

В.В. Мдзинаришвили

**НОВЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОГО
МИКРОМИРА И МЕГАМИРА**

**ОПТИМАЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО
МИКРОМИРА И МЕГАМИРА**

**Тбилиси
Национальная Академия наук Грузии
2017**

Рецензенты:

Академический доктор, главный научный сотрудник института геофизики им. М. Нодия, профессор Тбилисского государственного Университета им. И. Джавахишвили Н. Варамашвили,

Отделение прикладной механики, машиностроения, энергетики и процессов управления Национальной Академии наук Грузии.

**Памяти, оказавшим интеллектуальную поддержку,
Владимиру Чавчанидзе, Алмасхану Гугушвили,
Елене Шаховой, Галине Серпуховитине
Посвящаю**

**То, что разумно – оптимально,
то, что оптимально – действительно.**

Автор

Введение

В эпоху, когда осмысливались результаты экспериментов по исследованию излучения абсолютно чёрного тела, проведенных в физическом Микром мире, обрабатывались данные наблюдений в Мегамире за удаляющимися галактиками, не использовались такие определения и понятия как целостность физической системы и её диссипативность, а при применении вариационных методов не обращалось внимания на эквивалентность уравнений Эйлера-Лагранжа и Гамильтона. Вместе с тем эти определения, понятия и методы являются существенными при моделировании процессов Микром мира и Мегамира, поскольку позволяют с вариационных позиций взглянуть на оптимальность этих миров. В то же время эти определения, понятия и методы присущи как Микром миру, так и Мегамиру. Они роднят физический Микром мир и Мегамир.

Свойство целостности системы, т.е. её нерасчленимость на отдельные подсистемы, удобно интерпретировать на примере системы наблюдений (измерений).

Пусть система наблюдений задана скалярными уравнениями

$$\dot{x} = -\alpha x + \xi(t), \quad (0.1)$$

$$y = x + \zeta(t), \quad (0.2)$$

объекта (0.1) и канала наблюдений (0.2).

В выражениях (0.1) и (0.2) $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ являются скалярными случайными процессами типа белого шума, имеющими следующие стохастические характеристики:

$$E[\xi(t)] = 0, \quad E[\xi(t)\xi(t')] = \rho\delta(t-t'),$$

$$E[\zeta(t)\zeta(t')] = r\delta(t-t'), \quad E[\zeta(t)] = 0,$$

причём E – оператор математического ожидания, δ – функция Дирака, параметры α, ρ, r являются постоянными.

Примем следующие обозначения: $E[x(0)] = 0$, $E[x^2(0)] = \nu_0$, $\nu = E[(\hat{x} - x)^2]$ где \hat{x} – означает условную оценку переменной x , полученную методом наименьших квадратов, а ν – дисперсию переменной x .

В этом случае уравнение для дисперсии ν примет вид [1]:

$$\dot{\nu} = -2\alpha\nu - (1/r^2)\nu^2 + \rho, \quad \nu(0) = \nu_0. \quad (0.3)$$

¹ Уравнение (0.3), в котором постоянный член равен нулю, т.е. $\rho = 0$, нами именуется как уравнение Риккати.

Выражение (0.3) является уравнением Риккати. **Правую часть уравнения (0.3) можно записать в виде солитона**

$$\frac{dv}{dt} = -A \operatorname{sech}^2(\beta^* t - \varphi), \quad (0.4)$$

где $\beta^* = \sqrt{\alpha^2 + \rho/r}$, $\varphi = \ln(\sqrt{c})^{-1}$, $c = \frac{v_2 + v_0}{v_1 - v_0}$, $v_1 > v_0$,

$$v_1 = r(\beta^* - \alpha), \quad v_2 = r(\beta^* + \alpha), \quad A = D\beta^*, \quad D = \frac{v_1 + v_2}{2\sqrt{c}},$$

а v_0 является значением дисперсии v в начальный момент времени $t = t_0$, т.е. $v_0 = v(t_0)$.

Наконец, поскольку решение уравнения (0.4) позволяет определить дисперсию (при $v_0 > v_1$), то имеем

$$v = -A \int_{t_0}^t \operatorname{sech}^2[\beta^*(t' - t_0) - \varphi] dt'. \quad (0.5)$$

Представление системы наблюдений (измерений) в виде объекта (0.1) и канала наблюдений (0.2) формально. Находящаяся в естественных условиях система наблюдений представляет собой целостное образование; она нерасчленима на объект (0.1) и канал наблюдений (0.2). Канал наблюдений (0.2) представляет собой неотъемлемую часть объекта (0.1) наблюдений [2]. Представление реальной системы наблюдений в виде выражений (0.1) и (0.2) целесообразно для математической обработки результатов наблюдений.

В Мегамире встречаются объекты, описываемые уравнениями

$$\dot{z} = mz(n - z), \quad (0.6a)$$

$$\dot{z} = -mz(n - z). \quad (0.6b)$$

Решения уравнений (0.6a) и (0.6b) имеют вид

$$z = \frac{1}{4} n^2 m \int_{t_0}^t \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} mn (t' - t_0) \right] dt', \quad (0.7a)$$

$$z = -\frac{1}{4} n^2 m \int_{t_0}^t \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} mn (t' - t_0) \right] dt'. \quad (0.7b)$$

Из свойства чётности солитона следует, что параметр n может иметь как положительный, так и отрицательный знак в решениях (0.7a) и (0.7b). Необходимо отметить, что уравнения (0.6a) и (0.6b) являются частным видом уравнения (0.3).

Свойство диссипативности означает, что вторая производная от диссипативной функции по её аргументу меняет знак диссипативной функции на обратный. *Диссипативные функции необратимы по соответствующему аргументу. Консервативные функции обратимы, их вторая производная по аргументу не меняет знак на обратный. Если аргументом функции является время, то говорят, что диссипативные функции необратимы во времени, а консервативные – обратимы во времени.* Физики считают, что стохастические системы (в данном случае (0.1) и (0.2)) необратимы. Поскольку уравнения (0.1) и (0.2) представляют собой искусственно записанные выражения, соответствующие нерасчленимому уравнению (0.3), или, что тоже самое, уравнению (0.4), то для удостоверения в необратимости уравнения (0.3), целесообразно использовать метод второй производной, применительно к уравнению (0.4). Этот метод даёт положительный ответ, т.е. уравнение (0.4) и, следовательно, (0.3) необратимы также, как решение (0.5).

В физическом Микром мире и Мегамире действуют оптимизационные¹ законы. С целью ознакомления с этими законами целесообразно обратиться к истории использования оптимизационного уравнения Эйлера-Лагранжа и эквивалентному ему уравнению Гамильтона. Впервые наличие оптимального свойства у элементарных частиц высказал Э.Шредингер, когда записал, принадлежащее ему уравнение, для частиц физического Микром мира с применением функции Гамильтона. После установления адекватности моделирования этим уравнением процессов Микром мира стало ясно, что Микром мир устроен на основе оптимальных принципов. Для создания общей теории относительности (ОТО), частично моделирующей оптимальное устройство Мегамира, А.Эйнштейн использовал тензорную запись оптимизационного уравнения Эйлера-Лагранжа. Этим, фактически, было показано, что определённая часть Мегамира подчиняется оптимизационным законам.

Определим теперь в чем заключается суть оптимизационного принципа, господствующего в физическом Микром мире и Мегамире. Согласно этому принципу всякая динамическая система, находящаяся под действием консервативных сил, движется таким образом, чтобы минимизировать среднее значение по времени разности между кинетической и потенциальной энергиями, т.е.

¹В дальнейшем вместо слов «вариационное уравнение» используется термин «оптимизационное уравнение», поскольку вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа применялось в прикладных (оптимизационных) задачах.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0$$

или

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0,$$

где $T(q, p)$ – кинетическая энергия,

$V(q)$ – потенциальная энергия,

$L \equiv L(q, p) = T - V$ – функция Лагранжа,

q – обобщённая координата,

$p = \dot{q}$ – обобщённый импульс.

Вариация функции Лагранжа имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial p} \delta p dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q dt + \frac{\partial L}{\partial p} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) \delta q dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) \right] \delta q dt = 0,$$

причём в последнем выражении принято $\delta q = 0$ при $t_1 = t$ и $t_2 = t$.

Поскольку число обобщённых координат q равно числу степеней свободы и так как δq не зависит от времени, то последнее равенство выполняется, если выражение в квадратных скобках равно нулю, т.е.

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \equiv \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} = 0 \Rightarrow \dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial q}, \quad (0.8a)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{p}} - \frac{\partial L}{\partial p} \equiv 0 - \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} = 0 \Rightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (0.8b)$$

где $H = T + V$ – функция Гамильтона (гамильтониан). Выражения (0.8a) и (0.8b) показывают, что уравнения Эйлера-Лагранжа эквивалентны уравнениям Гамильтона, представляющим правую часть (по отношению к знакам эквивалентности « \equiv ») выражений (0.8a) и (0.8b).

Производная от решения скалярного уравнения Риккати (0.3), имеющего постоянные коэффициенты, представляет собой солитон (0.4), который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа [3]. Таким образом, решением уравнения Эйлера-Лагранжа является функционал. Этим обстоятельством обусловлено существование у уравнения Эйлера-Лагранжа важного свойства инвариантности относительно произвольных преобразований координат. Это свойство, фактически, явилось одной из предпосылок использования этого оптимизационного уравнения в ОТО.

Оптимизационные принципы этого уравнения не только содержат свойство инвариантности, но и заключают в себе возможность как континуального, так и дискретного аспектов моделирования системы. Несмотря на разительный контраст физического Микромра и Мегамира, для их моделирования используется одни и те же оптимизационные уравнения, записанные в дискретной или континуальной формах. Использование дискретных алгоритмов оптимизации становится необходимым лишь тогда, когда невозможно игнорировать дискретность состояний, моделируемой частицы.

Настоящая монография состоит из двух глав. В первой главе даются новые модели физического Микромра и получены соответствующие им оптимальные выражения. Во второй главе получены новые модели Мегамира, доказывающие, что этот мир подчиняется оптимальным законам. *Математические дополнения представляют собой неотъемлемую часть основного текста и должны рассматриваться совместно с ним, как метод единого подхода. Такая форма представления проблем, решаемых в настоящей монографии, была выбрана из соображений лучшего понимания физической сути задачи и её математической интерпретации, как оптимальной.*

В каждом параграфе настоящей монографии буквенные обозначения имеют самостоятельное значение.

ГЛАВА 1

Новые модели физического Микромра и их оптимальность

*В мире не происходит ничего, в чем бы не был виден
смысл какого-нибудь максимума или минимума.*

Л. Эйлер

В §1.1 – §1.3 получены новые модели физического Микромра. Результаты этих параграфов содержанием не связаны, но связаны идейно словом «оптимальность». §1.5-§1.7 связаны структурно уравнением сепаратрисы математического маятника и идейно словом «оптимальность», поскольку в них используется оптимальное свойство сепаратрисы маятника – она удовлетворяет уравнению Гамильтона.

В §1.4 приводятся известные условия для поляризованной световой волны уравнений Максвелла, позволяющие осуществить переход от микроскопического уровня материи к мезоскопическому уровню. В §1.5 показано, что на мезоуровне неподвижные атомы находятся на сепаратрисе, т.е. их местонахождение – оптимально. В §1.6 показано, что рассматриваемые на мезоуровне движущиеся атомы перемещаются по сепаратрисе. Это означает, что движущиеся атомы находятся в оптимальном состоянии.

Особую ценность представляет §1.7 в котором даётся совершенно новый подход к ОТО, основанный на использовании оптимального свойства сепаратрисы математического маятника.

§1.1. Переход к дискретному аналогу уравнения Шредингера и решение обратной задачи

Используя идею де Бройля об оптико-механической аналогии в поведении микрочастицы и, опираясь на оптимизационный принцип Гамильтона, австрийский физик Эрвин Шредингер в середине двадцатых годов прошлого века синтезировал основное уравнение квантовой механики, носящее его имя:

$$j\varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Psi + \left(\frac{U(x)}{m} \right) \Psi, \quad (1.1)$$

где $j = \sqrt{-1}$, $\varepsilon = \hbar/m$, $\hbar = 1,05459 \cdot 10^{-34} \text{ дж} \cdot \text{с}$ – постоянная Планка, делённая на 2π , Ψ – волновая функция элементарной частицы, подлежащая нахождению, $U(x)$ – потенциальная энергия частицы, имеющей массу m и координату x .

После получения уравнения (1.1) Шредингер сразу же применил, соответствующее уравнению (1.1) стационарное уравнение (когда $\dot{\Psi} = 0$) к атому водорода (используя сферическую систему координат) и получил для собственных значений энергии спектр, совпадающий со всеми известными экспериментальными данными. Этим было показано, что стационарное уравнение правильно описывает движение электрона в потенциальном электрическом поле. Поэтому это уравнение было принято в качестве основного уравнения стационарных состояний квантовой механики. Сложность решения стационарного уравнения Шредингера зависит от вида потенциальной энергии и от числа измерений пространства, в котором решается задача.

Уравнение (1.1) справедливо для скорости элементарной частицы много меньшей скорости света c , т.е. для дорелятивистского случая. Уравнение (1.1) также предполагает, что движение частицы непрерывно во времени.

Английским физиком-теоретиком П. Дираком получено уравнение квантовой механика для релятивистского аналога уравнения (1.1). Нерелятивистское уравнение Шредингера при этом может быть получено как некоторое приближение уравнения Дирака при скорости частицы v , удовлетворяющей условию $v/c \ll 1$.

Поскольку на микроуровне материя дискретна, то от непрерывного уравнения (1.1) приходится переходить к дискретному аналогу. Эта задача решается ниже [4].

Для перехода от непрерывного уравнения (1.1) к соответствующему дискретному уравнению необходимо использовать систему уравнений стохастической механики

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \Delta \cdot (P \mathbf{v}) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{2} \varepsilon \Delta^2 \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

$$P \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \varepsilon \Delta P, \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} и \mathbf{u} – одномерные векторы дисперсии и диффузии частицы, P – плотность вероятности частицы, $\Delta \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ – одномерный вектор-оператор, $\mathbf{F} = \frac{d}{d\mathbf{x}} U$ – градиент поля U , т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{grad} U$, точка « \cdot » означает скалярное произведение.

Поскольку, в данном случае, угол между соответствующими векторами составляет 0 градусов, то точку в уравнениях (1.2) и (1.3) можно опустить, т.е. скалярное произведение заменить обычным произведением.

Хорошо известно, что система уравнений стохастической механики (1.2) – (1.4) эквивалентна уравнению (1.1). Следовательно, для перехода от уравнения (1.1) к соответствующему дискретному уравнению необходимо заменить непрерывную функцию плотности вероятности $P(x, t)$ на дискретную функцию плотности вероятности.

Если ввести обозначение

$$\Psi = \sqrt{P} \exp \left\{ \frac{j}{\varepsilon} \int v dx \right\}, \quad (1.5)$$

то с учетом уравнения (1.4) будем иметь дифференциальное соотношение $-j\varepsilon\Delta\Psi = (v + ju)\Psi$.

От этого соотношения можно перейти к волновой функции

$$\Psi(x, t) = e^{\frac{j}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau} v(x, t) dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau} u(x, t) dx}, \quad (1.6)$$

где τ_0 малое время, но отличное от нуля, т.е. $\tau_0 \neq 0$.

Дискретную функцию плотности вероятности, фигурирующую в формуле (1.5), будем искать в виде производной от обратного преобразования Лапласа от выражения $\frac{1}{s} \text{th} \left(\frac{\tau_0 s}{2} \right)$, используя символ « $\bullet \rightarrow \circ$ » соответствия между преобразованием

Лапласа и его оригиналом; в результате обратного преобразования будем иметь:

$$\frac{1}{s} \text{th} \left(\frac{\tau_0 s}{2} \right) \bullet \rightarrow \circ (-1)^{n-1}, \quad n-1 \leq \frac{t}{\tau_0} < n,$$

где $s = \sigma + j\omega$, t – текущее время, $\tau_0 = \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$. С учётом равенства $-1 = e^{\pi j(2k+1)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) последнее выражение запишется следующим образом

$$\frac{1}{s} \text{th} \left(\frac{\tau_0 s}{2} \right) \bullet \rightarrow \circ e^{\pi j(2k+1)(n-1)\tau_0}, \quad (n-1)\tau_0 \leq t < n\tau_0.$$

Введем обозначение $\tau = n\tau_0 = x$; ясно, что $t = 0$, когда $n = 1$. Для случая, когда $(n-1)\tau_0 = t$ ($n = 2, 3, \dots$), принимая во внимание равенство $\partial \tau = \partial t$, будем иметь соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{s} \text{th} \left(\frac{\tau s}{2} \right) \bullet \rightarrow \circ \frac{\partial}{\partial t} e^{\pi j(2k+1)t}. \quad (1.7)$$

После осуществления дифференцирования в соотношении (1.7) получим выражение для плотности вероятности

$$\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\tau s}{2} \right) \bullet \rightarrow \pi j(2k+1) e^{\pi j(2k+1)t} \equiv P(x, t, k). \quad (1.8)$$

Для использования формулы (1.6) необходимо определить диффузию $u(x, t)$ и дисперсию $v(x, t)$. Диффузия находится согласно формуле (1.4):

$$u = -\frac{\varepsilon}{2} \pi j(2k+1) = \text{const} \quad . \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) справедливо для каждого значения k . Для нахождения дисперсии v подставим плотность $P(x, t, k)$, определенную согласно (1.8), в уравнение (1.2):

$$-\pi^2 (2k+1)^2 e^{\pi j(2k+1)t} - v \pi^2 (2k+1)^2 e^{\pi j(2k+1)t} = -\pi j(2k+1) e^{\pi j(2k+1)t} \frac{\partial v}{\partial x} \Big| \pi j(2k+1) e^{\pi j(2k+1)t} .$$

Из последнего выражения следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\pi j(2k+1)(v+1). \quad (1.10)$$

Если значение диффузии (1.9) подставим в уравнение Нельсона (1.3), то будем иметь уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{F(x)}{m}. \quad (1.11)$$

Совместное решение уравнений (1.10) и (1.11) приводит к $2k+1 (k=0,1,2,\dots)$ количеству скалярных уравнений типа Риккати

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \pi j(2k+1)v + \pi j(2k+1)v^2 + F(x)/m. \quad (1.12)$$

Для конкретного k выражение (1.12) является скалярным уравнением Риккати с постоянными коэффициентами; производная от решения этого уравнения является солитонем, удовлетворяющим уравнению Эйлера-Лагранжа.

Решение уравнения Риккати (1.12) для конкретного значения k имеет вид

$$v(x, t) = v_1(x) + \frac{v_1(x) + v_2(x)}{\left(\frac{v_0(x) + v_2(x)}{v_0(x) - v_1(x)} \right) e^{2\beta(x)t} - 1}, \quad (1.13)$$

где

$$\beta(x) \equiv \beta(jx) = \sqrt{-\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2 - j \frac{\pi}{2}(2k+1) \frac{F(x)}{m}}, \quad (0.13 a)$$

$$v_1(x) \equiv v_1(jx) = -[j\pi(2k+1)]^{-1} \left[\beta(x) + j\frac{\pi}{2}(2k+1) \right], \quad (1.13b)$$

$$v_2(x) \equiv v_2(jx) = -[j\pi(2k+1)]^{-1} \left[\beta(x) - j\frac{\pi}{2}(2k+1) \right], \quad (1.13c)$$

а $v_0 = v(x, 0)$ – значение дисперсии при $t = 0$. Без потери общности, при решении уравнения (1.12), можно положить $v_0 = 0$ [4]. Тогда решение уравнения (1.12) может быть записано в виде [5]:

$$v(x, t) = -D(x)\beta(x) \int_0^{\infty} \sec^2 h^2[\beta(x)t - \phi(x)] dt, \quad (1.14)$$

$$\text{где } D(x) = \frac{v_1(x) + v_2(x)}{2\sqrt{c}}, \quad c = \frac{v_2(x)}{v_1(x)}, \quad \phi(x) = \ln(\sqrt{c})^{-1}.$$

Функционал (1.14), определяющий дисперсию $v(x, t)$ на временном интервале $t \in (0, \infty)$, сложным образом зависит от координаты частицы; поэтому подстановка дисперсии $v(x, t)$ в формулу волновой функции (1.6) очень осложняет вычисление этой функции, делая, практически, невозможным это вычисление. Однако для определения дисперсии $v(x, t)$ в стационарном случае, т.е. когда $t = \infty$, и в начальный момент, когда $t = 0$, вычисление дисперсии становится возможным.

Действительно, когда $t = \infty$, согласно формуле (1.13), имеем $v(x) = v_1(x)$, если же $t = 0$, то из (1.13) получим $v(x) = 0$. Следовательно, вычисление интеграла (1.14) в стационарном состоянии и в начальный момент будет иметь вид

$$v(x, t = \infty) = v(x) = v_1(x) - 0 = v_1(x). \quad (1.15)$$

Согласно формуле (1.13b) выражение (1.15) запишется так

$$v(x) = v_1(x) = -[j\pi(2k+1)]^{-1} \beta(x) - \frac{1}{2}. \quad (1.16)$$

Если в формуле (0.13 a) за знак радикала вынесем член $-\frac{\pi^2}{4}(2l+1)^2$, то будем иметь

$$\beta(x) = j\frac{\pi}{2}(2k+1) \sqrt{1 + j\frac{4}{\pi m(2k+1)} F(x)}. \quad (1.17)$$

Если в выражении (1.16) принять во внимание (1.17), то получим

$$v(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + j\alpha F(x)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + jz(x)} - \frac{1}{2}, \quad (1.18)$$

где $\varkappa = \frac{4}{\pi m (2k + 1)}$, $z(x) = \varkappa F(x)$.

С учетом формулы

$$\sqrt{1 + jz} = \pm \left[\sqrt{\frac{r+1}{2}} - j \sqrt{\frac{r-1}{2}} \right], \quad r = \sqrt{1 + z^2}, \quad (1.17 a)$$

выражение (1.17) запишется так

$$\beta(x) = \pm [j\eta(x) - \gamma(x)], \quad (1.17b)$$

где $\eta(x) = \frac{\pi}{2}(2k+1)\sqrt{\frac{r+1}{2}}$, $\gamma(x) = \frac{\pi}{2}(2k+1)\sqrt{\frac{r-1}{2}}$.

