

თ.ობგაძე, ა.ფრანგიშვილი, ა.ტრუსკინოვსკი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

დამხმარე სახელმძღვანელო

ფრაქტალები

III ტომი



საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თამაზ ოზგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი, ალექსანდრე
ტრუსკინოვსკი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

ფრაქტალები
დამხმარე სახელმძღვანელო
III

თბილისი
2016

დამხმარე სახელმძღვანელოს საფუძვლად დაედო ავტორების მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევის შედეგები. ამ ტომში განხილულია ცოცხალი სისტემის კონსტრუირების ფრაქტალური მეთოდები, გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალები; იტერირებად ფუნქციათა სისტემები; ფრაქტალურ-ვეივლეტური მეთოდების გამოყენება სიგნალების კოდირებისა და დეკოდირებისას; შესწავლილია დინამიკური ფრაქტალები, რომლებიც დაკავშირებულია კვადრატულ ასახვებთან კომპლექსურ არეში. მოყვანილია ჟულიას სიმრავლეების აგებისა და მანდელბროტის სიმრავლის ფორმირების პროგრამები.

ნაშრომი განკუთვნილია სტუ-ს ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მაგისტრატურისა და დოქტორანტურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტები: ასოც. პროფესორი ია მოსაშვილი,

აკადემიური დოქტორი ლაშა იაშვილი

© საგამომცემლო სახლი “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2016

ISBN 978-9941-20-470-8 (ყველა ტომი)

ISBN 978-9941-20-700-6 (მესამე ნაწილი)

შესავალი

მეცნიერები სამყაროს კვლევისა და მოდელირების პროცესში, როგორც წესი, ყურადღებას ამახვილებდნენ ისეთ სიმრავლეებსა და ფუნქციებზე, რომლებისთვისაც ადვილი გამოსაყენებელია გამოთვლის კლასიკური მეთოდები. ისეთ ფუნქციებს კი, რომლებიც არ იყო სათანადო სიგლუვის მატარებელი ანუ რეგულარული, ხშირად თვლიდნენ პათოლოგიებად და სათანადო ყურადღებას არ უთმობდნენ. მცირე დრო გავიდა, რაც სიტუაცია შეიცვალა და არაგლუვმა ფუნქციებმა თუ სიმრავლეებმა დიდი პოპულარობა მოიპოვა, რაც განპირობებულია ბუნებაში მიმდინარე პროცესების კომპიუტერით ზუსტად აღწერის აუცილებლობით. **ბენუა მანდელბროტის ფრაქტალური გეომეტრია** [1] სწორედ ასეთი არარეგულარული სიმრავლეების შესწავლითაა დაკავებული. ფრაქტალური გეომეტრიის ძირითადი ცნებაა **ფრაქტალი**, რომლის წარმოშობა მნიშვნელოვნადაა დაკავშირებული კომპიუტერული მოდელირების ამოცანებთან. მნიშვნელოვანია ფრაქტალების გამოყენება ინფორმაციის შეკუმშვისა და კომპიუტერული დიზაინის სფეროში. დიდი ხანი არაა, რაც ფრაქტალების საშუალებით აღიწერა წყლის გრუნტში ფილტრაციის ტრაექტორიები, ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე წარმოქმნილი ნათება, ხის ტოტების ზრდის დინამიკა, ადამიანის შინაგანი ორგანოების, ფსიქიკისა და ორგანიზაციული სისტემების ფრაქტალური სტრუქტურა.

ამჟამად არ არსებობს, მათემატიკის თვალსაზრისით, ფრაქტალის ზუსტი განსაზღვრება. **ლევერიეს** [2] აზრით, **ფრაქტალი** არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე გეომეტრიული ფრაგმენტი მეორდება სხვადასხვა მასშტაბში შემცირებისას. ასეთი ფრაქტალები წრფივი (აფინური) კუმშვადი მსგავსების ასახვით მიიყვანება “უძრავ წერტილამდე”, რომლის საწყისსაც **კონსტრუქციულ დედაფრაქტალს** ვუწოდებთ.

არსებობს სხვა ტიპის ფრაქტალიც, რომელიც არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში წარმოიქმნება და ამიტომ მას, ზოგჯერ, **დინამიკურ ფრაქტალს** უწოდებენ [3]. მასაც ახასიათებს “**მასშტაბური ინვარიანტობა**”, თუმცა მხოლოდ მიახლოებით. ორივე ტიპის ფრაქტალის ერთდროულად აღსაწერად ბენუა მანდელბროტმა მოგვცა ფრაქტალის შემდეგი განსაზღვრება: “**ფრაქტალი ისეთი**

სიმრავლეა, რომლის ტოპოლოგიური განზომილება ნაკლებია, ვიდრე მისი ჰაუსდორფის (ფრაქტალური) განზომილება”.

ცხადია, ამ განსაზღვრებას დამატებითი განმარტება სჭირდება, რომელსაც მოგვიანებით გავაკეთებთ. პირველი განმარტებით, ცნება “ფრაქტალი” წარმოდგება ლათინური სიტყვიდან “fractus”, რაც დამსხვრეულს ნიშნავს. მეორე განსაზღვრებაში ეს ცნება დაკავშირებულია ინგლისურ სიტყვასთან “fractional”, რაც წილადურს ნიშნავს.

დინამიკური ფრაქტალი 1918 წელს აღწერა ფრანგმა მათემატიკოსმა გასტონ ჟულიამ [4]. მაშინ კომპიუტერები არ არსებობდა და შესაბამისი გეომეტრიული ილუსტრაციები მხოლოდ მოგვიანებით გამოჩნდა [5].

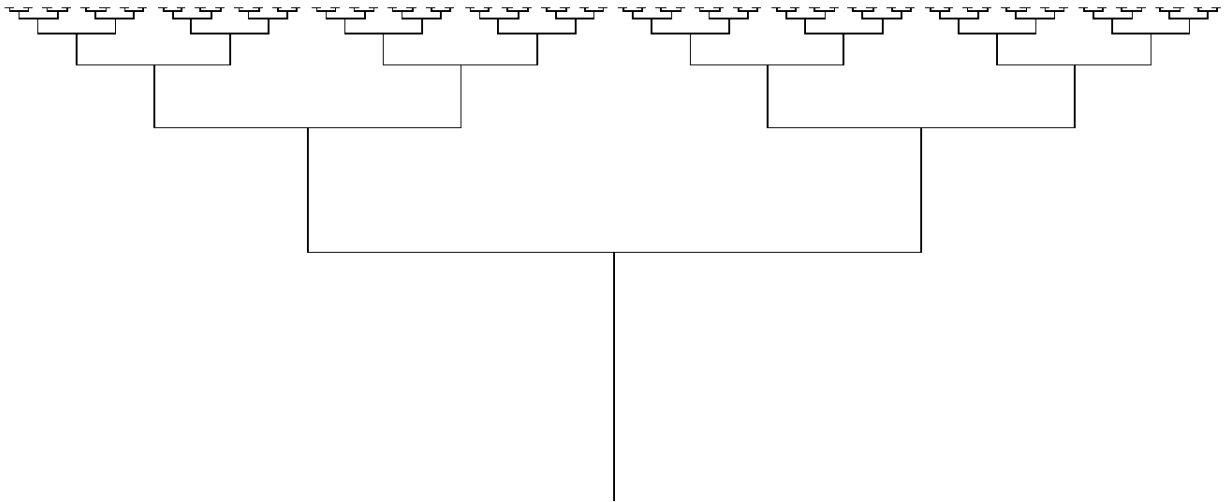
აღმოჩნდა, რომ ხისმაგვარ რეგულარულ მათემატიკურ ფრაქტალში თუ შევიტანთ შემთხვევით შემფოთებებს, მივიღებთ ნამდვილი ხის მოდელს. ფრაქტალებს იყენებენ რთული, სხვადასხვა ტიპის სიგნალების კლასიფიკაციისათვის, გამოიყენება ასევე ეკონომიკაში ვალუტის კურსის რხევების შესწავლისას, ჰიდროაერომექანიკაში ტურბულენტური დინების აღსაწერად, გრუნტში სითხის ფილტრაციის დროს ტრაექტორიების აღსაწერად. ფრაქტალისმაგვარი სიმრავლეებია ღრუბლის საზღვარი, ზღვის სანაპირო, დედამიწის რღვევის წირები, გულ-სისხლძარღვთა სისტემა, შინაგანი ორგანოების სტრუქტურა. გამოიყენება ქაოსის თეორიაში და ა.შ.

I თავი. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალი. ფრაქტალი და პოზიციური თვლის სისტემა

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ამჟამად არ არსებობს, მათემატიკის თვალსაზრისით, ფრაქტალის ზუსტი განსაზღვრება. ლევერიეს [2] განმარტებით, ფრაქტალი არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე გეომეტრიული ფრაგმენტი მასშტაბურად შემცირებისას სხვადასხვა მასშტაბში მეორდება. ასეთი ფრაქტალები წრფივი (აფინური) კუმშვადი მსგავსების ასახვით მიიყვანება “უძრავ წერტილამდე”. როგორც ვიცით, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ თითოეული რიცხვისათვის სხვადასხვა სიმბოლოს შემოღება არაპრაქტიკულია. აქედან გამომდინარე, შემუშავებულ იქნა პოზიციური თვლის სისტემები, რომლებიც სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით გვერდს უვლის ამ სირთულეს ნატურალური რიცხვების სხვადასხვა პოზიციაში განლაგებით და თითოეული პოზიციისათვის გარკვეული შინაარსის მინიჭებით. ამიტომ უწოდებენ ამ სისტემებს პოზიციურს. იმის მიხედვით, თუ რიცხვების ჩასაწერად რამდენ სიმბოლოს ვიყენებთ, განასხვავებენ *ორობით*, *რვაობით*, *ათობით*, *ოცობით*, *სამოცობით* და ა.შ. რიცხვით სისტემებს.

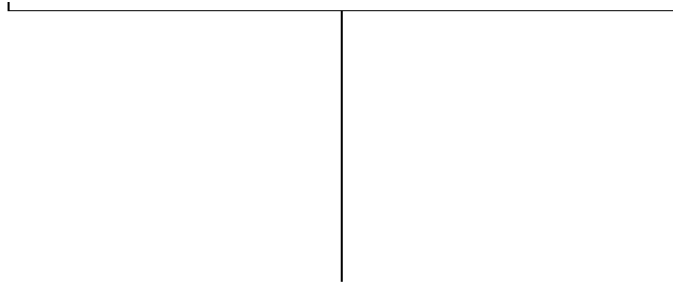
1.1. პოზიციური სისტემების ხისმაგვარი სტრუქტურა

განვიხილოთ ფრაქტალ “დენდრიტის” ერთ-ერთი სახე – ორობითი ხე. სიტყვა დენდრიტი წარმოდგება ბერძნული სიტყვისაგან “dendron”, რაც ხეს ნიშნავს.



ნახ. 1.1. ორობითი ხე

ეს სახელი სავსებით შეესაბამება ამ ფრაქტალს, რადგან მისი სტრუქტურა ძლიერ წააგავს ხის სტრუქტურას: ძირითადი დეროდან გამოდის ორი ტოტი, რომელთაგან თითოეული მასშტაბში უფრო მცირე დერო ხდება შემდგომი დატოტვისათვის და ა.შ. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მაშინ გვექნება დონეთა უსასრულო რაოდენობა (ნახ.1.1). ამ ნახაზზე თვალშისაცემია მათი მსგავსება სხვადასხვა მასშტაბში. შემცირების მასშტაბი არჩეულია 0.5. ვერტიკალური დეროების რაოდენობა ორმაგდება ყოველ მომდევნო დონეზე, ხოლო მათი სიგრძეები ორჯერ კლებულობს. ჰორიზონტალური ხაზები ორჯერ უფრო გრძელია წინა დონის ვერტიკალურ დეროსთან შედარებით. რაც უფრო ზემოთაა ტოტები, მით მჭიდროა მათი განლაგება. სიმრავლის ორ-ორ ელემენტად დაჯგუფება ან დაყოფა დამახასიათებელია თვლის ორობითი სისტემისათვის (ათობითი სისტემისათვის დამახასიათებელია ათ-ათ ელემენტად დაჯგუფება). 1.1 ნახ-ზე წარმოდგენილია ორობითი სისტემის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ფრაქტალ-დენდრიტის ფორმით. ამ ფრაქტალის წარმომქმნელ საწყის ფრაგმენტს -- ელემენტს დედაფრაქტალს ვუწოდებთ. 1.1 ნახ-ზე გამოსახულ დენდრიტის დედაფრაქტალს ექნება 1.2 ნახ-ზე მოცემული სახე.



ნახ. 12. ორობითი ხის დედაფრაქტალი

ათობითი სისტემა, რომლითაც ვსარგებლობთ, ინდოელებმა შეიმუშავეს 14 საუკუნის წინ, ხოლო ჩინელებმა უფრო ადრე. თანამედროვე ათწილადები ევროპაში სიმონ სტევენმა მიიღო მეთექვსმეტე საუკუნეში. ათობითი სისტემა მოქნილია და პრაქტიკული. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ 10-ის ხარისხის მეშვეობით:

$$2016 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0. \quad (1.1)$$

ათობითი სისტემის გავრცელება ალბათ დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ ადამიანს აქვს 10 თითი. შეიძლება სხვა პლანეტაზე ცხოვრობდეს ხალხი, რომელთაც 8 თითი აქვთ და მათთვის უფრო ბუნებრივია რვაობითი სისტემა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ათობით სისტემას, როგორც ნებისმიერ სხვას, ნაკლიც აქვს. თუნდაც ის, რომ წილადი $\frac{1}{3}$ ვერ გამოიხატება სასრული ათწილადით და იძულებული ვართ დავჯერდეთ მის მიახლოებით მნიშვნელობას.

დაახლოებით 5000 წლის წინ შუმერებმა მესოპოტამიაში შეიმუშავეს სამოცობითი სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებდა მათ მოთხოვნებს აგროკულტურასა და ასტროლოგიაში. ჩვენ დღესაც ვსარგებლობთ ამ სისტემით დროის გამოთვლისას: გვაქვს საათში 60 წუთი, წუთში - 60 წამი. ასევე, კუთხეების გაზომვისას $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

მაიას ტომები სარგებლობდნენ ოცობითი სისტემით (ხელებისა და ფეხების თითების რაოდენობის შესაბამისად). ეს სისტემა დამახასიათებელია ქართველებისთვისაც, რადგან ვიყენებთ რიცხვთა დასახელებებს: ორმოცი—ორი ოცი, სამოცი—სამი ოცი. . .

ამჟამად, მთელი მსოფლიო სარგებლობს ათობითი სისტემით, ხოლო კომპიუტერებში ორობითი სისტემა გამოიყენება.

1.1.1. ორობითი სისტემა

ორობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად ორი სიმბოლო გამოიყენება: 0 და 1. მაგალითად:

$$1_{10} = 1_2, 2_{10} = 10_2, 3_{10} = 11_2, 4_{10} = 100_2, 5_{10} = 101_2,$$

$$6_{10} = 110_2, 7_{10} = 111_2, 8_{10} = 1000_2, 9_{10} = 1001_2.$$

ორობითი სისტემიდან რიცხვი რომ გადავიყვანოთ ათობით სისტემაში, საჭიროა წარმოვადგინოთ 2-ის ხარისხებად და გამოვთვალოთ. მაგალითად,

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \quad (1.2)$$

$$101101_2 = 45_{10} \quad (1.3)$$

შესაბამისად, ათობითი სისტემიდან რიცხვი ორობითში რომ გადავიყვანოთ უნდა წარმოვადგინოთ ის 2-ის ხარისხებად და მიმდევრობით ამოვწეროთ წარმოდგენის კოეფიციენტები. 1-ელ ცხრილში წარმოდგენილია ორობითი გამრავლების ტაბულა.

ცხრილი 1

X	0	1
0	0	0
1	0	1

1.1.2. სამობითი სისტემა

სამობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად სამი სიმბოლო გამოიყენება: 0; 1; 2. მაგალითად,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^0 = 12_3 = 5_{10}. \quad (1.4)$$

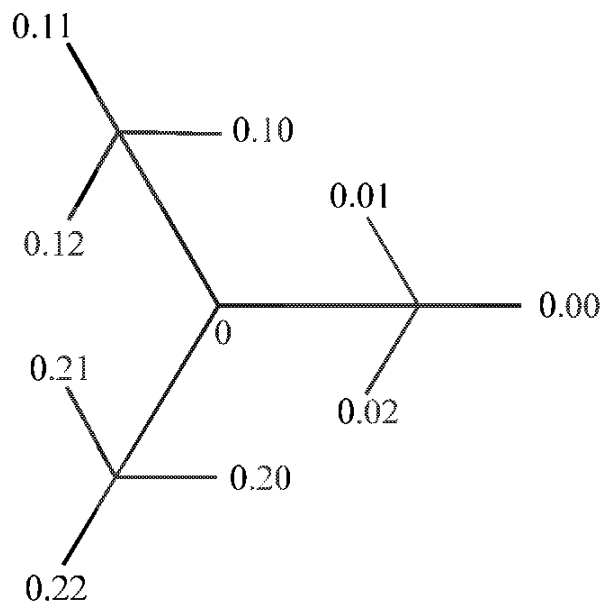
$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3 = 16_{10}. \quad (1.5)$$

როგორც ვხედავთ, აქ რიცხვი წარმოდგება სამის ხარისხების მიხედვით. სამობით სისტემაში გამრავლების ტაბულა მოცემულია მე-2 ცხრილში.

ცხრილი 2

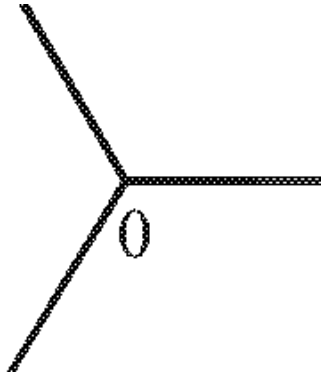
X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

აგავთ სამობითი სისტემის შესაბამისი დენდრიტი



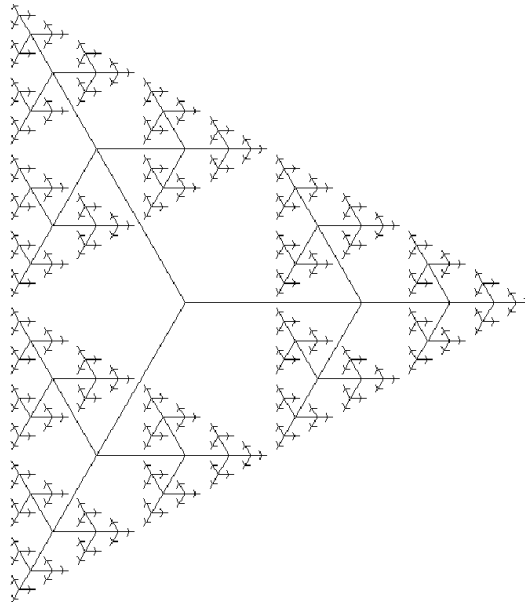
ნახ. 1.3. სამობითი დენდრიტი

ამ ნახაზზე 0 საწყისი წერტილია, საიდანაც ერთმანეთისადმი 120°-იანი კუთხით გამოდის სამი ღერო, რომელთა ბოლოები შემდგომ ეტაპზე თავად ხდება საწყისი წერტილი და სამი ღეროს მშობელი და ა.შ. მიმართულებას მარჯვნივ აღვნიშნავთ “0”-ით, მარცხნივ და ზემოთ – “1”, მარცხნივ და ქვემოთ – “2”-ით. სამობითი დენდრიტის დედაფრაქტალს აქვს 1.4 ნახ-ზე წარმოდგენილი სახე.



ნახ. 14. სამობითი დენდრიტის დედაფრაქტალი

ამ ალგორითმიდან გამომდინარე, შეგვიძლია სამობითი დენდრიტი ავაგოთ კომპიუტერშიც (ნახ.15).



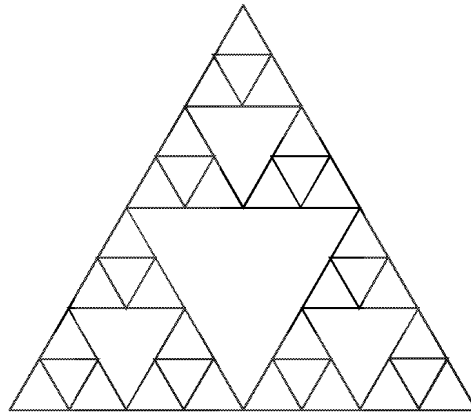
ნახ. 15. სამობითი დენდრიტი

12. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

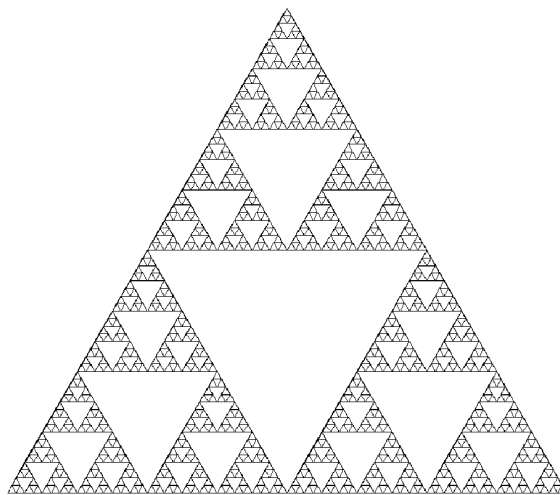
პოლონელმა მათემატიკოსმა ვაცლავ სერპინსკიმ 1915 წელს შექმნა ლამაზი მათემატიკური ობიექტი, რომელიც ძალზე წააგავს სამობით დენდრიტს. ამ ობიექტს სერპინსკის ფრაქტალურ ხალიჩას უწოდებენ.

მის აგებას ვიწყებთ ტოლგვერდა სამკუთხედიდან, სადაც ამოვჭრით გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებულ სამკუთხედს. იგივე მოქმედებას ვასრულებთ დარჩენილ სამ

სამკუთხედზე და ამ პროცესს უსასრულოდ ვაგრძელებთ (ნახ.1.6 –1.7).

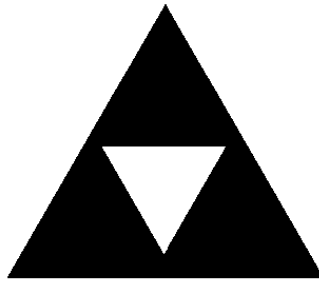


ნახ. 1.6. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის აგების დაწყებითი ეტაპი



ნახ. 1.7. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის დედაფრაქტალია ტოლგვერდა სამკუთხედი და მისგან მამაფრაქტალის მოქმედებით (შუა სამკუთხედის ამოჭრით) მიიღება სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის წარმომქმნელი ელემენტი (ნახ.1.8).

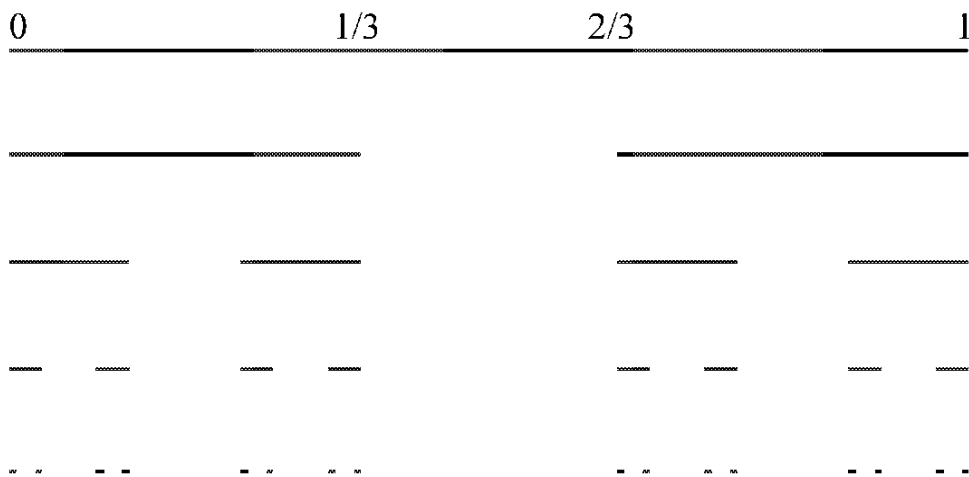


ნახ. 1.8. სერპინსკის ხაღისის წარმომქმნელი ელემენტი

1.3. კანტორის ფრაქტალი

სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთმა შემქმნელმა გეორგ კანტორმა შეისწავლა საინტერესო სიმრავლე, რომელსაც კანტორის სიმრავლეს უწოდებდნენ. ჩვენ კი კანტორის ფრაქტალს ვუწოდებთ.

კანტორის ფრაქტალის ასაგებად განიხილავენ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთს. საწყის ეტაპზე დაყოფენ სამ ტოლ ნაწილად და ამოჭრიან შუა $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ მონაკვეთს. შემდეგ დარჩენილი ორი მონაკვეთიდან ამოაჭრიან შუა მესამედს. ეს პროცესი გრძელდება უსასრულოდ. ზღვარში მიღებულ წერტილთა სიმრავლეს კანტორის ფრაქტალს უწოდებენ (ნახ.1.9).



ნახ.1.9. კანტორის ფრაქტალი

კანტორის ფრაქტალის დედაფრაქტალს აქვს სახე (ნახ.1.10):

ნახ. 1.10. კანტორის ფრაქტალის წარმომქმნელი ელემენტი, რომელიც მიიღება კანტორის დედაფრაქტალიდან (მონაკვეთი $[0;1]$) შუა მონაკვეთის ამოჭრით (მამაფრაქტალი)

ცხადია, რომ სამი ბიჯის შემდეგ გვექნება $2^3 = 8$ მონაკვეთი, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა $3^{-3} = \frac{1}{27}$. n ბიჯის შემდეგ მივიღებთ 2^n მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა 3^{-n} .

ე.ი. დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძეა $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. გასაგებია რომ, როცა $n \rightarrow \infty$, დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძე ნულისკენ მიისწრაფვის. ეს ნიშნავს, რომ კანტორის სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია და, მაშასადამე, მისი ტოპოლოგიური განზომილებაც ნულოვანია. არსებობს განზომილების განსაზღვრის სხვა წესიც, რომლის მიხედვით კანტორის ფრაქტალის განზომილებაა **0.6309**. ეს განზომილება წილადურია (არაა მთელი რიცხვი). აქედან წარმოდგება ფრაქტალური განზომილების ცნებაც.

II თავი. ფრაქტალური სიმრავლეების განზომილების ექსპერიმენტული განსაზღვრა

ფრაქტალის განზომილება შეიძლება განისაზღვროს ექსპერიმენტიდან გამომდინარე, რომელიც რიჩარდსონმა ჩაატარა დიდი ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის განსაზღვრისთვის.

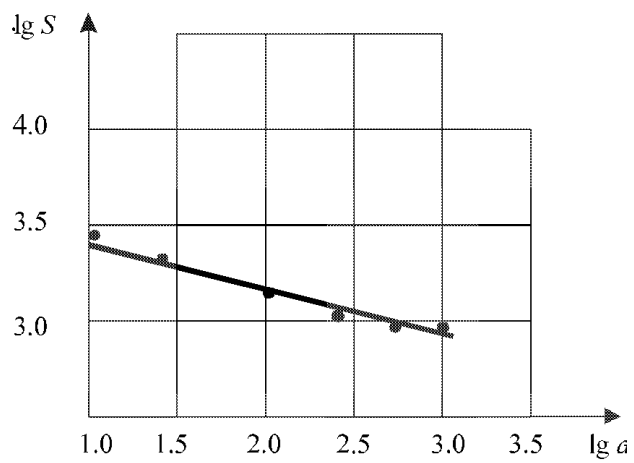
2.1. რიჩარდსონის ექსპერიმენტი

ფრაქტალებისადმი დიდი ყურადღება განაპირობა ბენუა მანდელბროტის ნაშრომებმა [1],[6],[7]. მანდელბროტის წარმატება მნიშვნელოვნად დამოკიდებულია მისი წინამორბედის, ცნობილ მეტეოროლოგ რიჩარდსონის ნაშრომებზე [8].

რიჩარდსონის ნაშრომში, რომელიც 1961 წელს, მისი სიკვდილის შემდეგ გამოქვეყნდა, მანდელბროტმა აღმოაჩინა ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა. რიჩარდსონმა შენიშნა, რომ გაზომვის სიზუსტე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული რუკის მასშტაბზე. თუ რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და ფარგლის მეშვეობით გავზომავთ რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ, რომ $S = N \cdot a$, სადაც N კონტურის მთლიანად შემოსავლელად აუცილებელი ბიჯების რაოდენობაა, a – ბიჯის სიგრძე. სიგრძის ერთეულის შემცირებისას, ცხადია, სანაპირო ზოლის სიგრძის მნიშვნელობა იზრდება, რადგან სულ უფრო მეტი მიხვეულ-მოხვეული სიგრძეების დამატება ხდება. გაზომვების შედეგად რიჩარდსონმა შენიშნა, რომ სანაპირო ზოლის სიგრძის ლოგარითმებსა და სიგრძის მასშტაბის ლოგარითმების მნიშვნელობებს შორის წრფივი დამოკიდებულებაა. მან ააგო წრფივი რეგრესიის წრფე და დაადგინა მისი დახრილობა (ნახ. 2.1), რამაც საშუალება მისცა განესაზღვრა სანაპირო ზოლის კონტურის ფრაქტალური განზომილება. 2.1 სურ-ზე მოცემულია სანაპირო ზოლის რეალური სახე.



სურ. 2.1. კუნბულის სანაპირო ზოლი



ნახ. 2.1. რიხარდსონის ექსპერიმენტის შედეგი

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$\ln S = -0.22 \cdot \ln a + \ln S_1, \quad (2.1)$$

სადაც S_1 არის სანაპირო ზოლის სიგრძე, როცა სიგრძის ერთეულად მიღებული იყო $a = 1$ კმ. (2.1) ფორმულის ამოხსნით მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$S = S_1 \cdot a^{-0.22}. \quad (2.2)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით:

$$S = S_1 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{0.22}. \quad (2.3)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს, რომ თუ სიგრძის ერთეულს a შევამცირებთ 32-ჯერ, მაშინ სანაპიროს სიგრძე დაახლოებით 2-ჯერ გაიზრდება. როცა $a \rightarrow 0$, მაშინ $S \rightarrow \infty$, მაგრამ რეალურად სიგრძე უსასრულო არ იქნება, რადგან სიგრძის ერთეულის შემცირება გარკვეული ბიჯის შემდეგ აღარ გამოიწვევს სანაპირო ზოლის სიგრძის შეცვლას (აღარ გვექნება დამატებითი მიხვეულ-მოხვეულები საზღვრის კონტურში).

სასარგებლო იქნებოდა კონტურის მრუდწირულობისთვის გვექნოდა რაღაც რიცხვითი მახასიათებელი. მანდელბროტმა (2.3) ფორმულაში ხარისხის მაჩვენებელს ერთი დაამატა და მიიღო რიცხვი D , რომელსაც სანაპიროს კონტურის ფრაქტალური განზომილება უწოდა (ამ შემთხვევაში $D = 1.22$).

2.2. ფრაქტალური განზომილების ცნება

მათემატიკაში არსებობს სიმრავლის განზომილების განსაზღვრების სხვადასხვა წესი, მათგან ყველაზე პოპულარულია ა. პუანკარეს ტოპოლოგიური განზომილების განსაზღვრება, რომლის მიხედვით ცარიელი სიმრავლის განზომილებაა “-1”, შემდგომი სიმრავლეებისათვის კი განზომილება განიმარტება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით: თუ ვიცით, რა არის “ $n-1$ ”, მაშინ სიმრავლის განზომილება “ n ” შეიძლება წარმოვადგინოთ რაგინდ მცირე “ $n-1$ ”-განზომილებიანი სიმრავლეების საშუალებით და არ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ “ $n-2$ ”-განზომილებიანი სიმრავლეებით. ამ განმარტებიდან გამომდინარე, წერტილს, წრფეს, ზედაპირს, შესაბამისად, აქვს 0; 1 და 2 ტოპოლოგიური განზომილება.

მოგვიანებით განზომილების უფრო ზუსტი განმარტება მოგვცა ბრაუერმა, ასევე განზომილების სხვა განმარტებები შემოიღეს ჰაუსდორფმა, ბეზიკოვიჩმა და კოლმოგოროვმა, რომელთა განსაზღვრებები მოიცავს წილადური განზომილების სივრცეებ-საც.

დავუბრუნდეთ რიჩარდსონის ექსპერიმენტებს. თუ რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და გავზომავთ ფარგლის მეშვეობით რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ, რომ $S = N \cdot a$, სადაც N კონტურის მთლიანად შემოსავლელად აუცილებელი ბიჯების (ტეხილის მონაკვეთების) რაოდენობაა, სიგრძის ერთეული – a . მანდელბროტის განსაზღვრების თანახმად, ტეხილის “ფრაქტალური განზომილება D ” ტოლია:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}}. \quad (2.4)$$

ცხადია, რომ D არის სანაპირო ზოლის წირის “მიხვევ- მოხვევის” რიცხვითი მახასიათებელი. თუ a ბიჯის შემდგომი შემცირებისას (2.4) ფორმულაში შემავალი წილადის მნიშვნელობა არ იცვლება, ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}} \quad (2.5)$$

ანუ

$$N = \left(\frac{1}{a}\right)^D. \quad (2.6)$$

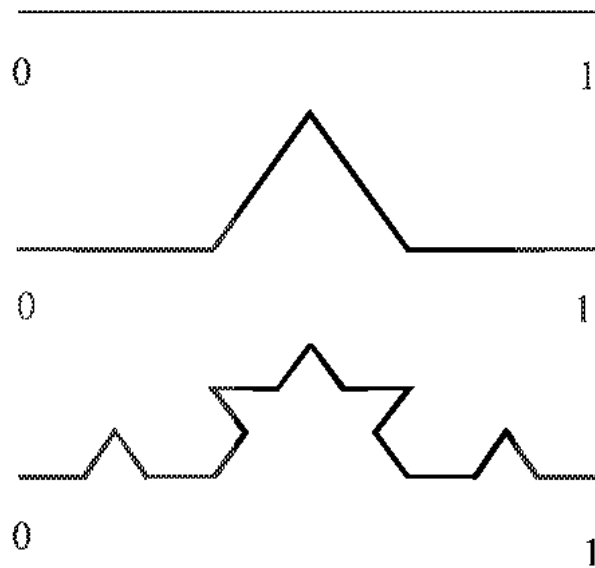
თუ გავიხსენებთ, რომ $S = N \cdot a$, მაშინ

$$S = \left(\frac{1}{a}\right)^{D-1}. \quad (2.7)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, როგორ იცვლება სანაპირო ზოლის სიგრძის გაზომილი S მნიშვნელობა, გაზომვის a მასშტაბის მიხედვით.

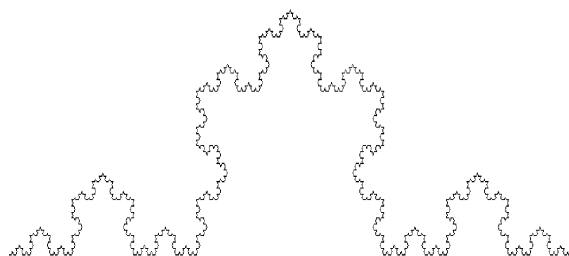
2.3. კოხის “დაფრაქტალეზებული” წირი

კოხის დაფრაქტალებული წირის ასაგებად ვიქცევით ისე, როგორც კანტორის ფრაქტალის აგების დროს. განსხვავება ისაა, რომ საწყისი ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილი კი არ უქმდება, არამედ ტოლგვერდა სამკუთხედამდე შეივსება ქვედა გვერდის გარეშე (მამაფრაქტალი), (ნახ. 2.2) და ეს პროცესი გაგრძელდება მიღებული ტეხილის ყველა მონაკვეთისათვის.



