საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებებით

ვახტანგ როდონაია

სივრცითი ბრუნვების დინამიკის კომპიუტერული მოდელირების ახალი მეთოდების შემუშავება

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი დისერტაციის

ავტორეფერატი

თბილისი
2012 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის
კომპიუტერული ინჟინერიის დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი,
ალექსანდრე მილნიკოვი

რეცენზენტები: ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი
ზურაბ გასიტაშვილი;
ტექნიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი
დავით გორგიძე

დაცვა შედგება 2012 წლის " " , საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,
კორპუსი , აუდიტორია
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა – სტუ-ს ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი
სრული პროფესორი თ. კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

სადისერტაციო ნაშრომში კვლევის ობიექტს წარმოადგენს სხვადასხვა ტექნიკური ობიექტების მოძრაობა, როგორიცაა საფრენი აპარატები, დამიზნების სისტემები, იერარქიული სისტემები. სამუშაოს მიზანს წარმოადგენს მათემატიკური მოდელების და მათ საფუძველზე პროგრამული კომპლექსის დამუშავება აღნიშნული სისტემების მოძრაობის კომპიუტერული მოდელირების ჩასატარებლად. კომპიუტერული და მათემატიკური მოდელირება არის მაღალეფექტური და შედარებით იაფი მეთოდი რთული ტექნიკური სისტემების კვლევისას. განსაკუთრებულ მნიშვნელობას მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება იძენს ისეთი რთული ტექნიკური სისტემების, რომელთათვისაც ბუნებრივი კვლევის ჩატარება არის შრომატევადი და ძვირადღირებული პროცედურა. ტექნიკური ობიექტების მოძრაობის მოდელირების შედეგები გამოიყენება ტექნიკური გადაწყვეტების ოპტიმალობის შესაფასებლად, ახალი ნიმუშების პროექტირებისას, ძველის მოდიფიცირებისას ან არასტანდარტული სიტუაციების გამოკვლევისას. რიგ შემთხვევებში, მაგალითად ესკიზური პროექტირების ეტაპზე ან უნიკალური ტექნიკური ობიექტის კვლევის დროს, მათემატიკური და კომპიუტერული მოდელირება არის ერთადერთი საშუალება რთული ტექნიკური სისტემის გამოკვლევისათვის.

ტექნიკური ობიექტების დინამიური თვისებების გამოკვლევა წარმოადგენს აუცილებელს და ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან ეტაპს ტექნიკური სისტემების კვლევისა და პროექტირებისათვის. დინამიური ანალიზის სირთულე მდგომარეობს ზუსტი ანალიტიკური კვლევის შეუძლებლობაში მარტივი სისტემებისათვის კი, რადგანაც დინამიკა, როგორც წესი აღიწერება დიფერენციალური ან დიფერენციალურ-ალგებრული განტოლებების სისტემებით, ზოგად შემთხვევაში არა წრფივი, რომელთა ამოხსნა მკაფიო სახით შეუძლებელია. მეორე მხრივ, თავისუფლების დიდი ხარისხის მქონე მოძრაობის სისტემების განტოლებების შედგენა შეიძლება აღმოჩნდეს არამარტივი პროცედურა. ეს დაკავშირებულია სირთულის ზრდით კინემატიკური სიდიდეებისათვის, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემაში შემავალი ელემენტების

მდგომარეობას, სიჩქარეს და აჩქარებას. ამ ტიპის მოდელების კომპიუტერულ I რეალიზაცია იქცევა რთულ პრობლემად, რომელიც მოითხოვს ახალი მიდგომებისა და მეთოდების შემუშავებას.

თემის აქტუალობა

როგორც ცნობილია, მოძრაობის მართვის ამოცანები წარმოადგენენ ერთ-ერთ ყველაზე რთულს, აქტუალურს და ამავე დროს გავრცელებულ მიმართულებას მეცნიერებასა და ტექნიკაში. აქ საკმარისია აღინიშნოს ამოცანები, რომლებიც დაკავშირებულია მფრინავი აპარატებისა ან რობოტო-ტექნიკურური მოწყობილობების მუშა ორგანოების სივრცობრივი მოძრაობების მართვასთან. აღნიშნული ამოცანები ბოლო დროს ფართე გამოყენებას პოულობენ აგრეთვე შესაბამისი პროცესების კომპიუტერულ მოდელირებაშიც და ანიმაციურ გრაფიკაში, რაც ძალზე აქტუალურია პროექტირების ავტომატიზირებული სისტემებში. ამგვარი სახის ამოცანებში განსაკუთრებული ადგილი უკავია ბრუნვითი მოძრაობების მართვის საკითხებს, რომლებსაც ტექნოლოგიური თვალსაზრისით გააჩნია ძალზე მნიშვნელოვანი როლი, ვინაიდან ამგვარი მოწყობილობების მუშა ორგანოების მოძრაობა უმეტესად სწორედ ბრუნვით ხასიათს ატარებს. სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის ამოცანებში ძირითად სირთულეს წარმოადგენს ამ ამოცანების მაღალი განზომილება, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ჩნდება 9 პარამეტრის (ადგილმდებარეობა, სიჩქარე და აჩქარება) ერთდროულად მართვის აუცილებლობა. ეს განსაძღვრას იმ ფაქტს, რომ დღეისათვის არსებული სივრცობრივი ბრუნვითი მოძრაობების მართვის მეთოდები და მათ ბაზაზე აგებული მართვის სისტემები გამოირჩევიან სირთულით, არამდგრადობით (არაადაპტურობით) და მაღალი ღირებულებით, რაც თავის მხრივ ამცირებს შესაბამისი სისტემების და მოწყობილობების ტექნოლოგიურ ეფექტურობას.

დღეისათვის რთული სისტემების სივრცითი გადაადგილების ერთ-ერთი, რომ არა ვთქვათ ერთად-ერთი, მართვის მეთოდი შესაძლებელია მოკლედ აღვწეროდ შემდეგნაირად. დაუშვათ, რომ ობიექტი გადაყვანილ უნდა იქნას მოცემული საწყისი მდებარეობიდან, რომელიც განისაზღვრება

როგორც სამ განზომილებიანი სივრცის წერტილი, ამავე სივრცის სხვა წერტილში. ამგვარი ამოცანის ამოხსნა ითხოვს ეილერის კუთხეების გამოთვლას, რომლებიც უზრუნველყოფენ საჭირო სივრცობრივ მოძრაობას. ეს ითხოვს საწყისი ამოცანის განსხვავებულ ფორმულირებას ბრუნვათა კუთხეების ტერმინებში, ესე იგი საწყისი სივრცობრივი მოძრაობას წარმოდგენენ როგორც სამი საკოორდინატო ღერძების ირგვლივ ბრუნვების სუპერპოზიციას. უკანასკნელს მივყევართ სამი 3×3 ბრუნვათა მატრიცებისაკენ, რომლებიც შეიცავენ 2×2 ორგანზომილიან ბრუნვათა ქვემატრიცებს. ამ მატრიცების ნამრავლი წარმოადგენს იმ მატრიცას, რომელიც უზრუნველყოფს ბრუნვას საწყისიდან საბოლოო წერტილამდე, და რომლის საფუძველზე გამოითვლება ეილერის კუთხეები. აღწერილი მეთოდი ხასიათდება შემდეგი ნაკლოვანებებით:

1. ის ითხოვს დეკარტთა კოორდინატებში განსაზღვრულ ტექნოლოგიური ამოცანის შეცვლას საკოორდინატო ღერძების ირგვლივ სამი ბრუნვათა ამოცანით, რაც ცხადია არის ძალზე მოუხერხებელი და რაც ითხოვს დროის დამატებით ხარჯვას;
2. მარეზულტირებელი მატრიცა, რომელიც წარმოადგენს სამი მატრიცის ნამრავლს, შეიძლება აღმოჩნდეს ცუდად განპირობებული, რაც იწვევს ეილერის კუთხეების გამოთვლისას ცდომილებების ზრდას;
3. ერთი მართვის ამოცანის მაგივრად წარმოიშვება სამი, რაც, ცხადია ართულებს ტექნიკური მოწყობილობის პროგრამირებას და მართვის აპარატურას.

აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ ლიტერატურაში მეთოდები, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მოვახდინოთ ბრუნვა, მოცემულია მხოლოდ იმ შემთხვევისთვის, როდესაც ეილერის კუთხეები უკვე განსაზღვრულია. მაგრამ არ არსებობს ეილერის კუთხეების გამოთვლის მეთოდი, თუ ზოგადათ მოცემულია კუთხე θ, რომელზედაც უნდა შებრუნდეს ვექტორი. ეს კი საკმაოდ ვრცლად გავრცელებული ამოცანაა ტექნიკაში და კომპიუტერულ გრაფიკაში. სასურველი იქნებოდა დამუშავდეს მეთოდი, რომელიც მოგვცემდა საშუალებას გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ

შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია მხოლოდ ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად.

