ТБИЛИССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. АКАД. И.Н.ВЕКУА

На правах рукописи

РОГАВА Джемали Леонтьевич

УДК 519.633

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СХЕМ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

Специальность 01.01.07 - вычислительная математика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физико-математических

наук Д.Г.ГОРДЕЗИАНИ,

старший научный сотрудник,

кандидат физико-математических

наук Т.С.ВАШАКМАДЗЕ

Тбилиси-1984

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что различные краевые задачи для эволюционных уравнений с частными производными могут быть сведены к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве с неограниченным оператором. Одним из методов решения этих задач является метод полудискретизации (так называют метод, основанный на дискретизации производной по временной переменной). В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных методу полудискретизации (прямых). С обзором этих работ по состоянию на 1965 год можно ознакомиться в статье [23]. Вопросы, связанные с приближенным решением эволюционных задач, рассматриваются в учебниках и монографиях С.К.Годунова, и В.С.Рябенького [8], О.А.Ладыженской [19], Г.И.Марчука [28], Ш.Е.Микеладзе [31], С.Г.Михлина [33], Рихтмайера и Мортона [39], В.С.Рябенького и А.Ф.Филиппова [44], А.А.Самарского [45], Н.Н.Яненко [54], а также в трудах [6, 9, 10, 13, 18, 20, 26, 49, 50, 55-59, 73, 74], которые наиболее близки по содержанию к нашей работе.

Метод полудискретизации обладает тем преимуществом, что получаемую при этом систему можно решить, например, методом конечных разностей, осуществляя последующую дискретизацию производных по пространственным переменным, или применить другие методы (в том числе аналитические), которые реализуемы на ЭВМ. Среди таких методов отметим проекционно-сеточные, вариационные и метод конечных элементов (см.[15, 29, 33, 52]).

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию устойчивости и сходимости в гильбертовом пространстве трехслойных полудискретных схем для эволюционных задач на основе полиномов Чебышева от двух переменных. Кроме того рассматривается применение этих полиномов для исследования трехслойных операторно-разностных и итерационных схем.

Вопросами применения ортогональных полиномов в дискретных и непрерывных задачах занимались многие авторы (см. монографию Ф.Аткинсона [2] с обширной библиографией). В этом направлении отметим труды [4, 5, 25, 27, 34, 38, 64, 71].

Недавно в русском переводе вышла книга [37] о полиномах и рядах Чебышева, где наряду с другими вопросами рассматривается применение этих полиномов в дифференциальных уравнениях.

Суть данной работы заключается в том, что исследование устойчивости трехслойных разностных схем с самосопряженными, перестановочными операторными коэффициентами сводится к оценке полиномов Чебышева от двух переменных, определяемых трехчленным рекуррентным соотношением:

$$U_{k+1}(x,y) = xU_k(x,y) - yU_{k-1}(x,y),$$

$$U_0(x,y) \equiv 1, \quad U_1(x,y) = x.$$

Как нам известно, этот факт остался незамеченным, хотя полиномы Чебышева широко применяются для ускорения сходимости итерационных процессов (см. учебники и монографии Н.С.Бахвалова [3], Г.И.Марчука и Ю.А.Кузнецова [30], А.А.Самарского и Е.С.Николаева [47] и работы [21, 61, 62, 66, 67]).

Многие работы посвящены обобщению полиномов Чебышева. Например, в [60, 68, 70, 72] рассматриваются полиномы Чебышева от двух и более переменных. Они связаны четырехчленным рекуррентным соотношением. В связи с этим их применение для исследования четырехслойных схем кажется более естественным, чем для трехслойных.

Отметим, что при дискретизации эволюционных задач по t получаются полудискретные схемы с неограниченными операторными коэффициентами, действующими в бесконечномерном пространстве. Поэтому получение таких априорных оценок для этих схем (особенно для многослойных), которые обеспечили бы сходимость приближенного решения к точному в естественных классах, сопряжено с трудностями.

Предложенный в работе подход позволяет (например, в случае задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения $u''(t)+Au(t)=f(t)$) получить априорные оценки в норме L_2 не только для u_k и $\Delta u_k/\tau$ (u_k - приближенное решение, $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, τ - шаг по времени), но и для величин $A^{1/2}u_k$, Au_k , $A^{1/2}(\Delta u_k/\tau)$ и $\Delta^2 u_k/\tau^2$.

Переходим к изложению содержания работы. Она состоит из трех глав и приложения.

В первой главе излагаются результаты исследования полиномов $U_k(x,y)$.

В § I показано, что нули полинома $U_k(x, ax+b)$, $b>0$ являются вещественными, простыми и расположены внутри промежутка $]\alpha,\beta[$, где α и β - абсциссы точки пересечения прямой $y = ax + b$ с параболой $y = 0,25x^2$. При этом, между двумя соседними нулями полинома U_k лежит один и только один нуль полинома U_{k+1} . Доказательство этого утверждения опирается на формулу

$$U_k^2(x,y) = y^k + U_{k-1}(x,y)U_{k+1}(x,y).$$

Следующий результат заключается в том, что если G - открытая область, а ∂G - ее граница, то $U_k(x,y)$ достигает своего экстремума на ∂G

В § 2 приводятся оценки для $U_k(x,y)$ в разных подобластях треугольника

$$\Delta = \{(x,y) \,|\, |y| < 1 \wedge |x| < y+1\}.$$

Среди них выделим следующие:

$$|U_k(x,y)| \leq \begin{cases} 4q^k/\varepsilon_0, \ (x,y) \in \Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}, & (0.1) \\ c_1 q^k/(3-\lambda), \ (x,y) \in \Lambda_{\lambda,\varepsilon}, & (0.2) \end{cases}$$

где

$$\varepsilon_0 > 0, \ \varepsilon_1 \geq 0, \ 1 \leq \lambda < 3, \ c_1 = 64(5+\lambda)^{-1}, \ q^4 = 1 - \varepsilon, \ \varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1),$$

$\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$ - замкнутый равнобедренный треугольник, который расположен внутри Δ таким образом, что основание его находится на расстоянии ε_0 от основания Δ, а боковые стороны - на расстоянии ε_1 от соответствующих боковых сторон Δ;

$$\Lambda_{\lambda,\varepsilon} = \{(x,y) \in \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} \,|\, |x| \leq \lambda - y\}.$$

В § 3 рассматривается аналогичный вопрос для полиномов $U_n - y^k U_{n-1}$, $k = 0,1$. Здесь основным результатом является оценка вида:

$$|U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y)| \leq c_2 q^{n-1+k}/(3-\lambda), \quad (0.3)$$

$$(x,y) \in \Delta_\lambda \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon},$$

$$\Delta_\lambda = \{(x,y) \in \Delta \,|\, y - x \leq \lambda\}.$$

В § 4 рассматривается общее трехточечное рекуррентное соотношение

$$u_{k+1} = \alpha_k(x) u_k - \beta_k(y) u_{k-1} + g_k, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где u_0, u_1, g_k - заданные элементы некоторого линейного пространства, $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(y)$ - скаляры и связанные с ним полиномы. С помощью этих полиномов строится формула для представления u_k через u_0 , u_1 и g_1, g_2, g_{k-1} . С точки зрения приложений интересен частный случай этой формулы, когда $\alpha_k(x) = x$ и $\beta_k(y) = y$:

$$u_{k+1} = U_k(x,y)u_1 - yU_{k-1}(x,y)u_0 + \sum_{i=1}^{k} U_{k-i}(x,y)g_i \,.$$

Отсюда непосредственно следует

Лемма 0.I. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$u_{k+1} = Lu_k - Su_{k-1} + g_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{0.4}$$

где L и S - линейные коммутирующие операторы, действующие в линейном пространстве X ; u_0 , u_1 и g_k - заданные элементы этого же пространства. Тогда для $\forall n$ справедлива формула

$$u_{k+1} = U_k(L,S)u_1 - SU_{k-1}(L,S)u_0 + \sum_{i=1}^{k} U_{k-i}(L,S)g_i \,. \tag{0.5}$$

В данной работе формула (0.5) является основным соотношением. Именно она позволяет свести исследование устойчивости трехслойных схем к оценке полиномов $U_k(x,y)$.

<u>Вторая глава</u> посвящена применению полиномов Чебышева для исследования трехслойных операторно-разностных схем, которые в некоторых случаях можно трактовать как итерационные алгоритмы.

Параграф 5 имеет вспомогательный для всего дальнейшего изложения характер. Ради удобства здесь сформулированы в виде

теорем некоторые известные свойства замкнутых и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Приводятся доказательства тех результатов, которые не встречаются в известных нам учебниках по функциональному анализу.

Пункты I и 2 § 6 посвящены исследованию схемы (0.4), когда

$$g_i=\tau^m f_i\,,\quad \tau>0,\quad m=1,2,\quad i=1,2,\dots,$$

$$L_\tau=P(K_\tau,N_\tau),\qquad S_\tau=Q(K_\tau,N_\tau).$$

Здесь P и Q – полиномы от двух переменных с вещественными коэффициентами; $K_\tau: H\to H$ и $N_\tau: H\to H$ – симметричные, перестановочные, ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H; u_0, u_1 и f_i – заданные элементы этого же пространства.

Введем множество

$$G_\tau=\{(x,y)\in E_2\,|\,x=P(\xi,\eta),\ y=Q(\xi,\eta),$$
$$(\xi,\eta)\in Sp(K_\tau)\times Sp(N_\tau)\},$$

где $Sp(K_\tau)$ и $Sp(N_\tau)$ – соответственно спектры операторов K_τ и N_τ; E_2 – двумерное евклидово пространство. Обозначим через $d_\tau^{+(-)}$ расстояние между множествами G_τ и $\Gamma^{+(-)}$, где Γ^+ – основание треугольника Δ, а Γ^- – объединение его боковых сторон. Везде в дальнейшем $\|\cdot\|$ – обозначает норму в H.

Справедлива следующая

Теорема 0.I. Пусть существуют постоянные $\tau_0>0$, $1\le\lambda<3$ и $C_0>0$ такие, что $G_\tau\subset\Delta_\lambda$, $d_\tau^+\ge C_0\tau$ и $d_\tau^-\ge C_0\tau^2$ для любого τ из $]0,\tau_0]$. Тогда для u_k при $m=1$ справедливы оценки:

$$\| u_{k+1} \| \leqslant \frac{1}{C_0} \left[\rho_\tau^k \left(C_0 a(\lambda) \| u_0 \| + 4 \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| \right) + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right], \tag{0.6}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant a(\lambda) \left[\rho_\tau^k \left(\frac{2}{\tau} \| u_0 \| + \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| \right) + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right], \tag{0.7}$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

где $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, $\rho_\tau^4 = 1 - C_0 \tau^2$, $a(\lambda) = C_2 (3-\lambda)^{-1}$.

Заметим, что если $m = 1$, $G_\tau \subset \Lambda_{\lambda,0}$ и $d_\tau^- \geqslant C_0 \tau$, то в силу оценки (0.2) справедливо неравенство

$$\| u_{k+1} \| \leqslant a(\lambda) \left[(1 - C_0 \tau)^{\frac{k}{4}} (\| u_0 \| + \| u_1 \|) + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right].$$

Доказательство теоремы 0.I опирается на формулу (0.5) и оценки (0.2) и (0.3).

В пункте 3 § 6 для уравнения $u = Au + f$, $A^* = A$ рассматривается трехслойная итерационная схема следующего вида

$$u_{k+1} = (A + \alpha I) u_k - \alpha u_{k-1} + f. \tag{0.8}$$

Доказывается, что условие

$$\Delta \supset G = \{ (x, y) \mid x = t + \alpha, \quad y = \alpha, \quad t \in Sp(A) \}.$$

является достаточным, а при $\dim(H) < \infty$ – и необходимым для сходимости итерационного процесса (0.8).

Аналогичный результат справедлив и для итерационной схемы
$u_{k+1} = (I + Q(A) - AP(A)) u_k - Q(A) u_{k+1} + P(A) f$, $P(t) > 0$, $t \in Sp(A)$,

решения уравнения $Au=f$ при $A^*=A$.

В § 7 с помощью полиномов Чебышева исследуются трехслойные операторно-разностные схемы, записанные в каноническом виде (см. [12, 45, 46]), а также явные схемы, имеющие вид:

$$\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+Au_k=f_k, \qquad k=1,2,\dots, \tag{0.9}$$

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k=f_k, \quad k=1,2,\dots, \tag{0.10}$$

соответственно с кососимметричными и самосопряженными операторами при условии, что выполняется критерий устойчивости Самарского. Некоторые априорные оценки, получаемые для этих схем с помощью предложенного подхода, совпадают с известными оценками, полученными энергетическим методом А.А.Самарским и А.В.Гулиным (см. [12, 45, 46]).

Приведем те оценки, которые справедливы при выполнении необходимых условий устойчивости:

а) если в схеме (0.9) $\tau\,\|A\|\leq 1$, то

$$\|u_{k+1}\|\leq k\|u_0\|+(k+1)\|u_1\|+2\tau\sum_{i=1}^{k}(k+1-i)\|f_i\|,$$

б) если в схеме (0.10) $0\leq\tau A\leq 4I$, то

$$\|u_k\|\leq(2k-1)\|u_0\|+t_k\left\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\|+\tau\sum_{i=1}^{k}t_{k-i}\|f_i\|,$$

$$\left\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\right\|\leq t_k\|Au_0\|+(2k-1)\left\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\|+\tau\sum_{i=1}^{k}(2k+1-2i)\|f_i\|.$$

В третьей главе исследуется устойчивость и сходимость некоторых трехслойных полудискретных схем для эволюционных задач.

В § 8 рассматривается задача Коши

$$u''(t)+Au(t)=f(t),\quad t\in[0,T],\tag{0.11}$$

$$u(0)=\varphi_0\ ,\quad u'(0)=\varphi_1\ ,\tag{0.12}$$

в вещественном гильбертовом пространстве H. Здесь A – самосопряженный положительно определенный оператор; $f(t)$ – функция со значениями в H, $\varphi_0\in\mathcal{D}(A)$, $\varphi_1\in\mathcal{D}(A^{1/2})$.

Задаче (0.11), (0.12) ставится в соответствие следующая разностная задача

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+A\frac{u_{k+1}+\sigma u_k+u_{k-1}}{2+\sigma}=f_k\ ,$$

где $\sigma\neq-2$, $k=\overline{1,n-1}$, $\tau=T/n$, u_0, u_1 заданы.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 0.2. Пусть u_0, $u_1\in\mathcal{D}(A)$, $f_k\in H$, $k=\overline{1,n-1}$ и $\sigma\in]-2,2[$. Тогда справедливы оценки

$$\|u_{k+1}\|\leq c\Big(\|u_0\|+\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|A^{-\frac12}f_i\|\Big),$$

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\leq c\Big(\|A^{1/2}u_0\|+\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\Big),$$

$$\|A^{\frac{s}{2}}u_{k+1}\|\leq c\Big(\|A^{\frac{s}{2}}u_0\|+\Big\|A^{\frac{s-1}{2}}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+\tau\Big\|A^{\frac{s}{2}}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+$$

$$+\tau^{2-s}\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\Big),\ s=1,2,\ k=\overline{1,n-1},$$

$$\Big\|\frac{\Delta^2u_k}{\tau^2}\Big\|+\Big\|A^{\frac12}\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\|\leq c\Big(\|Au_0\|+\Big\|A^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\|f_i-f_{i-1}\|),\quad k=\overline{1,n-2},\quad c=\mathrm{const}>0.$$

Отсюда для погрешности $z_k = u(t_k)-u_k$ следует

Теорема 0.3. Пусть $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$, $\varphi_0, \varphi_1\in D(A)$, $f_k=f(t_k)$, $k=\overline{1,n-1}$ и $u(t)\in C(W^2)$. Тогда

а) если $f(t)\in C^1(H)$ и $u(t)\in C^3(H)$, то

$$\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|A^{1/2}z_{k+1}\|\leqslant c\tau$$

и

$$\|u(t)-\tilde S_\tau(t)\|+\|u'(t)-\tilde S_\tau'(t)\|\leqslant c\tau,$$

где $S_\tau(t)$ - кубический сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$S_\tau(t_k)=u_k,\quad S_\tau'(t_k)=\Delta u_k/\tau;$$

б) если $f(t)\in C^2(H)$ и $u(t)\in C^{3-i}(W^i)\cap C^4(H)$, то

$$\left\|A^{1/2}\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\left\|\frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2}\right\|\leqslant c\tau \quad \text{при} \quad i=1$$

и

$$\|Au_k\|\leqslant c\tau \qquad \text{при} \quad i=2.$$

Здесь $C(H)$ - множество непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в H; $C^m(H)$, $m\geqslant 1$ - множество функций $u(t)$ из $C(H)$, непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ до порядка m включительно. Аналогично определяются $C(W^i)$ и

$C^m(W^i)$, $i=1,2$, где W^1 и W^2 гильбертовы пространства, получаемые соответственно после введения норм $\|u\|_1=\|A^{1/2}u\|$ в $D(A^{1/2})$ и $\|u\|_2=\|Au\|$ в $D(A)$.

Доказывается, что в классе более гладких начальных данных и решения для величин, фигурирующих в теореме 0.6, справедливы оценки порядка $O(\tau^2)$.

В § 9 рассматривается задача Коши для полного уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве H:

$$u''(t)+Bu'(t)+Au(t)=f(t), \quad t\in[0,T], \tag{0.13}$$

$$u(0)=\varphi_0, \quad u'(0)=\varphi_1. \tag{0.14}$$

Здесь A и B неограниченные, самосопряженные, положительно определенные операторы в H с областями определения $D(A)$ и $D(B)$, $f(t)$ - функция со значениями в $H, \varphi_0, \varphi_1, \in D(B)$.

Задаче (0.13), (0.14) ставится в соответствие следующая разностная задача:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+B\left[(1+\theta\,\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}-\theta\,\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}\right]+$$

$$+A\left[\sigma_1 u_{k+1}+(1-\sigma_1-\sigma_2)u_k+\sigma_2 u_{k-1}\right]=f_k, \tag{0.15}$$

$$u_0=\varphi_0, \quad u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1, \quad k=\overline{1,n-1}, \tag{0.16}$$

где $\tau=T/n$, $f_k=f(k,\tau)$, θ , σ_1 и σ_2 - вещественные числа.

Теорема 0.4. Пусть $\theta=0$, $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0$, $D(A)\subset D(B)$ и $A^{-1}Bx=BA^{-1}x$, $x\in D(A)$. Тогда существуют постоянные $\tau_0>0$ $1\leq\lambda<3$ и $C_0>0$ такие, что при $0<\tau\leq\tau_0$ для решения задачи (0.15), (0.16) справедливы оценки (0.6) и (0.7). Если $\varphi_0\in D(A)$, то

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq c\rho_\tau^k \left(\| A u_0 \| + \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right), \qquad (0.17)$$

где $\rho_\tau^4 = 1 - c_0\tau^2$, $c = const > 0$.

Теорема 0.5. Пусть выполняются условия теоремы 0.4 и задача (0.I5), (0.I6) имеет такое трижды непрерывно дифференцируемое решение $u(t)$, что $u''(t) \in D(B)$ при любом t из $[0,T]$ и функция $Bu''(t)$ непрерывна. Предположим, кроме того, что $f(t)$ непрерывно дифференцируема. Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедлива оценка

$$\| z_{k+1} \| + \left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \leq c\tau, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Если $D(A) = D(B)$, то аналогичные теоремы справедливы для задачи (0.I5), (0.I6) при следующих значениях параметров: (I) $\theta = -0{,}5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ (2) $\theta = \sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

В первом случае в оценках (0.6), (0.7) и (0.I7) - ρ_τ следует заменить на $e^{c\tau}$. Относительно погрешности заметим, что если

$$u(t) \in C^4(H) \cap C^3(W^2), \quad u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \tau^2\varphi_2,$$

$$\varphi_2 = 0{,}5\,(f(0) - A\varphi_0 - B\varphi_1),$$

то

$$\| z_{k+1} \| + \left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \leq c\tau^2.$$

Во втором случае схема (0.I5) по точности апроксимаций уступает предыдущей схеме, однако константы в оценках типа (0.6), (0.7) и (0.I7) не зависят от $t_к$.

В § I0 для параболического уравнения рассматриваются некоторые трехслойные полудискретные схемы. С помощью предложенного подхода доказывается их устойчивость и сходимость.

Приложение посвящается численной реализации следующих стационарных задач:

I. Расчет сферической оболочки по теории Векуа [75];

2. Расчет прямоугольных плит, когда на параллельных гранях задан вектор внешнего напряжения, а остальная часть границы закреплена.

Эти задачи решаются вариационно-дискретным методом, развитым в работе [4]. Получаемая при этом алгебраическая система решается рассмотренным в диссертации итерационным методом. Соответствующие программы составлены на языке ФОРТРАН и являются программными модулями (ПМ), созданного в ИПМ ТГУ пакета прикладных программ расчета пространственных сооружений (РАПСО) (см. [35], стр. 35-40, 67-78; [36], стр. 4-35).

Пакет был принят Государственной комиссией ГКНТ СССР I3 января I979 г., включен в ФАП ГССР в декабре I978 г.(Гос. регистр. № 0I50).

Следует отметить, что ПМ независимы и работают в широком диапазоне входных параметров. В связи с этим не представляет особого труда создание на основе этих ПМ программы расчета нестационарных задач теории упругости методом полудискретизации.

Диссертационная работа выполнена в отделе проекционных методов Института прикладной математики им. И.Н.Векуа. В нее включены соответствующие разработки, предусмотренные планом научно-исследовательских работ на I976-I982 гг. по следующим темам:

I. Разработка и внедрение методов расчета пространственных конструкций с применением ЭВМ. Подтема: Проекционные методы расчета пространственных конструкций. Шифр 76/3.3. Выполнялась по Нархозплану ГССР на 1976-1980 гг.

2. Создать и ввести в эксплуатацию пакет прикладных программ для расчета на ЭВМ ЕС однородных и неоднородных элементов и конструкций пространственных сооружений. Гос. регистр. № 0.80.I4.09.20. Выполнялась в 1976-1978 гг. в соответствии с постановлением ГКНТ СМ СССР от I2.У.1976 г. № I75.

3. Проекционные методы решения задач механики сплошной среды на ЭВМ. Гос. регистр. № 80077I23, шифр 8I/9. Выполняется с 198I г. по пятилетнему плану ИПМ ТГУ.

Основные результаты диссертационной работы докладывались на научно-исследовательских семинарах Института прикладной математики им. акад. И.Н.Векуа Тбилисского государственного университета (I975-I984 гг.), на совещании Проблемной комиссии многостороннего научного сотрудничества академий наук социалистических стран: Научные основы механики машин, конструкций и технологических процессов (Фрунзе, май, I982 г.), на республиканской конференции по пространственным задачам математической теории упругости, граничным задачам теории функций и сингулярным интегральным уравнениям (Тбилиси, ноябрь, I983 г.).

Они опубликованы в работах [35, 36, 40-43].

ГЛАВА I. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ I. Определение и основные свойства

Определим полиномы $U_n(x,y)$ с помощью рекуррентного соотношения

$$U_{n+1}(x,y) = xU_n(x,y) - yU_{n-1}(x,y),$$
$$U_0(x,y) \equiv 1, \quad U_1(x,y) = x; \quad (x,y) \in E_2, \tag{I.I}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; E_2 – двумерное евклидово пространство. Полиномы $U_n(x,y)$ мы назовем полиномами Чебышева второго рода от двух переменных, т.к. при $y=1$ $U_n(x,y)$ совпадает с полиномами Чебышева второго рода на отрезке $[-2,2]$.

Те известные формулы и оценки, которыми будем пользоваться в дальнейшем, взяты из книги [48]

Введем множества:

$$\Delta = \{(x,y) \in E_2 \mid |y| < 1 \wedge |x| < y+1\},$$

$$\Delta^+ = \{(x,y) \in \Delta \mid x \geq 0\}, \quad \Delta^- = \{(x,y) \in \Delta \mid x \leq 0\},$$

$$\Omega^+ = \{(x,y) \in E_2 \mid 4y - x^2 > 0\},$$

$$\Omega^- = \{(x,y) \in E_2 \mid 4y - x^2 < 0\},$$

$$\Gamma^+ = \partial\Delta \cap \bar{\Omega}^+, \quad \Gamma^- = \partial\Delta \cap \bar{\Omega}^-,$$

$$\Omega_1 = \bar{\Omega}^+ \cap \Delta^+, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}^- \cap \Delta^+,$$

$$\Omega_2^+=\{(x,y)\in\Omega_2 \mid y\geq 0\},\quad \Omega_2^-=\{(x,y)\in\Omega_2 \mid y\leq 0\},$$

$$\Omega_0=\{(x,y)\in\bar{\Omega}^- \mid x\geq 0 \wedge y\geq 0\},$$

$$\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}=\{(x,y)\in\Delta \mid d((x,y);\ \Gamma^+)\geq\varepsilon_0\wedge d((x,y);\Gamma^-)\geq\varepsilon_1\},$$

$$\Delta_\lambda^-=\{(x,y)\in\bar{\Delta}^- \mid x-y+\lambda\geq 0\},$$

$$\Delta_\lambda^+=\{(x,y)\in\bar{\Delta}^+ \mid x+y-\lambda\leq 0\},$$

$$\Delta_\lambda=\{(x,y)\in\Delta \mid x-y+\lambda\geq 0\},$$

$$\Lambda_{\lambda,\varepsilon}=(\Delta_\lambda^+\cup\Delta_\lambda^-)\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon},$$

$$\Omega_{\lambda,\varepsilon}=\bar{\Delta}_\lambda\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon},$$

$$\Delta_*(a)=\{(x,y)\in\bar{\Delta} \mid |x|\leq a(1+y),\ 0\leq a<1\},$$

$$\Gamma_\varepsilon^+=\partial\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}\cap\bar{\Omega}^+,\quad \Gamma_\varepsilon^-=\partial\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}\cap\bar{\Omega}^-.$$

Здесь ε, ε_0 , ε_1 , λ – действительные числа; $\partial\Delta$ – граница множества Δ ; $\bar{\Omega}^{+(-)}$ – замыкание множества $\Omega^{+(-)}$,

$d((x,y);\ \Gamma^{+(-)})$ - расстояние от точки (x,y) до множества $\Gamma^{+(-)}$.

ЛЕММА I.I. Справедливы формулы:

$$U_n(x,y)=\sqrt{|y|^n}\,U_n\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}},\ \mathrm{sign}(y)\right),\quad (y\neq 0),\qquad (I.2)$$

$$y^k U_{n-k}(x,y)=U_k(x,y)U_n(x,y)-U_{k-1}(x,y)U_{n+1}(x,y),\qquad (I.3)$$

$$U_n(x,1)=\sum_{i=0}^{n} C_{n+i+1}^{2i+1}(x-2)^i,\qquad (I.4)$$

где $n=0,1,\ldots,\ k=\overline{0,n}$, C_{n+i+1}^{2i+1} - биномиальный коэффициент.

Формулы (I.2) и (I.3) легко доказываются методом математической индукции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (I.2). При $n=0,1$ справедливость формулы (I.2) очевидна. Пусть формула (I.2) справедлива при $n=0,1,\ldots,k-1\ (k>2)$ и докажем ее справедливость при $n=k$

$$U_k(x,y)=xU_{k-1}(x,y)-yU_{k-2}(x,y)=$$

$$=x\sqrt{|y|^{k-1}}\,U_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}},\ \mathrm{sign}(y)\right)-$$

$$-|y|\,\mathrm{sign}(y)\cdot\sqrt{|y|^{k-2}}\,U_{k-2}\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}},\ \mathrm{sign}(y)\right)=$$

$$=\sqrt{|y|^k}\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}}\,U_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}},\ \mathrm{sign}(y)\right)-\right.$$

$$- \operatorname{sign}(y) U_{k-2}\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}}, \operatorname{sign}(y)\right)\Big) = \sqrt{|y|}^{k} U_k\left(\frac{x}{\sqrt{|y|}}, \operatorname{sign}(y)\right).$$

Формула (I.2) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (I.3). При $k = 0,1$ справедливость формулы (I.3) очевидна. Пусть формула (I.3) справедлива при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ $(m > 2)$ и докажем ее справедливость при $k = m$. Для краткости вместо $U_n(x, y)$ будем писать U_n.

$$y^m U_{n-m} = y^{m-1}(y U_{n-m}) = y^{m-1}(x U_{n-m+1} -$$

$$- U_{n-m+2}) = x(y^{m-1} U_{n-(m-1)}) - y(y^{m-2} U_{n-(m-2)}) =$$

$$= x(U_{m-1} U_n - U_{m-2} U_{n+1}) - y(U_{m-2} U_n -$$

$$- U_{m-3} U_{n+1}) = (x U_{m-1} - y U_{m-2}) U_n -$$

$$- (x U_{m-2} - y U_{m-3}) U_{n+1} = U_m U_n - U_{m-1} U_{n+1}.$$

Формула (I.3) доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (I.4). Проводя разложение для $U_n(x,1)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 2$, получим

$$U_n(x,1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{U_n^{(i)}(2,1)}{i!}(x-2)^i.$$

Отсюда, после подстановки

$$U_n^{(i)}(2,1) = i!\, C_{n+i+1}^{2i+1}, \tag{I.5}$$

получим формулу (I.4).

ЗАМЕЧАНИЕ I.I. Формула (I.5) легко доказывается по индукции с применением известной формулы (см. [48])

$$U_n'(x,1) - U_{n-2}'(x,1) = n U_{n-1}(x,1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. При $k = n$ из (I.3) следует важная формула

$$U_n^2(x,y) = y^n + U_{n-1}(x,y)\, U_{n+1}(x,y). \tag{I.6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. Из формул (I.I) и (I.6) следует, что $U_{n-1}(x,1)$ и $U_{n+1}(x,1)$ удовлетворяют уравнению

$$z^2 - x U_n(x,1) z + U_n^2(x,1) - 1 = 0.$$

Из неотрицательности его дискриминанта следует известная (см. [48] , стр. I79) оценка

$$|U_n(x,1)| \leq \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{при} \quad x \in]-2, 2[. \tag{I.7}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.4. Пусть $(x,y) \in \Omega^+$, тогда справедливы неравенства:

$$|U_n(x,y)| \leq 2\sqrt{\frac{y^{n+1}}{4y - x^2}}, \tag{I.8}$$

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant (n+1)\sqrt{y^n}. \qquad (I.9)$$

Обе оценки следуют из формулы (I.2): Оценка (I.8) - с учетом (I.7), а оценка (I.9) - с учетом известной оценки $\left|U_n(x,1)\right| \leqslant$ $\leqslant n+1$ (см.[48] , стр. I78).

ЗАМЕЧАНИЕ I.5. Из формул (I.2) и (I.4) следует, что полиномы $U_n(x,y)$ - возрастающие относительно x при фиксированном y , когда $x \geqslant (1+\operatorname{sign}(y))\sqrt{|y|}$.

Отсюда и из формулы

$$U_n(-x,y) = (-1)^n U_n(x,y)$$

следует, что

$$\left|U_n(x,y)\right| \geqslant U_n(1+y,y) = 1+y+\dots+y^n, \qquad (I.10)$$

при $y \geqslant -1$ и $|x| \geqslant 1+y$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.6. Согласно первой части замечания (I.5) и оценки (I.9) справедливо неравенство

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant U_n(1+y,y) = 1+y+\dots+y^n, \qquad (I.11)$$

при $y \geqslant -1$ и $|x| \leqslant 1+y$.

