

Министерство образования и науки Грузии  
Государственный университет Акакия Церетели

На правах рукописи

БАЙСАРОВА ГУЛБАНУ ГАСАНКУЛИЕВНА

РАСЧЕТ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ  
ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

04.08 – инженерия и технология механики

Диссертация на соискание академической  
степени доктора инженерии

Научный руководитель-  
доктор технических наук,  
профессор О.Г.Киквидзе

Кутаиси - 2016

# СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

### 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Пути термомеханического нагружения и модель материала

1.2 Напряжения и перемещения в стержне при  
термомеханическом нагружении

1.3 Геометрически нелинейные задачи деформирования  
термоупругих стержней

1.4 Постановка задач исследования

### 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

2.1 Основные уравнения теплопроводности. Начальные и  
граничные условия

2.2 Задача одномерной нестационарной теплопроводности

2.3 Численное интегрирование дифференциального уравнения  
теплопроводности в системе Mathcad

2.4 Задача двухмерной нестационарной теплопроводности

2.5 Численный расчет неоднородного температурного поля

2.6 Анализ полученных результатов

### 3. ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОГО СЕЧЕНИЯ

3.1 Обобщенные статические моменты и координаты  
приведенного центра тяжести

3.2 Обобщенные моменты инерции плоского сечения

3.3 Численный расчет обобщенных моментов инерции и  
координат центра тяжести в системе Mathcad

#### 4. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

4.1 Основные уравнения нелинейного деформирования стержней

4.2 Метод численного решения нелинейной краевой задачи

4.3 Нелинейные задачи расчета стержней  
при термомеханическом нагружении

4.4 Устойчивость прямого стержня при неравномерном  
термомеханическом нагружении

#### 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БАЛКИ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

5.1 Описание экспериментального стенда

5.2 План эксперимента и результаты измерений

5.3 Обработка экспериментальных данных в системе Mathcad

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

## ВВЕДЕНИЕ

Стержни, как элементы конструкций широко используются в строительных конструкциях, машинах, измерительных приборах, роботах и манипуляторах как силовые элементы, аккумуляторы механической энергии, упругие передаточные механизмы, гибкие связи и т.д. поэтому изучение закономерностей деформирования необходимо для решения практически важных задач.

Надежность строительных конструкций, машин и приборов зависит от надежности элементов конструкций и соответственно от точности их расчетов. Поэтому, на современном этапе существенно выросли требования к точности расчетов с учетом реальных свойств материала и режима нагружения.

В строительных конструкциях, турбинах, энергетических установках, машинах на железно-дорожных путях стержневые элементы испытывают действие механической нагрузки и неоднородного температурного поля. Воздействие температурного поля существенно влияет на закономерности деформирования. Неоднородность температурного поля вызывает неоднородность материала, поскольку модуль упругости зависит от температуры, изменяется кривизна стержня. Гибкие стержневые элементы существенно меняют форму, для сплавов с памятью формы перемещения упругой линии могут быть соизмеримы с геометрическими размерами стержня в интервале температур термоупругих мартенситных превращений.

Решение нелинейной задачи дает возможность исследовать устойчивость элементов машиностроительных и строительных конструкций, установить критическую нагрузку и изучить за критическое поведение.

Геометрически линейные задачи деформирования термоупругих стержней рассмотрены в работах И.А.Биргера, Н.Н.Малинина, Б.Боли, Дж.Уэйнера и др. Часто, практически важных случаях при термомеханическом нагружении стержень или полоса существенно изменяет геометрию. Например, разные плоские пружины, провода в электромеханических системах. В само разворачивающихся конструкциях сплавы с памятью формы при малом градиенте температуры существенно изменяют геометрию.

В работах Е.П.Попова, В.А.Светлицкого, А.А.Илюхина и др. изучены большие перемещения гибких стержней при механических нагрузках. В этих работах предполагается, что длина упругой линии не меняется, т.е. существует нейтральный слой, где деформация равна нулю. Однако, при изменении температуры все слои стержня деформируются в связи с температурным расширением (сжатием).

Для определения напряжений в поперечном сечении стержня при термомеханическом нагружении недостаточно использовать геометрические характеристики плоского сечения. Необходимо ввести обобщенные характеристики плоского сечения с учетом распределения температуры в поперечном сечении и использовать понятие приведенного центра тяжести.

Задача еще больше усложняется, если температурное поле нестационарное. В этом случае, параллельно с краевой задачей механики стержней необходимо решить задачу теплопроводности в многомерной постановке.

Нахождение точных решений задач деформирования стержней, особенно нелинейных задач, с точки зрения математики весьма сложна. Поэтому, основные методы решения практических задач приближенные. Более того, усовершенствование и развитие приближенных методов один из направлений теории упругих стержней. Большинство приближенных методов основаны на линеаризацию основных уравнений. Часто решения представляются в виде рядов.

В настоящее время весьма актуально развитие численных методов решения линейных и нелинейных краевых задач механики упругих стержней. Существуют пакеты определенных прикладных программ, которые можно эффективно реализовать на современных персональных компьютерах. Однако, стандартные прикладные программы недостаточны для решения задач, когда необходимо учитывать особенности конкретных конструкций и режима нагружения. Развитие численных методов определенным образом влияет на построение теории и представление основных дифференциальных уравнений.

В работах [29,31] исследованы геометрически нелинейные задачи плоского изгиба стержней при заданном распределении температуры в поперечном сечении. В научной литературе недостаточно работ, в которых комплексно исследуются задачи теплопроводности и геометрически нелинейного деформирования стержня, изучаются обобщенные геометрические характеристики и положение приведенного центра тяжести

поперечного сечения, определяются напряжения в поперечном сечении при действии нестационарного температурного поля и механической нагрузки.

Изучению этих вопросов посвящена представленная диссертационная работа. Она состоит из введения и пяти разделов.

В первом разделе представлены пути термомеханического нагружения и модель материала, дан обзор работ по расчету напряженно – деформированного состояния стержня. Рассмотрены геометрически нелинейные задачи и методы их решения. На основе анализа научных работ сформулированы задачи исследования.

Во втором разделе рассматриваются нестационарные задачи теплопроводности для прямого стержня в одномерной и двухмерной постановках. Сформулированы начальные и граничные условия. Одномерная нестационарная задача решается численно в системе Mathcad. Двухмерная нестационарная задача решается методом прямых используя прямоугольную конечно- разностную схему.

В третьем разделе изучаются обобщенные геометрические характеристики плоского сечения с учетом переменного параметра упругости при неравномерном распределении температуры. Даны формулы для обобщенных моментов инерции и координат приведенного центра тяжести. Проведены численные расчеты прямоугольного сечения в системе Mathcad.

В четвертом разделе рассматривается геометрически нелинейная задача плоского деформирования стержня при нестационарном термомеханическом нагружении. Сформулированы основные нелинейные уравнения и краевые условия нестационарной теплопроводности и механики стержней. Нелинейная краевая задача решается методом стрельбы. Даны результаты численных расчетов на FORTRAN –е.

В пятом разделе дано экспериментальное исследование консольной балки прямоугольного поперечного сечения при нагреве части поверхности и нагружении сосредоточенной силой. В эксперименте измеряются температуры в зоне нагрева нижней части и верхней поверхности стержня, а также вертикальное и горизонтальное перемещения свободного конца. Результаты измерений сопоставляются с результатами численного расчета.

В конце диссертационной работы приводятся основные результаты и выводы по работе. В приложениях представлены прикладные программы расчетов в системе Mathcad

а также результаты экспериментальных измерений перемещений и температур для консольной балки.

## 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

### 1.1 Пути термомеханического нагружения и модель материала

В общем случае путь термомеханического нагружения можно задать параметрически  $R = R(t), T = T(t)$ , где  $R$  обобщенные внешние силы,  $T$  - температура,  $t$  - параметр, в зависимости от которого меняются внешние действующие факторы. Наиболее простыми является случай внешнего воздействия, когда

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \text{const}, \dot{T} = 0, T(t) = T(t_0) \\
 R(t) &= \text{const}, \dot{T} \neq 0 \\
 T &= \text{const}, \dot{R} = 0; T = \text{const}, \dot{R} \neq 0 \\
 R(t) &= \text{var}; T(t) = \text{var}.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

На рис.1.1 показаны пути термомеханического нагружения от начальной точки  $A$  до конечной точки  $B$ . Для каждого пути нагружения, материал деформируется в пределах упругости. Как известно, в таком случае, напряженно-деформированное состояние стержня в точке  $B$  не зависит от пути термомеханического нагружения.

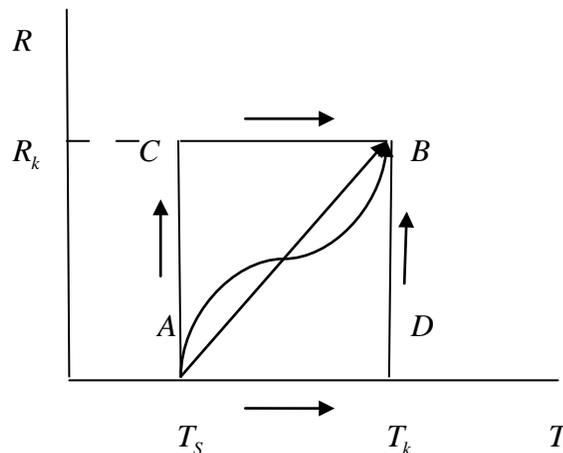


Рис.1.1 Пути термомеханического нагружения

При расчете напряжений и деформаций в элементах конструкций существенное значение имеет модель материала, которая устанавливает связь между напряжением и деформацией на основе экспериментальных данных. Модель определяется физико-механическими свойствами материала и ее выбор зависит от конкретных целей исследования.

В пределах упругости при термомеханическом нагружении конструкционных материалов деформации малые. Поэтому, полные деформации можно представить как сумму упругих  $\varepsilon^e$ , температурных  $\varepsilon^T$  и дополнительных  $\varepsilon^a$  деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T + \varepsilon^a \quad (1.2)$$

При одноосном напряженном состоянии для линейно упругого тела упругая деформация вычисляется по формуле

$$\varepsilon^e = \sigma / E(T) \quad (1.3)$$

где  $E(T)$  - модуль упругости первого рода, который, в общем, зависит от температуры.

Температурная деформация вычисляется как

$$\varepsilon^T = \beta(T)(T - T_0) \quad (1.4)$$

где  $\beta(T)$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T_0$  и  $T$  начальная и текущая температуры соответственно.

Дополнительные деформации могут быть обратимыми и необратимыми. В работе [56] деформация  $\varepsilon^a$  используется для исследования стержней в стадии пластичности и ползучести по методу дополнительных деформаций. В работе [32] деформация  $\varepsilon^a$  введена для учета физико-механических свойств сплавов связанных с фазовыми превращениями. Например, когда для сплавов с памятью формы в интервале температур прямых мартенситных превращений, в результате термоупругих мартенситных превращений

накапливается деформация, величина которого не зависит от пути термомеханического нагружения.

Представленной диссертационной работе ограничимся только упругими и температурными деформациями и представим полную деформацию как

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^T \quad (1.5)$$

Модуль упругости  $E$  и коэффициент температурного расширения (или линейного расширения)  $\beta$  в каждой точке стержня считаем зависящими от температуры, т.е.

$$E = E(T) = E(y, z); \beta(T) = \beta(y, z) \quad (1.6)$$

Коэффициент Пуассона будем считать постоянным.

Для большинства конструкционных материалов до температуры  $500^\circ\text{C}$  модуль упругости имеет линейную зависимость от температуры [49]:

$$E(y, z) = E_0 - \beta_1 T(y, z) \quad (1.7)$$

или

$$E(y, z) = E_0 - \beta_2 T^2(y, z) \quad (1.8)$$

Коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  подбирают в каждом конкретном случае в зависимости от материала.

В табл.1.1 приведены значения модуля упругости и предела текучести для разных сплавов [42] из которого видно, что модуль упругости существенно уменьшается при нагреве до  $250^\circ\text{C}$ .

Коэффициент линейного расширения  $\beta$  для большинства металлов и сплавов с повышением температуры увеличивается. С достаточной для практических расчетов степенью точности эту зависимость можно аппроксимировать линейно [49]:

$$\beta(y, z) = \beta_0 + \gamma T(y, z) \quad (1.9)$$

В формулах (1.7), (1.8) и (1.9) целесообразно ввести начальную температуру испытания материала, что повлияет на величины постоянных. В таком случае  $E_0$  и  $\beta_0$  будут значения модуля упругости и линейного расширения при обычной (комнатной) температуре.

Таблица 1.1

№	Сплав	$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma_{0,2}$ кг/см <sup>2</sup>	$E \cdot 10^{-3}$ кг/см <sup>2</sup>	Относительное уменьшение мо- дуля упругости, %
1.	Дуралюмин повы- шенной прочности Д 16Т	20	3410	730	11
		250	-	651	
2.	Магниевый сплав средней прочности МА 8	20	1620	410	32
		250	800	280	
3.	Магниевый высо- копрочный сплав ВМ 65	20	2670	430	24
		200	1690	325	
4.	Высокопрочный сплав В 95	20	5730	660	17
		200	5320	550	

Для численных расчетов необходимо использовать безразмерные величины.

В безразмерной форме формулы (1.7), (1.8) и (1.9) примут вид:

$$\bar{E}(y, z) = 1 - \beta_1^* (\bar{T}(y, z) - 1) \quad (1.10)$$

$$\bar{E}(y, z) = 1 - \beta_2^* (\bar{T}^2(y, z) - 1) \quad (1.11)$$

$$\bar{\alpha}(y, z) = 1 + \gamma^* (\bar{T}(y, z) - 1) \quad (1.12)$$

где введены обозначения:

$$\bar{E}(y, z) = E(y, z) / E_0; \beta_1^* = \beta_1 T_0 / E_0; \beta_2^* = \beta_2 T_0^2 / E_0; \gamma^* = \gamma T_0 / \beta_0; \bar{\beta}(y, z) = \beta(y, z) / \beta_0 .$$

Приведенные выше формулы показывают, что если в теле температурное поле неоднородное, то неоднородно и механические свойства материала. Следовательно, при решении задач деформирования стержня появляются определенные особенности, в отличие от задач линейной упругости с постоянными параметрами на основе закона Гука. Особенности связаны с характеристиками плоского сечения, с определением центра тяжести сечения, с распределением напряжений, с изменением кривизны стержня и т.д.

Даже в простейшем случае, действие одномерного стационарного температурного поля существенно влияет на решение задачи изгиба. Становится необходимым введение обобщенных геометрических характеристик плоского сечения [33,56], изучение их свойств и определение напряженно – деформированного состояния. Температурное поле меняет картину деформирования по сравнению с изгибом упругого стержня. Не существует традиционный нейтральный слой, меняется картина распределения напряжения в поперечном сечении [7,9,16,29].

## 1.2 Напряжения и перемещения в стержне при термомеханическом нагружении

В 30-ие годы XX –го века интенсивно развивались инженерные методы расчета стержней на прочность и жесткость [41,50]. Для определения перемещений были разработаны графо - аналитические методы, были составлены специальные справочные таблицы.

В работе [16] рассматривается расчет напряжений в стержне прямоугольного поперечного сечения при одномерном распределении температуры. Считается, что

температура меняется только по высоте поперечного сечения. Записана формула для расчета нормального напряжения вдали от концов незакрепленного стержня

$$\sigma_x = -\beta ET(y) + \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \beta ET(y) dy + \frac{3y}{2c^3} \int_{-c}^c \beta ET(y) y dy \quad (1.13)$$

где:  $c$  – половина высоты поперечного сечения.

Если ширина поперечного сечения переменна по высоте, т.е.  $b = b(y)$ , то формула (1.13) примет вид

$$\sigma_x = -\beta ET(y) + \frac{1}{A} \int_{-c}^c \beta ET(y) b(y) dy + \frac{y}{I_z} \int_{-c}^c \beta ET(y) b(y) y dy \quad (1.14)$$

где:  $A$  - площадь поперечного сечения,  $b(y)$  - ширина сечения,  $I_z$  - момент инерции относительно оси  $z$ .

Если, например, температура меняется по параболическому закону  $T = T_0(1 - y^2/b^2)$  [16] то, согласно формуле (1.13) напряжения в стержне будут равны

$$\sigma_x = \frac{2}{3} \beta ET_0 - \beta ET_0 \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \quad (1.15)$$

В работах И.А. Биргера [7,56] в линейной постановке рассматривается плоский изгиб прямолинейных стержней имеющие плоскость симметрии  $yz$ , в которой действуют поперечные нагрузки. Распределение температуры симметрично относительно этой плоскости. На основании гипотезы плоских сечений перемещение произвольной точки сечения вдоль оси  $z$  определяется как

$$w = w_0 + \varphi_x y \quad (1.16)$$

где  $w_0$  - осевое перемещение начало координат,  $\varphi_x$  - угол поворота сечения.

Записана формула для нормального напряжения [7]

$$\sigma = E \frac{M_x y}{\int_A E y^2 dA} + E \left( \frac{\int_A E \varepsilon^T dA}{\int_A E dA} + \frac{y \int_A E \varepsilon^T y dA}{\int_A E y^2 dA} - \varepsilon^T \right) \quad (1.17)$$

Первый член выражает напряжения от внешних нагрузок, второй – температурные напряжения. При равномерной температуре

$$\sigma = M_x y / I_x \quad (1.18)$$

где  $I_x = \int_A y^2 dA$  - момент инерции сечения относительно оси  $x$ .

Положение приведенного центра тяжести сечения  $O$  определяется из условия

$$\int_a E y dA = 0. \quad (1.19)$$

Из уравнений равновесия с учетом (1.19) получены формулы для  $\varepsilon_0, \kappa_x$ . ( $\varepsilon_0 = dw_0 / dz, \kappa_x = d\varphi_x / dz$ ). Расчет статически неопределимых стержней на изгиб проводится методом начальных параметров.

В работе [30] рассматривается изгиб прямого стержня под действием температурного поля. Как и в трудах Боли Б., Уэинер Дж., Биргера И.А. и др. [7,9,16,56], используется гипотеза плоских сечений Бернулли – Эйлера. Предполагается, что температурное поле стационарное, одномерное и меняется по высоте поперечного сечения по степенному закону. Поперечное сечение имеет ось симметрии. Перемещения являются малыми. Продольное перемещение определяется формулой (1.16). Для одноосного напряженного состояния нормальное напряжение определено формулой:

$$\sigma = E(T)(\varepsilon_0 + \kappa_x y - \varepsilon^T) \quad (1.20)$$

Для определения неизвестной деформации  $\varepsilon_0$  и неизвестной кривизны  $\kappa_x$  используются уравнения равновесия. Для стержня, который свободен от внешних нагрузок уравнения равновесия имеют вид:

$$\int_A \sigma dA = 0; \quad \int_A \sigma y dA = 0 \quad (1.21)$$

Первый из которых представляет равенство нулю нормальной силы а второе – равенство нулю изгибающего момента.

Расчеты проведены для сплава с памятью формы в интервале температур терма упругих мартенситных превращений в котором нормальное напряжение определяется формулой [30]:

$$\sigma = (\varepsilon_0 + \kappa_x y - \varepsilon^T) / [B(T_S^k - T^k)] \quad (1.22)$$

где  $B, k$  - постоянные материала.

Для вычисления величин  $\varepsilon_0$  и  $\kappa_x$  получены формулы:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{A^*} \int_A \frac{\varepsilon^T}{B(T_S^k - T^k)} dA, \kappa_x = \frac{1}{I_x^*} \int_A \frac{\varepsilon^T y}{B(T_S^k - T^k)} dA \quad (1.23)$$

где  $A^*$  - обобщенная площадь,  $I_x^*$  - обобщенный момент инерции.

Перемещения в продольном направлении определяются по формуле [30]:

$$w = w_0 + \int_0^z (\varepsilon_0 + \kappa_x y) dz \quad (1.24)$$

где  $w_0$  - перемещение начального сечения.

Для определения прогиба используется дифференциальное уравнение  $v'' = -\kappa_x$ , на основе которого получена формула:

$$v = D + D_0 z - \int_0^z \left( \int_0^z \kappa_x dz \right) dz \quad (1.25)$$

где  $D, D_0$  - постоянные интегрирования.

В работе [ 16] рассматривается методика расчета неравномерно нагретых стержней с переменными параметрами упругости. Считается, что температурное поле стационарное и задано. Поперечное сечение не имеет ось симметрии. Используется гипотеза плоских сечений. Перемещения считаются малыми. Перемещение произвольной точки в дол оси стержня выражается равенством:

$$w = w_0 + \varphi \cdot y - \psi \cdot x \quad (1.26)$$

где  $\varphi, \psi$  – углы поворота сечения относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $w_0$  - перемещение точки начало координат.

Предполагается отсутствие поперечных нормальных напряжений. Используя закон Гука для одноосного напряженного состояния, записана формула для расчета напряжения

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 + \frac{d\varphi}{dz} y - \frac{d\psi}{dz} x \right) - E\beta T \quad (1.27)$$

Формула (1.27) содержит три неизвестных параметра:  $\varepsilon_0, d\varphi/dz, d\psi/dz$ , которые определяются из условий равновесия:

$$\int_A \sigma dA = N, \quad \int_A \sigma \cdot y dA = M_x, \quad \int_A \sigma \cdot x dA = -M_y \quad (1.28)$$

Моменты считаются положительными, если они стремятся осуществить поворот по часовой стрелке. Подставляя выражение (1.27) в формулах (1.28) определены неизвестные  $\varepsilon_0, d\varphi/dz, d\psi/dz$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{N + \int_A E\beta T dA}{\int_A E dA}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_x + \int_A E\beta T y dA}{\int_A E y^2 dA}, \quad \frac{d\psi}{dz} = \frac{M_y - \int_A E\beta T x dA}{\int_A E x^2 dA} \quad (1.29)$$

Начало координат (точка O) выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись условия:

$$\int_A E \cdot x dA = 0; \quad \int_A E \cdot y dA = 0$$

Определены температурные напряжения в стержне треугольного поперечного сечения. При расчете распределение температуры принято по параболическому закону:

$$T(x) = \frac{1}{9}T_{\max} - \frac{4}{3}T_{\max} \frac{x}{b} + 4T_{\max} \frac{x^2}{b^2}, \quad \text{модуль упругости и коэффициент линейного}$$

температурного расширения считаются постоянными.

### 1.3 Геометрически нелинейные задачи

#### деформирования стержней

Теория стержней является один из интенсивно развивающихся частей механики со второй половины XIX –го века. Труды в основном были связаны с теорией упругих стержней, основы которого даны в труде Кирхгофа. Рассматривая стержень как одномерный континуум, он получил основные дифференциальные уравнения для величин определяющих геометрию оси стержня. Однако, система не была замкнутой. Кирхгоф записал дополнительные соотношения без строгого вывода. Поэтому, для уточнения теории Кирхгофа, большинство дальнейших исследований посвящается получению нужного количества уравнений. Большинство этих исследований проанализированы в обзорах С.С. Антмана [65], Э.И. Григолюка и И.Т. Селезнева [22].

Развитие теории стержней тесно связано с развитием теории упругости. Первая попытка преобразования трехмерных уравнений теории упругости для тонких стержней была предпринята в труде А.Лява [39], в котором зависимости между переменными входящих в уравнениях Кирхгофа должны были определяться экспериментально. Для изотропных материалов эта зависимость теоретически была установлена Николаи Е.Л [43].

Можно выделить три направления построения теории упругих стержней известные в научной литературе. Прежде всего необходимо отметить теорию деформирования естественно закрученных стержней. В этом направлении первые исследования проведены в трудах Г.Ю. Джанелидзе [ 24], А.И.Лурье [ 38], П. Риза [ 50] и др. Эти труды представляют уточнение теории Кирхгофа для описания раскручивания стержня при растяжении. Решение задач деформирования естественно закрученных стержней находится методом разложения в ряд по малому параметру.

Ряд работ посвящены к исследованию слабоизогнутых стержней, когда в качестве малого параметра принимается начальная кривизна оси стержня [20,61 и др.]. Один из преимуществ асимптотического разложения по малому параметру заключается в том, что дает возможность оценить долю отдельных членов. Отрицательная сторона метода громоздкость полученных формул, что создает неудобство для инженерных расчетов.

