რევაზ დანელია, ჯემალ როგავა

წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მოკლე კურსი

თბილისი
1997

რევაზ დანელია, ჯემალ როგავა

წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის მოკლე კურსი

საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ საქართველოს სახელმწიფო აგრარული უნივერსიტეტის ეკონომიკური და საინჟინრო ფაკულტეტების სტუდენტთათვის

მეცნიერებათა აღორძინების ფონდი
გამომცემლობა „ინტელექტი“

თბილისი
1997

უ.ა.კ. 13.00.02

წინამდებარე სახელმძღვანელოში წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის საკითხები გადმოცემულია იმგვარად, რომ უმაღლესი მათემატიკის ეს კურსი მიახლოებულია ელემენტარულ მათემატიკასთან.

წიგნი განკუთვნილია ეკონომიკური და საინჟინრო ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტები: საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის
წევრ-კორესპონდენტი, პროფესორი
ნოდარ ბერიკაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი
როლანდ ომანაძე

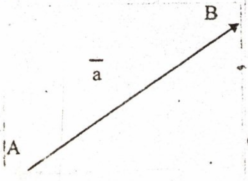
რედაქტორი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
კანდიდატი, დოცენტი
მამუკა ნადარეიშვილი

თავი პირველი

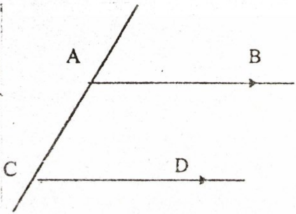
ვექტორული ალგებრის ელემენტები

§1. ვექტორის ცნება. მოქმედებანი ვექტორებზე

1. ვექტორის ცნება. განვიხილოთ ბუნების ისეთი ხშირი მოვლენა, როგორიცაა ქარი. მის დასახასიათებლად საკმარისი არ არის ქარის სიჩქარის რიცხვითი მნიშვნელობის ცოდნა, საჭიროა აგრეთვე ვიცოდეთ ქარის გავრცელების მიმართულება, ანუ სიჩქარის მიმართულებაც. იგივე ითქმის ძალაზე, აჩქარებაზე და ზოგიერთ სხვა ფიზიკურ სიდიდეზე. ამის გამო ხელსაყრელია აღნიშნული ფიზიკური სიდიდეების მიმართული მონაკვეთებით გამოსახვა.



სურ. 1.

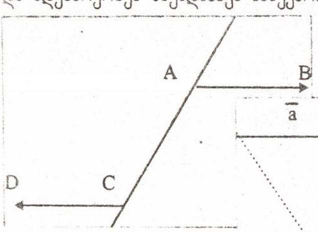


სურ. 2.

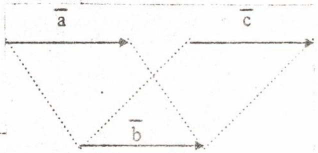
მიმართულ მონაკვეთს **ვექტორი** ეწოდება (სურ. 1). ვექტორის მიმართულება განისაზღვრება სათავისა და ბოლოს მითითებით. ვექტორი აღინიშნება პატარა ლათინური ასოებით, რომლებსაც თავზე ისარი ან ხაზი აქვთ: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \cdots$. ვექტორს

აღნიშნავენ აგრეთვე მისი სათავის და ბოლოს მითითებით, დიდი ლათინური ასოების საშუალებით, ამ შემთხვევაში პირველ ადგილზე იწერება ვექტორის სათავე. მაგალითად $\overline{a}$ ვექტორს (სურ. 1) მეორენაირად აღნიშნავენ $\overline{AB}$-თი.

2. ვექტორის მიმართულება და სიგრძე. $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორებს **თანამიმართული** ეწოდება, თუ AB და CD სხივები თანამიმართულია (სურ. 2). ორ სხივს თანამიმართული ეწოდება, თუ ისინი პარალელურია და მდებარეობენ ერთ და იგივე ნახევარსიბრტყეში. $\overline{AB}$ და $\overline{CD}$ ვექტორებს **მოპირდაპირედ მიმართული** ეწოდება, თუ AB და CD სხივები მოპირდაპირედ არიან მიმართული (სურ. 3). ორ სხივს მოპირდაპირედ მიმართული ეწოდება, თუ ისინი პარალელურია და მდებარეობენ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში.



სურ. 3.



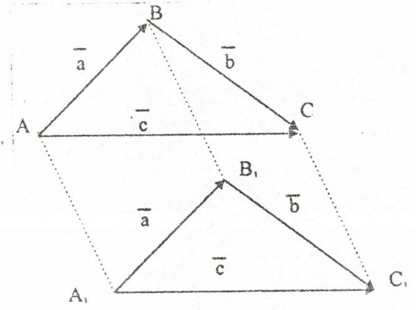
სურ. 4.

AB მონაკვეთის სიგრძეს უწოდებენ $\overline{AB} = \overline{a}$ ვექტორის სიგრძეს და ასე აღნიშნავენ: $|\overline{AB}|$ ან $|\overline{a}|$.

ერთნაირი მიმართულების ვექტორებს , რომელთაც ერთიდაიგივე სიგრძე აქვთ, არ განასხვავებენ და ითვლება, რომ ისინი ტოლია. მაგალითად: $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორები ტოლია სურ. 4-დან. მეორენაირად ასეთ ვექტორებს **თავისუფალ** ვექტორებს უწოდებენ.

$\overline{AB} = \bar{a}$ ვექტორის მოდებას რაიმე C წერტილში, უწოდებენ ისეთი CD მონაკვეთის აგებას, რომ $\overline{CD} = \bar{a}$.

3. **ვექტორების შეკრება და გამოკლება.** ვთქვათ მოცემულია ორი ვექტორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$. ავიღოთ ნებისმიერი წერტილი A და მოვდოთ $\bar{a}$ ვექტორი, $\overline{AB} = \bar{a}$. B წერტილში მოვდოთ $\bar{b}$ ვექტორი, $\overline{BC} = \bar{b}$. $\overline{AC} = \bar{c}$ ვექტორს უწოდებენ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების ჯამს და წერენ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ (იხ. სურ. 5).



სურ. 5.

ამ გზით $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების ჯამი განისაზღვრება სავსებით ცალსახად, ის არ არის დამოკიდებული იმაზე A წერტილს სად ავიღებთ. მართლაც, ავიღოთ A_1 წერტილი განსხვავებული A წერტილისგან (იხ. სურ. 5). ცხადია ABB_1A_1 და BCC_1A_1 ოთხკუთხედები წარმოადგენენ პარალელოგრამებს. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ ACC_1A_1 ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, ე.ი. $\overline{A_1C_1} = \overline{AC} = \bar{c}$.

ამრიგად, თუ ავიღებთ ნებისმიერ სამ წერტილს, A, B და C,

ადგილი აქვს ვექტორულ ტოლობას

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC},$$

რომელსაც ვექტორების შეკრების სამკუთხედის წესს უწოდებენ.

ერთნაირი სიგრძის მოპირდაპირედ მიმართული ვექტორების ჯამი განსაკუთრებულ „ვექტორს" წარმოადგენს, რომელსაც ნულოვან ვექტორს უწოდებენ და აღნიშნავენ სიმბოლოთი $\overline{0}$. განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{0}.$$

ანუ

$$\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0},$$

ნებისმიერი $\overline{a}$ ვექტორისათვის. აქვე განვმარტავთ: $\overline{a}$ ვექტორის მოპირდაპირედ მიმართულ ვექტორს, რომლის სიგრძე $\overline{a}$ ვექტორის სიგრძის ტოლია, ეწოდება $\overline{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი და აღინიშნება სიმბოლოთი $(-\overline{a})$.

ორი ვექტორის შეკრების ოპერაციას შემდეგი თვისებები გააჩნია:

1). $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

2). $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

3). $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

პირველ თვისებას უწოდებენ ჯუფთებადობის კანონს, ხოლო მეორეს - გადანაცვლებადობის კანონს.

დავამტკიცოთ პირველი თვისება. ვთქვათ $\overline{a}=\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{BC}$ და $\overline{c}=\overline{CD}$ (იხ. სურ. 6).

ორი ვექტორის ჯამის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=(\overline{AB}+\overline{BC})+\overline{CD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AD},$$

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=\overline{AB}+(\overline{BC}+\overline{CD})=\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AD}.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს დასამტკიცებელი თვისება.

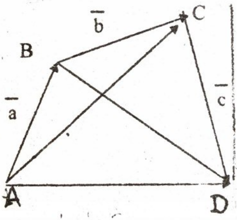
მე-2 თვისება მტკიცდება პარალელოგრამის წესის გამოყენებით, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: მოვდოთ A წერტილში

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები: $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$. ავაგოთ პარალელოგრამი გვერდებით AB და AD (იხ. სურ. 7). რადგან $\bar{a} = \overline{AB} = \overline{CD}$, და $\bar{b} = \overline{AD} = \overline{BC}$, ამიტომ სამკუთხედის წესის თანახმად გვექნება:

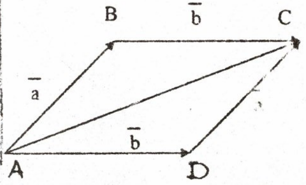
$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

$$\bar{b} + \bar{a} = \overline{AD} = \overline{CD} = \overline{AC}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.