Отсюда следует оценка

$$\left|U_n(x,y)\right| < \frac{1}{\varepsilon}, \quad (x,y) \in \Delta_{\varepsilon,0}, \; 0 < \varepsilon \leqslant 1. \qquad (I.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.7. Из формул (I.4) и (I.2) следует формула

$$U_n(x,y)-\sqrt{y}\,U_{n-1}(x,y)=\sqrt{y^n}\sum_{i=0}^{n} C_{n+i}^{2i}(z-2)^i, \qquad (I.13)$$

где $z=x/\sqrt{y}$, $y>0$, C_{n+i}^{2i} - биномиальный коэффициент, $C_n^0=1$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.8. Справедлива формула

$$U_n(x,y)=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, \qquad (x,y)\in\Omega^-, \qquad (I.14)$$

где

$$a=a(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-4y}\right),$$

$$b=b(x,y)=ya^{-1}(x,y).$$

Формула (I.I4) доказывается по индукции с учетом формул:

$$a^{n+1}=xa^n-ya^{n-1}, \qquad b^{n+1}=xb^n-yb^{n-1}.$$

Отметим, что для производных справедливы формулы:

$$\frac{\partial U_{n+1}}{\partial x}-y\frac{\partial U_{n-1}}{\partial x}=(n+1)U_n, \qquad (I.15)$$

$$\frac{\partial U_{n+1}}{\partial y}-y\frac{\partial U_{n-1}}{\partial y}=-(n+1)U_n. \qquad (I.16)$$

Эти формулы также доказываются по индукции.

ТЕОРЕМА I.I. Нули полинома $U_n(x, ax+b)$, где $a\in]-\infty,+\infty[$ и $b\in]0, +\infty[$ являются вещественными и простыми и расположены внутри промежутка (α, β), где

$$\alpha = 2\left(a - \sqrt{a^2+b}\right), \quad \beta = 2\left(a + \sqrt{a^2+b}\right).$$

При этом, между двумя нулями полинома $U_n(x, ax+b)$ лежит один и только один нуль полинома $U_{n+1}(x, ax+b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается методом индукции с помощью формулы (I.6). При $n = 1,2$ справедливость теоремы очевидна. Пусть $x_1 < x_2 < \dots < x_n (n \geq 2)$ - нули полинома $U_n(x, ax+b)$, а $\xi_1 < \xi_2 < \dots \xi_{n-1}$ - нули полинома $U_{n-1}(x, ax+b)$, тогда в силу индукции выполняются неравенства: $x_i < \xi_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$.
Из (I.6) следует

$$\overset{i}{u}_{n+1} \overset{i}{u}_{n-1} = -(ax_i + b)^n, \quad \overset{i}{u}_n = U_n(x_i, ax_i + b).$$

Отсюда получаем

$$\overset{i}{u}_{n+1} \overset{i}{u}_{n-1} < 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{I.I7}$$

так как

$$0 < \left(\sqrt{a^2+b} - |a|\right)^2 < ax_i + b < \left(\sqrt{a^2+b} + |a|\right)^2,$$

при $\alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \beta$. Теперь из (I.I7) следует, что

$$\overset{i}{u}_{n+1} \overset{i+1}{u}_{n+1} \overset{i}{u}_{n-1} \overset{i+1}{u}_{n-1} > 0. \tag{I.I8}$$

Поскольку в промежутке $]x_i, x_{i+1}[$ лежит один и только один нуль полинома $U_{n-1}(x, ax+b)$, то $u^i_{n-1}\, u^{i+1}_{n-1} < 0$. Тогда из (I.18) вытекает неравенство $u^i_{n+1}\, u^{i+1}_{n+1} < 0$. Это означает, что в промежутке $]x_i, x_{i+1}[$ лежит по крайней мере один нуль полинома $U_{n+1}(x, ax+b)$. В силу формулы (I.2) имеем

$$U_{n+1}(\alpha, a\alpha+b)\, U_{n-1}(\alpha, a\alpha+b) = n(n+2)\,|\alpha|^{2n} > 0.$$

Отсюда и из (I.17) при $i=1$ следует, что в промежутке $]\alpha, x_1[$ лежит по крайней мере один нуль полинома $U_{n+1}(x, ax+b)$, так как $U_{n-1}(x, ax+b) \neq 0$ при $x \in [\alpha, x_1]$. Точно так же доказывается, что в промежутке $]x_n, \beta[$ лежит по крайней мере один нуль полинома U_{n+1}. Окончательно получаем, что в каждом промежутке

$$]x_i, x_{i+1}[, \quad i = \overline{0,n}, \quad x_0 = \alpha, \quad x_{n+1} = \beta$$

лежит один и только один нуль полинома U_{n+1}, что и требовалось доказать.

ЛЕММА I.2. Пусть $(x,y) \in \Omega^-$. Тогда справедлива формула

$$|U_n(x,y)| = \frac{\rho^{n+1} - \eta^{n+1}}{\rho - \eta}, \qquad \text{(I.19)}$$

где
$$\rho = \rho(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x| + \sqrt{x^2 - 4y}\right),$$

$$\eta = y\,\rho^{-1}(x,y).$$

Сначала относительно функций $\rho(x,y)$ сделаем следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ I.9. Функция $\rho(x,y)$ в области Ω^- - возрастающая относительно $|x|$ при фиксированном y, поэтому

$$\rho(x,y) > \rho(\pm 2\sqrt{y}, y) = \sqrt{y} \qquad \text{при} \quad y \geq 0.$$

и

$$\rho(x,y) > \rho(0,y) = \sqrt{|y|} \qquad \text{при} \quad y<0$$

Отсюда следует, что

$$\rho(x,y) > \sqrt{|y|}, \quad (x,y)\in\Omega^-.$$

Из последнего неравенства непосредственно следует

$$\sqrt{|y|} > |y\rho^{-1}(x,y)| = |\eta(x,y)|, \quad y\neq 0.$$

При $y=0$ очевидно, что $\sqrt{|y|} = |\eta(x,y)|$.
Окончательно получаем неравенство

$$\rho(x,y) > \sqrt{|y|} \geq |\eta(x,y)|, \quad (x,y)\in\Omega^-. \qquad (I.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (I.I9). Формула (I.I9) следует из (I.I4) с учетом (I.20). При $x<0$ учитываем, что

$$a(x,y) = -\eta(x,y) \quad b(x,y) = -\rho(x,y).$$

ТЕОРЕМА I.2. Пусть G - открытая область, тогда $U_n(x,y)$ в $G \cup \partial G$ достигает своего экстремума на ∂G.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $U_n(x,y)$ достигает своего максимума в некоторой точке $(x_0, y_0)\in G$. Рассмотрим случай

$$\overset{\circ}{u}_n = U_n(x_0, y_0) \neq 0.$$

Отсюда следует, что $|x_0| + |y_0| \neq 0$. Возьмем точку (x_α, y_α), где $x_\alpha = \alpha x_0$, $y_\alpha = \alpha^2 y_0$. Так как G - открытое множество, то всегда можно подобрать такое α ($\alpha > 1$, если

$\overset{\circ}{u}_n > 0$ и $0 < \alpha < 1$, если $\overset{\circ}{u}_n < 0$), что $(x_\alpha, y_\alpha) \in G$. Из формулы (I.2) следует

$$U_n(x_\alpha, y_\alpha) = U_n(\alpha x_0, \alpha^2 y_0) = \alpha^n U_n(x_0, y_0),$$

в силу чего

$$U_n(x_\alpha, y_\alpha) > U_n(x_0, y_0),$$

что противоречит допущению.

Остается случай, когда

$$U_n(x_0, y_0) = 0. \tag{I.21}$$

Так как все корни уравнения

$$U_n(x, y_0) = 0.$$

простые, то из (I.21) следует, что $\exists\, \varepsilon > 0$, при котором

$$(x_0 \pm \varepsilon, y_0) \in G \quad \text{и} \quad U_n(x_0 + \varepsilon, y_0) > 0$$

или

$$U_n(x_0 - \varepsilon, y_0) > 0.$$

Это противоречит тому, что

$$\max U_n(x, y) = 0$$

Аналогично доказывается, что $U_n(x, y)$ достигает своего минимума на ∂G

§ 2. Оценки для полиномов $U_n(x,y)$

ТЕОРЕМА 2.I. Пусть $(x,y)\in\bar{\Omega}^-$ и $y\geq 0$. Тогда справедливы неравенства:

$$|U_n(x,y)|\leq \rho^n+\rho^{n-1}\sqrt{y}+\dots+\sqrt{y^n}, \tag{2.I}$$

$$|U_n(x,y)|\leq (n+1)\rho^n, \tag{2.2}$$

$$|U_n(x,y)|\geq (n+1)\sqrt{y}^n, \tag{2.3}$$

$$|U_n(x,y)|\geq \rho^n, \tag{2.4}$$

где

$$\rho=\rho(x,y)=\frac{1}{2}\left(|x|+\sqrt{x^2-4y}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x,y)\in\Omega^-$ и $y\geq 0$, тогда согласно лемме I.2 имеем

$$|U_n(x,y)|=\frac{\rho^{n+1}-\eta^{n+1}}{\rho-\eta}=\rho^n+\rho^{n-1}\eta+\dots\eta^n.$$

Отсюда, учитывая (I.20) получаем каждое неравенство из (2.I)-(2.4) при $(x,y)\in\Omega^-$. При $(x,y)\in\partial\Omega^-$ неравенства (2.I)-(2.4) очевидны, так как

$$(x,y)\in\partial\Omega^-\Longleftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$$

и

$$|U_n(x,y)| = (n+1)\sqrt{y^n}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $(x,y)\in\bar{\Omega}^-\cap\Delta$. Тогда справедливо неравенство

$$|U_n(x,y)| \leqslant (1+\sqrt[4]{y}+\dots+\sqrt[4]{y^n})\rho^{\frac{n}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant (1-\sqrt[4]{y})^{-1}\rho^{\frac{n}{2}}. \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) следует из (2.I) с учетом неравенства

$$\rho^{n-k}y^{\frac{k}{2}} = \rho^{\frac{n-k}{2}}\rho^{\frac{n-k}{2}}y^{\frac{k}{4}}y^{\frac{k}{4}} \leqslant$$
$$\leqslant \rho^{\frac{n-k}{2}}\,1\,\rho^{\frac{k}{2}}y^{\frac{k}{4}} = \rho^{\frac{n}{2}}y^{\frac{k}{4}}.$$

Здесь мы применили неравенство

$$0 \leqslant \sqrt{y} \leqslant \rho < 1,$$

которое справедливо в области $\bar{\Omega}^-\cap\Delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.I. При $y \leqslant 0$ справедливы неравенства:

$$|U_n(x,y)| \leqslant \rho^n(x,y), \tag{2.6}$$

$$|U_{2n}(x,y)| \geqslant \frac{1}{2}\rho^{2n}(x,y). \tag{2.7}$$

Эти неравенства следуют из (I.I9) с учетом (I.20).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 \geqslant 0$, $0 < \varepsilon_0 + \sqrt{2}\varepsilon_1 \leqslant 2$, $(x,y)\in\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$. Тогда справедлива оценка

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant \frac{4}{\varepsilon_0}\left(1-\varepsilon\right)^{\frac{n}{4}}, \qquad \varepsilon = \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1). \tag{2.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь мы должны разобрать всего три случая:

а) $\Omega_1^+ \neq \Phi \wedge \Omega_1^- \neq \Phi$, б) $\Omega_1^+ \neq \Phi \wedge \Omega_1^- = \Phi$,

в) $\Omega_1^+ = \Phi \wedge \Omega_1^- \neq \Phi$, $\Omega_1^{+(-)} = \Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} \cap \bar{\Omega}^{+(-)}$.

Рассмотрим случай а). Очевидно, что треугольник $\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}$ симметричен относительно оси Oy. Вершину, которая принадлежит полуплоскости $x > 0$, обозначим через D.

Пусть вершина $D \in \bar{\Omega}^+$, тогда (см. рис. I)

$$\Delta^+ \cap \Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1} = [OBDC] \cup [OKB] \cup [AKO].$$

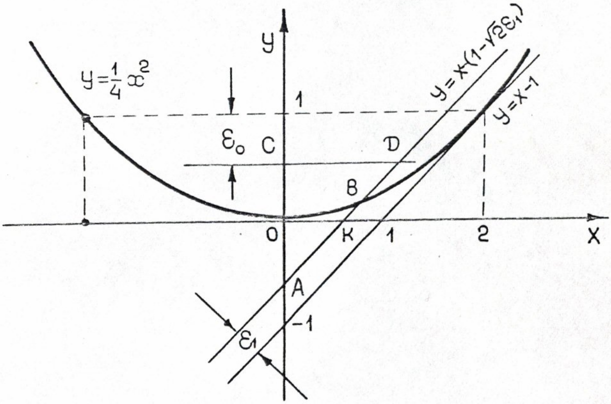


Рис. I.

Из неравенства (I.9) следует оценка

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant (n+1)(1-\varepsilon_0)^{\frac{n}{2}}, \quad (x,y) \in [OBDC]. \tag{2.9}$$

Учитывая затем, что

$$\forall n \ (n=0,1,\dots) \qquad (n+1)(1-\varepsilon_0)^{\frac{n}{4}} < 2/\varepsilon_0 ,$$

из (2.9) получаем оценку

$$\left|U_n(x,y)\right| < \frac{2}{\varepsilon_0}(1-\varepsilon_0)^{\frac{n}{4}}, \qquad (x,y)\in[OBDC]. \tag{2.10}$$

Теперь оценим $U_n(x,y)$ в области $[OKB]$. Для этого воспользуемся неравенством (2.5). Так как $\rho(x,y)$ - возрастающая функция относительно $|x|$ при фиксированном y в области Ω^-, приходим к оценке

$$\left|U_n(x,y)\right| \le (1-\sqrt[4]{y})^{-1} \max_{(s,t)\in[KB]} \rho^{\frac{n}{2}}(s,t), \tag{2.11}$$

$$(x,y)\in[OKB].$$

Однако $\rho(s,t)$ - убывающая функция на отрезке $[KB]$ и, следовательно

$$\max_{(s,t)\in[KB]} \rho(s,t) \le \rho(1-\sqrt{2}\,\varepsilon_1, 0) = 1-\sqrt{2}\,\varepsilon_1 . \tag{2.12}$$

Кроме того

$$(1-\sqrt[4]{y})^{-1} = (1+\sqrt[4]{y})(1+\sqrt{y})(1-y)^{-1} < \frac{4}{\varepsilon_0}, \tag{2.13}$$

$$(x,y)\in[OKB].$$

Далее из (2.II) с учетом (2.I2) и (2.I3) следует оценка

$$\left|U_n(x,y)\right| < 4\varepsilon_0^{-1}\left(1-\sqrt{2}\,\varepsilon_1\right)^{\frac{n}{2}}, \qquad (x,y)\in[OKB]. \qquad (2.I4)$$

Рассуждая также, как в предыдущем случае, из неравенства (2.6) получаем оценку

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant \left(1-\sqrt{2}\,\varepsilon_1\right)^{\frac{n}{4}}, \qquad (x,y)\in[AKO]. \qquad (2.I5)$$

Наконец, учитывая, что

$$U_n(-x,y)=(-1)^n U_n(x,y),$$

из (2.I0), (2.I4) и (2.I5) получим оценку (2.8). Пусть теперь вершина $D\notin\overline{\Omega}^+$, тогда (см. рис. 2)

$$\Delta^+\cap\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon_1}=[OKDC]\cup[AKO].$$

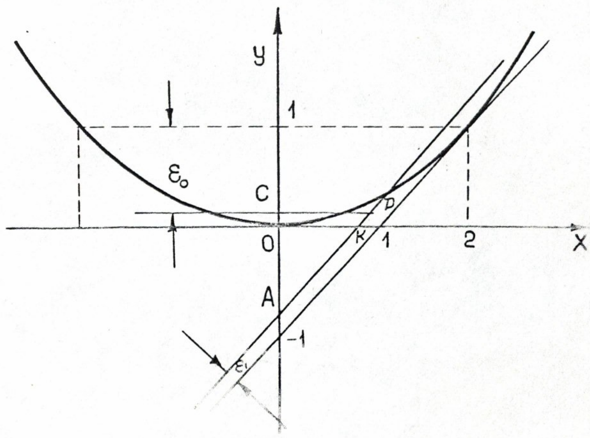


рис. 2

Очевидно, что в области $[OKDC]$ справедлива оценка (2.14). Отсюда и из оценки (2.15) с учетом равенства

$$U_n(-x,y)=(-1)^n U_n(x,y),$$

получаем оценку (2.8). Наконец, в случае б) справедлива оценка (2.10), а в случае в) - оценка (2.15). Отсюда в обоих случаях непосредственно следует оценка (2.8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Пусть $0<\varepsilon\leqslant 2(1+\sqrt{2})^{-1}$, $(x,y)\in\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$. Тогда справедливы оценки:

$$\left|U_n(x,y)\right|<\frac{2}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}, \tag{2.16}$$

$$\left|U_n(x,y)\right|<(n+1)(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}. \tag{2.17}$$

Оценка (2.16) не следует из (2.8), но в ее справедливости нетрудно убедиться, если проследить доказательство оценки (2.8) и уточнить константы. Уточнение коснется неравенства (2.13), которое при $\varepsilon_0=\varepsilon_1=\varepsilon$ принимает вид

$$(1-\sqrt[4]{y})^{-1}=(1+\sqrt[4]{y})(1-\sqrt{y})^{-1}<\frac{2}{\sqrt[4]{2\varepsilon^2}}\leqslant\frac{2}{\varepsilon},$$

$$0\leqslant y\leqslant(1-\sqrt[4]{2\varepsilon^2})^2.$$

Оценка (2.17) следует из (1.9), (2.1) и (2.6).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $0\leqslant\varepsilon\leqslant 2(1+\sqrt{2})^{-1}$, $1\leqslant\lambda<3$, $(x,y)\in\Lambda_{\lambda,\varepsilon}$. Тогда справедлива оценка

$$\left|U_n(x,y)\right|<c(\lambda)(3-\lambda)^{-1}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}, \tag{2.18}$$

где $C(\lambda)=64(5+\lambda)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как область

$$\Lambda_{\lambda,\varepsilon}=(\Delta^+_\lambda\cup\Delta^-_\lambda)\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}=(\Delta^+_\lambda\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon})\cup(\Delta^-_\lambda\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon})$$

симметрична относительно оси Oy и

$$U_n(-x,y)=(-1)^n U_n(x,y),$$

то достаточно оценить $U_n(x,y)$ в области $\Delta^+_\lambda\cap\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$. Пусть A_λ – точка пересечения прямых $y=\lambda-x$ и $y=x-1$ (см. рис. 3). В точке A_λ проведем перпендикуляр к оси Ox, в точке пересечения перпендикуляра с параболой $y=\frac{1}{4}x^2$ проведем прямую, параллельную оси OX. Легко получается, что ее уравнение есть

$$y=\frac{1}{16}(1+\lambda)^2.$$

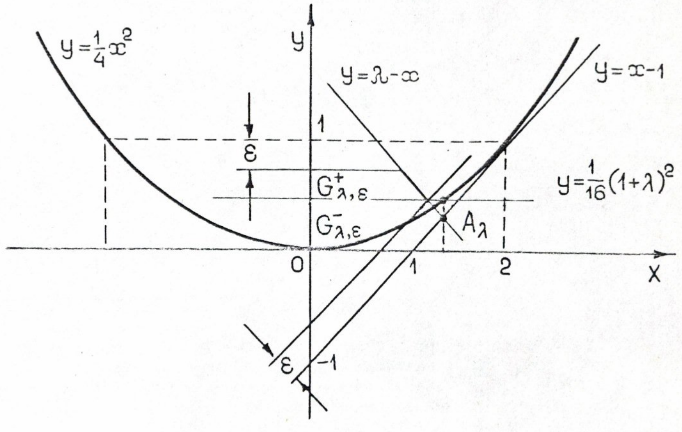


Рис. 3.

Рассмотрим случай, когда

$$0 \leqslant \varepsilon < 1 - \frac{1}{16}(1+\lambda)^2.$$

Область $\Delta^+ \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$ представим так:

$$\Delta^+_\lambda \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} = G^+_{\lambda,\varepsilon} \cup G^-_{\lambda,\varepsilon},$$

$$G^+_{\lambda,\varepsilon} = \left\{(x,y) \in \Delta^+_\lambda \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} \,\middle|\, y \geqslant \frac{1}{16}(1+\lambda)^2\right\},$$

$$G^-_{\lambda,\varepsilon} = \left\{(x,y) \in \Delta^+_\lambda \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} \,\middle|\, y \leqslant \frac{1}{16}(1+\lambda)^2\right\}.$$

В области $G^+_{\lambda,\varepsilon}$ справедливо (см. замечание I.4) неравенство

$$\left|U_n(x,y)\right| \leqslant 2y^{\frac{n}{4}} \left[\varphi_n(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.19}$$

где

$$\varphi_n(x,y) = \frac{y^{\frac{n}{2}+1}}{4y - x^2}.$$

Очевидно, что для $\forall n$ $(n = 2,3\ldots)$

$$\varphi_n(x,y) \leqslant \alpha(y) = \frac{y^2}{4y-(\lambda-y)^2}, \quad (x,y) \in G^+_{\lambda,\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Из $(x,y) \in G^+_{\lambda,\varepsilon}$ следует, что

$$\sigma^2 \leqslant y \leqslant 1-\varepsilon, \qquad \sigma = \frac{1+\lambda}{4}.$$

Оценим снизу $\alpha^{-1}(y)$ в указанном промежутке. Положим $t = y^{-1}$, тогда

$$\alpha^{-1}(y)=\alpha_0(t)=4t-(\lambda t-1)^2, \quad (1-\varepsilon)^{-1}\leq t\leq \sigma^{-2}.$$

Так как $\alpha_0(t)>0$ при $1\leq t\leq \sigma^{-2}$, то

$$\alpha_0(t)\geq \min\,(\alpha_0(1),\ \alpha_0(\sigma^{-2})).$$

После простых вычислений получим

$$\alpha_0(1)=(3-\lambda)(1-\lambda),\quad \alpha_0(\sigma^{-2})=(3-\lambda)^2(1+\lambda)^{-4}(7+22\lambda-\lambda^2).$$

Заметим, что

$$\alpha_0(1)\geq 16(3-\lambda)^2(1+\lambda)^{-4} \quad \text{и} \quad \alpha_0(\sigma^{-2})\geq 16(3-\lambda)^2(1+\lambda)^{-4}.$$

при $1\leq\lambda<3$, тогда для $\alpha^{-1}(y)$ получим

$$\alpha^{-1}(y)\geq 16(3-\lambda)^2(1+\lambda)^4,\quad \sigma^2\leq y\leq 1-\varepsilon. \tag{2.21}$$

Из (2.19), (2.20) и (2.21) следует неравенство

$$|U_n(x,y)|\leq\frac{1}{2}(1+\lambda)^2(3-\lambda)^{-1}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}, \tag{2.22}$$

$$(x,y)\in G^{+}_{\lambda,\varepsilon}.$$

Таким образом, в области $G^{+}_{\lambda,\varepsilon}$ для $U_n(x,y)$ получена более точная оценка, чем (2.18).

Оценим теперь $U_n(x,y)$ в области $G^{-}_{\lambda,\varepsilon}$. Нетрудно заметить, что

$$G^{-}_{\lambda,\varepsilon}\subset\Delta_{\varepsilon_0,\varepsilon},\quad \varepsilon_0=1-\frac{1}{16}(1+\lambda)^2,\quad 0\leq\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Тогда согласно теореме 2.2 справедлива оценка (2.I8) при $(x,y)\in G^-_{\lambda,\varepsilon}$.

Остается случай, когда

$$\varepsilon \geqslant 1-\frac{1}{16}(1+\lambda)^2=\frac{1}{16}(3-\lambda)(5+\lambda).$$

Так как всегда выполняется включение $\Lambda_{\lambda,\varepsilon}\subset\Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$, то из (2.I6) следует оценка

$$|U_n(x,y)|<32(5+\lambda)^{-1}(3-\lambda)^{-1}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}},\ (x,y)\in\Lambda_{\lambda,\varepsilon},$$

которая более точна, чем (2.I8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из приведенного выше доказательства следует (если для оценки $|U_n(x,y)|$ в области $G^-_{\lambda,0}$, применим оценку (I.I2)), что справедлива оценка

$$|U_n(x,y)|<16(5+\lambda)^{-1}(3-\lambda)^{-1},\quad 1\leqslant\lambda<3, \tag{2.23}$$

$$(x,y)\in\Lambda_{\lambda,0}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Справедлива оценка

$$|U_n(x,y)|\leqslant 1,\quad (x,y)\in\Lambda_{1,0}. \tag{2.24}$$

Действительно, из оценок (2.22) и (I.9) следует

$$|U_n(x,y)|\leqslant\max\left(1,\frac{n+1}{2^n}\right)\leqslant 1,\ \ (x,y)\in\Lambda_{1,0}\cap\bar{\Omega}^+.$$

Согласно теореме I.2 справедлива оценка

$$|U_n(x,y)|\leqslant\max_{(s,t)\in\Gamma}|U_n(s,t)|,\ \ (x,y)\in\Lambda_{1,0}\cap\bar{\Omega}^-,$$

где Γ - граница области $\Lambda_{1,0} \cap \bar{\Omega}^-$. Однако, в силу теоремы I.I и формулы

$$U_n(1+y, y) = (1-y)^{-1}(1-y^{n+1}),$$

имеем

$$\max_{(s,t)\in\Gamma} |U_n(s,t)| = 1.$$

Из этих неравенств следует (2.24), так как

$$\Lambda_{1,0} = (\Lambda_{1,0} \cap \bar{\Omega}^+) \cup (\Lambda_{1,0} \cap \bar{\Omega}^-).$$

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $|a| < 1$ и $|y| \leq 1$. Тогда справедлива оценка

$$|U_n(a(1+y), y)| < \sqrt{\frac{2}{1-a^2}}. \qquad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a = 0$ неравенство очевидно. Рассмотрим случай, когда $0 < a < 1$.

Обозначим соответственно через A, B, C и B_0 точки пересечения прямой $x = a(1+y)$ с прямыми $x=0$, $y=1-b$, ($b = \sqrt{1-a^2}$), $y=1$ и с параболой $y = \frac{1}{4}x^2$ (см. рис. 4) При $-1 \leq y \leq 1-b$ оценка (2.25) следует из (I.II).

Докажем (2.25) при $1-b \leq y \leq 1$. Принимая во внимание, что ордината точки B_0

$$y_0 = \frac{(1-\sqrt{1-a^2})^2}{a^2} = \frac{1-b}{1+b} < 1-b, \quad b = \sqrt{1-a^2}$$

из (I.8) получим

$$\left|U_n(a(1+y),y)\right| \leq 2\sqrt{y^n \varphi(y)}, \qquad (2.26)$$

где
$$\varphi(y) = \left[4 - a^2\left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2\right]^{-1}.$$

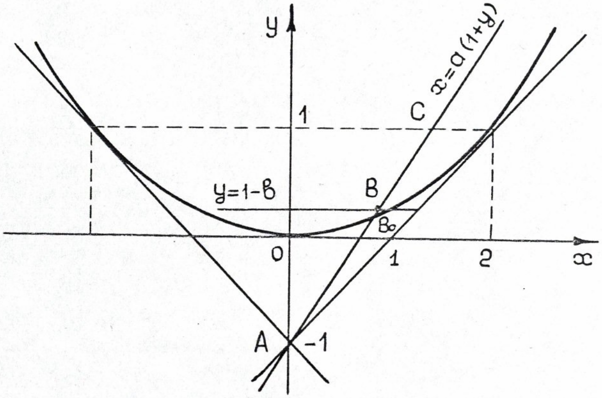


Рис. 4.

Так как $\varphi(y)$ - убывающая функция при $1-b \leq y \leq 1$, то

$$\varphi(1-b) \geq \varphi(y) \geq \varphi(1).$$

Однако

$$\varphi(1-b) = \frac{1-b}{4(1-b)-(1-b^2)(2-b)} = \frac{1}{(3-b)b^2} < \frac{1}{2b^2}.$$

Отсюда и из (2.26) следует оценка (2.25) при $1-b \leq y \leq 1$.

Остается случай, когда $-1 < a < 0$, который согласно формуле

$$U_n(a(1+y), y) = (-1)^n U_n(|a|(1+y), y),$$

приводится к рассмотренному случаю. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Справедлива оценка

$$\left| U_n(x,y) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{1-a^2}}, \quad (x,y) \in \Delta_*(a). \tag{2.27}$$

Эта оценка есть следствие теоремы I.2 и 2.4.

ТЕОРЕМА 2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x,y) = 0$, тогда и только тогда, когда $(x,y) \in \overset{\circ}{\Delta}$.

Достаточность условия теоремы следует из (2.I7). Докажем необходимость.

Пусть при фиксированном (x,y)

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x,y) = 0, \tag{2.28}$$

тогда из (I.6) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} y^n = 0,$$

отсюда получаем, что $|y| < 1$. Теперь из (I.I0) и (2.28) при $|y| < 1$ следует, что $|x| < 1 + y$. Значит $(x,y) \in \Delta$ что и требовалось доказать.

§ 3. Оценки для полиномов $U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y)$

ТЕОРЕМА 3.I. Пусть $x \in]-2, 2]$, тогда справедливо неравенство

$$\left| U_n(x,1) - U_{n-1}(x,1) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{2+x}}. \tag{3.I}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$P_n(x) = U_n(x,1) - U_{n-1}(x,1)$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x),$$

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x - 1.$$

Отсюда по индукции (для краткости вместо $P_n(x)$ и $U_n(x,1)$ будем писать P_n и U_n) следует

$$P_{n-k} = U_k P_n - U_{k-1} P_{n+1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

При $k = n$ получим

$$1 = U_n P_n - U_{n-1} P_{n+1} \tag{3.2}$$

После подстановки $U_n = P_n + U_{n-1}$ (3.2) примет вид

$$1 = P_n^2 + U_{n-1} P_n - U_{n-1} P_{n+1} = P_n^2 + U_{n-1}(P_n - P_{n+1}) =$$

$$= P_n^2 + U_{n-1}\left[2U_n - (U_{n-1} + U_{n+1})\right] =$$

$$= P_n^2 + (2-x) U_{n-1} U_n,$$

или

$$P_n^2 = 1 - (2-x) U_{n-1} U_n.$$

Отсюда и из очевидного неравенства

$$P_n^2 = (U_n - U_{n-1})^2 \geq -4 U_n U_{n-1}.$$

следует

$$\rho_n^2 \leqslant 1 + \frac{2-x}{4}\rho_n^2,$$

или

$$\rho_n^2 \leqslant \frac{4}{2+x}, \quad x \in]-2,2[,$$

что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.I. Пусть $(x,y) \in \Omega^+$, тогда справедливо неравенство

$$\left| U_n(x,y) - \sqrt{y}\, U_{n-1}(x,y) \right| \leqslant \sqrt{\frac{2y^n}{1+q(x,y)}}, \qquad (3.3)$$

где

$$q(x,y) = x/(2\sqrt{y}).$$

Неравенство (3.3) следует из формулы (I.2) с учетом оценки (3.I).