В этом отношении определенное преимущество у вариационного метода, который представляет основу трудов О.Б. Голубева [19], Е.С.Гребеня [21], Е. Рейсснера [74] и др. В этих трудах структура зависимости вектора перемещения от координат точки одинакова и в определенных совпадают с формулами В.В.Новожилова [44] .

Со второй половины XX века интенсивно развивается также направление, где стержень представляется как ориентированная или направленная кривая. Дж.Ерикссон и К. Трусдел [69] использовали эту идею для получения уравнений теории стержней. Основы этой теории даны в работе [75] и в дальнейшем развивались для задач статики в трудах [64,68,70,71,72].

Перечисленные выше три направления являются основными для построения различных теории упругих стержней. В трудах [5,14,22,24 ] даны несколько иные подходы построения теории. В частности В.З.Власов [14 ], Г.Ю.Джанелидзе [24 ] и Е.Бейлин [5 ] широко используют результаты теории цилиндрических оболочек.

В отдельную группу необходимо выделить исследования А.И.Лурье [38], Н.Н.Малинина, Я.А. Пратусевича и др. в которых внимание уделяется на практически важных задачах малых перемещений точек стержня, а также труды И.Д. Грудева [23] и др. для специального класса задач.

Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней рассмотрены в трудах А.А. Илюхина [26,27]. Показана, что зависимость компонентов тензора напряжений от дуговой координаты и координат в поперечном сечении разделяются. Задача деформирования стержня сформулирована относительно компонентов вектора Дарбу и единичного вектора направления силы. Зависимость этих переменных от дуговой координаты недостаточно для того, чтобы судить о форме стержня после деформации. Необходимо простое соотношение между начальными параметрами и координат точек оси стержня. Для малых перемещений А.Клебш установил связь между перемещениями точек оси стержня от изменения кривизны. Оказалось целесообразным представить уравнения в системе цилиндрических координат предложенный Е.Николай. Для цилиндрических координат упругой линии криволинейного стержня получены уравнения в виде конечных соотношений и двух квадратур [26].

Как правило, решения уравнений Кирхгофа определяют зависимость начальных величин от некоторой вспомогательной переменной, которая зависит от криволинейной координаты известным образом. Поэтому непосредственное изучение формы упругой линии не всегда возможно. Полный анализ деформирования стержня, когда перемещения точек оси стержня параллельны одной плоскости, дано в монографии [48]. Отдельные детализации аналогии плоского случая с движением физического маятника даны в трудах [57,63].

Можно сказать, что теория упругих стержней на современном этапе носит достаточно общий характер. Однако, такая общность достигается усложнением основных зависимостей, что существенно усложняет анализ в практических задачах. По мнению С.С.Антмана [65], по состоянию 70-х годов XX века теория упругих стержней было более общей, чем этого требовало практика. Это состояние подталкивало исследователей развивать более теории, которые были бы доступны для широкого круга практических специалистов.

В этом отношении можно выделить труды Е.П.Попова [47,48] и В.А.Светлицкого [51,52,53,54]. Е.П. Попов разработал теорию плоского изгиба упругих стержней и на ее основе дал прикладные методы исследования тонких гибких деталей при больших перемещениях: метод эллиптических параметров использованием численных таблиц, метод упругих параметров использованием специальных диаграмм и метод численного расчета на ЭЦВМ. Записаны достаточно компактные общие формулы, которые одинаковы для кривых и прямых тонких стержней и не зависят от схем нагружения и закреплений. Структура полученных формул, таблиц и диаграмм такова, что точность вычислений повышается с ростом перемещений до величин, соизмеримых длины или начального радиуса кривизны стержня.

Существенный вклад в развитии теории стержней и разработке прикладных методов расчета внесли В.А.Светлицкий и его сотрудники [51,52,53,54]. На основе этих методов решены ряд, практически важных задач. При выводе уравнений равновесия или движения, рассматривается «физически линейные» нерастяжимые стержни. Получены векторные дифференциальные уравнения статики и динамики пространственных криволинейных упругих стержней в линейной и нелинейной постановках при следующих основных допущениях: 1. Плоские сечения нормальные к оси стержня остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации (традиционная гипотеза плоских сечений в инженерных расчетах), 2. Размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кривизны оси стержня, 3. Ось стержня не растяжим. Система пяти векторных уравнений содержат пять неизвестных вектора: главный вектор и главный момент действующие в поперечном сечений, вектор угла поворота сечения, вектор перемещения и вектор кривизны. Считается, что существует прямо пропорциональная зависимость главного момента от изменения вектора кривизны. Компонентами коэффициента пропорциональности являются жесткости на кручение и изгиб. Записаны граничные условия. Использование численных методов решены ряд прикладных задач, которые имеют большое значение для приборостроения и разных сфер машиностроения.

В статьях [ 10,12,13] изучается гибкие стержни по моментной модели используя численный метод, основанный на автоматической вариации и выборе параметров в ходе решения задачи, для обеспечения сходимости итерационного процесса. Рассмотрен стационарный режим работы ленточного радиатора. Записаны шесть дифференциальных

уравнений статики: три – для компонентов перемещений и три – для компонентов внутренних усилий. Установлены критические значения параметров движения. Результаты численного расчета для основных неизвестных представлены в виде таблиц.

В статье [ 66] рассмотрен расчет абсолютно гибкого стержня закрепленными концами в потоке жидкости или в поле аэродинамических сил, нагруженного сосредоточенными силами. Основные дифференциальные уравнения предлагается решать методом конечных разностей.

В ряде работ изучается термоупругое выпучивание стержней. Термоупругое выпучивание может иметь место при равномерном нагреве конструкции (например стержня или пластинки), если свободные деформации конструкции стеснены какими-либо связями. С другой стороны, при неравномерном нагреве тонкостенная конструкция при отсутствии внешних связей может потерять устойчивость. Потеря устойчивости происходит за счет сжимающих напряжений, несмотря на то, что они уравновешены растягивающими напряжениями.

Очевидно, при потере устойчивости, вызванной самоуравновешенными напряжениями, существенное значение имеют не только величины самих температур, но и их градиенты.

В связи с тем, что температурные напряжения зависят от температурного расширения, т.е. от деформации тела, а не от внешних нагрузок, возникает вопрос о применении обычных методов исследования упругой устойчивости к проблеме термоупругого выпучивания. Этот вопрос был исследован Н.Хоффом [58], который рассмотрел задачу о термоупругом выпучивании стержня с фиксированными концами. В результате проведенного исследования сделан вывод, что поперечные смещения стержня первого порядка малости вызывают в момент выпучивания изменения второго порядка малости в температурных напряжениях. Автор приходит к заключению, что классический анализ проблемы устойчивости, основанный на предположении, что внешние нагрузки в процессе выпучивания остаются постоянными, применим также к задачам о термоупругой устойчивости не только стержней, но и пластин и оболочек. Этот вывод, однако, требует дальнейших исследований, как и отмечает сам Н.Хофф.

Ряд работ посвящены за критическому поведению конструкции, испытавшей температурное выпучивание [9,16, и др.] . Задачи рассматривались в нелинейной

постановке. Важной проблемой является исследование термоупругой устойчивости при высоких температурах, когда необходимо учитывать зависимость констант материала от температуры и для решения задач необходимо использовать численные методы.

#### 1.4 Постановка задач исследования

Из анализа приведенных работ видно, что деформирование упругих стержней при термомеханическом нагружении в нелинейной постановке недостаточно исследовано как с точки зрения механики так и с позиции современных систем численного анализа.

В работе [31] решена нелинейная задача плоского деформирования стержней при термомеханическом нагружении. Предполагается, что температурное поле стационарное и одномерное. Интегрирование системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями проводится численным методом на алгоритмическом языке FORTRAN. Необходимо отметить, что FORTRAN или visual FORTRAN несовместимы с последними версиями Windows (Windows 2007, Windows 2010), что сужает возможности использования персонального компьютера для решения практических задач. Поэтому, для численного анализа необходимо использовать более современные системы с хорошим математическим обеспечением, например систему Mathcad.

Если учесть, что возможности существующих встроенных функции в системе Mathcad для интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных ограничены [34,36], то разработка новых алгоритмов решения прикладных задач весьма актуальна.

Для интегрирования нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями часто возникает проблема выбора значений параметров в начале интервала интегрирования. Решение нелинейных задач необходимо осуществить с использованием специальных алгоритмов пристрелки.

Определение напряжений и перемещений в линейной постановке исследованы для заданного стационарного температурного поля. При такой постановке невозможно изучить изменение формы стержня в процессе нагрева с одновременным изменением механической нагрузки (пути термомеханического нагружения ACB, ADB или AB на рис.1.1). Для изучения напряженно-деформированного состояния в процессе

термомеханического нагружения необходимо совместно решить задачи теплопроводности и механики стержней.

Решение нелинейной задачи в общей постановке весьма трудно. Поэтому, необходимо разработать методику, которая позволит учитывать особенности деформирования и будет доступна для специалистов при проектировании элементов машиностроительных и строительных стержневых конструкций. Разработка численных алгоритмов расчета автоматизирует сложные процессы вычислений напряжений, перемещений и деформации в нестационарных задачах при разных путях термомеханического нагружения.

Разработка прикладных методов связана с определенными гипотезами и приближениями. Для того, чтобы проверить достоверность полученных результатов необходимо сравнить с известными результатами для частных случаев. Кроме этого, необходимо провести экспериментальные исследования и сравнить полученные результаты с данными численного расчета.

Целью диссертационной работы является разработка методов расчета нелинейных задач деформирования стержней при термомеханическом нагружении с использованием современных систем решения задач.

Для достижения цели в диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

- исследована не стационарная задача теплопроводности для стержня с использованием математического редактора маткад;
- изучены обобщенные геометрические характеристики плоского сечения при неравномерном нагреве и переменном модуле упругости материала;
- сформулирована нелинейная краевая задача плоского изгиба стержня при термомеханическом нагружении;
- проведено численное интегрирование нелинейных уравнений методом продолжения решения с параллельной пристрелкой на фортране;
- проведено экспериментальное исследование консольной балки при термомеханическом нагружении;
- результаты измерений обработаны в маткаде и найдены коэффициенты степенной регрессии;
- дано сопоставление результатов теоретических расчетов с данными исследований.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПРИЗМАТИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Расчет распределения температур для каждого элемента конструкции требует составления уравнения теплового баланса. В случае зависимости распределения теплоты в теле как от координат, так и от времени имеем нестационарный режим теплопроводности.

Нестационарный режим теплопроводности имеет место при различных технологических операциях, например нагревание металла дляковки, штамповки, закалки и др. Появление сверхзвуковых летательных аппаратов, ракетных двигателей и т.п. усилило интерес к процессам теплопроводности при нестационарном режиме. В ряде случаев расчет тепловой защиты головной части летательного аппарата или стенок камеры сгорания и сопла двигателя целесообразно вести с учетом нестационарности режима. Дело в том, что летательные аппараты и их двигатели в ряде случаев работают в течение очень короткого времени и поэтому тепловые процессы в элементах их конструкции не успевают выйти на стационарный режим.

Нестационарные режимы теплопроводности могут быть периодическими или переходными. При периодических процессах некоторое распределение температуры повторяется через определенный промежуток времени произвольное число раз. Переходные процессы характеризуются переходом от одного стационарного режима к другому. В инженерной практике переходные процессы встречаются чаще.

### 2.1 Основные уравнения теплопроводности.

#### Начальное и граничные условия

Уравнение теплопроводности (уравнение Фурье) в декартовых координатах имеет следующий вид [37,62]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{c\gamma} Q \quad (2.1)$$

где  $c$  - теплоемкость твердого тела,  $T$  - температура,  $a = \lambda / (c\gamma)$  - коэффициент температуропроводности,  $\gamma$  - плотность материала,  $\lambda$  - теплопроводность твердого тела,  $Q$  - плотность внутренних источников тепла.

Мощность источника (стока), т.е. объемная плотность теплового потока  $Q$  - это количество теплоты, выделяемое (поглощаемое) единицей объема тела в единицу времени. Единицей этой величины является [Дж/(м<sup>3</sup>с)] или [Вт/м<sup>3</sup>]. Если задана мощность нагреваемого источника [Вт], то для определения плотности теплового потока необходимо мощность нагреваемого источника разделить на объем тела.

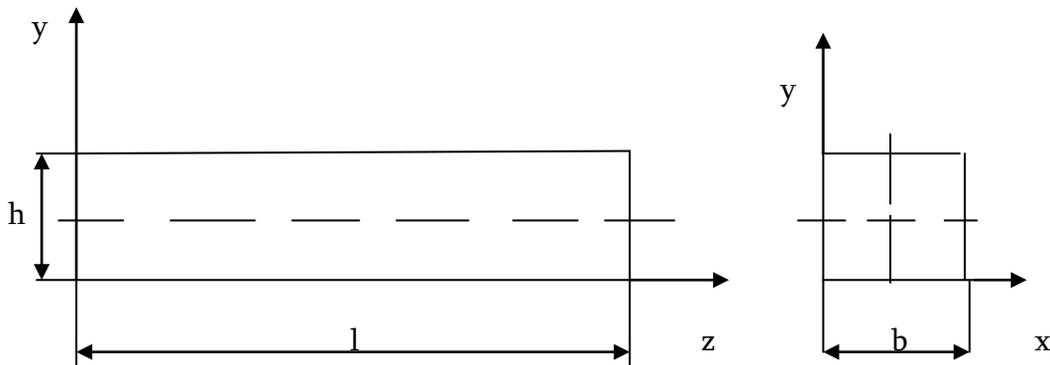


Рис.2.1 К расчету температурного поля в балке

При отсутствии источников теплоты в теле  $Q = 0$  и уравнение (2.1) упрощается.

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (2.1) необходимо начальное и граничные условия. Начальное условие, например: при

$$t = 0, T(x, y, z) = T_f = const \quad (2.2)$$

Для искомой функции температуры могут быть заданы следующие граничные условия [49,62]:

1. Граничные условия первого рода, когда задают температуры на ограничивающих тело поверхностях. В общем случае температура на границе может зависеть от координат точек границы и времени.

$$\begin{aligned} t > 0; T(x, y, z, t)_{z=0,l} = T_1(x, y, z, t)_{z=0,l}; T(x, y, z, t)_{y=0,h} = T_2(x, y, z, t)_{y=0,h}; \\ T(x, y, z, t)_{x=0,b} = T_3(x, y, z, t)_{x=0,b} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2. Граничные условия второго рода, когда на поверхности задана плотность теплового потока, т.е. производная от температуры по нормали к поверхности в виде функции времени и координат точек поверхности.

3. Граничные условия третьего рода, в которых тепловой поток предполагается пропорциональным разности температур поверхности и окружающей среды

$$\begin{aligned} t > 0; -\lambda \left[ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial x} \right]_{x=0,b} = \alpha [T(x, y, z, t) - T_f]_{x=0,b} \\ t > 0; -\lambda \left[ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial y} \right]_{y=0,h} = \alpha [T(x, y, z, t) - T_f]_{y=0,h} \\ t > 0; -\lambda \left[ \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial z} \right]_{z=0,l} = \alpha [T(x, y, z, t) - T_f]_{z=0,l} \end{aligned} \quad (2.4)$$

4. Граничные условия четвертого рода (условия сопряжения), которые сводятся к одновременному заданию равенства температур и тепловых потоков на границе раздела, когда решается задача о теплообмене двух сред (твердое тело-жидкость, тело-тело, жидкость-жидкость), в каждой из которых перенос теплоты описывается уравнением

$$T_1 = T_2 \Big|_{\text{гр}} \quad , \quad -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\text{гр}} \quad (2.5)$$

Эти условия допускают различные модификации в зависимости от физических условий на границе раздела сред. Так, например, если контакт между двумя твердыми телами не является идеальным, то первое условие (2.5) может содержать скачок температур. Если на границе раздела имеются источники теплоты (химическая реакция, фазовый переход), то во второе условие (2.5) следует включить тепловой поток, возникающий в результате наличия поверхностного источника.

Когда внутренний источник теплоты в теле распространяется на определенном участке или объему, или локализован в точке, то в уравнение теплопроводности плотность теплового потока  $Q$  следует учитывать с помощью обобщенных функции Дирака  $\delta$  или Хэвисайда  $H_1$ .

Для одномерной задачи точечный источник теплоты записывается с помощью  $\delta$  функции Дирака (единичная импульсная функция) в виде  $Q\delta(y - y_0)$ , где  $y_0$  координата источника. Аналогично можно учитывать источники теплоты для двумерных и трехмерных задач с помощью многомерных  $\delta$  функций. Многомерные функции могут быть представлены в виде произведения одномерных функции в количестве, равном размерности пространства, на котором определена многомерная функция.

При двумерной задаче для учета в уравнении теплопроводности источника теплоты с координатами  $x_0, y_0$  имеем  $Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$ . Для трехмерной задачи при точечном источнике теплоты с координатами  $x_0, y_0, z_0$  имеем:  $Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$  и уравнение (2.1) примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{c\gamma} Q\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

Первообразной одномерной  $\delta$  функции является функция Хэвисайда (функция единичного скачка)  $H_1(x) = 0, x < 0; H_1(x) = 1, x \geq 0$ . Значение функции при аргументе равном нулю, может явно указываться в записи функции, например  $H_1(x) = 1/2, x = 0$ . В системе Mathcad функция Хэвисайда возвращает 1 если  $x \geq 0$ , иначе 0. Ступенчатая функция Хэвисайда может быть использована для создания импульса шириной  $a$ ,  $H_1(x) - H_1(x - a)$  который продолжает воздействие. Если стержень нагревается на участке

$[a, b]$ , то плотность теплового потока в уравнении теплопроводности можно учитывать с помощью функции Хэвисайда следующим образом:  $Q \cdot [H_1(x - a) - H_1(x - b)]$  и уравнение теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{c\gamma} Q [H_1(x - a) - H_1(x - b)]$$

Доказано [49], что искомую функцию температуры можно представить как произведение трех функции, каждую из которых можно написать на основании решения для неограниченной стенки, если представить параллелепипед как пересечение трех так стенок. Решение представляется в виде ряда [49]. Коэффициенты и корни характеристического уравнения входящие в ряде определяются по графикам, что достаточно неудобно для практических расчетов и ограничивает возможности применения компьютера для расчета. Поэтому, для решения практических задач необходимо использовать численные методы.

С точки зрения автоматизации инженерных расчетов, на современном этапе целесообразно использовать вычислительную технику (персональные компьютеры) и современные системы решения задач.

## 2.2 Задача одномерной нестационарной теплопроводности

Рассмотрим задачу одномерной нестационарной теплопроводности для стержня (рис.2.1) . Допустим, что температурное поле меняется по координате  $y$  и по времени  $t$ ,  $T = T(y, t)$ , источник теплоты в теле  $Q = 0$ . В таком случае уравнение (2.1) упрощается и примет вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) решается методом разделения переменных [37,62]. Решение будем искать в виде:

$$T = T(y,t) = Y(y)F(t) \quad (2.7)$$

где  $Y$  - функция только от  $y$ ;  $F$  - функция только от  $t$ .

Подстановка (2.7) в уравнение (2.6) и деление его на произведение  $Y(y)F(t)$  дает

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} \quad (2.8)$$

Если левая часть равенства (2.8) является функцией только от  $y$ , правая часть – функцией только от  $t$ , то это значит, что они не изменяются при изменении  $y$  и  $t$ , следовательно постоянные:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{a} \frac{1}{F} \frac{dF}{dt} = \text{const},$$

Постоянную выберем в форме  $\pm k^2$ .

Теперь уравнение (2.8) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$d^2 Y / dy^2 = \pm k^2 Y \quad (2.9)$$

$$dF / dt = \pm k^2 a F \quad (2.10)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (2.10) решается разделением переменных

$$dF / F = \pm k^2 adt .$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$F = Ce^{\pm ak^2 t} \quad (2.11)$$

где  $C$  - постоянная интегрирования.

Температура не может неограниченно возрастать при  $t \rightarrow \infty$ , поэтому положительное значение постоянной  $+k^2$  физического смысла не имеет [37,62].

Уравнение (2.9) с учетом сказанного имеет общее решение вида

$$Y = A \cos ky + B \sin ky , \quad (2.12)$$

Следовательно, общее решение уравнения (2.6) имеет вид:

$$T = YF = e^{-ak^2 t} (A_1 \cos ky + B_1 \sin ky) \quad (2.13)$$

где  $A_1, B_1$  постоянные интегрирования.

Для данной задачи имеем начальные и граничные условия:

$$t = 0, y = 0, T = f_1(0) = T_f; y = h, T = T_f \quad (2.14)$$

$$t > 0; y = 0, T = f_1(t) \quad (2.15)$$

где:  $f_1(t)$  - известная функция,  $T_f$  - температура окружающей среды.

Постоянные интегрирования  $A_1, B_1$  определяем из условий (2.14). Из первого условия (2.14) находим:  $A_1 = f_1(0) = T_f$ . Из второго условия (2.14)  $B_1 = T_f [1 - \cos(kh)] / \sin(kh)$ .

Следовательно, решение задачи примет вид:

$$T = T_f e^{-ak^2 t} \left[ \cos ky + \frac{1 - \cos(kh)}{\sin(kh)} \sin ky \right] \quad (2.16)$$

Уравнение (2.6) имеет также решение, не являющееся произведением двух функций, из которых каждая зависит только от одной переменной. Это решение называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности и имеет вид [62]:

$$T = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{4at}} e^{-(\xi-y)^2 / (4at)},$$

где  $C$  - постоянная интегрирования.

Фундаментальное решение дает распределение температуры от теплового импульса (мгновенное повышение температуры до  $T \rightarrow \infty$ ) в сечении  $y = \xi$ . Это решение используется для определения напряжений и деформации при сварке элементов металлоконструкций.

Для задания функции  $f_1(t)$  в граничное условие (2.15) необходимо знать значения температуры  $T_1, T_2, \dots, T_n$  в разные моменты нагрева  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , например через определенный шаг времени  $t_{i+1} = t_i + \Delta t$  (рис.2.2)

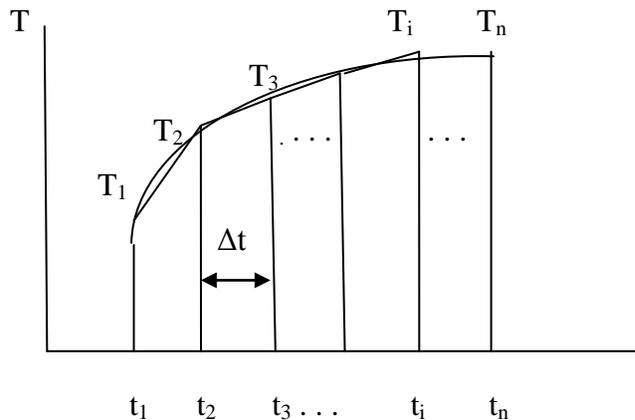


Рис.2.2 К определению граничного условия

На каждом шаге времени температуру аппроксимируем линейной функцией  $T = a \cdot t + b$ . Постоянные  $a$  и  $b$  определяем из условий при  $t = t_i, T = T_i$  при  $t = t_{i+1}, T = T_{i+1}$ . В таком случае нетрудно установить изменение температуры по времени

$$T = \frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t + T_i - \frac{T_{i+1} - T_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t_i \quad (2.17)$$

Следовательно, функция  $f_1(t)$  определяется формулой (2.17).

В место температуры  $T$  в уравнении (2.6), обычно, подставляют избыточную температуру [37,62]  $\mathcal{G} = T - T_f$ , представляющую собой разность между переменной температурой точки тела  $T$  и постоянной температурой окружающей среды  $T_f$ , тогда в место уравнения (2.6) и граничных условий третьего рода (2.4) для одномерной задачи получим [37, 62 ]:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathcal{G}$$

Для уравнения теплопроводности и граничных условий третьего рода в теории подобия получены безразмерные комбинации, представляющие критерий подобия Фурье ( $Fo$ ) для дифференциального уравнения теплопроводности и био ( $Bi$ ), для граничного условия [37, 62 ]:

$$Fo = \frac{a \cdot t_*}{h^2} \quad , \quad Bi = \frac{\alpha \cdot h}{\lambda}$$

где  $t_*$  - характерное время нагрева.

Эти величины используются в параграфе 2.3 при представлении уравнения теплопроводности и граничного условия в безразмерных величинах для численного счета.