კიდევ ერთს ძალზე მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს ის რომ, ხშირ შემთხვევაში, ბრუნვითი მოძრაობის მართვის ტექნოლოგიური ამოცანის წარმატებული ამოხსნისათვის საჭიროა მოძრაობის საბოლოო ეტაპზე ზუსტი პოზიციონირება და, აქედან გამომდინარე, მართვა ამ ეტაპეპზე (ტერმინალური მართვა) ხდება განსაკუთრებით აქტუალური. ამგვარი ამოცანების ეფექტური ამოხსნა საშუალებას მოგვცემს გავაუმჯობესოთ ტექნოლოგიური პროცესების ხარისხი, რადგან ამგვარი პროცესების ხარისხი მრავალ ასპექტში დამოკიდებულია ბრუნვითი მოძრაობების სისტემების ელემენტების ტერმინალური პოზიციონირების სიზუსტეზე.

მეთოდების უმრავლესობა, რომლებიც გამოიყენება ზემოდ მოხსენიებული ამოცანისთვის, არის პროგრამული მართვის ოპტიმალური მეთოდები (განრთული მეთოდები უკუ კავშირის გარეშე). ასეთებს განეკუთვნება მაქსიმუმის პრინციპი, დინამიკური პროგრამირების მეთოდი, მომენტების მეთოდი და სხვა. როგორც აღინიშნა, ყველა ჩამოთვლილი მეთოდი პროგრამულია, ანუ ითხოვს მართვის კანონის u(t) წინასწარ გამოთვლას და არ იძლევა მოძრაობის პროცესში მისი კორექტირების საშუალებას. ამავდროულად პრაქტიკა ითხოვს ავტომატური რეგულირების სისტემების (არს) აგებას, რომლებიც უკუკავშირის პრინციპს იყენებს, რაც მოძრაობის პროცესში მოძრაობის ტრაექტორიის კორექტირების საშუალებას იძლევა.

ყოველივე ზემოდ ნათქვამი განსაზღვრავს წარმოდგენილი ნაშრომის სამეცნიერო და პრაქტიკულ აქტუალობას.

კვლევის მიზნები. ნაშრომში განისაზღვრა კვლევის შემდეგი ამოცანები და მიზნები:

- ტრადიციულის მეთოდების ნაცვლად შემუშავდეს ახალი მეთოდი დაფუძნებული ინოვაციურ მათემატიკურ მეთოდზე, რომელიც

საშუალებას მოგვცემს მივიღოთ ეილერის კუთხეები, როგორც საწყისი და საბოლოო წერტილების კოორდინატების ფუნქციები.

- დასამუშავებელმა მეთოდმა საშუალება უნდა მოგვცეს გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია მხოლოდ ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად.
- დამუშავდეს სივრცითი ბრუნვების საბოლოო (ტერმინალური) მდგომარეობების მართვის მარტივი ადაპტიური ალგორითმები

კვლევის მეთოდები. სამუშაოში გამოყენებულია ბრუნვების ჯგუფების წარმოდგენის თეორიის ელემენტები, სპინორების თეორიის მეთოდები, მოძრაობისა მართვის ვარიაციული მეთოდები, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებების მეთოდები, MatCad-ზე პროგრამირების მეთოდები.

სამეცნიერო სიახლე. ნაშრომის სამეცნიერო სიახლე მდგომარეობს შემდეგში:

1. სივრცითი მოძრაობების მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა იქნა დაყვანილი ერთგანზომილებიანზე
2. ბრუნვების აღსაწერად პირველად გამოყენებულია მათი სპინორული წარმოდგენა. მიღებულია მარტივი გამოსახულებები მმართველი ორთოგონალური მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად ბრუნვის ცენტრის, საწყისისა და საბოლოო წერტილების კოორდინატების მიხედვით;
3. მიღებულია მმართველი ეილერის კუთხეების გამოსათვლელი მარტივი საინჟინრო ფორმულები;
4. შემუშავებულია ტერმინალური მართვის ზოგადი ვარიაციული პრინციპის დასაბუთება
5. შემუშავებულია სივრცითი ბრუნვების მოძრაობის მართვის ტერმინალური ამოცანების გადაწყვეტის ზოგადი ვარიაციული

მეთოდი;

6. შემუშავებულია მარტივი ადაპტიური ალგორითმები ტერმინალური მართვის სხვადასხვა კერძო ამოცანების (გაქანების, დაყვანის და დაახლოების) გადასაწყვეტად
7. შემუშავებულია ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა Matcad სისტემის გამოყენებით

ნაშრომის პრაქტიკული მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ დამუშავებული ალგორითმები შეიძლება წარმატებით გამოყენებულიყოს სხვადასხვა ტექნიკური სისტემების (მფრინავი ობიექტები, დამიზნების სისტემები, რობოტოტექნიკა, კომპიუტერული გრაფიკა და ანიმაცია, ავტომატიზაციისა და პროექტირების სისტემები (CAD) დამუშავებისას პრაქტიკული ტექნოლოგიური ამოცანების გადასაწყვეტად, რაც გააუმჯობესებს მათი საბოლო პოზიციონირებას და ამით მთლიანობაში აამაღლებს ტექნოლოგიურ პროცესების მართვის ხარისხს.

ნაშრომის აპრობაცია. ნაშრომის ძირითადი შედეგები განხილული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის და შავი ზღვის საერთაშორისო უნივერსიტეტის სემინარებზე,.

გამოქვეყნებული შრომები. სამუშაოს თემაზე გამოქვეყნებულია 3 ნაშრომი.

სამუშაოს სტრუქტურა **და მოცულობა.** სამუშაო მოიცავს 145 გვერდს, შეიცავს 3 თავს, ლიტერატურის ჩამონათვალს, დანართს, 3 ცხრილს და 19 ნახაზს.

General Information on the Thesis

The research subject of the thesis is the movement of the various engineering objects, such as aircrafts, guidance control systems, hierarchical systems, etc. The aim of the work is the development of mathematical models and program system based on them to execute computer modeling of the above systems' movement. The computer modeling is a highly effective and relative cheap method to investigate complex engineering systems. Mathematical and computer modeling has special significance when researching such complex engineering systems for which execution of natural experiments is labour-intensive or expensive. Results of modeling of complex engineering systems' movement are used to evaluate optimality of technical solutions when designing new product samples, modifying old ones or investigating non-standard situations. In a number of cases, for example, at the stage of draft design or when we deal with unique engineering object, mathematical and computer modeling is an only way to investigate complex engineering systems.

Investigation of dynamic properties of complex engineering objects is an indispensable and very important stage of complex engineering systems' research and development. Complexity of dynamical analysis consists in impossibility of exact analytical research of even simple systems, because dynamics, as a rule, is described by differential or algebraic-differential systems (generally, non-linear ones). It is impossible to solve such systems in an explicit form. On the other hand, construction of movement equations with high degree of freedom can turn out to be not simple procedure. This is closely related to growth of complexity for kinematic values that determine position, velocity and acceleration of bodies which are parts of the system.

Implementation of computer models of such types becomes a rather complex problem that requires development of new approaches and methods.

Topicality of the Research

Problems of control of spatial motions in general and, in particular, of rotational motions belong to the most topical directions in the complex of high technologies which demand a lot of scientific research. It is enough to mention problems of control of aircraft flight control or robot arm tools' spatial motion. Today the above problems are widely adopted also to computer modeling of relevant processes and computer graphics that is of large importance for development of CAD systems. In such kind of problems the issues of rotation motion control have particular significance since motion of operative parts are predominantly described exactly in terms of rotations. The main difficulty in problems of spatial rotation motion control is the high dimension of such problems since in this case appears a need to control 9 parameters (position, velocity, acceleration). This determines the fact that currently existing methods of rotation motion control and control systems based on these methods are characterized by complexity, instability (non-adaptability) and high price that, on its turn, reduces technological effectiveness of relevant systems and devices.

To date one of few, not to say the least, unique method of spatial motion of complex systems can be shortly described as follows: assume that an object has to be moved from an initial position (that is determined as an spatial point in three dimension) to another point in the same space. Solution of such a problem requires computation of Euler angles that provide a needed spatial motion. This requires different formulation of the initial problems in terms of rotation angles. That is, the initial spatial motion is represented as a superposition of rotations around 3 axis. The latter leads us to three 3x3 rotation matrices that contain two 2x2 two-dimensional sub-matrices. The product of these matrices represents the matrix that provides rotation from the initial position to final one and on the basis of which Euler angles are computed. This method has the following disadvantages:

1. the method requires replacing the technological problem defined in Cartesian coordinates by the problem of three rotations around three axis; obviously, this is an extremely awkward and causes waste of time
2. the resulting matrix that represents product of three matrices can be poorly determined and this causes growth of error in computation of Euler angles
3. instead of one control problem three problems arise that, obviously, complicates programming of technical devices and control equipment.