ნახ. 2.2. კოხის დაფრაქტალებული წირის აგების ალგორითმის სქემა

კოხის ალგორითმით, მონაკვეთის დედაფრაქტალიდან $([0;1]$ მონაკვეთიდან) მამაფრაქტალის (მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილის ნაცვლად ჩასმული, ამოზნექილი ორი მონაკვეთი) ზემოქმედებით მიღებულ დაფრაქტალებულ წირს აქვს სახე:



ნახ.2.3. კოხის დაფრაქტალებული წირი

ვიპოვოთ კოხის დაფრაქტალებული წირის ფრაქტალური განზომილება (2.5) ფორმულის მეშვეობით. რადგან საწყისი

მონაკვეთის სიგრძეა 1, პირველი ბიჯის შემდეგ მიღებული თითოეული ფრაგმენტის (მონაკვეთის) სიგრძე იქნება $\frac{1}{3}$ და, მაშასადამე, ოთხივე მონაკვეთი ერთად მოგვცემს $S = \frac{4}{3}$ სიგრძეს. შემდეგი ბიჯი მოგვცემს 16 მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძე იქნება $\frac{1}{9}$ და, მაშასადამე, მიღებული წირის სიგრძეა $S = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$ და ა.შ. აქედან გამომდინარე, (2.5) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = \frac{\ln 4^2}{\ln 3^2} = \dots \quad (2.8)$$

რაც ნიშნავს, რომ კოხის დაფრაქტალეზებული წირის განზომილება $D \approx 1.26$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ კოხის დაფრაქტალეზებულ წირს თვითმსგავსება ახასიათებს: მისი ყოველი ნაწილი, რომელიც შემდეგ ბიჯზე მიიღება, არის მასშტაბში შემცირებული წინა ბიჯის წირის ასლი.

ფრაქტალური წირით შეგვიძლია ავაგოთ რეალური ქვიშის ქარიშხლის საზღვრის მოდელიც (სურ. 2.2):

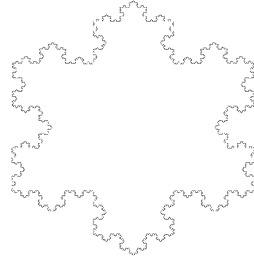


სურ. 2.2. ერაყის ერთ-ერთ ქალაქს უახლოვდება ქვიშის ქარიშხალი

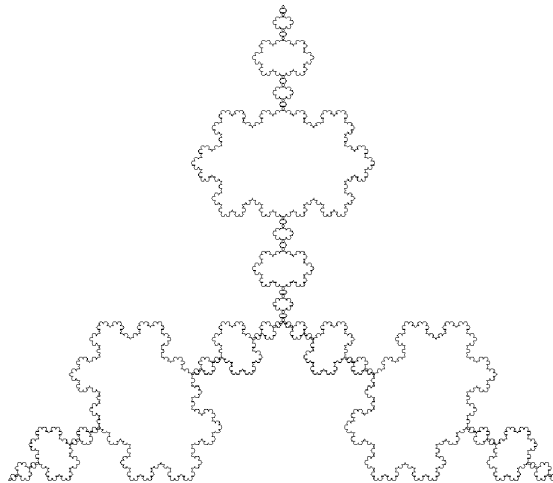
2.3.1. კოხის დაფრაქტალეზებული კუნძული

თუ კოხის დედაფრაქტალად ავიღებთ რაიმე წესიერ მრავალ-კუთხედს (მაგალითად, წესიერ სამკუთხედს) და მის შემადგენელ

ყოველ მონაკვეთზე ვიმოქმედებთ კოხის გარეთ მიმართული მამაფრაქტალით, მივიღებთ კოხის დაფრაქტალეზულ კუნძულს (ნახ. 2.4), ხოლო თუ ვიმოქმედებთ შიგნით მიმართული მამაფრაქტალით, მივიღებთ კოხის დაფრაქტალეზულ კუნძულს (ნახ. 2.5) შემდეგი ფორმით:



ნახ. 2.4. კოხის დაფრაქტალეზული კუნძული გარეთ მიმართული მამაფრაქტალით



ნახ. 2.5. კოხის დაფრაქტალეზული კუნძული შიგნით მიმართული მამაფრაქტალით

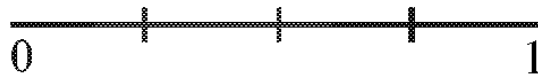
ბუნებაში გვხვდება ცოცხალი სისტემები, რომლებსაც წააგავს კოხის კუნძული (სურ. 2.3).



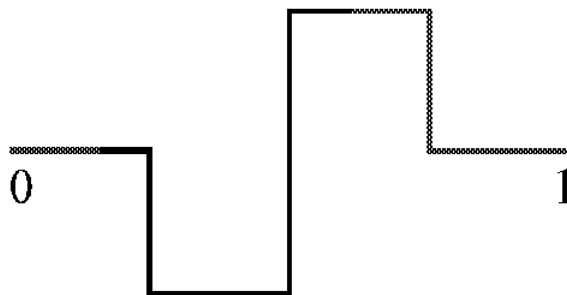
სურ. 2.3. ხვეული კომბოსტო

2.3.2. მინკოვსკის ფრაქტალი

მინკოვსკის ფრაქტალისათვის გვაქვს დედაფრაქტალი (ნახ. 2.6) და მამაფრაქტალი (ნახ. 2.7).

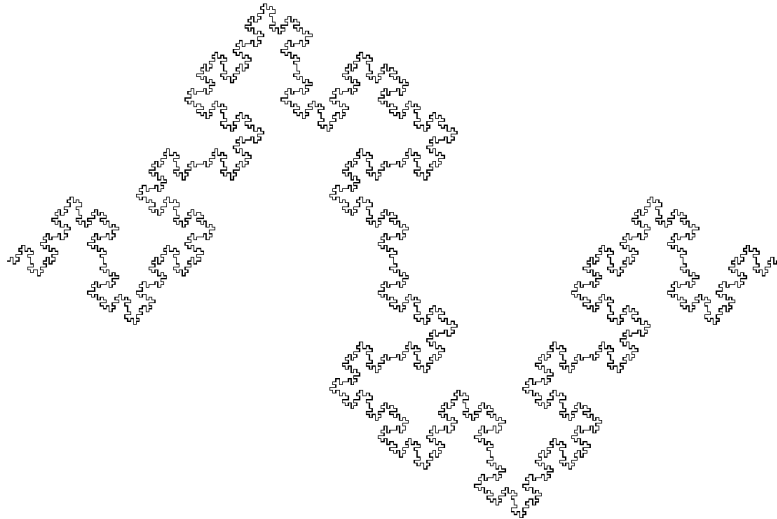


ნახ. 2.6. მინკოვსკის დედაფრაქტალი



ნახ. 2.7. მინკოვსკის მამაფრაქტალი

თუ მამაფრაქტალით ვიმოქმედებთ მინკოვსკის დედაფრაქტალზე და შემდეგ თითოეულ მიღებულ მონაკვეთს განვიხილავთ დედაფრაქტალად, მათზეც ვიმოქმედებთ მინკოვსკის მამაფრაქტალით და ა.შ., ოთხი ბიჯის შემდეგ მივიღებთ მინკოვსკის ფრაქტალს შემდეგი ფორმით (ნახ. 2.8):



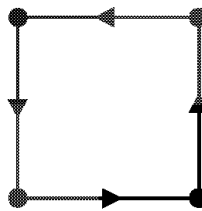
ნახ. 2.8. მინკოვსკის ფრაქტალი

მინკოვსკის ფრაქტალის განზომილებას გამოვთვლით (2.5) ფორმულით:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}} = \frac{\ln N^2}{-\ln a^2} = \frac{\ln 8}{\ln \frac{1}{0.25}} = 1.5. \quad (2.9)$$

2.3.3. ფრაქტალური კუნძული

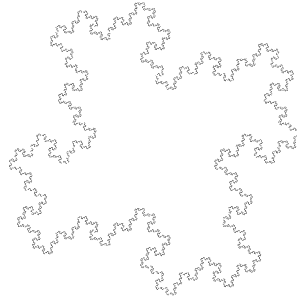
ვთქვათ, დედაფრაქტალია კვადრატი წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში (ნახ. 2.9), ხოლო მამაფრაქტალი—2.10 ნახ-ზე მოცემული ფრაგმენტი



ნახ. 2.9. კვადრატი წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში



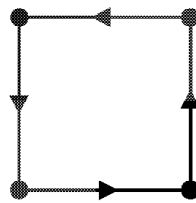
ნახ. 2.10. მამაფრაქტალი შუალედური წერტილებით $(0.4; 0.2)$ და $(0.6; -0.2)$ მაშინ მივიღებთ ფრაქტალურ კუნძულს (ნახ. 2.11):



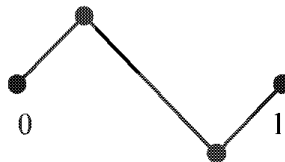
ნახ. 2.11. ფრაქტალური კუნძული

2.3.4. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

დედაფრაქტალად ავიღოთ ისევ კვადრატი წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$, წერტილებში (ნახ. 2.12), ხოლო მამაფრაქტალად—2.13 ნახ-ზე მოცემული ფრაგმენტი.

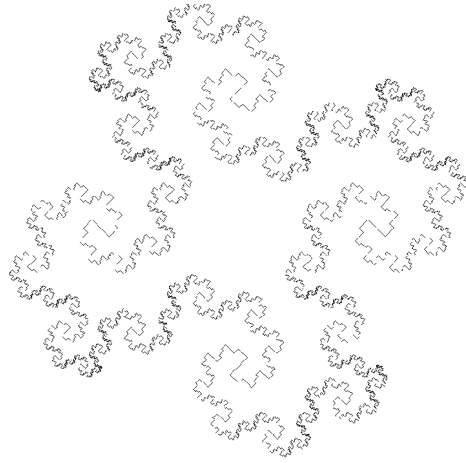


ნახ. 2.12. კვადრატი წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში



ნახ. 2.13. მინკოვსკის მამაფრაქტალი შუალედური წერტილებით $(0.25; 0.25)$ და $(0.75; -0.25)$

აგებულ მინკოვსკის ფრაქტალურ კუნძულს აქვს ფორმა (ნახ.2.14):



ნახ. 2.14. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

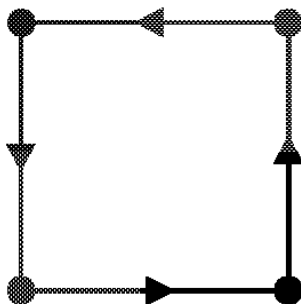
მინკოვსკის ფრაქტალით შეგვიძლია მიუახლოვდეთ მცენარის - კრასულა ბუდას ტაძრის ფორმას (სურ. 2.4).



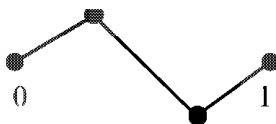
სურ. 2.4. კრასულა ბუდას ტაძარი

2.3.5. ფიორდების ფრაქტალური კუნძული

თუ დედაფრაქტალი კვლავ კვადრატია წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში (ნახ. 2.15), ხოლო მამაფრაქტალი 2.16 ნახ-ზე მოცემული ფრაგმენტი

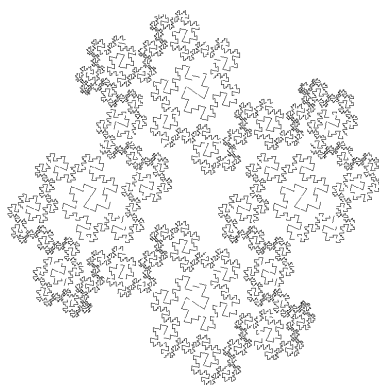


ნახ. 2.15. კვადრატის წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში



ნახ. 2.16. ფიორდის მამაფრაქტალი შუალედური წვეროებით $(0.3; 0.3)$ და $(0.7; -0.3)$

შესაბამის ფიორდის ფრაქტალურ კუნძულს ექნება სახე (ნახ. 2.17):



ნახ. 2.17. ფიორდის ფრაქტალური კუნძული

ბუნებაში ხშირად გვხვდება სხვადასხვა ფრაქტალური ფორმის ობიექტები (სურ. 2.5, სურ 2.6).



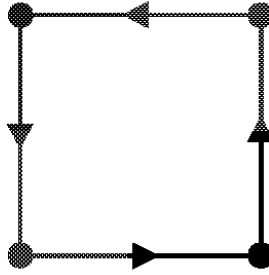
სურ. 2.5. ფრთის ფორმის დრუბლის ფრაქტალი წარმოიქმნება 7-10კმ სიმაღლეზე, აღმავალი ჰაერის მასების ატმოსფერული ფრონტის გაცივებისას



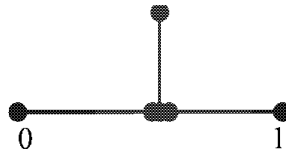
სურ. 2.6. ყინულის ბუნებრივი ფრაქტალი

2.3.6. ყინულის ფრაქტალური კვადრატი

განვიხილოთ დედაფრაქტალად კვადრატი წვეროებით $(\pm 1; \pm 1)$ წერტილებში (ნახ. 2.18), ხოლო მამაფრაქტალად – ფრაგმენტი (ნახ. 2.19) სამი შუალედური წერტილით: $(0.5; 0)$, $(0.5; 0.33)$ და $(0.5; 0)$.

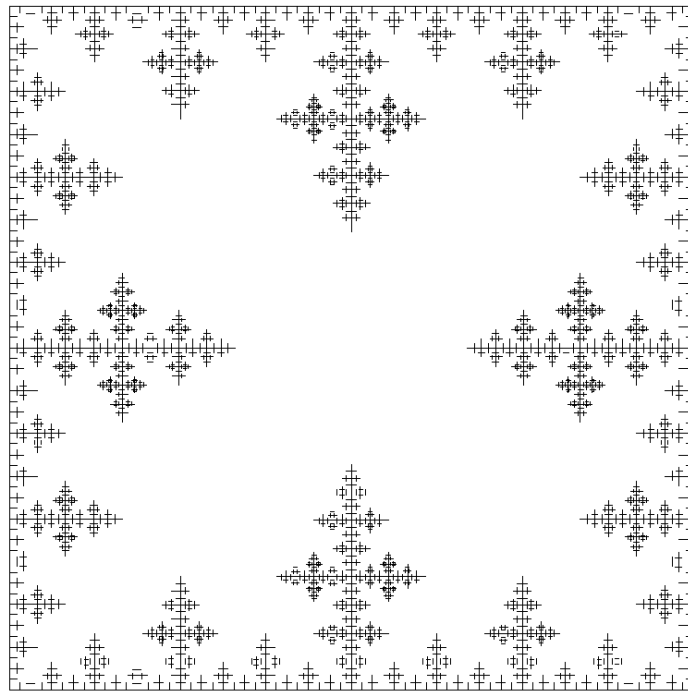


ნახ. 2.18. დედაფრაქტალი



ნახ. 2.19. მამაფრაქტალი შუალედური წვეროებით $(0.5; 0)$, $(0.5; 0.33)$ და $(0.5; 0)$ წერტილებში

შესაბამის ყინულის ფრაქტალურ კვადრატს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 2.20):



ნახ. 2.20. ყინულის ფრაქტალური კვადრატი

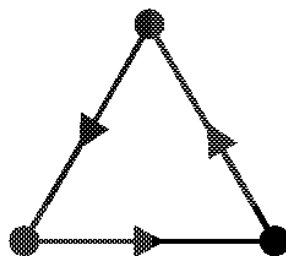
შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალია თოვლის ფიფქი (სურ. 2.7)



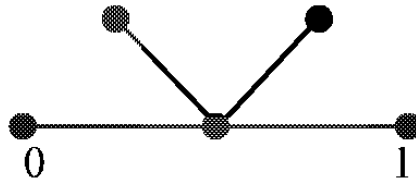
სურ. 2.7. თოვლის ფიფქის ყინულის ფრაქტალი

2.3.7. ყინულის ფრაქტალური სამკუთხედი

დედაფრაქტალად განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი წვეროებით $(0; 0)$, $(0.5; 0.85)$ და $(0; 1)$ წერტილებში (ნახ. 2.21), ხოლო მამაფრაქტალად ფრაგმენტი (ნახ. 2.22) შუალედური წვეროებით $(0.5; 0)$, $(0.375; 0.2165)$ და $(0.625; 0.2165)$ წერტილებში.

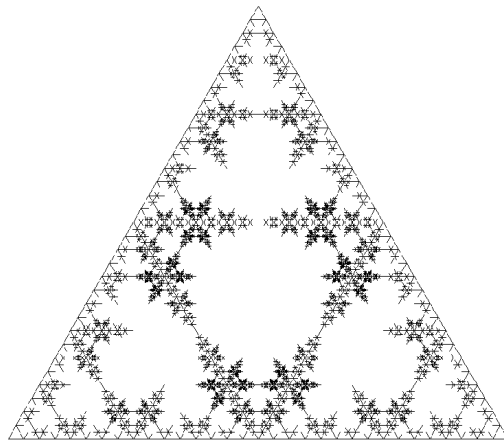


ნახ. 2.21. დედაფრაქტალი



ნახ. 2.22. მამაფრაქტალი

შესაბამის ყინულის ფრაქტალურ სამკუთხედს ექნება სახე (ნახ. 2.23):



ნახ. 2.23. ყინულის ფრაქტალური სამკუთხედი



სურ. 2.8. წვიმის წყლის ორთქლისაგან შედგენილი ფრაქტალი, წარმოიქმნება 0.5 - 2კმ სიმაღლეზე

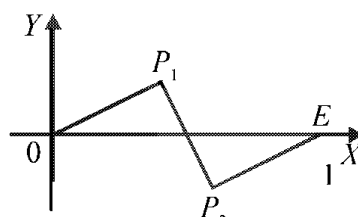


სურ. 2.8. ყინულის ნაწილაკებისაგან შედგენილი ღრუბლის ფრაქტალი, წარმოიქმნება 8კმ სიმაღლეზე

2.3.8. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი

ზემოთ განხილული გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების აგების მაგალითებიდან გამომდინარე შეგვიძლია ავა-გოთ ზოგადი ალგორითმი.

ვთქვათ, დედაფრაქტალი შედგება n რაოდენობის მონაკვეთისგან, ხოლო მამაფრაქტალის ფრაგმენტი მოიცავს m მონაკვეთს. დედაფრაქტალისა და მამაფრაქტალის მონაკვეთების ბოლოების კოორდინატები ითვლება, რომ წინასწარაა განსაზღვრული. ვთქვათ, მოცემულია მამაფრაქტალი (ნახ. 2.24)

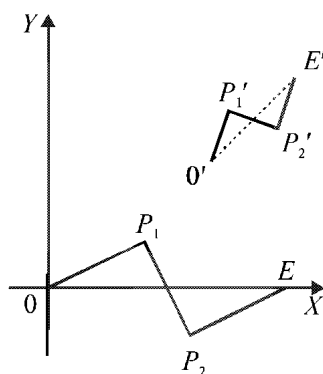


ნახ. 2.24. მამაფრაქტალი

$O(0; 0)$ წერტილი კოორდინატთა სათავეა, E წერტილების კოორდინატებია $(1; 0)$, შუალედური წვეროების კოორდინატები $P_1(0.4; 0.2)$, $P_2(0.6; -0.2)$, მაშინ $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

დედაფრაქტალად განვიხილოთ კვადრატი $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$ წვეროებით. თუ ბიჯების რაოდენობაა k , მაშინ OE მამაფრაქტალის მოქმედებით დედაფრაქტალის ყოველ მონაკვეთზე მივიღებთ $m^k - 1$ წვეროს მქონე ტეხილს. ამ ტეხილის წვეროების კოორდინატები გამოითვლება მსგავსების გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = (x_2 - x_1) \cdot x - (y_2 - y_1) \cdot y + x_1 \\ y' = (y_2 - y_1) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + y_1 \end{cases} \quad (2.10)$$

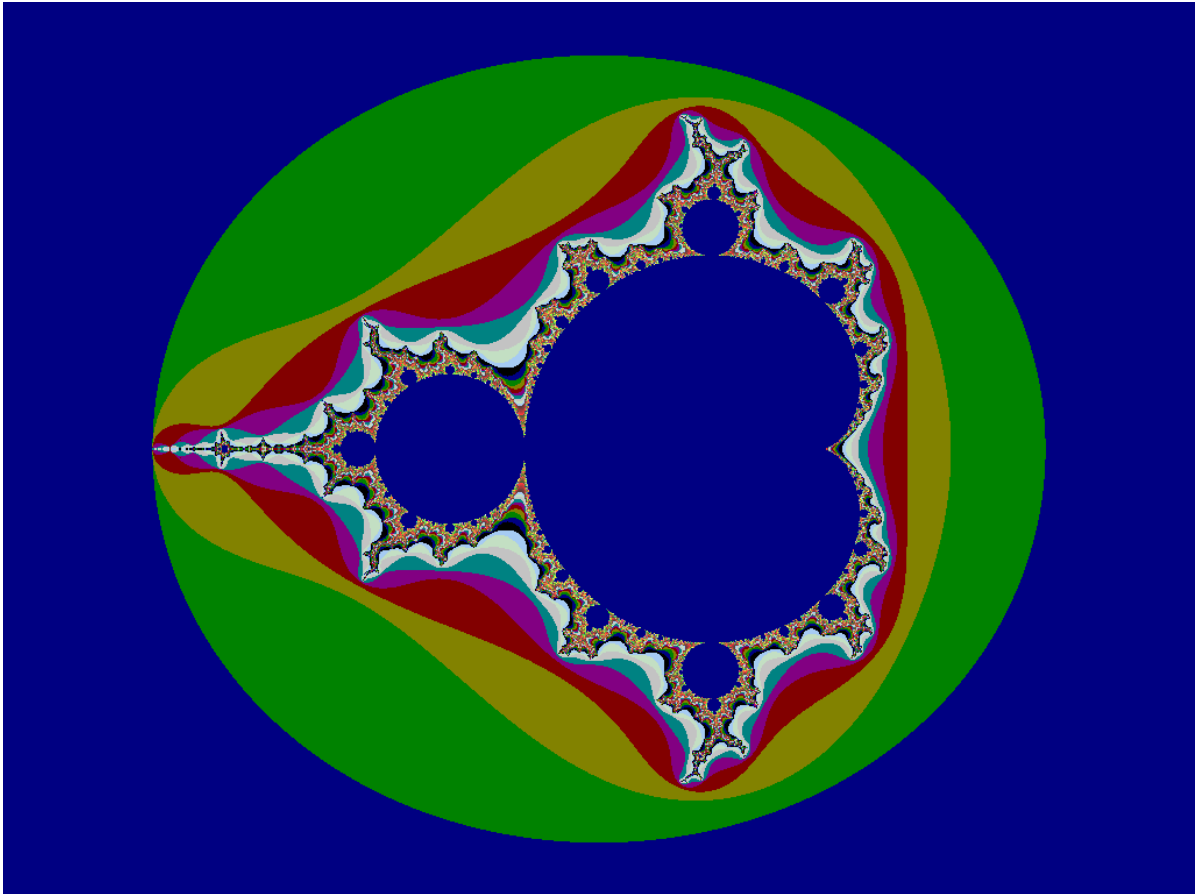


ნახ. 2.25. მსგავსების გარდაქმნა

ამ გარდაქმნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია 2.25 ნახაზზეა მოცემული. შესაბამისად, გვაქვს ასახვა: $O(0; 0) \rightarrow O'(x_1; y_1)$,

$E(1; 0) \rightarrow E'(x_2; y_2)$, $P(x; y) \rightarrow P'(x'; y')$.

თვითმსგავსება კარგად ჩანს ანალიზურად აგებულ [5] მანდელბროტის ფრაქტალში (ნახ. 2.26).



ნახ. 2.26. მანდელბროტის ფრაქტალი

OA_i შემობრუნდება OA_{i+1} მდგომარეობაში φ კუთხით, ხოლო მისი საწყისი სიგრძე გარკვეულად წაგრძელებდა k -ჯერ ანუ $r_{i+1} = k \cdot r_i$. აქედან გამომდინარე, რადგან OA_i რადიუს-ვექტორის აბსცისთა ღერძთან დახრის კუთხეა ϑ_i , გვექნება ტოლობები:

$$x_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \cos(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\cos \vartheta_i \cdot \cos \varphi - \sin \vartheta_i \cdot \sin \varphi); \quad (3.1)$$

$$y_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \sin(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\sin \vartheta_i \cdot \cos \varphi + \cos \vartheta_i \cdot \sin \varphi), \quad (3.2)$$

მაგრამ

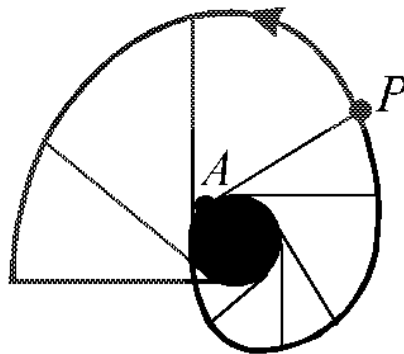
$$x_i = r_i \cdot \cos \vartheta_i \text{ და } y_i = r_i \cdot \sin \vartheta_i. \quad (3.3)$$

აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$x_{i+1} = k \cdot (x_i \cdot \cos \varphi - y_i \cdot \sin \varphi), \quad (3.4)$$

$$y_{i+1} = k \cdot (y_i \cdot \cos \varphi + x_i \cdot \sin \varphi). \quad (3.5)$$

ამრიგად, მივიღეთ სპირალი, რომელიც ყოველ ბიჯზე საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით მობრუნდება φ კუთხით და, შესაბამისად, კოორდინატთა სათავეს k -ჯერ დაშორდება (ნახ. 3.2).



ნახ. 3.2. ა) ტიპის სპირალი

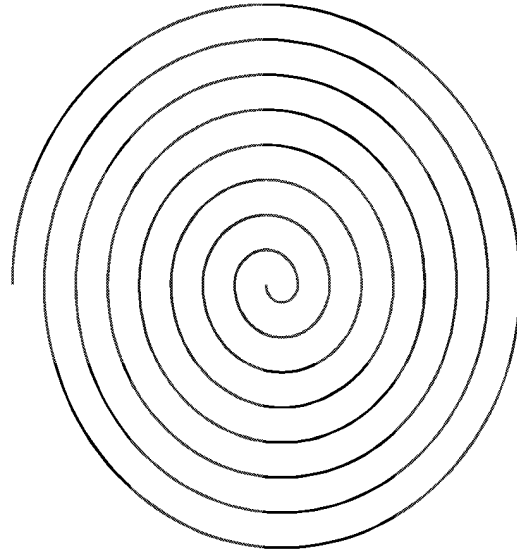
ბ) არქიმედის სპირალი (ნახ. 3.3)

არქიმედის სპირალი პოლარულ კოორდინატებში ჩაიწერება ფორმით:

$$r = k \cdot \varphi, \quad (3.6)$$

სადაც $k > 0$ მუდმივი რიცხვია და გარკვეულ შესაბამისობაშია მეზობელ ხვეულებს შორის მანძილთან, ხოლო φ შესაბამისი

მობრუნების კუთხეა. მართლაც, რადგან r არის მანძილი სპირალის რომელიმე წერტილიდან პოლუსამდე, ავირჩიოთ წერტილი პირველ ხვეულზე, როცა $\varphi = 2\pi$ ანუ $r = k \cdot 2\pi$, სპირალის კიდევ ერთხელ შემობრუნებისას გვექნება $\varphi_1 = 4\pi$ და $r_1 = k \cdot 4\pi$; მაშინ მანძილი მეზობელ ხვეულებს შორის იქნება: $\Delta r = r_1 - r = 4\pi \cdot k - 2\pi \cdot k = 2\pi \cdot k$.



ნახ. 3.3. არქიმედის სპირალი



სურ. 3.1. ცოცხალი ფრაქტალი – სპირალური სუკულენტი

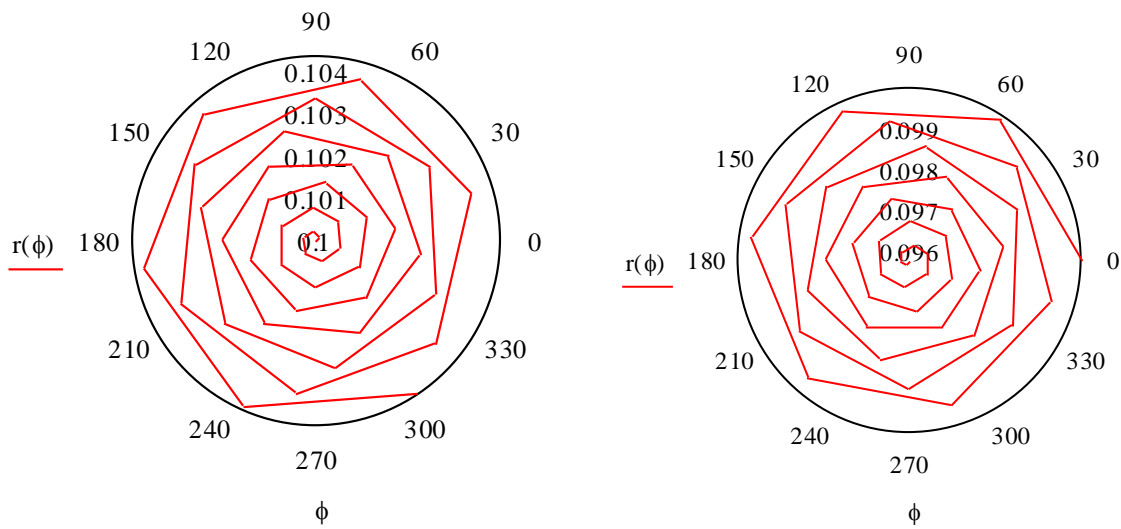
გ) ლოგარითმული ზრდის სპირალი (ნახ. 3.4)

პოლარულ კოორდინატებში ლოგარითმული ზრდის სპირალს აქვს სახე:

$$\ln r = k \cdot \varphi \Leftrightarrow r = r_0 \cdot e^{k \cdot \varphi}. \quad (3.7)$$

ლოგარითმული სპირალისათვის (ნახ. 3.4) დამახასიათებელია საინტერესო თვისებები. თუ განვიხილავთ სპირალის ბრუნვას თანაბარი სიჩქარით საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით და შესაბამის სამ მიმდევრობით მდგომარეობას (ნახ. 3.5), მაშინ:

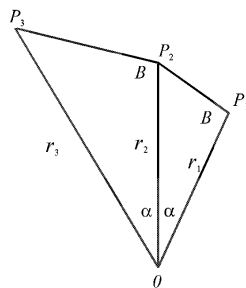
$$\ln \frac{r_3}{r_2} = \ln \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow r_2^2 = r_1 \cdot r_3. \quad (3.8)$$



ა) $k > 0$

ბ) $k < 0$

ნახ. 3.4. ლოგარითმული სპირალი (დახვევის მიმართულება დამოკიდებულია k კოეფიციენტის ნიშანზე. თუ უარყოფითია, მაშინ დახვევის მიმართულება დაემთხვევა საათის ისრის მიმართულებას)



ნახ. 3.5. ლოგარითმული სპირალის სამი მიმდევრობითი წერტილი

სხვანაირად რომ ვთქვათ, $r_1; r_2; r_3$ ადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას. იაკობ ბერნულიმ ამ სპირალს “სასწაულებრივი” უწოდა, რადგან აღმოაჩინა მისი მასშტაბური ინვარიანტობის თვისება (თვითმსგავსება) ანუ სპირალის მასშტაბური შემცირება

გვაძლევს იგივე შედეგს, რასაც მისი მობრუნება რაიმე α კუთხით. მართლაც

$$r = r_0 \cdot e^{k(\varphi-\alpha)} = r_0 \cdot e^{-k\alpha} \cdot e^{k\varphi} = \bar{r}_0 \cdot e^{k\varphi}. \quad (3.9)$$

იმდენად განაცვიფრა ამ ფაქტმა ბერნული, რომ მის საფლავზე გააკეთეს წარწერა “Eadem mutata resugo”, რაც ნიშნავს “მე უცვლელად აღვდგები”.

შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ ბუნებაში ფართოდაა გავრცელებული სპირალური ფრაქტალის ფორმები (სურ: 3.1 – 3.7).



სურ. 3.2. ლოკოკინას სახლის ფრაქტალი ($k < 0$)



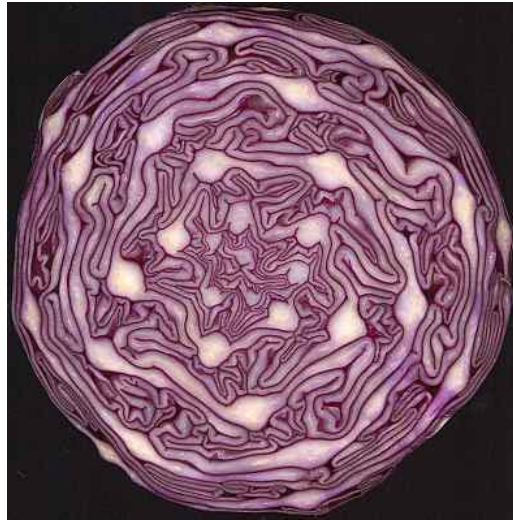
სურ. 3.3. ლოკოკინას სახლის ლოგარითმული, სპირალური ფრაქტალი (ჭრილი)



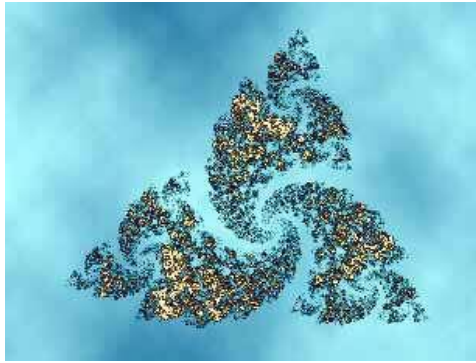
სურ. 3.4. მზესუმზირას ლოგარითმული სპირალური ფრაქტალი ($k > 0$)



სურ. 3.5. გეორგინას სპირალური ფრაქტალი



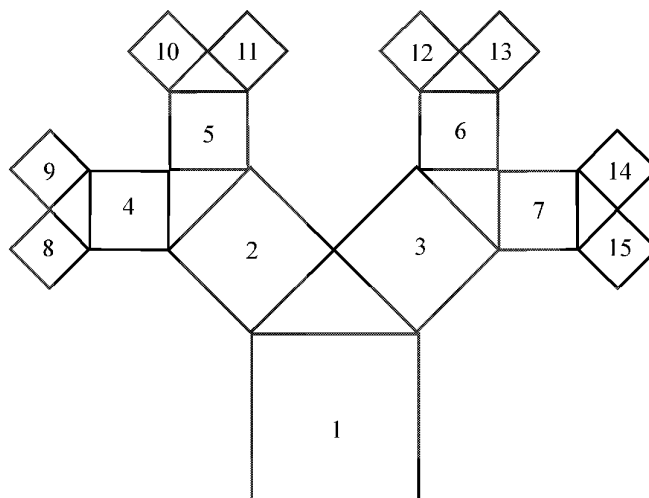
სურ. 3.6. კომბოსტოს ფოთლების ძარღვები ქმნის ლოგარითმულ, სპირალურ ფრაქტალს ($k < 0$)



სურ. 3.7. გალაქტიკის სპირალური ფრაქტალი ($k < 0$)

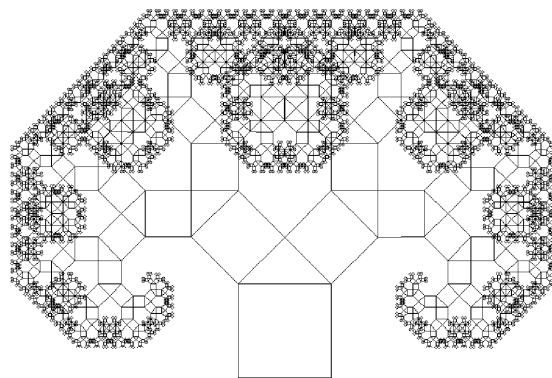
3.2. პითაგორას ფრაქტალური ხე

პითაგორას თეორემის თანახმად, მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრეტი უდრის კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამს. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ ერთეულოვანი ფართობის მქონე კვადრეტი, როგორც დედაფრაქტალი – ნომერი 1 (ნახ. 3.6), ხოლო მამაფრაქტალი იყოს მის ზედა გვერდზე ჰიპოტენუზით დაყრდნობილი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი კათეტებზე აგებული კვადრატებით – ნომერი 2 და 3, შემდეგ პროცესი მეორდება თითოეული ახალი კვადრატისათვის და ა.შ. ადვილი მისახვედრია, რომ 2 და 3 – ნომრიანი კვადრატების ფართობთა ჯამიც 1 იქნება. იგივე ფაქტს ექნება ადგილი სხვა კვადრატებისთვისაც.



