საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გიორგი ყირმელაშვილი

პითაგორას თეორემა და მისი გამოყენება

ნაკვეთი I

ნაშრომი დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2011

გ. ყირმელაშვილი. პითაგორას თეორემა და მისი გამოყენება (ნაკვეთი I). თბილისი, საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2011. – გვ.

პითაგორას თეორემა გამოიყენებოდა და გამოიყენება მანძილისა და ფართობის გაზომვაში. ამ თვალსაზრისით მას გამოყენება აქვს მეცნიერების სხვადასხვა სფეროში, ტექნიკასა და პრაქტიკულ ცხოვრებაში. მისი დახმარებით მტკიცდება მრავალი თეორემა, მოიძებნება განტოლებათა ფესვები და ამოიხსნება ამოცანები როგორც სიბრტყეზე, ისე სივრცეში. ნაშრომში წარმოდგენილი მასალა გათვალისწინებულია საშუალო სკოლის მოსწავლეებისათვის და მკითხველთა ფართო წრისათვის.

რეცენზენტი: სრული პროფესორი, **რ. ცხვედაძე**

რედაქტორი: სრული პროფესორი, **გ. ყიფიანი**

კომპიუტერული უზრუნველყოფა: **ე. ზარიძე**

ISBN
http://www.gtu.ge/publishinghouse/

Verba voland
scripta manent

წინასიტყვაობა

> გეომეტრია ფლობს ორ განძს – პითაგორას თეორემას და ოქროს კვეთას. თუ პირველი ამ ორი განძიდან საზომით ოქროს შეიძლება შევადაროთ, მაშინ მეორე შეიძლება შევადაროთ ძვირფას ქვას
>
> (იოჰან კეპლერი)

დღეისათვის სრულად არაა წარმოდგენილი პითაგორას თეორემის დამტკიცებები. ეს მეტად მნიშვნელოვანი და საყურადღები საქმეა. თუ ეს სამომავლო ძიების საქმე შესრულდა, ბუნებრივია კიდევ მოიძებნოს (ჩამოყალიბდეს) თეორემის ახალი სახის დამტკიცებები. მათემატიკური ნაშრომებიდან ცნობილია, რომ რიგი ავტორებისა გარკვეული სახით ამტკიცებს თეორემას და ისინი იქვე მიუთითებენ: კი წარმოგიდგენთ დამტკიცებას, მაგრამ ვერ ვადასტურებთ, არსებობს თუ არა კიდევ ასეთი ან მსგავსი დამტკიცებაო.

პითაგორას თეორემის ყველა დამტკიცებების თავმოყრა მოგვცემს მნიშვნელოვან ენციკლოპედიას, რომელიც საინტერესო იქნება თეორემის არა მარტო ისტორიული, არამედ გამოყენების თვალსაზრისითაც. თეორემის განსხვავებულ დამტკიცებათა შეგროვებაში სასურველია მონაწილეობა მიიღოს მრავალმა ერთმანეთთან კავშირში მყოფმა მკვლევარებმა. ჩვენს ინტერესს წარმოადგენს გაწეული იქნას საჭირო შრომა და ეს საქმე რაც შეიძლება დროულად გადაწყდეს. ასეთი ნაშრომი განსაკუთრებით საჭირო იქნება სტუდენტებისთვის და საშუალო სკოლის მოსწავლეებისთვის.

ქვემოთ მოგვყავს თეორემის რამოდენიმე დამტკიცება და დამტკიცებისთვის საჭირო მასალა.

ნაშრომის წაკითხვისა და სასარგებლო შენიშვნებისათვის ავტორი მადლობას უძღვნის პროფესორ რ. ცხვედაძეს.

მკითხველთა შენიშვნები ავტორის მიერ სიამოვნებით იქნება გათვალისწინებული სამომავლოდ.

ავტორი

შესავალი

პითაგორას თეორემა სხვადასხვა სახითაა ცნობილი, თუმცა მის ყოველ ჩამოყალიბებაში შინაარსი ერთი და იგივეა. თეორემას ასე გამოთქვამდნენ:

1. მართკუთხა სამკუთხედის მცირე გვერდებზე (კათეტებზე) აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამი დიდ გვერდზე (ჰიპოტენუზაზე) აგებული კვადრატის ფართობის ტოლია (ასე გამოთქვამდნენ თეორემას პითაგორა და მისი მოწაფეები-პითაგორელები თავდაპირველად თეორემის აღმოჩენისა და დასაბუთების პერიოდში);

2. კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრატის ტოლია, რაც მოკლედ ასე გამოითქმება: კათეტების კვადრატების ჯამი ჰიპოტენუზის კვადრატის ტოლია;

3. თეორემის კლასიკური-ევკლიდისეული ფორმულირება ასეთია: მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის მომჭიმავ გვერდზე აგებული კვადრატის ფართობი მართი კუთხის გვერდებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამის ტოლია;

4. ჭეშმარიტია პითაგორას თეორემის შებრუნებული თეორემაც: თუ სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების ჯამი უდრის მესამე გვერდის კვადრატს, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა-მართია მესამე გვერდის მოპირდაპირე კუთხე (თეორემის დამტკიცებაში გამოიყენება სამკუთხედის ტოლობის მესამე ნიშანი).

განსხვავებული შინაარსის გადმოცემებში აღნიშნულია, რომ არსებობს პითაგორას თეორემის, დაახლოებით 500-მდე დამტკიცება; ზუსტად ვერ ვიტყვით, რადგან ყველა დამტკიცება ერთად თავმოყრილი არ არსებობს. ქართველმა მათემატიკოსებმა (ნ. ძიგავა, გ. სუსარეიშვილი, მ. ბურჭულაძე, ა. ბენდუქიძე და სხვა) წარმოადგინეს თეორემის განსხვავებული დამტკიცებები, მაგრამ არ დაუდასტურებიათ, არის თუ არა ისინი განსხვავებული ადრეული დამტკიცებებისაგან. ეს მხოლოდ ყველა დამტკიცების თავმოყრით შეიძლება აისხნას.

1. მოკლე ისტორიული ცნობები

პითაგორა დაიბადა დაახლოებით 530 წელს კუნძულ სამოსზე. მოღვაწეობდა საბერძნეთსა და იტალიაში 2500 წლის წინ VI საუკუნეში ჩვენს წელთაღრიცხვამდე (მისი მოღვაწეობის წლების შესახებ არსებობს განსხვავებული მოსაზრებები). პითაგორა და მისი მოწაფეები (პითაგორელები) მეცნიერულ მოღვაწეობას ეწეოდნენ მათემატიკაში, ასტრონომიაში, მუსიკაში და სხვა დარგებში. პითაგორას ღვაწლი განსაკუთრებით დიდია გეომეტრიაში. მას მნიშვნელოვანი გამოკვლევები ჰქონდა, აგრეთვე, მათემატიკის სხვა დარგებშიც, რისთვისაც მისი თანამედროვენი ბრძენად, სასწაულმოქმედად და მეცნიერებათა ნიმუშად აღიარებდნენ. თეორემის პირველი სრულყოფილი დამტკიცება მოგვცა პითაგორამ (570-500 ძ.წ.ა.), რაშიც გარკვეული წვლილი მიუძღვით მის მოწაფეებს. რადგან იმ დროისათვის მეცნიერული კვლევის შედეგები თემის ხელმძღვანელს მიეწოდებოდა, ამიტომაა თეორემა ცნობილი პითაგორას თეორემის სახელწოდებით. პროკლე და პლუტარქე თვლიდნენ, რომ თეორემა პითაგორამდე არ იყო დამტკიცებული და ამ აღმოჩენისათვის პითაგორამ ხარი დაკლა. გადმოცემით ცნობილია, აგრეთვე, რომ პითაგორამ თეორემის დასაბუთების აღსანიშნავად გახარებულმა ღმერთს არა ერთი, არამედ ასი ხარი შესწირა (პლუტარქე). თვით თეორემის დამტკიცებამ კი შემდგომში შინაარსის შეუცვლელად თანდათანობით გარკვეული სახეცვლილებები განიცადა [1; 2; 3].

პითაგორას ქებადიდებით იხსენებდნენ, მის შესახებ წერდნენ და წერენ ახლაც, ძველი დროიდან მეოცე საუკუნის ჩათვლით თხზავდნენ ლექსებს და ლეგენდებს.

პითაგორას თეორემამ დიდი აღიარება, გამოყენება და გამოხმაურება ჰპოვა მრავალ ქვეყანაში. თეორემის შინაარსი ცნობილი იყო ძველი დროიდან მის დამტკიცებამდე და პრაქტიკულად გამოიყენებოდა კიდეც. იგი ცნობილი იყო ძველ ეგვიპტეში, ბაბილონში, საბერძნეთში, ინდოეთში, ჩინეთში და სხვა ქვეყნებში [2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10]. თეორემის შინაარსი აქტიურად გამოიყენებოდა დაახლოებით ძ.წ.ა.