სურ. 6.



სურ. 7.

მე-3 თვისება მტკიცდება მარტივი მსჯელობით. მოვდოთ ნებისმიერ A წერტილში $\bar{a}$ ვექტორი, $\overline{AB} = \bar{a}$. მაშინ მივიღებთ:

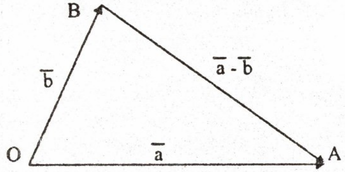
$$\bar{a} + \bar{0} = \overline{AB} + \overline{BB} = \overline{AB} = \bar{a}.$$

ახლა განვმარტოთ ორი ვექტორის სხვაობა. ნებისმიერი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებისათვის არსებობს ისეთი $\bar{c}$ ვექტორი, რომ $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. $\bar{c}$ ვექტორს უწოდებენ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების სხვაობას და აღნიშნავენ ასე: $\bar{a} - \bar{b}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$. თუ გამოვიყენებთ ვექტორთა შეკრების კანონებს, მივიღებთ:

$$\overline{b}+(\overline{a}+(-\overline{b}))=(\overline{a}+(-\overline{b}))+\overline{b}=$$

$$=\overline{a}+((-\overline{b})+\overline{b})=\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}.$$



სურ. 8.

ვთქვათ $\overline{a}=\overline{OA}$ და $\overline{b}=\overline{OB}$, მაშინ სამკუთხედის წესის თანახმად გვაქვს (იხ. სურ. 8):

$$\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}.$$

4. ვექტორის გამრავლება რიცხვზე (სკალარზე). ვთქვათ α არის ნამდვილი რიცხვი (სკალარი). არანულოვანი $\overline{a}$ ვექტორის ნამრავლი $\alpha\neq 0$ რიცხვზე ეწოდება ისეთ $\overline{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

ა). $|\overline{b}|=|\alpha||\overline{a}|$;

ბ). როცა $\alpha>0$, $\overline{b}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\overline{a}$ ვექტორის მიმართულებას, ხოლო როცა $\alpha<0$, $\overline{b}$ ვექტორის მიმართულება $\overline{a}$ ვექტორის მიმართულების მოპირდაპირეა.

თუ $\overline{a}=\overline{0}$ ან $\alpha=0$, მაშინ მიღებულია, რომ $\alpha\overline{a}=\overline{0}$.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ძირითადი თვისებებია:

1). $(\alpha\beta)\overline{a}=\alpha(\beta\overline{a})$ (ჯუფთებადობის კანონი);

2). $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ (განრიგებადობის პირველი კანონი);

3). $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$ (განრიგებადობის მეორე კანონი);

ვაჩვენოთ პირველი თვისება. თუ α და β სკალარებიდან ერთ-ერთი ნულის ტოლია ან $\overline{a} = \overline{0}$, მაშინ განსაზღვრების თანახმად $(\alpha\beta)\overline{a} = \overline{0}$ და $\alpha(\beta\overline{a}) = \overline{0}$. განვიხილოთ შემთხვევა: $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ და $\overline{a} \neq 0$. მარტივი მსჯელობით მტკიცდება:

$$|(\alpha\beta)\overline{a}| = |\alpha\beta||\overline{a}| = |\alpha||\beta||\overline{a}|,$$

$$|\alpha(\beta\overline{a})| = |\alpha||\beta\overline{a}| = |\alpha||\beta||\overline{a}|.$$

ამ ვექტორების მიმართულებებიც ერთმანეთს ემთხვევა. მართლაც, $(\alpha\beta)\overline{a}$ და $\alpha(\beta\overline{a})$ ვექტორებს $\overline{a}$ ვექტორის მიმართულება აქვთ ან $\overline{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე მიმართულება, იმის და მიხედვით α და β ერთნაირი ნიშნისაა, თუ სხვადასხვა.

მე–2 და მე–3 თვისებას ვაჩვენებთ მე–4 პარაგრაფში.

§2. კოლინეარული და კომპლანარული ვექტორები

ერთი და იმავე წრფის პარალელურ ვექტორებს **კოლინეარული** ვექტორები ეწოდება. ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულად ითვლება.

მაგალითად, კოლინეარული ვექტორებია: $\overline{a}$ და $(-\overline{a})$; $2\overline{a}$ და $(-3\overline{a})$; $\frac{1}{2}\overline{a}$, $-2\overline{a}$ და $\overline{a}$.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 1. ორი $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორი კოლინეარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი λ_1 და λ_2 რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და შესრულებულია პირობა:

$$\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{0}. \tag{1}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები კოლინეარულია და ვაჩვენოთ (1) ტოლობა. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებიდან რომელიმე ნულის ტოლია. ვთქვათ, მაგალითად, $\bar{a} = \bar{0}$. მაშინ ცხადია (1) ტოლობა ავტომატურად სრულდება, როცა λ_1 ნებისმიერია (კერძოდ განსხვავებულია ნულისაგან), ხოლო $\lambda_2 = 0$. თუ ეს ვექტორები არცერთი ნულის ტოლი არ არის, მაშინ რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\bar{b} = \lambda \bar{a}, \tag{2}$$

სადაც $\lambda = \pm \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. დადებითი ნიშანი უნდა ავიღოთ იმ შემთხვევაში, როცა $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ერთი და იმავე მიმართულებისაა, ხოლო უარყოფითი - როცა $\bar{a}$ და $\bar{b}$ მოპირდაპირედ მიმართულია.

ცხადია (2) ტოლობიდან გამომდინარეობს (1) ($\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -1$).

ვაჩვენოთ ახლა (1) პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, მაგალითად, $\lambda_1 \neq 0$. მაშინ (1) გამომდინარეობს, რომ $\bar{a} = \lambda \bar{b}$, სადაც $\lambda = -\lambda_2/\lambda_1$.

აქედან კი რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტების თანახმად გამომდინარეობს, რომ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები კოლინეარულია.

განვმარტოთ ახლა კომპლანარული ვექტორები.

ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს **კომპლანარული** ვექტორები ეწოდება. ცხადია, კოლინეარული ვექტორები ავტომატურად კომპლანარულია.

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ფაქტი: ნებისმიერი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები და $x\bar{a} + y\bar{b}$ ვექტორი (x და y ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია) კომპლანარულია. მართლაც, რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტების თანახმად გვაქვს: $x\bar{a} || \bar{a}$ და $y\bar{b} || \bar{b}$. მოვდოთ ეს ვექტორები ერთ წერტილში. ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის თანხმად $x\bar{a} + y\bar{b}$ ვექტორი $x\bar{a}$ და $y\bar{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალს

წარმოადგენს. ცხადია, ამ პარალელოგრამის სიბრტყეზე იქნება მოთავსებული $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებიც.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. სამი $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორი კომპლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი λ_1, λ_2 და λ_3 რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და შესრულებულია პირობა:

$$\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = \bar{0}. \qquad (3)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორები კომპლანარულია და ვაჩვენოთ (3) ტოლობა. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ამ ვექტორებიდან რომელიმე ორი კოლინეარულია. ვთქვათ, მაგალითად, $\bar{a}$ და $\bar{b}$. მაშინ თეორემა 1-ის თანახმად არსებობს ისეთი k_1 და k_2 რიცხვები, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და მართებულია ტოლობა:

$$k_1\bar{a} + k_2\bar{b} = \bar{0}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (3) ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\lambda_1 = k_1$, $\lambda_2 = k_2$, $\lambda_3 = 0$.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორებიდან ნებისმიერი ორი არაკოლინეარულია. მაშინ ამ ვექტორებიდან ნებისმიერი შეგვიძლია გამოვსახოთ დანარჩენების საშუალებით. გამოვსახოთ, მაგალითად, $\bar{c}$ ვექტორი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების საშუალებით. გავატაროთ $\bar{c}$ ვექტორის სათავეში შესაბამისად $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების პარალელური L_1 და L_2 წრფეები. ვთქვათ $\overline{OA}$ არის $\bar{c}$ ვექტორის გეგმილი L_1 წრფეზე L_2 წრფის პარალელურად, ხოლო $\overline{OB}$ - L_2 წრფეზე L_1-ის პარალელურად (იხ. სურ. 9).