ნახ. 3.6. პითაგორას ფრაქტალური ხის აგების დაწყებითი ეტაპები

თუ დავაკვირდებით 3.6 ნახაზს, ვნახავთ, რომ კვადრატზე n ინდექსით დაყრდნობილია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებზე იზრდება უფრო მცირე სიდიდის ორი კვადრატი. მარცხნივ მდგომი კვადრატის ინდექსია $2n$, ხოლო მარჯვნივ მდგომი კვადრატისა – $(2n + 1)$. ყოველ დონეზე არსებული კვადრატების ფართობთა ჯამი საწყისი კვადრატის ფართობის ტოლია ანუ თუ ავიღებთ კვადრატებს 8;9;10;11;12;13;14;15 ნომრებით, აღმოვაჩენთ, რომ მათი ფართობების ჯამიც ერთის ტოლი იქნება. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ პითაგორას ფრაქტალურ ხეს (ნახ. 3.7).



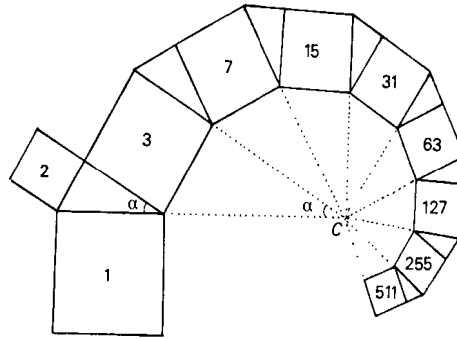
ნახ. 3.7. პითაგორას ფრაქტალური ხე



სურ. 3.8. მაგნიუმის ხელოვნური დენდრიტი, რომელიც მიიღება მაგნიუმის ორთქლის კონდენსაციით ცივ ზედაპირზე. ძალიან ჰგავს ნაძვის გირჩების გროვას

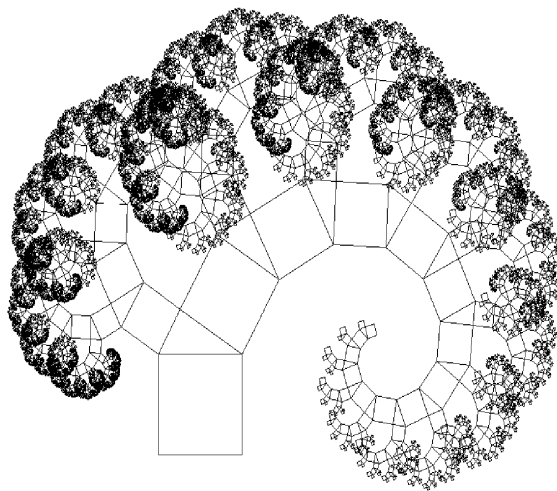
3.2.1. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე

პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე არის პითაგორას ფრაქტალური ხის განზოგადება. მისი აგების ალგორითმი მოცემულია 3.8 ნახ-ზე.



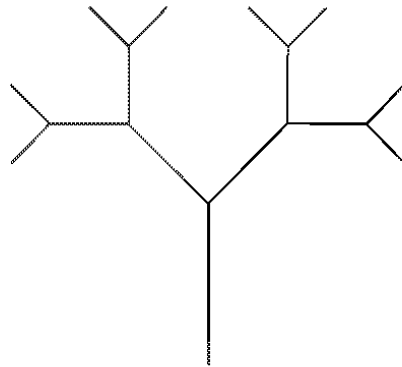
ნახ. 3.8. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმი

ფრაქტალი წარმოიქმნება თითოეულ ბიჯზე, მარჯვენა მხრიდან კვადრატის დამატებით, ხოლო ლოგარითმული სპირალი (ტეხილი) მსგავსების გარდაქმნით, რომელიც შემობრუნდება α კუთხით და მასშტაბური შემცირებით $\cos \alpha$ -ჯერ. ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ მსგავსების გარდაქმნა, რომელიც მოქმედებს მარცხენა მხრიდან-მობრუნება $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ კუთხით და მასშტაბური შემცირება $\sin \alpha$ -ჯერ. მაშინ მივიღებთ სპირალურ ფრაქტალურ ხეს (ნახ. 3.9), სადაც $\alpha = \frac{\pi}{6}$ [2].

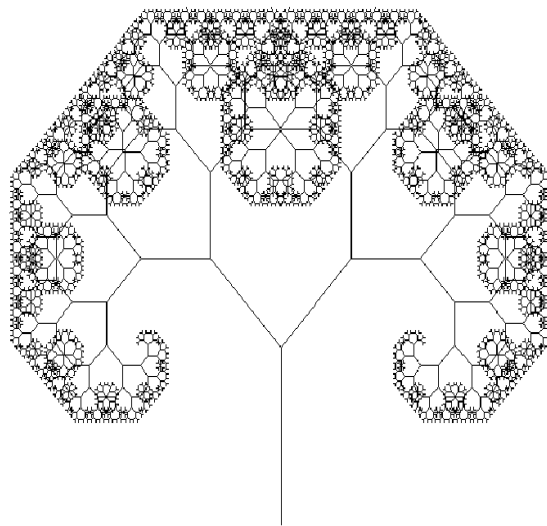


ნახ. 3.9. სპირალური ფრაქტალური ხე

თუ გავამარტივებთ პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმს – უკუვაგდებთ კვადრატებს და დავხატავთ მხოლოდ იმ მონაკვეთებს, რომლებიც სამკუთხედების “ცენტრებს” აერთებს, ხოლო სამკუთხედებს აღარ დავხატავთ, მივიღებთ პითაგორას სპირალურ, გაშიშვლებულ ფრაქტალურ ხეს (ნახ. 3.10 – 3.11).

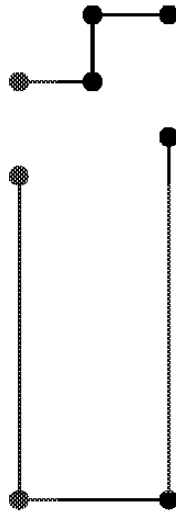


ნახ. 3.10. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული, ფრაქტალური ხის აგების საწყისი ბიჯები

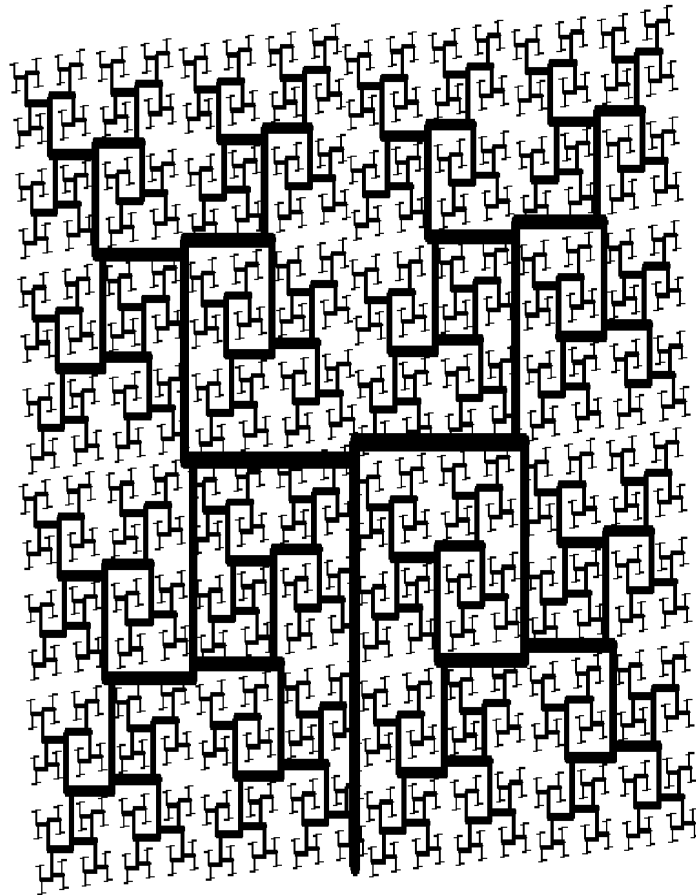


ნახ. 3.11. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული ფრაქტალური ხე

მანდელბროტის წიგნში [1] განხილულია ფრაქტალური ხის სხვა ვარიანტებიც (ნახ. 3.12 - 3.13).

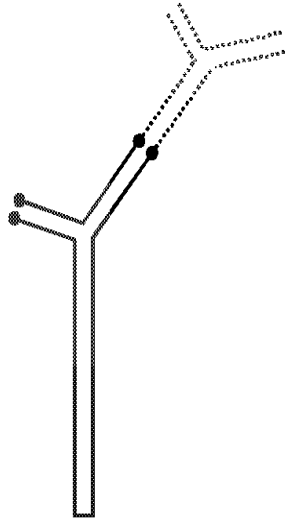


ნახ. 3.12. მანდელბროტის ფრაქტალური ხის დედაფრაქტალი და ზემოთა აგრეგატი (მამაფრაქტალი)

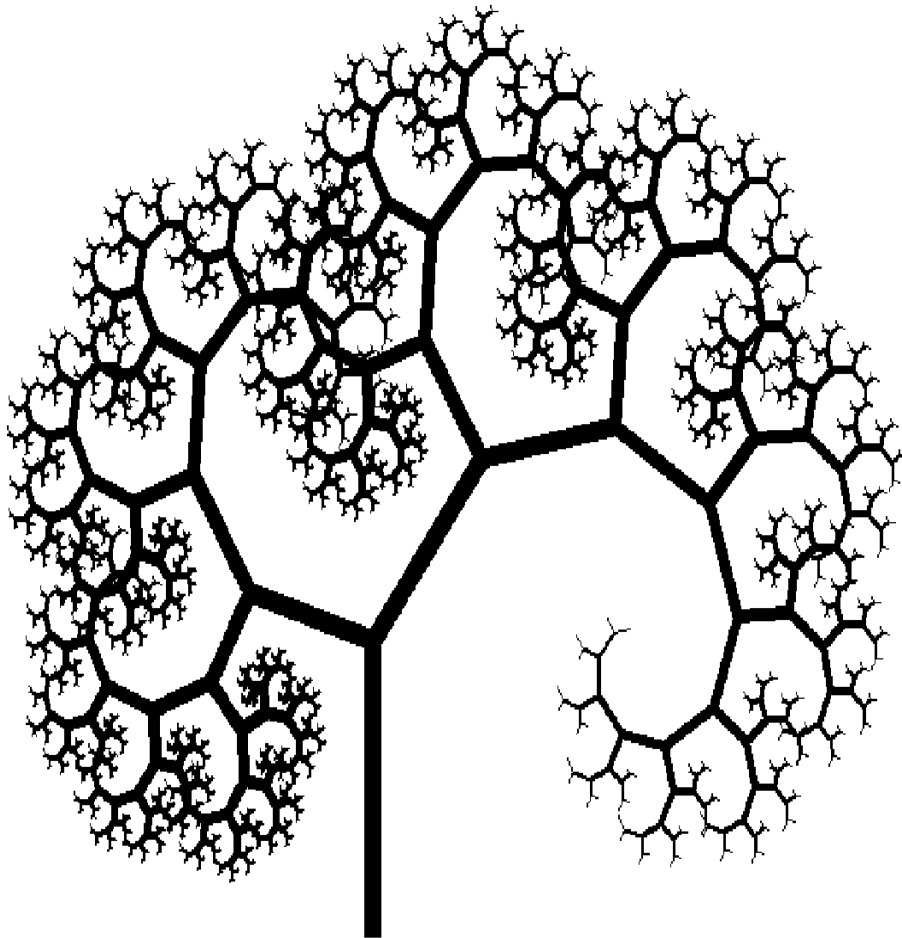


ნახ. 3.13. მანდელბროტის ფრაქტალური ხე

მანდელბროტმა ააგო რეალური ფრაქტალური ხის მოდელიც, რომელიც გამოსახულია 3.14 და 3.15 ნახაზებზე.



ნახ. 3.14. რეალური ფრაქტალური ხის მოდელი



ნახ. 3.15. რეალური ფრაქტალური ხე

განვიხილოთ შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალების სურათები:
(სურ. 3.8-3.19):



სურ. 3.9. დედამიწის ზედაპირის სურათები კოსმოსიდან, გვაძლევს ფრაქტალური ფორმის ლანდშაფტს



სურ. 3.10. თხევადი ან აირადი ნივთიერების კრისტალიზაციით წარმოქმნილი მინერალის ფრაქტალი



სურ. 3.11. ქვიშის დუნის წყლით ნაწილობრივი მორეცხვის შედეგად წარმოქმნილი ფრაქტალი



სურ. 3.12. ხის ტოტები – ბუნებრივი ფრაქტალი



სურ. 3.13. ხის ტოტები იყოფა ორად, შემდეგ ბიჯზე თითოეული ტოტი კვლავ იყოფა და ა.შ. გარკვეულ სასრულ რაოდენობამდე (როგორც მის გენეტიკურ პროგრამაშია ჩადებული). ეს დენდრიტის ტიპის ფრაქტალია



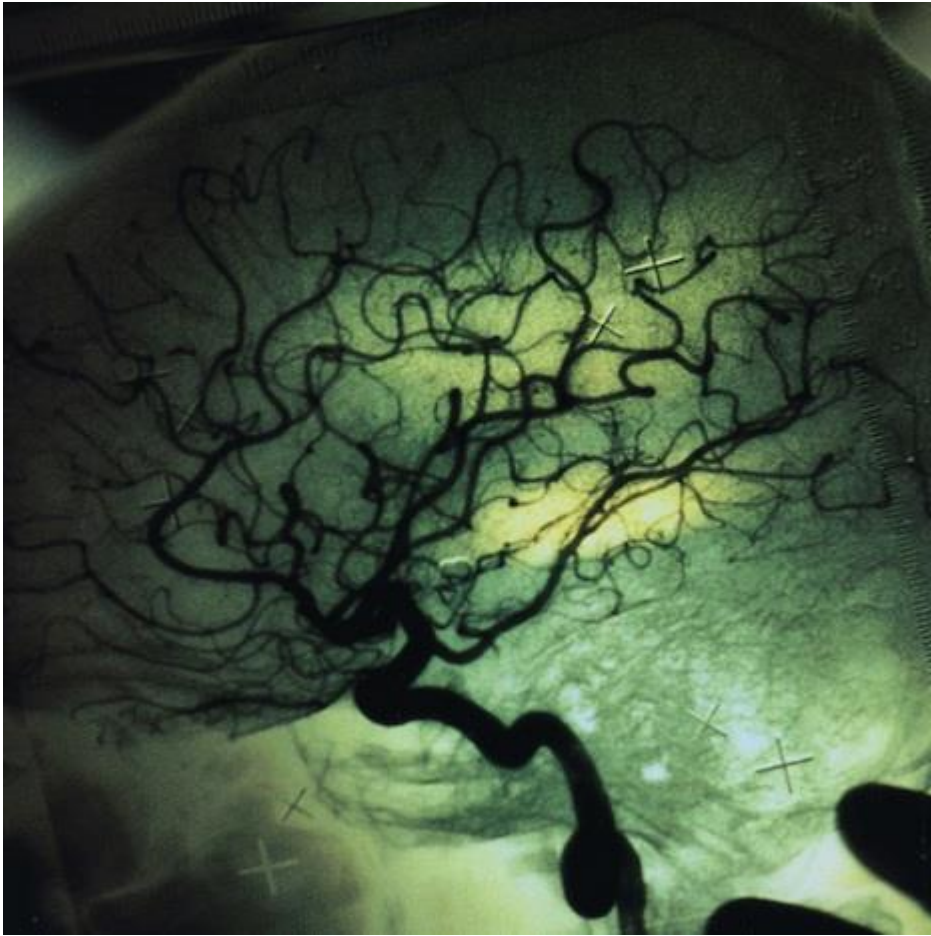
სურ. 3.14. ბაობაბი ასევე ფრაქტალური კანონით იტოტება, თუმცა ყველა ხეს თავისი გენეტიკური კოდი (დატოტვის წესი) აქვს



სურ. 3.15. ვულკანიდან ამოფრქვეული გაცივებული ლავის მიერ შექმნილი დინების ფრაქტალურ ფორმა



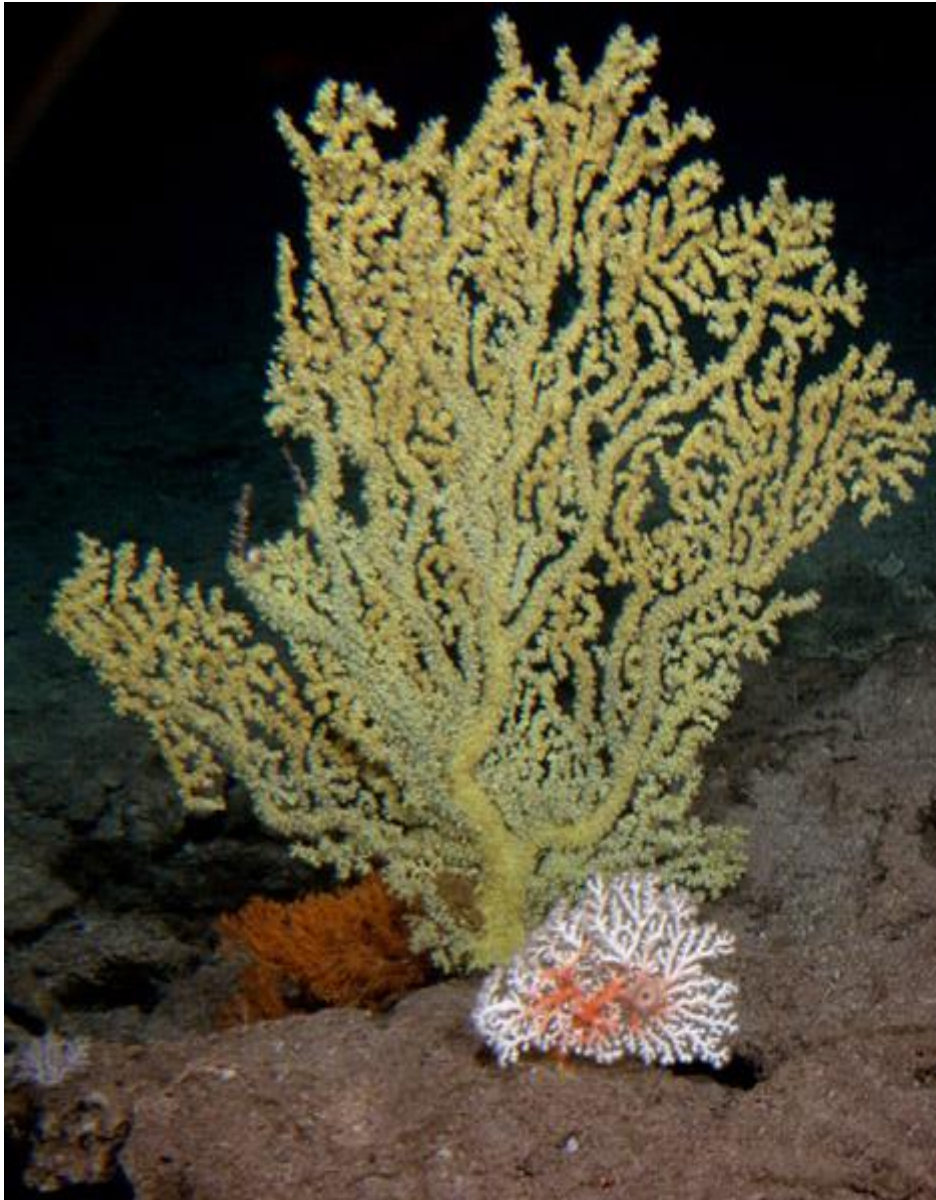
სურ. 3.16. მცენარეთა ფრაქტალური ფორმაა დენდრიტი



სურ. 3.17. ადამიანის ტვინის სისხლძარღვთა სისტემა დენდრიტია



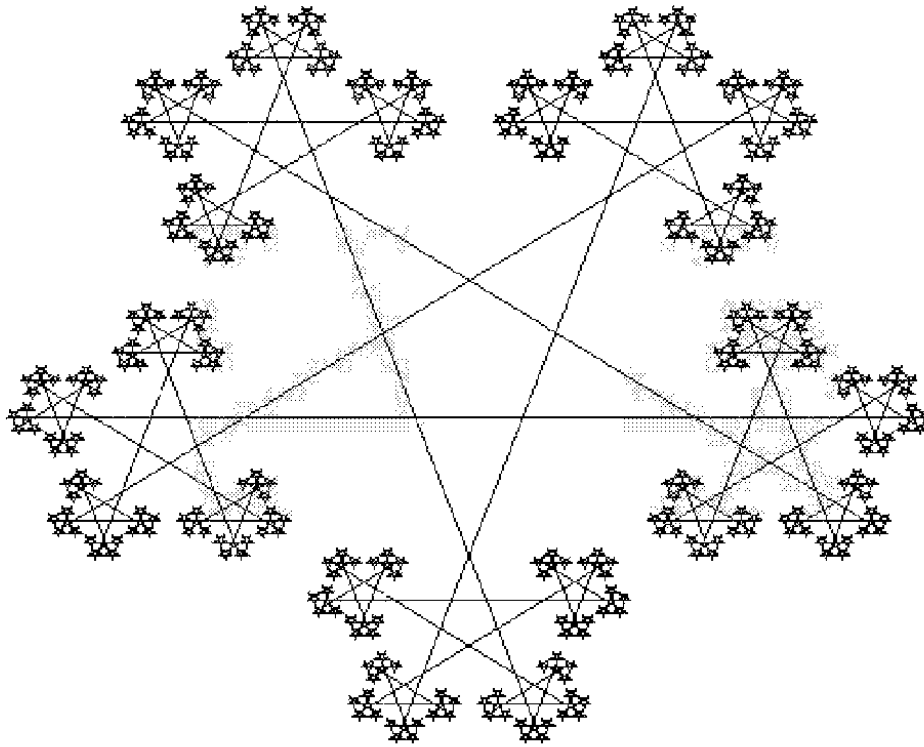
სურ. 3.18. მდინარეთა დატოტვის ფრაქტალი დენდრიტია



სურ. 3.19. მარჯნის ფრაქტალი დენდრიტია

3.3. ვარსკვლავები

განვიხილოთ ვარსკვლავური ფრაქტალი, რომელიც შედგება ხუთქიმიანი ვარსკვლავისაგან 5 შედარებით მცირე გირლანდით, რომლებიც უფრო მცირე მასშტაბის ვარსკვლავებს შეადგენს და თითოეულის ოთხ წვეროზე უფრო მცირე ზომის ვარსკვლავებია განლაგებული. თეორიულად ეს პროცესი უსასრულოა (ნახ. 3.16).

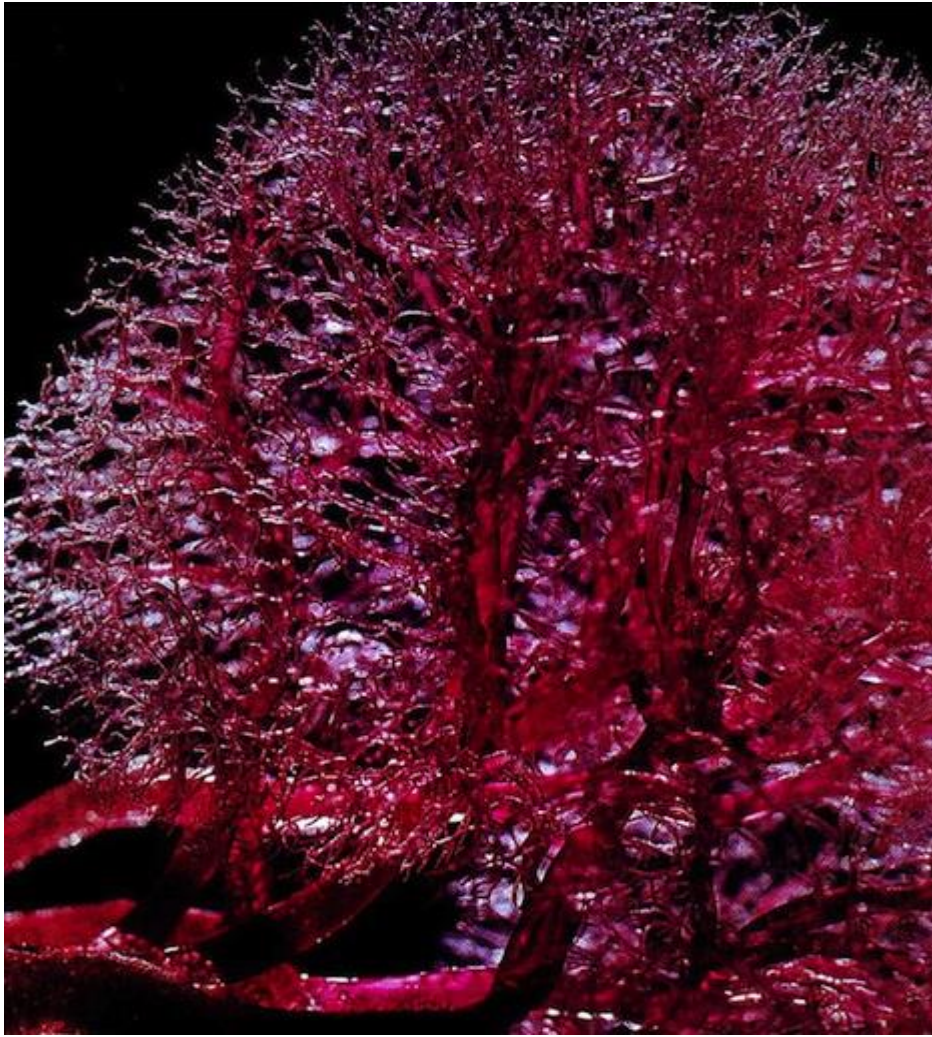


ნახ. 3.16. ვარსკვლავური ფრაქტალი

განვიხილოთ ბუნებრივი ვარსკვლავური ტიპის ფრაქტალები (სურ. 3.20-3.23).



სურ. 3.20. მცენარის ფესვთა ვარსკვლავური ფრაქტალი



სურ. 3.21. ფილტვი შეიცავს ერთმანეთში გადაჯაჭვულ სამ ფრაქტალს: სასუნთქი, სისხლძარღვთა ვენოზური სისხლის და არტერიული სისხლის



სურ. 3.22. ამაზონის წყლის შროშანი



სურ. 3.23. ბაობაბის დატოტვის სისტემა ჰგავს სისხლძარღვთა სისტემას

IV თავი. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების გარდაქმნის ანალიზი

კომპიუტერში გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების ასაგებად, ხშირად, გამოიყენება აფინურ გარდაქმნათა ნახევარჯგუფი. სიბრტყეზე აფინური გარდაქმნაა: გაჭიმვა-კუმშვის, მობრუნებისა და სიმეტრიის ასახვა.

4.1. ინვარიანტული გარდაქმნა

უმარტივეს შემთხვევაში, აფინური გარდაქმნა არის მასშტაბში შემცირებისა და მობრუნების წრფივ ასახვათა კომპოზიცია:

$$(x; y) \rightarrow (x'; y'), \quad (4.1)$$

რომელიც ჩაიწერება ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

(4.2) გარდაქმნას, გარდაქმნის A მატრიცით აღვნიშნავთ T ასოთი.

თუ სიბრტყე აისახება თავის თავზე ისე, რომ $x' = x$ და $y' = y$, მაშინ (4.2) გარდაქმნის ფორმულებიდან

$$\begin{cases} x = a \cdot x + b \cdot y \\ y = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1) \cdot x + b \cdot y = 0 \\ c \cdot x + (d - 1) \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

მაშასადამე სიბრტყის თავის თავზე ასახვისას გვაქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი $O(0; 0)$. ამ უძრავი წერტილის ტიპის დასადგენად ამოვხსნათ A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება:

$$\lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda + \Delta = 0, \quad (4.4)$$

სადაც $\Delta = \det A$.

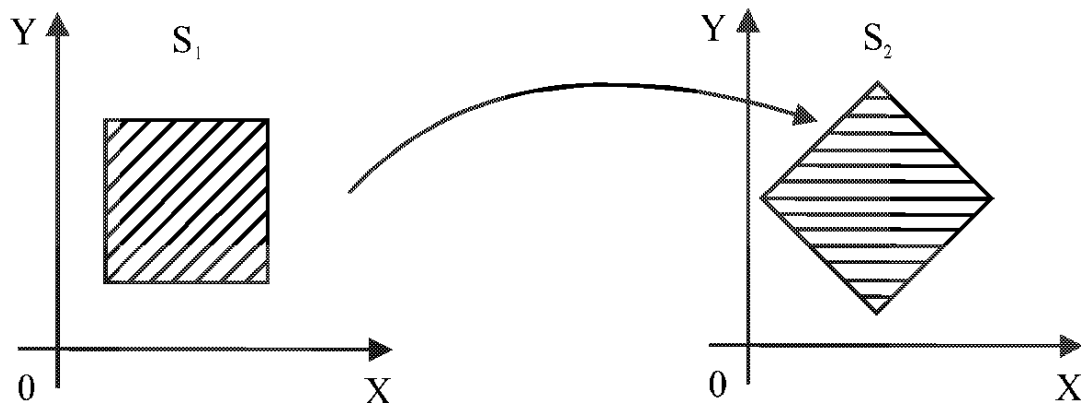
გვაქვს ოთხი შემთხვევა:

1. თუ $|\lambda_1| < 1$ და $|\lambda_2| < 1$, მაშინ O წერტილი მდგრადია;
2. თუ $|\lambda_1| < 1$ და $|\lambda_2| > 1$, მაშინ O უნაგირა (ჰიპერბოლური) წერტილია;

3. თუ $|\lambda_1| = 1$ და $|\lambda_2| = 1$, მაშინ O ელიფსური წერტილია;
4. თუ $|\lambda_1| > 1$ და $|\lambda_2| > 1$, მაშინ O არამდგრადი წერტილია.

ამბობენ, რომ T ასახვა ინახავს ფართობს, თუ $|\det A| = 1$. ამ შემთხვევაში, ცხადია, რომ $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = 1$. ფართობის შემნახველი ასახვის უძრავი წერტილი შეიძლება მხოლოდ ელიფსური ან ჰიპერბოლური ტიპის იყოს.

განვიხილოთ ფართობის შემნახველი ასახვა (ნახ. 4.1)



$$S_1 = S_2$$

ნახ. 4.1. S ფართობის შემნახველი ასახვა

თეორემა. არსებობს არაგადაგვარებული წრფივი ასახვა $(x; y) \rightarrow (x'; y')$, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (4.5)$$

სადაც α მობრუნების კუთხეა, თუ $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$ და $\Delta = 1$.

4.2. მობრუნება

განვიხილოთ საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით (გაჭიმვეა-შეკუმშვის გარეშე) α კუთხით მობრუნების გარდაქმნა. ასეთი გარდაქმნა მოცემულია (4.5) ფორმულებით. ამ გარდაქმნის იაკობიანი 1-ის ტოლია. ეს ფორმულები ასახავს სიბრტყის მობრუნებას კოორდინატთა სათავის ირგვლივ.

ასახვა, რომელიც სიბრტყის რაიმე (x_0, y_0) (უძრავი) წერტილის გარშემო, საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით α კუთხით მობრუნებისას მიიღება იქნება:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cdot \cos \alpha - (y - y_0) \cdot \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \cdot \sin \alpha + (y - y_0) \cdot \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (4.6)$$

4.3. გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა დაკავშირებულია მასშტაბის ცვლილებასთან. ცენტრალური გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა $O(0; 0)$ კოორდინატთა სათავის მიმართ k გაჭიმვა-შეკუმშვის მახასიათებლით ასე გამოისახება:

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases} \quad (4.7)$$

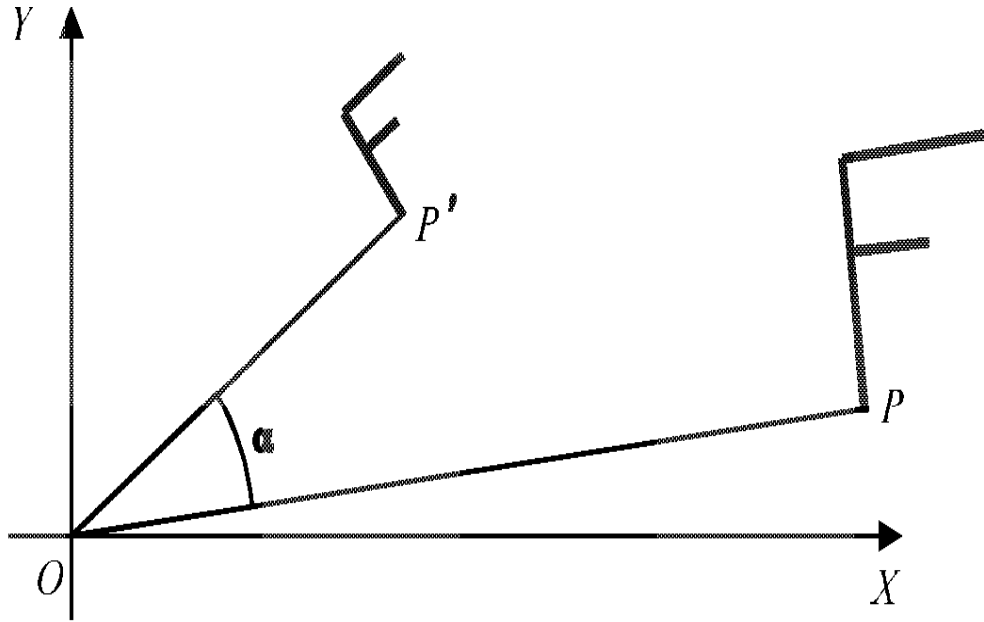
გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ k მახასიათებლით კი

$$\begin{cases} x' = k \cdot (x - x_0) + x_0 \\ y' = k \cdot (y - y_0) + y_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

როცა $|k| > 1$, ეს გარდაქმნები აღწერს გაჭიმვის ასახვას, თუ $|k| < 1$, გვაქვს შეკუმშვის ასახვა. თუ $k = -1$, გვაქვს არეკვლა $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ ანუ მობრუნება 180° -იანი კუთხით საათის ისრის საპირისპირო მიმართულებით.