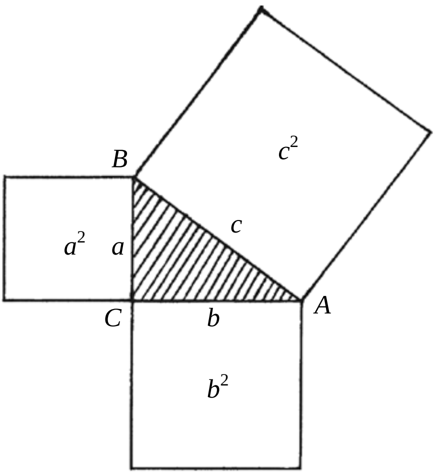
XXIII საუკუნიდან. ძველი დროიდანვე საკითხი ასე ისმებოდა: გავზომოთ მანძილი ორ წერტილს შორის მესამე წერტილის გამოყენებით, როცა მესამე წერტილი არ მდებარეობს აღებული ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთზე და სამივე წერტილი უნდა წარმოადგენდეს მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებს. საძებნი მანძილი გამოითვლება პითაგორას თეორემით. მესამე წერტილი შეიძლება იყოს სხვადასხვა მდებარეობის, მაგრამ პირველი და მეორე წერტილები აუცილებლად უნდა იყოს სამკუთხედის ცნობილი წვეროები.

დღეისათვის დადგენილია, რომ თეორემის შინაარსი გვხვდება ბაბილონის ტექსტებში **პითაგორამდე 1200 წლით ადრე, ეგვიპტეში 2000 წლით ადრე, ინდოეთში 500 წლით ადრე**.

მართი კუთხის ცნება განსაზღვრა ევკლიდემ როგორც გაშლილი კუთხის ნახევარი. საერთოდ კუთხის ცნება ძველი დროიდანაა შემოყვანილი ბერძნებისა და ბაბილონელების მიერ. უმრავლეს ძველ ცივილიზაციაში (ეგვიპტე, ბაბილონი, საბერძნეთი, ინდოეთი, ჩინეთი და სხვა) სწავლულებმა ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად მოძებნეს ფორმულირება კავშირისა მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებს შორის. ამ დამოკიდებულების შესახებ გარკვეული წარმოდგენა ჰქონდათ ინდოელებს. მათ ჰქონდათ წარმოდგენა პითაგორას თეორემის დამტკიცების პრინციპების შესახებ, რაც განსხვავდება ევკლიდეს დამტკიცებისაგან. ევკლიდემ მოგვცა ორი დამტკიცება: ერთი დამხმარე ფიგურის აგებით, მეორე – პროპორციათა თეორიის გამოყენებით [1; 6].

გარდა პითაგორას თეორემის გამოყენებითი მხარისა, რომ მისი საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ რაიმე უცნობ განსაკუთრებით მიუწვდომელ წერტილამდე (საგნამდე) მანძილი და საგნის სიმაღლე, როცა წერტილი ჩანს ან არ ჩანს (მიუვალია), ან გამოვთვალოთ მიწის და მოცემული ბრტყელი ფიგურის ფართობი, მრავალი ავტორი (მეცნიერი, პედაგოგი და მათემატიკის სხვა მცოდნე) შეეცადა ახლებურად დაემტკიცებინა თეორემა (იგი კოლეგებისთვის გაეზიარებინა), რადგან ყოველ ახალ დამტკიცებაზე ავტორს აჯილდოვებდნენ, აწინაურებდნენ და

ენიჭებოდა პედაგოგის მაღალი წოდება. ძველად ეს წოდება (მაღალკვალიფიციური მათემატიკის მასწავლებელი) უტოლდებოდა მაგისტრის ან უფრო მაღალ მეცნიერულ ხარისხს. ამ მხრივ მეტი ყურადღება ექცეოდა თეორემის წმინდა გეომეტრიულ დამტკიცებას, რომ ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატი კათეტებზე აგებული კვადრატების გაერთიანების ტოლდიდია: $c^2 + a^2 + b^2$ (ნახ. 1).



ნახ. 1

მათემატიკაში თეორიულ გამოკვლევებსა და ადამიანის პრაქტიკულ მოღვაწეობას შორის ძველი დროიდანვე არსებობს მჭიდრო კავშირი. მიუხედავად იმისა, რომ ადრეულ ხანაში აღმოცენდა ტენდენციები რიცხვებისა და მათზე მოქმედებების იდეალიზაციის შესახებ – შექმნილი იყო აზრი რიცხვითი სამყარო ჩამოეშორებინათ რეალური სინამდვილისაგან, მაგრამ მათემატიკა მაინც ვითარდებოდა და მათემატიკის სწავლულები მიზნად ისახავდნენ თავიანთი გამოკვლევების შედეგები გამოეყენებინათ ცხოვრების პრაქტიკულ საქმიანობაში. თუ პირობით მათემატიკის პირველ მეცნიერულ წყაროებად მივიჩნევთ პითაგორას, ევკლიდეს, ჰიპოკრატეს და სხვათა ნაშრომებს, დავრწმუნდებით, თუ როგორი გზა განვლო მათემატიკის განვითარებამ და რა დიდმნიშვნელოვან შედეგებს მიაღწია დღემდის.

პითაგორას თეორემას ჰქონდა, აქვს და ექნება დიდი გამოყენება სამკუთხედების და სხვადასხვა სახის განტოლებების ამოხსნებში, სამშენებლო, სამთო, სამხედრო საქმიანობებში და ცხოვრების სხვა სფეროებში.

ჩვენ ქვემოთ მოგვყავს პითაგორას თეორემის ის დამტკიცებები, რომლებიც საინტერესოა და საჭიროდ ვცანით

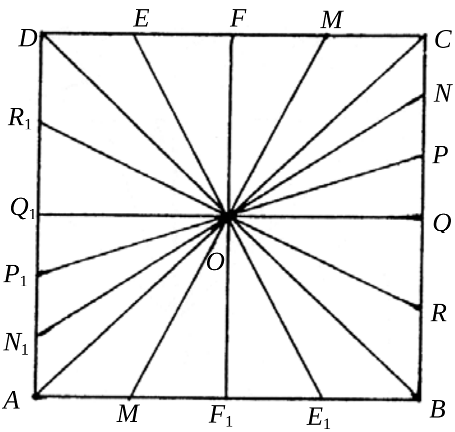
როგორც ისტორიული, ისე პრაქტიკული (გამოყენებითი) თვალსაზრისით.

2. ძირითადი ნაწილი

(თეორემის დამტკიცებები)

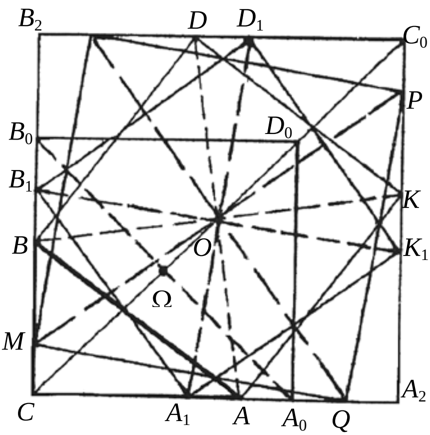
მოვიყვანოთ პითაგორას თეორემის განსხვავებული სახის რამოდენიმე დამტკიცება:

1) თეორემა დავამტკიცოთ შემდეგი სამი თეორემის (ლემის) გამოყენებით: ა) კვადრატის სიმეტრიიის ცენტრში გამავალი წრფე კვადრატს ორ ტოლდიდ ფიგურად ყოფს (ნახ. 2); ბ) კვადრატში ჩახაზული სხვადასხვა სიდიდის კვადრატების სიმეტრიის ცენტრები ემთხვევიან მოცემული კვადრატის ცენტრს (ნახ. 3); გ) მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა გადის ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ცენტრში (ნახ. 4 და 5).

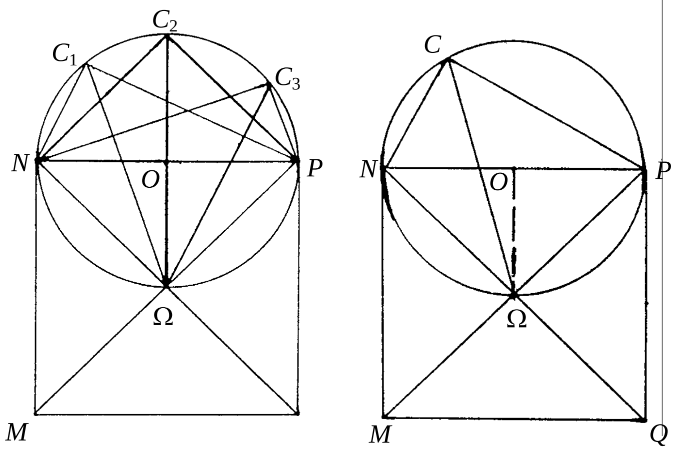


ნახ. 2

ამ თეორემების დამტკიცების შემდეგ მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე ვაგებთ კვადრატებს (ნახ. 6). მართი კუთხის ბისექტრისის გავლების შემდეგ ამავე კუთხის წვეროზე ვავლებთ ბისექტრისის მართობს. ეს წრფე კი კათეტზე აგებული კვადრატების კუთხეების ბისექტრისას წარმოადგენს.

