

T 14.570  
3



**Р.Ш. ВАРСИМАШВИЛИ**

**ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ  
С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ  
ОТНОШЕНИЕМ**

„ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ“



ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

02183  
240  
საქართველოს  
ტექნიკური უნივერსიტეტი

Р.Ш. ВАРСИМАШВИЛИ

8.5.2016-94763  
M-1413/4

**ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ  
С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРЕДАТОЧНЫМ  
ОТНОШЕНИЕМ**



Монография утверждена

Редакционно-издательским советом

ГТУ, 28.10.2015, протокол №2

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი  
საგარეო ურთიერთობების განყოფილება

Тбилиси  
2015



Зубчатые передачи с переменным передаточным отношением.  
Р.Ш. Варсимашвили, доктор технических наук, профессор, академик инженерной академии Грузии, Тбилиси, Грузинский технический университет. 2015 г. 601 с.

Посвящаю Мариам и Луке.

Монография посвящена теории, конструирования, производства некруглых зубчатых колес плоских, пространственных зацепления и передач с переменным углом между осями вращения колес. Рассмотрены новые зубчатые передачи, планетарные, волновые передачи и зубчатые вариаторы. Приведены кинематические схемы зуборезных станков с числовым программным управлением. Рассмотрен расчет на прочность. Изложен опыт изготовления и использования некруглых колес.

Монография окажет помощь преподавателям, научным работникам, конструкторам, докторантам, магистрантам и студентам.

Handwritten text in Georgian script, likely a library or archival stamp.

Научный редактор профессор Т.А. Чхаидзе

Рецензенты: доктор технических наук,  
профессор В.Н. Гоглашвили,  
доктор технических наук,  
профессор Т.М. Мchedlishvili

Handwritten number: 075 14 3

© Издательский дом "Технический университет", 2015

ISBN 978-9941-20-579-8

<http://www.gtu.ge>

Все права защищены. Ни одна часть этой книги (будь то текст, фото, иллюстрация или др.) не может быть использована без письменного разрешения издателя ни в каких-либо форме и средствах (электронной или механической).

Нарушение авторских прав карается законом.



Handwritten numbers: 18 / 16



В настоящее время в различных областях промышленности из некруглых зубчатых передач нашли широкое применение плоские передачи. Что касается использования пространственных некруглых зубчатых передач, их применение лимитируется отсутствием разработки теории, методов нарезания колес и зуборезного оборудования. Поэтому монография Р.Ш. Варсимашвили, несомненно, является, своевременной и актуальной.

Многолетний научный и практический опыт работы в области теории зацепления и конструирования машин позволил автору провести глубокий и обширный анализ состояния вопроса. Результатом явилось создание геометрической теории передач с некруглыми колесами. Разработаны теоретические положения, на которых базируются: созданные им новые зубчатые передачи с переменным передаточным отношением; методы нарезания некруглых колес; зуборезное оборудование для нарезания некруглых колес плоского и пространственного зацеплений. Результаты исследований могут рассматриваться как новое направление, относящееся к проблеме зубчатых передач с переменным передаточным отношением.

საბჭოთაუნა  
საქართველოს, შტატთა და კონტინენტის  
საინჟინერო და მეცნიერებათა  
საბჭოთაუნა.

რ. შ. ვარსიმაშვილი

9.07.2016.

## ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей задачей современного машиностроения является повышение качества и технического уровня выпускаемых машин на основе реализации достижений науки и техники. При этом металлоемкость, габариты, надежность, долговечность и стоимость машин в значительной степени зависят от совершенства используемых в них зубчатых передач, поскольку последние являются основным и наиболее ответственным звеном подавляющего большинства современных машин и приборов. В условиях бурного развития техники к зубчатым передачам предъявляются повышенные требования по воспроизведению заданных законов движения. Для выполнения этих требований необходимо совершенствование существующих и создание новых видов зубчатых передач, а также разработка методов нарезания колес, вопросов теории зацепления и оборудования для нарезания колес.

По характеристике передаточного отношения зубчатые передачи разделяются на передачи:

- а) с постоянным передаточным отношением и
- б) с переменным передаточным отношением.

Колеса первой группы получили название круглых зубчатых колес, а второй – некруглых. В промышленности основное применение имеют передачи с круглыми колесами. Передачи с некруглыми колесами тоже находят все более широкое распространение, но лишь при параллельных осях вращения (плоские передачи), поскольку вопросы геометрии, теории зацепления и методы нарезания в настоящее время разработаны достаточно полно лишь для этих передач.

Механизмы, составленные из некруглых колес, по сравнению с шарнирно-рычажными, кулачковыми и кулачково-планетарными механизмами, предназначенными для тех же целей, имеют ряд преимуществ: они обеспечивают воспроизведение заданной функции с большей точностью; совершают продолжительное циклическое вращательное и возвратно-вращательное движение; используются как силовые передачи; имеют высокий КПД; проще



можно отнести и к пространственным зубчатым передачам с некруглыми колесами, которые, в отличие от плоских передач, способны передать движение по заданному закону переменного передаточного отношения в пространстве, в связи с чем сфера применения этих передач значительно расширяется. Кроме того, применение пространственных передач с некруглыми колесами позволяет значительно упростить конструкцию, уменьшить металлоемкость и габариты машин-автоматов.

В настоящее время применение пространственных передач с некруглыми колесами в различных механизмах лимитируется отсутствием производительных и точных методов нарезания зубьев на таких колесах и недостаточной разработкой теории зацепления. Поэтому многие ценные предложения конструкторов, пытавшихся использовать эти передачи, не находят своего прямого применения и заменяются нерациональными конструкторскими решениями.

В книге обобщены работы автора, касающиеся вопросов теории зацепления, конструирования и технологии производства некруглых колес пространственных и плоских зацеплений, планетарных и волновых передач с переменным передаточным отношением; создания зуборезного оборудования, а также новых зубчатых передач и зубчатых вариаторов.



### 1.1. Необходимые сведения о матрицах

При решении многих вопросов теории зацепления необходимы преобразования систем координат. Эти преобразования обычно выполняются в матричной форме. Приведем необходимые сведения по матричному исчислению, которые понадобятся в дальнейшем.

Система  $m, n$  чисел, расположенных в прямоугольной таблице из  $m$  строк и  $n$  столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

называется матрицей.

Числа  $a_{ij}$ , где  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ , составляющие данную матрицу, называются ее элементами. Здесь первый индекс  $i$  обозначает номер строки элемента, а второй  $j$  – номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Если число строк матрицы равно числу столбцов, то такая матрица называется квадратной.

Прямоугольная матрица, состоящая из одного столбца

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{14} \end{pmatrix},$$

называется столбцевой матрицей.

Произведение двух квадратных матриц  $A$  и  $B$  одного порядка представляет собой матрицу того же порядка, каждый элемент которой равен

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad (1.2)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, q$ .



Элемент  $c_{ij}$  матрицы произведения, стоящий на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на элементы  $j$ -го столбца матрицы  $B$ . Например, при умножении двух матриц  $A$  и  $B$  требуется определить элемент матрицы  $c_{43}$ . Искомый элемент матрицы будет находиться в четвертой строке матрицы  $C$  на пересечении с третьим столбцом, т.к.  $i = 4, j = 3$ . Используя уравнение (1.2), можно написать:

$$c_{43} = a_{41}b_{13} + a_{42}b_{23} + a_{43}b_{33} + a_{44}b_{43}.$$

Элемент  $c_{43}$  представляет собой сумму произведений элементов четвертой строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы третьего столбца матрицы  $B$ . Приведенное правило умножения двух матриц остается в силе, если число сомножителей больше двух. При этом сомножители могут быть объединены в группы. Например, при умножении матриц  $A, B$  и  $C$  их можно объединять в группы следующим образом:

$$(AB)C = A(BC).$$

При умножении квадратной и столбцовой матриц остается в силе правило умножения двух квадратных матриц, т.е. правило умножения строки на столбец.

Обратной называется матрица  $A^{-1}$ , которая получается из матрицы  $A$ , если вместо элементов первой строки подставить элементы первого столбца, вместо элементов второй строки – элементы второго столбца и т.д. Элемент обратной матрицы связан с элементами исходной матрицы соотношениями

$$A_{ij}^{-1} = A_{ji}, \tag{1.3}$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

## 1.2. Преобразование координат

Пусть требуется совершить переход от координатной системы  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  к системе координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$  (рис. 1.1), отличающейся от первой смещением начала координат на величины  $x_{01}, y_{01}, z_{01}$  и поворотом вокруг оси  $z_1$  на угол  $\varphi$ . В дальнейшем будут использованы правые системы координат.

Применяя обычные правила для составления формул преобразования координат, запишем:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi + x_{01}; \\ y_2 &= x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi + y_{01}; \\ z_2 &= z_1 + z_{01}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

В целях использования матриц введем однородные координаты [77]. Тогда положение точки в соответствующих системах координат, в однородных координатах запишем так:

$$A(x_1, y_1, z_1, t_1) \text{ и } A(x_2, y_2, z_2, t_2),$$

где  $t_1 = t_2 = 1$ .

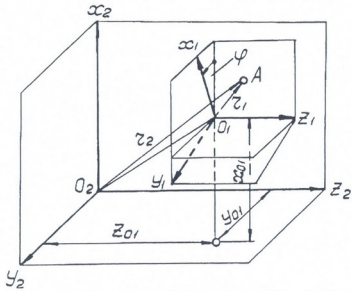


Рис. 1.1. К преобразованию координат точки

Формулы (1.4) перехода от системы координат  $S_1$  к системе координат  $S_2$ , с учетом новых обозначений, примут следующий вид:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi + z_1 0 + t_1 x_{01}; \\ y_2 &= x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi + z_1 0 + t_1 y_{01}; \\ z_2 &= x_1 0 + y_1 0 + z_1 1 + t_1 z_{01}; \\ t_2 &= x_1 0 + y_1 0 + z_1 0 + t_1 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Коэффициенты, стоящие рядом с  $x_1, y_1, z_1$  и  $t_1$ , запишем в виде элементов следующей матрицы:



$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & x_{01} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & y_{01} \\ 0 & 0 & 1 & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь индекс 21 матрицы указывает, что совершается переход от системы координат  $S_1$  к системе координат  $S_2$ .

Уравнение (1.5) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & x_{01} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & y_{01} \\ 0 & 0 & 1 & z_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

или в сокращенной записи:

$$r_2 = M_{21} \cdot r_1, \quad (1.8)$$

где:  $r_1$  и  $r_2$  – столбцовые матрицы радиус-векторов точки в системах координат  $S_1$  и  $S_2$ :

$$r_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Матрицу  $M_{21}$  в двухиндексной системе запишем так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.10)$$

Координатным осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в обеих системах координат присвоим соответственно номера 1, 2, 3. Тогда в матрице  $M_{21}$  элемент  $a_{kl}$  (где  $k=1,2,3$ ;  $l=1,2,3$ ) представляет косинус угла, образуемого новой осью номера  $k$  со старой осью номера  $l$ .

Например, элемент  $a_{32} = \cos(z_2, \hat{y}_1)$ . Элементы  $a_{14}$ ,  $a_{24}$ ,  $a_{34}$

представляют проекции начала  $O_1$  старой системы координат  $S_1$  в новой системе координат  $S_2$ .

В дальнейшем придется устанавливать связь между проекциями одного и того же свободного вектора в разных системах координат. Например, если в системе координат  $S_1$  известны проекции  $v_{1x}^{(12)}$ ,  $v_{1y}^{(12)}$ ,  $v_{1z}^{(12)}$  свободного вектора  $\vec{v}^{(12)}$  и необходимо найти проекции  $v_{2x}^{(12)}$ ,  $v_{2y}^{(12)}$ ,  $v_{2z}^{(12)}$  того же вектора в системе  $S_2$ , воспользуемся матричным равенством

$$v_2^{(12)} = L_{21} v_1^{(12)}, \quad (1.11)$$

где  $v_1^{(12)}$  и  $v_2^{(12)}$  – столбцевые матрицы:

$$v_1^{(12)} = \begin{Bmatrix} v_{1x}^{(12)} \\ v_{1y}^{(12)} \\ v_{1z}^{(12)} \end{Bmatrix}, \quad v_2^{(12)} = \begin{Bmatrix} v_{2x}^{(12)} \\ v_{2y}^{(12)} \\ v_{2z}^{(12)} \end{Bmatrix},$$

$L_{21}$ -квадратная матрица третьего порядка, полученная из матрицы (1.6) зачеркиванием четвертой строки и четвертого столбца.

### 1.3. Классификация зубчатых передач с переменным передаточным отношением

Для передачи движения с заданным законом переменного передаточного отношения возможно использовать зубчатые передачи: 1) с некруглыми колесами; 2) с эксцентричными зубчатыми колесами; 2) с переменным углом между осями вращения (рис. 1.2).

Аксиоды, центры некруглых колес определяются заданным законом переменного передаточного отношения и средним передаточным отношением. Аксиоды, центры колес могут быть замкнутыми или незамкнутыми, выпуклыми и вогнутыми. Некруглыми колесами возможно воспроизвести такие законы изменения скорости, при которых передаточное отношение на некоторых участках меняется по заданному закону, а на некоторых участках остается постоянным. В этом случае применяются кругло-некруглые колеса. Когда необходимо при

одном обороте ведущего колеса воспроизвести разные законы передаточного отношения аксоиды, centroиды некруглых колес составлены из разных кривых. Передаточные отношения с некруглыми колесами могут быть одноцикловыми и многоцикловыми. Одноцикловые передаточные отношения составлены из одинаковых колес. Среднее передаточное отношение в одноцикловых передачах равно единице. Многоцикловые передаточные отношения образуются из сочетания ведущего и ведомого некруглых колес, получаемого обкаткой без скольжения ведомого колеса ведущим столько раз, сколько единиц составляет передаточное отношение, которое всегда больше единицы и является целым числом.

В кинематическом отношении передача третьей группы характеризуется нелинейной зависимостью между углами поворота ведущего и ведомого колес при переменном угле между осями вращения колес.

К зубчатым передачам первой группы относятся

А. Передаточные отношения со скрещивающимися осями:

1. Гипоидная передача (рис. 1.2.1), аксоидами колес 1 и 2 являются некруглые конусы.
2. Червячная передача (рис. 1.2.2), которая состоит из цилиндрического некруглого червяка 1 и червячного колеса 2.
3. Спиroidная цилиндрическая передача (рис. 1.2.3) [99], которая состоит из некруглого цилиндрического червяка 1 и пространственного червячно-цилиндрического колеса 2.
4. Спиroidная коническая передача (рис. 1.2.4) [99], которая состоит из некруглого конического червяка 1 и пространственного червячно-конического колеса 2.

Витки червяков передач выполнены архимедовой, эвольвентной или конволютной поверхностями. Активные поверхности зубьев колес выполнены взаимоогнбаемыми с активными поверхностями витков червяков, а их аксоиды являются функциями передаточного отношения.

5. Цилиндрическая винтовая передача (рис. 1.2.5) с некруглыми цилиндрическими колесами 1 и 2.

Б. Передаточные отношения с пересекающимися осями.

6. Передаточные отношения (рис. 1.2.6), которая состоит из некруглых конических колес 1 и 2.

В. Передаточные отношения с параллельными осями:

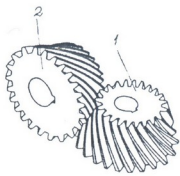


7. Передачи с цилиндрическими некруглыми колесами 1, 2 внешнего (рис. 1.2.7) и внутреннего зацепления (рис. 7.2).
  8. Передача (рис. 1.2.8), которая состоит из эксцентрических круглых цилиндрических колес 1 и 2.
  9. Торцевые зубчатые передачи с некруглыми колесами 1, 2 внешнего (рис. 1.2.9) и внутреннего зацепления (рис. 5.15) [123].
  10. Многовитковая передача с некруглыми колесами 1, 2 (рис. 1.2.10).
  11. Реечная передача (рис. 1.2.11), которая состоит из некруглого цилиндрического колеса 1 и пространственной рейки 2.
- К зубчатым передачам второй группы относится
12. передача с эллипсоидными колесами 1, 2 (рис. 1.2.12) [122].

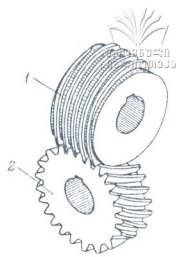
Для передачи движения с заданным законом переменного передаточного отношения возможно использовать планетарные (рис. 1.2.13) и волновые зубчатые передачи (рис. 1.2.14) [107, 136]. Планетарная передача состоит из центрального некруглого колеса 1, сателлитного некруглого колеса 2 и водила Н. Волновая передача состоит из некруглого жесткого колеса 1, гибкого колеса 2 и некруглых 3 генераторов волн.

Планетарные и волновые передачи, при малом количестве некруглых зубчатых колес, позволяют получить большие переменные передаточные отношения.

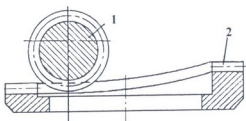
При передаче движения с заданным законом переменного передаточного отношения на значительное расстояние возможно использовать передачи с гибкой связью: цепную и ременную. Цепная передача (рис. 1.2.15) состоит из ведущей некруглой (круглой) звездочки 1, ведомой некруглой звездочки 2, втулочно-роликовой или зубчатой цепи 3 и натяжной звездочки 4. Зубчато-ременная передача (рис. 1.2.16) состоит из ведущего круглого (некруглого) 1, ведомого некруглого 2, шкивов, ремня 3 и натяжного ролика 4. Шкивы 1, 2 и ремень 3 снабжены прямыми или арочными [124] зубьями.



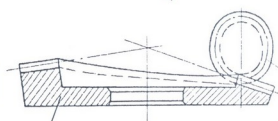
1)



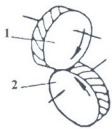
2)



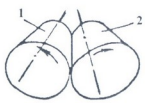
3)



4)



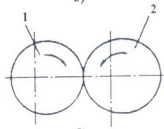
5)



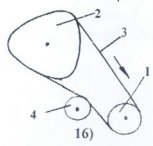
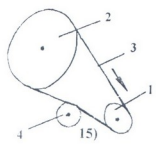
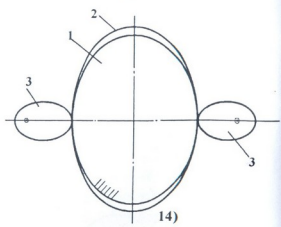
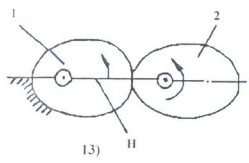
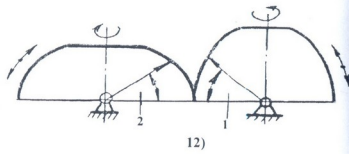
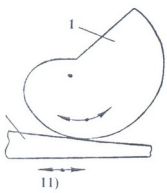
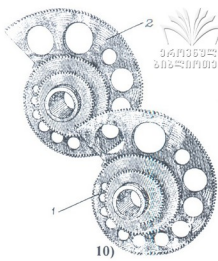
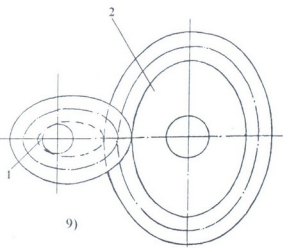
6)



7)



8)



ՐԻՍ. 1.2. ՍԵՐՏԻՆԵՐԻ ՄԵԿՐԻՄԵՆՆԱԿԱՆ ԲԵՐԱԴՐՈՒՄԻ ՄԵԿՐՈՒՄ

### 2.1. Относительное движение звеньев зубчатых передач с некруглыми колесами

Представим себе, что в пространстве заданы две произвольно скрещивающиеся оси  $AA$  и  $BB$  (рис. 2.1), между которыми необходимо осуществить передачу вращательного движения с переменным передаточным отношением по заданному закону

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\psi_1}{d\psi_2} \neq const,$$

где:  $\omega_1, \omega_2$  - угловые скорости, с которыми вращаются ведущее 1 и ведомое 2 зубчатые колеса;  $\psi_1, \psi_2$  - углы поворота колес;  $\omega_2, \psi_2$  - переменные величины.

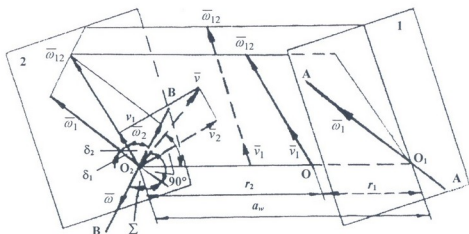


Рис. 2.1. К определению относительного движения некруглых колес

Определим относительное движение колес и аксоиды зубчатой передачи. Для решения поставленной задачи необходимо отыскать положения осей вращения зубчатых колес в относительном движении. Определим относительное движение зубчатого колеса 1 по отношению к зубчатому колесу 2. Для этого воспользуемся методом обращения движения и сообщим обоим колесам общую угловую скорость  $\bar{\omega}'_2 = -\bar{\omega}_2$ . При этом условии колесо 2 станет неподвижным, а колесо 1 будет совершать два вращательных движения вокруг осей  $AA$  и  $BB$  с угловыми



скоростями  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}'_2$ . Для нахождения суммарной угловой скорости  $\bar{\omega}_{12}$  вращения колеса 1 в преобразованном механизме перенесем вектор  $\bar{\omega}_1$  параллельно самому себе в точку  $O_2$ . Перпендикулярно плоскости расположения векторов  $\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}'_2$  приложим вектор поступательной скорости  $\bar{v} = \bar{a}_w \times \bar{\omega}_1$ , где  $a_w$  – кратчайшее межосевое расстояние.

Складывая векторы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}'_2$  в точке  $O_2$ , получим вектор  $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}'_2$ . Как видим, результирующее движение колеса 1 сводится к вращательному движению вокруг оси  $\bar{\omega}_{12}$  и поступательному перемещению со скоростью  $\bar{v}$ . Известно, что при таком движении результирующее движение колеса 1 оказывается винтовым. Найдем это винтовое движение, для чего разложим  $\bar{v}$  на два составляющих вектора, один из которых  $\bar{v}_1$  направим параллельно вектору  $\bar{\omega}_{12}$ , а другой  $\bar{v}_2$  - перпендикулярно ему. Складывая вращательное и поступательное движения  $\bar{\omega}_{12}$  и  $\bar{v}_2$ , получим мгновенное вращательное движение колеса 1 вокруг оси, параллельной  $\bar{\omega}_{12}$  и отстоящей от точки  $O_2$  на расстояние  $r_2(\psi_1) = v_2 / \omega_{12}$ .

Относительная угловая скорость

$$\omega_{12} = \frac{\omega_1}{u_{12}(\psi_1)} \sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}. \quad (2.1)$$

Скорость поступательного движения определим выражением

$$v_2 = a_w \omega_1 \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}. \quad (2.2)$$

Используя соотношения

$$\frac{\omega_1}{\sin \delta_2} = \frac{\omega_2}{\sin \delta_1} = \frac{\omega_{12}}{\sin \Sigma}, \quad (2.3)$$

определим расстояние между осью мгновенного относительного вращения и осью  $BB$ :

$$r_2(\psi_1) = a_w \frac{\cos \delta_1 \sin \delta_2}{\sin \Sigma}. \quad (2.4)$$





Здесь  $\delta_1, \delta_2$  – переменные углы между векторами скоростей  $\vec{\omega}_{12}$  и  $\vec{\omega}_2, \vec{\omega}_1$ .

С учетом зависимостей

$$\cos \delta_1 = \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}, \quad (2.5)$$

$$\sin \delta_2 = \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}, \quad (2.6)$$

расстояния между осями мгновенного относительного вращения – скольжения и осями  $AA$  и  $BB$  определяются выражениями:

$$r_1(\psi_1) = a_w \frac{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}, \quad (2.7)$$

$$r_2(\psi_1) = a_w \frac{u_{12}^2(\psi_1) + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}. \quad (2.8)$$

Скорость скольжения вдоль оси относительного вращения имеет вид

$$v_1 = a_w \omega_1 \frac{\sin \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}. \quad (2.9)$$

Передаточное отношение:

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \sin \Sigma \operatorname{ctg} \delta_1 - \cos \Sigma \neq \text{const}. \quad (2.10)$$

Углы между осями вращения колес и осью относительного вращения-скольжения определим выражениями:

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{ctg} \delta_2 = \frac{u_{21}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad (2.12)$$

где

$$u_{21}(\psi_1) = \frac{1}{u_{12}(\psi_1)}.$$

Параметр винта:



$$p = a_w \frac{u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}$$



Из полученных зависимостей видно, что, поскольку передача движения между скрещивающимися осями колес осуществляется с переменным передаточным отношением, каждому значению мгновенного передаточного отношения соответствует своя ось относительного вращения-скольжения. В пространстве мгновенная ось относительно вращения-скольжения занимает переменное положение, совершая в процессе зацепления зубьев колес качательное движение вокруг линии кратчайшего межосевого расстояния и одновременно перемещаясь вдоль этой линии. В относительном движении колесо 1 совершает вращение с неравномерной угловой скоростью вокруг оси мгновенного относительного вращения-скольжения, поступательное перемещение со скольжением с неравномерной линейной скоростью вдоль этой же оси, а также перемещение с неравномерной линейной скоростью по линии межосевого расстояния.

## 2.2. Аксоиды некруглых колес

Семейство мгновенных осей относительного вращения-скольжения в системах координат, связанных с колесами, образует аксоиды колес.

Для определения аксоидов колес 1 и 2 введем системы координат: неподвижную систему координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ , связанную с колесом 1 (рис. 2.2), подвижные системы координат  $S_k(x_k, y_k, z_k)$ , ( $k = 1, 2$ ), связанные соответственно с колесами 1, 2, и вспомогательную систему координат  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ , связанную с колесом 2.

В системе  $S_0$  мгновенную ось относительного вращения-скольжения запишем уравнением

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 = & -a_w \frac{1 + u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \vec{i}_0 + \\ & + \frac{u}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}} [(u_{12}(\psi_1) + \end{aligned}$$

$$+ \cos \Sigma) \bar{j}_0 + u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma \bar{k}_0], \quad (2.14)$$

где  $u$ -переменный параметр, определяющий положение точки на мгновенной оси относительного вращения-скольжения;  $\bar{r}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$  – орты системы координат  $S_0$ .

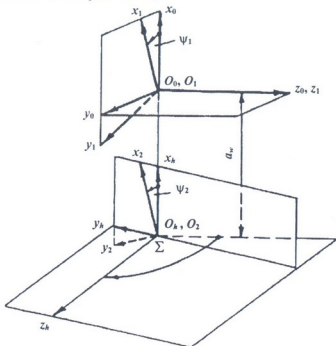


Рис. 2.2. Системы координат для определения аксоидов зубчатых колес между скрещивающимися осями

Перепишем уравнение (2.14) в системе координат  $S_1$ . Для этого используем матричное равенство

$$r_1 = M_{10} \cdot r_0. \quad (2.15)$$

Здесь:  $r_1, r_0$ -столбцевые матрицы радиус-векторов образующих аксоидов в системах координат  $S_1$  и  $S_0$ ;  $M_{10}$  – матрица перехода от системы координат  $S_0$  к системе координат  $S_1$ . Матрица  $M_{10}$  имеет выражение:

$$M_{10} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & \sin \psi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Используя (2.14), (2.15) и (2.16), радиус-вектор поверхности аксоида ведущего колеса определится зависимостью

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 = a_w \frac{1 + u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} (\sin \psi_1 \bar{j}_1 - \cos \psi_1 \bar{i}_1) + \\ + u \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}} \left( \sin \psi_1 \bar{i}_1 + \right. \\ \left. + \cos \psi_1 \bar{j}_1 + \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma} \bar{k}_1 \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для определения радиус-вектора поверхности аксоида ведомого колеса используем матричное равенство

$$r_2 = M_{2h} M_{h0} r_0. \quad (2.18)$$

Здесь  $M_{h0}$  - матрица перехода от системы  $S_0$  к системе  $S_h$ ;  $M_{2h}$  - матрица перехода от системы  $S_h$  к системе  $S_2$ :

$$M_{h0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_w \\ 0 & \cos \Sigma & -\sin \Sigma & 0 \\ 0 & \sin \Sigma & \cos \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$M_{2h} = \begin{pmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Используя зависимость

$$M_{20} = \begin{pmatrix} \cos \psi_2 & \sin \psi_2 \cos \Sigma & -\sin \psi_2 \sin \Sigma & a_w \cos \psi_2 \\ -\sin \psi_2 & \cos \psi_2 \cos \Sigma & -\cos \psi_2 \sin \Sigma & -a_w \sin \psi_2 \\ 0 & \sin \psi \Sigma & \cos \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

и выражения (2.14), (2.18), радиус-вектор поверхности аксоида ведомого колеса запишем в виде

$$\begin{aligned}
 r_2 = & a_w \frac{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} (\sin \psi_2 \bar{j}_2 - \cos \psi_2 \bar{i}_2) + \\
 & + u \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{\sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}} \left[ \sin \psi_2 \cos \Sigma \bar{i}_2 + \right. \\
 & + \cos \psi_2 \cos \Sigma \bar{j}_2 + \sin \Sigma \bar{k}_2 - \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma} (\sin \psi_2 \sin \Sigma \bar{i}_2 + \\
 & \left. + \cos \psi_2 \sin \Sigma \bar{j}_2 + \cos \Sigma \bar{k}_2) \right] + a_w (\cos \psi_2 \bar{i}_2 - \sin \psi_2 \bar{j}_2). \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Здесь  $\psi_2(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{u_{12}(\psi_1)}$  – угол поворота ведомого колеса.

Аксоиды колес (2.17) и (2.22), при передаче вращательного движения, с переменным передаточным отношением между скрещивающимися осями, являются однополостными гиперболами, которые определяются заданным законом переменного передаточного отношения. При

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{1}{n} \frac{1 - e^2}{1 - 2e \cos \psi_1 + e^2},$$

где:  $n$  – среднее передаточное отношение;  $e$  – эксцентриситет эллипса, в горловом сечении однополостных гиперболоидов лежат эллипсы. Уравнения эллипсов при  $n = 1$  представим в следующем виде:

$$r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \psi_1},$$

$$r_2 = a_w - r_1,$$

где:  $a_w = 2a$  – межосевое расстояние;  $a$  – длина большой полуоси эллипса.

На рис. 2.3 показана зубчатая передача, аксоидами которой являются однополостные эллиптические гипербоиды при  $n = 1$ .

Если угол скрещивания принять равным нулю и оси однополостных гипербоидов сделать параллельными, относительное движение колес будет не винтовым, а вращательным. В относительном движении колесо 1 будет совершать вращение с неравномерной угловой скоростью вокруг оси мгновенного вращения, а также перемещение с неравномерной линейной

скоростью вдоль линии межосевого расстояния. При этом аксоидные поверхности представляют собой некруглые цилиндры. В случае пересечения осей вращения колес межосевое расстояние обращается в нуль, относительное движение колес будет вращательным. В относительном движении колесо 1 будет совершать вращение с неравномерной угловой скоростью вокруг оси мгновенного относительного вращения, а также переносное движение с неравномерной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через вершину конуса, перпендикулярно оси мгновенного относительного вращения. При этом аксоидные поверхности представляют собой некруглые конусы.

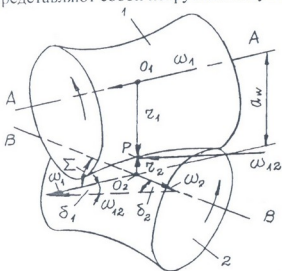


Рис. 2.3. Однополостная эллиптическая гиперболическая зубчатая передача,  $n = 1$

Если вместо эллипса в горловом сечении однополостного гиперboloида возьмем окружность, получим однополостный гиперboloид вращения, используемый в качестве аксоидов пространственных зубчатых передач со скрещающимися осями при  $u_{12}(\psi_1) = const$ . В этих передачах мгновенная ось относительного вращения-скольжения занимает неизменное положение в пространстве, образуя постоянные углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  с осями вращения колес.

Если оси однополостных гиперboloидов вращения сделать параллельными, т.е. угол скрещивания принять равным нулю,

зубчатая передача с однополостными гиперболоидами вращения превращается в передачу с круглыми цилиндрическими колесами.

В случае пересечения осей однополостных гиперболоидов вращения, расстояние между ними обращается в нуль и передача с однополостными гиперболоидами вращения превращается в передачу с круглыми коническими колесами.

Исходя из изложенного можно полагать, что зубчатые передачи, аксоидами которых являются однополостные гиперболоиды, относятся к общим видам зубчатых передач.

### 2.1.1. Аксоиды некруглых конических колес

Некруглые конические зубчатые колеса наружного зацепления предназначены для передачи движения с заданным переменным передаточным отношением между пересекающимися осями, когда колеса вращаются в противоположных направлениях. При проектировании некруглых конических зубчатых колес исходными являются функция передаваемого переменного передаточного отношения  $u_{12}(\psi_1)$  и угол  $\Sigma$  между пересекающимися осями вращения колес;  $\psi_1$  – угол поворота ведущего некруглого колеса.

Пусть требуется передать вращательное движение между пересекающимися осями  $Oa$  и  $Ob$  (рис. 2.4) с заданным законом изменения передаточного отношения

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \neq const,$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловые скорости вращения колес 1 и 2.

Первоначальным вопросом при проектировании некруглых конических зубчатых колес является определение таких аксоидов, которые в процессе зацепления зубьев будут перекатываться друг по другу без скольжения. Для этого необходимо определить положения мгновенных осей вращения колес 1 и 2 в их относительном движении.

Используя метод обращения движения, сообщим обоим некруглым колесам общую угловую скорость –  $\bar{\omega}_2$ . Тогда колесо 2

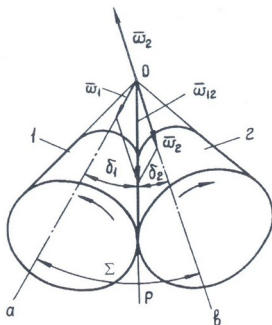


Рис. 2.4. Аксоиды некруглых колес между пересекающимися осями

станет неподвижным, а колесо 1 будет вращаться вокруг оси  $Ob$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_2$  и вокруг оси  $Oa$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$ . Мгновенная угловая скорость колеса 1 в относительном движении (по отношению к колесу 2) равна  $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$ . Откладывая векторы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  в соответствующих направлениях по осям  $Oa$  и  $Ob$ , находим результирующий вектор  $\bar{\omega}_{12}$ . Направление этого вектора определит мгновенную ось вращения  $OP$ . Поскольку угловая скорость  $\bar{\omega}_2$  переменная, каждому значению переменного передаточного отношения соответствует свое определенное направление  $\bar{\omega}_{12}$  мгновенной угловой скорости в относительном движении, и, следовательно, мгновенное положение оси  $OP$ . Эти положения определяются переменными значениями углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , образуемыми мгновенными осями  $OP$  с осями колес  $Oa$  и  $Ob$ .

Аксоид некруглого конического колеса представляет геометрическое место мгновенных осей вращения в системе координат, связанной с этим колесом. При наших обозначениях аксоидами колес являются некруглые конусы с переменным





углом  $\delta_k$  ( $k=1,2$ ) между образующими некруглых конусов и осями колес. Назовем эти аксоиды колес начальными некруглыми конусами. Поскольку аксоиды колес – начальные некруглые конусы – перекаатываются друг по другу без скольжения, скорости точек мгновенной оси вращения, принадлежащих обоим некруглым конусам, должны быть равны между собой. Используя это положение, передаточное отношение определится зависимостью

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \neq const, \quad (2.23)$$

где  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2$ .

Для нахождения аксоидов некруглых конических зубчатых колес функцию переменного передаточного отношения необходимо задать в таком виде, чтобы независимым переменным являлся угол поворота ведущего некруглого конического колеса  $\psi_1$ . Совместным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} u_{12}(\psi_1) &= \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}; \\ \Sigma &= \delta_1 + \delta_2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

определился положение мгновенных осей вращения:

$$ctg \delta_1 = \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad (2.25)$$

$$ctg \delta_2 = \frac{u_{21}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad (2.26)$$

где  $u_{21}(\psi_1) = \frac{1}{u_{12}(\psi_1)}$ .

Для определения радиус-векторов образующих аксоидов  $\bar{r}_1$  и  $\bar{r}_2$  введем в рассмотрение следующие системы координат [79] (рис. 2.5): неподвижную систему координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ , связанную со стойкой передачи; подвижную систему координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ , жестко связанную с ведущим некруглым коническим колесом 1; подвижную систему координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , жестко связанную с ведомым некруглым коническим колесом 2. В

системе координат  $S_0$  мгновенная ось вращения  $OP$  определится уравнением

$$\bar{r}_0 = q(\operatorname{tg} \delta_1 \bar{i}_0 + \bar{j}_0), \quad (2.27)$$

где  $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$  – орты неподвижных осей;  $q = OP \cos \delta_1$  – параметр, определяющий положение точки на оси колеса 1.

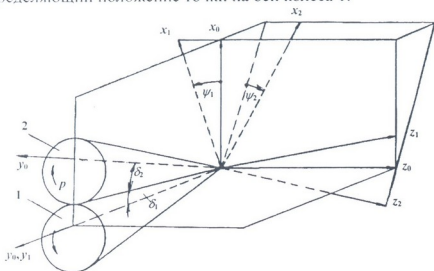


Рис. 2.5. К определению радиус-векторов образующих аксоидов некруглых конических колес

Переписывая уравнение мгновенной оси вращения (2.27) в подвижных системах  $S_1$  и  $S_2$ , получим поверхности аксоидов колес 1 и 2. Переход от системы координат  $S_0$  к системе координат  $S_1$ , связанной с колесом 1, совершим с помощью матричного равенства

$$r_1 = M_{10} \cdot r_0, \quad (2.28)$$

где:  $r_0$  и  $r_1$  – столбцевые матрицы радиус-векторов образующих аксоидов в системах координат  $S_0$  и  $S_1$ .  $M_{10}$  – матрица перехода от системы координат  $S_0$  к системе координат  $S_1$  определяется выражением

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 & 0 & -\sin \psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_1 & 0 & \cos \psi_1 \end{vmatrix}. \quad (2.29)$$

Запишем (2.28) в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & 0 & -\sin \psi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_1 & 0 & \cos \psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q t g \delta_1 \\ q \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Радиус-вектор поверхности аксоида некруглого конического колеса в системе координат  $S_1$  определится уравнением

$$\bar{r}_1 = q t g \delta_1 (\cos \psi_1 \bar{i}_1 + \sin \psi_1 \bar{k}_1) + q \bar{j}_1. \quad (2.31)$$

Учитывая (2.25), радиус-вектор поверхности аксоида ведущего некруглого конического колеса определим из выражения

$$\bar{r}_1 = q \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} (\cos \psi_1 \bar{i}_1 + \sin \psi_1 \bar{k}_1) + q \bar{j}_1. \quad (2.32)$$

Аналогично, уравнение поверхности аксоида ведомого некруглого колеса в системе  $S_2$  определится зависимостью

$$\bar{r}_2 = q \frac{\sin \Sigma}{u_{21}^*(\psi_2) + \cos \Sigma} (\cos \psi_2 \bar{i}_2 + \sin \psi_2 \bar{k}_2) + q \bar{j}_2, \quad (2.33)$$

где  $q$ ,  $\psi_k$  ( $k=1,2$ ) – параметры поверхности;  $u_{21}^*(\psi_2)$  определяется следующим образом:

$$u_{21}^*(\psi_2) = u_{21}^*[\psi_2(\psi_1)] = u_{21}(\psi_1) = \frac{1}{u_{12}(\psi_1)};$$

$$\psi_2 = \psi_2(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{u_{12}(\psi_1)}. \quad (2.34)$$

$\psi_{21}(\psi_2)$  является функцией передаточного отношения, заданного как функция от угла поворота  $\psi_2$  ведомого некруглого конического колеса.

Поверхность аксоида некруглого конического колеса может иметь как выпуклые, так и вогнутые участки. Нарезание зубьев на заготовке некруглого конического колеса наиболее простым образом можно осуществить тогда, когда его аксоид имеет выпуклую форму. Для обеспечения выпуклости поверхности аксоида функция передаточного отношения  $u_{12}(\psi_1)$  должна удовлетворять следующим требованиям [79]:

для ведущего колеса

$$u_{12}(\psi_1) + \frac{d^2}{d\psi_1^2} [u_{12}(\psi_1)] + \cos \Sigma > 0; \quad (2.35)$$

для ведомого колеса

$$1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma + \left\{ \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] \right\}^2 - u_{12}(\psi_1) \frac{d^2}{d\psi_1^2} [u_{12}(\psi_1)] > 0. \quad (2.36)$$

При передаче непрерывного вращательного движения аксоиды колес должны быть замкнутыми. Для этого необходимо, чтобы функция передаточного отношения была периодической и ее период удовлетворял соотношению

$$T = \frac{T_1}{K_1} = \frac{T_2}{K_2}. \quad (2.37)$$

Здесь:  $T_1$  и  $T_2$  – периоды оборотов ведущего и ведомого колес;  
 $K_1$  и  $K_2$  – целые числа.

Зубчатая передача с некруглыми коническими колесами внутреннего зацепления (рис. 2.6) предназначена для передачи движения с заданным законом переменного передаточного отношения между пересекающимися осями колес, когда колеса вращаются в одном и том же направлении.

Передача (рис. 2.6) состоит из ведущего некруглого конического колеса 1 и ведомого некруглого конического колеса 2. Оси  $Oa$  и  $Ob$  вращения колес пересекаются в одной и той же точке  $O$  центра сферы радиусом  $R$ . Некруглая коническая аксоида колеса 1 выпуклая, а колеса 2 – вогнутая. Колеса могут быть оснащены: прямыми, косыми, круговыми, эвольвентными или циклоидальными зубьями. На колесе 1 нарезаются зубья внешнего, а на колесе 2 – внутреннего зацепления. При вращении ведущего колеса 1 с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  ведомое колесо 2 вращается в том же направлении с переменной угловой скоростью  $\omega_2$  по заданному закону переменного передаточного отношения  $u_{12}(\psi_1)$ , где  $\psi_1$  – постоянный угол поворота ведущего колеса 1. Среднее переменное передаточное отношение передачи  $n = 2, 3, 4, 5$  и т.д.

При проектировании некруглых конических зубчатых колес исходными являются функция передаваемого переменного пере-



даточного отношения  $u_{12}(\psi_1)$  и угол  $\Sigma$  между пересекающимися осями вращения колес.

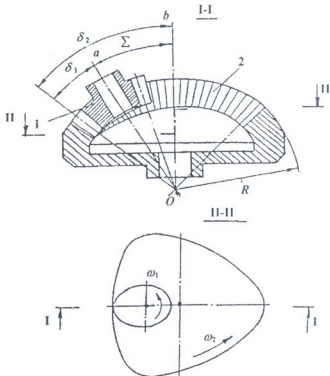


Рис. 2.6. Зубчатая передача с некруглыми коническими колесами внутреннего зацепления

Пусть требуется передать вращательное движение между пересекающимися осями  $Oa$  и  $Ob$  (рис. 2.6, 2.7) с заданным законом изменения передаточного отношения

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\psi_2}{\psi_1} \neq const ,$$

где  $\psi_2$  – угол поворота ведомого некруглого конического колеса 2.

Первоначальным вопросом, при проектировании некруглых конических зубчатых колес, является определение таких аксоидов, которые в процессе зацепления зубьев будут перекатываться друг по другу без скольжения. Для этого необходимо

определить положения мгновенных осей  $OP$  вращения колес 1 и 2 в их относительном движении.

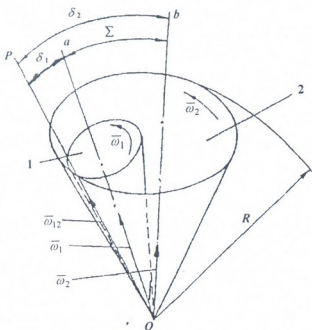


Рис. 2.7. Аксоиды некруглых конических зубчатых колес внутреннего зацепления между пересекающимися осями

Используя метод обращения движения, сообщим обоим некруглым колесам общую угловую скорость —  $\bar{\omega}_1$  (рис. 2.7). Тогда колесо 2 станет неподвижным, а колесо 1 будет вращаться вокруг оси  $Ob$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_2$  и вокруг оси  $Oa$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}_1$ . Мгновенная угловая скорость колеса 1 в относительном движении по отношению к колесу 2 равна  $\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$ . Откладывая векторы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  в соответствующих направлениях по осям  $Oa$  и  $Ob$ , находим результирующий вектор  $\bar{\omega}_{12}$ . Направление этого вектора определяет мгновенную ось вращения  $OP$ . Поскольку угловая скорость  $\bar{\omega}_2$  переменная, каждому значению переменного передаточного отношения соответствует свое определенное направление  $\bar{\omega}_{12}$  мгновенной угловой скорости в относительном движении, и, следовательно, мгновенное

положение оси  $OP$ . Эти положения определяются переменными значениями углов  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , образуемых мгновенными осями  $OP$  с осями колес  $Oa$  и  $Ob$ .

Аксоид некруглого конического колеса представляет геометрическое место мгновенных осей вращения в системе координат, связанной с этим колесом. При наших обозначениях аксоидами колес являются некруглые конусы с переменным углом  $\delta_k$  ( $k=1,2$ ) между образующими некруглых конусом и осями колес. Назовем эти аксоиды колес начальными некруглыми конусами. Поскольку аксоиды колес – начальные некруглые конусы – перекатываются друг по другу без скольжения, скорости точек мгновенной оси вращения, принадлежащих обоим некруглым конусам, должны быть равны между собой. Используя это положение, передаточное отношение определится зависимостью

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \neq const, \quad (2.38)$$

где  $\Sigma = \delta_2 - \delta_1$ .

Для нахождения аксоидов некруглых конических колес функцию переменного передаточного отношения необходимо задать в таком виде, чтобы независимым переменным являлся угол поворота  $\psi_1$  ведущего некруглого конического колеса. Совместным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} u_{12}(\psi_1) &= \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}; \\ \Sigma &= \delta_2 - \delta_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

определяем положение мгновенных осей вращения:

$$ctg \delta_1 = \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad (2.40)$$

$$ctg \delta_2 = \frac{\cos \Sigma - u_{21}(\psi_1)}{\sin \Sigma}, \quad (2.41)$$

где  $u_{21}(\psi_1) = \frac{1}{u_{12}(\psi_1)}$ .

При известных значениях  $\Sigma$  и  $\delta_1$ , угол  $\delta_2$  возможно также определить зависимостью (2.39).



Для определения радиус-векторов образующих аксоидов  $r_{11}$  и  $r_2$  введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 2.8): неподвижную систему координат  $S_0(x_0, y_0, z_0)$ , связанную со стойкой передачи; подвижную систему координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$ , жестко связанную с ведущим некруглым коническим колесом 1; подвижную систему координат  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , жестко связанную с ведомым некруглым коническим колесом 2. В системе координат  $S_0$  мгновенная ось вращения  $OP$  определится уравнением (2.27).

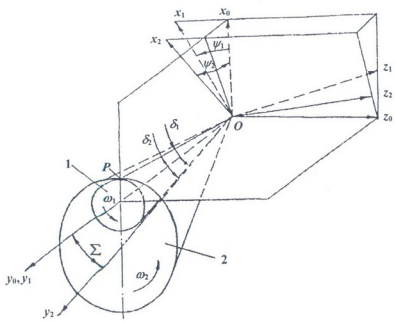


Рис. 2.8. К определению радиус-векторов образующих аксоидов некруглых конических зубчатых колес внутреннего зацепления

Для определения радиус-векторов поверхности аксоида ведомого некруглого конического колеса с зубьями внутреннего зацепления, воспользуемся зависимостью

$$r_2 = M_{20} \cdot r_0, \quad (2.42)$$

где:  $r_2$  – столбцевая матрица радиус-векторов образующих аксоида колеса 2 в системе  $S_2$ ;  $M_{20}$  – матрица перехода от системы  $S_0$  к системе  $S_2$  определяется выражением



$$M_{20} = \begin{vmatrix} \cos\psi_2 \cos\delta_2 & \cos\psi_2 \sin\Sigma & -\sin\psi_2 \\ -\sin\delta^2 & \cos\Sigma & 0 \\ \sin\psi_2 \cos\delta_2 & 0 & \cos\psi_2 \end{vmatrix}. \quad (2.43)$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\psi_2 \cos\delta_2 & \cos\psi_2 \sin\Sigma & -\sin\psi_2 \\ -\sin\delta_2 & \cos\Sigma & 0 \\ \sin\psi_2 \cos\delta_2 & 0 & \cos\psi_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q \operatorname{tg}\delta_1 \\ q \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.44)$$

Радиус-вектор поверхности ведомого колеса запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 = q \frac{\sin\Sigma}{u_{21}^*(\psi_2) + \cos\Sigma} (\cos\psi_2 \cos\delta_2 \vec{i}_2 - \sin\delta_2 \vec{j} + \sin\psi_2 \cos\delta_2 \vec{k}_2) + \\ + q(\cos\psi_2 \cos\Sigma \vec{i}_2 + \cos\Sigma \vec{j}_2), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где  $q$ ,  $\psi_k$  ( $k=1,2$ ) – параметры поверхности;  $u_{21}^*(\psi_2)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u_{21}^*(\psi_2) = u_{21}^*[\psi_2(\psi_1)] = u_{21}(\psi_1) = \frac{1}{u_{12}(\psi_1)}; \\ \psi_2 = \psi_2(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{u_{12}(\psi_1)} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$\psi_{21}^*(\psi_1)$  – функция передаточного отношения, заданная как функция от угла поворота  $\psi_2$  ведомого некруглого конического колеса.

Поверхности аксоид некруглых конических колес могут иметь выпукло-вогнутые, волнообразные участки. Нарезание зубьев на заготовках некруглых конических колес наиболее простым образом можно осуществить тогда, когда их аксоиды не имеют волнообразную форму, а имеют гладкие формы; выпуклую или вогнутую (рис. 2.6, 2.7, 2.8). Для этого функция передаточного отношения  $u_{12}(\psi_1)$  должна удовлетворить требованиям (2.35; 2.36).

При передаче непрерывного вращательного движения аксоиды колес должны быть замкнутыми. Для этого необходимо, чтобы функция передаточного отношения была периодической и ее период удовлетворял соотношению (2.35, 2.36).

## 2.1.2. Геометрические параметры начальных поверхностей передач с некруглыми коническими зубчатыми колесами



НАЦІОНАЛЬНИЙ  
ТЕХНІЧЕСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
КИЇВСЬКОГО ПОЛІТЕХНІЧЕСЬКОГО ІНСТИТУТУ

При геометрическом расчете зубчатых передач в качестве базовых поверхностей целесообразно принимать не аксоиды колес, а так называемые начальные поверхности зубчатых колес. Представим себе, что имеются некруглые конические начальные поверхности  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , с которыми жестко связаны системы координат  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $S_2(x_2, y_2, z_2)$  (рис. 2.9). Углы  $\delta_1$  и  $\delta_2$  между осями  $O_1y_1$ ,  $O_2y_2$  и образующими некруглых конусов переменны. Оси  $O_1y_1$  и  $O_2y_2$  начальных поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  скрещиваются под произвольным углом  $\Sigma$ ;  $A_1A_2 = \alpha_w$  - кратчайшее межосевое расстояние;  $O_1A_1 = b_1$  - смещение начала системы координат  $S_1$  относительно линии кратчайшего межосевого расстояния;  $O_2A_2 = b_2$  - смещение начала системы координат  $S_2$  относительно линии кратчайшего межосевого расстояния. Для определения геометрических параметров начальных поверхностей передач с некруглыми коническими колесами исходим из условия их касания.

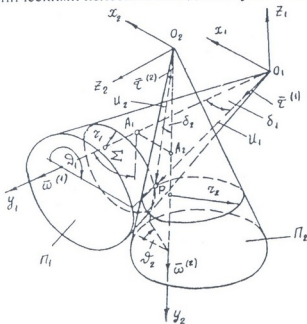


Рис. 2.9. Схема зацепления начальных поверхностей некруглых конических колес

Для обеспечения касания в полюсе зацепления Р начальных поверхностей, заданных в параметрической форме, должны выполняться условия [77]:

$$\bar{r}^{(1)}(u_1, \vartheta_1) = \bar{r}^{(2)}(u_2, \vartheta_2); \quad (2.47)$$

$$\bar{e}^{(1)}(u_1, \vartheta_1) = \bar{e}^{(2)}(u_2, \vartheta_2); \quad (2.48)$$

$$\bar{v}^{(12)} \cdot \bar{e}^{(1)} = 0, \quad (2.49)$$

где:  $\bar{r}^{(k)}$  – переменный радиус-вектор текущей точки поверхности  $\Pi_k$ ;  $\bar{e}^{(k)}$  – орт нормали к поверхности  $\Pi_k$ ;  $u_k, \vartheta_k$  – независимые параметры, определяющие положение точки на поверхности ( $k = 1, 2$ );  $\bar{v}^{(12)}$  – вектор скорости относительного движения.

Уравнения начальных поверхностей в системах координат  $S_1$  и  $S_2$  имеют вид:

$$x_1^{(1)} = u_1 \sin \delta_1 \cos \vartheta_1, \quad y_1^{(1)} = u_1 \cos \vartheta_1, \quad z_1^{(1)} = u_1 \sin \delta_1 \sin \vartheta_1, \quad (2.50)$$

$$x_2^{(2)} = u_2 \sin \delta_2 \cos \vartheta_2, \quad x_2^{(2)} = u_2 \cos \vartheta_2, \quad z_2^{(2)} = u_2 \sin \delta_2 \sin \vartheta_2. \quad (2.51)$$

Векторы и орты нормалей к поверхностям (2.50) и (2.51) определяются выражениями

$$n_{xk}^{(k)} = u_k \sin \delta_k \cos \delta_k \cos \vartheta_k, \quad n_{yk}^{(k)} = -u_k \sin^2 \delta_k, \quad (2.52)$$

$$n_{zk}^{(k)} = u_k \sin \delta_k \cos \vartheta_k \sin \vartheta_k, \quad (2.53)$$

$$e_{xk}^{(k)} = \cos \delta_k \cos \vartheta_k, \quad e_{yk}^{(k)} = -\sin \delta_k, \quad e_{zk}^{(k)} = \cos \delta_k \sin \vartheta_k; \quad (2.54)$$

$k = 1, 2.$

Чтобы орты  $\bar{e}_1^{(1)}$  и  $\bar{e}_2^{(2)}$  были направлены в одну и ту же сторону, необходимо знак второго орта заменить на противоположный. Тогда

$$e_{x1}^{(1)} = \cos \delta_1 \cos \vartheta_1, \quad e_{y1}^{(1)} = -\sin \delta_1, \quad e_{z1}^{(1)} = \cos \delta_1 \sin \vartheta_1, \quad (2.55)$$

$$e_{x2}^{(2)} = -\cos \delta_2 \cos \vartheta_2, \quad e_{y2}^{(2)} = \sin \delta_2, \quad e_{z2}^{(2)} = -\cos \delta_2 \sin \vartheta_2. \quad (2.56)$$

Для составления уравнений (2.47) и (2.48) запишем (2.51) и (2.56) в системе координат  $S_1$ . Для этого воспользуемся матрицами перехода от системы  $S_2$  к  $S_1$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_w \\ 0 & \cos \Sigma & \sin \Sigma & b_1 - b_2 \cos \Sigma \\ 0 & -\sin \Sigma & \cos \Sigma & b_2 \sin \Sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

$$L_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Sigma & \sin \Sigma \\ 0 & -\sin \Sigma & \cos \Sigma \end{vmatrix}.$$

На основании выражений

$$r_1^{(2)} = M_{12} \cdot r_2^{(2)}, \quad e_1^{(2)} = L_{12} \cdot e_2^{(2)},$$

где:  $r_1^{(2)}$  и  $e_1^{(2)}$  - столбцовые матрицы, определяющие радиус-вектор и орт нормали к поверхности  $\Pi_2$  в системе  $S_1$ ; с учетом (2.51), (2.56), (2.57) и (2.58) получим:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= x_2 - a_w, \quad y_1^{(2)} = (y_2 - b_2) \cos \Sigma + z_2 \sin \Sigma + b_1, \\ z_1^{(2)} &= z_2 \cos \Sigma - (y_2 - b_2) \sin \Sigma, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} e_{z1}^{(2)} &= e_{z2}^{(2)}, \quad e_{y1}^{(2)} = e_{y2}^{(2)} \cos \Sigma + e_{z2}^{(2)} \sin \Sigma, \\ e_{x1}^{(2)} &= e_{x2}^{(2)} \cos \Sigma - e_{y2}^{(2)} \sin \Sigma. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Используя (2.50), (2.56), (2.59) и (2.60), из условий (2.47) и (2.48) получим:

$$\cos \vartheta_1 / \cos \vartheta_2 = -\cos \delta_2 / \cos \delta_1, \quad (2.61)$$

$$\sin \vartheta_1 = -(\sin \delta_2 + \sin \delta_1 \cos \Sigma) / \sin \Sigma \cos \delta_1, \quad (2.62)$$

$$\sin \vartheta_2 = (\sin \delta_1 + \sin \delta_2 \cos \Sigma) / \sin \Sigma \cos \delta_2, \quad (2.63)$$

$$a_w = r \cos \vartheta_2 - r_1 \cos \vartheta_1, \quad (2.64)$$

$$b_1 = r_1 \operatorname{ctg} \delta_1 + (r_1 \sin \vartheta_1 - r_2 \sin \vartheta_2 \cos \Sigma) \operatorname{ctg} \Sigma - r_2 \sin \vartheta_2 \cos \Sigma, \quad (2.65)$$

$$b_2 = r_2 \operatorname{ctg} \vartheta_2 + (r_1 \sin \vartheta_1 - r_2 \sin \vartheta_2 \cos \Sigma) / \sin \Sigma. \quad (2.66)$$

Для полюса зацепления в начальной плоскости (рис. 2.10)

$$r_1 \cos \beta_1 = u_{12} r_2 \cos \beta_2, \quad (2.67)$$

где:  $u_{12} = \omega_1 / \omega_2$  - заданное переменное передаточное отношение;  $\omega_1, \omega_2$  - угловые скорости начальных поверхностей;  $\beta_1$  - угол, составленный образующей некруглого конуса  $\Pi_1$  с касательной к линии зуба;  $\beta_2$  - угол, составленный образующей некруглого конуса  $\Pi_2$  с касательной к линии зуба.

Найдем угол  $\mu$  между образующими некруглых конусов. Единичные векторы  $\bar{r}_1^{(1)}$  и  $\bar{r}_2^{(2)}$ , направленные по образующим некруглых конусов (2.50) и (2.51), определяются выражениями:



$$\begin{aligned} \tau_{x1}^{(1)} &= \sin \delta_1 \cos \vartheta_1, \quad \tau_{y1}^{(1)} = \cos \delta_1, \quad \tau_{z1}^{(1)} = \sin \delta_1 \sin \vartheta_1, \\ \tau_{x2}^{(2)} &= \sin \delta_2 \cos \vartheta_2, \quad \tau_{y2}^{(2)} = \cos \delta_2, \quad \tau_{z2}^{(2)} = \sin \delta_2 \sin \vartheta_2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

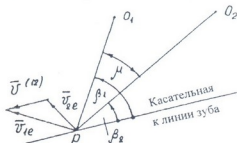


Рис. 2.10. План скоростей в касательной плоскости к начальным поверхностям

Используя матрицу (2.58), запишем (2.69) в системе  $S_1$ :

$$\begin{aligned} \tau_{z2}^{(2)} &= \sin \delta_2 \cos \vartheta_2, \quad \tau_{y2}^{(2)} = \cos \delta_2 \cos \Sigma + \sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \sin \Sigma, \\ \tau_{x2}^{(2)} &= \sin \delta_2 \sin \vartheta_2 \cos \Sigma - \cos \delta_2 \sin \Sigma. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Тогда

$$\cos \mu = \bar{r}_1. \quad \bar{r}_2 = tg \delta_1 tg \delta_2 + \cos \Sigma / \cos \delta_1 \cos \delta_2. \quad (2.71)$$

Если считать заданными векторы  $\bar{\omega}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}^{(2)}$  угловых скоростей начальных поверхностей, то вектор относительной скорости в расчетной точке

$$\bar{V}^{(2)} = (\bar{\omega}^{(1)} - \bar{\omega}^{(2)}) \times \bar{r}_p^{(1)} - \bar{R} \times \bar{\omega}^{(2)}, \quad (2.72)$$

где:  $\bar{r}_p^{(1)}$  – радиус-вектор точки  $P$  в системе координат  $S_1$ ;  $\bar{R}$  – радиус-вектор точки  $O_2$  на линии действия вектора  $\bar{\omega}^{(2)}$  в системе координат  $S_1$ .

Полагая  $\omega^{(1)} = 1$  рад/с и  $\omega^{(2)} = u_{12}$  рад/с, получим для проекции векторов, входящих в (2.72):

$$\begin{aligned} \omega_{x1}^{(1)} &= \omega_{z1}^{(1)} = 0, \quad \omega_{y1}^{(1)} = 1 \text{ рад/с}, \quad \omega_{x1}^{(2)} = 0, \quad \omega_{y1}^{(2)} = u_{12} \cos \Sigma, \\ \omega_{z1}^{(2)} &= -u_{12} \sin \Sigma, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$R_{x1} = -a_w, \quad R_{y1} = b_1 - b_2 \cos \Sigma, \quad R_{z1} = b_2 \sin \Sigma; \quad r_{x1}^{(1)} = r_1 \cos \vartheta_1,$$

$$r_{y1}^{(1)} = r_1 ctg \delta_1, \quad r_{z1}^{(1)} = r_1 \sin \vartheta_1.$$

Тогда проекции скорости относительного движения:

$$v_{x1}^{(12)} = r_1 \sin \vartheta_1 (1 - u_{12} \cos \Sigma) - u_{12} \sin \Sigma (r_1 \operatorname{ctg} \delta_1 - b_1),$$

$$v_{y1}^{(12)} = u_{12} \sin \Sigma (r_1 \cos \vartheta_1 + a_w),$$

$$v_{z1}^{(12)} = -r_1 \cos \vartheta_1 (1 - u_{12} \cos \Sigma) + a_w u_{12} \cos \Sigma.$$

Учитывая (2.55) и (2.74), уравнение зацепления запишем в виде

$$y_1 - b_1 = r_2 \sin \delta_1 / \cos \delta_2 + a_w \operatorname{ctg} \Sigma \operatorname{tg} \vartheta_1. \quad (2.75)$$

Углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  определим из уравнений:

$$\cos \beta_1 = r_2 u_{12} \sin \Sigma \cos \vartheta_2 / |\bar{v}^{(12)}| \cos \delta_1; \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 = & r_1 \sin \vartheta_1 \sin \delta_2 \cos \vartheta_2 (1 - u_{12} \cos \Sigma) - u_{12} \sin \Sigma \sin \delta_2 \times \\ & \times \cos \vartheta_2 (r_1 \operatorname{ctg} \delta_1 - b_1) + u_{12} \sin \delta_2 \sin \vartheta_2 (a_w + r_1 \cos \vartheta_1) - \\ & - r_1 \cos \vartheta_1 \cos \delta_2 \sin \Sigma (\operatorname{tg} \delta_2 \operatorname{ctg} \Sigma \sin \vartheta_2 - 1) / |\bar{v}^{(12)}|. \end{aligned} \quad (2.77)$$

В уравнениях (2.76) и (2.77)

$$|\bar{v}^{(12)}| = \sqrt{r_1^2 + u_{12}^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 u_{12} \cos \Sigma}.$$

Для ортогональной передачи получим:

$$\sin \vartheta_1 = -\sin \delta_2 / \cos \delta_1, \quad \sin \vartheta_2 = \sin \delta_1 / \cos \delta_2,$$

$$b_1 = r_1 \operatorname{ctg} \delta_1 - r_2 \sin \vartheta_2, \quad b_2 = r_2 \operatorname{ctg} \delta_2 + r_1 \sin \vartheta_1,$$

$$\cos \mu = \operatorname{tg} \delta_1 \operatorname{tg} \delta_2, \quad y_1 - b_1 = r_2 \sin \delta_1 / \cos \delta_2,$$

$$\cos \beta_1 = r_2 u_{12} \cos \vartheta_2 / |\bar{v}^{(12)}| \cos \delta_1,$$

$$\begin{aligned} \cos \beta_2 = & r_1 \sin \vartheta_1 \cos \delta_2 (1 + \operatorname{tg} \vartheta_1 \operatorname{tg} \delta_2 \cos \vartheta_2) - u_{12} \sin \delta_2 \cos \vartheta_2 \times \\ & \times (r_1 \operatorname{ctg} \delta_1 - b_1) + u_{12} \sin \delta_2 \sin \vartheta_2 (a_w + r_1 \cos \vartheta_1) / |\bar{v}^{(12)}|; \end{aligned}$$

$$|\bar{v}^{(12)}| = \sqrt{r_1^2 + u_{12}^2 r_2^2}.$$

При расчете начальных поверхностей передач с круглыми колесами в приведенных уравнениях нужно положить  $u_{12} = \operatorname{const}$ .

## 2.2. Методы нарезания колес

В современных машинах-автоматах и во многих других устройствах все более широкое применение находят некруглые зубчатые передачи с параллельными осями. Что касается некруглых колес пространственных зацеплений, то их применение ограничи-

вается из-за отсутствия производительных и точных методов нарезания зубьев на таких колесах. Метод копирования, используемый в настоящее время для нарезания некруглых колес [3, 179] пространственных зубчатых зацеплений, имеет существенный недостаток: профиль зуба некруглых колес меняется от зуба к зубу, в то время как профиль инструмента остается постоянным. Указанное обстоятельство приводит к тому, что зацепление колес, нарезаемых методом копирования, получается неправильным. Погрешность, возникающая при этом методе, пропорциональна изменению кривизны аксоидов колес и модулю нарезаемых зубьев. Поэтому метод копирования возможно использовать при нарезании колес таких передач, к которым не предъявляются большие требования по воспроизведению закона переменного передаточного отношения. Для передач точных механизмов, а также быстроходных передач больших мощностей метод копирования непригоден. В связи с этим возникает необходимость разработки современных методов нарезания зубьев некруглых колес.

### 2.2.1. Методы нарезания некруглых конических колес

При нарезании прямых зубьев некруглого конического колеса

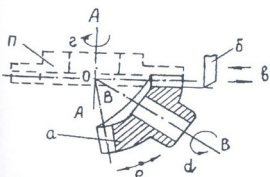


Рис. 2.11. Схема нарезания некруглых конических колес с прямыми зубьями

*a* используется два резца *б* (рис. 2.11). Резцы, совершая возвратно-поступательное движение к вершине *O* некруглого конуса по направлению *в*, как бы воспроизводят при этом впадину зубьев воображаемого производящего колеса *П*. Производящему колесу и резцам сообщается переносное вращение с постоянной угловой скоростью

вокруг оси *A-A* по направлению *2*. Находясь в зацеплении с воображаемым производящим колесом, заготовка некруглого конического колеса участвует в двух, согласованных между собой,



движениях: неравномерном относительном вокруг оси В-В в направлении  $d$  и неравномерном переносном вокруг оси, проходящей через вершину  $O$  некруглого конуса перпендикулярно плоскости чертежа по направлению  $e$ . Нарезание колес производится по методу прерывистого деления.

При нарезании круговых зубьев некруглого конического колеса

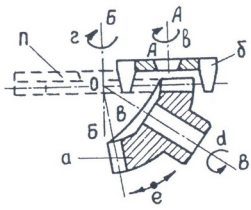


Рис. 2.12. Схема нарезания некруглого конического колеса с круговыми зубьями

$a$  в качестве режущего инструмента используется торцовая резцовая головка  $\delta$  (рис. 2.12), которой сообщается вращение вокруг оси А-А по направлению  $v$ . При этом движении прямолинейные режущие кромки резцовой головки воспроизводят впадину зуба производящего колеса П. Производящему колесу и резцовой головке сообщается переносное движение с постоянной скоростью вокруг оси

Б-Б по направлению  $z$ . Находясь в зацеплении с воображаемым производящим колесом, заготовка некруглого конического колеса участвует в согласованных между собой движениях: неравномерном относительном вокруг оси В-В по направлению  $d$  и неравномерном переносном вокруг оси, проходящей через вершину  $O$  некруглого конуса перпендикулярно плоскости чертежа по направлению  $e$ . Нарезание колес производится по методу прерывистого деления.

При нарезании некруглого конического колеса  $a$  с циклоидальной линией зубьев, в качестве режущего инструмента используется торцовая резцовая головка  $\delta$ , которая имеет одну или несколько групп резцов. Каждая группа состоит из одного или нескольких черновых и двух чистовых резцов с прямолинейными режущими кромками. Каждый чистовой резец профилирует либо вогнутую, либо выпуклую поверхность зубьев воображаемого производящего колеса П. Резцовой головке сообщается вращение вокруг оси А-А по направлению  $v$  (рис. 2.13). Производящему колесу и



резцовой головке сообщается переносное вращение с постоянной скоростью вокруг оси Б-Б по направлению  $z$ . Находясь в зацеплении с воображаемым производящим колесом, заготовка некруглого конического колеса участвует в двух согласованных между собой движениях: неравномерном относительном вокруг оси В-В по направлению  $d$  и неравномерном переносном вокруг оси Г-Г, проходящей через вершину  $O$  некруглого конуса перпендикулярно оси В-В по направлению  $e$ . Нарезание колес производится по методу непрерывного деления. Вращения по направлениям  $z$ ,  $d$  и  $e$  согласованы между собой таким образом, что группы резцов обрабатывают впадины зубьев некруглого конического колеса.

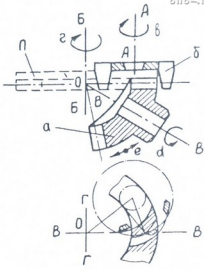


Рис. 2.13. Схема нарезания некруглого конического колеса с циклоидальной линией зубьев

При нарезании некруглого конического колеса  $a$  с эвольвентной линией зубьев, в качестве режущего инструмента используется коническая червячная фреза  $\delta$  (рис. 2.14), которой сообщается вращение

вокруг оси А-А по направлению  $v$ . При вращении фрезы можно представить, что инструментом как бы образуется воображаемое производящее колесо П, которое вращается вокруг оси Б-Б по направлению  $z$ . Производящее колесо, вращаясь вокруг оси Б-Б с постоянной угловой

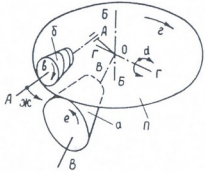


Рис. 2.14. Схема нарезания некруглого конического колеса с эвольвентной линией зубьев

скоростью, сообщает заготовке нарезаемого колеса согласованные между собой движения: неравномерное относительное вокруг оси В-В по направлению  $e$  и неравномерное переносное вокруг оси Г-Г, проходящей через вершину  $O$  некруглого конуса

перпендикулярно оси В-В и лежащей в плоскости производящего колеса по направлению  $d$ . Одновременно с этим фрезе  $\delta$  сообщается движение подачи – вращение оси А-А вокруг оси Б-Б по направлению  $ж$ . При движении фрезы  $\delta$  по направлению  $ж$ , фреза  $\delta$  и заготовка  $a$  колеса превращаются в дифференциал, поэтому заготовке сообщают дополнительные движения по направлениям  $e$  и  $d$ . Нарезание колес производится по методу непрерывного деления.

При нарезании зубьев некруглого конического колеса  $a$

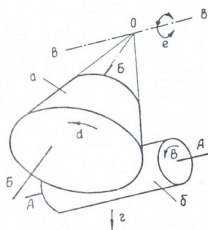


Рис. 2.15. Схема нарезания некруглого конического колеса цилиндрической червячной фрезой

цилиндрической червячной фрезой  $\delta$  (рис. 2.15), фрезе сообщаются вращение вокруг оси А-А по направлению  $в$  и подача по направлению  $z$ . Одновременно с этими движениями фрезы, заготовке  $a$  сообщаются согласованные между собой движения: неравномерное относительное вокруг оси Б-Б по направлению  $d$  и неравномерное переносное вокруг оси В-В, проходящей через вершину  $O$  некруглого конуса перпендикулярно оси Б-Б, по направлению  $e$ . Нарезание колес производится по методу непрерывного деления.

При нарезании некруглого конического колеса  $a$  конической червячной фрезой  $\delta$  с переменным модулем (рис. 2.16), фрезе сообщают вращение вокруг оси А-А по направлению  $в$  и поступательные перемещения по направлениям  $z$  и  $d$ . Одновременно с этим, заготовке  $a$  сообщают согласованные с движениями инструмента  $\delta$ , изменяющиеся по заданному закону изменения некруглости аксоида нарезаемого колеса, согласованные между собой движения, одно из которых относительное вокруг своей оси Б-Б по направлению  $e$ , а другое – переносное вокруг оси В-В, проходящей в вершине некруглого конуса  $O$  перпендикулярно оси Б-Б по направлению  $ж$ . Закон изменения некруглости аксоида колеса определяется зависимостью



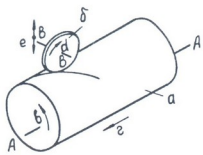


Рис. 2.17. Схема нарезания некруглого цилиндрического червяка

направлению  $z$ . Одновременно с этим, фрезе  $б$  сообщают вращение вокруг оси В-В по направлению  $d$  и перемещение, согласованное с винтовым движением, с переменной линейной скоростью перпендикулярно оси А-А по направлению  $e$  [91].

При нарезании некруглого конического червяка  $a$  (рис. 2.18) закрепление заготовки должно обеспечить возможность разворота вокруг вершины  $O$  конуса таким образом,

чтобы образующая делительного некруглого конуса была перпендикулярна оси симметрии  $б-б$  режущего инструмента  $в$ . Затем заготовке сообщают неравномерное относительное вращение вокруг оси А-А по направлению  $z$  и неравномерное переносное движение вокруг оси, проходящей через вершину  $O$  перпендикулярно оси А-А по направлению  $d$ . Одновременно с этим режущему инструменту сообщают перемещение с постоянной скоростью по направлению  $e$ .

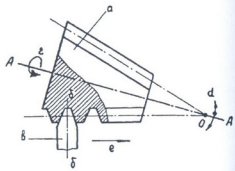


Рис. 2.18. Схема нарезания некруглого конического колеса

### 2.2.3. Метод нарезания спироидного зубчатого колеса

Нарезание зубьев спироидного зубчатого колеса  $a$  производится цилиндрической червячной фрезой  $б$  (рис. 2.19). Фрезе  $б$  сообщают вращение вокруг оси А-А с постоянной скоростью по направлению  $в$ . Заготовке колеса сообщают вращение с переменной скоростью вокруг оси Б-Б по направлению  $z$ . Одновременно с этим фрезе сообщают согласованное с вращением заготовки перемещение с переменной линейной скоростью вдоль оси Б-Б по направлению  $d$  [96]. Нарезание зубьев производится по методу непрерывного деления.

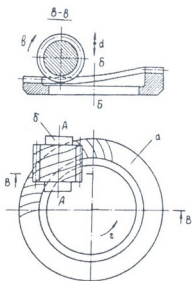


Рис. 2.19. Схема нарезания спиридного зубчатого колеса

#### 2.2.4. Метод нарезания арочных зубьев некруглого цилиндрического колеса

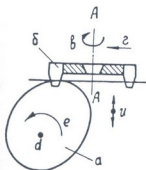


Рис. 2.20. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с арочными зубьями

При нарезании арочных зубьев некруглого цилиндрического колеса  $a$  в качестве режущего инструмента используется резцовая головка  $б$  (рис. 2.20), которой сообщают вращение вокруг оси  $A-A$  и перемещение с равномерной скоростью по направлениям  $в, з$ . Одновременно с этим заготовке сообщают: неравномерное относительное вращение вокруг оси  $d$  в направлении  $e$  и неравномерное поступательное движение параллельно оси  $A-A$  по направлению  $и$ . После выхода зубьев резцовой головки из заготовки она возвращается в исходное положение, производится поворот заготовки на угловой шаг и нарезается следующий зуб колеса.

## 2.2.5. Методы нарезания сферических колес



При нарезании прямых зубьев сферического колеса  $a$  используются два резца  $b$  (рис. 2.21). Резцы, совершая возвратно-поступательное движение по направлению  $v$ , как бы воспроизводят впадину зубьев воображаемого производящего колеса  $\Pi$ . Производящему колесу и резцам сообщается переносное вращение вокруг оси  $A-A$  по направлению  $z$ . Заготовке сферического колеса, находящейся в зацеплении с воображаемым производящим колесом, сообщается относительное движение вокруг оси  $B-B$  по направлению  $d$ .

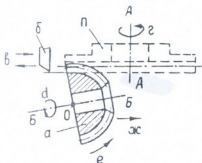


Рис. 2.21. Схема нарезания сферического колеса

Одновременно с этим заготовке сообщается движение перекачивания по начальной плоскости производящего колеса: относительное движение вокруг оси, проходящей в точке  $O$  перпендикулярно плоскости чертежа по направлению  $e$ , и перемещение по направлению  $ж$ . Нарезание зубьев производится по методу прерывистого деления.

При нарезании прямых, косых зубьев сферического колеса  $a$  (рис. 2.22) применяется коническая червячная фреза  $b$ . Фрезу разворачивают относительно диаметральной плоскости  $A-A$  колеса на угол подъема винтовой линии и устанавливают относительно заготовки так, чтобы обеспечивалось равенство модулей фрезы и колеса в диаметральной плоскости  $A-A$ . Заготовке колеса сообщают относительное движение вокруг оси  $B-B$  по направлению  $v$ , а фрезе – вращение вокруг оси  $B-B$  по направлению  $z$ . Одновременно с этим, фрезе сообщают перемещение вдоль оси  $B-B$  по направлению  $d$ , а заготовке колеса – относительное движение вокруг оси  $\Gamma-\Gamma$ , лежащей в диаметральной плоскости  $A-A$  и расположенной в плане параллельно оси  $B-B$  по направлению  $e$ . Фреза перемещается вдоль оси  $B-B$  по направлению  $d$  таким образом, чтобы при вращении заготовки вокруг оси  $\Gamma-\Gamma$  по направлению  $e$ , в текущем полюсе зацепления соблюдалось бы равенство модулей фрезы и колеса. При движении фрезы  $b$  по направлению  $d$  заготовке сообщают дополнительные движения по

направлениям  $v$  и  $e$ . Колеса нарезаются по методу непрерывного деления.

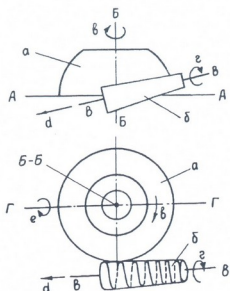


Рис. 2.22. Схема нарезания сферического колеса

### 2.3. Методы нарезания некруглых цилиндрических колес с применением числового программного управления

Для нарезания некруглых цилиндрических колес в настоящее время используются станки, которые имеют следующие недостатки:

1. Переход на другой вид изделия связан, как правило, с изготовлением новых кулачков, что требует больших затрат времени и материальных средств.

2. Кулачки и рычаги, задающие программу работы станка, воспринимают усилие обкатки, в результате чего в копирующей системе происходят деформации и износ, снижающие точность обработки.

3. Недостаточная жесткость и кинематическая точность длинных кинематических цепей привода кулачков снижают точность обработки.

4. Нарезание колес производится методом непрерывного



огибания, резание происходит при нежестко закрепленной заготовке, что отрицательно влияет на точность нарезаемых зубьев.

Отмеченные недостатки являются препятствием для применения существующих методов нарезания некруглых колес в мелкосерийном и особенно в индивидуальном производстве.

Для нарезания некруглых зубчатых колес особенно эффективно можно использовать числовое программное управление (ЧПУ), которое обеспечивает следующие преимущества:

1. Управляющую программу высокой точности можно рассчитать и получить с использованием ЭВМ, поэтому ее изготовление значительно дешевле, чем высокоточных кулачков.
2. Не требуется сложная переналадка станка: переход от одного вида изделия к другому требует лишь смены управляющей программы.
3. Управляющий орган отделен от передачи усилия.
4. Станки имеют сравнительно короткую кинематическую цепь и оснащены обратной связью, что значительно повышает точность нарезаемых зубьев.
5. Возможно использование метода прерывистого огибания, при котором резание зубьев осуществляется при жестко закрепленной заготовке, что обеспечивает получение высококачественных колес.
6. Шлифование зубьев возможно проводить на том же станке, на котором нарезаются зубья.
7. Нарезание колес можно осуществить как на специальных, так и на универсальных фрезерных станках, оснащенных системой ЧПУ.

Метод прерывистого огибания, используемый для нарезания цилиндрических некруглых зубчатых колес с применением универсального оборудования [75], наряду с преимуществами, обладает следующими недостатками: 1) обработка каждой стороны зуба производится за два прохода, профиль зуба получается приближенным, очерченным двумя пересекающимися прямыми; 2) низкая производительность.

Для устранения указанных недостатков можно использовать метод прерывистого огибания, основанный на применении системы ЧПУ. При этом в качестве инструмента используется вращающаяся рейка 1 (рис. 2.23). Во время резания, как и обычно





На рис. 2.23 вращающаяся рейка, в целях упрощения, показана состоящей из двух дисковых фрез. Шаг зубьев  $p_t$  условно разбит на четыре равные части. Первое перемещение фрезы производится из положения 1 в положение 5, показанное пунктиром, затем после очередных двойных ходов, фреза перемещается последовательно в положения 6 и 7; вместо последнего, четвертого перемещения фреза движется обратно из положения 7 в положение 1. После этого описанный цикл перемещения фрезы повторяется до окончания обработки всех зубьев. При каждом перемещении фрезы по координате  $x$ , заготовке сообщаются дискретные повороты и смещения, соответствующие перемещению фрезы в прямом направлении на величину  $p_t/4$ .

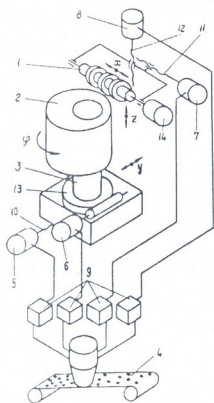


Рис. 2.24. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с применением ЧПУ

Движение рабочих органов станка в процессе обработки осуществляется с помощью системы ЧПУ с использованием электродвигателей в качестве автономных приводов для: а) перемещения фрезерной головки с фрезой вдоль ее оси; б) поворота заготовки вокруг ее оси; в) поступательного движения стола с заготовкой; г) поступательного движения фрезы вдоль образующей зуба. Программа каждого из четырех перемещений, обеспечивающих прерывистое огибание, записывается на соответствующих дорожках программноносителя 4 (рис. 2.24). Усиление, формирование и распределение по фазам электродвигателей 5, 6, 7 и 8 сигналов, считанных с программноносителя 4, осуществляются электронными устройствами 9 программного управления. Электродвигатели 5, 6, 7 и 8, с помощью винтовых пар качения 10, 11,

12 и червячной пары 13, сообщают дискретные перемещения фрезе 1 и заготовке 2 по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  и  $z$ . Вращение фрезы 1 вокруг своей оси осуществляется обычным образом от асинхронного электродвигателя 14.

При нарезании некруглых цилиндрических зубчатых колес с косыми зубьями фрезу 1 разворачивают на угол наклона зубьев. Движение рабочих органов по координатам  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  осуществляется по описанному выше способу, а перемещение фрезы по координате  $z$  производится под углом, равным углу наклона линии зубьев.

Описанный метод прерывистого огибания возможно также осуществить, если фрезе сообщить только движение резания, а заготовке – движение огибания. Рассмотрим метод шлифования зубьев при таком относительном движении фрезы [90]. Шлифование зубьев колеса 1 осуществляется коническим шлифовальным кругом 2 (рис. 2.25), которому сообщают возвратно-поступательное движение вдоль образующей по координате  $y$ .

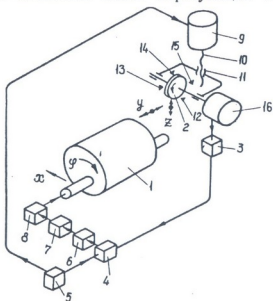


Рис. 2.25. Схема шлифования зубьев некруглого цилиндрического колеса с применением ЧПУ

Датчик 3 измеряет мощность резания; сигнал от датчика поступает в сравнивающее устройство – сумматор 4, где он



суммируется алгебраически с эталонным сигналом, поступающим от программирующего устройства 5. Разностный сигнал преобразуется в усилителе 6 и подается в сервомеханизм 7, далее, через механическое, гидравлическое или электрическое устройство 8 осуществляются дискретные движения огибания, включающие вращение заготовки 1 по координате  $\varphi$  и перемещение по координате  $x$ . Одновременно с этим, от программирующего устройства 5 через электродвигатель 9, винт 10, гайку 11 шлифовальному кругу 2 сообщают согласованные с движениями огибания возвратно-поступательные перемещения перпендикулярно оси заготовки по координате  $z$ . Для исключения влияния износа конического шлифовального круга на точность обработки зубчатых колес предусмотрен непрерывный контроль профиля шлифовального круга, осуществляемый алмазами 12 и 13. Размеры шлифовального круга определяются установочным положением алмазов правки 14 и 15. Вращение фрезы 2 осуществляется обычным образом, от электродвигателя 16.

При нарезании арочных зубьев заготовку некруглого цилиндрического колеса  $a$  закрепляют неподвижно (рис. 2.26). Резцовой головке  $\delta$  сообщают вращение вокруг оси А-А по направлению  $v$  и поступательное перемещение вдоль оси А-А по направлению  $z$ , до соприкосновения ее начальной плоскости с центроидой колеса. После этого резцовой головке  $\delta$  сообщается перемещение в исходное положение вдоль оси А-А по направлению  $d$ , заготовке придают дискретные перемещения: вокруг своей оси вращения  $e$  в направлении  $u$ ; перпендикулярно к оси А-А по направлению  $ж$ . Затем заготовку закрепляют неподвижно и описанный цикл дискретного огибания повторяют до окончательной обработки зуба [98].

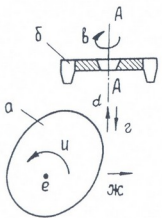


Рис. 2.26. Схема нарезания арочных зубьев некруглого цилиндрического колеса

После этого резцовой головке  $\delta$  сообщается перемещение в исходное положение вдоль оси А-А по направлению  $d$ , заготовке придают дискретные перемещения: вокруг своей оси вращения  $e$  в направлении  $u$ ; перпендикулярно к оси А-А по направлению  $ж$ . Затем заготовку закрепляют неподвижно и описанный цикл дискретного огибания повторяют до окончательной обработки зуба [98].

Описанные методы дают возможность: 1) сохранения важного преимущества метода прерывистого огибания – резания при



неподвижно, жестко закрепленной заготовке; 2) уменьшения огранки профиля и, следовательно, повышения ее точности путем увеличения числа делений шага и отрезков прямых, воспроизводящих профиль зуба; 3) нарезания высококачественных некруглых цилиндрических зубчатых колес путем фрезерования, что существенно увеличивает производительность обработки.

#### 2.4. Метод нарезания некруглых цилиндрических колес с внешними, внутренними зубьями с применением числового программного управления

Метод прерывистого огибания возможно использовать для нарезания некруглых цилиндрических колес с внешними, внутренними зубьями (рис. 2.27, 2.28). Метод нарезания эвольвентного профиля зубьев некруглых колес с помощью долбяка заключается в следующем. Окружной шаг  $P_1$  долбяка 1 делят на равные или неравные части. Число делений шага может быть выбрано в зависимости от требуемой точности воспроизведения эвольвентного профиля зуба нарезаемого колеса. При делении окружного шага  $P_1$  на равные  $n$  части, длина одной дуги равна  $P_1/n$ . Для примера окружной шаг долбяка разделим на две равные части (рис. 2.27, 2.28). Определяем дискретный центральный угол, соответствующий длине одной дуги  $\Delta\varphi_1 = \varphi_1/n$ , где  $\varphi_1$  – центральный угол долбяка, соответствующий угловому шагу  $P_1$ . Определяют дискретный угол поворота  $\Delta\varphi_2$  заготовки 2 вокруг точки  $O_2$  вращения нарезаемого колеса 1 и дискретное расстояние  $\Delta u$  между точками  $O_1$ ,  $O_2$  соответствующее повороту долбяка 1 на дискретный угол  $\Delta\varphi_1$ .

При нарезании некруглых колес с наружными, внутренними зубьями (рис. 2.29, 2.30) от электродвигателя 3, с помощью зубчатого сектора 4, круглой рейки 5, вала 6, долбяку 1 сообщают перемещение по координате  $z$  вверх в исходное положение. От электродвигателя 7 с помощью червяка 8, червячного колеса 9, оправки 10 заготовку 2 поворачивают на дискретный угол  $\Delta\varphi_2$  вокруг точки  $O_2$ . От электродвигателя 11, с помощью червяка 12, червячного колеса 13, вала, 6 долбяк 1 поворачивают на угол  $\varphi_1$  так.

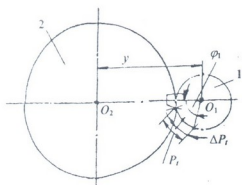


Рис. 2.27. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с наружными зубьями

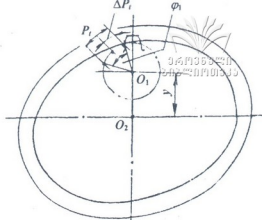


Рис. 2.28. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями

чтобы ось симметрии зуба долбяка была расположена вдоль максимального или минимального радиуса колеса 2 (рис. 2.29, 2.30). От электродвигателя 14, с помощью винта 15, гайки 16, стола 17, заготовку 2 перемещают по координате  $y$  в направлении долбяка 1 так, чтобы зуб долбяка 1 был врезан в заготовку 2 на определенную высоту впадины зуба колеса. После окончания установочных передвижений заготовку 2 закрепляют неподвижно. От электродвигателя 3 с помощью зубчатого сектора 4, круглой рейки 5, вала 6 долбяку 1 сообщают перемещение по координате  $z$  вниз в направлении заготовки 2. После выхода долбяка 1 из заготовки 2 от электродвигателя 14, с помощью винта 15, гайки 16, стола 17, заготовку 2 перемещают по координату  $y$ , заготовку 2 отводят от долбяка 1. От электродвигателя 3, с помощью зубчатого сектора 4, вращающейся рейки 5, вала 6, долбяк 1 перемещают по координате  $z$  вверх в исходное положение. От электродвигателя 11 с помощью червяка 12, червячного колеса 13, вала 6, долбяку 1 сообщают дискретный поворот на угол  $\Delta\varphi_1$  и закрепляют неподвижно. От электродвигателя 7, с помощью червяка 8, червячного колеса 9, оправки 10, заготовке 1 сообщают дискретный поворот на угол  $\Delta\varphi_2$  и закрепляют неподвижно. От электродвигателя 14 с помощью винта 15, гайки 16, стола 17, заготовке 2 сообщают дискретное  $\Delta y$  перемещение по координате  $y$  в направлении долбяка 1 так, чтобы зуб долбяка был врезан в заготовку 2 на определенную высоту впадины зуба колеса. От электродвигателя 3 с помощью зубчатого сектора 4, вращающейся рейки 5, вала 6 долбяку 1 сообщают перемещение по координате  $z$  в направлении

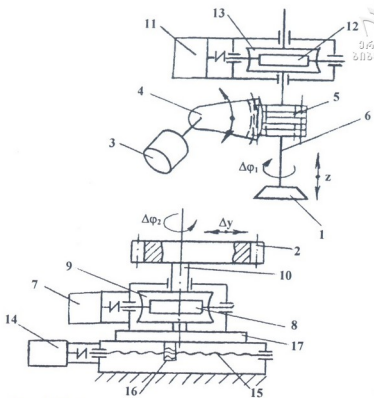


Рис. 2.29. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с наружными зубьями с применением

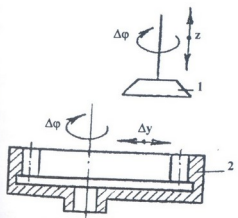


Рис. 2.30. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями с применением ЧПУ

заготовки 2. После выхода долбяка 1 из заготовки 2, заготовку отводят от долбяка, долбяк перемещают в исходное положение, поворачивают на угол  $\Delta\varphi_1$  и закрепляют неподвижно. Заготовке 2 сообщают дискретные перемещения по координатам  $\Delta\varphi_2$  и  $\Delta y$  в направлении долбяка, закрепляют неподвижно и описанный цикл дискретного огибания повторяют до нарезания всех зубьев.

При нарезании косозубых

## 2.5. Параметры движения при нарезании некруглых конических колес наружного зацепления по методу непрерывного огибания

Для определения параметров движения при нарезании некруглых конических колес наружного зацепления по методу непрерывного огибания введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 2.31): неподвижную систему координат  $S(x, y, z)$ , жестко связанную со стойкой станка; подвижные системы координат  $S_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1,2$ ) и  $S_n(x_n, y_n, z_n)$ , жестко связанные соответственно с нарезаемыми колесами 1, 2 и производящим колесом П [80].

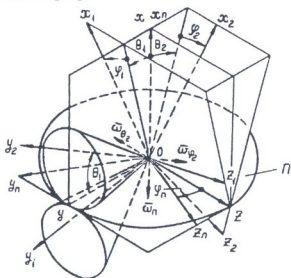


Рис. 2.31. Системы координат в станочном зацеплении при нарезании некруглых конических колес

Нарезание зубьев некруглого конического колеса может быть осуществлено при обкатке без скольжения его аксоида, начального некруглого конуса, по коническому аксоиду производящего колеса или по плоскому производящему колесу.

При обкатке некруглого конического колеса 1 по коническому аксоиду производящего колеса, осью вращения является  $x_{01}$





(рис. 2.32). Аксоидом производящего колеса служит конус  $\delta_{n1} = 90^\circ - \theta_{f1}$ . Соответственно, при обкатке некруглого конического колеса 2 осью вращения является  $x_{o2}$ ; аксоидом производящего колеса является конус с углом  $\delta_{n2} = 90^\circ + \theta_{f2}$ ,  $\delta_{n1} \neq \delta_{n2}$ . Поэтому нарезанные некруглые колеса, при зацеплении друг с другом, не будут воспроизводить требуемый закон изменения передаточного отношения.

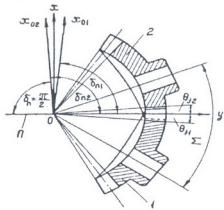


Рис. 2.32. Конические производящие колеса

Для получения требуемого закона изменения передаточного отношения необходимо, чтобы аксоидом некруглого конического колеса при нарезании и при зацеплении был бы один и тот же некруглый конус. Этого можно добиться, если ось вращения производящего колеса  $Ox$  будет перпендикулярна образующим начального некруглого конуса, а  $\delta_{n1}$  и  $\delta_{n2}$  совпадут друг с другом и будут равняться  $\delta_n = 0,5\pi$ . При этом производящей поверхностью будет плоскость, а на некруглых конических колесах 1 и 2 получатся равновысокие зубья.

При равномерном вращении производящего колеса вокруг  $Ox$  (рис. 2.31) со скоростью  $\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt}$  ( $\varphi_n$ -угол поворота производящего колеса) заготовка некруглого конического колеса участвует в следующих движениях:

1. Неравномерном относительном движении вокруг оси  $Oy_k$  с угловой скоростью  $\omega_{\varphi_k} = \frac{d\varphi_k}{dt}$ , где  $\varphi_k$ -угол поворота заготовки некруглого колеса вокруг своей оси при нарезании колеса ( $k=1,2$ ).

2. Неравномерном переносном движении вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega_{\theta_k} = \frac{d\theta_k}{dt}$ , где  $\theta_k$ -переменный угол между плоскостью производящего колеса и осью нарезаемого колеса.

Для того чтобы аксоид нарезаемого колеса перекатывался без скольжения по аксоиду плоского производящего колеса, необходимо, чтобы вектор относительной угловой скорости

$$\bar{\omega}_{отн} = \bar{\omega}_{\varphi_k} + \bar{\omega}_{\theta_k} - \bar{\omega}_n \quad (2.78)$$

был бы направлен по образующей касания некруглого конуса и плоского производящего колеса.

Столбцевую матрицу радиус-вектора  $r^{(k)}$  образующей аксоида нарезаемого колеса в неподвижной системе координат  $S$  представим в виде

$$r^{(k)} = M_{ок} \cdot r_k,$$

где  $M_{ок}$  – матрица перехода от системы  $S_k$  к системе  $S$ ;  $r^{(k)}$  и  $r_k$  – столбцевые матрицы радиус-векторов образующих аксоидов в системах  $S$  и  $S_k$ .

При  $k=1$  матрица  $M_{01}$  имеет вид

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 \cos \varphi_1 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \theta_1 \cos \varphi_1 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \varphi_1 \end{vmatrix}. \quad (2.79)$$

С учетом (2.75) и (2.79) радиус-вектор образующей аксоида запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(1)} = & q_0 \bar{i} \left[ \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \cos \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) - \sin \theta_1 \right] + \\ & + q_0 \bar{j} \left[ \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \right] - \\ & - q_0 \bar{k} \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin(\psi_1 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Вектор относительной угловой скорости в системе  $S$  определяется выражением

$$\bar{\omega}_{отн} = \bar{i} \left( -\sin \theta_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_n}{dt} \right) + \bar{j} (\cos \theta_1) \frac{d\varphi_1}{dt} + \bar{k} \left( \frac{d\theta_1}{dt} \right).$$

Векторы  $\bar{\omega}_{отн}$  и  $\bar{r}^{(1)}$  коллинеарны, поэтому можно написать:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\sin \theta_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_n}{dt}}{\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \cos \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) - \sin \theta_1} = \\
 & = \frac{\cos \theta_1 \frac{d\varphi_1}{dt}}{\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1} = \\
 & = \frac{\frac{d\theta_1}{dt}}{\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin(\psi_1 - \varphi_1)}. \tag{2.80}
 \end{aligned}$$

Так как производящая поверхность – плоскость, проекции векторов  $\vec{\omega}_{\text{отн}}$  и  $\vec{r}^{(1)}$  на ось  $x$  равны нулю. Учитывая это, а также равенство

$$\frac{\frac{d\theta_1}{dt}}{\frac{d\varphi_1}{dt}} = \frac{d\theta_1}{d\varphi_1},$$

зависимость (2.80) приведем к виду

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_n}{dt} \frac{1}{\sin \theta_1}; \tag{2.81}$$

$$\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \cos(\psi_1 - \varphi_1) - \operatorname{tg} \theta_1 = 0; \tag{2.82}$$

$$\frac{d\theta_1}{d\varphi_1} = \frac{\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin(\psi_1 - \varphi_1)}{-\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \operatorname{tg} \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) - 1}. \tag{2.83}$$

Дифференцируя уравнение (2.82), как тождество, относительно  $\varphi_1$  получим

$$\sin \Sigma \left\{ \left[ u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma \right] \left[ \sin(\psi_1 - \varphi_1) \left( \frac{d\psi_1}{d\varphi_1} - 1 \right) \right] - \right.$$

$$\frac{-\cos(\psi_1 - \varphi_1) \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] \frac{d\psi_1}{d\varphi_1}}{[u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma]^2} + (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1) \frac{d\theta_1}{d\varphi_1} = 0. \quad (2.84)$$

Учитывая

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta_1 = \frac{[u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma]^2 \sin^2 \Sigma \cos^2(\psi_1 - \varphi_1)}{[u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma]^2}$$

и (2.83), получим:

$$\frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] \frac{1}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} + \operatorname{tg}(\psi_1 - \varphi_1) = 0. \quad (2.85)$$

Для определения законов переносного и относительного движения при нарезании колеса  $k = 2$ , учитывая

$$\frac{d}{d\psi_2} [u_{12}^*(\psi_2)] = \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] \frac{d\psi_1}{d\psi_2} = - \frac{\frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)]}{u_{12}(\psi_1)},$$

после аналогичных преобразований получим следующие уравнения:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_n}{dt} \frac{1}{\sin \theta_2}; \quad (2.86)$$

$$\frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \cos[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] + \operatorname{tg} \theta_2 = 0; \quad (2.87)$$

$$- \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] \frac{1}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} + \operatorname{tg}[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] = 0; \quad (2.88)$$

$$\frac{d\theta_2}{d\varphi_2} = \frac{\frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \sin[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2]}{- \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \operatorname{tg} \theta_2 \cos[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] + 1}, \quad (2.89)$$

где  $\psi_2(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} \frac{d\psi_1}{u_{12}(\psi_1)}$  – угол поворота ведомого некруглого колеса при зацеплении его с ведущим колесом.

Для определения параметров движения при нарезании некруглых конических колес с эвольвентной линией зубьев, введем следующие системы координат (рис. 2.33): неподвижные  $S(x, y, z)$  и

$S_h(x_h, y_h, z_h)$ , связанные соответственно с производящим и нарезаемым колесами, и подвижные  $S_a(x_a, y_a, z_a)$ ,  $S_n(x_n, y_n, z_n)$ ,  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  и  $S_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1,2$ ), связанные соответственно с червячной фрезой, производящим и нарезаемым колесами. При нарезании колеса лезвостаночная червячная фреза, вращаясь вокруг оси  $O_n z_n$  с угловой скоростью  $\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt}$ , при-

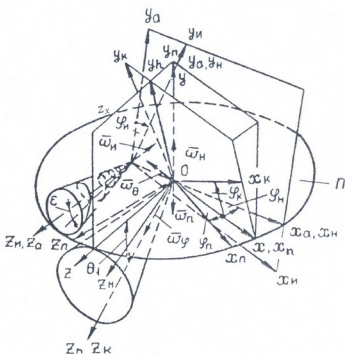


Рис. 2.33. Системы координат в станочном зацеплении при нарезании некруглого конического колеса с эвольвентной линией зубьев

водит производящее колесо П во вращательное движение вокруг оси  $O_n y_n$  с угловой скоростью  $\omega_n = \omega_n z_n$ , где  $z_n$  — число зубьев производящего колеса. Обкатываясь по плоскому производящему колесу, нарезаемое некруглое коническое колесо участвует в двух движениях: 1) неравномерном переносном вокруг оси  $O_h x_h$  с угловой скоростью  $\omega_\theta = \frac{d\theta_k}{dt}$ ; 2) относительном вокруг оси  $O_k z_k$

с угловой скоростью  $\omega_\varphi = \frac{d\varphi_k}{dt}$ . Одновременно с этим, фрезе сообщается движение подачи, вращение вокруг оси  $O_kV_k$  с угловой скоростью  $\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt}$ , где  $\varphi_n$  – угол поворота фрезы вокруг оси  $O_nV_n$ .

При установлении зависимости между параметрами движения производящего и нарезаемого колес исходим из того положения, что для обеспечения обкатки без скольжения аксоида нарезаемого некруглого конического колеса по плоскому производящему колесу необходимо, чтобы вектор относительной угловой скорости был бы направлен по образующей касания плоского производящего колеса и аксоида нарезаемого колеса.

Относительная угловая скорость в системе  $S$ , при  $k=1$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{\text{отн}} = & \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \cos \varepsilon \sin \varphi_n - \frac{d\theta_1}{dt} \right) \bar{i} + \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \sin \varepsilon - \frac{d\varphi_1}{dt} \sin \theta_1 - \right. \\ & \left. - \frac{d\varphi_n}{dt} \right) \bar{j} + \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \cos \varepsilon \cos \varphi_n - \frac{d\varphi_1}{dt} \cos \theta_1 \right) \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.90)$$

где  $\varepsilon$  – угол между образующей конуса и осью вращения фрезы.

Используя коллинеарность векторов  $\bar{r}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}_{\text{отн}}$ , получим уравнения:

для колеса  $k=1$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} = & \frac{1}{\sin \theta_1} \left( \sin \varepsilon - \frac{l'}{z_n \pm i} \right) \frac{d\varphi_n}{dt}, \\ \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \cos(\psi_1 - \varphi_1) - \operatorname{tg} \theta_1 = & 0, \\ - \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] [u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma] + [u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma] \times \\ \times [u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma + a_1 \sin \Sigma \cos(\psi_1 - \varphi_1) \operatorname{ctg} \varepsilon \cos \varphi_n^{(1)}] \times \\ \times \operatorname{tg}(\psi_1 - \varphi_1) + a_1 \operatorname{ctg} \varepsilon \sin \psi_n^{(1)} \{ \sin^2 \Sigma \cos^2(\psi_1 - \varphi_1) + \\ + [u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma]^2 \} = & 0; \end{aligned} \quad (2.91)$$

для колеса  $k = 2$



$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{1}{\sin\theta_2} \left( \sin\varepsilon + \frac{1}{z_n \pm i} \right) \frac{d\varphi_n}{dt}, \\ \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \cos[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] + \operatorname{tg}\theta_2 &= 0, \\ [1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]^2 \left\{ \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] - \operatorname{tg}[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] \right\} - \\ - u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma \frac{d}{d\psi_1} [u_{12}(\psi_1)] [1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma] + \\ + \{ 1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma + a_2 u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma \cos[\psi_2(\psi_1) - \\ - \varphi_2] \operatorname{ctg}\varepsilon \cos \varphi_n^{(2)} \} \operatorname{tg}[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] [1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma] + \\ + a_2 \operatorname{ctg}\varepsilon \sin \psi_n^{(2)} \{ u_{12}^2(\psi_1) \sin^2 \Sigma \cos^2[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] + \\ + [1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]^2 \} &= 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Здесь  $a_1 = \frac{z_n \pm i}{z_n \pm i - 1}$ ,  $a_2 = \frac{z_n \pm i}{z_n \pm i + 1}$  учитывают добавочное вращение фрезы; знак перед  $i$  выбирается в зависимости от направления вращения фрезы вокруг оси производящего колеса;

$\varphi_n^{(1)} = \frac{z_1}{z_n \pm i} \varphi_1$ ,  $\varphi_n^{(2)} = \frac{z_2}{z_n \mp i} \varphi_2$  – углы поворота фрезы вокруг оси производящего колеса;  $z_1, z_2$  – числа зубьев нарезаемых колес.

Уравнения (2.81, 2.82, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88, 2.91, 2.92) позволяют получить зависимости вида

$$\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_n); \quad \theta_1 = \theta_1(\varphi_n); \quad (2.93)$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_n); \quad \theta_1 = \theta_1(\varphi_n), \quad (2.94)$$

определяющие связь между угловыми перемещениями нарезаемого и производящего колес.

## 2.6. Параметры движения при нарезании некруглых конических колес по методу прерывистого огибания

Нарезание некруглых конических колес по методу непрерывного огибания связано с реконструкцией существующего



оборудования или проектированием нового зуборезного станка. В ряде случаев с успехом могут быть использованы некруглые конические колеса, нарезанные по методу прерывистого огибания. Такое нарезание можно осуществить на универсальном оборудовании с помощью приспособления.

При нарезании некруглых конических колес по методу прерывистого огибания, нужно найти положение мгновенной оси вращения  $OP$  – линии касания аксоидов производящего и нарезаемого колес, определяемой углом  $\nu^{(1)}$ , который образуется осью  $OP$  с линией  $Oy$  и отсчитывается от оси  $Oy$  к оси  $Oz$  (рис. 2.34, 2.35). Используя выражение для  $\bar{r}^{(1)}$ , угол  $\nu^{(1)}$  определим зависимостью

$$tg \nu^{(1)} = \frac{z^{(1)}}{y^{(1)}} = \frac{\sin(\psi_1 - \varphi_1)}{\sin \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) + \cos \theta_1 \frac{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}}. \quad (2.95)$$

При нарезании некруглого конического колеса по методу прерывистого огибания применяется дисковая фреза, имитирующая производящее колесо с одним зубом. Примем, что плоскость симметрии фрезы совпадает с плоскостью  $xOy$  неподвижной системы координат, в которой задаются угловые перемещения производящего и нарезаемого колес. При нарезании впадины должно существовать положение, при котором линия  $OP$  принадлежит плоскости симметрии зуба производящего колеса; в противном случае впадины некруглого конического колеса не будут иметь полной глубины (рис. 2.34).

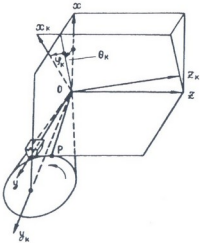


Рис. 2.34. К определению положения мгновенной оси вращения

Это требование приводит еще к одной зависимости, дополняющей уравнения (2.81, 2.82, 2.85). Для получения этой зависимости представим сначала, что производящее колесо является многозубым. Пусть при  $\psi_1 = \psi_{10}$  мгновенная ось





вращения занимает положение  $OP_0$ , определяемое углом  $\varphi_n$  (рис. 2.35, а). Линия  $OP_0$  совпадает с линией  $OM$ , принадлежащей плоскости симметрии зуба № 0 производящего колеса. Некоторому новому значению параметра  $\psi_1$  соответствуют углы  $\varphi_n$  и  $v_0^{(1)}$  (рис. 2.35, б). После поворота на угол  $\varphi_n$  линия  $OM$  производящего колеса займет новое положение и составит с линией  $Oy$  угол  $\varphi_n - v_0^{(1)}$  (рис. 2.35, а и б).

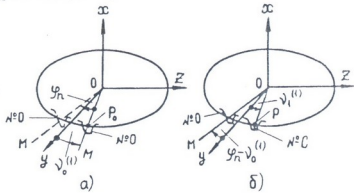


Рис. 2.35. К определению положения мгновенной оси вращения

Для того чтобы линия  $OP$  совпадала с осью симметрии зуба №  $C$  производящего колеса, должно выполняться условие

$$\varphi_n - v_0^{(1)} + v_1^{(1)} = C \frac{2\pi}{z_n}, \quad (2.96)$$

где коэффициенту  $C$ , определяющему номер рассматриваемого зуба производящего колеса, следует придавать значения  $C=0, 1, 2, 3$  и т.д.

Для определения угла  $v_0^{(1)}$  в уравнении (2.95) необходимо принять  $\varphi_1 = 0$  и  $\psi_1 = \psi_{10}$ , где  $\psi_{10}$  – параметр, определяющий положение образующей  $OP_0$  аксоида нарезаемого колеса (здесь индекс 10 обозначает, что  $\psi_1$  придано начальное значение). Этой образующей аксоид касается начальной плоскости производящего колеса в исходном его положении. При  $\varphi_n = 0$ ,  $v_0^{(1)} = v^{(1)}$  и  $C=0$  образующая  $OP_0$  совпадает с осью симметрии зуба № 0

производящего колеса. При расчете начальных установок колеса для нарезания каждой впадины коэффициенту  $C$  нужно последовательно придавать значения 0, 1, 2, 3 и т.д.

Формулы (2.95) и (2.96) позволяют определить такие значения  $\psi_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  и  $\varphi_n$ , при которых мгновенная ось вращения принадлежит плоскости симметрии зуба № С производящего колеса. Для того чтобы плоскость симметрии зуба № С воображаемого производящего колеса совпала с плоскостью  $xOy$  нужно повернуть вокруг оси  $Ox$  производящее и нарезаемое колеса, жестко (мысленно) связанные между собой, на угол  $v^{(1)}$  до совпадения  $OP$  с  $Oy$ . Для нарезания первой впадины угол поворота вокруг оси  $Ox$  должен быть равен  $v_0^{(1)}$ .

Для воспроизведения принципа огибания нужно также найти значения  $\varphi'_n$ , соответствующие повороту производящего колеса после прорезания каждой впадины на долю углового шага. Для этого используем систему уравнений (2.81, 2.82, 2.85) при условии, что

$$\varphi'_n = \varphi_n + C \frac{2\pi}{z_n}, \quad (2.97)$$

где значения  $\varphi_n$  должны удовлетворять уравнению (2.96);  $C$  – коэффициент, последовательно принимающий значения, близкие к  $1/4$ ,  $1/2$ ,  $3/4$ . Используя уравнения (2.81, 2.82, 2.85) и (2.97), нужно рассчитать значения  $\varphi'_n$ ,  $\theta'_1$  и  $\varphi'_1$ . Установив нарезаемое колесо под углами  $\theta'_1$  и  $\varphi'_1$ , необходимо повернуть приспособление вместе с нарезаемым колесом на угол, равный  $\varphi'_n - \varphi_n$ , в направлении, противоположном  $\varphi_n$ , вместо того, чтобы поворачивать производящее колесо (фрезу) на угол  $\varphi'_n$  вокруг оси  $Ox$ .

Рассуждая по аналогии, для расчета установок при нарезании колеса  $k = 2$  нужно использовать систему уравнений (2.86, 2.87, 2.88) и уравнение

$$\varphi_n - v_0^{(2)} + v^{(2)} = C \frac{2\pi}{z_n} \quad (C = 0, 1, 2 \text{ и т.д.}). \quad (2.98)$$

Угол  $v^{(2)}$  определяется зависимостью

$$\operatorname{tg}v^{(2)} = \frac{\sin[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2]}{-\sin\theta_2 \cos[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2] + \cos\theta_2 \operatorname{ctg}\delta_2} \quad (2.99)$$

Для нахождения  $v_0^{(2)}$  в уравнении (2.99) нужно принять  $\varphi_n = 0$  и  $\psi_2(\psi_1) = \psi_{20}$ .

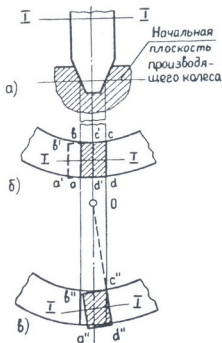


Рис. 2.36. Схема к определению относительных установок фрезы и заготовки

При черновой обработке нарезаемое колесо устанавливается под углами  $\varphi_k$  и  $\theta_k$  ( $k = 1, 2$ ), при которых плоскость симметрии фрезы совпадает с плоскостью симметрии зуба производящего колеса. После чернового нарезания в сечении производящего колеса начальной плоскостью образуется прямоугольник  $abcd$  (рис. 2.36, а и б). Между тем, боковые поверхности впадин должны быть направлены к центру  $O$  производящего колеса, что и достигается в результате чистовой обработки. При переходе к чистовой обработке одной стороны впадины необходимо сместить фрезу (или приспособление) так, чтобы контур  $abcd$  занял положение

$a'b'c'd'$  (рис. 2.36, б), а затем повернуть приспособление (или фрезу) вокруг оси  $Ox_k$ , проходящей через  $O$  (рис. 2.34) так, чтобы контур  $a'b'c'd'$  занял положение  $a''b''c''d''$  (рис. 2.36, в). Аналогично следует поступить при чистовой обработке другой стороны впадины. Осевой сдвиг и поворот фрезы (рис. 2.36, б и в) должны быть выбраны с учетом припуска на чистовую обработку. Чистовая обработка каждой стороны впадины совершается в несколько проходов, при которых производящему колесу, в соответствии с уравнением (2.97), сообщаются последовательные повороты, соответствующие долям углового шага. В результате этого профиль зуба получается ограниченным.

## 2.7. Проектирование профилей кулачков

При нарезании зубьев некруглого конического колеса методом огибания, как было показано выше, производящее колесо П (рис. 2.37) вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. При этом заготовка 1 участвует в следующих движениях: неравномерном относительном вращении вокруг своей оси и неравномерном переносном вокруг оси  $OO$ , проходящей через центр станка. Зависимости между перемещениями производящего и нарезаемого колес выражены уравнениями (2.81, 2.82, 2.85) и (2.86, 2.87, 2.88). Эти зависимости для общего случая представлены на рис. 2.38, где по оси абсцисс отложены углы поворота производящего колеса, а по оси ординат – угловые перемещения  $\varphi$ ,  $\varphi_k$  и  $\theta_k$ . Угол поворота нарезаемого колеса может быть представлен в виде суммы двух функций: а) линейной и б) нелинейной:

$$\varphi_k = \varphi + \varphi_{\text{доб}}, \quad (2.100)$$

где  $\varphi$  – угол поворота нарезаемого колеса в равномерном движении прямо пропорционален углу поворота производящего колеса;  $\varphi_{\text{доб}}$  – добавочный угол поворота нарезаемого колеса.

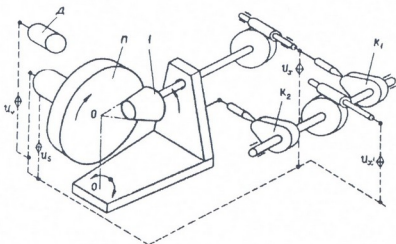


Рис. 2.37. Схема к расчету профилей кулачков:  
 $v_v$  – гитара скорости резания;  $u_s$  – гитара подачи;  $u_x$  – гитара деления бабки изделия;  $u_{x'}$  – гитара деления кулачковых механизмов; \* – условное обозначение передачи движения к последующим звеньям станка

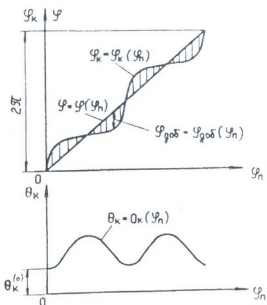


Рис. 2.38. Зависимость между перемещениями производящего и нарезаемого колес

Угол поворота  $\varphi$  сообщается некруглому коническому колесу от цепи обкатки станка. При этом

$$\frac{\varphi}{\varphi_n} = \frac{z_n}{z_k}, \quad (2.101)$$

где  $z_n$  – число зубьев производящего колеса;  $z_k$  – число зубьев нарезаемого некруглого колеса ( $k = 1, 2$ ).

Угол поворота  $\varphi_{\text{доб}}$  сообщается нарезаемому колесу от кулачка  $K_1$ . Суммирование углов  $\varphi$  и  $\varphi_{\text{доб}}$  осуществляется с помощью суммирующих механизмов, в данном случае червячным дифференциалом, в котором червяк, помимо вращения вокруг своей оси, совершает еще и осевое перемещение, сообщаемое ему кулачком  $K_1$ . Переносное движение с переменной угловой скоростью вокруг оси  $OO$  сообщается нарезаемому колесу от кулачка  $K_2$ . Для определения добавочных угловых перемещений нужно воспользоваться зависимостью

$$\varphi_{\text{доб}} = \varphi_1(\varphi_n) + \varphi_n \frac{z_n}{z_k}, \quad (2.102)$$

где  $\varphi = \varphi_n \frac{z_n}{z_k}$  – линейная часть функции  $\varphi_1(\varphi_n)$ .

Предполагается, что кулачковые механизмы центральные и перемещение толкателя равно изменению радиуса кулачка. Перемещение толкателя кулачкового механизма  $K_2$  и угол  $\theta_k$  связаны между собой прямой пропорциональностью. Аналогично угол  $\varphi_{\text{доб}}$  пропорционален перемещению толкателя кулачкового механизма  $K_1$ . На этом основании, при  $k = 1$ ,

$$\varphi_{\text{доб}} = m_1 (R_1^{(1)} - R_0^{(1)}); \quad (2.103)$$

$$\theta_1 - \theta_1^{(0)} = m_2 (R_1^{(2)} - R_0^{(2)}). \quad (2.104)$$

Здесь;  $R_1^{(1)}$ ,  $R_0^{(1)}$  и  $R_1^{(2)}$ ,  $R_0^{(2)}$  – текущие и начальные значения радиусов кулачков  $K_1$  и  $K_2$  соответственно;  $m_1$ ,  $m_2$  – коэффициенты пропорциональности.

При известных  $u_{12}(\psi_1)$  и  $\Sigma$ , задавшись углами  $\varphi$  через равные промежутки –  $1^\circ$ ,  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  и т.д., определяем по формуле (2.101) значения углов  $\varphi_n$ , по которым из уравнений (2.103) находим значения углов  $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_n)$  и  $\theta_1 = \theta_1(\varphi_n)$ . По этим значениям производим расчет радиусов кулачков при нарезании некруглого конического колеса  $k = 1$ , для чего используются уравнения (2.102), (2.103) и (2.104). Аналогично ведется расчет для нарезания колеса при  $k = 2$ , причем используются уравнения (2.102), (2.94). Определив  $\varphi_{\text{доб}}$ ,  $(\theta_k - \theta_k^0)$  и задавшись коэффициентами  $m_1$  и  $m_2$ , определяют радиус-векторы кулачков  $K_1$  и  $K_2$  по формулам (2.103) и (2.104).

## 3.1. Гипоидная передача. Уравнение зацепления

Гипоидная передача предназначена для передачи движения по заданному закону переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями. В качестве начальных поверхностей колес используются некруглые конусы 1 и 2 (рис. 3.1), расположенные в расширяющихся частях однополостных гиперboloидов (рис. 2.3).

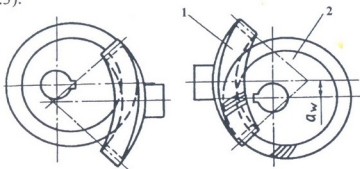


Рис. 3.1. Гипоидная передача с некруглыми коническими колесами

Для исследования зацепления введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 3.2, 3.3, а, б): подвижные системы  $S_s(x_s, y_s, z_s)$ ,  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  и  $S_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k = 1, 2$ ), жестко связанные с конической производящей поверхностью, производящим и нарезаемым колесами; неподвижную систему  $S(x, y, z)$ , связанную с производящим колесом; вспомогательные неподвижные системы  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ ,  $S_a(x_a, y_a, z_a)$ , связанные с нарезаемым колесом. Колеса нарезаются по методу огибания плоским производящим колесом, ось которого перпендикулярна начальной плоскости передачи. Центр вращения производящего колеса  $O_n$  выбираем на отрезке  $O_1O_2$ , соединяющем вершины некруглых конусов. Исследование проводится в системе  $S_n$ . Система  $S_n$  вращается вокруг оси  $O_nx_n$  с постоянной угловой скоростью. При этом система  $S_k$  совершает вращательные движения вокруг осей  $Oy_k$  и  $Oz_h$  ( $k = 1, 2$ ) с переменной скоростью.

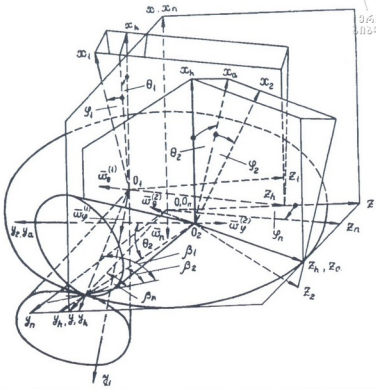


Рис. 3.2. Станочное зацепление при нарезании гипоидных некруглых конических колес

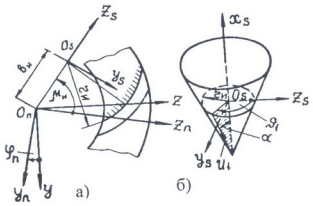


Рис. 3.3. Коническая производящая поверхность

Коническая производящая поверхность, образуемая наружными режущими кромками резцовой головки, представлена на рис. 3.3, б. Запишем уравнения ее боковой поверхности в системе  $S_s$ :



$$x_s = u_1 \cos \alpha - z_n \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y_s = u_1 \sin \alpha \sin \mathcal{G}_1;$$

$$z_s = u_1 \sin \alpha \cos \mathcal{G}_1,$$

где  $r_n$  – расчетный радиус резцовой головки;  $\alpha$  – угол наклона режущей кромки.

Уравнения производящей поверхности в системе координат  $S_n$ :

$$x_n = u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y_n = u_1 \sin \alpha \sin (\mathcal{G}_1 - \mu_n) - b_n \sin \mu_n;$$

$$z_n = u_1 \sin \alpha \cos (\mathcal{G}_1 - \mu_n) + b_n \cos \mu_n.$$

Здесь  $\mu_n$  и  $b_n$  – координаты установки резцовой головки.

Уравнения производящей поверхности в системе  $S$ :

$$x = u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y = u_1 \sin \alpha \sin \tau - b_n \sin (\mu_n - \varphi_n);$$

$$z = u_1 \sin \alpha \cos \tau + b_n \cos (\mu_n - \varphi_n),$$

где  $\tau = \mathcal{G}_1 - \mu_n + \varphi_n$ ;  $\varphi_n$  – угол поворота производящего колеса.

Составим уравнение станочных зацеплений, воспользовавшись кинематическим методом:

$$\bar{e}^{(n)} \left[ (\bar{\omega}^{(n)} - \bar{\omega}^{(k)}) \times \bar{r} + \bar{\omega}^{(k)} \times \bar{r}_{ko} \right] = 0,$$

где  $\bar{e}^{(n)}$  – орт нормали к производящей поверхности;  $\bar{\omega}^{(n)}$  – вектор угловой скорости производящего колеса;  $\bar{\omega}^{(k)}$  – вектор угловой скорости нарезаемого колеса;  $\bar{r}_{ko} = OO_k$  ( $k = 1, 2$ ) – радиус-векторы точек пересечения осей вращения колес с начальной плоскостью производящего колеса.

Вектор нормали к производящей поверхности в системе  $S_n$  запишем следующим образом:

$$\bar{n}_n = \frac{\partial \bar{r}_n}{du_1} \times \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial \mathcal{G}_1},$$

а орт нормали

$$\bar{e}_n = \frac{\bar{n}_n}{|\bar{n}_n|}.$$

После преобразования получим:

$$\bar{e}^{(n)} = -\sin \alpha \bar{i}_n + \cos \alpha \left[ \sin(\vartheta_1 - \mu_n) \bar{j}_n + \cos(\vartheta_1 - \mu_n) \bar{k}_n \right]. \quad (3.7)$$

Векторы угловых скоростей имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{(n)} &= -\bar{\omega}^{(n)} \bar{i}; \\ \bar{\omega}^{(1)} &= -\bar{\omega}_\varphi^{(1)} \sin \theta_1 \bar{i} + \left( -\bar{\omega}_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 + \bar{\omega}_\theta^{(1)} \sin \mu_1 \right) \bar{j} + \\ &\quad + \left( \omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 - \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1 \right) \bar{k}; \\ \bar{\omega}^{(2)} &= -\bar{\omega}_\varphi^{(2)} \sin \theta_2 \bar{i} + \left( \bar{\omega}_\varphi^{(2)} \cos \theta_2 \cos \mu_2 + \bar{\omega}_\theta^{(2)} \sin \mu_2 \right) \bar{j} + \\ &\quad + \left( \omega_\varphi^{(2)} \cos \theta_2 \sin \mu_2 - \omega_\theta^{(2)} \cos \mu_2 \right) \bar{k}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь  $\mu_1 = \beta_1 - \beta_n$ ;  $\mu_2 = \beta_n - \beta_2$ ;  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, n$ ) – углы наклона линии зубьев нарезаемых колес и производящего колеса в полюсе зацепления;  $\omega_\varphi^{(k)}$  – угловые скорости вращения нарезаемых колес в неравномерном относительном движении вокруг осей  $O_1y_1$  и  $O_2y_2$ ;  $\omega_\theta^{(k)}$  – угловые скорости нарезаемых колес в неравномерном переносном движении вокруг осей  $O_1z_n$ ,  $O_2z_n$ .

Вектор относительной скорости при нарезании колеса  $k=1$  в системе  $S$  определяется зависимостью

$$\bar{v}^{(n1)} = (\bar{\omega}^n - \bar{\omega}_\varphi^{(1)} - \bar{\omega}_\theta^{(1)}) \times \bar{r} + (\bar{\omega}_\varphi^{(1)} + \bar{\omega}_\theta^{(1)}) \times \bar{r}_{10}. \quad (3.9)$$

Используя (3.8), (3.9), получим для вектора относительной скорости в системе  $S$  следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{x'x'}^{(n1)} &= z(\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 - \omega_\theta^{(1)} \sin \mu_1) - y(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 + \\ &\quad + \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1) + z_{10}(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \sin \mu_1) - \\ &\quad - y_{10}(\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 - \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1); \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{y'y'}^{(n1)} &= x(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1) - z(\omega_\varphi^{(1)} \sin \theta_1 - \omega^{(n)}) + \\ &\quad + z_{10} \omega_\theta^{(1)} \sin \theta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_{z'z'}^{(n1)} &= y(\omega_\varphi^{(1)} \sin \theta_1 - \omega^{(n)}) - x(\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 - \\ &\quad - \omega_\theta^{(1)} \sin \mu_1) - y_{10} \omega_\varphi^{(1)} \sin \theta_1. \end{aligned}$$

Найдем вектор относительной скорости в системе  $S_n$ , для чего используем матричное равенство

$$v_n^{(n1)} = L_{no} \cdot v^{(n1)}, \quad (3.11)$$

где матрица перехода от  $S$  к  $S_n$  имеет вид:

$$L_{no} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{vmatrix}.$$



На основании (3.10), (3.11) и (3.12) получим:

$$\begin{aligned} v_{xn}^{(n1)} &= z(\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 - \omega_\theta^{(1)} \sin \mu_1) - y(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 + \\ &\quad + \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1) + z_{10}(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \cos \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \sin \mu_1) - \\ &\quad - y_{10}(\omega_\varphi^{(1)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 - \omega_\theta^{(1)} \cos \mu_1); \\ v_{yn}^{(n1)} &= x(-\omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \cos \theta_1 \sin \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \cos \varphi_n \cos \mu_1) - \\ &\quad - z(\omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \sin \theta_1 - \omega^{(n)} \cos \varphi_n) + z_{10} \omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \sin \theta_1 + \\ &\quad + y(-\omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \sin \theta_1 + \omega^{(n)} \sin \varphi_n) - \\ &\quad - x(-\omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \cos \theta_1 \cos \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \sin \varphi_n \sin \mu_1) + \\ &\quad + y_{10} \omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \sin \theta_1; \\ v_{zn}^{(n1)} &= x(-\omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \cos \theta_1 \sin \mu_1 + \omega_\theta^{(1)} \sin \varphi_n \cos \mu_1) - \\ &\quad - z(\omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \sin \theta_1 - \omega^{(n)} \sin \varphi_n) + z_{10} \omega_\varphi^{(1)} \sin \varphi_n \sin \theta_1 + \\ &\quad + y(\omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \sin \theta_1 - \omega^{(n)} \cos \varphi_n) - x(\omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \cos \theta_1 \cos \mu_1 - \\ &\quad - \omega_\theta^{(1)} \cos \varphi_n \cos \mu_1) - y_{10} \omega_\varphi^{(1)} \cos \varphi_n \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Проекции радиус-векторов  $\vec{r}_{ko}$  равны:

$$\begin{aligned} y_{10} &= R_e^{(n)} - R_e^{(1)} \cos \mu_1; & z_{10} &= R_e^{(1)} \sin \mu_1; \\ y_{20} &= R_e^{(n)} - R_e^{(2)} \cos \mu_2; & z_{20} &= -R_e^{(2)} \sin \mu_2; \end{aligned}$$

где  $R_e^{(1)}$ ,  $R_e^{(2)}$ ,  $R_e^{(n)}$  – внешнее делительное конусное расстояние некруглых конусов и плоского производящего колеса.

Связь между координатами  $S$  и  $S_n$  имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_n, \\ y &= y_n \cos \varphi_n + z_n \sin \varphi_n, \\ z &= -y_n \sin \varphi_n + z_n \cos \varphi_n. \end{aligned} \quad (3.14)$$



Используя (3.3), (3.4) и (3.7), запишем уравнение зацепления при нарезании колеса  $k = 1$  в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_1}{d\varphi_n} \{ \cos\theta_1 \cos(\varphi_n - \mu_1 + \vartheta_1 - \mu_n)(r_n \operatorname{ctg}\alpha - u_1 \cos\alpha) - u_1 \sin\alpha \times \\ & \times \cos\theta_1 \cos(\varphi_n + \mu_1 + \vartheta_1 - \mu_n) \operatorname{tg}\alpha - b_n [\sin\theta_1 \sin\vartheta_1 + \cos\theta_1 \times \\ & \times \operatorname{tg}\alpha \cos(\varphi_n - \mu_n - \mu_1)] + R_e^{(n)} [\cos\theta_1 \sin\mu_1 \operatorname{tg}\alpha - \sin\theta_1 \cos(\vartheta_1 + \\ & + \mu_n - \mu_n)] + R_e^{(1)} \sin\theta_1 \cos(\varphi_n - \mu_1 + \vartheta_1 - \mu_n) \} + \frac{d\theta_1}{d\varphi_n} \{ u_1 \sin(\varphi_n + \\ & + \mu_1 + \vartheta_1 - \mu_n)(\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha) - r_n \operatorname{ctg}\alpha \sin(\varphi_n + \mu_1 + \vartheta_1 - \mu_n) + \\ & + \operatorname{tg}\alpha [b_n \sin(\varphi_n + \mu_1 - \mu_n) - R_e^{(n)} \cos\mu_1 + R_e^{(1)} \cos 2\mu_1] \} + \\ & + b_n \sin\vartheta_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

На основе аналогичных выкладок получим уравнение зацепления при нарезании колеса  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_2}{d\varphi_n} \{ \cos\theta_2 \cos(\varphi_n + \mu_2 + \vartheta_1 - \mu_n)(u_1 \cos\alpha - r_n \operatorname{ctg}\alpha) - u_1 \sin\alpha \times \\ & \times \cos\theta_2 \cos(\varphi_n + \mu_2 + \vartheta_1 - \mu_n) \operatorname{tg}\alpha - b_n [\sin\theta_2 \sin\vartheta_1 - \cos\theta_2 \times \\ & \times \operatorname{tg}\alpha \cos(\varphi_n + \mu_2 - \mu_n)] + R_e^{(n)} [\cos\theta_2 \sin\mu_2 \operatorname{tg}\alpha - \sin\theta_2 \cos(\vartheta_1 - \\ & - \varphi_n - \mu_n)] + R_e^{(n)} \sin\theta_2 \cos(\varphi_n + \mu_2 + \vartheta_1 - \mu_n) \} + \frac{d\theta_2}{d\varphi_n} \{ u_1 \sin(\varphi_n + \\ & + \mu_2 + \vartheta_1 - \mu_n)(\cos\alpha + \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha) - r_n \operatorname{ctg}\alpha \sin(\varphi_n + \mu_2 + \vartheta_1 - \mu_n) + \\ & + \operatorname{tg}\alpha [b_n \sin(\varphi_n + \mu_2 - \mu_n) - R_e^{(n)} \cos\mu_2 + R_e^{(2)} \cos 2\mu_2] \} + \\ & + b_n \sin\vartheta_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнения (3.15) и (3.16) не тождественны, поэтому нарезаемая пара в зацеплении будет иметь точечный контакт.

Если решить совместно систему уравнений, состоящую из (3.3) и (3.15), получим уравнение поверхности зацепления при нарезании колеса 1.