ЛЕММА 3.I. Пусть $(x,y) \in \Omega_0$ и $|x| + |y| \neq 0$. Тогда справедлива формула

$$U_n(x,y) - \sqrt{y}\, U_{n-1}(x,y) = \frac{\rho^{n+1} + \sqrt{y}\,\eta^n}{\rho + \sqrt{y}}. \qquad (3.4)$$

где

$$\rho = \rho(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 4y}\right), \qquad \eta = \eta(x,y) = y\rho^{-1}(x,y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (I.I9), получим

$$U_n(x,y) - \sqrt{y}\, U_{n-1}(x,y) = \frac{\rho^{n+1} - \eta^{n+1}}{\rho - \eta} -$$

$$-\sqrt{y}\,\frac{\rho^n-\eta^n}{\rho-\eta}=\rho^n\,\frac{\rho-\sqrt{y}}{\rho-\eta}+\eta^n\,\frac{\sqrt{y}-\eta}{\rho-\eta}.$$

Отсюда учитывая, что

$$\frac{\rho-\sqrt{y}}{\rho-\eta}=\frac{\rho-\sqrt{y}}{\rho^2-y}\,\rho=\frac{1}{\rho+\sqrt{y}}\,\rho$$

и

$$\frac{\sqrt{y}-\eta}{\rho-\eta}=\frac{\sqrt{y}\rho-y}{\rho^2-y}=\frac{\sqrt{y}\,(\rho-\sqrt{y})}{\rho^2-y}=\frac{\sqrt{y}}{\rho+\sqrt{y}},$$

получаем формулу (3.4).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(x,y)\in\Omega_0$. Тогда справедливо неравенство

$$\sqrt{y}^n\leqslant U_n(x,y)-\sqrt{y}\,U_{n-1}(x,y)<\rho^n(x,y). \qquad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(x,y)\in\Omega_0$ и $y>0$. Тогда

$$0<y\leqslant\rho^2\Longleftrightarrow\eta\leqslant\rho\Longleftrightarrow\eta^n\leqslant\rho^n\Longleftrightarrow\sqrt{y}\,\eta^n\leqslant\sqrt{y}\,\rho^n\Longleftrightarrow$$

$$\rho^{n+1}+\sqrt{y}\,\eta^n\leqslant\sqrt{y}\,\rho^n+\rho^{n+1}\Longleftrightarrow\rho^{n+1}+\sqrt{y}\,\eta^n\leqslant$$

$$\leqslant\rho^n\,(\rho+\sqrt{y})\Longleftrightarrow\frac{\rho^{n+1}+\sqrt{y}\,\eta^n}{\rho+\sqrt{y}}\leqslant\rho^n.$$

Левая часть последнего неравенства, согласно формуле (3.4) равно

$$U_n - \sqrt{y}\, U_{n-1}$$

Таким образом, правая часть неравенства (3.5) доказана, когда $(x, y) \in \Omega_0$ и $y > 0$. Неравенство

$$U_n - \sqrt{y}\, U_{n-1} \geqslant \sqrt{y^n}$$

следует из формулы (I.I3).

Если $y = 0$ неравенство (3.5) автоматически выполняется.

ЛЕММА 3.2. Пусть $(x, y) \in \Omega_2^+$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y) \right| \leqslant 3\rho^{\frac{n-1+k}{2}}, \qquad (3.6)$$

где

$$\rho = \rho(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 4y}\right), \quad k = 0,1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя оценки (2.5) и (3.5) получим

$$\left| U_n - yU_{n-1} \right| \leqslant \left| U_n - \sqrt{y}\, U_{n-1} \right| + \sqrt{y}\,(1-\sqrt{y}) \left| U_{n-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \rho^n + \sqrt{y}\,(1-\sqrt{y})\,\frac{1}{1-\sqrt[4]{y}}\,\rho^{\frac{n-1}{2}} = \rho^n + \sqrt{y}\,(1+\sqrt[4]{y})\,\rho^{\frac{n-1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \rho^n + \rho\,(1+\sqrt[4]{y})\,\rho^{\frac{n-1}{2}} \leqslant \left(\rho^{\frac{n}{2}} + \rho^{\frac{1}{2}}\,(1+\sqrt[4]{y})\right)\rho^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда учитывая

$$\rho^{\frac{n}{2}} + \rho^{\frac{n}{2}}\,(1+\sqrt[4]{y}) \leqslant 3,$$

получаем оценку (3.6) при $k = 1$. Аналогично доказывается неравенство (3.6) при $k = 0$.

ЛЕММА 3.3. Пусть $(x,y) \in \Omega_1$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y) \right| \leq \sqrt{2}\, y^{\frac{n-1+k}{4}}, \quad k=0,1. \tag{3.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3.3) и (I.9) получим:

$$\left| U_n - U_{n-1} \right| \leq \left| U_n - \sqrt{y}\, U_{n-1} \right| + (1-\sqrt{y}) \left| U_{n-1} \right| \leq \sqrt{2y^n} +$$

$$+ n(1-\sqrt{y})\sqrt{y}^{\,n-1} = \left(\sqrt{2}\, y^{\frac{n+1}{4}} + n(1-\sqrt{y})\, y^{\frac{n-1}{4}} \right) y^{\frac{n-1}{4}}.$$

Отсюда учитывая, что для $\forall n$

$$\sqrt{2}\, y^{\frac{n+1}{4}} + n(1-\sqrt{y})\, y^{\frac{n-1}{4}} \leq \sqrt{2}, \quad y \in [0,1],$$

получим оценку (3.7) при $k=0$

Аналогично доказывается случай $k=1$

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть $(x,y) \in \Delta^+ \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq 2(1+\sqrt{2})^{-1}$. Тогда справедлива оценка

$$\left| U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y) \right| \leq 3(1-\varepsilon)^{\frac{n-1+k}{4}}, \quad k=0,1. \tag{3.8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\Delta^+ \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} = (\Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}) \cup (\Omega_2 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}).$$

Докажем справедливость оценки (3.8) для каждой из этих областей. Рассмотрим отдельно два случая.

Первый случай: $0 \leq \varepsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Очевидно, что оба множества $\Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$ и $\Omega_2 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$ непусты (см. рис. I). В силу неравенства (2.6) имеем

$$|U_n - y^k U_{n-1}| \leq 2\rho^n, \quad (x,y) \in \Omega_2^- . \tag{3.9}$$

Так как $\Omega_2 = \Omega_2^+ \cup \Omega_2^-$, то на основе неравенств (3.6) и (3.9) заключаем, что справедливо неравенство

$$|U_n - y^k U_{n-1}| \leq 3\rho^{\frac{n-1+k}{2}}, \quad (x,y) \in \Omega_2 .$$

Отсюда и из неравенства

$$\rho(x,y) \leq 1 - \sqrt{2}\varepsilon \leq 1 - \varepsilon$$

следует оценка (3.8) в области $\Omega_2 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$. В области $\Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$ оценка (3.8) следует из неравенства (3.7).

Второй случай: $\frac{\sqrt{2}}{2} < \varepsilon \leq 2(1+\sqrt{2})^{-1}$. Очевидно, что $\Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} \neq \Phi$ и $\Omega_2 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} = \Phi$ для $\forall \varepsilon$ из рассматриваемого промежутка. Отсюда следует $\Delta^+ \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon} = \Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$. Так как $0 \leq y \leq 1-\varepsilon$ при $(x,y) \in \Omega_1 \cap \Delta_{\varepsilon,\varepsilon}$, то оценка (3.8) следует из неравенства (3.7). Теорема доказана.

Из теорем 2.3 и 3.3 следует

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $(x,y) \in \Omega_{\lambda,\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq 2(1+\sqrt{2})^{-1}$, $1 \leq \lambda < 3$. Тогда справедлива оценка

$$|U_n(x,y) - y^k U_{n-1}(x,y)| < C(\lambda)(3-\lambda)^{-1}(1-\varepsilon)^{\frac{n-1+k}{4}}, \tag{3.10}$$

где

$$C(\lambda) = 128(5+\lambda)^{-1}, \quad k = 0,1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Справедлива оценка

$$|(1+y-x)U_n(x,y)| \leq 2C(\lambda)(3-\lambda)^{-1}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}, \quad (x,y) \in \Omega_{\lambda,\varepsilon}. \tag{3.11}$$

Оценка (3.II) следует из представления

$$(1+y-x)U_n(x,y)=(1+y)U_n-(U_{n+1}+yU_{n-1})=$$
$$=y(U_n-U_{n-1})+(U_n+U_{n+1})$$

с учетом оценки (3.IO).

Отметим, что при $\varepsilon=0$ справедливы более точные оценки, чем соответствующие оценки, получаемые непосредственно из (3.9) и (3.IO). Для доказательства этого понадобятся две леммы.

ЛЕММА 3.4. Справедливо неравенство

$$\sqrt{y^n}\leqslant \Phi_n(x,y)\leqslant \frac{1+y^{n+1/2}}{1+\sqrt{y}}, \qquad (3.\text{I}2)$$
$$(x,y)\in\bar{\Omega}_2^+,$$

где

$$\Phi_n(x,y)=U_n(x,y)-\sqrt{y}\,U_{n-1}(x,y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Phi_n(x,y)$ - возрастающая функция относительно x при фиксированном y, когда $x\geqslant 2\sqrt{y}$ (см. замечание I.7), следовательно

$$\Phi_n(2\sqrt{y},y)\leqslant\Phi_n(x,y)\leqslant\Phi_n(1+y,y).$$

Отсюда после подстановки

$$U_n(2\sqrt{y},y)=(n+1)\sqrt{y}^{\,n},$$
$$U_n(1+y,y)=\frac{1-y^{n+1}}{1-y},$$

получим (3.I2). При $y=1$ неравенство (3.I2) очевидно.

ЛЕММА 3.5. Справедлива оценка

$$\left|U_n(x,y)-y^{\kappa}U_{n-1}\right|\leqslant 2-\delta_{1\kappa}\,,\quad (x,y)\in\Omega_2^{+}\,. \tag{3.13}$$

где $\delta_{1\kappa}$ - символ Кронеккера, $\kappa=0,1$. Оценка (3.I3) следует из неравенства

$$\left|U_n-y^{\kappa}U_{n-1}\right|\leqslant\left(U_n-\sqrt{y}\,U_{n-1}\right)+\sqrt{y}^{\,\kappa}\left(1-\sqrt{y}\right)U_{n-1}\,.$$

с учетом оценок (3.I2) и (I.II).

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $(x,y)\in\Omega_{\lambda,0}\,,\ 1\leqslant\lambda<3\,.$ Тогда справедливы оценки:

$$\left|U_n(x,y)-y^{\kappa}U_{n-1}(x,y)\right|\leqslant 32\,(5+\lambda)^{-1}(3-\lambda)^{-1}, \tag{3.14}$$

$$\left|(1+y-x)U_n(x,y)\right|\leqslant 64\,(5+\lambda)^{-1}(3-\lambda)^{-1}\,. \tag{3.15}$$

Оценка (3.I4) следует из (3.I3), (2.6), (3.7) и (2.23), так как

$$\Omega_{\lambda,0}=\bar{\Omega}_2^{+}\cup\bar{\Omega}^{-}\cup\Omega_1^{-}\cup\Lambda_{\lambda,0}\,.$$

Оценка (3.I5) следует из (3.II) с учетом оценки (3.I4).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из приведенного выше рассуждения с учетом (2.24) следует, что справедливы оценки:

$$\left|U_n(x,y)-y^{\kappa}U_{n-1}(x,y)\right|\leqslant 2\,,\qquad \kappa=0,1\,, \tag{3.16}$$

$$\left|(1+y-x)U_n(x,y)\right|\leqslant 4\,,\qquad (x,y)\in\Omega_{1,0}\,. \tag{3.17}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Справедлива оценка

$$\left|\sqrt{x+2}\,\left[U_n(x,1)-U_{n-1}(x,1)\right]\right|\leqslant 2. \tag{3.18}$$

Оценка (3.I8) следует из (3.I).

§ 4. Трехточечное рекуррентное соотношение и связанные с ним полиномы

ЛЕММА 4.I. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = \alpha_n(x)\, u_n - \beta_n(y)\, u_{n-1} + f_n\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\alpha_n(x) = a_n x + b_n\,, \quad \beta_n(y) = c_n y + d_n\,, \quad (x,y) \in E_2\,.$$

Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ - последовательности действительных или комплексных чисел и u_0, u_1, f_n $(n = 1, 2 \ldots)$ - заданные элементы линейного пространства X над полем действительных или комплексных чисел. Тогда $\forall n$ справедлива формула

$$u_{n+1} = \overset{0}{P}_n(x,y)\, u_1 - \beta_1(y)\, \overset{1}{P}_{n-1}(x,y)\, u_0 + \sum_{i=1}^{n} \overset{i}{P}_{n-i}(x,y)\, f_i\,, \tag{4.I}$$

где полиномы $\overset{k}{P}_n(x,y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered} \overset{k}{P}_n(x,y) = \alpha_{n+k}(x)\, \overset{k}{P}_{n-1}(x,y) - \beta_{n+k}(y)\, \overset{k}{P}_{n-2}(x,y)\,, \\ \overset{k}{P}_{-1}(x,y) \equiv 0, \quad \overset{k}{P}_0(x,y) \equiv 1\,, \quad (x,y) \in E_2\,. \end{gathered} \tag{4.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается методом математической индукции. При $n = 1, 2$ справедливость формулы (4.I) очевидна. Пусть формула (4.I) справедлива при $n = 1, 2, \ldots, m-1$ $(m \geq 3)$ и докажем ее справедливость при $n = m$. Для краткости вместо $\alpha_n(x), \beta_n(y)$ и $\overset{k}{P}_n(x,y)$ будем писать соответственно α_n, β_n и $\overset{k}{P}_n$.

$$u_{m+1} = \alpha_m u_m - \beta_m u_{m-1} + f_m =$$

$$= \alpha_m \Big(\overset{0}{P}_{m-1} u_1 - \beta_1 \overset{1}{P}_{m-2} u_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \overset{i}{P}_{m-1-i} f_i \Big) -$$

$$- \beta_m \Big(\overset{0}{P}_{m-2} u_1 - \beta_1 \overset{1}{P}_{m-3} u_0 + \sum_{i=1}^{m-2} \overset{i}{P}_{m-2-i} f_i \Big) +$$

$$+ f_m = \big(\alpha_m \overset{0}{P}_{m-1} - \beta_m \overset{0}{P}_{m-2} \big) u_1 -$$

$$- \beta_1 \big(\alpha_m \overset{1}{P}_m - \beta_m \overset{1}{P}_{m-3} \big) u_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \big(\alpha_m \overset{i}{P}_{m-1-i} -$$

$$- \beta_m \overset{i}{P}_{m-2-i} \big) f_i + f_m . \tag{4.3}$$

В силу формулы (4.2) имеем

$$\alpha_m \overset{i}{P}_{m-1-i} - \beta_m \overset{i}{P}_{m-2-i} = \overset{i}{P}_{m-i} . \tag{4.4}$$

Теперь очевидно, что из (4.3) с учетом (4.4) следует (4.I). Лемма доказана.

Определим полиномы $P_n^{(\lambda)}(x,y)$ с помощью рекуррентного соотношения

$$P_n^{(\lambda)}(x,y) = (1+\lambda_n)\, x P_{n-1}^{(\lambda)}(x,y) - (1+2\lambda_n)\, y P_{n-2}^{(\lambda)}(x,y).$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$P_{-1}^{(\lambda)}(x,y) \equiv 0 , \qquad P_0^{(\lambda)}(x,y) \equiv 1 ,$$

$$\lambda_n = (\lambda - 1) n^{-1}, \qquad \lambda \in \,]-\infty, +\infty[.$$

Назовем их ультрасферическими полиномами от двух переменных, так как при $y = 1$, $P_n^{(\lambda)}(x,1)$ - классические ультрасферические полиномы, определенные на $[-2,2]$ (см.[48] , стр. 93).

Пусть теперь $\overset{k}{P}{}_n^{(\lambda)}(x, y)$ - класс полиномов, которые получаются по формуле (4.2) при следующих значениях параметров

$$a_n = 1 + \lambda_n , \quad c_n = 1 + 2\lambda_n , \quad b_n = d_n = 0 .$$

Очевидно, что

$$\overset{}{P}_n^{(\lambda)}(x,y)=\overset{\circ}{P}_n^{(\lambda)}(x,y) \quad \text{и} \quad U_n(x,y)=\overset{(1)}{P}_n(x,y).$$

ЛЕММА 4.2. Справедливы формулы:

$$\overset{\kappa}{P}_n^{(\lambda)}(x,y)=\sqrt{|y|}^{\,n}\,\overset{\kappa}{P}_n^{(\lambda)}\Big(\frac{x}{\sqrt{|y|}},\,\mathrm{sign}(y)\Big), \tag{4.5}$$

$$y\neq 0, \quad \kappa, n \neq 0,1,\dots,$$

$$\beta_{n+\kappa}(y)\cdots\beta_{n+\kappa-i}(y)\overset{\kappa}{P}_{n-i-2}(x,y)=$$
$$=\overset{n+\kappa}{Q}_{i+1}(x,y)\overset{\kappa}{P}_{n-1}(x,y)-\overset{n+\kappa-1}{Q}_{i}(x,y)\overset{\kappa}{P}_n(x,y), \tag{4.6}$$
$$n=2,3,\dots \quad \kappa=0,1,\dots \quad i=\overline{0,n-2},$$

где полиномы $\overset{n}{Q}_i(x,y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\overset{n}{Q}_i(x,y)=\alpha_{n+1-i}(x)\overset{n}{Q}_{i-1}(x,y)-\beta_{n+2-i}(y)\overset{n}{Q}_{i-2}(x,y). \tag{4.7}$$
$$\overset{n}{Q}_{-1}(x,y)\equiv 0, \quad \overset{n}{Q}_0(x,y)\equiv 1.$$

Формула (4.5) доказывается методом индукции точно также, как формула (I.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ (4.6). Из (4.2) следует, что

$$\beta_{n+\kappa}\overset{\kappa}{P}_{n-2}=\alpha_{n+\kappa}\overset{\kappa}{P}_{n-1}-\overset{\kappa}{P}_n \tag{4.8}$$

или

$$\beta_{n+\kappa}\overset{\kappa}{P}_{n-2}=\overset{n+\kappa}{Q}_1\overset{\kappa}{P}_{n-1}-\overset{n+\kappa-1}{Q}_0\overset{\kappa}{P}_n\,. \tag{4.9}$$

Таким образом, при $i=0$ формула (4.6) справедлива. Легко доказывается, что она справедлива и при $i=1$. Действительно, из

(4.8) следует

$$\beta_{n+k-1} \overset{k}{P}_{n-3} = \alpha_{n+k} \overset{k}{P}_{n-2} \overset{k}{P}_{n-1} .$$

Если обе части этого равенства умножим на β_{n+k} и вместо $\beta_{n+k} \overset{k}{P}_{n-2}$ поставим ее значения из (4.9), тогда получим

$$\beta_{n+k} \beta_{n+k-1} \overset{k}{P}_{n-3} = \alpha_{n+k-1} (\overset{n+k}{Q}_1 \overset{k}{P}_{n-1} - \overset{n+k-1}{Q}_0 \overset{k}{P}_n) - \beta_{n+k} \overset{k}{P}_{n-1} =$$

$$= (\alpha_{n+k-1} \overset{n+k}{Q}_1 - \beta_{n+k}) \overset{k}{P}_{n-1} - \alpha_{n+k-1} \overset{n+k-1}{Q}_0 \overset{k}{P}_n .$$

Отсюда, учитывая, что

$$\alpha_{n+k-1} \overset{n+k}{Q}_1 - \beta_{n+k} = \overset{n+k}{Q}_2 \quad \text{и} \quad \alpha_{n+k-1} \overset{n+k-1}{Q}_0 = \overset{n+k-1}{Q}_1 ,$$

получим формулу (4.6) при $i=1$

Теперь для $\forall i$ формула (4.6) легко доказывается методом индукции.

ЛЕММА 4.3. Справедлива формула

$$\overset{n}{Q}_i (x, y) = \overset{n-i}{P}_i (x, y), \qquad i = \overline{0, n}. \tag{4.10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (4.10) есть следствие формулы

$$\overset{n}{Q}_i = \overset{n-i}{P}_k \overset{n}{Q}_{i-k} - \beta_{n+k+1-i} \overset{n-i}{P}_{k-1} \overset{n}{Q}_{i-k-1} , \tag{4.11}$$

при $k=i$. Докажем (4.11) методом индукции. При $k=0,1$ справедливость формулы (4.11) очевидна. Пусть формула (4.11) справедлива при $k=0,1 \ldots, m-1$ $(m \geq 2)$ и докажем ее справедливость при $k=m$.

$$\overset{n}{Q}_i = \overset{n-i}{P}_{m-1}\overset{n}{Q}_{i+1-m} - \beta_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-2} Q_{i-m} =$$

$$= \overset{n-i}{P}_{m-1}(\alpha_{n+m-1}\overset{n}{Q}_i - \beta_{n+m+1-i}\overset{n}{Q}_{i-m-1}) - \beta_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-2}\overset{n}{Q}_{i-m} =$$

$$= (\alpha_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-1} - \beta_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-2})\overset{n}{Q}_{i-m} - \beta_{n+m+1-i}\overset{n-i}{P}_{m-1}\overset{n}{Q}_{i-m-1}.$$

Отсюда учитывая, что

$$\alpha_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-1} - \beta_{n+m-i}\overset{n-i}{P}_{m-2} = \overset{n-i}{P}_m .$$

получим формулу (4.II) при $K = m$

СЛЕДСТВИЕ 4.I. Справедлива формула

$$\overset{K+1}{P}_{n-1}(x,y)\overset{K}{P}_{n-1}(x,y) = \beta_{n+K}(y)\dots\beta_{K+2}(y) + \overset{K+1}{P}_{n-2}(x,y)\overset{K}{P}_n(x,y). \qquad (4.I2)$$

Она является следствием формулы (4.6). Для этого достаточно в (4.6) положить $i = n-2$ и учесть формулу (4.I0).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = x u_n - y u_{n-1} + f_n , \quad n = 1, 2, \dots, (x,y) \in E_2 .$$

где u_0 , u_1 , f_n - заданные элементы линейного пространства X над полем действительных или комплексных чисел. Тогда для $\forall n$ справедлива формула

$$u_{n+1} = U_n(x,y)\, u_1 - y U_{n-1}(x,y)\, u_0 + \sum_{i=1}^{n} U_{n-i}(x,y) f_i , \qquad (4.I3)$$

где $U_n(x,y)$ - полиномы Чебышева второго рода от двух переменных.

Формула (4.I3) является следствием формулы (4.I), так как

$$\overset{k}{P}_n(x,y) = U_n(x,y), \qquad k,n = 0,1,\ldots,$$

при $\alpha_i(x) = x$ и $\beta_i(y) = y$.

Теперь, очевидно, что справедлива

ЛЕММА 4.4. Пусть дано рекуррентное соотношение

$$u_{n+1} = L u_n - S u_{n-1} + f_n, \quad n = 1,2,\ldots,$$

где L и S – линейные коммутирующие операторы, действующие в пространстве X, а u_0, u и f_n – заданные элементы этого же пространства. Тогда для $\forall n$ справедлива формула

$$u_{n+1} = U_n(L,S)u_1 - SU_{n-1}(L,S)u_0 + \sum_{i=1}^{n} U_{n-i}(L,S)f_i. \tag{4.14}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из формулы (4.14) следуют формулы (для краткости вместо $U_n(L,S)$ будем писать U_n):

$$u_k = (U_{k-1} - SU_{k-2})u_0 + U_{k+1}\Delta u_0 + \sum_{i=1}^{k-1} U_{k-1-i} f_i, \quad k = 2,3,\ldots, \tag{4.15}$$

$$\Delta u_k = (L-S-1)U_{k-1}u_0 + (U_k - U_{k-1})\Delta u_0 + \sum_{i=1}^{k} (U_{k-i} - U_{k-1-i}) f_i, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{4.16}$$

где $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$. Формула (4.15) очевидна, а формула (4.16) получается из (4.15). При этом надо учесть, что

$$U_k - SU_{k-1} - (U_{k-1} - SU_{k-2}) = (U_k + SU_{k-2}) - (S+I)U_{k-1} = LU_{k-1} - (S+I)U_{k-1} = (L-S-I)U_{k-1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Рекуррентное соотношение типа (4.I2) впервые ввел Стильтес ([5I] , § 2) для исследования непрерывных дробей. Отметим также работу [7] , где рассмотрено уравнение в конечных разностях

$$y_n - (x - \alpha_n)\, y_{n-1} + \beta_n\, y_{n-2} = 0,$$

и связанные с ними полиномы.

ГЛАВА II. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ СХЕМ

§ 5. Некоторые сведения из функционального анализа

Пусть в гильбертовом пространстве H задан плотно определенный линейный оператор A, т.е. $\overline{D(A)} = H$, где $D(A)$ - область определения оператора A. Пусть A^* - сопряженный к A оператор.

а) Оператор A называется симметрическим, если $(Au,v)=(u,Av)$ для $\forall u, v \in D(A)$;

б) Оператор A называется самосопряженным, если $A = A^*$, т.е. $D(A) = D(A^*)$ и $Au = A^*u$ для $\forall u \in D(A)$;

в) Оператор A называется замкнутым, если из соотношений $u_n \in D(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ и $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = f$ следует, что $u \in D(A)$ и $Au = f$.

Сформулируем в виде теорем некоторые свойства этих операторов.

ТЕОРЕМА 5.I. Пусть A^{-1} существует, тогда A замкнуто тогда и только тогда, когда A^{-1} замкнут (см[16], стр. 2I0).

ТЕОРЕМА 5.2. Оператор A^* всегда замкнут (см [16], стр. 2I3).

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть A замкнут и S ограничен, тогда оператор AS замкнут.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть A и B замкнутые операторы и A взаимнооднозначно отображает $D(A)$ на $R(A) = H$. Тогда AB замкнут (см.[16], задача 5.7, стр. 209).

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть A и B - линейные плотно определенные операторы в пространстве H. Пусть оператор B A - ограничен, т.е. $D(A) \subset D(B)$ и $\|Bu\| \leq a\|u\| + b\|Au\|$, $u \in D(A)$, $a>0$, $b>0$.

Предположим кроме того, что $\beta < 1$. Тогда

а) Если A - замкнут, то $A+B$ замкнут (см. [I6], теорема I.I, стр. 24I).

б) Если A - самосопряженный и B - симметрический, то $A+B$ самосопряженный (см. I6, теорема 4.3, стр. 36I).

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть A - симметрический плотно определенный оператор в пространстве H. Тогда (см. [16], задача 3.II, 3.I2 и 3.I8, стр. 338 и 34I)

а) Если $\mathcal{D}(A)=H$, то оператор A самосопряжен и ограничен.

б) Если $R(A)=H$, то A^{-1} существует, $A=A^*$, A^{-1} ограничен и $\|Au\| \geqslant \alpha \|u\|$.

в) Если $A=A^*$ и $\|Au\| \geqslant \alpha \|u\|$, то $R(A)=H$.

ЛЕММА 5.I. Пусть A и S - линейные плотно опреленные операторы в пространстве H, $\mathcal{D}(S)=H$, $S^*=S \geqslant 0$,

$$S : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A) \quad \text{и} \quad SAx = ASx$$

при $x \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

а) Если A замкнут, то $S^{1/2} : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ и $S^{1/2}Ax = AS^{1/2}x$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

б) Если A замкнут и $A \geqslant 0$ в области $\mathcal{D}(A)$, то $SA = AS \geqslant 0$ в этой же области.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (а). По определению ([14] , стр. I76)

$$S^{1/2}x = \lim_{n\to\infty} V_n(x),$$

где

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}\left((I-S)+V_n^2\right), \quad V_1 = 0, \ n=1,2,\dots$$

Отсюда и из соотношений $S : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$, $SAx = ASx$, $x \in \mathcal{D}(A)$

следует, что $\forall n\,(n=1,2,\ldots)$

$$V_n x \in \mathcal{D}(A),\quad A(V_n x)=V_n(Ax)\to S^{1/2}(Ax).$$

Так как оператор A по предположению замкнут, то отсюда следует, что

$$S^{1/2}x\in\mathcal{D}(A) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} A(V_n x)=AS^{1/2}x=S^{1/2}Ax.$$

Утверждение (б) следует из тождества

$$(SAx,x)=(S^{1/2}S^{1/2}Ax,x)=(S^{1/2}Ax,S^{1/2}x)=$$

$$=(A(S^{1/2}x),S^{1/2}x).$$

ЛЕММА 5.2. Пусть A - симметрический плотно определенный оператор в пространстве H с областью значения $R(A)=H$, а S - линейный ограниченный оператор с областью определения $\mathcal{D}(S)=H$. Тогда

а) Если $SA\geq 0$ в области $\mathcal{D}(A)$, то $A^{-1}S\geq 0$ в H.

б) Предположим кроме того, что $S:\mathcal{D}(A)\to\mathcal{D}(A)$ и $SAx=ASx$ при $x\in\mathcal{D}(A)$. Тогда если $A\geq 0$ и $SA\geq 0$ в области $\mathcal{D}(A)$, то $S\geq 0$ в H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (а). Существование оператора A^{-1} следует из теоремы 5.6 (б), а неравенство $A^{-1}S\geq 0$ следует из тождества

$$(A^{-1}Sx,x)=(A^{-1}S(AA^{-1}x),x)=(SA(A^{-1}x),A^{-1}x).$$

(б). Сначала заметим, что

$$SA^{-1}x=A^{-1}A(SA^{-1}x)=A^{-1}S(AA^{-1}x)=A^{-1}Sx,\ x\in H.$$

В силу (а) из $SA\geq 0$ следует, что $SA^{-1}=A^{-1}S\geq 0$ в H. Далее легко получаем

$$(Sx,x)=(S(A^{-1}Ax),\ A^{-1}Ax)=(SA^{-1/2}y,A^{-1/2}y)=$$

$$=(A^{-1/2}SA^{-1/2}y,y)=(A^{-1}Sy,y)\geq 0,\quad x\in\mathcal{D}(A),\ y=A^{1/2}x.$$

Отсюда, в силу непрерывности скалярного произведения следует утверждение (б).

ЛЕММА 5.3. Пусть A замкнут и B замыкаем. Пусть A взаимнооднозначно отображает $\mathcal{D}(A)$ на H. Тогда из включения $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B)$ следует, что оператор BA^{-1} ограничен в H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{B}$ – замыкание оператора B. Так как A^{-1} замкнут (теорема 5.I), то $\bar{B}A^{-1}$ замкнут (теорема 5.3). Тогда отсюда и из $\mathcal{D}(\bar{B}A^{-1})=H$ (в силу теоремы о замкнутом графике) следует, что $\bar{B}A^{-1}$ ограничен. Следовательно, ограничен и оператор BA^{-1}.

ЛЕММА 5.4. Пусть A и B – симметричные плотноопределенные операторы в пространстве H. Пусть $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(B)$, $R(A)=H$ и $A^{-1}Bx=BA^{-1}x$ при $x\in\mathcal{D}(A)$ (существование оператора A^{-1} следует из теоремы 5.6 (б)). Предположим кроме того, что

$$(Ax,x)\geq(Bx,x)\geq 0\qquad x\in\mathcal{D}(A).$$

Тогда оператор $S=BA^{-1}$ симметричен в H и

$$0\leq(Sx,x)\leq(x,x)\qquad x\in H.$$

Отсюда, в частности, следует, что $\|S\|\leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$(A^{-1}h,h)=(x,Ax)\geq 0,\quad h\in H,\quad x=A^{-1}h.$$

Пусть
$$A^{-1/2}=(A^{-1})^{1/2},$$

тогда согласно лемме 5.I (а) из $B \geq 0$ следует, что

$$A^{-1/2} B A^{-1/2} = A^{-1} B = B A^{-1} \geq 0$$

в области $\mathcal{D}(A)$. Аналогично получаем неравенство

$$I - A^{-1} B = I - B A^{-1} \geq 0 .$$

Отсюда и из $BA^{-1} \geq 0$ следует, что

$$0 \leq (BA^{-1} x, x) \leq (x, x), \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Так как оператор $S = BA^{-1}$ ограничен (лемма 5.3) и $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$, то в силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$0 \leq (Sx, x) \leq (x, x), \qquad x \in H .$$

Симметричность оператора S в H следует из соотношения

$$(Sx, y) = (x, Sy), \quad x, y \in \mathcal{D}(A) .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.I. Если $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ и $R(B) = H$, то $B^{-1} \geq A^{-1} \geq 0$ в H. Утверждение следует из неравенства (см. лемму 5.2 (б))

$$I - A^{-1} B = (B^{-1} - A^{-1}) B \geq 0 .$$

ТЕОРЕМА 5.7. Пусть A и B - линейные операторы из X в Y (X и Y - банаховы пространства). Предположим, что A - замкнут, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и взаимно-однозначно отображает $\mathcal{D}(A)$ на $R(A) = Y$. Предположим кроме того, что $\exists q \in [0, 1[$ такое, что справедливо неравенство $\|Bu\| \leq q \|Au\|$ при $u \in \mathcal{D}(A)$. Тогда $S = A + B$ замкнут и уравнение $Sx = y$ при $y \in Y$ имеет единственное решение из $\mathcal{D}(A)$, кроме того, итеррационный процесс

$$Ax_k = -Bx_{k-1} + y. \qquad (5.1)$$

сходится для $\forall x_0 \in D(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замкнутость оператора S сразу следует из неравенства $\| Bu \| \leq q \| Au \|$ (см. теорему 5.5).