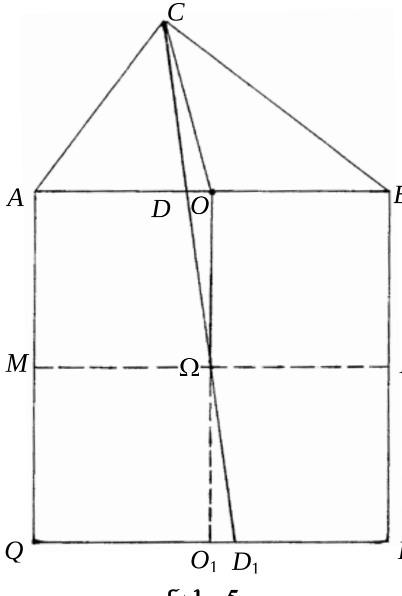


ნახ. 3



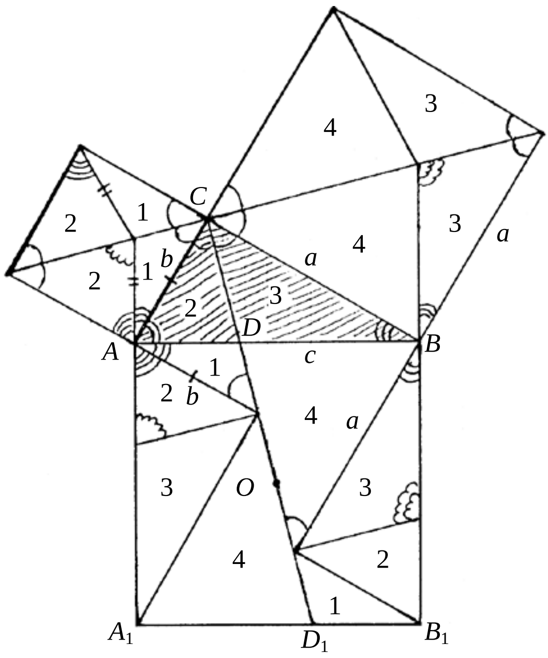
ნახ. 4

წარმოდგენილი ნახაზის მიხედვით გვაქვს, რომ $AD = D_1B_1$, ოთხკუთხედი ADD_1A_1 სიმეტრიულია BDD_1B_1-ის მიმართ. O ცენტრი არის ΔABC-ს ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ცენტრი, რომელიც ამავე დროს A კუთხის ბისექტრისაზეა მოთავსებული. ΔABC-ზე აგებული სამივე კვადრატი დაიყოფა სამკუთხედებად ისე, რომ დიდ კვადრატში მოთავსებული სამკუთხედები იქნება გადანაწილებული კათეტებზე აგებულ კვადრატებზე, რადგან დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის ჩვენება, რომ ერთი და იგივე ნომრით წარმოდგენილი სამკუთხედები ერთმანეთის ტოლია. ეს პირობა კი



ნახ. 5

ადასტურებს, რომ ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობი კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამის ტოლია, ანუ ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამს უდრის. ჩვენ მოვიყვანეთ „ძველი“ დამტკიცების მხოლოდ ერთი სახე (ნახ. 6). ასეთი სახის და სირთულის დამტკიცება კი ცნობილია რამოდენიმე [1; 3; ...].



ნახ. 6

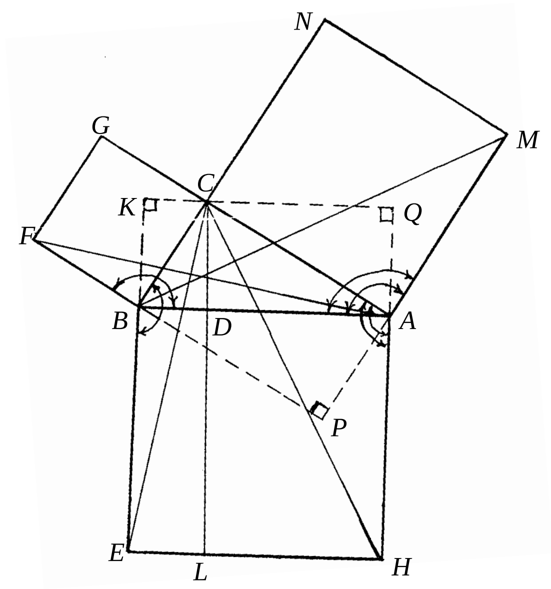
2) პითაგორას თეორემა ორი სახით დაამტკიცა ევკლიდემ [6]. პირველი დამტკიცება ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ (ნახ. 7): $\Delta BFA = \Delta EBC$, რადგან ამ სამკუთხედებს ტოლი აქვთ შესაბამისად ორი გვერდი და მათ შორის მოთავსებული კუთხე. ამავე თვისების ძალით $\Delta ABM = \Delta AHC$.

$BD = KC$, სამკუთხედ EBC-ს ფართობი კი იქნება

$$S_{\Delta EBC} = \frac{EB \cdot KC}{2} = \frac{EB \cdot BD}{2} = \frac{S_{EBDL}}{2},$$

საიდანაც გვაქვს ტოლობა

$$S_{EBDL} = 2S_{\Delta EBC} = 2\frac{BF \cdot AP}{2} = BC^2 = S_{CBFG}\,.$$



ნახ. 7

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$S_{LDAH} = HL \cdot AH = 2S_{\Delta AHC} = 2\frac{CQ \cdot AH}{2} = 2S_{\Delta ABM} = 2\frac{AM \cdot PB}{2} =$$

$$= AC^2 = S_{ACNM}\,.$$

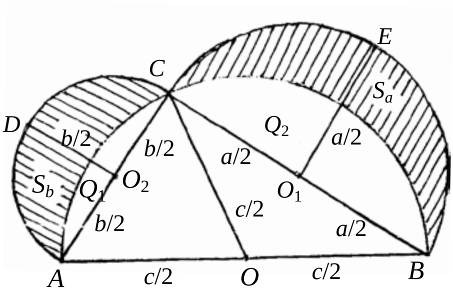
მაშასადამე, $S_{EBDL} = BC^2$ და $S_{LDAH} = AC^2$. ამ იგივეობების შეკრება გვაძლევს დასამტკიცებლად ტოლობას

$$S_{AHEB} = S_{CBFG} + S_{ACNM}\,.$$

3) საინტერესოა საკითხი ე.წ. ჰიპოკრატეს მცირე „მთვარეების“ შესახებ. ჰიპოკრატე ხიოსელმა (ბერძენი მათემატიკოსი, ცხოვრობდა ძ.წ.ა. V საუკუნეში) გადაწყვიტა საკმარისად ძნელი ამოცანა [8; 23]: ფარგლითა და სახაზავით ააგო სამკუთხედი, რომელიც ტოლდიდია მრუდწირული

ფიგურის, რომლის კონტური წრეწირების რკალებია (იხ. ნახ. 8).

განიხილება ამოცანა: მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტების სიგრძეებია a და b, ჰიპოტენუზის სიგრძე კი არის c. მის ყველა გვერდზე, როგორც დიამეტრებზე ერთ ნახევარ სიბრტყეში აგებულია ნახევარწრეწირები. ნახ. 8-ზე დაშტრიხული მცირე და დიდი ფიგურების ფართობები იყოს S_a და S_b; დიდი წრის სეგმენტების ფართობები იყო Q_1 და Q_2; O_1, O_2 და O ნახევარი წრეწირების ცენტრებია; ნახევარწრეწირების რადიუსებია



ნახ. 8

$R = OC = \dfrac{c}{2}$, $R_1 = O_1E = \dfrac{a}{2}$, $R_2 = O_2D = \dfrac{b}{2}$. მტკიცდება პირდაპირი და შებრუნებული თეორემები.

თეორემა (პირდაპირი). თუ $a^2 + b^2 = c^2$, მაშინ $S_{\Delta ABC} = S_a + S_b$, ანუ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი „მთვარეთა“ ნაწილების ფართობია ჯამის ტოლია.

რადგან

$$R_1 = \frac{a}{2}, \ R_2 = \frac{b}{2} \text{ და } R = \frac{c}{2}$$

ამიტომ

$$\pi a^2 + \pi b^2 = \pi c^2 \ \text{ ან } \ 4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 4\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

ცხადია, სამართლიანია ტოლობა $\pi R_1^2 + \pi R_2^2 = \pi R^2$. გავყოთ ტოლობა ორზე, მივიღებთ, რომ კათეტებზე (როგორც დიამეტრებზე) დაყრდნობილი ნახევარწრეების ფართობთა ჯამი ტოლია ჰიპოტენუზაზე აგებული ნახევარი წრის ფართობის, ე.ი. $0{,}5\pi R_1^2 + 0{,}5\pi R_2^2 = 0{,}5\pi R^2$. ეს ტოლობა ნახაზის

მიხედვით ასე შეიძლება წარმოვადგინოთ $S_a + Q_1 + S_b + Q_2 = = S_{\Delta ABC} + Q_1 + Q_2$, საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა.