Методика аналитического способа определения закона распределения температур сводится к тому, что для вычисления значения критерия Био подбирают четыре – пять корней трансцендентного уравнения [37]. Затем, для каждого значения времени определяют критерий Фурье  $Fo$  и вычисляют соответствующие значения температур используя графоаналитический метод [37 ]. Расчетные формулы записывают в форме критериальных уравнений вида:  $\mathcal{G}(y,t)/T_f = f(Bi, Fo, y/h)$ . Бурдиным Д.В. и Красовским

Б.А. составлены графики зависимости температуры от критериев  $Bi$  и  $Fo$ . Они охватывают широкий диапазон изменения критериев.

Число критерия Био имеет большое значение при решении любой задачи теории теплопроводности. Если  $Bi \ll 1$ , то или мала теплоотдача с поверхности тела, или велика тепловая проводимость поверхности тела. В обоих случаях это означает, что температурный перепад внутри тела мал и по всему сечению тела температура может быть принята одинаковой. При значении критерия  $Bi \gg 1$  возникает положение противоположное предыдущему и в соответствии с равенством  $Bi = \alpha : (\lambda/h)$  можно утверждать, что температура поверхности тела становится практически равной температуре окружающей среды. Промежуточный случай, когда  $Bi \approx 1$ , наиболее сложный, поскольку упростить решение задачи здесь не удастся.

### 2.3 Численное интегрирование дифференциального уравнения теплопроводности в системе Mathcad

Для численного интегрирования дифференциального уравнения (2.6) с граничными и начальными условиями введем безразмерные величины:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_f}; \bar{t} = \frac{t}{t_*}; \bar{y} = \frac{y}{h}$$

где -  $t_*$  конечное значение времени нагрева.

Дифференциальное уравнение (2.6) с учетом внутреннего источника теплоты в безразмерной форме примет вид:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = \frac{at_*}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \bar{Q}H_1(-\bar{y}) \quad (2.18)$$

где безразмерная величина  $\bar{Q} = \frac{t_* Q}{c \gamma T_f V_0}$ ,  $V_0$  - объем тела.

Граничные и начальные условия в безразмерных величинах имеют вид (представлены два варианта):

$$\bar{t} = 0, \bar{y} = 0, \bar{T} = \bar{f}_1(0), \bar{y} = 1, \bar{T} = 1; \bar{t} > 0, \bar{y} = 0, \bar{T} = \bar{f}_1(\bar{t}) \quad (2.19)$$

$$\bar{t} = 0, \bar{y} = 0, \bar{T} = 1, \bar{y} = 1, \bar{T} = 1; \bar{t} > 0, \bar{y} = 0, \bar{T} = \bar{f}_1(\bar{t})$$

Для избыточной безразмерной температуры, при отсутствии источника тепла ( $\bar{Q} = 0$ ), уравнение (2.18) имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{t}} = Fo \cdot \frac{\partial^2 \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{y}^2}$$

где:  $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/T_f$ .

Граничное условие третьего рода для избыточной безразмерной температуры.

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial \bar{y}} = -Bi \cdot \bar{\mathcal{G}}$$

Для численного интегрирования в частных производных в системе Mathcad используем встроенную функцию pdsolve [34]. Функция pdsolve имеет набор различных аргументов и работает следующим образом:

Pdsolve(u,x,xrange,t,trange,[xpts],[tpts])

где: -  $u$  явно заданный вектор имен функции (без указания имен аргументов), подлежащих вычислению. В данной задаче одна функция - температура  $\bar{T}$  ( $u \equiv \bar{T}$ ). Эта функция, а также начальные и граничные условия должны быть определены перед применением функции pdsolve в вычислительном блоке после ключевого слова Given;  $x$ - пространственная координата. В данной задаче  $x \equiv \bar{y}$ ;

xrange – пространственный интервал, т.е. вектор значений аргумента  $x$  для граничных условий. Этот вектор должен состоять из двух действительных чисел, представляющих левую и правую границу расчетного интервала  $[0,1]$ ;

$t$  – время (имя аргумента неизвестной функции)  $t \equiv \bar{t}$ ;

,trange – расчетная временная область: вектор значений аргумента  $t$ , который состоит из двух действительных чисел, представляющих левую и правую границу расчетного интервала по времени  $[0,1]$ ;

xpts – количество пространственных точек дискретизации;

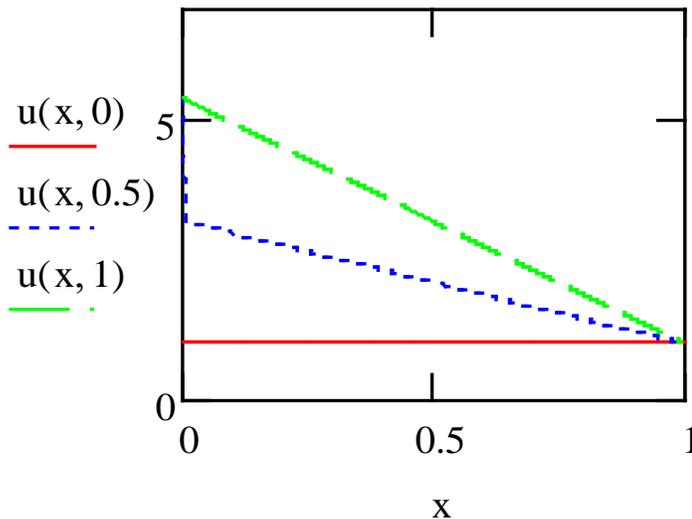
tpts – количество временных слоев, т.е. интервал дискретизации по времени.

Расчеты проводились для следующих значений параметров процесса теплопроводности и теплофизических постоянных материала Ст.45 [42,62]:

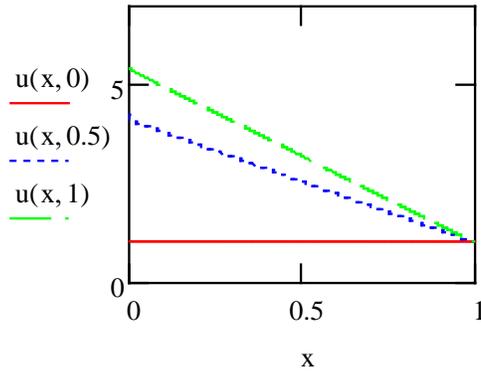
$\lambda = 51,5 \text{ Вт / (м}^0\text{С)}$ ,  $c = 486 \text{ Дж / (кг}^0\text{С)}$ ,  $\gamma = 7854 \text{ кг / м}^3$ ,  $\alpha = 7,95 \text{ Вт / (м}^2\text{ }^0\text{С)}$ ,

$t_* = 440 \text{ с}$ ,  $h = 0,012 \text{ м}$ ,  $l = 0,7 \text{ м}$ ,  $Q = 200 \text{ Вт}$ .

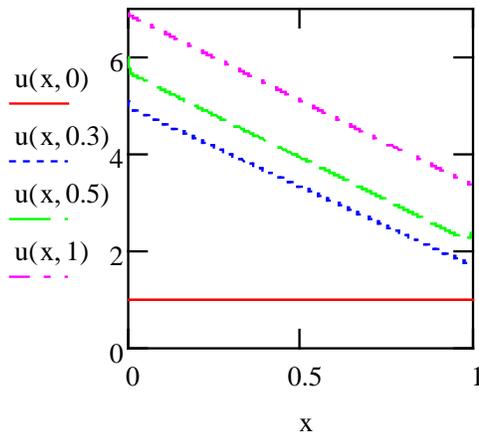
В приложении 1 представлена программа интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (2.18). На рис.2.2 и рис.2.3 показаны результаты расчета.



а) Решение задачи при нагреве нижней поверхности  $\bar{f}_1(t) = 1 + q \cdot \bar{t}$

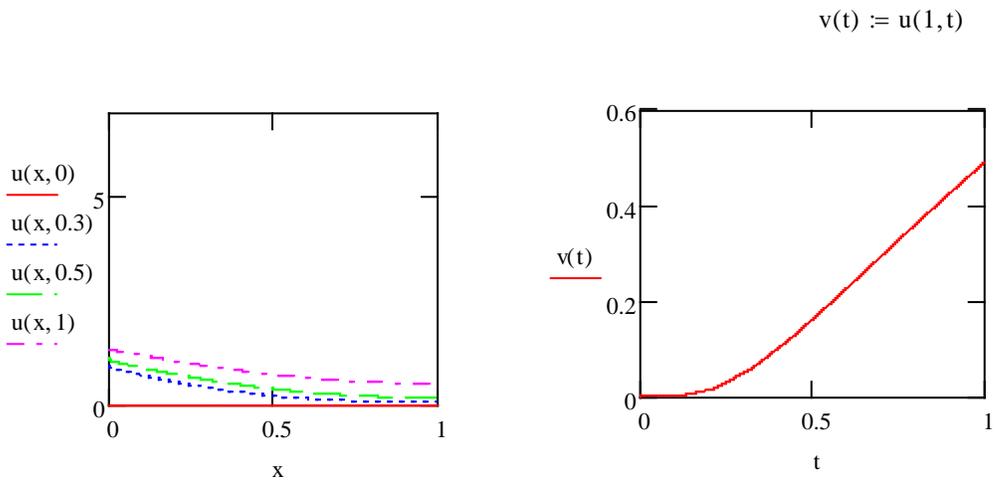


б) Решение задачи при нагреве нижней поверхности  $\bar{f}_1(t) = 1 + q \cdot \sqrt{\bar{t}}$

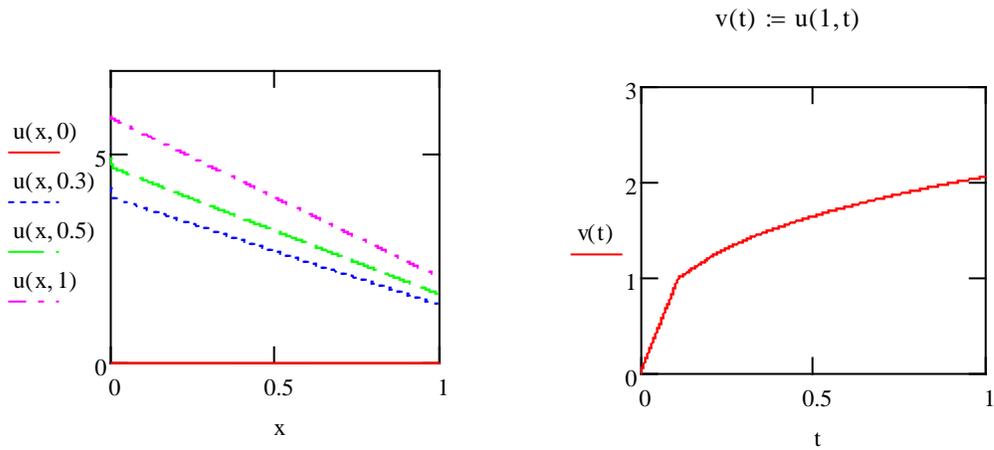


в) Решение задачи при граничных условиях (5.2) и (5.3):

$$\bar{y} = 0, \bar{f}_1(\bar{t}) = \frac{20.688 \cdot \tau^{0.322}}{T_f} \bar{t}^{0.322} + \frac{24.878}{T_f}; \bar{y} = 1, \bar{T} = \frac{0.153 \cdot \tau^{0.98}}{T_f} \bar{t}^{0.98} + \frac{23.929}{T_f}$$

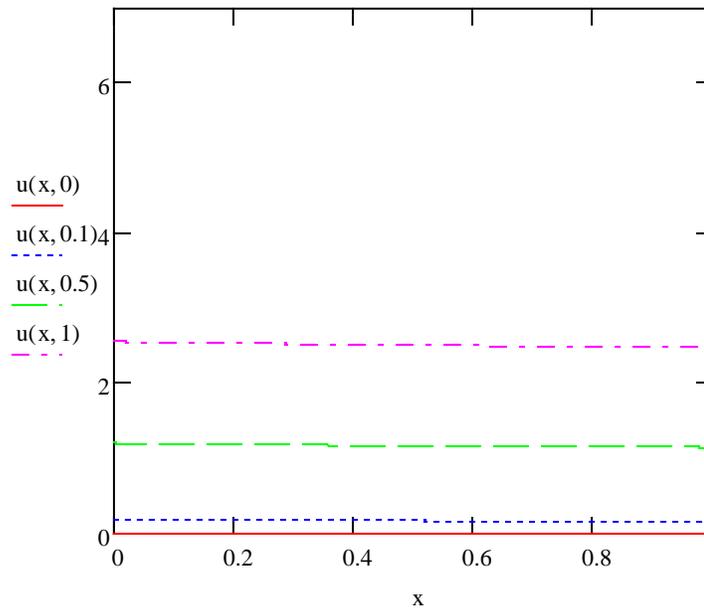


г) Решение задачи при граничных условиях третьего рода критерий Био  $Bi=0.185$ ,  $u(x,t)=(T-T_f)/T_f$  безразмерная избыточная температура критерий Фурье  $Fo=0.412$ ,  $v(t)$  – температура на свободной поверхности

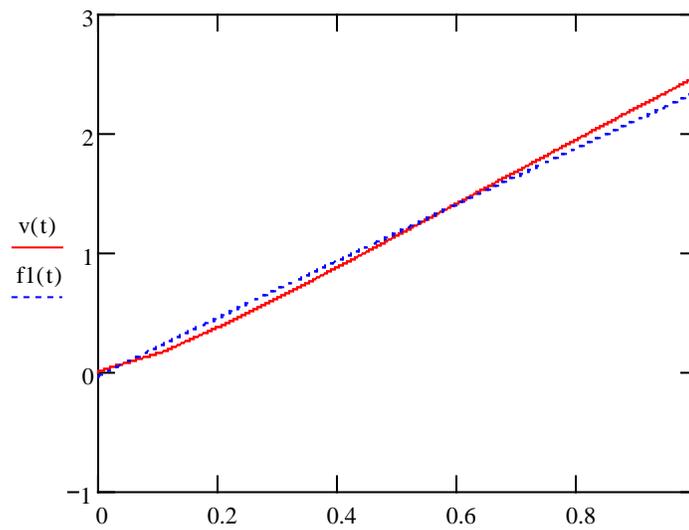


д) Решение задачи при граничных условиях третьего рода критерий Био  $Bi=1.85$ ,  $u(x,t)=(T-T_f)/T_f$  безразмерная избыточная температура, критерий Фурье  $Fo=41.226$ ,  $v(t)$  – температура на свободной поверхности

Рис. 2.2 Распределение температуры в разные моменты времени для граничных условий первого и третьего рода



a)



б)

Рис. 2.3 Решение задачи при граничных условиях третьего рода на обе границы. Коэффициенты теплоотдачи на поверхности нагрева  $\alpha_1=79.5$  и на свободной поверхности  $\alpha=7.95$   $f_1(t)$  – результаты эксперимента

## 2.4 Задача двумерной нестационарной теплопроводности

Рассмотрим стержень с симметричным поперечным сечением нагруженный не стационарным температурным полем. Необходимо определить распределение температуры в стержне  $T=T(t, z, y)$ , где  $t$ -время,  $z$ -осевая координата,  $y$ -координата вдоль оси симметрии (рис.2.1).

Из уравнения (2.1) получаем дифференциальное уравнение двумерной нестационарной теплопроводности, который имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{c\rho}Q \quad (2.20)$$

Начальные и граничные условия для интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности (2.20):

$$t = 0, T = T_0(y, z) = T_f \quad (2.21)$$

$$z = 0, T = T(y); z = l, T = T_l(y) \quad (2.22)$$

$$y = 0, T = T_a(z); y = h, T = T_h(z) \quad (2.23)$$

$$y = 0, -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T_a - T_f); y = h, -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T_h - T_f) \quad (2.24)$$

$$z = 0, -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T_0 - T_f); z = l, -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T_l - T_f) \quad (2.25)$$

где:  $T_f$  - температура окружающей среды,  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи;  $T_a, T_h, T_0, T_l$  - температуры соответствующих боковых поверхностей стержня.

Условия (2.22) и (2.23) представляют собой граничные условия первого рода, а условия (2.24) и (2.25) – граничные условия третьего рода.

## 2.5 Численный расчет неоднородного температурного поля

Решение дифференциального уравнения в частных производных (2.20) с граничными условиями проводим численно. Mathcad обладает довольно ограниченными возможностями по отношению к уравнениям в частных производных и позволяет решать лишь их сравнительно небольшие классы [34].

Для интегрирования уравнения теплопроводности используем метод прямых. Заменяем производные по координатам  $z$  и  $y$  центральными конечно-разностными аналогами [15]. Выбираем прямоугольную сетку с постоянным шагом по координатам  $y$  и  $z$  (рис.2.4).

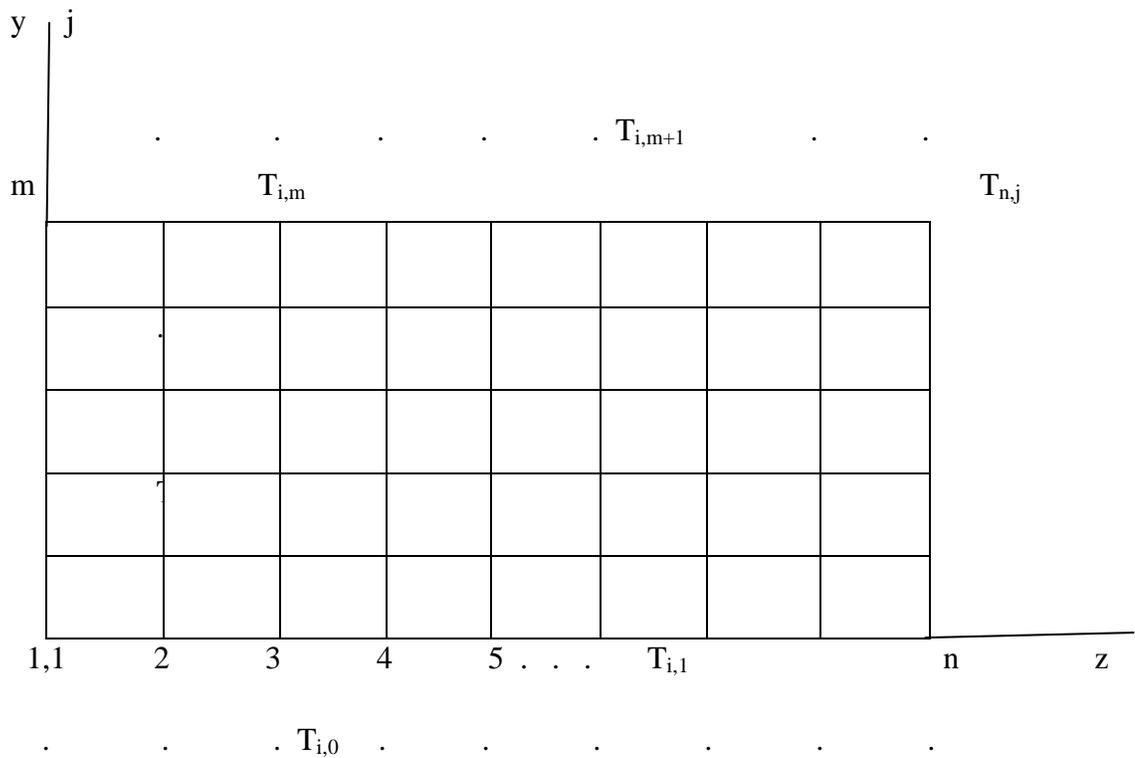


Рис.2.4 Конечно-разностная сетка

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (2.26)$$

где:  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$

В результате, в место дифференциального уравнения в частных производных получим обыкновенные дифференциальные уравнения относительно температуры в точках деления сетки.

$$\dot{T}_{i,j} = a \left( \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) + \frac{Q}{c\gamma} \quad (2.27)$$

Граничные и начальные условия:

$$t = 0, T_{i,j} = T_f \quad (2.28)$$

$$j = 1, T_{i,0} = T_{i,2} - 2\alpha \frac{\Delta y}{\lambda} (T_{i,1} - T_f); j = m, T_{i,m+1} = T_{i,m-1} - 2\alpha \frac{\Delta y}{\lambda} (T_{i,m} - T_f) \quad (2.29)$$

$$i = 1, T_{0,j} = T_{2,j} - 2\alpha \frac{\Delta z}{\lambda} (T_{1,j} - T_f); i = n, T_{n+1,j} = T_{n-1,j} - 2\alpha \frac{\Delta z}{\lambda} (T_{n,j} - T_f)$$

$$j = 1, T_{i,1} = f(t); j = m, T_{i,m} = T_f \quad (2.30)$$

$$i = 1, T_{1,j} = T_f; i = n, T_{n,j} = T_f$$

Если используются граничные условия третьего рода, то выражениями (2.29) исключаем фиктивные точки сетки за пределами области стержня (рис.2.4). В результате расчета на каждом шаге времени определяются температура в точках деления, в том числе на границах области.

При использовании граничных условий (2.30), дифференциальные уравнения (2.27) интегрируются для узлов внутри области, а на границах автоматически присваиваем соответствующие значения.

Для численного расчета введем безразмерные величины:

$$\bar{T}_{i,j} = \frac{T_{i,j}}{T_f}, \bar{z} = \frac{z}{L}, \bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{t} = \frac{t}{t_*}, \bar{a} = \frac{at_*}{h^2}, \bar{Q} = \frac{Qt_*}{c\gamma T_f}$$

В безразмерных величинах уравнение (2.27) примет вид :

$$\dot{\bar{T}}_{i,j} = \bar{a} \left[ \left( \frac{h}{L} \right)^2 \frac{\bar{T}_{i+1,j} - 2\bar{T}_{i,j} + \bar{T}_{i-1,j}}{\Delta \bar{z}^2} + \frac{\bar{T}_{i,j+1} - 2\bar{T}_{i,j} + \bar{T}_{i,j-1}}{\Delta \bar{y}^2} \right] + \bar{Q} \quad (2.31)$$

Начальные и граничные условия (2.28),(2.29) и (2.30) примут вид:

$$t = 0, \bar{T}_{i,j} = 1 \quad (2.32)$$

$$j = 1, \bar{T}_{i,0} = \bar{T}_{i,2} - 2\alpha \frac{\Delta y}{\lambda} (\bar{T}_{i,1} - 1); j = m, \bar{T}_{i,m+1} = \bar{T}_{i,m-1} - 2\alpha \frac{\Delta y}{\lambda} (\bar{T}_{i,m} - 1) \quad (2.33)$$

$$i = 1, \bar{T}_{0,j} = \bar{T}_{2,j} - 2\alpha \frac{\Delta z}{\lambda} (\bar{T}_{1,j} - 1); i = n, \bar{T}_{n+1,j} = \bar{T}_{n-1,j} - 2\alpha \frac{\Delta z}{\lambda} (\bar{T}_{n,j} - 1)$$

$$j = 1, \bar{T}_{i,1} = \bar{f}(t); j = m, \bar{T}_{i,m} = 1 \quad (2.34)$$

$$i = 1, \bar{T}_{1,j} = 1; i = n, \bar{T}_{n,j} = 1$$

Дифференциальное уравнение (2.31) для узловых точек сетки является задачей с начальными условиями (2.32) (задача Коши) и решается методом Рунге-Кутты. Расчеты проводились для следующих значений теплофизических параметров материала и геометрических размеров стержня:

$\lambda = 51,5$  Вт / (м °С),  $c = 486$  Дж / (кг °С),  $\gamma = 7854$  кг / м<sup>3</sup>,  $\alpha = 7,95$  Вт / (м<sup>2</sup> °С), (для пары – углеродистая сталь воздух),  $a = 13,3 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с,  $t_* = 440$  с,  $h = 0,012$  м.,  $d = 24 \cdot 10^{-3}$  м,  $L = 0,7$  м,  $Q = 0$ ,  $T_f = 24$  °С,  $T_0 = 24$  °С,  $f(t) = T_a = 136$  °С.

Поскольку возможности системы Mathcad для решения подобных задач ограничена, то программа численных расчетов составлена на алгоритмическом языке Visual FORTRAN.

### 3.ОБОБЩЕННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОГО СЕЧЕНИЯ

В работе [33] обобщенные геометрические характеристики плоского сечения предлагается для расчета рабочих лопаток турбин. Обеспечение длительной и надежной работы рабочих лопаток основная задача на стадии проектирования турбин.