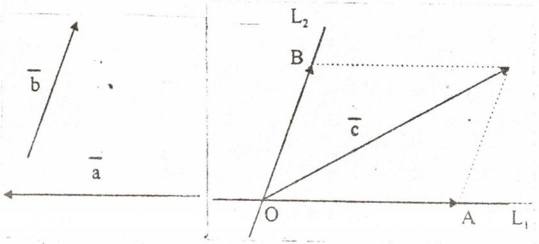
ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის თანახმად გვაქვს:

$$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

რადგან $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ ვექტორები შესაბამისად პარალელურია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების, ამიტომ არსებობს ისეთი x და y რიცხვები, რომ $\overline{OA} = x\overline{a}$ და $\overline{OB} = y\overline{b}$. ამრიგად, $\overline{c}$ ვექტორისათვის გვექნება შემდეგი წარმოდგენა:

$$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}. \tag{4}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (3) ტოლობას ადგილი აქვს, როცა $\lambda_1 = x,\ \lambda_2 = y,\ \lambda_3 = -1$.



სურ. 9.

ვაჩვენოთ ახლა (3) პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, მაგალითად, $\lambda_3 \neq 0$. მაშინ (3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{c} = k_1\overline{a} + k_2\overline{b},$$

სადაც $k_1 = -\lambda_1/\lambda_3,\ k_2 = -\lambda_2/\lambda_3$.

ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის თანახმად $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორები ერთ სიბრტყეზე ძევს, ე.ი. ეს ვექტორები კომპლანარულია.

ვაჩვენოთ, რომ $\overline{c}$ ვექტორისათვის (4) წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. გვაქვს:

$$\overline{c} = x'\overline{a} + y'\overline{b}. \tag{5}$$

(4) და (5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$(x - x')\bar{a} + (y - y')\bar{b} = \bar{0}.$$

რადგან $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები არაკოლინეარულია, ამიტომ $x = x'$ და $y = y'$.

ამრიგად, ჩვენ პარალელურად დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. თუ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები არაკოლინეარულია, მაშინ ამ ვეტორების კომპლანარული ნებისმიერი $\bar{c}$ ვექტორისათვის არსებობს ერთადერთი x და y რიცხვები ისეთი, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ სივრცეში მოცემულია სამი $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ არაკომპლანარული ვექტორი, მაშინ ნებისმიერი $\bar{d}$ ვექტორისათვის არსებობს ერთადერთი x, y და z რიცხვები ისეთი, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას:

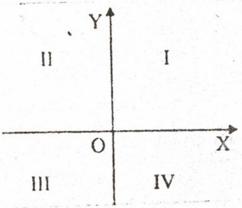
$$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}.$$

§3. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

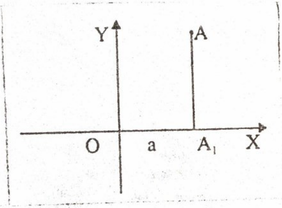
1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე. სიბრტყის ნებისმიერ O წერტილზე გავავლოთ ორი ურთიერთმართობული OX და OY წრფე. ამ წრფეებს უწოდებენ საკოორდინატო ღერძებს. ჰორიზონტალურ ღერძს ეწოდება აბცისთა ღერძი, ვერტიკალურ ღერძს კი – ორდინატთა ღერძი. O წერტილს უწოდებენ კოორდინატთა სათავეს. კოორდინატთა სათავით თითეული ღერძი ორ ნახევარღერძად იყოფა. შევთანხმდეთ, რომ ერთ მათგანს, რომელსაც ისრით

ავღნიშნავთ, დადებითი ნახევარღერძი ვუწოდოთ, მეორეს კი – უარყოფითი ნახევარღერძი.

კოორდინატთა ღერძები სიბრტყეს ოთხ ნაწილად – მეოთხედებად ყოფს I, II, III, IV (სურ. 10). პირველი მეოთხედის საზღვრებს დადებითი ნახევარღერძები წარმოადგენს. დანარჩენი მეოთხედები დანომრილია საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



სურ. 10.



სურ. 11.

ავიღოთ ახლა XOY სიბრტყეზე ნებისმიერი A წერტილი. ვთქვათ A_1 არის A წერტილიდან OX ღერძზე დაშვებული მართობის ფუძე (სურ. 11). A_1 წერტილს ეწოდება A წერტილის ორთოგონალური გეგმილი OX ღერძზე. OA_1 მონაკვეთის სიგრძე ავღნიშნოთ a-თი.

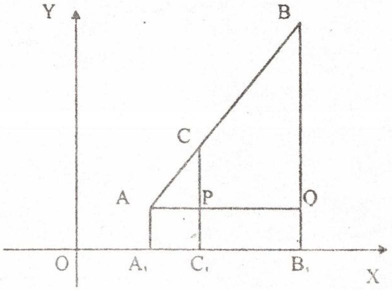
A წერტილს შევუსაბამოთ რიცხვთა წყვილი – $(x;y)$ შემდეგი წესის მიხედვით: $x=a$, თუ A_1 წერტილი ძევს დადებით ნახევარღერძზე; $x=-a$, თუ A_1 წერტილი ძევს უარყოფით ნახევარღერძზე. თუ A_1 წერტილი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ $x=0$. ანალოგიურად განისაზღვრება y.

რიცხვთა წყვილს $(x;y)$-ს ეწოდება A წერტილის კოორდინატები. x ეწოდება აბსცისა, y კი – ორდინატი. მეორენაირად

x და y კოორდინატებს დეკარტის კოორდინატებს უწოდებენ.

2. მონაკვეთის გაყოფა მოცემული თანაფარდობით. ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილი. ვთქვათ $C(x_0; y_0)$ წერტილი AB მონაკვეთს ყოფს λ ფარდობით, $|BC| = \lambda|AC|$. ვიპოვოთ C წერტილის x_0, y_0 კოორდინატები.

დავუშვათ, AB მონაკვეთი პარალელური არ არის არც OX და არც OY ღერძის. A, B და C წერტილებზე გავავლოთ OY ღერძის პარალელური წრფეები (სურ. 12). ეს წრფეები OX ღერძს $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$, $C_1(x_0; 0)$ წერტილებში გადაკვეთს.



სურ. 12.

გავავლოთ A წერტილზე OX ღერძის პარალელური წრფე. ვთქვათ ამ წრფის CC_1 და BB_1 წრფეებთან გადაკვეთის წერტილებია შესაბამისად P და Q.

სამკუთხედი ACP მსგავსია სამკუთხედი ABQ. აქედან

გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{|AQ|}{|AP|} = \frac{|BQ|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|} = 1 + \lambda. \tag{1}$$

რადგანაც $|AQ| = |x_2 - x_1|$, $|AP| = |x_0 - x_1|$, $|BQ| = |y_2 - y_1|$ და $|CP| = |y_0 - y_1|$, ამიტომ (1)-ის თანახმად გვაქვს:

$$x_2 - x_1 = (1 + \lambda)(x_0 - x_1) \ \& \ y_2 - y_1 = (1 + \lambda)(y_0 - y_1).$$

აქედან მიიღება შემდეგი ფორმულები:

$$x_0 = \frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda + 1}, \quad y_0 = \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda + 1}.$$

ცხადია ეს ფორმულები სამართლიანია მაშინაც, როცა AB მონაკვეთი პარალელურია OX ან OY ღერძის.

თუ C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, მაშინ $\lambda = 1$ და გვექნება:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულა. ვთქვათ სიბრტყეზე აღებულია $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილები. ამ წერტილებს შორის მანძილი გამოვსახოთ მათი კოორდინატების საშუალებით.

დავუშვათ, რომ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$. A და B წერტილებზე გავავლოთ კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები და მათი გადაკვეთის წერტილი C-თი აღვნიშნოთ (სურ. 13).

ცხადია გვაქვს:

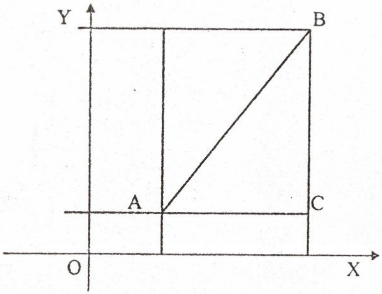
$$|AC| = |x_1 - x_2| \ \& \ |BC| = |y_1 - y_2|.$$

თუ ABC სამკუთხედისათვის პითაგორას თეორემას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \tag{2}$$

სადაც d არის მანძილი A და B წერტილებს შორის ($d = |AB|$).

ცხადია (2) ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როცა AB მონაკვეთი პარალელურია OX ან OY ღერძის. პირველ შემთხვევაში $d = |x_1 - x_2|$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $d = |y_1 - y_2|$.



სურ. 13.

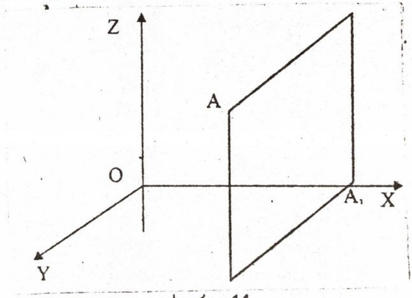
ამრიგად, A და B წერტილებს შორის მანძილი გამოისახება ფორმულით:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში. სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე გავავლოთ სამი ურთიერთმართობული OX, OY და OZ წრფე. ამ წრფეებს უწოდებენ საკოორდინატო ღერძებს. O წერტილს უწოდებენ კოორდინატთა სათავეს. კოორდინატთა სათავით თითეული ღერძი ორ ნახევარღერძად იყოფა. შევთანხმდეთ, რომ ერთ-ერთი ნახევარღერძს დადებითი ვუწოდოთ, ხოლო მეორეს - უარყოფითი.

