ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

МАРИНА КЛЕБАНСКАЯ

НАЧАЛЬНАЯ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д и с с е р т а ц и я

Представленная на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, проф. – Д.К. Гвазава

Тбилиси – 2006

СОДЕРЖАНИЕ

В В Е Д Е Н И Е

Изучение уравнений в частных производных связано со многими математическими и практическими моделями, соответствующими различным физическим процессам. Такие уравнения, как правило, нелинейны и для них не существует такой же совершенной теории, какая построена для линейных уравнений. Поэтому каждый класс нелинейных уравнений требует индивидуального подхода. В некоторых случаях, на основании существенных ограничений и допущений, нелинейные уравнения линеаризуют (если это возможно и не требуется особой точности).

Но и к линейным уравнениям предъявляют достаточно жесткие требования. Например, члены младшего порядка уравнения, которые не определяют его тип, должны быть если не непрерывны, то хотя бы ограничены. Довольно часто практические задачи и после линеаризации не удовлетворяют этим условиям.

Подобные линейные уравнения с разрывными коэффициентами членов младшего порядка одним из первых в своих работах рассмотрел Г. Дарбу ([18]). Этим же вопросам посвящены труды Ж. Адамара ([1]), С. Пуассона ([36]), Л. Эйлера ([18]) и многих других известных авторов. Такие уравнения в литературе известны как уравнения Эйлера-Дарбу-

Пуассона [45]. Они равносильны уравнениям с вырождением порядка. Этот факт был применен Н.Е. Жуковским и С.А. Чаплыгиным ([36]) в процессе исследования аэродинамических задач. Впоследствии выяснилось, что эллиптические и гиперболические уравнения с помощью простого преобразования могут быть приведены к параболически вырождающимся уравнениям, т.е. к уравнениям с вырождением типа.

В результате фундаментальных исследований этих и многих других фактов, Ф.Трикоми построил теорию уравнений смешанного типа ([44, 45]). Она стала актуальной при постановке и решении некоторых гидро- и аэродинамических задач. Впоследствии эта теория получила развитие в трудах таких ученых как Г.Фон Карман ([5]), П. Жермен ([24]), М.А.Лаврентьев ([35]), М.В. Келдыш ([26]), А.В. Бицадзе ([6, 7]), К.И. Бабенко ([4]) и др.

Первые труды, посвященные нелинейным уравнениям смешанного типа, принадлежат Д.К. Гвазава (12-15), И.В. Майорову ([37]), М.И. Алиеву ([2]). В последствии этими вопросами занимались Р.Г. Бицадзе ([8, 9]), О.М. Джохадзе ([20-23]), М.З. Ментешашвили ([38]), О.Ф. Меньших ([39]), А.Г. Подгаев ([41]). В их работах были исследованы различные задачи для нелинейных уравнений с применением методов нелинейного анализа.

В настоящей работе мы рассматриваем класс квазилинейных уравнений второго порядка гиперболического типа со специальной главной частью с допустимым параболическим вырождением. Следует отметить, что при постановке классических задач для нелинейных уравнений, особенно гиперболических, мы часто сталкиваемся с существенными затруднениями, по причине зависимости характеристических многообразий от искомых решений.

В данной работе изучена начальная задача Коши, исследованы новые нелинейные аналоги начально-характеристической задачи Дарбу и характеристической задачи Гурса. Получены условия разрешимости задач и дан анализ структуры областей определения решений ([27 - 32]).

Постановка задач для нелинейных уравнений становиться возможной на основе общего представления решения. Но только для узкого класса уравнений, в том числе, и рассматриваемого в данной работе уравнения, удается найти его общий интеграл и общее решение.

В первой главе рассмотрено квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$L(u) \equiv 2y\left(u_y - 2y\right)u_{xx} + \left(u_y - 2yu_x - 2y\right)u_{xy} - u_x\, u_{yy} = F\left(u,\, u_x, u_y\right).$$

(0.1)

Уравнение (0.1) эквивалентно закону сохранения (неразрывности), который в данном случае имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{u_y - 2y}{u_x} + 2y = \upsilon, \\ 2y\,\upsilon_x + \upsilon_y = 0. \end{cases} \qquad (0.2)$$

Дифференциальному оператору L соответствуют два действительных характеристических направления, определяемых соотношениями

$$2ydy = dx, \qquad \left(u_y - 2y\right)dy + u_x dx = 0\,. \qquad (0.3)$$

Наряду с другими свойствами, уравнение (0.1) интересно тем, что одно его семейство характеристик вполне определено независимыми переменными x и y, как в линейном случае. Эффект нелинейности проявляется в другом семействе – это семейство не определено из-за зависимости от значений производных первого порядка искомого решения. Это свойство, в определенной степени, ставит уравнение (0.1) на стыке линейных и квазилинейных уравнений, отчасти упрощая исследование ряда задач для уравнения (0.1).

На множестве точек, где характеристические направления, определяемые соотношениями (0.3) совпадают, т.е. выполняется условие

$$u_y - 2y\left(1 - u_x\right) = 0\,, \qquad (0.4)$$

уравнение (0.1) параболически вырождается. Если решения таковы, что условие (0.4) выполняется всюду, тогда вдоль этих решений уравнение параболического типа, а сами решения называются параболическими.

Поэтому, (0.1) следует относить к классу параболически вырождающихся гиперболических уравнений.

Для простоты изложения и с целью получения наиболее четких результатов, рассматриваем частный, специальный случай уравнения (0.1) со следующей правой частью

$$L(u) = 2u_x\left(u_x - 1\right), \qquad (0.5)$$

когда представление общего интеграла возможно линейной комбинацией двух произвольных функций.

Для построения общего интеграла мы обратились к классическому методу характеристик.

Дифференциальные системы характеристических соотношений имеют вид:

$$2y\,dy - dx = 0, \quad d\,p - \frac{p\,dq}{q-2y} - \frac{p(p-1)}{y(q-2y)}\,dx = 0\,, \tag{0.6}$$

$$(q-2y)\,dy + p\,dx = 0, \quad d\,p + \frac{dq}{2y} - \frac{p(p-1)}{y(q-2y)}\,dx = 0\,, \tag{0.7}$$

каждая из которых дополняется условием согласованности

$$du = pdx + qdy\,. \tag{0.8}$$

Здесь и ниже мы воспользовались известными обозначениями Монжа: $p \equiv u_x$, $q \equiv u_y$.

Опираясь на известные факты относительно совместных систем уравнений первого порядка, устанавливаем, что оба дифференциальных соотношения имеют соответственно по два первых интеграла

$$\xi = x - y^2, \quad \xi_{`1} = \frac{q-2y}{p} + 2y \tag{0.9}$$

и

$$\eta = u - y^2, \ \ \eta_1 = 2y(p-1) + q\,. \tag{0.10}$$

<u>Т е о р е м а</u>. *Каждая из характеристических систем (0.6), (0.8) и (0.7), (0.8) уравнения (0.1) допускает по два первых интеграла.*

Эти первые интегралы являются характеристическими или Римановыми инвариантами. Характеристические инварианты ξ и ξ_1 системы (0.9) постоянны вдоль каждой характеристики семейства, соответствующего корню λ_1 и полностью определяют это семейство. Множество этих характеристик в дальнейшем будем называть ξ-семейством. Из соотношений (0.9) следует, что уравнение (1) имеет промежуточный интеграл вида

$$\frac{q-2y}{p} + 2y = G\left(x - y^2\right), \tag{1.11}$$

где G - произвольная достаточна гладкая функция.

Другая пара инвариантов η и η_1 определяется вторым из соотношений (0.3) и соответствующее ей множество характеристик назовем η-семейством.

Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что уравнение (0.5) имеет еще один промежуточный интеграл

$$2y(p-1) + q = H\left(u - y^2\right) \tag{1.12}$$

с произвольной функцией $H \in C^2\left(R^1\right)$.

С помощью промежуточных интегралов строится общий интеграл уравнения (0.5)

$$y = h\left(u - y^2\right) - g\left(x - y^2\right), \tag{0.13}$$

где g и h - произвольные функции того же класса $C^2\left(R^1\right)$.

Так как функция h произвольна, мы из общего интеграла (0.12) получаем представление общего решения

$$u = y^2 + f\left[\, y + g\left(x - y^2\right)\right]. \tag{0.14}$$

Оно задано суперпозицией двух произвольных гладких функций f и g. Такой класс квазилинейных уравнений с общими решениями, представимыми суперпозицией произвольных функций, одна из которых входит в состав аргумента другой, был рассмотрен в ([12-15]). В данном случае структура характеристических инвариантов в некоторой степени отличается от указанных выше общих решений.

<u>Т е о р е м а</u>. *Уравнение (0.5) интегрируемо и его общее решение выражается при помощи двух произвольных функций в виде (0.14), где одна произвольная функция входит в состав аргумента другой произвольной функции.*

Как отмечалось выше, при совпадении характеристических корней λ_1, λ_2, уравнение (0.5) параболически вырождается, и все его параболические решения определяются условием (0.4). Это условие в уравнении (0.5) учитывается двояко. Заменяя выражение $\left(2y - u_y\right)/u_x$ в уравнении (0.5) на $2y$, приходим к линейному параболическому уравнению

$$4y^2 u_{xx} + 4y u_{xy} + u_{yy} = -2\left(u_x - 1\right), \tag{0.15}$$

характеристическое уравнение которого имеет кратный корень

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2y},$$

а его общее решение имеет вид

$$u = x + y\, f_1\left(x - y^2\right) + g_1\left(x - y^2\right), \tag{0.16}$$

где f_1 , g_1 - произвольные функции.

Если же выражение $2y$ заменить на $u_y/\left(1 - u_x\right)$, получим квазилинейное уравнение параболического типа:

$$u_y^{\,2} u_{xx} - 2u_y\left(u_x - 1\right) u_{xy} + \left(u_x - 1\right)^2 u_{yy} = -2\left(u_x - 1\right)^3, \tag{0.17}$$

которому соответствует кратный характеристический корень

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{u_x - 1}{u_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$x = y^2 - y\varphi(u - x) + \psi(u - x), \tag{0.18}$$

где φ и ψ - также произвольные функции.

Отсюда можно сделать вывод, что из уравнения (0.5) с учетом условия (0.4) получаются линейное уравнение (0.15) и нелинейное уравнение (0.17). Все эти три уравнения взаимно родственны. Существуют их общие решения (0.14), (0.16) и (0.17), но, в отличии от уравнений, они не связаны друг с другом, так как в условии (0.4) присутствуют производные первого порядка этих решений, а не сами решения. Из общего решения (0.14) не возможно получить общее решения уравнений (0.15) и (0.16) и наоборот. Тогда как, дифференцируя общие решения (0.14), (0.16) и (0.18) по независимым переменным, последующим исключением производных от произвольных функций из полученных соотношений, во всех трех случаях получаем один и тот же результат - выражение (0.4), определяющее класс параболических решений уравнения (0.5).

Следует также отметить, что при введении контактного преобразования, в котором величины x и u меняются местами, уравнение (0.5) сохраняет свою форму, т.е. инвариантно относительно преобразования $\xi = x - y^2$, $\eta = u - y^2$. Это также видно из формы общего интеграла (0.13).

Подвергая уравнение (0.5) произвольному неособому преобразованию: $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, мы получаем уравнение того же гиперболо- параболического смешанного типа.

Рассматриваемое уравнение, в определенном смысле, родственно уравнениям Борна и Инфельда ([10], [46]) и Дюбрей-Жакотэн ([19], [43]). В этом легко убедится, применяя к уравнению (0.5) видоизмененное преобразование годографа (см., напр., [15], стр. 55]).

Во второй и третьей главах комбинированием общего интеграла (0.13) и общего решения (0.14) с другими методами нелинейного анализа исследованы начальная задача Коши и характеристические задачи Дарбу и Гурса.

В первом параграфе второй главы изучена следующая начальная задача Коши: Пусть $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные на замкнутом интервале [-1,1] соответственно дважды и один раз дифференцируемые функции, причем функция $\nu(x)$ всюду на данном интервале отлична от нуля. Отрезок прямой $y=0$: $[-1,\ 1]$ выбран без ограничения общности.

<u>Задача Коши</u>. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (0.5), удовлетворяющее начальным условиям:*

$$u\big|_{y=0} = \tau(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{0.19}$$

$$u_y\big|_{y=0} = \nu(x), \ x \in [-1, 1], \tag{0.20}$$

где $\tau \in C^2[-1,1]$, $\nu \in C^1[-1,1]$ *- заданные функции.*

Отрезок $[-1,\ 1]$ прямой $y=0$ выбран без ограничения общности.

Постановка задачи Коши, как и следовало ожидать, не отличается от классической. Но необходимо отметить, что решение и его область определения должны строиться одновременно. А также начальные данные должны быть подобраны таким образом, чтобы их носитель был свободен от параболического вырождения.

<u>Т е о р е м а.</u> *Если начальные функции на всем интервале* J *удовлетворяют неравенствам*

$$\tau'(x) \neq 0, \quad \nu(x) \neq 0,$$

а интегральное соотношение

$$\zeta = \int_a^x \frac{\tau'(t)}{\nu(t)} dt + g(a),$$

где $a \in J$ *- произвольная постоянная, однозначно разрешимо как функциональное уравнение относительно величины* x, $x = G[\zeta, a]$, *то задача (0.5), (0.18), (0.19) имеет единственное регулярное решение, представленное формулой*

$$u = y^2 + \tau\left\{ G\left[y + \int_a^{x-y^2} \frac{\tau'(t)}{\nu(t)} dt \ ,\ a \right]\right\} \tag{0.21}$$

и область его определения однозначна.

Согласно этой формуле создается впечатление, что рассматриваемая задача имеет бесконечное множество решений – целое однопараметрическое семейство с параметром a. Однако, дальнейшее упрощение представления (2.8) убеждает нас в обратном.

Действительно, если ввести обозначение $\vartheta'(x) \equiv \dfrac{\tau'(x)}{\nu(x)}$, где $\vartheta \in C^2[-1,1]$ и потребовать выполнения условия: уравнение $\zeta = \vartheta(x)$ при любом $\zeta \in [\vartheta(-1),\, \vartheta(1)]$ должно имеет единственное решение:

$$x = G(\zeta),\ G(0) = 0,$$

непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале, тогда можно сделать следующий

Вывод: *Если функция ϑ на всем интервале $[-1,1]$ удовлетворяет неравенству*

$$\vartheta'(x) \neq 0,$$

а уравнение $\zeta = \vartheta(x)$ однозначно разрешимо относительно величины x: $x = G(\zeta), G(0) = 0$, то задача Коши имеет единственное регулярное решение представленное формулой

$$u = y^2 + \tau\left\{G\left[y + \vartheta\left(x - y^2\right)\right]\right\}$$

область определения которого ограничена характеристиками обоих семейств: $x - y^2 = -1$, $x - y^2 = 1$ и $y + \vartheta\left(x - y^2\right) = \vartheta(-1)$, $y + \vartheta\left(x - y^2\right) = \vartheta(1)$.

Следствие. Если уравнение $\zeta = \vartheta(x)$ имеет $i = 1,\ldots,k$ решений, тогда задача Коши разрешима в классе регулярных решений, число ее решений не превышает количества обратных относительно x и каждое решение определяется в характеристическом четырехугольнике. Носитель начальных данных безусловно попадает в область определения.

Для наглядности приведено несколько частных случаев.

Во втором параграфе той же главы рассмотрена задача Дарбу. Эта задача предусматривает построение решения по заданным значениям на двух различных кривых, выходящих из одной точки. В первой задаче Дарбу одна из этих кривых характеристика, другая – свободная кривая. Мы рассматриваем случай, когда общей точкой является начало координат, одна кривая дуга характеристической параболы $x = y^2$, $x \in [0,a]$, вторая же отрезок $x \in [0,b]$ оси $y = 0$. Из постановки задачи следует, что эта вторая кривая должна быть свободной. Для этого, исходя из структуры второго характеристического корня, характеристическое направление $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y - 2y}$ не должно совпадать с направлением, параллельным оси Ox. Поэтому мы требуем выполнения следующего условия:

$$u(x,0) \neq const \tag{0.22}$$

<u>Задача Дарбу</u>. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (0.5), если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned} &u\Big|_{y=\sqrt{x}} = \varphi(x),\ 0 \le x \le a\,; \\ &u\Big|_{y=0} = \psi(x),\ \ 0 \le x \le b,\ a \le b\,, \end{aligned} \tag{0.23}$$

где $\varphi \in C^2[0,a]$, $\psi \in C^1[0,b]$ *- заданные функции и* $\varphi(0) = \psi(0)$.

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены неравенство (0.22) и следующие условия:*

1. *Функциональное уравнение* $\varphi(x) - x = z$ *разрешимо при любом* $z \in [\varphi(0),\ \varphi(a) - a]$ *и имеет единственное решение:* $x = \Phi(z)$, $\Phi(\varphi(0)) = 0$*;*
2. $\varphi'(x) > 1$*;*
3. $\psi(x) < \varphi(a) - a,\quad x \in [0,b]$,

тогда задача (0.5), (0.23) однозначно разрешима в классе регулярных решений; ее решение представлено формулой

$$u = y^2 + \varphi\left\{\left[\ y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]}\ \right]^2\right\} - \left\{\ y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]}\ \right\}^2 \tag{0.24}$$

и определяется в криволинейном четырехугольнике, ограниченном носителями данных, характеристикой $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$ *и дугой параболы* $x - y^2 = b$*;*

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены неравенство (0.22), условия 1 и 2 предыдущей теоремы и* $\psi(x) \ge \varphi(a) - a$, $x \in [0,b]$, *тогда задача (0.5), (0.23) имеет единственное регулярное решение, представленное формулой (0.24), которое определяется в криволинейном треугольнике, ограниченном носителями данных и характеристикой* $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$.