### 3.1.1. Поверхность зубьев нарезаемого колеса

Боковую поверхность зубьев нарезаемого колеса определим, используя матричное равенство

$$r_1 = M_{1a} M_{ah} M_{ho} M_{on} r_n, \quad (3.17)$$



где  $M_{on}$ ,  $M_{ho}$ ,  $M_{ah}$ ,  $M_{1a}$  – матрицы перехода от  $S_n$  к  $S_o$ , от  $S_o$  к  $S_h$ , от  $S_h$  к  $S_a$ , от  $S_a$  к  $S_1$ :

$$M_{on} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3.18)$$

$$M_{ho} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu_1 & -\sin \mu_1 & -r_{10} \sin \beta_1 \\ 0 & \sin \mu_1 & \cos \mu_1 & -r_{10} \cos \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3.19)$$

$$M_{ha} = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (3.20)$$

$$M_{1a} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & 0 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & 0 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.21)$$

С учетом (3.18, 3.19, 3.20, 3.21) матрицу перехода от  $S_n$  к  $S_1$  запишем в виде

$$M_{1n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

где

$$a_{11} = \cos \varphi_1 \cos \theta_1;$$

$$a_{12} = -\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \cos(\varphi_n - \mu_1) + \sin \varphi_1 (\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{13} = \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin(\varphi_n - \mu_1) + \sin \varphi_1 \cos(\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{14} = r_{10} (\cos \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1 - \sin \varphi_1 \cos \beta_1);$$

$$a_{21} = \sin \theta_1;$$

$$a_{22} = \cos \theta_1 \cos(\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{23} = -\cos \theta_1 \sin(\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{24} = -r_{10} \cos \theta_1 \sin \beta_1;$$

$$a_{31} = -\sin \varphi_1 \cos \theta_1;$$

$$a_{32} = \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \cos(\varphi_n - \mu_1) + \cos \varphi_1 \sin(\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{33} = -\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin(\varphi_n - \mu_1) + \cos \varphi_1 \cos(\varphi_n - \mu_1);$$

$$a_{34} = -r_{10} (\sin \varphi_1 \sin \theta_1 \sin \beta_1 + \cos \varphi_1 \cos \beta_1);$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0; \quad a_{44} = 1.$$

Используя матрицу (3.22) и зависимость (3.2), определим боковую поверхность зубьев уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 = & (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \cos \varphi_1 \cos \theta_1 + u_1 \sin \alpha \sin \varphi_1 \times \\ & \times \cos(\varphi_n + \vartheta_1 - \mu_n - \mu_1) [1 - \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{tg}(\varphi_n + \vartheta_1 - \mu_n - \mu_1)] + \\ & + b_n \sin \varphi_1 \cos(\varphi_n - \mu_n - \mu_1) [1 - \operatorname{ctg} \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{tg}(\varphi_n - \mu_n - \mu_1)] - \\ & - R_e^{(n)} \sin \varphi_1 \cos \mu_1 (1 - \operatorname{ctg} \varphi_1 \operatorname{tg} \beta_1 \sin \theta_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 = & (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \sin \theta_1 + u_1 \sin \alpha \cos \theta_1 \times \\ & \times \sin(\varphi_n + \vartheta_1 - \mu_n - \mu_1) + b_n \cos \theta_1 \sin(\varphi_n - \mu_n - \mu_1) - \\ & - R_e^{(n)} \cos \theta_1 \sin \mu_1 \operatorname{tg} \beta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 = & (-u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \sin \varphi_1 \cos \theta_1 + u_1 \sin \alpha \cos \varphi_1 \times \\ & \times \cos(\varphi_n + \vartheta_1 - \mu_n - \mu_1) [1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{tg}(\varphi_n + \vartheta_1 - \mu_n - \mu_1)] + \\ & + b_n \cos \varphi_1 \cos(\varphi_n - \mu_n - \mu_1) [1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \theta_1 \operatorname{tg}(\varphi_n - \mu_n - \mu_1)] - \\ & - R_e^{(n)} \cos \varphi_1 \sin \mu_1 (1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \beta_1 \sin \theta_1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Уравнения (3.23) определяют боковую поверхность зубьев нарезаемого колеса как огибающую боковой поверхности зуба производящего колеса, поскольку  $u_1$ ,  $\vartheta_1$  и  $\varphi_n$  связаны между собой уравнением (3.16), а  $\varphi_k$  ( $\varphi_n$ ) и  $\theta_k$  ( $\varphi_n$ ) – функции, определяемые выражениями (2.81). Уравнения (3.2, 3.15, 3.16, 3.23) справедливы при нарезании выпуклой стороны зуба колеса 1 и вогнутой стороны зуба колеса 2. При нарезании противоположных сторон зубьев необходимо в приведенных уравнениях угол  $\alpha$  заменить углом  $180^\circ - \alpha$ .

### 3.2. Червячная передача. Уравнение зацепления

Для передачи движения по заданному закону переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями можно использовать червячную передачу, состоящую из многозаходного некруглого цилиндрического червячка и некруглого червячного колеса (рис. 3.4). Передаточное отношение и радиусы начальных поверхностей некруглых цилиндров определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} u_{12}(\psi_1) &= \frac{r_2}{r_1 \operatorname{tg} \lambda}, \\ r_1 &= \frac{a_w}{1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda}, \\ r_2 &= a_w \frac{u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda}{1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\pi m z_1}{s}$  – угол подъема винтовой линии на начальном некруглом цилиндре червяка;  $m$  – модуль зацепления;  $z_1$  – число заходов червяка;  $s = \int_0^{2\pi} \frac{r_1}{\sin \mu} d\psi_1$  – длина дуги центроиды начального некруглого цилиндра червяка;  $\mu$  – угол между радиус-вектором и положительным направлением к касательной центроиде червяка.

Межосевое расстояние  $a_w = r_1 + r_2$  в передаче постоянное. Угол скрещивания осей червяка и червячного колеса может быть произвольным. Рассмотрим случай ортогональной червячной передачи.

Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 3.4, 3.5): подвижные системы  $S_k(x_k, y_k, z_k)$ , ( $k = 1, 2$ ), связанные соответственно с червяком и червячным колесом; неподвижную систему  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ , жестко связанную с червяком; вспомогательную систему  $S_p(x_p, y_p, z_p)$ , связанную с червячным колесом; неподвижные системы координат  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  и  $S(x, y, z)$ , связанные с производящей поверхностью и червяком. Система  $S_1$

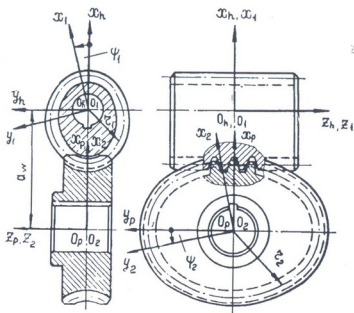


Рис. 3.4. Червячная передача с переменным передаточным отношением

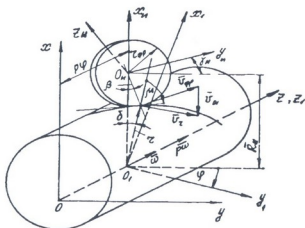


Рис. 3.5. Станочное зацепление при нарезании некруглого цилиндрического червяка

вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $O_1z_1$ , при этом система  $S_2$  совершает вращательное движение вокруг оси  $O_2z_2$  с переменной угловой скоростью. При нарезании винтовой поверхности некруглого цилиндрического червяка тороидальная производящая поверхность совершает равномерное вращательное движение вокруг оси  $O_nz_n$ ; заготовка некруглого цилиндрического





червяка совершает винтовое движение с параметром  $p$  — вращение с переменной скоростью вокруг оси  $Oz$  и перемещение вдоль этой же оси с постоянной линейной скоростью. Одновременно с этим заготовка совершает поступательное движение в направлении оси  $Ox$  с переменной линейной скоростью  $v_{01}$  [93].

Уравнение тороидальной производящей поверхности в системе  $S_n$  (рис. 3.6) запишем в виде

$$\bar{r}_n = (d + \rho \sin \vartheta)(\cos \psi \bar{i}_n - \sin \psi \bar{j}_n) + \rho(\cos \vartheta - b)\bar{k}_n. \quad (3.25)$$

Вектор нормали и орт нормали к поверхности (3.25) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{n}_n &= -(\rho d + \rho^2 \sin \vartheta)(\cos \psi \bar{i}_n - \sin \psi \bar{j}_n + \operatorname{ctg} \vartheta \bar{k}_n) \sin \vartheta; \\ \bar{e} &= -(\cos \psi \bar{i}_n - \sin \psi \bar{j}_n + \operatorname{ctg} \vartheta \bar{k}_n) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь:  $p = \frac{dz}{d\varphi}$  — параметр винтового движения;  $\varphi = \eta - \delta$  — угол

поворота червяка в относительном винтовом движении;  $\eta$  — полярный угол центроиды червяка;  $\delta = \pi - 2(\mu - \beta)$ ;  $\mu = \operatorname{arctg} \frac{r}{dr/d\eta}$ ;

$\beta = \operatorname{arctg} \frac{r \cos \mu}{r_{\text{фр}} + r \sin \mu}$  — угол между нормалью, проведенной в

точке касания инструмента с червяком, и осью  $Ox$ ;  $r_{\text{фр}}$  — радиус окружности фрезы, которой он касается начального некруглого цилиндра червяка.

Приведя вектор  $\bar{\omega}$  к точке  $O_n$  (рис. 3.5), определим вектор скорости относительного движения инструмента по отношению к некруглому червяку из выражения

$$\begin{aligned} \bar{v}_n^{(nl)} &= \bar{\omega} \times \bar{r}_n + \bar{R}_n \times \\ &\times \bar{\omega} + p\bar{\omega} \pm \bar{v}_{01}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $r_n$  — радиус-вектор текущей точки производящей поверхности;  $R_n$  — радиус-вектор точки  $O$  линии действия вектора  $\bar{\omega}$ .

В формуле (3.27) перед вектором скорости поступательного движения знак положительный,

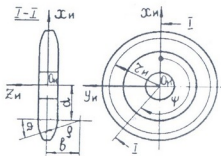


Рис. 3.6. Тороидальная производящая поверхность

когда расстояние между осями червяка и инструмента уменьшается, и отрицательный – когда это расстояние увеличивается. Векторы, входящие в (3.27), имеют вид

$$\bar{\omega} = \omega(\sin \gamma_n \bar{j}_n + \cos \gamma_n \bar{k}_n); \quad \bar{R}_n = -(r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \bar{i}_n;$$

$$p \bar{\omega} = p \omega(\sin \gamma_n \bar{j}_n + \cos \gamma_n \bar{k}_n); \quad \bar{v}_{01} = \pm r \omega(\sin \delta + \cos \delta \operatorname{tg} \beta) \bar{i}_n.$$

Здесь  $\gamma_n$  – угол скрещивания осей червяка и инструмента.

Проекции относительной скорости определим уравнениями:

$$v_{x_n}^{(n1)} = \omega [z_n \sin \gamma_n - y_n \cos \gamma_n \pm r(\sin \delta + \cos \delta \operatorname{tg} \beta)];$$

$$v_{y_n}^{(n1)} = \omega [\cos \gamma_n (x_n + r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) + p \sin \gamma_n]; \quad (3.28)$$

$$v_{z_n}^{(n1)} = -\omega [\sin \gamma_n (x_n + r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) - p \cos \gamma_n].$$

Используя (3.25), (3.26) и (3.28), запишем уравнение связи между параметрами  $\psi$ ,  $\vartheta$  в виде

$$\operatorname{tg} \vartheta [\sin \psi \cos \gamma_n (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta + p \operatorname{tg} \gamma_n + b \operatorname{ctg} \psi \operatorname{tg} \gamma_n)] \mp$$

$$\mp r \cos \psi (\sin \delta + \cos \delta \operatorname{tg} \beta) + \sin \gamma_n (r \cos \delta + d \cos \psi +$$

$$+ r_{\text{фр}} \cos \beta + p \operatorname{ctg} \gamma_n) = f(\psi, \vartheta) = 0. \quad (3.29)$$

Линия контакта на поверхности инструмента определяется уравнениями:

$$x_n = (d + \rho \sin \vartheta) \cos \psi;$$

$$y_n = -(d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi; \quad (3.30)$$

$$z_n = \rho \cos \vartheta;$$

$$f(\psi, \vartheta) = 0.$$

### 3.2.1. Уравнения боковой поверхности витков червяка и поверхности зацепления

Боковая поверхность витков червяка определяется как семейство линий контакта поверхностей инструмента и червяка в системе координат  $S_1$ , связанной с червяком. Связь между системами  $S_n$  и  $S_1$  запишем в виде матричного равенства

$$r_1 = M_{1n} r_n, \quad (3.31)$$

где  $r_1$  и  $r_n$  – столбцевые матрицы радиус-вектора точки производящей поверхности в системах  $S_1$  и  $S_n$ .

Матрица перехода от  $S_n$  к  $S_1$  имеет вид

$$M_{1n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \cos \gamma_n & -\sin \varphi \sin \gamma_n & \cos \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \gamma_n & -\cos \varphi \sin \gamma_n & -\sin \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \\ 0 & \sin \gamma_n & \cos \gamma_n & -p\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Боковая поверхность витков червяка выразится уравнениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= (d + \rho \cos \vartheta)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \varphi \sin \gamma_n + \cos \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta); \\ y_1 &= -(d + \rho \sin \vartheta)(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \gamma_n) - \\ &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \cos \varphi \sin \gamma_n - \sin \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta); \\ z &= -(d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p\varphi; \\ f(\psi, \vartheta) &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Поверхность зацепления определится как семейство линий контакта поверхностей инструмента и червяка в неподвижной системе координат  $S_h$ , связанной с червяком. Используя матрицу

$$M_{h1} = \begin{pmatrix} \cos \psi_1 & -\sin \psi_1 & 0 & 0 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

запишем связь между системами  $S_1$  и  $S_h$  в виде

$$r_h = M_{h1} r_1, \quad (3.35)$$

где  $r_h$  и  $r_1$  – столбцовые матрицы радиус-вектора точки поверхности червяка в системах  $S_h$  и  $S_1$ . На основании (3.33), (3.34) и (3.35) поверхность зацепления определим системой уравнений

$$\begin{aligned} x_h &= (d + \rho \sin \vartheta)[\cos \psi \cos(\varphi - \psi_1) - \sin \psi \cos \gamma_n \times \\ &\quad \times \sin(\varphi_1 - \psi_1)] - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n \sin(\varphi - \psi_1) + \\ &\quad + \cos(\varphi - \psi_1)(r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta); \\ y_h &= -(d + \rho \sin \vartheta)[\cos \psi \sin(\varphi - \psi_1) + \sin \psi \cos \gamma_n \times \\ &\quad \times \cos(\varphi - \psi_1)] - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n \cos(\varphi - \psi_1) - \\ &\quad - \sin(\varphi - \psi_1)(r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta); \\ z_h &= -(d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p\varphi; \\ f(\psi, \vartheta) &= 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Приняв  $z_1 = 0$ , определим торцовый профиль червяка системой уравнений

$$\varphi = \frac{(\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - (d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi \sin \gamma_n}{p};$$

$$x_1 = (d + \rho \sin \vartheta)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma_n) -$$

$$- (\rho \cos \vartheta - b) \sin \varphi \sin \gamma_n + \cos \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta);$$

$$y_1 = - (d + \rho \sin \vartheta)(\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma_n) -$$

$$- (\rho \cos \vartheta - b) \cos \varphi \sin \gamma_n - \sin \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta); \quad (3.37)$$

$$f(\psi, \vartheta) = 0.$$

Положив  $y_1 = 0$ , получим осевое сечение червяка, определяемое системой уравнений

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{(d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi \cos \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n}{(d + \rho \sin \vartheta) \cos \psi + r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta};$$

$$x_1 = (d + \rho \cos \vartheta)(\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma_n) -$$

$$- (\rho \cos \vartheta - b) \sin \varphi \sin \gamma_n + \cos \varphi (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta);$$

$$z = - (d + \rho \sin \vartheta) \sin \psi \sin \gamma_n + (\rho \cos \vartheta - b) \cos \gamma_n - p \varphi; \quad (3.38)$$

$$f(\psi, \vartheta) = 0.$$

### 3.2.2. Уравнение боковой поверхности зубьев червячного колеса

Боковая поверхность зубьев червячного колеса определяется как семейство линий контакта инструмента и червяка в системе координат  $S_2$ , связанной с червячным колесом. Связь между системами  $S_1$  и  $S_2$  запишем в виде матричного равенства

$$r_2 = M_{21} r_1, \quad (3.39)$$

где  $r_1, r_2$  – столбцевые матрицы радиус-вектора точки производящей поверхности в системах  $S_1, S_2$ .

Матрица перехода от системы  $S_1$  к системе  $S_2$  имеет вид

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \psi_1 \cos \psi_2 & -\sin \psi_1 \cos \psi_2 & -\sin \psi_2 & a_\omega \cos \psi_2 \\ -\cos \psi_1 \sin \psi_2 & \sin \psi_1 \sin \psi_2 & -\cos \psi_2 & -a_\omega \sin \psi_2 \\ \sin \psi_1 & \cos \psi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.40)$$

Боковая поверхность зубьев червячного колеса определяется системой уравнений

$$\begin{aligned}
 x_2 &= (d + \rho \sin \vartheta) [\cos \psi \cos \psi_2 \cos(\varphi - \psi_1) - \sin \psi \cos \gamma_n \cos \psi_2 \times \\
 &\quad \times \sin(\varphi - \psi_1) + \sin \psi \sin \gamma_n \sin \psi_2] - (\rho \cos \vartheta - b) \times \\
 &\quad \times [\sin \gamma_n \cos \varphi_2 \sin(\varphi - \psi_1) + \sin \psi_2 \cos \gamma_n] + (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \times \\
 &\quad \times \cos \varphi_2 \cos(\varphi - \psi_1) + p \psi \sin \psi_2 + a_w \cos \psi_2; \\
 y_2 &= (d + \rho \sin \vartheta) [-\cos \psi \sin \psi_2 \cos(\varphi - \psi_1) + \sin \psi \cos \gamma_n \times \quad (3.41) \\
 &\quad \times \sin \psi_2 \sin(\varphi - \psi_1) + \sin \psi \sin \gamma_n \cos \psi_2] + (\rho \cos \vartheta - b) \times \\
 &\quad \times [\sin \gamma_n \sin \psi_2 \sin(\varphi - \psi_1) - \cos \gamma_n \cos \psi_2] - (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \times \\
 &\quad \times \sin \varphi_2 \cos(\varphi - \psi_1) + p \varphi \cos \psi_2 - a_w \sin \psi_2; \\
 z_2 &= -(d + \rho \sin \vartheta) [\cos \psi \sin(\varphi - \psi_1) + \sin \psi \cos \gamma_n \cos(\varphi - \psi_1)] - \\
 &\quad - (\rho \cos \vartheta - b) \sin \gamma_n \cos(\varphi - \psi) - (r \cos \delta + r_{\text{фр}} \cos \beta) \sin(\varphi - \psi_1); \\
 f(\psi, \vartheta) &= 0.
 \end{aligned}$$

### 3.3. Спиroidные цилиндрические передачи

Спиroidные цилиндрические передачи (рис. 3.7, а, б) предназначены для передачи движения по заданному закону переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями.

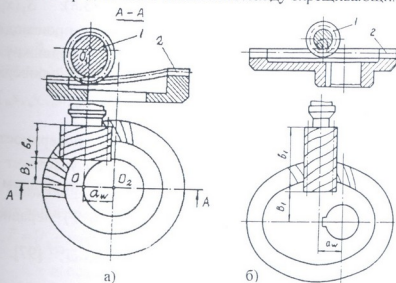


Рис. 3.7. Спиroidные цилиндрические передачи

Передача (рис. 3.7, а) состоит из многозаходного некруглого цилиндрического червяка 1 и сопряженного с ним пространственного торцового спироидного колеса 2, оси которых в направлении общего межосевого перпендикуляра отстоят друг от друга на расстояние  $a_w$  [99].

Передача (рис. 3.7, б) состоит из круглого цилиндрического червяка 1 и плоского торцового некруглого спироидного колеса 2. Цилиндрический червяк имеет витки асимметрического профиля и постоянный осевой шаг. Плоское некруглое спироидное колесо 2 снабжено криволинейными зубьями, расположенными вдоль направляющей кривой, форма которой соответствует закону изменения передаточного отношения. Передача движения обеспечивается по заданному закону большого переменного передаточного отношения, изменяющегося в широком диапазоне.

### 3.3.1. Спироидная цилиндрическая передача с пространственным колесом. Уравнение зацепления

Рассмотрим образование пространственного спироидного колеса, нарезаемого методом огибания стандартной червячной фрезой.

Введем следующие системы координат (рис. 3.8):  $S_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $S_2(x_2, y_2, z_2)$ , связанные соответственно с производящей поверхностью и с нарезаемым колесом; неподвижную систему координат  $S(x, y, z)$ , связанную с производящей поверхностью, и вспомогательную систему координат  $S_a(x_a, y_a, z_a)$ , связанную с нарезаемым колесом.

При равномерном вращении производящей поверхности вокруг оси  $z_1$  со скоростью  $\bar{\omega}^{(1)}$  нарезаемое колесо участвует в двух движениях: 1) неравномерном переносном поступательном в направлении оси  $O_a z_a$  со скоростью  $\bar{v} = \pm \frac{dc}{dt}$  и 2) неравномерном вращательном вокруг оси  $O_a z_a$  со скоростью  $\bar{\omega}^{(2)}$  [97].

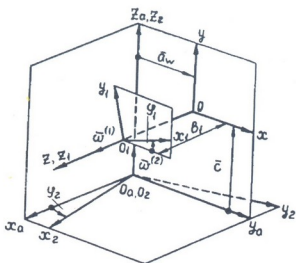


Рис. 3.8. Системы координат в станочном зацеплении

Производящая эвольвентная цилиндрическая винтовая поверхность в системе  $S_1$  определяется уравнением

$$\bar{r}_1 = (r_u \cos \vartheta_1 + u_1 \cos \lambda \sin \vartheta_1) \bar{i}_1 + (r_u \sin \vartheta_1 - u_1 \cos \lambda \cos \vartheta_1) \bar{j}_1 + (p \vartheta - u_1 \sin \vartheta_1) \bar{k}_1. \quad (3.42)$$

В неподвижной системе координат производящую поверхность запишем с помощью матричного равенства

$$r = M_{01} r_1, \quad (3.43)$$

где  $r$  и  $r_1$  – столбцевые матрицы радиус-вектора точки производящей поверхности в системах  $S$  и  $S_1$ . Матрица перехода от системы  $S_1$  к  $S$  имеет вид

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.44)$$

Производящую поверхность в неподвижной системе координат выразим уравнением

$$\bar{r} = [r_u \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) + u_1 \cos \lambda \sin(\varphi_1 + \vartheta_1)] \bar{i} + [r_u \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) - u_1 \cos \lambda \cos(\varphi_1 + \vartheta_1)] \bar{j} + (p \vartheta_1 - u_1 \sin \lambda + B_1) \bar{k}_1. \quad (3.45)$$



Здесь  $u_1$ ,  $\vartheta_1$ ,  $p = r_y \operatorname{tg} \lambda$  – параметры винтовой поверхности;  $r_y$  – радиус основного цилиндра;  $\lambda$  – угол подъема винтовой линии;  $B_1$  – расстояние от плоскости  $xOy$  до ближайшего торца червяка.

Орт нормали к поверхности (3.42) определяется уравнением

$$\bar{e}_1^{(1)} = \sin \lambda \sin \vartheta_1 \bar{i}_1 - \sin \lambda \cos \vartheta_1 \bar{j}_1 + \cos \lambda \bar{k}_1. \quad (3.46)$$

Вектор скорости относительного движения выразим зависимостью

$$\bar{v}^{(12)} = \bar{\omega}^{(1)} \times \bar{r} - (\bar{\omega}^{(2)} \times \bar{r} + \bar{a}_w \times \bar{\omega}^{(2)} \pm \bar{v}). \quad (3.47)$$

Векторы, входящие в (3.47), равны:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{(1)} &= \omega^{(1)} \bar{k}; & \bar{\omega}^{(2)} &= \omega^{(2)} \bar{j}; \\ \bar{a}_w &= -a_w \bar{i}; & \bar{v} &= \pm \frac{dc}{dt} \bar{j}. \end{aligned}$$

Рассматривая  $u_{21}(\varphi_1) = \frac{\omega^{(2)}}{\omega^{(1)}}$  и  $u_{21}^1(\varphi_1) = \frac{dc}{dt} : \omega^{(1)}$  как заданные

функции угла поворота  $\varphi_1$  и принимая, что  $\omega^{(1)} = 1$  рад/с, представим вектор скорости относительного движения в виде

$$\bar{v}^{(12)} = -[y + zu_{21}(\varphi_1)] \bar{i} + [x \pm u_{21}^1(\varphi_1)] \bar{j} + [u_{21}(\varphi_1)(x + a_w)] \bar{k}. \quad (3.48)$$

Запишем проекции скорости относительного движения в системе  $S_1$ . Для этого используем матричное равенство

$$v_1^{(12)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot v^{(12)}. \quad (3.49)$$

На основании выражений (3.46), (3.49) и системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1; \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1; \\ z &= z_1 + B_1, \end{aligned} \quad (3.50)$$

получим:

$$\begin{aligned} v_{x_1}^{(12)} &= -y_1 + u_{21}(\varphi_1)(z_1 + B_1) \cos \varphi_1 \pm u_{21}^1(\varphi_1) \sin \varphi_1; \\ v_{y_1}^{(12)} &= x_1 + u_{21}(\varphi_1)(z_1 + B_1) \sin \varphi_1 \pm u_{21}^1(\varphi_1) \cos \varphi_1; \\ v_{z_1}^{(12)} &= u_{21}(\varphi_1)(x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + a_w). \end{aligned} \quad (3.51)$$



Учитывая выражения (3.42), (3.46) и (3.51), уравнение зацепления

$$e_{x1}^{(1)}v_{x1}^{(12)} + e_{y1}^{(1)}v_{y1}^{(12)} + e_{z1}^{(1)}v_{z1}^{(12)} = 0 \quad (3.52)$$

в виде

$$u_1 = \frac{\sin \lambda \{ u_{21}(\varphi_1) [ p \vartheta_1 \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) + B_1 \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) - r_u \operatorname{ctg} \lambda \times \\ \times \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) - a_w \operatorname{ctg} \lambda ] \pm u_{21}^1(\varphi_1) \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) + r_u \}}{u_{21}(\varphi_1) \sin(\varphi_1 + \vartheta_1)}. \quad (3.53)$$

Система уравнений (3.42) и (3.53) определяет линии контакта на производящей поверхности. Задавая значение параметра  $\vartheta_1$  при фиксированном угле  $\varphi_1$ , определяем соответствующее значение  $u_1$ . Затем, используя уравнение (3.42), определяем координаты контактной линии. Поверхность зацепления выразится уравнениями (3.45) и (3.53).

### 3.3.2. Уравнение боковой поверхности зубьев пространственного спироидного колеса

Для составления уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса используем матричное равенство

$$r_2 = M_{21} r_1, \quad (3.54)$$

где  $r_2$  – столбцевая матрица радиус-вектора точки производящей поверхности в системе  $S_2$ . Матрица перехода от системы координат  $S_1$  к системе  $S_2$  имеет вид

$$M_{21} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & B_1 \cos \varphi_2 + \\ & & & + a_w \sin \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -B_1 \sin \varphi_1 + \\ & & & + a_w \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Используя (3.42), (3.54) и (3.55), выразим боковую поверхность зубьев спироидного колеса системой уравнений

$$x_2 = \sin \varphi_2 [ r_u \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) + u_1 \cos \lambda \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) + a_w ] + \\ + \cos \varphi_2 ( p \vartheta_1 - u_1 \sin \lambda + B_1 );$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \cos \varphi_2 [r_{\eta} \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) + u_1 \cos \lambda \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) + a_w] - \\
 &\quad - \sin \varphi_2 (p \vartheta_1 + u_1 \sin \lambda - B_1); \\
 z_2 &= r_{\eta} \sin(\varphi_1 + \vartheta_1) - u_1 \cos \lambda \cos(\varphi_1 + \vartheta_1) + c.
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

Уравнения (3.56) необходимо рассмотреть совместно с уравнением (3.53).

### 3.4. Спироидная коническая передача. Уравнение зацепления

Для передачи движения по заданному закону переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями может быть использована спироидная передача [93], состоящая из многозаходного некруглого конического червяка 1 и сопряженного с ним некруглого конического спироидного колеса 2, оси которых в направлении общего межосевого перпендикуляра

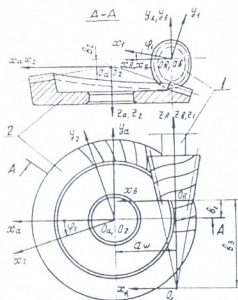


Рис. 3.9. Спироидная коническая передача

отстоят друг от друга на расстоянии  $a_w$  (рис. 3.9). Рассмотрим образование некруглого конического червяка, нарезаемого методом огибания левозаходной конической фрезой с архимедовой винтовой поверхностью.

Введем следующие системы координат (рис. 3.9, 3.10): неподвижные системы  $S(x, y, z)$ ,  $S'(x', y', z')$ ,  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ ,  $S_a(x_a, y_a, z_a)$ ,  $S_b(x_b, y_b, z_b)$ , связанные соответственно с инструментом, стойкой, нарезаемым некруглым коническим червяком, некруглым коническим спироидным колесом;

подвижные системы  $S_{\eta}(x_{\eta}, y_{\eta}, z_{\eta})$ ,  $S_k(x_k, y_k, z_k)$ , ( $\eta = 1, 2$ ), связанные с инструментом, некруглым коническим червяком и некруглым коническим спироидным колесом. Система  $S_1$  вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $O_h, z_h$ ; при этом система  $S_2$  совершает

вращательное движение с переменной угловой скоростью вокруг оси  $O_a z_a$ . При нарезании винтовой поверхности некруглого конического червяка производящей поверхности, конической червячной фрезе сообщается вращательное движение с постоянной скоростью вокруг оси  $O z_n$ . При этом заготовка червяка участвует в неравномерном относительном вращении вокруг оси  $O z_h$  и неравномерном переносном вращении вокруг оси  $O x$ .

Относительная угловая скорость в системе  $S$

$$\bar{\omega}^{(In)} = \omega_\theta \bar{i} - \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \bar{j} + (\omega_\varphi \cos \theta_1 \cos \varepsilon - \omega_n) \bar{k}, \quad (3.57)$$

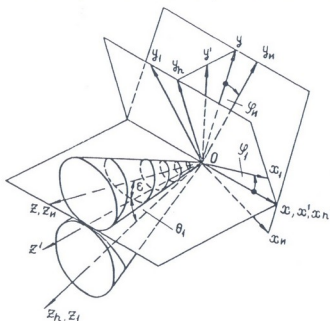


Рис. 3.10. Системы координат в станочном зацеплении

где  $\omega_n = \frac{d\varphi_n}{dt}$  — угловая скорость вращения фрезы вокруг оси  $O z_n$ ;

$\varphi_n$  — угол поворота фрезы;  $\omega_\varphi = \frac{d\varphi_1}{dt}$  — переменная угловая

скорость вращения нарезаемого червяка вокруг оси  $O z_1$ ;  $\varphi_1$  — пере-

менный угол поворота нарезаемого червяка;  $\omega_\theta = \frac{d\theta_1}{dt}$  — перемен-

ная угловая скорость вращения нарезаемого червяка вокруг оси



$Ox$ ;  $\theta_1$  – переменный угол между осью  $Oz_1$  с образующей некруглого конуса;  $\varepsilon$  – угол конуса фрезы.

Найдем относительную угловую скорость в системе координат  $S_n$ . Для этого используем матричное равенство

$$\omega_n^{(1n)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n & 0 \\ \sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \omega_n^{(1n)}. \quad (3.58)$$

На основании (3.57) и (3.58) проекции относительной угловой скорости на координатные оси системы  $S_n$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{xn}^{(1n)} &= \omega_\theta \cos \varphi_n + \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \sin \varphi_n; \\ \omega_{yn}^{(1n)} &= \omega_\theta \sin \varphi_n - \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \cos \varphi_n; \\ \omega_{zn}^{(1n)} &= \omega_\theta \cos \theta_1 \cos \varepsilon - \omega_n. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Скорость относительного движения в системе  $S_n$

$$\bar{v}_n^{(1n)} = \bar{\omega}_n^{(1n)} \times \bar{r}_n. \quad (3.60)$$

Уравнение поверхности нисходящей стороны витков архимедова червяка в системе  $S_n$  имеет вид [76]

$$\bar{r}_n = -u_1 \cos \alpha_n (\cos \vartheta_1 \bar{i}_n - \sin \vartheta_1 \bar{j}_n) + (p \vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \bar{k}_n. \quad (3.61)$$

Здесь  $u_1$  – длина отрезка образующей прямой от оси червяка до текущей точки поверхности витка фрезы;  $\alpha_n = \alpha + \varepsilon$ ;  $\alpha$  – угол профиля витков червяка в осевом сечении;  $\vartheta_1$  – угол поворота образующей прямой в винтовом движении.

Используя (3.59; 3.60), запишем проекции  $\bar{v}^{(1n)}$  в системе  $S_n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{nx}^{(1n)} &= (p \vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) (\omega_\theta \sin \varphi_n - \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \cos \varphi_n) - \\ &\quad - u_1 \cos \alpha_n \sin \vartheta_1 (\omega_\varphi \cos \theta_1 \cos \varepsilon - \omega_n); \\ v_{ny}^{(1n)} &= - (p \vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) (\omega_\theta \cos \varphi_n + \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \sin \varphi_n) - \\ &\quad - u_1 \cos \alpha_n \cos \vartheta_1 (\omega_\varphi \cos \theta_1 \cos \varepsilon - \omega_n); \\ v_{nz}^{(1n)} &= u_1 \cos \alpha_n [\sin \vartheta_1 (\omega_\theta \cos \varphi_n + \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \sin \varphi_n) + \\ &\quad + \cos \vartheta_1 (\omega_\varphi \sin \varphi_n - \omega_\varphi \cos \theta_1 \sin \varepsilon \cos \varphi_n)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Уравнение нормали к поверхности (3.61):

$$\begin{aligned} \bar{n}_n = & (p \sin \vartheta_1 + u_1 \cos \vartheta_1 \sin \alpha_n) \bar{i}_n + (-u_1 \sin \alpha_n \sin \vartheta_1 + \\ & + p \cos \vartheta_1) \bar{j}_n - u_1 \cos \alpha_n \bar{k}_n. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Рассматривая  $u_{\varphi_n}(\varphi_n) = \frac{\omega_\varphi}{\omega_n}$  и  $u_{\theta_n}(\varphi_n) = \frac{\omega_\theta}{\omega_n}$  как известные функции от угла поворота  $\varphi_n$ , принимая  $\omega_n = 1$  рад/с и используя зависимости (3.62) и (3.63), представим уравнение зацепления в виде

$$\begin{aligned} u_{\varphi_n}(\varphi_n) & [-u_1 p \vartheta_1 \cos \theta_1 \sin \varepsilon \sin \alpha_n \cos(\varphi_n + \vartheta_1) + u_1 p \cos \theta_1 \times \\ & \times \sin \varepsilon \sin \alpha_n \sin(\varphi_n + \vartheta_1) - u_1 p \cos \theta_1 \cos \varepsilon \cos \alpha_n + p^2 \vartheta_1 \times \\ & \times \cos \theta_1 \sin \varepsilon \sin(\varphi_n + \vartheta_1) + u_1^2 \cos \theta_1 \sin \varepsilon \cos(\varphi_n + \vartheta_1)] + \\ & + u_{\theta_n}(\varphi_n) [u_1 p \vartheta_1 \sin \alpha_n \sin(\varphi_n + \vartheta_1) + u_1 p \sin \alpha_n \times \\ & \times \cos(\varphi_n + \vartheta_1) - p^2 \vartheta_1 \cos(\varphi_n + \vartheta_1) - u_1^2 \sin(\varphi_n + \vartheta_1)] + \\ & + u_1 p \cos \alpha_n = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Рассматривая совместно (3.61) и (3.64), определим в системе  $S_n$  линии контакта витков некруглого конического червяка и фрезы. При этом вычисления выполняются следующим образом: считая фиксированным значение угла  $\varphi_n$  и задаваясь рядом значений  $\vartheta_1$  (или  $u_1$ ), находим  $u_1$  (или  $\vartheta_1$ ) из уравнения (3.64), а затем, используя (3.61), определяем координаты точек контактной линии.

### 3.4.1. Уравнение боковой поверхности витков червяка

Боковая поверхность витков некруглого конического червяка определяется как семейство линий контакта поверхностей инструмента и червяка в системе координат  $S_1$ , связанной с нарезаемым червяком. Связь между системами  $S_n$  и  $S_1$  запишем с помощью матричного равенства

$$r_1 = M_{1n} r_n, \quad (3.65)$$

где  $r_1$  и  $r_n$  — столбцевые матрицы радиус-вектора точки производящей поверхности в системах  $S_1$  и  $S_n$ .

Матрица перехода от системы  $S_n$  к  $S_1$ :

$$M_{1n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_n - & \cos \varphi_1 \sin \varphi_n + \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_n \cos(\theta_1 + \varepsilon) & + \sin \varphi_1 \cos \varphi_n \cos(\theta_1 + \varepsilon) \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_n - & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_n + \\ -\cos \varphi_1 \cos \varphi_n \cos(\theta_1 + \varepsilon) & + \cos \varphi_1 \cos \varphi_n \cos(\theta_1 + \varepsilon) \\ \sin \varphi_n \sin(\theta_1 + \varepsilon) & -\cos \varphi_n \sin(\theta_1 + \varepsilon) \\ 0 & 0 \\ \sin \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon) & 0 \\ \cos \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon) & 0 \\ \cos(\theta_1 + \varepsilon) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.66)$$

На основании (3.61), (3.65) и (3.66) уравнение боковой винтовой поверхности некруглого конического червяка представим в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= -u_1 \cos \alpha_n [\cos \varphi_1 \cos(\vartheta_1 + \varphi_n) - \sin \varphi_1 \cos(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \\ & \quad + \varphi_n)] + (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \sin \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon); \\ y_1 &= u_1 \cos \alpha_n [\sin \varphi_1 \cos(\vartheta_1 + \varphi_n) + \cos \varphi_1 \cos(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \\ & \quad + \varphi_n)] + (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \cos \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon); \\ z_1 &= -u_1 \cos \alpha_n \sin(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \varphi_n) + \\ & \quad + (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \cos(\theta_1 + \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Рассматривая совместно (3.64) и (3.67), определим линию контакта в системе  $S_1$ .

### 3.4.2. Уравнение боковой поверхности зубьев спироидного колеса

Поверхность зубьев спироидного колеса определяется как семейство линий контакта инструмента и червяка в системе координат  $S_2$ , связанной со спироидным колесом. Переход от системы  $S_1$  к системе  $S_2$  запишем в виде матричного равенства

$$r_2 = M_{21} r_1, \quad (3.68)$$

где  $r_2$  – столбцевая матрица радиус-вектора точки производящей поверхности в системе  $S_2$ .

Матрицу перехода от системы  $S_1$  к  $S_2$  запишем в виде

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & -\cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_2 (b_3 + a_w) - b_1 \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 (b_3 + a_w) + b_1 \sin \varphi_2 \\ -b_3 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (3.69)$$

На основании (3.67), (3.68) и (3.69) уравнение боковой винтовой поверхности зубьев спироидного колеса определим системой уравнений

$$\begin{aligned} x_2 &= -u_1 \cos \alpha_n [\cos \varphi_2 \cos(\vartheta_1 + \varphi_n) - \sin \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \\ &\quad + \varphi_n)] - (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \sin \varphi_1 \cos(\theta_1 + \varepsilon) - \\ &\quad - (a_w + b_3) \cos \varphi_2 - b_1 \sin \varphi_2; \\ y_2 &= -u_1 \cos \alpha_n [\sin \varphi_2 \cos(\vartheta_1 + \varphi_n) - \cos \varphi_1 \sin(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \\ &\quad + \varphi_n)] + (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \cos \varphi_1 \cos(\theta_1 + \varepsilon) - \\ &\quad - (a_w + b_3) \sin \varphi_2 + b_1 \sin \varphi_2; \\ z_2 &= -u_1 \cos \alpha_n \cos(\theta_1 + \varepsilon) \sin(\vartheta_1 + \varphi_n) - \\ &\quad - (p\vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \sin(\theta_1 + \varepsilon) - b_2. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Здесь  $\varphi_2 = u_{21}(\varphi_1)\varphi_1$  – угол поворота некруглого конического спироидного колеса,  $u_{21}(\varphi_1)$  – передаточное отношение спироидной передачи.



Некруглые конические колеса предназначены для передачи движения с заданным переменным передаточным отношением между пересекающимися осями.

Вопросы, рассматриваемые в данной главе, посвящены исследованию зацепления некруглых конических колес, зубья которых нарезаются однопараметрическим или двухпараметрическим огибанием, методами, приведенными в главе 2.

### 4.1. Некруглые конические колеса с прямыми зубьями. Уравнение зацепления

Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 4.1): неподвижную  $S(x, y, z)$ , жестко связанную с производящим колесом  $\Pi$ , подвижные  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  и  $S_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1,2$ ), связанные соответственно с производящим и нарезаемым колесами, а также вспомогательные неподвижные системы координат  $S_a(x_a, y_a, z_a)$  и  $S_h(x_h, y_h, z_h)$ . Система  $S_n$  совершает вращательное движение с постоянной скоростью вокруг оси  $Ox$ ; при этом система  $S_k$  участвует в следующих движениях: неравномерном относительном вокруг оси  $Oy_k$  и неравномерном переносном вокруг оси  $Oz$ .

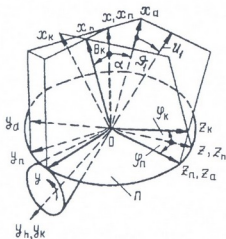


Рис. 4.1. Системы координат в станочном зацеплении

Производящей поверхностью является плоскость, описываемая режущими кромками инструмента, уравнение которой в системе  $S_a$  имеет вид

$$\bar{r}_a = u_1 (\cos \vartheta_1 \bar{i}_a + \sin \vartheta_1 \bar{k}_a). \quad (4.1)$$

Для получения уравнения производящей поверхности в системах координат  $S_n$  и  $S$  используем матричные равенства

здесь  $\bar{r}_a$  — радиус-вектор точки на поверхности инструмента в системе  $S_a$ .



$$r_n = M_{na} r_a,$$

$$r = M_{oa} r_a.$$



Здесь  $r_a$ ,  $r_n$  и  $r$  – столбцевые матрицы точки производящей поверхности в системах координат  $S_a$ ,  $S_n$  и  $S$ ;  $M_{na}$  и  $M_{oa}$  – матрицы перехода от системы  $S_a$  к  $S_n$  и  $S_a$  к  $S$ . В дальнейшем нам понадобятся также матрицы перехода от системы  $S$  к  $S_h$  и от  $S_h$  к  $S_k$ . Указанные матрицы имеют вид:

$$M_{na} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.4)$$

$$M_{oa} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & \sin \varphi_n \\ 0 & -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M_{ho} = \begin{vmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.6)$$

$$M_{kh} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -\sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Используя (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7), запишем уравнения производящей поверхности в координатах систем  $S_n$  и  $S$  в виде

$$\bar{r}_n = u_1 (\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i}_n - \sin \alpha \cos \vartheta_1 \bar{j}_n + \sin \vartheta_1 \bar{k}_n), \quad (4.8)$$

$$\bar{r} = u_1 [\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i} - (\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{j} + (\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{k}]. \quad (4.9)$$

Вектор нормали к поверхности (4.9)

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta_1} \quad (4.10)$$

представим в виде

$$\bar{n} = u_1 (-\sin \alpha \bar{i} - \cos \varphi_n \cos \alpha \bar{j} + \cos \alpha \sin \varphi_n \bar{k}). \quad (4.11)$$

Орт нормали к поверхности (4.9) определим из уравнения

$$r_n = M_{na} r_a,$$

$$r = M_{oa} r_a.$$

Здесь  $r_a$ ,  $r_n$  и  $r$  – столбцовые матрицы точки производящей поверхности в системах координат  $S_a$ ,  $S_n$  и  $S$ ;  $M_{na}$  и  $M_{oa}$  – матрицы перехода от системы  $S_a$  к  $S_n$  и  $S_a$  к  $S$ . В дальнейшем нам понадобятся также матрицы перехода от системы  $S$  к  $S_h$  и от  $S_h$  к  $S_k$ . Указанные матрицы имеют вид:

$$M_{na} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.4)$$

$$M_{oa} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & \sin \varphi_n \\ 0 & -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

$$M_{ho} = \begin{vmatrix} \cos \theta_k & \sin \theta_k & 0 \\ -\sin \theta_k & \cos \theta_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.6)$$

$$M_{kh} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -\sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Используя (4.1), (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (4.6) и (4.7), запишем уравнения производящей поверхности в координатах систем  $S_n$  и  $S$  в виде

$$\bar{r}_n = u_1 (\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i}_n - \sin \alpha \cos \vartheta_1 \bar{j}_n + \sin \vartheta_1 \bar{k}_n), \quad (4.8)$$

$$\bar{r} = u_1 [\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i} - (\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{j} + (\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{k}]. \quad (4.9)$$

Вектор нормали к поверхности (4.9)

$$\bar{n} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta_1} \quad (4.10)$$

представим в виде

$$\bar{n} = u_1 (-\sin \alpha \bar{i} - \cos \varphi_n \cos \alpha \bar{j} + \cos \alpha \sin \varphi_n \bar{k}). \quad (4.11)$$

Орт нормали к поверхности (4.9) определим из уравнения

$$\bar{e} = \sin \alpha \bar{i} - \cos \alpha \cos \varphi_n \bar{j} - \cos \alpha \sin \varphi_n \bar{k}. \quad (4.12)$$

Для вывода уравнения зацепления при нарезании **некрутых** конических колес воспользуемся условием сопряженности боковых поверхностей зубьев

$$\bar{e} \cdot \bar{v}^{(kn)} = 0, \quad (4.13)$$

где  $v^{(kn)}$  – скорость относительного движения.

Относительную угловую скорость в системе  $S$  определим уравнением

$$\bar{\omega}^{(kn)} = \left( -\frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k + \frac{d\varphi_n}{dt} \right) \bar{i} + \frac{d\varphi_k}{dt} \cos \theta_k \bar{j} - \frac{d\theta_k}{dt} \bar{k}. \quad (4.14)$$

Проекция относительной скорости на координатные оси системы  $S$ :

$$\begin{aligned} v_{x'o'}^{(kn)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (\cos \theta_k \sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \theta_k \cos \varphi_n \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \vartheta_1) + \frac{d\theta_k}{dt} (\sin \varphi_n \sin \vartheta_1 - \sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1) \right]; \\ v_{y'o'}^{(kn)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (\sin \theta_k \sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \sin \theta_k \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\varphi_n}{dt} (\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) - \cos \alpha \cos \vartheta_2 \frac{d\theta_k}{dt} \right]; \\ v_{z'o'}^{(kn)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 \sin \theta_k - \sin \theta_k \sin \varphi_n \sin \vartheta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \cos \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1) + \frac{d\varphi_n}{dt} (\sin \varphi_n \sin \vartheta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1) \right]. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\varphi_k = \varphi_k(\varphi_n)$  и  $\theta_k = \theta_k(\varphi_n)$ , производной  $\frac{d\varphi_n}{dt}$

можно придать произвольное значение. Примем  $\frac{d\varphi_n}{dt} = 1$  рад/с, тогда для производных, входящих в уравнения (4.15), получим:

$$\frac{d\varphi_l}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n},$$

$$\frac{d\theta_l}{dt} = \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \frac{d\varphi_n}{dt} = \frac{d\theta_k}{d\varphi_n}.$$

На основании (4.12), (4.13) и (4.15) получим уравнение зацепления

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\cos \theta_k \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \sin \theta_k \sin \vartheta_1 \cos \alpha + \\ & + \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \vartheta_1 \sin \alpha) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\sin \varphi_n \sin \vartheta_1 \sin \alpha - \\ & - \cos \varphi_n \cos \vartheta_1) - \sin \vartheta_1 \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Уравнение (4.16) представляет зависимость вида

$$f(\vartheta_1, \varphi_n) = 0. \quad (4.17)$$

Производные  $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n}$ ,  $\frac{d\theta_k}{d\varphi_n}$  определяются уравнениями:

для колеса  $k = 1$

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_1}{d\varphi_n} = \frac{1}{\sin \theta_1}, \\ & \frac{d\theta_1}{d\varphi_n} = \frac{\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \sin(\psi_1 - \varphi_1)}{\left[ -\frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma} \operatorname{tg} \theta_1 \cos(\psi_1 - \varphi_1) - 1 \right] \sin \theta_1}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

для колеса  $k = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi_2}{d\varphi_n} = \frac{1}{\sin \theta_2}, \\ & \frac{d\theta_2}{d\varphi_n} = \frac{\frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \sin[\psi_2(\psi_1) - \varphi_2]}{\left[ -\frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \operatorname{tg} \theta_2 \cos\{\psi_2(\psi_1) - \varphi_2\} + 1 \right] \sin \theta_2}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

#### 4.1.1. Уравнения линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезаемого колеса

Линия контакта в системе  $S_n$  выражается уравнениями:

$$x_n = u_1 \cos \alpha \cos \vartheta_1,$$

$$y_n = -u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1,$$

$$z_n = u_1 \sin \vartheta_1,$$

$$f(\vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Уравнения контактных линий в системе координат  $S$  определяют поверхность зацепления:

$$x = u_1 \cos \alpha \cos \vartheta_1,$$

$$y = -u_1 (\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_n \sin \vartheta_1),$$

$$z = u_1 (\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1),$$

$$f(\vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Для сечения поверхности зацепления плоскостью  $y = R_m$ , где  $R_m$  – среднее конусное расстояние, получим:

$$x = -\frac{\cos \alpha \cos \vartheta_1}{\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_n \sin \vartheta_1} R_m,$$

$$z = -\frac{\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1}{\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_n \sin \vartheta_1} R_m.$$

Запишем уравнения контактных линий в системе координат  $S_k$ , связанной с колесом. Для этого используем матричное равенство

$$r_k = M_{kn} r_n,$$

где  $r_k$  и  $r_n$  – столбцевые матрицы радиус-вектора в системах  $S_k$  и  $S_n$ ;  $M_{kn}$  – матрица перехода от системы  $S_n$  к системе  $S_k$ :

$$M_{kn} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k \cos \theta_k & \cos \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n + \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n - \\ & + \sin \varphi_k \sin \varphi_n & - \sin \varphi_n \cos \varphi_n \\ - \sin \theta_k & \cos \theta_k \cos \varphi_n & \cos \theta_k \sin \varphi_n \\ \sin \varphi_k \cos \theta_k & \sin \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_k - & \sin \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n + \\ & - \cos \varphi_k \sin \varphi_n & + \cos \varphi_k \cos \varphi_n \end{pmatrix}.$$

Боковую поверхность зубьев нарезаемого колеса определим системой уравнений:



$$\begin{aligned}
 x_k &= u_1 (\cos \varphi_k \cos \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \cos \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \\
 &\quad - \sin \varphi_k \sin \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \\
 &\quad - \sin \varphi_k \cos \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1), \\
 y_k &= u_1 (-\sin \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 + \\
 &\quad + \cos \theta_k \sin \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1), \\
 z_k &= u_1 (\sin \varphi_k \cos \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \sin \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_k \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \\
 &\quad - \cos \varphi_k \sin \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1 + \\
 &\quad + \cos \varphi_k \cos \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1), \\
 f(\vartheta_1, \varphi_n) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

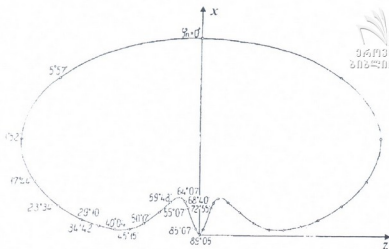
В качестве примера определим координаты контактных линий на производящей поверхности в системе  $S_n$  и найдем сечение поверхности зацепления плоскостью  $y = 100$  мм при следующих данных эллиптических конических колес: среднее передаточное отношение равно единице; эксцентриситет эллипса  $e = 0,2$ ; угол между осями колес  $\Sigma = 60^\circ$ . Используя уравнения (2.23, 2.24, 2.26, 4.16, 4.18, 4.8), определяем координаты контактных линий и сечения поверхности зацепления. Расчет координат введем при значении  $\psi_k$  через  $1^\circ$ . В табл. 4.1, 4.2 приведены результаты счета при изменении  $\psi_k$  с интервалами  $10^\circ$ .

Таблица 4.1

Координаты контактных линий

$\varphi_k^0$	x, мм	y, мм	z, мм	$\varphi_k^0$	x, мм	y, мм	z, мм
180	100,3670	-37,6200	0,0013	80	30,5581	-11,1215	-105,0834
170	78,7939	-28,6767	-71,1961	70	43,6629	-15,8909	-99,7047
160	50,0185	-18,2040	-96,2640	60	49,8773	-18,1526	-96,3470
150	32,3266	-11,7651	-104,4874	50	47,0143	-17,1106	-97,9637
140	20,9339	-7,6188	-107,7206	40	39,2403	-14,2813	-101,7656
130	13,1981	-4,8034	-109,1997	30	30,5433	-11,1161	-105,0882
120	7,9955	-2,9099	-109,6704	20	19,6520	-7,1341	-108,0040
110	5,4986	-2,0012	-109,8443	10	9,9086	-3,6062	-109,4934
100	6,9034	-2,5125	-109,7544	0	0,5602	-0,2039	-109,9984
90	14,5026	-2,5282	-108,9120				

На рис. 4.2 изображено искомое сечение поверхности зацепления.



Րիս. 4.2. Տեսքը մակերևույթի շարժման շրջանակում  
 հարթությամբ  $y = 100$  մմ

Տախույա 4.2

Կոորդինատներ շարժման գծերի

$\varphi_k^1$	$\theta_k^1$	$\varphi_k^0$	$\varphi_n^0$	x, մմ	z, մմ
180	36°35'	0	0	274,7650	0
170	36°28'	7°22'	5°57'	219,4434	-188,9366
160	36°09'	14°50'	11°52'	133,0918	-248,7407
150	35°36'	22°26'	17°44'	75,1264	-222,9500
140	34°53'42"	30°19'33"	23°34'01"	41,8259	-191,1897
130	34°04'09"	38°22'11"	29°10'46"	22,9983	-161,9030
120	33°00'16"	46°49'34"	34°42'06"	12,3344	-136,5415
110	31°51'38"	55°40'57"	40°04'05"	7,6120	-114,5890
100	30°43'43"	64°58'46"	45°15'55"	8,6581	- 94,6479
90	29°33'03"	74°44'32"	50°17'11"	16,6412	- 75,1987
80	28°24'05"	84°58'46"	55°07'48"	32,8621	- 53,9768
70	27°19'01"	95°40'57"	59°48'07"	46,3682	- 38,6767
60	26°22'01"	106°21'13"	64°07'41"	52,3120	- 27,8521
50	25°27'48"	118°22'11"	68°40'43"	48,2312	- 20,2062
40	24°44'12"	130°15'39"	72°55'07"	38,6723	- 16,0222
30	24°09'43"	142°26'20"	77°03'20"	28,1962	- 11,9845
20	23°44'50"	154°50'08"	81°06'48"	18,1819	- 8,9275
10	23°29'47"	167°22'50"	89°07'48"	9,0569	- 5,2321
0	23°24'47"	180°	89°05'47"	0	0

#### 4.1.2. Кривизна поверхностей зубьев



УДК 62-50  
 ISSN 0013-788X  
 ISSN 2616-6262

Для определения главной кривизны поверхности некруглых конических колес воспользуемся формулой Родрига, согласно которой

$$\varkappa_{I,II}^{(k)} = \frac{\dot{\bar{e}}_r^{(k)}}{\bar{v}_r^{(k)}},$$

где  $\varkappa_{I,II}^{(k)}$  – кривизна по главным направлениям;  $\bar{v}_r^{(k)}$  – скорость точки контакта в относительном движении;  $\dot{\bar{e}}_r^{(k)}$  – скорость конца орта нормали в относительном движении.

Производящая поверхность представляет собой плоскость, поэтому

$$\dot{\bar{e}}_r^{(n)} = 0, \quad \dot{\bar{e}}_r^{(k)} = \bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)}, \quad \text{где } \bar{\omega}^{(kn)} = \bar{\omega}^{(k)} - \bar{\omega}^{(n)}.$$

Для точки контакта, принадлежащей мгновенной оси вращения, в относительном движении  $\bar{v}_r^{(k)} = \bar{v}_r^{(n)}$ . Тогда главная кривизна прямых зубьев некруглых конических колес определяется зависимостью

$$\varkappa_{I,II}^{(k)} = -\frac{(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})}{\bar{v}_r^{(n)}}.$$

Скорость движения точки контакта по производящей поверхности

$$\bar{v}_r^{(n)} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt},$$

где  $\bar{r} = \bar{r}(u_1, \vartheta_1)$  выражается уравнением (4.9).

Скорость движения точки контакта по производящей поверхности при допущении, что  $\varphi_n = const$ :

$$\begin{aligned} \bar{v}_r^{(n)} = & [\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i} + (-\sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{j} + \\ & + (\sin \alpha \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) \bar{k}] \frac{du_1}{dt} + \\ & + \{u_1 [-\cos \alpha \sin \vartheta_1 \bar{i} + (\sin \alpha \cos \varphi_n \sin \vartheta_1 + \sin \varphi_n \cos \vartheta_1) \bar{j} + \\ & + (-\sin \alpha \sin \varphi_n \sin \vartheta_1 + \cos \varphi_n \cos \vartheta_1) \bar{k}]\} \frac{d\vartheta_1}{dt}. \end{aligned}$$





Для скорости конца орта нормали на основании (4.12) и (4.14) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r^{(k)} = & \left( -\cos \theta_k \cos \alpha \sin \varphi_n \frac{d\varphi_k}{dt} + \cos \alpha \cos \varphi_n \frac{d\theta_k}{dt} \right) \vec{i} + \\ & + \left[ -\sin \alpha \frac{d\theta_k}{dt} + \left( \frac{d\varphi_n}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k \right) \cos \alpha \sin \varphi_n \right] \vec{j} + \\ & + \left[ \left( \frac{d\varphi_n}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k \right) \cos \alpha \cos \varphi_n - \cos \theta_k \sin \alpha \frac{d\theta_k}{dt} \right] \vec{k}. \end{aligned}$$

Дифференцирование уравнения зацепления (4.16) дает

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\cos \varphi_n \operatorname{tg} \vartheta_1 \sin \alpha + \sin \varphi_n) + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\cos \theta_k \cos \varphi_n - \cos \theta_k \sin \varphi_n \times \\ & \times \operatorname{tg} \vartheta_1 \sin \alpha) + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} \left[ \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\sin \theta_k \cos \alpha + \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \alpha - \cos \theta_k \times \right. \\ & \left. \sin \varphi_n \operatorname{tg} \vartheta_1) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\sin \varphi_n \sin \alpha + \cos \varphi_n \operatorname{tg} \vartheta_1) - \cos \alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

Найдем нормальную кривизну зубьев нарезаемых поверхностей для точки контакта, лежащей на оси зацепления при двух направлениях перемещения контактной точки по производящей поверхности, определяемых соответственно условиями:  $\frac{du_1}{dt} = 0$  и

$\frac{d\vartheta_1}{dt} = 0$ . Поверхность зуба является линейчатой поверхностью,

образуемой прямой  $u_1$ . Одно из главных направлений  $\frac{d\vartheta_1}{dt}$  совпадает с образующей некруглого конуса, и главная кривизна в этом направлении равна нулю. Главная кривизна по направлению

$\frac{du_1}{dt} = 0$  имеет вид:

$$\kappa_{//}^{(k)} = \frac{\cos \varphi_n \frac{d\theta_k}{dt} - \cos \theta_k \sin \varphi_n \frac{d\varphi_k}{dt}}{u_1 \sin \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt}}.$$

Из продифференцированного уравнения находим:

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\cos\theta_k \sin\varphi_n \operatorname{tg}\vartheta_1 \sin\alpha - \cos\theta_k \cos\varphi_n) - \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\cos\varphi_n \operatorname{tg}\vartheta_1 \sin\alpha + \sin\varphi_n);$$

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\sin\theta_k \cos\alpha + \cos\theta_k \cos\varphi_n \sin\alpha - \cos\theta_k \sin\varphi_n \operatorname{tg}\vartheta_1) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\sin\varphi_n \sin\alpha + \cos\varphi_n \operatorname{tg}\vartheta_1) - \cos\alpha}{\dots}$$

Главную кривизну для точки контакта  $u_1 = R_e$ , при  $\varphi_n = 0^\circ$  запишем в виде

$$\varkappa_{II}^{(k)} = \frac{\frac{d\theta_k}{dt}}{R_e \sin\vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt}}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial\vartheta_1}{dt} = \frac{-\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos\theta_k - \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \operatorname{tg}\vartheta_1 \sin\alpha}{\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\sin\theta_k \cos\alpha + \cos\theta_k \sin\alpha) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \operatorname{tg}\vartheta_1 - \cos\alpha}$$

получим:

$$\varkappa_{II}^{(k)} = -\frac{\operatorname{ctg}\theta_n \sin\alpha + \operatorname{tg}\vartheta_1 \frac{d\theta_k}{dt}}{R_e \left( \sin\vartheta_1 \operatorname{tg}\vartheta_1 \operatorname{tg}\alpha + \sin\vartheta_1 \cos\theta_k \frac{d\varphi_k}{dt} \right)} \quad (4.21)$$

Главная кривизна для точки контакта при  $\varphi_n = 90^\circ$

$$\varkappa_{II}^{(k)} = -\frac{\cos\theta_k \frac{d\varphi_k}{dt}}{R_e \sin\vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt}}$$

С учетом

$$\frac{\partial \vartheta_1}{dt} = \frac{\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \operatorname{tg} \vartheta_1 \sin \alpha - \frac{d\theta_k}{d\varphi_n}}{\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\sin \theta_k \cos \alpha - \cos \theta_k \operatorname{tg} \vartheta_1) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \alpha - \cos \alpha}$$

получим:

$$\varkappa_{II}^{(k)} = - \frac{\cos \varphi_n \sin \alpha \frac{d\theta_k}{dt} - \cos \theta_k \operatorname{ctg} \theta_k \operatorname{tg} \vartheta_1}{R_c \left( \sin \vartheta_1 \cos \theta_k \operatorname{tg} \vartheta_1 \sin \alpha - \sin \vartheta_1 \frac{d\theta_k}{d\varphi_k} \right)}.$$

Здесь  $\frac{d\theta_k}{d\varphi_k}$ ,  $\frac{d\theta_k}{d\varphi_n}$  – производные, определяемые уравнениями (4.18) и (4.19).

### 4.1.3. Подрезание зубьев

При нарезании зубьев поверхность последних может оказаться подрезанной; на поверхности зубьев появляются особые точки, в которых кривизна нормального сечения поверхности обращается в нуль. Во избежание подрезания зубьев некруглого конического колеса при его нарезании, поверхность зубьев должна быть ограничена некоторой кривой. Для точек граничной линии должно быть соблюдено следующее условие:

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{du_1} & \frac{df}{d\vartheta_1} & \frac{df}{d\varphi_n} & \frac{d\varphi_n}{dt} \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_1} & v_{xn}^{(nk)} & \\ \frac{\partial z_n}{\partial u_1} & \frac{\partial z_n}{\partial \vartheta_1} & v_{zn}^{(nk)} & \end{vmatrix} = 0. \quad (4.22)$$

Используя матричное равенство

$$\omega_n^{(nk)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{vmatrix} \cdot \omega^{(nk)},$$

определяем относительную угловую скорость в системе  $S_n$  с помощью уравнения

$$\bar{\omega}_n^{(nk)} = \left( \frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k - \frac{d\varphi_n}{dt} \right) \bar{i}_n - \left( \frac{d\varphi_k}{dt} \cos \varphi_k \cos \theta_k + \frac{d\theta_k}{dt} \sin \varphi_n \right) \bar{j}_n + \left( -\frac{d\varphi_k}{dt} \sin \varphi_n \cos \theta_k + \frac{d\theta_k}{dt} \cos \varphi_n \right) \bar{k}_n.$$

Проекции вектора относительной скорости на координатные оси системы  $S_n$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} v_{xn}^{(kn)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (-\cos \varphi_n \cos \theta_k \sin \vartheta_1 - \sin \varphi_n \cos \theta_k) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \alpha \cos \vartheta_1 + \frac{d\theta_k}{dt} (-\sin \varphi_n \sin \vartheta_1 + \sin \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1) \right]; \\ v_{yn}^{(nk)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (-\sin \varphi_n \cos \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \sin \theta_k \sin \vartheta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha \cos \varphi_n \cos \vartheta_1 \frac{d\theta_k}{dt} + \sin \vartheta_1 \frac{d\varphi_n}{dt} \right]; \\ v_{zn}^{(nk)} &= u_1 \left[ \frac{d\varphi_k}{dt} (\cos \varphi_n \cos \theta_k \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \sin \theta_k \sin \alpha \cos \vartheta_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi_n \cos \alpha \cos \vartheta_1 \frac{d\theta_k}{dt} + \sin \alpha \cos \vartheta_1 \frac{d\varphi_n}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Найдем элементы определителя (4.22):

$$\frac{\partial x_n}{\partial u_1} = \cos \alpha \cos \vartheta_1; \quad \frac{\partial z_n}{\partial u_1} = \sin \vartheta_1;$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_1} = -u_1 \cos \alpha \sin \vartheta_1; \quad \frac{\partial z_n}{\partial \vartheta_1} = u_1 \cos \vartheta_1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\cos \varphi_n \cos \theta_k \cos \vartheta_1 \sin \alpha - \sin \varphi_n \cos \theta_k \times$$

$$\sin \vartheta_1 + \cos \vartheta_1 \sin \theta_k \cos \alpha) + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\cos \varphi_n \times \sin \vartheta_1 + \sin \varphi_n \cos \vartheta_1 \times$$

$$\times \sin \alpha) - \cos \vartheta_1 \sin \alpha;$$



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{d\varphi_n} = & \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_n^2} (\cos\varphi_n \cos\theta_k \sin\vartheta_1 \sin\alpha + \sin\varphi_n \cos\theta_k \cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1 \sin\theta_k \cos\alpha) + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} (\cos\varphi_n \cos\theta_k \cos\vartheta_1 - \sin\varphi_n \cos\theta_k \times \\
 & \times \sin\vartheta_1 \sin\alpha) + \frac{d^2\theta_k}{d\varphi_n^2} (\sin\varphi_n \sin\vartheta_1 \sin\alpha - \cos\varphi_n \cos\vartheta_1) + \\
 & + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (\cos\varphi_n \sin\vartheta_1 \sin\alpha + \sin\varphi_n \cos\vartheta_1). \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

Внося значения (4.23) и (4.24) в определитель (4.22), приняв при этом  $\frac{d\varphi_n}{dt} = 1$  рад/с и раскрыв его по элементам первой строки, получим уравнение связи между параметрами  $\vartheta_1$  и  $\varphi_n$

$$\Phi(\vartheta_1, \varphi_n) = 0. \tag{4.25}$$

Для нахождения  $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_n)$ ,  $\theta_1 = \theta_1(\varphi_n)$  используем уравнения (2.71, 2.72, 2.75), которые решаются следующим образом: задаемся значением  $\psi_1$ , из (2.75) находим  $(\psi_1 - \varphi_1)$ , а из (2.72) и (2.71) определим  $\theta_1$  и  $\varphi_n$ . Рассматривая совместно уравнения (4.16) и (4.25), найдем текущие значения  $u_1$  и  $\vartheta_1$ . По выражениям (4.8) определим координаты граничной линии, которой должна быть ограничена производящая поверхность во избежание подрезания нарезаемых зубьев некруглого конического колеса.

## 4.2. Некруглые конические зубчатые колеса с круговыми зубьями. Уравнение зацепления

Введем в рассмотрение следующие системы координат: подвижные  $S_s(x_s, y_s, z_s)$ ,  $S_n(x_n, y_n, z_n)$  и  $S_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1,2$ ), жестко связанные с производящим и нарезаемым колесами, и неподвижную систему координат  $S(x, y, z)$ , жестко связанную с производящим колесом (рис. 4.3). Система  $S_n$  совершает вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси  $O_n x_n$ ; при этом система  $S_k$  участвует в следующих движениях: неравномерном

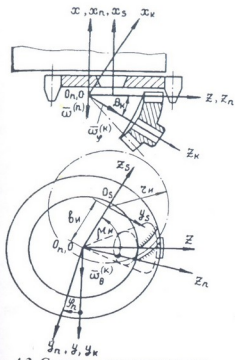


Рис. 4.3. Системы координат в станочном зацеплении при нарезании некруглых конических колес с круговыми зубьями

относительном вращении вокруг оси \$Oz\_k\$ в неравномерном переносном вращении вокруг оси \$Oy\_k\$.

Вектор относительной угловой скорости запишем в виде  

$$\bar{\omega}^{(kn)} = (\omega^{(n)} - \omega_\varphi^{(k)} \sin \theta_k) \bar{i} + \omega_\theta^{(k)} \bar{j} + \omega_\varphi^{(k)} \cos \theta_k \bar{k}.$$

Вектор скорости относительного движения выразим уравнением

$$\bar{v}^{(kn)} = (z\omega_\theta^{(k)} - y\omega_\varphi^{(k)} \cos \theta_k) \bar{i} - [z(\omega^{(n)} - \omega_\varphi^{(k)} \sin \theta_k) - x\omega_\theta^{(k)} \cos \theta_k] \bar{j} + [y(\omega^{(n)} - \omega_\varphi^{(k)} \sin \theta_k) - x\omega_\theta^{(k)}] \bar{k}.$$

Используя матричное равенство

$$v_n^{(kn)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{pmatrix} \cdot v^{(kn)}$$

где \$v\_n^{(kn)}\$, \$v^{(kn)}\$ – столбцевые матрицы вектора относительной скорости в системах \$S\_n\$ и \$S\$, определим вектор скорости относительного движения в системе \$S\_n\$:

$$v_n^{(kn)} = [\omega_\theta^{(k)} (z_n \cos \varphi_n - y_n \sin \varphi_n) - \omega_\varphi^{(k)} \cos \theta_k (z_n \sin \varphi_n + y_n \cos \varphi_n)] \bar{i}_n - [z_n (\omega^{(n)} - \omega_\varphi^{(k)} \sin \theta_k) - x_n (\omega_\theta^{(k)} \sin \varphi_n + \omega_\varphi^{(k)} \cos \theta_k \cos \varphi_n)] \bar{j}_n + [y_n (\omega^{(n)} - \omega_\varphi^{(k)} \sin \theta_k) - x_n (\omega_\theta^{(k)} \cos \varphi_n - \omega_\varphi^{(k)} \cos \theta_k \sin \varphi_n)] \bar{k}_n.$$

Внеся \$x\_n\$, \$y\_n\$, \$z\_n\$ из (3.2), получим выражения для проекции скорости относительного движения на координатные оси системы \$S\_n\$:

$$v_{xn}^{(kn)} = [u_1 \sin \alpha \cos \tau + b_n \cos(\mu_n - \varphi_n)] \frac{d\theta_k}{dt} -$$

$$- \cos \theta_k [u_1 \sin \alpha \sin \tau - b_n \sin(\mu_n - \varphi_n)] \frac{d\varphi_k}{dt};$$

$$v_{1n}^{(kn)} = [u_1 \sin \alpha \cos(\vartheta_1 - \mu_n) + b_n \cos \mu_n] \left( \frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k - \frac{d\theta_n}{dt} \right) + (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{dt} \sin \varphi_n + \frac{d\varphi_k}{dt} \cos \theta_k \cos \varphi_n \right); \quad (4.26)$$

$$v_{2n}^{(kn)} = [u_1 \sin \alpha \sin(\vartheta_1 - \mu_n) - b_n \sin \mu_n] \left( \frac{d\varphi_n}{dt} - \frac{d\varphi_k}{dt} \sin \theta_k \right) - (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{dt} \cos \varphi_n - \frac{d\varphi_k}{dt} \cos \theta_k \sin \varphi_n \right).$$

Используя выражения (3.7) и (4.26), запишем уравнение связи между параметрами  $u_1$ ,  $\vartheta_1$  и  $\varphi_n$  в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} [r_n \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha \cos \tau - u_1 \cos \tau - b_n \sin \alpha \cos(\mu_n - \varphi_n)] + \\ & + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} [u_1 \cos \theta_k \sin \tau - b_n \sin \alpha \cos \theta_k \sin(\mu_n - \varphi_n) + \\ & + b_n \cos \alpha \sin \theta_k \sin \vartheta_1 - r_n \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha \cos \theta_k \sin \tau] - \\ & - b_n \cos \alpha \sin \vartheta_1 = 0, \end{aligned} \quad (4.27)$$

что представляет зависимость вида

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0. \quad (4.28)$$

#### 4.2.1. Уравнения линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезаемого колеса

Линия контакта на поверхности инструмента определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_n &= u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha; \\ y_n &= u_1 \sin \alpha \sin(\vartheta_1 - \mu_n) + b_n \sin \mu_n; \end{aligned}$$

$$z_n = u_1 \sin \alpha \cos(\vartheta_1 - \mu_n) + b_n \cos \mu_n;$$

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Считая фиксированным угол поворота производящего колеса  $\varphi_n$  и задавая ряд значений одного из параметров  $u_1$  (или  $\vartheta_1$ ), из последнего уравнения (4.29) определяем  $\vartheta_1$  (или  $u_1$ ). Используя значения  $u_1, \vartheta_1$ , находим из (4.29) координаты контактной линии.

Для определения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса, запишем уравнение контактных линий в системе координат  $S_k$ , связанной с нарезаемым колесом. Для этого используем матричное равенство

$$r_k = M_{kn} r_n, \quad (4.30)$$

где  $r_k$  и  $r_n$  – столбцевые матрицы радиус-вектора в системах координат  $S_k$  и  $S_n$ ; матрица перехода от системы координат  $S_n$  к  $S_k$ :

$$M_{kn} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k \cos \theta_k & \sin \varphi_k \cos \varphi_n & \sin \varphi_k \sin \varphi_n \\ -\sin \varphi_k \cos \theta_k & \cos \varphi_k \cos \varphi_n & \cos \varphi_k \sin \varphi_n \\ -\sin \theta_k & -\cos \theta_k \sin \varphi_n & \cos \theta_k \cos \varphi_n \end{vmatrix}. \quad (4.31)$$

С учетом (4.29), (4.30) и (4.31) представим уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса в виде:

$$x_k = u_1 (\cos \alpha \cos \varphi_k \cos \theta_k + \sin \alpha \sin \varphi_k \sin \tau) -$$

$$- r_n \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi_k \cos \theta_k - b_n \sin \varphi_k \sin(\mu_n - \varphi_n);$$

$$y_k = u_1 \sin \alpha \cos \varphi_k (\sin \tau - \cos \alpha \sin \varphi_k \cos \theta_k) +$$

$$+ r_n \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi_k \cos \theta_k - b_n \cos \varphi_k \sin(\mu_n - \varphi_n);$$

$$z_k = u_1 (\sin \alpha \cos \tau \cos \theta_k - \cos \alpha \sin \theta_k) +$$

$$+ r_n \operatorname{ctg} \alpha \sin \theta_k + b_n \cos \theta_k \cos(\mu_n - \varphi_n);$$

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Поверхность зацепления определится системой уравнений:

$$x = u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y = u_1 \sin \alpha \sin \tau - b_n \sin(\mu_n - \varphi_n);$$

$$z = u_1 \sin \alpha \cos \tau + b_n \cos(\mu_n - \varphi_n);$$

$$f(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Сечение поверхности зацепления плоскостью  $z = R_m$  выражается уравнениями:



$$x = \frac{R_m - b_n \cos(\mu_n - \varphi_n)}{\sin \alpha \cos(\vartheta_1 - \mu_n - \varphi_n)} \cos \alpha - r_m \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y = \frac{R_m - b_n \cos(\mu_n - \varphi_n)}{\cos(\vartheta_1 - \mu_n - \varphi_n)} \sin(\vartheta_1 - \mu_n - \varphi_n) - b_n \sin(\mu_n - \varphi_n).$$

При нарезании выпуклой стороны зуба внутренними кромками резцовой головки, в приведенных уравнениях угол  $\alpha$  необходимо заменить углом  $180^\circ - \alpha$ .

#### 4.2.2. Нормальная кривизна поверхностей зубьев

Кривизну огибающей поверхности будем определять через кривизну огибаемой поверхности и параметры движения контактной точки. Из дифференциальной геометрии известно, что кривизна поверхности в нормальном сечении, например, в сечении, проходящем через вектор относительной скорости и нормаль к поверхности, определяется зависимостью

$$\varkappa^{(k)} = - \frac{\bar{v}_t^{(k)} \cdot \dot{\bar{e}}_r^{(k)}}{[\bar{v}_r^{(k)}]^2}.$$

Здесь  $\bar{v}_r^{(k)} = \bar{v}_r^{(n)} - \bar{v}^{(kn)}$  – скорость контактной точки при ее относительном движении;  $\dot{\bar{e}}_r^{(k)} = \dot{\bar{e}}_r^{(n)} - (\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})$  – скорость конца орта нормали в относительном движении;  $\bar{v}^{(kn)}$  – скорость относительного движения точки;  $\bar{\omega}^{(kn)} = \bar{\omega}^{(k)} - \bar{\omega}^{(n)}$ .

Используя выражения для  $\bar{v}_r^{(k)}$  и  $\dot{\bar{e}}_r^{(k)}$ , представим уравнение кривизны огибаемой поверхности в виде

$$\varkappa^{(k)} = - \frac{[\bar{v}_r^{(n)} - \bar{v}^{(kn)}] \left[ \dot{\bar{e}}_r^{(n)} - (\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)}) \right]}{[\bar{v}_r^{(n)} - \bar{v}^{(kn)}]^2}. \quad (4.32)$$

Определим нормальную кривизну поверхности зубьев нарезаемого колеса  $P_k$  в сечениях, проведенных через главные направления  $\Gamma^{(n)}$  и  $\Pi^{(n)}$  поверхности зубьев производящего колеса



$\Pi_n$ . При этом будем считать известными главные направления и главные кривизны огибаемой поверхности  $\Pi_n$ . Обозначив через  $\bar{i}_I$  и  $\bar{i}_{II}$  главные направления поверхности  $\Pi_n$ , представим уравнение зацепления в виде

$$\bar{e}^{(n)} \left[ \left( \bar{\omega}_\phi^{(k)} + \bar{\omega}_\theta^{(k)} - \bar{\omega}^{(n)} \right) \times \bar{r}^{(n)} \right] = 0. \quad (4.33)$$

Учитывая, что  $\bar{\omega}^{(n)} = const$ , а  $\bar{\omega}^{(k)} \neq const$ , дифференцируя уравнение (4.51), получим

$$\dot{\bar{e}}^{(n)} \bar{v}^{(kn)} + \left[ \bar{e}^{(n)}, \left( \dot{\bar{\omega}}_\phi^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_\theta^{(k)} \right), \bar{r}^{(n)} \right] + \left[ \bar{e}^{(n)}, \bar{\omega}^{(kn)}, \bar{v}_e^{(n)} \right] = 0. \quad (4.34)$$

Здесь  $\dot{\omega}_\phi^{(k)} = \frac{d^2 \phi_k}{dt^2}$ ,  $\dot{\omega}_\theta^{(k)} = \frac{d^2 \theta_k}{dt^2}$  — угловые ускорения нарезаемого колеса.

Учитывая значение скорости точки в абсолютном движении, запишем уравнение (4.34) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_r^{(n)} \bar{v}^{(kn)} + \left[ \bar{\omega}^{(n)}, \bar{e}^{(n)}, \bar{v}^{(kn)} \right] + \left[ \bar{e}^{(n)}, \left( \dot{\bar{\omega}}_\phi^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_\theta^{(k)} \right), \bar{r}^{(n)} \right] + \\ + \bar{v}_r^{(n)} \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right) + \left[ \bar{e}^{(n)}, \bar{\omega}^{(kn)}, \bar{v}_e^{(n)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Векторы,  $\dot{\bar{e}}_r^{(n)}$ ,  $\bar{v}_r^{(n)}$ ,  $\bar{v}^{(kn)}$ ,  $\left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right)$ ,  $\bar{i}_I$  и  $\bar{i}_{II}$  лежат в плоскости, касательной к поверхности зубьев. Разложим эти векторы по главным направлениям  $I^{(n)}$  и  $II^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{rI}^{(n)} \nu_I^{(kn)} + \dot{\bar{e}}_{rII}^{(n)} \nu_{II}^{(kn)} + \nu_{rI}^{(n)} \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right)_I + \nu_{rII}^{(n)} \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right)_{II} + \\ + \left[ \bar{\omega}^{(n)}, \bar{e}^{(n)}, \bar{v}^{(kn)} \right] + \left[ \bar{e}^{(n)}, \left( \dot{\bar{\omega}}_\phi^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_\theta^{(k)} \right), \bar{r}^{(n)} \right] + \\ + \left[ \bar{e}^{(n)}, \bar{\omega}^{(kn)}, \bar{v}_e^{(n)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{v}_r^{(n)} &= \nu_{rI} \cdot \bar{i}_I + \nu_{rII} \cdot \bar{i}_{II}; & \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right)_I &= \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right) \bar{i}_I; \\ \dot{\bar{e}}_r^{(n)} &= \dot{e}_{II}^{(n)} \bar{i}_I + \dot{e}_{rII} \bar{i}_{II}; & \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right)_{II} &= \left( \bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)} \right) \bar{i}_{II}; \\ \bar{v}^{(kn)} &= \nu_I^{(kn)} \bar{i}_I + \nu_{II}^{(kn)} \bar{i}_{II}; \end{aligned}$$

Для главных направлений по формуле Родрига имеем

$$\dot{e}_{rI}^{(n)} = -\alpha_I^{(n)} \nu_{rI}^{(n)} \quad \text{и} \quad \dot{e}_{rII}^{(n)} = -\alpha_{II}^{(n)} \nu_{rII}^{(n)}. \quad (4.36)$$

Подставив (4.36) в (4.35), получим:

$$\begin{aligned}
 & v_{rl}^{(n)} [(e^{(n)} \times \omega^{(kn)})_I - \alpha_I^{(n)} v_I^{(kn)}] + v_{rl}^{(n)} [(\bar{e}^{(n)} \times \bar{\omega}^{(kn)})_{II} - \\
 & - \alpha_{II}^{(n)} v_{II}^{(kn)}] + [\bar{\omega}^{(n)}, \bar{e}^{(n)}, \bar{v}^{(kn)}] + [\bar{e}^{(n)}, (\dot{\bar{\omega}}_\varphi^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_\theta^{(k)}), r^{(n)}] + \\
 & + [\bar{e}^{(n)}, \omega^{(kn)}, \bar{v}_c^{(n)}] = 0.
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

В случае линейного касания поверхностей зубьев, направление скорости относительного движения  $v_r^{(n)}$  может быть выбрано произвольно.

Задаемся направлением движения точки контакта на поверхности  $\Pi_n$ . Предположим, что она движется по главному направлению  $I^{(n)}$ . Тогда  $v_{r(II)}^{(n)} = 0$  и из (4.37) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & [\bar{\omega}^{(n)}, \bar{e}^{(n)}, \bar{v}^{(kn)}] + [\bar{e}^{(n)}, (\dot{\bar{\omega}}_\varphi^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_\theta^{(k)}), r^{(n)}] + \\
 & + [\bar{e}^{(n)}, \bar{\omega}^{(kn)}, \bar{v}_c^{(n)}] \\
 v_{rl}^{(n)} = & \frac{\quad}{(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_I + \alpha_I^{(n)} \bar{v}_I^{(kn)}}. \tag{4.38}
 \end{aligned}$$


Раскладывая векторы, входящие в уравнения (4.32) по главным направлениям  $I^{(n)}$  и  $II^{(n)}$ , и учитывая (4.36), получим формулу общего вида для определения нормальных кривизн огибающей поверхности в сечениях, проведенных через вектор  $\bar{v}_r^{(n)}$ :

$$\begin{aligned}
 & (v_{rl}^{(n)} - v_I^{(kn)}) [(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_I + \alpha_I^{(n)} \bar{v}_{rl}^{(kn)}] + \\
 \alpha^{(k)} = & \frac{+(v_{rl}^{(n)} - v_{II}^{(kn)}) [(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_{II} + \alpha_{II}^{(n)} \bar{v}_{II}^{(kn)}]}{(v_{rl}^{(n)} - v_I^{(kn)})^2 + (v_{rl}^{(n)} - v_{II}^{(kn)})^2}. \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

Положив условие  $v_{rl}^{(n)} = 0$ , определим из (4.39) нормальную кривизну поверхности  $\Pi_k$  в сечении, проведенном через первое главное направление  $I^{(n)}$ :

$$\begin{aligned}
 & (v_{rl}^{(n)} - v_I^{(kn)}) [(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_I + \alpha_I^{(n)} \bar{v}_{rl}^{(kn)}] - \\
 \alpha_{I^{(n)}}^{(k)} = & \frac{-v_{II}^{(kn)} (\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_{II}}{(v_{rl}^{(n)} - v_I^{(kn)})^2 + (v_{II}^{(kn)})^2}. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Аналогично, при движении точки контакта на поверхности  $\Pi_n$  по главному направлению  $II^{(n)}$ , получим соответствующие выражения:



$$[\bar{\omega}^{(n)}, \bar{e}^{(n)}, \bar{v}^{(kn)}] + [\bar{e}^{(n)}, (\dot{\bar{\omega}}_{\phi}^{(k)} + \dot{\bar{\omega}}_{\theta}^{(k)}), \bar{r}^{(n)}] +$$

$$+ [\bar{e}^{(n)}, \bar{\omega}^{(kn)}, \bar{v}_e^{(n)}] \quad (4.41)$$

$$v_{rII}^{(n)} = \frac{(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_{II} + \alpha_{II}^{(n)} \bar{v}_{II}^{(kn)}}{(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_I + (v_{rII}^{(n)} - v_{II}^{(kn)})[(\bar{\omega}^{(kn)} \times \bar{e}^{(n)})_{II} +$$

$$+ \alpha_{II}^{(n)} v_{rII}^{(n)}] \quad (4.42)$$

$$\alpha_{II}^{(k)} = \frac{(\alpha_{II}^{(n)} v_{rII}^{(n)})}{(v_{rII}^{(n)} - v_{II}^{(kn)})^2 + (v_I^{(kn)})^2}.$$

Величины  $v_{rI}^{(n)}$  и  $v_{rII}^{(n)}$ , входящие в (4.39) и (4.42), определяются из равенств (4.38) и (4.41).

### 4.2.3. Кривизна поверхностей $\Pi_n$ и $\Pi_k$ в нормальном сечении, проведенном через вектор касательной к характеристике

В этом случае нормальные кривизны взаимоогibaемых поверхностей  $\Pi_n$  и  $\Pi_k$  будут иметь одинаковые значения. Используя формулу Эйлера, получим:

$$\alpha^{(n)} = \alpha^{(k)} = \alpha_I^{(n)} \cos^2 q_1 + \alpha_{II}^{(n)} \sin^2 q_1.$$

Здесь  $q_1$  – угол, составленный касательной к характеристике, лежащей в плоскости нормального сечения, с искомой кривизной  $\alpha^{(n)} = \alpha^{(k)}$  и главным направлением  $\Gamma^{(n)}$ . Направим вектор  $\bar{v}_r^{(n)}$  касательно к линии контакта. Тогда

$$\cos q_1 = \frac{\bar{v}_r^{(n)} \cdot \bar{i}_I}{|\bar{v}_r^{(n)}|}. \quad (4.43)$$

Здесь

$$v_r^{(n)} = \frac{\partial \bar{r}^{(n)}}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial \bar{r}^{(n)}}{\partial \vartheta_1} \frac{d\vartheta_1}{dt}. \quad (4.44)$$

Орт  $\Gamma^{(n)}$  первого главного направления огibaемой поверхности в общем виде

$$\bar{i}_I = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k};$$

здесь косинусы считаются известными.

В выражение для  $v_r^{(n)}$  входят производные  $\frac{du_1}{dt}$  и  $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ , подлежащие определению. Для этого воспользуемся уравнением зацепления (4.27) и продифференцируем его, учитывая, что

$\varphi_n = \text{const}$  (предполагается, что точка контакта движется по неподвижной поверхности  $\Pi_n$ ). Соответственно, углы  $\theta_k$  и производные  $\frac{d\theta_k}{dt}$ ,  $\frac{d\vartheta_k}{dt}$ , являющиеся функциями угла  $\varphi_n$ , принимают постоянные значения. Задаваясь произвольно одной из производных, например,  $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ , из продифференцированного уравнения зацепления определяем вторую производную  $\frac{du_1}{dt}$ . Внося производные в (4.44), определим  $v_r^{(n)}$ . Далее, из (4.43) находим угол  $q_1$ .

#### 4.2.4. Подрезание зубьев

Для определения граничной линии на нарезаемой поверхности воспользуемся определителем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} & \frac{\partial f}{\partial \varphi_n} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_1} & v_{xn}^{(kn)} & \\ \frac{\partial y_n}{\partial u_1} & \frac{\partial y_n}{\partial \vartheta_1} & v_{yn}^{(kn)} & \end{vmatrix} = 0. \quad (4.45)$$

Найдем элементы определителя (4.45), для чего продифференцируем уравнение (3.2) по  $u_1$ ,  $\vartheta_1$ , а уравнение зацепления (4.27) – по  $u_1$ ,  $\vartheta_1$  и  $\varphi_n$ . Получим:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \sin \tau - \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \cos \tau; \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vartheta_1} = & (u_1 - r_n \text{ctg} \alpha \cos \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \tau + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \cos \tau \right) + \\ & + b_n \cos \alpha \cos \vartheta_1 \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \sin \theta_k - 1 \right); \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_n} = (u_1 - r_n \text{ctg} \alpha \cos \alpha) \left[ \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \tau - \frac{d^2 \theta_k}{d\varphi_n^2} \cos \tau \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \theta_k \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \tau + \frac{d^2 \varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin \tau \right) - \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \times \\
 & \times \sin \theta_k \sin \tau \left] - b_n \sin \alpha \left[ \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin(\mu_n - \varphi_n) + \right. \\
 & \left. + \frac{d^2 \theta_k}{d\varphi_n^2} \cos(\mu_n - \varphi_n) \right] - \cos \theta_k \left[ \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos(\mu_n - \varphi_n) - \right. \\
 & \left. - \frac{d^2 \varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin(\mu_n - \varphi_n) - \sin \theta_k \sin(\mu_n - \varphi_n) \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} - \right. \\
 & \left. - \operatorname{ctg} \alpha \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k + \frac{d^2 \varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin \theta_k \right) \right]; \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial u_1} = \cos \alpha; \quad \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_1} = 0; \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial u_1} = \sin \alpha \sin(\vartheta_1 - \mu_n); \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \vartheta_1} = u_1 \sin \alpha \cos(\vartheta_1 - \mu_n). \quad (4.51)$$

Выражения для  $v_{xn}^{(kn)}$  и  $v_{yn}^{(kn)}$  определяются из (4.26). Внося значения (4.46-4.51) в определитель (4.45) и раскрыв его по элементам второй строки, запишем уравнение подрезания в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \cos \alpha \left[ (u_1 - r_n \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \tau + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \cos \tau \right) + \right. \\
 & \left. + b_n \cos \alpha \cos \vartheta_1 \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \sin \theta_k - 1 \right) \right] \left[ u_1 \sin \alpha \cos(\vartheta_1 - \right. \\
 & \left. - \mu_n) + b_n \cos \mu_n \right] \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \sin \theta_k - 1 \right) + (u_1 \cos \alpha - \\
 & - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \varphi_n + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \cos \varphi_n \right) \left. \right] + \\
 & + u_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos(\vartheta_1 - \mu_n) \left\{ (u_1 - r_n \operatorname{ctg} \alpha \cos \alpha) \times \right.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \times \left[ \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \tau - \frac{d^2\theta_k}{d\varphi_n^2} \cos \tau \right) + \cos \theta_k \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \tau + \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin \tau \right) \right. \\
 & - \sin \tau \sin \theta_k \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \left. \right] - b_n \sin \alpha \left[ \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin(\mu_n - \varphi_n) + \right. \\
 & + \frac{d^2\theta_k}{d\varphi_n^2} \cos(\mu_n - \varphi_n) - \cos \theta_k \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos(\mu_n - \varphi_n) - \right. \\
 & - \left. \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin(\mu_n - \varphi_n) \right) - \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \theta_k \sin(\mu_n - \varphi_n) - \\
 & - \left. \left. \text{ctg} \alpha \sin \vartheta_1 \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k + \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_n^2} \sin \theta_k \right) \right] \right\} + \\
 & + \sin \alpha \sin(\vartheta_1 - \mu_n) \left[ \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} (u_1 \sin \alpha \cos \tau + b_n \cos(\mu_n - \varphi_n)) - \right. \\
 & - \left. \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k (u_1 \sin \alpha \sin \tau - b_n \sin(\mu_n - \varphi_n)) \right] \times \\
 & \times \left[ u_1 \text{ctg}(\vartheta_1 - \mu_n) \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \sin \tau - \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \cos \tau \right) - (u_1 - \right. \\
 & - r_n \text{ctg} \alpha \cos \alpha) \left( \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} \sin \tau + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \cos \theta_k \cos \tau \right) - b_n \cos \alpha \times \\
 & \times \left. \left. \cos \vartheta_1 \left( \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} \sin \theta_k - 1 \right) \right] \right\} = 0. \tag{4.52}
 \end{aligned}$$

В качестве примера определим координаты граничной кривой при нарезании эллиптических конических зубчатых колес ( $\kappa = 1$ ) со следующими данными:  $\Sigma = 60^\circ$ ;  $e = 0,2$ ;  $z_1 = 25$ ;  $\alpha = 20^\circ$ ;  $r_n = 76,2$  мм;  $b_n = 80,796$  мм;  $\mu_n = 50^\circ 35' 30''$ . Из уравнений (4.27) и (4.52) определяем  $u_1$  и  $\vartheta_1$ ; внеся их значения в уравнение (3.2), определяем координаты граничной линии.

По приведенным уравнениям были проведены вычисления на ЭЦВМ М-222. Результаты вычислений приведены в табл. 4.4. По данным табл. 4.3 построена граничная кривая (рис. 4.4).

Анализ полученных результатов показывает, что при выбран-

ных параметрах зубья эллиптических конических колес /не  
подвергаются подрезанию.

Координаты граничной кривой

$\varphi_1$ , °	$\psi_1$ , °	$u_1$ , мм	$\vartheta_1$ , °	$x_1$ , мм	$y_1$ , мм	$z_1$ , мм
180°	0°00'00"	229,81	185°45'49"	-15,20	13,90	-3,69
168°	8°51'48"	216,49	140°32'48"	-6,82	11,59	59,31
156°	17°51'19"	217,36	135°33'43"	-6,00	11,59	57,85
143°40'	27°21'47"	153,76	13°03'48"	-55,79	-96,41	93,01
131°10'	37°24'25"	211,29	140°25'41"	-11,71	9,74	51,38
118°15'	48°20'45"	168,97	0°31'26"	-51,59	-12,99	88,06
104°50'	60°25'44"	178,57	351°41'32"	-42,47	-114,73	82,88
90°45'	73°59'36"	175,55	187°17'40"	-45,31	-36,82	-15,62
76°	89°12'21"	163,51	180°18'35"	-42,62	-17,26	-0,73
60°25'	106°21'13"	202,87	315°18'33"	-9,69	-131,56	44,92
43°55'	125°33'57"	216,43	320°04'59"	-6,88	-136,47	51,31
26°40'	146°33'01"	211,81	284°04'59"	-10,23	-113,24	-0,34
9°	168°38'25"	221,19	185°21'45"	-2,42	-8,84	-2,03

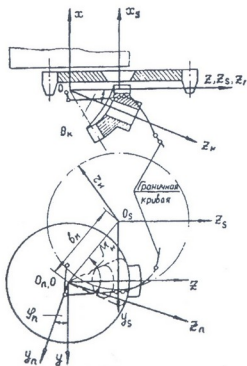


Рис. 4.4. Граничная кривая



### 4.3. Некруглые конические зубчатые колеса с циклоидальной линией зубьев. Уравнение зацепления



Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 4.5):  $S_p(x_p, y_p, z_p)$  и  $S_n(x_n, y_n, z_n)$ , связанные соответственно с режущей кромкой и с резцовой головкой;  $S_n(x_n, y_n, z_n)$ , связанную с производящим колесом;  $S_2(x_2, y_2, z_2)$  и  $S_s(x_s, y_s, z_s)$ , связанные с нарезаемым колесом;  $S(x, y, z)$ , связанную с производящим колесом. Системы  $S$  и  $S_s$  неподвижны.

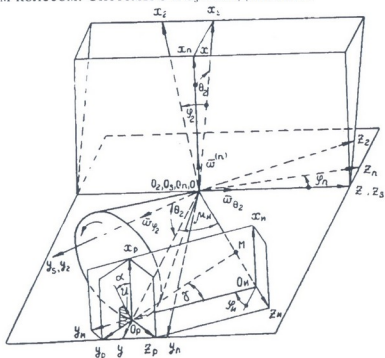


Рис. 4.5. Системы координат в станочном зацеплении при нарезании некруглых конических колес с циклоидальной линией зубьев

Нарезание зубьев осуществляется следующим образом: при вращении производящего колеса вокруг оси  $O_n x_n$ , резцовая головка одновременно совершает вращательные движения вокруг своей оси  $O_n x_n$  и вокруг оси производящего колеса  $O_n x_n$ . В этих движениях режущие кромки образуют зубья плоского производящего колеса. При равномерном вращении вокруг оси  $O_n x_n$  с

угловой скоростью  $\omega = \frac{d\varphi'_n}{dt}$  ( $\varphi'_n$  – угол поворота производящего колеса при его зацеплении с нарезаемым колесом), нарезаемое колесо участвует в следующих движениях: 1) неравномерном относительном вращении вокруг оси  $O_2y_2$  с угловой скоростью  $\omega_{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{dt}$ , где  $\varphi_2$  – угол поворота нарезаемого колеса при его зацеплении с производящим колесом; 2) неравномерном переносном вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\omega_{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{dt}$ , где  $\theta_2$  – угол, образуемый начальной плоскостью производящего колеса с осью  $O_2y_2$ .

Режущая кромка резца, профилирующая выпуклую сторону зуба производящего колеса, выразится уравнением

$$\vec{r}_p = u(\cos \alpha \vec{i}_p + \sin \alpha \vec{j}_p), \quad (4.53)$$

где  $u$  – параметр, определяющий положение текущей точки на режущей кромке.

Боковую поверхность выпуклой стороны зубьев производящего колеса получим, используя матричное равенство

$$r_n = M_{np} r_p,$$

где  $M_{np}$  – матрица перехода от системы  $S_p$  к системе  $S_n$ :

$$M_{np} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_n + \varphi_n - \gamma) & \sin(\varphi_n + \varphi_n - \gamma) & a_w \cos(\mu_n - \varphi_n) + R_n \cos(\varphi_n + \varphi_n) \\ 0 & \sin(\varphi_n + \varphi_n - \gamma) & \cos(\varphi_n + \varphi_n - \gamma) & a_w \sin(\mu_n - \varphi_n) - R_n \sin(\varphi_n + \varphi_n) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Здесь  $\gamma$  – угол установки резца;  $R_n = O_n O_p$  – производящий радиус резцовой головки;  $\varphi_n, \varphi_n$  – углы поворота резцовой головки и производящего колеса при нарезании зубьев производящего колеса;  $\mu_n$  и  $R + r = OM + MO_n = a_w$  – координаты установки центра резцовой головки  $O_n$ ;  $R$  и  $r$  – центры производящего колеса и резцовой головки.

Используя матрицу (4.54) и уравнение (4.53), определим боковую поверхность выпуклой стороны зубьев производящего колеса системой уравнений:

$$x_n = u \cos \alpha;$$

$$y_n = u \sin \alpha \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \gamma] + a_w \cos(\mu_n - \varphi_n u_{nn}) + R_n \cos[\varphi_n(1 + u_{nn})];$$

$$z_n = u \sin \alpha \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \gamma] + a_w \sin(\mu_n - \varphi_n u_{nn}) - R_n \sin[\varphi_n(1 + u_{nn})], \quad (4.55)$$

где  $u_{nn} = \frac{\varphi_n}{\varphi_n}$ .

Продольный профиль зуба производящего колеса получим, положив в уравнениях (4.55)  $x_n = 0$ :

$$\begin{aligned} y_n &= a_w \cos(\mu_n - \varphi_n u_{nn}) + R_n \cos[\varphi_n(1 + u_{nn})], \\ z_n &= a_w \sin(\mu_n - \varphi_n u_{nn}) - R_n \sin[\varphi_n(1 + u_{nn})]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Продольный профиль (4.56) представляет эпициклоиду.

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес в системе  $S_1$  выражается скалярным произведением

$$\bar{n}_1^{(n)} \cdot \bar{U}_1^{(2n)} = 0,$$

где:  $\bar{n}_1^{(n)} = \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}_n}{\partial \varphi_n}$  – вектор нормали к производящей поверхности, проекции которого на координатные оси системы  $S_n$  определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} n_{xn} &= u \sin^2 \alpha - R_n \sin \alpha \cos(\varphi_n + \mu_n - \gamma); \\ n_{yn} &= -u \cos \alpha \sin \alpha \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \gamma] + \\ &\quad + R_n \cos \alpha \cos(\mu_n - \varphi_n u_{nn}); \\ n_{zn} &= -u \sin \alpha \cos \alpha \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \gamma] - \\ &\quad - R_n \cos \alpha \sin(\mu_n - \varphi_n u_{nn}); \end{aligned} \quad (4.57)$$

$\bar{U}_1^{(2n)} = \bar{\omega}_1^{(2n)} \times \bar{r}_1$  – вектор скорости относительного движения;  
 $\bar{\omega}_1^{(2n)}$  – вектор относительной угловой скорости;  $\bar{r}_1$  – радиус-вектор точки контакта.

Относительная угловая скорость в системе  $S$

$$\bar{\omega}^{(2n)} = \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 - \frac{d\varphi_n'}{dt} \right) \bar{i} + \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \bar{j} + \frac{d\theta_2}{dt} \bar{k}. \quad (4.58)$$

Для определения относительной угловой скорости в системе  $S_1$  воспользуемся зависимостью

$$\omega_n^{(2n)} = L_{no} \omega^{(2n)}, \quad (4.59)$$

где  $\omega_n^{(2n)}$ ,  $\omega^{(2n)}$  – столбцевые матрицы вектора относительной угловой скорости в системах  $S_n$  и  $S$ ;  $L_{no}$  – матрица перехода от системы  $S$  к системе  $S_n$ :

$$L_{no} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi'_n & \sin \varphi'_n \\ 0 & -\sin \varphi'_n & \cos \varphi'_n \end{vmatrix}. \quad (4.60)$$

На основании (4.58), (4.59) и (4.60) относительная угловая скорость в системе  $S_n$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_n^{(2n)} = & \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 - \frac{d\varphi'_n}{dt} \right) \bar{i} + \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \cos \varphi'_n + \right. \\ & \left. + \frac{d\theta_2}{dt} \sin \varphi'_n \right) \bar{j}_n - \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \sin \varphi'_n - \frac{d\theta_2}{dt} \cos \varphi'_n \right) \bar{k}_n. \end{aligned}$$

Следовательно, скорость относительного движения

$$v_n^{(2n)} = \begin{vmatrix} \bar{i}_n & \bar{j}_n & \bar{k}_n \\ \frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 - \frac{d\varphi'_n}{dt} & \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \cos \varphi'_n + \frac{d\theta_2}{dt} \sin \varphi'_n & \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \sin \varphi'_n - \frac{d\theta_2}{dt} \cos \varphi'_n \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix}.$$

Проекция скорости относительного движения на оси системы  $S_n$  с учетом (4.55):

$$\begin{aligned} v_{xn}^{(2n)} = & \{ u \sin \alpha \cos \theta_2 \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n - \gamma] - \\ & - R_n \cos \theta_2 \sin(\mu_n - \varphi_n u_{nn} - \varphi'_n) + \\ & + a_w \cos \theta_2 \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n] \} \frac{d\varphi_2}{dt} - \\ & - \{ u \sin \alpha \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n - \gamma] + \\ & + R_n \cos(\mu_n - \varphi_n u_{nn} - \varphi'_n) + a_w \cos[\varphi_n(1 + \\ & + u_{nn}) + \varphi'_n] \} \frac{d\theta_2}{dt}; \quad (4.61) \end{aligned}$$

$$v_{yn}^{(2n)} = \{ -u \cos \alpha \cos \theta_2 \sin \varphi'_n - u \sin \alpha \sin \theta_2 \sin[\varphi_n(1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + u_{\text{ни}}) - \gamma] - a_w \sin \theta_2 \sin[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}})] + \\
 & + R_{\text{н}} \sin(\mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}} u_{\text{ни}}) \sin \theta_2 \left\} \frac{d\varphi_2}{dt} + \right. \\
 & + u \cos \alpha \cos \varphi'_{\text{н}} \frac{d\theta_2}{dt} + \{u \sin \alpha \sin[\varphi_{\text{и}}(1 + \\
 & + u_{\text{ни}}) - \gamma] - R_{\text{н}} \sin(\mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}} u_{\text{ни}}) + a_w \sin[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}})] \left. \right\} \frac{d\varphi'_{\text{н}}}{dt}; \\
 v_{\text{zn}}^{(2\text{n})} = & \{u \sin \alpha \sin \theta_2 \cos[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}}) - \gamma] + \\
 & + R_{\text{н}} \sin \theta_2 \cos(\mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}} u_{\text{ни}}) + \\
 & + a_w \sin \theta_2 \cos[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}})] - u \cos \alpha \cos \theta_2 \cos \varphi'_{\text{н}} \left. \right\} \frac{d\varphi_2}{dt} - \\
 & - u \cos \alpha \sin \varphi'_{\text{н}} \frac{d\theta_2}{dt} - \{u \sin \alpha \cos[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}}) - \gamma] + \\
 & + R_{\text{н}} \cos(\mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}} u_{\text{ни}}) + a_w \cos[\varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}})] \left. \right\} \frac{d\varphi'_{\text{н}}}{dt}.
 \end{aligned}$$

Используя равенства (4.57), (4.61), уравнение зацепления представим в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{d\varphi_2}{d\varphi'_{\text{н}}} [uR_{\text{н}} \sin \alpha (\text{ctg}^2 \alpha \cos \theta_2 \sin \alpha_1 - \cos \theta_2 \sin \alpha_1 - \\
 & - 2 \sin \theta_2 \text{ctg} \alpha \sin \alpha_2 - \cos \theta_2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3) - \\
 & - a_w R_{\text{н}} (\cos \theta_2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_4 + \sin \theta_2 \text{ctg} \alpha \sin \alpha_5) + \\
 & + ua_w \sin \alpha (\cos \theta_2 \sin \alpha_4 + \sin \theta_2 \text{ctg} \alpha \sin \gamma) + \\
 & + \cos \theta_2 (u^2 \sin \alpha_3 + R_{\text{н}}^2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)] + \\
 & + \frac{d\theta_2}{d\varphi'_{\text{н}}} [uR_{\text{н}} \sin \alpha (\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 + \\
 & + \cos \alpha_1 \text{ctg}^2 \alpha) - u^2 a_w \cos \alpha_3 - ua_w \sin \alpha \cos \alpha_4 + \\
 & + R_{\text{н}} \cos \alpha_2 (a_w \cos \alpha_4 + R_{\text{н}} \cos \alpha_1)] + ua_w \cos \alpha \sin \gamma + \\
 & + R_{\text{н}} (a_w \text{ctg} \alpha \sin \alpha_5 + 2u \cos \alpha \sin \alpha_2) = 0, \tag{4.62}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 & = \mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}} u_{\text{ни}} - \varphi'_{\text{н}}; & a_2 & = \mu_{\text{и}} + \varphi_{\text{и}} - \gamma; \\
 a_3 & = \varphi_{\text{и}}(1 + u_{\text{ни}}) + \varphi'_{\text{н}} - \gamma; & a_4 & = (1 + u_{\text{ни}})\varphi_{\text{и}} + \varphi'_{\text{н}}; \\
 a_5 & = \mu_{\text{и}} - \varphi_{\text{и}}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (4.55), рассмотренные совместно с уравнением (4.62), при фиксированном значении  $\varphi'_n$  определяют контактную линию на производящей поверхности.

### 4.3.1. Поверхность зацепления, боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса

Для определения поверхности зацепления найдем уравнение производящей поверхности в системе  $S$ . Воспользуемся матричным равенством

$$r = M_{on} r_n,$$

где  $r, r_n$  – столбцевые матрицы точки производящей поверхности в системах координат  $S$  и  $S_n$ ;  $M_{on}$  – матрица перехода от системы  $S_n$  к системе  $S$ :

$$M_{on} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi'_n & -\sin \varphi'_n \\ 0 & \sin \varphi'_n & \cos \varphi'_n \end{vmatrix}.$$

Производящая поверхность в системе  $S$  выразится уравнениями:

$$x = u \cos \alpha;$$

$$y = u \sin \alpha \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_{nn} - \gamma] + a_w \cos(\varphi_n u_{nn} + \varphi'_n - \mu_n) + R_n \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \varphi'_n];$$

$$z = u \sin \alpha \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n - \gamma] + a_w \sin(\varphi_n u_{nn} + \varphi'_n - \mu_n) + R_n \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \varphi'_n]. \quad (4.63)$$

Уравнения (4.63), рассмотренные совместно с уравнением (4.62), определяют поверхность зацепления.

Сечение поверхности зацепления плоскостью  $y = R_m$  определится уравнениями:

$$u = \frac{R_m - a_w \cos(\varphi_n u_{nn} + \varphi'_n - \mu_n) - R_n \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \varphi'_n]}{\sin \alpha \cos[\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n - \gamma]};$$

$$x = u \cos \alpha;$$

$$z = u \sin \alpha \sin[(\varphi_n(1 + u_{nn}) + \varphi'_n - \gamma) + a_w \sin(\varphi_n u_{nn} + \varphi'_n - \mu_n) + R_n \sin[\varphi_n(1 + u_{nn}) - \varphi'_n].$$

Для нахождения уравнения боковой поверхности нарезаемого колеса используем матричное равенство

$$r_2 = M_{2n} r_n,$$

где  $M_{2n}$  – матрица перехода от системы  $S_n$  к  $S_2$ :

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \cos \theta_2 & -\cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi'_n - \\ & -\sin \varphi_2 \sin \varphi_n \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \sin \varphi'_n \\ \sin \varphi_2 \cos \theta_2 & -\sin \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi'_n + \\ & + \cos \varphi_2 \sin \varphi'_n \\ & \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi'_n - \\ & -\sin \varphi_2 \cos \varphi'_n \\ & -\cos \theta_2 \sin \varphi'_n \\ & \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi'_n + \\ & + \cos \varphi_2 \cos \varphi'_n \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Используя (4.55), (4.64) и (4.65), для определения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса получим систему уравнений:

$$x_2 = u \sin \alpha (\operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi_2 \cos \theta_2 - \sin \varphi_2 \sin \alpha_3 + \\ + \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_3) + R_n (\sin \varphi_2 \sin \alpha_6 - \\ - \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_6) - a_w (\cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_7 + \\ + \sin \varphi_2 \sin \alpha_7);$$

$$y_2 = u \sin \alpha (\operatorname{ctg} \alpha \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \cos \alpha_3) + \\ + R_n \cos \theta_2 \cos \alpha_6 + a_w \cos \theta_2 \cos \alpha_7;$$

$$z_2 = u \sin \alpha (\operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi_2 \cos \theta_2 - \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_3 + \\ + \cos \varphi_2 \cos \alpha_3) - R_n (\sin \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_6 + \\ + \cos \varphi_2 \sin \alpha_6) + a_w (\cos \varphi_2 \sin \alpha_7 - \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \alpha_7),$$

где

$$a_6 = \varphi_n (1 + u_{nn}) - \varphi'_n; \quad a_7 = \mu_n + \varphi'_n - \varphi_n u_{nn}.$$

Приведенные уравнения определяют боковую поверхность зуба нарезаемого колеса как огибающую боковой поверхности зуба производящего колеса, поскольку  $u$ ,  $\varphi_n$  и  $\varphi'_n$  связаны

уравнением зацепления (4.62), а  $\varphi_2(\varphi_n)$  и  $\theta_2(\varphi_n)$  — функции, определяемые уравнениями (2.53), (2.54) и (2.57).



#### 4.4. Некруглые конические зубчатые колеса с эвольвентной линией зубьев. Уравнения зацепления

Системы координат, используемые при исследовании, представлены на рис. 2.31. Производящей поверхностью является коническая червячная фреза (3.61). Уравнение поверхности витков конического червяка в системе  $S_a$ :

$$\vec{r}_a = -u_1 \cos \alpha_n \cos v \vec{i}_a + u_1 \cos \alpha_n \sin v \vec{j}_a + (p \vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n) \vec{k}_a, \quad (4.66)$$

где  $v = \varphi_n + \vartheta_1$ .

Вектор нормали к поверхности (4.66)

$$\vec{n}_a = (p \sin v + u_1 \sin \alpha_n \cos v) \vec{i}_a + (p \cos v - u_1 \sin \alpha_n \sin v) \vec{j}_a - u_1 \cos \alpha_n \vec{k}_a. \quad (4.67)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес в системе  $S_a$ , при фиксированном параметре  $\varphi_n$ , выражается скалярным произведением

$$\vec{n}_a \cdot \vec{v}_a^{(нк, \varphi_n)} = 0. \quad (4.68)$$

Вектор скорости относительного движения

$$\vec{v}_a^{(нк, \varphi_n)} = (\vec{\omega}_n - \vec{\omega}_\varphi - \vec{\omega}_\theta) \times \vec{r}_a - \vec{a}_w \times (\vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta), \quad (4.69)$$

где  $\vec{a}_w = \overline{OO_1}$

При определении вектора относительной скорости примем во внимание, что проекции векторов, входящих в (4.69), на координатные оси системы  $S_a$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_{nx} &= 0; & \omega_{\varphi x} &= -\omega_\varphi \cos \theta_k \sin \varphi_n; \\ \omega_{ny} &= 0; & \omega_{\varphi y} &= -\omega_\varphi (\cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon + \sin \theta_k \cos \varepsilon); \\ \omega_{nz} &= -\omega_n; & \omega_{\varphi z} &= \omega_\varphi (\cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon - \sin \theta_k \sin \varepsilon); \\ \omega_{\theta x} &= -\omega_\theta \cos \varphi_n; & \omega_{nx} &= 0; & \omega_{ny} &= \omega_n \cos \varepsilon; & \omega_{nz} &= \omega_n \sin \varepsilon; \\ \omega_{\theta y} &= \omega_\theta \sin \varphi_n \sin \varepsilon; & a_{wx} &= a_w; & a_{wy} &= 0; & a_{wz} &= 0. \\ \omega_{\theta z} &= -\omega_\theta \sin \varphi_n \cos \varepsilon; \end{aligned}$$





Проекция относительной скорости выразим уравнениями:

$$\begin{aligned}
 v_{xa}^{(нк, \varphi_n)} &= y_a (\omega_n + \omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon - \omega_\varphi \sin \theta_k \sin \varepsilon - \\
 &\quad - \omega_\theta \sin \varphi_n \cos \varepsilon) - z_a (-\omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon - \\
 &\quad - \omega_\varphi \sin \theta_k \cos \varepsilon + \omega_\theta \sin \varphi_n \sin \varepsilon); \\
 v_{ya}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a (\omega_n + \omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon - \omega_\varphi \sin \theta_k \sin \varepsilon - \\
 &\quad - \omega_\theta \sin \varphi_n \cos \varepsilon) + z_a (-\omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n - \omega_\theta \cos \varphi_n) + \\
 &\quad + a_w (\omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon - \omega_\varphi \sin \theta_k \sin \varepsilon - \\
 &\quad - \omega_\theta \sin \varphi_n \cos \varepsilon); \\
 v_{za}^{(нк, \varphi_n)} &= y_a (\omega_\varphi \cos \theta_k \sin \varphi_n + \omega_\varphi \cos \varphi_n) + \\
 &\quad + x_a (-\omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon - \omega_\varphi \sin \theta_k \cos \varepsilon + \\
 &\quad + \omega_\theta \sin \varphi_n \sin \varepsilon) + a_w (\omega_\varphi \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \omega_\varphi \sin \theta_k \cos \varepsilon - \omega_\theta \sin \varphi_n \sin \varepsilon). \tag{4.70}
 \end{aligned}$$

Используя равенства (4.67), (4.68) и (4.70), уравнение зацепления при  $\varphi_n = const$  получим в виде

$$\begin{aligned}
 &\frac{d\varphi_k}{d\varphi_n} [p^2 \mathcal{D}_1 (\cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin v + \sin \theta_k \cos \varepsilon \sin v - \\
 &\quad - \cos \theta_k \sin \varphi_n \cos v) + u_1 p \mathcal{D}_1 (\cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_n \cos v + \\
 &\quad + \cos \theta_k \sin \varphi_n \sin \alpha_n \sin v + \sin \theta_k \cos \varepsilon \sin \alpha_n \cos v) + \\
 &\quad + u_1 p (\cos \alpha_n \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon - \sin \alpha_n \cos \theta_k \cos \varphi_n \times \\
 &\quad \times \sin \varepsilon \sin v - \sin \alpha_n \sin \theta_k \cos \varepsilon \sin v - \cos \alpha_n \sin \theta_k \sin \varepsilon + \\
 &\quad + \sin \alpha_n \cos \theta_k \sin \varphi_n \cos v) - u_1^2 (\cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos v + \\
 &\quad + \sin \theta_k \cos \varepsilon \cos v + \cos \theta_k \sin \varphi_n \sin v) + a_w p (\cos \theta_k \times \\
 &\quad \times \cos \varphi_n \cos \varepsilon \cos v + \sin \theta_k \sin \varepsilon \cos v) + a_w u_1 (\sin \theta_k \times \\
 &\quad \times \sin \varepsilon \sin \alpha_n \sin v - \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon \sin \varepsilon \sin \alpha_n - \\
 &\quad - \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \alpha_n - \sin \theta_k \cos \varepsilon \cos \alpha_n)] + \\
 &\quad + \frac{d\theta_k}{d\varphi_n} [p^2 \mathcal{D}_1 (-\cos \varphi_n \cos v - \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin v) + \\
 &\quad + u_1 p \mathcal{D}_1 (\cos \varphi_n \sin \alpha_n \sin v - \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin v \sin \alpha_n +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ u_1 p (\sin \alpha_n \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin v - \cos \alpha_n \sin \varphi_n \cos \varepsilon + \\
 &+ \sin \alpha_n \cos \varphi_n \cos v) + u_1^2 (\sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos v - \\
 &- \cos \varphi_n \sin v) - a_w p \sin \varphi_n \cos \varepsilon \cos v + a_w u_1 (\sin \varphi_n \times \\
 &\times \cos \varepsilon \sin \alpha_n \sin v + \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \alpha_n)] + u_1 p \cos \alpha_n - \\
 &- u_1^2 \sin \alpha_n \sin v \cos \alpha_n \cos \vartheta_1 = 0. \quad (4.71)
 \end{aligned}$$

Уравнение (4.71) выражает связь между параметрами производящей поверхности и параметрами огибания:

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_n, \varphi_n) = 0.$$

Найдем вектор скорости относительного движения  $\bar{D}^{(нк, \varphi_n)}$  при фиксированном угле поворота червяка  $\varphi_n = \text{const}$ . При этом фреза совершает вращательное движение вокруг оси  $O_a v_a$  с угловой скоростью  $\omega_n$ .

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{D}_a^{(нк, \varphi_n)} = \bar{\omega}^{(н)} \times \bar{r}_a + \bar{a}_w \times \bar{\omega}^{(н)}.$$

Проекции вектора  $v_a^{(нк, \varphi_n)}$  на координатные оси системы  $S_a$ :

$$v_{xa}^{(нк, \varphi_n)} = \omega_n (x_a \cos \varepsilon - y_a \sin \varepsilon);$$

$$v_{ya}^{(нк, \varphi_n)} = \omega_n \sin \varepsilon (x_a - a_w);$$

$$v_{za}^{(нк, \varphi_n)} = \omega_n \cos \varepsilon (a_w - x_a). \quad (4.72)$$

Уравнение зацепления при фиксированном параметре  $\varphi_n$  представим в виде

$$\bar{n}_a \cdot \bar{D}_a^{(нк, \varphi_n)} = 0. \quad (4.73)$$

Используя (4.67), (4.72) и (4.73), получим уравнение зацепления

$$\begin{aligned}
 &p^2 \vartheta_1 \sin v \cos \varepsilon + u_1 p \vartheta_1 \sin \alpha_n \cos v \cos \varepsilon - u_1 p (\sin \alpha_n \sin v \cos \varepsilon + \\
 &+ \cos \alpha_n \sin \varepsilon) - u_1^2 \cos v \cos \varepsilon - u_1 a_w (\sin \alpha_n \sin v \sin \varepsilon - \\
 &- \cos \alpha_n \cos \varepsilon) - a_w p \cos v \sin \varepsilon = f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0. \quad (4.74)
 \end{aligned}$$

Уравнение зацепления получим при совместном рассмотрении уравнений (4.71) и (4.74).

#### 4.4.1. Уравнение линии контакта и боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса



Линии контакта в системе  $S_n$  определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}x_n &= -u_1 \cos \alpha_n \cos \vartheta_1; \\y_n &= u_1 \cos \alpha_n \sin \vartheta_1; \\z_n &= p \vartheta_1 - u_1 \sin \alpha_n; \\f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_n, \varphi_n) &= 0; \\f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) &= 0.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Найдем уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса. Для этого представим уравнения контактной линии (4.75) в системе  $S_k$ . Переход от системы  $S_n$  к системе  $S_k$  совершим согласно матричному равенству

$$r_k = M_{kn} r_n,$$

где  $r_n$  и  $r_k$  – столбцовые матрицы радиус-вектора производящей поверхности в системах  $S_n$  и  $S_k$ ;  $M_{nk}$  – матрица перехода от системы  $S_n$  к системе  $S_k$ :

$$M_{kn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\tag{4.76}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= \cos \varphi_k \cos \varphi_n \cos \varphi_n + \cos \varphi_k \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n - \sin \varphi_k \cos \theta_k \times \\ &\times \cos \varepsilon \sin \varphi_n - \sin \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \cos \varphi_n + \sin \varphi_k \cos \theta_k \times \\ &\times \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{12} &= \cos \varphi_k \cos \varphi_n \sin \varphi_n - \cos \varphi_k \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n + \\ &+ \sin \varphi_k \cos \theta_k \cos \varepsilon \cos \varphi_n - \sin \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \sin \varphi_n - \\ &- \sin \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n;\end{aligned}$$

$$a_{13} = \cos \varphi_k \sin \varphi_n \cos \varepsilon + \sin \varphi_k \cos \theta_k \sin \varepsilon + \sin \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon;$$

$$a_{14} = -a_w (\cos \varphi_k \cos \varphi_n - \sin \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n);$$

$$\begin{aligned}a_{21} &= -\sin \varphi_k \cos \varphi_n \cos \varphi_n - \sin \varphi_k \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n - \\ &- \cos \varphi_k \cos \theta_k \cos \varepsilon \sin \varphi_n - \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \cos \varphi_n +\end{aligned}$$

$$+ \cos \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n;$$

$$a_{22} = -\sin \varphi_k \cos \varphi_n \sin \varphi_n + \sin \varphi_k \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n + \\ + \cos \varphi_k \cos \theta_k \cos \varepsilon \cos \varphi_n - \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n \sin \varphi_n - \\ - \cos \varphi_k \sin \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n;$$

$$a_{23} = -\sin \varphi_k \sin \varphi_n \sin \varepsilon + \cos \varphi_k \cos \theta_k \sin \varepsilon + \cos \varphi_k \sin \theta_k \times \\ \times \cos \varphi_n \cos \varepsilon;$$

$$a_{24} = a_w (\sin \varphi_k \cos \varphi_n + \cos \varphi_k \sin \theta_k \sin \varphi_n);$$

$$a_{31} = \sin \theta_k \cos \varepsilon \sin \varphi_n - \cos \theta_k \sin \varphi_n \cos \varphi_n + \\ + \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n;$$

$$a_{32} = -\sin \theta_k \cos \varepsilon \cos \varphi_n - \cos \theta_k \sin \varphi_n \sin \varphi_n - \\ - \cos \theta_k \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n;$$

$$a_{33} = -\sin \theta_k \sin \varepsilon + \cos \theta_k \cos \varphi_n \cos \varepsilon;$$

$$a_{34} = a_w \cos \varphi_k \sin \varphi_n;$$

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0; \quad a_{44} = 1.$$

С учетом выражений (4.75) и (4.76), уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса примут вид:

$$x_k = -u_1 \cos \alpha_n \cos \varphi_k \cos \varphi_n \cos v(1 + tg \varphi_n \sin \varepsilon tg v) + \\ + u_1 \sin \varphi_k \sin \theta_k \cos \alpha_n \sin v(ctg \theta_k \cos \varepsilon + \sin \varphi_n ctg v - \\ - \cos \varphi_n \sin \varepsilon) + p \vartheta_1 \cos \varepsilon [-\cos \varphi_k \cos \varphi_n + \sin \varphi_k \cos \theta_k \times \\ \times (tg \varepsilon + tg \theta_k \cos \varphi_n)] + u_1 \sin \varepsilon [\cos \varphi_k \sin \varphi_n \sin \alpha_n - \\ - \sin \varphi_k \cos \theta_k \sin \alpha_n (tg \varepsilon + ctg \theta_k \cos \varphi_n)] - \\ - a_w \cos \varphi_k \cos \varphi_n (1 + tg \varphi_k tg \varphi_n \sin \theta_k);$$

$$y_k = u_1 \sin \varphi_k \cos \varphi_n \cos \alpha_n \cos v(1 + tg \varphi_n \sin \varepsilon tg v) + \\ + u_1 \cos \varphi_k \sin \theta_k \cos \alpha_n \sin v(ctg \theta_k \cos \varepsilon + \sin \varphi_n ctg v - \\ - \cos \varphi_n \sin \varepsilon) + p \vartheta_1 \sin \varepsilon [-\sin \varphi_k \cos \varphi_n + \cos \varphi_k \cos \theta_k (1 + \\ + tg \theta_k \cos \varphi_n ctg \varepsilon)] + u_1 \sin \varepsilon [\sin \varphi_k \sin \varphi_n \sin \alpha_n - \\ - \cos \varphi_k \cos \theta_k \sin \alpha_n (1 + tg \theta_k \cos \varphi_n ctg \varepsilon)] + \\ + a_w \sin \varphi_k \cos \varphi_n (1 - ctg \varphi_k \sin \theta_k tg \varphi_n);$$

$$z_k = -u_1 \cos \theta_k \cos \alpha_n \sin v(tg \theta_k \cos \varepsilon - \sin \varphi_n ctg v + \cos \varphi_n \sin \varepsilon) + \\ + (u_1 \sin \theta_k \sin \varepsilon \sin \alpha_n - p \vartheta_1 \sin \theta_k \sin \varepsilon)(1 - ctg \theta_k \cos \varphi_n \times$$

$$\times \operatorname{ctg} \varepsilon) + a_w \cos \theta_k \sin \varphi_n ;$$

$$f_1(u_1, \vartheta_1, \varphi_n, \varphi_n) = 0;$$

$$f_2(u_1, \vartheta_1, \varphi_n) = 0.$$

Приведенные уравнения определяют боковую поверхность зуба нарезаемого колеса как огибающую боковой поверхности зуба производящего колеса, поскольку  $u_1, \vartheta_1, \varphi_n, \varphi_n$  связаны между собой уравнениями зацепления (4.71) и (4.74), а  $\varphi_k(\varphi_n),$

$\theta_k(\varphi_n), \frac{d\varphi_k}{d\varphi_n}, \frac{d\theta_k}{d\varphi_n}$  — функции, определяемые из уравнений (2.81),

(2.82).

#### 4.5. Некруглые конические зубчатые колеса, нарезаемые цилиндрической червячной фрезой

Введем в рассмотрение следующие системы координат (рис. 4.6): подвижные системы  $S_1(x_1, y_1, z_1), S_2(x_2, y_2, z_2)$ , связанные с инструментом и нарезаемым колесом; неподвижную систему  $S(x, y, z)$ , расположенную в вершине некруглого конуса; вспомогательные системы координат  $S_a(x_a, y_a, z_a), S_p(x_p, y_p, z_p)$  и подвижную систему  $S'(x', y', z')$ , неизменно связанную с инструментом. Оси  $x', y', z'$  выбраны так, что они всегда расположены параллельно соответственно осям  $x, y, z$ . Переход от системы  $S$  к  $S_2$  совершим следующим образом: повернем систему координат  $S_a$  вокруг оси  $x$  так, чтобы угол между осями  $Oz$  и  $O_a y_a$  стал равным углу скрещивания осей  $\gamma_n$ ; повернем систему координат  $S$  вокруг оси  $z$  с таким расчетом, чтобы угол между осями  $Ox, O_p x_p$  стал равным углу  $\theta_2$  между осью вращения колеса и образующей некруглого конуса; затем повернем систему координат  $S_p$  вокруг оси  $y_p$  на угол  $\varphi_2$ , чем обеспечим переход от системы  $S_k$  к системе  $S_2$ . Для перехода от системы  $S_1$  к системе  $S$  повернем систему координат  $S_1$  вокруг оси  $z_1$  на угол  $\varphi_1$  и перенесем начало координат системы  $S'$  в точку  $O$ .

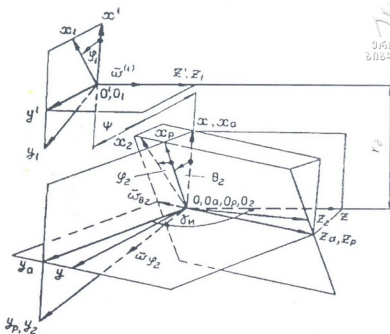


Рис. 4.6. Системы координат при нарезании некруглых конических колес червячной цилиндрической фрезой

Особенности геометрии некруглых конических колес, нарезаемых червячной фрезой, вытекают из процесса их образования.

Если при нарезании некруглых цилиндрических колес начальная плоскость исходного контура инструмента перемещается параллельно станочно-поллоидной плоскости, то при нарезании некруглых конических колес начальная плоскость исходного контура перемещается относительно станочно-поллоидной плоскости под переменным углом  $\theta_2$  (рис. 4.7).

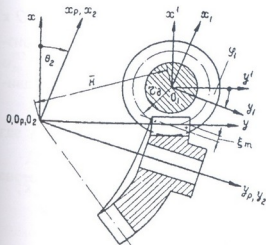


Рис. 4.7. Станочное зацепление

Такое положение обуславливает нарезание каждого зуба с меняющейся вдоль образующей некруглого конического колеса величиной смещения:

$$\xi m = (\psi - \psi_0) t g \theta_2,$$

где  $\xi$  – относительный сдвиг инструмента,  $m$  – модуль зацепления,  $\psi$  – текущая величина перемещения фрезы вдоль оси  $Oy$ ,  $\psi_0$  – расстояние от оси  $Ox$  до сечения с нулевым значением смещения.

При равномерном вращении производящей поверхности цилиндрической червячной фрезы вокруг оси  $O_1z_1$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(1)} = \frac{d\varphi_1}{dt}$  и перемещении ее вдоль оси  $Oy$  со скоростью

$\frac{d\psi}{dt}$ , нарезаемое колесо участвует в неравномерном переносном

движении вокруг оси  $O_pz_p$  со скоростью  $\bar{\omega}_{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{dt}$  и

неравномерном относительном движении вокруг оси  $O_2y_2$  со скоростью  $\bar{\omega}_{\varphi_2} = \frac{d\varphi_2}{dt}$ .

Определим вектор относительной скорости при фиксированном значении параметра  $\psi$ . Для этого приведем вектор  $\bar{\omega}^{(2)}$  к точке  $O$ . Тогда

$$\bar{v}^{(12, \varphi_1)} = \bar{\omega}^{(12)} \times (\bar{r}' + \bar{H}) + \bar{H} \times \bar{\omega}^{(1)}.$$

Здесь  $\bar{H}$  – радиус-вектор, проведенный из точки приведения  $O$  к линии действия вектора  $\bar{\omega}^{(1)}$ ;  $\bar{r}'$  – радиус-вектор точки производящей поверхности в системе  $S'$ .

При определении вектора скорости относительного движения  $\bar{v}^{(12, \varphi_1)}$  примем во внимание, что:

$$\bar{\omega}^{(1)} = \frac{d\varphi_1}{dt} \bar{k};$$

$$\bar{\omega}_{\varphi_2} = -\frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 \bar{i} + \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \sin \gamma_n \bar{j} + \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \sin \gamma_n \bar{k};$$

$$\bar{\omega}_{\theta_2} = \frac{d\theta_2}{dt} \cos \gamma_n \bar{j} - \frac{d\theta_2}{dt} \sin \gamma_n \bar{k};$$

$$\bar{\omega}^{(12)} = \frac{d\varphi_2}{dt} \sin \theta_2 \bar{i} - \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \sin \gamma_n + \frac{d\theta_2}{dt} \cos \gamma_n \right) \bar{j} -$$

$$-\left(\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} \cos \theta_2 \cos \gamma_n - \frac{d\theta_2}{dt} \sin \gamma_n\right) \bar{k};$$



$$\bar{H} = r_\theta \bar{i} + \psi \sin \gamma_n \bar{j}.$$

Здесь  $r_\theta$  – радиус делительной окружности цилиндрической фрезы.

Уравнение производящей поверхности-геликоида в системе координат  $S'$  имеет вид

$$\bar{r}' = r[\cos(\theta + \zeta + \varphi_1) \bar{i}' + \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) \bar{j}'] + p\zeta \bar{k}',$$

где  $r = r(\theta)$  – полярное уравнение торцового профиля червяка;  $\theta$ ,  $\zeta$  – параметры производящей поверхности;  $\varphi_1$ ,  $\psi$  – параметры огибания.

Вектор относительной скорости в проекциях на оси системы координат  $S$  определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} v_{x_0}^{(12, \varphi_1)} = & (\psi \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n + r \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \beta - \\ & - p\zeta \cos \theta_2 \sin \gamma_n) \frac{d\varphi_2}{dt} - (p\zeta \cos \gamma_n + r \sin \gamma_n \sin \beta + \\ & + \psi \sin^2 \gamma_n) \frac{d\theta_2}{dt} - r \sin \beta \frac{d\varphi_1}{dt}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y_0}^{(12, \varphi_1)} = & -(r \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \beta + r \cos \theta_2 \cos \gamma_n + p\zeta \sin \theta_2) \frac{d\varphi_2}{dt} + \\ & + (r \sin \gamma_n \cos \beta + r_\theta \sin \gamma_n) \frac{d\theta_2}{dt} + r \cos \beta \frac{d\varphi_1}{dt}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{z_0}^{(12, \varphi_1)} = & (r \sin \theta_2 \sin \beta + \psi \sin \theta_2 \sin \gamma_n + r \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta + \\ & + r_\theta \cos \theta_2 \sin \gamma_n) \frac{d\varphi_2}{dt} + (r \sin \gamma_n \cos \beta + r_\theta \sin \gamma_n) \frac{d\theta_2}{dt}, \end{aligned}$$

где  $\beta = \theta + \zeta + \varphi_1$ .