Рабочие лопатки турбин рассчитывают по стержневой модели используя гипотезу плоских сечений [56]. Расчет стержня ведется на растяжение и изгиб. Для определения напряженно-деформированного состояния необходимо ввести обобщенные геометрические характеристики поперечного сечения с учетом физических свойств материала.

В работе [30] введены обобщенные геометрические характеристики плоского сечения при термомеханическом нагружении материала с памятью формы в интервале температур термо упругих мартенситных превращений.

#### 3.1Обобщенные статические моменты и координаты приведенного центра тяжести

Для однородного тела подчиняющегося закону Гука характеристики плоского поперечного сечения называются геометрическими характеристиками и рассмотрены в курсе сопротивления материалов [8, 40, и др.]. Для неоднородного Гуковского материала в работе [56] рассмотрены упруго-геометрические характеристики. Для структурно неоднородного тела, когда параметры материала меняются по другим параметрам необходимо использовать обобщенные геометрические характеристики (физико-геометрические характеристики [30]). Моменты высшего порядка для плоского сечения были введены в работе [17].

Рассмотрим некоторое плоское сечение в системе координат  $xoy$  и запишем следующие интегралы:

$$S_x^* = \int_A yF(x, y)dA \quad S_y^* = \int_F xF(x, y)dA \quad (3.1)$$

где  $F(x, y)$  - скалярная функция которая описывает состояние элементарной материальной площади и вид которой зависит от модели материала.

В формулах (3.1) интегрирование проводится по всей площади. Величины  $S_x^*$  и  $S_y^*$  называются обобщенными статическими моментами относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно [30].

При параллельном переносе осей, значения обобщенных статических моментов меняются:

$$S_{x1}^* = S_x^* - bA^*, S_{y1}^* = S_y^* - aA^*$$

где:  $a$  - расстояние между параллельными осями  $y$  и  $y_1$ ,  $b$  - расстояние между параллельными осями  $x$  и  $x_1$ ,

$$A^* = \int_A F(x, y)dA \quad (3.2)$$

представляет собой обобщенную площадь плоского сечения.

Подбираем оси  $x_1$  и  $y_1$  так, чтобы  $S_{x1}^* = 0$  и  $S_{y1}^* = 0$ . Тогда координаты приведенного центра тяжести плоского сечения определяются с помощью формул [30]:

$$y_c = S_x^* / A^*, x_c = S_y^* / A^* \quad (3.3)$$

$S_x^*, S_y^*$  – обобщенные статические моменты относительно осей  $x$  и  $y$  соответственно.

Следовательно, для того чтобы определить координаты приведенного центра тяжести плоского сечения необходимо в произвольной системе координат  $xoy$  рассчитать

обобщенные статические моменты и обобщенную площадь плоского сечения. Легко увидеть, что для однородного тела с однородными структурными параметрами обобщенные геометрические характеристики плоского сечения представляют собой геометрические характеристики, а приведенный центр тяжести совпадает с центром тяжести (геометрическим центром).

### 3.2 Обобщенные моменты инерции плоского сечения

Рассмотрим обобщенные моменты инерции плоского сечения относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$I_x^* = \int_A y^2 F(x, y) dA, I_y^* = \int_A x^2 F(x, y) dA, I_{xy}^* = \int_A xy F(x, y) dA \quad (3.4)$$

где:  $I_x^*, I_y^*$  – обобщенные моменты инерции относительно осей  $x, y$  соответственно,  $I_{xy}^*$  – обобщенный центробежный момент.

Если функция  $F$  положительно определенная, то обобщенные осевые моменты инерции всегда положительны, а обобщенный центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным.

При параллельном переносе координатных осей меняются величины обобщенных моментов инерции. Будем считать, что обобщенные моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$  известны. Обобщенные моменты инерции относительно осей  $x_1$  и  $y_1$  вычисляются формулами [30]:

$$\begin{aligned} I_{x_1}^* &= I_x^* - 2bS_x^* + b^2 A^* \\ I_{y_1}^* &= I_y^* - 2aS_y^* + a^2 A^* \\ I_{x_1 y_1}^* &= I_{xy}^* - aS_x^* - bS_y^* + abA^* \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если оси  $x$  и  $y$  проходят через центр приведенного центра тяжести, то

$$S_x^* = 0, S_y^* = 0,$$

формулы (3.5) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{x1}^* &= I_x^* + b^2 A^* \\ I_{y1}^* &= I_y^* + a^2 A^* \\ I_{x1y1}^* &= I_{xy}^* + abA^* \end{aligned} \quad (3.6)$$

Приведенные выше формулы показывают, что обобщенные геометрические характеристики плоского сечения при переходе на параллельные оси имеют те же свойства, что и геометрические характеристики.

Функция  $F(x, y)$  при термомеханическом нагружении упругого материала (например конструкционная сталь) представляет собой модуль упругости, который зависит от температуры, а для слоев композиционного материала представляет собой модуль упругости в обычных условиях. Для конструкционных материалов:

$$F(x, y) \equiv E(T) \equiv E(x, y) \quad (3.7)$$

С учетом выражения (3.7), из формул (3.4) получим соотношения приведенные в [1]. Когда модуль упругости постоянная величина, из формул (3.1), (3.2), (3.4) и (3.6) получим обычные геометрические характеристики плоского сечения в относительных величинах.

В качестве примера рассмотрим расчет обобщенных характеристик прямоугольного сечения в котором температура меняется только в дол оси симметрии  $y$ . Зависимость модуля упругости от температуры примем в виде:

$$E(T) = E_0 - \beta_k (-T_S^k + T^k), \quad (3.8)$$

где  $\beta_k, T_S, k$  - постоянные величины,  $T_S$  - начальная температура,  $T$  - текущая температура.

Очевидно, что при  $k = 1; 2$  получаем формулы (1.7) и (1.8) или формулы (1.10) и (1.11) в безразмерной форме.

Примем, что текущая температура меняется по закону:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)(y/h)^n \quad (3.9)$$

Здесь  $T_0$  и  $T_1$  температуры в поперечном сечении при  $y = 0$  и  $y = h$  соответственно.

Используя формулы (3.3) и (3.8) имеем:

$$y_C = \left[ \int_0^h y [1 - \beta_k / E_0 (-T_S^k + T^k)] dy \right] / \int_0^h dy [1 - \beta_k / E_0 (-T_S^k + T^k)] \quad (3.10)$$

Очевидно, что  $x_C = 0$ .

Обобщенный момент инерции относительно оси  $x$  согласно формулам (3.4) вычисляется как:

$$I_x^* = E_0 d \int_0^h y^2 [1 - \beta_k / E_0 (-T_S^k + T^k)] dy \quad (3.11)$$

Обобщенный момент инерции относительно оси  $x_c$  проходящей через приведенный центр тяжести параллельно оси  $x$  определяем по формуле:

$$I_{x_c}^* = I_x^* - y_C^2 A^* \quad (3.12)$$

где:  $A^* = E_0 d \int_0^h dy [1 - \beta_k / E_0 (-T_S^k + T^k)]$ .

Для практических расчетов весьма важно выбор значений коэффициентов:  $\beta_k$  в формуле (3.8) или коэффициентов  $\beta_1; \beta_2$  в формулах (1.10) и (1.11). Легко показать, что коэффициент  $\beta_k$  можно вычислить по формуле:

$$\beta_k = \frac{E_0 - E_F}{T_F^k - T_S^k},$$

где:  $T_F$  - конечное значение температуры нагрева материала,  $E_0$  - модуль упругости первого рода при начальной (обычной) температуре,  $E_F$  - модуль упругости первого рода при нагреве материала до конечной температуры.

На самом деле, если взять зависимость  $E = aT^k + b$ , где  $a, b$  - постоянные, то используя условия: при  $T = T_S, E = E_0; T = T_F, E = E_F$ , то получим:

$$E = E_0 - \frac{E_0 - E_F}{T_F^k - T_S^k} (T^k - T_S^k) \quad (3.13)$$

Или в безразмерной форме:

$$\bar{E} = 1 - \frac{1 - E_F/E_0}{(T_F/T_S)^k - 1} [(T/T_S)^k - 1] \quad (3.14)$$

где  $\bar{E} = E/E_0$ . Следовательно, в безразмерном виде коэффициент  $\beta_k$  вычисляется по формуле:

$$\beta_k^* = \frac{1 - E_F/E_0}{(T_F/T_S)^k - 1} \quad (3.15)$$

Из формулы (3.15) видно, что значение коэффициента  $\beta_k$  зависит от значений модуля упругости материала в начале и конце нагрева, от начальной (обычной) температуры и конечной температуры нагрева и от показателя степени  $k$ . Модуль упругости первого рода для большинства стали и сплавов в интервале температур от 20<sup>0</sup>С до 200<sup>0</sup>С уменьшается в пределах 3-8% фактически по линейному закону [42,49]. В среднем уменьшение модуля упругости составляет 5%.

Из приведенных выше формул видно, что для определения обобщенных характеристик плоского сечения необходимо вычислить интеграл дифференциального бинома, что достаточно объемно. Поэтому, указанные интегралы целесообразно вычислить численно. Для этого введем безразмерные величины:

$$\bar{y} = y / h, \bar{T} = T / T_S, \bar{A}^* = A^* / (E_0 dh), \bar{I}_x^* = I_x^* / (E_0 dh^3);$$

$$\beta_k^* = (1 - E_F / E_0) / [(T_F / T_S)^k - 1], k = 1; 2$$

Тогда формулы (3.10), (3.11) и (3.12) примут вид:

$$\bar{y}_c = \frac{\int_0^1 \bar{y} d\bar{y} [1 - \beta_k^* (\bar{T}^k - 1)]}{\int_0^1 [1 - \beta_k^* (\bar{T}^k - 1)] d\bar{y}}$$

$$\bar{I}_x^* = \int_0^1 \bar{y}^2 [1 - \beta_k^* (\bar{T}^k - 1)] d\bar{y} \quad (3.13)$$

$$\bar{I}_{xc}^* = \bar{I}_x^* - \bar{y}_c^2 \bar{A}^*$$

$$\bar{A}^* = \int_0^1 [1 - \beta_k^* (\bar{T}^k - 1)] d\bar{y}$$

Численный расчет был проведен для следующих значений постоянных:  $T_S = 26^0 C, T_0 = 108^0 C, T_1 = 34^0 C, k = 1, n = 1$ . В результате расчета получили значения приведенных геометрических характеристик плоского сечения:  $\bar{y}_c = 0.504, \bar{I}_x^* = 0.328, \bar{I}_{xc}^* = 0.081, \bar{A}^* = 0.973$ . При расчете считали, что модуль упругости материала в результате нагрева уменьшается на 5%. Результаты расчета приведены в таблице 3.1. В таблице 3.2 приведены данные расчета при уменьшении модуля упругости на 10% при тех же режимах нагрева, что и в таб.3.1. Численные расчеты проводились в системе Mathcad и соответствующая программа показана в приложении 2.

В качестве тестовой задачи был проведен расчет для равномерного распределения температуры по сечению. В результате расчета получили точное значение координаты приведенного центра тяжести  $\bar{y}_c = 0.5$ , который совпадает с геометрическим центром тяжести.

Таблица 3.1

№	$k$	$T_0$ °C	$T_1$ °C	$T_s$ °C	$n$	$\bar{y}_c$	$\bar{I}_x^*$	$\bar{I}_{xc}^*$	$\bar{A}^*$
1	1	108	34	26	1	0,504	0,328	0,081	0,973
2					2	0,504	0,326	0,081	0,965
3					1/2	0,503	0,33	0,082	0,98
4					1/3	0,502	0,33	0,082	0,984
1	1	168	83	26	1	0,507	0,31	0,076	0,913
2					2	0,507	0,307	0,075	0,9
3					1/2	0,505	0,313	0,077	0,925
4					1/3	0,504	0,314	0,077	0,931

Таблица 3.2

№	$k$	$T_0$ °C	$T_1$ °C	$T_s$ °C	$n$	$\bar{y}_c$	$\bar{I}_x^*$	$\bar{I}_{xc}^*$	$\bar{A}^*$
1	1	108	34	26	1	0,676	0,223	0,023	0,438
2					2	0,772	0,177	0,008	0,283
3					1/2	0,604	0,256	0,04	0,592
4					1/3	0,574	0,269	0,049	0,669
1	1	168	83	26	1	0,515	0,288	0,069	0,825
2					2	0,516	0,28	0,067	0,801
3					1/2	0,512	0,293	0,07	0,85
4					1/3	0,509	0,295	0,071	0,863

Из результатов расчета приведенных в таб.3.1 и 3.2 видно, что при незначительном (до 5%) изменении модуля упругости материала приведенный центр тяжести фактически совпадает с геометрическим центром и вид функции изменения температуры в поперечном сечении незначительно влияет на положение приведенного центра тяжести. При изменении модуля упругости на 10% при тех же температурных режимах координата приведенного центра тяжести не совпадает с геометрическим центром. Координата приведенного центра тяжести существенно зависит от температур нагрева верхней и нижней грани поперечного сечения и от закона изменения температуры в поперечном сечении.

В сплавах с мартенситными превращениями вблизи температур фазовых превращений наблюдается резкое изменение модуля упругости [45]. Относительное уменьшение модуля упругости во время фазового перехода составляет до 25% от модуля упругости аустенита [46]. Очевидно, что проведенные выше расчеты еще более существенны для сплавов с памятью формы.

В табл.1.1 приведены значения модуля упругости и предела текучести для разных сплавов из которого видно, что модуль упругости существенно уменьшается при нагреве и проведенный выше анализ обязательно для расчета стержней изготовленных из дюралюминия, магниевых сплавов, высокопрочного сплава В95 и других материалов, при термомеханическом нагружении до температуры 250°C.

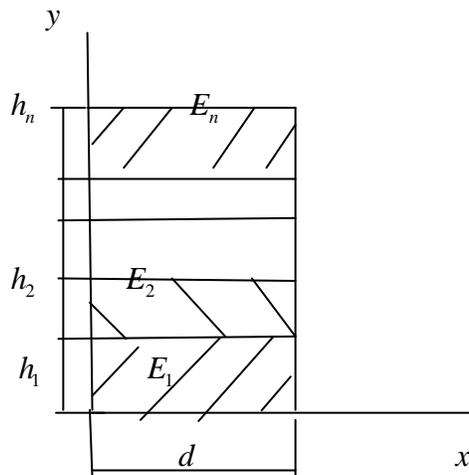


Рис.3.1 Составное поперечное сечение

Для композиционной балки прямоугольного поперечного сечения из  $n$  количество слоев (рис.3.1) с модулями упругости  $E_1, E_2, \dots, E_n$  координаты приведенного центра тяжести поперечного сечения, на основе формул (3.3) определяются следующим образом:

$$y_c = \frac{E_1 h_1 h_1 / 2 + E_2 h_2 (h_1 + h_2 / 2) + \dots + E_n h_n (h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1} + h_n / 2)}{E_1 h_1 + E_2 h_2 + \dots + E_n h_n},$$

$$x_c = \frac{E_1 h_1 d / 2 + E_2 h_2 d / 2 + \dots + E_n h_n d / 2}{E_1 h_1 + E_2 h_2 + \dots + E_n h_n} = \frac{d}{2}.$$

Используя формулы (3.4) обобщенные моменты инерции определяются как:

$$I_x^* = d \left[ \int_0^{h_1} E_1 y^2 dy + \dots + \int_{h_{n-1}}^{h_n} E_n y^2 dy \right] = d [E_1 h_1^3 + E_2 (h_2^3 - h_1^3) + \dots + E_n (h_n^3 - h_{n-1}^3)] / 3,$$

$$I_y^* = \int_0^d E_1 x^2 h_1 dx + \dots + \int_0^d E_n x^2 h_n dx = d^3 (E_1 h_1 + E_2 h_2 + \dots + E_n h_n) / 3.$$

## 4. БОЛЬШИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

### 4.1 Основные уравнения нелинейного деформирования стержней

Рассмотрим деформирование стержней с начальной кривизной. Обозначим радиус кривизны термоупругой линии до и после деформации через  $\rho_0$  и  $\rho$  а угол наклона касательной термоупругой линии к оси  $z$  до и после деформации через  $\theta_0$  и  $\theta$  соответственно, перемещение вдоль оси  $z$  - через  $w$ , а вдоль оси  $y$  - через  $v$ . Очевидно, что  $w=w(l), v=v(l), \rho=\rho(l), \theta=\theta(l)$ , где  $l$ -длина дуги деформированной термоупругой линии (сопутствующая координата), или  $w=w(l_0), v=v(l_0), \rho=\rho(l_0), \theta=\theta(l_0)$ , где  $l_0$ -длина дуги недеформированной термоупругой линии. Оси  $y, z$  выберем таким образом, чтобы плоскость  $yz$  совпадала с плоскостью изгиба (рис.4.1) [30, 31].

Деформация элементарного отрезка АВ длиной  $dl_0$  определяется как

$$\varepsilon_0=(dl-dl_0)/dl_0,$$

откуда, длина после деформации  $dl$  того же элемента

$$dl=dl_0(1+\varepsilon_0) \tag{4.1}$$

где  $dl=\rho d\theta$ ,  $dl_0=\rho_0 d\theta_0$  (рис.4.1).

Рассматривая геометрию терма упругой линии в деформированном состоянии согласно рис.4.1, можно записать

$$dl_0 \sin \theta_0 + dv = dl \sin \theta,$$

$$dl_0 \cos \theta_0 + dw = dl \cos \theta,$$

которые с учетом соотношения (4.1) примут вид:

$$dv/dl_0=(1+\varepsilon_0)\sin \theta -\sin \theta_0 \tag{4.2}$$

$$dw/dl_0 = (1 + \epsilon_0) \cos \theta - \cos \theta_0$$

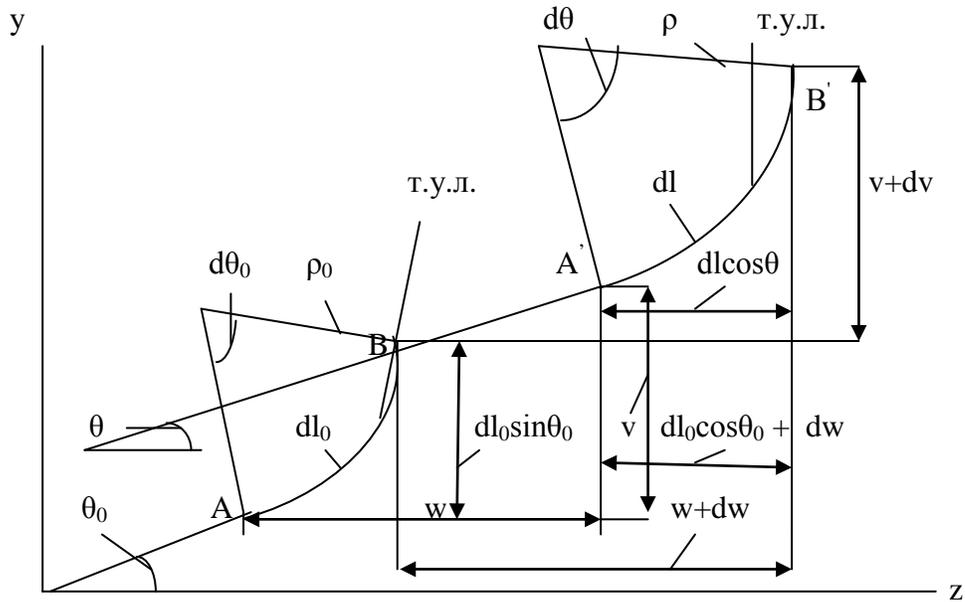


Рис.4.1 Геометрия терма упругой линии

до и после деформации

Для того чтобы установить распределение деформации в поперечном сечении используем гипотезу плоских сечений и рассмотрим деформацию элементарного отрезка СД на расстоянии  $y$  от термоупругой линии. На рис.4.2 показано положение указанного отрезка до и после деформации.

Деформация СД слоя определяется как

$$\epsilon_{сд} = [(\rho + y)d\theta - (\rho_0 + y)d\theta_0] / [(\rho_0 + y)d\theta_0]$$

или после преобразования получим

$$\epsilon_{сд} = (\rho + y)d\theta / [(1 + y/\rho_0) \rho_0 d\theta_0] - 1 \quad (4.3)$$

Очевидно, что для стержней  $y/\rho_0 < 1$  (не рассматриваем стержни большой кривизны, для которых  $y$  и  $\rho_0$  соизмеримы). В таком случае

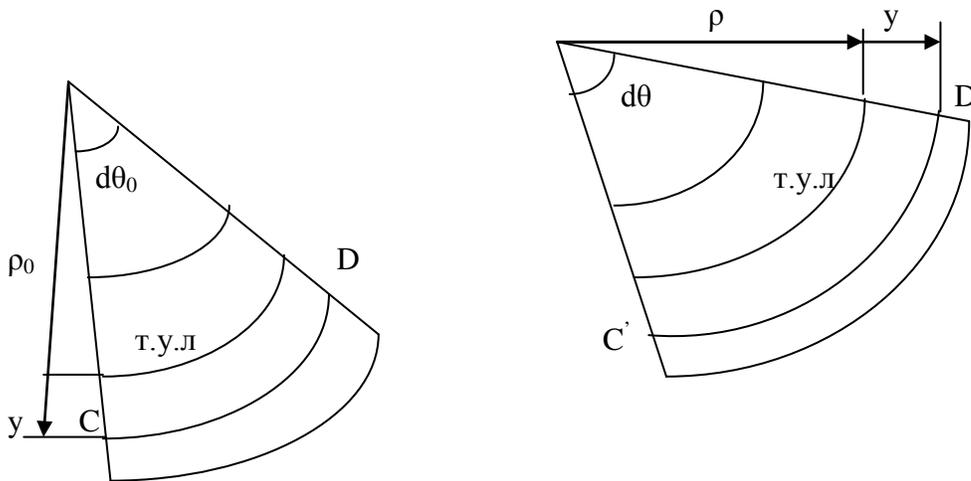


Рис. 4.2 К установлению распределения деформации в поперечном сечении

$$1/(1+y/\rho_0) = 1 - y/\rho_0 + (y/\rho_0)^2 - \dots$$

и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости, с учетом последнего выражения формула (4.3) примет вид

$$\varepsilon_{сд} = \varepsilon_0 + \kappa_x y, \quad (4.4)$$

где введено обозначение

$$\kappa_x = d\theta(1 - \rho/\rho_0)/dl_0 \quad (4.5)$$

или

$$\kappa_x = (1 + \varepsilon_0)(1/\rho - 1/\rho_0)$$

Из последнего выражения следует, что кривизна после деформации

$$1/\rho = 1/\rho_0 + \kappa_x / (1 + \varepsilon_0) \quad (4.6)$$

Используя соотношения (4.5) и (4.6) получим

$$d\theta/dl_0 = (1 + \varepsilon_0) / \rho_0 + \kappa_x \quad (4.7)$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение для угла наклона касательной, которое совместно с уравнениями (4.2) описывают геометрию деформирования при больших перемещениях с учетом деформации (растяжения – сжатия) терма упругой линии.

Для того чтобы определить неизвестные параметры  $\varepsilon_0$  и  $\kappa_x$ , имеем уравнения равновесия:

$$\int \sigma dF = N, \quad \int \sigma y dF = M, \quad (4.8)$$

где  $N$ - нормальная сила,  $M$ -изгибающий момент в поперечном сечении стержня.

При решении термо упругой задачи полная деформация определяется как сумма упругих  $\varepsilon^e$  и температурных  $\varepsilon^t$  деформации ( $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t$ ). Тогда с учетом закона Гука и выражения (4.4), для напряжения получим

$$\sigma = E(t)(\varepsilon_0 + \kappa_x y) - E(t)\varepsilon^t$$

где  $E(t)$  -модуль упругости,  $t$ -температура.

В ряде случаев при вычислении полной деформации необходимо учитывать также дополнительные деформации  $\varepsilon^0$ , которые связаны с фазовыми превращениями ( $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t + \varepsilon^0$ ). Например, для материалов с памятью формы в интервале температур термо упругих мартенситных превращений дополнительными деформациями являются фазовые деформации, которые вычисляются как  $\varepsilon^0 = B\sigma(t^m - M_s^m)$ , где  $B$  и  $m$  постоянные материала,  $M_s$ - температура начала фазового превращения. В таком случае для напряжения имеем

$$\sigma = \Phi(t)(\varepsilon_0 + \kappa_x y) - \Phi(t)\varepsilon^t, \quad (4.9)$$

где  $\Phi(t) = 1/[1/E(t) + B(t^m - M_s^m)]$ . В дальнейшем для общности используем уравнение (4.9).