Для иллюстрации рассмотрен случай линейной функции $\varphi(x) = kx$.

Третья глава посвящена изучению характеристической задачи Гурса. Решение этой задачи определяется по заданным значениям на дугах двух различных характеристик, выходящих из общей точки. В данном случае одна характеристика парабола и задана равенством

$$x = y^2 + \delta\,, \tag{0.25}$$

другая характеристика зависит от искомого решения, и мы выбираем ее произвольно. Допустим, что на плоскости переменных x, y дана гладкая кривая γ, которая может пересекаться с характеристикой ξ-семейства не более одного раза и ее направление нигде не совпадает с ξ-характеристическим направлением. Другими словами, если эта кривая представима в явном виде уравнением

$$x = \omega(y), \qquad a \le y \le c\,, \quad \omega(a) = \delta + a^2, \tag{0.26}$$

где $\omega \in C^2[a\,,\, c]$ - заданная функция, тогда уравнение

$$\omega(y) - y^2 = k \tag{0.27}$$

при произвольном значении $k > 0$ относительно величины y не может иметь более одного решения и, кроме того, всюду выполнено неравенство

$$\omega'(y) - 2y \neq 0\,. \tag{0.28}$$

Уравнение (0.26) при любой положительной правой части $k \in [\delta\,,\, \omega(c) - c^2]$ имеет единственное решение:

$$y = W(k),\; W(\delta) = a\,, \tag{0.29}$$

непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале. При этом, функции $\omega(y) - y^2$ и $W(k)$ должны быть взаимно обратными.

<u>Задача Гурса</u>. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (0.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\Big|_{x=y^2+\alpha} = \upsilon(y), \qquad a \le y \le b\,, \tag{0.30}$$

а дуга кривой γ, заданная соотношением (0.26) является характеристикой η-семейства.

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены условия (0.27), (0.28) и функции $\omega(y) - y^2$, $\upsilon(y) - y^2$ однозначно обратимы: $y = W(k)$, $W(\delta) = a$ и $y = V(t)$, $V(0) = 0$ соответственно, тогда задача (0.5), (0.26), (030) имеет единственное регулярное решение; это решение представлено формулой*

$$u = y^2 + \upsilon\left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\}^2$$

(0.31)

и определяется в замкнутом криволинейном четырехугольнике, ограниченном дугами характеристических кривых: $x = y^2 + \delta$, $x = \omega(y)$, $x = y^2 + \omega(y+a-b) + (y+a-b)^2$, $x = y^2 + \omega(c) - c^2$.

Для иллюстрации рассмотрен специальный простой случай, когда

$$\upsilon(y) = dy^2 + ny + l\ ,\ \ y \neq \frac{n}{2(d-1)}\ ,\ \ d \neq 1,$$

$$\omega(y) = my^2,\ \ m > 1\ ,\ \ \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} = -\frac{n}{2(d-1)}.$$

Во втором параграфе этой же главы мы изучаем сингулярную задачу Гурса, когда характеристики касаются друг друга в общей точке - начале координат.

В этом случае характеристиками – носителями данных являются парабола

$$x = y^2 \tag{0.32}$$

и кривая γ, представленная уравнением

$$x = \omega(y), \quad 0 \le y \le b, \quad \omega(0) = 0, \quad \omega'(0) = 0 \tag{0.33}$$

где $\omega \in C^2[0,b]$ - заданная функция и выполняются следующие условия: уравнение

$$\omega(y) - y^2 = \zeta \tag{0.34}$$

при любом положительном значении правой части ζ относительно величины y не может иметь более одного решения и всюду в $[0,b]$ выполнено неравенство (0.28). Уравнение (0.34) при любой положительной правой части $\zeta \in [0, \omega(b) - b^2]$ имеет единственное решение

$$y = W(\zeta),\ W(0) = 0, \tag{0.35}$$

которое принадлежит классу $C[0,\ \omega(b) - b^2] \cap C^1(0,\ \omega(b) - b^2]$.

Безусловно, функции $\omega(y) - y^2$ и $W(\zeta)$ взаимно обратны.

Задача Гурса. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (0.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\Big|_{x=y^2} = \upsilon(y)\ , \quad 0 \le y \le a\ ,\ \ \upsilon \in C^2[0,a]\ , \tag{0.36}$$

а дуга кривой γ*, заданная соотношением (0.33) является характеристикой* η*-семейства.*

Справедлива следующая

Т е о р е м а. *Если выполнены условия (0.28), (0.34) и функции* $\omega(y)-y^2$, $\upsilon(y)-y^2$ *однозначно обратимы:* $y=W(\zeta)$, $W(0)=0$ *и* $y=V(t)$, $V(\upsilon(0))=0$ *соответственно, тогда задача Гурса имеет единственное решение, представленное формулой*

$$u=y^2+\upsilon\left\{y-W\left(x-y^2\right)\right\}-\left\{y-W\left(x-y^2\right)\right\}^2, \tag{0.37}$$

которое определяется и непрерывно всюду в криволинейном характеристическом четырехугольнике, ограниченном дугами $x=y^2$, $x=\omega(y)$, $x=\omega(y-a)+2ay-a^2$, $x=y^2+\omega(b)-b^2$; *а для его производных первого порядка кривая* $x=y^2$ *является сингулярной.*

В качестве примера также приведен частный случай, в котором парабола $x=y^2$ является огибающей $\eta-$семейства, все характеристические кривые которого пересекаются между собой.

В следующем параграфе этой же главы задача Гурса исследована на основании нелинейного аналога свойства среднего значения для уравнения (0.5). Это свойство позволяет доказать разрешимость задачи в классе как регулярных, так и обобщенных решений.

Свойства среднего значения для гиперболических уравнений были установлены в ([3, 25, 31, 34]). Для данного квазилинейного уравнения этот принцип определяется просто: *суммы ординат противоположных вершин характеристического четырехугольника равны.*

Предположим, что общей точкой опять является начало координат, но характеристические дуги не касаются друг друга в этой точке. Характеристики заданы уравнениями: (0.32) и

$$x=\omega(y), \qquad 0\le y\le b, \quad \omega(0)=0, \tag{0.38}$$

где $\omega\in C^2[0,b]$ - заданная функция. Уравнение (0.34) при любом положительном значении ζ относительно величины y не может иметь более одного решения и, кроме того, всюду в $[0,b]$ выполнено неравенство (0.28). Кроме того, уравнение (0.34) при любой положительной правой части $\zeta\in\left[0,\,\omega(b)-b^2\right]$ имеет единственное решение (0.35), непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале. Функции $\omega(y)-y^2$ и $W(\zeta)$ взаимно обратны.

<u>Задача Гурса</u>. *Вместе со своей областью определения найти решение уравнения (0.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\big|_{x=y^2} = \upsilon(y), \quad 0 \le y \le a\,,\ \ \upsilon \in C^2[0,a], \tag{0.39}$$

а дуга кривой, заданная соотношением (0.38) является характеристикой η*-семейства.*

В данном параграфе показано, что при заданной дуге характеристики (0.37) можно явно представить все дуги характеристик η-семейства, выходящих из точек параболы $x = y^2$. Тем самым, полностью описывается структура области определения решения поставленной задачи.

Лемма. *Дуги характеристик* η*-семейства, выходящих из точек параболы* $x = y^2$*, при выполнении условий (0.28), (0.34), (0.35), покрывают бесконечную параболическую полосу* $y_0{}^2 \le x_0 \le y_0{}^2 + \psi(b) - b^2$ *и между собой не пересекаются* ((x_0, y_0) - произвольно взятая точка).

<u>Т е о р е м а.</u> *Если выполнены условия (0.28), (0.34), функция* $\omega(y) - y^2$ *имеет единственную обратную* W, $W(0) = 0$, *тогда задача (0.5), (0.38), (0.39) однозначно разрешима в классе регулярных решений; ее решение, представленное формулой (0.37), определяется в криволинейном четырехугольнике, ограниченном характеристическими кривыми:* $x = y^2$, $x = \omega(y)$, $x = y^2 + \omega(y-a) + (y-a)^2$, $x = y^2 + \omega(b) - b^2$.

<u>Т е о р е м а 11</u>. *Если для некоторого значения* $y = b_1 \in (0, b]$

$$\omega'(b_1) = 2b_1\,,$$

а при $0 < y < b_1$ *выполняется условие (0.28), то вся* $\xi -$*характеристика*

$$x = y^2 + \omega(b_1) - b_1^2,$$

проходящая через точку $(\omega(b_1), b_1)$, *является множеством точек характеристического параболического вырождения уравнения (0.5).*

ГЛАВА I
ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО ИНТЕГРАЛА КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Построение промежуточных интегралов методом характеристик

На плоскости независимых переменных x, y рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$L(u) = 2y(u_y - 2y)\, u_{xx} + (u_y - 2yu_x - 2y)\, u_{xy} - u_x u_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) эквивалентно закону сохранения (неразрывности), который в данном случае имеет вид (см., напр., [11], стр. 80):

$$\begin{cases} \dfrac{u_y - 2y}{u_x} + 2y = \upsilon, \\ 2y\upsilon_x + \upsilon_y = 0. \end{cases}$$

Соответствующее (1.1) характеристическое уравнение

$$2y(u_y - 2y)\lambda^2 - (u_y - 2yu_x - 2y)\lambda - u_x = 0$$

на плоскости x, y определяет два характеристических корня

$$\lambda_1 = \frac{1}{2y},\ \lambda_2 = -\frac{u_x}{u_y - 2y}. \tag{1.2}$$

Как известно, семейства характеристических многообразий линейных уравнений определяются главными коэффициентами. Тогда как, корни квазилинейных уравнений и соответственно семейства характеристик могут зависеть от искомого решения и его младших производных. Поэтому эти семейства не будут определены до тех пор, пока не известно решение.

Наряду с другими свойствами, уравнение (1.1) интересно тем, что одно его семейство вполне определено независимыми переменными x и y, как в линейном случае. Эффект нелинейности проявляется в другом семействе – это семейство не определено из-за зависимости от значений производных первого порядка искомого решения. Это свойство, в определенной степени, ставит уравнение (1.1) на стыке линейных и квазилинейных уравнений, отчасти упрощая исследование ряда задач для уравнения (1.1).

Для ненулевых значений дискриминанта $(u_y - 2y + 2yu_x)^2$ характеристические корни отличаются друг от друга. На множестве же точек, где характеристические направления, определяемые соотношениями

$$2y\,dy - dx = 0,\quad (u_y - 2y)dy + u_x\,dx = 0 \tag{1.3}$$

совпадают, т.е. выполняется условие

$$u_y + 2y(u_x - 1) = 0, \tag{1.4}$$

уравнение (1.1) параболически вырождается. Если решения таковы, что условие (1.4) выполняется всюду, тогда вдоль этих решений уравнение (1.1) параболического типа, а сами решения называются параболическими.

Множество точек параболически вырождающихся линейных уравнений второго порядка с действительными характеристиками также определяется независимыми переменными. К этому классу относятся, в частности, уравнения Трикоми и Чибрарио - Келдыша. В первом случае кривая вырождения свободна, во втором – она огибает семейство характеристик, и сама является характеристикой ([6]).

Множество же точек и характер параболического вырождения данного нелинейного уравнения зависят от поведения производных первого порядка u_x и u_y. Поэтому вырождение может быть характеристическим или свободным, сильным или слабым.

Итак, уравнение (1.1) следует относить к классу параболически вырождающихся гиперболических уравнений смешанного типа [6, 44].

Для простоты изложения и с целью получения наиболее четких результатов рассмотрим частный, специальный случай уравнения (1.1) со следующей правой частью

$$L(u) = 2u_x(u_x - 1), \tag{1.5}$$

когда возможно представление общего интеграла линейной комбинацией двух произвольных функций.

Как отмечалось выше, характеристические многообразия частично определяются соотношениями (1.3). Характеристические корни λ_1, λ_2 в каждой точке задания уравнения (1.5) определяют характеристические направления равенствами (1.3). Первое из этих направлений определено полностью и его непосредственным интегрированием строится семейство парабол $x - y^2 = C$ - семейство характеристик, соответствующее корню λ_1. Другое дифференциальное соотношение характеристических направлений, соответствующее корню λ_2, также интегрируется непосредственно. В результате интегрирования получается, что каждая характеристика этого семейства является линией уровня комбинаций $u - y^2$, содержащей решение $u(x, y)$. Для полного определения характеристик обоих семейств и построения промежуточных интегралов, необходимо привести в соответствие дифференциальные соотношения (1.3) с другими дифференциальными соотношениями. В совокупности они должны быть равносильны уравнению (1.5). Следуя классической теории характеристик, в качестве дополнительных характеристических дифференциальных соотношений, мы берем само уравнение (1.5) вдоль обоих семейств (см. напр., [15], стр. 13 или [17], стр. 51).

Семейство характеристических многообразий, соответствующее характеристическому корню λ_1, описывается дифференциальными соотношениями:

$$\begin{cases} dy - \dfrac{1}{2y}dx = 0\ , \\ du_x - \dfrac{u_x}{u_y - 2y}du_y - \dfrac{u_x(u_x - 1)}{y(u_y - 2y)}dx = 0\ , \end{cases} \tag{1.6}$$

а для характеристических многообразий, соответствующих корню λ_2 выполнены следующие дифференциальные соотношения:

$$\begin{cases} dy + \dfrac{u_x}{u_y - 2y}dx = 0, \\ du_x + \dfrac{du_y}{2y} - \dfrac{u_x(u_x - 1)}{y(u_y - 2y)}dx = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Вторые равенства этих систем представляют собой уравнения (1.5) вдоль соответствующих характеристических направлений.

Обе группы равенств (1.6) и (1.7) дополняем условием согласованности:

$$du = u_x dx + u_y dy\ . \tag{1.8}$$

Таким образом, существуют два различных семейства характеристик, которые получаются одно из другого перестановкой корней λ_1 и λ_2 и, которые сливаются при совпадении этих корней: $\lambda_1 = \lambda_2$.

Характеристики каждой системы зависят не от конечного числа произвольных постоянных, как в случае уравнений первого порядка, а от одной произвольной функции. Действительно, дифференциальные характеристические многообразия объединяют независимые переменные x и y, решение u и его производные первого порядка u_x и u_y. Между этими пятью величинами для каждого из семейств существует всего три дифференциальных соотношения, поэтому их не следует интегрировать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако можно заняться нахождением первых интегралов для этих систем.

Как известно, некая функция

$$\xi\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = const$$

является первым интегралом характеристических дифференциальных соотношений (1.6), (1.8), если равенство

$$d\xi\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0$$

равносильно системе (1.6), (1.8). Это значит, что функция ξ сохраняет одинаковое значение вдоль любой характеристики этой системы, которое меняется при переходе от одной характеристики к другой.

Запишем полный дифференциал $d\xi$ в развернутой форме:

$$\left\{\xi_x + \frac{1}{2y}\xi_y + \left(u_x + \frac{1}{2y}u_y\right)\xi_u + \frac{u_x(u_x - 1)}{y\left(u_y - 2y\right)}\xi_{u_x}\right\}dx + \left\{\xi_{u_y} + \frac{u_x}{u_y - 2y}\xi_{u_x}\right\}du_y = 0.$$

Для того, чтобы из системы (1.6) следовало $d\xi = 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$\begin{cases} L_1\xi = \xi_x + \dfrac{1}{2y}\xi_y + \left(p + \dfrac{1}{2y}q\right)\xi_u + \dfrac{p(p-1)}{y(q-2y)}\xi_p = 0, \\ L_2\xi = \dfrac{p}{q-2y}\xi_p + \xi_q = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Для удобства здесь и ниже мы воспользуемся известными обозначениями Монжа: $p \equiv u_x$, $q \equiv u_y$ [40].

Уравнения системы (1.9) линейно независимы. Необходимо отметить, что система (1.9) находится в непосредственной связи с характеристическими дифференциальными соотношениями (1.6), (1.8) и замена величин dx, dy, dp и dq в этих равенствах выражениями

$$\xi_p,\ \xi_q,\ -\left(\xi_x + p\xi_u\right),\ -\left(\xi_y + q\xi_u\right)$$

соответственно, дает систему (1.9).

Процесс построения системы (1.9) значительно упрощается тем, что ее коэффициенты не зависят от искомой функции ξ. Так как система (1.9) линейна, ее можно интегрировать стандартными методами. Прежде всего, расширим систему (1.9) применением скобок Якоби – Пуассона (см. напр. [17], стр. 21 или [45], стр.152):

$$L_3\xi \equiv \langle L_1, L_2\rangle\xi \equiv L_1\left[L_2\xi\right] - L_2\left[L_1\xi\right].$$

В результате получаем:

$$L_3\xi = \frac{q-2y+2yp}{2y(q-2y)}\xi_u = 0, \Rightarrow \quad \xi_u = 0 \,,$$

с учетом последнего равенства система (1.9) перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} L_1\xi = \xi_x + \dfrac{1}{2y}\xi_y + \dfrac{p(p-1)}{y\,(q-2y)}\xi_{u_p} = 0, \\ L_2\xi = \dfrac{p}{q-2y}\xi_p + \xi_q = 0, \\ L_3\xi = \xi_u = 0\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Как легко видеть, операторы L_1, L_2, L_3 системы (1.10) линейно независимы.