Для нахождения вектора скорости относительного движения в системе  $S_1$  воспользуемся матричным равенством

$$v_1^{(12, \varphi_1)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot v^{(12, \varphi_1)}. \quad (4.77)$$

Вектор относительной скорости в проекциях на оси координат системы  $S_1$ :





$$\begin{aligned}
 v_{x1}^{(12, \varphi_1)} = & (r \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \beta - p \zeta \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta - \\
 & + \psi \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n - r \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \beta - \\
 & - r_\partial \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n - p \zeta \sin \varphi_1 \sin \theta_2) \frac{d\varphi_2}{dt} + \\
 & + (r_\partial \sin \varphi_1 \sin \gamma_n + r \sin \varphi_1 \sin \gamma_n \cos \beta - \psi \cos \varphi_1 \sin^2 \gamma_n - \\
 & - r \cos \varphi_1 \sin \gamma_n \sin \beta - p \zeta \cos \varphi_1 \cos \gamma_1) \frac{d\theta_2}{dt} + \\
 & + (r \sin \varphi_1 \cos \beta - r \cos \varphi_1 \sin \beta) \frac{d\varphi_1}{dt};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{y1}^{(12, \varphi_1)} = & (p \zeta \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \gamma_n - r \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta - \\
 & - \psi \sin \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n - r \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \beta - \\
 & - r_\partial \cos \varphi_1 \cos \theta_2 \cos \gamma_n - p \zeta \cos \varphi_1 \sin \theta_2) \frac{d\varphi_2}{dt} + \\
 & + (p \zeta \sin \varphi_1 \cos \gamma_n + r \sin \varphi_1 \sin \gamma_n \sin \beta + \psi \sin \varphi_1 \sin^2 \gamma_n + \\
 & + r \cos \varphi_1 \sin \gamma_n \cos \beta + r_\partial \cos \varphi_1 \sin \gamma_n) \frac{d\theta_2}{dt} + \\
 & + (r \sin \varphi_1 \sin \beta + r \cos \varphi_1 \sin \beta) \frac{d\varphi_1}{dt};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{z1}^{(12, \varphi_1)} = & (r \sin \theta_2 \sin \beta + \psi \sin \theta_2 \sin \gamma_n + r \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta + \\
 & + r_\partial \cos \theta_2 \sin \gamma_n) \frac{d\varphi_2}{dt} + (r \cos \gamma_n \cos \beta + r_\partial \cos \gamma_n) \frac{d\theta_2}{dt}.
 \end{aligned}$$

Нормаль к производящей поверхности в системе  $S_1$  имеет вид

$$\bar{n}_1 = \frac{r}{\sin \mu} (p \sin \beta \bar{i}_1 - p \cos \beta \bar{j}_1 + r \cos \mu \bar{k}), \quad (4.78)$$

где

$$\mu = \arctg \left( r / \frac{dr}{d\theta} \right).$$

Используя выражения проекции скорости относительного движения и нормали, представим уравнение зацепления при фиксированном значении параметра  $\psi$  в виде

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} (\psi p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \sin \alpha_1 + r_\partial p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \alpha_1 +$$



$$\begin{aligned}
 &+ p^2 \zeta \sin \theta_2 \cos \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \alpha_1 + r p \cos \theta_2 \times \\
 &\times \cos \gamma_n \cos \mu + r^2 \cos \mu \sin \theta_2 \sin \beta + \psi r \cos \mu \sin \theta_2 \sin \gamma_n + \\
 &+ r^2 \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta + r_\partial r \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n) + \\
 &+ \frac{d\theta_2}{dt} (r_\partial r \cos \mu \cos \gamma_n + r^2 \cos \mu \cos \gamma_n \cos \beta - \\
 &- \psi p \sin^2 \gamma_n \sin \alpha_1 - r_\partial p \sin \gamma_n \cos \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \gamma_n \sin \alpha_1 - \\
 &- r p \sin \gamma_n \cos \mu) - r p \cos \mu = 0,
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

где  $\alpha_1 = \theta_1 + \zeta + \mu + \varphi_1$ .

Уравнение (4.79) представляет собой зависимость  $f_1(r, \theta, \varphi_1, \psi) = 0$ .

Вектор скорости относительного движения  $\bar{v}^{(12, \psi)}$  при фиксированном угле поворота геликоида

$$\bar{v}^{(12, \psi)} = (\sin \gamma_n \bar{j} + \cos \gamma_n \bar{k}) \frac{d\psi}{dt}. \tag{4.80}$$

Используя матрицу (4.77), выразим уравнение (4.80) в системе  $S_1$ :

$$\bar{v}_1^{(12, \psi)} = (\sin \varphi_1 \sin \gamma_n \bar{i} + \cos \varphi_1 \sin \gamma_n \bar{j} + \cos \gamma_n \bar{k}_1) \frac{d\psi}{dt}.$$

Уравнение зацепления при фиксированном значении параметра  $\varphi_1$  определим выражением вида

$$r \cos \mu \operatorname{ctg} \gamma_n - p \cos \alpha_1 = 0, \tag{4.81}$$

что представляет собой зависимость

$$f_2(r, \theta, \varphi_1) = 0.$$

Уравнение зацепления в системе  $S_1$  получим при совместном решении уравнений (4.79) и (4.81).

#### 4.5.1. Уравнения линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезаемого колеса

Контактная линия взаимооггибаемых поверхностей в системе  $S_1$  определится уравнениями:

$$\bar{r}_1 = r \cos(\theta + \zeta) \bar{i}_1 + r \sin(\theta + \zeta) \bar{j}_1 + p \zeta \bar{k}_1,$$

$$f_1(r, \theta, \varphi_1, \psi) = 0,$$

$$f_2(r, \theta, \varphi_1) = 0.$$

Для получения уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса используем матричное равенство

$$r_2 = M_{21}r_1,$$

где  $M_{21}$  – матрица перехода от системы  $S_1$  к системе  $S_2$ :

$$M_{21} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

Здесь:

$$a_{11} = \cos \varphi_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \gamma_n \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \gamma_n \sin \varphi_1$$

$$a_{12} = -\cos \varphi_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \gamma_n \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \gamma_n \cos \varphi_1;$$

$$a_{13} = \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \gamma_n - \sin \varphi_2 \sin \gamma_n;$$

$$a_{14} = r_\partial \cos \varphi_2 \cos \theta_2 + \psi \cos \varphi_2 \sin \theta_2;$$

$$a_{21} = -\sin \theta_2 \cos \varphi_1 + \cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \varphi_1;$$

$$a_{22} = \sin \theta_2 \sin \varphi_1 + \cos \theta_2 \cos \varphi_1;$$

$$a_{23} = \cos \theta_2 \cos \gamma_n;$$

$$a_{24} = -r_\partial \sin \theta_2 + \psi \cos \theta_2;$$

$$a_{31} = \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \cos \varphi_1 + \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \gamma_n \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos \gamma_n \sin \varphi_1;$$

$$a_{32} = -\sin \varphi_2 \cos \theta_2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos \gamma_n \cos \varphi_1;$$

$$a_{33} = \sin \varphi_2 \cos \theta_2 \cos \gamma_n + \cos \varphi_2 \sin \gamma_n;$$

$$a_{34} = r_\partial \sin \varphi_2 \cos \theta_2 + \psi \sin \varphi_2 \sin \theta_2.$$

С учетом (4.82) и (4.83) боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса определится уравнениями:

$$x_2 = r(\cos \varphi_2 \cos \theta_2 \cos \beta + \cos \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \gamma_n \sin \beta + \sin \varphi_2 \cos \gamma_n \sin \beta) + p\zeta(\cos \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \gamma_n -$$



$$\begin{aligned}
& -\sin \varphi_2 \sin \gamma_n) + r_\partial \cos \varphi_2 \cos \theta_2 + \psi \cos \varphi_2 \sin \theta_2 ; \\
y_2 = & r(\cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \beta - \sin \theta_2 \cos \beta) + p\zeta \cos \theta_2 \cos \gamma_n - \\
& - r_\partial \sin \theta_2 + \psi \cos \theta_2 ; \\
z_2 = & r(\sin \varphi_2 \cos \theta_2 \cos \beta + \sin \varphi_2 \sin \theta_2 \sin \gamma_n \sin \beta - \\
& - \cos \varphi_2 \cos \gamma_n \sin \beta) + p\zeta(\sin \varphi_2 \sin \theta_2 \cos \gamma_n + \\
& + \cos \varphi_2 \cos \gamma_n) + r_\partial \sin \varphi_2 \cos \theta_2 + \psi \sin \varphi_2 \sin \theta_2 ; ; \\
& f_1(r, \theta, \varphi_1, \psi) = 0 ; \quad f_2(r, \theta, \varphi_1) = 0 .
\end{aligned}$$

Используя матричное равенство

$$r = M_{00'} M_{01'} \cdot r_1,$$

получим уравнения линии зацепления в системе S:

$$\begin{aligned}
x &= r \cos(\theta + \zeta + \varphi_1) + r_\partial ; \\
y &= r \sin(\theta + \zeta + \varphi_1) + \psi \sin \gamma_n \\
z &= p\zeta + \psi \cos \gamma_n ; \\
f_1(r, \theta, \varphi_1, \psi) &= 0 ; \quad f_2(r, \theta, \varphi_1) = 0 .
\end{aligned}$$

#### 4.5.2. Нормальная кривизна нарезаемой поверхности

Для определения нормальной кривизны поверхности зубьев воспользуемся зависимостью

$$\kappa^{(2)} = - \frac{\bar{v}_r^{(2)} \dot{\bar{e}}_r^{(2)}}{[\bar{v}_r^{(2)}]^2} . \tag{4.84}$$

Здесь скорость движения контактной точки по огибающей поверхности

$$\bar{v}_r^{(2)} = \bar{v}_r^{(1)} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{d\varphi_1}{dt} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{d\psi}{dt} ; \tag{4.85}$$

скорость движения контактной точки по огибаемой поверхности

$$\bar{v}_r^{(1)} = \frac{d\bar{r}^{(1)}}{d\theta} \frac{\partial \theta}{dt} + \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} ; \tag{4.86}$$

скорость конца орта нормали в относительном движении по огибающей поверхности с учетом того, что параметр  $\psi$  определяет поступательное движение,

$$\dot{\bar{e}}_r^{(2)} = \dot{\bar{e}}_r^{(1)} + \left( \frac{d\varphi_1}{dt} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) \times \bar{e}^{(1)};$$

орт нормали к огибающей поверхности

$$\bar{e}_r^{(1)} = \frac{\bar{n}^{(1)}}{|\bar{n}^{(1)}|}; \quad (4.87)$$

$\bar{v}^{(12, \varphi_1)}$  – вектор скорости относительного движения при изменении параметра  $\varphi_1$  и при фиксированном значении параметра  $\psi$ ;

$\bar{v}^{(12, \psi)}$  – вектор скорости относительного движения при изменении параметра  $\psi$  и при фиксированном значении параметра  $\varphi_1$ .

Скорость конца орта нормали по огибаемой поверхности определим дифференцированием выражения (4.87):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_r^{(1)} = & \left( \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} \right) \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} + \\ & + \bar{n}^{(1)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\zeta}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, скорость конца орта нормали по огибающей поверхности

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_r^{(2)} = & \left( \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} \right) \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} + \left[ \left( \bar{\omega}_1^0 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \bar{\omega}_2^0 \right) \times \bar{e}^{(1)} \right] \frac{d\varphi_1}{dt} + \\ & + \bar{n}^{(1)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\zeta}{dt} \right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

где  $\bar{\omega}_1^0$ ,  $\bar{\omega}_2^0$  – единичные векторы угловых скоростей.

Далее, учитывая (4.85), (4.86), (4.88) и принимая во внимание, что

$$\bar{n}^{(1)} \bar{v}_r^{(2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{|\bar{n}^{(1)}|} \right) \frac{d\zeta}{dt} \right] = 0,$$

определяем нормальную кривизну:

$$\kappa^{(2)} = - \frac{\left[ \left( \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} \right) \frac{1}{|n^{(1)}|} + \left( \bar{\omega}_1^0 - \bar{\omega}_2^0 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right) \times \right.}{\left( \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{d\varphi_1}{dt} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{d\psi}{dt} \right)^2} \times \bar{e}^{(1)} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} \Big] \bar{v}_r^{(2)}. \quad (4.89)$$

В выражение нормальной кривизны (4.89) входят независимые переменные  $\frac{d\theta}{dt}$ ,  $\frac{d\zeta}{dt}$ ,  $\frac{d\varphi_1}{dt}$  и  $\frac{d\psi}{dt}$ . Дифференцируя уравнения зацепления, находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{d\zeta}{dt}; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \frac{d\zeta}{dt}; \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \psi}; & \Delta_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}; \\ \Delta_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} \frac{\partial f_2}{\partial \psi}; & \Delta_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta}; \\ \Delta &= \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_2}{\partial \psi} - \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \frac{\partial f_1}{\partial \psi}. \end{aligned}$$

Нормальная кривизна

$$\kappa^{(2)} = - \frac{A_{11} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2A_{12} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\zeta}{dt} + A_{13} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2}{B_{11} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2B_{12} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\zeta}{dt} + B_{13} \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2}. \quad (4.90)$$

Здесь:

$$A_{11} = \frac{1}{|n^{(1)}|} \left( \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \Big) + \left[ \left( \bar{\omega}_1^0 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \bar{\omega}_2^0 \right) \times \bar{e}^{(1)} \right] \times \\
 & \times \left( \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11}^2}{\Delta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{11} \Delta_{21}}{\Delta^2} \right); \\
 A_{12} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{|n^{(1)}|} \left[ \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} + \right. \right. \\
 & + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \\
 & \left. \left. + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \right] + \right. \\
 & + \left[ \left( \bar{\omega}_1^0 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \bar{\omega}_2^0 \right) \times \bar{e}^{(1)} \right] \left[ \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11} \Delta_{12}}{\Delta^2} + \right. \\
 & + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{11} \Delta_{12}}{\Delta^2} + \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11} \Delta_{12}}{\Delta^2} + \\
 & \left. \left. + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{12} \Delta_{21}}{\Delta^2} \right] \right\};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} = & \frac{1}{|n^{(1)}|} \left[ \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \times \right. \\
 & \times \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \frac{\partial \bar{n}^{(1)}}{\partial \zeta} \Big) + \left[ \left( \bar{\omega}_1^0 - \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \bar{\omega}_2^0 \right) \times \bar{e}^{(1)} \right] \times \\
 & \times \left( \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{12}^2}{\Delta^2} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{12} \Delta_{22}}{\Delta^2} \right);
 \end{aligned}$$

$$B_{11} = \left( \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right)^2;$$

$$B_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \theta} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \frac{d\bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + [\bar{v}^{(12, \varphi_1)}]^2 \frac{\Delta_{11} \Delta_{12}}{\Delta} + \\
 & + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{11} \Delta_{12}}{\Delta^2} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \\
 & + [\bar{v}^{(12, \psi)}]^2 \frac{\Delta_{21} \Delta_{22}}{\Delta^2} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{12} \Delta_{21}}{\Delta^2} \Big);
 \end{aligned}$$

$$B_{13} = \left( \frac{\partial \bar{r}^{(1)}}{\partial \zeta} + \bar{v}^{(12, \varphi_1)} \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \bar{v}^{(12, \psi)} \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \right).$$

Направление нормального сечения устанавливается соотношением  $\frac{d\theta}{dt} : \frac{d\xi}{dt}$ .

### 4.5.3. Подрезание зубьев

Определим координаты граничной линии для некруглых конических зубчатых колес, образуемых при двухпараметрическом огибании. Во избежание появления узловых точек на производящей поверхности при двухпараметрическом огибании должно быть соблюдено условие

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \frac{d\psi}{dt} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} \\
 \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & v_{x1}^{(12, \psi)} & v_{x1}^{(12, \varphi_1)} \\
 \frac{\partial z_1}{\partial \theta} \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} & v_{z1}^{(12, \psi)} & v_{z1}^{(12, \varphi_1)}
 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.91)$$

Используя уравнение производящей поверхности (4.82) и уравнения зацепления (4.79) и (4.81), выразим производные, входящие в определитель, в следующем виде:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos(\theta + \zeta) - r \sin(\theta + \zeta); \quad (4.92)$$



$$\frac{\partial x_1}{\partial \zeta} = -r \sin(\theta + \zeta);$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial z_1}{\partial \zeta} = p;$$

(4.94)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = & \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \left[ \psi p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \cos \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) - \right. \\ & - r_\partial p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) - p^2 \zeta \cos \theta_2 \times \\ & \times \sin \gamma_n \cos \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) - p^2 \zeta \sin \theta_2 \sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) + \\ & + p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \mu \frac{dr}{d\theta} - r p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \mu \frac{d\mu}{d\theta} + \\ & + 2r \cos \mu \sin \theta_2 \sin \beta \frac{dr}{d\theta} - r^2 \sin \mu \sin \theta_2 \sin \beta \frac{d\mu}{d\theta} + \\ & + \psi \cos \mu \sin \theta_2 \sin \gamma_n \frac{dr}{d\theta} - \psi r \sin \mu \sin \theta_2 \sin \gamma_n \frac{d\mu}{d\theta} + \\ & + 2r \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta \frac{dr}{d\theta} - r^2 \sin \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \times \\ & \times \cos \beta \frac{d\mu}{d\theta} + r_\partial \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \frac{dr}{d\theta} - r_\partial r \sin \mu \times \\ & \times \cos \theta_2 \sin \gamma_n \frac{d\mu}{d\theta} \left. \right] + \frac{d\theta_2}{d\varphi_1} \left[ r_\partial \cos \mu \cos \gamma_n \frac{dr}{d\theta} - \right. \\ & - r_\partial r \sin \mu \cos \gamma_n \frac{d\mu}{d\theta} + 2r \cos \mu \cos \gamma_n \cos \beta \frac{dr}{d\theta} - \\ & - r^2 \sin \mu \cos \gamma_n \cos \beta \frac{d\mu}{d\theta} - \psi p \sin^2 \gamma_n \cos \alpha_1 \times \\ & \times \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) + r_\partial p \sin \gamma_n \sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) - p^2 \zeta \times \\ & \times \cos \gamma_n \cos \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right) - p \sin \gamma_n \cos \mu \frac{dr}{d\theta} + \end{aligned}$$

$$+ rp \sin \gamma_n \sin \mu \frac{d\mu}{d\theta}] - p \left( \cos \mu \frac{dr}{d\theta} - r \sin \mu \frac{d\mu}{d\theta} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} & (\psi p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \cos \alpha_1 - r_\partial p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \times \\ & \times \sin \alpha_1 - p^2 \cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \alpha_1 + \\ & + p^2 \sin \theta_2 \cos \alpha_1 - p^2 \zeta \sin \theta_2 \sin \alpha_1 + r^2 \cos \mu \sin \theta_2 \cos \beta - \\ & - r^2 \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta) + \frac{d\theta_2}{d\varphi_1} (-r^2 \cos \mu \cos \gamma_n \sin \beta - \\ & - \psi p \sin^2 \gamma_n \cos \alpha_1 + r_\partial p \sin \gamma_n \sin \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \gamma_n \cos \alpha_1 - \\ & - p^2 \cos \gamma_n \cos \alpha_1); \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \psi} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} & (p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \sin \alpha_1 + r \cos \mu \sin \theta_2 \times \\ & \times \sin \gamma_n) - p \sin^2 \gamma_n \sin \alpha_1 \frac{d\theta_2}{d\varphi_1}; \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1} = \frac{d^2 \varphi_1}{d\varphi_1^2} & (\psi p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \sin \alpha_1 + r_\partial p \cos \theta_2 \times \\ & \times \cos \gamma_n \cos \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \alpha_1 + p^2 \zeta \sin \theta_2 \cos \alpha_1 + \\ & + rp \cos \theta_2 \cos \gamma_n \cos \mu + r^2 \cos \mu \sin \theta_2 \sin \beta - \\ & - \psi r \cos \mu \sin \theta_2 \sin \gamma_n + r^2 \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \beta + \\ & + r_\partial r \cos \mu \cos \theta_2 \sin \gamma_n) + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} (\psi p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \gamma_n \cos \alpha_1 - \\ & - r_\partial p \cos \theta_2 \cos \gamma_n \sin \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \theta_2 \sin \gamma_n \cos \alpha_1 - \\ & - p^2 \zeta \sin \theta_2 \sin \alpha_1 + r^2 \cos \mu \sin \theta_2 \cos \beta - r^2 \cos \mu \times \\ & \times \cos \theta_2 \sin \gamma_n \sin \beta) + \frac{d^2 \theta_2}{d\varphi_1^2} (r_\partial r \cos \mu \cos \gamma_n + r^2 \cos \mu \times \\ & \times \cos \gamma_n \cos \beta - \psi p \sin^2 \gamma_n \sin \alpha_1 - r_\partial p \sin \gamma_n \cos \alpha_1 - \\ & - p^2 \zeta \cos \gamma_n \sin \alpha_1 - rp \sin \gamma_n \cos \mu) + \frac{d\theta_2}{d\varphi_1} (-r^2 \cos \mu \cos \gamma_n \times \end{aligned}$$



$$\times \sin \beta - \psi p \sin^2 \gamma_n + r_{\partial} p \sin \gamma_n \sin \alpha_1 - p^2 \zeta \cos \gamma_n \cos \alpha_1); \quad (4.98)$$

$$\frac{df_2}{d\theta} = \cos \mu \operatorname{ctg} \gamma_n \frac{dr}{d\theta} - r \sin \mu \operatorname{ctg} \gamma_n \frac{d\mu}{d\theta} + p \sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{d\mu}{d\theta} \right); \quad (4.99)$$

$$\frac{df_2}{d\zeta} = p \sin \alpha_1 \quad (4.100); \quad \frac{df_2}{d\varphi_1} = p \sin \alpha_1 \quad (4.101);$$

$$\frac{df_2}{d\psi} = 0; \quad (4.102)$$

где

$$\mu = \operatorname{arctg} \left( r / \frac{dr}{d\theta} \right); \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\rho \sin \mu} - 1;$$

$\rho$  – радиус кривизны торцового профиля червяка.

Подставив значения скорости относительного движения и проекции (4.91-4.102) в определитель (4.91) и раскрыв его, найдем зависимость вида

$$f_1(r, \theta, \varphi_1, \psi) = 0. \quad (4.103)$$

Рассмотрев совместно (4.103) и уравнения зацепления (4.79) и (4.81), определим значения  $\theta$  и  $\zeta$ . Подставив их в уравнение производящей поверхности (4.82), найдем уравнения линии, ограничивающей производящую поверхность во избежание подрезания зубьев некруглых конических колес, образуемых двухпараметрическим огибанием.





числе зубьев вначале, до ввода в зацепление резцовой головки с нарезаемым колесом, нужно совместить с осью  $Oy$  максимальный (минимальный) радиус-вектор центроиды колеса, а также ось  $O_3y_3$ . Приведем резцовую головку в исходное положение, сместив ее в плоскости  $xOy$  таким образом, чтобы обеспечивалось расстояние между осями  $Oy$  и  $O_3y_3$ , равное номинальному радиусу  $r_n$  резцовой головки. Далее, резцовую головку вращающуюся вокруг оси  $O_3y_3$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(n)}$ , введем в зацепление с нарезаемым колесом, совместив начальную плоскость  $x_3O_3z_3$  резцовой головки с начальной центроидой колеса. Сообщим резцовой головке перемещение с постоянной линейной скоростью

$\bar{v}^{(n)} = -\frac{dx}{dt}$  вдоль оси  $Ox$ . При этом заготовка нарезаемого колеса

участвует в двух движениях: неравномерном переносном поступательном в направлении оси  $Oy$  со скоростью  $|\bar{v}^{(01)}| = r\omega^{(1)} \cos \mu$  и неравномерном относительном вокруг оси

$O_1z_1$  со скоростью  $\bar{\omega}^{(1)} = \frac{d\varphi_1}{dt}$ . Здесь  $r = r(\vartheta)$  – уравнение центроиды нарезаемого колеса;  $\vartheta$  – полярный угол центроиды;

$\mu = \arctg\left(r / \frac{dr}{d\vartheta}\right)$  – угол между радиус-вектором и касательной к

центроиде;  $\varphi_1 = \vartheta + \mu$  – угол поворота нарезаемого колеса. После обкатки первой впадины резцовая головка выходит из зацепления и возвращается в исходное положение. Для перехода к очередной впадине необходимо нарезаемое колесо повернуть вокруг оси  $O_1z_1$  на переменный угловой шаг и произвести соответствующую этому повороту установку колеса по координатам  $x$  и  $y$ .

Для вывода уравнения зацепления воспользуемся условием сопряженности боковых поверхностей зубьев

$$\bar{e}_s^{(s)} \cdot \bar{v}_s^{(1n)} = 0.$$

Коническая производящая поверхность, образуемая режущими кромками резцовой головки в системе  $S_s$ , определяется уравнением

$$\bar{r}_s = u_1 \sin \alpha (\cos \vartheta_1 \bar{i}_s + \sin \vartheta_1 \bar{k}_s) - (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha) \bar{j}_s, \quad (5.1)$$



Здесь  $r_n$  – расчетный радиус резцовой головки.

Вектор-нормаль и орт нормали к поверхности (5.1) выражаются следующими уравнениями:

$$\bar{n}_s^{(s)} = u_1 \sin \alpha (\cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i}_s - \sin \alpha \bar{j}_s - \cos \alpha \sin \vartheta_1 \bar{k}_s); \quad (5.2)$$

$$\bar{e}_s^{(s)} = \cos \alpha \cos \vartheta_1 \bar{i}_s - \sin \alpha \bar{j}_s - \cos \alpha \sin \vartheta_1 \bar{k}_s,$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{v}_s^{(1n)} = \bar{\omega}_s^{(1)} \times \bar{r}_s + \bar{R}_s \times \bar{\omega}_s^{(1)} + \bar{v}_s^{(01)} + \bar{v}_s^{(n)}; \quad (5.3)$$

$\bar{r}_s$  – радиус-вектор текущей точки производящей поверхности,

$\bar{R}_s$  – радиус-вектор точки приложения вектора  $\bar{\omega}^{(1)}$ . Найдем проекции векторов, входящих в (5.3):

$$\begin{aligned} \omega_{sz}^{(1)} &= \omega^{(1)}; & v_{sy}^{(01)} &= \pm r \omega^{(1)} \cos \mu; \\ R_{sx} &= -r_n - s \pm r \cos \mu; & R_{sy} &= -r \sin \mu, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $s = \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{r}{\sin \mu} d\vartheta$  – длина дуги центроиды нарезаемого колеса.

С учетом (5.4) выражение (5.3) запишем в следующем виде:

$$\bar{v}_s^{(1n)} = \omega^{(1)} [-y_s \bar{i}_s + (x_s + r_n + s) \bar{j}_s]. \quad (5.5)$$

На основании (5.2) и (5.5) уравнение зацепления примет вид

$$-u_1 \cos \vartheta_1 + \sin \alpha (r_n \cos \vartheta_1 - r_n - s) = 0.$$

Используя матричное равенство

$$r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_n - s \pm r \cos \mu \\ 0 & 1 & 0 & r \sin \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot r_s, \quad (5.6)$$

определим поверхность зацепления системой уравнений:

$$x = u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1 - r_n - s \pm r \cos \mu;$$

$$y = u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha + r \sin \mu;$$

$$z = u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1;$$

$$-u_1 \cos \vartheta_1 + \sin \alpha (r_n \cos \vartheta_1 - r_n - s) = 0. \quad (5.7)$$

Найдем уравнение боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса, используя матричное равенство

$$r_1 = M_{10} M_{0s} r_s,$$

где матрица перехода от системы координат  $S$  к системе координат  $S_1$  имеет вид

$$M_{10} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

С учетом формул (5.1), (5.6) и (5.8), определим боковую поверхность нарезаемых зубьев системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 &= (u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1 - r_n - s \pm r \cos \mu) \cos \varphi_1 + \\ &\quad + (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha + r \sin \mu) \sin \varphi_1; \\ y_1 &= (u_1 \cos \alpha - r_n \operatorname{ctg} \alpha + r \sin \mu) \cos \varphi_1 - \\ &\quad - (u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1 - r_n - s \pm r \cos \mu) \sin \varphi_1; \\ z_1 &= u_1 \sin \alpha \cos \vartheta_1; \\ &\quad - u_1 \cos \vartheta_1 + \sin \alpha (r_n \cos \vartheta_1 - r_n - s) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Уравнения (5.9) определяют геометрическое место контактных линий в системе координат  $S_1$ . При этом, вычисления выполняются в таком порядке: считая фиксированным значение угла  $\vartheta_1$  (или  $u_1$ ) и задаваясь рядом значений  $u_1$  (или  $\vartheta_1$ ), из уравнения зацепления находим  $\vartheta_1$  (или  $u_1$ ), вычисляем  $\varphi_1 = \vartheta + \mu$ . Используя уравнения (5.9), определяем координаты точек контактной линии.

## 5.2. Рациональные геометрические параметры зацепления

Некруглые цилиндрические колеса с арочными зубьями характеризуются переменным по длине зуба нормальным модулем, уменьшающимся от середины зубчатого венца к его торцам. Арочная линия зубьев приводит к появлению вблизи каждого из торцов участков со сниженным сопротивлением излому (рис. 5.2). При этом, стремление к выравниванию изломной прочности по длине зуба без увеличения ширины зубчатого

венца противоречит стремлению к повышению плавности зацепления – то есть улучшению динамических качеств передачи. Поэтому при синтезе некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями очень важным является вопрос выбора геометрических параметров; в случае неправильного решения этой задачи сравнение косозубых или шевронных колес с некруглыми цилиндрическими колесами с арочными зубьями может быть не в пользу последних.

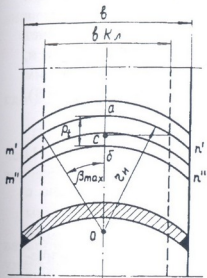


Рис. 5.2. Развертка делительного некруглого цилиндра с арочными линиями зубьев

Некруглые цилиндрические зубчатые колеса с арочными зубьями характеризуются существованием как профильного, так и осевого коэффициентов перекрытия зубьев. Вопрос об осевом перекрытии зубьев целесообразно рассматривать только применительно к полушевرونу (название принято нами по аналогии с шевронными колесами), так как процесс зацепления зубьев обоих полушевронных во времени полностью совпадает; к тому же некоторое время оба полушеврона имеют общую линию одновременного контакта.

Рассмотрим эвольвентное зацепление. Такое название применительно к некруглым цилиндрическим колесам с арочными зубьями употребляем условно, так как зацепление зубьев является действительно эвольвентным лишь в среднем сечении зубчатого венца. На рис. 5.2 представлена развертка делительного некруглого цилиндра,  $m'a n'$  и  $m''\delta n''$  – линии соседних арочных зубьев. Коэффициент осевого перекрытия

$$\varepsilon_0 = \frac{r_{\text{и}}(1 - \cos \beta_{\text{max}})}{\pi m_t}, \quad (5.10)$$

где:  $m_t$  – торцовый модуль;  $\beta_{\text{max}}$  – максимальный угол рабочего участка зубчатого венца:



$$\beta_{\max} = \arcsin \frac{bK_n}{2r_n};$$

$K_n$  – коэффициент локализации пятна контакта зубьев – отношение ширины рабочего участка зубчатого венца к его полной ширине.

Выбор рациональных геометрических параметров связан с выбором определенных значений коэффициента перекрытия. При синтезе эвольвентных передач необходимо стремиться к повышению плавности зацепления, что достигается за счет постоянства суммарной длины линии одновременного контакта и, по аналогии с косозубыми колесами, выражается следующим условием;  $\varepsilon_0 = e$ , где  $e$  – целое положительное число (1, 2 или 3). Поэтому необходимо обеспечить условие

$$\beta_{\max} = \arccos \left( 1 - \frac{\pi m_t e}{r_n} \right). \quad (5.11)$$

Таким образом, повышение плавности зацепления связано с ростом угла  $\beta_{\max}$ , что приводит к уменьшению величины нормального модуля на торцах колес. Помимо снижения изломной прочности возникают дополнительные технологические трудности, связанные с необходимостью уменьшения развода резцов.

Значения нормального модуля  $m_n$  выбираются из соображения изломной прочности. При этом необходимо учесть, с одной стороны, отношение минимальных моментов сопротивления изгибу плоских сечений оснований арочного и прямого зубьев, по величине которых ориентировочно можно оценить влияние прочности арочного зуба. С другой стороны, продольная локализация пятна контакта приводит к уменьшению пятна контакта и по профилю в сечениях, удаленных от средней плоскости зубчатого венца колеса. Таким образом, на краях рабочего участка зубчатого венца максимальная высота приложения нагрузки к зубу и изгибающий момент существенно уменьшаются. К тому же, по мере удаления от торцов, величина нормального модуля быстро возрастает и в среднем сечении  $m_n = m_t$ . Благодаря симметричности арочного зуба и сравнительно малой чувстви-

тельности его к погрешностям изготовления и сборки передачи, нагрузка распределяется более равномерно, чем в косозубых и шевронных передачах. Все это позволяет в первом приближении рекомендовать при проектировании некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями выбирать величину нормального модуля примерно на (10-15)% меньше, чем в косозубой передаче аналогичной конструкции.

За номинальный радиус резцовой головки принимается значение из стандартного ряда, ближайшее к расчетному:

$$r_n = \frac{bK_n}{2 \sin \beta_{\max}}, \quad (5.12)$$

где  $\beta_{\max} = \arccos \frac{m_n}{m_t}$ .

При отклонениях номинального радиуса от расчетного более чем на 20% необходимо определить новое значение ширины зубчатого венца:

$$b = \frac{2r_n \sin \beta_{\max}}{K_n},$$

варьируя углом  $\beta_{\max}$  так, чтобы предельное значение  $m_n$  не уменьшилось и отклонение величины коэффициента осевого перекрытия от целого числа не превышало 20%. В случае ограничения ширины зубчатого венца, постоянство суммарной длины линий одновременного контакта может быть обеспечено за счет условия равенства целому числу коэффициента профильного перекрытия, которое достигается подбором параметров исходного контура. По своим свойствам такая передача является промежуточной между прямозубой (при  $\varepsilon_s = 1, 2, \dots$ ) и косозубой (при  $\varepsilon_0 = 1, 2, \dots$ ).

Как было отмечено, некруглые цилиндрические колеса с арочными зубьями позволяют очень просто создать локализацию пятна контакта. Поэтому при их проектировании необходимо принимать в расчет требуемый коэффициент локализации, который выбирается либо исходя из условий работы ослабленного участка зуба (см. рис. 5.5, зачерченные участки тела зуба), либо из условия удовлетворения определенных технологических и эксплуатационных требований. Ослабленный кромочный

участок зуба выключается из работы при коэффициенте локализации пятна контакта зубьев, равном

$$K_n = 1 - 2 \frac{S_g \sin \beta_{\max}}{b}, \quad (5.13)$$

где  $S_g$  – толщина зуба на краю зубчатого венца по делительному некруглому цилиндру.

Локализация пятна контакта создается за счет суммарного отвода зубьев в «тело» (на край локализованного пятна контакта) на величину, равную сумме их сближений за счет упругого сжатия и уменьшения микронеровностей в процессе приработки.

### 5.3. Торцовые зубчатые передачи

#### 5.3.1. Виды торцовых зубчатых передач

Торцовые зубчатые передачи внешнего и внутреннего зацеплений [123] можно использовать для передачи вращающего момента с высокой точностью между параллельными осями с

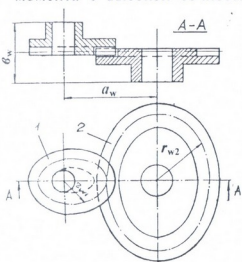


Рис. 5.3. Торцовая зубчатая передача с некруглыми колесами

переменным (рис. 5.3, 5.15), переменнo-постоянным (рис. 5.4, 5.16) и постоянным (рис. 5.5, 5.17) передаточными отношениями. Передачи состоят из колес 1, 2; 3, 4 и 5, 6. Аксиоиды колес 1, 2 – некруглые; 3, 4 – некругло-круглые; 5, 6 – круглые цилиндры. Начальными и делительными поверхностями колес являются торцовые плоскости, ограниченные: кривыми переменного; переменнo-постоянного радиуса и окружностями постоянного радиуса. На торцовых плоскостях колес нарезаны торцовые зубья.

Профили зубьев в сечениях колес торцовыми плоскостями, продольные профили очерчены выпукло-выпуклыми, выпукло-вогнутыми линиями. Линиями продольных профилей зубьев являются:

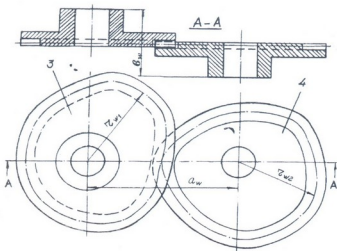


Рис. 5.4. Торцовая зубчатая передача с некругло-круглыми зубчатыми колесами

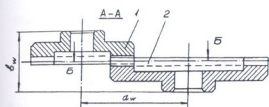


Рис. 5.5. Торцовая зубчатая передача с круглыми зубчатыми колесами

обыкновенные (рис. 5.6), эпи-, гипо- эвольвенты, циклоиды, дуги окружностей и др. Профилями зубьев в цилиндрических сечениях Б-Б колес являются: трапеция  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  (рис. 5.7, а); равнобочная трапеция  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

(рис. 5.7, б); прямоугольник  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  (рис. 5.7, в); пилообразный  $\alpha_2 \neq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 = 0$  (рис. 5.7 г). Мгновенный контакт профилей происходит на линиях, расположенных: наклонно (рис. 5.7 а, б); перпендикулярно (рис. 5.7, в); наклонно-перпендикулярно (рис. 5.7 г) к начальным, делительным поверхностям колес.

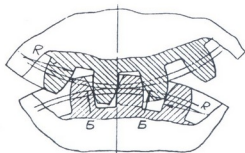


Рис. 5.6. Профили зубьев в сечениях колес торцовыми плоскостями

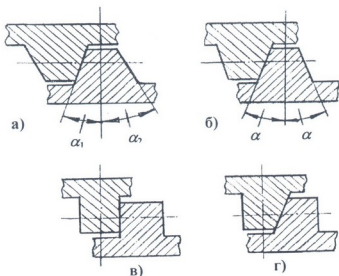


Рис. 5.7. Профили зубьев в цилиндрических сечениях Б-Б зубчатых колес

### 5.3.2. Преимущества торцовых зубчатых передач

Преимущества торцовых зубчатых передач состоят в том, что они:

- 1) дают возможность осуществить регулирование межбазового  $b_w$  расстояния, при постоянном межосевом  $a_w$  расстоянии, без нарушения правильности зацепления зубьев, что уменьшает мертвый ход передач;
- 2) мало чувствительны к перекосам осей, что упрощает монтаж передач;
- 3) обладают высокой кинематической точностью;
- 4) создают возможность осуществления передач с различными продольными профилями и профилями зубьев в цилиндрических сечениях колес;
- 5) обладают высокой жесткостью зубьев;
- 6) имеют высокую изгибную прочность;
- 7) мгновенный контакт профилей происходит: в точке (точках); на кривых или на прямых линиях;
- 8) зубья не подвержены подрезанию и заострению, минимальное число зубьев колеса можно брать  $z_{\min} < 17$  (рис. 5.17).

### 5.3.3. Нарезание торцовых зубчатых колес внешнего зацепления

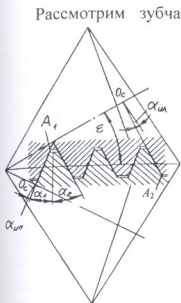


Рис.5.8. Осевой трапецидальный профиль червячной фрезы

Рассмотрим зубчатую передачу с некруглыми торцовыми зубчатыми колесами внешнего зацепления (рис. 5.3) с эвольвентными линиями продольного профиля зубьев. При нарезании некруглых торцовых зубчатых колес в качестве режущих инструментов используются червячные фрезы, витки которых расположены на усеченных конусах (рис. 5.8). Профили витков фрез в осевых сечениях очерчены прямыми линиями, образующими  $O_c A_1$  и  $O_c A_2$  пересекающие оси фрез. С плоскостью, проведенной перпендикулярно к образующим начальных конусов, линии  $O_c A_1$  и  $O_c A_2$  образуют углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Осевыми профилями фрез являются: при  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  трапеция;

при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  равнобокая трапеция; при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  прямоугольник (рис. 5.9); при  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$  или  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  (рис. 5.10) пилообразный. Боковые поверхности зубьев профилируются с линиями: левого направления образующей  $O_c A_1$  правозаходной фрезы; правого направления образующей  $O_c A_2$  левозаходной фрезы. Образующие  $O_c A_1$  и  $O_c A_2$  с плоскостями, проведенными перпендикулярно к осям фрез, при трапецидальном профиле образуют углы:  $O_c A_1$  с правозаходной фрезой –  $\alpha_{ин} = \varepsilon - \alpha_1$ ;  $O_c A_2$  с левозаходной фрезой –  $\alpha_{ин} = \varepsilon - \alpha_2$ , где  $\varepsilon$  – угол начального конуса фрезы. В передачах боковые поверхности зубьев с линиями правого (левого) направления находятся в зацеплении с боковыми поверхностями зубьев с линиями левого (правого) направления. Нарезание зубьев производится отдельно, методом непрерывного деления и обкатки. Сперва нарезаются зубья с

линиями правого (левого) направления, затем – с линиями левого (правого) направления.

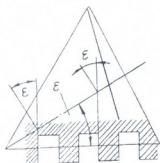


Рис. 5.9. Осевой прямоугольный профиль червячной фрезы

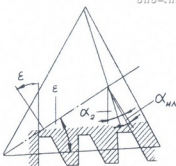


Рис. 5.10. Осевой пилообразный профиль червячной фрезы

### 5.3.4. Системы координат

При исследовании зацепления некруглых торцевых зубчатых колес введем следующие системы координат (рис. 5.11, 5.12, 5.13, 5.14): неподвижную систему координат  $S_0$ , связанную с плоским производящим колесом П; подвижные системы координат  $S_m$ ,  $S_n$ ,  $S_p$  и  $S_k$ , связанные с фрезой  $d(e)$ , производящим П и нарезаемым колесами; вспомогательные системы координат  $S_a$ ,

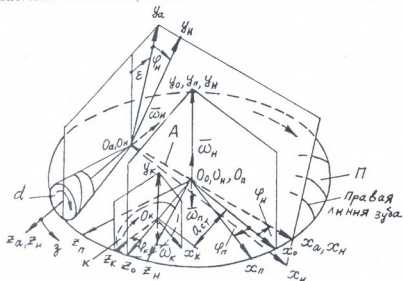


Рис. 5.11. Станочное зацепление при нарезании некруглых торцевых зубчатых колес с правыми линиями зубьев

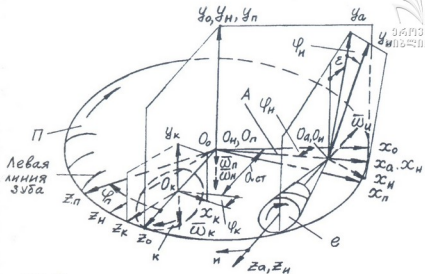


Рис. 5.12. Станочное зацепление при нарезании некруглых торцевых зубчатых колес с левыми линиями зубьев

$S_o$ , связанные с фрезой  $d(e)$ . Системы координат  $S_a$  и  $S_n$  связаны между собой жестко, водилом  $O_n O_n = A$ , где  $A$  – кратчайшее межосевое расстояние. Исследование проводится в системе  $S_a$ .

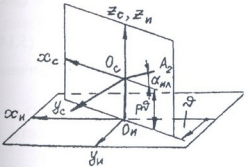


Рис. 5.13. Системы координат, связанные с левозаходной фрезой

Фрезе  $d(e)$  сообщим вращение вокруг оси  $O_n z_n$  с угловой скоростью  $\omega_n = d\varphi_n/dt$ , где  $\varphi_n$  – угол поворота фрезы.

При вращении фрезы можно представить, что инструментом как бы образуется плоское производящее колесо  $\Pi$ , которое вращается вокруг оси  $O_a y_n$  с угловой скоростью  $\omega_n = d\varphi_n/dt$ ,

где  $\varphi_n$  – угол поворота производящего колеса. Обкатываясь по производящему колесу  $\Pi$ , нарезаемое колесо участвует в движениях: неравномерном вращательном вокруг оси  $O_k y_k$  с угловой скоростью  $\omega_k = d\varphi_k/dt$ , где  $\varphi_k$  – угол поворота нарезаемого колеса, и неравномерном переносном поступательном вдоль оси  $O_o z_o$  со скоростью  $c = da_{ст}/dt$ , где  $a_{ст} = O_o O_k$  – переменное



станочное межосевое расстояние. Одновременно с этим фрезе  $d(e)$

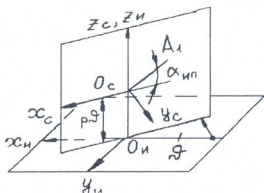


Рис. 5.14. Системы координат, связанные с правозаходной фрезой

сообщается движение подачи, вращение вокруг оси  $O_n y_n$  с угловой скоростью  $\omega_n = d\varphi_n/dt$ , где  $\varphi_n$  – угол поворота фрезы по направлению  $z(i)$ . Одновременно с вращением фрез  $d(e)$  вокруг своих осей осуществляется их подача: фрезы  $d$  по направлению  $z$ , а фрезы  $e$  – по направлению  $i$ .

### 5.3.5. Нарезание зубьев с правыми эвольвентными продольными линиями

Нарезание производится левозаходной фрезой (рис. 5.11). Образующая  $O_c A_2$  в системе  $S_c$  определяется уравнением (рис. 5.13) [77]

$$\bar{r}_c = -u(\cos \alpha_{ин} \bar{i} - \sin \alpha_{ин} \bar{k}_c), \quad (5.14)$$

где  $u = \overline{O_c A_2}$ ,  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  – орты координатных осей, единичные векторы.

Системе  $S_c$  сообщим винтовое движение вокруг оси  $O_n z_n$  с параметром  $p$ . Для определения производящей поверхности в системах  $S_n$  и  $S_a$  воспользуемся матричными равенствами

$$r_n = M_{ис} r_c; \quad (5.15)$$

$$r_a = M_{ан} M_{ис} r_c, \quad (5.16)$$

где  $r_n$ ;  $r_c$ ;  $r_a$  – столбцевые матрицы точки производящей поверхности в системах  $S_n$ ,  $S_c$ ,  $S_a$ ;  $M_{ис}$ ,  $M_{ан}$  – матрицы перехода от  $S_c$  к  $S_n$ , от  $S_n$  к  $S_a$  имеют вид

$$M_{ис} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.17)$$

$$M_{an} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поверхность витков червяка в системах координат  $S_n$  и  $S_a$  определится уравнениями

$$\bar{r}_n = -u \cos \alpha_{ил} (\cos \vartheta \bar{i}_n - \sin \vartheta \bar{j}_n) + (p \vartheta + u \sin \alpha_{ил}) \bar{k}_n, \quad (5.19)$$

$$\bar{r}_a = -u \cos \alpha_{ил} (\cos \nu \bar{i}_a - \sin \nu \bar{j}_a) + (p \vartheta + u \sin \alpha_{ил}) \bar{k}_a, \quad (5.20)$$

где  $\vartheta$  – угол поворота образующей  $O_c A_2$  в винтовом движении;  
 $\nu = \varphi_n + \vartheta$ .

Связь между координатами векторов нормали в системах  $S_n$  и  $S_a$  определится уравнением

$$\bar{n}_a = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 \\ -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{n}_n, \quad (5.21)$$

где  $\bar{n}_n = (dr_n/du) \times (dr_n/d\vartheta)$  – столбцевая матрица вектора нормали к поверхности (5.20), или

$$\bar{n}_a = (p \sin \nu - u \sin_{ил} \cos \nu) \bar{i}_a + (p \cos \nu + u \sin \alpha_{ил} \sin \nu) \bar{j}_a - u \cos \alpha_{ил} \bar{k}_a. \quad (5.22)$$

### 5.3.6. Уравнения зацепления

Уравнение зацепления при фиксированном параметре  $\varphi_n$  имеет вид

$$\bar{n}_a \cdot \bar{V}_a^{(нк, \varphi_n)} = 0. \quad (5.23)$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{V}_a^{(нк, \varphi_n)} = \bar{\omega}_n \times \bar{r}_a - [\bar{\omega}_k \times \bar{r}_a + \bar{\omega}_k \times (\overline{O_k O_0} + \overline{O_0 O_a}) + \bar{c}]. \quad (5.24)$$

Проекции векторов имеют выражения:

$$\begin{aligned} (\omega_n)_{xa} &= 0; & (\omega_k)_{xa} &= 0; \\ (\omega_n)_{ya} &= 0; & (\omega_k)_{ya} &= -\omega_k \cos \varepsilon; \\ (\omega_n)_{za} &= -\omega_n; & (\omega_k)_{za} &= -\omega_k \sin \varepsilon; \end{aligned} \quad (5.25) \quad (5.26)$$



$$\begin{aligned}
 (O_k O_o)_{xa} &= a_{ct} \sin \varphi_n; & (O_o O_a)_{xa} &= A; \\
 (O_k O_o)_{ya} &= -a_{ct} \cos \varphi_n \sin \varepsilon; & (O_o O_a)_{ya} &= 0; \\
 (O_k O_o)_{za} &= a_{ct} \cos \varphi_n \cos \varepsilon; & (O_o O_a)_{za} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.28}$$

Проекции вектора  $\bar{c}$  на ось  $O_o z_o$  будем приписывать положительный или отрицательный знаки в зависимости от того, увеличивается ли при этом или уменьшается станочное межосевое расстояние  $a_{ct}$ . Проекции вектора  $\bar{c}$  запишем при увеличении  $a_{ct}$ :

$$\begin{aligned}
 c_{xa} &= (da_{ct}/dt) \sin \varphi_n; & c_{ya} &= -(da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon; \\
 c_{za} &= (da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon.
 \end{aligned}
 \tag{5.29}$$

Проекции вектора скорости относительного движения выразим уравнениями:

$$\begin{aligned}
 v_{xa}^{(нк, \varphi_n)} &= y_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + z_a \omega_k \cos \varepsilon + \omega_k a_{ct} \cos \varphi_n + \\
 &\quad + (da_{ct}/dt) \sin \varphi_n; \\
 v_{ya}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + \omega_k a_{ct} \sin \varphi_n \sin \varepsilon + A \omega_k \sin \varepsilon - \\
 &\quad - (da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon; \\
 v_{za}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a \omega_k \cos \varepsilon - \omega_k a_{ct} \sin \varphi_n \cos \varepsilon - A \omega_k \cos \varepsilon + \\
 &\quad + (da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon.
 \end{aligned}
 \tag{5.30}$$

Используя (5.20, 5.22, 5.30), уравнение зацепления (5.23) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 + a_7 + a_8 - a_9 + a_{10} + a_{11} - \\
 - a_{12} + a_{13} - a_{14} - a_{15} - a_{16} + a_{17} + a_{18} + a_{19} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.31}$$

где:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= p^2 \vartheta u_{ки} \cos \varepsilon \sin \nu; & a_2 &= up \vartheta u_{ки} \sin \alpha_{ил} \cos \varepsilon \cos \nu; \\
 a_3 &= u^2 u_{ки} \cos \varepsilon \cos \nu; & a_4 &= up \cos \alpha_{ил}; \\
 a_5 &= uu_{ки} p \cos \alpha_{ил} \sin \varepsilon; & a_6 &= uu_{ки} p \sin \alpha_{ил} \cos \varepsilon \sin \nu; \\
 a_7 &= u_{ки} a_{ct} p \cos \varphi_n \sin \nu; & a_8 &= u_{ки} a_{ct} p \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu; \\
 a_9 &= uu_{ки} a_{ct} \cos \varphi_n \sin \varphi_{ил} \cos \nu; \\
 a_{10} &= uu_{ки} a_{ct} \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{ил} \sin \nu; \\
 a_{11} &= uu_{ки} a_{ct} \sin \varphi_n \cos \varepsilon \cos \alpha_{ил}; & a_{12} &= j_{ки} p \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu; \\
 a_{13} &= j_{ки} p \sin \varphi_n \sin \nu; & a_{14} &= uj_{ки} \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{ил} \sin \nu;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{15} &= u j_{\text{ки}} \cos \varphi_{\text{н}} \cos \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}}; & a_{16} &= u j_{\text{ки}} \sin \varphi_{\text{н}} \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \nu; \\
 a_{17} &= u_{\text{ки}} p A \sin \varepsilon \cos \nu; & a_{18} &= u u_{\text{ки}} A \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu; \\
 a_{19} &= u u_{\text{ки}} A \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ил}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.32}$$

$u_{\text{ки}} = d\varphi_k / d\varphi_{\text{н}}$ ;  $j_{\text{ки}} = da_{\text{ст}} / d\varphi_{\text{н}}$  – заданные функции переменного передаточного отношения.

Уравнение зацепления при фиксированном параметре  $\varphi_{\text{н}}$  имеет вид

$$\bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} = 0. \tag{5.33}$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} = \bar{\omega}_{\text{н}} \times \bar{r}_a + \overline{O_0 O_a} \times \bar{\omega}_{\text{н}}. \tag{5.34}$$

Проекции вектора угловой скорости  $\bar{\omega}_{\text{н}}$  имеют выражения

$$(\omega_{\text{н}})_{xa} = 0; \quad (\omega_{\text{н}})_{ya} = \omega_{\text{н}} \cos \varepsilon; \quad (\omega_{\text{н}})_{za} = \omega_{\text{н}} \sin \varepsilon. \tag{5.35}$$

Проекции вектора относительной скорости запишем в виде:

$$\begin{aligned}
 v_{xa}^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} &= \omega_{\text{н}} (z_a \cos \varepsilon - y_a \sin \varepsilon); \\
 v_{ya}^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} &= \omega_{\text{н}} \sin \varepsilon (x_a - A); \\
 v_{za}^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} &= -\omega_{\text{н}} \cos \varepsilon (x_a - A).
 \end{aligned}
 \tag{5.36}$$

Используя (5.20, 5.22, 5.35, 5.36) и принимая  $\omega_{\text{н}} = 1$  рад/сек, уравнение зацепления (5.33) представим зависимостью

$$\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - \delta_5 - \delta_6 - \delta_7 - \delta_8 = 0, \tag{5.37}$$

где:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= p^2 \mathcal{G} \sin \nu \cos \varepsilon; & \delta_2 &= u p \mathcal{G} \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \nu \cos \varepsilon; \\
 \delta_3 &= u p \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu \cos \varepsilon; & \delta_4 &= u p \cos \alpha_{\text{ил}} \sin \varepsilon; \\
 \delta_5 &= u^2 \cos \nu \cos \varepsilon; & \delta_6 &= u A \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu \sin \varepsilon; \\
 \delta_7 &= u A \cos \alpha_{\text{ил}} \cos \varepsilon; & \delta_8 &= p A \cos \nu \cos \varepsilon.
 \end{aligned}
 \tag{5.38}$$

Уравнение зацепления получим при совместном рассмотрении уравнений (5.32) и (5.38). Линии контакта с системе  $S_{\text{н}}$  представим в виде

$$\begin{aligned}
 x_{\text{н}} &= -u \cos \alpha_{\text{ил}} \cos \mathcal{G}; \\
 y_{\text{н}} &= u \cos \alpha_{\text{ил}} \sin \mathcal{G}; \\
 z_{\text{н}} &= p \mathcal{G} + u \sin \alpha_{\text{ил}}; \\
 \bar{n}_a \cdot v_a^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} &= 0; & \bar{n}_a \cdot v_a^{(\text{нк}, \varphi_{\text{н}})} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.39}$$

### 5.3.7. Боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса

Для нахождения уравнения правой боковой поверхности зубьев нарезаемого некруглого торцевого зубчатого колеса воспользуемся матричным равенством

$$r_k = M_{ко} M_{он} M_{на} M_{ан} r_i, \quad (5.40)$$

где  $r_k$  – столбцевая матрица точки производящей поверхности в системе координат  $S_k$ ;  $M_{ан}$ ,  $M_{на}$ ,  $M_{он}$ ,  $M_{ко}$  – матрицы перехода от  $S_i$  к  $S_a$ , от  $S_a$  к  $S_n$ , от  $S_n$  к  $S_o$ , от  $S_o$  к  $S_k$  имеют вид:

$$M_{ан} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 \\ -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (5.41)$$

$$M_{на} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -A \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.42)$$

$$M_{он} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & 0 & \sin \varphi_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_n & 0 & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.43)$$

$$M_{ко} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k & 0 & -a_{ст} \sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_k & \cos \varphi_k & -a_{ст} \sin \varphi_k \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.44)$$

С учетом (5.19, 5.41, 5.42, 5.43) правую боковую поверхность зубьев представим уравнениями:

$$\begin{aligned} x_k &= -b_1 - b_2 + b_3 + b_4 - b_5 - b_6; \\ y_k &= b_7 + b_8 + b_9; \\ z_k &= b_{10} - b_{11} + b_{12} + b_{13} + b_{14} - b_{15}; \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0;$$

$$\bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_k)} = 0,$$



где

$$\begin{aligned} b_1 &= u \cos \alpha_{\text{нл}} \cos \nu \cos \psi; & b_2 &= u \cos \alpha_{\text{нл}} \sin \varepsilon \sin \nu \sin \psi; \\ b_3 &= u \sin \alpha_{\text{нл}} \cos \varepsilon \sin \psi; & b_4 &= p \vartheta \cos \varepsilon \sin \psi; \\ b_5 &= A \cos \psi; & b_6 &= a_{\text{ст}} \sin \varphi_k; & b_7 &= u \cos \alpha_{\text{нл}} \cos \varepsilon \sin \nu; \\ b_8 &= p \vartheta \sin \varepsilon; & b_9 &= u \sin \alpha_{\text{нл}} \sin \varepsilon; \\ b_{10} &= u \cos \alpha_{\text{нл}} \cos \nu \sin \psi; & b_{11} &= u \cos \alpha_{\text{нл}} \sin \varepsilon \sin \nu \cos \psi; \\ b_{12} &= u \sin \alpha_{\text{нл}} \cos \varepsilon \cos \psi; & b_{13} &= p \vartheta \cos \varepsilon \cos \psi; \\ b_{14} &= A \sin \psi; & b_{15} &= a_{\text{ст}} \cos \varphi_k; & \psi &= \varphi_k + \varphi_n. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Поверхность зацепления определится уравнениями:

$$\begin{aligned} r_0 &= M_{\text{он}} \cdot r_n; \\ \bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} &= 0; & \bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_k)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

где  $r_0$  – столбцевая матрица точки производящей поверхности в системе  $S_0$ .

Матрицу перехода от системы  $S_n$  к системе  $S_0$  запишем в виде

$$M_{\text{он}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

где:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi_n \cos \varphi_n + \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n; \\ a_{12} &= \cos \varphi_n \sin \varphi_n - \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \varphi_n; \\ a_{13} &= \sin \varphi_n \cos \varepsilon; & a_{14} &= -A \varepsilon \cos \varphi_n; \\ a_{21} &= -\cos \varepsilon \sin \varphi_n; & a_{22} &= \cos \varepsilon \cos \varphi_n; \\ a_{23} &= \sin \varepsilon; & a_{24} &= 0; \\ a_{31} &= -\sin \varphi_n \cos \varphi_n + \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n; \\ a_{32} &= -\sin \varphi_n \sin \varphi_n - \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \varphi_n; \\ a_{33} &= \cos \varphi_n \cos \varepsilon; & a_{34} &= A \sin \varphi_n; \\ a_{41} &= a_{42} = a_{43} = 0; & a_{44} &= 1. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Используя (5.19, 5.47, 5.48, 5.49), поверхность зацепления представим уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 - \Gamma_5; \\
 y_0 &= \Gamma_6 + \Gamma_7 + \Gamma_8; \\
 z_0 &= \Gamma_9 - \Gamma_{10} + \Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{13}; \\
 \bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} &= 0; \quad \bar{n}_a \cdot \nu_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \cos \nu; \quad \Gamma_2 = u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \nu; \\
 \Gamma_3 &= u \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \varphi_n \cos \varepsilon; \quad \Gamma_4 = p \vartheta \sin \varphi_n \cos \varepsilon; \\
 \Gamma_5 &= A \cos \varphi_n; \quad \Gamma_6 = u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \nu \cos \varepsilon; \\
 \Gamma_7 &= u \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \varepsilon; \quad \Gamma_8 = p \vartheta \sin \varepsilon; \quad \Gamma_9 = u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varphi_n \cos \varepsilon; \\
 \Gamma_{10} &= u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \nu; \quad \Gamma_{11} = u \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \cos \varepsilon; \\
 \Gamma_{12} &= p \vartheta \cos \varphi_n \cos \varepsilon; \quad \Gamma_{13} = A \sin \varphi_n.
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

### 5.3.8. Нарезание зубьев с левыми эвольвентными продольными линиями

Нарезание производится правозаходной фрезой (рис. 5.12). Образующая  $O_c A_1$  имеет выражение (рис. 5.14)

$$\bar{r}_c = -u(\cos_{\text{ин}} \bar{i}_c - \sin \alpha_{\text{ин}} \bar{k}_c), \tag{5.52}$$

где  $u = \overline{O_c A_1}$ .

Поверхность витков червяка в системах  $S_n, S_a$  запишем в виде:

$$\bar{r}_n = -u(\cos_{\text{ин}} \cos \vartheta \bar{i}_n + \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \vartheta \bar{j}_n) + (p \vartheta + u \sin \alpha_{\text{ин}}) \bar{k}_n; \tag{5.53}$$

$$\bar{r}_a = -u(\cos_{\text{ин}} \cos \nu' \bar{i}_a - \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \nu' \bar{j}_a) + (p \vartheta + u \sin \alpha_{\text{ин}}) \bar{k}_a. \tag{5.54}$$

Вектор нормали к поверхности (5.53) определится уравнением

$$\begin{aligned}
 \bar{n}_a &= (p \sin \nu' + u \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \nu') \bar{i}_a + (p \cos \nu' - \\
 &\quad - u \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu') \bar{j}_a + u \cos \alpha_{\text{ин}} \bar{k}_a,
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

где  $\nu' = \varphi_n - \vartheta$ .

Проекции векторов  $\bar{\omega}_n, \bar{\omega}_k, \overline{O_k O_0}$  и  $\bar{c}$  определяются уравнениями (5.25, 5.26, 5.27, 5.29). Проекции векторов  $\overline{O_0 O_a}$  и  $\bar{\omega}_n$  запишем в виде

$$(O_0 O_a)_{xa} = -A; \quad (O_0 O_a)_{ya} = 0; \quad (O_0 O_a)_{za} = 0; \tag{5.56}$$

$$(\omega_n)_{xa} = 0; (\omega_n)_{ya} = -\omega_n \cos \varepsilon; (\omega_n)_{za} = -\omega_n \sin \varepsilon \quad (5.57)$$

Проекции вектора скорости относительного движения при фиксированном параметре  $\varphi_n$ , имеют выражения:

$$\begin{aligned} v_{xa}^{(нк, \varphi_n)} &= y_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + z_a \omega_k \cos \varepsilon + \omega_k a_{ст} \cos \varphi_n + \\ &\quad + (da_{ст} / dt) \sin \varphi_n; \\ v_{ya}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) - \omega_k a_{ст} \sin \varphi_n \sin \varepsilon - \\ &\quad - A \omega_k \sin \varepsilon + (da_{ст} / dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon; \\ v_{za}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a \omega_k \cos \varepsilon + \omega_k a_{ст} \sin \varphi_n \cos \varepsilon + \\ &\quad + A \omega_k \cos \varepsilon - (da_{ст} / dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Учитывая (5.24, 5.55, 5.58), уравнение зацепления (5.23) представим в виде (5.31), где: углы  $\varphi_{ин}$  и  $\nu$  надо заменить на углы  $\alpha_{ин}$  и  $\nu'$ ; перед членами  $a_6, a_8, a_{17}$  нужно положить знак минус, перед членами  $a_2, a_3, a_5, a_9, a_{12}, a_{14}$  — плюс.

Проекции вектора скорости относительного движения при фиксированном параметре  $\varphi_n$ , имеют выражение:

$$\begin{aligned} v_{xa}^{(нк, \varphi_n)} &= -\omega_n (z_a \cos \varepsilon - y_n \sin \varepsilon); \\ v_{ya}^{(нк, \varphi_n)} &= -\omega_n \sin \varepsilon (x_a + A); \\ v_{za}^{(нк, \varphi_n)} &= \omega_n \cos \varepsilon (x_a + A). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Используя (5.54, 5.55, 5.59), уравнение зацепления (5.33) представим в виде (5.37), где: углы  $\alpha_{ин}$  и  $\nu$  надо заменить на углы  $\alpha_{ин}$  и  $\nu'$ ; перед членом  $\delta_1$  нужно поставить знак минус, перед членами  $\delta_3, \delta_7, \delta_8$  — плюс.

Линия контакта в системе  $S_n$  определяется уравнением (5.53) при совместном рассмотрении с уравнениями (5.31) и (5.37).

Для нахождения уравнения левой боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса воспользуемся матричным равенством (5.40), где матрицы  $M_{ан}$ ,  $M_{ко}$  имеют выражения (5.41) и (5.44). Матрицы  $M_{на}$  и  $M_{он}$  представим в виде

$$M_{на} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.60)$$



$$M_{\text{он}} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & 0 & -\sin \varphi_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_n & 0 & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

С учетом (5.19, 5.40, 5.41, 5.44, 5.60, 5.61) левая боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса определится уравнениями (5.45), где углы  $\alpha_{\text{ил}}$  и  $\nu$  надо заменить на углы  $\alpha_{\text{ип}}$  и  $\nu'$ ; перед членами  $b_3, b_9, b_{12}$  нужно поставить знак минус, перед членами  $b_2, b_5$  – плюс. Поверхность зацепления определится уравнениями (5.50), где углы  $\alpha_{\text{ил}}$  и  $\nu$  надо заменить на углы  $\alpha_{\text{ип}}$  и  $\nu'$ ; перед членами  $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_9$  нужно поставить знак минус, перед членом  $\gamma_5$  – плюс. В приведенных уравнениях углы  $\alpha_{\text{ил}} = \varepsilon - \alpha_2, \alpha_{\text{ип}} = \varepsilon - \alpha_1$  нужно заменить на углы, при нарезании колес с профилем: равнобочным трапецеидальным –  $\alpha_{\text{ил}} = \alpha_{\text{ип}} = \varepsilon - \alpha$ ; прямоугольным –  $\alpha_{\text{ил}} = \alpha_{\text{ип}} = \varepsilon$ ; пилообразным –  $\alpha_{\text{ил}} = \varepsilon - \alpha_2; \alpha_{\text{ип}} = \varepsilon; (\alpha_{\text{ил}} = \varepsilon, \alpha_{\text{ип}} = \varepsilon - \alpha_1)$ .

Полученные уравнения являются общими и охватывают случаи торцовых зубчатых передач внешнего зацепления как с переменным, переменного-постоянным, так и постоянным передаточным отношением. Для круглых участков колес с некругло-круглыми аксоидами и колес с круглыми аксоидами в приведенных уравнениях нужно поставить:  $a_{\text{сг}} = \text{const}; da_{\text{сг}}/dt = 0; u_{\text{ки}} = \text{const}$  и  $j_{\text{ки}} = 0$ .

#### 5.4. Торцовая зубчатая передача внутреннего зацепления

Рассмотрим зубчатую передачу с некруглыми торцовыми колесами внутреннего зацепления (рис. 5.15, 5.16, 5.17) зубьев. При нарезании колес эвольвентными линиями продольного профиля в качестве режущих инструментов используются конические червячные фрезы, витки которых расположены на усеченных конусах (рис. 5.8). Боковые поверхности зубьев профилируются с линиями: левого направления образующей  $O_c A_2$  правозаходной фрезы; правого направления образующей  $O_c A_1$  левозаходной фрезы.

Нарезание зубьев производится раздельно методом непрерывного деления и обкатки. Сначала нарезаются зубья с линиями правого (левого) направления, затем — с линиями левого (правого) направления.

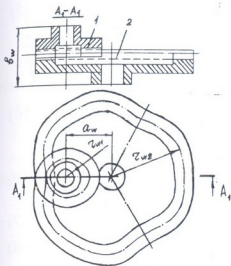


Рис. 5.15. Торцевая зубчатая передача с некруглыми колесами

цилиндрических сечениях колес. Образующая  $O_c A_2$  правозаходной фрезы (рис. 5.8, 5.12) в системе  $S_c$  определяется уравнением

$$\bar{r}_c = -u(\cos \alpha_{ин} \bar{i}_c + \sin \alpha_{ин} \bar{k}_c), \quad (5.62)$$

где  $u = \overline{O_c A_2}$ ,  $\alpha_{ин} = \varepsilon + \alpha_2$ .

Системе  $S_c$  сообщим винтовое движение вокруг оси  $O_n z_n$  с параметром  $p$ . Для определения производящей поверхности в системах  $S_n$  и  $S_a$  воспользуемся матричными равенствами:

$$r_n = M_{ис} r_c; \quad (5.63)$$

$$r_a = M_{ан} M_{ис} r_c, \quad (5.64)$$

где  $r_n$ ,  $r_c$ ,  $r_a$  — столбцевые матрицы точки производящей поверхности в системах  $S_n$ ,  $S_c$ ,  $S_a$ ;  $M_{ис} M_{ан}$  — матрицы перехода от  $S_c$  к  $S_n$ , от  $S_n$  к  $S_a$  имеют вид

При исследовании зацепления некруглых торцовых колес внутреннего зацепления используем системы координат (рис. 5.11, 5.12).

Рассмотрим нарезание некруглого торцового колеса с левыми эвольвентными продольными линиями зубьев с трапецеидальным профилем в

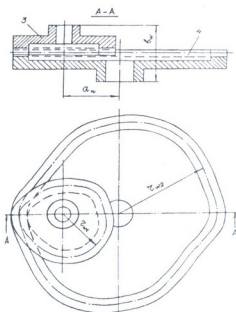


Рис. 5.16. Торцевая зубчатая передача с некругло-круглыми колесами

$$M_{\text{ис}} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{\text{ан}} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{\text{и}} & \sin \varphi_{\text{и}} & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{\text{и}} & \cos \varphi_{\text{и}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.66)$$

Поверхность витков червяка в системах координат  $S_{\text{и}}$  и  $S_{\text{а}}$  определится уравнениями

$$\bar{r}_{\text{и}} = -u \cos \alpha_{\text{ин}} (\cos \vartheta \bar{i}_{\text{и}} + \sin \vartheta \bar{j}_{\text{и}}) + (p\vartheta - u \sin \alpha_{\text{ин}}) \bar{k}_{\text{и}}, \quad (5.67)$$

$$\bar{r}_{\text{а}} = -u \cos \alpha_{\text{ин}} (\cos \nu \bar{i}_{\text{а}} - \sin \nu \bar{j}_{\text{а}}) + (p\vartheta - u \sin \alpha_{\text{ин}}) \bar{k}_{\text{а}}, \quad (5.68)$$

где  $\vartheta$  – угол поворота образующей  $O_{\text{а}}A_2$  в винтовом движении:  
 $\nu = \varphi_{\text{и}} - \vartheta$ .

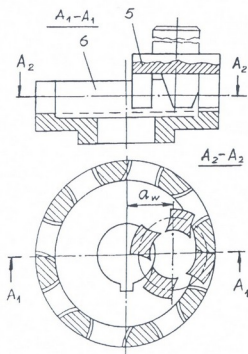


Рис. 5.17. Торцевая зубчатая передача с круглыми колесами

Связь между координатами векторов нормали в системах координат  $S_n$  и  $S_a$  определится уравнением

$$\begin{pmatrix} n_{xa} \\ n_{ya} \\ n_{za} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 \\ -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p \sin \vartheta - u \cos \alpha_{nn} \cos \vartheta \\ p \cos \vartheta - u \sin \alpha_{nn} \sin \vartheta \\ u \cos \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

или

$$\bar{n}_a = (p \sin \nu - u \sin \alpha_{nn} \cos \nu) \bar{j}_a + (p \cos \nu + u \sin \alpha_{nn} \sin \nu) \bar{j}_a + u \cos \alpha_{nn} \bar{k}_a. \quad (5.70)$$

Уравнение зацепления при фиксированном параметре  $\varphi_n$  имеет вид

$$\bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(нк, \varphi_n)} = 0. \quad (5.71)$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{v}_a^{(нк, \varphi_n)} = \bar{\omega}_n \times \bar{r}_a - [\bar{\omega}_k \times \bar{r}_a + \bar{\omega}_k \times (\overline{O_k O_0} + \overline{O_0 O_a}) + \bar{c}]. \quad (5.72)$$

Проекции векторов имеют выражения:

$$\begin{aligned} (\omega_n)_{xa} &= 0; & (\omega_k)_{xa} &= 0; \\ (\omega_n)_{ya} &= 0; & (\omega_k)_{ya} &= -\omega_k \cos \varepsilon; \end{aligned} \quad (5.73) \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} (\omega_n)_{za} &= -\omega_n; & (\omega_k)_{za} &= -\omega_k \sin \varepsilon; \\ (O_k O_0)_{xa} &= -a_{ct} \sin \varphi_n; & (O_0 O_a)_{xa} &= -A; \\ (O_k O_0)_{ya} &= -a_{ct} \cos \varphi_n \sin \varepsilon; & (O_0 O_a)_{ya} &= 0; \end{aligned} \quad (5.75) \quad (5.76)$$

$$(O_k O_a)_{za} = a_{ct} \cos \varphi_n \cos \varepsilon; \quad (O_0 O_a)_{za} = 0.$$

Проекции вектора  $\bar{c}$  запишем при увеличении  $a_{ct}$ :

$$\begin{aligned} c_{xa} &= -(da_{ct}/dt) \sin \varphi_n; & c_{ya} &= -(da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon; \\ c_{za} &= (da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Проекции вектора скорости относительного движения выразим уравнениями:

$$\begin{aligned} \bar{v}_{xa}^{(нк, \varphi_n)} &= y_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + z_a \omega_k \cos \varepsilon + \\ &+ \omega_k a_{ct} \cos \varphi_n + (da_{ct}/dt) \sin \varphi_n; \\ \bar{v}_{ya}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) - \omega_k a_{ct} \sin \varphi_n \sin \varepsilon - \\ &- A \omega_k \sin \varepsilon + (da_{ct}/dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon; \\ \bar{v}_{za}^{(нк, \varphi_n)} &= -x_a \omega_k \cos \varepsilon + \omega_k a_{ct} \sin \varphi_n \cos \varepsilon + \end{aligned}$$

$$+ A \omega_k \cos \varepsilon - (da_{\text{ст}} / dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon. \quad (5.78)$$

Используя (5.68, 5.70, 5.78), уравнение (5.71) запишем в виде

$$\begin{aligned} & p^2 \vartheta u_{\text{ки}} \cos \varepsilon \sin \nu - p \vartheta u_{\text{ки}} u \cos \varepsilon \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \nu + u_{\text{ки}} u^2 \cos \varepsilon \cos \nu + \\ & + up \cos \alpha_{\text{ин}} - uu_{\text{ки}} p (\cos \varepsilon \sin \nu \sin \alpha_{\text{ин}} + \sin \varepsilon \cos \alpha_{\text{ин}}) + \\ & + u_{\text{ки}} a_{\text{ст}} p (\cos \varphi_n \sin \nu - \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu) - uu_{\text{ки}} a_{\text{ст}} (\cos \varphi_n \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \nu + \\ & + \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu - \sin \varphi_n \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ин}}) + j_{\text{ки}} p (\sin \varphi_n \sin \nu + \\ & + \cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu) - j_{\text{ки}} u (\sin \varphi_n \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \nu - \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu + \\ & + \cos \varphi_n \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ин}}) - Au_{\text{ки}} (p \sin \varepsilon \cos \nu + u \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu - \\ & - u \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ин}}) = 0, \end{aligned} \quad (5.79)$$

где  $u_{\text{ки}} = d\varphi_k / d\varphi_n$ ;  $j_{\text{ки}} = da_{\text{ст}} / d\varphi_n$  - заданные функции переменного передаточного отношения.

Уравнение зацепления при фиксированном параметре  $\varphi_n$  имеет вид

$$\bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{ик}, \varphi_n)} = 0. \quad (5.80)$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{v}_a^{(\text{ик}, \varphi_n)} = \bar{\omega}_n \times \bar{r}_a + \overline{O_0 O_a} \times \bar{\omega}_n. \quad (5.81)$$

Проекции вектора угловой скорости  $\bar{\omega}_n$  имеют выражения

$$(\omega_n)_{xa} = 0; (\omega_n)_{ya} = -\omega_n \cos \varepsilon; (\omega_n)_{za} = -\omega_n \sin \varepsilon. \quad (5.82)$$

Вектор относительной скорости запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{v}_a^{(\text{ик}, \varphi_n)} = \omega_n [y_a \sin \varepsilon - z_a \cos \varepsilon] \bar{i}_a - (x_a \sin \varepsilon + A \sin \varepsilon) \bar{j}_a + \\ + \cos \varepsilon (x_a + A) \bar{k}_a. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Используя (5.68, 5.70, 5.82, 5.83) и принимая  $\omega_n = 1$  рад/сек, уравнение зацепления представим зависимостью

$$\begin{aligned} & p^2 \vartheta \sin \nu \cos \varepsilon + up \vartheta \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \nu \cos \varepsilon + up (\sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu \cos \varepsilon + \\ & + \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varepsilon) - u^2 \cos \nu \cos \varepsilon - uA (\sin \alpha_{\text{ин}} \sin \nu \sin \varepsilon - \\ & - \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varepsilon) - pA \cos \nu \sin \varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Уравнение зацепления получим при совместном рассмотрении уравнений (5.79) и (5.84).

Линии контакта в системе  $S_n$  представим в виде

$$\bar{r}_n = -u \cos \alpha_{\text{ин}} (\cos \vartheta \bar{i}_n + \sin \vartheta \bar{j}_n) + (p \vartheta - u \sin \alpha_{\text{ин}}) \bar{k}_n. \quad (5.85)$$

$$\bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{ик}, \varphi_n)} = 0; \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{ик}, \varphi_n)} = 0.$$

### 5.4.1. Уравнение левой боковой поверхности зубьев колеса



Найдем уравнения левой боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса. Для этого воспользуемся матричным равенством

$$r_k = M_{ko} M_{on} M_{na} M_{an} r_n, \quad (5.86)$$

где  $r_k$ -столбцевая матрица точки производящей поверхности в системе координат:  $S_k, M_{an}, M_{na}, M_{on}, M_{ko}$  – матрицы перехода от  $S_n$  к  $S_a$ , от  $S_a$  к  $S_n$ , от  $S_n$  к  $S_o$ , от  $S_o$  к  $S_k$  имеют вид:

$$M_{an} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & \sin \varphi_n & 0 \\ -\sin \varphi_n & \cos \varphi_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (5.87)$$

$$M_{na} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.88)$$

$$M_{on} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_n & 0 & -\sin \varphi_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_n & 0 & \cos \varphi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (5.89)$$

$$M_{ko} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_k & 0 & \sin \varphi_k & -a_{ct} \sin \varphi_k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_k & 0 & \cos \varphi_k & -a_{ct} \sin \varphi_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.90)$$

С учетом (5.67, 5.86, 5.87, 5.88, 5.89, 5.90) левую боковую поверхность зубьев представим уравнениями:

$$\begin{aligned} x_k &= -u \cos \alpha_{ин} \cos \nu \cos \psi_1 + u \cos \alpha_{ин} \sin \varepsilon \sin \nu \sin \psi_1 - \\ &\quad - u \sin \alpha_{ин} \cos \varepsilon \sin \psi_1 + p \vartheta \cos \varepsilon \sin \psi_1 + A \cos \psi_1 - a_{ct} \sin \varphi_k; \\ y_k &= u \cos \alpha_{ин} \cos \varepsilon \sin \nu + p \vartheta \sin \varepsilon - u \sin \alpha_{ин} \sin \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_k &= u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \nu \sin \psi_1 - u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varepsilon \sin \nu \cos \psi_1 - \\
 &\quad - u \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \varepsilon \cos \psi_1 + p \vartheta \cos \varepsilon \cos \psi_1 - \\
 &\quad - A \sin \psi_1 - a_{\text{ст}} \cos \varphi_k; \\
 \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} &= 0; \quad \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

где  $\psi_1 = \varphi_k - \varphi_n$ .

Поверхность зацепления определится уравнениями:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= M_{\text{он}} r_n; \\
 \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} &= 0; \quad \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

где  $r_0$  – столбцевая матрица точки производящей поверхности в системе  $S_0$ ;  $M_{\text{он}}$  – матрица перехода от системы  $S_n$  к системе  $S_0$ .

Используя (5.67, 5.87, 5.88, 5.89, 5.91), поверхность зацепления представим уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \cos \nu + u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \nu + \\
 &\quad + u \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \varepsilon \sin \varphi_n - p \vartheta \cos \varepsilon \sin \varphi_n + A \cos \varphi_n; \\
 y_0 &= u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varepsilon \sin \nu - u \sin \alpha_{\text{ин}} \sin \varepsilon + p \vartheta \sin \varepsilon; \\
 z_0 &= -u \cos \alpha_{\text{ин}} \sin \varphi_n \cos \nu + u \cos \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \nu - \\
 &\quad - u \sin \alpha_{\text{ин}} \cos \varphi_n \cos \varepsilon + p \vartheta \cos \varphi_n \cos \varepsilon + A \sin \varphi_n; \\
 \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} &= 0; \quad \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

#### 5.4.2. Нарезание зубьев с правыми эвольвентными линиями

Нарезание зубьев производится левозаходной (рис. 5.11) фрезой. Образующая  $O_c A_1$  в системе  $S_c$  определяется уравнением (рис. 5.8)

$$\bar{r}_c = -u(\cos \alpha_{\text{ил}} \bar{i}_c + \sin \alpha_{\text{ил}} \bar{k}_c),$$

где  $u = O_c A_1$ ,  $\alpha_{\text{ил}} = \varepsilon + \alpha_1$ .

Поверхности витков червяка в системах  $S_n$ ,  $S_a$  имеют вид

$$\bar{r}_n = -u \cos \alpha_{\text{ил}} (\cos \vartheta \bar{i}_n - \sin \vartheta \bar{j}_n) + (p \vartheta - u \sin \alpha_{\text{ил}}) \bar{k}_n;$$

$$\bar{r}_a = -u \cos \alpha_{\text{ил}} (\cos \nu \bar{i}_a - \sin \nu \bar{j}_a) + (p \vartheta - u \sin \alpha_{\text{ил}}) \bar{k}_a,$$

где  $\nu = \varphi_n + \vartheta$ .

Вектор нормали к поверхности  $\vec{r}_a$  определится уравнением

$$\vec{n}_a = (p \sin \vartheta + u \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \nu) \vec{i}_a + (p \cos \nu - u \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu) \vec{j}_a - u \cos \alpha_{\text{ил}} \vec{k}_a.$$

Проекции векторов  $\vec{\omega}_n, \vec{\omega}_k, \overline{O_k O_0}, \overline{O_0 O_a}, \vec{c}$  и  $\vec{\omega}_n$  имеют вид:

$$\begin{aligned} (\omega_n)_{xa} &= 0, & (\omega_k)_{xa} &= 0, & (O_k O_0)_{xa} &= a_{\text{ст}} \sin \varphi_n, \\ (\omega_n)_{ya} &= 0, & (\omega_k)_{ya} &= -\omega_k \cos \varepsilon, & (O_k O_0)_{ya} &= -a_{\text{ст}} \cos \varphi_n \sin \varepsilon, \\ (\omega_n)_{za} &= -\vec{\omega}_n, & (\omega_k)_{za} &= -\omega_k \sin \varepsilon, & (O_k O_a)_{za} &= a_{\text{ст}} \cos \varphi_n \cos \varepsilon, \\ (O_0 O_a)_{xa} &= A, & c_{xa} &= (da_{\text{ст}}/dt) \sin \varphi_n, & (\omega_n)_{xa} &= 0, \\ (O_0 O_a)_{ya} &= 0, & c_{ya} &= -(da_{\text{ст}}/dt) \sin \varphi_n \sin \varepsilon, & (\omega_n)_{ya} &= \omega_n \cos \varepsilon, \\ (O_0 O_a)_{za} &= 0, & c_{za} &= (da_{\text{ст}}/dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon, & (\omega_n)_{za} &= \omega_n \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Проекции вектора скорости относительного движения при фиксированном положении параметра  $\varphi_n$  запишем в виде

$$V_{xa}^{(\text{нк}, \varphi_n)} = y_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + z_a \omega_k \cos \varepsilon + \omega_k a_{\text{ст}} \cos \varphi_n - (da_{\text{ст}}/dt) \sin \varphi_n;$$

$$V_{ya}^{(\text{нк}, \varphi_n)} = -x_a (\omega_n - \omega_k \sin \varepsilon) + \omega_k a_{\text{ст}} \sin \varphi_n \sin \varepsilon + A \omega_k \sin \varepsilon + (da_{\text{ст}}/dt) \cos \varphi_n \sin \varepsilon;$$

$$V_{za}^{(\text{нк}, \varphi_n)} = -x_a \omega_k \cos \varepsilon - \omega_k a_{\text{ст}} \sin \varphi_n \cos \varepsilon - A \omega_k \cos \varepsilon - (da_{\text{ст}}/dt) \cos \varphi_n \cos \varepsilon.$$

Уравнение зацепления, при  $\varphi_n = \text{const}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} & p^2 \vartheta u_{\text{ки}} \cos \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}} + p \vartheta u_{\text{ки}} \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \varepsilon \cos \nu - u^2 u_{\text{ки}} \cos \varepsilon \cos \nu + \\ & + u p \cos \alpha_{\text{ил}} - u u_{\text{ки}} p (\cos \alpha_{\text{ил}} \sin \varepsilon + \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \varepsilon \sin \nu) + \\ & + u_{\text{ки}} a_{\text{ст}} p (\cos \varphi_n \sin \nu + \sin \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu) + u_{\text{ки}} a_{\text{ст}} u (\cos \varphi_n \sin \alpha_{\text{ил}} \times \\ & \times \cos \nu - \sin \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu + \sin \varphi_n \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ил}}) + \\ & + j_{\text{ки}} p (\cos \varphi_n \sin \varepsilon \cos \nu - \sin \varphi_n \sin \nu) - j_{\text{ки}} u (\cos \varphi_n \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}} \times \\ & \times \sin \nu - \cos \varphi_n \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ил}} + \sin \varphi_n \sin \alpha_{\text{ил}} \cos \nu) + \\ & + A u_{\text{ки}} (p \sin \varepsilon \cos \nu - u \sin \varepsilon \sin \alpha_{\text{ил}} \sin \nu + u \cos \varepsilon \cos \alpha_{\text{ил}}) = \\ & = \vec{n}_a \cdot \vec{V}_a^{(\text{нк}, \varphi_n)} = 0. \end{aligned}$$

Проекции вектора скорости относительного движения при фиксированном параметре  $\varphi_n$  запишем в виде:



$$V_{xa}^{(нк, \varphi_H)} = \omega_H (z_a \cos \varepsilon - y_a \sin \varepsilon);$$

$$V_{ya}^{(нк, \varphi_H)} = \omega_H \sin \varepsilon (x_a - A);$$

$$V_{za}^{(нк, \varphi_H)} = -\omega_H \cos \varepsilon (x_a - A).$$

Уравнение зацепления представим в виде

$$p^2 \vartheta \sin \nu \cos \varepsilon + up \vartheta \sin \alpha_{ил} \cos \nu \cos \varepsilon - up (\sin \alpha_{ил} \sin \nu \cos \varepsilon + \cos \alpha_{ил} \sin \varepsilon) - u^2 \cos \nu \cos \varepsilon - uA (\sin \alpha_{ил} \sin \nu \sin \varepsilon - \cos \alpha_{ил} \cos \varepsilon) - pA \cos \nu \sin \varepsilon = \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(нк, \varphi_H)} = 0.$$

Используя (5.87, 5.90) и матрицы:

$$M_{ан} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -A \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon & 0 \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{он} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_H & 0 & \sin \varphi_H & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_H & 0 & \cos \varphi_H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

получим следующие выражения для определения правой боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса:

$$x_k = -u \cos \alpha_{ил} \cos \nu \cos \psi - u \cos \alpha_{ил} \sin \varepsilon \sin \nu \sin \psi - u \sin \alpha_{ил} \cos \varepsilon \sin \psi + p \vartheta \cos \varepsilon \sin \psi - A \cos \psi - a_{ст} \sin \varphi_k;$$

$$y_k = u \cos \alpha_{ил} \cos \varepsilon \sin \nu + p \vartheta \sin \varepsilon - u \sin \alpha_{ил} \sin \varepsilon;$$

$$z_k = u \cos \alpha_{ил} \cos \varepsilon \sin \nu \sin \psi - u \cos \alpha_{ил} \sin \varepsilon \sin \nu \cos \psi - u \sin \alpha_{ил} \cos \varepsilon \sin \psi + p \vartheta \cos \varepsilon \cos \psi + A \cos \psi - a_{ст} \cos \varphi_k;$$

$$\bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(нк, \varphi_k)} = 0; \quad \bar{n}_a \cdot \bar{v}_a^{(нк, \varphi_H)} = 0.$$

В полученных уравнениях углы  $\alpha_{ин}$  и  $\alpha_{ил}$  нужно заменить на углы при нарезании колес с: трапецидальным равнобоковым профилем  $\alpha_{ин} = \alpha_{ил} = \varepsilon + \alpha$ ; прямоугольным профилем  $\alpha_{ин} = \alpha_{ил} = \varepsilon$ ; пилообразным профилем  $\alpha_{ил} = \varepsilon$ ;  $\alpha_{ин} = \varepsilon + \alpha_2$ ; ( $\alpha_{ин} = \varepsilon$ ,  $\alpha_{ил} = \varepsilon + \alpha_1$ ).

Полученные уравнения являются общими и охватывают случаи торцовых зубчатых колес как с переменным, переменным-



постоянным, так и постоянным передаточным отношением. Для круглых участков колес с некругло-круглыми аксоидами и колес с круглыми аксоидами в приведенных уравнениях нужно положить:  $a_{ст} = const, da_{ст}/dt = 0, u_{ки} = const$  и  $j_{ки} = 0$ .

### 5.5. Реечная передача

Передача [114] состоит из многовиткового кругло-некруглого колеса 1 и пространственной рейки 2 (рис. 5.18).

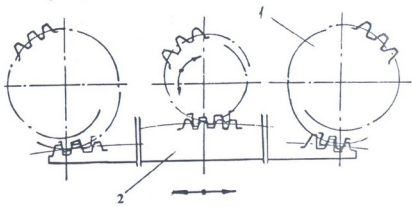


Рис. 5.18. Реечная передача

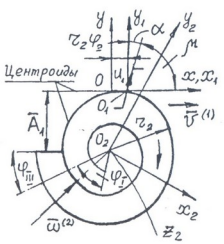


Рис. 5.19. Станочное зацепление при нарезании многовиткового некругло-круглого колеса. движения: относительном

При исследовании реечной передачи с переменнопостоянным передаточным отношением используем следующие системы координат (рис. 5.19): подвижные системы координат  $S_1, S_2$ , жестко связанные с рейкой и многовитковым некругло-круглым колесом; неподвижную систему координат  $S$ , жестко связанную со стойкой. При зацеплении рейки с зубьями, расположенными на некруглых участках, и ее перемещении с линейной скоростью  $\bar{v}^{(1)}$  нарезаемое колесо участвует в вращательном вокруг оси  $Oz_2$  с

неравномерной скоростью  $\bar{\omega}_2$  и переносом поступательном/в направлении оси  $Oy$  с переменной линейной скоростью  $|\bar{c}| = \frac{dA_1}{dt}$ ;

$A_1$  – переменное расстояние от центроиды рейки до точки  $O_2$ .

Огибаемый профиль в системе  $S_1$  определяется уравнением

$$\bar{r}_1 = u_1 (\sin \alpha \bar{i}_1 + \cos \alpha \bar{j}_1), \quad (5.94)$$

где  $\alpha$  – угол профиля рейки.

Орт нормали к огибаемому профилю имеет выражение

$$\bar{e}_1 = \cos \alpha \bar{i}_1 - \sin \alpha \bar{j}_1. \quad (5.95)$$

Вектор скорости относительного движения

$$\bar{v}_1^{(12)} = \bar{v}_1^{(1)} - (\bar{v}_1^{(2)} + \bar{c}), \quad (5.96)$$

где  $\bar{v}_1^{(1)} = \omega^{(2)} r_2 \bar{i}_1$  – вектор скорости перемещения точки рейки;  $r_2$  – переменного-постоянный радиус многовиткового некругло-круглого колеса;  $\bar{v}_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{r}_1 + \bar{R}_1 \times \bar{\omega}_1^{(2)}$  – вектор окружной скорости такой же точки многовиткового некругло-круглого колеса в системе  $S_1$ ;  $\bar{\omega}_1^{(2)} = -\omega^{(2)} \bar{k}_1$ ;  $\bar{r}_1$  – радиус-вектор точки профиля рейки в системе  $S_1$ ;  $\bar{R}_1 = -r_2 \varphi_2 \bar{i}_1 - r_2 \sin \mu \bar{j}_1$  – радиус-вектор в системе  $S_1$  точки  $O_2$  линии действия вектора  $\bar{\omega}_1^{(2)}$ ;  $\varphi_2 = \vartheta + \mu$  – угол поворота нарезаемого многовиткового некругло-круглого колеса;  $\vartheta$  – полярный угол центроиды многовиткового некругло-круглого колеса;  $\mu$  – угол, образуемый радиус-вектором центроиды с положительным направлением касательной; проекции вектора  $\bar{c}$  на ось  $y_1$  будем приписывать положительный или отрицательный знаки в зависимости от того, перемещается  $O_2$  в направлении или против направления оси  $Oy_1$ ,  $\bar{c} = \frac{dA_1}{dt} \bar{i}_1$ ;  $\bar{i}_1$ ,  $\bar{j}_1$ ,  $\bar{k}_1$  – орты координатных осей  $x_1, y_1, z_1$ .

Вектор скорости относительного движения

$$\begin{aligned} \bar{v}_1^{(12)} = \bar{\omega}^{(2)} \left[ (r_2 - u_1 \cos \alpha - r_2 \sin \mu) \bar{i}_1 + \right. \\ \left. + \left( u_1 \sin \alpha + r_2 \varphi_2 - \frac{dA_1}{dt} \right) \bar{j}_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Приняв отношение элементарных перемещений  $u_{21} = dA_1/d\varphi_2$  как заданную функцию от угла поворота  $\varphi_2$ , вектор скорости относительного движения запишем в виде

$$\bar{v}_1^{(12)} = \bar{\omega}^{(2)} \left[ (r_2 - u_1 \cos \alpha - r_2 \sin \mu) \bar{i}_1 + (u_1 \sin \alpha + r_2 \varphi_2 - u_{21}) \bar{j}_1 \right]. \quad (5.98)$$

На основании уравнения зацепления  $\bar{e}_1 \cdot \bar{v}_1^{(12)} = 0$ , зависимость между параметрами  $u_1$  и  $\varphi_2$  для некруглых участков многовиткового некругло-круглого колеса примет следующее выражение:

$$f_1(u_1, \varphi_2) = u_1 + r_2 \varphi_2 \sin \alpha + r_2 \cos \alpha (\sin \mu - 1) - u_{21} \sin \alpha = 0. \quad (5.99)$$

Используя зависимость

$$\bar{r}_2 = M_{21} \bar{r}_1, \quad (5.100)$$

где  $\bar{r}_1, \bar{r}_2$  – столбцевые матрицы радиус-векторов текущей точки производящей поверхности в системах  $S_1, S_2$ ;  $M_{21}$  – матрица перехода от  $S_1$  к  $S_2$ :

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & -A_1 \sin \varphi_2 - r_2 \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & A_1 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.101)$$

уравнения профиля зубьев многовиткового некругло-круглого колеса запишем в виде:

$$\begin{aligned} x_2 &= u_1 (\sin \alpha \cos \varphi_2 - \cos \alpha \sin \varphi_2) - A_1 \sin \varphi_2 - r_2 \varphi_2; \\ y_2 &= u_1 (\sin \alpha \sin \varphi_2 + \cos \alpha \cos \varphi_2) + A_1 \cos \varphi_2; \\ f_1(u_1, \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Линия зацепления профилей зубьев многовиткового некругло-круглого колеса представляет совокупность точек контакта в неподвижной системе координат и определится уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= u_1 \sin \alpha - r_2 \varphi_2; \\ y &= u_1 \cos \alpha; \\ f_1(u_1, \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (5.103)$$

## ГЛАВА 6. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМ УГЛОМ МЕЖДУ ОСЯМИ ВРАЩЕНИЯ КОЛЕС

### 6.1. Полусферическая зубчатая передача

Рассмотрим образование зубчатой передачи с полусферическими колесами, которая обеспечивает передачу вращательного движения с постоянным передаточным отношением при переменном угле  $\Sigma$  между осями вращения колес. В основу нарезания колес положен метод огибания. Производящей поверхностью является плоскость.

Передача состоит из полусферических колес с прямыми зубьями. При исследовании зацепления введем следующие системы координат (рис. 6.1, 6.2): неподвижную систему координат  $S$ , жестко связанную с производящим колесом; систему координат  $S_h$ , жестко связанную с полусферой; плоскости  $x_h O_h y_h$  и  $xOz$  лежат в одной и той же плоскости; систему координат  $S_a$ , связанную с производящей поверхностью; подвижные системы координат  $S_n$ ,  $S_2$ , связанные соответственно с производящей поверхностью и нарезаемым колесом. При равномерном вращении производящей поверхности вокруг оси  $O_n x_n$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(n)}$ , нарезаемое колесо участвует в равномерном относительном вращении вокруг оси  $O_2 y_2$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(2)}$  и вокруг оси  $O_h z_h$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(3)}$ .

Вектор относительной скорости при фиксированном значении угла  $\Sigma$  определяется уравнением

$$\bar{v}^{(n2, \varphi_n)} = \bar{\omega}^{(n)} \times \bar{r} - \bar{\omega}^{(2)} \times (\bar{r} + \bar{R}_0). \quad (6.1)$$

Проекции скорости относительного движения на оси системы  $S$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} v_{xo}^{(n2, \varphi_n)} &= -y\omega_2 \sin \Sigma; \\ v_{yo}^{(n2, \varphi_n)} &= -z(\omega^{(n)} + \omega^{(2)} \cos \Sigma) + (x + R_0)\omega^{(2)} \sin \Sigma; \\ v_{zo}^{(n2, \varphi_n)} &= y(\omega^{(n)} + \omega^{(2)} \cos \Sigma), \end{aligned} \quad (6.2)$$

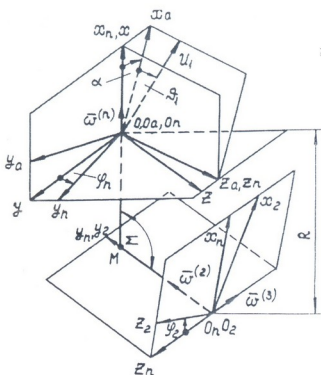


Рис. 6.1. Системы координат в станочном зацеплении

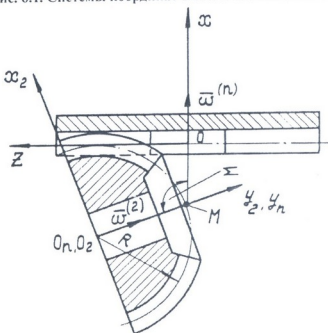


Рис. 6.2. Станочное зацепление при нарезании полусферического зубчатого колеса

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки контакта в системе  $S$ :  $\bar{R}_0 = \overline{OM}$  – радиус-вектор, проведенный из точки  $M$  пересечения действия вектора  $\bar{\omega}^{(2)}$  с осью  $Ox$ . Конец вектора  $\bar{R}_0$  совпадает с точкой  $O$ .

При определении вектора относительной скорости примем во внимание, что:

$$\begin{aligned} \omega_{xo}^{(n)} &= \omega^{(n)}; & \omega_{xo}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \cos \Sigma; & \omega_{xo}^{(3)} &= 0; \\ \omega_{yo}^{(n)} &= 0; & \omega_{yo}^{(2)} &= 0; & \omega_{yo}^{(3)} &= -\bar{\omega}^{(3)}; \\ \omega_{zo}^{(n)} &= 0; & \omega_{zo}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \sin \Sigma; & \omega_{zo}^{(3)} &= 0; \\ R_0 &= R(1 + \cos \Sigma), \end{aligned}$$

где  $R$  – радиус сферы.

Используя зависимость

$$\begin{vmatrix} v_{xo}^{(n2, \varphi_n)} \\ v_{yo}^{(n2, \varphi_n)} \\ v_{zo}^{(n2, \varphi_n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega^{(n)} & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\omega^{(2)} \cos \Sigma & 0 & -\omega^{(2)} \sin \Sigma \\ x + R^0 & y & z \end{vmatrix}, \quad (6.3)$$

представим скорость относительного движения в координатной форме:

$$\begin{aligned} v_{xo}^{(n2, \varphi_n)} &= -y\omega^{(2)} \sin \Sigma; \\ v_{yo}^{(n2, \varphi_n)} &= -(\omega^{(n)} + \omega^{(2)} \cos \Sigma)z + (x + R_0)\omega^{(2)} \sin \Sigma; \\ v_{zo}^{(n2, \varphi_n)} &= y(\omega^{(n)} + \omega^{(2)} \cos \Sigma). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Учитывая (4.9, 4.12) и (6.4), получим уравнение зацепления при фиксированном значении угла  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{\cos \alpha} (\cos \vartheta_1 \cos \varphi_n + \sin \varphi_n \sin \vartheta_1 \sin \alpha) + \\ + R_0 \cos \varphi_n - u_1 \ell \sin \vartheta_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где

$$\ell = \frac{\omega^{(n)} + \omega^{(2)} \cos \Sigma}{\omega^{(2)} \sin \Sigma}.$$

В полюсе зацепления  $P$ :

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = R \sin \Sigma; \quad \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_n = 0; \quad u_1 = z; \quad \ell = ctg \frac{\Sigma}{2}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{(n)} &= \bar{\omega}^{(2)}; & v_{xo}^{(n)} &= \omega^{(n)} z = \omega^{(n)} R \sin \Sigma; \\ v^{(2)} &= \omega^{(2)} R^* = \omega^{(2)} R \sin \Sigma; & v^{(n)} &= v^{(2)}, \end{aligned}$$

где  $R^*$  – перпендикуляр, опущенный из полюса зацепления на линию действия вектора  $\bar{\omega}^{(2)}$ .

Тогда уравнение (6.5) примет вид

$$\left( \frac{u_1}{\cos \alpha} \cos \vartheta_1 + R_0 \right) \cos \varphi_n + u_1 \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta_1 \sin \varphi_n - u_1 \operatorname{ctg} \frac{\Sigma}{2} \sin \vartheta_1 = 0.$$

Вектор относительной скорости при фиксированном значении угла поворота производящего колеса  $\varphi_n$

$$\bar{v}^{(n3, \Sigma)} = - \left[ \bar{\omega}^{(3)} \times (\bar{r} + \overline{O_2 O}) \right]. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) в проекциях на оси системы координат  $S$ :

$$v_{xo}^{(n3, \Sigma)} = - \omega^{(3)} (z - R \sin \Sigma);$$

$$v_{yo}^{(n3, \Sigma)} = 0;$$

$$v_{zo}^{(n3, \Sigma)} = \omega^{(3)} (x + R). \quad (6.7)$$

Используя выражения проекции скорости относительного движения (6.7) и (4.9, 4.12), получим уравнение зацепления при фиксированном значении параметра  $\varphi_n$

$$\begin{aligned} (u_1 \cos \vartheta_1 + R) \sin \varphi_n - u_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_n \sin \alpha + \\ + R \sin \Sigma \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Уравнения (4.9), (6.5) и (6.8) определяют контактную линию в системе координат  $S_n$ .

### 6.1.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса

Для определения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса используем матричное равенство

$$r_2 = M_{2n} \cdot r_n. \quad (6.9)$$



Матрица перехода от системы координат  $S_n$  координат  $S_2$  имеет вид

$$M_{2n} \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 \sin \Sigma & -\cos \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_n - \sin \varphi_2 \cos \varphi_n \\ -\cos \Sigma & \sin \Sigma \sin \varphi_n \\ \sin \varphi_2 \sin \Sigma & -\sin \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_n + \cos \varphi_2 \cos \varphi_n \\ 0 & 0 \\ -\cos \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_n + R \sin \Sigma \cos \varphi_2 (1 + \cos \Sigma) \\ + \sin \varphi_2 \sin \varphi_n \\ -\sin \Sigma \cos \varphi_n & R(\sin^2 \Sigma - \cos \Sigma) \\ -\sin \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_n - R \sin \Sigma \sin \varphi_n (1 + \cos \Sigma) \\ -\cos \varphi_2 \sin \varphi_n \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.10)$$

Используя (4.8), (6.9) и (6.10), выразим линию контакта в системе координат  $S_2$  уравнениями:

$$\begin{aligned} x_2 &= u_1 (\cos \varphi_2 \sin \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta_1 + \cos \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_n \times \\ &\quad \times \sin \alpha \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \\ &\quad - \cos \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_n \sin \vartheta_1 + \sin \varphi_n \sin \varphi_2 \sin \vartheta_1) + \\ &\quad + R \cos \varphi_2 \sin \Sigma (1 + \cos \Sigma); \\ y_2 &= u_1 (-\cos \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta_1 - \sin \Sigma \sin \varphi_n \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \\ &\quad - \sin \Sigma \cos \varphi_n \sin \vartheta_1) + R(\sin^2 \Sigma - \cos \Sigma); \\ z_2 &= u_1 (\sin \varphi_2 \sin \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta_1 + \sin \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_n \times \\ &\quad \times \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \cos \varphi_n \cos \varphi_2 \sin \alpha \cos \vartheta_1 - \\ &\quad - \sin \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_n \sin \vartheta_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_n \sin \vartheta_1) + \\ &\quad + R \sin \varphi_2 \sin \Sigma (1 + \cos \Sigma). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Уравнения (6.11), рассмотренные совместно с уравнениями зацепления (6.5, 6.8), определяют боковую поверхность зубьев нарезаемого колеса. Линия зацепления в неподвижной системе координат определяется системой уравнений (4.9), (6.5) и (6.8). Геометрическое место линий зацепления при различных значениях угла  $\Sigma$  образует поверхность зацепления.

## 6.2. Торонидная передача



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ  
ԳԱՐՈՅԵԱՆ  
ՏՈՒՆԱԳՐԱԿԱՆԱԿ

Зацепление торонидной зубчатой передачи (рис. 6.3) относится к пространственным зацеплениям. Главная особенность и преимущество торонидной передачи – возможность нормальной работы при непрерывном изменении угла  $\delta$  между осями вращения колес от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ . При этом передаточное отношение остается постоянным, обычно  $i_{12}=1$ . Используются торонидные зубчатые передачи в механизмах с переменной структурой, в перенастраивающихся манипуляторах и т.п.[71].

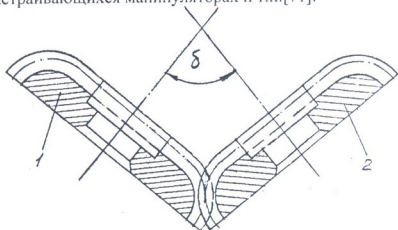


Рис. 6.3. Торонидная зубчатая передача

Введем следующие системы координат (рис. 6.4, 6.5): неподвижную систему координат  $S_0$ , жестко связанную с производящим колесом; подвижные системы координат  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ , связанные с производящим и нарезаемым колесами, и вспомогательную систему координат  $S_a$ , жестко связанную с производящим колесом. Начало  $O_3$  системы координат  $S_3$  расположено в центре тора. Плоскости  $x_0O_0z_0$  и  $x_3O_3y_3$  расположены в одной и той же плоскости. В основе нарезания колес лежит метод огибания. При вращении производящего колеса вокруг оси  $O_1x_1$  с постоянной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(1)}$ , нарезаемое колесо совершает вращательное движение с постоянной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(2)}$  вокруг оси  $O_2y_2$ . Одновременно с этим нарезаемое колесо, совершая поворот с постоянной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(3)}$

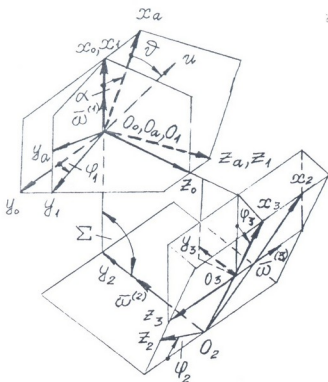


Рис. 6.4. Системы координат

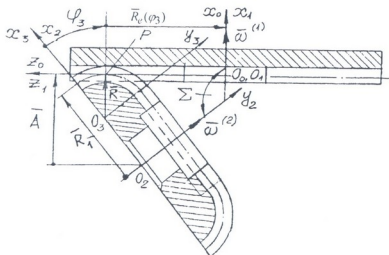


Рис. 6.5. Станочное зацепление

вокруг оси  $O_2z_2$ , перекачивается без скольжения по плоскости производящего колеса. При этом начало системы координат  $O_2$



перемещается по удлиненной циклоиде. Движение нарезаемого колеса рассмотрим как сумму дискретных перемещений в направлениях осей  $O_0x_0$  и  $O_0z_0$  с переменными линейными скоростями  $|\bar{v}_{\text{вер}}| = \overline{dA}/dt$  и  $|\bar{v}_{\text{гор}}| = \overline{dR_e}(\varphi_3)/dt$ , где  $\bar{A}$  – вектор-расстояние от точки  $O_2$  до начальной плоскости производящего колеса;  $\bar{R}_e(\varphi_3)$  – вектор-расстояние от точки полюса зацепления  $P$  до точки  $O_2$ .

Вектор относительной скорости при  $\Sigma = \text{const}$  определяется уравнением

$$\bar{v}^{(12, \varphi_1)} = (\bar{\omega}^{(1)} - \bar{\omega}^{(2)}) \times \bar{r} - \bar{R}_0 \times \bar{\omega}^{(2)}, \quad (6.12)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор точки контакта в системе  $S_0$ ;  $R_0 = \bar{R}_1 - \bar{R}(1 - \cos \varphi_3) - \bar{R}_e(\varphi_3) \sin \varphi_3$  – радиус-вектор точки приложения  $\bar{\omega}^{(2)}$  в системе  $S_0$ ;  $\bar{R}_1$  – радиус-вектор начальной окружности нарезаемого колеса в торцовой плоскости;  $\bar{R}$  – радиус-вектор тора.

При определении вектора относительной скорости (6.12) примем во внимание, что:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{x_0}^{(1)} &= \omega^{(1)}; & \bar{\omega}_{x_0}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \cos \Sigma; & \bar{R}_{x_0}^{(0)} &= -R_0 \sin \Sigma, \\ \bar{\omega}_{y_0}^{(1)} &= 0; & \bar{\omega}_{y_0}^{(2)} &= 0; & \bar{R}_{y_0}^{(0)} &= 0, \\ \bar{\omega}_{z_0}^{(1)} &= 0; & \bar{\omega}_{z_0}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \sin \Sigma; & \bar{R}_{z_0}^{(0)} &= \bar{R}_0 \cos \Sigma, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где  $\Sigma = \pi/2 + \varphi_3$  – переменный угол между осями вращения производящего и нарезаемого колес.

Приняв во внимание, что  $u_{21}(\varphi_1) = \omega_2/\omega_1$ , с учетом (6.13) получим:

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(12, \varphi_1)} &= -y u_{21}(\varphi_1) \sin \Sigma \bar{i} + [-z + x u_{21}(\varphi_1) \sin \Sigma - z u_{21}(\varphi_1) \cos \Sigma + \\ &+ u_{21}(\varphi_1) R_0] \bar{j} + y [1 + u_{21}(\varphi_1) \cos \Sigma] \bar{k}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес при фиксированном значении угла  $\Sigma$ , используя (4.9), (4.12) и (6.14), запишем в виде

$$\begin{aligned} u \cdot u_{21}(\varphi_1) (\cos \vartheta \cos \varphi_1 \sin \Sigma + \sin \vartheta \sin \varphi_1 \sin \Sigma \sin \alpha - \\ - \sin \vartheta \cos \Sigma \cos \alpha) - u \sin \vartheta \cos \alpha + u_{21}(\varphi_1) R_0 \cos \alpha \cos \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$



Вектор скорости относительного движения при фиксированном значении угла  $\varphi_1$  имеет выражение

$$\bar{v}^{(13,\Sigma)} = -(\bar{\omega}^{(3)} \times \bar{r} + \overline{O_3 O_0} \times \bar{\omega}^{(3)} + \bar{v}_{\text{гор}} + \bar{v}_{\text{вер}}), \quad (6.16)$$

где:  $\overline{O_3 O_0} = \bar{R} + \bar{R}_e(\varphi_3)$  – радиус-вектор точки приложения вектора  $\bar{\omega}^{(3)}$  в системе  $S_0$ ;  $\varphi_3 = 0^\circ \dots \pi/2$  – угол поворота нарезаемого колеса вокруг оси  $O_3 z_3$ .

Проекции векторов, входящих в (6.16), на координатные оси  $S_0$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{x_0}^{(3)} &= 0; & \bar{R}_{x_0} &= R_0; & [\bar{R}_e(\varphi_3)]_{x_0} &= 0; \\ \bar{\omega}_{y_0}^{(3)} &= -\omega^{(3)}; & \bar{R}_{y_0} &= 0; & [\bar{R}_e(\varphi_3)]_{y_0} &= 0; \\ \bar{\omega}_{z_0}^{(3)} &= 0; & \bar{R}_{z_0} &= 0; & [\bar{R}_e(\varphi_3)]_{z_0} &= -R_r(\varphi_3); \\ (\bar{v}_{\text{гор}})_{x_0} &= 0; & & & (\bar{v}_{\text{вер}})_{x_0} &= dA/dt; \\ (\bar{v}_{\text{гор}})_{y_0} &= 0; & & & (\bar{v}_{\text{вер}})_{y_0} &= 0; \\ (\bar{v}_{\text{гор}})_{z_0} &= -[dR_e(\varphi_3)/dt]; & & & (\bar{v}_{\text{вер}})_{z_0} &= 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(13,\Sigma)} &= [\omega^{(3)} z + R_e(\varphi_3) - (dA/dt)] \bar{i} - \\ &\quad - (\omega^{(3)} x - dR_e(\varphi_3)/dt) \bar{k}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Приняв  $\omega^{(3)} = 1$  рад/сек, учитывая  $[dR_e(\varphi_3)/dt]: \omega^{(3)} = j_{21}(\varphi_3)$  и  $(dA/dt): \omega^{(3)} = j_{21}^1(\varphi_3)$  как заданные функции от угла поворота  $\varphi_3$ , скорость относительного движения определится уравнением

$$\bar{v}^{(13,\Sigma)} = [z + R_e(\varphi_3) - j_{21}^1(\varphi_3)] \bar{i} - [x - j_{21}(\varphi_3)] \bar{k}. \quad (6.19)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес при  $\varphi_3 = const$ , используя (4.9), (4.12) и (6.19), запишем в виде

$$\begin{aligned} -u(\cos \vartheta \sin \varphi_1 + \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \alpha) - R_e(\varphi_3) \sin \alpha + \\ + j_{21}(\varphi_3) \cos \alpha \sin \varphi_1 - j_{21}^1(\varphi_3) \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Уравнения зацепления получим при совместном рассмотрении уравнений (6.15) и (6.20).

## 6.2.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса



Линии контакта в системе  $S_1$  определяются уравнениями (4.8), (6.15) и (6.20). Переписав уравнения линии контакта в системе  $S_2$  получим уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса. Переход от системы  $S_1$  к системе  $S_2$  совершим согласно матричному равенству

$$r_2 = M_{21}r_1, \quad (6.21)$$

где  $r_1, r_2$  – столбцевые матрицы радиус-векторов одной и той же точки контакта в системах  $S_1$  и  $S_2$ ;  $M_{21}$  – матрица перехода от системы  $S_1$  к системе  $S_2$ :

$$M_{21} = M_{23}M_{30}M_{01}. \quad (6.22)$$

Матрицы, входящие в (6.22), имеют вид:

$$M_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (6.23)$$

$$M_{30} = \begin{vmatrix} \sin \varphi_3 & 0 & \sin \varphi_3 & -a_1 \\ \sin \varphi_3 & 0 & -\cos \varphi_3 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (6.24)$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 & (R_1 - R) \cos \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 & (R_1 - R) \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (6.25)$$

где  $a_1 = R_c(\varphi_3) \sin \varphi_2 - R \cos \varphi_3$ ;  $a = R_c(\varphi_3) \cos \varphi_3 + R \sin \varphi_3$ .

Произведение матриц:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \cos \varphi_2 - \\ & - \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_3 & - \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 + \\ & + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ 0 & 0 \\ \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 + & (R_1 - R - a_1) \cos \varphi_2 \\ + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 & \\ - \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 & a \\ \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 - & (R_1 - R - a_1) \sin \varphi_2 \\ - \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 & \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.26)$$

Используя (4.8), (6.21) и (6.26), линию контакта в системе  $S_2$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} x_2 &= u(\cos \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \alpha \cos \vartheta - \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta + \\ &+ \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta + \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 \sin \vartheta + \\ &+ \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \vartheta) + (R_1 - R - a_1) \cos \varphi_2; \\ y_2 &= u(\sin \varphi_3 \cos \alpha \cos \vartheta + \cos \varphi_3 \sin \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta - \\ &- \cos \varphi_3 \cos \varphi_1 \sin \vartheta) + a; \\ z_2 &= u(\sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \cos \alpha \cos \vartheta - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \sin \alpha \cos \vartheta - \\ &- \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \alpha \cos \vartheta + \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 \cos \varphi_1 \sin \vartheta - \\ &- \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \vartheta) - (R_1 - R - a_1) \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Уравнения (6.27), рассмотренные совместно с уравнениями зацепления (6.20), (6.15), определяют боковую поверхность зубьев нарезаемого тороидного колеса.

Уравнения (4.9), рассмотренные совместно с уравнениями (6.15), (6.20), определяет поверхность зацепления.

### 6.3. Эллипсоидная зубчатая передача

Зубчатая передача с эллипсоидными колесами 1 и 2 (рис. 6.6) может быть использована для передачи вращательного движения

при непрерывном изменении угла  $\delta$  между осями вращения колес [113]. При этом каждому мгновенному значению угла  $\delta$  соответствует свой мгновенный полюс  $P$  зацепления. При изменении положения колес в пространстве каждому мгновенному полюсу зацепления соответствует свое мгновенное переменное передаточное отношение

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{r_2 \cos \varphi_2}{r_1 \cos \varphi_1}, \quad (6.28)$$

где  $\psi_1$  – угол поворота колеса 1 вокруг оси вращения;  $r_1, r_2$  – текущие радиус-векторы начальных эллиптических аксоидов колес 1,2;  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота колес 1,2 вокруг осей, перпендикулярных (плоскости чертежа) к осям вращения колес и лежащих в больших торцовых плоскостях колес.

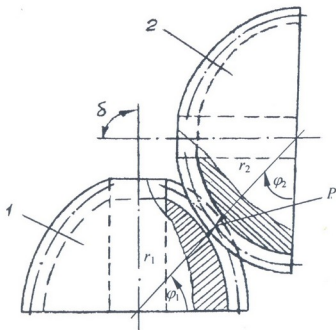


Рис. 6.6. Эллипсоидная зубчатая передача

При исследовании зацепления эллипсоидных колес введем следующие системы координат (рис. 6.7, 6.8): неподвижную систему координат  $S_0$ , жестко связанную с производящим колесом; систему координат  $S_a$ , связанную с производящей поверх-





ностью; подвижные системы координат  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_h$ , соответственно с производящим и нарезаемым колесами; плоскости  $x_0O_0z_0$  и  $x_hO_hz_h$  расположены в одной и той же плоскости.

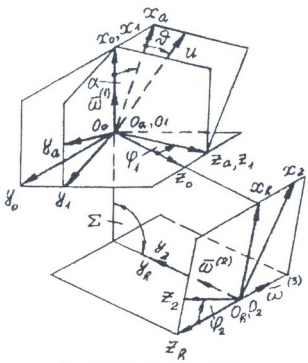


Рис. 6.7. Системы координат

В основе нарезания колеса лежит метод огибания. При вращении производящего колеса вокруг оси  $O_1x_1$  с постоянной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(1)}$ , нарезаемое колесо вращается вокруг оси  $O_2y_2$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(2)}$ . Совершая поворот с постоянной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(3)}$  вокруг оси  $O_hz_h$ , нарезаемое колесо перекатывается по производящему колесу, при этом каждому мгновенному полюсу зацепления  $P$  нарезаемого и производящего колес соответствует свое мгновенное передаточное отношение станочного зацепления. Поэтому нарезаемое колесо вращается с переменной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(2)}$ . При перекатывании по производящему колесу нарезаемое колесо участвует в поступательных движениях в направлениях осей  $O_0x_0$  и  $O_0z_0$  с

переменными линейными скоростями



$$|\vec{v}_{\text{гор}}| = dB/dt.$$

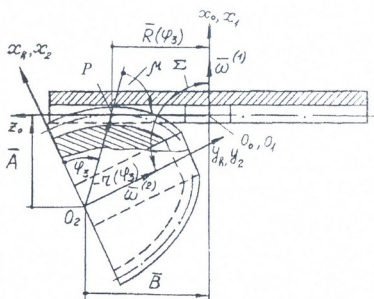


Рис. 6.8. Станочное зацепление

Вектор относительной скорости при фиксированном значении угла  $\Sigma$  определяется уравнением

$$\vec{v}^{(12, \varphi_1)} = (\vec{\omega}^{(1)} - \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{r} - \vec{R}_0 \times \vec{\omega}^{(2)}, \quad (6.29)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки контакта в системе  $S_0$ ;  $\vec{R}_0$  – радиус-вектор точки приложения вектора  $\vec{\omega}^{(2)}$  в системе  $S_0$ .

При определении вектора относительной скорости (6.29) примем во внимание, что

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{x_0}^{(1)} &= \omega^{(1)}; & \vec{\omega}_{x_0}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \cos \Sigma; & \vec{R}_{x_0}^{(0)} &= -R_0 \sin \Sigma; \\ \vec{\omega}_{y_0}^{(1)} &= 0; & \vec{\omega}_{y_0}^{(2)} &= 0; & \vec{R}_{y_0}^{(0)} &= 0; \\ \vec{\omega}_{z_0}^{(1)} &= 0; & \vec{\omega}_{z_0}^{(2)} &= -\omega^{(2)} \sin \Sigma; & \vec{R}_{z_0}^{(0)} &= R_0 \cos \Sigma, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где  $\Sigma = \varphi_3 + \mu$  – переменный угол между осями вращения производящего и нарезаемого колес;  $\mu = \frac{r(\varphi_3)}{dr(\varphi_3)/d\varphi_3}$  – угол



между радиус-вектором  $r(\varphi_3)$  и положительным направлением касательной к центруде колеса.

Приняв во внимание, что  $u_{21}(\varphi_1) = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ , с учетом (6.30)

получим:

$$\bar{v}^{(12, \varphi_1)} = -yu_{21}(\varphi_1) \sin \Sigma \bar{i} + [-z + xu_{21}(\varphi_1) \sin \Sigma - zu_{21}(\varphi_1) \cos \Sigma + u_{21}(\varphi_1) R_0] \bar{j} + y[1 + u_{21}(\varphi_1) \cos \Sigma] \bar{k}. \quad (6.31)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес при фиксированном значении угла  $\Sigma$ , используя (4.9), (4.12) и (6.40), запишем в виде

$$u \cdot u_{21}(\varphi_1) (\cos \mathcal{I} \cos \varphi_1 \sin \Sigma + \sin \mathcal{I} \sin \varphi_1 \sin \Sigma \sin \alpha - \sin \mathcal{I} \cos \Sigma \cos \alpha) - u \sin \mathcal{I} \cos \alpha + u_{21}(\varphi_1) R_0 \cos \alpha \cos \varphi_1 = 0. \quad (6.32)$$

Вектор скорости относительного движения при фиксированном значении угла  $\varphi_1$  имеет выражение

$$\bar{v}^{(13, \Sigma)} = -(\bar{\omega}^{(3)} \times \bar{r} + \overline{O_2 O} \times \bar{\omega}^{(3)} + \bar{v}_{\text{гор}} + \bar{v}_{\text{всп}}),$$

где  $\overline{O_2 O} = \overline{O_2 P} + \overline{P O_0}$  – радиус-вектор точки приложения вектора  $\bar{\omega}^{(3)}$  в системе  $S_0$ .

Тогда

$$\bar{v}^{(13, \Sigma)} = -(\bar{\omega}^{(3)} \times \bar{r} + \overline{O_2 P} \times \bar{\omega}^{(3)} + \overline{P O_0} \times \bar{\omega}^{(3)} + \bar{v}_{\text{гор}} + \bar{v}_{\text{всп}}). \quad (6.33)$$

Проекции векторов, входящих в (6.33), на координатные оси  $S_0$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{x0}^{(3)} &= 0; & (\overline{O_2 P})_{x0} &= r(\varphi_3) \sin \mu; & (\overline{P O_0})_{x0} &= 0; \\ \bar{\omega}_{y0}^{(3)} &= -\omega^{(3)}; & (\overline{O_2 P})_{y0} &= 0; & (\overline{P O_0})_{y0} &= 0; \\ \bar{\omega}_{z0}^{(2)} &= 0; & (\overline{O_2 P})_{z0} &= -r(\varphi_3) \cos \mu; & (\overline{P O_0})_{z0} &= -R(\varphi_3); \\ (\bar{v}_{\text{гор}})_{x0} &= 0; & (\bar{v}_{\text{всп}})_{x0} &= \frac{dr(\varphi_3)}{dt} \sin \mu; \\ (\bar{v}_{\text{гор}})_{y0} &= 0; & (\bar{v}_{\text{всп}})_{y0} &= 0; \end{aligned}$$

$$(\bar{v}_{\text{гор}})_{z_0} = -\frac{dr(\varphi_3)}{dt} \cos \mu - \frac{dR(\varphi_3)}{dt}; (\bar{v}_{\text{вер}})_{z_0} = 0. \quad (6.34)$$

Приняв  $\omega^{(3)} = 1$  рад/сек, учитывая (6.43) и  $\frac{dr(\varphi_3)}{dt} : \omega^{(3)} = j_{21}(\varphi_3)$ ;  $\frac{dR(\varphi_3)}{dt} : \omega^{(3)} = j'_{21}(\varphi_3)$ , как заданные функции от угла  $\varphi_3$  поворота нарезаемого колеса вокруг оси  $O_{hz_h}$ , вектор скорости относительного движения (6.33) представим выражением

$$\bar{v}^{(13,\Sigma)} = [z + r(\varphi_3) \cos \mu + R(\varphi_3) - j_{21}(\varphi_3) \sin \mu] \bar{i} + [-x + r(\varphi_3) \sin \mu + j_{21}(\varphi_3) \cos \mu + j'_{21}(\varphi_3)] \bar{k}. \quad (6.35)$$

Уравнение зацепления производящего и нарезаемого колес при фиксированном угле  $\varphi_1$ , используя (4.9), (4.12) и (6.35), запишем в виде

$$-u(\cos \vartheta \sin \varphi_1 - \sin \vartheta \cos \varphi_1 \sin \alpha) + r(\varphi_3)(\cos \mu \sin \alpha + \sin \mu \cos \alpha \sin \varphi_1) + j_{21}(\varphi_3)(\cos \mu \cos \alpha \sin \varphi_3 - \sin \mu \sin \alpha) + j'_{21}(\varphi_3) \cos \alpha \sin \varphi_1 + R(\varphi_3) \sin \alpha = 0. \quad (6.36)$$

Уравнение зацепления получим при совместном рассмотрении уравнений (6.32) и (6.36).

Линии контакта в системе  $S_1$  определяются уравнениями (4.8), (6.32) и (6.36).

### 6.3.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса

Для определения уравнения боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса уравнения контактной линии запишем в системе  $S_2$ . Переход от системы  $S_1$  к системе  $S_2$  совершим согласно матричному равенству

$$r_2 = M_{21} r_1,$$

где  $r_1, r_2$  – столбцевые матрицы радиус-векторов одной и той же точки контакта в системах  $S_1$  и  $S_2$ ;  $M_{21}$  – матрица перехода от системы  $S_1$  к системе  $S_2$ :

$$M_{21} = M_{2h} M_{h0} M_{01}. \quad (6.37)$$



Используя (4.8) и (6.41), линию контакта с системе  $S_2$  уравнениями:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= u(\cos \varphi_2 \sin \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta + \cos \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta + \\
 &\quad + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta - \cos \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_1 \sin \vartheta + \\
 &\quad + \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \vartheta) + R_0 \cos \varphi_2; \\
 y_2 &= u(-\cos \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta + \sin \Sigma \sin \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta - \\
 &\quad - \sin \Sigma \cos \varphi_1 \sin \vartheta) + A_1; \\
 z_2 &= u(\sin \varphi_2 \sin \Sigma \cos \alpha \cos \vartheta + \sin \varphi_2 \cos \Sigma \sin \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta - \\
 &\quad - \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 \sin \alpha \cos \vartheta - \sin \varphi_2 \cos \Sigma \cos \varphi_1 \sin \vartheta - \\
 &\quad - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 \sin \vartheta) + R_0 \sin \varphi_2. \tag{6.42}
 \end{aligned}$$

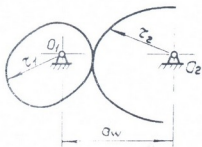
Уравнения (6.42), рассмотренные совместно с уравнениями зацепления (6.32), (6.36), определяют боковую поверхность зубьев нарезаемого эллипсоидного колеса.

Уравнение (4.9), рассмотренное совместно с уравнениями (6.32), (6.36), определяет поверхность зацепления.



### 7.1. Необходимые сведения из геометрии некруглых цилиндрических колес, центры колес

При проектировании некруглых зубчатых колес первоочередным вопросом является определение таких сопряженных центроид, которые в процессе зацепления зубьев будут перекатываться друг по другу без скольжения.



Если через  $r_k$  ( $k=1,2$ ) обозначим текущие радиус-векторы центроид некруглых колес (рис. 7.1), то при постоянном межосевом расстоянии  $a_w$  можно написать для внешнего зацепления:

$$r_1 + r_2 = a_w. \quad (7.1)$$

Геометрической характеристикой некруглых колес являются функция положения и функция передаточного отношения.

Функцией положения называют зависимость

$$\varphi_2 = f(\varphi_1), \quad (7.2)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота соответственно ведущего и ведомого некруглых колес.

Функция передаточного отношения

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = \frac{1}{f'(\varphi_1)}. \quad (7.3)$$

Аналогично

$$u_{21}(\varphi_1) = f'(\varphi_1).$$

Здесь  $\omega_1, \omega_2$  – угловые скорости ведущего и ведомого колес.

Используя (7.1, 7.3), можно по заданному межосевому расстоянию и функции передаточного отношения определить радиус-векторы центроид:

$$r_1 = \frac{a_w}{1 + u_{12}(\varphi_1)}; \quad r_2 = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{1 + u_{12}(\varphi_1)}. \quad (7.4)$$

Для выражения уравнения центров в полярной системе координат необходимо кроме радиус-векторов задать угол поворота ведомого колеса. Угол поворота ведущего колеса является независимой переменной. Угол поворота ведомого колеса может быть определен из выражения

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1},$$

откуда

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1. \quad (7.5)$$

Рассуждая аналогично, для определения центров некруглых зубчатых колес внутреннего зацепления (рис. 7.2) получим:

$$r_1 = \frac{a_w}{u_{12}(\varphi_1) - 1}; \quad r_2 = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{u_{12}(\varphi_1) - 1}; \quad (7.6)$$

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{u_{12}(\varphi_1)} = F(\varphi_1) + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из условий  $\varphi_1 = 0$  и  $\varphi_2 = 0$ .

Таким образом, если заданы функция переменного передаточного отношения и межосевое расстояние, радиус-векторы центров рассчитываются по уравнениям (7.4, 7.6).

В случае, если задана одна из центров, допустим, ведущая и межосевое расстояние, то ведомая центроид и угол поворота ведомого колеса при внешнем зацеплении определяются уравнениями

$$\begin{aligned} r_2 &= a_w - r_1, \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{r_1}{a_w - r_1} d\varphi_1, \end{aligned} \quad (7.7)$$

а при внутреннем зацеплении уравнениями

$$\begin{aligned} r_2 &= a_w + r_1, \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} \frac{r_1}{a_w + r_1} d\varphi_1. \end{aligned} \quad (7.8)$$

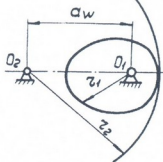


Рис. 7.2. Центроиды цилиндрических некруглых колес внутреннего зацепления



Центроиды некруглых колес должны состоять только из обыкновенных точек, вблизи которых кривая имеет вид простого отрезка. Недопустимо наличие у центроидной кривой особых точек, то есть точек, вблизи которых кривая не будет простым отрезком при любом сужении области расположения этих точек. Последнее очевидно, т.к. в этих точках ветки центроид сходятся с изломом, и нарезание зубьев на участках центроид, близких к особым точкам, становится невозможным.

Из изложенного следует, что передаточное отношение механизма некруглых колес должно выражаться гладкой функцией с ограниченными и притом положительными значениями.

Функцию положения некруглых колес можно представить состоящей из линейной части и нелинейной добавки (рис. 7.3). При среднем передаточном отношении, равном единице,

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \psi(\varphi_1), \quad (7.9)$$

где  $\varphi_1$  — линейная часть функции,  $\psi_1(\varphi_1)$  — нелинейная добавка с периодом, равным периоду оборота ведущего или ведомого колеса.

Тогда функцию передаточного отношения можно записать в виде

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 1 + \psi'(\varphi_1). \quad (7.10)$$

## 7.2. Определение замкнутых центроид

Для воспроизведения непрерывного вращательного движения центроиды некруглых зубчатых колес должны представлять собой замкнутые кривые.

Ведущая и ведомая центроиды будут замкнутыми в том случае, если при повороте ведущей центроиды на угол  $\varphi_1 = 2\pi$  ведомая центроида повернется на угол  $\varphi_2 = 2\pi/n$ , где  $n$  — целое

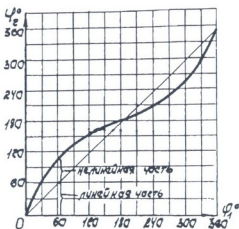


Рис. 7.3. Функция положения некруглых колес

число. При изменении числа  $n$  меняется число периодов изменения передаточного отношения за один оборот ведущей центроиды.

Определим замкнутые центроиды, если одна из них, например, ведущая, задана уравнением

$$r_1 = f(\varphi_1) = \frac{a_w}{1 + u_{12}(\varphi_1)}.$$

Ведомая центроида выразится уравнениями:

для внешнего зацепления

$$r_2 = a_w - f(\varphi_1),$$

для внутреннего зацепления

$$r_2 = a_w + f(\varphi_1).$$

Рассмотрим внутреннее зацепление. Для замкнутости центроиды ведущего колеса необходимо, чтобы функция  $u_{12}(\varphi_1)$  была периодической и ее период  $\Pi$  удовлетворял соотношению  $\Pi = \Pi_1/n_1$ , где  $\Pi_1$ -период оборота ведущего колеса,  $n_1$ -целое число.

Рассмотрим теперь условия замкнутости второй центроиды. Из (7.6) для ведомой центроиды

$$r_2 = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{u_{12}(\varphi_1) - 1}, \quad \varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{u_{12}(\varphi_1)},$$

откуда видно, что если  $u_{12}(\varphi_1)$  – периодическая функция с периодом  $\Pi = \Pi_1/n_1$ , то значения  $r_2$  также периодически повторяются при углах поворота  $\varphi_1$ , кратных  $2\pi/n_1$ .