Из (5.I) следует

$$\| Ax_{k+1} - Ax_k \| = \| Bx_k - Bx_{k-1} \| .$$

Так как $\| Bu \| \leq q \| Au \|$, то

$$\| Ax_{k+1} - Ax_k \| \leq q \| Ax_1 - Ax_{k-1} \| .$$

Отсюда

$$\| Ax_{k+1} - Ax_k \| \leq q^k \| Ax_1 - Ax_0 \| . \qquad (5.2)$$

Принимая во внимание тождество

$$Ax_{k+m} - Ax_k = (Ax_{k+1} - Ax_k) + (Ax_{k+2} - Ax_{k+1}) + \\ + \dots + (Ax_{k+m} - Ax_{k+m-1}).$$

и учитывая неравенство (5.2), получим

$$\| Ax_{k+m} - Ax_k \| \leq \frac{q^k}{1-q} \| Ax_1 - Ax_0 \| \qquad (5.3)$$

Это значит, что $\{Ax_k\}$ - последовательность Коши. Тогда в силу полноты Y существует $\lim\limits_{k \to \infty} Ax_k$.

Теперь докажем, что $\{x_k\}$ - тоже последовательность Коши. Так как A - замкнут и обратим, то A^{-1} - замкнут. Отсюда и из $D(A^{-1}) = Y$ в силу теоремы о замкнутом графике (см. [I6], стр. 2II) следует, что A^{-1} ограничен, т.е. $\exists\ c > 0$ такое, что

$$\| A^{-1} y \| \leqslant c \| y \|, \quad y \in Y.$$

Отсюда следует

$$\| Ax \| \geqslant \frac{1}{c} \| x \|, \quad x \in D(A). \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) заключаем, что $\{x_k\}$ - последовательность Коши. Тогда, в силу полноты X существует $x_* \in X$ такое, что $\lim\limits_{k \to} x_k = x_*$. Итак, в силу замкнутости A имеем

$$x_* \in D(A) \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} Ax_k = Ax_*.$$

Отсюда и из неравенства

$$\| Bu \| \leqslant q \| Au \|$$

следует, что

$$\lim_{k \to \infty} Bx_k = Bx_* .$$

Теперь в (5.I) устремляя k к бесконечности, мы получим $Sx_* = y$, что и требовалось доказать.

Единственность решения следует из неравенства

$$\| Sx \| \leqslant (1-q) \| Ax \| \geqslant \frac{1-q}{c} \| x \| .$$

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть A и B - симметричные плотно определенные операторы в пространстве H. Пусть $D(A) \subset D(B)$, $R(A) = H$ и $A^{-1} Bx = BA^{-1} x$ при $x \in D(A)$ Предположим, кроме того, что

$$(Ax, x) \geqslant 0, \quad (Bx, x) \geqslant 0, \quad x \in D(A).$$

Тогда $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(A)$ и $R(S)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из включения $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ сразу следует, что $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(A)$. Докажем, что $R(S) = H$, т.е. уравнение $Sx = f$ при $f \in H$ имеет единственное решение из $\mathcal{D}(A)$. Так как оператор A симметричен, $\mathcal{D}(A) = H$ и $R(A) = H$, то $A = A^*$ и $(A^{-1})^* = A^{-1}$ (теорема 5.6 (б)). Следовательно, A и A^{-1} замкнуты (теорема 5.2). Тогда оператор BA^{-1} ограничен (теорема 5.3), т.е.

$$\| BA^{-1} x \| \leqslant c \| x \|, \quad c > 0, \quad x \in H.$$

Отсюда следует, что

$$\| Bx \| \leqslant c \| Ax \|$$

при $x \in \mathcal{D}(A)$.

Рассмотрим операторы

$$S_i = A + B_i, \quad B_i = \frac{i}{n} B, \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть натуральное число n подобрано так, что $c/n < 1$. Тогда

$$\| B_1 x \| \leqslant \frac{c}{n} \| Ax \| = \frac{c}{n} \| S_0 x \|, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Отсюда и из $R(S_0) = H$, в силу теоремы 5.7 следует, что $R(S_1) = H$.

Очевидно, что операторы A и S_1 удовлетворяют условиям леммы 5.4. Тогда справедлива оценка $\| AS_1^{-1} \| \leqslant 1$. Отсюда и из неравенства

$$\| B_1 x \| \leqslant \frac{c}{n} \| Ax \|$$

следует, что

$$\| B_1 x \| \leq \frac{c}{n} \| A S_1^{-1} \| \cdot \| S_1 x \| \leq \frac{c}{n} \| S_1 x \|, \quad x \in D(A).$$

Следовательно, операторы S_1 и B_1 удовлетворяют условиям теоремы 5.7. Тогда, так как $S_2 = S_1 + B_1$, то $R(S_2) = H$. Продолжая этот процесс по индукции, получим

$$R(S) = R(S_n) = H,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5.9. Пусть A - самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Тогда (см. [I4], лемма 2, стр. 346)

$$\| P(A) \| = \max_{x \in S_p A} | P(x) |,$$

где $P(x)$ - вещественный полином, $S_p(A)$ - спектр оператора A.

ТЕОРЕМА 5.I0. (Garnir H. G [63]). Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - нормальные (т.е. $A_i A_i^* = A_i^* A_i$), попарно коммутирующие операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Пусть $P(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ - полином $2n$ переменных. Тогда справедлива оценка

$$\| P(A_1, A_1^*, \ldots, A_n, A_n^* \| < \sup_{z_i \in S_p(A_i),\, i=1,n} \| P(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_n, \bar{z}_n)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Из теоремы 5.I следует, что если A и B - самосопряженные, коммутирующие операторы, то

$$\| P(A,B) \| \leq \sup_{(x,y) \in S_p(A) \times S_p(B)} | P(x,y) |.$$

ТЕОРЕМА 5.II. Пусть a и b - границы самосопряженного оператора A, т.е.

$$a = \inf_{\|h\|=1} (Ah, h), \qquad b = \sup_{\|h\|=1} (Ah, h), \quad h \in H.$$

Тогда, если $\varphi(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция, то (см.[I4], теорема 2, стр. 346)

$$\|\varphi(A)\| = \max_{x \in Sp(A)} |\varphi(x)|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Границы оператора A являются точками спектра (см. [I4], стр. 345).

§ 6. Явные трехслойные операторно-разностные и итерационные схемы

6.I. Рассмотрим явную операторно-разностную схему вида

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + \tau^m f_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.I}$$

Здесь

$$L_\tau = P(K_\tau, N_\tau), \qquad S_\tau = Q(K_\tau, N_\tau)$$

(P и Q - полиномы от переменных x и y с вещественными коэффициентами), $K_\tau : H \longrightarrow H$ и $N_\tau : H \to H$ - симметричные, перестановочные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, $\tau \geq 0$, $m = 1, 2$,

$$\mathcal{D}(K_\tau) = \mathcal{D}(N_\tau) = H.$$

$\mathcal{D}(K_\tau)$ и $\mathcal{D}(N_\tau)$ соответственно области определения операторов K_τ и N_τ) f_k, ($k = 1, 2, \ldots$), u_0 и u_1 - заданные элементы пространства H.

Введем множество

$$G_\tau = \{(x,y) \mid x = P(\xi,\eta),\ \ y = Q(\xi,\eta),$$
$$(\xi,\eta) \in Sp(K_\tau) \times Sp(N_\tau)\},$$

где $Sp(K_\tau)$ и $Sp(N_\tau)$ - соответственно спектры операторов K_τ и N_τ.

Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.I. Пусть существуют постоянные $\tau_0 > 0$, $1 \leqslant \lambda < 3$ и $C_0 > 0$ такие, что $G_\tau \subset \Delta_\lambda$, $d_\tau^+ \geqslant C_0\tau$ и $d_\tau^- \geqslant C_0\tau^2$ для любого τ из $]\,0,\tau_0\,]$. Тогда для u_k при $m=2$ и $0 < \tau \leqslant \tau_0$ справедливы оценки:

$$\|u_{k+1}\| \leqslant \frac{1}{C_0}\Big[\rho_\tau^{\frac{k}{4}}\Big(C_0 a(\lambda)\|u_0\| + 4\Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big) + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\Big], \qquad (6.2)$$

$$\Big\|\frac{\Delta u_k}{\tau}\Big\| \leqslant a(\lambda)\Big[\rho^{\frac{k-1}{4}}\Big(\frac{2}{\tau}\|u_0\| + \Big\|\frac{\Delta u_0}{\tau}\Big\|\Big) + \tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\Big], \qquad (6.3)$$

где

$$k = 1,2,\ldots,\ \ \Delta u_k = u_{k+1} - u_k\,,\ \ \rho_\tau = 1 - C_0\tau^2,$$

$$a(\lambda) = 128\,(5+\lambda)^{-1}(3-\lambda)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя формулу (4.I5), получим

$$\|u_{k+1}\| \leqslant \|U_k(L_\tau,S_\tau) - S_\tau U_{k-1}(L_\tau,S_\tau)\|\,\|u_0\| +$$
$$+ \|U_k(L_\tau,S_\tau)\|\,\|\Delta u_0\| + \tau^m\sum_{i=1}^{k}\|U_{k-i}(L_\tau,S_\tau). \qquad (6.4)$$

В силу замечания 5.2

$$\|U_k(L_\tau,S_\tau)\| \leqslant \max_{(\xi,\eta)\in S_p(K_\tau)\times S_p(N_\tau)} |U_k(P(\xi,\eta),Q(\xi,\eta))| =$$

$$= \max_{(x,y)\in G_\tau} |U_k(x,y)|, \tag{6.5}$$

$$\|U_k(L_\tau,S_\tau)-S_\tau U_{k-1}(L_\tau,S_\tau)\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(x,y)\in G_\tau} |U_k(x,y)-yU_{k-1}(x,y)|. \tag{6.6}$$

Так как очевидно, что (см. рис. 5 и 6)

$$G_\tau \subset \Delta_{\varepsilon_\tau^+,\varepsilon_\tau^-}, \quad G_\tau \subset \Omega_{\lambda,\varepsilon_\tau} \subset \Delta_\lambda,$$

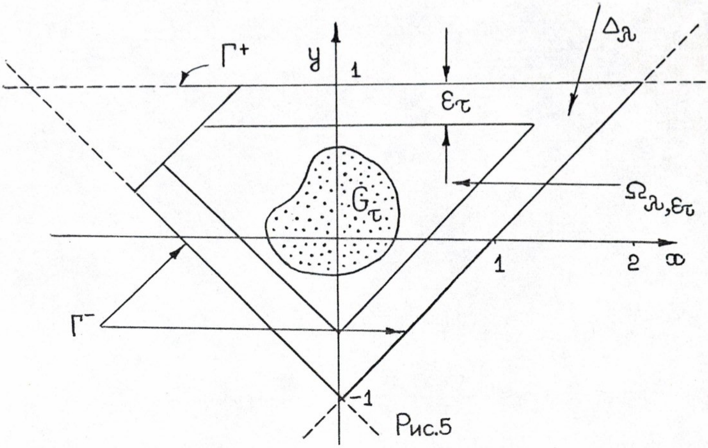
$$\varepsilon_\tau^+ = c_0\tau, \quad \varepsilon_\tau^- = c_0\tau^2, \quad \varepsilon_\tau = c_0\tau^2.$$

то согласно оценкам (2.8) и (3.10) получим

$$\max_{(x,y)\in G_\tau} |U_k(x,y)| \leqslant \max_{(x,y)\in \Delta_{\varepsilon_\tau^+,\varepsilon_\tau^-}} |U_k(x,y)| \leqslant \frac{4}{c_0\tau}\rho_\tau^{\frac{k}{4}},$$

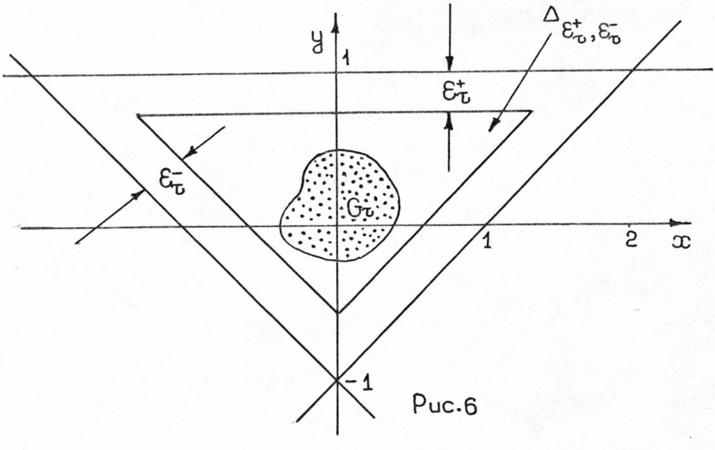
$$\max_{(x,y)\in G_\tau} |U_k(x,y)-yU_{k-1}(x,y)| \leqslant \max_{(x,y)\in \Omega_{\lambda,\varepsilon_\tau}} |U_k(x,y)-$$

$$-yU_{k-1}(x,y)| \leqslant a(\lambda)\rho_\tau^{\frac{k}{4}}, \quad \rho_\tau = 1-c_0\tau^2.$$



Γ^+
y
1
Δ_λ
ε_τ
G_τ
$\Omega_{\lambda,\varepsilon_\tau}$
1
2
x
Γ^-
-1

Рис.5



y
1
$\Delta_{\varepsilon_\tau^+,\varepsilon_\tau^-}$
ε_τ^+
ε_τ^-
G_τ
1
2
x
-1

Рис.6

Следовательно

$$\| U_к (L_\tau, S_\tau) \| \leqslant \frac{4}{C_0 \tau \alpha_0} \rho_\tau^{\frac{к}{4}}, \tag{6.7}$$

$$\| U_к (L_\tau, S_\tau) - S_\tau U_{к-1} (L_\tau, S_\tau) \| \leqslant a(\lambda) \rho_\tau^{\frac{к}{4}}. \tag{6.8}$$

Теперь очевидно, что из (6.4) с учетом оценки (6.7) и (6.8) следует оценка (6.2).

Для доказательства оценки (6.3) воспользуемся формулой (4.I6). В результате получим следующее неравенство (для краткости вместо $U_к(L_\tau, S_\tau)$ будем писать $U_к$):

$$\| \Delta u_к \| \leqslant \| (L_\tau - S_\tau - I) U_к \| \, \| u_0 \| + \| U_к -$$

$$- U_{к-1} \| \, \| \Delta u_0 \| + \tau^m \sum_{i=1}^{к} \| U_{к-i} - U_{к-i-1} \| \, \| f_i \|.$$

Отсюда, с учетом оценок (3.I0) и (3.II) следует (6.3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в теореме 6.I $G_\tau \subset \Lambda_{\lambda,0}$ и $d_\tau^- \geqslant C_0 \tau$, то при $m=1$ справедливо неравенство

$$\| u_{к+1} \| \leqslant \frac{1}{2} a(\lambda) \Big[(1 - C_0 \tau)^{\frac{к}{4}} (\| u_0 \| +$$

$$+ \| u_1 \|) + \tau \sum_{i=1}^{к} \| f_i \| \Big],$$

которое сразу следует из формулы (4.I4) с учетом оценки (2.I8).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть существуют постоянные $\tau_0 > 0$ и $1 \leqslant \lambda < 3$ такие, что $G_\tau \subset \bar{\Delta}_\lambda = \Omega_{\lambda,0}$ для $\forall \tau \in]\,0, \tau_0\,]$. Тогда для решения $u_к$ схемы (6.I) при $\tau \in]\,0, \tau_0\,]$ справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leqslant \frac{a_0(\lambda)}{8} \left(2 \| u_0 \| + t_k \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \tau^{m-1} \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \| \right), \qquad (6.9)$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant \frac{a_0(\lambda)}{4} \left(\frac{2}{\tau} \| u_0 \| \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \tau^{m-1} \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right), \qquad (6.10)$$

где $a_0(\lambda) = a(\lambda)\, \mathrm{sign}\,(\lambda - 1) + 8\delta_{\lambda 1}$.

Доказательство проводится по вышеприведенной схеме. В этом случае применяем неравенства (2.17), (2.23), (2.24), (3.14), (3.15), (3.16) и (3.17) для оценки норм операторов перехода.

Из формулы (4.14) с учетом оценки (2.27) следует

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть существуют постоянные $\tau_0 > 0$ и $0 \leqslant \lambda < 1$ такие, что $G_\tau \subset \Delta_*(\lambda)$ для $\forall \tau \in]\, 0, \tau_0]$. Тогда для решения u_k схемы (6.1) при $\tau \in]\, 0, \tau_0]$ справедлива оценка

$$\| u_k \| \leqslant \sqrt{\frac{2}{1-\lambda^2}} \left(\| u_0 \| + \| u_1 \| + \tau^m \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \| \right), \qquad (6.11)$$

$$k = 2, 3 \ldots$$

6.2. В этом пункте рассмотрим схему (6.1) с нулевой правой частью. Решение ее обозначим через $\overset{\circ}{u}_k$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть существует постоянная $\tau_0 > 0$ такая, что $G_\tau \subset \Delta$ для $\forall \tau \in]\, 0, \tau_0 [$. Тогда справедливо неравенство

$$\| \overset{\circ}{u}_k \| \leqslant \alpha_k(\tau) \left(\| u_0 \| + \| u_1 \| \right), \qquad (6.12)$$

где $\{\alpha_k(\tau)\}_1^\infty$ - снисходящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через ε_τ расстояние между множествами G_τ и $\partial\Delta$ ($\partial\Delta$ - граница треугольника Δ). Из условия $G_\tau \subset \Delta$ следует, что $G_\tau \cap \partial\Delta = \Phi$; значит

$\varepsilon_\tau > 0$, поскольку оба множества G_τ и $\partial\Delta$ замкнуты. Далее очевидно, что справедливо соотношение

$$G_\tau \subset \Delta_{\varepsilon_\tau,\, \varepsilon_\tau} \subset \Delta . \tag{6.13}$$

Теперь из (6.5) с учетом (6.13) и оценки (2.16) получим

$$\| U_\kappa (L_\tau, S_\tau)\| \leqslant \max_{(x,y)\in \Delta_{\varepsilon_\tau,\varepsilon_\tau}} |U_\kappa(x,y)| < \frac{2}{\varepsilon_\tau}(1-\varepsilon_\tau)^{\frac{\kappa}{4}} = \alpha_{\kappa+1}(\tau).$$

Отсюда и из формулы (4.14) следует (6.12).

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть в схеме (6.1) один из операторов K_τ или N_τ – тождественный оператор (пусть, например, $N_\tau = I$). Пусть существует постоянная $\tau_0 > 0$ такая, что для решения $\mathring{u}_\kappa$ схемы (6.1) при $f_\kappa = 0$ справедливо неравенство

$$\| \mathring{u}_\kappa \| \leqslant \alpha_\kappa(\tau)(\| u_0 \| + \| u_1 \|), \quad \tau \in \,]0, \tau_0] , \tag{6.14}$$

где $\{\alpha_\kappa(\tau)\}_1^\infty$ – сходящаяся к нулю последовательность неотрицательных чисел. Тогда для $\forall \tau \in \,]0, \tau_0]$ справедливо включение

$$\Gamma_\tau \subset \Delta ,$$

где

$$\Gamma_\tau = \{(x,y) \,|\, x = P(\xi,1),\ y = Q(\xi,1),\ \xi \in S_p(K_\tau)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (4.14)

$$\mathring{u}_{\kappa+1} = \hat{U}_\kappa u_1 - \hat{U}_{\kappa-1} u_0 , \quad \kappa = 1,2,\ldots,$$

где

$$\hat{U}_\kappa = U_\kappa(P(K_\tau, I),\ Q(K_\tau, I)).$$

Отсюда с учетом (6.14) следует

$$\|\hat{U}_\kappa u_1\| \leqslant \alpha_{\kappa+1}(\tau)\,\|u_1\| \qquad \text{при} \qquad u_0 = 0$$

Так как это неравенство справедливо для $\forall u_1 \in H$, то

$$\|\hat{U}_\kappa\| \leqslant \alpha_{\kappa+1}(\tau). \tag{6.15}$$

В силу теоремы 5.9 справедлива оценка

$$\|\hat{U}_\kappa\| = \max_{\xi \in S_p(K_\tau)} |U_\kappa P(\xi,1), Q(\xi,1)| \geqslant$$

$$\geqslant |U_\kappa(x,y)|, \quad (x,y) \in \Gamma_\tau .$$

Отсюда и из (6.15) следует, что

$$\lim_{\kappa\to\infty} U_\kappa(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_\tau .$$

Тогда согласно теореме 2.5 получаем $\Gamma_\tau \subset \Delta$, что и требовалось доказать.

Из теорем 6.4 и 6.5 следует

ТЕОРЕМА 6.6. Пусть в схеме (6.1) $f_\kappa = 0$ и один из операторов K_τ или N_τ - тождественный оператор. Предположим кроме того, что гильбертово пространство H конечномерно. В этих условиях для решения $\mathring{u}_\kappa$ схемы (6.1) $\lim\limits_{\kappa\to\infty} \|\mathring{u}_\kappa\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_\tau \subset \Delta$.

6.3. В заключение для уравнения

$$u = Au + f.$$

рассмотрим трехслойную итерационную схему вида

$$u_{\kappa+1} = \tilde{A} u_\kappa - \alpha u_{\kappa-1} + f, \tag{6.16}$$

где $\tilde{A} = A + \alpha I$, α - числовой параметр.

Пусть A - линейный симметричный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H с областью определения

$$\mathcal{D}(A)=H\ ,\quad f\in H,\quad u_0,\, u_1,\in H\,.$$

Обозначим через m_1 и m_2 границы оператора A, т.е.

$$m_1=\inf_{\|h\|=1}(Ah,h),\qquad m_2=\sup_{\|h\|=1}(Ah,h)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.7. Пусть $[m_1,\, m_2]\subset[-3,1]$ и $\alpha\in]-0{,}5(m_1+1),1[$ Тогда итерационный процесс (6.I6) сходится в H и для погрешности приближения верна оценка

$$\|u_{n+1}-u^*\|\leqslant\|(I-A)^{-1}\|(\|U_n(\tilde{A},\alpha)-\alpha AU_{n-1}(\tilde{A},\alpha)\|\|u_1-$$

$$-u_0\|+\|U_n(\tilde{A},\alpha)-\alpha U_{n-1}(\tilde{A},\alpha)\|\|u_2-u_1\|), \tag{6.I7}$$

где u^* - точное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (4.I4), из (6.I6) следует, что

$$u_{n+1}=U_n(\tilde{A},\alpha)u_1-\alpha U_{n-1}(\tilde{A},\alpha)u_0+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}U_i(\tilde{A},\alpha)f.$$

Покажем, что $\{u_n\}_1^{\infty}$ - последовательность Коши. Для этого оценим норму операторного полинома $U_n(\tilde{A},\alpha)$. Так как множество

$$G=\{(x,y)\,|\,x=t+\alpha,\ y=\alpha,\ t\in Sp(A)\}$$

замкнуто и $G\subset\Delta$, то расстояние ε между множествами G и $\partial\Delta$ строго положительно (см. рис. 7). Отсюда в силу оценки (2.I6) следует, что

$$\|U_n(\tilde{A},\alpha)\| \leq \frac{2}{\varepsilon}(1-\varepsilon)^{\frac{n}{4}}.$$

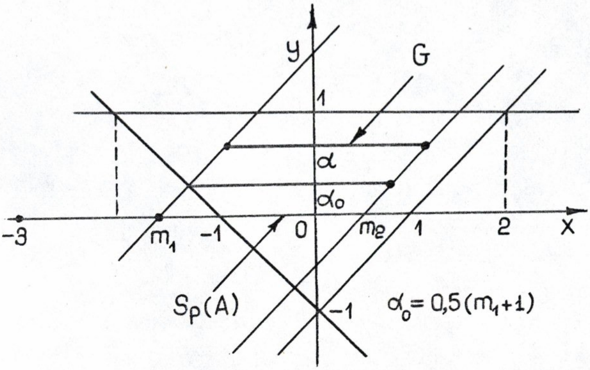


Рис. 7.

Принимая во внимание эту оценку, из формулы (6.18) получим

$$\| u_{n+k} - u_n \| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty$$

Следовательно, $\{u_n\}_1^\infty$ – последовательность Коши. Тогда в силу полноты H существует $u^* \in H$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u^* \qquad \text{для} \quad \forall u_0, u_1, f \in H.$$

Очевидно, что u^* – решение исходного уравнения. Теперь оценим погрешность приближения. Так как для точного решения также верна формула (6.18), то

$$u_{n+1} - u^* = U_n(\tilde{A},\alpha)(u_1 - u^*) - \alpha U_{n-1}(\tilde{A},\alpha)(u_0 - u^*) =$$

$$= \alpha U_{n-1}(u_1 - u_0) + (U_n - \alpha U_{n-1})(u_1 - u^*).$$

После подстановки

$$u_1 - u^* = (I-A)^{-1}(I-A)(u_1 - u^*) = (I-A)^{-1}[(u_1 - Au_1) -$$

$$-(u^* - Au^*)] = (I-A)^{-1}[u_1 - (Au_1 + f)] =$$

$$= (I-A)^{-1}[(u_1 - u_2) + \alpha(u_1 - u_0)],$$

получим

$$u_{n+1} - u^* = [\alpha U_{n-1} + (I-A)^{-1}(U_n - \alpha U_{n-1})](u_1 - u_0) +$$

$$+ (I-A)^{-1}(U_n - \alpha U_{n-1})(u_1 - u_2),$$

или

$$u_{n+1} - u^* = (I-A)^{-1}[(U_n - \alpha A U_{n-1})(u_1 - u_0) +$$

$$+ (U_n - \alpha U_{n-1})(u_1 - u_2)].$$

Отсюда следует оценка (6.I7).

СЛЕДСТВИЕ. Если $u_1 = u_0$ и $\alpha = \alpha_*^2$

$$\alpha_* = \max_{i=1,2} \left|1 - \sqrt{1-m_i}\right|,$$

то справедлива оценка

$$\| u_{n+1} - u^* \| \leq \frac{\alpha_*^n}{1-m_2}[1 + (1-\alpha_*)n] \, \| u_2 - u_1 \|. \tag{6.I9}$$

Оценка (6.I9) следует из (6.I7) с учетом оценки

$$\| U_n(A + \alpha_* I, \alpha_*) \| \leq (n+1)\alpha_*^n .$$

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть H – конечномерное гильбертово пространство. Тогда условия теоремы 6.7 необходимо и достаточно для сходимости итерационного процесса (6.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность следует из теоремы 6.7.

Необходимость. Допустим, что последовательность $\{U_n\}_1^\infty$ сходится. Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|U_n(\tilde{A},\alpha)\| = 0 .$$

В силу теоремы 5.9 справедливо соотношение

$$\|U_n(\tilde{A},\alpha)\| = \max_{x\in Sp(A)} |U_n(x+\alpha,\alpha)| \to 0. \tag{6.20}$$

Так как $m_1, m_2 \in Sp(A)$,то согласно теореме 2.5 из (6.20) следует $(m_1+\alpha,\alpha),(m_2+\alpha,\alpha)\in\Delta$. Отсюда вытекает, что

$$[m_1, m_2] \subset]-3,1[, \quad \alpha \in]-0{,}5(m_1+1), 1[.$$

Рассмотрим теперь для уравнения

$$Au=f, \qquad A=A^*, \quad f\in H,$$

трехслойную итерационную схему вида

$$u_{n+1} = Lu_n - Su_{n-1} + P(A)f, \tag{6.21}$$

где

$$L = I + Q(A) - AP(A), \quad S = Q(A)$$

Здесь $P(A)$ и $Q(A)$ операторные полиномы.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 6.9. Пусть $P(x)>0$ при $x\in Sp(A)$ и

$$\Delta \supset G\{(x,y) \mid x = 1+Q(t) - tP(t), \ y = Q(t), \ t\in Sp(A)\}.$$

Тогда итерационный процесс (6.21) сходится в H

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства теоремы 6.7.

§ 7. Априорные оценки для трехслойных схем в конечномерном гильбертовом пространстве

7.I. В предложенной А.А.Самарским (см.[45] , гл. УI) теории устойчивости разностных схем в гильбертовом пространстве для трехслойных схем указаны достаточные условия устойчивости в терминах линейных неравенств между операторными коэффициентами, а также получены априорные оценки в энергетических нормах. В этом параграфе рассмотрим применение полиномов $U_n(x,y)$ для получения априорных оценок для некоторых трехслойных схем при выполнении критерия устойчивости Самарского.

В конечномерном гильбертовом пространстве H рассмотрим трехслойную разностную схему вида:

$$B\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+R\,(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})+Au_k=f_k, \qquad (7.I)$$

$$k=1,2,\dots$$

Пусть

а) A , B и R - самосопряженные операторы;

б) $A>0$ и $B\geqslant\beta I>0$;

в) $R\geqslant\frac{1}{4}A$;

г) $\frac{1}{\tau^2}B+R\geqslant\frac{1}{4(1-\varepsilon)}A$, $\quad \varepsilon\in\,]0,1[$;

д) u_0, u_1, f_k, $(k=1,2,\dots)$ - заданные элементы пространства H .

Положим $\quad C=R-\frac{1}{4}A$, $\quad C_\tau=B+\tau^2C$.

$$A_\tau = \frac{\tau^2}{4} C_\tau^{-1/2} A C_\tau^{-1/2}, \qquad L_\tau = 2(I+A_\tau)^{-1}(I-A_\tau)$$

ЛЕММА 7.I. Пусть операторы A , B и R удовлетворяют условиям а)–в). Тогда справедливы оценки

$$\| U_k (L_\tau, I) \| \leqslant k+1 , \tag{7.2}$$

$$\| [U_k (L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I)] (I + A_\tau)^{-1/2} \| \leqslant 1 . \tag{7.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор L_τ представим в виде

$$L_\tau = 2(I+A_\tau)^{-1}(I-A_\tau) = 4(I+A_\tau)^{-1} - 2I .$$

Так как $A_\tau^* = A_\tau \geqslant 0$, то

$$0 \leqslant (I+A_\tau)^{-1} \leqslant I .$$

Отсюда следует, что $L_\tau^* = L_\tau$ и $Sp(L_\tau) \subset [-2,2]$. Тогда в силу теоремы 5.II и оценки (3.I8) получим

$$\| [U_k (L_\tau, I) - U_{k-1} (L_\tau, I)] (I + A_\tau)^{-1/2} \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| [U_k (L_\tau, I) - U_{k-1} (L_\tau, I)] (L_\tau + 2I)^{1/2} \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left| [U_k (x,1) - U_{k-1} (x,1)] \sqrt{x+2} \right| \leqslant 1 .$$

Аналогично доказывается 7.2 с применением оценки

$$| U_k (x,1) | \leqslant k+1 .$$

ЛЕММА 7.2. Пусть операторы A , B и R удовлетворяют условиям а)–г). Тогда справедливы оценки

$$\| (2I - L_\tau) U_k (L_\tau, I) \| \leqslant \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} , \tag{7.4}$$

$$\| U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I) \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{7.5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства

$$\frac{1}{\tau^2} B + R \geqslant \frac{1}{4(1-\varepsilon)} A$$

следует, что

$$\frac{1}{\tau^2} B + \left(R - \frac{1}{4} A\right) \geqslant \frac{\varepsilon}{4(1-\varepsilon)} A,$$

или

$$\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} C_\tau \geqslant \frac{\tau^2}{4} A \geqslant 0.$$

Отсюда получаем

$$0 \leqslant A_\tau \leqslant \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} I.$$

Далее, так как

$$L_\tau = 2(2(I + A_\tau)^{-1} - I),$$

то справедлива оценка

$$-2(1-2\varepsilon) I \leqslant L_\tau \leqslant 2I,$$

или

$$S_p(L_\tau) \subset [-2(1-2\varepsilon), 2].$$

Тогда в силу теоремы 5.II и оценки (I.7) получим

$$\|(2I-L_\tau)U_k(L_\tau,I)\| \leq \max_{x\in[-2(1-2\varepsilon),2]} |(2-x)U_k(x,1)| \leq \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Аналогично доказывается (7.5) с применением оценки (3.I).