Согласно формуле (1.6) операции с учетом выражений (1.9) и (1.18) будут производиться в степени экспоненты; эта степень имеет вид

$$-\frac{j}{2\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} \sqrt{1 + jz(x)} dx - \frac{j}{2\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dx + \frac{1}{2} j\pi(2k+1) \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dx. \quad (1.19)$$

При $(jz)^2 \leq 1$ выражение $(1 + jz(x))^{1/2} \leq 1$ можно разложить в биномиальный ряд

$$\sqrt{1 + jz(x)} = 1 + j\frac{1}{2}z + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}z^2 - j\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}z^3 - \dots \quad (1.20)$$

Ограничимся первыми тремя членами разложения (1.20) и произведём вычисление интегралов в выражении (1.19); тогда интегрирование отдельных членов суммы

(1.19), без учёта коэффициента $\frac{1}{2}$, даст

$$1. -\frac{j}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dx = -\frac{j}{\varepsilon}(n\tau_0 - \tau_0) = -\frac{j}{\varepsilon}(n-1)\tau_0 = -j\alpha_1(n\tau_0),$$

$$2. -\frac{j}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} \left(j\frac{1}{2}\varkappa \left(\frac{dU}{dx} \right) \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dU(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa}{\varepsilon} (U(n\tau_0) - U(\tau_0)) = \alpha_2(n\tau_0),$$

$$3. -\frac{j}{2} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} \left(-j^2 \frac{1}{8} \varkappa^2 \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right) dx = -j\alpha_3(n\tau_0),$$

$$4. -\frac{j}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dx = -\frac{j}{\varepsilon}(n\tau_0 - \tau_0) = -\frac{j}{\varepsilon}(n-1)\tau_0 = -j\alpha_4(n\tau_0) = -j\alpha_1(n\tau_0),$$

$$5. j\pi(2k+1) \int_{\tau_0}^{n\tau_0} dx = j\pi(2k+1)(n\tau_0 - \tau_0) = j\pi(2k+1)(n-1)\tau_0 = j\alpha_5(n\tau_0).$$

Подстановка значений $-j\alpha_1, \alpha_2, -j\alpha_2, -j\alpha_4, j\alpha_5$ в сумму (1.19), с последующим учётом этой суммы в формуле (1.6), позволяет определить дискретную волновую функцию

$$\Psi(n\tau_0) = e^{\frac{1}{2}\{(\alpha_2(n\tau_0) - j[2\alpha_1(n\tau_0) + \alpha_3(n\tau_0) - \alpha_5(n\tau_0)])\}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad k = const, \quad (1.21)$$

которая является решением дискретного аналога уравнения Шредингера.

С помощью формулы (1.21) решается обратная задача: по известной волновой функции, имеющей малое собственное время τ_c , определяется потенциальная энергия частицы. К таким объектам относятся: изотоп полония $^{238}P_0$, имеющий период полураспада $\tau_c = 3 \cdot 10^{-7} c$, время жизни атома водорода в состоянии $2P_{1/2}$, равное $\tau_c = 1,6 \cdot 10^{-9} c$, время жизни атома водорода в состоянии $2S_{1/2}$, равное $\tau_c = 0,14 c$, и т.д.

Так, например, потенциальная энергия частицы определяется из равенства $e^{\frac{1}{2}\alpha_2} = \tau_c$, а ограничения, накладываемые на энергию частицы, находим из выражения $\alpha_5 - \alpha_3 - 2\alpha_1 = 0$.

Переход от уравнения (1.1) к дискретному аналогу осуществляется путём учёта обозначений $t = \tau_0(n-1)$ и $x = n\tau_0$ в уравнении (1.1). Время квантования τ_0 необходимо выбрать много меньшим характерного времени потенциального поля U , т.е. $\tau_0 \ll \tau_c$.

Вышеполученные результаты могут быть использованы при обосновании явления «рождения из ничего» [4] (т.е. из виртуальных частиц) реальных частиц, происходящего в сильном градиенте электрического поля [2].

Для определения градиента электрического поля, при котором из виртуальных (мнимых) частиц возникают реальные частицы, используем формулу (1.17 a) вместо первого члена выражения (1.19); при этом, без учета коэффициента $1/2$, получим

$$-j \int_{\tau_0}^{n\tau_0} \left\{ \pm \frac{1}{\varepsilon} \left[\sqrt{\frac{r+1}{2}} + j \sqrt{\frac{r-1}{2}} \right] + \frac{1}{\varepsilon} - \pi(2k+1) \right\} dx. \quad (1.22)$$

После умножения выражения (1.22) на $-j$, в формуле (1.22) будем иметь отдельно мнимые и немнимые члены

$$\int_{\tau_0}^{n\tau_0} \left\{ + \left[\pm \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{r-1}{2}} \right] - \left[\pm \frac{j}{\varepsilon} \sqrt{\frac{r+1}{2}} \right] - \frac{j}{\varepsilon} + j\pi(2k+1) \right\} dx. \quad (1.23)$$

В случае, когда виртуальные частицы отсутствуют, в выражении (1.23) сумма коэффициентов при мнимых членах должна быть равна нулю, т.е.

$$-\frac{1}{\varepsilon} \left[\pm \sqrt{\frac{r+1}{2}} \right] - \frac{1}{\varepsilon} + \pi(2k+1) = 0 \quad (1.24)$$

При отсутствии виртуальных частиц имеем только действительные частицы.

Поскольку $r = \sqrt{1 + \varkappa^2 F^2}$, то из равенства (1.24) следует

$$\sqrt{1 + \varkappa^2 F^2} = G(k), \quad (1.25)$$

где $G(k) = 1 - 4\pi\varepsilon(2k+1) + 2\pi^2\varepsilon^2(2k+1)^2$.

Из равенства (1.25) находим градиент электрического поля при котором возникают реальные частицы

$$F(k) = \left| \pm \frac{1}{\varkappa(k)} \sqrt{G(k)^2 - 1} \right|. \quad (1.26)$$

Знак абсолютной величины в формуле (1.26) обусловлен тем, что выражение

$$z = \frac{4F}{\pi m(2k+1)} \quad \text{положительно и, следовательно, } F > 0.$$

Окончательный результат образования реальных частиц «из ничего» получим, если в выражении (1.23) учтём (1.24), а также примем во внимание формулу (1.21) и обозначение $\tau_0(n-1) = t$:

$$\Psi(k, t) = e^{\frac{t}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{r(k)-1}{2}}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad t = \text{const}. \quad (1.26')$$

Таким образом, при переходе от непрерывного уравнения (1.1) к дискретному уравнению стало возможным получение дискретной волновой функции (1.21) и определение градиента поля (1.26), при котором образуются реальные частицы согласно формуле (1.26').

§1.2. Узлы и бинарные функции. Оптимальность частот, на которых образуются бинарные функции

Узлы могут образовываться только в пространстве размерности «три». Чтобы избежать трудностей при изображении узлов в трехмерном пространстве, рассматривают проекции узлов на плоскость. При этом учитывается аксиома линии, предложенная Евклидом, которая гласит, что линия имеет «длину без ширины».

В результате проведения упорядочения количества узлов, имеющих менее десяти пересечений на их проекциях, было выявлено 105 узлов, часть из которых (35 узлов) показана на Рис. 1.

На Рис. 1 узлы расположены по возрастанию минимального количества пересечений на их проекции. Если есть несколько разных узлов с одинаковым количеством пересечений, то они группируются вместе и каждый получает кроме обозначения количества пересечений, еще и дополнительный индекс. Так, например, первая фигура (трилистник) имеет три пересечения и она является всего одной с таким количеством пересечений поэтому получает номер 3_1 .

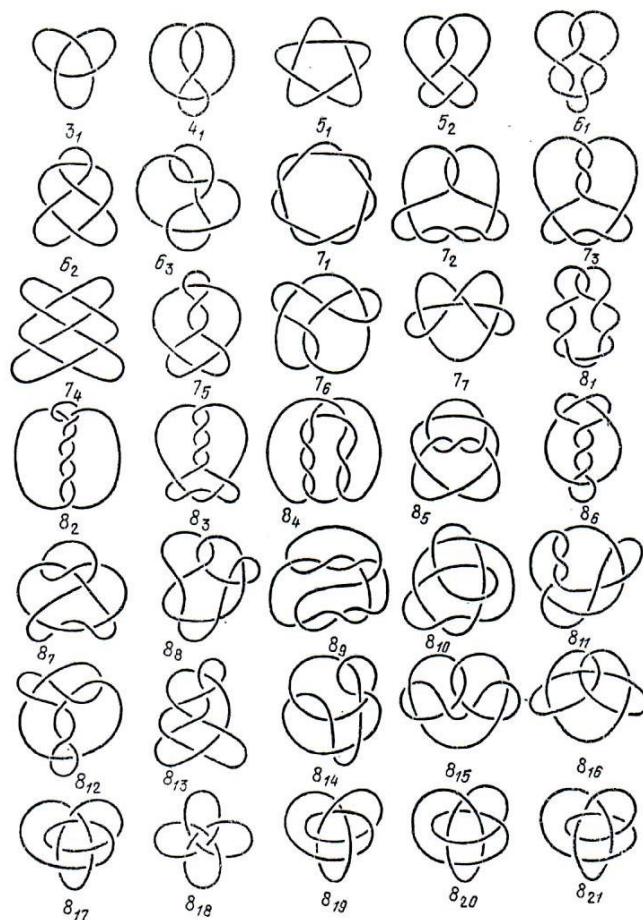


Рис. 1

Вторая фигура (восьмёрка) имеет четыре пересечения и она является всего одной с таким количеством пересечений поэтому получает номер 4_1 и т.д. Определим теперь закономерность изменения числа узлов от количества пересечений. В таблице 1 приводится зависимость числа узлов от количества пересечений, составленную согласно Рис. 1 [6]:

Таблица 1

Число узлов	Количество пересечений 3	Количество пересечений 4	Количество пересечений 5	Количество пересечений 6	Количество пересечений 7	Количество пересечений 8
w_i	1	1	2	3	7	21

Из таблицы 1 видно, что число первых четырех узлов, имеющих одно и то же количество пересечений, подчиняется принципу последовательности чисел Фибоначчи, для которой имеет место рекуррентное соотношение

$$U_i = U_{i-1} + U_{i-2}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (1.27)$$

Можно заметить, что следующее т.е. пятое (см. Рис. 1) значение числа узлов V_5 , имеющих 7 пересечений, определяется как сумма числа всех предыдущих узлов

$$V_5 = \sum_{i=1}^4 U_i = 7. \quad (1.28)$$

В результате экстраполяции данных, приведённых в таблице 1, получим рекуррентное выражение для числа узлов $V_i (i \geq 5)$, имеющих одно и то же количество пересечений:

$$V_i = 2V_{i-1} + 7, \quad i = 5, 6, 7, \dots, \quad (1.29)$$

Таким образом, последовательность числа узлов, имеющих одно и то же количество пересечений w , состоит из двух последовательностей (1.27) и (1.29); выражение (1.28) является как бы связывающим звеном между этими последовательностями. И так, имеем последовательность числа узлов, имеющих одно и то же количество пересечений

$$W_i = \begin{cases} U_i, & \text{если } i < 5, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ V_i, & \text{если } i \geq 5, \quad i = 5, 6, 7, \dots \end{cases} \quad (1.30)$$

Следовательно, если ввести обозначение $\ell = n + 4 (n = 1, 2, \dots)$, то согласно формуле (1.29) число узлов V_ℓ , имеющих количество пересечений ℓ , можно представить в виде матрицы-строки

$$V_\ell = 7 \parallel 1 \quad 3 \quad 7 \quad 15 \quad 31 \quad 63 \quad \dots \parallel. \quad (1.31)$$

Матрица (1.31) может быть записана в виде

$$V_\ell = 7 \parallel 2^1 - 1 \quad 2^2 - 1 \quad 2^3 - 1 \quad 2^4 - 1 \quad 2^5 - 1 \quad 2^6 - 1 \quad \dots \parallel. \quad (1.31 a)$$

Каждый элемент матрицы (1.31 а) может быть представлен как частное решение разностного уравнения

$$V_m = (1 + r)V_{m-1} + V_0$$

при $r = 1$ и $V_0 = 7$. Это решение имеет вид

$$V_m = \frac{V_0}{r} [(1 + r)^{m+1} - 1],$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$.

Определим теперь понятие квантовой системы (КС). Характерной особенностью КС является то, что частица находящаяся в ней может принимать лишь два значения, условно обозначаемые 1 и 0 или +1 и -1, т.е. представляет собой бинарную функцию. Бесконечные (во времени) последовательности бинарных функций образуют квантовомеханические функции (КМФ).

Рассмотрим функцию чистого запаздывания, т.е. кусочно-постоянную функцию, показанную на Рис. 2а. Преобразование Лапласа от этой функции запишется так: $1 - e^{-\tau s}$, где $s = \sigma + j\omega$, $\sigma > 0$, $j = \sqrt{-1}$. Изменение этой функции на интервале $[0, 2\tau]$ полубесконечной временной оси ($t \in [0, \infty)$) показано на Рис. 2б.

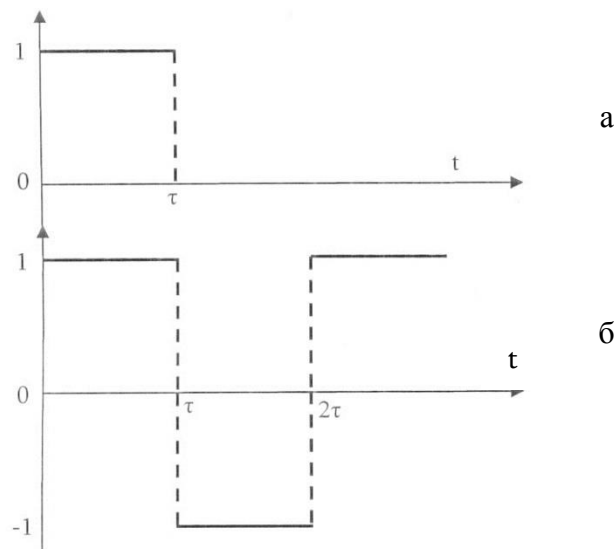


Рис. 2

Преобразование Лапласа от изменения этой функции на всей полубесконечной временной оси имеет вид

$$D_0(\tau s) = \frac{1 - e^{-\tau s}}{1 + e^{-\tau s}} = \text{th} \left(\frac{\tau s}{2} \right). \quad (1.32)$$

Рассмотрим теперь изменение других функций $(1 - e^{-\tau s})^2$, $(1 - e^{-\tau s})^3$, $(1 - e^{-\tau s})^4$ и т.д. на всей полубесконечной временной оси и выразим это изменение через преобразование Лапласа от бинарной функции (1.32), тогда будем иметь следующие преобразованные по Лапласу КМФ¹:

$$D_1(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^2}{1 + e^{-2\tau s}} = \frac{2 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.33)$$

$$D_2(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^3}{1 + e^{-3\tau s}} = \frac{2^2 \operatorname{th}^3\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 3 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.34)$$

$$D_3(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^4}{1 + e^{-4\tau s}} = \frac{2^3 \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 6 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.35)$$

$$D_4(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^5}{1 + e^{-5\tau s}} = \frac{2^4 \operatorname{th}^5\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 10 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 5 \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} D_5(\tau s) &= \frac{(1 - e^{-\tau s})^6}{1 + e^{-6\tau s}} = \frac{2^5 \operatorname{th}^6\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{\left[1 + \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right)\right] \left[1 + 14 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right)\right]} = \\ &= \frac{2^5 \operatorname{th}^6\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 15 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 15 \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right) + \operatorname{th}^6\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$D_6(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^7}{1 + e^{-7\tau s}} = \frac{2^6 \operatorname{th}^7\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 35 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 21 \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 7 \operatorname{th}^6\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.38)$$

$$D_7(\tau s) = \frac{(1 - e^{-\tau s})^8}{1 + e^{-8\tau s}} = \frac{2^7 \operatorname{th}^8\left(\frac{\tau s}{2}\right)}{1 + 28 \operatorname{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 70 \operatorname{th}^4\left(\frac{\tau s}{2}\right) + 28 \operatorname{th}^6\left(\frac{\tau s}{2}\right) + \operatorname{th}^8\left(\frac{\tau s}{2}\right)}, \quad (1.39)$$

¹ В дальнейшем, преобразованные по Лапласу КМФ, именуются просто КМФ.

и т.д.

Формулы (1.33)–(1.39) обладают определёнными свойствами.

1) Число членов в знаменателе формул (1.33)–(1.39) изменяется в каждой последующей паре на единицу. Так, в паре 1, 2 число членов равно 2, в паре 3, 4 число членов равно 3, в паре 5, 6 число членов равно 4, в паре 7, 8 число членов равно 5 и т.д.

2) В знаменателе КМФ (формулы (1.33)–(1.39)) находится некоторое количество части биномиальных коэффициентов; сумма всех коэффициентов находящихся в

знаменателе КМФ (при $\text{th}\left(\frac{\tau s}{2}\right) = \pm 1$) равна 2^n : $C_1^0 + C_1^1 = 2^1$, $C_3^0 + C_3^1 = 2^2$,

$$C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 2^3, \quad C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 2^4, \quad C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = 2^5, \quad C_7^0 + C_7^3 + C_7^2 + C_7^1 = 2^6,$$

$$C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8 = 2^7, \quad \text{и т.д.}$$

$$\sum_{\nu=0}^n C_{\mu(n)}^{\nu(n)} = 2^n, \quad \mu(n) = 1, 3, 4, 5, \dots; \quad \nu(n) = 0, 1, 2, \dots$$

где n – номер КМФ, а символ $C_{\mu(n)}^{\nu(n)}$ означает число сочетаний из μ по ν .

Поскольку в числителях КМФ фигурирует дискретная степенная функция 2^n , то вычитанием из неё единицы можно получить соответствующий элемент матрицы-строки (1.31 а). Таким образом строится вся матрица-строка (1.31 а), каждый элемент которой, умноженный на 7, показывает число узлов, имеющих одно и то же количество пересечений.

С целью доказательства оптимальности узлов в КС, рассмотрим квантовое уравнение Риккати

$$\frac{d\Gamma(\tau s)}{d\tau} = \sigma \Gamma(\tau s) - s \sigma \Gamma^2(\tau s)^1, \quad (1.40)$$

где

$$\Gamma(\tau s) = \frac{1}{s} \text{th}\left(\frac{\tau s}{2}\right). \quad (1.41)$$

Производная по τ от решения квантового уравнения Риккати (1.40) является солитоном, который удовлетворяет соответствующему оптимизационному уравнению Эйлера-Лагранжа.

Подстановка обозначения (1.41) в уравнение (1.40) приводит к уравнению

$$\left(\frac{\sigma}{s} - \frac{1}{2}\right) \text{th}^2\left(\frac{\tau s}{2}\right) - \frac{\sigma}{s} \text{th}\left(\frac{\tau s}{2}\right) + \frac{1}{2} = 0. \quad (1.42)$$

¹ s рассматривается как параметр, независимый от переменной τ .

Решение уравнения (1.42) имеет корни:

$$\operatorname{th}\left(\frac{\tau s}{2}\right)_1 = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{th}\left(\frac{\tau s}{2}\right)_2 = \frac{s}{2\sigma - s}. \quad (1.43)$$

Первый корень показывает, что уравнению (1.40) удовлетворяет преобразование Лапласа от δ -функции Дирака.

Корни (1.43) непригодны для установления бинарности КМФ.

Однако, если во втором корне принять $\sigma = 0$ и положить $\omega \neq 0$, то получим корень $\operatorname{th}\left(\frac{\tau j\omega}{2}\right)_2 = -1$ пригодный для установления бинарности КМФ. В этом случае в преобразованиях Лапласа (1.32)–(1.39) отсутствует действительная часть.

Действительно, подстановка $\operatorname{th}\left(\frac{\tau j\omega}{2}\right)_2 = -1$ в формулы (1.33)–(1.39) дает

$$D_1 = D_3 = D_5 = D_7 = +1$$

и

$$D_2 = D_4 = D_6 = -1.$$

Эти выражения подтверждают существование бинарности КМФ.

Определим частоты, на которых имеет место бинарность КМФ. Имеем

$$\operatorname{th}\left(j\frac{\tau\omega}{2}\right) = \pm 1 \quad \text{или} \quad j\operatorname{tg}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) = \mp j.$$

Найдём теперь j и $-j$. Поскольку $-1 = e^{\pi j(2k+1)}$, то $j = e^{\frac{\pi}{2}j(2k+1)}$ и $-j = e^{\frac{3\pi}{2}j(2k+1)}$. С учётом формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j\sin x$, принимая во внимание соотношения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau\omega_{\mp}}{2}\right) = \mp j, \quad \text{получим искомые частоты:}$$

$$\omega_{-}(k) = \frac{2}{\tau} \operatorname{Arctg} \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\tau\omega_{-}}{2}\right) \sin \left[\frac{3\pi}{2}(2k_{-1} + 1) \right] \right\} : \omega_{-}(k), \quad k_{-1} = \frac{2\alpha}{3}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Из последнего выражения имеем

$$D_{2\alpha} = \sin \left[\frac{3\pi}{2}(2k_{-1} + 1) \right], \quad k_{-1} = \frac{2\alpha}{3}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

$$\omega_{+}(k) = \frac{2}{\tau} \operatorname{Arctg} \left\{ \operatorname{tg}\left(\frac{\tau\omega_{+}}{2}\right) \sin \left[\frac{\pi}{2}(2k_{+1} + 1) \right] \right\} : \omega_{+}(k), \quad k_{+1} = 2\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Аналогично, из последнего выражения получим

$$D_{2\alpha-1} = \sin \left[\frac{\pi}{2}(2k_{+1} + 1) \right], \quad k_{+1} = 2\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots$$

Следовательно, на частотах ω_- и ω_+ выполняется условие бинарности КМФ. Частоты ω_- и ω_+ являются оптимальными, поскольку они (при $\sigma=0$) непосредственно вытекают из представления (1.42) квантового уравнения Риккати (1.40), левая часть которого (солитон) удовлетворяет оптимизационному уравнению Эйлера-Лагранжа.

§1.3. Оптимальная характеристика газа Ферми-Дирака

Для газа Ферми-Дирака, состоящего из N частиц, имеет место соотношение

$$\sum_i \langle N(E_i) \rangle = \sum \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT} + 1} = N ,$$

в котором суммирование производится по всем разрешённым значениям энергий E_i частицы; μ – химический потенциал для фермионов может быть как положительной, так и отрицательной величиной в зависимости от свойств и состояния системы, т.е. $\mu \leq 0$. Значение химического потенциала $\mu(T = 0)$ есть максимальная энергия частицы в газе Ферми-Дирака при $T = 0$; величины k и T являются соответственно постоянной Больцмана и абсолютной температурой.

В квантовой теории действует принцип тождественности одинаковых частиц, образующих данную квантовомеханическую систему; согласно этому принципу, все одинаковые частицы являются совершенно тождественными. Эти частицы не взаимодействуют друг с другом, поэтому полная энергия системы равна сумме энергий отдельных состояний, занятых частицами

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^n E_i .$$

Закон распределения энергии

$$\langle N(E_n) \rangle = \frac{1}{e^{(E - \mu)/kT} + 1} \quad (1.44)$$

называют распределением Ферми-Дирака, а совокупность частиц, описываемую этим законом – газом Ферми-Дирака.

Производная от распределения (1.44) является плотностью распределения; нормированную плотность обозначим так

$$L(E) = \left(\frac{1}{e^{(E - \mu)/kT} + 1} \right)' / (4kT)^{-1} = \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right], \quad (1.45)$$

где $\lambda = 1/kT$, $E_0 = \mu$.