შებრუნებული თეორემა. თუ $S_{\Delta ABC} = S_a + S_b$, მაშინ $a^2 + b^2 = c^2$. თეორემა მტკიცდება პირდაპირი თეორემის შებრუნებულად. მართლაც, რადგან $S_{\Delta ABC} = S_a + S_b$, ამიტომ $S_{\Delta ABC} + Q_1 + Q_2 = S_a + Q_1 + S_b + Q_2$, ანუ $0{,}5\pi R^2 = 0{,}5\pi R_1^2 + 0{,}5\pi R_2^2$. შედეგად ვღებულობთ ტოლობას:

$$R_1^2 + R_2^2 = R^2 .$$

რადგან $R_1 = \frac{a}{2}$, $R_2 = \frac{b}{2}$ და $R = \frac{c}{2}$, ამიტომ ამ პირობების გათვალისწინება ბოლო ტოლობაში მოგვცემს ახალ იგივეობას

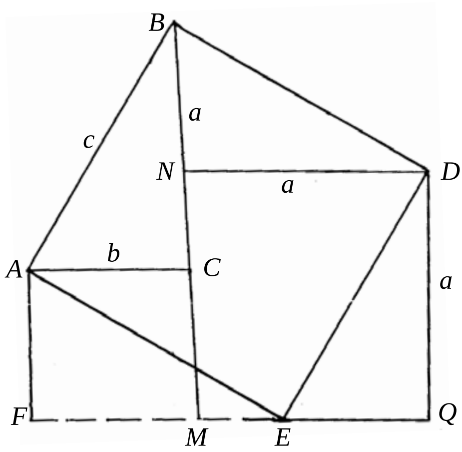
$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$$

და ცხადია პითაგორას თეორემის (დასამტკიცებელი ტოლობის) სამართლიანობა.

4) ა. ბენდუქიძე აღნიშნავს, რომ პითაგორას თეორემის მარტივი დამტკიცებები „არ არის წმინდა გეომეტრიული – უშუალოდ არ მტკიცდება ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატისა და კათეტებზე აგებული კვადრატების გაერთიანების ტოლდიდობა“ [1, 4, 5, 19].

თეორემის ამ სახით დამტკიცება შეიძლება შევასრულოთ წარმოდგენილი ნახ. 9-ის მიხედვით. ΔABC-ს კათეტებზე $(MN = CB)$ აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამს და ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობს თუ გამოვაკლებთ ტოლი სამკუთხედების ($S_{\Delta NBD} = S_{\Delta FAE}$ და $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta EDQ}$) ფართობებს დაგვრჩება *EACND* ჩაზნექილი ხუთკუთხედის ფართობი, ამიტომ *ABDE* კვადრატის ფართობი უდრის *ACMF* და *MNDQ* კვადრატების ფართობთა ჯამს, ე.ი. $c^2 = a^2 + b^2$.

ნახ. 9-ს, რომელსაც შეიძლება უფრო თვალსაჩინო სახე მივცეთ (იხ. ნახ. 10), ინდუსები „პატარძლის სკამს“ უწოდებდნენ.



ნახ. 9

აღნიშნული დამტკიცების მსგავს დამტკიცებას გვთავაზობს ა. ბენდუქიძე. ნახაზის აგების და დამტკიცების თანმიმდევრობა მოსწავლეებისათვის უფრო თვალსაჩინოა და გასაგები. მოვიყვანოთ ეს დამტკიცება მთლიანად [19]. მართკუთხა სამკუთხედის გარეთ მის კათეტებზე ვაგებთ კვადრატებს, ხოლო ჰიპოტენუზაზე ვაგებთ კვადრატს, რომელიც სამკუთხედს მოიცავს (ნახ. 10). ვერტიკალურ კათეტზე აგებული კვადრატი E_1CAE_2 ჩამოვაცუროთ ქვემოთ ამ კათეტის გასწვრივ ისე, რომ მისი ქვედა ჰორიზონტალური გვერდი CE_1 მეორე კათეტზე აგებული ED_1BC კვადრატის D_1E გვერდის გაგრძელებაზე მდებარეობდეს. ეს კვადრატი მიიღებს C_1EDA_1 მდებარეობას. ეჭვს არ იწვევს, რომ C_1E მონაკვეთი ჰიპოტენუზაზე აგებული BAA_1B_1 კვადრატის B_1 წვეროზე გადის.

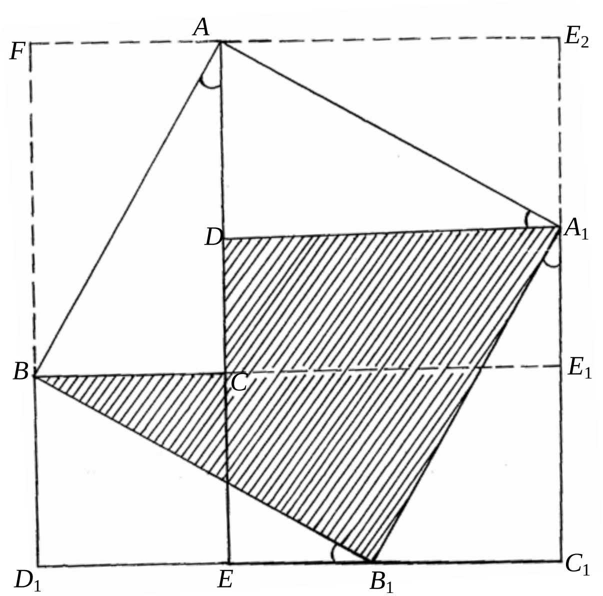
ცხადია, აგრეთვე, რომ ჰიპოტენუზაზე და კათეტებზე აგებული კვადრატების საერთო ნაწილი ნახაზზე დაშტრიხული ჩაზნექილი A_1DCBB_1 ხუთკუთხედია. ჩვენ შეგვიძლია დამტკიცების ცხადი სახით წარმოდგენისათვის ნახაზი სრულ $C_1D_1FE_2$ კვადრატამდე შევავსოთ (ა. ბენდუქიძის ნახაზი მიიღება, თუ ამ ნახაზს მოვაცილებთ წყვეტილ მონაკვეთებს). მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნების თანახმად

$$\Delta ABC = \Delta A_1AD = \Delta A_1B_1C_1 = \Delta BD_1B_1 .$$

თუ დაშტრიხულ ხუთკუთხედს დავუმატებთ ΔABC-სა და ΔADA_1, მივიღებთ ჰიპოტენუზაზე აგებულ კვადრატს. თუ ახლა დაშტრიხულ ხუთკუთხედს დავუმატებთ ΔBD_1B_1-სა და

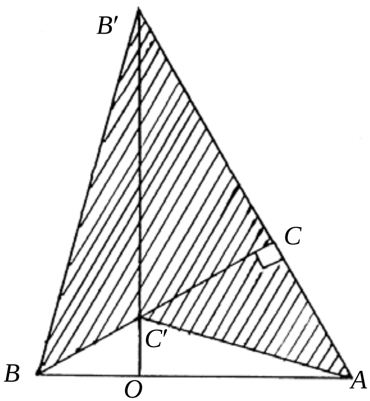
$\Delta A_1B_1C_1$-ს. მივიღებთ კათეტებზე აგებული კვადრატების გაერთიანებას.

მაშასადამე, ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობი ტოლია კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამის.



ნახ. 10

5) თითქმის ყველა დამტკიცებისგან განსხვავებით მოვიყვანოთ თეორემის ნაწილობრივ გამოთვლაზე დაფუძნებული დამტკიცება [1].



ნახ. 11

განვიხილოთ მართკუთხა სამკუთხედი ABC (ნახ. 11). გავაგრძელოთ AC კათეტი და მოვზომოთ BC-ს ტოლი CB' მონაკვეთი. დავუშვათ AB გვერდზე $B'O$ პერპენდიკულარი. $\angle CB'C' = \angle CBA$, როგორც პერპენდიკულარულგვერდებიანი მახვილი

კუთხეები. $\Delta ABC = \Delta CB'C'$, რადგან მათ ტოლი აქვთ თითო კათეტი და მახვილი კუთხე. სამკუთხე-დის ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AC = C'C$ და $AB = C'B'$. შევაერთოთ B' და B წერტილები და C' და A წერტილები. შემოვიღოთ აღნიშვნები $BC = a$, $AC = b$ და $AB = c$. $\Delta ACC'$ და $\Delta BCB'$ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედებია. მათი ფართობთა ჯამი ნახაზზე დაშტრი-ხული ჩაზნექილი ოთხკუთხედის ფართობის ტოლია. ცხადია, გვექნება იგივეობა:

ფართ.$\Delta BB'C$ +ფართ.$\Delta ACC'$ = ფართ.$\Delta BC'B'$ +ფართ. $\Delta AB'C'$.

ეს ტოლობა ასე შეიძლება გადავწეროთ:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} = \frac{c \cdot BO}{2} + \frac{c \cdot AO}{2} = \frac{c^2}{2}.$$

მაშასადამე,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

თეორემის მოყვანილი დამტკიცება გამოქვეყნებულია 1909 წელს გავკინსის მიერ. გაურკვეველია ამ თეორემის შინაარსი იყო თუ არა უფრო ადრე ცნობილი.

6) მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზასა და კათეტებზე აგებულია მსგავსი მრავალკუთხედები. დავამტკიცოთ, რომ თუ პითაგორას თეორემა სამართლიანია, კათეტებზე აგებული მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამი ჰიპოტენუ-ზაზე აგებული მრავალკუთხედის ფართობის ტოლია.