ავიღოთ ახლა ნებისმიერი A წერტილი და გავავლოთ მასზე OYZ სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. ვთქვათ იგი OX ღერძს კვეთს A_1 წერტილში (სურ. 14). A_1 წერტილს ეწოდება A წერტილის გეგმილი OX ღერძზე. OA_1 მონაკვეთის სიგრძე ავღნიშნოთ a-თი.

A წერტილის x კოორდინატი განისაზღვრება შემდეგნაირად: $x = a$, თუ A_1 წერტილი ძევს დადებით ნახევარღერძზე; $x = -a$, თუ A_1 წერტილი ძევს უარყოფით ნახევარღერძზე. თუ A_1 წერტილი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, მაშინ ჩავთვალოთ, რომ $x = 0$. ანალოგიურად განისაზღვრება A წერტილის y და z კოორდინატები. წერტილის კოორდინატები ჩაიწერება ასე: $A(x; y; z)$.

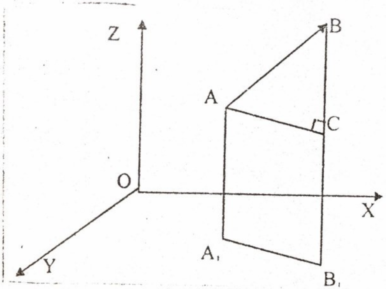


სურ. 14.

ვთქვათ სივრცეში აღებულია ორი წერტილი: $A(x_1; y_1; z_1)$ და $B(x_2; y_2; z_2)$. ამ წერტილებს შორის მანძილი გამოვსახოთ მათი კოორდინატების საშუალებით.

დაუშვათ, რომ AB მონაკვეთი OZ ღერძის პარალელური არ არის. ვთქვათ A_1 და B_1 არის შესაბამისად A და B წერტილების ორთოგონალური გეგმილები OXY სიბრტყეზე

(წერტილის ორთოგონალურ გეგმილს სიბრტყეზე უწოდებენ ამ წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეს). მათი კოორდინატები შესაბამისად იქნება $(x_1; y_1; 0)$ და $(x_2; y_2; 0)$. ახლა A წერტილზე გავავლოთ A_1B_1 წრფის პარალელური წრფე, რომელიც BB_1 წრფეს კვეთს C წერტილში (სურ. 15).



სურ. 15.

პითაგორას თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}.$$

სიბრტყეზე ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$|A_1B_1|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

რადგანაც $|AC| = |A_1B_1|$, ხოლო $|BC| = |z_1 - z_2|$, ამიტომ

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

ცხადია ეს ფორმულა სამართლიანია, როცა AB მონაკვეთი პარალელურია OZ ღერძის.

§4. ვექტორის კოორდინატები. ვექტორის დაშლა მგეზავი ვექტორების მიხედვით

1. ვექტორის კოორდინატების განსაზღვრა. ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია რაიმე $\bar{a}$ ვექტორი, რომლის სათავეა - $A(x_1; y_1)$, ხოლო ბოლო - $B(x_2; y_2)$. $\bar{a}$ ვექტორის კოორდინატებს უწოდებენ $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$ რიცხვებს და წერენ $\bar{a} = (a_1; a_2)$ ან $\bar{a}(a_1; a_2)$.

თეორემა. *ტოლ ვექტორებს შესაბამისი კოორდინატები ტოლი აქვთ, და პირიქით თუ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია, მაშინ ეს ვექტორები ტოლია.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\bar{a}$ ვექტორის სათავე და ბოლოა შესაბამისად $A(x_1; y_1)$ და $B(x_2; y_2)$ წერტილები, ხოლო მისი ტოლი $\overline{a'}$ ვექტორის - $A'(x'_1; y'_1)$ და $B'(x'_2; y'_2)$. მაშინ გვაქვს (იხ. სურ. 16):

$$\bar{a} = \overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1),$$
$$\overline{a'} = \overline{A'B'} = (x'_2 - x'_1; y'_2 - y'_1).$$

$\bar{a}$ და $\overline{a'}$ ვექტორების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $ABB'A'$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. მისი დიაგონალების გადაკვეთის M წერტილის კოორდინატებისათვის გვაქვს:

$$\frac{x'_1 + x_2}{2} = \frac{x_1 + x'_2}{2}, \qquad \frac{y'_1 + y_2}{2} = \frac{y_1 + y'_2}{2}.$$

ან რაც იგივეა

$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1, \ \ y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1.$$

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით, თუ $\overline{AB}$ და $\overline{A'B'}$ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატები ტოლია,

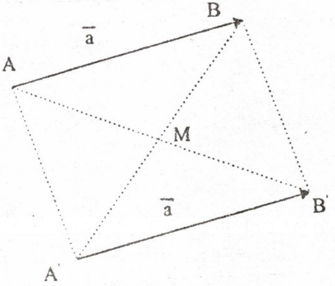
$$x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1, \qquad y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1, \tag{1}$$

მაშინ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

(1) ტოლობებიდან მიიღება

$$\frac{x_1' + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2'}{2}, \qquad \frac{y_1' + y_2}{2} = \frac{y_1 + y_2'}{2}.$$

გამოდის, რომ $ABB'A'$ ოთხკუთხედის AB' და $A'B$ დიაგონალების შუაწერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $ABB'A'$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამს წარმოადგენს. აქედან ავტომატურად გამომდინარეობს $\overline{AB}$ და $\overline{A'B'}$ ვექტორების ტოლობა.



სურ. 16.

შენიშვნა: ზემოთ ჩამოყალიბებული თეორემა სიმარტივისათვის ჩვენ დავამტკიცეთ სიბრტყის შემთხვევაში. ცხადია იგი მართებულია სივრცის შემთხვევაშიც. სივრცეში $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატებია:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

თუ A და B წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად $(x_1; y_1; z_1)$ და $(x_2; y_2; z_2)$.

ახლა ვექტორის სიგრძე გამოვსახოთ მისი კოორდინატების საშუალებით. განმარტების თანახმად ვექტორის სიგრძე ტოლია

იმ მონაკვეთის სიგრძის, რომელსაც ეს ვექტორი გამოსახავს. ამიტომ, ცხადია $\overline{AB}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია A და B წერტილებს შორის მანძილის. თუ A წერტილის კოორდინატებია $(x_1; y_1; z_1)$, ხოლო B წერტილის – $(x_2; y_2; z_2)$, მაშინ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

თუ მოცემულია $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$, მაშინ ამ ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

2. ვექტორთა ჯამის კოორდინატები. ვთქვათ, მოცემულია $\overline{a} = (a_1; a_2)$ და $\overline{b} = (b_1; b_2)$ ვექტორები. ვაჩვენოთ, რომ

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

ავიღოთ ნებისმიერი A წერტილი და მოვდოთ $\overline{a}$ ვექტორი, $\overline{AB} = \overline{a}$. B წერტილზე მოვდოთ $\overline{b}$ ვექტორი, $\overline{BC} = \overline{b}$. განსაზღვრების თანახმად $\overline{AC} = \overline{a} + \overline{b}$.

ვთქვათ A, B და C წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ და $(x_3; y_3)$. მაშინ გვაქვს:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1), \quad \overline{BC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1),$$

$$\overline{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1).$$

პირველ პუნქტში დამტკიცებული თეორემის თანახმად $\overline{AB}$ და $\overline{BC}$ ვექტორების კოორდინატები შესაბამისად $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების კოორდინატების ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} =$$

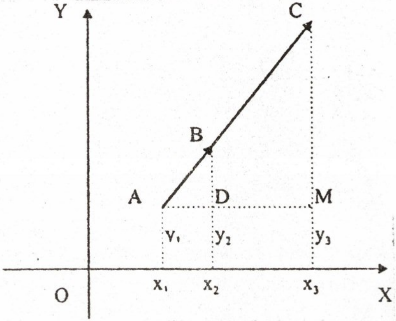
$$= ((x_3 - x_2) + (x_2 - x_1); (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1)) =$$

$$= (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

ამგვარად ვექტორთა ჯამის კოორდინატები შესაკრებთა შესაბამისი კოორდინატების ჯამის ტოლია.

ცხადია, $\overline{a} = (a_1; a_2)$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი $(-\overline{a}) = (-a_1;\ -a_2)$.

3. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის კოორდინატები. ვთქვათ მოცემულია $\overline{a} = (a_1; a_2)$ ვექტორი. ავიღოთ ნებისმიერი A წერტილი და მოვდოთ $\overline{a}$ ვექტორი, $\overline{AB} = \overline{a}$. განვიხილოთ $\alpha\overline{a}$ ვექტორი, სადაც $\alpha \neq 0$. ვთქვათ, მისი კოორდინატებია $(b_1; b_2)$. ვაჩვენოთ, რომ $b_1 = \alpha a_1$ და $b_2 = \alpha a_2$. როცა $\alpha = 0$ ამ ტოლობების მართებულობა ცხადია. განვიხილოთ შემთხვევა $\alpha > 0$. ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განმარტების თანახმად გვაქვს, რომ $\overline{AB} = \overline{a}$ და $\overline{AC} = \alpha\overline{a}$ თანამიმართულია და $|\alpha\overline{a}| = \alpha|\overline{a}|$ (იხ. სურ. 17).