Уравнение типа Эйлера-Лагранжа (0.8a) для нормированной плотности (1.45) газа Ферми-Дирака имеет вид [7]

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial E} \frac{\partial L}{\partial(\partial y / \partial E)} = 0, \quad (1.46)$$

где

$$y = \sec h \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] - \text{соответствует координате } q, \text{ а } \frac{\partial y}{\partial E} - \text{импульсу } p.$$

В уравнении (1.46), по сравнению с уравнением Эйлера-Лагранжа, оператор $\frac{d(\cdot)}{dt}$ заменён на оператор $\frac{\partial(\cdot)}{\partial E}$, а структура уравнения (1.46) та же, что уравнения Эйлера-Лагранжа.

В развёрнутом виде уравнение (1.46) запишется следующим образом

$$L_y - L_{Ey'} - L_{yy'} \cdot y' - L_{y'y'} \cdot y'' = 0. \quad (1.46 a)$$

В уравнении (1.46 a) имеем следующие значения, входящих в него слагаемых [5]

$$L_y \equiv L_{Ey'} = 2 \sec h \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right], \quad (1.47)$$

$$L_{yy'} \cdot y' = 2 \sec h \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right], \quad (1.48)$$

$$L_{y'y'} \cdot y'' = \frac{\sec h \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right]}{\text{th}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right]} \left\{ 1 - 2 \sec h^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] \right\}, \quad (1.49)$$

Подстановка значений (1.47)–(1.49) в уравнение (1.46 a), с учётом $\sec h \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] \neq 0$, даёт уравнение

$$2 \text{th}^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] + 1 - 2 \sec h^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] = 0.$$

Из этого уравнения имеем

$$L \equiv \sec h^2 \left[\frac{\lambda}{2} (E - E_0) \right] = \frac{3}{4}. \quad (1.50)$$

Какому условию должна удовлетворять функция плотности газа Ферми-Дирака (1.45) чтобы эта плотность обладала оптимальным свойством? Чтобы ответить на этот вопрос определим вторую производную от выражения (1.45) по энергии

$$(L(E))_E'' = \lambda^2 \sec^2 h^2 \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right] \left\{ \frac{3}{2} \sec^2 h^2 \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right] - 1 \right\}. \quad (1.51)$$

Найдем теперь условие, при котором значение функции L (1.50) становится наименьшим из всех возможных состояний; это происходит, когда функция (1.51) положительна и, следовательно, если выполняется требование

$$\frac{3}{2} \sec^2 h^2 \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right] - 1 > 0.$$

Из этого неравенства вытекает требование

$$\sec^2 h^2 \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right] > \frac{2}{3}. \quad (1.52)$$

Требование(1.52) не противоречит равенству (1.50). Это означает, что состояние L (1.50) является наименьшим для плотности газа Ферми-Дирака.

Используем соотношение $\operatorname{th}^2(x) = 1 - \sec^2 h^2(x)$ для перехода от функции (1.50) к функции квадрата гиперболического тангенса:

$$\operatorname{th}^2 \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right] = \frac{1}{4}.$$

Из этого равенства имеем два корня

$$\operatorname{th} \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right]_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{th} \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right]_2 = -\frac{1}{2}.$$

Из первого корня $\operatorname{th} \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right]_1 = \frac{1}{2}$ нетрудно найти энергию поля газа Ферми-Дирака: $E = kT \ln 3 + 2kTE_0$.

Функция Лагранжа (лагранжиан) удовлетворяет уравнению типа Эйлера-Лагранжа и, следовательно, параметры газа Ферми-Дирака, найденные путём решения уравнения Эйлера-Лагранжа, являются оптимальными.

Согласно второму корню $\left(\operatorname{th} \left[\frac{\lambda}{2}(E - E_0) \right]_2 = -\frac{1}{2} \right)$ энергия поля газа Ферми-Дирака равна

$$E = -kT \ln 3 + 2kTE_0. \quad (1.53)$$

Отрицательность энергии (1.53) означает отсутствие физического смысла у этой величины.

Чтобы избавиться от трудностей связанных с отрицательным значением энергетического поля (1.53) Дирак предположил, что в нормальном состоянии, т.е. в вакууме, все положительные энергетические электронные уровни свободны, а все отрицательные энергетические уровни заняты. Такое состояние электронно-

-позитронного поля является равновесным, поскольку в силу принципа Паули переходы в состояния с отрицательной энергией осуществляться не могут. Дирак предположил, что электроны, находящиеся на отрицательных уровнях ненаблюдаемы; наблюдаемыми является отклонения от состояния вакуума. Следовательно, «дырка» в вакууме не может быть интерпретирована как положительно заряженный электрон, т.е. как позитрон. Из теории Дирака вытекает, что наблюдаемое энергетическое поле (плотность лагранжиана газа Ферми-Дирака), положительно и равно сумме энергетических полей, создаваемых электронами и позитронами.

Фермионы частицы, обладающие положительной энергий, в совокупности могут создавать как положительное, так и отрицательное энергетическое поле [2] (стр. 82). Дело в следующем. Если принять, что создаваемое фермионами положительное энергетическое поле находится на римановой поверхности, то создаваемое ими же отрицательное энергетическое поле должно находится на псевдоримановой поверхности, т.е. на обратной стороне римановой поверхности. Так, что запись (1.53) – справедлива. Следовательно, теория Дирака утратила своё значение.

§1.4. Рассмотрение уравнений Максвелла на мезоскопическом уровне

Между микроуровнем и макроуровнем находится мезоуровень. Такое представление уровней материи условно хотя, полезно. Наиболее ярким примером рассмотрения материи на мезоуровне является броуновское движение. Уравнение Шрёдингера (1.1) также справедливо для мезоуровня.

Уравнения Максвелла, как и уравнение Эйлера-Лагранжа, обладают важным свойством инвариантности относительно преобразований координат [8]. Необходимо отметить существенную разницу между уравнением Эйлера-Лагранжа и уравнениями Максвелла. Если уравнение Эйлера-Лагранжа было получено из чисто математических (вариационных) соображений, то уравнения Максвелла получены из физических характеристик. Если рассматривать уравнения Максвелла на мезоуровне, то создается возможность использования оптимизационных методов.

Векторы электромагнитного поля, характеризующие световую волну, описываются уравнениями Максвелла (см. например, [9])

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.54 a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.54b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.54c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.54d)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, \mathbf{P} – поляризация среды.

Поскольку ниже речь пойдет о распространении световой волны в пространственно однородной, электрически нейтральной среде, то можно положить $\rho = j = 0$. При этом, единственным источником световой волны в среде является член поляризации \mathbf{P} . Поляризация возникает вследствие отклонения формы атома от идеальной сферической симметрии, а само отклонение является следствием появления электромагнитного поля световой волны в среде. Именно это взаимодействие световой волны со средой вводит в задачу нелинейность. Световая волна удовлетворяет волновому уравнению, которое можно получить, беря ротор от (1.54a) и, используя (1.54b). В результате будем иметь

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (1.55)$$

Так как \mathbf{P} зависит от \mathbf{E} , то уравнение (1.55) оказывается нелинейным. Нелинейностью обусловлено то, что релаксационные явления (соударения, спонтанное излучение) не успевают разрушить фазовую память системы, вследствие чего поляризация среды становится нелинейной функцией амплитуды и фазы распространяющегося электромагнитного импульса.

Поскольку продолжительность светового импульса изменяется от наносекунд ($10^{-9} c$) до пикосекунд ($10^{-12} c$), а продолжительность светового цикла составляет фемтосекунды ($10^{-15} c$), то даже самые короткие импульсы содержат много световых циклов. Поэтому целесообразно записать величину поля $E(x, t)$ в виде быстро осциллирующей бегущей волны с более медленно меняющейся огибающей. Считается также разумным принять медленное изменение фазы φ несущей волны и записать

$$E(x, t) = \Re(x, t) \cos [kx - \omega t + \varphi(x, t)]. \quad (1.56)$$

Медленное изменение \Re и φ на масштабах длины и времени означает выполнение следующих усиленных неравенств

$$\frac{\partial \Re}{\partial x} \ll k\Re, \quad \frac{\partial \Re}{\partial t} \ll \omega\Re, \quad (1.57)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \ll k, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ll \omega. \quad (1.58)$$

Таким образом, выполнение выражения (1.56) и условий (1.57) и (1.58) позволяет рассмотреть уравнения Максвелла на мезоскопическом уровне. В дальнейшем нам

понадобятся нижеопределённые параметры атомной физики, встречающиеся в следующих двух параграфах.

Ниже мы будем рассматривать идеализированную среду, состоящую из атомов, имеющих только два энергетических уровня. Предполагается, что разность энергий между верхним уровнем a и нижним b приблизительно пропорциональна частоте падающего света $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Следовательно, предполагается выполнение условия резонанса $E_a - E_b = \hbar\omega_{ab} \approx \hbar\omega_0$, где \hbar – постоянная Планка, делённая на 2π .

Используется понятие начальной поляризации атома

$$p_0 \equiv -e \int \psi_a^* r \psi_b d\tau = -e \int \psi_b^* r \psi_a d\tau ,$$

где

e – заряд электрона,

ψ_a – волновая функция уравнения Шрёдингера, соответствующая уровню a ,

ψ_a^* – самосопряжённая волновая функция уравнения Шрёдингера, соответствующая уровню a ,

r – внутренняя атомная координата.

Поскольку атомы распределены в зависимости от скорости, т.е. по скоростям, то имеется соответствующее распределение по смещениям частот $\nabla\omega$. Обычно, распределение по смещениям частот задаётся функцией $g(\nabla\omega)$. Функция $g(\nabla\omega)$ часто предполагается гауссовой.

При моделировании процесса распространения ультракоротких импульсов в двухуровневой резонансной среде задают уравнения Максвелла (1.54) для описания электромагнитного импульса, а также бинарный (двухуровневый) ансамбль энергетических уровней атомов с целью описания среды в которой движется импульс.

§1.5. Оптимальность модели неподвижных атомов

Введем зависимую переменную

$$\tilde{\mathfrak{R}} = p_0 \mathfrak{R} / \hbar ,$$

имеющую размерность частоты.

Определим её следующим образом

$$\tilde{\mathfrak{R}} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} .$$

Из последнего обозначения имеем

$$\sigma(x, t) = \int_{-\infty}^t \tilde{\mathfrak{R}}(x, t') dt',$$

причем $\sigma(x, -\infty) = 0$. Этот случай относится к состоянию системы до прихода импульса.

Далее вводится преобразование координат [9]

$$\xi = \Omega x/c, \quad \tau = \Omega(t - x/c), \quad (1.59)$$

где $\Omega^2 = \frac{2\pi n_0 \omega_0 P_0^2}{\hbar}$,

n_0 – число атомов в единице объёма,

x – координата атома,

c – скорость света.

Обозначения (1.59) приводят к следующим операторам

$$\frac{\partial}{\partial t} = \Omega \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\Omega}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \quad (1.60)$$

Если операторы (1.60) использовать применительно к определяющему уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{R}}}{\partial t} + c \frac{\partial \tilde{\mathfrak{R}}}{\partial x} = \pm \Omega^2 \sin \sigma, \quad (1.61)$$

то уравнение (1.61) примет вид уравнения синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial \tau} = \pm \sin \sigma, \quad (1.61 a)$$

в котором нижний знак относится к усилителю, а верхний – к аттенуатору, если $\sigma(x, -\infty) = 0$. Знак «+» соответствует изначальной инверсной заселённости энергетических уровней. При этом, на проходящую через среду световую волну, среда действует как усилитель. Знак «-» берётся когда атомы среды находятся на нижнем уровне. В этом случае среда действует как аттенуатор.

В Дополнении А показано, что уравнение синус-Гордона (1.61 a) является оптимальным. *Атом находится в неподвижном состоянии на сепаратрисе математического маятника, т.е. находится в некоторой точке оптимальной траектории.* В какой именно точке сепаратрисы находится атом зависит от координаты атома.

§1.6. Оптимальность модели движущихся атомов

Известный результат теории солитонов в атомной физике – теорема площадей показывает как распространение светового импульса в аттенуаторах и усилителях влияет на полную площадь под импульсом, определяемую выражением

$$\Theta(x) = \frac{P_0}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \Re(x, t) dt. \quad (1.62)$$

После несложных, но длинных преобразований [9] из выражения (1.62) можно получить уравнение

$$\frac{d\Theta}{dx} = \pm \frac{\alpha}{2} \cos \Theta \quad \text{сравнить с (A.6)}; \quad (1.63)$$

знак «+» относится к усилителю, а знак «-» – к аттенуатору, $\alpha = \frac{4\pi^2 n_0 \omega_0 P_0^2 g(0)}{\hbar c}$.

Промежуточное решение уравнения (1.63), удовлетворяющее условию $\Theta = \Theta_0$ при $x = x_0$, запишется так

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\Theta_s}{2} + \frac{\pi}{4} \right| = \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} \right) e^{\pm \frac{\alpha}{2}(x-x_0)}.$$

Из последнего выражения находим искомую площадь Θ как функцию координаты атома x и начальных условий Θ_0 и x_0 :

$$\Theta_{s\pm} = \pm 2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} \right) \exp \left[\pm \frac{\alpha}{2}(x-x_0) \right] \right\} \mp \frac{\pi}{2}. \quad (1.64)$$

Введем обозначения $\Theta_s = \varphi_s/2$, $x = t$, $\pm \omega_0 = \pm \alpha/2$, тогда уравнение (1.63) станет эквивалентным уравнению (A.6); это означает, что соотношение (1.64) (при начальных условиях $\Theta = 0$ когда $x = 0$) определяет угол поворота сепаратрисы как функцию координаты атома x :

$$\Theta_{s+} = 4 \operatorname{arctg} \left(e^{\omega_0 x} \right) - \pi \quad (1.65 a)$$

и

$$\Theta_{s-} = -4 \operatorname{arctg} \left(e^{-\omega_0 x} \right) + \pi \quad (1.65 b)$$

Формулы (1.65 a) и (1.65b) идентичны формулам (A.8). Поскольку в соотношении (1.64) начальное условие Θ_0 не является нулевыми ($\Theta_0 \neq 0$ при $x \neq 0$), то формула (1.64) также определяет угол поворота сепаратрисы математического маятника как функцию координаты атома x и начальных условий Θ_0 и x_0 :

$$\Theta_{s_+} = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} \right) \exp \left[+ \frac{\alpha}{2} (x - x_0) \right] \right\} - \frac{\pi}{2}. \quad (1.66 a)$$

и

$$\Theta_{s_-} = -2 \operatorname{arctg} \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\Theta_0}{2} \right) \exp \left[- \frac{\alpha}{2} (x - x_0) \right] \right\} + \frac{\pi}{2}. \quad (1.66b)$$

Формулы (1.66a) и (1.66b) показывают, что движение атомов происходит по траектории сепаратрисы, т.е. по оптимальной траектории. Величина $\alpha(\omega_0)$ называется коэффициентом поглощения слабого монохроматического поля частоты ω_0 .

Поскольку выражения (1.66) удовлетворяют уравнениям Гамильтона (А.3), то оптимальность модели движущихся атомов очевидна. К этому заключению можно прийти путём сопоставления уравнений (1.63) и (А.6), из которых видно, что структурно они идентичны и, следовательно, уравнение (1.63) обладает тем же оптимальным свойством, что и уравнение (А.6).

Распространение ультракороткого импульса в двухуровневой резонансной среде под действием переднего фронта импульса вызывает переход атомов, находящихся в нижнем энергетическом состоянии E_b в верхнее энергетическое состояние E_a ; в результате этого перехода среда становится полностью инвертированной. Под действием оставшейся части импульса, атомы, перешедшие в верхнее энергетическое состояние, начинают индуцированно излучать. Это явление получило название «самоиндуцированной прозрачности». При появлении явления «самоиндуцированной прозрачности» энергия, передаваемая квантовой системе отбирается обратно, вследствие чего восстанавливается первоначальная форма импульса. При использовании словаря синергетики оно звучит так: «самоорганизующаяся прозрачность». С математических позиций это явление вызвано тем, что используется оператор «обращения» (см. Дополнение А) при получении выражений (1.66). В результате использования оператора «обращения» система (1.66) становится замкнутой, т.е. самоорганизующейся.

§1.7. Современная интерпретация общей теории относительности (ОТО) [10]

Созданию ОТО предшествовала специальная теория относительности (СТО). Созданная для решения проблем электродинамики, СТО содержала также нерешённые задачи ОТО. Так, например, дифференциальное уравнение, устанавливающее связь

между энергией E и массой m , движущейся со скоростью v , соизмеримой со скоростью света c , имеющее вид

$$\frac{dE}{dt} = v \frac{d}{dt} \left\{ \frac{vm}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\}, \quad (1.67)$$

является связывающим звеном между задачами СТО и ОТО.

Для решения релятивистских задач А. Эйнштейном была создана ОТО. В уравнении (1.67) масса m определяется с использованием преобразования Лоренца

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (1.68)$$

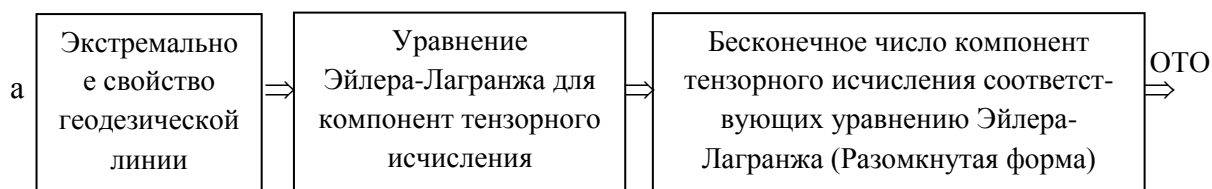
где m_0 – начальная масса, найденная при $v = 0$.

При создании ОТО Эйнштейн использовал тензорное исчисление. По нашему мнению тензорное исчисление имеет два существенных недостатка: 1. оно сводит решение задачи к разомкнутой форме, когда для точного её решения необходимо определение бесконесного количества тензорных компонент, 2. тензорное исчисление не имеет физической интерпретации. Эти недостатки негативно сказываются на решении задач, использующих тензорное исчисление. В настоящей монографии предлагается новый подход к созданию ОТО, свободный от этих недостатков.

Необходимо отметить, что К. Шварцшильд [11] нашёл точное решение задачи ОТО для статической массы, обладающей сферической симметрией, т.е. для частного случая, не прибегая к использованию бесконечного числа компонент тензора.

На Рис. 3 приводятся блок-схемы последовательностей математических операций при решении задачи ОТО, предложенные Эйнштейном (Рис. 3а) и автором (Рис. 3б).

Последовательность математических операций Эйнштейна



Последовательность математических операций автора

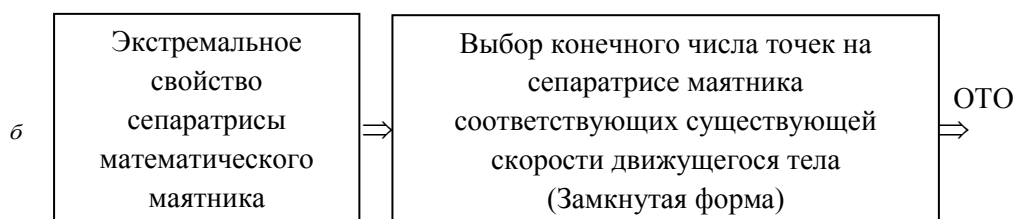


Рис. 3

С целью иллюстрации метода автора целесообразно рассмотреть функционирование математического маятника в земных условиях. Фазовые траектории движения математического маятника, в зависимости от различных значений полной энергии E (см. А.2), показаны на Рис. 4. На Рис. 4а показаны различные уровни полной энергии E при которых происходит функционирование маятника, а на Рис. 4б дан соответствующий фазовый портрет этих траекторий. На Рис. 4б имеем следующие обозначения:

Цифра 3 – сепаратриса маятника имеет длину без ширины; она не представляет собой множество, в Дополнении В ей соответствует случай 2b,

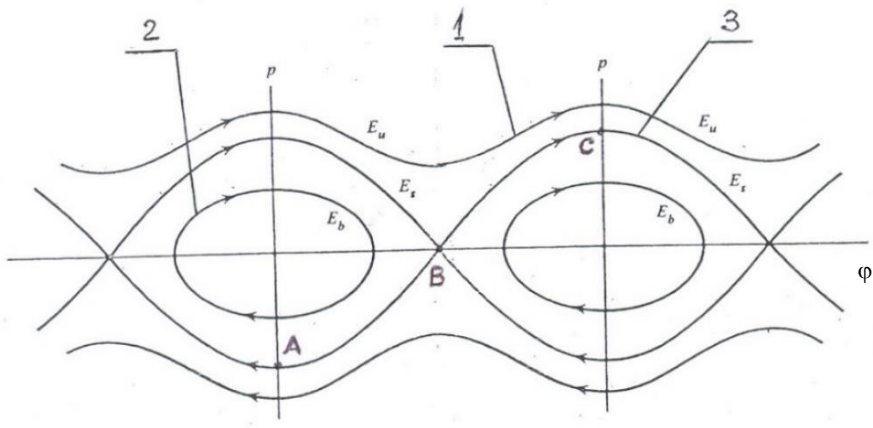
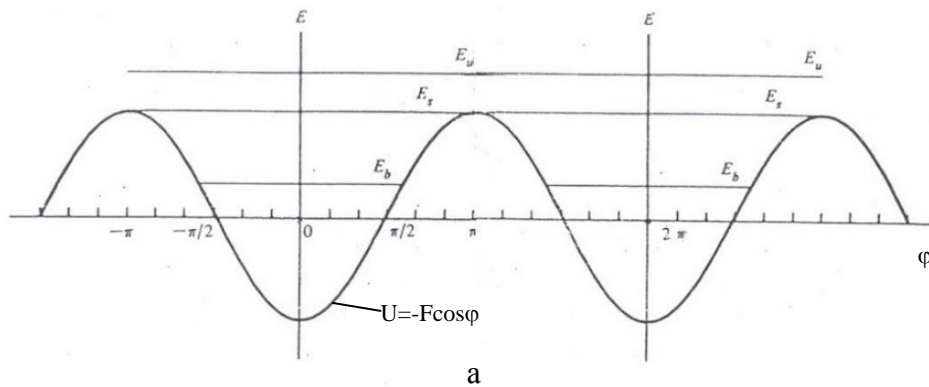
Цифра 2 – отвечает колебательному движению маятника; она окаймляет множество 2 и сама принадлежит этому множеству. В Дополнении В ей соответствует случай 1,

Цифра 1 – отвечает вращательному движению маятника; она принадлежит множеству, которое простирается от контура 1 до сепаратрисы 3. Сепаратриса 3 не принадлежит множеству 1. В Дополнении В цифре 1 соответствует случай 2а.

Для создания ОТО Эйнштейн использовал экстремальное свойство геодезической линии. Вариационные методы позволяют заменить уравнение геодезической линии уравнением Эйлера-Лагранжа¹. Как отмечено во введении (см. (0.8a) и (0.8b)), уравнение Эйлера-Лагранжа эквивалентно уравнению Гамильтона. Следовательно, согласно уравнению Гамильтона (первое уравнение (А.3)), сепаратриса маятника обладает экстремальным (оптимальным) свойством. Нами для создания ОТО вместо экстремального свойства геодезической линии используется экстремальное свойство сепаратрисы математического маятника.