რადგან მსგავსი მრავალკუთხედების (აგრეთვე სამკუთხე-დების) ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც მათი მსგავსებული გვერდების კვადრატები, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ პროპორციები (ნახ. 12):

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BC^2}{CA^2}, \quad \frac{S_2}{S_3} = \frac{CA^2}{AB^2}, \quad \frac{S_3}{S_1} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

პირველი ტოლობიდან განვსაზღვროთ BC^2, მეორიდან AB^2 და შევიტანოთ ტოლობაში

$$AB^2 = BC^2 + CA^2,$$

გვექნება

$$\frac{S_3 \cdot CA^2}{S_2} = \frac{S_1 \cdot CA^2}{S_2} + CA^2;$$

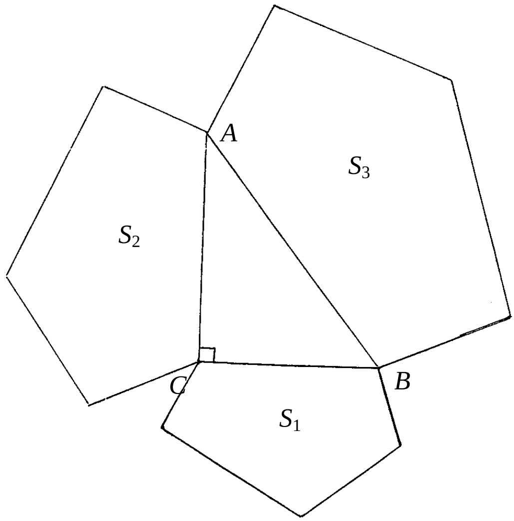
მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას $S_3 = S_1 + S_2$

სამართლიანია შებრუნებული დებულებაც: თუ კათეტებზე და ჰიპოტენუზაზე აგებულია მსგავსი მრავალკუთხედები და ჰიპოტენუზაზე აგებული მრავალკუთხედის ფართობის კათეტებზე აგებული მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია, მაშინ სამართლიანია პითაგორას თეორემა. მართლაც, ტოლობაში $S_3 = S_1 + S_2$ შევიტანოთ $S_3 = \frac{S_1 AB^2}{BC^2}$ და $S_2 = \frac{S_1 CA^2}{BC^2}$, მივიღებთ

$$\frac{S_1 AB^2}{BC^2} = S_1 + \frac{S_1 AC^2}{BC^2},$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა

$$AB^2 = BC^2 + AC^2.$$



ნახ. 12.

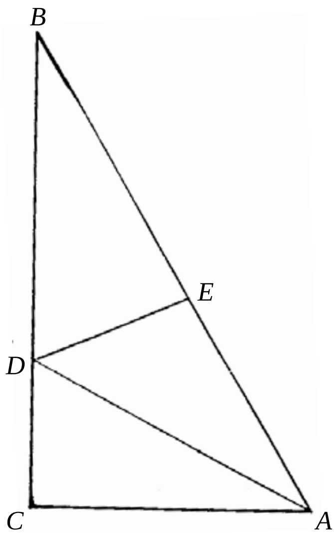
7) 1947 წელს გაზეთ „სახალხო განათლებაში“ გამოქვეყნდა თეორემის დამტკიცება, რომელიც ეკუთვნის **ნ. ძიგავას**

(თბილისის 23-ე ქალთა საშუალო სკოლის მასწავლებელი) [17], ნახ. 13-ის მიხედვით აღვნიშნოთ $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. გავავლოთ A კუთხის AD ბისექტრისა და D წერტილიდან აღვმართოთ AB-ს მართობი DE.

რადგან $\angle DAC = \angle DAE = \frac{\angle A}{2}$, ამიტომ $AE = AC = b$ და $DE = DC = x$. მაშასადამე, $BE = c - b$ და $BD = a - x$. ΔDBE მსგავსია ΔABC-სი, ამიტომ $\frac{a-x}{c} = \frac{c-b}{a}$, საიდანაც

$$a^2 - ax = c(c-b). \qquad (1)$$

სამკუთხედის შიგა კუთხის ბისექტრისის თვისების თანახმად გვაქვს ტოლობა



ნახ. 13

$$\frac{a-x}{c} = \frac{x}{b} \text{ ანუ } \frac{a}{x} - 1 = \frac{c}{b},$$

საიდანაც $x = \frac{ab}{b+c}$.

ჩავსვათ x-ის მიღებული მნიშვნელობა (1) ტოლობაში, მივიღებთ

$$a^2 - a\frac{ab}{b+c} = c(c-b)$$

ამ ტოლობის გამარტივება გვაძლევს დასამტკიცებელ ტოლობას

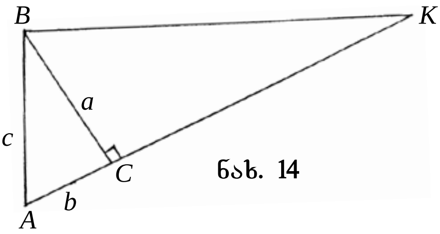
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

8) თეორემის განსხვავებული დამტკიცება წარმოადგინა, აგრეთვე, **მ. ბურჭულაძემ** [18]. ნახ. 14-ის მიხედვით B წვეროზე გავავლოთ $BK \perp AB$ AC გვერდის გაგრძელების გადაკვეთამდე. მივიღებთ მართკუთხა ΔABK-ს, რომლის გაორკეცებული ფართობი უდრის კათეტების ან ჰიპოტენუზისა და (მართი კუთხის წვეროდან) მასზე დაშვებული პერპენდიკულარის ნამრავლს, ე.ი.

$$2S_{\Delta ABK} = AB \cdot BK = AK \cdot BC. \qquad (1)$$

რადგან $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AK = b + CK$ ამიტომ

$$c \cdot BK = (b + CK)a. \qquad (2)$$



ნახ. 14

BK და CK მონაკვეთები განვსაზღვროთ ΔABC-ს გვერდების საშუალებით. $\angle AKB = \angle ABC$, როგორც პერპენდიკულარულ გვერდებიანი მახვილი კუთხეები, რის გამოც ΔBCK მსგავსია ΔABC-სი.

მაშასადამე, $\dfrac{BK}{c} = \dfrac{a}{b}$ და $\dfrac{CK}{a} = \dfrac{a}{b}$. ამ პროპორციებიდან განსაზღვრული BK-სა და CK-ს მნიშვნელობები ჩავსვათ (2) ტოლობაში, მივიღებთ

$$c \cdot \frac{ac}{b} = \left(b + \frac{a^2}{b} \right) a,$$

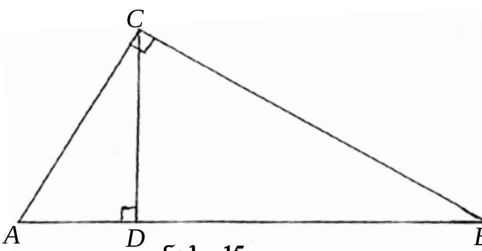
საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

9) თეორემა შეიძლება დავამტკიცოთ მახვილი კუთხეების კოსინუსების დახმარებით [13]. ნახ. 15-ის მიხედვით გვაქვს

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}; \quad AC^2 = AB \cdot AD;$$

$$\cos B = \frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}; \quad BC^2 = AB \cdot DB.$$



ნახ. 15

მიღებული ტოლობების გამოყენებით, რადგან $AD + DB = AB$, მივიღებთ, რომ

$$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$$

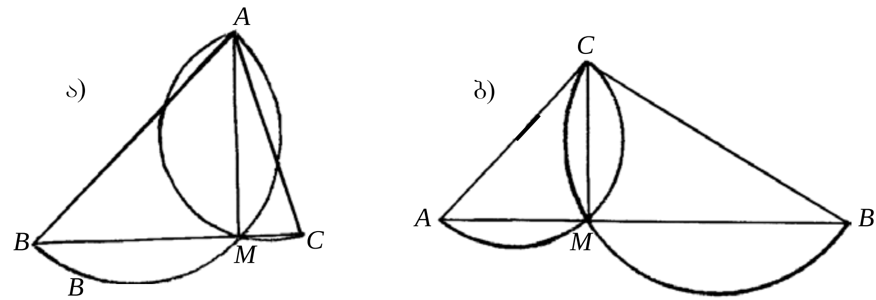
თეორემა დამტკიცებულია.

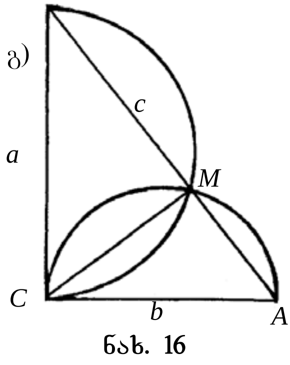
10) მოვიყვანოთ თეორემის გ. სუსარეიშვილისეული დამტკიცება [20]. ჯერ

დავამტკიცოთ, რომ ყოველი სამკუთხედის ორ გვერდზე, როგორც დიამეტრზე, შემოხაზული ნახევარწრეწირების გადაკვეთის წერტილი მდებარეობს მესამე გვერდზე.