სურ. 17.

ABD და ACM სამკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{|CM|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \alpha. \qquad (2)$$

ვთქვათ A, B და C წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად

$(x_1; y_1), (x_2, y_2)$ და $(x_3; y_3)$. მაშინ გვაქვს (იხ. ნახ. 17):

$$|AM| = |x_3 - x_1|, \ |AD| = |x_2 - x_1|,$$

$$|CM| = |y_3 - y_1|, \ |BD| = |y_2 - y_1|.$$

რადგან AB და AC სხივები თანამიმართულია, ამიტომ (2) თანახმად მიიღება:

$$x_3 - x_1 = \alpha(x_2 - x_1), \ y_3 - y_1 = \alpha(y_2 - y_1).$$

ანუ

$$b_1 = \alpha a_1, \ b_2 = \alpha a_2.$$

განვიხილოთ შემთხვევა $\alpha < 0$.

ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$(-1)\overline{a} = -\overline{a} = (-a_1; -a_2), \tag{3}$$

$$\alpha\overline{a} = ((-1)(-\alpha))\overline{a} = (-1)((-\alpha)\overline{a}). \tag{4}$$

ვინაიდან $(-\alpha > 0)$ ამიტომ (3) ტოლობისა და დამტკიცებული თვისების თანახმად (4)-დან მიიღება:

$$\alpha\overline{a} = (-1)(-\alpha a_1; -\alpha a_2) = (\alpha a_1; \alpha a_2).$$

ამრიგად ვექტორის რიცხვზე გამრავლების შემთხვევაში, ვექტორის კოორდინატები მრავლდება ამ რიცხვზე.

ახლა დავამტკიცოთ ვექტორის რიცხვზე გამრავლების შემდეგი ორი თვისება (იხ. პუნქტი 1.3):

$$(\alpha + \beta)\overline{a} = al\overline{a} + \beta\overline{a}, \ \alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}.$$

ვთქვათ $\overline{a} = (x_1; y_1)$ და $\overline{b} = (x_2; y_2)$. მაშინ გვაქვს:

$$(\alpha + \beta)\overline{a} = ((\alpha + \beta)x_1; (\alpha + \beta)y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1; \alpha y_1 + \beta y_1) =$$
$$= (\alpha x_1; \alpha y_1) + (\beta x_1; \beta y_1) = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a},$$

$$\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = (\alpha(x_1 + x_2); \alpha(y_1 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha x_2; \alpha y_1 + \alpha y_2) =$$
$$= (\alpha x_1; \alpha y_1) + (\alpha x_2; \alpha y_2) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}.$$

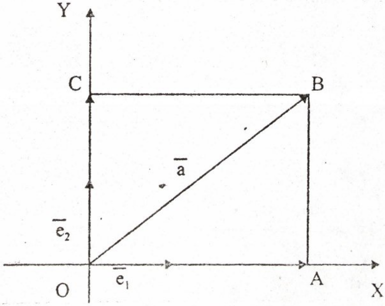
4. ვექტორის დაშლა მგეზავი ვექტორების მიხედვით. ვექტორს ერთეულოვანი ეწოდება, თუ მისი სიგრძე ერთის ტოლია. ავიღოთ სიბრტყეზე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ერთეულოვან ვექტორებს, რომელთაც დადებითი საკოორდინატო ღერძების მიმართულება აქვთ, **მგეზავ ვექტორებს (ორტებს)** უწოდებენ. ცხადია OX ღერძის მგეზავი ვექტორი იქნება $\overline{e_1} = (1;0)$, ხოლო OY ღერძის - $\overline{e_2} = (0;1)$.

ავიღოთ ნებისმიერი $\overline{a} = (x_1;y_1)$ ვექტორი. მისი წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი სახით:

$$\overline{a} = x_1\overline{e_1} + y_1\overline{e_2}. \tag{5}$$

მართლაც, გვაქვს:

$$x_1\overline{e_1} + y_1\overline{e_2} = (x_1;0) + (0;y_1) = (x_1;y_1) = \overline{a}.$$



სურ. 18.

გეომეტრიულად (5) წარმოდგენას შემდეგი შინაარსი აქვს. ვთქვათ, $\overline{a}$ ვექტორის კოორდინატებიდან არცერთი არ უდრის ნულს. O წერტილზე მოვდოთ $x_1\overline{e_1}$ და $y_1\overline{e_2}$ ვექტორები: $\overline{OA} = x_1\overline{e_1}$, $\overline{OC} = y_1\overline{e_2}$.

ავაგოთ მართკუთხედი გვერდებით OA და OC (ნახ. 18). ვექტორების შეკრების პარალელოგრამის წესის თანახმად გვექნება: $\bar{a} = \overline{OB}$.

სივრცეში $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ვექტორისათვის მართებულია წარმოდგენა:

$$\bar{a} = x_1\overline{e_1} + y_1\overline{e_2} + z_1\overline{e_3}.$$

სადაც

$$\overline{e_1} = (1; 0; 0), \qquad \overline{e_2} = (0; 1; 0), \qquad \overline{e_3} = (0; 0; 1)$$

შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძების მგეზავი ვექტორებია.

§5. ორი ვექტორის სკალარული და ვექტორული ნამრავლი

1. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი. წინასწარ შემოვიღოთ კუთხის ცნება ორ არანულოვან ვექტორს შორის.

ვთქვათ, მოცემულია არანულოვანი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები. მოვდოთ ეს ვექტორები სიბრტყის ნებისმიერ O წერტილში, $\overline{OA} = \bar{a}$ და $\overline{OB} = \bar{b}$.

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება OA და OB სხივებს შორის იმ კუთხეს, რომელიც ნაკლებია ან ტოლი გაშლილ კუთხეზე. მისი სიდიდე აღინიშნება $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე არ არის დამოკიდებული O წერტილის არჩევაზე.

განსაზღვრება. *არანულოვანი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი ეწოდება ამ ვექტორთა სიგრძეების და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.*

თუ ამ ვექტორებიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი მიღებულია ნულის ტოლად.

$\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\overline{a} \cdot \overline{b}$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრების თანახმად გვაქვს:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \varphi, \;\; \varphi = (\widehat{\overline{a}, \overline{b}}).$$

უშუალოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს შემდეგი ორი თვისება:

1). $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$;

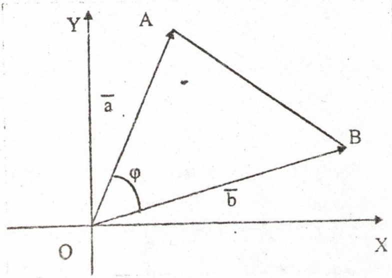
2). $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$.

თეორემა. *ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ტოლია შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის.*

დამტკიცება: ვთქვათ $\overline{a} = (x_1; y_1)$ და $\overline{b} = (x_2; y_2)$. ვაჩვენოთ, რომ

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{1}$$

მოვდოთ ორივე ვექტორი სათავეში, $\overline{OA} = \overline{a}$ და $\overline{OB} = \overline{b}$ (იხ. სურ. 19).



სურ. 19.

განვიხილოთ OAB სამკუთხედი. კოსინუსების თეორემის

თანახმად გვაქვს:

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos\varphi, \quad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$

თუ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$$

აქედან გამარტივების შედეგად ვღებულობთ:

$$|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = x_1x_2 + y_1y_2.$$

განსაზღვრების თანახმად მარცხენა მხარე წარმოადგენს $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების სკალარულ ნამრავლს. ამით ნაჩვენებია (1) ფორმულის სამართლიანობა.

შევნიშნავთ, რომ ზემოთ მოყვანილი თეორემა ზოგად შემთხვევაში მტკიცდება იმავე გზით.

2. ვექტორთა სკალარული ნამრავლის თვისებები. ვექტორთა სკალარული ნამრავლის ოპერაციას შემდეგი თვისებები გააჩნია:

1). $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$ (გადანაცვლებადობის კანონი);

2). $\alpha\bar{a}\cdot\bar{b} = \alpha(\bar{a}\cdot\bar{b})$ (ჯუფთებადობის კანონი);

3). $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$ (განრიგებადობის კანონი).

