საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

თენგიზ ქირია

# სტაციონარულიპროცესების პარამეტრების ძალდებული შეფასებებისშესახებ

წარმოდგენილია  დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

თბილისი

2017

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. გოგი ფანცულაია
პროფ. ზურაბ ზერაკიძე

რეცენზენტები:-------------------------
-------------------------

დაცვაშედგება ---------- წლის ”------” ---------------, --------- საათზე

საქართველოსტექნიკურიუნივერსიტეტის ----------------------------------------

----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის

სხდომაზე, კორპუსი ---------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77..

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

დისერტაციის ავტორეფერატის სტუ-ს ვებგვერდზე.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი **პროფ. თინათინ კაიშაური**

## ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

**საკვლევი პრობლემის აღწერა.** კარგადაა ცნობილი, რომ ინფორმაცია ”ალბათობით ერთი”, მთელ რიგ შემთხვევებში, არის მეტად ღარიბი, რაც შეიძლება ჩაითვალოს არათავსებადი სტატისტიკური გადაწყვეტილებების მიღების ერთ-ერთ ძირითად მიზეზად.

*მათემატიკური სტატისტიკის თანამედროვე თეორიასა* და ჰიპოთეზათა შემოწმების შედეგებს შორის არსებული განსხვავების ასახსნელად, წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში ჩვენ შემოვიტანეთ სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევითი სუბიექტური და ობიექტური შეფასებების კონცეფციები [18]. ეს მიდგომა არსებითად იყენებს უსასრულო-განზომილებიანი პოლონური ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცისათვის ქრისტენსენის მიერ [2] ნაშრომში შემუშავებულ *ჰაარის ნულსიმრავლეთა თეორიის მეთოდებს.*

ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების (რაც იგივეა, უსასრულო შერჩევათა) სივრცე წარმოადგენს უსასრულოგანზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეს აღჭურვილს ტიხონოვის მეტრიკით, რომელიც თამაშობს მეტად მნიშვნელოვან როლს სტატისტიკურ გადაწყვეტილებების მიღების თეორიაში, ვინაიდან უცნობი პარამეტრისათვის რაიმე ძალდებული შეფასების ცნების განხილვა სხვადასხვა სტოქასტურ მოდელში შეუძლებელია უსასრულო შერჩევის არსებობის გარეშე .

$R^N$ სივრცის ჰაარის ნულ სიმრავლეთა თეორიის საშუალებით ჩვენ შევეცდებით ავხსნათ ნუნალისა [14] და კოენის [4] მოსაზრებები.

[27] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ შეფასება $\overline{\lim} T_n := \inf_n \sup_{m\geq n} T_m$ და $\underline{\lim} T_n := \sup_n \inf_{m\geq n} T_m$ ხ მოდელირებული (1.6)-ში, სასარგებლო $\theta$ სიგნალის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებაა (იხ, [27], თეორემა 4.2, გვ. 483). როცა ჩვენ ვიწყებთ უსასრულო შერჩევების $R^N$ -ზე განსაზღვრული სტატისტიკების თვისებების შესწავლას ჰაარის ნულსიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით, ჩვენ ვაწყდებით მოულოდნელ ფაქტს იმასთან

დაკავშირებით, რომ ეს ორივე შეფასება არის ობიექტური (იხ, [20], თეორემა 3.1).

მნიშვნელოვანი ფაქტს წარმოადგენს *''ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების''* ცნების შემოტანა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფებისათვის.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ ზოგიერთ განსაზღვრებას და ფაქტს სრული მეტრიკული წრფივი სივრცეების ჰაარის ნულსიმრავლეთა და ღერძზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების თეორიიდან. აქვე მოვიყვანთ ობიექტური და ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების ცნებებს სტატისტიკური სტრუქტურებისთვის. ასევე განვიხილავთ უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური შეფასების აგების ზოგიერთ კონსტრუქციას, რომელიც განაზოგადებს [27] ნაშრომში მიღებულ ზოგიერთ შედეგს. აქ ნაჩვენები იქნება უცნობი განაწილების $F(F \in \mathcal{F})$ ფუნქციის ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი ბორელის ალბათურ ზომათა $\{p_F^N : F \in \mathcal{F}\}$ ოჯახისთვის,სადაც $\mathcal{F}$ აღნიშნავს ყველა მკაცრად ზრდად და უწყვეტ განაწილების ფუნქციათა ოჯახს და $p_F^N$ აღნიშნავს $p_F$ ბორელის ზომის უსასრულო ხარისხს. მეოთხე ნაწილში წარმოვადგენთ „სასარგებლო სიგნალის“ ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების ეფექტურად აგებას ზოგიერთ წრფივი ერთგანზომილებიანი მოდელისთვის. უცნობი განაწილების სიმკვრივისათვის ალბათობების უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება იგება ცალკე დადებით უწყვეტ სიმკვრივეთა კლასისთვის და შევისწავლით ობიექტური შეფასების არსებობის საკითხს. დიდი ნაწილი ეძღვნება ჰაარის ემბივალენტის ცნების [1] გამოყენებას ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებში პრინციპულად ახალი ისეთი სტატისტიკური სტრუქტურების გამოსაკვლევად, რომლებსაც გააჩნიათ უცნობი პარამეტრის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური შეფასებები. კონკრეტულად, ჩვენ შევისწავლეთ სხვადასხვა სტატისტიკურ სტრუქტურებს შორის ურთიერთმიმართება. ნაშრომში განვიხილავთ სუსტადგანცალებადი სტატისტიკური სტრუქტურის მაგალითს,