ავიღოთ მახვილკუთხა ΔABC (ნახ. 16, ა) და მის AC და AB გვერდებზე, როგორც დიამეტრებზე, შემოვხაზოთ ნახევარწრეწირები. წრეწირების გადაკვეთის M წერტილი შევაერთოთ A წერტილთან. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\angle AMC$ და $\angle AMB$ მართი კუთხეებია, რადგან ისინი დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეებია. ამ კუთხეებს აქვთ საერთო AM გვერდი, ამიტომ ისინი მოსაზღვრე კუთხეებია. ამგვარად, MC და MB მონაკვეთები ერთ წრფეს წარმოად-გენს (ერთ წრფეზე მდებარეობენ). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, M წერტილი მდებარეობს BC გვერდზე. თეორემა სამართლიანია მაშინაც, როცა სამკუთხედი ბლაგვკუთხა (ნახ. 16, ბ) ან მართკუთხაა (ნახ. 16, გ).

მართკუთხა სამკუთხედის შემთხვევაში (ნახ. 16, გ) გ.სუსარეიშვილი ამტკიცებს პითაგორას თეორემას. როგორც იგი აღნიშნავს, დამტკიცების ეს ახალი გზა მონახულია მის მიერ.





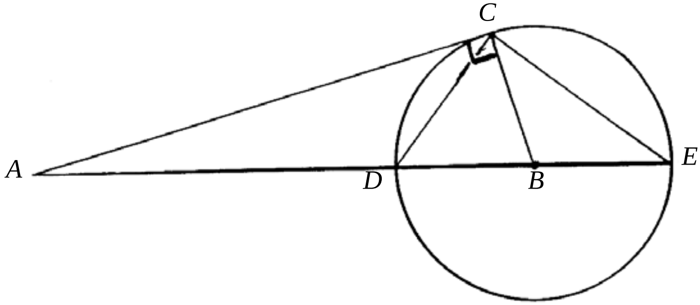
ნახ. 16

დამტკიცებული წინა დებულების მიხედვით ნახევარწრეწირების გადაკვეთის M წერტილი მოთავსებული იქნება AB ჰიპოტენუზაზე. $b = AC$ გვერდზე აგებული ნახევარწრეწირისათვის $a = BC$

მხებია, ხოლო ჰიპოტენუზა $c = BA$ მკვეთია. წრეწირისადმი გავლებული მხებისა და მკვეთის თვისების გამო გვექნება ტოლობა $c \cdot BM = a^2$. CB დიამეტრზე აგებული ნახევარწრეწირისათვის AC მხებია, AB კი – მკვეთი. ანალოგიურად გვექნება მეორე ტოლობა $c \cdot AM = b^2$. მიღებული ორი ტოლობის შეკრებით კი მივიღებთ, რომ

$$c(AM + BM) = a^2 + b^2 \quad \text{ანუ} \quad c^2 = a^2 + b^2 .$$

11). მოვიყვანოთ პითაგორას თეორემის კიდევ ერთი დამტკიცება ამოცანის სახით (ნახ. 17). AC წრეწირის მხებია, AE კი არის ცენტრზე გამავალი მკვეთი. BC არის AC მართობი, ამიტომ ΔABC მართკუთხაა.



ნახ. 17

ACD და ACE სამკუთხედები მსგავსია, რადგან მათ აქვთ საერთო A კუთხე და $\angle ACD = \angle CEA$, რადგან $\angle ACD$ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხეა, ხოლო $\angle CEA$ არის ჩახაზული კუთხე. ეს კუთხეები ერთი და იგივე CD რკალის ნახევრით იზომებიან. შედეგად ვღებულობთ, რომ მხების მონაკვეთის კვადრატი მკვეთისა და მისი გარე ნაწილის ნამრავლი ტოლია, ე.ი. $AC^2 = AD \cdot AE = (AB - DB)(AB + BE) =$ $= (AB - BC)(AB + BC) = AB^2 - BC^2$ მიღებული შედეგი კი გვაძლევს დასამტკიცებელ ტოლობას

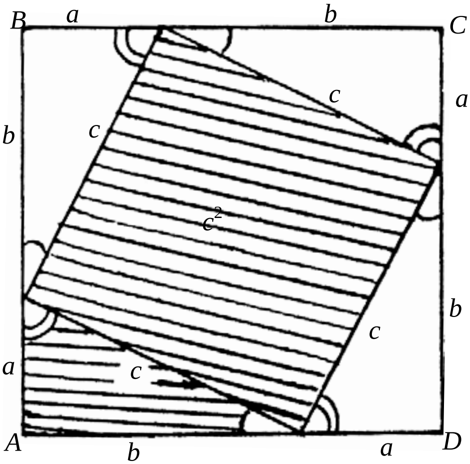
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 .$$

12) ნახაზ 18-ის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ $ABCD$ დიდი კვადრატის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულები [14; 15]:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2$$

და

$$S = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + a^2 + b^2,$$



ნახ. 18

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

13) წარმოდგენილი ნახაზ 19-ის მიხედვით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$(a+b)^2 = 2ab + a^2 + b^2;$$

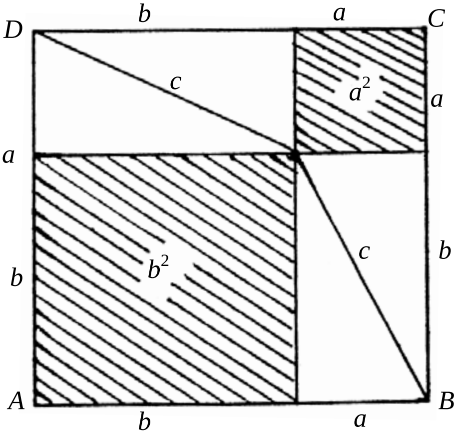
მაგრამ წინა დამტკიცებაში იგივე ფართობის მქონე კვად-რატისათვის (ნახ. 18) გვქონდა ტოლობა

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2,$$

ამიტომ

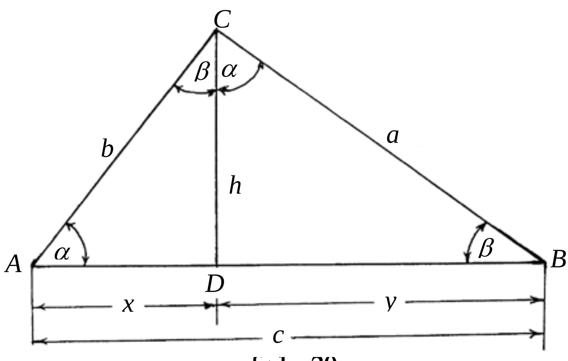
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

თეორემის სამართლიანობა ცხადია.



ნახ. 19

14) პითაგორას თეორემის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ თეორემა: მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული პერპენდიკულარი საშუალო პროპორციულია ჰიპოტენუზის მონაკვეთებისა, ხოლო თითოეული კათეტი საშუალო პროპორციულია ჰიპოტენუზისა და ამ კათეტის გეგმილისა ჰიპოტენუზაზე. ავაგოთ სათანადო ნახაზი (ნახ, 20), სადაც $\angle C = \alpha + \beta = \angle ADC = \angle BDC = 90°$. რადგან სამკუთხედები ABC, ADC და BDC მსგავსი სამკუთხედებია, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ დამოკიდებულებები [11; 12]:



ნახ. 20

$$\frac{h}{y}=\frac{x}{h}=\frac{b}{a};\quad h^2=xy;\quad x+y=c;$$

$$\frac{c}{b}=\frac{b}{x}=\frac{a}{h};\quad b^2=cx \quad \text{და} \quad \frac{c}{a}=\frac{a}{y}=\frac{b}{h};\quad a^2=cy;$$

$$a^2+b^2=cx+cy=c(x+y)=c^2.$$

მაშასადამე. მივიღეთ დასამტკიცებლად ტოლობა: $c^2=a^2+b^2$.

15) თეორემის დამტკიცება, თანახმად წინა შემთხვევისა, შეიძლება ასეც წარვმართოთ: $x=\frac{b^2}{c}$ და $y=\frac{a^2}{c}$, ამიტომ $S_{\Delta ACD}=\frac{hx}{2}=\frac{hb^2}{2c}$ და $S_{\Delta BCD}=\frac{hy}{2}=\frac{ha^2}{2c}$; სამკუთხედ ABC-ს ფართობი იქნება: $S_{\Delta ABC}=\frac{ab}{2}=\frac{hc}{2}$ და $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta BDC}=$ $=\frac{h}{2c}(a^2+b^2)$. ამ ტოლობის მიხედვით კი სამართლიანი იქნება ტოლობა $\frac{h}{2c}(a^2+b^2)=\frac{hc}{2}$, საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი ტოლობა [12].

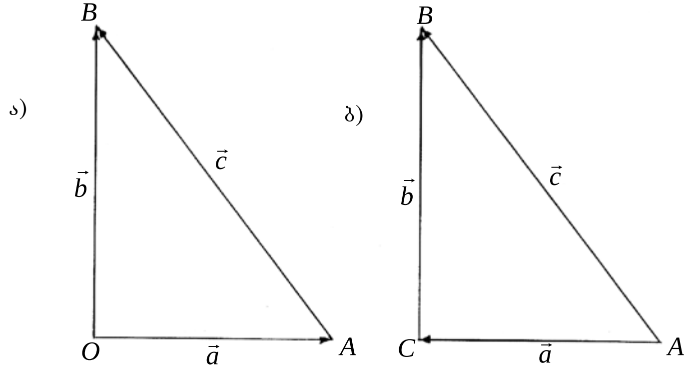
16) დავამტკიცოთ თეორემა ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით [21].