It is significant that all the literature explains how to rotate in case when Euler angles are given. There is no clear explanation for calculating the Euler angles. The latter is very important problem in engineering, computer graphics and simulation. It would be desirable to develop a method that would allow us to calculate Euler angles even in case when *only* general rotation angle between initial and final positions of rigid body is given

Another very important problem is that, in a majority of cases, for a successful solution of technological problems of rotational motion control it is necessary to provide an exact positioning in the terminal stage of motion and thus the control of terminal states (terminal control) becomes of special topical interest. An effective solution of such problems will enable us to improve the quality of technological processes, since the quality of these processes depends in many respects on the accuracy of the terminal positioning of the rotation motion systems' elements

Most of the methods used to solve these problems are optimal methods of programmed control (disconnected methods without feedback). They include the maximum principle, the dynamic programming method, the momentum method and others.

As has been noted, all the listed methods are the programming ones, i.e. requiring the preliminary calculation of the control law $u(t)$ and not making it possible to correct this law during motion. However practice requires the construction of automatic control systems (ACS) employing the feedback principle, since such systems make it possible to correct the motion trajectory in the course of the process.

All the above-said determines scientific and practical topicality of the submitted thesis.

Objectives of the Research

The following objectives are defined:

1. Instead of conventional methods a new method based on the new innovation mathematical method and which will allow Euler angles as a function of initial and final positions' coordinates to be obtained will be developed
2. The method to be developed has to allow Euler angles to be computed even in case when only general rotation angle between initial and final positions is defined
3. Simple adaptive algorithms to control terminal positions of spatial rotations will be developed

Research methods

The following methods are used in the thesis: elements of the theory of representation of rotation groups, spinor theory methods, variational methods of motion control, methods of ordinary differential equations, methods of programming in MatCad.

Scientific Novelty of the present research consists in the following:

1. The obtained results have enabled the actual three-dimensional problem of spatial motion control to be reduced to the one-dimensional one
2. To describe rotations the spinor representation of them has been used for the first time. Simple expressions to compute elements of control orthogonal matrices in respect to coordinates of the rotation's center, initial and final points have been obtained
3. Simple formulas to compute Euler angles to be controlled have been obtained;
4. Validation of the general variational principle for terminal control has been developed
5. The general variational method to solve terminal problems of spatial rotation motion control has been developed
6. Simple adaptive algorithms for terminal control of various particular problems (acceleration, bringing, approach) have been developed;
7. Software package (in Matcad) to implement the adaptive algorithms obtained has been developed

The Practical Importance of the work consists in that the developed algorithms can be successfully used to solve practical technological problems when designing and developing various engineering systems (aircrafts, guidance systems, robotics, computer graphics and animation, computer design systems (CAD)), which will improve processes of terminal positioning and, in the end, overall processes control quality.

Presentations of the research.

The main results of the thesis were presented at two scientific seminars at the Georgian Technical University and at tone scientific seminar at the Black Sea International University.

Publications.3 articles on the present work were published.

Structure of the Thesis. The Thesis consists of 145 pages, comprises 3 chapters, References, 1 Appendix, 3 Tables and 19 Figures

ნაშრომის შინაარსი

პირველი თავი ეთმობა საკითხის განსაზღვრას, კვლევის მიზნების და ამოცანების დადგენას, რამაც საშუალება მოგვცა ჩამოგვეყალიბებინა კველვის ამოცანები და მიზნები.

მეორე თავი ეთმობა განზოგადოებული ბრუნვების თეორიული საფუძვლების შემუშავებას განზოგადოებულ ბრუნვებში იგულისხმება ყველა შესაძლო ბრუნვების სიმრავლე როგორც ნულოვანი, ისე ნულოვანისგან განსხვავებული ცენტრებით, რომლებიც საწყისი, სამგანზომილებიანი წერტილის საბოლოოში გადაყვანას ახორციელებს. ამასთან დაკავშირებით ამოცანა შეიძლება შემდეგნაირად იყოს ფორმული-რებული: მოცემულია ორი სამგანზომილებიანი წერტილი $\mathbf{x}(x^1,x^2,x^3)$ და $\mathbf{y}(y^1,y^2,y^3)$, რომლებიც რაიმე ბრუნვის საწყისი და საბოლოო წერტილებია, საჭიროა გამოვსახოთ ყველა შესაძლო ბრუნვების ცენტრების სიმრავლის $\mathbf{z}(z^1,z^2,z^3)$ კოორდინატების დამოკიდებულება $\mathbf{x}(x^1,x^2,x^3)$ და $\mathbf{y}(y^1,y^2,y^3)$ წერტილების ფიქსირებულ კოორდინატებზე და ვიპოვოთ შესაბამისი ბრუნვების გარდაქმნების სიმრავლე, რომლებიც უზრუნველყოფს $\mathbf{x}(x^1,x^2,x^3)$ წერტილის გადაყვანას $\mathbf{y}(y^1,y^2,y^3)$ წერტილში. მსგავს გარდაქმნებზე საუბრისას ჩვენ ვგულისხმობთ სამგანზომილებიანი სივრცის ბრუნვის, ძირითადისგან განსხვავებულ, წარმოდგენებს. მაშინ, როდესაც ძირითადი წარმოდგენა რეალიზებულია მესამე რიგის, ორთოგონალური, ევკლიდურ სივრცეში მოქმედი მატრიცების საშუალებით, წარმოდგენილ სამუშაოში გამოყენებული სპინორული წარმოდგენა ეფუძნება მეორე რიგის, კომპლექსურ, უნიტარულ, კომპლექსური რიცხვების ველზე ორგანზომილებიან წრით სივრცეში მოქმედ მატრიცებს.

სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის სპინორული მოდელი.

დავუშვათ L^3 არის წრფივი ევკლიდური სივრცე ძირითადი ორთონორმირებული ვექტორებით e_1, e_2, e_3. თითოეული L^3 სივრცის ვექტორისთვის $x=x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3$ ჩვენ ვანიჭებთ ერმიტულ მატრიცას

$$X=\begin{vmatrix} x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & -x^3 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

რომლის ელემენტებს უწოდებენ x ვექტორის სპინორულ კომპონენტებს. როდესაც ჩვენ x ვექტორის ჩვეულებრივი ევკლიდური კომპონენტებიდან გადავდივართ სპინორულზე, ჩვენ x ვექტორს ვაიდენტიფიცირებთ ერმიტეს ფუნქციონალებთან ორ განზომილებიან წრფივ სივრცეზე C^2 კომპლექსური რიცხვების ველ C ზედა. ავღნიშნოთ $L(C^2)$ -ით ყველა ერმიტეს ფუნქციონალების სიმრავლე C^2-ზე, რომელიც წარმოადგენს 3 განზომილებიან წრფივსივრცეს ნამდვილ რიცხვების ველზე იმის გათვალისწიმებით, რომ პაულის მატრიცები აღებულია საბაზისო ელემენტებად. ამგვარად თითოეული (1) ფორმის მატრიცისთვის მართებულია შემდეგი დეკომპოზიცია

$$X= x^1\sigma_1+ x^2\sigma_2+x^3\sigma_3\,, \tag{2}$$

სადაც

$$\sigma_1=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\sigma_2=\begin{vmatrix}0&-i\\i&0\end{vmatrix},\sigma_3=\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}$$

არიან *პაულის* მატრიცები.

(2) დეკომპოზიციიდან გამომდინარეობს რომ სივრცე $L(C^2)$ არის 3 განზომილებიანი წრფივი სივრცე ნამდვილ რიცხვების ველზე და ამიტომ შესაძლებელია მისი სივრცის L^3-თან იდენტიფიცირება. გასათავალიაწინებელია, რომ ორ განზომილებიანი სფერო C^2-ში თითოეული საბაზისო ვექტორისთვის ჩვენ შეგვიძლია მივანიჭოთ $L(C^2)$ სიბრტყეს საბაზისო ვექტორები $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ (და აგრეთვე ორთონორმირებული საბაზისო ვექტორები e_1,e_2,e_3, L^3 და $L(C^2)$ იდენტიფიკაციის გამო): σ_i თითოეული მატრიცა წარმოდგენილია როგორც C^2 სივრცის საბაზისო ვექტორების ტენზორული ნამრავლების რაიმე წრფივი კომბინაცია.