რომლისთვისაც უცნობი პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი ვერ გადაწყდება $(ZF)\,\&\,(DC)$ თეორიაში. ეს შედეგები აუმჯობესებენ [19] ნაშრომში მიღებულ შედეგებს. ამასთან ჩვენ განვაზოგადებთ პოლონური $R^N$ ჯგუფის შემთხვევაში შემოტანილ ობიექტური და სუბიექტური ძალდებული შეფასებების ცნებებს ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფებისთვის და განვიხილავთ ყოველი სტატისტიკური სტრუქტურისთვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხს, როცა არსებობს სუბიექტური ძალდებული შეფასება. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს საკითხი დადებითად გადაწყვეტადია იმ შემთხვევისათვის, როცა არსებობს ერთ მაინც ისეთი პარამეტრი, რომლის წინარე სახე არსებული სუბიექტური შეფასებით არის გავრცელება. მოყვანილია $\{0;1\}^N$ პოლონური კომპაქტური ჯგუფისათვის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების აგების ზოგიერთ კონსტრუქცია.

**სამუშაოს მიზანი:** კვლევის საგანია ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებზე განსაზღვრული პრინციპულად ახალი სტატისტიკური სტრუქტურ-ებისთვის უცნობი პარამეტრების ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებისაგებასთან დაკავშირებული საკითხები, რომელიც გადავწყვიტეთ ჰაარის ემზივალენტის ცნებების გამოყენებით. ეს უკანასკნელი შემოტანილია ბალკას, ბუკზოლიცისა და ელეკეშის მიერ 2012 წელს. პასუხი შეკითხვაზე - „არსებობს თუ არა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ნებისმიერი სტატისისტიკური სტრუქტურებისთვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური შეფასება, იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს სუბიექტური შეფასება“ - დადებითია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს ერთი მაინც ისეთი პარამეტრი, რომლის წინარე სახე აღნიშნული სუბიექტური შეფასების მიმართ არის გავრცელება. ეს შედეგი არის გ. ფანცულაიას (2014) მიერ მიღებული შედეგის განზოგადება. იმისათვის რომ

მივიღოთ კვლევის უსასრულო განზომილებიანი ვერსიები, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებზე რომელი ზომები შეიძლება ჩაითვალოს $R^n\ (n \in N)$ სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის ანალოგად. ამ მიმართლებით მნიშვნელოვანია ი. გირსანოვის, ბ. მიტიაგინის [5] და სუდაკოვის [16] შედეგები უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არატრივიალური ძვრის მიმართ ინვარიანტული $\sigma$-სასრული ბორელის ალბათური ზომების არარსებობის შესახებ. მათ დაამტკიცეს, რომ $\sigma$-სასრულობის თვისება და ინვარიანტობის თვისება ყოველი ძვრის მიმართ არათავსებადია. გამომდინარე აქედან შეიძლება შევასუსტოთ ყოველი ძვრის მიმართ ინვარიანტობის თვისება ლებეგის ზომის ანალოგებისთვის $R^{\infty}$ სივრცეში და შემოვიფარგლოთ ისეთი არატრივი-ალური $\sigma$-სასრული ბორელის ზომებით, რომლებიც ინვარიანტული არიან ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. უნდა აღინიშნოს, რომ მურის [12], იამასაკის [19] და ხარაზიშვილის [9] მიერ მოცემულ იქნა ისეთი ზომების აგების კონსტრუქციები ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების $R^{\infty}$ სივრცეზე, რომლებიც ინვარიანტული არიან ყველა ფინიტური მიმდევრობებისა $R^{(N)}$ ჯგუფის მიმართ.

