გიმზერ საათაშვილი

სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო

ივნისი, 2012

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით საათაშვილი გიმზერის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: ”სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ” და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი:
სრ. პროფესორი ____________ ზურაბ ზერაკიძე

სრ. პროფესორი ____________ გოგი ფანცულაია

რეცენზენტი:
სრ. პროფესორი ____________ გრიგოლ სოხაძე

რეცენზენტი:
ასოც. პროფესორი ____________ ზურაბ ქვათაძე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2012 წელი

ავტორი: საათაშვილი გიმზერი

დასახელება: "სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 5. 06.2012

რეზიუმე

ნაშრომში "სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ" განხილულია სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ზოგადი თეორიის ზოგიერთი ასპექტი.

ნაშრომში განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ის ძირითადი ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება აღნიშნულ კვლევებში.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ძირითადი თვისებების შესწავლას ერგოდული თეორიის (ე.ი. ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების) თვალსაზრისით. კერძოდ, განიხილება ამოცანა, თუ რა მიმართებაშია ერთმანეთთან სტაციონარული ალბათური ზომები და ალბათური ზომის შემნახავი გარდაქმნები. დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა პოლონური სივრცის G-ხარისხზე ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცის თვისებების შესწავლას. კერძოდ, განიხილება ამავე სივრცეში ბაზისის არსებობისა და მისი სიმძლავრის შეფასების ამოცანა. ამ ამოცანების გადასაჭრელად, ნაშრომში შეისწავლება ზომად ინვარიანტულ სივრცეზე განსაზღვრული მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე σ-სასრულო ინვარიანტული ზომების სივრცე და ამავე სივრცეში ბაზისის არსებობისა და მისი სიმძლავრის შეფასების ამოცანა. აღნიშნული ამოცანის გადასაჭრელად გამოიყენება ზომის თეორიის ისეთი ცნობილი მეთოდები, როგორიცაა კარათეოდორის თეორემა ალგებრიდან ამავე ალგებრით განსაზღვრულ მინიმალურ σ-ალგებრაზე ალბათობის გაგრძელების შესახებ, ხანის თეორემა, რადონ-ნიკოდიმის თეორემა, მეტრიკული ტრანზიტულობის მქონე სრული σ-სასრულო ინვარიანტული ზომების თვისებები და სხვა.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ასევე ერგოდული და არაერგოდული სტაციონარული სტოქასტური პროცესების აგების ამოცანას სხვადასხვა ალბათურ სივრცეებში.

ნაშრომის ერთი ნაწილი ეძღვნება წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული არასეპარაბელური დიფუზიური სტაციონარული პროცესების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლების შესწავლას. აქ განიხილება ა. სკოროხოდის მიერ 1981 წელს შემოტანილი ალბათურ ზომათა სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალებადი, ძლიერად განცალებადი, ძალდებული შეფასების მქონე) ოჯახების კლასიფიკაცია. უნდა აღინიშნოს, რომ სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიაში ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახიდან შესაბამის ძლიერად განცალებად ოჯახზე გადასვლის ამოცანა დღესაც არ კარგავს თავის აქტუალობას. ამ მიმართულებით საინტერესოა 1981 წელს ა. სკოროხოდის მიერ მიღებული შედეგი, რომლის თანახმადაც კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობის შემთხვევაში ალბათურ ზომათა ყოველი სუსტად განცალებადი ოჯახი,

რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალებადი. შებრუნებული დებულების მართებულობა დამტკიცდა გ. ფანცულაიას მიერ 1989 წელს. კერძოდ, ნაჩვენები იყო, რომ თუ ალბათურ ზომათა ყოველი სუსტად განცალებადი ოჯახი, რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალებადი, მაშინ მართებულია კონტინუუმ ჰიპოთეზა. მარტინის აქსიომის გამოყენებით, ზ.ზერაკიძემ 1984 წელს ნაშრომში დაამტკიცა, რომ პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, თუ პარამეტრთა სიმრავლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს. გ. ფანცულაიას მიერ ეს შედეგი 2003 წელს განზოგადოებულ იქნა ისეთი სრული მეტრიკული სივრცეებისათვის, რომელთა ტოპოლოგიური წონები არ არიან ზომადი ფართე აზრით. სწორედ ამ თემატიკას განეკუთვნება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ ძვრა-ზომათა თვლადი ხარისხებისათვის (რომლებიც წარმოადგენენ $\mathbb{R}^{\infty}$ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომებს) სუსტად განცალებადი ოჯახიდან ძლიერად განცალებად ოჯახზე გადასვლისა და მათთვის ძალდებული შეფასებების აგების ამოცანები. მოცემულია ამ ამოცანის გადაჭრის ორი მეთოდი. პირველი მეთოდი არსებითად იყენებს [0,1] ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტექნიკას, ხოლო მეორე კი-დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონს.

ნაშრომის გარკვეული ნაწილი ეთმობა სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა ოჯახების აგებას უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდებით. საყოველთაოდ ცნობილია, რომ უსასრულო კომბინატორიკის ზოგიერთი მეთოდი წარმატებით გამოიყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად, ტოპოლოგიასა და ზომის თეორიაში. ამ მეთოდებს შორის განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახის აგების მეთოდი. სიმძლავრის თვალსაზრისით დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის არსებობის ამოცანა პირველად განხილული იყო ტარსკის მიერ. მან დაამტკიცა რომ ეს სიმძლავრე $2^{card(E)}$ სიმძლავრის ტოლია. ამ შედეგმა ჰპოვა საინტერესო გამოყენება ზოგად ტოპოლოგიაში, რომლის საშუალებითაც დამტკიცდა, რომ უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში ულტრაფილტრების კლასის სიმძლავრე $2^{2^{card(E)}}$ სიმძლავრის ტოლია. ევკლიდეს E_n სივრცის შემთხვევაში, დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდის გამოყენებით, ა. ხარაზიშვილმა 1981 წელს ააგო ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის არაელემენტარულ D_n -ინვარიანტულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ გაგრძელებათა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახი, სადაც D_n აღნიშნავს E_n სივრცის ყველა იზომეტრიულ გარდაქმნათა ჯგუფს. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ შპილრაინ-მარჩევსკი იყო მათემატიკოსი, ვინც ჯერ კიდევ 1946 წელს პირველად გამოიყენა

დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად. მოგვიანებით, 1950 წელს იგივე მეთოდი გამოიყენეს კაკუტანიმ, კოდაირამ და ოქსტობიმ ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად. დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი გამოყენებულ იქნა ა. ხარაზიშვილის მიერ ევკლიდეს E_n სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის ისეთი არაელემენტარული D_n -ინვარიანტული გაგრძელების ასაგებად, რომელთანაც ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა არის მაქსიმალური, კერძოდ, 2^c კარდინალური რიცხვის ტოლი, სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს. გ. ფანცულაიას მიერ 2003 წელს გაზოგადებულ იქნა ტარსკის მიერ შემუშავებული დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი და წარმატებით გამოყენებულ იქნა არათვლად ლოკალურად კომპაქტურ σ -კომპაქტურ ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომის სხვადასხვა (ელემენტარული, არაელემენტარული, სეპარაბელური, არასეპარაბელური და სხვა) ინვარიანტული გაგრძელებების ასაგებად. ამით მოხერხდა ლებეგის ზომის ინვარიანტულ გაგრძელებათა თეორიაში ზემოთ აღნიშნული შედეგების განზოგადება. დისერტაციის შემდგომი ნაწილი ეძღვნება სწორედ გ.ფანცულაიას მიერ შემუშავებული დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მეთოდის გამოყენებას ამჟამად სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა ორთოგონალური ოჯახების, კერძოდ ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, G-პროცესების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალებადი, ძლიერად განცალებადი, ძალდებული შეფასების მქონე, ელემენტარული, არაელემენტარული) სტაციონარული გაგრძელებების ასაგებად და მათი სიმძლავრეების შესაფასებლად.

ასევე შეისწავლება საკითხი, თუ რაოდენ მნიშვნელოვანია ინფორმაციის გადაცემისას სტაციონარული ალბათური ზომების (კერძოდ, ”თეთრი ხმაურის”) დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილი ჯგუფის სტრუქტურის ცოდნა შესაფასებელი პარამეტრისათვის ძალდებული შეფასების ასაგებად.

ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, შეისწავლება სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიის მეტად აქტუალური საკითხი- ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ ძვრა ზომათა ბერისა და ბორელის G -ხარისხების ოჯახებისათვის განცალებადობისა და ძალდებული შეფასების აგების ამოცანა. ამ ამოცანის გადასაჭრელად ნაშრომში გამოყენებულია უნიფორმულად განაწილებულ მიმდევრობათა თეორიის ტექნიკა და დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი.

აღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

1. შემუშავებულია მეთოდი პოლონური სივრცის G-ხარისხზე ზოგიერთი სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურის ასაგებად;
2. აგებულია ბაზისი პოლონური სივრცის G -ხარისხზე განსაზღვრული ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცისათვის და დათვლილია მისი სიმძლავრე.

3. უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდების (დამოუკიდებელ სიმრავლეთა ოჯახები, თითქმის დიზუნქტიური ოჯახები, ფუნქციათა განცალებადი ოჯახები და ა.შ.) გამოყენებით აგებულია პოლონური სივრცის G-ხარისხებზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალებადი, ძლიერად განცალებადი, სეპარაბელური, არასეპარაბელური) სტაციონარული გაგრძელებები და დათვლილია მათი სიმძლავრეები;
4. ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, პოლონური სივრცის G-ხარისხზე განსაზღვრული ბერისა და ბორელის G-პროცესებისათვის აგებულია პარამეტრის ძალდებული შეფასება;
5. ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ $\mathbb{R}^{\infty}$-ზე აგებულია ისეთი არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომა, რომელიც არის ინვარიანტული ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ და ამავდროულად არ არის ექვივალენტური ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული არცერთი აბსოლუტურად უწყვეტი ალბათური ბორელის μ ზომის $\mathbb{N}$- ხარისხის.

Abstract

The thesis "On a structure of stationary statistical structures" deals with certain aspects of the general theory of stationary statistical structures.

There are considered such main notions and auxiliary statements from the set theory, measure theory, probability theory, mathematical statistics, mathematical analysis and functional analysis, which are applied essentially in these investigations. Main properties of such structures from the point of view of ergodic theory (i.e., the theory of quasiinvariant and invariant measures) are studied. In particular, here is studied a relation between stationary probability measures and measure preserving transformations.

First part of the present thesis is devoted to study properties of elementary stationary probability measures defined on N-powers of Polish spaces. In particular, a space of all invariant sigma-finite measures with a metrically transitivity property, a problem of the existence of a basis and of the estimation its cardinality are under considerations in this thesis. In order to solve these problems, there are used such well known methods of measure theory that are Charatheodory theorem about extending of a probability measure from an algebra to the minimal σ-algebra generated by the same algebra, Khan theorem, Radon-Nikodim theorem, properties of σ-finite invariant measures with metrically transitivity properties and so on. A problem of a construction of ergodic and nonergodic stationary stochastic processes in various probability spaces is considered in that thesis.

Second part of the thesis is devoted to study of set-theoretical characteristics of mutually orthogonal diffused stationary processes. Here is considered a classification of various (orthogonal, weakly orthogonal, strictly orthogonal, having consistent estimate) families of probability measures introduced by A.Skorokhod in 1981. It can be mentioned especially that a problem of a transition from the weakly separated family to the strictly separated one does not lost his actuality. In this direction a result of A.Skorokhod obtained in 1981 is of some interest. His result asserted that under CH (Continuum Hypothesis) each weakly separated family of probability measures is strictly separated if its cardinality is equal or less than the cardinality of continuum. The validity of the converse result has been established by G. Pantsulaia in 1989. In particular, it has been shown that if each weakly separated family of probability measures, whose cardinality is equal or less than the cardinality of continuum , is strictly separated then CH holds. In 1984, by MA (Martin Axiom), Z.Zerakidze proved that each weakly separated family of Borel probability measures on a Polish space with cardinality equal or less than the cardinality of continuum, is strictly separated. In 2003, this result has been extended by G.Pantsulaia for complete metric spaces whose topological weights are not measurable in the wide sense. Problems of a transition from a weakly separated family to a strictly separated and of a construction of a consistent estimator for the family of countable powers of shift measures defined on the real axis (which are stationary measures defined on the

topological vector space $\mathbb{R}^{\infty}$) are directly connected with topics of the theory of statistical decisions described above. Here are presented two approaches to solve these problems. The first of them applies the methods of the theory of uniformly distributed sequences on $[0,1]$. The second of them uses TSLLN (The strong law of large numbers).

Another part of the thesis is devoted to construct of various families of stationary probability measures by methods of infinite combinatorics. It is well known that methods of infinite combinatorics have lately been successfully used in different areas of mathematics, for example, in topology and measure theory. Among them, special mention should be made of the method of constructing a maximal (in the sense of cardinality) family of independent families of sets in arbitrary infinite base spaces. The question of the existence of a maximal (in the sense of cardinality) independent family of subsets was considered by A.Tarski. He proved that this cardinality is equal to $2^{card(E)}$. This result found an interesting application in general topology by means of which it was proved that in an arbitrary infinite space E the cardinality of the class of all ultrafilters is equal to $2^{2^{card(E)}}$. Using the method of an independent family of sets in the case of the Euclidean space E_n, in 1981 A.B. Kharazishvili constructed a maximal (in the sense of cardinality) family of orthogonal elementary D_n-invariant extensions of the Lebesgue measure l_n, where D_n denotes a group of all isometric transformations of the Euclidean space E_n. It can be noted especially that E. Szpilrajn (E. Marczewski) was the mathematician who in 1946 firstly has used the method of an independent family of sets to construct nonseparable extensions of the Lebesgue measure. Later, in 1950 S. Kakutani, K. Kodaira and J. Oxtoby have used the same method to construct nonseparable invariant extensions of the Lebesgue measure.

The method of an independent family of sets has been used to construct an example of a nonelementary D_n-invariant extension of the Lebesgue measure l_n such that the topological weight of the metric space associated with such a measure is maximal; In 2003, the method of an independent family of sets due to A.Tarski, has been generalized and successfully used to construct various (orthogonal, weakly separated, strictly separated, with consistent estimators, elementary, nonelementary) families of invariant extensions of the Haar measure defined on an arbitrary uncountable locally-compact σ-compact topological group. Thus, some results of the theory of invariant extensions of the Lebesgue measure have been generalized. The further part of the thesis is devoted to applications of the method of independent families of sets elaborated by G.Pantsulaia in order to construct and to estimate cardinalities of various orthogonal families of stationary probability measures, in particular, of various (orthogonal, weakly separated, strictly separated, with consistent estimators, elementary, nonelementary) extensions of so called G-processes for an arbitrary infinite additive group G.

A question from the mathematical theory of information transmission *asking whether is important to know a structure of the group of all admissible translations of a stationary probability measure(for example, of the "White Noice") for a construction of the consistent estimator* is discussed in this thesis.

For an arbitrary infinite additive group G. Here is studied the following problems of the theory of statistical decisions - a separation problem and a construction of the consistent estimate for Baire and Borel G-processes defined on the G-power of a Polish space. In order to solve these problems, methods of the theory of uniformly distributed sequences and the strong law of large numbers are applied.

The following results are obtained in the present thesis:

1. It is elaborated the method for a construction of some stationary statistical structures on the Γ -power of a Polish space;
2. It is constructed a basis of the space of all elementary stationary probability measures defined on the Γ -power of a Polish space and its cardinality is calculated;
3. By using methods of infinite combinatorics (independent families of sets, almost disjoint families of sets, separating families of functions, etc.) it is constructed various invariant non-separable extensions of stationary measures defined on Γ -powers of locally compact σ-compact Polish groups;
4. In the case of an arbitrary infinite additive group **G,** consistent estimators are constructed for Baire and Borel G-processes defined on the G-power of a Polish space. In the topological vector space $\mathbb{R}^{\infty}$ equipped with Tychonoff topology, an example of a non-trivial σ-finite Borel measure is constructed with everywere dense (in $\mathbb{R}^{\infty}$) group of admissible translations (in the sense of invariance) such that this measure is not equivalent to any Γ –power of absolutely continuous Borel probability measure defined on the real axis $\mathbb{R}$.

შინაარსი

მადლიერება

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს პროფესორებს ზურაბ ზერაკიძესა და გოგი ფანცულაიას მნიშვნელოვანი რჩევებისა და გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

ნაშრომი ეხება სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ზოგადი თეორიის აქტუალურ საკითხებს.

საკვლევი პრობლემის აღწერა. კარგადაა ცნობილი, რომ დაკვირვებადი ზოგიერთი (ფიზიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა) შემთხვევითი პროცესის რიცხვითი მახასიათებლები არ იცვლება დროის დინების მიუხედავად. ასეთი პროცესები აღიწერებიან ეგრეთ წოდებული სტაციონარული სტოქასტური პროცესებით (იხილეთ [1],[2]), ხოლო ამ პროცესებით წარმოქმნილ შესაბამის ალბათურ ზომებს უწოდებენ სტაციონარულ ალბათურ ზომებს.

დაკვირვებად სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესს ბუნებრივი წესით უკავშირდება ალბათურ სივრცეთა ოჯახი $(X^T, S^T, \mu_\vartheta)_{\vartheta\in\theta}$, სადაც T არის დაკვირვების მომენტებისაგან შედგენილი სივრცე, (X,S) არის ზომადი სივრცე საიდანაც ღებულობს მნიშვნელობებს დაკვირვებადი სტაციონარული პროცესი დროის ყოველი ფიქსირებული მომენტისათვის, S^T არის X^T სივრცის ქვესიმრავლეთა გარკვეული σ-ალგებრა (კერძოდ, S σ-ალგებრის T ხარისხი) და $(\mu_\vartheta)_{\vartheta\in\theta}$ არის S^T σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ისეთი ოჯახი, რომელიც შეიცავს დაკვირვებადი სტაციონარული სტოქასტური პროცესით წარმოქმნილ μ ალბათურ ზომას. სწორედ ეს გახლავთ დაკვირვებადი სტაციონარული სტოქასტური პროცესის აღმწერი სტატისტიკური სტრუქტურა.

ბუნებრივად ისმის შემდეგი

ამოცანა. როგორ შევაფასოთ ის $\theta_0 \in \Theta$ პარამეტრი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას $\mu_{\theta_0} = \mu$?

ამ ამოცანის დასმა სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურე-ბისათვის განეკუთვნება წინა საუკუნეს (იხილეთ [3]), მაგრამ მიუხედავად თავისი სიძველისა მას დღეისათვისაც არ დაუკარგავს თავისი აქტუალობა.

$\theta_0 \in \Theta$ ელემენტს უწოდებენ დაკვირვებადი სტაციონარული სტოქასტური პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრს.

სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების შესწავლის აუცილებლობა ინვარიანტულობის თვალსაზრისით განპირობებულია შემდეგი მიზეზებით: როცა $T = Z$, სტაციონარული სტოქასტური პროცესი $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც შემთხვევით სიდიდეთა $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ მიმდევრობა მნიშვნელობებით (X, S) ზომად სივრცეში, რომლისთვისაც $(\xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_k})$ შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილება იგივეა რაც $(\xi_{n_1+n}, \cdots, \xi_{n_k+n})$ შემთხვევითი ვექტორის ერთობლივი განაწილება ყოველი $k \geq 1$, და $n, n_1, \cdots, n_k \in \mathbf{Z}$ მთელი რიცხვებისათვის. თუ დავუშვებთ, რომ სრულდება კოლმოგოროვის შეთანხმებულობის პირობა (იხილეთ [4]), მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ზომა μ, რომელიც განსაზღვრული იქნება X^Z სივრცის S^Z σ-ალგებრაზე. X^Z სივრცეზე არსებობს ნატურალური ძვრა h, განსაზღვრული $h((x_n)_{n\in\mathbf{Z}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}$ პირობით. ამ შემთხვევაში, საკოორდინატო პროექციები $\{Pr_k : k \in \mathbf{Z}\}$ ექვივალენტურია $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ შემთხვევითი სიდიდეების. პროცესის სტაციონარობა გადადის μ ზომის ინვარიანტუ-ლობაში h გარდაქმნის მიმართ, ე.ი. $\mu h^{-1} = \mu$. ამგვარად, ჩვენ ვღებულობთ ალბათურ სივრცეს $(\Omega, F, \mu) = (X^Z, S^Z, \mu)$ ურთიერთცალსახა ზომადი $h : \Omega \to \Omega$ ასახვით, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\mu(h^{-1}(A)) = \mu(A)$ ყოველი $A \in \mathcal{F}$ სიმრავლისათვის. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ μ არის ინვარიანტული h გარდაქმნის მიმართ, ან h გარდაქმნა არის μ ზომის შემნახავი გარდაქმნა.

ახლა პირიქით, თუ ჩვენ გვაქვს (Ω, F, μ) სივრცე, ურთიერთცალსახა ზომადი $h : \Omega \to \Omega$ ასახვა რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\mu(h^{-1}(A)) = \mu(A)$ ყოველი $A \in \mathcal{F}$ სიმრავლისათვის და რაიმე ზომადი ასახვა

$\xi:(\Omega,F)\to(X,S)$, მაშინ შეიძლება დამტკიცდეს, რომ $\xi_n(\omega)=\xi(h^n(\omega))\,(\omega\in\Omega)$ განსაზღვრავს სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესს.

ზემოთქმულიდან გამომდინარეობს, რომ სტაციონარული სტოქას-ტური პროცესის შესწავლა იგივეა, რაც ალბათური ზომის შემნახავი გარდაქმნის შესწავლა.

სტაციონარული სტოქასტური პროცესების განმსაზღვრელი პარამეტისათვის ძალდებული შეფასების აგებისას არსებითი ყურადღება ეთმობა კვაზი-ინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილი ჯგუფების სტრუქტურის შესწავლას. ამ პრობლების განხილვის აუცილებლობა განპირობებულია შემდეგი არგუმენტით: ინფორმაციის გადაცემის მათემატიკურ თეორიაში განხილვის ობიექტია შემდეგი ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური სისტემა

$$\xi(t,\omega)=\theta(t)+\Delta(t,\omega),$$

სადაც $t\in T\subseteq R$, H არის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე, Θ არის ვექტორული H^T სივრცის ქვესივრცე, $(\theta(t))_{t\in T}\in\Theta\subset H^T$ არის სასარგებლო სიგნალი,

$$(\Delta(t,\cdot))_{t\in T}:\Omega\to H^T$$

არის სტაციონარული გაუსის პროცესი (ეგრეთ წოდებული "თეთრი ხმაური") განსაზღვრული (Ω,F,P) ალბათურ სივრცეზე. μ-ით აღვნიშნოთ ბერის ალბათური ზომა H^T -სივრცეზე, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X\in Ba(H^T)\to\mu(X)=P(\{\omega:(\Delta(t,\omega))_{t\in T}\in X\})),$$

სადაც $Ba(H^T)$ აღნიშნავს H^T-სივრცის ბერის აზრით ზომად ქვესიმრავლე-თა σ-ალგებრას.

ინფორმაციათა გადაცემის თეორიის ძირითადი დაშვებაა, რომ ბერის ზომა λ, განსაზღვრული გარდაქმნილი ”თეთრი ხმაურით”

$$(\xi(t,\cdot))_{t\in T}:\Omega\to H^T,$$

ემთხვევა μ ზომის გარკვეულ $\mu_{\theta_0}\,(\theta_0\in\Theta)$ ძვრას, ე.ი.,

$$(\forall X)(X \in Ba(H^T) \to \lambda(X) = \mu_{\theta_0}(X)),$$

სადაც $\mu_{\theta_0}(X) = \mu(X - \theta_0)$ როცა $X \in Ba(H^T)$.

θ_0 პარამეტრის "კარგი" შეფასება შეიძლება მიღებულ იქნას ეგრეთ წოდებული $\overline{\theta} : H^T \to \Theta$ ძალდებული შეფასებით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$(\forall \theta)(\theta \in \Theta \to \mu_\theta(\{(x(t))_{t\in T} : \overline{\theta}((x(t))_{t\in T}) = (\theta(t))_{t\in T}\}) = 1).$$

როგორც წესი, აუცილებელ პირობას ძალდებული შეფასების არსებობისათვის წარმოადგენს შემდეგი პირობა $\Theta \cap Q_\mu = \{\mathbf{0}\}$, სადაც Q_μ აღნიშნავს μ ზომის კვაზიინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილ ჯგუფს და $\mathbf{0}$ აღნიშნავს H^T ადიტიური ჯგუფის ნულოვან ელემენტს. შესაბამისად, აქ წარმოიქმნება Q_μ ჯგუფის განხილვისა და დაკვირვებადი სტოქასტური პროცესის ფილტრაციის ზოგადი პრობლემის გამოკვლევის აუცილებლობა.

საკვლევი პრობლემის აქტუალობა. ერგოდული თეორიის დაფუძვნება სტიმულირებული იყო სტატისტიკური მექანიკის პრობლემების განხილვის აუცილებლობით და დაკავშირებული იყო ბირკჰობის (1943), კრილოვისა და ბოგოლიუბოვის (1946), ჰოფის (1949) და სხვა ცნობილი მათემატიკოსების შრომებთან (იხილეთ [1], [5]) .

დაკვირვებადი სტოქასტური პროცესის განმსაზღვრელი პარამეტრისათვის ძალდებული შეფასების ამოცანები და მასთან დაკავშირებული პრობლემები განხილული იყო ჯ. ვონ ნეიმანის (1935), ს. კაკუტანის (1943), ვ. სუდაკოვის (1959), ჯ. ფელდმანის (1966), ი. როზანოვის (1968), ხი დაო ხინგის (1972), ა. სკოროხოდის (1975), ჰ. შიმომურას (1975) და სხვათა ნაშრომებში. უნდა აღინიშნოს, რომ კვლევები ამ მიმართულებით არ შენელებულა რაზეც მიუთითებს აღნიშნული თემატიკის გარშემო პუბლიკაციათა ესოდენ დიდი სიმრავლე(იხილეთ, მაგალითად [6], [7], [8], [9], [10], [11]). ამის გამო, დაკვირვებადი სტაციონარული სტოქასტური

პროცესების კვლევა ერგოდული და სტატისტიკური თეორიების თვალსაზრისით დღეისათვისაც არ კარგავს თავის აქტუალობას.