Чтобы удостовериться, является ли полной, расширенная при помощи скобок Якоби – Пуассона, система (1.10), продолжим процесс ее расширения. Последующее применение скобок Якоби – Пуассона относительно дифференциальных операторов $\langle L_1, L_3\rangle$ и $\langle L_2, L_3\rangle$ попарно дает

$$L_4\xi \equiv \langle L_1, L_3\rangle\xi \equiv L_1[L_3\xi] - L_3[L_1\xi] \equiv 0,$$
$$L_5\xi \equiv \langle L_2, L_3\rangle\xi \equiv L_2[L_3\xi] - L_3[L_2\xi] \equiv 0.$$

Очевидно, что система (1.10) больше не расширяется и, следовательно, она является полной в смысле Якоби.

Согласно теореме Якоби, полная однородная система k дифференциальных уравнений допускает $n-k$ линейно независимых первых интеграла, где n - число независимых переменных [см. напр. [15], стр. 45]. Таким образом, система (1.10) допускает ровно два независимых решения. Следовательно, и система (1.6), (1.8) допускает ровно два первых интеграла.

Обозначим через η искомый первый интеграл системы (1.7), (1.8). Характеристические соотношения семейства корня λ_2 перепишем в виде

$$\begin{cases} L_1\eta = (q-2y)\eta_x - p\eta_y - 2yp\eta_u + \dfrac{p(p-1)}{y}\eta_p = 0, \\ L_2\eta = \eta_p - 2y\eta_q = 0\,. \end{cases} \tag{1.11}$$

Эти два уравнения линейно независимы. Как и в первом случае расширим систему (1.11) до полной.

Применение скобок Якоби - Пуассона относительно операторов L_1 и L_2

$$L_3\,\eta \equiv \langle L_1, L_2\rangle\eta \equiv L_1[L_2\,\eta] - L_2[L_1\,\eta]$$

дает уравнение

$$L_3\eta = 2y(\eta_x + \eta_u) + \eta_y - \frac{2p-1}{y}\eta_p + 2p\eta_q = 0\,,$$

а, принимая во внимание, оператор $L_2\,\eta$, получаем еще одно линейное уравнение

$$L_3\eta = 2y(\eta_x + \eta_u) + \eta_y - \frac{p-1}{y}\eta_p = 0\,, \tag{1.12}$$

которое не является линейной комбинацией двух уравнений системы (1.11). Поэтому, уравнения (1.11-1.12) также составляют независимую совместную систему. Продолжим процесс расширения системы (1.11-1.12).

Попарное применение скобок Якоби к дифференциальным операторам L_1, L_2, L_3

$$L_4\eta \equiv \langle L_1, L_3\rangle\eta \equiv 2y(\eta_x+\eta_u)+\eta_y-\frac{p-1}{y}\eta_p = L_3\eta\,,$$

$$L_5\eta \equiv \langle L_2, L_3\rangle\eta \equiv \frac{\eta_p}{2y}-\eta_q \equiv L_2\eta$$

не расширяет систему (1.11-1.12) и, следовательно, она является полной в смысле Якоби и, также как и система (1.7), имеет ровно два линейно независимых решения.

Следовательно, системы (1.9) и (1.11) допускают по два первых интеграла, которые более легким способом получаются непосредственным интегрированием дифференциальных многообразий.

Например, для системы (1.9) первое уравнение (1.6), вместе с условием совместимости (1.8), дает

$$\xi = x - y^2\,,$$

а, умножая второе уравнение на величину $\dfrac{q-2y}{p^2}$, получаем выражение

$$\frac{q-2y}{p^2}dp - \frac{dq}{p} - \frac{2(p-1)}{p}dy = 0\,.$$

Последний член этого равенства перепишем в $\left(2dy - \dfrac{2}{p}dy\right)$ виде, в результате чего имеем

$$d\left(\frac{q-2y}{p}\right) = 2dy\,,$$

откуда

$$\xi_1 = \frac{q-2y}{p} + 2y\,.$$

Для системы (1.11) первое из уравнений характеристических соотношений (1.7) вместе с условием совместимости (1.8), дает

$$\eta = u - y^2\,,$$

второй характеристический инвариант рассматриваемого семейства, определяется уравнением

$$dp + \frac{dq}{2y} = -\frac{p-1}{y}dy\,,$$

для которого существует интегрирующий множитель y, при помощи которого получаем

$$d\left(y(p-1)+\frac{q}{2}\right) = 0\,.$$

Откуда следует, что

$$\eta_1 = y(p-1)+\frac{q}{2}\,.$$

Окончательно заключаем, что вдоль семейства характеристик, соответствующего корню λ_1 мы имеем два первых интеграла

$$\begin{cases} \xi = x - y^2 \ , \\ \xi_1 = 2y + \dfrac{q - 2y}{p}, \end{cases} \tag{1.13}$$

первые интегралы другого семейства характеристик, соответствующего корню λ_2, имеют вид:

$$\begin{cases} \eta = u - y^2 \ , \\ \eta_1 = 2y\left(p - 1\right) + q \, . \end{cases} \tag{1.14}$$

Первые интегралы (1.13) и (1.14) в литературе известны как характеристические или Римановы инварианты. Других характеристических инвариантов уравнение (1.5) как доказано выше не имеет и они в совокупности равносильны данному уравнению [см. напр., [15], стр. 26 или [17], стр. 60].

Таким образом, мы установили , что имеют место следующее утверждение:

Т е о р е м а. *Каждая из характеристических систем (1.6), (1.8) и (1.7), (1.8) уравнения (1.5) допускает по два первых интеграла.*

Первые интегралы ξ и ξ_1 системы (1.9) постоянны вдоль каждой характеристики семейства, соответствующего корню λ_1 и полностью определяют это семейство. Множество этих характеристик в дальнейшем будем называть ξ-семейством. Первым интегралом системы (1.9) будет любая функция двух аргументов ξ, ξ_1 - $K(\xi, \xi_1)$, которая также будет постоянна вдоль этих характеристик. Если подставить значения инвариантов ξ и ξ_1, определенные формулами (1.13), в произвольную функцию K и приравнять её к какому-либо постоянному, получим промежуточный интеграл уравнения (1.5). Функцию K рассмотрим в виде разности $\xi_1 - G(\xi)$, тогда промежуточный интеграл будет

$$\frac{q - 2y}{p} + 2y = G\left(x - y^2\right), \tag{1.15}$$

где G - произвольная достаточна гладкая функция.

Другая пара инвариантов η и η_1 определяется вторым из соотношений (1.3) и соответствующее ей множество характеристик назовем η-семейством.

Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что уравнение (1.5) имеет еще один промежуточный интеграл

$$2y(p - 1) + q = H\left(u - y^2\right) \tag{1.16}$$

с произвольной функцией $H \in R^1$.

§2. Построение общего интеграла

Как было установлено в предыдущем параграфе, уравнение (1.5) допускает два промежуточных интеграла (1.15) и (1.16).

Для построения общего интеграла понадобиться определить производные первого порядка искомого решения u_x, u_y с помощью этих двух промежуточных интегралов (см., напр., [15], стр. 29 или [17], стр. 62). Для удобства этого процесса мы воспользуемся характеристическими инвариантами (1.13) и (1.14) и выберем

$$\xi = x - y^2, \ \ \eta = u - y^2$$

в качестве характеристических переменных. Из промежуточных интегралов, переписанных в терминах характеристических инвариантов

$$\xi_1 = G(\xi),\ \eta_1 = H(\eta)$$

определим величины p и q:

$$p = \frac{H(\eta)}{G(\xi)} \qquad \text{и} \qquad q = H(\eta) - 2y\left(\frac{H(\eta)}{G(\xi)} - 1\right)$$

и подставим их в условие согласованности

$$du = pdx + qdy = \frac{H(\eta)}{G(\xi)}(dx - 2ydy) + 2ydy + H(\eta)dy.$$

Переписывая последнее равенство в виде

$$d\left(u - y^2\right) = \frac{H(\eta)}{G(\xi)} d\left(x - y^2\right) + H(\eta)dy$$

и, принимая во внимание вид характеристических переменных, получаем

$$dy = \frac{d\eta}{H(\eta)} - \frac{d\xi}{G(\xi)}.$$

Обозначая заново производные $1/G(\xi)$ и $1/H(\eta)$ соответственно через $g'(\xi)$ и $h'(\eta)$, последнее равенство перепишем в виде:

$$dy = h'(\eta)d\eta - g'(\xi)d\xi.$$

Левая часть этого равенства действительно является полным интегралом. Его непосредственным интегрированием получается общий интеграл уравнения (1.5):

$$y = h(\eta) - g(\xi)$$

или, учитывая значения ξ и η,

$$y = h\left(u - y^2\right) - g\left(x - y^2\right), \tag{1.17}$$

где g и h - произвольные функции. Так как функция h произвольна, мы из общего интеграла (1.17) получим представление общего решения:

$$u = y^2 + f\left[\, y + g\left(x - y^2\right)\right]. \tag{1.18}$$

Оно задано суперпозицией двух произвольных гладких функций f и g.

Такой класс квазилинейных уравнений с общими решениями, представимыми суперпозицией произвольных функций, одна из которых входит в состав аргумента другой, был рассмотрен в ([12-15]). В данном случае структура характеристических инвариантов в некоторой степени отличается от указанных выше общих решений.

Следует удостовериться, действительно ли соотношение (1.18) является решением уравнения (1.5). Для этого продифференцируем равенство (1.18) по x и y до второго порядка включительно, а затем из полученных выражений исключим функции f и g вместе с их производными:

$$u_x = f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)g'\left(x - y^2\right),$$
$$u_y = 2y + f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[1 - 2yg'\left(x - y^2\right)\right],$$
$$u_{xx} = f''\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[g'\left(x - y^2\right)\right]^2 + f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[g''\left(x - y^2\right)\right],$$
$$u_{xy} = f''\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[1 - 2yg'\left(x - y^2\right)\right]g'\left(x - y^2\right) - 2yf'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[g''\left(x - y^2\right)\right],$$
$$\begin{aligned} u_{yy} &= 2 + f''\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[1 - 2yg'\left(x - y^2\right)\right]^2 + \\ &\quad + f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[-2g'\left(x - y^2\right) + 4y^2 g''\left(x - y^2\right)\right] = \\ &= 2 + f''\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[1 - 2yg'\left(x - y^2\right)\right]^2 + \\ &\quad + 4y^2 f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)\left[g''\left(x - y^2\right)\right] - 2f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right)g'\left(x - y^2\right). \end{aligned}$$

Из третьего и четвертого равенств определяем производные второго порядка f'' и g'' произвольных функций f и g

$$f'' = \frac{4y^2 u_{xx} - u_{yy} - 2f' \cdot g' + 2}{4yg' - 1},$$
$$g'' = \frac{(g')^2 u_{yy} + 2(f' \cdot g' - 1)(g')^2 - u_{xx}(1 - 2yg')^2}{f'(4yg' - 1)}$$

и подставляем их в последнее соотношение. Этим вторые производные произвольных функций будут исключены и мы получим связь между производными второго порядка решения $u(x, y)$ при наличии производных первого порядка произвольных функций

$$\begin{aligned} u_{xy}(4yf' \cdot g' - f') &= \left(4y^2 u_{xx} - u_{yy} - 2f' \cdot g' + 2\right)(1 - 2yg')f' \cdot g' + \\ &\quad + 2yf'\left[u_{xx}(1 - 2yg')^2 - g'^2 u_{yy} + 2g'^2(1 - f' \cdot g')\right]. \end{aligned}$$

Остается исключить эти производные из трех соотношений – последнего равенства и выражений первых производных u_x, u_y. Но сначала расположим вместе все коэффициенты при одинаковых производных второго порядка искомого решения, т.е.

$$\begin{aligned} &\left[4y^2(1 - 2yg')f' \cdot g' + 2yf'(1 - 2yg')^2\right]u_{xx} + (1 - 4yg')f' u_{xy} - \\ &- \left[(1 - 2yg')f' \cdot g' + 2yf' g'^2\right]u_{yy} + 2(1 - f' g')(1 - 2yg')f' \cdot g' = 4y^2 g'^2 f'(f' \cdot g' - 1). \end{aligned}$$

Дальнейшее упрощение дает

$$2y(1 - 2yg')\, u_{xx} + (1 - 4yg')\, u_{xy} - g'\, u_{yy} + 2(1 - 2f' \cdot g')g' = 0.$$

Вычисляя значения первой производной произвольной функции g' и произведения производных двух произвольных функций $f' \cdot g'$ при помощи производных u_x и u_y искомого решения

$$g' = \frac{u_x}{u_y - 2y + 2yu_x}, \qquad f' \cdot g' = u_x$$

получаем выражение:

$$2y\left(1 - 2y\,\frac{u_x}{u_y - 2y + 2yu_x}\right)u_{xx} + \left(4y\,\frac{u_x}{u_y - 2y + 2yu_x} - 1\right)u_{xy} -$$

$$-\frac{u_x}{u_y - 2y + 2yu_x}u_{yy} + 2(1 - u_x)\frac{u_x}{u_y - 2y + 2yu_x} = 0,$$

которое эквивалентно уравнению (1.5).

Таким образом, справедлива следующая

<u>Теорема</u>. *Уравнение (1.5) интегрируемо и его общее решение выражается при помощи двух произвольных функций в виде (1.18), где одна произвольная функция входит в состав аргумента другой произвольной функции.*

Как отмечалось выше, при совпадении характеристических корней λ_1, λ_2, уравнение (1.5) параболически вырождается, и все его параболические решения определяются условием (1.4). Условие (1.4) в уравнении (1.5) можно учитывать двояко. Если в уравнении (1.5) выражение $(2y - u_y)/u_x$ заменить на $2y$, приходим к линейному параболическому уравнению

$$4y^2u_{xx} + 4yu_{xy} + u_{yy} = -2(u_x - 1). \tag{1.19}$$

Если же выражение $2y$ будет заменено на $u_y/(1 - u_x)$, получим квазилинейное уравнение параболического типа:

$$u_y{}^2u_{xx} - 2u_y(u_x - 1)\,u_{xy} + (u_x - 1)^2u_{yy} = -2(u_x - 1)^3. \tag{1.20}$$

Естественно выяснить в каком соотношении находятся общие решения уравнений (1.19) и (1.20) с общим решением (1.18) уравнения (1.5). Для этого построим эти общие решения. Рассмотрим сначала уравнение (1.19). Его характеристическое уравнение имеет кратный корень

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2y}.$$

Заменой переменных $\xi = x,\ \eta = x - y^2$ уравнение (1.19) преобразуется в параболическое уравнение:

$$2(\xi - \eta)u_{\xi\xi} + u_\xi = 2$$

с вырождением порядка на прямой $\xi = \eta$, которой в первоначальных переменных соответствует прямая $y = 0$. Это уравнение относится к классу уравнений Эйлера-Дарбу, интегрируется непосредственно и его общее решение имеет вид

$$u = x + y\,f_1\left(x - y^2\right) + g_1\left(x - y^2\right), \tag{1.21}$$

где f_1, g_1 - произвольные функции.

Теперь перейдем к нахождению общего решения уравнения (1.20). Его характеристическому уравнению соответствует кратный характеристический корень

$$\mu_1 = \mu_2 = -\frac{u_x - 1}{u_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения строится с помощью системы характеристических дифференциальных соотношений:

$$\begin{cases} 2y = -\dfrac{p-1}{q}dx\,, \\ dp - \dfrac{p-1}{q}dq + 2\dfrac{(p-1)^3}{q^2}dx = 0\,, \\ du = pdx + qdy\ . \end{cases}$$

Два первых интеграла этой системы представлены формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p-1} + 2y = \varphi(u-x) \\ x + y^2 + \dfrac{yq}{p-1} = \psi(u-x), \end{cases}$$

а общий интеграл имеет вид:

$$x = y^2 - y\varphi(u-x) + \psi(u-x), \tag{1.22}$$

где φ и ψ - также произвольные функции.

Отсюда можно сделать вывод, что из уравнения (1.5) с учетом условия (1.4) получаются линейное уравнение (1.19) и нелинейное уравнение (1.20). Все эти три уравнения взаимно родственны. Существуют их общие решения (1.18), (1.21), (1.22), но, в отличии от уравнений, они не связаны между собой, так как в условии (1.4) присутствуют производные первого порядка этих решений, а не сами решения. Из общего решения (1.18) не возможно получить общее решения (1.21) и общий интеграл (1.22) и наоборот. Тогда как, дифференцируя выражения (1.18), (1.21) и (1.22) по независимым переменным, последующим исключением производных от произвольных функций из полученных соотношений, во всех трех случаях получаем один и тот же результат – выражение (1.4), определяющее класс параболических решений уравнения (1.5).