**შედეგების გამოყენების სფერო.** ნაშრომში მოყვანილი საკვლევი პრობლემები ფუნდამენტური ხასიათისაა და მისი გამოყენების არეალი საკმარისად ფართოა. ერთისმხრივ, ნაშრომში წარმოდგენილი თეორიული სახის შედეგები შეიძლება იქნას გამოყენებული როგორც მათემატიკური სტატისტიკის აქტუალური საკითხების შემდგომი კვლევისას, ასევე მათემატიკის აღნიშნული დარგის თანამედროვე კურსის წაკითხვის პროცესში. მეორე მხრივ, შესაძლებელია აღნიშნული შედეგების წარმატებით გამოყენება იმ ელემენტარული ჭეშმარიტების გამო, რომ დაკვირვებადი ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო თუ სხვა შემთხვევითი პროცესების უმრავლესობა კარგად მოდელირდება სტაც-იონარული სტოქასტური პროცესებით.

**ნაშრომის აპრობაცია.** დისერტაციაში გადმოცემული შედეგების

პრეზენტაცია მოხდა:

1) ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტე-ტის (თსუ) ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუ-ტის (გმი) სემინარის XXIX გაფართოებული სხდომები, 22-24 აპრილი, 2015 .აპრილი, 2014. (სექციის ხელმძღვანელი: საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემიის წევრ-კორესპოდენტი, პროფესორი ელიზბარ ნადარაია, თსუ მათემატიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, ასოც. პროფესორი ომარ ფურთუხია);

2) სასწავლო-სამეცნიერო სემინარი - ზომის თეორიის სიმრავლურ-თეორიული ასპექტები (ხელმძღვანელი: პროფესორი გ. ფანცულაია).

3) საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სასწავლო-სამეცნიერო სემინარი (ხელმძღვანელი: პროფესორი დ.ნატროშვილი).

ამასთანავე, შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებული იქნა როგორც საერთაშორისო, ასევე ადგილობრივი მნიშვნელობის კონფერენციებზე.

**ნაშრომის მოცულობა დასტრუქტურა.** დისერტაცია შედგება შესავლის, 4 თავის, 9 ქვეთავისა და დასკვნისაგან. იგი მოიცავს 131 ნაბეჭდ გვერდს. ნაშრომს თანერთვის 58 დასახელების გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხა.

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში.

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება შემდეგი ამოცანების გადაწყვეტას:

1. უცნობი განაწილების ფუნქციის უსასრულოდ შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ამოცანა წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა თეთრი ხმაურის შესაბამისი განაწილების ფუნქცია მკაცრად ზრდადი და უწყვეტია.
2. ჰაარის ემბივალენტის ცნების საშუალებით უცნობი განაწილების ფუნქციის ყველა უსასრულოდ შერჩევით ძალდებულ შეფასებებათა კლასის შესწავლა;
3. უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულოდ შერჩევითი ძალდებული შეფასებების არსებობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა.
4. თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის საშუალებით მკაცრად ზრდადიდაუწყვეტი განაწილების ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახის პარამეტრიზაცია და მისთვის უცნობი განაწილების ფუნქციის შეფასების არაპარამეტრული ამოცანის პარამეტრიზებულ ამოცანაზე დაყვანა.
5. უცნობიგანაწილებისფუნქციის უსასრულოდ შერჩევითი ძალდებული შეფასებების აგება მკაცრად ზრდადიდაუწყვეტი განაწილების ფუნქციებისნებისმიერიოჯახისათვის .
6. უცნობი საშუალოდ კვადრატული გადახრისათვის განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული ნულჰიპოთეზის ტესტირების შესწავლა ‘’თითქმის ყველა’’ ტერმინებში და მისი გარკვეული მოდიფიკაციების განხილვა.
7. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურადკომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუ-ქტურების თვისებები.
8. სოლოვეის მოდელში სუსტად განცალებადი სტატისტიკური სტრუქტურა არ არის ძლიერად განცალებადი.
9. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურად-კომპაქტურ ტოპოლოგიურჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქ-

ტურისათვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი.

10. $\{0;1\}^N$ ჯგუფზე განსაზღვრულის ტატისტიკური სტრუქტურების შესახებ.

11. მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი.

## სადისერტაციო ნაშრომისმოკლეშინაარსი

შესავალში გადმოცემულია საკვლევი პრობლემის აღწერა, აქტუალობა და პრაქტიკული მნიშვნელობა, სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა თავებისა და ქვეთავების მიხედვით.

**თავი I -** ძირითადი კონცეფციები. განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზისის ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება შემდგომ კვლევებში.

### თავი II - წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში უცნობი პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქციების შესახებ

### ქვეთავი - 2.1. თანაბრადგანაწილებული მიმდევრობების ზოგიერთი ახალი თვისების შესახებ

**ლემა 2.17.** ვთქვათ, $F_1$ და $F_2$ არის ორი მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუქცია და $p_1$ და $p_2$ ბორელის ალბათური ზომებია $R$ ღერძზე განსაზღვრული $F_1$-ით და $F_2$-ით, შესაბამისად. მაშინ არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ისეთი, რომ ის ერთდროულად იყოს $p_1$-თანაბრადგანაწილებული და $p_2$-თანაბრადგანაწილებული.

