

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიმზერ საათაშვილი

სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების
შესახებ

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი

2012 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის
მათემატიკური დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: **ზურაბ ზერაკიძე,**

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი

გოგი ფანცულაია,

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი

რეცენზენტები: **გრიგოლ სოხაძე,**

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი

ზურაბ ქვათაძე,

მათემატიკის დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი

დაცვა შედგება 2012 წლის "-----" -----, ----- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის
სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,
კორპუსი VI, აუდიტორია -----

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - სტუ-ს ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი
სრული პროფესორი

თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა. საყოველთაოდ არის ცნობილი, რომ სტატისტიკური სტრუქტურების კვლევისას დიდი ყურადღება ეთმობა მისი ძირითადი თვისებების შესწავლას ერგოდული თეორიის (ე.ი. ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების) თვალსაზრისით. ერგოდული თეორიის დაფუძვნება სტიმულირებული იყო სტატისტიკური მექანიკის პრობლემების განხილვის აუცილებლობით და დაკავშირებული იყო ბირკჰობის (1943), კრილოვისა და ბოგოლიუბოვის (1946), ჰოფის (1949) და სხვა ცნობილი მათემატიკოსების შრომებთან.

სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიაში ხშირად წარმოიშვება ამოცანა ალბათურ ზომათა სუსტად განცალკეობადი ოჯახიდან შესაბამის ძლიერად განცალკეობად ოჯახზე გადასვლის შესახებ. 1981 წელს სკოროხოვმა მიიღო შედეგი რომლის თანახმადაც კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობის შემთხვევაში ალბათურ ზომათა ყოველი სუსტად განცალკეობადი ოჯახი, რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალკეობადი. შებრუნებული დებულების მართებულობა დამტკიცდა გ.ფანცულაიას მიერ 1989 წელს. კერძოდ, ნაჩვენები იყო, რომ თუ ალბათურ ზომათა ყოველი სუსტად განცალკეობადი ოჯახი, რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალკეობადი, მაშინ მართებულია კონტინუუმ ჰიპოთეზა. მარტინის აქსიომის გამოყენებით, ზ.ზერაკიძემ 1984 წელს დაამტკიცა, რომ პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალკეობადი ოჯახი არის ძლიერად განცალკეობადი, თუ პარამეტრთა სიმრავლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს. გ.ფანცულაიას მიერ 1989 წელს ეს შედეგი განზოგადოებულ იქნა ისეთი სრული მეტრიკული სივრცეებისათვის, რომელთა ტოპოლოგიური წონები არ არიან ზომადი ფართე აზრით. ყურადსაღებია ის ფაქტი, რომ ზემოთმოყვანილი საკითხების გადასაჭრელად არსებითად გამოიყენება ისეთი დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომები,

როგორცაა კონტინუუმ ჰიპოთეზა, მარტინის აქსიომა, განზოგადოებული კონტინუუმ ჰიპოთეზა და სხვა. დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ანალოგიური საკითხების კვლევას სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურებისათვის ყოველგვარი დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე.

ინფორმაციის გადაცემის მათემატიკურ თეორიაში განხილვის ობიექტია შემდეგი ერთ-განზომილებიანი წრფივი სტოქასტური სისტემა

$$\xi(t, \omega) = \theta(t) + \Delta(t, \omega),$$

სადაც $t \in T \subseteq R$, H არის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე, Θ არის ვექტორული H^T სივრცის ქვესივრცე, $(\theta(t))_{t \in T} \in \Theta \subset H^T$ არის სასარგებლო სიგნალი

$$(\Delta(t, \cdot))_{t \in T} : \Omega \rightarrow H^T$$

არის სტაციონარული გაუსის პროცესი (ეგრეთ წოდებული "თეთრი ხმაური") განსაზღვრული (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე. μ -ით აღვნიშნოთ ბერის ალბათური ზომა H^T -სივრცეზე, განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X \in Ba(H^T) \rightarrow \mu(X) = P(\{\omega : (\Delta(t, \omega))_{t \in T} \in X\})),$$

სადაც $Ba(H^T)$ აღნიშნავს H^T -სივრცის ბერის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრას.

ინფორმაციათა გადაცემის თეორიის ძირითადი დაშვებაა, რომ ბერის ზომა λ , განსაზღვრული გარდაქმნილი ხმაურით

$$(\xi(t, \cdot))_{t \in T} : \Omega \rightarrow H^T,$$

ემთხვევა μ ზომის გარკვეულ μ_{θ_0} ($\theta_0 \in \Theta$) ძვრას, ე.ი.,

$$(\forall X)(X \in Ba(H^T) \rightarrow \lambda(X) = \mu_{\theta_0}(X)),$$

სადაც $\mu_{\theta_0}(X) = \mu(X - \theta_0)$ როცა $X \in Ba(H^T)$.

θ_0 პარამეტრის "კარგი" შეფასება შეიძლება მიღებულ იქნას ეგრეთ წოდებული $\bar{\theta}: H^T \rightarrow \Theta$ ძალდებული შეფასებით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$(\forall \theta)(\theta \in \Theta \rightarrow \mu_{\theta}(\{(x(t))_{t \in T} : \bar{\theta}((x(t))_{t \in T}) = (\theta(t))_{t \in T}\}) = 1).$$

როგორც წესი, აუცილებელ პირობას ძალდებული შეფასების არსებობისათვის წარმოადგენს შემდეგი პირობა $\Theta \cap Q_{\mu} = \{\mathbf{0}\}$, სადაც Q_{μ} აღნიშნავს μ ზომის კვაზინვარიანტულობის თვალსაზრისით დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილ ჯგუფს და $\mathbf{0}$ აღნიშნავს H^T ადიტიური ჯგუფის ნულოვან ელემენტს. შესაბამისად, აქ წარმოიქმნება Q_{μ} ჯგუფის განხილვისა და დაკვირვებადი სტოქასტური პროცესის ფილტრაციის ზოგადი პრობლემის გამოკვლევის აუცილებლობა. ამ მიმართულებით, მსგავსი პრობლემები განხილული იყო ჯ. ვონ ნეიმანის (1935), ს. კაკუტანის (1943), ვ. სუდაკოვის (1959), ჯ. ფელდმანის (1966), ი. როზანოვის (1968), ხი დაო ხინგის (1972), ა. სკოროხოდის (1975), ჰ. შიმომურას (1975), ა. ხარაზიშვილისა (1985) და სხვათა ნაშრომებში. დისერტაციის მეორე ნაწილი ეთმობა სწორედ სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურებისათვის ძალდებული შეფასებების აგებას ყოველგვარი დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გარეშე.

სამუშაოს მიზანი. ჩვენ ვახდენთ ფოკუსირებას სტაციონარულ სტატისტიკურ სტრუქტურებზე, რომლებთაც აქვთ ბევრი საინტერესო გამოყენება მეცნიერების სხვადასხვა დარგში. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი, ძალდებული შეფასების მქონე და სხვა) სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლები. ასევე, ჩვენ მიზნად ვისახავთ ამ სტრუქტურების ძირითადი თვისებების შესწავლას ერგოდული თეორიის (ე.ი. ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების) თვალსაზრისით.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები. კვლევის ობიექტს წარმოადგენს პოლონური X სივრცის G -ხარისხზე განსაზღვრული სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა (ელემენტარული, არაელემენტარული, დიფუზიური, ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი, ძალდებული შეფასების მქონე და სხვა) ოჯახები, სადაც G ნებისმიერი უსასრულო ადიტიური ჯგუფია. ამ ობიექტის რიგი თვისებების შესასწავლად გამოიყენება სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ისეთი ცნობილი მეთოდები, როგორცაა ტარსკის დამოუკიდებელ სიმრავლეთა ოჯახები, დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი, ფუბინის თეორემა, რადონ-ნიკოდიმის თეორემა, ხანი-ბანახის თეორემა, ალბათურ ზომათა ინდუქციური ზღვარი, ჰაარის ზომის თეორია, უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების თეორია.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე. ნაშრომში მიღებულია შემდეგი ძირითადი შედეგები:

1. შემუშავებულია მეთოდი პოლონური სივრცის N -ხარისხზე ზოგიერთი სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურის ასაგებად;
2. აგებულია ბაზისი პოლონური სივრცის N -ხარისხზე განსაზღვრულ ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცისათვის და დათვლილია მისი სიმძლავრე.
3. უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდების (დამოუკიდებელ სიმრავლეთა ოჯახები, თითქმის დიზუნქტიური ოჯახები, ფუნქციათა განცალკეადი ოჯახები და ა.შ.) გამოყენებით აგებულია პოლონური სივრცის N -ხარისხზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი, სეპარაბელური, არასეპარაბელური) სტაციონარული გაგრძელებები და დათვლილია მათი სიმძლავრეები;