4.4. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

კომპიუტერში გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების ასაგებად ხშირად გამოიყენება მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია. აქ განმსაზღვრელია: მობრუნების კუთხე, ცენტრის მდებარეობა და მასშტაბირების კოეფიციენტი. 4.2 ნახ-ზე გამოსახულია მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის ოპერაციის შედეგი კოორდინატთა $O(0; 0)$ სათავის მიმართ:



ნახ. 4.2. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

რომელიც მოიცემა შემდეგი გარდაქმნით

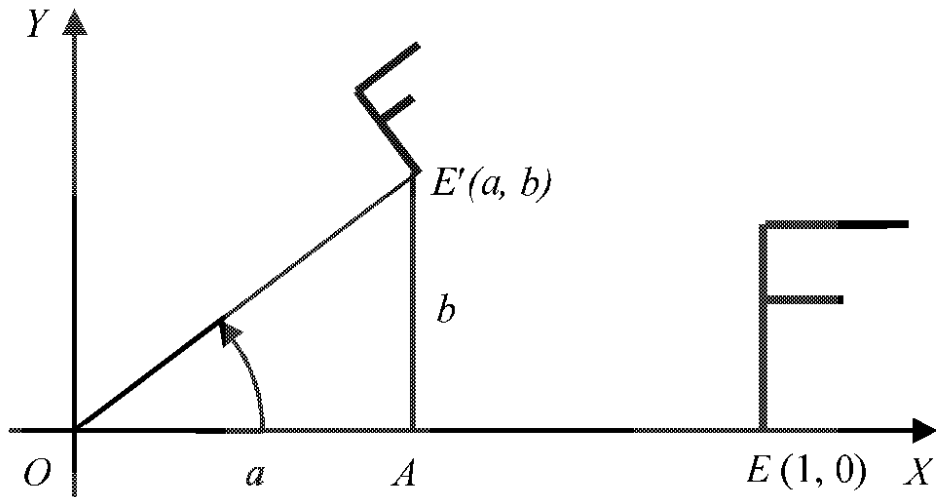
$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y \\ y' = b \cdot x + a \cdot y \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Δ გამოსახავს გაჭიმვა-შეკუმშვის სიდიდეს. როცა $\Delta > 1$, გვაქვს გაჭიმვა, $\Delta < 1$ -ის შემთხვევაში – შეკუმშვა. თუ გვაქვს მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა, რომლის დროსაც $E(1; 0)$ აისახება $E'(a; b)$ წერტილში (ნახ. 4.3), მასშტაბირების კოეფიციენტი იქნება:

$$k = \frac{OE'}{OE} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.10)$$

ამ ასახვისას მობრუნების კუთხეა α , რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OE'} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{AE'}{OE'} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.11)$$

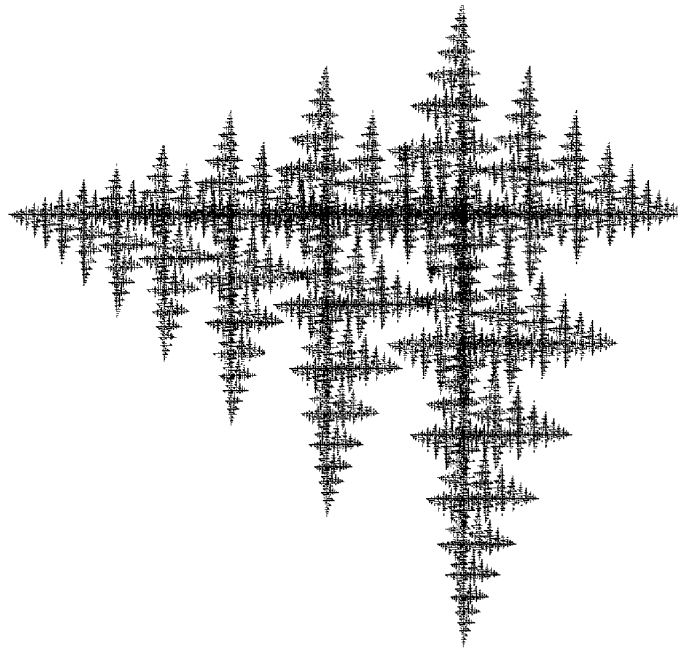


ნახ. 4.3. მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

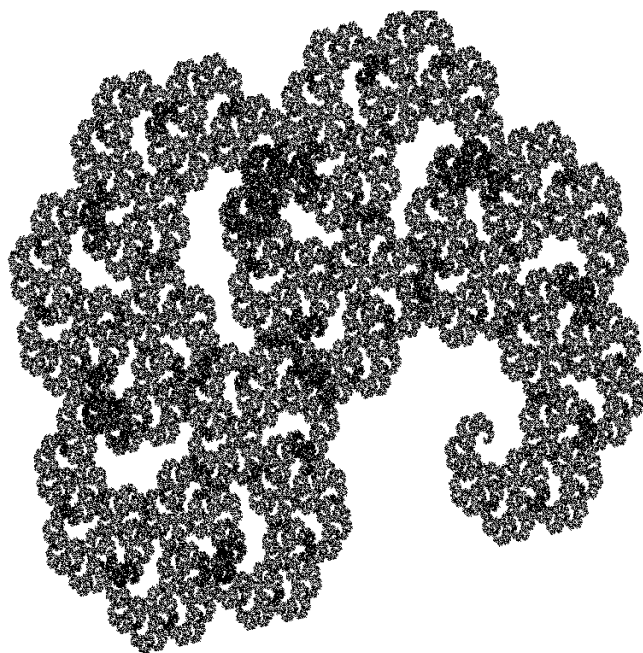
თუ გვინდა ჩავწეროთ მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა ნებისმიერი $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x + a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

ამ გარდაქმნების საფუძველზე იგება შესაბამისი ფრაქტალები (ნახ. 4.4 – 4.5).



ნახ. 4.4. მობრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი



ნახ. 4.5. ორმაგი მობრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი ბუნებაში გვხვდება მსგავსი ფრაქტალებიც (სურ. 4.1):



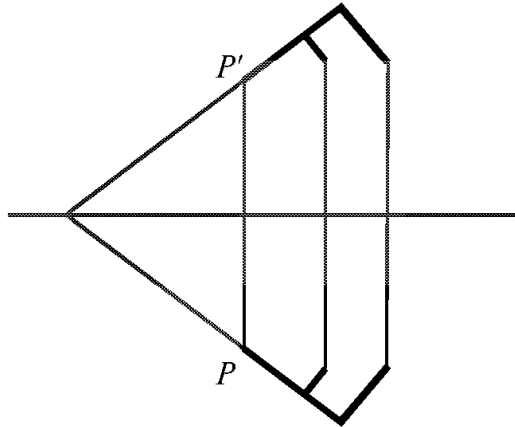
სურ. 4.1. კაქტუსი

4.5. სიმეტრიის გარდაქმნა

სიმეტრიის S ასახვა შეგვიძლია განვმარტოთ ტოლობით:

$$S^2 = E, \quad (4.13)$$

სადაც E იგივეური გარდაქმნაა. მართლაც, მოცემული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის სიმეტრიის გარდაქმნა გვაბრუნებს მოცემულ ფიგურასთან (ნახ. 4.6)



ნახ. 4.6. ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა

ფრაქტალების კონსტრუირების დროს სიმეტრიის გარდაქმნა უმეტესწილად გვხვდება შეკუმშვის ასახვასთან კომპოზიციაში. შეკუმშვის ასახვისას გვაქვს შეკუმშვის უძრავი ცენტრი და მასშტაბირების კოეფიციენტი, ხოლო სიმეტრიის ასახვისას ორი უძრავი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე.

თუ უძრავი ცენტრია კოორდინატთა სათავე $O(0; 0)$, მაშინ გვაქვს გარდაქმნა:

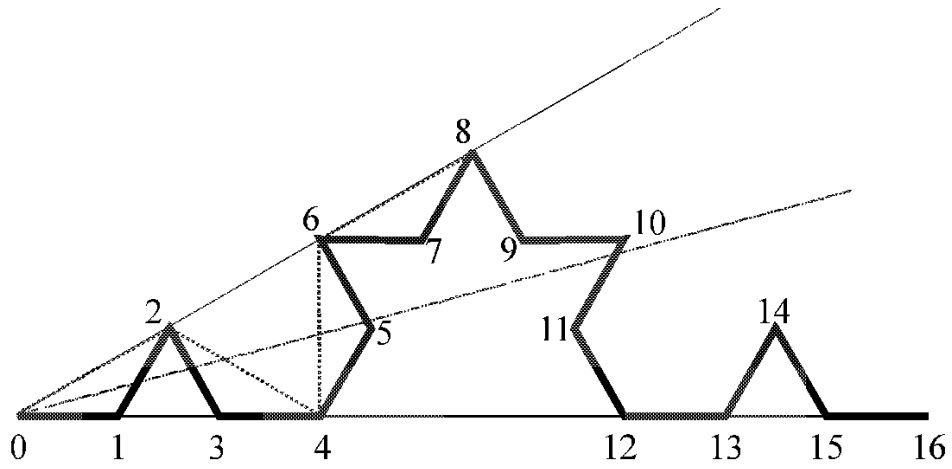
$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = -k \cdot y \end{cases} \quad (4.14)$$

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა გვაქვს უძრავი $M(x_0; y_0)$ ცენტრი, შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვა მოიცემა გარდაქმნებით:

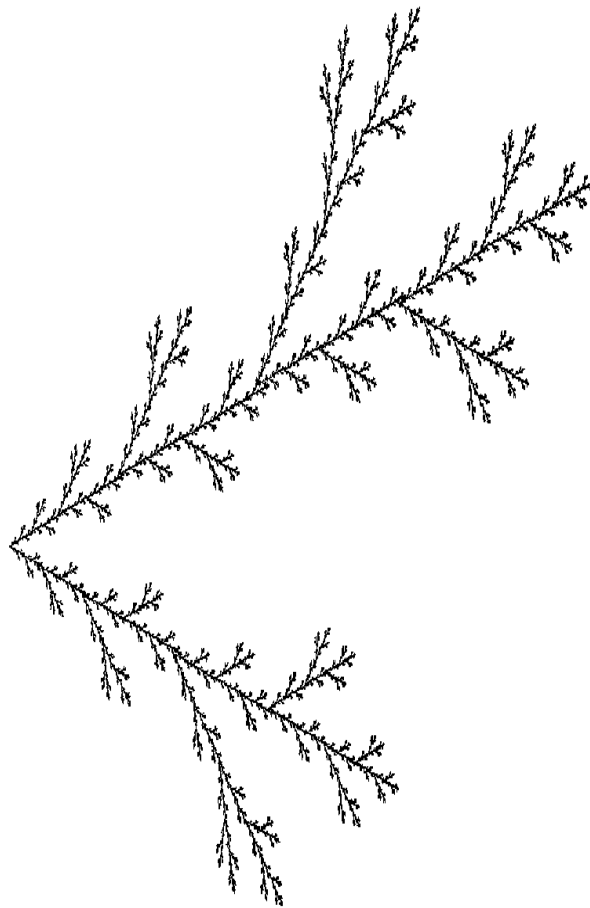
$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x - a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (4.15)$$

სადაც მასშტაბირების კოეფიციენტი $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

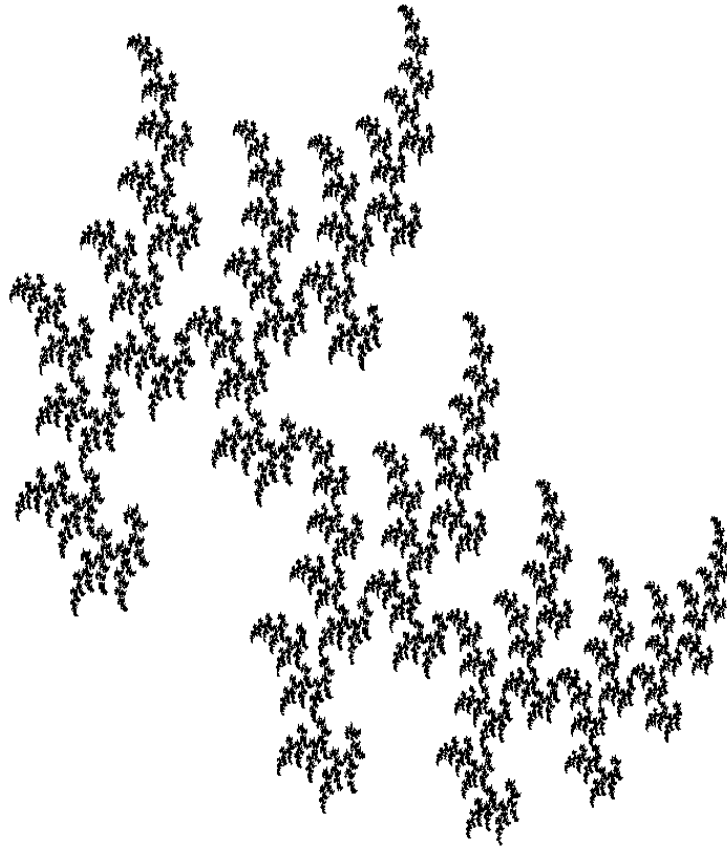
შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია ფართოდ გამოიყენება ფრაქტალების აგებისას (ნახ. 4.7 - 4.9):



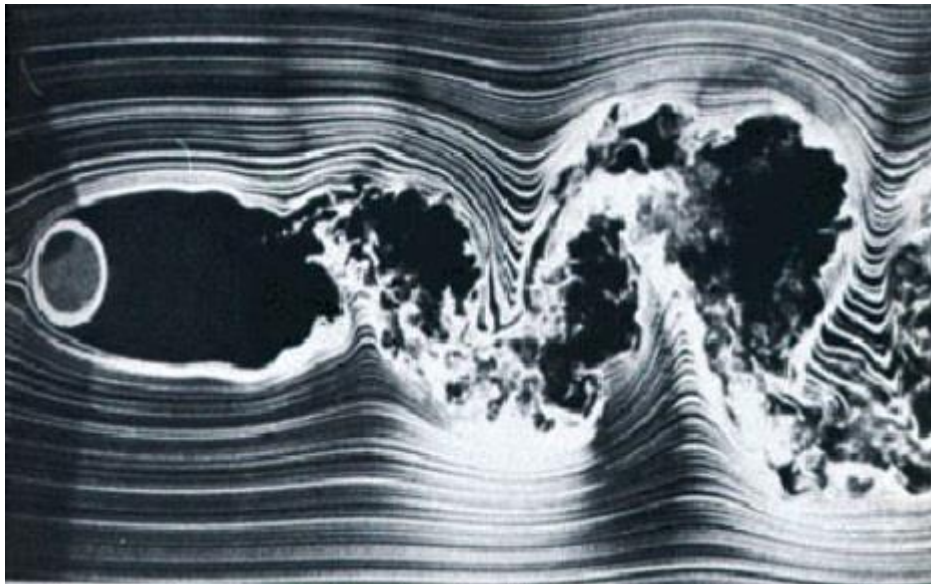
ნახ. 4.7. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია კოხის ფრაქტალში



ნახ. 4.8. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია დენდრიტის ფრაქტალში



ნახ. 4.9. ფრაქტალი, რომელიც მიიღება მობრუნება-შეკუმშვისა და შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიციით



სურ. 4.1. ბლანტი სითხით ცილინდრის გარსდენისას მიიღება ტურბულენტური კვალი, რომელიც რღვევის უბნებში ბუნებრივ ფრაქტალს ქმნის



სურ. 4.2. ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე გამოსახული ფრაქტალი



სურ. 4.3. თოვლის ზეგვის ფრაქტალი ცოცხალი სისტემა



სურ. 4.4. თერგის ჩანჩქერის ფრაქტალი



სურ. 4.5. ღორწომის კლდის დაფრაქტალეზებული ზედაპირი ქსნის ხეობაში



სურ. 4.6. ცხავატის (ქსნის ხეობაში) გამშრალი თიხის ზედა ფენის ფრაქტალი, რომელიც ძალიან წააგავს კანის ტექსტურასა და მცენარეთა ფოთლების აღნაგობას



სურ. 4.7. წყლისა და მიწის ურთიერთქმედებით ჩამოყალიბებული კავკასიონის მთათა ფრაქტალური ლანდშაფტი



სურ. 4.8. “იუპიტერის თვალის ფრაქტალი”. იუპიტერი აირად მდგომარეობაში მყოფი პლანეტაა. ეს თვალები მისი ატმოსფეროს დინამიკური წარმონაქმნია

4.6. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის დინამიკური სტრუქტურა

გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ზოგადი ფორმულით:

$$GKIFRACTAL \stackrel{\text{def}}{=} Fr(m, f, gekev), \quad (4.16)$$

სადაც m დედაფრაქტალია (საწყისი სიმრავლე), f – მამაფრაქტალი (ყოველ ბიჯზე დასამატებელი გეომეტრიული აგრეგატი), ხოლო $gekev$ პარამეტრი ფრაქტალის ევოლუციის გენეტიკური კოდია, რომელიც მიუთითებს, რამდენი ბიჯი კეთდება მსგავსების პრინციპით აგებისას და როგორია ფრაქტალის ზრდის კანონის გენეტიკა (ევოლუციის წესი).

ფრაქტალს იდეალურს ვუწოდებთ, რადგან მხედველობაში არ მიიღება გარემო პირობების შემთხვევითი RND ზემოქმედება ფრაქტალის ევოლუციის გეომეტრიაზე.

ამგვარად, წარმოდგენილი ფრაქტალები ფართოდ გამოიყენება ცოცხალი სისტემების მოდელირებისას.

თუ ვიცით დედაფრაქტალის, მამაფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის სახე, შეგვიძლია ავაგოთ გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი. ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად არსებობს შესაბამისი ალგორითმებიც.

გაცილებით მნიშვნელოვანია ისეთი ალგორითმის დამუშავება, რომელიც ამოხსნის შებრუნებულ ამოცანას ანუ როცა ვიცით ცოცხალი სისტემის გეომეტრიული ფორმა, როგორ დაავადგინოთ შესაბამისი დედაფრაქტალი, მამაფრაქტალი და გენეტიკური კოდი.

მართლაც, ცნობილია, რომ ადამიანის შინაგანი ორგანოები წარმოადგენს ფრაქტალებს, რომელთაგან თითოეულს აქვს თავისი დედაფრაქტალი, მამაფრაქტალი და გენეტიკური კოდი; მათი ცოდნა გაგვიადვილებდა შინაგანი ორგანოების ლაბორატორიულ პირობებში აღდგენის პრობლემას და დაავადებული ორგანოების შეცვლას. ცნობილია, რომ კიბოსაც ფრაქტალური სტრუქტურა აქვს. თუ შევძლებთ მისი დედაფრაქტალის, მამაფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის დადგენას, მაშინ გვეცოდინება, როგორ ვებრძოლოთ ამ დაავადებას უფრო ეფექტურად, ვიდრე ეს დღესაა შესაძლებელი.

ასე, რომ გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალების სახეთა გამოცნობის ამოცანა, რაც ნიშნავს მისი აგების შებრუნებული ალგორითმის დადგენას, მეტად მნიშვნელოვანია პრაქტიკული მედიცინის თვალსაზრისითაც.

4.7. მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნა

განვიხილოთ X სივრცე. ვთქვათ, ამ სივრცეში გვაქვს $X \times X$ დეკარტულ ნამრავლზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის $d(x, y)$ ფუნქცია ისე, რომ ადგილი აქვს აქსიომებს:

$$a) d(x, y) \geq 0; \forall (x, y) \in X \times X; \quad (4.17)$$

$$b) d(x, y) = 0 \Rightarrow (x = y); \quad (4.18)$$

$$g) d(x, y) = d(y, x); \quad (4.19)$$

$$d) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \forall x, y, z \in X, \quad (4.20)$$

მაშინ (X, d) წყვილს მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მეტრიკული სივრცე არის სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკის (მანძილის) ცნებით.

ვთქვათ, მოცემულია (X, d) მეტრიკული სივრცე. T ასახვას ეწოდება კუმშვადი (შეკუმშვა), თუ არსებობს ისეთი $0 < s < 1$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$d(T(x), T(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad (4.21)$$

რაც ნიშნავს, რომ კუმშვად ასახვას ნებისმიერი ორი წერტილი გადაჰყავს ისეთ სხვა ორ წერტილში, რომელთა შორისაც მანძილი უფრო ნაკლებია, ვიდრე ასახვამდე იყო.

კუმშვადი ასახვები საშუალებას გვაძლევს ვიმსჯელოთ ასახვათა უძრავ წერტილებზე. $f(x)$ ასახვის უძრავი წერტილი ეწოდება ისეთ $x = x_0$ წერტილს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(x_0) = x_0. \quad (4.22)$$

ადგილი მისახვედრია, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოგვცემს კუმშვად ასახვას, თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f'(x)| < s < 1. \quad (4.23)$$

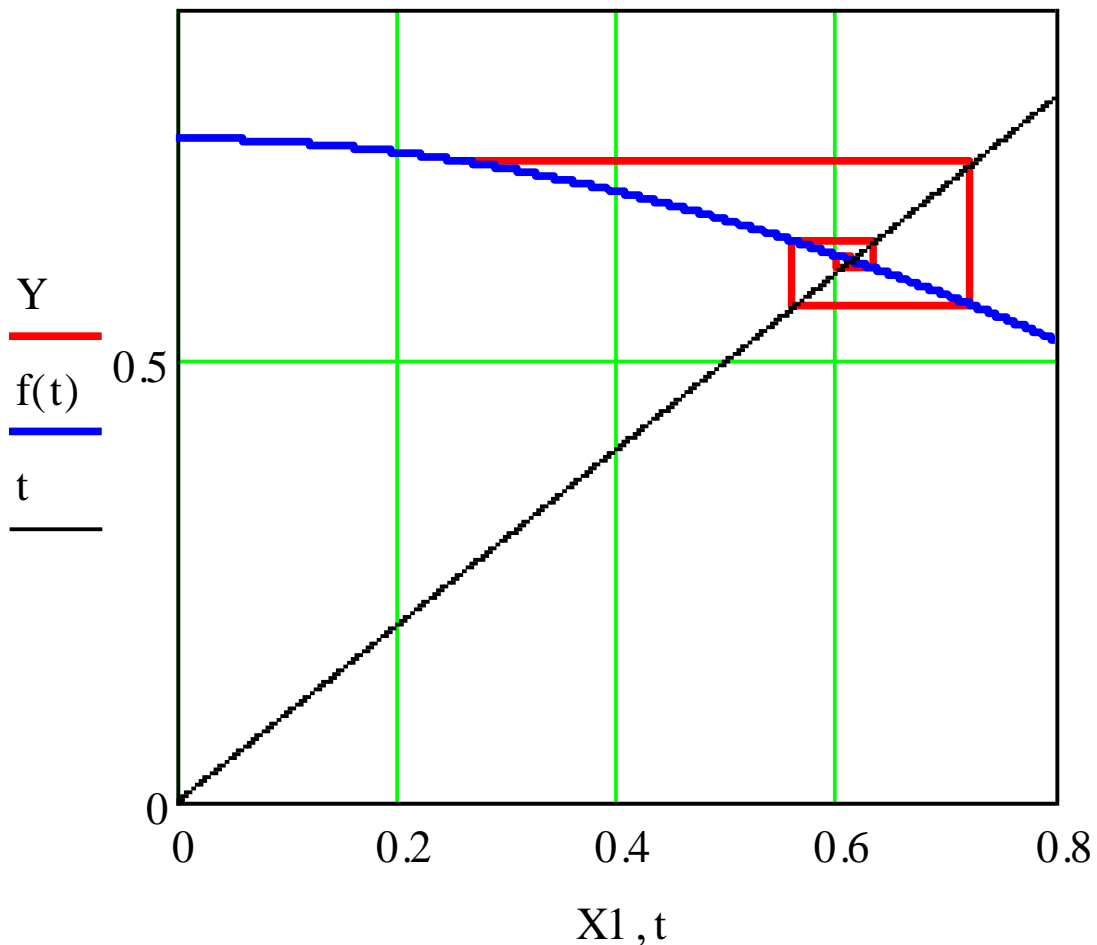
თუ $f(x)$ კუმშვადი ასახვაა, მაშინ ერთბიჯიან იტერაციულ სქემას ცნობილი საწყისი x_0 მიახლოებით

$$x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}, \quad (4.24)$$

აქვს უძრავი წერტილი $x = \xi$ ანუ $f(\xi) = \xi$, სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi. \quad (4.25)$$

მაგალითი. განვიხილოთ $f(x) = 0.75 \cdot \cos x$ ფუნქცია $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ შუალედში. ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია და უწყვეტი ამ შუალედში. ამასთან, $|f'(x)| = 0.75|\sin x| \leq 0.75 < 1$, რაც ნიშნავს რომ შესაბამისი ერთბიჯიანი იტერაციული სქემა: $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0.26$ საწყისი მიახლოებით კრებადია უძრავი წერტილისაკენ (ნახ. 4.10).



ნახ. 4.10. ობობას ქსელისმაგვარი დიაგრამა ერთობიანი იტერაციული სქემისათვის

ახლა გადავიდეთ მეტრიკული სივრცის აფინურ გარდაქმნაზე. მეტრიკული სივრცის წრფივ გარდაქმნას შემდგომი გადატანის ასახვით აფინური გარდაქმნა ეწოდება.

მეტრიკული \mathbb{R}^n სივრცის L გარდაქმნას წრფივი ეწოდება, თუ მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი x და y ორი ელემენტისათვის და λ, μ ნამდვილი რიცხვებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y). \quad (4.26)$$

თუ L წრფივი გარდაქმნაა, მაშინ ადგილი აქვს მის მატრიცულ წარმოდგენას:

$$L(x) = A \cdot x. \quad (4.27)$$

გადატანის T გარდაქმნა განისაზღვრება ტოლობით:

$$T(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.28)$$

სადაც a გადატანის მუდმივი ვექტორია.

ამგვარად, აფინური გარდაქმნა, ზოგადად, შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$T(x) = A \cdot x + a. \quad (4.29)$$

\mathbb{R}^2 სიბრტყის გარდაქმნის შემთხვევაში აფინური გარდაქმნა მოიცემა *ქვესი მუდმივის* $(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_1; \gamma_2)$ მეშვეობით:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

გარდაქმნა (4.30) ადიდებს ($\delta > 1$) ან ამცირებს მრავალკუთხედის ფართობს ($\delta < 1$) δ -ჯერ იმის მიხედვით, როგორია გარდაქმნის

$$\delta = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

მატრიცის დეტერმინანტი.

4.8. მანძილი მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლებს შორის

განვიხილოთ (X, d) მეტრიკული სივრცე.

განსაზღვრება. ვამბობთ, რომ X მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ კრებადია $a \in X$ წერტილისაკენ, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$.

განსაზღვრება. ვამბობთ, რომ X მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ არის ფუნდამენტური ანუ კოშის მიმდევრობა, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

ცხადია, მეტრიკულ სივრცეში ყოველი კრებადი მიმდევრობა კოშის მიმდევრობაა, თუმცა შებრუნებული დებულება არაა ყოველთვის ჭეშმარიტი ანუ ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა საზოგადოდ არაა კრებადი.

განსაზღვრება. მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სრული**, თუ მასში ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია.

განსაზღვრება. (X, d) მეტრიკული სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება **ჩაკეტილი** (X, d) სივრცეში, თუ ის შეიცავს მისი ფუნდამენტური მიმდევრობების ყველა ზღვარით წერტილს.

განსაზღვრება. (X, d) მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **კომპაქტური**, თუ მისი წერტილების ნებისმიერი $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

P.S. თუ \mathbb{R}^n საწყისი მეტრიკული სივრცეა, მაშინ მისი ქვესიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული.

ვთქვათ, მოცემულია (X, d) სრული მეტრიკული სივრცე. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $K(X)$ -ით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ყველა კომპაქტური ქვესივრცე. განვსაზღვროთ უმოკლესი მანძილი X სიმრავლის რაიმე $x \in X$ წერტილსა და $K(X)$ ქვესივრცის რაიმე $B \in K(X)$ კომპაქტურ სიმრავლეს შორის:

$$d(x; B) = \min\{d(x; y) : y \in B\}. \quad (4.32)$$

ახლა უკვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ მანძილი ორ კომპაქტურ A და B სიმრავლეს შორის:

$$d(A; B) = \max\{d(x; B) : x \in A\}. \quad (4.32)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$d(A; B) \neq d(B; A). \quad (4.33)$$

ამ ფაქტის გამოსწორება შეიძლება, თუ შემოვიღებთ მანძილის ახალ $h(A; B)$ ცნებას:

$$h(A; B) = \max\{d(A; B); d(B; A)\}. \quad (4.34)$$

ახლა უკვე სრულდება მეტრიკის სიმეტრიულობის თვისება:

$$d(A; B) = d(B; A) \quad (4.35)$$

და $h(A; B)$ არის $K(X)$ სივრცის მეტრიკა. ამ მეტრიკას ჰაუსდორფის მეტრიკა, ხოლო $(K(X), h)$ სივრცეს ჰაუსდორფის მეტრიკული სივრცე ეწოდება. ბარნსლიმ ამ სივრცეს “ფრაქტალების საცხოვრისი” უწოდა. ეს სრული მეტრიკული სივრცეა. იმ შემთხვევაში, როცა \mathbb{R}^2 საწყისი მეტრიკული სივრცეა, შესაბამის კომპაქტურ ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს მოკლედ $K(\mathbb{R}^2)$ აღნიშნავენ.

V თავი. გამოსახულების ფრაქტალური შეკუმშვა

ციფრული გამოსახულებების გამოყენების ფართო დიაპაზონის გამო ციფრულ კამერებში, სკანერებში, პრინტერებში ასევე სამხედრო ინტერესებისათვის ტელემეტრიული მონაცემების დამუშავების სფეროში, ადგილის გამოსახულების არქივირებისათვის, თავდაცვის ღონისძიებების მოდელირებისათვის და ა.შ. დიდი გამოყენება პოვა გამოსახულებათა შეკუმშვის, შენახვისა და აღდგენის ყველაზე უფრო თანამედროვე მეთოდების დამუშავებამ, რაც ფრაქტალებისა და ვეივლეტების გამოყენებას ეყრდნობა.

მონაცემთა სტრუქტურის დადგენა მეტად მნიშვნელოვანია მათი ეფექტურად წარმოდგენისა და შენახვის საქმეში. ფრაქტალური კოდირებისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის მეთოდები იყენებს ორ სხვადასხვა მიდგომას მონაცემთა სტრუქტურის დასადგენად. **ბარნსლმა და სლოუნმა** პირველებმა [11] შენიშნეს კავშირი იტერირებად ფუნქციათა სისტემის თეორიასა და გამოსახულებათა შეკუმშვის პრობლემას შორის. **ჯეკვინმა** [11] შეიმუშავა მონაცემთა **ფრაქტალური კოდირების მეთოდი**, სადაც გამოიყენება გამოსახულების **დომენურ და რანგულ ბლოკთა სისტემები**. ამ მეთოდიდან გამომდინარე, გამოსახულებას ყოფენ ერთმანეთთან არათანამკვეთ რანგულ ქვეგამოსახულებებად და განსაზღვრავენ ერთმანეთთან თანამკვეთ დომენურ ქვეგამოსახულებათა სისტემას. ყოველი რანგული ბლოკისათვის კოდირების ალგორითმი პოულობს შესაბამის დომენურ ბლოკსა და აფინურ გარდაქმნას, რომელიც ამ დომენურ ბლოკს ასახავს მოცემულ რანგულ ბლოკზე. ამგვარად, გამოსახულების სტრუქტურა აისახება დომენური, რანგული ბლოკების სისტემებსა და შესაბამის აფინურ გარდაქმნებზე. ამჟამად, მიმდინარეობს კვლევები გამოსახულების ფრაქტალური შეკუმშვის დროის შემცირებისათვის.

გამოსახულების შეკუმშვის **ვეივლეტ-მეთოდები** იყენებს ვეივლეტ-გარდაქმნებს, რაც საშუალებას იძლევა გამოსახულება გაფილტვროთ ზედმეტი მონაცემებისაგან და ეფექტური კოდირება მოვახდინოთ.

გამოსახულების შეკუმშვის კომბინირებული ვეივლეტ-ფრაქტალური მეთოდები იყენებს ფრაქტალური შეკუმშვის დომენურ-რანგული გარდაქმნის იდეას ვეივლეტ-ფილტრის ქვეხეებისათვის.

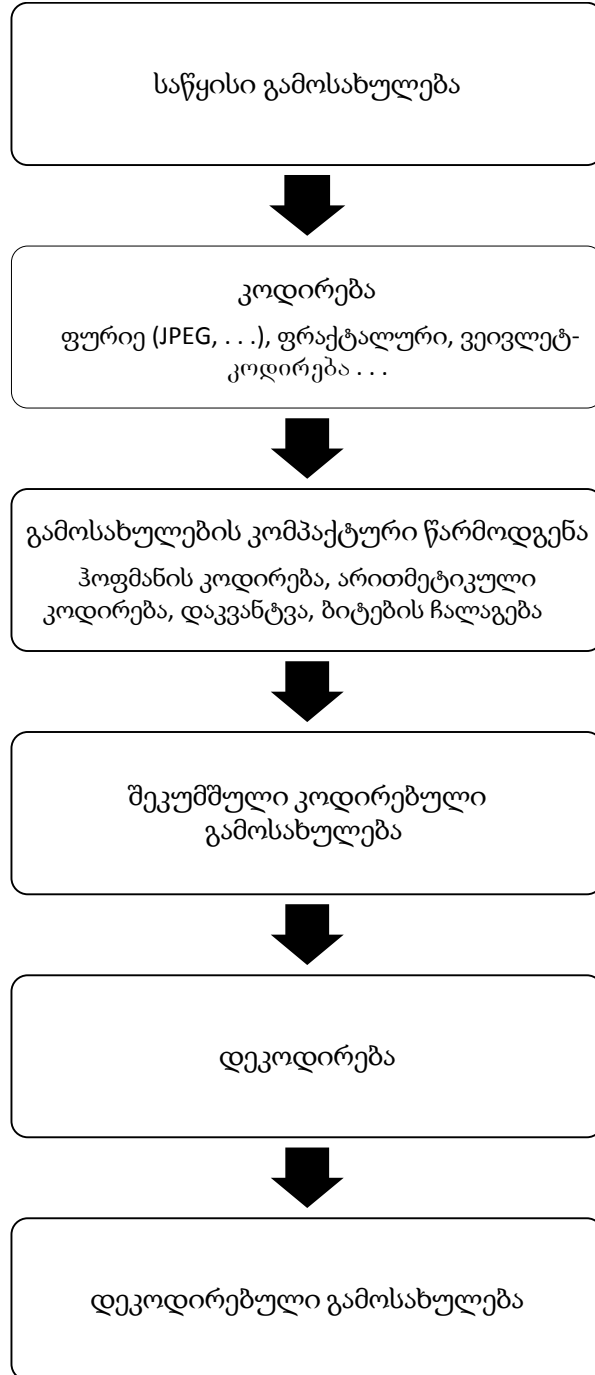
შედგება ვიდეო შეკუმშვის კოეფიციენტისა და დეკოდირებული გამოსახულების უკეთეს ხარისხს.

მათემატიკის თვალსაზრისით, შავ-თეთრი გამოსახულება შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც ორი ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია $z = f(x, y)$, რომელიც განსაზღვრულია მართკუთხედზე $D(f) = \{(x; y) | (a \leq x \leq b) \wedge (c \leq y \leq d)\}$ ან კვადრატზე $D(f) = \{(x; y) | (a \leq x \leq b) \wedge (a \leq y \leq b)\}$. რადგან გამოსახულებამ “არიცის” საკუთარი განსაზღვრის არე, ჩავთვალოთ, რომ განსაზღვრის არეა ერთეული სიგრძის გვერდის მქონე კვადრატი $D(f) = \{(x; y) | (0 \leq x \leq 1) \wedge (0 \leq y \leq 1)\}$. მაშინ გამოსახულების გრადაცია მოიცემა შესაბამისი $z = f(x, y)$ ფუნქციით (სადაც გამოსახულების მეტ სიმკვეთრეს უფრო დიდი რიცხვითი მნიშვნელობები შეესაბამება). შესაბამისად, თუ გვინდა ფერადი გამოსახულების გამოსახვა, მაშინ დაგვჭირდება სიბრტყეზე განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქციები. არსებობს წარმოდგენის რამდენიმე საშუალება. კომპიუტერში ფერი წარმოიდგინება, როგორც სამი ფერის: **წითლის, მწვანის და ლურჯის** კომბინაცია (*RGB*). პრინტერში შავის გარდა გამოიყენება: ცისფერი, წითელი და ყვითელი ფერების კომბინაცია (*CMYK*). ნებისმიერ შემთხვევაში ფერი წარმოიდგინება, როგორც სამი ფერის კომბინაცია ანუ ყოველ წერტილში განსაზღვრულია ვექტორი.

ადამიანის მიერ გამოსახულების აღქმა ანალოგური პროცესია, ხოლო კომპიუტერული სამყარო – ციფრული სამყარო. შავ-თეთრი გამოსახულება კომპიუტერში არაუარყოფითი რიცხვების ორგანზომილებიანი მასივია, მასივის თითოეული ელემენტი – გამოსახულების ერთი პიკსელი. თითოეული პიკსელისათვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ 8 ბიტი (თანრივი).

5.1. გამოსახულების შეკუმშვის ამოცანა

გამოსახულების შეკუმშვის პროცესი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგი ბლოკ-სქემით (ნახ. 5.1):



ნახ. 5.1. გამოსახულების შეკუმშვის პროცესის ბლოკ-სქემა

ციფრული გამოსახულება – პიკსელთა მნიშვნელობების მასივი, რომელიც რიცხვითი მატრიცით გამოისახება. გამოსახულების

შეკუმშვის ოპერაცია ორი ძირითადი ნაწილისაგან შედგება: **კოდირება და დეკოდირება.**

კოდირება გარდაქმნის საწყის რიცხვით მასივს ისე, რომ მან რაც შეიძლება ნაკლები მეხსიერება დაიკავოს კომპიუტერში.