საკვლევი პრობლემის პრაქტიკული მნიშვნელობა. ნაშრომში მოყვანილი საკვლევი პრობლემები ფუნდამენტური ხასიათისაა და მისი გამოყენების არეალი საკმარისად ფართოა. ერთის მხრივ, ნაშრომში წარმოდგენილი თეორიული სახის შედეგები შეიძლება იქნას გამოყენებული როგორც მათემატიკური სტატისტიკის აქტუალური საკითხების შემდგომი კვლევისას, ასევე მათემატიკის აღნიშნული დარგის თანამედროვე კურსის წაკითხვის პროცესში. მეორეს მხრივ, შესაძლებელია აღნიშნული შედეგების წარმატებით გამოყენება იმ ელემენტარული მიზეზის გამო, რომ დაკვირვებადი ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო თუ სხვა შემთხვევითი პროცესების უმრავლესობა წარმოადგენს სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესს.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ ნაშრომის მოკლე დახასიათებას თავებისა და ქვეთავების მიხედვით.

თავი I. ამ თავში მოცემულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება.

თავი II. **2.1 ქვეთავში შესწავლილია მიმართება სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესებსა და გარდაქმნის შემნახავ ალბათობას შორის.**

2.2 ქვეთავში მოცემულია სტაციონარული სტოქასტური პროცესის აგების ერთი ზოგადი მეთოდი. ასევე, მოცემულია ერგოდული და არაერგოდული სტაციონარული სტოქასტური პროცესების აგების ზოგიერთი მაგალითი.

2.3. ქვეთავში შესწავლილია (E,G,S) ინვარიანტულ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ელემენტარულ G-ინვარიანტულ ზომათა კლასისათვის ბაზისის არსებობის ამოცანა.

2.4 ქვეთავში განხილულია 2.3. ქვეთავში მიღებული შედეგების

გამოყენება პოლონური X სივრცის $\mathbb{Z}$ ხარისხზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცისათვის.

თავი III. 3.1 ქვეთავში მოცემულია ა. სკოროხოდის [3] მიერ შემოღებული (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახების კლასიფიკაცია.

3.2 ქვეთავში მოყვანილია გ. ფანცულაიას მიერ [12] ნაშრომში მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა, რომელიც ეხება ლოკალურად კომპაქტურ σ-კომპაქტურ ტოპოლოგიურ H ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომის ინვარიანტული გაგრძელებების სხვადასხვა ოჯახების არსებობას, როცა H ჯგუფი აკმაყოფილებს პირობას $card(H^{\aleph_0}) = card(H)$.

3.3 ქვეთავში შესწავლილია მიმართება პოლონური სივრცის Z ხარისხზე განსაზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა ოჯახებს შორის და დათვლილია ამ ოჯახების სიმრავლურ -თეორიული მახასიათებლები.

3.4 ქვეთავში აგებულია არასეპარაბელური არაელემენტარული სტაცი-ონარული ზომების სხვადასხვა ორთოგონალური ოჯახები.

თავი IV. 4.1 ქვეთავში მოცემულია ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებუ-ლება უნიმორფულად განაწილებული მიმდევრობების თეორიიდან (იხილეთ [13]). ამავე ქვეთავში მოყვანილია დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ფორმულირება(იხილეთ, მაგალითად, [4])

4.2 ქვეთავში თავში შესწავლილია ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ძვრა-ზომათა $\mathbb{Z}$ ხარისხების განცალებადობისა და ძალდებული შეფასების არსებობის ამოცანები.

4.3 ქვეთავში აგებულია მაგალითი $([0,1]^2)^{\mathbb{N}}$ სივრცეზე განსაზღვრული სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახისა და მისთვის შესწავლილია ძლიერად განცალებადობი ამოცანა. კერძოდ, კონტინუუმ ჰიპოთეზის (იხილეთ, მაგალითად, [14],[15]) მტკიცდება, რომ ეს ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

4.4 ქვეთავში, [16] და [17] ნაშრომებში მიღებულ შედეგებზე

დაყრდნობით, იგება მაგალითი ისეთი ინვარიანტული ზომისა, რომელიც არ არის არის ექვივალენტური არც ერთი აბსოლუტურად უწყვეტი ალბათური ბორელის μ ზომის $\mathbb{N}$ - ხარისხის.

თავი V. 5.1 ქვეთავში მოცემულია ზოგიერთი დამხმარე ცნება და ფაქტი ნამდვილ რიცხვთა ხარისხებზე განსაზღვრული ბერისა და ბორელის ალბათურ ზომათა არსებობის შესახებ (იხილეთ [5]). ამავე ქვეთავში დადგენილია ძალდებული შეფასების არსებობისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

5.2 ქვეთავში, ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფის შემთხვევაში, ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ უწყვეტ ძვრა-ზომათა ბერისა და ბორელის G -ხარისხების ოჯახებისათვის შესწავლილია განცალებადობისა და ძალდებული შეფასების არსებობის ამოცანები.

5.3 ქვეთავში მოცემულია პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომის G-ხარისხის გაგრძელებათა G-პროცესების ოჯახების აგების ერთი მეთოდი.

ძირითადი შედეგები ასახულია შემდეგ ნაშრომებში: [18], [19], [20], [21]. მოხსენებები მიღებული შედეგების გარშემო გაკეთდა შემდეგ კონ-ფერენციებზე: [22], [23], [24].

თავი I. ძირითადი კონცეფციები

მოცემულ თავში ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის, ზოგადი ტოპოლოგიისა და ზომის თეორიის ზოგიერთ ცნებებსა და დამხმარე დებულებებს. ჩვენ მათ სისტემატურად გამოვიყენებთ ჩვენს შემდგომ კვლევებში.

ZF -სიმბოლო აღნიშნავს ეგრეთ წოდებულ ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიას, რომელიც წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფორმალურ სისტემას. (იხილეთ [25]). ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებებია სიმრავლეები და მათ შორის მიკუთვნების ბინარული მიმართება $\in$. ZF სისტემა შედგება რამოდენიმე აქსიომისაგან, რომლებიც ახდენენ სიმრავლეთა სხვადასხვა თვისებების ფორმალიზაციას ბინარული $\in$ მიმართების ტერმინებში.

ZFC სიმბოლო აღნიშნავს ცერმელო-ფრენკელის თეორიას ამორჩევის AC აქსიომით. სხვა სიტყვებით, ZFC თეორია არის

$$ZF \,\&\, AC,$$

სადაც AC აღნიშნავს ამორჩევის აქსიომას.

თუ x და X არის ორი სიმრავლე, მაშინ $x \in X$ აღნიშნავს, რომ x მიეკუთვნება X-ს. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ x არის X-ის ელემენტი.

მიმართება $X \subseteq Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y-ის ქვესიმრავლე.

მიმართება $X \subset Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y-ის საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $R(x)$ არის მიმართება დამოკიდებული x-ზე (ან, სხვა სიტყვებით, $R(x)$ არის x ელემენტის თვისება), მაშინ სიმბოლო

$$\{x : R(x)\}$$

აღნიშნავს ყველა იმ x ელემენტთა ერთობლიობას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $R(x)$.

სიმბოლო $\emptyset$, როგორც წესი, აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს, ე.ი.,

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}.$$

თუ X არის რაიმე სიმრავლე, მაშინ სიმბოლო $P(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს, ე.ი.,

$$P(X) = \{Y : Y \subseteq X\}.$$

$P(X)$ სიმრავლეს ასევე უწოდებენ X სიმრავლის ბულეანს.

ვთქვათ, X და Y არის ორი სიმრავლე. მაშინ :

$X \cup Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების გაერთიანებას;

$X \cap Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების თანაკვეთას;

$X \setminus Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სხვაობას;

$X\Delta Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სიმეტრიულ სხვაობას, ე.ი.,

$$X\Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

ვთქვათ, Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $P(\Omega)$ კი - Ω -ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \leq k \leq n)$. $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ სიმრავ-ლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n\},$$

სადაც $\vee$ აღნიშნავს დიზიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.2. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსას-რულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k\in N} A_k = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots\}.$$

განსაზღვრება 1.3. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \leq k \leq n)$. სიმრავლეთა სას-რული $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{x \mid x \in A_1 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\},$$

სადაც $\wedge$ აღნიშნავს კონიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.4. ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k \in N}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap_{k \in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k \in N} A_k = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots\}.$$

მართებულია დე მორგანის ორადულობის შემდეგი ფორმულები:

1) $\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

2) $\Omega \setminus \bigcup_{k \in N} A_k = \bigcap_{A_k} (\Omega \setminus A_k);$

3) $\Omega \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

4) $\Omega \setminus \bigcap_{k \in N} A_k = \bigcup_{k \in N} (\Omega \setminus A_k).$

განსაზღვრება 1.5. Ω -სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{A}$ კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

2) თუ $A, B \in \mathcal{A}$, მაშინ $A \cup B \in \mathcal{A}$ და $A \cap B \in \mathcal{A}$;

3) თუ $A \in \mathcal{A}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 1.1. განსაზღვრება 1.5-ში, მე-2) პირობაში საკმარისია მოვითხოვოთ $A \cup B \in \mathcal{A}$ და $A \cap B \in \mathcal{A}$ პირობებიდან მხოლოდ ერთ-ერთის მართებულობა, ვინაიდან მართებულია შემდეგი სიმრავლურ-თეორიული ტოლობები:

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)),$$

$$A \cap B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)).$$

შენიშვნა 1.2. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა მის ქვესიმრავ-ლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω -ს და ჩაკეტილია სასრული რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "$\cap,\cup,\setminus$" მიმართ.

განსაზღვრება 1.6. Ω-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{F}$-კლასს ეწოდება σ-ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

2) თუ $A_k \in \mathcal{F}\ (k \in N)$, მაშინ $\bigcup_{k\in N} A_k. \in \mathcal{F}$ და $\bigcap_{k\in N} A_k. \in \mathcal{F}$;

3) თუ $A \in \mathcal{F}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 1.3. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა მის ქვესიმ-რავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω-ს და ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "$\cap,\cup,\setminus$" მიმართ.

განსაზღვრება 1.7. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$ (ალბათობის არაუარ-ყოფითობის თვისება);

2) $P(\Omega) = 1$ (ალბათობის ნორმირების თვისება);

3) თუ $(A_k)_{k\in N}$ $\mathcal{F}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ $P(\cup_{k\in N} A_k) = \sum_{k\in N} P(A_k)$ (ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისება).

ვთქვათ, Ω არის არაცარიელი სიმრავლე და F მის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასია. მართებულია შემდეგი დებულება.

ლემა 1.1 [26]. *არსებობს Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა $\sigma(F)$, რომელიც შეიცავს F კლასს და არის მინიმალური ჩართვის თვალ-საზრისით იმ σ -ალგებრებს შორის, რომლებიც შეიცავენ F -ს.*

განსაზღვრება 1.8. ვთქვათ, მოცემულია Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ორი კლასი S_1 და S_2. ამასთან, $S_1 \subset S_2$. P_1 და P_2 იყოს შესაბამისად S_1 და

S_2 კლასზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები. P_2 რიცხვით ფუნქციას ეწოდება P_1 რიცხვითი ფუნქციის გაგრძელება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall X)(X \in S_1 \to P_2(X) = P_1(X)).$$

განსაზღვრება 1.9. ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის არაცარიელი Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრა. $\mathcal{A}$ კლასზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathcal{A}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ $\mathcal{A}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\bigcup_{k \in N} A_k . \in \mathcal{A}$, მაშინ

$$P.\left(\bigcup_{k \in N} A_k\right) = \sum_{k \in N} P(A_k).$$

ალბათური სივრცეების აგების ზოგადი მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1.1 (კარათეოდორი)([26]). *ვთქვათ, P არის $\mathcal{A}$ ალგებრაზე განსაზღვრული ალბათობა. მაშინ არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას; ამასთან, $\overline{P}$ ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:*

$$(\forall B)(B \in \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{P}(B) = \inf\left\{\sum_{k \in N} P(A_k) \mid (\forall k)(k \in N \to A_k \in \sigma(\mathcal{A}))\ \&\ B \subseteq \cup_{k \in N} A_k\right\}.$$

მაგალითი 1.1. A-თი აღვნიშნოთ $[0,1]$ ინტერვალის ყველა ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლის ელემენტები წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს $[0,1]$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P([a_k, b_k[) = b_k - a_k$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(A)$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(A)$ კლასს ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $B([0,1[)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალზე განსაზღვრული ერთ-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა და აღინიშნება b_1 სიმბოლოთი.

სამეულს $([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), b_1)$-ს ეწოდება $[0,1[$ სიმრავლესთან ასოცირებული ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე.

მაგალითი 1.2 ვთქვათ, $F : R \to [0,1]$ არის ყოველ წერტილში მარჯვნიდან უწყვეტი ისეთი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; \& \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $F(-\infty) = 0$ და $F(+\infty) = 1$.

ვთქვათ, $\Omega = R \cup (+\infty)$.

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლებიც წარმოიდგინებიან მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულო ოჯახის გაერთიანებით, ე.ი.

$$\mathcal{A} = \left\{ A \mid A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right\},$$

სადაც $-\infty \le a_i < b_i \le \infty \quad (1 \le i \le n)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვა-ლებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P((a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია იმავე სახის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებაზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომე-ლიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A}) \cap R$ კლასს ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}(R)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ P_F რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R) \to P_F(X) = \overline{P}(X)),$$

ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განაწილების F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ $(1 \le i \le n)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეთა სასრულ ოჯახს.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \cdots, \omega_n \in \Omega_n\}.$$

$A \subseteq \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$B = \prod_{i=1}^{n} B_i,$$

სადაც $B_i \in \mathcal{F}_i$ $(1 \le i \le n)$.

$\mathcal{A}$ -ით აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების

სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P_i(B_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{1\le i\le n}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i=1}^{n}P_i$-ით.

$(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$ სამეულს ეწოდება $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)_{1\le i\le n}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.4. ($[0,1]^n$-სა და R^n-ზე განსაზღვრული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომები).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i=[0,1]\ \ (1\le i\le n)$,

ბ) $\mathcal{F}_i=\mathcal{B}([0,1])\ \ (1\le i\le n)$,

გ) $P_i=b_1\ \ (1\le i\le n)$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბთან ასოცირებული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i=1}^{n}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზო-

მილებიან $[0,1[^n$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა.

b_n-ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in B(R^n) \rightarrow b_n(X) = \sum_{h \in Z^n} \prod_{i=1}^{n} P_i([0,1[^n \cap (X-h))),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა, განსაზღვრული R^n-ზე.

მაგალითი 1.5. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{1 \le i \le n}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(1 \le i \le n \,\&\, x \in R \rightarrow F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{1 \le i \le n} \Omega_i, \prod_{i \in N} \mathcal{F}_i, \prod_{i \in N} P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან R^n სივრცესთან ასოცირებული n-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე.

$\prod_{1 \le i \le n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან ევკლიდეს R^n სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური n-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_n-ით.

მაგალითი 1.6 . ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i \in I}$ ალბათურ სივრცეთა უსასრულო ოჯახია.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა

$$\prod_{i \in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i \in I} : \omega_i \in \Omega_i, i \in I\}.$$

$A \subseteq \prod_{i \in I} \Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის არსებობს ინდექსთა სასრული $(i_k)_{1 \le k \le n}$ მიმდევრობა და $(\mathcal{F}_{i_k})_{1 \le k \le n}$

σ-ალგებრების ისეთი ელემენტები $(B_{i_k})_{1\le k\le n}$, რომ მართებულია წარმოდგენა

$$B = \{(\omega_i)_{i\in I} : (\omega_i \in \Omega_i,\ i \in I \setminus \cup_{k=1}^{n}\{i_k\})\,\&\,(\omega_i \in B_i,\ i \in \cup_{k=1}^{n}\{i_k\})\}.$$

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P(B) = \prod_{k=1}^{n} P_{i_k}(B_{i_k}),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}P_i$-ით.

სამეულს $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in I}P_i)$ ეწოდება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.6 (უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1] \ \ (i \in N)$,

ბ) $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1]) \ \ (i \in N)$,

გ) $P_i = b_1 \ (i \in N)$.

მაშინ, $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება b_N-ით.

მაგალითი 1.7 (გაუსის ზომა - "თეთრი ხმაური"). ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{i\in N}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(i \in N \ \& \ x \in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცესთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე, სადაც $\Omega_i = R, \mathcal{F}_i = \mathcal{B}(R) \ \ (i \in N)$. $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_N-ით, ხოლო $\prod_{i\in N}\mathcal{F}_i$ σ-ალგებრას ეწოდება R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}(R^N)$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 1.8 (ხარაზიშვილის ზომა) ([5],[16]). ვთქვათ, ყოველი $i \in N$ ინდექსისათვის, p_i არის $[a_i, b_i]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და $\Delta = \prod_{i\in N}[a_i, b_i]$. $Z^{(N)}$ ჯგუფი განვსაზღვროთ პირობით

$$Z^{(N)} := \{(z_k)_{k\in N} : z_k \in Z \,\&\, (\exists n_{(z_k)_{k\in N}} \in N)(\forall k > n_{(z_k)_{k\in N}} \to z_k = 0)\}.$$

ν_Δ ზომას, განსაზღვრულს $\mathcal{B}(R^N)$ σ-ალგებრაზე შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R^N) \to \nu_\Delta(X) = \sum_{(z_k)_{k\in N} \in Z^{(N)}} \prod_{k\in N} p_k(X - ((b_k - a_k)z_k)_{k\in N}),$$

ეწოდება ხარაზიშვილის ზომა.

თუ X არის სიმრავლე, მაშინ $card(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის სიმძლავრეს. ზოგჯერ $card(X)$--ს ეძახიან X სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს.

ω არის პირველი უსასრულო კარდინალური(ორდინალური) რიცხვი. კერძოდ, ω არის

$$N = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

ყველა ნატურალურ რიცხვთა კარდინალური რიცხვი.

ω_1 არის პირველი არათვლადი კარდინალური(ორდინალური) რიცხვი. შევნიშნოთ, რომ ω_1 შეიძლება გავაიგივოთ ყველა თვლად ორდინალურ რიცხვთა სიმრავლესთან.

სხვადასხვა ორდინალური რიცხვები აღინიშნებიან შემდეგი ასოებით

$$\alpha, \beta, \gamma, \xi, \cdots.$$

ვთქვათ, α არის ორდინალური რიცხვი. ჩვენ ვიტყვით, რომ α არის ზღვრული ორდინალი, თუ

$$\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}.$$

ზღვარითი α ორდინალის კონფინალურობა არის უმცირესი ორდინალი ξ რომლისთვისაც არსებობს ორდინალთა ოჯახი

$$\{\alpha_\iota : \iota < \xi\},$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\alpha_\iota < \alpha \ \ (\iota < \xi),$$

$$\alpha = \sup\{\alpha_\iota : \iota < \xi\}.$$

α ზღვარითი ორდინალის კონფინალობა აღინიშნება $cf(\alpha)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ ყოველი ზღვარითი ორდინალური α რიცხვისათვის სრულდება პირობა

$$cf(\alpha) \leq \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება რეგულარული, თუ

$$cf(\alpha) = \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება სინგულარული, თუ

$$cf(\alpha) < \alpha.$$

მაგალითად, ω და ω_1 არიან რეგულარული ორდინალები და ω_ω არის სინგულარური ორდინალი.

თუ k არის რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვი, მაშინ k^+ აღნიშნავს უმცირესს კარდინალურ რიცხვს იმ კარდინალთა შორის რომლებიც აღემატებიან k-ს. მაგალითად,

$$\omega^+ = \omega^1,\ \omega_2 = (\omega_1)^+, \cdots.$$

კონტინუუმ ჰიპოთეზა (შემოკლებულად, CH) არის გამონათქვამი

$$c = \omega_1.$$

გიოდელმა აჩვენა რომ $(ZFC) \& (CH)$ თეორია არის თავსებადი კონ-სტრუქტიულ უნივერსუმში (იხილეთ [27]). მეორეს მხრივ, კოენმა აჩვენა რომ თეორია

$$(ZFC) \& (\neg CH)$$

ასევე არის თავსებადი (იხ. [14], [15]). შესაბამისად CH არის დამოუკიდე-ბელი ZFC თეორიისაგან.

კონტინუუმ ჰიპოთეზის ძლიერ ფორმას წარმოადგენს განზოგა-დოებული კონტინუუმ ჰიპოთეზა GCH, რომელიც არის გამონათქვამი

$$(\forall k > \omega)(2^k = k^+).$$

გიოდელმა ასევე აჩვენა, რომ $(ZFC) \& (GCH)$ თეორია ასევე თავსებადია კონსტრუქციულ უნივერსუმში (იხ. [27]).

ვთქვათ, X და Y ორი სიმრავლეა. მათი დეკარტული $X \times Y$ ნამრავლის ნებისმიერ $G \subseteq X \times Y$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული

მიმართება X და Y სიმრავლეებს შორის. თუ $X = Y$, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას X ბაზისურ სიმრავლეზე.

დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) არის შემდეგი წინადადება:

თუ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას არაცარიელ X ბაზისურ სიმრავლეზე და X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს ამავე სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ $(x,y) \in G$, მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ელემენტთა ისეთი თვლადი $x_1, x_2, \cdots$ მიმდევრობა, რომ $(x_n, x_{n+1}) \in G$ ყოველი ნატურალური $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის.

ცხადია, რომ დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის სუსტ ფორმას, რომელიც სავსებით საკმარისია კლასიკური მათემატიკის ისეთი დარგებისათვის, როგორიცაა სასრულ-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის გეომეტრია, ნამდვილი ღერძის მათემატიკური ანალიზი, ლებეგის ზომის თეორია და ა.შ.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი ცნება, რომელიც არის აუცილებელი დეტერმინირების აქსიომის (AD) ჩამოსაყალიბებლად.

ყოველი $A \subseteq \omega^{\omega}$ ქვესიმრავლე განსაზღვრავს G_A ტიპის თამაშს I და II მოთამაშეს შორის შემდეგნაირად:

I მოთამაშე წერს a_0 ნატურალურ რიცხვს . II მოთამაშე უყურებს a_0 ნატურალურ რიცხვს და წერს a_1 ნატურალურ რიცხვს. ამის შემდეგ, I მოთამაშე უყურებს a_0, a_1 ნატურალურ რიცხვებს და წერს a_3 ნატურალურ რიცხვს და ა.შ. უსასრულოდ. ზღვარში მიიღება ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. თუ ეს მიმდევრობა ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ იგებს I მოთამაშე; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოგებულია II მოთამაშე .

თამაშის ბევრი სახეობა (ჭადრაკი, შაში და ა.შ.) შეიძლება აღიწეროს ზემოთ მოყვანილი სქემით.

$\omega^{(\omega)}$-თი აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სასრული მიმდევრობების სივრცე ცარიელი სიმრავლის ჩათვლით. ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩაითვალოს ნული სიგრძის მიმდევრობად.

ფუნქციას $\sigma : \omega^{(\omega)} \to \omega$ ეწოდება სტრატეგია G_A ტიპის თამაშისას.

ვთქვათ, $\sigma : \omega^{(\omega)} \to \omega$ არის სტრატეგია I მოთამაშისათვის და $\tau : \omega^{(\omega)} \to \omega$ არის სტრატეგია II მოთამაშისათვის.

$\sigma : \omega^{(\omega)} \to \omega$ და $\tau : \omega^{(\omega)} \to \omega$ სტრატეგიების შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (\sigma(\varnothing), \tau(\sigma(\varnothing)), \sigma(\sigma(\varnothing), \tau(\sigma(\varnothing))), \cdots).$$

$\sigma : \omega^{(\omega)} \to \omega$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია I მოთამაშისათვის , თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \in A$$

II მოთამაშის ნებისმიერი τ სტრატეგიისათვის.

ანალოგიურად, $\tau : \omega^{(\omega)} \to \omega$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია II მოთამაშისათვის , თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \notin A$$

I მოთამაშის ნებისმიერი σ სტრატეგიისათვის.

G_A ტიპის უსასრულო თამაშს ეწოდება დეტერმინირებული, თუ მხოლოდ ერთისათვის ამ ორი მოთამაშისათვის არსებობს მომგებიანი სტრატეგია.

დეტერმინირების აქსიომა (AD). ყოველი $A \subseteq \omega^{\omega}$ ქვესიმრავლისათვის, G_A ტიპის უსასრულო თამაში დეტერმინირებულია.

მიჩელსკისა და სვერჩკოვსკის კლასიკური შედეგი ყალიბდება შემდეგნაირად:

თეორემა 1.2. $(ZF)\&(DC)\&\ (AD)$ *თეორიაში ნამდვილი* $\mathbb{R}$ *ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით.*

ვთქვათ, (E,T) არის ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე (იხილეთ [28]).

$X \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი (E-ში) თუ $int(cl(X)) = \varnothing$.

$Y \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ Y წარმოდგენადია $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ სახით, სადაც Y_n $(n \in \omega)$ არის E-ს არსად მკვრივი ქვესიმრავლე.

$Z \subseteq E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება E-ს მეორე კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ ის არ არის E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კვაზი-კომპაქტური, თუ E-ს ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს E-ს სასრულ ქვედაფარვას.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ჰაუსდორფის თუ ნებისმიერი ორი $x, y \in E$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი ღია G_x და G_y სიმრავლეები, რომ $x \in G_x$, $y \in G_y$ და $G_x \cap G_y = \varnothing$.

E სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ ის ერთდროულად არის ჰაუსდორფის სივრცე და კვაზი-კომპაქტური სივრცე.

თეორემა 1.3 (ტიხონოვი). *კვაზი-კომპაქტურ სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლი არის კვაზი-კომპაქტური* (იხილეთ [27]).

თეორემა 1.4 (ბანახი). *ვთქვათ, E არის ტოპოლოგიური სივრცე და $(V_i)_{i\in I}$ არის ღია პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლეთა ოჯახი. მაშინ, გაერთიანება $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე* (იხ. [25]).

თეორემა 1.4-ის უშუალო შედეგს წარმოადგენს

თეორემა 1.5. *ყოველი ტოპოლოგიური სივრცე E წარმოიდგინება შემდეგი*

$$E = E_1 \cup E_2$$

გაერთიანების სახით, სადაც E_1 არის E-ს პირველი კატეგორიის ღია სიმრავლე და E_2 არის E-ს ბერის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

ვთქვათ, (E_1,S_1) და (E_2,S_2) არის ორი ზომადი სივრცე და f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. ჩვენ ვიტყვით, რომ f არის ზომადი ასახვა თუ

$$(\forall X)(X \in S_2 \to f^{-1}(X) \in S_1).$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ასახვა $f : E_1 \to E_2$ არის ზომადი იზომორფიზმი E_1-დან E_2-ში თუ f არის ზომადი ბიექცია და შებრუნებული ასახვა f^{-1} აგრეთვე არის ზომადი.

ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი ტოპოლოგიური სივრცე. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ზომადი სივრცე $(E_1,B(E_1))$ და $(E_2,B(E_2))$, სადაც $B(E_1)$ და $B(E_2)$ აღნიშნავენ შესაბამისად E_1 და E_2 სივრცეების ბორელის σ-ალგებრებს. ვთქვათ, f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. f ასახვას ეწოდება ბორელის აზრით ზომადი, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall X)(X \in B(E_2) \to f^{-1}(X) \in B(E_1)).$$

ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება პოლონური, თუ ის ჰომეომორფულია სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის.

ცხადია, რომ ყოველი კომპაქტური არათვლადი მეტრიკული სივრცე არის პოლონური სივრცე. კერძოდ, კანტორის დისკონტინუუმი $\{0,1\}^{\omega}$ (სადაც $\{0,1\}$ აღჭურვილია დისკრეტული ტოპოლოგიით) არის პოლონური სივრცე. $\omega^{\omega} = N^{\omega}$ სივრცე, სადაც N აღჭურვილი დისკრეტული ტოპოლოგიით, არის ასევე მაგალითი პოლონური სივრცის. არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ N^{ω} ჰომეომორფულია R ღერძის ირაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლის.

თეორემა 1.6. *შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტურია:*

1) *ყოველი არაცარიელი პოლონური სივრცე არის* N^{ω} *სივრცის უწყვეტი ანასახი;*

2) *ყოველი არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცე არის კანტორის* $\{0,1\}^{\omega}$ *დისკონტინუუმის უწყვეტი ანასახი;*

3) *ყოველი სეპარაბელური სივრცე ტოპოლოგიურად შეიძლება ჩაიდგას ჰილბერტის* $[0,1]^{\omega}$ *კუბში.*

ვთქვათ, (E_1, S_1, μ_1) და (E_2, S_2, μ_2) არის ორი ზომიანი სივრცე. μ_1 და μ_2 ზომებს ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობს ზომადი f ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში, რომ შესრულებულია ტოლობა

$$(\forall X)(X \in S_1 \to \mu_1(X) = \mu_2(f(X))).$$

თეორემა 1.7 (იხ. [25]). ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი პოლონური სივრცე აღჭურვილი შესაბამისად μ_1 და μ_2 დიფუზიური ალბათური ბორელის ზომებით. მაშინ არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$$\varphi : (E_1, B(E_1)) \to (E_2, B(E_2)),$$

ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $\mu_1(X) = \mu_2(\varphi(X))$ ყოველი $X \in B(E_1)$ სიმრავლისათვის.

თეორემა 1.8 (ფუბინი) [26]. *ვთქვათ,* (E_1, S_1, μ_1) *და* (E_2, S_2, μ_2) *არის ორი ზომადი სივრცე, აღჭურვილი შესაბამისად* μ_1 *და* μ_2 σ*-სასრულო ზომებით და ვთქვათ,*

$$(E, S, \mu) = (E_1, S_1, \mu_1) \times (E_2, S_2, \mu_2).$$

ვთქვათ, $f : E \to R$ *არის* μ*-ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ:*

1) μ_1*-თითქმის ყველა* $x \in E_1$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$y \to f(x, y)\ (y \in E_2)$$

არის μ_2*-ინტეგრებადი;*

2) μ_2*-თითქმის ყველა* $y \in E_2$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$x \to f(x, y)\ (x \in E_1)$$

არის μ_1*-ინტეგრებადი;*

3) *ფუნქცია*

$$x \to \int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$$

არის μ_1*-ინტეგრებადი და ფუნქცია*

$$y \to \int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$$

არის μ_2*-ინტეგრებადი;*

4) *სრულდება შემდეგი ტოლობა*

$$\int_{E_1}\left(\int_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int_{E_2}\left(\int_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)$$

$$= \int\int_{E_1\times E_2} f(x,y)d(\mu_1(x)\times\mu_2(y)).$$

შევნიშნოთ, რომ ფუბინის თეორემა შესაძლებელია ჩამოყალიბდეს σ-სასრულო ზომების სასრული ოჯახის ნამრავლისათვის.

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა. ფუნქციას, განსაზღვრულს შემდეგი პირობით

$$\nu : S \to \overline{R}$$

ეწოდება მუხტი S-ზე, თუ

ა) $\nu(\varnothing) = 0$;

ბ) $card(ran(\nu) \cap \{-\infty,+\infty\}) \le 1$;

გ) ν არის σ-ადიტიური.

თეორემა 1.9 (ხანი) [26]. *ვთქვათ,* ν *არის* E *სივრცის ქვესიმრავლეთა* S σ*-ალგებრაზე განსაზღვრული მუხტი. მაშინ არსებობს ორი ისეთი* $A \subseteq E$ *და* $B \subseteq E$ *სიმრავლე, რომ:*

1) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = E$;

2) $A \in S$, $B \in S$;

3) *ყოველი* $X \in S$ *სიმრავლისათვის სრულდება* $\nu(A \cap X) \ge 0$ *და* $\nu(B \cap X) \le 0$ *პირობები.*

$\{A, B\}$ სიმრავლეებს ეწოდება E სივრცის ხანის წარმოდგენა ν მუხტის მიმართ.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\nu^{+}(X) = \nu(X \cap A)\,(X \in S),$$

$$\nu^{-}(X) = -\nu(X \cap B)\,(X \in S).$$

ადვილია იმის ჩვენება რომ ν^{+} და ν^{-} წარმოადგენენ ჩვეულებრივ ზომებს განსაზღვრულს S σ-ალგებრაზე. ამასთან,

$$\nu = \nu^{+} - \nu^{-}.$$

$|\nu|$ ფუნქცია, განსაზღვრულს პირობით

$$|\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}$$

წარმოადგენს S σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომას და მას ეწოდება ν მუხტის ტოტალური ვარიაცია.

ვთქვათ, (E, S, μ) არის ზომიანი სივრცე და ν არის ზომა განსაზღვრული S σ-ალგებრაზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ ν არის აბსოლუ-ტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ, თუ

$$(\forall X \in S)(\mu(X) = 0 \rightarrow \nu(X) = 0).$$

თეორემა 1.10 (რადონ-ნიკოდიმი)[26]. *ვთქვათ, (E, S, μ) არის ზომიანი სივრცე, აღჭურვილი σ-სასრულო μ ზომით და ν არის σ-სასრულო ზომა, განსაზღვრული S σ-ალგებრაზე. თუ ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ, მაშინ არსებობს ისეთი μ-ზომადი ფუნქცია $f : E \rightarrow R$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობა*

$$\nu(X) = \int_X f d\mu.$$

f ფუნქციას ეწოდება ν ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული μ ზომის მიმართ და აღინიშნება $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, E არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცე და μ არის E-ზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის რადონის ზომა თუ ყოველი $X \in B(E)$ სიმრავლისათვის სრულდება პირობა

$$\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K \text{ კომპაქტურია } E\text{-ში } \& \ K \subseteq X\text{-ზე}\}.$$

ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება რადონის, თუ E-ზე განსაზღვრული ბორელის ყოველი σ-სასრული ზომა არის რადონის ზომა.

თეორემა 1.11 (ულამი)[29]. *ყოველი პოლონური ტოპოლოგიური სივრცე E არის რადონის სივრცე.*

ვთქვათ, E არის ბაზისური სივრცე და G არის მის ზომად გარდაქმნათა ჯგუფი. ვთქვათ, D არის E-ს ქვესიმრავლეთა კლასი. ჩვენ ვიტყვით, რომ D არის G-ინვარიანტული, თუ

$$(\forall X)(\forall g)(X \in D \,\&\, g \in G \rightarrow g(X) \in D).$$

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა და μ არის ზომა განსაზღვრული S კლასზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის G-კვაზიინვარიანტული თუ:

1) S არის G-ინვარიანტული კლასი;

2) μ-ნულ ზომად სიმრავლეთა კლასი $L(\mu)$ ასევე არის G-ინვარიანტული.

თუ მე-2) პირობის ნაცვლად შესრულებულია უფრო ძლიერი პირობა

3) $(\forall X)(\forall g)(X \in S \,\&\, g \in G \rightarrow \mu(g(X)) = \mu(X))$,

მაშინ μ ზომას ეწოდება G-ინვარიანტული.

(E, S, G, μ) ოთხეულს ეწოდება ინვარიანტული ზომიანი სივრცე, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) E არის არაცარიელი სიმრავლე;

2) G არის E სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი;

3) S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული σ-ალგებრა;

4) μ არის S-ზე განსაზღვრული G-ინვარიანტული ზომა.

ვთქვათ, $(G_i)_{i\in I}$ არის ჯგუფთა რაიმე ოჯახი. ვთქვათ, e_i არის $G_i\,(i\in I)$-ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. $(G_i)_{i\in I}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ჯამი აღინიშნება $\sum_{i\in I} G_i$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება პირობით:

$$\sum_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} : (\forall i)(i\in I \rightarrow g_i \in G_i \ \&\ card(\{i : g_i \neq e_i\}) < \omega)\}.$$

ფუბინის თეორემით ადვილად მიიღება შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 1.12. *ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე და $(E_i, S_i, G_i, \mu_i)_{i\in I}$ არის ინვარიანტულ (კვაზიინვარიანტულ) ალბათურ სივრცეთა ოჯახი. მაშინ პროდაქტ-ზომა $\prod_{i\in I}\mu_i$ არის $\sum_{i\in I} G_i$-ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ალბათური ზომა.*

ვთქვათ, $(G,.)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ასეთი ჯგუფისათვის მართებულია ჰაარის კარგად ცნობილი შედეგი, რომელიც გვამცნობს, რომ ასეთ G ჯგუფზე არსებობს და მასთან ერთადერთი არატრივიალური ინვარიანტული ბორელის ზომა μ (იხ. [18]). კერძოდ, μ ზომა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) μ არის ლოკალურად სასრული ზომა, ე.ი., ყოველი $x\in G$ წერტილისათვის არსებობს ამავე წერტილის ისეთი ღია მიდამო $V(x)$, რომ $\mu(V(x)) < +\infty$;

2) μ არის რადონის ზომა;

3) μ არის $B(G)$-კლასზე განსაზღვრული მარცხნიდან ინვარიანტული ზომა, ე.ი.,

$$(\forall X)(\forall g)(X\in B(G)\ \&\ g\in G \rightarrow \mu(g\cdot X) = \mu(X)).$$

μ ზომას ეწოდება G-ჯგუფზე განსაზღვრული (მარცხენა) ჰაარის ზომა.

თავი II. ელემენტარულ სტაციონარულ ზომათა სტრუქტურის შესახებ

2.1. მიმართება სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესებსა და გარდაქმნის შემნახავ ალბათურ ზომებს შორის.

განსაზღვრება 2.1.1. ვთქვათ, $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ არის პროცესი განსაზღვრული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე, რომელიც ღებულობს მნიშვნელობებს X პოლონურ სივრცეში. ჩვენ ვიტყვით, რომ $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ არის სტაციონარული პროცესი,თუ $(\xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_k})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება იგივეა, რაც $(\xi_{n_1+n}, \cdots, \xi_{n_k+n})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება ყოველი $k \geq 1$ და $n, n_1, \cdots, n_k \in \mathbf{Z}$ რიცხვებისათვის.

თეორემა 2.1.1. *ვთქვათ,* $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ *არის სტაციონარული სტოქასტური პროცესი განსაზღვრული* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ალბათურ სივრცეზე მნიშვნელობებით* X *პოლონურ სივრცეში. ვთქვათ,* T *არის* $X^{\mathbf{Z}}$ *სივრცის ნატურალური ძვრა განსაზღვრული* $T((x_n)_{n \in \mathbf{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbf{Z}}$ *პირობით ყოველი* $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in X^{\mathbf{Z}}$ *მიმდევრობისათვის. მაშინ ფუნქციონალი* μ*, განსაზღვრული პირობით*

$$(\forall Y)(Y \in \mathcal{B}(X^{\mathbf{Z}}) \to \mu(Y) = P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k \in \mathbf{Z}} \in Y\})$$

წარმოადგენს $X^{\mathbf{Z}}$ *სივრცეზე განსაზღვრულ* T*-ინვარიანტულ ბორელის ალბათურ ზომას.*

დამტკიცება. ვინაიდან $\{\xi_n : n \in \mathbf{Z}\}$ არის სტაციონარული პროცესი, განსაზღვრული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე მნიშვნელობებით X პოლონურ სივრცეში, ამიტომ $(\xi_{n_1}, \cdots, \xi_{n_k})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება იგივეა რაც $(\xi_{n_1+n}, \cdots, \xi_{n_k+n})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება ყოველი $k \geq 1$ და $n, n_1, \cdots, n_k \in \mathbf{Z}$ რიცხვებისათვის. ამის გამო ჩვენ გვაქვს, რომ სრულდება პირობა

$$P(\{\omega : (\xi_{k+n}(\omega))_{k \in Z}) \in Y\}) = P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k \in Z}) \in Y\})$$

$X^{\mathbf{Z}}$ სივრცის ყოველი ელემენტარული ცილინდრული Y სიმრავლისათვის. კარათეოდორის თეორემის გამოყენებით, ეს ტოლობა შესაძლებელია გაგრძელდეს $X^{\mathbf{Z}}$ სივრცის ყოველი ბორელისეული ქვესიმრავლისათვის.

დავუშვათ

$$(\forall Y)(Y \in \mathcal{B}(X^{\mathbf{Z}}) \to \mu(Y) = P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k\in\mathbf{Z}} \in Y\}).$$

μ არის ალბათური ზომა განსაზღვრული $X^{\mathbf{Z}}$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრაზე.

ზომის სტაციონარულობა გადადის μ ზომის ინვარიანტულობაში T გარდაქმნის მიმართ, ე.ი., $\mu T^{-1} = \mu$. მართლაც, $Y \in \mathcal{B}(E^{\mathbf{Z}})$ სიმრავლისათვის ჩვენ ვღებულობთ

$$\begin{aligned}
&\mu(T^{-1}(Y)) = P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k\in\mathbf{Z}} \in T^{-1}(Y)\}) \\
&= P(\{\omega : T((\xi_k(\omega))_{k\in\mathbf{Z}}) \in Y\}) = P(\{\omega : (\xi_{k+1}(\omega))_{k\in\mathbf{Z}}) \in Y\}) \\
&= P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k\in\mathbf{Z}}) \in Y\}) = \mu(Y).
\end{aligned}$$

□

2.2. სტაციონარული სტოქასტური პროცესის აგების ერთი მეთოდის შესახებ

შემდეგი წინადადება აღწერს სტაციონარული სტოქატური პროცესის აგების ერთ ზოგად მეთოდს.

თეორემა 2.2.1. *ვთქვათ,* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *არის ალბათური სივრცე და* X *არის პოლონური სივრცე. ვთქვათ,* $\xi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{B})$ *არის ზომადი ასახვა. ვთქვათ,* $T : \Omega \to \Omega$ *არის ურთიერთცალსახა* $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$*-ზომადი ასახვა, რომელიც ინახავს* P *ზომას. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა* $(\xi_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, *განსაზღვრული*

$$\xi_n(\omega) = \xi(T^n(\omega)), \omega \in \Omega$$

პირობით, წარმოადგენს სტაციონარულ პროცესს.

დამტკიცება. ვთქვათ, $X_{n_1} \times \cdots \times X_{n_k} \in \mathcal{B}(X^{\{n_1,\cdots,n_k\}})$, სადაც $k \ge 1$, $n_1,\cdots,n_k \in \mathbf{Z}$ და $X_{n_i} \in \mathcal{B}(X)$ $(1 \le i \le k)$. ჩვენ ვღებულობთ

$$P(\{\omega : (\xi_n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}} \in X_{n_1} \times \cdots \times X_{n_k} \times X^{\mathbf{Z}\setminus\{n_1,\cdots,n_k\}}\}$$

$$= P(\{\omega : (\xi_{n_1}(\omega),\cdots,\xi_{n_k}(\omega)) \in X_{n_1} \times \cdots \times X_{n_k}\}$$

$$= P(\{\omega : \xi(T^{n_1}(\omega)) \in X_{n_1} \,\&\cdots\&\, \xi(T^{n_k}(\omega)) \in X_{n_k}\}$$

$$= P(\{\omega : T^{n_1}(\omega) \in \xi^{-1}(X_{n_1}))\,\&\cdots\&\, T^{n_k}(\omega) \in \xi^{-1}(X_{n_k}))\}$$

$$= P(\{T^{-n}(\omega) : T^{n_1}(\omega) \in \xi^{-1}(X_{n_1}))\,\&\cdots\&\, T^{n_k}(\omega) \in \xi^{-1}(X_{n_k}))\}$$

$$= P(\{s : T^{n_1}(T^{n}(s)) \in \xi^{-1}(X_{n_1}))\,\&\cdots\&\, T^{n_k}(T^{n}(s)) \in \xi^{-1}(X_{n_k}))\}$$

$$= P(\{s : T^{n_1+n}(s) \in \xi^{-1}(X_{n_1}))\,\&\cdots\&\, T^{n_k+n}(s)) \in \xi^{-1}(X_{n_k}))\}$$

$$= P(\{s : \xi(T^{n_1+n}(s)) \in X_{n_1} \,\&\cdots\&\, \xi(T^{n_k+n}(s)) \in X_{n_k})\}$$

$$= P(\{\omega : (\xi_{n_1+n}(\omega),\cdots, X_{n_k+n}) \in X_{n_1} \times \cdots \times X_{n_k}\}. \qquad \square$$

შენიშვნა 2.2.1. 2.1.1 და **2.2.**1 თეორემების კომბინირებით, ჩვენ ვასკვნით რომ სტაციონარული პროცესის შესწავლა იგივეა, რაც ალბათობის შემნახავი გარდაქმნის შესწავლა.

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ სტაციონარული პროცესების ზოგიერთ მაგალითს, რომელიც არსებითად იყენებს თეორემა 2.2.2-ს.

მაგალითი 2.2.1. ვთქვათ, $\Omega = \mathbb{R}^2$ და U_α არის $\mathbb{R}^2$ საკოორდინატო სიბრტყის შემობრუნება მისი სათავის გარშემო α კუთხით. ვთქვათ, P არის სტანდარტული გაუსის ზომა $\mathbb{R}^2$-ზე. დავუშვათ, რომ $\mathcal{F} = \mathcal{B}(R^2)$. ვთქვათ,

$$\xi(x,y) = x^2 + y^2$$

როცა $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. მაშინ

$$\xi : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$$

არის ზომადი და პროცესი განსაზღვრული პირობით

$$(\xi(U_\alpha^n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}$$

არის ნამდვილ-მნიშვნელობიანი სტაციონარული პროცესი განსაზღვრული $(\Omega,\mathcal{F},P)=(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbf{R}^2),\mu)$ ალბათურ სივრცეზე.

განსაზღვრება 2.2.2. ვთქვათ, T არის $X^{\mathbf{Z}}$ სივრცის ძვრა და μ არის T-ინვარიანტული ბორელის ალბათური ზომა განსაზღვრული $X^{\mathbf{Z}}$ სივრცეზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის ერგოდული T ძვრის მიმართ, თუ $T(D)=D$ პირობის მართებულობა $D\in\mathcal{B}(X^{\mathbf{Z}})$ სიმრავლისათვის იწვევს, რომ $\mu(D)=1$ ან $\mu(D)=0$.

განსაზღვრება 2.2.3. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ სტაციონარული პროცესი განსაზღვრული $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ალბათურ სივრცეზე მნიშვნელობებით X პოლონურ სივრცეში არის ერგოდული თუ $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ პროცესით $X^{\mathbf{Z}}$-სივრცეზე განსაზღვრული ალბათური ზომა μ არის ერგოდული.

ახლა ჩვენ მოვიყვანთ ნამდვილ-მნიშვნელობიან არაერგოდული სტაციონარული პროცესის მაგალითს.

მაგალითი 2.2.3. ვთქვათ, $(\xi(U_\alpha^n(\cdot))_{n\in\mathbf{Z}}$ არის ნამდვილ-მნიშვნელობიანი სტაციონარული პროცესი აგებული მაგალით 2.3.1-ში, როცა $\alpha=\frac{\pi}{4}$. ვთქვათ, D არის გაერთიანება $\frac{\pi}{2}$ რადიანის სიგრძის მქონე ჩრდილოეთი და სამხრეთი პოლუსების რკალური მიდამოებისა. მაშინ D სიმრავლისათვის ჩვენ გვაქვს, რომ $U_\alpha(D)=D$ და $P(D)=\frac{1}{2}$.

ვთქვათ, μ არის $(\xi(U_\alpha^n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}$ პროცესით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა $\mathbb{R}^{\mathbf{Z}}$-სივრცეზე, ე.ი.,

$$(\forall Y)(Y\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbf{Z}})\to\mu(Y)=P(\{\omega:(U_\alpha^n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}\in Y\})).$$

ვთქვათ, T არის $\mathbb{R}^{\mathbf{Z}}$ სივრცის ძვრა განსაზღვრული $T((x_n)_{n\in\mathbf{Z}})=(x_{n+1})_{n\in\mathbf{Z}}$ პირობით, სადაც $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}\in\mathbb{R}^{\mathbf{Z}}$.

მაშინ, $D_1=\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^n(D)))\}$ სიმრავლისათვის $T(D_1)=D_1$. მართლაც,

$$T(D_1)=T(\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^n(D))))=\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^{n+1}(D))))=\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^n(D))))=D_1.$$

მეორეს მხრივ,

$$\mu(D_1)=P(\{\omega:(\xi_n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}\in\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^n(D)))\})$$

$$=P(\{\omega:(\xi(U_\alpha^n(\omega)))_{n\in\mathbf{Z}}\in\prod_{n\in\mathbf{Z}}(\xi(U_\alpha^n(D)))\})$$

$$=P(\{\omega:(U_\alpha^n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}\in\prod_{n\in\mathbf{Z}}U_\alpha^n(D)\})$$

$$=P(\{\omega:(U_\alpha^n(\omega))_{n\in\mathbf{Z}}\in\prod_{n\in\mathbf{Z}}D\})$$

$$=P(\{\omega:(\omega)_{n\in\mathbf{Z}}\in\prod_{n\in\mathbf{Z}}U_\alpha^{-n}D\})$$

$$=P(\{\omega:\omega\in D\})=\frac{1}{2}.$$

უკანასკნელი თანაფარდობები მიუთითებს, რომ μ არ არის ერგოდული T ძვრის მიმართ, ექვივალენტურად, $(\xi(U_\alpha^n(\cdot))_{n\in\mathbf{Z}}$ არის ნამდვილ-მნიშვნელობიანი არაერგოდული სტაციონარული პროცესი.

შენიშვნა 2.2.2. ვთქვათ, $(\xi(U_\alpha^n(\cdot))_{n\in\mathbf{Z}}$ არის მაგალით 2.3.1-ში აგებული ნამდვილ-მნიშვნელობიანი სტაციონარული პროცესი. ადვილია იმის დამტკიცება, რომ:

(ა) თუ $\frac{\alpha}{\pi}\notin Q$, მაშინ $(\xi(U_\alpha^n(\cdot))_{n\in\mathbf{Z}}$ პროცესი არის ერგოდული.

(ბ) თუ $\frac{\alpha}{\pi}\in Q$, მაშინ $(\xi(U_\alpha^n(\cdot))_{n\in\mathbf{Z}}$ არის არაერგოდული.

2.3 ელემენტარულ ინვარიანტულ ალბათურ ზომათა სტრუქტურის შესახებ

[30]-ის თანახმად, (E,G,S,μ) ოთხეულს ეწოდება ინვარიანტულ ზომიანი სივრცე თუ სრულდება შემდეგი ოთხი პირობა:

1) E არის არაცარიელი;

2) G არის E-სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი;

3) S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G-ინვარიანტული σ-ალგებრა;

4) μ არის S-ზე განსაზღვრული G-ინვარიანტული ზომა.

ვთქვათ, (E,G,S,μ) არის ინვარიანტულ ზომიანი სივრცე.

განსაზღვრება 2.3.1. $X \in S$ ელემენტს ეწოდება μ-თითქმის G-ინვარიანტული, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall g)(g \in G \to \mu(g(X)\Delta X) = 0).$$

განსაზღვრება 2.3.2. ვთქვათ, (H,G,S,μ) არის ინვარიანტული ზომით აღჭურვილი ზომადი სივრცე და X არის H ჯგუფის μ-თითქმის G-ინვარიანტული ქვესიმრავლე.

$$\mu_X : S \to \overline{R}^+$$

ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall Z)(Z \in S \to \mu_X(Z) = \mu(X \cap Z)),$$

ეწოდება X სიმრავლესთან ასოცირებული μ ზომის კომპონენტი(იხილეთ [30]).

განსაზღვრება 2.3.3. μ ზომის μ_X კომპონენტს ეწოდება ელემენტარული, თუ ყოველი $Z \in S$ ელემენტისათვის, რომლისთვისაც $\mu(Z) > 0$, არსებობს G ჯგუფის ელემენტთა ისეთი $(g_k)_{k \in N}$ მიმდევრობა, რომ

$$\mu\left(X \setminus \bigcup_{k \in N} g_k(Z) \right) = 0.$$

განსაზღვრება 2.3.4. G-ინვარიანტულ μ ზომას ეწოდება არაელემენტარული, თუ მას არ გააჩნია ელემენტარული კომპონენტები.

შემდეგი დამხმარე დებულება არის მეტად სასარგებლო ინვარიანტულ ზომათა ზოგადი თეორიის სხვადასხვა ასპექტში.

ლემა 2.3.1 ([30], გვ. 152). *ვთქვათ,* (E,G,S,μ) *არის ინვარიანტულ ზომიანი სივრცე აღჭურვილი* σ*-სასრულო ინვარიანტული ზომით. მაშინ არ-*

სებობს μ *ზომის ელემენტარული კომპონენტებისაგან შედგენილი ოჯახი* $(\mu_{X_i})_{i\in I}$ *ისეთი, რომ შესრულებულია შემდეგი სამი პირობა:*

ა) $(\forall i)(i \in I \to \mu(X_i) > 0)$;

ბ) $(\forall i)(\forall j)(i \in I \ \& \ j \in I \ \& \ i \neq j \to \mu(X_i \cap X_j) = 0)$;

გ) $(\forall X)(\forall \mu_X)(X \in S \ \& \ \mu_X$ *არის* μ *ზომის ელემენტარული ნაწილი* $\to (\exists i)(i \in I \ \& \ \mu(X \Delta X_i) = 0))$.

ვთქვათ, (E,G,S,μ) არის ინვარიანტულ ზომიანი სივრცე და $(\mu_{X_i})_{i\in I}$ არის მის ელემენტარულ კომპონენტთა ოჯახი, რომლისთვისაც შესრულე-ბულია ლემა 2.3.1-ის პირობები.

[30]-ის თანახმად, μ ზომას ეწოდება ელემენტარული (ან ელემენტა-რულად წარმოდგენადი), თუ მართებულია

$$\mu = \sum_{i\in I} \mu_{X_i}$$

წარმოდგენა. წინააღმდეგ შემთხვევაში, μ-ზომას ეწოდება არაელემენტარული.