4. მოცემულია ა. სკოროხოდის მიერ ზომად სივრცეზე განსაზღვრული წყვილ-წყვილად ორთოგონალური ალბათური ზომებისათვის შემოტანილი კლასიფიკაციის ახლებური გააზრება იმდაგვარად, რომ ძლიერად განცალკეებადობისა და ძალდებული შეფასების არსებობის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევიან.
5. ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, პოლონური სივრცის G -ხარისხზე განსაზღვრული ბერისა და ბორელის G -პროცესების ერთი კლასისათვის, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ძვრა ზომების ბორელისა და ბერის G -ხარისხების ოჯახებისათვის უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის გამოყენებით გადაწყვეტილია განცალკეებადობისა და ძალდებული შეფასების აგების ამოცანები, როცა დაკვირვებადი შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი სასრულ სიდიდეს არ წარმოადგენს.
6. ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ \mathbb{R}^∞ სივრცეზე აგებულია მაგალითი ისეთი არაგადაგვარებული σ -სასრულო ბორელის ზომის, რომელიც არის ინვარიანტული ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ და ამავედროულად არ არის ექვივალენტური ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული არცერთი აბსოლუტურად უწყვეტი ბორელის ალბათური ზომის \mathbb{N} -ხარისხის.

შედეგების გამოყენების სფერო. ნაშრომში მოყვანილი შედეგები ფუნდამენტური ხასიათისაა და მისი გამოყენების არეალი საკმარისად ფართოა. ერთის მხრივ, დისერტაციაში წარმოდგენილი თეორიული სახის შედეგები შეიძლება იქნას გამოყენებული როგორც მათემატიკური სტატისტიკის აქტუალური საკითხების შემდგომი კვლევისას, ასევე მათემატიკის აღნიშნული დარგის თანამედროვე კურსის წაკითხვის პროცესში. მეორეს მხრივ, შესაძლებელია აღნიშნული შედეგების გამოყენება დაკვირვებადი სტაციონარული

პროცესების განმსაზღვრელი პარამეტრის შესაფასებლად, რის საშუალებასაც იძლევა პოლონურ სივრცის G -ხარისხზე განსაზღვრული G -პროცესების ერთი კლასისათვის პარამეტრის ძალდებული შეფასების აგების კონსტრუქცია ყოველი უსასრულო აბელის G ჯგუფისათვის.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენდა ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის ყოველკვირეულ სემინარებზე:

- სიმრავლეთა თეორიის საწყისები (ხელმძღვანელი; საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპონდენტი ა.ხარაზიშვილი);
- ზომის თეორიის სიმრავლურ-თეორიული ასპექტები (ხელმძღვანელი: სრული პროფესორი გ.ფანცულაია).

დისერტაციაში მიღებული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხა ავტორეფერატს თან ერთვის.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია შედგება შესავალისაგან, ხუთი თავისა და გამოყენებული ლიტერატურისაგან. იგი მოიცავს 111 ნაბეჭდ გვერდს. გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა შეიცავს 47 დასახელებას.

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია სტუ-ს ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

შესავალში გადმოცემულია საკვლევი პრობლემის აღწერა, აქტუალობა და პრაქტიკული მნიშვნელობა, სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა თავებისა და ქვეთავების მიხედვით.

თავი I - ძირითადი კონცეფციები. განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, თამაშთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ის ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება შემდგომ კვლევებში.

თავი II. ელემენტარულ სტაციონარულ ზომათა სტრუქტურის შესახებ.

2.1 ქვეთავი-მიმართება სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესებსა და გარდაქმნის შემნახავ ალბათურ ზომებს შორის. მოცემულია სტაციონარული ალბათური ზომის განსაზღვრება დროის ძვრის ტერმინებში და დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.1.1. ვთქვათ, $\{\xi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ არის სტაციონარული სტოქასტური პროცესი განსაზღვრული (Ω, \mathcal{F}, P) ალბათურ სივრცეზე მნიშვნელობებით X პოლონურ სივრცეში. ვთქვათ, T არის $X^{\mathbb{Z}}$ სივრცის ნატურალური ძვრა განსაზღვრული $T((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ პირობით ყოველი $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$ მიმდევრობისათვის. მაშინ ფუნქციონალი μ , განსაზღვრული პირობით

$$(\forall Y)(Y \in \mathfrak{D}(X^{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mu(Y) = P(\{\omega : (\xi_k(\omega))_{k \in \mathbb{Z}} \in Y\}))$$

წარმოადგენს $X^{\mathbb{Z}}$ სივრცეზე განსაზღვრულ T -ინვარიანტულ ბორელის ალბათურ ზომას.

ქვეთავი - 2.2 სტაციონარული სტოქასტური პროცესის აგების ერთი მეთოდის შესახებ. მოყვანილია სტაციონარული სტოქასტური პროცესის აგების ერთ ზოგადი მეთოდი.

თეორემა 2.2.1. ვთქვათ, (Ω, \mathcal{F}, P) არის ალბათური სივრცე და X არის პოლონური სივრცე. ვთქვათ, $\xi : \Omega \rightarrow X$ არის ზომადი ასახვა. ვთქვათ, $T : \Omega \rightarrow \Omega$ არის ურთიერთცალსახა $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ -ზომადი ასახვა, რომელიც ინახავს P ზომას. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $(\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, განსაზღვრული

$$\xi_n(\omega) = \xi(T^n(\omega)) \quad (\omega \in \Omega, n \in \mathbb{Z})$$

პირობით, წარმოადგენს სტაციონარულ პროცესს.

აღნიშნულ ქვეთავში მოცემულია ასევე ერგოდული და არაერგოდული სტაციონარული სტოქასტური პროცესების აგების ზოგიერთი მაგალითი.

ქვეთავი 2.3 - ელემენტარულ ინვარიანტულ ალბათურ ზომათა სტრუქტურის შესახებ. შესწავლილია (E, G, S) ინვარიანტულ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ელემენტარულ G -ინვარიანტულ ზომათა კლასის სტრუქტურა, კერძოდ, მოცემულია შემდეგი დებულების დამტკიცება.

ლემა 2.3.4. ვთქვათ, (E, G, S) არის ინვარიანტული ზომადი სივრცე და ვიგულისხმობთ, რომ S -ზე განსაზღვრულ ელემენტარულ G -ინვარიანტულ ზომათა კლასი არაცარიელია. მაშინ არსებობს σ -სასრულო ზომათა ოჯახი განსაზღვრული (E, G, S) -ზე, ისეთი, რომ შესრულებულია პირობები:

- 1) $(\forall i)(i \in I \rightarrow (\mu_i \text{ არის მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე } \sigma\text{-სასრულო } G\text{-ინვარიანტული ზომა}))$;
- 2) $(\mu_i)_{i \in I}$ არის \aleph_0 -დამოუკიდებელი;
- 3) $(\mu_i)_{i \in I}$ არის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელ ზომათა ოჯახი;
- 4) ყოველი ელემენტარული σ -სასრულო G -ინვარიანტული μ ზომისათვის არსებობს თვლადი სიმრავლე $I_0 \subseteq I$ და თვლადი ოჯახი არაუარყოფითი $(a_i)_{i \in I_0}$ რიცხვებისა, ისეთი რომ

$$\mu = \sum_{i \in I_0} a_i \mu_i,$$

და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი.

ქვეთავი 2.4 - X^Z -ზე განსაზღვრული ელემენტარული სტაციონარული ზომების სტრუქტურის შესახებ. მიღებულია შემდეგი შედეგები:

თეორემა 2.4.1 (ბაზისის არსებობა). ვთქვათ, X არის პოლონური სივრცე. ვთქვათ, T არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრული დროითი ძვრის ოპერატორი. ვთქვათ, T აღნიშნავს χ გუფს, წარმოქმნილს T ოპერატორით. მაშინ არსებობს

X^Z -სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ისეთი $(\mu_i)_{i \in I}$ ოჯახი, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) $(\forall i)(i \in I \rightarrow (\mu_i \text{ გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება } T - \text{ჯგუფის მიმართ}))$;

2) ზომათა $(\mu_i)_{i \in I}$ ოჯახი არის \aleph_0 -დამოუკიდებელი;

3) $(\mu_i)_{i \in I}$ არის წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ზომათა ოჯახი;

4) X^Z -სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი ელემენტარული სტაციონარული ალბათური ზორელის μ ზომისათვის, არსებობს ინდექსთა თვლადი ოჯახი $I_0 \subseteq I$ და არაუარყოფით რიცხვთა ისეთი თვლადი $(a_i)_{i \in I_0}$ მიმდევრობა, რომ

$$\mu = \sum_{i \in I_0} a_i \mu_i,$$

და ეს წარმოდგენა არის ერთადერთი.