დეკოდირება აღადგენს საწყის გამოსახულებას კოდირებულიდან (შებრუნებული გარდაქმნით). თუ დეკოდირებული გამოსახულება ზუსტად ემთხვევა საწყის გამოსახულებას, მაშინ ამბობენ, რომ კოდირება-დეკოდირების ალგორითმი არის **ალგორითმი დანაკარგის გარეშე**. თუ დეკოდირებული გამოსახულება განსხვავდება საწყისი გამოსახულებისაგან, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **ალგორითმი დანაკარგებით**.

შეკუმშვის სხვა უმრავლეს მეთოდებთან ერთად, ფრაქტა-ლური და ვეივლეტ-მეთოდებიც წარმოადგენს ალგორითმებს დანაკარგებით. არსებობს, მონაცემთა შეკუმშვის ორი ხერხი:

- ა) შეგვიძლია შევამციროთ მონაცემები მათი გაფილტვრის საშუალებით, მაშინ შემცირდება მათ შესანახად საჭირო ბიტების რაოდენობაც;
- ბ) ან დავამრგვალოთ რიცხვები მოცემულ მასივებში და ამით შევამციროთ შესანახად აუცილებელი მეხსიერება.

სრულ სქემებში გამოიყენება შეკუმშვის ორივე მეთოდი.

მონაცემთა შეკუმშვისათვის **ჰოფმანმა** შეიმუშავა **ენტროპი-ული მეთოდი**, რომელიც ამოწმებს ციფრულ მონაცემთა განაწილების სტრუქტურას. რიცხვით მნიშვნელობებს, რომლებიც მასივში ხშირად გვხვდება, შეუსაბამებენ ნაკლები რაოდენობის ბიტებს, ხოლო იმ მნიშვნელობებს, რომელიც უფრო იშვიათად გვხვდება, შეუსაბამებენ უფრო მეტ ბიტებს. ენტროპიულ მიდგომას იყენებს **არითმეტიკული კოდირების** მეთოდიც.

პრაქტიკაში მიზანშეწონილია ყველა ამ მეთოდის სინთეზურად გამოყენება, რათა ყველა მიდგომის დადებითი მხარე იქნეს გამოყენებული გამოსახულების ეფექტური კოდირებისათვის.

მონაცემთა ფრაქტალური შეკუმშვისათვის მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ჰათინსონისა [12] და ბარნსლის [13] იტერირებად ფუნქციათა თეორია. განვიხილოთ **იტერირებად ფუნქციათა სისტემები (IFS)** და მათი გამოყენება.

5.2. იტერირებად ფუნქციათა სისტემები

სიბრტყის აფინური გარდაქმნის განხილვისას მიიღება გარდაქმნის ფორმულები (4.30), რომლებიც დამოკიდებულია ექვს თავისუფალ ცვლადზე. აქედან გამომდინარე, თუ გვინდა ბრტყელი ფიგურის სამი სხვადასხვა წერტილის კოორდინატები $(x_1; y_1); (x_2; y_2); (x_3; y_3)$ ავსახოთ სხვა, განსხვავებულ სამ წერტილში $(x'_1; y'_1); (x'_2; y'_2); (x'_3; y'_3)$, მაშინ ცალსახად განისაზღვრება გარდაქმნის ექვსი ცვლადის მნიშვნელობები განტოლებებიდან:

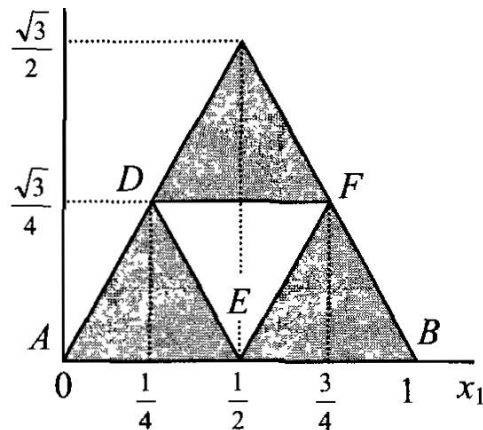
$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

ავაგოთ \mathbb{R}^2 სიბრტყის აფინური გარდაქმნები

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

რომლებიც საშუალებას მოგვცემს ავაგოთ სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა (ნახ. 5.2).



ნახ. 5.2. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის დედა და მამაფრაქტალები
ნახაზზე კარგად ჩანს, რომ ერთი ΔABC სამკუთხედი იცვლება სამი $\Delta DCF, \Delta ADE$ და ΔEFB სამკუთხედით. აქვეა მითითებული წვეროთა შესაბამისი კოორდინატები. ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ ის აფინური გარდაქმნები, რომლებიც დიდ სამკუთხედს გადასახავს სამ მცირე სამკუთხედად.

ეს აფინური გარდაქმნებია:

$$\Delta ABC \Rightarrow \Delta ADE: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (5.4)$$

$$C \Rightarrow D: \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

ასევე მოწმდება სხვა წერტილების ასახვებიც:

$$\Delta ABC \Rightarrow EFB: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad (5.6)$$

$$C \Rightarrow F: \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

დასასრულ

$$\Delta ABC \Rightarrow DCF: \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}; \quad (5.8)$$

$$C \Rightarrow C: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

მხედველობაში მიიღება, რომ დიდი სამკუთხედის ფართობი ყოველ ბიჯზე $D = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 4$ -ჯერ მცირდება. პროცესის

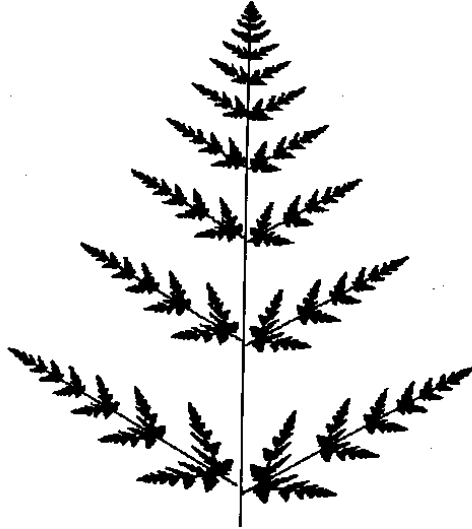
გეომეტრიულად გამოსახვისათვის აფინური ასახვები უნდა გავიმეოროთ ყოველი ახლად წარმოქმნილი პატარა სამკუთხედი-სათვის და შედეგები გამოვხაზოთ საწყისი სამკუთხედის ნახაზზე. ამისათვის დაგვჭირდება კიდევ ოთხი ტიპის ასახვა: მობრუნება ϑ კუთხით, სიმეტრიის ასახვა OX ღერძის მიმართ, OY ღერძის მიმართ და ცენტრული სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ. ეს ასახვები, შესაბამისად, მოიცემა ასახვის მატრიცებით:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

ეს ალგორითმი ადვილად რეალიზებადია *Matlab* გარემოში.

5.2.1. გამოსახულების კოდირების მაგალითი

განვიხილოთ გვიმრის ორობითი ტიპის გამოსახულება (ნახ. 5.3), სადაც პიკსელის მნიშვნელობაა: 0 ან 1.



ნახ. 5.3. გვიმრის ორობითი ტიპის გამოსახულება

ამ გამოსახულებას ახასიათებს თვითმსგავსება ანუ ფრაქტალური სტრუქტურა. მისი ფრაქტალური კოდირებისათვის საკმარისია ოთხი ობიექტის კოდირება, რომელთაგან თითოეული ხასიათდება სამი რიცხვით: პირველი ობიექტია ქვედა მარცხენა ტოტის მომცველი მინიმალური ზომის სამკუთხედი (სამი წვეროთი), მეორე ქვედა მარჯვენა ტოტის მომცველი მინიმალური სამკუთხედი (სამი წვეროთი), მესამე ქვემო დატოტვიდან მომდევნო დატოტვამდე არსებული დეროს მონაკვეთი (ორი დატოტვის წერტილი და მათ შორის შუა წერტილი) და მეოთხე ზედა წვეროს მომცველი მინიმალური სამკუთხედი (სამი წვეროთი). აქედან გამომდინარე, ამ გამოსახულების ფრაქტალური კოდირებისათვის საკმარისია 24 რიცხვის შენახვა. მართლაც, სამკუთხედის აფინურ გარდაქმნას სჭირდება 6 რიცხვი (5.1-5.2), 4 ტრიადის (სამი წერტილის) გადასახვას $4 \cdot 6 = 24$ პიქსელი. ეს აადვილებს გამოსახულების კოდირებას. დანარჩენი ტოტების მიღება ხდება აფინური, თვითმსგავსების პრინციპიდან გამომდინარე, რადგან გვიმრის ტოტები ერთნაირი გეომეტრიული აგებულებისაა და მხოლოდ მასშტაბით განსხვავდება. საზოგადოდ, ყველა გამოსახულებას არა აქვს ფრაქტალური

სტრუქტურა და უნდა ვეძებოთ განმეორებადი ფრაგმენტები, რათა გავიმარტივოთ გამოსახულების კოდირება.

5.2.2. IFS ფუნქციათა სისტემები ჰაუსდორფის სივრცეში

ფრაქტალური გამოსახულებები განვიხილოთ $(K(X); h)$ ჰაუსდორფის სივრცეში. განვსაზღვროთ კუმშვადი ასახვების სპეციალური სახე, რომელიც მოქმედებს გამოსახულებაზე ანუ $(K(X); h)$ სივრცის ელემენტებზე.

ვთქვათ, $\{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ არის (X, d) მეტრიკული სივრცის კუმშვად ასახვათა სასრული რაოდენობა კუმშვის შესაბამისი s_1, s_2, \dots, s_N კოეფიციენტებით, სადაც $s_i \in [0; 1)$. შემოვიღოთ W ასახვა, რომელიც მოქმედებს X სივრცის კომპაქტურ ქვესიმრავლეებზე (ანუ $K(X)$ ელემენტებზე):

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{i=1}^N w_i(B), \quad \forall B \in K(X). \quad (5.11)$$

მაშასადამე, $W: K(X) \rightarrow K(X)$ არის კუმშვადი ასახვა $(K(X); h)$ ჰაუსდორფის სივრცეში s კუმშვის კოეფიციენტით, სადაც $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ და ადგილი აქვს უტოლობას:

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C) \quad \forall B, C \in K(X). \quad (5.12)$$

P.S. იტერირებად ფუნქციათა (IFS) სისტემა შედგება სრული მეტრიკული (X, d) სივრცისა და სასრული რაოდენობის კუმშვადი ასახვებისაგან. ასეთი ასახვებისათვის იხმარება აღნიშვნა $\{X, w_i; i = \overline{1, N}\}$.

კუმშვადი ასახვები შეგვიძლია გამოვიყენოთ იტერირებადი ფუნქციებისათვისაც. გამოსახულებას, რომელიც **IFS** ასახვის ერთადერთი უძრავი წერტილია, ატრაქტორი ეწოდება. ბარნსლიმ ჩამოაყალიბა თეორემა ჰაუსდორფის მეტრიკულ სივრცეში კუმშვადი ასახვების შესახებ და კოლაჟის თეორემა უწოდა.

კოლაჟის თეორემა. ვთქვათ, L არის წერტილი $L \in K(X)$. მოცემულია $\varepsilon > 0$ მუდმივას რაღაც მნიშვნელობა. ავირჩიოთ IFS ფუნქციათა სისტემა $\{X, w_i; i = \overline{1, N}\}$ კუმშვის s კოეფიციენტით ($0 < s < 1$) ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$h(L, \cup_{i=1}^N w_N(L)) \leq \varepsilon, \quad (5.13)$$

მაშინ

$$h(L, A) \leq (1 - s)^{-1} \cdot h(L, \cup_{i=1}^N w_N(L)) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}, \quad (5.14)$$

სადაც A არის IFS ფუნქციათა სისტემის ატრაქტორი.

რადგან A ატრაქტორი არის IFS იტერაციათა უსასრულო რაოდენობის შედეგი, ცხადია ის ფრაქტალია. კოლაჟის თეორემა გვაძლევს ალგორითმს გამოსახულების შესაბამისი ფრაქტალების ასაგებად. ეს ნათლად გამოჩნდა გვიმრის ორობითი ფრაქტალის აგებისას.

5.3. გამოსახულების ფრაქტალური კოდირება შავ-თეთრ ფერებში

ისეთი გამოსახულება, როგორცაა გვიმრის ორობითი გამოსახულება, შეგვიძლია ავავოთ შედარებით მარტივი IFS ფუნქციათა სისტემის საფუძველზე, რადგან მას ახასიათებს გლობალური თვითმსგავსება. ეს ნიშნავს, რომ მთლიანი გამოსახულება შედგება მისი ან მისი ნაწილების მსგავსი მასშტაბში შემცირებული ფრაგმენტებისაგან. ამასთან, ასეთი გამოსახულება ორობითი ტიპის გამოსახულებაა, რადგან მის ყოველ პიქსელს აქვს 1 ან 0 მნიშვნელობა. რეალურ ობიექტთა უმრავლესობას არა აქვს თვითმსგავსების თვისება, უფრო მეტიც მათი უმრავლესობა არაა ორობითი ტიპის ანუ ყოველი პიქსელი მნიშვნელობებს იღებს გარკვეულ დიაპაზონში შავ-თეთრი გამოსახულებებისათვის ან ხასიათდება ვექტორით ფერადი გამოსახულების შემთხვევაში. ამ შემთხვევაში დაგვეჭიროება IFS სისტემაზე უფრო ზოგადი სისტემა.

როგორც აღვნიშნეთ, შავ-თეთრი ტიპის გამოსახულება შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $I^2 = I \times I$ კვადრატზე განსაზღვრული ორი ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია $f(x, y)$ ანუ

$$f: I^2 \rightarrow \{1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

სადაც N შავი ფერის გრადაციათა რაოდენობაა. შეგვიძლია ამ ტიპის ფუნქციათა სიმრავლეზე შემოვიღოთ მეტრიკა:

$$d_2(f, g) = \left(\int_1^N \int_1^N |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.16)$$

აქედან გამომდინარე, განვიხილავთ კვადრატით ინტეგრირებად F სრულ მეტრიკულ სივრცეს. ამ სივრცისათვის ადგილი აქვს თეორემას კუმშვადი ასახვის შესახებ.

განვიხილოთ ციფრული გამოსახულებები. $n \times m$ ზომის ციფრული გამოსახულება არის $f_{i,j}$ მატრიცა, სადაც $i = \overline{1, n}$ და $j = \overline{1, m}$, ხოლო $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. ასეთ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ გვაქვს გაუსის დისკრეტული მეტრიკა:

$$d_{dG}(f, g) = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |f(x_i, y_j) - g(x_i, y_j)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

5.3.1. ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა

გამოსახულების ფრაქტალური შეკუმშვისათვის გამოიყენება სპეციალური ტიპის ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა (*partitioned iterated function system – PIFS*). ეს სისტემა შედგება სრული მეტრიკული X სივრცის, მისი $D_i \subset X$, $i = \overline{1, n}$ ქვესიმრავლეებისა და კუმშვადი $w_i: D_i \rightarrow X$, $i = \overline{1, n}$ ასახვებისაგან.

5.3.2. შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების აფინური ასახვა

ვთქვათ, გვაქვს ერთეულოვანი კვადრატის აფინური ასახვა თავის თავზე:

$$\widetilde{w}_i: I^2 \rightarrow I^2. \quad (5.18)$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, გვაქვს 2×2 ზომის A_i მატრიცისა და 2×1 ზომის b_i ვექტორისათვის აფინური ასახვის ჩანაწერი:

$$\bar{w}_i(x, y) = A_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_i. \quad (5.19)$$

ვთქვათ, $D_i \subset I^2$ არის ერთეულოვანი კვადრატის რაღაც ქვესიმრავლე, ხოლო R_i \bar{w}_i ასახვის სახე მისი D_i ქვესიმრავლეზე მოქმედებისას, მაშინ $\bar{w}_i(D_i) = R_i$. ეხლა უკვე შეგვიძლია ჩავწეროთ $f(x, y)$ ფუნქციაზე მოქმედი $w_i: F \rightarrow F$ ასახვა:

$$w_i(f)(x, y) = s_i \cdot f(\bar{w}_i^{-1}(x, y)) + o_i. \quad (5.20)$$

s_i კონსტანტაზეა დამოკიდებული გამოსახულების კონტრასტულობა. o_i გამოსახულების სიკაშკაშეს მართავს.

\bar{w}_i ასახვას w_i ასახვის სივრცულ მდგენელს უწოდებენ. (5.20) ასახვა ის ბაზური ასახვაა, რომელსაც იყენებენ შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების ფრაქტალური კოდირებისას.

ეხლა განვიხილოთ შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვადი ასახვა. იმისათვის, რომ $w_i: F \rightarrow F$ ასახვა იყოს კუმშვადი, უნდა შესრულდეს უტოლობა:

$$d_2(w_i(f), w_i(g)) \leq s \cdot d_2(f, g), \quad (5.21)$$

სადაც $s \in (0, 1)$. თუ გამოვიყენებთ ცვლადთა გარდაქმნას (5.16) ორჯერად ინტეგრალში, მაშინ [11]

$$d_2^2(w_i(f), w_i(g)) \leq |s_i|^2 \cdot |\det A_i| \cdot d_2^2(f, g), \quad (5.22)$$

სადაც A_i არის w_i გარდაქმნის მატრიცა, $\det A_i$ – გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი, s_i – კუმშვის კოეფიციენტი.

5.3.3. შავ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვადი ასახვა

ერთეულოვანი I^2 კვადრატი დაეფაროს რანგული ბლოკების $\{R_i\}$ სიმრავლით ისე, რომ

$$I^2 = \cup R_i, \quad (5.23)$$

$$R_i \cap R_j = \emptyset. \quad (5.24)$$

ვთქვათ, \bar{w}_i არის ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა PIFS:

$$\bar{w}_i: D_i \rightarrow R_i, \quad (5.25)$$

ასე, რომ D_i დომენური არეა $D_i \subset I^2$, რომლებიც შეიძლება გადაიკვეთოს. \bar{w}_i ასახვა D_i დომენებს ასახავს რანგულ R_i სიმრავლეებზე. დომენები შეიძლება იკვეთებოდეს კიდევ, ხოლო რანგული არეები მთლიანად ფარავს ერთეულოვან კვადრატს.

თითოეული \bar{w}_i ასახვისათვის განვსაზღვრავთ შესაბამის w_i ასახვას გამოსახულებათა F სიმრავლეზე:

$$w_i(f)(x, y) = s_i \cdot f(\bar{w}_i^{-1}(x, y)) + o_i, \quad (5.26)$$

სადაც s_i ისე აირჩევა, რომ w_i იყოს კუმშვადი ასახვა. ახლა განვსაზღვროთ $W: F \rightarrow F$:

$$W(f)(x, y) = w_i(f)(x, y), \quad \forall (x, y) \in R_i. \quad (5.27)$$

რადგან რანგული არეები მთლიანად ფარავს ერთეულოვან კვადრატს, W ასახვა მოქმედებს მთელ ერთეულოვან კვადრატზე და, შესაბამისად, $W(f)$ არის კუმშვადი გამოსახულება. კუმშვადი ასახვების თეორემიდან ვიცით, რომ გვექნება ერთადერთი უძრავი წერტილი:

$$W(f_w) = f_w. \quad (5.28)$$

თეორემა კუმშვადი ასახვების შესახებ არის ბაზური გამოსახულებათა ფრაქტალური კოდირების საქმეში. მართლაც, თუ გვაქვს f ციფრული გამოსახულება, მაშინ ვეძებთ ისეთ კუმშვად W ასახვას, რომ მისი უძრავი წერტილი f_w ახლოს იყოს f საწყის გამოსახულებასთან. თუ W შეიცავს მთელ ინფორმაციას f_w -ს მისაღებად და თუ W იკავებს უფრო მცირე ადგილს, ვიდრე საწყისი ციფრული გამოსახულება, მაშინ მიგვიღწევია ციფრული ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვისათვის. აქაც კოლაჟის თეორემა საშუალებას იძლევა ფრაქტალური კოდირება მოვახდინოთ ერთ ბიჯზე და აღარ გვჭირდება იტერაციათა უსასრულო რაოდენობა.

VI თავი. გამოსახულების შეკუმშვა ვეივლეტებით

გამოსახულებათა შეკუმშვა ვეივლეტების მეშვეობით, გარდაქმნათა მეთოდების ნაირსახეობაა და რამდენადმე განსხვავდება ფრაქტალური მეთოდისაგან. თუმცა, ამ ორი ტიპის მეთოდს შორის მჭიდრო კავშირია. ფრაქტალური მეთოდი იყენებს სხვადასხვა მასშტაბში განხილული გამოსახულების თვითმსგავსების თვისებას, რათა შეამციროს შესანახი ინფორმაციის მოცულობა მაშინ, როცა ვეივლეტ-მეთოდი იყენებს გარდაქმნილი გამოსახულების მონაცემთა ზედმეტად მასშტაბურობის თვისებას. ამიტომ, გამოსახულების შეკუმშვის შერეული, ფრაქტალურ-ვეივლეტური მეთოდი იყენებს ფრაქტალურ მეთოდს ვეივლეტ-გარდაქმნით მიღებული გამოსახულების მიმართ.

6.1. ვეივლეტები და სიგნალების მათემატიკური მოდელირება

ვეივლეტები არის განსაკუთრებული ტიპის ფუნქციის ზოგადი დასახელება, რომელსაც აქვს მოკლე ტალღათა პაკეტის სახე, ნულოვანი ინტეგრალური მნიშვნელობით და გარკვეული, ზოგჯერ რთული ფორმით, რომელსაც ლოკალური ძვრა და მასშტაბირება ახასიათებს.

ვეივლეტები აიგება სპეციალური ბაზისური ფუნქციების მეშვეობით, რომლებიც გარკვეულ პირობებს აკმაყოფილებს. ვეივლეტების ერთობლიობას შეუძლია ფუნქციისა და სიგნალების მიახლოება ზუსტად ან გარკვეული სიზუსტით. ვეივლეტები საშუალებას იძლევა გამოსახულებები დავამუშაოთ, გავუკეთოთ დეკომპოზიცია, რესტავრაცია და იდენტიფიკაცია; ასევე გავფიქროთ ხმაურისაგან, შევკუმშოთ ფაილები, რომლებიც რიცხვით მონაცემებსა და გამოსახულებებს შეიცავს.

ვეივლეტების ცნება შემოიღეს გროსმანმა და მორლემ 80-იანი წლებში [14]. ამჟამად, ვეივლეტები ფართოდ გამოიყენება სახეთა ამოცნობის ამოცანებში, სხვადასხვა ტიპის სიგნალების

დამუშავებისა და სინთეზის ამოცანებში, ტურბულენტური ველების თვისებების შესწავლისათვის და ა.შ.

ვეივლეტ-გარდაქმნა მდგომარეობს იმაში, რომ სიგნალს დაშლიან სოლიტონისებრი ფუნქციებისაგან შემდგარი მასშტაბური და წანაცვლებული ბაზისის მიმართ. ბაზისის თითოეული ფუნქცია ახასიათებს როგორც გარკვეულ სივრცით (დროით) სიხშირეს, ასევე მის ლოკალიზაციას ფიზიკურ სივრცეში (დროში).

სიგნალების ანალიზის ტრადიციული ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით ვეივლეტ-გარდაქმნა გვაძლევს ერთგანზომილებიანი სიგნალის ორგანზომილებიან სიხშირე-კოორდინატად წარმოდგენას. შედეგად, საშუალება გვქვია შევისწავლოთ სიგნალი, ერთდროულად, ფიზიკურ და სპექტრულ სივრცეში.

ცნობილია მოკლე, მაღალსიხშირიანი ან ლოკალიზებული მაღალსიხშირიანი სიგნალების დამუშავების სირთულე. ასეთი მონაცემების ადეკვატური გაშიფრვისათვის საჭიროა ისეთი ბაზისი, რომლის ელემენტები იძლევა მაღალი სიხშირის რხევების აღწერას და ასევე კარგად ლოკალიზებულია სივრცეში (დროში). ვეივლეტები საშუალებას გვაძლევს დავამუშაოთ ასეთი სიგნალები მოძრავი სიხშირე-დროის ფანჯრით. ამის გამო, ზოგჯერ ვეივლეტებს მათემატიკურ მიკროსკოპსაც უწოდებენ. სიგნალების წარმოდგენისას მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ ისეთი წარმოდგენა, რომელიც გარკვეული აზრით ოპტიმალური იქნება. სასურველია სიგნალის ისეთი წარმოდგენა, რომელიც შეინარჩუნებს სიგნალის ყველა თვისებას. ასეთი წარმოდგენა შეიძლება x სიგნალის **დეკომპოზიციით, ელემენტარული x_i სიგნალებით:**

$$x = \sum_i x_i, \quad (6.1)$$

სადაც x_i ელემენტარული ფუნქციებია. უფრო მეტიც, სასურველია, რომ ამ ფუნქციებს ჰქონდეს გარკვეული ფიზიკური ინტერპრეტაცია. სიგნალის დეკომპოზიცია უნდა შესრულდეს სწრაფი ალგორითმით, წინააღმდეგ შემთხვევაში მას მხოლოდ თეორიული ღირებულება ექნებოდა. დეკომპოზიციისას უნდა ამოიხსნას აპროქსიმაციის ამოცანა ანუ დეკომპოზიციის შედეგი რაც შეიძლება ახლოს უნდა

იყოს საწყის სიგნალთან. ეს უნდა განხორციელდეს, რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის ელემენტარული ბლოკების გამოყენებით. სხვადასხვა “ოპტიკური დაშვებით” ანალიზის კონცეფცია საშუალებას მოგვცემს შევასრულოთ ეს მოთხოვნები ბუნებრივად, საწყისი უხეში აპროქსიმაციის თანდათანობითი დაზუსტებით, დეტალების მიმდევრობითი დამატებით. ასეთი ამოცანის კლასიკურ გადაწყვეტას გვაძლევს ფურიეს გარდაქმნა როგორც უწყვეტი, ასევე წყვეტილი დროით. შემუშავებულია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მრავალი ალგორითმი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს სხვადასხვა ალგორითმით ამოიხსნება, თითოეულისთვის დამახასიათებელია ერთი და იგივე მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

თუ მოცემულია ერთსიხშირიანი სიგნალი $e^{i\omega t}$, მაშინ ფურიეს გარდაქმნაზე დამყარებული მეთოდები საშუალებას მოგვცემს ω სიხშირეზე ვიპოვოთ სიგნალის პიკი. თუ სიგნალი ორ სინუსოიდას მაინც შეიცავს, განსაზღვრულს სხვადასხვა დროით ინტერვალზე, მაშინ წარმოიშობა პრობლემა. მიიღება ორი პიკი დროის ლოკალიზაციის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს სიგნალის სიხშირე-დრო ცვლადებში წარმოდგენის აუცილებლობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა მიგველო ლოკალური ინფორმაცია სიგნალის შესახებ როგორც სიხშირით, ასევე დროით არეში. ცხადია, რომ საჭიროა უფრო ლოკალიზებული ბაზისური ფუნქციები, ვიდრე სინუსოიდაა. ამიტომ განიხილავენ ე.წ. ფანჯრებს

$$\omega(t) \sin t, \tag{6.2}$$

სადაც $\omega(t)$ ფანჯრის ფუნქციაა, რომელიც დროის ლოკალიზაციას იძლევა. ასეთ გარდაქმნას **ფანჯრულ ფურიეს გარდაქმნას** უწოდებენ. მიღებული ელემენტარული ბლოკები სიხშირე-დრო სიბრტყეს გარკვეულ ნაწილებად ყოფს. ასეთ სიტუაციაში, **ჰეიზენბერგის პრინციპიდან** გამომდინარე, შეუძლებელია მივალწიოთ ერთნაირად კარგ დროით და სიხშირით ლოკალიზაციას. სიხშირისა და დროის დაშვებები შემოიფარგლება **ჰეიზენბერგის უტოლობით**:

$$\Delta t \cdot \Delta f \leq \frac{1}{4\pi}. \tag{6.3}$$

ვეივლეტ-ანალიზი შედარებით ახალი ცნებაა, ამიტომ მისი გადმოცემისას გამოიყენება ფურიეს ანალიზის პარალელური განხილვა.

ვთქვათ, $L_2(0;2\pi)$ არის $(0;2\pi)$ შუალედში განსაზღვრული, კვადრატით ინტეგრირებად ფუნქციათა სიმრავლე (ფუნქციონა-ლური სივრცე) ანუ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (6.4)$$

ეს ალაგ-ალაგ უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლის განსაზღვრებაა. ის შეიძლება პერიოდულ ფუნქციამდე შევავსოთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში

$$f(x) = f(x - 2\pi), \quad \forall x. \quad (6.5)$$

ნებისმიერი 2π - პერიოდიანი კვადრატით ინტეგრირებადი $f(x) \in L_2(0;2\pi)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივით

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \quad (6.6)$$

სადაც C_n მუდმივი რიცხვებია და

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (6.7)$$

ამავე დროს (6.6) მწკრივი თანაბრად კრებადია ანუ

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=M}^N C_n e^{inx} \right|^2 dx = 0. \quad (6.8)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ

$$W_n(x) = e^{inx}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (6.9)$$

ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს $L_2(0;2\pi)$ სივრცეში. ბაზისური ფუნქციები მიიღება ერთადერთი $W(x) = e^{ix}$ ფუნქციის მასშტაბური ცვლილებით ისე, რომ

$$W_n(x) = W(nx). \quad (6.10)$$

ამ მოქმედებას ინტეგრალურ გაფართოებას უწოდებენ.

P.S. $L_2(0;2\pi)$ ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $W(x) = e^{ix}$ ბაზისური ფუნქციის $W_n(x) = W(nx)$ ინტეგრალური გაფართოების სუპერპოზიციით.

რადგან (6.9) ბაზისი ორთონორმირებულია, ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობას:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2. \quad (6.11)$$

$f(x)$ ფუნქციის წარმოდგენა ვეივლეტების მეშვეობით. განვიხილოთ კვადრატით ინტეგრირებადი ფუნქციების $L_2(R)$ ფუნქციონალური სივრცე, სადაც

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty. \quad (6.12)$$

$L_2(R)$ და $L_2(0;2\pi)$ ფუნქციონალური სივრცეები მნიშვნელოვნად განსხვავდება ერთმანეთისაგან. კერძოდ, $L_2(R)$ სივრცის ნებისმიერი ფუნქციის საშუალო ლოკალური მნიშვნელობა მიისწრაფვის ნულისკენ. ამიტომ, სინუსოიდური ტალღა არ ეკუთვნის $L_2(R)$ -ს და, მაშასადამე, $W_n(x)$ არ შეიძლება იყოს ამ ფუნქციონალური სივრცის ბაზისი. ვიპოვოთ მარტივი ფუნქციები $L_2(R)$ ბაზისის კონსტრუირებისათვის. ბაზისის წარმომქმნელი ფუნქცია უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ ორივე მიმართულებით. ვეივლეტი პატარა ტალღას ნიშნავს.

როგორც $L_2(0;2\pi)$ სივრცის შემთხვევაში, $L_2(R)$ -შიც შევეცადოთ ავაგოთ ბაზისი ერთი $\psi(x)$ წარმომქმნელი ფუნქციის

მეშვეობით (ის შეიძლება იყოს რამდენიმე-სიხშირიანი ან ერთ-სიხშირიანი ვეივლეტი). თუ ვეივლეტი სწრაფად მიისწრაფვის ნულისკენ, ამ ფუნქციებით როგორ დავფაროთ მთელი რიცხვითი ღერძი? ყველაზე მარტივად ეს შეიძლება გავაკეთოთ k სიდიდით წანაცვლების ოპერაციის მეშვეობით ანუ გვექნება $\psi(x-k)$. ამ ოპერაციას ინტეგრალურ ძვრას უწოდებენ. განვიხილოთ

სინუსოიდური სიხშირის ანალოგი, რომელსაც მარტივად წარმოვადგენთ ორის ხარისხით:

$$\psi(2^j \cdot x - k), \quad (6.13)$$

სადაც $j; k$ მთელი რიცხვებია.

რადგან

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx}, \quad (6.14)$$

ამიტომ

$$\|\psi(2^j \cdot x - k)\| = 2^{-\frac{j}{2}} \|\psi(x)\|. \quad (6.15)$$

მაშინ ორთონორმირებულ ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \quad (6.16)$$

საზოგადოდ, ვეივლეტს ეწოდება ორთოგონალური, თუ შესაბამისი ვეივლეტ-ბაზისი ψ_{jk} აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\langle \psi_{jk}; \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}. \quad (6.17)$$

მაშინ $\forall f(x) \in L_2(R)$ ადგილი აქვს ვეივლეტ-წარმოდგენას:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_{jk}(x). \quad (6.18)$$

ამ ჯერადი მწკრივის თანაბარი კრებადობა ჩაიწერება შემდეგი ზღვრით:

$$\lim_{M1, N1, M2, N2 \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{M2}^{N2} \sum_{M1}^{N1} C_{jk} \psi_{jk} \right\| = 0. \quad (6.19)$$

ყველაზე მარტივი ორთოგონალური ვეივლეტი ჰაარის ვეივლეტია $\psi^H(x)$:

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{if } x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \quad (6.20)$$

6.2. ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა

განვიხილოთ ვეივლეტები ზოგად შემთხვევაში, როცა მასშტაბური ცვლილება არ არის აუცილებლად ორის ხარისხი. ასევე, განვიხილოთ ნებისმიერი წანაცვლება. ერთი წარმომქმნელი $\psi(x)$ ვეივლეტ-ფუნქციის ინტეგრალური a გაფართოებით და b წანაცვლებით შესაძლებელია კონსტრუირება გაგუკეთოთ ნებისმიერ ფუნქციას $L_2(R)$ ფუნქციონალური სივრციდან.

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \psi \in L_2(R). \quad (6.21)$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია ავაგოთ ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა:

$$[W_\psi f](a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx, \quad (6.22)$$

სადაც ψ ფუნქციას ვეივლეტის დედაფუნქციას (წარმომშობს) უწოდებენ.

(6.22) ფორმულაში $\psi_{a,b}(x)$ ფუნქცია იგივე როლს ასრულებს, რასაც $e^{i\omega t}$ ფუნქცია ფურიეს გარდაქმნაში.

თუ გავაგრძელებთ ანალოგიის ძებნას ფურიეს გარდაქმნასთან, მაშინ (6.23) ფორმულაში $f(x)$ ფუნქციის ვეივლეტებით წარმოდგენის C_{jk} კოეფიციენტები

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k) \quad (6.23)$$

გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$C_{jk} = \langle f; \psi_{jk} \rangle. \quad (6.24)$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარე, ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნების საფუძველზე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$C_{jk} = [W_\psi f] \left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right). \quad (6.25)$$

6.3. ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები

ვეივლეტ-გარდაქმნა საშუალებას გვაძლევს სიგნალი განვიხილოთ სოლიტონისებრი ფუნქციებისაგან შედგენილი ბაზისის მიმართ. განვსაზღვროთ ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც უნდა ჰქონდეთ სოლიტონისებრ (წარმომშობ) $\psi(x)$ დედაფუნქციებს (ვეივლეტებს), რათა განხილულ იქნეს როგორც ვეივლეტები.

ლოკალიზაცია

ვეივლეტ-გარდაქმნა, ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით, იყენებს ისეთ ბაზისურ (წარმომშობ) დედაფუნქციას, რომელიც ლოკალიზებულია სივრცის (დროის) შემოსაზღვრულ არეში. ვეივლეტი ლოკალიზებული უნდა იყოს როგორც ფიზიკურ, ასევე სპექტრულ სივრცეში, როგორც წესი, $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$.

ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა

ნიშნავს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (6.26)$$

ამოცანების განხილვისას ზოგჯერ მოითხოვება უფრო მაკრო პირობაც:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0. \quad (6.27)$$

ასეთ ვეივლეტს m რიგის ვეივლეტს უწოდებენ, რომელიც მაშინ განიხილება, როცა საჭიროა ვეივლეტის წარმოებულების განხილვა, m რიგის ჩათვლით.