Если подставить выражение (4.9) в условия (4.8), то после несложных преобразований получим

$$\varepsilon_0 = N/A^* + [\int \varepsilon^t \Phi dA]/A^*, \quad \kappa_x = M/I_x^* + [\int \varepsilon^t y \Phi dA]/I_x^*, \quad (4.10)$$

где  $A^* = \int \Phi dA$  - обобщенная площадь, а  $I_x^* = \int y^2 \Phi dA$  - обобщенный момент инерции поперечного сечения.

Для того чтобы замкнуть систему уравнений (4.2), (4.7) необходимо получить дифференциальные уравнения статики. Рассмотрим равновесие элемента стержня (рис.4.3)

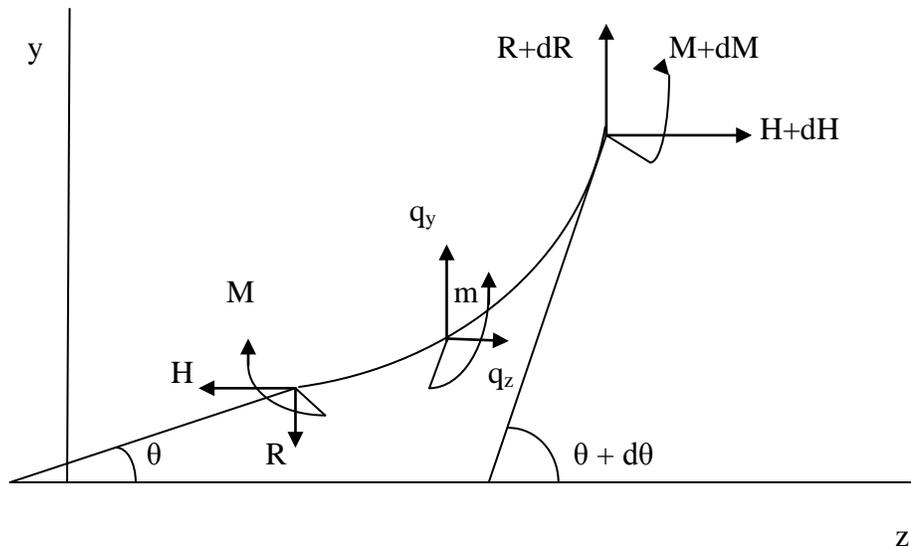


Рис.4.3 К выводу уравнения равновесия деформированного элемента стержня

На рис.4.3  $q_z, q_y$  составляющие вектора распределенных внешних сил, а  $m$  – интенсивность внешнего изгибающего момента. Уравнения статики имеют вид:

$$dM/dl = H \sin \theta - R \cos \theta - m,$$

$$dR/dl = -q_y,$$

$$dH/dl = -q_z,$$

где  $T$  и  $R$  горизонтальная и вертикальная составляющие вектора усилия в поперечном сечении стержня. Последняя система уравнений с учетом выражения (4.1) примет вид

$$dM/dl_0 = (1 + \varepsilon_0)(H \sin \theta - R \cos \theta - m),$$

$$dR/dl_0 = -(1 + \varepsilon_0)q_y, \quad (4.11)$$

$$dH/dl_0 = -(1 + \varepsilon_0)q_z,$$

Нормальную силу  $N$  в поперечном сечении определяем с помощью вертикального и горизонтального составляющих усилия. Из рис.4.4 можно записать

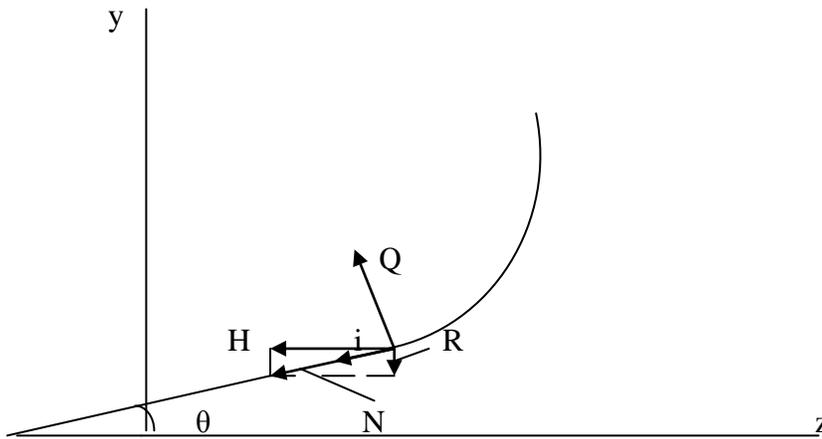


Рис.4.4 К определению нормальной и поперечной

сил в поперечном сечении

$$\bar{N} = \bar{H} + \bar{R} \quad \text{или} \quad \bar{N} \cdot \bar{i} = \bar{H} \cdot \bar{i} + \bar{R} \cdot \bar{i}$$

Откуда нетрудно показать, что

$$N = H \cos \theta + R \sin \theta \quad (4.12)$$

Поперечная сила в сечении определяется как

$$Q = H \sin \theta - R \cos \theta$$

Таким образом, получили систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений плоского изгиба стержней при термомеханическом нагружении. Система состоит из трех уравнений геометрии (4.2), (4.7) и из трех уравнений статики (4.11) совместно с уравнениями (4.10) и (4.12).

Заметим, что из приведенных выше уравнений при  $\theta_0 = 0$  и  $\rho_0 \rightarrow \infty$  получим уравнения изгиба прямых стержней. Соответственно будем иметь  $dl_0 = dz$  и из уравнений геометрии (4.2), (4.7)

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dz} &= (1 + \varepsilon_0) \sin \theta \\ \frac{dw}{dz} &= (1 + \varepsilon_0) \cos \theta - 1 \\ \frac{d\theta}{dz} &= \kappa_x \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнения статики получим из системы (4.11):

$$\begin{aligned} dM/dz &= (1 + \varepsilon_0)(H \sin \theta - R \cos \theta - m), \\ dR/dz &= -(1 + \varepsilon_0)q_y, \\ dH/dz &= -(1 + \varepsilon_0)q_z, \end{aligned} \quad (4.14)$$

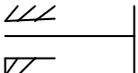
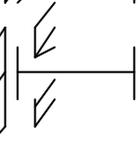
Радиус кривизны стержня после деформации определяется по формуле:

$$\rho = \frac{1 + \varepsilon_0}{\kappa_x} \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13) и (4.14) совместно с уравнениями (4.10) и (4.12) составляют замкнутую систему, которая описывает плоский изгиб прямого стержня при термо механическом нагружении.

Граничные условия для разных видов закрепления края записываются следующим образом:

1. шарнирно неподвижный край  $v=0, w=0, M=0,$
2. жестко защемленный край  $v=0, w=0, \theta=0,$
3. шарнирно подвижный в горизонтальном направлении  $v=0, H=0, M=0$
4. свободный край  $M=0, R=0, H=0$  (4.16)

5.   $v=0, H=0, \theta=0$
6.   $w=0, \theta=0, R=0$

Полученная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (4.2), (4.7), (4.11) с граничными условиями эффективно решается численными методами, в частности методом продолжения решения по параметру с параллельной пристрелкой [10].

#### 4.2 Метод численного решения нелинейной краевой задачи

Для численного расчета введем следующие безразмерные величины:

$$\bar{l} = \frac{l}{L}, \bar{v} = \frac{v}{L}, \bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{\kappa}_x = \kappa_x L, \bar{R} = \frac{R}{q_* L}, \bar{H} = \frac{H}{q_* L}, \bar{m} = \frac{m}{q_* L}, \bar{M} = \frac{M}{q_* L^2}, \bar{y} = \frac{y}{h}, \bar{T} = \frac{T}{T_f}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{L}$$

$$\bar{z} = \frac{z}{L} \text{ (для прямых стержней)}. \bar{l}_0 = \frac{l_0}{L}, \bar{q}_{y,z} = \frac{q_{y,z}}{q_*}$$

где  $L$  - длина стержня до деформации,  $q_*$  - максимальное значение распределенной нагрузки.

В безразмерных величинах система уравнений (4.2), (4.7), (4.11) и уравнения (4.10), (4.12) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{v}}{d\bar{l}_0} &= (1 + \varepsilon_0) \sin \theta - \sin \theta_0, \\
 \frac{d\bar{w}}{d\bar{l}_0} &= (1 + \varepsilon_0) \cos \theta - \cos \theta_0, \\
 \frac{d\theta}{d\bar{l}_0} &= \frac{1 + \varepsilon_0}{\bar{\rho}_0} + \bar{\kappa}_x, \\
 \frac{d\bar{R}}{d\bar{l}_0} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_y, \\
 \frac{d\bar{H}}{d\bar{l}_0} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_z, \\
 \frac{d\bar{M}}{d\bar{l}_0} &= (1 + \varepsilon_0)(\bar{H} \sin \theta - \bar{R} \cos \theta - \bar{m})
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\bar{N} = \bar{H} \cos \theta + \bar{R} \sin \theta \tag{4.18}$$

$$\bar{\kappa}_x = \frac{\bar{M}}{I_x^*} \bar{q} + \frac{L \alpha T_f}{h I_x^*} \int_0^1 \bar{E} (\bar{T} - 1) \bar{y} d\bar{y} \tag{4.19}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{A^*} \left( \bar{N} \frac{h^2}{L^2} \bar{q} + \beta T_f \int_0^1 \bar{E} (\bar{T} - 1) d\bar{y} \right) \tag{4.20}$$

Аналогично можно записать уравнения (4.13), (4.14) в безразмерных величинах для описания деформирования прямых стержней.

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{v}}{d\bar{z}} &= (1 + \varepsilon_0) \sin \theta, \\
\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} &= (1 + \varepsilon_0) \cos \theta - 1, \\
\frac{d\theta}{d\bar{z}} &= \bar{\kappa}_x, \\
\frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_y, \\
\frac{d\bar{H}}{d\bar{z}} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_z, \\
\frac{d\bar{M}}{d\bar{z}} &= (1 + \varepsilon_0) (\bar{H} \sin \theta - \bar{R} \cos \theta - \bar{m})
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Систему дифференциальных уравнений запишем в векторном виде:

$$Y' = F(Y, \bar{q}) \tag{4.22}$$

где  $Y = (\bar{v}, \theta, \bar{w}, \bar{R}, \bar{H}, \bar{M})^T$ .

$\bar{q}$  – представляет параметр движения при интегрировании уравнения (4.22) и от его значения зависит решение задачи.

Для интегрирования системы (4.22) используем алгоритм, разработанный в монографии [11]. При нулевом значении внешней нагрузки можно точно задать граничные условия в начале интервала интегрирования, что весьма важно для интегрирования нелинейных уравнений.

Запишем граничные условия в общем виде:

$$\begin{aligned}
\bar{z} = 0, \varphi_0(Y(0)) &= 0, \\
\bar{z} = 1, \varphi(Y(1)) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где  $\varphi_0 = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ ,  $\varphi = (\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)^T$ .

Решение краевой задачи (4.22) – (4.23) находим в следующей последовательности. Для фиксированного значения параметра  $\bar{q}$ ,  $\bar{q} = \bar{q}_0$  задаем начальные условия неизвестных функций, т.е. значения начальных параметров

$$A_1 = \bar{v}(0), A_2 = \theta(0), A_3 = \bar{w}(0), A_4 = \bar{R}(0), A_5 = \bar{H}(0), A_6 = \bar{M}(0) \quad (4.24)$$

По условиям (4.16) из 6 параметров три всегда известны и остаются неизвестными три параметра. Разработанный в [11] алгоритм позволяет получить решение задачи для более сложных случаев.

Численным интегрированием системы (4.22) определяем вектор  $Y(L)$ . Этот вектор будет зависеть от начальных значений вектора (4.24) и значения параметра  $\bar{q} = \bar{q}_0$ :

$$Y(L) = Y(Y(0), \bar{q}_0) \quad (4.25)$$

Для того, чтобы этот вектор являлся решением задачи, дополнительно должно выполняться следующие равенства:

$$\varphi_0(Y(0), \bar{q}_0) = 0; \varphi(Y(0), \bar{q}_0) = 0 \quad (4.26)$$

Введем новый шестимерный вектор  $\psi$

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi \end{pmatrix}$$

и равенства (4.26) запишем в виде одного векторного равенства

$$\psi(Y(0), \bar{q}_0) = 0 \quad (4.27)$$

Пусть  $Y^{k+1}(0)$  приближенное решение уравнения (4.27). Тогда уточненное решение представим в виде

$$Y^{k+1}(0) = Y^k(0) + \Delta y \quad (4.28)$$

Поскольку выражение (4.28) является решением уравнения (4.27), можно записать

$$\psi(Y^k(0) + \Delta y, \bar{q}_0) = 0 \quad (4.29)$$

Откуда 
$$\psi(Y^k(0), \bar{q}_0) + \frac{\partial \psi(Y^k(0), \bar{q}_0)}{\partial Y} \Delta Y \approx 0 \quad (4.30)$$

Якобиан в выражении (4.30)

$$I = \frac{\partial \psi(Y^k(0), \bar{q}_0)}{\partial Y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial A_1} \dots \frac{\partial \varphi_1}{\partial A_6} \\ \dots \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_1} \dots \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_6} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

где  $A_i$  значения параметров в начальной точке. Из (4.30) имеем:

$$\Delta Y = -I^{-1}(Y^k(0), \bar{q}_0) \cdot \psi(Y^k(0), \bar{q}_0)$$

После подстановки этого выражения в (4.28) получим:

$$Y^{k+1}(0) = Y^k(0) - I^{-1}(Y^k(0), \bar{q}_0) \cdot \psi(Y^k(0), \bar{q}_0) \quad (4.32)$$

Формула (4.32) дает возможность решить задачи путем итерационного процесса Ньютона. Для этого необходимо, чтобы матрица (4.31) была невырожденной.

Элементами матрицы (4.31) являются частные производные функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$  по неизвестным начальным параметрам (4.24). Они определяются по формулам конечных разностей.

По условиям (4.16) на каждом конце стержня имеем по три значения. Соответственно, неизвестны три значения начальных параметров, которые являются параметрами стрельбы. Параметры стрельбы подбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничные условия в конце стержня т.е. второе условие (4.26). Таким образом, Якобиан представляет матрицу  $3 \times 3$ , компонентами которого являются частные производные функции  $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$  по неизвестным начальным параметрам. Для их определения необходимо интегрирование уравнений (4.22) при малых приращениях соответствующих неизвестных параметров.

Для формирования якобиана уравнение (4.22) должны интегрировать четыре раза. Один раз по неизвестным начальным параметрам без приращений, затем приращением для каждого неизвестного параметра по очереди. При этом расчеты должны быть проведены для каждой итерации. Такой процесс, как правило, быстро сходится. В целях экономии времени часто используют модифицированный метод Ньютона, когда якобиан определяется при первой итерации и используется для каждого приближения. Итерационный процесс осуществляется по формуле:

$$Y^{k+1}(0) = Y^k(0) - I^{-1}(Y^0(0), \bar{q}_0) \cdot \psi(Y^k(0), \bar{q}_0) \quad (4.33)$$

Если в формуле (4.33) в место матрицы  $I^{-1}$  положим единичную матрицу, то получим формулу по которой осуществляется процесс простой итерации. Из перечисленных выше процессов он наиболее простой, но характеризуется относительно худшей сходимостью.

Вопрос сходимости в нелинейных задачах тесно связано с тем, насколько хорошо предскажем начальные приближения неизвестных начальных параметров. Если начальные значения неизвестных параметров предсказаны плохо, то возможно наилучший итерационный процесс не даст желательных результатов сходимости, и наоборот, при хороших начальных приближениях все известные методы решения нелинейных алгебраических уравнений даст решение при небольшом числе итераций.

Для того, чтобы как можно точно задать начальные приближения неизвестных параметров, часто искусственно вводят параметр  $\bar{q}$  в исходные нелинейные уравнения, для фиксированного значения которого, например  $\bar{q} = 0$ , решение известно. В уравнение (4.22) параметр  $\bar{q}$  представляет собой внешнюю нагрузку. Если геометрия стержня не имеет начальных несовершенств и отсутствуют начальные напряжения, когда  $\bar{q} = 0$  решением является тривиальное решение  $Y \equiv 0$  и соответственно известны значения начальных параметров. Решение задачи находим последовательно для значений параметра  $\bar{q}, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_i, \bar{q}_{i+1}$ .

Предположим, что когда  $\bar{q} = \bar{q}_i$  решение с вектором начальных условий  $Y_i(0)$  известно. Необходимо получить решение задачи для  $\bar{q}_{i+1}$ ,  $\bar{q}_{i+1} = \bar{q}_i + \Delta q$ . Начальное приближение в итерационном процессе находим по формуле:

$$Y_{i+1}^0(0) = Y_i(0) + \frac{\partial Y_i(0)}{\partial \bar{q}} \Delta \bar{q} + \frac{\partial^2 Y_i(0)}{2 \partial \bar{q}^2} \Delta \bar{q}^2 \quad (4.34)$$

Производные в формуле (4.34) приближенно определяются разностными формулами

$$\frac{\partial Y_i(0)}{\partial \bar{q}} = \frac{Y_i(0) - Y_{i-1}(0)}{\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}}, \quad \frac{\partial^2 Y_i(0)}{\partial \bar{q}^2} = \frac{1}{\bar{q}_i - \bar{q}_{i-1}} \left[ \frac{\partial Y_i(0)}{\partial \bar{q}} - \frac{\partial Y_{i-1}(0)}{\partial \bar{q}} \right] \quad (4.35)$$

Затем решение проводится по описанной выше последовательности. В начале движения по параметру т.е. на первом шаге  $\bar{q} = \bar{q}_0$  в правой части уравнения (4.34) учитываем только первое слагаемое, на втором шаге - первые две слагаемые а дальше все слагаемые. Численное интегрирование дифференциальных уравнений проводится методом Рунге-Кутты. Выбор шага по параметру  $\bar{q}$  осуществляется по описанной в [10] методике.

#### 4.3 Нелинейные задачи расчета стержней при термомеханическом нагружении

По описанной в параграфе 4.2 методике решим ряд задач нелинейного деформирования прямого стержня прямоугольного поперечного сечения. Определим перемещения и внутренние силовые факторы для разных значений механической нагрузки и неоднородного нагрева в пределах упругости. Температура меняется только по высоте поперечного сечения по заданному закону. В основных уравнениях безразмерные величины подобраны таким образом, что характеризующие максимальные значения внешних нагрузок  $q_*$  и параметры материала были сосредоточены в параметре движения  $\bar{q}$ .

Для численного интегрирования вектор  $Y$  представим следующими компонентами:

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)^T \quad (4.36)$$

где

$$Y_1 \equiv \bar{v}, Y_2 \equiv \theta, Y_3 \equiv \bar{w}, Y_4 \equiv \bar{R}, Y_5 \equiv \bar{M}, Y_6 \equiv \bar{H} . \quad (4.37)$$

Расчеты проводились для следующих значений геометрических размеров и параметров материала:  $h = 0.012, d = 0.024, L = 0.7, T_f = 26^0 C, T_a = 30 C, T_h = 56^0 C, n = 0.3$ . Для данного материала и геометрических размеров балки  $q_* = 14,4\bar{q}$  кН/м. Вектор нагрузки не меняет направление.

При исследовании каждой задачи важно записать вектор  $Y$  для начальной точки и для конечной точки с целью вычисления якобиан.

Рассмотрим статически неопределимую балку нагруженной распределенной нагрузкой и температурным полем, переменным по высоте поперечного сечения.

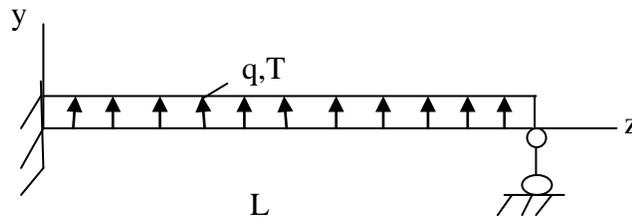


Рис.4.5 Статически неопределимая балка

Граничные условия на левом конце соответствует второму условию (4.16), а на правом конце - третьему условию (4.16). Вектор  $Y$  в начальной точке интервала интегрирования имеет вид:

$$Y(0) = (0, 0, 0, A_1, A_2, A_3)^T \quad (4.38)$$

где  $A_i, i = 1, 2, 3$  неизвестные начальные параметры (параметры стрельбы). Для их определения имеем граничные условия в конце балки:

$$\varphi_4 = y_1 = 0, \varphi_5 = y_5 = 0, \varphi_6 = y_6 = 0$$

якобиан имеет вид:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_3} \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_3} \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_3} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad I = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial A_1} & \frac{\partial y_1}{\partial A_2} & \frac{\partial y_1}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_5}{\partial A_1} & \frac{\partial y_5}{\partial A_2} & \frac{\partial y_5}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_6}{\partial A_1} & \frac{\partial y_6}{\partial A_2} & \frac{\partial y_6}{\partial A_3} \end{pmatrix}$$

Значения параметров  $A_i$  при  $\bar{q} = 0$ , равняются нулю  $A_i = 0, i = 1, 2, 3$ .

Начальный шаг параметра движения равняется 0,01. На каждом шаге параметра движения сходимость достигается за 2-3 итерации. Точность удовлетворения граничных условий составляет  $10^{-4}$ . В уравнениях (4.21) необходимо положить:  $\bar{q}_z = 0, \bar{q}_y = 1, m = 0$ .

На рис.4.6 и рис.4.7 представлены графики компонентов перемещений, а на рис.4.8 и рис.4.9 – силовые факторы для значений  $\bar{q} = 0,04$  и  $\bar{q} = 1,56$ . Сравнительный анализ показывает, что с увеличением параметра  $\bar{q}$  существенно меняется соотношение между перемещениями  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$ .