თეორემა 2.4.2. ვთქვათ, $(\mu_i)_{i \in I}$ არის X^Z -სივრცეზე განსაზღვრულ ელემენტარულ სტაციონარულ ზორელის ალბათურ ზომათა კლასის ბაზისი განსაზღვრული თეორემა 2.3.1-ით. მაშინ

$$\text{card}(I) = c,$$

სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს.

თავი III. წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული არასეპარაბელური დიფუზიური სტაციონარული პროცესების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლები.

ქვეთავი 3.1-ალბათურ ზომათა ორთოგონალური ოჯახები. მოცემულია სკოროხოდის მიერ შემოტანილი (E, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი და ძალდებული შეფასების მქონე ოჯახების ცნებები.

ქვეთავი - 3.2 ზოგიერთი დამხმარე დებულება. ეთმოზა ჰაარის ზომის სხვადასხვა ინვარიანტული გაგრძელებების შესახებ გ. ფანცულაიას მიერ 2004 წელს მიღებული ზოგიერთი შედეგის ფორმულირებას .

ქვეთავი - 3.3 ორთოგონალურ სტაციონარულ ზომათა მაგალითები. დადგენილია შემდეგ დებულებათა მართებულობა.

თეორემა 3.3.1. ვთქვათ, (X, S, μ) არის დიფუზიური¹ ალბათური სივრცე. მაშინ μ ზომის Z -ხარისხი μ^Z , განსაზღვრული პირობით $\mu^Z = \prod_{i \in \mathbf{Z}} \mu_i$, სადაც $\mu_i = \mu$ ყოველი $i \in \mathbf{Z}$ ინდექსისათვის, წარმოადგენს (X^Z, S^Z) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ დიფუზიურ სტაციონარულ ზომას.

თეორემა 3.3.2. ვთქვათ, X არის პოლონური ჯგუფი. მაშინ X^Z სივრცეზე არსებობს მაქსიმალური სიმძლავრის მქონე დიფუზიურ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ისეთი $(\mu_t)_{t \in T}$ ოჯახი, რომ $\text{card}(T) = 2^{2^c}$ და შესრულებულია პირობები:

$$(i) (\forall i)(\forall j)(i \in T \ \& \ j \in T \rightarrow \text{dom}(\mu_i) = \text{dom}(\mu_j));$$

(ii) $(\forall i)(i \in T \rightarrow a(\mu_i)$ არის მაქსიმალური $\& a(\mu_i) = 2^c$), სადაც $a(\mu)$ აღნიშნავს μ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.

თეორემა 3.3.3. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t \in T}$ არის სუსტად განცალკეადი ოჯახი დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომებისა X^Z სივრცეზე. მაშინ $\text{card}(T) \leq 2^c$.

თეორემა 3.3.4 ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური სივრცე. მაშინ არსებობს X^Z სივრცეზე განსაზღვრული ისეთი დიფუზიური სტაციონარული

¹ ალბათურ (X, S, μ) სივრცეს ეწოდება დიფუზიური, თუ ყოველი წერტილოვანი სიმრავლე ეკუთვნის S კლასს და μ ზომის მნიშვნელობა ასეთ სიმრავლეებზე ნულის ტოლია. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ μ არის დიფუზიური ალბათური ზომა.

ალბათური ზომების მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) სუსტად განცალკეობადი ოჯახი $(\lambda_j)_{j \in J}$, რომ $\text{card}(J) = 2^c$.

თეორემა 3.3.5. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t \in J}$ არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრულ დიფუზიურ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ძლიერად განცალკეობადი ოჯახი, მაშინ $\text{card}(J) \leq c$.

მაგალითი 3.3.2. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი და $(\mu_t)_{t \in J}$ არის X^Z სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური სტაციონარული ზომების ისეთი სუსტად განცალკეობადი ოჯახი, რომ $\text{card}(J) > c$ (იხ. თეორემა 3.3.4). მაშინ, თეორემა 3.3.5-ის ძალით, $(\mu_t)_{t \in J}$ არ წარმოადგენს ძლიერად განცალკეობად ოჯახს.

თეორემა 3.3.6. ვთქვათ, X არის პოლონური კომპაქტური ჯგუფი. მაშინ არსებობს X^Z სივრცეზე განსაზღვრული ძლიერად განცალკეობადი ოჯახი დიფუზიური სტაციონარული ალბათური ზომებისა, ისეთი რომ $\text{card}(J) = c$.

მაგალითი 3.3.3. ვთქვათ $F: R \rightarrow R$ არის უნივერსალურად არაზომადი ურთიერთცალსახა ასახვა. $i \in R$ პარამეტრისათვის, λ_i -თი აღვნიშნოთ დირაკის ზომა კონცენტრირებული $f(i)$ წერტილში. დავუშვათ $\mu_i = \lambda_i^Z$, როცა $i \in Z$. მაშინ $(\mu_i)_{i \in R}$ არის ძლიერად განცალკეობადი ოჯახი სტაციონარული ზომებისა R^Z სივრცეზე, რომლისთვისაც არ არსებობს ძალდებული შეფასება.

ქვეთავი - 3.4 არასეპარაბელური არაეემენტარული სტაციონარული ზომები. აგებულია არასეპარაბელური არაეემენტარული სტაციონარული ზომების სხვადასხვა ორთოგონალური ოჯახები. განიხილება საკოორდინატო R^2 სიბრტყის მისივე სათავის გარშემო შემობრუნებათა H ჯგუფი. ვთქვათ, λ არის ჰაარის ალბათური ზომა განსაზღვრული H ჯგუფზე და $T_h(g) = g \oplus h (g \in H)$. ვთქვათ, $(\lambda_i)_{i \in I}$ არის ჰაარის λ ზომის T_h -ინვარიანტულ

არაელემენტარულ გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი, რომ $card(I) = 2^{2^{card(H)}}$ და შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

$$1) (\forall i)(\forall j)(i \in I \& j \in I \rightarrow dom(\lambda_i) = dom(\lambda_j) := S);$$

$$2) (\forall i)(i \in I \rightarrow a(\lambda_i) \text{ არის მაქსიმალური } \& a(\lambda_i) = 2^{card(H)}), \text{ სადაც } a(\lambda_i)$$

აღნიშნავს λ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას. ასეთი ოჯახის არსებობა გამომდინარეობს ლემა 3.2.5-იდან.

დავუშვათ, რომ $\xi_n(\cdot) = \xi(T_h^n(\cdot))$, როცა $n \in Z$, სადაც $\xi : H \rightarrow [0, 2\pi[$ რაიმე ზომადი ასახვაა. განვსაზღვროთ $[0, 2\pi[^Z$ სივრცის ქვესიმრავლეთა S_0 σ -ალგებრა შემდეგნაირად:

$$S_0 = \{(\xi_n)_{n \in Z}(X) : X \in S\}.$$

განვსაზღვროთ μ_i ზომა შემდეგნაირად:

$$(\forall Y)(Y \in S_0 \rightarrow \mu_i(Y) = \lambda(\{\omega : (\xi_n(\omega))_{n \in Z} \in Y\})).$$

თეორემა 3.4.1. ალბათურ ზომათა $(\mu_i)_{i \in I}$ ოჯახი არის $[0, 2\pi[^Z$ -სივრცეზე განსაზღვრული წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული სტაციონარული ზომების ისეთი მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახი, რომ $card(I) = 2^{2^c}$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$1) (\forall i)(\forall j)(i \in I \& j \in I \rightarrow dom(\mu_i) = dom(\mu_j));$$

2) $(\forall i)(i \in I \rightarrow a(\mu_i) \text{ არის მაქსიმალური } \& a(\mu_i) = 2^c)$, სადაც $a(\mu_i)$ აღნიშნავს μ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.

თეორემა 3.4.2. არსებობს $[0, 2\pi[^Z$ -სივრცეზე განსაზღვრული არაელემენტარული არასეპარაბელური სტაციონარული ზომების მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ისეთი სუსტად-განცალეხადი ოჯახი $(\lambda_j)_{j \in J}$, რომ $card(J) = 2^c$ და შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$(\forall j)(i \in J \rightarrow a(\lambda_i) \text{ არის მაქსიმალური } \& a(\lambda_i) = 2^c),$$

სადაც $a(\lambda_i)$ აღნიშნავს λ_i ზომასთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას.