В частности, для уравнения (1.15) имеем

$$f'\left(y + g\left(x - y^2\right)\right) = u_y + 2y(u_x - 1),$$

а для уравнений (1.19) и (1.20)

$$f_1\left(x - y^2\right) = u_y + 2y(u_x - 1)\ ,$$

$$\varphi(u-x)(u_x - 1) = u_y + 2y(u_x - 1)$$

соответственно.

Следует также отметить, что при введении контактного преобразования, в котором величины x и $u(x,y)$ меняются местами, уравнение (1.5) сохраняет свою форму, т.е. инвариантно относительно преобразования

$$\xi = x - y^2\,,\ \ \eta = u - y^2\,.$$

Это также видно из формы общего интеграла (1.17).

Действительно, исходя из произвольности выбора функций g и h, общий интеграл (1.17) можно переписать следующим образом:

$$x = y^2 + G\left[y - h\left(u - y^2\right)\right],$$

а если заменить функции G и h другими произвольными функциями f и $-g$, то мы получим выражение, которое имеет структуру аналогичную общему решению (1.18), т.е.

$$x = y^2 + f\left[y + g\left(u - y^2\right)\right].$$

Уравнение (1.5), в определенном смысле, родственно уравнениям Борна и Инфельда ([10], [46]) и Дюбрей-Жакотэн ([19], [43]). В этом легко убедится, применяя к уравнению (1.5) видоизмененное преобразование годографа (см., напр., [15], стр. 55]).

ГЛАВА II
НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА КОШИ. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДАРБУ

Общее решение (1.18) дает возможность применить метод Даламбера (см., напр. [7], стр. 52-54, [10], стр. 12-14) в решении начальных и краевых задач. При постановке задачи Коши начальные данные должны быть подобраны таким образом, чтобы их носитель был свободен от параболического вырождения, тогда задача Коши исследуется до конца. Что же касается характеристических или частично характеристических задач, то на них линейные постановки автоматически не переносятся и существуют их различные варианты ([37 – 40]).

§ 1. Начальная задача Коши

Пусть $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные на замкнутом интервале [-1,1] соответственно дважды и один раз дифференцируемые функции, причем функция $\nu(x)$ всюду на данном интервале отлична от нуля. Отрезок прямой $y = 0: [-1, 1]$ выбран без ограничения общности.

Задача Коши. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (1.5), удовлетворяющее начальным условиям:*

$$u\big|_{y=0} = \tau(x), \quad x \in [-1,1], \tag{2.1}$$

$$u_y\big|_{y=0} = \nu(x), \quad x \in [-1,1], \tag{2.2}$$

где $\tau \in C^2[-1,1]$ *,* $\nu \in C^1[-1,1]$ *- заданные функции.*

Согласно предположению (1.4), условие $\nu(x) \neq 0, \ x \in J$ исключает параболическое вырождение уравнения (1.5) на носителе начальных данных, где

$$J = \{(x, y): -1 \le x \le 1, \ y = 0\}. \tag{2.3}$$

Как отмечалось неоднократно, в нелинейном случае характеристические направления в каждой точке области задания уравнения зависят от значений решения и его младших производных. Эта зависимость сохраняется во всех точках уравнения, в том числе и в точках носителей начальных данных. Поэтому, начальные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ и производная $\tau'(x)$ определяют характеристические направления в каждой точке носителя. От их значений зависит также поведение самого уравнения, его параболическое вырождение. В частности,

1) если функция ν отлична от нуля во всех точках, то характеристические направления в точках носителя различны и уравнение остается гиперболическим всюду на носителе.
2) когда в некоторой точке x_0 носителя J функция ν обращается в нуль, какого угодно порядка, а $\tau'(x_0)$ отлична от нуля, то уравнение (1.5) в этой точке параболично из-за совпадения двух характеристических направлений в этой точке.

Т е о р е м а. *Если начальные функции на всем интервале J удовлетворяют неравенствам*

$$\tau'(x) \neq 0, \quad \nu(x) \neq 0,$$

а интегральное соотношение

$$\zeta = \int_a^x \frac{\tau'(t)}{\nu(t)} dt + g(a),$$

где $a \in J$ - произвольная постоянная, однозначно разрешимо как функциональное уравнение относительно величины x, $x \equiv G[\zeta,\, a]$, то задача (1.5), (2.1), (2.2) имеет единственное регулярное решение, представленное формулой

$$u = y^2 + \tau\left\{ G\left[y + \int_a^{x-y^2} \frac{\tau'(t)}{\nu(t)} dt\,,\, a \right]\right\}$$

и область его определения однозначна.

Доказательство.

Построим решение поставленной задачи. С этой целью, подчиним общее решение (1.18) уравнения (1.5) начальным условиям (2.1), (2.2). Но сначала вычислим производную u_y искомого решения

$$u_y = 2y + \left[1 - 2yg'\left(x - y^2\right)\right] f'\left[y + g\left(x - y^2\right)\right], \tag{2.4}$$

а затем рассмотрим значения u и u_x при $y = 0$.

Получаем следующую систему

$$\begin{cases} f[g(x)] = \tau(x), \\ f'[g(x)] = \nu(x), \end{cases} \tag{2.5}$$

откуда постараемся определить значения произвольных функций f и g. Для этого продифференцируем первое уравнение системы (2.5) по x, тогда она примет вид

$$\begin{cases} f'[g(x)] \cdot g'(x) = \tau'(x), \\ f'[g(x)] = \nu(x) \end{cases}.$$

Из этих соотношений определяем производную произвольной функции g:

$$g'(x) = \frac{\tau'(x)}{\nu(x)}.$$

Чтобы определить саму функцию g, выражение ее производной проинтегрируем в интервале $[a,\, x]$,

$$g(x)=\int_a^x \frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt+g(a),$$

Подставляя полученное выражение произвольной функции g в первое уравнение системы (2.5), для произвольной функции f имеем

$$f\left[\int_a^x \frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt+g(a)\right]=\tau(x).$$

Аргумент функции f является монотонной функцией относительно величины x, так как его производная, согласно условиям ***задачи,*** знакоопределена на всем интервале J и однозначно отображает замкнутый отрезок $[-1,1]$ на интервал

$$\left[\int_a^{-1} \frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt+g(a),\ \int_a^{1} \frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt+g(a)\right]. \qquad (2.6)$$

Если теперь ввести обозначение

$$\zeta\equiv\int_a^x \frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt+g(a) \qquad (2.7)$$

и рассмотреть полученное соотношение как функциональное уравнение относительно величины x, тогда у нас появиться возможность определить функцию f на интервале (2.6) при произвольном значении $a\in J$. Уравнение (2.7) на основании наших предположений относительно функций $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ должно быть однозначно разрешимым какого бы ни было $a\in J$. Следовательно, соблюдены достаточные условия разрешимости функционального уравнения (2.7) и обозначим его решение через

$$x\equiv G[\zeta,\,a],$$

тогда функция $f(\zeta)$ должна быть

$$f(\zeta)=\tau\,\{G[\zeta,\,a]\}.$$

Таким образом решение задачи (1.5), (2.1), (2.2) окончательно будет представлено формулой

$$u=y^2+\tau\left\{G\left[y+\int_a^{x-y^2}\frac{\tau'(t)}{\nu(t)}dt\,,\,a\right]\right\}. \qquad (2.8)$$

Согласно этой формуле создается впечатление, что рассматриваемая задача имеет бесконечное множество решений – целое однопараметрическое семейство с параметром a. Однако, дальнейшее упрощение представления (2.8) убеждает нас в обратном.

Действительно, введем обозначения $\vartheta'(x) \equiv \dfrac{\tau'(x)}{\nu(x)}$, тогда условие (2.2) перепишется в следующем виде:

$$u_y\Big|_{y=0} = \frac{\tau'(x)}{\vartheta'(x)}, \quad \vartheta'(x) \neq 0, \; x \in [-1,1], \quad \vartheta \in C^2[-1,\,1].$$

Следует отметить, что уравнение $\zeta = \vartheta(x)$ при любом $\zeta \in [\vartheta(-1),\, \vartheta(1)]$ должно иметь единственное решение:

$$x = G(\zeta),\; G(0) = 0,$$

непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале (см., напр., [45], [46]).

В таком случае произвольная функции g принимает вид:

$$g(x) = \int_a^x \vartheta'(t)\,dt + g(a) = \vartheta(x) - \vartheta(a) + g(a),$$

а первое уравнение системы (2.5) для произвольной функции f дает

$$f\,[\vartheta(x) - \vartheta(a) + g(a)] = \tau(x).$$

Обозначая аргумент функции f через ζ

$$\zeta \equiv \vartheta(x) - \vartheta(a) + g(a),$$

определим, если это возможно, величину x:

$$x = G[\zeta + \vartheta(a) - g(a)],$$

где G является обратной к функции $\vartheta(x)$. Если

$$f\,(\zeta) = \tau\{G\,[\zeta + \vartheta(a) - g(a)]\},$$

тогда решение будет представлено соотношением

$$u = y^2 + \tau\,\left\{G\,\left[y + \vartheta\left(x - y^2\right)\right]\right\}. \tag{2.9}$$

Необходимо удостовериться, действительно ли полученная формула является решением задачи Коши. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что

$$u\Big|_{y=0} = \tau\,\{G\,[\vartheta(\,x)\,]\,\} = \tau\,(x).$$

Производная u_y решения $u(x, y)$ согласно формуле (2.9)

$$u_y = 2y + \tau'\,\left\{G\left[y + \vartheta\left(\,x - y^2\,\right)\right]\right\} G'\,\left[y + \vartheta\left(x - y^2\right)\right]\left(1 - 2y\vartheta'\left(x - y^2\right)\right)$$

вычисляется на носителе начальных данных

$$u_y\Big|_{y=0} = \tau'(x)\,G'[\vartheta(x)]\ ,$$

что, с учетом, соотношений

$$G[\vartheta(x)] \equiv x \quad \text{и} \quad G'[\vartheta(x)]\ \vartheta'(x) = 1$$

приводит нас к равенству

$$G'[\vartheta(x)] = \frac{1}{\vartheta'(x)}\ .$$

Отсюда непосредственно получаем

$$u_y\Big|_{y=0} = \frac{\tau'(x)}{\dfrac{\tau'(x)}{\nu(x)}} = \nu\ (x).$$

Следовательно, полученное нами решение (2.9) удовлетворяет условиям задачи Коши и не зависит от постоянного интегрирования a.

Необходимо выявить структуру области определения решения (2.9). Оно определено, когда

$$\tau(-1) \le\ u - y^2 = \tau\left\{ G\left[y + \vartheta\left(\ x - y^2\right)\right]\right\} \le\ \tau(1),$$
$$-1 \le\ x - y^2\ \le 1,\ -1 \le x \le 1.$$

Это криволинейный характеристический четырехугольник, который ограничен характеристиками, выходящими из конечных точек отрезка $-1 \le x \le 1$ оси $y = 0$. Уравнения семейств этих характеристик можно записать в явной форме при помощи решения (2.9).

Через точку с координатами (-1,0) пройдут две характеристические кривые, заданные равенствами

$$x - y^2\ = -1, \qquad y + \vartheta\left(x - y^2\right) = \vartheta(-1).$$

С другой стороны область определения решения ограничивают характеристические кривые, проходящие через точку с координатами (1,0):

$$x - y^2\ = 1, \qquad y + \vartheta\left(x - y^2\right) = \vartheta(1).$$

Следует отметить, что каждая характеристика одного семейства пересекает любую характеристику другого семейства в единственной точке, так как система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2\ = b \\ y + \vartheta\left(x - y^2\right) = \vartheta(c) \end{cases}$$

имеет единственное решение $\left((\vartheta(c)-\vartheta(b))^2+b,\ \vartheta(c)-\vartheta(b)\right)$, где b и c – взяты произвольно.

Вывод: *Если функция ϑ на всем интервале $[-1,1]$ удовлетворяет неравенству*

$$\vartheta'(x)\neq 0,$$

а уравнение $\zeta=\vartheta(x)$ однозначно разрешимо относительно величины x: $x=G(\zeta), G(0)=0$, то задача Коши имеет единственное регулярное решение представленное формулой (2.9), область определения которого ограничена характеристиками обоих семейств: $x-y^2=-1$, $x-y^2=1$ и $y+\vartheta\left(x-y^2\right)=\vartheta(-1)$, $y+\vartheta\left(x-y^2\right)=\vartheta(1)$.

Следствие. Если уравнение $\zeta=\vartheta(x)$ имеет $i=1,\dots,k$ решений, тогда задача Коши разрешима в классе регулярных решений, число ее решений не превышает количества обратных относительно x и каждое решение определяется в характеристическом четырехугольнике. Носитель начальных данных безусловно попадает в область определения.

Рассмотрим несколько частных случаев:

1) пусть

$$\tau'(x)=\nu(x),$$

тогда

$$z=g(x)=\int_a^x dt+g(a)=x+g(a)-a,$$

что касается функции f, то она, в этом случае, будет иметь вид:

$$\tau(z-g(a)+a)=\tau\left[\int_a^x dt+g(a)-g(a)+a\right]=\tau(x),$$

а само решение будет представлено формулой:

$$u=y^2+\tau\left(x+y-y^2\right).$$

Область определения данного решения - характеристический четырехугольник, который с одной стороны ограничен параболами $x-y^2=-1$ и $x+y-y^2=-1$, проходящими через точку с координатами $(-1;0)$, с другой – параболами $x - y^2 = 1$, $x + y - y^2 = 1$, проходящими через точку с координатами $(1;0)$. Характеристические кривые пересекаются в точках с координатами $(3\,;2)$ и $(5;\,-2)$.

2) Рассмотрим также другой частный случай, когда начальные функции представлены формулами

$$\tau(x) = h(x), \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$\nu(x) = h'(x)\sqrt{1-x}, \quad -1 \le x \le 1.$$

В этом случае

$$z = g(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-x}} + g(-1) = arcsin\, x + \frac{\pi}{2} + g(-1),$$

а функция f примет вид:

$$f(z) = h\left\{ sin\left(z - \frac{\pi}{2} - g(-1) \right) \right\} = h(x),$$

решение задачи Коши вычисляется следующим образом

$$u = y^2 + h\left\{ sin\left[y + arcsin\left(x - y^2\right) + \frac{\pi}{2} + g(-1) - \frac{\pi}{2} - g(-1) \right] \right\} =$$

$$= y^2 + h\,\left\{ sin\left[y + arcsin\left(x - y^2\right)\right]\right\}.$$

В данном случае решение определено, когда

$$h(-1) \le u - y^2 = h\left\{ sin\left[y + arcsin\left(x - y^2\right)\right]\right\} \le h(1),\ -1 \le x - y^2 \le 1, -1 \le x \le 1,$$

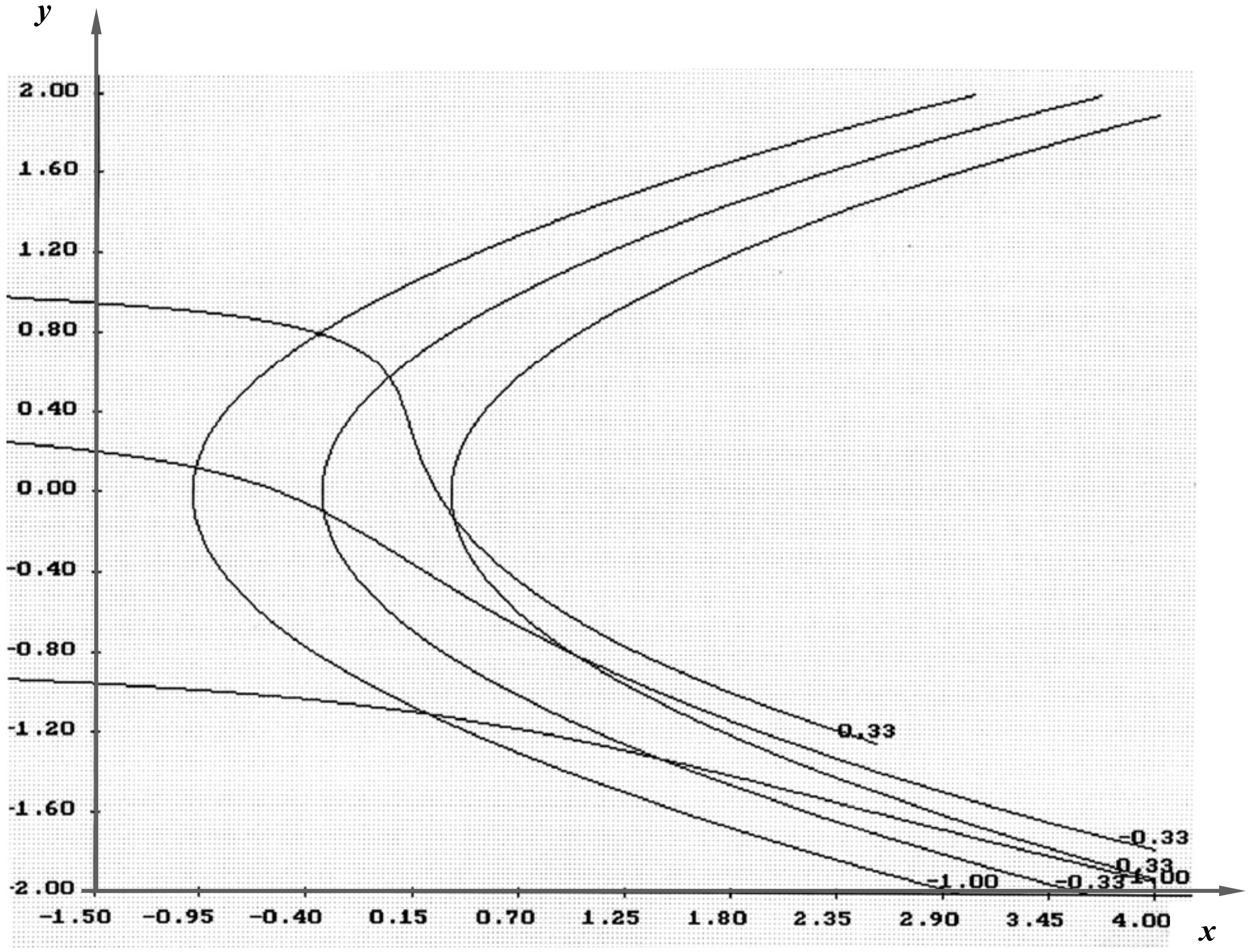

рис. 1

т.е. в характеристическом четырехугольнике, который с одной стороны ограничен кривой $y + arcsin\left(x - y^2\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ и параболой $x - y^2 = -1$, проходящими через точку с координатами $(-1;0)$, с другой – кривой $y + arcsin\left(x - y^2\right) = \dfrac{\pi}{2}$ и параболой $x - y^2 = 1$, проходящими через точку с координатами $(1,\ 0)$ (см. рис.1). Характеристические кривые пересекаются в точках с координатами $\left(\ \pi^2 - 1,\ \pi\right)$ и $\left(\pi^2 + 1, -\pi\right)$ соответственно.