Рассмотрим практическую реализацию алгоритма автора согласно блок-схеме на Рис. 3б. Обратимся к участку сепаратрисы АВС, показанному на Рис. 4б, которому соответствует формула (А.8d).

¹ Лагалли М. Векторное исчисление. Издательство НКТП СССР. Москва 1936 Ленинград.



б
Рис. 4

На интервале $[0, \pi]$ участок сепаратрисы ABC характеризуется вогнутой, нисходящей ветвью BA, т.е. некоторой линией псевдоримановой поверхности; она определяется формулой (A.8б) с учетом знака «-»:

$$\varphi_{s-} = -4 \operatorname{arctg} [\exp (-\omega_0 t)], \quad (1.69)$$

без принятия во внимание члена π .

На интервале $[\pi, 2\pi]$ участок сепаратрисы ABC представляет собой выпуклую, восходящую ветвь BC, т.е. некоторую линию римановой поверхности; она определяется формулой (A.8a) с учетом знака «+»:

$$\varphi_s = 4 \operatorname{arctg} [\exp (\omega_0 t)], \quad (1.70)$$

без принятия во внимание члена π .

Следовательно, вместо формул (1.69) и (1.70), сепаратриса ABC может быть описана одной формулой

$$\varphi_s \equiv \varphi_{ABC} = \begin{cases} \left| -4 \operatorname{arctg} [\exp(-\omega_0 t)] \right|, & \text{если } \omega_0 t \in [0, \pi], \\ 4 \operatorname{arctg} [\exp(\omega_0 t)], & \text{если } \omega_0 t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (1.71)$$

Участок сепаратрисы ABC вынесен отдельно на Рис. 5.

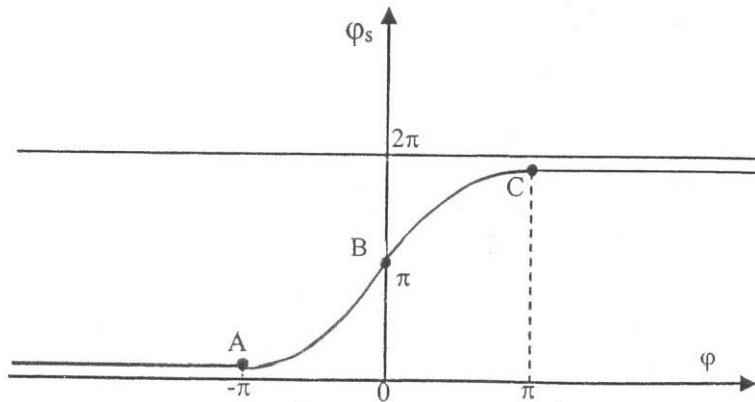


Рис. 5

Найдем теперь асимптоты участка сепаратрисы ABC (Рис. 5). Решение нижнего уравнения (1.71) при $\omega_0 t = \varphi_s$ позволяет определить верхнюю асимптоту $\varphi_{s \max} = 6,275659 \dots$ Использовался персональный компьютер для решения трансцендентного уравнения (1.71) итеративным способом. Насыщение шести цифр после запятой наступило за шесть шагов итераций, начиная с первого шага, равного единице. Поскольку кривая ABC симметрична относительно оси $O\varphi_s$, то нижняя асимптота определяется разностью $\varphi_{s \min} = 2\pi - \varphi_{s \max} = 0,006525 \dots$

Для определения массы тела m , движущегося со скоростью v , соизмеримой со скоростью света c , необходимо использовать формулу (1.68). С этой целью следует произвести отображение значений кривой ABC на функцию гиперболического тангенса, т.е. для фиксированной точки $\varphi_{s,i}$ кривой ABC нужно найти соответствующее значение функции $\operatorname{th}(\varphi_{s,i}) = v/c$. Следовательно, скорость тела в точке i будет определяться из соотношения

$$v_i = c \left\{ \operatorname{th} \left[4 \operatorname{arctg} \left(e^{\varphi_i} \right) \right] \right\}, \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi, \quad (1.72)$$

масса которого в точке i находится по выражению (1.68)

$$m_i = m_0 \operatorname{ch} \left[4 \operatorname{arctg} \left(e^{\varphi_i} \right) \right], \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi. \quad (1.73)$$

Использование формул (1.72) и (1.73) проиллюстрируем на пяти примерах.

1. Положим $\varphi = -2$, при этом $\varphi_{s,-2} = 4 \operatorname{arctg}(e^{-2}) = 0,538072$. Скорость тела будет $v = c[\operatorname{th}(0,538072)]$, а масса тела станет равной $m = m_0 \operatorname{ch}(0,538072)$.

2. Положим $\varphi = -1$, при этом $\varphi_{s,-1} = 4 \operatorname{arctg}(e^{-1}) = 1,410054$. Скорость тела будет $v = c[\operatorname{th}(1,410054)]$, а масса тела станет равной $m = m_0 \operatorname{ch}(1,410054)$.

3. Когда $\varphi = 0$, будем иметь: $\varphi_{s,0} = 4 \operatorname{arctg}(e^0) = \pi = 3,141592$. Скорость тела в этом случае равна $v = c[\operatorname{th}(3,141592)]$, а масса тела будет: $m = m_0 \operatorname{ch}(3,141592)$.

4. В том случае, когда $\varphi = 1$, имеем $\varphi_{s,1} = 4 \operatorname{arctg}(e^1) = 4,873132$. Скорость тела – $v = c[\operatorname{th}(4,873132)]$, а соответствующая масса тела равна $m = m_0 \operatorname{ch}(4,873132)$.

5. Если положить $\varphi = 2$, то будем иметь $\varphi_{s,2} = 4 \operatorname{arctg}(e^2) = 5,745113$. Скорость тела будет $v = c[\operatorname{th}(5,745113)]$, а масса тела станет $m = m_0 \operatorname{ch}(5,745113)$.

Таким образом, из преобразований Лоренца следует, что состояние (т.е. значение) физической величины (в данном случае массы) зависит от её скорости, если эта скорость соизмерима со скоростью света. Для произвольной физической величины (длины, времени и т.д.) сказанное можно обобщить путем использования этих гиперболических функций.

Пусть представляет интерес длина ℓ_i некоторого тела, движущегося со скоростью v_i соответствующей i -ой точке функции ABC (см. Рис. 5), и соизмеримой со скоростью света c ; скорость этого тела, выраженную через скорость света, находим из формулы (1.72). Длина данного тела, определяемая с использованием преобразования Лоренца, сокращается согласно выражению

$$\ell_i = L \operatorname{sech} [4 \operatorname{arctg}(e^{\varphi_i})] < L, \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi,$$

где L – длина тела в состоянии покоя, т.е. когда $v = 0$.

В случае, когда происходит движение системы со скоростью v_i соответствующей i -ой точке функции ABC (см. Рис. 5), происходит не только уменьшение длины этой системы (тела), но и замедляется течение в ней времени τ_i , согласно формуле

$$\tau_i = t \operatorname{sech} [4 \operatorname{arctg}(e^{\varphi_i})] < t, \quad -\pi \leq \varphi_i \leq \pi,$$

причем t – течение времени в покоящейся системе ($v = 0$).

Следовательно, использование вышеизложенной методики определения изменений физических величин (увеличения массы, сокращение длины и замедление течения

времени) системы, движущейся со скоростью, соизмеримой со скоростью света, даёт те же результаты, что и ОТО.

Два разных подхода к решению одной задачи приводят к двум разным алгоритмам её решения. Однако, следует отметить, что исходным пунктом в обеих подходах является оптимальность поставленной задачи: в одном случае основой решения служит оптимизационное уравнение Эйлера-Лагранжа, в другом – эквивалентное ему уравнение Гамильтона.

Сравнить эти два подхода можно в случае точного решения поставленной задачи, т.е. для задачи Шварцшильда.

Для сферической системы координат

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1.74)$$

вблизи статической массы, обладающей сферической симметрией, для риманова интервала ds^2 имеется точное решение

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) + \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2, \quad (1.75)$$

где $a = \frac{2\kappa m}{c^2}$, κ – гравитационная постоянная Ньютона, m – масса тела, обладающего сферической симметрией.

Необходимо отметить, что система координат (1.74) является ортогональной криволинейной системой.

В гравитационном поле этого тела траекториями незаряжённой частицы являются геодезические линии риманова пространства

$$\frac{d^2 y^\rho}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0, \quad (1.76)$$

где $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu, \nu \end{matrix} \right\}$ – символ Кристоффеля.

Символ $\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu, \nu \end{matrix} \right\}$ заменяется его значениями, вычисленными с использованием

потенциалов

$$g_{00} = - \frac{1}{g_{11}} = \left(1 - \frac{a}{r}\right), \quad g_{22} = \frac{g_{33}}{\sin^2 \theta} = -r^2.$$

Запишем уравнение геодезической линии (1.76) сначала для $\rho = 2$. Полагая $y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \psi$ получим

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\psi}{ds} \right)^2 = 0.$$

Систему координат (1.74) выберем так, чтобы движение частицы происходило на плоскости xoy , т.е. когда $z = 0$. Это достигается при $\theta = \pi/2$. В этом случае

($d^2\theta = 0$) уравнение (1.75) запишется следующим образом

$$ds^2 = -\frac{1}{\alpha} dr^2 - r^2 d\psi^2 + \alpha c^2 dt^2, \quad (1.77)$$

где $\alpha = 1 - \frac{2\text{æm}}{c^2 r} = 1 - \frac{a}{r}$.

Уравнения (1.76) при $\rho = 3$ и $\rho = 0$ запишутся так

$$\frac{d^2\psi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{ds} \frac{dr}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \frac{\alpha'_r}{\alpha} \frac{dr}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Интегрирование последних двух уравнений дает

$$r^2 \frac{d\psi}{ds} = \frac{h}{c} \equiv \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{k}{\alpha c^2}, \quad (1.78)$$

где h и k постоянные интегрирования.

Если теперь проинтегрируем (1.76) для $\rho = 1$, исключив из него dt и ds с помощью (1.78), то будем иметь

$$\frac{1}{\alpha} \left(\frac{h}{r^2 c} \frac{dr}{d\psi} \right)^2 + \frac{h^2}{r^2 c^2} - \frac{h^2}{\alpha c^2} = -1. \quad (1.79)$$

Введем обозначение

$$u = \frac{1}{r}. \quad (1.80)$$

С учетом обозначения (1.80), выражение (1.79) запишется следующим образом

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 = \frac{2\text{æm}}{c^2} u^3 - u^2 + \frac{2\text{æm}}{h^2} u - \frac{c^2}{h^2} \left(1 - \frac{k^2 h^2}{c^4} \right). \quad (1.81)$$

Решение задачи Шварцшильда (1.81) нельзя сопоставить с методом автора. Невозможность такого сравнения вызвана тем, что решение (1.81) использует угол поворота ψ сферической системы координат (1.74) как аргумент расстояния $u = 1/r$ до сферически симметричной массы, в то время как метод автора опирается на формулу (1.71), в которой угол поворота сепаратрисы φ_s зависит от текущего времени или

соответствующего угла, заданного в радианах. Однако, поскольку уравнения Гамильтона эквивалентны уравнениям Эйлера-Лагранжа (см. (0.8a) и (0.8b)), то сравнить точное решение (1.81) можно, если задачу Шварцшильда решить путем использования уравнения Эйлера-Лагранжа, что эквивалентно решению автора. Поэтому обратимся к решению задачи Шварцшильда с применением уравнения Эйлера-Лагранжа.

Функцию Лагранжа L определим только как сумму кинетических энергий соответствующих членов риманова интервала (1.77):

$$L = -\frac{1}{2} \frac{r_s^2}{1 - \frac{a}{r}} - \frac{1}{2} r^2 \psi_s^2 + \frac{1}{2} c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right) t_s^2. \quad (1.82)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа¹ запишутся в виде

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial t_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (1.84)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial r_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (1.85)$$

в которых индекс s при переменных ψ , t , r означает производную по s . Из решения уравнений (1.83) и (1.84) вытекает, что $\frac{\partial L}{\partial \psi_s} = const$ и $\frac{\partial L}{\partial t_s} = const$, т.е. имеем

$$r^2 \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\sqrt{b}}, \quad (1.86)$$

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \frac{dt}{ds} = -\frac{k^2}{c^2 \sqrt{b}}, \quad (1.87)$$

где $b \equiv \frac{c^2}{h^2}$ – постоянная.

С учетом уравнений (1.86) и (1.87) в уравнении (1.77), будем иметь

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} = \left[-br^2 + \frac{k^2 r^2}{c^2 \left(1 - \frac{a}{r}\right)} - 1 \right] r^2 d\psi^2. \quad (1.88)$$

Принимая во внимание обозначение (1.80), из уравнения (1.88) получим

¹ Уравнения (1.83)–(1.85) именуется уравнениями Эйлера–Лагранжа, поскольку интервал ds пропорционален интервалу времени dt , т.е. $ds = v dt$, где v – скорость движущегося тела.

$$\left(\frac{du}{d\psi}\right)^2 = au^3 - u^2 + abu + \frac{k^2}{c^2} - b. \quad (1.89)$$

Если в уравнение (1.89) подставим вышепринятые обозначения $a = 2\text{эм} / c^2$ и $b = c^2 / h^2$, то уравнение (1.89) совпадёт с уравнением (1.81). Этим доказано, что использование метода автора эквивалентно применению метода Эйнштейна для решения задачи Шварцшильда.

Решением уравнения (1.85) можно удостовериться в справедливости уравнения Эйлера-Лагранжа.

В монографии [12] (§14) высказана мысль о том, что в случае геометродинамики динамическим объектом является не пространство-время, т.е. четырёхмерное пространство, а трёхмерное пространство.

Размерность пространства не является объективной реальностью, а зависит от того, какую систему координат выбирает исследователь. Если нет необходимости в учёте релятивистского эффекта (например, в геометродинамике), то следует использовать такую систему координат, которая в явном виде не содержит время, но описывает изменяющееся во времени трёхмерное пространство.

Если необходимо учесть релятивистский эффект, то согласно уравнению (1.81), следует выбрать ортогональную криволинейную систему координат (1.74). Сказанное удобно проиллюстрировать на примере задачи Шварцшильда.

Траекторию движения планеты Меркурий можно получить, если уравнение (1.81) продифференцировать по u :

$$\frac{d^2 u}{d\psi^2} + u = \frac{3\text{эм}}{c^2} u^2 + \frac{\text{эм}}{h^2}. \quad (1.90)$$

Нетрудно показать [13], что в этом случае, уравнение (1.90) приводит к прецессии большой оси эллиптической траектории по которой движется планета; эта прецессия за

$$\text{век равна } \Omega = \frac{20946,357 \cdot 10^{12}}{\Delta(1 - \varepsilon^2)T} = 42,9 \text{ угловым секундам,}$$

где

$$\Delta = 5,8 \cdot 10^{12} \text{ см} - \text{большая ось траектории,}$$

$$\varepsilon = 0,2056 - \text{эксцентриситет траектории,}$$

$$T = 87,97 \text{ дней} - \text{период оборота планеты в звёздных сутках.}$$

Понадобится три миллиона лет, чтобы большая ось эллипса, по которому движется Меркурий, совершила полный оборот вокруг Солнца.

Обратимся теперь к решению этой же задачи в случае системы координат, использующей эллиптическую функцию Вейерштрасса \wp . Введем обозначение

$$u = \frac{4}{a}U + \frac{1}{3a}. \quad (1.91)$$

С учетом обозначения (1.91) уравнение (1.89) запишется в виде

$$\left(\frac{dU}{d\psi} \right)^2 = 4U^3 - g_2^*U - g_3^*, \quad (1.92)$$

где $g_2^* = \frac{1}{12} - \frac{a^2b}{4}$, $g_3^* = \frac{1}{216} + \frac{a^2b}{24} - \frac{a^2k^2}{16c^2}$.

Интегрирование уравнения (1.92) даёт

$$U = \wp(\psi + C),$$

где C – постоянная интегрирования.

Принимая во внимание последнее выражение, подстановка (1.91) запишется так

$$u = \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{3a} + \frac{4}{a}\wp(\psi + C). \quad (1.93)$$

Следовательно, подстановка (1.91) позволяет перевести уравнение (1.89) в уравнение (1.92), с последующим его решением эллиптической функцией Вейерштрасса.

Определим теперь траекторию планеты в системе координат (U, ψ) . С этой целью продифференцируем уравнение (1.92) по U :

$$\frac{d^2U}{d\psi^2} - 6U^2 = -\frac{1}{2}g_2^*. \quad (1.94)$$

Выражение (1.94) является уравнением неустойчивого осциллятора; **коэффициент при переменной U^2 не содержит скорости света c . Этим обстоятельством объясняется то, что тело, движущееся согласно (1.94), не обладает релятивистским эффектом.** Необходимо также обратить внимание на один из коэффициентов уравнения траектории планеты Меркурий (1.90), который содержит скорость света c : это коэффициент $3\alpha_m/c^2$ при переменной u^2 . **В результате зависимости коэффициента при искомой переменной u от c будет существовать релятивистский эффект.**

Таким образом, на выбор той или иной системы координат накладывает ограничение физический смысл задачи.

Результаты ОТО используется: в Микром мире при движении элементарных частиц со скоростями, соизмеримыми со скоростью света, в Макром мире при полёте космических аппаратов, в Мегамире при движении галактик, звезд и планет.

ГЛАВА 2

Новые модели Мегамира и их оптимальность

*Тому, кто единым взглядом смог бы окинуть Вселенную,
все мироздание показалось бы правильным и необходимым*

Ж. Даламбер

Космология пришла к заключению, что масса материи во Вселенной, обладающая соответствующим тяготением, способна остановить расширение Вселенной. Происходящее в настоящее время расширение Вселенной моделируется воображаемым раздувающимся шаром, на поверхности которого находятся частицы-галактики. Вслед за расширением Вселенной будет иметь место её сжатие; весь процесс расширения и сжатия носит пульсирующий характер, адекватно описываемый уравнениями математического маятника. Расширение Вселенной является устойчивым процессом, а её сжатие – неустойчивым процессом. При постоянном темпе изменения радиуса (воображаемого раздувающегося или сжимающегося) шара весь процесс расширения и сжатия, как это показано в §2.3, имитируется уравнениями тесноты и сверхтесноты. Эти уравнения являются следствием совместного решения неустойчивой и устойчивой систем уравнений Вольтерра-Лотка. В результате решения уравнений тесноты и сверхтесноты определяется радиус воображаемого раздувающегося или сжимающегося шара. Обратная величина этого радиуса служит кривизной Вселенной (см. §2.4, пункт б). Следовательно, кривизна Вселенной находится не путём решения классических уравнений гравитационного поля [14], а как обратные величины радиусов шаров, соответствующих расширяющейся и сжимающейся Вселенной. Такой способ определения кривизны Вселенной вытекает из предложенного нами подхода к моделированию эволюции Вселенной.

§2.1. Возможная модель образования тёмного вещества во Вселенной

За последние годы было сделано очень важное открытие: стало известно, что масса светящихся объектов во Вселенной составляет около четырёх процентов от всей массы вещества, находящейся в Космосе; остальная масса (примерно 96%) приходится на тёмное (неясное) вещество. Это означает, что средняя плотность вещества во Вселенной составляет $\rho = 10^{-1,2} \text{ г/см}^3$, что во много раз превышает её критическую плотность $\rho_c = 10^{-29} \text{ г/см}^3$. Из сказанного следует: общая масса материи во Вселенной такова, что она способна остановить её расширение [15], т.е. Вселенная замкнута. Вслед за расширением Вселенной, начавшимся в момент «сотворения Мира», следует процесс сжатия Вселенной, за сжатием произойдёт вновь расширение и т.д. Следовательно, Вселенная характеризуется циклической эволюцией.

То, что искривлённое гравитацией пространство инициирует образование материи хорошо известно. Однако, механизм образования материи в искривлённом пространстве не рассматривался. Среда, в которой может действовать предлагаемый нами механизм образования материи, представляет собой упругую модель физического вакуума, а элементарная частица выступает как сингулярность этой среды. Следовательно, в данной модели физический вакуум является упругим твердым телом, а частица рассматривается как локализованный возбудитель этого тела. Необходимо отметить, что такая модель физического вакуума не представляет собой нечто новое. В книге [16] приводится подобная модель в элементарном, но содержательном изложении. Проблема образования вещества в вакууме рассмотрена в статье [17], а упругой модели вакуума посвящена работа [18].

Уравнение смещений при изменении состояния упругой среды в линейном приближении дается в монографии [19]; в векторной форме оно имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - (\lambda + 2\mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{X}, \quad (2.1)$$

где

\mathbf{u} – вектор смещения частиц среды,

ρ – плотность среды,

μ и λ – постоянные упругой среды, называемые коэффициентами Ламе и имеющие размерность эрг/см^3 , \mathbf{X} – вектор внешнего воздействия по отношению к упругой среде. Если ввести обозначения $c_1 = \sqrt{\mu/\rho}$ и $c_2 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, то уравнение (2.1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + c_1^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho^{-1} \mathbf{X}, \quad (2.2)$$

где

c_1 – скорость распространения поперечной волны,

c_2 – скорость распространения продольной волны в упругой среде.

По нашему мнению прирост объема, в искривлённом гравитацией пространстве (вакууме), в котором образуется тёмное вещество, описывается стационарным уравнением, соответствующим уравнению (2.2). Исходя из этих соображений, локализованная микрочастица тёмного вещества характеризуется точечным дефектом включения, т.е. центром дилатации. Этот центр дилатации представляет собой такую правую часть стационарного уравнения

$$c_1^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{Q},$$

которая имеет вид [20]

$$\mathbf{Q} = -\frac{b}{\rho} \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.3)$$

где

$\mathbf{Q} = \rho^{-1} \mathbf{X}$ – приведённый вектор внешнего воздействия по отношению к упругой среде,

$|\mathbf{b}| \equiv b$ – величина вектора Бюргерса,

δ – функция Дирака,

\mathbf{r}' – вектор текущего расстояния до центра включения (дилатации), т.е. центра сферы радиуса r . Приведенный вектор внешнего воздействия (2.3) вызывает в упругой среде потенциальное поле смещения

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\frac{b}{4\pi\rho c_2^2} \operatorname{grad} \left[\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right].$$

Дивергенция этого смещения всюду равна нулю, кроме точки дилатации [20]; следовательно, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{b}{\rho c_2^2} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.4)$$

Хорошо известно, что отрицательное значение вектора Бюргерса определяется как циркуляция дифференциала вектора смещения

$$\oint \mathbf{d}\mathbf{u}(\mathbf{r}) = -\mathbf{b}. \quad (2.5)$$

Если подынтегральное выражение уравнения (2.5) для каждой компоненты вектора смещения u_k запишем в виде

$$du_k = u_{ik} dr_i, \quad (2.6)$$

(где $u_{ik} = \frac{\partial}{\partial r_i} u_k$ – тензор упругой дилатации), то будем иметь

$$\oint u_{ik} dr_i = -b_k,$$

т.е. циркуляция тензора упругой дилатации вокруг дилатации дает отрицательную компоненту вектора Бюргера.