თავი IV. ძვრა ზომათა N ხარისხების განცალგებადობის შესახებ R^∞ სივრცეში.

ქვეთავი 4.1. - ზოგიერთი დამხმარე ცნება და დებულება. მოცემულია ზოგიერთი ცნება და დამხმარე დებულება უნიმორფულად განაწილებული მიმდევრობების თეორიიდან. ამავე ქვეთავში მოყვანილია დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ფორმულირება.

ვთქვათ, X არის კომპაქტური პოლონური სივრცე და μ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. ვთქვათ, $\mathcal{B}(X)$ არის X სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის შემოსაზღვრულ ფუნქციათა სივრცე.

განსაზღვრება 4.1.3. X სივრცის ელემენტთა s_1, s_2, s_3, \dots მიმდევრობას ეწოდება μ -ექვიგანაწილებული ან μ -უნიფორმულად განაწილებული X სივრცეზე, თუ ყოველი $f \in \mathcal{B}(X)$ ელემენტისათვის სრულდება ტოლობა

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 4.1.2 ვთქვათ, $f \in \mathcal{B}(X)$ და $\mu_\infty := \mu^\infty$. მაშინ, μ_∞ -თითქმის ყველა $(s_n)_{n \in N} \in X^\infty$ მიმდევრობისათვის, სრულდება ტოლობა

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(s_n) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 4.1.3 ვთქვათ, S არის μ -უნიფორმულ მიმდევრობების სიმრავლე X^∞ -ში. მაშინ

- (i) $\mu_\infty(S) = 1$;
- (ii) S არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;
- (iii) S არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიაში.

შედეგი 4.1.1. ვთქვათ, ℓ_1 არის ლებეგის წრფივი ზომა $(0,1)$ ინტერვალზე. ვთქვათ, D არის ℓ_1 -ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლე. მაშინ

(i) $\ell_1^\infty(D) = 1$;

(ii) D არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;

(iii) D არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

განსაზღვრება 4.1.4. ვთქვათ, μ არის R ღერძზე განსაზღვრული ალბათური ბორელის ზომა და F არის მისი განაწილების ფუნქცია. ნამდვილ რიცხვთა s_1, s_2, s_3, \dots მიმდევრობას ეწოდება μ -ექვიგანაწილებული ან μ -უნიფორმულად განაწილებული R ღერძზე, თუ ყოველი $[a, b]$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) ინტერვალისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#([a, b] \cap \{x_1, \dots, x_n\})}{n} = F(b) - F(a).$$

ლემა 4.1.4. ვთქვათ, $(x_k)_{k \in N}$ არის ℓ_1 -უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა (0.1)-ზე და F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია $\bar{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$ -ზე, ისეთი, რომ $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ და $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R -ზე განსაზღვრული F ფუნქციით. მაშინ $(F^{-1}(x_k))_{k \in N}$ არის p_F -უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა R ღერძზე.

შედეგი 4.1.2. ვთქვათ, F არის მკაცრად ზრდადი ფუნქცია $\bar{R} := \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$ -ზე, ისეთი, რომ $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ და $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, და ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R -ზე განსაზღვრული F ფუნქციით. მაშინ p_F -უნიფორმულ მიმდევრობების $D_F (\subset R^\infty)$ სივრცისათვის ჩვენ გვაქვს

(i) $D_F = \{(F^{-1}(x_k))_{k \in N} : (x_k)_{k \in N} \in D\}$.

(ii) $p_F^\infty(D_F) = 1$;

(iii) D_F არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე;

(iv) D_F არის ყველგან მკვრივი ტიხონოვის ტოპოლოგიის მიმართ.

ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ არის (E, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ოჯახი. ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის $\overline{\mu_\theta}$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ μ_θ ზომის გასრულება.

განსაზღვრება 4.1.5. ჩვენ ვიტყვით, რომ $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეობადი, თუ არსებობს $\bigcap_{\theta \in \Theta} \overline{dom(\mu_\theta)}$ კლასის ელემენტთა $(Z_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახი, ისეთი რომ

$$(i) \mu_\theta(Z_\theta) = 1;$$

$$(ii) Z_{\theta_1} \cap Z_{\theta_2} = \emptyset;$$

$$(iii) \bigcup_{\theta \in \Theta} Z_\theta = E.$$

ქვეთავი - 4.2 ძირითადი შედეგები. მიღებულია შემდეგი ძირითადი შედეგები:

თეორემა 4.2.1. ვთქვათ, F არის R ღერძზე განსაზღვრული განაწილების ფუნქცია და p_F არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა R ღერძზე. ვთქვათ, ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, $F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R)$. მაშინ ძვრა-ზომათა N -ხარისხების $(p_{F_\theta}^\infty)_{\theta \in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეობადი.

თეორემა 4.2.2. ვთქვათ, F არის R ღერძზე განსაზღვრული განაწილების ფუნქცია, ისეთი რომ $\int_R x dF(x) < \infty$. ვთქვათ, p_F არის ბორელის ალბათური ზომა R -ზე განსაზღვრული F -ით. $\theta \in R$ პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ F_θ შემდეგნაირად: $F_\theta(x) = F(x+\theta)(x \in R)$. მაშინ ძვრა-ზომათა N -ხარისხების $(p_{F_\theta}^\infty)_{\theta \in R}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეობადი.

ქვეთავი 4.3 - $[0,1]^N$ სივრცეზე განსაზღვრულ სუსტად განცალკეობად სტაციონარულ ზომათა ერთი მაგალითის შესახებ. განხილულია შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 4.3.2. განსაზღვროთ ალბათურ ზომათა $(\mu_t)_{t \in [0,1] \cup]1,2]}$ ოჯახი შემდეგნაირად: თუ $X \in B([0,1]^2)$, მაშინ $\mu_t(X) = I_1(X \cap \{t\} \times [0,1])$ როცა $t \in]0,1[$ და $\mu_t(X) = I_1(X \cap [0,1] \times \{t\})$ როცა $t \in]1,2[$. ახლა განვიხილოთ ალბათურ ზომათა ოჯახი $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t \in [0,1] \cup]1,2]}$. ცხადია, რომ ის წარმოადგენს $([0,1]^2)^{\mathbb{N}}$ სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა ოჯახს. ასევე ცხადია, რომ ეს ოჯახი სუსტად განცალკეობადია. მართლაც, თუ განვიხილავთ ბორელის სიმრავლეთა $(X_t)_{t \in [0,1] \cup]1,2]}$ ოჯახს, განსაზღვრულს პირობით $X_i = (\{t\} \times [0,1]) \times ([0,1]^2)^{\mathbb{N} \setminus \{i\}}$ როცა $t \in]0,1[$ და $X_i = ([0,1] \times \{t\}) \times ([0,1]^2)^{\mathbb{N} \setminus \{i\}}$ როცა $t \in]1,2[$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\mu_{t_1}^{\mathbb{N}}(X_{t_2}) = \delta(t_1, t_2) \quad (t_1, t_2 \in ([0,1] \cup]1,2])^2).$$

ამავე ქვეთავში მიღებულია შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 4.3.1. $((ZFC) \& (CH))$ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სუსტად განცალკეობადი $(\mu_t^{\mathbb{N}})_{t \in [0,1] \cup]1,2]}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეობადი.

ქვეთავი 4.4 - R^∞ -სივრცეზე განსაზღვრული ერთი ინვარიანტული ზომის შესახებ. ეძვნება ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ \mathbb{R}^∞ ვექტორულ სივრცეზე გარკვეული თვისების მქონე ინვარიანტული ზომის არსებობის საკითხს. ცნობილია, რომ თუ μ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრულ ერთ-განზომილებიან ბორელის ალბათურ ზომას დადებითი განაწილების სიმკვრივით, მაშინ ევკლიდეს $\mathbb{R}^n (n \in \mathbb{N})$ სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი σ -სასრული ბორელის λ ზომა, რომელიც დებულობს რაიმე არანულოვან სასრულ მნიშვნელობას რაიმე არაგადაგვარებულ პარალელეპიპედზე და არის ინვარიანტული \mathbb{R}^n სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ, ექვივალენტურია μ^n ზომის. ბუნებრივად ისმის შემდეგი

ამოცანა 4.4.1. ვთქვათ, μ წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრულ ერთ-განზომილებიან ბორელის ალბათურ ზომას დადებითი

განაწილების სიმკვრივით. ვთქვათ, λ არის ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ \mathbb{R}^N ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრული σ -სასრული ბორელის λ ზომა, რომელიც ღებულობს რაიმე არანულოვან სასრულ მნიშვნელობას რაიმე არაგადაგვარებულ უსასრულო-განზომილებიან პარალელეპიპედზე და არის ინვარიანტული \mathbb{R}^N სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ. არიან თუ არა λ და μ^N ზომები ექვივალენტური?