3) **Приведем еще один частный случай, когда**

$$\tau(x) = h(x), \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$\nu(x) = h'(x)\left(1 + e^x\right), \quad -1 \le x \le 1.$$

Тогда

$$z = g(x) = \int_{-1}^{x} \frac{dt}{1+e^t} + g(-1) = ln\frac{e^x}{1+e^x} + ln(1+e) + g(-1).$$

Что касается функции f, то она примет вид:

$$f(z) = h\left\{z - g(-1) - ln\left(1 + e - e^{\,z-g(-1)}\right)\right\},$$

а решение задачи Коши вычисляется следующим образом

$$u = y^2 + h\left\{y + x - y^2 - ln\left(1 + e^{\,x-y^2}\left(1-e^y\right)\right)\right\}.$$

Данное решение определено, когда

$$h(-1) \le u - y^2 = h\left\{y + x - y^2 - ln\left(1 + e^{\,x-y^2}\left(1-e^y\right)\right)\right\} \le h(1),$$

$$-1 \le x - y^2 \le 1, -1 \le x \le 1,$$

т.е. в характеристическом четырехугольнике, который с одной стороны ограничен кривой $x = y^2 - ln\left(e^y(e+1)-1\right)$ и параболой $x - y^2 = -1$, проходящими через точку с координатами $(-1;0)$, с другой – кривой $x = y^2 - ln\left(e^y\left(e^{-1}+1\right)-1\right)$ и параболой $x - y^2 = 1$, проходящими через точку с координатами $(1,0)$ (см. рис.2). Характеристические кривые пересекаются в точках с координатами $(2;-1)$ и $(0;1)$ соответственно.

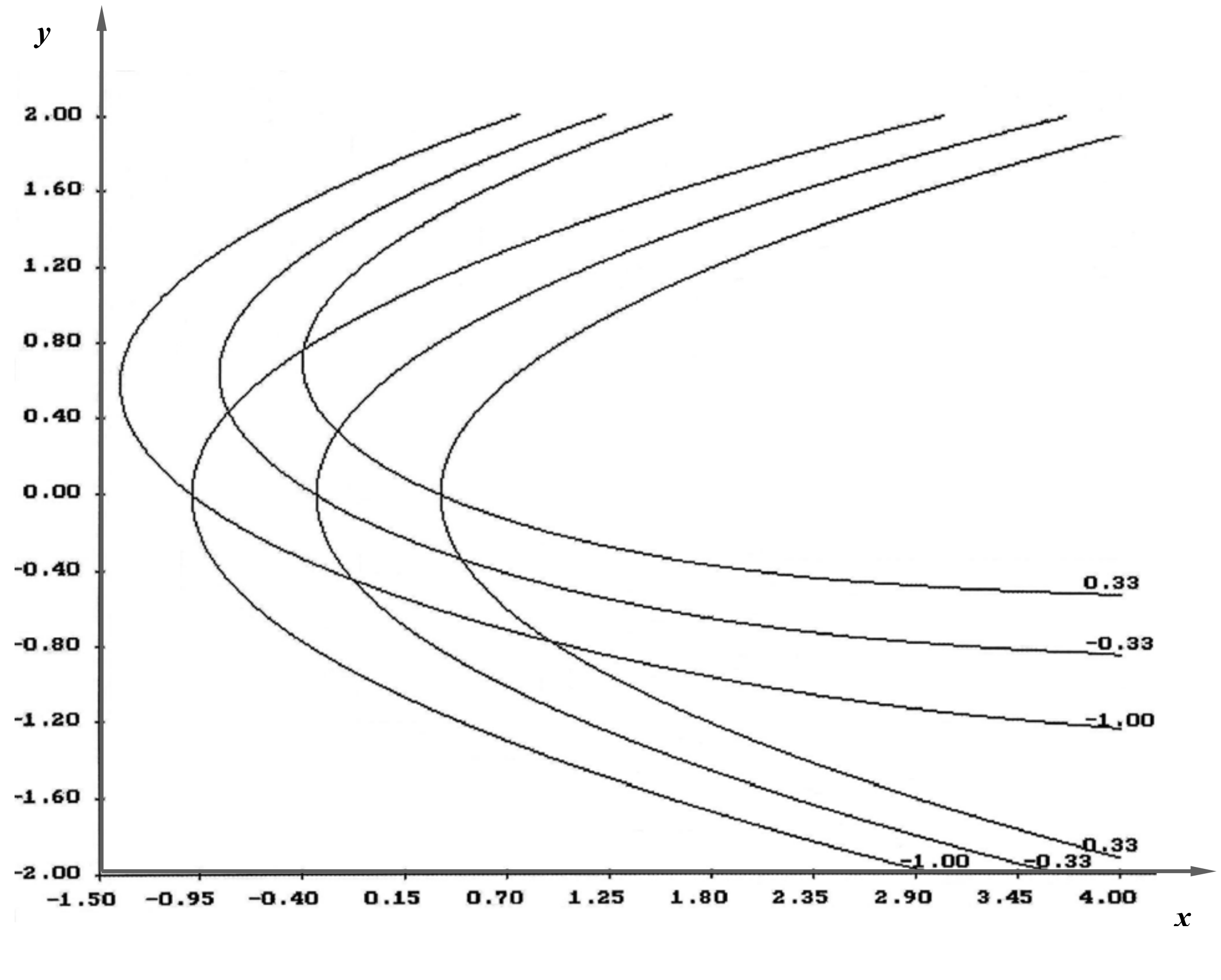

рис. 2

Задача Коши для гиперболических уравнений имеет свойство, которое распространяется и на задачу (1.5), (2.1), (2.2): если одно из начальных условий в какой-либо точке x_0 имеет разрыв, то этот разрыв распраниться вдоль всей характеристики, выходящей из этой точки.

Допустим, что

$$\nu(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \nu_1(x), \quad -1 \le x \le 1, \quad \alpha > 0,$$

или

$$\tau(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \tau_1(x), \quad -1 \le x \le 1, \quad \alpha > 0,$$

где $\nu_1(x)$ и $\tau_1(x)$- непрерывные функции. В таком случае в выражении решения (2.9) будет присутствовать слагаемое

$$\int_{-1}^{x-y^2} \frac{\tau'(t)}{(t-t_0)^{-\alpha}\nu_1(t)}dt = \int_{-1}^{x-y^2} (t-t_0)^{\alpha} \frac{\tau'(t)}{\nu_1(t)}dt$$

либо

$$\int_{-1}^{x-y^2} \frac{(t-t_0)^{-\alpha}\tau_1'(t) - \alpha(t-t_0)^{-(\alpha+1)}\tau_1'(t)}{\nu(t)}dt,$$

что доказывает вышесказанное.

Поэтому, если функция $\tau(x)$ или $\nu(x)$ имеет разрыв в какой-либо точке, этот разрыв, в известной степени, изменит поведение решения. Подразумевается, что степень этого разрыва не должна препятствовать существованию интегрального слагаемого.

§2. Первая задача Дарбу

Рассмотрим вариант аналогичный линейной постановке задачи Дарбу. Как известно, задача Дарбу предусматривает построение решения по заданным значениям на двух различных кривых, выходящих из одной точки. В первой задаче Дарбу одна из этих кривых характеристика, другая – свободная кривая. Мы рассматриваем случай, когда общей точкой является начало координат, одна кривая дуга характеристической параболы $x = y^2$,

$x \in [0,a]$, вторая же отрезок $x \in [0,b]$ оси $y = 0$. Из постановки задачи следует, что эта вторая кривая должна быть свободной. Для этого, исходя из структуры второго характеристического корня, характеристическое направление $\frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y - 2y}$ не должно совпадать с направлением, параллельным оси Ox. Поэтому мы требуем выполнения следующего условия:

$$u(x,0) \neq const. \tag{2.10}$$

З а д а ч а Д а р б у. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (1.5), если оно удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned} &u\big|_{y=\sqrt{x}} = \varphi(x),\ 0 \le x \le a; \\ &u\big|_{y=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le b,\ a \le b, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\varphi \in C^2[0,a]$, $\psi \in C^1[0,b]$ *- заданные функции и* $\varphi(0) = \psi(0)$ (см. рис.3).

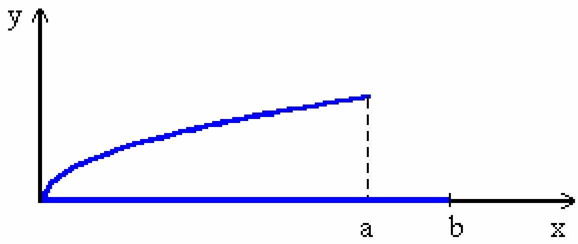

рис.3

Необходимо отметить, что в зависимости от поведения функций φ и ψ задача (1.5), (2.11) может оказаться как аналогом задачи Гурса, так и задачи Дарбу. Например, если $\psi = const$, задача (1.5), (2.11) представляет собой известную задачу Гурса и однозначно разрешима; если функция $\varphi(x) = x + c$, тогда парабола $x = y^2$ одновременно будет характеристикой и кривой вырождения уравнения (1.5).

Поэтому справедливы следующие утверждения:

Т е о р е м а. *Если выполнены неравенство (2.10) и следующие условия:*

4. *Функциональное уравнение* $\varphi(x) - x = z$ *разрешимо при любом* $z \in [\varphi(0),\ \varphi(a) - a]$ *и имеет единственное решение:* $x = \Phi(z)$, $\Phi(\varphi(0)) = 0$;

5. $\varphi'(x) > 1$;

6. $\psi(x) < \varphi(a) - a, \quad x \in [0,b]$,

тогда задача (1.5), (2.11) однозначно разрешима в классе регулярных решений; ее решение представлено формулой

$$u = y^2 + \varphi\left\{\left[\, y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]}\,\right]^2\right\} - \left\{ y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]}\,\right\}^2 \qquad (2.12)$$

и определяется в криволинейном четырехугольнике, ограниченном носителями данных, характеристикой $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$ *и дугой параболы* $x - y^2 = b$ *;*

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены неравенство (2.10), условия 1 и 2 предыдущей теоремы и* $\psi(x) \geq \varphi\ (a) - a$, $x \in [0,b]$, *тогда задача (1.5), (2.11) имеет единственное регулярное решение, представленное формулой (2.12), которое определяется в криволинейном треугольнике, ограниченном носителями данных и характеристикой* $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$.

<u>Доказательство.</u>

На основании метода Даламбера приведем в соответствие условия задачи Дарбу и общий интеграл (1.17). Для каждого x из замкнутого интервала $[0,\ a]$, имеем

$$h(\varphi(x) - x) - g(0) = \sqrt{x}\ .$$

Это соотношение дает возможность определить функцию h в том случае, если ее аргумент $\varphi(x) - x$ будет обратим. Так как это условие предусмотрено теоремой 2, можно говорить о разрешимости функционального уравнения $\varphi(x) - x = z$ относительно величины x, решение которого определяется функцией переменного $z : x = \Phi(z)$, $\Phi(\ \varphi(0)) = 0$ (см., напр., [45], [46]).

Исходя из того, что функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, аргумент z пробежит интервал $[\varphi(0),\ \varphi(a) - a]$.

Поэтому, произвольная функция

$$h(z) = g(0) + \sqrt{\Phi\,(z)}$$

вполне определяется с точностью до постоянного слагаемого $g(0)$. Для второй произвольной функции g имеем

$$g(x)=h[\psi(x)].$$

Следовательно, область определения функции g зависит от аргумента $\psi(x)$ функции h; она может быть определена либо в замкнутом интервале $[0,b]$, когда $\psi(x)$ не превышает значения $(\varphi(a)-a)$, либо в полуоткрытом интервале $[0,b)$, когда $\psi(x)$ больше $(\varphi(a)-a)$.

Подставим полученные значения функций g и h в представление общего интеграла (1.17). Тогда

$$\sqrt{\Phi\left(u-y^2\right)}-\left(y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}\right)=0.$$

Умножая это выражение на сопряженное и обращая функцию Φ, получим решение задачи (1.5), (2.11)

$$u=y^2+\varphi\left\{\left[\,y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}\,\right]^2\right\}-\left\{\,y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}\,\right\}^2.$$

Граница области определения этого решения представляется в явном виде в терминах функции Φ, т.е. характеристика $\eta-$семейства имеет $y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}=\sqrt{a}$ вид.

Что же касается области определения решения, здесь может быть несколько случаев, в зависимости от того, какие значения принимает функция $\psi(x)$:

1) если $\psi(x)<\varphi(a)-a$, тогда областью определения решения является характеристический четырехугольник. Две его стороны представлены носителями данных задачи, две другие – дугой семейства параболы $x-y^2=b$, выходящей из точки с координатами $(b,0)$ и характеристикой $\eta-$семейства $y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}=\sqrt{a}$, проходящей через точку с координатами $\left(a,\sqrt{a}\right)$. (см. рис. 4);

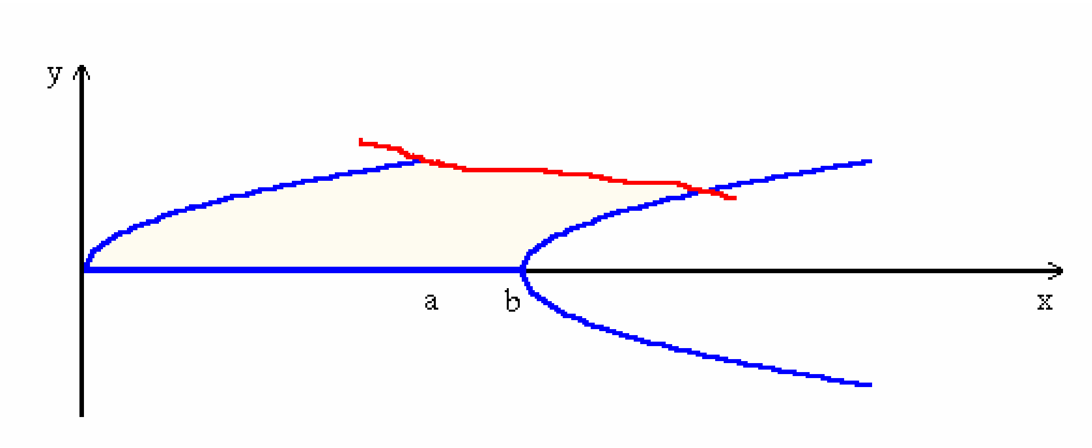

рис. 4

2) если $\psi(x) = \varphi(a) - a$, решение определяется в криволинейном треугольнике, две стороны которого также представляют собой носители данных задачи, с третьей стороны его ограничивает характеристика $\eta-$семейства $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$, выходящая из точки с координатами $\left(a, \sqrt{a}\right)$ и пересекающая прямую $y = 0$ в точке $(b, 0)$. (см. рис. 5);

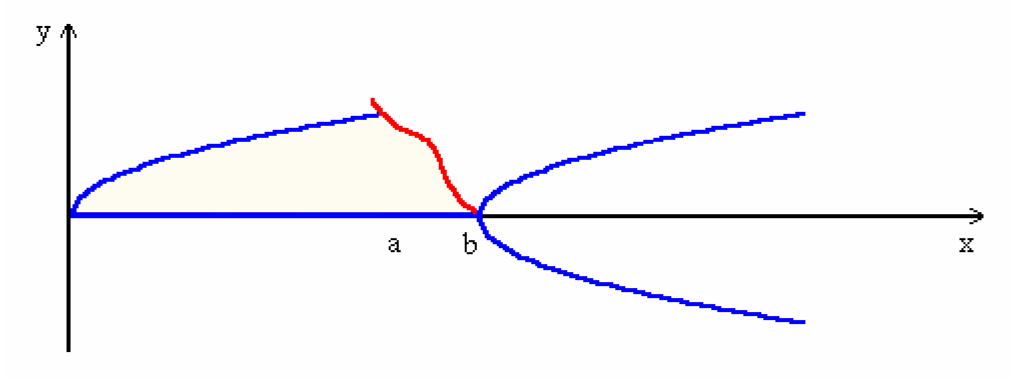

рис. 5

3) если $\psi\ (x) > \varphi(a) - a$, решение также определяется в криволинейном треугольнике, ограниченном носителями данных и характеристикой $y + \sqrt{\Phi\left[\psi\left(x - y^2\right)\right]} = \sqrt{a}$. Но в отличие от случая 2), точка пересечения $(c, 0)$ этой характеристики с прямой $y = 0$ попадает между точками $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Поэтому, отрезок носителя от точки пересечения $(c, 0)$ до точки $(b, 0)$ остается неосвоенным (см. рис. 6).