შემოსაზღვრულობა მოიცემა პირობით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (6.28)$$

კარგი ლოკალიზაცია და შემოსაზღვრულობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$|\psi(x)| < \frac{1}{1+|x|^n} \quad (6.29)$$

ან შესაბამისი ფურიე-გარდაქმნისათვის

$$\left| \hat{\psi}(\omega) \right| < \frac{1}{1+|k-\omega_0|^n}, \quad (6.30)$$

სადაც ω_0 ვეივლეტის დომინანტური სიხშირეა.

ახლა განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები:

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$[W_\psi f](a,b) = w(f) = w(a,b). \quad (6.31)$$

ვეივლეტ-გარდაქმნის ოპერატორის წრფივობის თვისება

$$w[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha w(f_1) + \beta w(f_2) = \alpha w_1(a,b) + \beta w_2(a,b). \quad (6.32)$$

ინვარიანტულობა წანაცვლების ოპერაციის მიმართ

$$w[f(x-b_0)] = w(a,b-b_0). \quad (6.33)$$

ინვარიანტულობა მასშტაბის ცვლილების მიმართ

$$w\left[f\left(\frac{x}{a_0}\right) \right] = \frac{1}{a_0} w\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \quad (6.34)$$

ენერჯის შენახვის თვისება

ვეივლეტ-გარდაქმნისთვის ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობის ანალოგს:

$$\int f_1(x) \cdot f_2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w_1(a,b)w_2(a,b)dadb}{a^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int f^2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w^2(a,b)dadb}{a^2}. \quad (6.35)$$

6.4. ვეივლეტ-ფუნქციების კერძო შემთხვევები

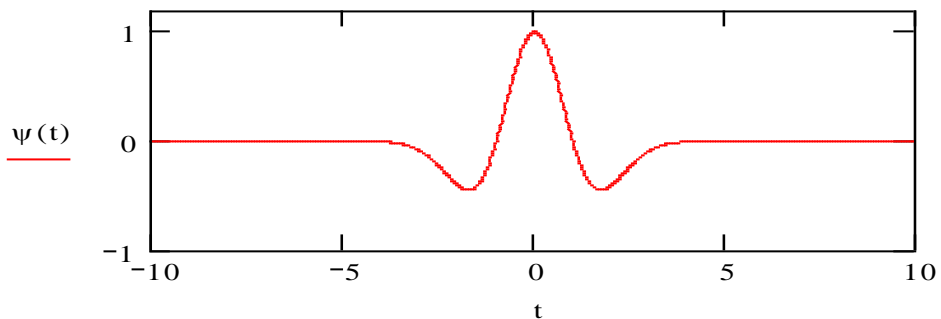
განვიხილოთ ვეივლეტ-ფუნქციების კონკრეტული სახეები:

მექსიკური ქუდი (მაარის ვეივლეტი)

ასე უწოდებენ ფუნქციას, რომელიც მიიღება გაუსის ფუნქციის ორჯერ გაწარმოებით

$$\psi(t) = (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (6.36)$$

მექსიკური ქუდის გრაფიკი მოცემულია 6.1 ნახ-ზე.



ნახ.6.1. მაარის ვეივლეტი - მექსიკური ქუდი

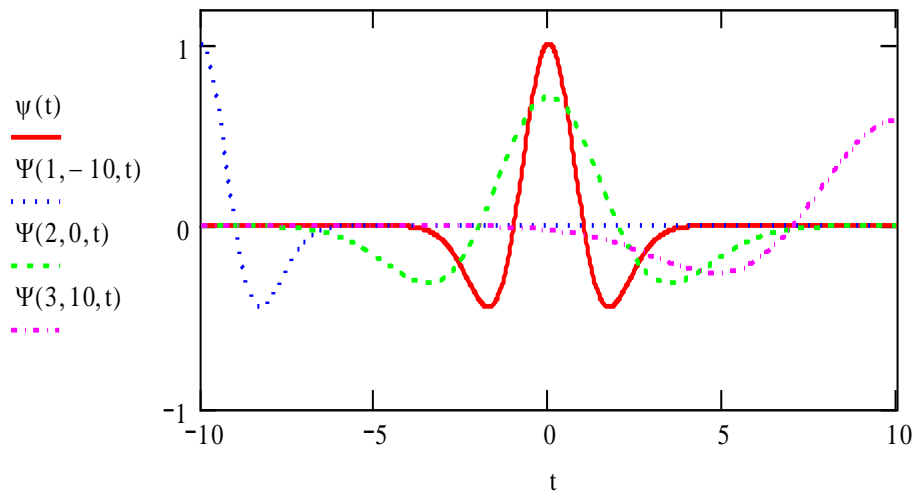
შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k). \quad (6.37)$$

დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია მაარის ვეივლეტისათვის მოცემულია 6.2 ნახ-ზე.

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right),$$

$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

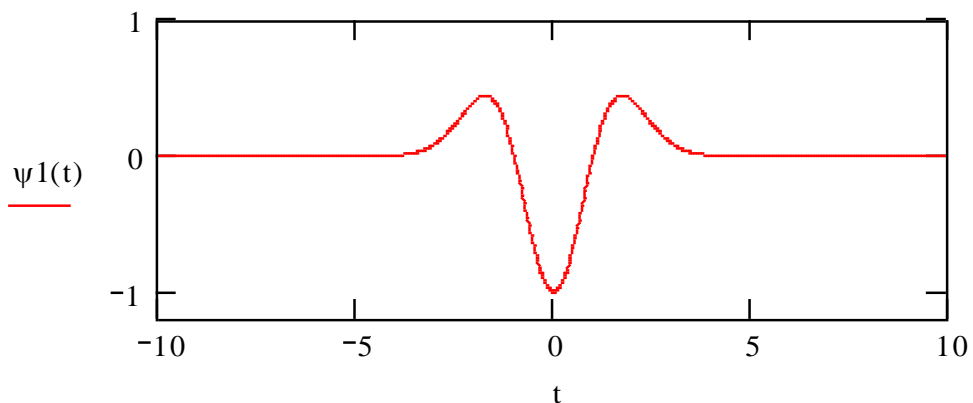


ნახ. 6.2. დამასშტაბებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია

ზოგჯერ იყენებენ გადაბრუნებულ მექსიკურ ქუდს, რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\psi_1(t) = (1+t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{6.38}$$

გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი მოცემულია 6.3. ნახ-ზე.



ნახ. 6.3. მარის ვეივლეტი – გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი

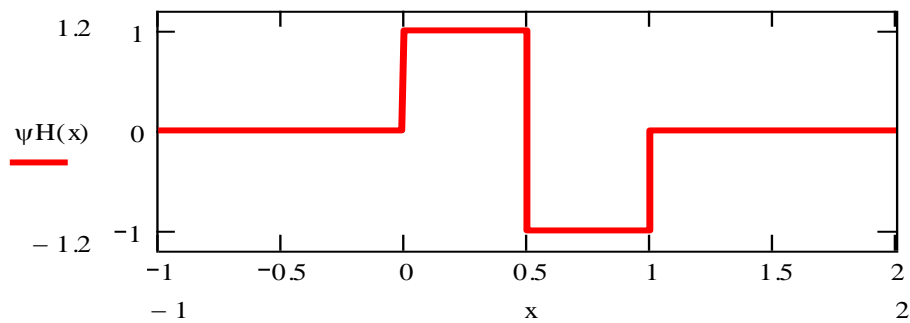
შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{1_{jk}} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi_1(2^j \cdot x - k). \quad (6.39)$$

ჰაარის ვეივლეტი

სიგნალების დეკომპოზიციისა და რეკონსტრუქციისათვის ხშირად იყენებენ ჰაარის ვეივლეტებს, რომელთა წარმომქმნელ (დედა) ფუნქციას აქვს სახე (ნახ. 6.4):

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{if } (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ 0 & \text{if } ((x < 0) \vee (x > 1)) \end{cases} \quad (6.40)$$



ნახ. 6.4. ჰაარის ვეივლეტი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^H_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^H(2^j \cdot x - k). \quad (6.41)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი ორი $\psi^H_{jk} \wedge \psi^H_{mn}$ ფუნქცია ვეივლეტ-ბაზისიდან, რომლებიც მიიღება ჰაარის დედა-ფუნქციიდან, $\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^m}$ ინტეგრალური გაფართოებისა და $\frac{k}{2^j}, \frac{n}{2^m}$ წანაცვლების შემდეგ ორთონორმალურია ერთმანეთის მიმართ ანუ ადვილი აქვს ტოლობას:

$$\langle \psi^H_{jk}; \psi^H_{mn} \rangle = \delta_{jm} \delta_{kn}. \quad (6.42)$$

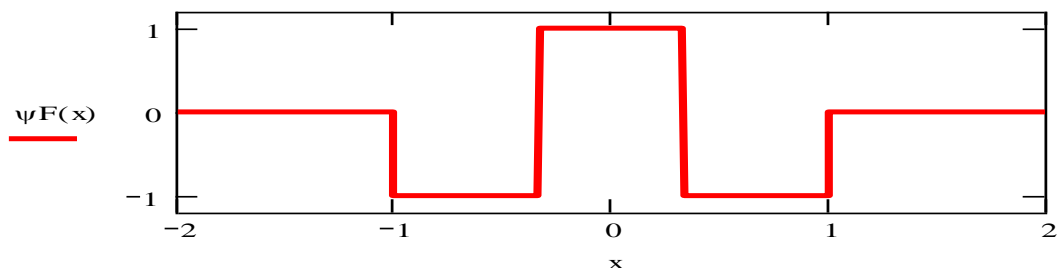
P.S. ჰაარის ბაზისის უარყოფითი მხარეა ის, რომ ეს ვეივლეტი არასიმეტრიულია და გლუვი, თუმცა ზოგიერთ ამოცანაში სიგნალების დამუშავებისას ეს უმნიშვნელოა. ამდენად, ჰაარის ვეივლეტებს ხშირად იყენებენ პრაქტიკაში.

უფრო ხშირად იყენებენ ჰაარის ვეივლეტის მსგავს სიმეტრიულ წარმომქმნელ ვეივლეტს (დედაფუნქციას), რომელსაც ფრანგულ ქუდს უწოდებენ.

ფრანგულ ქუდი

ამ ვეივლეტს ჩაწერენ შემდეგი სახით:

$$\psi^F = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| \leq \frac{1}{3} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{3} < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases} \quad (6.43)$$



ნახ. 6.5. ვეივლეტი – ფრანგული ქუდი

შესაბამის ვეივლეტ-ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^F_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^F(2^j \cdot x - k). \quad (6.44)$$

უფრო რთული, ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის გარდა წანაცვლებისა და დამასშტაბებისა, საჭიროა გავითვალისწინოთ მობრუნებაც.

ვეივლეტ-გარდაქმნები ფართოდ გამოიყენება სიგნალების ფილტრაციისა და შეკუმშვისათვის [14–15].

მაღალი რიგის ვეივლეტებისათვის, წარმომქმნელი დედა-ვეივლეტის ასაგებად, როგორც წესი, გამოიყენება შესაბამისი ფილტრაციის კოეფიციენტების გამოთვლის იტერაციული, ფუნქციური განტოლებები, რომელთათვისაც აუცილებელია შემქმნელი, მამავეივლეტების აგება. ასე აიგება, მაგალითად, დობეშის მეოთხე რიგის ვეივლეტი [14–16].

6.5. ვეივლეტ-ანალიზი Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემულია სიგნალი $s(t)$, რომლის ენერგია შემოსაზღვრულია ანუ

$$\int_R s^2(t) dt < \infty. \quad (6.45)$$

ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა, ფურიეს გარდაქმნის ანალოგიურად, მოიცემა შესაბამისი ვეივლეტ-კოეფიციენტების მეშვეობით:

$$C(a, b) = \langle s(t), \psi(a, b, t) \rangle = \int_R s(t) \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (6.46)$$

ასე, რომ ვეივლეტ-კოეფიციენტები მოიცემა სიგნალისა და მოცემული სახის ვეივლეტ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლით.

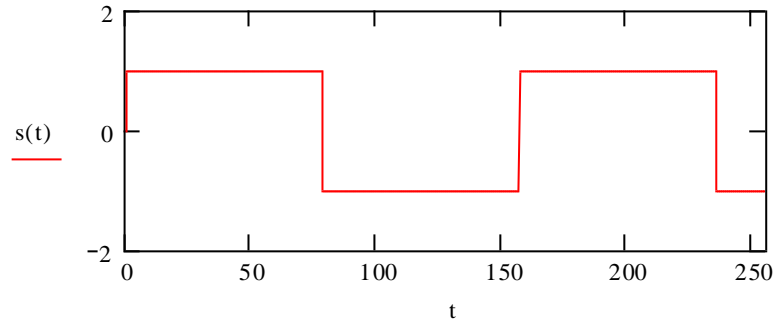
განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის მაგალითები:

1) მოცემულ სიგნალს აქვს სიმეტრიული მართკუთხა იმპულსების სახე – მენდრა. მოიცემა ანალიზური ფორმულით:

$$s(t) = \text{sign}(\sin(0.04 \cdot t)). \quad (6.47)$$

გრაფიკულად, მენდრას ტიპის სიგნალი მოცემულია

6.6 ნახ-ზე.



ნახ. 6.6. მენდრას გრაფიკული სახე

აუაგოთ ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა მათრის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

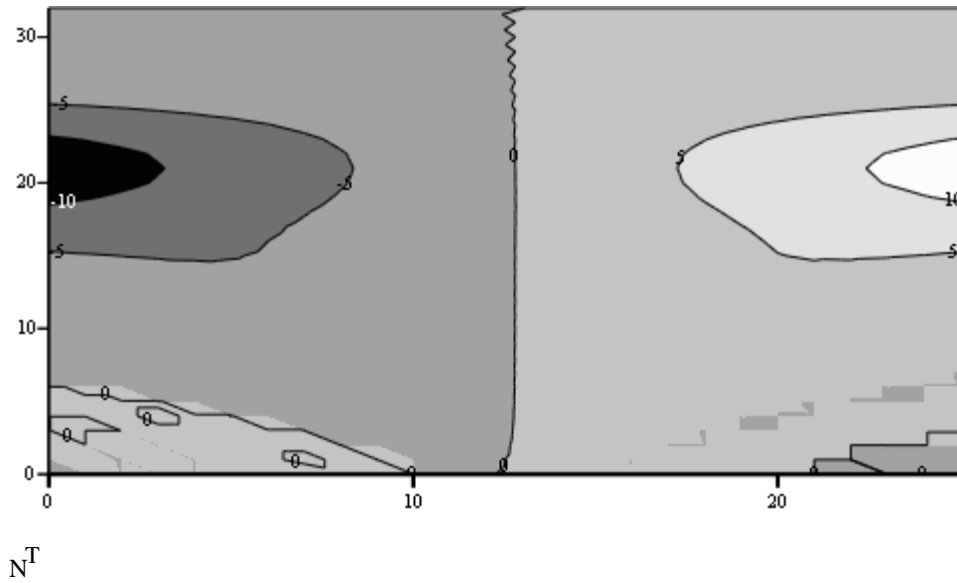
$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$$j := 0..32$$

$$b := 0, 1.. \frac{N}{10}$$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3 \cdot 10^4} \quad N_{j, b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$

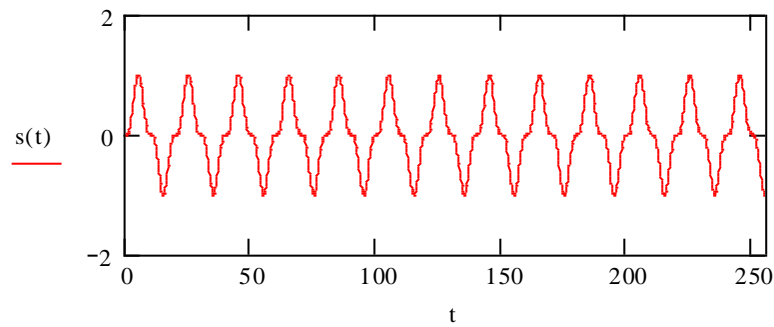


ნახ. 6.7. მენდრას ტიპის სიგნალის სპექტროგრამა

2) მოცემულ სიგნალს აქვს სინუს-კუბის სახე ანუ

$$s(t) = \sin(0.1 \cdot \pi)^3. \quad (6.48)$$

გრაფიკულად ამ ტიპის სიგნალი მოცემულია 6.8 ნახ-ზე.



ნახ. 6.8. სინუს-კუბის გრაფიკული სახე

აუგოთ ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მარის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის მეშვეობით Matcad 2001-ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} e^{-\frac{t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

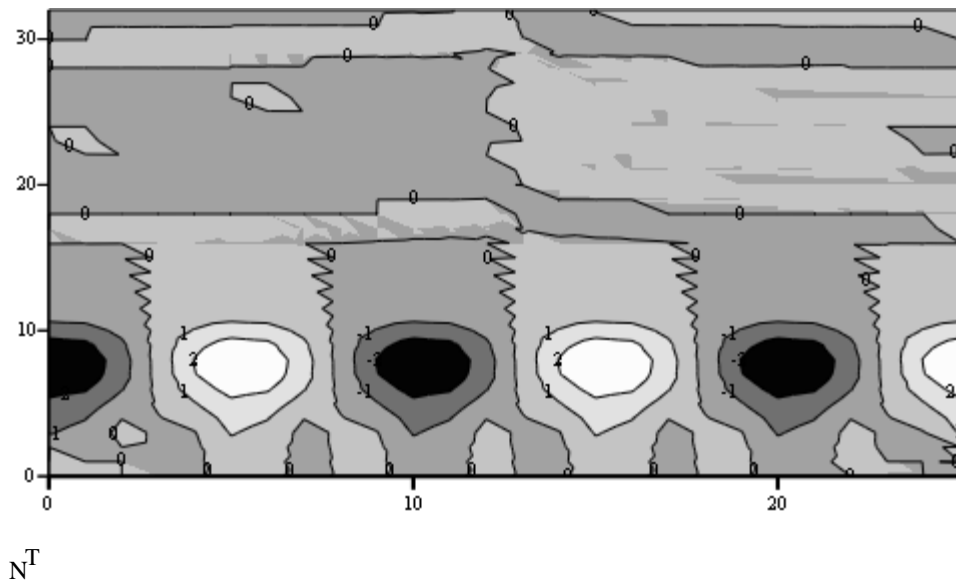
$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) s(t) := \sin(0.1 \cdot \pi \cdot t)^3$$

$$C(a, b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \cdot s(t) dt$$

$$j := 0..32$$

$$b := 0, 1.. \frac{N}{10}$$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3 \cdot 10^4} \quad N_{j,b} := C\left(a_j, 2 \cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



ნახ. 6.9. სინუს-კუბის სპექტროგრამა

იმ შემთხვევაში, როცა გვაქვს პერიოდული სიგნალი, უმჯობესია გამოვიყენოთ ფურიეს გარდაქმნები. როცა სიგნალი ხასიათდება სივრცითი ან დროითი ლოკალიზაციით, მაშინ ვეივლეტ-გარდაქმნა ყველაზე უფრო ზუსტია. ეს უპირატესობა მკვეთრად ჩანს ბგერითი და გამოსახულებათა სიგნალების შემთხვევებში.

6.6. ვეივლეტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტვრა

Mathcad-ის ბაზაზე

სიგნალები შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც მისი უხეში მიახლოებისა და დამაზუსტებელ (უფრო დეტალურ) წარმოდგენათა ჯამი. ამ პროცესის რეალიზაციისათვის ორთოგონალური ვეივლეტები გამოიყენება, რომელიც აიგება მულტიმასშტაბური (multiresolution) ანალიზით. ეს ანალიზი ემყარება შემდეგ ძირითად ფაქტებს:

- სიგნალების V სივრცე შეიძლება დაიყოს ისეთ იერარქიულ V_j ქვესივრცეებად, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთს და რომელთა გაერთიანება ზღვარში $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეს იძლევა;
- ნებისმიერი $s(t) \in V_j$ ფუნქციისათვის, მისი შეკუმშული ვერსია V_{j-1} ქვესივრცეს ეკუთვნის;
- არსებობს ისეთი $\varphi(x) \in V_0$ ფუნქცია, რომლისთვისაც მისი $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k)$ წანაცვლება შეადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში.

თუ $\varphi_{0,k}(t)$ ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში, მაშინ

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \varphi(2^{-j} \cdot t - k) \quad (6.49)$$

ფუნქციები ადგენს ორთონორმირებულ ბაზისს $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეში. ამ ფუნქციებს **შემქმნელ, მამავეივლეტებს** უწოდებენ. ისინი მამასშტაბირებელი ფუნქციებია, რადგან ქმნის თავის მსგავს ფუნქციებს სხვადასხვა მასშტაბში. ე.ი. $s(t)$ სიგნალი შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს, როგორც მისი V_j სუბქვესივრცეში თანამიმდევრული მიახლოების ზღვარი:

$$s(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} s_j(t). \quad (6.50)$$

როგორც წესი, სიგნალის დეკომპოზიციის წესიდან გამომდინარე, j -ს დიდი მნიშვნელობისათვის მიიღება **უხეში მიახლოებები**, ხოლო მცირე მნიშვნელობისათვის – უფრო ზუსტი მიახლოებები.

სიგნალის აპროქსიმაციას შეესაბამება იტერაციული ფორმულა:

$$s_j(t) = \sum_k C(j,k) \cdot \varphi_{j,k}(t), \quad (6.51)$$

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \cdot \sum_k h_k \varphi(2 \cdot t - k). \quad (6.52)$$

ზოგად შემთხვევაში, სიგნალის რეკონსტრუქცია j_n დაშვების დონეზე ხორციელდება ფორმულით:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \cdot \varphi_{j_n,k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_k(t), \quad (6.53)$$

სადაც $a_{j_n,k}$ აპროქსიმაციის კოეფიციენტებია; $d_{j,k}$ - დამაზუსტებელი კოეფიციენტები; $\varphi_{j_n,k}(t)$ - შემქმნელი მამავეივლეტი; $\psi_k(t)$ - წარმომქმნელი, დედავეივლეტი.

სიგნალის მთლიანი აღდგენა შესაძლებელია, თუ

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exists \{h_k\} \left| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sum_k h_k \varphi(t-k). \quad (6.54)$$

ამ განტოლებას დამაზუსტებელი (refinement) ეწოდება.

მაგალითი. ჰაარის ვეივლეტისათვის $h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$s(t) = C_{0,0} \cdot \varphi(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t), \quad (6.55)$$

სადაც $C_{0,0}$ არის სიგნალის დაბალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტი; $d_{j,k}$ - სიგნალის მაღალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტების მატრიცა; $\varphi(t)$ - მამავეივლეტი; $\psi_{j,k}(t)$ - დედავეივლეტი.

ვთქვათ, გვაქვს სიგნალი $y = \{1;0;-3;2;1;0;1;2\}$, რომელიც განსაზღვრულია $L_2[0,1]$ სივრცეში.

თუ გამოვიყენებთ ჰაარის ვეივლეტს და დეკომპოზიციის (6.55) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ მატრიცას:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{2,2} \\ d_{2,3} \end{pmatrix}. \quad (6.56)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიდ მატრიცაში

- პირველი სვეტი არის მასშტაბირების $\varphi(t)$ ფუნქცია;
- მეორე სვეტი - ჰაარის ვეივლეტი;
- მესამე და მეოთხე სვეტები - სიგნალის პირველი დონის წარმოდგენის რიცხვითი მნიშვნელობები;
- მეხუთე - მერვე სვეტები შეესაბამება სიგნალის მეორე დონის წარმოდგენას.

ასე რომ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უცნობი მატრიცის გამოსათვლელად საჭიროა (6.56) მატრიცული განტოლების ამოხსნა. როცა შემომავალი სიგნალის რიცხვითი მნიშვნელობების რაოდენობა საკმარის დიდია, ვეივლეტ-კოეფიციენტები გამოითვლება ფილტრაციის მეთოდებით.

განვიხილოთ შემომავალი სიგნალის დეკომპოზიციის (ფილტრაციის) ალგორითმი:

$$(Ha)_k = \sum_n h(n-2k) \cdot a_n; \quad (6.57)$$

$$(Ga)_k = \sum_n g(n-2k) \cdot a_n, \quad (6.58)$$

სადაც Ha – სიგნალის დაბალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორია; Ga – სიგნალის მაღალსიხშირიანი ფილტრაციის ოპერატორი; h – ვეივლეტ-ფილტრის დაბალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი; g – ვეივლეტ-ფილტრის მაღალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორი.

ცნობილია, რომ ჰაარის ვეივლეტ-ფილტრის შემთხვევაში

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad g_1 = -g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (6.59)$$

ამ ფაქტების გათვალისწინებით მოვახდინოთ შემომავალი y სიგნალის დეკომპოზიცია:

$$\begin{array}{l} y = c^{(3)} \\ d^{(2)} \\ c^{(2)} \\ d^{(1)} \\ c^{(1)} \\ d^{(0)} \\ c^{(0)} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ & 1 & & -1 \\ & 0 & & 2 \\ & & -\sqrt{2} & \\ & & & \sqrt{2} \end{array}$$

დეკომპოზიციის პირველ დონეზე სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის, (6.57) გამოსახულების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(Ha)_1 = \sum_{n=1}^8 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-3+2)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2)\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\} .$$

ანალოგიურად, (6.58) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ სიგნალის შესაბამისი მაღალსიხშირიანი მდგენე-ლიც.

შემდეგ, დეკომპოზიციის მეორე დონეზე, სიგნალის დაბალსი-ხშირიანი მდგენელისათვის მივიღებთ:

$$(Ha)_2 = \sum_{n=1}^4 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \{0; 2\} .$$

შესაბამისად, დეკომპოზიციის მესამე დონეზე

$$(Ha)_3 = \sum_{n=1}^2 h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0+2)\right) = \sqrt{2} .$$

ამრიგად, შემომავალი სიგნალი $y = \{1; 0; -3; 2; 1; 0; 1; 2\}$ გარდაიქმნება ახალ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ ვექტორად, რომლის კომპონენტების რაოდენობა ემთხვევა შემომავალი სიგნალის ელემენტების

რაოდენობას, თუმცა ენერჯის ძირითადი ნაწილი მოქცეულია კომპონენტების შედარებით მცირე რაოდენობის ელემენტებში. თუ შემთხვევითი შემფოთების ზღვრულ მნიშვნელობად ავიღებთ 0.9, მივიღებთ ახალ ვექტორს:

$\left(0; -\frac{3}{\sqrt{2}}; 0; 0; 1; -1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$. რაც ნიშნავს, რომ კოეფიციენტების ნაწილი ატარებს უმნიშვნელო ინფორმაციას და მათი მნიშვნელო-ბები შეგვიძლია ნულად ჩავთვალოთ.

შემდეგ შესაბამისი შემომავალი სიგნალის აღსადგენად უნდა ვისარგებლოთ ოპერატორებით:

$$(Ha^*)_n = \sum_k h(n-2k)a_n, \tag{6.60}$$

$$(Ga^*)_n = \sum_k g(n-2k)a_n. \tag{6.61}$$

P.S. ეს ალგორითმი ამარტივებს სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმს.

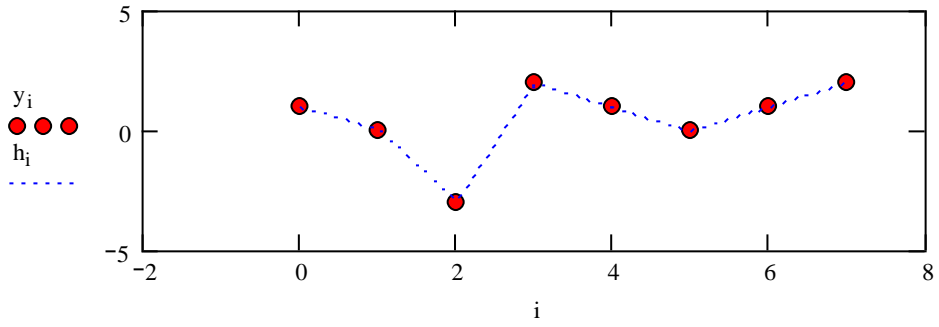
განვიხილოთ ამ სიგნალის ვეივლეტ-გარდაქმნა და უკუგარდაქმნა Mathcad-ის ბაზაზე (ნახ. 6.10).

```

y :=  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  W := wave(y) h := iwave(W)

i:=0..7

```



ნახ. 6.10. სიგნალის ვეივლეტ-ფილტრაცია, ანალიზ-სინთეზი

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტული და ვეივლეტ-ფილტრით სინთეზირებული სიგნალები ერთმანეთს ემთხვევა.

6.7. შერეული ფრაქტალურ-ვეივლეტური კოდირება

თვითმსგავსების არსებობა ფრაქტალის ძირითადი თვისებაა. ვეივლეტები კი საშუალებას გვაძლევს გავითვალისწინოთ მასშტაბური ეფექტები, ამდენად ისინი ფრაქტალის ანალიზის ბუნებრივი ინსტრუმენტია. ამიტომ, რომ გამოსახულებათა შეკუმშვისათვის, უმეტესწილად, შერეულ ფრაქტალურ-ვეივლეტურ მეთოდებს იყენებენ.

VII თავი. დინამიკური ფრაქტალები

ფრაქტალთა სამყარო მეტად ფართოა და მრავალფეროვანი. ფრაქტალებს ვხვდებით მექანიკასა და აკუსტიკაში, ქიმიასა და ბიოლოგიაში. ახალი რიცხვითი მეთოდები საშუალებას იძლევა თავიდან ავიცილოთ მოსალოდნელი სოციალური კატასტროფებიც. სინერგეტიკის სპეციალისტები უკვე დარწმუნდნენ, რომ ქიმიური, ფიზიკური, ბიოლოგიური და სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები უფრო ზუსტად აღიწერება ფრაქტალური სტრუქტურებით, ვიდრე კლასიკური უწყვეტი და გლუვი ფუნქციებით. ფრაქტალები ახალი მიმართულება გახდა ხელოვნებაშიც, სადაც მათი საშუალებით იქმნება საოცრად ლამაზი და მიმზიდველი სურათები. თუმცა, ჩვენი ინტერესების სფეროა ის მათემატიკური კანონზომიერებები, რაც დაკავშირებულია ფრაქტალებთან.

7.1. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები

ფრაქტალის ძირითადი მახასიათებელია თვითმსგავსების თვისება, რაც მამაფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის მეშვეობით გამოიხატება და საშუალებას იძლევა დედაფრაქტალიდან შესაბამისი რეკურსიით (რეკურენტული ფორმულით) [20] მივიღოთ დინამიკური ფრაქტალი.

განვიხილოთ $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადი და კომპლექსური რიცხვი $c = a + ib$ და შევადგინოთ რეკურენტული ფორმულა:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (7.1)$$

რომელიც შეგვიძლია გადავწეროთ სხვა სახითაც, თუ გამოვყოფთ ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს, მართლაც

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = (x_n + iy_n)^2 + a + ib \quad (7.2)$$

ანუ

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a, \quad (7.3)$$

$$y_{n+1} = 2x_n y_n + b. \quad (7.4)$$

განვიხილოთ კონკრეტული შემთხვევა, როცა

$$x_0 = 0, y_0 = 0, a = -0.1194, b = 0.6289. \quad (7.5)$$

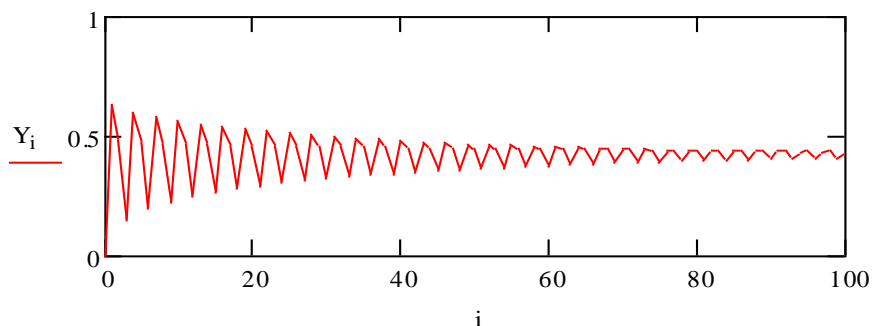
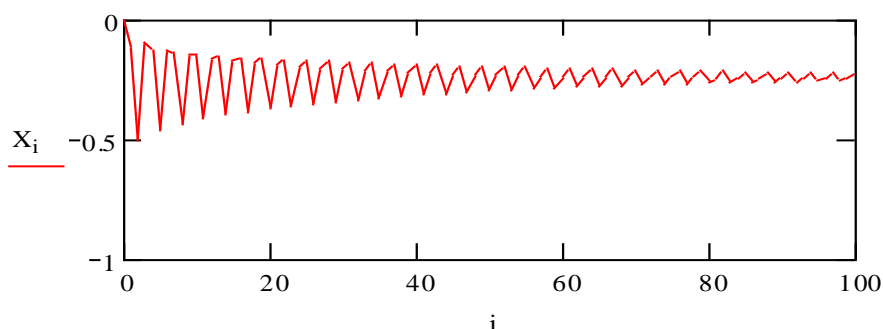
შევადგინოთ პროგრამა და გამოვთვალოთ (x_i, y_i) წერტილების მნიშვნელობები $i = \overline{1, 100}$, რომლის გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია 7.1 ნახ-ზე, ხოლო შესაბამისი სისტემის ფაზური პორტრეტი 7.1 ა ნახ-ზე.

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა და ვაწარმოოთ გამოთვლა Mathcad პროგრამის ბაზაზე:

$$X_0 := 0 \quad Y_0 := 0 \quad i := 0..100$$

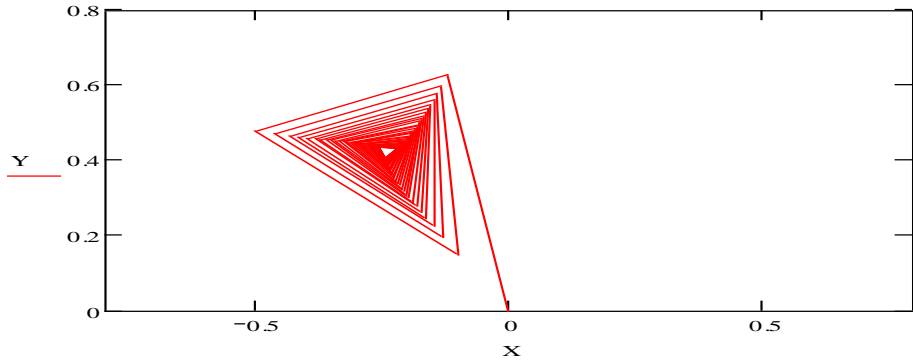
$$a_i := -0.1194 \quad b_i := 0.6289$$

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} (X_i)^2 - (Y_i)^2 + a_i \\ 2 \cdot X_i \cdot Y_i + b_i \end{bmatrix}$$



ნახ. 7.1. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა

$$a = -0.1194, \quad b = 0.6289$$

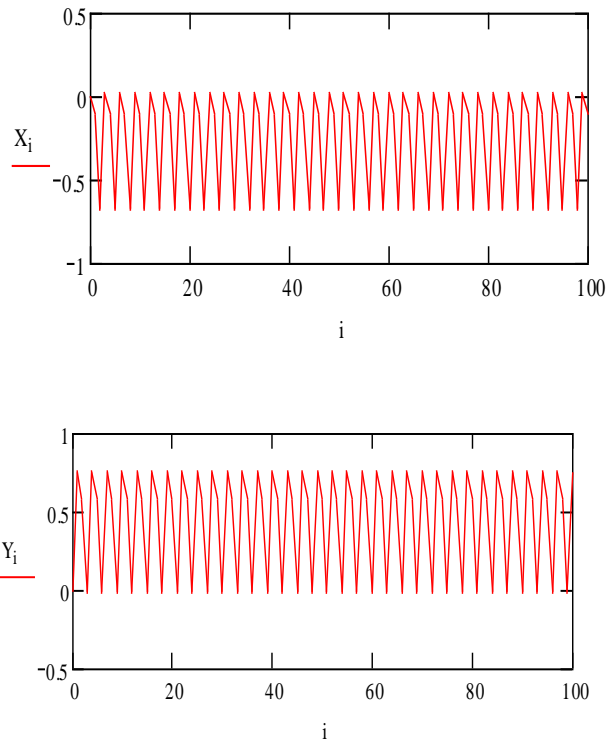


ნახ. 7.1ა. დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალის ორბიტა, როცა

$$a = -0.1194, \quad b = 0.6289$$

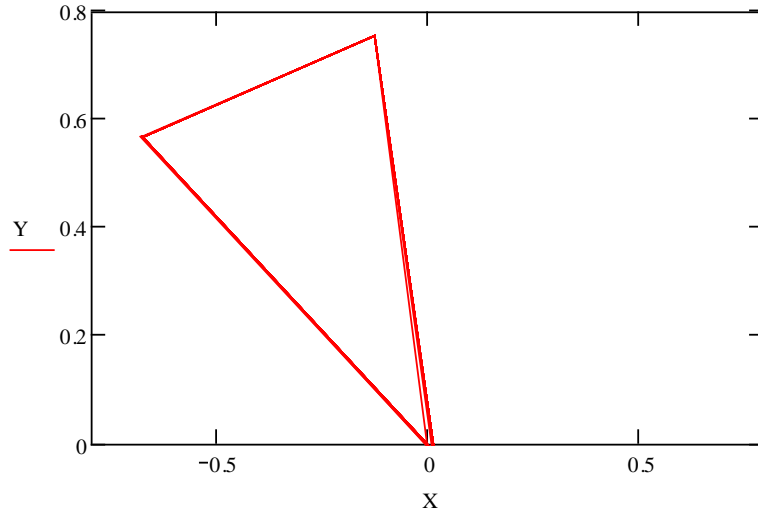
ანალოგიურად, თუ $(a ; b)$ პარამეტრების მნიშვნელობებია:

$a = -0.1244, \quad b = 0.756$, გვექნება პერიოდულად ცვლადი დინამიკური სისტემა (ნახ.7.2), ხოლო შესაბამის ფაზურ პორტრეტს ექნება 7.2ა ნახ-ზე მოცემული სახე.