პრობლემა შეიძლება ხელმეორედ ფორმულირებულ იქნას C^2 *სპინორული* სივრცის კონტექსტში. მოცემულია ორი ერმიტული ფუნქციონალის მატრიცა

$$X = \begin{vmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{vmatrix} \qquad Y = \begin{vmatrix} y^3 & y^1 - iy^2 \\ y^1 + iy^2 & -y^3 \end{vmatrix}$$

საჭიროა განისაზღვროს:

1) უნიტარული მატრიცების სიმრავლე $C = \begin{vmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{vmatrix}$ რომელიც

აკმაკოფილებს ტოლობას

$$Y = \overline{C}^T XC$$

(3)

(5) ტოლობიდან ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ უცნობი ცვლადების და წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებების შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} x_3\alpha + \gamma\beta &= y_3\alpha - \overline{\delta\beta} \\ \bar{\gamma}\alpha - x_3\beta &= y_3\beta + \bar{\delta}\overline{\alpha} \end{aligned} \tag{4}$$

სადაც $\gamma = x_1 + ix_2$ და $\delta = y_1 + iy_2$.

ნებისმიერი α - თვის, (4)-ის ამოხსნა არის მოცემული

$$\beta = \frac{\bar{\gamma}\alpha - \bar{\delta}\overline{\alpha}}{x_3 + y_3}$$

(5)

(5) დან გამომდინარეობს, რომ

$$\operatorname{Re}\beta = \beta_1 = \frac{\alpha_1(x_1 - y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2)}{x_3 + y_3} \quad \text{და} \quad \operatorname{Im}\beta = \beta_2 = \frac{\alpha_2(x_1 + y_1) - \alpha_1(x_2 - y_2)}{x_3 + y_3} \tag{6}$$

C ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1$) მატრიცის უნიტარულობის პირობიდან შეიძლება განისაზღვროს ან $\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha$ ან $\alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha$. გავითვალისწინოთ, რომ ამ პარამეტრებიდან ერთ-ერთი რჩება არაგანსაზღვრული. ასე რომ (5) განსაზღვრავს ბრუნვას $\alpha \neq 0$ და $x_3 + y_3 \neq 0$-თვის.

$z(z_1, z_2, z_3)$ ბრუნვის ცენტრის ინვარიანტობა C გარდაქმნის მიმართ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი პირობის სახით:

$$\overline{C}^T ZC = Z$$

ანუ ვექტორი Z გარდაქმნა $\overline{C}^T ZC$-ის შედეგად არ იცვლება (რჩება Z ტოლი). ამ უცვლელობას ჰქვია *ინვარიანტობა*. იმ წერტილს, რომელზედაც არ მოქმედებს გარდაქმნა, ჩვენ ვუძახით *ბრუნვის ცენტრად*. აქედან ჩვენ ვღბულობთ

$$z_3\alpha + \mu\beta = z_3\alpha - \overline{\mu}\overline{\beta}$$
$$\overline{\mu}\alpha - z_3\beta = z_3\beta + \overline{\mu}\overline{\alpha}$$

სადაც $\quad \mu = z_1 + iz_2$

უკანასკნელ ფორმულას მივყავართ სისტემამდე:

$$\beta_1 z_1 - \beta_2 z_2 = 0;$$
$$\alpha_2 z_2 - \beta_1 z_3 = 0;$$
$$\alpha_1 z_1 - \beta_2 z_3 = 0.$$

მოცემული $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ და β_2 ($\alpha \neq 0$ და $x_3 + y_3 \neq 0$) -თვის ყოველთვის არსებობს არატრივიალური ამოხსნა , რომელიც შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით:

$$z_1 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} z_3 \quad z_2 = \frac{\beta_1}{\alpha_2} z_3 \tag{7}$$

სადაც z_3 არის ნებისმიერი.

ანუ z_1, z_2 , z_3 წარმოადგენენ ერთ-ერთ შესაძლო ბრუნვის ცენტრის კოორდინატებს. ასეთი ყველა შესაძლო ცენტრების სიმრავლე შეადგენს ბრუნვის ცენტრების სიბრტყეს

თუ ჩვენ ავირჩევთ α_1-ს პარამეტრად, მაშინ მის თითოეულ ფიქსირებულ მნიშვნელობას (რომელიც განსაზღვრავს უნიკალურ გარდაქმნას) ჩვენ შეგვიძლია მივანიჭოთ ბრუნვის ცენტრების სიმრავლე, რომლებიც მდებარეობენ სიბრტყეზე

$$\alpha_2 z_1 + \alpha_2 z_2 - (\beta_1 + \beta_2) z_3 = 0 \tag{8}$$

ამრიგად, (6) ნორმალიზაციის პირობასთან ერთად განსაზღვრავს განზოგადოებულ ბრუნვას, რომელიც გარდაქმნის წერტილს (x^1,x^2,x^3) წერტილ (y^1,y^2,y^3)-ში ცენტრების სიმრავლის მიმართ (განსაზღვრული განტოლებით (8)).

C^2-ში და L^3-ში გარდაქმნებს შორის კავშირი

ჩვენ შეგვიძლია დავამყაროთ შესაბამისობა სივრცის C^2 გარდაქმნის მატრიცის $C = \begin{vmatrix} \overline{\alpha} & -\beta \\ \overline{\beta} & \alpha \end{vmatrix}$ ელემენტებსა და სივრცის L^3 ბრუნვის ორტთოგონალური ნამდვილი მატრიცის A ელემენტებს შორის.

რადგან მატრიცები C და A გარდაქმნიან (ბრუნავენ) ნებისმიერ ვექტორებს შესაბამის სივრცეში, ისინი აგრეთვე გარდაქმნიან ამ სივრცეების საბაზისო ვექტორებს

მატრიცა A წარმოადგენს სივრცე L^3-ის სამ ორთონორმირებული საბაზისო ვექტორის შორის გარდაქმნას და მისი რიგები წარმოადგენენ ახალი საბაზისო ვექტორების დეკომპოზიციას საწყისი საბაზისო ვექტორების მიმართ. აქედან გამომდინარე და აგრეთვე $L(C^2)$ და L^3 სივრცეების იდენტიფიკაციის გამო ჩვენ გაგვაჩნია:

$$\overline{C}^T \sigma_i C = a_i^{i'} \sigma_{i'} \quad (i, i' = 1,2,3) \tag{9}$$

სადაც σ_i საწყისი ბაზისის შესაბამისი პაულის მატრიცებია, $\sigma_{i'}$ წარმოადგენენ ახალის ბაზისის პაულის მატრიცებს და $\alpha_i^{i'}$ წარმოადგენენ A^{-1} მატრიცის ელემენტებს. ანუ $\overline{C}^T \sigma_i C$ გარდაქმნის (ბრუნავს) საბაზისო ვექტორს (პაულის მატრიცას) σ_i (i=1, 2,3). მაგალითად, $\overline{C}^T \sigma_1 C$ ბრუნავს საბაზისო მატრიცას $\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ და გარდაქმნილი საბაზისო მატრიცის σ_1 კოეფიციენტები a_1^1, a_2^1, a_3^1 განლაგებულია მატრიცა A-ს პირველ რიგში. $\overline{C}^T \sigma_2 C$ ბრუნავს საბაზისო მატრიცას $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$ და გარდაქმნილი საბაზისო მატრიცის σ_2 კოეფიციენტები a_1^2, a_2^2, a_3^2 განლაგებულია მატრიცა A -ს მეორე რიგში და ა.შ.

(9) განტოლებებიდან მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას რათა გამოვითვალოთ A მატრიცის ელემენტები C მატრიცის ელემენტების მეშვეობით:

$$a_1^1 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - (\beta_1^2 - \beta_2^2); \; a_2^1 = 2(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2); \; a_3^1 = 2(\alpha_2 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1);$$

$$a_1^2 = 2(\beta_1 \beta_2 - \alpha_1 \alpha_2); \; a_2^2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2); \; a_3^2 = 2(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1);$$

$$a_1^3 = 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2); \; a_3^2 = 2(\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2); \; a_3^3 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (\beta_1^2 + \beta_2^2). \tag{10}$$

გამოსახულება (10) საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ A^{-1} მატრიცის ელემენტები მოცემული 3 წერტილის (საწყისი, ტერმინალური და ცენტრალური) და რომლებიც განსაზღვრავენ ბრუნვას) კოორდინატების მეშვეობით. მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ რომ მატრიცა შეიძლება ჩაიწეროს *ეილერის* ფორმით:

$$A=\left\|\begin{matrix} \cos\varphi\cos\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\psi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\sin\theta & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{matrix}\right\|$$

მივიღებთ, რომ (10) გამოსახულება გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ ეილერის კუთხეები: $\cos\theta=a_{33}$; $\cos\psi\sin\theta=a_{32}$ და $\sin\psi\sin\theta=a_{31}$ (11)