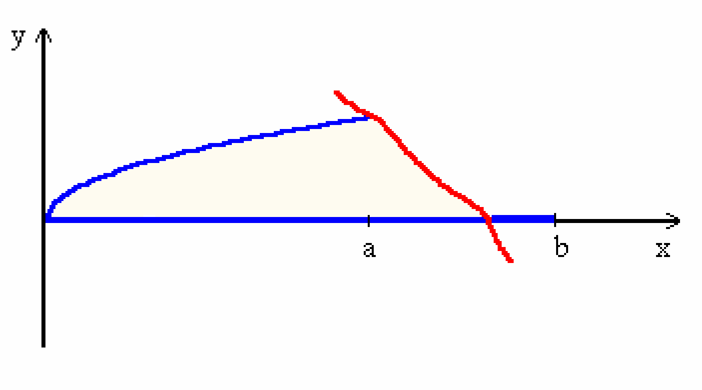

рис. 6

Область определения решения задачи Дарбу может быть и неограниченна; например, при бесконечно большом b ни одна кривая $\eta-$семейства не пересекает параболу $x-y^2=b$.

<u>Замечание</u>. Когда $a>b$, решение задачи Дарбу определяется в области, ограниченной носителями данных задачи и характеристическими кривыми $y+\sqrt{\Phi\left[\psi\left(x-y^2\right)\right]}=\sqrt{a}$ и $x-y^2=b$.

Рассмотрим случай, когда функция $\varphi(x)$ имеет конкретный линейный вид:

$$\varphi(x)=kx,\ k\neq 1,\ \varphi(0)=\psi(0)=0,\ (k-1)\psi(x)\geq 0.$$

Для произвольных функций h и g имеем

$$h(z)=g(0)+\sqrt{\frac{z}{k-1}},\quad 0\leq z\leq (k-1)a,$$

$$g(x)=h(\psi(x))=g(0)+\sqrt{\frac{\psi(x)}{k-1}},\ 0\leq x\leq b,\ 0\leq\psi(x)\leq(k-1)a.$$

Тогда общий интеграл запишется в форму:

$$\sqrt{\frac{u-y^2}{k-1}}-\sqrt{\frac{\psi\left(x-y^2\right)}{k-1}}=y.$$

Отсюда решение задачи Дарбу представлено формулой:

$$u=y^2+(k-1)\left(y+\sqrt{\frac{\psi\left(x-y^2\right)}{k-1}}\right)^2. \qquad (2.13)$$

Решение (2.13) определено, если выполнены следующие условия:

$$0 \le y + \sqrt{\frac{\psi\left(x - y^2\right)}{k-1}} \le \sqrt{a}, \quad 0 \le x - y^2 \le b.$$

Поэтому в данном случае имеем следующие области определения решения:

1) когда $\psi(b) < a(k-1)$, характеристическая кривая $\eta-$семейства, проходящая через точку с координатами $\left(a, \sqrt{a}\right)$ пересекает параболу $x - y^2 = b$ и решение определяется в криволинейном четырехугольнике, ограниченном кривыми $x - y^2 = 0$, $y = 0$, $\psi\left(x - y^2\right) = (k-1)\left(\sqrt{a} - y\right)^2$ и $x - y^2 = b$;
2) когда $\psi\ (b) = a(k-1)$, характеристика $\psi\left(x - y^2\right) = (k-1)\left(\sqrt{a} - y\right)^2$ проходит через точку с координатами $(b, 0)$ и решение определяется в криволинейном треугольнике;
3) когда $\psi\ (b) > a(k-1)$, характеристическая кривая семейства $u - y^2 = c$, выходящая из точки с координатами $\left(a, \sqrt{a}\right)$ пересекает ось абсцисс $y = 0$ в точке, лежащей между точками $(a, 0)$ и $(b, 0)$. Решение вновь определяется в криволинейном треугольнике, но отрезок оси Ox остается неосвоенным.

ГЛАВА III
ЗАДАЧА ГУРСА

§1. Нелинейный аналог характеристической задачи Гурса

1.1. Мы рассматриваем нелинейную модификацию задачи Гурса. Как известно, решение задачи Гурса определяется по его значениям на дугах двух различных характеристик, выходящих из общей точки. В данном случае одна характеристика уже определена и явно задана равенством $x = y^2 + \delta$. Поэтому, также как и в линейном случае, на ней можно задавать значения решения. Другая характеристика зависит от искомого решения, и мы выбираем ее произвольно. Допустим, что на плоскости переменных x, y дана гладкая кривая γ, которая может пересекаться с характеристикой ξ-семейства не более одного раза и ее направление нигде не совпадает с ξ-характеристическим направлением. Другими словами, если эта кривая представима в явном виде уравнением

$$x = \omega(y), \qquad a \le y \le c, \quad \omega(a) = \delta + a^2, \tag{3.1}$$

где $\omega \in C^2[a, c]$ - заданная функция, тогда уравнение

$$\omega(y) - y^2 = k \tag{3.2}$$

при произвольном значении $k > 0$ относительно величины y не может иметь более одного решения и, кроме того, всюду выполнено неравенство

$$\omega'(y) - 2y \ne 0. \tag{3.3}$$

Все эти предположения относительно функции ω не противоречат еще одному условию, что уравнение (3.2) при любой положительной правой части $k \in \left[\delta, \omega(c) - c^2\right]$ имеет единственное решение:

$$y = W(k),\ W(\delta) = a, \tag{3.4}$$

непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале. При этом, функции $\omega(y) - y^2$ и $W(k)$ должны быть взаимно обратными.

Рассмотрим другую функцию $\upsilon \in C^2[a, b]$ и потребуем от нее выполнение следующего условия:

$$\upsilon(y) - y^2 \ne const. \tag{3.5}$$

<u>Задача Гурса</u>. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (1.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\Big|_{x=y^2+\alpha} = \upsilon(y), \quad a \le y \le b, \tag{3.6}$$

а дуга кривой γ, заданная соотношением (3.1) является характеристикой η-семейства.

Заметим, что если условия (3.3) и (3.5) не выполняются, тогда нарушается условие единственности решения. Нарушение каждого из этих условий влечет за собой параболическое вырождение на характеристических дугах.

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены условия (3.2), (3.3),(3.4) и функции $\omega(y) - y^2$, $\upsilon(y) - y^2$ однозначно обратимы: $y = W(k),\ W(\delta) = a$ и $y = V(t),\ V\left[\upsilon(a) - a^2\right] = a$ соответственно, тогда задача (1.5), (3.1), (3.6) имеет единственное регулярное решение; это решение представлено формулой*

$$u = y^2 + \upsilon\left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right) + a\right\}^2$$

(3.7)

и определяется в замкнутом криволинейном четырехугольнике, ограниченном дугами характеристических кривых: $x = y^2 + \delta$, $x = \omega(y)$, $x = y^2 + \omega(c) - c^2$
$x = y^2 + \omega(y + a - b) + (y + a - b)^2$.

Действительно, решим задачу методом Даламбера: условия задачи и общее решение (1.18) вместе дают следующие равенства:

$$\begin{cases} f[y + g(\delta)] = \upsilon(y) - y^2, & a \le y \le b, \\ f\{y + g[\omega(y) - y^2]\} = \upsilon(a) - a^2, & a \le y \le c. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Для первого равенства этой системы введем обозначение: $y + g(\delta) \equiv z$, тогда функция

$$f(z) = \upsilon(z - g(\delta)) - (z - g(\delta))^2, \quad a + g(\delta) \le z \le b + g(\delta).$$

Соотнеся последнее выражение со вторым равенством системы (3.8), получаем

$$\upsilon\{y + g[\omega(y) - y^2] - g(\delta)\} - \{y + g[\omega(y) - y^2] - g(\delta)\}^2 = \upsilon(a) - a^2.$$

В силу условия Теоремы, функция $\upsilon(y) - y^2$ обратима, поэтому

$$y + g[\omega(y) - y^2] - g(\delta) = V(\upsilon(a) - a^2) = a,$$

где $y = V\ (t)$ является решением функционального уравнения $\upsilon(y) - y^2 = t$.

Введя еще одно обозначение: $\omega(y) - y^2 \equiv k$ **, в силу условия (3.5), получаем**

$$g(k) = -W(k) + g(\delta) + a, \quad \delta \le k \le \omega(c) - c^2,$$

Следовательно, решение задачи можно построить в явной форме

$$u = y^2 + \upsilon\{y - W(x - y^2) + a\} - \{y - W(x - y^2) + a\}^2.$$

Проверим корректность постановки задачи. Для этого найдем полный дифференциал первого

$$u(\delta + y^2, y) = \upsilon(y).$$

характеристического условия:

$$2y u_x(\delta + y^2, y) + u_y(\delta + y^2, y) = \upsilon'(y),$$

его значение в точке $(a^2,\ a)$ равно:

$$2a u_x(\delta + a^2, a) + u_y(\delta + a^2, a) = \upsilon'(a).$$

Используя условие совместимости $\omega(a) = \delta + a^2$, получаем следующее соотношение

$$2a u_x(\omega(a),\ a) + u_y(\omega(a),\ a) - 2a = \upsilon'(a) - 2a,$$

справедливое во всей области. Левая часть этого равенства $2y(u_x-1)+u_y$ представляет собой η_1 инвариант $\eta-$семейства характеристик, т.е.

$$\eta_1=\upsilon'(a)-2a=const .$$

Теперь продифференцируем второе характеристическое условие

$$u(\omega(y),y)-y^2=\upsilon(a)-a^2 .$$

Значение его полного дифференциала

$$\omega'(y)u_x(\omega\ (y),y)+u_y(\omega(y),y)-2y=0$$

в точке $(a^2,\ a)$ равно

$$\omega'(a)u_x(\omega\ (a),a)+u_y(\omega(a),a)=2a .$$

Производные u_x и u_y найдем из

$$\begin{cases}2a\,u_x(\omega(a),a)+u_y(\omega(a),a)=\upsilon'(a),\\ \omega'(a)u_x(\omega(a),a)+u_y(\omega(a),a)=2a.\end{cases}$$

системы:

$$u_x=\frac{\upsilon'(a)-2a}{2a-\omega'(a)},\qquad u_y=2a-\omega'(a)\,\frac{\upsilon'(a)-2a}{2a-\omega'(a)}.$$

Полученные значения подставим в выражение ξ_1 семейства характеристик (1.13):

$$\xi_1=2a-\omega'(a)\frac{(\upsilon'(a)-2a)\cdot(2a-\omega'(a))}{(2a-\omega'(a))\cdot(\upsilon'(a)-2a)}=2a-\omega'(a)=const .$$

Отсюда следует, что решение задачи Гурса вдоль характеристических дуг сохраняет постоянное значение, что доказывает корректность постановки задачи.

Опишем структуру области определения решение (3.7). Оно определено, когда

$$\delta\le x-y^2\le\omega(c)-c^2 ,$$

$$\upsilon(a)-a^2\le u-y^2=\upsilon\ \{y-W(x-y^2)+a\}-\{y-W(x-y^2)+a\}^2\le\upsilon(b)-b^2 ,$$

т. е. решение задачи Гурса ограничено носителями данных, выходящими из точки с координатами (a^2,a), параболой $x=y^2+\omega(c)-c^2$ и характеристической кривой $x=y^2+\omega(y+a-b)-(y+a-b)^2$. Последняя принадлежит $\eta-$семейству характеристик.

1.2. Рассмотрим следующий частный случай, когда характеристические функции представлены формулами:

$$\upsilon(y) = dy^2 + ny + l\ ,\quad y \neq \frac{n}{2(d-1)}\ ,\quad d \neq 1,$$

$$\omega(y) = my^2,\ m > 1\ ,\quad \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} = -\frac{n}{2(d-1)}.$$

Подчиним общее решение (1.18) сначала первому характеристическому условию:

$$f\left[y + g(\delta)\right] = (d-1)y^2 + ny + l, \qquad \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} \leq y \leq b\,.$$

После введения обозначения $y + g(\delta) \equiv z$, имеем

$$f(z) = (d-1)[z - g(\delta)]^2 + n\left[z - g(\delta)\right] + l\,, \qquad \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + g(\delta) \leq y \leq b + g(\delta).$$

Удовлетворяя второе характеристическое условие,

$$f\left\{y + g\left[(m-1)y^2\right]\right\} = (d-1)\frac{\delta}{m-1} + n\sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + l\,, \qquad \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} \leq y \leq c$$

и, соотнеся его с первым характеристическим условием, получаем

$$(d-1)\left\{y + g\left[(m-1)y^2\right] - g(\delta)\right\}^2 + n\left\{y + g\left[(m-1)y^2\right] - g(\delta)\right\} = (d-1)\frac{\delta}{m-1} + n\sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\,,$$

откуда в силу условия совместимости

$$y + g\left[(m-1)y^2\right] - g(\delta) = \frac{-n \pm \left(n + 2(d-1)\sqrt{\delta/(m-1)}\right)}{2(d-1)} = \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\,.$$

Если обозначить $(m-1)y^2 \equiv k$, тогда $y = \pm\sqrt{\dfrac{k}{m-1}}$ и

$$g(k) = g(\delta) \mp \sqrt{\frac{k}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\,, \qquad \delta \leq y \leq (m-1)c^2$$

Решение (3.7) в этом случае принимает следующий вид:

$$u = y^2 + \left\{(d-1)\left[y \mp \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2\right\} + n\left[y \mp \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\,. \qquad (3.9)$$

Мы получили два соотношения. Проверим действительно ли оба они являются решением рассматриваемой задачи. Для этого подчиним каждое из них характеристическим условиям, откуда можно сделать вывод, что

1) $$u = y^2 + \left\{(d-1)\left[y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2\right\} + n\left[y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l \qquad (3.10)$$

является решением, т.к.

$$u\Big|_{x=y^2+\delta} = y^2 + \left\{(d-1)\left[y - \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + \left[y - \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\right\} =$$

$$= y^2 + \{(d-1)y^2 + ny + l\} = dy^2 + ny + l\,,$$

$$x = \omega(y) = my^2,\; u - y^2 = \left\{(d-1)\left[y - \sqrt{\frac{m-1}{m-1}y^2} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + n\left[y - y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\right\}$$

$$= (d-1)\frac{\delta}{m-1} + n\sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + l\,.$$

2) $$u = y^2 + \left\{(d-1)\left[y + \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2\right\} + n\left[y + \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l$$

не является решением, т.к.

$$u\Big|_{x=y^2+\delta} = y^2 + \left\{(d-1)\left[y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + n\left[y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\right\} =$$

$$= y^2 + \left\{(d-1)\left[y + 2\sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + n\left[y + 2\sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\right\},$$

$$x = \omega(y) = my^2,\; u - y^2 = \left\{(d-1)\left[y - \sqrt{\frac{m-1}{m-1}y^2} + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + n\left[y - y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\right\}$$

$$= (d-1)\left[2y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right]^2 + n\left[2y + \sqrt{\frac{\delta}{m-1}}\right] + l\,.$$

Решение (3.10) определено, когда выполняются неравенства

$$\delta \le x - y^2 \le (m-1)c^2, \;\; 0 \le y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} \le b - \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} \; .$$

Выясним, что собою представляет характеристическая кривая

$$y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} = b - \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} \; .$$

Последнее выражение перепишем в виде

$$y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}} < A, \quad \text{где } A = b - \sqrt{\frac{\delta}{m-1}} \; .$$

Умножим неравенство $(y-A) - \sqrt{\dfrac{x-y^2}{m-1}} < 0$ на сопряженное, тогда

$$y^2 - 2Ay + A^2 < \frac{x-y^2}{m-1}$$

или

$$x > my^2 - 2A(m-1)y + A^2(m-1).$$

Правую часть этого неравенства заполним до полного квадрата

$$x > my^2 - 2A(m-1)y + \frac{(A(m-1))^2}{m} - \frac{(A(m-1))^2}{m} + A^2(m-1)$$

$$x > m\left(y - \frac{A(m-1)}{m}\right)^2 + A^2\,\frac{m-1}{m}$$

и разделим на m

$$\left(y - \frac{m-1}{m}A\right)^2 - \frac{x}{m} + A^2\,\frac{m-1}{m^2} < 0 \, .$$

Полученное уравнение

$$\left(y - \frac{m-1}{m}\,A\right)^2 - \frac{x}{m} + A^2\,\frac{m-1}{m^2} = 0 \qquad (3.11)$$

является уравнением параболы, координаты вершины которой соответственно равны

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{m-1}{m}A^2 = \dfrac{m-1}{m}\left(b-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}}\right)^2 \\ y_0 = \dfrac{m-1}{m}A = \dfrac{m-1}{m}\left(b-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}}\right) \end{cases}$$

Найдем ее точки пересечения с параболой $x = y^2 + (m-1)c^2$**.**

Из двух точек пересечения

(1) $$\begin{cases} x = \left(b+c-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}}\right)^2 + (m-1)c^2 \\ y = b+c-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}} \end{cases}$$ (2) $$\begin{cases} x = \left(b-c-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}}\right)^2 + (m-1)c^2 \\ y = b-c-\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}} \end{cases}$$

(2) не попадает в область определения решения, так как $b-\left(c+\sqrt{\dfrac{\delta}{m-1}}\right) < c$.