ქვეთავი - 2.2. განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული საშუალო კვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ

**თეორემა 2.1.** ვთქვათ, $\mu_\theta$ არის ალბათური ზომა R-ზე, წარმოქმნილი ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინისა და θ (θ>0) საშუალო კვადრატული გადახრის მქონე შემთხვევითი სიდიდით.

$T_1((x_k)_{k\in N}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}}$ თუ $\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}}$ არსებობს და სასრულია ($(x_k)_{k\in N} \in R^N$), ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში $T_1((x_k)_{k\in N}) = 1$. მაშინ, $T_1$ არის θ∈(0,∞) პარამეტრისთვის სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება.

ქვეთავი - 2.3. უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ

**თეორემა 2.3.5** *ვთქვათ,* $\mathrm{F} = \{F_\theta : \theta\in\Theta\}$ *და* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახი განსაზღვრულია თეორემა 2.3.1. -ით.ვთქვათ,* $\theta_0 \in \Theta$ *და მისთვის განსაზღვრულია შეფასება* $T^{(2)}{}_{\theta_0} : R^N \to \Theta$ *შემდეგი სახით:* $T^{(2)}{}_{\theta_0}((x_k)_{k\in N}) = \underline{\lim}\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})$ *თუ* $\underline{\lim}\,\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N}) \in \Theta\setminus\{\theta_0\}$ *და* $T^{(2)}{}_{\theta_0}((x_k)_{k\in N}) = \theta_0$*, სხვა შემთხვევაში* $\underline{\lim}\widetilde{T}_n = \sup_n \inf_{m\ge n}\widetilde{T}_m$ *და*

$$\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N}) = n^{-1}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty;x_*])$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in R^N$. მაშინ $T^{(2)}{}_{\theta_0}$ არის $\theta$ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

**თეორემა 2.3.7** *ვთქვათ,* F *არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნციების ოჯახი. ყოველი* $F\in\mathrm{F}$ *ელემენტისათვის,* $p_F$ *-ით აღვნიშნოთ ბორელის ალბათური ზომა* $F$ *განაწილების ფუნქციით. მაშინ* $\{p_F^N : F\in\mathrm{F})\}$ *ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი ძლიერ განცალებადია.*

**შენიშვნა:**შევნიშნოთ, რომ გლივენკო-კანტელის თეორემის გამოყენებით შესაძლებელია თეორემა 2.3.7-ის გაძლიერება განაწილებათა ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახისათვის. მართლაც, გლივენკო-კანტელის თეორემის თანახმად, ყოველი $F$ განაწილების ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$p_F^N\{(x_k)_{k\in N} : \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R} |\frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x)}{n} - F(x)| = 0\} = 1.$$

*თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას*

$$D_F\{(x_k)_{k\in N} : \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R} |\frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x)}{n} - F(x)| = 0\},$$

*მაშინ ცხადია რომ ორი განსხვავებული* $F_1$ და $F_2$ განაწილების ფუნქციისათვის გვექნება

$$D_{F_1} \cap D_{F_2} = \emptyset$$

**ქვეთავი - 2.4 წრფივი ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლოს სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია**

**თეორემა 2.4.1.** ვთქვათ , მოცემულია (2.3.12) ფორმულით განსაზღვრულიწრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური პროცესი, სადაც „თეთრი ხმაურ“-ს აქვს სასრული პირველი რიგის აბსოლუტური მომენტი და მისი პირველი რიგის მომენტი ნულის ტოლია. ვთქვათ, ბორელის ალბათური ზომა $\lambda$ განსაზღვრულია გარდაქმნილი $(\xi_k)_{k\in N}$ სიგნალების მიმდევრობით და გარკვეული $\theta_0 \in [0,1]$ პარამეტრისთვის ემთხვევა $(\mu_{\theta_0}^N)$ -ს. $T : R^N \to [0,1]$ სტატისტიკა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$T((x_k)_{k\in N}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \text{ თუ ზღვარი არსებობს } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \neq 1,$$

$$T((x_k)_{k\in N}) = 1 \text{ თუ } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1,$$

$$\text{და } T((x_k)_{k\in N}) = \sum_{k\in N}\frac{\chi_{(0,+\infty)}(x_k)}{2^k}, \text{ სხვა შემთხვევაში.}$$

სადაც $\chi_{(0,+\infty)}(\cdot)$ აღნიშნავს $(0,+\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ სიმრავლის ინდიკატორ ფუნქციას. მაშინ $T$ არის $\theta$ უცნობი პარამეტრის ძლიერად

ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ სტატისტიკური სტრუქტურისთვის, რომელიც არის წრფივ ერთგანზომილებიანი სტოქასტური პროცესის აღმწერი.