ТЕОРЕМА 7.I. Пусть операторы A, B и R удовлетворяют условиям а)-г). Тогда для решения u_k схемы (7.I) справедливы оценки:

$$\|u_k\|_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|u_0\|_1 + t_k\left\|\frac{u_1-u_0}{\tau}\right\|_1 + \frac{t_{k-1}}{\sqrt{\beta}}\tau\sum_{i=1}^{k-1}\|f_i\|, \tag{7.6}$$

$$\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_1 \leq \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}\|u_0\|_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\|\frac{u_1-u_0}{\tau}\right\|_1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{7.7}$$

$$\left\|\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}\right\|_1 \leq \frac{t_k}{\sqrt{\beta}}\|Au_0\| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left\|\frac{u_1-u_0}{\tau}\right\|_1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|, \tag{7.8}$$

где

$$\|u_k\|_1 = \|C_\tau^{1/2}u_k\|, \qquad t_k = k\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схему (7.I) можно представить в симметричном виде

$$\left(C_\tau+\frac{\tau^2}{4}A\right)u_{k+1} - 2\left(C_\tau-\frac{\tau^2}{4}A\right)u_k + \left(C_\tau+\frac{\tau^2}{4}A\right)u_{k-1} = \tau^2 f_k \tag{7.9}$$

Так как $C_\tau = C_\tau^* > 0$, то существуют операторы $C_\tau^{1/2}$ и $C_\tau^{-1/2}$ и схема (7.9), эквивалентная следующей схеме

$$(I+A_\tau)x_{k+1}-2(I-A_\tau)x_k+(I+A_\tau)x_{k-1}=\tau^2 C_\tau^{-1/2} f_k ,$$

где

$$x_k = C_\tau^{1/2} u_k , \qquad A_\tau = C_\tau^{-1/2} A C_\tau^{-1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$x_{k+1} = L_\tau x_k - x_{k-1} + \tau^2 g_k , \tag{7.10}$$

где

$$L_\tau = 2(I+A_\tau)^{-1}(I-A_\tau), \quad g_k = (I+A_\tau)^{-1} C_\tau^{1/2} f_k .$$

Далее, согласно формулам (4.15) и (4.16), получаем

$$\|x_k\| \leq \|T_{k-1} x_0\| + \|U_{k-1}(L_\tau, I)\|\cdot\|x_1 - x_0\| +$$

$$+\tau^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|U_{k-1-i}(L_\tau, I)\|\cdot\|g_i\|, \tag{7.11}$$

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|M_{k-1} x_0\| + \|T_k (x_1 - x_0)\| +$$

$$+\tau^2 \sum_{i=1}^{k} \|T_{k-i}(I+A_\tau)^{-1/2}\|\cdot\|(I+A_\tau)^{1/2} g_i\|, \tag{7.12}$$

где операторы T_k и M_k определяются формулами

$$T_k = U_k(L_\tau, I) - U_{k-1}(L_\tau, I), \tag{7.13}$$

$$M_k = (2I - L_\tau) U_k (L_\tau, I). \tag{7.14}$$

Сначала оценим величины $\|g_i\|$ и $\|(I+A_\tau^{1/2}) g_i\|$.

Так как

$$\| C_\tau^{1/2} h \| = (C_\tau^{1/2} h, C_\tau^{1/2} h) = (C_\tau h, h) \leq \beta \| h \|^2, h \in H,$$

то

$$\| C_\tau^{-1/2} \| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} .$$

Далее из неравенства $A_\tau \geq 0$ следует, что

$$\| (I + A_\tau)^{-\frac{s}{2}} \| \leq 1 , \quad s = 1,2.$$

Применяя эти оценки, получим

$$\| g_i \| \leq \| (I + A_\tau)^{-1} \| \| C_\tau^{-1/2} \| \cdot \| f_i \| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \| f_i \| ,$$

$$\| (I + A_\tau)^{1/2} g_i \| \leq \| (I + A_\tau)^{-\frac{1}{2}} \| \| C_\tau^{-1/2} \| \cdot \| f_i \| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \| f_i \| .$$

Так как операторы A , B и R удовлетворяют условиям лемм 7.I и 7.2, то из (7.II) и (7.I2) сразу же следуют оценки (7.6) и (7.7). Остается вывод оценки (7.8). Для этого достаточно доказать справедливость оценки

$$\| M_{k-1} x_0 \| \leq \frac{\tau t_k}{\sqrt{\beta}} \| A u_0 \| , \quad x_0 = C_\tau^{1/2} u_0 . \tag{7.I5}$$

Из представления оператора L_τ следует, что

$$2I - L_\tau = 4 [I - (I + A_\tau)^{-1}] = 4 (I + A_\tau)^{-1} A_\tau =$$
$$= \tau^2 (I + A_\tau)^{-1} C_\tau^{-1/2} A C_\tau^{-1/2} .$$

Тогда

$$\| M_{k-1} x_0 \| \leq \tau^2 \| U_{k-1}(L_\tau, I) \| \cdot \| (I + A_\tau)^{-1} \| \cdot \| C_\tau^{-1/2} \| \cdot \| A C_\tau^{-1/2} x_0 \| \leq$$

$$\leq \frac{\tau^2 k}{\sqrt{\beta}} \| A u_0 \| = \frac{\tau t_k}{\sqrt{\beta}} \| A u_0 \| ,$$

тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть операторы A , B и R удовлетворяют условиям а)-в). Тогда для решения u_k схемы (7.I) справедливы оценки:

$$\| u_k \|_1 \leq \| u_0 \|_2 + t_k \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\|_1 + \frac{t_{k-1}}{\sqrt{\beta}} \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \| ,$$

$$\left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\|_1 < \frac{t_k}{\sqrt{\beta}} \| A u_0 \| + \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\|_2 + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| .$$

Здесь

$$\| u_0 \|_2 = \sqrt{((B + \tau^2 R) u_0 , u_0)} ,$$

$$\| u_k \|_1 = \| C_\tau^{1/2} u_k \| .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что справедливо соотношение

$$\| (I + A_\tau)^{1/2} x_0 \| = \sqrt{((I + A_\tau) x_0 , x_0)} =$$

$$= \sqrt{((I + A_\tau) C_\tau^{1/2} u_0 , C_\tau^{1/2} u_0)} = \sqrt{((C_\tau + \frac{\tau^2}{4} A) u_0 , u_0)}$$

Так как

$$C_\tau + \frac{\tau^2}{4} A = B + \tau^2 \left(R - \frac{1}{4} A \right) + \frac{\tau^2}{4} A = B + \tau^2 R ,$$

то

$$\| (I+A_\tau)^{1/2} x_0 \| = \sqrt{((B+\tau^2 R)u_0, u_0)} = \| u_0 \|_2 .$$

Тогда в силу оценки (7.3) получим

$$\| T_k x_0 \| \leq \| T_k (I+A_\tau)^{1/2} \| \, \| (I+A_\tau)^{1/2} x_0 \| \leq \| u_0 \|_2 . \qquad (7.16)$$

Теперь из (7.11) и (7.12) с учетом (7.2), (7.15) и (7.16) следуют априорные оценки теоремы 7.2.

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть операторы A, B и R удовлетворяют условиям а)-г). Предположим кроме того, что A, B и R попарно коммутирующие операторы. Тогда для решения u_k схемы (7.1) справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| u_0 \| + t_k \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \beta}} \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| A^{-1/2} f_i \| , \qquad (7.17)$$

$$\| u_k \| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\| u_0 \| + \left\| A^{-1/2} B^{1/2} \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| + \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| A^{1/2} B_\tau^{-1/2} f_i \| \right), \qquad (7.18)$$

$$\| A^{1/2} u_k \| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\| A^{1/2} u_0 \| + \left\| B_\tau^{1/2} \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| + \right.$$

$$\left. + \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| B_\tau^{-1/2} f_i \| \right), \qquad (7.19)$$

$$\left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\| \leq \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \| u_0 \| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| + \qquad (7.20)$$

$$+ \frac{1}{\beta \sqrt{\varepsilon}} \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| ,$$

$$\left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\beta}} \| A^{1/2} u_0 \| + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| +$$

$$+ \frac{1}{\beta\sqrt{\varepsilon}} \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| . \tag{7.21}$$

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 7.3. Пусть $L = L^*$ и $Sp\,(L) \subset [-2+4\varepsilon, 2]$, $\varepsilon \in]\,0, 1\,]$. Тогда справедлива оценка

$$\| (2I - L)^{1/2}\, U_k\,(L, I) \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} . \tag{7.22}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 5.II имеем

$$\|(2I-L)^{1/2} U_k(L,I)\| = \max_{x \in Sp(L)} |(2-x)^{1/2}\, U_n(x,1)| .$$

Отсюда и из оценки (см. (I.7))

$$|(2-x)^{1/2} U_n(x,1)| \leqslant \frac{2}{\sqrt{2+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} , \quad x \in [-2+4\varepsilon, 2]$$

следует (7.22).

ЛЕММА 7.4. Пусть операторы A, B и R удовлетворяют условиям теоремы 8.3. Тогда справедлива оценка

$$\| U_k(L_k, I) B_\tau^{-1/2} A^{1/2} \| \leqslant \frac{\tau^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} , \tag{7.23}$$

где

$$L_\tau = 2I - \tau^2 B_\tau^{-1} A, \quad B_\tau = B + \tau^2 R; \tag{7.24}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как операторы A, B и R – самосопряженные, положительные и коммутирующие, то

$$(B_\tau^{-1})^* = B_\tau^{-1} \qquad \text{и} \qquad B_\tau^{-1} A = A B_\tau^{-1}.$$

Отсюда и из г) следует, что

$$0 \leqslant \tau^2 B_\tau^{-1} A \leqslant 4(1-\varepsilon).$$

Тогда

$$(-2+4\varepsilon) I \leqslant L_\tau \leqslant 2,$$

или

$$Sp(L_\tau) \subset [-2+4\varepsilon, 2], \quad \varepsilon \in]0,1[. \tag{7.25}$$

Далее,

$$B_\tau^{-1/2} A^{1/2} = \tau^{-1} (2I - L_\tau)^{1/2}.$$

Применяя теперь лемму 7.3, получим оценку (7.23).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.3. В силу (4.15) и (4.16), для решения u_k схемы (7.1) справедливы неравенства:

$$\|u_k\| \leqslant \|T_{k-1}\| \cdot \|u_0\| + \|U_{k-1}(L_\tau, I)\| \cdot \|u_1 - u_0\| +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|U_{k-1-i}(L_\tau, I) B_\tau^{-1} f_i\|, \tag{7.26}$$

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \|M_{k-1} u_0\| + \|T_k\| \cdot \|u_1 - u_0\| +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{k} \|T_{k-i}\| \cdot \|B_\tau^{-1}\| \cdot \|f_i\|, \tag{7.27}$$

где операторы T_k, M_k, L_τ и B_τ определяются формулами (7.13), (7.14) и (7.24). Так как оператор L_τ удовлетворяет соотношению (7.25), то согласно леммам 7.I, 7.2 и 7.3 справедливы следующие оценки:

$$\| U_k(L_\tau, I) \| \leqslant k+1, \quad \| T_k \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \| M_k \| \leqslant \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}},$$

$$\| (2I - L_\tau)^{1/2} U_k(L_\tau, I) \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Далее, применяя (7.23), получим

$$\| U_k(L_\tau, I) B_\tau^{-1} f_k \| < \| U_k(L_\tau, I) B_\tau^{-1/2} A^{1/2} \| \times$$

$$\times \| B_\tau^{-1/2} A^{1/2} f_k \| \leqslant \frac{\tau^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \| B_\tau^{-1/2} \| \cdot \| A^{-1/2} f_k \|.$$

Подставляя теперь эти оценки в (7.26) и (7.27) и учитывая при этом, что $\| B_\tau^{-1} \| \leqslant \beta^{-1}$, получим оценки (7.I7) и (7.20). Остается вывод оценки (7.2I). Для этого достаточно доказать справедливость неравенства

$$\| M_{k-1} u_0 \| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\beta\varepsilon}} \| A^{1/2} u_0 \|. \tag{7.29}$$

Из представления оператора L_τ следует, что

$$2I - L_\tau = \tau^2 B_\tau^{-1} A.$$

Тогда, применяя (7.22) и (7.28), получим

$$\| M_{k-1} u_0 \| \leqslant \| (2I - L_\tau)^{1/2} U_{k-1}(L_\tau, I) \| \cdot \| (2I - L_\tau)^{1/2} u_0 \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \| \tau B_\tau^{-1/2} A^{1/2} u_0 \| \leqslant \frac{\tau}{\sqrt{\varepsilon\beta}} \| A^{1/2} u_0 \|.$$

Оценки (7.I8) и (7.I9) следуют из формулы

$$u_к=(U_{к-1}-U_{к-2})u_0+U_{к-1}B_\tau^{-1/2}A^{1/2}(A^{-1/2}B_\tau^{1/2}(u_1-u_0))+$$

$$+\tau^2\sum_{i=1}^{к-1}U_{к-1}B_\tau^{-1/2}A^{1/2}(A^{-1/2}B_\tau^{-1/2}f_i), \qquad (7.29)$$

с учетом (7.5) и (7.23).

7.2. Рассмотрим теперь в конечномерном гильбертовом пространстве H трехслойную разностную схему вида (см. А.А.Самарский [45] гл. УП)

$$B\frac{u_{к+1}-u_{к-1}}{2\tau}+R(u_{к+1}-2u_к+u_{к-1})+Au_к=f_к, \qquad (7.30)$$

$$к=1,2,\ldots$$

Здесь A , B и R - линейные операторы в H ; u_0 , u_1 и $f_к$, $(к=1,2,\ldots)$ - заданные элементы пространства H.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть в схеме (7.30) операторы A , B и R - самосопряженные и попарно коммутирующие. Предположим, кроме того, что $A>0$ и $B\geq\beta I>0$. Тогда

а) Если $\varepsilon R\leq\frac{1}{4}A\leq(1-\varepsilon)R$, $\varepsilon\in\,]\,0,\frac{1}{2}]$, то

$$\|u_к\|\leq\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)}}(\|u_0\|+\|u_1\|+2\beta^{-1}\tau\sum_{i=1}^{к-1}\|f_i\|). \qquad (7.3I)$$

б) Если $R\geq\frac{1}{4}A$, то

$$\|u_к\|\leq(к-1)\|u_0\|+к\|u_1\|+2\beta^{-1}\tau\sum_{i=1}^{к-1}(к-i)\|f_i\|. \qquad (7.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схему (7.30) представим в виде:

$$(\frac{1}{2\tau}B+R)u_{к+1}-(2R-A)u_к+(-\frac{1}{2\tau}B+R)u_{к-1}=f_к.$$

Отсюда следует, что

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + g_k \ , \ k=1,2,\dots , \tag{7.33}$$

где

$$L_\tau = \left(\frac{1}{2\tau} B + R\right)^{-1}(2R-A),$$

$$S_\tau = -\left(\frac{1}{2\tau} B + R\right)^{-1}\left(\frac{1}{2\tau} B - R\right),$$

$$g_\tau = -\left(\frac{1}{2\tau} B + R\right)^{-1} f_k .$$

Из условий теоремы следует, что L_τ и S_τ самосопряженные и коммутирующие операторы. Тогда согласно лемме 4.4 для u_k справедлива формула (4.I4) и, следовательно:

$$\|u_k\| \leqslant \|U_{k-1}(L_\tau,S_\tau)\|\cdot\|u_1\| + \|S_\tau\|\cdot\|U_{k-2}(L_\tau,S_\tau)\|\cdot\|u_0\| +$$

$$+ \left\|\left(\frac{1}{2\tau} B + R\right)^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k-1} \|U_{k-1-i}(L_\tau,S_\tau)\|\cdot\|f_i\| . \tag{7.34}$$

Оценим норму операторного полинома $U_k(L_\tau,S_\tau)$. L_τ и S_τ представим в виде

$$S_\tau = 2K_\tau - I , \quad L_\tau = N(S_\tau + I),$$

где

$$K_\tau = \left(\frac{1}{2\tau} B + R\right)^{-1} R, \ \ N = I - \frac{1}{2} R^{-1} A .$$

Так как $Sp(K_\tau) \subset [0,1]$, то $Sp(S_\tau) \subset [-1,1]$. Далее,

а) Если $\varepsilon R \leqslant \frac{1}{4} A \leqslant (1-\varepsilon) R$, то $Sp(N) \subset [-1+2\varepsilon, 1-2\varepsilon]$.

б) если $R \geq \frac{1}{4} A$, то $S_p(N) \subset [-1,1]$.

Учитывая эти соотношения, в силу замечания 5.2, получим

$$\| U_k(L_\tau, S_\tau) \| = \| U_k(N(S_\tau + I), S_\tau) \| \leq$$

$$\leq \max_{(a,y) \in G_\varepsilon} | U_k(a(y+1), y) |,$$

где

$$G_\varepsilon = [-1+2\varepsilon, 1-2\varepsilon] \times [-1,1].$$

Так как (см. оценки (2.25) и (I.II))

$$| U_k(a(y+1), y) | \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)}} \quad \text{при} \quad (a,y) \in G_\varepsilon, \; \varepsilon \in]0,1[$$

и

$$| U_k(a(y+1), y) | \leq k+1 \quad \text{при} \quad (a,y) \in G_0,$$

то

$$\| U_k(L_\tau, S_\tau) \| \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(1-\varepsilon)}} \quad \text{в случае (а)},$$

$$\| U_k(L_\tau, S_\tau) \| \leq k+1 \quad \text{в случае (б)}$$

Представляя теперь эти оценки поочередно в (7.34) и учитывая при этом неравенства

$$\left\| \left(\frac{1}{2\tau} B + R \right)^{-1} \right\| \leq \frac{2\tau}{\beta}, \qquad \| S_\tau \| \leq 1.$$

получим соответственно (7.3I) и (7.32).

7.3. В заключении этого параграфа рассмотрим явные трехслойные схемы, имеющие вид:

$$\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+Au_k=f_k\,,\quad k=1,2,\dots, \tag{7.35}$$

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+Au_k=f_k\,,\quad k=1,2,\dots, \tag{7.36}$$

где A – линейный оператор в конечномерном гильбертовом пространстве H ; u_0 , u_1 , f_k ($k=1,2,\dots$) – заданные элементы пространства H .

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 7.5. Пусть в схеме (7.35) оператор A – кососимметрический ($A^*=-A$) в комплексном гильбертовом пространстве H и $\tau\|A\|\leq 1-\varepsilon$, $\varepsilon\in[0,1]$. Тогда

а) Если $\varepsilon>0$, то справедлива оценка

$$\|u_{k+1}\|\leq\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}\Big(\|u_0\|+\|u_1\|+2\tau\sum_{i=1}^{k}\|f_i\|\Big), \tag{7.37}$$

б) Если $\varepsilon=0$, то справедлива оценка

$$\|u_{k+1}\|\leq k\|u_0\|+(k+1)\|u_1\|+2\tau\sum_{i=1}^{k}(k+1-i)\|f_i\|. \tag{7.38}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (4.14) для решения u_k схемы (7.35) справедливо неравенство

$$\|u_{k+1}\|\leq\|U_k(iL_\tau,-1)\|\cdot\|u_1\|+\|U_{k-1}(iL_\tau,-1)\|\cdot\|u_0\|+$$
$$+2\tau\sum_{s=1}^{k}\|U_{k-s}(iL_\tau,-1)\|\cdot\|f_s\|, \tag{7.39}$$

где

$$L_\tau=2\tau iA\,,\quad i=\sqrt{-1}.$$

Из формулы

$$U_k(x,y) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^s C^s_{k-i}\, x^{k-2s} y^s$$

следует, что

$$U_k(ix,-y) = i^k U_k(x,y).$$

Согласно этой формуле получим

$$\| U_k(iL_\tau, -I)\| = \| U_k(L_\tau, I)\|.$$

Так как $L_\tau = L^*_\tau$ и $\| L_\tau \| \leq 2(1-\varepsilon)$, то в силу теоремы 5.9 и оценки (I.7), справедливо неравенство

$$\| U_k(iL_\tau, -I)\| = \| U_k(L_\tau, I)\| \leq$$

$$\leq \max_{|x| \leq 2(1-\varepsilon)} |U_k(x,1)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}.$$

Отсюда и из (7.39) следует (7.37). Неравенство (7.38) доказывается с применением оценки

$$\| U_k(L_k, I)\| \leq k+1 \quad \text{при} \quad \tau\|A\| \leq 1.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7.6. Пусть в схеме (7.36) оператор A самосопряжен и $0 \leq \tau^2 A \leq 4(1-\varepsilon) I$, $\varepsilon \in [0,1]$. Тогда

а) Если $\varepsilon > 0$, то справедливы оценки (7.I7), (7.I8 а), (7.I9 б), (7.20) и (7.2I) с постоянной $\beta = 1$ и оператором $B_\tau = I$.

б) Если $\varepsilon = 0$, то справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leq (2k-1)\| u_0 \| + t_k \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| + \tau \sum_{i=1}^{k-1} t_{k-i} \| f_i \|, \quad (7.40)$$

$$\left\| \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} \right\| \leq t_k \| A u_0 \| + (2k-1) \left\| \frac{u_1 - u_0}{\tau} \right\| +$$

$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} (2k+1-i) \| f_i \|, \quad k = 1, 2, \ldots, \; t_k = k\tau. \qquad (7.41)$$

Первая часть теоремы является следствием теоремы 7.3 при $B=I$ и $R=0$. Вторая часть доказывается с помощью оценки

$$\| U_k (L_\tau, I) \| \leq k+1, \quad L_\tau = 2I - \tau^2 A.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Критерий устойчивости схемы (7.35), когда оператор A подобен кососимметрическому оператору ($A = C^{-1} K C, K^* = -K$) и схемы (7.36), когда оператор A подобен самосопряженному оператору ($A = C^{-1} L C$, $L^* = L$) принадлежит А.В.Гулину [II]. В этой работе доказывается, что необходимым условием устойчивости схемы (7.35) является неравенство $\tau \| K \| \leq 1$, а схемы (7.36) - неравенство $0 \leq \tau^2 L \leq 4I$.

Как видно из теорем 7.5 и 7.6, при выполнении этих условий справедлива оценка (7.38) для схемы (7.35) и оценки (7.40) и (7.4I) - для схемы (7.36). Приведенные оценки (из-за наличия множителей $k = i$ и $2k - i$) указывает на то, что схемы (7.35) и (7.36) слабо устойчивы при $\varepsilon = 0$.

ГЛАВА III. УСТОЙЧИВОСТЬ И СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 8. Абстрактное гиперболическое уравнение

8.1. Пусть H гильбертово пространство, норму и скалярное произведение в котором обозначим соответственно через $\|\cdot\|$ и $(\cdot\,,\,)$. Рассмотрим задачу Коши

$$u''(t)+Au(t)=f(t),\ t\in[0,T], \tag{8.1}$$

$$u(0)=\varphi_0\,,\quad u'(0)=\varphi_1\,. \tag{8.2}$$

Здесь и $u(t)$ и $f(t)$ - функции со значениями в H, A - неограниченный, самосопряженный оператор в H с областью определения $\mathcal{D}(A)$; φ_0 и φ_1 - заданные элементы из H. Предположим, кроме того, что выполняется неравенство $A\geqslant\alpha I$, $\alpha=\mathrm{const}\geqslant 0$, т.е.

$$(Ah,h)\geqslant\alpha\|h\|^2,\quad h\in\mathcal{D}(A).$$

Введем нужные нам пространства. Определив в $\mathcal{D}(A)$ эрмитову норму $\|h\|^2=\|Ah\|$, получим гильбертово пространство W^2. Аналогично, определив в $\mathcal{D}(A^{1/2})$ норму $\|h\|_1=\|A^{1/2}h\|$ получим гильбертово пространство W^1. Обозначим через $C(H)$ множество всех непрерывных на $[0,T]$ функций со значениями в H, через $C^m(H)$ (целое число $m\geqslant 1$) - множество всех непрерывно дифференцируемых функций из $C(H)$ до порядка m включительно. Аналогично определяем множества $C(W^i)$ и $C^m(W^i)$, $i=1,2$.

Далее всюду решением задачи (8.1), (8.2) будем называть функцию $u(t)\in C^2(H)\cap C(W^2)$, удовлетворяющую уравнению (8.1) на отрезке $[0,T]$ и условиям (8.2). Теорема о существовании и единственности такого решения, когда $\varphi_0\in W^2$, $\varphi_1\in W^1$ и

$f(t) \in C^1(H)$ (или $f(t) \in C(W^2)$) доказана, например, в [I7] (см. теорема I.5, стр. 30I).

Заметим, что вопросы существования и единственности слабых решений для задачи вида (8.I), (8.2) изучены в [22], где приводится обширная библиография по данному вопросу.

Задаче (8.I), (8.2) ставится в соответствие следующая разностная задача:

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+A\,\frac{u_{k+1}+\sigma u_k+u_{k-1}}{2+\sigma}=f_k\,, \tag{8.3}$$

где $\sigma \neq -2$, $k=\overline{1,n-1}$, $\tau=T/n$, u_0, u_1 - заданы.

ТЕОРЕМА 8.I. Пусть $u_0, u_1 \in D(A)$, $f_k \in H$, $k=\overline{1,n-1}$ и $\sigma \in]-2;2[$. Тогда

а) если $\alpha > 0$, то справедливы оценки:

$$\| u_{k+1}\| \le C_0\| u_0\| + C_1(\tau)\left\| \frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + C_2\tau\sum_{i=1}^{k}\| A^{-1/2} f_i\|, \tag{8.4}$$

$$\| u_{k+1}\| \le C_0\left(\| u_0\| + \left\| B_\tau^{1/2}A^{-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\| B_\tau^{-1/2}A^{-1/2} f_i\|\right), \tag{8.5}$$

$$\| B_\tau^{1/2}u_{k+1}\| \le C_0\left(\| B_\tau^{1/2}u_0\| + \left\| B_\tau A^{-1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\| A^{-1/2} f_i\|\right), \tag{8.6}$$

$$\| A^{1/2}u_{k+1}\| \le C_0\left(\| A^{1/2}u_0\| + \left\| B_\tau^{1/2}\frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \tau\sum_{i=1}^{k}\| B_\tau^{-1/2} f_i\|\right), \tag{8.7}$$

$$\| A^{1/2}u_{k+1}\| \le C_0\left(\| A^{1/2}u_0\| + \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + \sigma_0\| A^{1/2}(\Delta u_0)\|\right) + C_2\tau\sum_{i=1}^{k}\| f_i\|, \tag{8.8}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le \frac{C_3}{\tau}\| u_0\| + C_0\left\| \frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + C_2\tau\sum_{i=1}^{k}\| f_i\|, \tag{8.9}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau}\right\| \le C_2\| A^{1/2}u_0\| + C_0\left\| \frac{\Delta u_0}{\tau}\right\| + C_2\tau\sum_{i=1}^{k}\| f_i\|, \tag{8.I0}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq C_0 \left(\| A^{1/2} B_\tau^{-1/2} u_0 \| + \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| \right) + C_2 \tau \sum_{i=1}^{k} \| B_\tau^{-1/2} f_\tau \|, \quad (8.11)$$

$$\left\| B_\tau^{1/2} \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq C_0 \left(\| A^{1/2} u_0 \| + \left\| B_\tau^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| \right) + C_2 \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_\tau \|, \quad (8.12)$$

$$\left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq C_2 \| A u_0 \| + C_0 \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + C_2 \sum_{i=1}^{k} \| f_i - f_{i-1} \|, \quad (8.13)$$

$$\left\| \frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2} \right\| \leq C_2 \left(\| A u_0 \| + \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \sum_{i=1}^{k} \| f_i - f_{i-1} \| \right), \quad (8.14)$$

$$\| A u_k \| \leq C_0 \left(\| A u_0 \| + \left\| B_\tau^{1/2} A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| \right) + C_3 \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|, \quad (8.15)$$

$$\| A u_{k+1} \| \leq C_0 \left(\| A u_0 \| + \left\| B_\tau^{1/2} A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \tau \sum_{i=1}^{k} \| A^{1/2} B_\tau^{-1/2} f_i \| \right), \quad (8.16)$$

$$\| A u_{k+1} \| \leq C_0 \left(\| A u_0 \| + \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \sigma_0 \| A (\Delta u_0) \| \right) + C_3 \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|, \quad (8.17)$$

$$\left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq C_2 \| A u_0 \| + C_0 \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + 2 \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|, \quad (8.18)$$

$$\left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq C_2 \| A u_0 \| + C_0 \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + C_2 \tau \sum_{i=1}^{k} \| A^{1/2} B_\tau^{-1/2} f_i \|, \quad (8.19)$$

$$\left\| \frac{\Delta^2 u_k}{\tau^2} \right\| \leq C_2 \left(\| A u_0 \| + \left\| A^{1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \right) + \sum_{i=1}^{k+1} \| f_i \|, \quad (8.20)$$

б) если $\alpha = 0$, то справедливы оценки: (8.7)–(8.16), (8.18)–(8.20) и оценка

$$\| u_{k+1} \| \leq C_2 \| u_0 \| + t_{k+1} \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \tau^2 \sum_{i=1}^{k} t_{k+1-i} \| f_i \|. \quad (8.21)$$

Здесь

$$t_k = k\tau, \quad k=\overline{1, n-1}, \quad f_0=0,$$

$$C_0 = 2(2-\sigma)^{-1/2}, \quad C_1(\tau) = 2\left[\frac{2+\sigma+\alpha\tau^2}{(4-\sigma^2)\alpha}\right]^{1/2},$$

$$C_2 = 2(2+\sigma)^{-1/2}, \quad C_3 = 2(2-\sigma)^{-1/2}(2+\sigma)^{1/2},$$

$$\sigma_0 = (2+\sigma)^{-1/2}, \quad B_\tau = I + \tau^2(2+\sigma)^{-1}A.$$

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 8.I. Пусть $A = A^* \geq \alpha I, \alpha>0, B = B^* \geq \beta I, \beta>0$, $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ и $B^{-1}Ah = AB^{-1}h$, $h \in \mathcal{D}(A)$. Тогда справедливы равенства

$$B^{-1}A^{-1}h = A^{-1}B^{-1}h, \qquad h \in \mathcal{D}(A), \tag{8.22}$$

$$B^{-s}A^{-s}h = A^{-s}B^{-s}h, \qquad s=\frac{1}{2}, \quad h \in H, \tag{8.23}$$

$$B^{s}A^{s}h = A^{s}B^{s}h, \qquad h \in \mathcal{D}(A), \tag{8.24}$$

$$(A^{s}B^{-s})^2 h = AB^{-1}h, \qquad h \in H, \tag{8.25}$$

$$(B^{-s}A^{s})^2 h = B^{-1}Ah, \qquad h \in \mathcal{D}(A). \tag{8.26}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 5.6 из соотношения $A=A^*>\alpha I$ следует, что $R(A) = H$, существует A^{-1} и $A^{-1} = (A^{-1})^*$. Очевидно, что A^{-1} ограничен и

$$(A^{-1}h, h) \geq 0 \qquad \text{при} \quad h \in H.$$

Тогда по теореме 2 ([I6] , стр. 228) существует единственный квадратный корень $(A^{-1})^{1/2}$. Положим $A^{-1/2} = (A^{-1})^{1/2}$. Заметим, что по определению ([I6], стр. 353) $A^{1/2} = (A^{-1/2})^{-1}$.