ამრიგად, სამგანზომილებიანი სივრცის ბრუნვის სპინორული მოდელი საშუალებას გვაძლევს:

1. აღვწეროთ საწყისი და ბოლო წერტილებით მოცემულ ბრუნვათა ერთობრივობა მათთვის დასაშვებ ცენტრთა სიმრავლის მიმართ, რასაც ადრე ვუწოდეთ განზოგადოებული ბრუნვები;
2. განვიხილოთ ნამდვილ ორთოგონალურ გარდაქმნათა მატრიცები L^3-ში, როგორც კერძო შემთხვევები უნიტარული გარდაქმნებისა C^2-ში, რამაც საშუალება მოგვცა გამოგვეყვანა გამოთვლის მარტივი ფორმულები ნამდვილ ორთოგონალურ მატრიცათა ელემენტებისათვის და მოძრაობის მართვის ისეთი მნიშვნელოვანი ტექნიკური პარამეტრებისათვის, როგორც ეილერის კუთხეებია

აღსანიშნავია, რომ ლიტერატურაში მეთოდები, რომლის საშუალებითაც შეიძლება მოვახდინოთ ბრუნვა, მოცემულია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ეილერის კუთხეები უკვე განსაზღვრულია. მაგრამ არ არსებობს ეილერის კუთხეების გამოთვლის მეთოდი, თუ ზოგადათ მოცემულია კუთხე θ, რომელზედაც უნდა შებრუნდეს ვექტორი. ეს კი საკმაოდ ვრცლად გავრცელებული ამოცანაა ტექნიკაში და კომპიუტერულ გრაფიკაში. ზემოდ განხილული მეთოდი კი საშუალებას გვაძლებს გამოვთვალოთ ეილერის კუთხეები იმ შემთხვევაშიც კი, თუ მოცემულია

მხოლოდ ზოგადი ბრუნვის კუთხე საწყისი ვექტორის საბოლოო ვექტორში გადასაყვანად .

კინემატიკური გამოსახულებები ეილერის კუთხეებისთვის

(6) და (11) გამოსახულებებიდან ადვილად გამოითვლება ეილერის კუთხეები, რომლებიც უზრუნველყოფენ $x(x^1,x^2,x^3)$ წერტილის $y(y^1,y^2,y^3)$ წერტილში შემობრუნებას. თუ მიღებულია, რომ საწყის წერტილს $x(x^1,x^2,x^3)$-ს შეესაბამებიან ეილერის ნულოვანი კუთხეები $\theta_0=\phi_0=\psi_0=0$, მაშინ ბრუნვის მართვა მდგომარეობს ეილერის კუთხეების საწყისი მნიშვნელობების ცვლილებებში ბოლო $\theta_f;\phi_f;\psi_f$ მნიშვნელობებამდე, რომლებიც გამოთვლილია (11) ფორმულებით. ზოგადი სახით მართვის პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ეილერის კუთხეების ცვლილების ფუნქციები: $\theta(t)$; $\phi(t)$; $\psi(t)$, რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ შემდეგ პირობებს:

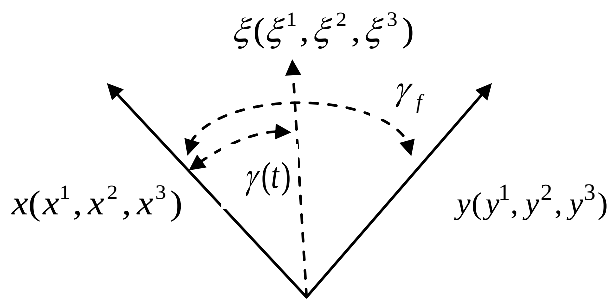
$$\theta(t_0)=0;\ \phi(t_0)=0;\ \psi(t_0)=0,$$

$$\theta(t_f)=\theta_f;\ \phi(t_f)=\phi_f;\ \psi(t_f)=\psi_f, \qquad (12)$$

სადაც t_0 და t_f – მართვის პროცესის საწყისი და საბოლოო მომენტებია. ნათქვამიდან ბუნებრივად გამომდინარეობს მართვის ფუნქციების $\theta(t)$; $\phi(t)$; $\psi(t)$ განსაზღვრის ამოცანა.

ნახ.1-ზე გამოსახულია უძრავი ვექტორები $x(x^1,x^2,x^3)$; $y(y^1,y^2,y^3)$ და შუალედური მბრუნავი ვექტორი $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$, რომელიც დროის საწყის $t=t_0$ მომენტში ემთხვევა ბრუნვის საწყის ვექტორს $x(x^1,x^2,x^3)$, ხოლო ბოლო მომენტში $t=t_f$ ემთხვევა $y(y^1,y^2,y^3)$ ბოლო ვექტორს. მიმდინარე კუთხე γ $x(x^1,x^2,x^3)$ და $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$ ვექტორთა შორის $t=t_0$ მომენტში უდრის ნულს და $t=t_f$ მომენტში $\gamma=\gamma_f$, სადაც

$$\gamma_f = ar\cos\left(\frac{(x,y)}{|x|*|y|}\right) = ar\cos\left(\frac{(x,y)}{|x|^2}\right);$$ $(x,y)-$ x და y ვექტორთა სკალარული ნამრავლია. ცხადია, რომ მიმდინარე კუთხე $y(y^1,y^2,y^3)$ და $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$ ვექტორებს შორის ტოლია $\gamma_f-\gamma$.



ნახაზი 1. სივრცული ბრუნვის საწყისი, ბოლო და შუალედური ვექტორები.

განვსაზღვრავთ $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$ ვექტორის კოორდინატებს იმ პირობიდან, რომ ის შეადგენს γ და $\gamma_f-\gamma$ კუთხეებს $x(x^1,x^2,x^3)$ და $y(y^1,y^2,y^3)$ ვექტორებთან და განლაგებულია მათ სიბრტყეში. ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ საძიებელი $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$ ვექტორის კოორდინატები გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\xi^1=\frac{|x|^2}{|r|^2}((\cos(\gamma_f-\gamma)(r^2x^3-r^3x^2)-\cos\gamma(r^2y^3-r^3y^2))$$

$$\xi^2=\frac{|x|^2}{|r|^2}((\cos(\gamma_f-\gamma)(r^3x^1-r^1x^3)-\cos\gamma(r^3y^1-r^1y^3)) \tag{13}$$

$$\xi^3=\frac{|x|^2}{|r|^2}((\cos(\gamma_f-\gamma)(r^1x^2-r^2x^1)-\cos\gamma(r^1y^2-r^2y^1))$$

ამ გამოსახულებებში დამოუკიდებელი ცვლადი არის კუთხე γ, რომელიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც დროის ფუნქცია, ეს კი ნიშნავს, რომ $\xi(\xi^1;\xi^2;\xi^3)$ ვექტორის კოორდინატებიც ასევე წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს. ნაშრომში მიღებულია საძიებელი კოორდინატების მარტივ გამოსახულებები, როგორც დროის ფუნქციები:

$$\xi^1(t)=\frac{|x|^2}{|r|^2}(\cos(\gamma_f-\omega t)r_x^1-\cos\omega t r_y^1)$$

$$\xi^2(t)=\frac{|x|^2}{|r|^2}(\cos(\gamma_f-\omega t)r_x^2-\cos\omega t r_y^2) \tag{14}$$

$$\xi^3(t) = \frac{|x|^2}{|r|^2}(\cos(\gamma_f - \omega t)r_x^3 - \cos\omega t r_y^3)$$

აგრეთვე განსაზღვრულია ეილერის კუთხეები, რომლებიც ასევე წარმოადგენენ დროის ფუნქციებს:

$$\theta(t) = \arccos(\frac{(x^3 + \xi^3(t))^2 - (x^1 - \xi^1(t))^2 - (x^2 - \xi^2(t))^2}{(x^3 + \xi^3(t))^2})$$

$$\varphi(t) = \arcsin(\frac{2(x^1 - \xi^1(t))}{(x^3 + \xi^3(t))\sin\theta(t)})$$

$$\psi(t) = \arcsin(\frac{2(\xi^1(t) - x^1)}{(x^3 + \xi^3(t))\sin\theta(t)})$$

მიღებული გამოსახულებები (15) წყვეტენ $\theta(t)$; $\phi(t)$; $\psi(t)$ მმართველი კინემატიკური ფუნქციების განსაზღვრის დასმულ ამოცანას. მეორე მხრივ, საჭიროა აღინიშნოს, რომ შემოთავაზებული თეორია გვაძლევს საშუალებას სივრცული მოძრაობის მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა დავიყვანოთ ერთგანზომილებიანზე. მართლაც, საკმარისია როგორმე შევადგინოთ ფუნქცია $\gamma(t)$, რომელიც აკმაყოფილებს შესაბამის ზღვრულ პირობებს, მაშინ ცხადია, რომ მართვის პროცესი მთლიანად განსაზღვრული იქნება ბრუნვის სპინორული მატრიცის და ეილერის კუთხეების (15) ფუნქციათა მეშვეობით.

