

ვახტანგ როდონია

სივრცითი ბრუნვების დინამიკის კომპიუტერული მოდელირების ახალი  
მეთოდების შემუშავება

წარმოდგენილია სადოქტორო აკადემიური ხარისხის  
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
თბილისი, 0175, საქართველო  
ივნისი, 2012

საავტორო უფლება © 2010 გვარი, სახელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით როდონაია ვახტანგის მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით:

სივრცითი ბრუნვების დინამიკის კომპიუტერული მოდელირების ახალი მეთოდების შემუშავება და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მართვის სისტემების ფაკულტეტის საგამოცდო კომისიაში მის განხილვას სადოქტორო აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
სრული პროფესორი,  
ალექსანდრე მილნიკოვი

რეცენზენტი: 1. ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
სრული პროფესორი  
ზურაბ გასიტაშვილი;  
2. ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,  
სრული პროფესორი  
დავით გორგიძე

ხარისხის უზრუნველყოფის  
სამსახურის უფროსი: აკადემიური დოქტორი, სრული  
პროფესორი  
ზურაბ ბაიაშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2012

ავტორი: ვახტანგ როდონაია

დასახელება: სივრცითი ბრუნვების დინამიკის კომპიუტერული მოდელირების  
ახალი მეთოდების შემუშავება

ფაკულტეტი : ”ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების”

ხარისხი: სადოქტორო

სხდომა ჩატარდა: 27.06.2010

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების ნაშრომის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

---

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

სადისერტაციო ნაშრომს სიყვარულით და პატივისცემით ვუძღვნი  
საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს და ჩემს ოჯახს

# რეზიუმე

## ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

სადისერტაციო ნაშრომში კვლევის ობიექტს წარმოადგენს სხვადასხვა ტექნიკური ობიექტების მოძრაობა, როგორცაა საფრენი აპარატები, დამიზნების სისტემები, იერარქიული სისტემები. სამუშაოს მიზანს წარმოადგენს მათემატიკური მოდელების და მათ საფუძველზე პროგრამული კომპლექსის დამუშავება აღნიშნული სისტემების მოძრაობის კომპიუტერული მოდელირების ჩასატარებლად. კომპიუტერული და მათემატიკური მოდელირება არის მადალეფექტური და შედარებით იაფი მეთოდი რთული ტექნიკური სისტემების კვლევისას. განსაკუთრებულ მნიშვნელობას მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება იძენს ისეთი რთული ტექნიკური სისტემების, რომელთათვისაც ბუნებრივი კვლევის ჩატარება არის შრომატევადი და ძვირადღირებული პროცედურა. ტექნიკური ობიექტების მოძრაობის მოდელირების შედეგები გამოიყენება ტექნიკური გადაწყვეტების ოპტიმალობის შესაფასებლად, ახალი ნიმუშების პროექტირებისას, ძველის მოდიფიცირებისას ან არასტანდარტული სიტუაციების გამოკვლევისას. რიგ შემთხვევებში, მაგალითად ესკიზური პროექტირების ეტაპზე ან უნიკალური ტექნიკური ობიექტის კვლევის დროს, მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება არის ერთადერთი საშუალება რთული ტექნიკური სისტემის გამოკვლევისათვის.

ტექნიკური ობიექტების დინამიური თვისებების გამოკვლევა წარმოადგენს აუცილებელს და ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან ეტაპს ტექნიკური სისტემების კვლევისა და პროექტირებისათვის. დინამიური ანალიზის სირთულე მდგომარეობს ზუსტი ანალიტიკური კვლევის შეუძლებლობაში მარტივი სისტემებისათვის კი, რადგანაც დინამიკა, როგორც წესი აღიწერება დიფერენციალური ან დიფერენციალურ-ალგებრული განტოლებების სისტემებით, ზოგად შემთხვევაში არა წრფივი, რომელთა ამოხსნა მკაფიო სახით შეუძლებელია. მეორე მხრივ, თავისუფლების დიდი ხარისხის მქონე მოძრაობის სისტემების განტოლებების შედგენა შეიძლება აღმოჩნდეს არამარტივი პროცედურა. ეს დაკავშირებულია სირთულის ზრდით კინემატიკური სიდიდეებისათვის, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემაში შემავალი ელემენტების მდგომარეობას, სიჩქარეს და აჩქარებას. ამ ტიპის მოდელების კომპიუტერულ I რეალიზაცია იქცევა რთულ პრობლემად, რომელიც მოითხოვს ახალი მიდგომებისა და მეთოდების შემუშავებას.

## თემის აქტუალობა

როგორც ცნობილია, მოძრაობის მართვის ამოცანები წარმოადგენენ ერთ-ერთ ყველაზე რთულს, აქტუალურს და ამავე დროს გავრცელებულ მიმართულებას მეცნიერებასა და ტექნიკაში. აქ საკმარისია აღინიშნოს ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია მფრინავი აპარატებისა ან რობოტო-ტექნიკურური მოწყობილობების მუშა ორგანოების სივრცობრივი მოძრაობების მართვასთან. აღნიშნული ამოცანები ბოლო დროს ფართე გამოყენებას პოულობენ აგრეთვე შესაბამისი პროცესების კომპიუტერულ მოდელირებაშიც და ანიმაციურ გრაფიკაში, რაც ძალზე აქტუალურია პროექტირების ავტომატიზირებული სისტემებში. ამგვარი სახის ამოცანებში განსაკუთრებული ადგილი უკავია ბრუნვითი მოძრაობების მართვის საკითხებს, რომლებსაც ტექნოლოგიური თვალსაზრისით გააჩნია ძალზე მნიშვნელოვანი როლი, ვინაიდან ამგვარი მოწყობილობების მუშა ორგანოების მოძრაობა უმეტესად სწორედ ბრუნვით ხასიათს ატარებს. სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის ამოცანებში ძირითად სირთულეს წარმოადგენს ამ ამოცანების მაღალი განზომილება, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ჩნდება 9 პარამეტრის (ადგილმდებარეობა, სიჩქარე და აჩქარება) ერთდროულად მართვის აუცილებლობა. ეს განსაძღვრავს იმ ფაქტს, რომ დღეისათვის არსებული სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის მეთოდები და მათ ბაზაზე აგებული მართვის სისტემები გამოირჩევიან სირთულით, არამდგრადობით (არაადაპტურობით) და მაღალი ღირებულებით, რაც თავის მხრივ ამცირებს შესაბამისი სისტემების და მოწყობილობების ტექნოლოგიურ ეფექტურობას.

დღეისათვის რთული სისტემების სივრცითი გადაადგილების ერთ-ერთი, რომ არა ვთქვათ ერთად-ერთი, მართვის მეთოდი შესაძლებელია მოკლედ აღვწეროდ შემდეგნაირად. დაუშვათ, რომ ობიექტი გადაყვანილ უნდა იქნას მოცემული საწყისი მდებარეობიდან, რომელიც განისაზღვრება როგორც სამ განზომილებიანი სივრცის წერტილი, ამავე სივრცის სხვა წერტილში. ამგვარი ამოცანის ამოხსნა ითხოვს ეილერის კუთხეების გამოთვლას, რომლებიც უზრუნველყოფენ საჭირო სივრცობრივ მოძრაობას. ეს ითხოვს საწყისი ამოცანის განსხვავებულ ფორმულირებას ბრუნვათა კუთხეების ტერმინებში, ესე იგი საწყისი სივრცობრივი მოძრაობას წარმოადგენენ როგორც სამი საკოორდინატო ღერძების ირგვლივ ბრუნვების სუპერპოზიციას. უკანასკნელს მივყევართ სამი  $3 \times 3$  ბრუნვათა მატრიცებისაკენ, რომლებიც შეიცავენ  $2 \times 2$  ორგანზომილიან ბრუნვათა ქვემატრიცებს. ამ მატრიცების ნამრავლი წარმოადგენს იმ მატრიცას, რომელიც უზრუნველყოფს ბრუნვას საწყისიდან საბოლოო წერტილამდე, და რომლის საფუძველზე გამოითვლება ეილერის კუთხეები. აღწერილი მეთოდი ხასიათდება შემდეგი ნაკლოვანებებით:

1. ის ითხოვს დეკარტა კოორდინატებში განსაზღვრულ ტექნოლოგიური ამოცანის შეცვლას საკოორდინატო დერეჟის ირგვლივ სამი ბრუნვითა ამოცანით, რაც ცხადია არის ძალზე მოუხერხებელი და რაც ითხოვს დროის დამატებით ხარჯვას;

2. მარეზულტირებელი მატრიცა, რომელიც წარმოადგენს სამი მატრიცის ნამრავლს, შეიძლება აღმოჩნდეს ცუდად განპირობებული, რაც იწვევს ეილერის კუთხეების გამოთვლისას ცდომილებების ზრდას;

3. ერთი მართვის ამოცანის მაგივრად წარმოიშვება სამი, რაც, ცხადია ართულებს ტექნიკური მოწყობილობის პროგრამირებას და მართვის აპარატურას.

აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ ლიტერატურაში მეთოდები, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მოვახდინოთ ბრუნვა, მოცემულია მხოლოდ იმ შემთხვევისთვის, როდესაც ეილერის კუთხეები უკვე განსაზღვრულია. მაგრამ არ არსებობს ეილერის კუთხეების გამოთვლის მეთოდი, თუ ზოგადად მოცემულია კუთხე  $\theta$ , რომელზედაც უნდა შებრუნდეს ვექტორი. ეს კი საკმაოდ ვრცლად გავრცელებული ამოცანაა ტექნიკაში და კომპიუტერულ გრაფიკაში. სასურველი იქნებოდა დამუშავდეს მეთოდი, რომელიც მოგვცემდა საშუალებას გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია მხოლოდ ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად.

კიდევ ერთს ძალზე მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს ის რომ, ხშირ შემთხვევაში, ბრუნვითი მოძრაობის მართვის ტექნოლოგიური ამოცანის წარმატებული ამოხსნისათვის საჭიროა მოძრაობის საბოლოო ეტაპზე ზუსტი პოზიციონირება და, აქედან გამომდინარე, მართვა ამ ეტაპზე (ტერმინალური მართვა) ხდება განსაკუთრებით აქტუალური. ამგვარი ამოცანების ეფექტური ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს გავაუმჯობესოთ ტექნოლოგიური პროცესების ხარისხი, რადგან ამგვარი პროცესების ხარისხი მრავალ ასპექტში დამოკიდებულია ბრუნვითი მოძრაობების სისტემების ელემენტების ტერმინალური პოზიციონირების სიზუსტეზე.

მეთოდების უმრავლესობა, რომლებიც გამოიყენება ზემოდ მოხსენიებული ამოცანისთვის, არის პროგრამული მართვის ოპტიმალური მეთოდები (განთული მეთოდები უკუ კავშირის გარეშე). ასეთებს განეკუთვნება მაქსიმუმის პრინციპი, დინამიკური პროგრამირების მეთოდი, მომენტების მეთოდი და სხვა. როგორც აღინიშნა, ყველა ჩამოთვლილი მეთოდი პროგრამულია, ანუ ითხოვს მართვის

კანონის  $u(t)$  წინასწარ გამოთვლას და არ იძლევა მოძრაობის პროცესში მისი კორექტირების საშუალებას. ამავდროულად პრაქტიკა ითხოვს ავტომატური რეგულირების სისტემების (არს) აგებას, რომლებიც უკუკავშირის პრინციპს იყენებს, რაც მოძრაობის პროცესში მოძრაობის ტრაექტორიის კორექტირების საშუალებას იძლევა.

ყოველივე ზემოდ ნათქვამი განსაზღვრავს წარმოდგენილი ნაშრომის სამეცნიერო და პრაქტიკულ აქტუალობას.

## **კვლევის მიზნები**

ნაშრომში განისაზღვრა კვლევის შემდეგი ამოცანები და მიზნები:

- ტრადიციულის მეთოდების ნაცვლად შემუშავდეს ახალი მეთოდი დაფუძნებული ინოვაციურ მათემატიკურ მეთოდზე, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ ეილერის კუთხეები, როგორც საწყისი და საბოლოო წერტილების კოორდინატების ფუნქციები.
- დასამუშავებელმა მეთოდმა საშუალება უნდა მოგვცეს გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია მხოლოდ ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად.
- დამუშავდეს სივრცითი ბრუნვების საბოლოო (ტერმინალური) მდგომარეობების მართვის მარტივი ადაპტიური ალგორითმები

**კვლევის მეთოდები.** სამუშაოში გამოყენებულია ბრუნვების ჯგუფების წარმოდგენის თეორიის ელემენტები, სპინორების თეორიის მეთოდები, მოძრაობისა მართვის ვარიაციული მეთოდები, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მეთოდები, MatCad-ზე პროგრამირების მეთოდები.

**სამეცნიერო სიახლე.** ნაშრომის სამეცნიერო სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

1. სივრცითი მოძრაობების მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა იქნა დაყვანილი ერთგანზომილებიანზე



2. ბრუნვების აღსაწერად პირველად გამოყენებულია მათი სპინორული წარმოდგენა. მიღებულია მარტივი გამოსახულებები მმართველი ორთოგონალური მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად ბრუნვის ცენტრის, საწყისისა და საბოლოო წერტილების კოორდინატების მიხედვით;
3. მიღებულია მმართველი ეილერის კუთხეების გამოსათვლელი მარტივი საინჟინრო ფორმულები;
4. შემუშავებულია ტერმინალური მართვის ზოგადი ვარიაციული პრინციპის დასაბუთება
5. შემუშავებულია სივრცითი ბრუნვების მოძრაობის მართვის ტერმინალური ამოცანების გადაწყვეტის ზოგადი ვარიაციული მეთოდი;
6. შემუშავებულია მარტივი ადაპტიური ალგორითმები ტერმინალური მართვის სხვადასხვა კერძო ამოცანების (გაქანების, დაყვანის და დაახლოების) გადასაწყვეტად
7. შემუშავებულია ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა Matcad სისტემის გამოყენებით

**ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა** მდგომარეობს იმაში, რომ დამუშავებული ალგორითმები შეიძლება წარმატებით გამოყენებულიყოს სხვადასხვა ტექნიკური სისტემების (მფრინავი ობიექტები, დამიზნების სისტემები, რობოტოტექნიკა, კომპიუტერული გრაფიკა და ანიმაცია, ავტომატიზაციისა და პროექტირების სისტემები (CAD) დამუშავებისას პრაქტიკული ტექნოლოგიური ამოცანების გადასაწყვეტად, რაც გააუმჯობესებს მათი საბოლოო პოზიციონირებას და ამით მთლიანობაში აამაღლებს ტექნოლოგიურ პროცესების მართვის ხარისხს.

**ნაშრომის აპრობაცია.** ნაშრომის ძირითადი შედეგები განხილული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის და შავი ზღვის საერთაშორისო უნივერსიტეტის სემინარებზე.

**გამოქვეყნებული შრომები.** სამუშაოს თემაზე გამოქვეყნებულია 3 ნაშრომი.

**სამუშაოს სტრუქტურა და მოცულობა.** სამუშაო მოიცავს 145 გვერდს, შეიცავს 3 თავს, ლიტერატურის ჩამონათვალს, დანართს, 3 ცხრილს და 19 ნახაზს.

# Abstract

## General Information on the Thesis

The research subject of the thesis is the movement of the various engineering objects, such as aircrafts, guidance control systems, hierarchical systems, etc. The aim of the work is the development of mathematical models and program system based on them to execute computer modeling of the above systems' movement. The computer modeling is a highly effective and relative cheap method to investigate complex engineering systems. Mathematical and computer modeling has special significance when researching such complex engineering systems for which execution of natural experiments is labour-intensive or expensive. Results of modeling of complex engineering systems' movement are used to evaluate optimality of technical solutions when designing new product samples, modifying old ones or investigating non-standard situations. In a number of cases, for example, at the stage of draft design or when we deal with unique engineering object, mathematical and computer modeling is an only way to investigate complex engineering systems.

Investigation of dynamic properties of complex engineering objects is an indispensable and very important stage of complex engineering systems' research and development. Complexity of dynamical analysis consists in impossibility of exact analytical research of even simple systems, because dynamics, as a rule, is described by differential or algebraic-differential systems (generally, non-linear ones). It is impossible to solve such systems in an explicit form. On the other hand, construction of movement equations with high degree of freedom can turn out to be not simple procedure. This is closely related to growth of complexity for kinematic values that determine position, velocity and acceleration of bodies which are parts of the system.

Implementation of computer models of such types becomes a rather complex problem that requires development of new approaches and methods.

## Topicality of the Research

Problems of control of spatial motions in general and, in particular, of rotational motions belong to the most topical directions in the complex of high technologies which demand a lot of scientific research. It is enough to mention problems of control of aircraft flight control or robot arm tools' spatial motion. Today the above problems are widely adopted also to computer modeling of relevant processes and computer graphics that is of large importance for development of CAD systems. In such kind of problems the issues of rotation motion control have particular significance since motion of operative parts are predominantly described exactly in terms of rotations. The main difficulty in problems of spatial rotation motion control is the high dimension of such problems since in this case appears a need to control 9 parameters (position, velocity, acceleration). This determines the fact that currently existing methods of rotation motion control and control systems based on these methods are characterized by complexity, instability (non-adaptability) and high price that, on its turn, reduces technological effectiveness of relevant systems and devices.

To date one of few, not to say the least, unique method of spatial motion of complex systems can be shortly described as follows: assume that an object has to be moved from an initial position (that is determined as a spatial point in three dimension) to another point in the same space. Solution of such a problem requires computation of Euler angles that provide a needed spatial motion. This requires different formulation of the initial problems in terms of rotation angles. That is, the initial spatial motion is represented as a superposition of rotations around 3 axis. The latter leads us to three 3x3 rotation matrices that contain two 2x2 two-dimensional sub-matrices. The product of these matrices represents the matrix that provides rotation from the initial position to final one and on the basis of which Euler angles are computed. This method has the following disadvantages:

1. the method requires replacing the technological problem defined in Cartesian coordinates by the problem of three rotations around three axis; obviously, this is an extremely awkward and causes waste of time
2. the resulting matrix that represents product of three matrices can be poorly determined and this causes growth of error in computation of Euler angles
3. instead of one control problem three problems arise that, obviously, complicates programming of technical devices and control equipment.

It is significant that all the literature explains how to rotate in case when Euler angles are given. There is no clear explanation for calculating the Euler angles. The latter is very important problem in engineering, computer graphics and simulation. It would be desirable to develop a method that

would allow us to calculate Euler angles even in case when *only* general rotation angle between initial and final positions of rigid body is given

Another very important problem is that, in a majority of cases, for a successful solution of technological problems of rotational motion control it is necessary to provide an exact positioning in the terminal stage of motion and thus the control of terminal states (terminal control) becomes of special topical interest. An effective solution of such problems will enable us to improve the quality of technological processes, since the quality of these processes depends in many respects on the accuracy of the terminal positioning of the rotation motion systems' elements

Most of the methods used to solve these problems are optimal methods of programmed control (disconnected methods without feedback). They include the maximum principle, the dynamic programming method, the momentum method and others.

As has been noted, all the listed methods are the programming ones, i.e. requiring the preliminary calculation of the control law  $u(t)$  and not making it possible to correct this law during motion. However practice requires the construction of automatic control systems (ACS) employing the feedback principle, since such systems make it possible to correct the motion trajectory in the course of the process.

All the above-said determines scientific and practical topicality of the submitted thesis.

## **Objectives of the Research**

The following objectives are defined:

1. Instead of conventional methods a new method based on the new innovation mathematical method and which will allow Euler angles as a function of initial and final positions' coordinates to be obtained will be developed
2. The method to be developed has to allow Euler angles to be computed even in case when only general rotation angle between initial and final positions is defined
3. Simple adaptive algorithms to control terminal positions of spatial rotations will be developed

## **Research methods**

The following methods are used in the thesis: elements of the theory of representation of rotation groups, spinor theory methods, variational methods of motion control, methods of ordinary differential equations, methods of programming in MatCad.

**Scientific Novelty** of the present research consists in the following:

1. The obtained results have enabled the actual three-dimensional problem of spatial motion control to be reduced to the one-dimensional one
2. To describe rotations the spinor representation of them has been used for the first time. Simple expressions to compute elements of control orthogonal matrices in respect to coordinates of the rotation's center, initial and final points have been obtained
3. Simple formulas to compute Euler angles to be controlled have been obtained;
4. Validation of the general variational principle for terminal control has been developed
5. The general variational method to solve terminal problems of spatial rotation motion control has been developed
6. Simple adaptive algorithms for terminal control of various particular problems (acceleration, bringing, approach) have been developed;
7. Software package (in Matcad) to implement the adaptive algorithms obtained has been developed

**The Practical Importance** of the work consists in that the developed algorithms can be successfully used to solve practical technological problems when designing and developing various engineering systems (aircrafts, guidance systems, robotics, computer graphics and animation, computer design systems (CAD)), which will improve processes of terminal positioning and, in the end, overall processes control quality.

**Presentations of the research.**

The main results of the thesis were presented at two scientific seminars at the Georgian Technical University and at one scientific seminar at the Black Sea International University.

**Publications.** 3 articles on the present work were published.

**Structure of the thesis.** The thesis consists of 145 pages, comprises 3 chapters, References, 1 Appendix, 3 Tables and 19 Figures

## შინაარსი

შესავალი;

თავი პირველი. საკითხის განსაზღვრა და კვლევის მიზანი;

- 1.1. ზოგადი განსაზღვრებები;
- 1.2. შემოზღუდვის მატრიცები;
  - 1.2.1. ნებისმიერი ღერძის ირგვლივ შემოზღუდვის მატრიცა;
  - 1.2.2. შემოზღუდვის მატრიცების წარმოდგენა ეილერის კუთხეების საშუალებით;
- 1.3. კინემატიკის შეზღუდული ამოცანა;
  - 1.3.1. შეზღუდული გარდაქმნის მეთოდი;
- 1.4. რობოტ-მანიპულატორების მოძრაობის მართვის მეთოდების მიმოხილვა;
  - 1.4.1. ოპტიმალური(პროგრამული) მართვის თეორიის მეთოდები;
  - 1.4.2. ტერმინალური მართვის ამოცანები;
- 1.5. დასკვნა და კვლევის მიზნები;
  - 1.5.1. დასკვნები;
  - 1.5.2. კვლევის მიზნები ;

თავი მეორე. განზოგადებული ბრუნვების თეორიული საფუძვლების შემუშავება;

- 2.1. ძირითადი ცნობები სივრცულ ბრუნვათა წარმოდგენის თეორიიდან;
- 2.2. ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდური სივრცის სპინორული მოდელი ;
- 2.3. სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის სპინორული მოდელი;
- 2.4. განზოგადებული ბრუნვების თეორია და ეილერის კუთხეების გამოთვლა;
- 2.5. ეილერის კუთხეების გამოსახველი გამოსახულების მიღება;



2.5.1. უნიტარული და ორთოგონალური მატრიცების დამაკავშირებელი განტოლებები;

2.5.2. საკუთარი ორთოგონალური მატრიცის განსაზღვრა;

2.6. ეილერის კუთხეების განსაზღვრა;

2.6.1. რიცხობრივი მაგალითი;

2.7. მრავალრგოლიანი სივრცული მექანიზმების კინემატიკის უკუ ამოცანის გადაწყვეტა;

2.8. კინემატური ანალიზი;

2.8.1. კინემატიკური გამოსახულებები ეილერის კუთხეებისთვის;

2.8.2. რიცხობრივი მაგალითი;

თავი მესამე. მოძრავი მექანიკური ობიექტების ტერმინალური მდგომარეობების მართვის მეთოდის შემუშავება და სინთეზი;

3.1. ტერმინალური მართვის ამოცანა და მმართველი ფუნქციის სინთეზი;

3.2. დაყვანის ამოცანა;

3.2.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი;

3.2.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი დაყვანის ამოცანაში;

3.3. საწყისი აჩქარების (გაქანების) ამოცანა;

3.3.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი;

3.3.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი გაქანების ამოცანაში;

3.4. მიახლოების ამოცანა;

3.4.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი;

3.4.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი მიახლოების ამოცანაში;

3.4.3. მიახლოების ამოცანა დამატებითი პირობით საბოლოო აჩქარებაზე;

3.4.3.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი;

3.4.3.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი მიახლოების

ამოცანაში დამატებითი პირობით საბოლოო აჩქარებაზე;

3.5. თექნიკური სისტემების ელემენტების სივრცული

ბრუნების საბოლოო მდგომარეობათა მართვა;

3.5.1. მართვა მოძრაობის საწყის უბანზე;

3.5.2. მართვა თანაბარი ბრუნვის უბანზე;

3.5.3. დამუხრუჭება;

შედეგები;

გამოყენებული ლიტერატურე;

დამატება. ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა.

## ნახაზების ნუსხა

ნახაზი 1. აბსოლუტური და დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ განვსაზღვროთ განზომილებით

ნახაზი 2. კოორდინატთა მბრუნავი სისტემა

ნახაზი 3. ნებისმიერი ღერძის ირგვლივ ბრუნვა

ნახაზი 4. ეილერის კუთხეების პირველი სისტემა

ნახაზი 5. ეილერის კუთხეების მეორე სისტემა

ნახაზი 6.  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  – ეილერის კუთხეები

ნახაზი 7. ხუთრგოლიანი მანიპულატორის პრინციპული სქემა.

ნახაზი 8. სივრცული ბრუნვის საწყისი, ბოლო და შუალედური

ვექტორები.

ნახაზი 9. დაყვანის ამოცანის ავტომატური მართვის სისტემის ბლოკ-სქემა.

ნახაზი 10. საწყისი აჩქარების პროცესის მართვის ბლოკ-სქემა.

ნახაზი 11. მიახლოების ამოცანის ბლოკ-სქემა.

ნახაზი 12. მოძრაობის საწყისი უბანი: ბრუნვის სიდიდის

დამოკიდებულება დროზე

ნახაზი 13. მოძრაობის საწყისი უბანი: კუთხური სიჩქარის

დამოკიდებულება დროზე

ნახაზი 14. მოძრაობის საწყისი უბანი

ნახაზი 15. თანაბარი ბრუნვის უბანი: ბრუნვის კუთხის

დამოკიდებულებები დროზე

ნახაზი 16. თანაბარი ბრუნვის უბანი: კუთხური სიჩქარის

დამოკიდებულებები დროზე

ნახაზი 17. თანაბარი ბრუნვის უბანი

ნახაზი 18. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა)

ბრუნვის კუთხის მნიშვნელობის დამოკიდებულებები დროზე)

ნახაზი 19. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა)

(კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულებები დროზე)

### ცხრილების ნუსხა

ცხრილი 1. ეილერის კუთხეების სამი სისტემა

ცხრილი 2. მბრუნავი ვექტორის კოორდინატები  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ .

ცხრილი 3. მბრუნავი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორის კოორდინატთა გამოთვლა

## მადლიერება

უპირველეს ყოვლისა მადლობას ვუხდით ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელს, პროფესორ, ბატონ ალექსანდრე მილნიკოვს, რომლის უაღრესად კვალიფიციური ხელმძღვანელობის და ღრმა მეცნიერული მითითებების გარეშე ეს ნაშრომი ვერ დასრულდებოდა. ის გვერდში მედგა როგორც პროფესიული, ასევე მორალური თვალსაზრისით.

მადლობას ვუხდით საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს, ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტს, მის დეკანს პროფ. ზ. წვერაიძეს, კომპიუტერული სისტემების და ქსელების დეპარტამენტის გამგეს, პროფესორს ვ. კამკამიძეს, საბჭოს სწავლულ მდივანს, პროფ. თ. კაიშაურს.

## შესავალი

მოდრაობის მართვის ამოცანები წარმოადგენენ ერთ-ერთ ყველაზე რთულს, აქტუალურს და ამავე დროს გავრცელებულ მიმართულებას მეცნიერებასა და ტექნიკაში. ისინი იკავებენ უმთავრეს ადგილს მეცნიერულად ტევად ტექნოლოგიებში როგორც სამხედრო, ასევე სამოქალაქო წარმოებაში. აქ საკმარისია აღინიშნოს ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია მფრინავი აპარატებისა ან რობოტო-ტექნიკურული მოწყობილობების მუშა ორგანოების სივრცობრივი მოძრაობების მართვასთან. აღნიშნული ამოცანები ბოლო დროს აგრეთვე იძენენ აქტუალობას შესაბამისი პროცესების კომპიუტერულ მოდელირებაშიც და ამგვარი პროცესების ანიმაციურ გრაფიკაში, რაც ძალზე აქტუალურია პროექტირების ავტომატიზირებული სისტემებში. ამგვარი სახის ამოცანებში განსაკუთრებული ადგილი უკავია ბრუნვითი მოძრაობების მართვის საკითხებს, რომლებსაც ტექნოლოგიური თვალსაზრისით გააჩნია ძალზე მნიშვნელოვანი როლი, ვინაიდან ამგვარი მოწყობილობების მუშა ორგანოების მოძრაობა უმეტესად სწორედ ბრუნვით ხასიათს ატარებს. სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის ამოცანებში ძირითად სირთულეს წარმოადგენს ამ ამოცანების მაღალი განზომილება, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ჩნდება 9 პარამეტრის (ადგილმდებარეობა, სიჩქარე და აჩქარება) ერთდროულად მართვის აუცილებლობა. ეს განსაძღვრას იმ ფაქტს, რომ დღეისათვის არსებული სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის მეთოდები და მათ ბაზაზე აგებული მართვის სისტემები გამოირჩევიან სირთულით, არამდგრადობით (არაადაპტურობით) და მაღალი ღირებულებით, რაც თავის მხრივ ამცირებს შესაბამისი მოწყობილობების ტექნოლოგიურ ეფექტურობას.

კიდევ ერთს ძალზე მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს ის რომ, ხშირ შემთხვევაში, ბრუნვითი მოძრაობის მართვის ტექნოლოგიური ამოცანის წარმატებული ამოხსნისათვის საჭიროა მოძრაობის საბოლოო ეტაპზე ზუსტი პოზიციონირება და, აქედან გამომდინარე, მართვა ამ ეტაპებზე (ტერმინალური მართვა) ხდება განსაკუთრებით აქტუალური. ამგვარი ამოცანების ეფექტური ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს გავაუმჯობესოთ ტექნოლოგიური პროცესების ხარისხი, რადგან ამგვარი პროცესების ხარისხი მრავალ ასპექტში დამოკიდებულია ბრუნვითი

მომრაობების სისტემების ელემენტების ტერმინალური პოზიციონირების სიზუსტეზე.

ყოველივე ზემოდ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ძალზე აქტუალურია ისეთი ახალი ალგორითმების დამუშავება, რომლებიც შეიძლება წარმატებით იქნას გამოიყენებული სხვადასხვა ტექნიკური სისტემების (მფრინავი ობიექტები, დამიზნების სისტემები, რობოტოტექნიკა, კომპიუტერული გრაფიკა და ანიმაცია, ავტომატიზაციისა და პროექტირების სისტემები (CAD) დამუშავებისას პრაქტიკული ტექნოლოგიური ამოცანების გადასაწყვეტად.

## **თავი პირველი.**

### **საკითხის განსაზღვრა და კვლევის მიზანი.**

ამ თავში განსაზღვრული იქნება ის უმთავრესი ცნებები, რომლებიც გამოიყენება ზოგადად სივრცითი ბრუნვების დინამიკის კომპიუტერული მოდელირებისას [1÷2].

#### **1.1. ზოგადი განსაზღვრებები**

*კომპიუტერული მოდელირება* წარმოადგენს ერთ-ერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდს რთული ფიზიკური და ტექნიკური სისტემების შესწავლაში. ხშირად კომპიუტერული მოდელები არიან უფრო ადვილად შესასწავლი, ისინი იძლევიან საშუალებას ისეთი გამოთვლითი ექსპერიმენტების ჩატარებისა, რომლის რეალური (ფიზიკური) ჩატარება ან საერთოდ შეუძლებელია, ან შეიძლება მოგვცეს ძნელად გასათვლელი შედეგი. კომპიუტერული მოდელების ლოგიკურობა და ფორმალიზაცია საშუალებას იძლევა გამოვავლინოთ შესასწავლი ობიექტების თვისებების განმსაზღვრელი ძირითადი ფაქტორები, გამოვიკვლიოთ ფიზიკური სისტემის რეაქცია მისი პარამეტრების და საწყისი პირობების ცვლილებებზე.

კომპიუტერული მოდელირება თხოულობს აბსტრაგირებას მოვლენების კონკრეტული ბუნებისგან, პირველად ხარისხობრივი, და შემდეგ რიცხობრივი მოდელის აგებას. ამის შემდეგ ხდება კომპიუტერზე

გამოთვლითი ექსპერიმენტების ჩატარების სერია, შედეგების ინტერპრეტაცია, მოდელირების შედეგების შედარება შესასწავლი ობიექტის რეალურ ქცევასთან, მოდელის შემდგომი დაზუსტება და ა.შ.

კომპიუტერული მოდელირების ძირითადი ეტაპებს წარმოადგენენ:

- ამოცანის დაყენება,
- მოდელირების ობიექტის განსაზღვრა,
- კონცეპტუალური მოდელის დამუშავება
- სისტემის ძირითადი ელემენტების და ურთიერთქმედების

ელემენტარული აქტების გამოვლენა

- ფორმალიზაცია, ანუ მათემატიკურ მოდელზე გადასვლა
- ალგორითმის შექმნა და პროგრამის დაწერა
- კომპიუტერული ექსპერიმენტების დაგეგმარება და ჩატარება
- შედეგების ანალიზი და ინტერპრეტაცია

არსებობს ანალიტიკური და იმიტაციური მოდელირება. ანალიტიკურს უწოდებენ ისეთ მოდელირებას, სადაც რეალური ობიექტის მოდელი იყენებს ალგებრულ, დიფერენციალურ და სხვა განტოლებებს, აგრეთვე ითვალისწინებს ზუსტი ამანახსნის უზრუნველყოფელ ცალსახა გამოთვლით პროცედურის განხორციელებას. იმიტაციურ მოდელირებას უწოდებენ მათემატიკურ მოდელირებას, რომლებიც ახორციელებენ შესასწავლი სისტემის ფუნქციონირების ალგორითმს დიდი რაოდენობის ელემენტარული ოპერაციების თანმიმდევრობითი შესრულების გზით.

განსაკუთრებით ეფექტურია კომპიუტერული მოდელირება სხვადასხვა ბუნებრივი და ტექნიკური ობიექტების სივრცითი მოძრაობის კვლევისა და ოპტიმიზაციის ამოცანებში, როგორცაა მფრინავი აპარატები, დამიზნების სისტემები, იერარქიულისი სიტემები. ამ უკანასკნელში იგულისხმება სისტემები, რომლებშიც მოითხოვება ბმულობის უზრუნველყოფა (ან მდგომარეობის შესაბამისობა) ობიექტებს შორის, რომლებიც ორგანიზებულ არიან ხის ტიპის სტრუქტურაში. იერარქიული მოდელის ტიპიური მაგალითი



შეიცავს ობიექტებს, რომლებიც ბოლოებით შეერთებული არიან რათა წარმოქმნან ბმული წრედები.

ასეთი იერარქიები სასარგებლოა ცხოველებისა და ადამიანების მოდელირებისას, რადგანაც შესაძლოა შესახსრები კიდურების მართვა სხეულის მოძრავნაწილებიანი ფიგურის მისაღებად. იერარქიული მოდელის სხვა გავრცელებული მაგალითია რობოტოტექნიკა[3].

კომპიუტერული მოდელირების მეთოდების გამოყენების მნიშვნელოვან სფეროს წარმოადგენს აგრეთვე კომპიუტერულ გრაფიკაში ობიექტების სივრცული მოძრაობის რეალიზაცია(ანიმაცია) და დაპროექტების ავტომატიზაციის სისტემები. აქ განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საერთო ხარისხის უზრუნველყოფა. კომპიუტერული მოდელის სტრუქტურა ავტომატურად უზრუნველყოფს შესაქმნელი მოძრაობის გარკვეულ ხარისხის შეზღუდვებს. მოდელმა უნდა გაითვალისწინოს სხვადასხვა მოთხოვნები, რომლებიც წაყენება ობიექტების სივრცობრივი(სამგანზომილებიანი) მოძრაობის თავისებურებების ეკრანზე ადექვატურად ასახვას, როგორცაა გეომეტრიული ობიექტების შედარებითი განლაგების უზრუნველყოფა, შეუღწევადობის შეზღუდვის უზრუნველყოფა, სიმბიმისა და სხვა ძალებზე რეაქციის გამოთვლა, ობიექტების შენახვის უზრუნველყოფა ან ქცევის წესების გათვალისწინება. ყველა ზემოდმოყვანილი სისტემები და ობიექტები ფლობენ თავისუფლების მრავალ ხარისხს, ხასიათდებიან ქცევის უკიდურესი სირთულით და არაერთმნიშვნელოვნების მაღალი ხარისხით, ფიზიკური კვლევების და ექსპერიმენტების ჩატარების სირთულით(ან შეუძლებლობით). ამიტომ, კომპიუტერული მოდელირების გამოყენება მსგავსი პროცესების ეფექტურად მართვისათვის გვესახება უკიდურესად სასურველად დააუცილებლად კი.

ცხადია, რომ როგორც სივრცითი მოძრაობის პროცესების კომპიუტერული მოდელირების მეთოდებისათვის, ასევე მათი ფიზიკური რეალიზაციისთვის ( სივრცითი მექანიზამების და რობოტების-მანიპულატორების მართვის

ამოცანებში) გამოიყენება ერთიანი მათემატიკური აპარატი. ქვემოთ ჩვენ მოკლედ განვიხილავთ კინემატიკის და დინამიკის შესაბამისი ამოცანების ამოხსნის ძირითად მეთოდებს, რონლებიც გამოიყენებიან ნითითებული ობიექტების მართვის თანამედროვე თეორიაში[4-8].

განიხილება მანიპულატორის კინემატიკის ორი ძირითადი ამოცანა:

1. კონკრეტული მანიპულატორისათვის მიერთებული კუთხეების განზოგადოებული კოორდინატების ცნობილი ვექტორის  $(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), \dots, q^{(n)}(t))^T$  მიხედვითდა რგოლების ( $n$ -თავისუფლების ხარისხის რიცხვი) მოცემული გეომეტრიული პარამეტრებით განისაზღვროს მანიპულატორის დამჭერის (ეფექტორის) მდგომარეობა და ორიენტაცია კოორდინატთა აბსოლუტური სისტემის მიმართ.

2. რგოლების ცნობილი გეომეტრიული პარამეტრებით მოიძებნოს მანიპულატორის მიერთებული ცვლადების ყველა შესაძლო ვექტორი, რომლებიც უზრუნველყოფენ დამჭერის მოცემულ მდგომარეობას და ორიენტაციას კოორდინატთა აბსოლუტური სისტემის მიმართ.

ამ ამოცანათაგან პირველს უწოდებენ *პირდაპირ* ამოცანას და მეორეს – მანიპულატორის კინემატიკის *შებრუნებულ* ამოცანას. რადგან მანიპულატორის საკუთარ დამოუკიდებელ ცვლადებს წარმოადგენენ მიერთებული ცვლადები, ხოლო ამოცანა, როგორც წესი ფორმირდება ათვლის კოორდინატთა აბსოლუტურ სისტემაში, კინემატიკის *შებრუნებულ* ამოცანას უფრო ხშირად ვხვდებით, ვიდრე პირდაპირს. ორივე ამოცანის ამოხსნისათვის გამოიყენება შემდეგი მათემატიკური ობიექტები და მეთოდები.