## ქვეთავი 2.6 – უცნობი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება

**თეორემა2.5.6** *ვთქვათ,* $X_1, X_2, \cdots$ *არის დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა* $(a,\sigma)$ *პარამეტრებით, სადაც* $a$ *არის საშუალო და* $\sigma$ *არის საშუალო კვადრატული გადახრა. დაუშვათ, რომ ცნობილია საშუალო* $a$, *რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ,* $\Phi$ *არის გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქცია. ყოველი* $\sigma\in\Sigma=(0,\infty)$ *პარამეტრისთვის,* $\mu_\sigma$ *-ით ავღნიშნოთ* $(a,\sigma)$ *პარამეტრებიანი ბორელის ალბათური გაუსის ზომა. დავაფიქსიროთ* $\sigma_0\in\Sigma$ *განვსაზღვროთშეფასება*$T_{\sigma_0}^{(2)}: R^N \to \Sigma$ *შემდეგნაირად:*

$T_{\sigma_0}^{(2)}((x_k)_{k\in N}) = \overline{\lim} T_n^{(2)}((x_k)_{k\in N})$ *თუ* $\overline{\lim} T_n^{(2)}((x_k)_{k\in N}) \in \Sigma \setminus \{\sigma_0\}$ *და*$T_{\sigma_0}^{(2)}((x_k)_{k\in N}) = \sigma_0$ *სხვა შემთხვევაში, სადაც* $T_n^{(2)}((x_k)_{k\in N}) = \inf_n \sup_{m\ge n} T_m^{(2)}$ *და*

$$T_n^{(2)}((x_k)_{k\in N}) = T_n^{(2)}(x_1,\dots x_n) = -\frac{a}{\Phi^{-1}\left(\frac{\#([\{x_1,\dots x_n\}\cap(-\infty,0]]}{n}\right)}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ შერჩევისათვის. მაშინ $T_{\sigma_0}^{(2)}$ არის $\sigma$ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma\in\Sigma}$ ოჯახისთვის.

## 2.6 კომპაქტურ პოლონურ $\{0,1\}^N$ ჯგუფში უცნობი პარამეტრის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებების შესახებ

ვთქვათ Gარის არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი, აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ,

$$\text{SOCE} \to \text{OCE} \to \text{CE} \leftrightarrow \text{SS} \to \text{WS} \to \text{O}$$

**თეორემა 2.6.21** დავუშვათ, $G$ არის ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი. ვთქვათ, $card(\Theta)=2^{\aleph_0}$ და $T:G\to\Theta$ არის $\theta$ პარამეტრის ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის, ისეთი, რომ არსებობს $\theta_0\in\Theta$ რომლისთვისაც $T^{-1}(\theta_0)$ სიმრავლე არის გავრცელება. მაშინ არსებობს $\theta$ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

არალოკალურად კომპაქტურ აბელის პოლონურ $R^N$ ჯგუფზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურისთვის აიგო უცნობი პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება. ამასთან დაკავშირებით ჩვენ ვახდენთ შემდეგი ამოუხსნელი ამოცანის ფორმულირებას.

**ამოცანა 2.6.1** ვთქვათ, $G$ არის ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი. არსებობს თუ არა ისეთი სტატისტიკური სტრუქტურა $\{(G,\mathrm{B}(G),\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$, რომლისთვისაც $card(\Theta)=2^{\aleph_0}$ და არსებობს $\theta$ პარამეტრის ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასება?

**შედეგი:** მოვიყვანოთ $\mathrm{SS}\leftarrow\mathrm{WS}$ წინადადების კონტრმაგალითი სოლოვეის მოდელში (SM) [25] . სოლოვეის მოდელში სუსტად განცალებადი ოჯახი არ არის ძლიერად განცალებადი.

## თავი III - ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების საშუალებით

კოლმოგოროვის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გარკვეული მოდიფიცირების გამოყენებით მიღებულია ბახას და შოისენგერის (2002) შედეგის გაძლიერება (0,1) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების მაქსიმალურ ქვესიმრავლეზე, რომელიც მკაცრად მოიცავს ყველა $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ სახის მიმდევრობებს, სადაც $\alpha$ ირაციონალური რიცხვია.

ამასთან ამ კლასის $\ell_1^\infty$ ზომა 1–ის ტოლია, სადაც $\ell_1^\infty$ არის $(0,1)$ -ინტერვალზე განსაზღვრული წრფივი ლებეგის $\ell_1$ ზომის უსასრულო ხარისხი.