$(A^{1/2})^2 = A$ ([I6] , лемма 3.37, стр. 354) и $A^{1/2}$ и есть единственный квадратный корень из неограниченного оператора A ([I6] , лемма 3.46, стр. 358). Тоже самое верно для оператора B

Перестановочность операторов A^{-1} и B^{-1} следует из равенства

$$B^{-1}A^{-1}h = B^{-1}A^{-1}BB^{-1}h = B^{-1}BA^{-1}B^{-1}h = A^{-1}B^{-1}h.$$

Из (8.22) по определению квадратного корня сразу следует (8.23). Докажем перестановочность неограниченных самосопряженных операторов A^s и B^s , $s = \frac{1}{2}$. Так как A и B имеют общую область определения, то $\mathcal{D}(A^s) = \mathcal{D}(B^s)$, $0 < s < 1$ (Э.Хаинц [69]). Отсюда следует, что если $h \in \mathcal{D}(A)$, то

$$A^{1/2}h \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \qquad B^{1/2}h \in \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Тогда в силу (8.23) получим

$$B^sA^sh = B^sA^s(B^{-s}A^{-s}A^sB^sh) =$$
$$= B^sA^s(A^{-s}B^{-s}A^sB^sh) = A^sB^sh, \quad s = \tfrac{1}{2}, \quad h \in \mathcal{D}(A),$$

что и требовалось доказать.

Последние два соотношения проверяются непосредственно:

$$(A^sB^{-s})^2h = A^sB^{-s}A^sB^{-s}h = A^sB^{-s}A^sB^{-2s}h =$$

$$= A^sB^{-s}B^sA^sB^{-1}h = AB^{-1}h, \quad h \in H;$$

$$(B^{-s}A^s)^2h = B^{-s}A^sB^{-s}A^sh = B^{-s}A^sB^{-s}A^{-s}A^{2s}h =$$

$$= B^{-s}A^sA^{-s}B^{-s}A^{2s}h = B^{-1}Ah, \quad h \in \mathcal{D}(A).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть $A=A^*\geq \alpha I$, $\alpha>0, б\in]-2,2[$. Тогда справедливы оценки:

$$\|U_к(L_\tau, I)\|\leq C_1(\tau), \tag{8.27}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)B_\tau^{-1}h\|\leq \frac{C_2}{\tau}\|A^{-1/2}h\|,\ h\in H, \tag{8.28}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)A^{1/2}B_\tau^{-1/2}\|\leq \frac{C_0}{\tau}, \tag{8.29}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)A^{1/2}B_\tau^{-1}\|\leq \frac{C_2}{\tau}, \tag{8.30}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)AB_\tau^{-1}\|\leq \frac{C_2}{\tau^2}, \tag{8.31}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)AB_\tau^{-2}\|\leq \frac{1}{\tau^2}, \tag{8.32}$$

$$\|(2I-L_\tau)U_к(L_\tau, I)\|\leq C_3, \tag{8.33}$$

$$\|(2I-L_\tau)U_к(L_\tau, I)\|\leq C_0\tau\|A^{1/2}B_\tau^{-1/2}h\|,\ h\in H, \tag{8.34}$$

$$\|(2I-L_\tau)U_к(L_\tau, I)h\|\leq C_2\tau\|A^{1/2}h\|,\ h\in D(A), \tag{8.35}$$

$$\|U_к(L_\tau, I)-U_{к-1}(L_\tau, I)\|\leq C_0, \tag{8.36}$$

$$\|(U_к(L_\tau, I)-U_{к-1}(L_\tau, I))B_\tau^{-1/2}\|\leq C_2, \tag{8.37}$$

$$\|(U_k(L_\tau,I)-U_{k-1}(L_\tau,I))B_\tau^{-1}\| \leq C_2 , \qquad (8.38)$$

$$\|(U_k(L_\tau,I)-U_{k-1}(L_\tau,I))A^{1/2}B_\tau^{-1}\| \leq \frac{2}{\tau} , \qquad (8.39)$$

где C_0, $C_1(\tau)$, C_2, C_3 – постоянные из теоремы 8.I,

$$L_\tau = (2+\sigma)B_\tau^{-1} - \sigma I, \qquad B_\tau = I + \frac{\tau^2}{2+\sigma} A .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, неравенство (8.28). Очевидно, что справедливо неравенство (вместо $U_k(L_\tau, I)$ будем писать U_k)

$$\|U_k B_\tau^{-1} h\| \leq \|U_k A^{1/2} B_\tau^{-1}\| \cdot \|A^{-1/2} h\|, \; h \in H . \qquad (8.40)$$

Так как

$$B_\tau^{-1} = (2+\sigma)^{-1} (\sigma I + L_\tau),$$

$$\tau^2 A B_\tau^{-1} = 2I - L_\tau ,$$

то в силу (8.25) получим

$$\|U_k A^s B_\tau^{-s} B_\tau^{-s}\| \leq \tau^{-1}(2+\sigma)^{-s}\|U_k(2I-L_\tau)^s(\sigma I+L_\tau)^s\|, \; s=\frac{1}{2} . \qquad (8.4I)$$

Согласно теоремы 5.II справедлива оценка

$$\|U_k(2I-L_\tau)^s(\sigma I+L_\tau)^s\| =$$

$$= \max_{x \in Sp(L_\tau)} |U_k(x,1)(2-x)^s(\sigma+x)^s|, \; s=\frac{1}{2} . \qquad (8.42)$$

Далее, из формулы

$$L_\tau = (2+\sigma) B_\tau^{-1} - \sigma I$$

следует, что

$$Sp(L_\tau) \subset [-\sigma, \sigma_\tau],$$

где

$$\sigma_\tau = \frac{4+2\sigma-\sigma\alpha\tau^2}{2+\sigma+\alpha\tau^2}, \quad \sigma \in]-2;2[.$$

Тогда в силу оценки (1.7) из (8.42) получим

$$\| U_k (2I - L_\tau)^s (\sigma I + L_\tau)^s \| \leq$$

$$\leq 2 \max_{-\sigma \leq x \leq \sigma_\tau} \frac{(2-x)^s (\sigma+x)^s}{(4-x^2)^s} \leq 2, \quad s = \frac{1}{2}, \tag{8.43}$$

Окончательно, из (8.40), (8.41) и (8.43) следует оценка (8.28).

Аналогично доказываются и другие оценки с применением (1.7) и (3.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Схему (8.3) представим в виде

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - u_{k-1} + \tau^2 B_\tau^{-1} f_k, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где

$$B_\tau = I + \frac{\tau^2}{2+\sigma} A, \quad L_\tau = (2+\sigma) B_\tau^{-1} - \sigma I.$$

Отсюда согласно формулам (4.15) и (4.16) следует, что для u_k справедливы представления

$$u_{k+1} = (U_k - U_{k-1}) u_0 + U_k (u_1 - u_0) + \tau^2 \sum_{i=1}^{k} U_{k-i} B_\tau^{-1} f_\tau, \tag{8.44}$$

$$\Delta u_\kappa = (L_\tau + 2I) U_{\kappa-1} u_0 + (U_\kappa - U_{\kappa-1})(u_1 - u_0) +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{\kappa} (U_{\kappa-i} - U_{\kappa-1-i}) B_\tau^{-1} f_i, \tag{8.45}$$

$$\Delta u_\kappa = (L_\tau - 2I) U_{\kappa-1} u_0 + (U_\kappa - U_{\kappa-1})(u_1 - u_0) +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{\kappa} U_{\kappa-i} B_\tau^{-1} (f_i - f_{i-1}), \tag{8.46}$$

$$\Delta^2 u_\kappa = (L_\tau - 2I)[(U_\kappa - U_{\kappa-1}) u_0 + U_\kappa (u_1 - u_0)] +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{\kappa+1} (U_{\kappa+1-i} - U_{\kappa-i}) B_\tau^{-1} (f_i - f_{i-1}), \tag{8.47}$$

$$\Delta^2 u_\kappa = (L_\tau - 2I)[(U_\kappa - U_{\kappa-1}) u_0 + U_\kappa (u_1 - u_0) +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{\kappa} U_{\kappa-i} B_\tau^{-1} f_i] + \tau^2 B_\tau^{-1} f_{\kappa+1}, \tag{8.48}$$

где $\kappa = 1, \overline{n-1}$, $f_0 = 0$, $U_{-1} = 0$, $\Delta u_\kappa = u_{\kappa+1} - u_\kappa$, $\Delta^2 u_\kappa = \Delta(\Delta u_\kappa)$.

Из этих формул с учетом (8.27)-(8.39) следуют оценки теоремы 8.I. Докажем некоторые из них, например, (8.5) и (8.I7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СПРАВЕДЛИВОСТИ ОЦЕНКИ (8.5). Из формулы (8.44) следует неравенство

$$\| u_{\kappa+1} \| \leq \| U_\kappa - U_{\kappa-1} \| \| u_0 \| + \tau \| U_\kappa A^{1/2} B_\tau^{-1/2} \| \| B_\tau^{1/2} A^{-1/2} \frac{\Delta u_0}{\tau} \| +$$

$$+ \tau^2 \sum_{i=1}^{\kappa} \| U_{\kappa-i} A^{1/2} B_\tau^{-1/2} \| \| A^{-1/2} B_\tau^{-1/2} f_i \|.$$

Отсюда с учетом (8.36) и (8.29) следует (8.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СПРАВЕДЛИВОСТИ ОЦЕНКИ (8.I7). В силу леммы 8.I $\| B_\tau^{1/2} R_\tau^{-1} \| = \| B_\tau^{1/2} (R_\tau^{-2})^{1/2} \| = \| (B_\tau R_\tau^{-2})^{1/2} \|$, $R_\tau = I + \tau \sigma_0 A^{1/2}$.

Далее, так как

$$R_\tau^2 \geq B_\tau \geq 0,$$

то (см. лемму 5.4)

$$\| B_\tau (R_\tau^2)^{-1} \| = \| B_\tau R_\tau^{-2} \| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\| B_\tau^{1/2} R_\tau^{-1} \| \leq 1.$$

Тогда

$$\| B_\tau^{1/2} A^{1/2} h \| \leq \| B_\tau^{1/2} R_\tau^{-1} \| \| R_\tau A^{1/2} h \| \leq$$

$$\leq \| (A^{1/2} + \tau \sigma_0 A) h \| \leq \| A^{1/2} h \| + \tau \sigma_0 \| A h \| , \quad h \in D(A).$$

Подставляя эту оценку в (8.15), получим (8.17), что и требовалось доказать.

8.2. В этом пункте для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ ($u(t_k$ - значения точного решения в точке $t_k = k\tau$) будет установлен порядок сходимости по τ в зависимости от гладкости решения.

Очевидно, что z_k является решением разностной задачи:

$$\frac{z_{k+1} - 2z_k + z_{k-1}}{\tau^2} + A \frac{z_{k+1} + \sigma z_k + z_{k-1}}{2+\sigma} = \varepsilon_k , \quad k = \overline{1, n-1},$$

где

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{0,k} + \varepsilon_{3,k} + (2+\sigma)^{-1} (\varepsilon_{2,k} - \varepsilon_{1,k}) .$$

$$\varepsilon_{0,k} = \frac{\Delta^2 u(t_{k-1})}{\tau^2} - u''(t_k), \quad \varepsilon_{1,k} = \Delta^2 u''(t_{k-1}),$$

$$\varepsilon_{2,\kappa} = \Delta^2 f(t_{\kappa-1}), \qquad \varepsilon_{3,\kappa} = f_{,}(t_\kappa) - f_\kappa,$$

$$\Delta^2 u(t_{\kappa-1}) = \Delta(\Delta u(t_{\kappa-1})), \quad \Delta u(t_{\kappa-1}) = u(t_\kappa) - u(t_{\kappa-1}).$$

Из теоремы 8.I непосредственно следует теорема об оценке погрешности.

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть выполняются условия теоремы 8.I и решение задач (8.I), (8.2) $u(t) \in C^m(H)$, $m \geq 2$. Тогда для справедливы оценки (8.4)-(8.20) с правой частью $\varepsilon_\kappa, \kappa=\overline{1,n-1}$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы о сходимости.

Предварительно положим

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\Delta^2 u(t-\tau)}{\tau^2} - u''(t), \qquad \varepsilon_1(t) = \Delta^2 u''(t-\tau),$$

$$\varepsilon_2(t) = \Delta^2 f(t-\tau), \quad \varphi_1 = u'(0), \quad \varphi_2 = u'(0) + \frac{\tau}{2} u''(0),$$

$$\Delta^2 u(t-\tau) = \Delta(\Delta u(t-\tau)), \quad \Delta u(t-\tau) = u(t) - u(t-\tau),$$

$$t, t+\tau, t-\tau \in [0,T].$$

ЛЕММА 8.3. Справедливы оценки:

$$\|\varepsilon_0(t)\| \to 0, \quad (\tau \to 0), \quad u(t) \in C^2(H), \tag{8.49}$$

$$\|\varepsilon_0(t)\| \leq \alpha_i \tau^i, \quad i = 1,2, \quad u(t) \in C^{2+i}(H), \tag{8.50}$$

$$\|\varepsilon_1(t)\| \to 0, \quad (\tau \to 0), \quad u(t) \in C^2(H), \tag{8.51}$$

$$\|\varepsilon_1(t)\| \leq \alpha_{2+i} \tau^i, \quad i = 1,2, \quad u(t) \in C^{2+i}(H), \tag{8.52}$$

$$\|\varepsilon_2(t)\| \to 0, \quad (\tau \to 0), \quad f(t) \in C(H). \tag{8.53}$$

$$\| \varepsilon_2(t) \| \leq \alpha_{4+i} \tau^i, \quad i=1,2, \quad f(t) \in C^i(H), \tag{8.54}$$

$$\| \frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_i \| \leq \alpha_{6+i} \tau^i, \; i=1,2, \; u(t) \in C^{1+i}(H), \tag{8.55}$$

$$\| A^{1/2} \left(\frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_1 \right) \to 0, \; (\tau \to 0), \; u(t) \in C^1(W^1), \tag{8.56}$$

$$\| A^{1/2} \left(\frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_i \right) \| \leq \alpha_{8+i} \tau^i, \; i=1,2, \; u(t) \in C^{1+i}(W^1), \tag{8.57}$$

$$\| \Delta \varepsilon_0 (t-\tau) \| \to 0, \quad (\tau \to 0), \quad u(t) \in C^2(H), \tag{8.58}$$

$$\| \Delta \varepsilon_0 (t-\tau) \| \leq \beta_i \tau^i, \quad i=1,2,3, \; u(t) \in C^{2+i}(H), \tag{8.59}$$

$$\| \Delta \varepsilon_1 (t-\tau) \| \to 0, \quad (\tau \to 0), \quad u(t) \in C^2(H), \tag{8.60}$$

$$\| \Delta \varepsilon_1 (t-\tau) \| \leq \beta_{3+i} \tau^i, \; i=1,2,3, \; u(t) \in C^{2+i}(H), \tag{8.61}$$

$$\| \Delta \varepsilon_2 (t-\tau) \| \to 0, \quad (\tau \to 0), \; u(t) \in C(H), \tag{8.62}$$

$$\| \Delta \varepsilon_2 (t-\tau) \| \leq \beta_{6+i} \tau^i, \; i=1,2,3, \; u(t) \in C^i(H), \tag{8.63}$$

$$\| A \left(\frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_1 \right\| \to 0, \; (\tau \to 0), \; u(t) \in C^1(W^2), \tag{8.64}$$

$$\| A \left(\frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_i \right) \| \leq \alpha_{10+i} \tau^i, \; i=1,2, \; u(t) \in C^{1+i}(W^2), \tag{8.65}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} a_3 , \quad \alpha_2 = \frac{1}{12} a_4 , \quad \alpha_3 = 2 a_3 , \quad \alpha_4 = a_4 ,$$

$$\alpha_5 = 2 b_1 , \quad \alpha_6 = b_2 , \quad \alpha_7 = \frac{1}{2} a_2 , \quad a_8 = \frac{1}{6} a_3 ,$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{2} C_{1,2} , \quad \alpha_{10} = \frac{1}{6} C_{1,3} , \quad \alpha_{11} = \frac{1}{2} C_{2,2} , \quad \alpha_{12} = \frac{1}{6} C_{2,3} ,$$

$$\beta_1 = 3 a_3 , \quad \beta_2 = \frac{4}{3} , \quad \beta_3 = \frac{7}{15} a_5 ,$$

$$\beta_4 = 6 a_3 , \quad \beta_5 = 4 a_4 , \quad \beta_6 = 2 a_5 ,$$

$$\beta_7 = 6 b_1 , \quad \beta_8 = 4 b_2 , \quad \beta_9 = 2 b_8 ,$$

$$a_i = \sup_t \| u^{(i)}(t) \| , \quad i = 2, 3, 4, 5 ,$$

$$b_i = \sup_t \| f^{(i)}(t) \| , \quad i = 1, 2, 3 ,$$

$$C_{i,j} = \sup_t \| A^{i/2} u^j(t) \| , \; i = 1, 2 , \; j = 2, 3 , \; t \in [0, T] .$$

Справедливость этих оценок доказывается с помощью формул Тейлора:

$$u(t+\tau)=u(t)+\tau u'(t)+\dots+\frac{\tau^n}{n!}u^{(n)}(t)+R_n^+(u,t,\tau),$$

$$u(t-\tau)=u(t)-\tau u'(t)+\dots+(-1)^n\frac{\tau^n}{n!}u^{(n)}(t)+R_n^-(u,t,\tau),$$

где

$$R_n^+(u,t,\tau)=\int\limits_t^{t+\tau}\int\limits_t^{s_n}\dots\int\limits_t^{s_1}u^{(n+1)}(s)\,ds\,ds_1\dots ds_n, \tag{8.66}$$

$$R_n^-(u,t,\tau)=(-1)^{n+1}\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{s_n}^{t}\dots\int\limits_{s_1}^{t}u^{(n+1)}(s)\,ds\,ds_1\dots ds_n. \tag{8.67}$$

Справедлива следующая теорема о сходимости

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $A=A^*\geq\alpha I$, $\alpha>0$, $u_0=\varphi_0$, $u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1$,

$\varphi_0\varphi_1\in W^2$, $f(t)\in C(H)$, $f_k=f(t_k)$, $k=1,\overline{n-1}$, $6\in]-2,2[$.

Тогда

а) Если $u(t)\in C^2(H)\cap C(W^2)$, то

$$\max_{1\leq k\leq n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|\right)\to 0 \quad \text{при } \tau\to 0,$$

б) Если $f(t)\in C^1(H)$ (или $f(t)\in C(W^2)$), то

$$\max_{1\leq k\leq n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|+\|A^{1/2}z_{k+1}\|\to 0 \text{ при } \tau\to 0.\right.$$

в) Если $f(t)\in C^1(H)$ и $u(t)\in C^3(H)\cap C(W^2)$, то

$$\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|\|A^{1/2}z_{k+1}\|\leq C_4\tau,\quad k=1,\overline{n-1};$$

г) Если $f(t) \in C^2(H)$ и $u(t) \in C^4(H) \cap C(W^2)$, то

$$\max_{1 \le k \le n-2} \left(\left\| A^{1/2} \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| + \left\| \frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2} \right\| \right) \to 0 \quad \text{при } \tau \to 0;$$

д) Если $f(t) \in C^2(H)$ и $u(t) \in C^2(W^1) \cap C^4(H) \cap C(W^2)$, то

$$\left\| A^{1/2} \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| + \left\| \frac{\Delta^2 z_k}{\tau^2} \right\| \le c_5 \tau, \qquad k = 1, \overline{n-2};$$

е) Если $f(t) \in C^2(H)$ и $u(t) \in C^1(W^2) \cap C^4(H)$, то

$$\| A u_{k+1} \| \le c_6 \tau, \qquad k = 1, \overline{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 8.2 справедливы неравенства:

$$\| z_{k+1} \| \le C_1(\tau) \left\| \frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_1 \right\| + c_2 \tau \sum_{i=1}^{k} \| A^{-1/2} \varepsilon_i \|, \quad (8.68)$$

$$\left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \le c_0 \left\| \frac{\Delta u(0)}{\tau} - \varphi_1 \right\| + c_2 \tau \sum_{i=1}^{k} \| \varepsilon_i \|. \quad (8.69)$$

Отсюда, с учетом (8.49), (8.5I), (8.52) и (8.55) следует положение пункта а). Оценка, приведенная в пункте в) следует из (8.68), (8.69) и (8.8) с учетом (8.50), (8.52), (8.54) и (8.55). Из (8.I3) и (8.I4) (с учетом (8.59), (8.6I), (8.63) и (8.57)) следует утверждение пункта д). Остальные положения теоремы доказываются аналогично.

В классе более гладких решений справедлива следующая

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть $A = A^* \ge \alpha I$, $\alpha > 0$, $u_0 = \varphi_0$, $\varphi_0 \in W^2$,

$$u_1 = \varphi_0 + \tau \varphi_2, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\tau}{2} \left(f(0) - A\varphi_0 \right),$$

$$\varphi_1,\ A\varphi_0,\ f(0)\in W^2,\quad f(t)\in C^2(H),$$

$$f_\kappa = f(t_\kappa),\quad \kappa=1,\overline{n-1},\quad \sigma\in\,]-2;\,2[\,.$$

Тогда

а) Если $u(t)\in C^4(H)\cap C(W^2)$, то

$$\|z_{\kappa+1}\| + \left\|\frac{\Delta z_\kappa}{\tau}\right\| \leqslant C_6\tau^2;$$

б) Если $u(t)\in C^2(W^1)\cap C^4(H)\cap C(W^2)$, то

$$\|A^{1/2} z_{\kappa+1}\|\, C_7\tau^2;$$

в) Если

$$f(t)\in C^3(H),\quad u(t)\in C^3(W^1)\cap C^5(H)\cap C(W^2),$$

то

$$\left\|\frac{\Delta^2 z_\kappa}{\tau^2}\right\| + \left\|A^{1/2}\ \frac{\Delta z_\kappa}{\tau}\right\| \leqslant C_8\tau^2.$$

8.3. В этом пункте изучается вопрос сходимости абстрактного кубического сплайна $\tilde{S}_\tau(t)$, удовлетворяющего условиям:

$$\tilde{S}(t_i)=u_i\,,\ \tilde{S}'_\tau(t_i)=\delta u_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{\tau},\quad i=\overline{0,n},$$

$$\tau=T/n,\quad t_i=i\tau,\quad \delta u_n=0\,.$$

к решению $u(t)$ задачи (8.I), (8.2). При этом, в зависимости от гладкости решения $u(t)$ будет установлен порядок сходимости по τ .

Предварительно сформулируем некоторые вспомогательные леммы, являющиеся распространением соответствующих результатов из [I]

ЛЕММА 8.4. Пусть $\| u_i \| \le a$ и $\| \delta u_i \| \le b$, $i=\overline{0,n}$. Тогда справедливы оценки:

$$\| \tilde{S}_\tau(t) \| \le a + \frac{\tau}{4} b, \quad \| \tilde{S}'_\tau(t) \| \le 2b, \quad t \in [0,T].$$

ЛЕММА 8.5. Пусть $u(t) \in C^2(H)$, $\hat{S}_\tau(t)$ - кубический сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$\hat{S}_\tau(t_i) = u(t_i), \quad \hat{S}'_\tau(t_i) = u'(t_i), \quad t_i = i\tau, \tau = \overline{0,n}.$$

Тогда справедливы оценки:

$$\| u(t) - \hat{S}_\tau(t) \| \le \sup_t \| u''(t) \| \tau^2, \tag{8.70}$$

$$\| u'(t) - \hat{S}'_\tau(t) \| \le 2 \sup_t \| u''(t) \| \tau, \quad t \in [0,T]. \tag{8.71}$$

ЛЕММА 8.6. Пусть $u(t) \in C^2(H)$ и $S_\tau(t)$ - кубический сплайн, удовлетворяющий условиям:

$$S_\tau(t_i) = u(t_i), \quad S'_\tau(t_i) = \delta u(t_i) = \frac{u(t_i+1) - u(t_i)}{\tau},$$

$$i = \overline{0,n}, \quad t_i = i\tau, \quad \delta u(t_i) = 0.$$

Тогда справедливы оценки:

$$\| \hat{S}_\tau(t) - S_\tau(t) \| \le c\tau^2, \tag{8.72}$$

$$\| \hat{S}'_\tau(t) - S'_\tau(t) \| \le 2c\tau, \tag{8.73}$$

где $\quad C = \sup\limits_{0\le t\le T} \| u''(t)\|$.

Справедлива следующая теорема о сходимости.

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть выполняются условия теоремы 8.4 и $u(t)\in C^4(H)\cap C(W^2)$. Тогда

$$\| u(t)-\tilde{S}_\tau(t)\| \le c_9\tau^2, \tag{8.74}$$

$$\| u'(t)-\tilde{S}'_\tau(t)\| \le c_{10}\tau. \tag{8.75}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу пункта а) теоремы 8.4 справедлива оценка

$$\| z_{k+1}\| + \left\| \frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| \le c_6\tau^2, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда, в силу леммы 8.4 следует

$$\| S_\tau(t)-\tilde{S}_\tau(t)\| \le \left(1+\frac{\tau}{4}\right)c_6\tau^2, \tag{8.76}$$

$$\| S'_\tau(t)-\tilde{S}'_\tau(t)\| \le 2c_6\tau^2. \tag{8.77}$$

Теперь из тождества

$$u(t)-\tilde{S}_\tau(t) \equiv u(t)-\hat{S}_\tau(t)+\hat{S}_\tau(t)-S_\tau(t)+S_\tau(t)-\tilde{S}_\tau(t),$$

с учетом (8.70), (8.72) и (8.76) следует оценка (8.74). Оценка (8.75) следует из тождества

$$u'(t)-\tilde{S}'_\tau(t) \equiv u'(t)-\hat{S}'_\tau(t)+\hat{S}'_\tau(t)-S'_\tau(t)+S'_\tau(t)-\tilde{S}'_\tau(t),$$

с учетом (8.71), (8.73) и (8.77).

Аналогично доказывается следующая

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть выполняются условия теоремы 8.3. Тогда
а) Если $f(t)\in C^1(H)$ (или $f(t)\in C(W^2)$), то

$$\|u(t)-\tilde{S}_\tau(t)\|+\|u'(t)-\tilde{S}'_\tau(t)\|\to 0.$$

б) Если $f(t)\in C^1(H)$ и $u(t)\in C^3(H)\cap C(W^2)$, то

$$\|u(t)-\tilde{S}_\tau(t)\|+\|u'(t)-\tilde{S}^1_\tau(t)\|\leq C_{11}\tau .$$

§ 9. Полное уравнение второго порядка

9.I. В этом параграфе для задачи Коши

$$u''(t)+Bu'(t)+Au(t)=f(t),\quad t\in[0,T], \tag{9.1}$$

$$u(0)=\varphi_0\ ,\quad u'(0)=\varphi_1\ . \tag{9.2}$$

где A и B линейные самосопряженные операторы в H, исследуются некоторые трехслойные полудискретные схемы.

Рассмотрим сначала неявную полудискретную схему вида

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+B\,\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}+Au_{k+1}=f_k\,, \tag{9.3}$$

$$u_0=\varphi_0\ ,\qquad u_1=\varphi_0+\tau\varphi_1\ , \tag{9.4}$$

где

$$k=1,\overline{n-1},\quad \tau=T/n,\quad f_k=f(k\tau).$$

Справедлива следующая теорема об априорных оценках.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{D}(B)$, $f(t) \in C(H)$, $A \geq \alpha I$, $B \geq \beta I$, $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $A^{-1}Bx = BA^{-1}x$, $x \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

а) для решения u_k задачи (9.3), (9.4) справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leq \rho_\tau^{\frac{k-1}{4}} (3 \| \varphi_0 \| + C_\tau \| \varphi_1 \|) + C_\tau \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \|, \qquad (9.5)$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq \rho_\tau^{\frac{k-1}{4}} \left(\frac{6}{\tau} \| \varphi_0 \| + \| \varphi_1 \| \right) + 2\tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| ; \qquad (9.6)$$

б) если $\varphi_0 \in \mathcal{D}(A)$, то

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leq 3 \rho_\tau^{\frac{k-1}{4}} \left(\| A\varphi_0 \| + \| \varphi_1 \| \right) + 2\tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| . \qquad (9.7)$$

Здесь

$$\rho_\tau = 1 - \gamma_\tau \tau^2, \quad \gamma_\tau = \max\left(\beta_\tau, \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_\tau\right),$$

$$\alpha_\tau = \alpha(1 + \alpha C\tau + \alpha\tau^2)^{-1}, \quad \beta_\tau = (\beta + \alpha\tau)(1 + \beta\tau + \alpha\tau^2)^{-1},$$

$$C = \| BA^{-1} \| < \infty, \quad C_\tau = 4\beta_\tau^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что из условия теоремы следует $R(A) = R(B) = H$ (теорема 5.6, пункт в)). Тогда оператор BA^{-1} ограничен (теорема 5.3), т.е.

$$\| BA^{-1} x \| \leq C \| x \|, \quad C > 0, \quad x \in H.$$

Отсюда следует, что

$$\|Bx\| \leqslant C\|Ax\|, \quad x \in D(A).$$

Следовательно по теореме 4.12 (см.[16] , стр. 366)

$$|(Bx,x)| \leqslant C(Ax,x), \quad x \in D(A).$$

Так как

$$(Bx,x) \geqslant \beta(x,x), \ \beta > 0, \ x \in D(B) \supset D(A),$$

то

$$(Bx,x) \leqslant C(Ax,x), \quad x \in D(A). \tag{9.8}$$

Теперь схему (9.3) представим в виде

$$B_2 u_{k+1} - B_1 u_k + B_0 u_{k-1} = \tau^2 f_k, \ k = \overline{1, n-1}, \tag{9.9}$$

где

$$B_2 = I + \tau B + \tau^2 A, \quad B_1 = 2I + \tau B, \quad B_0 = I.$$

Согласно теореме 5.8, $R(B_2) = H$. Тогда из (9.9), учитывая при этом перестановочность B_2^{-1} и A в $D(A)$, следующая из перестановочности B и A^{-1} , получим

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + \tau^2 B_2^{-1} f_k, \ k = \overline{1, n-1}, \tag{9.10}$$

где

$$L_\tau = I + S_\tau - K_\tau, \ S_\tau = B_2^{-1}, \quad K_\tau = \tau^2 A B_2^{-1}.$$

Оценим спектр оператора K_τ . Принимая во внимание (9.8), получим

$$\alpha_\tau (B_2 x, x) \leqslant (Ax, x), \ x \in D(A),$$

где

$$\alpha_\tau = \alpha\,(1+\alpha c\tau + \alpha\tau^2)^{-1}.$$

Так как

$$\tau^2\,(Ax,x) \leqslant (B_2 x,x), \quad x\in D(A),$$

то

$$\alpha_\tau\,(B_2 x,x) \leqslant (Ax,x) \leqslant \tau^{-2}(B_2 x,x), \quad x\in D(A).$$

Отсюда согласно лемме 5.4, получим $K_\tau^* = K_\tau$ и

$$Sp\,(K_\tau) \subset [\alpha_\tau \tau^2, 1]. \tag{9.11}$$

Для спектра оператора S_τ имеем оценку

$$Sp\,(S_\tau) \subset [0, 1-\beta_\tau \tau], \tag{9.12}$$

где

$$\beta_\tau = (\beta + \alpha_\tau)(1+\beta\tau + \alpha\tau^2)^{-1}.$$

Далее, из (9.11) и (9.12) следует, что (см. рис. 8):

$$G_\tau \subset \hat{G}_\tau, \tag{9.13}$$

где

$$G_\tau = \{(x,y)\,|\,x=1+y-\xi, \ \ y\in Sp(S_\tau), \ \ \xi\in Sp(K_\tau)\},$$

$$\hat{G}_\tau = \{(x,y)\,|\,x=1+y-\xi, \ \ y\in[0,1-\beta_\tau\tau], \ \xi\in[\alpha_\tau\tau^2, 1]\}.$$

В области $\hat{G}_\tau$ справедливы оценки:

$$|U_n(x,y)| \leqslant \frac{4}{\beta_\tau \tau}\,\rho_\tau^{\frac{n}{4}}. \tag{9.14}$$

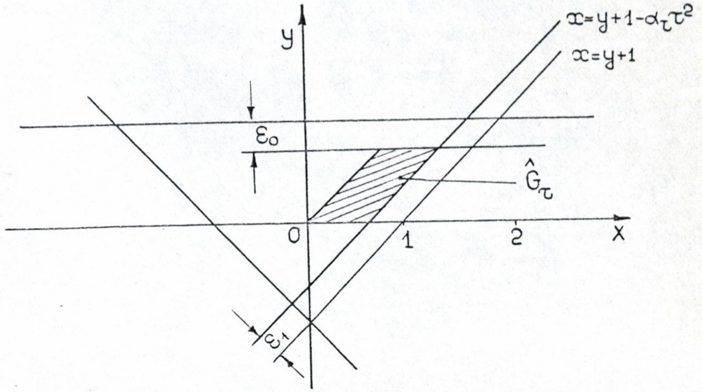


Рис. 8.