3. შიმომურას (1975) და გ.ფანცულაიას (2002) შედეგებზე დაყრდნობით გაცემულია უარყოფითი პასუხი ამოცანა 4.4.1-ზე.

თავი V. ბორელისა და ბერის ალბათურ ზომათა G ხარისხების ოჯახის განცალგებლობის შესახებ.

ქვეთავი 5.1 - ზოგიერთი დამხმარე ცნებები და ფაქტები. მოცემულია ზოგიერთი დამხმარე ცნება და ფაქტი ნამდვილ რიცხვთა ხარისხებზე განსაზღვრული ბერისა და ბორელის ალბათურ ზომათა არსებობის შესახებ.

განსაზღვრება 5.1.2. ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ არის (E, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ალბათურ ზომათა ოჯახი, სადაც Θ აღჭურვილია მის ქვესიმრავლეთა ისეთი $L(\Theta)$ σ -ალგებრით, რომელიც შეიცავს Θ სიმრავლის ყველა წერტილოვან სიმრავლეს და $S_1 := \bigcap_{\theta \in \Theta} \text{dom}(\bar{\mu}_\theta)$. ჩვენ ვიტყვით, რომ ზომადი ასახვა $\tilde{\theta} : E \rightarrow \Theta$ არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$(\forall \theta)(\theta \in \Theta \rightarrow \bar{\mu}_\theta(\{x : \tilde{\theta}(x) = \theta\}) = 1).$$

აღნიშნული ქვეთავის ერთ-ერთ ძირითად შედეგს აქვს შემდეგი სახე.

ლემა 5.1.3. ვთქვათ, $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ არის (E, S) ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ ალბათურ ზომათა ოჯახი, სადაც Θ აღჭურვილია მის ქვესიმრავლეთა ისეთი $L(\Theta)$ σ -ალგებრით, რომელიც შეიცავს Θ სიმრავლის ყველა წერტილოვან სიმრავლეს და $S_1 := \bigcap_{\theta \in \Theta} \text{dom}(\bar{\mu}_\theta)$. მაშინ შემდეგი წინადადებები არის ექვივალენტური:

(a) არსებობს θ პარამეტრის ძალდებული $\tilde{\theta} : E \rightarrow \Theta$ შეფასება;

(b) ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეადი.

განსაზღვრება 5.1.4. ვთქვათ, μ არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ზომა და $\theta \in \mathbb{R}$. ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე. μ_θ^I ზომას, განსაზღვრულს $\mu_\theta^I = \prod_{i \in I} \lambda_i$ პირობით, სადაც $\lambda_i = \mu_\theta$, როცა $i \in I$ და μ_θ არის μ ზომის θ -ძვრა ზომა (ე.ი., $\mu_\theta(X) = \mu(X + \theta)$ როცა $X \in \mathcal{B}(R)$), ეწოდება \mathbb{R} -ზე განსაზღვრული μ_θ θ -ძვრა-ზომის ბერის I -ხარისხი.

განსაზღვრება 5.1.5. ვთქვათ, μ არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ზომა და $\theta \in \mathbb{R}$. ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე. ვთქვათ, \mathcal{P}_I არის \mathbb{R} -ზე განსაზღვრული μ_θ θ -ძვრა-ზომის ბერის I -ხარისხის ბორელის გაგრძელება. მაშინ \mathcal{P}_I ზომას ეწოდება \mathbb{R} -ზე განსაზღვრული μ_θ θ -ძვრა-ზომის ბორელის I -ხარისხი.

განსაზღვრება 5.1.6. ვთქვათ, (Ω, \mathcal{F}, p) არის ალბათური სივრცე და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. $X = (X_g)_{g \in G} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^G$ სტოქასტურ პროცესს ეწოდება (Ω, \mathcal{F}, p) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული G -პროცესი, თუ მისი ერთობლივი განაწილების ფუნქცია

$$F_{(g_1, \dots, g_n)}^{(X)}(x_1, \dots, x_n) = p(\{\omega : X_{g_1}(\omega) < x_1, \dots, X_{g_n}(\omega) < x_n\}),$$

სადაც $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ და $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, არ იცვლება, როცა ხდება მისი ძვრა G -ჯგუფით, ე.ი., სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$F_{(g_1, \dots, g_n)}^{(X)}(x_1, \dots, x_n) = F_{(g_1+h, \dots, g_n+h)}^{(X)}(x_1, \dots, x_n)$$

ყოველი $h \in G$ ელემენტისათვის.

შენიშვნა 5.1.2. $G = \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) ჯგუფისათვის, G -პროცესის ცნება ემთხვევა ერთგვაროვანი ველის ცნებას. თუ $G = \mathbb{R}$, მაშინ G -პროცესის ცნება ემთხვევა ჩვეულებრივი სტაციონარული პროცესის ცნებას.

ლემა 5.1.4. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. ვთქვათ, $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი და $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ არის ისეთ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, რომ $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k = 1$. ვთქვათ, ყოველი $k \in \mathbb{N}$ ნატურალური რიცხვისათვის p_k^G არის p_k ზომის ბორელის (ან ბერის) G -ხარისხი და $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k p_k^G$. მაშინ $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), \mu)$ (ან $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}_a(\mathbb{R}^G), \mu)$) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციათა $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი.

ქვეთავი 5.2 - ძირითადი შედეგების ფორმულირება და დამტკიცება. ძირითადი შედეგები ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 5.2.1. ვთქვათ, F არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია და p არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა \mathbb{R} -ზე. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ $(p_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ძვრა-ზომების ბორელის G -ხარისხების ოჯახი $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ არის ძლიერად განცალკეობადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.

შენიშვნა 5.2.1. ვთქვათ, $\Theta = \mathbb{R}$ არის აღჭურვილი ბუნებრივი მეტრიკით. თეორემა 5.2.1-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^G \rightarrow \Theta$ განსაზღვრული პირობით $\tilde{\theta}(x) = \theta$, როცა $x \in D_\theta$, არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

თეორემა 4.3.2-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 5.2.2. ვთქვათ, F არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ისეთი განაწილების ფუნქცია, რომ $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) < \infty$. ვთქვათ, p არის \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა განაწილების F ფუნქციით. ვთქვათ, G

არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ $(p_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ძვრა-ზომების ბორელის G -ხარისხების ოჯახი $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ არის ძლიერად განცალკეადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.

შენიშვნა 5.2.2. ვთქვათ, $\Theta = \mathbb{R}$ არის აღჭურვილი ბუნებრივი მეტრიკით. თეორემა 5.2.2-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^G \rightarrow \Theta$ განსაზღვრული პირობით $\tilde{\theta}(x) = \theta$, როცა $x \in D_\theta$, არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

მაგალითი 5.2.1. ვთქვათ, p არის ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული გაუსის ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.1 (ან თეორემა 5.2.2)-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, ნამდვილ \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული გაუსის ზომის ძვრა-ზომათა ბორელის (ან ბერის) G -ხარისხების $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}_a(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის.

მაგალითი 5.2.2. ვთქვათ, p არის ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძის ბორელის σ -ალგებრაზე განსაზღვრული პუასონის ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.2-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, ნამდვილი \mathbb{R} ღერძის ბორელის σ -ალგებრაზე განსაზღვრული პუასონის ზომის ძვრა-ზომათა ბერის G -ხარისხების $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}_a(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის. შევნიშნოთ, რომ

აღნიშნული ფაქტების მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 5.2.1-ის გამოყენებით, ვინაიდან დარღვეულია თეორემა 5.2.1-ის პირობები.

მაგალითი 5.2.3. ვთქვათ, p არის ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული კოშის ალბათური ზომა. მაშინ თეორემა 5.2.1-ის ძალით ჩვენ ვასკვნით, რომ ყოველი უსასრულო ადიტიური G ჯგუფისათვის, ნამდვილი \mathbb{R} ღერძის ბორელის σ -ალგებრაზე განსაზღვრული კოშის ალბათური ზომის ძვრა-ზომათა ბორელის G -ხარისხების $(p_\theta^G)_{\theta \in \mathbb{R}}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$ (ან $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}a(\mathbb{R}^G), p_\theta^G)$) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრული საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $\theta \in \mathbb{R}$ პარამეტრისათვის. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ფაქტების მართებულობის დადგენა შეუძლებელია თეორემა 5.2.2-ის გამოყენებით, ვინაიდან დარღვეულია თეორემა 5.2.2-ის პირობები იმის გამო, რომ $\int_{\mathbb{R}} x dF(x)$ განშლადია.