დამტკიცება: ვთქვათ $\bar{a} = (x_1; y_1), \bar{b} = (x_2; y_2)$ და $\bar{c} = (x_3; y_3)$. მაშინ გვაქვს:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \bar{b}\cdot\bar{a},$$

$$\alpha\bar{a}\cdot\bar{b} = (\alpha x_1)x_2 + (\alpha y_1)y_2 = \alpha(x_1x_2 + y_1y_2) = \alpha(\bar{a}\cdot\bar{b}),$$

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = x_1(x_2+x_3) + y_1(y_2+y_3) =$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}.$$

ცხადია, სივრცეში $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ და $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2}$$

3. კუთხე ორ ვექტორს შორის. ორი ვექტორის პერპენდიკულარობისა და პარალელურობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია $\bar{a} = (X_1; Y_1)$ და $\bar{b} = (X_2; Y_2)$ ვექტორები. სკალარული ნამრავლის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$cos\varphi \doteq \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}, \qquad \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}).$$

თუ გადავალთ კოორდინატებზე, მივიღებთ:

$$cos\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}. \tag{3}$$

ავღნიშნოთ α და β შესაბამისად $\bar{a}$ ვექტორის მიერ OX და OY ღერძებთან შედგენილი კუთხეები. თუ (3) ფორმულაში $\bar{b}$ ვექტორის ნაცვლად ჩავსვამთ OX ღერძის $\overline{e_1} = (1; 0)$ [illegible] ვექტორს, მივიღებთ:

$$cos\alpha = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

ანალოგიურად გვაქვს:

$$cos\beta = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

სივრცის შემთხვევაში გვექნება:

$$cos\alpha = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}, \qquad cos\beta = \frac{Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}},$$

$$cos\gamma = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}},$$

სადაც α, β და γ არის $\bar{a} = (X_1; Y_1; Z_1)$ ვექტორის მიერ შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძებთან შედგენილი კუთხეები.

(3) ფორმულის ანალოგიურად, სივრცეში $\bar{a} = (X_1; Y_1; Z_1)$ და $\bar{b} = (X_2; Y_2; Z_2)$ ვექტორების მიერ შედგენილი კუთხის კოსინუსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$cos\varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

ცხადია, $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა იქნება ($\varphi = 90°$):

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0. \tag{4}$$

რიცხვისა და ვექტორის ნამრავლის განმარტების თანახმად, $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (იხ. თეორემა 1 §2-დან)

$$\bar{a} = \lambda \bar{b}, \tag{5}$$

სადაც λ რიცხვია ($\lambda = \pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$).

(5) ტოლობა ეკვივალენტურია შემდეგი პროპორციის:

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \tag{6}$$

ცხადია, ვექტორის სიგრძის ფორმულა (იხ. §3) მიიღება სკალარული ნამრავლის გამოყენებითაც. მართლაც, გვაქვს:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2.$$

მეორეს მხრივ (2)-ის თანახმად,

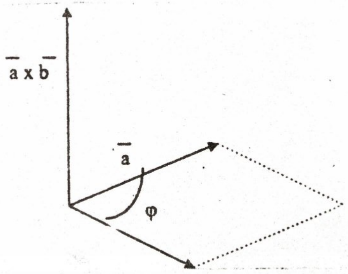
$$\bar{a} \cdot \bar{a} = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$|\bar{a}| = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}. \tag{7}$$

4. **ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი.** ვთქვათ, მოცემულია არაკოლინეარული $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორები.

$\bar{a}$ და b ვექტორების **ვექტორული** ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\bar{c}$ ვექტორს, რომლის სიგრძე ტოლია მოცემული ვექტორების სიგრძეთა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის და მიმართულია $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის სიბრტყის მართობულად ისე, რომ $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორები (აღნიშნული მიმდევრობით) ქმნიან მარცხენა სისტემას (იხ. სურ. 20).



სურ. 20.

სამი არაკომპლანარული $\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორი ქმნის **მარცხენა სისტემას**, თუ დამკვირვებლისათვის, რომელიც დგას $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებზე აგებულ პარალელოგრამის სიბრტყეზე $\bar{c}$ ვექტორის გასწვრივ და იყურება $\bar{a}$ ვექტორისაკენ, $\bar{b}$ ვექტორი მიმართულია მარჯვენიდან მარცხნისაკენ. იმ შემთხვევაში, როცა $\bar{b}$ ვექტორი მიმართულია მარცხნიდან მარჯვენისაკენ, გვაქვს **მარჯვენა სისტემა**.

$\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი აღინიშნება $\bar{a} \times \bar{b}$ სიმბოლოთი. განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|sin\varphi,$$

სადაც φ არის კუთხე $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებს შორის.

ამრიგად, $\overline{a} \times \overline{b}$ ვექტორის სიგრძე რიცხობრივად ტოლია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის.

თუ $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები კოლინეარულია, მაშინ მათი ვექტორული ნამრავლი მიღებულია ნულის ტოლად.

უშუალოდ ვექტორული ნამრავლის განმარტებიდან გამომდინარეობს:

1). $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$,

2). $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$.

$\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი π სიბრტყეზე ეწოდება ისეთ $\overline{A'B'}$ ვექტორს, სადაც A' და B' წერტილები შესაბამისად A და B წერტილებიდან π სიბრტყეზე დაშვებული მართობების ფუძეებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ვექტორთა ჯამის გეგმილი ტოლია შესაკრებთა გეგმილების ჯამის.

ვთქვათ, მოცემულია $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორები. ავღნიშნოთ $\overline{a}'$-ით $\overline{a}$ ვექტორის გეგმილი $\overline{b}$ ვექტორის მართობულ სიბრტყეზე. მართებულია ტოლობა:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{a}' \times \overline{b}.$$

მართლაც, ერთის მხრივ გვაქვს:

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|sin\varphi = (|\overline{a}|sin\varphi)|\overline{b}| =$$

$$= |\overline{a}'||\overline{b}| = |\overline{a}'||\overline{b}|sin90^\circ = |\overline{a}' \times \overline{b}|.$$

მეორის მხრივ, $\overline{a}' \times \overline{b}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\overline{a} \times \overline{b}$ ვექტორის მიმართულებას, ე.ი. ეს ვექტორები ტოლია.

ვექტორული ნამრავლისათვის მართებულია განრიგებადობის კანონი. კერძოდ, ნებისმიერი $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორებისათვის გვაქვს:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}. \qquad (8)$$

როცა $\bar{c} = \bar{0}$ (8) თვისება ცხადია. საკმარისია ვაჩვენოთ (8) თვისება, როცა $|\bar{c}| = 1$. ზოგად შემთხვევაში $\bar{c}$ ვექტორს მივცემთ სახეს:

$$\bar{c} = \lambda \bar{e},$$

სადაც

$$\bar{e} = \frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}, \qquad \lambda = |\bar{c}|,$$

და გამოვიყენებთ მე-2 თვისებას.

ამრიგად, დაუშვათ, რომ $|\bar{c}| = 1$. ავღნიშნოთ $\bar{a}'$ და $\bar{b}'$ შესაბამისად $\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორების გეგმილები $\bar{c}$ ვექტორის მართობულ სიბრტყეზე. მაშინ $\bar{a}' \times \bar{c}$, $\bar{b}' \times \bar{c}$ და $(\bar{a}' + \bar{b}') \times \bar{c}$ ვექტორები მიიღება შესაბამისად $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ და $\bar{a}' + \bar{b}'$ ვექტორებისაგან მათი მობრუნებით 90°-იანი კუთხით, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$(\bar{a}' + \bar{b}') \times \bar{c} = \bar{a}' \times \bar{c} + \bar{b}' \times \bar{c}. \tag{9}$$

ვინაიდან

$$\bar{a}' \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c}, \ \ \bar{b}' \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{c}, \ \ (\bar{a}' + \bar{b}') \times \bar{c} = (\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c},$$

ამიტომ (9)-დან გამომდინარეობს (8) ტოლობა.

(8) ტოლობიდან პირველი თვისების გათვალისწინებით მიიღება:

$$\bar{c} \times (\bar{a} + \bar{b}) = \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b}. \tag{10}$$

(8) და (10) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{d}. \tag{11}$$

ეს თვისება გვეუბნება: თუ გვინდა ვექტორთა ჯამი გავამრავლოთ ვექტორულად ვექტორთა ჯამზე (თითოეულ ჯამში ვექტორთა რიცხვი ნებისმიერია), შეგვიძლია გამოვიყენოთ მრავალწევრის მრავალწევრზე გამრავლების წესი, იმ განსხვავებით,

რომ გამრავლების დროს საჭიროა თითოეულ ნამრავლში მამრავლთა რიგი შევინარჩუნოთ, რადგან ვექტორული ნამრავლი დამოკიდებულია მამრავლთა რიგზე.