по теореме 2.2,

$$\left|U_n(x,y)-y^{\kappa}U_{n-1}(x,y)\right| \leq 3\rho_\tau^{\frac{n-1+\kappa}{4}} \tag{9.I5}$$

по теореме 2.3,

$$\left|U_n(x,y)-y^{\kappa}U_{n-1}(x,y)\right| \leq 2\,, \tag{9.I6}$$

в силу замечания 3.4,

$$\left|(1+y-x)\,U_n(x,y)\right| \leq 6\rho_\tau^{\frac{n}{4}}\,, \tag{9.I7}$$

согласно формуле 3.II. Здесь

$$\kappa=0,1,\ \ \rho_\tau=1-\gamma_\tau\tau^2,\ \ \gamma_\tau=\max\left(\beta_\tau,\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_\tau\right).$$

Используя теперь схему доказательства теоремы 6.I и учитывая при этом оценки (9.14)- (9.17), а также неравенство

$$\|\tau^2 B_2^{-1} f_k\| \leqslant \tau^2 \|f_k\|,$$

то для u_k получим оценки (9.5) и (9.6). Заметим, что эти оценки более точны, чем оценки, получаемые непосредственно из теоремы 6.1.

Аналогично получаем (9.7) с учетом равенства

$$U_n(L_\tau, S_\tau)(L_\tau - S_\tau - I) = \tau^2 U_n(L_\tau, S_\tau) B_2^{-1} A. \tag{9.18}$$

Перейдем теперь к оценке погрешности решения. Обозначим через V^2 гильбертово пространство, получаемое после введения в $D(B)$ эрмитовой нормы $\|h\|_2 = \|Bh\|$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть выполняются условия теоремы 9.1, $f(t) \in C^1(H)$ и $u(t) \in C^3(H) \cap C(W^2) \cap C^2(V^2)$. Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедливы оценки:

$$\|z_k\| \leqslant C_\tau \left(a(\tau)\rho_\tau^{\frac{k-1}{4}} + b_k \tau\right), \quad k = \overline{2,n}, \tag{9.19}$$

$$\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\| \leqslant a(\tau)\rho_\tau^{\frac{k-1}{4}} + 2b_k \tau, \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{9.20}$$

где

$$a(\tau) = \int_0^\tau \|u''(t)\| dt,$$

$$b_k = \int_0^{t_k} \left(3\|u'''(t)\| + \|Bu''(t)\| + \|f'(t)\|\right) dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что z_k является решением разностной задачи:

$$\frac{z_{k+1}-2z_k+z_{k-1}}{\tau^2}+B\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau}+Az_{k+1}=\varepsilon_k,$$

$$z_0=0, \qquad z_1=\int_0^\tau\int_0^s u''(t)\,dt\,ds, \quad k=\overline{1,n-1},$$

где

$$\varepsilon_k=\tau^{-2}\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{\lambda}\int_{t_k}^{s}u'''(t)\,dt\,ds\,dt-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{\lambda}^{t_k}\int_{s}^{t_k}u'''(t)\,dt\,ds\,dt\Big]+$$

$$+\tau^{-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{s}Bu''(t)\,dt\,ds+\int_{t_k}^{t_{k+1}}\big[f'(t)-Bu''(t)-u'''(t)\big]dt.$$

Отсюда, в силу теоремы 9.I, с учетом оценок:

$$\|z_1\|\leq\tau\int_0^\tau\|u''(t)\|\,dt, \quad \sum_{i=1}^{k-1}\|\varepsilon_i\|\leq b_k,$$

следует (9.I9) и (9.20).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.I. Если $f(t)\in C(H)$ и

$$u(t)\in C^2(H)\cap C(W^2)\cap C^1(V^2),$$

то

$$\max_{1\leq k\leq n-1}\left(\|z_{k+1}\|+\left\|\frac{\Delta z_k}{\tau}\right\|\right)\to 0 \quad \text{при } \tau\to 0$$

9.2. В этом пункте рассмотрим схему

$$\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{\tau^2}+B\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+Au_k=f_k. \tag{9.2I}$$

$$u_0,\ u_1 \in \mathcal{D}(A), \quad k=\overline{1,n-1}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$, $A \geqslant \alpha I$, $B \geqslant \beta I$,

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $f(t) \in C(H)$, $A^{-1}Bx = BA^{-1}x$, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Тогда для u_k справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leqslant e^{2ct_{k-1}} \left(2\| u_0 \| + \beta_\tau^{-1} \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + \beta_\tau^{-1} \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \| \right), \tag{9.22}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant e^{2ct_{k-1}} \left(\frac{4}{\tau} \| u_0 \| + 2 \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + 2\tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right), \tag{9.23}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant e^{2ct_{k-1}} \left(\beta_\tau^{-1} \| A u_0 \| + 2 \left\| \frac{\Delta u_0}{\tau} \right\| + 2\tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \| \right), \tag{9.24}$$

где
$$k=\overline{1,n-1}, \quad c = \| AB^{-1} \| < \infty, \quad \beta_\tau = \beta(2+\beta\tau)^{-1},$$

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k, \quad t_k = k\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9.21) следует, что

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + \tau^2 B_2^{-1} f_k, \tag{9.25}$$

где
$$S_\tau = 2B_2^{-1} - I, \qquad L_\tau = I + S_\tau - K_\tau,$$

$$K_\tau = \tau^2 A B_2^{-1}, \quad B_2 = I + \frac{\tau}{2} B.$$

Оценим спектр оператора K_τ. Для этого в неравенстве (9.8) операторы A и B поменяем местами. Тогда получим неравенство

$$0 \leq \tau\ (Ax, x) \leq 2C\ (B_2 x, x), \quad x \in D(A),$$

Следовательно, в силу леммы 5.4 $K_\tau^* = K_\tau$ и

$$Sp\,(K_\tau) \subset [0,\ 2c\tau]. \tag{9.26}$$

Для спектра оператора S_τ имеем оценку

$$Sp\,(S_\tau) \subset [-1, 1-2\beta_\tau \tau], \tag{9.27}$$

где

$$\beta_\tau = \beta\ (2+\beta\tau)^{-1}.$$

Далее, из (9.26) и (9.27) следует, что (см. рис. 9)

$$G_\tau \subset \hat{G}_\tau,$$

где

$$G_\tau = \{(x,y)\,|\,x = 1+y-\xi, \quad y \in Sp\,(S_\tau), \quad \xi \in Sp\,(K_\tau)\},$$

$$\hat{G}_\tau = \{(x,y)\,|\,x = 1+y-\xi, \quad y \in [-1, 1-\beta_\tau \tau],\ \xi \in [0, 2c\tau]\}.$$

Область $\hat{G}_\tau$ представим как объединение областей $\hat{G}_\tau \cap \bar{\Delta}$ и $\hat{G}_\tau \cap \Delta'$ (Δ' - дополнение открытого треугольника Δ).

Легко заметить, что в области $\hat{G}_\tau \cap \Delta'$ справедлива оценка

$$|\,U_n(x,y)| \leq |\,U_n(-2c\tau,-1)| = U_n(2c\tau,-1).$$

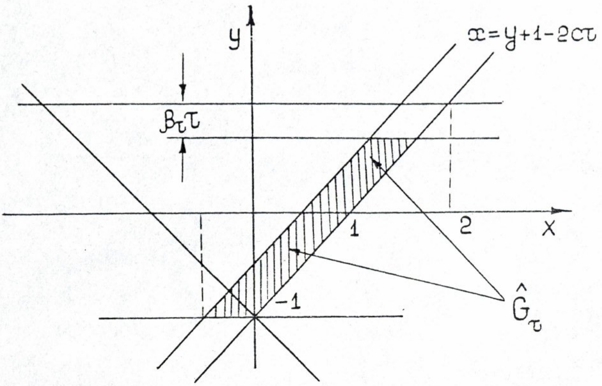


Рис. 9.

С учетом (2.6) получим

$$U_n(2c\tau,-1)\le\left(c\tau+\sqrt{c^2\tau^2+1}\right)^n\le(1+2c\tau)^n\le e^{2ct_n},\quad t_n=n\tau.$$

Следовательно,

$$|U_n(x,y)|\le e^{2ct_n},\quad (x,y)\in\hat{G}_\tau\cap\Delta'. \tag{9.29}$$

Отсюда и из (I.I2) находим

$$|U_n(x,y)|\le\frac{1}{\beta\tau}e^{2ct_n},\quad (x,y)\in\hat{G}_\tau. \tag{9.30}$$

Далее, из (3.I6), (3.I7) и (9.29) следуют неравенства:

$$|U_n(x,y)-y^k U_{n-1}(x,y)|\le 2e^{2ct_n},\quad k=0,1,\quad (x,y)\in\hat{G}_\tau. \tag{9.31}$$

$$|(1+y-x)\,U_n(x,y)|\le 4e^{2ct_n},\quad (x,y)\in\hat{G}_\tau. \tag{9.32}$$

Наконец, поскольку

$$L_\tau S_\tau x = S_\tau L_\tau x, \quad x \in H,$$

то для решения u_k схемы (9.25) справедливы формулы (4.15) и (4.16), из которых, с учетом (9.30), (9.31) и (9.32), в силу замечания 5.2, следуют оценки (9.22)-(9.24). Заметим, что при выводе оценки (9.24) учитываем формулу (9.18), которая и в данном случае верна.

Перейдем теперь к оценке погрешности решения. Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть выполняются условия теоремы 9.3,

$$\varphi_0 \varphi_1 \in D(A), \quad u_0 = \varphi_0, \quad u(t) \in C^4(H) \cap C^3(W^2)$$

и

$$u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1 + \frac{1}{2}\tau^2 (f(0) - A\varphi_0 - B\varphi_1), \quad u_1 \in D(A).$$

Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедливы оценки:

$$\|z_k\| \leq \beta_\tau^{-1} e^{2ct_{k-1}} (a(\tau) + b_k\tau)\tau, \quad k = \overline{2,n},$$

$$\left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \leq 2e^{2ct_{k-1}} (a(\tau) + b_k\tau)\tau, \quad k = \overline{1,n-1},$$

где

$$a(\tau) = \int_0^\tau \| u'''(t)\| dt,$$

$$b_k = \int_0^{t_k} (\| u^{IV}(t)\| + \| Bu'''(t)\|) dt.$$

ТЕОРЕМА 9.5. Пусть выполняются условия теоремы 9.3,

$$\varphi_0, \varphi_1 \in D(A), \quad u_0 = \varphi_0, \quad u_1 = \varphi_0 + \tau\varphi_1.$$

и

$$u(t) \in C^3(H) \cap C^2(W^2).$$

Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедливы оценки:

$$\| z_k \| \le \beta_\tau^{-1} e^{2ct_{k-1}} (\alpha(\tau) + b_k \tau), \quad k = \overline{2,n},$$

$$\left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \le 2 e^{2ct_{k-1}} (\alpha(\tau) + b_k \tau), \quad k = \overline{1,n-1},$$

где

$$b_k = 2 \int_0^{t_k} (\| u'''(t) \| + \| B u''(t) \|) dt,$$

$$\alpha(\tau) = \int_0^{\tau} \| u''(t) \| dt.$$

Эти теоремы доказываются также, как теорема 9.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Если $u(t) \in C^2(H) \cap C^1(W)$, то

$$\max_{1 \le k \le n-1} \left(\| z_{k+1} \| + \left\| \frac{\Delta z_k}{\tau} \right\| \right) \to 0 \qquad \text{при } \tau \to 0.$$

9.3. В этом пункте для задачи (9.I), (9.2) рассмотрим схему вида:

$$\frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{\tau^2} + B \frac{u_{k+1} - u_k}{\tau} + A u_k = f_k, \tag{9.33}$$

$$u_0 = \varphi_0, \quad u_1 = \varphi_0 + \tau \varphi_1, \quad \varphi_0, \varphi_1 \in D(A), \; k = \overline{1,n-1}. \tag{9.34}$$

Заметим, что хотя схема (9.33), (9.34) по точности аппроксимации уступает схеме (9.2I), однако константы в оценках типа (9.22)-

(9.24) лучше (они не зависят от t_k). В частности, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть выполняются условия теоремы 9.3. Тогда для решения u_k задачи (9.33), (9.34) справедливы оценки:

$$\| u_k \| \leqslant 2 \| \varphi_0 \| + \left(\frac{1}{\beta} + \tau\right)\left(\| \varphi_1 \| + \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| f_i \|\right), \tag{9.35}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant \frac{4}{\tau} \| \varphi_0 \| + 2\left(\| \varphi_1 \| + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|\right), \tag{9.36}$$

$$\left\| \frac{\Delta u_k}{\tau} \right\| \leqslant \left(\frac{1}{\beta} + \tau\right) \| A\varphi_0 \| + 2\left(\| \varphi_1 \| + \tau \sum_{i=1}^{k} \| f_i \|\right). \tag{9.37}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9.33) находим:

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + \tau^2 S_\tau f_k ,$$

где

$$S_\tau = (I + \tau B)^{-1}, \quad L_\tau = I + S_\tau - K_\tau , \quad K_\tau = \tau^2 A S_\tau .$$

Следуя доказательству теоремы 9.3, получим

$$S_\rho (K_\tau) \subset [0, C\tau], \quad C = \| AB^{-1} \| < \infty . \tag{9.38}$$

Для спектра оператора S_τ имеем оценку

$$S_\rho (S_\tau) \subset [0, 1 - \beta_\tau \tau], \quad \beta_\tau = \beta (1 + \tau\beta)^{-1} . \tag{9.39}$$

Далее, из (9.38) и (9.39) следует, что (см. рис. 10)

$$G_\tau \subset \hat{G}_\tau ,$$

где

$$G_\tau=\{(x,y)\,|\,x=1+y-\xi,\quad y\in S_\rho(S_\tau),\quad \xi\in S_\rho(K_\tau)\},$$

$$\hat{G}_\tau=\{(x,y)\,|\,x=1+y-\xi,\quad y\in[0,1-\beta_\tau\tau],\quad \xi\in[0,c\tau]\}.$$

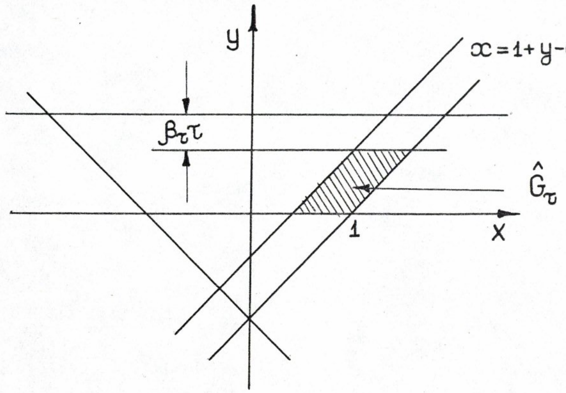


Рис. I0.

В области $\hat{G}_\tau$ (см. (I.I2), (3.I6) и (3.I7)) справедливы оценки:

$$|U_n(x,y)|<\frac{1}{\tau\beta_\tau},$$

$$|U_n(x,y)-y^k U_{n-1}(x,y)|\le 2,\quad (k=0,1),$$

$$|(1+y-x)U_n(x,y)|\le 4.$$

Рассуждая дальше как при доказательстве теоремы 9.3 придем к искомым оценкам.

ТЕОРЕМА 9.7. Пусть выполняются условия теоремы 9.3 и $u(t)\in C^3(H)\cap C^2(W^2)$. Тогда для погрешности $z_k=u(t_k)-u_k$ справедливы оценки:

$$\| z_\kappa \| \leq \left(\frac{1}{\beta} + \tau\right)(a(\tau) + b_\kappa \tau), \qquad \kappa = \overline{2, n},$$

$$\left\| \frac{\Delta z_\kappa}{\tau} \right\| \leq 2\,(a(\tau) + b_\kappa \tau), \qquad \kappa = \overline{1, n-1},$$

где

$$a(\tau) = \int_0^\tau \| u''(t) \| \, dt,$$

$$b_\kappa = \int_0^{t_\kappa} (2 \| u'''(t) \| + \| B u''(t) \|) \, dt.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что z_κ является решением разностной задачи:

$$\frac{z_{\kappa+1} - 2 z_\kappa + z_{\kappa-1}}{\tau^2} + B \frac{z_{\kappa+1} - z_\kappa}{\tau} + A z_\kappa = \varepsilon_\kappa,$$

$$z_0 = 0, \quad z_1 = \int_0^\tau \int_0^s u''(t) \, dt \, ds, \quad \kappa = \overline{1, n-1},$$

где

$$\varepsilon_\kappa = \tau^{-2} \left[\int_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} \int_{t_\kappa}^{t} \int_{t_\kappa}^{s} u'''(t) \, dt \, ds \, d\lambda - \int_{t_{\kappa-1}}^{t_\kappa} \int_{t}^{t_\kappa} \int_{s}^{t_\kappa} u'''(t) \, dt \, ds \, d\lambda \right] +$$

$$+ \tau^{-1} \int_{t_\kappa}^{t_{\kappa+1}} \int_{t_\kappa}^{s} B u''(t) \, dt \, ds.$$

Отсюда в силу теоремы 9.6 следуют искомые оценки.

Заметим, что априорные оценки этого параграфа являются разностными аналогами оценок, справедливых для решения исходной задачи (см., например [20, 24, 65]).

§ 10. Абстрактное параболическое уравнение

10.1. Рассмотрим задачу Коши

$$u'(t)+Au(t)=f(t), \quad t\in[0,T], \tag{10.1}$$

$$u(0)=\varphi. \tag{10.2}$$

в вещественном гильбертовом пространстве H . Предположим, что

$$A=A^*\geqslant\alpha I,\ \alpha>0,\ \varphi\in D(A),\ f(t)\in C(W^2)$$

(или $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера). Тогда по теореме 5.6 (5.8) [32] существует единственное решение $u(t)\in C^1(H)$ задачи (10.1), (10.2).

В этом пункте данной задачи ставится в соответствие следующая разностная задача

$$\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2\tau}+A\frac{u_{k+1}+\sigma u_k+u_{k-1}}{2+\sigma}=f_k, \tag{10.3}$$

где $\sigma\neq-2$, $k=\overline{1,n-1}$, $\tau=T/n$, u_0, u_1 - заданы.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть $u_0\, u_1\in D(A)$, $f_k\in H$, $(k=\overline{1,n-1})$, $\sigma\in\,]-2,2[$. Тогда справедлива оценка

$$\|u_k\|\leqslant2\sqrt{\frac{2}{4-\sigma^2}}\left(\|u_0\|+\|u_1\|+2\tau\sum_{i=1}^{k-1}\|f_i\|\right),\quad k=\overline{2,n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10.3) следует, что

$$u_{k+1}=L_\tau u_k-S_\tau u_{k-1}+2\tau B_\tau f_k,$$

где

$$L_\tau = \frac{1}{2}\sigma\,(I + S_\tau), \qquad S_\tau = I - 2B_\tau^{-1},$$

$$B_\tau = I + \frac{2\tau}{2+\sigma}A.$$

Так как операторы L_τ и S_τ коммутирующие, то в силу леммы 4.4 для решения u_k справедлива формула (4.I4). Следовательно, имеем

$$\|u_k\| \le \|U_k\|\,\|u_1\| + \|S_\tau\|\,\|U_{k-1}\|\,\|u_0\| +$$

$$+ 2\tau\sum_{i=1}^{k}\|U_{k-i}\|\cdot\|B_\tau^{-1}\|\cdot\|f_i\|, \quad U_k = U_k(L_\tau, S_\tau). \qquad (I0.4)$$

Легко заметить, что

$$S_p(B_\tau^{-1}) \subset [0,1], \qquad S_p(S_\tau) \subset [-1,1]. \qquad (I0.5)$$

Тогда в силу теоремы 5.II и оценки (2.25) получим

$$\|U_k\| \le \max_{-1\le y\le 1}\left|U_k\left(\tfrac{1}{2}\sigma(1+y), y\right)\right| \le 2\sqrt{\frac{2}{4-\sigma^2}}.$$

Для завершения доказательства остается подставить эту оценку в (I0.4) и учесть (I0.5).

ТЕОРЕМА I0.2. Пусть $u_0, u_1 \in \mathcal{D}(A), \sigma \in]-2,2[, f(t) \in C^m(H)$, $u(t) \in C^{m+1}(H) \cap C(W^2)$, $m = 1,2$.

Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедлива оценка

$$\|z_k\| \le \sigma_0\,\|u(\tau) - u_1\| + \|u(0) - u_0\| +$$

$$+\tau^m \int_0^{t_k} (\sigma_1 \| u^{(m+1)}(t)\| + \sigma_2 \| f^{(m)}(t)\|)dt),$$

где

$$k=\overline{2,n}, \quad t_k = k\tau, \qquad \sigma_0 = 2\sqrt{\frac{2}{4+\sigma^2}},$$

$$\sigma_1 = \frac{4+\sigma}{2+\sigma}, \qquad \sigma_2 = \frac{2}{2+\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что z_k является решением разностной задачи

$$\frac{z_{k+1}-z_{k-1}}{2\tau} + A\frac{z_{k+1}+\sigma z_k - z_{k-1}}{2+\sigma} = \varepsilon_k, \quad k=\overline{2,n},$$

где

$$\varepsilon_k = (2\tau)^{-1}\left[R_m^+(u,t_k,\tau) - R_m^-(u,t_k,\tau)\right] +$$

$$+(2+\sigma)^{-1}\left[R_{m-1}^+(f-u',t_k,\tau) + R_m^-(f-u',t_k,\tau)\right].$$

Здесь $R_m^{+(-)}$ определяются формулами (8.66), и (8.67). Отсюда в силу теоремы 9.I с учетом неравенства

$$\tau\sum_{i=1}^{k-1}\|\varepsilon_i\| \le \tau^m \int_0^{t_k} (\sigma_1 \| u^{m+1}(t)\| + \sigma_2 \| f^{(m)}(t)\|)dt.$$

следует оценка для z_k

Из теоремы I0.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ I0.I. а) Если $u_0 = u_1 = \varphi$, $\varphi \in D(A)$, $m=1$, то

$$\| z_k\| \le \sigma_0 \int_0^{\tau} \| u'(t)\| dt + \tau \int_0^{t_k} (\sigma_1 \| u''(t)\| + \sigma_2 \| f'(t)\|)dt;$$

б) если

$$u_0=\varphi,\quad \varphi\in D(A),\ u_1=\varphi+\tau\varphi_1,\ \varphi_1=f(0)-A\varphi,\ \varphi_1\in D(A), m=2,$$

то

$$\|z_k\|\leq \sigma_0\tau\int_0^{\tau}\|u''(t)\|dt+\tau^2\int_0^{t_k}(\sigma_1\|u'''(t)\|+\sigma_2\|f''(t)\|)dt,$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. Если $u_0=u_1=\varphi,\ \varphi\in D(A), f(t)\in C(W^2)$, то

$$\max_{1\leq k\leq n}\|z_k\|\to 0 \quad \text{при} \quad \tau\to 0.$$

10.2. В этом пункте рассмотрим схему вида

$$(1+\theta)\frac{u_{k+1}-u_k}{\tau}-\theta\frac{u_k-u_{k-1}}{\tau}+Au_{k+1}=f_{k+1}, \tag{10.6}$$

где u_0, u_1 – заданные элементы пространства H, параметр $\theta=\mathrm{const}\geq 0$, $k=\overline{1,n-1}$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 10.3. Пусть $A^*=A\geq\alpha I$, $\alpha>0$ и $\tau>0$ такое, что $1-4\theta\alpha\tau>0$. Тогда для решения u_k справедлива оценка

$$\|u_k\|\leq C_\tau\rho_\tau^{k-1}(\|u_0\|+\|u_1\|)+\tau\sum_{i=2}^{k}\|f_i\|,\quad k=\overline{2,n},$$

где

$$\rho_\tau=\frac{1+2\theta\sqrt{1-4\theta\alpha\tau}}{2(1+\theta+\alpha\tau)}=\frac{1+\sqrt{1-4\theta\alpha\tau}}{1+\sqrt{1+4\theta\alpha\tau}+2\alpha\tau},$$

$$C_\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1+2\theta}{\sqrt{1+4\theta\alpha\tau}}+1\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10.6) следует, что

$$u_{k+1} = L_\tau u_k - S_\tau u_{k-1} + \tau B_\tau^{-1} f_{k+1},$$

где

$$S_\tau = \frac{\theta}{1+2\theta} L_\tau, \quad L_\tau = (1+2\theta) B_\tau^{-1},$$

$$B_\tau = (1+\theta) I + \tau A.$$

Отсюда, согласно формуле (4.14) получим

$$\| u_{k+1} \| \leq \| U_k \| \cdot \| u_1 \| + \| S_\tau \| \, \| U_{k-1} \| \, \| u_0 \| +$$

$$+ \tau \sum_{i=1}^{k} \| U_{k-1} \| \, \| B_\tau^{-1} f_{i+1} \|, \quad U_k = U_k(L_\tau, S_\tau). \tag{10.7}$$

Оценим норму операторного полинома U_k. Легко заметить, что

$$S_p(L_\tau) \subset [0, \theta_\tau], \quad \theta_\tau = \frac{1+2\theta}{1+\theta+2\alpha\tau}.$$

Тогда согласно теореме 5.9 справедлива оценка

$$\| U_k \| \leq \max_{x \in [0,\theta_\tau]} \left| U_k\left(x, \frac{\theta}{1+2\theta} x\right) \right|,$$

Так как $1 - 4\theta\alpha\tau > 0$, то (см. рис. 11)

$$\max_{x \in [0,\theta_\tau]} \left| U_k\left(x, \frac{\theta}{1+2\theta} x\right) \right| \leq U_k\left(\theta_\tau, \frac{\theta}{1+2\theta}\theta_\tau\right).$$

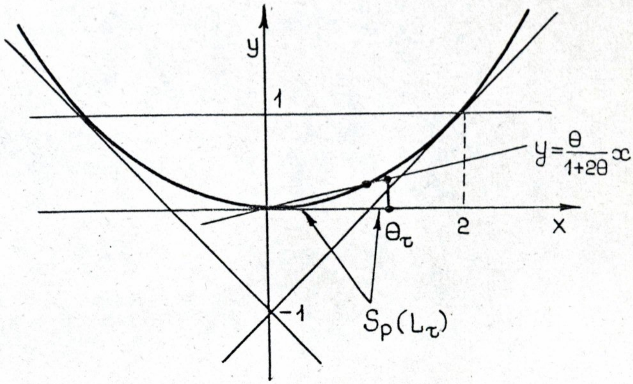


Рис. II.

Далее, согласно лемме I.2, справедливо неравенство

$$U_\kappa\left(\theta_\tau, \frac{\theta}{1+2\theta}\theta_\tau\right) \leqslant \frac{\rho_\tau^{\kappa+1}}{\rho_\tau - \eta_\tau},$$

где

$$\rho_\tau = \rho\left(\theta_\tau, \frac{\theta}{1+2\theta}\theta_\tau\right), \quad \rho(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x| + \sqrt{x^2-4y}\right),$$

$$\eta_\tau = \frac{\theta}{1+2\theta}\theta_\tau \rho_\tau^{-1}.$$

После элементарных преобразований получим

$$\frac{\rho_\tau}{\rho_\tau - \eta_\tau} \leqslant C_\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{1+2\theta}{\sqrt{1-4\theta\alpha\tau}} + 1\right)$$

Следовательно,

$$\| U_\kappa \| \leqslant C_\tau \rho_\tau^{\kappa}. \tag{I0.8}$$

Отсюда, формально при $\tau = 0$ получаем оценку

$$\| U_k \| \leq 1+\theta , \tag{10.9}$$

которая в силу (1.11) справедлива для $\forall \tau > 0$.

Справедливы также оценки:

$$\| S_\tau \| = \frac{\theta}{1+2\theta} \| L_\tau \| \leq \frac{\theta}{1+\theta+\alpha\tau} < \rho_\tau , \tag{10.10}$$

$$\| B_\tau^{-1} \| \leq \frac{1}{1+\theta}. \tag{10.11}$$

Подставляя теперь (10.8), (10.9), (10.10) и (10.11) в (10.7) получим искомую оценку.

ТЕОРЕМА 10.4. Пусть выполняются условия теоремы 10.3, u_0, u_1 - заданные элементы пространства H, $f(t) \in C\,(H)$ и

$$u(t) \in C^{1+m}(H) \cap C(W^2), \quad m=1,2.$$

Тогда для погрешности $z_k = u(t_k) - u_k$ справедлива оценка

$$\| z_k \| \leq c\tau \rho_\tau^{k-1} (\| u(\tau) - u_1 \| + \| u(0) - u_0 \|) +$$

$$+ c\tau^m \int_0^{t_m} \| u^{(m+1)}(t) \| dt + (m-1)|\theta - 0{,}5| \tau^2 \sum_{i=2}^{k} \| u^{(m)}(t_i) \| ,$$

$$k = \overline{2,n} , \quad t_k = k\tau , \quad c = 1 + 2^{m+1}\theta .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что z_k является решением разностной задачи

$$(1+\theta) \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} - \theta \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} + A z_{k+1} = \varepsilon_{k+1} , \quad k = \overline{2,n} ,$$

где

$$\varepsilon_{k+1} = (m-1)(\theta-0{,}5)\tau u^{(m)}(t_{k+1}) + \tau^{-1}[\theta R_m^-(u, t_{k+1}, 2\tau) -$$

$$-(1+2\theta)R_m^-(u, t_{k+1}, \tau)], \quad m = 1, 2.$$

Здесь R_m^- определяется формулой (8.67). Отсюда в силу теоремы 9.3 с учетом неравенств

$$\| R_m^-(u, t_{k+1}, 2\tau)\| \leq (2\tau)^m \int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \| u^{(m+1)}(t)\| dt,$$

$$\| R_m^-(u, t_{k+1}, \tau)\| \leq \tau^m \int_{t_k}^{t_{k+1}} \| u^{(m+1)}(t)\| dt.$$

следует оценка для погрешности z_k

Из теоремы 10.4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 10.2. а) Если $u_1 = u_0 = \varphi$ и $m = 1$, то

$$\| z_k\| \leq C_\tau \rho_\tau^{k-1} \int_0^\tau \| u'(t)\| dt + (1+4\theta)\tau \int_0^{t_k} \| u''(t)\| dt;$$

б) если $u_0 = \varphi$, $\varphi \in D(A)$, $u_1 = \varphi + \tau\varphi_1$, $\varphi_1 = f(0) - A\varphi$, $\theta = 0{,}5$ и $m = 2$, то

$$\| z_k\| \leq C_\tau \rho_\tau^{k-1} \tau \int_0^\tau \| u''(t)\| dt + 5\tau^2 \int_0^{t_k} \| u'''(t)\| dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.2. Разлагая в ряд Тейлора $\ln \rho_\tau(x)$ по $x = 4\theta\alpha\tau$, получим

$$\ln \rho_\tau = -\alpha\tau - \alpha^2\left(\theta - \frac{1}{2}\right)\tau^2 -$$

$$-\alpha^3\left[\frac{1}{3}+\theta(2\theta-1)(\theta+1)\right]\tau^3-\dots$$

следовательно

$$\rho_\tau^{k}=e^{-\alpha t_k}\cdot e^{-i\alpha_\tau(\theta)t_k},\quad t_k=k\tau,$$

$$\alpha_\tau(\theta)=\alpha^2\left(\theta-\frac{1}{2}\right)+\alpha^3\left[\frac{1}{3}+\theta(2\theta-1)(\theta+1)\right]\tau+\dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ I0.3. Если $u_0=u_1=\varphi$, $f(t)\in C(W^2)$, то

$$\max_{1\le k\le n}\|z_k\|\longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad \tau\rightarrow 0.$$

I0.3. В этом пункте исследуется устойчивость и сходимость одной явной трехслойной схемы. Для этого используется подход, предложенный В.А.Треногиным (см. [53], гл. УП).