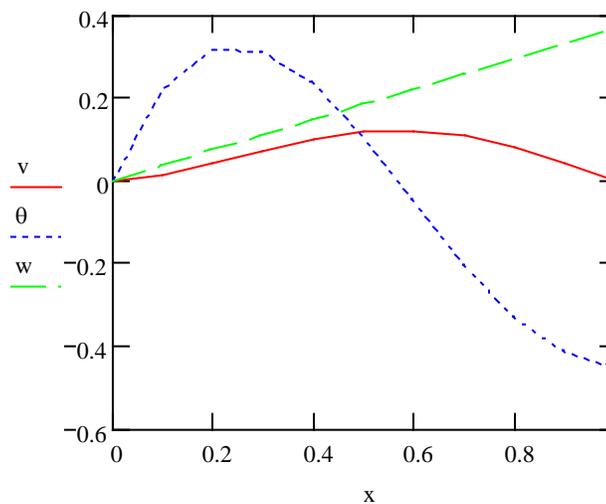


Рис.4.6 Перемещения балки при термомеханическом нагружении для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.03$ ,

$$v = \bar{v} \cdot 10^3, \theta = \theta \cdot 10^3, w = \bar{w} \cdot 10^4$$

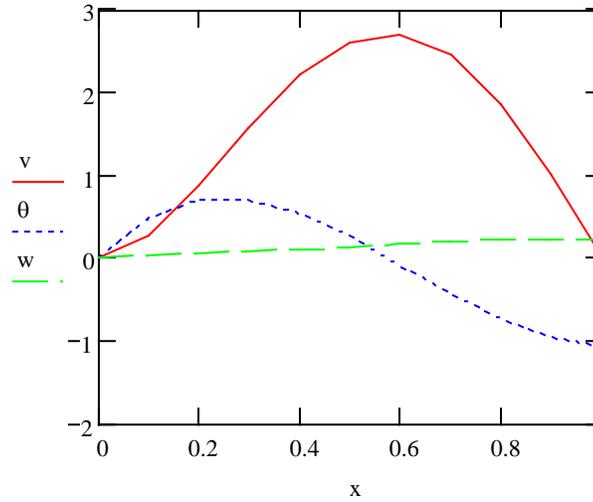


Рис.4.7 Перемещения балки при термомеханическом нагружении для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.6$

$$v = \bar{v} \cdot 10^3, \theta = \bar{\theta} \cdot 10^2, w = \bar{w} \cdot 10^4$$

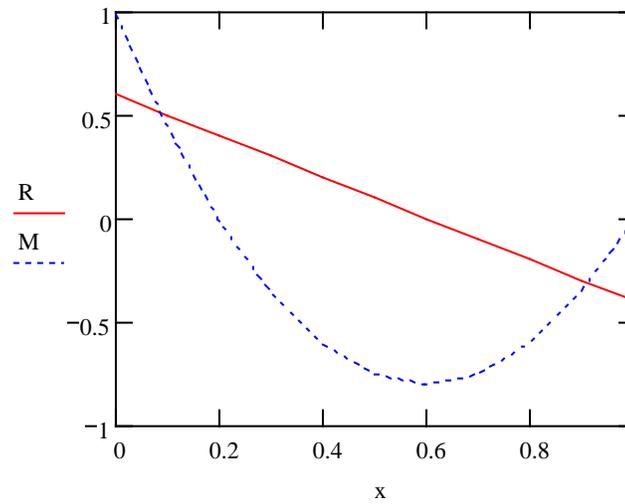


Рис.4.8 Распределение изгибающего момента и вертикальной составляющей силы при термомеханическом нагружении для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.03$   $R = \bar{R}$ ,  $M = \bar{M} \cdot 10$

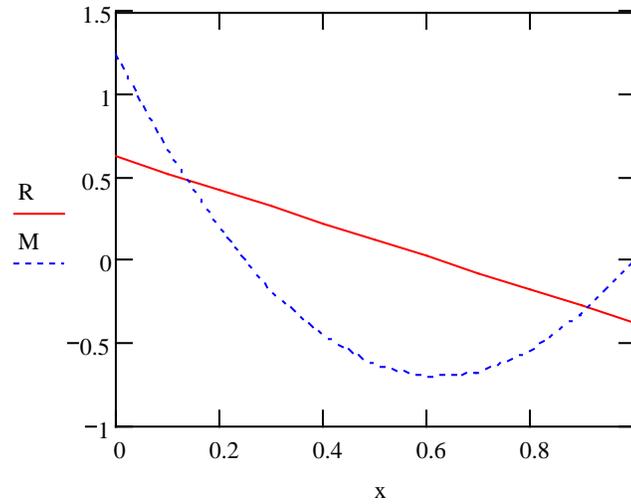


Рис.4.9 Распределение изгибающего момента и вертикальной составляющей силы при термомеханическом нагружении для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.6 R = \bar{R}, M = \bar{M} \cdot 10$

Рассмотрим продольный изгиб прямого стержня под действием сосредоточенной силы и температурного поля. Вес стержня не учитывается (рис. 4.10).

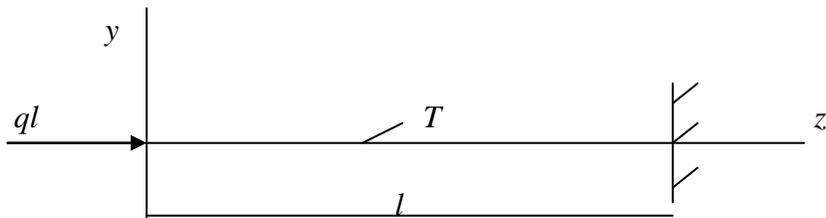


Рис.4.10 К задаче устойчивости консольной балки при термомеханическом нагружении

Вектор  $Y$  в начале интервала интегрирования имеет вид:

$$Y(0) = (A_1, A_2, A_3, 0, 0, -1)^T \quad (4.39)$$

Для определения неизвестных начальных параметров  $A_i, i = 1, 2, 3$  (параметров стрельбы) имеем граничные условия на другом конце стержня:

$$\varphi_4 = y_1 = 0, \varphi_5 = y_2 = 0, \varphi_6 = y_3 = 0. \quad (4.40)$$

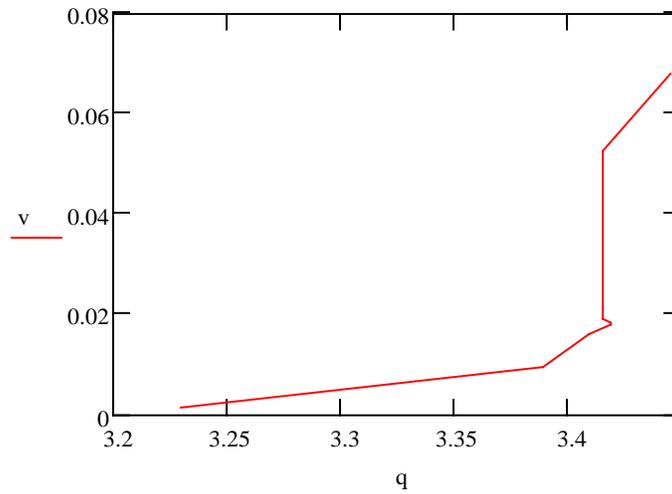
Соответственно якобиан задачи:

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial A_1} & \frac{\partial y_1}{\partial A_2} & \frac{\partial y_1}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial A_1} & \frac{\partial y_2}{\partial A_2} & \frac{\partial y_2}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial A_1} & \frac{\partial y_3}{\partial A_2} & \frac{\partial y_3}{\partial A_3} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

При  $\bar{q} = 0$  значения параметров  $A_i$  равняются нулю. В уравнениях (4.21) нужно положить:  $\bar{q}_y = 0, \bar{q}_z = 0, m = 0$ . Граничные условия удовлетворялись точностью  $10^{-4}$ . Расчеты были проведены также с точностью  $10^{-3}$ . Результаты интегрирования давали разницу в четвертом знаке. При этом существенно выросли количество приближений для данного значения параметра движения.

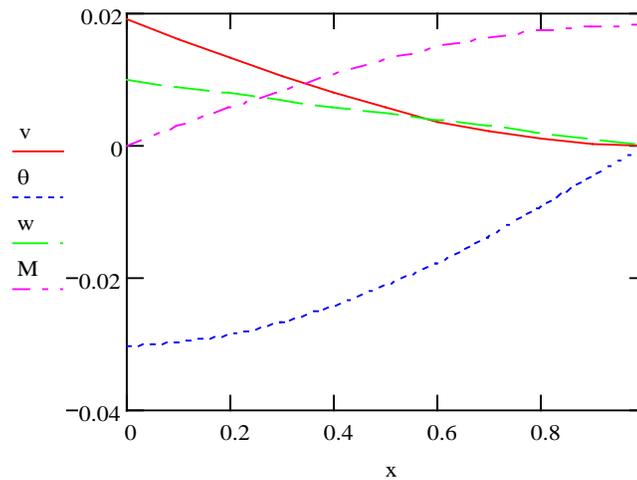
Для определения критической нагрузки был построен график зависимости перемещения точки приложения нагрузки от параметра  $\bar{q}$ . На рис.4.11 а дан фрагмент этой зависимости в области предельных точек значений нагрузки  $\bar{q} = 3,42$ . Численные расчеты показывают, что  $\bar{q} = 3,42$  является предельной точкой, в которой  $\partial \bar{q} / \partial \bar{v} = 0$ , или  $\partial \bar{v} / \partial \bar{q} \rightarrow \infty$ . Как известно [1], в предельных точках не пересекаются разные решения, но при переходе через эту точку устойчивое равновесие становится неустойчивой. При этом, предельная точка, обычно, соответствует неустойчивому равновесию. Предельная

точка начальной формы равновесия является критической. На рис.4.11 б представлены графики компонентов перемещений и изгибающего момента



а)

Рис.4.11. Зависимость поперечного перемещения свободного конца балки от параметра нагрузки



б)

Рис.4.11 б Компоненты перемещений и изгибающего момента

для параметра нагрузки  $\bar{q} = 3.416$

Было изучено деформирование консольной балки нагруженной продольно-поперечной нагрузкой и температурным полем (рис.4.12). Продольная нагрузка не меняет направление в процессе нагружения

. В таком случае примем  $\bar{q}_y = 1, \bar{q}_z = 5, \bar{m} = 0$ . Вектор  $Y$  в начальной точке имеет вид:

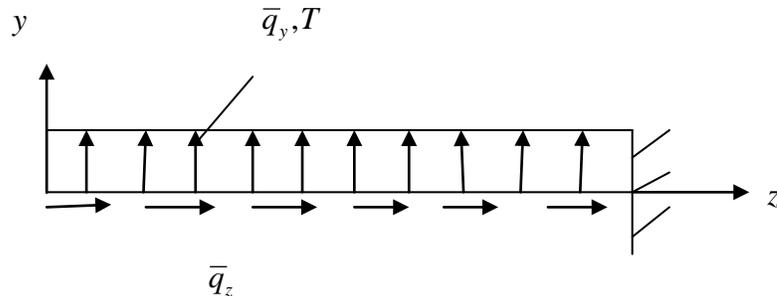


Рис.4.12 Продольно-поперечный изгиб консольной балки

$$Y(0) = (A_1, A_2, A_3, 0, 0, 0)^T \quad (4.42)$$

где  $A_i, i = 1, 2, 3$  неизвестные начальные параметры (параметры стрельбы). Для их определения имеем граничные условия в конце балки

$$\varphi_4 = y_1 = 0, \varphi_5 = y_2 = 0, \varphi_6 = y_3 = 0$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_4}{\partial A_3} \\ \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_5}{\partial A_3} \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_1} & \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_2} & \frac{\partial \varphi_6}{\partial A_3} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad I = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial A_1} & \frac{\partial y_1}{\partial A_2} & \frac{\partial y_1}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial A_1} & \frac{\partial y_2}{\partial A_2} & \frac{\partial y_2}{\partial A_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial A_1} & \frac{\partial y_3}{\partial A_2} & \frac{\partial y_3}{\partial A_3} \end{pmatrix}$$

Сходимость итерационного процесса на каждом шаге параметра  $\bar{q}$  достигается за 2-3 итерации. На рис.4.13 и рис.4.14 даны графики перемещений, а на рис. 4.15 и рис.4.16 представлены графики силовых факторов для значений параметра движения:  $\bar{q} = 0,03$  и  $\bar{q} = 1$ .

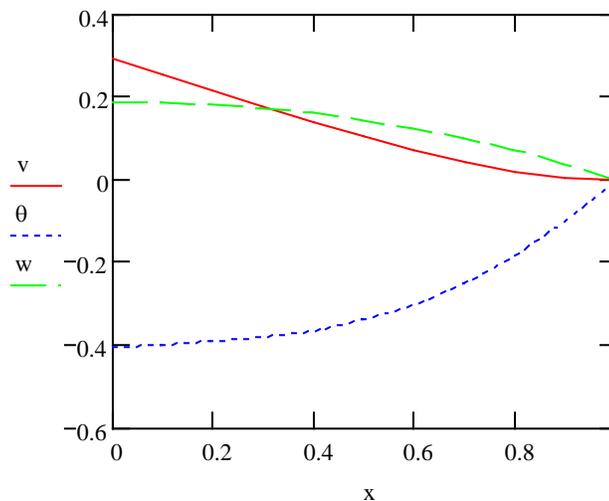


Рис.4.13 Перемещения консольной балки при продольно-поперечном изгибе в условиях термомеханического нагружения для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.03$ ,  $v = \bar{v} \cdot 10^2$ ,  $\theta = \theta \cdot 10^2$ ,  $w = \bar{w} \cdot 10^3$

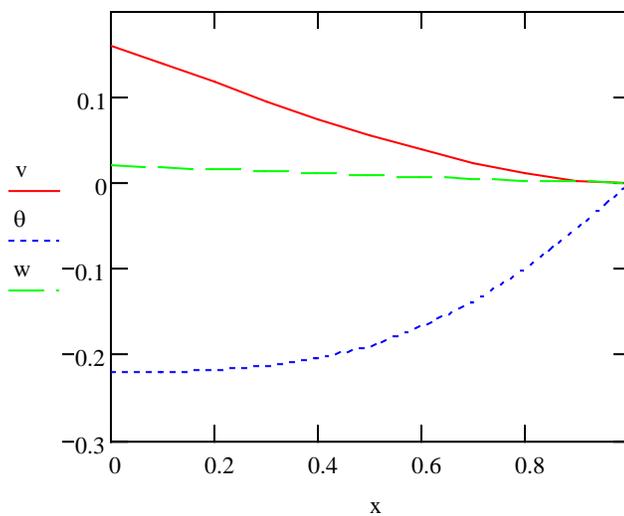


Рис.4.14 Перемещения консольной балки при продольно-поперечном изгибе в условиях термомеханического нагружения для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 1.0$ ;  $v = \bar{v}$ ,  $\theta = \theta$ ,  $w = \bar{w}$

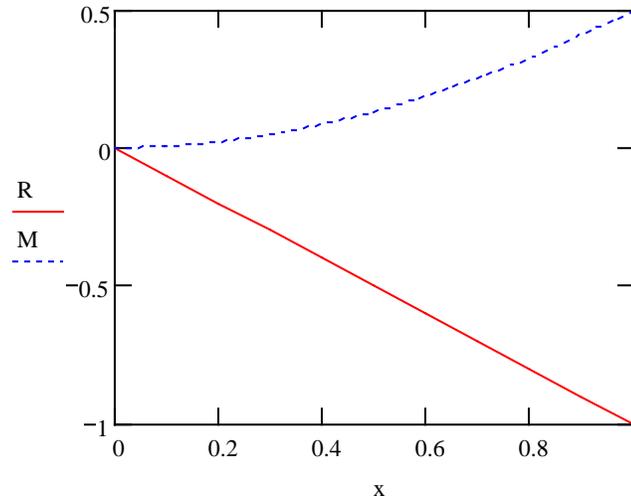


Рис.4.15 Распределение изгибающего момента и вертикальной составляющей силы при продольно-поперечном изгибе в условиях термомеханического нагружения для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 0.03$ ;  $R = \bar{R}, M = \bar{M}$

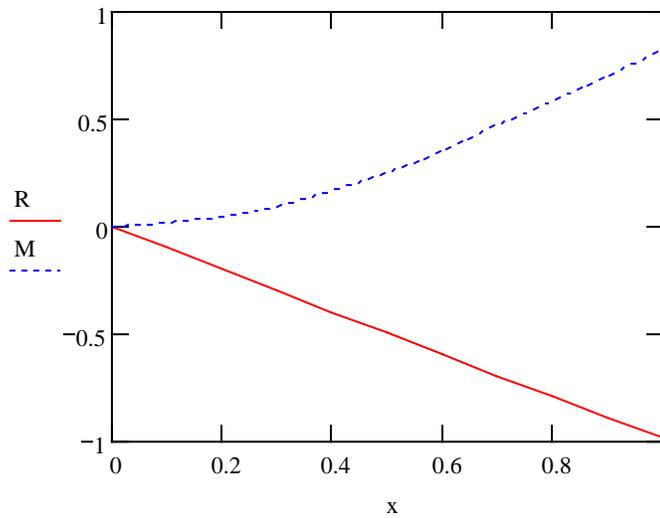


Рис.4.16 Распределение изгибающего момента и вертикальной составляющей силы при продольно-поперечном изгибе в условиях термомеханического нагружения для значения параметра нагружения  $\bar{q} = 1.0$ ;  $R = \bar{R}, M = \bar{M}$

#### 4.4 Устойчивость прямого стержня при неравномерном термомеханическом нагружении

Для обычных строительных конструкций критическая нагрузка при потере устойчивости в упругой стадии, часто весьма близка к разрушающей и является опасной. Тем более, что всегда существующие в природе отклонения от расчетной схемы отрицательно влияют на устойчивость элемента или всего сооружения. Поэтому весьма актуальна в расчетной модели максимально учитывать геометрические особенности конструкции и режим нагружения сооружения в условиях эксплуатации.

При исследовании устойчивости стойки каркасов необходимо учитывать собственный вес, внешние нагрузки и неравномерное температурное поле, которое может быть связано с разными причинами (аварийные ситуации, климатические условия и т.д.). Такие расчеты актуальны для внедрения новых строительных материалов. Весьма интересна установить зависимость критической нагрузки от градиента температуры в поперечном сечении и время, за которое наступает критическое состояние для конструкции.

Для установления критической нагрузки и формы деформированного элемента необходимо исследовать геометрически нелинейную термоупругую задачу. Аналитическое решение связанной нелинейной задачи механики стержней и задачи теплопроводности трудно и в определенном смысле не эффективно. Задача эффективно решается численными методами, что позволяет автоматизировать сложные инженерные расчеты. Основные уравнения нестационарной термомеханической задачи приведены в работе [74].

Рассмотрим стержень с прямоугольным поперечным сечением нагруженный продольно-поперечной нагрузкой и нестационарным температурным полем  $T = T(t, z, y)$ . Для температурной задачи выберем систему координат  $zOy$ , начало которой расположено на нижней поверхности стержня, ось  $y$  совпадает с осью симметрии поперечного сечения, а ось  $z$  параллельно оси стержня. Пусть нижняя поверхность стержня на участке  $[e, b]$  нагревается нагревательным устройством с удельной мощностью  $Q$ . Термомеханическое нагружение соответствует пути ADB (рис. 1.1).

Уравнение теплопроводности (2.20) в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \bar{a} \left[ \left( \frac{h}{L} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \frac{t_*}{c \rho T_f} Q [H_1(\bar{x} - \bar{e}) - H_1(\bar{x} - \bar{b})] \quad (4.43)$$

Для нелинейной задачи механики используем метод Эйлера. Выберем систему координат  $z_1 y_1$ , начало которой совпадает с приведенным центром тяжести поперечного сечения, а ось  $z_1$  параллельно с осью  $z$  (рис.4.17).

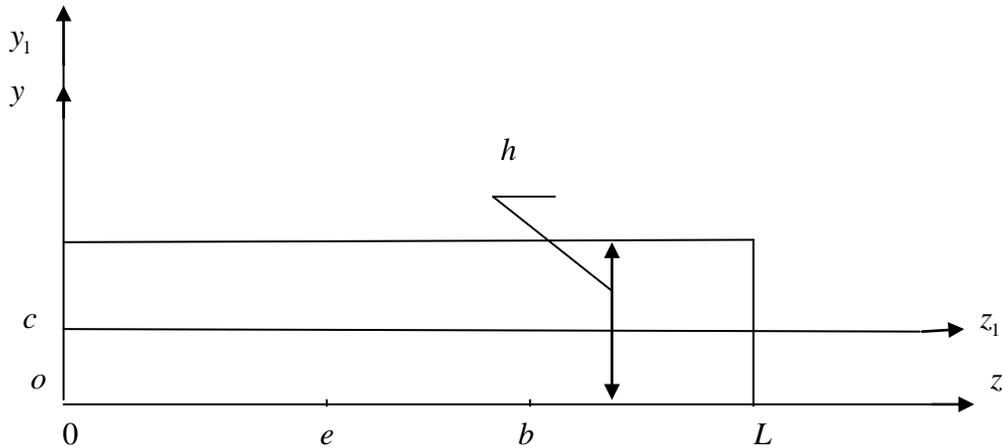


Рис.4.17 К расчету задачи нестационарной термоупругости

Поскольку температурное поле нестационарное, то компоненты вектора перемещений точек термо упругой линии тоже нестационарные и зависят от осевой координаты и времени  $(z_1, t)$ :  $w = w(z_1, t), v = v(z_1, t), \theta = \theta(z_1, t)$  [4]. Рассматривается медленное нагружение при котором силы инерции можно пренебречь. Будем считать, что перемещения большие и конечные значения не зависят от пути термомеханического нагружения. Материал подчиняется закону Гука и модуль упругости не зависит от температуры.

В координатах Эйлера система дифференциальных уравнения нелинейной задачи плоского деформирования термо упругости в безразмерных величинах (4.21) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}_1} &= (1 + \varepsilon_0) \sin \theta, \\
\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}_1} &= (1 + \varepsilon_0) \cos \theta - 1, \\
\frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_1} &= \bar{\kappa}_x, \\
\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{z}_1} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_{y_1}, \\
\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}_1} &= -(1 + \varepsilon_0) \bar{q}_{z_1}, \\
\frac{\partial \bar{M}}{\partial \bar{z}_1} &= (1 + \varepsilon_0) (\bar{H} \sin \theta - \bar{R} \cos \theta - \bar{m})
\end{aligned} \tag{4.44}$$

В уравнениях (4.43) и (4.44) использованы безразмерные величины приведенные в параграфах 2.3 и 4.2

Последовательность решения задачи такова. Сначала решается задача теплопроводности и на каждом шаге определяем распределение температуры в стержне, находим приведенный центр тяжести поперечного сечения и интегрируем нелинейные дифференциальные уравнения плоского деформирования (4.44).

Для интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (4.43) имеем начальные и граничные условия:

$$t = 0, T = T_f \tag{4.45}$$

$$y = 0, z \in [0, e] \wedge z \in (b, L], -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T_a - T_f)$$

$$y = 0, z \in [e, b], T = f_1(t)$$

$$y = h, z \in [0, L], -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha(T_h - T_f) \tag{4.46}$$

$$z = 0, y \in [0, h], -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_1(T_0 - T_f)$$

$$z = L, y \in [0, h], -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_1(T_L - T_f)$$

В граничные условия (4.46) функция  $f_1(t)$  обычно задается на основе экспериментов например в виде зависимости (2.17) или в виде степенной функции в интервале  $[e, b]$   $f_1(t) = T_f + q \cdot t^n$ . Степенная зависимость установлена на основе результатов экспериментальных исследований приведенных в пятом разделе. Функцию  $f_1(t)$  можно задать, также, на основе характеристик нагревательного устройства.

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (4.44) используем граничные условия в соответствии (4.16). Например, для консольной балки с жестким защемлением на левом конце (в начале системы координат) в безразмерных величинах имеем:

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 = 0, \bar{v} = 0, \bar{w} = 0, \theta = 0, \\ \bar{z}_1 = 1, \bar{R} = 0, \bar{H} = 0, \bar{M} = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Решение уравнения теплопроводности (4.43) осуществляется методом прямых. Заменяем производные по координатам  $z$  и  $y$  центральными конечно-разностными аналогами выбирая прямоугольную сетку, как это сделано в параграфе 2.3

$$\dot{\bar{T}}_{i,j} = \bar{a} \left[ \left( \frac{h}{L} \right)^2 \frac{\bar{T}_{i+1,j} - 2\bar{T}_{i,j} + \bar{T}_{i-1,j}}{\Delta \bar{z}^2} + \frac{\bar{T}_{i,j+1} - 2\bar{T}_{i,j} + \bar{T}_{i,j-1}}{\Delta \bar{y}^2} \right] + \bar{Q} \quad (4.48)$$

Начальные и граничные условия в безразмерных величинах в соответствии с рис.2.3 имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{t} = 0, \bar{T}_{i,j} = 1; \\ j = 1, i \in [1, \dots, 4] \wedge i \in [6, \dots, 8], \bar{T}_{i,0} = \bar{T}_{i,2} - 2\alpha \Delta \bar{y} h (\bar{T}_{i,1} - 1) / (\lambda T_f); \\ j = 1, i \in [5, \dots, 8], \bar{T}_{i,1} = \bar{f}_1(\bar{t}); \\ j = m, \bar{T}_{i,m+1} = \bar{T}_{i,m-1} - 2\alpha \Delta \bar{y} h (\bar{T}_{i,m} - 1) / (\lambda T_f); \\ i = 0, \bar{T}_{0,j} = \bar{T}_0; i = n, \bar{T}_{n+1,j} = \bar{T}_{n-1,j} - 2\alpha_1 \Delta \bar{z} L (\bar{T}_{n,j} - 1) / (\lambda T_f). \end{aligned} \quad (4.49)$$

На каждом шаге времени, после определения температурного поля решается нелинейная краевая задача деформирования стержня. Интегрирование системы дифференциальных уравнений (4.44) с граничными условиями (4.47) проводится методом движения по параметру с параллельной пристрелкой изложенный в параграфе 4.2.

Деформация термо упругой линии  $\varepsilon_0$  и величина  $\bar{\kappa}_x$  определяются с помощью уравнений (4.19) и (4.20). При интегрировании системы (4.44) в качестве параметра движения следует принять внешнюю нагрузку. При нулевом значении внешней нагрузки точно задаются граничные условия в начале интервала интегрирования.

## 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СТЕРЖНЕ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Стержневые элементы конструкций в период эксплуатации часто испытывают одновременное воздействие неоднородного температурного поля и механической нагрузки. Следовательно, расчет напряженно-деформированного состояния и оценка прочности необходимо вести на основе решения связанной задачи теплопроводности и механики деформируемого твердого тела.