ნახ. 7.2. დისკრეტული დინამიკური სისტემის დინამიკა, როცა

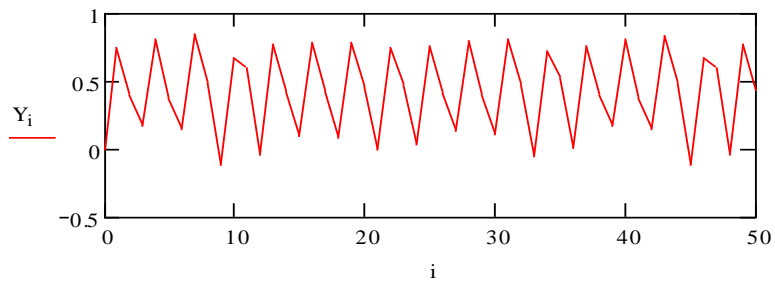
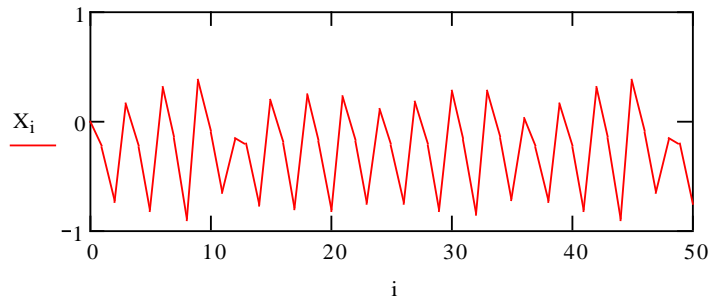
$$a = -0.1244, \quad b = 0.756$$



ნახ. 7.2ა. დისკრეტული სამი პერიოდის მქონე დინამიკური სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.1244$, $b = 0.756$

თუ (a ;b) პარამეტრების მნიშვნელობებია:

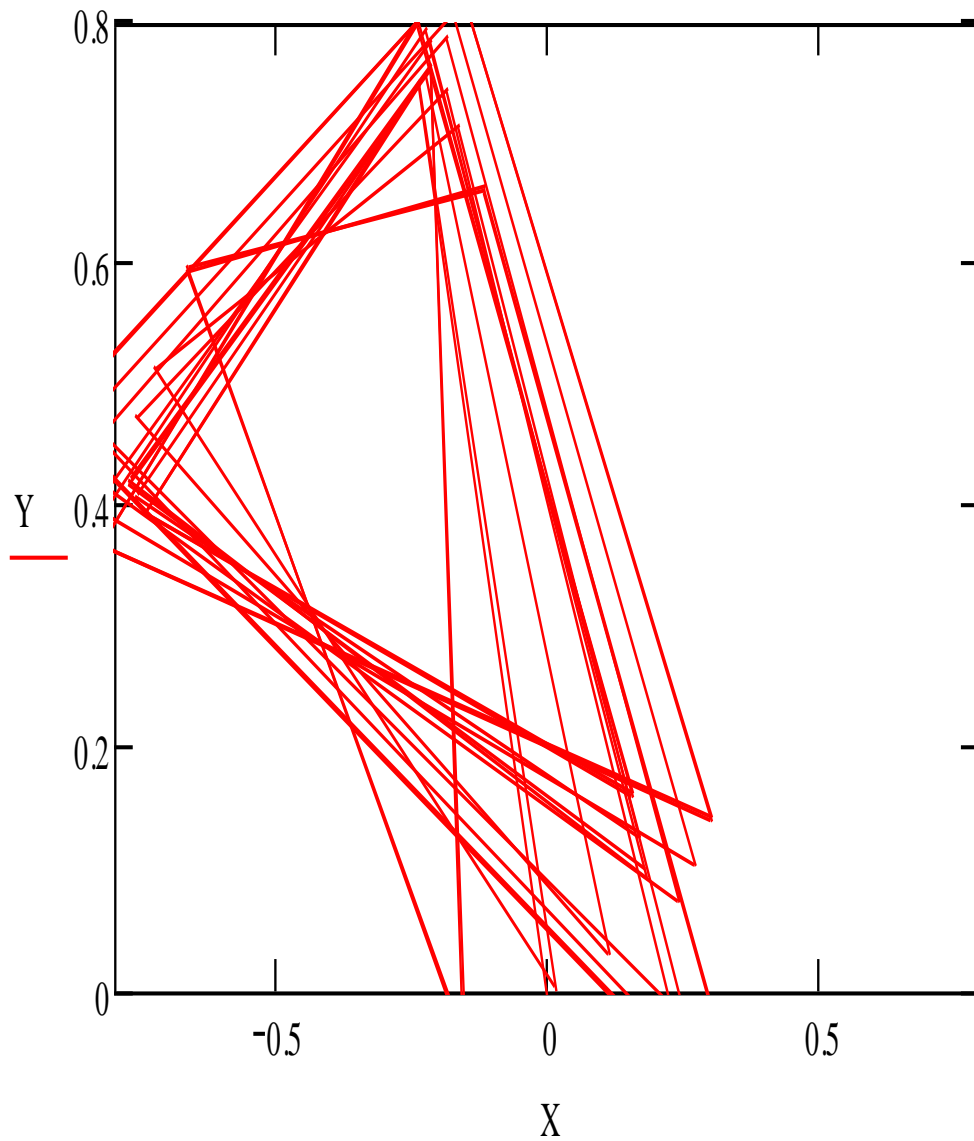
$$a = -0.237, \quad b = 0.75,$$



ნახ. 7.3. დისკრეტული ქაოსური სისტემის დინამიკა, როცა

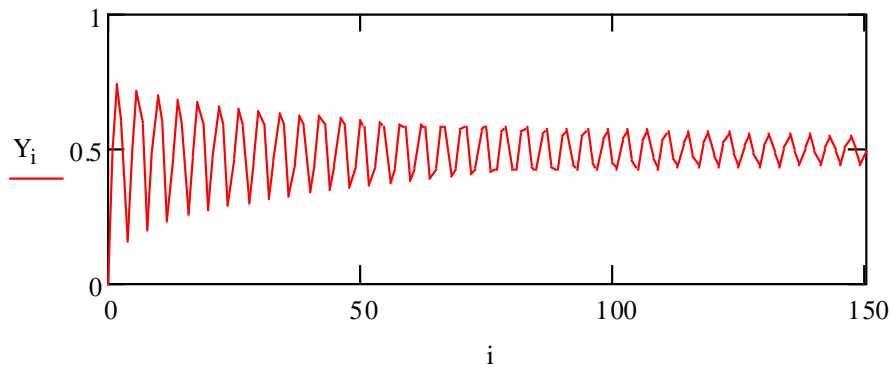
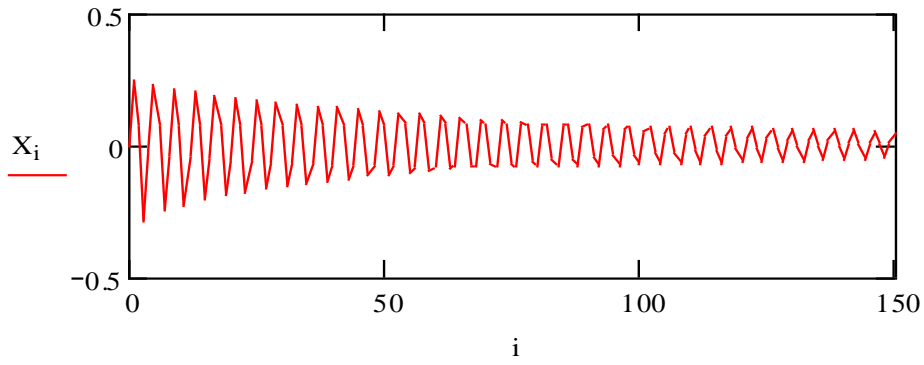
$$a = -0.237, \quad b = 0.75$$

გვეჩვენება ქაოსური დინამიკური სისტემა (ნახ. 7.3) შესაბამისი ფაზური პორტრეტით (ნახ. 7.3ა).

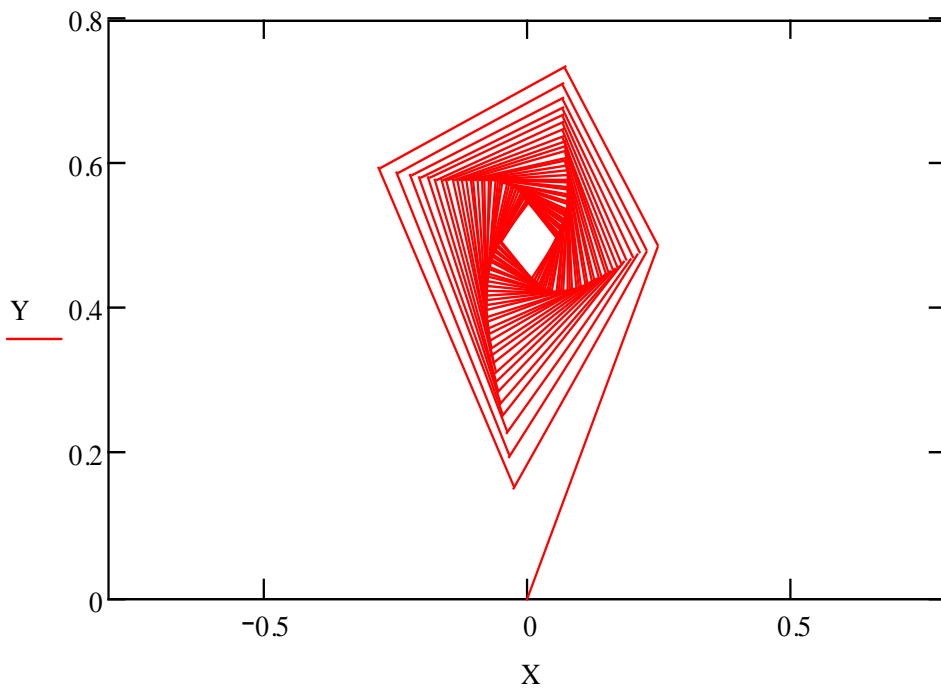


ნახ. 7.3ა. დისკრეტული ქაოსური, უსასრულობისაკენ მიმავალი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.237$, $b = 0.75$

თუ $(a;b)$ პარამეტრების მნიშვნელობებია: $a = 0.25$, $b = 0.49$, მაშინ გვეჩვენება ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა (ნახ. 7.4), რომლის ფაზურ პორტრეტს აქვს ფრაქტალური ორბიტის სახე (ნახ. 7.4ა).



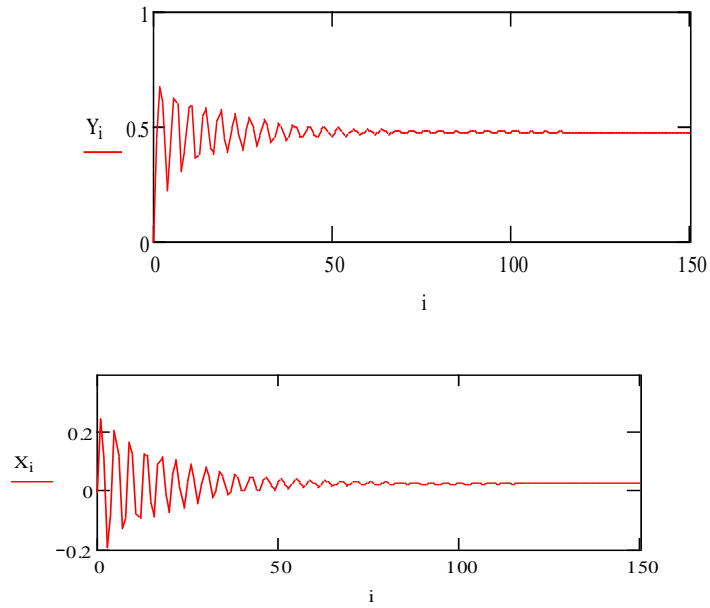
ნახ. 7.4.ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემა



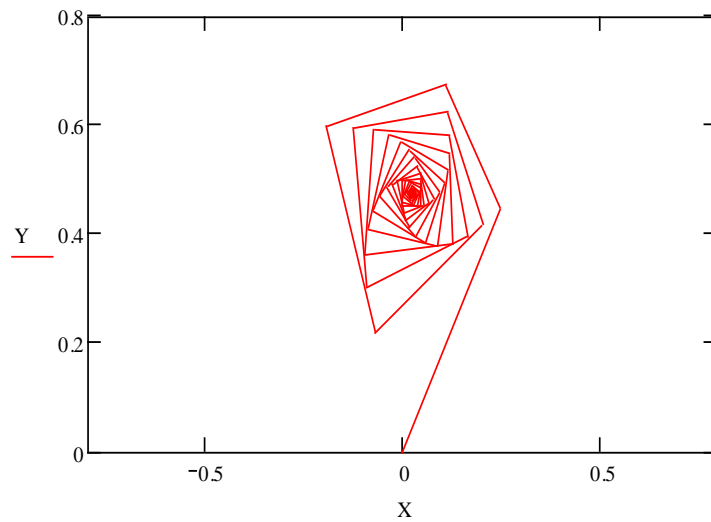
ნახ. 7.4.ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.25$, $b = 0.49$

თუ განვიხილავთ $(a; b)$ პარამეტრების მნიშვნელობებს: $a = 0.25$, $b = 0.45$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისკენ კრებადი

დინამიკური სისტემა (ნახ. 7.5), შესაბამისი (ნახ. 7.5ა) ფაზური პორტრეტით.



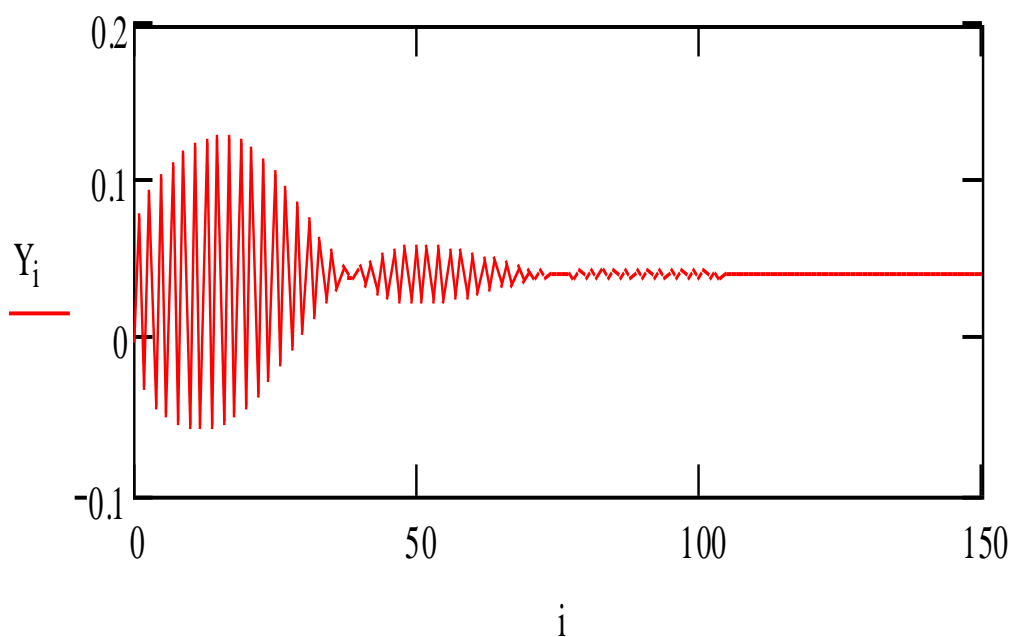
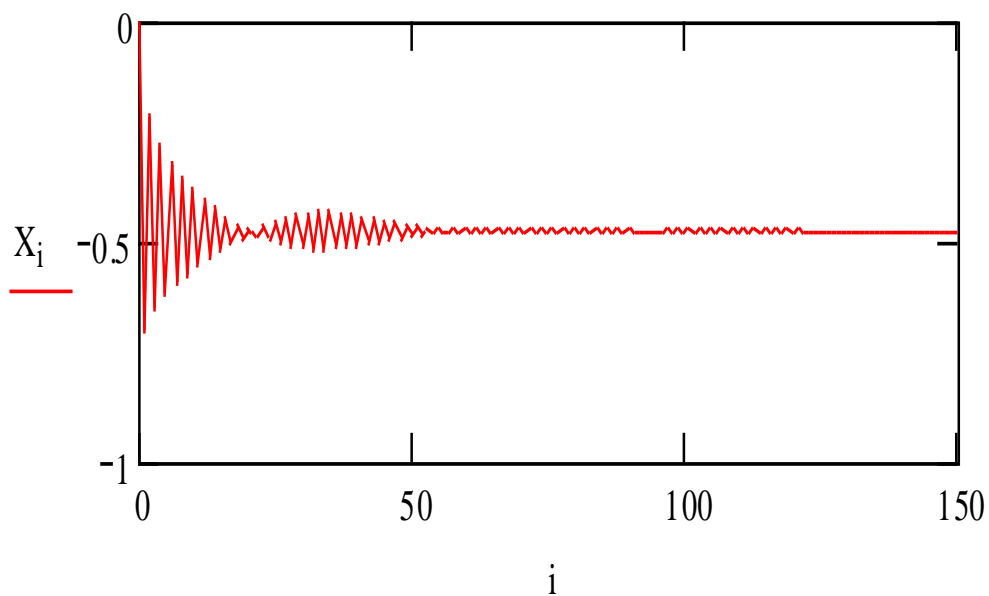
ნახ. 7.5. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = 0.25$, $b = 0.45$



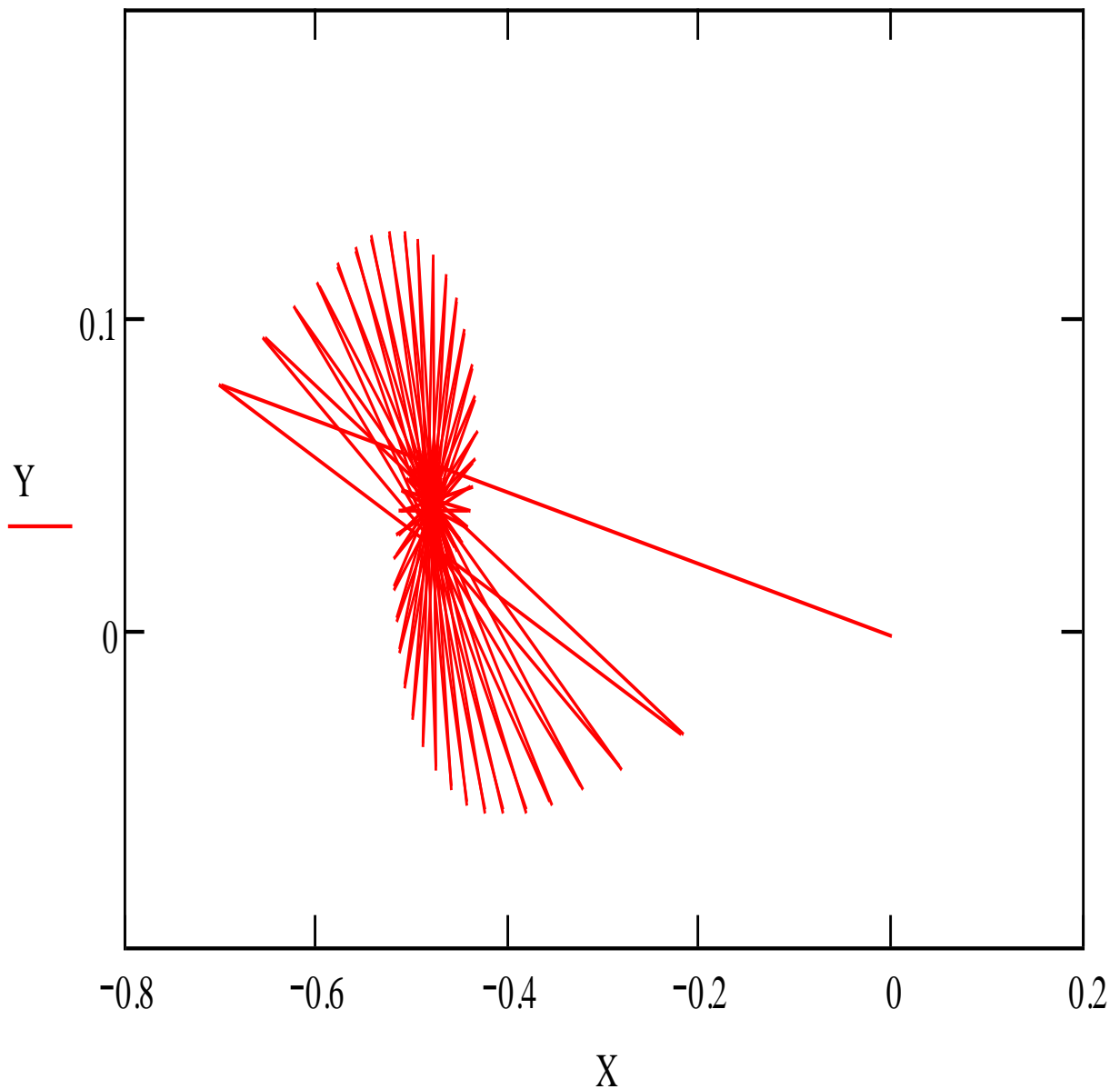
ნახ. 7.5ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.25$, $b = 0.45$

განვიხილოთ $(a ; b)$ პარამეტრების მნიშვნელობები:

$a = -0.7$, $b = 0.08$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა (ნახ. 7.6), შესაბამისი (ნახ. 7.6ა) ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.

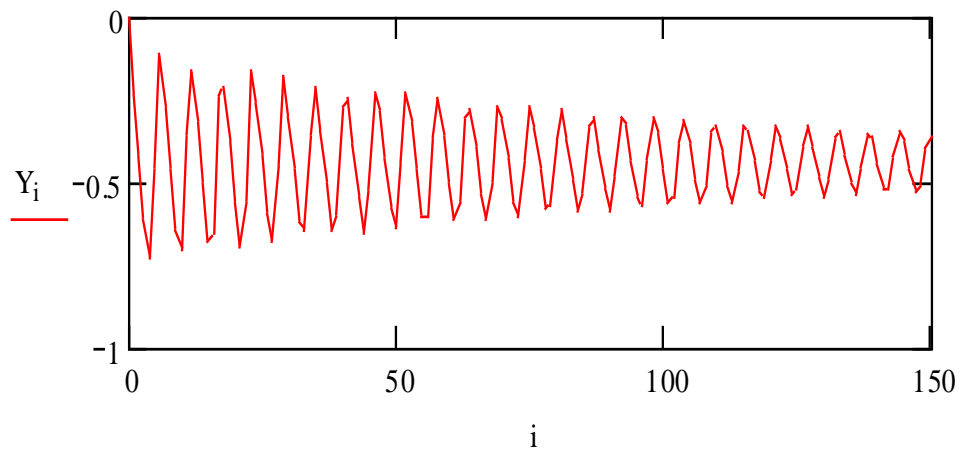
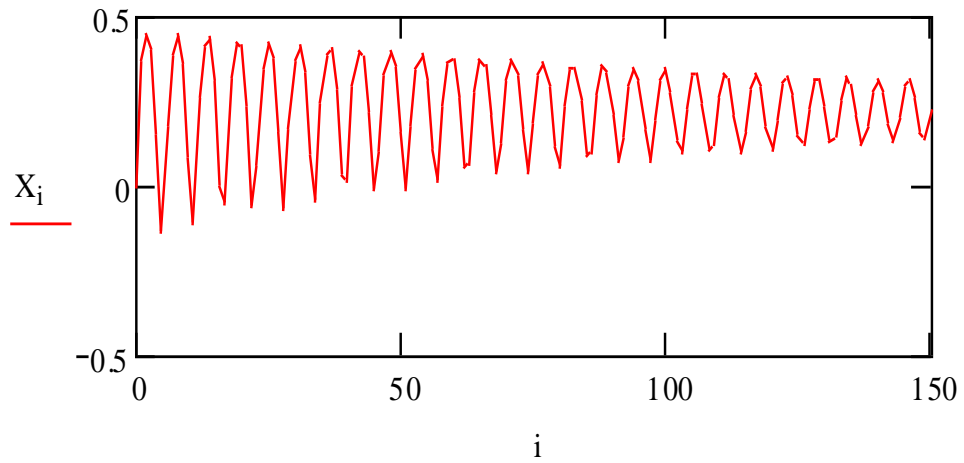


ნახ. 7.6. ფრაქტალური ცენტრისაკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.7$, $b = 0.08$

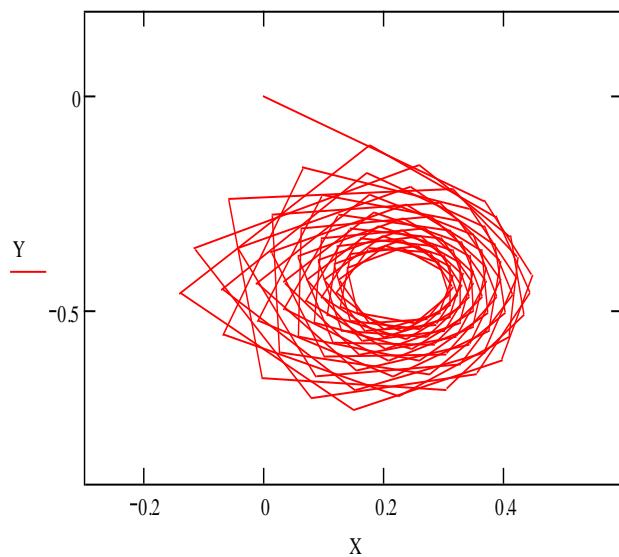


ნახ. 7.6ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.7$, $b = 0.08$

განვიხილოთ $(a ; b)$ პარამეტრების მნიშვნელობები:
 $a = 0.37$, $b = -0.24$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისკენ კრებადი დინამიკური სისტემა (ნახ. 7.7), შესაბამისი (ნახ. 7.7ა) ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



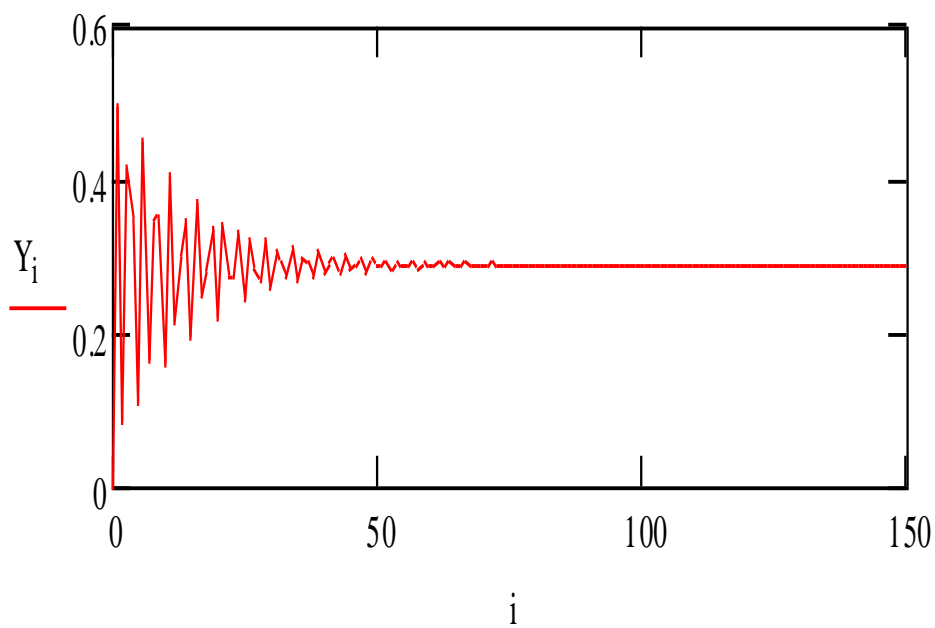
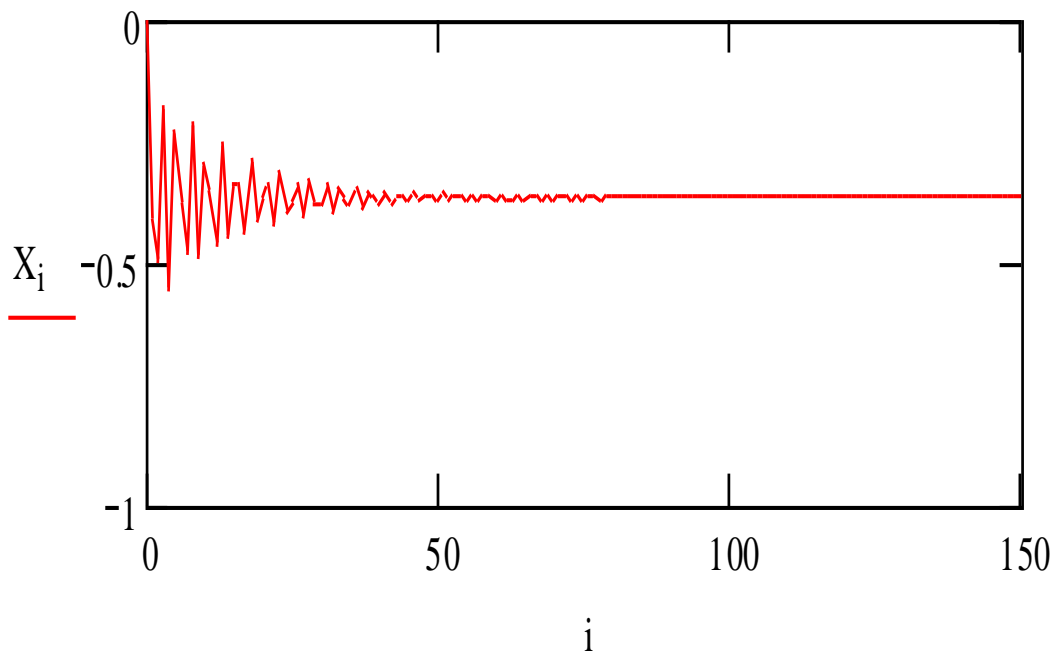
ნახ. 7.7. ფრაქტალური ცენტრისკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = 0.37$, $b = -0.24$



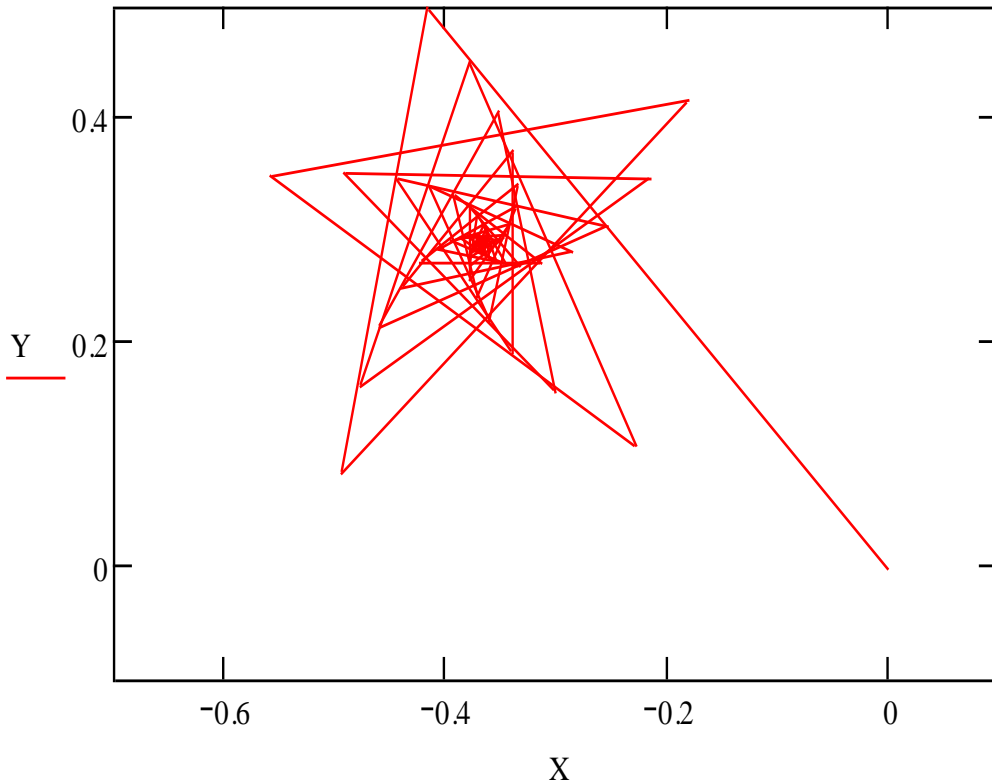
ნახ. 7.7ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = 0.37$, $b = -0.24$

განვიხილოთ $(a ; b)$ პარამეტრების მნიშვნელობები:

$a = -0.4161$, $b = 0.5$, მაშინ კვლავ გვაქვს ცენტრისაკენ კრებადი დინამიკური სისტემა (ნახ. 7.8), შესაბამისი (ნახ. 7.8ა) ფაზური პორტრეტით, რომელიც გამოსახავს დინამიკური სისტემის ორბიტას.



ნახ. 7.8. ფრაქტალური ცენტრისაკენ მიმავალი სისტემის დინამიკა, როცა $a = -0.4161$, $b = 0.5$



ნახ. 7.8ა. ფრაქტალური ცენტრისკენ კრებადი სისტემის ორბიტა, როცა $a = -0.4161$, $b = 0.5$

განვიხილოთ (7.3), (7.4) იტერაციული ფორმულებით მოცემული დისკრეტული დინამიკური სისტემის (x,y) ორბიტები, რომლებიც წარმოიშობა სისტემის სხვადასხვა საწყისი (a,b) პირობების შემთხვევაში. 7.1 ა ნახ-ზე მოცემულია **დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალი**, რომელიც წარმოიშობა (7.5) საწყისი პირობების შემთხვევაში და მიისწრაფვის $(-0.2381; 0.4242)$ მიზიდულობის ცენტრისკენ. 7.2 ა ნახ-ზე მოცემული ორბიტა არაა ფრაქტალი, ის **პერიოდული ორბიტა** სამი პერიოდით, თუმცა მისი საწყისი პირობები დიდად არ განსხვავდება 7.1 ა ფრაქტალის საწყისი პირობებისაგან. 7.3 ა ნახ-ზე მოცემულია უსასრულობისკენ მიმავალი იტერაციული ორბიტა, რომელიც ქაოსურ სისტემას შეესაბამება. ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ **სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა: ა) ფრაქტალური, მიზიდულობის ცენტრისკენ მიმავალი (ნახ. 7.1ა; 7.4ა; 7.8ა); ბ) პერიოდული (ნახ. 7.2ა ; გ) ქაოსური, უსასრულობისკენ მიმავალი (ნახ. 7.3ა).**

ყველაზე მეტ ყურადღებას ფრაქტალური ორბიტები იმსახურებს.