Для компоненты смещения u_{ik} , определённой согласно уравнению (2.4), будем иметь

$$u_{ik} = \frac{b_k}{\rho c_2^2} \delta(r_i - r'_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Если ввести обозначение $u_k = \Delta V_k$, то с учетом (2.6) и (2.7) можно утверждать, что в результате циркуляции смещения k -ой частицы, находящейся в искривлённом гравитацией вакууме, происходит прирост объема ΔV_k , в котором образуется тёмное вещество; этот прирост объёма определяется из выражения

$$\Delta V_k = \frac{b_k}{\rho c_2^2} \int \delta(r_i - r'_i) dr'_i = \frac{b_k}{\rho c_2^2}.$$

Последнее выражение рассматривается как постановка задачи определения объема, в котором образуется тёмное вещество.

Введем понятие плотности вероятности занятия (нахождения) k -ой частицей объёма V_k , обозначив эту плотность буквой $p_k(\mathbf{r}', t)$. При этом, вероятность нахождения компоненты вектора Бюргера b_k в объёме V_k будет равна $b_k p_k(\mathbf{r}', t)$.

Введем определение, согласно которому два центра дилатации неконтактным способом не взаимодействуют между собой¹, т.е. имеем

$$\Xi(k, \ell) = -\frac{b_k b_\ell}{\rho c_2^2} \int p_k(\mathbf{r}', t) p_\ell(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' = 0, \text{ если } k \neq \ell.$$

Взаимодействие происходит только при непосредственном контакте двух сосредоточенных включений упругой среды:

$$\Xi(k, k) = -\frac{b_k^2}{2\rho c_2^2} \int p_k^2(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \neq 0, \text{ если } k = \ell. \quad (2.8)$$

¹ Дмитриев В.П. Стохастическая механика. М.: Высшая школа, 1990.

Для функции плотности вероятности $p(r, t)$ имеют место следующие формулы

$$\int p_k(r, t) dr = 1, \quad (2.8a)$$

$$p_k = 1/V_k. \quad (2.8b)$$

Формула (2.8) показывает, что при взаимодействии двух центров дилатации контактным способом возникает энергия, определённая этим выражением. С учетом внутренней энергии частиц, заданной выражением (2.8), путем использования термодинамического потенциала Гиббса [21], можно оценить объем области искривлённого физического вакуума, который занимает k -ая частица. Для данной задачи термодинамический потенциал Гиббса записывается следующим образом:

$$G(k) = \Xi(k, k) - T_k H(k) + T_k H_0 + s_k V_k. \quad (2.9)$$

Слагаемые и параметры в потенциале (2.9) имеют следующие наименования:

$H(k) = (b_k/b_k^* K_k \ln V_k)$ – энтропия идеального газа, соответствующая равновесному состоянию флюида в объёме V_k , T_k – температура флюида точечного включения k -ой частицы, K_k – постоянный коэффициент, зависящий от упругих свойств среды с включённой k -ой частицей [20], b_k^* – компонента вектора Бюргера, соответствующая одному молю¹ флюида точечного включения, $H_0 = const$ – начальная энтропия идеального газа в равновесном состоянии, s_k – давление фона точечного включения k -ой частицы.

С учетом этих обозначений и формул (2.8), (2.8a), (2.8b), потенциал (2.9) запишется следующим образом

$$G(k) = -\frac{b_k^2}{2\rho c^2 V_k} - \frac{b_k}{b_k^*} K_k T_k \ln V_k + T_k H_0 + s_k V_k. \quad (2.9)$$

a)

С целью определение объёма темного вещества, занимаемого k -ой частицей, необходимо решить уравнение безусловной оптимизации, записанное для искомого объёма

$$\frac{\partial}{\partial V_k} G(k) = 0. \quad (2.10)$$

¹Моль – единица количества вещества, равная количеству вещества системы, в которой содержится столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов и т.д.), сколько содержится атомов в углероде ¹²C массой 0,012 кг.

Подстановка потенциала (2.9 a) в уравнение (2.10) приводит к квадратному уравнению

$$s_k V_k^2 - m V_k + \mu = 0 ,$$

где

$$m = \frac{K_k T_k}{b_k^*} b_k , \quad \mu = \frac{b_k^2}{2 \rho c_2^2} .$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$V_k = D_k b_k , \tag{2.11}$$

где

$$D_k = \Phi_k \Psi_k ,$$

причём $\Phi_k = \frac{K_k T_k}{2 s_k b_k^*}$ и $\Psi_k = 1 + \sqrt{1 - \frac{2 b_k^{*2} s_k}{\rho c_2^2 K_k^2 T_k^2}}$.

Поскольку имеет место усиленное неравенство $1 \gg \frac{2 b_k^{*2} s_k}{\rho c_2^2 K_k^2 T_k^2}$, то в этом случае будем иметь $D_k = \frac{K_k T_k}{s_k b_k^*}$. Полный объём определяется как бесконечная сумма элементарных объёмов (2.11)

$$V = \sum_{k=1}^{\infty} V_k .$$

Последнее выражение может быть представлено в виде произведения вектор-строки \mathbf{D} , имеющей бесконечное число компонент D_k на вектор-столбец $\oint d\mathbf{u}(\mathbf{r})$ (см. 2.5), также имеющий бесконечное число компонент. С учетом того, что отрицательный объём не имеет физического смысла, будем иметь

$$V = \mathbf{D} \oint d\mathbf{u}(\mathbf{r}) .$$

В результате циркуляции флюид находится во вращательном состоянии. Центробежная сила, действует на отдельные части флюида по-разному: та часть флюида, которая содержит структурные элементы (атомы, молекулы и т.д.), содержащие бóльшую массу (атомный вес), испытывает воздействие бóльшей центробежной силы. Следовательно, в результате циркуляции флюида объём неравномерно заполняется этим веществом. При вращении происходит конденсация флюида, который превращается в твердое тело. Таким образом объясняется то, что тело, образованное из затвердевшего флюида не имеет эллипсоидальную (округлую) форму: в разных направлениях оно имеет разную конфигурацию. В результате вращения тёмного вещества вокруг оси, проходящей через центр массы (подобно

центру тяжести) этого тела, вращение отдельных точек конфигурации (формы) тёмного вещества происходит с одной и той же угловой скоростью ω . При этом можно определить мощность вращения тёмного вещества вокруг этой оси:

$$W = M \omega^2,$$

где M – масса тёмного вещества, равная $M = \rho V$.

Мощность w может быть принята за основную динамическую характеристику тёмного вещества.

Полученные результаты показывают, как гравитационная энергия, вызывающая искривление пространства, превращается в реальную материю.

Ввиду малого значения гравитационной постоянной Ньютона ($\alpha = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / \text{г} \cdot \text{се} \text{к}^2$), на вышеописанной стадии образования тёмной материи феномен тяготения отсутствует. Однако, после достижения массы тёмного вещества определённой величины, начинает действовать гравитационный эффект.

На последующих стадиях образования тёмной материи, благодаря появления гравитационных сил, тёмное вещество может принять как макроскопические, так и мегаскопические размеры, соизмеримые с объектами космического пространства.

Результаты настоящего параграфа позволяют объяснить вращение планеты Уран вокруг своей оси; это вращение имеет направление обратное по отношению ко всем остальным планетам солнечной системы: при движении Солнца вокруг центра Галактики гравитационное поле Солнца захватило тёмное вещество, вращающееся вокруг своей оси. Это тёмное вещество было названо планетой Уран.

Астероиды должны рассматриваться не как осколки, несостоявшейся планеты, а как фрагменты тёмного вещества.

Наконец, происхождение естественных спутников планеты Марс Фобоса и Деймоса можно объяснить захватом гравитационным полем этой планеты пролетающих мимо астероидов.

§2.2. Динамическая модель расширения и сжатия Вселенной

В предыдущем параграфе отмечено, что поскольку средняя плотность материи во Вселенной больше критической, то эволюция Вселенной является циклической: за расширение следует сжатие Вселенной, а за сжатием вновь расширение и т.д. По нашему мнению циклическую эволюцию Вселенной адекватно моделирует

функционирование математического маятника. Уравнения движения маятника имеют вид

$$\dot{p}_1 = -F_1 \sin \varphi_1, \quad \dot{\varphi}_1 = G_1 p_1, \quad (2.12)$$

где p_1 – импульс, $F_1 = m_1 |\gamma| h_1$, $G_1 = 1/m_1 h_1^2$, $m_1 |\gamma|$ – сила тяготения, т.е. гравитационная сила, действующая на галактику, имеющую массу m_1 , со стороны светящихся объектов и тёмного вещества Вселенной (это означает, что тяготение создаётся всеми видами материи), совокупная масса которых равна M , h_1 – длина маятника, $\gamma = -\varkappa \frac{M}{h_1^2}$ – ускорение, $\varkappa = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / \text{г} \cdot \text{се} \text{к}^2$ – гравитационная постоянная Ньютона, φ_1 – угол отклонения маятника от вертикали.

Запишем гамильтониан для уравнений математического маятника (2.12):

$$H_1 = T_1 + U_1 = E_1$$

или

$$H_1 = \frac{1}{2} G_1 p_1^2 - F_1 \cos \varphi_1 = E_1, \quad (2.13)$$

где $T_1 = \frac{1}{2} G_1 p_1^2$ – кинетическая энергия,

$U_1 = -F_1 \cos \varphi_1$ – потенциальная энергия,

E_1 – полная энергия Вселенной (Метагалактики).

Пусть полная энергия $E_1 = E_u$ больше максимального значения потенциальной энергии F_1 . В этом случае импульс p_1 всегда отличен от нуля; это приводит к неограниченному изменению φ_1 , т.е. к вращению (см. Дополнение В, случай 2 а). При этом для $p_1 > 0$ движение происходит слева направо с энергией $+E_u$, а при $p_1 < 0$ движение происходит справа налево с энергией $-E_u$. Положительность и отрицательность энергии во Вселенной зависит от того, с какого места (ниже оси $o\varphi_1$ или выше оси $o\varphi_1$) (см. Рис. 4) мы производим наблюдение за движением маятника; во Вселенной нет понятий «низа» и «верха», поэтому знак энергии $\langle\langle - \rangle\rangle$ является формальностью. Относительность знака энергии становится ясной, когда мы определяем объём энергии, который не может быть отрицательной величиной.

Введем обозначение $E_u = F_1 + \Delta E_u$ [22]. Нас будет интересовать максимальное и минимальное значение импульса, которое он принимает при предельных значениях

функции $\cos \varphi_1$, т.е. при $\cos \varphi_1 = \pm 1$; тогда, согласно гамильтониану (2.13), будем иметь (см. Рис. 6)

$$p_{1 \max} \equiv R_{\max} = \sqrt{\frac{2}{G_1} (F_1 + \Delta E_u)}, \quad (2.14)$$

$$p_{1 \min} \equiv R_{\min} = \sqrt{\frac{2 \Delta E_u}{G_1}}. \quad (2.15)$$

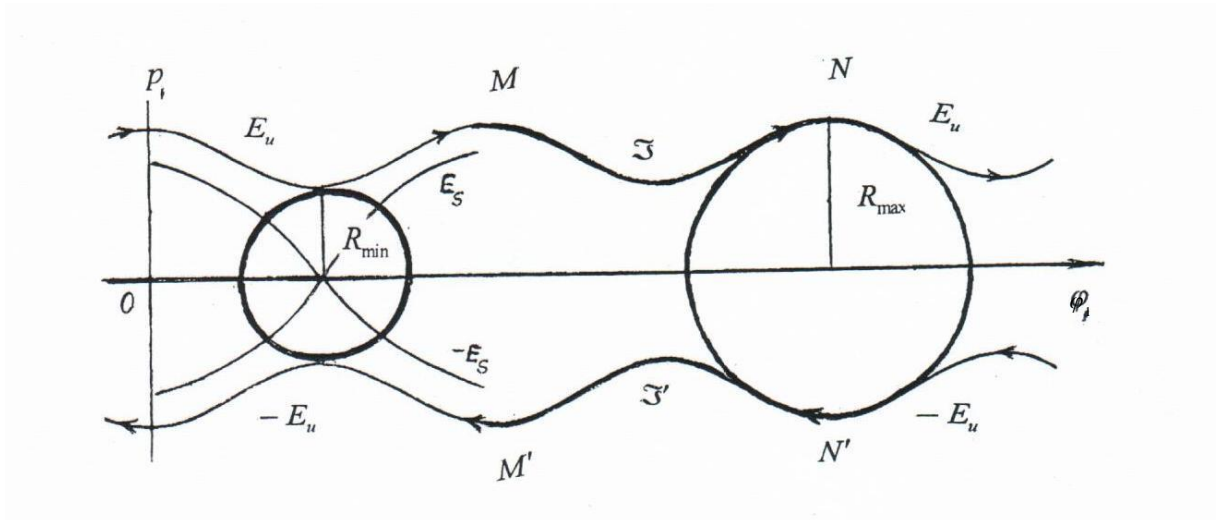


Рис. 6

Таким образом определён как минимальный радиус R_{\min} воображаемого раздувающегося шара, так и максимальный радиус R_{\max} , который будет иметь шар в конце расширения Вселенной. Минимальный радиус воображаемого раздувающегося шара соответствует начальной плотности материи в первую секунду «сотворения Мира» [15], т.е. $\rho_0 = 8 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3$, а также в канце сжатия Вселенной.

Чтобы избежать перегрузки чертежа на Рис. 6 максимальный радиус шара R_{\max} сдвинут вправо на один период от MM' до NN' ; шар и траектория его движения изображены жирными кривыми. Индекс s при энергии, т.е. E_s указывает на принадлежность этой энергии к сепаратрисе.

Определим теперь прирост полной энергии Вселенной ΔE_u , фигурирующий в выражениях (2.14) и (2.15). С этой целью обратимся к формуле

$$R_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3M^*}{4\pi\rho}}, \quad (2.16)$$

где $M^* = M + m_1$.

Приравнивая правые части формул (2.15) и (2.16), определим величину прироста полной энергии Вселенной

$$\Delta E_u = \frac{G_1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{3M^*}{4\pi\rho}\right)^2}. \quad (2.17)$$

С учетом формулы (2.17) в выражении (2.14) получим величину максимального радиуса воображаемого раздувающегося шара

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{2}{G_1} \left[F_1 + \frac{G_1}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{3M^*}{4\pi\rho}\right)^2} \right]}. \quad (2.18)$$

Поскольку уравнения математического маятника (2.12) удовлетворяют уравнениям Гамильтона (А.3) (Дополнение А), то эволюция Вселенной является оптимальной в смысле уравнений Гамильтона (0.8a) и (0.8b).

§2.3. Физические предпосылки расширения и сжатия Вселенной

Согласно постулату физики материя может находиться в двух состояниях: вещества и поля [23]. Во Вселенной параллельно друг другу происходит процесс перехода (превращения) вещества в поле и процесс перехода поля в вещество. На Рис. 7 схематически показаны эти переходы.

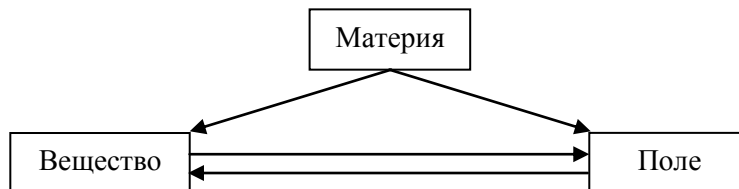


Рис. 7

В масштабах Вселенной эти превращения происходят на всех уровнях материи. На уровне элементарных частиц об этих превращениях образно сказано М-А Тоннелой [13]: «Наконец, опыты, в которых квант электромагнитного излучения с энергией $E_0 = h\nu_0$ ¹ превращается в пару противоположно заряженных частиц с общей энергией $2m_0c^2$, а также опыты, в которых наблюдается противоположный процесс: превращение вещества в излучение ($2m_0c^2 \rightarrow h\nu_0$), позволяют придать смысл

¹ h – постоянная Планка,

ν_0 – частота электромагнитного излучения.

соотношению $\Delta E = \Delta mc^2$ также и в том случае, когда в результате реакции масса возникает из излучения или же, наоборот, полностью исчезает и превращается в излучение». На уровне звёзд превращение вещества в поле, т.е. в излучение, имеет место при катастрофическом взрыве звезды в конце жизни; это явление называется вспышкой сверхновой звезды. Световая компонента (яркость звезды) является частью общего, резко возросшего излучения (поля), испускаемого при взрыве сверхновой звездой. Превращение поля в вещество описано в параграфе §2.1, когда в вакууме, искривлённом гравитационным полем, образуется тёмное вещество.

Для процессов расширения и сжатия Вселенной очень существенно высказывание основоположника современной космологии Ж. Леметра считавшего, что Вселенная состоит из частиц-галактик, находящихся в процессе либо разбегания в разные стороны (расширение Вселенной), либо движущихся навстречу друг другу (сжатие Вселенной). Как следует из этого высказывания при расширении Вселенной происходит разрежение газа, состоящего из частиц-галактик. Как уже отмечалось, это явление моделируется нахождением частиц-галактик на поверхности воображаемого раздувающегося шара. Модель расширения Вселенной, приводимая ниже, создана для имитации процесса разрежения средней плотности материи, находящейся во Вселенной.

Обратимся теперь к физическим моделям расширения и сжатия Вселенной. В качестве модели расширения Вселенной берётся модель эффекта «тесноты» [24]: каждой галактике тем хуже, чем ближе к ней другие галактики, т.е. чем больше концентрация галактик. Поэтому член, описывающий уменьшение концентрации галактик, должен быть пропорционален z^2 :

$$\frac{dz_+}{dt} = \beta_+ z_+ - \mu_+ z_+^2, \quad (2.19)$$

где z_+ – плотность материи в воображаемом раздувающемся шаре.

Вводится другая модель, имитирующая сжатие Вселенной:

$$\frac{dz_-}{dt} = -\beta_- z_- + \mu_- z_-^2, \quad (2.20)$$

где z_- – плотность материи в сжимающемся шаре.

Уравнение (2.20) назовём моделью «сверхтесноты». Эта модель заключается в том, что каждой галактике тем лучше, чем ближе к ней другие галактики, т.е. чем больше концентрация галактик. *Модели (2.19) и (2.20) являются уравнениями Риккати без свободного члена; производная от их решения является солитоном, который удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа, т.е. эти модели оптимальны.*

Хотя плотность вещества y во много раз больше плотности поля x , при большой массе поля их конкурентное поведение становится реальным. В ранние моменты времени после Большого взрыва излучение, т.е. поле давало гораздо больший вклад в плотность материи, чем вещество. Этот период носит название «радиационной эры»¹. Как известно, конкурентное поведение двух переменных x и y адекватно моделируется уравнениями Вольтерра-Лотка «хищник-жертва». Целесообразность использования этих уравнений при моделировании Большого взрыва приводится в Дополнении с .

В докладе [25] показано, что если для двух конкурирующих переменных x и y , удовлетворяющих системам уравнений Вольтерра-Лотка «хищник-жертва», устойчивой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \quad a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= cxy - dy, \quad c, d > 0, \end{aligned} \quad M$$

и неустойчивой

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy, \quad a, b > 0, \\ \frac{dy}{dt} &= dy - cxy, \quad c, d > 0, \end{aligned} \quad N$$

при введении обозначения $z = xy$ и принятия условия, согласно которому темп изменения плотности материи z постоянен, т.е.

$$\dot{z}/z = q = const \quad (2.21)$$

может быть осуществлен переход от систем M и N к модифицированному уравнению Риккати [22]

$$\frac{dz}{dt} = -(d - q)z + \frac{bc}{a - q}z^2. \quad (2.22)$$

С целью разъяснения роли параметров a и b в первом уравнении системы M , представим это уравнение в темповой записи:

$$\frac{dx}{dt} = a - by. \quad (2.23)$$

¹ Силк Дж. Большой взрыв. Рождение и эволюция Вселенной. М.: Мир, 1982.

Из представления (2.23) видно, что параметр a характеризует темп производства плотности поля $x = \rho(x)$; параметр b является весовым коэффициентом для плотности вещества $y = \rho(y)$ в уравнении (2.23).

Аналогично, для выявления назначения параметров c и d во втором уравнении системы M , представим это уравнение в темповой форме:

$$\frac{dy}{dt} = cy - d. \quad (2.24)$$

Уравнение (2.24) показывает, что параметр d характеризует темп производства (образования) плотности вещества $y = \rho(y)$, а параметр c является весовым коэффициентом для плотности поля $x = \rho(x)$.

Необходимо отметить, что уравнение (2.22) содержит в себе как уравнение (2.19), моделирующее расширяющуюся Вселенную, так и уравнение (2.20), моделирующее сжимающуюся Вселенную; всё зависит от выбора коэффициентов при z и z^2 .

Обратимся теперь к определению параметра q . С этой целью решение уравнения (2.22) будем искать в классе обобщённых функций [22]. Действительно, обратимся к уравнениям

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\psi}, \quad (2.25)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\chi}. \quad (2.26)$$

Из уравнений (2.25) и (2.26) следует

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{\chi}{\psi} \Rightarrow \frac{d\chi}{\chi} = \frac{d\psi}{\psi} \Rightarrow (\ln \chi)'_{\psi} = \frac{1}{\psi}. \quad (2.27)$$

Если в формулу (2.27) вместо χ подставить z , а вместо ψ подставить текущее время t , то для обозначения

$$z = z_0 \ell^t, \quad (2.28)$$

(z_0 – значение плотности материи в равновесном состоянии: $a = \frac{bcz_0}{d} e$, а буква e

означает число Непера, т.е. $e = 2,7182 \dots$) с учётом (2.21), будем иметь

$$\frac{1}{t} = \dot{z}/z = (\ln z)'_t = \ln \ell = q. \quad (2.29)$$

Выражение (2.29) показывает, что параметр q принадлежит к классу обобщённых функций. Разделим обе части уравнения (2.22) на z , тогда с учётом (2.21) получим равенство

$$q = -d + q + \frac{bc}{a - q} z .$$

Из последнего выражения определим z :

$$z = \frac{d(a - q)}{bc} . \quad (2.30)$$

Согласно соотношению (2.29), выражению (2.30) и обозначению (2.28) можно записать следующее равенство

$$z_0 t \ln \ell = \ln \left| \frac{d(a - q)}{bc} \right| \Rightarrow e = \pm \left(\frac{d(a - q)}{bc z_0} \right) . \quad (2.31)$$

Из соотношения (2.31) получим две формулы

$$q_1 = a - \frac{bc z_0}{d} e , \quad (2.32)$$

$$q_2 = a + \frac{bc z_0}{d} e . \quad (2.33)$$

Корень q_2 (2.33) непригоден, поскольку он соответствует только сжимающейся Вселенной:

$$z = z_0 e^{q_2 t} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty .$$

Из последнего выражения следует, что плотность материи стремится к бесконечности.