Через (1) точку пересечения пройдет верхняя ветвь параболы (3.11).

Поэтому, решение (3.10) определяется в замкнутом криволинейном четырехугольнике, ограниченном носителями данных и дугами характеристических кривых:

$$x = my^2 - 2(m-1)\left(b-\sqrt{\delta/(m-1)}\right)y + (m-1)\left(b-\sqrt{\delta/(m-1)}\right)^2 \text{ и } x = y^2 + (m-1)c^2.$$

§2. Сингулярная задача Гурса

2.1. Предположим, что характеристические дуги выходят из начала координат и касаются друг друга в общей точке. Характеристические кривые - носители данных представлены уравнениями:

$$x - y^2 = 0 \tag{3.12}$$

и

$$x = \omega(y), \quad 0 \le y \le b, \quad \omega(0) = 0, \ \omega'(0) = 0 \tag{3.13}$$

где $\omega \in C^2[0,b]$ - заданная функция. А также выполняются условия аналогичные (3.2), (3.3) и (3.4): уравнение

$$\omega(y) - y^2 = \zeta \tag{3.14}$$

при любом положительном значении ζ относительно величины y не может иметь более одного решения и всюду в $[0,b]$ выполняется неравенство (3.3).

Уравнение (3.14) при любой положительной правой части $\zeta \in \left[0, \omega(b) - b^2\right]$ имеет единственное решение:

$$y = W(\zeta),\ W(0) = 0, \tag{3.15}$$

которое принадлежит классу $C\left[0,\ \omega(b) - b^2\right] \cap C^1\left(0,\ \omega(b) - b^2\right]$. Безусловно, функции $\omega(y) - y^2$ и $W(c)$ взаимно обратны и выполняется условие (3.5).

<u>Задача Гурса</u>. *Вместе со своей областью определения найти регулярное решение уравнения (1.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\Big|_{x=y^2} = \upsilon(y), \quad 0 \le y \le a,\ \upsilon \in C^2[0,a], \tag{3.16}$$

а дуга кривой, заданная соотношением (3.13) является характеристикой η-семейства.

Вообще, для гиперболических уравнений задачи с данными на открытых носителях корректны только в том случае, когда эти условия дают возможность определить искомое решение и его производные младшего порядка в каждой точке носителя. Если же характеристики касаются друг друга, задача, как правило, поставлена не корректно. Хотя, в некоторых случаях все же удается определить решение вне носителя.

Инварианты Римана (1.13) и (1.14) уравнения (1.5) вместе с условиями задачи Гурса соответственно дают две следующие системы:

$$\begin{cases} u\left(y^2,\ y\right) = \upsilon(y), \quad (a) \\ 2y(p-1) + q = C_1 p, \end{cases} \qquad \begin{cases} u(\omega(y),\ y) - y^2 = const,\ (б) \\ 2y(p-1) + q = C_2. \end{cases}$$

Продифференцируем первые соотношения этих пар и рассмотрим полученные результаты совместно со вторыми соотношениями. Тогда

$$\begin{cases} 2y\, p\left[y^2,\ y\right] + q\left[y^2,\ y\right] = \upsilon'(y), & (a) \\ 2y\, p\left[y^2,\ y\right] + q\left[y^2,\ y\right] = 2y + C_1 p\left[y^2,\ y\right] \end{cases} \tag{3.17}$$

и

$$\begin{cases} \omega'(y)\, p[\omega(y),\ y] + q[\omega(y),\ y] = 2y, & (б) \\ 2y\, p[\omega(y),\ y] + q[\omega(y),\ y] = 2y + C_2 \end{cases} \tag{3.18}$$

Вычисляя первые соотношения обеих пар при значении аргумента $y = 0$, мы получаем систему двух уравнений относительно неизвестных значений $p(0,0)$, $q(0,0)$. Эти значения необходимы для определения постоянных C_1 и C_2. После подстановки этих постоянных во вторые соотношения систем (3.17) и (3.18), мы имели бы вполне определенные линейные алгебраические системы двух уравнений относительно производных p и q уже не в начале координат, а вдоль характеристик, выпущенных из этой точки. Но система соотношений *(а)*, *(б)*, выписанная в начале координат, не дает возможность определения постоянных C_1 и C_2 из-за параболического вырождения уравнения (1.5) в точке $(0,0)$.

Поэтому мы воспользуемся подходом предыдущего параграфа. Условие (3.16) на дуге кривой (3.12) определяет произвольную функцию

$$f(z) = \upsilon(z - g(0)) - (z - g(0))^2,$$

в интервале $z \in [g(0), a + g(0)]$, границы которого пока неизвестны, а условие (3.13) дает

$$g\left[\omega(y) - y^2\right] = g(0) - y .$$

Чтобы определить произвольную функцию g, мы пользуемся единственным решением (3.15) функционального уравнения $\omega(y) - y^2 \equiv \zeta$:

$$g(\zeta) = -W(\zeta) + g(0), \quad 0 \le \zeta \le \omega(b) - b^2 .$$

Тогда решение задачи Гурса определяется по формуле:

$$u = y^2 + \upsilon\left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\}^2 . \tag{3.19}$$

Необходимо описать структуру области определения решения задачи Гурса. Оно определено, когда

$$0 \le x - y^2 \le \omega(b) - b^2 ,$$

$$\upsilon(0) \le u - y^2 = \upsilon\left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\}^2 \le \upsilon(a) - a^2 .$$

Т. е. решение задачи Гурса ограничено носителями данных, выходящими из начала координат, параболой $x = y^2 + \omega(b) - b$ и характеристической кривой $x = y^2 + \omega(y - a) - (y - a)^2$. Последняя принадлежит $\eta -$семейству характеристик, все кривые которого касаются параболы.

Легко проверить, что парабола $x = y^2$ является огибающей $\eta -$семейства характеристик. Для этого следует дифференцировать уравнение $\eta -$характеристики по параметру и затем исключить его из этих двух уравнений. Если такая система уравнений разрешима, то ее решение будет огибающей $\eta-$семейства.

Действительно, допустим (β^2,β), $\beta\in(0,a]$ является произвольной точкой параболы $x=y^2$. Через эту точку проходит характеристическая кривая $\eta-$семейства, которая представлена уравнением

$$x=y^2+\omega\{y-\beta\}-\{y-\beta\}^2$$

или, если переписать его в следующем виде

$$x-y^2-\omega\{y-\beta\}+\{y-\beta\}^2=0,$$

тогда производная этого уравнения по параметру β будет равна:

$$\omega'(y-\beta)-2(y-\beta)=0.$$

Из имеющихся двух равенств вычисляем x и y: $x=\beta^2$, $y=\beta$.

Откуда следует, что парабола $x=y^2$ является огибающей $\eta-$семейства характеристик.

Исходя из произвольности выбора точки (β^2,β), мы делаем вывод, что парабола $x=y^2$ полностью состоит из таких точек, а значит представляет собой дискриминантную кривую.

Следует также отметить, что дуги характеристик $\eta-$семейства, выходящие из точек параболы $x=y^2$ между собой не пересекаются (см. Гл. III, §3, Лемма).

Решение (3.19) непрерывно всюду в области определения. Что же касается его производных первого порядка

$$u_x(x,y)=-W'(x-y^2)\left\{\upsilon'\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)\right\},$$

$$u_y(x,y)=2y+\left[1+2yW'(x-y^2)\right]\left\{\upsilon'\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)\right\},$$

то, в силу того, что $\lim\limits_{y\to+0}W'(c)=\infty$, эти производные стремятся к бесконечности, когда точка (x,y) стремится изнутри области к любой точке параболы $x-y^2=0$, в чем и проявляется сингулярность поставленной задачи.

Справедлива следующая

Т е о р е м а. *Если выполнены условия (3.3), (3.14)) и функции* $\omega(y)-y^2$, $\upsilon(y)-y^2$ *однозначно обратимы:* $y=W(\zeta)$, $W(0)=0$ *и* $y=V(t)$, $V(\upsilon(0))=0$ *соответственно,* *тогда задача Гурса имеет единственное решение, представленное формулой (3.19), которое определяется и непрерывно всюду в криволинейном характеристическом четырехугольнике, ограниченном дугами* $x = y^2$, $x = \omega(y)$, $x = \omega(y-a) + 2ay - a^2$, $x = y^2 + \omega(b) - b^2$*; а для его производных первого порядка кривая* $x = y^2$ *является сингулярной.*

Теперь из вторых характеристических инвариантов систем (3.17) и (3.18) легко определить постоянные C_1 и C_2, подставляя в них значения производных u_x и u_y вдоль соответствующих направлений. Так для характеристического инварианта системы (3.17) имеем:

$$
\begin{aligned}
&-2yW'\left(x-y^2\right)\left\{\upsilon'\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)\right\}+\\
&\quad+2y+\left[1+2yW'\left(x-y^2\right)\right]\left\{\upsilon'\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)\right\}=\\
&\qquad\qquad=2y+C_1\left[-W'\left(x-y^2\right)\left\{\upsilon'\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(x-y^2\right)\right)\right\}\right],
\end{aligned}
$$

откуда

$$
C_1 = -\frac{\upsilon'(y)-2y}{W'(0)\left[\upsilon'(y)-2y\right]} = 0 .
$$

Аналогично, для системы (3.18), вычисляем постоянную C_2:

$$
\begin{aligned}
&-2yW'\left(\omega(y)-y^2\right)\left\{\upsilon'\left(y-W\left(\omega(y)-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(\omega(y)-y^2\right)\right)\right\}+\\
&\quad+2y+\left[1+2yW'\left(\omega(y)-y^2\right)\right]\left\{\upsilon'\left(y-W\left(\omega(y)-y^2\right)\right)-2\left(y-W\left(\omega(y)-y^2\right)\right)\right\}=\\
&\qquad\qquad=2y+C_2 .
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
C_2 = \upsilon'(y-y) = \upsilon'(0)
$$

2.2. Рассмотрим частный случай, когда

$$
\omega(y) = my^2 , \; m > 1 .
$$

Он интересен тем, что область определения решения имеет иную структуру.
В этом случае решение (3.19) представлено формулой:

$$
u = y^2 + \upsilon\left\{y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}}\right\} - \left\{y - \sqrt{\frac{x-y^2}{m-1}}\right\}^2
$$

и определено в криволинейном четырехугольнике, ограниченном носителями данных, выходящими из начала координат, параболой $x = y^2 + (m-1)a^2$ и характеристической кривой $x = my^2 - a(m-1)(2y-a)$. В данном случае, парабола $x = y^2$ также является огибающей $\eta -$семейства характеристик. Причем, все характеристические кривые этого семейства пересекаются между собой.

Действительно, если на дуге параболы взять произвольно две точки $\left(\beta^2, \beta\right)$, $\left(\gamma^2, \gamma\right)$, $\gamma > \beta$ и через них провести $\eta -$характеристики, которые сами являются параболами

$$\begin{cases} x = y^2 + (m-1)(y-\beta)^2 \\ x = y^2 + (m-1)(y-\gamma)^2 \end{cases},$$

то точка их пересечения

$$\begin{cases} x = \dfrac{4\beta\gamma + m(\beta-\gamma)^2}{4} \\ y = \dfrac{\beta+\gamma}{2} \end{cases}$$

попадет в область определения решения, так как выполняется следующее неравенство:

$$(\beta+\gamma)^2 < 4\beta\gamma + m(\beta+\gamma)^2 < m(\beta+\gamma)^2.$$

Отсюда следует вывод, что парабола $x = y^2 + (m-1)(y-\beta)^2$ проходит через точку (β^2, β), ее верхняя ветвь касается параболы $x = y^2$, пересекает все кривые своего семейства, затем параболу $x = my^2$ и выходит за пределы области определения.

§3. Нелинейный аналог свойства среднего значения

3.1. Теперь предположим, что общей точкой опять является начало координат, но характеристические дуги не касаются друг друга в этой точке. Характеристики представлены уравнениями (3.12) и

$$x = \omega(y), \quad 0 \le y \le b, \quad \omega(0) = 0, \tag{3.20}$$

где $\omega \in C^2[0,b]$ - заданная функция. Уравнение (3.14) при любой положительной правой части $\zeta \in [0,\, \omega(b) - b^2]$ имеет единственное решение (3.15), непрерывно дифференцируемое в замкнутом интервале. Кроме того, функции $\omega(y) - y^2$ и $W(\zeta)$ должны быть взаимно обратными и всюду в $[0,b]$ выполнено неравенство (3.3).

Задача Гурса. *Вместе со своей областью определения найти решение уравнения (1.5), если оно удовлетворяет условию*

$$u\big|_{x=y^2} = \upsilon(y), \quad 0 \le y \le a, \ \upsilon \in C^2[0,a], \tag{3.21}$$

а дуга кривой, заданная соотношением (3.20) является характеристикой η-семейства.

В этом параграфе исследуем задачу Гурса на основании нелинейного аналога известного свойства среднего значения для уравнения (1.5). Это свойство позволяет доказать разрешимость задачи в классе как регулярных, так и обобщенных решений.

Свойства среднего значения для гиперболических уравнений были установлены в ([3, 25, 21, 34]). В простейшем случае, для уравнения струны, оно состоит в следующем: *суммы значений решения в противоположных вершинах любого характеристического четырехугольника равны.* Исходя из общего представления решения (1.18), указанное свойство для уравнения (1.5) можно перефразировать так: *суммы ординат противоположных вершин характеристического четырехугольника равны.*

Ниже будет установлено, что при заданной дуге характеристики (3.20) можно явно представить все дуги характеристик η-семейства, выходящих из точек параболы $x = y^2$. Тем самым, нам представится возможность полностью описать структуру области определения решения поставленной выше задачи.

Действительно. Через произвольно взятую точку (x_0, y_0) проведем характеристику ξ-семейства: $x - y^2 = x_0 - y_0^2$. Согласно условию (3.14), эта парабола либо вовсе не пересекается с дугой характеристики (3.20), либо имеет с ней единственную точку пересечения. Первая группа точек, естественно не попадет в область определения решения. Мы рассмотрим только вторую группу. Координаты множества точек этой группы должны удовлетворять неравенствам

$$y_0{}^2 \le x_0 \le y_0{}^2 - b^2 + \omega(b), \tag{3.22}$$

которыми определяется бесконечная параболическая полоса ***D***. Предполагая, что точка (x_0, y_0) лежит в полосе ***D,*** в силу условий (3.3), (3.14), парабола $x - y^2 = x_0 - y_0^2$ пересекается с дугой (3.20) в единственной точке и уравнение (3.14) при правой части $\zeta = x_0 - y_0^2$, имеет единственное решение. Оно согласно (3.15) представлено формулой:

$$y = W\left(x_0 - y_0^2\right). \tag{3.23}$$

Это соотношение определяет ординату точки пересечения рассматриваемых двух характеристических дуг.

Таким образом, точка пересечения этих характеристик определяется полностью: $x = \omega\left[W\left(x_0 - y_0^2\right)\right],\ y = W\left(x_0 - y_0^2\right).$

В полосе ***D*** на дуге характеристики (3.20) возьмем произвольную точку с ординатой, $y_2 \in [0, b]$ и через нее также проведем характеристику ξ-семейства: $x - y^2 = \psi(y_2) - y_2^2$.