თეორემა 5.2.3. ვთქვათ, $(\Theta_i)_{i \in I}$ არის ნამდვილი \mathbb{R} ღერძის ისეთი დახლექა, რომ $card(\Theta_i) \leq \aleph_0$, სადაც \aleph_0 აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმძლავრეს. ვთქვათ, $(\alpha_\theta^{(i)})_{\theta \in \Theta_i}$ არის დადებით ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\sum_{\theta \in \Theta_i} \alpha_\theta^{(i)} = 1$ ყოველი $i \in I$ პარამეტრისათვის. ვთქვათ, μ_θ არის ნამდვილ \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული ისეთი ალბათური ბორელის μ ზომის θ -ძვრა, რომლის განაწილების ფუნქცია არის მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი. ვთქვათ, G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. ყოველი $i \in I$ პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ ბორელის ალბათური ზომა λ_i \mathbb{R}^G -სივრცეზე შემდეგი პირობით: $\lambda_i = \sum_{\theta \in \Theta_i} \alpha_\theta^{(i)} \mu_\theta^G$. მაშინ $(\lambda_i)_{i \in I}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალკეადი და $(\mathbb{R}^G, \mathcal{B}(\mathbb{R}^G), \lambda_i)$ ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ

საკოორდინატო პროექციათა $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი ყოველი $i \in I$ პარამეტრისათვის.

შენიშვნა 5.2.3. ვთქვათ, I აღჭურვილია დისკრეტული მეტრიკით. თეორემა 5.2.3-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^G \rightarrow I$, განსაზღვრული პირობით $\tilde{\theta}(x) = i$ როცა $x \in E_i$, არის i პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

შენიშვნა 5.2.4. ვთქვათ, I აღჭურვილია დისკრეტული მეტრიკით. თეორემა 5.2.3-ის პირობებში, ლემა 5.1.3-ის ძალით, ჩვენ ვასკვნით, რომ ასახვა $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^G \rightarrow I$, განსაზღვრული პირობით $\tilde{\theta}(x) = i$ როცა $x \in E_i$, არის i პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

ქვეთავი - 5.3 პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომის G -ხარისხის T_G -ინვარიანტულ გაგრძელებათა ოჯახების შესახებ. განხილულია G -პროცესების ერთი კლასისათვის ინვარიანტული გაგრძელებების აგების ამოცანა.

ვთქვათ, E არის პოლონურ სივრცე და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. განვსაზღვროთ T_G კლასი შემდეგი პირობით $T_G = \{g_h : E^T \rightarrow E^T \mid h \in G \ \& \ (\forall (x_t)_{t \in T} \in E^T \rightarrow g_h((x_t)_{t \in T}) = (x_{t+h})_{t \in T})\}$.

აღვილი შესამოწმებელია, რომ T_G წარმოადგენს E^T სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფს. ამასთან, ალბათური ზომა λ , განსაზღვრული E^T სივრცის ქვესიმრავლეთა T_G - ინვარიანტულ S σ -ალგებრაზე არის T_G -ინვარიანტული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (E^T, S, λ) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ საკოორდინატო პროექციების $X = (Pr_g)_{g \in G}$ ოჯახი არის G -პროცესი.

თეორემა 5.3.1 ვთქვათ, ψ არის E პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომა და G არის უსასრულო ადიტიური

ჯგუფი. მაშინ არსებობს ψ^G -ზომის გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი $(\psi_i^G)_{i \in I}$, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

- ა) $\text{card}(I) = 2^{2^c}$;
- ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ψ^G -ზომის T_G - ინვარიანტულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;
- გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \rightarrow \text{dom}(\psi_i^G) = \text{dom}(\psi_j^G))$.
- დ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \ \& \ i \neq j \rightarrow \text{dom}(\psi_i^G) \perp \text{dom}(\psi_j^G))$.

შედეგი 5.3.1 ვთქვათ, γ არის ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ლერძზე განსაზღვრული გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ \mathbb{R}^G სივრცეზე არსებობს ბერის γ^G -”თეთრი ხმაურის” გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი $(\psi_i^G)_{i \in I}$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

- ა) $\text{card}(I) = 2^{2^c}$;
- ბ) ψ_i^G წარმოადგენს ბერის γ^G -”თეთრი ხმაურის” სტაციონარულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;
- გ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \rightarrow \text{dom}(\psi_i^G) = \text{dom}(\psi_j^G))$.
- დ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \ \& \ i \neq j \rightarrow \text{dom}(\psi_i^G) \perp \text{dom}(\psi_j^G))$.

თეორემა 5.3.2 ვთქვათ, ψ არის E პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრული დიფუზიური ბორელის ალბათური ზომა და G არის უსასრულო ადიტიური ჯგუფი. მაშინ არსებობს ψ^G -ზომის გაგრძელებათა ისეთი ოჯახი $(\psi_i^G)_{i \in I}$, რომ $\text{card}(I) = 2^c$ და შესრულდება შემდეგი პირობები:

- ა) ψ_i^G წარმოადგენს ψ^G -ზომის T_G - ინვარიანტულ გაგრძელებას ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის;
- ბ) $(\forall i)(\forall j)(i, j \in I \rightarrow \text{dom}(\psi_i^G) = \text{dom}(\psi_j^G))$.
- გ) ალბათურ ზომათა ოჯახი $(\psi_i^G)_{i \in I}$ არის სუსტად განცალკეადი.

დასკვნა

ნაშრომში "სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების აგებულების შესახებ" განხილულია სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ზოგადი თეორიის ზოგიერთი ასპექტი.

ნაშრომში განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ის ძირითადი ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება აღნიშნულ კვლევებში.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ძირითადი თვისებების შესწავლას ერგოდული თეორიის (ე.ი. ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების) თვალსაზრისით. კერძოდ, განიხილება ამოცანა, თუ რა მიმართებაშია ერთმანეთთან სტაციონარული ალბათური ზომები და ალბათური ზომის შემნახავი გარდაქმნები. დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა პოლონური სივრცის N -ხარისხზე ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცის თვისებების შესწავლას. კერძოდ, განიხილება ამავე სივრცეში ბაზისის არსებობისა და მისი სიმძლავრის შეფასების ამოცანა. ამ ამოცანების გადასაჭრელად, ნაშრომში შეისწავლება ზომად ინვარიანტულ სივრცეზე განსაზღვრული მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისების მქონე σ -სასრულო ინვარიანტული ზომების სივრცე და ამავე სივრცეში ბაზისის არსებობისა და მისი სიმძლავრის შეფასების ამოცანა. აღნიშნული ამოცანის გადასაჭრელად გამოიყენება ზომის თეორიის ისეთი ცნობილი მეთოდები, როგორცაა კარათეოდორის თეორემა ალგებრიდან ამავე ალგებრით განსაზღვრულ მინიმალურ σ -ალგებრაზე ალბათობის გაგრძელების შესახებ, ხანის თეორემა, რადონ-ნიკოდიმის თეორემა, მეტრიკული ტრანზიტულობის მქონე სრული σ -სასრულო ინვარიანტული ზომების თვისებები და სხვა.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ასევე ერგოდული და არაერგოდული სტაციონარული სტოქასტური პროცესების აგების ამოცანას სხვადასხვა ალბათურ სივრცეებში.