Корень q_1 (2.32) может быть использован как при моделировании расширяющейся Вселенной, когда $\frac{bc z_0}{d} e > a$, так и при моделировании сжимающейся Вселенной, когда

$a > \frac{bc z_0}{d} e$. В уравнении (2.22) под параметром q подразумевается именно корень q_1 .

Следовательно, плотность материи соответствующая корню q_1 запишется в виде

$$z = z_0 e^{q_1 t} . \quad (2.32 a)$$

Таким образом, при постоянном темпе (2.21) изменения плотности материи $z(z = xy)$ формула (2.32 a) определяет общую плотность поля x и вещества y в виде экспоненциальной функции, состоящей из произведения текущего времени t , разности

$q_1 = a - \frac{bc z_0}{d} e$, характеризующей соотношение между весовыми коэффициентами поля

(a, d) , вещества (b, c) и значением общей плотности материи в равновесном состоянии

$z_0 = \frac{a_0 d_0}{b_0 c_0 e}$, причём параметры a_0, b_0, c_0, d_0 соответствуют равновесному состоянию

параметров a, b, c, d для которых имеет место равенство $a - \frac{bcz_0}{d}e = 0$.

Следовательно, для расширяющейся Вселенной, т.е. для уравнения (2.19) параметры β_+ и μ_+ определяются следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_+ = -(d + q) = -d - a + \frac{bcz_0}{d}e > 0 \Rightarrow \frac{bcz_0}{d}e > a + d, \\ \mu_+ = \frac{bc}{a - q} = \frac{bc}{a - \frac{bcz_0}{d}e + a} = \frac{bcd}{2ad - bcz_0 e} > 0, \quad 2ad > bcz_0 e. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Для сжимающейся Вселенной, т.е. для уравнения (2.20) параметры β_- и μ_- находятся из выражений

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_- = q - d = a - \frac{bcz_0}{d}e - d > 0 \Rightarrow a - d > \frac{bcz_0}{d}, \\ \mu_- = \frac{bc}{a - q} = \frac{bc}{a - a + \frac{bcz_0}{d}e} = \frac{d}{z_0 e} > 0. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

Движение воображаемого шара (см. Рис. 6) происходит слева направо: размер шара увеличивается, что соответствует расширению Вселенной, происходящему в настоящее время; это вызывает соответствующий процесс разрежения материи. Состояние шара MM' характеризуется устойчивым положением: радиус шара максимален, т.е. имеем R_{\max} , а плотность материи достигает минимального значения ρ_{\min} . После состояния MM' начинается процесс сжатия шара; этот процесс заканчивается в состоянии $\zeta\zeta'$, когда плотность достигает максимального значения $\rho_{\max} = \rho_0$, а радиус шара становится минимальным R_{\min} . В дальнейшем, согласно модели маятника, процессы расширения и сжатия Вселенной повторяются.

§2.4. Решение уравнений маятника, функционирующего во Вселенной, для сепаратрисы, колебательного и вращательного движений. Определение объёма энергии, соответствующего колебательному движению маятника Вселенной. Определение сепаратрисной поверхности во Вселенной. Кривизна Вселенной

В настоящем и в следующем параграфе вместо ускорения свободного падения маятника, действующего в земных условиях, будет фигурировать ускорение

$\gamma = -\frac{\varkappa M}{h_1^2}$, точнее абсолютная величина от этого ускорения, соответствующая маятнику, функционирующему в масштабе Вселенной; структура уравнения маятника Вселенной (2.12) остаётся прежней.

1. Решение уравнений маятника Вселенной, соответствующее сепаратрисе.

Дифференциальные соотношения для сепаратрисы маятника (В.6а) и (В.6б) остаются в силе

$$p_1' = \sec h^2(\varphi_1 - \varphi_0), \quad (2.36)$$

$$p_2' = -\sec h^2(\varphi_1 - \varphi_0), \quad (2.37)$$

где угол поворота сепаратрисы φ_1 определяется по формуле (В.7)

Решения дифференциальных уравнений (2.36) и (2.37) создают возможность определить импульсы, соответствующие сепаратрисам, движущимся влево направо и справа налево:

$$p_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sec h^2(\varphi_1 - \varphi_0) d\varphi_1, \quad (2.38)$$

$$p_2 = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} \sec h^2(\varphi_1 - \varphi_0) d\varphi_1. \quad (2.39)$$

Как уже отмечалось, сепаратриса не является множеством, а представляет собой линию, имеющую длину, но не имеющую ширины.

Решениям (2.38) и (2.39) соответствуют значения энергий E_s и $-E_s$ отвечающие сепаратрисе маятника Вселенной (см. Рис. 4б, цифра 3).

2. Множество, соответствующее колебательному движению маятника Вселенной.

В этом случае неравенства для энергий E_1 и $-E_1$ имеют вид (см. Рис. 4б, цифра 2):

$$E_s > E_1 \geq 0, \quad (2.40a)$$

$$-E_s < -E_1 \leq 0, \quad (2.40b)$$

где E_1 – полная энергия маятника.

Как уже отмечалось (см. текст после формулы (2.13)) отрицательная энергия $-E_1$ во Вселенной отсутствует; это понятие относительно: положительность и отрицательность энергии зависит от местонахождения наблюдателя по отношению к

оси $0\varphi_1$. Мы используем ось $0\varphi_1$ (для которой $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{h_1^3}}$), поскольку от маятника, функционировавшего в земных условиях (см. Рис. 4) переходим к маятнику Вселенной. Если наблюдатель находится ниже оси $0\varphi_1$, то имеют место неравенства (2.40a) и (2.40b). Если наблюдатель находится выше оси $0\varphi_1$, то отрицательная энергия (2.40b) становится положительной (2.40a) и наоборот. Сказанное также можно интерпретировать путем использования символа эквивалентности « \equiv » применительно к интегралам

$$\int_a^b \equiv - \int_b^a .$$

В том, что отрицательному импульсу p соответствует отрицательная энергия $-E$ можно удостовериться путём элементарных рассуждений. Согласно формуле $p = mv$, если импульс p отрицателен, то масса m будет отрицательной и следовательно, энергия $E = mc^2$ также будет отрицательной. Поскольку отрицательность массы не имеет физического смысла, то существование отрицательной энергии – нонсенс.

Колебательному движению маятника Вселенной соответствует формула (B.2) с заменой в ней параметра $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ на параметр $\omega_1 = \sqrt{\frac{\varkappa M}{h_1^3}}$:

$$p = k \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{\varkappa M}{h_1^3}}(t - t_0), k \right]. \quad (2.41)$$

Формула (2.41) обладает свойством симметрии относительно оси $0\varphi_1$ (см. Рис. 4б); при значении параметра k , принадлежащего интервалу $(0, 1)$, т.е. $k_+ \in (0, 1)$, она описывает верхнюю часть (по отношению к оси $0\varphi_1$) множества 2, а при значении параметра $k_- \in (-1, 0)$, описывает зеркальное отражение верхней части этого множества относительно оси $0\varphi_1$, которое находится ниже оси $0\varphi_1$ и, следовательно, $k_- = -k_+$. Поскольку множество 2 замкнуто, то начальное условие t_0 может быть опущено. Аргумент в последней формуле можно представить в виде соответствующего угла (см. B.7):

$$p = k \operatorname{sn}(\varphi_1, k). \quad (2.42)$$

Согласно известным свойствам эллиптической функции Якоби sn , колебательное движение является периодическим, имеющим период

$$T = 4 \omega_1 K, \quad (2.43)$$

где

$$K = \int_0^1 \left[\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2} \right]^{-1} dt$$

3. Множество, соответствующее вращательному движению маятника Вселенной.

В этом случае неравенства для энергий имеют вид (см. Рис. 4б, цифра 1):

$$E_u \geq E_1 > E_s,$$

$$-E_u \leq -E_1 < -E_s.$$

Вращательному движению маятника Вселенной соответствует формула (В.3), опять-таки с заменой в ней параметра $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$ на параметр $\omega_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon M}{h_1^3}}$:

$$p = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon M}{h_1^3}} \cdot \frac{t - t_0}{k}, k \right). \quad (2.44)$$

Формула (2.44) обладает свойством симметрии относительно оси $0\varphi_1$ (см. Рис. 4б); при значении параметра k , принадлежащего интервалу $(0, 1)$, т.е. $k_+ \in (0, 1)$, она описывает верхнюю часть (по отношению к оси $0\varphi_1$) множества 1, простирающегося до сепаратрисы 3, а при значении параметра $k_- \in (-1, 0)$, описывает зеркальное отражение этого множества, находящегося ниже оси $0\varphi_1$ и, следовательно, $k_- = -k_+$.

Последнее выражение можно представить в следующем виде (см. В.7):

$$p = \operatorname{sn} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{k}, k \right). \quad (2.45)$$

4. Определение объема энергии, соответствующего колебательному движению маятника Вселенной.

Объем эллипсоида энергии w , образованный вращением выражения (2.42) вокруг оси $0\varphi_1$, находится по формуле

$$W = \pi k^2 \int_{-n}^n \operatorname{sn}^2(\varphi_1, k) d\varphi_1. \quad (2.46)$$

Эллиптическая функция Якоби sn определяется в виде сходящегося ряда

$$\operatorname{sn}(x, k)^1 = x - (1 + k^2) \frac{x^3}{3!} + (1 + 14k^2 + k^4) \frac{x^5}{5!} - (1 + 135k^2 + 135k^4 + k^6) \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

а $-n$ и n являются крайними точками большой оси эллипсоида энергии (см. Рис. 8),

образованного в результате вращения функции (2.42) вокруг оси $0\varphi_1$, т.е. они характеризуют длину большой оси эллипсоида энергии, равную

$$L_s = n + |-n| = 2n. \quad (2.47)$$

Длина L_s находится как произведение скорости движения галактики v в эллипсоиде на время t_n прохождения галактикой большой оси эллипсоида

$$L_s = vt_n. \quad (2.48)$$

Время прохождения t_n определяется путём использования формулы (2.43). Из сопоставления выражений (2.47) и (2.48) может быть найдено значение точки n и по формуле (2.46) определён объём эллипсоида гравитационной энергии.

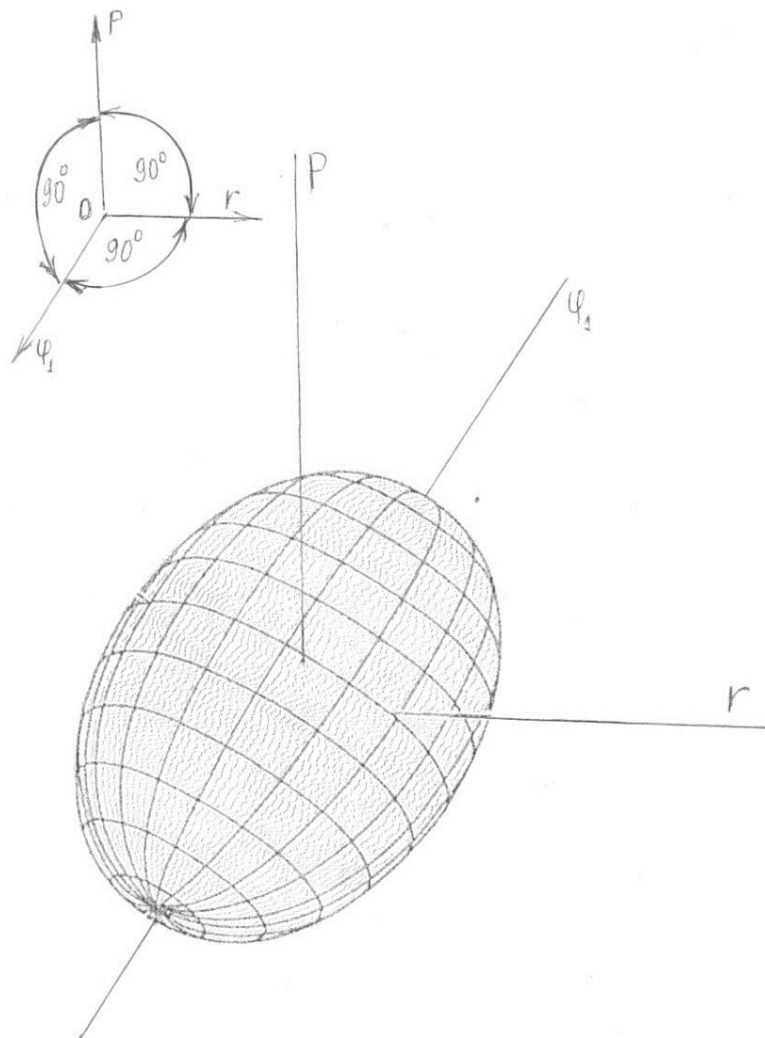


Рис. 8

5. Определение сепаратрисной поверхности во Вселенной.

В §1.7 было показано, что движение по сепаратрисе означает перемещение по траектории, которая обеспечивает релятивистский эффект. Этот же эффект будет иметь место при движении по сепаратрисной поверхности. Поэтому представляет интерес нахождение площади поверхности, образованной вращением сепаратрисы 3 (см. Рис. 4б) вокруг оси $0\varphi_1$, с заменой угла φ на угол поворота маятника Вселенной φ_1 , определенный согласно (В.7).

Сепаратриса φ_s состоит из двух участков: вогнутого участка φ_{s-} (ВА) и выпуклого участка φ_{s+} (ВС). Поэтому площадь Q , образованную вращением сепаратрисы 3 вокруг оси $0\varphi_1$, представим в виде суммы площадей, образованных вращением этих участков вокруг оси $0\varphi_1$:

$$Q = 2\pi \left| \int_0^{m\pi} (-4\text{arctg}(e^{-\varphi_1})) \sqrt{1 + \left(\frac{-4d\text{arctg}(e^{-\varphi_1})}{d\varphi_1} \right)^2} d\varphi_1 + \right. \\ \left. + 2\pi \int_{m\pi}^{m2\pi} 4\text{arctg}(e^{\varphi_1}) \sqrt{1 + \left(\frac{4d\text{arctg}(e^{\varphi_1})}{d\varphi_1} \right)^2} d\varphi_1 \right|, \quad (2.49)$$

$2\pi m$ – число, соответствующее крайней точке сепаратрисы Вселенной.

Первое слагаемое в формуле (2.49) является площадью псевдоримановой поверхности, а второе – соответствует площади римановой поверхности.

6. Кривизка Вселенной.

В качестве кривизны Вселенной нами берётся обратная величина от текущего радиуса воображаемого шара, на поверхности которого находятся частицы-галактики:

$$K_+ = \frac{1}{R_+} \quad (2.50)$$

для расширяющейся Вселенной и

$$K_- = \frac{1}{R_-} \quad (2.51)$$

для сжимающейся Вселенной.

В формулах (2.50) и (2.51) радиусы воображаемых расширяющегося и сжимающегося шаров определяются по хорошо известным выражениям:

$$R_+ = \sqrt[3]{\frac{3M^*}{4\pi z_+}} \quad (2.52)$$

и

$$R_- = \sqrt[3]{\frac{3M^*}{4\pi|z_-|}}. \quad (2.53)$$

Плотности материи z_+ и z_- определяются согласно формулам (В.8e) и (В.8f). Поскольку отрицательная плотность материи z_- лишена физического смысла, то в формуле (2.53) эта величина определяется путем использования знака абсолютной величины $|z_-|$.

Из формул (2.50) и (2.51) следует, что кривизна расширяющейся и сжимающейся Вселенной со временем, т.е. при $t \rightarrow \infty$ и $t' \rightarrow \infty$ соответственно уменьшается и увеличивается; это видно из анализа формул (2.50), (2.52), (В.8e) и (2.51), (2.53) и (В.8f).

Поскольку результаты настоящего параграфа непосредственно вытекают из уравнений математического маятника, которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона (0.8a) и (0.8b), то результаты приведённые в пунктах 1-6, являются оптимальными.

§2.5. Гипотетическая модель образования эллиптической галактики

В пятидесятых годах двадцатого века К.Ф. фон Вейцекер высказал гипотезу о вихревой природе образования галактик; к этой гипотезе присоединился автор теории горячей Вселенной Г.А. Гамов. Предложенная нами модель эволюции Вселенной (см. §2.4, пункты 2 и 4), подтверждает возможность вихревой природы образования галактик. Действительно, *при колебательном движении математического маятника Вселенной образуется область (см. §2.4, пункты 2 и 4) в виде вытянутого эллипсоида энергии (Рис. 8), в которой имеются вихревые линии гравитационного поля E_1 , т.е. векторные линии поля $\text{rot } E_1$; эти линии удовлетворяют выражению*

$$\text{div rot } E_1 = 0,$$

означающему, что вихревые линии не имеют начала и не имеют конца. Вихревые линии, замкнуты как на плоскости (Рис. 4б, цифра 2), так и в пространстве (Рис. 9). Звёзды, попавшие в эллипсоид энергии, движутся по соответствующим вихревым линиям. Вид (форма) галактики зависит от того, в какую вихревую линию эллипсоида энергии и под каким углом попадёт поток звёзд. Следовательно, при образовании

галактики определённой формы, имеет значение место входа звёзд в вытянутый эллипсоид энергии (спереди или сбоку), а также угол их входа в этот эллипсоид.

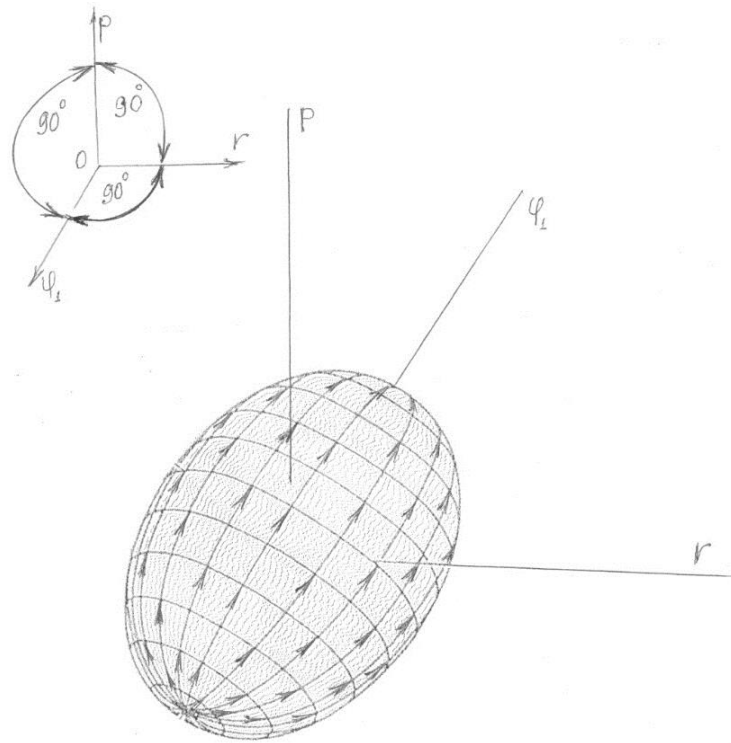


Рис. 9

Траектории потока звёзд, втягиваемых гравитационным полем эллипсоида энергии, могут иметь по отношению к осям (большой и малой) эллипсоида энергии три возможных расположения:

- вдоль вихревого движения,
- поперёк вихревого движения,
- произвольное расположение по отношению к осям эллипсоида.

Эти три траектории потока звёзд полностью определяют формы всех (кроме эллиптической) галактик: дисковой, колесовидной, спиральной, шаровой, пекулярной, неправильной и т.д.

Характерные размеры галактик составляют 500 000 световых лет.

Вращение галактик является веским аргументом в пользу их вихревого происхождения.

Звёзды, во всех вышеперечисленных галактиках, движутся по своим орбитам детерминированно. В эллиптических галактиках звёзды движутся почти хаотично [26]. Поэтому нами для моделирования хаотического движения звёзд взята модель поверхности странного аттрактора [27], имитирующая почти хаотическое движение.

Формировании обычных (неэллиптических) галактик происходит только под воздействием вихревых линий гравитационного поля эллипсоида энергии. В эллиптической галактике воображаемая плоскость, на которой находится траектория звёзд, втягиваемых гравитационным полем эллипсоида энергии в этот эллипсоид, подвергается деформации. Эта деформация может быть словесно описана следующим образом.

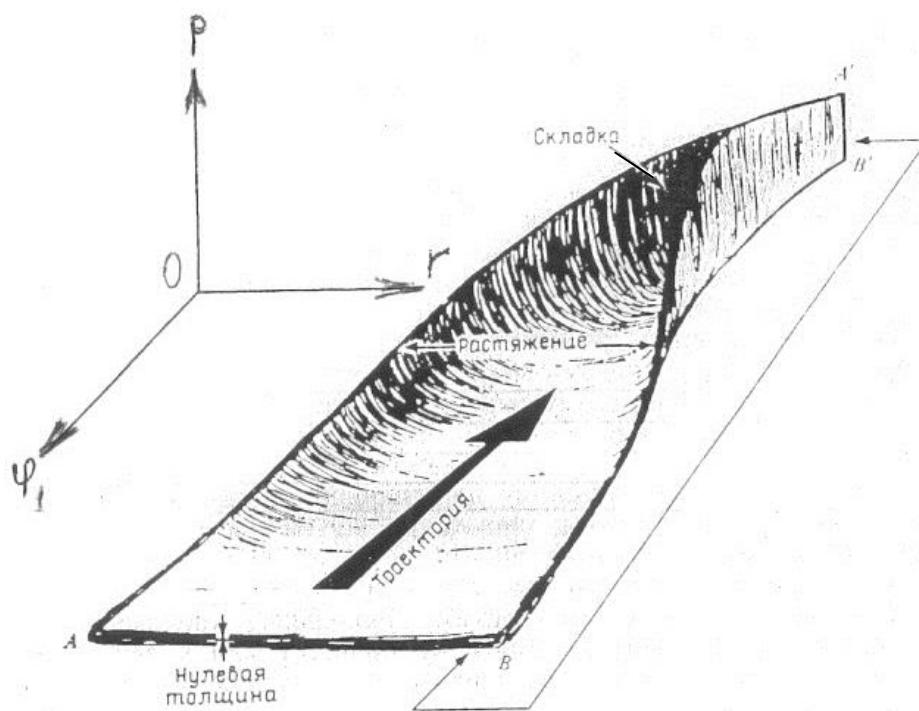
Каждая звезда, движущаяся по траектории (см. Рис. 10а), имеет определенную массу и соответствующее электромагнитное поле. Гравитационное вихревое движение в эллипсоиде энергии происходит вокруг малой оси эллипсоида, а вращательное движение электромагнитного поля в эллипсоиде, индуцированное движением звёзд в потоке, происходит вокруг большой оси эллипсоида.

При формировании эллиптической галактики, поток звёзд, движущихся по соответствующей траектории, втягивается гравитационным полем эллипсоида энергии в носовую область эллипсоида параллельно оси $o\varphi_1$ или, в лучшем случае, эта траектория совпадает с осью $o\varphi_1$ (Рис. 11а).