მესამე თავი ეძღვნება მოძრავი ობიექტების საბოლოო მდგომარეობის მართვის ამოცანების გადაწყვეტის თეორიულ მეთოდებს.

შემუშავებული მიდგომის ძირითადი იდეა ეფუძნება იმ თვალსაჩინო ფაქტს, რომ მოძრაობისას მოძრავ ობიექტზე მოქმედებს ორი სახის ძალა: მმართველი და არამმართველი. მმართველი ძალების ცვლილება აგრეთვე არამმართველ ძალებსაც ცვლის. მოძრავ ობიექტზე მოქმედი ყველა ძალა (არამმართველი + მმართველი) ობიექტის $\dot{V}$ აჩქარებას იწვევს. ცხადია, რომ ის ადვილად ექვემდებარება პირდაპირ გაზომვას, ამიტომ უნდა დაისვას მმართველი ფუნქციის $\ddot{\gamma}(t)$ აჩქარების სახით სინთეზის ამოცანა, რასაც მივყევართ შემდეგი ვარიაციული ამოცანის ამოხსნამდე:

მოცემულია ორი წერტილი $(\gamma_0;\dot{\gamma}_0)$ და $(\gamma_f;\dot{\gamma}_f)$ ორგანზომილებიან ფაზურ სივრცეში, საჭიროა განისაზღვროს ფაზური სივრცის ისეთი მრუდის განტოლება, რომელიც აერთიანებს მათ და მინიმუმს ანიჭებს შემდეგ ფუნქციონალს

$$J_F = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t,\gamma,\dot{\gamma},\alpha(t))dt. \quad (16)$$

(16) ფუნქციონალი მეორე რიგის წარმოებულების შემცველი ტიპის ფუნქციონალებს განეკუთვნება, ამიტომ მისი შესაბამისი ეილერის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{d^2\ddot{\gamma}}{dt^2} = 0. \quad (17)$$

(17)-ის ამონახსნი მესამე რიგის პოლინომია

$$\gamma = C_0 + C_1 t + C_2\frac{t^2}{2} + C_3\frac{t^3}{6}. \quad (18)$$

სასაზღვრო პირობები ტოლია

$$t=0;\ \gamma = \gamma_0;\ \ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0, \quad (19)$$

$$t=T;\ \gamma = \gamma_f;\ \ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_f. \quad (20)$$

ეს ოთხი პირობა საკმარისია იმისთვის, რომ განისაზღვროს ოთხი მუდმივა C_i (i=0,1,2,3), რაც სრულად განსაზღვრავს ოპტიმალურ ტრაექტორიას.

მოთხრობილი მიდგომა საკმაოდ ზოგად ხასიათს ატარებს, რაც საშუალებას იძლევა გადაწყვეტილი იყოს ტერმინალური მართვის რიგი პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი ამოცანა. კერძოდ, იგულისხმება გაქანების, დაყვანისა და დაახლოების ამოცანები.

ადგილის ეკონომიის მიზნით მოგვყავს მხოლოდ დაახლოების ამოცანასთან დაკავშირებული შედეგები, რადგან სწორედ ისინი იყო გამოყენებული რობოტ-მანიპულატორის ბრუნვის მართვის პრაქტიკული ალგორითმის შემუშავებისას. აღვნიშნოთ, რომ სადისერტაციო ნაშრომში

აგრეთვე წარმოდგენილია გაქანებისა და დაყვანის ამოცანების სრული ამონახსნები.

დაახლოების ამოცანაში გამოიყენება ოთხივე სასაზღვრო პირობა (19) და (20), რომლებიც საშუალებას იძლევა პირდაპირ გამოითვალოს C_i ($i=0,1,2,3$) კოეფიციენტები მმართველ ფუნქციაში.

$$C_0 = \gamma_0; \qquad C_1 = \dot{\gamma}_0; \qquad C_2 = \frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(\dot{\gamma}_f + 2\dot{\gamma}_0);$$

$$C_3 = \frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) + \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0). \tag{21}$$

რაც საშუალებას იძლევა მივიღოთ მართვის სინთეზირებული ფუნქცია

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(\frac{6}{T^2}(\gamma_f - \gamma_0) - \frac{2}{T}(2\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right) + \left(\frac{12}{T^3}(\gamma_0 - \gamma_f) - \frac{6}{T^2}(\dot{\gamma}_f + \dot{\gamma}_0)\right)t \tag{22}$$

მაგრამ ეს არის განრთული (პროგრამული) მართვის კანონი, ანუ მართვის კანონი უკუ კავშირის გარეშე. აჩქარების პირდაპირი გაზომვის შესაძლებლობის გამოყენებით მართვის ობიექტი შეიძლება გადავაქციოთ მართვის კანონად უკუ კავშირით. ამ მიზნით საკმარისია საწყისი ფაზური მდგომარეობა მიმდინარედ ჩაითვალოს, ანუ დავთქვათ $\gamma = \gamma_0 \, u \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0$. ამასთან იგულისხმება, რომ მართვის ობიექტი ისეთნაირად მისდევს საბოლოო წერტილს γ_f, რომ დავალების შესრულების დრო T – t= ΔT მუდმივ სიდიდედ ჩაითვალოს. მაშინ ვღებულობთ მმართველ ფუნქციას უკუ კავშირით მართვისთვის

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{6\gamma_f}{(\Delta T)^2} - \frac{6\gamma}{(\Delta T)^2} - \frac{4\dot{\gamma}}{(\Delta T)} - \frac{2\dot{\gamma}_f}{(\Delta T)}, \tag{23}$$

პროცესის მოცემულ მდგომარეობაში გაყვანის ზოგადი ამონახსნის იძულებითი და გარდამალი მდგენელებია

$$\gamma_{fr} = \frac{\Delta T^2}{6}[K_0 - \frac{2}{3}\Delta T K_1 + \frac{5}{9}\Delta T^2 K_2 - \frac{4}{9}\Delta T^3 K_3 + \left(K_1 - \frac{4}{3}\Delta T K_2 + \frac{5}{3}\Delta T^2 K_3\right)t +$$

$$+ \left(K_2 - 2\Delta T K_3\right)t^2 + K_3 t^3]. \;\; \gamma_{tr} = e^{-\frac{2t}{\Delta T}}\left(A\cos\frac{\sqrt{2}}{\Delta T}t + B\sin\frac{\sqrt{2}}{\Delta T}t\right), \tag{24}$$

სადაც

$$A=\gamma_{10}-\frac{1}{6}\Delta T^2K_0+\frac{1}{9}\Delta T^3K_1-\frac{5}{54}\Delta T^4K^2+\frac{4}{54}\Delta T^5K_3;$$

$$B=\sqrt{2}\,\gamma_{10}+\frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\gamma}_{10}\Delta T-\frac{\sqrt{2}}{6}\Delta T^2K_0+\frac{\sqrt{2}}{36}\Delta T^3K_1+\frac{5\sqrt{2}}{270}\Delta T^4K_2-\frac{7\sqrt{2}}{108}\Delta T^5K_3.$$

ხაზი გავუსვათ, რომ მოყვანილ გამოსახულებებში საწყისი მნიშვნელობები γ_{10} *и* $\dot{\gamma}_{10}$ არ უდრის (19)-ში მოყვანილ საწყის მნიშვნელობებს, რის გამოც ჩნდება გარდამავალი პროცესი (24), რომელიც დროის განმავლობაში ქრება (ამასთან დროის მუდმივა უდრის $\frac{\Delta T}{2}$), ანუ ობიექტი გამოდის იძულებით ტრაექტორიაზე (24), რასაც მივყევართ დაახლოების ამოცანის სრულ ამოხსნამდე.

ხშირად ტერმინალური მართვის პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად დაახლოების ამოცანის ოთხი სასაზღვრო პირობა (19) არასაკმარისია. მაგალითად, დამუხრუჭებისას არ კმარა საბოლოო სიჩქარის ნულთან გატოლება. სრული გაჩერებისთვის აუცილებელია აგრეთვე საბოლოო აჩქარების ნულთან გატოლება. მაშასადამე, ჩნდება აჩქარებასთან დაკავშირებული დამატებითი სასაზღვრო პირობა (მეხუთე)

t=0; $\gamma=\gamma_0$; $\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_0$, t=T; $\gamma=\gamma_f$; $\dot{\gamma}=\dot{\gamma}_f$;1 $\ddot{\gamma}=\ddot{\gamma}_f$. (25)

არ მოგვყავს მარტივი, თუმცა საკმაოდ გრძელი გარდაქმნები და პირდაპირ წარმოვადგენთ მმართველი ფუნქციისთვის საბოლოო გამოსახულებას

$$\ddot{\gamma}(t)=\frac{12}{(T-t)^2}\left(\gamma_f-\gamma\right)-\frac{6}{(T-t)}\left(\dot{\gamma}_f+\dot{\gamma}\right). \qquad (26)$$

აჩქარების საბოლოო მნიშვნელობას ვგულისხმობთ $\ddot{\gamma}_f=0$ სახით, რაც ბუნებრივია დამუხრუჭების (გაჩერების) ამოცანისთვის.