## 1.2. შემობრუნების მატრიცები

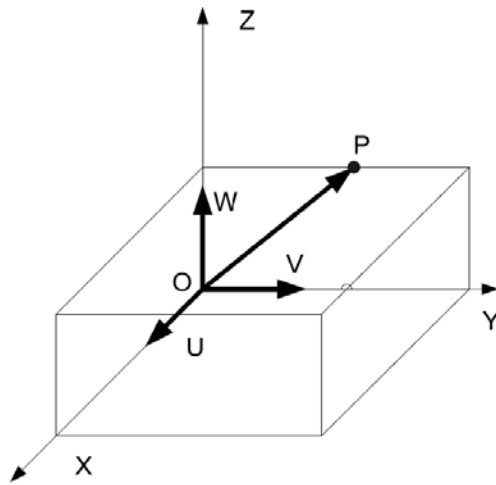
შემობრუნების მატრიცა განზომილებით  $3 \times 3$  შეიძლება განისაზღვროს როგორც სამგანზომილებიანი მდგომარეობის ვექტორის გარდაქმნის მატრიცა ევკლიდეს სივრცეში, რომელსაც გადაჰყავს მისი კოორდინატები

შეტრიალებული(ბმული) ათვლის სისტემიდან OUVW კოორდინატა აბსოლუტურ სისტემაში OXYZ. ნახ.1 ნაჩვენებია კოორდინატა ორი მარჯვენა სწორკუთხოვანი სისტემა: OXYZ კოორდინატა სისტემა OX, OY, OZ ღერძებით და OUVW სისტემა ღერძებით OU, OV, OW. ამ სისტემების საწყისები ერთმანეთს ემთხვევა და მდებარეობს 0 წერტილში. OXYZ სისტემა ფიქსირებულია სამგანზომილებიან სივრცეში და მიღებულიაროგორც აბსოლუტური, ხოლო კოორდინატა სისტემა OUVW ბრუნავს OXYZ სისტემის მიმართ. ფიზიკურად OUVW სისტემა შეიძლება განიხილებოდეს როგორც კოორდინატა შებმული სისტემა. ეს ნიშნავს, რომ ის შესაბამისად ხისტად არის შეკავშირებული მყარ სხეულთან(მაგალითად, მფრინავ აპარატთან ან მანიპულატორის რგოლთან) და მოძრაობს მასთან ერთად.

დავუშვათ  $(i_u, j_v, k_w)$  და  $(i_x, j_y, k_z)$  ერთეულოვანი ვექტორი მიმართულია შესაბამისად OXYZ და OUVW სისტემების ღერძების გასწვრივ. გარკვეული P წერტილი სივრცეში შეიძლება დახასიათდეს შესაბამისად ნებისმიერი ამ მითითებული სისტემების კოორდინატებით. მსჯელობის გასამარტივებლად ვივარაუდოთ, რომ P წერტილი დაფიქსირებულია და უძრავია ათვლის OUVW სისტემაში, მაშინ OUVW და OXYZ სისტემებში წერტილს ექნება შესაბამისად კოორდინატები

$$P_{xyz} = (P_x, P_y, P_z)^T \quad \text{და} \quad P_{uvw} = (P_u, P_v, P_w)^T$$

სადაც  $P_{uvw}$  და  $P_{xyz}$  ახასიათებენ ერთი და იგივე P წერტილის მდგომარეობას ათვლის სხვადასხვა სისტემების მიმართ. ზედა ინდექსი T, დამატებული ვექტორის ან მატრიცის აღნიშვნაზე, ასახავს ტრანსპონირების ოპერაციას.



ნახაზი1. აბსოლუტური და დაკავშირებული კოორდინატა სისტემა

ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ განესაზღვროთ განზომილებით  $3 \times 3$  მატრიცა, რომელიც გარდაქმნის კოორდინატებს ვექტორი  $P_{uvw}$  ორდინატებად  $OXYZ$  სისტემაში მას შემდეგ, რაც სისტემა  $OUVW$  მობრუნდება, ე.ი.

$$= R(1)$$

შეგნიშნავთ, რომ  $P$  ფიქტურული  $P_{uvw}$  ტილი ბრუნავს  $OUVW$  კოორდინატა სისტემასთან ერთად.

$$P_{uvw} = p_u \cdot i_u + p_v \cdot j_v + p_w \cdot k_w$$

სადაც  $P_u$ ,  $P_v$  და  $P_w$  წარმოადგენენ  $P$  ვექტორის შემადგენლებს  $Ou$ ,  $Ov$  და  $Ow$  ღერძებს გასწვრივ შესაბამისად, ან  $P$  ვექტორის პროექციას ამ ღერძებზე.

ამგვარად, ვიყენებთ რა სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებას და (1) ტოლობას, ვღებულობთ

$$\begin{aligned} p_x &= P \cdot i_x = i_x \cdot i_u \cdot p_u + i_x \cdot j_v \cdot p_v + i_x \cdot k_w \cdot p_w \\ p_y &= P \cdot j_y = j_y \cdot i_u \cdot p_u + j_y \cdot j_v \cdot p_v + j_y \cdot k_w \cdot p_w \\ p_z &= P \cdot k_z = k_z \cdot i_u \cdot p_u + k_z \cdot j_v \cdot p_v + k_z \cdot k_w \cdot p_w \end{aligned} \quad (3)$$

ან მატრიცულ ფორმაში

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით მატრიცა  $R$  ტოლობაში (1) იღებს სახეს

$$R = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} \quad (5)$$

ანალოგიურად, კოორდინატები  $P_{uvw}$  შეიძლება მივიღოთ კოორდინატებისგან:

$$P_{uvw} = Q \cdot P_{xyz} \quad (6)$$

$$\text{რც: } \begin{bmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u \cdot i_x & i_u \cdot j_y & i_u \cdot k_z \\ j_v \cdot i_x & j_v \cdot j_y & j_v \cdot k_z \\ k_w \cdot i_x & k_w \cdot j_y & k_w \cdot k_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

იშუტატიურია,

შეფარდებილია (6)-(8) გამოძღვისათვის

$$Q = R^{-1} = R^T \quad (8)$$

$$QR = R^T R = R^{-1} R = I_3 \quad (9)$$

სადაც  $I_3$ - ერთეულოვანი მატრიცა განზომილებით  $3 \times 3$ . (1) ან (6) ფორმულებით განსაზღვრულ გარდაქმნას ეწოდება *ორთოგონალური* გარდაქმნა, და რადგან სკალარულ ნამრავლში შემავალი ყველა ვექტორი ერთეულოვანია, მასაც უწოდებენ *ორთონორმალურ* გარდაქმნას.

განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს OUVW სისტემების ბრუნვის მატრიცები OXYZ სისტემების სამ ძირითად დერძთან მიმართებით. თუ სივრცეში OUVW სისტემის მდგომარეობა იცვლება ამ სისტემის OX დერძის ირგვლივ  $\alpha$  კუთხით მობრუნების ხარჯზე, მაშინ ათვლის სისტემაში OXYZ შეიცვლება წერტილის (რომელსაც  $P_{uvw}$  OUVW სისტემაში უცვლელი კოორდინატები ) კოორდინატები  $(P_u, P_v, P_w)$   $(P_x, P_y, P_z)^T$

შესაბამის გარდაქმნის მატრიცას  $R_{x,\alpha}$  იწოდება  $\alpha$  კუთხით OX დერძის ირგვლივ ბრუნვის მატრიცათ. შემთხვევით მიღებულ შედეგებზე დაყრდნობით მატრიცისათვის  $R_{x,\alpha}$  გვაქვს:

$$P_{xyz} = R_{x,\alpha} \cdot P_{uvw}$$

(10)

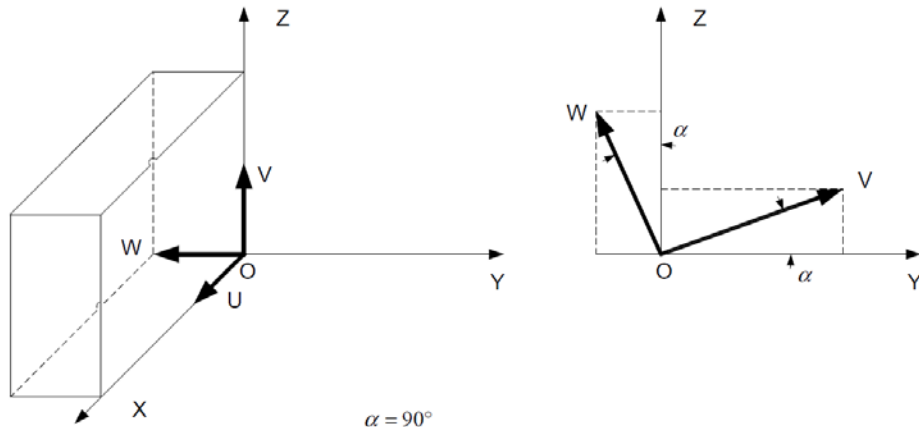
თანაც  $i_x=i_y$ , და

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} i_x \cdot i_u & i_x \cdot j_v & i_x \cdot k_w \\ j_y \cdot i_u & j_y \cdot j_v & j_y \cdot k_w \\ k_z \cdot i_u & k_z \cdot j_v & k_z \cdot k_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (11)$$

ანალოგიურად, სამგანზომილებიანი (განზომილებით 3x3)  $\varphi$  კუთხით OY ღერძის ირგვლივ და  $\theta$  კუთხით OZ ღერძის ირგვლივ ბრუნვის მატრიცებს აქვთ შესაბამისად შემდეგი სახე ნახ.2.

$$R_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$R_{x,\alpha}$ ,  $R_{y,\varphi}$ , და  $R_{z,\theta}$  მატრიცებს უწოდებენ ელემენტარული შემობრუნების მატრიცებს. საბოლოო შემობრუნების ნებისმიერი სხვა მატრიცები შეიძლება მივიღოთ თუ გამოვიყენებთ ელემენტარული შემობრუნების მატრიცებს.

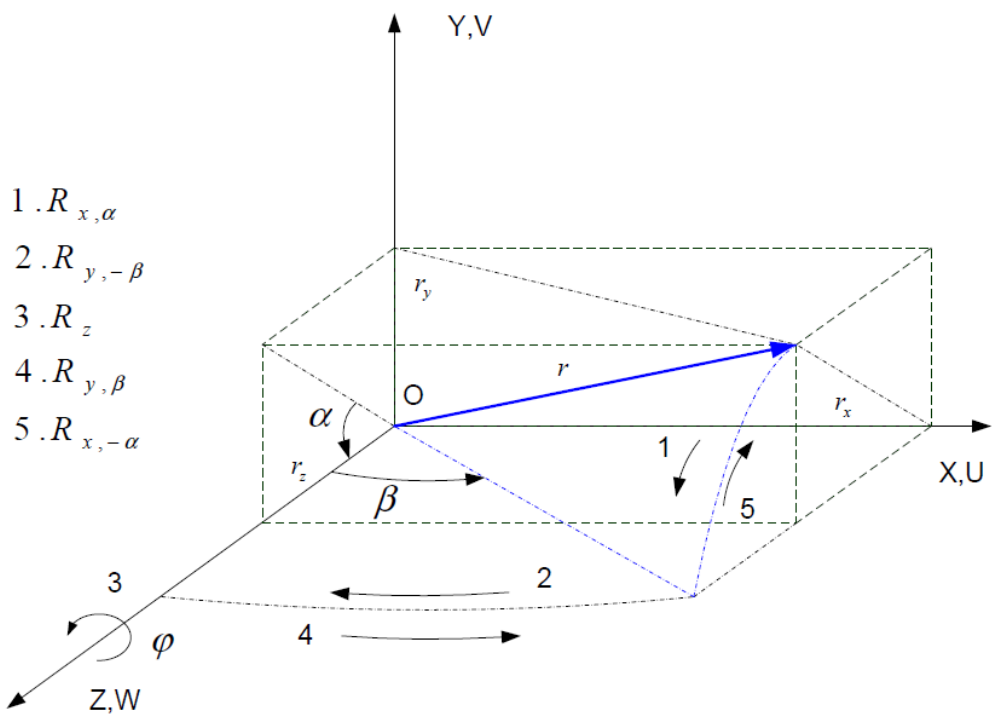


ნახა იი. კოორდინატთა ძიოუხავი სისტემა

### 12.1 ნებისმიერი ღერძის ირგვლივ შემობრუნების მატრიცა

რიგ შემთხვევებში OUVW მოძრავ კოორდინატთა სისტემას შეუძლია შეასრულოს  $\varphi$  კუთხით ბრუნვი  $r$  ნებისმიერი ღერძის მიმართ, რომელიც წარმოადგენს ერთეულოვანი ვექტორი,  $r_x$ ,  $r_y$  და  $r_z$  კომპონენტებით, გამოსულს 0

საწყის კოორდინატაში ბრუნის უპირატესობა მდგომარეობას იმაში, რომ ზოგი კუთხური მოძრაობისთვის ბრუნების თანმიმდევრობა  $OXYZ$  ან  $OUVW$  კოორდინატა სისტემების ძირითადი ღერძების მიმართ შეიძლება შეიცვალოს  $r$  ღერძის ირგვლივ  $OUVW$  სისტემის ერთი შემობრუნებით. რომ მივიღოთ ბრუნის მატრიცა, შეიძლება ჯერ ვაწარმოოთ რიგი ბრუნებისა  $OXYZ$  სისტემის ღერძების მიმართ, რათა შევათავსოთ  $r$  ღერძი  $OZ$  ღერძთან. შემდეგ მოვახდინოთ საჭირო ბრუნვა  $r$  ღერძის ირგვლივ კუთხით და ისევ რიგი ბრუნები  $OXYZ$  სისტემის ღერძების მიმართ, რომლებით აბრუნებენ  $OZ$  ღერძს საწყის მდგომარეობაში. ნახაზიდან ჩანს, რომ  $OZ$  და  $r$  ღერძების შეთავსება შეიძლება განხორციელდეს  $OX$  ღერძზე  $\alpha$  კუთხით შემობრუნების საშუალებით ( $r$  ღერძზე შედეგად აღმოჩნდება  $XZ$  სიბრტყეზე), შემდეგ კუთხით  $OY$  ღერძის ირგვლივ (შედეგად  $OZ$  ღერძი დაემთხვევა  $r$  ღერძს).  $\varphi$  კუთხით  $OZ$  ან  $r$  ღერძის მიმართ მობრუნების შემდეგ ჩავატაროთ ბრუნების შემოდაღნიშნული მიმდევრობა, მაგრამ შებრუნებული მიმართულებით და ამავდროულად შევცვალოთ ბრუნის კუთხეთა ნიშნები საწინააღმდეგოდ.



- 1.  $R_{x, \alpha}$
- 2.  $R_{y, -\beta}$
- 3.  $R_z$
- 4.  $R_{y, \beta}$
- 5.  $R_{x, -\alpha}$

ნახაზის მიხედვით ბრუნის ირგვლივ ბრუნვა შემობრუნების მარჯულტერებელი მატრიცა უდრის:

$$\begin{aligned}
R_{r,\varphi} &= R_{x,-\alpha} \cdot R_{y,\beta} \cdot R_{z,\varphi} \cdot R_{y,-\beta} \cdot R_{x,\alpha} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ნახ. 3. ადვილად განისაზღვრება, რომ

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{r_z}{\sqrt{r_y^2 + r_z^2}}$$

$$\sin \beta = r_x, \quad \cos \beta = \sqrt{r_y^2 + r_z^2}$$

ამ ორი ტოლობის შეყვანა წინა გამოსახულებაში  $R_{r,\varphi}$ -ვა

$$R_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} r_x^2 V\varphi + \cos \varphi & r_x r_y V\varphi - r_z \sin \varphi & r_x r_z V\varphi + r_y \sin \varphi \\ r_x r_y V\varphi + r_z \sin \varphi & r_y^2 V\varphi + \cos \varphi & r_y r_z V\varphi - r_x \sin \varphi \\ r_x r_z V\varphi - r_y \sin \varphi & r_y r_z V\varphi + r_x \sin \varphi & r_z^2 V\varphi + \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (13)$$

სადაც

$$V\varphi = \text{vers} \varphi = 1 - \cos \varphi$$

## 1.2.2. შემობრუნების მატრიცების წარმოდგენა ეილერის კუთხეების საშუალებით

მყარი სხეულის ბრუნვის მატრიცული აღწერა ამარტივებს ბევრ ოპერაციას; მაგრამ, მხოლოდ იმისათვის, რომ მთლიანად აღიწეროს მყარი სხეულის ორიენტაცია, აუცილებელია გამოყენებულ იქნას შემობრუნების მატრიცის ყველა ცხრა ელემენტი. უშუალოდ ეს ელემენტები არ ქმნიან განზოგადოებულ კოორდინატთა მთელი სისტემას, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება აღიწეროს მბრუნავი მყარი სხეულის ორიენტაცია

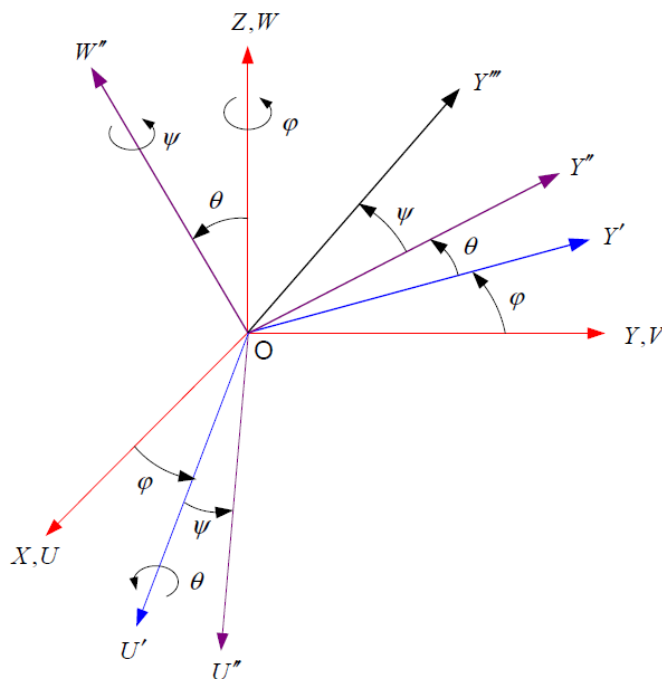


კოორდინატა აბსოლუტური სისტემის მიმართ. განზოგადოებული კოორდინატების სახით შეიძლება ეილერის კუთხეების  $\varphi$ ,  $\theta$  და  $\psi$  გამოყენება. არსებობს ეილერის კუთხეების მრავალი განსხვავებული სისტემა და ყველა ისინი აღწერენ მყარი სხეულის ორიენტაციას ზოგიერთ მოცემულ კოორდინატა სისტემის მიმართ. სამი ყველაზე ხშირად გამოყენებული სისტემები ეილერის კუთხეებისა წარმოდგენილია ცხრილ-1-ში:

	1	2	3
ბრუნვების თანმიმდევრობა	$\varphi$ კუთხით ბრუნვა OZ ღერძის გარშემო  $\theta$ ბრუნვა OU ღერძის გარშემო  $\psi$ ბრუნვა OW ღერძის გარშემო	$\varphi$ კუთხით ბრუნვა OZ ღერძის გარშემო  $\theta$ ბრუნვა OV ღერძის გარშემო  $\psi$ ბრუნვა OW ღერძის გარშემო	$\psi$ ბრუნვა OX ღერძის გარშემო  $\theta$ ბრუნვა OY ღერძის გარშემო  $\varphi$ კუთხით ბრუნვა OZ ღერძის გარშემო

ცხრილი 1. ეილერის კუთხეების სამი სისტემა

ეილერის კუთხეების განხილულ სისტემათაგან პირველი ჩვეულებრივ გამოიყენება ჰოროსკოპების მოძრაობის აღსაწერად და შეესაბედა შემობრუნების შემდეგ მიმდევრობას (ნახ. 4):



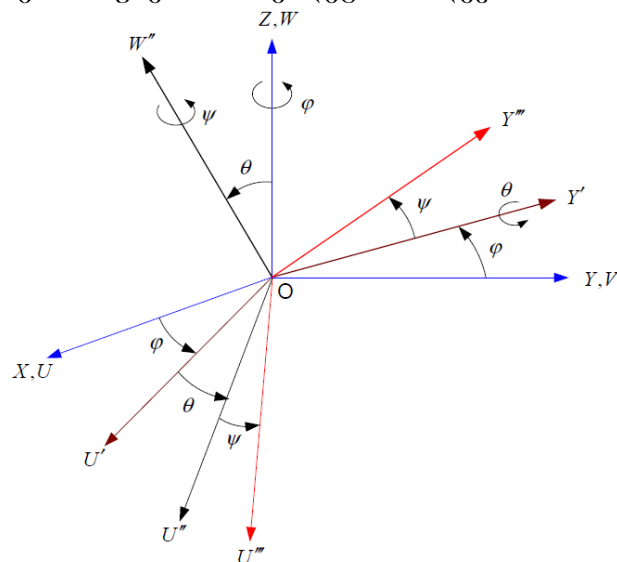
ნახაზი 4. ეილერის კუთხეების პირველი სისტემა

1.  $\varphi$  კუთხით შემობრუნება OZ ღერძის გარშემო.
2.  $\theta$  კუთხით შემობრუნება OU მოტრიალებული ღერძის გარშემო ( $R_{u,\theta}$ )
3. დაბლოს,  $\psi$  კუთხით შემობრუნება OW ( $R_{w,\psi}$ ) მოტრიალებული ღერძის ირგვლივ.

შემობრუნების მარეზულტირებელ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

$R_{\varphi,\theta,\psi}$  მატრიცის მიერ აღწერილი შემობრუნება შეიძლება ასევე მიღებულ იქნას კოორდინატა უძრავი სისტემის ღერძთა ირგვლივ შემობრუნებათა შემდეგი მიმდევრობის შესრულებით: ჯერ  $\varphi$  კუთხით OZ ღერძის გარშემო, შემდეგ  $\theta$  კუთხით OX ღერძის გარშემო და ბოლოს,  $\psi$  კუთხით OZ ღერძის გარშემო. ნახაზ 5. გამოსახულია ეილერის კუთხეების მეორე სისტემა, განსაზღვრული შემობრუნებათა შემდეგი მიმდევრობით:



ნახაზი 5. ეილერის კუთხეების პირველი სისტემა

1.  $\varphi$  კუთხით შემობრუნება  $OZ(R_{z,\varphi})$ ღერძის ირგვლივ;
2.  $\theta$  კუთხით შემობრუნება  $OY(R_{y,\theta})$  მოტრიალებული ღერძის ირგვლივ;
3. ბოლოს,  $\psi$  კუთხით შემობრუნება  $OX(R_{x,\psi})$  მოტრიალებული ღერძის ირგვლივ.

შემობრუნების მარეზულტირებელ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned}
 R_{\varphi,\theta,\psi} &= R_{z,\varphi} \cdot R_{y,\theta} \cdot R_{x,\psi} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi\cos\theta + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\cos\psi\sin\theta & \sin\theta\sin\psi & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (15)
 \end{aligned}$$

შემობრუნება, რომელსაც აღწერს  $R_{\varphi,\theta,\psi}$  მატრიცა ეილერის კუთხეების ამ სისტემისათვის, შეიძლება ასევე მიღებულ იქნას კოორდინატა უძრავი სისტემის ღერძთა ირგვლივ ბრუნვათა მიმდევრობის შესრულების შედეგად:  $\psi$  კუთხით  $OZ$  ღერძის ირგვლივ, შემდეგ  $\theta$  კუთხით  $OY$  ღერძის ირგვლივ და ბოლოს  $\varphi$  კუთხით  $OX$  ღერძის ირგვლივ.

### 13. კინემატიკის შებრუნებული ამოცანა

სივრცითი ბრუნვების მართვის ამოცანების ამოხსნის და ფორმულირების საფუძველია კინემატიკის შებრუნებული ამოცანა. ქვემოთ განხილულია მოცემული ამოცანის ამოხსნის არსებული მეთოდები.

არსებობს კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდები, რომელთა რიცხვს მიეკუთვნება შებრუნებული გარდაქმნის, ხრახნული ალგებრის, დუალური მატრიცების, დუალური კვატერნიონების, იტერაციის და გეომეტრიული მიდგომის, გაგრძელების მეთოდები [10-15]. პაიპერმა[16] მიიღო კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა ექვსი

თავისუფლების ხარისხის მქონე ნებისმიერი მანიპულატორისათვის, რომლის პირველი სამი შესახსრები ბრუნვითი ან პირდაპირ მოძრაობა, ხოლო ბოლო სამის ღერძები იკვეთება ერთ წერტილში. ამოხსნა მიღებულია მეოთხე ხარისხის განტოლების ფორმით ერთ-ერთი უცნობის მიმართ და აშკარა სახით. პოლმა დასხვ.[9,17,19] მანიპულატორების იმავე კლასისათვის, როგორც პაიპერის შემოგვთავაზეს შებრუნებული გარდაქმნების მეთოდით სარგებლობა 4X4 განზომილების ერთგვაროვანი მატრიცების გამოყენებით. ამ მიდგომის უარყოფითი მხარეა ის, რომ არ აჩვენებს როგორ ამოვირჩიოთ რამოდენიმე არსებული ამოხსნიდან ერთი, რომელიც შეესაბამება მანიპულატორის მოცემულ კონფიგურაციას. ამ საკითხში მკვლევარი უნდა დაეყრდნოს თავის ინტუიციას. უიკერმა და სხვებმა[13], ასევე მილენკოვიცმა და ჰუნგმა შემოგვთავაზეს უმრავლესი სამრეწველო რობოტების კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის იტერატიული პროცედურა. ასეთი მიდგომა მოითხოვს დიდ გამოთვლით ხარჯებს და შედეგების კრებადობის გარანტიას არ იძლევა, განსაკუთრებით გადაგვარებული შემთხვევისათვის. გარდა ამისა როგორც შებრუნებული გარდაქმნების მეთოდი, იტერაციის მეთოდიც არ იძლევა საშუალებას მანიპულატორის მოცემული კონფიგურაციის შესაბამისი რამოდენიმე არსებულიდან ერთადერთი ამოხსნის ამორჩევას.

განვიხილოთ ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი მეთოდი- შებრუნებული გარდაქმნის მეთოდი.

### 1.3.1. შებრუნებული გარდაქმნის მეთოდი

ამ განაკვეთში შებრუნებული გარდაქმნების საერთო მეთოდი ნაჩვენებია ეილერის კოორდინატებში კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის მაგალითზე. ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ცნობილია რა შემობრუნების სამგანზომილებიანი მატრიცა და გათვალისწინებულია ტოლობა (14), რომელიც წარმოადგენს ეილერის კუთხეების საშუალებით ამ მატრიცის გამოსატყულებას:

$$\begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x \\ n_y & s_y & a_y \\ n_z & s_z & a_z \end{bmatrix} = R_{z,\varphi} \cdot R_{u,\theta} \cdot R_{w,\psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (16)$$

განისაზღვროს კუთხეების შესაბამისი მნიშვნელობები. ჩავიწერთ რა ამ მატრიცულ განტოლებას ცალკეული ელემენტების განტოლების ფორმით, მივიღებთ:

$$n_x = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi \quad (17)$$

$$n_y = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta \quad (18)$$

$$n_z = \sin\varphi\sin\theta \quad (19)$$

$$s_x = -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\theta\cos\psi \quad (20)$$

$$s_y = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta \quad (21)$$

$$s_z = \cos\varphi\sin\theta \quad (22)$$

$$a_x = \sin\varphi\sin\theta \quad (23)$$

$$a_y = -\cos\varphi\sin\theta \quad (24)$$

$$a_z = \cos\theta \quad (25)$$

განტოლებების (25), (22) და (24)-დან ვღებულობთ, რომ განტოლებების სისტემას(17)-(25) ამოხსნას აქვს შემდეგი სახე:

$$\theta = \arccos(a_z) \quad (26)$$

$$\varphi = \arccos\left[\frac{s_z}{\sin\theta}\right] \quad (27)$$

მიღებული მოხსნა არამყარია და ცუდათ არის უზრუნველყოფილი შემდეგი მიზეზებით:

1. ფუნქცია  $\arcsin$  მოუხერხებელია იმით, რომ მისი მნიშვნელობის გამოთვლის სიზუსტე დამოკიდებულია ამ მნიშვნელობისაგან

2. წერტილებში, სადაც  $\sin \theta$  ღებულობს ნულთან ახლო მნიშვნელობებს, ე.ი. როცა  $\theta \approx 0^\circ$  ან  $\theta \approx 180^\circ$ , ტოლობები (25) და (26) ან არ არიან განსაზღვრული, ან გვაძლევენ გამოთვლების დაბალ სიზუსტეს.

აქედან გამომდინარე, საჭიროა მოიძებნოს ამ ამოცანაში ეილერის კუთხეების განსაზღვრის უფრო მდგრადი საშუალება, ასევე უფრო მყარი შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქცია ამ კუთხეების გამოსათვლელად. მკუთხის განსაზღვრისათვის, რომლის მნიშვნელობა ძვეს  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ფარგლებში, ვისარგებლოთ არკტანგენტის ფუნქციით

$\text{ATAN2}(y/x)$ , რომელიც ითვლის მნიშვნელობას  $\arctg(y/x)$ , შესაბამის კვადრატთან არგუმენტის მიკუთვნების გათვალისწინებით. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\theta = \begin{cases} 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ & \text{თუ } x > 0, y > 0 \\ 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ & \text{თუ } x < 0, y > 0 \\ -180^\circ \leq \theta \leq -90^\circ & \text{თუ } x < 0, y < 0 \\ -90^\circ \leq \theta \leq 0^\circ & \text{თუ } x > 0, y < 0 \end{cases} \quad (28)$$

მატრიცის ელემენტები მატრიცული განტოლების (16) მარცხენა მხარეს მოცემულია, ხოლო მატრიცის ელემენტები ამ განტოლების მარჯვენა მხარეს უცნობია და დამოკიდებულია  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ -ზე. ერთი მეთოდით გათვალისწინებულია თანმიმდევრობით გავამრავლოთ (16) განტოლების ორივე ნაწილი შებრუნებული გარდაქმნის მატრიცებზე და ამ გზით მიღებული მატრიცული განტოლებისაგან განვსაზღვროთ საძიებელი კუთხეები. ამ გარდაქმნების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ ჯერ გადაგვაქვს უცნობი სიდიდეებიდან ერთ-ერთი განტოლების მარჯვენა მხრიდან მარცხენაში, ვპოულობთ მას, შემდეგ გადაგვაქვს მარცხენა მხარეს შემდეგი უცნობი, ვპოულობთ და ვიმეორებთ ამ პროცედურას მანამ, სანამ არ მოვძებნით ყველა უცნობს.

თუმცა შებრუნებული გარდაქმნების მეთოდი იძლევა ამოხსნისადმი ზოგად მიდგომას, მისგან არ გამომდინარეობს როგორ უნდა ავირჩიოთ

რამოდენიმე არსებული გადაწყვეტიდან ერთი, რომელიც შეესაბამება მანიპულატორის მოთხოვნილ კონფიგურაციას. მანიპულატორის მოცემული მატრიცით კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის მოსაძებნად გამოიყენება გეომეტრიული მიდგომა, რომელიც იძლევა მანიპულატორის კონკრეტული კონფიგურაციისთვის ერთადერთი ამოხსნის ამორჩევის საშუალებას. მოცემული ხერხი, განხილული პუმას ტიპის ექვს რგოლიანი მანიპულატორის მაგალითზე დაწვრილებითაა აღწერილი[12].

ამის გარდა [18]-ში შეთავაზებულია კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა იმავე მანიპულატორისთვის, მიღებული როდრიგო-ჰამილტონის დუალურ პარამეტრებში, სწორედ ბიკვატერნიონური მატრიცების საშუალებით.

იმ შემთხვევაში, თუ შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა ანალიტიკური გამოსახულებებით შეუძლებელია, გამოიყენება რიცხვითი მეთოდები [19-21].

ამოცანის ზოგადი დასმა რიცხვითი მეთოდების გამოყენების შემთხვევაში, მაგალითად სამრგოლიანი მანიპულატორისათვის სამი მბრუნავი წყვილით, ფორმირდება შემდეგნაირად. ცნობილია დამჭერის მდგომარეობა სივრცეში: საწყისი  $P_i$ , ნამდვილი  $P_r$  (განსაზღვრული კორექტირების ი-ური ბიჯით) და საბოლოო (სასურველი)  $P_d$ , მიცემული დეკარტის კოორდინატებით.

აუცილებელია განისაზღვროს განზოგადოებული კოორდინატების  $q_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ისეთი მნიშვნელობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეფექტორის ცენტრის მდგომარეობის  $P_d$  წერტილში (სასურველ მდგომარეობა).

ასეთი სახით დასმული ამოცანა წარმოადგენს სამცვლადიანი ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანას და მიზნობრივ ფუნქციას ექნება სახე:

$$f(\theta) = \|P_r - P_d\|$$

სადაც  $P_r, P_d$  – რადიუს-ვექტორებია ეფექტორის ცენტრის ნამდვილი სასურველი მდგომარეობისა.

მრავალრგოლიანი მანიპულატორის შემთხვევაში, როცა თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი სამზე მეტია, აუცილებელია ვიცოდეთ ასევე სივრცეში მანიპულატორის ორიენტაცია. ამგვარად, მანიპულატორის ორიენტაციის განსაზღვრავად, რომლის თავისუფლების ხარისხთა რიცხვი  $n < 3$ , ეფექტორის კოორდინატთა ცენტრის გარდა საჭიროა ვიცოდეთ დამატებითი

პარამეტრები, მაგალითად, საბაზისო კოორდინატთა სისტემა  $O_i$ -ში ეფექტორის კოორდინატთა სისტემის საწყისი მდგომარეობა  $O_i$  წერტილის სასურველი მდგომარეობას როგორც  $O_{id}$ , მივიღებთ გამოსახულებას მიზნობრივი ფუნქციისათვის, რომელიც ითვალისწინებს როგორც დამჭერის მდგომარეობას, ასევე მანიპულატორის ორიენტაციას:

$$f(\theta) = \|P_r - P_d\| + \|O_{ir} - O_{id}\| \quad (29)$$

სადაც  $P_r, P_d, O_{ir}, O_{id}$  - რადიუს-ვექტორებია ეფექტორის ცენტრის ნამდვილი და სასურველი მდგომარეობისა, ეფექტორის კოორდინატთა სისტემის საწყისის (ანუ  $O_i$  წერტილის) ნამდვილი და სასურველი მდგომარეობებისა.

ამგვარად, აუცილებელია  $f$  ფუნქციის მინიმიზირება მოცემული სიზუსტით და ფუნქციის მინიმუმის განსაზღვრა.

მიზნობრივი ფუნქცია (29) წარმოადგენს მრავალი ცვლადის ასაწრფივ ფუნქციას, რომელიც შეიცავს ტრიგონომეტრიულ დამოკიდებულებებს, რომლის გამოძახილია - რთული ჰიპერზედაპირი ღრმულებით, უნაგირის წერტილებით, თხრილებით. ასეთი ზედაპირი შეუძლებელია წარმოვადგინოთ გეომეტრიულად, ამგვარად, სირთულე წარმოიშვება ფუნქციის გლობალური მინიმუმის განსაზღვრისას მრავალ ლოკალურს შორის.

მთლიანობაში ყველა პრაქტიკულად გამოყენებული მეთოდი წარმოადგენს ლოკალური ძიების მეთოდებს. გლობალური მინიმუმის ძიების საიმედო და ერთდროულად ეკონომიური მეთოდები ამჟამად უცნობია.

რიცხვული მეთოდი საშუალებას იძლევა ამოიხსნას კინემატიკის შებრუნებული ამოცანა მანიპულატორის იმ კონსტრუქციებისათვის, რომელთათვისაც ზუსტი ამოხსნის მიღება ანალიტიკური გამოსახულებით არ არის შესაძლებელი ან საკმაოდ გართულებულია. ეს არის ძირითადი ღირსება რიცხვითი მეთოდის გამოყენებისას დასმული ამოცანის დროს. გარდა ამისა, შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი მეთოდი საშუალებას იძლევა მივადწიოთ ამოხსნის მოთხოვნილ სიზუსტეს. მაგრამ კრებადობის დრო ამა თუ იმ მეთოდისა წინასწარ უცნობია და ბევრად არის დამოკიდებული საწყის მიახლოებაზე. შედეგად, მიზნობრივი ფუნქციის ცვლადთა რაოდენობის მიმართ მგრძობიანობა ჰიპერზედაპირის გამო და ასევე განსხვავებული კრებადობის სიჩქარე და კარგვებიძებნისას



თხოვლობენ მნიშვნელოვან გამოთვლით სიმძლავრეებს, რაც ართულებს მათ გამოყენებას სინამდვილეში.

დასასრულსაუცილებელია განვიხილოთ კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ყველაზე გავრცელებული მეთოდი და მასზე დაფუძნებული მრავალრგოლიანი მექანიზმების და მანიპულაციური რობოტების მუშა ორგანოების მართვის მეთოდი: ეგრედ წოდებული **დენავიტის-ხარტენბერგის** წარმოდგენა [9], რომელიც გამოიყენებს ფაქტორიზაციას (14).

ერთგვაროვან 4x4 მატრიცებისთვის მოცემული წარმოდგენა გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}A_i = T_{z,d}T_{z,\theta}T_{x,a}T_{x,\alpha} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)
 \end{aligned}$$

## 14. რობოტ-მანიპულატორების მოძრაობის მართვის მეთოდების მიმოხილვა

### 14.1. ოპტიმალური(პროგრამული) მართვის თეორიის მეთოდები

როგორც აღინიშნა კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა წარმოადგენს სივრცითი ბრუნვის მართვის მეთოდების შემუშავების საფუძველს. ამჟამად არსებობს მოძრაობის მართვის მეთოდების საკმარისი რაოდენობა. ამ თეორიაში არსებითი ადგილი უჭირავთ ოპტიმალური მართვის პრობლემებს. საერთოდ ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს. განიხილება მართული ზემოქმედების ქვეშ მყოფი ობიექტი(მექანიკური სისტემა,

ელექტრული წრედი და ა.შ.) მოცემულია სასურველი მოძრაობის ელემენტები, მაგალითად ობიექტის საწყისი და საბოლოო მდგომარეობა. მითითებულია მოთხოვნები პროცესის ხარისხისადმი, რომელიც ჩვეულებრივ შეიცავს მინიმუმის ან მაქსიმუმის პირობებს, ან შესაძლოა სისტემის მუშაობის მეჩვენებლის რომელიმე მინიმალს ან მაქსიმუმს. მაგალითად, ხშირად გხვდება დახარჯული ენერჯიის მინიმუმის პირობა. მოითხოვება მოიძებნოს კანონი, რომელიც განსაზღვრავს საჭირო მოძრაობის განხორციელების ძალისხმევას.

ოპტიმალური მართვის თეორია აერთიანებს განსხვავებული ამოცანების დიდ რაოდენობას. მისი შესწავლა გართულებულია პრობლემების საყოველთაოდ აღიარებული კლასიფიკაციის არ არსებობით, რომელთა კვლევიდაც დაკავებული არიან მათემატიკოსები და მექანიკოსები, ფიზიკოსები და ინჟინრები, ბიოლოგები და სოციოლოგები, რომლებიც ისახავენ სხვადასხვა მიზანს და გამოიყენებენ განსხვავებულ მეთოდებს ანალოგიური ამოცანების ამოხსნისას. უკანასკნელ დროს განვითარებულ მართვის თეორიის ცალკეულ შტოებს აქვთ ფართო და ჩახლართული ბიბლიოგრაფია. ეს ართულებს შედეგების მიმოხილვას.