7.2. ფრაქტალური ორბიტები და ჟულიას სიმრავლეები

განვიხილოთ უფრო დეტალურად (7.1) დისკრეტული დინამიკური სისტემა, რათა გავერკვეთ, რატომაა საწყის მონაცემებსა და პარამეტრის არჩევაზე დამოკიდებული სამი სხვადასხვა ტიპის ორბიტა.

ამ პრობლემის შესწავლის მიზნით განვიხილოთ, (7.1)

დინამიკური სისტემის მსგავსი, ნამდვილი ცვლადის (7.6) დინამიკური სისტემა:

$$f(x): x_{n+1} = x_n^2 + a, \quad a = \text{const}. \quad (7.6)$$

დავუშვათ, რომ $a = 0$, მაშინ (7.6) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$x_{n+1} = x_n^2. \quad (7.7)$$

ამ სისტემის უძრავი (წონასწორობის) წერტილების განსაზღვრისას უნდა ვიგულისხმოთ, რომ

$$x_{n+1} = x_n = x_0. \quad (7.8)$$

მაშინ (7.7) იტერაციული ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$x_0 = x_0^2 \text{ ანუ } x_0 = 0 \vee x_0 = 1 \vee x_0 = \infty. \quad (7.9)$$

რაც ნიშნავს, რომ (7.7) დინამიკურ სისტემას აქვს სამი წერტილი: $x_0 = 0$, $x_0 = \infty$ და $x_0 = 1$.

შევისწავლოთ მათი მდგრადობის საკითხი. ამისათვის, წონასწორობის წერტილს უნდა მივცეთ მცირე ნაზარდი $0 < \delta_n \ll 1$ და ((7.7) სისტემიდან გამომდინარე) შევისწავლოთ ნაზარდის დინამიკა. თუ ის იზრდება, მაშინ შესაბამისი წერტილი არაა მდგრადი, თუ ნულისკენ მიისწრაფვის, მაშინ გვაქვს მდგრადობა. განვიხილოთ ცალ-ცალკე წონასწორობის წერტილების მდგრადობის საკითხები.

ა) $x_0 = 0$, მაშინ განვიხილათ ამ წერტილის შეშფოთებას ანუ

$$x_n = 0 + \delta_n. \quad (7.10)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.7) სისტემის სახეს, გვექნება:

$$\delta_{n+1} = \delta_n^2. \quad (7.11)$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = \delta_n \ll 1, \quad (7.12)$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0. \quad (7.13)$$

ე.ი. წონასწორობის წერტილი $x_0 = 0$ მდგრადია. რაც ნიშნავს, რომ თუ სისტემის საწყის მდებარეობად ავიღებთ $|x_0| < 1$ მნიშვნელობას, მაშინ სისტემას აქვს ფრაქტალური მიზიდვის ცენტრი $x = 0$ და ნებისმიერი ასეთი $|x_0| < 1$ საწყისი პირობის შემთხვევაში მისი ორბიტა მიიზიდება ამ ცენტრის მიერ. ასევე, მიზიდულობის ცენტრია $x_0 = \infty$ და მისკენ მიიზიდება ისეთი წერტილების ორბიტები, რომელთათვისაც $|x_0| > 1$.

ბ) $x_0 = 1$, მაშინ განვიხილავთ ამ წერტილის შემოფოთებას ანუ

$$x_n = 1 + \delta_n. \quad (7.14)$$

თუ გავითვალისწინებთ (7.7) სისტემის სახეს, გვექნება:

$$1 + \delta_{n+1} = (1 + \delta_n)^2 \quad (7.15)$$

ანუ

$$1 + \delta_{n+1} = 1 + 2\delta_n + \delta_n^2, \quad (7.16)$$

მაშინ

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 2 + \delta_n. \quad (7.17)$$

და რადგან $0 < \delta_n \ll 1$, მივიღებთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \infty. \quad (7.18)$$

რაც ნიშნავს, რომ $x_0 = 1$ წონასწორობის წერტილი არაა მდგრადი.

გ) თუ სისტემის საწყისი მდგომარეობაა $x_0 = 1$, მაშინ მცირე შემოფოთებაც კი საკმარისია, რომ სისტემის ორბიტა წავიდეს უსასრულობაში, თუმცა შემოფოთების არარსებობის შემთხვევაში, სისტემა იძლევა პერიოდულ პროცესს. თუ საწყისი მნიშვნელობა $|x_0| > 1$, მაშინ სისტემა იძლევა უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას.

ეს სამი შემთხვევა შეესაბამება 7.1ა–7.3ა ნახაზებზე მოცემულ სამ შემთხვევას.

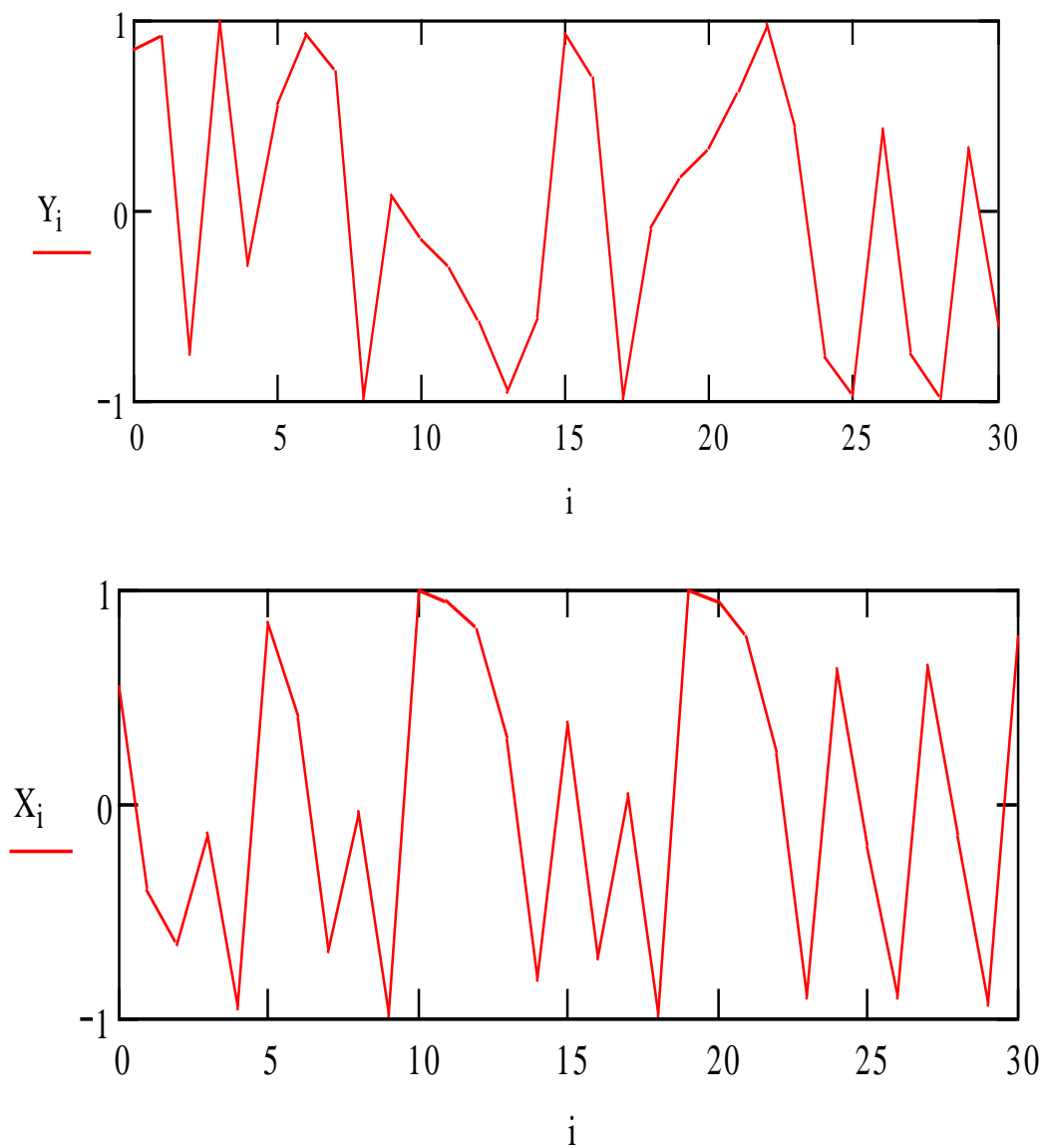
ეხლა განვიხილოთ კომპლექსური ცვლადების შემთხვევა (7.1).

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \quad (7.19)$$

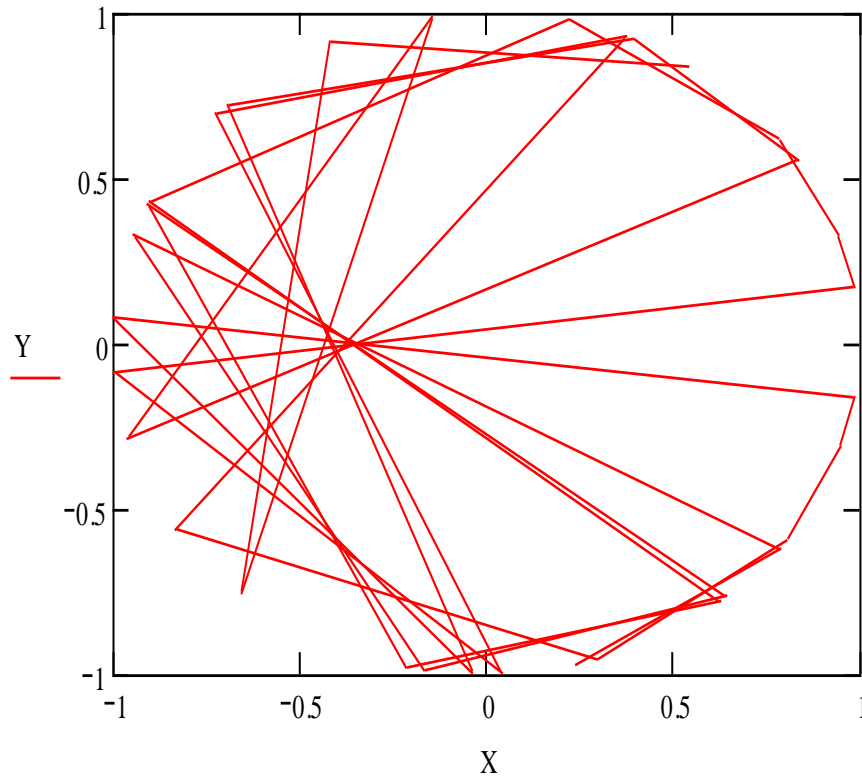
თუ იტერაციის რომელიმე ბიჯზე $|z_n| > 1$, მაშინ ფუნქცია მოგვცემს უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას. არსებობს ზღვრული შემთხვევა $|z_n| = 1$; $c = 0$.

მაგალითად, თუ $x_0 = \cos 1$; $y_0 = \sin 1$, მაშინ წერტილები ლაგდება ერთეულოვანი რადიუსის წრეწირზე, თუმცა რამდენიმე ბიჯის შემდეგ თანდათან სცილდება მას (ნახ. 7.9, ნახ. 7.9ა). ითვლება, რომ წრეწირზე მდებარე წერტილები არამდგრადია და ან

მოგვცემს უსასრულობაში მიმავალ ორბიტას, ან მიიზიდება წრის რომელიმე შიგა წერტილის მიერ.



ნახ. 7.9. სისტემის დინამიკა, როცა $|z_n| = 1$; $c = 0$



ნახ. 7.9ა. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ორბიტა, როცა $|z_n| = 1$; $c = 0$

$f(z)$ ფუნქციის $J(f)$ ჟულიას სიმრავლე ეწოდება იმ z წერტილების სიმრავლის საზღვარს, რომელთა ორბიტა უსასრულობისკენ მიდის n -თან ერთად [3].

$$J(f) = \partial \left\{ z: \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rightarrow \infty \right\} \quad (7.20)$$

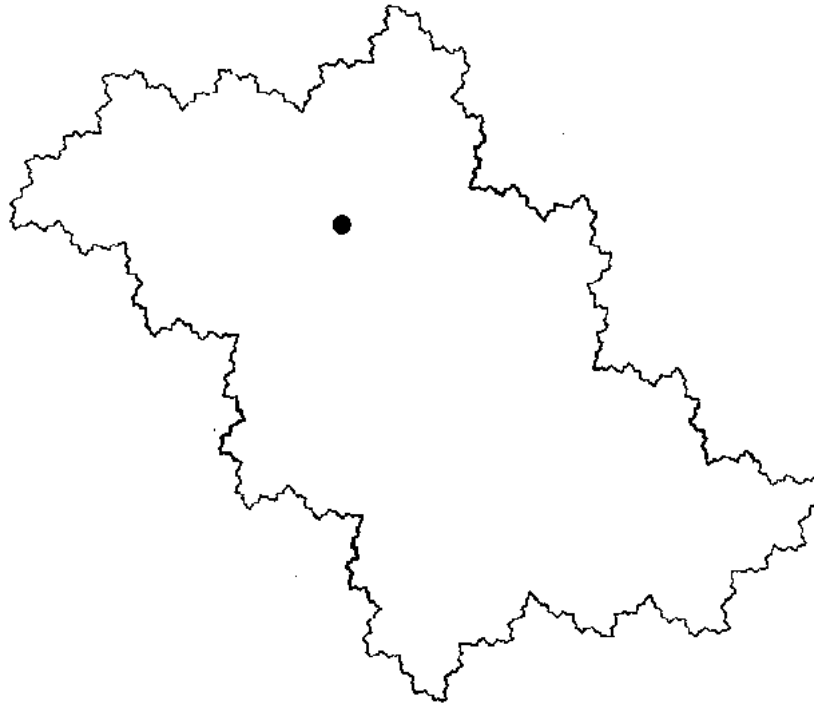
ან სხვანაირად

$J(f)$ ჟულიას სიმრავლე არის f ფუნქციის ყველა მიზიდულობის წონასწორობის წერტილის (მათ შორის ∞ -ის) მიზიდულობის ველის საზღვარი.

უმარტივესი $z_{n+1} = z_n^2$ სისტემისათვის ჟულიას სიმრავლეს აქვს სახე: $|z| = 1$. აქ გვაქვს ქაოსი, თუმცა ეს სიმრავლე არ წარმოადგენს ფრაქტალს, მაგრამ, როგორც წესი, ჟულიას სიმრავლე ფრაქტალია [21], ამიტომ მოცემული c -სთვის განიხილავენ z -ის ისეთ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც $|z| < 2$ და შესაბამისი წერტილების სიმრავლეს ჟულიას შიგა სიმრავლეს უწოდებენ. ითვლება, რომ თუ $|z| > 2$, მაშინ შესაბამისი ორბიტა მიდის

უსასრულობისკენ. ჟულიას შიგა სიმრავლის საზღვარს ჟულიას წირს უწოდებენ. ხოლო ჟულიას წირის დამატებით სიმრავლეს - ფატუს სიმრავლეს [4],[22].

7.1ა ნახ-ზე გამოსახული დისკრეტული დინამიკური სისტემის შესაბამის ჟულიას სიმრავლეს აქვს 7.10 ნახაზე მოცემული სახე.



ნახ. 7.10. დისკრეტული დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტა გამოსახულია 7.1ა ნახ-ზე

განვიხილოთ $z_{n+1} = z_n^2 + c$ სქემისათვის ჟულიას შიგა სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში, სადაც $c = a + ib$:

მონაცემების შეტანა:

a, b

(c, d) (ფანჯრის ცენტრი)

s (ფანჯრის ზომები)

p (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

შედეგების გამოტანა:

ჟულიას შიგა სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია: $\left[c - \frac{s}{2}, c + \frac{s}{2} \right] \times \left[d - \frac{s}{2}, d + \frac{s}{2} \right]$

ბიჯები:

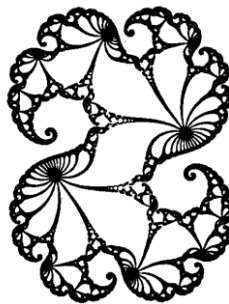
for m = 1 to p

```

 $x_0 = c - \frac{s}{2} + \frac{ms}{p}$ 
for n = 1 to p
 $y_0 = d - \frac{s}{2} + \frac{ns}{p}$ 
x = x0
y = y0
z = 0
iter = 1
while iter < 20
iter = iter + 1
 $x_1 = x^2 - y^2 + a$ 
 $y_1 = 2xy + b$ 
x = x1
y = y1
 $z = x^2 + y^2$ 
if z > 4 ციკლიდან გამოსვლა, end if
end While
if z < 4 ავაგოთ წერტილები (x0, y0), end if
end for
end for

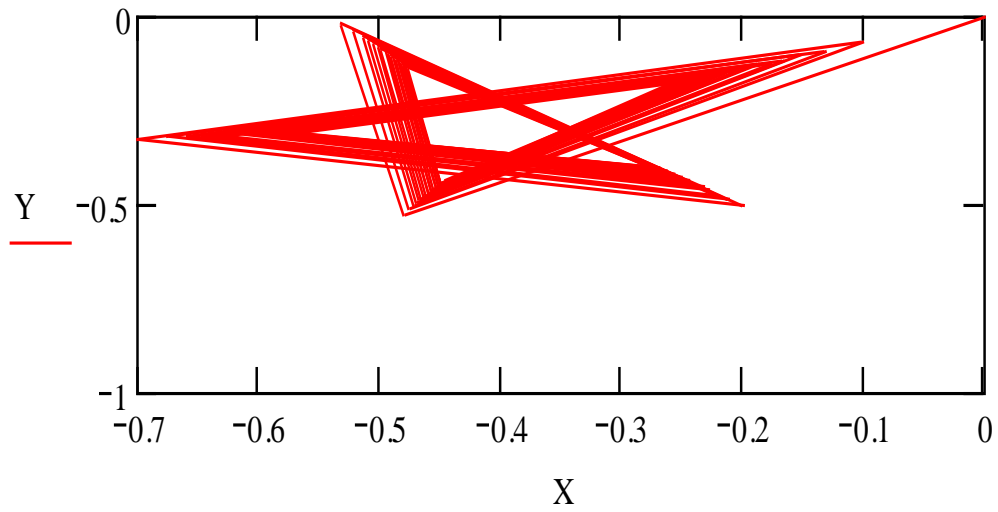
```

უფრო ხშირად განიხილავენ ჟულიას შიგა სიმრავლის საზღვარს და უწოდებენ ჟულიას წირს, რომელთა მაგალითები გამოსახულია 7.1 - 7.14 ნახაზებზე.

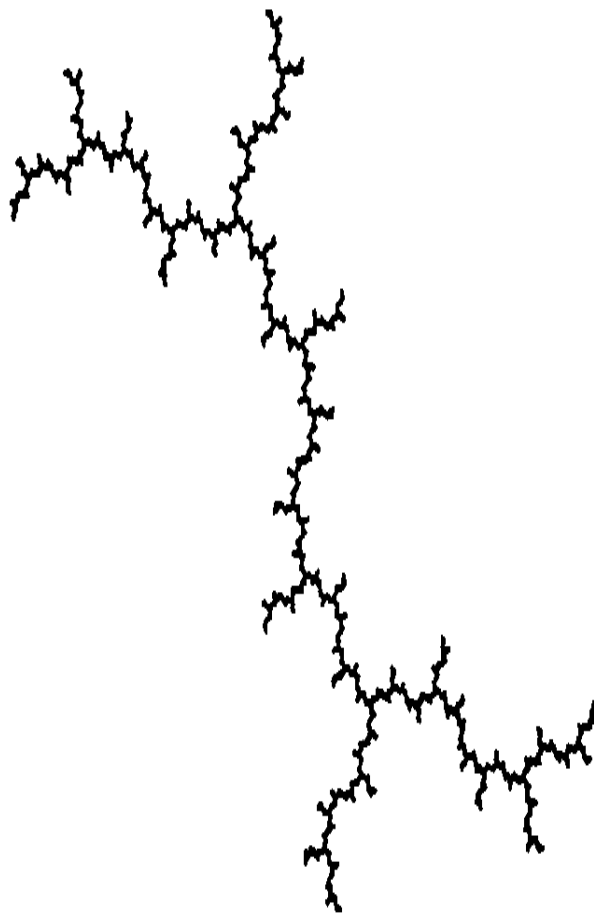


ნახ. 7.11. ჟულიას წირი. პარაბოლური შემთხვევა, როცა $c = -0.48 - 0.53i$

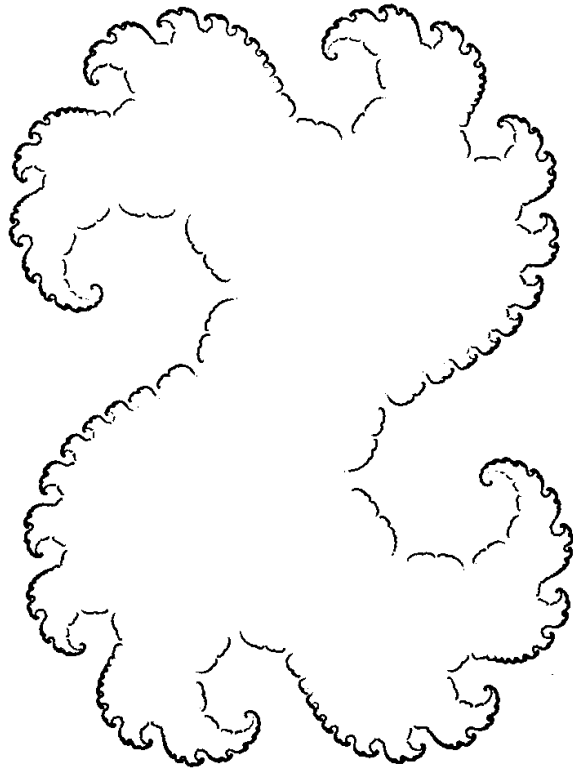
ამ შემთხვევაში ფაზური პორტრეტი ვარსკვლავის ფორმის ორბიტაა (ნახ. 7.11ა).



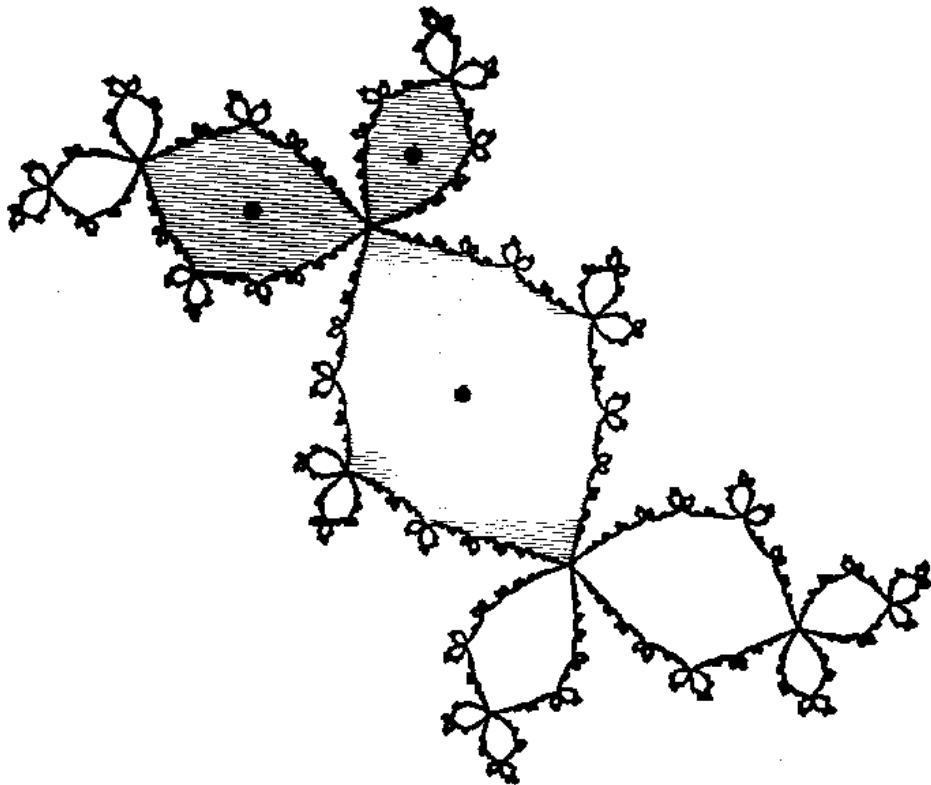
ნახ. 7.11ა. ფაზური პორტრეტი ვარსკვლავის ფორმის ორბიტა, როცა $c = -0.48 - 0.53i$



ნახ. 7.12. უელის წირი. დენდრიტი, როცა $c = i$



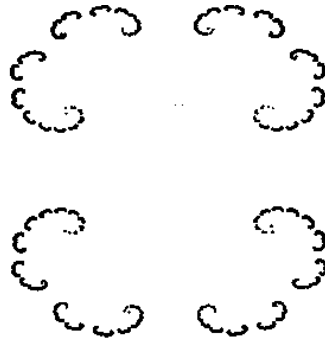
ნახ. 7.13. ჟულიას წირი, როცა $c = 0.32 + 0.043i$



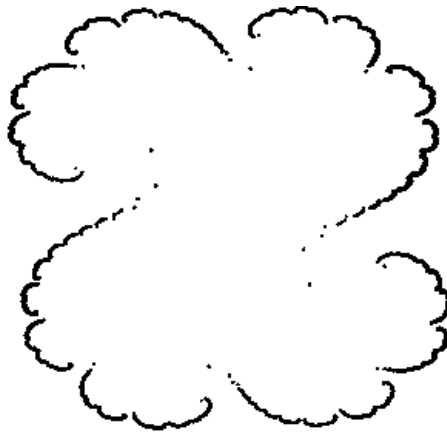
ნახ. 7.14. დისკრეტული სამი პერიოდის მქონე დინამიკური სისტემის ჟულიას სიმრავლე, რომლის ორბიტა გამოსახულია 7.2 ა ნახ-ზე

7.3. მანდელბროტის სიმრავლე

როგორც ვიცით, $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის ჟულიას სიმრავლე შეიძლება იყოს სხვადასხვა ტიპის იმის მიხედვით, თუ როგორია c პარამეტრის მნიშვნელობა. ამის მიუხედავად, ამ ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ ორი ტიპის ჟულიას სიმრავლე: ა) ბმული სიმრავლე; ბ) სრულიად არაბმული. ბმული ჟულიას სიმრავლეები ერთმანეთისაგან შეიძლება ძალიან განსხვავდებოდეს ვიზუალური თვალსაზრისით. ერთნი შეიძლება იყოს შეკრული წირები ფრაქტალური სტრუქტურით, როგორც, მაგალითად, $0 < |c| < 0.25$ შემთხვევაში; ხოლო სრულიად არაბმულ ჟულიას სიმრავლეებს აქვს კანტორის მტვერის გეომეტრიული სტრუქტურა (ნახ. 7.15, ნახ. 7.16).

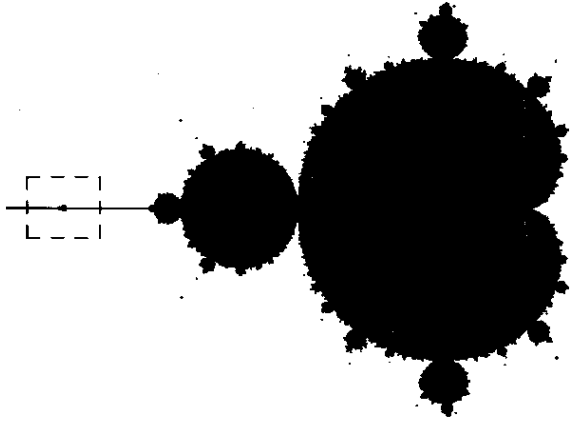


ნახ. 7.15. ჟულიას სიმრავლე, როცა $c = 0.5$



ნახ. 7.16. ჟულიას სიმრავლე, როცა $c = 0.31 + 0.04i$

მოცემული $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის ჟულიას სიმრავლის ტიპის ინდიკატორი არის მისი მანდელბროტის სიმრავლე, რომლის ყველა შიგა c წერტილს შეესაბამება ბმული ჟულიას სიმრავლე (ნახ. 7.17).



ნახ. 7.17. მანდელბროტის სიმრავლე

მანდელბროტის სიმრავლის ყოველ c წერტილს შეესაბამება ბმული ჟულიას სიმრავლე, ხოლო მის დამატებით სიმრავლეს – სრულიად არაბმული ჟულიას სიმრავლე (კანტორის მტვერი).

განსაზღვრება. $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლე ეწოდება ისეთი $c \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვების სიმრავლეს, რომლებისთვისაც 0 წერტილის ორბიტები შემოსაზღვრულია.

ახლა შევადგინოთ $f(z) = z^2 + c$ ფუნქციის მანდელბროტის სიმრავლის აგების პროგრამა ფსევდოკოდებში:

მონაცემების შეტანა:

(i, j) (ფანჯრის ცენტრი, მაგ, $(0 ; 0)$)

s (ფანჯრის ზომები $s \times s$)

p (პიქსელების რაოდენობა ფანჯრის ყოველ გვერდში)

$iter$ (იტერაციათა რაოდენობა)

შედეგების გამოტანა:

მანდელბროტის სიმრავლის გამოსახვა

ინიციალიზაცია:

გრაფიკული ეკრანის ფანჯრის ზომებია: $[i - \frac{s}{2}, i + \frac{s}{2}] \times [j - \frac{s}{2}, j + \frac{s}{2}]$

ბიჯები:

for $m = 1$ to p

$$a = i - \frac{s}{2} + \frac{ms}{p}$$

for $n = 1$ to p

```


$$b = j - \frac{s}{2} + \frac{ns}{p}$$

 $x = 0$ 
 $y = 0$ 
 $iter = 1$ 
while  $iter \leq 20$ 
   $iter = iter + 1$ 
 $x1 = x^2 - y^2 + a$ 
 $y1 = 2xy + b$ 
   $x = x1$ 
   $y = y1$ 
   $z = x^2 + y^2$ 
  if  $z > 4$ , ციკლიდან გამოსვლა, end if
end while
  if  $z < 4$ 
    plot(a; b)
  end if
end for
end for

```

როგორც ვხედავთ, ისეთი მარტივი ერთბიჯიანი იტერაციული სისტემებისათვისაც კი, როგორცაა კვადრატული ასახვით წარმოქმნილი სქემა, დამახასიათებელია გეომეტრიულად არარეგულარული რეჟიმების არსებობა. თუმცა, ცოცხალი სისტემებისათვის დამახასიათებელი „არჩევანის თავისუფლება“ (ასახვის დაკავშირება შემთხვევით პროცესებთან) განაპირობებს ფრაქტალური პორტრეტების მრავალფეროვნებას.

ლიტერატურა

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ. Ижевск, 2002.
2. Lauwerier H.A. Fractals – images of chaos// Princeton Univ. press, 1991.
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ. Москва, 2000.
4. Julia G. Memoir sur l'iteration des fonctions rationnelles. J. de Mathematiques pures et appliquees, v. 1, Paris, 1918.
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Пер. с англ. Москва: Мир, 1993.
6. Мандельброт Б. Фракталы, случаи и финансы. Пер. с франц. Ижевск, Москва, 2004.
7. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ. Ижевск, Москва, 2009.
8. Richardson L.F. Weather prediction by numerical process. Cambridge. University press, 1922.
9. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Институт компьютерных исследований. Ижевск, Москва, 2002.
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевск, 2001.
11. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие, пер. с англ. Триумф. Москва, 2003.
12. Hutchinson J.E. Fractals and Self Similarity// Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5, 1981, pp. 713-747.
13. Barnsley M. Fractals Everywhere. Academic Press, Boston, 1993.
14. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed, 1992.
15. Shumaker L., Webb G., editor. Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press, 1993.
16. Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998.
17. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П.Петухова. Москва, 2001.
18. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков//Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997.

19. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. Москва, 2002.
20. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. Москва, 2005.
21. Мильнор Дж. Голоморфная динамика. пер. с англ. Ижевск, 2000.
22. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles, bulletin societete, Math. France, v.47, 1919.

შინაარსი

ბმ.

შესავალი		3
I თავი	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალი.	5
	ფრაქტალი და პოზიციური თვლის სისტემა	
	1.1 პოზიციური სისტემების ხისმაგვარი სტრუქტურა	5
	1.1.1 ორობითი სისტემა	8
	1.1.2 სამობითი სისტემა	8
	1.2 სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა	10
	1.3 კანტორის ფრაქტალი	12
II თავი	ფრაქტალური სიმრავლეების განზომილების ექსპერიმენტული განსაზღვრა	14
	2.1 რიჩარდსონის ექსპერიმენტი	14
	2.2 ფრაქტალური განზომილების ცნება	16
	2.3 კოხის “დაფრაქტალეზებული” წირი	18
	2.3.1 კოხის დაფრაქტალეზებული კუნძული	20
	2.3.2 მინკოვსკის ფრაქტალი	21
	2.3.3 ფრაქტალური კუნძული	22
	2.3.4 მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული	23
	2.3.5 ფიორდების ფრაქტალური კუნძული	25
	2.3.6 ყინულის ფრაქტალური კვადრატი	26
	2.3.7 ყინულის ფრაქტალური სამკუთხედი	28
	2.3.8 გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი	30
III თავი	სპირალები, ხეები და ვარსკვლავები	33
	3.1 სპირალები	33
	3.2 პითაგორას ფრაქტალური ხე	39
	3.2.1 პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე	41
	3.3 ვარსკვლავები	50
IV თავი	გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების გარდაქმნის ანალიზი	54
	4.1 ინვარიანტული გარდაქმნა	54
	4.2 მობრუნება	55
	4.3 გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა	56
	4.4 მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია	56
	4.5 სიმეტრიის გარდაქმნა	60
	4.6 გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის დინამიკური	

	სტრუქტურა	66
	4.7 მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნა	67
	4.8 მანძილი მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლეებს შორის	70
V თავი	გამოსახულების ფრაქტალური შეკუმშვა	72
	5.1 გამოსახულების შეკუმშვის ამოცანა	74
	5.2 იტერირებად ფუნქციათა სისტემები	76
	5.2.1 გამოსახულების კოდირების მაგალითი	78
	5.2.2 <i>IFS</i> ფუნქციათა სისტემები ჰაუსდორფის სივრცეში	79
	5.3 გამოსახულების ფრაქტალური კოდირება შაფ-თეთრ ფერებში	80
	5.3.1 ალაგ-ალაგ განსაზღვრული იტერირებად ფუნქციათა სისტემა	81
	5.3.2 შაფ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების აფინური ასახვა	82
	5.3.3 შაფ-თეთრი გრადაციის გამოსახულების კუმშვადი ასახვა	83
VI თავი	გამოსახულების შეკუმშვა ვეივლეტებით	85
	6.1 ვეივლეტები და სიგნალების მათემატიკური მოდელირება	85
	6.2 ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა	91
	6.3 ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები	92
	6.4 ვეივლეტ-ფუნქციების კერძო შემთხვევები	94
	6.5 ვეივლეტ-ანალიზი <i>Mathcad</i> -ის ბაზაზე	98
	6.6 ვეივლეტ-გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტვრა <i>Mathcad</i> -ის ბაზაზე	102
	6.7 შერეული ფრაქტალურ-ვეივლეტური კოდირება	107
VII თავი	დინამიკური ფრაქტალები	108
	7.1 დისკრეტული დინამიკური ფრაქტალები	108
	7.2 ფრაქტალური ორბიტები და ჟულიას სიმრავლეები	120
	7.3 მანდელბროტის სიმრავლე	128
	ლიტერატურა	131