Для того чтобы центроида ведомого колеса была замкнутой, необходимо, чтобы значения  $r_2$  повторялись при углах  $\varphi_2$ , кратных  $2\pi/n_2$ , где  $n_2$  – целое число. Указанное требование будет обеспечено, если

$$\frac{2\pi}{n_2} = \int_0^{n_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1. \quad (7.11)$$



Центроиды некруглых колес могут иметь как выпуклые, так и вогнутые участки. Нарезание зубьев некруглых колес проще осуществить при центроиде выпуклой формы. В этом случае нарезание зубьев возможно произвести рейкой, червячной фрезой или долбяком. При наличии на центроиде выпукло-вогнутого участка появляется точка перегиба. Как известно, наличие точки перегиба на центроиде характеризуется тем, что радиус кривизны в этой точке  $\rho = \infty$ . Поэтому для обеспечения выпуклости в выражении

$$\rho = \frac{\left[ r^2 + \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}$$

знаменатель

$$r^2 + 2 \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \geq 0. \quad (7.12)$$

Для центроиды ведущего колеса внешнего зацепления имеем:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a_w}{1 + u_{12}(\varphi_1)}, \\ \frac{dr_1}{d\varphi_1} &= -a_w \frac{\dot{u}_{12}(\varphi_1)}{[1 + u_{12}(\varphi_1)]^2}, \\ \frac{d^2 r_1}{d\varphi_1^2} &= -a_w \frac{[1 + u_{12}(\varphi_1)] \ddot{u}_{12}(\varphi_1) - 2[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2}{[1 + u_{12}(\varphi_1)]^3}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Подставив в уравнение (7.12) значения (7.13), получим [76]:

$$u_{12}(\varphi_1) + \ddot{u}_{12}(\varphi_1) + 1 \geq 0. \quad (7.14)$$

Для ведомого некруглого колеса внешнего зацепления:

$$r_2 = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{1 + u_{12}(\varphi_1)},$$

$$\frac{dr_2}{d\varphi_2} = a_w \frac{\dot{u}_{12}(\varphi_1)u_{12}(\varphi_1)}{[1 + u_{12}(\varphi_1)]^2},$$

$$[1 + u_{12}(\varphi_1)]\{[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2 + u_{12}(\varphi_1)\ddot{u}_{12}(\varphi_1)\} -$$

$$\frac{d^2r_2}{d\varphi_2^2} = a_w \frac{-2u_{12}(\varphi_1)[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2}{[1 + u_{12}(\varphi_1)]^3} - u_{12}(\varphi_1).$$

Использование (7.15) для ведомого колеса дает:

$$1 + u_{12}(\varphi_1) + [\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2 - u_{12}(\varphi_1)\ddot{u}_{12}(\varphi_1) \geq 0. \quad (7.16)$$

Запишем условия отсутствия вогнутости для ведущей и ведомой центроид некруглых колес внутреннего зацепления. Для центроиды ведущего колеса имеем:

$$r_1 = \frac{a_w}{u_{12}(\varphi_1) - 1},$$

$$\frac{dr_1}{d\varphi_1} = -a_w \frac{\dot{u}_{12}(\varphi_1)}{[u_{12}(\varphi_1) - 1]^2},$$

$$\frac{d^2r_1}{d\varphi_1^2} = -a_w \frac{[u_{12}(\varphi_1) - 1]\ddot{u}_{12}(\varphi_1) - 2[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2}{[u_{12}(\varphi_1) - 1]^3}. \quad (7.17)$$

На основании уравнений (7.12) и (7.17) получим для ведущего колеса

$$u_{12}(\varphi_1) + \ddot{u}_{12}(\varphi_1) - 1 \geq 0. \quad (7.18)$$

Для ведомого колеса

$$r_2 = a_w \frac{u_{12}(\varphi_1)}{u_{12}(\varphi_1) - 1},$$

$$\frac{dr_2}{d\varphi_2} = -a_w \frac{\dot{u}_{12}(\varphi_1)u_{12}(\varphi_1)}{[u_{12}(\varphi_1) - 1]^2}, \quad (7.19)$$

$$[u_{12}(\varphi_1) - 1]\{[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2 + \ddot{u}_{12}(\varphi_1)u_{12}(\varphi_1)\} -$$

$$\frac{d^2r_2}{d\varphi_2^2} = -a_w \frac{-2u_{12}(\varphi_1)[\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2}{[u_{12}(\varphi_1) - 1]^2} - u_{12}(\varphi_1).$$

Используя (7.12, 7.19), для ведомого колеса получим:

$$u_{12}(\varphi_1) - [\dot{u}_{12}(\varphi_1)]^2 + \ddot{u}_{12}(\varphi_1)u_{12}(\varphi_1) - 1 \geq 0. \quad (7.20)$$

Случаи, когда неравенства (7.14, 7.16, 7.18, 7.20) обращаются в нуль, свидетельствуют о наличии на центроидах колес точек, в которых  $\rho = \infty$ .

#### 7.4. Эллиптические цилиндрические колеса

Два равных эллипса 1 и 2 с осями вращения, проходящими через

фокусы  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 7.4), могут быть приняты за центры некруглых зубчатых колес, создающих определенную функцию передаточного отношения.

Обозначим длину большой оси эллипса через  $2a$ , длину малой оси через  $2b$ , длину хорды, проведенной через

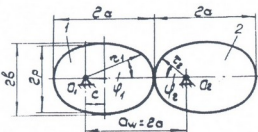


Рис. 7.4. Центроиды эллиптических колес

фокус эллипса перпендикулярно большой оси, через  $2p$ . Уравнение эллипса в полярной форме

$$r_1 = \frac{p}{1 - e \cos \varphi_1},$$

где:  $e = \frac{c}{a}$  — эксцентриситет эллипса;  $\varphi_1$  — полярный угол центроида колеса;  $2a$  — расстояние между фокусами.  $a_w$  — межосевое расстояние.

С учетом зависимости  $p = a(1 - e^2)$  радиус-вектор центроида ведущего колеса определяется уравнением

$$r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi_1}.$$

Радиус-вектор центроида ведомого колеса, при среднем передаточном отношении  $n = 1$ , имеет вид

$$r_2 = \frac{a(1 + e^2 - 2e \cos \varphi_1)}{1 - e \cos \varphi_1}.$$

Передаточное отношение

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{1 + e^2 - 2e \cos \varphi_1}{1 - e^2}.$$

Функция положения ведомого колеса выражается зависимостью

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{u_{12}(\varphi_1)} = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Определим межосевое расстояние для эллиптических колес внешнего зацепления [75]. Используя (7.7), для функции положения получим:

$$\varphi_2 = \frac{2p}{\sqrt{(a_w - p)^2 + p^2 e^2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\sqrt{(a_w - p)^2 - a_w^2 e^2}}{a_w(a_w - e) - p} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right]. \quad (7.22)$$

Согласно условию замкнутости центроид, при  $\varphi_1 = 2\pi$  должно быть обеспечено равенство  $\varphi_2 = 2\pi/n$ . Тогда (7.22) можно представить в виде

$$n = \frac{\sqrt{(a_w - p)^2 - a_w^2 e^2}}{p},$$

откуда для межосевого расстояния получим:

$$a_w = \frac{p}{1 - e^2} \left[ 1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e^2)} \right]. \quad (7.23)$$

Уравнение ведомой центроиды представим в виде

$$r_2 = a_w - r_1. \quad (7.24)$$

Определим межосевое расстояние для эллиптических колес внутреннего зацепления.

Функция передаточного отношения

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{r_2}{r_1} = \frac{a_w + r_1}{r_1} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_2},$$

откуда

$$d\varphi_2 = \frac{p}{(a_w + p) - a_w e \cos \varphi_1} d\varphi_1.$$

Или

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \frac{p}{(a_w + p) - a_w e \cos \varphi_1} d\varphi_1 = \frac{2p}{\sqrt{(a_w + p)^2 - a_w^2 e^2}} \times \arctg \left[ \sqrt{\frac{a_w(1+e)+p}{a_w(1-e)+p}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right] + C.$$

При  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2$  также равно нулю, поэтому  $C = 0$ , следовательно:

$$\varphi_2 = \frac{2p}{\sqrt{(a_w + p)^2 - a_w^2 e^2}} \arctg \left[ \sqrt{\frac{a_w(1+e)+p}{a_w(1-e)+p}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right]$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2p} \sqrt{(a_w + p)^2 - a_w^2 e^2} = \sqrt{\frac{a_w(1+e)+p}{a_w(1-e)+p}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}. \quad (7.25)$$

Поскольку центры колес должны быть замкнутыми, то при  $\varphi_1 = 2\pi$ ,  $\varphi_2 = 2\pi/n$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \frac{p}{\sqrt{(a_w + p)^2 - a_w^2 e^2}} = \pi, \quad (7.26)$$

откуда межосевое расстояние

$$a_w = \frac{p}{1-e^2} \left( \sqrt{1 - (2-e^2)(1-n^2)} - 1 \right). \quad (7.27)$$

Определяя из (7.26)  $n$  и подставляя его в (7.25), получим для функции положения ведомого колеса

$$\operatorname{tg} \frac{n\varphi_2}{2} = \sqrt{\frac{[a_w(1+e)-p]}{[a_w(1-e)+p]}} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}. \quad (7.28)$$

Уравнение ведомой центроиды представим в виде

$$r_2 = a_w + r_1.$$

Значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varphi_2$  при параметрах эллипса  $a = 35$ ;  $e = 0,2$  для внешнего зацепления приведены в таблицах 7,1, 7,2, 7.3. В таблице 7.1 приведены значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varphi_2$  при среднем передаточном отношении  $n = 2$ , в таблице 7.2 – при  $n = 3$ , в таблице 7.3 – при  $n = 4$ .

Межосевое расстояние  $a_w = 103,942$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
0	0	42,0000	61,9420	95	49,774	33,0243	70,9177
5	2,7	41,9600	61,9820	100	54,240	32,4722	71,4698
10	5,414	41,8410	61,1010	105	52,690	31,9463	71,9957
15	8,117	41,6452	62,2968	110	57,124	31,4487	72,4933
20	10,814	41,3761	62,5659	115	59,542	30,9813	72,9607
25	13,505	41,0387	62,9033	120	61,945	30,5454	73,3966
30	16,187	40,6388	63,3032	125	64,335	30,1422	73,7998
35	18,859	40,1832	63,7588	130	66,711	29,7725	74,1695
40	21,519	39,6792	64,2628	135	69,076	29,4360	74,506
45	24,167	39,1344	64,8076	140	71,429	29,1360	74,8060
50	26,801	38,5567	65,3853	145	72,773	28,8701	75,0719
55	29,401	37,9538	65,9882	150	76,107	28,6394	75,3026
60	32,024	37,3333	66,6087	155	78,435	28,4441	75,4874
65	34,612	36,7022	67,2398	160	80,755	28,2842	75,6578
70	37,182	36,0671	67,8749	165	83,071	28,1599	75,7821
75	39,736	35,4342	68,5078	170	85,383	28,0710	75,8710
80	42,272	34,8089	69,0431	175	87,692	28,0177	75,9243
85	44,790	34,1960	69,7460	180	90	28,0000	75,9420
90	47,291	33,6000	70,3420				

Таблица 7.2

Межосевое расстояние  $a_w = 138,1164$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	42,000	96,1164	95	33,123	33,0243	105,0921
5	1,805	41,9600	96,1564	100	34,827	32,4722	105,6442
10	3,619	41,8410	96,2754	105	36,460	31,9463	106,1701
15	5,511	41,6452	96,4712	110	38,082	31,4487	106,6677
20	7,210	41,3761	96,7403	115	39,694	30,9813	107,1352
25	9,003	41,0387	97,0777	120	91,297	30,5454	107,5710
30	10,791	40,6388	97,4776	125	42,890	30,1422	107,9742
35	12,573	40,1832	97,9332	130	44,474	29,7725	108,3439
40	14,346	39,6792	98,4372	135	46,050	29,4362	108,6802
45	16,112	39,1344	98,9820	140	47,619	29,1360	108,9804
50	17,868	38,5567	99,5597	145	49,182	28,8701	109,2464



Таблица 7.2 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8
55	19,614	37,9538	100,1626	150	50,738	28,6394	109,4770
60	21,350	37,3333	100,7831	155	52,290	28,4441	109,6723
65	23,075	36,7022	101,4142	160	53,837	28,2842	109,8322
70	24,780	36,0671	102,0493	165	55,381	28,1599	109,9565
75	26,491	35,4342	102,6822	170	56,922	28,0710	110,0454
80	28,181	34,8089	103,3082	175	58,461	28,0177	110,0987
85	29,860	34,1960	103,9104	180	60,0	28,0000	110,1164
90	31,527	33,6000	104,5164				

Таблица 7.3

Межосевое расстояние  $a_w = 172,3499$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	42,0000	130,3499	95	24,887	33,0243	139,3256
5	1,354	41,9600	130,3899	100	26,120	32,4722	139,8777
10	2,707	41,8410	130,5089	105	27,345	31,9463	140,4036
15	4,058	41,6452	130,7047	110	28,562	31,4487	140,9012
20	5,507	41,3761	130,9738	115	29,771	30,9813	141,3686
25	6,752	41,0387	131,3112	120	30,973	30,5454	41,8045
30	8,093	40,6388	131,7111	125	32,167	30,1422	143,2077
35	9,422	40,1832	132,1667	130	33,356	29,7725	142,5774
40	10,760	39,6792	132,6707	135	34,538	29,4360	142,9131
45	12,084	39,1344	133,2155	140	35,715	29,1360	132,2139
50	13,401	38,5567	133,7932	145	36,886	28,8701	143,4798
55	14,710	37,9538	134,3961	150	38,054	28,6394	143,7105
60	16,012	37,3333	135,0166	155	39,217	28,4441	143,9058
65	17,306	36,7022	135,6477	160	40,378	28,2842	144,0657
70	18,591	36,0671	136,2828	165	41,536	28,1599	144,1900
75	19,868	35,4342	136,9157	170	42,691	28,0710	144,2789
80	21,136	34,8089	137,5410	175	43,846	28,0177	144,3322
85	22,395	34,1960	138,1539	180	45,0	28,0000	144,3499
90	23,645	33,6000	138,7499				

Значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varphi_2$  при параметрах эллипса  $a = 35$ ;  $e = 0,2$  для внутреннего зацепления приведены в таблицах 7,4, 7,5, 7,6. При этом в таблице 7,4 приведены значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varphi_2$  при среднем передаточном отношении  $n = 2$ , в таблице 7,5 – при  $n = 3$ , в таблице 7,6 – при  $n = 4$ .

Межосевое расстояние  $a_w = 33,942$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
0	0	42,0000	75,9420	95	48,073	33,0243	66,9663
5	2,551	41,9600	75,9020	100	50,566	32,4722	66,4142
10	5,101	41,8410	75,7883	105	53,055	31,9463	65,8883
15	7,651	41,6452	75,5872	110	55,539	31,4487	65,3907
20	10,199	41,3761	75,3181	115	58,020	30,9813	64,9233
25	12,746	41,0387	74,9807	130	60,496	30,5454	64,4874
30	15,290	40,6388	74,5808	125	62,969	30,1422	64,0842
35	17,833	40,1832	74,1252	130	65,438	29,7725	63,7145
40	20,373	39,6792	73,6212	135	67,904	29,4360	63,3789
45	22,910	39,1344	73,0764	140	70,367	29,1360	63,0780
50	25,444	38,5567	72,4987	145	72,828	28,8701	62,8121
55	27,974	37,9538	71,8958	150	75,285	28,6394	62,5814
60	30,501	37,3333	71,2753	155	77,741	28,4441	62,3861
65	33,024	36,7022	70,6442	160	80,195	28,2842	62,2262
70	35,543	36,0671	70,0091	165	82,648	28,1599	62,1019
75	39,058	35,4342	69,3762	170	85,099	28,0710	65,0130
80	40,568	34,8089	68,7509	175	87,550	28,0177	61,9597
85	43,074	34,1960	68,1380	180	90,0	28,0000	61,9420
90	45,576	33,600	67,5420				

Таблица 7.5

Межосевое расстояние  $a_w = 68,1164$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	42,000	110,1164	95	32,176	33,0243	101,1407
5	1,712	41,9600	110,0764	100	33,836	32,4722	100,5886
10	3,423	41,8410	109,9674	105	35,493	31,9463	100,9627
15	3,134	41,6452	109,7616	110	37,145	31,4487	99,5651
20	6,844	41,3761	109,4945	115	38,794	30,9813	99,0977
25	8,552	41,0387	109,1551	130	40,440	30,5454	98,5709
30	10,259	40,6388	108,7552	125	42,083	30,1422	98,2586
35	11,963	40,1832	108,2996	130	43,722	29,7725	97,8889
40	13,666	39,6792	107,7956	135	45,358	29,4360	97,5533
45	15,365	39,1344	107,2508	140	46,992	29,1360	97,2524

Таблица 7.5 (продолжение)



1	2	3	4	5	6	7	8
50	17,062	38,5567	106,6731	145	48,624	28,8701	96,9865
55	18,756	37,9538	106,0702	150	50,253	28,6394	96,7558
60	20,446	37,3333	105,4497	155	51,880	28,4441	96,5605
65	22,133	36,7022	104,8186	160	53,506	28,2842	96,4006
70	23,816	36,0671	104,1835	165	55,131	28,1599	96,2763
75	25,496	35,4342	103,5506	170	56,754	28,0710	96,1874
80	27,172	34,8089	102,9253	175	58,377	28,0177	96,1341
85	28,844	34,1960	102,3124	180	60	28,0000	96,1164
90	30,512	33,6000	101,7164				

Таблица 7.6

Межосевое расстояние  $a_w = 102,3499$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
0	0	42,0000	144,3499	95	24,179	33,0243	135,3742
5	1,288	41,9600	144,3099	100	25,424	32,4722	134,8221
10	2,576	41,8410	144,1909	105	26,665	31,9463	134,2962
15	3,863	41,6452	143,9951	110	27,903	31,4487	133,7986
20	5,150	41,3761	143,7260	115	29,139	30,9813	133,3312
25	6,435	41,0387	143,3886	130	30,371	30,5454	132,8953
30	7,719	40,6388	142,9887	125	31,600	30,1422	132,4921
35	9,001	40,1832	142,5331	130	32,827	29,7725	132,1224
40	10,281	39,6792	142,0201	135	34,052	29,4360	131,7868
45	11,558	39,1344	141,4843	140	35,274	29,1360	131,4859
50	12,834	38,5567	140,9066	145	36,494	28,8701	131,2200
55	14,106	37,9538	140,3037	150	37,713	28,6394	130,9893
60	15,376	37,3333	139,6832	155	38,930	28,4441	130,7340
65	16,644	36,7022	139,0521	160	40,146	28,2842	130,6341
70	17,908	36,0671	138,4170	165	41,360	28,1599	130,5098
75	19,168	35,4342	137,7841	170	42,574	28,0710	130,4209
80	20,426	34,8089	137,1588	175	43,787	28,0177	130,3676
85	21,680	34,1960	136,4559	180	45	28,0000	130,3499
90	22,931	33,6000	135,9499				

На рис. 7.5 показаны центры некруглых колес с внешним и внутренним зацеплением при среднем передаточном отношении  $n = 2$  (рис. 7.5 а, г), при  $n = 3$  (рис. 7.5, б, д) и при  $n = 4$  (рис. 7.5 в, е).

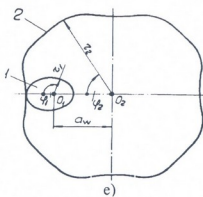
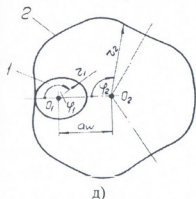
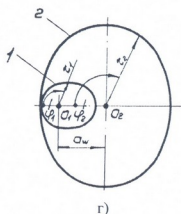
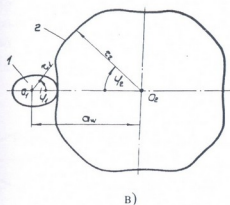
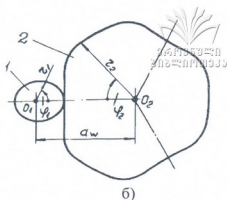
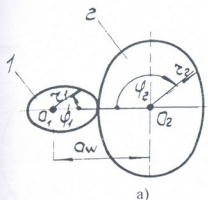


Рис. 7.5. Центроиды некруглых колес наружного и внутреннего зацепления

### 7.5. Овальные колеса

Центроиды эллиптических колес можно преобразовать в центроиды овальных колес, если сохранить модуль радиус-век-

тора эллиптической центроиды и уменьшить в целое число раз полярный угол, определяющий положение соответствующего радиус-вектора эллиптической центроиды [75].

Преобразуем центроиды эллиптических колес (рис. 7.4) в центроиды овальных колес. С этой целью разделим полярные углы центроид эллиптических колес на целое число  $k$ . Тогда уравнения центроид овальных колес при  $n = 1$  примет вид

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos k\varphi_1} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{a(1+e^2-2e \cos k\varphi_1)}{1-e \cos k\varphi_1}.$$

Функция передаточного отношения определяется выражением

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{1+e^2-2e \cos k\varphi_1}{1-e^2},$$

а функция положения примет вид

$$\varphi_2 = \frac{2}{k} \arctg \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{k\varphi_1}{2} \right).$$

На рис. 7.6 показаны центроиды овальных колес при значениях  $k = 2$  и  $n = 1$ .

Когда среднее передаточное отношение  $n \neq 1$ , центроиды колес определяются уравнениями

$$r_1 = \frac{a(1-e^2)}{1-e \cos k\varphi_1}, \quad r_2 = a_w - r_1.$$

Функция положения имеет следующий вид:

$$\varphi_2 = \frac{2}{k n} \arctg \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{k\varphi_1}{2} \right).$$

Значения  $r_1$ ,  $r_2$  и  $\varphi_2$  при параметрах  $a = 35$ ;  $e = \frac{1}{\sqrt{57}}$ ,  $n = 0,2$  и  $k = 2$  приведены в таблице 7.7.



Рис. 7.6. Центроиды овальных колес

Межосевое расстояние  $a_w = 103,942$  мм

$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм	$\varphi_1^0$	$\varphi_2^0$	$r_1$ , мм	$r_2$ , мм
0	0	39,5402	64,4018	50	28,568	33,6405	70,3015
5	3,241	39,4506	64,4914	55	30,835	32,9356	71,0074
10	6,450	39,1871	64,7549	60	33,017	32,3004	71,6416
15	9,594	38,7642	65,1774	65	35,125	31,7471	72,1979
20	12,651	38,2046	65,7374	70	37,173	31,2845	72,6575
25	15,600	37,5336	66,4054	75	39,172	30,9190	73,0230
30	18,432	36,7914	67,1506	80	41,134	30,6551	73,2869
35	21,142	36,0006	67,9414	85	43,073	30,4857	73,4463
40	23,731	35,1944	68,7476	90	45	30,4424	73,4996
45	26,203	34,4000	69,5420				

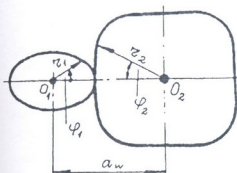


Рис. 7.7. Сопряжение овальной центриды с центридой, составленной дугами деформированного овала

На рис. 7.7 показаны центры овальных колес при значениях  $n = 2$  и  $k = 2$ .

### 7.6. Рядовое соединение некруглых зубчатых колес

На рис. 7.8 показано рядовое соединение двух пар зубчатых колес, одна из которых с круглыми, а другая с некруглыми колесами. На рис. 7.8, а передача с некруглыми колесами предшествует передаче с круглыми колесами, а на 7.8, б передача с некруглыми колесами расположена последней. Функция положения и передаточного отношения простого ряда, составленного из пары круглых и некруглых колес, зависит от последовательности присоединения этих колес.

Когда первой является пара некруглых колес (рис. 7.8, а), функции положения и передаточного отношения определяются уравнениями

$$\varphi_4 = u_{43} \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1,$$

$$u_{41} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = u_{45}u_{21}(\varphi_1),$$

где  $u_{21}(\varphi_1)$  – функция передаточного отношения пары некруглых колес;  $u_{43}$  – функция передаточного отношения пары круглых колес.

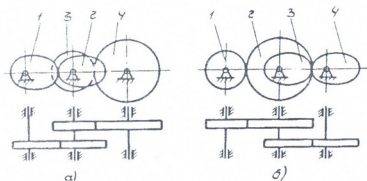


Рис. 7.8. Двухступенчатая передача

В случае, когда первой является пара круглых колес, а второй – пара некруглых, функция положения простого ряда имеет вид

$$\varphi_4 = u_{21} \int_0^{\varphi_1} u_{43}(\varphi_3) d\varphi_1.$$

Так как колеса 2 и 3 установлены на одном валу, то  $\varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1 u_{21}$ . В этом случае

$$\varphi_4 = u_{21} \int_0^{\varphi_1} u_{43}(\varphi_{21} u_{21}) d\varphi_1.$$

Функция передаточного отношения выразится уравнением

$$u_{41} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = u_{21} u_{43}(\varphi_1 u_{21}),$$

где  $u_{21}$  – функция передаточного отношения пары круглых колес;  $u_{43}(\varphi_3)$  – функция передаточного отношения пары некруглых колес.

Определим функцию положения и передаточного отношения колес, используя зависимости между углами поворота колес.

Зависимость между углами поворота колес 1,2 и 3,4 (рис. 7.8,а):

$$\varphi_2 = -f(\varphi_1), \quad \varphi_4 = -\varphi_3 u_{43}.$$

Колеса 2 и 3 закреплены на одном валу; поэтому  $\varphi_2 = \varphi_3$ .  
Тогда функция положения простого ряда колес

$$\varphi_4 = f(\varphi_1) u_{43}. \quad (7.29)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{41} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = f'(\varphi_1) u_{43}. \quad (7.30)$$

Для второй схемы (рис. 7.8, б) функции положения и передаточного отношения будут соответственно

$$\varphi_4 = f(\varphi_1 u_{21}),$$

$$u_{41} = f'(\varphi_1 u_{21}) u_{21}. \quad (7.31)$$

Используя зависимость (7.9), получим функцию положения простого ряда колес (рис. 7.8, а):

$$\varphi_4 = [\varphi_1 + \psi(\varphi_1)] u_{43} \quad (7.32)$$

и функцию передаточного отношения:

$$u_{41} = [1 + \psi'(\varphi_1)] u_{43}. \quad (7.33)$$

Для расположения некруглых и круглых колес, показанного на рис. 7.8, б, функции положения и передаточного отношения определяются уравнениями

$$\varphi_4 = \varphi_1 u_{21} + \psi(\varphi_1 u_{21}), \quad (7.34)$$

$$u_{41} = u_{21} + \psi'(\varphi_1 u_{21}) u_{21}.$$

Рассмотрим простой ряд двух некруглых колес 1,2 и 3,4 (рис. 7.9), где ведущее колесо 3 второй пары относительно межосевой линии установлено с разворотом на угол  $\varphi_{\text{фаз}}$ .

Функция положения колес 1,2 имеет вид

$$\varphi_2 = -f_1(\varphi_1). \quad (7.35)$$

Функция положения колес 3,4 выразится зависимостью

$$\varphi_4 = -f_2(\varphi_3).$$

Колеса 2,3 установлены на одном валу

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_{\text{фаз}}. \quad (7.36)$$

Тогда, с учетом (7.35) и

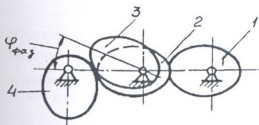


Рис. 7.9. Двухступенчатая передача



(7.36), получим:

$$\varphi_4 = f_2[f_1(\varphi_1) + \varphi_{\text{фаз}}] = F[f(\varphi_1) + \varphi_{\text{фаз}}] \quad (7.37)$$

и функцию передаточного отношения

$$u_{41} = \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = F'[f(\varphi_1) + \varphi_{\text{фаз}}] f'(\varphi_1). \quad (7.38)$$

Если простой ряд колес составлен из двух пар эллиптических колес со средним передаточным отношением  $n_1 = n_2 = 1$  и эксцентриситетом колес  $e_1 = e_2 = e$ , то функция положения

$$\varphi_4 = 2 \arctg \left[ \frac{1+e}{1-e} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right) \right]. \quad (7.39)$$

Функция передаточного отношения, как производная от функции положения, примет вид

$$u_{41} = \frac{\left( \frac{1+e}{1-e} \right) \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \times \right.} \quad (7.40)$$

$$\left. \times \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right) \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right]^2 \right\}}$$

При  $\varphi_{\text{фаз}} = 0$  для функций положения и передаточного отношения простого ряда, составленного из двух пар некруглых колес, получим выражения

$$\varphi_4 = F(\varphi_1), \quad u_{41} = F'(\varphi_1).$$

Когда простой ряд составлен из двух пар эллиптических колес со средним передаточным отношением  $n_1 \neq n_2$  и эксцентриситетом колес  $e_1 = e_2 = e$ , то при  $\varphi_{\text{фаз}} = 0$  функции положения и передаточного отношения определяются уравнениями

$$\varphi_{41} = \frac{2}{n_2} \arctg \left\{ \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{n} \arctg \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right) \right] \right\}, \quad (7.41)$$



$$u_{41} = \frac{2(1-e^2)^2}{n_1 n_2 (1+e^2 - 2e \cos \varphi_1) \left( 1+e^2 - 2e \cos \left[ \frac{1}{n_1} \arctg \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right)}$$

Когда же простой ряд составлен из двух пар эллиптических колес со средним передаточным отношением  $n_1 \neq n_2$  и эксцентриситетом колес  $e_1 \neq e_2$ , функции положения и передаточного отношения при  $\varphi_{\text{фаз}} = 0$  имеют следующий вид:

$$\varphi_{41} = \frac{2}{n_2} \arctg \left\{ \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{n} \arctg \left( \frac{1+e_1}{1-e_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (7.43)$$

$$u_{41} = \frac{2(1-e_1^2)(1-e_2^2)}{n_1 n_2 (1+e_1^2 - 2e \cos \varphi_1) \left( 1+e_2^2 - 2e_2 \cos \left[ \frac{1}{n_1} \arctg \left( \frac{1+e_1}{1-e_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right)}. \quad (7.44)$$

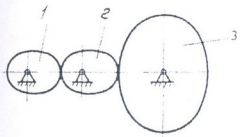


Рис. 7.10. Двухступенчатая передача

Рассмотрим рядовое соединение (рис. 7.10), состоящее из последовательно соединенных эллиптических колес 1,2,3. Эксцентриситет колес равен  $e$ .

Функцию положения колеса 2 запишем в виде

$$\operatorname{tg} \frac{n_1 \varphi_2}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Функция положения колеса 3 выразится формулой

$$\operatorname{tg} \frac{n_2 \varphi_3}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}.$$

Среднее передаточное отношение колес 1,2,  $n_1 = 1$ , а колес 2,3 -  $n_2 = 2$ . Поэтому

$$\varphi_3 = \arctg \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right]. \quad (7.45)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{31} = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{(1-e^2)^2}{\left[ (1+e)^4 + (1-e)^4 \right] - \left[ (1+e)^4 - (1-e)^4 \right] \cos \varphi_1}. \quad (7.46)$$

Из (7.45, 7.46) видно, что некруглое колесо 2 не может быть использовано в качестве паразитного колеса.

## 7.7. Планетарные передачи с некруглыми цилиндрическими колесами

Рассмотрим кинематику некоторых планетарных механизмов с некруглыми колесами.

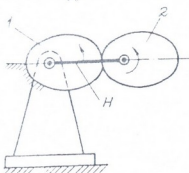


Рис. 7.11. Одноступенчатая планетарная передача

Планетарный механизм, представленный на рис. 7.11, состоит из двух некруглых колес, из которых центральное колесо 1 закреплено неподвижно, а сателлит 2 совершает переносное вращательное движение вместе с водилом  $H$  вокруг оси колеса 1 и относительное вращательное движение вокруг своей оси.

Для вывода уравнения функции положения планетарного механизма мысленно соединим жестко колеса 1, 2 с водилом  $H$  и сообщим им поворот на угол  $\varphi_H$ . Колеса 1 и 2 также повернутся на угол  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_H$ . Устраним жесткую связь колес с водилом и закрепим последнее неподвижно. Зубчатый ряд станет простым. Сообщим теперь колесу 1 поворот в направлении, противоположном вращению водила, на угол, равный по величине  $\varphi_H$ . Суммарный угол поворота колеса 1 окажется равным нулю. Колесо 2 во втором движении повернется в том же направлении, что и водило. Суммарный угол поворота колеса 2 окажется равным

$$\varphi_2 = \varphi_H + f(\varphi_H) \quad (7.47)$$

и функция передаточного отношения

$$u_{2H}^1 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 1 + f(\varphi_H). \quad (7.48)$$

Когда в качестве некруглых колес применяются эллиптические колеса, функция положения планетарного механизма определяется зависимостью

$$\varphi_2 = \varphi_H + \frac{2}{n} \arctg \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right), \quad (7.49)$$

а функция передаточного отношения принимает вид

$$u_{2H}^1 = 1 + \frac{1}{n} \frac{1 - e^2}{1 + e^2 - 2e \cos \varphi_H}.$$



Если в механизме применяются овальные колеса (рис. 7.6), функции положения и передаточного отношения выражаются уравнениями

$$\varphi_2 = \varphi_H + \frac{2}{kn} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{k\varphi_H}{2} \right), \quad (7.51)$$

$$u_{2H}^1 = 1 + \frac{1}{kn} \frac{1 - e^2}{1 + e^2 - 2e \cos k\varphi_H}.$$

На рис. 7.12, 7.13 показаны центрыды планетарных механизмов с некруглыми колесами с наружным зацеплением при среднем передаточном отношении в простом ряду, равном:  $n = 1$  (рис. 7.12, а);  $n = 2$  (рис. 7.12, б, в, г);  $n = 3$  (рис. 7.13, а) и  $n = 4$  (рис. 7.13, б).

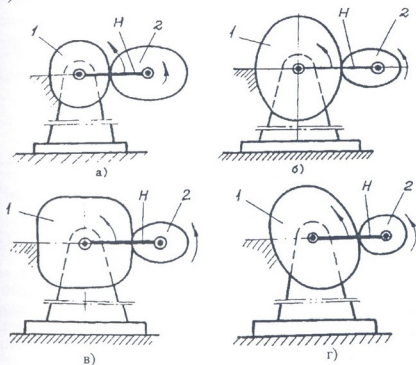


Рис. 7.12. Планетарные передачи

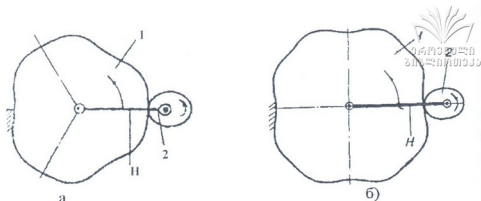


Рис. 7.13. Планетарные передачи

На рис. 7.14 и 7.15 а, б показаны центры эллиптических планетарных механизмов с эллиптическими колесами внутреннего зацепления при средних передаточных отношениях в простом ряду, равных:  $n=2$  (рис. 7.14),  $n=3$  (рис. 7.15, а) и  $n=4$  (рис. 7.15, б).

В планетарном механизме, представленном на рис. 7.14, неподвижным звеном является центральное некруглое колесо 1 внутреннего зацепления, а подвижными звеньями некруглое колесо – сателлит 2 и водило Н.

Для простого ряда колес механизма зависимость между углами поворота колес 1 и 2

$$\varphi_2 = f(\varphi_1).$$

Функция положения планетарного ряда колес

$$\varphi_2 = \varphi_H - f(\varphi_1).$$

Функция передаточного отношения

$$u_{2H}^1 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_H} = 1 - f'(\varphi_1). \quad (7.52)$$

Рассмотрим планетарный механизм (рис. 7.16), состоящий из некруглых колес 1,2,3 и водила Н. Центральное колесо 1 закреплено неподвижно. Подвижными звеньями

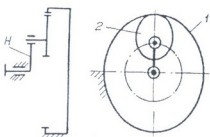
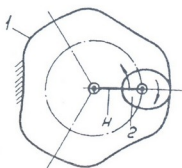


Рис. 7.14. Одноступенчатая планетарная передача

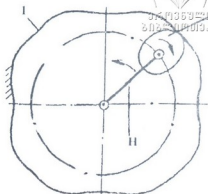
являются колеса 2,3 и водило Н.

Для простого ряда колес 2 и 3 функции положения запишем в виде

$$\varphi_2 = -f_1(\varphi_1); \quad \varphi_3 = -f_2(\varphi_2).$$



а)



б)

Рис. 7.15. Одноступенчатые планетарные передачи

Тогда функция положения простого ряда колес определяется зависимостью

$$\varphi_3 = f_2[f_1(\varphi_1)] = F(\varphi_1).$$

Функция положения планетарного ряда колес определяется зависимостью

$$\varphi_3 = \varphi_H - F(\varphi_H), \quad (7.53)$$

а функцию передаточного отношения можно выразить уравнением

$$u_{3H}^1 = 1 - F'(\varphi_H). \quad (7.54)$$

Если колеса 1, 2 и 3 эллиптические со средним передаточным отношением  $n = 1$  и эксцентриситетом  $e$ , функция положения колеса 2 в простом ряду

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}. \quad (7.55)$$

Соответственно, зависимость между углами поворота колес 2 и 3

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}. \quad (7.56)$$

С учетом (7.55)

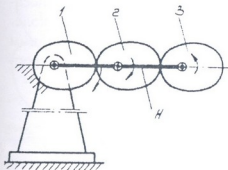


Рис. 7.16. Двухступенчатая планетарная передача

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Тогда функция положения простого ряда колес

$$\varphi_3 = 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right]. \quad (7.57)$$

Используя (7.57), для планетарного ряда колес функцию положения запишем в виде

$$\varphi_3 = \varphi_H - 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right]. \quad (7.58)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{3H}^1 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_H} = 1 - \frac{2(1-e^2)^2}{\left[ (1+e)^4 + (1-e)^4 \right] - \left[ (1+e)^4 - (1-e)^4 \right] \cos \varphi_H}. \quad (7.59)$$

Рассмотрим планетарный механизм (рис. 7.17), состоящий из двух центральных некруглых колес 1, 3 и некруглого колеса-сателлита 2, находящегося одновременно в зацеплении с колесами 1 и 3. Ось сателлита находится на водиле Н. Ведущим звеном является колесо 1, ведомым – водило Н; колесо 3 закреплено неподвижно.

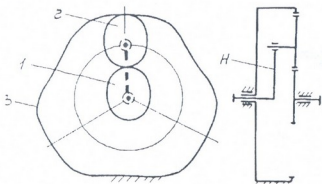


Рис. 7.17. Двухступенчатая планетарная передача

Для простого ряда зависимость между углами поворота колес 2 и 3

$$\varphi_2 = f_2(\varphi_3). \quad (7.60)$$

Зависимость между углами поворота колес 1 и 2 в простом ряду имеет вид

$$\varphi_1 = -f_1(\varphi_2) = -f_1[f_2(\varphi_3)] = -F(\varphi_3). \quad (7.61)$$

Функция положения планетарного ряда колес определится выражением

$$\varphi_1 = \varphi_H + F(\varphi_H). \quad (7.62)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{1H}^3 = 1 + F'(\varphi_H). \quad (7.63)$$

В планетарном механизме с двумя парами колес наружного зацепления возможны разные варианты сочетания круглых и некруглых колес.

Механизм, представленный на рис. 7.18, состоит из ведущего центрального круглого колеса 1, находящегося в зацеплении с круглым колесом 2 парного сателлита 2, 3. Второе колесо 3 сателлита некруглое и находится в зацеплении с центральным некруглым колесом 4, закрепленным неподвижно. Ведомым звеном механизма является водило Н.

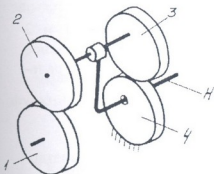


Рис. 7.18. Двухступенчатая планетарная передача

Для простого ряда колес зависимость между углами поворота колес 3, 4 имеет вид  $\varphi_3 = -f(\varphi_4)$ , а между углами поворота колес 1, 2 —  $\varphi_1 = -\varphi_2 u_{12}$ . Здесь  $u_{12}$  — передаточное отношение круглых колес. Колеса 2 и 3 закреплены на одном валу, поэтому  $\varphi_2 = \varphi_3$ . Тогда функция положения простого ряда колес  $\varphi_1 = f_1(\varphi_2) u_{12}$ .

Функция положения планетарного ряда колес

$$\varphi_1 = \varphi_H - f(\varphi_H) u_{12}. \quad (7.64)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{1H}^4 = 1 - f'(\varphi_H) u_{12}. \quad (7.65)$$

Используя (7.9), запишем функцию положения простого ряда колес в виде



$$\varphi_1 = [\varphi_4 + \psi(\varphi_2)] u_{12}.$$

Функция положения планетарного ряда колес, учитывая, что

$\varphi_4 = \varphi_H$ , примет вид

$$\varphi_1 = \varphi_H (1 - u_{12}) - \psi(\varphi_H) u_{12}.$$

Функция передаточного отношения определится уравнением

$$u_{1H}^4 = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_H} = (1 - u_{12}) - \psi'(\varphi_H) u_{12}.$$

Радиус-векторы центров некруглых колес определяются уравнениями:

$$r_3 = \frac{a_w u_{12}}{1 + u_{12} - u_{1H}^4}; \quad r_4 = \frac{a_w (1 - u_{1H}^4)}{1 + u_{12} - u_{1H}^4},$$

где  $a_w$  – межосевое расстояние колес.

В механизме, представленном на рис. 7.19, колеса 1 и 2 некруглые, колеса 3 и 4 – круглые. Ведущее звено – центральное колесо 1, ведомое – водило Н. Неподвижным является центральное колесо 4. Функция положения простого ряда колес

$$\varphi_1 = f(\varphi_4 u_{34}),$$

где  $u_{34}$  – передаточное отношение круглых колес.

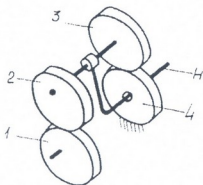


Рис. 7.19. Двухступенчатая планетарная передача

Функция положения планетарного механизма

$$\varphi_1 = \varphi_H - f(\varphi_H u_{43}).$$

Функция передаточного отношения

$$u_{1H}^4 = 1 - f'(\varphi_H u_{43}) u_{43}.$$

Используя (7.9), представим функцию положения простого ряда колес в виде

$$\varphi_1 = \varphi_4 u_{34} + \psi(\varphi_4 u_{34}).$$

Тогда функции положения и передаточного отношения планетарного ряда колес определяются уравнениями

$$\varphi_1 = (1 - u_{34}) \varphi_H - \psi(\varphi_H u_{34}),$$

$$u_{1H}^4 = (1 - u_{34}) - \psi'(\varphi_H u_{34}) u_{34}.$$

(7.66)

Рассмотрим планетарный механизм (рис. 7.20) [201], в котором ведущее звено водило Н, ведомое звено вал некруглого колеса 1. На ось водила Н, с возможностью вращательного движения, установлены блок цилиндрических некруглого 2 и круглого 3 колес, зубья которых находятся в зацеплении с зубьями некруглого 1 и круглого 4 цилиндрических колес.

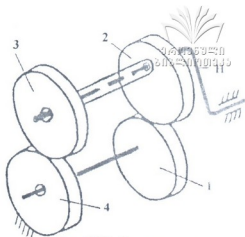


Рис. 7.20. Двухступенчатая планетарная передача

Функцию передаточного отношения планетарного механизма запишем в виде

$$u_{H1}^4 = 1 - \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}. \quad (7.67)$$

Примем передаточное отношение круглых колес  $u_{43} = 1$ , тогда функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{H1}^4 = 1 - \frac{r_2}{r_1}.$$

Обозначим угловые перемещения звеньев планетарного механизма: водила –  $\varphi$ ; колеса 1 –  $\psi$ . Тогда функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{1H}^4 = \frac{d\psi}{d\varphi} \quad \text{или} \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 1 - u_{H1}^4; \quad (7.68)$$

откуда

$$\psi = \varphi - \int_0^{\varphi} u_{H1}^4 d\varphi. \quad (7.69)$$

Выберем синусоидальный закон движения ведомого колеса 1. Примем, что водило Н вращается с постоянной угловой скоростью и время его полного оборота равно времени цикла Т. Через  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  обозначим углы поворота водила Н (фазовые углы) соответствующие промежуткам времени  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ . Максимальное отклонение ведущего колеса 1 обозначим через  $\psi$ .

Выражение закона движения при изменении  $\varphi$  от  $\theta$  до  $\Phi_1$  имеет вид

$$\psi = \frac{\Psi}{\Phi_1} \left( \varphi - \frac{\Phi_1}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\Phi_1} \varphi \right); \quad (7.70)$$

откуда

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{\Psi}{\Phi_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \varphi \right). \quad (7.71)$$

При изменении  $\varphi$  от  $\Phi_1$  до  $\Phi_1 + \Phi_2$  колесо 1 остается неподвижным

$$\psi = \Psi \quad (7.72)$$

и, следовательно,

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = 0. \quad (7.73)$$

Причем  $\varphi = \Phi_1 + \Phi_1 + \vartheta$ , тогда  $d\varphi = d\vartheta$  — закон движения и его производная имеет вид

$$\psi = \Psi - \frac{\Psi}{\Phi_3} \left( \vartheta - \frac{\Phi_3}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{\Phi_1} \vartheta \right); \quad (7.74)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{\Psi}{\Phi_2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \vartheta \right). \quad (7.75)$$

При изменении  $\varphi$  от  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$  до  $2\pi$  колесо 1 остается неподвижным

$$\psi = 0; \quad (7.76)$$

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = 0. \quad (7.77)$$

Из уравнения (7.68)

$$u_{1H}^4 = 1 - \frac{d\psi}{s\varphi}. \quad (7.78)$$

Используя (7.71, 7.73, 7.75, 7.77), получим:

При:  $0 < \varphi < \Phi_1$

$$u_{1H}^4 = 1 - \frac{\Psi}{\Phi_2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \varphi \right). \quad (7.79)$$

При  $\Phi_1 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_1$

$$u_{1H}^4 = 1.$$

При  $\Phi_1 + \Phi_2 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$

$$u_{1H}^4 = \frac{\Psi}{\Phi_3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_3} \vartheta \right). \quad (7.81)$$

При  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 < \varphi < 2\pi$

$$U_{1H}^4 = 1. \quad (7.82)$$

Равенства (7.79, 7.80, 7.81, 7.82) используем для расчета радиусов центроид некруглых колес 1,2. Центроида колеса 1:

при  $0 < \varphi < \Phi_1$

$$r_1 = \frac{a_w}{2 - \frac{\Psi}{\Phi_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \right)}; \quad (7.83)$$

при  $\Phi_1 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2$ ,

$$r_1 = \frac{a_w}{2}; \quad (7.84)$$

при  $\Phi_1 + \Phi_2 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ ,

$$r_1 = \frac{a_w}{2 - \frac{\Psi}{\Phi_2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_3} \nu \right)}; \quad (7.85)$$

при  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$ ,

$$r_1 = \frac{a_w}{2}. \quad (7.86)$$

Центроида колеса 2

при  $0 < \varphi < \Phi_1$

$$r_2 = a_w \frac{1 - \frac{\Psi}{\Phi_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_3} \varphi \right)}{2 - \frac{\Psi}{\Phi_1} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \psi \right)}; \quad (7.87)$$

при  $\Phi_1 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2$ ,

$$r_2 = \frac{a_w}{2};$$

при  $\Phi_1 + \Phi_2 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ ,

$$r_2 = a_w \frac{1 + \frac{\Psi}{\Phi_3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_3} \vartheta \right)}{2 - \frac{\Psi}{\Phi_3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\Phi_1} \vartheta \right)}; \quad (7.89)$$

при  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 < \varphi < \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$ ,

$$r_2 = \frac{a_w}{2}. \quad (7.90)$$

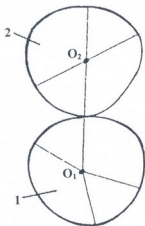


Рис. 7.21. Центроиды некруглых колес 1, 2

На рис. 7.21 изображены центроиды колес 1 и 2, рассчитанные по приведенным уравнениям при угле размаха  $\Psi = 15^\circ$  и фазовых углах  $\Phi_1 = \Phi_3 = 120^\circ$  и  $\Phi_2 = \Phi_4 = 60^\circ$ .

Рассмотрим случай, когда в планетарном механизме применяются две пары цилиндрических эллиптических колес с разными значениями эксцентриситетов (рис. 7.22). Колеса 1, 2 имеют эксцентриситет  $e_1$ , а колеса 3, 4 —  $e_2$ . Средние передаточные отношения колес  $n_1 = n_2 = 1$ .

Неподвижным является центральное эллиптическое колесо 1, ведущее звено — водило Н, ведомое — центральное колесо 4.

Функция положения колес 1, 2 в простом ряду

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Соответственно, функция положения колес 3, 4

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_4}{2} = \frac{1+e_2}{1-e_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

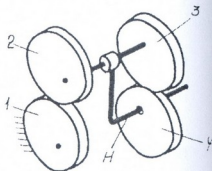


Рис. 7.22. Двухступенчатая планетарная передача

Так как  $\varphi_2 = \varphi_3$ , получим:

$$\varphi_4 = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e_1}{1-e_1} \frac{1+e_2}{1-e_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Тогда функция положения планетарного ряда колес

$$\varphi_4 = \varphi_H - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e_1}{1-e_1} \frac{1+e_2}{1-e_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right). \quad (7.91)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{2(1-e_1^2)(1-e_2^2)}{[(1-e_1)^2(1-e_2^2) + (1+e_1)^2(1+e_2)^2] - [(1+e_1)^2(1+e_2)^2 - (1-e_1)^2(1-e_2)^2] \cos \varphi_H}. \quad (7.92)$$

Если эксцентриситет эллиптических колес 1, 2, 3 и 4  $e_1 = e_2 = e$ , то функция положения планетарного механизма определяется уравнением

$$\varphi_4 = \varphi_H - 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right], \quad (7.93)$$

а функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{2(1-e^2)}{[(1+e)^4 + (1-e)^4] - [(1+e)^4 - (1-e)^4] \cos \varphi_H}. \quad (7.94)$$

Из полученных зависимостей видно, что планетарный механизм с двумя парами некруглых колес (рис. 7.22) эквивалентен планетарному механизму, составленному из трех эллиптических колес (рис. 7.16). При этом механизмы должны быть укомплектованы некруглыми колесами, имеющими одинаковые геометрические параметры.

Рассмотрим планетарный механизм с двумя парами некруглых колес 1, 2 и 3, 4 (рис. 7.23), в котором сателлит 3 второй пары колес установлен с разворотом на угол  $\varphi_{\text{фаз}}$  относительно плоскости, проходящей через геометрические оси  $O_1O_2$ ,  $O_3O_4$  колес. Неподвижным является центральное некруглое колесо 1, ведущее звено – водило H, ведомое – центральное некруглое колесо 4.

Функции положения и передаточного отношения планетарного ряда колес с учетом (7.37, 7.38) определяются уравнениями

$$\varphi_4 = \varphi_H - F[f(\varphi_H) + \varphi_{\text{фаз}}],$$

$$u_{4H}^1 = 1 - F'[f(\varphi_H) + \varphi_{\text{фаз}}]f'(\varphi_H).$$

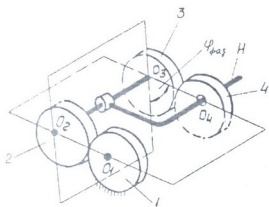


Рис. 7.23. Двухступенчатая передача

Для планетарного механизма с двумя парами эллиптических колес, для которых среднее передаточное отношение  $n_1 = n_2 = 1$  и эксцентриситет колес  $e_1 = e_2 = e$ , функции положения и передаточного отношения с учетом зависимостей (7.39, 7.40) определяются уравнениями [88]

$$\varphi_4 = \varphi_H - 2 \arctg \left[ \frac{1+e}{1-e} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right) \right],$$

$$u_{4H}^2 = 1 - \frac{\left( \frac{1+e}{1-e} \right) \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\varphi_H}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right)^2 + \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \times \right.}$$

$$\left. \times \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{фаз}}}{2} \right]^2 \right\}}.$$

Анализ формул (7.65, 7.66) показывает, что ведомое звено механизма совершает вращательное движение с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена при  $f'(\varphi_H)u_{12} < 1$  и  $\psi'(\varphi_H u_{43})u_{43} < (1 - u_{43})$ . Ведомое звено совершает вращательное движение в сторону, обратную направлению вращения ведущего звена, при  $f'(\varphi_H)u_{12} > 1$  и  $\psi'(\varphi_H u_{43})u_{43} >$

$> (1 - u_{43})$ . Если же  $f'(\varphi_H)u_{12} \geq 1$  и  $\psi'(\varphi_H u_{43})u_{43} \geq (1 - u_{43})$ , то ведомое звено совершает качательное движение. При  $f'(\varphi_H)u_{12} = 1$ ,  $\psi'(\varphi_H u_{43})u_{43} = (1 - u_{43})$  ведомое звено имеет выстой.

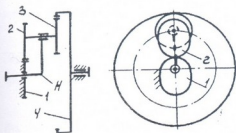


Рис. 7.24. Двухступенчатая планетарная передача

Рассмотрим планетарную передачу с двумя парами цилиндрических колес внешнего и внутреннего зацепления. Механизм первой разновидности (рис. 7.24) состоит из неподвижно закрепленного центрального некруглого колеса 1, находящегося в зацеплении с некруглым колесом 2 парного сателлита 2, 3. Второе колесо 3 сателлита круглое и находится в зацеплении с центральным круглым колесом 4 внутреннего зацепления. Ведущим звеном является водило Н, ведомым звеном – центральное колесо 4.

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4 в простом ряду

$$\varphi_2 = -f(\varphi_1), \quad \varphi_4 = \varphi_3 u_{43}.$$

Колеса 2 и 3 закреплены на одном валу, следовательно,  $\varphi_2 = \varphi_3$  и функция положения простого ряда колес

$$\varphi_4 = -f(\varphi_1)u_{43}.$$

Функция положения планетарного механизма примет следующий вид:

$$\varphi_4 = \varphi_H + f(\varphi_H)u_{43}. \quad (7.95)$$

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{1H}^1 = 1 + f'(\varphi_H)u_{43}. \quad (7.96)$$

Функцию положения некруглых колес 1 и 2 в простом ряду представим состоящей из линейной части и нелинейной добавки:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1) = \varphi_1 + \psi(\varphi_1) = \varphi_H + \psi(\varphi_H), \quad (7.97)$$

где  $\psi(\varphi_1)$  – нелинейная добавка.

Подставляя (7.97) в (7.95), находим функцию положения планетарного механизма:



$$\varphi_4 = \varphi_H (u_{43} + 1) + \psi(\varphi_H) u_{43}.$$

Функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{4H}^1 = (u_{43} + 1) + \psi'(\varphi_H) u_{43}. \quad (7.99)$$

Функция положения планетарного механизма при использовании эллиптических колес с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n$  выражается формулой

$$\varphi_3 = \varphi_H + \frac{2}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) u_{43}. \quad (7.100)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 + \frac{1}{n} \frac{u_{43}(1-e^2)}{1+e^2-2e-\cos \varphi_H}. \quad (7.101)$$

Радиус-векторы некруглых колес определяются уравнениями:

$$r_1 = \frac{a_w u_{43}}{u_{43} + u_{4H}^1 - 1}; \quad r_2 = \frac{a_w (u_{4H}^1 - 1)}{u_{43} + u_{4H}^1 - 1},$$

где  $a_w$  – межосевое расстояние.

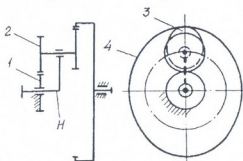


Рис. 7.25. Двухступенчатая планетарная передача

В планетарном механизме второй равновидности (рис. 7.25) колеса 1 и 2 круглые, колеса 3 и 4 – некруглые. Неподвижным звеном является центральное колесо 1. Ведущее звено – водило H, ведомое звено – центральное колесо 4.

Зависимость между углами поворота первой и второй пары колес:

$$\varphi_2 = -\varphi_1 u_{21}, \quad \varphi_4 = f(\varphi_3). \quad (7.102)$$

Колеса 2 и 3 закреплены на одном валу, поэтому функция положения простого ряда колес примет вид

$$\varphi_4 = -f(\varphi_1 u_{21}). \quad (7.103)$$

Функция положения планетарного механизма выразится формулой

$$\varphi_4 = \varphi_H + f(\varphi_H u_{21}), \quad (7.104)$$

а функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{1H}^4 = 1 + f'(\varphi_H u_{21}) u_{21}.$$

В планетарном механизме третьей разновидности (рис. 7.105) колеса 1 и 2 некруглые, колеса 3 и 4 – круглые. неподвижным звеном является центральное колесо 4. Ведущим – центральное некруглое колесо 1, ведомым – водило Н.

Функция положения некруглого колеса 1:  $\varphi_1 = -f(\varphi_2)$ . Зависимость между углами поворота второй пары колес 3 и 4:  $\varphi_3 = \varphi_4 u_{34}$ .

Так же, как и в ранее рассмотренных схемах,  $\varphi_2 = \varphi_3$ , поэтому функция положения простого ряда колес

$$\varphi_1 = -f(\varphi_4 u_{34}).$$

Функция положения планетарного механизма с учетом равенства  $\varphi_4 = \varphi_H$

$$\varphi_1 = \varphi_H + f(\varphi_H u_{34}) \quad (7.106)$$

и функция передаточного отношения

$$u_{1H}^4 = 1 + f'(\varphi_H u_{34}) u_{34}. \quad (7.107)$$

Выделим линейную и нелинейную части функции положения некруглых колес, придадим функции положения простого ряда колес следующий вид:

$$\varphi_1 = -[\varphi_4 u_{34} + f(\varphi_4 u_{34})],$$

где  $u_{34}$  – передаточное отношение круглых колес.

Функция положения планетарного механизма

$$\varphi_1 = \varphi_H (1 + u_{34}) + \psi(\varphi_H u_{34}).$$

Функция передаточного отношения представится формулой

$$u_{1H}^4 = (1 + u_{34}) + \psi'(\varphi_H u_{34}) u_{34}.$$

Функция положения рассматриваемого планетарного механизма, составленного из пары эллиптических зубчатых колес 3 и 4,

$$\varphi_1 = \varphi_H + \frac{2}{n} \arctg \left[ \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{(\varphi_H u_{34})}{2} \right] \quad (7.108)$$

и функция передаточного отношения

$$u_{1H}^4 = 1 + \frac{1}{n} \frac{u_{34}(1-e^2)}{1+e^2 - 2\cos(\varphi_H u_{34})}. \quad (7.109)$$

В планетарном механизме четвертой разновидности (рис. 7.24) колеса 1 и 2 круглые, а 3 и 4 – некруглые. Неподвижным является центральное колесо 4, ведущим – центральное круглое колесо 1, а ведомым – водило Н.

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4:

$$\varphi_1 = -\varphi_2 u_{12}, \quad \varphi_3 = f(\varphi_4).$$

Учитывая, что  $\varphi_2 = \varphi_3$ , получим функцию положения простого ряда колес в относительном движении в виде  $\varphi_1 = -f(\varphi_4) u_{12}$ . Функция положения планетарного механизма с учетом того, что  $\varphi_3 = \varphi_H$ , выразится формулой

$$\varphi_1 = \varphi_H + f(\varphi_H) u_{12}, \quad (7.110)$$

а функция передаточного отношения –

$$u_{1H}^4 = 1 + f(\varphi_H) u_{12}. \quad (7.111)$$

После выделения линейной и нелинейной частей, функция положения планетарного механизма выразится формулой

$$\varphi_1 = \varphi_H (1 + u_{12}) + \psi(\varphi_H) u_{12}, \quad (7.112)$$

а функция передаточного отношения –

$$u_{1H}^4 = (1 + u_{12}) + \psi'(\varphi_H) u_{12}. \quad (7.113)$$

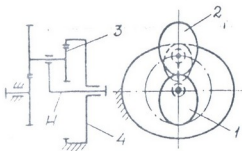


Рис. 7.26. Двухступенчатая планетарная передача

В планетарном механизме пятой разновидности колеса 1, 2, 3 и 4 – некруглые (рис. 7.26). Ведущим звеном является центральное колесо 1, ведомым – водило Н, неподвижным звеном – центральное некруглое колесо 4.

Для простого ряда колес 3 и 1 функция положения

$$\varphi_3 = f_1(\varphi_4), \quad \varphi_1 = -f(\varphi_2).$$

Так как  $\varphi_2 = \varphi_3$ , то  $\varphi_1 = -f_2[f_1(\varphi_4)] = -F(\varphi_4)$ .

Функция положения планетарного ряда колес

$$\varphi_1 = \varphi_H + F(\varphi_H). \quad (7.114)$$

Функция передаточного отношения примет вид

$$u_{1H}^4 = 1 + F'(\varphi_H). \quad (7.115)$$

Анализ полученных зависимостей (7.96, 7.105, 7.107, 7.111, 7.115) показывает, что в рассматриваемых схемах планетарных механизмов ведомое звено при любых значениях передаточного отношения круглых колес совершает вращательное движение с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена.

Рассмотрим планетарную передачу с двумя парами цилиндрических колес внутреннего зацепления.

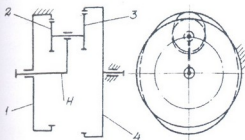


Рис. 7.27. Двухступенчатая планетарная передача

В механизме первой разновидности (рис. 7.27) колеса 1 и 2 – круглые, колеса 3 и 4 – некруглые. Неподвижным звеном является центральное колесо 1, ведущим – водило H, ведомым – центральное колесо 4.

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4:

$$\varphi_2 = u_{21}\varphi_1, \quad \varphi_4 = f(\varphi_3).$$

Учитывая, что  $\varphi_2 = \varphi_3$ , получим функцию положения простого ряда колес:  $\varphi_4 = f(\varphi_1)u_{21}$ .

Функция положения планетарного механизма

$$\varphi_4 = \varphi_H - f(\varphi_H u_{21}). \quad (7.116)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - f'(\varphi_H u_{21})u_{21}. \quad (7.117)$$

В механизме второй разновидности (рис. 7.28) колеса 1 и 2 – некруглые, колеса 3 и 4 – круглые, неподвижным является некруглое колесо 1, ведущим – водило H, ведомым – колесо 4.

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4 в простом ряду

$$\varphi_2 = f(\varphi_1), \quad \varphi_4 = \varphi_3 u_{43}.$$

Учитывая, что  $\varphi_2 = \varphi_3$ , функция положения простого ряда колес принимает вид

$$\varphi_4 = f(\varphi_H)u_{43}.$$

Функция положения планетарного механизма

$$\varphi_4 = \varphi_H - f(\varphi_H)u_{43},$$

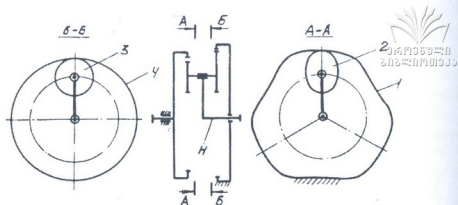


Рис. 7.28. Двухступенчатая планетарная передача

а функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - f'(\varphi_H)u_{43}. \quad (7.118)$$

Радиус-векторы некруглых колес определяются уравнениями:

$$r_1 = \frac{u_{43}a_w}{u_{43} + u_{4H}^1 - 1}; \quad r_2 = \frac{(1 - u_{4H}^1)a_w}{u_{43} + u_{4H}^1 - 1}.$$

В механизме третьей разновидности (рис. 7.29) колеса 1, 2, 3 и 4 – некруглые. Неподвижным является колесо 1, ведущим – водило H, ведомым – колесо 4.

Для простого ряда функции положения колес 2 и 4:

$$\varphi_2 = f_1(\varphi_1), \quad \varphi_4 = f_2(\varphi_3).$$

Так как  $\varphi_2 = \varphi_3$ :

$$\varphi_4 = f_2[f_1(\varphi_1)] = F(\varphi_1).$$

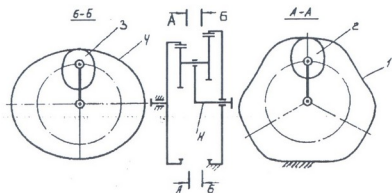


Рис. 7.29. Двухступенчатая передача

Функция положения планетарного ряда колес определяется зависимостью

$$\varphi_4 = \varphi_H - F(\varphi_H),$$

а функция передаточного отношения

$$u_{4H}^I = 1 - F'(\varphi_H). \quad (7.120)$$

Анализируя уравнения (7.117, 7.118 и 7.120), приходим к заключению, что ведомое звено рассматриваемых планетарных механизмов совершает либо вращательное, либо качательное движение. При этом ведомое звено этих механизмов может иметь выстой.

В частности, если удовлетворяются неравенства:  $f'(\varphi_H u_{21}) u_{21} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H) u_{43} \geq 1$  и  $F'(\varphi_H) \geq 1$ , то ведомое звено совершает качательное движение. Ведомое звено вращается с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена и имеет выстой, если выполняются неравенства  $f'(\varphi_H u_{21}) u_{21} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H) u_{43} \geq 1$  и  $F'(\varphi_H) \geq 1$ . Ведомое звено вращается с переменной скоростью в направлении, обратном направлению вращения ведущего звена, и имеет выстой при соблюдении неравенств  $f'(\varphi_H u_{21}) u_{21} \leq 1$ ,  $f'(\varphi_H) u_{43} \leq 1$  и  $F'(\varphi_H) \leq 1$ .

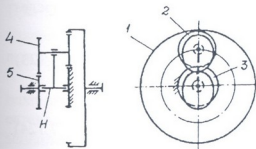


Рис. 7.30. Трехступенчатая передача

Колеса 1, 2, 3 – круглые; колеса 4, 5 – некруглые. Ведущим звеном является колесо 1, ведомым – колесо 5. Колесо 3 закреплено неподвижно.

Учитывая, что  $\varphi_2 = \varphi_4$ , получим функцию положения некруглого колеса 5 в простом ряду  $\varphi_5 = f(\varphi_3 u_{23})$ . Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3 в простом ряду  $\varphi_1 = -\varphi_3 u_{13}$ .

Тогда функция положения планетарного ряда колес определится зависимостью

$$\begin{aligned}\varphi_5 &= \varphi_H - f(\varphi_H u_{23}), \\ \varphi_1 &= \varphi_H + \varphi_H u_{13}.\end{aligned}\quad (7.121)$$

Функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{51}^3 = \frac{1 - f'(\varphi_H u_{23}) u_{23}}{1 + u_{13}}. \quad (7.122)$$

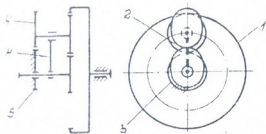


Рис. 7.31. Трехступенчатая передача

в простом ряду выражается следующими уравнениями:  $\varphi_3 = -\varphi_2 u_{32}$ ,  $\varphi_4 = -f(\varphi_5)$ . Для колес 1 и 2, с учетом равенства  $\varphi_2 = \varphi_4$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 u_{12} = -f(\varphi_5) u_{12}$ .

Тогда функция положения планетарного механизма определится уравнениями:

$$\begin{aligned}\varphi_3 &= \varphi_H - f(\varphi_H) u_{32}, \\ \varphi_1 &= \varphi_H + f(\varphi_H) u_{12}.\end{aligned}\quad (7.123)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{31}^5 = \frac{1 - f'(\varphi_H) u_{32}}{1 + f'(\varphi_H) u_{12}}. \quad (7.124)$$

В планетарном механизме, представленном на рис. 7.32, колеса 1, 2, 3 – круглые, колеса 4, 5 – некруглые. Колесо 1 – ведущее, колесо 5 – ведомое. Колесо 3 закреплено неподвижно.

Зависимость между углами поворота колес 5 и 4 в простом ряду, с учетом равенства  $\varphi_2 = \varphi_4$ ,  $\varphi_5 = f(\varphi_3 u_{23})$ . Зависимость между углами поворота колес 1, 3 в простом ряду  $\varphi_1 = -\varphi_3 u_{13}$ .

Функция положения планетарного ряда колес

$$\varphi_5 = \varphi_H - f(\varphi_H u_{23}), \quad \varphi_1 = \varphi_H + u_{31} \varphi_H. \quad (7.125)$$

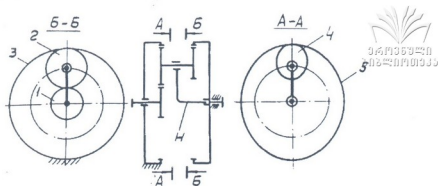


Рис. 7.32. Трехступенчатая передача

Тогда функция передаточного отношения планетарного механизма

$$u_{51}^3 = \frac{1 - f'(\varphi_H u_{23}) u_{23}}{1 + u_{31}}. \quad (7.126)$$

Анализ зависимостей (7.122, 7.124, 7.126) показывает, что ведомое звено рассмотренных планетарных механизмов вращается с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена, если  $f'(\varphi_H u_{23}) u_{23} < 1$  и  $f'(\varphi_H) u_{32} < 1$ . Вращение ведущего звена в направлении, обратном направлению вращения ведущего звена, будет происходить при  $f'(\varphi_H u_{23}) u_{23} > 1$  и  $f'(\varphi_H) u_{32} > 1$ . При значениях  $f'(\varphi_H u_{23}) u_{23} \geq 1$  и  $f'(\varphi_H) u_{32} \geq 1$  ведомое звено совершает качательное движение. Ведомое звено имеет выстой при значениях  $f'(\varphi_H u_{23}) u_{23} = 1$  и  $f'(\varphi_H) u_{32} = 1$ .

В планетарном механизме, показанном на рис. 7.33, сателлит 2 находится в зацеплении с центральными колесами 1 и 3. На валу сателлита 2 закреплены сателлиты 4 и 5. Сателлит 4 находится в зацеплении с центральным колесом 3, а сателлит 5 – с центральным колесом 6. Подшипники сателлитов 2, 4 и 5 находятся на водиле Н. Колеса 1, 2, 3 и 4 – круглые, колеса 5, 6 – некруглые. Колесо 1 – ведущее звено, колесо 6 – ведомое, неподвижным звеном является колесо 3. Для простого ряда имеем следующие зависимости между углами поворота колес: для колес 1, 3 и 5, 6,  $\varphi_1 = -\varphi_3 u_{13}$ ,  $\varphi_6 = f(\varphi_5)$ .

Так как сателлиты 4 и 5 закреплены на одном валу, то  $\varphi_5 = \varphi_4 = \varphi_3 u_{43}$ . Тогда  $\varphi_6 = f_2(\varphi_3 u_{43})$ .



Функция положения планетарного ряда колес примет вид

$$\varphi_1 = \varphi_H + u_{13}\varphi_H, \quad \varphi_6 = \varphi_H - f(u_{43}\varphi_H).$$

Функция передаточного отношения

$$u_{61}^3 = \frac{1 - f'(u_{43})u_{43}}{1 + u_{13}}. \quad (7.128)$$

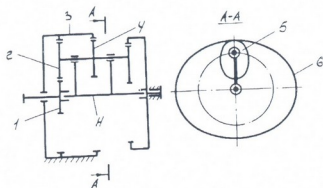


Рис. 7.33. Схема планетарной передачи

В планетарном механизме, изображенном на рис. 7.34,

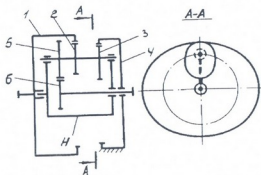


Рис. 7.34. Схема планетарной передачи

центральное колесо 1 находится в зацеплении с сателлитом 2. На валу сателлита 2 закреплены сателлиты 3 и 5. Сателлит 3 находится в зацеплении с центральным колесом 4, а сателлит 5 – с центральным колесом 6. Вал сателлитов 2, 3 и 5 сидит в подшипниках, находящихся на водиле Н. Колеса 1, 2, 5 и 6 – круглые, колеса 3, 4 –

некруглые. Колесо 1 является ведущим звеном, колесо 6 – ведомым звеном. Колесо 4 закреплено неподвижно.

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4 в простом ряду  $\varphi_1 = \varphi_2 u_{12}$ ,  $\varphi_3 = f(\varphi_4)$ .

С учетом равенства  $\varphi_2 = \varphi_3$  имеем  $\varphi_1 = f(\varphi_4) u_{21}$ . Зависимость между углами поворота колес 5 и 6 в простом ряду  $\varphi_6 = -\varphi_5 u_{65}$ .

Колеса 5 и 3 закреплены на одном валу,  
 $\varphi_5 = \varphi_3 = f(\varphi_4)$ .

Функция положения планетарного ряда колес:

$$\varphi_1 = \varphi_H - f(\varphi_H)u_{21}, \quad \varphi_6 = \varphi_H + f(\varphi_H)u_{65}. \quad (7.129)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{16}^4 = \frac{1 - f'(\varphi_H)u_{21}}{1 + f'(\varphi_H)u_{65}}. \quad (7.130)$$

В планетарном механизме, показанном на рис. 7.35, центральное колесо 1 находится в зацеплении с сателлитом 2. На одном валу с сателлитом 2 закреплены сателлиты 3 и 6. Сателлит 3 находится в зацеплении с центральным колесом 4, а сателлит 6 – с центральным колесом 5. Подшипники вала сателлитов 2, 3 и 6 находятся на водиле Н. Колеса 1, 2, 5 и 6 – круглые, колеса 3 и 4 – некруглые. Колесо 1 – ведущее, колесо 4 – ведомое. Колесо 5

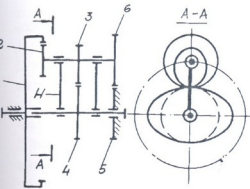


Рис. 7.35. Схема планетарной передачи

закреплено неподвижно. Зависимость между углами поворота колес 3, 4 и 5, 6 в простом ряду  $\varphi_4 = -f(\varphi_3)$ ,  $\varphi_6 = -\varphi_5 u_{65}$ .

Тогда с учетом равенства  $\varphi_3 = \varphi_6$  получим:  $\varphi_4 = f(\varphi_5 u_{65})$ .

Зависимость между углами поворота колес 1, 2 в простом ряду:  $\varphi_1 = \varphi_2 u_{12} = -\varphi_5 u_{12} u_{65}$ .

Функция положения планетарного ряда колес:

$$\varphi_4 = \varphi_H - f(\varphi_H)u_{65}, \quad \varphi_1 = \varphi_H + u_{12}u_{65}\varphi_H. \quad (7.131)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{41}^5 = \frac{1 - f'(\varphi_H)u_{65}}{1 + u_{12}u_{65}}. \quad (7.132)$$

Из анализа зависимостей (7.128, 7.130, 7.132) видно, что ведомое звено планетарных механизмов (рис. 7.33, 7.34, 7.35) будет вращаться с переменной скоростью в сторону вращения ведущего звена и будет иметь выстой, если выполняются условия:

$f'(\varphi_H u_{43})u_{43} \leq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{21} \leq 1$  и  $f'(\varphi_H u_{65})u_{65} \leq 1$ . Ведомое звено будет вращаться с переменной скоростью в сторону, обратную направлению вращения ведущего звена, и будет иметь выстой при  $f'(\varphi_H u_{43})u_{43} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{21} \geq 1$  и  $f'(\varphi_H u_{65})u_{65} \geq 1$ . При значениях  $f'(\varphi_H u_{43})u_{43} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{21} \geq 1$  и  $f'(\varphi_H u_{65})u_{65} \geq 1$  ведомое звено будет совершать качательное движение.

## 7.8. Планетарные передачи с некруглыми коническими зубчатыми колесами

Рассмотрим планетарную передачу с некруглыми коническими зубчатыми колесами 1, 2 (рис. 7.36). Центральное колесо 1 закреплено неподвижно. Сателлит 2 с помощью водила Н обкатывается по колесу 1.

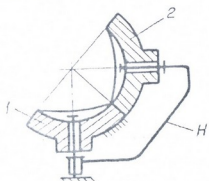


Рис. 7.36. Одноступенчатая планетарная передача

Для простого ряда колес механизма функция положения колеса 2  $\varphi_2 = -f(\varphi_1)$ . Функция положения планетарного ряда колес:

$$\varphi_2 = \varphi_H + f(\varphi_H). \quad (7.133)$$

Функция передаточного отношения планетарного ряда колес определяется зависимостью

$$u_{2H}^1 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_H} = 1 + f'(\varphi_H). \quad (7.134)$$

Когда в качестве некруглых колес применяются эллиптические конические колеса, функции положения и передаточного отношения планетарного механизма определяются уравнениями (7.49, 7.50).

В планетарном механизме (рис. 7.37) с некруглыми коническими зубчатыми колесами 1, 2 и 3 неподвижным звеном является центральное некруглое коническое колесо 1. Ведущее звено - центральное не-

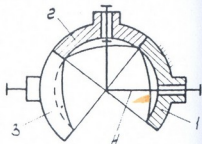


Рис. 7.37. Двухступенчатая планетарная передача

руглое коническое колесо 3, ведомое – водило Н.

Для простого ряда колес механизма зависимость между углами поворота колес 1, 2 и 2, 3:  $\varphi_2 = -f_1(\varphi_1)$ ,  $\varphi_3 = -f_2(\varphi_2)$  или  $\varphi_3 = f_2[f_1(\varphi_1)] = F_1(\varphi_1)$ .

Функция положения планетарного ряда колес:

$$\varphi_3 = \varphi_H + F(\varphi_H). \quad (7.135)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{3H}^1 = 1 + F'(\varphi_H). \quad (7.136)$$

Если в передаче (рис. 7.37) применяются эллиптические конические колеса со средним передаточным отношением  $n = 1$  и эксцентриситетом  $e$ , то, используя (7.57), получим для функции положения и передаточного отношения следующие выражения:

$$\varphi_3 = \varphi_H + 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right],$$

$$u_{3H}^1 = 1 + \frac{2(1-e^2)^2}{[(1+e)^4 + (1-e)^4] - [(1+e)^4 - (1-e)^4] \cos \varphi_H}.$$

В планетарном механизме с двумя парами конических колес наружного зацепления возможны разные варианты сочетания круглых и некруглых зубчатых колес.

В механизме первой равновидности (рис. 7.38) колеса 1, 2 – некруглые, колеса 3, 4 – круглые, центральное колесо 4 – неподвижное звено, центральное некруглое колесо 1 – ведущее звено, водило Н – ведомое звено.

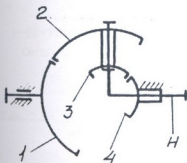


Рис. 7.38. Двухступенчатая планетарная передача

Функцию положения простого ряда колес с учетом равенства  $\varphi_2 = \varphi_3$  представим в виде  $\varphi_1 = -f(\varphi_4 u_{43})$ .  
Функция положения планетарного механизма:

$$\varphi_1 = \varphi_H + f(\varphi_H u_{43}). \quad (7.137)$$

Функция передаточного отношения:  $\clubsuit$

$$u_{1H}^4 = 1 + f'(\varphi_H u_{43}) u_{43}. \quad (7.138)$$

В механизме второй разновидности колеса 1 и 2 – круглые, колеса 3 и 4 – некруглые; неподвижное звено – колесо 4; ведущее звено – колесо 1; ведомое звено – водило Н.

Функции положения и передаточного отношения планетарного механизма рассматриваемой схемы выражаются формулами

$$\varphi_1 = \varphi_H + f(\varphi_H)u_{12}, \quad u_{1H}^4 = 1 + f'(\varphi_H)u_{12}. \quad (7.139)$$

В механизме третьей разновидности колеса 1 и 2 – некруглые, колеса 3 и 4 – круглые; неподвижное звено – колесо 1; ведущее звено – водило Н, ведомое звено – колесо 4.

Функции положения и передаточного отношения такого механизма:

$$\varphi_4 = \varphi_H + f(\varphi_H)u_{34}, \quad u_{4H}^1 = 1 + f'(\varphi_H)u_{34}. \quad (7.140)$$

Обозначим радиусы средних делительных конусов некруглых 1, 2 и круглых 3, 4 колес соответственно  $r_1, r_2$  и  $r_3$  и  $r_4$ , межосевой угол  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4$ , где  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3, \delta_4$  – соответственно переменные и постоянные углы между осями вращения колес и образующими конусов 1, 2 и 3, 4.

Функцию передаточного отношения запишем в виде

$$u_{4H}^1 = 1 + \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} u_{34},$$

где  $u_{34} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{\sin \delta_4}{\sin \delta_3}$ .

Тогда переменные углы между осями вращения и образующими делительных конусов некруглых колес 1, 2 можно определить из уравнений

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{u_{4H}^1 + u_{34} \cos \Sigma - 1}{u_{34} \sin \Sigma}, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

При  $\Sigma = 90^\circ$  получим

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{u_{4H}^1 - 1}{u_{34}}, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

В механизме четвертой разновидности колеса 1 и 2 – круглые, колеса 3 и 4 – некруглые; неподвижное звено – колесо 4; ведущее звено – колесо 1; ведомое звено – водило Н.

В механизме четвертой разновидности колеса 1, 2 – круглые, колеса 3, 4 – некруглые; неподвижное звено – колесо 1, ведущее звено – водило Н, ведомое звено – колесо 4.

Функции положения и передаточного отношения определяются формулами

$$\varphi_4 = \varphi_H + f(\varphi_H u_{21}), \quad u_{4H}^1 = 1 + f'(\varphi_H u_{21}) u_{21}. \quad (7.141)$$

В механизме пятой разновидности колеса 1, 2, 3, 4 – некруглые, неподвижное звено – колесо 1, ведущее звено – водило Н, ведомое звено – колесо 4.

Функции положения и передаточного отношения планетарного механизма:

$$\varphi_4 = \varphi_H + F(\varphi_H), \quad u_{4H}^1 = 1 + F'(\varphi_H). \quad (7.142)$$

Анализ формул (7.138, 7.139, 7.140, 7.141, 7.142) показывает, что ведомое звено совершает вращательное движение с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена при любых значениях передаточного отношения круглых колес.

Рассмотрим планетарный механизм, представленный на рис. 7.39.

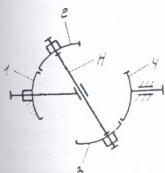


Рис. 7.39. Двухступенчатая планетарная передача

В механизме первой разновидности колеса 1, 2 – некруглые, колеса 3, 4 – круглые; неподвижным звеном является центральное некруглое колесо 1, ведущее звено – водило Н, ведомое звено – центральное круглое колесо 4.

Для простого ряда колес зависимости между углами поворота колес 1, 2 и 3, 4:  $\varphi_2 = -f(\varphi_1)$ ,  $\varphi_4 = -\varphi_3 u_{43}$ , где  $u_{43}$  – передаточное отношение круглых колес 3, 4.

Поскольку  $\varphi_2 = \varphi_3$ , то функция положения простого ряда колес в относительном движении

$$\varphi_4 = f(\varphi_1) u_{43}.$$

Функция положения планетарного механизма

$$\varphi_4 = \varphi_H - f(\varphi_H) u_{43}. \quad (7.143)$$

Функция передаточного отношения примет вид

$$u_{4H}^1 = 1 - f'(\varphi_H) u_{43}.$$



Радиусы делительных конусов некруглых колес обозначим через  $r_1, r_2$ , а круглых колес –  $r_3, r_4$ , межосевой угол  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = \delta_3 + \delta_4 \neq 90^\circ$ , где  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3, \delta_4$  – соответственно переменные и постоянные углы между осями вращения колес и образующими делительных конусов.

Запишем функцию передаточного отношения (7.144) в виде

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} u_{43},$$

где  $u_{43} = \frac{r_4}{r_3} = \frac{\sin \delta_3}{\sin \delta_4}$ .

Тогда переменные углы между образующими делительных некруглых конусов и осями вращения колес 1, 2 определяются выражениями

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{1 - u_{4H}^1 + \cos \Sigma}{u_{43} \sin \Sigma}, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

При  $\Sigma = 90^\circ$

$$\operatorname{ctg} \delta_1 = \frac{1 - u_{4H}^1}{u_{43}}, \quad \delta_2 = \Sigma - \delta_1.$$

Если в качестве некруглых колес применяются эллиптические конические колеса с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n = 1$ , то функции положения и передаточного отношения выражаются уравнениями

$$\varphi_4 = \varphi_H - 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) u_{43},$$

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{u_{43}(1-e^2)}{1+e^2 - 2e \cos \varphi_H}.$$

В механизме второй разновидности колеса 1, 2 – круглые, колеса 3, 4 – некруглые, неподвижным звеном является колесо 1, ведущим – водило Н, ведомым – колесо 4.

Функции положения и передаточного отношения этого планетарного механизма:

$$\varphi_4 = \varphi_H - f(\varphi_H u_{21}), \quad u_{4H}^1 = 1 - f'(\varphi_H u_{21}) u_{21}. \quad (7.145)$$

Рассмотрим случай, когда в механизме второй разновидности применяются эллиптические конические колеса 1, 2 и овальные конические колеса 3, 4. Эксцентриситет колес  $e_1 = e_2 = e$ , среднее передаточное отношение  $n_1 = n_2 = 1$ .

Функция положения колес 1, 2 в простом ряду:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Функция положения колес 3, 4:

$$\operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \varphi_3.$$

Поскольку  $\varphi_2 = \varphi_3$ , получим:

$$\varphi_4 = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \right\}.$$

В этом случае функция положения планетарного ряда колес:

$$\varphi_4 = \varphi_H - \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \right] \right\}.$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{2(1-e^2)^2}{(1+e^2 - 2e \cos \varphi_H) \left[ 1+e^2 - 2e \cos \left[ 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right) \right] \right]}.$$

Если в механизме применяются овальные колеса 1, 2, 3, 4 с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n_1 = n_2 = 1$ , функции положения и передаточного отношения выражаются уравнениями

$$\varphi_4 = \varphi_H - 2 \operatorname{arctg} \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_H}{2} \right],$$

и

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{2(1-e^2)^2}{[(1+e)^4 + (1-e)^4] - [(1+e)^4 - (1-e)^4] \cos \varphi_H}.$$



В планетарном механизме третьей разновидности колеса 1, 2 – некруглые, колеса 3, 4 – круглые, колесо 4 неподвижно, колесо 1 – ведущее звено, водило Н – ведомое звено.

Функции положения и передаточного отношения механизма рассматриваемой схемы имеют вид

$$\varphi_1 = \varphi_H - f(u_{34}\varphi_H), \quad u_{1H}^4 = 1 - f'(u_{34}\varphi_H)u_{34}. \quad (7.146)$$

В механизме четвертой разновидности колеса 1, 2 – круглые, колеса 3, 4 – некруглые; колесо 4 – неподвижное звено, колесо 1 – ведущее звено, водило Н – ведомое звено.

В этом случае функции положения и передаточного отношения выражаются уравнениями

$$\varphi_1 = \varphi_H - f(\varphi_H)u_{12}, \quad u_{1H}^4 = 1 - f'(\varphi_H)u_{12}. \quad (7.147)$$

В механизме пятой разновидности колеса 1, 2, 3, 4 – некруглые, колесо 4 – неподвижное звено, колесо 1 – ведущее звено, водило Н – ведомое звено.

Для функции положения и передаточного отношения такого механизма имеем следующие выражения:

$$\varphi_1 = \varphi_H - F(\varphi_H), \quad u_{1H}^4 = 1 - F'(\varphi_H). \quad (7.148)$$

Анализ формул (7.144, 7.145, 7.146, 7.147, 7.148) показывает, что при условиях  $f'(\varphi_H)u_{43} \leq 1$ ,  $f'(\varphi_H u_{21})u_{21} \leq 1$ ,  $f'(u_{34}\varphi_H)u_{34} \leq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{12} \leq 1$ ,  $F'(\varphi_H) \leq 1$ , ведомое звено планетарного механизма совершает вращательное движение с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена и имеет выстой. При выполнении условий  $f'(\varphi_H)u_{43} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H u_{21})u_{21} \geq 1$ ,  $f'(u_{34}\varphi_H)u_{34} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{12} \geq 1$ ,  $F'(\varphi_H) \geq 1$  ведомое звено планетарного механизма вращается в направлении, обратном направлению вращения ведущего звена, и имеет выстой. Если же  $f'(\varphi_H)u_{43} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H u_{21})u_{21} \geq 1$ ,  $f'(u_{34}\varphi_H)u_{34} \geq 1$ ,  $f'(\varphi_H)u_{21} \geq 1$ ,  $F'(\varphi_H) \geq 1$ , то ведомое звено механизма совершает качательное движение.

На рис. 7.40 показаны графики функции положения и передаточного отношения ведомого звена планетарного механизма первой разновидности (рис. 7.39). Вычисления выполнены при следующих параметрах механизма: 1)  $u_{43} = 0,5$ ;  $e = 0,2$ ; 2)  $u_{43} = 1$ ,

$e = 0,2$ ; 3)  $u_{43} = 1,5$ ;  $e = 0,2$ . Для подобранных параметров ведущее звено совершает следующие движения: 1) вращается в направлении вращения ведущего звена; 2) совершает качательное движение (угол качания равен  $46^\circ$ ); 3) вращается в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена.

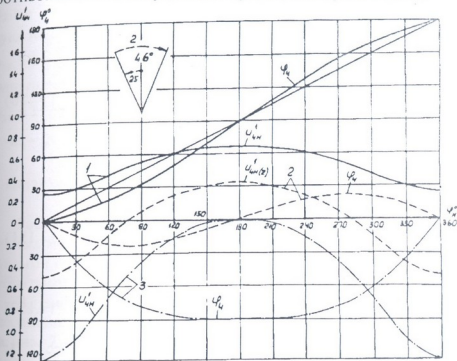


Рис. 7.40. Графики функции положения и передаточного отношения

В планетарном механизме, изображенном на рис. 7.41, колеса 1, 2, 3 – круглые, колеса 4,5 – некруглые, ведущим звеном является центральное круглое колесо 1, ведомым – центральное некруглое колесо 5, неподвижным звеном – центральное круглое колесо 3.

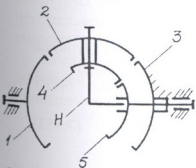


Рис. 7.41. Двухступенчатая планетарная передача

Функцию положения водила Н, не учитывая в начале наличия некруглых колес, можно выразить в виде

$$\varphi_H = \frac{\varphi_1}{1 + u_{13}^H}.$$

Используя функцию положения водила Н при неподвижном колесе 3, рассмотрим передачу с колесами 3, 2, 4 и 5 и определим функцию положения колеса 5. Для этой передачи

$$\frac{-\varphi_H}{\varphi_5 - \varphi_H} = \frac{r_2 r_5}{r_3 r_4}$$

или

$$\varphi_5 = \varphi_H \left( 1 - \frac{r_2 r_5}{r_3 r_4} \right), \quad (7.150)$$

где  $r_2, r_3$  – радиусы делительных конусов колес 2, 3;  $r_4, r_5$  – радиусы делительных конусов некруглых колес 4, 5.

Подставляя (7.149) в (7.150), находим функцию положения планетарного механизма:

$$\varphi_5 = \frac{\varphi_1}{1 + u_{13}^H} \left( 1 - \frac{r_2 r_5}{r_3 r_4} \right). \quad (7.151)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{51}^3 = \frac{1 - u_{23} u_{54}}{1 + u_{13}^H}. \quad (7.152)$$

Здесь  $u_{23}$  – постоянное передаточное отношение колес 2, 3;  $u_{54}$  – переменное передаточное отношение колес 4, 5.

Переменные углы между образующими и осями вращения колес определяются уравнениями

$$\operatorname{ctg} \delta_4 = \frac{1 - u_{4H}^1 (1 + u_{13}^H) + u_{23} \cos \Sigma}{u_{23} \sin \Sigma}, \quad \delta_5 = \Sigma - \delta_4.$$

Если радиусы колес 1, 2, 3 одинаковы,  $u_{23} = 1$ , для функций положения и передаточного отношения получим выражения

$$\begin{aligned} \varphi_5 &= \frac{1 - u_{54}}{2} \varphi_1, \\ u_{51}^3 &= \frac{1 - u_{54}}{2}. \end{aligned} \quad (7.153)$$

При этом углы  $\delta_4$  и  $\delta_5$  определяются уравнениями

$$\operatorname{ctg} \delta_4 = \frac{1 - 2u_{51}^3 + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}, \quad \delta_5 = \Sigma - \delta_4.$$



Зависимости (7.152, 7.153) показывают, что ведомое звено рассмотренного планетарного механизма вращается с переменной скоростью в направлении вращения ведущего звена при  $u_{23}u_{54} < 1$  и  $u_{54} < 1$ . Ведомое звено вращается в сторону, обратную направлению вращения ведущего звена при  $u_{23}u_{54} > 1$  и  $u_{54} > 1$ . Ведомое звено совершает качательное движение при выполнении условий  $u_{23}u_{54} \geq 1$  и  $u_{54} \geq 1$ . Если же  $u_{23}u_{54} = 1$  и  $u_{54} = 1$ , ведомое звено имеет выстой.

### 7.9. Дифференциальные передачи с некруглыми цилиндрическими зубчатыми колесами

Рассмотрим кинематику некоторых замкнутых дифференциальных механизмов с некруглыми цилиндрическими зубчатыми колесами.

В дифференциальном механизме, изображенном на рис. 7.42, от ведущего вала I-I вращательное движение передается по двум направлениям: на водило Н через пару некруглых колес 3, 4 и на центральное колесо 5 через пару круглых колес 1, 2. Движение снимается с вала центрального колеса 8.

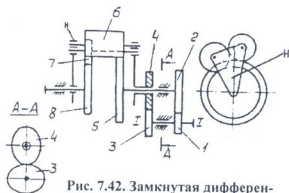


Рис. 7.42. Замкнутая дифференциальная передача

Согласно формуле Виллиса, передаточное отношение для дифференциального механизма, состоящего из колес 5, 6, 7 и 8, определяется зависимостью

$$u_{85}^H = \frac{\varphi_8 - \varphi_H}{\varphi_5 - \varphi_H}$$

и функция положения ведомого звена механизма выражается уравнением

$$\varphi_8 = \varphi_H (1 - u_{85}^H) - u_{85}^H \varphi_5.$$

Функции положения колес 4 и 2:

$$\varphi_4 = -f(\varphi_3)\varphi_1, \quad \varphi_2 = -\varphi_1 u_{21} = -\varphi_1 u_{21},$$

где  $\varphi_1$  — угол поворота ведущего вала I—I.

Некруглое колесо 4 закреплено на водиле H, следовательно,  $\varphi_H = \varphi_4$ ; круглое колесо 2 закреплено на одном валу с центральным колесом 5, следовательно,  $\varphi_5 = \varphi_2$ . Подставляя значения  $\varphi_H$  и  $\varphi_5$  в уравнение (7.154), функцию положения дифференциального механизма представим в следующем виде:

$$\varphi_8 = [u_{21} u_{85}^H - f(\varphi_1)(1 + u_{85}^H)] \varphi_1. \quad (7.155)$$

Функция передаточного отношения определяется как производная функции положения

$$u_{81} = u_{21} u_{85}^H - f'(\varphi_1)(1 + u_{85}^H). \quad (7.156)$$

Радиус-векторы центроид некруглых колес 3, 4 определяются зависимостями

$$r_3 = \frac{a_w (1 + u_{85}^H)}{1 + u_{85}^H (u_{21} + 1) - u_{81}}, \quad r_4 = \frac{a_w (u_{85}^H u_{21} - u_{81})}{1 + u_{85}^H (u_{21} + 1) - u_{81}}.$$

Для частного, наиболее часто встречающегося случая, когда радиусы ведущего и ведомого колес дифференциала  $r_3 = r_4$ , функция положения дифференциального механизма выражается уравнением

$$\varphi_8 = 2\varphi_H - \varphi_5. \quad (7.157)$$

Функции положения колес 4 и 5:

$$\varphi_4 = \varphi_H = - \int_0^{\varphi_1} u_{43}(\varphi_1) d\varphi_1, \quad \varphi_5 = \varphi_2 = -u_{21} \varphi_1.$$

При этом функция положения дифференциального механизма принимает вид

$$\varphi_8 = u_{21} \varphi_1 - 2 \int_0^{\varphi_1} u_{43}(\varphi_1) d\varphi_1, \quad (7.158)$$

а функция передаточного отношения

$$u_{81} = u_{21} - 2u_{43}(\varphi_1). \quad (7.159)$$

Представим функцию положения некруглых колес состоящей



из линейной части и нелинейной добавки, для дифференциального механизма получим уравнение

$$\varphi_8 = (u_{21} - 2)\varphi_1 - 2\psi(\varphi_1).$$

В этом случае функция передаточного отношения:

$$u_{81} = (u_{21} - 2) - 2\psi'(\varphi_1).$$

Радиус-векторы центроид некруглых колес:

$$r_3 = \frac{2a_w}{u_{21} - u_{81} + 2}, \quad r_4 = \frac{a_w(u_{21} - u_{81})}{u_{21} - u_{81} + 2}.$$

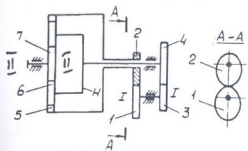


Рис. 7.43. Замкнутая дифференциальная передача

В дифференциальном механизме, изображенном на рис. 7.43, вращательное движение передается от ведущего вала I-I по двум направлениям: на водило H через пару круглых колес 3, 4 и на центральное колесо 5 через пару некруглых колес 1 и 2. Движение снимается с вала центрального

колеса 7. Колеса 5, 6, 7 – круглые.

Функция положения дифференциального механизма

$$\varphi_7 = \varphi_H (1 + u_{75}^H) - \varphi_5 u_{75}^H.$$

Функция положения некруглого колеса

$$\varphi_2 = \varphi_5 = -f(\varphi_1)\varphi_1.$$

Функция положения круглого колеса 4

$$\varphi_4 = \varphi_H = -\varphi_3 u_{43} = -\varphi_1 u_{43}.$$

Функция положения дифференциального механизма

$$\varphi_7 = f(\varphi_1)u_{75}^H\varphi_1 - u_{43}(u_{75}^H + 1)\varphi_1. \quad (7.160)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{71} = f'(\varphi_1)u_{75}^H - u_{43}(u_{75}^H + 1). \quad (7.161)$$

Анализ полученных зависимостей показывает, что в рассматриваемых схемах дифференциальных механизмов ведомое звено совершает качательное движение при значениях передаточного отношения круглых колес, определяемых неравенствами

$$u_{21} u_{85}^H \geq f'(\varphi_1)(1 + u_{85}^H), \quad u_{21} \geq 2u_{43}(\varphi_1), \quad f'(\varphi_1)u_{75}^H \geq u_{43}(u_{75}^H + 1).$$

Ведомое звено вращается с переменной скоростью в направлении вращения водила и имеет выстой при выполнении условий  $u_{21}u_{85}^H \geq f'(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$ ,  $u_{21} \geq 2u_{43}(\varphi_1)$ ,  $f'(\varphi_1)u_{75}^H \geq u_{43}(u_{75}^H+1)$ . Ведомое звено вращается с переменной скоростью в направлении, обратном направлению вращения водила, и имеет выстой, если  $u_{21}u_{85}^H \leq f'(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$ ,  $u_{21} \leq 2u_{43}(\varphi_1)$ ,  $f'(\varphi_1)u_{75}^H \leq u_{43}(u_{75}^H+1)$ .

Для частного случая механизма (рис. 7.42), когда  $r_5 = r_8$ , при  $u_{21}=2$  ведомое звено дифференциала совершает качательное движение, полный размах которого в одном направлении в два раза больше нелинейной добавки некруглого колеса 4. После поворота вала I-I с колесами 1 и 3 на угол  $2\pi$ , водило Н и колесо 5 поворачиваются на углы:

$$\varphi_H = \varphi_4 = 2\pi \text{ и } \varphi_5 = \varphi_2 = 4\pi.$$

Согласно (7.157), ведомое звено дифференциала имеет выстой.

При значениях  $u_{21}=1$ , функции  $\varphi_8(\varphi_1)$  и  $\varphi_{81}(\varphi_1)$  аналогичны по своей структуре функциям  $\varphi_4(\varphi_1)$  и  $\varphi_{43}(\varphi_1)$  для некруглых колес с той разницей, что функция  $\varphi_8(\varphi_1)$  имеет удвоенную величину нелинейной добавки.

На рис. 7.44 показаны графики функции положения и передаточного отношения дифференциального механизма, изображенного на рис. 7.42. Вычисления выполнены при следующих параметрах механизма: 1)  $u_{21}=1$ ;  $n=1$ ;  $e=0,2$ ;  $u_{85}^H=1$ ; 2)  $u_{21}=1$ ;  $n=2$ ;  $e=0,2$ ;  $u_{85}^H=1$ ; 3)  $u_{21}=1,5$ ;  $n=1$ ;  $e=0,2$ ;  $u_{85}^H=1$ ; 4)  $u_{21}=1,5$ ;  $n=1$ ;  $e=0,2$ ;  $u_{85}^H=2$ . Для подобранных параметров ведомое звено совершает следующие движения: 1) вращается в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена; 2) совершает качательное движение; угол качания равен  $46^\circ$ ; 3,4) ведомое звено совершает движение с попятным ходом.

В дифференциальном механизме, показанном на рис. 7.45, вращательное движение от ведущего вала I-I передается: на центральное колесо 5 через круглые колеса 3,4 и на водило Н через некруглые колеса 1, 2. Колеса 5, 6, 7, 8 – круглые. Движение снимается с вала центрального колеса 8.

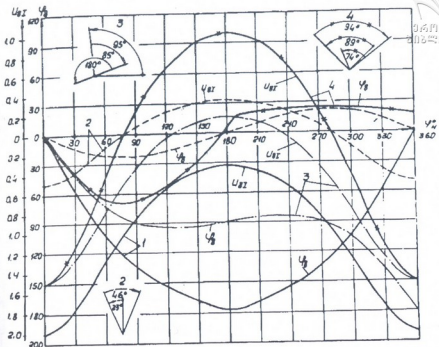


Рис. 7.44. Графики функции положения и передаточного отношения

Функция положения ведомого звена дифференциала:

$$\varphi_8 = \varphi_H (1 + u_{85}^H) - \varphi_5 \varphi_{85}^H.$$

Функция положения водила:

$$\varphi_H = \varphi_2 = - \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1. \quad (7.162)$$

Функция положения колеса 5:

$$\varphi_5 = \varphi_4 = -u_{43} \varphi_1. \quad (7.163)$$

Подставляя значения  $\varphi_H$  и  $\varphi_5$  в функцию положения дифференциального механизма, получим:

$$\varphi_8 = \varphi_{85}^H u_{43} \varphi_1 - \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1 (1 + u_{85}^H). \quad (7.164)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{81} = \varphi_{85}^H u_{43} - u_{21}(\varphi_1) (1 + u_{85}^H). \quad (7.165)$$

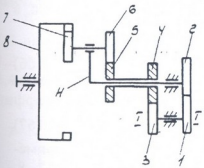


Рис. 7.45. Замкнутая дифференциальная передача



Радиус-векторы центроид некруглых колес можно вычислить зависимостями:

$$r_1 = \frac{a_W(1 + u_{85}^H)}{1 + u_{85}^H(u_{43} + 1) - u_{81}}, \quad r_2 = \frac{a_W(u_{85}^H u_{43} - u_{81})}{1 + u_{85}^H(u_{43} + 1) - u_{81}},$$

где  $u_{43} = \frac{r_4}{r_3}$ ;  $r_4, r_3$  – радиусы делительных окружностей круглых колес 3, 4.

Рассмотрим разновидность этой схемы дифференциального механизма, представленную на рис. 7.46. Движение от ведущего вала I–I передается по двум направлениям: на водило Н через некруглые колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4. Движение снимается с вала центрального колеса 8. Колеса 3, 4, 5, 6, 7, 8 – круглые, колеса 1, 2 – некруглые.

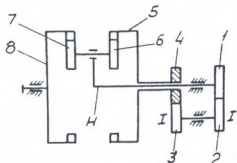


Рис. 7.46. Замкнутая дифференциальная передача

Используя (7.162, 7.163), представим функцию положения ведомого звена дифференциала в виде

$$\varphi_8 = \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1 (u_{85}^H - 1) - u_{85}^H u_{34} \varphi_1. \quad (7.166)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{81} = u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) - u_{85}^H u_{34}. \quad (7.167)$$

Рассмотрим случай, когда в механизме (рис. 7.46) применяются некруглые колеса 1, 2, 3, 4 и круглые колеса 5, 6, 7, 8. Тогда функция положения дифференциала:

$$\varphi_8 = f_1(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) - f_2(\varphi_1)u_{85}^H \varphi_1,$$

где  $\varphi_H = \varphi_2 = -f_1(\varphi_1)$  – функция положения колес 1, 2;  
 $\varphi_5 = \varphi_4 = -f_2(\varphi_1)$  – функция положения колес 3, 4.

Функция передаточного отношения дифференциала:

$$u_{81} = f_1'(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) - f_2'(\varphi_1)u_{85}^H.$$

В случае, когда колеса 1, 2 эллиптические с эксцентриситетом  $e_1$ , средним передаточным отношением  $n_1$ , а колеса 3, 4 — эллиптические, соответственно —  $e_2$  и  $n_2$ , формулы функции положения и передаточного отношения примут вид

$$\varphi_8 = \frac{2}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e_1}{1-e_1} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) (u_{85}^H - 1) \varphi_1 - \frac{2}{n_2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e_2}{1-e_2} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) u_{85}^H \varphi_1;$$

$$u_{81} = \frac{1}{n_1} \frac{(1-e_1^2)(u_{85}^H - 1)}{1+e_1^2 - 2e_1 \cos \varphi_1} - \frac{1}{n_2} \frac{(1-e_2^2)}{1+e_2^2 - 2e_2 \cos \varphi_1} u_{85}^H.$$

Из уравнений (7.165, 7.167) видно, что при  $u_{85}^H u_{43} > u_{21}(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$  и  $u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) > u_{85}^H u_{43}$  ведомое звено вращается в направлении вращения ведущего звена. При  $u_{85}^H u_{43} < u_{21}(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$  и  $u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) < u_{85}^H u_{43}$  ведомое звено вращается в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена. Если соблюдаются условия  $u_{85}^H u_{43} \geq u_{21}(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$  и  $u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) \geq u_{85}^H u_{43}$ , то ведомое звено совершает качательное движение. При  $u_{85}^H u_{43} = u_{21}(\varphi_1)(1+u_{85}^H)$  и  $u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) = u_{85}^H u_{43}$  ведомое звено дифференциала имеет выстой.

В дифференциальном механизме (рис. 7.47) движение от вала I—I передается: на водило Н через простой ряд некруглых колес 1, 2 и на центральное колесо 5 через простой ряд круглых колес 3, 4. Ведомым звеном механизма является центральное колесо 8 дифференциала. Колеса 5, 6, 7 и 8 — круглые.

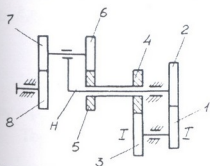


Рис. 7.47. Замкнутая дифференциальная передача

Функция положения дифференциала

$$\varphi_8 = u_{85}^H \varphi_5 - \varphi_H (u_{85}^H - 1). \quad (7.168)$$

Для простого ряда колес 1, 2 и 3, 4 зависимости между углами поворота колес имеют вид

$$\varphi_2 = \varphi_1 = - \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1,$$

$$\varphi_4 = \varphi_5 = -u_{43} \varphi_1.$$

При этом функция положения

ведомого звена дифференциала:

$$\varphi_8 = \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1 (u_{85}^H - 1) - u_{34} u_{85}^H \varphi_1$$

и функция передаточного отношения

$$u_{81} = u_{21}(\varphi_1)(u_{85}^H - 1) - u_{34} u_{85}^H. \quad (7.170)$$

Разновидность рассмотренной схемы дифференциального механизма представлена на рис. 7.48.

Здесь водило Н является ведущим. Движение передается Н через колеса 1, 2, 3, Н, на центральное колесо 5. Колеса 3, 4, 5, 6, 7, 8 – круглые, колеса 1, 2 – некруглые. Вращение снимается с вала центрального колеса 8.

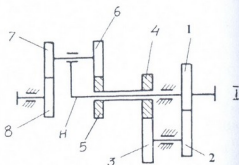


Рис. 7.48. Замкнутая дифференциальная передача

Функция положения колеса 5,  $\varphi_5 = \varphi_4 = -f(\varphi_3)$ . Колеса 2 и 3 установлены на одном валу, поэтому  $\varphi_3 = \varphi_2 = -u_{21}\varphi_1$  и  $u_5 = f(u_{21}\varphi_1)$ . Угол поворота водила  $\varphi_{II} = \varphi_1$ . Используя (7.168), функцию положения ведомого звена дифференциала представим в виде

$$\varphi_8 = u_{85}^H f(u_{21}\varphi_1) - (u_{85}^H - 1)\varphi_1. \quad (7.171)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{81} = f'(u_{21}\varphi_1)u_{85}^H - (u_{85}^H - 1). \quad (7.172)$$

Если колеса 3, 4 эллиптические, то функция положения колеса 5

$$\varphi_5 = \varphi_4 = \frac{2}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{u_{21}\varphi_1}{2} \right).$$

В этом случае функции положения и передаточного отношения дифференциала:

$$\varphi_8 = \frac{2}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{u_{21}\varphi_1}{2} \right) u_{85}^H - (u_{85}^H - 1)\varphi_1,$$

$$u_{81} = \left[ \frac{1}{n} \frac{u_{21}(1-e^2)}{1+e^2 - 2e \cos(u_{21}\varphi_1)} \right] u_{85}^H - (u_{85}^H - 1). \quad (7.173)$$



$$\varphi_4 = u_{65}u_{41}^H\varphi_1 - \int_0^{\varphi_1} u_{98}(u_{75}\varphi_1)d\varphi_1(1+u_{41}^H).$$



Функция передаточного отношения дифференциального механизма

$$u_{41} = u_{65}u_{41}^H - u_{98}(u_{75}\varphi_1)(1+u_{41}^H)u_{75}. \quad (7.174)$$

Рассмотрим случай, когда в механизме (рис. 7.49) применяются круглые колеса 1, 2, 3, 4, 8, 9 и эллиптические колеса 5, 6, 7 с одинаковым эксцентриситетом и со средним передаточным отношением, равным единице. Используя (7.55), получим функцию положения колеса 1:

$$\varphi_1 = \varphi_6 = 2\arctg\left(\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right),$$

а с учетом (7.57) – функцию положения водила:

$$\varphi_H = \varphi_9 = \varphi_8u_{98} = \varphi_7u_{98} = 2\arctg\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right]u_{98}.$$

Тогда функция положения дифференциального механизма выразится уравнением

$$\varphi_4 = 2\arctg\left(\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right)u_{41}^H - 2\arctg\left[\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}\right]u_{85}(1+u_{41}^H). \quad (7.175)$$

Функция передаточного отношения

$$u_{41} = \frac{(1-e^2)u_{41}^H}{1+e^2-2e\cos\varphi_1} - \frac{2(1-e^2)u_{98}(1+u_{41}^H)}{[(1+e)^4+(1-e)^4]-[(1+e)^4-(1-e)^4]\cos\varphi_1}. \quad (7.176)$$

Из полученной зависимости (7.174) видно, что ведомое звено дифференциала совершает вращательное движение в направлении вращения ведущего звена при  $u_{65}u_{41}^H > u_{98}(u_{75}\varphi_1)(1+u_{41}^H)u_{75}$ . Ведомое звено вращается в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена, если соблюдается условие  $u_{65}u_{41}^H < u_{98}(u_{75}\varphi_1)(1+u_{41}^H)u_{75}$ . При  $u_{65}u_{41}^H \geq u_{98}(u_{75}\varphi_1)(1+u_{41}^H)u_{75}$  ведомое звено дифференциала совершает качательное движение.

Если же удовлетворяется равенство  $u_{65}u_{41}^H = u_{98}(u_{76}\varphi_1)$ , то ведомое звено дифференциала имеет выстой.



## 7.10. Дифференциальные передачи с коническими колесами

Рассмотрим кинематику некоторых замкнутых дифференциальных механизмов с коническими колесами.

В дифференциальном механизме (рис. 7.50) вращательное движение от ведущего вала I-I передается на водило Н через некруглые колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 – через круглые колеса 3, 4. Колеса 5, 6, 7 – круглые. Ведомое звено – центральное колесо 7.

Функция положения ведомого звена при одинаковых радиусах колес 5, 6, 7 определяется зависимостью  $\varphi_7 = 2\varphi_H - \varphi_5$ . Функция положения некруглого колеса 2:  $\varphi_2 = \varphi_H = -\int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1$ . Функция положения колеса 5:  $\varphi_5 = \varphi_4 = -u_{43}\varphi_1$ . Тогда

$$\varphi_7 = u_{43}\varphi_1 - 2 \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1. \quad (7.177)$$

Функция передаточного отношения дифференциала:

$$u_{71} = u_{43} - 2u_{21}(\varphi_1). \quad (7.178)$$

Представим функцию положения некруглых колес состоящей из линейной части и нелинейной добавки. Тогда уравнение (7.177) примет вид

$$\varphi_7 = (2 - u_{43})\varphi_1 - 2\psi(\varphi_1). \quad (7.179)$$

Функция передаточного отношения:

$$u_{71} = (2 - u_{43}) - 2\psi'(\varphi_1). \quad (7.180)$$

Если колеса 1, 2 – эллиптические с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n=1$ , то функция положения ведомого звена дифференциала

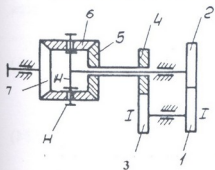


Рис. 7.50. Замкнутая дифференциальная передача

$$\varphi_7 = u_{43}\varphi_1 - \frac{4}{n} \operatorname{arctg} \left( \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Функция передаточного отношения

$$u_{71} = u_{43} - \frac{2}{n} \operatorname{arctg} \frac{(1-e^2)}{1+e^2-2e \cos \varphi_1}. \quad (7.181)$$

Формулы (7.158, 7.159) и (7.178, 7.181) имеют одинаковую структуру, поэтому дифференциальный механизм (рис. 7.50) обеспечивает выполнение тех же движений, что и дифференциальный механизм, представленный на рис. 7.42.

Рассмотрим разновидность схемы дифференциала (рис. 7.50), когда в механизме применяются эллиптические конические колеса 5, 6, 7 с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n=1$ . Колеса 1, 2, 3, 4 – круглые.

Функция положения центрального колеса 7:

$$\varphi_7 = \frac{\varphi_H [u_{57}^H(\varphi_5) + 1] - \varphi_5}{-u_{57}^H(\varphi_5)}.$$

Учитывая функцию положения водила  $\varphi_H = \varphi_2 = -u_{21}\varphi_1$  и функцию положения колеса 5,  $\varphi_5 = \varphi_4 = -u_{43}\varphi_1$ , получим функцию положения ведомого звена дифференциала:

$$\varphi_7 = \frac{u_{43} - u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]}{u_{57}(u_{43}\varphi_1)} \varphi_1. \quad (7.182)$$

Функция передаточного отношения механизма определится формулой

$$u_{71} = \frac{u_{43} - u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]}{u_{57}(u_{43}\varphi_1)}. \quad (7.183)$$

Здесь

$$u_{57}^H = \frac{2(1-e^2)u_{43}}{[(1+e)^4 + (1-e)^4] - [(1+e)^4 - (1-e)^4] \cos \varphi_1 (u_{43}\varphi_1)} \quad (7.184)$$

– передаточное отношение простого ряда эллиптических конических колес 5, 6, 7 с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n=1$ .

Из уравнения (7.183) следует, что при  $u_{43} > u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]$  ведомое звено вращается с переменной скоростью в направлении

вращения водила; при  $u_{43} < u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]$  ведомое звено вращается в направлении, противоположном направлению вращения водила; при  $u_{43} \geq u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]$ . ведомое звено совершает качательное движение, а при условии  $u_{43} = u_{21}[1 - u_{57}^H(u_{43}\varphi_1)]$  ведомое звено дифференциала имеет выстой.

С помощью рассмотренного дифференциала (рис. 7.50) можно осуществить движение от вала I-I к колесу 7 при следующих условиях: на участках  $0 \leq \varphi_1 \leq \gamma_1$  и  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \varphi_1 \leq 2\pi - \gamma_4$  — функция передаточного отношения постоянная. Так как углы поворота ведущего вала  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , при которых функция передаточного отношения остается по величине постоянной (рис. 7.51), рассматриваемый механизм является симметричным [84].

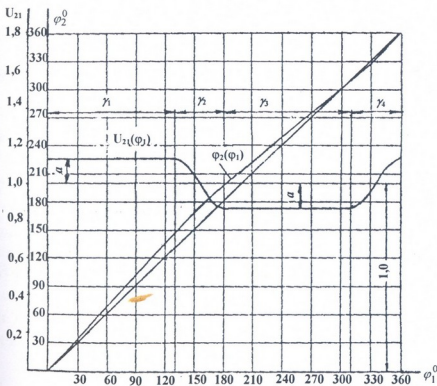


Рис. 7.51. Функции положения и передаточного отношения проектируемых некруглых колес



Среднее интегральное значение функции передаточного отношения в промежутке  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$  должно быть равно нулю. Так как за один оборот вала I-I колесо 1 должно вернуться в исходное положение. Среднее значение функции передаточного отношения запишем в виде

$$u_{\gamma_1(\varphi)} = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\gamma_1} a d\varphi_1 + \int_{\gamma_1}^{\frac{\pi}{m} + \gamma_1} \{ a \cos[m(\varphi_1 - \gamma_1)] \} d\varphi_1 + \int_{\frac{\pi}{m} + \gamma_1}^{2\pi - \frac{\pi}{m}} (-a d\varphi_1) + \int_{2\pi - \frac{\pi}{m}}^{2\pi} \{ a \cos[m(\varphi_1 - \varphi_1)] \} d\varphi_1 \right] = 0. \quad (7.185)$$

После преобразования выражения (7.185) получим

$$\gamma_1 = \pi \left( 1 - \frac{1}{m} \right), \quad m > 1. \quad (7.186)$$

Известно, что в дифференциале с круглыми коническими колесами 5, 6, 7

$$\varphi_7 = 2\varphi_H - \varphi_1.$$

Угол поворота водила Н равен углу поворота ведомого некруглого колеса 2

$$\gamma_1 = \frac{360^\circ - 2\gamma_4}{2} = 130^\circ.$$

На рис. 7.52 изображены центры некруглых колес 1, 2.

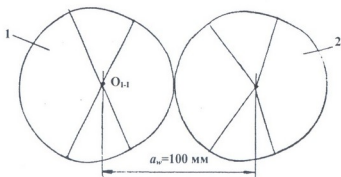


Рис. 7.52. Центроиды некруглых колес 1, 2

Функцию положения некруглых колес 1, 2 и функцию передаточного отношения выразим зависимостями, приведенными в табл. 7.8

Таблица 7.8

Участок	Пределы участка	Функция передаточного отношения	Функция положения
I	$0 \leq \varphi_1 \leq \gamma_1$	$1 + a$	$\varphi_1(1 + a)$
II	$\gamma_1 < \varphi_1 < \frac{\pi}{m} + \gamma_1$	$1 + a \cos(\varphi_1 - \gamma_1)$	$\varphi_1 + \frac{a}{m} \sin m(\varphi_1 - \gamma_1) + a\gamma_1$
III	$\frac{\pi}{m} + \gamma_1 < \varphi_1 < 2m - \frac{\pi}{m}$	$1 - a$	$\varphi_1(1 - a) + \left(\frac{\pi}{m} + 2\gamma_1\right)a$
IV	$2\pi - \frac{\pi}{m} < \varphi_1 < 2\pi$	$1 + a \cos m(2\pi - \varphi_1)$	$\varphi_1 - \frac{a}{m} \sin m(2\pi - \varphi_1)$

Среднее значение функции передаточного отношения колес 1, 2 в промежутке  $0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$  равно единице. Следовательно, за один поворот колеса 1 колесо 2 также совершит один оборот. На рис. 7.51 представлены графики функций положения и передаточного отношения проектируемых некруглых колес.

Учитывая передаточное отношение проектируемых некруглых колес выберем  $u_{43} = 2$ . Очевидно, что после поворота вала I-I на угол  $\varphi_1 = 2\pi$ , водило Н и колесо 7 совершает поворот на угол  $\varphi_H = \varphi_1 = 2\pi$ ,  $\varphi = \varphi = 4\pi$ . На основании зависимости (7.185) получим, что после поворота вала I-I на угол  $2\pi$  угол поворота вала колеса 7 окажется равным нулю.

В качестве примера примем, что величина угла поворота вала I-I соответствующего реверсу колеса 7 составляет  $\gamma_2 = \gamma_2 = 50^\circ$ . Угол поворота  $\gamma_1$ , при котором  $u_{71} = const$  (рис. 7.51), определяется из зависимости

$$\gamma_1 = \frac{360^\circ - 2\gamma_4}{2} = 130^\circ.$$

Центроиды некруглых колес 1, 2 рассчитанные при  $m = 3,6$  и  $a = 0,13$  изображены на рис. 7.52.

В дифференциальном механизме, представленном на рис. 7.53,

вращательное движение от вала I-I через колеса 4, 5 и 6, 7, 8 передается на центральные колеса 1 и 3.

Рассмотрим разновидности схемы механизма, обеспечивающие возможность получения различных видов движения ведомого звена.

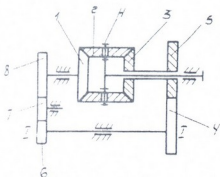


Рис. 7.53. Замкнутая дифференциальная передача

Тогда функция положения дифференциального механизма выразится формулой

$$\varphi_H = \frac{u_{86} - f_1(\varphi_1)}{2} \varphi_1,$$

а функция передаточного отношения примет вид

$$u_{H1} = \frac{u_{86} - f_1'(\varphi_1)}{2}. \quad (7.187)$$

В механизме второй разновидности колеса 1, 2, 3, 4, 5 – круглые, колеса 6, 7, 8 – некруглые. Функцию положения некруглого колеса запишем в виде  $\varphi_1 = \varphi_8 = -f_2(\varphi_7) = -f_2[-f_1(\varphi_6)] = F(\varphi_1)\varphi_1$ , а функция положения колеса 3 определится зависимостью  $\varphi_3 = \varphi_5 = -\varphi_4 u_{54} = -\varphi_1 u_{54}$ .

Тогда функция положения дифференциального механизма выразится формулой

$$\varphi_H = \frac{F(\varphi_1) - u_{54}}{2} \varphi_1.$$

Функция передаточного отношения, как производная от функции положения, примет вид

В механизме первой разновидности колеса 1, 2, 3, 6, 7, 8 – круглые, колеса 4, 5 – некруглые.

Функция положения ведомого звена Н дифференциала при  $r_1 = r_2 = r_3$  выражается формулой

$$\varphi_H = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}.$$

Функции положения колес 1 и 3:  $\varphi_1 = \varphi_8 = \varphi_6 u_{86} = \varphi_1 u_{86}$ ,

$$\varphi_3 = \varphi_5 = -f(\varphi_4)\varphi_1 = -f(\varphi_1)\varphi_1.$$

$$u_{H1} = \frac{F'(\varphi_1) - u_{54}}{2}.$$

В механизме третьей разновидности колеса 1, 2, 3 – некруглые, колеса 4, 5, 6, 7, 8 – круглые.

Функция положения ведомого звена дифференциального механизма с некруглыми коническими колесами имеет вид

$$\varphi_H = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 u_{13}^H(\varphi_1)}{u_{13}^H(\varphi_1) + 1},$$

где  $u_{13}^H(\varphi_1)$  – передаточное отношение некруглых конических колес.

Учитывая значения функции положения колес 1 и 3,  $\varphi_3 = \varphi_5 = -\varphi_1 u_{54}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1 u_{86}$ , функция положения дифференциального механизма выразится формулой

$$\varphi_H = \frac{u_{86} - u_{54} u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})}{u_{13}^H(\varphi_1 u_{86}) + 1} \varphi_1.$$

Функция передаточного отношения примет вид

$$u_{H1} = \frac{u_{86} - u_{54} u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})}{u_{13}^H(\varphi_1 u_{86}) + 1}, \quad (7.188)$$

где при эллиптических конических колесах 1, 2, 3 с эксцентриситетом  $e$  и со средним передаточным отношением  $n=1$

$$u_{13}^H(\varphi_1) = u_{13}^H(\varphi_1 u_{86}) = \frac{2(1-e^2)^2 u_{86}}{[(1+e)^4 + (1-e)^4] - [(1+e)^4 - (1-e)^4] \cos \varphi_1(\varphi_1 u_{86})}. \quad (7.189)$$

Анализ полученных формул (7.187, 7.188, 7.189) показывает, что если соблюдаются условия  $u_{86} \geq f_1'(\varphi_1)$ ,  $F'(\varphi_1) > u_{54}$ ,  $u_{86} > u_{54} u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})$ , ведомое звено вращается в направлении вращения ведущего звена; при  $u_{86} < f_1'(\varphi_1)$ ,  $F'(\varphi_1) < u_{54}$ ,  $u_{86} > u_{54} u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})$  ведомое звено вращается в направлении, противоположном направлению вращения ведущего звена; при  $u_{86} \geq f_1'(\varphi_1)$ ,  $F'(\varphi_1) \geq u_{54}$ ,  $u_{86} \geq u_{54} u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})$  ведомое звено

совершает качательное движение; при  $u_{86} = f'_1(\varphi_1)$ ,  $F'_1(\varphi_1) = u_{54}$ ,  $u_{86} = u_{54}u_{13}^H(\varphi_1 u_{86})$  ведомое звено дифференциала имеет выстой.

В дифференциальном механизме, представленном на рис. 7.54, движение от ведущего вала I-I передается на водило Н через простой ряд некруглых колес 1, 2 и на центральное колесо 5 через простой ряд круглых колес 3, 4. Колеса 5, 6, 7 и 8 – круглые. Ведомым звеном является центральное колесо 8 дифференциала.

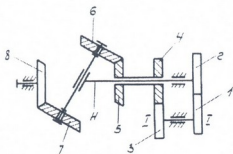


Рис. 7.54. Замкнутая дифференциальная передача

Функция положения ведомого звена дифференциала имеет вид

$$\varphi_8 = u_{85}^H \varphi_5 - (u_{85}^H - 1) \varphi_H. \quad (7.190)$$

С учетом зависимостей

$$\varphi_H = \varphi_2 = - \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1, \quad \varphi_5 = \varphi_4 = -u_{43} \varphi_1,$$

уравнение (7.190) примет следующий вид:

$$\varphi_8 = (u_{85}^H - 1) \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1 - u_{85}^H u_{43} \varphi_1. \quad (1.191)$$

Здесь  $u_{21}(\varphi_1)$  – переменное передаточное отношение некруглых колес.

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{81} = (u_{85}^H - 1) u_{21}(\varphi_1) - u_{85}^H u_{43}. \quad (7.192)$$

Рассмотрим схему дифференциала (рис. 7.54), когда в механизме применяются некруглые колеса 5, 6 и круглые колеса 1, 2, 3, 4, 7, 8. Функция положения дифференциального механизма определяется зависимостью

$$\varphi_8 = u_{87}^H (u_{87}^H - u_{21}) \int_0^{\varphi_1} u_{65}^H (u_{43} \varphi_1) d\varphi_1 - u_{21} \varphi_1, \quad (7.193)$$

а функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{81} = u_{87}^H (u_{43} - u_{21}) u_{65}^H (u_{43} \varphi_1) u_{43} - u_{21}. \quad (7.194)$$

Анализ полученных формул показывает, что если  $(u_{85}^H - 1) u_{21}(\varphi_1) > u_{85}^H u_{43}$ ,  $u_{87}^H (u_{43} - u_{21}) u_{65}^H (u_{43} \varphi_1) u_{43} > u_{21}$ , ведомое

звено дифференциала совершает непрерывное вращательное движение в направлении вращения ведущего звена  $(u_{85}^H - 1)u_{21}(\varphi_1) < u_{85}^H u_{43}$ ,  $u_{87}^H(u_{43} - u_{21})u_{65}^H(u_{43}\varphi_1)u_{43} < u_{21}$ , ведомое звено механизма совершает непрерывное вращательное движение в направлении, обратном направлению вращения водила. При  $(u_{85}^H - 1)u_{21}(\varphi_1) \geq u_{85}^H u_{43}$ ,  $u_{87}^H(u_{43} - u_{21})u_{65}^H(u_{43}\varphi_1)u_{43} \geq u_{21}$  ведомое звено совершает качательное движение. Если соблюдаются условия  $(u_{85}^H - 1)u_{21}(\varphi_1) = u_{85}^H u_{43}$ ,  $u_{87}^H(u_{43} - u_{21})u_{65}^H(u_{43}\varphi_1)u_{43} = u_{21}$ , ведомое звено имеет выстой.

### 8.1. Волновые зубчатые передачи с жесткими генераторами волн

Одноступенчатая двухволновая зубчатая передача (рис. 8.1) состоит: из жестких цилиндрических некруглых колес 1 и 2, на которых нарезаны зубья внутреннего зацепления; гибкого цилиндрического колеса 3, представляющего собой упругий тонкостенный стакан с внешними зубьями, и генератора волн; водила 4, в отверстиях которого жестко закреплены оси 5, на которых с возможностью вращения установлены сателлитные блоки некруглых роликов 6 и некруглых цилиндрических колес 7, которые оснащены зубьями наружного зацепления, находящимися в зацеплении с зубьями колеса 2. Водило 4 выполнено заодно с ведущим валом 9. Гибкое колесо жестко связано с ведомым валом 10. Колеса 1 и 2 закреплены в неподвижном корпусе 8. Некруглые колеса 7 и ролики 6 имеют центроид одинаковой формы и выполнены взаимно сопряженными с колесами 2 и 3. Радиус-векторы центроид колес 1, 2, 7 и роликов 6 представляют собой функцию передаточного отношения. В качестве центроид колес 1, 2, 7 и роликов 6 возможно использовать симметричные, несимметричные кривые или центроиды, составленные из круглых и некруглых участков. На колесах 1, 3 нарезаны зубья с одинаковым модулем и шагом. У гибкого колеса число зубьев меньше, чем у жесткого колеса,  $z_3 < z_1$ .

Внутри жесткого колеса установим гибкое колесо так, чтобы их геометрические оси расположились соосно. При установлении внутри гибкого колеса генератора последний деформирует гибкое колесо в радиальном направлении, придавая ему форму эллипса. В местах соприкосновения роликов и гибкого колеса образуются зоны контакта зубьев колес 1, 3 (рис. 8.1, сеч. б-б). Зубья колес 7 входят в зацепление с зубьями колеса 2 (рис. 8.1, сеч. а-а). По малой оси эллипса колеса 1 зубья колес 1, 3 зацепляются на полную высоту, по большой оси эллипса колеса 1 между вершинами зубьев колес 1, 3 образуется радиальный зазор (рис. 8.1, сеч. б-б).

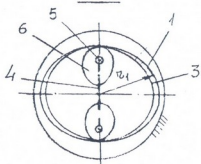
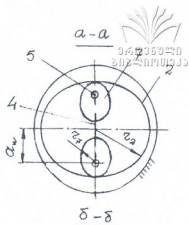
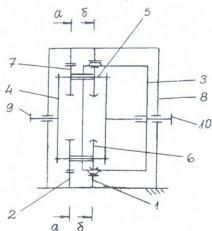


Рис. 8.1. Одноступенчатая двухволновая передача

Валу 9 (водицу 4) сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Совершая переносное и относительное движения, колеса 7 обкатываются по колесу 2, а ролики 6 – по внутренней поверхности гибкого колеса 3, вызывая его деформирование и зацепление зубьев колес 3 и 1. При переносном движении водила деформация колеса 3 перемещается в качестве бегущей волны.

Для определения передаточного отношения воспользуемся формулой Виллиса, согласно которой

$$u_{31}^4 = \frac{\omega_3 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4}. \quad (8.1)$$

При неподвижном колесе 1 и вращающемся генераторе волн передача становится планетарной, тогда

$$u_{31}^4 = 1 - \frac{\omega_3}{\omega_4} = 1 - u_{34}^1, \quad (8.2)$$

или

$$u_{34}^1 = 1 - u_{31}^4 = 1 - \frac{r_1}{r_3} = -\frac{r_1 - r_3}{r_3}, \quad (8.3)$$

где  $r_1 = r_2 = a_w + r_7$  – радиус-вектор центроид делительных кривых колес 1,2;  $a_w$  – межосевое расстояние колес 7, 2 и 7,1;



$$a_w = a \left( \sqrt{1 - (1 - e^2)(1 - n^2)} - 1 \right),$$

$a$  – половина длины большой полуоси эллиптической центроиды колеса 7;  $n$  – среднее передаточное отношение некруглой зубчатой передачи в простом ряду, для колес 7,2 и 7,1  $n = 2$ ;  $r_7$  – радиус-вектор центроиды колеса 7:

$$r_7 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi_7}; \quad (8.5)$$

$\varphi_7$  – угол поворота колеса 7;  $e$  – эксцентриситет эллипса;  $r_3$  – радиус делительной окружности гибкого колеса.

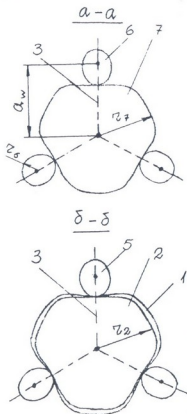
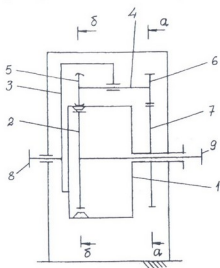


Рис. 8.2. Одноступенчатая трехволновая передача

Одноступенчатая трехволновая зубчатая передача (рис. 8.2) состоит из неподвижно закрепленного гибкого цилиндрического колеса 1 с внутренними зубьями, жесткого некруглого колеса 2 с наружными зубьями и водила 3. На концах свободно вращающихся осей 4 водила жестко закреплены некруглые цилиндрические ролики 5 и колеса 6, наружные зубья которого находятся в зацеплении с наружными зубьями некруглого колеса 7, закрепленного неподвижно. Число зубьев колеса 2

меньше числа зубьев колеса 1. Радиус-векторы центровид колес 2, 6, 7 и роликов 5 представляют собой функцию передаточного отношения. Колеса 6 и ролики 5 имеют центрыиды одинаковой формы.

В процессе работы ведущий вал 8 приводит во вращение с постоянной угловой скоростью водило 3. Совершая переносное и относительное движения, колеса 6 обкатываются по колесу 7, а ролики 5 – по наружной поверхности колеса 1, обеспечивая зацепление зубьев колес 1, 2 и перемещая волну деформирования по гибкому колесу. Передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{89}^1 = -\frac{r_1 - r_2}{r_2}, \quad (8.6)$$

где:  $r_2 = r_7 = a_w - r_6$ ;  $a_w$  – межосевое расстояние колес 6, 7:

$$a_w = a \left[ 1 + \sqrt{1 - (n^2 - 1)(1 - e^2)} \right]; \quad (8.7)$$

$r_6$  – радиус-вектор центраиды колеса 6:

$$r_6 = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \varphi_6}, \quad (8.8)$$

$\varphi_6$  – угол поворота колеса 6;  $n = 3$ .

Передача (рис. 8.3) состоит из двух последовательно соединенных ступеней волновых передач (рис. 8.1), где некруглые колеса 1, 2, 3 с внутренними зубьями закреплены неподвижно. С зубьями колес 2, 3 в зацеплении находятся наружные зубья гибких колес 4, 5, а с зубьями колеса 1 – зубья некруглых колес 8, закрепленных жестко на втулках, которые свободно вращаются на осях 7, закрепленных неподвижно на водиле 6. На втулках жестко закреплены также некруглые ролики 9, которые находятся в контакте с внутренним диаметром гибкого колеса 4. Гибкое колесо 4 жестко закреплено на валу 10, который с возможностью вращения установлен в подшипнике 11. На валу 10 жестко закреплено также водило 12, на концах которого неподвижно установлены осики 13. На осиках установлены свободно вращающиеся некруглые ролики 14, находящиеся в контакте с внутренней поверхностью гибкого колеса 5. Ведущим является вал 15, ведомым – вал 16. Корпус 17 закреплен неподвижно. Радиус-

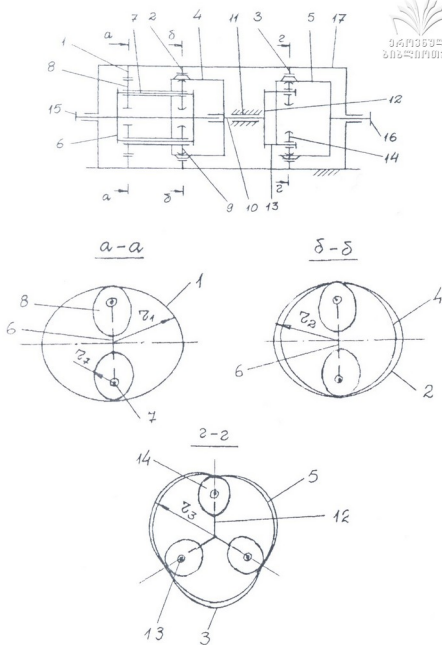


Рис. 8.3. Двухступенчатая передача

векторы колес 1, 2, 3, 8 и роликов 9, 14 являются функциями передаточного отношения. Центроиды колес 1, 2, 3 могут иметь одинаковые или неодинаковые формы. Центроиды колес первой ступени могут быть круглыми, а второй ступени некруглыми,

составлены из одинаковых или разных кругло-некруглых участков. Количество зон зацепления зубьев ступеней может быть одинаковым или неодинаковым, зоны зацепления зубьев ступеней могут быть расположены на одноименных или разноименных осях симметрии колес 1, 2, 3. Для передачи (рис. 8.3) первая ступень двухволновая (рис. 8.3, сеч. б-б), вторая – трехступенчатая (рис. 8.3, сеч. г-г).