განიხილებიან მხოლოდ ისეთი სასურველ განზომილებიანი ობიექტები, რომელთა მიმდინარე მდგომარეობა და მათზე მართვითი ზემოქმედება შეიძლება აღიწეროს სასურველგანზომილებიანი ვექტორებით  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $u = \{u_1, \dots, u_r\}$ , თანაც მოძრაობა  $\dot{x}_i(t)$  განისაზღვრება ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემებით

$$(31) \quad \dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \quad (i = 1, \dots, n).$$

სადაც  $t$ —დროა.

ძირითადი ყურადღება ეთმობა მოცემულ მდგომარეობაში ობიექტის მიყვანის ამოცანას, რაც საკამოდ ხშირად გხვდება მექანიკური მოძრაობის მართვის პრობლემებში.

ცნობილია მოძრაობის მართვის პრობლემების ამოცანათა ორი ძირითადი კლასი.

*1. პროგრამული* მართვის ამოცანა, სადაც მოცემულია ამოსავალი ინფორმაცია ობიექტის საწყისი მდგომარეობის (საწყისი მომენტისათვის  $t = t_a$ ) შესახებ და საჭიროებს მოიძებნოს ზემოქმედება *დროის ფუნქციის*  $u = u(t) \geq t_a$

სახით ისე, რომ პროცესის დამთავრების მომენტისათვის  $t = t_\beta$  სისტემა აღმოჩნდეს მოცემულ მდგომარეობაში. ამავე დროს, როგორც ზემოდ იყო აღნიშნული, ზოგადად კიდევ საჭიროა პროცესის სასურველი ხარისხის უზრუნველყოფამ.

ასეთი ამოცანის მაგალითია უკიდურესი პროგრამული სწრაფ მოქმედების პრობლემა: მოცემულია ობიექტის საწყისი მდგომარეობა  $t = t_\alpha$ ,  $x(t_\alpha) = x^\alpha$  და მითითებულია მდგომარეობა  $x(t_\beta) = x^\beta$  რომელშიც აუცილებელია ობიექტის გადაყვანა; საჭიროა მოიძებნოს ზემოქმედება  $u = u^0(t)$ , რომელიც აკმაყოფილებს პირობას  $\|u^0(t)\| \leq \mu$  და გადაჰყავს ობიექტი  $x(t_\beta) = x^\beta$  მდგომარეობაში უმცირეს შესაძლებელ დროში  $T = t_\beta - t_\alpha$  (სიმბოლო  $\|u\|$  აღნიშნავს ნორმას ვექტორისა  $(u_1^2 + \dots + u_r^2)^{1/2}$ ).

მოცემული ტიპის ამოცანებისათვის დამახასიათებელია, რომ დამატებითი ინფორმაცია, რომელიც შესაძლოა მოგვეწოდება პროცესის მსვლელობისას არ გამოიყენება მოძრაობის კორექციისათვის შედეგის გაუმჯობესების მიზნით, ე.ი. მოძრაობა ხორციელდება ხისტი პროგრამით  $u = u(t)$ , რომელიც წინასწარ არის შედგენილი. ეს ზღუდავს შესაძლების შედეგების როლს და გვაიძულებს პრობლემა განვიხილოთ შემდეგ ასპექტში.

## II. უკუკავშირიანი სისტემის სინთეზის ამოცანა.

აქ მართვის საუკეთესო კანონი იძებნება ისეთი განტოლებების სახით, რომლებიც აკავშირებენ  $u$ -ს ზემოქმედებას ზოგიერთ სიდიდეებთან  $\{y_1(t), \dots, y_m(t)\}$ , დარომლებიც, თავის მხრივ, გვაწვდიან ინფორმაციას  $x(t)$  ობიექტის მიმდინარე მდგომარეობებზე. კერძო შემთხვევაში, როცა შესაძლებელია სწრაფი და საკმაოდ ზუსტი გაზომვა ვექტორი  $x(t)$ -ის ყველა კოორდინატისა  $x_i(t)$ , მართვითი ზემოქმედება განისაზღვრება ჩვეულებრივ  $u_j = u_j[t, x_1(t), \dots, x_n(t)]$  ფუნქციის სახით. ყველაზე სრული გამოკვლევები და საბოლოო შედეგები მიეკუთვნება ოპტიმალურობის აუცილებელ ნიშნებს პროგრამული მართვის ამოცანისთვის ინტეგრალის მინიმუმის პირობებით:

$$I = \int_{t_a}^{t_b} \omega[t, x(t), u(t)] dt \quad (32)$$

ასეთი აუცილებელი პირობების თეორია ეყრდნობა ვარიაციული აღრიცხვის[22-27] კლასიკურ იდეებს და მათ განვითარებას ახალ მეთოდებში, შემუშავებულს უკანასკნელ ათწლეულებში. შინაარსით ფართო, მკაცრად დასაბუთებული და გამოყენებისათვის მოხერხებული ფორმით ოპტიმალურობის კრიტერიუმს წარმოადგენს მაქსიმუმის პრინციპი[28], რომელიც შეესაბამება ვეიერშტრასის კლასიკურ ვარიაციულ პრინციპს და ჰამილტონის კანონიკურ განტოლებების მეთოდს [29].

სხვა მიდგომა მართვის პრობლემისადმი, რომელიც პასუხობს უკუკავშირიანი ოპტიმალური სისტემების სინთეზის ამოცანებს, ვითარდება გზით, რომელსაც ეწოდა *დინამიური პროგრამირების* მეთოდი[30]. ეს მეთოდი შეესაბამება ვარიაციულ აღრიცხვაშიცნობილი მსჯელობებს აღზნების გავრცელების შესახებ და მოყვავართ ჰამილტონ-იაკობის ტიპის განტოლებებამდე კერძო წარმოებულებში [30,31].

ერთ-ერთ რთული და ნაკლებგანვითარებულ პრობლემად რჩება *სასაზღვრო* ამოცანა, რომელიც დაკავშირებულია აუცილებლობასთან მიიყვანოს მართული ობიექტი მოცემულ საბოლოო მდგომარეობამდე. ამჟამად, ეს სასაზღვროამოცანაწარმოადგენს წინააღმდეგობას მმართველი ძალისხმევების კონკრეტული გამოთვლების გზაზე.

#### 14.2. ტერმინალური მართვის ამოცანები

უკანასკნელ 10-15 წლის განმავლობაში გამოჩნდნენ ახალი ობიექტები და წარმოიშვნენ ახალი ამოცანები, რომლებიც წინაპირობად იქცნენ ავტომატური მართვის თეორიის განვითარებისა. აღვნიშნოთ, რომ მსგავსი პრობლემების უმრავლესობა შეესაბამება წინა ნაწილში მოხსენიებულ მეორე კლასის ამოცანებს. კოსმოსური ტექნიკა მაგალითად მოითხოვს საწვავის მინიმალურ დანახარჯს ან მინიმალურ გახურებასორბიტიდან ჩამოსვლის ან ატმოსფეროში შეჭრისას; აქედანაა მართვის ოპტიმიზაციის სხვადასხვა მეთოდების სწრაფი განვითარება. ისეთი ამოცანები, როგორცაა მსხვილი აეროპორტების რაიონებში საჰაერო მოძრაობის მართვა, თანამგზავრების,

ვერტიკალური აფრენის თვითმფრინავების და ვერტიკალური აფრენის რბილად დასმა, კოსმოსური ობიექტების და თვითმფრინავების შეპირიპირება საწვავის შევსების დროს. მოძრავი ობიექტების წყების მართვამ გვაიძულა ყურადღებით შეგვეხედა ობიექტების საბოლოო მართვის სფეროსათვის, რადგანაც ეს მეთოდები საშუალებას იძლევიან ვუზრუნველყოთ მოცემული დროის მომენტში ობიექტის მოცემული საბოლოო ფაზური მდგომარეობა. სხვაგვარად, შეიძლება მაგალითად საჭირო დროის განმავლობაში გადავიყვანოთ ობიექტი სივრცის შერჩეულ წერტილში სიჩქარის მოცემული ვექტორით.

ჩამოთვლილი ამოცანები იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ მათ დიდი ყურადღება ეთმობა. ასე მაგალითად 1968 წლის 30 სექტემბერ-5 ოქტომბერს ქ. თბილისში ჩატარდა IV საკავშირო შეკრება მოძრავი ობიექტების მართვის თაობაზე, 1974 წლის 26-31 აგვისტოს ცახკადორში შედგა ИФАК –ის VI სიმპოზიუმი, რომელიც ეძღვნებოდა სივრცეში ობიექტების მართვას.

გარდა ამისა, უკანასკნელ წლებში გამოქვეყნებულია მთელი რიგი ფუნდამენტალური ნაშრომებისა ოპტიმალური საბოლოო მართვის სფეროში, რომლებიც ანვითარებენ ზოგადთეორიულ საკითხებს [32-36] მაგრამ მიღებული შედეგების დიდი უმრავლესობა მიეკუთვნება მართვის პროგრამულ საშუალებას, რომელიც გამოითვლება  $u=u(t)$  სახით. პრაქტიკა კი მოითხოვს ავტომატური მართვის სისტემების აგებას (ამს), რომლებიც გამოიყენებენ შემობრუნებული კავშირის პრინციპს, ე.ი. მართვების სინთეზს, რომლებიც წარმოადგენენ ობიექტის მიმდინარე ფაზური მდგომარეობის ფუნქციებს.

საბოლოო მართვების სინთეზისა და ტექნიკური რეალიზაციის პრობლემების გადასაწყვეტად აუცილებელია რიგი სირთულეების გადალახვა, რომლებსაც აღნიშნავენ მოხსენებული შრომების ავტორები.

“ერთ-ერთ რთულ და ნაკლებად დამუშავებულ პრობლემად რჩება, რომელიც დაკავშირებულია მართული ობიექტების მოცემულ საბოლოო მდგომარეობამდე მოყვანის აუცილებლობაზე. ამჟამად, ეს ხშირად წარმოადგენს შეფერხების მმართველი ძალისხმევების კონკრეტული გამოთვლის გზაზე”(ნ.ნ.კრასოვსკი)[34].

“მართვის თეორიის გაფურჩქვნა, მომზადებული მისი განვითარების მთელი წინა ისტორიით, მჭიდროთ არის დაკავშირებული, ელექტრონულ-

გამოთვლითი ტექნიკის გამოჩენასთან, რომლის დამსახურებითაც აზრი მიეცა მართვის რთული ალგორითმების შექმნას”.(ნ.ნ.მოისევეი) [35]

ა.მ. ლეტოვი თავში “ტერმინალური მართვა” [36] ასევე აღნიშნავს, რომ ამჟამად არ არსებობს საკმარისად მარტივი მეთოდები საბოლოო მართვის ამოცანების გადასატრედად.

როგორც ვხედავთ, ავტორები ხაზს უსვამენ, რომ ოპტიმალური მართვის გაანგარიშების ალგორითმები რთულია და ამიტომ მოითხოვენ გამოთვლითი ტექნიკის გამოყენებას[29,31-33].

ზემოაღნიშნული ორი ფორუმის ლიტერატურული ანალიზს და მასალებს მიყვავართ შემდეგ დასკვნამდე: მართლაც, აქამდე არ არსებობს მარტივი საშუალებები საბოლოო მართვისა შებრუნებული კავშირით. სიმარტივეში აქ იგულისხმება მმართველი ფუნქციის გამოანგარიშების უბრალოება და მისი ტექნიკური რეალიზაციის სიმარტივე(ამს)-ში

მიუხედავად ნაშრომთა დიდი რაოდენობისა საბოლოო მდგომარეობის მართვის თეორიაში და ამ თეორიის მნიშვნელოვანი გამოყენების ფართო სფეროსი ეს უკანასკნელი იმყოფება ინჟინერული პრაქტიკის მოთხოვნილებებისაგან საკმაოდ შორს. თუმცა ოპტიმიზაციის ზოგადთეორიული საკითხებიდან გადავიდნენ მართვის კონკრეტული ამოცანების დასმასა და გადაწყვეტაზე, ამ პრობლემის მრავალი მხარე არასაკმარისადაა დამუშავებული.

## 1.5. დასკვნა და კვლევის მიზნები

### 1.5.1 დასკვნები

ზემოაღნიშნული მასალიდან გამომდინარეობს, რომ ობიექტების სივრცული მოძრაობის მართვისა და მოდელირების მეთოდები მნიშვნელოვნად მოქმედებს თანამედროვე ტექნიკური სისტემების(მფრინავი აპარატები, დამიხნების სისტემები, რობოტოტექნიკა, კომპიუტერული გრაფიკა და ანიმაცია, პროექტირების ავტომატური სისტემები (CAD) და ა.შ.) აგების ეფექტურობაზე და ფუნქციონირებაზე.

ანალიტიკური გადაწყვეტის ნაკლოვანებას მიეკუთვნება აშკარა სახით განზოგადებული კოორდინატების მიღების სირთულე და გაურკვეველობა, დაკავშირებული კინემატიკურ არაერთმნიშვნელობასთან და გამოყენებულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან. მაგრამ, ძირითად ნაკლოვანებად მაინც ითვლება

მანიპულატორების ნებისმიერი სივრცითი კონსტრუქციებისთვის ამოხსნის მიღების შეუძლებლობა. უფრო სწორედ, მანიპულატორები უკვე პროექტირდება იმის გათვალისწინებით, რომ კინემატიკის აღწერა შესაძლებელი იქნება ანალიტიკური გამოსახულების დახმარებით.

ასეთი ობიექტების მოძრაობების კინემატიკური და დინამიკური ამოცანების გამოთვლის ფართო კომპლექსში უმნიშვნელოვანეს ადგილს იკავებს კინემატიკის შებრუნებული ამოცანა. მისი ამოხსნისას ძირითად სირთულეს წარმოადგენს სამგანზომილებიანი ბრუნვებთან დაკავშირებული პრობლემა. უნდა აღინიშნოს, რომ ეს სირთულეები დამახასიათებელია დენევიტ-ხარტენბერგის მეთოდისათვის. მოცემული ამოცანა მრავალ შემთხვევაში მიდის მნიშვნელოვან გამოთვლით სირთულეებამდე რაც, საბოლოო ჯამში, ამცირებს ამ კუთხეების შეფასების სიზუსტეს, აუარესებს მართვის რიცხვის ხარისხს. საქმეთა ასეთი ვითარების მიზეზი არის სამგანზომილებიანი ბრუნვების წარმოდგენის მეთოდი ორთოგონალური, ნამდვილი, მესამე რიგის მატრიცების საშუალებით (ე.წ. სამგანზომილებიანი ბრუნვების ჯგუფის ძირითადი წარმოდგენა), რომლების ელემენტები ეილერის კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციებია. მოცემული მეთოდი, ერთის მხრივ, განკუთვნილია ცალკეული, ნულოვანი ცენტრის მქონე (კოორდინატთა სათავეში განლაგებული) კონკრეტული ბრუნვების აღსაწერად და, მეორეს მხრივ, არ იძლევა საშუალებას ეილერის კუთხეები გამოისახოს მოცემული ბრუნვის განმსაზღვრელი სამი წერტილის: ცენტრის, საწყისის და საბოლოოს, კოორდინატთა ფუნქციების სახით. ამავ დროს ობიექტის სამგანზომილებიანი სივრცის ერთი წერტილიდან მეორეში გადაყვანის (ბრუნვის) ამოცანა ძალიან გავრცელებულია და მისი გადაწყვეტის ახალი მეთოდების შემუშავება მნიშვნელოვნად შეუწყობს ხელს ზემოაღნიშნული სისტემების ეფექტური ფუნქციონირების ამაღლებას. იმის გამო, რომ გართულებულია პირდაპირი ფიზიკური ექსპერიმენტირება მსგავს სისტემებთან, აუცილებელია წინასწარი კომპიუტერული მოდელირება ამ სისტემების შემუშავების დროს. აღნისნული ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდების დანერგვა კომპიუტერული მოდელირების დროს საშუალებას იძლევა შემცირდეს აუცილებელი გამოთვლების მოცულობა და ამით მოხდეს პროცესის ხარისხის ამაღლება. ზემოთქმულიდან გამომდინარე, წარმოდგენილი სამუშაოს მიზანი მდგომარეობს სივრცითი მექანიზმებისთვის კინემატიკის შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის ახალი, სამგანზომილებიანი ბრუნვების ჯგუფის სპინორულ წარმოდგენაზე დაფუძნებული მეთოდის დამუშავებაში. გარდა ამისა, სივრცითი მოძრაობების მართვის ამოცანები არის ერთ-ერთი ყველაზე აქტუალური მიმართულება მაღალი

მეცნიერული ტექნოლოგიების კომპლექსში. მოცემული ამოცანების გადაწყვეტისას გამოყენებული მეთოდების უმრავლესობა წარმოადგენს პროგრამული მართვის ოპტიმალურ მეთოდებს (განთული მეთოდები უკუ კავშირის გარეშე). ასეთებს განეკუთვნება მაქსიმუმის პრინციპი, დინამიკური პროგრამირების მეთოდი, მომენტების მეთოდი და სხვა. როგორც აღინიშნა, ყველა ჩამოთვლილი მეთოდი პროგრამულია, ანუ ითხოვს მართვის კანონის  $u(t)$  წინასწარ გამოთვლას და არ იძლევა მოძრაობის პროცესში მისი კორექტირების საშუალებას. ამდროულად პრაქტიკა ითხოვს ავტომატური რეგულირების სისტემების (არს) აგებას, რომლებიც უკუ კავშირის პრინციპს იყენებს, რაც მოძრაობის პროცესში მოძრაობის ტრაექტორიის კორექტირების საშუალებას იძლევა. გარდა ამისა, რადგან უმეტეს შემთხვევაში სივრცითი მოძრაობების მართვის ამოცანების წარმატებით გადაწყვეტისთვის საჭიროა მოძრაობის საბოლოო სტადიაზე ზუსტი პოზიციონირების უზრუნველყოფა, ამიტომ განსაკუთრებულ აქტუალობას იძენს სწორედ მათი საბოლოო მდგომარეობების (ტერმინალური მდგომარეობების) მართვა. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ მარტივი ადაპტიური მოძრაობის ობიექტების საბოლოო მდგომარეობების ავტომატური რეგულირების სისტემების დამუშავებასთან დაკავშირებული ამოცანები აქტუალურია და პასუხობს მეცნიერული ტექნოლოგიების განვითარების თანამედროვე მოთხოვნებს.

## 1.5.2 კვლევის მიზნები.

როგორც ზემოდ იყო ნაჩვენები, განხილული ამოცანების ამოხსნა დაკავშირებულია საკმაოდ გართულებული კოორდინატთა სისტემების შემოღებასთან, სივრცული გარდაქმნების ასახვისთვის საჭირო დიდმოცულობიანი მრავალეჭაპიან გამოთვლებთან, რომლებიც მოითხოვენ მატრიცების მრავალჯერად გამრავრავლებებს. ამავე დროს, აუცილებელი პარამეტრების და პირობების ინტერპრეტაცია ხშირად გართულებულია მათი არაერთგვაროვნების გამო.

ამრიგად, ჩვენ განვსაზღვრეთ მოცემული კვლევის შემდეგი ამოცანები:

- ტრადიციული მეთოდების ნაცვლად შემუშავდეს ახალი მეთოდი დაფუძნებული ინოვაციურ მათემატიკურ მეთოდზე, რომელიც საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ ეილერის კუთხეები, როგორც საწყისი და სობოლოვ წერტილების კოორდინატების ფუნქციები.
- დასამუშავებელმა მეთოდმა საშუალება უნდა მოგვცეს გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია მხოლოდ



**ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად.**

- **დამუშავდეს სივრცითი ბრუნვების საბოლოო (ტერმინალური) მდგომარეობების მართვის მარტივი ადაპტიური ალგორითმები**

თითოეული ამ პრობლემის გადაჭრა მოითხოვს სპეციალურ მეთოდებსა და მიდგომებს. ეს მეთოდებია ბრუნვათა ჯგუფების სპინორული წარმოდგენების და კომპლექსური სივრცეების უნიტარული გარდასახვების თეორიის შედეგები. მომდევნო თავები ეთმობა აღნიშნული საკითხების განხილვასა და მიღებული შედეგების შეფასებას

## თავი მეორე

### განზოგადოებული ბრუნვების თეორიული საფუძვლების შემუშავება

#### 2.1. ძირითადი ცნობები სივრცულ ბრუნვათა წარმოდგენის თეორიიდან.

ქვემოთ მოყვანილ ნაწილში წარმოდგენილია შემდგომში აუცილებელი მოკლე ცნობები სივრცულ ბრუნვათა წარმოდგენის თეორიიდან ორთოგონალური ოპერატორების დახმარებით ნამდვილ სივრცეებში [37].

ბრუნვები წარმოადგენენ ნამდვილი სივრცის ისეთ გარდაქმნას, რომელიც არ ცვლის ბრუნვად ვექტორთა სიგრძეებს, ამიტომ ასეთი გარდაქმნების ოპერატორების როლში ბუნებრივია გამოვიყენოთ ორთოგონალური ოპერატორები. მათი მახასიათებელ მრავალწევრთა ფესვებს შორის ყოველთვის არსებობენ კომპლექსური წევრები, ამიტომ ორთოგონალური ოპერატორები არ ექვემდებარება დიაგონალიზაციას ნამდვილ რიცხვთა ველზე [37].

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მათი მატრიცების უმარტივესი ფორმა, საჭირო ხდება გამოვიყენოთ მათი კომპლექსიფიკაცია – უნიტარული ოპერატორები.

დავუშვათ  $V$  არის ნამდვილი წრფივი სივრცე,  $V^c$  კი – მისი კომპლექსიფიკაცია, ესე იგი წრფივი სივრცე, რომელიც შედგება  $z=x+iy$  სახის ვექტორებისაგან, სადაც  $x,y \in V$ . წრფივი ოპერატორ  $A: V \rightarrow V$  – სათვის ბუნებრივად განისაზღვრება კომპლექსური ოპერატორი  $A^c: V^c \rightarrow V^c$ , მოქმედი შემდეგი ფორმულის მიხედვით:

$$A^c(x+iy)=Ax+iAy. \quad (33)$$

ადვილად შესამოწმებელია, რომ ამგვარად განსაზღვრული ოპერატორი  $A^c$  ნამდვილად არის წრფივი კომპლექსურ სივრცეში  $V^c$ . მას უწოდებენ  $A$  ოპერატორის კომპლექსიფიკაციას. ვინაიდან  $V$  სივრცის ნამდვილი ბაზისი წარმოადგენს იმავდროულად ბაზისს  $V^c$  სივრცეში, ცხადია, რომ ამ ბაზისში  $A^c$  ოპერატორის მატრიცა ემთხვევა  $A$  ოპერატორის მატრიცას. ეს ნიშნავს, რომ  $A$  და  $A^c$  ოპერატორებს აქვთ ერთი და იგივე მახასიათებელი მრავალწევრები, ამასთან, მათი ნამდვილი ფესვები წარმოადგენენ ორივე ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობებს, იმ დროს, როცა კომპლექსური ფესვები არიან ასეთები მხოლოდ ოპერატორი  $A^c$ -სთვის. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ოპერატორი  $A^c$  დიაგონალიზირებადია კომპლექსურ





სამგანზომილებიან შემთხვევაში ორთოგონალური ოპერატორის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე [38,39]

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (36)$$

მას აქვს მარტივი გეომეტრიული აზრი. დავუშვათ, რომ გვაქვს  $x$ ,  $y$  და  $z$  კოორდინატთა ორთონორმირებული სისტემა, მაშინ ცხადია, რომ მატრიცა (36) აღწერს ბრუნვას  $\varphi$  კუთხით ღერძი  $x$ -ს მიმართ და  $oyz$  სიბრტყეში. ამასთან ორთოგონალური ოპერატორი  $A$ -ს მახასიათებელ მრავალწევრს აქვს სამი მახასიათებელი ფესვი:  $1$ ,  $\sin\varphi+i\cos\varphi$  და  $\sin\varphi-i\cos\varphi$ . მათი მოდულები ტოლია ერთის. პირველი ფესვი, რომელიც ტოლია ერთის, ამავდროულად არის ოპერატორ  $A$ -ს საკუთარი მნიშვნელობა, ამიტომ მას შეესაბამება საკუთარი ვექტორი, რომელიც განსაზღვრავს ერთგანზომილებიან ინვარიანტულ ქვესივრცეს – ბრუნვის ღერძს (ამ შემთხვევაში ის ემთხვევა  $x$  ღერძს). კომპლექსური ფესვები არ შეიძლება იყონ საკუთარი მნიშვნელობები ნამდვილ რიცხვთა ველზე, ამიტომ არ შეიძლება ვილაპარაკოთ შესაბამის საკუთარ ვექტორებზე. მაგრამ მატრიცა (36)-ს ფორმიდან ცხადია, რომ ბრუნვა წარმოებს ბრუნვის ღერძის პერპენდიკულარ ქვესივრცეში, ესე იგი –  $oyz$  სიბრტყეში.

ორთოგონალური ოპერატორი (36)-ს კომპლექსიფიკაცია არის დიაგონალიზირებადი უნიტარული ოპერატორი კომპლექსურ რიცხვთა ველზე, ვინაიდან სამივე მახასიათებელი ფესვები წარმოადგენენ საკუთარ მნიშვნელობებს:

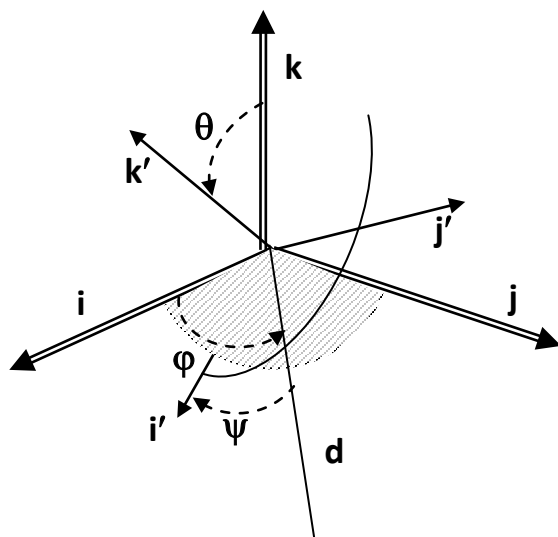
$$A = \begin{vmatrix} e^{i\psi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{vmatrix},$$

სადაც  $\psi=0^2$ .

ორთოგონალური ოპერატორი  $A$ -ს მატრიცის ჩაწერა (36) სახით ვარაუდობს, რომ არჩეულია გარკვეული ორთონორმირებული ბაზისი: ვექტორ  $e_1$ -ს მიმართულება თანხვედრილია ბრუნვის მიმართულებასთან, ვექტორები  $e_2$  და  $e_3$  კი შეადგენენ

<sup>2</sup> აქ:  $e^{i\psi} = 1; e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

ბრუნვის ორგანზომილებიანი სივრცის (სიბრტყის) ბაზისს. თუ ბაზისის არჩევა ნებისმიერია, მატრიცა  $A$ -ს, ცხადია, აქვს სხვა სახე. ბრუნვის ორთოგონალური ოპერატორების მატრიცათა წარმოდგენის ერთერთი ხერხია ე.წ. ეილერის კუთხეთა გამოყენება, რომლებიც ნაჩვენებია ფიგ.1.1-ზე. ბრუნვა  $\Omega$ -ს გადაჰყავს ბაზისურ ვექტორთა  $O_{ijk}$  სისტემა  $O_{i'j'k'}$  სისტემაში. დავუშვათ, რომ  $0 \leq \theta \leq \pi$  არის კუთხე  $k$  და  $k'$  შორის. თუ ვექტორები არაპარალელურები არიან, მაშინ სიბრტყეები  $O_{ij}$  და  $O_{i'j'}$  გადაიკვეთებიან  $d$  წრფეზე. დავუშვათ  $e$  ერთეული ვექტორია, მიმართული ისე, რომ, თუ უყურებთ მისი ბოლოდან, მაშინ  $k$  ვექტორის ისეთი შემობრუნება, რომელიც მას ამოხვევს  $k'$  ვექტორთან, იწარმოებს საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით. დავუშვათ  $\pi < \varphi \leq \pi$  არის კუთხე ვექტორ  $i$ -სა და ვექტორ  $e$ -ს შორის, ესე იგი წარმოადგენს შემობრუნების კუთხეს  $\Phi$   $ok$  ღერძის ირგვლივ, რომელსაც გადაჰყავს  $i, j, k$   $e, e_1, k$ -ში. ცხადია, რომ  $i, j, k$  ბაზისში ორთოგონალურ ოპერატორ  $\Phi$ -ს აქვს ბრუნვის მატრიცა



ნახაზი 6 [38, 40].  $\varphi, \theta, \psi$  – ეილერის კუთხეები.  $i, j, k$  – საბაზისო ვექტორების საწყისი სისტემა;  $i', j', k'$  – ახალი სისტემა შემობრუნების შემდეგ; ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ;  $0 \leq \theta \leq \pi$ ;  $-\pi < \psi \leq \pi$ )

$$\Phi = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

და ვექტორი  $e$  განისაზღვრება  $e_1 = \Phi j$  ტოლობიდან.

შემდეგი ბრუნვა  $\Theta$  სრულდება  $d$  ღერძის ირგვლივ და გადაჰყავს ბაზისი  $e, e_1, k$  ახალ  $e, e_2, k'$  ბაზისში, ამასთან  $e_2 = \Theta e_1$ . ამ შემობრუნების მატრიცას  $e, e_1, k$  ბაზისში აქვს შემდეგი სახე

$$\Theta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

მესამე ბრუნვა  $\Psi$  ასრულებს შემობრუნებას  $Ok'$  ღერძის ირგვლივ და გადაჰყავს ვექტორები  $e, e_2, k'$   $i', e_3, k'$  ვექტორებში, ესე იგი ბრუნვა სრულდება  $Ok'$  ღერძის ირგვლივ, ამასთან ვექტორი  $e$  გადადის ვექტორ  $i'$ -ში, ხოლო ვექტორი  $e_2$  ვექტორ  $e_3$ -ში:  $e_3 = \Psi e_2$ . გარდაქმნის მატრიცას  $e, e_2, k'$  ბაზისში აქვს შემდეგი სახე:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

ბაზისი  $i', e_3, k'$  ორთონორმირებულია და ერთნაირად ორიენტირებულია ბაზის  $i', j', k$ -თან, ამიტომ  $e_3 = j'$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალური ოპერატორი

$$\Omega = \Psi \Theta \Phi,$$

რომელიც წარმოადგენს  $\Psi \Theta \Phi$  თანმიმდევრულ ბრუნვათა შედეგს, და ახდენს ბაზის  $i, j, k$ -ს გარდაქმნას  $i', j', k'$  ბაზისად, ესე იგი ასრულებს სამგანზომილებიანი სივრცის დასახულ  $\Omega$  ბრუნვას. ორთოგონალური ოპერატორი  $\Omega$ -ს მატრიცა ტოლი

იქნება სამი ზემოთმოყვანილი მატრიცის ნამრავლსა, რომელიც სრულდება უკუ თანმიმდევრობით

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

(37)

ამაში მდგომარეობს ეილერის თეორემა, რომელიც ამტკიცებს, რომ ნებისმიერი საკუთარი ორთოგონალური მატრიცა  $A \in SO(3)$  უშვებს (37) სახის დაშლას, რომლის ძირითადი პარამეტრების როლში გამოდიან ეილერის კუთხეები [38, 39].

სამგანზომილებიანი სივრცის ორთოგონალურ გარდაქმნათა ეილერისეული წარმოდგენებმა იპოვეს ფართო გამოყენება ამოცანებში, რომლებიც დაკავშირებული არიან როგორც რობოტ-მანიპულატორების, ასევე ნებისმიერი სივრცული მექანიზმების კინემატიკასთან [41÷47].

## 2.2. ოთხგანზომილებიან ფსევდოევკლიდური სივრცის სპინორული მოდელი.

სპინორული გეომეტრიის მეთოდები გამოიყენებიან ძირითადად კვანტურ მექანიკაში [48÷50], და პრაქტიკულად ვერ იპოვეს რამდენადმე სერიოზული გამოყენება რთული მექანიკური სისტემების ანალიზისა და გაანგარიშების ამოცანებში. როგორც ჩანს, ეს დაკავშირებულია ამ მეთოდის ფრიად რთული მათემატიკურ მხარესთან.

დაეუშვათ  $L^{1,3}$  არის სიგნატურა (35)-ს ფსევდოევკლიდური სივრცე. ამ სივრცის ყოველ ვექტორს, რომელიც ჩვეულებრივად წარმოდგენილია სახით

$$x = x^i e_i, (i=0,1,2,3)$$



სადაც  $e_i$  –  $L^{1,3}$  სივრცის ფსევდოორთონორმირებული ბაზისია, შეიძლება შევუპირისპიროთ ერმიტის მატრიცა [37]

$$X = \begin{vmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{vmatrix}. \quad (38)$$

ამ მატრიცის ელემენტებს

$$x^{0\bar{0}} = x^0 + x^3; x^{1\bar{0}} = x^1 - ix^2; x^{0\bar{1}} = x^1 + ix^2; x^{1\bar{1}} = x^0 - x^3$$

ეწოდებათ ვექტორ  $x$ -ს სპინორული კომპონენტები. დეფისი მეორე ინდექსზე გვიჩვენებს, რომ ერმიტის ფუნქციონალი (38) ნახევრად წრფივია მეორე არგუმენტის მიხედვით, ესე იგი ადგილი აქვს წრფივობას კომპლექსურად შეუღლებული სივრცის მიმართ.

ეს კი ნიშნავს, რომ ჩვენ ვაიგივებთ ფსევდოევკლიდური სივრცე  $L^{1,3}$ -ს ვექტორებს ერმიტის ფუნქციონალებთან, რომლებიც მოქმედებენ ორგანზომილებიან კომპლექსურ სივრცეში  $C^2$ , რომლის ვექტორებსაც ეწოდება სპინორები, ხოლო პოლი- და წილადობრივად წრფივი ფორმების ტენზორებს მასზე – სპინტენზორები, და თვით სივრცეს – სპინორთა სივრცე [37,39]. ამგვარად,  $L^{1,3}$  სივრცის ტენზორი  $x^i$  (ვექტორი) გაიგივებულია სპინტენზორთან  $x^{\alpha\bar{\beta}}$  (ერმიტის ფუნქციონალთან)  $C^2$  სივრცეზე, რომელიც მოცემულია ამ სივრცის რომელიმე  $e_0, e_1$  ბაზისზე. მეორე მხრივ, ადვილად ჩანს, რომ ერმიტის ფუნქციონალის (38) მატრიცა შეიძლება იყოს წარმოდგენილი პაულის მატრიცების წრფიული კომბინაციის სახით

$$X = x^0 \sigma_0 + x^1 \sigma_1 + x^2 \sigma_2 + x^3 \sigma_3, \quad (39)$$

$$\text{სადაც } \sigma_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}; \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \text{პაულის მატრიცებია,}$$

რომლებიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც  $\frac{1}{2}$  წონის ბრუნვის ჯგუფის წარმოდგენის ელემენტები. აქვე აღვნიშნავთ, რომ პაულის მატრიცები არიან

ერთდროულად ერმიტულიც და უნიტარულიც, რაც შეიძლება უშუალოდ შემოწმდეს. მომავლისთვის ჩვენ დაგვიკვირდება მათი გამრავლების ტაბულაც.

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$\sigma_1$	$\sigma_0$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
$\sigma_2$	$-i\sigma_3$	$\sigma_0$	$i\sigma_1$
$\sigma_3$	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	$\sigma_0$

ცხრილი 2. პაულის მატრიცების გამრავლების ტაბულა

(39) დაშლიდან გამომდინარეობს, რომ ერმიტის ყველა ფუნქციონალთა სიმრავლე წარმოადგენს ოთხგანზომილებიან წრფივ სივრცეს  $M^{1,3}(\mathbb{C}^2)$  ნამდვილ რიცხვთა ველზე. ამ სივრცის ბაზისს წარმოადგენენ ერმიტის ფუნქციონალები  $\underline{\sigma}_i$ <sup>3</sup> ( $i=0,1,2,3$ ), რომელთაც ასოცირებულ მატრიცათა როლში აქვთ პაულის მატრიცები. ეს ფუნქციონალები, რომლებიც იმავდროულად არიან სპინტენზორები, შეიძლება იყონ წარმოსახული როგორც ტენზორული ნამრავლები  $\mathbb{C}^2$  სპინორთა სივრცის  $e_0, e_1$  ბაზისური ვექტორებისა [39]

$$\underline{\sigma}_0 = e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1; \quad \underline{\sigma}_1 = e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0;$$

$$\underline{\sigma}_2 = ie_1 \otimes e_0 - ie_0 \otimes e_1; \quad \underline{\sigma}_3 = e_0 \otimes e_0 - e_1 \otimes e_1.$$

მაგალითად, შევაშოთ მესამე ტოლობა

$$\underline{\sigma}_2 = ie_1 \otimes e_0 - ie_0 \otimes e_1 = i(0 \ 1) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i(1 \ 0) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}.$$

(38) მატრიცის დეტერმინანტი განსაზღვრავს ერმიტული ფუნქციონალ  $\mu$ -ს ნორმას.

<sup>3</sup> იმისათვის, რომ გავარჩიოთ ერმიტის ფუნქციონალები მათი მატრიცებისაგან, ვსარგებლობთ ქვედა ხაზგასმით.

$$|\mu| = \begin{vmatrix} \mu^0 + \mu^3 & \mu^1 - i\mu^2 \\ \mu^1 + i\mu^2 & \mu^0 - \mu^3 \end{vmatrix} = \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2.$$

სკალარული ნამრავლი  $M^{1,3}(C^2)$  სივრცეში მოცემულია შემდეგი გამოსახულების სახით

$$(\mu, \eta) = \frac{1}{2}(TrMTrN - TrMN),$$

სადაც  $M$  და  $N$  –  $\mu$  და  $\eta$  ფუნქციონალების ერმიტული მატრიცებია.