ვთქვათ, $(\mu_i)_{i\in I}$ არის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ G-ინვარიან-ტულ ზომათა ოჯახი განსაზღვრული G-ინვარიანტულ ზომად (E,G,S) სივრცეზე.

ჩვენ ვიტყვით, რომ ეს ოჯახი არის ბაზისი (E,G,S) ინვარიანტულ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ყველა G-ინვარიანტულ ელემენტარულ ზომათა კლასისათვის, თუ (E,G,S) ინვარიანტულ ზომად სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ელემენტარული G-ინვარიანტული μ ზომი-სათვის არსებობს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(a_i)_{i\in J}$ მიმდევ-რობა, რომ $J \subseteq I$, $card(J) \leq \aleph_0$ და

$$(\forall Y)\left(Y \in S \to \mu(Y) = \sum_{i\in J} a_i \mu_i(Y) \right).$$

მართებულია შემდეგი დამხმარე დებულება.

ლემა 2.3.2 ([30]). *ვთქვათ,* μ *არის მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე არატრივიალური* G *-ინვარიანტული* σ *-სასრულო ზომა*[1]. *ვთქვათ,* λ *არის* G *-ინვარიანტული* σ *-სასრულო ზომა, რომელიც არის აბსოლუტურად უწყვეტი* μ *ზომის მიმართ. მაშინ არსებობს ისეთი კოეფიციენტი* $q \geq 0$, *რომ*

$$\lambda = q \cdot \mu.$$

დამტკიცება. რადონ-ნიკოდიმის თეორემის თანახმად, არსებობს ზომადი ფუნქცია

$$f : E \to \overline{R}^{+},$$

ისეთი, რომ ყოველი $Z \in S := dom(\mu)$ სიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lambda(Z) = \int_Z f d\mu.$$

ლემა 2.3.2 იქნება დამტკიცებული, თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ფუნცია f არის μ-თითქმის ყველგან მუდმივი. ვთქვათ, g არის G -ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი. მაშინ, $Z \in S$ ელემენტისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\int_Z (fog) d\mu = \int_{g(Z)} f d\mu = \mu(g(Z)) = \mu(Z) = \int_Z f d\mu.$$

ვინაიდან $Z \in S$ იყო აღებული ნებისმიერად, E სივრცის μ-თითქმის ყველა x წერტილებისათვის ვღებულობთ

$$(fog)(x) = f(x).$$

ცხადია რომ f ფუნქცია არის მუდმივი. მართლაც, ნებისმიერი დადებითი a და b რიცხვებისათვის ავღნიშნოთ $Z_{a,b}$-ით შემდეგი სიმრავლე

$$\{x \mid x \in E \;\&\; a \leq f(x) \leq b\}.$$

ცხადია, რომ $g \in G$ ელემენტისათვის, ჩვენ ვღებულობთ

$$\mu(g(Z_{a,b}) \Delta Z_{a,b}) = 0,$$

---

[1] G -ინვარიანტულ μ ზომას განსაზღვრულს G -ინვარიანტულ ზომად (E,G,S) სივრცეზე ეწოდება მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე, თუ ყოველი დადებითი μ ზომის მქონე X სიმრავლისათვის არსებობს G ჯგუფის ელემენტთა ისეთი $(g_k)_{k \in N}$ მიმდევრობა, რომ სრულდება პირობა $\mu(E \setminus \bigcup_{k \in N} g_k(Z)) = 0$.

რაც ნიშნავს, რომ $Z_{a,b}$ არის E-სივრცის G-თითქმის ინვარიანტული ქვე-სიმრავლე. ვინაიდან ზომა μ ფლობს მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისებას, მართებულია შემდეგი პირობა

$$\mu(E \setminus Z_{a,b}) = 0 \vee \mu(Z_{a,b}) = 0.$$

შესაბამისად, ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ $[a_m; b_m]_{m \in N}$ სეგმენტთა ისეთი მიმდევრობა, რომ :

1) $(\forall m)(m \in N \to [a_{m+1}; b_{m+1}] \subseteq [a_m; b_m]);$

2) $\lim_{m \to \infty}(b_m - a_m) = 0;$

3) $(\forall m)(m \in N \to \mu(E \setminus Z_{a_m, b_m}) = 0).$

თუ q არის ამ სეგმენტების საერთო ელემენტი, მაშინ f μ-თითქმის ყველგან მიიღებს მნიშვნელობას და ამით ლემა 3.3.2 დამტკიცებულია. □

ლემა 2.3.3 ([31]). *ვთქვათ, μ არის σ-სასრულო მეტრიკული ტრანზიტულობის მქონე G-ინვარიანტული ზომა და λ არის σ-სასრული ელემენტარული G-ინვარიანტული ზომა. მაშინ მართებულია ტოლობა*

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2,$$

სადაც λ_1 და λ_2 არიან ისეთი σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომები, რომ λ_1 არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ, და λ_2 და μ არიან წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ზომები.

დამტკიცება. ჩვენ გვაქვს $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i$, სადაც $\sum_{i \in I} \lambda_i$ აღნიშნავს λ-ზომის ელემენტარულ კომპონენტთა ჯამს. λ ზომის σ-სასრულობის გამო ვღებულობთ, რომ

$$card(I) \leq \aleph_0.$$

λ_i და μ ზომების მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების გამო ვღე-ბულობთ

$$(\forall i)(i \in I \to (\lambda_i \perp \mu) \vee (\lambda_i \ll \mu)),$$

სადაც $\perp$ და $\ll$ სიმბოლოები აღნიშნავენ შესაბამისად ორთოგონალურობასა და აბსოლუტურად უწყვეტობას.

$I_0 = \{i \mid i \in I \; \& \; (\lambda_i \perp \mu)\}$ აღნიშვნის შემოტანით, ჩვენ ვღებულობთ

$$\lambda = \sum_{i \in I_0} \lambda_i + \sum_{i \in I \setminus I_0} \lambda_i.$$

ეს ასრულებს ლემა 2.3.3-ის დამტკიცებას. □

G-ინვარიანტული მუხტების $(\lambda_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი, თუ ტოლობა

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k = 0$$

სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი ნატურალური $k \in [1;n]$ რიცხვისათვის $\alpha_k = 0$.

G-ინვარიანტულ მუხტთა $(\lambda_i)_{i \in I}$ ოჯახს ეწოდება წრფივად $\aleph_0$-დამოუკიდებელი, თუ

$$(\forall I_0)\left(I_0 \subseteq I \; \& \; Card(I_0) \le \aleph_0 \; \& \sum_{i \in I_0} \alpha_i \lambda_i = 0 \to \sum_{i \in I_0} |\alpha_i| = 0 \right).$$

მართებულია შემდეგი დებულება.

ლემა 2.3.4 ([31], თავი 12, თეორემა 1). *ვთქვათ, (E, G, S) არის ინვარიანტული ზომადი სივრცე და ვიგულისხმოთ, რომ S-ზე განსაზღვრულ ელემენტარულ G-ინვარიანტულ ზომათა კლასი არაცარიელია. მაშინ არსებობს σ-სასრულ ზომათა ოჯახი, ისეთი, რომ შესრულებულია პირობები:*

1) $(\forall i)(i \in I \to (\mu_i$ *არის მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომა*$))$;

2) $(\mu_i)_{i \in I}$ *არის $\aleph_0$-დამოუკიდებელი;*

3) $(\mu_i)_{i \in I}$ *არის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ ზომათა ოჯახი;*

4) *ყოველი ელემენტარული σ-სასრულო G-ინვარიანტული μ ზომისათვის არსებობს თვლადი სიმრავლე $I_0 \subseteq I$ და თვლადი ოჯახი არაუარყოფითი $(a_i)_{i \in I_0}$ რიცხვებისა, ისეთი რომ*

$$\mu = \sum_{i \in I_0} a_i \mu_i,$$

და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(\lambda_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$ არის S σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ყველა ელემენტარულ არატრივიალურ G-ინვარიანტულ σ-სასრულო ზომათა ტრანსფინიტული მიმდევრობა.

ვიგულისხმოთ, რომ $\tau<\omega_\alpha$ ორდინალური რიცხვისათვის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ზომათა კერძო $(\lambda_\xi')_{\xi<\tau}$ მიმდევრობა აგებულია ისე, რომ ლემა 2.3.4-ის მე-3) პირობაა დაკმაყოფილებული, და ყოველი $\xi<\tau$ ორდინალისათვის, λ_ξ' ზომა იყოს λ_ξ ზომის ელემენტარული კომპონენტი. 2.3.2-2.3.3 ლემების ძალით, ყოველი $\xi<\tau$ ორდინალისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\lambda_\tau = a_\xi \lambda_\xi' + \lambda_\xi'',$$

სადაც $a_\xi \geq 0$, და ზომები λ_ξ'' და λ_ξ' არიან წყვილ-წყვილად ორთოგონალურები.

λ_τ ზომის σ-სასრულობის თვისების გამო, ვღებულობთ რომ

$$card(\{\xi \mid \xi<\tau \;\&\; a_\xi \neq 0\}) \leq \aleph_0.$$

განვიხილოთ λ_τ''' ზომა, სადაც

$$\lambda_\tau''' = \lambda_\tau - \sum_{\xi<\tau} a_\xi \lambda_\xi'.$$

შევნიშნოთ, რომ λ_τ''' ზომა არის G-ინვარიანტული.

ვთქვათ,

$$\lambda_\tau''' = \sum_{i\in I} \mu_i^{(\tau)}$$

არის λ_τ''' ზომის წარმოდგენა მისი ელემენტარული კომპონენტების ჯამის სახით. აღვნიშნოთ λ_τ' -ით რაიმე არატრივიალური ზომა ზომათა $(\mu_i^{(\tau)})_{i\in I}$ ოჯახიდან.

თუ ასეთი ზომა არ არსებობს, მაშინ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\lambda_\tau = 0$. ტრანსფინიტული ინდუქციის პრინციპის თანახმად, $(\lambda_\tau')_{\tau<\omega_\alpha}$ ოჯახი აგებულია ისე, რომ:

1) ყოველი $\xi < \omega_\alpha$ ორდინალისათვის λ_ξ' არის σ-სასრულო მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე G-ინვარიანტული ზომა;

2) $(\lambda_\xi')_{\xi<\omega_\alpha}$ არის წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ზომების ოჯახი;

3) λ_ξ' არის λ_ξ ზომის ელემენტარული კომპონენტი.

შევნიშნოთ, რომ λ_ξ' ზომა არის ტრივიალური თუ λ_ξ ზომა არის წარმოდგენადი $(\lambda_\zeta')_{\zeta<\xi}$ ოჯახის ელემენტების თვლადი კომბინაციის სახით.

σ-სასრულობის არგუმენტის ხელახლა გამოყენებითა და იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ ყოველი ელემენტარული კომპონენტი კვლავ მიეკუთვნება $(\lambda_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$ ოჯახს, ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი σ-სასრული ელემენტარული G-ინვარიანტული λ ზომისათვის, არსებობს ინდექსთა თვლადი ოჯახი $I_0 \subseteq [0;\omega_\alpha[$ და არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა ისეთი $(a_i)_{i\in I_0}$ მიმდევრობა, რომ

$$\lambda = \sum_{i\in I_0} a_i\lambda_i'.$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$I_1^* = \{i \mid i \in [0;\omega_\alpha[\;\&\; \lambda_i' = 0\}$$

და განვიხილოთ სიმრავლე $I = [0;\omega_\alpha[\setminus I_1^*$.

ვიგულისხმოთ, რომ

$$(\forall i)(i \in I \rightarrow \mu_i = \lambda_i').$$

ცხადია, რომ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახისათვის სრულდება $1)-4)$ პირობები.

ამით ლემა 2.3.4 დამტკიცებულია. □

ვთქვათ, (E,G,S) არის G-ინვარიანტული ზომადი სივრცე, $(\mu_i)_{i\in I}$ არის G-ინვარიანტულ ზომათა ნებისმიერი ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს ლემა 2.3.4-ის 1)-4) პირობებს. მაშინ $card(I)$ კარდინალურ რიცხვს ეწოდება G-ინვარიანტულ ზომად (E,G,S) სივრცეზე განსაზღვრულ σ-სას-

რული ელემენტარულ G-ინვარიანტულ ზომათა კლასის განზომილება (ადვილია ამ განსაზღვრის კორექტულობის ჩვენება).

მაგალითი 2.3.1. ვთქვათ, G არის ლოკალურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ვთქვათ, S არის G ჯგუფის ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა. მაშინ G-ინვარიანტულ ზომად (E,G,S) სივრცეზე განსაზღვრულ σ-სასრულო ელემენტარულ G-ინვარიანტულ ზომათა კლასის განზომილება 1-ის ტოლია. ბაზისი შედგება მხოლოდ ერთი λ ელემენტისაგან, სადაც λ აღნიშნავს G-ჯგუფზე განსაზღვრულ ჰაარის ზომას.

მაგალითი 2.3.2. ვთქვათ, $\mu = \nu_{\Delta}$ არის ხარაზიშვილის ზომა, სადაც $\Delta = [0;1]^N$. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $g_k = (k,k,\cdots)$ $(1 \le k \le n)$.

λ_k-ით აღვნიშნოთ ზომა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall B)(B \in \mathcal{B}(R^N) \to \mu_k(B) = \mu(B - g_k)).$$

ასევე, დავუშვათ, რომ

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \mu_k .$$

L-ით აღვნიშნოთ $\mathcal{B}(R^N)$ σ-ალგებრის გასრულება λ ზომით. ვთქვათ, $\mathcal{K}$ არის L-კლასზე განსაზღვრულ ისეთ $R^{(N)}$-ინვარიანტულ σ-სასრულო ზომათა ოჯახი, რომლებიც ღებულობენ სასრულო მნიშვნელობებს $(\Delta - g_k)$ $(1 \le k \le n)$ ელემენტებზე. ცხადია, რომ $\mathcal{K}$ კლასის განზომილება n-ის ტოლია.

2.4. X^Z-ზე განსაზღვრული ელემენტარული სტაციონარული ზომების სტრუქტურის შესახებ

შემდეგი თეორემა წარმოადგენს ლემა 2.3.4-ის უშუალო შედეგს.

თეორემა 2.4.1 (ბაზისის არსებობა). *ვთქვათ, X არის პოლონური სივრცე. ვთქვათ, T არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრული ძვრის ოპერატორი. ვთქვათ, $\mathcal{T}$ აღნიშნავს ჯგუფს, წარმოქმნილს T ოპერატორით. მაშინ არსე-*

ბობს X^Z *-სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ისეთი* $(\mu_i)_{i\in I}$ *ოჯახი, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1) $(\forall i)(i \in I \to (\mu_i$ *ზომას გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება* $\mathcal{T}$ *-ჯგუფის მიმართ));*

2) *ზომათა* $(\mu_i)_{i\in I}$ *ოჯახი არის* $\aleph_0$ *-დამოუკიდებელი;*

3) $(\mu_i)_{i\in I}$ *არის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ზომათა ოჯახი;*

4) X^Z *-სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ელემენტარული სტაციო-ნარული ალბათური ბორელის* μ *ზომისათვის, არსებობს ინდექსთა თვლა-დი ოჯახი* $I_0 \subseteq I$ *და არაუარყოფით რიცხვთა ისეთი თვლადი* $(a_i)_{i\in I_0}$ *მიმ-დევრობა, რომ*

$$\mu = \sum_{i\in I_0} a_i \mu_i,$$

და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი.

დამტკიცება. ცხადია, რომ ბორელის σ-ალგებრა $\mathcal{B}(X^Z)$ არის $\mathcal{T}$-ინ-ვარიანტული. ამიტომ X^Z-სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ელემენტა-რული სტაციონარული ალბათური ბორელის ზომა არის $\mathcal{T}$-ინვარიან-ტული. ლემა 2.3.4-ის გამოყენება ასრულებს თეორემის დამტკიცებას. □

შემდეგი თეორემა, პოლონური X-სივრცის შემთხვევაში, იძლევა X^Z-სივრცეზე განსაზღვრული ელემენტარული სტაციონარული ალბათური ბორელის ზომათა კლასის ბაზისის სიმძლავრის შეფასებას.

თეორემა 2.4.2. *ვთქვათ,* $(\mu_i)_{i\in I}$ *არის* X^Z *-სივრცეზე განსაზღვრული ელემენტარული სტაციონარული ალბათური ბორელის ზომათა კლასის ბაზისი განსაზღვრული თეორემა* 2.4.1*-ით. მაშინ*

$$card(I) = c,$$

სადაც c *აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს.*

დამტკიცება. ვინაიდან X^Z კვლავ წარმოადგენს პოლონურ სივრცეს, ჩვენ ვასკვნით რომ X^Z სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა

სიმძლავრე c -ს ტოლია, რაც იწვევს $card(I) \le c$ უტოლობის მართებულობას. ახლა ვაჩვენოთ $card(I) \ge c$ უტოლობის მართებულობა. ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, μ_x -ით აღვნიშნოთ დირაკის ბორელის ზომა X^Z -ზე, რომელიც კონცენტრირებულია $(\cdots, x, x, x, \cdots)$ წერტილზე. ცხადია, რომ ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის, μ_x არის ელემენტარული მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე სტაციონარული ალბათური ზომა X^Z -ზე. თეორემა 2.4.1-ის მე-4) პირობის მართებულობა იწვევს $\mu_x \in \{\mu_i : i \in I\}$ პირობის მართებულობას ყოველი $x \in X$ წერტილისათვის. შესაბამისად, $card(I) \ge card(X) = c$. ამით თეორემა 2.4.2 დამტკიცებულია. □

თავი III. წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული არასეპარაბელური დიფუზიური სტაციონარული პროცესების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლები

3.1. ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახები

განვიხილოთ ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახებისათვის ა. სკოროხოდის მიერ [3] ნაშრომში შემოტანილი შემდეგი კლასიფიკაცია:

ვთქვათ, (E,S) არის ზომადი სივრცე.

განსაზღვრება 3.1.1. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება ორთოგონალური (O), თუ პარამეტრთა I ოჯახის ყოველი ორი განსხვავებული i და j ელემენტისათვის μ_i და μ_j ზომები არიან ორთოგონალურები.

განსაზღვრება 3.1.2. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება სუსტად განცალებადი $(W.S)$ თუ არსებობს E სივრცის ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი $(X_i)_{i\in I}$ ოჯახი, რომ

$$(\forall i,j)(i\in I\ \&\ j\in I\to\mu_i(X_j)=\delta(i,j)),$$

სადაც $\delta(i,j)$ აღნიშნავს I სიმრავლის I^2 დეკარტულ კვადრატზე განსაზღვრულ კრონეკერის ფუნქციას.

განსაზღვრება 3.1.3. (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახს ეწოდება ძლიერად განცალებადი $(S.S)$ თუ არსებობს E სივრცის ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი დიზუნქტიური ოჯახი $(X_i)_{i\in I}$, რომ

$$(\forall i)(i\in I\to\mu_i(X_i)=1).$$

განსაზღვრება 3.1.4. ვიტყვით, რომ (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახისათვის არსებობს i პარამეტრის

ძალდებული შეფასება $(C.E)$, თუ არსებობს ისეთი ზომადი ასახვა $\widetilde{i}: E \to I$, რომ

$$(\forall i)(i \in I \to \overline{\mu}_i(\{x : \widetilde{i}(x) = i\}) = 1).$$

ადვილია შემდეგ იმპლიკაციათა მართებულობის დადგენა: $(C.E) \to (S.S) \to (W.S) \to (O)$.

შემდგომ ქვეთავებში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ შებრუნებული იმპლიკაციები არაა ზოგადად მართებული პოლონური სივრცის Z-ხარისხებზე განსაზღვრული ორთოგონალური სტაციონარული ზომებისათვის.

3.2. ზოგიერთი დამხმარე დებულება

უსასრულო კომბინატორიკის ზოგიერთი მეთოდი წარმატებით გამოიყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად, ტოპოლოგიასა და ზომის თეორიაში. ამ მეთოდებს სორის განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახის აგების მეთოდი. სიმძლავრის თვალსაზრისით დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის არსებობის ამოცანა პირველად განხილული იყო ტარსკის მიერ(იხ. მაგალითად, [32]). მან დაამტკიცა რომ ეს სიმძლავრე $2^{card(E)}$ სიმძლავრის ტოლია. ამ შედეგმა ჰპოვა საინტერესო გამოყენება ზოგად ტოლპოლოგიაში რომლის საშუალებითაც დამტკიცდა, რომ უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში ულტრაფილტრების კლასის სიმძლავრე $2^{2^{card(E)}}$ სიმძლავრის ტოლია (იხ. მაგალითად, [33]) .

ევკლიდეს E_n სივრცის შემთხვევაში, დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდის გამოყენებით, ა. ხარაზიშვილმა ააგო ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის არაელემენტარულ D_n-ინვარიანტულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ გაგრძელებათა მაქსიმალური (სიმძლავრის საშუალებით) ოჯახი (იხილეთ [30]), სადაც D_n

აღნიშნავს E_n სივრცის ყველა იზომეტრიულ გარდაქმნათა ჯგუფს. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ შპილრაინ-მარჩევსკი იყო პირველი, ვინც გამოიყენა დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად (იხ. [34]). მოგვიანებით, ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად იგივე მეთოდი გაიყენეს კაკუტანიმ, კოდაირამ და ოქსტობიმ (იხ. [35], [36]).

ა. ხარაზიშვილის მიერ დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი გამოყენებულ იქნა ევკლიდეს E_n სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის ისეთი არაელემენტარული D_n-ინვარიანტული გაგრძელების ასაგებად, რომელთანაც ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა არის მაქსიმალურ, კერძოდ, 2^c კარდინალური რიცხვის ტოლი, სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს (იხ. [30]).

გ. ფანცულაიას მიერ გაზოგადებულ იქნა ტარსკის მიერ შემუშავებული დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი და წარმატებით გამოყენებულ იქნა არათვლად ლოკალურად კომპაქტურ σ -კომპაქტურ ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომის სხვადასხვა (ელემენტარული, არაელემენტარული, სეპარაბელური, არასეპარაბელური და სხვა) ინვარიანტული გაგრძელებების ასაგებად (იხილეთ, მაგალითად, [5], [12]). ამით მოხერხდა ლებეგის ზომის ინვარიანტულ გაგრძელებათა თეორიაში ზემოთ აღნიშნული შედეგების განზოგადება.

ჩვენ მოვიყვანთ [12] ნაშრომში მიღებული ზოგიერთი შედეგის ფორმულირებას.

ვთქვათ, H არის ლოკალურად-კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი და λ არის ამავე ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომა.

ლემა 3.2.1 ([12], ლემა 4, გვ. 381). *ვთქვათ, K არის H სივრცის ქვესიმრავლეთა ისეთი H -ინვარიანტული თვლადად ადიტიური იდეალი, რომ*

$$(\forall Z)(Z \in K \to \lambda_*(Z) = 0),$$

სადაც λ_* *აღნიშნავს* λ *ზომით განსაზღვრულ შიგა ზომას.*

მაშინ μ *ფუნქციონალი, განსაზღვრული პირობით*

$$\mu((X \cup Z') \cup Z'') = \lambda(X),$$

სადაც X *არის* H *სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე,* Z' *და* Z'' *არიან* K *იდეალის ელემენტები, არის ჰაარის* λ *ზომის* H *-ინვარიანტული გაგრძელება.*

ლემა 3.2.2 ([12], ლემა 5, გვ. 381*). ვთქვათ* H *არის ისეთი ლოკალურად კომპაქტური* σ *-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომ*

$$card(H^{\aleph_0}) = card(H).$$

მაშინ არსებობს H *ჯგუფის ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი* $(A_j)_{j \in J}$*, რომ:*

1) $card(J) = 2^{card(H)}$;

2) J *სიმრავლის ელემენტთა ყოველი ინექციური* $(j_k)_{k \in N}$ *მიმდევრობისათვის, შემდეგი თანაკვეთა*

$$\bigcap_{k \in N} \overline{A}_{j_k},$$

სადაც

$$(\forall k)(k \in N \to \overline{A}_{j_k} = A_{j_k} \vee \overline{A}_{j_k} = H \setminus A_{j_k}),$$

არის H *ჯგუფის თითქმის* H *-ინვარიანტული ქვესიმრავლე*[2]*;*

3) J *სიმრავლის ელემენტთა ყოველი ინექციური* $(j_k)_{k \in N}$ *მიმდევრობისათვის და* H *ჯგუფის ყოველი ჩაკეტილი* $F \subseteq H$ *ქვესიმრავლისათვის, რომლისთვისაც* $\lambda(F) > 0$, *სრულდება პირობა*

$$card\left(\left(\bigcap_{k \in N} \overline{A}_{j_k}\right) \cap F\right) = card(H),$$

სადაც

$$(\forall k)(k \in N \to \overline{A}_{j_k} = A_{j_k} \vee \overline{A}_{j_k} = H \setminus A_{j_k}).$$

---

[2] H ჯგუფის ქვესიმრავლეს ეწოდება H ჯგუფის თითქმის H -ინვარიანტული ქვესიმრავლე, თუ ყოველი $g \in H$ ელემენტისათვის სრულდება $card(g(A) \Delta A) < card(H)$.