Валу 15 сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Совершая переносное и относительное движения, колеса 8 и ролики 9 обкатываются, соответственно, по колесу 1 и внутреннему диаметру гибкого колеса 4, вызывая его деформирование и зацепление зубьев колес 4, 2. При переносном движении водила деформация колеса 4 перемещается в качестве бегущей волны; вал 10, водило 12 совершают вращательное движение. При переносном движении водила 12 ролики 14 обкатываются по внутренней поверхности колеса 5, вызывая его деформирование и зацепление зубьев колес 5, 3. При переносном движении водила деформация колеса 5 перемещается в качестве бегущей волны; вал 16 совершает вращательное движение.

Передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{15.16}^{2(3)} = \frac{r_4 r_5}{(r_2 - r_4)(r_3 - r_5)}, \quad (8.9)$$

где  $r_4, r_5$  – делительные радиусы колес 4,5;  $r_2 = r_3 = r_1 = a_w + r_8$  – радиус-векторы центроид делительных кривых колес 1, 2, 3;  $a_w$  – межосевое расстояние колес 8,1; 8,2 и 8,3 определяются зависимостью (8.4),  $a$  – половина большой полуоси эллиптической центроиды колес 8;  $e$  – эксцентриситет эллипса;  $n$  – среднее передаточное отношение некруглой зубчатой передачи в простом ряду: для колес 8,1; 8,2 –  $n = 2$ , для колес 8,3 –  $n = 3$ .  $r_8$  – радиус-вектор центроиды колеса 8 определяется уравнением (8.5), где индекс 7 для радиус-вектора и угла поворота колеса надо заменить на 8. При  $r_4 = r_5$  и  $r_2 = r_3$  формула (8.9) принимает вид

$$u_{15.16}^{2(3)} = \frac{r_4^2}{(r_2 - r_4)^2}. \quad (8.10)$$

Одноступенчатая двухволновая торцевая зубчатая передача (рис. 8.4) состоит из: неподвижно закрепленного жесткого конического колеса 1 с внешними прямыми зубьями, у которого угол  $\delta_1$  делительного конуса переменный; гибкого колеса 2, изготовленного в виде плоского тонкостенного диска с торцевыми зубьями, и водила 3, на концах которого, с возможностью вращательного движения, установлены блоки с некруглыми коническими роликами 4 и коническими колесами 5 с внешними зубьями, у которых угол  $\delta_5$  переменный. Зубья колес 5 находятся в зацеплении с зубьями колеса 1. Угол между геометрическими осями колес 1,5  $\Sigma = \delta_1 + \delta_5$ . Углы  $\delta_1, \delta_2$  представляют собой функцию передаточного отношения. В качестве аксоидов некруглых колес и роликов могут быть использованы: симметричные, несимметричные некруглые конусы или конусы, составленные из кругло-некруглых аксоидов.

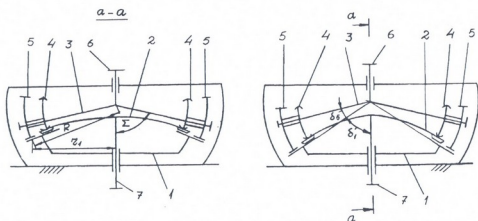


Рис. 8.4. Одноступенчатая торцевая передача

Сообщим водилу 3 вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Совершая переносное и относительное движения, колеса 5 обкатываются по колесу 1, а ролики 4 – по наружной поверхности колеса 2, перемещая волну деформирования по гибкому колесу, обеспечивая зацепление зубьев колес 2,1 и вращательное движение вала 7. Передаточное отношение определяется формулой

$$u_{32}^1 = \frac{1}{1 - u_{21}^3} = -\frac{r_2}{r_1 - r_2},$$



где:  $r_2$  – радиус делительной окружности колеса 2;  $r_1 = \frac{R}{\sin \delta_1}$ ;  $R$  – конусное расстояние;  $\delta_1 = \Sigma - \delta_5$  – угол делительного некруглого конуса колеса 1;  $\delta_5 = \arctg \frac{u_{51}(\varphi_5) + \cos \Sigma}{\sin \Sigma}$  – угол делительного некруглого конуса колеса 5;  $u_{51}(\varphi_5)$  – функция передаточного отношения колес 5,1;  $\varphi_5$  – угол поворота колеса 5.

Двухступенчатая торцевая зубчатая передача (рис. 8.5) состоит из: последовательно соединенных торцевых волновых передач (рис. 8.4), где жесткие колеса 1, 2 с наружными прямыми зубьями и переменными делительными углами  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  закреплены неподвижно; гибких колес 3, 4, изготовленных в виде тонкостенных плоских прямозубых колес, жестко закрепленных на концах вала 5, который с возможностью вращения вмонтирован в подшипник. На концах ведущего 6 и ведомого 7 водил, с возможностью вращательного движения, установлены блоки с некруглыми роликами и коническими колесами 8,9 и 10,11. На колесах 9, 11 нарезаны внешние прямые зубья. Углы:  $\delta_1$ ,  $\delta_9$ ;  $\delta_2$ ,  $\delta_{11}$  представляют собой функции переменного передаточного отношения. В качестве аксоидов колес 1, 2, 9, 11 и роликов 8, 10 могут быть использованы: для первой ступени круглые, для второй ступени некруглые конусы или кругло-некруглые конусы; симметричные, несимметричные некруглые конусы; некруглые конусы одинаковой или различной формы; конусы с кругло-некруглыми аксоидами.

Сообщим водилу 6 вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Совершая переносное и относительное движения, колеса 9 обкатываются по колесу 1, а ролики 8 – по наружной поверхности колеса 3, перемещая волну деформирования по гибкому колесу, обеспечивая зацепление зубьев колес 9, 1 и вращательное движение вала 5 и гибкого колеса 4. При переносном движении водила 6 деформация колеса 3 перемещается в качестве бегущей волны, вал 5 и колесо 4 совершают

вращательное движение. Вращательное движение колеса 4 вызывает перекаатывание роликов 10 и колес 11 соответственно по колесам 4, 2 и вращательное движение водила 7. Перекаатывание роликов 10 по колесу 4 вызывает его деформирование и зацепление зубьев колес 4, 10. При переносном движении водила 7 деформирование колеса 4 перемещается в качестве бегущей волны.

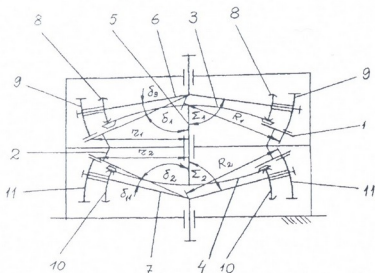


Рис. 8.5. Двухступенчатая торцевая передача

Передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{67}^{(2)} = \frac{r_3 r_4}{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}, \quad (8.12)$$

где  $r_3, r_4$  – делительные радиусы колес 3, 4;  $r_1 = R_1 \sin \delta_1$ ,  $r_2 = R_2 \sin \delta_2$  – радиус-векторы образующих аксоидов колес 1, 2;  $R_1, R_2$  – конусное расстояние зубчатых передач 9, 1 и 11, 2;  $\delta_1 = \Sigma_1 - \delta_9$  – угол делительного некруглого конуса колеса 1;  $\Sigma_1$  – угол между геометрическими осями колес 9, 1;  $\delta_9 = \text{arccctg} \frac{u_{91}(\varphi_9) + \cos \Sigma_1}{\sin \Sigma_1}$  – угол делительного некруглого конуса колеса 9;  $u_{91}^1(\varphi_9)$  – функция передаточного отношения колес 9, 1;  $\varphi_9$  – угол поворота некруглого колеса 9;  $\delta_2 = \Sigma_2 - \delta_{11}$  – угол



делительного некруглого конуса колеса 2;  $\Sigma_2$  – угол между геометрическими осями колес 11, 2;  $\delta_{11} = \text{arccctg} \frac{u_{11,2}(\varphi_{11}) + \cos \Sigma_2}{\sin \Sigma_2}$  – угол

делительного некруглого конуса колеса 11;  $u_{11,2}(\varphi_{11})$  – функция передаточного отношения колес 11, 2;  $\varphi_{11}$  – угол поворота некруглого колеса 11.

При:  $r_1 = r_2$ ;  $r_3 = r_4$ ;  $\delta_9 = \delta_{11}$ ;  $\delta_1 = \delta_{12}$ ;  $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ;  $R_1 = R_2$  и  $u_{91}(\varphi_9) = u_{11,2}(\varphi_{11})$ , формула (8.12) принимает вид

$$u_{67}^{1(2)} = \frac{r_3^2}{(r_1 - r_3)^2}. \tag{8.13}$$

Двухступенчатая двухволновая (рис. 8.6, 8.8) и четырехволновая (рис. 8.7) зубчатые передачи состоят из: жестких колес 1, 2, 3, гибкого колеса 4, которое представляет собой цилиндрическое кольцо с двумя рядами зубчатых венцов 5,6 с внутренними (рис. 8.6), наружными (рис. 8.7), наружными-внутренними (рис. 8.8) зубьями, и водила 7, на осях которого, с возможностью вращательного движения, установлены блоки с некруглыми цилиндрическими колесами 8 и роликами 9. Зубья венцов 5,6 находятся в зацеплении с наружными (рис. 8.6), внутренними (рис. 8.7), внутренними-наружными (рис. 8.8) зубьями колес 1,2. Зоны зацепления зубьев венцов 5, 6 и колес 1,2 сдвинуты относительно друг друга на  $90^\circ$  (рис. 8.8). Колеса 1, 3 закреплены неподвижно. Зубья колес 8 находятся в зацеплении с наружными (рис. 8.6), внутренними (рис. 8.7, 8.8) зубьями колес 3. Ролики 9 находятся в контакте с наружной (рис. 8.6), внутренними (рис. 8.7, 8.8) поверхностями гибких колес. Вал 10 – ведущий, вал 11 – ведомый.

При вращении вала 10, водила 7 – совершая переносное и относительное движения, колеса 8 и ролики 9 обкатываются по колесам 3 и по наружной (рис. 8.6), внутренней (рис. 8.7, 8.8) поверхностям гибких колес, вызывают их деформирование, зацепление зубьев венцов 5,6 и колес 1, 2. При переносном движении водила деформация гибких колес перемещается в качестве бегущей волны.



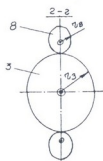
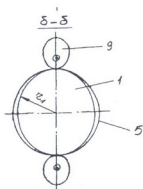
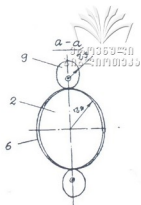
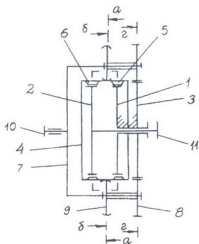


Рис. 8.6. Двухступенчатая двухволновая передача

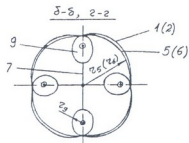
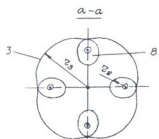
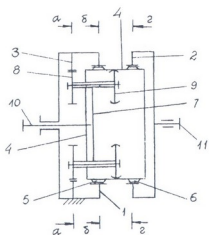


Рис. 8.7. Двухступенчатая четырехволновая передача

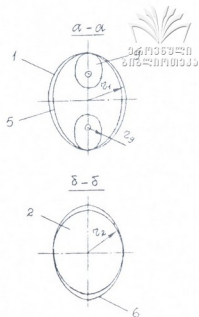
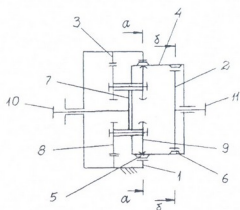


Рис. 8.8. Двухступенчатая двухволновая передача

Для рассматриваемых передач передаточное отношение определяется из выражения

$$u_{10,11}^I = \frac{r_2 r_5}{r_2 r_3 - r_1 r_6}, \quad (8.14)$$

где  $r_1, r_2$  – радиус-векторы центроид делительных кривых колес 1, 2;  $r_5, r_6$  – делительные радиусы колес 5, 6.

Анализ формул (8.3, 8.6, 8.9, 8.10, 8.11, 8.12, 8.13, 8.14) показывает, что при определенном подборе центроид некруглых колес, при постоянной скорости вращения ведущего вала ведомый вал может совершать вращательное движение с переменной скоростью: в направлении вращения ведущего вала, против направления вращения ведущего вала; качательное или, качательно-вращательное движения. При этих движениях ведомый вал может иметь выстой.

## 8.2. Волновой зубчатый дифференциал

Если в рассматриваемых волновых передачах жестким, гибким колесам и водилу сообщим вращательное движение, получим дифференциальную волновую передачу с переменным

передаточным отношением. Любые два звена дифференциала соединим с ведущим валом, получим замкнутую дифференциальную передачу.

Рассмотрим схему волновой передачи (рис. 8.9). Коэффициент деформирования центроид 1, 2, вместо  $k=2$ , примем  $k=4$ . При этом двухволновая передача превратится в четырехволновую передачу. После этого с ведущим валом I-I соединим колеса 1, 2 с некруглыми цилиндрическими колесами 11, 12, а водило 4 соединим с валом I-I круглыми цилиндрическими колесами 13, 14 (рис. 8.9).

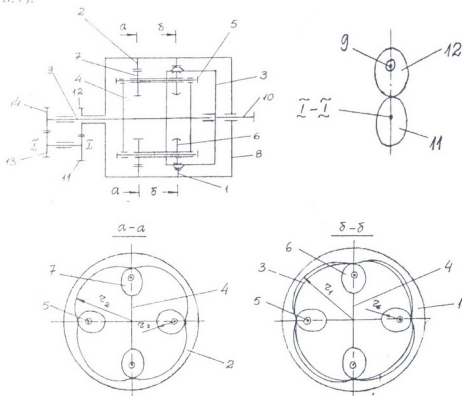


Рис. 8.9. Волновой дифференциал

Валу I-I сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. От вала I-I через колеса 13, 14 водилу 4 передается вращательное движение с постоянной угловой скоростью, а колесам 1,2 через колеса 11, 12 – с переменной угловой скоростью. Суммарное движение снимается с вала 10 гибкого колеса 3.

Согласно формуле Виллиса, передаточное отношение дифференциала

$$u_{31}^4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{\varphi_1 - \varphi_4}, \quad (8.15)$$

а функция положения ведомого вала

$$\varphi_3 = u_{31}^4 \varphi_1 + (1 - u_{31}^4) \varphi_4. \quad (8.16)$$

Функция положения жесткого колеса 1 определяется зависимостью

$$\varphi_1 = \varphi_{12} = -f(\varphi_{11})\varphi_1 = -f(\varphi_1)\varphi_1, \quad (8.17)$$

а функция положения водила 4 –

$$\varphi_4 = \varphi_{14} = -u_{13.14}\varphi_{13} = -u_{13.14}\varphi_1. \quad (8.18)$$

Тогда для функции положения и передаточного отношения дифференциала получим выражения:

$$\varphi_3 = \frac{r_1 - r_3}{r_3} u_{13.14} \varphi_1 - \frac{r_1}{r_3} f(\varphi_1) \varphi_1; \quad (8.19)$$

$$u_{31} = \frac{r_1 - r_3}{r_3} u_{13.14} - \frac{r_1}{r_3} f'(\varphi_1), \quad (8.20)$$

где  $f(\varphi_1)$ ,  $f'(\varphi_1)$  – функции положения колеса 12 и передаточного отношения колес 11, 12;  $r_1$  – радиус-вектор колеса 1;  $r_3$  – радиус делительной окружности колеса 3.

При вращении вала I–I с постоянной скоростью вал 10 совершает следующие движения: при  $[(r_1 - r_3)/r_3] u_{13.14} > (r_1/r_3) f'(\varphi_1)$  – вращается с переменной скоростью в направлении вращения вала I–I; при  $[(r_1 - r_3)/r_3] u_{13.14} < (r_1/r_3) f'(\varphi_1)$  – вращается с переменной скоростью против направления вращения вала I–I; при  $[(r_1 - r_3)/r_3] u_{13.14} = (r_1/r_3) f'(\varphi_1)$  имеет выстой; при  $[(r_1 - r_3)/r_3] u_{13.14} \geq (r_1/r_2) f'(\varphi_1)$  – совершает качательное движение с переменной скоростью; при  $[(r_1 - r_3)/r_3] \times u_{13.14} \geq (r_1/r_3) f'(\varphi_1)$  и  $[(r_1 - r_3)/r_3] u_{13.14} \leq (r_1/r_3) f'(\varphi_1)$  – совершает качательное движение с переменной скоростью с остановками.

### 8.3. Волновые передачи с гибкими генераторами волн



При износе поверхностей качения некруглых роликов и гибких колес жесткие генераторы волн не смогут обеспечить нормальное зацепление зубьев гибких и жестких колес на полную рабочую высоту, что отрицательно повлияет на работоспособность передач. Поэтому возникает необходимость использования гибких генераторов волн. При использовании гибких генераторов волн отпадает необходимость использования дополнительных некруглых центральных сателлитных колес и роликов, что намного упрощает конструкции волновых передач. Кроме этого, при износе поверхностей качения круглых роликов, шариков и гибких колес гибкие генераторы волн автоматически обеспечат зацепление зубьев гибких и жестких колес на полную рабочую высоту зубьев.

Рассмотрим некоторые вышеприведенные схемы волновых передач с гибкими генераторами волн.

Волновая зубчатая передача (рис. 8.10) состоит из: жесткого некруглого цилиндрического колеса 1 с зубьями внутреннего зацепления, закрепленного неподвижно; гибкого колеса 3 с зубьями внешнего зацепления и водила 2, в цилиндрических отверстиях которого (рис. 8.11), с возможностью осевого перемещения, вставлены цилиндры 4, 5, в которых размещены пружины 6. На неподвижных осях 7 цилиндров 4, с возможностью вращательного движения, установлены шарикоподшипники или шарики 8 (рис. 8.11, Б) (в случае использования шариков отсутствует необходимость использования осиков 7). В цилиндрах 4 завинчены винты 9 с возможностью перемещения в продольных призматических пазах водила. С целью регулирования силы сжатия пружин 6 в водиле завинчены винты 10.

При вращении водила ролики (шарики) обкатываются по внутренней поверхности гибкого колеса. По мере увеличения – уменьшения радиус-векторов жесткого колеса, пружины, растягивая – сжимая деформируют гибкое колесо и обеспечивают зацепление зубьев гибкого и жесткого колес. При переносном движении водила деформация гибкого колеса перемещается в

качестве бегущей волны. Передаточное отношение определяется по формуле (8.3).

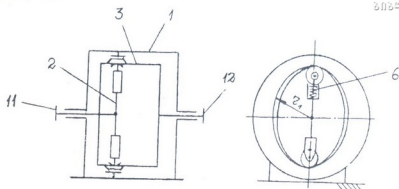


Рис. 8.10. Одноступенчатая передача

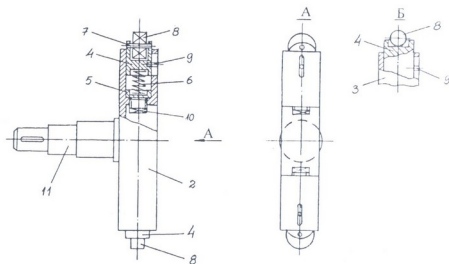


Рис. 8.11. Гибкий генератор волн

Одноступенчатая двухволновая торцевая зубчатая передача (рис. 8.12) состоит из: неподвижно закрепленного жесткого конического колеса 1 с наружными зубьями, у которого угол делительного конуса переменный; гибкого колеса 2, изготовленного в виде тонкостенного плоского зубчатого колеса с торцовыми зубьями, и водила 3 с гибкими генераторами волн.

В процессе работы, совершая вращательное движение с постоянной скоростью, водило 3, шарики 8 (рис. 8.11, Б) обкаты-

ваются по наружной поверхности гибкого колеса. По мере уменьшения-увеличения угла делительного конуса колеса 1 пружины 6, сжимаемая-растягивая вызывают деформирование гибкого колеса и зацепление зубьев колес 2, 1. При переносном движении водила 3 деформация гибкого колеса перемещается в качестве бегущей волны. Передаточное отношение определяется формулой (8.11).

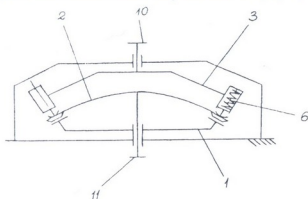


Рис. 8.12. Одноступенчатая торцевая передача

Двухволновая зубчатая передача (рис. 8.13) состоит из: неподвижно закрепленного гибкого колеса 1 с зубьями внутреннего зацепления; жесткого некруглого колеса 2 с зубьями внешнего зацепления и водила 3 с гибкими генераторами волн. Принцип работы передачи аналогичен принципу работы волновой передачи (рис. 8.10). Передаточное отношение определяется по формуле (8.6).

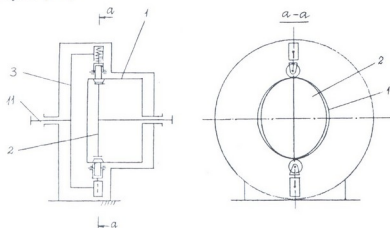


Рис. 8.13. Одноступенчатая передача

## 8.4. Волновые вариаторы



Одноступенчатый фрикционный волновой вариатор (рис. 8.14) состоит из электродвигателя 1, который цилиндрической зубчатой передачей 2 связан с корпусом 3. Корпус 3 с возможностью вращения вмонтирован в подшипниках 4, 5. В корпусе 3, с возможностью перемещения по стрелке «Б», вставлен вал 6, на котором жестко закреплены конические колеса 7, 8. В корпусе 3, с возможностью вращательного движения, размещены конические колеса 9, 10. Колесо 9 жестко закреплено на цапфе винта 11 правого направления, левая цапфа которого, с возможностью вращения, вмонтирована в корпусе 3, а правая цапфа расположена в

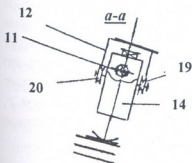
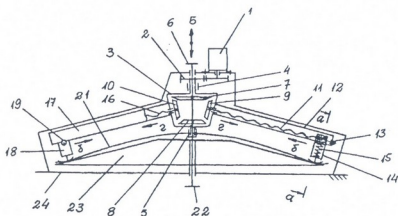


Рис. 8.14. Одноступенчатый вариатор

направлении. Левая цапфа винта 16 вмонтирована в подшипнике коробки 17, которая прикреплена к корпусу 3. На винте 16, с возможностью перемещения вдоль винта, установлен цилиндр 18

подшипнике 13 коробки 12, которая прикреплена к корпусу 3. На винте 11, с возможностью перемещения вдоль винта, установлен цилиндр 14 генератора волн, который снабжен резьбой правого направления. В цилиндре размещены пружина 15 сжатия-растяжения, шарики и другие элементы гибкого генератора волн. Колесо 10 жестко закреплено на правой цапфе винта 16 правого





генератора волн, который снабжен резьбой правого направления. В цилиндрах размещены элементы генератора волн. В цилиндрах завинчены оси, на которых, с возможностью вращательного движения, установлены ролики 19, 20 (рис. 8.14, сеч. а-а), которые ограничивают вращательное движение цилиндров при их перемещении вдоль винтов 11, 16. Шарики генераторов волн сопряжены с поверхностью гибкого фрикционного торцового диска 21, вал 22 которого, с возможностью вращения, вставлен в отверстие жесткого конического фрикционного колеса 23, закрепленного неподвижно. Передача размещена в коробке 24, закрепленной неподвижно.

Перед началом работы генераторы волн необходимо разместить в концах винтов 11, 16 (или около корпуса 3).

От электродвигателя 1, через зубчатую передачу 2, корпусу 3 передается вращательное движение по направлению вращения часовой стрелки. При этом шарики генератора волн, обкатываясь по наружной поверхности гибкого колеса 21, вызывают его деформирование, которое перемещается в качестве бегущей волны. Валу 22 сообщается вращательное движение с постоянной угловой скоростью. После этого валу 6 сообщим перемещение вниз по стрелке Б. При этом зубья колеса 7 входят в зацепление с зубьями колес 9, 10. Колеса 9, 10, обкатываясь по колесу 7, винтам 11, 16 сообщают вращательное движение вокруг своих осей. При этом генераторы волн перемещаются по направлениям  $\delta$ ,  $\delta$  и размещаются около корпуса 3. После этого валу 6 сообщим перемещение вверх по стрелке Б. При этом зубья колеса 8 входят в зацепление с зубьями колес 9, 10. Колеса 9, 10, обкатываясь по колесу 8, сообщают винтам 11, 16 вращательное движение вокруг своих осей. Генераторы волн перемещаются по направлениям  $\gamma$ ,  $\gamma$ , возвращаются в исходные положения. Передаточное отношение определяется зависимостями:

$$(u_{3,21}^{23})_{\max} = -\frac{(d_{21})_{\max}}{(d_{23})_{\max} - (d_{21})_{\max}}; \quad (8.21)$$

$$(u_{3,21}^{23})_{\min} = -\frac{(d_{21})_{\min}}{(d_{23})_{\min} - (d_{21})_{\min}}, \quad (8.22)$$

где  $(d_{21})_{\max}$ ;  $(d_{21})_{\min}$ ;  $(d_{23})_{\max} = \frac{2R_{\max}}{\sin \delta}$ ;  $(d_{23})_{\min} = \frac{2R_{\min}}{\sin \delta}$

симметричный, минимальный диаметры точек контакта гибкого и жесткого колес;  $R_{\max}$ ,  $R_{\min}$  – максимальное, минимальное конусные расстояния в точках контакта колес 21, 23;  $\delta$  – делительный угол конуса колеса 23.

Диапазон регулирования

$$D = - \frac{(d_{21})_{\max} [(d_{23})_{\min} - (d_{21})_{\min}]}{(d_{21})_{\min} [(d_{23})_{\max} - (d_{21})_{\max}]} \quad (8.23)$$

Двухступенчатая волновая фрикционная передача (рис. 8.15) состоит из последовательно соединенных торцовых волновых вариаторов (рис. 8.14), где жесткие колеса 24, 25 закреплены неподвижно. Конструкция ступеней аналогична конструкции передачи (рис. 8.14), с той разницей, что в случае расположения генераторов волн 16, 19 и 32, 35 в концах винтов 14, 17 и 30, 33, направления винтовых линий винтов одинаковые, а в случае расположения генераторов волн 16, 19 в концах винтов 14, 17, а генераторы волн 32, 35 около коробки 27, направления винтовых линий винтов 14, 17 и 30, 33 противоположные.

Вариатор работает следующим образом. От электродвигателя 1 через ременную передачу 2 корпусу 3 сообщается вращательное движение с постоянной угловой скоростью по направлению вращения часовой стрелки. При этом шарики генераторов волн 16, 19, обкатываясь по наружной поверхности гибкого колеса 22, вызывают его деформирование. Вал 23 гибкого колеса 26 и генераторы волн 32, 35 совершают вращательное движение с постоянной угловой скоростью вокруг вала 6. При этом шарики генераторов волн 32, 35, обкатываясь по поверхности гибкого колеса 26, деформируют его. После этого валу 6 сообщим перемещение по направлению стрелки а направо. При этом зубья колес 7, 9 входят в зацепление с зубьями колес, соответственно 11, 12 и 28, 29. Колеса 11, 12, 28, 29, обкатываясь по колесам 7, 9, сообщают вращательное движение вокруг своих осей винтам 14, 17 и 30, 33. Генераторы волн 16, 19 и 32, 35 перемещаются вдоль осей винтов и размещаются около корпусов 3 и 27. После этого валу 6 сообщим перемещение по направлению стрелки а налево.

При этом зубья колес 8, 10 входят в зацепление с зубьями колес 11, 12 и 28, 29. Колеса 11, 12, 28, 29, обкатываясь по колесам 8, 10, сообщают вращательное движение вокруг своих осей винтам 14, 17 и 30, 33. Генераторы волн возвращаются в исходные положения.

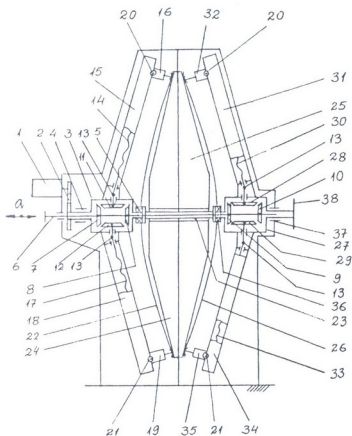


Рис. 8.15. Двухступенчатый вариатор

Передаточное отношение определяется зависимостями:

$$\left[ u_{3,27}^{24(25)} \right]_{\max} = \frac{(d_{22})_{\max} (d_{26})_{\max}}{[(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}][(d_{25})_{\max} - (d_{26})_{\max}]}; \quad (8.24)$$

$$\left[ u_{3,27}^{24(25)} \right]_{\min} = \frac{(d_{22})_{\min} (d_{26})_{\min}}{[(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}][(d_{25})_{\min} - (d_{26})_{\min}]} \quad (8.25)$$

Диапазон регулирования

$$D = \frac{[(d_{22})_{\max} (d_{26})_{\max}] \{[(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}] \times [(d_{25})_{\min} - (d_{26})_{\min}]\}}{\{[(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}] [(d_{25})_{\max} - (d_{26})_{\max}]\} \times (d_{22})_{\min} (d_{26})_{\min}}, \quad (8.26)$$

где  $(d_{22})_{\max}$ ;  $(d_{24})_{\min}$ ;  $(d_{24})_{\max} = \frac{2(R_{24})_{\max}}{\sin \delta_1}$ ;  $(d_{24})_{\min} = \frac{2(R_{24})_{\min}}{\sin \delta_1}$ ;

$(d_{25})_{\max} = \frac{2(R_{25})_{\max}}{\sin \delta_2}$ ;  $(d_{25})_{\min} = \frac{2(R_{25})_{\min}}{\sin \delta_2}$ ;  $(d_{26})_{\max}$ ;  $(d_{26})_{\min}$  –

максимальные, минимальные диаметры колес 22, 24, 25, 26 в точках их контакта;  $(R_{24})_{\max}$ ,  $(R_{24})_{\min}$ ,  $(R_{25})_{\max}$ ,  $(R_{25})_{\min}$  – максимальное, минимальное конусные расстояния в точках контакта колес 22, 24 и 25, 26;  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – делительные углы конусов колес 24, 25.

При  $(d_{22})_{\max} = (d_{26})_{\max}$ ;  $(d_{22})_{\min} = (d_{26})_{\min}$ ;  $(d_{24})_{\max} = (d_{25})_{\max}$  и  $(d_{24})_{\min} = (d_{25})_{\min}$ , формулы (8.24), (8.26) и (8.27) принимают вид:

$$[u_{3,27}^{24(25)}]_{\max} = \frac{(d_{22})_{\max}^2}{[(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}]^2}; \quad (8.27)$$

$$[u_{3,27}^{24(25)}]_{\min} = \frac{(d_{22})_{\min}^2}{[(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}]^2}; \quad (8.28)$$

$$D = \frac{(d_{22})_{\max}^2 [(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}]^2}{(d_{22})_{\min}^2 [(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}]^2}. \quad (8.29)$$

Когда генераторы волн 16, 19 расположены в концах винтов 14, 17, а генераторы волн 32, 35 – около корпуса 27; при перемещении вала 6 по направлению стрелки а направо генераторы волн 16, 19 размещаются около корпуса 3, а генераторы волн 32, 35 – удаляются от корпуса 27 и располагаются в концах винтов 30, 33. При перемещении вала 6 по направлению стрелки а налево, генераторы волн размещаются в исходных положениях.

Передаточное отношение определяется зависимостями:

$$[u_{3,27}^{24(25)}]_{\max} = \frac{(d_{22})_{\max} (d_{26})_{\min}}{[(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}] [(d_{25})_{\min} - (d_{26})_{\min}]}; \quad (8.30)$$

$$[u_{3,27}^{24(25)}]_{\min} = \frac{(d_{22})_{\min} (d_{26})_{\max}}{[(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}][(d_{25})_{\max} - (d_{26})_{\max}]} \quad (8.31)$$

Диапазон регулирования

$$D = \frac{[(d_{22})_{\max} (d_{26})_{\max}] \{[(d_{24})_{\min} - (d_{22})_{\min}] \times [(d_{25})_{\max} - (d_{26})_{\max}]\}}{\{[(d_{24})_{\max} - (d_{22})_{\max}][(d_{25})_{\min} - (d_{26})_{\min}]\} \times (d_{22})_{\min} (d_{26})_{\min}} \quad (8.32)$$

В передачах (рис. 8.14, 8.15) вместо жестких фрикционных колес возможно использовать конические торцевые или сферические колеса (рис. 8.16) с прямыми зубьями и гибкие колеса (рис. 8.17), изготовленные в виде тонкостенных торцевых дисков, на внутренней торцевой поверхности которых нарезаны прямые зубья, оснащенные V – образными концентрическими круговыми канавками. Генераторы волн 1 (рис. 8.18) снабжены двумя шариками 2.

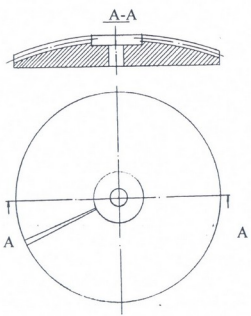


Рис. 8.16. Сферическое с прямыми зубьями жесткое колесо

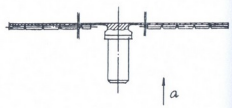


Рис. 8.17. Торцевое зубчатое гибкое колесо

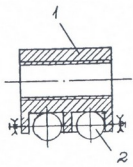


Рис. 8.18. Генератор волн

Принцип работы зубчатых волновых вариаторов аналогичен принципу работы фрикционных вариаторов (рис. 8.14, 8.15). Передаточное отношение и диапазон регулирования определяются по формулам (8.21), (8.22), (8.23), (8.24), (8.25), (8.26), (8.27), (8.28), (8.29), (8.230), (8.31), (8.32), где  $(d_{22})_{\max}$ ,  $(d_{22})_{\min}$ ,  $(d_{24})_{\max}$ ,  $(d_{24})_{\min}$ ,  $(d_{25})_{\max}$ ,  $(d_{25})_{\min}$ ,  $(d_{26})_{\max}$ ,  $(d_{26})_{\min}$  – максимальные, минимальные делительные окружности колес 22, 24, 25, 26 в точках контакта их зубьев.

### 8.5. Волновая резьбовая передача

Передача (рис. 8.19) состоит из жесткого некруглого цилиндра 1, на котором нарезана резьба, гибкой гайки 2, закрепленной неподвижно, на внутренней поверхности которой нарезана резьба, и водила 3 с гибкими генераторами волн.

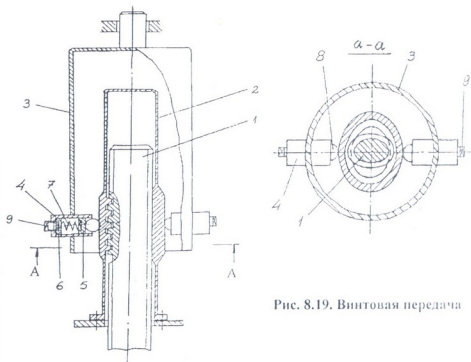


Рис. 8.19. Винтовая передача

Конструктивно возможны следующие варианты передачи:

1. На внутренней поверхности гайки нарезаны круговые, не – винтовые кольца, а на некруглом цилиндре нарезана резьба;

на внутренней поверхности гайки нарезана резьба, угол подъема которой меньше угла подъема винтовой резьбы, нарезанной на некруглом цилиндре;

2. На некруглом цилиндре и гайке нарезаны резьбы с одинаковым шагом, но с разными (правая, левая) направлениями винтовых линий.

В качестве центроид некруглого цилиндра возможно использовать симметричные, несимметричные кривые или центроиды, составленные из кругло-некруглых участков.

При вращении водила 3 с постоянной угловой скоростью шарики 8, обкатываясь по гибкой гайке 2, деформируют ее и обеспечивают зацепление боковых поверхностей круговых колец, винтовых поверхностей гайки и некруглого винта.



### 9.1. Передаточные отношения эксцентричных зубчатых колес

Плоский механизм, составленный из цилиндрического эксцентричного колеса 1 и рейки 2 (рис. 9.1) возможно использовать для преобразования вращательного движения с постоянной угловой скоростью эксцентричного колеса 1 в поступательное движение с переменной линейной скоростью рейки 2 или для преобразования поступательного перемещения рейки 2 с постоянной линейной скоростью во вращательное движение эксцентричного колеса 1 с переменной угловой скоростью.

Уравнение центрады колеса 1, как эксцентричной окружности представим в виде [75]

$$r_1 = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1, \quad (9.1)$$

где  $a$  – радиус окружности;  $e$  – эксцентриситет;  $\varphi_1$  – угол поворота эксцентричного колеса 1.

Передаточное отношение:

максимальное

$$u_{\max} = r_{1\max};$$

минимальное

$$u_{\min} = r_{1\min}. \quad (9.2)$$

Функция передаточного отношения передачи с эксцентричными цилиндрическими колесами наружного зацепления при  $n=1$  (рис. 9.2) определяется зависимостью

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}. \quad (9.3)$$

Отнесем линейные размеры к  $a$  и введем обозначения

$$d = \frac{a_w}{a}; \quad \varepsilon = \frac{e}{a}.$$

Тогда

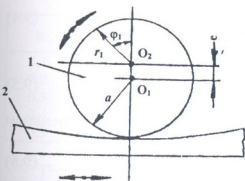


Рис. 9.1. Реечная передача

деляется зависимостью



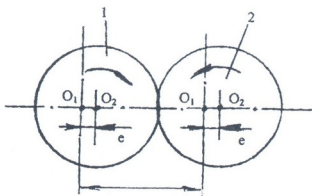


Рис. 9.2. Передача с эксцентричными цилиндрическими колесами внешнего зацепления,  $n = 1$

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{d}{d - \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1} + \varepsilon \cos \varphi_1}.$$

Передаточное отношение:  
максимальное

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{1 + \varepsilon}{d - (1 + \varepsilon)}; \quad (9.4)$$

минимальное

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{1 - \varepsilon}{d - (1 - \varepsilon)}. \quad (9.5)$$

Относительное межосевое расстояние при внешнем зацеплении определяется зависимостью [5]


$$d = (n + 1)(1 + K_1 \varepsilon^2 + K_2 \varepsilon^4 + K_3 \varepsilon^6 + K_4 \varepsilon^8 + K_5 \varepsilon^{10}), \quad (9.6)$$

где:

$$K_1 = \frac{2 - n}{4n}; \quad K_2 = \frac{1}{64n^2}(-3n^3 + 10n^2 - 4n - 8);$$

$$K_3 = \frac{1}{256n^5}(-5n^5 + 20n^4 - 20n^3 - 24n^2 + 24n + 16);$$

$$K_4 = \frac{1}{16384n^7}(-175n^7 + 754n^6 - 1172n^5 - 680n^4 + 2500n^3 + 480n^2 - 1600n - 640);$$



$$K_5 = \frac{1}{65536n^9} (-441n^9 + 1956n^8 - 3924n^7 - 120n^6 + 101097n^5 - 4144n^4 - 11688n^3 + 1792n^2 - 6272n + 1792).$$

Для облегчения расчетов в табл. 9.1 даны значения  $K_1, K_2, K_3, K_4$  и  $K_5$  для  $n=1,2,3,4,5$ .

Таблица 9.1

$n$	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$K_5$
1	0,250000	0,078125	0,042969	0,032532	0,025803
2	0,000000	0,000000	-0,003906	-0,002121	-0,001402
3	-0,083333	-0,006366	-0,004337	-0,002966	-0,002031
4	-0,125000	-0,013672	-0,009735	-0,003696	-0,002543
5	-0,150000	-0,019125	-0,007611	-0,003832	-0,002944

В таблице 9.2 представлены значения относительного межцентрового расстояния  $d$ , вычисленные по формуле (9.2) для  $n=1,2,3,4,5$  при значениях  $\varepsilon = 0,1; 0,2; \dots; 0,5$ .

Таблица 9.2

$\varepsilon$	$n$				
	1	2	3	4	5
0,1	2,00498	3,00000	3,99666	4,99375	5,99099
0,2	2,01976	3,00000	3,98663	4,97490	5,96381
0,3	2,04379	2,99999	3,96978	4,94318	5,91804
0,4	2,07632	2,99995	3,94595	4,89812	5,85286
0,5	2,11637	2,99980	3,91476	4,83870	5,76701

При нарезании зубьев эксцентричных колес методом обкатки должна быть обеспечена нелинейная зависимость между углами поворота режущего инструмента и заготовки для внешнего зацепления

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \left[ \frac{a_w}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} - 1 \right] d\varphi_1. \quad (9.7)$$

Для решения уравнения (9.7) возможно использовать метод Симпсона

$$\varphi_2 = \frac{2}{3} \Delta \varphi_1 \left[ \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) (y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) \right], \quad (9.8)$$

где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – значения подинтегрального выражения (9.7) при фиксированных значениях угла поворота инструмента  $\varphi_1$  в точках деления интеграла интегрирования.

При помощи формулы (9.7) вычислены значения углов поворота ведомого некруглого колеса 2 внешнего зацепления соответствующего значениям угла поворота ведущего эксцентричного колеса 1 через  $10^\circ$ . Полученные значения углов поворота (табл. 9.3) могут быть использованы при нарезании колес 1, 2 методом обкатки.

Радиусы делительных окружностей эксцентричных цилиндрических колес при  $n=1$  можно записать в виде [88]

$$r_1 = a + e \cos \varphi_1, \quad (9.9)$$

$$r_2 = a - e \cos \varphi_1. \quad (9.10)$$

Межосевое расстояние определяемое из (9.9, 9.10), при  $\varphi_1 = 0^\circ$  и  $\varphi_1 = 180^\circ$  равно

$$a_w = 2a, \quad (9.11)$$

при  $\varphi_1 = 90^\circ$  и  $\varphi_1 = 270^\circ$

$$a_{w1} = 2\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1}. \quad (9.12)$$

Выражения (9.11) и (9.12) показывают величину необходимого межосевого расстояния при соответствующих углах поворота ведущего колеса. Из (9.11, 9.12) видно, что при  $a_w = const$  центры зацепляющихся эксцентричных колес не могут быть круглыми.

Чтобы передача с круглыми эксцентричными колесами могла работать при  $a_w = const$ , необходимо уменьшить наружные диаметры колес на величину

$$a = a_w - a_{w1} = 2\left(a - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1}\right).$$

При этом делительные окружности рассматриваемых колес будут касаться только в двух противоположных точках, расположенных в окрестностях линии, проходящей через ось вращения колеса и перпендикулярной линии эксцентриситета. В остальных положениях колес между делительными окружностями образуется зазор  $\Delta a_w$ .

Таблица 9.3

$\varphi_1$ град	$\epsilon$																										
	0,1			0,2			0,3			0,4			0,1			0,2			0,3								
	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.	град.	мин.	сек.			
	$n = 1$												$n = 2$														
0	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00	0	00	00
10	8	9	10	6	34	10	5	13	20	4	4	30	4	17	20	3	38	30	3	3	00	2	30	20	2	30	20
20	16	21	00	13	12	20	10	31	00	8	13	20	8	33	50	7	18	50	6	8	10	5	3	00	3	3	00
30	24	36	10	19	58	30	15	57	30	12	30	50	12	56	30	11	2	40	9	17	40	7	40	30	7	40	30
40	33	3	30	26	57	00	21	37	50	17	1	50	17	20	30	14	52	10	12	34	00	10	25	10	10	25	10
50	41	39	20	34	11	50	27	37	00	21	52	00	21	47	40	18	48	50	15	39	30	13	19	50	13	19	50
60	50	28	20	41	47	40	34	1	10	27	7	40	26	21	10	22	54	40	19	36	50	16	27	50	16	27	50
70	59	32	30	49	49	00	40	56	20	32	36	30	31	00	50	27	11	30	23	28	30	19	52	40	19	52	40
80	68	34	20	58	20	40	48	29	50	39	27	40	33	47	20	31	40	50	27	37	30	23	38	10	23	38	10
90	78	35	20	67	27	10	56	49	20	46	51	30	40	41	10	36	24	20	32	6	30	27	48	20	27	48	20
100	88	36	50	77	12	30	66	2	50	55	20	10	45	42	50	41	23	10	36	37	50	32	27	20	32	27	20
110	98	39	40	87	40	40	76	18	30	65	6	40	50	52	30	46	38	20	42	13	50	37	39	20	37	39	20
120	109	44	00	98	34	00	87	43	10	76	24	30	56	10	00	52	9	50	47	33	50	43	27	20	43	27	20
130	120	48	50	110	53	10	100	22	10	89	26	00	61	35	00	57	57	50	54	4	10	49	53	10	49	53	10
140	132	13	00	123	37	10	114	17	20	104	19	10	67	6	40	64	1	00	60	38	20	56	57	00	56	57	00
150	143	53	50	137	4	50	129	25	20	121	5	30	72	44	20	70	17	00	67	33	30	64	36	10	64	36	10
160	155	48	00	151	00	40	145	36	30	139	33	30	78	26	50	76	44	40	74	32	00	72	43	30	72	43	30
170	167	51	40	165	23	50	162	35	50	159	25	40	84	12	20	83	20	00	82	22	20	81	16	50	81	16	50
180	180	00	00	180	00	00	180	00	00	180	00	00	90	00	00	90	00	00	90	00	00	90	00	00	90	00	00

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{a - e \cos \varphi_1}{a + e \cos \varphi_1} \quad (9.13)$$

Анализ численных значений полученных зависимостей (9.3) и (9.13) показывает, что функции  $u_{12}(\varphi_1)$  с достаточной степенью точности совпадают. Следовательно, для определения функций передаточного отношения можно пользоваться и выражением (9.13). Однако, для более точного исследования зацепления эксцентричных цилиндрических колес при  $n=1$  необходимо использовать выражение (9.3).

Функция передаточного отношения и угол поворота ведомого колеса передачи с эксцентричным цилиндрическим колесом 1 и некруглым колесом 2 наружного зацепления (рис. 9.3) определяются уравнениями [75]:

$$u_{12} = \frac{a_w}{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1}} - 1; \quad (9.14)$$

$$\varphi_2 = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}{\varphi_2 a_w - \sqrt{r^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1}} d\varphi_1. \quad (9.15)$$

Величины передаточного отношения будут меняться в пределах от

$$u_{\min} = \frac{1 - \varepsilon}{m - (1 - \varepsilon)}; \quad (9.16)$$

до

$$u_{\max} = \frac{1 + \varepsilon}{m - (1 + e)}, \quad (9.17)$$

где:  $m = \frac{a_w}{r}$ ;  $a_w$  — межосевое расстояние

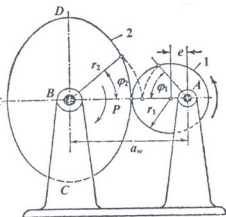


Рис. 9.3. Передача с эксцентричным и некруглым цилиндрическим колесами наружного зацепления  $n=2$

$$a_w \approx r(1+u) \left[ 1 - \frac{(u-2)\varepsilon^2}{4a} + \frac{-3u^3 + 2u^2 + 12u + 24}{64u^3} \varepsilon^4 \right]$$

$r$  – радиус круглого колеса 1,  $\varepsilon = e/r$ ;  $u$  – среднее передаточное отношение  $u = u_{12} = 1, 2, 3, 4, \dots$ ;  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота колес 1, 2.

Функция передаточного отношения и угол поворота ведомого колеса передачи с эксцентричным цилиндрическим колесом 1 и некруглым колесом 2 внутреннего зацепления (рис. 9.4) определяются уравнениями:

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{a_w + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}; \quad (9.19)$$

$$\varphi_2 = \int_0^{\varphi_1} \left[ \frac{a_w + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1}}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}} \right] d\varphi_1. \quad (9.20)$$

В передаче (рис. 9.5) колеса 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей  $A$  и  $B$ . Центр  $O$  колеса 1 расположен эксцентрично по отношению к оси вращения  $A$ . Величина эксцентриситета равна  $e$ . Радиус начальной окружности колеса 1 равен  $r_1$ . Длина центраида колеса 2 равна  $2\pi r_1$ . Центраида колеса 2 является кривой, получаемой в относительном движении колес. За полный цикл движения механизма величина среднего передаточного отношения без учета знака равна  $u_{12} = 1$ . Величина передаточного отношения будет однократно

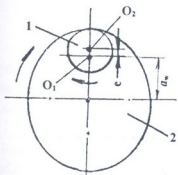


Рис. 9.4. Передача с эксцентричными и некруглыми колесами  $n = 2$

меняться в пределах:

при  $e = 0,1r$  от  $u_{\min} = 0,82$  до  $u_{\max} = 1,23$ ;

при  $e = 1/6r$  от  $u_{\min} = 0,73$  до  $u_{\max} = 1,41$ ;

при  $e = 0,2r$  от  $u_{\min} = 0,68$  до  $u_{\max} = 1,53$ ;

при  $e = 1/4r$  от  $u_{\min} = 0,63$  до  $u_{\max} = 1,71$ ;

при  $e = 0,3r$  от  $u_{\min} = 0,57$  до  $u_{\max} = 1,92$ ;

при  $e = 1/3r$  от  $u_{\min} = 0,54$  до  $u_{\max} = 2,08$  ;  
 при  $e = 0,4r$  от  $u_{\min} = 0,49$  до  $u_{\max} = 2,47$  ;  
 при  $e = 0,5r$  от  $u_{\min} = 0,42$  до  $u_{\max} = 3,25$  ;  
 при  $e = 0,6r$  от  $u_{\min} = 0,36$  до  $u_{\max} = 4,45$  ;  
 при  $e = 2/3r$  от  $u_{\min} = 0,33$  до  $u_{\max} = 5,67$  ;  
 при  $e = 0,7r$  от  $u_{\min} = 0,32$  до  $u_{\max} = 6,48$  ;  
 при  $e = 3/4r$  от  $u_{\min} = 0,30$  до  $u_{\max} = 8,13$  .

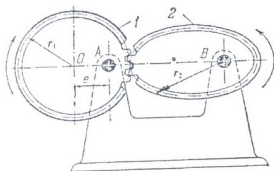


Рис. 9.5. Передача с эксцентричным и некруглым колесами  $n = 1$

В передаче (рис. 9.6) колеса 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей  $A$  и  $B$ . Центр  $O$  колеса 1 расположен эксцентрично по отношению к оси вращения  $A$ . Величина эксцентриситета равна  $e$ . Радиус начальной окружности колеса 1 равен  $r$ . Длина центроиды колеса 2 равна  $4\pi r$ . За полный цикл движения механизма величина среднего передаточного отношения без учета знака равна  $u_{12} = 2$ . Величина передаточного отношения будет двукратно меняться в пределах:

при  $e = 0,1r$  от  $u_{\min} = 0,73$  до  $u_{\max} = 2,33$  ;  
 при  $e = 1/6r$  от  $u_{\min} = 0,57$  до  $u_{\max} = 2,60$  ;  
 при  $e = 0,2r$  от  $u_{\min} = 1,50$  до  $u_{\max} = 2,75$  ;  
 при  $e = 1/4r$  от  $u_{\min} = 1,40$  до  $u_{\max} = 3,00$  ;  
 при  $e = 0,3r$  от  $u_{\min} = 1,31$  до  $u_{\max} = 3,29$  ;  
 при  $e = 1/3r$  от  $u_{\min} = 1,25$  до  $u_{\max} = 3,50$  ;

при  $e = 0,4r$  от  $u_{\min} = 1,14$  до  $u_{\max} = 4,00$  ;  
 при  $e = 0,5r$  от  $u_{\min} = 1,00$  до  $u_{\max} = 5,00$  ;  
 при  $e = 0,6r$  от  $u_{\min} = 0,88$  до  $u_{\max} = 6,50$  ;  
 при  $e = 2/3r$  от  $u_{\min} = 0,80$  до  $u_{\max} = 8,00$  ;  
 при  $e = 0,7r$  от  $u_{min} = 0,77$  до  $u_{\max} = 9,00$  ;  
 при  $e = 3/4r$  от  $u_{\min} = 0,72$  до  $u_{\max} = 11,0$  .

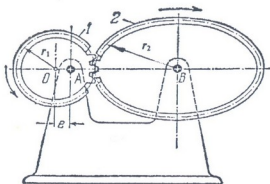


Рис. 9.6. Передача с эксцентричным и некруглым колесами,  $n = 2$

В передаче (рис. 9.7) колеса 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей  $A$  и  $B$ . Центр  $O$  колеса 1 расположен эксцентрично по отношению к оси вращения  $A$ . Величина эксцентриситета равна  $e$ . Радиус начальной окружности колеса 1 равен  $r_1$ . Длина центрады колеса 2 равна  $6\pi r$ . Центрада колеса 2 является кривой, получаемой в относительном движении колес.

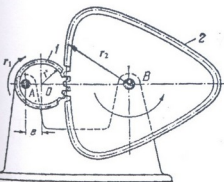


Рис. 9.7. Передача с эксцентричным и некруглым колесами  $n = 3$

За полный цикл движения механизма величина среднего передаточного отношения без учета знака равна  $u_{12} = 3$ . Величина передаточного отношения будет трехкратно меняться в пределах

при  $e = 0,1r$  от  $u_{\min} = 0,65$  до  $u_{\max} = 3,44$  ;



при  $e = 1/6r$  от  $u_{\min} = 2,42$  до  $u_{\max} = 3,79$  ;  
 при  $e = 0,2r$  от  $u_{\min} = 2,32$  до  $u_{\max} = 3,98$  ;  
 при  $e = 1/4r$  от  $u_{\min} = 2,18$  до  $u_{\max} = 4,31$  ;  
 при  $e = 0,3r$  от  $u_{\min} = 2,05$  до  $u_{\max} = 4,67$  ;  
 при  $e = 1/3r$  от  $u_{\min} = 1,97$  до  $u_{\max} = 4,94$  ;  
 при  $e = 0,4r$  от  $u_{\min} = 1,81$  до  $u_{\max} = 5,58$  ;  
 при  $e = 0,5r$  от  $u_{\min} = 1,61$  до  $u_{\max} = 6,83$  ;  
 при  $e = 0,6r$  от  $u_{min} = 1,42$  до  $u_{\max} = 8,70$  ;  
 при  $e = 2/3r$  от  $u_{\min} = 1,31$  до  $u_{\max} = 10,6$  ;  
 при  $e = 0,7r$  от  $u_{\min} = 1,26$  до  $u_{\max} = 11,8$  ;  
 при  $e = 3/4r$  от  $u_{\min} = 1,18$  до  $u_{\max} = 16,3$  .

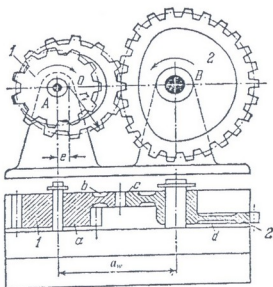


Рис. 9.8. Передача с круглыми и кругло-некруглыми колесами,  $n = 2$

В передаче (рис. 9.8) колеса 1 и 2 вращаются вокруг неподвижных осей  $A$  и  $B$ . Сдвоенное колесо 1 состоит из круглых колес  $a$  и  $b$ . Геометрический центр колеса  $a$  совпадает с осью  $A$ . Геометрический центр  $O$  колеса  $b$  имеет эксцентриситет  $e$ . Колесо 2 состоит из половины некруглого колеса  $c$  и половины круглого колеса  $d$ . За два оборота колеса 1 колесо 2 делает один оборот,

величина среднего передаточного отношения механизма. При этом, когда в зацеплении находятся части  $a$  и  $d$  колес 1 и 2, передаточное отношение  $u_{12}$  постоянно и без учета знака равно  $u_{12} = 2$ . Когда в зацеплении находятся части  $b$  и  $c$  колес 1 и 2, передаточное отношение  $u_{12}$  меняется в пределах от

$$u_{\min} = \frac{1 - \varepsilon}{m - (1 - \varepsilon)} \text{ до } u_{\max} = \frac{1 + \varepsilon}{m - (1 + \varepsilon)}. \quad (9.21)$$

Величины  $\varepsilon$  и  $m$  равны:  $\varepsilon = \frac{e}{r_1}$ ;  $m = \frac{a_w}{r_1}$ , где  $r_1$  – радиус начальной окружности колеса  $b$ ,  $a_w$  – межосевое расстояние.

Эксцентричные торцовые зубчатые передачи возможно использовать для передачи вращения с переменным передаточным отношением между параллельными валами, когда колеса вращаются в противоположных (рис. 9.9), или в одном и том же направлении (рис. 9.10).

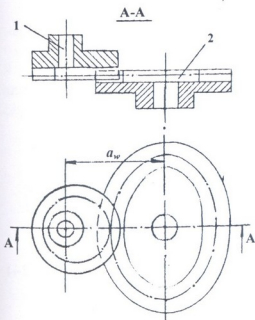


Рис. 9.9. Торцовая зубчатая передача с эксцентричным и некруглым колесом внешнего зацепления

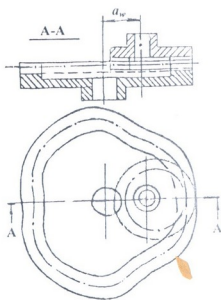


Рис. 9.10. Торцовая зубчатая передача с эксцентричным и некруглым колесом внутреннего зацепления

Функция передаточного отношения определяется:  
для наружного зацепления

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}; \quad (9.22)$$

для внутреннего зацепления

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{a_w + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}. \quad (9.23)$$

Эксцентричные конические зубчатые передачи возможно использовать для передачи вращательного движения с переменным передаточным отношением между пересекающимися осями колес, когда колеса вращаются в противоположных (рис. 9.11) или в одном и том же направлении (рис. 9.12).

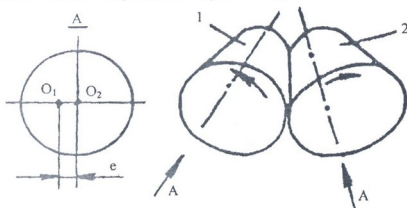


Рис. 9.11. Коническая зубчатая передача с эксцентричными колесами внешнего зацепления

Функция передаточного отношения имеет выражения:  
для наружного зацепления

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}; \quad (9.24)$$

для внутреннего зацепления

$$u_{21} = \frac{\sin(\Sigma - \delta_1)}{\sin \delta_1},$$

где  $\Sigma$  – межосевой угол;  $\delta_1 = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{R}$   
 переменный угол делительного конуса колеса 1;  $R$  – среднее конусное расстояние.

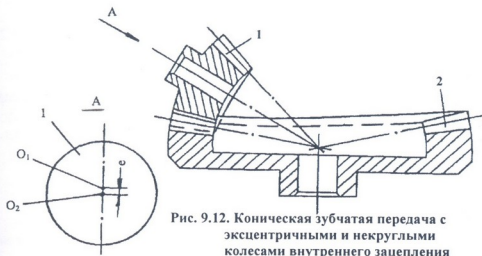


Рис. 9.12. Коническая зубчатая передача с эксцентричными и некруглыми колесами внутреннего зацепления

Червячные передачи с эксцентричными цилиндрическим червяком и червячным колесом (рис. 9.13, а); эксцентричным цилиндрическим червяком и некруглым червячным колесом (рис. 9.13, б) могут быть использованы для передачи движения с заданным законом переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями:

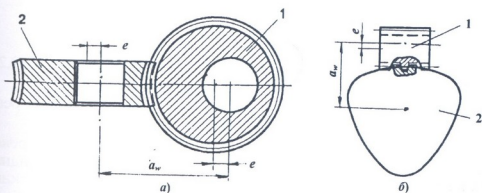


Рис. 9.13. а) Червячная передача с эксцентричными червяком и червячным колесом; б) Червячная передача с эксцентричным червяком и некруглым червячным колесом

для передачи (рис. 9.13, а)

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{a_w - r_1}{\left(\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1\right) \operatorname{tg} \lambda}; \quad (9.25)$$

для передачи (рис. 9.13, б)

$$u_{12}(\varphi_1) = \frac{a_w - r_1}{a + e \cos \varphi_1}, \quad (9.26)$$

где:  $a_w$  – межосевое расстояние;  $\lambda$  – угол подъема винтовой линии.

Винтовая зубчатая передача с эксцентричными колесами может быть использована для передачи переменного передаточного отношения между скрещивающимися осями колес (рис. 9.14). Передача состоит из эксцентричных цилиндрических колес 1, 2.

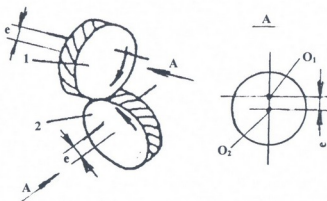


Рис. 9.14. Винтовая передача

Функция передаточного отношения имеет выражение

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{(a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1) \cos \delta_2}{(\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1) \cos \delta_1}, \quad (9.27)$$

где:  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – углы между осями вращения колес и осью относительного вращения-скольжения.

Для передачи движения с заданным законом между скрещивающимися осями колес могут быть использованы спироидные передачи с эксцентричными цилиндрическими, коническими червяками 1 и пространственными червячно-цилиндрическим 2, червячно-некруглым 2, червячно-коническим 2 колесами (рис. 9.15, 9.16, 9.17) и гипоидная передача с эксцентричными коническими колесами 1, 2 (рис. 9.18).

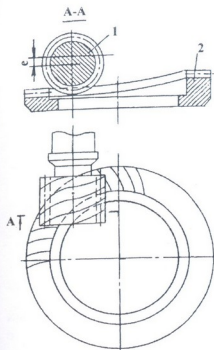


Рис. 9.15. Спироидная цилиндрическая передача

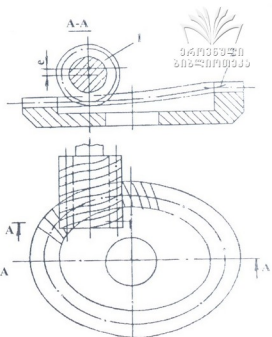


Рис. 9.16. Спироидная цилиндрическая передача

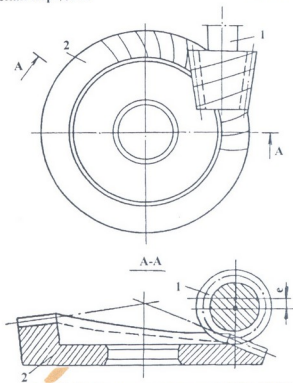


Рис. 9.17. Спироидная коническая передача

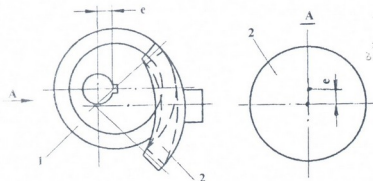


Рис. 9.18. Гипоидная передача

## 9.2. Планетарные передачи с эксцентричными цилиндрическими зубчатыми колесами

Планетарная передача (рис. 9.19) состоит из эксцентричных цилиндрических колес 1, 2 с зубьями наружного зацепления. Центральное колесо 1 закреплено неподвижно, сателлитное колесо 2 совершает переносное вращательное движение вместе с водилом Н вокруг оси 3 колеса 1 и относительное вращательное движение вокруг своей оси 4.

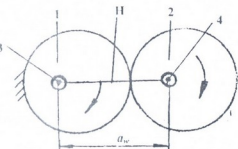


Рис. 9.19. Планетарная передача с эксцентричными круглыми цилиндрическими колесами

Функция передаточного отношения

$$u_{2H}^1 = \frac{a_w}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}, \quad (9.28)$$

$a_w$  – межосевое расстояние.

Планетарная передача (рис. 9.20) состоит из эксцентричных цилиндрических зубчатых колес 1, 2, 3 и водила Н. Центральное колесо 1 закреплено неподвижно. Подвижными звеньями являются колеса 2, 3 и водило Н. Эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e_3 = e$ .

Функция передаточного отношения

$$u_{3H}^1 = \frac{a_w^2}{a^2 - e^2 (\sin^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1) - 2e \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} \cos \varphi_1}. \quad (9.29)$$

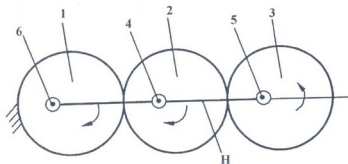


Рис. 9.20. Планетарная передача с эксцентричными круглыми цилиндрическими зубчатыми колесами

Планетарные передачи (рис. 9.21, а, б, г, д) состоят из некруглых центральных колес 1, закрепленных неподвижно, сателлитных круглых цилиндрических, эксцентричных колес 2 и водил Н. Ведущее звено – Н, ведомое звено – колеса 2.

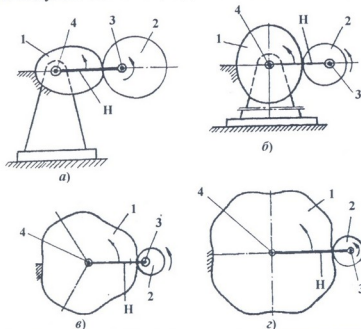


Рис. 9.21. Планетарные передачи с эксцентричными цилиндрическими зубчатыми колесами

Функция передаточного отношения определяется уравнением

$$u_{2H}^1 = 1 + \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_2}{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2} + e \cos \varphi_2} \quad (9.30)$$



Планетарные передачи (рис. 9.22, а, б, г) состоят из центральных некруглых колес 1 с внутренними зубьями, сателлитных эксцентричных цилиндрических колес 2 и водил Н. Колеса 1 закреплены неподвижно. При вращении водил Н сателлитные колеса 2 совершают вращательное движение вместе с водилами Н вокруг осей колес 1 и относительные движения вокруг осей 3.

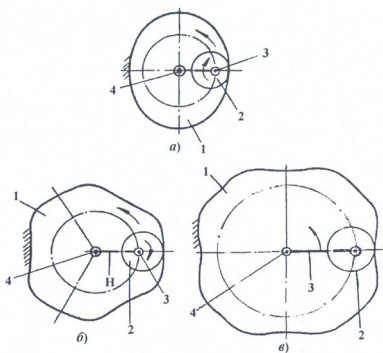


Рис. 9.22. Планетарные передачи с эксцентричными круглыми и некруглыми цилиндрическими колесами

Функция передаточных отношений имеет вид

$$u_{2H}^1 = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_2}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2} - e \cos \varphi_2 - a_w} \quad (9.31)$$

Планетарная передача состоит из двух центральных колес (рис. 9.23), эксцентричного цилиндрического колеса 1, некруглого колеса 3 и сателлитного эксцентричного цилиндрического колеса 2, находящегося в зацеплении с колесами 1 и 3. Ось сателлита 2 находится на водиле Н. Ведущее звено-вал 4 колеса 1,

ведомое вал 5 водила Н, некруглое колесо 3 неподвижно,  $a_w$  – межосевое расстояние.

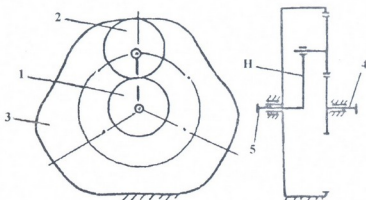


Рис. 9.23. Двухступенчатая планетарная передача с эксцентричными и некруглыми колесами

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{13}^H = \frac{a_w^2}{a^2 - e^2 (\sin^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_1) - 2\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} \cos \varphi_1}. \quad (9.32)$$

В планетарной передаче с двумя парами колес наружного зацепления возможны разные варианты сочетания эксцентричных, круглых и некруглых цилиндрических колес с зубьями наружного зацепления. Механизм, представленный на рис. 9.24, состоит из ведущего центрального круглого колеса 1, находящегося в зацеплении с круглым колесом 2 парного сателлита 2, 4. Второе колесо сателлита эксцентричное цилиндрическое колесо 4 находящегося в зацеплении с центральным эксцентричным цилиндрическим колесом 5, закрепленным неподвижно. Ведомое звено-водило Н.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{1H}^4 = 1 - \frac{u_{21}^H (a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}. \quad (9.33)$$

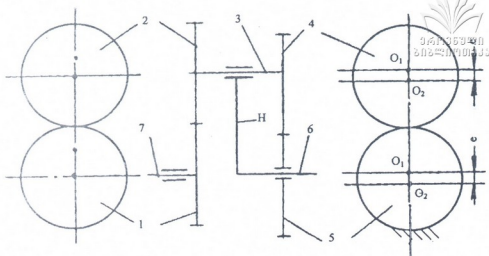


Рис. 9.24. Двухступенчатая планетарная передача

В механизме представленном на рис. 9.25, колеса 1, 2; 4, 5 эксцентричные. Эксцентриситеты  $e_1 = e_2 = e$ . Ведущее звено – вал 6 центрального эксцентричного цилиндрического колеса 1, ведомое звено вал 7 водила Н. Неподвижным звеном является центральное эксцентричное колесо 5.

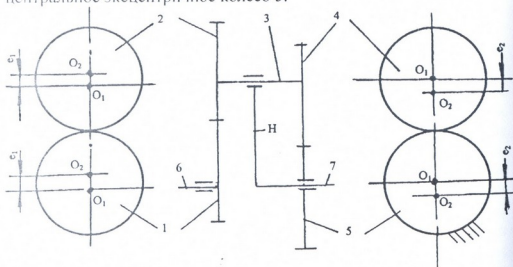


Рис. 9.25. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения планетарного ряда колес когда эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e$ , определяется уравнением (9.23).

В механизме представленном на рис. 9.26 колеса 1, 2 эксцентричные, колеса 4, 5 эллиптические. Эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = e$ .

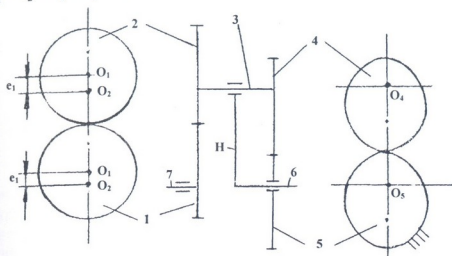


Рис. 9.26. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{IH}^5 = 1 - \frac{(a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1)(1 + e^2 - 2e \cos \varphi_1)}{(1 - e^2)(\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1)}. \quad (9.34)$$

В планетарной передаче (рис. 9.27) колеса 1, 2 эксцентричные, колеса 4, 5 овальные. Эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = e$ .

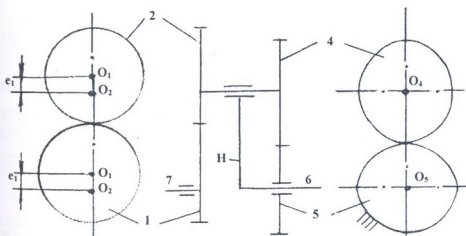


Рис. 9.27. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{1H}^5 = 1 - \frac{(1 - e^2 - 2e \cos 2\varphi_1)(a_w - \sqrt{a^2 - \sin^2 \varphi_1}) - e \cos \varphi_1}{(1 - e^2)(\sqrt{a^2 - \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1)} \quad (9.35)$$

В планетарной передаче (рис. 9.28) колеса 2,4 эксцентричные, колеса 1, 5 некруглые. Эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e_4 = e_5$ .

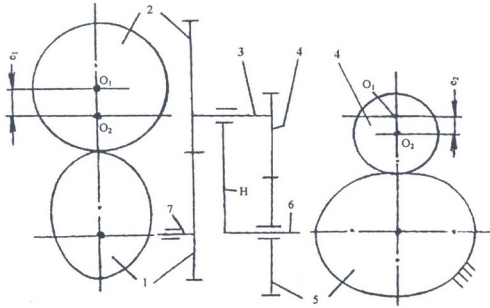


Рис. 9.28. Двухступенчатая планетарная передача

Функцию передаточного отношения запишем в виде

$$u_{1H}^5 = -\frac{r_2(r_4 - a_w)}{a_w(r_4 - r_2)}, \quad (9.36)$$

где:  $r_2 = \sqrt{a_2^2 - e_2^2 \sin^2 \varphi_1} - e_2 \cos \varphi_1$ ;  $r_4 = \sqrt{a_4^2 - e_4^2 \sin^2 \varphi_1} - e_4 \cos \varphi_1$ .

В планетарном механизме (рис. 9.29) колеса 1, 2 эксцентричные, эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e$ , колеса 4, 5 круглые, ведущее звено-водило Н, ведомое – колесо 5. Эксцентричное колесо 1 закреплено неподвижно.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{31}^5 = 1 - u_{54} \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} \quad (9.37)$$

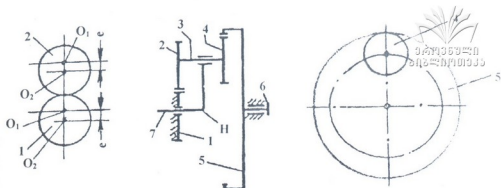


Рис. 9.29. Двухступенчатая планетарная передача

Рассмотрим планетарную передачу с двумя парами цилиндрических колес внутреннего зацепления (рис. 9.30), колеса 1, 3 – круглые, колесо 4 эксцентричное, с эксцентриситетом  $e$ , колесо 2 некруглое. Ведущее звено-колесо 1, ведомое звено, водило H, неподвижное звено-колесо 2.

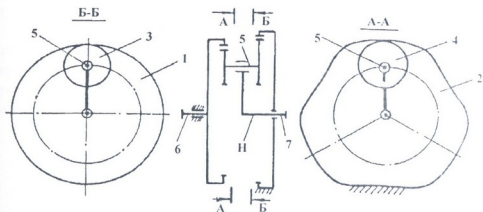


Рис. 9.30. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения

$$u_{12}^H = 1 - u_{13} \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}. \quad (9.38)$$

В планетарном механизме (рис. 9.31) используются эксцентричные сателлитные колеса 3, 4 с эксцентриситетом  $e_3 = e_4 = e$ . Центральные колеса 1, 2 некруглые:  $n_1 = 2$ ;  $n_2 = 3$ . Центроиды некруглых колес 1, 2 составлены из дуг деформированных

эксцентричных колес 3 и 4. Ведущее звено – вал 6 колеса 1, ведомое – вал 7 водила Н, неподвижное звено – некруглое колесо 2.

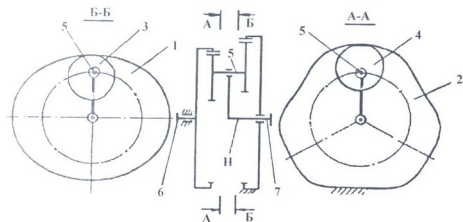


Рис. 9.31. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{17}^H = \frac{r_4(a_w + r_3) - a_w(r_3 + r_4)}{r_4(a_w + r_3)}. \quad (9.39)$$

В трехступенчатой планетарной передаче (рис. 9.32) круглое сателлитное колесо 2 находится в зацеплении с центральными колесами 1 и 3. На валу сателлита 2 закреплено эксцентричное колесо – сателлит 4, находящийся в зацеплении с центральным некруглым колесом 5. Ведущим звеном является колесо 1, ведомым – колесо 5. Колесо 3 закреплено неподвижно.

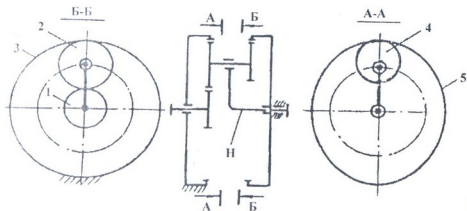


Рис. 9.32. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения определяется уравнением

$$u_{15} = 1 + u_{13} \frac{a_w + \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} \quad (9.40)$$

В планетарном механизме (рис. 9.33) внутренние зубья центрального круглого колеса 1 находятся в зацеплении с наружными зубьями сателлитного колеса 4. На одном валу 7 сателлитного колеса 4 закреплены сателлитные колеса: эксцентричное 6 и круглое 5. Прямые зубья колес 6, 5 находятся в зацеплении с зубьями центрального: некруглого 3 и круглого 2 колес. Колесо 2 закреплено неподвижно. Подшипники вала 7 находятся на водиле Н. Ведущее звено-вал 8 колеса 1, ведомое – вал 9.

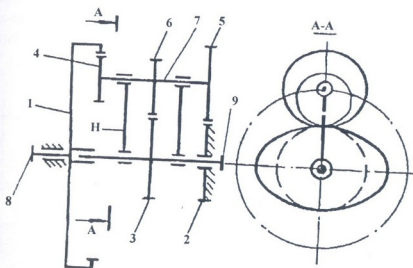


Рис. 9.33. Двухступенчатая планетарная передача

Функция передаточного отношения определяется зависимо-  
стью

$$u_{13}^H = 1 - u_{14} u_{52} \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} \quad (9.41)$$



### 9.3. Планетарные передачи с эксцентричными коническими колесами

Рассмотрим планетарную передачу с эксцентричными коническими колесами 1, 2 (рис. 9.34). Центральное колесо 1 закреплено неподвижно. Сателлит 2 с помощью водила Н обкатывается по колесу 1. Эксцентриситеты колес  $e_1 = e_2 = e$ .

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{2H}^1 = \frac{2e \cos \varphi_1}{a + t \cos \varphi_1}. \quad (9.42)$$

В планетарной передаче с эксцентричными коническими зубчатыми колесами 1, 2, 3 (рис. 9.35) неподвижное звено-центральное эксцентричное колесо 3. Ведущее звено-колесо 1, ведомое водило Н. Эксцентриситеты колес  $e_2 = e_3 = e$ .

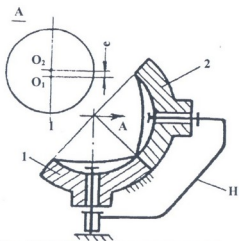


Рис. 9.34. Планетарная передача с эксцентричными коническими колесами

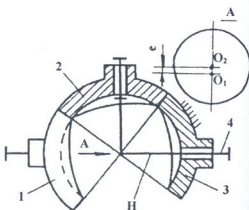


Рис. 9.35. Планетарная передача с эксцентричными коническими колесами

Функция передаточного отношения определяется соотношением

$$u_{1H}^3 = \frac{4ae \cos \varphi_1}{a^2 + 2ae \cos \varphi_1 + e^2 \cos^2 \varphi_1}. \quad (9.43)$$



В планетарной передаче с двумя парами конических наружного зацепления возможны разные варианты сочетания круглых и эксцентричных зубчатых колес.

В механизме первой разновидности (рис. 9.36) колеса 1, 2 эксцентричные, колеса 3, 4 – круглые. Центральное колесо 1 закреплено неподвижно, центральное эксцентричное колесо 4 ведомое, ведущее звено-вал 5 водило – Н.

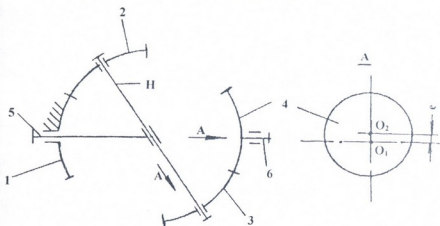


Рис. 9.36. Двухступенчатая передача

Функция передаточного отношения определяется зависимо-  
мостью

$$u_{3H}^1 = 1 - \frac{2'e \cos \varphi_1 \sin \delta_4}{a + e \cos \varphi_1 \sin \delta_3}. \quad (9.44)$$

В планетарном механизме (рис. 9.36) второй разновидности колеса 1, 2, 3, 4 эксцентричные. Неподвижное звено-колесо 1, ведущее звено-колесо 4, ведомое звено-вал 5 водило Н, эксцентриситеты колес  $e_1 \neq e_2$ , радиусы делительных окружностей конусов  $a_1 \neq a_2$ .

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{a_1 a_2 - (a_1 e_2 + a_2 e_1 - e_1 e_2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1}{a_1 a_2 + (a_1 e_2 + a_2 e_1 + e_1 e_2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1}. \quad (9.45)$$

Когда:  $a_1 \neq a_2$ ;  $e_2 = e_3 = e$ , функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{a_1 a_2 - (a_1 e + a_2 e - e^2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1}{a_1 a_2 + (a_1 e + a_2 e + e^2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1}. \quad (9.46)$$

Когда  $a_1 = a_2 = a$ ;  $e_1 \neq e_2$ , функция передаточного отношения

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{a^2 - (ae_2 + ae_1 - e_1e_2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1}{a^2 + (ae_2 + ae_1 + e_1e_2 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1} \quad (9.47)$$

Когда в планетарной передаче (рис. 9.36) колеса 1, 2 эксцентричные, а колеса 3, 4 эллиптические, функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{(a - e \cos \varphi_1)(1 + e^2 - 2e \cos \varphi_1)}{a(1 - e^2) + e \cos \varphi_1(1 - e^2 \cos \varphi_1)} \quad (9.48)$$

Когда в планетарной передаче (рис. 9.36) используются эксцентричные колеса 1, 2 и овальные колеса 3, 4 функция передаточного отношения имеет выражение

$$u_{4H}^1 = 1 - \frac{(a - e \cos \varphi_1)(1 + e^2 - 2e \cos 2\varphi_1)}{a(1 - e^2) + e \cos \varphi_1(1 - e^2 \cos \varphi_1)} \quad (9.49)$$

В планетарном механизме (рис. 9.37) колеса 1, 2, 3 – круглые, колеса 4, 5 – эксцентричные, ведущим звеном является центральное круглое колесо 1, ведомым – центральное эксцентричное колесо 5, неподвижное звено-центральное круглое колесо 3.

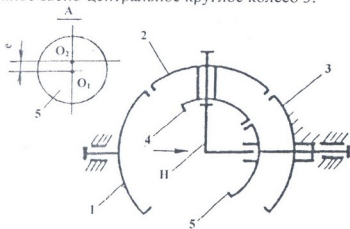


Рис. 9.37. Двухступенчатая передача

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{51}^3 = 1 - \frac{(a - e \cos \varphi_1) \sin \delta_3}{(a + e \cos \varphi_1) \sin \delta_1}, \quad (9.50)$$



где:  $\delta_1, \delta_3$  – делительные углы конусов колес 1, 3.

Из анализа полученных зависимостей функции передаточных отношений можно сделать заключение, что при соответствующем подборе параметров колес ведомые звенья планетарных механизмов будут вращаться с переменной угловой скоростью по заданному закону функции передаточного отношения в сторону вращения ведущего звена, ведомые звенья будут вращаться с переменной угловой скоростью в обратную сторону направления вращения ведущего звена. При этих движениях ведомые звенья могут иметь выстой. Ведомые звенья совершат качательное движение.

#### 9.4. Дифференциальные передачи с эксцентричными зубчатыми колесами

Рассмотрим кинематику некоторых замкнутых дифференциальных механизмов с эксцентричными цилиндрическими колесами.

В дифференциальном механизме (рис. 9.38) вращательное движение от ведущего вала I-I передается по двум направлениям: на центральное колесо 5 через круглые колеса 1, 2 и на водило Н через эксцентричные колеса 3, 4. Движение снимается с вала центрального колеса 8. Колеса 5, 6, 7, 8 круглые.

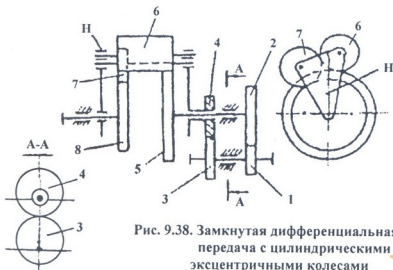


Рис. 9.38. Замкнутая дифференциальная передача с цилиндрическими эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{81} = u_{21} u_{85}^H - \frac{(1 + u_{85}^H)(a_w - \sqrt{e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1})}{\sqrt{a - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}, \quad (9.51)$$

где  $a_w$  – межосевое расстояние колес 3, 4.

В дифференциальном механизме (рис. 9.39) вращательное движение от ведущего вала I-I передается на центральное колесо 7 через эксцентричные колеса 1, 2 и на водило Н через круглые колеса 3, 4. Движение снимается с вала 8 центрального колеса 7. Колеса 5, 6, 7 круглые.

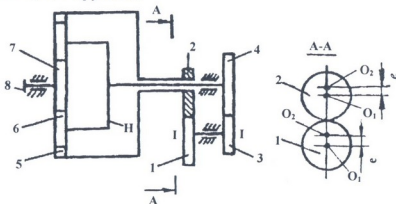


Рис. 9.39. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения

$$u_{71} = \frac{u_{75}^H (a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1})}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}} - u_{43} (u_{75}^H + 1). \quad (9.52)$$

В дифференциальном механизме, показанном на рис. 9.40, вращательное движение от ведущего вала I-I передается на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4 и на водило Н через эксцентричные колеса 1, 2. Колеса 5, 6, 7, 8 – круглые. Движение снимается с вала центрального колеса 8.

Функция передаточного отношения

$$u_{81} = u_{85}^H u_{43} \frac{(1 + u_{85}^H)(a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e \cos \varphi_1})}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}. \quad (9.53)$$

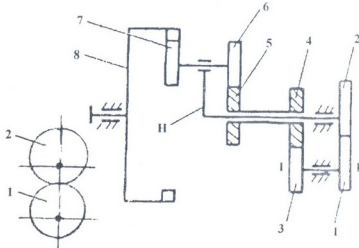


Рис. 9.40. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

В дифференциальном механизме (рис. 9.41) движение от ведущего вала I-I передается на водило Н через эксцентричные колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4. Движение снимается с вала центрального колеса 8. Колеса 5, 6, 7, 8 – круглые.

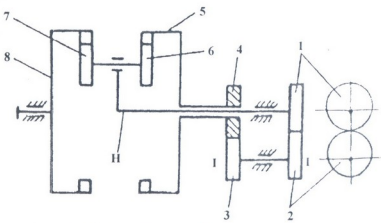


Рис. 9.41. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения

$$u_{8I} = \frac{(u_{85}^H - 1)(a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} - u_{85}^H u_{34} \quad (9.54)$$

Рассмотрим случай, когда в механизме (рис. 9.41) применяются – эксцентричные колеса 1, 2, 3, 4, эксцентриситеты колес 1, 2 –  $e_1$ , эксцентриситеты колес 3, 4 –  $e_2$ . Колеса 5, 6, 7, 8 – круглые

Функция передаточного отношения

$$u_{81} = \frac{(u_{85}^H - 1)(a_w - \sqrt{a^2 - e_1^2 \sin^2 \varphi_1} + e_2 \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e_1^2 \sin^2 \varphi_1} - e_2 \cos \varphi_1} - \frac{u_{85}^H (a_w - \sqrt{a^2 - e_2^2 \sin^2 \varphi_1} + e_2 \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e_2^2 \sin^2 \varphi_1} - e_2 \cos \varphi_1} \quad (9.55)$$

В дифференциальном механизме (рис. 9.42) движение от вала I-I передается: на водило H через эксцентричные колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4. Ведомое звено – центральное колесо 8. Колеса 5, 6, 7, 8 – круглые.

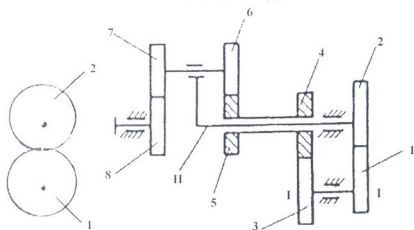


Рис. 9.42. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения

$$u_{81} = \frac{a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} (u_{85}^H - 1) - u_{34} u_{85}^H \quad (9.56)$$

В дифференциальном механизме, показанном на рис. 9.43, вращательное движение от ведущего вала I передается: на водило H, а через эксцентричные колеса 1, 2 и круглые колеса 3, 4 на центральное колесо 5. Движение снимается с вала центрального колеса 8.

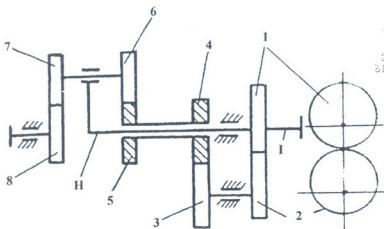


Рис. 9.43. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения

$$u_{8I} = \frac{u_{85}^H (a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \cos \varphi_1} + e \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos \varphi_1} - e \cos \varphi_1} - (u_{85}^H - 1). \quad (9.57)$$

Рассмотрим кинематику некоторых замкнутых дифференциалов с коническими зубчатыми колесами.

В дифференциальном механизме (рис. 9.44) вращательное движение от ведущего вала I-I передается на водило Н через эксцентричные цилиндрические колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4. Колеса 5, 6, 7 – круглые. Ведомое звено-вал центрального колеса 7.

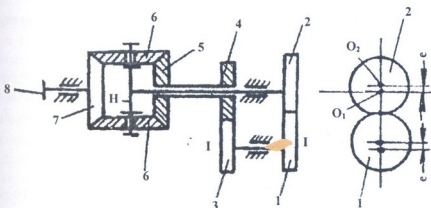


Рис. 9.44. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами



$$u_{71} = \frac{a(u_{43} - 1) + e \cos \varphi_1 (u_{43} + 1)}{a + e \cos \varphi_1} \quad (9.58)$$

В дифференциальном механизме, представленном на рис. 9.45, вращательное движение от вала I-I через колеса 4, 5 и 6, 7, 8 передается на центральные колеса 3, 1. Колеса 1, 2, 3, 6, 7, 8 – круглые, колеса 4, 5 – эксцентричные,  $e_1 = e_2 = e$ .

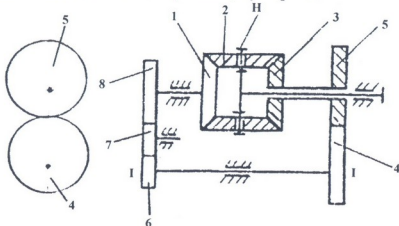


Рис. 9.45. Замкнутая дифференциальная передача с эксцентричными колесами

Функция передаточного отношения имеет выражение

$$a_w^2 - (1 - u_{54})(a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 + e^2 \cos^2 \varphi_1) + \\ + u_{54} \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1 \\ u_{21} = \frac{2(a^2 - 2e \cos \varphi_1 \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e^2 \cos^2 \varphi_1)}{2(a^2 - 2e \cos \varphi_1 \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e^2 \cos^2 \varphi_1)} \quad (9.59)$$

В дифференциальном механизме (рис. 9.46) движение от вала I-I передается на водило H через эксцентричные колеса 1, 2 и на центральное колесо 5 через круглые колеса 3, 4. Колеса 5, 6, 7, 8 круглые. Ведомое звено-вал колеса 8.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{81} = \frac{(h_{85}^H - 1)(a_w - \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} + e \cos \varphi_1)}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1} - u_{85}^H u_{43} \quad (9.60)$$

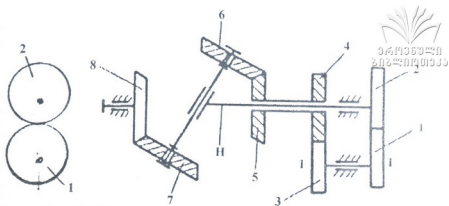


Рис. 9.46. Замкнутая дифференциальная передача

Рассмотрим дифференциал (рис. 9.46), когда вращательное движение от ведущего вала I-I передается на водило H через простой ряд некруглых колес 1, 2 и на центральное колесо 5 через простой ряд круглых колес 3, 4. Колеса 5, 6 - эксцентричные колеса 7, 8 - круглые.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{8I} = \frac{u_{87}^H (u_{43} - u_{21})(a - e \cos \varphi_5) u_{43} - u_{21}(a + e \cos \varphi_5)}{a + e \cos \varphi_5}. \quad (9.61)$$

## 9.5. Волновые передачи с эксцентричными колесами

Одноступенчатая двухволновая передача (рис. 9.47) состоит из цилиндрических некруглых колес 1, 2 с зубьями внутреннего зацепления; упругого тонкостенного гибкого цилиндрического колеса 3 с зубьями внешнего зацепления и генератора волн водила 4, в отверстиях которого жестко закреплены оси 5 на которых с возможностью вращения установлены сателлитные блоки эксцентричных цилиндрических роликов 6 и эксцентричных цилиндрических колес 7, с зубьями наружного зацепления, находящимися в зацеплении с внутренними зубьями колеса 2. Водило 4 выполнено заодно с ведущим валом 9. Гибкое колесо 3 жестко связано с ведомым валом 10. Эксцентричные колеса выполнены взаимно сопряженными с колесами 2 и 3. Радиус-векторы центроид колес 1, 2, 7 и роликов 6 представляют собой функцию передаточного отношения. На колесах 1 и 3 нарезаны зубья с одинаковым модулем и шагом,  $z_3 < z_1$ .

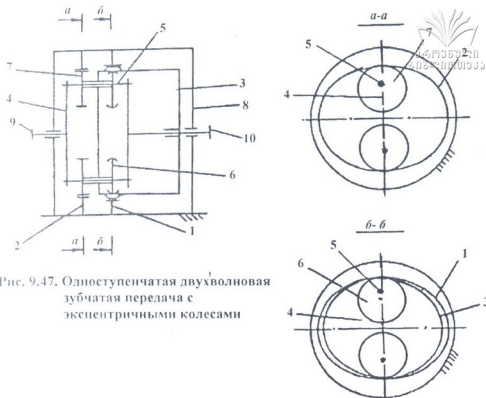


Рис. 9.47. Одноступенчатая двухволновая зубчатая передача с эксцентричными колесами

Передаточное отношение волновой передачи от быстроходного вала к тихоходному, при неподвижном жестком колесе 2, имеет вид

$$u_{910}^I = - \frac{r_3}{\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi_9} - e \cos \varphi_9 - r_3}. \quad (9.62)$$

Одноступенчатая трехволновая зубчатая передача (рис. 9.48) состоит из: закрепленного неподвижно гибкого колеса 1 с внутренними зубьями, жесткого колеса 2 с наружными зубьями и водила 3. На концах свободно вращающихся осей 4 водила 3 жестко закреплены эксцентричные цилиндрические ролики 5 и колеса 6. Наружные зубья колеса 6 накладываются в зацеплении с наружными зубьями некруглого колеса 7, закрепленного неподвижно. Число зубьев колеса 2 меньше числа зубьев колеса 1. Радиус-векторы центров колес 2, 6, 7 и роликов 5 представляют собой функцию передаточного отношения. Эксцентричные колеса 6 и ролики 5 имеют одинаковые центры. Центроиды некруглых

колес 2 и 7 составлены из центроид эксцентричных колес 6 при  $k = 3$ .

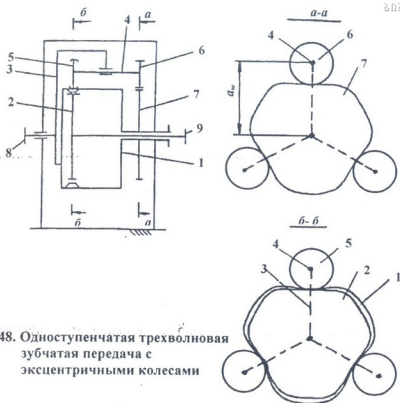


Рис. 9.48. Одноступенчатая трехволновая зубчатая передача с эксцентричными колесами

Передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{89}^1 = -\frac{r_1}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1} + r_1} \quad (9.63)$$

## 9.6. Планетарные передачи с эластичными водилами

Рассмотрим кинематику некоторых схем планетарных механизмов с эластичными водилами.

Планетарная передача (рис. 9.49) состоит из ведущего вала 1 на котором с помощью шпонки жестко закреплено эластичное водило Н (рис. 9.50). В цилиндрическое отверстие водила Н вставлены цилиндры 2, 3 и пружина сжатия 4. В цилиндре 2, с возможностью перемещения вдоль паза водила Н, завинчена шпилька 5.

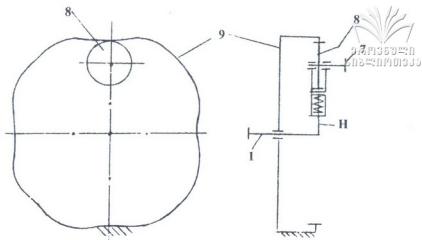


Рис. 9.49. Одноступенчатая планетарная передача

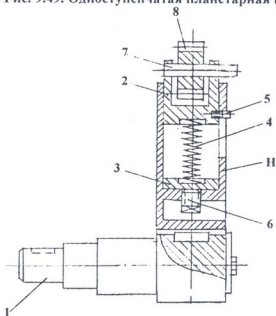


Рис. 9.50. Ведущий вал с эластичным водилом

Для регулирования силы сжатия пружины 4 в цилиндре водила Н завинчен винт 6. На ось 7, которая с возможностью вращательного движения установлена в отверстиях цилиндра 2, жестко закреплена сателлитная круглая цилиндрическая шестерня 8, наружные зубья которой находятся в зацеплении с внутренними (рис. 9.49) или наружными зубьями (рис. 9.51) центральных некруглых колес 9, закрепленных неподвижно.

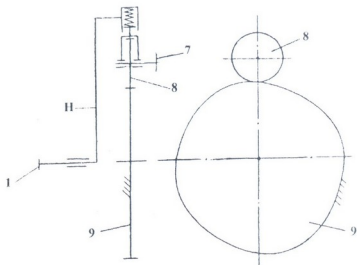


Рис. 9.51. Одноступенчатая планетарная передача

При вращении вала 1 с постоянной угловой скоростью сателлитная шестерня 8 и ось 7 совершают вращательное движение с переменной угловой скоростью. При изменении радиусов центральных колес 9 пружина, сжимаемая-растягивая обеспечивает постоянное зацепление зубьев шестерен 8 и колес 9.

Функция передаточного отношения (рис. 9.49) имеет вид

$$u_{H8}^2 = \frac{r_8 - e \cos 4\varphi_H (r_8 + 2a) - a(1 + e^2)}{(1 - e \cos 4\varphi_H) r_8} \quad (9.64)$$

Функция передаточного отношения для передачи (рис. 9.51) определяется зависимостью

$$u_{H8}^9 = -\frac{a_w}{r_8}, \quad (9.65)$$

где:  $a_w$  – межосевое расстояние колес 8, 9;  $r_8$  – радиус делительной окружности колеса 8.

Планетарные передачи (рис. 9.52, 9.53) состоят из ведущего вала 1 с эластичными водилами  $H_1$ ,  $H_2$  (рис. 9.54). На осях 7 водил жестко закреплены сателлитные шестерни 8, 10 с одинаковыми или с разными начальными диаметрами. Зубья сателлитных шестерен 8, 10 находятся в зацеплении с зубьями центральных эксцентричных колес 9.

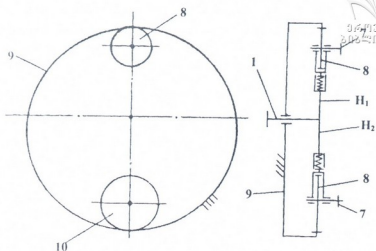


Рис. 9.52. Двухступенчатая планетарная передача эксцентричным колесом

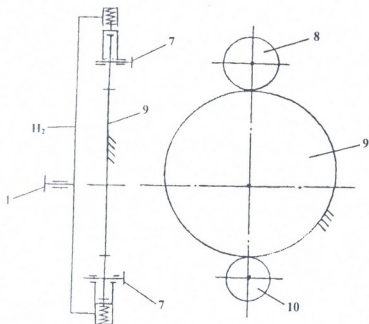


Рис. 9.53. Двухступенчатая планетарная передача эксцентричным колесом

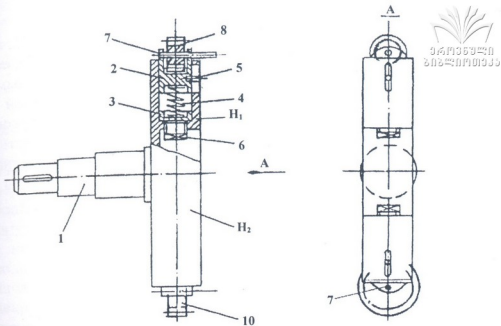


Рис. 9.54. Ведущий вал с эластичным водилом

При вращении вала 1 с постоянной угловой скоростью шестерни 8, 10 и оси 7 вращаются с одинаковыми или с разными угловыми скоростями.

Функция передаточного отношения имеет вид:  
для передачи (рис. 9.52)

$$u_{81}^9 = -\frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}{r_8}; \quad (9.66)$$

$$u_{101}^9 = -\frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}{r_{10}}; \quad (9.67)$$

для передачи (рис. 9.53)

$$u_{81}^9 = \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}{r_8}; \quad (9.68)$$

$$u_{101}^9 = \frac{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1 - e \cos \varphi_1}}{r_{10}}; \quad (9.69)$$

где:  $r_8, r_{10}$  радиусы центров колес 8, 10;  $\varphi_1$  – угол поворота вала 1.



Планетарная передача (рис. 9.55) состоит из ведущего вала 1, на котором жестко закреплено центральное цилиндрическое колесо 2, наружные зубья которого находятся в зацеплении с наружными зубьями круглой сателлитной шестерней 3, установленной с возможностью вращательного движения на оси 4 жесткого сателлита  $H_1$ . На оси 7 эластичного водила  $H_2$ , с возможностью вращательного движения, установлена круглая сателлитная шестерня 5, наружные зубья которой находятся в зацеплении с внутренними зубьями центрального некруглого колеса 6. Центроида колеса 6 имеет произвольную некруглую форму.

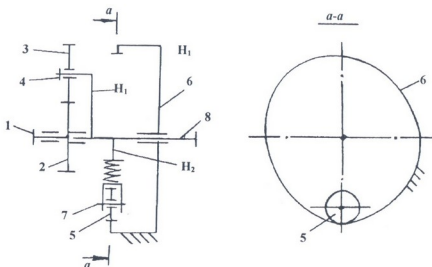


Рис. 9.55. Двухступенчатая планетарная передача с жестким и эластичным водилами

Валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью: шестерня 3, водилы  $H_1$ ,  $H_2$  и шестерня 5 выполняют вращательно-переносное движение. Вал 8 вращается с переменной угловой скоростью.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{18}^6 = \frac{r_5(r_2 + r_3) + r_3 a_w}{r_2 r_5} \quad (9.70)$$

Здесь через  $r$  обозначены радиусы центроид соответствующих колес.

Когда центроида колеса 6 составлена из деформированных эллипсов функция передаточного отношения

$$u_{81}^6 = 1 + \frac{a(1 + e^2 - 2e \cos \kappa \varphi_1) r_3}{(1 - e \cos \kappa \varphi_1) r_2 r_3}, \quad (9.71)$$

где  $\kappa = 2, 3, 4 \dots$ .

Планетарная передача (рис. 9.56) состоит из ведущего вала 1 на котором жестко закреплено центральное некруглое колесо 2. В передаче использованы эластичные водилы  $H_1, H_2$ . На осях 7, 8 водил с возможностью вращательного движения установлены сателлитные шестерни 3, 4 зубья которых находятся в зацеплении с наружными и внутренними зубьями центральных некруглых колес 2, 5. Центроиды колес 3, 4 имеют одинаковые или разные начальные диаметры. Центроиды колес 2, 5 имеют произвольные некруглые формы. Колесо 5 закреплено неподвижно. Ведомое звено вал 6.

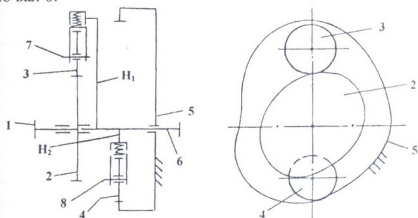


Рис. 9.56. Двухступенчатая планетарная передача с жестким и эластичным водилами

При вращении вала 1 с постоянной угловой скоростью с помощью зацепления зубьев колес 2, 3; 4, 5 вал 6 выполнит вращательное движение с переменной угловой скоростью.

Функцию передаточного отношения запишем в виде

$$u_{16}^5 = \frac{r_4(a_{w1} - r_3) - r_3(a_{w2} + r_4)}{r_3 r_4}, \quad (6.72)$$

где:  $r_3, r_4$  – радиусы центроид колес 3, 4;  $a_{w1}, a_{w2}$  – межосевые расстояния зубчатых передач 2,3 и 4, 5.

Планетарная передача (рис. 9.57) состоит из ведущего вала 1 на котором жестко закреплено центральное круглое колесо 2 с внутренними зубьями. В передаче использованы жесткое  $H_1$  и эластичное  $H_2$  водилы. На осях, жестко закрепленных в водилах 7, 8, с возможностью вращательного движения, установлены сателлитные шестерни 3, 4, зубья которых находятся в зацеплении с внутренними зубьями центральных колес 2, 5. Центроида колеса 5 имеет произвольную некруглую форму. Колесо 5 закреплено неподвижно. Ведомое звено-вал 6.

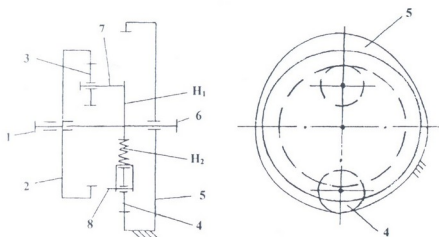


Рис. 9.57. Двухступенчатая планетарная передача с жестким и эластичным водилами

Валу 1 колесу 2 сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Шестерни 3, 4 с помощью водил  $H_1$ ,  $H_2$  совершают планетарное движение. Вал 6 вращается с переменной угловой скоростью.

Передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{16}^5 = 1 - \frac{r_3 r_5}{r_2 r_4}. \quad (9.73)$$

Когда центроида колеса 5 составлена из центроид деформированных эллипсов, передаточное отношение запишем в виде

$$u_{16}^5 = \frac{(1 - e^2)(r_2 - r_3)r_4 - p[\sqrt{1 - (2 - e^2)(1 - n^2)} - 1]}{(1 - e^2)r_2 r_4}, \quad (9.74)$$

где:  $e$  – эксцентриситет эллипса;  $n$  – среднее передаточное отношение;  $r_2, r_4$  – радиусы центроид колес 2, 4.



Планетарная передача (рис. 9.58) состоит из ведущего вала 1, на котором жестко закреплено центральное некруглое колесо 2 с внутренними зубьями. В передаче использованы эластичные водилы  $H_1$  и  $H_2$ . На осях 7, 8 водил с возможностью вращательного движения установлены сателлитные шестерни 3, 4 наружные зубья которых находятся в зацеплении с внутренними зубьями центральных некруглых колес 2, 5. Колесо 5 закреплено неподвижно. Ведомое звено-вал 6, водил  $H_1, H_2$ .

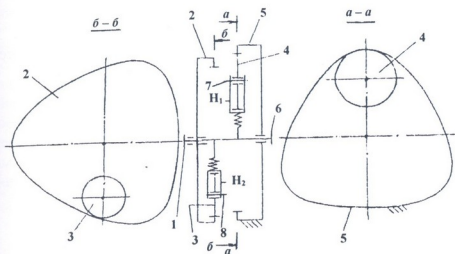


Рис. 9.58. Двухступенчатая планетарная передача эластичными водилами

Валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью. С помощью зацепления зубьев колес 2, 3; 4, 5 и водил  $H_1, H_2$  вал 6 выполнит вращательное движение с переменной скоростью.

Когда коэффициент деформации центроид колес 2, 5,  $n_2 = n_5 = 3$ , функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{16}^5 = \frac{a(r_4 - r_3)(1 + e^2) - 2ae \cos 3\varphi_1 (r_3 + r_4)}{r_4 a (1 + e^2 - 2e \cos 3\varphi_1)} \quad (9.75)$$

Когда коэффициент деформации колес 2, 5,  $n_2 = 3, n_5 = 4$ , функция передаточного отношения имеет выражение

$$u_{16}^5 = \frac{a(r_4 - r_3)(1 + e^2) - 2ae(r_4 \cos 3\varphi_1 - r_3 \cos 4\varphi_1)}{r_4 a(1 + e^2 - 2e \cos 3\varphi_1)}$$



где:  $r_3, r_4$  – радиусы центров колес 3, 4;  $\varphi_1$  – угол поворота колеса 1.

Планетарная передача (рис. 9.59) состоит из ведущего вала 1, на котором жестко закреплено центральное круглое колесо 2 с наружными зубьями. В передаче использованы жесткая  $H_1$  и эластичного  $H_2$  водилы. На осях 7, 8 водил, с возможностью вращательного движения, установлены круглые сателлитные цилиндрические шестерни 3, 4, наружные зубья которых находятся в зацеплении с наружными зубьями центральных колес 2, 5. Центроида колеса 5, которое закреплено неподвижно, имеет произвольную некруглую форму. Ведомое звено-вал водил 6.

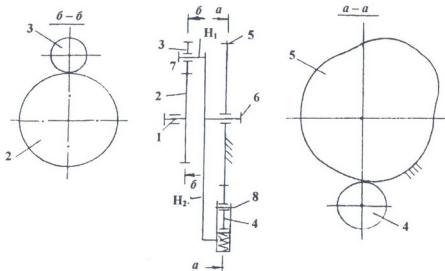


Рис. 9.59. Двухступенчатая планетарная передача с жестким и эластичным водилами

Валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. С помощью зацепления зубьев колес 2, 3 и 4, 5, водил  $H_1, H_2$  шестерни 3, 4 совершают вращательно переносное движение. Вал 6 совершает вращательное движение с переменной угловой скоростью.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{26}^5 = \frac{r_4(r_2 + r_3) - r_3 a_w}{r_2(a_w - r_4)}$$

Когда центроид колеса 5 эллиптическая функция, передаточное отношение определяется зависимостью

$$r_{26}^5 = \frac{r_4(1 - e^2)(r_2 - r_3) - r_3[1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - n^2)}]}{r_2 r_4(1 - e^2)}, \quad (9.78)$$

где:  $r_2, r_3, r_4$  – радиусы центроид колес 2, 3, 4;  $a_w$  – межосевое расстояние зубчатой передачи 4, 5.

Планетарная передача (рис. 9.60) состоит из ведущего вала 1, на котором жестко закреплено центральное некруглое колесо 2 с наружными зубьями. В передаче использованы эластичные водилы  $H_1, H_2$ . На осях 7, 8 водил с возможностью вращательного движения установлены сателлитные шестерни 3, 4 с разными или одинаковыми делительными диаметрами. Наружные зубья шестерен 3, 4 находятся в зацеплении с наружными зубьями центральных некруглых колес 2, 5. Центроиды некруглых колес 2, 5 имеют произвольную некруглую форму. Колесо 5 закреплено неподвижно. Ведомое звено – вал 6 водил  $H_1, H_2$ .

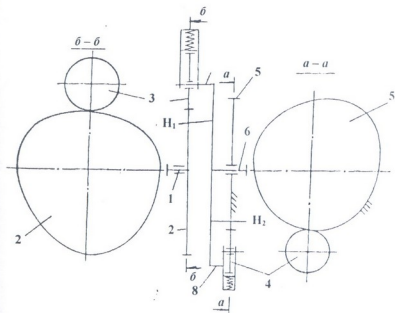


Рис. 9.60. Двухступенчатая планетарная передача с эластичными водилами

Валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Шестерни 3, 4 совершают планетарное движение. Вал 6 совершает вращательное движение с переменной угловой скоростью.

Функция передаточного отношения имеет вид

$$u_{26}^5 = \frac{(a_{w1} - r_3)r_4 - (a_{w2} - r_4)r_3}{(a_{w1} - r_3)r_4}, \quad (9.79)$$

где:  $r_3, r_4$  – радиусы центроид колес 3, 4;  $a_{w1}, a_{w2}$  – межосевое расстояние зубчатых передач: 2, 3; 4, 5.

Планетарная передача (рис. 9.61) состоит из вала 1, на котором жестко закреплено ведущее центральное эксцентричное колесо 2. Наружные зубья колеса 2 находятся в зацеплении с наружными зубьями сателлитной шестерни 3, установленной с возможностью вращения на оси 7 эластичного водила  $H_1$ . На оси 8 жесткого водила  $H_2$ , с возможностью вращательного движения, установлена сателлитная шестерня 4, наружные зубья которой находятся в зацеплении с внутренними зубьями центрального круглого колеса 5, закрепленного неподвижно. Водила  $H_1, H_2$  жестко закреплены на ведомом валу 6.

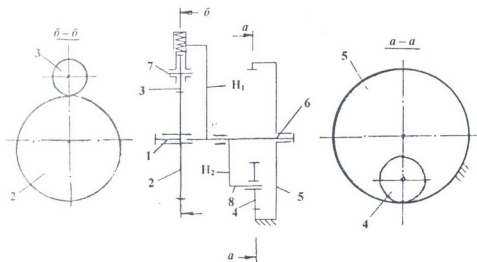


Рис. 9.61. Двухступенчатая планетарная передача с эластичным и жестким водилами

Центральному эксцентричному колесу 2 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью. С помощью зацеп-

ления зубьев колес 2, 3; 4,5 вал 6 совершает вращательное движение с переменной скоростью.

Функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{26}^5 = \frac{r_4(\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2} - e \cos \varphi_2) + r_3 r_5}{\sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_2} - e \cos \varphi_2}, \quad (9.80)$$

где:  $r_3, r_4, r_5$  – радиусы центроид колес 3, 4, 5;  $\varphi_2$  – угол поворота колеса 2.

Из анализа полученных зависимостей функции передаточных отношений можно сделать заключение, что при соответствующем подборе параметров колес ведомые звенья планетарных механизмов будут вращаться с переменной угловой скоростью по заданному закону функции передаточного отношения в сторону вращения ведущего звена, ведомые звенья будут вращаться с переменной скоростью в обратную сторону направления вращения ведущего звена. При этих движения ведомые звенья могут иметь выстой. Ведомые звенья будут совершать качательные движения.



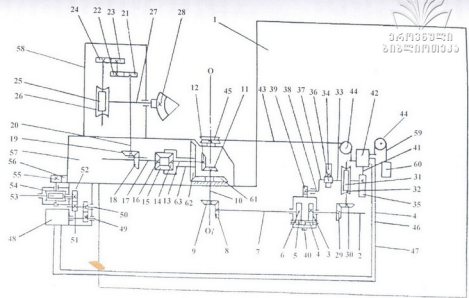
## 10.1. Кинематическая схема станка для нарезания некруглых конических колес с прямыми, круговыми зубьями, циклоидальными и эвольвентными линиями зубьев

Для нарезания некруглых конических колес с прямыми, круговыми зубьями и циклоидальными, эвольвентными линиями зубьев разработана кинематическая схема станка (рис. 10.1) [92]. При этом за основу работы станка приняты методы нарезания (рис. 2.7, 2.8, 2.9, 2.10). В качестве привода станка может быть использован привод от существующих зуборезных станков для нарезания круглых конических колес.

Станок работает следующим образом. От общей кинематической цепи привода 1 модернизируемого станка вращается горизонтальный вал 2, который через колеса 3, 4, 5, 6 цилиндрического дифференциала, вал 7, колеса 8, 9, вертикальный вал 10, колеса 11, 12, вал 13, колеса 14, 15, 16 конического дифференциала, вал 17, колеса 18, 19, вертикальный вал 20, колеса гитары 21, 22, 23, 24, червяк 25, червячное колесо 26, вал 27 передает вращение заготовке 28 некруглого конического колеса. В результате заготовка 28 получает вращение с равномерной скоростью. С другой стороны, от вала 2 через колеса 29, 30, червяк 31, червячное колесо 32, кулачковый вал 33, кулачок 34, ролик 36, рычаг 37, валик 38, колеса 39, 40, корпус дифференциала, колеса 5, 6, вал 7, колеса 8, 9, вал 10, колеса 11, 12, колеса 14, 15, 16 дифференциала, вал 17, колеса 18, 19, вал 20, колеса 21, 22, 23, 24, червяк 25, червячное колесо 26, вал 27 вращение передается заготовке 28. Тогда заготовка получает добавочное вращение с неравномерной скоростью. Одновременно с этим вращение кулачкового вала 33 передается кулачку 35, который, воздействуя на шток 41 следящего золотника 42, трубопроводы 46, 47, включает гидродвигатель 48, поворачивающий через колеса 49, 50, 51, 52, червячную пару 53, 54, колеса 55, 56, плиту 57 с бабкой 58 изделия вокруг оси  $OO_1$ , проходящей через центр станка. При повороте бабки 58 изделия колесо 12, обкатываясь по колесу 11,



საქართველოს  
საინჟინერო-ტექნიკური  
უნივერსიტეტი



345

Рис. 10.1. Кинематическая схема станка

передает заготовке 28 дополнительное вращение. Компенсация этих дополнительных вращений происходит от конического колеса 62, которое одновременно с поворотом бабки 58 изделия обкатывается по неподвижному колесу 61 и через водило 63, колеса 15, 16, вал 17, колеса 18, 19, вал 20, колеса 21, 22, 23, 24, червячную пару 25, 26, вал 27 передает заготовке 28 откорректированное движение. Между следящим золотником 42 и гидродвигателем 48 предусмотрена обратная связь, состоящая из троса 43 и блоков 44, 45. При повороте бабки 58 изделия трос 43, наматываясь на блок или сматываясь с блока 45, перемещает корпус следящего золотника 42 таким образом, чтобы он перекрыл поток масла, заставляющий работать гидромотор 48, т.е. ставит следящий золотник 42 в согласованное положение.

## **10.2. Кинематическая схема станка для нарезания некруглых конических колес с круговыми зубьями**

Для нарезания некруглых конических колес с круговыми зубьями разработана кинематическая схема модернизации станка (рис. 19.2). В качестве базового станка выбран зубофрезерный станок модели ZFTKK – 500×10 завода «Модуль». При разработке кинематической схемы модернизации станка за основу принят метод нарезания (рис. 2.12).

Станок работает следующим образом: от привода 1 станка, через горизонтальный вал 8, колеса 80, 79, вертикальный вал 82, колеса 78, 77, вал траверсы 81, колеса 76, 75, полый вал 74, колеса 73, 72, 83, 84 дифференциала 6, вал 85, колеса 86, 87, сменные колеса 88, 89, 90, 91 гитары и червячную передачу 92, 93 приводится во вращение заготовка некруглого конического колеса с постоянной скоростью. Одновременно с этим, от вала 8 через муфту 9, сменные колеса гитары 10, 11, 12, 13 и червячную передачу 14, 15 вращательное движение передается кулачкам 16 и 17. Кулачок 16, служащий для изменения передаточного отношения обкатки, сообщает заготовке некруглого конического колеса вращательное движение с переменной угловой скоростью через штангу 43, следящий золотник 44, трубопроводы 45, 46,

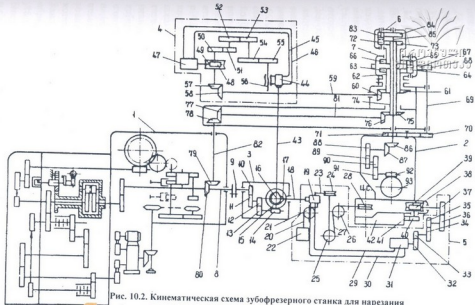


Рис. 10.2. Кинематическая схема зубофрезерного станка для нарезания некруглых конических колес с круговыми зубьями

гидродвигатель 47, червячную передачу 48, 49, колеса 57, 58, вал траверсы 59, колеса 60, 61, полый вал 62, колеса 63, 64, 65, 66, корпус дифференциала 6, колеса 83, 84, вал 85, колеса 86, 87, сменные колеса гитары 88, 89, 90, 91 и червячную передачу 92, 93. Одновременно с этим, от гидродвигателя 47 через червячную передачу 48, 49, сменные колеса гитары 50, 51, 52, 53 и колеса 54, 55 вращение передается винту 56, который перемещает следящий золотник 44, устанавливая его в согласованное положение. Сменные колеса 50, 51, 52, 53, колеса 54, 55 и винт 56 являются элементами обратной связи следящей системы, обеспечивающими совместно со следящим золотником 44 и гидродвигателем 47, точный доворот или отставание заготовки некруглого конического колеса с целью сохранения постоянства линейной скорости точек, обрабатываемых в данный момент при обкатном вращении. Одновременно с поворотом кулачка 16, вращательное движение получает кулачок 17 изменения угла установки бабки 2 изделия, который через рычаг 18, следящий золотник 19, трубопроводы 29, 30, гидродвигатель 31, колеса 32, 33, 34, 35, 36, 37, червячную передачу 38, 39 и колеса 40, 41, поворачивает плиту 42 с бабкой изделия 2. При этом трос 27, наматываясь на блок 28 или сматываясь с него, перемещает корпус золотника 19 таким образом, чтобы он перекрыл поток масла, заставляющий работать гидродвигатель 31, т.е. устанавливает следящий золотник 19 в согласованное положение. При повороте бабки 2 изделия вал траверсы 81 меняет свое положение относительно люльки станка: коническая шестерня 77, обкатываясь по колесу 78, вызывает дополнительный поворот вала траверсы 81. Коррекция дополнительных перемещений вала траверсы 81 производится механизмом компенсации 4 и дифференциалом 6. Одновременно с поворотом вала траверсы 81 поворачивается вал траверсы 59, в результате чего колесо 58, обкатываясь по колесу 57, вызывает дополнительный поворот вала траверсы 59 в сторону, противоположную вращению вала траверсы 81. Это движение передается заготовке некруглого конического колеса через колеса 60, 61, вал 62, колеса 63, 64, 65, 66 дифференциала 7, корпус дифференциала 6, колеса 83, 84, вал 85, колеса 86, 87, сменные колеса гитары 88, 89, 90, 91 и червячную передачу 92, 93. Поправка на искажение угла поворота заготовки в результате изменения положения бабки

изделия 2 относительно вала траверсы 81 корректируется колесом 71. Последнее, поворачиваясь вместе с бабкой изделия, обеспечивает заготовке некруглого конического колеса откорректированное движение через колеса 70, вал 69, колесо 68, 67, корпус дифференциала 7, колеса 65, 66, корпус дифференциала 6, колеса 83, 84, вал 85, колеса 86, 87, сменные колеса 88, 89, 90, 91, червяк 92 и червячное колесо 93.

Для нарезания некруглых конических колес с различными параметрами, в механизме изменения передаточного отношения обкатки (механизме компенсации) предусмотрена такая же гитара сменных колес, как и в бабке изделия. Эта гитара дает возможность сохранить передаточное отношение обкатки равным 1:1 во всех случаях. Наладка станка, в части гитар обкатки и деления, осуществляется так же, как и для нарезания круглого конического колеса с числом зубьев, равным числу зубьев нарезаемого некруглого конического колеса.

Для нарезания зубьев некруглых конических колес сначала необходимо произвести обработку заготовки по некруглому конусу вершин зубьев на станке мод. ZFTKK-500×10, модернизированном для нарезания некруглых конических колес с использованием кулачков, рассчитанных на нарезание зубьев данного некруглого конического колеса. На оправке закрепляется предварительно обработанная по наибольшему углу конуса вершин круглая коническая заготовка. Люлька станка устанавливается в положение центра обкатки, червяк люльки разъединяется с гитарой и запирается. Резцовая головка смещается на величину, равную разности между длиной образующей и половиной длины зуба обрабатываемого колеса. Шпиндель кулачков и шпиндель изделия, при помощи специальных калибров, устанавливаются в начальное положение. Для этого применяются мелкозубые муфты, помещенные на приводном валу бабки кулачков и на дифференциале бабки изделия. Установка бабки изделия в начальное положение осуществляется поворотом корпуса дифференциала. Золотник, управляющий углом установки бабки, регулируется таким образом, чтобы бабка изделия была развернута на минимальный угол вершин зубьев нарезаемого некруглого конического колеса. После этого стол станка смещается до соприкосновения заготовки с резцовой головкой, включается станок и начинается обработка

по поверхности вершин зубьев. Подача производится постепенным перемещением стола вручную до тех пор, пока центр стола не совместится с центром станка.

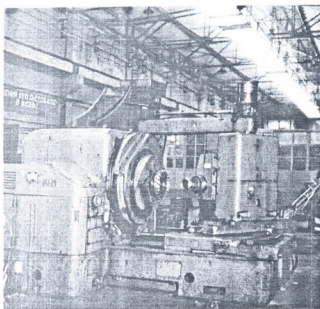


Рис. 10.3. Модернизированный зуборезный станок мод. ZFTKK-500×10 для нарезания некруглых конических колес с круговыми зубьями

После обработки заготовки станок настраивается для нарезания зубьев. Для этого бабка изделия устанавливается с таким расчетом, чтобы вершина начального некруглого конуса совпала с центром станка, червяк люльки сцепляется с гитарой, рассчитанной для нарезания данного некруглого колеса, люлька устанавливается в начальное положение. При нечетном числе зубьев впадина зуба располагается симметрично относительно максимального или минимального радиус-векторов нарезаемого колеса, что позволяет простейшим образом соблюсти в начале резания соответствие установок резцовой головки аксоидам парных колес. Для этого шпиндель кулачков и шпиндель бабки изделия устанавливаются в начальное положение по описанному выше способу. Золотник, управляющий углом установки бабки изделия, регулируется таким образом, чтобы бабка изделия была повернута на минимальный угол делительного аксоида. Осталь-

ные элементы наладок рассчитываются как и для нарезания круглого конического колеса, имеющего те же число зубьев и модуль, что и некруглое коническое колесо.

На рис. 10.3 представлен модернизированный зуборезный станок мод. ZFTKK-500×10.

### 10.3. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых конических колес

Для нарезания некруглых, круглых конических колес с прямыми, круговыми, циклоидными и эвольвентными линиями зубьев разработана кинематическая схема станка с ЧПУ (рис. 10.4), при этом в основе работы станка использованы методы нарезания (рис. 2.11, 2.12, 2.13, 2.14). Станок состоит из силовых электродвигателей 1, 10, которые соединены с пультом управления.

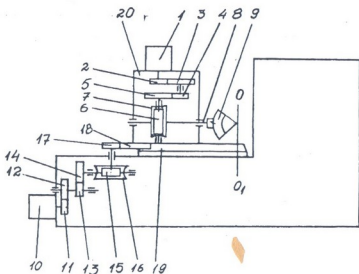


Рис. 10.4. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания конических колес

От электродвигателя 1 через колеса 2, 3, 4, 5, червяк 6, червячное колесо 7, оправки 8 заготовке 9 некруглого конического колеса сообщается вращательное движение вокруг своей оси с неравномерной скоростью. Одновременно с этим от электродвига-



теля 10 через колеса 11, 12, 13, 14, червяк 15, червячное колесо 16, шестерню 17, зубчатый сектор 18, поворотный стол 19, бабки 20 заготовке 9 сообщается переносное движение с неравномерной скоростью вокруг оси  $OO_1$ , проходящей через центр станка.

При нарезании зубьев круглых конических колес вращательное движение вокруг своей оси заготовка совершает с равномерной скоростью.

В качестве привода станка может быть использован привод от станков для нарезания круглых конических колес.

#### 10.4. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых конических колес

Для нарезания прямозубых некруглых конических колес по методу прерывистого огибания (рис. 2.24) разработана кинематическая схема зубофрезерного станка (рис. 10.5).

Зубья нарезают дисковой фрезой, причем сначала производят черновую обработку всех впадин, а затем чистовую, отдельно правой и левой сторон впадин зубьев. Для этого стол 26 сперва разворачивают в правую сторону вокруг оси, проходящей через центр станка (ЦС) на четверть углового шага, и с помощью колес 24, 25 и винта 4 сообщают салазкам 2 и 3 перемещение по координате  $x$  в направлении разворота стола 26 на половину ширины головки зуба производящего колеса с внутреннего конца зуба. После этого производят обработку левой стороны впадин зубьев. От электродвигателя 6, через колеса 7, 8, 9, 10, вал 11, колеса 12, 13, вал 14 сообщают вращательное движение фрезе 15. Сигналы, считанные с программносителя, распределяются по электродвигателям 16, 21, 27, 31, 37. От электродвигателя 27 через червячную пару 28, 29 и поворотный стол 26 заготовка 41 получает дискретное перемещение на угол  $\varphi'_n$ . От электродвигателя 31 через червячную пару 32, 33, вал 34 и поворотную плиту 35 заготовке 41 сообщается дискретное перемещение на угол  $\theta'_k$ . От электродвигателя 37 через червячную пару 38, 39 и вал 40 заготовке 41 сообщается дискретное перемещение на угол  $\varphi'_k$ .

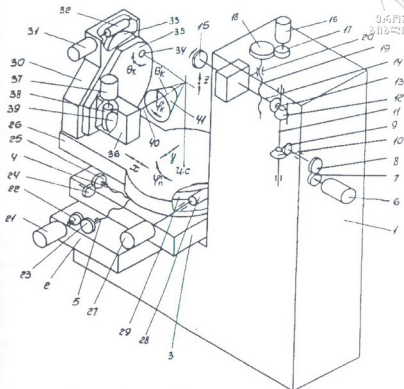


Рис. 10.5. Кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ для нарезания некруглых конических колес

После этого заготовка закрепляется неподвижно с помощью гидросистемы. От электродвигателя 16 через колеса 17, 18, винт 19, гайку 20, суппорт и вал 14 фрезе 15 сообщается перемещение вниз по координате  $z$ , до совмещения начальной плоскости производящего колеса с начальным некруглым конусом нарезаемого колеса. От электродвигателя 21 через колеса 22, 23, винт и гайку 5 стол 3 получает перемещение по координате  $y$  – рабочий ход, фреза 15 производит нарезание зуба. После выхода из зацепления с заготовкой, фреза 15 совершает перемещение вверх по координате  $z$ . От электродвигателя 21 через колеса 22, 23, винт и гайку 5 стол 26 возвращается в исходное положение. Заготовке сообщают новые дискретные угловые перемещения  $\varphi'_n$ ,  $\varphi'_k$ ,  $\theta'_k$  и описанный цикл нарезания повторяется до обработки левой стороны впадин всех зубьев. После этого стол 26 разворачивается в левую сторону, смещается по координате  $x$  в направлении

разворота стола, и по описанному методу производится обработка правой стороны впадин зубьев.

Для расчета управляющих программ дискретных перемещений используются выражения (2.81, 2.82, 2.85, 2.86, 2.87, 2.88). При этом необходимо определить такие значения углов установки  $\varphi'_n, \varphi'_k, \theta'_k$ , которые соответствуют значениям  $[\varphi_n]/n$ .

### 10.5. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых, спироидных, многовитковых цилиндрических, некруглых и круглых червячных зубчатых колес

Для нарезания некруглых, круглых, спироидных, многовитковых цилиндрических зубчатых колес по методу прерывистого, непрерывного огибания разработана кинематическая схема зубофрезерного станка, в котором механизмы продольного и вертикального перемещений фрезерной головки, поперечного и вращательного движений поворотного стола, выполнены в виде самостоятельных силовых приводов и соединены с пультом программного управления (рис. 10.6).

При нарезании прямых зубьев некруглых цилиндрических колес по методу прерывистого огибания (рис. 2.25) в качестве режущего инструмента применяется вращающаяся рейка 1, геометрическую ось которой устанавливают горизонтально. От асинхронного электродвигателя 28 через колеса 29, 30, 32, 33 (или 34, 35), 37, 38, 40, 41, 43, 44, 46, 47 дисковой фрезе (вращающейся рейке) 1 сообщают вращательное движение. Сигналы, считанные с программносителя, распределяются по электродвигателям 2, 10, 17, 23. От электродвигателя 10 через колеса 11, 12 и винтовую пару качения 13, 14 заготовке 16 сообщается дискретное перемещение по координате  $y$ . От электродвигателя 17 через колеса 18, 19, вал 20, червяк 21, червячное колесо 22 заготовке 16 сообщается дискретное перемещение по координате  $\varphi$ . После этого заготовка 16 с помощью гидросистемы закрепляется неподвижно. От электродвигателя 2 через колеса 3, 4, винтовую пару качения 5, 6 и направляющие 9 фрезерной головке 7 сообщается дискретное перемещение по координате  $x$ . От электродвигателя 23

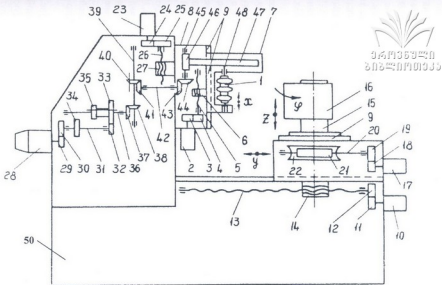


Рис. 10.6. Кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых, спирондных, многовитковых цилиндрических зубчатых колес

через колеса 24, 25, винтовую пару качения 26, 27 и поворотный суппорт 8 фрезе 1 сообщается рабочий ход – перемещение из верхнего исходного положения вниз по координате  $z$ . После выхода фрезы 1 из заготовки 16 в нижнем положении, столу 9 сообщают перемещение по координате  $y$ , благодаря чему режущие кромки фрезы 1 отводятся от обрабатываемой поверхности. Поворотный суппорт перемещается вверх по координате  $z$ . Фреза 1 возвращается в верхнее исходное положение. После этого цикл дискретных перемещений заготовки по координатам  $y$ ,  $\varphi$  и фрезы по координатам  $x$ ,  $z$  повторяется до нарезания всех зубьев колеса.

При обработке заготовки по некруглому цилиндру вершин зубьев вместо фрезы 1 применяется обычная цилиндрическая фреза.

При нарезании прямых зубьев некруглых цилиндрических колес методом непрерывного огибания вместо вращающейся рейки применяется обычная цилиндрическая червячная фреза. Заготовке сообщают непрерывные: 1) вращательное движение с неравномерной скоростью по координате  $\varphi$ , 2) перемещения с неравномерной линейной скоростью по координате  $y$ . Фрезе сообщают: 1) вращательное движение с равномерной скоростью вокруг своей оси; 2) вертикальное перемещение с равномерной скоростью по координате  $z$  вниз.

При нарезании пространственного спироидного колеса по методу непрерывного огибания (рис. 2.19) вместо дисковой фрезы 1 применяется обычная цилиндрическая червячная фреза. Заготовке пространственного спироидного колеса сообщают вращательное движение вокруг своей оси с неравномерной скоростью. Фрезе сообщают вращательное движение с равномерной скоростью вокруг своей оси и перемещения с неравномерной линейной скоростью, согласованные с вращательным движением заготовки, по координате  $z$ .

При нарезании плоского некруглого спироидного колеса (рис. 3.7, б) по методу непрерывного огибания вместо червячной фрезы обычной длины необходимо использовать длинную червячную фрезу. Фрезе сообщают вращательное движение вокруг своей оси. Заготовке сообщают вращательное движение с неравномерной скоростью вокруг своей оси.

При нарезании круглого спироидного цилиндрического колеса червячной фрезе и заготовке колеса сообщают согласованные вращательные движения вокруг своих осей с равномерными скоростями.

При нарезании многовиткового некруглого колеса по методу прерывистого огибания колесо 47 и оправка 48 снимаются, кинематическая цепь 29...46 отключается, на каретке 7 устанавливается обычная гребенка. Заготовке сообщают дискретные перемещения по координатам  $\varphi$ ,  $y$ . Гребенке сообщают дискретные перемещения по координатам  $x$  и  $z$ . Движения по координатам  $\varphi$ ,  $y$  по  $x$ ,  $z$  согласованы между собой.

При нарезании круглого цилиндрического колеса по методу прерывистого огибания заготовке сообщают дискретные перемещения по координате  $\varphi$ ; фрезе, вращающейся рейке сообщают дискретные перемещения по координатам  $x$ ,  $z$ . Эти движения согласованы между собой.

При нарезании круглого цилиндрического колеса по методу непрерывного огибания заготовке сообщают вращательное движение вокруг своей оси, червячной фрезе сообщают вращательное движение вокруг своей оси и перемещение по координате  $z$ .

При нарезании некруглых, круглых косозубых цилиндрических колес фрезерную головку разворачивают вокруг вала 42.