**თეორემა 3.1** *([4] , შედეგი 1.1, გვ. 3) ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა* $(x_n)_{n\in N} \in [0,1]^\infty$ *არის თანაბრად განაწილებული* $[0,1]$ *-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* $[0,1]$ *-ზე რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყოველი ნამდვილ–მნიშვნელობიანი* $f$ *ფუნქციისთვის*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} f(x_n)}{N} = \int_0^1 f(x)dx.$$

**თეორემა 3.5.** *ვთქვათ,* $f:(0,1)\to R$ *არის* ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია.ვთქვათ, $D_f$ არის $(0,1)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული ყველა იმ მიმდევრობების სიმრავლე, რომელთათვისაც შემდეგი სამი პირობა

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{n} = 0$ ;
2. $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k)$ არსებობს;
3. $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(x_k) = \int_{(0,1)} f(x)dx$ ;

ეკვივალენტურია. მაშინ $D_f$ (მაქსიმალური) სიმრავლეს გააჩნია სრული $\ell_1^\infty$-ზომა და

$$D_f = (A_f \cap S)\cup(S \setminus C_f),$$

სადაც $S$ *არის ყველა* $[0,1]$ *ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების სივრცე. მაშინ* $\ell_1^\infty(S) = 1$.

$$A_f = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in X^\infty \ \&\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f(x)dx\}.$$

$$C_f = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in (0,1)^\infty \ \&\ \lim_{N\to\infty}\frac{f(x_N)}{N} = 0\}.$$

## თავი IV- მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომისა და ბორელის უსასრულო დიფუზიურ ალბათური ზომის შესახებ $R$-ზე

ამ თავში შესწავლილია მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი. უფრო ზუსტად, ჩვენ მოგვყავს დამტკიცება იმ ფაქტის, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული არცერთი მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი არ არის ექვივალენტური მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის.

**ამოცანა 4.1** ვთქვათ, *$\mu$ არის ნამდვილ რიცხვთა $R$ ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომა და $\lambda$ არის მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომა* $\mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ *-ზე. არიან თუ არა $\mu^N$ და $\lambda$ ზომები ევკივალენტური?*

### *ამოცანა 4.1-ის უარყოფითი გადაწყვეტა*

ამოცანა 4.1 -ის უარყოფითი გადაწყვეტა მოცემულია შემდეგ წინადადებაში:

**ფაქტი 4.1**([19], წინადადება 2.1, გვ. 696)*ვთქვათ, $f(x)$ ზომადი ფუქნციაა $R^1$ -ზე, რომელიც აკმაყოფილებს $f(x)>0$ და $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ პირობებს. ვთქვათ, $\mu$ არის სტაციონარული პროდაქტ ზომა განსაზღვრული $f$- ით (ე.ი. $d\mu=\prod_{i=1}^{\infty} f(x_i)dx_i$) და $R^{(N)}$ არის ყველა ფინიტური მიმდევრობების წრფივი ვეტორული სივრცე. მაშინ $\mu$ არის $R^{(N)}$-კვაზიინვარიანტული, $\mu$ ზომას არ გააჩნია არცერთი მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ექვივალენტური ზომა.*

**ამოცანა 4.2***ვთქვათ, $(\mu_k)_{k\in N}$ არის ნამდვილ რიცხვთა $R$-ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათურ დიფუზიურ ზომათა ოჯახი და $\lambda$ არის მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომა* $\mathrm{R}^{\mathrm{N}}$ *-ზე. არიან თუ არა $\prod_{k\in N}\mu_k$ და $\lambda$ ზომები ევკივალენტური?*

### ამოცანა 4.2 -ის კერძო გადაწყვეტა:

ვთქვათ, $(c_n)_{n\in N}$ დადებითი რიცხვების ისეთი მიმდევრობაა, რომ $0 < c_n < l$. ყოველი $n$ ნატურალური რიცხვისთვის განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა $R$ ღერძზე განსაზღვრული უწყვეტი $f_n(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$0 < f_n(x) < 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1,$$

$$f_n(x) = c_k \quad x \in [0,1].$$

ასეთი $f_n(x)$ ფუქნცია არსებობს $n$ ნატურალური რიცხვისთვის.

ყოველი $n$ ნატურალური რიცხვისთვის $\mu_n$–ით აღვნიშნოთ განაწილების $f_n$ სიმკვრივის მქონე ბორელის ალბათური ზომა.