ცხადია, რომ ამგვარად განსაზღვრული გამრავლება არის ბიწრფივიც და სიმეტრიულიც. პირველი გამომდინარეობს იქიდან, რომ კვალის აღების ოპერაცია არის წრფივი, მეორე კი – იქედან, რომ  $TrMN=TrNM$ . დავუშვათ, რომ ერმიტის ფუნქციონალები  $\mu$  და  $\eta$  მოიცემიან  $M^{1,3}(C^2)$  სივრცის  $e_0, e_1$  ბაზისში მატრიცებით

$$M = \begin{vmatrix} \mu^0 + \mu^3 & \mu^1 - i\mu^2 \\ \mu^1 + i\mu^2 & \mu^0 - \mu^3 \end{vmatrix} \text{ и } N = \begin{vmatrix} \eta^0 + \eta^3 & \eta^1 - i\eta^2 \\ \eta^1 + i\eta^2 & \eta^0 - \eta^3 \end{vmatrix}. \text{ მაშინ ადვილი გამოსათვლელია,}$$

რომ  $TrMTrN = 4\mu^0\eta^0$ . გამოვთვალოთ  $M$  მატრიცის პირველი სტრიქონის ნამრავლი  $N$  მატრიცის პირველ სვეტზე:  $\mu^0\eta^0 + \mu^0\eta^3 + \mu^3\eta^0 + \mu^3\eta^3 + \mu^1\eta^1 + i\mu^1\eta^2 - i\mu^2\eta^2 + \mu^2\eta^2$  და  $M$  მატრიცის მეორე სტრიქონის ნამრავლი  $N$  მატრიცის მეორე სვეტზე:  $\mu^1\eta^1 - i\mu^1\eta^2 + i\mu^2\eta^1 + \mu^2\eta^2 + \mu^0\eta^0 + \mu^0\eta^3 - \mu^3\eta^0 + \mu^3\eta^3$ . მათი ჯამი იქნება  $TrMN = 2(\mu^0\eta^0 + \mu^1\eta^1 + \mu^2\eta^2 + \mu^3\eta^3)$ , საიდანაც საბოლოოდ გვაქვს

$$(\mu, \eta) = \frac{1}{2}(TrMTrN - TrMN) = \mu^0\eta^0 - \mu^1\eta^1 - \mu^2\eta^2 - \mu^3\eta^3, \quad (40)$$

ესე იგი (40) ნამდვილად განსაზღვრავს ფსევდოევკლიდურ ნამრავლს მინკოვსკის სივრცეში [39]. ესლა გვრჩება შევამოწმოთ ტოლობა

$$(TrM)^2 - TrM^2 = 2 \det M,$$

ესე იგი უნდა შევამოწმოთ, გვაძლევს თუ არა (40) ვექტორის ფსევდოევკლიდურ ნორმას, როცა  $\mu=\eta$ . თუ  $\lambda_1^2$  და  $\lambda_2^2$  იქნებიან  $M^2$  მატრიცის საკუთარი ვექტორები და მაშასადამე  $TrM^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ , ამიტომ (იმის გათვალისწინებით, რომ  $2 \det M = 2\lambda_1\lambda_2$ ) გვაქვს

$$(TrM)^2 - TrM^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 2\lambda_1\lambda_2 = 2 \det M .$$

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ სკალარული ნამრავლი გარდაქმნის პაულის მატრიცებს ფსევდოორთონორმირებულ სისტემად, რაც გამომდინარეობს იქედან, რომ  $Tr\sigma_0 = 2, Tr\sigma_i = 0 (i=1,2,3)$  და ცხრილი 2-დან. მაგალითად,

$$(\sigma_2, \sigma_2) = \frac{1}{2}(0 - Tr\sigma_0) = -1; (\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}(0 - Tr\sigma_3) = 0$$

ამ მსჯელობათა შედეგად ჩვენ გვეძლევა საშუალება გავაიგივეოთ  $M^{1,3}(C^2)$  სივრცე, ესე იგი ყველა ერმიტული ფუნქციონალების (ორვალენტის სპინტენზორების) სივრცე, რომლის ფსევდოეკლიდური ბაზისი შედგება პაულის მატრიცებისაგან, ხოლო ფსევდოეკლიდური მეტრიკა მოგვეცემა (40) ფორმით, ნებისმიერ ფსევდოეკლიდურ  $M^{1,3}$  სივრცესთან. შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ  $M^{1,3}(C^2)$  და  $M^{1,3}$  აღვნიშნებს როგორც ტოლფასოვნებს.

როგორც უკვე ვიცით,  $C^2$  სივრცის ბაზისი  $e_0, e_1$  განსაზღვრავს  $M^{1,3}(C^2)$  სივრცის ბაზისს  $\underline{\sigma}_i (i=0,1,2,3)$ , ამიტომ ბუნებრივად ჩნდება შემდგომისთვის მნიშვნელოვანი კითხვა იმის შესახებ, თუ როგორ უნდა მოხდეს მოცემული კომპლექსური  $C$  მატრიცის მიხედვით<sup>4</sup>, რომელიც გარდაქმნის ბაზისებს  $C^2$  -ში, იმ შესაბამისი ბაზისების გარდაქმნის მატრიცას განსაზღვრა, რომელიც გარდაქმნის ბაზისებს  $M^{1,3}$ -ში.

პაულის მატრიცები წარმოადგენენ მეორე რიგის კონტრავარიანტული სპინტენზორების მატრიცებს  $C^2$  სივრცეში, და მაშასადამე, თუ  $C$  არის  $C^2$  სივრცის ბაზისური ვექტორების გარდაქმნის მატრიცა, მაშინ სპინტენზორების კომპონენტები გარდაიქმნებიან  $\sigma_k^{ij} C_i^i C_j^j$  კანონის მიხედვით, ან მატრიცულ ფორმაში  $\bar{C}^T \sigma_i C$ .

წინადადება 1. [39]. დაეუშვათ, რომ  $C$  არის მეორე რიგის უნიტარული მატრიცა, მაშინ მატრიცები  $\bar{C}^T \sigma_i C (i=0,1,2,3)$ :

1. არიან უნიტარული და ერმიტული;
2. შეადგენენ ფსევდოორთონორმირებულ ბაზისს სკალარული ნამრავლის მნიშვნელობით (40).

<sup>4</sup> მეორე რიგის კომპლექსური მატრიცები წარმოქმნიან ჯგუფს, რომელიც აღინიშნება  $SL(2;C)$ -ით.

დამტკიცება.

1.  $(\overline{C}^T \sigma_i C)(\overline{C}^T \sigma_i C)^T = (\overline{C}^T \sigma_i C)(\overline{C}^T \sigma_i C) = \overline{C}^T \sigma_i \sigma_i C = \overline{C}^T C = E$ ; ცხადია, რომ ასევე  $(\overline{C}^T \sigma_i C)^T (\overline{C}^T \sigma_i C) = E$ . გავიხსენოთ, რომ 1.1 ტაბულის მიხედვით,  $\sigma_i \sigma_i = \sigma_0 = E$  ( $i=0,1,2,3$ );

2. იმისათვის, რომ დამტკიცდეს პუნქტი 2, საჭიროა  $\overline{C}^T \sigma_i C$  მატრიცების და მათი სხვადასხვა ნამრავლების კვალი გამოთვლა.

$$Tr(\overline{C}^T \sigma_0 C) = Tr(\overline{C}^T C) = TrE = 2^5;$$

$$\overline{C}^T \sigma_1 C = \begin{vmatrix} \overline{\alpha} - \beta & * & 0 & 1 \\ \overline{\beta} & \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\alpha\beta + \overline{\alpha}\overline{\beta}) & (\overline{\alpha})^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 - (\overline{\beta})^2 & (\alpha\beta + \overline{\alpha}\overline{\beta}) \end{vmatrix},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $Tr(\overline{C}^T \sigma_1 C) = 0$ .

$$\overline{C}^T \sigma_2 C = \begin{vmatrix} \overline{\alpha} - \beta & * & 0 - i \\ \overline{\beta} & \alpha & i & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i(\overline{\alpha}\overline{\beta} - \alpha\beta) & -i((\overline{\alpha})^2 + \beta^2) \\ i(\alpha^2 + (\overline{\beta})^2) & i(\alpha\beta - \overline{\alpha}\overline{\beta}) \end{vmatrix},$$

რაც ისევ გვაძლევს  $Tr(\overline{C}^T \sigma_2 C) = 0$ , და ბოლოს

$$\overline{C}^T \sigma_3 C = \begin{vmatrix} \overline{\alpha} - \beta & * & 1 & 0 \\ \overline{\beta} & \alpha & 0 & -1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\overline{\alpha}\beta \\ 2\alpha\overline{\beta} & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{vmatrix},$$

რაც გვაძლევს ანალოგიურ შედეგს  $Tr(\overline{C}^T \sigma_3 C) = 0$ .

ვინაიდან ნამრავლები  $(\overline{C}^T \sigma_i C)(\overline{C}^T \sigma_i C) = E$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ), მათი კვალი უდრის 2. ნამრავლების  $(\overline{C}^T \sigma_i C)(\overline{C}^T \sigma_j C)$  ( $i \neq j$ ;  $i, j=1, 2, 3$ ) კვალი უდრის ნულს, რაც გამომდინარეობს 2 ცხრილიდან. და ბოლოს,  $(\overline{C}^T \sigma_i C)(\overline{C}^T \sigma_j C)$  ( $j=1, 2, 3$ ) ნამრავლი კვალი ასევე, ცხადია, უდრის ნულს.

---

<sup>5</sup> E- ერთეული მატრიცა

თუ ამ შედეგებს ჩავსმამთ სკალარულ ნამრავლში (1.8), ადვილად დავრწმუნდებით მოცემული ნამრავლის პუნქტი 2-ის სამართლიანობაში. წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 1-დან გამომდინარეობს, რომ  $C^2$  სპინორების სივრცე არის უნიტარული, რადგანაც ფსევდოორთონორმირებული ბაზისების კლასის არსებობა კომპლექსურ სივრცეში, რომლებიც დაკავშირებული არიან გადასვლათა უნიტარულ მატრიცებთან, შესაძლებელია მხოლოდ ერმიტული მეტრიკის არსებობისას, რომლის მიმართაც ბაზისთა მოცემული კლასი შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც ფსევდოორთონორმირებული.

წინადადება 1 ფაქტიურად ნიშნავს, რომ მატრიცები  $\bar{C}^T \sigma_i C$  შეადგენენ პაულის ახალ ფსევდოორთონორმირებულ ბაზისს  $\sigma'_i$ . სხვა სიტყვებით, გადასვლას ახალ ბაზისში  $C^2$  სივრცეში ( $C$  უნიტარული მატრიცის დახმარებით) ხელს უწყობს გადასვლა ახალ ფსევდოორთონორმირებულ  $M^{1,3}(C^2)$  -ში

$$\sigma'_i = \bar{C}^T \sigma_i C. \tag{41}$$

როცა ვიცით მატრიცა  $C$ , შეიძლება განისაზღვროს ფსევდოორთონორმალური მატრიცა  $A$ , რომელიც უზრუნველყოფს იგივე ფსევდოორთონორმალური ბაზისების გარდაქმნას  $M^{1,3}(C^2)$ -ში.

როგორც უკვე აღნიშნული იყო, პაულის მატრიცები წარმოადგენენ ერმიტულ მატრიცებს, ამიტომ  $M^{1,3}$ -ში არსებობს პაულის ბაზისი  $\sigma_i$ , რომელშიც ადგილი აქვს დაშლას ახალი ბაზისის მატრიცებისათვის.

$$\sigma'_i = \bar{C}^T \underline{\sigma}_i C = a_i^j \sigma_j \quad (i=0, 1, 2, 3). \tag{42}$$

ოთხი დაშლა (42) გვაძლევს მეოთხე რიგის ნამდვილ ფსევდოორთონორმალურ  $A$  მატრიცას, რომელიც ანხორციელებს ბაზისების გარდაქმნას  $M^{1,3}(C^2)$  -ში

$$\sigma'_i = a_i^j \sigma_j. \tag{43}$$

ტოლობები (43) გვაძლევენ 16 განტოლებას მატრიცა  $A$ -ს ელემენტების განსაზღვრისათვის.  $A$ -სთან ტრანსპონირებული  $A^T$  მატრიცა შეიძლება გამოყენებული იქნას ვექტორთა კოორდინატების გარდაქმნისათვის ბაზისების გარდაქმნის დროს.

$$x^i = a_i^j x^j.$$

### 2.3. სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის სპინორული მოდელი.

ჩვენ საბოლოო მიზანი, რომელიც უკავშირდება ბრუნვებს სამგანზომილებიან სივრცეში, არის სპინორული მოდელის აღწერა სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში.

განვიხილოთ ბაზისური  $\sigma_0$  ვექტორის ორთოგონალური დამატება  $\perp \sigma_0$ . ცნობილია, რომ ეს დამატება არის ანტიევკლიდური, ესე იგი, სკალარული ნამრავლების ნიშნების შეცვლის შემდეგ ხდება ევკლიდური, ორთონორმირებული ბაზისით  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . აღვნიშნოთ ეს სივრცე  $L^3(\mathbb{C}^2)$ -ით. ორთოგონალურ დამატებისკენ გადასვლა ნიშნავს, რომ საქმე გვექნება სამგანზომილებიან ვექტორებთან  $x(x^1, x^2, x^3) \in \perp \sigma_0$ , რომელთათვის  $x^0=0$ . სამგანზომილებიანი ვექტორების სპინორული მატრიცა ამიტომ იღებს შემდეგ სახეს:

$$X = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{vmatrix}, \quad (44)$$

რომლიდანაც ჩანს, რომ ის არის უკვალო ( $\text{Tr}X=0$ ).

ამრიგად, სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის სპინორულ მოდელად ჩვენ ვთვლით ორგანზომილებიანი უნიტარული კომპლექსური  $\mathbb{C}^2$  სივრცის ყველა უკვალო ერმიტული ფუნქციონალის სივრცეს.

სკალარული ნამრავლი  $L^3(\mathbb{C}^2)$  სივრცეში გამოვსახოთ

$$(\mu, \eta) = \frac{1}{2}(\text{Tr}MN), \quad (45)$$

ფორმულის სახით, სადაც  $M$  და  $N$  ისევ არიან ერმიტული ფუნქციონალების  $\mu$  და  $\eta$  მატრიცები ( $L^3(\mathbb{C}^2)$  სივრცის ვექტორები).

ცხადია, რომ ვექტორის სიგრძე ტოლია  $(\mu, \mu) = (\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + (\mu^3)^2$ . ვინაიდან  $\text{Tr}AB = \text{Tr}BA$ , (45) სიმეტრიულია. დაგვრჩა ვაჩვენოთ, რომ ნამრავლი (45) არის დადებითად განსაზღვრული ფუნქციონალი. მატრიცა  $M$  მეორე რიგისაა, ამიტომ მას აქვს ორი ფესვი, უკვალობა კი ნიშნავს, რომ მათი ჯამი ნულის ტოლია, ესე იგი

ფესვები უდრიან  $\pm\lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ . კვალი  $M^2$  ტოლი იქნება  $2\lambda^2$ , ეს კი ნიშნავს, რომ  $(\mu, \mu)$  შეიძლება უდრიდეს ნოლს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ  $\mu$  – ნულოვანი ვექტორია. აღვნიშნოთ, რომ  $M$  მატრიცის დეტერმინანტი უდრის  $\lambda^2$  (უდრის  $\lambda$  ( $-\lambda$ ) ფესვების ნამრავლს), მაგრამ მეორე მხრივ, ის ტოლია ვექტორის სუგრძის კვადრატის  $|\mu|^2 = (\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + (\mu^3)^2$ , ამიტომ  $M$  მატრიცის დადებითი საკუთარი მნიშვნელობა ტოლია  $\mu$  ვექტორის სიგრძის.

#### 2.4. განზოგადებული ბრუნვების თეორია და ეილერის კუთხეების გამოთვლა.

კინემატიკის შექცეული ამოცანის გადაწყვეტის ახალი მეთოდი, რომელიც აღწერილია ქვემოთ, ეფუძნება სამგანზომილებიანი სივრცის განზოგადებულ ბრუნვების მცნებას მათ სპინორულ წარმოდგენაში და ასევე ეილერის კუთხეთა გამოთვლის ახალ მეთოდს, რაზედაც საუბარი გვექნება მოცემულ ნაწილში.

დავუშვათ, მოცემულია სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის  $L^3$ -ის ორი ნებისმიერი წერტილი  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$  და  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$ . განვიხილოთ ასევე სიბრტყე  $\Xi$ , რომელიც პერპენდიკულარულია იმ წრფის მონაკვეთისა, რომელიც აერთებს  $\mathbf{x}$  და  $\mathbf{y}$  წერტილებს და გადის  $z_c^i = \frac{(x^i + y^i)}{2}$  წერტილზე, რომელიც განლაგებულია მონაკვეთის ცენტრზე.

იმის გათვალისწინებით, რომ  $\Xi$  სიბრტყის ნორმალის ვექტორის კოორდინატები ტოლია  $A_i = y^i - x^i$ , ნორმალის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$A_i(z^i - z_c^i) = 0$$

ან არართული გარდაქმნების შემდეგ, ასეთი სახით

$$A_i z^i + D = 0, \tag{46}$$

სადაც  $D = \frac{|y|^2 - |x|^2}{2}$ ;

$|x|^2$  და  $|y|^2$   $\mathbf{x}$ -ს და  $\mathbf{y}$ -ს ვექტორების ნორმების კვადრატებია.

ვაჩვენოთ, რომ  $|x - z| = |y - z|$ , სადაც  $z$  არის ნებისმიერი ვექტორი, რომელიც აკმაყოფილებს (46)-ს.



მართლაც, (46)-ან ადვილად ვიღებთ

$$\sum_{i=1}^3 ((y^i - x^i)z^i - \frac{(y^i - x^i)(y^i + x^i)}{2}) = \sum_{i=1}^3 \frac{x^{i^2} - 2x^i z^i + z^{i^2} - y^{i^2} + 2y^i z^i - z^{i^2}}{2} =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{(x^i - z^i)^2 - (y^i - z^i)^2}{2}$$

ამგვარად, წერტილთა წყვილი  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$  და  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$  წარმოქმნიან  $\Xi^{xy}$  სიბრტყეს, რომლის ყოველი წერტილი წარმოადგენს  $x$  წერტილის ბრუნვის ცენტრს  $y$  წერტილში.

როცა ბრუნვის ცენტრად ავირჩევთ ერთ-ერთ  $z$  წერტილს, განლაგებულს  $\Xi^{xy}$  სიბრტყეში, ტრანსლაციის გარდაქმნის დახმარებით შეიძლება  $z$  წერტილი შეთავსდეს კოორდინატთა სათავესთან

$$x^{i''} = x^i - z^i, \quad (47)$$

ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავე იქნება ბრუნვის ცენტრი.

განსაზღვრება 1. ეუწოდოთ განზოგადებული ბრუნვა სიმრავლეს  $L^3$  სივრცის ისეთ საკუთარ ორთოგონალურ გარდაქმნებს, რომლებსაც გადაჰყავთ  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$  წერტილი  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$  წერტილში  $\Xi^{xy}$  სიბრტყეში მდებარე ერთი-ერთი  $z$  წერტილის მიმართ [39].

შემდგომში იგულისხმება, რომ (47) გარდაქმნის მეშვეობით წერტილი  $z$ , რომლის მიმართაც განიხილება მოცემული ბრუნვა, გადატანილია კოორდინატთა სათავეში. ეუწოდოთ წერტილს  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$ -ს ბრუნვის საწყისი წერტილი და წერტილ  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$  –ს კი – საბოლოო წერტილი. ნათქვამიდან ბუნებრივად ჩნდება განზოგადებული ბრუნვის განსაზღვრის ამოცანა მოცემული საწყისი და ბოლო წერტილებისთვის, ესე იგი  $L^3$  სივრცის საკუთარ ორთოგონალურ გარდაქმნათა შესაბამისი სიმრავლის განსაზღვრის ამოცანა.

პუნქტ (2.2)-ის გათვალისწინებით, მოცემული ამოცანა შეიძლება იყოს გადაფორმულირებული სპინორების თეორიის ტერმინებში:

მოცემულია ერმიტული ფუნქციონალების ორი უკვალო მატრიცა

$$X = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{vmatrix} \text{ და } Y = \begin{vmatrix} y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & -y^3 \end{vmatrix}, \text{ რომლებიც მოცემული არიან } \mathbb{C}^2$$

სპინორების სივრცეში. ამ მატრიცებს უკავშირდებიან შესაბამისად უკვალო ერმიტული ფუნქციონალების  $L^3(\mathbb{C}^2)$  ევკლიდური სივრცის ვექტორები  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$  და  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$ ; საჭიროა განვსაზღვროთ  $\mathbb{C}^2$  სპინორთა სივრცის ბაზისების გარდაქმნის უნიტარულ მატრიცათა  $C = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$  სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$Y = \bar{C}^T X C, \tag{48}$$

სადაც  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  და  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ .

## 2.5. ეილერის კუთხეების გამოსახველი გამოსახულების მიღება

ამ ნაწილში გათვალისწინებულია განზოგადოებული ბრუნვების ეილერის კუთხეების, როგორც ბრუნვის საწყისი, საბოლოო და ცენტრის კოორდინატების ფუნქციების, საინჟინრო გამოსახულებების მიღება. ქვემოთ მოყვანილია ამ ამოცანის გადაწყვეტის შედეგები და შესაბამისი თეორია.

### 2.5.1. უნიტარული და ორთოგონალური მატრიცების დამაკავშირებელი განტოლებები.

შემდგომში იგულისხმება, რომ (47) გარდაქმნის მეშვეობით წერტილი  $z$ , რომლის მიმართაც განიხილება მოცემული ბრუნვა, გადატანილია კოორდინატთა სათავეში. ვუწოდოთ  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$ -ს წერტილს ბრუნვის საწყისი წერტილი და წერტილ  $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$  –ს კი – საბოლოო წერტილი. ნათქვამიდან ბუნებრივად ჩნდება განზოგადებული ბრუნვის განსაზღვრის ამოცანა მოცემული საწყისი და ბოლო წერტილებისთვის, ესე იგი  $L^3$  სივრცის საკუთარ ორთოგონალურ გარდაქმნათა შესაბამისი სიმრავლის განსაზღვრის ამოცანა.

პუნქტ (2.2)-ის გათვალისწინებით, მოცემული ამოცანა შეიძლება იყოს გადაფორმულირებული სპინორების თეორიის ტერმინებში:

მოცემულია ერმიტული ფუნქციონალების ორი უკვალო მატრიცა

$$X = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{vmatrix} \text{ და } Y = \begin{vmatrix} y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & -y^3 \end{vmatrix}, \text{ რომლებიც მოცემული არიან } \mathbb{C}^2$$

სპინორების სივრცეში. ამ მატრიცებს უკავშირდებიან შესაბამისად უკვალო  
ერმიტული ფუნქციონალების  $L^3(\mathbb{C}^2)$  ევკლიდური სივრცის ვექტორები  $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$  და  
 $\mathbf{y}(y^1, y^2, y^3)$ ; საჭიროა განვსაზღვროთ  $\mathbb{C}^2$  სპინორთა სივრცის ბაზისების გარდაქმნის

უნიტარულ მატრიცათა  $C = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$  სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობას

$$Y = \bar{C}^T X C, \quad (49)$$

$$\text{სადაც } \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \text{ და } \beta = \beta_1 + i\beta_2.$$

შევნიშნოთ, რომ  $C$  გარდაქმნის უნიტარულობის შედეგად ვექტორის ნორმები,  
რომლებიც განისაზღვრებიან  $X$  და  $Y$  ერმიტული ფუნქციონალების მატრიცების  
დეტერმინანტებით, ერთმანეთის ტოლი არიან, ამიტომ (48) ნამდვილად განსაზღვრავს  
ბრუნვას.

ცხადია, რომ მოცემული ამოცანა ადვილად ვრცელდება იმ შემთხვევაზეც,  
როცა ორი სასრულო წერტილის ნაცვლად განიხილება სიმრავლე  $\mathbf{x}_i(x_i^1, x_i^2, x_i^3)$  და  $\mathbf{y}_i$   
( $y_i^1, y_i^2, y_i^3$ )  $i=1,2,\dots,m$  წერტილებისა, რაც შეესაბამება მყარი სხეულის ბრუნვებს.

(49) მატრიცული ტოლობიდან, მასში მატრიცა  $C$ -ს და  $X$  და  $Y$  ერმიტული  
ფუნქციონალების მატრიცების ჩასმით, შეიძლება მიღებულ იქნას წრფივი  
ერთგვაროვანი განტოლებების შემდეგი სისტემა  $\alpha$  და  $\beta$  უცნობთა მიმართ.

$$\begin{aligned} x^3\alpha + \gamma\beta &= y^3\alpha - \delta\bar{\beta}, \\ \bar{\gamma}\alpha - x^3\beta &= y^3\beta + \delta\bar{\alpha}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\text{სადაც } \gamma = x^1 + ix^2 \text{ და } \delta = y^1 + iy^2.$$

(50) არის მეორე ხარისხის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებების სისტემა,  
რომლის ამოხსნას ერთერთი უცნობის, მაგალითად,  $\alpha$ -ს, ნებისმიერი მნიშვნელობისას  
წარმოადგენს

$$\beta = \frac{\bar{\gamma}\alpha - \delta\bar{\alpha}}{x^3 + y^3} \quad (51)$$

რიგი მარტივი გარდაქმნეებით ვღებულობთ:

$$\operatorname{Re} \beta = \beta_1 = \frac{\alpha_1(x^1 - y^1) + \alpha_2(x^2 + y^2)}{x^3 + y^3} \text{ და}$$

$$\operatorname{Im} \beta = \beta_2 = \frac{\alpha_2(x^1 + y^1) - \alpha_1(x^2 - y^2)}{x^3 + y^3} \quad (52)$$

$\mathbb{C}$  ( $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$ ) მატრიცის უნიტარულობის პირობიდან შეიძლება განისაზღვროს ან  $\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha$  ან  $\alpha_2 = \operatorname{Im} \alpha$ . ოთხი პარამეტრიდან რჩება ერთი ნებისმიერი, ვთქვათ  $\alpha_1$ , ამიტომ განტოლებები (50), ნორმირების პირობასთან ერთად განსაზღვრავენ  $C_{\alpha_1}$  ოპერატორების უნიტარული მატრიცების ერთპარამეტრულ ოჯახს, რომლებიც ახდენენ განზოგადებული ბრუნვის რეალიზაციას და გადაჰყავთ  $(x^1, x^2, x^3)$  მატრიცა  $(y^1, y^2, y^3)$  მატრიცაში (რომელიც გადანაცვლებულია ვექტორ  $z$ -ით, რომელიც აკმაყოფილებს (46) სიბრტყის განტოლებას).

ბრუნვის ღერძი  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ინვარიანტულია  $\mathbb{C}$  გარდაქმნის მიმართ, რაც ჩაიწერება შემდეგი პირობის სახით:

$$\bar{C}^T \Xi C = \Xi,$$

$$\text{სადაც } \Xi = \begin{vmatrix} \xi^3 & \xi^1 - i\xi^2 \\ \xi^1 + i\xi^2 & -\xi^3 \end{vmatrix},$$

საიდანაც ვიღებთ სისტემას

$$\begin{aligned} \xi^3 \alpha + \mu \beta &= \xi^3 \alpha - \bar{\mu} \bar{\beta}, \\ \bar{\mu} \alpha - \xi^3 \beta &= \xi^3 \beta + \bar{\mu} \alpha, \end{aligned}$$

$$\text{სადაც } \mu = \xi^1 + i\xi^2,$$

რომელსაც მივყავართ ერთგავაროვან სისტემასთან  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  უცნობთა მიმართ:

$$\begin{aligned} \beta_1 \xi^1 - \beta_2 \xi^2 &= 0; \\ \alpha_2 \xi^2 - \beta_1 \xi^3 &= 0; \\ \alpha_2 \xi^1 - \beta_2 \xi^3 &= 0. \end{aligned}$$

ადვილად ჩანს, რომ ამ სისტემის რანგი უდრის ორს, ამიტომ ყოველთვის არსებობენ არატრივიალური, ნულისგან განსხვავებული ამოხსნები ( $\alpha_2 \neq 0$  და  $x^3 + y^3 \neq 0$ ), რომლებიც ჩაიწერებიან შემდეგი სახით:

$$\xi^1 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \xi^3; \xi^2 = \frac{\beta_1}{\alpha_2} \xi^3; \xi_3 - \text{ნებისმიერია,}$$

და რომლებიც განსაზღვრავენ ერთგანზომილებიან სივრცეს – ბრუნვის ღერძს  $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

ამ პარაგრაფს ვასრულებთ წინადადებით, რომელიც ეხება ბრუნვის ღერძს.

$L^3$ -ში მოქმედი ორთოგონალური ოპერატორი  $A$ -ს კომპლექსიფიკაცია  $A^c$  ექვემდებარება დიაგონალიზაციას, ამასთან ოპერატორ  $A$ -ს ორი საკუთარი მნიშვნელობა არიან კომპლექსურად შეუღლებულები, ერთი მათ შორის – უდრის ერთს და მისი შესაბამისი საკუთარი ვექტორი განსაზღვრავს ბრუნვის ღერძს [39]. აქედან გამომდინარეობს

**წინადადება 1** [52,53]. ვექტორი  $\xi$ , რომელიც აკმაყოფილებს  $\bar{C}^T \Xi C = \Xi$  ტოლობას, წარმოადგენს  $A$  გარდაქმნის საკუთარ ვექტორს (ეს გარდაქმნა განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით  $\bar{C}^T \sigma_i C = a_i' \sigma_i$  ( $i, i' = 1, 2, 3$ )), რომელიც შეესაბამება საკუთარ მნიშვნელობას 1-ს.

რადგან  $\bar{C}^T \Xi C = \bar{C}^T \xi^i \sigma_i C = \xi^i \bar{C}^T \sigma_i C$  და  $\bar{C}^T \Xi C = \bar{C}^T \xi^i \sigma_i C = \xi^i \bar{C}^T \sigma_i C$ , ამიტომ  $\bar{C}^T \Xi C = \xi^i a_i' \sigma_i = a_i' \xi^i \sigma_i$ .  $\bar{C}^T \Xi C = \Xi$  პირობიდან გამომდინარეობს, რომ  $a_i' \xi^i \sigma_i = \xi_i \sigma_i$ . ძველ და ახალ ბაზისებში კოორდინატთა ტოლობის საფუძველზე საბოლოოდ გვაქვს  $a_i' \xi^i = \xi_i$ . წინადადება დამტკიცებულია.

წინადადება 2 გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ ბრუნვის სიბრტყე, როგორც ორგანზომილებიანი ქვესივრცე, რომელიც ორთოგონალურია  $\xi$  ვექტორის მიმართ, რომელიც ამავედროულად არის  $A$  მატრიცის საკუთარი ვექტორი, რომელიც შეესაბამება საკუთარ მნიშვნელობას 1-ს.

**2.5.2. საკუთარი ორთოგონალური მატრიცის განსაზღვრა.**

შესაძლებელია დავადგინოთ შესაბამისობა ერთი მხრივ  $C^2$ -ში  $C = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$  მოქმედ გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებსა და, მეორე მხრივ, საკუთარი ორთოგონალური ნამდვილი მატრიცის  $A$  ( $L^3(C^2)$ -ში) ელემენტებს შორის.

აღრე იყო მიღებული თანაფარდობა (41), რომელიც ადგენს კავშირს  $C^2$ -ში მოქმედ  $C = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix}$  გარდაქმნის მატრიცის ელემენტებსა და, მეორე მხრივ, ფსევდოორთოგონალური ნამდვილ  $A$  მატრიცის ( $M^{1,3}(C^2)$ -ში) ელემენტებს შორის.  $L^3(C^2)$  სივრცის შემთხვევაში, რომელიც წარმოადგენს  $M^{1,3}(C^2)$  ქვესივრცეს, ანალოგიურ თანაფარდობას ორ ორთონორმირებულ ბაზისებს შორის გარდაქმნის  $A$  მატრიცისათვის ექნება შემდეგი სახე [38, 39].

$$\bar{C}^T \sigma_i C = a_i' \sigma_{i'} \quad (i, i' = 1, 2, 3), \tag{53}$$

სადაც  $\sigma_i$  – პაულის მატრიცებია, რომლებიც შეესაბამებიან ძველ ბაზისს,  $\sigma_{i'}$  – პაულის მატრიცები, რომლებიც შეესაბამებიან ახალ ბაზისს,  $a_i'$  კი –  $A^{-1}$  მატრიცის ელემენტები.

გაშლილი სახით (53) შეიძლება წარმოვადგინოთ სამი მატრიცული ტოლობის სახით

$$a_1^1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^1 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{vmatrix},$$

$$a_1^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{vmatrix},$$

$$a_1^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^3 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \bar{\alpha} \end{vmatrix}$$

გარდავქმნათ ამ ტოლობათა მარცხენა და მარჯვენა მხარეები.

$$a_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & -a_3 \end{vmatrix}$$

$$a_1^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^3 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3^2 & a_1^2 - ia_2^2 \\ a_1^2 + ia_2^2 & -a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$a_1^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a_2^3 \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} + a_3^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3^3 & a_1^3 - ia_2^3 \\ a_1^3 + ia_2^3 & -a_3^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) & (\bar{\alpha})^2 - \beta^2 \\ \alpha^2 - (\bar{\beta})^2 & (\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i\bar{\beta} & -i\bar{\alpha} \\ i\alpha & i\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i(\bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta) & -i((\bar{\alpha})^2 + \beta^2) \\ i(\alpha^2 + (\bar{\beta})^2) & i(\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{\alpha} - \beta & * \\ \bar{\beta} & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & -\bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\bar{\alpha}\beta \\ 2\alpha\bar{\beta} & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{vmatrix}$$

ამ ტოლობათა წევრობრივად გათანაბრებით, ვღებულობთ გამოსახულებებს A მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად C მატრიცის ელემენტების მიხედვით:

$$a_1^1 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\beta_1^2 - \beta_2^2); \quad a_2^1 = 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2); \quad a_3^1 = 2(\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1);$$

$$a_1^2 = 2(\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2); \quad a_2^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2); \quad a_3^2 = 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1);$$

$$a_1^3 = 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2); \quad a_2^3 = 2(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2); \quad a_3^3 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2). \quad (54)$$

## 2.6. ეილერის კუთხეების განსაზღვრა

(2.7) გამოსახულებება საშუალებას გვაძლევს სამი წერტილის მოცემული კოორდინატების მეშვეობით გამოვთვალოთ  $A^{-1}$  საკუთარი ორთოგონალური მატრიცების ელემენტები  $A^{-1}=A^T$  ორთოგონალურობის გამო.

იმის გათვალისწინებით, რომ მეორე მხრივ მატრიცა  $A$  შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (55)$$

სადაც  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  и  $-\pi < \psi \leq \pi$  - ეილერის კუთხეებია,

აღვილად ჩანს, რომ (54) გამოსახულებების და (55) მატრიცის შესაბამისი ელემენტების გამოყენებით, შეიძლება შევადგინოთ სამი განტოლება ეილერის კუთხეების განსაზღვრისათვის (ამასთან უნდა გავითვსალისწინოთ, რომ გამოსახულებები (54) გვაძლევენ მატრიცას, ტრანსპონირებულს  $A$ -ს მიმართ)

$$\cos \theta = a_{33}; \sin \varphi \sin \theta = a_{31} \text{ и } \sin \psi \sin \theta = a_{13}. \quad (56)$$

ამრიგად, სამგანზომილებიანი სივრცის ბრუნვის სპინორული მოდელი საშუალებას გვაძლევს:

1. აღვწეროთ საწყისი და ბოლო წერტილებით მოცემულ ბრუნვათა ერთობრივობა მათთვის დასაშვებ ცენტრთა სიმრავლის მიმართ, რასაც ადრე ვუწოდეთ განზოგადოებული ბრუნვები;
2. განვიხილოთ ნამდვილ ორთოგონალურ გარდაქმნათა მატრიცები  $L^3$ -ში, როგორც კერძო შემთხვევები უნიტარული გარდაქმნებისა  $C^2$ -ში, რამაც საშუალება მოგვცა გამოგვეყვანა გამოთვლის მარტივი ფორმულები ნამდვილ ორთოგონალურ მატრიცათა ელემენტებისათვის და მოძრაობის მართვის ისეთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური პარამეტრებისათვის, როგორც ეილერის კუთხეებია.

### 2.6.1. რიცხობრივი მაგალითი

ზემოთ მოყვანილი დასკვნების ილუსტრაციისათვის განვიხილოთ კონკრეტული რიცხობრივი მაგალითი. მასში გამოყენებული ყველა სიდიდე სრულიად ნებისმიერია, რაც ხაზს უსვამს დამუხსავებული მეთოდის მაღალ ზოგადობას.



ვთქვათ მოცემულია თანაბარი სიგრძის ორი ნებისმიერი ვექტორი  $\mathbf{x}(100; -30; 10)$  და  $\mathbf{y}(-12; 2; 104,73)$  ბრუნვის ნულოვანი ცენტრით. ნებისმიერად აღებული  $\alpha=-5+8i$  დროს, (51)-ს გამოვთვლით  $\beta=6,867+4,765i$  მისხედვით. აქედან ნორმირების შემდეგ ვიღებთ გარდაქმნის მატრიცას

$$C = \begin{vmatrix} -0,397 + 0,635i & -0,545 + 0,378i \\ 0,545 + 0,378i & -0,397 - 0,635i \end{vmatrix},$$

თუ გამოვსახავთ  $\mathbf{x}$  და  $\mathbf{y}$  ვექტორებს სპინორული მატრიცებით

$$X = \begin{vmatrix} 10 & 100 + 30i \\ 100 - 30i & -10 \end{vmatrix} \text{ და } Y = \begin{vmatrix} 104,173 & -12 - 2i \\ -12 + 2i & -104,173 \end{vmatrix},$$

ვამოწმებთ ნორმების ტოლობას (1.22)-ში

$$\begin{vmatrix} -0,397 + 0,635i & -0,545 + 0,378i \\ 0,545 + 0,378i & -0,397 - 0,635i \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 10 & 100 + 30i \\ 100 - 30i & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,397 - 0,635i & 0,545 - 0,378i \\ -0,545 - 0,378i & -0,397 + 0,635i \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 104,173 & -12 - 2i \\ -12 + 2i & -104,173 \end{vmatrix},$$

ესე იგი ამგვარად განსაზღვრული  $C$  გარდაქმნის მატრიცა ნამდვილად ასრულებს ბრუნვას.

(54) ფორმულების გამოყენებით გამოვთვლით მატრიცას

$$A = \begin{vmatrix} -0,399 & -0,916 & 0,048 \\ 0,092 & -0,092 & -0,992 \\ 0,912 & -0,392 & 0,121 \end{vmatrix}$$

ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ  $A$  მატრიცის დეტერმინანტი უდრის ერთს და რომ  $A^{-1}=A^T$ , ესე იგი  $A$  არის ნამდვილად ორთოგონალური მატრიცა.

შემდგომ ვამოწმებთ  $A\mathbf{x}=\mathbf{y}$  ტოლობას

$$\begin{vmatrix} -0,399 & -0,916 & 0,048 \\ 0,092 & -0,092 & -0,992 \\ 0,912 & -0,392 & 0,121 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ -30 \\ 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 \\ 2 \\ 104,73 \end{vmatrix}$$

ამგვარად, მატრიცა  $A$  ასრულებს იგივე ბრუნვას  $L^3$ -ში, რომელსაც კომპლექსური მატრიცა  $C$  ასრულებს  $C^2$ -ში.

ამჯერად ავიღოთ ბრუნვის ნულისგან განსხვავებული ცენტრი მდებარე (46) სიბრტყეში. ვაძლევთ  $z_3$  კოორდინატას ნებისმიერ მნიშვნელობას  $z^3=10=10$ , და (54) ფორმულების მიხედვით გამოვთვლით დანარჩენ ორ კოორდინატას  $z^2=-8,583$  და  $z^1=5,956$ . აქვე ადვილად ვრწმუნდებით, რომ

$$\begin{vmatrix} -0,399 & -0,916 & 0,048 \\ 0,092 & -0,092 & -0,992 \\ 0,912 & -0,392 & 0,121 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5,956 \\ -8,583 \\ 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5,956 \\ -8,583 \\ 10 \end{vmatrix}$$

ესე იგი ვექტორი  $z$  არის საკუთარი ვექტორი, რომელის შეესაბამება საკუთარ მნიშვნელობას 1-ს.