ლემა 3.2.3 ([12], თეორემა 1, გვ. 381). *ვთქვათ, H არის ისეთი ლოკა-ლურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომ*

$$card(H^{\aleph_0}) = card(H).$$

მაშინ არსებობს H ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომათა ისეთი ორთოგონალური ოჯახი $(\mu_t)_{t\in T}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $card(T) = 2^{2^{card(H)}}$;

2) $(\forall t)(t \in T \to$ *ზომა μ_t არის ჰაარის λ ზომის H-ინვარიანტული გაგრძელება).*

ლემა 3.2.4. *ვთქვათ, H არის ისეთი ლოკალურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომ*

$$card(H^{\aleph_0}) = card(H).$$

მაშინ არსებობს H ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომათა ისეთი სუსტად განცალებადი ოჯახი $(\mu_t)_{t\in T}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $card(T) = 2^{card(H)}$;

2) $(\forall t)(t \in T \to$ *ზომა μ_t არის ჰაარის λ ზომის H-ინვარიანტული გაგრძელება).*

დამტკიცება. ვთქვათ, $(A_j)_{j\in J}$ არის H ჯგუფის ქვესიმრავლეთა ოჯახი განსაზღვრული ლემა 3.2.2-ით. ყოველი $i \in J$ ინდექსისათვის, f_i-ით აღვნიშნოთ $\{i\}$ სიმრავლის ინდიკატორი ფუნქცია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $G = \{f_i : i \in J\}$. ყოველი $g \in G$ ელემენტისათვის, $(A_j^g)_{j\in J}$-ით აღვნიშნოთ H ჯგუფის ელემენტთა ოჯახი განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall j)\left(j \in J \to A_j^g = \begin{cases} A_j, & g(j) = 0, \\ H \setminus A_j, & g(j) = 1. \end{cases}\right)$$

ვთქვათ, K_g არის H ჯგუფის ქვესიმრავლეთა თვლადად ადიტიური H-ინვარიანტული იდეალი წარმოქმნილი $(A_j^g)_{j\in J}$ ოჯახით. მაშინ ადვი-

ლია იმის შემოწმება, რომ K_g იდეალი აკმაყოფილებს ლემა 4.2.1-ის პირობებს. $\overline{\mu}_g$-ით ავღნიშნოთ ჰაარის ზომის H-ინვარიანტული გაგრძელება წარმოქმნილი K_g იდეალით (იხ. ლემა 4.2.1). ამგვარად, ჩვენს მიერ აგებულია ჰაარის λ ზომის გაგრძელებათა ისეთი $(\overline{\mu}_g)_{g\in G}$ ოჯახი, რომ

$$card(G) = card(J) = 2^{card(H)}.$$

S-ით აღვნიშნოთ H ჯგუფის ქვესიმრავლეთა H-ინვარიანტული σ-ალგებრა, წარმოქმნილი $F(H)$, $\mathcal{B}(H)$ $\{A_j : j \in J\}$ კლასებით, სადაც $F(H)$ აღნიშნავს H ჯგუფის იმ ქვესიმრავლეთა კლასს, რომელთა სიმძლავრეები არ აღემატება $card(H)$-ს, $\mathcal{B}(H)$ აღნიშნავს H-ჯგუფის ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასს. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$(\forall g)(g \in G \to \mu_g = \overline{\mu}_g |_S),$$

სადაც $\overline{\mu}_g |_S$ აღნიშნავს $\overline{\mu}_g$ ზომის შევიწროებას S σ-ალგებრაზე.

$G := J$ აღნიშვნის შემოტანა ასრულებს ლემა 3.2.4-ის დამტკიცებას. □

ვთქვათ, (H, G, S, μ) არის ინვარიანტული ზომით აღჭურვილი ზომადი სივრცე. შევნიშნოთ, რომ ρ_μ ფუნქცია, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall X)(\forall Y)(X \in S \;\&\; Y \in S \to \rho_\mu(X, Y) = \mu(X \Delta Y)),$$

არის S კლასზე განსაზღვრული კვაზი-მეტრიკა.

განსაზღვრება 3.2.1. ვთქვათ, $\approx$ არის ექვივალენტობის მიმართება განაზღვრული S კლასზე შემდეგი პირობით: ყოველი $X, Y \in S$ ელემენტებისათვის, $X \approx Y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\rho_\mu(X, Y) = 0$. ვთქვათ, $(S_i)_{i\in I}$ არის $\approx$ ბინარული მიმართებით წარმოქმნილი ექვივალენტურობის კლასები. მაშინ $(\mathcal{C}, \rho_\mu)$ წყვილს, სადაც $\mathcal{C}$ არის $(S_i)_{i\in I}$ ოჯახის სელექტორი, ეწოდება μ ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცე.

განსაზღვრება 3.2.2. μ ზომას ეწოდება სეპარაბელური (არასეპარაბელური), თუ μ ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული $(\mathcal{C}, \rho_\mu)$ სივრცის ტოპოლოგიური წონა $a(\mu)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$a(\mu) < \aleph_1 \quad (a(\mu) \geq \aleph_1),$$

სადაც $\aleph_1$ აღნიშნავს პირველ არათვლად კარდინალს.

ლემა 3.2.5 ([12], თეორემა 4, გვ. 388). *ვთქვათ, H არის ისეთი ლოკალურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომ*

$$card(H^{\aleph_0}) = card(H).$$

ვთქვათ, λ არის H ტოპოლოგიურ ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომა. მაშინ არსებობს ჰაარის ზომის H-ინვარიანტულ არაელემენტარულ გაგრძელებათა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ორთოგონალური ოჯახი $(\lambda_t)_{t \in T}$, ისეთი რომ $card(T) = 2^{2^{card(H)}}$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $(\forall i)(\forall j)(i \in T \;\&\; j \in T \to dom(\lambda_i) = dom(\lambda_j))$;

2) $(\forall i)(i \in T \to a(\lambda_i)$ *არის მაქსიმალური* $\&\; a(\lambda_i) = 2^{card(H)})$.

ლემა 3.2.4-ში გამოყენებული სქემითა და ლემა 3.2.5-ის საშუალებით მტკიცდება შემდეგი ლემა.

ლემა 3.2.6. *ვთქვათ, H არის ისეთი ლოკალურად კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, რომ*

$$card(H^{\aleph_0}) = card(H).$$

ვთქვათ, λ არის H ტოპოლოგიურ ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომა. მაშინ არსებობს ჰაარის ზომის H-ინვარიანტულ არაელემენტარულ გაგრძელებათა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) სუსტად განცალებადი ოჯახი $(\lambda_t)_{t \in T}$, ისეთი რომ $card(T) = 2^{card(H)}$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $(\forall i)(\forall j)(i \in T \;\&\; j \in T \to dom(\lambda_i) = dom(\lambda_j))$;

2) $(\forall i)(i \in T \to a(\lambda_i)$ *არის მაქსიმალური* $\&\; a(\lambda_i) = 2^{card(H)})$.

3.3. ორთოგონალურ სტაციონარულ ზომათა მაგალითები

თეორემა 3.3.1. *ვთქვათ,* (X,S,μ) *არის დიფუზიური*[3] *ალბათური სივრცე. მაშინ* μ *ზომის* Z*-ხარისხი* $\mu^{\mathbf{Z}}$, *განსაზღვრული პირობით* $\mu^{\mathbf{Z}}=\prod_{i\in\mathbf{Z}}\mu_i$, *სადაც* $\mu_i=\mu$ *ყოველი* $i\in\mathbf{Z}$ *ინდექსისათვის, წარმოადგენს* $(X^{\mathbf{Z}},S^{\mathbf{Z}})$ *ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ დიფუზიურ სტაციონარულ ზომას.*

დამტკიცება. ყოველი $k\in\mathbf{Z}$ მთელი რიცხვისათვის Pr_k -ით ავღნიშნოთ k-ური პროექცია $X^{\mathbf{Z}}$-ზე, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall x)(x=(x_i)_{i\in Z}\in X^{\mathbf{Z}}\to Pr_k((x_i)_{i\in Z})=x_k).$$

ვაჩვენოთ, რომ $(Pr_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ არის $(X^{\mathbf{Z}},S^{\mathbf{Z}},\mu^{\mathbf{Z}})$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული სტაციონარული პროცესი. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $(Pr_{n_1},\cdots,Pr_{n_k})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება იგივეა რაც $(Pr_{n_1+n},\cdots,Pr_{n_k+n})$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილება ყოველი $k\geq 1$ და $n,n_1,\cdots,n_k\in\mathbf{Z}$ მთელი რიცხვებისათვის.

მართლაც, ვთქვათ, $X_i\in S$, როცა $1\leq i\leq k$. მაშინ $\mu^{\mathbf{Z}}$ ზომის თვისების გამო ვღებულობთ

$$\mu^{\mathbf{Z}}\left(\left\{x\in X^{\mathbf{Z}}:(Pr_{n_1}(x),\cdots,Pr_{n_k}(x))\in\prod_{i=1}^{k}X_i\right\}\right)$$

$$=\mu^{\mathbf{Z}}\left(\left\{x\in X^{\mathbf{Z}}:(Pr_{n_1+n}(x),\cdots,Pr_{n_k+n}(x))\in\prod_{i=1}^{k}X_i\right\}\right)=\prod_{i=1}^{k}\mu(X_i).$$

კარათეოდორის კარგად ცნობილი თეორემის ძალით, ეს ტოლობა გაგრძელებადია S^k σ-ალგებრის ელემენტებისათვის, რაც ასრულებს თეორემა 3.3.1-ის დამტკიცებას. □

---

[3] ალბათურ (X,S,μ) სივრცეს ეწოდება დიფუზიური, თუ ყოველი წერტილოვანი სიმრავლე ეკუთვნის S კლასს და μ ზომის მნიშვნელობა ასეთ სიმრავლეებზე ნულის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ μ არის დიფუზიური ალბათური ზომა.

შედეგი 3.3.1. *ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ ბორელის $\gamma^{\mathbb{Z}}$ "თეთრი ხმაური" წარმოადგენს $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, B(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}))$ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ დიფუზიურ სტაციონარულ ზომას.*

თეორემა 3.3.2. *ვთქვათ, X არის პოლონური ჯგუფი. მაშინ X^Z სივრცეზე არსებობს მაქსიმალური სიმძლავრის მქონე დიფუზიურ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ისეთი $(\mu_t)_{t\in T}$ ოჯახი, რომ $card(T) = 2^{2^c}$ და შესრულებულია პირობები:*

(i) $(\forall i)(\forall j)(i\in T \,\&\, j\in T \to dom(\mu_i) = dom(\mu_j))$;

(ii) $(\forall i)(i\in T \to a(\mu_i)$ *არის მაქსიმალური* $\&\, a(\lambda_i) = 2^c)$, *სადაც* $a(\mu)$ *აღნიშნავს* μ_i *ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.*

დამტკიცება. ცხადია, რომ $card(X^{\aleph_0}) = card(X) = c$. ვთქვათ, λ არის X ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომა. მაშინ ლემა 3.2.3-ის ძალით, არსებობს ჰაარის ზომის X-ინვარიანტული გაგრძელებების მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ორთოგონალური $(\lambda_t)_{t\in T}$ ოჯახი, ისეთი, რომ $card(T) = 2^{2^c}$, და შესრულებულია პირობები:

1) $(\forall i)(\forall j)(i\in T \,\&\, j\in T \to dom(\lambda_i) = dom(\lambda_j))$;

2) $(\forall i)(i\in T \to a(\lambda_i)$ არის მაქსიმალური $\&\, a(\lambda_i) = 2^c)$, სადაც $a(\lambda_i)$ აღნიშნავს λ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.

შემოვიღოთ შემდეგი აღვნიშვნა: $\mu_t = \lambda_t^Z$ როცა $t\in T$. თეორემა 3.3.1-ის ძალით, $\{\mu_t : t\in T\}$ ოჯახის ყოველი ელემენტი არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომა და $dom(\mu_t) = S^Z$ ყოველი $t\in T$ ინდექსისათვის. შესაბამისად, სრულდება პირობა (i).

ვაჩვენოთ, რომ $(\mu_t)_{t\in T}$ არის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ზო–

მათა ოჯახი. მართლაც, ვთქვათ t და s არიან T სიმრავლის განსხვავებული ელემენტები. ლემა 3.2.3-ის ძალით, λ_t და λ_s არიან ორთოგონალურები, რაც ნიშნავს S σ-ალგებრის ისეთი თანაუკვეთი X_t და X_s ელემენტების არსებობას, რომ $\lambda_t(X_t)=1$ და $\lambda_s(X_s)=1$. $(\mu_t)_{t\in T}$ ოჯახის განსაზღვრის ძალით, სიმრავლეები $Y_t = X_t^Z$ და $Y_s = X_s^Z$ მიეკუთვნებიან S^Z σ-ალგებრას. მეორეს მხრივ, $Y_t \cap Y_s = \varnothing$, $\mu_t(Y_t)=1$, $\mu_s(Y_s)=1$, რაც ასრულებს (ii) პირობის მართებულობის დამტკიცებას.

შედეგი 3.3.2. *ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ სივრცეზე არსებობს მაქსიმალური სიმძლავრის მქონე $\gamma^{\mathbb{Z}}$-"თეთრი ხმაურის" სტაციონარულ გაგრძელებათა ისეთი ორთოგონალური $(\mu_t)_{t\in T}$ ოჯახი, რომ $card(T) = 2^{2^c}$ და შესრულებულია პირობები:*

(i) $(\forall i)(\forall j)(i \in T \ \&\ j \in T \rightarrow dom(\mu_i) = dom(\mu_j))$;

(ii) $(\forall i)(i \in T \rightarrow a(\mu_i)$ *არის მაქსიმალური* $\&\ a(\lambda_i) = 2^c)$, *სადაც $a(\mu)$ აღნიშნავს μ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.*

შენიშვნა 3.3.1. ყოველ ორ პოლონურ სივრცეს შორის ბორელის იზომორფიზმის არსებობა იძლევა საშუალებას თეორემა 3.3.2 განვაზოგადოთ ყოველი პოლონური სივრცისათვის.

თეორემა 3.3.3. *ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t\in T}$ არის სუსტად განცალებადი ოჯახი დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომებისა X^Z სივრცეზე. მაშინ $card(T) \le 2^c$.*

დამტკიცება. ვინაიდან $(\mu_t)_{t\in T}$ არის სუსტად განცალებადი ოჯახი, ამიტომ იარსებებს X^Z სივრცის ზომად ქვესიმრავლეთა ისეთი $(X_t)_{t\in T}$ ოჯახი, რომ

$$(\forall i, j)(i \in T \ \&\ j \in T \rightarrow \mu_i(X_j) = \delta(i, j)),$$

სადაც $\delta(i,j)$ აღნიშნავს კრონეკერის ფუნქციას განსაზღვრულს I სიმრავლის დეკარტულ I^2 კვადრატზე.

ცხადია, რომ $(X_t)_{t\in T}$ არის X^Z სივრცის ქვესიმრავლეთა ინექციური ოჯახი. ამიტომ $card(T) \le 2^{card(X^Z)} = 2^c$. □

თეორემა 3.3.4 *ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური სივრცე. მაშინ არსებობს X^Z სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომების მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) სუსტად განცალებადი ოჯახი $(\lambda_j)_{j\in J}$, რომ $card(J) = 2^c$.*

დამტკიცება. ვინაიდან $card(X^{\aleph_0}) = card(X)$, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლემა 3.2.4. ამიტომ იარსებებს X სივრცის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ σ-ალგებრაზე განსაზღვრული სუსტად განცალებადი ოჯახი $(\mu_j)_{j\in J}$, ისეთი რომ:

1) $card(J) = 2^c$;

2) $(\forall j)(j \in J \to$ μ_j არის X სივრცეზე განსაზღვრული ჰაარის λ ზომის X-ინვარიანტული გაგრძელება).

X სივრცის ქვესიმრავლეთა $(A_j)_{j\in J}$ ოჯახისათვის (იხ. ლემა 3.2.4-ის დამტკიცება) ჩვენ გვაქვს

$$(\forall i,j)(i \in I \ \&\ j \in I \to \mu_i(A_j) = \delta(i,j)),$$

სადაც $\delta(i,j)$ აღნიშნავს კრონეკერის ფუნქციას განსაზღვრულს J სიმრავლის დეკარტულ J^2 კვადრატზე.

ყოველი $j \in J$ ელემენტისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\lambda_j = \mu_j^Z$. თეორემა 3.3.1-ის ძალით, λ_j არის S^Z σ-ალგებრაზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომა. ყოველი $j \in J$ ლემენტისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა $B_j = A_j^Z$. $(B_j)_{j\in J}$ ოჯახისათვის ჩვენ ვღებულობთ

$$(\forall i,j)(i \in I \ \&\ j \in I \to \lambda_i(B_j) = \delta(i,j)),$$

სადაც $\delta(i,j)$ აღნიშნავს კრონეკერის ფუნქციას განსაზღვრულს J სიმრავლის დეკარტულ J^2 კვადრატზე.

ეს ასრულებს თეორემა 3.3.4-ის დამტკიცებას. $\square$

შედეგი 3.3.3. *ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ სივრცეზე არსებობს $\gamma^{\mathbb{Z}}$-"თეთრი ხმაურის" სტაციონარულ გაგრძელებათა ისეთი სუსტად განცალებადი $(\mu_t)_{t\in T}$ ოჯახი, რომ შესრულებულია პირობები:*

(i) $(\forall i)(\forall j)(i \in T \,\&\, j \in T \to dom(\mu_i) = dom(\mu_j))$;

(ii) $card(T) = 2^c$.

მაგალითი 3.3.1 $(O \neg\!\to (W.S.))$. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t\in J}$ არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ დიფუზიურ სტაციონარულ ზომათა ისეთი ოჯახი რომ $card(J) > 2^c$ (იხ. თეორემა 3.3.2). მაშინ, თეორემა 3.3.3-ის ძალით, $(\mu_t)_{t\in J}$ არ წარმოადგენს სუსტად განცალებად ოჯახს.

თეორემა 3.3.5. *ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t\in J}$ არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრულ დიფუზიურ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ძლიერად განცალებადი ოჯახი. მაშინ $card(J) \le c$.*

დამტკიცება. ვინაიდან $(\mu_t)_{t\in J}$ არის ძლიერად განცალებადი ოჯახი დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომებისა X^Z სივრცეზე, არსებობს დიზუნქტიური ოჯახი ზომადი $(X_t)_{t\in J}$ სიმრავლეებისა, ისეთი რომ $\mu_t(X_t) = 1$. თუ შევარჩევთ $x_t \in X_t$ წერტილს ყოველი $t \in J$ ინდექსისათვის, მაშინ მივიღებთ $card(J) \le card(\{x_t : t \in J\}) \le card(X^Z) = c$. $\square$

მაგალითი 3.3.2 $(W.S. \neg\!\to (S.S.))$. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t\in J}$ არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური

სტაციონარული ზომების ისეთი სუსტად განცალებადი ოჯახი, რომ $card(J) > c$ (იხ. თეორემა 3.3.4). მაშინ, თეორემა 3.3.5-ის ძალით, $(\mu_t)_{t\in J}$ არ წარმოადგენს ძლიერად განცალებად ოჯახს.

თეორემა 3.3.6. *ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი. მაშინ არსებობს X^Z სივრცეზე განსაზღვრული ძლიერად განცალებადი ოჯახი $(\mu_t)_{t\in J}$ დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომებისა, ისეთი რომ $card(J) = c$.*

დამტკიცება. ვთქვათ, $(p_j)_{j\in J}$ არის X-ზე განსაზღვრული ძლიერად განცალებადი ოჯახი დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომებისა, ისეთი რომ $card(J) = c$ და $(X_j)_{j\in J}$ არის დიზუნქტური ოჯახი X სივრცის ბორელის აზრით ზომადი ქვესიმრავლეებისა, ისეთი რომ $p_j(X_j) = 1$ ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის. ყოველი $j \in J$ ელემენტისათვის შემოტანოთ აღნიშვნა $\mu_j = p_j^Z$. ცხადია, რომ $\mu_j(X_j^Z) = 1$ და $(X_j^Z)_{j\in J}$ არის დიზუნქტური ოჯახი X^Z სივრცის ბორელის აზრით ზომადი ქვესიმრავლეებისა. ეს ასრულებს თეორემა 3.3.6-ის დამტკიცებას. □

შედეგი 3.3.4. *ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ სივრცეზე არსებობს "თეთრი ხმაურის" სტაციონარულ გაგრძელებათა ისეთი ძლიერად განცალებადი $(\mu_t)_{t\in T}$ ოჯახი, რომ შესრულებულია პირობები:*

(i) $(\forall i)(\forall j)(i \in T \ \&\ j \in T \rightarrow dom(\mu_i) = dom(\mu_j))$;

(ii) $card(T) = c$.

შენიშვნა 3.3.2. [37] ნაშრომში (იხ. თეორემა 1, გვ. 335) დადგენილია, რომ აქსიომათა (ZFC) სისტემაში კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობა ექვივალენტურია წინადადების, რომ ყოველი კონტინუალური სუსტად განცალებადი ოჯახი ალბათური ზომებისა არის ძლიერად განცალებადი.

მაგალითი 3.3.3 $(S.S)\neg\to(C.E)$. ვთქვათ $F:R\to R$ არის უნივერსალურად არაზომადი[4] ურთიერთცალსახა ასახვა. $i\in R$ პარამეტრისათვის, λ_i-ით ავღნიშნოთ დირაკის ზომა კონცენტრირებული $f(i)$ წერტილში. დავუშვათ $\mu_i=\lambda_i^Z$, როცა $i\in R$. ცხადია, რომ $(\mu_i)_{i\in R}$ არის ძლიერად განცალებადი ოჯახი სტაციონარული ზომებისა R^Z სივრცეზე. ვაჩვენოთ, რომ $(\mu_i)_{i\in R}$ ოჯახისათვის არ არსებობს ძალდებული შეფასება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $\widetilde{i}:R^Z\to R$ არის ბორელის აზრით ზომადი ფუნქცია, ისეთი რომ

$$(\forall i)(i\in R\to\mu_i(\{x:\widetilde{i}(x)=i\})=1).$$

შევნიშნოთ, რომ $f^{-1}(\{i\})\in Pr_k(\widetilde{i}^{-1}(\{i\}))$ როცა $i\in R$. ვინაიდან $(Pr_k(\widetilde{i}^{-1}(\{i\})))_{i\in R}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სიმრავლეების ოჯახი და $\bigcup_{i\in R}\{f^{-1}(\{i\})\}=R$, ჩვენ ვასკვნით, რომ $Pr_k(\widetilde{i}^{-1}(\{i\}))=f^{-1}(\{i\})$, როცა $i\in R$. შესაბამისად ეს ტოლობა გაგრძელებადია ყოველი $Y\subseteq R$ ქვესიმრავლისათვის შემდეგნაირად

$$Pr_k(\widetilde{i}^{-1}(Y))=f^{-1}(Y).$$

ვინაიდან f არ არის უნივერსალურად ზომადი, არსებობს ბორელის აზრით ზომადი სიმრავლე $Y_0\in\mathcal{B}(R)$ ისეთი, რომ $f^{-1}(Y_0)\notin\mathcal{U}(R)$. უკანასკნელი თანაფარდობა ნიშნავს, რომ $Pr_k(\widetilde{i}^{-1}(Y_0))\notin\mathcal{U}(R)$, რაც ეწინააღმდეგება პირობას $Pr_k(\widetilde{i}^{-1})(Y))\in\mathcal{U}(R)$, როცა $Y\in\mathcal{U}(R)$.

---

[4] ვთქვათ, K არის $\mathcal{B}(B)$ σ−ალგებრაზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა კლასი. $\mathcal{B}(B)^{\mu}$−ით აღვნიშნოთ $\mathcal{B}(B)$ \$ σ−ალგებრის გასრულება μ ზომით, სადაც $\mu\in K$. $E\subset B$ სიმრავლეს ეწოდება უნივერსალურად ზომადი, თუ $E\in\cap_{\mu\in K}\mathcal{B}(B)^{\mu}$.

3.4. არასეპარაბელური არაელემენტარული სტაციონარული ზომები

ვთქვათ, H არის საკოორტინატო R^2 სიბრტყის შემობრუნებათა ჯგუფი კოორდინატთა სათავის გარშემო. ჩვენ შეგვიძლია მისი გაიგივება ერთეულოვან $S(0,1)$ წრეწირთან ცენტრით საკოორტინატო R^2 სიბრტყის სათავეში და რადიუსით ერთი. ყოველი $g \in S(0,1)$ ელემენტისათვის, ჩვენ შემოგვაქვს აღნიშვნა $\xi(g) = \alpha(g)$, სადაც $\alpha(g)$ აღნიშნავს კუთხეს g და (1.0) ვექტორებს შორის. ცხადია, რომ $0 \le \alpha(g) < 2\pi$. ჩვენ აღვნიშნავთ $\bigoplus$-ით H ჯგუფის ოპერაციას. ვთქვათ, λ არის H ჯგუფზე განსაზღვრული ნორმირებული ჰაარის ზომა. $h \in H$ ელემენტისათვის, ჩვენ შემოგვაქვს აღნიშვნა $T_h(g) = g \bigoplus h (g \in H)$. ვთქვათ, $(\lambda_i)_{i \in I}$ არის ჰაარის λ ზომის T_h-ინვარიანტულ არაელემენტარულ გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი, რომ $card(I) = 2^{2^{card(H)}}$ და:

1) $(\forall i)(\forall j)(i \in I \; \& \; j \in I \to dom(\lambda_i) = dom(\lambda_j) := S)$;

2) $(\forall i)(i \in I \to a(\lambda_i)$ არის მაქსიმალური $\& \; a(\lambda_i) = 2^{card(H)})$, სადაც $a(\lambda_i)$ აღნიშნავს λ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას. ასეთი ოჯახის არსებობა გამომდინარეობს ლემა 3.2.5-იდან.

დავუშვათ, რომ $\xi_n(\cdot) = \xi(T_h^n(\cdot))$, როცა $n \in Z$.

ჩვენ განვსაზღვრავთ $[0,2\pi[^Z$ სივრცის ქვესიმრავლეთა S_0 σ-ალგებრას შემდეგნაირად:

$$S_0 = \{(\xi_n)_{n \in Z}(X) : X \in S\}.$$

განვსაზღვროთ μ_i ზომა შემდეგნაირად:

$$(\forall Y)(Y \in S_0 \to \mu_i(Y) = \lambda(\{\omega : (\xi_n(\omega))_{n \in Z} \in Y\})).$$

თეორემა 3.4.1. *ალბათურ ზომათა* $(\mu_i)_{i \in I}$ *ოჯახი არის* $[0,2\pi[^Z$*-სივრცეზე განსაზღვრული წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული სტაციონარული ზომების ისეთი მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალ-*

საზრისით) ოჯახი, რომ $card(I) = 2^{2^c}$ *და შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1) $(\forall i)(\forall j)(i \in I \;\&\; j \in I \to dom(\mu_i) = dom(\mu_j))$;

2) $(\forall i)(i \in I \to a(\mu_i)$ *არის მაქსიმალური* $\& \, a(\mu_i) = 2^c)$, *სადაც* $a(\mu_i)$ *აღნიშნავს* μ_i *ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.*

დამტკიცება. პირველად ვაჩვენოთ, რომ $(\mu_i)_{i \in I}$ არის ორთოგონალურ ზომათა ოჯახი. მართლაც, ვინაიდან $(\lambda_i)_{i \in I}$ ოჯახი არის ორთოგონალური, ყოველი განსხვავებული $i, j \in I$ ინდექსებისათვის არსებობს ისეთი $Y_i \in S$, რომ $\lambda_i(Y_i) = 1$ და $\lambda_j(Y_i) = 0$. შესაბამისად, $X_i = (\xi_n)_{n \in Z}(Y_i)$-ისთვის, ჩვენ ვღებულობთ $\mu_i(X_i) = \lambda_i(Y_i) = 1$ და $\mu_j(X_i) = \lambda_j(Y_i) = 0$.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ μ_i არის არაელემენტარული ზომა ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $(\mu_i)_X$ არის მისი ელემენტარული კომპონენტი. მაშინ, თუ $Z \in S_0$ სიმრავლისათვის სრულდება პირობა $(\mu_i)_X(Z) > 0$, მაშინ იარსებებს Z სიმრავლის ელემენტთა ისეთი $(n_k)_{k \in N}$ მიმდევრობა, რომ

$$(\mu_i)_X\left(X \setminus \bigcup_{k \in N} T^{n_k}(Z)\right) = 0.$$

ვთქვათ, Y და W არიან S-ის ისეთი ელემენტები, რომ

$$X = (\xi_n)_{n \in Z}(Y)$$

და

$$Z = (\xi_n)_{n \in Z}(W).$$

ერთის მხრივ, $(\mu_i)_X(X) > 0$ პირობა იწვევს $\lambda_i(Y) > 0$ პირობის მართებულობას. მეორეს მხრივ, Z სიმრავლის ელემენტთა რაიმე $(n_k)_{k \in N}$ მიმდევრობისათვის,

$$(\mu_i)_X\left(X \setminus \bigcup_{k \in N} T^{n_k}(Z)\right) = 0$$

პირობის მართებულობა იწვევს შემდეგი პირობის მართებულობას

$$(\lambda_i)_Y\left(Y \setminus \bigcup_{k\in N}(T_h)^{n_k}(W)\right)=0.$$

უკანასკნელი თანაფარდობა ნიშნავს, რომ λ_i ზომას აქვს ელემენტარული კომპონენტი $(\lambda_i)_Y$, რაც ეწინააღმდეგება ლემა 3.2.5-ის შედეგს.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.2.2-ის ძალით, μ_i არის $[0,2\pi[^Z$ სივრცეზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომა ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის.