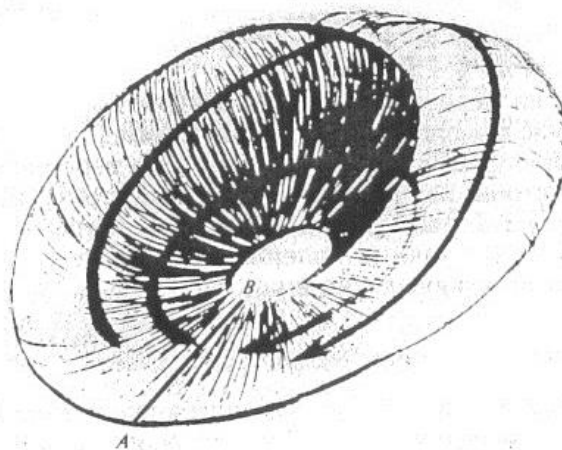
Из-за воздействия на воображаемую плоскость электромагнитного поля звёзд, имеет место эффект, вызывающий растяжение воображаемой плоскости (Рис. 10а). Известно, что звёзды, как и Солнце имеют положительный заряд. Следовательно, поток звёзд, движущийся по траектории, индуцирует в эллипсоиде энергии вращающееся вокруг оси $o\varphi_1$ электромагнитное поле. Это вращающееся поле действует на растянутую воображаемую плоскость, образуя складку (Рис. 10а). В дальнейшем вращательное движение совместно с гравитационным движением вызывает в эллипсоиде энергии как вращение складки, так и её перемещение. В результате линии AB и $A'B'$ гладко соединяются между собой. Окончательный вид странного аттрактора показан на Рис. 10б. При этом воображаемая плоскость, на которой находится траектория звёзд, оказывается деформированной.

Таким образом, в формировании эллиптической галактики участвуют два поля: гравитационное поле эллипсоида энергии и электромагнитное поле, индуцированное потоком звёзд. На Рис. 11а показан общий вид эллипсоида энергии вместе с траекторией потока звёзд, а на Рис. 11б показан вид эллиптической галактики, образованной совместным воздействием гравитационного и электромагнитного поля на воображаемую плоскость (Рис. 10а), на которой находится траектория звёзд.

Эллиптическая галактика именуется в англоязычной литературе галактикой кошачий глаз.

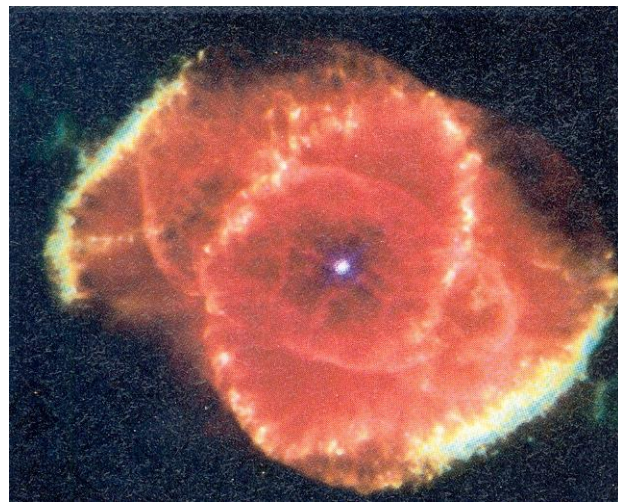
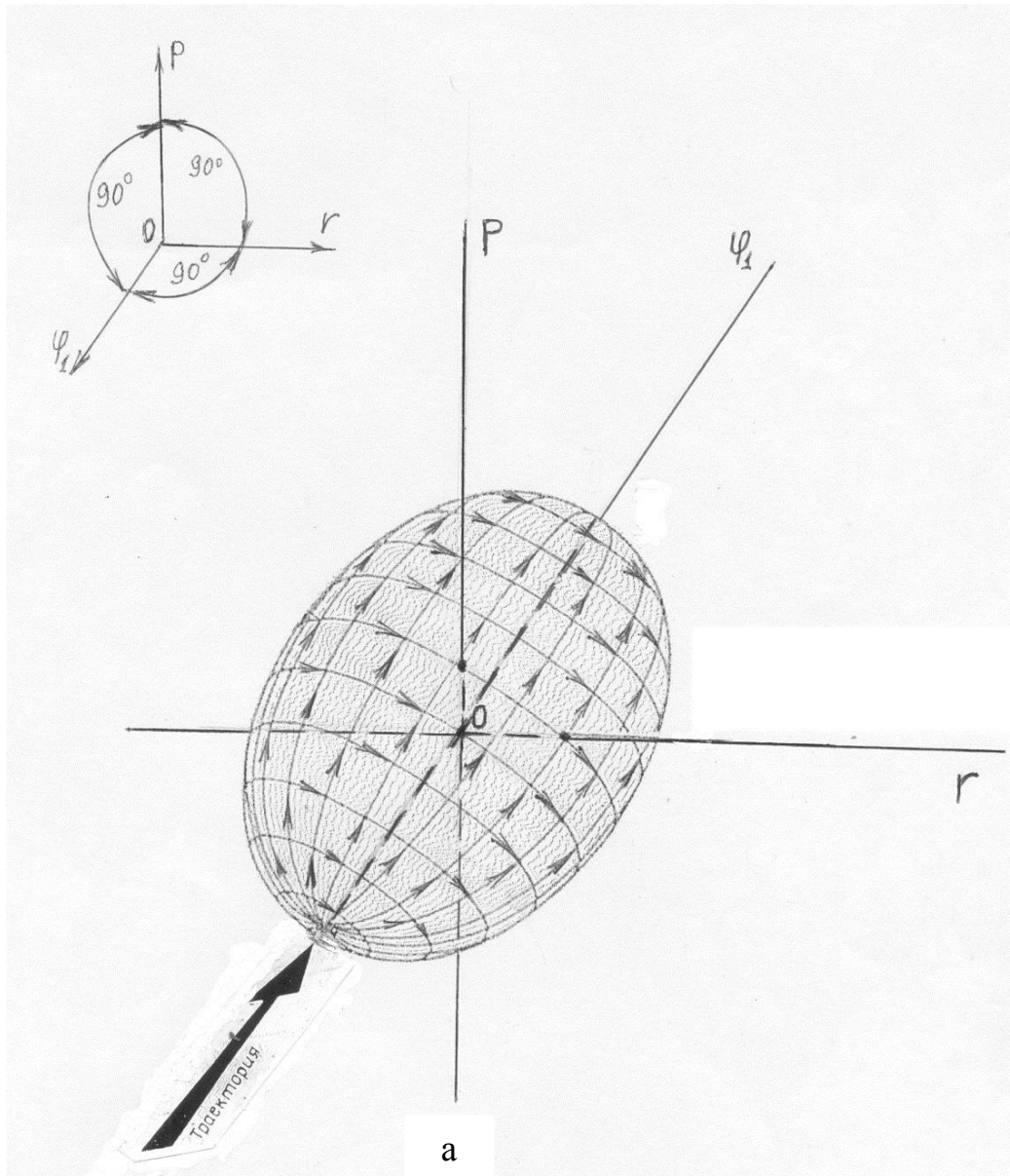


а



б

Рис. 10



б
Рис. 11

§2.6. Использование уравнений математического маятника для моделирования звёздных систем в масштабах галактики

При моделировании движения звёзд в масштабах галактики главная задача состоит в анализе природы гравитационных сил, действующих на некоторую, интересующую нас звезду, со стороны других звёзд. Общие соображения приводят к необходимости классификации этих сил. Следует проводить различие между воздействием гравитационного поля всей галактики и локальным влиянием поля звёзд близлежащей окрестности: в первом случае имеем гравитационную силу в виде плавно меняющейся функции пространства и времени, а во втором – силу, подверженную относительно быстрым флуктуациям [28]. В масштабах нашей Галактики нам неизвестен вид функции плотности вероятности некоторого случайного процесса, соответствующего этим флуктуациям. Для других форм галактик эта плотность будет другой. Исходя из этих соображений, мы остановим выбор на первом случае, т.е. используем эту силу при моделировании функционирования математического маятника в масштабах галактики.

С этой целью используем результаты Хольцмарка по определению гравитационной силы, действующей на звезду. Хольцмарк [29] нашёл стационарное распределение

$$w(|f|) = H(\beta)/Q_H$$

для гравитационной силы f , действующей на звезду со стороны других звёзд и определил эту силу, действующую на единицу массы

$$|f| = \beta Q_H, \quad (2.54)$$

где β – параметр распределения Хольцмарка

$$H(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^{\infty} \exp\left[-(x/\beta)^{3/2}\right] x \sin x dx,$$

причем

$$Q_H \equiv a^{2/3},$$

где

$$a = (4/15)(2\pi\alpha)^{3/2} \left\langle m_2^{3/2} \right\rangle_N n,$$

$$\left\langle m_2^{3/2} \right\rangle_N = \int_0^{\infty} m_2^{3/2} \omega(m_2) dm_2,$$

$\omega(m_2)$ – частота с которой встречаются звёзды различной массы m_2 ,

N – число звёзд в галактике; в нашей Галактике это число равно: $N = 2 \cdot 10^{11}$,

κ – гравитационная постоянная Ньютона,

n – плотность распределения звёзд в галактике, т.е. величина концентрации звёзд.

Структура математического маятника остаётся той же, что в случае маятника, функционировавшего в земных условиях и в условиях Вселенной

$$\dot{p}_2 = -F_2 \sin \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = G_2 p_2, \quad (2.55)$$

В уравнениях (2.55) имеем параметры, соответствующие звёздной системе (галактике): $F_2 = h_2 m_2 |f|$, где $m_2 |f|$ – гравитационная сила, действующая на звезду, имеющую массу m_2 , h_2 – длина маятника, означающая расстояние от интересующей звезды до центра усреднённой по иножеству массы звёзд галактики; φ_2 – угол отклонения маятника от вертикали, p_2 – импульс, а $G_2 = 1/m_2 h_2^2$.

Таким образом, подстановка силы $|f|$, определённой согласно (2.54), в первое из уравнений (2.55) позволяет использовать маятник для моделирования гравитационного поля в масштабах галактики.

Из результатов настоящего параграфа следует, что эволюция звёздной системы в галактике подчиняется гамильтониану системы (2.55), который удовлетворяет уравнению Гамильтона (0.8 а); следовательно, эволюция звёздной системы является оптимальной.

Согласно ОТО, гравитационное поле шарообразного тела не может зависеть от времени, несмотря на то, покоится ли распределение материи, создающее поле или сферически – симметрично расширяется в пространстве в радиальном направлении. Для обобщённой структуры этого гравитационного поля не имеет значение создаётся ли оно Солнцем (рассматриваемым как шарообразный объект), нейтронной или коллапсирующей звездой. Только активная гравитационная масса (равная инертной массе), а также радиус погасшей звезды оказывают влияние на гравитационное поле звезды.

Независимость от времени, т.е. стационарность гравитационного поля, создаваемое этим телом, легко обосновывается путем использования уравнения Эйлера-Лагранжа. Потенциальная энергия U гравитационного поля представляет собой функцию Лагранжа для уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial p} = 0, \quad (2.56)$$

где $q \equiv \varphi$ – циклическая координата.

Так как уравнение (2.56) содержит циклическую координату, то оно запишется следующим образом

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial p} = 0 .$$

Интегрирование последнего уравнения по t дает

$$\frac{\partial U}{\partial p} = const .$$

Последнее уравнение стационарно. Следовательно, гравитационное поле, как этого требует ОТО, не зависит от времени.

§2.7. Гипотетическая модель, объясняющая выбросы светящегося вещества из ядра галактики

В сороковых годах двадцатого века известный учёный-астрофизик академик В.А. Амбарцумян наблюдал необычное явление: выбросы светящегося вещества из ядра Галактики [30]. Это удивительное явление не получило тогда адекватного объяснения. По нашему мнению дело обстоит в следующем.

В ядре Галактики находится сверхмассивный сгусток гравитационной энергии. Электромагнитная волна Галактики, сталкиваясь с этим сгустком энергии, отражается от него. В результате отражения от сгустка гравитационной энергии электромагнитная волна уже имеет другую длину волны, находящуюся в видимом диапазоне волн. Это означает, что невидимая электромагнитная волна становится видимой человеческому глазу, что создаёт эффект выбросов светящегося вещества из ядра Галактики. Следовательно, на самом деле, не происходит выброса светящегося вещества из ядра Галактики, а наблюдатель видит отражённые электромагнитные волны.

* * *

Из высказывания выдающегося учёного, приведённого в эпиграфе к настоящей главе следует, что он считал Вселенную эволюционирующей оптимальным образом. Как показано в данной главе, оптимальное устройство Вселенной означает, что процесс её эволюции должен подчиняться оптимизационным уравнениям. Во времена, когда творили И. Ньютон и А. Эйнштейн не использовали классификацию систем, делящую их на консервативные и диссипативные. Кажущаяся стационарность Вселенной ввела в заблуждение Эйнштейна, когда он посчитал Вселенную (как и Ньютон) консервативной системой и записал свои уравнения гравитационного поля с учётом

постоянной Λ , соответствующей силам отталкивания вакуума, т.е. отрицательной энергии. В своих последующих высказываниях Эйнштейн назвал «самой грубой ошибкой в своей жизни» учёт Λ – члена¹. Результаты настоящей главы показывают, что Вселенная является диссипативной системой, оптимизационным уравнениям которой подчиняется её эволюция.

¹ Возможность существования квантового вакуума, имеющего место на труднообразимых временных и пространственных интервалах, Эйнштейном не рассматривалась.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ДОПОЛНЕНИЯ**

Дополнение А

Оптимальность уравнений математического маятника.

Оптимальность уравнения сепаратрисы математического маятника и связь этого уравнения с уравнением синус-Гордона

Уравнения математического маятника имеют вид

$$\dot{p} = -F \sin \varphi, \quad \dot{\varphi} = Gp, \quad (\text{A.1})$$

где $F = mhg$, $G = 1/mh^2$, mg – сила тяжести, действующая на массу m , h – длина маятника. Угол отклонения от вертикали φ , а момент импульса $-p$. Гамильтониан, как уже отмечалось, есть сумма кинетической энергии $\frac{1}{2}Gp^2$ и потенциальной энергии

$$U = -F \cos \varphi :$$

$$H = \frac{1}{2}Gp^2 - F \cos \varphi = E. \quad (\text{A.2})$$

Значение гамильтониана E соответствует полной энергии системы (A.1). Движения маятника при различных значениях энергии E (Рис. 4а) показаны на Рис. 4б. Если E больше максимального значения потенциальной энергии F , то импульс p всегда отличен от нуля. Это приводит к неограниченному изменению φ , т.е. к вращению (см. Дополнение В, случай 2а). При этом для $p > 0$ движение происходит слева направо с энергиями E_u . Для $E < F$ движение ограничено (внутри потенциальной ямы) и соответствует колебаниям маятника (см. Дополнение В, случай 1). Если же $E = F \equiv E_s$, то движение происходит по сепаратрисе (см. Дополнение В, случай 2б). Движение имеет две особые точки при $p = 0$; одна находится в начале координат при $\varphi = 0$ и является устойчивой, или эллиптической особой точкой, другая (в месте соединения двух ветвей сепаратрисы при $\varphi = \pm\pi$) является неустойчивой, или гиперболической особой точкой.

Координата φ и импульс p математического маятника удовлетворяют уравнениям Гамильтона (0.8а) и (0.8б)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = Gp, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -F \sin \varphi. \quad (\text{A.3})$$

Найдем теперь уравнение сепаратрисы, используя гамильтониан (А.2) и условие $E = F$, при выполнении которого модуль эллиптической функции k становится равным $k = \pm 1$ (см. Дополнение В случай 2b):

$$p_s = \frac{2^{1/2} \omega_0}{G} (1 + \cos \varphi_s)^{1/2}, \quad (\text{A.4})$$

где $\omega_0 = (FG)^{1/2}$, а индекс s отвечает значениям переменных на сепаратрисе (Рис. 4б).

Из (А.4) следует

$$p_s = \pm \frac{2\omega_0}{G} \cos \frac{\varphi_s}{2}, \quad (\text{A.5})$$

где плюс и минус соответствуют верхней и нижней ветвям сепаратрисы.

Использование первого уравнения Гамильтона (А.3) с учётом (А.5) дает

$$\frac{d\varphi_s}{dt} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi_s}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Решая уравнение (А.6) относительно dt и интегрируя с начальным условием $\varphi = 0$ при $t = 0$, получим

$$\pm \omega_0 t = \int_0^{\varphi_0} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \ln \operatorname{tg} \left| \frac{\varphi_s}{4} + \frac{\pi}{4} \right|. \quad (\text{A.7})$$

Выражение (А.7) говорит о необходимости совместного (неотъемлемого) представления массы ω_0 и времени t . Формулу (А.7) можно записать в отдельности

для знаков плюс и минус в функции $\ln \operatorname{tg} \left[\pm \left(\frac{\varphi_s}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$:

$$+ \omega_0 t = \int_0^{\varphi_0} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi_{s+}}{4} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{A.7a})$$

$$- \omega_0 t = \int_0^{\varphi_0} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \ln \operatorname{tg} \left[- \left(\frac{\varphi_{s-}}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right]. \quad (\text{A.7b})$$

Выбор знака в формулах (А.7а) и (А.7б) производится в соответствии с направлением движения сепаратрисы, показанной на Рис. 4б.

После обращения формул (А.7а) и (А.7б) будем иметь

$$\varphi_{s+} = 4 \operatorname{arctg} [\exp(\omega_0 t)] - \pi, \quad \text{если} \quad \omega_0 t \in [\pi, 2\pi], \quad (\text{A.8a})$$

$$\varphi_{s-} = -4 \operatorname{arctg} [\exp(-\omega_0 t)] + \pi, \quad \text{если} \quad \omega_0 t \in [0, \pi], \quad (\text{A.8b})$$

На Рис. 4б участок ВА сепаратрисы АВС, без учета направления движения сепаратрисы, равен

$$\varphi_{|s_{-}|} = \left| -4 \operatorname{arctg} [\exp (-\omega_0 t)] \right| + \pi, \quad \text{если } \omega_0 t \in [0, \pi]. \quad (\text{A.8c})$$

Следовательно, формула (A.8c) рассматривается на нисходящем участке сепаратрисы 3; участок BC сепаратрисы ABC определяется формулой (A.8a). Целиком, вся сепаратриса ABC (Рис. 4б) представляет собой сумму этих участков:

$$\begin{aligned} \varphi_{SABC} = \varphi_{|s_{-}|} + \varphi_{s_{+}} = & \left| -4 \operatorname{arctg} [\exp (-\omega_0 t)] \right|, \omega_0 t \in [0, \pi] + \\ & + 4 \operatorname{arctg} [\exp (\omega_0 t)], \omega_0 t \in [\pi, 2\pi]. \end{aligned} \quad (\text{A.8d})$$

Необходимо отметить, что вместо выражения (A.7b) может быть записана следующая формула

$$-\omega_0 t = \int_0^{j\varphi_{s_{-}}} \frac{d(j\varphi/2)}{\cos(j\varphi/2)} \equiv j \int_0^{j\varphi_{s_{-}}} \frac{d(\varphi/2)}{\operatorname{ch}(\varphi/2)} = \ln \operatorname{tg} \left[- \left(\frac{\varphi_{s_{-}}}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad \text{где } j = \sqrt{-1}.$$

Обращение последнего выражения вновь приводит к формуле (A.8b); это и понятно, поскольку **вогнутый участок ВА сепаратрисы ABC свидетельствует о нахождении сепаратрисы на псевдоримановой поверхности (см. Рис. 4б).**

Оператор «обращения» означает, что мы получаем замкнутую систему, в которой угол поворота сепаратрисы $\varphi_{s_{\pm}}$ и её аргумент $\pm \omega_0 t$ взаимозависимы.

Выясним теперь какая связь существует между решением (A.8a) и уравнением синус-Гордона

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial \tau} = \sin \sigma. \quad (\text{A.9})$$

В монографии [31] показано, что решение уравнения (A.9) имеет вид

$$\sigma = 4 \operatorname{arctg} (\exp \sigma). \quad (\text{A.10})$$

Решение (A.8a) для точки, находящейся на сепаратрисе, т.е. когда $\omega_0 t = \varphi_{s_{+}}$, совпадает с решением уравнения синус-Гордона (A.10), если не учитывать постоянной π в решении (A.8a).

Необходимо отметить, что уравнение

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial \tau} = -\sin \sigma \quad (\text{A.11})$$

не является уравнением синус-Гордона, как это сказано в некоторых монографиях (см., например, [9]), а представляет собой уравнение, сопряжённое с уравнением синус-Гордона. Однако уравнения (A.9) и (A.11) часто записывают совместно

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi \partial \tau} = \pm \sin \sigma, \quad (\text{A.12})$$

называя выражение (A.12) уравнением синус-Гордона. Решение уравнения (A.11) записывается так

$$\sigma = -4 \operatorname{arctg} [\exp (-\sigma)]. \quad (\text{A.13})$$

Следует отметить, что решение (A.13) отражает движение по вогнутому участку ВА (Рис. 4б) сепаратрисы 3, т.е. по псевдоримановой поверхности, а решение (A.10) соответствует движению по выпуклому участку ВС сепаратрисы 3, т.е. по римановой поверхности.

Поскольку решение уравнения синус-Гордона (A.9) эквивалентно решению уравнения математического маятника (A.8 a) (без свободного члена π), а выражение (A.8 a) является решением, оптимизационного уравнения Гамильтона (0.8 a), то уравнение синус-Гордона (A.9) является оптимальным.

Сказанное означает, что от уравнения Гамильтона (A.6) может быть осуществлён переход к уравнению синус-Гордона (A.12). Читателю предлагается произвести этот переход.

Дополнение В

Решения уравнений математического маятника.

Стохастическая природа импульса математического маятника

Совместное представление уравнений математического маятника (А.1) имеет вид:

$$\dot{p}^2 = \frac{g}{h} (1 - p^2) \left(\frac{v}{2h} - p^2 \right), \quad (\text{В.1})$$

где $v = 2hk^2$, $v/h = 1 + E/F$ (см. А.2).

Рассмотрим в отдельности два типа движения маятника: колебательное движения, когда точка колеблется около наинизшего положения окружности, и вращательное движение, когда точка обладает настолько большой скоростью, что она всё время описывает полные круги.

1. При колебательном движении точка останавливается, не достигая наивысшего положения окружности; поэтому \dot{p} обращается в нуль при некотором значении $p < 1$. Таким образом, в этом случае $v/2h = k^2 < 1$, причём $k = const$ – модуль эллиптической функции Якоби характеризует относительную энергию математического маятника.

Для решения уравнения (В.1) в классе эллиптических функций Якоби sn необходимо представить уравнение (В.1) в эквивалентной форме

$$\dot{p}^2 = \frac{gk^2}{h} \left(1 - k^2 \cdot \frac{p^2}{k^2} \right) \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right).$$

Решение последнего уравнения даётся формулой

$$p = k \operatorname{sn} \left[\sqrt{\frac{g}{h}} (t - t_0), k \right]. \quad (\text{В.2})$$

Выражение (В.2) представляет собой решение задачи колебательного движения математического маятника. Постоянные интегрирования t_0 и k должны быть найдены из начальных условий движения. Согласно известным свойствам эллиптической функции Якоби sn , формула (В.2) описывает движение, являющееся периодическим.