ასევე ადვილია გამოვთვალოთ, რომ მატრიცა  $A$  არის  $x$  და  $y$  საწყისი (გამოსავალი) წერტილების ბრუნვის მატრიცა ახალი ცენტრის მიმართ, რომელიც გადაადგილებულია ნულოვანიდან ვექტორ  $z$ -ით. ამისთვის გამოვთვლით ვექტორებს  $x-z=(94,044; -21,417; 0)$ ,  $y-z=(-17,956; 10,583; 94,173)$  და ნამრავლს

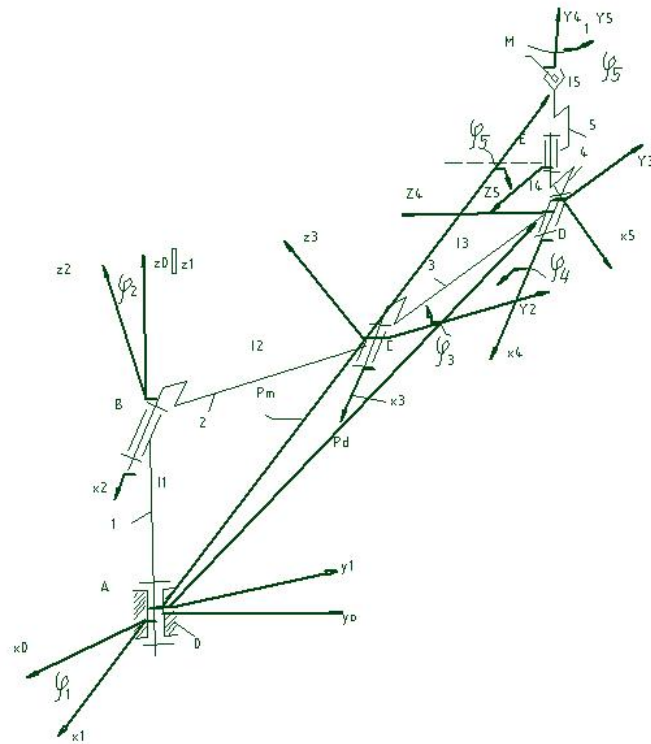
$$\begin{vmatrix} -0,399 & -0,916 & 0,048 \\ 0,092 & -0,092 & -0,992 \\ 0,912 & -0,392 & 0,121 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 94,044 \\ 21,17 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17,956 \\ 10,583 \\ 94,173 \end{vmatrix}$$

(56)-ის და  $A^T$  მატრიცის ელემენტების  $a_3^3$ ,  $a_2^3$ ,  $a_1^3$  გამოყენებით გამოვთვლით ეილერის კუთხეების მნიშვნელობებს:  $\varphi=74,4^\circ$ ,  $\theta=91,1^\circ$  и  $\psi=-74,4^\circ$ . მიღებული მნიშვნელობების (55)-ში ჩასმით შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ მიღებული მატრიცა ემთხვევა (56) განტოლებებით დახმარებით გამოთვლილს, რაც ამტკიცებს, რომ ეილერის კუთხეები სწორად იყო გამოთვლილი.

ვინაიდან ჩამოყალიბებული თეორია მთლიანად ეყრდნობა უნიტარული და ერმიტული ოპერატორების თეორიას, ჩვენ დაურთეთ ამ თეორიის ძირითადი დებულებების მოკლე მიმოხილვა დამატების ფორმატში (იხილეთ დამატება  $A_1$ ).

## 2.7. მრავალრგოლიანი სივრცული მექანიზმების კინემატიკის უკუ ამოცანის გადაწყვეტა.

როგორც უკვე აღნიშნულია, კინემატიკის უკუ ამოცანას აქვს დიდი მნიშვნელობა სივრცული მექანიზმების მოძრაობის ანალიზისა და მართვის ამოცანებში [45, 46]. ამავდროულად ეს ამოცანა განსაკუთრებულად რთულია, რაც განპირობებულია სწორედ მისი სივრცული ხასიათით, რაც აიხსნება უკვე მის ფორმულირებაში. განვიხილავთ კინემატიკის უკუ ამოცანის ფორმულირებას სუთრგოლიან მექანიზმის მაგალითზე ბრუნვითი წყვილებით [45], რომელიც მოყვანილია ნახ.7-ზე.



ნახაზი 7. სუთრგოლიანი მანიპულატორის პრინციპული სქემა.

ყოველ ბრუნვით წყვილთან (+ საყრდენი, რომელსაც მივაკუთნებთ ნომერ 0-ს) დაკავშირებულია კოორდინატთა სისტემა  $A_i x_i y_i z_i (i=0, \dots, 5)$ . მოცემულ კოორდინატთა სისტემების ურთიერთგანლაგებები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს: ღერძი

$z_1$  მიმართულია პირველი ბრუნვითი წყვილის ღერძის მიმართულებით, ხოლო ღერძი  $x_1$  – მეორე ბრუნვითი წყვილის ღერძის პარალელურად. ღერძი მიმართულია მეორე ბრუნვითი წყვილის ღერძის მიმართულებით, ხოლო  $y_2$  – მისი რგოლის გასწვრივ. მესამე და მეოთხე ბრინვითი წყვილების კოორდინატთა სისტემებს შორის უნდა არსებობდეს სრულიად ანალოგიური კავშირები. და ბოლოს, მეხუთე რგოლის კოორდინატთა სისტემის განლაგებას წაყენება კიდევ ერთი პირობა: ღერძი  $y_5$  უნდა იყოს მიმართული მისი ბრუნვის ღერძის გასწვრივ.

აქვე უნდა ხაზი გაესვას (რაც ასევე უკვე აღინიშნა), ჯერ ერთი, ექვსი სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემის გამოყენების აუცილებლობას, და, მეორე, ასევე მათი ურთიერთორიენტირების საკმაოდ რთულ და შრომატევად პროცესს.

ეხლა შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ კინემატიკის უკუ ამოცანის ზუსტი ფორმულირება. მოცემულ სიდიდეებს წარმოადგენენ:

- ბოლო რგოლი 5-ს (მტაცის) კოორდინატები -  $x_5, y_5, z_5$  ;
- ბაზისური ერთეულ ვექტორების (ორტების) პროექციები  $e_i, e_2, e_3$  კოორდინატთა უძრავ სისტემაში  $A_0x_0y_0z_0$  ;
- რგოლების სიგრძეები  $l_i (i=1, \dots, 5)$ .

უნდა განისაზღვროს:

- განზოგადებული კოორდინატები (კუთხეები) ( $\varphi_i (i=1, \dots, 5)$ ) რგოლების მდგომარეობის მიმართ (ნახ.7).

შენიშვნა. მოცემული ამოცანის გადაწყვეტის შედეგი შეიძლება გამოყენებული იყოს ხუთრგოლიანი მანიპულატორის მოძრაობის მართვისათვის. მართლაც, ცხადია, რომ ბოლო რგოლის  $x_5, y_5, z_5$  ყველა მდგომარეობას შეესაბამება რგოლების განზოგადოებულ კოორდინატთა (ფარდობითი კუთხეების) ვექტორი. ვუწოდოთ ბოლო რგოლის და რგოლთა ფარდობითი კუთხეების ვექტორის დეკარტული კოორდინატების  $x_5, y_5, z_5$  რომელიმე ფიქსირებულ ერთობლივობას მანიპულატორის  $i$ -რი მდგომარეობა, რასაც აღვნიშნავთ ზედა ინდექსით. დავუშვათ, რომ საჭიროა გადავიტანოთ ბოლო რგოლი (მტაცი) რომელიღაც  $i-1$  მდგომარეობიდან, რომლის დეკარტული კოორდინატები არიან  $x_5^{i-1}, y_5^{i-1}, z_5^{i-1}$  მოცემულ  $i$ -ურში, რომლის დეკარტული კოორდინატებია  $x_5^i, y_5^i, z_5^i$ . რგოლთა

ფარდობითი მდგომარეობების საძიებელი კუთხეები ( $\varphi_j^i$  ( $j=1,\dots,5$ )) უზრუნველყოფენ მოცემული მდგომარეობის  $x_5^i, y_5^i, z_5^i$  მიღწევას. ამასთან არაცხადად იგულისხმება, რომ ცნობილი არიან როგორც ბოლო რგოლის წინა მდგომარეობა  $x_5^{i-1}, y_5^{i-1}, z_5^{i-1}$ , ასევე რგოლთა ფარდობითი მდგომარეობების კუთხეებიც ( $\varphi_j^{i-1}$  ( $j=1,\dots,5$ ))  $i-1$  მანიპულატორის შესაბამის მდგომარეობაში. ამგვარად, მართვის ამოცანა დაიყვანება კუთხეთა ( $\varphi_j^{i-1}$  ( $j=1,\dots,5$ )) ისეთ შეცვლამდე, რომელიც გაუტოლებს მათ ( $\varphi_j^i$  ( $j=1,\dots,5$ ))-ს, რაც უზრუნველყოფს ბოლო რგოლის გადაყვანას მოცემულ მდგომარეობაში.

ამ იდეაზეა დაფუძნებული მოცემული ნაშრომის მეორე ნაწილი, რომელიც ეძღვნება სივრცული მოძრაობების მართვის პრობლემას.

ჩამოყალიბებული უკუ ამოცანა მანიპულატორებისათვის ბრუნვითი წყვილებით წყდება ე.წ. ვექტორული მეთოდის დახმარებით, რომელიც, ჯერ ერთი, მთლიანად დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორ არის შერჩეული ზემოთ აღნიშნული კოორდინატთა ექვსი სისტემა, და, მეორედ, მიყვავართ გრძელ და უზომოდ დიდ გამოთვლით ალგორითმთან, რომელიც დაწრილებით განხილულია სხვადასხვა ავტორების მიერ, მაგალითად, [45]-ში. ხაზი უნდა გაეუსვას, რომ ვექტორული მეთოდი ვერ წყვეტს ამოცანებს, რომლებიც დაკავშირებული არიან მანიპულატორებთან, რომლებიც შეიცავენ სფერულ წყვილებს მათი თავისუფლების ხარისხთა სიმრავლის გამო.

## 2.8. კინემატური ანალიზი

### 2.8.1. კინემატიკური გამოსახულებები ეილერის კუთხეებისთვის [52, 53]

(52) და (56) გამოსახულებებიდან ადვილად გამოითვლება ეილერის კუთხეები, რომლებიც უზრუნველყოფენ  $x(x^1, x^2, x^3)$  წერტილის  $y(y^1, y^2, y^3)$  წერტილში შემობრუნებას. თუ მიღებულია, რომ საწყის წერტილს  $x(x^1, x^2, x^3)$ -ს შეესაბამებინათ ეილერის ნულოვანი კუთხეები  $\theta_0 = \phi_0 = \psi_0 = 0$ , მაშინ ბრუნვის მართვა მდგომარეობს ეილერის კუთხეების საწყისი მნიშვნელობების  $\theta_0; \phi_0; \psi_0$  ცვლილებებში

ბოლო  $\theta_f; \phi_f; \psi_f$  მნიშვნელობებამდე, რომლებიც გამოთვლილია (56) ფორმულებით. ზოგადი სახით მართვის პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ეილერის კუთხეების ცვლილების ფუნქციები:  $\theta(t); \phi(t); \psi(t)$ , რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} \theta(t_0) = 0; \phi(t_0) = 0; \psi(t_0) = 0, \\ \theta(t_f) = \theta_f; \phi(t_f) = \phi_f; \psi(t_f) = \psi_f, \end{aligned} \quad (57)$$

სადაც  $t_0$  და  $t_f$  – მართვის პროცესის საწყისი და საბოლოო მომენტებია.

ნათქვამიდან ბუნებრივად გამომდინარეობს მართვის ფუნქციების  $\theta(t); \phi(t); \psi(t)$  განსაზღვრის ამოცანა.

ზახს ვუსვამთ, რომ  $\theta(t); \phi(t); \psi(t)$  დამოკიდებულებებს აქვთ კინემატიკური ხასიათი, ვინაიდან ისინი არ ითვალისწინებენ არც მომენტებს, არც დრეკადობებს და არც პროცესის რაიმე დინამიკურ მახასიათებლებს, ამიტომ მათი განსაზღვრის შემდეგ რჩება დინამიკური ადაპტიური მართვის სინთეზის ამოცანა ამ ფუნქციათა ბაზაზე, რაზეც კვემოდ ვისაუბრებთ.

ნახ.8-ზე გამოსახულია უძრავი ვექტორები  $x(x^1, x^2, x^3); y(y^1, y^2, y^3)$  და შუალედური მბრუნავი ვექტორი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ , რომელიც დროის საწყის  $t=t_0$  მომენტში ემთხვევა ბრუნვის საწყის ვექტორს  $x(x^1, x^2, x^3)$ , ხოლო ბოლო მომენტში  $t=t_f$  ემთხვევა  $y(y^1, y^2, y^3)$  ბოლო ვექტორს. მიმდინარე კუთხე  $\gamma$   $x(x^1, x^2, x^3)$  და  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორთა შორის  $t=t_0$  მომენტში უდრის ნულს და  $t=t_f$  მომენტში  $\gamma = \gamma_f$ , სადაც

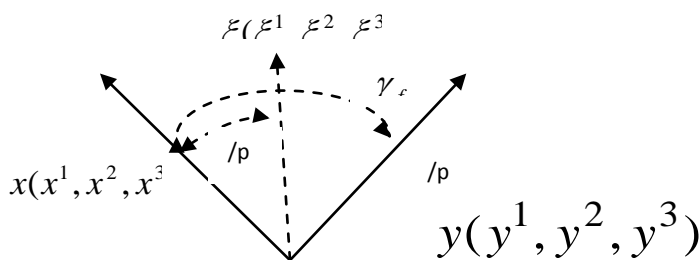
$$\gamma_f = \ar \cos\left(\frac{(x, y)}{|x| * |y|}\right) = \ar \cos\left(\frac{(x, y)}{|x|^2}\right)^6; \quad (x, y) - x \text{ და } y \text{ ვექტორთა სკალარული}$$

ნამრაველია. ცხადია, რომ მიმდინარე კუთხე  $\gamma(y^1, y^2, y^3)$  და  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორებს შორის ტოლია  $\gamma_f - \gamma$ .

---

<sup>6</sup>  $|x| * |y| = |x|^2$ , ვინაიდან ბრუნვისას  $|x| = |y|$

განსაზღვრავთ  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორის კოორდინატებს იმ პირობიდან, რომ ის შეადგენს  $\gamma$  და  $\gamma_f - \gamma$  კუთხეებს  $x(x^1, x^2, x^3)$  და  $y(y^1, y^2, y^3)$  ვექტორებთან და განლაგებულია მათ სიბრტყეში. ამ მიზნით საჭიროა შემოვიღოთ ვექტორი  $r(x^2y^3 - x^3y^2; x^3y^1 - x^1y^3; x^1y^2 - x^2y^1)$ , რომელიც წარმოადგენს  $x$  და  $y$  ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს.



ნახაზი 8. სივრცული ბრუნვის საწყისი, ბოლო და შუალედური ვექტორები.

ამ შემთხვევაში აღნიშნული პირობები შეიძლება ჩაიწეროს წრფივი განტოლებების შემდეგი სახით:

$$(\xi, r) = 0;$$

$$(\xi, x) = |x|^2 \cos \gamma;$$

$$(\xi, y) = |x|^2 \cos(\gamma_f - \gamma). \quad (58)$$

ადვილად ჩანს, რომ ვექტორი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ , განსაზღვრული (58) სისტემით, აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- 1) როცა  $\gamma = 0$  მაშინ  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = x(x^1, x^2, x^3)$ , რაც გამომდინარეობს (58) სისტემის მეორე განტოლებიდან, რადგან ამ შემთხვევაში  $(\xi, x) = |x|^2$ , რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = x(x^1, x^2, x^3)$

- 2) როცა  $\gamma = \gamma_f$  მაშინ  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = y(y^1, y^2, y^3)$ , რაც გამომდინარეობს (58) სისტემის მესამე განტოლებიდან, ვინაიდან ამ შემთხვევაში  $(\xi, y) = |x|^2$ , რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = y(y^1, y^2, y^3)$ ;
- 3)  $|\xi| = |x| = |y|$ , რაც გამომდინარეობს (58) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებიდან.

ამგვარად, ვექტორი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ , განსაზღვრული (58) სისტემიდან, შეესაბამება ნახ.8-ს, ესე იგი ის ნამდვილად შეიძლება განვიხილოთ როგორც ვექტორი, მბრუნავი (პირობა 3)  $x(x^1, x^2, x^3)$  ვექტორიდან (პირობა 1)  $y(y^1, y^2, y^3)$  ვექტორამდე (პირობა 2). ამასთან კუთხე  $\gamma$  იცვლება  $0 \leq \gamma \leq \gamma_f$  საზღვრებში.

(58) სისტემის განტოლებები შეიძლება წარმოვდგინდეს კოორდინატული სახით:

$$\xi^1 r^1 + \xi^2 r^2 + \xi^3 r^3 = 0$$

$$\xi^1 x^1 + \xi^2 x^2 + \xi^3 x^3 = |x|^2 \cos \gamma$$

$$\xi^1 y^1 + \xi^2 y^2 + \xi^3 y^3 = |x|^2 \cos(\gamma_f - \gamma). \quad (59)$$

ადვილად ჩანს, რომ ამ სისტემის დეტერმინანტი ტოლია

$$\Delta = \begin{vmatrix} r^1 & r^2 & r^3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = |r|^2. \quad (60)$$

კრამერის ფორმულების დანარჩენ დეტერმინანტებს (59) სისტემისთვის ექნებათ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & r^2 & r^3 \\ |x|^2 \cos \gamma & x^2 & x^3 \\ |x|^2 \cos(\gamma_f - \gamma) & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = |x|^2 ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^2 x^3 - r^3 x^2) - \cos \gamma(r^2 y^3 - r^3 y^2)));$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r^1 & 0 & r^3 \\ x^1 & |x|^2 \cos \gamma & x^3 \\ y^1 & |x|^2 \cos(\gamma_f - \gamma) & y^3 \end{vmatrix} = |x|^2 ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^3 x^1 - r^1 x^3) - \cos \gamma(r^3 y^1 - r^1 y^3));$$



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} r^1 & r^2 & 0 \\ x^1 & x^2 & |x|^2 \cos \gamma \\ y^1 & y^2 & |x|^2 \cos(\gamma_f - \gamma) \end{vmatrix} = |x|^2 ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^1 x^2 - r^2 x^1) - \cos \gamma(r^1 y^2 - r^2 y^1))), \quad (61)$$

რაც გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ საძიებელი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორის კოორდინატები შემდეგი სახით:

$$\xi^1 = \frac{|x|^2}{|r|^2} ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^2 x^3 - r^3 x^2) - \cos \gamma(r^2 y^3 - r^3 y^2)))$$

$$\xi^2 = \frac{|x|^2}{|r|^2} ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^3 x^1 - r^1 x^3) - \cos \gamma(r^3 y^1 - r^1 y^3)))$$

$$\xi^3 = \frac{|x|^2}{|r|^2} ((\cos(\gamma_f - \gamma)(r^1 x^2 - r^2 x^1) - \cos \gamma(r^1 y^2 - r^2 y^1))). \quad (62)$$

ამ გამოსახულებებში დამოუკიდებელი ცვლადი არის კუთხე  $\gamma$ , რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც დროის ფუნქცია, ეს კი ნიშნავს, რომ  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორის კოორდინატებიც ასევე წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს. ამასთან ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ  $\gamma(t)$  არის საკიმარისად გლუვი და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:  $\gamma(t = t_o) = 0$  და  $\gamma(t = t_f) = \gamma_f$ . სახს ვუსვამთ, რომ ამგვარად სივრცული მოძრაობის მართვის სინტეზის ამოცანა დაიყვანება კონკრეტული სახის  $\gamma(t)$  ფუნქციის განსაზღვრამდე, რაც დაკავშირებულია ბრუნვის პროცესის დინამიკასთან, რაც აღწერილი იქნება მომდევნო ნაშრომებში. ამ ნაშრომში კი ვგულისხმობთ, რომ  $\gamma(t)$  არის ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს აღნიშნულ პირობებს. გარკვეულობისთვის ვუშვებთ:

$$\gamma(t) = \omega t, \quad (63)$$

სადაც  $\omega = 2\pi f$  – არის მუდმივი კუთხური სიხქარე.

თუ შემოვიღებთ ახალ ვექტორებს  $r_x = (r^2 x^3 - r^3 x^2; r^3 x^1 - r^1 x^3; r^1 x^2 - r^2 x^1)$  და  $r_y = (r^2 y^3 - r^3 y^2; r^3 y^1 - r^1 y^3; r^1 y^2 - r^2 y^1)$ , რომლებიც წარმოადგენენ ვექტორულ

ნამრავლებს  $[r \times x]$  და  $[r \times y]$ , შესაბამისად, მივიღებთ სწაძიებელი კოორდინატების მარტივ გამოსახულებებს, როგორც დროის ფუნქციებს:

$$\begin{aligned}\xi^1(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - \omega t) r_x^1 - \cos \omega t r_y^1); \\ \xi^2(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - \omega t) r_x^2 - \cos \omega t r_y^2); \\ \xi^3(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - \omega t) r_x^3 - \cos \omega t r_y^3).\end{aligned}\tag{64}$$

როგორც ნათქვამი იყო, ვექტორი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  წარმოადგენს მბრუნავ ვექტორს, ამიტომ დროის ყოველ მომენტში ის შეიძლება განვიხილოთ როგორც ბრუნვის პროცესის მიმდინარე მომენტის ბოლო ვექტორი. თუ (52) ფორმულებში  $y(y^1, y^2, y^3)$  წერტილის კოორდინატების ნაცვლად ჩავსვამთ (63) გამოსახულებებს, მივიღებთ  $C$  სპინორული მატრიცის პარამეტრების,  $A$  ორთოგონალური მატრიცის (ფორმულები (54)) და ეილერის კუთხეების (56) წარმოდგენებს დროის ფუნქციათა სახით. ამით ვიღებთ დროზე დამოკიდებულ (კინემატიკურ) წარმოდგენას  $x(x^1, x^2, x^3)$  წერტილის  $y(y^1, y^2, y^3)$ -ში ბრუნვისას. მაგრამ მანამდე საჭიროა ბოლომდე განისაზღვროს მატრიცა  $C$  იმგვარად, რომ ბრუნვის სპინორულ განტოლებას საწყის მომენტში ჰქონდეს შემდეგი სახე  $X = \bar{C}^T X C$ , რაც ცხადია, შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა  $C$  არის ერთეული მატრიცა. ეს შეიძლება შესრულდეს  $\alpha_1 u \alpha_2$  პარამეტრების შესაბამისი შერჩევით.

მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ  $\alpha_1 = 1; \alpha_2 = 0$ , მივიღებთ რიმ:

$$\operatorname{Re} \beta = \beta_1 = \frac{x^1 - y^1}{x^3 + y^3}; \operatorname{Im} \beta = \beta_2 = \frac{y^2 - x^2}{x^3 + y^3}.\tag{65}$$

ამის შემდეგ (65)-ში  $y$  ვექტორის ნაცვლად ჩავსვამთ  $\xi$  ვექტორის კოორდინატებს (64)-დან, მაშინ მატრიცა  $C$  იქნება დროზე დამოკიდებული და მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$C(t) = \frac{1}{1+|\beta|^2} \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{((\xi^1(t) - x^1) + i(\xi^2(t) - x^2))}{x^3 + \xi^3(t)} \\ \frac{((x^1 - \xi^1(t)) - i(x^2 - \xi^2(t)))}{x^3 + \xi^3(t)} & 1 \end{array} \right|, \quad (66)$$

სადაც  $|\beta|^2 = \frac{(x^1 - \xi^1(t))^2 + (x^2 - \xi^2(t))^2}{(x^3 + \xi^3(t))^2}$ ;  $\xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t)$  - დროის ფუნქციებია,

რომლებიც განსაზღვრული არიან (64)-ში.

ცხადია, რომ საწყის  $t_0$  მომენტში მატრიცა  $C(t=t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , რადგანაც ამ

შემთხვევაში  $\gamma(t_0) = 0$  და  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = x(x^1, x^2, x^3)$ .

$t = t_f$  მომენტისთვის გვაქვს  $\gamma(t_f) = \gamma_f$ ,  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3) = y(y^1, y^2, y^3)$  და შესაბამისად

$$C(t=t_f) = \frac{1}{1+|\beta|^2} \left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{((y^1 - x^1) + i(y^2 - x^2))}{x^3 + y^3} \\ \frac{((x^1 - y^1) - i(x^2 - y^2))}{x^3 + y^3} & 1 \end{array} \right|. \quad (67)$$

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ბრუნვის სპინორული მატრიცა (66) განსაზღვრულია კორექტულად. მაგრამ ამ შემთხვევაში კორექტულად განსაზღვრულია ეილერის კუთხეებიც (56), რომლებიც ასევე აღმოჩნდებიან დროის ფუნქციები

$$\theta(t) = \arccos\left(\frac{(x^3 + \xi^3(t))^2 - (x^1 - \xi^1(t))^2 - (x^2 - \xi^2(t))^2}{(x^3 + \xi^3(t))^2}\right);$$

$$\phi(t) = \arcsin\left(\frac{2(x^1 - \xi^1(t))}{(x^3 + \xi^3(t)) \sin \theta(t)}\right);$$

$$\psi(t) = \arcsin\left(\frac{2(\xi^1(t) - x^1)}{(x^3 + \xi^3(t)) \sin \theta(t)}\right). \quad (68)$$

მიღებული გამოსახულებები (68) წყვეტენ  $\theta(t)$ ;  $\phi(t)$ ;  $\psi(t)$  მმართველი კინემატიკური ფუნქციების განსაზღვრის დასმულ ამოცანას. მეორე მხრივ, საჭიროა აღინიშნოს, რომ შემოთავაზებული თეორია გვაძლევს საშუალებას სივრცული

მოძრაობის მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა დაიფიქსირა ერთგანზომილებიანზე. მართლაც, საკმარისია როგორმე შევადგინოთ ფუნქცია  $\gamma(t)$ , რომელიც აკმაყოფილებს შესაბამის ზღვრულ პირობებს, მაშინ ცხადია, რომ მართვის პროცესი მთლიანად განსაზღვრული იქნება ბრუნვის (66) სპინორული მატრიცის და ეილერის კუთხეების (68) ფუნქციათა მეშვეობით.

### 2.8.2. რიცხობრივი მაგალითი

განვიხილოთ რიცხობრივი მაგალითი ზემონათქვამის ილუსტრირებისათვის.

ვთქვათ მიღებულია ნებისმიერად საწყისი და ბოლო ვექტორები:  $x(10,-45,30)$  და  $y(1,20,51.225)$ . კუთხე მათ შორის  $\gamma_f = \arccos\left(\frac{(x, y)}{|x|^2}\right) = 77.65^\circ$ . გამოთვლის

სიმარტივისათვის მივიღოთ  $\omega = 1, \frac{\gamma_f}{3}$  ბიჯით. გამოვთვალოთ ორი სხვადასხვა გზით

მბრუნავი ვექტორის  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ხუთი შუალედური მდგომარეობა. (64) ფორმულების გამოყენებით ვიღებთ მბრუნავი ვექტორის შემდეგ კოორდინატებს კუთხეთა სამი მნიშვნელობისათვის (ცხრილი 3).

მბრუნავი ვექტორის კოორდინატები  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ . ცხრილი 2.

Угол $\gamma^0_f$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$	$ \xi $
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$\gamma_f/3=25.88^\circ$	<b>8.48</b>	<b>-27.25</b>	<b>47.02</b>	<b>55</b>
$2\gamma_f/3=51.77^\circ$	<b>5.27</b>	<b>-4.03</b>	<b>54.60</b>	<b>55</b>
$\gamma_f=77.65^\circ$	<b>1</b>	<b>20</b>	<b>51.23</b>	<b>55</b>

ეილერის კუთხეების გამოთვლის სისწორის შემოწმება მდგომარეობს იმაში, რომ საჭიროა კუთხეება ყველა 5 მნიშვნელობისთვის (ცხრილი 2) გამოვთვალოთ

ვილერის კუთხეები ვექტორ  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$ -ს შუალედურ მდგომარეობათა კოორდინატების მიღებული მნიშვნელობების გამოყენებით (68) ფორმულების მიხედვით და ასევე გამოვთვალოთ ძირითადი წარმოდგენის სამგანზომილებიანი ორთოგონალური მატრიცა  $A$  და ასევე გამოვთვალოთ მბრუნავი ვექტორის შუალედური კოორდინატები ფორმულით  $\xi = Ax$ , სადაც  $x$  არის ბრუნვის საწყისი ვექტორი. ამ გზით მიღებული მნიშვნელობები უნდა დაემთხვეს ცხრილისას. ცხრილში 4 მოყვანილია შესაბამისი გამოთვლათა შედეგები.

მატრიცა  $A$  გამოთვლილია ვილერის კუთხეების იმ მნიშვნელობებისთვის, რომლებიც მიღებულია (68) ფორმულებით და მოყვანილია ცხრილი 4-ის მეორე სვეტში.  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  მბრუნავი ვექტორის კოორდინატთა მნიშვნელობები გამოთვლილია (55) მატრიცის გამრავლებით ბრუნვის საწყის ვექტორზე  $x(10, -45, 30)$ :  $\xi = Ax$ . მე-4 ცხრილის 4-6 სვეტებიდან ჩანს, რომ მბრუნავი ვექტორის კოორდინატები ემთხვევა (64) ფორმულით გამოთვლილ კოორდინატებს (ცხრილი 3).

მბრუნავი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ვექტორის კოორდინატთა გამოთვლა (55)

ორთოგონალური  $A$  მატრიცის გამოყენებით.

ცხრილი 3

კუთხე	ვილერის კუთხეები	ორთოგონალური მატრიცა $A$	$\xi^1$	$\xi^2$	$\xi^3$
$\gamma^0_f$					
1	2	3	4	5	6
$\gamma_f / 3 = 25.88^\circ$	$\theta = 26.05^\circ$ $\varphi = 4.87^\circ$ $\psi = -4.87^\circ$	$A_1 = \begin{pmatrix} 0.999 & 8.59 \times 10^{-3} & 0.037 \\ 8.59 \times 10^{-3} & 0.899 & -0.438 \\ -0.037 & 0.438 & 0.898 \end{pmatrix}$	<b>8.48</b>	<b>-27.25</b>	<b>47.02</b>

$2\gamma_f / 3 = 51.77^\circ$	$\theta = 56.98^\circ$ $\varphi = 6.58^\circ$ $\psi = -6.58^\circ$	$A_2 = \begin{pmatrix} 0.995 & 0.044 & 0.09 \\ 0.044 & 0.621 & -0.783 \\ -0.09 & 0.783 & 0.616 \end{pmatrix}$	<b>5.27</b>	<b>-4.03</b>	<b>54.60</b>
$\gamma_f = 77.65^\circ$	$\theta = 77.87^\circ$ $\varphi = 7.88^\circ$ $\psi = -7.88^\circ$	$A_3 = \begin{pmatrix} 0.985 & 0.107 & 0.134 \\ 0.107 & 0.225 & -0.968 \\ -0.134 & 0.968 & 0.21 \end{pmatrix}$	<b>1</b>	<b>20</b>	<b>51.23</b>

## თავი მესამე

### 3. მოძრავი მექანიკური ობიექტების ტერმინალური მდგომარეობების მართვის მეთოდის შემუშავება და სინთეზი.

#### 3.1. ტერმინალური მართვის ამოცანა და მმართველი ფუნქციის სინთეზი.

თავი-ში 1 (გვ. 23-24) ნაჩვენებია, რომ მოძრაობის მართვის ბევრი ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნას მოძრავი ობიექტების საბოლოო (ტერმინალური) მდგომარეობების მართვის ამოცანებად. იქვეა ფორმულირებული კვლევის მიზანი: დამუშავდეს მარტივი, ტერმინალური მართვის ადაპტური მეთოდი. ქვემოთ მოყვანილი მოსაზრებები წარმოადგენს ამ ამოცანის ამოხსნის საფუძველს [54,55].

სიმარტივისთვის განვიხილოთ სამართავი ობიექტის ერთგანზომილებიანი მოძრაობა, რომლის კოორდინატაა  $\psi$ . ცხადია, რომ მისი მოძრაობა აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა შემდეგი სისტემით:

$$\dot{V} = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{j=1}^k f_j \right);$$
$$V = \dot{\psi}, \tag{69}$$

სადაც  $V$  – არის სამართავი ობიექტის სიჩქარე;

$F_i (i = 1, 2, \dots, n)$  – არამართვადი ძალების პროექციები მოძრაობის

მიმართულებაზე, ესე იგი  $\gamma$  ღერძზე;

$f_j (j = 1, 2, \dots, k)$  – მართვადი ძალების პროექციები მოძრაობის მიმართულებაზე, ანუ  $\gamma$  ღერძზე;

$m$  – ობიექტის მასაა.

არამართვად ძალებს განეკუთვნება მაგალითად, ყველა შემაშფოთებელი ძალა, რომლებიც იმ გარემო პირობებით წარმოიშვა, სადაც მიმდინარეობს მოძრაობა.

ტერმინალური მართვის ამოცანა შემდეგნაირად ჩამოყალიბდება: ცნობილია ობიექტის საწყისი ფაზური მდგომარეობა  $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$ . საჭიროა  $T$  დროის განმავლობაში მისი გადაყვანა საბოლოო მდგომარეობაში  $(\gamma_f, \dot{\gamma}_f)$ . არამართვადი ძალები წარმოადგენენ  $t$  დროის,  $\gamma$  კოორდინატის და  $\dot{\gamma}$  სიჩქარის ფუნქციებს, ანუ  $F_i = F_i(t, \gamma, \dot{\gamma})$ , ხოლო მართვადი ძალები კიდევ დამატებით  $\alpha$  მართვადი პარამეტრის ფუნქციასაც:  $f_j = f_j(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha)$ . შევნიშნავთ, რომ  $\alpha$  პარამეტრი ხშირად წარმოადგენს სამართავი ობიექტის მდგომარეობას და შესაძლებელია იყოს დროის ფუნქცია. მოძრაობის მართვის აღნიშნული ამოცანის ამოხსნისადმი ტრადიციული მიდგომა მდგომარეობს ისეთი  $f_j = f_j(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha)$  ფუნქციების ძებნაში, რომელთათვისაც დროის  $[0, T]$  მონაკვეთზე (69) სისტემის ამოხსნები აკმაყოფილებენ შესაბამის სასაზღვრო პირობებს. როგორც იყო აღნიშნული, ამოხსნის ერთადერთობა მიიღწევა დამატებითი პირობის გამოყენებით – ამოხსნები უნდა ანიჭებდნენ სპეციალურად შერჩეულ ფუნქციონალს ექსტრემუმს. ასეთ დამატებით პირობად ხშირად გამოიყენება მართვის დროის მინიმუმის მოთხოვნა (სწრაფმოქმედების მაქსიმუმი) ან კიდევ მართვის ენერჯის მინიმუმი. ასევე შესაძლებელია შეგვხდეს სხვა ხასიათის ფუნქციონალებიც. ამგვარად მიღებულ ამოხსნებს აქვთ პროგრამული ხასიათი (მართვის სისტემა არის ღია), რაც იწვევს განსახორციელებელი მოძრაობის არამდგრადობას არამართვადი ძალების გაუთვალისწინებელი ზემოქმედების გამო. ადაპტიური მართვის დამუშავება მოითხოვს სხვაგვარ მიდგომას: ამ შემთხვევაში უნდა განხორციელდეს უწყვეტი თვალთვალი მოძრავი ობიექტის მიმდინარე მდგომარეობაზე, რაც მოითხოვს შესაბამისი გაზომვების ჩატარებას.

განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დაწვრილებით. ვთქვათ, რაიმე მეთოდებით განსაზღვრულია მმართველი ძალების ოპტიმალური ფუნქცია  $\varphi(t)$ , მაშინ ცხადია, რომ მმართავი პარამეტრის ფუნქცია  $\alpha(t)$  შეიძლება განისაზღვროს როგორც რაიმე დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა, რომლის მარჯვენა ნაწილი დამოკიდებულია მმართველი ძალების მოცემული ოპტიმალური  $\varphi(t)$  ფუნქციისა და ამავე ძალების  $f = f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))$  მიმდინარე მნიშვნელობას შორის სხვაობაზე. დაეუშვათ, რომ ამ განტოლებას აქვს სახე:

$$\dot{\alpha}(t) = k_c (\varphi(t) - f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))). \quad (70)$$



მივიღოთ, რომ კავშირი მართვად  $\alpha(t)$  პარამეტრსა და მიმდინარე (გაზომილ)  $f = f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))$  მნიშვნელობას შორის შეიძლება წარმოვიდგინოთ პირველი რიგის ინერციული რგოლის სახით:

$$\dot{f} = (k_f \alpha(t) - f). \quad (71)$$

მოწყობილობა, რომელიც აღიწერება (80) განტოლებით, წარმოადგენს რეგულატორს – ძრავულ დანადგარს, რომელიც ახდენს მმართველი ძალის  $f = f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))$  გენერირებას.

ამგვარად, მართვის პროცესი აღიწერება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის (69) – (71) მეშვეობით. თუ ვიცით მმართველ ძალთა სინთეზირებული ფუნქცია  $\varphi(t)$ , შეიძლება ობიექტი საწყისი  $\gamma(t_0); \dot{\gamma}(t_0)$  მდგომარეობიდან გადავიყვანოთ საბოლოო მდგომარეობაში  $\gamma(t_f); \dot{\gamma}(t_f)$ . ამსთან, აქ წარმოიშვება სირთულე, დაკავშირებული მმართველი ძალების გაზომვის აუცილებლობასთან, რაც, ცხადია, მოითხოვს უნარს ობიექტის მოძრაობის პროცესში გამოვყოთ ისინი არამართვადი ძალებისაგან. ეს უკანასკნელი პრაქტიკული თვალსაზრისით, წარმოადგენს გადაუჭრელ ამოცანას, რაც აფერხებს ტერმინალური კონტროლის ამოცანებისათვის ადაპტური მეთოდების განვითარებას.

მოცემული პრობლემის გადაჭრა შესაძლებელია განხორციელდეს სხვა მიდგომის მეშვეობით.

მართვადი ძალების ცვლილება იწვევს არამართვადი ძალების ცვლილებასაც. ყველა ძალა, რომელიც მოქმედებს მოძრავ ობიექტზე (არამართვადი + მართვადი), იწვევს ობიექტის აჩქარებას  $\dot{V}$ . ცხადია, ის ადვილად ემორჩილება პირდაპირ გაზომვას, ამიტომ საჭიროა დაისვას ამოცანა აჩქარების  $\dot{V}$  სახით მართვადი ფუნქციის სინთეზისა. მაშინ მართვის პროცესი მიიყვანება შემდეგი ტოლობის დაცვამდე:

$$\dot{V} = \dot{\gamma}(t), \quad (72)$$

სადაც  $\dot{V}$  – ობიექტის გაზომილი აჩქარებაა.

$\dot{\gamma}(t)$  - ობიექტის მოცემული (სინთეზირებული) აჩქარებაა.

შენიშნოთ, რომ (72) არსით წარმოადგენს სამართავი ობიექტის მოძრაობის განტოლებას მმართველი ძალების  $\dot{\gamma}(t)$ -ს ფუნქციის ზემოქმედებით, რომელიც (69)-ის ექვივალენტურია. ეს აიხსნება იმით, რომ ობიექტის გაზომილი  $\dot{V}$  აჩქარება ითვალისწინებს როგორც მართვადი, ისე არამართვადი ძალების ცვლილებებსაც. შემდგომში ეს ფაქტი არსებითად იქნება გამოყენებული. (72) ტოლობა ფიზიკურად ადვილად რეალიზებადია, თუ რეგულატორი (ძრავული დანადგარი), გამოსახული ინერციული რგოლის განტოლებით (71), საკმაოდ მძლავრია. ამ შემთხვევაში შესაძლებელია არამართვადი ძალების მართვადი ძალებით კომპენსირება და ამით (72) ტოლობის დაცვა.