ამგვარად, $(\mu_i)_{i\in I}$ არის $[0,2\pi[^Z$ სივრცეზე განსაზღვრული წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული სტაციონარული ზომების ისეთი მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახი, რომ $card(I)=2^{2^c}$ და ამასთან

$$(\forall i)(\forall j)(i\in I \ \&\ j\in I \to dom(\mu_i)=dom(\mu_j):=S_0).$$

ახლა ვაჩვენოთ მე-2) პირობის მართებულობა.

ვინაიდან $a(\lambda_i)=2^c$, ამიტომ იარსებებს S σ-ალგებრის ელემენტთა ისეთი $(A_j)_{j\in J}$ ოჯახი, რომ $card(J)=2^c$ და

$$(\forall j)(\forall j')\left(j\in J \ \&\ j'\in J \ \&\ j\neq j' \to \rho_{\lambda_i}(A_j,A_{j'})=\lambda_i(A_j\Delta A_{j'})=\frac{1}{2}\right).$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $(B_j)_{j\in J}=((\xi_n)_{n\in Z}(A_j))_{j\in J}$, მაშინ მივიღებთ

$$(\forall j)(\forall j')\left(j\in J \ \&\ j'\in J \ \&\ j\neq j' \to \rho_{\mu_i}(B_j,B_{j'})=\mu_i(B_j\Delta B_{j'})=\lambda_i(A_j\Delta A_{j'})=\frac{1}{2}\right).(1)$$

მიღებული თანაფარდობა ნიშნავს მე-2) პირობის მართებულობას. □

თეორემა 2.2.2, ლემა 3.2.6-ისა და თეორემა 3.4.2-ის დამტკიცებაში გამოყენებული სქემის საშუალებით ჩვენ ვღებულობთ შემდეგი დებულების დამტკიცებას.

თეორემა 3.4.2. *არსებობს* $[0,2\pi[^Z$ *-სივრცეზე განსაზღვრული არაელე-მენტარული არასეპარაბელური სტაციონარული ზომების მაქსიმალური*

(*სიმძლავრის თვალსაზრისით*) *ისეთი სუსტად-განცალებადი ოჯახი* $(\lambda_j)_{j \in J}$, *რომ* $card(J) = 2^c$ *და შესრულებულია შემდეგი პირობა:*

$$(\forall j)(i \in J \rightarrow a(\lambda_i) \text{ არის მაქსიმალური } \& \, a(\lambda_i) = 2^c),$$

სადაც $a(\lambda_i)$ *აღნიშნავს* λ_i *ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.*

თავი IV. ძვრა-ზომათა N-ხარისხების ოჯახის განცალებადობის შესახებ R^{∞} სივრცეში

4.1. ზოგიერთი დამხმარე ცნება და დებულება

შეთანხმება 4.1.1. მომავალში N -ის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ $\{1,2,\cdots\}$ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 4.1.1 ([13]). ნამდვილ რიცხვთა $s_1, s_2, s_3, \cdots$ მიმდევრობას (a,b) ინტერვალიდან ეწოდება უნიფორმულად განაწილებული (a,b) ინტერვალზე, თუ ყოველი $[c,d]$ და (a,b) ქვეინტერვალებისათვის ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#(\{s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n\}\cap[c,d])}{n}=\frac{d-c}{b-a},$$

სადაც $\#$ აღნიშნავს მთვლელ ზომას.

შენიშვნა 4.1.1. ასეთი მიმდევრობები შეისწავლება დიოფანტურ მიახლოებათა თეორიაში და მათ აქვთ გამოყენებები მონტე კარლოს ინტეგრებადობის საკითხებში (იხილეთ, მაგალითად, [38], [39], [40]).

შეთანხმება 4.1.2. ყოველი ნამდვილი r რიცხვისათვის, $<r>$ სიმბოლოთი აღინიშნება r რიცხვის წილადი ნაწილი, ე.ი., $<r>=r-[r]$, სადაც $[r]$ აღნიშნავს r-ის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 4.1.1 ([13], სავარჯიშო 1.12, გვ. 16). ყოველი ირაციონალური α რიცხვისათვის, მიმდვრობა

$$<0>,<\alpha>,<2\alpha>,<3\alpha>\cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე.

მაგალითი 4.1.2 ([13], მაგალითი 1.13, გვ. 16). მიმდევრობა

$$\frac{0}{1},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{0}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cdots,\frac{0}{k},\cdots,\frac{k-1}{k},\cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე.

მაგალითი 4.1.3 ყოველი ირაციონალური α რიცხვისათვის, მიმდევ-რობა

$$<2\alpha>, <3\alpha>, <5\alpha>, <7\alpha>, <11\alpha>, \cdots$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ ინტერვალზე. ეს არის ანალი-ზურ რიცხვთა თეორიის მეტად მნიშვნელოვანი თეორემა, რომელიც მიღე-ბულ იქნა ვინოგრადოვის მიერ 1935 წელს (იხილეთ [40]).

ვთქვათ, X არის კომპაქტური პოლონური სივრცე და μ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. ვთქვათ, $\mathcal{B}(X)$ არის X სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სივრცე.

განსაზღვრება 4.1.3 . X სივრცის ელემენტთა $s_1, s_2, s_3, \cdots$ მიმდევრობას ეწოდება μ-ექვიგანაწილებული ან μ-უნიფორმულად განაწილებული X სივრცეზე, თუ ყოველი $f \in \mathcal{B}(X)$ ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 4.1.2 ([13], ლემა 2.1, გვ. 199). *ვთქვათ, $f \in \mathcal{B}(X)$ და $\mu_\infty := \mu^\infty$. მაშინ, μ_∞-თითქმის ყველა $(s_n)_{n \in N} \in X^\infty$ მიმდევრობისათვის, სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 4.1.3 ([13], გვ. 199-201). *ვთქვათ, S არის μ-ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლე X-სივრცეზე. მაშინ*

(i) $\mu_\infty(S) = 1$;

(ii) *S არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;*

(iii) *S არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიაში.*

შედეგი 4.1.1. ვთქვათ, ℓ_1 არის ლებეგის წრფივი ზომა $(0,1)$ ინტერ-ვალზე. ვთქვათ, D არის ℓ_1-ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლე (0.1)-ზე. მაშინ

$(i)\ \ell_1^{\infty}(D)=1$;

$(ii)\ D$ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;

$(iii)\ D$ არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

განსაზღვრება 4.1.4. ვთქვათ, μ არის R ღერძზე განსაზღვრული ალბათური ბორელის ზომა და F არის მისი განაწილების ფუნქცია. ნამდვილ რიცხვთა $s_1, s_2, s_3, \cdots$ მიმდევრობას ეწოდება μ-ექვიგანაწილებული ან μ-უნიფორმულად განაწილებული R ღერძზე, თუ ყოველი $[a,b]$ $(-\infty \le a < b \le +\infty)$ ინტერვალისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#([a,b]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})}{n}=F(b)-F(a).$$

ლემა 4.1.4. *ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}$ არის ℓ_1-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა (0.1)-ზე და F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია $\overline{R}=\{-\infty\}\cup R\cup\{+\infty\}$-ზე ისეთი, რომ $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ და $F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$. ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R-ზე განსაზღვრული განაწილების F ფუნქციით. მაშინ $(F^{-1}(x_k))_{k\in N}$ არის p_F-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა R ღერძზე.*

დამტკიცება. ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#([a,b]\cap\{F^{-1}(x_1),\cdots,F^{-1}(x_n)\})}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\#([F(a),F(b)]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})}{n}=F(b)-F(a). \qquad \square$$

შედეგი 4.1.2. *ვთქვათ, F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია $\overline{R}:=\{-\infty\}\cup R\cup\{+\infty\}$-ზე, ისეთი, რომ $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$ და $F(+\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, და ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R-ზე განსაზღვრული განაწილების F ფუნქციით. მაშინ R ღერძზე p_F-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების $D_F(\subset R^{\infty})$ სიმრავლისათვის ჩვენ გვაქვს:*

$(i)\ D_F=\{(F^{-1}(x_k))_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in D\}$.

$(ii)\ p_F^{\infty}(D_F)=1$;

$(iii)\ D_F$ *არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;*

$(iv)\ D_F$ *არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.*

ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ოჯახი. ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის $\overline{\mu}_\theta$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ μ_θ ზომის გასრულება.

განსაზღვრება 4.1.5. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს $\cap_{\theta\in\Theta} dom(\overline{\mu_\theta})$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ

$(i)\ \mu_\theta(Z_\theta)=1;$

$(ii)\ Z_{\theta_1}\cap Z_{\theta_2}=\varnothing;$

$(iii)\ \cup_{\theta\in\Theta} Z_\theta = E.$

შემდგომში ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი კარგად ცნობილი ფაქტი ალბათობის თეორიიდან.

ლემა 4.1.5 (დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი)[4]. *ვთქვათ,* $X_1, X_2, \ldots$ *არის ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა შემოსაზღვრული საშუალოთი, ე.ი.,* $E(X_1)=E(X_2)=\cdots=m<\infty$. *მაშინ*

$$p\left(\left[\omega:\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k(\omega)}{n}=m\right]\right)=1.$$

4.2. ძირითადი შედეგები

$(0,1)$ ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობათა თვისებების გამოყენებით მტკიცდება

თეორემა 4.2.1. *ვთქვათ,* F *არის* R *ღერძზე განსაზღვრული განაწილების ფუნქცია და* p_F *არის* F *ფუნქციით განსაზღვრული*

ბორელის ალბათური ზომა R ღერძზე. ვთქვათ, ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, $F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R)$. მაშინ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p_{F_\theta}^\infty)_{\theta \in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

დამტკიცება. ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, D_θ-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე p_{F_θ}-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობებისა R^∞ სივრცეში. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $-\infty < \theta_1 < \theta_2 < +\infty$ პარამეტრებისათვის სრულდება ტოლობა $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \emptyset$. ყოველი $(x_k)_{k \in N} \in D_{\theta_1}$ მიმდევრობისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#((-\infty,0] \cap \{x_1, \cdots, x_n\})}{n} = F_{\theta_1}(0) = F(\theta_1).$$

ანალოგიურად, ყოველი $(x_k)_{k \in N} \in D_{\theta_2}$ მიმდევრობისათვის, ჩვენ გვაქვს

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\#((-\infty,0] \cap \{x_1, \cdots, x_n\})}{n} = F_{\theta_2}(0) = F(\theta_2).$$

ვინაიდან F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია R-ზე, ჩვენ ვღებულობთ $F(\theta_1) < F(\theta_2)$. ეს უკანასკნელი პირობა იწვევს, რომ $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \emptyset$.

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის Y_θ-ით აღვნიშნოთ X_θ სიმრავლის ისეთი F_σ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $p_{F_\theta}^\infty(Y_\theta) = 1$.

$\theta \in R \setminus \{0\}$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა $Z_\theta = Y_\theta$ და

$$Z_0 = Y_0 \cup (R^\infty \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta).$$

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$L_\theta = \mathcal{B}(Z_\theta) \cup \mathcal{P}(R^\infty \setminus Z_\theta).$$

ვთქვათ, $S = \cap_{\theta \in R} L_\theta$. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{B}(R^\infty) \subseteq S$; მართლაც, დავაფიქსიროთ $X \in \mathcal{B}(R^\infty)$. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის ჩვენ გვაქვს

$$X = (X \cap Z_\theta) \cup (X \cap (R^\infty \setminus Z_\theta)).$$

ვინაიდან

$$X \cap Z_\theta \in \mathcal{B}(Z_\theta)$$

და

$$(X \cap (R^{\infty} \setminus Z_{\theta})) \in \mathcal{P}(R^{\infty} \setminus Z_{\theta}),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $X \in L_{\theta}$. შესაბამისად, $X \in \cap_{\theta \in R} L_{\theta} = S$. ვინაიდან ბორელის სიმრავლე X აღებული იყო ნებისმიერად, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\mathcal{B}(R^{\infty}) \subseteq S$.

როგორც მარტივი შედეგი, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $Z_{\theta} \in S$, როცა $\theta \in R$.

ყოველი $\theta_0 \in R$, ჩვენ გვაქვს

$$\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} = Z_{\theta_0} \cup \cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_{\theta}.$$

ვინაიდან $Z_{\theta_0} \in \mathcal{B}(Z_{\theta_0})$ და

$$\cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_{\theta} \in \mathcal{P}(R^{\infty} \setminus Z_{\theta}),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in L_{\theta_0}$. $\theta_0 \in R$ იყო აღებული ნებისმიერად, რაც ნიშნავს რომ

$$\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in \cap_{\theta_0 \in R} L_{\theta_0} = S.$$

ცხადია, რომ S, როგორც თანაკვეთა R^{∞} სივრცის σ-ალგებრებისა, ასევე არის σ-ალგებრა. შესაბამისად, $R^{\infty} \setminus \cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in S$.

ვთქვათ, $\theta_0 \in R$. ვთქვათ,

$$X_{\theta_0} = Z_{\theta_0} \cup (R^{\infty} \setminus \cup_{\theta \in R} Z_{\theta}),$$

და $X_{\theta} = Z_{\theta}$, როცა $\theta \neq \theta_0$.

ახლა ადვილია იმის შემოწმება, რომ

$(i)\ X_{\theta} \in S = \cap_{\theta \in \Theta} dom(\overline{\mu}_{\theta})$ როცა $\theta \in R$;

$(ii)\ \overline{p}^{\infty}_{F_{\theta}}(X_{\theta}) = 1;$

$(ii)\ X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2} = \varnothing;$

$(iii) \cup_{\theta \in \Theta} X_{\theta} = R^{\infty}.$

ეს ასრულებს თეორემა 4.2.1-ის დამტკიცებას. □

დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გამოყენებით ვღებულობთ შემდეგი დებულების მართებულობას.

თეორემა 4.2.2. *ვთქვათ, F არის განაწილების ფუნქცია $\overline{R} := \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$ -ზე, ისეთი რომ $\int_R x dF(x) < \infty$. ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R-ზე განსაზღვრული F-ით. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ F_θ შემდეგნაირად:*

$$F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R).$$

მაშინ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p_{F_\theta}^\infty)_{\theta \in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

დამტკიცება. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის D_θ-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე, განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$D_\theta = \{(x_i)_{i \in N} : (x_i)_{i \in N} \in R^\infty \ \& \ \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} Pr_k((x_i)_{i \in N})}{n} = \theta\}) = 1,$$

სადაც Pr_k აღნიშნავს k-ურ პროექციას, განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$Pr_k((x_i)_{i \in N}) = x_k.$$

ლემა 4.1.5-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ $p_{F_\theta}^\infty(D_\theta) = 1 \quad \theta \in R$-თვის.

ცხადია, რომ $D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $\theta_1, \theta_2 \in R$ პარამეტრებისათვის.

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის Y_θ-ით აღვნიშნოთ X_θ სიმრავლის ისეთი F_σ სიმრავლე, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა $p_{F_\theta}^\infty(Y_\theta) = 1$.

$\theta \in R \setminus \{0\}$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა $Z_\theta = Y_\theta$ და

$$Z_0 = Y_0 \cup (R^\infty \setminus \cup_{\theta \in R} Z_\theta).$$

$\theta \in R$ პარამეტრისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$L_\theta = \mathcal{B}(Z_\theta) \cup \mathcal{P}(R^\infty \setminus Z_\theta).$$

ვთქვათ, $S = \cap_{\theta \in R} L_\theta$. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{B}(R^\infty) \subseteq S$; მართლაც, დავაფიქსიროთ $X \in \mathcal{B}(R^\infty)$. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის ჩვენ გვაქვს

$$X = (X \cap Z_\theta) \cup (X \cap (R^\infty \setminus Z_\theta)).$$

ვინაიდან

$$X \cap Z_{\theta} \in \mathcal{B}(Z_{\theta})$$

და

$$(X \cap (R^{\infty} \setminus Z_{\theta})) \in \mathcal{P}(R^{\infty} \setminus Z_{\theta}),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $X \in L_{\theta}$. შესაბამისად, $X \in \cap_{\theta \in R} L_{\theta} = S$. ვინაიდან ბორელის სიმრავლე X აღებული იყო ნებისმიერად, ჩვენ ვასკვნით, რომ $\mathcal{B}(R^{\infty}) \subseteq S$.

როგორც მარტივი შედეგი, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $Z_{\theta} \in S$, როცა $\theta \in R$.

ყოველი $\theta_0 \in R$, ჩვენ გვაქვს

$$\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} = Z_{\theta_0} \cup \cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_{\theta}.$$

ვინაიდან $Z_{\theta_0} \in \mathcal{B}(Z_{\theta_0})$ და

$$\cup_{\theta \in R \setminus \{\theta_0\}} Z_{\theta} \in \mathcal{P}(R^{\infty} \setminus Z_{\theta}),$$

ჩვენ ვასკვნით, რომ $\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in L_{\theta_0}$. $\theta_0 \in R$ იყო აღებული ნებისმიერად, რაც ნიშნავს რომ

$$\cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in \cap_{\theta_0 \in R} L_{\theta_0} = S.$$

ცხადია, რომ S, როგორც თანაკვეთა R^{∞} სივრცის σ-ალგებრებისა, ასევე არის σ-ალგებრა. შესაბამისად, $R^{\infty} \setminus \cup_{\theta \in R} Z_{\theta} \in S$.

ვთქვათ, $\theta_0 \in R$. ვთქვათ,

$$X_{\theta_0} = Z_{\theta_0} \cup (R^{\infty} \setminus \cup_{\theta \in R} Z_{\theta}),$$

და $X_{\theta} = Z_{\theta}$, როცა $\theta \neq \theta_0$.

ახლა ადვილია იმის შემოწმება, რომ

(i) $X_{\theta} \in S = \cap_{\theta \in \Theta} dom(\overline{\mu}_{\theta})$ როცა $\theta \in R$;

(ii) $\overline{p}^{\infty}_{F_{\theta}}(X_{\theta}) = 1$;

(ii) $X_{\theta_1} \cap X_{\theta_2} = \varnothing$;

$(iii) \cup_{\theta\in\Theta} X_\theta = R^\infty$.

ეს ასრულებს თეორემა 4.2.2-ის დამტკიცებას. □

მაგალითი 4.2.1. ვთქვათ, F არის გაუსის განაწილების ფუნქცია R-ზე $(m,\sigma^2)(m\in R, 0<\sigma^2<+\infty)$ პარამეტრებით. მაშინ თეორემა 4.2.1-ის (ან თეორემა 4.2.2-ის) გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

მაგალითი 4.2.2. ვთქვათ, F არის პუასონის განაწილების ფუნქცია R-ზე λ პარამეტრით. მაშინ, თეორემა 4.2.2-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი. შევნიშნოთ, რომ ამ შედეგის მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 4.2.1-ის გამოყენებით.

მაგალითი 4.2.3. ვთქვათ, F არის კოშის განაწილების ფუნქცია R-ზე. მაშინ, თეორემა 4.2.1-ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით, რომ ძვრა-ზომათა N-ხარისხების $(p^\infty_{F_\theta})_{\theta\in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი. შევნიშნოთ, რომ ამ შედეგის მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 4.2.2-ის გამოყენებით.

4.3. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ სივრცეზე განსაზღვრულ სუსტად განცალებად სტაციონარულ ზომათა ერთი მაგალითის შესახებ

ვთქვათ, არის (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ოჯახი.

განსაზღვრება 4.3.1. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს $S \subseteq \cap_{\theta\in\Theta} dom(\overline{\mu}_\theta)$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ

$(i)\ \mu_\theta(Z_\theta)=1$;

$(ii)\, Z_{\theta_1} \cap Z_{\theta_2} = \varnothing;$

$(iii) \cup_{\theta \in \Theta} Z_\theta = E.$

განსაზღვრება 4.3.2. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახი არის სუსტად განცალებადი, თუ არსებობს $S \subseteq \cap_{\theta \in \Theta} dom(\overline{\mu}_\theta)$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ $\mu_{\theta_1}(X_{\theta_2}) = \delta(\theta_1, \theta_2)$ $(\theta_1, \theta_2 \in \Theta^2)$, სადაც $\delta(\cdot,\cdot)$ აღნიშნავს Θ^2 სიმრავლეზე განსაზღვრულ კრონეკერის ფუნქციას.

მაგალითი 4.3.2. განვსაზღვროთ ალბათურ ზომათა $(\mu_t)_{t \in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახი

შემდეგნაირად: თუ $X \in B([0,1]^2)$, მაშინ $\mu_t(X) = l_1(X \cap \{t\} \times [0,1])$ როცა $t \in]0,1[$ და $\mu_t(X) = l_1(X \cap [0,1] \times \{t\})$ როცა $t \in]1,2[$. ახლა განვიხილოთ ალბათურ ზომათა ოჯახი $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t \in]0;1[\cup]1;2[}$. ცხადია, რომ ის წარმოადგენს $([0,1]^2)^{\mathbb{N}}$ სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ოჯახს. ასევე ცხადია, რომ ეს ოჯახი სუსტად განცალებადია. მართლაც, თუ განვიხილავთ ბორელის სიმრავლეთა $(X_t)_{t \in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახს, განსაზღვრულს პირობით $X_i = (\{t\} \times [0,1]) \times ([0,1]^2)^{\mathbb{N} \setminus \{1\}}$ როცა $t \in]0,1[$ და

$X_i = ([0,1] \times \{t\}) \times ([0,1]^2)^{\mathbb{N} \setminus \{1\}}$ როცა $t \in]1,2[$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\mu^{\mathbb{N}}_{t_1}(X_{t_2}) = \delta(t_1, t_2) \quad (t_1, t_2 \in ([0,1[\cup]1,2[)^2). \qquad \square$$

თეორემა 4.3.1. $((ZFC) \,\&\, (CH))$ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t \in]0;1[\cup]1;2[}$.ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

დამტკიცება. ა.სკოროხოდის ერთი ცნობილი შედეგის თანახმად, კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე ალბათურ ზომათა ნებისმიერი სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი (იხილეთ, [3]). შესაბამისად, $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t \in]0;1[\cup]1;2[}$ ოჯახი ძლიერად განცალებადია. $\square$

შენიშვნა 4.3.1. თეორემა 4.3.1-ის მართებულობა შესაძლებელია დადგინდეს

კონტინუუმ ჰიპოთეზაზე უფრო სუსტი, ეგრეთ წოდებული, მარტინის აქსიომით (იხილეთ [41]). ეს გამომდინარეობს ზ.ზერაკიძის შედეგიდან, რომლის თანახმადაც, მარტინის აქსიომის მართებულობის შემთხვევაში, პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი კონტინუუმის სიმძლავრის ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი(იხილეთ [11]). 4.3.2 მაგალითთან დაკავშირებით ბუნებრივად იბადება შეკითხვა, თუ რამდენად არის შესაძლებელი $(ZF)\,\&\,(DC)$ თეორიის ისეთი თავსებადი გაფართოების აგება, რომელშიც სტაციონარულ ალბათურ ზომათა $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$.ოჯახი არ იქნება ძლიერად განცალებადი. სასარგებლოა შევნიშნოთ, რომ ალბათურ ზომათა $(\mu_t)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$.ოჯახისათვის მსგავსი ამოცანა წყდება დადებითად. მართლაც, ერთის მხრივ, ჩვენ გვაქვს, რომ

$$\mu_{t_1}(X_{t_2}) = \delta(t_1,t_2) \quad (t_1,t_2 \in ([0,1]\cup]1,2[)^2),$$

რაც ნიშნავს, რომ ალბათურ ზომათა $(\mu_t)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$.ოჯახი სუსტად განცალებადია. თეორემა 4.3.1-ის დამტკიცებაში გამოყენებული სქემით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ეს ოჯახი $(ZFC)\,\&\,(CH)$ თეორიაში არის ძლიერად განცალებადი. თუ განვიხილავთ ამავე ოჯახისათვის ძლიერად განცალებადობის ამოცანას სოლოვეის (SM) მოდელში (იხილეთ [42]), რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად $(SM)=(ZF)\,\&\,(DC)\,\&\,\{$ ნამდვილი $\mathbb{R}$ ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით $\}$, მაშინ პასუხი იქნება უარყოფითი. მართლაც, თუ დაუშვებთ, რომ ალბათურ ზომათა $(\mu_t)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$. ოჯახი სუსტად განცალებადია, მაშინ იარსებებს $[0,1]^2$ სიმრავლის ისეთი დახლეჩა $(Y_t)_{t\in]0;1[\cup]1;2[}$, რომ შესრულდება პირობა $\mu_t(Y_t)=1$, როცა $t\in]0,1[\cup]1,2[$. განვიხილოთ სიმრავლეები A და B, განსაზღვრული შემდეგი პირობებით: $A=\bigcup_{t\in]0,1[}Y_t$, $B=\bigcup_{t\in]1,2[}Y_t$. ეს თანაუკვეთი სიმრავლეები არიან ზომადი ლებეგის აზრით. მეორეს მხრივ ყოველი $A_x=\{(x,y):(x,y)\in A\}$ $(x\in]1,2[)$ კვეთის, ისევე როგორც

$B^y = \{(x,y):(x,y) \in B\}$ $(y \in]1,2[)$ კვეთის წრფივი ლებეგის l_1 ზომა ერთის ტოლია. ფუბინის თეორემის თანახმად ვღებულობთ, რომ $l_2(A) = \int_{]0,1[} l_1(A_x)dx = 1$ და $l_2(B) = \int_{]1,2[} l_1(B^y)dy = 1$. ეს ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $l_2(A) + l_2(B) = 1$. □

4.4. R^∞-სივრცეზე განსაზღვრული ერთი ინვარიანტული ზომის შესახებ

ცნობილია, რომ თუ μ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრულ ერთ-განზომილებიან ბორელის ალბათურ ზომას დადებითი განაწილების სიმკვრივით, მაშინ ევკლიდეს $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი σ-სასრული ბორელის λ ზომა, რომელიც ღებულობს რაიმე არანულოვან სასრულ მნიშვნელობას რაიმე არაგადაგვარებულ პარალელეპიპედზე და არის ინვარიანტული $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ, ექვივალენტურია μ^n ზომის. ბუნებრივად ისმის შემდეგი ამოცანა-ადგილი აქვს თუ არა მსგავს ფაქტს ადგილი ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ სივრცეში? ანუ სხვა სიტყვებით, ჩვენი კვლევის ობიექტია შემდეგი.