განზოგადებული სივრცითი ბრუნვების სპინორული წარმოდგენის საფუძველზე შემუშავებული სივრცითი ბრუნვების კინემატიკის სპინორულმა მოდელმა (თავი II) და მბრუნავი ობიექტების მოძრაობის საბოლოო მდგომარეობის მართვის თეორიის მეთოდებმა საშუალება

მოგვცეს შეგვექმნა სივრცითი ბრუნვების საბოლოო მდგომარეობის მართვის მარტივი მეთოდები.

სივრცითი მოძრაობის მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა დაყვანილია ერთგანზომილებიანზე, რადგან მბრუნავი ვექტორის კოორდინატები განისაზღვრა ბრუნვის ერთი, ბრუნვის სიბრტყეში მდებარე კუთხის ფუნქციის სახით. ცხადია, რომ მსგავსი სახის მოძრაობის შესაბამისი ტრაექტორიები სამი ბუნებრივი მონაკვეთისგან შედგება: გაქანების, თანაბარი ბრუნვისა და დამუხრუჭების. მართვის ამოცანა ფორმულირებული იყო შემდეგნაირად. საჭიროა ბრუნვის მეშვეობით გადავიყვანოთ $x(x^1, x^2, x^3)$ კოორდინატების მქონე მართვის ობიექტი (მო) სამგანზომილებიანი სივრცის $y(y^1, y^2, y^3)$ კოორდინატების მქონე წერტილში

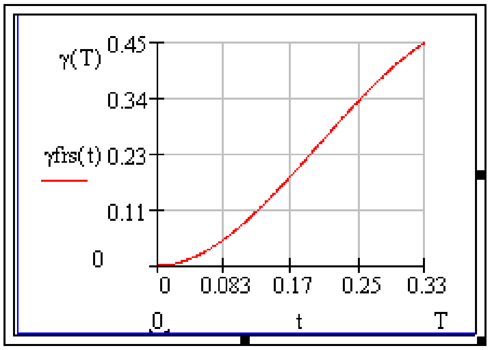
საწყის ეტაპზე ბრუნვის პროცესი მოდელირებულ იყო MatCAD-ის საშუალებებით. საწყისი და საბოლოო ვექტორების სახით აღებული იყო x(10,-45,30) და y(1,20,51.225). ცხადია, რომ მათ შორის კუთხე ტოლია $\gamma_f = ar\cos(\frac{(x,y)}{|x|^2}) = 77.65^0$, რომელიც დაიყო სამ ტოლ ნაწილად

$\gamma_f/3$=25.880; $2\gamma_f/3$=51.770 და γ_f=77.650, ანუ, ამ შემთხვევაში $\alpha_1 = \frac{1}{3}\, u\, \alpha_2 = \frac{2}{3}$. შემდგომში გამოვიყენოთ რადიანებში გამოსახული კუთხეების მნიშვნელობები, ამიტომ $\gamma_f/3$=0.452; $2\gamma_f/3$=0.904 და γ_f=1.355., მივიღოთ, რომ კუთხური სიჩქარე ტოლია ω = 1 და ბრუნვის დროც აგრეთვე T = 1 წმ. დავუშვათ აგრეთვე ისიც, რომ სამივე ეტაპის ხანგრძლივობა ერთნაირია, ანუ რომ $T_1 = \frac{T}{3} = 0.333$ წმ.

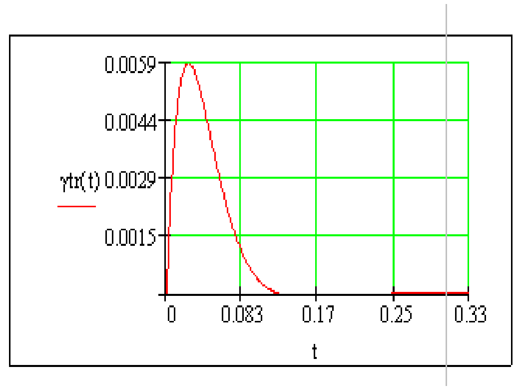
რადგან ამჟამად ვიხილავთ ბრუნვის საწყის ეტაპს, სასაზღვრო პირობებს შემდეგი სახე ექნება

t=0; $\gamma_0 = 0$; $\dot{\gamma}_0 = 0$, t=$_{T1;}$ $\gamma_f = 0.452$; $\dot{\gamma}_f = \omega_f = 1$.

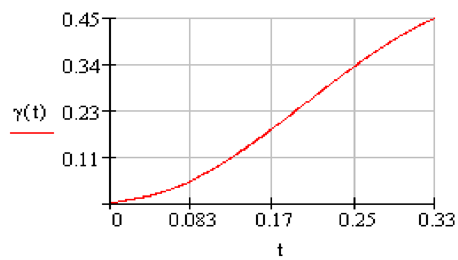
ზემოთ მოყვანილი შედეგების გამოყენებით მივიღებთ ნახ.2-ზე მოყვანილ ბრუნვის საწყისი ეტაპის მართვის დინამიკურ მახასიათებლებს.



ა)



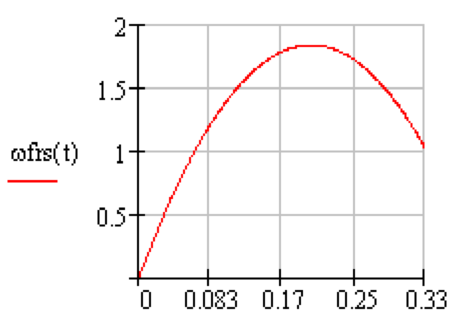
ბ)



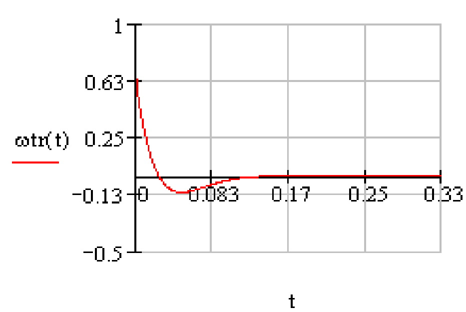
ბ

ნახაზი 2. მოძრაობის საწყისი უბანი: ბრუნვის კუთხის სიდიდის დროზე დამოკიდებულება:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი; გ) ფაზური ტრაექტორია.



ა)



ბ)

ნახაზი 3. მოძრაობის საწყისი უბანი: კუთხური სიჩქარის დროზე დამოკიდებულება:

ა) იძულებითი მდგენელი; ბ) გარდამავალი მდგენელი;

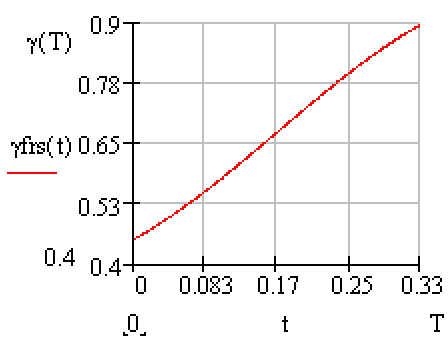
ნახ. 2ბ აჩვენებს გარდამავალი პროცესის არსებობას, თუმცა ის ორი რიგით სუსტია იძულებით შემადგენელზე (ნახ. 2ა) და საკმარისად სწრაფად მიილევა. ასევე სწრაფად მიილევა კუთხური სიჩქარის გარდამავალი შემადგენელიც (ნახ. 3ბ), თუმცა მისი რიგი შედარებითია იძულებითი შემადგენლის რიგთან (ნახ. 3ა). ფაზურ ტრაექტორიასთან არსებული სუსტი ჩაღუნვები (ნახ. 2გ) არის გარდამავალი პროცესის შედეგი.