განვიხილოთ ორი ურთიერთპერპენდიკულარული $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ და $\vec{b}=\overrightarrow{OB}+$ ვექტორი. რადგან $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$, ამიტომ $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=$ $=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ანუ $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ (ნახ. 21, ა). $\vec{c}$ ვექტორის თავისთავზე ნამრავლი (სკალარული კვადრატი) იქნება:

$$\vec{c}^{\,2}=|\vec{c}\,|^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=|\vec{b}\,|^2+|\vec{a}\,|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $|\vec{a}\,|=a$, $|\vec{b}\,|=b$ და $|\vec{c}\,|=c$. გავითვალისწინებთ, რომ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a\cdot b\cos\frac{\pi}{2}=0$, შედეგად

მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას $c^2 = a^2 + b^2$. ეს ტოლობა მიიღება მაშინაც, როცა $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (იხ. ნახ. 22, ბ).

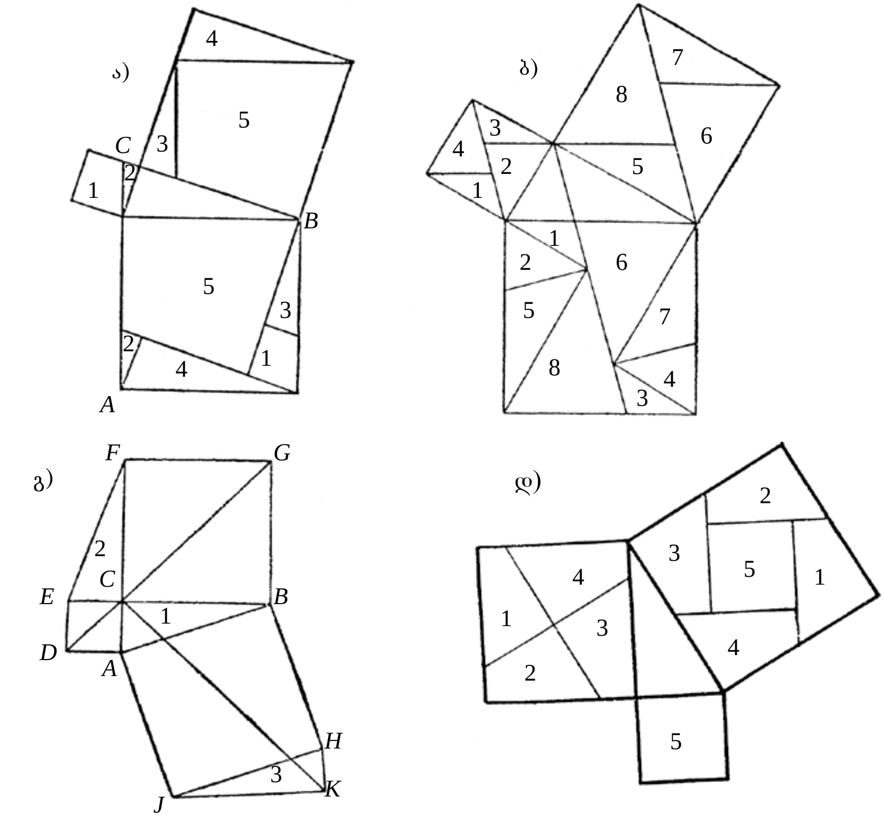


ნახ. 21

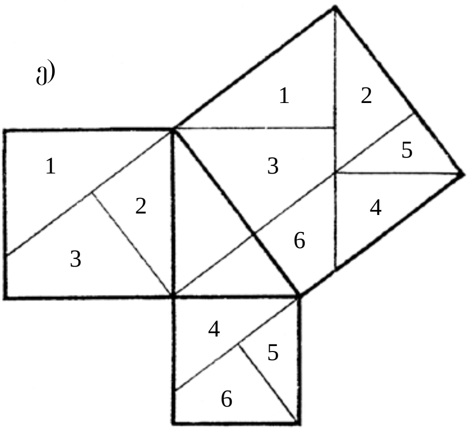
17) პითაგორას თეორემის დამტკიცებისათვის მოგვყავს სხვადასხვა სახის ნახაზები (ნახ. 22, ა, ბ, გ, დ, ე). შევეცადოთ მათი დახმარებით ვაჩვენოთ თეორემის სამართლიანობა [1; 8; 16]. წინასწარ საჭიროა აღიწეროს ნახაზების აგების თანმიმდევრობა. შემდეგ უნდა დამტკიცდეს ერთი და იგივე ნომრით წარმოდგენილ ფიგურათა ტოლობა. ამის შემდეგ ცხადი ხდება, რომ ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობი კათეტებზე აგებული კვადრატების ფართობთა ჯამს უდრის.

შევნიშნოთ, რომ ნახ. 22 ა თეორემის დამტკიცებისათვის ანარიციმ გამოიყენა XI საუკუნეში; ნახ. 22 გ შეიცავს 1, 2 და 3 ნომრებით მოცემულ ტოლ სამკუთხედებს და ფიგურები *DABGFE* და *CAJKHB* ტოლდიდებია. ვიყენებთ მათი ნახევრების 90°-ით მობრუნებას ჯერ *A* და შემდეგ *B* წვეროს მიმართ; შედარებით ადვილი ასაგებია ნახაზები 22 ბ და 22 ე.

ახლა ჩავხაზოთ ჰიპოტენუზაზე აგებულ კვადრატში მცირე კათეტზე აგებული კვადრატის ტოლი და პარალელურგვერდებიანი კვადრატი (ნახ. 22 დ) ისე, რომ მისი გვერდების გაგრძელებები დიდი კვადრატის გვერდებამდე ტოლი იყოს



ნახ. 22, ა, ბ, გ, დ, ე



ერთმანეთის. ამ გაგრძელებების ტოლი მონაკვეთები გადავზომოთ მეორე კათეტის გვერდებზე და ამ კვადრატში გავავლოთ ურთიერთგადამკვეთი მონაკვეთები, როგორც ნახაზზეა ნაჩვენები.

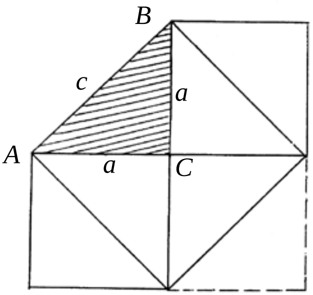
პითაგორას თეორემის შესწავლის დროს, როგორც

დამატებითი თვალსაჩინო მასალა, შეიძლება ვისარგებლოთ იმ მეთოდური მასალით, რომელიც წარმოდგენილია [22] მეთოდურ სახელმძღვანელოში.

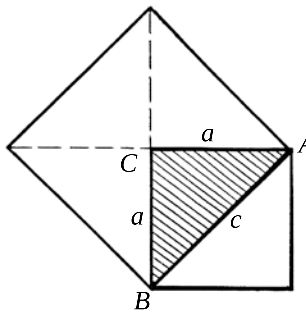
18) როდესაც სამკუთხედი ტოლფერდა მართკუთხაა, მის კათეტებზე და ჰიპოტენუზაზე განსხვავებული სახით ვაგებთ კვადრატებს (ნახ. 23, ა, ბ, გ). შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$c^2 = 4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2 = a^2 + a^2 .$$

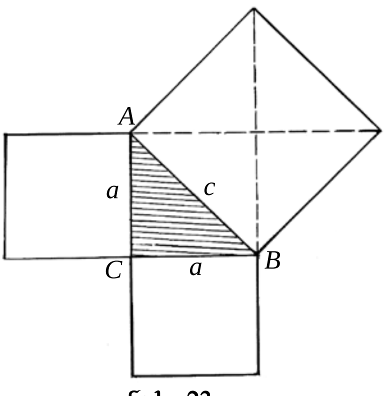
ე.ი. პითაგორას თეორემა სამართლიანია.



ნახ. 23 ა



ნახ. 23 ბ



ნახ. 23,გ

ეს შემთხვევა პითაგორას თეორემის ზოგადი შემთხვევის (კათეტები განსხვავდებიან) კერძო შემთხვევაა (კათეტები ტოლია).

მესამე შემთხვევა (ნახ. 23, გ) ეჭვს არ იწვევს, რადგან

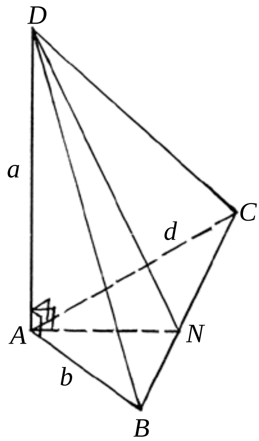
$$c^2 = 2a^2$$

ჰიპოტენუზაზე აგებული კვადრატის ფართობს გამოსახავს და კათეტებზე აგებული (ტოლი) კვადრატების ფართობთა ჯამიც $2a^2$-ის ტოლია.