При нарезании некруглого червячного колеса обычной цилиндрической фрезе сообщают вращение вокруг своей оси, заготовке червячного колеса сообщают неравномерные: 1) вращение по координате  $\varphi$ ; 2) перемещения по координате  $y$ .

При нарезании круглого червячного колеса заготовке сообщают вращение по координате  $\varphi$ .

## 10.6. Зубодолбежный станок с ЧПУ для нарезания некруглых и круглых цилиндрических колес

Для нарезания некруглых, круглых, некругло-круглых цилиндрических зубчатых колес с зубьями внешнего и внутреннего зацепления разработана кинематическая схема зубодолбежного станка (рис. 10.7) с ЧПУ. Станок состоит из силовых электродвигателей 1, 2, 3 и 4, которые соединены с пультом управления.

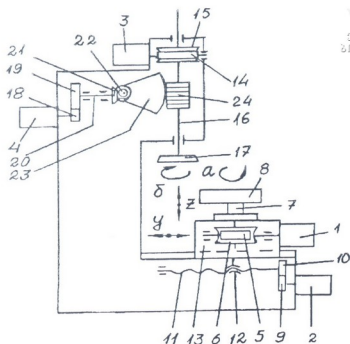


Рис. 10.7. Кинематическая схема зубодолбежного станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых цилиндрических колес

При нарезании прямых зубьев некруглых цилиндрических колес внешнего, внутреннего зацепления, от электродвигателя 1 через червяк 5, червячное колесо 6, оправку 7 заготовке 8 некруглого цилиндрического колеса сообщается вращательное движение с неравномерной скоростью по координате  $\varphi$  в направлении  $a$ . От электродвигателя 2 через колеса 9, 10, винтовую пару 11, 12, поворотный стол 13 заготовке 8 сообщают перемещение с неравномерной линейной скоростью по координате  $y$ . Одновременно с этим от электродвигателя 3 через червяк 14, червячное колесо 15, вал 16 долбяку 17 сообщают: вращательное движение с равномерной скоростью по направлению  $b$  и от электродвигателя 4 через колеса 18, 19, вал 20, колеса 21, 22, зубчатый сектор 23, круговую рейку 24, вал 16 долбяку 17 сообщают рабочий ход – перемещение из верхнего исходного положения вниз по координате  $z$ . После выхода долбяка из заготовки от электродвигателя 2 через колеса 9, 10, винтовую пару 11, 12, поворотный стол 13 заготовке 8 сообщают перемещение по

координате  $y$  (отводят от долбяка). Долбяку сообщают холостой ход – перемещение вверх по координате  $z$  в исходное положение. После этого описанный процесс нарезания зубьев повторяется до нарезания всех зубьев колеса. Рабочий ход долбяка производят медленно, холостой ход – быстрее.

При нарезании круглых цилиндрических колес заготовке сообщают вращательное движение с равномерной скоростью.

При нарезании колес по методу непрерывного огибания координаты  $\varphi$ ,  $y$ ,  $z$  задаются непрерывно, при нарезании колес по методу прерывистого огибания координаты  $\varphi$ ,  $y$  задаются дискретно.

При нарезании косозубых колес долбяк 17 со своим приводом разворачивают вокруг вала 20.

### 10.7. Кинематические схемы станков с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых цилиндрических червяков

Для нарезания некруглых, круглых цилиндрических червяков разработана кинематическая схема станка (рис. 10.8) с ЧПУ. При нарезании некруглых червяков за основу работы станка принят метод (рис. 2.17). Станок состоит из силовых электродвигателей 4, 33, 38, которые соединены с пультом управления.

В начале нарезания червяков необходимо заготовку 1 относительно дисковой фрезы 2 установить в исходное положение. От электродвигателя 4 через колеса 5,6, червяк 7, червячное колесо 8, винтовую пару 9, 10, плиту 3 перемещают по координате  $z$  так, чтобы в плане ось вращения фрезы разместилась в торцевой плоскости заготовки. Винтовой парой 12, 13 плиту 11 перемещают по координате  $y$  так, чтобы в плане ось вращения заготовки разместилась в плоскости, проходящей через середину толщины фрезы. Плиту 14 с помощью шестерни 17 и зубчатого сектора 18 поворачивают на угол  $90^\circ - \lambda$  и закрепляют неподвижно;  $\lambda$  – угол подъема винтовой линии на начальном некруглом цилиндре. Поворот плиты 14 производят: при нарезании правозаходного червяка, против направления вращения часовой стрелки; при нарезании левозаходного червяка – по направлению вращения часовой стрелки.



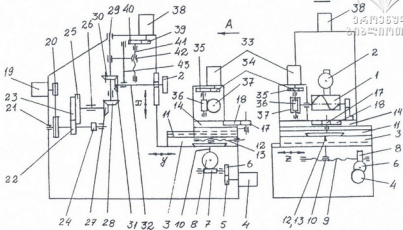


Рис. 10.8. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания цилиндрических червяков

При нарезании некруглого цилиндрического червяка от асинхронного электродвигателя 19 через ременную передачу 21, колеса 22, 23 (или 24, 25), вал 26, колеса 27, 28, вал 29, колеса 30, 31, вал 32 фрезе 2 сообщают вращательное движение. Сигналы, считанные с программоносителя, распределяются по электродвигателям 4, 33 и 38. От электродвигателя 33 через колеса 34, 35, червяк 36, червячное колесо 37 заготовке 1 некруглого червяка сообщают вращательное движение с неравномерной угловой скоростью. От электродвигателя 4 через колеса 5, 6, червяк 7, червячное колесо 8, винтовую пару 9, 10 заготовке 1 сообщают перемещение по координате  $z$  с равномерной линейной скоростью. Одновременно с этим от электродвигателя 38 через колеса 39, 40, винтовую пару 41, 42, ось 43, фрезе 2 сообщают перемещение с неравномерной линейной скоростью по координате  $x$ . После выхода фрезы из заготовки фрезе сообщают перемещение в исходное положение по координате  $x$ , заготовке сообщают перемещение в исходное положение по координате  $z$ . От электродвигателя 33 через колеса 34, 35, червяк 36, червячное колесо 37 заготовке сообщают поворот на переменный угловой шаг, и описанный процесс нарезания винтовой поверхности повторяется до нарезания всех витков червяка. Движения заготовки и фрезы согласованы между собой.

Обработку заготовки по некруглому цилиндру вершин витков производят на данном станке, при этом вместо дисковой фрезы используют обычную цилиндрическую фрезу.

При нарезании круглого цилиндрического червяка заготовке сообщают вращательное движение с равномерной угловой скоростью.

Для нарезания некруглых, круглых цилиндрических червяков разработана кинематическая схема станка с ЧПУ (рис. 10.9, 10.10). Станок состоит из силовых электродвигателей 1, 2, 3, которые соединены с пультом управления.

В начале нарезания некруглого цилиндрического червяка необходимо установить резец 26 относительно заготовки 9 в начальное положение. Для этого от двигателя 1 через колеса 4, 5, червяк 6, червячное колесо 7, оправки 8 заготовку 9 поворачивают так, чтобы в горизонтальном положении был расположен максимальный или минимальный радиус заготовки 9 (рис. 10.10).

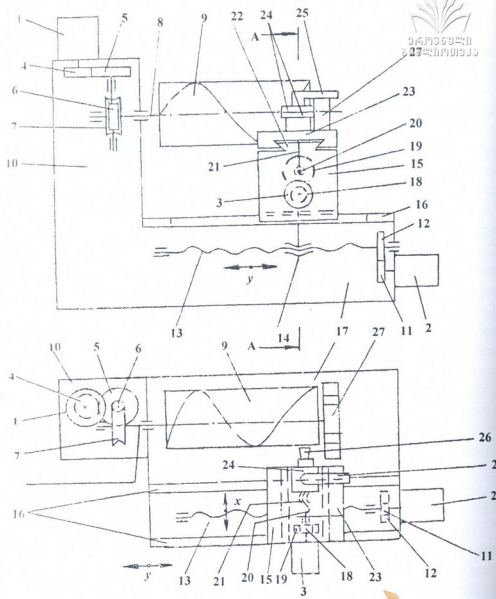


Рис. 10.9. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания цилиндрических червяков

При нарезании архимедового червяка резец 25 относительно заготовки 9 устанавливают так, чтобы режущая кромка резца 26 была расположена в осевом сечении заготовки 9 (рис. 10.10). При нарезании конволютного червяка резец 26 устанавливают так, чтобы режущая кромка резца 26 была расположена перпендикулярно





колес 18, 19, винта 20, гайки 21, направляющих 22, плиты 23 сообщают перемещение по координате  $x$ , резец 26 от заготовки 9. От электродвигателя 2 через колеса 11, 12, винт 13, гайки 14 резец 26 перемещают по координате  $y$  в исходное положение. От электродвигателя 1, с помощью колес 4, 5, червяка 6, червячного колеса 7, оправки 8 заготовку 9 поворачивают на угловой шаг. От электродвигателя 3 через зубчатые колеса 18, 19, винт 20, гайки 21, направляющих 22, плиты 23 резцу 26 сообщают перемещение по координате  $x$  в направлении заготовки 9. Резец 26 врезается в заготовку на определенную высоту винтового зуба. От электродвигателей 1, 2, 3 заготовке 9 и резцу 26 сообщают движения по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и описанный процесс нарезания винтовой поверхности повторяется до нарезания всех витков червяка.

Обработку заготовки некруглого червяка 9 по наружному некруглому цилиндру вершин витков производят на данном станке, при этом используют обычный резец.

При нарезании круглого червяка от электродвигателя 1 с помощью колес 4, 5, червяка 6, червячного колеса 7, оправки 8 заготовке круглого червяка сообщают вращательное движение с постоянной скоростью. От электродвигателя 3 с помощью колес 18, 19, винта 20, гайки 21, направляющих 22, плиты 23 резцу 26 сообщают перемещение по координате  $x$  с постоянной скоростью. От электродвигателя 2 с помощью колес 11, 12, винта 13, гайки 4, коробки 15, направляющих 16, плиты 23 резцу 26 сообщают перемещения по координате  $y$  с постоянной линейной скоростью.

**10.8. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых конических червяков**

Для нарезания некруглых конических червяков по методу (рис. 2.18) и круглых конических червяков разработана кинематическая схема станка (рис. 10.11) с ЧПУ. Станок состоит из силовых электродвигателей 2, 8, 13, которые соединены с пультом управления.

В начале нарезания червяков заготовку 1 от электродвигателя 2 через червяк 3, червячное колесо 4, шестерню 5, зубчатый сектор 6,

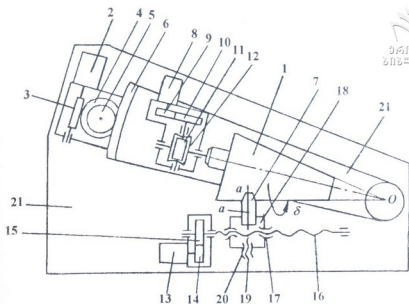


Рис. 10.11. Кинематическая схема станка для нарезания некруглых, круглых конических червяков

поворотный стол 21 поворачивают вокруг вершины  $O$  начального конуса таким образом, чтобы образующая конуса вершин витков была расположена перпендикулярно оси  $a-a$  симметрии резца 7.

От электродвигателя 8 через колеса 9, 10, червяк 11, червячное колесо 12 заготовке 1 некруглого конического червяка сообщают вращательное движение с неравномерной скоростью вокруг своей оси по направлению  $\delta$ . Одновременно с этим от электродвигателя 2 через червяк 3, червячное колесо 4, шестерню 5, зубчатый сектор 6, поворотный стол 21 заготовке некруглого конического червяка 1 сообщают переносное движение с неравномерной скоростью вокруг оси, проходящей через вершину  $O$ , перпендикулярно плоскости чертежа. Одновременно с этим от электродвигателя 13, колеса 14, 15, винтовой пары 16, 17, каретки 18 резцу 7 сообщают перемещение с постоянной скоростью вдоль образующей конической заготовки 1. После выхода резца из заготовки, при помощи винтовой пары 19, 20 резец отводят из заготовки и от электродвигателя 13 через колеса 14, 15, винтовую пару 16, 17 каретки 18 перемещают в исходное положение. От электродвигателя 8 через колеса 9, 10, червяк 11, червячное колесо 12 заготовке 1 сообщают поворот на переменный угловой шаг, и

описанный процесс нарезания винтовой поверхности повторяется до нарезания всех витков червяка. Резец на полную высоту витка червяка перемещают с помощью винтовой пары 19, 20.

Обработку заготовки по наружному некруглому конусу вершин витков производят на данном станке, при этом используют обычный резец.

При нарезании круглого конического червячка заготовке сообщают вращательное движение с равномерной угловой скоростью.

### 10.9. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых и круглых цилиндрических колес с арочными зубьями

Для нарезания некруглых, круглых цилиндрических колес с арочными зубьями разработана кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ (рис. 10.12). При нарезании некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями за основу работы станка приняты методы (рис. 5.1, 2.26). Станок состоит из силовых электродвигателей 1, 2, 3, которые соединены с пультом управления.

На продольных направляющих 4 стола 5 установлена коробка 6, которая через гайку 7, винт 8, колеса 9, 10 соединена с электродвигателем 1. На поперечных направляющих 11 коробки 6 установлена бабка 12 изделия, которая через гайку 13 соединена с винтом 14. На вертикальных направляющих 15 бабки изделия 12 установлен суппорт 16, который через гайку 17, винт 18, колеса 19, 20 соединен с электродвигателем 2. Заготовка 21 некруглого цилиндрического колеса через червячное колесо 22, червяк 23, колеса 24, 25 соединена с электродвигателем 3. Резцовая головка 26 через колеса 27, 28, 29, 30, 31, 32 соединена с электродвигателем 33.

В начале работы необходимо заготовку 21 установить относительно резцовой головки 26 в определенное исходное положение. Для этого с помощью винтовой пары 13, 14 стол 6 с бабкой 12 изделия перемещают по направляющим 11 и заготовку 21 устанавливают относительно резцовой головки 26 в исходное положение по координате  $x$ , и коробку 6 закрепляют





неподвижно. От электродвигателя 1 через колеса 10, 9, винт 8, гайку 7, коробку 6, бабку 12 изделия, суппорт 16 заготовку 21 устанавливают в исходное положение по координате  $z$ . От электродвигателя 2 через колеса 20, 19, винт 18, гайку 17, суппорт 16 заготовку 21 устанавливают в исходное положение по координате  $y$ .

Станок работает следующим образом. От электродвигателя 33 через колеса 32, 31, 30, 29, 28, 27 резцовой головке 26 сообщается вращательное движение. Сигналы, считанные с программноносителя, распределяются по электродвигателям 1, 2, 3. От электродвигателя 3 через колеса 25, 24, червяк 23, червячное колесо 22 заготовке 21 сообщают вращательное движение с неравномерной скоростью. Одновременно с этим заготовке 21 сообщают: от электродвигателя 2 через колеса 20, 19, винтовую пару 18, 17, суппорт 16 перемещение вниз по координате  $y$  с равномерной линейной скоростью и от электродвигателя 1 через колеса 10, 9, винтовую пару 8, 7, коробку 6, бабки 12 изделия, суппорт 16 перемещение по координате  $z$  с неравномерной линейной скоростью. После выхода резцовой головки 26 из заготовки бабку 12 изделия отводят от резцовой головки по координате  $z$ , суппорту 16 сообщают перемещение по координате  $y$  в верхнее исходное положение. От электродвигателя 3 через колеса 25, 24, червяк 23, червячное колесо 22 заготовке 21 сообщают поворот на переменный угловой шаг и описанный процесс нарезания повторяется до нарезания всех зубьев.

При нарезании некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями по методу прерывистого огибания (рис. 2.26) резцовой головке 26 сообщают вращательное движение вокруг своей оси. Заготовке 21 сообщают дискретные перемещения: вокруг своей оси и по координате  $y$ . Затем заготовку закрепляют неподвижно и сообщают перемещение по координате  $z$ .

При нарезании круглых цилиндрических колес с арочными зубьями по методу непрерывного огибания заготовке сообщают: вращательное движение с равномерной скоростью и перемещение по координате  $y$  с равномерной линейной скоростью.

## 10.10. Кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ для нарезания эллипсоидных, сферических, тороидных, некруглых и круглых конических зубчатых колес

Для нарезания эллипсоидных, сферических, тороидных, некруглых и круглых конических зубчатых колес разработана кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ (рис. 10.13).

Станок состоит из силовых электродвигателей 13, 18, 38 и 39, которые соединены с пультом управления. Нарезание колес производят конической червячной фрезой 1. При нарезании эллипсоидного, сферического колес заготовку 2 на оправке 3 устанавливают так, чтобы через большую торцовую плоскость заготовки колес проходили геометрические оси валиков 4, 5 и пересекали геометрическую ось оправки 3. При нарезании тороидного колеса геометрические оси валов 4, 5 с геометрической осью оправки 3 расположены эксцентрично.

При нарезании эллипсоидного, сферического, тороидного колес от электродвигателя 39 через червяк 42, червячное колесо 43, валики 4, 5, люльки 44 заготовку 2 нарезаемого колеса поворачивают вокруг валиков 4, 5 таким образом, чтобы оправка 3 расположилась в горизонтальной плоскости.

Перед началом работы суппорт 6 поворачивают вокруг вала 7 таким образом, чтобы геометрическая ось оправки 17, образующая ав фрезы 1, расположилась в большой горизонтальной плоскости. От электродвигателя 13 через колеса 14, 15, винтовую пару качения 16, 17, суппорт 6 перемещают по координате  $z$  таким образом, чтобы геометрическая ось оправки 17, образующая ав фрезы 1, расположилась в большой торцовой плоскости заготовки 2 нарезаемого колеса. От колес 8, 9 через винтовую пару качения 10, 11 стол 12 перемещают по координате  $y$  таким образом, чтобы поверхности вершин зубьев нарезаемого колеса соприкасались с образующей ав фрезы 1. От электродвигателя 18 через колеса 19, 20, винтовую пару качения 21, 22, суппорт 6 фрезу 1 перемещают по координате  $x$ , таким образом, чтобы текущий модуль фрезы совместился с модулем в большой торцовой плоскости нарезаемого колеса. После этого суппорт 6 поворачивают на угол подъема винтовой линии фрезы.

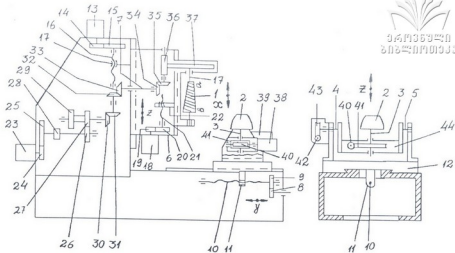


Рис. 10.13. Кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ для нарезания эллипсоидных, сферических, торондных, некрутлых и круглых конических колес

От асинхронного электродвигателя 23 через колеса 24, 25, 26, 27, (или 28, 29), 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36 и 37 фрезе 1 сообщают вращательное движение. Сигналы, считанные с программно-носителя, распределяются по электродвигателям 13, 18, 38, 39. От электродвигателя 38 через червяк 40, червячное колесо 41, оправки 3 заготовке 2 эллипсоидного (сферического, тороидного) колеса сообщают вращательное движение с равномерной скоростью. От электродвигателя 39 через червяк 42, червячное колесо 43, валики 4, 5, люльки 44, оправки 3 заготовке 2 сообщают переносное движение с равномерной скоростью вокруг валиков 4,5. Одновременно с этим от электродвигателя 18 через колеса 19, 20, винтовую пару качения 21, 22 фрезе 1 сообщают перемещение по координате  $x$ . При нарезании эллипсоидного колеса, одновременно с перемещением фрезы 1 по координате  $x$ , от электродвигателя 13 через колеса 14, 15, винтовую пару 16, 17 фрезе 1 сообщают перемещение вверх по координате  $z$ .

При нарезании некруглого и круглого конических колес заготовку 2 на оправке 3 устанавливают так, чтобы геометрические оси валиков 4, 5 проходили через вершину конусов. От электродвигателя 39 через червячную пару 42, 43, валики 4, 5, люльку 44 заготовку 2 круглого, некруглого конических колес поворачивают так, чтобы образующие делительных конусов расположились в вертикальном положении. Установочные перемещения фрезы и заготовки по координатам  $x$ ,  $y$  производят таким образом, чтобы текущий модуль фрезы совместился с модулем в меньшей торцевой плоскости нарезаемого колеса.

От электродвигателя 38 через червяк 40, червячное колесо 41, оправки 3 заготовке 2 сообщается вращательное движение. При нарезании некруглых конических колес вращательное движение заготовки неравномерное, при нарезании круглых конических колес – равномерное. От электродвигателя 39 через червяк 42, червячное колесо 43, валики 4, 5, люльку 44, оправки 3 заготовке 2 некруглого конического колеса сообщают неравномерное переносное движение вокруг валиков 4, 5. От электродвигателя 18 через колеса 19, 20, винтовую пару качения 21, 22 фрезе 1 сообщают перемещение по координате  $x$ . Одновременно с этим от электродвигателя 13 через колеса 14, 15, винтовую пару 16, 17 фрезе 1 сообщают перемещение вниз по координате  $z$ .

При перемещении фрезы по координате  $x$  станочное зацепление фреза-заготовка превращается в дифференциал, поэтому от электродвигателя 38 через червяк 40, червячное колесо 41, оправку 3 заготовке 2 сообщается дополнительное вращательное движение: неравномерное при нарезании некруглых конических колес и равномерное при нарезании эллипсоидных, сферических, тороидных и круглых конических колес.

### 10.11. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания зубчатых колес сферическим зуборезным инструментом

Для нарезания сферических, эллипсоидных колес с наружными зубьями; круглых, некруглых конических колес с наружными, внутренними зубьями; круглых, некруглых цилиндрических колес с наружными, внутренними зубьями разработана кинематическая схема зуборезного станка с ЧПУ (рис. 10.14).

С этой целью зуборезный инструмент 1 (рис. 10.15) выполняется в виде полусферического зубчатого колеса, например, с эвольвентными прямыми зубьями, расположенными по меридианам сферы и постепенно уменьшающимися в размерах (шаг, модуль) от диаметральной плоскости А-А к полюсу 2 сферы 1. В поперечном направлении зубья прорезаны однозаходной винтовой канавкой 3 постоянного шага. Для придания зубьям режущих свойств они снабжены передними и задними углами резания. Передние грани зубьев с режущими кромками расположены по винтовой линии канавки и направлены в сторону диаметральной плоскости А-А [94].

Работа станка основана на постепенном внедрении, завинчивании режущих кромок зубьев сферического зуборезного инструмента в заготовки нарезаемых колес. Такой принцип нарезания зубьев значительно повышает точность нарезания зубчатых колес и прочность режущего инструмента.

Станок состоит из силовых электродвигателей 1, 2, 3, 4, 5, 6, соединенных с пультом управления.

На заготовках сферического 7 (рис. 10.16) и эллипсоидного 8 (рис. 10.17) зубчатых колес нарезание прямых зубьев производят



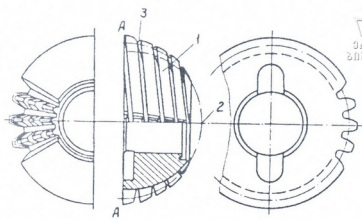


Рис. 10.15. Сферический зуборезный инструмент

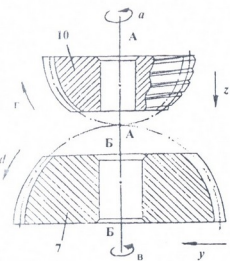


Рис. 10.16. Схема нарезания сферического зубчатого колеса

следующим образом. На шпиндель 9 закрепляют сферический зуборезный инструмент 10. На оправку 11 закрепляют заготовку сферического 7 или эллипсоидного 8 зубчатых колес. Заготовку 7 (8) и инструмент 10 закрепляют таким образом, чтобы в большой торцевой плоскости инструмента 10 лежали геометрические оси валов 12, 13, а в большой торцевой плоскости заготовки 7(8) лежали геометрические оси валов 14, 15. Заготовку 7 и инструмент 10 устанавливают в начальное положение. От электродвигателя 2 с помощью муфты,

вала 16, червяка 17, червячного колеса 18, вала 13, кронштейна 19, люльки 20, шпинделя 9 инструмент 10 поворачивает так, чтобы геометрическая ось А-А шпинделя 9 была расположена в вертикальном положении. От электродвигателя 5 с помощью муфты, вала 21, червяка 22, червячного колеса 23, вала 15, кронштейна 24, люльки 25, оправки 11 заготовку 7(8) колеса, поворачивают так, чтобы геометрическая ось Б-Б оправки 11 была расположена вертикально. От электродвигателя 6 с помощью колес 26, 27, винта 28, гайки 29, направляющих 30, плиты 31, кронш-

тейнов 32, 33 заготовку 7(8) колеса перемещают по координате  $y$  в направлении инструмента 10. От электродвигателя 3 с помощью колес 34, 35, винта 36, гайки 37, суппорта 38, направляющих 39 инструмент 10 перемещают по координате  $z$  с верхнего положения вниз в направлении заготовки 7(8). После окончания перемещения по координатам  $y, z$  заготовка 7(8) и инструмент 10 должны касаться полюсами, а их геометрические оси А-А, Б-Б должны лежать на одной линии (рис. 10.16, 10.17).

От электродвигателя 1 с помощью муфты 40, вала 12, колес 41, 42, вала 43, червяка 44, червячного колеса 45, шпинделя 9 инструменту 10 сообщают вращательное движение в направлении  $a$  подъема винтовой линии. Одновременно от электродвигателя 4 с помощью муфты 46, вала 14, колес 47, 48, вала 49, червяка 50, червячного колеса 51, оправки 11, заготовке 7(8) сообщают вращательное движение по направлению  $b$ . От электродвигателя 2 с помощью муфты, вала 16, червяка 17, червячного колеса 18, вала 13, кронштейна 19, люльки 20, инструменту 10 сообщают перекаточное движение в направлении  $g$ .

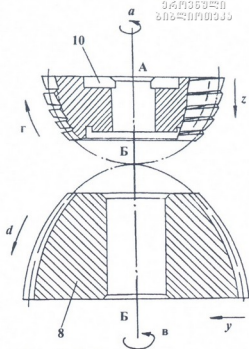


Рис. 10.17. Схема нарезания эллипсоидного зубчатого колеса

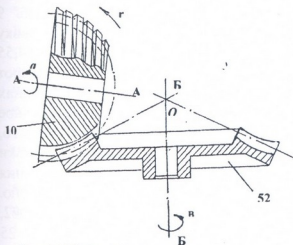


Рис. 10.18. Схема нарезания конического колеса с наружными зубьями



От электродвигателя 5, с помощью муфты, вала 21, червяка/22, червячного колеса 23, вала 15, кронштейна 24, люльки 25 заготовки 7(8) сообщают перекаточное движение по направлению  $d$ . Одновременно с обкаточными движениями инструмента и заготовки 7(8) заготовки 7(8) и инструменту 10 сообщают одновременное, согласованное с обкаточными движениями, перемещение по координатам  $y, z$ .

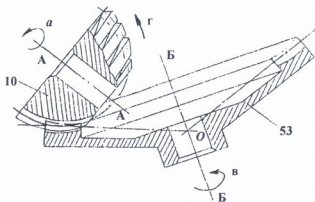


Рис. 10.19. Схема нарезания конического колеса с внутренними зубьями

На заготовках круглых 52, 53 (рис. 10.18, 10.19), некруглых 54, 55 (рис. 10.20, 10.21) конических колес нарезание зубьев с вогнутыми делительными поверхностями наружного, внутреннего зацепления производят следующим образом. На шпиндель 9 закрепляют сферический зуборезный инструмент 10. На оправку 11 закрепляют заготовку круглых 52, 53 или некруглых 54, 55 конических колес. Заготовки колес 52, 53, 54, 55 устанавливают так, чтобы геометрические оси валов 14, 15 проходили в вершинах  $O$  конусов. Заготовки и инструмент 10 устанавливают в начальное положение. От электродвигателя 2 с помощью муфты, вала 16, червяка 17, червячного колеса 18, вала 13, кронштейна 19, люльки 20 инструмент 10 поворачивают так, чтобы ось вращения инструмента А-А была расположена наклонно или горизонтально. От электродвигателя 5 с помощью муфты, вала 21, червяка 22, червячного колеса 23, вала 15, кронштейна 24, люльки 25 заготовки 52, 54, 55 устанавливают так, чтобы ось Б-Б вращения колес была расположена вертикально, ось Б-Б вращения колеса 53

была расположена наклонно. От электродвигателя 3 с помощью колес 34, 35, винта 36, гайки 37, суппорта 38, направляющего 39 инструмент 10 с верхнего положения перемещают по координате  $z$  в

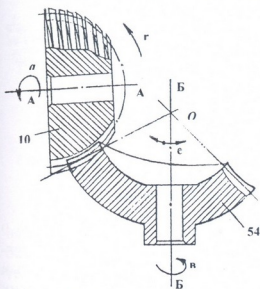


Рис. 10.20. Схема нарезания конического колеса с наружными зубьями

направлению  $v$ , согласованное с вращательным движением

инструмента 10 по направлению  $a$ . При нарезании круглых конических колес заготовкам сообщают вращательное движение с постоянной скоростью, при нарезании некруглых конических колес заготовкам сообщают качательное и вращательное движение с переменной скоростью.

На заготовках круглых 56, 57 (рис. 10.22, 10.23), некруглых 58, 59 (рис. 10.24, 10.25) цилиндрических колес нарезание прямых зубьев наружного, внутреннего зацепления производят следующим

направлении заготовок. От электродвигателя 1 с помощью муфты 40, вала 12, колес 41, 42, вала 43, червяка 44, червячного колеса 45, шпинделя 9 инструменту 10 сообщают вращательное движение в направлении  $a$  подъема винтовой линии. От электродвигателя 4 с помощью муфты 46, вала 14, колес 47, 48, вала 49, червяка 50, червячного колеса 51, оправки 11 заготовкам 52, 53, 54, 55 сообщают вращательное движение по

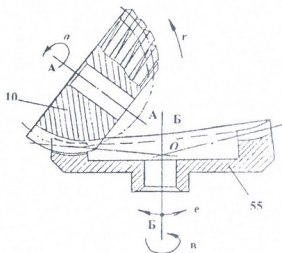


Рис. 10.21. Схема нарезания конического колеса с наружными зубьями

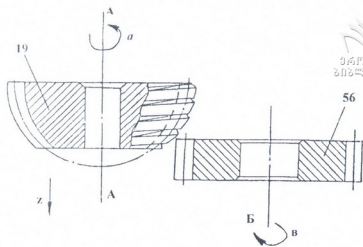


Рис. 10.22. Схема нарезания круглого цилиндрического колеса наружного зацепления

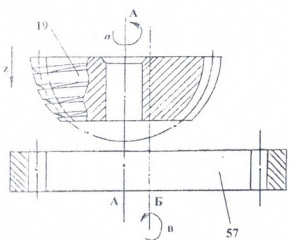


Рис. 10.23. Схема нарезания круглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями

образом. На шпиндель 9 закрепляют заготовку круглых 56; 57 или некруглых 58; 59 цилиндрических колес (рис. 10.22; 10.23; 10.24; 10.25). Заготовки 56, 57; 58, 59 и инструмент 10 устанавливают в начальное положение. От электродвигателя 2 с помощью муфты, вала 16, червяка 17, червячного колеса 18, вала 13, кронштейна 19, люльки 20 инструмент 10 поворачивают так, чтобы

ось А-А вращения инструмента была расположена вертикально. От электродвигателя 5 с помощью муфты, вала 21, червяка 22, червячного колеса 23 заготовки: 56, 57; 58, 59 устанавливают так, чтобы ось Б-Б вращения колес была расположена вертикально. От электродвигателя 6 с помощью колес 26, 27, винта 28, гайки 29, направляющих 30, плиты 31, кронштейнов 32, 33, заготовки колес 56, 57; 58, 59 перемещают по координате  $y$  в направлении инструмента 10 и устанавливают в положениях, показанных на

рисунках: 9.20, 9.21, 9.22, 9.23. От электродвигателя 1 с помощью

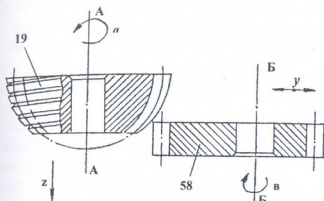


Рис. 10.24. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса наружными зубьями

муфты 40, вала 12, колес 41, 42, вала 43, червяка 44, червячного колеса 45, шпинделя 9 инструменту 10 сообщают вращательное движение в направлении  $a$ , подъема винтовой линии. От электродвигателя 4 с помощью муфты 46, вала 14, зубчатых колес 47, 48, вала 49, червяка 50, червячного колеса 51, оправки 11 заготовкам сообщают обкаточное вращательное движение, согласованное с вращательным движением инструмента 10, по направлению  $v$ .

От электродвигателя 3 с помощью колес 34, 35, винта 36, гайки 37, суппорта 38, направляющих 39 инструмент 10 перемещают по координате  $z$  в направлении заготовок.

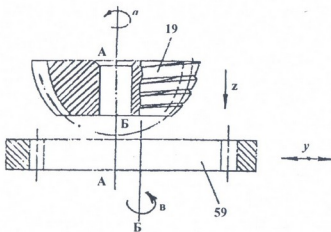


Рис. 10.25. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями

При обкаточно-вращательных движениях инструмента и заготовок от электродвигателя 3 с помощью колес 34, 35, винта 36, гайки 37, суппорта 38, направляющих 39 инструмент 10 перемещают по координате  $z$  в направлении заготовок.

Одновременно от электродвигателя 6 с помощью колес 26, 27, винта 28, гайки 29, направляющих 30, кронштейнов 32, 33 заготовкам 58, 59 некруглых колес сообщают перемещение по координате  $y$ .

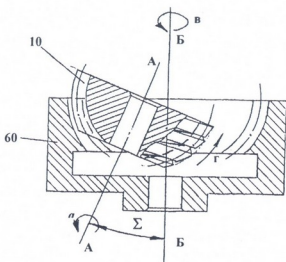


Рис. 10.26. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями

двигателя 1 с помощью муфты 40, вала 12, зубчатых колес 41, 42, вала 43, червяка 44, червячного колеса 45, шпинделя 9 инструменту 10 сообщают обкаточное вращательное движение по направлению  $a$ . От электродвигателя 4 с помощью муфты 46, вала 14, колес 47, 48, вала 49, червяка 50, червячного колеса 51, оправки 11, заготовкам 60, 61 сообщают обкаточное вращательное движение по направлению  $в$ , согласованное с обкаточным вращательным движением инструмента 10. Одновременно от электродвигателя 2 с помощью муфты, вала 16, червяка 17, червячного колеса 18, вала 13, кронштейна 19, люльки 20 инструменту 10 сообщают перекаточное движение по направлению  $г$ . Одновременно от электродвигателя 6 с помощью колес 26, 27, винта 28, гайки 29, направляющих 30, кронштейнов 32, 33 заготовке 61 некруглого колеса сообщают перемещения по координате  $y$ .

На заготовках круглых 60 (рис. 10.26), некруглых 61 (рис. 10.27) конических колес нарезание зубьев с внутренними вогнутыми начальными поверхностями производят следующим образом. На оправку 11 закрепляют заготовку круглых 60 или некруглых 61 цилиндрических колес так, чтобы ось Б-Б вращения колес была расположена вертикально, ось А-А вращения инструмента была расположена под углом  $\Sigma$ . От электро-

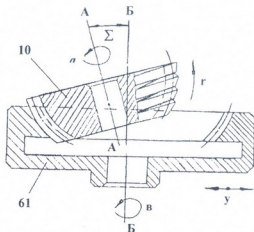


Рис. 10.27. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса с внутренними зубьями

При нарезании колес 7, 8, 52, 53, 54, 55, 60, 61 зубчатые передачи: 41, 42; 47, 48 превращаются в дифференциальные передачи, инструмент и заготовки получают дополнительные вращательные движения. Указанное должно быть учтено при составлении программ для нарезания колес.

### 11.1. Нарезание некруглых конических колес по методу прерывистого огибания

Устройство для нарезания колес. Для нарезания прямых зубьев некруглых колес по методу прерывистого огибания (рис. 2.34, 2.35) разработаны схема и конструкция устройства к универсальному оборудованию (рис. 11.1, 11.2).

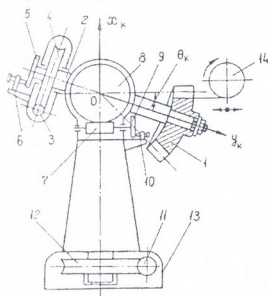


Рис. 11.1. Схема устройства для нарезания некруглых конических колес по методу прерывистого огибания

На конце шпинделя 2 крепится заготовка 1 с вершиной  $O$  и осью вращения  $y_k$  (рис. 10.1). На другом конце шпинделя закреплено колесо червячной пары 3, 4, посредством которой осуществляется поворот нарезаемого колеса вокруг оси  $Oy_k$  на угол  $\varphi_k$ . Для установки угла  $\theta_k$  служит червячная пара 7, 8, а для точной установки углов  $\varphi_k$  и  $\theta_k$  применяются соответственно делительные диски 5, 9 с фиксаторами 6, 10. Устройство помещается на поворотный стол 13 с червячной парой 11, 12, посредством которой всему устройству

сообщается поворот на угол  $\varphi_n$  вокруг оси  $Ox_k$  (ось вращения воображаемого производящего колеса). Устройство можно применить при черновом и чистовом нарезании зубьев дисковой фрезой 14. Крепится устройство (рис. 11.2) на поворотном столе 6 при помощи опор 1, 2, плиты 3, болтов и гаек 4, 5. Центровка приспособления в отверстии поворотного стола осуществляется с помощью буртика 7 плиты 3. Корпус 8 червячной передачи 9, 10 с осями 11, 12 размещен в опорах 1 и 2. Опора 2 одновременно служит корпусом для червячной пары 13, 14. На оси 15 закреплен

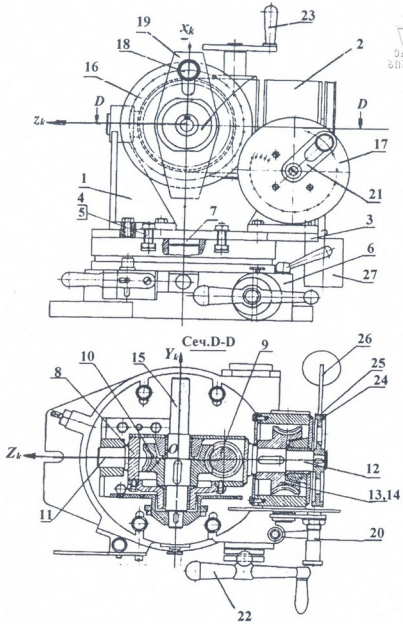


Рис. 11.2. Конструкция устройства для нарезания некруглых конических колес

делительный диск 16, вращающийся вместе с осью 15. На корпусе 2 неподвижно закреплен делительный диск 17; фиксатор 18 делительного диска 16 вставлен в паз неподвижного кронштейна 19, а фиксатор 20 делительного диска 17 – в паз подвижного



кронштейна 21. Устройство поворачивается вокруг оси  $O_{\text{ж}}$  с помощью рукоятки 22 поворотного стола 6. Поворотом оси 15, на конце которой устанавливается заготовка некруглого конического колеса, вокруг оси  $O_{\text{ж}}$  и фиксирование этого поворота осуществляются рукояткой 23, червячной парой 9, 10, делительным диском 16 и фиксатором 18. Для приведения образующих некруглого конуса в горизонтальное положение ось 15, с помощью червячной пары 13 и 14, поворачивается вокруг оси  $O_{\text{зк}}$ . Эти повороты фиксируются делительным диском 17 и фиксатором 20.

Для обеспечения большей жесткости устройства предусмотрен ленточный тормоз. Тормозной шкив 24 закреплен на конце оси 12. Оба конца тормозной ленты 25 прикреплены к рычагу 26. Рычаг 26, на конце которого подвешен груз 27, установлен шарнирно на ось, закрепленную в корпусе 2.

**Расчет аксоидов некруглых конических колес.** При расчете аксоидов некруглых конических колес исходным параметром является заданное передаточное отношение. Выбираем такой же закон изменения передаточного отношения, как для цилиндрических эллиптических колес. Дифференцируя (2.35, 2.36), находим:

$$\frac{d}{d\psi_1}[u_{12}(\psi_1)] = \frac{2e \sin \psi_1}{1 - e^2}; \quad (11.1)$$

$$\frac{d^2}{d\psi_1^2}[u_{12}(\psi_1)] = \frac{2e \cos \psi_1}{1 - e^2}. \quad (11.2)$$

Используя (11.1) и (11.2), представим неравенства (2.35) и (2.36) в следующем виде:

$$\frac{2 + e^2}{1 - e^2} + \cos \Sigma > 0; \quad (11.3)$$

$$1 + \frac{4e^2 - 2e \cos \psi_1 + 2e^2 \cos \psi_1}{(1 - e^2)^2} + \frac{1 - 2e \cos \psi_1 + e^2}{1 - e} \cos \Sigma > 0. \quad (11.4)$$

Неравенства (11.3) и (11.4), определяющие отсутствие вогнутости аксоидов ведущего и ведомого некруглых конических колес, удовлетворяются при любых значениях эксцентриситета. Принимаем  $e = 0,2$ , угол между осями вращения колес выбираем  $\Sigma = 60^\circ$ . Вычисление функции

$$\psi_2(\psi_1) = \int_0^{\psi_1} u_{21}(\psi_1) d\psi_1$$

показывает, что аксоид ведомого некруглого конического колеса имеет такое же очертание, как аксоид ведущего некруглого конического колеса. Поэтому в дальнейшем все расчеты будем производить для ведущего колеса. По формуле (2.11) определяем  $\delta_k$  ( $k = 1, 2$ ). При известных  $R_e$  и  $\delta_k$  находим текущие значения радиуса внешнего начального некруглого конуса в виде функции от  $\psi_k$  (рис. 11.3)

$$r_{ek}(\psi_k) = R_e \sin \delta_k. \quad (11.6)$$

Задаемся значением внешнего конусного расстояния  $R_e = 120$  мм, длиной зубьев  $b = 12$  мм. Находим внешний радиус вершин зубьев:

$$r_{ack}(\psi_1) = r_{ek}(\psi_1) + m_{te} \cos \delta_k. \quad (11.7)$$

Расчет аксоидов ведем при значении  $\psi_k$  через  $2^\circ$ . В таблице 11.1 приведены результаты счета при изменении  $\psi_k$  с интервалами в

$10^\circ$ . По максимальному радиусу  $r_{ack}$  обрабатываем заготовку некруглого конического колеса на токарном станке.

**Нарезание колес.** Для определения параметров движения при нарезании колес используем выражения (2.81, 2.82, 2.85, 2.82). Для названных  $\Sigma$  и  $e$  уравнения (2.81, 2.82 и 2.85) принимают вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\arcsin\left(\frac{\sin \varphi_1}{3,8}\right) + \varphi_1 + \pi; \\ \theta_1 &= \operatorname{arctg}\left[\frac{2,07846 \cos(\psi_1 - \varphi_1)}{3,8 - \cos \psi_1}\right]; \\ \varphi_n &\equiv \int_{180^\circ}^{\varphi_1} \sin \theta_1 d\varphi_1. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Параметры аксоидов эллиптических конических колес

$\varphi_1^0$	$u_{12}(\varphi_1)$	$\delta_1^0$	$\delta_2^0$	$\psi_2(\psi_1)^0$	$r_{\text{ек}}, \text{ мм}$
0	1,4999	23°24'50"	36°35'10"	0°	71,5200
10	1,4859	23°33'40"	36°26'20"	14°57'00"	71,2800
20	1,4455	23°59'40"	36°00'20"	29°59'40"	70,5366
30	1,3841	24°41'20"	35°18'40"	53°46'40"	60,3600
40	1,3036	25°35'20"	34°24'40"	57°15'00"	67,8120
50	1,2262	26°38'30"	33°21'30"	69°56'20"	65,9880
60	1,2438	27°47'50"	32°12'10"	81°47'40"	63,9480
70	1,0629	28°59'30"	31°00'30"	92°48'40"	61,8240
80	0,9891	30°10'50"	29°49'10"	103°03'40"	59,6760
90	0,9231	31°19'20"	28°40'40"	112°37'20"	57,5880
100	0,8654	32°23'20"	27°36'40"	121°28'20"	55,6200
110	0,8158	33°21'10"	26°38'50"	129°57'00"	53,8200
120	0,7742	34°12'10"	25°47'50"	137°53'40"	52,2240
130	0,7401	35°18'10"	24°41'50"	149°53'40"	50,1360
140	0,7130	35°31'30"	24°28'50"	152°43'20"	49,7160
150	0,6924	35°59'30"	24°00'30"	159°44'40"	48,8280
160	0,6780	36°19'20"	23°40'40"	160°35'20"	48,1920
170	0,6695	36°31'10"	23°28'50"	173°19'20"	47,8080
180	0,6667	36°35'20"	23°24'40"	180°	47,6760

Эти функции на ЭВМ БЭСМ-6 были вычислены так, чтобы  $\varphi_n$  оказались кратными половине углового шага производящего колеса:

$$[\varphi_n] = \frac{\int_0^{\varphi_n} f(\varphi_1) d\varphi_1}{z_k}.$$

Принимая  $z_k = 25$  ( $k = 1, 2$ ), определяем  $[\varphi_n] = 7^\circ 7' 39''$ . По данным расчета на координатном станке были изготовлены делительные диски 16, 17. Модуль плоского производящего колеса по средней окружности определяем зависимостью

$$m_{\text{им}} = \frac{R_m \sin \frac{[\varphi_n]}{2}}{1,57079} = 4,51 \text{ мм.}$$

С помощью описанного устройства на горизонтально-фрезерном станке были обработаны заготовки по некруглому конусу вершин зубьев, а затем было осуществлено нарезание эллиптических конических колес (рис. 11.4). На рис. 11.5 представлен макет эллиптических конических колес.

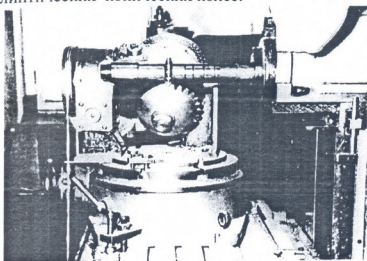


Рис. 11.4. Нарезание эллиптического конического колеса

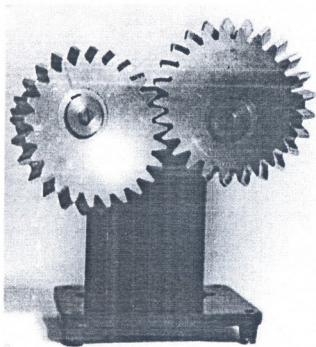


Рис. 11.5. Зацепление прямозубых эллиптических конических колес

## 11.2. Нарезание некруглых конических колес цилиндрической червячной фрезой

Для нарезания некруглых конических колес цилиндрической червячной фрезой, на базе метода нарезания (рис. 2.15) модернизирован зубофрезерный станок модели 532. Модернизация станка (рис. 11.6) предусматривает внесение в кинематическую цепь станка следующих узлов: подвешенной на вертикальных стойках люльки, сообщающей заготовке качательное движение вокруг оси, проходящей через вершину некруглого конуса заготовки; кулачкового вала с двумя кулачками для обеспечения неравномерного вращения заготовки и качательного движения люльки для приведения образующих некруглого конуса в вертикальное положение; дифференциалов, один из которых предназначен для вращения заготовки с неравномерной скоростью, а

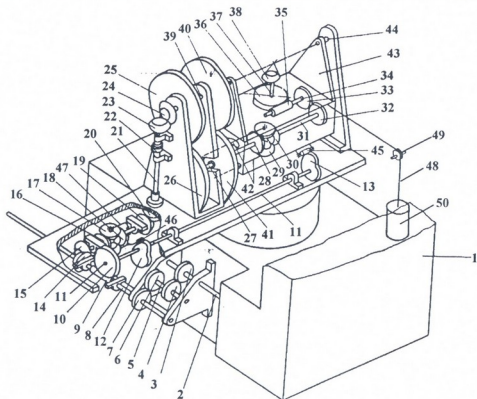


Рис. 11.6. Кинематическая схема модернизированного станка мод. 532 для нарезания некруглых конических колес

второй – для внесения коррекции в дополнительные вращения шпинделя.



От общей кинематической цепи станка 1 вращение получает вал 2, который, через колеса 3, 4, вал 5, колеса 6, 7, вал 8, колеса 14, 15, колеса 16, 17, 18 дифференциал, колеса 19, 20, вал 21, мелкозубую муфту 22, колеса 23, 24, 25, 26, вал 27, колеса 28, 29, 30 дифференциал, вал 31, колеса 32, 33, червячную пару 35, 36, шпиндель 37 вращает заготовку некруглого конического колеса 38. Таким образом заготовка получает вращение с постоянной угловой скоростью. Заготовке 38 также придается добавочное неравномерное вращение через червяк 9, червячное колесо 10, вал 11 вращение передается кулачкам 12 и 13. От кулачка 12 через ролик 46, водило 47, колеса 17, 18, 19, 20, вал 21, мелкозубую муфту 22, колеса 23, 24, 25, 26, вал 27, колеса 28, 29, 30 дифференциал, вал 31, колеса 32, 33, вал 34, червячную пару 35, 36 и шпиндель 37 неравномерное вращение передается заготовке некруглого конического колеса 38. От кулачка 13 через ролик 45 люлька 43 получает качательное движение вокруг осей 39, 44 с неравномерной скоростью. Этим достигается установка люльки 43 в необходимое положение при обработке заготовки по некруглому конусу вершин зубьев и нарезании зубьев. При качании люльки 43 колесо 26, обкатываясь по колесу 25, вызывает дополнительное вращение заготовки 38. Коррекция этих дополнительных вращений осуществляется колесом 41, которое обкатывается по неподвижно закрепленному колесу 40, передавая откорректированное движение через водила 42, колеса 29, 30, вал 31, колеса 32, 33, вал 34 и червячную пару 35, 36 шпинделю 37, несущему заготовку 38.

Люлька 43 через ролик 45 связана с кулачком 13, а через трос 48, блок 49 – с грузом 50. Заготовка, в начале нарезания зубьев, устанавливается в необходимое положение относительно кулачков 12 и 13 мелкозубой муфты 22.

**Расчет профилей кулачков.** За один оборот нарезаемого колеса кулачок изменения передаточного отношения обкатки может совершать один, два или три полных оборота, но в отличие от нарезаемого колеса, угловая скорость вращения кулачка является синхронной с угловой скоростью производящего колеса. Аксоид нарезаемого колеса должен вращаться с переменной угловой скоростью с целью уравнивания модулей векторов окружных

скоростей нарезаемого и производящего колес. Величину угла доворота или отставания нарезаемого колеса и должен задавать профиль кулачка, т.е. величина положительного или отрицательного приращения радиус-вектора кулачка на единицу угла поворота его определяет угол доворота или отставания нарезаемого колеса на единицу угла поворота производящего колеса (или кулачка).

Зависимость между поворотом производящего колеса и кулачка определяется из соотношения (2.92). Число зубьев производящего колеса

$$z_n = \frac{\pi z_k}{\int_{180^\circ}^{\varphi_n^0} \sin \theta_1 d\varphi_1} \quad (11.9)$$

Задаваясь углом поворота кулачка  $\varphi_k$  через равные промежутки, из (2.101) определим значения углов поворота производящего колеса  $\varphi_n$ . Из выражений (2.81, 2.82, 2.85) необходимо найти такие параметры  $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_n)$  и  $\theta_1 = \theta_1(\varphi_n)$ , которые соответствуют значениям углов поворота производящего колеса, полученным из (2.101) при изменении  $\varphi_k$  через равные промежутки ( $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$  и т.д.). Для определения радиус-векторов кулачков 12 и 13 используем зависимости (2.103), (2.104), коэффициенты пропорциональности, заложенные в кинематической схеме модернизированного станка  $m_1 = 5,07; m_2 = 7,57$ . По уравнениям (2.81), (2.82), (2.85), (2.101) и (2.103) на ЭВМ БЭСМ-6 были выполнены вычисления. В таблице 11.2 приведена часть результатов вычислений при изменении  $\varphi_k$ . По данным табл. 11.2 были изготовлены кулачки.

Таблица 11.2

Параметры движения при нарезании эллиптических конических колес

$\varphi_k^0$	$\varphi_n^0$	$\psi_1^0$	$\varphi_{\text{доб}}^0$	$\Delta R_1, \text{мм}$	$\theta_1^{(0)}$	$\theta_1^2 - \theta_1^{(0)}$	$\Delta R_2, \text{мм}$
0	0	0	0	0	35,5868	13,1935	99,9371
30	14,8496	25,0478	4,9522	8,6432	35,9085	12,4952	94,6470
60	29,6889	59,9298	9,0702	15,8304	33,9301	10,5168	79,6613
90	44,5482	78,5997	11,4003	19,8972	30,8937	7,4804	56,6624
120	59,3975	109,120	10,8799	18,9890	27,4090	3,9957	30,2667
150	74,2271	143,1870	6,8130	11,8909	24,5366	1,1233	8,5083
180	89,0963	180	0	0	23,4133	0	0



**Нарезание колес.** Для нарезания зубьев некруглых конических колес сначала необходимо произвести обработку заготовки по некруглому конусу вершин зубьев. Она производится на модернизированном станке мод. 532 с использованием кулачков, рассчитанных для нарезания зубьев данного некруглого конического колеса. В качестве режущего инструмента используется цилиндрическая фреза. На оправке закрепляется предварительно обработанная по наибольшему углу конуса вершин зубьев круглая коническая заготовка. После этого стол станка смещается до соприкосновения заготовки с фрезой, включается станок и начинается обработка по поверхности вершин зубьев. Подача производится постепенным перемещением стола вручную до тех пор, пока не образуется минимальный угол между осью вращения заготовки и образующей некруглого конуса.

Наладка станка в части гитар деления и подач осуществляется так же, как и для нарезания цилиндрических колес, с числом зубьев, равным числу зубьев нарезаемого некруглого конического колеса. На станке были обработаны заготовки и осуществлено нарезание эллиптических конических колес (рис. 11.7).

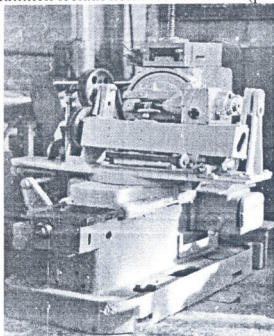


Рис. 11.7. Нарезание некруглого конического колеса на модернизированном станке мод. 532



### 11.3. Нарезание некруглых цилиндрических колес с прямыми зубьями



Для нарезания некруглых цилиндрических колес на универсальных станках с ЧПУ используем метод прерывистого огибания (рис. 2.24).

Вычисление функций  $\varphi(x)$ ,  $y(x)$  производим по уравнениям [75]

$$\begin{aligned} x &= s - r \cos \mu + r_0 \cos \mu_0; \\ y &= r \sin \mu; \\ \varphi_1 &= (\vartheta + \mu) - (\vartheta_0 + \mu_0), \end{aligned} \quad (11.10)$$

где  $s$  – длина дуги центроиды,  $r$  – радиус-вектор центроиды,  $\vartheta$  – полярный угол,  $\mu$  – угол между радиус-вектором и касательной к центроиде.

На основании уравнений (11.10) была составлена программа для ЭВМ БЭСМ-6 при нарезании эллиптических колес. Для таких колес

$$r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \vartheta}; \quad (11.11)$$

$$s = a \left[ \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi - \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi \right], \quad (11.12)$$

где  $a$  – большая полуось эллипса;  $\varphi$  – параметр, посредством которого длина дуги эллиптической центроиды выражается через эллиптические интегралы.

Связь между  $\vartheta$  и  $\psi$  определяется зависимостью

$$\cos \vartheta = \frac{\sin \psi - e}{1 - e \sin \psi}, \quad (11.13)$$

угол между радиус-вектором и касательной к центроиде имеет вид

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1 + e \cos \vartheta}{e \sin \vartheta}. \quad (11.14)$$

При вычислении шаг зубьев был разбит на пять равных частей. Часть результатов вычислений сведена в табл. 11.3.

Метод прерывистого огибания был осуществлен на вертикально-фрезерном станке с ЧПУ модели ФП-4С2. При этом

вместо существующего шпинделя станка была установлена разработанная нами фрезерная головка (рис. 11.8).

Фрезерная головка состоит из цилиндра 1, в котором под подшипниками 2 смонтирован вал 3, на котором закреплена коническая шестерня 4, находящаяся в зацеплении с шестерней 5.

Таблица 11.3

Параметры движения инструмента и заготовки при нарезании зубьев эллиптических цилиндрических колес

$\varphi^0$	x, мм	y, мм	$\Delta u$ , мм	r, мм	$\varphi_1^0$	$\Delta \varphi_1^0$
90°02'00"	0.00000	27.84093	0.00000	27.88094	0°00'00"	0°00'00"
71°03'60"	9.41478	28.19628	0.11278	28.25805	19°17'43"	3°50'18"
48°42'36"	20.73451	29.34884	0.24444	29.61388	41°52'14"	3°41'44"
27°08'44"	32.04425	31.16110	0.33678	31.67098	63°19'35"	3°29'05"
6°42'03"	43.35398	33.35922	0.38062	34.03784	83°25'60"	3°15'22"
0°10'06"	47.12390	34.12696	0.38453	34.83068	89°50'06"	3°10'57"
-3°02'36"	49.00885	34.51155	0.38459	35.22122	92°58'55"	3°08'49"
-18°33'48"	58.43363	36.39504	0.36781	37.07016	108°12'48"	2°58'57"
-36°03'44"	69.74336	38.43639	0.31645	38.95593	125°31'27"	2°49'17"
-52°34'56"	81.05009	40.08000	0.24087	40.38711	142°00'59"	2°42'10"
-68°20'45"	92.35233	41.21275	0.15000	41.32950	157°56'30"	2°37'31"
-92°06'30"	109.32743	41.31551	0.00377	41.81669	177°50'54"	0°51'38"

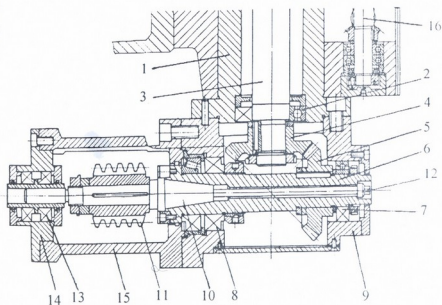


Рис. 11.8. Конструкция фрезерной головки

Шестерня 5 закреплена на шпинделе 6, смонтированном в подшипниках 7, 8 в корпусе 9, прикрепленном к цилиндру 1. Оправка 10 с фрезой (вращающаяся рейка) 13 крепится одним концом с помощью болта 12 в коническое отверстие шпинделя, а вторым концом смонтирована в подшипниках 13 корпуса 14, прикрепленного к кронштейну 15.

Вращательное движение фрезе 10 сообщается от коробки скоростей станка через конические колеса 4, 5. Вертикальное перемещение фрезерной головки вдоль образующей некруглого цилиндра сообщается от шагового электродвигателя через цилиндрические колеса, винт 16 и гайку.

По данным таблицы 11.3 были рассчитаны и записаны на магнитную ленту координаты опорных точек траектории движения инструмента и заготовки. Для управления координатами  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi_1$  были использованы три шаговых электродвигателя станка, работающие автономно. Для управления четвертой координатной  $z$  подачей инструмента вдоль образующей колеса, пульт управления станка был дополнен. На станке модели 6М13ГН1 сначала были обработаны заготовки колес по некруглому цилиндру вершин зубьев. После обработки заготовок на станке модели ФП-4С2 с фрезерной головкой были нарезаны (рис. 11.9) эллиптические цилиндрические зубчатые колеса (рис. 11.10) с параметрами:  $e = 0,2$ ;  $m = 3$  мм;  $z_k = 23$  ( $k = 1, 2$ ).

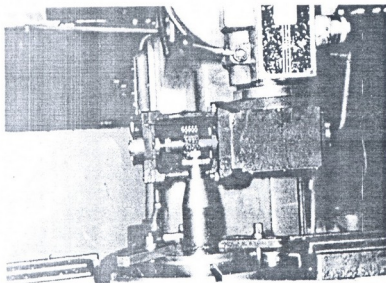


Рис. 11.9. Нарезание прямых зубьев эллиптического цилиндрического колеса

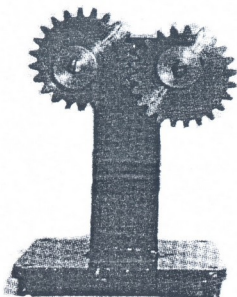


Рис. 11.10. Зацепление прямозубых эллиптических цилиндрических колес

Разработанный метод нарезания (рис. 2.24) зубьев был также реализован на фрезерном станке с ЧПУ модели 6305-Ф4 (рис. 11.11). При этом были нарезаны некруглые цилиндрические колеса (рис. 11.12) привода барабанных ножниц для резки листового материала (рис. 14.7). Радиус-векторы, угол поворота ведомого колеса и длина дуги центроид для указанных колес определяются выражениями

$$r_1 = a_w \frac{1 + d_1 \cos \varphi_1}{2 + d_1 \cos \varphi_1}; \quad (11.15)$$

$$r_2 = a_w \left( 1 - \frac{1 + d_1 \cos \varphi_1}{2 + d_1 \cos \varphi_1} \right); \quad (11.16)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + d_1 \sin \varphi_1; \quad (11.17)$$

$$s = a_w \int_0^{\varphi_1} \frac{\sqrt{d_1^2 \sin^2 \varphi_1 + (1 + d_1 \cos \varphi_1)^2 (2 + d_1 \cos \varphi_1)^2}}{(2 + d_1 \cos \varphi_1)^2} d\varphi_1, \quad (11.18)$$

где  $a_w = 344,2672$  мм;  $d_1 = 0,111848$ . Модуль зацепления  $m = 8$  мм, число зубьев колес  $z_k = 43$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

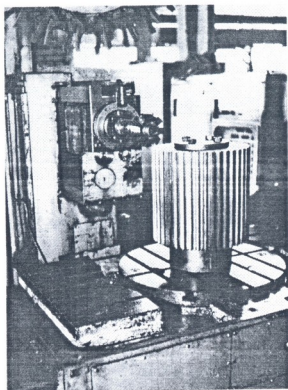


Рис. 11.11. Нарезание некруглого цилиндрического колеса на станке с ЧПУ мод. 6305-Ф4

На рис. 11.12 представлено зацепление некруглых цилиндрических колес привода барабанных ножниц (рис. 12.7).

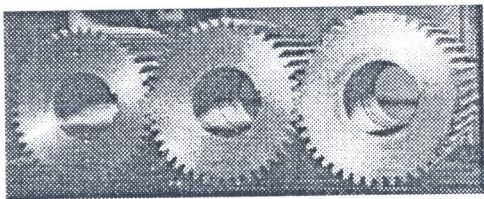
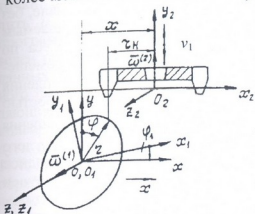


Рис. 11.12. Зацепление прямозубых некруглых цилиндрических колес привода барабанных ножниц

## 11.4. Нарезание некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями



Для нарезания арочных зубьев некруглых цилиндрических колес можно использовать систему ЧПУ. Нарезание зубьев можно



осуществить резцовой головкой методами непрерывного или прерывистого огибания (рис. 2.20, 2.26) [98]. При нарезании арочных зубьев некруглых цилиндрических колес необходимо осуществить функциональные зависимости  $x(\varphi_1)$  и  $y(\varphi_1)$ , где  $x, y$  определяют положение  $O_2$  по отношению к  $O$  (рис. 11.13).

При нарезании зубьев методом непрерывного огибания  $x(\varphi_1)$  и  $y(\varphi_1)$  должны задаваться непрерывно. Перед

Рис. 11.13. Станочные зацепления при нарезании некруглого цилиндрического колеса с арочными зубьями по методу прерывистого огибания

вводом резцовой головки в зацепление с нарезаемым колесом, совместим ось  $O_2y_2$  с плоскостью симметрии (рис. 2.26) по ширине венца  $b$  колеса и сообщим заготовке установочные перемещения по координатам  $\varphi$  и  $x$ . Далее резцовую головку, вращающуюся вокруг оси  $O_2y_2$  с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(n)}$ , введем в зацепление с нарезаемым колесом, обеспечивая совмещение начальной плоскости резцовой головки с центроидой некруглого колеса. Обкатка зубьев может быть осуществлена следующими сочетаниями движений: вращением заготовки вокруг оси  $O_1z_1$  с переменной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(1)}$ , перемещением вдоль оси  $Oy$  с переменной линейной скоростью  $v_1 = \pm \frac{dy}{dt}$  и перемещением резцовой головки

вдоль оси  $Ox$  с постоянной линейной скоростью  $\bar{v}^{(n)} = \mp \frac{dx}{dt}$  или

вращением заготовки с переменной угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(1)}$ , перемещениями резцовой головки вдоль оси  $O_2y_2$  с переменной

линейной скоростью  $\bar{v}_1$  и вдоль оси  $Ox$  с постоянной линейной скоростью  $\bar{v}^{(n)}$ . После выхода резцов из зацепления заготовка поворачивается на угловой шаг и огибание зубьев осуществляется в обратном направлении.

При нарезании зубьев методом прерывистого огибания (рис. 2.26) функции  $x(\varphi_1)$ ,  $y(\varphi_1)$  должны задаваться дискретно. Вначале, без ввода резцовой головки (рис. 11.13) в зацепление, с нарезаемым колесом совместим ось  $O_2y_2$  с плоскостью симметрии колеса по ширине  $b$  (рис. 5.2) и сообщим заготовке установочные перемещения по координатам  $\varphi$  и  $x$ . После неподвижного закрепления заготовки, резцовой головке, вращающейся с угловой скоростью  $\bar{\omega}^{(n)}$ , сообщим перемещение  $\bar{v}_1$  вдоль оси  $O_2y_2$  до совмещения начальной плоскости резцовой головки с центроидой некруглого колеса. Затем сообщим резцовой головке перемещение в исходное положение, а заготовке – дискретные перемещения  $\varphi_1$  вокруг оси  $O_1z_1$  и  $x$  вдоль оси  $Ox$ , после чего заготовку закрепим неподвижно. Затем описанный цикл дискретных перемещений повторяется до окончательного нарезания зуба. После этого заготовка поворачивается на угловой шаг, и огибание производится в обратном направлении. Величины дискретных перемещений выбираются по способу, описанному в параграфе 2.3.

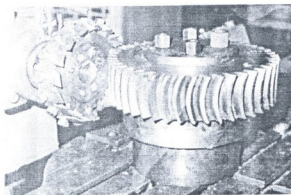


Рис. 11.14. Нарезание некруглого цилиндрического колеса с арочными зубьями на станке с ЧПУ мод. 6305-Ф4

При нарезании некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями на универсальных станках с ЧПУ применяем метод прерывистого огибания. Для осуществления необходимых движе-



ний между заготовкой и резцовой головкой используем выражения (11.10).

При определении параметров  $x$ ,  $y$ ,  $z$  сначала для расчетной точки центроиды необходимо решить уравнение  $s(\vartheta) = s_k$  относительно  $\vartheta$ , где  $s_k$  — длина дуги центроиды от точки отсчета до расчетной точки. Затем, используя найденное значение  $\vartheta$ , следует определить  $\mu$ ,  $u$  и  $\varphi_1$  из (11.10). По данному алгоритму составлена программа на алгоритмическом языке, с помощью которой проведен расчет для нарезания зубьев; на базе полученных расчетных данных сформированы управляющие программы для универсального фрезерного станка с ЧПУ мод. 6305-Ф4, и результат (управляющие программы) выдан на перфолентах. Расчет был проведен для колес, радиус-векторы, угол поворота ведомого колеса и длина дуги центроид которых определяются выражениями (11.15, 11.16, 11.7, 11.18). С помощью полученных перфолент была осуществлена обработка заготовок по некруглому цилиндру вершин зубьев, черновое и чистовое нарезание арочных зубьев некруглых цилиндрических колес (рис. 11.14). На рис. 11.15 представлено зацепление некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями, нарезанными по методу прерывистого огибания, имеющие параметры:  $m = 8$  мм,  $z_k = 43$  ( $k=1, 2$ ).

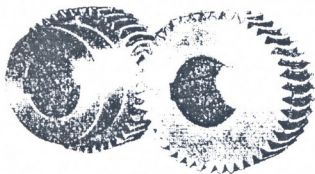


Рис. 11.15. Зацепление некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями

### 11.5. Блок-схемы алгоритмов расчета параметров движения заготовки при нарезании некруглых колес

Алгоритмы расчета параметров движения заготовки при нарезании зубьев некруглых цилиндрических и конических колес различаются лишь в несущественных деталях и в расчетных



формулах. Поэтому, для примера, приведем описание алгоритма расчета величин, необходимых для нарезания эллиптических цилиндрических колес (рис. 11.15):

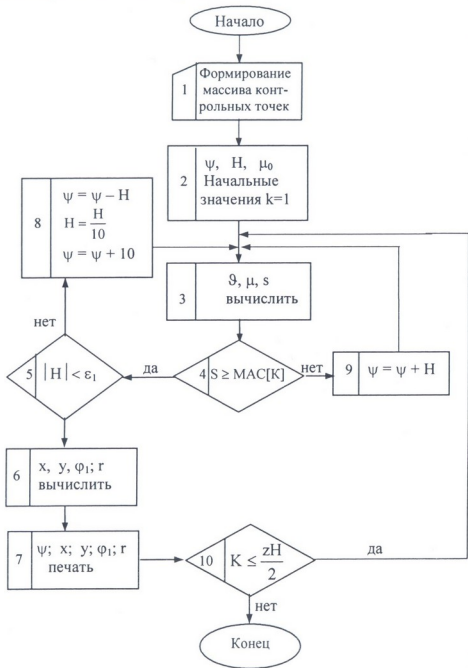


Рис. 11.16. Блок-схема алгоритма расчета параметров при нарезании некруглых цилиндрических колес

блок 1 – запишем в массив МАС длины дуг от нулевой точки до контрольных точек:

$$\text{МАС}[i] = \frac{\pi m(i-1)}{N}; \quad i_1 = 1 \dots \frac{z_k n}{2},$$

где  $m$  – модуль зацепления;  $z_k$  – число зубьев нарезаемого колеса;  $n$  – число точек деления шага колеса;

блок 2 – зададим начальные значения:  $\psi = \pi / 2$ ;  $k = 1$ ;  $H = -0,01$ ;  
 $\mu_0 = \pi / 2$ ;

блок 3 – вычисляются величины:

$$\vartheta = \arccos \frac{\sin \psi - e}{1 - e \sin \psi}; \quad \mu = \arctg \frac{1 + e \cos \vartheta}{e \sin \vartheta};$$

$$s = a \int_{\psi}^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi;$$

блок 4 – если  $s > \text{МАС}[k]$ , то переход к блоку 5, в противном случае – переход к блоку 9;

блок 5 – если  $|H| < \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1$  – точность вычисления), то переход к блоку 6, в противном случае – переход к блоку 8;

блок 6 – вычисляются величины:

$$x = s - r \cos \mu;$$

$$y = r \sin \mu;$$

$$\varphi_1 = \vartheta + \mu;$$

блок 7 – печатаются  $\psi, x, y, \varphi_1, r$ ;  $k = k + 1$ ; переход к блоку 10;

блок 8 –  $\psi = \psi - H$ ;  $H = \frac{H}{10}$ ;  $\psi = \psi + H$ ; переход к блоку 3;

блок 9 –  $\psi = \psi + H$ ; переход к блоку 3;

блок 10 – если  $k \leq \frac{z_k N}{2}$ , то переход к блоку 3, в противном случае

– конец.

При нарезании некруглых колес на станках с ЧПУ подготовительная работа по получению управляющих программ весьма трудоемка (перфорация большого количества символов, большой объем числовой информации – для одного колеса более, чем 3000 чисел и т.д.) и сопряжена с неизбежным появлением большого числа трудновывяемых ошибок. Поэтому необходимо автоматизи-

зировать процесс получения управляющих программ с помощью ЭВМ.



Алгоритм выдачи на перфоленту программы нарезания зубьев, при условии, что все необходимые данные уже вычислены, имеет следующий вид:

блок 1 – вводится  $N$  количество переменных частей в одном интервале;

блок 2 – вводятся постоянные фрагменты ( $N + 1$  фрагмент);

блок 3 – считывается одна строка изменяющихся чисел;

блок 4 – склеивается соответствующим образом информация блоков 2 и 3;

блок 5 – перекодируется полученная последовательность в коды станка;

блок 6 – выводится на информацию;

блок 7 – если выведена вся информация, переход на блок 3, в противном случае – конец.

Приведенные алгоритмы были использованы для получения расчетных данных и управляющих программ при нарезании некруглых цилиндрических и конических зубчатых колес.

## 11.6. Нарезание некруглых колес по методу копирования

Числовое программное управление возможно также использовать при изготовлении некруглых зубчатых колес, к которым не предъявляются большие требования по воспроизведению заданного закона переменного передаточного отношения.

При использовании метода копирования применяется дисковая модульная фреза 1 (рис. 11.17). Фреза 1 вращательное движение получает от асинхронного двигателя 2, перемещение по координате  $x$  совершает с помощью электродвигателя 3 и передачи винт-гайка 4. Заготовка 5 с помощью оправки 6 закреплена на поворотном столе 7, который вращательное движение совершает с помощью электродвигателя 8 и червячной передачи 9. Перемещение перпендикулярно к касательной 10 к центроиде колеса (рис. 11.18) стол совершает с помощью электродвигателя 11 и передачи винт-гайка 12. Фреза 1 совершает перемещение по

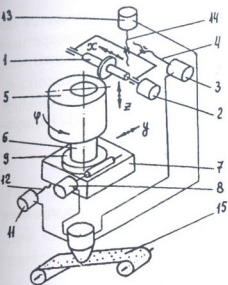


Рис.11.17.Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса по методу копирования с применением ЧПУ

координате  $z$ , параллельно к образующим некруглого цилиндра, с помощью электродвигателя 13 и передачи винт-гайка 14. Управление двигателями 3, 8, 11 и 13 осуществляется от программносителя 15 пульта управления.

В начале нарезания зубьев фреза находится в верхнем исходном положении по координате  $z$ . Для профилирования впадин зуба а заготовка поворачивается на угловой шаг  $\varphi_a$  и перемещается по координате  $y_a$ . После выполнения указанных движений заготовка 5 закрепляется неподвижно, фреза перемещается по координате  $z$  с

верхнего исходного положения впадины зуба а заготовка отводится от фрезы по координате  $y$ , фреза возвращается по координате  $z$  в верхнее исходное положение. Для профилирования следующей впадины зуба в необходимы: 1) поворот заготовки на угол  $\varphi_a - \varphi_a = \mu_a + (\vartheta_a - \vartheta_a) - \mu_a$ ; 2) перемещение заготовки по координате  $y = y_a - y_a$ ; фрезы — по координате  $x = x_a - x_a$ . После выполнения указанных движений заготовка закрепляется неподвижно, фреза с верхнего исходного положения перемещается вниз по координате  $z$ . После профилирования впадины зуба в заготовка

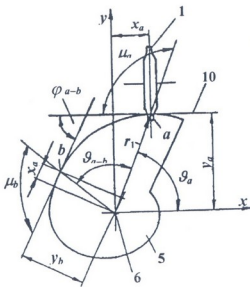


Рис. 11.18. Схема нарезания некруглого цилиндрического колеса по методу копирования

перемещается от фрезы по координате  $y$ , фреза возвращается по координате  $z$  в верхнее исходное положение. Указанные дискретные перемещения фрезы и заготовки выполняются до нарезания всех впадин зубьев колеса.

При расчете параметров движения заготовок и модульной фрезы используем методику, приведенную в работе [76]. Радиус-вектор центроиды ведущего колеса

$$r_1 = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \varphi_1},$$

где  $e_1 = 0,2$  – эксцентриситет исходного эллипса, определяем из условия выпуклости центроид. Большая полуось исходного эллипса

$$a_1 = \frac{a_w}{1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)}} = 21,8708 \text{ мм.}$$

Межосевое расстояние предварительно принимаем  $a_w = 85$  мм. Полная длина эллиптического интеграла

$$s_{1\text{полн}} = 4a_1 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 \psi} d\psi = 126,0938 \text{ мм.}$$

Вспомогательный параметр  $\psi$  и угол  $\varphi_1$  поворота колеса связаны уравнением

$$\varphi_1 = \arccos \frac{\cos \psi - e_1}{1 - e_1 \cos \psi}.$$

Принимаем модуль  $m = 2,5$  мм. Количество зубьев, которые размещаются на полной длине замкнутой центроиды, определяется зависимостью

$$z_1 = \frac{s_{1\text{полн}}}{\pi m} = 16,0527;$$

принимаем  $z_1 = 17$ . Уточняем величину большой полуоси исходного эллипса

$$a_1 = \frac{\pi m z_1}{4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 \psi_1} d\psi_1} = 21,4663 \text{ мм}$$

и межосевое расстояние

$$a_w = a_1 \left( 1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)} \right) = 84,71 \text{ мм.}$$



Связь между текущей длиной эллиптической центроиды и расположенными на ней впадинами зубьев определяем зависимостью

$$a_1 \left[ \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 \psi} d\psi - \int_0^{\psi} \sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 \psi} d\psi \right] = \pi m n_1,$$

где  $n_1 = 1, 2, 3 \dots 17$  – рядовой номер впадин зубьев колеса.

Аналогично проводим расчет параметров движения заготовки при нарезании ведомого колеса, радиус-вектор которой определяется зависимостью

$$r_2 = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos 3\varphi_2},$$

где

$$\varphi_2 = \frac{2}{3} \arctg \left( \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

– угол поворота ведомого колеса. Параметры эллипсов ведущего и ведомого колес связаны соотношениями:

$$e_2 = \frac{e_1}{\sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)}} = 0,06778;$$

$$a_2 = a_1 \left( 1 + \sqrt{1 + (n^2 - 1)(1 - e_1^2)} \right) = 63,2436 \text{ мм.}$$

Используя приведенные уравнения и уравнения (11.10, 11.11, 11.12, 11.13 и 11.14), разработаны блок-схемы алгоритма расчета параметров движения заготовок и инструмента для обработки заготовок по некруглым цилиндрам вершин зубьев и нарезания зубьев. На рис. 11.19 представлена блок-схема расчета параметров движения заготовки и инструмента при нарезании зубьев ведущего эллиптического колеса. В таблицу 11.4 сведена часть результатов расчета параметров движения заготовки и инструмента при нарезании ведущего колеса.

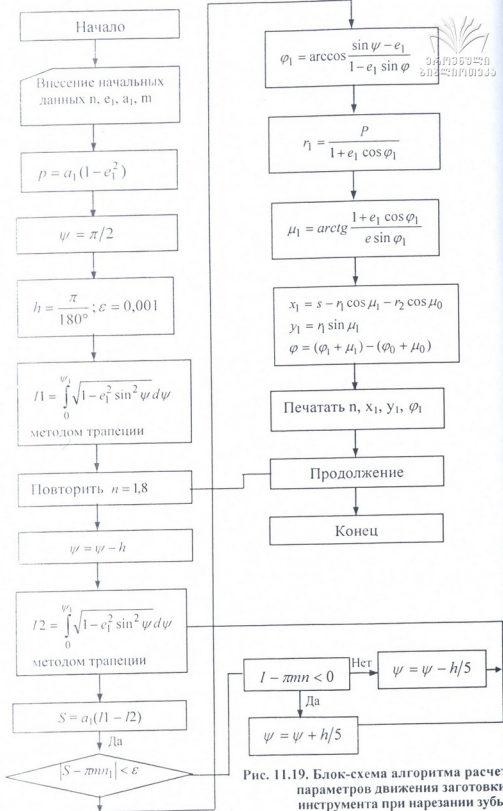


Рис. 11.19. Блок-схема алгоритма расчета параметров движения заготовки и инструмента при нарезании зубьев ведущего эллиптического колеса

Параметры движения заготовки и инструмента при нарезании зубьев ведущего эллиптического колеса

$\psi$ , рад	$s$ , мм	$\varphi_1$ , рад	$\mu_1$ , рад	$r_1$ , мм	$x$ , мм	$y$ , мм	рад
1.87080	0.00000	0.000000	1.87296	17.173	0.00000	17.173	0.000000
1.19462	7.93094	0.458051	1.49595	17.4730	6.62342	17.4243	0.383202
0.82235	15.8077	0.896653	1.43277	18.3204	13.2871	18.1462	0.758630
0.45398	23.6584	1.30624	1.38937	19.5835	20.1249	19.2621	1.124810
0.08206	31.4975	1.68496	1.3702	21.0881	27.2956	20.6652	1.484360
0.27756	39.3461	2.03688	1.37695	22.6427	34.9843	22.2186	1.843030
0.64894	47.2212	2.36853	1.40922	24.0506	43.3520	23.7373	2.206950
1.01561	55.0698	2.68440	1.46361	25.1147	52.3831	24.9706	2.577222
1.38788	62.9221	2.92210	1.53368	25.6879	61.9690	25.6702	2.954999

На универсальном фрезерном станке с ЧПУ осуществлена обработка заготовок – нарезание эллиптических колес с недеформированными и деформированными (рис. 11.20) центроидами. Составлены передачи из: колес с эллиптическими недеформированными центроидами (рис. 11.21),  $n = 1$ ; колес с деформированными эллиптическими центроидами (рис. 11.22)

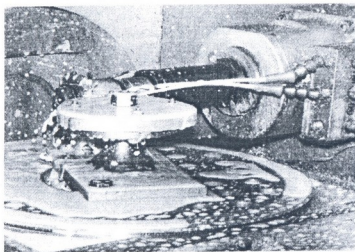


Рис. 11.20. Нарезание колеса с деформированной эллиптической центроидой

$n = 1$ , колес, где центроида ведущего колеса – недеформированный эллипс, а ведомого – деформированный эллипс (рис. 11.23).



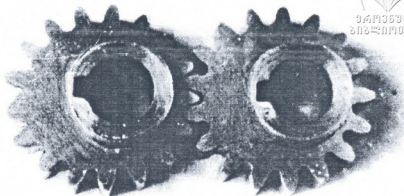


Рис. 11.21. Зацепление эллиптических колес с недеформированными центроидами,  $n=1$

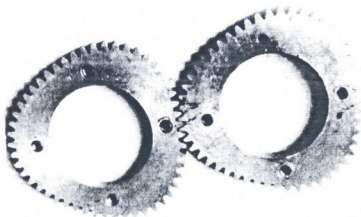


Рис. 11.22. Зацепление колес с деформированными центроидами,  $n=1, \kappa=3$

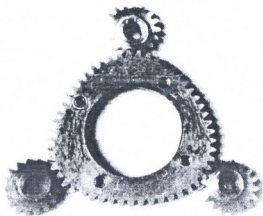


Рис. 11.23. Передача со средним передаточным отношением  $n=3$

## 11.7. Нарезание зубчатых колес с переменным углом между осями вращения колес



Для нарезания зубчатых колес с переменным углом между осями вращения сферических колес было разработано устройство (рис. 11.24), в основу работы которого положен метод нарезания (рис. 2.18).

На плите 1 крепится стандартный поворотный стол 2, расположенный рабочей поверхностью вниз. На опорной поверхности поворотного стола 2 закрепляется плита 3, имеющая направляющие типа «ласточкин хвост», на которой установлена салазка 4. Салазка 4 с помощью винта 5 и гайки 6 соединена с плитой 3. На салазке 4 установлены стойки 7 и 8, в подшипниках которых цапфами 9, 10 подвешен делительный червячный редуктор 11. На цапфе 9 закреплено червячное колесо 12, находящееся в зацеплении с червяком 13, который подшипниками 14 закреплен на опоре 15. На цапфе 10 с помощью втулки 16 установлено коническое колесо 17 с делительным диском 18, связанным через коническую шестерню 19 и сменные колеса 20, 21, 22, 23 гитары обкатки с валом 24 червяка поворотного стола 2. На втулке 16 крепится цилиндрическое колесо 25, соединяющееся посредством цилиндрического колеса 26 и вала 27 с червячным редуктором 11. Подшипник 29 вала 28 конической шестерни 19 крепится на стойке 8, а подшипник 30 – на опоре 31, закрепленной на плите 3. В червячном редукторе 11 установлен шпиндель, на который закрепляется заготовка нарезаемого сферического колеса. Устройство, плита 1 которого закреплена на столе станка, может выполнять следующие движения: вращение винта 5 вызывает перемещение салазки по направляющим плиты 3; при этом червячное колесо 12, перекатываясь по червяку 13, приводит во вращательное движение редуктор 11 вокруг цапф 9, 10. При вращении вала 24 приспособление совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси поворотного стола 2 через червяк и червячное колесо поворотного стола 2, а через цилиндрические колеса 23, 22, 21, 20, вал 28, шестерню 19, колесо 17, делительный диск 18, фиксатор 32, втулки 16, цилинд-

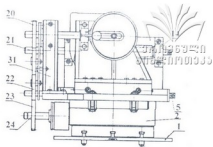
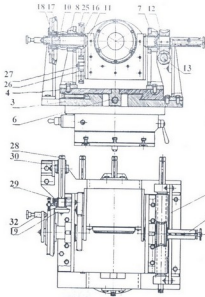


Рис. 11.24. Устройство для нарезания колес с переменным углом между осями вращения

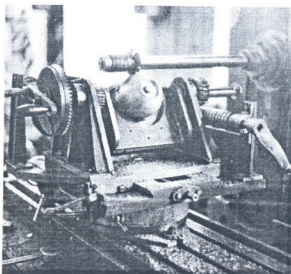


Рис. 11.25. Нарезание сферического колеса

рические колеса 25, 26, вал 27 и червячную передачу редуктора 11 заготовка нарезаемого колеса получает вращательное движение вокруг своей оси. Эти движения обеспечивают обкатку нарезаемого колеса по воображаемому плоскому колесу.

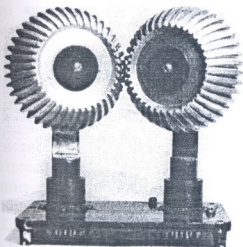


Рис. 11.26. Зацепление сферических колес

Применением описанного устройства на горизонтально-фрезерном станке были нарезаны (рис. 11.25) сферические колеса. На рис. 11.26 представлен макет сферических колес с параметрами:  $m_{te} = 3$  мм,  $z_k = 40$  ( $k = 1, 2$ ).

В большинстве машин-автоматов, технологических машин, автоматически действующих систем (манипуляторы, промышленные роботы, конвейеры), транспортных машин и др. необходимо регулировать скорость исполнительных органов в зависимости от изменяющихся свойств обрабатываемого объекта, условий технологического процесса, загрузки машин, возникающего при эксплуатации машин сопротивления и др. Оптимальным и рациональным в таких случаях является бесступенчатое регулирование скорости.

В настоящее время в машиностроении используется значительное число различных конструкций бесступенчатых передач, которые в основном работают с использованием сил трения и имеют определенные недостатки.

В предложенных вариаторах [126] передача движения от ведущего вала к ведомому осуществляется с использованием зубчатого зацепления. Рассмотрим схемы некоторых зубчатых вариаторов.

### 12.1. Вариаторы с составными зубчатыми колесами

Одноступенчатый зубчатый вариатор (рис. 12.1) состоит из ведомого прямозубого конического колеса 1, закрепленного жестко на ведомом валу 2. Зубья колеса 1 находятся в зацеплении с прямыми зубьями составного конического колеса 3, 4, жестко закрепленного на ведущем валу 5. Колеса 3, 4 (рис. 12.2) соединены посредством пружин 6, создающих момент  $M_{пр} > M_c$ , где  $M_c$  – момент сил сопротивления, приведенный к валу 5. Вал 5 установлен на подшипниках 6 и с помощью кронштейна 7 закреплен на неподвижной плите 8. Вал 2 при помощи подшипников 9, 10 и кронштейнов 11, 12 закреплен на салазке 13. Плита 8 и салазка 13 между собой соединены при помощи гайки 14 и винта 15. Вращением винта 15 салазка 13 и колесо 1 перемещаются по направлению  $A$ . При этом пружина 6, сжимаясь (растягиваясь), обеспечивает постоянный контакт боковых поверхностей зубьев

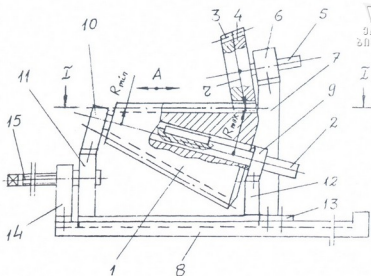


Рис. 12.1. Одноступенчатый вариатор с коническими зубчатыми колесами

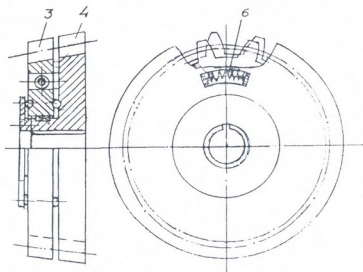


Рис. 12.2. Конструкция конического колеса с изменяющимся шагом

колес 3, 4 и 1 (рис. 12.3). При перемещении колеса 1 в направлении  $A$  бесступенчато меняется соотношение радиусов контактных точек боковых поверхностей зубьев колес 3, 4 и 1, что обеспечивает, в определенном диапазоне, бесступенчатое изменение передаточного отношения. Передаточное отношение

максимальное, когда колеса 3, 4 находятся у большого торца колеса 1, минимальное, когда колеса 3, 4 находятся у меньшего торца колеса 1:

$$u_{\max} = \frac{R_{\max}}{r}; \quad u_{\min} = \frac{R_{\min}}{r}; \quad (12.1)$$

диапазон резулирования

$$D = \frac{R_{\max}}{R_{\min}}. \quad (12.2)$$

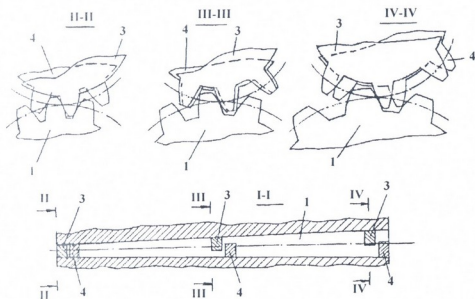


Рис. 12.3. Схема зацепления зубьев колес 3, 4 и 1 при перемещении колеса 1 по направлению А

Двухступенчатый конический зубчатый вариатор (рис. 12.4) состоит из ведущего 1 и ведомого 2 валов, на которых жестко закреплены составные ведущее 3, 4 и ведомое 5, 6 конические колеса, зубья которых находятся в зацеплении с зубьями плоского конического колеса 7, которое с возможностью вращения смонтировано на невращающейся оси 8, установленной в салазке 9. Салазка 9 через винт 10 и гайку 11 соединена с корпусом 12. Салазка 9, с возможностью перемещения, вставлена в направляющие 13 корпуса 12. При вращении винта 10 через салазку 9, ось 8 колесо 7 перемещается по направлению А. Передаточные

отношения, когда колеса 3, 4 и 5, 6 имеют одинаковые средние делительные радиусы, определяются зависимостями:

$$u_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_{\min}}; \quad u_{\min} = \frac{R_{\min}}{R_{\max}}; \quad (12.3)$$

диапазон регулирования

$$D = \frac{R_{\max}^2}{R_{\min}^2}. \quad (12.4)$$

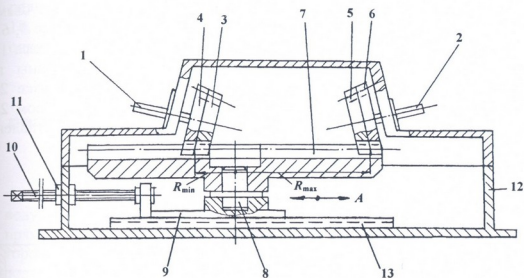


Рис. 12.4. Двухступенчатый вариатор с коническими зубчатыми колесами

Когда колеса 3, 4 и 5, 6 имеют разные делительные средние радиусы  $R_{\text{вед.}}$ ,  $R_{\text{ведом.}}$  и  $R_{\text{вед.}} > R_{\text{ведом.}}$ , передаточные отношения имеют вид

$$u_{\max} = \frac{R_{\text{ведом.}} R_{\max}}{R_{\text{вед.}} R_{\min}}; \quad u_{\min} = \frac{R_{\text{ведом.}} R_{\min}}{R_{\text{вед.}} R_{\max}}, \quad (12.5)$$

диапазон регулирования

$$D = \left( \frac{R_{\text{ведом.}} R_{\min}}{R_{\text{вед.}} R_{\max}} \right)^2. \quad (12.6)$$

Ведущий 1 и ведомый 2 валы вращаются в противоположных направлениях.



Четырехступенчатый конический зубчатый вариатор (рис. 12.5) состоит из ведущего 1 и ведомого 2 валов, на которых жестко закреплены ведущие 3, 4 и ведомые 5, 6 составные конические колеса, которые с возможностью вращения смонтированы в подшипниках 7, 8. На промежуточных валах 9, 10, которые, с возможностью вращения, смонтированы в подшипниках 11, 12, закреплены промежуточные составные конические колеса 13, 14 и 15, 16. Валы 9, 10 между собой соединены шарнирной муфтой 17. Зубья колес 3, 4 и 13, 14 находятся в зацеплении с зубьями плоского прямозубого конического колеса 18, а зубья колес 5, 6 и 15, 16 – с зубьями плоского прямозубого конического колеса 19. Колеса 18, 19 с возможностью вращения смонтированы на невращающихся осях 20, 21, которые вставлены в салазке 22. Салазка 22 через винт 23 и гайку 24 соединена с корпусом 25. Салазка 22, с возможностью перемещения по стрелке А, вставлена в направляющих 26 корпуса 25.

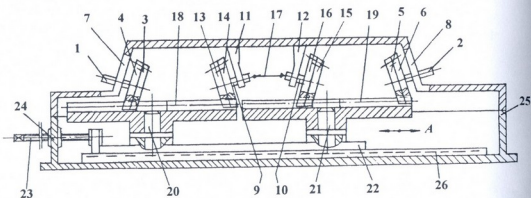


Рис. 12.5. Четырехступенчатый вариатор с коническими зубчатыми колесами

Ведущему валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью, которое через колеса 3, 4, 18, 13, 14, вал 9, шарнирную муфту 17, вал 10, колеса 16, 15, 19, 5, 6 передается ведомому валу 2. Валы 1, 2 вращаются в одном и том же направлении. При вращении винта 23 через салазку 22, оси 20, 21 колеса 18, 19 перемещаются по направлению А. Передаточные отношения, когда колеса 3, 4; 13, 14; 15, 16 и 5, 6 имеют одинаковые средние делительные радиусы и колеса 18, 19 имеют одинаковые  $R_{\max}$ ,  $R_{\min}$ , определяются зависимостями:

$$u_{\max} = \left( \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^2, \quad u_{\min} = \left( \frac{R_{\min}}{R_{\max}} \right)^2;$$

диапазон регулирования

$$Д = \left( \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^4. \quad (12.8)$$

Когда составные колеса имеют разные средние делительные радиусы: 3, 4 –  $R_{3,4}$ ; 13, 14 –  $R_{13,14}$ ; 15, 16 –  $R_{15,16}$ ; 5, 6 –  $R_{5,6}$  и колеса 18, 19 имеют одинаковые  $R_{\max}$ ,  $R_{\min}$ , передаточные отношения определяются зависимостями:

$$u_{\max} = \frac{R_{3,4} R_{15,16} R_{\max}^2}{R_{5,6} R_{13,14} R_{\max}^2}; \quad u_{\min} = \frac{R_{5,6} R_{13,14} R_{\min}^2}{R_{3,4} R_{15,16} R_{\max}^2}; \quad (12.9)$$

диапазон регулирования

$$Д = \frac{R_{3,4}^2 R_{15,16}^2 R_{\max}^4}{R_{5,6}^2 R_{13,14}^2 R_{\max}^2}. \quad (12.10)$$

Одноступенчатый зубчатый вариатор (рис. 12.6) состоит из ведущего 1 и ведомого 2 валов, на которых жестко закреплены прямозубые ведущие составные сферические колеса 3, 4 и ведомое торoidalное колесо 5. Вал 1, с возможностью вращения, смонтирован в подшипнике 6, закрепленном на оси 7. Ось 7, с возможностью поворота, установлена в подшипниках 8, 9. На конце оси 7

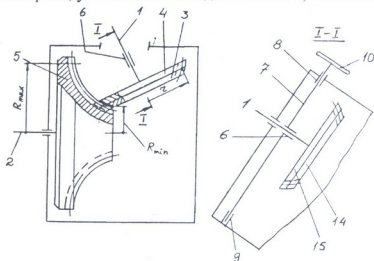


Рис. 12.6. Одноступенчатый зубчатый вариатор

$$u_{\min} = \frac{r_{7.8}(R_4)_{\min}}{r_{9.10}(R_3)_{\max}}$$

Диапазон регулирования

$$D = \frac{(R_3)_{\max} (R_4)_{\max}}{(R_3)_{\min} (R_4)_{\min}} \quad (12.15)$$

## 12.2. Вариаторы с эллипсоидными зубчатыми колесами

Для передачи движения с бесступенчатым регулированием скорости возможно использовать эллипсоидную зубчатую передачу (рис. 12.8, 12.9, 12.10) [112, 118].

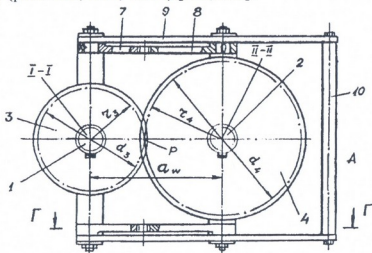


Рис. 12.8. Одноступенчатый эллипсоидный зубчатый вариатор

Передача состоит из валов 1, 2, на которых закреплены прямозубые эллипсоидные зубчатые колеса 3, 4. Колесо 3 является ведущим и установлено в неподвижном подшипнике 5, а колесо 4 – ведомое и установлено в подвижном подшипнике 6. На цапфах подшипников закреплены сегменты некруглых колес 7, 8. Пара некруглых зубчатых сегментов 7 закреплена неподвижно, а пара некруглых сегментов 8 подвижна. Тяги 9 смонтированы на цапфах подшипников 5, 6 и соединены с рычагом 10 болтами. Колеса 3, 7 и 4, 8 имеют одинаковые центры тяжести и отсчитываемые в противоположных направлениях равные углы: полярные и поворота.

При вращении колеса 3 вокруг оси I-I, колесо 4 вращается вокруг оси II-II. С исходного положения А рычагу 10 сообщим плавное перемещение по стрелке В. При этом тяги 9 поворачиваются вокруг цапф подшипника 5, а сегменты 8, обкатываясь по сегментам 7, переводят колесо 4 из положения А в текущее положение. При этом в зацепление входят боковые поверхности зубьев колес 3, 4, расположенные на переменных радиусах  $R_3, R_4$ . Каждому мгновенному полюсу зацепления Р соответствует свое мгновенное передаточное отношение. Когда рычаг находится в положении А, передаточное отношение максимальное, а в положении Б — минимальное. При этом передаточное отношение меняется плавно, бесступенчато.

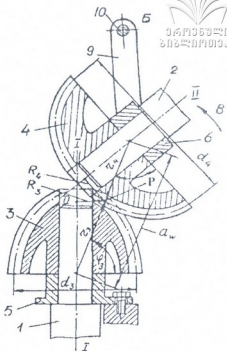


Рис. 12.9. Зацепление эллипсоидных зубчатых колес

При конструировании эллипсоидной зубчатой передачи первостепенной задачей является определение таких сопряженных начальных поверхностей колес 3, 4, которые при зацеплении зубьев, в процессе изменения угла между валами вращения колес 3, 4, будут перекатываться друг по другу без скольжения, обеспечивая бесступенчатое регулирование скорости.

Когда заданы функция переменного передаточного отношения  $u_{78}(\vartheta_7)$  сегментов 7, 8 и межосевое расстояние  $a_w$ , радиус-векторы центроид сегментов некруглых колес определяются уравнениями.

$$r_7 = \frac{a_w}{1 + u_{78}(\vartheta_7)}; \tag{12.16}$$

$$r_8 = \frac{a_w u_{78}(\vartheta_7)}{1 + u_{78}(\vartheta_7)}. \tag{12.17}$$

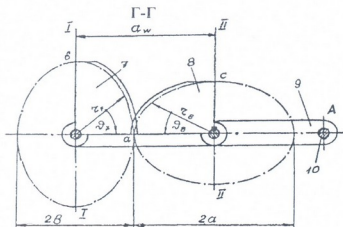


Рис. 12.10. Зацепление сегментов овальных колес

Полярный угол центрады ведомого сегмента

$$d\vartheta_8 = \int_0^{\vartheta_7} u_{78}(\vartheta_7), \quad (12.18)$$

где  $\vartheta_7$  – полярный угол центрады ведущего сегмента.

Если уравнение центрады ведущего сегмента задано в полярных координатах

$$r_7 = f(\vartheta_7), \quad (12.19)$$

радиус-вектор центрады и полярный угол ведомого сегмента определяются уравнениями

$$r_8 = a_w - f(\vartheta_7); \quad (12.20)$$

$$d\vartheta_8 = \int_0^{\vartheta_7} \frac{a_w - f(\vartheta_7)}{f(\vartheta_7)}. \quad (12.21)$$

Вращая сегменты  $ab$  и  $ac$  центроид (12.16) и (12.17) вокруг осей I-I, II-II, получим взаимооггибаемые начальные эллипсоидные поверхности колес 3, 4, которые при изменении угла между осями вращения колес будут перекатываться друг по другу без скольжения. Текущее передаточное отношение эллипсоидной зубчатой передачи определяется соотношениями

$$u_{43}(\varphi_3)_{\text{тек}} = \frac{R_4}{R_3} = u_{78}(\vartheta_7) \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_3}; \quad (12.22)$$

$$u_{43}(\varphi_3)_{\text{тек}} = \frac{[a_w - f(\vartheta_7)] \cos \varphi_4}{f(\vartheta_7) \cos \varphi_3}. \quad (12.23)$$

В качестве примера проведем расчет эллипсоидной передачи, когда уравнение ведущей центроиды задано в полярных координатах. Пусть ведущее колесо имеет овальную центроиду:

$$r_3 = \frac{a_3(1-e^2)}{1+e \cos 2\varphi_3}, \quad (12.24)$$

где  $a_3 = \frac{a}{1+e} = \frac{b}{1-e}$  – большая полуось исходного эллипса;  $a, b$  –

большая и малая полуоси овала;  $e = \frac{a-b}{d+b}$  – эксцентриситет

исходного эллипса.

Примем: окружной делительный модуль в большой торцевой плоскости эллипсоидных колес  $m = 2,5$  мм, число зубьев колес  $z_3 = 24, z_4 = 44$ . Тогда диаметры начальных окружностей в большой торцевой плоскости колес:  $d_3 = 60$  мм,  $d_4 = 110$  мм; межосевое расстояние  $a_w = 85$  мм,  $a = 0,5d_4 = 55$  мм,  $b = 0,5d_3 = 30$  мм,  $e = 0,2941, a_3 = 42,5$  мм.

Уравнение центроиды и угол поворота ведомого колеса

$$r_4 = a_w - r_3, \quad (12.25)$$

$$\varphi_4 = \arctg\left(\frac{1-e}{1+e} \operatorname{tg} \varphi_3\right). \quad (12.26)$$

По формулам (12.24, 12.25, 12.26, 12.22) проведен расчет. Часть результатов расчета сведена в таблицу 12.1. При  $\varphi_3 = 0^\circ, u_{43}(\varphi_3)_{\max} = 1,8333$ , при  $\varphi_3 = 70^\circ, u_{43}(\varphi_3)_{\min} = 1,1334$ , диапазон регулирования  $D = 1,6175$ .

Таблица 12.1

$\varphi_3^0$	$\varphi_4^0$	$r_3, \text{ мм}$	$r_4, \text{ мм}$	$R_3, \text{ мм}$	$R_4, \text{ мм}$	$u_{43}(\varphi_3)_{\text{тек}}$
0	0.0000	30.0000	55.0000	30.0000	55.0000	1.8333
10	5.4937	30.4169	54.5831	29.9548	54.3324	1.8138
20	11.2289	31.6847	53.3153	29.7739	52.2947	1.7563
30	17.4802	33.8464	51.1538	29.3116	48.7916	1.6645
40	24.5931	36.9370	48.0630	28.2954	43.7030	1.5445
50	33.0258	40.9131	44.0869	26.2984	36.9636	1.4055
60	43.3728	45.5172	39.4828	22.7586	28.7000	1.2610
70	56.0101	50.1193	34.8807	17.1408	19.4285	1.1334

При необходимости увеличения диапазона регулирования возможно использовать многоступенчатую передачу (рис. 12.11, 12.12, 12.13, 12.14).

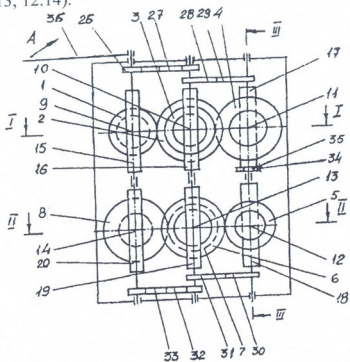


Рис. 12.11. Схема четырехступенчатой эллипсоидной зубчатой передачи

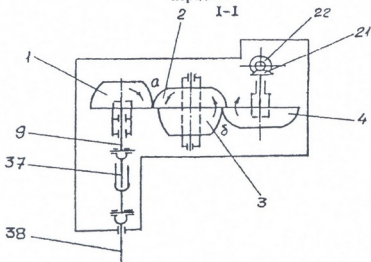


Рис. 12.12. Сечение I-I

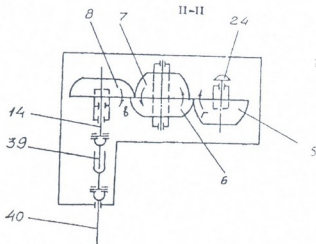


Рис. 12.13. Сечение II-II

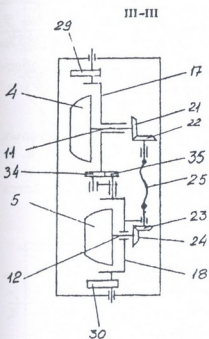


Рис. 12.14. Сечение III-III

Передача состоит из прямозубых эллипсоидных колес 1, 2; 3,4; 5,6; 7,8. Валы 9, 10, 11, 12, 13, 14 колес вмонтированы в размещенные в кронштейнах 15, 16, 17, 18, 19, 20 подшипники. На валу 11 закреплена коническая шестерня 21, находящаяся в зацеплении с шестерней 22. На валу 12 закреплена коническая шестерня 24, находящаяся в зацеплении с шестерней 23. Шестерни 22, 23 соединены гибким валом 25. На валиках кронштейнов закреплены сегменты некруглых колес 26, 27; 28, 29; 30, 31; 32, 33. На валиках кронштейнов 17, 18 дополнительно закреплены сегменты 34, 35 круглых колес. На валике кронштейна 15 закреплен рычаг 36. Вал 9 с помощью шлицевого кардана (или гибкого вала) 37 соединен с ведущим валом 38, а вал 14 с помощью шлицевого кардана (или гибкого вала) 39 соединен с ведомым валом 40.

Ведущему валу 38 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью. С помощью кардана 37, вала 9, колес 1,



2; 3, 4; 21, 22; гибкого вала 25, колес 23, 24; 5, 6; 7, 8, вала 14, кардана 39 вращательное движение передается ведомому валу 40. Рычагу 36 сообщим плавное перемещение по стрелке А. При этом эллипсоидные колеса повернутся вокруг осей валиков по направлениям а, б, г, в. При повороте кронштейна 17, с помощью сегментов 34, 35 колесо 5 получает дополнительный поворот. Текущее передаточное отношение

$$u_{81}(\varphi_1) = u_{21} \cdot u_{43} \cdot u_{22\ 21} \cdot u_{24\ 23} \cdot u_{65} \cdot u_{87} \cdot \frac{\cos \varphi_8}{\cos \varphi_1}, \quad (12.27)$$

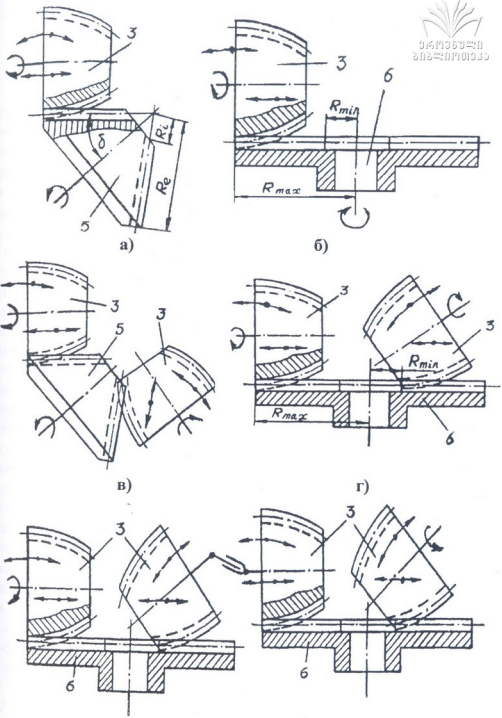
где  $u_{21}, u_{43}, u_{65}, u_{87}$  - текущие переменные передаточные отношения колес 2, 1; 4, 3; 6, 5; 8, 7;  $u_{22\ 21}; u_{24\ 23}; u_{35}, u_{34}$  - постоянные передаточные отношения колес 22, 21; 24, 23; 35, 34;  $\varphi_1, \varphi_3$  - текущие углы поворота колес 1, 8.

При:  $\varphi_1 = 0^\circ; u_{81}(\varphi_1)_{\max} = 11,2962$ . При  $u_{35,34} = 1; u_{81}(\varphi_1)_{\min} = 3,6042$ . Диапазон регулирования  $D=3,1342$ . При  $u_{35,34} = 1,7857; u_{81}(\varphi_1)_{\min} = 2,2064$ . Диапазон регулирования  $D=5,1197$ . При обеспечении  $\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_5 = \varphi_7 = 70^\circ$  и  $\varphi_2 = \varphi_4 = \varphi_6 = \varphi_8 = 56^\circ.10'$ ,  $u_{81}(\varphi_1)_{\min} = 1,6502$ . Диапазон регулирования  $D=6,8453$ .

На рис. 12.15 изображены принципиальные схемы некоторых передач вариаторов с эллипсоидными зубчатыми колесами: а, б - одноступенчатые; в, г - двухступенчатые; д - четырехступенчатая. Для приведенных схем диапазон регулирования определяется зависимостями:

$$\begin{aligned} D_a &= \frac{R_c \cdot R_3^{70^\circ}}{R_i \cdot R_3^{0^\circ}}; & D_b &= \frac{R_c \cdot R_3^{70^\circ}}{R_i \cdot R_3^{0^\circ}}; \\ D_v &= \left( \frac{R_c \cdot R_3^{70^\circ}}{R_i \cdot R_3^{0^\circ}} \right)^2; & D_r &= \left( \frac{R_{\max} \cdot R_3^{70^\circ}}{R_{\min} \cdot R_3^{0^\circ}} \right)^2; \\ D_d &= \left( \frac{R_{\max} \cdot R_3^{70^\circ}}{R_{\min} \cdot R_3^{0^\circ}} \right)^4, \end{aligned} \quad (12.28)$$

где:  $R_3^{0^\circ}, R_3^{70^\circ}$  - величины радиусов колеса 3 при  $\varphi_1 = 0^\circ$  и  $\varphi_1 = 70^\circ$ ;  $R_c, R_i$  - внешнее и внутреннее конусные расстояния колеса 5;  $R_{\max}, R_{\min}$  - максимальный, минимальный радиусы колеса 6.



д)  
 Рис. 12.15. Принципиальные схемы вариаторов

### 12.3. Симметричный реверсивный зубчатый вариатор



Вариатор (рис. 12.16) [120] состоит из ведущего вала 1,

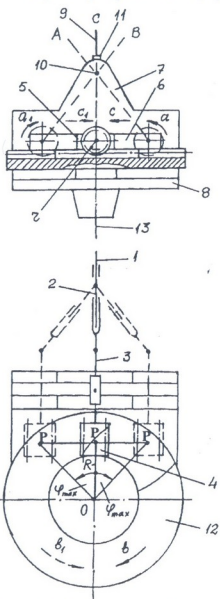


Рис. 12.16. Симметричный реверсивный вариатор

сообщим вращательное движение с постоянной скоростью по направлению  $a$ , которое через шарнирную муфту 2, вал 3,

который через шарнирную муфту 2, промежуточный вал 3 соединен с шестерней 4. Вал 3 смонтирован в подшипниках 5, которые расположены в направляющих 6, выполненных в вертикальных плоскостях 7 корпуса 8. Вал 3, с возможностью вращения, вставлен в продольный прорез управляющего рычага 9, который пальцем 10 соединен шарнирно с плоскостями 7. Управляющий рычаг 9 с фиксатором 11 соединен с цилиндрическими поверхностями плоскостей 7. На шестерне 4 нарезаны винтовые зубья, боковые поверхности которых являются сопряженными с боковыми поверхностями зубьев с эвольвентными продольными линиями, нарезанными на торцевой плоскости колеса 12. Окружной шаг винтовых зубьев шестерни 4 равен нормальному шагу зубьев колеса 12. Колесо 12 закреплено на ведомом валу 13, который с возможностью вращения, смонтирован в подшипниках, расположенных в горизонтальной плоскости корпуса 8.

В начале работы рычаг 9 переведем в положение А. Валу 1

шестерни 4, зацепления зубьев, шестерни 4 и колеса 12 передается ведомому валу 13. Колесо 12 и вал 13 будут вращаться с постоянной угловой скоростью по направлению в. Рычаг 9 из положения А плавно переведем в положение В. При этом полюс Р зацепления зубьев шестерни и колеса перемещается в торцовой плоскости колеса по направлению с. Валы 1 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью по направлению  $a_1$ , которое через шарнирную муфту 2, вал 3, шестерни 4 и колеса 12 передается ведомому валу 13. Колесо 12 и вал 13 будут вращаться с постоянной скоростью по направлению  $в_1$ .

Передаточное отношение максимальное, когда рычаг 9 находится в положениях А и В:

$$u_{\max} = \frac{R}{r \cos^2 \varphi_{\max}}. \quad (12.29)$$

Передаточное отношение минимальное, когда рычаг 9 находится в положении С:

$$u_{\min} = \frac{R}{r}, \quad (12.30)$$

где  $R$  – расстояние от точки 0 до полюса зацепления Р, когда рычаг 9 находится в положении С;  $r$  – радиус делительной окружности шестерни 4;  $\varphi_{\max}$  – угол перемещения шестерни 4 из среднего положения С до крайних положений А и В.

Диапазон регулирования определяется зависимостью

$$D = \frac{1}{\cos^2 \varphi_{\max}}. \quad (12.31)$$

## 12.4. Зубчато-шариковые передачи

Для реализации заданного закона переменного, переменного-постоянного передаточного отношения возможно использовать зубчато-шариковые передачи, изготовление которых не требует применения специального зуборезного оборудования.

Одноступенчатая зубчато-шариковая передача (рис. 12.17) состоит из ведущего 1, промежуточного 2 и ведомого валов 3. Валы 1, 2 параллельные, а вал 3 расположен перпендикулярно к валам 1, 2. На ведущем 1 и промежуточном 2 валах с помощью

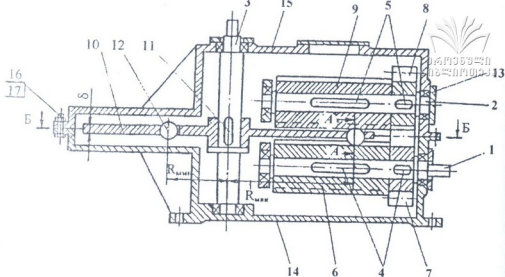


Рис. 12.17. Одноступенчатая зубчато-шариковая передача

шпонки 4, 5 закреплены круглые цилиндрические колеса 6, 7 и 8, 9. Зубчатые колеса 6, 9, имеющие одинаковые геометрические размеры, на валах 1, 2 закрепляют так, чтобы напротив впадины зуба колеса 6 была расположена вершина зубьев зубчатого колеса 9 или наоборот. На колесах 6, 9 нарезаны закругленные зубья большой длины. Колеса 7, 8 имеют одинаковые геометрические параметры и оснащены прямыми зубьями эвольвентного профиля. Между вершин и впадин закругленных зубьев колес 6, 9 расположен круглый цилиндрический диск 10, толщиной  $\delta$ , который с помощью шпонки 11 закреплен на ведомом валу 3 так, чтобы его средняя плоскость была касательной начальных цилиндров колес 7, 8. На плоскости диска 10 вдоль кривой, представляющей функцию передаточного отношения, через шаг  $P$ , расположены сквозные цилиндрические отверстия, которые с возможностью свободного перемещения вдоль осей цилиндров, оснащены сферическими шариками 12. Сквозные цилиндрические отверстия могут быть расположены на: эллипсе (рис. 12.18, а); деформированном эллипсе (рис. 12.18, б, в); на кривых составленных из дуг окружностей постоянными, переменными радиусами (рис. 12.18, г); симметричные, несимметричные кривые. Шарик 12 находится в зацеплении с вершиной и впадиной зубьев колес 6, 9. В каждом отверстии диска 10 расположен один шарик

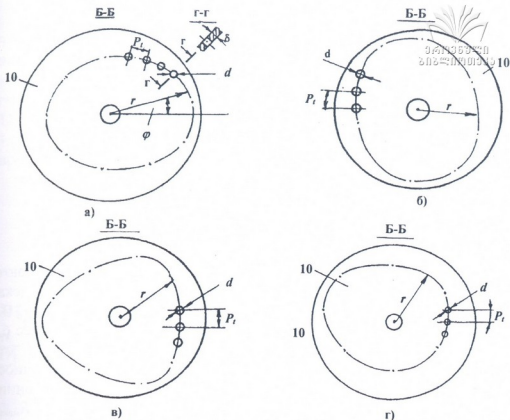


Рис. 12.18. Расположение отверстий для шариков на: а) эллипсе; б, в) деформированном эллипсе; г) кривой составленной дугами переменными, постоянными радиусами

(рис. 12.19). При передаче большой мощности, с целью увеличения прочности диска 10, целесообразно увеличение его толщины  $\delta$ . В таком случае в отверстиях диска 10 должны быть размещены несколько шариков 12 (рис. 12.20). Валы 1, 2, 3 опираются на подшипники качения 13, которые размещены в кожухе передачи. Кожух состоит из корпуса 14 и крышки 15, которые соединены болтами 16 и гайками 17.

Одноступенчатая зубчато-шариковая передача работает следующим образом. Валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью. С помощью шпонок 4, 5, зацепления зубьев колес 7, 8 вращательное движение передается зубчатым колесам 6, 7 и 8, 9. При вращении колес 6, 9 вершины зубьев колес нажимая на шарики 12, перемещают их вдоль отверстий диска 10 и

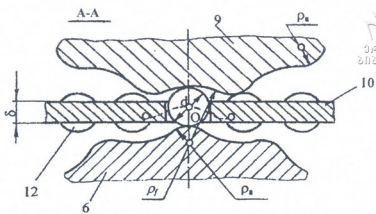


Рис. 12.19. Зацепление шариков с зубьями колес

поочередно входят в зацепление с зубьями колес 6, 9 и сообщают вращательное движение диску 10. Вращательное движение диска 10, с помощью шпонки 11, передается ведомому валу 3. Передаточное отношение максимальное, когда с зубьями колес 6, 9 в зацеплении находится шарик 12, расположенный от геометрической оси диска 10 на расстоянии  $R_{\text{макс}}$ . Передаточное отношение минимальное, когда с зубьями колес 6, 9 в зацеплении находится шарик 12, расположенный на расстоянии  $R_{\text{мин}}$ . От  $R_{\text{макс}}$  до  $R_{\text{мин}}$  передаточное отношение меняется по заданному закону.

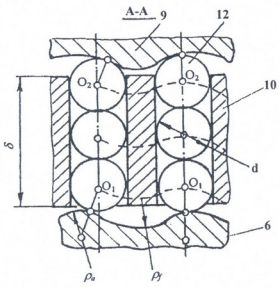


Рис. 12.20. Расположение шариков в диске большой толщины

Когда шарики 12, расположенные на кривой, составленной дугами окружностей постоянного и переменного радиусов (рис. 12.18, г), находятся в зацеплении с зубьями колес 6, 9, передаточное отношение на участке кривой, составленной из дуг окружностей с постоянными радиусами, — постоянное, передаточное отношение на участке кривой, составленной из дуг с переменными радиусами, — переменное.

В двухступенчатой зуб-

чато-шариковой передаче (рис. 12.21) шарики 12 одновременно находятся в зацеплении с зубьями цилиндрических колес 6, 9 и 18, 19, которые имеют одинаковые или разные геометрические параметры. По оси симметрии диска 10, шарики 12 могут быть размещены симметрично или несимметрично. Вал 1 ведущий, вал 23 ведомый. Диск 10 с возможностью свободного вращения связан с валом 3, который закреплен неподвижно.

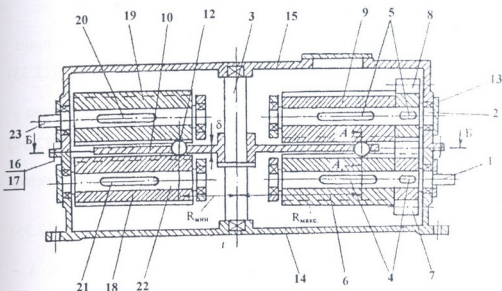


Рис. 12.21. Двухступенчатая зубчато-шариковая передача

Двухступенчатая зубчато-шариковая передача работает следующим образом. Ведущему валу 1 сообщим вращательное движение с постоянной скоростью. При этом шарики 12 поочередно входят в зацепление с зубьями колес 6, 9 и 18, 19. При расположении шариков 12, показанном на рис. 12.21, передаточное расстояние максимальное. Когда шарик 12 находится в зацеплении с зубьями колес 6, 9, расположенном на минимальном расстоянии от геометрической оси диска 10, передаточное отношение минимальное. Передаточное отношение от  $i_{\min}$  до  $i_{\max}$  меняется по заданному закону.

Методика расчета геометрических параметров зубчато-шариковой передачи заключается в следующем. Определяют радиус-вектор кривых, расположенных на плоскости диска 10.



При расположении шариков на эллипсе (рис. 12.18, а) уравнение эллипса в полярной форме запишем в виде

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos n\varphi}, \quad (12.32)$$

где:  $a$  – большая полуось эллипса;  $e$  – эксцентриситет эллипса;  $n = 1, 2, 3 \dots$ , на рис. 12.18 а показан эллипс при  $n = 1$ , на рис. 12.18, б, в показаны кривые, составленные из деформированных эллипсов при  $n = 2$ ,  $n = 3$ ;  $\varphi$  – полярный угол.

Полную длину эллипса определяем зависимостью

$$S_{\text{полн.}} = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (12.33)$$

Вспомогательный параметр  $\psi$  и угол  $\varphi$  связаны уравнением

$$\varphi = \arccos \frac{\sin \psi + e}{1 + e \sin \psi}. \quad (12.34)$$

Количество шариков 12, которые должны быть размещены на полной длине эллипса,

$$z = \frac{S_{\text{полн.}}}{d_{\text{ш}} + \Delta}, \quad (12.35)$$

где:  $d_{\text{ш}}$  – диаметр шарика 12, назначается конструктивно,  $\Delta$  – расстояние между соседними шариками, расположенными по эллипсу, целесообразно выбрать минимальное значение  $\Delta$ .

После уточнения количества отверстий, расположенных на полной длине эллипса, определяем величину большой полуоси эллипса:

$$a = \frac{P_i}{4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi} d\psi}, \quad (12.36)$$

где  $P_i$  – шаг между осями цилиндрических отверстий, расположенных на диске 10.

Определяем: параметры закругленных зубьев колес 6, 9; 18, 19. В зависимости от диаметра шарика высота закругленного зуба

$$h = 0,95r_{\text{ш}} - (0,5 \dots 1) \text{ мм}, \quad (12.37)$$

высота головки зуба

$$h_a = \frac{h}{2} - \frac{4h^2 d_w}{4h^2 + P_1^2};$$

высота ножки зуба

$$h_f = \frac{h}{2} + \frac{4h^2 d_w}{4h^2 + P_1^2}; \quad (12.39)$$

толщина зуба

$$s = \frac{h}{2} - \frac{4hP_1 d_w}{4h^2 + P_1^2}; \quad (12.40)$$

ширина впадины

$$e_1 = \frac{P_1}{2} + \frac{4hP_1 d_w}{4h^2 + P_1^2}; \quad (12.41)$$

радиус кривизны головки зуба

$$\rho_a = \frac{P_1^2}{16h} + \frac{h}{4} - \frac{d_w}{2}; \quad (12.42)$$

радиус кривизны ножки зуба

$$\rho_f = \frac{P_1^2}{16h} + \frac{h}{4} - \frac{d_w}{2}. \quad (12.43)$$

Определяем диаметры делительных окружностей колес 7, 8:

$$d_7 = \frac{P_1 z_7}{\pi}; \quad d_8 = \frac{P_1 z_8}{\pi}; \quad (12.44)$$

диаметр головки зубьев

$$d_a = d_w + \frac{h}{2} - \frac{4h^2 d_w}{4h^2 + P_1^2}; \quad (12.45)$$

диаметр ножки зубьев

$$d_f = d_w - \frac{h}{2} - \frac{4h^2 d_w}{4h^2 + P_1^2}. \quad (12.46)$$

Функция передаточного отношения для одноступенчатой передачи (рис. 12.17) определяется уравнениями:

максимальное

$$u_{\max} = \frac{a(1 - e^2)}{r_6(1 - e)}; \quad (12.47)$$

минимальное

$$u_{\min} = \frac{a(1 - e^2)}{r_6(1 + e)}.$$

Для двухступенчатой передачи (рис. 12.21), когда колеса 6 и 19 имеют одинаковые делительные окружности:

$$u_{\max} = \frac{1 + e}{1 - e}; \quad u_{\text{мбы}} = \frac{1 - e}{1 + e}. \quad (12.49)$$

Когда колеса 6 и 19 имеют разные делительные окружности, функция передаточного отношения:

максимальное

$$u_{\max} = \frac{r_{19}(1 + e)}{r_6(1 - e)}; \quad (12.50)$$

минимальное

$$u_{\min} = \frac{r_{19}(1 - e)}{r_6(1 + e)}. \quad (12.51)$$

## 12.5. Зубчато-шариковый вариатор

Вариатор (рис. 12.22, 12.23, 12.24, 12.25) [119] состоит из ведущего 1 и ведомого валов, на которых с помощью направляющих шпонок 3, 4 (или шлицевого соединения) установлены конические прямозубые колеса 5, 6, 7 и 8, которые на валах закреплены так, что против впадин зубьев колес 5, 7 расположены зубья колес 6, 8. Валы 1, 2 и ось 9 расположены параллельно. На оси 9 свободно установлены цилиндрические диски 10, на которых по окружности постоянного радиуса выполнены сквозные цилиндрические отверстия постоянного шага, в которых, с возможностью перемещения вдоль осей цилиндров, вставлены шарики 11. На валах 1, 2 установлены пружины сжатия – растяжения 12, 13. Валы 1, 2 смонтированы в подшипниках качения 14, 15, которые расположены в корпусе 16 вариатора. Ось 9, с одной стороны, с возможностью перемещения, вставлена в продольных направляющих 17 корпуса 16, а с другой стороны – в продольный прорез управляющего рычага 18, соединенного шарнирно с корпусом 16.

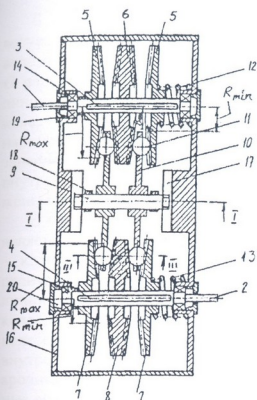


Рис. 12.22. Зубчато-шариковый вариатор

впадин, зубьев колес 7, 8, 7; шпонку 4 передается валу 2. Передаточное отношение максимальное:

$$u_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_{\min}}. \quad (12.52)$$

Рычаг 18 повернем по направлению В, ось 9 перемещается по направлению Д. При этом шарики 11 с одной стороны совместятся с максимальным радиусом  $R_{\max}$  колес 5, 6, 5, а с другой стороны – с минимальным радиусом  $R_{\min}$  колес 7, 8, 7. Передаточное отношение минимальное:

$$u_{\min} = \frac{R_{\min}}{R_{\max}}. \quad (12.53)$$

При плавном переводе рычага 18 из положения А в положение В передаточное отношение от  $u_{\max}$  до  $u_{\min}$  меняется плавно, бесступенчато. Диапазон регулирования

Перед началом работы поворотом рычага 18 по направлению А ось 9 перемещается по направлению Г. При этом шарики 11 с одной стороны совместятся с минимальным радиусом  $R_{\min}$  колес 5, 6 а с другой стороны – с максимальным радиусом –  $R_{\max}$  колес 7, 8. При перемещении оси 9 по направлению Г колеса 5, 6 и 7, 8 перемещаются вдоль валов 3 и 4, пружина 12 сжимается, а пружина 13 растягивается.

Сообщим валу 1 вращательное движение с постоянной скоростью, которое через шпонку 3, колеса 5, 6, 5 зацепления боковых поверхностей впадин зубьев колес 5, 6, 5 и шариков 11, дисков 10, зацепления шариков 11 и боковых поверхностей

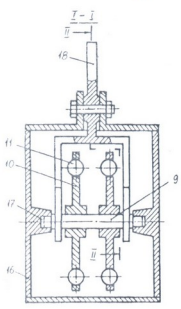


Рис. 12.23. Сечение I-I

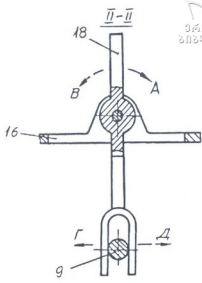


Рис. 12.24. Сечение II-II

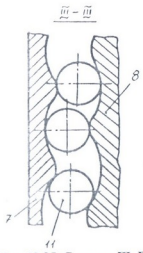


Рис. 12.25. Сечение III-III, зацепление шариков и зубьев колес

$$D = \left( \frac{R_{\max}}{R_{\min}} \right)^2. \quad (12.54)$$

Если на дисках 10 сквозные отверстия, в которые вставлены шарики 11, выполним по некруглым или кругло-некруглым центроидам, тогда при вращении ведущего вала 1 с постоянной угловой скоростью ведомый вал 2 будет вращаться с переменной, постоянно-переменной угловой скоростью.

### 12.6. Зубчатые передачи с выпукло-вогнутыми начальными поверхностями колес

Рассмотрим зубчатые передачи с выпукло-вогнутыми начальными поверхностями колес [120].

В зубчатой передаче с параллельными валами (рис. 12.26) ведущим является колесо 1 с выпуклой начальной поверхностью 2, ведомым – колесо 3 с вогнутой начальной поверхностью 4. Центр  $O$  радиуса  $r$  кривизны начальных поверхностей расположен на линии пересечения плоскостей, проведенных в середине ширины колес перпендикулярно осям, и на осях колес. На колесе 1 нарезаны прямые, винтовые или арочные зубья внешнего зацепления, а на колесе 3 – прямые, винтовые или арочные зубья внутреннего зацепления. Начальные поверхности колес сопряжены по всей длине зубьев колес.

В передаче с параллельными осями валов (рис. 12.27) ведущим является колесо 1 с вогнутой начальной поверхностью 2, ведомым – колесо 3 с выпуклой начальной поверхностью 4. Центр  $O$  радиуса  $r$  кривизны начальных поверхностей расположен на линии пересечения плоскостей, проведенных в середине ширины колес, перпендикулярно осям, и на осях вращения колес. На колесе 1 нарезаны прямые, винтовые или арочные зубья внутреннего зацепления, а на колесе 3 – прямые, винтовые или арочные зубья внешнего зацепления. Выпукло-вогнутые начальные поверхности колес сопряжены по всей длине зубьев колес.

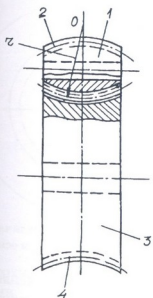


Рис. 12.26. Передача с параллельными осями

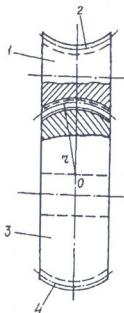


Рис. 12.27. Передача с параллельными осями

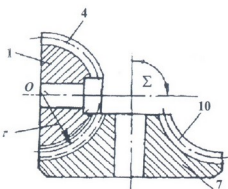


Рис. 12.28. Зубчатая передача с пересекающимися осями

$r$  кривизны начальных поверхностей (рис. 12.28) колес расположен в точке пересечения большой торцевой плоскости сферического колеса и оси вращения колеса 1. Центр  $O$  радиуса  $r$  кривизны начальных поверхностей (рис. 12.29, 12.30) колес расположен на линии пересечения большой торцевой плоскости колес 2, 3 и плоскости, проведенной на осях вращения колес. На колесах 1, 2, 3 нарезаны прямые или винтовые зубья внешнего зацепления, на колесах 7, 8, 9 – прямые или винтовые зубья внутреннего зацепления. Выпукло-вогнутые начальные поверхности колес сопряжены по всей длине зубьев.

В передачах с параллельными (рис. 12.31), пересекающимися (рис. 12.32) и скрещивающимися (рис. 12.33) осями колес ведущими являются эллипсоидные (или сферические) колеса 1 с выпуклыми начальными поверхностями 2, ведомыми – колеса 3 с вогнутыми начальными поверхностями 4. Центр радиуса  $r$  кривизны начальных

В зубчатых передачах с пересекающимися осями, ведущим является сферическое 1 (рис. 12.28), эллипсоидное 2 (рис. 12.29), или тороидное 3 (рис. 12.30) колеса с выпуклыми начальными поверхностями 4, 5, 6, ведомым – тороидные 7, 8, 9 колеса с вогнутыми начальными поверхностями 10, 11, 12. Угол пересечения осей:  $\Sigma = 90^\circ$ ;  $\Sigma \geq 90^\circ$ . Центр  $O$  радиуса

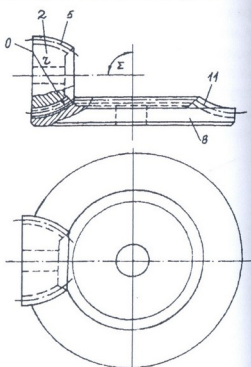


Рис. 12.29. Зубчатая передача с пересекающимися осями

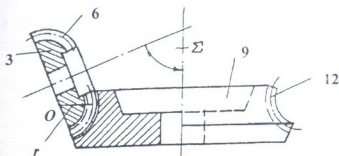


Рис. 12.30. Зубчатая передача между пересекающимися осями

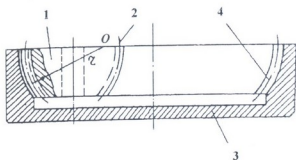


Рис. 12.31. Зубчатая передача с параллельными осями

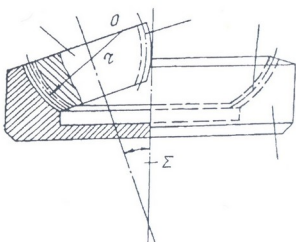


Рис. 12.32. Передача с пересекающимися осями

поверхностей колес (рис. 12.31, 12.32) расположен на пересечении линии большой торцевой плоскости колес 1 и плоскости, проведенной на осях колес 1,3. Центр  $O$  радиуса  $r$  кривизны начальных поверхностей колес (рис. 12.33) расположен в большой



торцевой плоскости ведущего колеса. На колесах 1 нарезаны

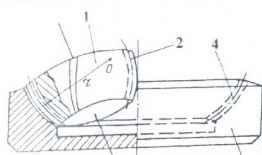


Рис. 12.33. Передача со скрещивающимися осями

прямые или винтовые зубья внешнего зацепления, а на колесах 3 – прямые или винтовые зубья внутреннего зацепления. Выпукло-вогнутые поверхности колес сопряжены по всей длине зубьев.