В общей многомерной постановке решение этой задачи достаточно сложно. Разработка относительно простой, прикладной модели требует введения определенных гипотез. Для проверки достоверности получаемых теоретических результатов, необходимо провести экспериментальное исследование, которое дает возможность также проверить справедливость вводимых гипотез. Основные результаты экспериментальных исследования перемещений и температурного поля консольной балки представлены в работах [3,67].

### 5.1 Описание экспериментального стенда

В лаборатории сопротивления материалов государственного университета Акакия Церетели было проведено испытание консольной призматической балки постоянного прямоугольного сечения при термомеханическом нагружении (Рис.5.1).



Рис.5.1 Экспериментальный стенд

Схема экспериментального стенда показана на рис.5.2 Характерные геометрические размеры стенда:  $l = 700\text{мм}$ ,  $l_1 = 350\text{мм}$ ,  $l_2 = 190\text{мм}$ ,  $l_3 = 240\text{мм}$ . Материал балки ст.45 с геометрическими размерами  $12 \times 24 \times 700$  (мм). Было изготовлено нагревательное устройство с использованием спирали мощностью 200 Вт., с помощью которого нагревали часть нижней поверхности балки длиной 19 см. Температуру

измеряли цифровым контактным термометром ТК – 5.03. Для измерения перемещений применяли индикаторы часового типа. Механическую нагрузку создавали с помощью гири 1 кг. и 2 кг.

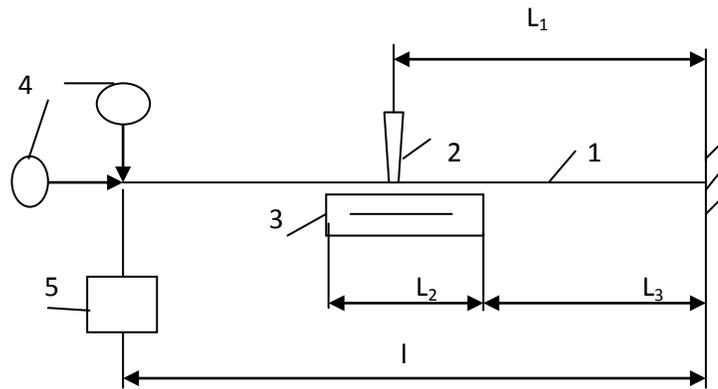


Рис.5.2 Схема экспериментального стенда.

1-консольная балка, 2- термометр, 3-нагревательное устройство, 4-индикаторы часового типа, 5- гири

Опыты проводились для двух случая нагружения: первый – когда балка только нагревается на части нижней поверхности и второй – термомеханическое нагружение. При термомеханическом нагружении вначале балку нагружали на свободном конце гирю, а затем нагревали на части нижней поверхности. Балка нагревалась в течении 8 мин. Интервалом 40 сек. измеряли температуру нижней нагреваемой части и верхней поверхности в данной точке, а также вертикальное и горизонтальное перемещения свободного конца балки.

## 5.2 План эксперимента и результаты измерений

Этот эксперимент однофакторный. Независимым фактором является время. Был выбран последовательный план. Проводились три повторные измерения для каждого уровня независимого фактора. Для графического представления экспериментальных данных была проведена статистическая обработка результатов измерений. Резко отклоняющиеся экспериментальные точки проверялись по критерий Смирнова - Гребса[25]:

$$V_{i \max} = \frac{y_{i \max} - \bar{y}_i}{\sigma} \sqrt{\frac{m}{m-1}}, \quad V_{i \min} = \frac{\bar{y}_i - y_{i \min}}{\sigma} \sqrt{\frac{m}{m-1}}$$

где:  $y_{i \max}$ ,  $y_{i \min}$  – максимальное и минимальное значения измеряемой величины на данном уровне независимого фактора,  $\bar{y}_i$  - среднее значение наблюдаемых величин на данном уровне независимого фактора,  $m$  - количество повторных измерений,  $\sigma$  - среднее квадратичное отклонение.

Если  $V_{i \max} > V_t$  или  $V_{i \min} > V_t$  то соответствующие экспериментальные точки исключаются из дальнейшего рассмотрения. Если  $V_{i \max} < V_t$  или  $V_{i \min} < V_t$  то соответствующие экспериментальные точки остаются.  $V_t = V_t(p, m)$  - теоретическое значение параметра и выбирается из таблицы [2,3] в зависимости от доверительной вероятности  $p$  (например  $p=0.9$ ) и от числа повторных измерений  $m$  ( $m=3$ ).

Однородность дисперсий проверяли по критерий Кокрена (Кохрена):  $G = \sigma_{i \max}^2 / \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ , где  $n$  - число уровней независимого фактора,  $\sigma_{i \max}^2$  - максимальная дисперсия,  $\sigma_i^2$  - дисперсии на каждом уровне. Если  $G < G_t$ , то гипотеза об однородности дисперсии не отбрасывается. Величина  $G_t = G_t(p, n, m-1)$  берется из таблицы в зависимости от доверительной вероятности, числа уровней независимого фактора и числа повторных измерений  $m$ .

Для каждого уровня независимого фактора находили средние значения измеряемых величин. На рис.5.3 показаны зависимости температуры нижней нагреваемой части балки

и температуры верхней поверхности балки в измеряемой точке. На рис.5.4 показаны зависимости вертикального и горизонтального перемещений свободного конца от времени при термомеханическом нагружении балки.

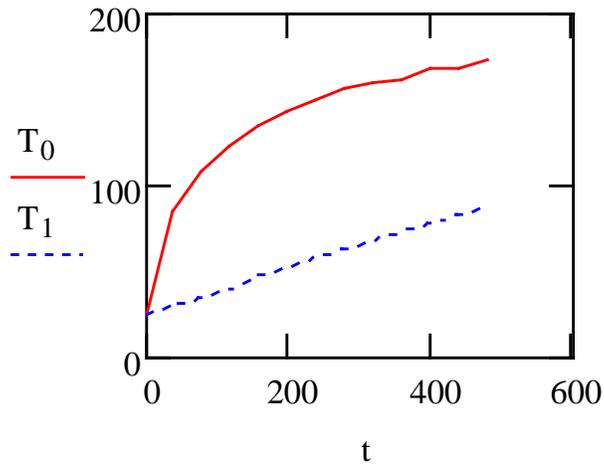


Рис.5.3 Зависимость температуры нижней нагреваемой поверхности балки ( $T_0$ ) и верхней поверхности в измеряемой точке ( $T_1$ ) от времени

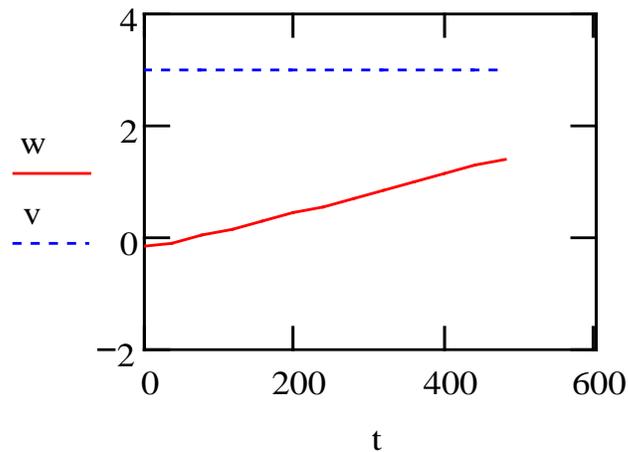


Рис.5.4 Зависимость горизонтального ( $W$ ) и вертикального ( $V$ ) перемещений свободного конца балки от времени при термомеханическом нагружении

Из рис.5.3 видно, что температура в точке верхней поверхности в пределах расположения нагревательного устройства меняется фактически линейно во времени а на нижней нагреваемой поверхности температура меняется нелинейно и примерно два раза выше. На рис.5.4 вертикальное перемещение от статической механической нагрузки гораздо больше чем горизонтальное перемещение. Однако, под действием температуры картина меняется и вертикальное перемещение остается фактически постоянной, т.е. перемещение от изменения температуры существенно меньше, чем от нагрузки а горизонтальное перемещение увеличивается существенно и в конце нагрева ( $t = 440\text{сек.}$ ) становится соизмеримым с вертикальным перемещением.

### 5.3 Обработка экспериментальных данных

#### в системе Mathcad

Для численного расчета необходимо знать зависимость температуры от времени на участке нагрева части нижней поверхности стержня. Следовательно, необходимо задать функцию  $f_1(t)$  в граничных условиях для интегрирования дифференциального уравнения теплопроводности. В таблице 1. (Приложение 3) даны результаты повторных измерений температуры на участке нагрева полученных в эксперименте. По этим данным определяем усредненные значения температуры с постоянным интервалом времени. Они указаны в матрице T.

Функцию  $f_1(t)$  можно задать дискретно в виде приведенных ниже матриц t и T. Часто, для расчета удобнее задать зависимость T(t) в виде функции  $f_1(t)$ , для этого можно применить трехпараметрическую регрессию степенной функцией вида:

$$f(t) = a \cdot t^b + c \quad (5.1)$$

где  $a, b, c$  - искомые параметры регрессии.

Вычисление неизвестных параметров проводим в системе Mathcad с помощью

встроенной функции  $\text{prwfit}(x,y,g)$ ,

где:

$x$  – вектор действительных данных аргумента;

$y$  – вектор действительных значений функции того же размера;

$g$  – вектор из трех элементов, задающий начальные значения  $a, b, c$ .

$$\begin{array}{l} t := \\ \left( \begin{array}{c} 0 \\ 40 \\ 80 \\ 120 \\ 160 \\ 200 \\ 240 \\ 280 \\ 320 \\ 360 \\ 400 \\ 440 \\ 480 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} T1 := \\ \left( \begin{array}{c} 27 \\ 81 \\ 106 \\ 118 \\ 123 \\ 133 \\ 142 \\ 151 \\ 157 \\ 160 \\ 163 \\ 164 \\ 169 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} T2 := \\ \left( \begin{array}{c} 26 \\ 96 \\ 109 \\ 131 \\ 144 \\ 154 \\ 161 \\ 160 \\ 163 \\ 164 \\ 172 \\ 174 \\ 178 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} T3 := \\ \left( \begin{array}{c} 25 \\ 78 \\ 109 \\ 120 \\ 138 \\ 142 \\ 146 \\ 155 \\ 156 \\ 160 \\ 166 \\ 167 \\ 169 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} T := \frac{(T1 + T2 + T3)}{3} \\ TT := \frac{T1 + T3}{2} \end{array}$$

$$T =$$

	0
0	26
1	85
2	108
3	123
4	135
5	143
6	149.667
7	155.333
8	158.667
9	161.333
10	167
11	168.333
12	172

$$TT =$$

	0
0	26
1	79.5
2	107.5
3	119
4	130.5
5	137.5
6	144
7	153
8	156.5
9	160
10	164.5
11	165.5
12	169

$$x := (0 \ 40 \ 80 \ 120 \ 160 \ 200 \ 240 \ 280 \ 320 \ 360 \ 400 \ 440 \ 480)^T$$

$$y := (26 \ 85 \ 108 \ 123 \ 135 \ 143 \ 150 \ 155.3 \ 159 \ 161.3 \ 167 \ 168.3 \ 172)^T$$

$$g := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \text{pwrfit}(x, y, g)$$

$$C = \begin{pmatrix} 20.668 \\ 0.322 \\ 24.878 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := C_0 \cdot t^{C_1} + C_2$$

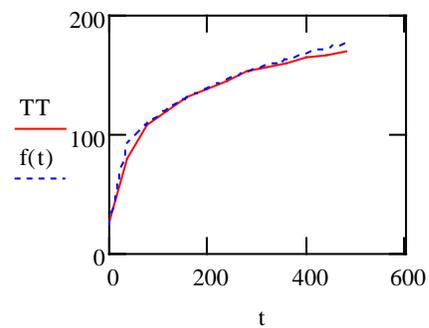
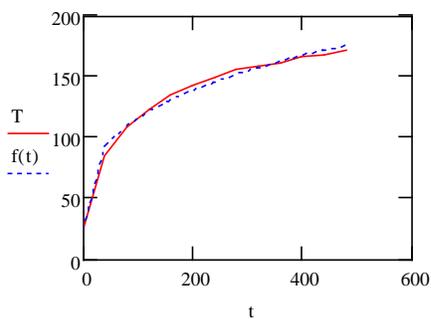


Рис.5.5 Степенная регрессия температуры нагрева от времени

Значения параметров регрессии даны в матрице  $C$ :  
 $C_0 = a = 20.688, C_1 = b = 0.322, C_2 = c = 24.878$ . Следовательно функция  $f_1(t)$  имеет вид:

$$f_1(t) = 20.688 \cdot t^{0.322} + 24.878 \quad (5.2)$$

На рис.5.5 сплошными линиями построены зависимости усредненных экспериментальных данных а пунктирными линиями представлены графики, построенные по формуле (5.2). Из рис.5.5 видно, что функция (5.2) хорошо описывают результаты опытов.

$$\begin{array}{l}
 \text{TI1} := \begin{pmatrix} 23 \\ 27 \\ 32 \\ 38 \\ 49 \\ 52 \\ 58 \\ 62 \\ 68 \\ 72 \\ 78 \\ 83 \\ 87 \end{pmatrix} \\
 \text{TI2} := \begin{pmatrix} 26 \\ 30 \\ 37 \\ 42 \\ 47 \\ 52 \\ 58 \\ 63 \\ 68 \\ 73 \\ 78 \\ 83 \\ 87 \end{pmatrix} \\
 \text{TI3} := \begin{pmatrix} 26 \\ 29 \\ 34 \\ 39 \\ 44 \\ 50 \\ 56 \\ 62 \\ 68 \\ 74 \\ 79 \\ 84 \\ 89 \end{pmatrix} \\
 \text{TI} := \frac{(\text{TI1} + \text{TI2} + \text{TI3})}{3}
 \end{array}$$

	0
0	25
1	28.667
2	34.333
3	39.667
4	46.667
5	51.333
6	57.333
7	62.333
8	68
9	73
10	78.333
11	83.333
12	87.667

$$y1 := (25 \ 28.67 \ 34.33 \ 39.67 \ 46.67 \ 51.33 \ 57.33 \ 62.33 \ 68 \ 73 \ 78.33 \ 83.33 \ 87.67)^T$$

$$g1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \text{pwrfit}(x, y1, g1)$$

$$D = \begin{pmatrix} 0.153 \\ 0.98 \\ 23.929 \end{pmatrix}$$

$$f1(t) := D_0 \cdot t^{D_1} + D_2$$

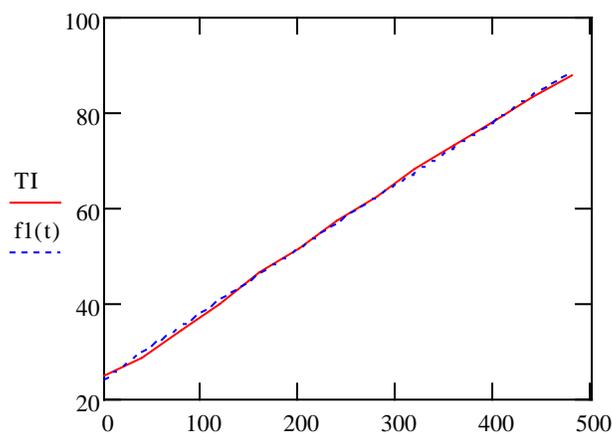


Рис.5.6 Степенная регрессия. Зависимость температуры в  
измеряемой точке от времени

Были обработаны, также экспериментальные данные температуры в измеряемой точке в виде степенной функции сглаживания (степенная регрессия) в системе Mathcad . вычисленные значения коэффициентов даны в матрице  $D$ .  $D_0 = 0.153, D_1 = 0.98$   $D_2 = 23.929$  . Следовательно, зависимость температуры от времени в измеряемой точке установленная в эксперименте имеет вид:

$$T(t) = 0.153 \cdot t^{0.98} + 23.929 \quad (5.3)$$

На рис.5.6 сплошной линией представлен график зависимости температуры от времени построенный по результатам усредненных значений повторных измерений, а пунктирной линией построен график по функции (5.3). Из рис.5.6 видно, что функция (5.3) достаточно хорошо описывает результаты экспериментов.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ПО РАБОТЕ

1. Выполнено теоретическое и экспериментальное исследование перемещений, внутренних силовых факторов и температурного поля при плоском деформировании стержней.
2. Изучена температурная задача для стержня прямоугольного поперечного сечения. Дифференциальное уравнение одномерной нестационарной теплопроводности решена в системе Mathcad для граничных условий первого и третьего рода, в том числе, для нестационарных граничных условий установленных экспериментально. Представлены прикладные программы. Результаты численных расчетов хорошо согласуются с результатами эксперимента. Максимальная погрешность составляет 17 % в конце нагрева при  $t=440$  с. представлены прикладные программы расчета.
3. Рассмотрена двухмерная нестационарная задача теплопроводности, когда на части поверхности стержня действует нагревательное устройство. Граничные условия на этой части записаны с помощью функции Хэвисайда. Решение дифференциального уравнения в частных производных проводится методом прямых используя прямоугольную сетку деления.
4. Исследованы обобщенные геометрические характеристики плоского сечения при неравномерном распределении температуры и переменном модуле упругости. Вычислены обобщенные моменты инерции для конструкционных углеродистых сталей и разных сплавов. Установлено, что расчет обобщенных геометрических характеристик существенно для алюминиевых, магниевых и др. сплавов модуль упругости которых меняется до 24% при нагреве до 250-300 °С, для конструкционных углеродистых сталей модуль упругости при нагреве до 250 °С меняется незначительно и следует использовать обычные геометрические характеристики.
5. Определены координаты приведенного центра тяжести при неравномерном распределении температуры. Установлено, что увеличение градиента температуры влияет на координаты приведенного центра тяжести и фактически не зависит от

закона изменения температуры. Расчеты проведены в системе Mathcad. Представлена прикладная программа.

6. Рассмотрена нелинейная задача плоского деформирования стержней с начальной кривизной при термомеханическом нагружении. Записана система нелинейных дифференциальных уравнений с учетом деформации термоупругой линии. Сформулированы граничные условия.
7. Для стационарного термомеханического нагружения проведены численные расчеты на visual FORTRAN. Решение нелинейной краевой задачи проводится методом движения по параметру с параллельной пристрелкой. Даны результаты расчетов для прямых стержней и представлены распределения перемещений и внутренних силовых факторов. Установлена критическая нагрузка соответствующая критической точке деформирования, в которой  $(\partial \bar{v} / \partial \bar{q} \rightarrow \infty)$
8. Рассмотрена задача плоского деформирования прямого стержня при нестационарном термомеханическом нагружении без учета инерционных составляющих. Сформулированы основные уравнения, начальные и граничные условия. Для уравнения теплопроводности сформулированы смешанные граничные условия на части поверхности.
9. Проведено экспериментальное исследование температурного поля и перемещений консольной балки прямоугольного поперечного сечения из ст.45. Для нагрева части нижней поверхности балки было изготовлено нагревательное устройство и собран экспериментальный стенд.
10. Проведены измерения температур нижней нагреваемой части балки и верхней свободной поверхности, а также, вертикальное и горизонтальное перемещения свободного конца. Установлена, что температура свободной поверхности в примерно два раза меньше температуры нагреваемой части стержня. При нагружении силой вертикальное перемещение существенно больше горизонтального, а при нагреве части балки, горизонтальные перемещения больше чем поперечные.

11. Результаты экспериментальных измерений обработаны в системе Mathcad. Путем регрессионного анализа получены зависимости температур на части нижней и верхней поверхностей от времени, которые использованы в качестве граничных условий при численных расчетах температурной задачи. Определены коэффициенты степенной регрессии, которые достаточно точно описывают экспериментальные кривые. Представлена прикладная программа.
12. Разработанная методика расчета может быть использована для расчета стержневых элементов машиностроительных и строительных металлоконструкции испытывающих механические и тепловые воздействия. Разработанные прикладные программы легко могут быть применены инженерами в практических расчетах, а также в процессе обучения студентов старших курсов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем.- М.: Машиностроение (Библиотека расчетчика)б 1978.-312с.
2. Аронсон А.Я. Об одном варианте построения обобщенной теории стержней. В кн.: динамика и прочность упругих и гидроупругих систем.- М.:Наука. 1975.- С.99-114.
3. Байсарова Г.Г., Киквидзе О.Г. Экспериментальное исследование перемещений и температурного поля в стержне при термомеханическом нагружении// GEORGIAN ENGINEERING NEWS, No.3,2015.-pp.41-44
4. Байсарова Г.Г., Киквидзе О.Г. Устойчивость стержня при неравномерном термомеханическом нагружении// GEORGIAN ENGINEERING NEWS, No.1,2016.-pp.
5. Беилин Е.А. механика стержневых систем и сплошных сред.- Сб. трудов ленинградского инженерно-строительного института., 1969. - №60.- С.5-19.
6. Берхов Н.Ф. Анализ соотношений обобщенной теории кривых стержней.- Тр. Ленингр. Метал. Завода.-1969, вып.12, С.147-156.
7. Биргер И.А. Неравномерно нагретые стержни с переменными параметрами упругости.- М.: . Машгиз. Расчеты на прочность. Вып.7, 1961, С.76-109.
8. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопrotивление материалов.-М.: Наука, гл.ред.физ.-мат.литературы.-1986.-560с.
9. Боли Б., Уэинер Дж. Теория температурных напряжений.-М.: Мир, 1964.-517с.
10. Валишвили Н.В. Устойчивость сжатых и изогнутых стержней при действии следящих нагрузок./Москва. Труды МВТУ, №322, «Динамика и прочность машин», -1980.
11. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.- М.:Машиностроение, 1976, - 278с.
12. Валишвили Н.В., Светлицкий В.А. Определение форм равновесия ленточного радиатора// Изв. АН СССР. Механика твердого тела (МТТ). – 1981. - №3
13. Валишвили Н.В.О формах равновесия движущегося гибкого стержня// Международная конференция «Неклассические задачи механики». Кутаиси. 25-27.10.2007.- С.106 – 126.
14. Власов В.З. Избранные труды. В 3-х т., т.2.-М.:изд-во АН СССР, 1962-1964, 507с.

15. Волков Е.А. Численные методы. 2-е изд.-М.:Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987.- 248с.
16. Гейтвуд Б.Е. Температурные напряжения.- М.:Изд-во иностр. лит., 1959
17. Глушков Г.С. Инженерные методы расчетов на прочность и жесткость с применением моментов высоких порядков.- М.: Машгиз, 1949,-246с.
18. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости.- М.: Наука, 1969.-336с.
19. Голубев О.Б. Обобщение теории тонких стержней.- Тр. Ленингр. политехн. ин-та.,1963, № 226.- С.18-24
20. Горгидзе А.Я. Кручение и изгиб составных брусьев со слабо изогнутыми осями.- Тр. Математического института АН ГССР, 1949.-№17.-С.29-36.
21. Гребен Е.С. К теории тонких стержней//Изв. АН СССР. Механика твердого тела.- 1967.- №5.- С.67-72.
22. Григолюк Э.И., Селезнев И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.-М., Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. ВИНТИ., т.5.- 1973, 272с.
23. Грудев И.Д. О больших прогибах пространственных тонких стержней.- Труды ВНИИ физ.-техн. и радиотехн. Измерений, 1971, вып.8, с.17-36.
24. Джанелидзе Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней.//Прикладная математика и механика.-1949.- 13, вып.6.-С.185-197.
25. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Пер. с англ.- М.: Мир, 1981.-518с.
26. Илюхин А.А. О деформации упругой линии//Киев., Механика твердого тела.- 1969,вып.1,С.128-138.
27. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней.- Киев., Наукова думка, 1979.-216с.
28. Кабриц С.А., Терентьев В.Ф. О численном построении диаграмм нагрузка-перемещение в одномерных нелинейных задачах теории стержней и оболочек.-В кн.: Вопросы механики и процессов управления. Л.:ЛГУ, 1977.- № 1.-С.155-171
29. Киквидзе О.Г., Киквидзе Л.Г. Большие перемещения термоупругих стержней при плоском изгибе//Проблемы прикладной механики. Изд-во «Комитет ИФТоММ-а Грузии».-№4(5).-2001.-С.73-77.