19) სკოლის მოსწავლეებს შეიძლება შევთავაზოთ დაამტკიცონ შემდეგი დებულება, რომელიც პითაგორას

თეორემის გარკვეულ განზოგადებულ სახეს წარმოადგენს [23].

განვიხილოთ ტეტრაედრი, რომლის ორი გვერდითი წახნაგი და ფუძე მართკუთხა სამკუთხედებს წარმოადგენენ. ერთი წახნაგის კათეტები იყოს a და b, მეორის – a და d, ხოლო მესამის – b და d. ეს წახნაგები განლაგებულია ისე, რომ მათი მართი კუთხის წვეროები ტეტრაედრის საერთო წვეროა და ტეტრაედრის სიმაღლე a. S_1, S_2, S_3 შესაბამისად იყოს სამი წახნაგის ფართობები, რომლებიც ქმნიან მართ სამწახნაგა კუთხეს. S_4 იყოს სამწახნაგა კუთხის მოპირდაპირე წახნაგის ფართობი. $AN \perp BC$ და $BC \perp DN$; $S_1 = 0{,}5ab$, $S_2 = 0{,}5ad$ და $S_3 = 0{,}5bd$ (იხ. ნახ. 24). შეიძლება დავამტკიცოთ შემდეგი დამოკიდებულების სამართლიანობა:



ნახ. 24

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_4^2 .$$

რადგან $BC = \sqrt{b^2 + d^2}$, $BC \cdot AN = bd$, $AN = \dfrac{bd}{BC} = \dfrac{bd}{\sqrt{b^2 + d^2}}$,

$$DN = \sqrt{a^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 d^2}{b^2 + d^2}} ,$$

ამიტომ

$$S_4 = \frac{DN \cdot BC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + d^2} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{b^2 d^2}{b^2 + d^2}} .$$

შევიტანოთ ტეტრაედრის წახნაგების ფართობთა მიღებული მნიშვნელობები დასამტკიცებლად ტოლობაში, მცირე გარდაქმნა ტოლობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეში მოგვცემს ერთი და იგივე გამოსახულებას:

$$a^2 b^2 + a^2 d^2 + b^2 d^2 .$$

შევნიშნოთ, რომ „პითაგორას თეორემის განზოგადოებად შეიძლება ჩაითვალოს ე.წ. ფერმას დიდი თეორემა. ფრანგმა მათემატიკოსმა პიერ ფერმამ (XVII ს.), განაზოგადა რა

პითაგორას თეორემა, გამოთქვა შემდეგი ვარაუდი: განტოლებას $x^n + y^n = z^n$ ნატურალური $n > 2$-თვის არ შეიძლება ამოიხსნას ნატურალურ რიცხვებში x, y და z-თვის“. ამ პირობის დამტკიცების სამართლიანობა მან არ დატოვა, მიუთითებდა, რომ მისი ნაკლოვანი ადგილის გადმოცემა არ შეუძლია. დღემდე არაა მოძებნილი ფერმას თეორემის ზოგადი დამტკიცება, რაც იმის ტოლფასია რომ არაა მოძებნილი მისი უარყოფაც. მაგრამ ფერმას თეორემა დამტკიცებულია $2 < n < 100$ ყველა ნატურალური რიცხვებისათვის“ (პ.ვ. სტრატილატოვი) [23].

დასკვნა

პითაგორას თეორემას დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. მისი გამოყენებით მტკიცდება გეომეტრიის მრავალი თეორემა და იხსნება მართკუთხა და ირიბკუთხა სამკუთხედები. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნაში ტრიგონომეტრიულ ფორმულებსა და მათემატიკურ ცხრილებთან ერთად პითაგორას თეორემა დიდ როლს თამაშობს. თეორემა გამოიყენება, აგრეთვე, სატრანსპორტო და სამშენებლო ამოცანების ამოხსნაში, სამხედრო საქმიანობაში, სამთო საქმეში (გეოლოგია-მარკშეიდერია-გეოდეზია), ასტრონომიაში და მეცნიერების სხვა მრავალ დარგში. მისი გამოყენებით მიიღება წრეწირის განტოლება და ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსათვლელი ფორმულები სიბრტყეზე და სივრცეში. თეორემის გამოყენებით მკვეთრად მარტივდება მთის, მაღალი ანძის ან შენობის სიმაღლის, მდინარის სხვადასხვა მხარეს მდებარე ორ პუნქტს შორის (მდინარის გადაულახავად) ან სხვა მიუწვდომელ პუნქტებს შორის მანძილის გამოთვლა. ამ თვალსაზრისით საკმარისი დრო უნდა დაეთმოს იმ ამოცანების შესწავლას, რომლებშიც პითაგორას თეორემა გამოიყენება. რაც შეეხება თეორემის წარმოდგენილ დამტკიცებებს, ისინი შეიძლება გარკვეული მოცულობით შევთავაზოთ მოსწავლეებს მათემატიკურ წრეებზე განსახილველად.

CONCLUSION

The Pythagorean Theorem has great practical importance. By its application are approved many theorems of geometry and are solved right and acute triangles. In the solution of geometric problems with trigonometry formulae and mathematical tables the Pythagorean Theorem play a big role. The theorem is applied also in transport and construction tasks solution, in military activity, in mining business (geology – mining engineering - geodesy), astronomy and in many other fields of science. By its application is received the circle equation and formulae for calculation distance between two-points the on the plane and in space. By theorem application is greatly simplified the calculation of height of mountains, high towers or high-rise buildings, or calculation of distance between located on different sides of the river two points (without the river crossing) or other out-of-the-way points. In this respect sufficient time should be given to the objectives of the study, in which the Pythagorean Theorem is applied. As for the approval of Theorem, they would be offered by a certain volume for discussion among students on mathematic circles.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. В. Литцман. Теорема Пифагора. – Одесса: Матезись, 1912; М.-Л.: ОНТИ, 1935; М.: Физматгиз, 1960 (Пер. с немецкого).
2. А. Рорберг. Треугольник и его практические применения. – Л.: Госиздат, 1925 (Пер. с немецкого).
3. უ. გათრი. ბერძენი ფილოსოფოსები. – თბილისი: საბ-ჭოთა საქართველო, 1983 (თარგმანი ინგლისურიდან).
4. А.П. Юшкевич. История математики в средние века. – М.: Госиздат физ.-мат. литературы. 1960.
5. А.И. Володарский. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977.
6. ევკლიდეს „საწყისები“. – თბილისი: მეცნიერება, 1990-1992 (თარგმანი ბერძნულიდან).
7. Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1969 (Пер. с немецкого).
8. В.Д. Чистяков. Старинные задачи по элементарной математике. – Минск: Вишейшая школа, 1978.
9. Энциклопедия элементарной математики. т. 3, Геометрия (Пла-ниметрия)
10. Г.И. Глейзер. История математики в школе (VII-VIII классы), Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982.
11. Н.Н. Никитин. Геометрия. Учебник для 6-8 классов. – М.: Просвещение, 1969.
12. ა.პ. კისელიოვი. გეომეტრია (პლანიმეტრია), ნაწილი პირ-ველი, სახელმძღვანელო 7-10 კლასებისათვის. – თბილისი: სახელგამი, 1948.
13. А.В. Погорелов. Геометрия. Пособие для 7-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1989.
14. С.А. Пономорев, П.В. Стратилатов, Н.И. Сирнев. Сборник упражнений по математике для 4-5 классов (Пособие для учи-телей). – М.: Просвещение, 1971.

15. გ. გოგიაშვილი, თ. ვეფხვაძე, ი. მებონია, ლ. ქურჩიშვილი. მათემატიკა, VIII კლასის სახელმძღვანელო. – თბილისი: ინტელექტი, 2007.
16. А.И. Фетисов. Геометрия в задачах. – М.: Просвещение, 1977.
17. ნ. ძიგავა. პითაგორას თეორემის შესახებ. გაზეთი „სახალხო განათლება“, 1947 წელი, 2 ოქტომბერი, გვ. 2. – თბილისი.
18. მ. ბურჭულაძე. პითაგორას თეორემა. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, 1976 წელი. № 3. – თბილისი.
19. ა. ბენდუქიძე. პითაგორას თეორემა. ჟურნალი „ფიზიკა და მათემატიკა სკოლაში“, 1986 წელი. № 4. – თბილისი. ჟურნალი „პიონერი“, 1976 წელი, № 11. – თბილისი.
20. გ. სუსარეიშვილი. გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნის ნიმუშები. – თბილისი: ცოდნა, 1962.
21. А. Донеддю. Евклидова планиметрия. – М.: Наука, 1978.
22. Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, В.Я. Санкинский, Г.Л. Луканкин. Методика преподавания математики в средней школе. – М.: Просвещение, 1975.
23. П.В. Стратилатов. О системе работы учителя математики (Методические рекомендации по организации учебного процес-са). – М.: Просвещение, 1984.

შინაარსი

ავტორი: გიორგი ისაკის ძე ყირმელაშვილი,
სტუ-ს მათემატიკის დეპარტამენტის სრული პროფესორი

იბეჭდება ავტორის მიერ წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას ....2011. ხელმოწერილია დასაბეჭდად .... 2011. ქაღალდის ზომა 70×100 1/16. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 2,5.
ტირაჟი 300 ეგზ.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“,
თბილისი, მ. კოსტავას 77