დავუშვათ, რომ მოცემული აჩქარება  $\ddot{\gamma}(t)$  და მმართველი ძალები  $f = f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))$  დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$\ddot{\gamma} = kf(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t)), \quad (73)$$

სადაც  $k$  – პროპორციულობის კოეფიციენტი.

მართვის ალგორითმის სინთეზი შეიძლება დაყვანილ იქნეს გარკვეულ ვარიაციულ ამოცანაზე ფაზურ სივრცეში: მოცემული ორი წერტილი  $(\gamma_0; \dot{\gamma}_0)$ ,  $(\gamma_f; \dot{\gamma}_f)$  ორგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში, საჭიროა ფაზურ სივრცეში ისეთი მრუდის განტოლების განსაზღვრა, რომელიც მათ აერთებს და შემდეგ ფუნქციონალს ანიჭებს მინიმუმს

$$J_F = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t)) dt. \quad (74)$$

საძიებელი მრუდის განტოლება შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ პარამეტრული სახით  $\gamma = \gamma(t)$  და  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t)$ , მაშინ ცხადია, რომ ამგვარად განსაზღვრულ ფაზურ მრუდს შეესაბამება  $\gamma_0$  წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია  $\gamma_f$  წერტილისკენ, ამასთან საწყისი სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში  $t = t_0$  ტოლია  $\dot{\gamma}_0$ , ხოლო საბოლოო მომენტში –  $t = T - \dot{\gamma}_f$ .

(74)-დან გამომდინარეობს, რომ  $\gamma = \gamma(t)$  და  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(t)$  ტრაექტორია, რომელიც (74)-ს ანიჭებს მინიმუმს, წარმოადგენს ოპტიმალურს იმ აზრით, რომ ის მინიმიზაციას უკეთებს ენერგეტიკულ მმართველ ზემოქმედებას.

აჩქარება ოპტიმალური ტრაექტორიის გასწვრივ წარმოადგენს ფაზური კოორდინატების ფუნქციას

$$\ddot{\gamma} = \varphi(\gamma, \dot{\gamma}). \quad (75)$$

(72) და (73)-დან გვაქვს

$$kf(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t)) = \varphi(\gamma, \dot{\gamma}). \quad (76)$$

(76)-ის (74)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T k_1 [\varphi(\gamma, \dot{\gamma})]^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [k_1 \ddot{\gamma}]^2 dt, \quad (77)$$

სადაც  $k_1 = \frac{1}{k}$ .

(77) ფუნქციონალი მიეკუთვნება იმ ტიპის ფუნქციონალებს, რომლებიც შეიცავენ მეორე რიგის წარმოებულებს, ამიტომ მათი შესაბამისი ეილერის განტოლება შესაძლებელია ჩაიწეროს შემდეგი სახით [32,33]:

$$\frac{d^2 \ddot{\gamma}}{dt^2} = 0. \quad (78)$$

(78)-ის ამონახსნი წარმოადგენს მესამე რიგის პოლინომს

$$\gamma = C_0 + C_1 t + C_2 \frac{t^2}{2} + C_3 \frac{t^3}{6}. \quad (79)$$

სასაზღვრო პირობები ტოლია:

$$t = 0; \gamma = \gamma_0; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0, \quad (80)$$

$$t = T; \gamma = \gamma_f; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f. \quad (81)$$

ეს ოთხი პირობა საკმარისია იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ოთხი კონსტანტა  $C_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), რომლებიც შედიან (79)-ში, რაც საკმარისია განსაზღვრავს ოპტიმალურ ტრაექტორიას.

მართვადი ძალების ცვლილება იწვევს არამართვადი ძალების ცვლილებასაც. ყველა ძალა, რომელიც მოქმედებს მოძრავ ობიექტზე (არამართვადი + მართვადი), იწვევს ობიექტის აჩქარებას  $\dot{V}$ . ცხადია, ის ადვილად ემორჩილება პირდაპირ გაზომვას, ამიტომ საჭიროა დაისვას ამოცანა აჩქარების  $\dot{V}$  სახით მართვადი ფუნქციის სინთეზისა. მაშინ მართვის პროცესი მიიყვანება შემდეგი ტოლობის დაცვამდე:

$$\dot{V} = \dot{\gamma}(t), \tag{82}$$

სადაც  $\dot{V}$  – ობიექტის გაზომილი აჩქარებაა.

$\dot{\gamma}(t)$  - ობიექტის მოცემული (სინთეზირებული) აჩქარებაა.

შევნიშნოთ, რომ (82) არსით წარმოადგენს სამართავი ობიექტის მოძრაობის განტოლებას მმართველი ძალების  $\dot{\gamma}(t)$ -ს ფუნქციის ზემოქმედებით, რომელიც (69)-ის ექვივალენტურია. ეს აიხსნება იმით, რომ ობიექტის გაზომილი  $\dot{V}$  აჩქარება ითვალისწინებს როგორც მართვადი, ისე არამართვადი ძალების ცვლილებებსაც.

შემდგომში ეს ფაქტი არსებითად იქნება გამოყენებული. (82) ტოლობა ფიზიკურად ადვილად რეალიზებადია, თუ რეგულატორი (ძრავული დანადგარი), გამოსახული ინერციული რგოლის (71) განტოლებით, საკმაოდ მძლავრია.

ამ შემთხვევაში შესაძლებელია არამართვადი ძალების მართვადი ძალებით კომპენსირება და ამით (72) ტოლობის დაცვა. აქ უნდა აღინიშნოს შემდეგი. ჩვენ ქვემოთ წარმოვადგინეთ ვარიაციული ამოცანის მმართველი პოლინომის ფორმალური გამოყვანა ამონახსნის საფუძველზე.

დავუშვათ, რომ მოცემული აჩქარება  $\dot{\gamma}(t)$  და მმართველი ძალები  $f = f(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t))$  დაკავშირებულია დამოკიდებულებით

$$\dot{\gamma} = kf(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t)), \tag{83}$$

სადაც  $k$  – პროპორციულობის კოეფიციენტია.

მართვის ალგორითმის სინთეზი შეიძლება დაყვანილ იქნეს გარკვეულ ვარიაციულ ამოცანაზე ფაზურ სივრცეში: ორგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში მოცემული ორი წერტილი  $(\gamma_0; \dot{\gamma}_0)$   $(\gamma_f; \dot{\gamma}_f)$  საჭიროა ფაზური სივრცის ისეთი მრუდის

განტოლების განსაზღვრა, რომელიც მათ აერთებს და მინიმუმს ანიჭებს შემდეგ ფუნქციონალს

$$J_F = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t, \gamma, \dot{\gamma}, \alpha(t)) dt. \quad (84)$$

ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ზოგიერთ კერძო შემთხვევებს, რომლებიც განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობების (80) და (81)-ს სხვადასხვა მნიშვნელობებით.

### 3.2. დაყვანის ამოცანა [56÷58].

#### 3.2.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი.

დაყვანის ამოცანა განისაზღვრება შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$t=0; \gamma = \gamma_0; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0, \quad (85)$$

$$t=T; \gamma = \gamma_f; \quad (86)$$

(85) და (86) პირობები ნიშნავს, რომ ობიექტი საწყისი მდგომარეობიდან  $\gamma = \gamma_0$  და  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$  გადაყვანილი უნდა იყოს  $\gamma = \gamma_f$  მდგომარეობაში და ამასთან სინქარე უნდა იყოს ნებისმიერი. ვარიაციული გამოთვლების ტერმინებში ეს არის ამოცანა მოძრავი ბოლოებით.

ასეთი სახის ამოცანებისათვის მოცემულ (85) და (86) სასაზღვრო პირობებს საჭიროა დაემატოს ე.წ. ბუნებრივი სასაზღვრო პირობა, რომელიც ჩვენ შემთხვევაში გამოისახება შემდეგნაირად [33]

$$G_{\dot{\gamma}} - \frac{d}{dt} G_{\ddot{\gamma}} = 0, \quad (87)$$

სადაც  $G = k\dot{\gamma}^2$ .

ცხადია, რომ

$$G_{\dot{\gamma}} = 0 \quad (88)$$

და

$$G_{\ddot{\gamma}} = 2\ddot{\gamma}. \quad (89)$$

(89) პირობა შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$2\ddot{\gamma} = 0. \quad (90)$$

(79)-ის სამჯერ გადიფერენცირებით და (85), (86) სასაზღვრო და (87) ბუნებრივი პირობების გათვალისწინებით, შეიძლება განისაზღვროს  $C_i (i = 0,1,2,3)$ :

$$C_3 = 0; C_2 = \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T}; C_1 = \dot{\gamma}_0; C_0 = \gamma_0. \quad (91)$$

(91)-ის ჩასმით (79)-ში და ამ გამოსახულების პირველ და მეორე წარმოებულებში, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებებს ოპტიმალური ტრაექტორიისთვის ფაზურ სივრცეში:

$$\gamma = \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0, \quad (92)$$

$$\dot{\gamma} = \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) t + \dot{\gamma}_0. \quad (93)$$

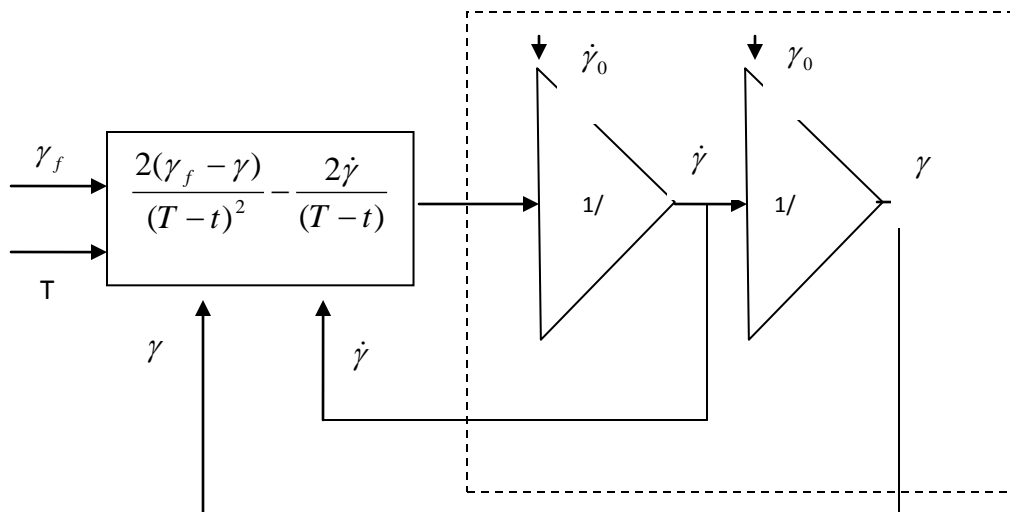
აჩქარება ((92)-ის მეორე წარმოებული) მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\ddot{\gamma} = \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T}. \quad (94)$$

(94) გამოსახულება წარმოადგენს მართვის კანონს დაყვანის ამოცანისთვის. ეს კანონი ნიშნავს, რომ თუ მართვის ობიექტის აჩქარება  $[0, T]$  დროის ინტერვალზე იქნება მუდმივი და ტოლი (94)-ის, მაშინ  $t = T$  დროის მომენტში მისი მდგომარეობა დააკმაყოფილებს სასახდვრო პირობებს (81). მაგრამ ეს არის მართვის გაშლილი (პროგრამული) კანონი, ესე იგი, მართვის კანონი უკუკავშირის გარეშე. მართვის ობიექტის აჩქარების პირდაპირი გაზომვის შესაძლებლობის გამოყენებით, (91) შეიძლება გარდაექმნათ უკუკავშირიან მართვის კანონად [55]. ამ მიზნით საკმარისია საწყისი ფაზური მდგომარეობა ჩავთვალოთ მიმდინარედ, ესე იგი ვიგულისხმობთ, რომ  $\gamma = \gamma_0$  და  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$ . ამ შემთხვევაში უნდა ჩავთვალოთ, რომ ამოცანის შესრულების დრო დარჩენილი დროის  $T - t$  ტოლია. ასეთ შემთხვევაში (92) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\ddot{\gamma} = \frac{2(\gamma_f - \gamma)}{(T - t)^2} - \frac{2\dot{\gamma}}{(T - t)}. \quad (95)$$

(95)-დან ჩანს, რომ ამ შემთხვევაში მართვის ობიექტზე მოქმედი აჩქარება არაა მუდმივი და დამოკიდებულია სიჩქარისა და მართვის ობიექტის მიმდინარე კოორდინატების მნიშვნელობებზე, ესე იგი ხორციელდება მართვა უკუკავშირით. ნახ.9-ზე წარმოდგენილია ასეთი უკუკავშირიანი მართვის რეალიზაციის ბლოკ-სქემა. მართვის ობიექტის მიმდინარე მდგომარეობის გაზომილი კოორდინატები  $(\gamma, \dot{\gamma})$  მიეწოდება ავტომატური მართვის სისტემის ბლოკს, სადაც განისაზღვრება მოქმედი აჩქარების საჭირო მნიშვნელობა (95).



ნახაზი 9. დაყვანის ამოცანის ავტომატური მართვის სისტემის ბლოკ-სქემა.

### 3.2.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი დაყვანის ამოცანაში.

აღვიდად ჩანს, რომ მოძრაობის პროგრამა (6.20) (გაშლილი მართვა) წარმოადგენს თანაბრად აჩქარებულ მოძრაობას მუდმივი აჩქარებით (94). უკუკავშირიან მართვაზე გადასვლა (95), როგორც უკვე ნათქვამია, გადააქცევს მას მოძრაობად ცვლადი აჩქარებით. მაგრამ იმ შემთხვევაში, როცა  $t = T$  ჩნდება განსაკუთრებული მდგომარეობა – მმართველი ფუნქციის მნიშვნელი უტოლდება ნულს. ამ სირთულის აცილება შესაძლებელია შემდეგნაირად.

დავუშვათ  $T - t = \Delta T$ , სადაც  $\Delta T$  – დროის მუდმივი ინტერვალია. ფიზიკური თვალსაზრისით ეს ნიშნავს, რომ დაყვანის პროცესის მიზნობრივი წერტილი ასევე მოძრაობს, რადგანაც მას აქვს წინსწრება მართვის ობიექტის მიმართ –  $\Delta T$ -ით. აღნიშნოთ მისი ცვლადი კოორდინატი  $\gamma_m$ -ით. მმართველი აჩქარების ფუნქცია  $\Delta T$  დროის ინტერვალზე შეიძენს შემდეგ სახეს:

$$\ddot{\gamma} = \frac{2 \cdot (\gamma_m - \gamma)}{\Delta T^2} - \frac{2 \cdot \dot{\gamma}}{\Delta T}, \quad (96)$$

სადაც  $\gamma$  და  $\dot{\gamma}$  – (მართვის ობიექტის კოორდინატა და სიჩქარე) როგორც ადრე იყო აღნიშნული ცვლადი სიდიდეებია, და წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს.

ამგვარად, (96) გამოსახულების მარჯვენა ნაწილის გამოყენება მმართველი აჩქარებისათვის ითვალისწინებს, რომ მართვის ობიექტი მოძრაობს  $\gamma_m$  მიზნობრივი წერტილისკენ, დროის მუდმივი  $\Delta T$  სიდიდის ტოილ ჩამორჩენით, და  $T$  დროში მისი კოორდინატა ტოლი იქნება მოცემული მნიშვნელობისა  $\gamma = \gamma_f$ .

საჭიროა დავრწმუნდეთ, რომ ეს მართლაც ასეა.

აქვე შევნიშნოთ, რომ (92)-თან ანალოგიის მიხედვით გვაქვს მოძრავი სამიზნე წერტილის კოორდინატის მართვის შემდეგი პროგრამა:

$$\gamma_m = \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{(t + \Delta T)^2}{2} + \dot{\gamma}_0(t + \Delta T) + \gamma_0. \quad (97)$$

ეს განტოლება ასახავს იმ ფაქტს, რომ წამყვანი წერტილი  $\gamma_m$  წინ უსწრებს მართვის ობიექტს  $\Delta T$  დროით.

თუ ჩავსვამთ (97)-ს (96)-ში და შევასრულებთ რიგ მარტივ გარადქმნებს, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას მმართველი აჩქარებისათვის

$$\ddot{\gamma} = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_\gamma^1 \gamma + k_\omega^1 \omega, \quad (98)$$

სადაც  $\omega = \dot{\gamma}$  - მართვის ობიექტის სიჩქარე;

$$k_0 = \frac{2\gamma_f}{T^2} + \frac{T - \Delta T}{\Delta T \cdot T} \left( 2\gamma_0 \frac{T + \Delta T}{\Delta T \cdot T} + 2\omega_0 \right);$$

$$k_1 = \frac{2\omega_0}{\Delta T} \left( \frac{1}{\Delta T} - \frac{2}{T} \right) + \frac{4(\gamma_k - \gamma_0)}{\Delta T \cdot T^2};$$

$$k_2 = \frac{2(\gamma_k - \gamma_0)}{\Delta T \cdot T^2} - \frac{2\omega_0}{\Delta T \cdot T};$$

$$k_\gamma^1 = -\frac{2}{\Delta T^2};$$

$$k_\omega^1 = -\frac{2}{\Delta T}.$$

(98) გამოსახულება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას მუდმივი კოეფიციენტებით

$$\ddot{\gamma} + k_\omega \dot{\gamma} + k_\gamma \gamma = k_0 + k_1 t + k_2 t^2, \quad (99)$$

სადაც  $k_\gamma = -k_\gamma^1$  და  $k_\omega = -k_\omega^1$ .



როგორც ცნობილია, მისი ამოხსნა შედგება ორი ნაწილისაგან: შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამოხსნისაგან და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნისაგან.

განვსაზღვროთ ჯერ კერძო ამოხსნა, ანუ დამყარებული მდგენელი ნაწილი. მოვუძებნოთ ამოხსნა მარჯვენა ნაწილის მსგავსი სტრუქტურის მქონე პოლინომის სახით:

$$\gamma = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

ამ გამოსახულების (99)-ში ჩასმით და მარჯვენა მხარეების გატოლებით  $t$ -ს ერთნაირი ხარისხის დროს, ვიღებთ შემდეგ განტოლებებს  $a_i$  ( $i=0,1,2$ ) კოეფიციენტებისათვის

$$2a_2 + k_\omega a_1 + k_\gamma a_0 = k_0;$$

$$2k_\omega a_2 + k_\gamma a_1 = k_1;$$

$$k_\gamma a_2 = k_2. \quad (100)$$

განტოლება (100) ადვილი ამოსახსნელია:

$$a_2 = \frac{k_2}{k_\gamma};$$

$$a_1 = \frac{1}{k_\gamma} \left( k_1 - 2 \frac{k_\omega k_2}{k_\gamma} \right);$$

$$a_0 = \frac{1}{k_\gamma} \left( k_0 - \frac{2k_2}{k_\gamma} - \frac{k_\omega}{k_\gamma} \left( k_1 - 2 \frac{k_\omega k_2}{k_\gamma} \right) \right). \quad (101)$$

თუ გამოსახულებაში (100) ჩავსვათ  $k_i$  ( $i=0,1,2$ ) კოეფიციენტებს (98)-დან, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$a_2 = \frac{(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{\dot{\gamma}_0}{T};$$

$$a_1 = \dot{\gamma}_0;$$

$$a_0 = \gamma_0. \quad (102)$$

აქედან (99) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი ექნება შემდეგი სახე:

$$\gamma = \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0, \quad (103)$$

რომელიც ემთხვევა (92)-ს და ამიტომ მართლაც აკმაყოფილებს (85) და (86) სასაზღვრო პირობებს.

ახლა განვსაზღვროთ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი

$$\dot{\gamma} + k_{\omega}\dot{\gamma} + k_{\gamma}\gamma = 0, \quad (104)$$

ესე იგი მიყვანის პროცესის გარდამავალ ფუნქცია. (104)-ის მახასიათებელ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$\lambda^2 + k_{\omega}\lambda + k_{\gamma} = 0, \quad (105)$$

რომელსაც, როგორც ადვილად ჩანს, აქვს ორი კომპლექსურად შეუღლებელი ფესვი

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\Delta T} + \frac{1}{\Delta T}i \quad \text{და} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\Delta T} - \frac{1}{\Delta T}i, \quad (107)$$

სადაც  $i = \sqrt{-1}$ .

(107)-ის გამოყენებით, (104) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\gamma(t) = e^{-\frac{1}{\Delta T}t} (C_1 \cos \frac{t}{\Delta T} + C_2 \sin \frac{t}{\Delta T}), \quad (108)$$

რასაც მიყვავართ (99) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნამდე

$$\gamma(t) = e^{-\frac{1}{\Delta T}t} (C_1 \cos \frac{t}{\Delta T} + C_2 \sin \frac{t}{\Delta T}) + \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0. \quad (109)$$

ჩვენ ასევე დაგვჭირდება (109)-ის წარმოებულ

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) = \omega(t) = & -\frac{1}{\Delta T} e^{-\frac{1}{\Delta T}t} (C_1 \cos \frac{t}{\Delta T} + C_2 \sin \frac{t}{\Delta T}) + e^{-\frac{1}{\Delta T}t} \left( \frac{1}{\Delta T} C_2 \cos \frac{t}{\Delta T} - \frac{1}{\Delta T} C_1 \sin \frac{t}{\Delta T} \right) \\ & \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) t + \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (110)$$

(109) და (110) ფუნქციათა საწყისი მნიშვნელობები, რომლებიც განისაზღვრებიან საწყისი პირობებით

$$t=0; \quad \gamma = \gamma_{10}; \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{10}, \quad (111)$$

საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ მუდმივები  $C_1$  და  $C_2$

$$C_1 = \gamma_{10} - \gamma_0 \quad \text{და} \quad C_2 = \Delta T(\dot{\gamma}_{10} - \dot{\gamma}_0) - (\gamma_{10} - \gamma_0) \quad (112)$$

და ამით – (99) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის საბოლოო სახე:

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & e^{-\frac{1}{\Delta T}t} [(\gamma_{10} - \gamma_0) \cos \frac{t}{\Delta T} + (\Delta T(\dot{\gamma}_{10} - \dot{\gamma}_0) - (\gamma_{10} - \gamma_0)) \sin \frac{t}{\Delta T}] + \\ & + \left[ \left( \frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0 \right] \end{aligned} \quad (113)$$

აუცილებელია გავაკეთოთ შენიშვნა, რომელიც ეხება (111) საწყის პირობებს, რადგან ისინი განსახვავდება პირველი სასაზღვრო პირობიდან – (85). საქმე იმაშია, რომ

დაყვანის პროცესი შეიძლება იწყებოდეს მართვის ობიექტის კოორდინატის და სიჩქარის ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობებისას, და არა აუცილებლად მათი ტოლობისას მართვის ობიექტის სიჩქარისა და კოორდინატის სათვლელ მნიშვნელობებთან, რომლებიც წინასწარ მოცემულია (85)-ში. თუ (85)-ის და (100)-ის მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლი არ არის, აღიძვრება გარდამავალი პროცესი, რომელიც განისაზღვრება ექსპონენციალური მდგენლით (113)-ში. წინააღმდეგ შემთხვევაში გარდამავალი მდგენელი არ არსებობს და დაყვანის პროცესი მიჰყვება მხოლოდ იძულებით მდგენელს (მეორე მდგენელი (113)-ში). ასევე აღვნიშნავთ, რომ გარდამავალ მდგენელს აქვს ქრობადი ხასიათი და ამასთან  $\Delta T$  ასრულებს დროის მუდმივას როლს: რაც უფრო დიდია იგი, მით უფრო ნელია ქრობა, და პირიქით. ამგვარად,  $\Delta T$ -ს მნიშვნელობა შეიძლება ასრულებდეს დაყვანის პროცესის მართვის “სიხისტის” საზომის როლს.

### 3.3. საწყისი აჩქარების (გაქანების) ამოცანა.

#### 3.3.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი.

საწყისი აჩქარების (გაქანების) ამოცანაში (საჭირო სიჩქარის მისაღწევად გარკვეულ მომენტში) სასაზღვრო პირობა (86) იცვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$$t = T; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f, \quad (114)$$

რომელიც ნიშნავს, რომ მოცემულ შემთხვევაში აუცილებელია, რომ მართვადი ობიექტის სიჩქარემ დროის მოცემულ მომენტში  $t = T$  მიაღწიოს დასახულ მნიშვნელობას  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f$ . ამასთან კოორდინატი შეიძლება იყოს ნებისმიერი.

ეს ისევ ვარიაციული ამოცანაა მოძრავი ბოლოებით. ბუნებრივი სასაზღვრო პირობა (90) რჩება ძალაში. იმის ანალოგიურად, როგორც ეს კეთდებოდა დაყვანის ამოცანაში, (6.10) გამოსახულებაში ვიღებთ  $C_i (i = 0, 1, 2, 3)$  კოეფიციენტების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$C_3 = 0; C_2 = \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}; C_1 = \dot{\gamma}_0; C_0 = \gamma_0 \quad (115)$$

აქედან

$$\gamma = \left(\frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{2T}\right)t^2 + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0, \quad (116)$$

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}\right)t + \dot{\gamma}_0, \quad (117)$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}. \quad (118)$$

ბოლო გამოსახულება წარმოადგენს საწყისი აჩქარების პროცესის მართვის კანონს. ეს ნიშნავს, რომ, თუ დროის  $[0;T]$  მონაკვეთში მართვის ობიექტს მიენიჭება მმართველი ზემოქმედება (117), მაშინ  $t=T$  მომენტისათვის მისი სინქარე დააკმაყოფილებს (114) სასაზღვრო პირობას.

მაგრამ ეს ისევ მართვის პროგრამული კანონია, და იმისათვის, რომ ის გარდაქნათ თვითკორექტირებადად (ადაპტურად), უნდა მოვიქცეთ ისე, როგორც დაყვანის ამოცანის შემთხვევაში, ესე იგი ვცვლით სინქარისა და კოორდინატების საწყის მნიშვნელობებს მიმდინარე მნიშვნელობებით, დროის  $T$  მომენტს კი  $T-t$  სხვაობით:

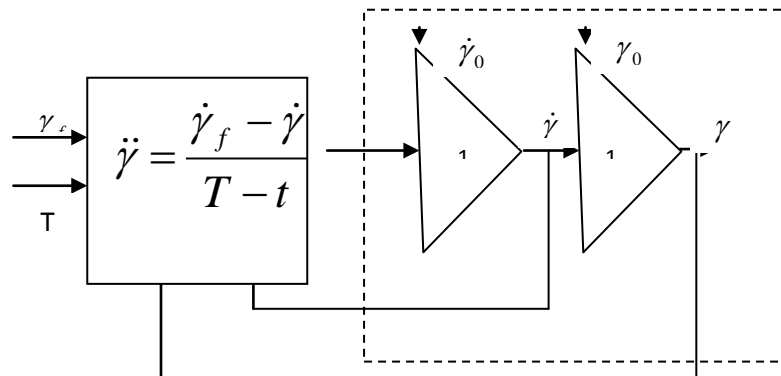
$$\ddot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}}{T-t}. \quad (119)$$

ნახ.10-ზე მოყვანილია საწყისი (გაქანების პროცესის მართვის) ბლოკ-სქემა.

მართვა (119) ისევ შეიცავს იმავე თავისებურებას, როგორსაც დაყვანის პროცესის ადაპტური მართვის კანონი, ამიტომ უნდა ვისარგებლოთ მისი გამორიცხვის ანალოგიური ხერხით.

### 3.3.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი გაქანების ამოცანაში.

დავუშვათ  $T-t=\Delta T$ , სადაც  $\Delta T$  – დროის მუდმივი ინტერვალია. ფიზიკური თვალსაზრისით ეს ისევ ნიშნავს, რომ გაქანების პროცესის მიზნობრივი წერტილი ასევე მოძრავია, რადგან ის უსწრებს მართვის ობიექტს  $\Delta T$  ინტერვალით.



ნახაზი 10. საწყისი აჩქარების პროცესის მართვის ბლოკ-სქემა.

აღნიშნოთ მისი ცვლადი კოორდინატა  $\gamma_m$ -ით. მმართველი აჩქარების ფუნქცია  $\Delta T$  ინტერვალზე იქნეს შემდეგ სახეს:

$$\ddot{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}_m - \dot{\gamma}}{\Delta T}, \quad (120)$$

სადაც  $\dot{\gamma} = \omega$  არის მართვის ობიექტის სიჩქარე, რომელიც დროის ფუნქციაა. ამრიგად, (96) გამოსახულების მარცხენა ნაწილის გამოყენება მმართველი აჩქარებისათვის ითვალისწინებს, რომ მართვის ობიექტი მოძრაობს მუდმივი ჩამორჩენით დროში  $\Delta T$  ინტერვალში  $\gamma_m$  მიზნობრივი წერტილისაგან, და  $T$  დროის შემდეგ მისი სიჩქარე გაუტოლდება მოცემულ  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f$  მნიშვნელობას.

(94)-ის ანალოგიურად ვიღებთ მოძრავი მიზნობრივი წერტილის სიჩქარის მართვის შემდეგ პროგრამას:

$$\dot{\gamma}_m = \dot{\gamma}_0 + \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}(t + \Delta T). \quad (121)$$

თუ (121)-ს ჩავსვამთ (120)-ში და შევასრულებთ რიგ მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას მმართველი აჩქარებისათვის

$$\ddot{\gamma} = k_0 + k_1 t + k_\omega^1 \omega, \quad (122)$$

სადაც  $\omega = \dot{\gamma}$  – მართვის ობიექტის სიჩქარეა;

$$k_0 = \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T} + \frac{\dot{\gamma}_0}{\Delta T};$$

$$k_1 = \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T\Delta T};$$

$$k_\omega^1 = -\frac{1}{\Delta T}.$$

(122) გამოსახულება წარმოადგენს მეორე რიგის წრფივ არაერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებას მუდმივი კოეფიციენტებით

$$\ddot{\gamma} + k_\omega \dot{\gamma} = k_0 + k_1 t, \quad (123)$$

სადაც  $k_\omega = -k_\omega^1$ .

თავდაპირველად განვსაზღვროთ (123)-ის კერძო ამონახსნით, ანუ დამყარებული მდგენელი, რომელიც უნდა მოიძებნოს იმავე სტრუქტურის პოლინომის სახით, როგორცაა მარჯვენა მხარე

$$\gamma = a_0 + a_1 t. \quad (124)$$

თუ (124)-ს ჩავსვამთ (123)-ში და გაუტოლებთ ერთმანეთს მარჯვენა მხარეებს  $t$ -ს ერთი და იგივე ხარისხებისას,  $a_i$  ( $i=0,1$ ) კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{aligned} 2a_1 + k_\omega a_0 &= k_0; \\ k_\omega a_1 &= k_1. \end{aligned} \quad (125)$$

(125) ადვილად ამოიხსნება:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k_1}{k_\omega}; \\ a_0 &= \frac{k_0}{k_\omega} - \frac{k_1}{k_\omega^2}. \end{aligned} \quad (126)$$

(122)-დან კოეფიციენტების მნიშვნელობების ჩასმით უკანასკნელ გამოსახულებაში მივიღებთ:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}; \\ a_0 &= \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \quad (127)$$

აქედან არაერთგვაროვანი (6.49) განტოლების კერძო ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე

$$\gamma = \left( \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T} \right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0, \quad (128)$$

ხოლო მისი წარმოებულს

$$\dot{\gamma} = \left( \frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T} \right) t + \dot{\gamma}_0, \quad (129)$$

რომელიც ემთხვევა (117)-ს და ამიტომ ნამდვილად აკმაყოფილებს (85) და (114) სასაზღვრო პირობებს.

ახლა ვსაზღვრავთ ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნას

$$\ddot{\gamma} + k_\omega \dot{\gamma} = 0, \quad (130)$$

ანუ გაქანების პროცესის გარდამავალ ფუნქციას. მახასიათებელ განტოლებას (130) აქვს შემდეგი სახე:

$$\lambda^2 + k_\omega \lambda = 0, \quad (131)$$

რომელსაც, როგორც ადვილად ჩანს, აქვს ორი ფესვი

$$\lambda_1 = 0 \text{ და } \lambda_2 = -k_\omega = -\frac{1}{\Delta T}. \quad (132)$$

(132)-ის გამოყენებით, (131) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\gamma(t) = C_1 + C_2 e^{-\frac{1}{\Delta T} t}, \quad (133)$$

რასაც მიყვავართ (123) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნამდე

$$\gamma(t) = C_1 + e^{-\frac{1}{\Delta T} t} C_2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}\right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0. \quad (134)$$

(134)-ის წარმოებული ტოლია

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{1}{\Delta T} e^{-\frac{1}{\Delta T} t} C_2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}\right) t + \dot{\gamma}_0. \quad (135)$$

საწყისი მნიშვნელობები, რომლებიც განისაზღვრებიან

$$t=0; \gamma = \gamma_{10}; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{10}, \quad (136)$$

საწყისი პირობებით, საშუალებას იძლევა განესაზღვროთ მუდგევები

$$C_1 = \gamma_0 - \gamma_{10} \text{ და } C_2 = (\dot{\gamma}_{10} - \dot{\gamma}_0) + (\gamma_{10} - \gamma_0), \quad (137)$$

და ამით – (123) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი და მისი წარმოებული

$$\gamma(t) = (\gamma_0 - \gamma_{10}) + ((\dot{\gamma}_{10} - \dot{\gamma}_0) + (\gamma_{10} - \gamma_0)) e^{-\frac{1}{\Delta T} t} + \left(\frac{\dot{\gamma}_f - \dot{\gamma}_0}{T}\right) \frac{t^2}{2} + \dot{\gamma}_0 t + \gamma_0.$$

$$\dot{\gamma}(t) = \omega(t) = -\frac{1}{\Delta T} e^{-\frac{1}{\Delta T} t} + \left(\frac{2(\gamma_f - \gamma_0)}{T^2} - \frac{2\dot{\gamma}_0}{T}\right) t + \dot{\gamma}_0. \quad (138)$$

აქ აუცილებელია გავაკეთოთ შენიშვნა, რომელიც ეხება საწყის პირობებს (11), რადგან ისინი განსხვავდებიან (85) სასაზღვრო პირობებისგან (პირველი მათგანისგან). საქმე იმაშია, რომ დაყვანის პროცესი შეიძლება დაიწყოს მართვის ობიექტის კოორდინატისა და სიჩქარის ნებისმიერი საწყისი მნიშვნელობის დროს, რომლებიც არ არის აუცილებელი იყოს ტოლი მართვის ობიექტის კოორდინატის და სიჩქარის (85)-ში წინასწარ მოცემულ საანგარიშო მნიშვნელობების. თუ (85) და (100) მნიშვნელობები ტოლი არ არის, მაშინ იწყება გარდამავალი პროცესი, რომელიც განისაზღვრება ექსპონენციალური მდგენლით (113)-ში. წინააღმდეგ შემთხვევაში გარდამავალი მდგენელი არ არსებობს და დაყვანის პროცესი მიჰყვება მხოლოდ იძულებით მდგენელს – მეორე შესაკრებს (113)-ში. აღვნიშნოთ ასევე, რომ გარდამავალ მდგენელს აქვს ქრობადი ხასიათი და  $\Delta T$  ასრულებს დროის მუდმივას როლს: რაც უფრო მეტია იგი, მით უფრო ნელია ქრობა, და პირიქით. ამგვარად,  $\Delta T$  შეიძლება გამოდგეს დაყვანის პროცესის მართვის “სიხისტის” საზომად.

### 3.4. მიახლოების ამოცანა.

#### 3.4.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი [57,58].

მიახლოების ამოცანაში გამოიყენება ოთხივე სასაზღვრო პირობა (80) და (81), რომლებიც საშუალებას იძლევა სწრაფად გამოვთვალოთ მმართველ ფუნქციაში (79)  $C_i (i = 0,1,2,3)$  კოეფიციენტები

$$C_0 = \gamma_0;$$

$$C_1 = \dot{\gamma}_0;$$

$$C_2 = \frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0);$$

$$C_3 = \frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0). \quad (139)$$

იმის გამო, რომ (79)-დან აჩქარებისთვის გვაქვს

$$\ddot{\gamma}(t) = C_2 + C_3 t, \quad (140)$$

ვიღებთ მართვის სინთეზირებულ ფუნქციას

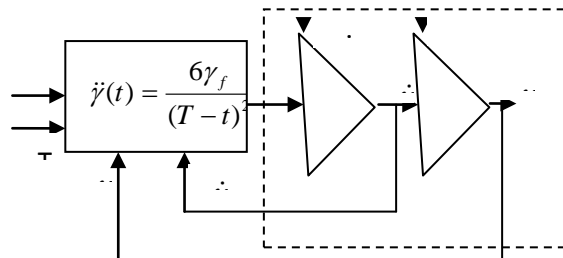
$$\ddot{\gamma}(t) = \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right) + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)t \quad (141)$$

და პროგრამებს სიჩქარისა და კოორდინატებისთვის

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_0 + \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)t + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)\frac{t^2}{2}; \quad (142)$$

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \dot{\gamma}_0 t + \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)\frac{t^2}{2} + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)\frac{t^3}{6} \quad (143)$$

ნახ.11-ზე მოყვანილია მიახლოების ამოცანის ბლოკ-სქემა.



ნახაზი 11. მიახლოების ამოცანის ბლოკ-სქემა.



იმისათვის, რომ მივიღოთ მართვის ადაპტური ალგორითმი, უნდა მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ვინაიდან ობიექტი ყველა მომენტში იმყოფება დროის საწყის წერტილში, ვთვლით, რომ  $t=0$  და ვცვლით სიჩქარის და კოორდინატის საწყის მნიშვნელობებს მიმდინარე მნიშვნელობებით და დროის  $T$  მომენტს – სხვაობით  $T-t$ :

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{6\gamma_f}{(T-t)^2} - \frac{6\gamma}{(T-t)^2} - \frac{4\dot{\gamma}}{(T-t)} - \frac{2\dot{\gamma}_f}{(T-t)}. \quad (144)$$

განტოლება (144) ისევ შეიცავს იმავე თავისებურებას, როგორც მიახლოების პროცესის ადაპტური მართვის კანონი, ამიტომ უნდა გამოვიყენოთ ამ თავისებურების გამორიცხვის ანალოგიური ხერხი.