ამოცანა 4.4.1. ვთქვათ, μ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრულ ერთ-განზომილებიან ბორელის ალბათურ ზომას დადებითი განაწილების სიმკვრივით. ვთქვათ, λ არის ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ სივრცეზე განსაზღვრული σ-სასრული ბორელის λ ზომა, რომელიც ღებულობს რაიმე არანულოვან სასრულ მნიშვნელობას რაიმე არაგადაგვარებულ უსასრულო-განზომილებიან პარალელეპიპედზე და არის ინვარიანტული $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. არიან თუ არა λ და $\mu^\mathbb{N}$ ზომები ექვივალენტურები?

აღნიშნული ქვეთავი ეძღვნება ამოცანა 4.4.1-ის ამოხსნას.

[17]-ის თანახმად, ვიტყვით, რომ μ ეკუთვნის ($\prod$) კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა μ წარმოადგენს ერთ-განზომილებიანი ბორელის ალბათურ ზომათა $(\mu_k)_{k\in N}$ ოჯახის ნამრავლს, სადაც f_k წარმოადგენს μ_k ზომის სიმკრივის ფუნქციას $k\in N$ ინდექსისათვის. თუ μ ეკუთვნის ($\prod$) კლასს და ყოველი $k\in N$ ინდექსისათვის $f_k = f$, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის სტაციონარული ზომა f ფუნქციით.

ლემა 4.4.1 ([17], დებულება 1.1., გვ. 751). *ვთქვათ, μ არის სტაციონარული ზომა f ფუნქციით. მაშინ $Q_\mu \subseteq l_2$, სადაც Q_μ აღნიშნავს μ ზომის კვაზი-ინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილ ჯგუფს.*

ლემა 4.4.2 ([16], თეორემა 1.4, გვ. 356). *ვთქვათ, $\Delta = \prod_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k]$, სადაც $-\infty < a_k < b_k < +\infty$. მაშინ $g = (g_1, g_2, \cdots) \in G_\Delta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|g_k|}{b_k - a_k} < +\infty,$$

სადაც G_Δ აღნიშნავს ხარაზიშვილის ν_Δ ზომის ინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილ ჯგუფს .

თეორემა 4.4.1. *ვთქვათ, $b_k - a_k = k^3$ ყოველი $k \in N$ ინდექსისათვის. მაშინ ყოველი ალბათური ზომა μ რომელიც არის ექვივალენტური ν_Δ ზომის, არ არის ექვივალენტური რაიმე სტაციონარული ზომის f ფუნქციით.*

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და μ იყოს ისეთი ზომა, რომელიც არის ექვივალენტური რაიმე სტაციონარული ზომის f ფუნქციით. ვინაიდან μ არის ექვივალენტური ν_Δ ზომის, ლემა 4.4.1-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ Q_μ ემთხვევა G_Δ-ს. შევნიშნოთ, რომ $l_2 \subseteq G_\Delta = Q_\mu$ და $(1,2,3,\cdots) \in G_\Delta \setminus l_2$. ეს ეწინააღმდეგება ლემა 4.4.1-ის შედეგს, რომელიც არის სწორედ $Q_\mu \subseteq l_2$ ჩართვის მართებულობა. □

თავი V. ბორელისა და ბერის ალბათურ ზომათა G-ხარისხების ოჯახის განცალებადობის შესახებ

5.1. ზოგიერთი დამხმარე ცნებები და ფაქტები

ამ ქვეთავს ჩვენ ვიწყებთ ალბათობის თეორიის სტანდარტული ცნებებით.

ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე. $(\mathbb{R}^I, \tau)$ -ით აღვნიშნოთ I -ზე განსაზღვრულ ნამდვილ-მნიშვნელობიან ფუნქციათა სივრცე, აღჭურვილი ტიხონოვის τ ტოპოლოგიით. $B(\mathbb{R}^I)$ -თი ჩვენ აღვნიშნავთ $\mathbb{R}^I$ სივრცის ქვესიმრავლეთა მინიმალურ σ -ალგებრას წარმოქმნილს ტიხონოვის τ ტოპოლოგიით.

ვთქვათ, $(Pr_i)_{i \in I}$ არის საკოორდინატო პროექციათა ოჯახი, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall (x_j)_{j \in I})(i \in I \,\&\, (x_j)_{j \in I} \in \mathbb{R}^I \to Pr_i((x_j)_{j \in I}) = x_i).$$

$\mathbb{R}^I$ -სივრცის ქვესიმრავლეთა მინიმალურ σ -ალგებრას, წარმოქმნილს

$$\{Pr_i^{-1}(X) : i \in I \,\&\, X \in B(\mathbb{R})\}$$

კლასით, ეწოდება $\mathbb{R}^I$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ბერის σ -ალგებრა და აღინიშნება $Ba(\mathbb{R}^I)$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ $Ba(\mathbb{R}^I) = B(\mathbb{R}^I)$ როცა $card(I) \le \aleph_0$, სადაც $\aleph_0$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს. თუ $card(I) > \aleph_0$, მაშინ

$$Ba(\mathbb{R}^I) \subset B(\mathbb{R}^I) \,\&\, B(\mathbb{R}^I) \setminus Ba(\mathbb{R}^I) \neq \emptyset.$$

$B(\mathbb{R}^I)$ კლასზე განსაზღვრულ ზომას ეწოდება ბორელის ზომა. ანალოგიურად, $Ba(\mathbb{R}^I)$ კლასზე განსაზღვრულ ზომას ეწოდება ბერის ზომა.

განსაზღვრება 5.1.1. ვთქვათ, μ_1 არის $\mathbb{R}^I$ კლასზე განსაზღვრული ბერის ზომა. $\mathbb{R}^I$ კლასზე განსაზღვრულ ბორელის μ_2 ზომას ეწოდება μ_1 ზომის ბორელისეული გაგრძელება, თუ

$$(\forall X)(X \in Ba(\mathbb{R}^I) \to \mu_2(X) = \mu_1(X)).$$

მაგალითი 5.1.1. ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე და p_i არის ბორელის ალბათური ზომა განსაზღვრული $\mathbb{R}_i := \mathbb{R}$ ღერძზე. თუ $card(I) > \aleph_0$, მაშინ ალბათური პროდაქტ-ზომა $\prod_{i \in I} p_i$ განსაზღვრულია

$$\prod_{i \in I} B(\mathbb{R}_i) = Ba(\mathbb{R}^I)$$

σ-ალგებრაზე.

შესაბამისად, ეს ზომა წარმოადგენს ბერის ალბათური ზომის მაგალითს, რომელიც განსაზღვრული არ არის ბორელის $B(\mathbb{R}^I)$ კლასზე.

ლემა 5.1.1 ([5], ლემა 4.4, გვ. 67). *ვთქვათ, (E_1, τ_1) და (E_2, τ_2) არის ორი ტოპოლოგიური სივრცე. ავღნიშნოთ, $B(E_1)$ და $B(E_2)$-ით (შესაბამისად, $B(E_1 \times E_2)$-ით) ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასები, წარმოქმნილი τ_1 და τ_2 (შესაბამისად, $\tau_1 \times \tau_2$) ტოპოლოგიებით. თუ ერთ-ერთს მაინც ამ ორი ტოპოლოგიური სივრციდან გააჩნია თვლადი ბაზა, მაშინ მართებულია ტოლობა*

$$B(E_1) \times B(E_2) = B(E_1 \times E_2).$$

ლემა 5.1.2 ([5], შენიშვნა 4.5, გვ. 70). *ვთქვათ, $(p_i)_{i \in I}$ არის R ღერძზე განსაზღვრულ მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქციის მქონე ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი. მაშინ არსებობს ბერის $\prod_{i \in I} p_i$ პროდაქტ-ზომის ერთადერთი ბორელისეული გაგრძელება $\mathcal{P}_I$.*

შედეგი 5.1.1 ([5], შედეგი 4.1, გვ. 75). *შევნიშნოთ, რომ* [43] *ნაშრომში აგებული ზომა ემთხვევა ლემა 5.2.2-ით განსაზღვრულ $\mathcal{P}_I$ ზომას, სადაც ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის p_i ალბათური ზომის განაწილების ფუნქცია არის განსაზღვრული შემდეგნაირად*

$$(\forall x)\left(x \in \mathbb{R} \to F_i(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

შედეგი 5.1.2 ([5], შედეგი 4.2, გვ. 75). *R ღერძზე განსაზღვრულ არატრი-ვიალურ გაუსის ზომათა ნებისმიერი $(p_i)_{i\in I}$ ოჯახის პროდაქტ-ზომას გააჩნია ერთადერთი ბორელისეული გაგრძელება.*

შედეგი 5.1.3 ([5], შედეგი 4.3, გვ. 75). *$\mathbb{R}^I$ სივრცის შემთხვევაში, როცა $Card(I) > \aleph_0$, ლემა 6.2.2 წარმოადგენს ანდერსენის კარგად ცნობილი თეორემის განზოგადებას, რომელიც იძლევა ბერის პროდაქტ-ზომის აგების კონსტრუქციას.*

შენიშვნა 5.1.1 ალბათურ ზომათა ნამრავლის ზოგიერთი თვისების შესახებ სასარგებლო ინფორმაცია მოიპოვება [44], [45] ნაშრომებში.

განსაზღვრება 5.1.2. ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის (E,S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ალბათურ ზომათა ოჯახი, სადაც Θ აღჭურვილია მის ქვესიმრავლეთა ისეთი $L(\Theta)$ σ-ალგებრით, რომელიც შეიცავს Θ სიმრავლის ყველა წერტილოვან სიმრავლეს და $S_1 := \cap_{\theta\in\Theta}\, dom(\overline{\mu}_\theta)$. ჩვენ ვიტყვით, რომ ზომადი ასახვა $\widetilde{\theta} : E \to \Theta$ არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$(\forall\,\theta)(\theta \in \Theta \to \overline{\mu}_\theta(\{x : \widetilde{\theta}(x) = \theta\}) = 1).$$

შენიშვნა 5.1.2 პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობისა და აგების ამოცანები განხილულია [3], [46] ,[47] ნაშრომებში.

ლემა 5.1.3. *ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის (E,S) ზომად სივრცეზე განსა-ზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ალბათურ ზომათა ოჯახი, სადაც Θ აღჭურვილია მის ქვესიმრავლეთა ისეთი $L(\Theta)$ σ-ალგებრით, რომელიც შეიცავს Θ სიმრავლის ყველა წერტილოვან სიმრავლეს და $S_1 := \cap_{\theta\in\Theta}\, dom(\overline{\mu}_\theta)$. მაშინ შემდეგი წინადადებები არის ექვივალენტური:*

(a) არსებობს θ პარამეტრის ძალდებული $\widetilde{\theta} : E \to \Theta$ შეფასება;

(b) ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ $(a)\to(b)$ იმპლიკაციის მართებულობა. θ პარამეტრის ძალდებული $\widetilde{\theta}: E\to\Theta$ შეფასების არსებობა ნიშნავს, რომ

$$(\forall\theta)(\theta\in\Theta\to\overline{\mu}_\theta(\{x:\widetilde{\theta}(x)=\theta\})=1).$$

ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $Z_\theta=\{x:\widetilde{\theta}(x)=\theta\}$, მაშინ მივიღებთ:

(i) $\overline{\mu}_\theta(Z_\theta)=\overline{\mu}_\theta(\{x:\widetilde{\theta}(x)=\theta\})=1$, როცა $\theta\in\Theta$;

(ii) $Z_{\theta_1}\cap Z_{\theta_2}=\varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისათვის, ვინაიდან

$$\{x:\widetilde{\theta}(x)=\theta_1\}\cap\{x:\widetilde{\theta}(x)=\theta_2\}=\varnothing;$$

(iii) $\cup_{\theta\in\Theta}Z_\theta=\{x:\widetilde{\theta}(x)\in\Theta\}=E.$

ვაჩვენოთ $(b)\to(a)$ იმპლიკაციის მართებულობა.

ვინაიდან $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის ძლიერად განცალებადი, ამიტომ არსებობს $S_1:=\cap_{\theta\in\Theta}dom(\overline{\mu}_\theta)$ σ-ალგებრის ელემენტთა ისეთი ოჯახი $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

(i) $\overline{\mu}_\theta(Z_\theta)=1$, როცა $\theta\in\Theta$;

(ii) $Z_{\theta_1}\cap Z_{\theta_2}=\varnothing$ ყოველი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისათვის პარამეტრთა Θ ოჯახიდან;

(iii) $\cup_{\theta\in\Theta}Z_\theta=E.$

ყოველი $x\in E$ ელემენტისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა $\widetilde{\theta}(x)=\theta$, სადაც θ არის ის ერთადერთი პარამეტრი Θ ოჯახიდან, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $x\in Z_\theta$. ასეთი ერთადერთი θ პარამეტრის არსებობა მტკიცდება $(ii)-(iii)$ პირობების გამოყენებით.

ვთქვათ, $Y\in L(\Theta)$. მაშინ $\{x:\widetilde{\theta}(x)\in Y\}=\cup_{\theta\in Y}Z_\theta$. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\{x:\widetilde{\theta}(x)\in Y\}\in dom(\overline{\mu}_{\theta_0})$ ყოველი $\theta_0\in\Theta$ პარამეტრისათვის.

შემთხვევა I. $\theta_0\in Y$. ამ შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\{x:\widetilde{\theta}(x)\in Y\}=\cup_{\theta\in Y}Z_\theta=Z_{\theta_0}\cup\cup_{\theta\in Y\setminus\theta_0}Z_\theta.$$

(b) პირობის მართებულობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$Z_{\theta_0} \in S_1 = \cap_{\theta \in \Theta} dom(\overline{\mu}_\theta) \subseteq dom(\overline{\mu}_{\theta_0}).$$

მეორეს მხრივ,

$$\cup_{\theta \in Y \setminus \theta_0} Z_\theta \subseteq (E \setminus Z_{\theta_0})$$

პირობის მართებულუბიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{\mu}_{\theta_0}(\cup_{\theta \in Y \setminus \theta_0} Z_\theta) = 0.$$

მიღებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\cup_{\theta \in Y \setminus \theta_0} Z_\theta \in dom(\overline{\mu}_{\theta_0}).$$

ვინაიდან $dom(\overline{\mu}_{\theta_0})$ არის σ-ალგებრა, ჩვენ ვასკვნით, რომ

$$\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\} = Z_{\theta_0} \cup \cup_{\theta \in Y \setminus \theta_0} Z_\theta \in dom(\overline{\mu}_{\theta_0}).$$

შემთხვევა II. $\theta_0 \notin Y$. ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\} = \cup_{\theta \in Y} Z_\theta \subseteq (E \setminus Z_{\theta_0}) \quad ,$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ $\overline{\mu}_{\theta_0}(\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\}) = 0$. ეს უკანასკნელი თანაფარდობა ნიშნავს, რომ

$$\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\} \in dom(\overline{\mu}_{\theta_0}).$$

ამგვარად, ჩვენ ვაჩვენეთ შემდეგი თანაფარდობის

$$\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\} \in dom(\overline{\mu}_{\theta_0})$$

მართებულობა ყოველი $\theta_0 \in \Theta$ პარამეტრისათვის, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\{x : \widetilde{\theta}(x) \in Y\} \in \cap_{\theta_0 \in \Theta} dom(\overline{\mu}_{\theta_0}) = S_1.$$

ამგვარად $\widetilde{\theta} : E \to \Theta$ ასახვის ზომადობა დამტკიცებულია.

ვინაიდან $L(\Theta)$ შეიცავს Θ სიმრავლის ყველა წერტილოვან ქვესიმრავლეს, ჩვენ ვასკვნით

$$(\forall \theta)(\theta \in \Theta \to \overline{\mu}_\theta(\{x : \widetilde{\theta}(x) = \theta\}) = \overline{\mu}_\theta(Z_\theta) = 1). \qquad \square$$

შენიშვნა 5.1.3. ვთქვათ, E არის პოლონური სივრცე და $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის E-ზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი. მაშინ σ-ალგებრა $S_1 = \cap_{\theta\in\Theta} dom(\overline{\mu}_\theta)$ შეიცავს ყველა უნივერსალურად ზომად[5] ქვესიმრავლეს. შევნიშნოთ, რომ ყოველი უნივერსალურად ზომადი ძალდებული შეფასება $\widetilde{\theta} : E \to \Theta$ (თუ ასეთი შეფასება არსებობს) იქნება ასევე ზომადი ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრება 5.1.2-ის აზრით.

განსაზღვრება 5.1.4. ვთქვათ, μ არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ზომა და $\theta \in \mathbb{R}$. ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე. μ_θ^I ზომას, განსაზღვრულს $\mu_\theta^I = \prod_{i\in I}\lambda_i$ პირობით, სადაც $\lambda_i = \mu_\theta$, როცა $i \in I$ და μ_θ არის μ ზომის θ-ძვრა ზომა (ე.ი., $\mu_\theta(X) = \mu(X+\theta)$ როცა $X \in \mathcal{B}(R)$), ეწოდება $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული μ_θ θ-ძვრა-ზომის ზერის I-ხარისხი.

განსაზღვრება 5.1.5. ვთქვათ, μ არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ზომა და $\theta \in \mathbb{R}$. ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე. ვთქვათ, $\mathcal{P}_I$ არის $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული μ_θ θ-ძვრა-ზომის ზერის I-ხარისხის ბორელის გაგრძელება. მაშინ $\mathcal{P}_I$ ზომას ეწოდება $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული μ_θ θ-ძვრა-ზომის ბორელის I-ხარისხი.

განსაზღვრება 5.1.6. ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ არის ალბათური სივრცე და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. $X = (X_g)_{g\in G} : \Omega \to \mathbb{R}^G$ სტოქასტურ პროცესს ეწოდება $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული G-პროცესი, თუ მისი ერთობლივი განაწილების ფუნქცია

$$F_{(g_1,\cdots,g_n)}^{(X)}(x_1,\cdots,x_n) = p(\{\omega : X_{g_1}(\omega) < x_1,\cdots, X_{g_n}(\omega) < x_n\}),$$

---

[5] ვთქვათ, $(\mu_i)_{i\in I}$ არის E პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი. $U(E)$ σ-ალგებრას, განსაზღვრულს პირობით $U(E) = \cap_{i\in I} dom(\overline{\mu}_i)$, სადაც $\overline{\mu}_i$ აღნიშნავს μ_i ზომის ჩვეულებრივ გასრულებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის, ეწოდება E სივრცის უნივერსალურად ზომადი ქვესიმრავლე.

სადაც $(g_1,\cdots,g_n)\in G^n$ და $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, არ იცვლება, როცა ხდება მისი ძვრა G-ჯგუფით, ე.ი., სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$F^{(X)}_{(g_1,\cdots,g_n)}(x_1,\cdots,x_n)=F^{(X)}_{(g_1+h,\cdots,g_n+h)}(x_1,\cdots,x_n))$$

ყოველი $h\in G$ ელემენტისათვის.

შენიშვნა 5.1.4. *$G=R^n$ $(n>1)$ ჯგუფისათვის G-პროცესის ცნება ემთხვევა ერთგვაროვანი ველის ცნებას. თუ $G=\mathbb{R}$, მაშინ G-პროცესის ცნება ემთხვევა ჩვეულებრივი სტაციონარული პროცესის ცნებას.*

მაგალითი 5.1.2. ვთქვათ, p არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ $(\mathbb{R}^G, Ba(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა $(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი წარმოადგენს G-პროცესს ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის, სადაც p_θ^G აღნიშნავს $\mathbb{R}$-ზე განსაზღვრული μ_θ θ-ძვრა-ზომის ბერის G-ხარისხს.

ლემა 5.1.4. *ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. ვთქვათ, $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი და $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ არის ისეთ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, რომ $\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k=1$. ვთქვათ, ყოველი $k\in\mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვისათვის p_k^G არის p_k ზომის ბორელის (ან ბერის) G-ხარისხი და $\mu=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k p_k^G$. მაშინ $(\mathbb{R}^G, B(\mathbb{R}^G),\mu)$ (ან $(\mathbb{R}^G, Ba(\mathbb{R}^G),\mu)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი.*

დამტკიცება. $n\in N$, $(g_1,\cdots,g_n)\in G^n$, $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ და $h\in G$ ელემენტებისათვის ჩვენ ვღებულობთ

$$F^{(X)}_{(g_1,\cdots,g_n)}(x_1,\cdots,x_n))=\mu\left(\left\{(\omega_g)_{g\in G}:(\omega_g)_{g\in G}\in\mathbb{R}^G\ \&\ (\omega_{g_1},\cdots,\omega_{g_n})\in\prod_{k=1}^n(-\infty,x_k)\right\}\right)$$

$$=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k p_k^G\right)\left(\left\{(\omega_g)_{g\in G}:(\omega_g)_{g\in G}\in\mathbb{R}^G\ \&\ (\omega_{g_1},\cdots,\omega_{g_n})\in\prod_{k=1}^n(-\infty,x_k)\right\}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k p_k^G\left(\left\{(\omega_g)_{g\in G} : (\omega_g)_{g\in G} \in \mathbb{R}^G \ \&\ (\omega_{g_1},\cdots,\omega_{g_n}) \in \prod_{k=1}^{n}(-\infty, x_k)\right\}\right)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k p_k^G\left(\left\{(\omega_g)_{g\in G} : (\omega_g)_{g\in G} \in \mathbb{R}^G \ \&\ (\omega_{g_1+h},\cdots,\omega_{g_n+h}) \in \prod_{k=1}^{n}(-\infty, x_k)\right\}\right)$$

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k p_k^G\right)\left(\left\{(\omega_g)_{g\in G} : (\omega_g)_{g\in G} \in \mathbb{R}^G \ \&\ (\omega_{g_1+h},\cdots,\omega_{g_n+h}) \in \prod_{k=1}^{n}(-\infty, x_k)\right\}\right)$$

$$= F^{(X)}_{(g_1+h,\cdots,g_n+h)}(x_1,\cdots,x_n)). \qquad \square$$

5.2 ძირითადი შედეგების ფორმულირება და დამტკიცება

თეორემა 5.2.1. *ვთქვათ, F არის R ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია და p არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა $\mathbb{R}$-ზე. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ $(p_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ძვრა-ზომების ბორელის G-ხარისხების ოჯახი $(p_\theta^G)_{\theta\in\mathbb{R}}$ არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.*

დამტკიცება. ლემა 5.1.3-ის ძალით, არსებობს ბერის p_θ^G ზომის ერთადერთი ბორელის გაგრძელება. შევინარჩუნოთ აღნიშვნა p_θ^G მისი ბორელის გაგრძელებისათვის. ვთქვათ, G_0 არის G-ს ისეთი ქვესიმრავლე, რომ $card(G_0) = \aleph_0$. ლემა 5.1.1-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ $p_\theta^G = p_\theta^{G_0} \times p_\theta^{G\setminus G_0}$. თეორემა 4.2.1-ის ძალით, $(p_\theta^{G_0})_{\theta\in\mathbb{R}}$ არის ძლიერად განცალებადი, რაც ნიშნავს $\cap_{\theta\in\mathbb{R}} dom(\overline{p_\theta^{G_0}})$ σ-ალგებრის ელემენტთა ისეთი $(Z_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახის არსებობას, რომლისთვისაც შესრულებულია პირობები:

(i) $\overline{p_\theta^{G_0}}(Z_\theta) = 1$ ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის;

$(ii)\, Z_{\theta_1} \cap Z_{\theta_2} = \varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისათვის პარამეტრთა $\mathbb{R}$ ოჯახიდან;

$(iii) \cup_{\theta \in \mathbb{R}} Z_\theta = \mathbb{R}^{G_0}$.

ვთქვათ, $D_\theta = Z_\theta \times \mathbb{R}^{G \setminus G_0}$. მაშინ ჩვენ მივიღებთ, რომ $(D_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ არის $S = \cap_{\theta \in \mathbb{R}} dom(\overline{p_\theta^G})$ σ-ალგებრის ელემენტთა ისეთი ოჯახი, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:

$(i^*)\, \overline{p_\theta^G}(D_\theta) = 1$ ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის;

$(ii^*)\, D_{\theta_1} \cap D_{\theta_2} = \varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისათვის პარამეტრთა $\mathbb{R}$ ოჯახიდან;

$(iii^*) \cup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\theta = \mathbb{R}^G$. □

შენიშვნა 5.2.1. ვთქვათ, $\Theta = \mathbb{R}$ არის აღჭურვილი ბუნებრივი მეტრიკით. თეორემა 5.2.1-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\widetilde{\theta} : \mathbb{R}^G \to \Theta$ განსაზღვრული პირობით $\widetilde{\theta}(x) = \theta$, როცა $x \in D_\theta$, არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

თეორემა 4.2.2-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 5.2.2. *ვთქვათ, F არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ისეთი განაწილების ფუნქცია, რომ $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) < \infty$. ვთქვათ, p არის $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა განაწილების F ფუნქციით. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ $(p_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ძვრაზომების ბორელის G-ხარისხების ოჯახი $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.*

შენიშვნა 5.2.2. ვთქვათ, $\Theta=\mathbb{R}$ არის აღჭურვილი ბუნებრივი მეტრიკით. თეორემა 5.2.2-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\widetilde{\theta}:\mathbb{R}^G\to\Theta$ განსაზღვრული პირობით $\widetilde{\theta}(x)=\theta$, როცა $x\in D_\theta$, არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

მაგალითი 5.2.1. ვთქვათ, γ არის ნამდვილ $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.1 (ან თეორემა 5.2.2)-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, $\mathbb{R}^G$ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის (ან ბერის) "თეთრ ხმაურთა" ძვრების $(\gamma_\theta{}^G)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G,B(\mathbb{R}^G),\gamma_\theta{}^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G,Ba(\mathbb{R}^G),\gamma_\theta{}^G)$) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.