Через точку (x_0, y_0) должны пройти две характеристики - парабола $x - y^2 = x_0 - y_0^2$ и искомая характеристика η-семейства. Последняя должна пересечь параболу $x - y^2 = \omega(y_2) - y_2^2$ в некоторой точке с координатами (x_3, y_3). Тем самым, мы формально замыкаем характеристический четырехугольник, ординатами вершин которого являются: y_0, $W(x_0 - y_0^2)$, y_2, y_3. На основании приведенного выше свойства среднего значения, имеем:

$$y_0 + y_2 = y_1 + y_3,$$

откуда находим ординату точки $(x_3,\ y_3)$

$$y_3 = y_0 + y_2 - W(x_0 - y_0^2). \tag{3.24}$$

Абсциссу этой точки можно найти из уравнения параболы $x - y^2 = \omega(y_2) - y_2^2$

$$x_3 = y_3^2 + \omega(y_2) - y_2^2. \tag{3.25}$$

Величину y_2 в соотношении (3.24) примем за параметр, пробегающий значения из интервала $[0,\ b]$ и рассмотрим однопараметрическое семейство y_3, зависящее от параметра y_2 и аргументов x_0, y_0. Соотношения (3.24 - 3.25) фактически являются параметрическим представлением характеристики η-семейства, проходящей через точку (x_0, y_0). Чтобы получить ее уравнение в явном виде, исключим параметр y_2 из этих равенств:

$$x = y^2 + \omega\{y - y_0 + W(x_0 - y_0^2)\} - \{y - y_0 + W(x_0 - y_0^2)\}^2. \tag{3.26}$$

Уравнением (3.26) представлены характеристики η-семейства, проходящие через любую точку (x_0, y_0). Все они непременно пересекаются с параболой $x = y^2$, $y \in [0,\ a]$. Так как функция $\omega(z) - z^2$ имеет единственный нуль $z = 0$, то точки пересечения этой параболы с характеристиками вида (3.22) вычисляются из условия

$$\omega\{y - y_0 + W(x_0 - y_0^2)\} - \{y - y_0 + W(x_0 - y_0^2)\}^2 = 0,$$

откуда, согласно условию (3.15), ордината y определяется единственным образом

$$y = y_0 - W(x_0 - y_0^2).$$

Поэтому, не найдется ни одной такой точки (x_0, y_0), проведенная через которую характеристика η-семейства не пересекалась бы с параболой $x = y^2$.

Лемма. *Дуги характеристик η-семейства, выходящих из точек параболы $x = y^2$ при выполнении условий (3.3), (3.14), (3.15) покрывают всю полосу **D** и между собой не пересекаются.*

Действительно, при допущении, что эти характеристики оставляют какую-либо лакуну в полосе ***D***, приходим к противоречию, т.к. из любой точки этой лакуны можно провести характеристику вида (3.26). А эта характеристика непременно выходит на характеристическую параболу $x = y^2$. Приходим к выводу, что двухпараметрическое семейство характеристик (3.26) равносильно однопараметрическому семейству кривых, представленных соотношениями

$$x - y^2 = \omega(y - y_0) - (y - y_0)^2, \tag{3.27}$$

где y_0 является параметром со значениями из интервала $[0,\ a]$.

Вторую часть Леммы также легко доказать допущением обратного. Если две какие-либо характеристики η-семейства пересекаются в точке $(x^*, y^*) \in D$, тогда получается, что через эту точку проходят две характеристики указанного семейства. А это противоречит доказанному выше факту, что через любую точку полосы ***D*** может проходить не более одной η-характеристики. Лемма доказана.

Таким образом, нам известны все характеристики $\xi -$семейства, лежащие в полосе ***D***. Это параболы $x = y^2 + const$. Нами построены все характеристики η-семейства, которые выходят из точек параболы - носителя $x = y^2$. Они представлены однопараметрическим семейством (3.27).

Располагая всеми характеристиками обоих семейств, уже не трудно в явном виде представить решение задачи Гурса (1.5), (3.20), (3.21). Как уже было сказано, комбинация $\eta = u - y^2$, являясь характеристическим инвариантом, сохраняет постоянное значение вдоль каждой кривой η-семейства.

Иными словами, кривые (3.27) представляют собой множество линий уровня разности $u - y^2$. И вдоль каждой кривой (3.27) значения искомого решения известны на том основании, что

$$\left(u(x, y) - y^2\right)\Big|_{x = y^2 + \omega(y - y_0) - (y - y_0)^2} = \left(u(x, y) - y^2\right)\Big|_{\left(y_0^2,\ y_0\right)}.$$

Отсюда следует, что

$$u = y^2 + \upsilon(y_0) - {y_0}^2.$$

Но это значение решения вдоль η-характеристики, выходящей из точки параболы $x = y^2$ с ординатой $y = y_0$. А мы должны определить значение решения в произвольно взятой точке $(x',\ y')$ полосы ***D***. В этой точке значение инварианта $\eta = u - y^2$ то же, что и на, проходящей через эту точку Γ-характеристике η-семейства. Согласно (3.26), эта характеристика пересекается с параболой-носителем в точке с ординатой $y' + W\left(x' - y'^2\right)$ и значение указанного инварианта вдоль всей характеристики определяется его значением в данной точке. Поэтому

$$u(x, y)\big|_{\Gamma} = y^2 + \upsilon\left(y' + W\left(x' - y'^2\right)\right) - \left(y' + W\left(x' - y'^2\right)\right)^2.$$

Ввиду того, что точка $(x',\ y')$ была взята произвольно, приходим к выводу, что

$$u(x, y) = y^2 + \upsilon\ \left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\} - \left\{y - W\left(x - y^2\right)\right\}^2. \tag{3.28}$$

Естественно, что гладкость решения (3.28) определяется гладкостью функций $\upsilon,\ W$. В приведенных выше рассуждениях не было необходимости требовать дифференцируемость функции υ и достаточна была только ее непрерывность. Поэтому построенное нами решение является обобщенным для уравнения (1.5). При требовании дважды непрерывной дифференцируемости функций υ, W формулой (3.28) будут представлены регулярные решения.

Не менее важно описание структуры области определения решения (3.28). Очевидно, что эта область расположена в полосе ***D*** и определена характеристиками $\eta -$семейства, выпущенными из точек параболы-носителя $x = y^2$ при $y \in [0, a]$. Но это семейство целиком представлено уравнениями вида (3.26) или (3.27). Они непрерывно покрывают некоторую часть полосы ***D*** без каких-либо лакун. Поэтому эта область будет ограничена характеристиками (3.27) при значениях параметра $y_0 = 0$ и $y_0 = a$. При $y_0 = 0$, (3.27) дает уравнение дуги кривой (3.20). Другую часть области будет составлять характеристическая парабола $x = y^2 + \omega(b) - b^2$. Область, ограниченную этими кривыми обозначим через D_0. Эта область, соответственно приведенным выше рассуждениям, является односвязной.

Поэтому справедлива следующая:

<u>Т е о р е м а</u>. *Если выполнены условия (3.3), (3.14) и функция $\omega(y) - y^2$ имеет единственную обратную W, $W(0) = 0$, тогда задача (1.5), (3.20), (3.21) однозначно разрешима в классе регулярных решений; ее решение представлено формулой (3.28) и определяется в криволинейном четырехугольнике, ограниченном характеристическими кривыми: $x = y^2$, $x = \omega(y)$, $x = y^2 + \omega(y - a) + (y - a)^2$, $x = y^2 + \omega(b) - b^2$.*

3.2. Случай параболического вырождения. Как видно из проведенного выше исследования, условие (3.3) играет существенную роль. Оно не только обеспечивает существование функции W, но и исключает параболическое вырождение уравнения (1.5) на кривой, представленной уравнением (3.20). При нарушении этого условия для некоторого значения b_1 аргумента y, направления касательных обеих характеристик совпадают в точке их пересечения $(\omega(b_1), b_1)$, т.е. имеет место параболическое вырождение в этой точке. В таком случае, мы не можем обратить уравнение (3.14), тем самым, под вопрос ставится существование функции W и, следовательно, разрешимость самой задачи. Необходимо установить, распространится ли в каком-либо направлении параболическое вырождение. Справедлива

Т е о р е м а. *Если для некоторого значения* $y = b_1 \in (0,\ b]$

$$\omega'(b_1) = 2b_1, \tag{3.29}$$

а при $0 < y < b_1$ *выполняется условие (3.3), то вся* $\xi -$*характеристика*

$$x = y^2 + \omega(b_1) - b_1^2, \tag{3.30}$$

проходящая через точку $(\omega(b_1),\ b_1)$*, является множеством точек характеристического параболического вырождения уравнения (1.5)* ([7]).

Доказательство.

Все приведенные выше рассуждения, связанные с построением характеристики вида (3.26), остаются справедливыми при $0 < y < b_1$. Поэтому в любой точке (x_0, y_0), $y_0 \in [0,\ a]$ полосы

$$0 \le x - y^2 \le \omega(b_1 - \varepsilon) - (b_1 - \varepsilon)^2, \tag{3.31}$$

где $\varepsilon > 0$ - некоторое заданное достаточно малое число, характеристики $\eta -$семейства могут быть представлены формулой (3.26) и, следовательно, формулой (3.27). Каждая из этих характеристик пересекается с характеристикой $\xi -$семейства

$$x = y^2 + \omega(b_1 - \varepsilon) - (b_1 - \varepsilon)^2 \tag{3.32}$$

в точке с ординатой

$$y = y_0 + W\left[\omega(b_1 - \varepsilon) - (b_1 - \varepsilon)^2\right] = y_0 + b_1 - \varepsilon .$$

В точке пересечения характеристических кривых (3.27) и (3.32) касательные к этим кривым имеют различные направления и соответственно равны:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=y_0+b_1-\varepsilon} = \frac{1}{\omega'(b_1-\varepsilon)+2y_0}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=y_0+b_1-\varepsilon} = \frac{1}{2(y_0+b_1-\varepsilon)}.$$

Теперь перейдем к пределу, когда $\varepsilon \to 0$. В таком случае мы выходим на всю полосу $0 \le x - y^2 \le \omega(b_1) - b_1{}^2$, где выполняется условие (3.29) и где характеристика (3.27) и парабола (3.32) в точке их пересечения имеют общую касательную с наклоном

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=y_0+b_1} = \frac{1}{2(y_0+b_1)}$$

Следовательно, все характеристики $\eta-$семейства касаются параболы (3.32) при пересечении с ней.

Отсюда делаем вывод, что уравнение (1.5) параболически вырождается в каждой точке параболы (3.30). Теорема доказана.

Если предположить, что $b_1 = b$, тогда уравнение (1.5) параболически вырождается вдоль всей границы области $x = y^2 + \omega(b) - b^2$ и Теорема справедлива во всей полосе ***D.***

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ж. Адамар (J. Hadamar)
   Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. // *Hermann ed., Paris,* 1903, 375 p.
2. М.И. Алиев, Задача Дирихле для вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений. // ДУ, «Наука и техника», Минск, т. 3, № 1 (1967), 81-88.
3. Л. Асгейрссон (L. Asgeirsson)
   Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. // *Math. Ann*, 1936, pp. 321-346.
4. К.И. Бабенко, К теории уравнений смешанного типа. // *«Усп. матем. наук»*, 1953, VIII, 2(54), 160 стр.
5. Л. Берс, Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. // *ИЛ, Москва.,* 1961, 280 стр.

6. А.В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа. // *Итоги науки, физ.-мат. наука, 2, Москва.,* 1959, 164 стр.
7. А.В. Бицадзе, Некоторые классы уравнений в частных производных. // *Москва, «Наука»*, 1981, 448 стр.
8. Р.Г. Бицадзе, Об одном варианте характеристической задачи Гурса для одного класса уравнений нелинейных колебаний // *Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. мат. ТГУ*, 1989, т. 4, № 1, стр. 11-14.
9. Р.Г. Бицадзе, О глобальной разрешимости задачи Коши для одного уравнения нелинейных колебаний // *Сообщ. АН ГССР*, 1988, т. 131, №1, с.17-30.
10. М. Борн, Л. Инфельд (M. Born, L. Infeld)

    Foundation of a new field theory. // *Proc. Roy. Soc. A*, 144 (1934), p. 425-451.
11. А. Вебстер и Г. Сеге, Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики. // *М., - Л.,* 1933, ч. 1, 283 стр.
12. Д.К. Гвазава, О некоторых классах квазилинейных уравнений смешанного типа. // *Тр. Тбил. Мат. Инс. Размадзе*. –1981.
13. Д.К. Гвазава (J. Gvazava)

    About Cauchy initial problem for quasilinear degenerative equations. // *Tbilisi, Proceeding of A. Rasmadze Mathematical Institute*, vol. 100, -1992, pp. 59-65.
14. Д.К. Гвазава (J. Gvazava)

    Nonlocal and Initial Problems for Quasilinear Nonstrictly Hyperbolic Equations with General Solutions Represented by Superposition of Arbitrary Function. // *Tbilisi, Geor. Math. Journal*, vol. 10, N4, -2002, pp. 687-707.
15. Д.К. Гвазава, Некоторые классы гиперболических уравнений и уравнений смешенного типа // *Тбилиси, «Мецниереба»,* - 1992, 176 стр. (на Грузинском языке)
16. Э. Гурса (E. Gousat)

    Leçon sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. // *Paris, Librairie scientifique, Hermann édition*, -1896, 344p.
17. Э. Гурса, Курс математического анализа // *М.,- Л.,* 1933, т. 3, ч.1, 276 стр.
18. Г. Дарбу (G. Darboux)

    Leçon sur la théorie de surface générale et les applications géométriques du calcul infinitésimal. // *Paris, Gauthier – Villars*, liv. IV, 1894.
19. М. Л. Дюбрей - Жакотэн (M. L. Dubreil – Jacotin)

    Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes. // *Rend. Accad. Lincei, cl. sci. fis., mat. e natur.*, 1932, t.15, fasc. 10, p. 814-819.

20. О.М. Джохадзе, О разрешимости задачи Коши в целом для одного квазилинейного гиперболического уравнения с параболическим вырождением // *Сообщ. АН ГССР*, 1982, т. 105, №2, с. 257-260.

21. О.М. Джохадзе, Задачи Коши и Дарбу в целом для одного класса нелинейных уравнений // *Аналит. методы в теории эллипт. уравнений. – Новосибирск,* 1982, с. 121-128.

22. О.М. Джохадзе, Характеристическая задача Гурса в целом для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений // *Дифф. уравнения*, 1983, т.19, №1, с. 30-37.

23. О.М. Джохадзе, Задача Дарбу в целом для одного класса квазилинейных гиперболических уравнений // *Дифф. уравнения*, 1985, т.21, №1, с. 46-50.

24. П. Жермен (P. Germain)

    Nouvelles solutions des l'équation de Tricomi. // *C. r. Ac. Sc. Paris*, 1950, 231, 1116-1118.

25. Ф. Йон (F. John)

    Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. // *Interscience publishers, New York - London*, 1995 (русский перевод: «Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными»).

26. М.В. Келдыш, О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. // *«Докл. АН СССР»*, 1951, 77, 2, стр. 181-183.

27. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)

On Cauchy and Goursat problems for the class of quasilinear mixed type equations. // *Tbilisi, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math*., Vol.10, N1, -1995, pp 52-54. [83]

28. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)

Darboux problem for hyperbolic equation with parabolic degeneracy. // *Tbilisi, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua App. Math*, vol. 12, No. 1-3, -1997, pp.12-14. [83]

29. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)

    Some nonlinear versions of Darboux and Goursat problem for hyperbolic equation with parabolic degeneracy. // *Abstracts of Intern. Symp. on Differential Equations and Math. Physics*, Tbilisi, 1997, p.79

30. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)

On Singular Nonlinear Goursat Problem// *Tbilisi, Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua App. Math*, vol. 14, No. 1, -1999, pp. 42-45. [83]

31. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)

A Nonlinear Version of Asgeirssonian Mean Value Property and its Application to Characteristic Problems // *Abstracts of Symp. on Differential equations and Mathematical Physics*, Tbilisi, 2003, p. 15.

32. М.Р. Клебанская (M. Klebanskaya)
On One Nonlinear Analogue of the Mean Value Property and its Application to the Nonlinear Goursat Problem. // *Tbilisi, Geor. Math. Journal*, 141 (2006), 67-74. [214]

33. Л.Д. Кудрявцев, Краткий курс математического анализа. // *Москва, « Наука»*, 1989, 735 с.

34. Р.К. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 2, *М., - Л.,* 1951, 544 стр.

35. М.А. Лаврентьев, А.В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа. // *«Докл. АН СССР»*, 1950, 70, 3, стр. 373-376.

36. М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного. // *Гос. Изд. Физмат. лит., М.*, 1958, 678 стр.

37. И. В. Майоров, Об одной задаче Франкля для нелинейного уравнения смешанного типа. // ДУ, «Наука и техника», Минск, т.IV, № 1 (1968), 46-51.

38. М.З. Ментешашвили, О задаче Коши для одного квазилинейного уравнения // *Тр. Тбил. ун-та, сер. естеств. н.,* 1987, т. 13, с. 24-30.

39. О.Ф. Меньших, О задаче Коши и краевых задачах для одного класса систем квазилинейных гиперболических уравнений // *Докл. АН СССР*, 1990, т.314, №1, с. 105-110.

40. Г. Монж (G. Monge)
Second mémoire sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles.// *Mem. Turin, annees* 1770-73, 79-122, (1776).

41. А.Г. Подгаев, О разрешимости обобщенной задачи Трикоми для нелинейного уравнения. // ДАН СССР, т. 236, № 6 (1977), 1307-1310.

42. М. Проттер (M. H. Protter)
The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation. // *Can. J. Math.,* 6, 4, 1954, p. 542-553.

43. Л.Н. Сретенский, Теория волновых поверхностей жидкости/ // *Москва, «Наука»*, 1947, 811 стр.

44. Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешенного типа. // *ОГИЗ, М., - Л.,* 1947, 192 стр.

45. Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, // *ИЛ, Москва,* –1957, стр. 443.

46. Дж. Уизем, Линейные и нелинейные волны, *Москва., Мир*, 1977, 622 с.

47. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. // *Физматгиз, Москва., «Наука»*, т. 1, 1962, 607 стр.