### 3.4.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი მიახლოების ამოცანაში.

შევცვალოთ (144)-ში  $T-t$   $\Delta T$  ინტერვალთ, სადაც  $\Delta T$  არის დროის მუდმივი ინტერვალი, ესე იგი ვაკეთებთ ისევ დაშვებას იმის შესახებ, რომ მიახლოების პროცესის მიზნობრივი წერტილი მოძრავია. მის ცვლად კოორდინატას ისევ აღვნიშნავთ  $\gamma_m$ -თ, რომელიც, ცხადია, ტოლი იქნება

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \gamma_0 + \dot{\gamma}_0(t + \Delta T) + \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right) \frac{(t + \Delta T)^2}{2} + \\ & + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right) \frac{(t + \Delta T)^3}{6}. \end{aligned} \quad (145)$$

ადვილად ჩანს, რომ მოძრავი მიზნობრივი წერტილის სიჩქარე აღმოჩნდება ტოლი

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) = & \dot{\gamma}_0 + \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)(t + \Delta T) + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \right. \\ & \left. - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right) \frac{(t + \Delta T)^2}{2}. \end{aligned} \quad (146)$$

ჩავსვათ (144)-ში (145), (146) და  $T-t=\Delta T$  და რიგი გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ მეორე რიგის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{\gamma} + K_v \dot{\gamma} + K_s \gamma = K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3, \quad (147)$$

სადაც  $K_0 = \frac{6\gamma_0}{\Delta T^2} + \frac{4\dot{\gamma}_0}{\Delta T} + C_2$ ,

$$K_1 = \frac{6\dot{\gamma}_0}{\Delta T^2} + \frac{4C_2}{\Delta T} + C_3, \quad K_2 = \frac{3C_2}{\Delta T^2} + \frac{2C_3}{\Delta T},$$

$$K_3 = \frac{C_3}{\Delta T^2}, \quad K_s = \frac{6}{\Delta T^2}, \quad K_v = \frac{4}{\Delta T},$$

$C_2$  და  $C_3$  განისაზღვრებიან (139)-დან.

(174) ზოგადი ამონახსნის იძულებით მდგენელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} \gamma_{fr} = & \frac{\Delta T^2}{6} \left[ K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + \left( K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3 \right) t + \right. \\ & \left. + (K_2 - 2\Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3 \right]. \end{aligned} \quad (148)$$

გარდამავალი მდგენელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \gamma_{tr} = & e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \left[ \gamma_{10} \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) + \dot{\gamma}_{10} \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta T \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t - \frac{\Delta T^2}{6} K_0 \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) + \right. \\ & + \frac{\Delta T^3}{9} K_1 \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) - \frac{5}{54} \Delta T^4 K_2 \left( \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t - \frac{\sqrt{2}}{5} \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) + \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}}{54} \Delta T^5 K_3 \left( 2\sqrt{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t - \frac{t}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) \right] = \\ = & e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \left( A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right), \end{aligned} \quad (149)$$

სადაც

$$A = \gamma_{10} - \frac{1}{6} \Delta T^2 K_0 + \frac{1}{9} \Delta T^3 K_1 - \frac{5}{54} \Delta T^4 K_2 + \frac{4}{54} \Delta T^5 K_3;$$

$$B = \sqrt{2} \gamma_{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}_{10} \Delta T - \frac{\sqrt{2}}{6} \Delta T^2 K_0 + \frac{\sqrt{2}}{36} \Delta T^3 K_1 + \frac{5\sqrt{2}}{270} \Delta T^4 K_2 - \frac{7\sqrt{2}}{108} \Delta T^5 K_3.$$

საზს ვუსვამთ, რომ მოყვანილ გამოსახულებებში საწყისი მნიშვნელობები  $\gamma_{10}$  და  $\dot{\gamma}_{10}$  არ არის ტოლი იმ საწყისი მნიშვნელობებისა, რომლებიც მოცემულია (80)-ში, რის გამოც წარმოიქმნება გარდამავალი პროცესი (149), რომელიც თანდათან ქრება (ამასთან, დროის მუდმივა ტოლია  $\frac{\Delta T}{2}$ ), ესე იგი ობიექტი გადის (148) იძულებით ტრაექტორიაზე, რასაც მივყავართ მიახლოების ამოცანის სრულ ამოხსნამდე.

### 3.4.3. მიახლოების ამოცანა დამატებითი პირობით საბოლოო აჩქარებაზე [57].

#### 3.4.3.1. მმართველი ფუნქციის სინთეზი.

სწორად ტერმინალური მართვის პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად არ არის საკმარისი მიახლოების ამოცანის ოთხი სასაზღვრო პირობა (80) და (81). მაგალითად, დამუხრუჭების დროს არ არის საკმარისი მოვითხოვოთ საბოლოო სიჩქარის ნულთან ტოლობა; სრული გაჩერებისთვის საჭიროა, რომ ასევე ნულის ტოლი იყოს საბოლოო აჩქარებაც. ამრიგად, ჩნდება დამატებითი სასაზღვრო პირობა (მეხუთე), დაკავშირებული აჩქარებასთან

$$\begin{aligned} t=0; \gamma &= \gamma_0; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0, \\ t=T; \gamma &= \gamma_f; \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f; \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}_f. \end{aligned} \quad (150)$$

ცხადია, რომ მმართველი ფუნქცია ამ შემთხვევაში უნდა წარმოადგენდეს მეოთხე რიგის პოლინომს ხუთი კოეფიციენტით, რომელთაგან მხოლოდ სამი საჭიროებს განსაზღვრას, ვინაიდან ცხადია, რომ პირველი ორი უნდა აკმაყოფილებდნენ ორ საწყის პირობას (150)

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \dot{\gamma}_0 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4. \quad (151)$$

პირველი და მეორე წარმოებულების გამოთვლით და მათი ჩასმით ბოლო სამ განტოლებაში (150), მივიღებთ  $C_i$  ( $i=2,3,4$ ) კოეფიციენტების მნიშვნელობებს

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{12}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{6}{T}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) + \ddot{\gamma}_f; \quad C_3 = \frac{48}{T^3}(\gamma_f - \gamma_0) + \frac{18}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) - \frac{6}{T}\ddot{\gamma}_f \\ C_4 &= \frac{36}{T^4}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{12}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) + \frac{6}{T^2}\ddot{\gamma}_f. \end{aligned} \quad (152)$$

(151) და (152)-დან გამომდინარეობს, რომ მმართველი აჩქარების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(t) &= \frac{12}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{6}{T}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) + \ddot{\gamma}_f + \left(\frac{48}{T^3}(\gamma_f - \gamma_0) + \frac{18}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) - \frac{6}{T}\ddot{\gamma}_f\right)t + \\ &+ \left(\frac{36}{T^4}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{12}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0) + \frac{6}{T^2}\ddot{\gamma}_f\right)t^2. \end{aligned} \quad (153)$$

3.4.3.2. მართვის პროცესის დინამიკის ანალიზი მიახლოების ამოცანაში  
დამატებითი პირობით საბოლოო აჩქარებაზე.

იმისათვის, რომ გადავიდეთ უკუკავშირიან მართვაზე, უნდა მოვიქცეთ ისევე, როგორც წინა შემთხვევებში, ესე იგი (153)-ში ვთვლით, რომ  $t=0$ ,  $\Delta T=T-t$ , და ფაზურ კოორდინატა საწყის მნიშვნელობებს ვცვლით მიმდინარე მნიშვნელობებით, რის შედეგადაც ვიღებთ

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{12}{(T-t)^2}(\gamma_f - \gamma) - \frac{6}{(T-t)}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}). \quad (153')$$

(153') – ეს ისევ მართვის კანონია თავისებურებით, რომლის მოშორებისთვის ვიქცევით ისე, როგორც წინა შემთხვევაში. ვთვლით, რომ  $T-t=\Delta T=\text{const}$ , ხოლო ფაზური ტრაექტორიების საბოლოო მნიშვნელობები – ტოლი არიან მოძრავი მიზნობრივი წერტილის ცვლადი ფაზური ტრაექტორიების

$$\begin{aligned} \gamma_m(t) &= \gamma_0 + \dot{\gamma}_{10}(t + \Delta T) + C_2 \frac{(t + \Delta T)^2}{2} + C_3 \frac{(t + \Delta T)^3}{6} + C_4 \frac{(t + \Delta T)^4}{24}; \\ \dot{\gamma}_m(t) &= \dot{\gamma}_{10} + C_2(t + \Delta T) + C_3 \frac{(t + \Delta T)^2}{2} + C_4 \frac{(t + \Delta T)^3}{6}, \end{aligned} \quad (154)$$

სადაც  $C_2, C_3$  და  $C_4$  განისაზღვრება (152)-დან.

(154) ფუნქციების ჩასმით (153)-ში და არართულია, მაგრამ საკმაოდ გრძელი გარდაქმნების შესრულებით ვიღებთ მიახლოების ამოცანის დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც არ შეიცავს თავისებურებას

$$\ddot{\gamma} + K_\omega \dot{\gamma} + K_\gamma \gamma = \sum_{i=0}^4 K_i t^i, \quad (155)$$

სადაც

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{12\gamma_0}{\Delta T^2} + \frac{6\omega_0}{\Delta T} + C_2; \\ K_1 &= \frac{12\omega_0}{\Delta T^2} + \frac{6C_2}{\Delta T} + C_3; \\ K_2 &= \frac{6C_2}{\Delta T^2} + \frac{3C_3}{\Delta T} + C_4; \\ K_3 &= \frac{2C_3}{\Delta T^2} + \frac{2C_4}{\Delta T}; \\ K_4 &= \frac{C_4}{\Delta T^2}; \end{aligned}$$

$$K_\gamma = -\frac{12}{\Delta T^2};$$

$$K_\omega = -\frac{6}{\Delta T}.$$

განსაზღვროთ (155) განტოლების გარდამავალი და დამყარებული მდგენლები. მოვძებნოთ არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამოხსნა შემდეგი სახით:

$$\gamma = \sum_{i=0}^4 a_i t^i, \quad (156)$$

სადაც  $a_i$  – კოეფიციენტებია, რომლებიც საჭიროებენ განსაზღვრას.

თუ ჩავსვამთ  $\gamma$ -ის პირველ და მეორე წარმოებულებს (155)-ში და ორივე მხარის კოეფიციენტებს –  $t$ -ს ერთნაირი ხარისხებით – გაუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ განტოლებათა სისტემას საძებნი კოეფიციენტების  $a_i (i=0, \dots, 4)$  მიმართ

$$K_0 = 2a_2 + K_\omega a_1 + K_\gamma a_0;$$

$$K_1 = 6a_3 + 2a_2 K_\omega + a_1 K_\gamma;$$

$$K_2 = 12a_4 + 3a_3 K_\omega + a_2 K_\gamma;$$

$$K_3 = 4a_4 K_\omega + a_3 K_\gamma;$$

$$K_4 = a_4 K_\omega, \quad (157)$$

საიდანაც ადვილად განისაზღვრება

$$a_4 = -\frac{K_4}{K_\gamma}; \quad a_3 = \frac{K_3 - 4K_4}{K_\gamma}; \quad a_2 = \frac{K_2 + 3K_\omega a_3 - 12a_4}{K_\gamma};$$

$$a_1 = \frac{K_1 + 2K_\omega a_2 - 6a_3}{K_\gamma}; \quad a_0 = \frac{K_0 a_1 - 2a_2}{K_\gamma}. \quad (158)$$

(158) გამოსახულებები განსაზღვრავენ მიახლოების პროცესის დამყარებულ მდგენელს აჩქარების მოცემული საბოლოო (ნულოვანი) მნიშვნელობით.

ადვილად ჩავეწერთ გარდამავალ მდგენელსაც ((6.83) არაერთგვაროვან განტოლების ზოგად ამონახსნს).

$$\gamma_{rr}(t) = e^{-\frac{k_\omega t}{2}} (s_1 \cos \beta t + s_2 \sin \beta t), \quad (159)$$

$$\text{სადაც } \beta = \sqrt{k_\gamma - \left(\frac{k_\omega}{2}\right)^2},$$

$s_1, s_2$  – არიან კონსტანტები, რომლებიც უნდა განისაზღვრონ.

(155)-ის სრული ამონახსნი ახლა წარმოადგენს გარდამავალი და დამყარებული ამოხსნების ჯამს:

$$\gamma(t) = \gamma_{tr}(t) + \gamma_{ir}(t) = e^{-\frac{K_\omega t}{2}} (s_1 \cos(\beta t) + s_2 \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i. \quad (160)$$

$s_1$  და  $s_2$  მუდმივების განსაზღვრისათვის ვიყენებთ (111) საწყის პირობებს და (160) წარმოებულს, რაც გვაძლევს შემდეგ გამოსახულებებს საძებნი მუდმივებისათვის:

$$C_1 = \gamma_{10} - a_0; \quad C_2 = \left( \dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{C_1}{2} \right) \frac{1}{\beta} \quad (161)$$

და ბოლოს (155)-ის სრული ამონახსნის საბოლოო გამოსახულებას

$$\gamma(t) = e^{-\frac{K_\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{\gamma_{10} - a_0}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i. \quad (162)$$

(159) გარდამავალი პროცესი თანდათან ქრება (დროის მუდმივა უდრის  $\frac{K_\omega}{2}$ ), ესე იგი

ობიექტი გადის (6.84) იძულებით ტრაექტორიაზე.

მართვის ობიექტის სიჩქარე იქნება

$$\dot{\gamma}(t) = e^{-\frac{K_\omega}{2}} \left( -\frac{K_\omega}{2} (\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \left( \omega_{10} - a_1 K_\omega \frac{\gamma_{10} - a_0}{2} \right) \sin \beta t + \right. \\ \left. + ((\gamma_{10} - a_0) \beta \sin \beta t + \left( \omega_{10} - a_1 K_\omega \left( \frac{\gamma_{10} - a_0}{2} \right) \right) \beta \cos \beta t) \right) + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3. \quad (163)$$

თუ ჩავსვამთ  $t=T$  მნიშვნელობას (155) განტოლების დამყარებულ ამონახსნში, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ისინი ნამდვილად აკმაყოფილებენ (81) სასზღრო პირობებს საბოლოო აჩქარების ნულოვანი მნიშვნელობა დროს, რაც წყვეტს საბოლოო მდგომარეობის მართვის დასმულ ამოცანას მიახლოების ამოცანაში.

### 3.5. თექნიკური სისტემების ელემენტების სივრცული ბრუნვების საბოლოო მდგომარეობათა მართვა

განზოგადებული წარმოდგენის საფუძველზე შემუშავებულმა სივრცულ ბრუნვათა კინემატიკის სპინორულმა მოდელმა და მექანიკური ობიექტების მოძრაობის საბოლოო მდგომარეობების მართვის თეორიის მეთოდებმა საშუალება მოგვცეს შეგვექმნა სხვადასხვა ობიექტების (მფრინავი აპარატები, რობოტ-მანიპულატორების, კომპიუტერული გრაფიკა და ანიმაცია, ავტომატიზირებული დაპროექტების სისტემები და სხვა) სივრცულ ბრუნვათა საბოლოო მდგომარეობების მართვის მარტივი მეთოდები. მოცემულ ნაწილში თეორიული შედეგების გამოყენება განხილული იქნება რობოტ-მანიპულატორების მართვის პრაქტიკულ მაგალითზე.

აქ საჭიროა გამეორდეს ის, რაც ადრე უკვე იყო აღნიშნული: სპინორულმა მიდგომამ საშუალება მოგვცა დაგვეყვანა არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა (სივრცული მოძრაობის მართვისა) ერთგანზომილებიანზე, რადგანაც განსაზღვრული იყო მბრუნავი ვექტორის კოორდინატები (64) როგორც ბრუნვის სიბრტყეში მდებარე ბრუნვის ერთი კუთხის ფუნქციები. ცხადია, რომ ტრაექტორიები, რომლებიც შეესაბამებიან მოძრაობებს, შედგებიან სამი ბუნებრივი უბნისაგან: აჩქარების, თანაბარი ბრუნვის<sup>2</sup> და დამუხრუჭების, რომელთა მართვისთვის გამოყენებული იქნება წინათ მიღებული შედეგები.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: საჭიროა გადავიყვანოთ მექანიკური მართვის ობიექტი (მაგალითად, სატაცი ან სფერული რგოლი), კოორდინატებით  $x(x^1, x^2, x^3)$  სამგანზომილებიანი სივრცის წერტილში კოორდინატებით  $y(y^1, y^2, y^3)$  ბრუნვის საშუალებით. როგორც ნაჩვენებია იყო მეორე თავში, შუალედური მბრუნავი ვექტორი  $\xi(\xi^1; \xi^2; \xi^3)$  ამ დროს განიცდის ბრუნვას კუთხით, რომელიც განისაზღვრება ბრუნვის საბოლოო და საწყისი წერტილებით -  $\gamma_f = \ar \cos\left(\frac{(x, y)}{|x| * |y|}\right) = \ar \cos\left(\frac{(x, y)}{|x|^2}\right)$ .

იქვე მიღებული იყო კინემატიკური გამოსახულებები მბრუნავი ვექტორისთვის

$$\xi^i(t) = \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - \gamma(t))r_x^i - \cos \gamma(t) \cdot r_y^i). \quad (164)$$

აქ აღსანიშნავია, რომ (64)-სგან განსხვავებით, (164) გამოსახულებებში გამოყენებულია ბრუნვის კუთხის ფუნქცია  $\gamma(t)$ , რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას  $0 \leq \gamma(t) \leq \gamma_f = \arccos\left(\frac{(x, y)}{|x|^2}\right)$ .

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია, არსებითად, განსაზღვრავს მართვის ობიექტის მოძრაობის დინამიკას და ამიტომ წარმოადგენს ძირითად საძიებელ ობიექტს ტერმინალური მართვის თეორიაში. ნაშრომის წინა ნაწილი მთლიანად ეძღვნებოდა ამგვარი ამოცანების გადაწყვეტას ზოგად შემთხვევაში. ახლა შესაძლებელია მიღებული ზოგადი შედეგების გამოყენება კონკრეტული ამოცანებისათვის სფერული და მბრუნავ წვეილთა მრავალრგოლიანი მექანიზმების სივრცული ბრუნვების ტერმინალური მართვისა დარგში.

### 3.5.1. მართვა მოძრაობის საწყის უბანზე

დინამიკის თვალსაზრისით ბრუნვის საწყისი პროცესი ნიშნავს, რომ ნულოვანი სიჩქარის მქონე მართვის ობიექტი უნდა ავანქაროთ საჭირო სიჩქარემდე  $\dot{\gamma}_f$ . ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ აჩქარების მართვის ამოცანის ამოხსნის შედეგები, მაგრამ საქმე იმაშია, რომ, თუ გვსურს დავასრულოთ მოძრაობის საწყისი ეტაპი  $[0; \alpha_1 \gamma_f]$  სეგმენტის მარჯვენა ბოლოში, მაშინ, ცხადია, უნდა გამოვიყენოთ მიახლოების ამოცანის მეთოდები, რომელიც ითვალისწინებს ყველა სასაზღვრო პირობას.

ბრუნვის საწყისი პირობებია:

$$\begin{aligned} t=0; \gamma(0) &= \gamma_0; \dot{\gamma}(0) = 0 \\ t=T; \gamma(T) &= \alpha_1 \gamma_f; \dot{\gamma}(T) = \dot{\gamma}_f, \end{aligned} \quad (165)$$

სადაც  $T$  არის ბრუნვის საწყისი ეტაპის ხანგრძლივობის მოცემული დრო.

თუ ჩავსვამთ (148) და (149) ჯამს (დაახლოების მართვის პროცესის გარდამავალ და დამყარებულ ფუნქციათა ჯამს), მივიღებთ მბრუნავი ვექტორის კოორდინატებს, რომლებიც წარმოადგენენ ბრუნვის საწყისი ეტაპის დინამიკას



$$\begin{aligned}
\xi^1(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) - \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + \\
&+ (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3]) r_x^1 - \cos(e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) + \\
&+ \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + \\
&+ (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3] \cdot r_y^1) \\
\xi^2(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) - \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + \\
&+ (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3]) r_x^2 - \cos(e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) + \\
&+ \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + \\
&+ (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3] \cdot r_y^2) \\
\xi^3(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) - \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + \\
&+ (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3]) r_x^3 - \cos(e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t)) + \\
&+ \frac{\Delta T^2}{6} [K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3 + (K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3) t + \\
&+ (K_2 - 2 \Delta T K_3) t^2 + K_3 t^3] \cdot r_y^3) \tag{166}
\end{aligned}$$

სადაც ყველა პარამეტრი განსაზღვრულია (148) და (149)-ში.

ძნელი არ არის განვსაზღვროთ შუალედი ვექტორის ბრუნვის სიხის კოორდინატთა ფუნქციები

$$\begin{aligned}
a_0 &= K_0 - \frac{2}{3} \Delta T K_1 + \frac{5}{9} \Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9} \Delta T^3 K_3; \quad a_1 = K_1 - \frac{4}{3} \Delta T K_2 + \frac{5}{3} \Delta T^2 K_3; \\
a_2 &= K_2 - 2 \Delta T K_3; \quad a_3 = K_3.
\end{aligned}$$

გარდა ამისა, იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \left( A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right)' &= -\frac{2}{\Delta T} e^{-\frac{2t}{\Delta T}} (A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t) + \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \cdot \\
&\cdot \left( B \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t - A \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right),
\end{aligned}$$

ვიღებთ გამოსახულებას ბრუნვის კუთხის ფუნქციის წარმოებულისთვის

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{2}{\Delta T} e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \left( A \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t + B \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) + \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} e^{-\frac{2t}{\Delta T}} \cdot \left( B \cos \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t - A \sin \frac{\sqrt{2}}{\Delta T} t \right) + a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2, \quad (167)$$

და საბოლოოდ, გამოსახულებას ვექტორის  $\xi(t)$  სიჩქარის ფუნქციისთვის

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^1(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} \dot{\gamma}(t) (\sin(\gamma_f - \gamma(t)) r_x^1 - \sin \gamma(t) r_y^1); \\ \dot{\xi}^2(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} \dot{\gamma}(t) (\sin(\gamma_f - \gamma(t)) r_x^2 - \sin \gamma(t) r_y^2); \\ \dot{\xi}^3(t) &= \frac{|x|^2}{|r|^2} \dot{\gamma}(t) (\sin(\gamma_f - \gamma(t)) r_x^3 - \sin \gamma(t) r_y^3). \end{aligned} \quad (168)$$

ბრუნვის პროცესი საწყის ეტაპზე მოდელირებული იყო MatCAD-ის საშუალებით. საწყის და საბოლოო ვექტორებად აღებულია  $x(10,-45,30)$  და  $y(1,20,51.225)$ . ცხადია, კუთხე მათ შორის ტოლია  $\gamma_f = \arccos\left(\frac{(x,y)}{|x|^2}\right) = 77.65^\circ$ . ბრუნვის მთელი კუთხე

$\gamma_f = 77.65^\circ$  გაყოფილი იყო სამ თანაბარ კუთხედ  $\gamma_f/3 = 25.88^\circ$ ;  $2\gamma_f/3 = 51.77^\circ$  და  $\gamma_f = 77.65^\circ$ , ესე იგი ამ შემთხვევაში  $\alpha_1 = \frac{1}{3}$  და  $\alpha_2 = \frac{2}{3}$ . შემდეგში გამოვიყენებთ

კუთხეთა მნიშვნელობებს, გამოსახულს რადიანებში  $\gamma_f/3 = 0.452$ ,  $2\gamma_f/3 = 0.904$  და  $\gamma_f = 1.355$ . ვუშვებთ, რომ კუთხური სიჩქარე  $\omega = 1$  და ბრუნვის დრო ასევე  $T = 1$  წმ. ჩავთვალოთ ასევე ისიც, რომ სამივე ეტაპის ხანგრძლივობა ერთნაირია, ესე იგი, რომ  $T_1 = \frac{T}{3} = 0.333$  წმ.

ვინაიდან ახლა ვიხილავთ ბრუნვის საწყის ეტაპს, სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\begin{aligned} t=0; \gamma_0 &= 0; \dot{\gamma}_0 = 0, \\ t=T_1; \gamma_f &= 0.452; \dot{\gamma}_f = \omega_f = 1. \end{aligned} \quad (169)$$

თუ გამოვიყენებთ 3.4.2 პარაგრაფის შედეგებს ((147) განტოლების გარდამავალი და იძულებითი ამონახსნები) და ასევე (166) და (167) გამოსახულებებს, მივიღებთ

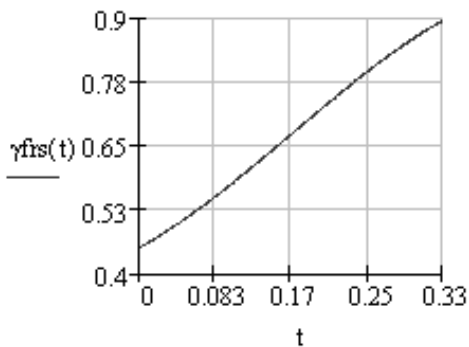
მართვის დინამიკურ მახასიათებლებს ბრუნვის საწყის ეტაპზე, რომლებიც მოყვანილია ნახ. 12 და 13.

მოყვანილ მრუდთა განხილვით ჩანს, რომ მართვა სწორად ასრულებს დასახულ სასაზღვრო პირობებს. ამაში ასევე ადვილია დავრწმუნდეთ, თუ გამოვთვლით ბრუნვის კუთხის მნიშვნელობას დროის საბოლოო მომენტში  $T_1$  შემდეგი გამოსახულების მიხედვით

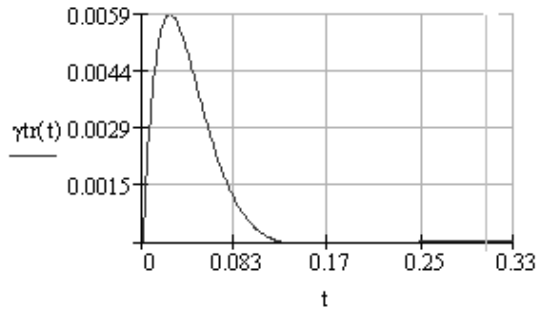
$$\cos \gamma(T_1) = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \xi_i(T_1)}{|x| |\xi(T_1)|}, \quad (170)$$

საიდანაც მივიღებთ  $\gamma(T_1) = \gamma_f = 0.452$ . ეს უკანასკნელი ასევე მნიშვნელოვანია იმიტომაც, რომ გვიჩვენებს შემდეგი ორი მეთოდის შეუღლების სისწორეს: ტერმინალური მართვის მეთოდისა და სივრცული ბრუნვების წარმოდგენის მეთოდის ((7.2) გამოსახულებები, რომლებიც შეიცავენ ბრუნვის კუთხის დინამიკურ ფუნქციებს). შევნიშნოთ, რომ როგორც ადვილი შესამოწმებელია პირდაპირი გამოთვლებით,  $|x| = |\xi(0)| = |\xi(T_1)| = 55$ , რაც ნიშნავს, რომ მეთოდი ნამდვილად რეალიზებას უკეთებს ბრუნვას.

და ბოლოს, მოვახდენთ მრუდთა ხასიათის კომენტირებას. ნახ.12,ბ გვიჩვენებს გარდამავალი პროცესის არსებობას, მაგრამ ის ორი რიგით უფრო სუსტია, ვიდრე იძულებითი მდგენელი (ნახ.12,ა) და საკმაოდ სწრაფად ქრება. ასევე სწრაფია კუთხური სიჩქარის გარდამავალი მდგენლის ქრობადობა (ნახ.13,ბ), მაგრამ მისი რიგი ახლოა იძულებითი მდგენლის რიგთან (ნახ.13,ა). ფაზური ტრაექტორიის (ნახ.14) სუსტი ვარდნები არის გარდამავალი პროცესის შედეგი.



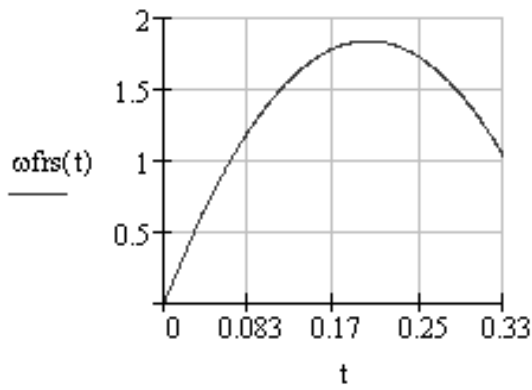
ა)



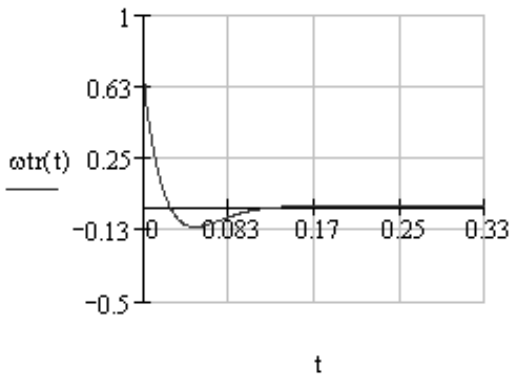
ბ)

ნახაზი 12. მოძრაობის საწყისი უბანი: ბრუნვის სიდიდის დამოკიდებულება დროზე:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



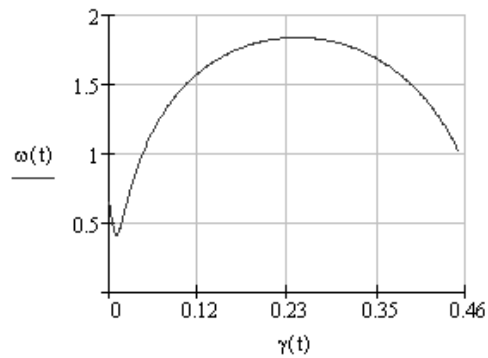
ა)



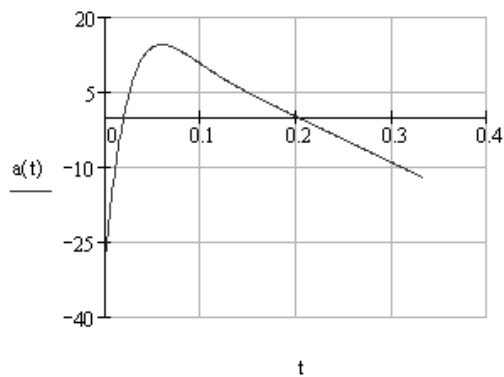
ბ)

ნახაზი 13. მოძრაობის საწყისი უბანი: კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულება დროზე:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



ა)



ბ)

ნახაზი 14. მოძრაობის საწყისი უბანი:

ა) ფაზური ტრაექტორია; ბ) აჩქარება.

### 3.5.2. მართვა თანაბარი ბრუნვის უბანზე.

ამ შემთხვევაში მართვა არ იცვლება, ესე იგი ვიყენებთ ყველა იმ განტოლებას და დამოკიდებულებებს, რომლებიც გამოყენებული იყო საწყის უბანზე. იცვლება მხოლოდ სასაზღვრო პირობები

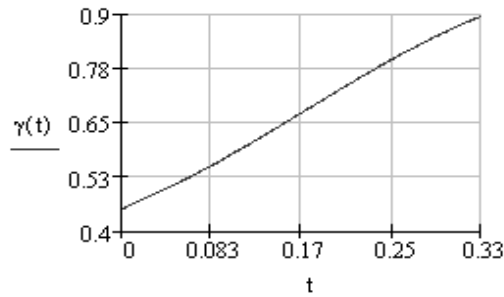
$$t=0; \gamma_0 = 0.452; \dot{\gamma}_0 = 1,$$

$$t=T_1; \gamma_f = 0.904; \dot{\gamma}_f = \omega_f = 1. \quad (171)$$

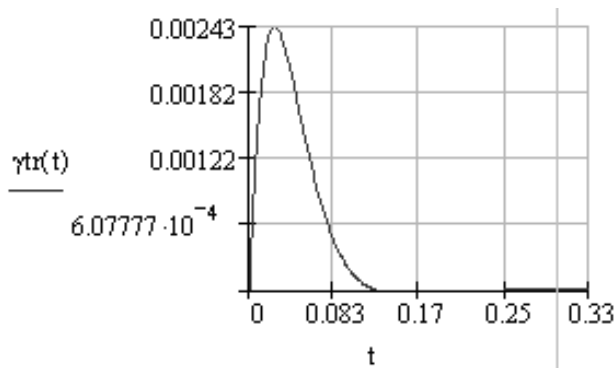
ნახაზებზე 15-17 ნაჩვენებია მართვის პროცესის დინამიკური მახასიათებლები თანაბარი ბრუნვის უბანზე.

ისევ კარგად ჩანს, რომ მართვა სწორად ასრულებს სასაზღვრო პირობებს: მართვის ობიექტს მართვის პერიოდის ბოლოს  $T=0.33$ წმ ნამდვილად აქვს დასახული

კუთხური კოორდინატა  $\gamma_f = 0.904$  და სიჩქარე  $\dot{\gamma}_f = 1$ . ადგილი აქვს გარდამავალ პროცესს, მაგრამ გარდამავალი მდგენელი კუთხური კოორდინატის ფუნქციისთვის უმნიშვნელოა (ნახ.15,ბ), მაშინ როცა მისი სიჩქარის ფუნქცია (ნახ.15,ა) ახლოსაა იძულებითთან (ნახ.16,ა). (7.6) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ უბნის ბოლოს  $\gamma(T_1) = \gamma_f = 0.904$ , და  $|x| = |\xi(0)| = |\xi(T_1)| = 55$ .



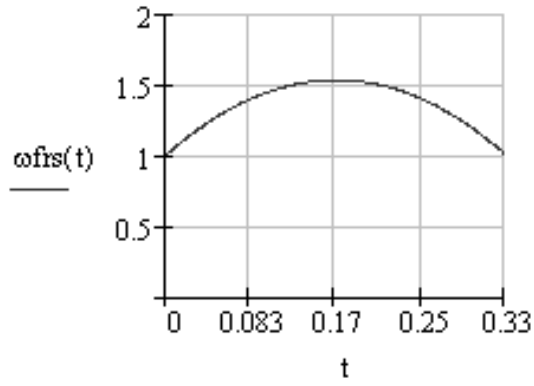
ა)



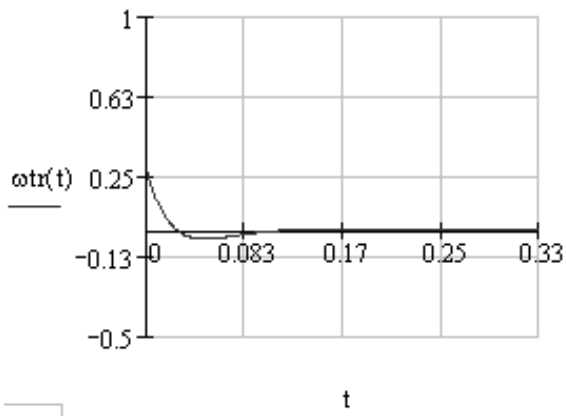
ბ)

ნახაზი 15. თანაბარი ბრუნვის უბანი: ბრუნვის კუთხის დამოკიდებულებები დროზე:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



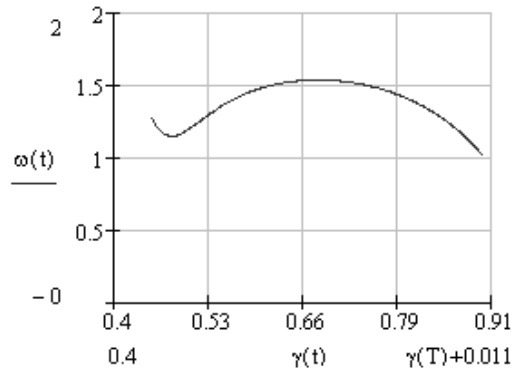
ა)



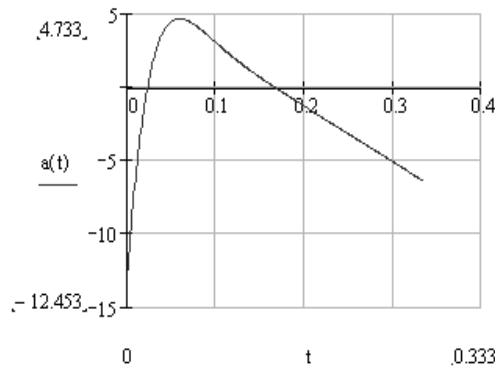
ბ)

ნახაზი 16. თანაბარი ბრუნვის უბანი: კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულებები დროზე:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



ა)



ბ)

ნახაზი 17. თანაბარი ბრუნვის უბანი:

ა) ფაზური ტრაექტორია; ბ) აჩქარება.

### 3.5.3. დამუხრუჭება.

დამუხრუჭების პროცესი, რომელიც მთავრდება სრული შეჩერებით, მოითხოვს გამოყენებულ იყოს ამოცანა ხუთი პირობით, ასე, ცხადია, რომ ბრუნვის დასასრულს აჩქარება უნდა იყოს ნულის ტოლი. ამის გათვალისწინებით, სასაზღვრო პირობები (150) იძენს შემდეგ სახეს:

$$t=0; \gamma = 0.904; \dot{\gamma} = 1,$$

$$t=T; \gamma = 1.355; \dot{\gamma} = 0; \ddot{\gamma} = 0. \quad (172)$$

(162)-ის ჩასმით (58)-ში ვლგებულობთ მბრუნავი ვექტორის კოორდინატების როგორც დროის ფუნქციებს გამოსახულებებს

$$\begin{aligned} \xi^1(t) = & \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{K\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\ & + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_x^1 - \cos(e^{-\frac{K\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\ & + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_y^1); \\ \xi^2(t) = & \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{K\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\ & + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_x^2 - \cos(e^{-\frac{K\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\ & + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_y^2); \end{aligned}$$

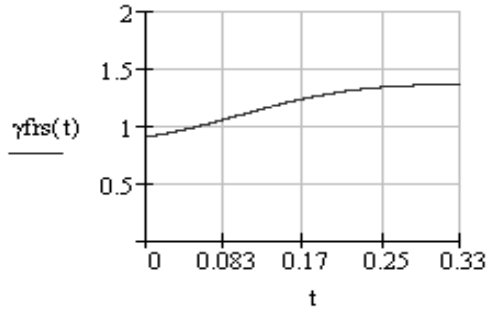


$$\begin{aligned}
\xi^3(t) = & \frac{|x|^2}{|r|^2} (\cos(\gamma_f - e^{-\frac{K_\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\
& + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_x^3 - \cos(e^{-\frac{K_\omega t}{2}} ((\gamma_{10} - a_0) \cos \beta t + \\
& + (\dot{\gamma}_{10} - a_1 K_\omega \frac{(\gamma_{10} - a_0)}{2}) \sin \beta t) + \sum_{i=0}^4 a_i t^i) r_y^3), \quad (173)
\end{aligned}$$

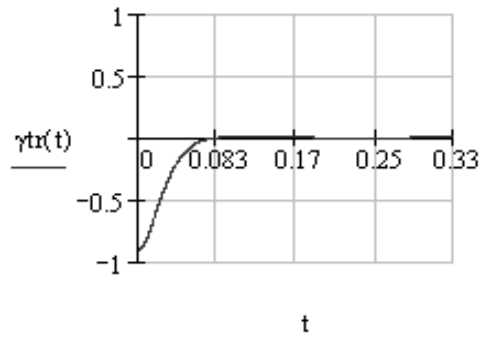
სადაც  $K_\omega, a_i (i=0,1,2,3,4)$  და  $\beta$  განისაზღვრება (157), (158) და (159)-დან შესაბამისად. ძნელი არ არის გამოვთვალოთ წარმოებულებიც (173)-სთვის, მაგრამ ჩვენ ისინი არ მოგვეყავს მათი არაკომპაქტურობის გამო.

ეს სიდიდეები, როგორც ნაჩვენებია ზემოდ, ტოლია საწყისი გადახრების მართვის სინთეზირებული ტრაექტორიებისაგან და განსაზღვრავენ გარდამავალი პროცესის არსებობას. იმ შემთხვევაში, თუ ისინი ტოლი არიან  $t=0$  (7.8) სასაზღვრო პირობებისათვის, გარდამავალი პროცესი არ არსებობს.