მაგალითი 5.2.2. ვთქვათ, p არის ნამდვილი $\mathbb{R}$ ღერძის ბორელის σ-ალგებრაზე განსაზღვრული პუასონის ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.2-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, ნამდვილი $\mathbb{R}$ ღერძის ბორელის σ-ალგებრაზე განსაზღვრული პუასონის ზომის ძვრა-ზომათა ბერის G-ხარისხების $(p_\theta^G)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G,\mathcal{B}(\mathbb{R}^G),p_\theta^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G,Ba(\mathbb{R}^G),p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფაქტების მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 5.2.1-ის გამოყენებით, ვინაიდან დარღვეულია თეორემა 5.2.1-ის პირობები.

მაგალითი 5.2.3. ვთქვათ, p არის ნამდვილ $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული კოშის ალბათური ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.1-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, ნამდვილი $\mathbb{R}$ ღერძის ბორელის σ-ალგებრაზე განსაზღვრული კოშის ალბათური ზომის

ძვრა-ზომათა ბორელის G-ხარისხების $(p_\theta^G)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G, Ba(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფაქტების მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 5.2.2-ის გამოყენებით, ვინაიდან დარღვეულია თეორემა 5.2.2-ის პირობები იმის გამო, რომ $\int_{\mathbb{R}} xdF(x)$ განშლადია.

თეორემა 5.2.3. *ვთქვათ, $(\Theta_i)_{i\in I}$ არის ნამდვილი $\mathbb{R}$ ღერძის ისეთი დახლეჩა, რომ $card(\Theta_i)\le\aleph_0$, სადაც $\aleph_0$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს. ვთქვათ, $(\alpha_\theta^{(i)})_{\theta\in\Theta_i}$ არის დადებით ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\sum_{\theta\in\Theta_i}\alpha_\theta^{(i)}=1$ ყოველი $i\in I$ პარამეტრისათვის. ვთქვათ, μ_θ არის ნამდვილ $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ისეთი ალბათური ბორელის μ ზომის θ-ძვრა, რომლის განაწილების ფუნქცია არის მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. ყოველი $i\in I$ პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ ბორელის ალბათური ზომა λ_i $\mathbb{R}^G$-სივრცეზე შემდეგი პირობით:*

$$\lambda_i=\sum_{\theta\in\Theta_i}\alpha_\theta^{(i)}\mu_\theta^G.$$

მაშინ $(\lambda_i)_{i\in I}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), \lambda_i)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $i\in I$ პარამეტრისათვის.

დამტკიცება. ლემა 5.2.3-ის ძალით, ბერის μ_θ^G ზომას გააჩნია ერთადერთი ბორელის გაგრძელება ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის, რომლისთვისაც ჩვენ ვინარჩუნებთ იგივე აღნიშვნას. შევნიშნოთ, რომ $\lambda_i=\sum_{\theta\in\Theta_i}\alpha_\theta^{(i)}\mu_\theta^G$ იქნება $\mathbb{R}^G$ სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ყოველი $i\in I$ პარამეტრისათვის.

ლემა 5.1.4-ის ძალით, $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), \lambda_i)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა $X=(Pr_g)_{g\in G}$ ოჯახი არის G-პროცესი ყოველი $i\in I$ პარამეტრისათვის.

თეორემა 5.2.1-ის ძალით, ბორელის ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta^G)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, ე.ი. იარსებებს $\cap_{\theta\in\mathbb{R}} dom(\overline{\mu_\theta^G})$ σ-ალგებრის ელემენტთა $(D_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ ოჯახი, ისეთი რომ:

(i) $\overline{\mu_\theta^G}(D_\theta)=1$ ყოველი $\theta\in\mathbb{R}$ პარამეტრისათვის;

(ii) $D_{\theta_1}\cap D_{\theta_2}=\varnothing$ ყოველი ორი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისათვის პარამეტრთა $\mathbb{R}$ ოჯახიდან;

(iii) $\cup_{\theta\in\mathbb{R}} D_\theta=\mathbb{R}^G$.

ვთქვათ, $E_i=\cup_{\theta\in\Theta_i} D_\theta$ როცა $i\in I$. ცხადია, რომ $(E_i)_{i\in I}$ არის $\cap_{i\in I} dom(\overline{\lambda_i})$ σ-ალგებრის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა ისეთი ოჯახი, რომ $\overline{\lambda_i}(E_i)=1$ როცა $i\in I$. □

შენიშვნა 5.2.3. ვთქვათ, I აღჭურვილია დისკრეტული მეტრიკით. თეორემა 5.2.3-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\widetilde{\theta}:\mathbb{R}^G\to I$, განსაზღვრული პირობით $\widetilde{\theta}(x)=i$ როცა $x\in E_i$, არის i პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

შემდეგი დებულება წარმოადგენს თეორემა 5.2.2-ის უშუალო შედეგს.

თეორემა 5.2.4. *ვთქვათ,* $(\Theta_i)_{i\in I}$ *არის ნამდვილი* $\mathbb{R}$ *ღერძის დანაწილება, ისეთი რომ* $card(\Theta_i)\le\aleph_0$, *სადაც* $\aleph_0$ *აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს. ვთქვათ,* $(\alpha_\theta^{(i)})_{\theta\in\Theta_i}$ *არის დადებით ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა რომ* $\sum_{\theta\in\Theta_i}\alpha_\theta^{(i)}=1$ *ყოველი* $i\in I$ *პარამეტრისათვის. ვთქვათ,* μ_θ *არის ნამდვილ* $\mathbb{R}$ *ღერძზე განსაზღვრული ისეთი ალბათური ბორელის* μ *ზომის* θ*-ძვრა, რომლის განაწილების*

ფუნქცია F *აკმაყოფილებს პირობას* $\int_R xdF(x) < \infty$. *ვთქვათ,* G *არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. ყოველი* $i \in I$ *პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ ბერის ალბათური ზომა* λ_i $\mathbb{R}^G$*-სივრცეზე შემდეგი პირობით:*

$$\lambda_i = \sum_{\theta \in \Theta_i} \alpha_\theta^{(i)} \mu_\theta^G .$$

მაშინ $(\lambda_i)_{i \in I}$ *ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი და* $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), \lambda_i)$ *ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა* $X = (Pr_g)_{g \in G}$ *ოჯახი არის* G *-პროცესი ყოველი* $i \in I$ *პარამეტრისათვის.*

შენიშვნა 5.2.4. ვთქვათ, I აღჭურვილია დისკრეტული მეტრიკით. თეორემა 5.2.3-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\widetilde{\theta} : \mathbb{R}^G \to I$, განსაზღვრული პირობით $\widetilde{\theta}(x) = i$ როცა $x \in E_i$, არის i პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

5.3 პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომის G-ხარისხის T_G-ინვარიანტულ გაგრძელებათა ოჯახების შესახებ

ვთქვათ, E არის პოლონურ სივრცე და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. განვსაზღვროთ T_G კლასი შემდეგი პირობით $T_G = \{g_h : E^T \to E^T \mid h \in G \;\&\; (\forall (x_t)_{t \in T} \in E^T \to g_h((x_t)_{t \in T}) = (x_{t+h})_{t \in T})\}$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ T_G წარმოადგენს E^T სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფს. ამასთან, ალბათური ზომა λ, განსაზღვრული E^T სივრცის ქვესიმრავლეთა T_G- ინვარიანტულ S σ-ალგებრაზე არის T_G-ინვარიანტული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (E^T, S, λ) *ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების* $X = (Pr_g)_{g \in G}$ *ოჯახი არის* G *-პროცესი.*

თეორემა 5.3.1 *ვთქვათ,* ψ *არის* E *პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომა და* G *არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ არსებობს* ψ^G *-ზომის გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი* $(\psi_i^G)_{i\in I}$ *, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) $card(I) = 2^{2^c}$ *;*

ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ψ^G *-ზომის* T_G - ინვარიანტულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;

გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \to dom(\psi_i^G) = dom(\psi_j^G))$.

დ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \,\&\, i \neq j \to dom(\psi_i^G) \perp dom(\psi_j^G))$.

დამტკიცება. ვთქვათ, O_2 არის საკოორდინატო $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის მისი სათავის გარშემო მობრუნებათა ჯგუფი და λ_2 არის ამავე ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ალბათური ზომა. თეორემა 1.6 -ის ძალით , არსებობს ბორელის **იზომორფიზმი**

$$\varphi : (O_2, B(O_2)) \to (E\ , B(E\ )),$$

ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $\lambda_2(X) = \psi(\varphi(X))$ ყოველი $X \in B(O_2)$ სიმრავლისათვის.

ლემა 3.2.3 -ის ძალით, *არსებობს* O_2 *ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ* σ *-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომათა ისეთი ორთოგონალური ოჯახი* $(\mu_i)_{i\in I}$ *, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1) $card(I) = 2^{2^c}$

2) $(\forall i)(i \in I \to$ *ზომა* μ_i *არის ჰაარის* λ_2 *ზომის* O_2 *-ინვარიანტული გაგრძელება).*

განვსაზღვროთ $(\psi_i\ )_{i\in I}$ *ოჯახი შემდეგნაირად*

$$(\forall i)(\forall X)(i \in I \,\&\, X \in dom(\mu_i) \to \psi_i\ (\varphi^{-1}(X)) = \mu_i(X)).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(\psi_i^G)_{i\in I}$ აკმაყოფილებს თეორემა 5.3.1 -ის ყველა პირობას. $\square$

შედეგი 5.3.1 *ვთქვათ,* γ *არის ნამდვილ რიცხვთა* $\mathbb{R}$ *ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა და* G *არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ* $\mathbb{R}^G$ *სივრცეზე არსებობს ბერის* γ^G *-"თეთრი ხმაურის" გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი* $(\psi_i^G)_{i\in I}$, *რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) $card(I) = 2^{2^c}$;

ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ბერის γ^G-*"თეთრი ხმაურის" სტაციონარულ გაგრძელებას ყოველი* $i \in I$ *ინდექსისათვის;*

გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \to dom(\psi_i^G) = dom(\psi_j^G))$.

დ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \,\&\, i \neq j \to dom(\psi_i^G) \perp dom(\psi_j^G))$.

თეორემა 5.3.2 *ვთქვათ,* ψ *არის* E *პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომა და* G *არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ არსებობს* ψ^G*-ზომის გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი* $(\psi_i^G)_{i\in I}$, *რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) $card(I) = 2^c$;

ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ψ^G-*ზომის* T_G- ინვარიანტულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;

გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \to dom(\psi_i^G) = dom(\psi_j^G))$.

დ) ალბათურ ზომათა ოჯახი $(\psi_i^G)_{i\in I}$ *არის სუსტად განცალებადი.*

დამტკიცება. ვთქვათ, O_2 არის საკოორდინატო $\mathbb{R}^2$ სიბრტყის მისი სათავის გარშემო მობრუნებათა ჯგუფი და λ_2 არის ამავე ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ალბათური ზომა. თეორემა 1.6 -ის ძალით, არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$$\varphi : (O_2, B(O_2)) \to (E\ , B(E\ )),$$

ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $\lambda_2(X) = \psi(\varphi(X))$ ყოველი $X \in B(O_2)$ სიმრავლისათვის.

ლემა 3.2.4 -ის ძალით, *არსებობს O_2 ჯგუფის ქვესიმრავლეთა გარკვეულ σ -ალგებრაზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ისეთი სუსტად განცალებადი ოჯახი $(\mu_i)_{i\in I}$, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

1) $card(I) = 2^{2^c}$

2) *$(\forall i)(i \in I \rightarrow$ ზომა μ_i არის ჰაარის λ_2 ზომის O_2 -ინვარიანტული გაგრძელება).*

განვსაზღვროთ $(\psi_i)_{i\in I}$ ოჯახი შემდეგნაირად

$$(\forall i)(\forall X)(i \in I \ \& \ X \in dom(\mu_i) \rightarrow \psi_i(\varphi^{-1}(X)) = \mu_i(X)).$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $(\psi_i^G)_{i\in I}$ აკმაყოფილებს თეორემა 5.3.2 -ის ყველა პირობას. □

შედეგი 5.3.2 *ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ მაშინ $\mathbb{R}^G$ სივრცეზე არსებობს ბერის γ^G -"თეთრი ხმაურის" გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი $(\psi_i^G)_{i\in I}$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

ა) $card(I) = 2^{c}$;

ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ბერის γ^G -*"თეთრი ხმაურის" სტაციონარულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;*

გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \rightarrow dom(\psi_i^G) = dom(\psi_j^G))$.

დ) ალბათურ ზომათა ოჯახი $(\psi_i^G)_{i\in I}$ არის სუსტად განცალებადი.

დასკვნა

ნაშრომში "სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ" განხილულია სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ზოგადი თეორიის ზოგიერთ ასპექტი.

ნაშრომში ჩატარებულია კვლევა სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურის აგებულების შესასწავლად ერგოდული თეორიის (ე.ი. ინვარიანტული ზომების) თვალსაზრისით; კერძოდ, მიღებულია შემდეგი სახის შედეგი:

- პოლონური სივრცის G-ხარისხზე განსაზღვრულ ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცისათვის აგებულია ბაზისი და დამტკიცებულია, რომ მისი სიმძლავრე კონტინუუმის სიმძლავრის ტოლია.

ნაშრომის გარკვეული ნაწილი ეთმობა სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიის დღეისათვისაც მეტად აქტუალურ საკითხს -ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახიდან შესაბამის ძლიერად განცალებად ოჯახზე გადასვლის ამოცანას. ამ მიმართულებით საინტერესო შედეგები თავის დროზე მიღებული ჰქონდათ ა. სკოროხოდს (1981), დ.მაჰარამს (1982), რ.გარდნერს (1982), რ.მაულდინსა და დ.პრეისლს (1983), ზ.ზერაკიძეს (1984), გ.ფანცულაიას (1989) და სხვებს. აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ აღნიშნული ავტორები თავიანთ კვლევებში ძირითადად იყენებდნენ ისეთ დამატებით სიმრავლურ-თეორიულ აქსიომებს, როგორიცაა კონტინუუმ ჰიპოთეზა (CH), მარტინის აქსიომა (MA), კონტინუუმის ფართე აზრით არაზომადობა (GCH), დეტერმინირების აქსიომა (DA) და სხვა. ამ მიმართულებით დისერტანტი თავის ყურადღებას მიმართავს სწორედ განცალებადობის პრობლემაზე ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ძვრა ზომების (ბორელისეული და ბერის) G -ხარისხების ოჯახებისათვის. შევნიშნოთ, რომ თეორიულად შესაძლებელია ორი შემთხვევა: როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრული სიდიდეა ან როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური

ლოდინი სასრულ სიდიდეს არ წარმოადგენს. კარგადაა ცნობილი, რომ სტატისტიკა-*შერჩევითი საშუალო* წარმოადგენს მათემატიკური ლოდინის ძალდებულ შეფასებას, როცა ცნობილია რომ დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრული რიცხვია. ამ შემთხვევაში *დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის* გამოყენებით დადებითად იჭრება ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ძვრა ზომების (ბორელისეული და ბერის) G -ხარისხების სუსტად განცალებადი ოჯახიდან შესაბამის ძლიერად განცალებად ოჯახზე გადასვლის ამოცანა.

სიტუაცია დიამეტრალურად იცვლება, როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი არ წარმოადგენს სასრულ სიდიდეს. ამ შემთხვევაში შეუძლებელია *დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის* გამოყენება *განცალებადობის ამოცანის* გადასაჭრელად. ამ მიმართულებით უნდა აღინიშნოს, რომ

- *ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფის შემთხვევაში, მოცემულია განცალებადობის ამოცანის გადაწყვეტა ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ძვრა ზომების (ბორელისეული და ბერის) G-ხარისხების ოჯახისათვის უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის გამოყენებით, როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულ სიდიდეს არ წარმოადგენს.*

საზოგადოდ *განცალებადობის ამოცანის* დადებითად გადაწყვეტა ჯერ კიდევ არ ნიშნავს დაკვირვებადი პროცესის განმსაზღვრელი პარამეტრისათვის ძალდებული შეფასების არსებობას, თუ, რასაკვირველია, გამოვიყენებთ ა. სკოროხოდის მიერ 1981 შემოტანილ ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახების კლასიფიკაციას (ორთოგონალური ოჯახები, სუსტად განცალებადი ოჯახები, ძლიერად განცალებადი ოჯახები, ძალდებული შეფასების მქონე ოჯახები). დისერტანტის დამსახურებად შეიძლება ჩაითვალოს ის ფაქტი, რომ

- *მოცემულია სკოროხოდის მიერ ზომად სივრცეზე განსაზღვრული წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ალბათური ზომებისათვის*

შემოტანილი კლასიფიკაციის ახლებური გააზრება იმდაგვარად, რომ ძლიერად განცალებადობისა და ძალდებული შეფასების არსებობის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევიან.

ეს ახალი მიდგომა საშუალებას იძლევა ყოველგვარი დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე, R^G სივრცეზე განსაზღვრული ძვრა ზომების (ბორელისეული და ბერის) G -ხარისხების ოჯახებისათვის ავაგოთ ძალდებული შეფასება ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის. ამგვარად,

- *ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფის შემთხვევაში, მოცემულია ძალდებული შეფასების აგების მეთოდი ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული ძვრა ზომების ბორელისა და ბერის G -ხარისხების ოჯახებისათვის უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის გამოყენებით, როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულ სიდიდეს არ წარმოადგენს.*

ნაშრომის მეცნიერულ სიახლეს წარმოადგენს ის ფაქტი, რომ მასში პირველადაა გამოყენებული ტარსკის (შემდგომში ფანცულაიას მიერ განზოგადოებული) დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი არათვლად ლოკალურად კომპაქტურ σ -კომპაქტურ H ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ძვრა-ზომათა ხარისხების სხვადასხვა სტაციონარული გაგრძელებების ასაგებად. როცა ჯგუფის სიმძლავრე კონტინუუმია, მაშინ შესაძლებელია ტარსკის დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი გამოყენება. წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოიყენება ფანცულაიას მიერ განზოგადოებული ტარსკის დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი ყოველი უსასრულო H ჯგუფისათვის, რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ $card(H^{\omega}) = card(H)$ ტოლობას. აქვე შევნიშნოთ, რომ განზოგადოებული კონტინუუმ ჰიპოთეზის (GCH) შემთხვევაში ეს ტოლობა ავტომატურად სრულდება ყველა არათვლადი H ჯგუფისათვის. უფრო ზუსტად, *ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფის შემთხვევაში,* დამოუკიდებელ

სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდის გამოყენებით მიღებულია შემდეგი შედეგები

- *არათვლად კომპაქტურ ჰაუსდორფის ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ალბათური ზომის ბერის G-ხარისხებისათვის აგებულია მათი სტაციონარული გაგრძელებების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალებადი, ძლიერად განცალებადი) ოჯახები და დათვლილია შესაბამისი სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლები.*
- *პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომის ბერის G-ხარისხებისათვის (კერძოდ, "თეთრი ხმაურისათვის") აგებულია მათი სტაციონარული გაგრძელებების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალებადი, ძლიერად განცალებადი) ოჯახები და დათვლილია შესაბამისი სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლები.*

ასევე, ჰ. შიმომურას, ა. ხარაზიშვილისა და გ.ფანცულაიას შედეგებზე დაყრდნობით, მიღებულია შემდეგი შედეგი:

ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ $\mathbb{R}^{\infty}$ სივრცეზე აგებულია მაგალითი ისეთი არაგადაგვარებული σ-სასრულო ბორელის ზომის, რომელიც არის ინვარიანტული ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ და ამავდროულად არ არის ექვივალენტური ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ღერძზე განსაზღვრული არცერთი აბსოლუტურად უწყვეტი ალბათური ბორელის μ ზომის $\mathbb{N}$- ხარისხის.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Gihman I.I., Skorokhod A.V. Teoriya sluchainykh protsessov. Moscow: Izdat. "Nauka", 1971, Tom I, 664 p (in Russian).

[2] Gihman I.I.; Skorokhod A.V. Introduction to the theory of stochastic processes. Moscow: Nauka., 1977, 567 p (in Russian).

[3] Ibramkhallilov I.Sh., Skorokhod A.V. On well-off estimates of parameters of stochastic processes Kiev, 1980, 189 p (in Russian).

[4] Shiryaev A.N. Probability. Moscow: Izd."Nauka", 1980, 574 p (in Russian).

[5] Pantsulaia G.R. Invariant and quasiinvariant measures in infinite-dimensional topological vector spaces. New York: Nova Science Publishers,Inc.,2007, 234 p.

[6] Burgess J.P., Mauldin R.D. Conditional distributions and orthogonal measures. *Ann.Probab.,* 1981, 9, 902–906.

[7] Gardner, R. J. A note on conditional distributions and orthogonal measures. *Ann.Probab.,* 1982, 10, 3, 877–878.

[8] Maharam D. Orthogonal measures: an example. *The Annals of Probability*, 1982, 10, 3, 879–880.

[9] Mauldin R.D., Preiss D.,Weizsacker H.Y., Orthogonal transition kernels. *The Annals of Probability*, 1983, 11, 4, 970-988.

[10] Pantsulaia G.R. On intersection of problems of theoretical statistics and set theory. *Far East Journal of Theoretical Statistics,* 2008, 25, 2, 251-271.

[11] Zerakidze Z. On weakly separated and separated families of probability measures(in Russian). *Bull. Acad. Sci. the Georgian SSR.,* 1984, 113, 2, 273-275 .

[12] Pantsulaia G.R. An applications of independent families of sets to the measure extension problem. *Georgian Math. J.*, 2004, 11, 2, 379—390.

[13] Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences. London. Sidney. Toronto: John Wiley & Sons. N.Y., 1974, 390 p.

[14] Cohen P.J., The independence of the continuum hypothesis. *Proc. Nat. Acad. Sci.,* 1963, **50,** 1143-1148.

[15] Cohen P.J., Set theory and the continuum hypothesis. New York: Benjamin., 1966, 154 p.

[16] Pantsulaia G.R. Duality of measure and category in infinite-dimensional separable Hilbert space, *IJMMS* ., 2002, 30, 6, 353-363.

[17] Shimomura, Hiroaki. An aspect of quasi-invariant measures on R^{∞}. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.,* 1975/76, 11, 3, 749-773.

[18] Pantsulaia G., Saatashvili G. On Separation Problem for the Family of N-Power-Shift-Measures in R^{∞}. *Georg. Inter. J. Sci. Tech.,* 2011, 3, 2, 189-195**.**

[19] Saatashvili G. On a structure of elementary stationary Borel probability measures. *Georg. Inter.J.Sci. Tech.,* 2011, 3, 4, in press.

[20] Saatashvili G., On set-theoretical characteristics of pairwise orthogonal non-elementary non-separable diffesed stationary processes. *Georg. Inter. J. Sci. Tech., 2*011, 3, 4, in press.

[21] Saatashvili G. On orthogonality of Borel shift measures on a Polish group, *Georg. Inter. J. Sci. Tech.,* 2011, 3, 4, in press.

[22] Pantsulaia G., Saatashvili G. On a certain example of a non-stationary measure on R^{∞}. Mathematical Conference dedicated to the memory of professor Rezo Absava. *Tbilisi: Georgian University*, 2012.

[23] Zerakidze Z., Saatashvili G. Construction of stationary statistical structures, *The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics", dedicated to the world Science Day for Peace and Development", Section no 4 "Applied Stochastic Analysis" (PCI 2010 - Published papers),* September 6-10, 2010, Baku, Azerbaijan

[24] Zerakidze Z., Pantsulaia G., Saatashvili G. On Separation Problem for the Family of Borel and Baire I-Powers of Shift-Measures on R, XXV Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Inst. Appl. Math., Section of Probability Theory and Mathematical Statistics, 21-23 April, Tbilisi (Georgia), 2011.

[25] Cichon J., Kharazishvili A., Weglorz B. Subsets of the real line, Lodz :Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego., 199, 232 p.

[26] Halmos P.R. Measure theory. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1950, 304 p.

[27] Gödel K. The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis with the axiom of set theory. *Annals of Math. Studies,* Princeton, Van Nostrand, 1940, pp.60.

[28] Engelking R. Outline of general topology. PWN, Warsaw.: North-Holland, Amsterdam., 1974, 388 p.

[29] Kharazishvili A.B. Topological aspects of measure theory. Kiev: Naukova Dumka., 1984, 117 p (in Russian).

[30] Kharazishvili A.B. Invariant extensions of the Lebesgue measure. Tbilisi Tbilisi University Press., 1983, 204 p (in Russian).

[31] Pantsulaia G.R. *On some Quasiinvariant Measures and Dynamical Systems in infinite-Dimensional Vector Spaces.* Ph.D. Thesis (under A.B. Kharazishvili). Tbilisi State University, 2003, 303 p.

[32] Kuratowski K., Mostowski A. Set theory. *Warsaw :PWN ,* 1978, 470 p.

[33] Kharazishvili A.B. Elements of combinatorical theory of infinite sets. Tbilisi: Tbilisi University Press., 1981, 200 p (in Russian).

[34] Szpilrajn E(Marczewski E.). On problems of the theory of measure. *Uspekhi Mat. Nauk.,* 1946, 1, 2(12), 179--188 (in Russian).

[35] Kodaira K., Kakutani S. A nonseparable tranlation--invariant extension of the Lebesgue measure space. *Ann. Math.,* 1950, 52, 574--579.

[36] Kakutani S., Oxtoby J. Construction of non--separable invariant extension of the Lebesgue measure space. *Ann Math.,* vol. 1950, **52** ,. 580--590

[37] Pantsulaia G.R. On separation properties for families of probability measures. *Georgian Math. J.*, 2003, 10, 2, 335-342.

[38] Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of diophantine approximation. *Acta Math.,* 1914, 37, 1, 193--239.

[39] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. Erratum: l'Some problems of diophantine approximation', *Acta Math.,* 1916, 41, 1, pp.196.

[40] Vinogradow I. On fractional parts of certain functions. *Ann. of Math.,* 1936 , 2, 37 , 2, 448-455.

[41] Shoenfield J.R., Martin's Axiom. *Amer. Monthly.*, 1975, 82, 610–617.

[42] Solovay R.M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann.Math.*, 1970, 92 , 1–56.

[43] Kharazishvili A.B., On the existence of quasi-invariant measures (in Russian). *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR.,* 1984, 115, 1, 37-40 .

[44] Loeb, Peter A.; Ross, David A. Infinite products of infinite measures. *Illinois J. Math.,* 2005, 49(1), 153-158 (electronic).

[45] Kakutani S., On equivalence of infinite product measures. *Ann.Math.*, 1948, 4, 9, 214-224.

[46] Tarashchanskii M. T., Shchestyuk N. Y. On well–off estimates of parameters and extremal extensions of measures. *Applied Statistics. Actuarial and FinancialMathematics,* 2008, 1, 2, 148-153 (in Russian).

[47] Pantsulaia G.R. Some properties of families of probability measures (in Russian). *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR.,* 1985, 120, 2, 245-248.