В червячной передаче (рис. 12.34) ведущим является червяк 1 с выпуклой начальной поверхностью 2, ведомым – червячное колесо 3 с вогнутой начальной поверхностью 4. На червяке нарезаны винтовые выпуклые зубья в осевом сечении, на червячном колесе – наклонные вогнутые зубья. Начальные поверхности сопряжены на дуге а – а. Центры  $O_2, O_4$  радиусов  $r_2, r_4$  начальных поверхностей расположены на линиях, проведенных в середине ширины червяка, параллельно оси вращения червячного колеса.

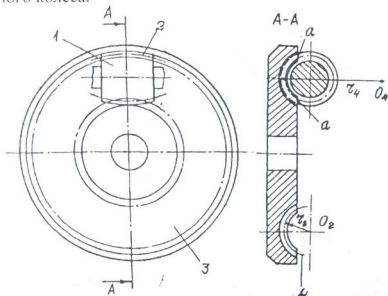


Рис. 12.34. Червячная передача

В гипоидной передаче (рис. 11.35) ведущим является колесо 1 с вогнутой (выпуклой) начальной поверхностью 2, ведомым –

колесо 3 с выпуклой (вогнутой) начальной поверхностью 4. На колесах нарезаны криволинейные зубья левого (правого) и правого (левого) направлений с выпукло-вогнутыми профилями.

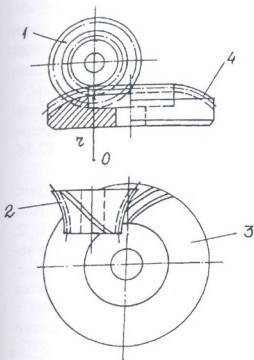


Рис. 12.35. Гипоидная передача

в зацеплении находится больше пар зубьев, уменьшается удельное давление, увеличиваются: длина контактных линий; размеры пространственных опасных сечений (сфера, эллипсоид) зубьев, а также приведенный радиус кривизны профилей активных поверхностей зубьев, что уменьшает изгибные и контактные напряжения и увеличивает надежность и долговечность передач.

## 12.7. Зубчатые передачи с составными колесами

Известно, что изготовление зубчатых колес сопровождается ошибками профиля и шага. Указанные ошибки вызывают изменение мгновенного постоянного передаточного отношения и при  $\omega_1 = const$  и  $u_{12} \neq const$  ведомое колесо совершает вращательное движение с неравномерной скоростью, возникают силы инерции, динамические нагрузки и удары боковых поверхностей зубьев.

Наличие бокового зазора между зубьями приводит к появлению мертвого хода при изменении направления вращения колес.

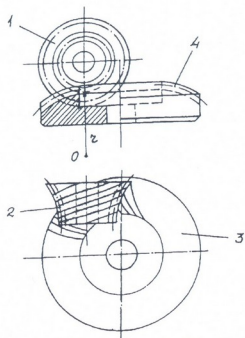


Рис. 12.36. Спироидная передача колеса 3. На колесах нарезаны прямые, пропорционально понижающиеся, или равновысокие зубья.

В зубчатой передаче (рис. 12.38) ведущее колесо состоит

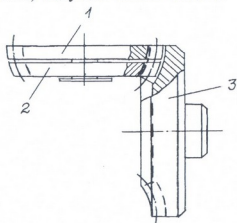


Рис. 12.38. Зубчатая передача между пересекающимися осями

Указанные недостатки возможно устранить использованием зубчатых передач, где одно колесо выполнено составным, с изменяющимся шагом. Принципиальные схемы таких передач изображены на рис. 12.36, 12.37, 12.38, 12.39 [126].

В зубчатой передаче (рис. 12.37) ведущее колесо состоит из двух конических колес 1, 2, которые между собой соединены с помощью пружины (рис. 12.2). Зубья колес 1, 2 находятся в одновременном зацеплении с зубьями ведомого конического

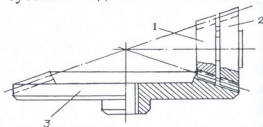


Рис. 12.37. Зубчатая передача между пересекающимися осями

из двух сферических колес 1, 2, которые между собой соединены с помощью пружины (рис. 12.2). Зубья колес находятся в одновременном зацеплении с зубьями ведомого тороидного колеса 3. На колесах 1, 2, 3 нарезаны пропорционально понижающиеся или прямые равновысокие зубья.

Червячная передача (рис. 12.39) состоит из червяка 1 и червячного колеса, составленного из колес 2, 3, которые между собой соединены пружиной 4. При таком конструктивном исполнении червячного колеса из зацепления удаляется труднодоступная для масла зона, зона сухого, граничного трения.

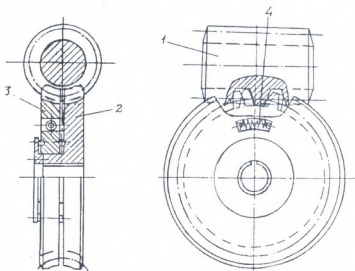


Рис. 12.39. Червячная передача

В реечной передаче (рис. 12.40) цилиндрическое колесо составлено из колес 1, 2, которые между собой соединены с помощью пружины 3. Зубья колес 3, 4 находятся в зацеплении с зубьями плоской рейки 4.

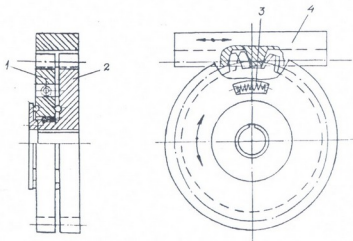


Рис. 12.40. Реечная передача

## 12.8. Зубчатые передачи с переменным передаточным отношением



Для передачи движения по заданному закону переменного передаточного отношения между пересекающимися и скрещивающимися осями колес возможно использовать зубчатые передачи [121], показанные на рис. 12.41, 12.42, 12.43.

Передачи состоят из ведущего некруглого (рис. 12.41, 12.43) 1, 3, кругло-некруглого 2 (рис. 12.42) колес и пространственных ведомых колес 4. В передачах (рис. 12.41, 12.42) оси валов колес 1, 2 и 4 пересекаются под прямым углом. В гипоидной передаче (рис. 12.43) оси валов вращения колес смещены друг относительно друга на межосевое расстояние  $a_w$ . На колесах нарезаны: косые, арочные зубья или зубья двойкой кривизны.

Активные поверхности зубьев колес 4 выполнены взаимогнбаемыми с активными поверхностями зубьев колес 1, 2, 3.

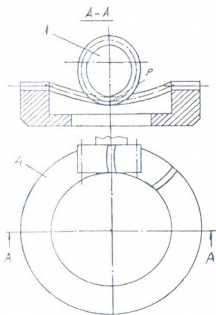


Рис. 12.41. Передача с эллиптическим ведущим колесом

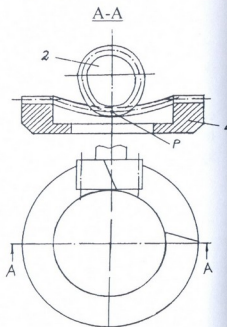


Рис. 12.42. Передача с кругло-некруглым ведущим колесом

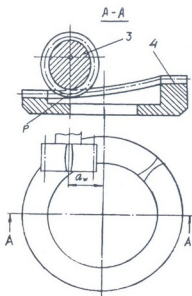


Рис. 12.43. Гипоидная передача с зубьями двоякой кривизны

При вращении ведущих колес 1, 2, 3 с постоянной скоростью ведомые колеса 4 вращаются по заданному закону с переменной (рис. 12.41, 12.43), с переменнo-постоянной скоростью (рис. 12.43).

### 12.9. Зубчатые вариаторы со сферическими колесами

На составных колесах 3 (рис. 12.2) нарезаны равновысокие прямые зубья с вогнутой начальной поверхностью. Радиус начальной поверхности колес 3 равен радиусу начальной сферической поверхности полусферических колес 4, 14, 15 (рис. 12.44, 12.45, 12.46, 12.47) с равновысокими прямыми зубьями с переменным шагом наружного зацепления.

При повороте сферических колес 4, 14, 15 по направлениям А(Б) пружина 6 (рис. 12.2), растягиваясь (сжимаясь) обеспечивает постоянный контакт боковых поверхностей зубьев составного колеса и сферических колес 4, 14, 15 (рис. 12.3), при этом бесступенчато меняется соотношение радиусов контактных точек боковых поверхностей зубьев составного и сферических колес, что обеспечивает в определенном диапазоне бесступенчатое изменение передаточного отношения. Передаточное отношение максимальное, когда составное колесо находится у большого торца полусферических колес.

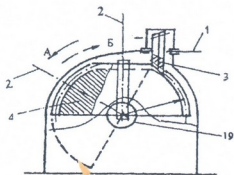


Рис. 12.44. Одноступенчатый вариатор

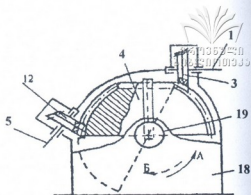


Рис. 12.45. Двухступенчатый вариатор

Принцип работы вариаторов рассмотрим на примере четырехступенчатого вариатора.

Зубчатый вариатор (рис. 12.47) состоит из составленных двух частей конического, оснащенного равновысотными прямыми зубьями внутреннего зацепления с изменяющимися шагами, ведущего 3 и ведомого 4 колес жестко закрепленных на ведущем 1 и ведомом 2 валах.

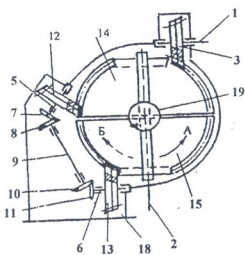


Рис. 12.46. Трехступенчатый вариатор

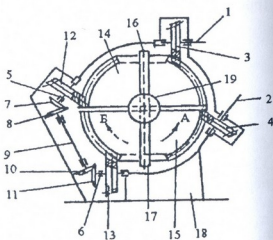


Рис. 12.47. Одноступенчатый вариатор

На промежуточных 5, 6 валах, соединенных друг с другом посредством колес 7, 8, вала 9, колес 10, 11, закреплены конические колеса 12, 13, составленные из двух частей и оснащенные равновысотными прямыми зубьями внутреннего зацепления с



изменяющимся шагом (рис. 12.2). Зубья колес 3, 12 находятся в зацеплении с прямыми равновысотными зубьями внешнего зацепления, с изменяющимся шагом полусферического колеса 14. Зубья колес 4, 13 находятся в зацеплении с прямыми равновысотными зубьями наружного зацепления, с изменяющимся шагом полусферического колеса 15. Радиусы полусферических колес 14, 15 могут быть равными ( $R_{14} = R_{15}$ ) или отличаться друг от друга ( $R_{14} \neq R_{15}$ ), радиусы начальных конусов колес 3, 12; 13, 4 могут быть равными или отличаться друг от друга. Полусферические колеса 14, 15 с возможностью вращения расположены на оси 16, которая с помощью цапф неподвижно зафиксирована в рычаге 17, имеющем сферическую форму. Рычаг 17 с помощью цапф, с возможностью вращения, посажен в неподвижный корпус 18 вариатора. На одной из цапф рычага расположен маховик 19.

Вариатор работает следующим образом: сообщим валу 1 вращательное движение с постоянной угловой скоростью. С помощью взаимозацепления боковых поверхностей зубьев колес 3, 14 и 14, 12 вращательное движение с постоянной угловой скоростью передается валу 5. От вала 5 с помощью колес 7, 8, вала 9, колес 10, 11, вала 6, взаимозацеплением боковых поверхностей зубьев колес 13, 15; 15, 4 вращательное движение с постоянной угловой скоростью передается валу 2. Плавно повернем маховик 19 сперва в А, а потом в Б направлении. Следовательно пружины 12 колес 3, 13, растягивая – сжимая, а пружины колес 4, 12 сжимая – растягивая обеспечивают зацепление боковых поверхностей колес 3,14; 14,12; 13,15 и 15,4. Этими движениями меняется соотношение радиусов контактных линий боковых поверхностей зубьев, что в определенном диапазоне способствует изменению передаточного отношения.

Передаточные отношения и диапазон регулирования рассмотренных вариаторов определяются зависимостями:

1) для одноступенчатого вариатора:

$$u_{\min} = \frac{R \sin \varphi}{r}, u_{\max} = \frac{R \sin \varphi_1}{r}; D_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi}; \quad (12.55)$$



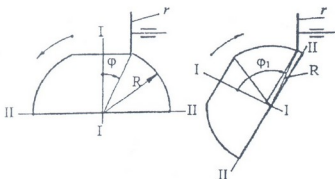


Рис. 12.48. Кинематическая схема работы одноступенчатого вариатора

2) для двухступенчатого вариатора

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= \frac{r_2 \sin \varphi}{r_1 \sin \varphi_1}; \\
 u_{\max} &= \frac{r_2 \sin \varphi_1}{r_1 \sin \varphi}; \quad D_2 = \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sin^2 \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{12.56}$$

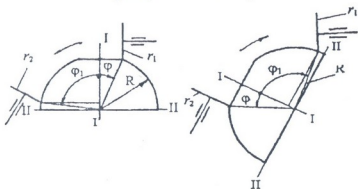


Рис. 12.49. Кинематическая схема работы двухступенчатого вариатора

3) для трехступенчатого вариатора:

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= \frac{r_2 R \sin^2 \varphi}{r_1 r_3 \sin \varphi_1}; \\
 u_{\max} &= \frac{r_2 R \sin^2 \varphi_1}{r_1 r_3 \sin \varphi}; \quad D_3 = \frac{\sin^3 \varphi_1}{\sin^3 \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{12.57}$$

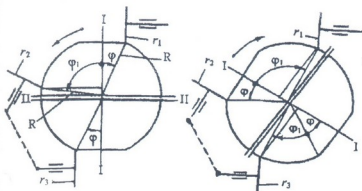


Рис. 12.50. Кинематическая схема работы трехступенчатого вариатора

4) Для четырехступенчатого вариатора

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= \frac{r_2 r_4 R \sin^2 \varphi}{r_1 r_3 \sin^2 \varphi_1}; \\
 u_{\max} &= \frac{r_2 r_4 R \sin^2 \varphi_1}{r_1 r_3 \sin^2 \varphi}; \\
 D_3 &= \frac{\sin^4 \varphi_1}{\sin^4 \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{12.58}$$

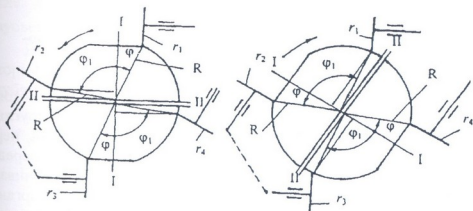


Рис. 12.51. Кинематическая схема работы четырехступенчатого вариатора

Результаты расчета изменения передаточного отношения и диапазона регулирования, при  $\varphi = 26^\circ$ ,  $\varphi_1 = 86^\circ$ ,  $R = 80$  мм, приведены в таблице 12.2.



Таблица 12.2

Вариатор	$r_1$ мм	$r_2$ мм	$r_3$ мм	$r_4$ мм	$u_{\min}$	$u_{\max}$	$D$
Одноступенчатый	40	-	-	-	0,876	1,995	2,27
Двухступенчатый	40	40	-	-	0,439	2,275	5,178
	40	80	-	-	0,878	4,551	
Трехступенчатый	80	40	-	-	0,219	1,137	11,78
	40	40	40	-	0,385	4,540	
	80	40	40	-	0,192	2,27	
	40	40	80	-			
40	80	40	-	0,770	9,080		
Четырехступенчатый	40	40	40	40	0,103	5,177	26,81
	80	80	40	40			
	40	80	40	80	0,7725	20,711	
	80	40	80	40	0,048	1,294	

Использование зубчатых вариаторов по сравнению с часто используемыми в машиностроении фрикционными вариаторами дает возможность увеличить диапазон регулирования и к.п.д., передать большую мощность.

### 12.10. Зубчатые передачи с переменным, переменнопостоянным шагом

Для передачи движения с переменным, переменнопостоянным передаточным отношением возможно использовать круглые, некруглые колеса, которые оснащены переменным или переменнопостоянным шагом. Основное преимущество этих передач состоит в высокой технологичности конструкций обеспечивающих заданный закон изменения скоростей рабочих органов машин-автоматов. Зубчатые колеса с переменным или переменнопостоянным шагом возможно изготовить обычным зуборезным инструментом на существующих зуборезных станках и станках с ЧПУ общего или специального назначения. Эти передачи создают ряд дополнительных возможностей. Например: цилиндрические колеса с  $P_i \neq const$  совершенно правильно зацепляются с обычным колесом или рейкой, обеспечивая при равномерном

вращении ведущего колеса изменение скорости ведомого колеса или рейки по определенному закону; обеспечение зацепления обычного колеса со специальной рейкой.

При нарезании зубьев обоих колес реечным инструментом каждой впадине одного колеса должен соответствовать определенный зуб парного колеса. Передаточное отношение может быть только целым числом. При нарезании одного из колес долбяком передаточное отношение может быть и дробным. Однако величина дробного передаточного отношения должна быть такой, чтобы при одном обороте ведомого колеса ведущее колесо поворачивалось на угол, кратный повороту на один зуб.

Передаточные отношения передач (рис. 12.52, 12.53) определяются уравнениями:

максимальное

$$u_{\max} = \frac{z_2(P_t + \Delta P_t)}{z_1(P_t - \Delta P_t)}; \quad (12.59)$$

минимальное

$$u_{\min} = \frac{z_2(P_t - \Delta P_t)}{z_1(P_t + \Delta P_t)}, \quad (12.60)$$

где:  $z_1, z_2$  – число зубьев колес 1, 2; делительный окружной шаг зубьев колес 1, 2;  $P_t$  – максимальная переменная величина шага.

На рис. 12.52, 12.53, 12.54, 12.55, 12.56 представлены некоторые законы движения ведомого звена, воспроизводимые зубчатыми передачами с переменным шагом.

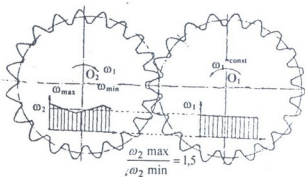


Рис. 12.52. Цилиндрическая зубчатая передача с переменным делительным шагом

законы изменения  
условных скоростей

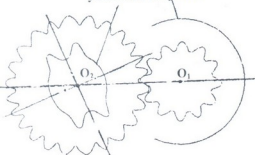


Рис. 12.53. Цилиндрическая зубчатая передача с переменным делительным шагом

движения рейки с постоянной скоростью во вращательное движение с переменной или переменнo-постоянной скоростью колеса.

Передачи составленные из круглых конических колес с зубьями наружного зацепления или наружного, внутреннего зацепления с переменным или переменнo-постоянным шагом, возможно использовать для преобразования вращательного движения с переменной или переменнo-постоянной скоростью между пересекающимися осями.

Передача (рис. 12.57) состоит из ведущего эллиптического колеса 1, наружные зубья которого находятся в зацеплении с наружными зубьями овального колеса 2, среднее передаточное отношение передачи  $n = 2$ . Примем, что делительный окружной шаг  $P_i$  зубьев колеса 1 от точки  $a$  до точки  $b$ , против направления вращения колеса 1 постепенно уменьшается  $P_i - \Delta P_i$ ,

Передачу, составленную из круглого цилиндрического колеса с переменным шагом и рейки с переменным или постоянным шагом, возможно использовать для преобразования вращательного движения колеса с постоянной скоростью в прямолинейное движение с переменной или переменнo-постоянной линейной скоростью рейки или для преобразования прямолинейного

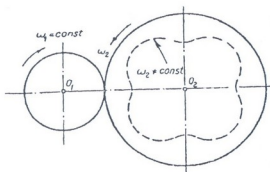


Рис. 12.54. Цилиндрическая зубчатая передача с переменным делительным шагом

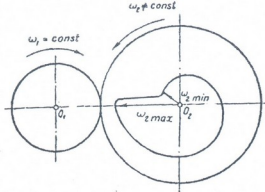


Рис. 12.55. Цилиндрическая зубчатая передача с переменным делительным шагом

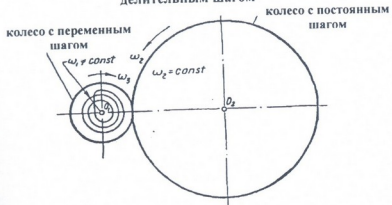


Рис. 12.56. Цилиндрическая зубчатая передача с переменным делительным шагом

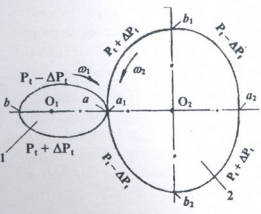


Рис. 12.57. Центроиды некруглых колес с переменным делительным шагом

а от точки *в* до точки *а* постепенно увеличивается  $P_i + \Delta P_i$ . Соответственно для ведомого овального колеса 2 делительный окружной шаг  $P_i$  зубьев от точек  $a_1, a_2$  до точек  $b_1, b_2$ , против направления вращения колеса 2, постепенно увеличивается  $P_i + \Delta P_i$ , а от точек  $b_1, b_2$  до точек  $a_2, a_1$  шаг  $P_i$  зубьев колеса 2 постепенно уменьшается  $P_i - \Delta P_i$ .

Функции передаточного отношения определяются зависимостями:



максимальное

$$u_{12}^{\max}(\varphi_1) = \frac{a(1 + e^2 - 2e \cos 2\varphi_1)(P_t + \Delta P_t)}{(1 - e \cos \varphi_1)(P_t - \Delta P_t)}; \quad (12.61)$$

максимальное

$$u_{12}^{\min}(\varphi_1) = \frac{a(1 + e^2 - 2e \cos 2\varphi_1)(P_t - \Delta P_t)}{(1 - e \cos \varphi_1)(P_t + \Delta P_t)}. \quad (12.62)$$

Используя данные таблицы 7.1 для рассмотренной передачи, видим, что функция передаточного отношения меняется в пределах:  $u_{12}^{\max}(\varphi_1) = 2,7$ ,  $u_{12}^{\min}(\varphi_1) = 1,45$ ,  $u_{12}^{\max}(\varphi_1) = 5,4$ ,  $u_{12}^{\min}(\varphi_1) = 0,73$ . Если примем, что шаг зубьев колеса 1 от точки  $a$  до точки  $b$  увеличивается, от точки  $b$  до точки  $a$  уменьшается, а для колеса 2 шаг зубьев от точек  $a_1, a_2$  до точек  $b_1, b_2$  уменьшается, а от точек  $b_1, b_2$  до точек  $a_1, a_2$  увеличивается функция передаточного отношения меняется в пределах:  $u_{12}^{\max} = 2,7$ ;  $u_{12}^{\min} = 1,45$ .

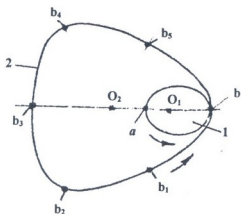


Рис. 12.58. Центроиды некруглых колес 1, 2 внутреннего зацепления, при  $n = 3$ , с переменным делительным шагом

Передача (рис. 12.58) состоит из эллиптического колеса 1 наружные зубья которого находятся в зацеплении с внутренними зубьями некруглого колеса 2, среднее передаточное отношение передачи  $n = 3$ . Примем, что шаг  $P_t$  зубьев колеса 1, по направлению вращения колеса, от точки  $a$  до точки  $b$  уменьшается, от точки  $b$  до точки  $a$  постоянный. Шаг зубьев колеса 2, против направления вращения колеса 2, от точек  $b, b_2, b_4$  до точек  $b_1, b_3, b_5$  увеличивается  $P_t + \Delta P_t$ , а от точек  $b_1, b_3, b_5$  до точек  $b_2, b_4, b$  постоянный. Функция

передаточного отношения на участках с переменным шагом определяется зависимостью

$$u_{21}(\varphi) = \frac{a(P_t + \Delta P_t)(1 + e^2 - 2e \cos 3\varphi_1)}{(P_t - \Delta P_t)(1 - e \cos 3\varphi_1)} \quad (12.63)$$

Функция передаточного отношения на участках с постоянным шагом имеет вид

$$u_{21}(\varphi_1) = \frac{a(1 + e^2 - 2e \cos 3\varphi_1)}{1 - e \cos 3\varphi_1} \quad (12.64)$$

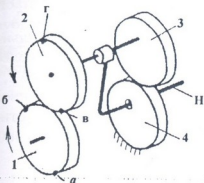


Рис. 12.59. Двухступенчатая планетарная передача

В планетарной передаче (рис. 12.59) шаг  $P_t$  ведущего круглого колеса 1 от точки  $a$ , по направлению вращения колеса, до точки  $b$  увеличивается, от точки  $b$  до точки  $a$  уменьшается. Шаг  $P_t$  зубьев ведомого круглого колеса 2 от точки  $b$  против направления вращения колеса, до точки  $g$  уменьшается, от точки  $g$  до точки  $v$  увеличивается. Шаг зубьев некруглых колес 3, 4 постоянный.

Функция передаточного отношения:  
максимальное

$$u_{1H}^4 = 1 - \frac{z_2 a (P_t + \Delta P_t) (1 + e^2 - 2e \cos k \varphi_1)}{z_1 (P_t - \Delta P_t) (1 - e \cos k \varphi_1)}; \quad (12.65)$$

минимальное

$$u_{1H}^4 = 1 - \frac{z_2 a (P_t - \Delta P_t) (1 + e^2 - 2e \cos k \varphi_1)}{z_1 (P_t + \Delta P_t) (1 - e \cos k \varphi_1)}, \quad (12.66)$$

где:  $k = 1, 2, 3, \dots$  и т.д.

Планетарная передача (рис. 12.60) состоит из центральных круглых цилиндрических колес с зубьями наружного 1 и внутреннего 2 зацепления, сателлитных колес 3 с зубьями наружного зацепления, водила  $H$ , ведущего 4 и ведомого 5 валов. Колеса 1, 3, 2 снабжены с зубьями переменного шага. Функция



переменного отношения от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  и от  $180^\circ$  до  $360^\circ$  определяется зависимостями:

максимальное

$$u_{12}^{\min} = 1 - \frac{z_2(P_t + \Delta P_t)}{z_1(P_t - \Delta P_t)}; \quad (12.67)$$

минимальное

$$u_{12}^2 = 1 - \frac{z_2(P_t - \Delta P_t)}{z_1(P_t + \Delta P_t)}. \quad (12.68)$$

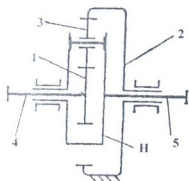


Рис. 12.60. Планетарная передача с круглыми цилиндрическими колесами с переменным шагом

В планетарном механизме (рис. 7.37) конические колеса 1, 2, 3 круглые, ведущее звено — центральное колесо 3, ведомое — водило Н, колесо 1 закреплено неподвижно. Колеса 1, 2, 3, снабжены зубьями переменного шага. Функция передаточного отношения от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  и от  $180^\circ$  до  $360^\circ$ , определяются зависимостями:

максимальное

$$u_{3H}^1 = 1 + \frac{z_3(P_t + \Delta P_t)^2}{z_1(P_t - \Delta P_t)^2}; \quad (12.69)$$

минимальное

$$u_{3H}^1 = 1 + \frac{z_3(P_t - \Delta P_t)}{z_1(P_t + \Delta P_t)}. \quad (12.70)$$

Принимая  $P_t + \Delta P_t = 6$  мм,  $P_t - \Delta P_t = 4$  мм, функция передаточного отношения планетарной передачи определится в виде: максимального  $u_{3H}^1 = 3,25 \frac{z_3}{z_1}$ ; минимального  $u_{3H}^1 = 1,44 \frac{z_3}{z_1}$ .

В дифференциальном механизме (рис. 7.43) вращательное движение от ведущего вала I-I с помощью круглых колес 3, 4 передается: на водило Н; с помощью круглых колес 1, 2 — на центральное колесо 5 и сателлитные колеса 6. Движение снимается с вала II-II центрального колеса 7. Колеса 1, 2 оснащены зубьями переменного шага.

Передаточное отношение определяется уравнениями:  
 максимальное

$$u_{71} = \frac{z_2(P_t + \Delta P_t)}{z_1(P_t - \Delta P_t)} u_{75}^H - u_{43}(u_{75}^H + 1); \quad (12.71)$$

минимальное

$$u_{71} = \frac{z_2(P_t - \Delta P_t)}{z_1(P_t + \Delta P_t)} u_{75}^H - u_{43}(u_{75}^H + 1). \quad (12.72)$$

Волновая зубчатая передача (рис. 12.61) состоит из: генератора волн 1, гибкого колеса 2 с наружными зубьями постоянным шагом и жесткого круглого колеса 3 с внутренними зубьями переменным шагом. Примем, что: делительный шаг  $P_t$  жесткого колеса 3 (рис. 12.61, А) из точки  $a$  до точки  $b$  постепенно уменьшается; от точки  $b$  до точки  $a$  постепенно увеличивается.

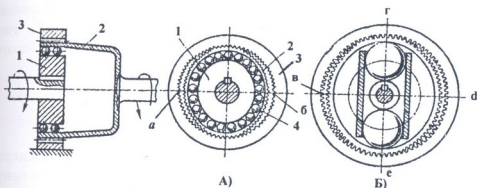


Рис. 12.61. Волновая зубчатая передача с переменным делительным шагом жесткого колеса

При вращении генератора волн 1 передаточное отношение от точки  $a$  до точки  $b$  определяется зависимостью

$$u_{12}^3 = \frac{z_2 P_t}{z_3(P_t - \Delta P_t) - z_2 P_t}; \quad (12.73)$$

от точки  $b$  до точки  $a$  имеет вид

$$u_{12}^3 = -\frac{z_2 P_t}{z_3(P_t + \Delta P_t) - z_2 P_t}. \quad (12.74)$$

Когда шаг зубьев жесткого колеса от точки  $b$  до точки  $g$  постепенно уменьшается (рис. 12.61, Б), от точки  $d$  до точки  $e$

постепенно увеличивается, а на участках  $gd$ ,  $ев$  шаг постоянный, функция передаточного отношения на участке  $вг$  имеет вид

$$u_{12}^3 = -\frac{z_2 P_i}{z_3(P_i - \Delta P_i) - z_2 P_i}, \quad (12.75)$$

на участке  $de$  функция передаточного отношения определяется зависимостью

$$u_{12}^3 = -\frac{z_2 P_i}{z_3(P_i + \Delta P_i) - z_2 P_i}. \quad (12.76)$$

На участках « $gd$ ,  $ев$ » функция передаточного отношения

$$u_{12}^3 = -\frac{z_2}{z_1 - z_2}. \quad (12.77)$$

В передачах с некруглыми зубчатыми колесами с переменным шагом передаточное отношение представляет функцию двух переменных и меняется в широком диапазоне. В волновых передачах с круглыми колесами с переменным шагом передаточное отношение представляет функцию одного переменного.

### 12.11. Новые зубчатые передачи с переменным передаточным отношением

Для реализации заданной функции переменного передаточного отношения возможно использовать передачи, зубчатые венцы ведущих и ведомых колес которых оснащены равновысокими зубьями полной и неполной длины, расположенными вдоль плоских или пространственных кривых, представляющих функцию переменного передаточного отношения.

Зубчатые передачи (рис. 12.62, 12.63, 12.64, 12.65, 12.66) состоят из ведущих 1 и ведомых 2 круглых конических колес (рис. 12.62, 12.63, 12.64), из ведущих круглых конических колес 1 и ведомых плоских: круглых 2 (рис. 12.65); некруглых 2 (рис. 12.66) колес. Зубчатые венцы ведущих и ведомых колес оснащены равновысокими зубьями наружного (рис. 12.62, 12.63, 12.65, 12.66), внутреннего (рис. 12.64) зацепления. Неполные зубья 4 расположены вдоль пространственных 5 или плоских 6 кривых, являющихся функциями переменного передаточного отношения.

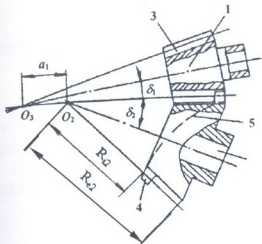


Рис. 12.62. Коническая зубчатая передача

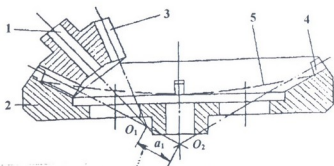
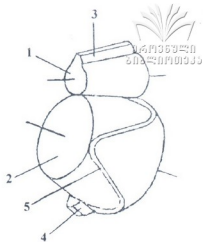


Рис. 12.63. Коническая зубчатая передача

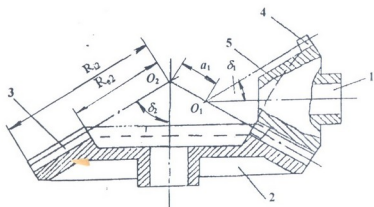


Рис. 12.64. Коническая зубчатая передача  
внутреннего зацепления

Вершины  $O_1O_2$  конусов расположены на одной линии образующих конусов и смещены друг от друга на расстоянии  $a_1$ .

Функция передаточного отношения определяется зависимостями:

для передач (12.62, 12.63, 12.64)

$$u_{\max} = \frac{R_{e2} \sin \delta_2}{(R_{e2} \pm a_1) \sin \delta_1}; u_{\min} = \frac{R_{i2} \sin \delta_2}{(R_{i2} \pm a_1) \sin \delta_1}; \quad (12.78)$$

для передачи (рис. 12.65)

$$u_{\max} = \frac{R_{e2}}{(R_{e2} \pm a_1) \sin \delta_1}; u_{\min} = \frac{R_{i2}}{(R_{i2} \pm a_1) \sin \delta_1}; \quad (12.79)$$

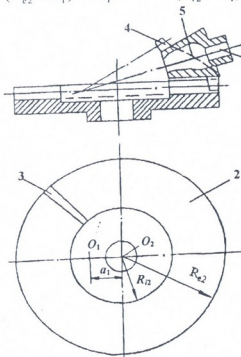


Рис. 12.65. Коническая зубчатая передача

для передачи (рис. 12.66)

$$u_{\max} = \frac{R_{e2\max}}{(R_{e2\max} - a_1) \sin \delta_1}; u_{\min} = \frac{R_{e2\min}}{(R_{e2\min} - a_1) \sin \delta_1}, \quad (12.80)$$

когда зубья колеса 2 (рис. 12.66) расположены на эллипсе

$$u_{\max} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e}; u_{\min} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e}, \quad (12.81)$$

где:  $R_{e2}$  – внешнее конусное расстояние колеса 2;  $R_{i2}$  – внутреннее конусное расстояние колеса 2;  $R_{i1}$  – внутреннее конусное

расстояние колеса 1;  $\delta_1, \delta_2$  – делительные углы колес 1, 2;  $a$  – половина длины большой оси эллипса;  $e$  – эксцентриситет эллипса.

Знак минус относится к случаю, когда вершина  $O_1$  ведущего колеса 1 расположена на образующей конуса ведомого колеса 2, а знак плюс – когда вершина  $O_2$  ведомого колеса 2 расположена на образующей конуса ведущего колеса 1.

Диапазон изменения передаточного отношения: для передач (рис. 12.62, 12.63, 12.64, 12.65)

$$D = \frac{R_{e2}(R_{i2} \pm a_1)}{R_{i2}(R_{e2} \pm a_1)}; \quad (12.82)$$

для передачи (рис. 12.66) когда зубья колеса 2 расположены на эллипсе.

$$D = \frac{1+e}{1-e}. \quad (12.83)$$

Зубчатые передачи (рис. 12.67, 12.68, 12.69, 12.70) состоят из ведущих и ведомых 1, 2 сферических колес, передача (рис. 7.71) состоит из тороидных колес 1, 2, передача (рис. 7.72) состоит из эллипсоидных колес 1, 2. Зубчатые венцы колес оснащены равновысокими прямыми или косыми (рис. 12.69) зубьями полной и неполной длины. Неполные зубья расположены вдоль пространственных кривых, являющихся функциями переменного передаточного отношения. Ведомые валы колес: параллельные, пересекаются или скрещиваются (рис. 12.69).

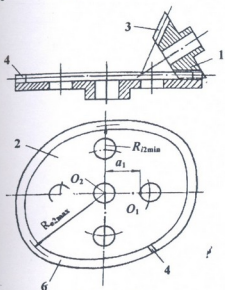


Рис. 12.66. Коническая зубчатая передача

косыми (рис. 12.69) зубьями полной и неполной длины. Неполные зубья расположены вдоль пространственных кривых, являющихся функциями переменного передаточного отношения. Ведомые валы колес: параллельные, пересекаются или скрещиваются (рис. 12.69).

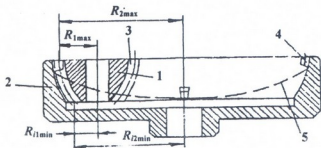


Рис. 12.67. Сферическая зубчатая передача

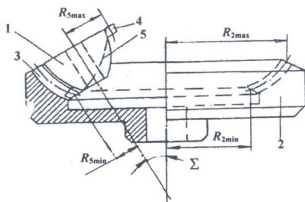


Рис. 12.68. Сферическая зубчатая передача

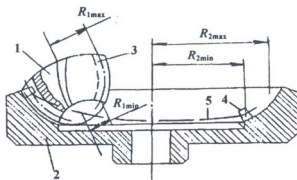


Рис. 12.69. Сферическая зубчатая передача

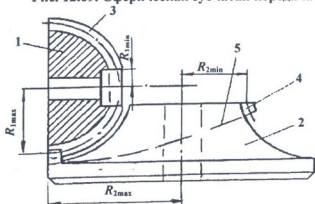


Рис. 12.70. Сферическая зубчатая передача

Функция передаточного отношения определяется зависимостями:

для передач (рис. 12.67, 12.68, 12.69, 12.70, 12.71, 12.72)

$$u_{\max} = \frac{R_{2\max}}{R_{1\max}}; u_{\min} = \frac{R_{2\min}}{R_{1\min}}$$

диапазон изменения передаточного отношения

$$\Delta = \frac{R_{2\max} R_{1\min}}{R_{1\max} R_{2\min}} \quad (12.85)$$

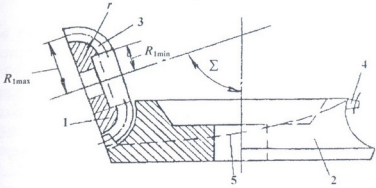


Рис. 12.71. Торондная зубчатая передача

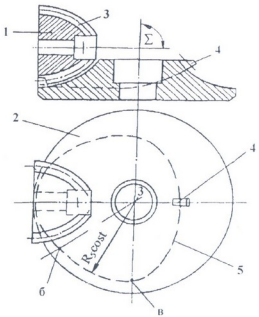


Рис. 12.72. Торондная зубчатая передача

Функция передаточного отношения для передачи (рис. 12.72) имеет вид:



$$u_{\max} = \frac{R_{2\max}}{R_1}; \quad u_{\min} = \frac{R_{2\min}}{R_1 - r_1},$$

диапазон изменения передаточного отношения

$$\Delta = \frac{R_{\max}(R_1 - r_1)}{R_1 R_{2\min}}. \quad (12.87)$$

Двухступенчатая передача (рис. 12.73) состоит из ведущего торoidalного 1, промежуточных сферических (или эллипсоидных) 2, 3 и ведомого торoidalного 4 колеса. Колеса 2, 3 жестко соединены между собой и с возможностью вращения установлены на неподвижной оси 5. Колеса 1, 4 оснащены равновысокими прямыми зубьями 6 полной длины. Колеса 2, 3 оснащены равновысокими прямыми зубьями 7, 8 неполной длины, которые расположены вдоль одинаковых или разных пространственных кривых 9, 10, представляющих заданную функцию переменного передаточного отношения.

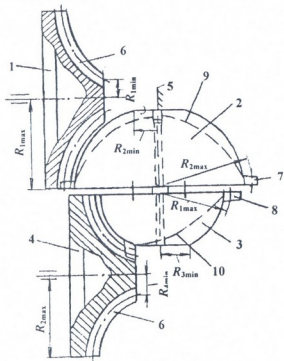


Рис. 12.73. Двухступенчатая торoidalно-сферическая зубчатая передача

Функция передаточного отношения имеет вид:

$$u_{\max} = \frac{R_{2\max} R_{4\min}}{R_{1\max} R_{3\min}};$$

$$u_{\min} = \frac{R_{2\min} R_{4\max}}{R_{1\min} R_{3\max}};$$

(12.88)

диапазон изменения передаточного отношения

$$Д = \frac{R_{1\min} R_{2\max} R_{3\max} R_{4\min}}{R_{1\max} R_{2\min} R_{3\min} R_{4\max}}.$$

(12.89)

Трехступенчатая передача (рис. 12.74) состоит из ведущего торoidalного колеса 1, промежуточного сферического или эллипсоидного колеса 2, промежуточных торoidalных 3, 4 и круглых конических 7, 8, 9, 10 колес, валов 5, 6, 11 и ведомого сферического или эллипсоидного колеса 12, которое жестко закреплено на ведомом валу 13. Колесо 2, с возможностью свободного вращения, связано с неподвижной осью 14. Колеса 2, 12 оснащены равновысокими

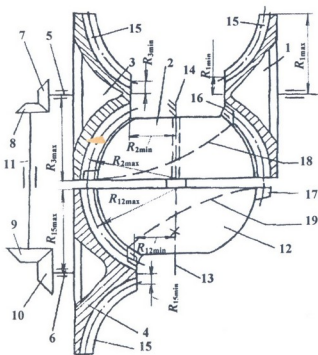


Рис. 12.74. Трехступенчатая торoidalно-сферическая зубчатая передача



прямыми зубьями 16, 17 неполной длины, которые расположены вдоль одинаковых или разных пространственных кривых 18, 19, представляющих заданную функцию переменного передаточного отношения.

Функция передаточного отношения имеет вид:  
 максимальное

$$u_{\max} = \frac{R_{2\min} R_{3\max} R_{12\min}}{R_{1\min} R_{2\max} R_{4\min}}; \quad (12.90)$$

минимальное

$$u_{\min} = \frac{R_{2\max} R_{3\min} R_{12\max}}{R_{1\max} R_{2\min} R_{4\max}}; \quad (12.91)$$

диапазон изменения передаточного отношения

$$Д = \frac{R_{1\max} R_{2\min} R_{3\max} R_{4\max} R_{12\min}}{R_{1\min} R_{2\max} R_{3\min} R_{4\min} R_{12\max}}. \quad (12.92)$$

Четырехступенчатая передача (рис. 12.75) состоит из ведущего 1, промежуточных 2, 3, ведомого 4, тороидных колес и промежуточных сферических или эллипсоидных колес 5, 6, которые с возможностью свободного вращения связаны с неподвижной осью 7. Колеса 1, 2, 6 оснащены равновысокими прямыми зубьями 8 неполной длины, которые расположены вдоль одинаковых или разных пространственных кривых 9, 10, 11, представляющих заданную функцию передаточного отношения. Колеса 3, 4, 5 оснащены равновысокими прямыми зубьями 12 полной длины. Колеса 2, 3 между собой связаны валами 13, 14, 15 и круглыми коническими колесами 16, 17, 18, 19.

Функция передаточного отношения определяется зависимостями:

$$u_{\max} = \frac{R_{2\max} R_{4\max} R_{5\min} R_{6\min}}{R_{1\min} R_{3\min} R_{5\max} R_{6\max}}; \quad (12.93)$$

$$u_{\min} = \frac{R_{2\min} R_{4\min} R_{5\max} R_{6\max}}{R_{1\max} R_{3\max} R_{5\min} R_{6\min}}; \quad (12.94)$$

диапазон изменения передаточного отношения

$$Д = \frac{R_{1\max} R_{2\max} R_{3\max} R_{4\max} R_{5\min}^2 R_{6\min}^2}{R_{1\min} R_{2\min} R_{3\min} R_{4\min} R_{5\max}^2 R_{6\max}^2}. \quad (12.95)$$

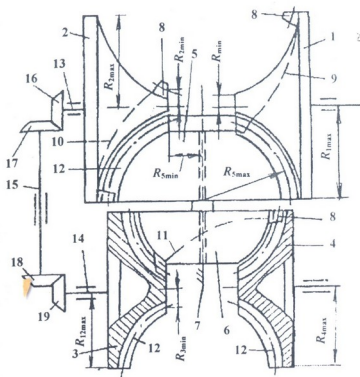


Рис. 12.75. Четырехступенчатая торондно-сферическая зубчатая передача

При необходимости передачи вращательного движения с переменнo-постояннoй углoвой скоростью, равновысокие зубья должны быть расположены вдоль кривых, которые составлены из частей с изменяющимися и постоянными радиусами участков.

Передача вращательного движения с переменным передаточным отношением осуществляется следующим образом. Ведущим колесам сообщают вращательное движение с постоянной угловой скоростью. Посредством зацепления боковых поверхностей зубьев полной и неполной длины, ведомые колеса совершают вращательное движение с переменной или переменнo-постояннoй угловой скоростью по заданному закону передаточного отношения.

Расчет зубьев некруглых колес на прочность, так же, как и зубьев круглых колес, сводится к расчету по контактным напряжениям на выносливость, по напряжениям изгиба и на заедание по допускаемым повышениям мгновенной температуры.

Методику расчета на прочность передач с круглыми колесами можно распространить и на передачи с некруглыми колесами с учетом следующих особенностей:

1. при работе передач с некруглыми колесами возникают добавочные динамические моменты – моменты сил инерции;
2. приложение сил к зубьям колес может иметь ударный характер;
3. силы в передачах с некруглыми колесами передаются при переменных углах давления;
4. зубья некруглых колес имеют различную кривизну и различные коэффициенты формы зубьев.

В данной главе рассматривается расчет зубьев некруглых колес на контактную и изгибающую прочность.

### 13.1. Силы, действующие в зацеплении прямозубой некруглой цилиндрической передачи

Закон живой силы, уравнение движения механизма с некруглыми колесами имеет вид [76]

$$T_{\text{дв}} = u_{12}(\psi_1) \left( T_{\text{nc}} + I_{\text{np}2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{\text{np}2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right), \quad (13.1)$$

где:  $T_{\text{дв}}$  – движущий момент, приведенный к валу ведущего колеса;  $u_{12}(\psi_1)$  – переменное передаточное отношение зубчатой передачи;  $T_{\text{nc}}$  – момент сил полезного сопротивления;  $I_{\text{np}2}$  – момент инерции приведенных масс относительно оси вращения ведомого колеса;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 / u_{12}(\psi_1) - \omega_1^2 \dot{u}_{12}(\psi_1) / [u_{12}(\psi_1)^2]$  – угловое ускорение ведомого колеса;  $\dot{u}_{12}(\psi_1) = d[u_{12}(\psi_1)] / d\psi_1$ ;  $u_{12}(\psi_1) I_{\text{np}2} \varepsilon_2$  – добавочный динамический момент, момент

инерции, возникающий при работе передач с некруглыми колесами, приведенный к ведущему валу. Этот момент зависит от размеров зубчатых передач и кинематических параметров передач

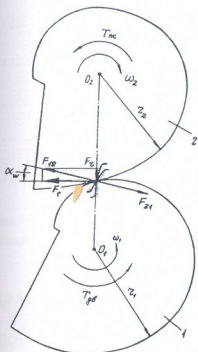


Рис. 13.1. Силы, действующие в зацеплении прямозубой некруглой цилиндрической передачи

инструмента;  $r_2$  – радиус-вектор центра тяжести ведомого колеса:

с некруглыми колесами. Величина его в течение одного периода вращения колес изменяется от положительного до отрицательного максимального значения вследствие изменения величины и знака углового ускорения;  $\psi_2$  – угол поворота ведомого колеса;  $\omega_2 = \omega_1/u_{12}(\psi_1)$  – угловая скорость ведомого колеса.

Из условия равенства моментов, действующих на ведомое колесо 2, для нормальной силы (рис. 13.1) получим:

$$F_n = \frac{T_{nc} + I_{np2}\varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2}}{r_2 \cos \alpha_w},$$

где:  $\alpha_w$  – полюсный угол зацепления, угол режущей кромки

$$r_2 = a_w \frac{u_{12}(\psi_1)}{1 \pm u_{12}(\psi_1)}. \quad (13.2)$$

Тогда нормальная сила определяется уравнением

$$F_n = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2}\varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)]}{a_w u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w}. \quad (13.3)$$

Окружная сила

$$F_t = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2}\varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)]}{a_w u_{12}(\psi_1)}, \quad (13.4)$$

радиальная сила



$$F_r = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)]}{a_w u_{12}(\psi_1)} \operatorname{tg} \alpha_w. \quad (13.5)$$

В формулах знак «плюс» для наружного, знак «минус» - для внутреннего зацепления.

### 13.2. Расчет на контактную прочность активных поверхностей прямых зубьев некруглых цилиндрических колес

Расчет прямых зубьев некруглых цилиндрических колес на выносливость рабочих поверхностей зубьев по контактным напряжениям имеет обычный вид

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q}{\rho_{np}} \frac{E_{np}}{2\pi(1-\mu^2)}} \leq [\sigma_H], \quad (13.6)$$

где:  $\sigma_H$  – максимальное контактное напряжение на активной поверхности зубьев;  $[\sigma_H]$  – допускаемое контактное напряжение при переменных нагрузках;  $E_{np} = 2E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$  – приведенный модуль упругости;  $E_1, E_2$  – модули упругости материалов колес;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $q$  – расчетная удельная нормальная нагрузка:

$$q = \frac{F_n}{l_\Sigma} K_{n\beta} K_{nv} = \frac{F_{12}}{b_w K_\varepsilon \alpha_\alpha} K_{n\beta} K_{nv}; \quad (13.7)$$

$F_n = F_{12}$  – нормальная сила;  $K_{n\beta}$  – коэффициент неравномерности нагрузки по длине контактных линий  $l_\Sigma$ ;  $K_{nv}$  – коэффициент динамической нагрузки при переменных нагрузках;  $b_w$  – ширина зубчатого венца;  $K_\varepsilon$  – коэффициент, учитывающий непостоянство суммарной длины контактной линии;  $\varepsilon_\alpha$  – коэффициент торцового перекрытия для прямозубых передач при однопарном зацеплении

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sqrt{z^2 \sin^2 \alpha_w + 4(z+1)}}{\cos \alpha_w} - z \operatorname{tg} \alpha_w \right)$$



при числе зубьев  $z_{\min} = 17$  и угле зацепления  $\alpha_w = 20^\circ$ ,  $\varepsilon_\alpha = 1,52$ .

С учетом (13.3) расчетная удельная нагрузка принимает вид

$$q = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)]}{a_w b_w K_\varepsilon \varepsilon_\alpha u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w} K_{H\beta} K_{H\alpha}. \quad (13.8)$$

Для определения приведенной кривизны профилей прямых зубьев воспользуемся зависимостью [76]

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{[1 \pm u_{12}(\psi_1)]^2 \sin \mu_1}{a_w u_{12}(\psi_1) \sin \alpha_w}, \quad (13.9)$$

где:  $\mu_1 = \operatorname{arctg} \left[ -\frac{1 \pm u_{12}(\psi_1)}{\dot{u}_{12}(\psi_1)} \right]$  – угол между радиус-вектором и касательной к центроиду колеса.

Подставляя (13.8) и (13.9) в (13.6), получим формулу для проверочного расчета

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\varepsilon \sqrt{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{H\alpha}}{a_w^2 b_w}} \leq [\sigma_H], \quad (13.10)$$

где:  $Z_H = \sqrt{\frac{1}{\sin 2\alpha_w}}$  – коэффициент, учитывающий форму сопря-

женных поверхностей;  $Z_M = \sqrt{\frac{E_{np}}{\pi(1-\mu^2)}}$  – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов сопряженных колес;

$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{K_\varepsilon \varepsilon_\alpha}}$  коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий. Будем считать, что нагрузка передается одной парой зубьев и длина контактных линий равна ширине зубчатого



венца  $l_{\Sigma} = b_w$ , тогда  $K_{\varepsilon} \approx 1$ ;  $\Phi_1(\psi_1) = \frac{[1 \pm u_{12}(\psi_1)]^3 \sin \mu_1}{[u_{12}(\psi_1)]^2}$

от угла поворота ведущего колеса.

При проектировании прямозубых некруглых цилиндрических колес, исходя из контактной прочности, нужно определить межосевое расстояние. Из формулы (13.10) получим:

$$a_w = K_a \sqrt[3]{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta}}{\psi_{ba} [\sigma_H]^2}}, \quad (13.11)$$

где:  $K_a = \sqrt{(Z_H Z_M Z_{\varepsilon})^2 K_{Hv}}$  – вспомогательный коэффициент;  
 $\psi_{ba} = b_w / a_w$  – коэффициент ширины колеса, подбирается по рекомендациям для круглых колес  $\psi_{ba} = 0,2 \dots 0,5$ .

В случае пренебрежимо малых значений, по сравнению с моментом  $T_{nc}$ , значений динамического момента  $I_{np2} \varepsilon_{2\max}$ , формулы (13.10, 13.11) принимают вид:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_{\varepsilon} \sqrt{\frac{10^3 T_{nc} [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{Hv}}{a^2 b_w}} \leq [\sigma_H]; \quad (13.12)$$

$$a_w = K_a \sqrt[3]{\frac{10^3 T_{nc} [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta}}{\psi_{ba} [\sigma_H]^2}}. \quad (13.13)$$

При малых значениях добавочного динамического момента по сравнению с моментом полезных сопротивлений,

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_{\varepsilon} \sqrt{\frac{10^3 (T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2) [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{Hv}}{a_w^2 b_w}} \leq [\sigma_H]; \quad (13.14)$$

$$a_w = K_a \sqrt[3]{\frac{10^3 (T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2) [\Phi_1(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta}}{\psi_{ba} [\sigma_H]^2}}. \quad (13.15)$$

В формулах (13.10, 13.11, 13.12, 13.13, 13.14 и 13.15) сумма моментов дана в Нм, контактное напряжение  $[\sigma_H]$  – в МПа.

Полученное значение  $a_w$  надо округлить до ближайшего большего значения стандартного межосевого расстояния для круглых колес.

Для определения модуля зацепления колес исходим из того положения, что на развернутой длине центроид некруглых колес должно разместиться целое число зубьев:

$$m = \frac{S_k}{\pi z_k}, \quad (13.16)$$

где:  $S_k = \int_0^{\vartheta} \frac{r_k}{\sin \mu_k} d\psi_k$  ( $k = 1, 2$ ) – длина центроид колес; при замкнутой центроиде  $\vartheta = 2\pi$ ;  $r_k$  – радиус-вектор центроид колес;  $z_k$  ( $k = 1, 2$ ) – число зубьев колес.

Полученное значение модуля надо округлить до ближайшего значения стандартного модуля для круглых колес. По стандартному модулю надо определить параметры зубчатых венцов некруглых колес.

По исходным формулам (13.10, 13.12, 13.14) необходимо провести проверочный расчет. При  $\sigma_H > [\sigma_H]$  нужно изменить геометрические параметры некруглых колес, материал для изготовления колес и значение коэффициента  $\psi_{ba}$ , провести перерасчет, обеспечивая выполнение условия  $\sigma_H \leq [\sigma_H]$ .

### 13.3. Расчет прямых зубьев некруглых цилиндрических колес на прочность при изгибе

Расчет служит для предотвращения усталостного излома зубьев. При этом используем известную зависимость для расчета на изгиб круглых прямозубых колес

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b_w m} Y_F K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F], \quad (13.17)$$

где:  $\sigma_F$  – максимальное напряжение в опасном сечении зуба;  $[\sigma_F]$  – допускаемое напряжение изгиба для материала зуба при переменных нагрузках;  $Y_F$  – коэффициент формы зуба, его можно назначать по рекомендациям для круглых колес, заменяя на минимальном радиус-векторе центроиду делительной кривой некруглого колеса окружностью приведенного круглого колеса с числом зубьев

$$z_{np} = \frac{2r_{k,\min}}{m};$$



$r_{k,\min}$  – минимальный радиус-вектор центроиды делительной кривой некруглого колеса на заменяемом участке ( $k=1,2$ );  $m$  – модуль зацепления;  $F_t$  – окружная сила;  $b_w$  – ширина зубчатого венца;  $K_{F\beta}$  – коэффициент неравномерности нагрузки по длине контактной линии;  $K_{Fv}$  – коэффициент динамической нагрузки при переменных нагрузках.

Тогда, используя формулу (13.4) для проверочного расчета открытой некруглой цилиндрической прямозубчатой передачи, получим:

$$\sigma_F = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_2(\psi_1)]_{\max}}{a_w b_w m} Y_K K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F], \quad (13.19)$$

где  $\Phi_2(\psi_1) = \frac{1 \pm u_{12}(\psi_1)}{u_{12}(\psi_1)}$  – функция от угла поворота ведущего колеса.

Для получения формулы проектировочного расчета из (13.19) определяем модуль:

$$m = \sqrt{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_2(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{Fv}}{\psi_{bm} a_w [\sigma_F]}} Y_F, \quad (13.20)$$

где  $\psi_{bm} = b_w / m = 5 \dots 40$ .

Для достижения равной изгибной прочности зубьев колес необходимо обеспечить  $[\sigma_1] / Y_{F1} \approx [\sigma_{F2}] / Y_{F2}$ . В формулу (13.20) подставляем  $Y_F$  и  $[\sigma_F]$  того колеса, для которого меньше соотношение  $[\sigma_F] / Y_F$ .

Значение модуля нужно округлить до стандартного модуля для круглых колес и определить параметры зубчатых венцов. По формуле (12.19) надо провести проверочный расчет. При  $\sigma_F > [\sigma_F]$  необходимо изменить параметры некруглых колес  $a_w$ ,  $\psi_{bm}$ , материал для изготовления колес и провести перерасчет, обеспечивая выполнение условий  $\sigma_F \leq [\sigma_F]$ .



Из (13.21) передаточное отношение определяется зависимостью

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2 \sin \mu_2 \cos \beta_2}{r_1 \sin \mu_1 \cos \beta_1}, \quad (13.22)$$

где:  $\mu_k = \arctg \frac{r_k}{dr_k/d\psi_k}$  ( $k=1,2$ ) – угол, образуемый радиус-вектором делительной центроиды с положительным направлением касательной;  $\psi_k$  – угол поворота колеса.

Как видим, передаточное отношение винтовой передачи зависит не только от радиус-векторов, но и от величин углов наклона зубьев. Поэтому заданное переменное передаточное отношение можно получить, управляя соотношениями радиус-векторов делительных некруглых цилиндров и углов наклона винтовых линий зубьев.

При  $\beta_1 + \beta_2 = 90^\circ$

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{r_2 \sin \mu_2}{r_1 \sin \mu_1} \operatorname{tg} \beta_1. \quad (13.23)$$

Контакт боковых поверхностей зубьев теоретически происходит в точке. Практически вследствие возникновения значительных скольжений боковых поверхностей, при  $\beta_1 + \beta_2 \neq 90^\circ$ ,

$$v_{ck} = \frac{2\omega_1 a_w \sin \mu_1 \sin \beta_1}{1 + u_{12}(\varphi_1)} \quad (13.24)$$

и износа зубьев, а также деформации материалов колес, контакт происходит по небольшой площадке. В результате чего на рабочих поверхностях зубьев возникают высокие контактные напряжения. Поэтому винтовые некруглые цилиндрические зубчатые передачи целесообразно использовать при небольших нагрузках, непрерывном и обильном смазывании, в основном в приборостроении.

Когда  $\beta_1 = -\beta_2$ , угол скрещивания осей равен нулю, винтовая передача с некруглыми цилиндрическими колесами обращается в косозубую некруглую цилиндрическую зубчатую передачу.

### 13.5. Косозубая некруглая цилиндрическая зубчатая передача. Общие сведения



В косозубой передаче с некруглыми цилиндрическими колесами следует различать три шага (рис. 13.3) в нормальной –  $P_n$ , торцевой –  $P_t$  и осевой –  $P_a$  плоскостях. Шаги и модули связаны зависимостями

$$P_n = P_t \cos \beta, \quad m_n = m_t \cos \beta, \quad P_a = \pi m_n / \sin \beta. \quad (13.25)$$

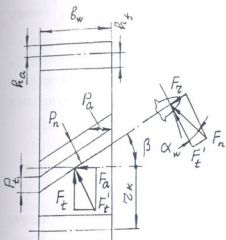


Рис. 13.3. Силы, действующие в зацеплении косозубой некруглой цилиндрической передачи

В косозубой некруглой цилиндрической зубчатой передаче в зацеплении одновременно находятся больше одной пары зубьев с различной длиной контактных линий. В плоскости зацепления линии контакта расположены наклонно к образующим основного некруглого цилиндра, благодаря чему возрастает, по сравнению с прямозубыми некруглыми цилиндрическими колесами, суммарная длина контактных линий. Коэффициент перекрытия определяется зависимостью

$$\varepsilon = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha + \psi_{bm} \sin \beta / \pi, \quad (13.26)$$

где:  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$  – коэффициенты перекрытия соответственно прямозубой и косозубой некруглой цилиндрической зубчатой передачи;  $\psi_{bm} = b_w / m_n$  – коэффициент ширины зубчатого колеса.

Для зубчатых передач с эллиптическими центроидами

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{z^2 \sin^2 \alpha_w + 4(z+1)}}{\cos \alpha_w} - z \operatorname{tg} \alpha_w + \psi_{bm} \sin \beta \right]. \quad (13.27)$$

Из уравнения (13.27) следует, что коэффициент перекрытия у косозубых некруглых цилиндрических зубчатых передач больше, чем у прямозубых некруглых цилиндрических зубчатых передач. При этом зубья нагружаются постепенно, по мере их входа в поле зацепления. Поэтому косозубые некруглые цилиндрические зубчатые передачи работают менее шумно.

Угол наклона зубьев должен быть принят таким, чтобы обеспечивать высокий коэффициент перекрытия и при этом не создавать больших осевых усилий. На основании этих соображений из третьего слагаемого уравнения (13.27) получим:

$$\beta_{\min} = \arcsin(\pi/\psi_{bm}) = 4^{\circ}30', \quad (13.28)$$

чему соответствует минимальное значение коэффициента  $\psi_{bm} = 5$ . Верхний предел угла наклона зубьев назначается из соображения ограничения осевого усилия. Принимаем  $\beta_{\max} = 10^{\circ}$ , чему соответствует  $\psi_{bm} = 18$ .

К преимуществам косозубой некруглой цилиндрической зубчатой передачи относится также то, что легко можно компенсировать несовпадение начал обкатывания при нарезании парных колес путем сдвига вдоль вала одного колеса передачи.

### 13.6. Силы, действующие в зацеплении косозубой некруглой цилиндрической передачи

В косозубой некруглой цилиндрической зубчатой передаче нормальная сила  $F_n$  направлена под углом  $\beta$  к торцу колеса. Раскладывая нормальную силу на составляющие, получим (рис. 13.3): окружную силу

$$F_t = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)] \cos \beta}{a_w u_{12}(\psi_1)}; \quad (13.29)$$

радиальную силу

$$F_r = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)] \operatorname{tg} \alpha_w}{a_w u_{12}(\psi_1)}; \quad (13.30)$$

и осевую силу

$$F_a = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)] \sin \beta}{a_w u_{12}(\psi_1)}. \quad (13.31)$$

### 13.7. Расчет на контактную прочность активных поверхностей косых зубьев некруглых цилиндрических колес

При расчете используем зависимость (13.6). Расчетная удельная нагрузка определяется уравнением

$$q = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 \pm u_{12}(\psi_1)] \cos \beta}{a_w u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w K_\varepsilon \varepsilon_\alpha b_w} K_{H\beta} K_{H\nu} K_{H\alpha}, \quad (13.32)$$

где  $K_{H\alpha}$  – коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями.

Используя связь между приведенными радиусами кривизны в нормальной и торцевой плоскостях  $\rho_n = \rho_t / \cos \beta$  и уравнение (13.9), для определения приведенной кривизны профилей косых зубьев получим:

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{[1 \pm u_{12}(\psi_1)]^2 \sin \mu_1 \cos \beta}{a_w u_{12}(\psi_1) \sin \alpha_w}. \quad (13.33)$$

Тогда формула для проверочного расчета принимает вид

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\varepsilon \times \sqrt[3]{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_3(\psi_1)]_{\max}}{a_w^3 \psi_{ba}}} K_{H\beta} K_{H\nu} K_{H\alpha} \leq [\sigma_H] \quad (13.34)$$

При проектировочном расчете из формулы (13.34) определяется межосевое расстояние:

$$a_w = K_a \sqrt[3]{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_3(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta}}{\psi_{ba} [\sigma_H]^2}}, \quad (13.35)$$

где:  $\Phi_3(\psi_1) = \frac{[1 + u_{12}(\varphi_1)]^3 \cos^2 \beta \sin \mu_1}{[u_{12}(\psi_1)]^2}$  – функция от угла поворота ведущего колеса;  $K_a = \sqrt[3]{(Z_H Z_M Z_\varepsilon)^2 K_{H\nu} K_{H\alpha}}$  – вспомога-



тельный коэффициент;  $\psi_{ba} = b_w/m = 0,2 \dots 0,5$  – коэффициент ширины колеса относительно межосевого расстояния.

Значение модуля надо округлить до большого значения стандартного  $a_w$  для круглых колес.

Нормальный модуль зацепления определяется зависимостью

$$m_n = \frac{S_k \cos \beta}{\pi z_k}, \quad (13.36)$$

где  $S_k$  ( $k=1,2$ ) – длина центроид некруглых колес;  $z_k$  – число зубьев колес.

Нормальный модуль должен выбираться из стандартного ряда модулей для круглых колес и определять параметры зубчатых венцов.

По формуле (13.34) надо провести проверочный расчет. Если условие  $\sigma_H \leq [\sigma_H]$  не обеспечивается, необходимо изменить параметры зацепления и провести перерасчет.

### 13.8. Расчет косых зубьев некруглых цилиндрических колес на прочность при изгибе

При расчете зубьев на изгиб используем известную зависимость

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b_w m_n} Y_F K_{F\beta} K_{Fv} F_{F\alpha} \leq [\sigma_F]. \quad (13.37)$$

Для проверочного расчета передачи получим:

$$\sigma_F = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_4(\psi_1)]_{\max}}{a_w b_w m_n} \times \\ \times Y_F K_{F\beta} K_{Fv} K_{F\alpha} \leq [\sigma_F], \quad (13.38)$$

где:  $\Phi_4(\psi_1) = [1 \pm u_{12}(\psi_1)] \cos \beta / u_{12}(\psi_1)$ ;  $Y_F$  – коэффициент формы зуба, можно назначать по приведенному числу зубьев;

$$z_{k,np,n} = \frac{z_{k,np,t}}{\cos^2 \beta}, \quad (k=1,2), \quad (13.39)$$

где:  $z_{k,np,t} = \frac{2r_{k,min,t}}{\cos \beta}$  – приведенное число зубьев  некруглых

косозубых колес в торцовой плоскости;  $r_{k,min,t}$  – минимальный радиус – вектор делительной центроиды некруглого цилиндрического колеса в торцовой плоскости.

При проектировочном расчете из (13.38) получим:

$$m_n = \sqrt[3]{\frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_4(\psi_1)]_{\max} K_{F\beta} K_{Fv}}{\psi_{bm} a_w [\sigma_H]}} Y_F. \quad (13.40)$$

Полученное значение  $m_n$  надо округлить до стандартного значения модуля для круглых колес и определить параметры зубчатых венцов. По формуле (13.38) надо провести проверочный расчет. Если условие  $\sigma_F \leq [\sigma_F]$  не обеспечивается, необходимо провести перерасчет.

### 13.9. Силы, действующие в зацеплении прямозубой некруглой конической передачи

При проектировании некруглой конической зубчатой передачи исходным является заданное  $u_{12}(\psi_1)$  эквивалентной некруглой цилиндрической зубчатой передачи (рис. 13.4). Эквивалентной некруглой цилиндрической зубчатой передачей назовем такую зубчатую передачу, размеры и форма зубьев которой практически идентичны размерам и форме зубьев некруглых конических зубчатых колес в сечениях, проведенных в середине длины зуба  $b_w$  перпендикулярно образующим.

Рассмотрим случай, когда межосевой угол  $\Sigma \neq 90^\circ$ . Радиус-векторы центроид эквивалентных некруглых цилиндрических колес определяются уравнениями

$$R_1 = R_m \frac{\sin \Sigma}{u_{12}(\psi_1) + \cos \Sigma}, \quad R_2 = R_m \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}. \quad (13.41)$$

Здесь  $R_m$  – среднее конусное расстояние;  $u_{12}(\psi_1)$  – передаточное отношение эквивалентной некруглой цилиндрической зубчатой передачи.

Для определения сил, действующих в зацеплении, рассмотрим зацепление некруглых конических колес при максимальном значении передаточного отношения. Допустим, что трение между зубьями отсутствует, тогда давление от одного зуба на другой передается по нормали к соприкасающимся профилям. С достаточной степенью точности это давление, распределенное по ширине зуба, можно заменить сосредоточенной силой, приложенной в середине длины зуба.

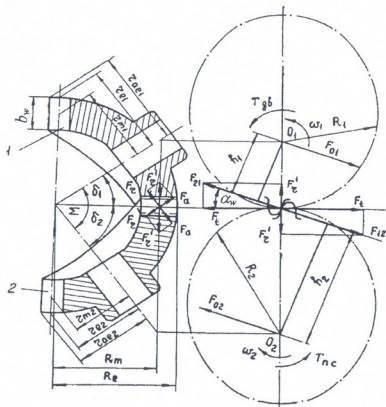


Рис. 13.4. Схема к определению сил, действующих в зацеплении прямозубых некруглых конических колес

Допустим, что на ведущее эквивалентное колесо действует постоянный движущий момент  $T_{дв}$ , нормальное давление  $F_{21}$  и реакция опоры  $F_{01}$ , а на ведомое эквивалентное колесо – момент сил полезного сопротивления  $T_{пс}$ , нормальное давление  $F_{12}$  и

реакция опоры  $F_{02}$ . Момент, действующий на ведомое эквивалентное некруглое цилиндрическое колесо, запишем в виде

$$T_2 = T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2. \quad (13.42)$$

Здесь  $I_{np} = 2E_2/\omega_2^2$  – момент инерции приведенных масс относительно оси вращения  $O_2$ ;  $E_2$  – кинетическая энергия ведомого колеса и приводимых им в движение звеньев механизма;  $\varepsilon_2$  – угловое ускорение ведомого колеса.

При составлении уравнения момента  $T_2$  пренебрегаем мощностью силы тяжести звеньев и не учитываем работу сил трения. Приведенные моменты инерции и угловую скорость ведущего колеса принимаем постоянными.

Рассмотрение условия равновесия ведомого эквивалентного некруглого цилиндрического колеса приводит к следующему выражению для нормального давления между зубьями:

$$F_{12} = \frac{T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2}{h_2}.$$

Плечо пары сил  $F_{12}$ ,  $F_{02}$  с учетом (13.41) определится из выражения

$$h_2 = (R_e - 0,5b_w) \frac{u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma} \cos \alpha_w. \quad (13.43)$$

Тогда нормальное давление

$$F_{12} = \frac{(T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]}{(R_e - 0,5b_w) u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma \cos \alpha_w}. \quad (13.44)$$

Разложим силу  $F_{12}$  на составляющие  $F_t$  и  $F_r'$ , лежащие в нормальной плоскости к образующей некруглого конического колеса. Сила  $F_t$ , перпендикулярная к плоскости осей зацепляющихся некруглых конических колес, являясь окружной силой, равна

$$F_t = \frac{(T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]}{(R_e - 0,5b_w) u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma}. \quad (13.45)$$

Сила  $F_r'$ , действующая в плоскости осей вращения конических колес, является радиальной силой эквивалентных некруглых цилиндрических колес и определяется из зависимости

$$F_r' = \frac{(T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]}{(R_e - 0,5b_w)u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma} \operatorname{tg} \alpha_w. \quad (13.46)$$

Разложим силу  $F_r'$  на радиальную  $F_r$  и осевую  $F_a$  составляющие:

$$F_r = \frac{(T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]^2 \operatorname{tg} \alpha_w}{(R_e - 0,5b_w)u_{12}(\psi_1) \sin \Sigma \sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}, \quad (13.47)$$

$$F_a = \frac{(T_{nc} + I_{np2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma] \operatorname{tg} \alpha_w}{(R_e - 0,5b_w) \sqrt{1 + u_{12}^2(\psi_1) + 2u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}}. \quad (13.48)$$

Уравнениями (13.45), (13.47) и (13.48) определяются искомые силы, действующие на зубья ведомого некруглого конического колеса. На зубья ведущего конического колеса действуют силы: окружная  $F_t = -|F_t|$ , радиальная  $F_r = -|F_r|$  и осевая  $F_a = -|F_r|$ .

Определим силы, действующие на ведомое колесо, для эллиптических конических колес со средним передаточным отношением, равным единице. При этом примем, что функция передаточного отношения эллиптических конических колес такая же, как и для эквивалентных эллиптических цилиндрических колес

$$u_{12}(\psi_1) = \frac{1 - 2e \cos \psi_1 + e^2}{1 - e^2}. \quad (13.49)$$

Угловое ускорение ведомого эквивалентного некруглого цилиндрического колеса

$$\varepsilon_2 = -2\omega_1^2 e(1 - e^2) \frac{\sin \psi_1}{(1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^2}. \quad (13.50)$$

Принимая во внимание (13.49) и (13.50), определим силы, действующие в зацеплении эллиптических конических колес:

окружная сила

$$F_t = \frac{[T_{nc}(1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^2 - 2I_{np2} \omega_1^2 e(1 - e^2) \times \sin \psi_1][1 - e^2 + (1 - 2e \cos \psi_1 + e^2) \cos \Sigma]}{(R_e - 0,5b_w)(1 - 2e \cos \psi_1 + e^2)^3 \sin \Sigma}; \quad (13.51)$$

радиальная сила



$$F_r = \frac{[T_{nc}(1-2e\cos\psi_1+e^2)^2 - 2I_{np2}\omega_1^2 e(1-e^2) \times \sin\psi_1][1-e^2+(1-2e\cos\psi_1+e^2)\cos\Sigma]^2 \operatorname{tg}\alpha_w}{(R_e-0,5b_w)(1-2e\cos\psi_1+e^2)^3 \times \sqrt{(1-e^2)^2+(1-2e\cos\psi_1+e^2)^2+2\cos\Sigma(1-2e\cos\psi_1+e^2) \times (1-e^2)}}; \quad (13.52)$$

осевая сила

$$F_a = \frac{[T_{nc}(1-2e\cos\psi_1+e^2)^2 - 2I_{np2}\omega_1^2 e(1-e^2) \times \sin\psi_1][1-e^2+(1-2e\cos\psi_1+e^2)\cos\Sigma] \operatorname{tg}\alpha_w}{(R_e-0,5b_w)(1-2e\cos\psi_1+e^2)^2 \times \sqrt{(1-e^2)^2+(1-2e\cos\psi_1+e^2)^2+2\cos\Sigma(1-2e\cos\psi_1+e^2) \times (1-e^2)}}. \quad (13.53)$$

По формулам (13.51), (13.52) и (13.53) можно определить аналитически максимальные значения сил, действующих в зацеплении. Однако при этом получаются громоздкие выражения. Поэтому более целесообразно, в каждом конкретном случае, по параметрам, характеризующим передачу, представить зависимости (13.51), (13.52) и (13.53) в виде таблицы или, для наглядности, в виде графика. В качестве примера определим силы, действующие в зацеплении эллиптических конических колес по следующим параметрам передачи:  $T_{nc} = 500$  кгс·см;  $\Sigma = 60^\circ$ ;  $I_{np,2} = 1$ ;  $\omega_1 = 1$ ;  $e = 0,2$ ;  $R_e = 12$  см и  $b_w = 1,2$  см. Результаты вычислений приведены в табл. 13.1, а график представлен на рис. 13.5.

Таблица 13.1

Силы, действующие в зацеплении

$\varphi_1^0$	$u_{12}(\psi_1)$	$F_t$ , кгс	$F_r$ , кгс	$F_a$ , кгс
1	2	3	4	5
0	1,4999	101,2923	33,8345	14,6592
10	1,4859	100,5457	33,5474	14,6396
20	1,4455	98,4742	32,7467	14,5880
30	1,3841	95,3465	31,5343	14,5064

1	2	3	4	5
40	1,3086	91,5169	30,0454	14,3979
50	1,2262	87,3432	28,4172	14,2672
60	1,1428	83,1259	26,7665	14,1194
70	1,0629	79,0847	25,1795	13,9608
80	0,9891	75,3587	23,7121	13,7973
90	0,9231	72,0223	22,3951	13,6350
100	0,8654	69,1041	21,2410	13,4791
110	0,8158	66,6038	20,2509	13,3339
120	0,7742	64,5051	19,4191	13,2031
130	0,7401	62,7846	18,7369	13,0894
140	0,7130	61,4173	18,1946	12,9945
150	0,6921	60,3802	17,7832	12,9200
160	0,6780	59,6547	17,4953	12,8665
170	0,6695	59,2265	17,3253	12,8348
180	0,6667	59,0872	17,2697	12,8249

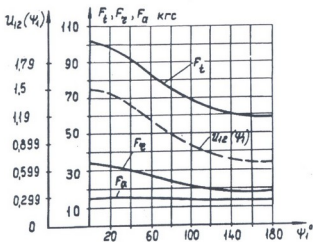


Рис. 13.5. График сил, действующих в зацеплении прямозубых эллиптических конических колес

Из табл. 13.1 (рис. 13.5) видно, что максимальному значению  $u_{12}(\psi_1)$  соответствуют наибольшие значения сил, действующих на зубья эллиптического конического колеса. По этим силам и следует вести прочностной расчет передачи, расчет валов и подбор подшипников.

### 13.10. Расчет активных поверхностей прямых зубьев некруглых конических колес на прочность по контактным напряжениям

При расчете на контактную прочность используем формулу (13.6). Расчетная удельная нормальная нагрузка имеет вид

$$q = \frac{(T_{nc} + I_{np.2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma] K}{b_w (R_e - 0,5b_w) u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w \sin \Sigma}, \quad (13.54)$$

где  $K = K_{H\beta} K_{H\gamma} = 1,2 \dots 1,7$  – коэффициент нагрузки.

Приведенный радиус кривизны профилей конических колес, определяемой с помощью эквивалентной некруглой цилиндрической зубчатой передачи, имеет вид

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma][1 + u_{12}(\psi_1)] \sin \mu_1}{(R_e - 0,5b_w) u_{12}(\psi_1) \sin \alpha_w \sin \Sigma}, \quad (13.55)$$

где  $\alpha_w$  – угол зацепления в полюсе передачи.

Подставляя (13.54) и (13.55) в формулу (13.6), получим зависимость для проверочного расчета в виде

$$\sigma_H = \frac{Z_H Z_M}{1 - 0,5\psi_R} \times \sqrt{10^3 \frac{(T_{nc} + I_{np.2} \cdot \varepsilon_2)[\Phi_5(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{H\gamma}}{\psi_R R_e^3}} \leq [\sigma_H], \quad (13.56)$$

где:  $\psi_R = b/R \leq 0,3$  – коэффициент ширины зуба,  $Z_H = \sqrt{1/\sin 2\alpha_w}$ ;

$$Z_M = \sqrt{E_{np}/2\pi(1-\mu^2)};$$

$$\Phi_5(\psi_1) = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma]^2 [1 + u_{12}(\psi_1)] \sin \mu_1}{u_{12}^2(\psi_1) \sin^2 \Sigma} \text{ – функция от угла}$$

поворота ведущего некруглого конического колеса;  $u_{12}(\psi_1)$  – функция передаточного отношения эквивалентных некруглых цилиндрических колес.

Для проектного расчета на основании (13.56) внешнее конусное расстояние определится зависимостью

$$R_e = \sqrt[3]{(Z_H Z_M)^2 \sqrt{10^3 (T_{nc} + I_{np.2} \cdot \varepsilon_2)[\Phi_5(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{H\gamma}}}{\psi_R (1 - 0,5\psi_R)^2 [\sigma_H]^2}. \quad (13.57)$$



Внешний модуль определяется зависимостью

$$m_{te} = \frac{R_e \sin(\varphi_n/2)}{1,55079},$$

где  $\varphi_n$  – угловой шаг производящего колеса:

$$\varphi_n = \frac{\int_0^{\varphi_1} f(\varphi_1) d\varphi_1}{z_k},$$

$f(\varphi_1) = \sin \theta_1$  – табличная функция от угла  $\varphi_1$ , вычисляемая с помощью уравнений (2.23), (2.24) и (2.26) ( $k = 1, 2$ ).

Модуль  $m_{te}$  надо округлить до стандартного модуля для круглых колес. При известных  $R_e$  и  $\delta_k$  определяем радиус  $r_{ek}(\psi_k)$  внешнего начального некруглого конуса и внешний радиус вершин зубьев  $r_{aek}(\psi_k)$ :

$$\begin{aligned} r_{ek}(\psi_1) &= R_e \sin \delta_k, \\ r_{aek}(\psi_1) &= r_{ek}(\psi_1) + m_{te} \cos \delta_k, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (13.59)$$

и другие параметры зубчатого венца колес.

При  $\Sigma = 90^\circ$  формулы (13.54) и (13.55) принимают вид:

$$q = \frac{(T_{nc} + I_{np.2} \cdot \varepsilon_2)[1 + u_{12}(\psi_1)]K}{b_w(R_e - 0,5b_w)u_{12}(\psi_1)\cos\alpha_w}; \quad (13.60)$$

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1)]^2 \sin \mu_1}{b_w(R_e - 0,5b_w)u_{12}(\psi_1)\sin\alpha_w}, \quad (13.61)$$

$$\Phi_5(\psi_1) = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1)]^3 \sin \mu_1}{u_{12}^2(\psi_1)}. \quad (13.62)$$

По формуле (13.56) надо провести проверочный расчет, обеспечивая выполнение условия  $\sigma_H \leq [\sigma_H]$ . При  $\sigma_H > [\sigma_H]$  необходимо провести перерасчет.

### 13.11. Расчет прямых зубьев некруглых конических колес по излому

При проведении проверочного расчета зубьев некруглых конических колес по излому используем зависимость

$$\sigma_F = Y_F \frac{10^3 (T_{nc} + I_{np.2} \varepsilon_2) [\Phi_6(\psi_1)]_{\max} K_{F\beta} K_{Fv}}{(R_e - 0,5b_w) b_w m_{tm}} \leq [\sigma_F] \quad (13.63)$$

При проектировочном расчете из (13.63) определяем внешнее конусное расстояние:

$$R_e = \sqrt{\frac{10^3 (T_{nc} + I_{np.2} \varepsilon_2) [\Phi_6(\psi_1)]_{\max} K_{F\beta} K_{Fv}}{\psi_R (1 - 0,5\psi_R) m_{tm} [\sigma_F]}} Y_F, \quad (13.64)$$

где  $\Phi_6(\psi_1) = \frac{1 + u_{12}(\psi_1) \cos \Sigma}{u_{12} \sin \Sigma}$  — функция от угла поворота ведущего некруглого конического колеса.

Коэффициент формы зуба  $Y_F$  надо подбирать по минимальному радиус-вектору центроиды эквивалентного колеса, соответствующему радиусу  $r_{mk.min}$  некруглого конического колеса при  $\delta_{k.min}$  ( $k = 1, 2$ ):

$$z_{k,np} = z_k / \cos \delta_{k.min} \quad (13.65)$$

где  $z_k$  — число зубьев круглого конического колеса, делительный радиус которого равен минимальному радиус-вектору некруглого конического колеса при угле  $\delta_{k.min}$  ( $k = 1, 2$ ):

$$z_k = 2\pi r_{m.k} / m_{tm}. \quad (13.66)$$

Внешний модуль определяется по формуле (13.58). Модуль  $m_{te}$  надо округлить до стандартного значения. При известных  $R_e$  и  $\delta_k$  по формуле (13.59) определяются  $r_{ek}(\psi_1)$ ,  $r_{aek}(\psi_1)$  и другие геометрические параметры зубчатого венца колес.

При  $\Sigma = 90^\circ$  функция  $\Phi_6(\psi_1)$  определяется зависимостью

$$\Phi_6(\psi_1) = \frac{1 + u_{12}(\psi_1)}{u_{12}(\psi_1)}. \quad (13.67)$$

По формуле (13.63) надо провести проверочный расчет, обеспечивая выполнение условия  $\sigma_F \leq [\sigma_F]$ . При  $\sigma_F > [\sigma_F]$  необходимо провести перерасчет.

### 13.12. Силы, действующие в зацеплении некруглой червячной передачи

В червячной передаче (рис. 13.6) в полюсе зацепления действует нормальная сила

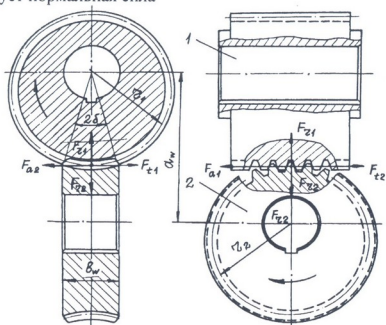


Рис. 13.6. Силы, действующие в зацеплении червячной передачи: 1, 2 – эксцентричные червяк и червячное колесо

$$F_n = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda]}{a_w u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w \operatorname{tg} \lambda} \quad (13.68)$$

Раскладывая нормальную силу по трем взаимно перпендикулярным направлениям на составляющие, получим окружную силу  $F_{t1}$  некруглого червяка, которая численно равна осевой силе  $F_{a2}$  некруглого червячного колеса  $F_{t1} = -|F_{a2}| = F_n \sin \lambda / \cos \alpha_w$ ; осевую силу  $F_{a1}$  некруглого червяка, которая численно равна окружной силе  $F_{t2}$  некруглого червячного колеса  $F_{a1} = -|F_{t2}| = F_n \cos \lambda / \cos \alpha_w$ , и радиальную силу  $F_{r1}$  некруглого червяка,

которая численно равна радиальной силе  $F_{r2}$  червячного колеса  $F_{r1} = -|F_{r2}| = F_n \sin \alpha_w$ .

### 13.13. Расчет на контактную прочность активных поверхностей зубьев некруглого червячного колеса

Для расчета червячной передачи с некруглыми колесами используем формулу (13.6). Расчетная удельная нагрузка  $q = F_n/l_\Sigma$ , где:  $F_n$  – нормальная сила к поверхности зуба некруглого червячного колеса и витка некруглого червяка в полюсе зацепления;  $l_\Sigma$  – переменная суммарная длина контактных линий в зацеплении червячной передачи:

$$l_{\Sigma \min} = \left[ \frac{S_v(2\delta)_{\min}}{\cos \lambda 360^\circ} \right] \xi \varepsilon_\alpha, \quad (13.69)$$

где:  $S_v = \int_0^{2\pi} \frac{a_w}{[1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda] \sin \mu_1} d\psi_1$  – полная длина делительной centroиды некруглого червяка;  $\mu_1$  – угол между радиус-вектором и касательной к делительной centroиде червяка;  $\lambda = \operatorname{arctg}(\pi m z_1 / S_v)$  – угол подъема винтовой линии на делительном некруглом цилиндре червяка (рис. 13.7);  $m$  – осевой модуль некруглого червяка;  $z_1$  – число заходов (зубьев) некруглого червяка;  $\xi$  – коэффициент, учитывающий уменьшение длины контактных линий из-за контакта по неполной дуге обхвата  $2\delta$  и его переменности. Угол  $2\delta$  имеет минимальное значение при

$$[u_{12}(\psi_1)]_{\min} = \frac{z_{2\min}}{r_{1\max} \operatorname{tg} \lambda}. \quad (13.70)$$

Поэтому для каждой проектируемой передачи нужно определить  $2\delta_{\min}$  и рассчитать  $l_{\Sigma \min}$ . Для предварительного расчета угла  $2\delta_{\min}$  радиус-вектор  $r_{1\max}$  можно принять постоянным. Исходя из такого допущения,  $2\delta_{\min} = \arcsin(b_w / r_{1\max})$ , где  $b_w$  – ширина некруглого червячного колеса. Принимая  $2\delta_{\min} \approx 60^\circ$  и по

аналогии с червячной передачей с  $u_{12}(\psi_1) = const$  коэффициенты  $\xi \approx 0,7$ ;  $\varepsilon_\alpha \approx 2$ , получим  $I_{\Sigma min} \approx 0,4S_v / \cos \lambda$ .

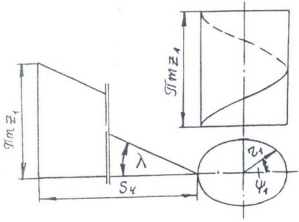


Рис. 13.7. Схема образования винтовых линий на делительном некруглом цилиндре

Расчетную удельную нагрузку запишем в виде

$$q = \frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda] \cos \lambda}{0,4a_w^2 u_{12}(\psi_1) \cos \alpha_w \operatorname{tg} \lambda S_v} \quad (13.71)$$

Учитывая, что радиус кривизны профиля червяка в нормальном сечении  $\rho_v = \infty$ , получим следующее соотношение для приведенной кривизны:

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda] \cos \lambda \sin \mu_1}{a_w u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda \sin \alpha_w} \quad (13.72)$$

Принимая:  $a_w = 20^\circ$ ;  $E_1 = 2,15 \cdot 10^5$  МПа (для стали);  $E_2 = 0,9 \cdot 10^5$  МПа (для бронзы и чугуна);  $\mu = 0,3$  и подставляя в зависимость (13.6) значения (13.71) и (13.72), для проверочного расчета получим:

$$\sigma_H \cong 169 \sqrt{\frac{\left( T_{nc} + I_{np2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_7(\psi_1)]_{\max} K_{H\beta} K_{Hv}}{a_w^3 S_v}} \leq [\sigma_H] \quad (13.73)$$

Для проектного расчета, когда требуется определить минимальное по условиям контактных напряжений межосевое расстояние, формула (13.73) принимает вид

$$a_w \cong 31 \sqrt[3]{\frac{\left( T_{nc} + I_{np,2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_7(\psi_1)]_{\max} K_{F\beta} K_{Fv}}{S_v [\sigma_F]}}, \quad (13.74)$$

где  $\Phi_7(\psi_1) = \frac{\{[1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda] \cos \lambda\}^2 \sin \mu_1}{u_{12}^2(\psi_1) \operatorname{tg}^2 \lambda}$  — функция от угла поворота червяка.

Полученное значение  $a_w$  надо округлить до ближайшего большого значения стандартного межосевого расстояния для червячной передачи с  $u_{12}(\psi_1) = \operatorname{const}$ .

Осевой модуль некруглого червяка определяется из того положения, что на полную длину делительной центроиды червяка разместилось целое число зубьев червяка:

$$m = \frac{S_v}{\pi z_1}. \quad (13.75)$$

Полученное значение модуля надо округлить до ближайшего стандартного модуля для червячной передачи с  $u_{12}(\psi_1) = \operatorname{const}$ .

По исходной формуле (13.73) необходимо провести проверочный расчет. При  $\sigma_H > [\sigma_H]$  нужно изменить геометрические параметры некруглых колес, материал для изготовления червячного колеса и провести перерасчет, обеспечивая выполнение условия  $\sigma_H \leq [\sigma_H]$ .

### 13.14. Расчет зубьев некруглого червячного колеса на усталость при изгибе

По напряжениям изгиба рассчитываются только зубья некруглого червячного колеса, так как витки некруглого червяка по форме профиля и материалу значительно прочнее зубьев некруглого червячного колеса.

Для проверочного расчета используем зависимость

$$\sigma_F = \frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np,2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_8(\psi_1)]_{\max}}{a_w b_w m_n} Y_{F2} K_{H\beta} K_{Hv} \leq \leq [\sigma_H], \quad (13.76)$$

где:  $\Phi_8(\psi_1) = \frac{[1 + u_{12}(\psi_1) \operatorname{tg} \lambda] \cos \lambda}{u_{12}(\psi_1) \cos^2 \alpha_w \operatorname{tg} \lambda}$  – функция от угла поворота червяка;  $m_n = m \cos \lambda$  – модуль зацепления в нормальном сечении.

Коэффициент формы зуба  $Y_{F2}$  можно назначить по рекомендациям для круглых колес, по приведенному числу зубьев косозубых некруглых цилиндрических колес по формуле (13.39).

Для проектного расчета открытой некруглой червячной передачи из формулы (13.76) определяем нормальный модуль:

$$m_n = \sqrt{\frac{10^3 \left( T_{nc} + I_{np,2} \varepsilon_2 + \frac{dI_{np2}}{d\psi_2} \frac{\omega_2^2}{2} \right) [\Phi_8(\psi_1)]_{\max}}{a_w \psi_{bm} [\sigma_F]}} Y_{F2} K_{H\beta} K_{Hv}. \quad (13.77)$$

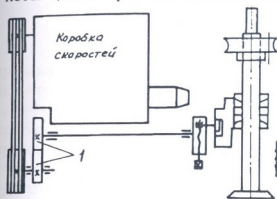
Определяем осевой модуль  $m = m_n / \cos \beta$  и округляем до стандартного значения. По стандартному осевому модулю определяем геометрические параметры венцов некруглого червяка и червячного колеса. По формуле (13.76) надо провести проверочный расчет. При  $\sigma_F > [\sigma_F]$  необходимо изменить параметры некруглого червяка и некруглого червячного колеса, материал для изготовления червячного колеса, значения межосевого расстояния и коэффициента  $\psi_{bm}$ ; надо провести перерасчет, обеспечивая выполнение условия  $\sigma_F \leq [\sigma_F]$ .

# ГЛАВА 14. ПРИМЕНЕНИЕ НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС



Рассмотрим некоторые примеры использования некруглых зубчатых колес.

В зубодолбежном станке некруглые колеса 1 применяются в приводе кривошипного механизма шпинделя (рис. 14.1). Это дает возможность обратный ход долбяка осуществить со скоростью в 2...2,5 раза быстрее, чем рабочий ход, что сокращает длительность цикла обработки одной детали на 30% [3]. Одновременно с



этим некруглые колеса обеспечивают равномерно изменяющуюся скорость резания, благодаря чему увеличивается стойкость долбяка, в зависимости от материала нарезаемых колес, на 10...40%. Фирма Fellows для этой цели применяет косозубые некруглые колеса (рис. 14.2).

Рис. 14.1. Схема привода шпинделя

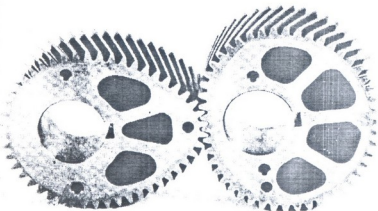


Рис. 14.2. Косозубые некруглые цилиндрические колеса

В зубозакругляющем станке модели 5А580 в цепи подачи оба элементарных движения должны иметь переменную скорость [169]. Для этого во внутренней цепи между салазками суппорта фрезы и



столом станка располагаются кулачок и овалы зубчатые колеса (рис. 14.3), которые превращают равномерное движение электродвигателя в неравномерные элементарные движения подачи фрезы и вращения поворота стола.

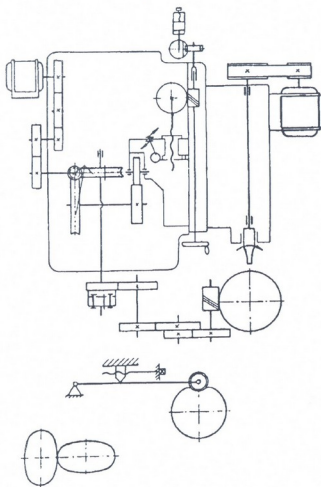


Рис. 43.3. Кинематическая схема зубозакругляющего станка

При нарезании колес с зубьями несимметричного профиля, в частности, храповых колес часов, в приводе зубофрезерного станка применяются некруглые колеса, обеспечивающие неравномерность вращения цепи обката [194].

В конструкции передачи питательного аппарата [184], совершающего прерывистое ускоренное движение на протяжении  $1/6$  оборота ведущего вала, на валу барабана 1 (рис. 14.4) закреплен

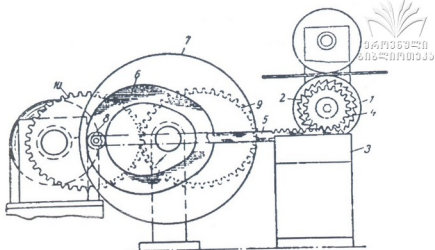


Рис. 14.4. Схема механизма питательного аппарата

храповик 2; собачка храповика установлена на станине 3. На этом же валу свободно установлено малое храповое колесо (оно скрыто за зубчатым колесом 4), у которого зубья имеют направление, противоположное направлению зубьев храповика 2; собачка этого храповика закреплена шарнирно на храповике 2. Малое храповое колесо крепится на колесо 4, которое входит в зацепление с зубчатой рейкой 5, совершающей возвратно-поступательное движение от кулачка, выполненного в виде профилированной канавки 6 в диске 7. В канавку 6 помещен ролик 8 рейки 5. Описанная система храповиков и собачек позволяет получить рабочий ход барабана 1 только при ходе рейки в одном направлении. Для увеличения скорости рабочего хода, диск 7 с канавкой 6 приводится в неравномерное вращение от эллиптических колес 9, 10. Ведомое колесо закреплено на одном валу с диском 7, а ведущее колесо 10 – непосредственно на валу двигателя.

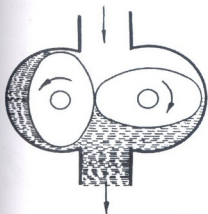


Рис. 14.5. Схема расходомера жидкости

В насосах и расходомерах жидкости используются овальные колеса с большой длиной зуба (рис. 14.5). При одних и тех же габаритных размерах и угловой скорости

такой насос значительно производительнее стандартного шестеренчатого. Объясняется это тем, что поток жидкости, проходящий за один оборот, при применении овальных колес гораздо больше, чем тот, который может пройти через пространство между зубьями шестеренчатого насоса. Кроме того, так как зубья не принимают участия в транспортировке жидкости, они могут быть малых размеров [69,75].

Эллиптические колеса применяются английской фирмой Fuller Electric Ltd. в коробке скоростей (рис. 14.6) [195].

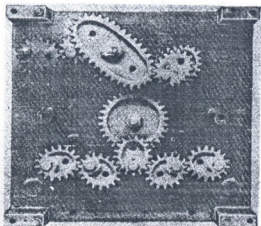


Рис. 14.6. Коробка скоростей

онная нагрузка. Для компенсации колебаний нагрузки введен маховик 10, который закреплен на валу 11 и через некруглое колесо 3 соединен с ведущим колесом 1. При этом момент инерции масс, связанных с колесом 3, равен моменту инерции масс, связанных с колесом 2. Центроиды некруглых колес рассчитаны из условия постоянства суммарной кинетической энергии всей системы,

В приводе барабанов ножиц для резки листового материала [164] от ведущего некруглого колеса 1 (рис. 14.7) через некруглое колесо 2, вал 4, муфту 5 и круглые цилиндрические колеса 6 вращательное движение с переменной угловой скоростью передается барабанам 7, на которых закреплены ножи 8. Материал к барабанам 7 подается роликами 9. В приводе развивается периодически изменяющаяся инерци-

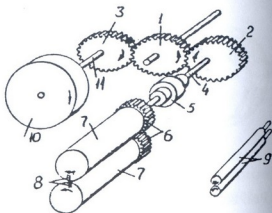


Рис. 14.7. Схема привода барабанов ножиц для резки листового материала

включая маховик. Резка материала на разные длины осуществляется путем регулирования числа оборотов барабанов с изменением фазового угла установки колес относительно барабанов.

Фирмой «Робертсон» в приводе барабанов летучих ножниц для резки кровельного железа некруглые колеса выполнены в виде эллиптических колес (рис. 14.8), работающих при окружных скоростях 30 м/мин [170].

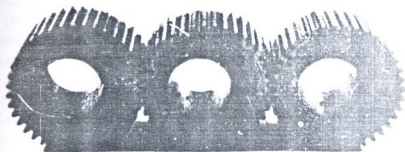


Рис. 14.8. Эллиптические зубчатые колеса

В двигателе внутреннего сгорания ротационного типа (рис. 14.9) секторы 1 и 2 получают вращательное движение с переменной угловой скоростью от овальных колес 3, 4, 5 и 6. Зацепление колес осуществлено таким образом, что с максимальным радиусом колеса 3 сопряжен минимальный радиус колеса 4, а с минимальным радиуса колеса 5 – максимальный радиус колеса 6. Вращаясь с переменной скоростью, секторы 1 и 2 создают камеры сжатия 7 и расширения 8 с переменными объемами. В камеру сжатия ввинчена свечка 9. Смесь горючего подается через окно 10, а отработанные газы выходят по трубе 11. Один оборот вала обеспечивает четыре такта, поэтому двигатель с некруглыми колесами эквивалентен восьмицилиндровому поршневому двигателю [180].

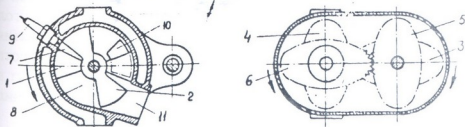
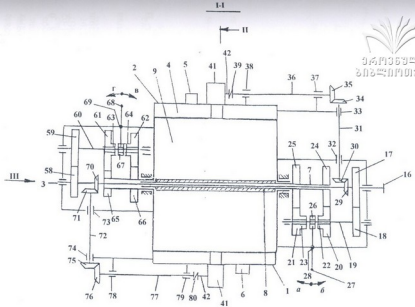


Рис. 14.9. Схема двигателя внутреннего сгорания

В начале работы ротационного двигателя внутреннего сгорания (рис. 14.10, 14.11, 14.12, 14.13) [150] всасывающие рабочей смеси клапаны 40 находятся в открытом положении, рычаги 27, 68 находятся в положениях а, в. Кулачки муфт 26, 67 находятся в зацеплении с кулачками полумуфт 22, 63. От стартера вала 16 сообщают вращательное движение. Вращательное движение вала 16 с помощью зацепления зубьев некруглых колес: 17, 18; 58, 59; валов 19, 60, шлицевого соединения, зацепления кулачков муфт 26, 67 и полумуфт 22, 63, зацепления зубьев колес: 20, 24; 61, 65 передается секторам 8, 9, которые совершают вращательное движение с переменной скоростью. При этом секторы 8, 9 создают камеры сжатия 11, расширения 12 с переменными объемами. Вращательное движение вала 16 с помощью конических колес: 29, 30; вала 31, конических колес 34, 35, вала 36, муфты 39, вала 42 передается механизму 41 открывания – закрывания всасывающего клапана 40. С помощью конических колес 70, 71, вала 72, конических колес 75, 76, вала 77, муфты 80, вала 42, вращательное движение передается механизму 41 открывания – закрывания всасывающего клапана 41. От валов 42, с помощью шпонок 45, вращательное движение передается некруглым колесам 46. При зацеплении зубьев некруглых колес 46, расположенных вдоль максимальных радиусов некруглых колес 46, с зубьями круглых шестерен 47, пружины 53 находятся в жатом положении. С помощью осей 48, серег 49, толкатели 50, пружины 53, находятся в сжатом положении. В камеры рабочей смеси 10, через всасывающие клапаны 40 поступает рабочая смесь. При повороте некруглых колес 46 от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  зубья некруглых колес 46, расположенные вдоль минимальных радиусов колес 46, находятся в зацеплении с зубьями круглых шестерен 47. Пружины 53 постепенно растягиваются, всасывающие рабочую смесь клапаны 40 закрываются. Прекращается подача рабочей смеси в камеры 10. При повороте секторов 8, 9 на определенный угол рабочая смесь сжимается. С помощью свечей 15 в камеры сжатия 11 подается искра, рабочая смесь взрывается. После поворота секторов 8, 9 на определенный угол отработавшие газы выходят в атмосферу по трубам 13, 14. Ротационный двигатель выполнил рабочие циклы.

По мере изменения профиля дороги рычаги 27, 68 переводят:



Րիս. 14.10. Րոտացիոնային շարժիչի ներքին այրման

503

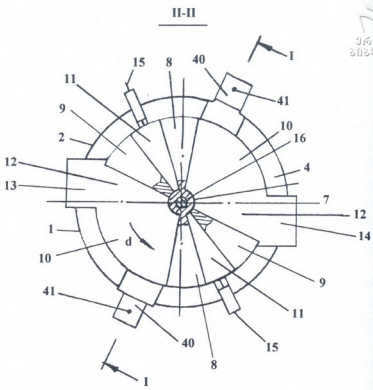


Рис. 14.11. Ротационный двигатель внутреннего сгорания

1. рычаг 27 – в положение б, а рычаг 68 – в положение г. В зацеплении находятся зубья колес: 21-25; 62-66;
2. рычаг 27 – в положение а, а рычаг 68 оставляют в положении г. В зацеплении находятся зубья колес: 20-24; 62-66;
3. рычаг 27 – в положение б, а рычаг 68 оставляют в положении в. В зацеплении находятся зубья колес: 21-25; 61-65.

Колеса: 20-24, 61-65; 21-25; 62-66; 20-24, 62-66; 21-25, 61-65 имеют разные передаточные отношения, поэтому секторы 8, 9 создают разные объемы камер 10, 11.

В зависимости от коэффициентов деформации некруглых колес: 17, 18; 58, 59 и передаточных отношений круглых колес ротационный двигатель, за один оборот ведущего вала, одновременно выполнит разное количество рабочих циклов.

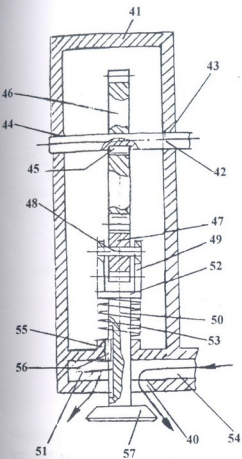


Рис. 14.12. Механизм открывания-закрывания клапанов

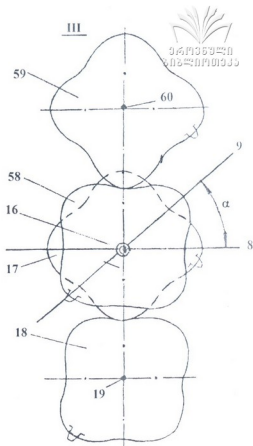


Рис. 14.13. Зацепление некруглых колес

В начале работы двигателя внутреннего сгорания с постоянным объемом камеры сжатия, без коленчатого вала и шатуна (рис. 14.14) [148], поршень 1 расположен в верхней мертвой точке (ВМТ) цилиндра 2, пружина 7 находится в сжатом положении. От стартера валу 14, маховику и некруглому колесу 11 (12 или 13) сообщают вращательное движение по стрелке А. С помощью зацепления зубьев некруглого колеса 11(12, 13) и шестерни 10, шестерня 10 совершает вращательное движение с переменной скоростью. По мере уменьшения радиуса  $R$  колеса 11 (12, 13), пружина 7, растягиваясь, обеспечивает постоянное зацепление зубьев колеса 11 (12, 13) и шестерни 10. С помощью оси 9, перегородки 5, рычага 4, оси 3 поршень 1 из ВМТ с переменной ско-



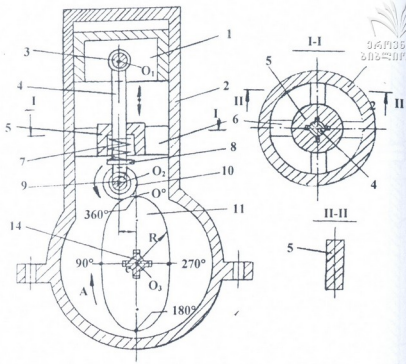


Рис. 14.14. Двигатель внутреннего сгорания

ростью перемещается в нижнюю мертвую точку (НМТ). Одновременно с началом перемещения поршня 2 из ВМТ открывается всасывающий рабочий смесь клапан. Когда некруглое колесо 11 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (колесо 12 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $60^\circ$ , колесо 13 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $45^\circ$ ) поршень 1 расположится в НМТ. Цилиндр 2 заполнится рабочей смесью.

Используя некруглые колеса 11 (12, 13) с разными максимальными, минимальными радиусами можно получить разные объемы камеры сжатия двигателя внутреннего сгорания.

Одновременно с заполнением цилиндра 2 рабочей смесью закрывается всасывающий клапан. Когда некруглое колесо 11 выполнит вращательное движение от  $90^\circ$  до  $180^\circ$  (колесо 12 выполнит вращательное движение от  $60^\circ$  до  $120^\circ$ , колесо 13 выполнит вращательное движение от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ ) с помощью зацепления

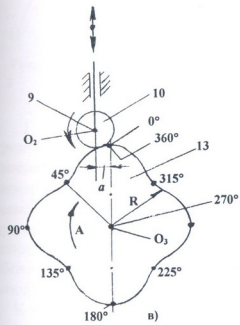
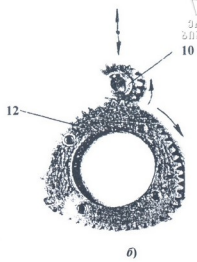
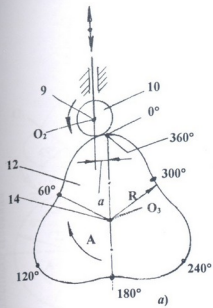


Рис. 14.15. Двигатель внутреннего сгорания

зубьев колес: 11, 10 (12, 10; 13, 10), оси 9, рычага 1, оси 3 поршень 1 с переменной скоростью перемещается в ВМТ. Рабочая смесь сжимается. С помощью свечи в камеру сжатия подается искра. Рабочая смесь взрывается. Поршень 1 с ВМТ перемещается в НМТ совершает рабочий ход с переменной линейной скоростью. Некруглое колесо 11 совершает вращательное движение от 180° до 270° (некруглое колесо 12 совершает вращательное движение от 120° до 180°, некруглое колесо 13 совершает вращательное движение от 90° до 135°). Одновременно с перемещением поршня 1 с НМТ в ВМТ открывается выпускной клапан. Колесо 11 (12, 13) совершает вращательное движение с

перемещением поршня 1 с НМТ в ВМТ открывается выпускной клапан. Колесо 11 (12, 13) совершает вращательное движение с

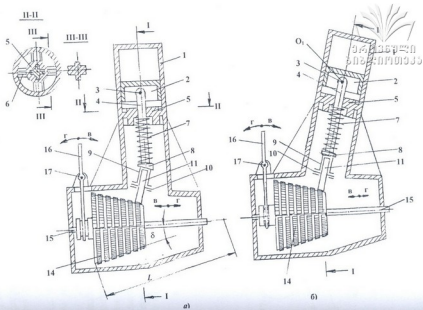


Рис. 14.16, а, б. Двигатель внутреннего сгорания

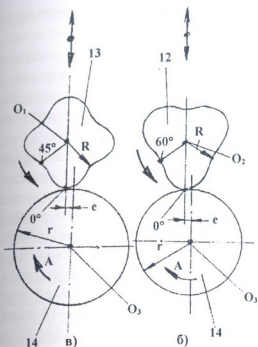
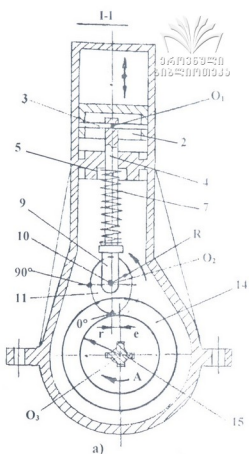


Рис. 14.17, а, б, в. Двигатель внутреннего сгорания



переменной скоростью. Колесо 11 совершает вращательное движение от  $270^\circ$  до  $360^\circ$ , (колесо 12 совершает вращательное движение от  $180^\circ$  до  $240^\circ$ , колесо 13 совершает вращательное движение от  $135^\circ$  до  $180^\circ$ ). Поршень 1 с НМТ цилиндра 1, с переменной линейной скоростью, перемещается в ВМТ, из цилиндра 2 выходят отработавшие газы. ДВС выполнил один рабочий цикл. Перемещения поршня 1 в мертвых точках выполняются за счет кинетической энергии маховика.

Когда в ДВС используются некруглые колеса с разными коэффициентами деформации центроид за один оборот вала 14 выполняется разное количество рабочих циклов. При коэффициенте деформации центроид:  $n=2$  (рис. 14.14) выполняется один рабочий цикл;  $n=3$  (рис. 14.15, а, б) выполняется полтора рабочего цикла;  $n=4$  (рис. 14.15, в) выполняется два рабочего цикла и т.д. В многоцилиндровых ДВС на вал 14 закрепляют

некруглые колеса 11 (12, 13), количество которых соответствует количеству цилиндров.

Благодаря применению некруглых колес возможно изменить соотношение времени рабочего и холостого ходов поршня 1. Центроиды некруглых колес 11 (12, 13) можно рассчитать так, чтобы перемещение поршня 1 с ВМТ в НМТ и обратно выполнялось с разными скоростями.

В начале работы ДВС (рис. 14.16, а, б) [149] без коленчатого вала и шатуна, с переменными камерами: рабочей смеси и сжатия, рычаг 16 находится в положении в. Зубья некруглого колеса 11(12, 13), которые расположены вдоль максимального радиуса некруглого колеса 11(12, 13) находятся в зацеплении с зубьями конического блока 14, расположенными в малой торцевой плоскости (рис. 14.17, а, б, в). В коническом блоке 14 разность зубьев ступеней составляет 1, 2, 3 и т.д. Допустимое под нагрузкой переключение скоростей осуществляется смещением блока 14 вдоль вала 15, при этом у каждого конического колеса блока 14 предусмотрены круговые выточки без зубьев [71]. Поршень 2 расположен в ВМТ цилиндра 1, который соответствует малой торцевой плоскости конического блока 14, пружина 7 находится в сжатом положении. От стартера ведущему валу 15 маховику и коническому блоку 14 сообщают вращательное движение в направлении стрелки А. С помощью зацепления зубьев конического блока и некруглого колеса 11 (12, 13) вращательное движение с переменной скоростью передается некруглому колесу 11(12, 13). По мере уменьшения радиуса  $R$  колеса 11 (12, 13), пружина 7 растягиваясь обеспечивает постоянное зацепление зубьев конического блока 14 и некруглого колеса 11 (12, 13). С помощью оси 10, серьги 9, рычага 4, цилиндрической перегородки 5, оси 3 поршень 2 из ВМТ, с переменной скоростью, перемещается в НМТ. Одновременно с началом перемещения поршня 2 из ВМТ открывается всасывающий клапан рабочей смеси. Когда некруглое колесо 11 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (колесо 12 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $60^\circ$ , колесо 13 выполнит вращательное движение от  $0^\circ$  до  $45^\circ$ ), поршень 2 расположится в НМТ. Цилиндр 1 заполнится рабочей смесью. Одновременно с заполнением цилиндра рабочей смесью

закрывается всасывающий клапан. Когда некруглое колесо 11 совершает вращательное движение от  $90^\circ$  до  $180^\circ$  (колесо 12 выполнит вращательное движение от  $60^\circ$  до  $120^\circ$ , колесо 13 выполнит вращательное движение от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ ) с помощью зацепления зубьев конического блока 14 и некруглого колеса 11 (12, 13), оси 10, серьги 9, рычага 4, цилиндрической перегонки 5, оси 3 поршень 2 с переменной скоростью которая соответствует маленькой торцевой плоскости колеса 14, перемещается в ВМТ. Рабочая смесь сжимается. С помощью свечи в камеру сжатия подается искра. Рабочая смесь взрывается. Поршень 2 совершает рабочий ход с переменной скоростью, с ВМТ перемещается в НМТ. Некруглое колесо 11 совершает вращательное движение от  $180^\circ$  до  $270^\circ$  (некруглое колесо 12 совершает вращательное движение от  $120^\circ$  до  $180^\circ$ , некруглое колесо 13 совершает вращательное движение от  $90^\circ$  до  $135^\circ$ ). Одновременно с перемещением поршня 2 с НМТ в ВМТ открывается выпускающий отработавшие газы клапан. Колесо 11 (12, 13) совершает вращательное движение с переменной скоростью. Колесо 11 совершает вращательное движение от  $270^\circ$  до  $360^\circ$ , (колесо 12 совершает вращательное движение от  $180^\circ$  до  $240^\circ$ , колесо 13 совершает вращательное движение от  $135^\circ$  до  $180^\circ$ ). Поршень 2 с НМТ цилиндра 1, с переменной линейной скоростью, перемещается в ВМТ. Из цилиндра 1 выходят отработавшие газы. ДВС выполнил один рабочий цикл. При изменении профиля дороги водитель постепенно перемещает рычаг 16 из положения в направлении г. Конический зубчатый блок 14 перемещается вдоль вала 15. По мере перемещения конического зубчатого блока 14 вдоль вала 15 изменяются участки зацепления зубьев колеса 14 и некруглого колеса 11 (12, 14; 13, 14). При вращении вала 15 поршень 2 выполнит движения по описанной выше последовательности. В конце перемещения конического блока 14 по направлению г в зацеплении находятся зубья блока 14, расположенные в большой торцевой плоскости, и зубья некруглого колеса 11(12, 13).

Радиусы расположенные в торцевых плоскостях конического блока,  $r = L \sin \delta$ , где  $L$  – переменное конусное расстояние конического зубчатого блока 14,  $\delta$  – угол делительного конуса блока 14.

По мере перемещения конического блока 14 из положения в в положение г количество воспроизводимых циклов, объемы рабочей смеси и камеры сжатия изменяются. Когда в ДВС используются некруглые колеса с разными коэффициентами деформации центроид, ДВС выполняет разное количество рабочих циклов. В многоцилиндровых ДВС на вал 15 закрепляют конические зубчатые блоки 14, количество которых соответствует количеству цилиндров 1.

Долговечность работы механизма газораспределения ДВС определяется износостойкостью кулачков распределительного вала. Износ профилей кулачков уменьшает средний подъем клапанов, что приводит к уменьшению их времени сечения и увеличению гидродинамического сопротивления на впуске рабочей смеси и выпуске отработавших газов, смещению фаз газораспределения, а также повышению динамических нагрузок в приводе клапанов. Все это ухудшает мощностные, экономические и

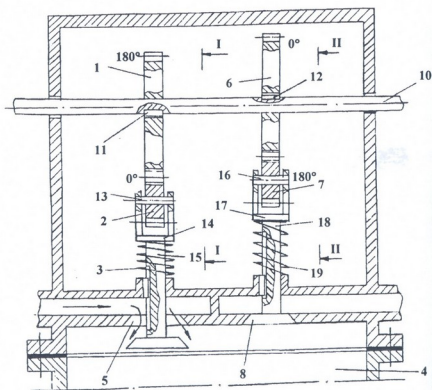


Рис. 14.18. Газораспределительный механизм ДВС

экологические характеристики ДВС, а также снижает его надежность. Установлено, что с износом кулачков снижение достигает 8% при малых частотах вращения коленчатого вала и 9,2% на режимах, близких к номинальным, а при износе кулачков до 1,2 мм количество углеводов в отработавших газах увеличивается на средних и максимальных нагрузках на 14...26%. Исходя из изложенного в механизме открывания-закрывания всасывающего и выпускного клапанов целесообразнее использование некруглых цилиндрических зубчатых колес [151].

Примем, что в начале работы газораспределительного механизма ДВС (рис. 14.18) зубья некруглого колеса 1, расположенные вдоль максимального радиуса  $r_{1max}$  некруглого колеса, находятся в зацеплении с зубьями круглой цилиндрической шестерни 2. Пружина 3 находится в сжатом положении. Всасывающий в цилиндре 4 рабочей смеси клапан 5 находится в открытом положении.

Зубья некруглого колеса 6, расположенные вдоль  $r_{6min}$  минимального радиуса некруглого колеса 6 находятся в зацеплении с зубьями круглой цилиндрической шестерни 7. Выпускной клапан отработавших газов из цилиндра 4 находится в закрытом положении. Пружина 9 находится в растянутом положении. Вал 10, на котором с помощью шпонок 11, 12 закреплены некруглые колеса 1, 6 получит вращательное движение от ведущего вала 14 ДВС (рис. 14.14, 14.15, 14.16). При повороте некруглого колеса 1 на угол от  $0^\circ$  до

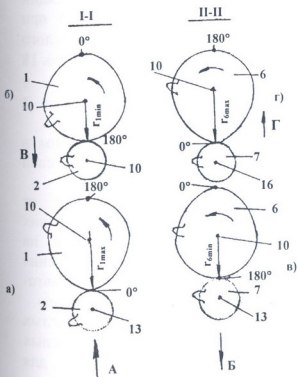


Рис. 14.19, а, б, в, г, Газораспределительный механизм ДВС



180° (рис. 14.19, а) радиус некруглого колеса 1 постепенно уменьшается от  $r_{1\max}$  до  $r_{1\min}$  (рис. 14.19, б). С помощью зацепления зубьев некруглого колеса 1 и шестерни 2, оси 13, серьги 14 толкатель 15 перемещается по направлению А. Пружина 3 постепенно растягивается, всасывающий рабочую жидкость клапан 5 закрывается. Одновременно при повороте некруглого колеса 6 на угол от 180° до 0° (рис. 14.19, в) радиус некруглого колеса 6 постепенно увеличивается от  $r_{6\min}$  до  $r_{6\max}$  (рис. 14.19, г). С помощью зацепления зубьев некруглого колеса 6 и шестерни 7, оси 16, серьги 17 толкатель 18 перемещается по направлению стрелки Б (рис. 14.19, б). Пружина 9 сжимается. Клапан 8 выпуска из цилиндра 5 отработавших газов открывается. Одновременно при повороте некруглого колеса 1 на угол от 180° до 0° (рис. 14.19, б) радиус некруглого колеса 1 увеличивается от  $r_{1\min}$  до  $r_{1\max}$  (рис. 14.19, а). Толкатель 15 перемещается по направлению В (рис. 14.19, б), пружина 3 сжимается. Всасывающий рабочую жидкость клапан 5 открывается. Одновременно при повороте кулачка 6 от 0° до 180° (рис. 14.19, г) радиус некруглого колеса 6 уменьшается от  $r_{6\max}$  до  $r_{6\min}$  (рис. 14.19, в). Толкатель 18 перемещается на направление Г (рис. 14.19, г), пружина 9 постепенно растягивается. Клапан 8 выпуска из цилиндра 4 отработавших газов закрывается.

Центроиды некруглых колес 1,6 должны быть выбраны в зависимости от центроид некруглых колес 11, 12, 13 двигателей внутреннего сгорания (рис. 14.14, 14.16).

Долговечность работы машин во многом зависит от износостойкости их деталей. Износ и выкрашивание рабочих поверхностей кулачковой пары оказывает большое влияние на точность воспроизведения функции заданных законов движения рабочих органов машин-автоматов. Поэтому в машинах-автоматах целесообразно использовать зубчатые кулачковые механизмы.

Плоские кулачковые механизмы, составленные из некруглых цилиндрических зубчатых колес 2 (рис. 14.20, а, б, в, г) и круглых цилиндрических шестерней 3 могут быть использованы для преобразования вращательного движения кулачков 3 в поступательное движение толкателей 5. Плоские кулачковые меха-

низмы, составленные из некруглых цилиндрических колес 1 (рис. 14.21) или некруглых эксцентричных колес 1 (рис. 14.22), могут быть использованы для преобразования вращательного движения кулачков 1 в качательное движение коромысла 6.

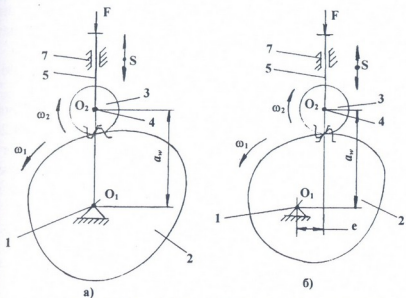


Рис. 14.20. а, б. Зубчатый кулачковый механизм

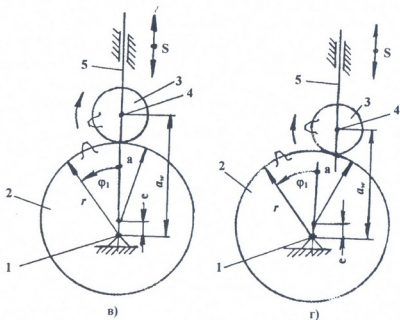


Рис. 14.20. в, г. Зубчатый кулачковый механизм

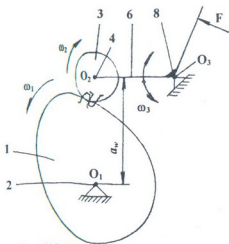


Рис. 14.21. Зубчатый кулачковый механизм

Плоский кулачковый механизм, составленный из рейки 2 и толкателя 5 (рис. 14.23), может быть использован для преобразования поступательного движения рейки 2 в поступательное движение толкателя 5.

Если центроида зубчатого кулачка эллипс (рис. 14.20, а), перемещение толкателя от верхнего крайнего положения может быть определено зависимостью

$$S = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi_1}, \quad (14.1)$$

где:  $a$  - половина длины большой полуоси эллипса;  $e$  - эксцентриситет эллипса;  $\varphi_1$  - угол поворота кулачка.

При круглых эксцентриковых колесах (рис. 14.20, в)

$$S = \sqrt{a^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1} - e \cos \varphi_1, \quad (14.2)$$

где:  $a$  - радиус окружности;  $e$  - эксцентриситет;  $\varphi_1$  - угол поворота кулачка.

Принцип работы двигателя внутреннего сгорания использован в пресс-стекателе (рис. 14.24) для извлечения сула из виноградной мезги [167]. Лопасты 1, 2 приводятся во вращательное движение с переменной угловой скоростью от овальных колес 3, 4 и 5, 6. Вращаясь с переменной скоростью, лопасты 1, 2 создают переменные

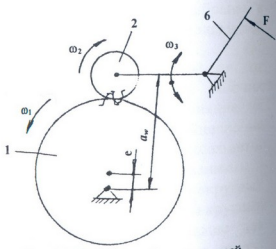


Рис. 14.22. Зубчатый кулачковый механизм

рабочие объемы дренажных секций. Максимальные рабочие объемы дренажных секций 7,8 образуются в зонах загрузочного 9

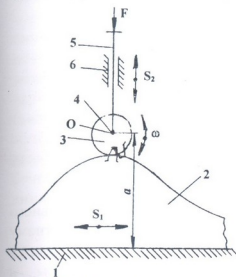


Рис. 14.23. Зубчатый кулачковый механизм

патрубок 16 направляется по назначению. После этого объем дренажной секции постепенно возрастает и в зоне выгрузочного патрубка 10 достигает своего максимального значения – в секции 8. При этом сжатая мезга освобождается от лопастей 1, 2 и через патрубок 10 выгружается из пресс – стекателя.

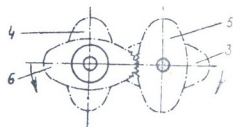
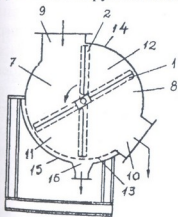


Рис. 14.24. Схема пресс-стекателя

В приведенных схемах двигателя и пресс-стекателя рабочие объемы сжатия и расширения можно регулировать путем изменения фазового угла, взаимного расположения больших осей колес 3, 4 и 5, 6. Для уменьшения инерционных сил, возникающих при движении главного транспортера агрегата БТГ для прессования,

круглении, кашировании и наклейке корешкового материала в приводе агрегата [4], применяются эллиптические колеса 1 и 2 (рис. 14.25).

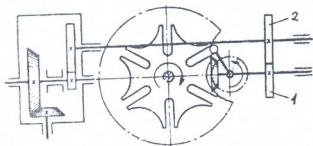


Рис. 14.25. Схема привода главного транспортера агрегата БТГ

В самонакладе СУ, предназначенном для последовательного отделения листов от стопы и транспортировки к печатному цилиндру [4], применяются эллиптические колеса в сочетании с

кулачковым механизмом и планетарной передачей с круглыми колесами (рис. 14.26). На ведущем валу закреплены эллиптическое колесо 1 и кулачок 2, приводящие в качательное движение свободно сидящее на ведомом валу водило 3. Последнее несет скрепленные между собой сателлитные колеса 4, 5 и 6. Эллиптическое колесо 1 находится в зацеплении с эллиптическим колесом 7, которое, в свою очередь, свободно вращается на ведомом валу и жестко связано с колесом 8. Колесо 8 при помощи сателлитных колес 4, 5 и 6

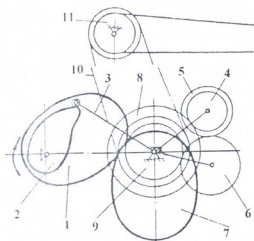


Рис. 14.26. Схема механизма последовательного отделения листов от стопы и транспортировки к печатному цилиндру

приводит во вращение колесо 9, которое через цепную передачу 10 сообщает транспортеру 11 движение с переменной скоростью.

В бочкомоющей машине (рис. 14.27), в процессе мойки, бочки перемещаются с одной технологической операции на

другую при помощи двух штанг, имеющих возвратно-поступательное движение, создаваемое посредством кривошипных механизмов 1. Движение передается кривошипам от двух редукторов с эллиптическими колесами 2, 3 и 4. Применение эллиптических колес обусловлено необходимостью обеспечить неравномерность вращения кривошипа и штанг. Благодаря такой конструкции механизма верхние полуобороты, соответствующие переносу бочек от одной операции к другой, производятся быстрее, а нижние, соответствующие мойке – медленнее. Промежуточные колеса 3 с помощью кулачков 5 и рычагов 6 приводят в движение ловители 7, которые, попадая в шунтовые отверстия бочки, обеспечивают ее установку отверстием вниз, что необходимо для мойки внутренней полости бочки.

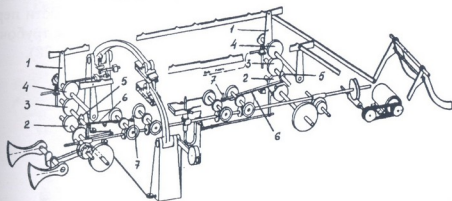


Рис. 14.27. Кинематическая схема бочкомоечной машины

В приводе ленточного конвейера, состоящего из трех лент, движущихся с разными скоростями: малой, средней и большой, для передачи транспортируемого предмета с медленно движущейся ленты на быстро движущуюся используется промежуточная лента, привод которой осуществляется некруглыми колесами. Некруглые колеса позволяют осуществить такой цикл, при котором на какой-то определенной части оборота имеет место постоянное передаточное отношение одного значения, а на другой – также постоянное передаточное отношение, но другого значения. Эти два участка соединены синусоидальной переходной кривой. Механизм позволяет выравнять линейные скорости медленно движущейся и промежуточной ленты в определенный момент, во время которого происходит поперечное перемещение предмета.

Затем промежуточная лента движется ускоренно до тех пор, пока ее скорость не сравняется с быстро движущейся лентой, после чего происходит второе поперечное перемещение предмета [180].

Некруглые колеса используются в гильзовых машинах в приводе печатающих аппаратов и ножниц [68]. Для получения на бумаге печатных знаков нормальной длины необходимо, чтобы в момент нанесения оттиска скорость перемещения клише равнялась бы скорости перемещения бумажной ленты. Для этого в приводе печатающего аппарата предусмотрены эллиптические колеса. Гильзовые ножницы кроме обреза рубашки совершают возвратно-поступательное движение, причем в момент обреза скорости поступательного движения ножниц и бумажной ленты должны быть равны. Регулировка поступательной скорости перемещения ножниц по скорости перемещения бумажной трубочки производится при помощи эллиптических колес (рис. 14.28).

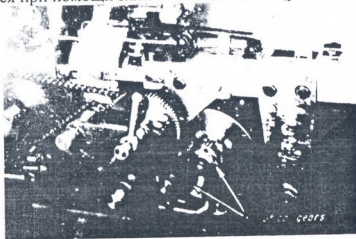


Рис. 14.28. Гильзовая машина

В автоматической линии изготовления шоколадных плит фирмы Carle e Montanari модели MLN № 275 по технологическим требованиям необходим перенос форм, наполненных шоколадной массой, с вибрационного стола на цепной транспортер. Механизму переноса шоколадных форм переносное вращательное движение с остановками сообщается от некруглых колес (рис. 14.29). Для осуществления прерывистого движения с переменной скоростью цепных транспортеров линий, в привод транспортеров также включены некруглые колеса (рис. 14.30).

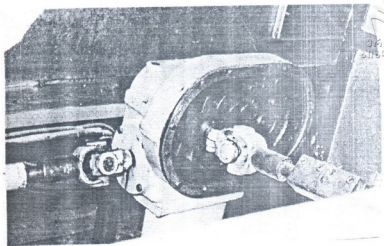


Рис. 14.29. Привод механизма переноса форм с вибрационного стола на транспортер

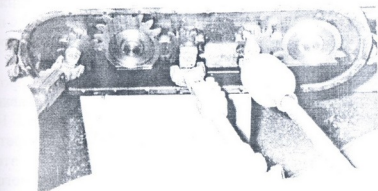


Рис. 14.30. Привод цепных транспортеров

В кривошипно-ползунных механизмах некруглые колеса обеспечивают ползуну приблизительно постоянную скорость в одном направлении (рис. 14.31), а также приблизительно равномерное движение (рис. 14.32).

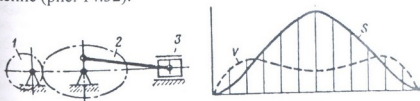


Рис. 14.31. Кривошипно-шатунный механизм с некруглыми колесами



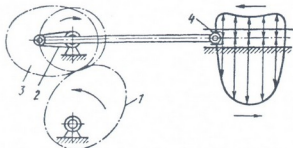


Рис. 14.32. Кривошипно-шатунный механизм с некруглыми колесами

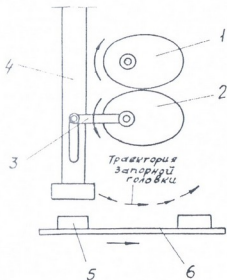


Рис. 14.33. Схема механизма привода запорной головки

Эллиптические колеса 1, 2 (рис. 14.33) через кривошип 3 сообщают запорной головке 4 движение по траектории, представляющей собой дугу окружности. Запорная головка, прижимая контейнер 5, движется вместе с ним горизонтально с приближенно постоянной скоростью конвейера 6 [71].

В механизме для протягивания специальной канавки с переменным шагом (рис. 14.34) при вращении винта 1 каретка 4 перемещается влево. При этом в результате качения многовиткового некруглого колеса 3 по сопряженной пространственной рейке 2, изделию, закрепленному на каретке, сообщается дополнительное вращение с переменной скоростью [71].

В механизме для протягивания специальной канавки с переменным шагом (рис. 14.34) при вращении винта 1 каретка 4 перемещается влево. При этом в результате качения многовиткового некруглого колеса 3 по сопряженной пространственной рейке 2, изделию, закрепленному на каретке, сообщается дополнительное вращение с переменной скоростью [71].