ვიპოვოთ ახლა ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის კოორდინატები დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ საკოორდინატო ღერძები OX, OY, OZ (აღნიშნული მიმდევრობით), შეადგენენ მარცხენა სისტემას. ავიღოთ ამ ღერძებზე შესაბამისად $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ და $\overline{e_3}$ ორტები. ვექტორული ნამრავლის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$\overline{e_1} \times \overline{e_1} = \overline{e_2} \times \overline{e_2} = \overline{e}_3 \times \overline{e_3} = \overline{0},$$

$$\overline{e_1} \times \overline{e_2} = \overline{e_3}, \ \ \overline{e_2} \times \overline{e_3} = \overline{e_1}, \ \ \overline{e_3} \times \overline{e_1} = \overline{e_2}.$$

ამ ფორმულებისა და (11) თვისების თანახმად

$$\overline{a_1} = X_1\overline{e_1} + Y_1\overline{e_2} + Z_1\overline{e_3}$$

და

$$\overline{a_2} = X_2\overline{e_1} + Y_2\overline{e_2} + Z_2\overline{e_3}$$

ვექტორების ვექტორული ნამრავლი იქნება:

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\overline{e_1} +$$

$$+ (Z_1X_2 - Z_2X_1)\overline{e_2} + (X_1Y_2 + X_2Y_1)\overline{e_3}. \qquad (12)$$

5. **სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. პარალელეპიპედის მოცულობა.** სამი $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორის შერეული ნამრავლი ეწოდება $\overline{a}$ და $\overline{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლისა და $\overline{c}$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. შერეულ ნამრავლს აღნიშნავენ $[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}]$ სიმბოლოთი. განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c}.$$

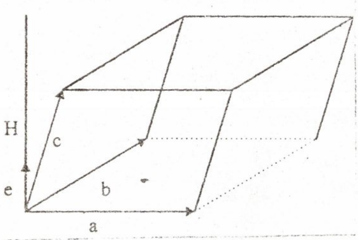
ცხადია შერეული ნამრავლი არის რიცხვი, ვინაიდან ის წარმოადგენს ორი $\overline{a} \times \overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს.

$\bar{a}$, $\bar{b}$ და $\bar{c}$ ვექტორების შერეულ ნამრავლს მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს. ის წარმოადგენს ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის (იგულისხმება, რომ ვექტორები გადადებული არიან ერთიდაიგივე წერტილიდან) მოცულობას ნიშნის სიზუსტით.

მართლაც გვაქვს:

$$\bar{a} \times \bar{b} = S\bar{e},$$

სადაც S არის პარალელეპიპედის ფუძის ($\bar{a}$ და $\bar{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის) ფართობი, ხოლო $\bar{e}$ – ერთეულოვანი ვექტორი, ფუძის მართობული (იხ. სურ. 21).



სურ. 21.

ცხადია, პარალელეპიპედის სიმაღლე H ტოლია $\bar{e}$ და $\bar{c}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლის ნიშნის სიზუსტით, $H = (\bar{e} \cdot \bar{c})$. ამრიგად, პარალელეპიპედის მოცულობის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$V = SH = (S\bar{e} \cdot \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c},$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თუ $\overline{a}$, $\overline{b}$ და $\overline{c}$ ვექტორები ისეა ორიენტირებული, როგორც საკოორდინატო ღერძები, ე.ი. ამ ვექტორებისაგან შედგენილი სისტემა და საკოორდინატო ღერძებისაგან შედგენილი სისტემა ორივე ერთდროულად ან მარცხენა სისტემაა ან - მარჯვენა, მაშინ შერეული ნამრავლი დადებითია, წინააღმდეგ შემთხვევაში - უარყოფითი.

შერეული ნამრავლის გეომეტრიული მნიშვნელობის თანახმად ცხადია, რომ შერეული ნამრავლი არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ თანამამრავლთა წრიულ გადანაცვლებას, ე. ი.

$$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}] = [\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}],$$

ანუ

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = (\overline{b} \times \overline{c}) \cdot \overline{a} = (\overline{c} \times \overline{a}) \cdot \overline{b}.$$

აქედან სკალარული ნამრავლის თვისების თანახმად, გამომდინარეობს, რომ

$$(\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}).$$

ცხადია შერეული ნამრავლი შეიცვლის ნიშანს, თუ ნებისმიერ ორ თანამამრავლს ურთიერთგადავანაცვლებთ, მაგალითად,

$$[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}] = -[\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}].$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ შერეული ნამრავლი უდრის ნულს, თუ მისი რომელიმე ორი თანამამრავლი ტოლია.

გამოვსახოთ ახლა $\overline{a_1} = (X_1; Y_1; Z_1)$, $\overline{a_2} = (X_2; Y_2; Z_2)$ და $\overline{a_3} = (X_3; Y_3; Z_3)$ ვექტორების შერეული ნამრავლი კოორდინატების საშუალებით. (5) ფორმულისა და სკალარული ნამრავლის განმარტების თანახმად გვექნება:

$$(\overline{a_1} \times \overline{a_2}) \cdot \overline{a_3} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) X_3 +$$

$$+ (Z_1 X_2 - Z_2 X_1) Y_3 + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3. \qquad (13)$$

§6. n განზომილებიანი ვექტორი. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება

1. n განზომილებიანი ვექტორის ცნება. აქამდე ჩვენ ვიხილავდით ვექტორებს სიბრტყეზე და სივრცეში. სიბრტყეზე აღებული ვექტორის კოორდინატებია რიცხვთა დალაგებული წყვილი, ხოლო სივრცეში – რიცხვთა დალაგებული სამეული. მათ განზოგადებას წარმოადგენს n განზომილებიანი ვექტორი.

n ნამდვილ რიცხვთა

$$\overline{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

სისტემას უწოდებენ n-განზომილებიან ვექტორს. x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, რიცხვებს უწოდებენ $\overline{a}$ ვექტორის კომპონენტებს (კოორდინატებს).

ერთნაირი განზომილებიან ვექტორებს უწოდებენ ტოლ ვექტორებს, თუ მათი შესაბამისი კოორდინატები ტოლია.

ვექტორს, რომლის ყველა კომპონენტი ნულის ტოლია, ნულოვანი ვექტორი ეწოდება.

$\overline{a} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $\overline{b} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ვექტორების ჯამი, სკალარული ნამრავლი და ვექტორის რიცხვზე ნამრავლი განისაზღვრება შესაბამისად შემდეგი ფორმულებით:

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

$$k\overline{a} = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$$

2. ვექტორთა წრფივი დამოკიდებულება. n განზომილებიან ვექტორთა სისტემისათვის შემოდის წრფივად დამოკიდებულებისა და წრფივად დამოუკიდებლობის ცნებები, რომელიც მჭიდროდ არის დაკავშირებული ვექტორთა კოლინეარობისა და კომპლანარობის ცნებებთან (იხ. §2).

$\bar{b}$ ვექტორს უწოდებენ $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ ვექტორების **წრფივ კომბინაციას**, თუ არსებობს ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვები, რომ

$$\bar{b} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n.$$

ვექტორთა სისტემას

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \quad (n \geq 2) \tag{6}$$

უწოდებენ წრფივად დამოკიდებულს, თუ ერთი მაინც ამ ვექტორებიდან წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვექტორთა (1) სისტემას **წრფივად დამოუკიდებელი** ეწოდება.

ცნობილია ამ მნიშვნელოვანი განმარტების სხვა ფორმაც.

ვექტორთა (1) სისტემას ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული**, თუ არსებობს ისეთი $x_1, x_2, \dots, x_n$ რიცხვები, რომელთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან და სრულდება ტოლობა:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \dots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}. \tag{7}$$

ვექტორთა (1) სისტემას ეწოდება **წრფივად დამოუკიდებელი**, თუ (2) ტოლობა მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა x_k $(k = 1, \dots, n)$ ნულის ტოლია.

მაგალითად, ვექტორთა სისტემა:

$$\bar{a}_1 = (1, 0), \quad \bar{a}_2 = (2, 1),$$

წრფივად დამოუკიდებელია, რადგანაც ტოლობა

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 = 0$$

ან რაც იგივეა

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1 = x_2 = 0$.

ვექტორთა სისტემა:

$$\overline{a}_1 = (1, -1, 2), \quad \overline{a}_2 = (2, -2, 4)$$

წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც სრულდება ტოლობა:

$$2\overline{a}_1 + (-1)\overline{a}_2 = \overline{0}.$$

თეორემა 2.1-ის (მე-2 პარაგრაფის თეორემა 1) თანახმად ცხადია, რომ თუ $\overline{a_1}$ და $\overline{a_2}$ ვექტორები კოლინეარულია (არაკოლინეარულია), მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია (დამოუკიდებელია). თეორემა 2.2-ის თანახმად ცხადია ასევე, რომ თუ $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$ და $\overline{a_3}$ ვექტორები კომპლანარულია (არაკომპლანარულია), მაშინ ისინი წრფივად დამოკიდებულია (დამოუკიდებელია).

თეორემა 2.3-ის თანახმად სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი ვექტორები, რომელთა რიცხვი სამზე მეტი ან ტოლია, წრფივად დამოკიდებულია. ასევე სივრცეში, ოთხი ან ოთხზე მეტი ვექტორისაგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია.

ჩამოვაყალიბოთ თეორემა 2.3-ის ანალოგიური თეორემა ზოგად შემთხვევაში.