2 а. При вращательном движении маятника $v > 2h$. Следовательно, полагая $2h = vk^2$, будем иметь $k^{-1} > 1$. При этом, дифференциальное уравнение (В.1) примет вид

$$\dot{p}^2 = \frac{g}{hk^2} (1 - p^2) (1 - k^2 p^2).$$

Решение последнего уравнения запишется с использованием эллиптической функции Якоби¹

$$p = \operatorname{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot \frac{t - t_0}{k}, k \right). \quad (\text{B.3})$$

2b. Пусть, наконец, $\nu = 2h$; при этом движущаяся точка маятника достигает наивысшего положения окружности. В этом случае дифференциальное уравнение (B.1) запишется так

$$\dot{p}^2 = \frac{g}{h}(1 - p^2)^2$$

или

$$\dot{p} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}(1 - p^2). \quad (\text{B.4})$$

Последнее выражение представляет собой два дифференциальных уравнений Риккати; их решения даются гиперболическими функциями

$$p_{1,2} = \pm \operatorname{th} \left[\sqrt{\frac{g}{h}}(t - t_0) \right] = \pm \operatorname{th}(\varphi - \varphi_0) = \operatorname{th}[\pm(\varphi - \varphi_0)], \quad (\text{B.5})$$

где

$$\varphi = \omega_0 t, \quad \varphi_0 = \omega_0 t_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Гиперболические функции p_1 и p_2 , имеющие противоположные знаки, показывают, что точка маятника может описывать полные круги в противоположных направлениях.

Необходимо отметить, что решения (B.2) и (B.3) уравнения маятника (B.1) не удовлетворяют оптимизационным уравнениям Эйлера-Лагранжа (0.8a), (0.8b) хотя, сами уравнения математического маятника (A.1) удовлетворяют уравнениям Гамильтона (A.3). Чтобы избавиться от этого несоответствия в решениях (B.2) и (B.3) следует положить $k = \pm 1$. При этом решения уравнения маятника (B.1) примут вид решений уравнений Риккати, которые удовлетворяют уравнениям Эйлера-Лагранжа (0.8a), (0.8b). Следовательно, **если в решениях (B.2) и (B.3) принять $k = \pm 1$, то мы получим решения (B.5) уравнений Риккати (B.4); в этом случае вышеотмеченные**

¹Функция Якоби $\operatorname{sn}(t, k)$ обладает тем свойством, что при $k = \pm 1$ она становится гиперболическим тангенсом, т.е. $\operatorname{sn}(t, \pm 1) = \operatorname{th}(t)$.

несоответствия отпадут. Как было показано в §1.7, такое поведение маятника эквивалентно движению на сепаратрисе (см. случай 2b).

Наконец, покажем стохастическую природу импульса математического маятника. С этой целью два уравнения Риккати (В.4) представим в отдельности:

$$\dot{p}_1 = \omega_0 - \omega_0 p_1^2, \quad (\text{В.4a})$$

$$\dot{p}_2 = -\omega_0 + \omega_0 p_2^2. \quad (\text{В.4b})$$

Этим уравнениям соответствуют следующие системы наблюдений (см. формулы (0.1) и (0.2))

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi(t), \\ y = x + \zeta(t), \end{cases} \quad (\text{В.4I})$$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = \xi^*(t), \\ y^* = x^* + \zeta^*(t), \end{cases} \quad (\text{В.4II})$$

в которых $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ некоррелированные между собой действительные белые гауссовы шумы, а $\xi^*(t)$ и $\zeta^*(t)$ также являются некоррелированными между собой мнимыми белыми гауссовыми шумами. Эти шумы имеют следующие стохастические характеристики:

$$E[\xi(t)] = 0 \quad \text{и} \quad E[\xi^*(t)] = 0, \quad E[\xi(t)\xi(t')] = \omega_0 \delta(t-t'), \quad E[\xi^*(t)\xi^*(t')] = -\omega_0 \delta(t-t'), \\ E[\zeta(t)\zeta(t')] = \omega_0^{-1} \delta(t-t'), \quad E[\zeta^*(t)\zeta^*(t')] = -\omega_0^{-1} \delta(t-t'), \quad \text{где } E \text{ — оператор математического ожидания, } \delta \text{ — функция Дирака.}$$

В случае системы (В.4I) уравнение для дисперсии p_1 имеет вид (В.4a), а в случае системы (В.4II) уравнением, определяющим дисперсию p_2 будет (В.4b).

Следовательно, импульсы p_1 и p_2 , найденные согласно формуле (В.5), являются дисперсиями некоторых систем наблюдений. **Решения уравнений математического маятника, встречающиеся в виде решений уравнений Риккати, определяют дисперсии и, следовательно, являются диссипативными функциями**

$$p_1 = \text{th}(\varphi - \varphi_0) \quad (\text{В.5a})$$

и

$$p_2 = -\text{th}(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{В.5b})$$

Ввиду того, что функция $\text{th}(\cdot)$ является нечёткой, т.е. $-\text{th}(\omega) = \text{th}(-\omega)$, импульс-дисперсия p_2 соответствует таким движениям маятника, которые имеют направление

противоположное, имеющим место для импульса-дисперсии p_1 (см. Рис. 4б); траектория этих движений находится ниже оси 0φ .

Производные от формул (В.5а) и (В.5б) по φ приводят к известным дифференциальным соотношениям для гиперболических функций

$$p'_1 = \sec h^2(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{В.6 а})$$

$$p'_2 = -\sec h^2(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{В.6б})$$

Уравнения (В.6а) и (В.6б) записаны для импульсов-дисперсий математического маятника, функционировавшего в земных условиях. Для маятника, функционирующего во Вселенной, структура уравнений (В.6а) и (В.6б) остаётся прежней, изменению подлежит лишь параметр ω . В случае Вселенной этот параметр определяется

формулой $\omega_1 = \sqrt{\frac{|\gamma|}{h_1}} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon M}{h_1^3}}$ и, следовательно,

$$\varphi_1 = \omega_1 t. \quad (\text{В.7})$$

В §2.4 угол отклонения маятника φ , функционировавшего в земных условиях, всюду заменяется углом отклонения маятника φ_1 , функционировавшего в масштабах Вселенной.

Если в правых частях уравнений (2.19) и (2.20) вынесем за скобки члены $\mu_+ z_+$ и $-\mu_- z_-$, то получим

$$\frac{dz_+}{dt} = \mu_+ z_+ (n_+ - z_+), \quad (\text{В.8 а})$$

$$\frac{dz_-}{dt'} = -\mu_- z_- (n_- - z_-), \quad (\text{В.8б})$$

где $n_+ = \beta_+ / \mu_+$ и $n_- = \beta_- / \mu_-$; значения β_+ , μ_+ и β_- , μ_- определяются по формулам (2.34) и (2.35). Уравнения (В.8а) и (В.8б) можно записать в виде

$$\frac{dz_+}{dt} = \frac{1}{4} \mu_+ n_+^2 \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \mu_+ n_+ (t - t_0) \right], \quad (\text{В.8с})$$

$$\frac{dz_-}{dt'} = -\frac{1}{4} \mu_- n_-^2 \sec h^2 \left[\frac{1}{2} \mu_- n_- (t' - t'_0) \right], \quad (\text{В.8д})$$

в которых момент «сотворения Мира» – t_0 , а момент начала сжатия Вселенной – t'_0 . Из уравнений (В.8с) и (В.8д) видно, что при эволюции Вселенной плотность материи удовлетворяет дифференциальным уравнениям, имеющим ту же структуру, что и импульсы-дисперсии (В.6а) и (В.6б).

Решение уравнения (В.8 а) и (В.8b) имеют вид:

$$z_+ = \frac{n_+}{1 + e^{-\mu_+ n_+ (t-t_0)}}, \quad (\text{В.8 e})$$

$$z_- = - \frac{n_-}{1 + e^{\mu_- n_- (t'-t'_0)}}. \quad (\text{В.8f})$$

Дополнение С

Модель Большого взрыва Вселенной

По своему характеру результаты настоящего дополнения относятся к отдельному параграфу. Однако, ввиду большого количества формул, автор посчитал возможным вынести настоящий материал в математическое дополнение.

В эпоху «радиационной эры» плотность поля определяется формулой

$$x = \frac{3}{32 \pi \varepsilon t^2}, \quad (\text{C.1})$$

причём время t задано в секундах.

Плотность материи во Вселенной определяется выражением (2.32 a)

$$z = z_0 e^{\left(a - \frac{bcz_0}{d}\right)t}, \quad (\text{C.2})$$

в котором параметры a , b , c и d удовлетворяют системам «хищник-жертва» M (см. стр. 53) и N , а z_0 определено на стр. 55. Поскольку в ранние моменты времени должно выполняться усиленное неравенство

$$a \gg \frac{bcz_0}{d} e,$$

то вместо выражения (C.2) получим упрощённую формулу

$$z = z_0 e^{at}. \quad (\text{C.3})$$

Поскольку в ранние моменты времени после Большого взрыва поле давало гораздо больший вклад в плотность материи чем вещество, то весовой коэффициент b в первом уравнении системы M приблизительно равен нулю, т.е. $b \approx 0$. Исходя из этого, первое уравнение системы M примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

Решение последнего уравнения запишется так

$$\ln x = a \int_0^t dt = at.$$

Если в последнем равенстве учесть x , согласно (C.1), то будем иметь

$$at = \ln K - \ln t^2, \quad (\text{C.4})$$

где $K = \frac{3}{32 \pi \varepsilon}$.

Подстановка значения at , найденного согласно (С.4), в формулу (С.3) даёт

$$z = z_0 e^{\ln K} \cdot e^{-\ln t^2}.$$

Объём, занимаемый материей во Вселенной в период Большого взрыва равен

$$V = V_0 e^{\ln t^2}, \quad (С.5)$$

где

$$V_0 = \frac{M^*}{z_0 e^{\ln K}} = const.$$

Формула (С.5) показывает, что в результате Большого взрыва объём материи во Вселенной растёт экспоненциально; она адекватно отражает экспоненциальное расширение Вселенной, происходящее при Большом взрыве. Исходя из физических соображений, в формуле (С.5) текущее время t должно удовлетворять начальному условию $t_0 = 1$.

С течением времени вклад плотности вещества в плотность материи возрастает. В количественном плане это возрастание соответствующим образом отражается увеличением значения коэффициента b в первом уравнении системы M ; при этом процесс расширения Вселенной замедляется, поскольку разность $a - \frac{bcz_0}{d} e$ уменьшается. Такое развитие сценария наблюдается в действительности.

Соображения

о целесообразности использования модели математического маятника (с точки зрения ОТО) при моделировании эволюции Мегамира с учётом связи пространства, времени и материи

Как было отмечено в Дополнении А, параметр маятника ω_0 должен рассматриваться совместно с текущим временем t . Однако параметр ω_1 распределён в пространстве, о чем свидетельствует зависимость параметра ω_1 от массы M и длины маятника h_1 , т.е. $\omega_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon M}{h_1^3}}$. Это означает, что уравнения маятника устанавливают связь между материей, пространством и временем. Ускорение γ также зависит от длины маятника h_1 . Поэтому взаимосвязь между ω_1 , t и пространством уже существует, поскольку масса M распределена в пространстве.

Заключение

Дискретные объекты физического Микромира не имеют общей теории и поэтому здесь исследования, естественно, сводятся к изучению частных случаев. Находясь в процессе поиска теории, которая характеризовала бы все дискретные объекты физического Микромира, автор нашёл не только то, что объединяет дискретные объекты физического Микромира, но и то, что роднит физический Микромир и Мегамир. Таким объединяющим фактором, оказалась *оптимальность* объектов физического Микромира и Мегамира. Оптимальность физического Микромира и Мегамира позволила с новых, оптимизационных позиций, взглянуть на устройство этих миров.

При удостоверении в оптимальном устройстве физического Микромира были выявлены новые физические свойства, присущие этому миру. Так, например (см. §1.1), при переходе к дискретному аналогу уравнения Шрёдингера, было обнаружено, что при решении дискретного аналога уравнения Шрёдингера, может быть определён градиент электрического поля, при котором из «ничего» возникают элементарные частицы. В §1.2 определена связь между узлами и бинарными функциями, а также получено соотношение между числом узлов, имеющих одно и то же количество пересечений и оптимальными частотами на которых образуются узлы в бинарных системах. С позиции физики высказано немало лестных слов в адрес распределения газа Ферми-Дирака. К сожалению, хвалебных слов не нашлось в адрес оптимизационного свойства этого распределения. Поэтому нами в §1.3 доказана оптимальность этого газа с точки зрения удовлетворения его лагранжианом уравнения Эйлера-Лагранжа. Хотя модели неподвижных и движущихся атомов хорошо известны, до сих пор не обращалось внимания на оптимальное свойство этих моделей. Чтобы изъять этот недостаток в §1.5 и §1.6 доказано, что модели неподвижных и движущихся атомов обладают оптимальными свойствами; атомы в этих моделях находятся и движутся по сепаратрисе математического маятника. Особую ценность представляет §1.7. В нём даётся альтернативный подход к задаче ОТО, основанный на оптимальном свойстве сепаратрисы математического маятника. Данный подход представляет собой новое слово в этой области науки, поскольку вместо экстремального свойства геодезической линии, использует оптимальное свойство сепаратрисы математического

маятника и, следовательно, решает задачу ОТО в замкнутой форме, когда эта задача решается путём использования конечного числа вычислений.

После вывода на околоземную орбиту телескопов «Хаббл» и «Кеплер», стало известно: количество материи, находящееся во Вселенной, в состоянии остановить расширение Вселенной. Этот факт оказал существенное влияние на проблемы, стоящие перед космологией. Тёмное вещество составляет подавляющую часть материи, находящейся во Вселенной. Модель образования тёмного вещества даётся в §2.1. Она основана на использовании термодинамического потенциала Гиббса и свидетельствует о той важной роли, которую играет оптимальность в образовании материи во Вселенной. Модель расширения и сжатия Вселенной предлагается в §2.2; она целиком опирается на уравнения математического маятника, удовлетворяющих уравнению Гамильтона. Физические предпосылки эволюции Вселенной приводятся в §2.3. Они основаны на модели Вольтерра-Лотка «хищник-жертва», играющей важную роль при моделировании конкурентных процессов. Эта модель удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа, т.е. она оптимальна. В §2.4, на основе использования эллиптической функции Якоби, даются решения уравнений для сепаратрисы, колебательного и вращательного движений математического маятника. В этом же параграфе определяется объём энергии в эллипсоиде и показано, как следует вычислить сепаратрисную поверхность во Вселенной. В последнем пункте этого параграфа предлагается новый подход к определению кривизны Вселенной. Все пункты этого параграфа определённым образом связаны с функционированием математического маятника, т.е. приведённые в них результаты оптимальны. Использованию результатов Хольцмарка, при моделировании математического маятника в масштабе галактики, посвящён §2.6. В §2.5 и §2.7 предлагаются гипотетические модели образования эллиптической галактики и выброса светящегося вещества из ядра галактики.

Очень важной является модель Большого взрыва Вселенной, данная в Дополнении С. Сверхрасширение Вселенной, имеющее место в начальные моменты «сотворения Мира», адекватно моделируется путём использования моделей Вольтерра-Лотка «хищник-жертва». Таким образом подтверждается целесообразность применения предложенной модели Большого взрыва при имитации эволюции Вселенной.

Следовательно, задача поставленная перед настоящей монографией достигнута: получены как новые модели физического Микромира и Мегамира, так и доказана их оптимальность.

Вышеприведённые результаты касаются неживого Мегамира (Вселенной). Следует однако, отметить, что в галактиках имеются звёздные системы, обладающие такими планетами, на которых, подобно нашей планете, может возникнуть жизнь. О развитии жизни на нашей планете красочно сказано в монографии [2]: «Случайные генетические изменения – дело слепого случая – порождают произвольный набор возможностей, из которых природа отбирает только то, что дает преимущество организму в его непрерывной борьбе за выживание. Лишь путем перебора чрезвычайно широкого диапазона возможных изменений орган совершенно случайно находит вариант, который способствует его адаптации в условиях окружающей среды». Это высказывание не использует термин «оптимизация» хотя, этот термин незримо присутствует в данной цитате (имеет место оптимизация случайным поиском). На ранней стадии возникновения живого эта же мысль звучит в тексте монографии [32]: «Эволюция представляет собой процедуру дальнейшей *оптимизации* при наличии определённых ограничений, накладываемых критериями отбора».

Начиная с ранних этапов зарождения живого и до наших дней образования человеческих сообществ, термин «оптимизация» не только не теряет своей актуальности, но и приобретает новые сферы своего приложения, поскольку всё неживое и живое (в том числе разумное) создано и эволюционирует исходя из принципов оптимальности.

Удивительно, что в живой и неживой природе действуют одни и те же оптимизационные уравнения. Это явление объяснимо, поскольку резкой грани между живым и неживым нет. Подтверждением этому служат вирусы, одновременно относящиеся как к живой, так и к неживой природе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брайсон А., Хо ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
2. Девис П. Суперсила. М.: Мир, 1989.
3. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955.
4. Мдзинаришвили В.В. Переход к дискретному аналогу уравнения Шрёдингера и его решение. Тбилиси, INTELECTI, №2(52), 2015.
5. Мдзинаришвили В.В. Новые аспекты современной теории самоорганизующихся и организующихся систем. Тбилиси: Издательство Национальной Академии наук Грузии, 2014.
6. Мдзинаришвили В.В. Выражение квантовомеханических функций через значения бинарной функции и их связь с узлами. Седьмая международная научная конференция «Образование, экономика и устойчивое развитие». 28-29 ноября 2014 года, г. Гори.
7. Метьюс П. Релятивистская квантовая теория взаимодействия элементарных частиц. М.: ИЛ, 1959.
8. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987.
9. Лем Дж. Мл. Введение в теорию солитонов. М.: Мир., 1983.
10. Мдзинаришвили В.В. Современная интерпретация теории относительности. Тбилиси, INTELECTI, №3(53), 2015.
11. Schwarzschild K. Berline Berichte, 189, 1916.
12. Уилер Дж. А. Предвидение Эйнштейна. М.: Мир, 1970.
13. Мари-Антуанет Тоннела. Основы электромагнетизма и теории относительности. М.: ИЛ, 1962.
14. Пиблс Ф.Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. М.: Мир, 1983.
15. Зельдович Я.Б. Теория расширяющейся Вселенной, создания А.А. Фридманов. В книге А.А. Фридман. Избранные труды. М.: Наука, 1966.
16. Борн М. Эйнштейновская теория относительности. М.: Мир, 1964.
17. Parker L. The Birth of the particle in the expansible Universe. Physical Review Letters v.21, No.8, p. 562, 1968.

18. Дубровский В.А. Упругая модель физического вакуума // ДАН СССР, т. 282, №1, с. 83, 1985.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
20. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Наука, 1963.
21. Радушкевич Л.В. Курс термодинамики. М.: Просвещение, 1971.
22. Мдзинаришвили В.В. Модель расширения и сжатия Вселенной с отрицательной кривизной. Тбилиси, INTELECTI, №1(54), 2016.
23. Брон О.Б. Электромагнитное поле как вид материи. М.: Госэнергоиздат, 1962.
24. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
25. Мдзинаришвили В.В., Самхарадзе З.П. О совместном существовании антагонистических популяций. Пятая международная конференция «Образование и инновация». 16-18 ноября 2012, Гори.
26. Новиков И.Д. Как взорвалась Вселенная. М.: Наука, 1988.
27. Shaw R. Zeitschrift Naturforsch, v.36a, p.80, 1981.
28. Чандрасекар С. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М.: ИЛ, 1947.
29. Holzmark J. Annalen der Physik 58, 577, 1919.
30. Уитни Ч. Открытие нашей Галактики. М.: Мир, 1975.
31. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. М.: Московский университет, 1990.
32. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
ГЛАВА 1. Новые модели физического Микромра и решение обратной задачи.....	9
§1.1. Переход к дискретному анализу уравнения Шредингера и его решения	9
§1.2. Узлы и бинарные функции.Оптимальность частот, на которых образуются бинарные функции	17
§1.3. Оптимальная характеристика газа Ферми-Дирака	23
§1.4. Рассмотрение уравнений Максвелла на мезоскопическом уровне	27
§1.5. Оптимальность модели неподвижных атомов	29
§1.6. Оптимальность модели движущихся атомов	30
§1.7. Современная интерпретация общей теории относительности (ОТО)	32
ГЛАВА 2. Новые модели Мегамира и их оптимальность	
§2.1. Возможная модель образования тёмного вещества во Вселенной	43
§2.2. Динамическая модель расширения и сжатия Вселенной	49
§2.3. Физические предпосылки расширения и сжатия Вселенной	52
§2.4. Решение уравнений маятника, функционирующего во Вселенной, для сепаратрисы, колебательного и вращательного движений. Определение объёма энергии, соответствующего колебательному движению маятника Вселенной. Определение сепаратрисной поверхности во Вселенной. Кривизна Вселенной	57
§2.5. Гипотетическая модель образования эллиптической галактики	63
§2.6. Использование уравнений математического маятника для моделирования процессов в масштабах галактики	68
§2.7. Гипотетическая модель, объясняющая выбросы светящегося вещества из ядра галактики	70
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ	
Дополнение А.....	73
Дополнение В	77
Дополнение С	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	84
ЛИТЕРАТУРА	87

V.V Mdzinarishvili

New Models of the Physical Microworld and Megaworld

Optimality models of the physical Microworld and Megaworld

Georgian National Academy of Science publishing House

Tbilisi

2017

Readership: Specialists of the Physical Microworld, Astrophysics and Cosmology

The book: comprises two chapters. First chapter is devoted to the Physical Microworld. Here is discussed the new mathematical models of the Physical Microworld. The new interpretation of the relativity theory takes the important part in this chapter, which belongs to the author.

The Second chapter is devoted to Cosmology and Astrophysics, where is proposed the mathematical models of the dark substance formation. Also is presented dynamic and physical models of the universe evolution based on the mathematical pendulum model. In this chapter the author also offers the defining rule of the Universe curvature. The Big Bang Model is discussed in the second chapter as well.

The author: Valentin V. Mdzinarishvili, Doctor of Science of System Theory, Automatic Control and Regulations and System Analysis. Mathematics Chair Professor

Мдзинარიшвили Валентин Валентинович

**НОВЫЕ МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКОГО
МИКРОМИРА И МЕГАМИРА**

ОПТИМАЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКОГО
МИКРОМИРА И МЕГАМИРА

Тбилиси

2017

ვალენტინ ვალენტინის ძე მძინარიშვილი

**ფიზიკური მიკროსამყაროს და მეგასამყაროს
ახალი მოდელები**

ფიზიკური მიკროსამყაროს და მეგასამყაროს
მოდელების ოპტიმალობა

თბილისი

2017