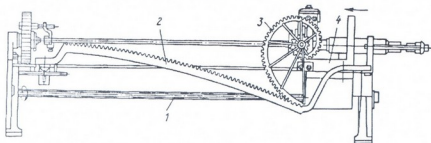


Рис. 14.34. Схема механизма для протягивания канавки с переменным шагом

В станках применяется комбинированная передача (рис. 14.35) с целью повышения скорости от номинального до максимального значения, осуществляемого в течение полуоборота ведомого вала и последующего его снижения до минимума. На ведущем валу зубчатое колесо 1 закреплено эксцентрично, а колесо 2 – концентрично. Одному обороту эксцентричного колеса в зацеплении эллиптическим сектором 7 на участке между зубьями 3 и 4

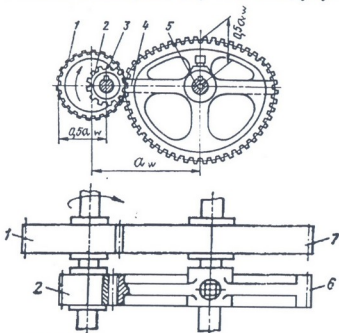


Рис. 14.35. Схема механизма поворота ведомого вала на заданные углы выстоя и движения

соответствует половина оборота ведомого вала 5, а два оборота колеса 2 в зацеплении с цилиндрическим сектором 6 завершают цикл полного оборота ведомого вала. Максимальная скорость по сравнению с первоначальной увеличивается вдвое [196].

Известно, что эффективность уплотнения грунта (бетона) тем выше, чем меньше отличаются друг от друга частота свободных колебаний вибратора на грунте (бетоне) и частота изменения возмущающей силы. В полуволновом вибраторе это достигается применением эллиптических зубчатых колес [85].

Обработка кулачков фрезерованием производится вращением заготовки с равномерной угловой скоростью, при неравномерной

скорости подачи, что приводит к образованию гребешков на обрабатываемой поверхности. Для устранения этого недостатка целесообразно кулачок приводить во вращение от некруглых колес, чем обеспечивается постоянная скорость подачи при неравномерном вращении кулачка [197].

Некруглые колеса применяются в устройстве для обработки диаметральных кулачков [74] привода наборно-перфорирующего механизма ленточного перфоратора (рис. 14.36). Устройство позволяет в широких пределах изменять основные параметры кулачков – радиус основной шайбы, величину хода кулачка и число его зубьев.

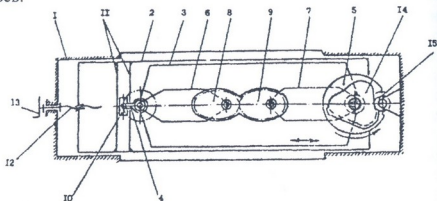


Рис. 14.36. Схема устройства для обработки диаметральных кулачков: 1 – станина; 2 – салазки; 3 – каретка; 4 – задающий кривошип; 5 – поворотный стол; 6, 7 – редукторы; 8, 9 – некруглые колеса; 10 – камень; 11 – направляющие; 12 – винтовая пара; 13 – маховик; 14 – заготовка; 15 – фреза

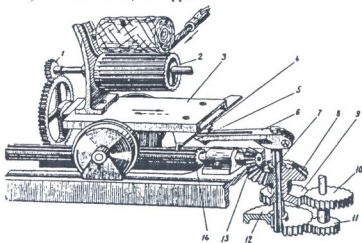


Рис. 14.37. Схема привода наматывающей каретки

В приводе наматывающей каретки в вытяжных машинах для сборки готовой уплотненной ленты и наматывания на патрон применяются некруглые колеса 9, 10 (рис. 14.37) [75].

Для улучшения динамических условий работы мальтийского креста привода транспортера блокообрабатывающей машины БО-2 в цепь привода включены эллиптические колеса (рис. 14.38) [75].

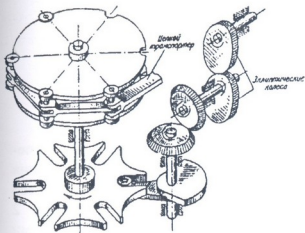


Рис. 14.38. Схема привода блокообрабатывающей машины

Ремизки ткацких станков при выработке тканей со сложными рисунками переплетений получают движение от барабанов 1 и 2 (рис. 14.39). Барабаны 1 и 2 получают вращательное движение с переменной угловой скоростью при помощи эллиптических колес  $z_1, z_2$ . В зависимости от фазового угла установки колес  $z_1, z_2$ , меняется

закон перемещения и продолжительность выстоя ремизок [7].

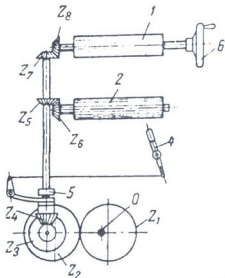


Рис. 14.39. Схема привода барабанов

В приводе батанного механизма некруглые колеса 1 и 2 (рис. 14.40) с помощью шатуна 3 сообщают батану 4 замедленное движение при прокидке челнока [7].

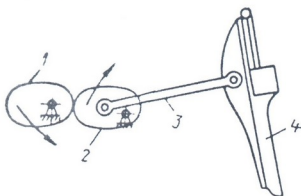


Рис. 14.40. Схема привода батанного механизма

Некруглые колеса используются в механизме для обеспечения поворота ведомого вала на заданные углы выстоя и движения [198]. На ведущем валу 1 (рис. 14.41) закреплены некруглое колесо 3 и двойной плоский пазовый кулачок 7. На ведомом валу 2 закреплены зубчатый сектор 4 с роликами 6 и диск 8 с роликами 9. Система дисков и кулачок обеспечивают безударный вход и выход из зацепления зубьев зубчатой пары и плавную работу передачи.

В рычажно-зубчатом механизме некруглые колеса применяются для получения неравномерного движения с большими колебаниями передаточного отношения [173]. Оси вращения ведущего 3 и ведомого 4 эллиптических колес (рис. 14.42) проходят через один из фокусов каждого эллипса. Вторые фокусы эллипсов соединены шарнирным рычагом 5. В положении, показанном на рисунке, фокусы расположены на одной оси, и рычаг находится в «мертвом» положении. В этой зоне колеса имеют зубчатую нарезку, по всему остальному периметру колеса гладкие, и передача вращения осуществляется рычагом 5. Наименьшее передаточное отношение механизма, в зависимости от соотношения размеров колес, доходит до 1:20. При большой неравномерности изменения передаточного отношения резко меняются нагрузочные характеристики колес. С целью уменьшения нагрузочной характер-

Истилки колес привод механизмов осуществляется через конический дифференциал.

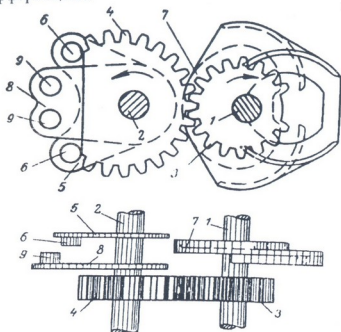


Рис. 14.41. Схема механизма поворота ведомого вала на заданные углы выстоя и движения

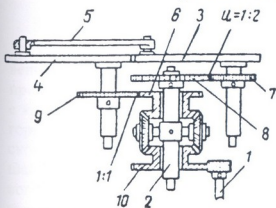


Рис. 14.42. Схема рычажно-зубчатого механизма

Некруглые колеса используются в приборе для удлинения определенного участка равномерной линейной шкалы, например, участка, расположенного около нуля. При этом ведущее некруглое колесо устанавливается на той части прибора, которая получает внешнюю информацию и движется равномерно, а сопряженное ведомое некруглое колесо соединя-

ется жестко со шкалой. Пример такого использования представляет прибор, указывающий положение плоскости самолета. Так как оно почти всегда должно быть близко к горизонтальному, то для повышения точности отсчета требуется расширение поля

шкалы вблизи нуля, что и достигается применением передачи с эллиптическими колесами и соответствующей эллиптической шкалой [184].

Для нарезания некруглых колес в качестве делительной червячной пары используется червячная передача с переменным передаточным отношением и переменным межосевым расстоянием [73]. Нарезаемое колесо 1 (рис. 14.43) закреплено на оправке 2. Соосно с колесом 1 установлено некруглое червячное колесо 3, находящееся в зацеплении с круглым червяком 4. В качестве режущего инструмента используется червячная фреза 5, которая через цепную передачу 6 приводит во вращение червяк 4. Указанная передача применяется также немецкой фирмой «Бопп и Рейтер» в качестве делительной червячной пары в зубофрезерном станке для нарезания овальных колес счетчика жидкости [175]. В передаче, для принудительного изменения межосевого расстояния, дополнительно применяются эксцентриковый или кулачковый механизмы, что намного усложняет конструкцию.

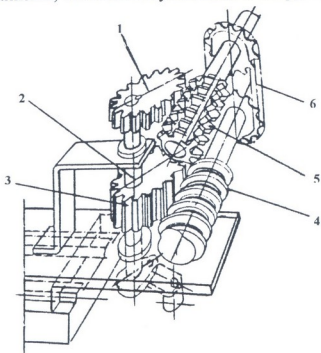


Рис. 14.43. Схема нарезания некруглых цилиндрических колес

Некруглые цилиндрические колеса применяют в станке для фрезерования шпонок, в котором вращение кривошипно-шатунного механизма сообщается от некруглых зубчатых колес с целью осуществления подачи с приблизительно постоянной скоростью. В токарных автоматах эллиптические колеса применяют для медленного вращения распределительного вала при выполнении рабочих операций и быстрого – во время холостых ходов. В шелкоткальных машинах некруглые колеса применяют для периодического изменения плотности утка и основы с целью получения тканей с определенным рисунком, закон изменения которых определяет бочкообразную форму катушки [72].

На рис. 14.44 приведены схемы комбинированных механизмов с некруглыми колесами [8].

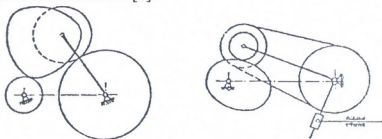


Рис. 14.44. Схемы комбинированных механизмов

В механизме возвратно-поступательного движения с уравновешенными силами инерции [181] ведомое звено 48 (рис. 14.45) приводится в возвратно-поступательное движение планшайбой 40 с кривошипом 45 при помощи камня 46, который перемещается в горизонтальном пазу детали 48. С целью получения увеличенной скорости обратного хода (относительно прямого) звена 48, планшайба 40 получает вращение с переменной скоростью от торцового зубчатого колеса 56 овальной формы. Колесо 56 находится в зацеплении с ведущей шестерней 55, вращающейся с постоянной скоростью. Силы инерции звена 48 уравновешиваются ползуном – противовесом 62. Детали 48 и 62 связаны между собой зубчато-реечным зацеплением так, что их движения полностью взаимозависимы и направлены всегда в разные стороны. Для компенсации неравномерного вращения шайбы 40 служит диск 74 с набором сменных шайб 83. Диск 74 приводится во вращение с переменной скоростью овальным торцевым зубчатым колесом 75



через шестерню 76, причем эта скорость согласуется со скоростью вращения шайбы 40. При изменении величины хода ведомого звена 48 энергия колебания шайбы 40 изменяется. Компенсация этого изменения осуществляется изменением массы диска 74, путем изменения числа шайб 83.

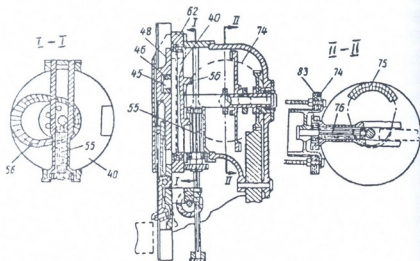


Рис. 14.45. Схема механизма возвратно-поступательного движения

В суммирующем механизме для уравнивания вращающихся масс [177] внутри корпуса 1 редуктора помещена рамка 2 зубчатого механизма, установленная на подшипниках 3 и 5 (рис. 14.46). Ведущий вал 6 редуктора проходит внутри опоры 3 рамки, а его колесо 7 передает вращение через ведущую группу цилиндрических и конических колес 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20 и 22 с валами 11, 17, 19а и 21 на группу ведомых колес 23, 25 и 26 с валами 24 и 26а. Валы всех этих колес вращаются в подшипниках, закрепленных на рамке 2 механизма, причем соосные валы 17 и 24 расположены под углом к оси соосных валов 6 и 28 редуктора. Паразитное колесо 26 механизма входит в зацепление с колесом 27 вала 28, проходящего внутри подшипника 5 рамки 2. На другом конце вала 29 закреплено колесо 30, которое входит в зацепление с колесом 31 выходного вала 32 редуктора. Колесо 34, закрепленное на валу 32, находится в зацеплении с колесом 33, закрепленным на пустотелой цапфе 4 рамки 2. Таким образом, крутящий момент на выходном валу складывается из крутящего



Шестерня 4, имеющая переменную скорость вращения, связана с колесом 11 двумя парами конических колес 5,6 и 7,8 и передачей с переменным передаточным отношением, состоящей из эвольвентной шестерни 9 и специального неэвольвентного зубчатого венца 10. Червячное колесо 11, на котором выполнен специальный зубчатый венец 10, имеет периодически изменяющуюся скорость с периодом одного оборота. Закон изменения этой скорости зависит от формы двух специальных зубчатых венцов 3 и 10. С червячным колесом 11 находится в зацеплении червяк 12, связанный с червяком 1 парой колес 13 и 14, и имеющий скорость вращения, равную скорости вращения червяка 1. Червяк 12 установлен на валу с помощью скользящей шпонки и может свободно перемещаться вдоль оси. Изменение перемещения червяка 12 осуществляется посредством поворота оси колеса 9 с помощью червячной передачи, состоящей из колеса 15 и червяка 16.

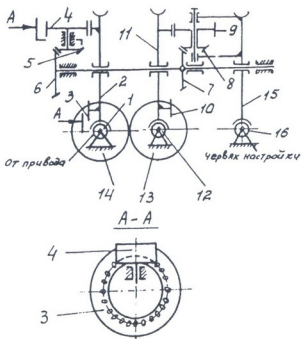


Рис. 14.47. Схема механизма качания кристаллизатора

Для динамического и статико-динамического уравновешивания четырехзвенных механизмов применяются простой и планетарный (рис. 14.48) ряды некруглых зубчатых колес. Пере-

данные отношения некруглых колес рассчитываются из условия полного динамического уравнивания механизмов. 14.49 представлены график переменного передаточного отношения  $u_{56}(\varphi)$  некруглых колес и соответствующие центры масс, необходимые для компенсации неуравновешенного момента  $M_x$  до постоянной величины  $M_y$ .

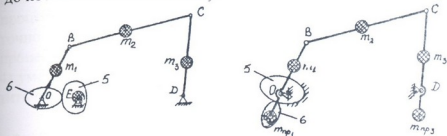


Рис. 14.48. Схемы уравнивания четырехзвенных механизмов

В роликовой машине трения [102] от привода 1 (рис. 14.50) через муфту 2 вращательное движение сообщается ведущим некруглым колесам 4, 5 и передается находящимся с ним в зацеплении ведомым зубчатым колесам 6 и 7. От вала 9 ведомого зубчатого колеса 7 роликовому образцу 14 вращательное движение сообщается через зубчатую передачу с круглыми колесами 11, 12. Второму роликовому образцу 10 вращательное движение передается от вала 8 ведомого зубчатого колеса 6. Центроиды колес 4, 5, 6 и 7 выполнены из четырех равных эвольвентных участков. Поэтому при уменьшении скорости роликового образца 10 скорость роликового образца 14 возрастает. До момента выравнивания их скоростей опережающим является роликовый образец 10, отстающим – роликовый образец 14, а скорость скольжения постоянно уменьшается. В точке, где их скорости выравниваются, скорость скольжения равна нулю. Далее опережающим является роликовый образец 14, отстающим – роликовый образец 10. В точке, где скорости роликовых образцов 10 и 14 равны и скольжение равно нулю, имитируется полюс зубчатого зацепления. В остальных точках имитируются все прочие точки линии зацепления. За один оборот роликовых образцов 10 и 14 зубчатое зацепление имитируется четыре раза, при этом одни и те же участки роликов 10 и 14 все время имитируют точки, принадлежащие ножке зуба, либо его головке, либо полюсу зацепления.

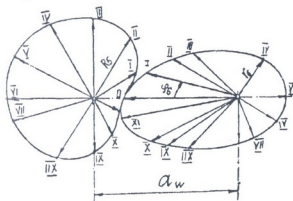
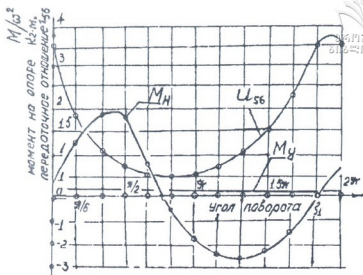


Рис. 14.49. График изменения  $u_{s6}$  и центровды некруглых колес

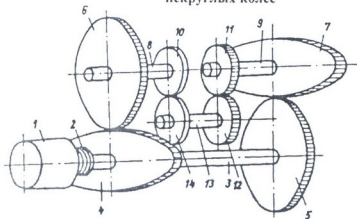


Рис. 14.50. Роликовая машина трения

Роликовая машина с некруглыми колесами обеспечивает воспроизведение кинематики рабочих профилей зубьев зубчатых колес на исследуемых образцах по всей линии зацепления, что позволяет на одной паре роликов найти наиболее опасные места по различным условиям разрушения поверхностей и дает возможность: 1) имитировать процесс, предшествующий вступлению в контакт поверхностей; 2) наблюдать за кинетикой развития процесса разрушения контактирующих поверхностей; 3) более точно оценить эластогидродинамические, тепловые и др. процессы в зоне контакта, характерные для зубчатого зацепления; 4) уменьшить количество экспериментальных образцов; 5) сократить время экспериментального исследования.

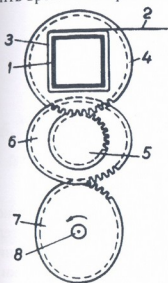


Рис. 14.51. Приводное устройство наматывающей машины

Применение овальных колес 6, 7 (рис. 14.51) в приводе намоточной машины обеспечивает равномерное натяжение проволоки 2 при ее наматывании на некруглый каркас 4 [179].

В устройстве для намотки каркасных электрических катушек (рис. 14.52) [106] уплотнитель 8 и каркас 11 вращательное движение получают от некруглых колес 7 и 9. В начале намотки (рис. 14.52, в) скорость  $v_1$  поверхности *a* уплотнителя 8 больше скорости  $v_2$  поверхности *б* каркаса 11. Сила трения  $T$  и натяжение  $P$  имеют одинаковое направление, а силы радиального прижатия  $R$  незначительны, поэтому сила трения  $T$

небольшая. В конце намотки (рис. 14.52, г)  $v_1 = v_2$  ( $v_2$  может даже превысить  $v_1$ , но при этом разность относительного перемещения поверхностей *a* и *б* не должна превысить величину упругой деформации поверхности *a* в тангенциальном направлении), сила трения скольжения в зоне контакта равна нулю, а силы радиального прижатия  $R$  максимальны.

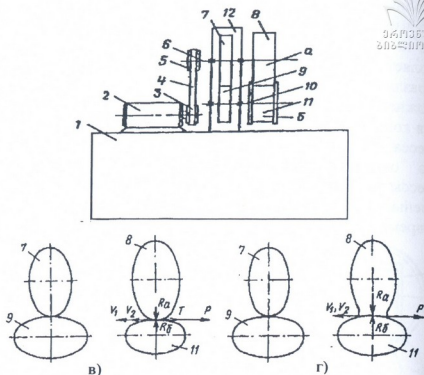


Рис. 14.52. Устройство для намотки каркасных электрических катушек

Таким образом, в начале процесса намотки уплотнение витков осуществляется, в основном, за счет силы, действующей на тело намотки в тангенциальном направлении при проскальзывании рабочей упругой поверхности  $a$  уплотнителя  $8$  по телу намотки  $b$  каркаса  $11$ , с последующим уменьшением величины проскальзывания и увеличением радиального усилия.

Введение в устройство для намотки электрических катушек некруглых зубчатых колес исключает проскальзывание уплотнителя, что улучшает качество катушек.

В вопросах улучшения эргономики управления транспортным средством и повышения безопасности движения немаловажная роль принадлежит определенным качествам рулевого механизма: одновременно удовлетворять требованиям безопасности управления транспортным средством при движении по прямой с высокими скоростями и уменьшению затрат энергии водителем при маневрировании на дорогах с частыми крутыми поворотами

может рулевой механизм, в котором передаточное отношение меняется по определенному закону [78].

На автомобилях Ауди [87] применяется реечная передача, которая состоит из круглой цилиндрической шестерни с постоянным шагом, закрепленной на одном конце рулевого вала, находящегося в зацеплении с зубьями рейки с переменным шагом.

Для реализации закона управления транспортным средством может быть использована реечная передача с переменным и переменнопостоянным передаточным отношением.

Передача с переменнопостоянным передаточным отношением (рис. 14.53) [111] состоит из рулевого вала 1, на одном конце

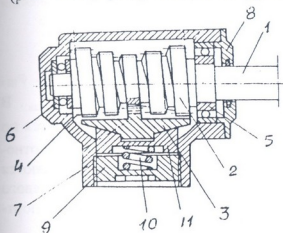


Рис. 14.53. Система реечного управления:

- 1 – рулевой вал; 2 – многовитковое некругло- круглое колесо; 3 – рейка;
- 4 – центрида колеса 2; 5 – радиальный подшипник; 6 – упорный подшипник; 7 – корпус; 8 – крышка;
- 9 гайка; 10 – пружина; 11 – стакан

которого закреплено рулевое колесо (на рисунках не показано), а на другом – многовитковое некругло- круглое колесо 2. Центрида 4 колеса 2 составлена из круглых и некруглых участков, ее радиус  $r$  представляет собой функцию передаточного отношения рулевого механизма и от средней плоскости ширины колеса 2 к его торцам меняется симметрично.

При движении на прямолинейном участке дороги рулевое колесо

находится в среднем А положении. В зонах  $\varphi_1$  (рис. 14.54) угла поворота рулевого колеса желательно иметь большое (максимальное) передаточное отношение  $u_{\max} = R/r_{\min}$ , где:  $R$  – радиус рулевого колеса;  $r_{\min}$  – минимальный радиус колеса 2. При глубоком маневрировании, т.е. при дальнейшем повороте рулевого колеса по направлениям а, б на угол, больший  $\varphi_1$ , снижается скорость транспортного средства и увеличивается время его



реакции на управляющее воздействие. В зонах  $\varphi_{II}$  передаточное отношение меняется до определенного минимального значения  $u_{min} = R/r_{max}$ , где  $r_{max}$  – максимальный радиус колеса 2.

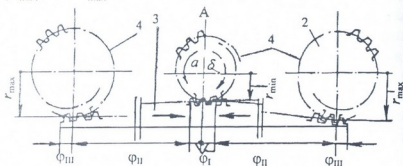


Рис. 14.54. Зоны зацепления многорычкового некругло-круглого колеса и рейки

При дальнейшем повороте рулевого колеса, в зонах  $\varphi_{III}$ , передаточное отношение остается постоянным, равным  $u_{min}$ . В диапазоне от  $u_{max}$  до  $u_{min}$  передаточное отношение меняется по требуемому для рулевого механизма закону передаточного отношения. Количество витков колеса 2 и длина 3 рейки определяются в зависимости от необходимой величины поворота рулевого колеса, обеспечивающей поворот управляемых колес транспортного средства от одного крайнего положения до другого.

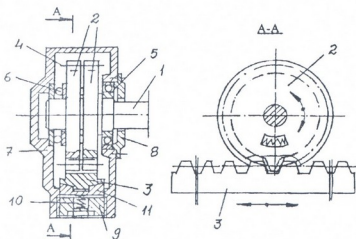


Рис. 14.55. Система реечного управления

На рис. 14.55 представлен рулевой механизм [126] с переменным передаточным отношением. Передача состоит из круглой цилиндрической шестерни 2 с изменяющимся шагом, зубья которой находятся в зацеплении с зубьями плоской рейки 3 с переменным шагом. Шаг зубьев рейки является функцией закона переменного передаточного отношения рулевого механизма.

На рис. 14.56, а, б, в представлены рулевые механизмы [146] с переменным передаточным отношением. Передачи состоят из: круглой цилиндрической шестерни 1 с переменным шагом и рейки 2 с постоянным шагом зубьев (рис. 14.56, а); эксцентричной цилиндрической шестерни 3 и рейки 4 (рис. 14.56, б); некруглого колеса 5 и рейки 6 (рис. 14.56, в).

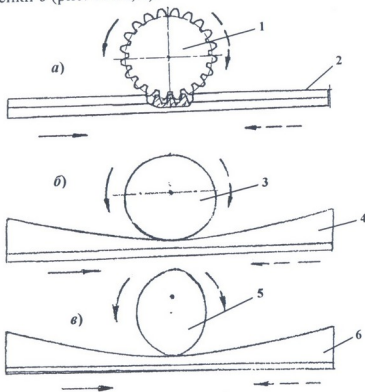


Рис. 14.56. Системы реечного управления

Рулевые механизмы с переменным передаточным отношением некоторых конструкций состоят из глобоидного червяка и одногребневого, двухгребневого роликов. В этих механизмах закон изменения передаточного отношения задается произвольно [2].

Для управления транспортным средством возможно использовать спироидную передачу [114] (рис. 14.57), которая состоит из круглого червяка 1 и плоского некруглого колеса 2, торцевые зубья которой расположены по направляющей кривой 3, являющейся функцией переменного передаточного отношения рулевого механизма. При вращении рулевого колеса 4 передаточное отношение спироидной передачи меняется от  $u_{\min}$  до  $u_{\max}$  (рис. 14.57 а, б).

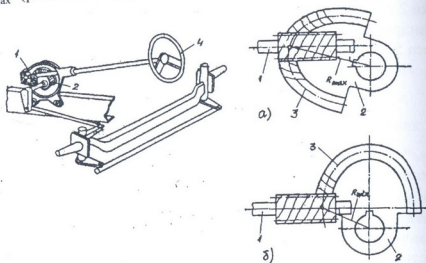


Рис. 14.57. Рулевое управление транспортного средства

Для обеспечения высокой проходимости и удовлетворительной поворачиваемости автотранспортного средства рациональным является применение межколесных дифференциалов с коэффициентом блокировки  $K_0 = 2,5...4$ . При равновероятных дорожных условиях и  $K_0 = 4$  вероятность полного использования сцепления составляет 93,8%, при  $K_0 = 3$  - соответственно 85% [2].

На автомобилях «Шевроле» фирмой «Тикмен» в качестве межколесного дифференциала применяется пульсирующий дифференциал [78]. На рис. 14.58 а, б, в показана схема дифференциала с круглыми коническими колесами с переменным передаточным отношением. Особенностью этого дифференциала является применение зубьев специального профиля (рис. 14.58, г), в результате чего

передаточное отношение пары сателлит-полуосевая шестерня меняется с изменением взаимного положения их зубьев. Число зубьев сателлита нечетное, поэтому в процессе поворота сателлита зацепление его с правой и левой полуосевыми шестернями находится в разных фазах. Профиль зубьев сателлита и полуосевых шестерен подобран так, чтобы максимальное передаточное отношение пары сателлит – полуосевая шестерня получалось при зацеплении ножки зуба сателлита с головкой зуба полуосевой шестерни, а минимальное – при зацеплении головки зуба сателлита с ножкой зуба полуосевой шестерни. Поэтому в положении, показанном на рис. 14.58, а, большая часть момента, подводимого к коробке дифференциала, передается на левую полуось, а в положении, показанном на рис. 14.58, в – на правую. В положении, показанном на рис. 14.58, б, момент, подведенный к коробке дифференциала, распределяется поровну между полуосями. Для рассмотренного дифференциала  $K_o < 2$  [2].

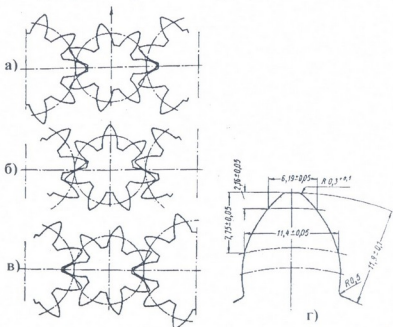


Рис. 14.58. Схема работы пульсирующего дифференциала

Рассмотрим межосевой дифференциал [111] с переменным передаточным отношением. Дифференциал состоит из эллиптических конических колес 1, 2 (рис. 14.59), закрепленных жестко

на полуосях 3, 4 ведущих колес А и В. С колесами 1, 2 в зацеплении находятся сателлитные эллиптические колеса 5, которые свободно вращаются на осях 6 корпуса 7 дифференциала. На корпусе дифференциала, который свободно вращается на полуосях 3, 4, закреплено круглое коническое колесо 8, с которым в зацеплении находится коническая шестерня 9, закрепленная жестко на карданном валу 10. Передача 1, 5, 2 может быть составлена из некруглых конических колес с недеформированными или деформированными аксоидами. Для дифференциала с переменным передаточным отношением  $K_o = - (u_{12}^7)_{\max}$ , где  $u_{12}^7$  - передаточное отношение колес 1, 5, 2 при неподвижном корпусе 7. Для эллиптических конических колес 1, 5, 2 со средним передаточным отношением в простом ряду  $n=1$ ,

$$(u_{12}^7)_{\max} = \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2, \quad (u_{12}^7)_{\min} = \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2, \quad (14.3)$$

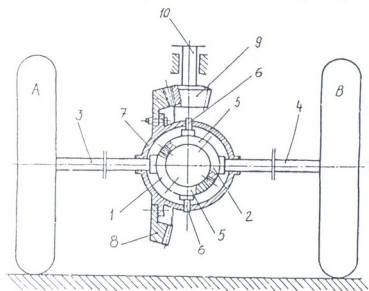


Рис. 14.59. Дифференциал с эллиптическими коническими колесами

где  $e$  - эксцентриситет колес 1,5,2. При  $e = 0,33$ ,  $(u_{12}^7)_{\max} = 3,94$ ,  $(u_{12}^7)_{\min} = 0,254$ ; при  $e = 0,225$ ,  $(u_{12}^7)_{\max} = 2,5$ ,  $K_o = -2,5$ . Примем

$K_d = -3,94$ . Так как  $(u_{12}^7)_{\max} \neq (u_{12}^7)_{\min}$ , дифференциал несимметричный.

Когда транспортное средство движется по прямой дороге и колеса А и В имеют одинаковые коэффициенты сцепления с дорогой, связь между угловыми скоростями звеньев дифференциала имеет вид

$$\omega_2 = \frac{(1 + u_{12}^7) \omega_7 - \omega_1}{u_{12}^7}, \quad (14.4)$$

где  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_7$  – угловые скорости колес 1, 2 и корпуса 7 дифференциала.

Когда транспортное средство движется по прямолинейной дороге и на колеса А и В действуют одинаковые силы сопротивления, корпус 7, колеса 1, 5, 2 вращаются вместе и обеспечивают равномерное распределение угловой скорости и вращающего момента на колесах А и В. Если транспортное средство движется на криволинейном участке дороги, где колеса А и В имеют разные коэффициенты сцепления с дорогой, колеса 1 и 2 получают дополнительное вращательное движение, сателлиты 5 поворачиваются вокруг осей 6, и весь механизм работает как дифференциал. При этом угловые скорости на забегающем и отстающем колесах меняются в пределах:

$$\begin{aligned} [(\omega_B)_{заб}]_{\min} &= 1,254\omega_7 - 0,254\omega_A; & [(\omega_B)_{заб}]_{\max} &= 4,93\omega_7 - 3,93\omega_A; \\ [(\omega_A)_{отст}]_{\max} &= 4,93\omega_7 - 3,93\omega_B; & [(\omega_A)_{отст}]_{\min} &= 1,254\omega_7 - 0,254\omega_A. \end{aligned}$$

Вращающие моменты на забегающем и отстающем колесах определяются зависимостями [78]:

$$\begin{aligned} [(T_B)_{заб}]_{\min} &= \frac{T_7}{1 - (u_{12}^7)_{\max}} = 0,202T_7; \\ [(T_B)_{заб}]_{\max} &= \frac{T_7}{1 - (u_{12}^7)_{\min}} = 0,797T_7; \\ [(T_A)_{отст}]_{\max} &\approx \frac{T_7 (u_{12}^7)_{\max}}{(u_{12}^7)_{\max} - 1} = 0,797T_7; \\ [(T_B)_{отст}]_{\min} &\approx \frac{T_7 (u_{12}^7)_{\min}}{(u_{12}^7)_{\min} - 1} = 0,202T_7, \end{aligned} \quad (14.5)$$

где  $T_7$  - вращающий момент, действующий на корпусе дифференциала.



Когда одно из колес остановлено, угловые скорости и вращающие моменты определяются зависимостями:

$$\text{при } \omega_A=0: (\omega_B)_{\max} = 4,94\omega_7; (\omega_B)_{\min} = 1,254\omega_7; (T_B)_{\max} = 0,797T_7; \\ (T_B)_{\min} = 0,202T_7,$$

$$\text{при } \omega_B=0: (\omega_A)_{\max} = 4,94\omega_7; (\omega_A)_{\min} = 1,254\omega_7; (T_A)_{\max} = 0,797T_7; \\ (T_A)_{\min} = 0,202T_7.$$

Если пробуксовывает колесо А, зубчатое колесо 1 получает дополнительное вращательное движение, колесо В будет вращаться с переменной угловой скоростью. Угловые скорости колеса В и вращающие моменты, передающиеся на колеса В и А, меняются в пределах:  $(\omega_B)_{\min} = 1,254\omega_7 - 0,254\omega_A$ ;  $(\omega_B)_{\max} = 4,93\omega_7 - 3,93\omega_A$ ;  $(T_A)_{\max} = 0,797T_7$ ;  $(T_A)_{\min} = 0,202T_7$ ;  $(T_B)_{\min} = 0,202T_7$ ;  $(T_B)_{\max} = 0,797T_7$ .

Если пробуксовывает колесо В:  $(\omega_A)_{\max} = 4,94\omega_7 - 3,94\omega_B$ ;  $(\omega_A)_{\min} = 1,254\omega_7 - 0,254\omega_B$ ;  $(T_A)_{\max} = 0,797T_7$ ;  $(T_A)_{\min} = 0,202T_7$ ;  $(T_B)_{\min} = 0,202T_7$ ;  $(T_B)_{\max} = 0,979T_7$ .

При одновременном пробуксовывании колес А и В:  $(\omega_B)_{\max} = 4,94\omega_7 - 3,94\omega_A$ ;  $(\omega_B)_{\min} = 1,254\omega_7 - 0,254\omega_A$ ;  $(T_B)_{\min} = 0,202T_7$ ;  $(T_B)_{\max} = 0,797T_7$ ;  $(\omega_A)_{\max} = 4,94\omega_7 - 3,94\omega_B$ ;  $(\omega_A)_{\min} = 1,254\omega_7 - 0,254\omega_B$ ;  $(T_A)_{\max} = 0,797T_7$ ;  $(T_A)_{\min} = 0,202T_7$ .

Частота изменения параметров:  $\omega_A$ ;  $\omega_B$ ;  $T_A$ ;  $T_B$  зависит от коэффициента деформации аксоидов колес 1, 5, 2; для колес с недеформированными аксоидами - равна  $180^\circ$ , когда коэффициент деформации аксоидов колес равен трем  $-120^\circ$ .

Из полученных зависимостей можно сделать следующие выводы:

1. За период, соответствующий повороту спутника на  $180^\circ$ , на  $120^\circ$  соотношение между моментами на отстающей и забегающей полуосях изменяется от  $K_\delta$  до  $1/K_\delta$ .

2. Изменяющиеся моменты обеспечивают изменение силы тяги в широком диапазоне.

3. Дифференциал обеспечивает быстрое передвижение автотранспортного средства на криволинейном участке дороги и при повороте.

4. Вращающие моменты уменьшаются настолько, что буксование колес прекращается, дифференциал блокируется.

5. Когда большая часть момента передается на отстающее колесо, то разность угловых скоростей уменьшается. При этом угловые скорости ведущих колес выравниваются, в результате чего дифференциал блокируется.

В пульсирующем дифференциале (рис. 14.59) возможно использовать круглые зубчатые колеса 1, 2, 3 с переменным шагом (рис. 14.60) [145].

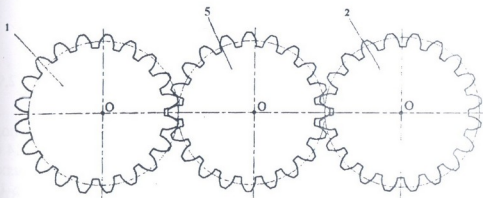


Рис. 14.60. Пульсирующий дифференциал с круглыми коническими колесами с переменным шагом

Функция переменного передаточного отношения дифференциала определяется зависимостями:

$$(u_{12}^7)_{\max} = \left( \frac{P_i + \Delta P_i'}{P_i - \Delta P_i'} \right)^2; \quad (u_{12}^7)_{\min} = \left( \frac{P_i - \Delta P_i'}{P_i + \Delta P_i'} \right)^2. \quad (14.6)$$

Для примера примем:  $(P_i + \Delta P_i')_{\max} = 6$  мм;  $(P_i - \Delta P_i')_{\max} = 4$  мм. Тогда:  $(u_{12}^7)_{\max} = 2,25$ ;  $(u_{12}^7)_{\min} = 0,44$ ;  $D = 5,11$ . Из приведенного примера видно, что для несимметричного дифференциала коэффициент блокировки равен  $K_g = -2,25$ .

В пульсирующем дифференциале (рис. 14.59) возможно использовать круглые конические эксцентричные зубчатые колеса



(рис. 61). Функция передаточного отношения определяется зависимостями:

$$(u_{12}^7)_{\max} = \left( \frac{a + e \cos \varphi_1}{a - e \cos \varphi_1} \right)^2; \quad (u_{12}^7)_{\min} = \left( \frac{a - e \cos \varphi_1}{a + e \cos \varphi_1} \right)^2, \quad (14.7)$$

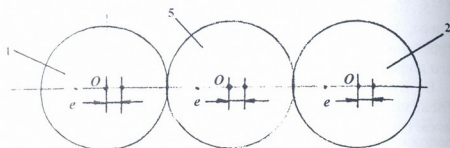


Рис. 14.61. Пульсирующий дифференциал с эксцентричными коническими колесами

Для примера примем:  $a = 30$  мм;  $e = 5$  мм. Тогда  $(u_{12}^7)_{\max} = 2,96$ ;  $(u_{12}^7)_{\min} = 0,5$ ;  $D = 5,92$ .

В пульсирующем дифференциале (рис. 14.59) возможно использовать сферические (рис. 14.62) или эллипсоидные (рис. 14.63) зубчатые колеса 1, 2, которые жестко закреплены на полуосях 3, 4 ведущих колес А и В. Прямые зубья полной длины колес 1, 2 находятся в зацеплении с зубьями неполной длины тороидных сателлитных колес 5, которые расположены вдоль пространственных кривых 6 колес 5. Колеса 5 свободно вращаются на осях 7 коопуса 8 дифференциала.

Передаточное отношение и диапазон регулирования определяются зависимостями:

для дифференциала (рис. 14.62)

$$(u_{12})_{\max} = \left( \frac{r_{\max} \cos \varphi}{r_{\min}} \right)^2; \quad (u_{12})_{\min} = \left( \frac{r_{\min}}{r_{\max} \cos \varphi} \right)^2;$$

$$D = \left( \frac{r_{\max} \cos \varphi}{r_{\min}} \right)^4; \quad (14.8)$$

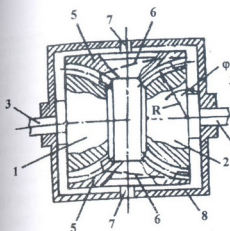


Рис. 14.62. Пульсирующий дифференциал со сферическими колесами

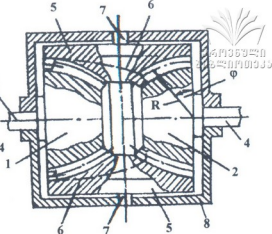


Рис. 14.63. Пульсирующий дифференциал с эллипсоидными колесами

для дифференциала (рис. 14.63)

$$(u_{12})_{\max} = \left( \frac{r_{\max} R_1 \cos \varphi}{r_{\min} R} \right)^2; \quad (u_{12})_{\min} = \left( \frac{r_{\min} R}{r_{\max} R_1 \cos \varphi} \right)^2;$$

$$D = \left( \frac{r_{\max} R_1 \cos \varphi}{r_{\min} R} \right)^4, \quad (14.9)$$

где:  $r_{\max}$ ,  $r_{\min}$  – максимальный, минимальный радиус сателлитного колеса;  $R$  – радиус сферы и радиус эллипсоидного колеса в большой торцевой плоскости;  $R_1$  – текущий радиус начальной поверхности эллипсоидного колеса;  $\varphi$  – переменный угол между большой торцевой поверхностью колес 1, 2 с текущими радиусами  $R$  и  $R_1$ .

В качестве примера для дифференциала (рис. 14.62) примем:  $r_{\max} = 22$  мм;  $r_{\min} = 7$  мм;  $R = 20$  мм;  $\varphi_{\max} = 55^\circ$ ; тогда  $(u_{12})_{\max} = 3,25$ ,  $(u_{12})_{\min} = 0,31$ ,  $D = 10,48$ . Для дифференциала (рис. 14.63) примем:  $r_{\max} = 27$  мм,  $r_{\min} = 7$  мм,  $R = 20$  мм;  $R_1 = 25$  мм;  $\varphi_{\max} = 65^\circ$ ; тогда  $(u_{12})_{\max} = 4,15$ ;  $(u_{12})_{\min} = 0,24$ ,  $D = 17,29$ .

Из приведенных примеров видно, что для несимметричных пульсирующих дифференциалов коэффициенты блокировки равны: для дифференциала (рис. 14.62)  $K_g = -3,25$ ; для дифференциала (рис. 14.63)  $K_g = -4,15$ .

При таких коэффициентах блокировки вероятность полного использования сцепления ведущих колес составляет: для дифференциала (рис. 14.62) 76,2%, для дифференциала (рис. 14.63) 97,3%.

В качестве примера, используя формулу Виллиса, определим максимальное, минимальное число оборотов и крутящие моменты колеса В. Для этого используем зависимости:

$$(n_B)_{\max} = \frac{(1 + u_{AB}^{\max})n_6 - n_A}{(u_{AB})_{\max}}; \quad (n_B)_{\min} = \frac{(1 + u_{AB}^{\min})n_6 - n_A}{(u_{AB})_{\min}}; \quad (14.10)$$

$$(T_2)_{\max} = (u_{12}^7)_{\max} T_1; \quad (T_2)_{\min} = (u_{12}^7)_{\min} T_1.$$

Принимая:  $T_1 = 100 \text{ Нм}$ ;  $n_A = 10 \text{ об/мин}$ ;  $n_6 = 20 \text{ об/мин}$ .

Результаты счета сведены в таблицу 14.1.

Таблица 14.1

Наименование дифференциала	$(n_B)_{\max}$ об/мин	$(n_B)_{\min}$ об/мин	$T_{2\max}$ , Н.м.	$T_{2\min}$ , Н.м.
1. Эллиптическими колесами	59,37	22,5	394	25,4
2. Сферическими колесами	52	23	325	31
3. Эксцентричными колесами	40	17,47	295	50
4. Эллипсоидными колесами	25, 53	22,4	415	24
5. Круглыми колесами с переменным шагом	15,55	13,05	225	44

Как видим, при повороте и буксовании автотранспортного средства, число оборотов ведущих колес и вращающие моменты, действующие на ведущих колесах, меняются в широком диапазоне, что способствует быстрому передвижению автотранспортного средства.

Практика использования велосипеда показала, что наиболее эффективной в цикле педалирования является система привода, которая автоматически изменяла бы передаточное отношение между кривошипом и колесом с учетом положения кривошипа: когда кривошип приближается к горизонтальному положению,

передаточное отношение плавно уменьшается, а когда к вертикальному-увеличивается. Наиболее удачное решение, предусматривающее возможность реально использовать эту идею, предусматривает применение овальной звездочки, установленной на вал каретки велосипеда, совместно с компенсатором изменения длины цепи в виде обычного суппорта, применяемого на шоссейном гоночном велосипеде (рис. 13.64). Наиболее эффективным, обеспечивающим минимальную работу в цикле педалирования для привода гоночного велосипеда, является привод с овальными ведущими звездочками с параметрами: большая полуось эллипса  $a = 0,07215$  м; малая полуось эллипса  $b = 0,09277$  м; угол сдвига осей овала относительно кривошипа  $\varphi = 155^\circ$ . Период изменения числа оборотов и вращающего момента ведущего колеса велосипеда равен  $90^\circ$ .

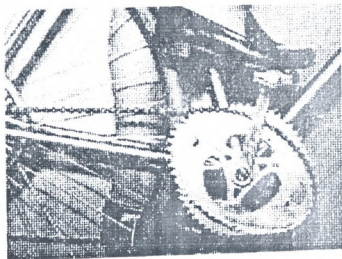


Рис. 14.64. Привод велосипеда с овальными звездочками

Вращательное движение кривошипов 1 (рис. 14.65) [152] с помощью вала 2 каретки 3 велосипеда, некруглых звездочек 4,5 и цепи 6 передается ведущему колесу 7 велосипеда. Колесо 7 совершает вращательное движение с переменной скоростью. Используя данные таблицы 7.3 передаточное отношение цепной передачи:  $u_{\max} = 0,32$ ;  $u_{\min} = 0,194$  принимая число оборотов кривошипа  $n_1 = 50$  об/мин, число оборотов ведущего колеса 7 велосипеда:  $n_{\max} = 258$  об/мин;  $n_{\min} = 156$  об/мин.



эксцентричных колес 6, 7, круглых цилиндрических колес 8, 9, цепной передачи 10, 11, 12 передается ведущему колесу 13 велосипеда. На рис. 14.67 представлен велосипед с двухступенчатым редуктором. В редукторе в качестве первой ступени использованы эксцентричные цилиндрические колеса 6, 7 со средним передаточным отношением  $n=1$ . Передаточное отношение привода велосипеда (рис. 14.67):  $u_{\max} = 0,124$ ,  $u_{\min} = 0,055$ . Принимая число оборотов кривошипов  $n_2 = 50$  об/мин, число оборотов ведущего колеса  $n_{13}^{\max} = 909$  об/мин;  $n_{13}^{\min} = 403$  об/мин.



Рис. 14.67. Велосипед с трехступенчатым приводом

На каретке велосипеда (рис. 14.65) закреплена коробка скоростей 1 (рис. 14.68) [152]. Вращательное движение кривошипов 5 с помощью вала 3 передается некруглому колесу 2, которое жестко закреплено на валу 3. С помощью зацепления зубьев некруглых колес 2, 6 вращательное движение передается колесу 6, жестко закрепленному на валу 7. На шлицевом соединении вала 7, с возможностью свободного вращательного движения установлены круглые колеса 8, 9, торцевые плоскости которых оснащены кулачковыми полумуфтами 10, 11. На валу 7 шлицевым соединением, с возможностью перемещения вдоль вала 7, установлены полумуфты 12, 13 связанные с рычагами 14, 15. Колеса 8, 9 с помощью зацепления зубьев колес: 8, 16; 9, 17, цепной передачи 19, 20, 21

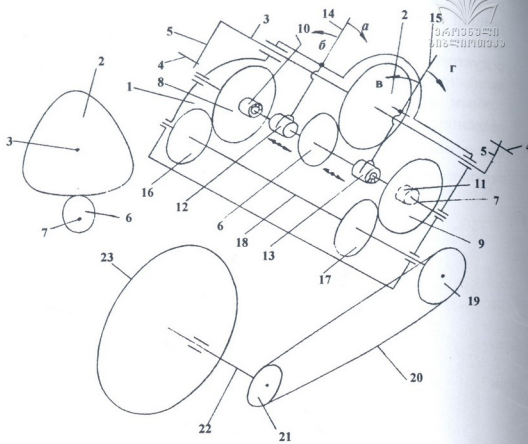


Рис. 14.68. Привод велосипеда с переменной скоростью

с круглыми звездочками, вала 22 связаны с ведущим колесом 23 велосипеда. Среднее передаточное отношение некруглых зубчатых колес 2, 6,  $n = 0,33$ . Принимая, что перед началом движения велосипеда рычаг 14 находится в положении *a*, кулачки полуумфт 10, 12 находятся в зацеплении. Вращательное движение кривошипов 5 с помощью вала 3, зацепления зубьев колес 2, 6, вала 7, шлицевого соединения, зацепления кулачков полуумфт 12, 10, зацепления зубьев колес 8, 16, вала 18, цепной передачи 19, 20, 21, вала 22 передается ведущему колесу 23, которое совершает вращательное движение с переменной угловой скоростью. При изменении профиля дороги велосипедист поворачивает рычаг 14 по стрелке б, полуумфты 10, 12 расцепляются. Одновременно велосипедист поворачивает рычаг 15 по стрелке в, кулачки

полу муфты 13 входят в зацепление с кулачками полу муфты 11. Вращательное движение вала 7 с помощью шлицевого соединения, зацепления кулачков полу муфт 13, 11; зацепления зубьев колес 9, 17, вала 18, цепной передачи 19, 20, 21, вала 22 передается ведущему колесу 23 велосипеда, которое совершает вращательное движение с переменной угловой скоростью.

Принимая передаточные отношения: некруглых колес 2, 6  $u_{max} = 0,69$ ;  $u_{min} = 0,37$ ; круглых колес 8, 16  $u = 0,5$ ; круглых колес 9, 17  $u = 0,3$ ; цепной передачи  $u = 0,3$ ; число оборотов кривошипов 5  $n_3 = 50$  об/мин, при зацеплении кулачков полу муфт 12, 10 число оборотов ведущего колеса 23  $n_{max} = 900$  об/мин,  $n_{min} = 480$  об/мин, при зацеплении кулачков полу муфт 13, 11 число оборотов ведущего колеса 23  $n_{max} = 1510$  об/мин,  $n_{min} = 797$  об/мин. Из рассмотренного примера видно, что проходимость велосипеда значительно увеличивается.

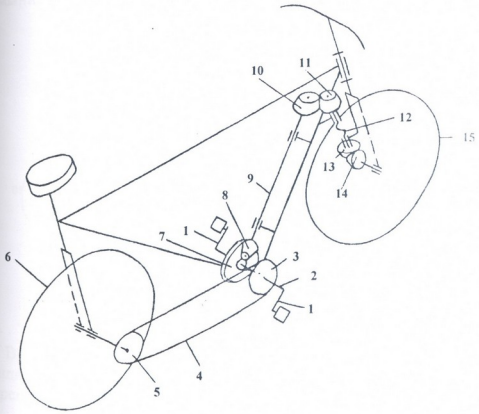


Рис. 14.69. Велосипед с обоими ведущими колесами



Вращательное движение кривошипов 1 велосипеда (рис. 14.69) [153] с помощью вала 2, цепной передачи 3, 4, 5 с некруглыми звездочками передается заднему ведущему колесу 6. Одновременно вращательное движение вала 2 с помощью зацепления зубьев круглых конических колес 7, 8, вала 9, зацепления зубьев круглых конических колес 10, 11, с помощью гибкого вала 12, зацепления зубьев некруглых конических колес 13, 14 передается переднему ведущему колесу 15 велосипеда.

Вращательное движение кривошипов 1 гоночного велосипеда (рис. 14.70) [154] с помощью вала 2, цепной передачи 3, 4, 5 с некруглыми звездочками передается валу 6 и заднему ведущему колесу 7. Вращательное движение вала 6 с помощью зацепления зубьев конических колес 8, 9, вала 10, зацепления зубьев конических колес: 11, 12; 12, 13, вала 14, зацепления зубьев конических колес 15, 16, гибкого вала 17, зацепления зубьев конических колес 18, 19 передается переднему ведущему колесу 20. Колеса 7, 20 совершают вращательное движение с одинаковыми переменными

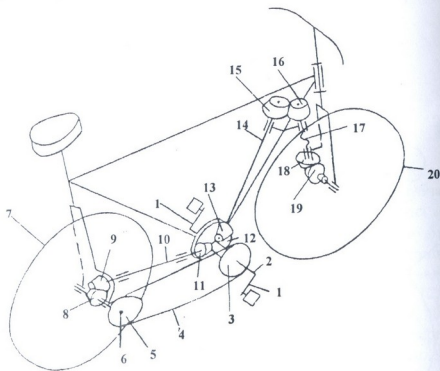


Рис. 14.70. Гоночный велосипед с обоими ведущими колесами

угловыми скоростями. При изменении профиля дороги велосипедист переводит цепь 7 на некруглые звездочки с разными делительными кривыми. Указанное изменяет число оборотов вращения и вращающий момент ведущих колес 7, 20 велосипеда.

В станке для поперечной прокатки изделий [181] колеса 1 (рис. 14.71), вращаясь с постоянной угловой скоростью в одном направлении, посредством зубчато-реечной передачи перемещают последовательно блоки 2 и 3. Клиновые инструменты, закрепленные на блоках, деформируют исходную заготовку 15, уменьшая ее в диаметре и увеличивая в длину. При выходе блоков 3 из рабочей зоны фиксаторы 12 входят в глухие отверстия 4 и 5. Рычаги 9 и 11, захватив блок 3, вращаются с некоторым ускорением, а в момент, предшествующий зацеплению рейки блока 3 с шестерней 14, с некоторым замедлением. Такой характер вращения рычагов 9 и 11 обеспечивается цепной передачей с эллиптическими звездочками 6 и 8.

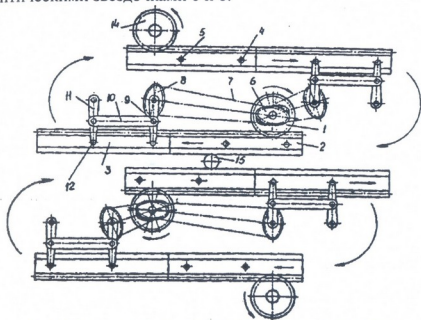


Рис. 14.71. Кинематическая схема станка для поперечной прокатки изделия

В механизме (рис. 12.72) для получения прерывистого вращательного движения на круговом эксцентрике 1, жестко закрепленном на ведущем валу 7, свободно вращается некруглая

звездочка 2. В течение каждого оборота эксцентрика звездочка 3 поворачивается цепью на некоторый угол и возвращается пружиной в исходное положение. Звездочка 3 связана при помощи муфты свободного хода с ведомым валом 5 так, что последний получает прерывистое вращение в одном и том же направлении. Угол поворота звездочки 3 и вала 5 за один оборот эксцентрика 1 изменяется (например, от  $20^\circ$  до  $60^\circ$ ) путем перевода рукоятки 4 [71].

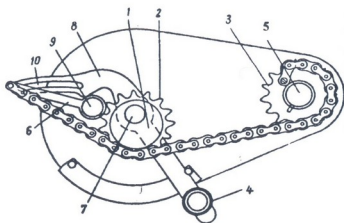


Рис. 14.72. Механизм прерывистого вращательного движения

При передаче заданного закона переменного передаточного отношения между валами, расположенными на значительном расстоянии, может быть использована зубчато-ременная передача [70]. Передача (рис. 14.73) состоит из ведущего и ведомого некруглых шкивов и ремня. Шкивы и ремень снабжены прямыми зубьями.

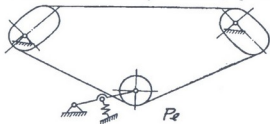


Рис. 14.73. Ременная передача с некруглыми шкивами

Зубчато-ременная передача, показанная на (рис. 14.74), [124] состоит из ведущего некруглого 1, ведомых некруглых 2, 3, 4 и кругло-некруглого 5 шкивов. В передаче используются бесконечный ремень 6 и натяжные ролики 7. Шкивы 1, 2, 3, 4, 5 и ремень 6 снабжены арочными зубьями 8.

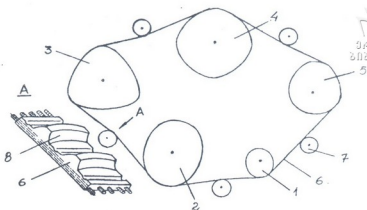


Рис. 14.74. Зубчато-ременная передача с некруглыми шкивами

Некруглые зубчатые колеса находят широкое применение в приборостроении для воспроизведения функции одного или нескольких независимых переменных [183]. В счетных машинах (рис. 14.75) некруглые зубчатые колеса воспроизводят многие математические функции – логарифмические, тригонометрические и др., с большей точностью, чем в случае применения кулачковых и рычажных механизмов, а также позволяют проектировать счетно-решающие механизмы с упрощенными конструктивными решениями, с меньшими габаритами и весом. Например, для воспроизведения заданной функции одного независимого переменного обычно применяется эксцентриковый механизм, который для силового замыкания, как правило, требует использования следящей системы. Применение же пары некруглых зубчатых колес исключает потребность как в эксцентриковом механизме, так и в следящей системе. Если воспроизводятся функции, производные которых в промежутке воспроизведения являются непериодическими, некруглые колеса имеют незамкнутые центроиды. Часть некруглых колес, применяемых в приборостроении, представлена на рис. 14.76.

Механизм некруглых колес, составленный из круглых цилиндрических эксцентриковых колес, применяется в приборе для определения высоты по барометрическому давлению.

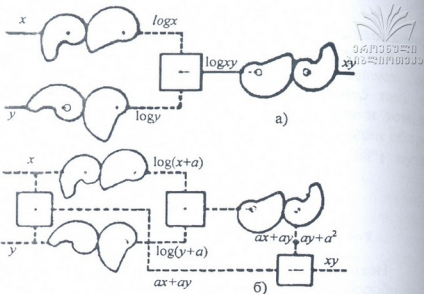


Рис. 14.75. Схемы для воспроизведения функциональных зависимостей

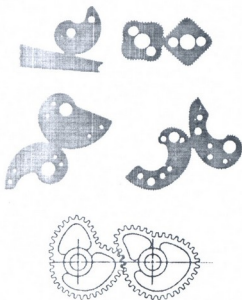


Рис. 14.76. Некруглые зубчатые колеса, применяемые в приборостроении

В различных счетно-вычислительных машинах может быть применена зубчатая логарифмическая передача [75]. На средней оси (рис. 14.77) закреплены независимо друг от друга зубчатые колеса 2, 3, 4 и 5, фиксированные в осевом направлении. Эти колеса имеют зубчатые венцы  $2a$ ,  $3a$ ,  $4a$  и  $5a$ , каждый из которых состоит из двух витков, выполненных по логарифмической спирали. На торцах колес также имеются цилиндрические зубчатые венцы разных диаметров  $2b$  и  $2c$ . При вращении колеса 2 с помощью привода 17, остальные колеса, благодаря промежуточным колесам 6, 7 и 8, закрепленным на оси 9, начинают вращаться с различными скоростями, при этом они могут последова-

тельно вступать в зацепление с колесом 10, имеющим возможность перемещаться вдоль оси 11. Конструкция колеса 10 аналогична конструкции колес 2, 3, 4 и 5. Благодаря направляющему штифту 13, проходящему через сквозную прорезь 14 в полном валу, последний вращается вместе с колесом 10, при этом скорость вращения изменяется по логарифмическому закону.

В коробке скоростей (рис. 14.78) на ведущем валу 20 закреплены цилиндрические зубчатые колеса 21, которые могут входить в зацепление с соответствующими колесами 28 подвижного зубчатого блока 34, который на шпонке может перемещаться вдоль оси ведомого вала 27. На блоке закреплено также некруглое наклонное зубчатое колесо 33, которое находится в зацеплении с некруглым колесом 26, закрепленным на ведущем валу. При перемещении специальным механизмом блока 34 зубчатые колеса 21, 28 одной из пар входят в зацепление друг с другом, а колеса зубчатой пары 33, 26 периодически входят в кратковременное зацепление друг с другом, причем в момент зацепления рабочие радиусы этой пары равны начальным радиусам цилиндрических колес, находящихся в зацеплении. При осевом перемещении блока 34, с целью изменения передаточного отношения, колеса зубчатой пары 33, 26 по всей ширине зубьев находятся в зацеплении друг с другом, обеспечивая динамическую связь валов 20 и 27. Благодаря специальному исполнению зубьев пары 33, 26, осевое перемещение блока 34 происходит равномерно.

В машинах-автоматах широко применяются механизмы, осуществляющие прерывистое периодическое движение рабочих органов. Среди таких механизмов наибольшее применение в

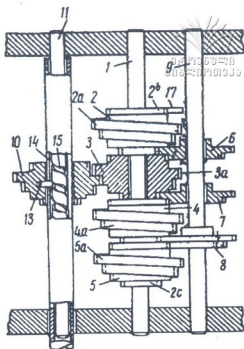


Рис. 14.77. Логарифмическая зубчатая передача

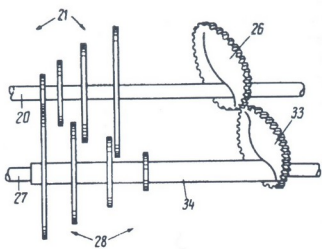


Рис. 14.78. Коробка скоростей

настоящее время получили кулачковые и мальтийские механизмы. Однако эти механизмы имеют существенные недостатки, которые лимитируют производительность автоматов. Шарнирно-рычажные механизмы, осуществляющие прерывистое движение, имеют некоторые преимущества перед кулачковыми, однако необходимость использования шестизвенных механизмов, которые в реальных условиях могут оказаться громоздкими и конструктивно неудобными, ограничивает возможность применения этих систем. Кроме того, эти механизмы способны обеспечить длительную остановку рабочего звена лишь в одном крайнем положении, что во многих случаях бывает недостаточно. Для получения прерывистого периодического движения успешно могут быть использованы планетарные и дифференциальные механизмы с некруглыми колесами. Планетарные и дифференциальные механизмы с некруглыми колесами позволяют осуществить переменное передаточное отношение, закон изменения которого выражается функцией, имеющей в воспроизводимом интервале положительные, отрицательные, а также экстремальные значения. Ведомые звенья этих механизмов, в зависимости от передаточных отношений отдельных ступеней входящих в них передач, при равномерном вращении ведущего вала воспроизводят вращательное и возвратно-вращательное движение с изменяющейся по величине скоростью. При этих движениях



ведомые звенья могут иметь выстой. Преимущества планетарных и дифференциальных механизмов с некруглыми элементами заключаются в том, что они:

1. могут применяться при высоких скоростях, обеспечивая плавность перехода из состояния покоя к движению и обратно;
2. позволяют получать любые соотношения времени движения к времени цикла;
3. обеспечивают любое направление движения ведомого вала относительно ведущего;
4. позволяют создать компактный механизм с малым числом движущихся частей, которые легко поддаются динамической балансировке.

Планетарный редуктор, первая ступень которого составлена из круглых колес с неподвижным центральным колесом, а вторая

– из некруглых колес (рис. 14.79), применяется фирмой ASEA в Швеции [185] для контактных переключателей трансформатора. Выходные валы механизма, связанные с рукоятками контактного переключателя трансформатора, совершают вращательные движения с остановками (рис. 14.80).

В механизме картофелекопателя (рис. 14.81) планетарная передача с эллиптическими колесами с малой разностью

полуосей применяется для сообщения лопаткам наклона относительно вертикали в небольших пределах [71].

На рис. 14.82 представлен макет планетарной передачи с эллиптическими коническими колесами, изготовленный нами по схеме рис. 7.39. Центральное эллиптическое колесо закреплено неподвижно, угол скрещивания колес  $\Sigma = 60^\circ$ . При передаточном отношении круглых конических колес  $u_{кр} = 1$  и эксцентриситете эллиптических конических колес  $e = 0,2$  вал ведомого круглого кони-

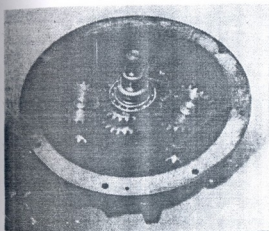


Рис. 14.79. Планетарный редуктор с некруглыми колесами



ческого колеса совершает качательное движение с мгновенными остановками в крайних положениях. Угол качания равен  $45^\circ$

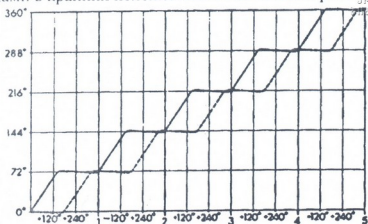


Рис. 14.80. График движения ведомого вала

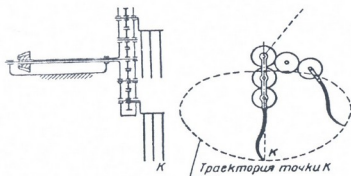


Рис. 14.81. Схема планетарного механизма картофелекопателя

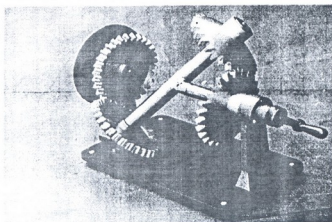


Рис. 14.82. Макет планетарной передачи с эллиптическими коническими колесами

На рис. 14.83 представлен макет планетарной передачи с эллиптическими цилиндрическими колесами, изготовленный нами по схеме рис. 7.19. Центральное эллиптическое колесо закреплено неподвижно. При передаточном отношении круглых цилиндрических колес  $u_{кр} = 1$  и эксцентриситете эллиптических цилиндрических колес  $e = 0,2$  вал ведомого круглого цилиндрического колеса совершает качательное движение с мгновенными остановками в крайних положениях. Угол качания равен  $50^\circ$ .

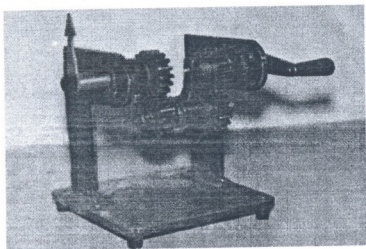


Рис. 14.83. Макет планетарной передачи с эллиптическими цилиндрическими колесами

Дифференциал с некруглыми колесами применяется в машине для выравнивания длины волокон [174]. На равномерно вращающемся валу 1 (рис. 14.84) закреплено ведущее некруглое колесо 2, находящееся в зацеплении с ведомым некруглым колесом 3, с которым соединено центральное круглое зубчатое колесо 4 внутреннего зацепления. Этой цепью колесо 4 получает вращательное движение с неравномерной угловой скоростью. С другой стороны, от вала 1 через круглые колеса 5 и 6 вращение с равномерной угловой скоростью передается водилу 7 дифференциала. Сателлитные колеса 8 находятся в зацеплении с центральными колесами 4 и 9. От колеса 9 через вал 10, колеса 11, 12 валу 13 сообщается возвратно-вращательное движение с остановками.

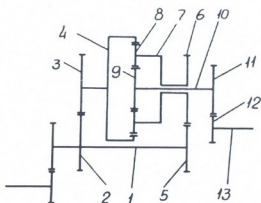


Рис. 14.84. Дифференциал с некруглыми цилиндрическими колесами

Некруглые колеса, в соединении с дифференциалом, позволяют получить бесступенчатое изменение передаточного отношения [186], использование которого, например, в автомобилях сократит расход горючего на 30%. На рис. 14.85 показана схема базовой сборки дифференциала с обгонной муфтой и передачей отбора мощности. Крутящий момент передается через обгонную муфту только тогда, когда вал водила вращается с постоянной непрерывной скоростью, определяемой вращением выходного вала. Винтом контрольного механизма фиксируется фазовый угол ведущих колес. При постоянной скорости вращения ведущего вала передача обеспечивает изменение скорости вращения ведомого вала 2 с сохранением постоянства передаточного отношения. Величина и закон изменения передаточного отношения при заданных параметрах передачи определяются центроидами некруглых колес и сдвигом фаз ведущих колес. Для сохранения заданного передаточного отношения за полный оборот ведущего вала 1 требуются четыре набора ведомых некруглых колес и связанных с ними дифференциалов. Такой механизм обеспечивает бесступенчатое изменение передаточного отношения от 1:1 до 1:2,67.

В первой ступени планетарного вариатора (рис. 14.86) на осях 13 ведущего вала 6 свободно установлены двойные сателлиты 2 и 3. Колеса 2 – некруглые и находятся в зацеплении с неподвижным солнечным колесом 1. Круглые цилиндрические колеса 3

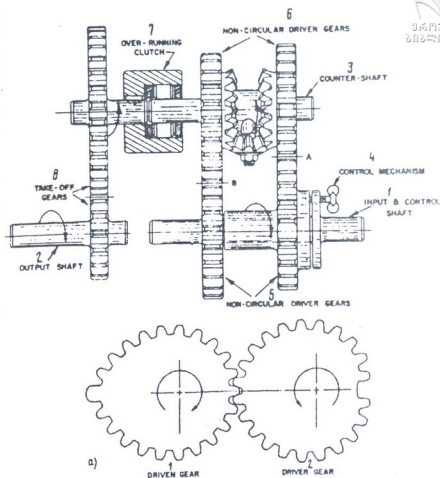


Рис. 14.85. Схема бесступенчатой передачи с некруглыми колесами

входят в периодическое зацепление в точке  $C$  с центральным колесом 4, ось вращения которого проходит через точку  $B$ , расположенную эксцентрично относительно оси вращения водила 6, проходящую через точку  $A$ . Центроиды некруглых колес 1 и 2 обеспечивают одинаковую скорость вращения сателлитов 3 в период их зацепления с колесом 4. Регулирование величины передаточного отношения достигается изменением относительного положения колеса 1 и сателлитов 2. Вторая ступень вариатора обычная и состоит из сателлитов 10, центрального колеса 12, солнечного колеса 11 и выходного вала 9. Вал 9 получает вращение, которое является результирующей при суммировании вращений колеса 12, связанного с колесом 4, и

сателлитов 10, связанных с водилом 6. Для компенсации несоосности, возникающей между колесами 4 и 12 при изменении эксцентриситета колеса 4 относительно оси водила и вала 9, колеса 12 и 4 соединяются через компенсирующую зубчатую муфту, состоящую из венцов 7 и 8 [168].

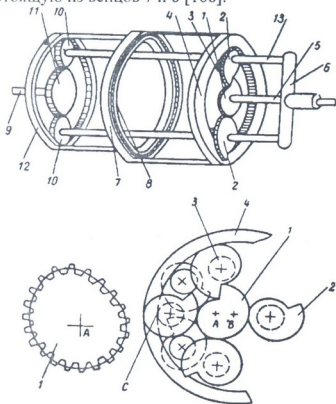


Рис. 14.86. Вариатор с некруглыми колесами

Планетарный привод с некруглыми колесами можно использовать в мешальных и месильных устройствах (рис. 14.87) [109]. Перемешивание жидкостей с разными фазами, красок, эмульсий, суспензий и т.д. с переменной скоростью обеспечивает интенсификацию технологического процесса, сокращает время перемешивания, увеличивает выход продукта из сырья и улучшает качество получаемого продукта.

От электродвигателя 1 через редуктор 2, вал 3, водило 4, сателлитные колеса 5, мешалки 6 получают переносное движение с постоянной скоростью вокруг оси неподвижного цент-

рального цилиндрического некруглого колеса 7. Одновременно с этим некруглые колеса 5, обкатываясь по колесу 7, мешалкам 6 сообщают относительное движение с переменной скоростью вокруг своих осей. При этом перерабатываемый материал совершает вращательное движение с постоянной скоростью вокруг оси центрального колеса и вращательное движение с переменной скоростью вокруг осей мешалок.

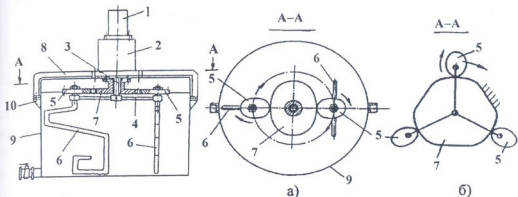


Рис. 14.87. Мешальное устройство

Для перемешивания разных материалов с разной интенсификацией перемешивания среднее передаточное отношение некруглых колес 5, 7 в простом ряду можно выбрать из соотношения: 1:1; 1:2; 1:3 и т.д. На рис. 14.87, а показаны центры колес 5, 7 при  $n = 2$ , а на рис. 14.87, б – при  $n = 3$ .

Функция передаточного отношения планетарной передачи с цилиндрическими эллиптическими колесами определяется зависимостью

$$u_{45}^7 = 1 + \frac{1}{nk} \frac{1 - e^2}{1 + e^2 - 2e \cos \varphi_4}. \quad (14.11)$$

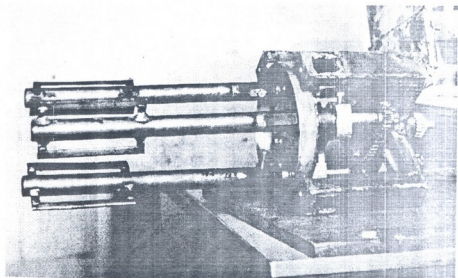
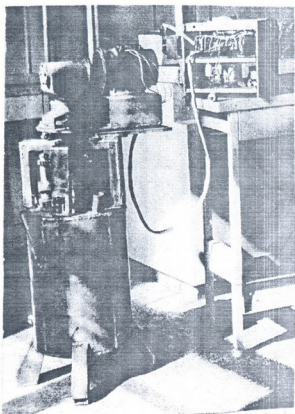
Допустим, требуется трехкратное перемешивание перерабатываемого материала. При этом  $n = 3$ ,  $k = 3$ , примем  $e = 0,2$ . По формуле (14.11) проведен расчет. Часть результатов расчета сведена в таблицу 14.1. Из расчетных данных видно, что за один оборот водила скорость вращательного движения мешалок 6 вокруг геометрических осей колес 5 от минимума до максимума меняется трижды, что обеспечивает трехкратную интенсификацию перемешивания.

$\varphi_4^0$	$u_{45}^7$	$\varphi_4^0$	$u_{45}^7$	$\varphi_6^0$	$u_{45}^7$
0	1,6666	120	1,6666	240	1,6666
20	1,1269	140	1,1269	260	1,1269
40	1,0860	160	1,0860	280	1,0860
60	1,0740	180	1,0740	300	1,0740
80	1,0860	200	1,0860	320	1,0860
100	1,1269	220	1,1269	340	1,1269

Была разработана и испытана лабораторная установка мешалки (рис. 14.88). Испытания в производстве двуокиси марганца показали, что мешалка обеспечивает повышение интенсификации перемешивания, уменьшение марганца в отходах и повышение качества получаемого продукта.

Допустим, что для интенсификации процесса перемешивания требуется воспроизвести прерывистое возвратно-поступательное вращательное движение мешалок по закону, показанному на рис. 14.89, где  $\varphi_{\text{вп.}}$  – переносное вращательное движение мешалок по направлению вращения часовой стрелки;  $\varphi_{\text{наз.}}$  – переносное вращательное движение мешалок против направления вращения часовой стрелки. Для решения данной задачи в качестве привода используем замкнутую дифференциальную передачу (рис. 7.43).

При вращении электродвигателя (рис. 14.90) [126] через муфту вращательное движение передается валу I, на котором жестко закреплены некруглое 1 и круглое 3 колеса. От колес 1, 2 колес 5, 6, 7, вала II, муфты, вала III вращательное движение с переменной угловой скоростью передается водилу  $H_1$ . Одновременно с этим от колес 3, 4, водила H, колес 6, 7, вала II, муфты, вала III вращательное движение с постоянной угловой скоростью передается водилу  $H_1$ . При вращении водила  $H_1$  некруглые колеса 8, обкатываясь по неподвижно закрепленному некруглому колесу 9, через вал 10 мешалкам 11 сообщают переносное и относительное движения с переменной скоростью вокруг вала III и геометрической оси вала 10.



Րիս. 14.88. Լաբորատորայն տնտնո՞վոն մեշոկոն



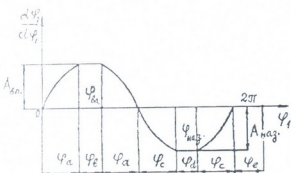


Рис. 14.89. Закон движения мешалок

Для воспроизведения заданной функции необходимо определить радиус-векторы центроид колес 1, 2. Для этого используем методику, приведенную в работе [184].

Обозначим угловые скорости колес 1, 2...7 и воила Н соответственно

$\omega_1, \omega_1 \dots \omega_7$  и  $\omega_H$ . Передаточное отношение дифференциала

$$u_{75}^H = \frac{\omega_7 - \omega_H}{\omega_5 - \omega_H},$$

откуда

$$\omega_7 = u_{75}^H \omega_5 + \omega_H (1 - u_{75}^H). \quad (14.12)$$

Из рис. 14.89 видно, что:  $\omega_5 = \omega_2 = -u_{21} \omega_1$  или  $\omega_5 = \frac{d\phi_2}{dt} =$

$= -u_{21} \frac{d\phi_1}{dt}$ ;  $\omega_H = \omega_4 = -u_{43} \omega_3 = -u_{43} \omega_1$  или  $\omega_H = -u_{43} \frac{d\phi_1}{dt}$ , где:

$u_{21}, u_{43}$  – переменное и постоянное передаточные отношения колес 1, 2 и 3, 4;  $\phi_1, \phi_2$  – углы поворота колес 1, 2.

Учитывая знак минус передачи  $u_{75}^H$ , уравнение (14.12) запишем в виде

$$\frac{d\phi_7}{dt} = u_{75}^H \frac{d\phi_2}{dt} - u_{43} (1 + u_{75}^H) \frac{d\phi_1}{dt}, \quad (14.13)$$

где  $\phi_7$  – угол поворота колеса 7.

Тогда передаточное отношение дифференциала определится зависимостью

$$\frac{d\phi_7}{d\phi_1} = u_{75}^H \frac{d\phi_2}{d\phi_1} - u_{43} (1 + u_{75}^H). \quad (14.14)$$

Передаточное отношение некруглых колес запишем в виде

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{1}{u_{75}^H} \frac{d\phi_7}{d\phi_1} + u_{43} (1 + u_{75}^H), \quad (14.15)$$

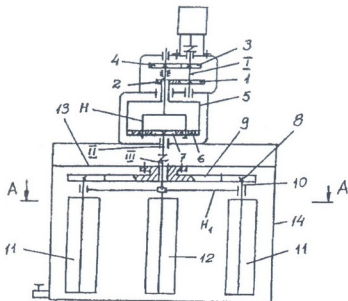


Рис. 14.90. Мешальное устройство

Функция положения некруглого колеса 2 примет вид

$$\varphi_2 = \frac{1}{u_{75}^H} \int \frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} d\varphi_1 + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{76}^H} \right) \varphi_1 + C, \quad (14.16)$$

где  $C$  – постоянное интегрирования.

Ось  $\varphi_1$  (рис. 14.89) разделим на участки  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$ ,  $\varphi_d$ ,  $\varphi_e$ , которые соответствуют углам поворота некруглого колеса 1 на соответствующем участке закона движения. Закон движения вала II-II запишем так:

первый участок:  $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_a$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = \frac{A_{en}}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi\varphi_1}{\varphi_a} \right); \quad (14.17)$$

второй участок:  $\varphi_a \leq \varphi_1 \leq \varphi_a + \varphi_b$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = A_{en}; \quad (14.18)$$

третий участок:  $\varphi_a + \varphi_b \leq \varphi_1 \leq 2\varphi_a + \varphi_b$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = \frac{A_{en}}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(\varphi_1 - \varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_a} \right]; \quad (14.19)$$

четвертый участок:  $2\varphi_a + \varphi_b \leq \varphi_1 \leq 2\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = \frac{A_{en}}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi(\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_c} \right]; \quad (14.20)$$

пятый участок:  $2\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c \leq \varphi_1 \leq 2\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = A_{наз.}; \quad (14.21)$$

шестой участок:  $2\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d \leq \varphi_1 \leq 2\varphi_a + \varphi_b + 2\varphi_c + \varphi_d$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = \frac{A_{наз.}}{2} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi[\varphi_1 - (2\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d)]}{\varphi_c} \right\}; \quad (14.22)$$

седьмой участок:  $2\varphi_a + \varphi_b + 2\varphi_c + \varphi_d \leq \varphi_1 \leq 2\varphi_a + \varphi_b + 2\varphi_c + \varphi_d + \varphi_e$

$$\frac{d\varphi_7}{d\varphi_1} = 0. \quad (14.23)$$

Из рис.14.89

$$\varphi_{en} = \frac{1}{2} A_{en} \varphi_a \cdot 2; \quad \varphi_{наз.} = \frac{1}{2} A_{наз.} \varphi_c \cdot 2,$$

определяем

$$A_{en.} = \frac{\varphi_{en.}}{\varphi_c + \varphi_a}; \quad A_{наз.} = \frac{\varphi_{наз.}}{\varphi_c + \varphi_d}. \quad (14.24)$$

Используя зависимости 14.16...14.23, передаточное отношение и функция положения некруглого колеса 2 определяются зависимостями:

для первого участка, передаточное отношение

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \left\{ \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{en}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right\} - \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{en}}{\varphi_a + \varphi_b} \cos \frac{\pi\varphi_1}{\varphi_a},$$

откуда интегрированием и с учетом начальных условий функция положения

$$\varphi_2 = \left\{ \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{en}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right\} \varphi_1 - \frac{1}{2\pi u_{75}^H} \frac{\varphi_{en}}{1 + \varphi_b/\varphi_a} \sin \frac{\pi\varphi_1}{\varphi_a}; \quad (14.25)$$

для второго участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{A_{\text{ан}}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right);$$

$$\varphi_2 = \left\{ \frac{1}{u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right\} (\varphi_1 - \varphi_a) +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right\} \varphi_a; \quad (4.26)$$

для третьего участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{A_{\text{ан}}}{2u_{75}^H} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(\varphi_1 - \varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_a} \right] + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right);$$

$$\varphi_2 = \left[ \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] (\varphi_1 - \varphi_a - \varphi_b) +$$

$$+ \left[ \frac{1}{u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_a +$$

$$+ \left[ \frac{1}{2u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_b +$$

$$+ \frac{\varphi_a}{2\pi u_{75}^H} \frac{\varphi_{\text{ан}}}{\varphi_a + \varphi_b} \sin \frac{\pi(\varphi_1 - \varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_a}; \quad (14.27)$$

для четвертого участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{A_{\text{наз}}}{2u_{75}^H} \left[ 1 - \cos \frac{\pi(\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_c} \right] + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right),$$

$$\varphi_2 = \left[ \frac{A_{\text{наз}}}{2u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] (\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b) + \left[ \frac{A_{\text{ан}}}{2u_{75}^H} + \right.$$

$$+ u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \left. \right] 2\varphi_a + \left[ \frac{A_{\text{ан}}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_b -$$

$$- \frac{\varphi_c}{2\pi u_{75}^H} A_{\text{наз}} \sin \frac{\pi(\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b)}{\varphi_c}; \quad (14.28)$$

для пятого участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{A_{наз}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right);$$

$$\varphi_2 = \left[ \frac{A_{наз}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] (\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c) + \left[ \frac{A_{наз}}{2u_{75}^H} + \right.$$

$$\left. + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_c + \left[ \frac{A_{вн}}{2u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] 2\varphi_a +$$

$$\left. + \left[ \frac{A_{вн}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_b; \quad (14.29)$$

для шестого участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{A_{наз}}{2u_{75}^H} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c - \varphi_d)}{\varphi_c} \right] + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right);$$

$$\varphi_2 = \left[ \frac{A_{наз}}{2u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] (\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c - \varphi_d) +$$

$$\left. + \left[ \frac{A_{наз}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_d + \left[ \frac{A_{вн}}{2u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_c + \right.$$

$$\left. + \left[ \frac{A_{вн}}{2u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] 2\varphi_a + \left[ \frac{A_{вн}}{u_{75}^H} + u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \right] \varphi_b + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi_c}{2\pi u_{75}^H} A_{наз} \sin \frac{\pi(\varphi_1 - 2\varphi_a - \varphi_b - \varphi_c - \varphi_d)}{\varphi_c}; \quad (14.30)$$

для седьмого участка

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right);$$

$$\varphi_2 = u_{43} \left( 1 + \frac{1}{u_{75}^H} \right) \varphi_1 + \frac{1}{u_{75}^H} (\varphi_{вн} + \varphi_{наз}). \quad (14.31)$$

Из зависимости (14.31)

$$u_{75}^H = \frac{\varphi_{вн} + \varphi_{наз} + u_{43}\varphi_1}{\varphi_2 - u_{43}\varphi_1}. \quad (14.32)$$

Среднее передаточное отношение некруглых колес примем  $n = 1$ , тогда при повороте колеса 1 на угол  $\varphi_1 = 2\pi$ , колеса 2 тоже повернутся на угол  $\varphi_2 = 2\pi$ . Тогда, используя (14.32), можно написать:

$$\varphi_{\text{вп}} = 2\pi u_{75}^H (1 - u_{43}) - \varphi_{\text{наз.}} - 2\pi u_{43}. \quad (14.33)$$

Для расчета радиус-векторов центроид некруглых колес используем зависимости

$$\begin{aligned} r_1 &= a_w \frac{d\varphi_2/d\varphi_1}{(d\varphi_2/d\varphi_1) + 1}; \\ r_2 &= a_w - r_1; \\ \varphi_2 &= \int_0^{\varphi_1} u_{21}(\varphi_1) d\varphi_1, \end{aligned} \quad (14.34)$$

где межосевое расстояние некруглых колес 1, 2 примем  $a_w = 150$  мм.

Используя вышеприведенные зависимости, проведен расчет, для чего разработан алгоритм. При расчете приняты:  $\varphi_a = 44^\circ$ ;  $\varphi_b = 19^\circ$ ;  $\varphi_c = 71^\circ$ ;  $\varphi_d = 60^\circ$  и  $\varphi_e = 51^\circ$ . В таблице 14.2 приведены часть расчета центроид некруглых колес и угла поворота ведомого колеса. Анализ полученных данных показывает, что ведомое звено дифференциала совершает симметричное реверсивное движение  $\varphi_{\text{вп}} = \varphi_{\text{наз.}} = 115^\circ$  по заданному на рис. 14.89 закону. На рис. 14.91 показано зацепление кругло-некруглых колес 1,2. На рис. 14.92 показана схема движения встречных потоков при перемешивании. Очевидно, что при возвратно-поступательном движении встречных потоков намного повысится интенсификация перемешивания, сократится время технологического цикла и улучшится качество получаемого продукта.

Для интенсификации процесса перемешивания разных продуктов может быть использована мешалка с эксцентричными цилиндрическими колесами.

$\varphi_1^0$	$r_1, \text{MM}$	$r_2, \text{MM}$	$\varphi_2^0$	$\varphi_1^0$	$r_1, \text{MM}$	$r_2, \text{MM}$	$\varphi_2^0$
0	73,9347	76,0563	0	165	64,7396	85,2604	196,648
10	76,7930	73,2070	9,9823	179	63,5395	85,4605	207,059
20	83,1359	66,8641	21,3782	180	63,5339	86,4661	207,794
30	89,1330	60,8670	34,9398	200	63,5339	86,4661	216,584
40	92,4991	57,5009	50,4059	239	63,5339	86,4661	245,975
44	92,9147	57,0853	56,8868	240	63,5395	86,4605	252,615
45	92,9320	57,0680	58,5150	250	64,1972	85,8028	260,013
55	92,9320	57,0680	74,7995	260	65,7884	84,2116	267,646
63	92,9320	57,0680	87,8270	270	67,9343	82,0657	275,683
64	92,9147	57,0853	89,4552	280	70,1785	79,8215	284,218
75	90,4734	59,5266	107,9240	290	72,1091	77,8909	293,25
85	85,1150	64,8850	121,1310	300	73,4427	76,5773	302,688
95	78,5145	71,4855	133,1410	310	73,9393	76,0607	312,36
105	74,2191	75,7809	143,4180	311	73,9437	76,0563	313,332
115	73,7312	76,2688	153,135	320	73,9437	76,0563	322,082
125	72,7215	77,2785	162,29	330	73,9437	76,0563	331,804
135	71,0083	78,9917	171,9	340	73,9437	76,0563	341,527
145	68,8454	81,1546	180,64	250	73,9437	76,0563	351,249
155	66,6057	83,3943	188,87	360	73,9437	76,0563	360

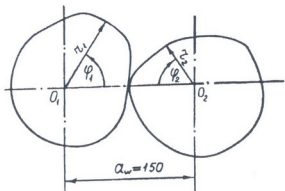


Рис. 14.91. Кругло-некруглые центры колес 1,2

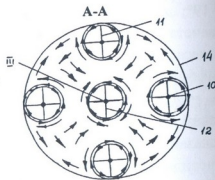


Рис. 14.92. Схема движения встречных потоков при перемещении

В мешалке с планетарным приводом с эксцентричными цилиндрическими колесами (рис. 14.93) от электродвигателя 1 через редуктор 2, вал 3, эластичные водилы  $H_1, H_2, H_3, H_4$  с центральным эксцентричным колесом 4 и сателлитными эксцентричными колесами 5, 6, 7, 8, с разными эксцентриситетами и с разными радиусами делительных окружностей мешадки 9 получают

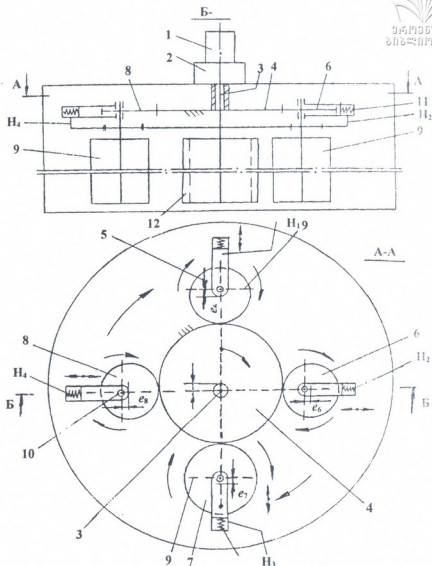


Рис. 14.93. Мешалка с планетарным приводом с эксцентричными цилиндрическими колесами

переносное движение с постоянной скоростью вокруг оси 3 центрального цилиндрического эксцентричного колеса 4, закрепленного неподвижно. Одновременно с этим сателлитные эксцентричные колеса 5, 6, 7, 8, обкатываясь по колесу 4, мешалкам 9 сообщают относительное движение с переменной скоростью



вокруг осей 10 и радиальное движение с переменной скоростью в направлении центра вала 3. Пружины 11, растягиваясь – сжимаясь, обеспечивают постоянное зацепление зубьев сателлитных и центральных колес. Одновременно с этим мешалка 12, закрепленная на оси 3 совершает вращательное движение с постоянной скоростью.

Функции передаточного отношения определяются зависимостями:

$$u_{H15}^4 = 1 - \frac{r_4}{r_5}; \quad u_{H26}^4 = 1 - \frac{r_4}{r_6}; \quad u_{H37}^4 = 1 - \frac{r_4}{r_7}; \quad u_{H48}^4 = 1 - \frac{r_4}{r_8}, \quad (14.35)$$

где:

$$r_4 = \sqrt{a_4^2 - e_4^2 \sin^2 \varphi_4} - e_4 \cos \varphi_4;$$

$$r_6 = \sqrt{a_6^2 - e_6^2 \sin^2 \varphi_6} - e_6 \cos \varphi_6; \quad r_7 = \sqrt{a_7^2 - e_7^2 \sin^2 \varphi_7} - e_7 \cos \varphi_7;$$

$r_8 = \sqrt{a_8^2 - e_8^2 \sin^2 \varphi_8} - e_8 \cos \varphi_8$ ;  $a_4$ ;  $a_5$ ;  $a_6$ ;  $a_7$ ;  $a_8$  – радиусы окружностей колес 4, 5, 6, 7, 8;  $e_4$ ;  $e_5$ ;  $e_6$ ;  $e_7$ ;  $e_8$  – эксцентриситеты колес 4, 5, 6, 7, 8.

При движении мешалок образуются встречные потоки перерабатываемого материала. Перерабатываемый материал получает вращательные и линейные движения с разными скоростями.

Планетарную передачу с некруглыми колесами возможно использовать в безэксцентриковом универсальном мотовиле (рис. 14.94, 14.95, 14.96) [103]. Безэксцентриковое универсальное мотовило содержит пустотелый вал, лучи, граблины с пальцами и механизм поворота граблин. Последний состоит из эллиптического солнечного колеса 9 и эллиптических 10 и овальных 11 сателлитных колес планетарного редуктора 8. Каждое овальное колесо 11 установлено последовательно относительно эллиптических сателлитного 10 и солнечного 9 колес. Оси вращения эллиптических колес 9 и 10 расположены в фокусе их эллипса и лежат на двух прямых, расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях. При работе мотовила колеса 10 и 11 вместе с корпусом редуктора 8 совершают переносное вращательное движение вокруг вала 12. При этом колеса 10 и 11, обкатываясь вокруг неподвижно закрепленного колеса 9, получают вращательное движение с переменной угловой скоростью. Угловая скорость граблин в момент соприкосновения со стеблями –

минимальная во избежание вымолота зерна. После соприкосновения граблин с колосьями угловая скорость мотвила увеличивается и во время срезания стеблей достигает максимума. Траектория движения пальцев обеспечивает подъем стеблей нормальной, средней и полной полеглости.

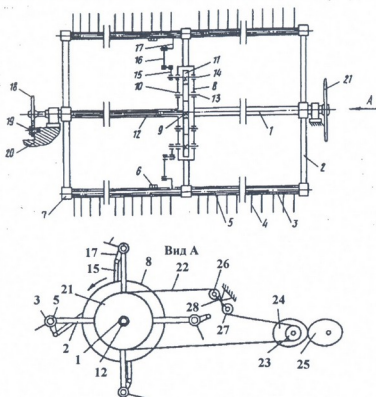


Рис. 14.94. Общий вид безэксцентрикового универсального мотвила

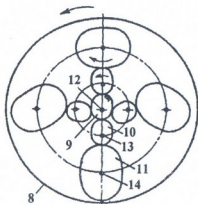


Рис. 14.95. Планетарная передача с некруглыми колесами

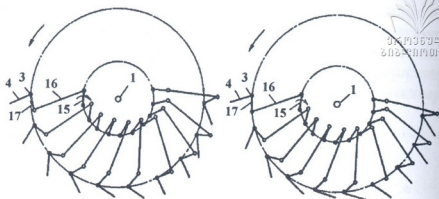


Рис. 14.96. Схема движения пальцев при уборке стеблей начальной, средней и полной полеглости

Функции положения и передаточного отношения планетарного ряда некруглых колес 9, 10, 11 определяются зависимостями:

$$\varphi_{11} = \varphi_2 - \arctg \left[ \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \right];$$

$$u_{11.H} = 1 - \frac{(1-e^2)^2}{\left[ (1+e)^4 + (1-e)^4 \right] - \left[ (1+e)^4 - (1-e)^4 \cos \varphi_2 \right]}, \quad (14.36)$$

где:  $\varphi_{11}$  – угол поворота колеса 11;  $\varphi_2$  – угол поворота мотовила;  $e$  – эксцентриситет колес 9, 10 и 11.

В вариаторе [200] применяется червячная передача с эксцентричным червячным колесом. С помощью гидравлической сервосистемы изменяется величина эксцентриситета вала и, следовательно, передаточное отношение.

Приведенный краткий обзор использования некруглых зубчатых колес показывает, что в современной технике зубчатые передачи с переменным передаточным отношением находят все более широкое применение.



1. Артоболевский И.И. Зубчатые передачи в современной технике. 1980, т. IV, – 487 с.
2. Андреев А.Ф., Ванцевич В.В., Лефаров А.Х. Дифференциалы колесных машин. – Москва: Машиностроение, 1987. – 175 с.
3. Американская техника и промышленность // Сб. рекламных материалов. В.Ф. Коуте – Новые методы обработки шестерен, 1976, с. 161-162.
4. Белозерский А.К., Смирнов Г.П., Свиридов Н.М. Брошюровочно-переплетные машины. II ч. – М.: Книга, 1971. – 281 с.
5. Богданов Н.Н. Некоторые вопросы проектирования одного из видов некруглых колес. Тр. ИМАШ СССР, том XXII, вып. 88, 1961.
6. Бежанов Б.Н., Бушунов Б.Т. Производственные машины-автоматы. М.: Машгиз, 1953. – 366 с.
7. Гордеев В.А., Волков П.В. Ткачество. М., 1958. 550 с.
8. Гъльбов В.Б. Върху синтеза, анализа и производство на некръгли зъбни колеса. Дисс. ктн. София. 1975. – 31 с.
9. Гуревич А.С. Теория зацепления некруглых конических колес с криволинейными зубцами и методы их нарезания. Дисс. ктн Тбилиси. 1973. – 151 с.
10. Варсимашвили Р.Ш. Определение главных кривизн и главных направлений поверхностей зубцов некруглых конических колес при однопараметрическом огибании // Труды ГПИ, 1975, № 1(174).
11. Варсимашвили Р.Ш. Подрезание зубцов некруглых конических колес при однопараметрическом огибании // Труды ГПИ, 1975, № 1(174).
12. Варсимашвили Р.Ш. Прямозубые некруглые конические колеса с постоянной высотой ножки зубцов // Труды ГПИ, 1967, № 3(115).
13. Варсимашвили Р.Ш. Аналитическое исследование некруглых конических колес с постоянной высотой ножки зубцов // Труды ГПИ, 1967, № 3(116).

14. Варсимашвили Р.Ш. Планетарные механизмы с некруглыми колесами // Труды ГПИ, 1967, № 3(115).
15. Варсимашвили Р.Ш. Дифференциальные механизмы с некруглыми колесами // Труды ГПИ, 1967, № 4(116).
16. Варсимашвили Р.Ш. Некруглые колеса и их применение в технике // ГрузНИИИТ. Техническая информация. Машиностроение, 1969, № 6.
17. Варсимашвили Р.Ш. Силы, действующие в зацеплении с прямозубой некруглой конической передачей // Труды XV научно-технической конференции ГПИ, 1970, вып. 10.
18. Варсимашвили Р.Ш. Исследование дифференциальных механизмов с некруглыми зубчатыми колесами // Труды XV научно-технической конференции ГПИ, 1970, вып. 10.
19. Варсимашвили Р.Ш. Кинематические особенности некоторых механизмов с некруглыми зубчатыми колесами // Труды ГПИ, 1971, № 1(136).
20. Варсимашвили Р.Ш., Журавлев Г.А., Шахбазов Н.А. Оптимальные геометрические параметры эвольвентных цилиндрических передач с круговыми зубьями // Труды ГПИ, 1971, № 3(143).
21. Варсимашвили Р.Ш. Расчет профилей кулачков для нарезания некруглых конических колес методом обкатки // Сообщения АН Грузии, 1972, 60, № 1.
22. Варсимашвили Р.Ш. Расчет на прочность некруглой конической передачи // Труды ГПИ, 1972, № 4(152).
23. Варсимашвили Р.Ш. Кривизна поверхностей прямых зубьев некруглых конических колес // Труды ГПИ, 1973, № 7(163).
24. Варсимашвили Р.Ш., Прилепский И.А., Гуревич А.Е. Зубофрезерный станок для нарезания некруглых конических колес с криволинейными зубьями // ГрузНИИИТИ техническая информация. – 1973, № 16.
25. Варсимашвили Р.Ш. Исследование зацепления некруглых конических колес, нарезаемых при двухпараметрическом огибании // Сообщения АН Грузии, 1974, 75, № 12.
26. Варсимашвили Р.Ш. Исследование сферической зубчатой передачи с прямыми зубьями // Сообщения АН Грузии, 1975, 77, № 3.

27. Варсимашвили Р.Ш. Подрезание прямых зубцов некруглых конических колес // Сообщения АН Грузии, 1975, 78, № 1.
28. Варсимашвили Р.Ш. Кривизна нормальных поверхностей некруглых конических колес при двухпараметрическом огибании // Сообщения АН Грузии, 1975, 78, № 2.
29. Варсимашвили Р.Ш. Зуборезные станки для нарезания некруглых конических зубчатых колес // ГрузНИИНТИ. Техническая информация. Машиностроение, 1975, № 5.
30. Варсимашвили Р.Ш. Подрезание зубцов некруглых конических колес, образуемых при двухпараметрическом огибании // Сообщения АН Грузии, 1976, 81, № 2.
31. Варсимашвили Р.Ш. Образование гиперболоидной зубчатой передачи с переменным передаточным числом // Сообщения АН Грузии, 1976, 82, № 1.
32. Варсимашвили Р.Ш., Саникидзе В.К. Нарезание сферических зубчатых колес с прямыми зубьями // Сообщения АН Грузии, 1976, 83, № 2.
33. Варсимашвили Р.Ш. Подрезание зубцов некруглых конических колес, образуемых при двухпараметрическом огибании // Сообщения АН Грузии, 1976, 81, № 2.
34. Варсимашвили Р.Ш. Зацепление конических зубчатых колес с переменным передаточным отношением // Изв. высш. учебных заведений. Машиностроение, № 10, 1976.
35. Варсимашвили Р.Ш. Червячная передача с переменным передаточным числом // Сообщения АН Грузии, 86, № 3. 1977.
36. Варсимашвили Р.Ш. Некруглые цилиндрические зубчатые колеса с круговыми зубьями // Сообщения АН Грузии, 87, № 1, 1977.
37. Варсимашвили Р.Ш. Устройство для нарезания некруглых цилиндрических колес с круговыми зубьями // Труды ГПИ, № 4(115), 1977.
38. Варсимашвили Р.Ш. Зубофрезерный станок с программным управлением для нарезания некруглых цилиндрических колес // ГрузНИИНТИ Машиностроение, № 1, 1977.
39. Варсимашвили Р.Ш. Спиroidная цилиндрическая передача с переменным передаточным отношением // Сообщения АН Грузии, 98, № 1, 1978.



40. Варсимашвили Р.Ш. Спироидная коническая передача с переменным передаточным отношением // Сообщения АН Грузии, 98, № 1, 1978.
41. Варсимашвили Р.Ш. К исследованию гипоидной передачи с переменным передаточным отношением // Сообщения АН Грузии, 89, № 1, 1978.
42. Варсимашвили Р.Ш. К образованию зубчатых передач со скрещивающимся осями, имеющих переменное передаточное отношение. – В сб. Доклады Всесоюзного совещания «Перспективы развития и использования спироидных передач и редукторов». Ижевск, 1979.
43. Варсимашвили Р.Ш. Зубофрезерный станок для нарезания колес спироидной передачи с переменным передаточным отношением. – В сб. Доклады Всесоюзного совещания «Перспективы развития и использования спироидных передач и редукторов». Ижевск, 1979.
44. Варсимашвили Р.Ш. Руда Л.Г. Нарезание круговых зубьев некруглых цилиндрических зубчатых колес // Сообщения АН Грузии, 95, № 2, 1979.
45. Варсимашвили Р.Ш. Некруглые конические зубчатые колеса с зацеплением Клингельберга // Научные труды ГПИ, ТММ, № 9(219), 1979.
46. Варсимашвили Р.Ш. Зуборезный станок для нарезания некруглых конических колес // Научные труды ГПИ «Технология машиностроения», № 11(221), 1979.
47. Варсимашвили Р.Ш. К расчету кулачков при нарезании некруглых конических колес с зацеплением Клингельберга // Научные труды ГПИ «Технология машиностроения», № 11(221), 1979.
48. Варсимашвили Р.Ш. Зубофрезерный станок с числовым программным управлением // Научные труды ГПИ «Расчет и конструирование деталей машин», № 3(224), 1980.
49. Варсимашвили Р.Ш. Зубофрезерный станок для нарезания некруглых цилиндрических колес // Труды ГПИ, № 2(234), 1981.
50. Варсимашвили Р.Ш., Кахиани М.Р. Нарезание некруглых колес на универсальных станках с ЧПУ // Вестник машиностроения № 7, 1984, с. 43-44.



51. Варсимашвили Р.Ш. Методы нарезания и теория зацепления некруглых зубчатых колес. Дисс. дтн. Москва, 1985.
52. Варсимашвили Р.Ш., Кахиани М.Р. Планетарные передачи с некруглыми колесами // Научные труды ГПИ, № 8(320), 1987.
53. Варсимашвили Р.Ш. Дифференциальные механизмы с нелинейными цилиндрическими передачами // Научные труды ГПИ № 87, 1987.
54. Варсимашвили Р.Ш. Исследование планетарных механизмов с нелинейными цилиндрическими передачами // Научные труды ГПИ, № 12(432), 1987.
55. Варсимашвили Р.Ш. Дифференциальные механизмы с нелинейными передачами // Научные труды ГПИ № 12(433), 1987.
56. Варсимашвили Р.Ш., Руда Л.Г. Кашмадзе Р.А. Изготовление некруглых зубчатых колес с использованием систем программного управления // Труды ГТУ №10, 1992.
57. Варсимашвили Р.Ш. Исследование передач с некруглыми колесами // Международный конгресс, Болгария, София, 1995.
58. Варсимашвили Р.Ш. Туманишвили Г.А. Мешальное и месильное устройство с переменной скоростью // Труды ГТУ, 1997, № 2(413), с. 94-98.
59. Варсимашвили Р.Ш. Классификация зубчатых передач с переменным передаточным отношением // Труды ГТУ, 1997, № 5(416), с. 71-77.
60. Варсимашвили Р.Ш., Кашмадзе Р.Ш. Использование планетарной передачи для равенсивного симметричного движения // Труды ГТУ № 2(413), 1997, с. 86-94.
61. Варсимашвили Р.Ш. Геометрические параметры начальных поверхностей передач с некруглыми колесами // Georgian engineering news, № 3, 2000.
62. Варсимашвили Р.Ш. Зубчатые вариаторы // Проблемы прикладной механики № 2, 2001, с. 50-56.
63. Варсимашвили Р.Ш. Исследования зацепления эллипсоидной зубчатой передачи // Проблемы прикладной механики №3, 2001.



64. Варсимашвили Р.Ш. Зубчатые передачи с переменным передаточным отношением // Georgian engineering news, № 4, 2003, с. 108-110.
65. Варсимашвили Р.Ш. Исследование торцевой зубчатой передачи внешнего зацепления // Международная конференция «Техника приводов 03». Болгария, София, 2003, с. 261-269.
66. R. Varsimashvili. Investigation of facial gearing engagement // Международная конференция, Республика Чехия, 2005, с.73-76.
67. Варсимашвили Р.Ш. Устройства, повышающие интенсификацию перемешивания // Проблемы механики, № 4, 2006, с.109-111.
68. Воробьевский В.И. Опыт эксплуатации и наладки гильзовых машин и их конструкция. – М.: ГОСИНТИ, 1958. – 176 с.
69. Киасбеили А.Ш., Лифшиц Л.М. Счетчики и расходомеры жидкости с овальными шестернями. – М.: Машиностроение, 1983. – 485 с.
70. Кожевников С.Н., Погребняк А.П. Конструирование и расчет механизмов с зубчатыми ременными передачами. – Киев.: Наука думка, 1984. – 111 с.
71. Кожевников С.Н., Есипенко Я.И., Раскин Я.М. Механизмы. – М.: Машиностроение, 1976. – 484 с.
72. Кожевников С.Н. Теория механизмов и машин. – М.: Машиностроение, 1969. – 583 с.
73. Кубато Макао. Теория некруглых зубчатых колес. Нарезание некруглых колес и применение. Кикай по кэнкю, 1960, т. 12. № 11. с. 1527-1532. Кикай по нэнко. 1961, т. 13, № 3, с. 483-488.
74. Зотоненко В.Т. Синтез механизмов ленточных перфораторов и устройство для обработки диаметральных кулачков. Дисс. ктн. Каунас, 1981. – 22 с.
75. Литвин Ф.Л. Некруглые зубчатые колеса. – Л., 1956. – 312 с.
76. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – М., 1960. – 442 с.
77. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. – Москва: Наука, 1968. – 584 с.
78. Литвинов А.С., Ротенбенг Р.В., Фрумкин А.К. Шасси автомобиля. М., 1963. – 503 с.

79. Литвин Ф.Л., Лившиц Г.А. К образованию некруглых конических колес // Машиноведение, № 1, 1968, с. 20-25.
80. Литвин Ф.Л., Варсимашвили Р.Ш. Нарезание некруглых конических колес по методу прерывистой обкатки // Станки и инструмент, 1970, № 5, с. 20-22.
81. Литвин Ф.Л., Варсимашвили Р.Ш. Метод нарезания цилиндрических зубчатых колес с применением системы программного управления // Сообщения АН Грузии, 1972, №12, с. 397-399.
82. Литвин Ф.Л., Варсимашвили Р.Ш. Метод нарезания цилиндрических некруглых зубчатых колес применением системы программного управления // Сообщения АН Грузии, 1972, 66, № 11.
83. Литвин Ф.Л., Варсимашвили Р.Ш. Нарезание некруглых цилиндрических зубчатых колес по методу прерывистой обкатки на станке с программным управлением // Сообщения АН Грузии, 1976, 81, № 3.
84. Литвин Ф.Л., Яблонский Н.С. Реверсивный симметричный механизм с некруглыми колесами. Известия ВУЗов, № 12, 1976, с. 23-29.
85. Марков Э.С. Поличастотный вибратор с механизмом некруглыми колесами // Изв. высш. учебн. заведений Машиностроение, 1965, № 8, с. 42-45.
86. Митропольский З.П., Фомченко В.Р. Проектирование ткацких станков. – Л.: Машиностроение, 1972. – 207 с.
87. Раймпель. Шасси автомобиля, рулевое управление. – Машиностроение, с. 144-146.
88. Утутов Н.Л. Исследование некруглых зубчатых колес с зацеплением новикова. Дис. ктн. 1975, 175 с.
89. А.с. 495170 (СССР). Устройство для нарезания некруглых конических колес к зубофрезерному станку. /Ф.Л. Литвин, Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ, 1975, № 46.
90. А.с. 660971 (СССР). Способ нарезания зубчатых колес. /Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ, 1979, № 17.
91. А.с. 701746 (СССР). Способ нарезания винтовой поверхности. /Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ, 1979, № 45.

92. А.с. 766773 (СССР). Устройство для нарезания <sup>некруглых</sup> конических колес. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1980, № 36.
93. А.с. 832182 (СССР). Червячная передача с переменным передаточным отношением. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1981, № 19.
94. А.с. 958043 (СССР). Сферический зуборезный инструмент. / Р.Ш. Варсимашвили, В.К. Саникидзе. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1982, № 34.
95. А.с. 1009659 (СССР). Способ обработки конических зубчатых изделий. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1983, № 13.
96. А.с. 633676 (СССР). Способ нарезания зубьев торцовых зубчатых колес. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1978, № 43.
97. А.с. 660791 (СССР). Способ нарезания зубчатых колес. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1979, № 17.
98. А.с. 610623 (СССР). Способ нарезания круговых симметричных зубьев. / Р.Ш. Варсимашвили, Л.Г. Руда. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1978, № 22.
99. А.с. 593036 (СССР). Пространственная передача. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1978, № 6.
100. А.с. 832182 (СССР). Червячная передача с переменным передаточным отношением. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1981, № 19.
101. А.с. 1096057 (СССР). Зубофрезерный станок. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1984, № 21.
102. А.с. 1116355 (СССР). Роликовая машина. / Р.Ш. Варсимашвили, Ю.Н. Дроздов, Г.И. Туманишвили, Н.Г. Беришвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1984, № 361.
103. А.с. 1477304 (СССР). Безэксцентриковое универсальное мотовило. / Р.Ш. Варсимашвили, М.Р. Кахиани. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1989, № 17.
104. А.с. 1009659 (СССР). Способ обработки конических зубчатых изделий. / Р.Ш. Варсимашвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1983, № 13.
105. А.с. 1661855 (СССР). Устройство для намотки каркасных электрических катушек. / Р.Ш. Варсимашвили, Г.Н. Туманишвили, Ю.Н. Дроздов, Н.Г. Беришвили. – Опу<sup>бл.</sup> в БИ, 1984, № 36.



106. А.с. 1166355 (СССР). Роликовая машина / Р.Ш. Варсимашвили, Ю.И. Дроздов, Г.И. Туманишвили, Н.Г. Беридзе. – Оpubл. в БИ, 1984, № 36.
107. А.с. 1326819 (СССР). Волновая зубчатая передача. / Р.Ш. Варсимашвили, А.А. Гаглов, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ, 1987, № 28.
108. А.с. 1096057А (СССР). Зуборезный станок. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ, 1984, № 21.
109. Патент 594 (Грузия). Планетарный привод мешального и месительного устройств. / Р.Ш. Варсимашвили, М.Р. Кахиани. – Оpubл. в БИ, 1997, № 1.
110. Патент 1697В (Грузия). Дифференциал с переменным передаточным отношением. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1999, № 6.
111. Патент 566 (Грузия). Система речного управления транспортным средством / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1997, № 1.
112. Патент 595 (Грузия). Зубчатая передача с переменным углом между осями вращения колес. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1997, № 1.
113. Патент 1369 В (Грузия). Зубчатая передача с переменным углом между осями вращения колес. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ.
114. Патент 565 (Грузия). Рулевой механизм управления транспортным средством / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в Б.И. 1997, № 1.
115. Патент 3208В (Грузия). Зубчатая передача. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ.
116. Патент 1346В (Грузия). Зубофрезерный станок. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1998, № 6.
117. Патент 1344В (Грузия). Метод нарезания зубчатого колеса. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1998, № 6.
118. Патент 1369В (Грузия). Зубчатая передача с переменным углом между осями вращения колес. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 1998, № 6.
119. Патент 1661 (Грузия). Зубчато-шариковый вариатор. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили, Т. Чхандзе. – Оpubл. в БИ 1999, № 4.

120. Патент 2864В (Грузия). Зубчатые передачи / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 2002, № 24.
121. Патент 3003В (Грузия). Вариатор скорости. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 2003, № 12.
122. Патент 3209 (Грузия). Зубчатая передача и вариатор, оснащенный этой передачей. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 2004, № 6.
123. Патент 3208В (Грузия). Торцовые зубчатые передачи. / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 2004, № 6.
124. Патент U1351 (Грузия). Зубчатоременная передача. / Р.Ш. Варсимашвили, М.Р. Кахиани. – Оpubл. в Б.И. 2007, № 10.
125. Патент 4279В (Грузия). Планетарный привод мешального и месительного устройства / Р.Ш. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ 2007, № 24.
126. Патент 4456 (Грузия). Зубчатые передачи с устройством для компенсации зазоров и вариаторы, оснащенные этими зубчатыми передачами. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили. – Оpubл. в БИ. 2008, № 15.
127. Патент 5009 (Грузия). Станок для изготовления круглых, некруглых червяков / Р.Ш. Варсимашвили.
128. Патент 4279 (Грузия). Планетарный привод мешального устройства / Р.Ш. Варсимашвили.
129. Патент 5011 (Грузия). Зубодолбежный станок для изготовления некруглых, круглых цилиндрических колес / Р.Ш. Варсимашвили.
130. Патент 5012 (Грузия). Станок для нарезания некруглых, круглых конических зубчатых колес / Р.Ш. Варсимашвили.
131. Патент 5007 (Грузия). Станок для нарезания некруглых, круглых червяков. / Р.Ш. Варсимашвили.
132. Патент 1344АI (Грузия). Способ нарезания зубчатого колеса / Р.Ш. Варсимашвили.
133. Патент 5145 (Грузия). Червячная передача / Р.Ш. Варсимашвили.
134. Патент 5146 (Грузия). Гипоидная передача / Р.Ш. Варсимашвили.
135. Патент 5010 (Грузия). Метод нарезания круглых, некруглых зубчатых колес с арочными зубьями. / Р.Ш. Варсимашвили.



136. Патент 1326819 (Грузия). Волновая зубчатая передача. / Р.Ш. Варсимашвили, З.Р. Варсимашвили.
137. Патент 5008 (Грузия). Зубчатые вариаторы. / Р.Ш. Варсимашвили.
138. Патент 5465 (Грузия). Зуборезный станок с ЧПУ. / Р.Ш. Варсимашвили.
139. Патент 5466 (Грузия). Коническая зубчатая передача с некруглыми колесами. / Р.Ш. Варсимашвили.
140. Патент 5435 (Грузия). Зубчато-шариковая передача. / Р.Ш. Варсимашвили..
141. Патент 5467 (Грузия). Пространственная передача. / Р.Ш. Варсимашвили.
142. Патент 11034/01 (Грузия). Метод нарезания зубчатых колес с волнообразными делительными поверхностями / Р.Ш. Варсимашвили.
143. Патент 11035/01 (Грузия). Метод нарезания зубчатых колес с выпукло-вогнутыми начальными поверхностями.
144. Патент 558 (Грузия). Трансмиссия многоколесных машин. / Р.Ш. Варсимашвили.
145. Патент 6035 (Грузия). Пульсирующие дифференциалы. / Р.Ш. Варсимашвили.
146. Патент 6036 (Грузия). Реечное управление транспортного средства. / Р.Ш. Варсимашвили.
147. Патент 6054 (Грузия). Планетарные дифференциалы. / Р.Ш. Варсимашвили.
148. Заявка № 13030/01 (Грузия). Двигатель внутреннего сгорания. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.
149. Заявка № 13107/01 (Грузия). Двигатель внутреннего сгорания. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.
150. Заявка № (Грузия). Ротационный двигатель внутреннего сгорания. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.
151. Заявка № 13284/01 (Грузия). Механизм открывания-закрывания клапанов ДВС. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.
152. Заявка № 12634/01 (Грузия). Велосипеды с переменной скоростью. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.
153. Заявка № 12895/01 (Грузия). Велосипеды с обоими ведущими колесами. Положительное решение. / Р.Ш. Варсимашвили.




154. Заявка № 12981/01 (Грузия). Велосипед с обоими ведущими колесами. / Р.Ш. Варсимашвили.
155. Варсимашвили Р.Ш. Волновые передачи с зубчатыми колесами / Geogian engineering news, № 3, 2009, с. 32-38.
156. Варсимашвили Р.Ш. Волновые вариаторы // Geogian engineering news, № 3, 2009, с. 39-42.
157. Варсимашвили Р.Ш. Зубчатые вариаторы // Грузинский технический университет. Транспорт и машиностроение №3, 2009, с. 35-41.
158. Варсимашвили Р.Ш. Зубчато-шариковые передачи с переменным передаточным отношением // Грузинский технический университет. Транспорт и машиностроение №2, 2010, с. 59-75.
159. Варсимашвили Р.Ш. Зубчатая передача с некруглыми коническими колесами внутреннего зацепления. Грузинский технический университет. Транспорт и машиностроение №4, 2010, с. 35-39.
160. Варсимашвили Р.Ш. Зубчатые вариаторы со сферическими колесами // GEN 2010, № 2, 2010, с. 49-53.
161. Патент 29121000 (США). Drive mechanism Westerner Electric Co., Inc./Logan Alexander. 1959.
162. Elliptical Gears are Back and More Versatile than Ever. – Prod. Eng. (USA), 1972, 43, № 8, pp. 34-38.
163. Manufacture of Elliptic Gears. – Mach. shop. Mog. 1963, 24, № 2, pp. 62-67.
164. Патент 2,975,363 (США). Energy – baleen ced drive of a rotary system at cyclically repeating continuously varying The Hallden Machine Co./ Jingham James D., Draber Graven A. – 1960.
165. Elliptical Gears. Machinery (London), 1955, 87, № 2226, p.150.
166. Патент 1.311.313 (Франция). Noneur themiqueu. / M. Michel, Rene Boinaard / - Bulleten officiel de la Propriete indystrial №49 de 1962.
167. А.с. 1442541 (СССР). Пресс-спекатель для извлечения сусла из виноградной мезги. /З.Д. Джапаридзе, Н.К. Залдастанишвили, Г.Ш. Бериашвили. – Опубл. в Б.И. 1988, № 45.
168. Elliptical Gears are Back and More Versatile than Ever. Prod. Eng. (USA), 1972, 43, № 8, pp. 34-38.





169. Les engrenages elliptiques. Ind. franke – achats et entret. mater. industr., 1957, 6, № 68, pp. 1129, pp. 1131-1132.
170. Boyd W.W. Elliptical Gears Provide Feed control Machine Desing, 1940, vol. 12, № 1.
171. Les engrenages elliptiques. Ind. franke – achats et entret. mater. industr; 1957, 6, № 68, pp. 119, pp. 1131-1132.
172. Патент 118965 (Франция). Perfectionnemente aux transmissions a mouvement intermittent Robert – Eugene Jules Lecavelier, s.10. 1959.
173. Clausen Hugh. Application of Elliptical Gears Wheels. Engineer, 1961, 211, № 5496, pp. 859-860.
174. Elliptical Gears are Back and More Versatile than Ever. – Prod. Eng. (USA), 1972, 43, № 8, pp. 34-38.
175. Патент 668897 (Германия). Станок для нарезания овальных колес с помощью червячной фрезы, 1938.
176. Патент 296905 (США). Inertia momber /Vildhaber Ernest. 1960.
177. Патент 3010341 (США). Torque amplifiers / Smith William E. 1961.
178. А.с. 402418 (СССР). Привод управления механизма качания кристаллизатора. Л.П. Полосатов, К.С. Тарханов, В.Ф. Фукин. – Оpubл. в Б.И. 1973, № 12.
179. Патент 2152185 (ФРГ). Приводное устройство наматывающей машины. Оpubл. 1973.
180. Патент 1.311.313 (Франция). Moneur themique. / M. Michel, Rene Voinaard / - Bulleten officiel de la Propriete industrial №49 de 1962.
181. А.с. 573240 (СССР). Стенд для поперечной прокатки изделий. /Г.В. Андреев, В.А. Буйкевич, Э.М. Горбунов, Макушек, Метто, В.Я. Шукин. – Оpubл. в Б.И., 1977, №35.
182. Патент 842221 (Аналия). Improved means for giving a variable al rotation al movement to a part Simon Ltd.
183. Cunnigham Frederik N. Noncircular Gear. – Mach. Design, 1959, 31, № 4, pp. 161-164.
184. Elliptical Gears are Back and More Vetsatile than Evar. – Prod. Eng. (USA), 1972, 43, № 8, pp. 34-38.
185. Olsson Uno. Non – circular Gears. – Acta Politechnica. Mechanical Engineering Series, 1955, XXI, № 5, pp. 55-56.



186. Патент 150-683, 164-296 (Канада). Variable  output transmission. / Kerr I.H – 1972, 1973.
187. Ferguson R.I., Daws L.F., Kerr I.H. The Design of a Pollution in Non – circular Gears. – Mech. and Mach. Theory, 1975, 10, № 6, pp. 467-478.
188. Патент 905174 (Англия). Improvements in or relating to variable gearing. / Priestley Charles, 1962.
189. Elliptical Gears are Back and More Versatile than Ever. – Prod. Eng. (USA), 1972, 43, № 8, pp. 34-38.
190. Olsson V. Non – circular Bever Gears. Acta Polytechnica Scandinavica. Mech. Enging. Ser. № 5. – Srockholm, 1959. – 199 p.
191. Федотенок А.А. Кинематические связи в кинематических станках. – М.: Машгиз, 1960. – 299 с.
192. Ishida Kisuka. Ямагата дайгаку киё (когаку). – Bull. Yamafata Univ. (Engng), 1957, 4, pp. 184-194.
193. Rappaport Sigmund. Elliptical Gears for Cyclic Speed Variations. – Prod. Engng., 31, № 13, pp. 68-70.
194. Manufacture of Elliptic Gears. – Mach. Shop. Mag. 1963, №24, № 2, pp. 62-67.
195. Les engrenages elliptiques. – Ind. dranke-achats et ertrat. mater. industr.m 1957, 6, № 68, pp. 1129, 1131-1132.
196. Boyd W.W. Elliptical Geats Provide Feed Control. – Machine Design, 1940, vol. 12, № 1.
197. Патент 1189605 (Франция). Perfectionnements aux thansmissions a mouvement intermittent Robert-Eugene Iules Lecavelier, 5.10.1959.
198. А.с. 402418 (СССР). Привод управления механизма качания кристаллизатора. / Л.П. Полосатов, К.С. Тарханов, В.Ф. Щукин. – Оpubл. в Б.И., 1973, № 42.
199. Патент 905174 (Англия). Improvemente in or relating to variable gearing. / Priestley charles. – 5.09.1962.
200. Патент 2398 (Япония). Эксцентрикoвый вариатор с гидросилителем / Одзамото Кадзу-нари. – 31.01. 1968.
201. Яворская А.Р. Об использовании планетарного механизма с некруглыми колесами для получения прерывистого периодического движения.



От редактора .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
<b>ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ</b>	
1.1. Необходимые сведения о матрицах .....	6
1.2. Преобразование координат .....	7
1.3. Классификация зубчатых передач с переменным передаточным отношением .....	10
<b>ГЛАВА 2. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕДАЧ С НЕКРУГ-         ЛЫМИ КОЛЕСАМИ</b> .....	15
2.1. Относительное движение звеньев зубчатых передач с некруглыми колесами .....	15
2.2. Апсоиды некруглых колес .....	18
2.1.1. Апсоиды некруглых конических колес .....	23
2.1.2. Геометрические параметры начальных поверхностей передач с некруглыми коническими зубчатыми колесами .....	34
2.2. Методы нарезания колес .....	38
2.2.1. Методы нарезания некруглых конических колес .....	39
2.2.2. Методы нарезания некруглых червяков .....	43
2.2.3. Метод нарезания спироидного зубчатого колеса .....	44
2.2.4. Метод нарезания арочных зубьев некруг- лого цилиндрического колеса .....	45
2.2.5. Методы нарезания сферических колес .....	46
2.3. Методы нарезания некруглых цилиндрических колес с применением числового программного управления .....	47
2.4. Метод нарезания некруглых цилиндрических колес с внешними, внутренними зубьями с применением ЧПУ .....	53
2.5. Параметры движения при нарезании некруглых конических колес наружного зацепления по методу непрерывного огибания .....	56



2.6. Параметры движения при нарезании некруг- лых конических колес по методу прерывис- того огибания .....	63
2.7. Проектирование профилей кулачков .....	68

**ГЛАВА 3. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ СО СКРЕЩИ-  
ВАЮЩИМИСЯ ОСЯМИ .....** 71

3.1. Гипоидная передача. Уравнение зацепления .....	71
3.1.1. Поверхность зубьев нарезаемого колеса .....	76
3.2. Червячная передача. Уравнение зацепления .....	79
3.2.1. Уравнения боковой поверхности витков червяка и поверхности зацепления .....	82
3.2.2. Уравнение боковой поверхности зубьев червячного колеса .....	84
3.3. Спиroidные цилиндрические передачи .....	85
3.3.1. Спиroidная цилиндрическая передача с пространственным колесом. Уравнение зацепления .....	86
3.3.2. Уравнение боковой поверхности зубьев пространственного спиroidного колеса .....	89
3.4. Спиroidная коническая передача. Уравнение зацепления .....	90
3.4.1. Уравнение боковой поверхности витков червяка .....	93
3.4.2. Уравнение боковой поверхности зубьев спиroidного колеса .....	94

**ГЛАВА 4. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРЕСЕКАЮ-  
ЩИМИСЯ ОСЯМИ .....** 96

4.1. Некруглые конические колеса с прямыми зубьями. Уравнение зацепления .....	96
4.1.1. Уравнения линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезае- мого колеса .....	100
4.1.2. Кривизна поверхностей зубьев .....	103
4.1.3. Подрезание зубьев .....	106
4.2. Некруглые конические зубчатые колеса с круговыми зубьями. Уравнение зацепления .....	108

4.2.1. Уравнения линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезаемого колеса .....	110
4.2.2. Нормальная кривизна поверхностей зубьев .....	112
4.2.3. Кривизна поверхностей $P_n$ и $P_k$ в нормальном сечении, проведенном через вектор касательной к характеристике .....	115
4.2.4. Подрезание зубьев .....	116
4.3. Некруглые конические зубчатые колеса с циклоидальной линией зубьев. Уравнение зацепления .....	120
4.3.1. Поверхность зацепления, боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса .....	125
4.4. Некруглые конические зубчатые колеса с эвольвентной линией зубьев. Уравнения зацепления .....	127
4.4.1. Уравнение линии контакта и боковой поверхности зубьев нарезаемого колеса .....	130
4.5. Некруглые конические зубчатые колеса, нарезаемые цилиндрической червячной фрезой .....	132
4.5.1. Уравнение линии контакта, поверхности зацепления и поверхности зубьев нарезаемого колеса .....	137
4.5.2. Нормальная кривизна нарезаемой поверхности .....	139
4.5.3. Подрезание зубьев .....	143

## ГЛАВА 5. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМИ .....

147

5.1. Некруглые цилиндрические зубчатые колеса с арочными зубьями .....	147
5.2. Рациональные геометрические параметры зацепления .....	150
5.3. Торцовые зубчатые передачи внешнего зацепления .....	154
5.3.1. Виды торцовых зубчатых передач .....	154



5.3.2. Преимущества торцовых зубчатых передач .....	156
5.3.3. Нарезание торцовых зубчатых колес внешнего зацепления .....	157
5.3.4. Системы координат .....	158
5.3.5. Нарезание зубьев с правыми эвольвентны- ми продольными линиями .....	160
5.3.6. Уравнения зацепления .....	161
5.3.7. Боковая поверхность зубьев нарезаемого колеса .....	164
5.3.8. Нарезание зубьев с левыми эвольвентными продольными линиями .....	166
5.4. Торцовая зубчатая передача внутреннего зацепления .....	168
5.4.1. Уравнение левой боковой поверхности зубьев колеса .....	173
5.4.2. Нарезание зубьев с правыми эвольвентными линиями .....	174
5.5. Реечная передача .....	177

**ГЛАВА 6. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ С ПЕРЕМЕННЫМ  
УГЛОМ МЕЖДУ ОСЯМИ ВРАЩЕНИЯ  
КОЛЕС .....** 180

6.1. Полусферическая зубчатая передача .....	180
6.1.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса .....	183
6.2. Торoidalная передача .....	185
6.2.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса .....	189
6.3. Эллипсоидная зубчатая передача .....	190
6.3.1. Уравнение боковой поверхности зубьев колеса .....	195

**ГЛАВА 7. ПЛАНЕТАРНЫЕ ПЕРЕДАЧИ С  
НЕКРУГЛЫМИ КОЛЕСАМИ .....** 198

7.1. Необходимые сведения из геометрии некруглых цилиндрических колес, центроиды колес .....	198
7.2. Определение замкнутых центроид .....	200



7.3. Условия выпуклости центроид .....	202
7.4. Эллиптические цилиндрические колеса .....	204
7.5. Овальные колеса .....	211
7.6. Рядовое соединение некруглых зубчатых колес .....	213
7.7. Планетарные передачи с некруглыми цилиндрическими колесами .....	218
7.8. Планетарные передачи с некруглыми коническими зубчатыми колесами .....	242
7.9. Дифференциальные передачи с некруглыми цилиндрическими зубчатыми колесами .....	251
7.10. Дифференциальные передачи с коническими колесами .....	261
<b>ГЛАВА 8. ВОЛНОВЫЕ ПЕРЕДАЧИ С НЕКРУГЛЫМИ КОЛЕСАМИ .....</b>	<b>270</b>
8.1. Волновые зубчатые передачи с жесткими генераторами волн .....	270
8.2. Волновой зубчатый дифференциал .....	281
8.3. Волновые передачи с гибкими генераторами волн .....	284
8.4. Волновые вариаторы .....	287
8.5. Волновая резьбовая передача .....	293
<b>ГЛАВА 9. ЭКСЦЕНТРИЧНЫЕ ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ ....</b>	<b>295</b>
9.1. Передаточные отношения эксцентричных зубчатых колес .....	295
9.2. Планетарные передачи с эксцентричными цилиндрическими зубчатыми колесами .....	310
9.3. Планетарные передачи с эксцентричными коническими колесами .....	320
9.4. Дифференциальные передачи с эксцентричными зубчатыми колесами .....	323
9.5. Волновые передачи и эксцентричными колесами .	329
9.6. Планетарные передачи с эластичными водилами	331
<b>ГЛАВА 10. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗУБОРЕЗ- НЫХ СТАНКОВ .....</b>	<b>344</b>
10.1. Кинематическая схема станка для нарезания	

некруглых конических колес с прямыми, круговыми зубьями, циклоидальными и эвольвентными линиями зубьев .....	344
10.2. Кинематическая схема станка для нарезания некруглых конических колес с круговыми зубьями .....	346
10.3. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых конических колес .....	351
10.4. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых конических колес .....	352
10.5. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых, спироидных, многовитковых цилиндрических, некруглых и круглых червячных зубчатых колес .....	354
10.6. Зубодолбежный станок с ЧПУ для нарезания некруглых и круглых цилиндрических колес .....	357
10.7. Кинематические схемы станков с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых цилиндрических червяков .....	359
10.8. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых, круглых конических червяков .....	364
10.9. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания некруглых и круглых цилиндрических колес с арочными зубьями .....	366
10.10. Кинематическая схема зубофрезерного станка с ЧПУ для нарезания эллипсоидных, сферических, тороидных, некруглых и круглых конических зубчатых колес .....	369
10.11. Кинематическая схема станка с ЧПУ для нарезания зубчатых колес сферическим зуборезным инструментом .....	372
<b>ГЛАВА 11. ИЗГОТОВЛЕНИЕ КОЛЕС .....</b>	<b>382</b>
11.1. Нарезание некруглых конических колес по методу прерывистого огибания .....	382



11.2. Нарезание некруглых конических колес цилиндрической червячной фрезой .....	392
11.3. Нарезание некруглых цилиндрических колес с прямыми зубьями .....	392
11.4. Нарезание некруглых цилиндрических колес с арочными зубьями .....	397
11.5. Блок-схемы алгоритмов расчета параметров движения заготовки при нарезании некруглых колес .....	399
11.6. Нарезание некруглых колес по методу копирования .....	402
11.7. Нарезание зубчатых колес с переменным углом между осями вращения колес .....	409

## ГЛАВА 12. ЗУБЧАТЫЕ ВАРИАТОРЫ И ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ .....

	412
--	-----

12.1. Вариаторы с составными зубчатыми колесами .....	412
12.2. Вариаторы с эллипсоидными зубчатыми колесами .....	420
12.3. Симметричный реверсивный зубчатый вариатор .....	428
12.4. Зубчато-шариковые передачи .....	429
12.5. Зубчато-шариковый вариатор .....	436
12.6. Зубчатые передачи с выпукло-вогнутыми начальными поверхностями колес .....	438
12.7. Зубчатые передачи с составными колесами .....	443
12.8. Зубчатые передачи с переменным передаточным отношением .....	446
12.9. Зубчатые вариаторы со сферическими колесами .....	447
12.10. Зубчатые передачи с переменным, переменнопостоянным шагом .....	452
12.11. Новые зубчатые передачи с переменным передаточным отношением .....	460

## ГЛАВА 13. РАСЧЕТ ЗУБЬЕВ НЕКРУГЛЫХ КОЛЕС НА ПРОЧНОСТЬ. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ .....

	470
--	-----

13.1. Силы, действующие в зацеплении прямозубой некруглой цилиндрической передачи .....	470
---	-----



13.2. Расчет на контактную прочность активных поверхностей прямых зубьев некруглых цилиндрических колес .....	472
13.3. Расчет прямых зубьев некруглых цилиндрических колес на прочность при изгибе .....	475
13.4. Некруглые цилиндрические зубчатые передачи с винтовыми зубьями. Общие сведения .....	477
13.5. Косозубая некруглая цилиндрическая зубчатая передача. Общие сведения .....	479
13.6. Силы, действующие в зацеплении косозубой некруглой цилиндрической передачи .....	480
13.7. Расчет на контактную прочность активных поверхностей косых зубьев некруглых цилиндрических колес .....	481
13.8. Расчет косых зубьев некруглых цилиндрических колес на прочность при изгибе .....	482
13.9. Силы, действующие в зацеплении прямозубой некруглой конической передачи .....	483
13.10. Расчет активных поверхностей прямых зубьев некруглых конических колес на прочность по контактному напряжению .....	489
13.11. Расчет прямых зубьев некруглых конических колес по излому .....	490
13.12. Силы, действующие в зацеплении некруглой червячной передачи .....	492
13.13. Расчет на контактную прочность активных поверхностей зубьев некруглого червячного колеса .....	493
13.14. Расчет зубьев некруглого червячного колеса на усталость при изгибе .....	495
ГЛАВА 14. ПРИМЕНЕНИЕ НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС .....	497
ЛИТЕРАТУРА .....	480

Редактор М.А. Преображенская

Сдано в производство 29.10.2015 г. Подписано в печать 09.11.2015 г.  
Формат бумаги 60X84 1/16. Усл. печ. л. 37,5.

Издательский дом "Технический университет", Тбилиси,  
ул. М. Костава, 77



Verba volant,  
scripta manent