**ფაქტი 4.2.** თუ $\prod_{n\in N} c_n > 0$, მაშინ $\prod_{n\in N} \mu_n$ და $\nu_{[0,1]^N}$ არიან ეკვივალენტური ზომები.

**შენიშვნა.** *ვთქვათ,* $\prod_{k\in N} \mu_k$ *აღნიშნავს ფაქტი 1.2 -ში აგებულ პროდაქტ ზომას. მაშინ* $\nu_{[0,1]^N}$ *ზომის ყველა დასაშვები ძვრების ჯგუფს (ინვარიანტობის თვალსაზრისით) აქვს შემდეგი სახე*

$$l_1 = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \sum_{k\in N} |x_k| < +\infty\}.$$

**ამოცანა 4.3** *ვთქვათ,* $\mu_1$ *და* $\mu_2$ *არიან ნამდვილ რიცხვთა* $R$ *-ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომები. არიან თუ არა* $\mu_1^N$ *და* $\mu_2^N$ *ზომები ეკვივალენტური?*

### ამოცანა 4.3–ის გადაწყვეტა:

**თეორემა 4.10** *ვთქვათ,* $F_1$ *და* $F_2$ *არიან ნამდვილ რიცხვთა* $R$ *ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციები, და* $p_1$ *და* $p_2$ *არიან ნამდვილ რიცხვთა* $R$ *ღერძზე შესაბამისად* $F_1$ *და* $F_2$ *-ით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომები. მაშინ* $p_1^N$ *და* $p_2^N$ *ზომები არის ორთოგონალური.*

**ამოცანა 4.4** *ვთქვათ,* $(\mu_i)_{i\in I}$ *არის ნამდვილ რიცხვთა* $R$ *ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომების ოჯახი მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუქნციებით. ვთქვათ,*

$$S(R^N) := \cap_{i\in I} dom(\overline{\mu_i^N}),$$

*სადაც* $\overline{\mu_i^N}$ *წარმოადგენს* $\mu_i^N (i \in I)$ *ზომის გასრულებას. არსებობს თუ არა* $R^N$ *სივრცის* $(D_i)_{i\in I}$ *დახლეჩა* $S(R^N)$ $\sigma$*-ალგებრის ელემენტებით, ისეთი რომ სრულდებოდეს პირობა* $\overline{\mu_i^N}(D_i) = 1$ *ყოველი* $i \in I$ *ინდექსისათვის?*

## ამოცანა 4.4-ის გადაწყვეტა:

**თერემა 4.14** *ვთქვათ,* $\mathrm{F}$ *არის ნამდვილ რიცხვთა* $R$ *ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ოჯახი და* $p_F$ *აღნიშნავს* $F$ *-ით წარმოქმნილ ბორელის ალბათურ ზომას* $R$ *-ზე ყოველი* $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის. მაშინ ბორელის ალბათური ზომათა ოჯახი* $\{p_F^N : F \in \mathrm{F}\}$ *ძლიერად განცალებადია.*

## სადისერტაციონაშრომშიწარმოდგენილიშედეგები გამოქვეყნებულია4სამეცნიეროშრომაში:

[1] Murman Kintsurashvili, Tengiz Kiria, Gogi Pantsulaia, On objective and strong objective consistent estimates of unknown parameters for statistical structures in a Polish group admitting an invariant metric, Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications, Volume 13, No. 2 (2015) 179-233

[2] G. Pantsulaia and T. Kiria.On statistical structures in a Polish non-locally-compact group admitting an invariant metric,Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute168 (2015), 117-127

[3] T.Kiria, On the statistical structure defined by the law of the iterated logarithm, Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics Volume 29, 2015, pp. 68-71.

http://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol29/kiria.pdf

[4] Gogi Pantsulaia, Tengiz Kiria , Calculation of Lebesgue integrals by using uniformly distributed sequences.Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute

Volume 170, Issue 3, December 2016, Pages 402–409.

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2346809216300034

https://arxiv.org/pdf/1507.02978.pdf

სადისერტაციონაშრომშიმოყვანილიშედეგებიმოხსენებულიიყო

შემდეგ კონფერენციებზე:

1. **მოხსენება ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXIX გაფართოებულ სხდომებზე**

[1] **თ. ქირია.** საშუალო კვადრატული გადახრის ერთი ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის (თსუ) ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის XXIX გაფართოებული სხდომები , 22-24 აპრილი, 2015 .

2. მოხსენება ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის (გმი) სემინარის **XXXX გაფართოებულ სხდომებზე 20-22 აპრილი, 2016**

[1] **თენგიზქირია, ზურაბზერაკიძე.** ჰიპოთეზის შესამოწმებელი ძალდებული კრიტერიუმი გაუსის ერთგვაროვანი ველის სტატისტიკური სტრუქტურისათვის.

3. მოხსენება - საქართველოსბიზნესისაკადემია_SBA. თბილისი 2016 (2016 წლის 19-20 მაისი) საერთაშორისოკონფერენცია (Business development in Global economy)

**კინწურაშვილი მურმანი, ქირია თენგიზი** - ზოგიერთი ეკონიმიკური ამოცანის მათემატიკური მოდელი (Mathematical moelings of some Econimical problems

## SUMARY

## On Consistent Estimation ofParameters of the Stationary Processes

The present work "On Consistent Estimation ofParameters of the Stationary Processes" considers some aspects of a general theory of the “Haar Zero Sets” and some applications thereof. Besides, a considerable attention is paid to use of the uniformly distributed sequences technique in solving various tasks.