ნაშრომის ერთი ნაწილი ეძღვნება წყვილ-წყვილად ორთოგონალური არაელემენტარული არასეპარაბელური დიფუზიური სტაციონარული პროცესების სიმრავლურ-თეორიული მახასიათებლების შესწავლას. აქ განიხილება ა. სკოროხოდის მიერ 1981 წელს შემოტანილი ალბათურ ზომათა სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალკეებადი, ძლიერად განცალკეებადი, ძალდებული შეფასების მქონე) ოჯახების კლასიფიკაცია. უნდა აღინიშნოს, რომ სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიაში ალბათურ ზომათა სუსტად განცალკეებადი ოჯახიდან შესაბამის ძლიერად განცალკეებად ოჯახზე გადასვლის ამოცანა დღესაც არ კარგავს თავის აქტუალობას. ამ მიმართულებით საინტერესოა 1981 წელს ა. სკოროხოდის მიერ მიღებული შედეგი, რომლის თანახმადაც კონტინუუმ ჰიპოთეზის მართებულობის შემთხვევაში ალბათურ ზომათა

ყოველი სუსტად განცალვადი ოჯახი, რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალვადი. შებრუნებული დებულების მართებულობა დამტკიცდა გ. ფანცულაიას მიერ 1989 წელს. კერძოდ, ნაჩვენები იყო, რომ თუ ალბათურ ზომათა ყოველი სუსტად განცალვადი ოჯახი, რომლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს, არის ძლიერად განცალვადი, მაშინ მართებულია კონტინუუმ ჰიპოთეზა. მარტინის აქსიომის გამოყენებით, ზ.ზერაკიძემ 1984 წელს ნაშრომში დაამტკიცა, რომ პოლონურ სივრცეზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალვადი ოჯახი არის ძლიერად განცალვადი, თუ პარამეტრთა სიმრავლის სიმძლავრე არ აღემატება კონტინუუმს. გ. ფანცულაიას მიერ ეს შედეგი 2003 წელს განზოგადოებულ იქნა ისეთი სრული მეტრიკული სივრცეებისათვის, რომელთა ტოპოლოგიური წონები არ არიან ზომადი ფართე აზრით. სწორედ ამ თემატიკას განეკუთვნება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ მერა-ზომათა თვლადი ხარისხებისათვის (რომლებიც წარმოადგენენ \mathbb{R}^∞ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეზე განსაზღვრულ სტაციონარულ ალბათურ ზომებს) სუსტად განცალვადი ოჯახიდან ძლიერად განცალვად ოჯახზე გადასვლისა და მათთვის ძალდებული შეფასების აგების ამოცანები. მოცემულია ამ ამოცანის გადაჭრის ორი მეთოდი. პირველი მეთოდი არსებითად იყენებს $[0,1]$ ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტექნიკას, ხოლო მეორე კი - დიდ რიცხვთა გაძლიერებულ კანონს.

ნაშრომის გარკვეული ნაწილი ეთმობა სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა ოჯახების აგებას უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდებით. საყოველთაოდ ცნობილია, რომ უსასრულო კომბინატორიკის ზოგიერთი მეთოდი წარმატებით გამოიყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად, ტოპოლოგიასა და ზომის თეორიაში. ამ მეთოდებს შორის განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახის აგების მეთოდი. სიმძლავრის თვალსაზრისით დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის არსებობის ამოცანა პირველად განხილული იყო ტარსკის მიერ. მან დაამტკიცა რომ ეს სიმძლავრე $2^{\text{card}(E)}$ სიმძლავრის ტოლია. ამ შედეგმა ჰპოვა საინტერესო გამოყენება ზოგად ტოპოლოგიაში, რომლის საშუალებითაც დამტკიცდა, რომ უსასრულო ბაზისურ E სივრცეში ულტრაფილტრების კლასის სიმძლავრე $2^{2^{\text{card}(E)}}$ სიმძლავრის ტოლია. ევკლიდეს E_n სივრცის შემთხვევაში, დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდის გამოყენებით, ა. ხარაზიშვილმა 1981 წელს ააგო ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის არაელემენტარულ D_n -ინვარიანტულ წყვილ-წყვილად ორთოგონალურ გაგრძელებათა მაქსიმალური (სიმძლავრის თვალსაზრისით) ოჯახი, სადაც D_n აღნიშნავს E_n სივრცის ყველა

იზომეტრიულ გარდაქმნათა ჯგუფს. განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ შპილრაინ-მარჩევსკი იყო მათემატიკოსი, ვინც ჯერ კიდევ 1946 წელს პირველად გამოიყენა დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად. მოგვიანებით, 1950 წელს იგივე მეთოდი გამოიყენეს კაკუტანიმ, კოდაირამ და ოქსტობიმ ლებეგის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად. დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი გამოყენებულ იქნა ა. ხარაზიშვილის მიერ ევკლიდეს E_n სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის ისეთი არაელემენტარული D_n -ინვარიანტული გაგრძელების ასაგებად, რომელთანაც ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა არის მაქსიმალური, კერძოდ, 2^c კარდინალური რიცხვის ტოლი, სადაც c აღნიშნავს კონტინუუმის სიმძლავრეს. გ. ფანცულაიას მიერ 2003 წელს განზოგადებულ იქნა ტარსკის მიერ შემუშავებული დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მაქსიმალური ოჯახის მეთოდი და წარმატებით გამოყენებულ იქნა არათვლად ლოკალურად კომპაქტურ σ -კომპაქტურ ჯგუფზე განსაზღვრული ჰაარის ზომის სხვადასხვა (ელემენტარული, არაელემენტარული, სეპარაბელური, არასეპარაბელური და სხვა) ინვარიანტული გაგრძელებების ასაგებად. ამით მოხერხდა ლებეგის ზომის ინვარიანტულ გაგრძელებათა თეორიაში ზემოთ აღნიშნული შედეგების განზოგადება. დისერტაციის შემდგომი ნაწილი ეძღვნება სწორედ გ.ფანცულაიას მიერ შემუშავებული დამოუკიდებელ სიმრავლეთა მეთოდის გამოყენებას ამჟამად სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სხვადასხვა ორთოგონალური ოჯახების, კერძოდ ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, G -პროცესების ერთი კლასისათვის სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი, ძალდებული შეფასების მქონე, ელემენტარული, არაელემენტარული) ინვარიანტული გაგრძელებების აგებასა და მათი სიმძლავრეების შესაფასებას.

ასევე შეისწავლება საკითხი, თუ რაოდენ მნიშვნელოვანია ინფორმაციის გადაცემისას სტაციონარული ალბათური ზომების (კერძოდ, "თეთრი ხმაურის") დასაშვები ძვრებით წარმოქმნილი ჯგუფის სტრუქტურის ცოდნა შესაფასებელი პარამეტრისათვის ძალდებული შეფასების ასაგებად.

ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, შეისწავლება სტატისტიკურ დაშვებათა თეორიის მეტად აქტუალური საკითხი- ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ ძვრა ზომათა ბერისა და ბორელის G -ხარისხების ოჯახებისათვის განცალკეადობისა და ძალდებული შეფასების აგების ამოცანა. ამ ამოცანის გადასაჭრელად ნაშრომში გამოყენებულია უნიფორმულად განაწილებულ მიმდევრობათა თეორიის ტექნიკა და დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი.

აღნიშნულ ნაშრომში მიღებულია შემდეგი შედეგები:

- შემუშავებულია მეთოდი პოლონური სივრცის N -ხარისხზე ზოგიერთი სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურის ასაგებად;

- აგებულია ბაზისი პოლონური სივრცის N -ხარისხზე განსაზღვრული ელემენტარულ სტაციონარულ ალბათურ ზომათა სივრცისათვის და დათვლილია მისი სიმძლავრე.
- უსასრულო კომბინატორიკის მეთოდების (დამოუკიდებელ სიმრავლეთა ოჯახები, თითქმის დიზუნქტიური ოჯახები, ფუნქციათა განცალკეადი ოჯახები და ა.შ.) გამოყენებით აგებულია პოლონური სივრცის N -ხარისხებზე განსაზღვრული სტაციონარული ზომების სხვადასხვა (ორთოგონალური, სუსტად განცალკეადი, ძლიერად განცალკეადი, სეპარაბელური, არასეპარაბელური) სტაციონარული გაგრძელებები და დათვლილია მათი სიმძლავრეები;
- ნებისმიერი უსასრულო აბელის G ჯგუფის შემთხვევაში, პოლონური სივრცის G -ხარისხზე განსაზღვრული ბერისა და ბორელის G -პროცესების გარკვეული კლასისათვის აგებულია პარამეტრის ძალდებუ-ლი შეფასება;
- ტიხონოვის ტოპოლოგიით აღჭურვილ ტოპოლოგიურ ვექტორულ \mathbb{R}^∞ სივრცეზე აგებულია ისეთი არაგადაგვარებული σ -სასრულო ბორელის ზომის მაგალითი, რომელიც არის ინვარიანტული ამავე სივრცის ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ და ამავედროულად არ არის ექვივალენტური ნამდვილ რიცხვთა \mathbb{R} ღერძზე განსაზღვრული არცერთი აბსოლუტურად უწყვეტი ალბათური ბორელის μ ზომის \mathbb{N} -ხარისხის.

მადლობას ვუხდით ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს პროფესორებს ზურაბ ზერაკიძესა და გოგი ფანცულაიას მნიშვნელოვანი რჩევებისა და გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის.