Пусть пространство H аппроксимируется посредством последовательности конечномерных подпространств $\{H_n\}$, связанных с H с помощью линейных операторов сужения $\{T_n\}$:

$T_n H = H_n$.

Задаче(I0.I), (I0.2) ставится в соответствие следующая разностная задача:

$$(1+\theta)\frac{\overset{k+1}{u}_m-\overset{k}{u}_m}{\tau}-\theta\frac{\overset{k}{u}_m-\overset{k-1}{u}_m}{\tau}+\tilde{A}_m\overset{k}{u}_m=f_m(t_k),$$

$$\overset{0}{u}_m=\overset{1}{u}_m=T_m\varphi,\quad f_m(t_k)=T_m f(t_k),$$

$$k=\overline{1,n-1},\quad m=1,2,\dots$$

Здесь $\tilde{A}_m$ линейный оператор, отображающий $D(\tilde{A}_m)=H_m$ в H_m , параметр $\theta = const \geq 0$.

Сформулируем основные результаты в виде теорем.

ТЕОРЕМА 10.5. Пусть для $\forall m$ ($m=1,2,\dots$)

$$\tilde{A}_m^* = \tilde{A}_m \geq \alpha_0 I,\ \alpha_0 > 0 \quad \text{и} \quad Sp(\tau \tilde{A}_m) \subset [0, 2(1+2\theta)].$$

Тогда для $\overset{k}{u}_m$ справедлива оценка

$$\| \overset{k}{u}_m \| \leq \theta \| \overset{0}{u}_m \| + (1+\theta) \| \overset{1}{u}_m \| + \tau \sum_{i=1}^{k-1} \| f_m(t_i) \|, \quad k=\overline{2,n}.$$

ТЕОРЕМА 10.6. Пусть выполняются условия теоремы 10.5,

$$\varphi \in D(A), \qquad f(t) \in C(H) \qquad \text{и} \qquad u(t) \in C^2(H) \cap C(W^2).$$

Предположим, кроме того, что

$$\lim_{m \to \infty} \| T_m h \| = \| h \|, \quad h \in H.$$

Тогда для погрешности $\overset{k}{z}_m = T_m u(t_k) - \overset{k}{u}_m$ справедлива оценка

$$\| \overset{k}{z}_m \| \leq c \left(\int_0^{\tau} \| u'(t) \| dt + \tau \int_0^{t_k} \| u''(t) \| dt \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \| \tilde{A}_m T_m u(t_i) - T_m A u(t_i) \|,$$

$$k = \overline{2,n}, \qquad m = 1,2,\dots, \quad t_k = k\tau.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 10.4. Если $\| \tilde{A}_m T_m u(t) - T_m A u(t) \| \leq \dfrac{\beta(u(t))}{m^s}$, где $\beta(u(t)) \in C[0,T]$, $\beta(u(t)) \geq 0$ и $S > 0$, то

$$\| \overset{k}{z}_m \| \leq C\left(\tau + \frac{1}{m^s}\right).$$

Доказательство теоремы I0.5 проводится по той схеме, которой мы неоднократно пользовались. Основным в этой схеме является представление решения u_k через u_0 , u_1 и f_n с помощью операторного полинома $U_k(L_\tau, S_\tau)$, а затем оценка нормы этого оператора . Последняя задача, когда L_τ и S_τ - самосопряженные, перестановочные операторы, сводится к оценке полиномов $U_k(x,y)$ в области

$$G_\tau = S_p(L_\tau) \times S_p(S_\tau),$$

для которой выполняется включение $G_\tau \subset \Delta$.

Теорема I0.6 является следствием теоремы I0.5.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Расчет сферической оболочки.

Рассматриваются уравнения равновесия сферической оболочки по теории Векуа в нулевом приближении (см. [75], стр. 924)

$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\varepsilon}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x\partial y}-\varepsilon^2 u_1=\frac{1}{E}2(1+\sigma)f_1+\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial y}-\varepsilon^2 u_2=\frac{1}{E}2(1+\sigma)f_2+\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}-4\varepsilon^2\frac{1}{1-2\sigma}u_3=\frac{1}{E}2(1+\sigma)f_3-\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right),$$

с краевым условием

$$u_i(\pm h_1, y)=u_i(x,\pm h_2)=0, \qquad i=1,2,3, \qquad (2)$$

$$|x|\le h_1, \quad |y|\le h_2 .$$

Здесь $\varepsilon = 2R^{-1}H$, H – полутолщина оболочки, R – радиус сферы, σ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга; $f=f(x,y)=$ $=(f_1, f_2, f_3)^T$ – известный, а $u=u_1(x,y)=(u_1, u_2, u_3)^T$ – искомый вектор.

Решение задачи (I), (2) ищется с помощью итерационного процесса

$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 \overset{n}{u}_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \overset{n}{u}_1}{\partial y^2}-\varepsilon^2\overset{n}{u}_1=\frac{1}{E}2(1+\sigma)f_1-\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 \overset{n-1}{u}_2}{\partial x\partial y}+\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial \overset{n-1}{u}_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \overset{n}{u}_2}{\partial x^2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 \overset{n}{u}_2}{\partial y^2}-\varepsilon^2\overset{n}{u}_2=\frac{1}{E}2(1+\sigma)f_2-\frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial^2 \overset{n}{u}_1}{\partial x\partial y}+\varepsilon\frac{3-2\sigma}{1-2\sigma}\frac{\partial \overset{n-1}{u}_3}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$\Delta \overset{n}{u}_3 - 4\varepsilon^2 \frac{1}{2-2\sigma} \overset{n}{u}_3 = \frac{1}{E} 2(1+\sigma) f_3 - \varepsilon \frac{3-2\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{\partial \overset{n}{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial \overset{n}{u}_2}{\partial y} \right),$$

$$\overset{n}{u}_i (\pm h_1, y) = \overset{n}{u}_i (x, \pm h_2) = 0, \quad i = 1,2,3, \tag{4}$$

где n обозначает номер приближения.

Функции $\overset{n}{u}_i(x,y)$ находятся по методике, изложенной в статье [4]. Они представляются в виде ряда

$$\overset{n}{u}_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \overset{n}{u}_{k,i,j} \varphi_{1,i}(x) \varphi_{2,j}(y),$$

$$\varphi_{\alpha,i}(x) = \sqrt{\frac{2i+1}{2}} \int_{-h_\alpha}^{x} P_i \left(\frac{t}{h_\alpha} \right) dt, \quad \alpha = 1,2,$$

где $P_i(t)$ - полиномы Лежандра, а коэффициенты $\overset{n}{u}_{k,i,j}$ удовлетворяют следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \left(B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,k,s-2} - C_s \overset{n}{u}_{1,k,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,k,s+2} \right) + B_{k-1} \overset{n}{u}_{1,k-2,s} -$$

$$- C_k \overset{n}{u}_{1,k,s} + B_{k+1} \overset{n}{u}_{1,k+2,s} - \varepsilon^2 \left[B_{k-1} \left(B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,k-2,s-2} - C_s \overset{n}{u}_{1,k-2,s} + \right.\right.$$

$$\left. + B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,k-2,s+2} \right) - C_k \left(B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,k,s-2} - C_s \overset{n}{u}_{1,k,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,k,s+2} \right) +$$

$$\left.+ B_{k+1} \left(B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,k+2,s} - C_s \overset{n}{u}_{1,k+2,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,k+2,s+2} \right) \right] =$$

$$= \frac{2(1+\sigma)}{E} B_{1,k,s} - \frac{4}{1-2\sigma} A_k A_s \left(A_{k-1} A_{s-1} \overset{n-1}{u}_{2,k-1,s-1} + \right.$$

$$+A_{k+1}A_{s+1}\overset{n-1}{u}_{2,k+1,s+1}-A_{k-1}A_{s+1}\overset{n-1}{u}_{2,k-1,s+1}-A_{k+1}A_{s-1}\overset{n-1}{u}_{2,k+1,s-1})-$$

$$+\frac{\varepsilon(3-2\sigma)}{1-2\sigma}[2A_{k-1}A_k(B_{s-1}\overset{n-1}{u}_{3,k-1,s-2}-C_s\overset{n-1}{u}_{3,k-1,s}+B_{s+1}\overset{n-1}{u}_{3,k-1,s+2})+$$

$$+2A_{k+1}A_k(-B_{s-1}\overset{n-1}{u}_{3,k+1,s-2}+C_s\overset{n-1}{u}_{3,k+1,s}-B_{s+1}\overset{n-1}{u}_{3,k+1,s+2})],$$

$$B_{s-1}\overset{n}{u}_{2,k,s-2}-C_s\overset{n}{u}_{2,k,s}+B_{s+1}\overset{n}{u}_{2,k,s+2}+\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}(B_{k-1}\overset{n}{u}_{2,k-2,s}-$$

$$-C_k\overset{n}{u}_{2,k,s}+B_{k+1}\overset{n}{u}_{2,k+2,s})-\varepsilon^2[B_{k-1}(B_{s-1}\overset{n}{u}_{2,k-2,s-2}-$$

$$-C_s\overset{n}{u}_{2,k-2,s}+B_{s+1}\overset{n}{u}_{2,k-2,s+2})-C_k(B_{s-1}\overset{n}{u}_{2,k,s-2}-C_5\overset{n}{u}_{2,k,s}+$$

$$+B_{s+1}\overset{n}{u}_{2,k,s+2})+B_{k+1}(B_{s-1}\overset{n}{u}_{2,k+2,s-2}-C_s\overset{n}{u}_{2,k+2,s}+B_{s+1}\overset{n}{u}_{2,k+2,s+2})]=$$

$$=\frac{2(1+\sigma)}{E}B_{2,k,s}-\frac{4}{1-2\sigma}A_kA_s(A_{k-1}A_{s-1}\overset{n}{u}_{1,k-1,s-1}+$$

$$+A_{k+1}A_{s+1}\overset{n}{u}_{1,k+1,s+1}-A_{k-1}A_{s+1}\overset{n}{u}_{1,k-1,s+1}-A_{k+1}A_{s-1}\overset{n}{u}_{1,k-1,s-1})+$$

$$+\frac{\varepsilon(3-2\sigma)}{1-2\sigma}[2A_{s-1}A_s(B_{k-1}\overset{n-1}{u}_{3,k-2,s-1}-C_k\overset{n-1}{u}_{3,k,s-1}+B_{k+1}\overset{n-1}{u}_{3,k+2,s-1})+$$

$$+2A_{s+1}A_s(-B_{k-1}\overset{n-1}{u}_{3,k-2,s+1}+C_k\overset{n-1}{u}_{3,k,s+1}+B_{k+1}\overset{n-1}{u}_{3,k+2,s+1})],$$

$$B_{s-1}\overset{n}{u}_{3,k,s-2}-C_6\overset{n}{u}_{3,k,s}+B_{s+1}\overset{n}{u}_{3,k,s+2}+B_{k-1}\overset{n}{u}_{3,k-2,s}-$$

$$-C_k\overset{n}{u}_{3,k,s}+B_{k+1}\overset{n}{u}_{3,k+2,s}-\frac{4\varepsilon^2}{1-2\sigma}[B_{k-1}(B_{s-1}\overset{n}{u}_{3,k-2,s-2}-$$

$$-C_s \overset{n}{u}_{3,\kappa-2,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{3,\kappa-2,s+2}) - C_\kappa (B_{s-1} \overset{n}{u}_{3,\kappa,s-2} -$$

$$-C_s \overset{n}{u}_{3,\kappa,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{3,\kappa,s+2}) + B_{\kappa+1} (B_{s-1} \overset{n}{u}_{3,\kappa+2,s-2} -$$

$$-C_s \overset{n}{u}_{3,\kappa+2,s} + B_{s+1} \overset{n}{u}_{3,\kappa+2,s+2})] = \frac{2(1+\sigma)}{E} B_{3,\kappa,s} -$$

$$-\frac{\varepsilon(3-2\sigma)}{1-2\sigma} [2A_{\kappa-1} A_\kappa (B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,\kappa-1,s-2} - C_s \overset{n}{u}_{1,\kappa-1,s} +$$

$$+ B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,\kappa-1,s+2}) - 2A_{\kappa+1} A_\kappa (-B_{s-1} \overset{n}{u}_{1,n+1,s-2} +$$

$$+ C_s \overset{n}{u}_{1,\kappa+1,s} - B_{s+1} \overset{n}{u}_{1,\kappa+1,s+2}) - 2A_{s-1} A_s (B_{\kappa-1} \overset{n}{u}_{2,\kappa-2,s-1} -$$

$$-C_\kappa \overset{n}{u}_{2,\kappa,s-1} + B_{\kappa+1} \overset{n}{u}_{2,\kappa+2,s-1}) - 2A_{s+1} A_s (-B_{\kappa-1} \overset{n}{u}_{2,\kappa-2,s+1} +$$

$$+ C_\kappa \overset{n}{u}_{2,\kappa,s+1} - B_{\kappa+1} \overset{n}{u}_{2,\kappa+2,s+1})] \qquad (5)$$

Здесь $2A_s^2 = (2S+1)^{-1}, \; (2S+1)^2 B_S^2 = [(2S-1)(2S+3)]^{-1},$

$$C_s = (2S+1)^2 B_5^2, \quad B_{i,\kappa,s} = \int_{-h_1}^{h_1} \int_{-h_2}^{h_2} f_i(x,y) \varphi_{1,s}(x) \varphi_{2,\kappa}(y)\, dx dy,$$

$$i = 1, 2, S; \qquad \kappa, S = 1, 2, \ldots$$

Программа расчета задачи (I), (2) по вышеизложенной методике составлена на языке ФОРТРАН и являются программными модулями (ПМ). Руководство для эксплуатации ПМ дано в [35] (стр. 67-78), текст соответствующей программы в [36] (стр. 4-I7).

Реализована следующая тестовая задача. Искомыми решениями являются функции:

$$u_1 = u_2 = x^6(1-x^2)(1-y^2)E^{-1}, \quad u_3 = (1-x^2)(1-y^2)E^{-1}.$$

Параметрам приданы следующие значения:

$$h_1 = h_2 = 1, \quad \sigma = 0.25, \quad \varepsilon = 0.01, 0.5, 1, 2, 2.5.$$

Результаты вычислений приводятся в таблицах I и 2; в первой дается приближенное значение вектора $u(0,0)$, а во второй $u(0.5, 0.5)$, при этом точные значения равны:

$Eu(0,0) = (0,0,I)^T$,

$Eu(0.5, 0.5) = (8.7890625 \cdot 10^{-3}, 8.7890625 \cdot 10^{-3}, 0.5625)^T$,

Таблица I

ε	$10^{12} Eu_1$	$10^{12} Eu_2$	Eu_3	Количество итераций
0	5,95	97,9	I	II
0,I	5,37	94,3	I	II
0,5	6,I5	6,68	I	I2
I	4,9	6,4	I	I6
2	5,53	8,I	$1-3 \cdot 10^{-9}$	32
2,5	3,I3	5,9	$1-5 \cdot 10^{-9}$	38

Как видно, точные и приближенные значения практически совпадают. Отметим, что то же самое наблюдается и во всех других точках квадрата.

Таблица 2

ε	$10^3 \cdot Eu_1$	$10^3\, Eu_2$	$E u_3$	Количество итераций
0	8,78906256	8,78906253	0,5625	II
0,I	8,78906252	8,78906253	"	II
0,5	8,78906249	8,78906250	"	I2
I	8,78906243	8,78906235	"	I6
2	8,78906I27	8,78906I09	"	32
2,5	8,78906065	8,78906029	0,56250000I	38

ПМ реализован на реальных задачах. Рассчитана контрольная задача, когда $f_1 = f_2 = 0$, $f_3 = -1$, при следующих значениях параметров: $\sigma = 0.4$, $\varepsilon = 0.1$, $h_1 = h_2 = 1$. Счет прекращается, если

$$\max_{i,j} |u_{i,N_1}(x_j, y_j) - u_{i,N_2}(x_j, y_j)| < \varepsilon_0 ,$$

$$i = 1,2,3, \quad j = \overline{1,m},$$

где ε_0 – требуемая точность, $u_{i,N}(x,y)$ – приближенные решения исходной задачи, построенное по коэффициентам разложения $u_{i,k,s}$; $k, s = \overline{1, N}$, (x_j, y_j) – точки квадрата.

Замечание I. Предложенный итерационный процесс фактически является процессом Зейделя. Сходимость его очевидна, так как соответствующая матрица симметрична и положительно определена (см. [4]).

Замечание 2. Для решения вариационно-дискретного аналога задачи

$$\left(1+\frac{\delta_{1i}}{1-2\sigma}\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \left(1+\frac{\delta_{2i}}{1-2\sigma}\right)\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} -$$

$$-\varepsilon^2\left(1+\frac{3+2\sigma}{1-2\sigma}\delta_{3i}\right)u_i=\frac{2(1+\sigma)}{E}f_i\,,$$

$$u_i(\pm h_1,y)=u_i(x,\pm h_2)=0,\quad i=1,2,3,$$

используется итерационный процесс, являющийся частным случаем процесса (6.2I).

2. Расчет прямоугольных плит, когда на параллельных гранях задан вектор внешнего напряжения, а остальная часть границы закреплена.

В области $[-h_1,h_1]\times[-h_2,h_2]\times[-h_3,h_3]$ ищется решение трехмерного уравнения теории упругости

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}u=f \tag{6}$$

с краевыми условиями:

$$\tau(u)\Big|_{z=\pm h_3}=\varphi^{\pm}(x,y), \tag{7}$$

$$u(x,\pm h_2,z)=u(\pm h_1,y,z)=0. \tag{8}$$

Здесь $\tau(u)=(X_z,Y_z,Z_z)$ - вектор внешнего напряжения, действующего на площадке поверхности $z=\pm h_3$, u - трехкомпонентный вектор смещения; $f(x,y,z)$ и $\varphi^{\pm}(x,y)$ - известные вектор-функции.

Приближенное решение задачи (6)-(8) представляется в виде:

$$u(x,y,z)=\sum_{k=0}^{N}\overset{k}{u}(x,y)P_k\left(\frac{z}{h_3}\right)+A(x,y)\left[P_{m+1}\left(\frac{z}{h_3}\right)-\right.$$
$$\left.-P_{m-1}\left(\frac{z}{h_3}\right)\right]+B(x,y)P_{m+2}\left(\frac{z}{h_3}\right),$$

где $P_m(z)$ – полиномы Лежандра. $\overset{k}{u}(x,y)$, согласно методике [5], является решением следующей задачи:

$$A_2 \overset{k-1}{u} = a_k A_2 \overset{k+1}{u} - b_k A_1 \overset{k}{u} -$$

$$- c_k A_0 (\overset{k+1}{u} + \overset{k+3}{u} + \dots + \overset{N_k}{u}) + b_k (\overset{k-1}{F} - \overset{k+1}{F}),$$

$$k = N+1, N, \dots, 1, \tag{9}$$

$$\overset{k}{u}(\pm h, y) = \overset{k}{u}(x, \pm h_2) = 0,$$

$$a_k = (2k-1)(2k+3)^{-1}, \quad b_k = 2k-1, \quad c_k = 4k^2 - 1, \tag{10}$$

$$\overset{N_k}{u} = \begin{cases} \overset{N}{u}, & \text{если } N+K \text{ четно}, \\ \overset{N+1}{u}, & \text{если } N+K \text{ нечетно}, \end{cases}$$

$$\overset{k}{F} = E^{-1}(1+\sigma)\overset{k}{f}, \qquad \overset{k}{f} = \int_{-h_3}^{h_3} f(x,y,z) P_k\left(\frac{z}{h_3}\right) dz,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 I \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \sigma_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} + \sigma_0 \begin{bmatrix} \partial^2_{xx} & \partial^2_{xy} & 0 \\ \partial^2_{xy} & \partial^2_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}, \quad \sigma_0 = (1-2\sigma)^{-1}, \quad \sigma_1 = 1 + \sigma_0 .$$

Трехкомпонентные векторы A и B определяются согласно [76] (см. стр. 328).

В программе расчета задачи (9), (10) обращение оператора A_2 с краевыми условиями (10) осуществлено $(N+1)$ -кратным использованием ПМ задачи 1. Она работает в режиме, когда объемные силы приближенно заменяются полиномами от трех переменных. В этом случае правые части алгебраического аналога исходной задачи вычисляются по рекуррентным соотношениям, для которых доказана устойчивость по начальным данным. Руководство для эксплуатации ПМ задачи 2 дано в [35](стр. 35-40), текст соответствующей программы в [36] (стр. 17-35).

ЛИТЕРАТУРА

1. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.:Мир, 1972. - 316 с.
2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. - М.:Мир, 1968. - 749 с.
3. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.:Наука, 1973. - 631 с.
4. Вашакмадзе Т.С. О применении одного численного процесса к задаче Дирихле уравнений теории оболочек. - Wiss.Z.Hochsch.Arch. und Bauw., Weimar, 1972, J.19, H 2, с.228-231.
5. Вашакмадзе Т.С. Трехточечные операторы уравнения теории оболочек. - Семинар ИПМ Тбилисского гос. ун-та, Аннотации докл., 1973, т. 8, с. 23-28.
6. Вашакмадзе Т.С., Рогава Дж.Л. Об одном дискретно-аналитическом методе решения параболических уравнений. - В кн.: Приближенные методы решения задач математической физики. - Тбилиси:Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1975, с. 51-55.
7. Геронимус Я.Л. О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов. - Записки математического отделения физико-математического факультета ХГУ и Харьковского математического общества, 1957, т. XXУ, с. 87-100.
8. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. - М.:Наука, 1977. - 439 с.
9. Гордезиани Д.Г. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного уравнения гиперболического типа. - Семинар ИПМ Тбилисского гос. ун-та, Аннотации докл., 1971, т. 4, с. 11-13.
10. Гордезиани Д.Г., Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации. -

В кн.: Комплексный анализ и его приложения. - М.:Наука, 1978, с. 173-186.

11. Гулин А.В. Критерии устойчивости некоторых несамосопряженных трехслойных разностных схем. - Дифференц. уравнения, 1980, т. XУI, № 7, с. 1205-1210.

12. Гулин А.В., Самарский А.А. О некоторых результатах и проблемах теории устойчивости разностных схем. - Матем. сб., 1976, т. 99 (141), № 3, с. 299-330.

13. Дьяконов Е.Г. Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач. - ЖВМ и МФ, 1962, т. 2, № 4, с. 549-568.

14. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.:Наука, 1977. - 741 с.

15. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.-Л.:Физматгиз, 1962. - 708 с.

16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.:Мир, 1972. - 740 с.

17. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. - М.:Наука, 1971. - 464 с.

18. Кузнецов Н.Н. Слабая устойчивость и асиптотика решений конечно-разностных апроксимаций дифференциальных уравнений. - Докл. АН СССР, 1971, т. 200, № 5, с. 1026-1029.

19. Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. - М.:Гостехиздат, 1953. - 279 с.

20. Ладыженская О.А. О решении нестационарных операторных уравнений. - Матем. сб., 1956, 39 (81), с. 491-524.

21. Лебедев В.И. Итерационные методы решения линейных операторных уравнений и многочлены, наименее отклоняющиеся от нуля. - В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск:Наука, 1978, с. 89-108.

22. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.:Мир, 1971. - 371 с.

23. Лисковец О.А. Метод прямых (обзор). - Дифференц. уравнения, 1965, т. I, № 12, с. 1662-1678.

24. Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И. Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка. - Дифференц. уравнения, 1976, т. XII, № 12, с. 2242-2250.

25. Макаров В.Л. Ортогональные многочлены и разностные схемы с точными и явными спектрами.- Докторская диссертация, физ.-мат.наук. - Киев, 1974. - 286 с.

26. Макаров В.Л., Самарский А.А. Применение точных разностных схем к оценке скорости сходимости метода прямых. - М., 1979. - 30 с. (Препринт) ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР:№ 133).

27. Мальцев Л.Е. Применение смешанных полиномов Чебышева при решении операторных уравнений второго рода. - Вестник Московского ун-та, Серия мат., мех., 1977, т. I, с. 102-110.

28. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.:Наука, 1977. - 455 с.

29. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М.:Наука, 1981. - 414 с.

30. Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А. Итерационные методы и квадратичные функционалы. - В кн.: Методы вычислительной математики. Новосибирск:Наука, 1975, с. 4-148.

31. Микеладзе Ш.Е. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. - М.-Л.:Изд-во АН СССР, 1936. - 108 с.

32. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., 1977. - 504 с.

33. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. -

М.:Наука, 1966. - 432 с.

34. Новиков В.А., Демидов Г.В. Замечание к одному методу построения схем высокой точности. - В сб.: Численные методы мех. сплош. среды, т. 3, № 4. Новосибирск, 1972, с. 89-91.

35. Пакет прикладных программ расчета пространственных сооружений. (РАПСО). Часть I. - Тбилиси:Изд-во ТГУ, 1982. - 166 с.

36. Пакет прикладных программ расчета пространственных сооружений. (РАПСО). Часть П. - Тбилиси:Изд-во ТГУ, 1982. - 160 с.

37. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. - М.:Наука, 1983. - 384 с.

38. Растренин В.А. О применении одного разностного метода к абстрактным гиперболическим уравнениям. Дифференц. уравнения, 1973, т. IX, № 12, с. 2222-2226.

39. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.:Мир, 1972. - 418 с.

40. Рогава Дж. Л. Об исследовании устойчивости полудискретных схем с помощью ортогональных полиномов Чебышева. - Сообщ. АН ГССР, 1976, т. 83, № 3, с. 545-548.

41. Рогава Дж. Л. Об устойчивости метода полудискретизации для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка. - Докл. семинара ИПМ Тбилисского гос. ун-та, 1978, 12-13, с. 41-47.

42. Рогава Дж. Л. Об одном применении полиномов Чебышева в итерационных процессах. - Сообщ. АН ГССР, 1978, т. 90, № 2, с. 285-288.

43. Рогава Дж. Л. Устойчивость и сходимость некоторых трехслойных полудискретных схем для эволюционных задач. - Сообщ. АН ГССР, 1984, т. 114, № 1, с. 57-60.

44. Рябенький В.С., Филиппов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М.:Гостехиздат, 1956. - 171 с.

45. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.:Наука, 1977. - 656 с.

46. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. - М.:Наука, 1973. - 415 с.

47. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М.:Наука, 1978. - 589 с.

48. Сегё Г. Ортогональные многочлены. - М.:Физматгиз, 1962. - 500 с.

49. Сердюкова С.И. Об устойчивости в линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами. - ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 3, с. 477-486.

50. Соболевский П.Е., Чеботарева Л.М. Приближенное решение методом прямых задач Коши для абстрактного гиперболического уравнения. Известия высших учебных заведений, Серия математика, 1977, № 5 (180), с. 103-116.

51. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях. Харьков, 1936. - 156 с.

52. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. - 349 с.

53. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.:Наука, 1980. - 495 с.

54. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск:Наука, 1967. - 196 с.

55. Baker G.A. Error estimates for finite element methods for second order hyperbolic.-SIAM J.Numer.Anal.,1976,13,N4,p. 564-576.

56. Baker G.A.,Dougalis V.A.,Serbin S.M.An approximation theorem for second-order evolution equations.-Numerische Mathematik, 1980,35,N2,p.127-142.

57. Bramble J.H.Multistep methods for quasilinear parabolic equations.-Proc. of the TICOM Second Inter. Conf.,Austin,Texas,

1979.Amsterdam e.a.1980,p.177-183.

58.Crouzeix M.,Raviart Pierre-Arnaud.Approximation des équations d'évolution linéaires par des méthodes à pas multiples.-C.R. Acad.Sc.Paris,1976,283,N6,A 367-370.

59.Crouzeix M.Une méthode multipas implicite-explicite pour l' approximation des équations d'evolution paraboliques.Numerische Mathematik,1980,35,N3,p.257-276.

60.Eier R.,Lidl R.Tschebyscheff polynome in einer und zwei Variablen.-Abh.math.Semin.Univ.Hamburg,1974,41,s.17-27.

61.Frank W.F.Solution of linear systems by Richardson's method.-J.Assoc.Comput.mach.,1960,vol.7,p.274-286.

62.Fröhmer M.Stabilitätsuntersuchung eines verallgemeinerten Iterationsprozesses zur Lösung linearer Gleichungssysteme.-Beitr. Numerisch.Math.2.,Berlin,1974,s.19-23.

63.Garnir H.G.Démonstration élémentaire d'une inégalité relative aux operateurs normaux commutatifs.-Rendiconti di Matematica, 1975,8,N2,s.473-480.

64.Gentzsch W.,Schlüter A.Über ein Einschrittverfahren mit zyklischer Schrittweitenänderung zur Lösung parabolischer Differentialgbeichungen.-Z.Angew.Math.Mech.,Berlin,1978,Bd.58,H.7, T415-T416.

65.Goldstein J.A.,Rosencrans S.I.Energy decay and partition for dissipative weve equations.-J.of Different.Equat.,1980,36,N1, p.66-73.

66.Golub G.,Varga R.S.Chebyshev semi-iterative methods,successive over-relaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods.P.1.-Numer.Math.,1961,Bd.3,S.147-156.

67.Golub G.,Varga R.S.Chebyshev semi-iterative methods,successive over-relaxation iterative methods and second order Richardson iterative methods.P.2.-Numer.Math.,1961,Bd.3,S.157-168.

68.Hays R.O.Multi-dimensional extensions of the Chebyshev polinomials.-Math.Comput.,1973,27,N123,p.621-624.

69.Heinz E.Beitrëge sur Störungstheorie der Spektralzerlegung.-Math.Ann.,1951,123,H.4,S.415-438.

70.Lidl R.Tschebyscheff polynome in mehreren Variablen.-J.reine und angew.Math.,273,1975,s.178-198.

71.Morris A.G.,Horner T.S.Chebyshev polynomials in the numerical solution of differential equations.-Math.Comput.,1977,31,N140, p.881-891.

72.Ricci P.E.I polinomi di Tchebycheff in pin variabili.Rend. mat.,1978,11,N2,p.295-327.

73.Roux M.-N.Le.Semi-discrétisation en temps pour les équations d'evolution paraboliques lorsque l'operate'jr dépend du temps. -RAIRO Analys numérique / Numerical Analysis,1979,vol.13,N2, p.119-137.

74.Vashskmadze T.On opplications of a variational-difference method to the solution of some shell theory problems.-Theory of shells.N.-Holland Published Compeny,1980,p.575-581.

75.Vekua I.N.On construction of approximate solutions of equations of the shallow spherical shell.-Int.J.Solid Structures, 1969,5,p.991-1003.

76.Vekua I.N.On two ways of constructing the theory of elastic shells.-Proc.of Thirteenth Inter. Congress of Theor.and Appl. Mech.M.,1972,p.322-339.