The paper deals with the basic concepts and auxiliary provisions of the set theory, measure theory, probability theory, mathematical statistics, mathematical analysis, and functional analysi, which are essentially used in the mentioned studies.

A certain part of the thesis is devoted to studying the structure of the class of assessment of the main characteristicparameters of the stationary statistical structures, with using the Haar Zero Sets methods. Specifically, the task is discussed, why the zero hypothesis is rejected through the maximal credibility zero hypothesis test, for "almost all" infinite selections.

We demonstrate that an infinite random assessment of an unknown average square deviation defined by the repeated logarithm law is not determined for the "almost all" infinite selections in the $R^N$ space. The statistics constructed naturally with using this estimation, is the consistent and subjective statistics. We will consider one modification of this estimation, which represents a strongly objective infinite selective consistent statistic of an unknown average square deviation.

The concepts of subjective and objective infinite selective consistent estimations areintroduced and, indicated, that in the case of linear one-dimensional stochastic model, when the first line moment exists for the white noise, the infinite selective average is the subjective infinite selective consistent estimation of the useful signal.

The statistics developed in the work of [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire G-powers of shift-measures on R, Ukrainian Mathematical Journal, v. 65, issue 4 (2013), 470–485] is considered, which is the infinite selective consistent estimation of a useful signal in the linear one-dimensional stochastic model even in case where the first line moment does not exist for the white noise. Here the technique of the real number sequences uniformly distributed in an interval, is applied mainly.

With using one sufficient condition of the Haar ambivalence, it is proved that this statistic is the objective infinite selective consistent estimation of the useful signal.

In the dissertation work a great place is dedicated to the task of construction of the objective and very objective consistent estimations of the unknown parameters of the statistical structures determined for the polish group equipped with the invariant metric.

The issues of objective and strongly objective consistent estimation of unknown parameters of the principally new statistical structures defined for the non-local compact polish groups equipped with invariant metric, are discussed with using the concept of the Haar ambivalence. The latter was introduced by Balca, Buksolize and Elekesh in 2012. Answer on the question: "Is there an objective assessment of an unknown parameter for any statistical structures defined by the non-linear compact polish groups equipped with an invariant metric, if there is a subjective estimation?" - is positive in a case, when there is at least one parameter, towards which the said subjective estimation may be spread. This is a generalization of the result recently obtained by us. We also consider the examples of objective and strongly objective consistent estimations in the compact polish group.

We gave some space to the issue of the relationship between Moore-Yamasaki-Kharazishvili (1980) type measures and infinite powers of Borel diffused probability

measures determined on the axis of real numbers. More precisely, we provide a proof that no infinite power of the Borel probability measure with a strictly positive density function on the axis of the real numbers, is equivalent to the Moore-Yamasaki-Kharazishvili type measure.

We introduce also calculation of the Lebesgue integral through uniformly distributed sequences; By certain modification of Kolmogorov's Strong Law of Large Numbers, the strengthened result of Baha and Shoisenger (2002) is received for maximal sub-sets of equally distributed sequences on (0, 1) interval, that covers strongly all sequences of $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ type, where $\alpha$ is the irrational number. At the same time, $\ell_1^\infty$ measure of this class equals to 1, where $\ell_1^\infty$ is an infinite power of Lebesgue's $\ell_1$ measure determined on (0, 1) interval.

**In the dissertation work we have resolved the following issues:**

1. The task of constructing an infinite randomized consistent estimation of the function of unknown distribution in a one-dimensional stochastic model when the function of the distribution of white noise is strictly increasing and continuous.
2. Study of all infinite selective consistent estimations of the unknown distribution function by means of the concept of the Haar ambivalence.
3. Some of the sufficient conditions for the existence of objective infinite random selection consistent estimations of the unknown distribution function.
4. Parameterization of any family of the strongly increasing and continuous functions through the uniformly distributed sequences technique and, bringing the non-parametric task of estimation of the unknown distribution function to the task of estimation of an unknown parameter.
5. Construction of the infinite random selection consistent estimations of the unknown distribution function for any family of the strongly increasing and continuous functions.
6. Study of the zero hypothesis tests determined by the repeated logarithm law and, its certain modifications, in "almost all" terms.
7. Properties of the statistical structures determined for the non-local compact topological polish groups with the invariant metric.
8. On one weakly separated statistical structure in the Set Theory model (ZF) & (DC) (by construction of the counter-example, it is proved that a weakly separated statistical structure in the Solovey model, is not strongly separated).
9. On existence of the objective consistent estimation of an unknown parameter for the statistical structure of the non-local compact topological polish groups with the invariant metric.
10. On the statistical structures determined for the $\{0;\ 1\}^N$ group.
11. On relationship between Moore-Yamasaki-Kharazishvili (1980) type measures and infinite powers of Borel diffused probability measures determined on the axis of real numbers