კონფერენციებში მონაწილეობა

- [1] Zerakidze Z., Saatashvili G., Construction of stationary statistical structures, The Third International Conference "Problems of Cybernetics and Informatics", dedicated to the world Science Day for Peace and Development", Section #4 "Applied Stochastic Analysis" (PCI'2010 - Published papers), September 6-10, 2010, Baku, Azerbaijan. <http://www.pci2010.science.az/htm/4.htm> უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული - 17.04.2012.
- [2] Zerakidze Z., Pantsulaia G., Saatashvili G., On Separation Problem for the Family of Borel and Baire I -Powers of Shift-Measures on R , XXV Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Inst. Appl. Math., Section of Probability Theory and Mathematical Statistics, 21-23 April, Tbilisi (Georgia), 2011. <http://www.viam.science.tsu.ge/enlrg.htm> უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული - 17.04.2012.
- [3] Pantsulaia G., Saatashvili G., On a certain example of a non-stationary measure on R^{∞} , Mathematical Conference dedicated to the memory of professor Rezo Absava. Georgian University, February 9-10, 2012.

პუბლიკაციები

- [1] Pantsulaia G., Saatashvili G. On Separation Problem for the Family of N -Power-Shift-Measures in R^{∞} . *Georg. Inter. J. Sci. Tech.*, 2011, 3, 2, 189-195. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=27467 უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული-17.04.2012.
- [2] Saatashvili G. On a structure of elementary stationary Borel probability measures. *Georg. Inter. J. Sci. Tech.*, 2011, 3, 4, in press. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=32804 უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული-17.04.2012.
- [3] Saatashvili G., On set-theoretical characteristics of pairwise orthogonal non-elementary non-separable diffused stationary processes. *Georg. Inter. J. Sci. Tech.*, 2011, 3, 4, in press. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=32804 უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული-17.04.2012.
- [4] Saatashvili G. On orthogonality of Borel shift measures on a Polish group, *Georg. Inter. J. Sci. Tech.*, 2011, 3, 4, in press. https://www.novapublishers.com/catalog/product_info.php?products_id=32804 უკანასკნელად იქნა გადამოწმებული 17.04.2012

SUMMARY

The thesis “On a structure of stationary statistical structures” deals with certain aspects of the general theory of stationary statistical structures.

There are considered such main notions and auxiliary statements from the set theory, measure theory, probability theory, mathematical statistics, mathematical analysis and functional analysis, which are applied essentially in these investigations. Main properties of such structures from the point of view of ergodic theory (i.e., the theory of quasiinvariant and invariant measures) are studied. In particular, here is studied a relation between stationary probability measures and measure preserving transformations.

First part of the present thesis is devoted to study properties of elementary stationary probability measures defined on N -powers of Polish spaces. In particular, a space of all invariant sigma-finite measures with a metrically transitivity property, a problem of the existence of a basis and of the estimation its cardinality are under considerations in this thesis. In order to solve these problems, there are used such well known methods of measure theory that are Charatheodory theorem about extending of a probability measure from an algebra to the minimal σ -algebra generated by the same algebra, Khan theorem, Radon-Nikodim theorem, properties of σ -finite invariant measures with metrically transitivity properties and so on. A problem of a construction of ergodic and nonergodic stationary stochastic processes in various probability spaces is considered in that thesis.

Second part of the thesis is devoted to study of set-theoretical characteristics of mutually orthogonal diffused stationary processes. Here is considered a classification of various (orthogonal, weakly orthogonal, strictly orthogonal, having consistent estimate) families of probability measures introduced by A.Skorokhod in 1981. It can be mentioned especially that a problem of a transition from the weakly separated family to the strictly separated one does not lost his actuality. In this direction a result of A.Skorokhod obtained in 1981 is of some interest. His result asserted that under CH (Continuum Hypothesis) each weakly separated family of probability measures is strictly separated if its cardinality is equal or less than the cardinality of continuum. The validity of the converse result has been established by G. Pantsulaia in 1989. In particular, it has been shown that if each weakly separated family of probability measures, whose cardinality is equal or less than the cardinality of continuum, is strictly separated then CH holds. In 1984, by MA (Martin Axiom), Z.Zerakidze proved that each weakly separated family of Borel probability measures on a Polish space with cardinality equal or less than the cardinality of continuum, is strictly separated. In 2003, this result has been extended by G.Pantsulaia for complete metric spaces whose topological weights are not measurable in the wide sense.

Problems of a transition from a weakly separated family to a strictly separated and of a construction of a consistent estimator for the family of countable powers of shift measures defined on the real axis (which are stationary measures defined on the topological vector space \mathbb{R}^∞) are directly connected with topics of the theory of statistical decisions described above. Here are presented two approaches to solve these problems. The first of them applies the methods of the theory of uniformly distributed sequences on $[0,1]$. The second of them uses TSLLN(The strong law of large numbers).

Another part of the thesis is devoted to construct of various families of stationary probability measures by methods of infinite combinatorics. It is well known that methods of infinite combinatorics have lately been successfully used in different areas of mathematics, for example, in topology and measure theory. Among them, special mention should be made of the method of constructing a maximal (in the sense of cardinality) family of independent families of sets in arbitrary infinite base spaces. The question of the existence of a maximal (in the sense of cardinality) independent family of subsets was considered by A.Tarski. He proved that this cardinality is equal to $2^{card(E)}$. This result found an interesting application in general topology by means of which it was proved that in an arbitrary infinite space E the cardinality of the class of all ultrafilters is equal to $2^{2^{card(E)}}$. Using the method of an independent family of sets in the case of the Euclidean space E_n , in 1981 A.B. Kharazishvili constructed a maximal (in the sense of cardinality) family of orthogonal elementary D_n -invariant extensions of the Lebesgue measure l_n , where D_n denotes a group of all isometric transformations of the Euclidean space E_n . It can be noted especially that E. Szpilrajn (E. Marczewski) was the mathematician who in 1946 firstly has used the method of an independent family of sets to construct nonseparable extensions of the Lebesgue measure. Later, in 1950 S. Kakutani, K. Kodaira and J. Oxtoby have used the same method to construct nonseparable invariant extensions of the Lebesgue measure.

The method of an independent family of sets has been used to construct an example of a nonelementary D_n -invariant extension of the Lebesgue measure l_n such that the topological weight of the metric space associated with such a measure is maximal; In 2003, the method of an independent family of sets due to A.Tarski, has been generalized and successfully used to construct various (orthogonal, weakly separated, strictly separated, with consistent estimators, elementary, nonelementary) families of invariant extensions of the Haar measure defined on an arbitrary uncountable locally-compact σ -compact topological group. Thus, some results of the theory of invariant extensions of the Lebesgue measure have been generalized. The further part of the thesis is devoted to applications of the method of independent families of sets elaborated by G.Pantsulaia in order to construct and to estimate

cardinalities of various orthogonal families of stationary probability measures, in particular, of various (orthogonal, weakly separated, strictly separated, with consistent estimators, elementary, nonelementary) extensions of so called G -processes for an arbitrary infinite additive group G .

A question from the mathematical theory of information transmission *asking whether is important to know a structure of the group of all admissible translations of a stationary probability measure (for example, of the “White Noise”) for a construction of the consistent estimator* is discussed in this thesis.

For an arbitrary infinite additive group G . Here is studied the following problems of the theory of statistical decisions - a separation problem and a construction of the consistent estimate for Baire and Borel G -processes defined on the G -power of a Polish space. In order to solve these problems, methods of the theory of uniformly distributed sequences and the strong law of large numbers are applied.

The following results are obtained in the present thesis:

1. It is elaborated the method for a construction of some stationary statistical structures on the \mathbb{N} -power of a Polish space;
2. It is constructed a basis of the space of all elementary stationary probability measures defined on the \mathbb{N} -power of a Polish space and its cardinality is calculated;
3. By using methods of infinite combinatorics (independent families of sets, almost disjoint families of sets, separating families of functions, etc.) it is constructed various invariant non-separable extensions of stationary measures defined on \mathbb{N} -powers of locally compact σ -compact Polish groups;
4. In the case of an arbitrary infinite additive group G , consistent estimators are constructed for a certain class of Baire and Borel G -processes defined on the G -power of a Polish space.
5. In the topological vector space \mathbb{R}^∞ equipped with Tychonoff topology, an example of a non-trivial σ -finite Borel measure is constructed with everywhere dense (in \mathbb{R}^∞) group of admissible translations (in the sense of invariance) such that this measure is not equivalent to any \mathbb{N} -power of absolutely continuous Borel probability measure defined on the real axis \mathbb{R} .