ნახაზებზე 18-20-ზე მოყვანილია დინამიკური მახასიათებლები, როცა  $\gamma_{10} = \gamma_0 = 0$  და  $\dot{\gamma}_{10} = \dot{\gamma}_0 = 0$ . ამ შემთხვევაში ჩნდება გარდამავალი პროცესი, რაც ჩანს ნახ.18,ბ და ნახ.19,ბ-დან. წინა უბნებისგან განსხვავებით, ამ შემთხვევაში გარდამავალი პროცესების ინტენსივობა სავსებით შედარებადია დამყარებულებთან, თუმცა ისინი სწრაფად ქრება. ცხადია, რომ სწორედ გარდამავალი პროცესების ინტენსივობით აიხსნება მნიშვნელოვანი განსხვავება კუთხურ გადადგილებებსა (ნახ.18,ა და ნახ.18,ბ) და მათ სიჩქარეებს შორის (ნახ.19,ა და ნახ.19,ბ) დამყარებულ და სრულ ფუნქციებში. ამის მიუხედავად, მართვა ისევ სწორად ასახავს სასაზღვრო პირობებს, რაც ასევე გამომდინარეობს (170)-დანაც, სადაც უნდა ჩაისვას (173) ფუნქციების მნიშვნელობები  $t=T_1$ -სთვის, რაც გვაძლევს ამ უბნისთვის:  $\gamma(T_1) = \gamma_f = 1.355$  და  $|x| = |\xi(0)| = |\xi(T_1)| = 55$ .



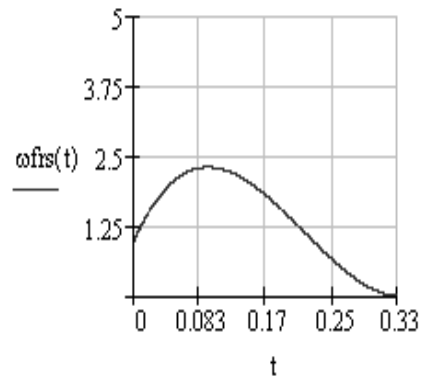
ა)



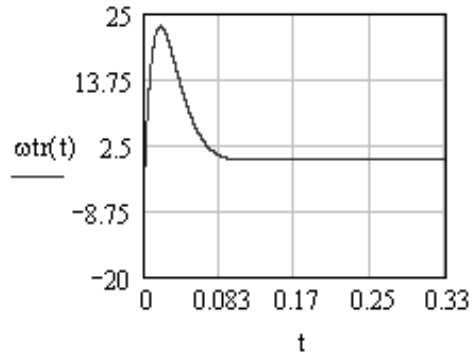
ბ)

ნახაზი 18. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა):  
 ბრუნვის კუთხის მნიშვნელობის დამოკიდებულებები დროზე:

იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



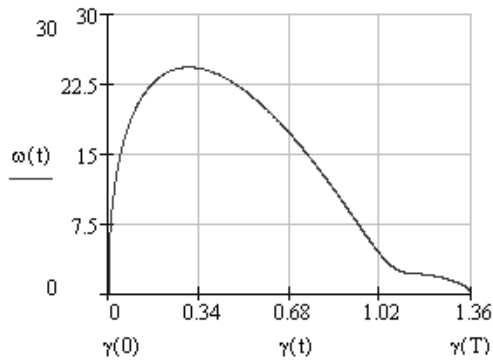
ა)



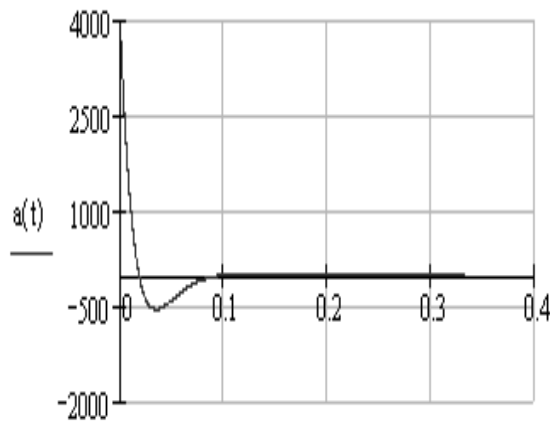
ბ)

ნახაზი 19. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა):კუთხური სინქარის დამოკიდებულებები დროზე:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი.



ა)



ბ)

ნახაზი 20. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა):

ა)ფაზური ტრაექტორია; ბ) აჩქარება.

## შედეგები

1. სივრცითი მოძრაობების მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა იქნა დაყვანილი ერთგანზომილებიანზე
2. ბრუნვების აღსაწერად პირველად გამოყენებულია მათი სპინორული წარმოდგენა. მიღებულია მარტივი გამოსახულებები მმართველი ორთოგონალური მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად ბრუნვის ცენტრის, საწყისისა და საბოლოო წერტილების კოორდინატების მიხედვით;
3. მიღებულია მმართველი ეილერის კუთხეების გამოსათვლელი მარტივი საინჟინრო ფორმულები;
4. შემუშავებულია ტერმინალური მართვის ზოგადი ვარიაციული პრინციპის დასაბუთება
5. შემუშავებულია სივრცითი ბრუნვების მოძრაობის მართვის ტერმინალური ამოცანების გადაწყვეტის ზოგადი ვარიაციული მეთოდი;
6. შემუშავებულია მარტივი ადაპტიური ალგორითმები ტერმინალური მართვის სხვადასხვა კერძო ამოცანების (გაქანების, დაყვანის და დაახლოების) გადასაწყვეტად
7. შემუშავებულია ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა Matcad სისტემის გამოყენებით

## გამოყენებული ლიტერატურა

1. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Часть первая.-- М.: Мир, 1990.-- 400 с.
2. Adrian Thomas, "Integrated Graphic and Computer Modelling", Springer-Verlag London Limited 2008.-704 p
3. S.Gottshalk, M.Lin and D.Manocha. "ODBB Tree: A Hierarhical Structure for Rapid Interference Detection". Proceedings of SIGGRAPH 96, Computer Graphical Proceedings. Annual Conference Series, pp.171-180 (August 1996, New Orlean, La). Addison-Wesley.EditedbyHollyRushmeir.ISBN 0-201-94800-1
4. K. S. Fu, R. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee.Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence.McGraw Hill, 1987.
5. Z. Li. Geometrical considerations of robot kinematics. International Journal of Robotics and Automation, 5(3):139–145, 1990.
6. J. J. Craig. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. Addison-Wesley, second edition, 1989.
7. ШахинпурМ. Курсробототехники.-М.: Мир, 1990.-527 с
8. R.P.Paul*Robot Manipulators: Mathematics, programming, and control*, The MIT Press, 1981.
9. J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. Journal of Applied Mechanics, pages215–221, June 1955.
10. R.Mansear,"Structural kinematics of six revolute axis robot manipulators". Mech.Mach.Theoty, Vol.31, No.05, 2004.
11. J. M. McCarthy, 1990, *Introduction to Theoretical Kinematics*, MIT Press, Cambridge, MA
12. J. M. McCarthy and G. S. Soh, 2010, [\*Geometric Design of Linkages\*](#), Springer, New York.
13. J. J. Uicker, G. R. Pennock, and J. E. Shigley, 2003, *Theory of Machines and Mechanisms*, Oxford University Press, New York
14. W. Khalil, and E. Dombre, *Modeling, identification and control of robots*, Hermes Penton, London, 2002

15. W.Tsai and T. Morgan “Solving the kinematics of the most of general six and five degree-of-
16. D.Piper and B.Roth “The kinematics of manipulators under computer control”. Proc.2<sup>nd</sup>Int.Cong.on the Theory of Mach,2002.
17. R.Paul and P.Mayer “Robot manipulators: Mathematics programming”, Int.J. of Robotics Research,1987.
18. Бранец, В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. М. :Наука, 1973.
19. Richard M. Murray, Zexiang Li, S. Shankar Sastry, “A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation”, CRC Press, 1994, the electronic edition is available from <http://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki>.
20. D.Rogers, J.Adams, Mathematical Elements for Compute Graphics, McGraw-Hill? NewYork, 1976
21. В. В. Цисарж, Р. И. Марусик, “Математические методы компьютерной графики“, из-во «Факт», Киев, 2004
22. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат, 1957, 375с.
23. Курант Р., Гилберт Д. Методы математической физики, т.1. М.: Гостехтеоретиздат, 1951, 525с.
24. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966, 432с.
25. Блисс Дж.А. Лекции по вариационному исчислению. М.: Иностранная литература, 1950, 348с.
26. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и оптимальному управлению. М.: Мир, 1974, 488с.
27. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление.М.: Физматгиз, 1961, 228с.
28. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов.М.: Физматгиз, 1961
29. КоллатцЛ. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1968, 447с.
30. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная Литература, 1960

31. Егоров А.И. Об одной вариационной задаче в теории уравнений эллиптического типа. // Сибирский математический журнал 1964, 4, №3(5)
32. Ли Э.Б., Маркус Л., Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972
33. Брайсон А. Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972
34. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1971
35. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971
36. Летов А.М. Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969
37. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958, 751 с.
38. Гатнмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: «Наука», 1967, 575с.
39. Постников М.М. Лекции по геометрии. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986, 400с.
40. Гельфанд И.Н. Лекции по линейной алгебры. М.: «Наука», 1966, 271с
41. Lee C.S.G., Ziegler M.A. A geometric approach in Solving the Inverse Kinematics of PUMA Robots, IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems, AES-20, No.6, pp. 695-706, 1984
42. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. М.: «Наука», 1975, 576 с.
43. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. М.: «Наука», 1979, 574 с.
44. Юдин В.А., Петрокас Л.В. Теория механизмов и машин. М.: «Высшая школа», 1977, 527 с.
45. Юдин В.А. Пректирование кинематических схем механизмов. М.: «Искусство». 1963, 426 с.
46. Механика промышленных роботов. Кинематика и динамика. т.1, М.: Высшая школа, 1988, 304 с.
47. Белянин П.Н. Промышленные роботы. М.: Машиностроение, 1975, 257 с.
48. Вейль. Г. Теория групп и квантовая механика. М.: «Наука», 1986, 321 с.
49. Вигинер Е. Теория групп и её приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. М.: «Наука», 1961, 278 с.
50. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представления групп. М.: «Наука», 1965, 375с.
51. Девитт Б.С. Динамическая теория групп и полей. М.: «Наука», 1987, 413 с.

52. Milnikov A.A., Prangishvili A.I., Rodonaia I.D. Spinor model of generalized three-dimensional Rotations // Automation and Remote control 2005, vol. 66, No6 pp. 876-882
53. Milnikov A.A., A New Procedure of Robots Spatial Rotations Terminal Control // 13<sup>th</sup> International Conference on Applied Mechanics and Mechanical Engineering, Cairo, Egypt, 2008. pp
54. Milnikov A.A., Onal H., Group Representation and Terminal Control of Spatial Rotations// SYMPHOSIYM on “Contemporary mathematics and its Applications”, Batumi, Georgia.
55. Батенко А.П. Управление конечным состоянием движущихся объектов. М.:
56. Milnikov A.A., New methods in Theory of Spatial Rotations Terminal Control//Proceedings of International Conference “Non-Classical Problems of Mechanics”, Kutaisi, Georgia, 2007, Vol. I, p. 17-21.
57. Milnikov A.A., A New Procedure of Robots Spatial Rotations Terminal Control // 13th International Conference on Applied Mechanics and mechanical Engineering, Cairo, Egypt, 2008.
58. Milnikov A., Prangishvili A. Groups Representations Methods in the Problems of Terminal Control of Spatial Rotations// International Conference “Hardware and Software means of Control Systems and Measurements”, Moscow, Research Center of Control Problems of Russian Academy of Sciences, 10-12 November, 2008. pp



# დამატება. ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა

## 1. კინემატიკის ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა.

$$i := \sqrt{-1}$$

$$x_{1,1} := -100 \quad x_{1,2} := 30 \quad x_{1,3} := 10 \quad y_{1,2} := 2 \quad y_{1,1} := -12 \quad y_{1,3} := \left( \left| \frac{dx}{x} \right| \right)^2 - (y_{1,1})^2 - (y_{1,2})^2 \quad y_{1,3} := \sqrt{y_{1,3}}$$

### ნულოვანი ბრუნვის ცენტრი

$$ga := x_{1,1} + dx_{1,2} + y_{1,1} + y_{1,2}i \quad al := 50 + 14i \quad be := \frac{(al \cdot \overline{ga} - \overline{al} \cdot de)}{y_{1,3} + x_{1,3}}$$

$$\underline{in} := \begin{bmatrix} x_{1,3} & \overline{ga} \\ ga & -x_{1,3} \end{bmatrix} \quad \underline{in1} := \begin{bmatrix} y_{1,3} & \overline{de} \\ de & -y_{1,3} \end{bmatrix}$$

$$nor := \sqrt{al \cdot \overline{al} + be \cdot \overline{be}} \quad \underline{tr} := \begin{pmatrix} \frac{al}{nor} & \frac{be}{nor} \\ \frac{-\overline{be}}{nor} & \frac{\overline{al}}{nor} \end{pmatrix} \quad \text{tr s is C matrix acted in } \mathbb{C}^2$$

$$tr3 := (tr) \quad al1 := \operatorname{Re}(tr3_{1,1}) \quad al2 := \operatorname{Im}(tr3_{1,1}) \quad be1 := \operatorname{Re}(tr3_{1,2}) \quad be2 := \operatorname{Im}(tr3_{1,2})$$

$a_{ij}$  - elements of A matrix acted in  $\mathbb{R}^3$

$$a_{1,1} := (al1 \cdot al1 - al2 \cdot al2) - (be1 \cdot be1 - be2 \cdot be2)$$

$$a_{1,2} := 2(al1 \cdot al2 + be1 \cdot be2) \quad a_{1,3} := -2(al1 \cdot be1 - al2 \cdot be2)$$

$$a_{2,1} := -2(al1 \cdot al2 - be1 \cdot be2) \quad a_{2,2} := (al1 \cdot al1 - al2 \cdot al2) + (be1 \cdot be1 - be2 \cdot be2)$$

$$a_{2,3} := 2(al1 \cdot be2 + al2 \cdot be1) \quad a_{3,1} := 2(al1 \cdot be1 + al2 \cdot be2) \quad a_{3,2} := -2(al1 \cdot be2 - al2 \cdot be1)$$

## არანულოვანი ბრუნვის ცენტრი

$$z_{1,3} := 100 \quad z_{1,1} := \operatorname{Im}(be) \cdot \frac{z_{1,3}}{\operatorname{Im}(al)} \quad z_{1,2} := \operatorname{Re}(be) \cdot \frac{z_{1,3}}{\operatorname{Im}(al)} \quad z_{ij} - \text{coordinates of the center of rotation}$$

$$zm := \begin{pmatrix} z_{1,3} & z_{1,1} - z_{1,2}i \\ z_{1,1} + z_{1,2}i & -z_{1,3} \end{pmatrix} \quad zm - \text{spinor matrix for nonzero center of rotation}$$

$$xs := x - z \quad ys := y - z \quad xs \text{ and } ys - \text{new points after shifting of center of rotation}$$

$$gas := xs_{1,1} + xs_{1,2}i \quad des := ys_{1,1} + ys_{1,2}i$$

$$ins := \begin{bmatrix} xs_{1,3} & \overline{(gas)} \\ gas & -xs_{1,3} \end{bmatrix} \quad ins1 := \begin{pmatrix} ys_{1,3} & \overline{des} \\ des & -ys_{1,3} \end{pmatrix} \quad ins \text{ and } ins1 \text{ Spinor matrixes of } x \text{ and } y$$

$$bes := \frac{(al \cdot \overline{gas} - al \cdot \overline{des})}{ys_{1,3} + xs_{1,3}} \quad nors := \sqrt{al \cdot al + bes \cdot bes}$$

$$trs := \begin{pmatrix} \frac{al}{nors} & \frac{bes}{nors} \\ \frac{-bes}{nors} & \frac{al}{nors} \end{pmatrix} \quad trs \text{ is } C \text{ matrix acted in } C^2 \text{ for non zero centers}$$

## შედეგები

$$\text{tr} = \begin{pmatrix} 0.74 + 0.207i & -0.512 - 0.385i \\ 0.512 - 0.385i & 0.74 - 0.207i \end{pmatrix} \quad \text{trs} = \begin{pmatrix} 0.786 - 0.119i & -0.646 - 0.145i \\ 0.319 - 0.58i & 0.61 - 0.51i \end{pmatrix}$$

$$\text{trs} \cdot \text{ins} \cdot (\overline{\text{trs}})^T = \begin{pmatrix} 4.467 & 185.917 - 266.801i \\ 185.917 + 266.801i & -4.467 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.7 & 0.598 \\ 0.087 & 0.618 & -0.781 \\ -0.917 & 0.357 & 0.18 \end{pmatrix} \quad \text{ins1} = \begin{pmatrix} 4.173 & 173.683 - 249.244i \\ 173.683 + 249.244i & -4.173 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr} \cdot \text{in} \cdot (\overline{\text{tr}})^T = \begin{pmatrix} 104.173 & -12 - 2i \\ -12 + 2i & -104.173 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = (-100 \ 30 \ 10) \quad \mathbf{y} = (-12 \ 2 \ 104.173)$$

$$\mathbf{y}_s = (173.683 \ 249.244 \ 4.173)$$

$$\mathbf{z} = (-185.683 \ -247.244 \ 100)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 104.173 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y}^T = \begin{pmatrix} -100 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = (-185.683 \ -247.244 \ 100)$$

$$\mathbf{x}_s = (85.683 \ 277.244 \ -90)$$

$$\mathbf{y}_s = (173.683 \ 249.244 \ 4.173)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_s^T = \begin{pmatrix} 173.683 \\ 249.244 \\ 4.173 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{y}_s^T = \begin{pmatrix} 85.683 \\ 277.244 \\ -90 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{z}^T = \begin{pmatrix} -185.683 \\ -247.244 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(\mathbf{a}, 1) = \begin{pmatrix} -0.571 \\ -0.761 \\ 0.308 \end{pmatrix}$$

$$zn_{1,1} := \frac{z_{1,1}}{|z^T|} \quad zn_{1,2} := \frac{z_{1,2}}{|z^T|} \quad zn_{1,3} := \frac{z_{1,3}}{|z^T|} \quad zn^T = \begin{pmatrix} -0.571 \\ -0.761 \\ 0.308 \end{pmatrix}$$

$$tt := -\text{acos}[(a)_{3,3}] \quad ps := \text{asin}\left(\frac{a_{1,3}}{\sin(tt)}\right) \quad ps = -37.451 \cdot \text{deg}$$

$$tt = -79.637 \cdot \text{deg} \quad fi := \text{asin}\left(\frac{a_{3,1}}{\sin(tt)}\right) \quad fi = 68.735 \cdot \text{deg}$$

$$M := \begin{pmatrix} \cos(fi) \cdot \cos(ps) - \cos(tt) \cdot \sin(fi) \cdot \sin(ps) & -\cos(fi) \cdot \sin(ps) - \cos(tt) \cdot \sin(fi) \cdot \cos(ps) & \sin(fi) \cdot \sin(tt) \\ \sin(fi) \cdot \cos(ps) + \cos(tt) \cdot \cos(fi) \cdot \sin(ps) & -\sin(fi) \cdot \sin(ps) + \cos(tt) \cdot \cos(fi) \cdot \cos(ps) & -\cos(fi) \cdot \sin(tt) \\ \sin(ps) \cdot \sin(tt) & \cos(ps) \cdot \sin(tt) & \cos(tt) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.087 & -0.917 \\ 0.7 & 0.618 & 0.357 \\ 0.598 & -0.781 & 0.18 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.7 & 0.598 \\ 0.087 & 0.618 & -0.781 \\ -0.917 & 0.357 & 0.18 \end{pmatrix}$$

$$x = (-100 \ 30 \ 10)$$

$$y = (-12 \ 2 \ 104.173)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0.39 & 0.7 & 0.598 \\ 0.087 & 0.618 & -0.781 \\ -0.917 & 0.357 & 0.18 \end{pmatrix}$$

$$M^T \cdot x^T = \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 104.173 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot y^T = \begin{pmatrix} -100 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 0.094 + 0.996i \\ 0.094 - 0.996i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(a) = \begin{pmatrix} 0.094 + 0.996i \\ 0.094 - 0.996i \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2. განტოლების ამოხსნის პროგრამა

$$\begin{aligned}
 & i := \sqrt{-1} \\
 & x_{1,1} := 3 \quad x_{1,2} := -1 \quad x_{1,3} := -1 \quad y_{1,2} := 4 \quad y_{1,3} := 0 \quad y_{1,1} := -3 \quad l1 := 26 \\
 & t_{1,1} := 2 \quad t_{1,2} := 8 \quad t_{1,3} := 2 \quad l2 := 27 \\
 & A := x_{1,1} - y_{1,1} \quad B := x_{1,2} - y_{1,2} \quad C := x_{1,3} - y_{1,3} \quad D := \frac{\left[ \left[ (x)^T \right]^2 - \left[ (y)^T \right]^2 \right]}{2} \\
 & M2 := A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C \quad M2 := \frac{1}{M2} \quad M := \sqrt{M2} \quad M := -\text{sign}(D) \cdot M \\
 & TET_{1,1} := \frac{-\left[ \left( A \cdot t_{1,1} + B \cdot t_{1,2} + C \cdot t_{1,3} \right) + D \right]}{A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C} \quad TET_{1,2} := \frac{-\left[ \left( A \cdot y_{1,1} + B \cdot y_{1,2} + C \cdot y_{1,3} \right) + D \right]}{A \cdot A + B \cdot B + C \cdot C} \\
 & Zt_{1,1} := t_{1,1} + A \cdot TET_{1,1} \quad Zt_{1,2} := t_{1,2} + B \cdot TET_{1,1} \quad Zt_{1,3} := t_{1,3} + C \cdot TET_{1,1} \\
 & Zy_{1,1} := y_{1,1} + A \cdot TET_{1,2} \quad Zy_{1,2} := y_{1,2} + B \cdot TET_{1,2} \quad Zy_{1,3} := y_{1,3} + C \cdot TET_{1,2} \\
 & A1 := Zt_{1,1} - Zy_{1,1} \quad B1 := Zt_{1,2} - Zy_{1,2} \quad C1 := Zt_{1,3} - Zy_{1,3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y := \begin{pmatrix} A1 \\ B1 \\ C1 \end{pmatrix} \quad Z := \begin{bmatrix} (t_{1,1} - Zt_{1,1}) \\ (t_{1,2} - Zt_{1,2}) \\ (t_{1,3} - Zt_{1,3}) \end{bmatrix} \quad X := Y \times Z \quad YN := \frac{Y}{|Y|} \\
 ZN := \frac{Z}{|Z|} \quad XN := \frac{X}{|X|} \quad MT1 := \begin{pmatrix} XN_{1,1} & XN_{2,1} & XN_{3,1} \\ YN_{1,1} & YN_{2,1} & YN_{3,1} \\ ZN_{1,1} & ZN_{2,1} & ZN_{3,1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{mgt} := (t_{1,1} - Zt_{1,1})^2 + (t_{1,2} - Zt_{1,2})^2 + (t_{1,3} - Zt_{1,3})^2$$

$$\text{magy} := (y_{1,1} - Zy_{1,1})^2 + (y_{1,2} - Zy_{1,2})^2 + (y_{1,3} - Zy_{1,3})^2$$

$$\text{mgt} := \left| (M \cdot A \cdot t_{1,1} + M \cdot B \cdot t_{1,2} + M \cdot C \cdot t_{1,3} + M \cdot D) \right|$$

$$\text{mgy} := \left| M \cdot A \cdot y_{1,1} + M \cdot B \cdot y_{1,2} + M \cdot C \cdot y_{1,3} + M \cdot D \right|$$

$$\text{SR1} := l1 \cdot l1 - \text{mgt} \cdot \text{mgt} \quad \text{SR2} := l2 \cdot l2 - \text{mgy} \cdot \text{mgy}$$

$$\text{SR} := A1 \cdot A1 + B1 \cdot B1 + C1 \cdot C1 \quad \text{R12} := \sqrt{\text{SR1}} \quad \text{R22} := \sqrt{\text{SR2}} \quad \underline{\underline{\text{R}}} := \sqrt{\text{SR}}$$

$$a := \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{Y1}}} := \text{MT1}^T \cdot a + Zt^T \quad \underline{\underline{\text{S}}} := \begin{pmatrix} \text{Y1} & -Y \\ |\text{Y1}| & |Y| \end{pmatrix}$$

$$\text{CY} := \frac{\text{sign}(\text{S}) \cdot (\text{SR1} + \text{SR} - \text{SR2})}{2 \cdot R} \quad \text{CX} := \sqrt{\text{SR1} - \text{CY} \cdot \text{CY}} \quad \text{CY} = -0.117 \quad \text{CX} = 25.572$$

$$\text{SP} := \begin{pmatrix} \text{CX} \\ \text{CY} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Sol} := \text{MT1}^T \cdot \text{SP} + Zt^T \quad \text{Sol} = \begin{pmatrix} 2.568 \\ -3.392 \\ 25.365 \end{pmatrix}$$

$$\text{R12} = 25.572 \quad \sqrt{\text{CX} \cdot \text{CX} + \text{CY} \cdot \text{CY}} = 25.572$$

$$\text{R22} = \blacksquare \quad \sqrt{\text{CX} \cdot \text{CX} + (\text{R} + \text{CY}) \cdot (\text{R} + \text{CY})} = 26.388 \quad \text{R} = 6.631$$

$$\text{Sol}_{1,1} \cdot A + \text{Sol}_{2,1} \cdot B + \text{Sol}_{3,1} \cdot C + D = -1.421 \times 10^{-14}$$

$$(t_{1,1} - \text{Sol}_{1,1})^2 + (t_{1,2} - \text{Sol}_{2,1})^2 + (t_{1,3} - \text{Sol}_{3,1})^2 - l1 \cdot l1 = 1.137 \times 10^{-13}$$

$$(y_{1,1} - \text{Sol}_{1,1})^2 + (y_{1,2} - \text{Sol}_{2,1})^2 + (y_{1,3} - \text{Sol}_{3,1})^2 - l2 \cdot l2 = 2.274 \times 10^{-13}$$

### 3. აჩქარების ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

$$i := \sqrt{-1}$$

$$x_1 := 10 \quad x_2 := -45 \quad x_3 := 30 \quad \underline{R} := |x|$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 20 \quad y_3 := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2}$$

$$y_3 = 51.225$$

$$r := x \times y \quad |y| = 55 \quad R = 55 \quad |x| = 55$$

$$rx := r \times x \quad ry := r \times y \quad \gamma t := \arccos \left[ x \frac{y}{(|x|)^2} \right]$$

$$\gamma 0 := 0 \quad \omega 0 := 0 \quad \underline{T} := 1 \quad \underline{T} := \frac{T}{3} \quad \gamma f := \frac{\gamma t}{3} \quad \omega f := 1 \quad d\omega f := 0 \quad \underline{dt} := \frac{T}{6}$$

$$S_0 := \gamma 0 \quad S_1 := \omega 0 \quad S_2 := \frac{6(\gamma f - \gamma 0)}{T^2} \quad \underline{S_2} := S_2 - \frac{2(\omega f + 2\omega 0)}{T} \quad S_3 := \frac{12(\gamma 0 - \gamma f)}{T^3}$$

$$\underline{S_3} := S_3 + \frac{6(\omega f + \omega 0)}{T^2}$$

$$k_1 := \left( 6 \frac{\gamma 0}{dt^2} \right) + \left( 4 \frac{\omega 0}{dt} \right) + S_2 \quad k_2 := \left( 6 \frac{\omega 0}{dt^2} \right) + \left( 4 \frac{S_2}{dt} \right) + S_3 \quad k_3 := \left( 3 \frac{S_2}{dt^2} \right) + \left( 2 \frac{S_3}{dt} \right)$$

$$k_4 := \left( \frac{S_3}{dt^2} \right) \quad k_\gamma := \frac{6}{dt^2} \quad k_\omega := \frac{4}{dt}$$

$$a_1 := k_1 - \frac{2 \cdot dt \cdot k_2}{3} \quad a_1 := a_1 + \frac{5 \cdot dt^2 \cdot k_3}{9} \quad a_1 := a_1 - \frac{4 \cdot dt^3 \cdot k_4}{9}$$

$$a_2 := k_2 - \frac{4 \cdot dt \cdot k_3}{3} \quad a_2 := a_2 + \frac{5 \cdot dt^2 \cdot k_4}{3}$$

$$a_3 := k_3 - 2 \cdot dt \cdot k_4 \quad a_4 := k_4$$

$$\underline{A} := \gamma_{10} - \left(\frac{1}{6}\right) \cdot dt^2 \cdot k_1 + \left(\frac{1}{9}\right) dt^3 \cdot k_2 - \left(\frac{5}{54}\right) \cdot dt^4 \cdot k_3 + \left(\frac{5}{54}\right) dt^5 \cdot k_4$$

$$B := \sqrt{2} \cdot \gamma_{10} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \omega_{10} \cdot dt - \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right) dt^2 \cdot k_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{36}\right) \cdot dt^3 \cdot k_2 + \left(5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{270}\right) \cdot dt^4 \cdot k_3 - \left(7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{108}\right) \cdot dt^4 \cdot k_4$$

$$t := 0, 0.001 .. T$$

$$\gamma_{\text{frs}}(t) := \frac{1}{k_Y} \left( a_1 + a_2 \cdot t + a_3 \cdot t^2 + a_4 \cdot t^3 \right) \quad \gamma_{\text{tr}}(t) := e^{\frac{-2t}{dt}} \cdot \left( A \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot \frac{t}{dt}\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot \frac{t}{dt}\right) \right)$$

$$\gamma(t) := \gamma_{\text{frs}}(t) + \gamma_{\text{tr}}(t) \quad \omega_{\text{frs}}(t) := \frac{d}{dt} \gamma_{\text{frs}}(t) \quad \omega_{\text{tr}}(t) := \frac{d}{dt} \gamma_{\text{tr}}(t)$$

$$\omega(t) := \omega_{\text{frs}}(t) + \omega_{\text{tr}}(t)$$

$$a(t) := \frac{d}{dt} \omega(t)$$

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{1,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{1,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{2,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{2,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{3,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{3,1}})}{(|r|)^2} \end{bmatrix}$$



#### 4. გაჩერების ამოცანის პროგრამული უზრუნველყოფა

$$i := \sqrt{-1}$$

$$x_1 := 10 \quad x_2 := -45 \quad x_3 := 30 \quad \underline{R} := |x|$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 20 \quad y_3 := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2} \quad y_3 = 51.225$$

$$|y| = 55 \quad R = 55 \quad |x| = 55$$

$$r := x \times y$$

$$r_x := r \times x \quad r_y := r \times y \quad \gamma t := \arccos \left[ x \frac{y}{(|x|)^2} \right]$$

$$\underline{T} := 1$$

$$\gamma_{10} := 0 \quad \omega_{10} := 0$$

$$\gamma_0 := 0.904 \quad \omega_0 := 1 \quad \underline{T} := \frac{1}{3} \quad \gamma f := \gamma t \quad \omega f := 0 \quad d\omega f := 0 \quad \underline{dt} := \frac{T}{6}$$

$$S_0 := 12 \cdot \frac{(\gamma f - \gamma_0)}{T^2} \quad \underline{S_0} := S_0 - 6 \frac{(\omega f + \omega_0)}{T} \quad \underline{S_0} := S_0 + d\omega f$$

$$S_1 := 48 \cdot \frac{(\gamma_0 - \gamma f)}{T^3} \quad \underline{S_1} := S_1 + 18 \frac{(\omega f + \omega_0)}{T^2} \quad \underline{S_1} := S_1 - 6 \cdot \frac{d\omega f}{T}$$

$$S_2 := 36 \cdot \frac{(\gamma f - \gamma_0)}{T^4} \quad \underline{S_2} := S_2 - 12 \frac{(\omega f + \omega_0)}{T^3} \quad \underline{S_2} := S_2 + 6 \cdot \frac{d\omega f}{T^2}$$

$$k_1 := \left( 12 \frac{\gamma_0}{dt^2} \right) + \left( 6 \frac{\omega_0}{dt} \right) + S_0 \quad k_2 := \left( 12 \frac{\omega_0}{dt^2} \right) + \left( 6 \frac{S_0}{dt} \right) + S_1 \quad k_3 := \left( 6 \frac{S_0}{dt^2} \right) + \left( 3 \frac{S_1}{dt} \right) + S_2$$

$$k_4 := \left( 2 \frac{S_1}{dt^2} \right) + \left( 2 \frac{S_2}{dt} \right) \quad k_5 := \left( \frac{S_2}{dt^2} \right) \quad k_\gamma := \frac{12}{dt^2} \quad k_\omega := \frac{6}{dt} \quad k_\omega = 108$$

$$a4 := \frac{k_5}{k\gamma} \quad a3 := \frac{(k_4 - 4 \cdot k\omega \cdot a4)}{k\gamma} \quad a2 := \frac{(k_3 - 3 \cdot k\omega \cdot a3 - 12 \cdot a4)}{k\gamma}$$

$$a1 := \frac{(k_2 - 2 \cdot k\omega \cdot a2 - 6 \cdot a3)}{k\gamma} \quad a0 := \frac{(k_1 - 2 \cdot a2 - a1 \cdot k\omega)}{k\gamma}$$

$$\beta := \sqrt{k\gamma - \left(\frac{k\omega}{2}\right)^2}$$

$$t := 0, 0.0001..T$$

$$c1 := \gamma_{10} - a0 \quad c2 := \left(\omega_{10} - a1 + k\omega \cdot \frac{c1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\beta}$$

$$\omega_{tr}(t) := e^{\frac{-k\omega \cdot t}{2}} \cdot \left(\frac{-k\omega}{2}\right) \cdot (c1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + c2 \cdot \sin(\beta \cdot t)) + e^{\frac{-k\omega \cdot t}{2}} \cdot (-c1 \cdot \beta \cdot \sin(\beta \cdot t) + c2 \cdot \beta \cdot \cos(\beta \cdot t))$$

$$\omega_{frs}(t) := a1 + 2 \cdot a2 \cdot t + 3 \cdot a3 \cdot t^2 + 4 \cdot a4 \cdot t^3$$

$$\gamma_{frs}(t) := (a0 + a1 \cdot t + a2 \cdot t^2 + a3 \cdot t^3 + a4 \cdot t^4)$$

$$\omega_{tr}(0) = -1 \quad \omega(t) := \omega_{tr}(t) + \omega_{frs}(t) \quad a(t) := \frac{d}{dt} \omega(t)$$

$$\gamma_{tr}(t) := e^{\frac{-k\omega \cdot t}{2}} \cdot (c1 \cdot \cos(\beta \cdot t) + c2 \cdot \sin(\beta \cdot t))$$

$$\gamma(t) := (\gamma_{frs}(t) + \gamma_{tr}(t))$$

$$\gamma_{frs}(0) = 0.904$$

$$\gamma_{tr}(0) = -0.904$$

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) \cdot r_{x_{1,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{1,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) \cdot r_{x_{2,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{2,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) \cdot r_{x_{3,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{3,1}})}{(|r|)^2} \end{bmatrix}$$

## 5. ბრუნვა მუდმივი სიჩქარით –პროგრამული უზრუნველყოფა

$$i := \sqrt{-1}$$

$$x_1 := 10 \quad x_2 := -45 \quad x_3 := 30 \quad R := |x|$$

$$y_1 := 1 \quad y_2 := 20 \quad y_3 := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2} \quad y_3 = 51.225$$

$$|y| = 55 \quad R = 55 \quad |x| = 55$$

$$r := x \times y$$

$$rx := r \times x \quad ry := r \times y \quad \gamma T := \arccos \left[ x \frac{y}{(|x|)^2} \right]$$

$$\gamma 10 := 0.452 \quad \omega 10 := 1$$

$$\gamma 0 := 0.452 \quad \omega 0 := 1 \quad \frac{T}{\omega} := 1 \quad \frac{T}{\omega} := \frac{T}{3} \quad \gamma f := \frac{2\gamma T}{3} \quad \omega f := 1 \quad d\omega f := 0 \quad \frac{dt}{\omega} := \frac{T}{6}$$

$$S0 := \gamma 0 \quad S1 := \omega 0 \quad S2 := \frac{6(\gamma f - \gamma 0)}{T^2} \quad S2 := S2 - \frac{2(\omega f + 2\omega 0)}{T}$$

$$S3 := \frac{12(\gamma 0 - \gamma f)}{T^3} \quad S3 := S3 + \frac{6(\omega f + \omega 0)}{T^2}$$

$$k_1 := \left( 6 \frac{\gamma 0}{dt^2} \right) + \left( 4 \frac{\omega 0}{dt} \right) + S2 \quad k_2 := \left( 6 \frac{\omega 0}{dt^2} \right) + \left( 4 \frac{S2}{dt} \right) + S3 \quad k_3 := \left( 3 \frac{S2}{dt^2} \right) + \left( 2 \frac{S3}{dt} \right)$$

$$k_4 := \left( \frac{S3}{dt^2} \right) \quad k\gamma := \frac{6}{dt^2} \quad k\omega := \frac{4}{dt}$$

$$a_1 := k_1 - \frac{2 \cdot dt \cdot k_2}{3} \quad a_1 := a_1 + \frac{5 \cdot dt^2 \cdot k_3}{9} \quad a_1 := a_1 - \frac{4 \cdot dt^3 \cdot k_4}{9}$$

$$a_2 := k_2 - \frac{4 \cdot dt \cdot k_3}{3} \quad a_2 := a_2 + \frac{5 \cdot dt^2 \cdot k_4}{3} \quad a_3 := k_3 - 2 \cdot dt \cdot k_4 \quad a_4 := k_4$$

$$A := \gamma 10 - \left( \frac{1}{6} \right) \cdot dt^2 \cdot k_1 + \left( \frac{1}{9} \right) dt^3 \cdot k_2 - \left( \frac{5}{54} \right) \cdot dt^4 \cdot k_3 + \left( \frac{5}{54} \right) dt^5 \cdot k_4$$

$$B := \sqrt{2} \cdot \gamma 10 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \omega 10 \cdot dt - \left( \frac{\sqrt{2}}{6} \right) dt^2 \cdot k_1 + \left( \frac{\sqrt{2}}{36} \right) \cdot dt^3 \cdot k_2 + \left( 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{270} \right) \cdot dt^4 \cdot k_3 - \left( 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{108} \right) \cdot dt^4 \cdot k_4$$

$$t := 0, 0.001.. T$$

$$\gamma_{\text{firs}}(t) := \frac{1}{k\gamma} \left( a_1 + a_2 \cdot t + a_3 \cdot t^2 + a_4 \cdot t^3 \right) \quad \gamma_{\text{tr}}(t) := e^{\frac{-2t}{dt}} \cdot \left( A \cdot \cos\left(\sqrt{2} \cdot \frac{t}{dt}\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot \frac{t}{dt}\right) \right)$$

$$\gamma(t) := \gamma_{\text{firs}}(t) + \gamma_{\text{tr}}(t) \quad \omega_{\text{firs}}(t) := \frac{d}{dt} \gamma_{\text{firs}}(t) \quad \omega_{\text{tr}}(t) := \frac{d}{dt} \gamma_{\text{tr}}(t)$$

$$\omega(t) := \omega_{\text{firs}}(t) + \omega_{\text{tr}}(t) \quad a(t) := \frac{d}{dt} \omega(t)$$

$$\xi(t) := \begin{bmatrix} \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{1,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{1,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{2,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{2,1}})}{(|r|)^2} \\ \frac{(|x|)^2 \cdot (\cos(\gamma_f - \gamma(t)) r_{x_{3,1}} - \cos(\gamma(t)) \cdot r_{y_{3,1}})}{(|r|)^2} \end{bmatrix}$$