თანაბარი ბრუნვის უბანზე მართვა არ იცვლება, ანუ გამოიყენება ყველა ის განტოლება და დამოკიდებულება, რომლებიც გამოიყენებოდა საწყის უბანზე. იცვლება მხოლოდ სასაზღვრო პირობები

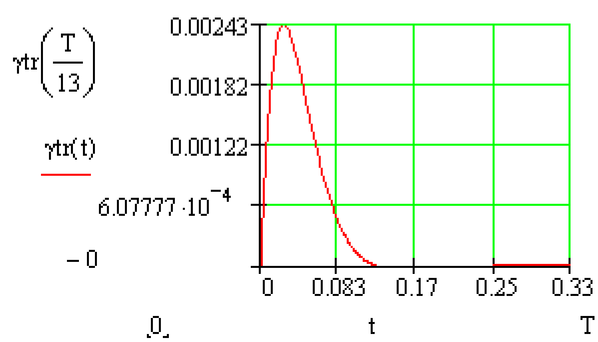
t=0; $\gamma_0 = 0.452$; $\dot{\gamma}_0 = 1$,

t=T1; $\gamma_f = 0.904$; $\dot{\gamma}_f = \omega_f = 1$. (27)

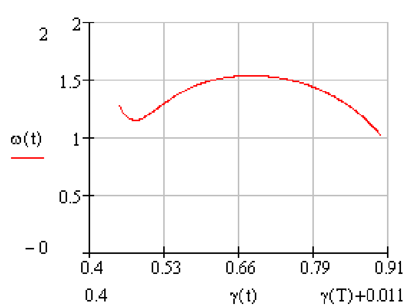
ნახ. 4-ზე ნაჩვენებია მართვის პროცესის დინამიკური მახასიათებლები თანაბარი ბრუნვის უბანზე:



ა)



ბ)

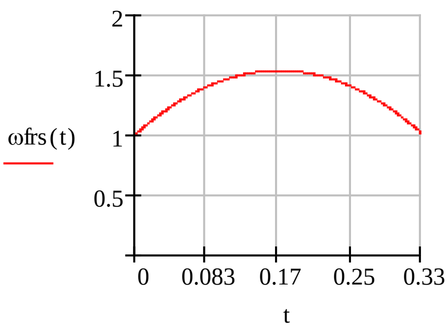


გ)

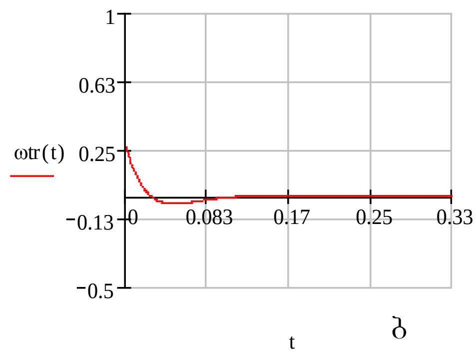
ნახაზი 4. თანაბარი ბრუნვის უბანი: ბრუნვის კუთხის დამოკიდებულება დროზე:

ა) იძულებითი შემადგენელი; ბ) გარდამავალი შემადგენელი;

გ) ფაზური ტრაექტორია.



ა



ბ

ნახაზი 5. თანაბარი ბრუნვის უბანი: კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულება დროზე:

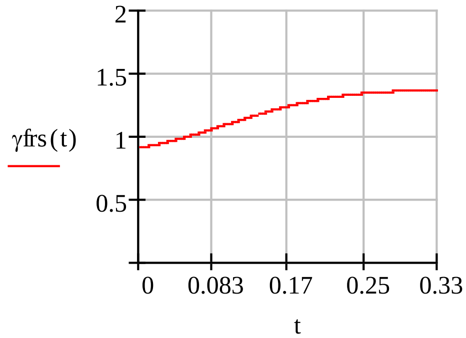
ა) იძულებითი შემადგენელი; ბ) გარდამავალი შემადგენელი;

კიდევ ერთხელ კარგად ჩანს, რომ მართვა კარგად ამუშავებს მო-ის სასაზღვრო პირობებს მართვის პერიოდის ბოლოში T=0.33 წმ. ნამდვილად გააჩნია მოცემული კუთხური კოორდინატი $\gamma_f = 0.904$ და სიჩქარე $\dot{\gamma}_f = 1$. ადგილი აქვს გარდამავალ პროცესს, თუ ა) გარდამავალი შემადგენელი კუთხური კოორდინატის ფუნქციისთვის უმნიშვნელოა (ნახ. 3გ) მაშინ, როდესაც მისი სიჩქარის ფუნქცია (ნახ. 5ბ) შედარებადია იძულებითთან (ნახ. 5ა).

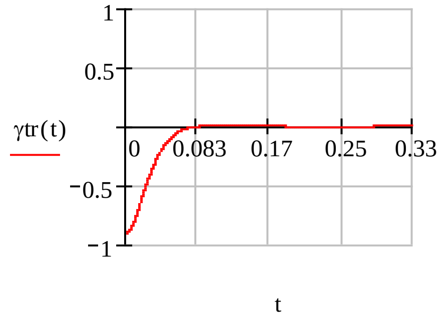
სრული გაჩერებით დასრულებული დამუხრუჭების პროცესი ითხოვს ხუთი პირობის მქონე ამოცანის გამოყენებას, რადგან ცხადია, რომ ბრუნვის ბოლოში აჩქარება ნულის ტოლი უნდა იყოს. ნათქვამის გათვალისწინებით, სასაზღვრო პირობები შემდეგ სახეს იღებს

t=0; $\gamma = 0.904$; $\dot{\gamma} = 1$,

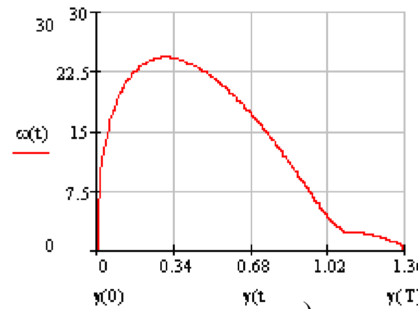
t=T; $\gamma = 1.355$; $\dot{\gamma} = 0$; $\ddot{\gamma} = 0$.



ა)



ბ)



გ)

ნახაზი 6. დამუხრუჭების უბანი (გარდამავალი პროცესის არსებობა): ბრუნვის კუთხის სიდიდის დამოკიდებულება დროზე: ა) იძულებითი მდგენელი;

ბ) გარდამავალი მდგენელი; გ) ფაზური ტრაექტორია.

ნახ.6-ზე მოყვანილია დინამიკური მახასიათებლები, როდესაც $\gamma_{10} = \gamma_0 = 0$ и $\dot{\gamma}_{10} = \dot{\gamma}_0 = 0$. ამ შემთხვევაში წარმოიქმნება გარდამავალი პროცესი. წინა უბნებისგან განსხვავებით, ამ შემთხვევაში გარდამავალი პროცესების ინტენსივობა სავსებით შედარებადია დამყარებულებთან, თუმცა კი ისინი სწრაფად მიილევა. ცხადია, რომ სწორედ გარდამავალი პროცესების ინტენსივობით აიხსნება კუთხური გადაადგილების დამყარებულ და სრულ ფუნქციათა შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებები. ამის მიუხედავად, მართვა მაინც კარგად ამუშავებს სასაზღვრო პირობებს.

შედეგები

2. სივრცითი მოძრაობების მართვის არსებითად სამგანზომილებიანი ამოცანა იქნა დაყვანილი ერთგანზომილებიანზე
8. ბრუნვების აღსაწერად პირველად გამოყენებულია მათი სპინორული წარმოდგენა. მიღებულია მარტივი გამოსახულებები მმართველი ორთოგონალური მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად ბრუნვის ცენტრის, საწყისისა და საბოლოო წერტილების კოორდინატების მიხედვით;
9. მიღებულია მმართველი ეილერის კუთხეების გამოსათვლელი მარტივი საინჟინრო ფორმულები;
10. შემუშავებულია ტერმინალური მართვის ზოგადი ვარიაციული პრინციპის დასაბუთება
11. შემუშავებულია სივრცითი ბრუნვების მოძრაობის მართვის ტერმინალური ამოცანების გადაწყვეტის ზოგადი ვარიაციული მეთოდი;
12. შემუშავებულია მარტივი ადაპტიური ალგორითმები ტერმინალური მართვის სხვადასხვა კერძო ამოცანების (გაქანების, დაყვანის და დაახლოების) გადასაწყვეტად
13. შემუშავებულია ადაპტიური ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფა Matcad სისტემის გამოყენებით

დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია შემდეგი ნაშრომები:

1. A. Milnikov, V. Rodonaia. Solution of Inverse Kinematic Problem by means of Spinor Representation of Spatial Rotation Group // Intellectual , 2011, #17, pp.101-105
2. A. Milnikov, V. Rodonaia. Determination of kinematic control functions for spatial rotations // Georgian Engineering News,2011, #2, pp. 26-29
3. V. Rodonaia. Spinor Representation of Spatial Rotation Group for Rigid Bodies // International Black Sea University Scientific Journal, 2012, Vol. ……………