30. Киквидзе О.Г., Киквидзе Л.Г. Геометрически нелинейная задача изгиба термоупругих стержней .- Тбилиси. Груинский технический университет, сб. трудов межд.симпозиума «Проблемы тонкостенных пространственных конструкции», 4-5.07.01 – С.28-31.
31. Киквидзе О.Г. Большие перемещения термоупругих стержней при изгибе.// Проблемы машиностроения и надежности машин, РАН.-№1.-2003.-С.49-53
32. Киквидзе О.Г., Махутов Н.А. Уравнение состояния сплавов с эффектом памяти формы//Проблемы машиностроения и надежности машин, 1996.-№2.-С.51-56.
33. Киквидзе О.Г., Байсарова Г.Г. Обобщенные геометрические характеристики для расчета лопаток турбин//III International Scientific Conference ENERGY:REGIONAL PROBLEMS AND DEVELOPMENT OPPORTUNITIES 24-25.10.2015 Kutaisi, Georgia
34. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 13. – СПб.: БХВ – Петербург, 2006.-528 с.
35. Коновалов А.А. Дифференциальные уравнения для больших перемещений пространственного стержня//Ижевск. Динамика, прочность и долговечность деталей машин. 1974, вып.3. С.3-12.
36. Кудрявцев Е.М. Mathcad 8. Символьное и численное решение разнообразных задач.- М.:ДМК, 2000.-320с.
37. Лариков Н.Н. Теплотехника. Учеб. Для вузов.-3-е изд., перераб. и доп.-М.: Строймиздат, 1985.-432с.
38. Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней. – Тр. Ленингр. политехн. института, 1941.-№3.- С.47-54.
39. Ляв А. Математическая теория упругости.- М.-Л., Гостехиздат, 1935.- 674с.
40. Макаров Е.Г. Сопротивление материалов на базе Mathcad.- СПб.: БХВ – Петербург, 2004.-512с.
41. Макушин Н.Н. теория упругой линии при продольно – поперечном изгибе/Тр. Моск.мех.-маш.стр.ин-та им. Н.Э.Баумана, вып.56/3, машгиз,1939
42. Масленков С.Б., Масленкова Е.А. Стали и сплавы для высоких температур. Справочник в двух книгах.-М.:Металлургия, книга1/ 1991,383с. Книга 2.1991. 832с.

43. Николай Е.Л. К задаче об упругой линии двойкой кривизны.- /В кн. Труды по механике.-М.: ОГИЗ., 1955.-С.45-277.
44. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости.- М.-Л., Гостехиздат, 1948.- 320с.
45. Ооцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. и др. Сплавы с эффектом памяти формы. – М.: Металлургия, 1990.-224с.
46. Определение теплофизических и механических свойств материалов с эффектом памяти формы/Отчет о НИР Харьковский гос.университет №0185.0080132. Харьков, 1989.
47. Попов Е.П. О больших перемещениях изгиба стержней при произвольных нагрузках//Инженерный сборник.- 1947,т.4,вып.1.- С.46-74.
48. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней.-М.: Наука, гл.ред. физ.-мат. литературы, 1986.-296с.
49. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур/Н.И.Безухов, В.Л.Бажанов, И.И.Гольденблат и др. Под ред. И.И.Гольденבלата.- М.: Машиностроение. – 1965.- 568с.
50. Риз П.М. Деформация стержней закрученных и слабо изогнутых в ненапряженном состоянии.- Тр. ЦАГИ, 1940.-№ 471, С.37-43.
51. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х ч.-М.:Высшая школа, 1987. Ч.1-320с, ч.2-304с.
52. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей.-М.:Машиностроение,1982.- 279с.
53. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. упругие элементы машин.-М.:Машиностроение, 1989.-264с.
54. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней.- М.: Изд.-во МАИ.-2001.
55. Славутский Л.А. Основы регистрации данных и планирования эксперимента. – Чебоксары. Изд.-во ЧГУ,2006.-200с.
56. Термопрочность деталей машин. /Под ред. И.А.Биргера и Б.Ф.Шорра. - М.: Машиностроение, 1975.- 455 с.
57. Тихомиров Е.Н. О точном уравнении продольного изгиба// М.: Расчеты элементов конструкций на устойчивость, 1971, вып.15.- С.195-216.

58. Хофф Н. выпучивание при высокой температуре. В сб. «Механика» , №5, 1958.
59. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.-Л.: Машиностроение, Ленингр. Отд-ние, 1986.-336с.
60. Чиркин В.С. Теплофизические свойства материалов. - М.: Физматгиз, 1959.
61. Шеломов М.А. Статика брусьев с пространственной криволинейной упругой осью малой кривизны//Прочность конструкций летат.апаратов., 1974, вып.2.- С.33-39.
62. Юдаев Б.Н. Теплопередача.- М.: Высш. Школа, 1981.-319с.
63. Ярошевич Г.О. Распространение аналогии Кирхгофа на явление «перескока» //Изв. АН СССР, отд.техн.наук, Механика и машиностроение.- 1959.-№2.-С.33-39.
64. Antman S.S. Kirchoff's problem for nonlinearly elastic rods.-Quart. Appl. Math. 1974, 32.-№3.-pp.221-240.
65. Antman S.S. The theory of rods.- Hand. Phys., 1972.-pp.641-703.
66. Arkania Z. About the equation of absolutely flexible sticks balance calculation//Bulletin of Akaki Tsereteli State University. Kutaisi.2013.- №1.-2013.-p.153-158.
67. Baisarova G., Kikvidze O. Experimental investigation of beam at thermo mechanical loading // VI ANNUAL MEETING OF THE GEORGIAN MECHANICAL UNION 30.09-4.10.2015 Tbilisi, Georgia
68. Cohen H. A non-linear theory of elastic directed curves//International Journal of Engineering Sciences.- 1966.- 4, №5.-pp.511-524.
69. Eriksen J.L., Trudell C. Exact theory of stress and strain rods and shells //Arch. Ration Mech. And anal.-1958.-№1.-pp.295-323.
70. Green A.E., Knops R.J., Laws N. Large deformations, superposed small deformations and stability of elastic rods// International Journal solids and struct.- 1968,4.-№5.- pp.555-577.
71. Green A.E., Laws N. A general theory of rods//Proc.Roy.Soc.-1966,293.-1433.-pp.145-155.
72. Greenberg J.M. On the equilibrium configurations of compressible slender bars//Arch. Ration Mech. And anal. – 1967, 27.-№3.-pp.181-194.

73. Kikvidze O., Baisarova G. Non stationary problem of beam's deformation at thermo mechanical loading//Kutaisi. BULLETIN OF AKAKI TSERETELI STATE UNIVERSITY №2(4).- 2014.-p.77-82.
74. Reissner E. One dimensional large displacement finite strain beam theory//Stud.Ahhl. Math.-1973, 52.-№2.-pp.87-95.
75. Suhubi E.S. On the foundations of the theory of rods// International journal Engineering Sciences.-1968, 6.-№3.-pp.169-171.

## Приложение 1

Интегрирование дифференциального уравнения в частных производных

(Одномерная нестационарная задача теплопроводности)

partial differential equation thermal conductivity

$$\tau := 440 \quad h := 0.012 \quad d := 0.024 \quad \lambda := 51.5 \quad c_{\lambda\lambda} := 486 \quad \rho := 7854 \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.349 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := 7.95 \quad l := 0.7 \quad Q := 200 \quad T1 := 26 \quad L := 1 \quad T := 1 \quad D := \frac{a \cdot \tau}{h^2} \quad D = 41.226$$

$$q := Q \cdot \frac{\tau}{c \cdot T1 \cdot \rho \cdot d \cdot h \cdot l} \quad q = 4.398$$

Given

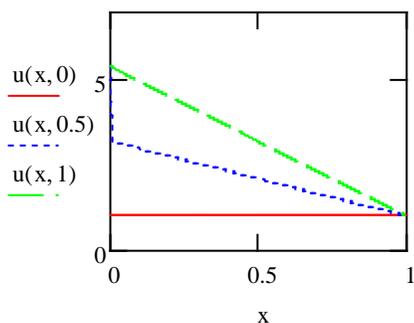
$$u_t(x, t) = D \cdot u_{xx}(x, t) + q \cdot \Phi(-x)$$

$$u(x, 0) = 1$$

$$v := 1$$

$$u(0, t) = 1 + q \cdot t \quad u(L, t) = 1 - (1 - v) \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot h \cdot \alpha \cdot 0.01}$$

$$u := \text{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 10\right]$$



## Приложение 1(продолжение)

partial differential equation thermal conductivity

$$\tau := 440 \quad h := 0.012 \quad d := 0.024 \quad \lambda := 51.5 \quad c_{\text{max}} := 486 \quad \rho := 7854 \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.349 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := 7.95 \quad l_{\text{max}} := 0.7 \quad Q := 200 \quad T1 := 25 \quad L_{\text{max}} := 1 \quad T_{\text{max}} := 1 \quad D := \frac{a \cdot \tau}{h^2}$$

$$q := Q \cdot \frac{\tau}{c \cdot T1 \cdot \rho \cdot d \cdot h \cdot l} \quad q = 4.574$$

Given

$$u_t(x, t) = D \cdot u_{xx}(x, t) + q \cdot \Phi(-x)$$

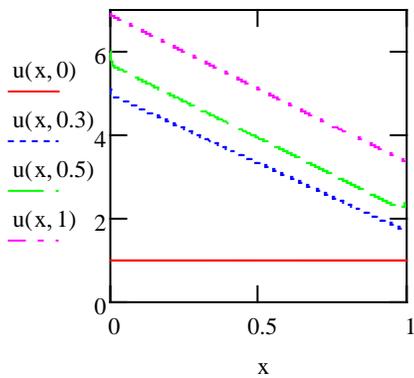
$$u(x, 0) = 1$$

$$v := 1$$

$$u(0, t) = \frac{24.878}{T1} + \frac{20.688 \cdot \tau^{0.322}}{T1} \cdot t^{0.322}$$

$$u(L, t) = \frac{23.929}{T1} + \frac{0.153 \cdot \tau^{0.98}}{T1} \cdot t^{0.98}$$

$$u := \text{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 10\right]$$



## Приложение 1(продолжение)

partial differential equation thermal conductivity

$$\tau := 4.40 \quad h := 0.012 \quad d := 0.024 \quad \lambda := 51.5 \quad c_{\lambda\lambda} := 486 \quad \rho := 7854 \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.349 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := 795 \quad l := 0.7 \quad Q := 200 \quad T1 := 25 \quad L := 1 \quad T := 1 \quad \text{Fo} := \frac{a \cdot \tau}{h^2} \quad \text{Fo} = 0.412$$

$$q := Q \cdot \frac{\tau}{c \cdot T1 \cdot \rho \cdot d \cdot h \cdot l} \quad q = 0.046 \quad \text{Bi} := \alpha \cdot \frac{h}{\lambda} \quad \text{Bi} = 0.185$$

Given

$$u_t(x, t) = \text{Fo} \cdot u_{xx}(x, t)$$

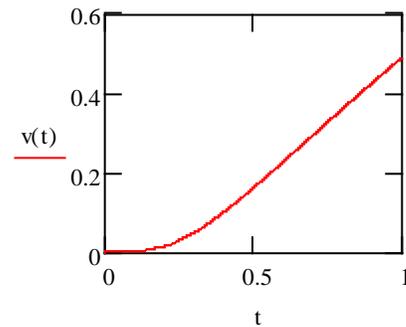
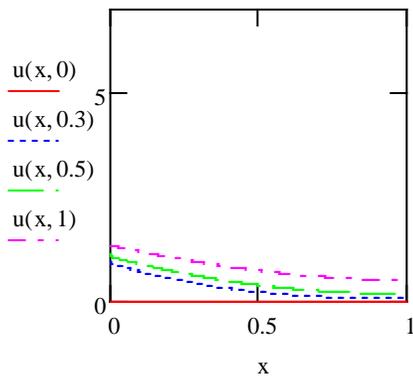
$$u(x, 0) = 0$$

$$u(0, t) = \frac{24.878}{T1} + \frac{20.688 \cdot \tau^{0.322}}{T1} \cdot t^{0.322} - 1$$

$$u_x(L, t) = -\text{Bi} \cdot u(1, t)$$

$$u := \text{Pdsolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 100, 10\right]$$

$$v(t) := u(1, t)$$



## Приложение 1(продолжение)

partial differential equation thermal conductivity

$$\tau := 440 \quad h := 0.012 \quad d := 0.024 \quad \lambda := 51.5 \quad c_{\lambda\lambda} := 486 \quad \rho := 7854 \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.349 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := 7.95 \quad l_{\lambda\lambda} := 0.7 \quad Q := 200 \quad T1 := 25 \quad L_{\lambda\lambda} := 1 \quad T_{\lambda\lambda} := 1 \quad D := \frac{a \cdot \tau}{h^2} \quad D = 41.226$$

$$q := Q \cdot \frac{\tau}{c \cdot T1 \cdot \rho \cdot d \cdot h \cdot l} \quad q = 4.574$$

Given

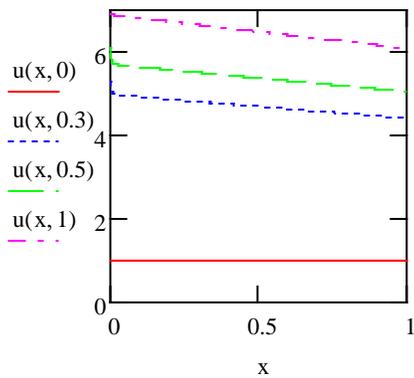
$$u_t(x, t) = D \cdot u_{xx}(x, t)$$

$$u(x, 0) = 1$$

$$u(0, t) = \frac{24.878}{T1} + \frac{20.688 \cdot \tau^{0.322}}{T1} \cdot t^{0.322}$$

$$u_x(L, t) = \frac{-\alpha \cdot (u(1, t) - 1.)}{\lambda}$$

$$u := \text{Pdesolve}\left[u, x, \left(\begin{matrix} 0 \\ L \end{matrix}\right), t, \left(\begin{matrix} 0 \\ T \end{matrix}\right), 100, 10\right]$$



# Приложение 1(продолжение)

partial differential equation thermal conductivity

$$\tau := 440 \quad h := 0.012 \quad d := 0.024 \quad \lambda := 51.5 \quad c_{\lambda} := 486 \quad \rho := 7854 \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 1.349 \times 10^{-5}$$

$$\alpha := 7.95 \quad l := 0.7 \quad Q := 200 \quad T1 := 25 \quad L := 1 \quad T_{\infty} := 1 \quad Fo := \frac{a \cdot \tau}{h^2} \quad Fo = 41.226$$

$$q := Q \cdot \frac{l}{c \cdot T1 \cdot \rho \cdot d \cdot h \cdot l} \quad q = 4.574 \quad Bi := \alpha \cdot \frac{h}{\lambda} \quad Bi = 1.852 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_1 := 79.5 \quad Bi1 := \alpha_1 \cdot \frac{h}{\lambda} \quad Bi1 = 0.019$$

Given

$$u_t(x, t) = Fo \cdot u_{xx}(x, t)$$

$$u(x, 0) = 0$$

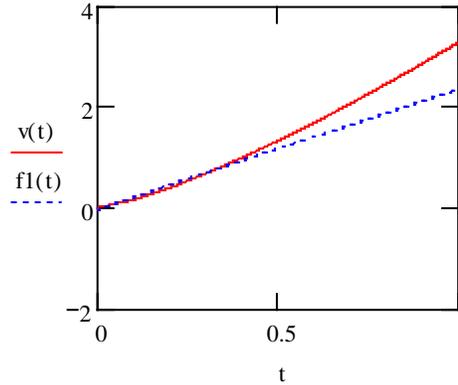
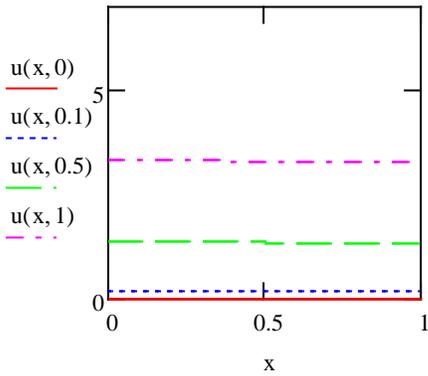
$$u_x(0, t) = Bi1 \cdot \left( 1 - \frac{24.878}{T1} - t^{0.322} \cdot 20.688 \cdot \frac{\tau}{T1} \right)$$

$$u_x(L, t) = -Bi \cdot u(1, t)$$

$$u := \text{Pdesolve} \left[ u, x, \left( 0, \left( \frac{0}{L} \right) \right), t, \left( 0, \left( \frac{0}{T} \right) \right), 100, 10 \right]$$

$$f1(t) := \frac{0.153 \cdot (t \cdot \tau)^{0.98} + 23.929 - T1}{T1}$$

$$v(t) := u(1, t)$$



## Приложение 2.

### Расчет обобщенных геометрических характеристик

$$\begin{aligned}
 T_0 &:= 108 & T_3 &:= 26 & T_0 &:= \frac{T_0}{T_3} & T_0 &= 4.154 \\
 T_1 &:= 34 & & & T_1 &:= \frac{T_1}{T_3} & T_1 &= 1.308 \\
 \lambda &:= 0.95 & k &:= 1 & n &:= 1 & & \\
 T(y) &:= T_0 + (T_1 - T_0) \cdot y^n & \beta &:= \frac{(1 - \lambda)}{(T_1)^k - 1} & & & \beta &= 0.163
 \end{aligned}$$

$$A := \int_0^1 [1 - \beta \cdot (T(y))^k + \beta] dy$$

$$S := \int_0^1 y \cdot [1 - \beta \cdot (T(y))^k + \beta] dy$$

$$yc := \frac{S}{A}$$

$$I_x := \int_0^1 y^2 \cdot [1 - \beta \cdot (T(y))^k + \beta] dy$$

$$I_{xc} := I_x - yc^2 \cdot A$$

$$S = 0.398 \quad A = 0.719$$

$$yc = 0.554$$

$$I_x = 0.278$$

$$I_{xc} = 0.058$$

## Приложение 2. (Продолжение)

$$\begin{array}{llll}
 T_0 := 108 & T_3 := 26 & T_0 := \frac{T_0}{T_3} & T_0 = 4.154 \\
 T_1 := 34 & & T_1 = 1.308 & n := \frac{1}{3} \\
 \lambda := 0.9 & k := 1 & & \\
 T(y) := T_0 + (T_1 - T_0) \cdot y^n & \beta := \frac{1 - \lambda}{(T_1)^k - 1} & & \beta = 0.325
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 A := \int_0^1 (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & \\
 S := \int_0^1 y \cdot (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & S = 0.384 \quad A = 0.669 \\
 yc := \frac{S}{A} & yc = 0.574 \\
 Ix := \int_0^1 y^2 \cdot (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & Ix = 0.269 \\
 Ixc := Ix - yc^2 \cdot A & Ixc = 0.049
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 T_0 := 108 & T_3 := 26 & T_0 := \frac{T_0}{T_3} & T_0 = 4.154 \\
 T_1 := 34 & & T_1 = 1.308 & n := 2 \\
 \lambda := 0.9 & k := 1 & & \\
 T(y) := T_0 + (T_1 - T_0) \cdot y^n & \beta := \frac{1 - \lambda}{(T_1)^k - 1} & & \beta = 0.325
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 A := \int_0^1 (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & \\
 S := \int_0^1 y \cdot (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & S = 0.219 \quad A = 0.283 \\
 yc := \frac{S}{A} & yc = 0.772 \\
 Ix := \int_0^1 y^2 \cdot (1 - \beta \cdot T(y)^k + \beta) dy & Ix = 0.177 \\
 Ixc := Ix - yc^2 \cdot A & Ixc = 7.779 \times 10^{-3}
 \end{array}$$

**Приложение 3.**  
**Результаты измерений**

**Таблица 1.**

№	Время нагрева, (с)	Температура по длине нагрева, ( °С )			Температура в измеряемой точке, ( °С )			Показания индикаторов (дел).					
		1	2	3	1	2	3	В вертикальном направлении			В горизонтальном направлении		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0	27	26	25	23	26	26	536	553,5	06/23	01/54	02/84	01/94
2	40	81	96	78	27	30	29	540	553,5	06/31	01/54	02/84	01/94
3	80	106	109	109	32	37	34	540	553,5	06/32	01/63	02/84	01/94
4	120	118	131	120	38	42	39	540	553,5	06/32	01/74	02/90	01/98
5	160	123	144	138	49	47	44	540	553,5	06/31	01/90	02/98	02/00
6	200	133	154	142	52	52	50	540	553,5	06/31	01/94	03/12	02/15
7	240	142	161	146	58	58	56	540	553	06/31	02/08	03/28	02/32
8	280	151	160	155	62	63	62	535,5	553	06/30,5	02/18	03/41	02/47
9	320	157	163	156	68	68	68	535,5	553	06/30,5	02/26	03/57	02/55
10	360	160	164	160	72	73	74	535,5	553	06/30,4	02/39	03/70	02/75
11	400	163	172	166	78	78	79	535,5	553	06/30,4	02/46	03/87	02/90
12	440	164	174	167	83	83	84	535,5	553	06/30,2	02/57	04/00	03/01
13	480	169	178	169	87	87	89	535,5	553	06/30,2	02/64	04/14	03/15

**Результаты измерений**

**Таблица 2.**

№	Нагрузка, (кг.)	Время нагрева (с)	Температура по длине нагрева ( °С )	Температура в измеряемой точке, ( °С )			Показания индикаторов (дел.)					
							В вертикальном направлении			В горизонтальном направлении		
				1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0	0	26	22	26	26	037	655	652	05/74	05/74	02/70
2	1	0	26	22	26	26	175	506	504	05/29	05/29	02/45
3		40	86	27	28	29	175	506	504,5	05/60	05/80	02/46
4		80	108	31	33	33	175	505,5	504,5	05/62	05/85	02/52
5		120	123	36	37	37	175	505,5	504,5	05/69	06/00	02/65
6		160	135	42	43	41	175	505,5	504,5	05/81	06/10	02/75
7		200	143	47	48	46	175	505,5	504,5	05/94	06/20	02/90
8		240	149	53	53	51	174,5	505,5	504	06/08	06/38	03/05
9		280	155	57	58	56	174,5	505,5	504	06/22	06/49	03/24
10		320	159	62	63	61	174,5	505	504	06/33	06/63	03/39
11		360	161	66	68	67	174,5	505	504	06/49	06/78	03/54
12		400	167	71	74	71	174,5	505	503,8	06/65	06/90	03/65
13		440	168	76	79	76	174,5	505	503,5	06/80	07/05	03/80
14		480	172	81	83	81	174,5	505	503,5	06/96	07/15	03/95

**Результаты измерений**

**Таблица 2.**

№	Нагрузка, (кг.)	Время нагрева (с)	Температура по длине нагрева ( °С )	Температура в измеряемой точке, ( °С )			Показания индикаторов (дел.)					
							В вертикальном направлении			В горизонтальном направлении		
				1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	0	0	26	26	26	26	557	559	552	02/98	02/99	02/97
2	2	0	26	26	26	26	259	259	252	02/88	02/81	02/80
3		40	86	29	28	30	259	261	256	02/89	02/88	02/87
4		80	108	32	32	34	259	261	256	02/99	02/98	02/95
5		120	123	37	36	38	259	261	256	03/10	03/09	03/10
6		160	135	42	42	45	259	261	255,5	03/25	03/23	03/25
7		200	143	47	46	48	259	261	255,5	03/40	03/36	03/39
8		240	149	53	52	53	259	260,5	255	03/55	03/50	03/48
9		280	155	58	57	57	259	260,5	255	03/69	03/64	03/64
10		320	159	63	62	62	259	260,5	255	03/84	03/75	03/80
11		360	161	68	67	66	259	260	255	04/00	03/89	03/97
12		400	167	73	72	69	259	260	255	04/14	04/02	04/10
13		440	168	78	76	73	259,5	260	255	04/29	04/20	04/25
14		480	172	82	81	76	259,5	260	255	04/38	04/34	04/38
15		520		86	85	80	259,5	260	255	04/52	04/50	04/52
16		560		91	89	83	259,5	260	255	04/67	04/62	04/72
17	600		94	93	86	259,2	259,8	255	04/82	04/79	04/86	