თეორემა. თუ $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_k}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო სისტემა შედგენილი ამ ვექტორებისა და $\overline{a}$ ვექტორისაგან წრფივად დამოკიდებული, მაშინ არსებობს ერთადერთი $x_1, x_2, \cdots, x_k$ რიცხვები ისეთი, რომ $\overline{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს წარმოდგენას:

$$\overline{a} = x_1\overline{a_1} + x_2\overline{a_2} + \cdots + x_k\overline{a_k}. \tag{8}$$

დამტკიცება. თეორემის პირობის თანახმად გვაქვს:

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \cdots + \lambda_k\overline{a_k} + \lambda\overline{a} = \overline{0}, \tag{9}$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ და λ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ვაჩვენოთ, რომ $\lambda \neq 0$. თუ $\lambda = 0$,

მაშინ (4)-დან მიიღება:

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \cdots + \lambda_k\overline{a_k} = \overline{0},$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_k}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. ამრიგად $\lambda \neq 0$ და (4) ტოლობიდან მიიღება (3) წარმოდგენა ($x_i = -\lambda_i/\lambda$, $i = 1, 2, \cdots, k$).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\overline{a}$ ვექტორისათვის (3) წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. გვაქვს:

$$\overline{a} = x_1'\overline{a_1} + x_2'\overline{a_2} + \cdots + x_k'\overline{a_k}. \tag{10}$$

(3) და (5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$(x_1 - x_1')\overline{a_1} + (x_2 - x_2')\overline{a_2} + \cdots + (x_k - x_k')\overline{a_k}) = \overline{0}.$$

რადგან $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_k}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ გვექნება:

$$x_1 = x_1', x_2 = x_2', \cdots, x_k = x_k',$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

თავი მეორე

წრფივ განტოლებათა სისტემა და დეტერმინანტი

§1. წრფივ განტოლებათა სისტემა და დეტერმინანტი

1. ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემა და მეორე რიგის დეტერმინანტი. ვთქვათ მოცემულია ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლების სისტემა შემდეგი სახის:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

სადაც x_1 და x_2 უცნობებია, a_{ij} $(i,j = 1,2)$ - სისტემის კოეფიციენტები და b_i-მარჯვენა მხარეები ცნობილი რიცხვებია.

გავამრავლოთ პირველი განტოლება a_{22}-ზე, ხოლო მეორე - a_{12}-ზე და გამოვაკლოთ პირველს მეორე, მაშინ მივიღებთ:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

თუ (1) სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ a_{21}-ზე, ხოლო მეორე განტოლებას - a_{11}-ზე და მეორეს გამოვაკლებთ პირველს, მაშინ გამოირიცხება x_1 უცნობი და მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

ამრიგად (1) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1&=b_1a_{22}-b_2a_{12},\\(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2&=b_2a_{11}-b_1a_{21}.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

(2) სისტემა მოკლედ ჩაიწერება მეორე რიგის დეტერმინანტის გამოყენებით. განვმარტოთ მეორე რიგის დეტერმინანტი. a_{ij} კოეფიციენტებისგან შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ \\ a_{21} & a_{22}.\end{matrix}$$

მეორე რიგის დეტრემინანტი არის ამ ცხრილის მთავარ დიაგონალზე მდგომი კოეფიციენტების ნამრავლს გამოკლებული მეორე დიაგონალზე მდგომი კოეფიციენტების ნამრავლი.

მას აღნიშნავენ შემდეგი სიმბოლოთი:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

მაშინ (2) სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1&=\Delta_1,\\ \Delta x_2&=\Delta_2.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

ვთქვათ (1) სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$. მაშინ (1) სისტემა ეკვივალენტურია (3) სისტემის და გვექნება:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

ამ ფორმულებს უწოდებენ კრამერის ფორმულებს.

2. სამუცნობიანი სამი წრფივი განტოლებათა სისტემა და მესამე რიგის დეტერმინანტი. შეიძლება ითქვას მეორე რიგის დეტერმინანტის შემოტანა არსებითად არ ამარტივებს ორუცნობიანი ორი წრფივი განტოლებათ სისტემის ამოხსნას, ვინაიდან ამის გარეშეც მისი ამოხსნა დიდ სირთულეს არ წარმოადგენს. ანალოგიური მეთოდის გამოყენება სამუცნობიანი სამი წრფივი განტოლების სისტემის შემთხვევაში პრაქტიკულ მნიშვნელობას იძენს.

ვთქვათ, მოცემულია სამუცნობიანი სამი წრფივი განტოლების სისტემა შემდეგი სახის:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

თუ ჩვენ (4) სისტემის განტოლებების ორივე მხარეს გავამრავლებთ შესაბამისად $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ და $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ რიცხვებზე და შევკრებთ, მაშინ x_2 და x_3 უცნობები გამოირიცხება და მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\begin{gathered} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = \\ = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{gathered} \tag{5}$$

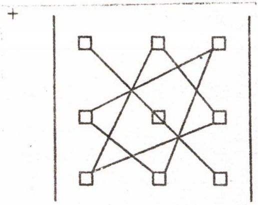
ამ ტოლობაში x_1-ის კოეფიციენტს უწოდებენ მესამე რიგის დეტერმინანტს. მის აღსანიშნავად გამოიყენება იგივე სიმბოლო,

რაც მეორე რიგის დეტერმინანტის შემთხვევაში. ამრიგად, გვაქვს:

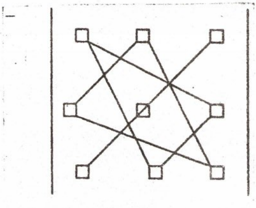
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (6)$$

ერთი შეხედვით მესამე რიგის დეტერმინანტის გამოსახულება დიდი ჩანს, მაგრამ მისი შედგენის წესი საკმაოდ მარტივია. თუ კარგად დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ (6) გამოსახულებაში დადებითი ნიშნით შემავალი წევრებიდან პირველი წარმოადგენს მთავარ დიაგონალზე მდგომი წევრების ნამრავლს, ხოლო მეორე და მესამე წევრებიდან თითოეული წარმოადგენს ამ დიაგონალის პარალელურ ფუძიან ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებზე მდგომი წევრების ნამრავლს (იხ. სურ. 22).



სურ. 22.



სურ. 23.

რაც შეეხება (6) გამოსახულებაში შემავალ უარყოფითი წევრებს, მათ ვადგენთ იმავე წესით, ოღონდ მეორე დიაგონალის მიმართ (იხ. სურ. 23)

ძნელი არ არის იმის მიხვედრა, რომ (5) ტოლობის მარჯვენა მხარე ასევე წარმოადგენს მესამე რიგის დეტერმინანტს,

რომელიც მიიღება (6) ტოლობის მარცხენა მხარეში პირველი სვეტის შეცვლით (4) სისტემის მარჯვენა მხარეებისგან შედგენილი სვეტით. თუ ჩვენ (6) დეტერმინატს ავღნიშნავთ d-თი, ხოლო დეტერმინანტს, რომელიც მიიღება (6)-დან i-ური ($i = 1, 2, 3$) სვეტის შეცვლით მარჯვენა მხარეებისგან შედგენილი სვეტით, ავღნიშნავთ d_i-თი, მაშინ (5) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$dx_1 = d_1.$$

ანალოგიურად, თუ (4) სისტემის განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}$ და $a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$ რიცხვებზე და შევკრებთ, მაშინ x_1 და x_3 უცნობები გამოირიცხება და მივიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$dx_2 = d_2.$$

და ბოლოს, თუ (4) სისტემის განტოლებებს გავამრავლებთ შესაბამისად $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$ და $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ რიცხვებზე და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$dx_3 = d_3.$$

ამრიგად, (4) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= d_1, \\ dx_2 &= d_2, \\ dx_3 &= d_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ვთქვათ, (4) სისტემის დეტერმინანტი $d \neq 0$. მაშინ (4) სისტემა ეკვივალენტურია (7)-ის და გვექნება:

$$x_1 = \frac{d_1}{d}, \;\; x_2 = \frac{d_2}{d}, \;\; x_3 = \frac{d_3}{d}. \tag{8}$$

(8) ფორმულებს უწოდებენ კრამერის ფორმულებს, ხოლო (4) სისტემის ამოხსნის ზემოთ მოყვანილ წესს, კი - კრამერის წესს.

§2. დეტერმინანტის თვისებები

თავიდან ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ დეტერმინანტის თვისებებს მესამე რიგის დეტერმინანტის შემთხვევაში, ხოლო შემდეგ კი განვსაზღვრავთ n-ური რიგის დეტერმინანტს.

1. თუ სტრიქონებს შევცვლით სვეტებით, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

მესამე რიგის დეტერმინანტის განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{21}a_{31}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{2}$$

თუ ამ ტოლობაში a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ ელემენტებს შევცვლით a_{ji} ელემენტებით, მაშინ მარცხენა მხარეს მიიღება (1) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი დეტერმინანტი, ხოლო მარჯვენა მხარე იგივე დარჩება. მართლაც, დადებით ნიშნიანი წევრებიდან პირველი არ შეიცვლება, მეორე - შეიცვლება მესამეთი და პირიქით, ხოლო უარყოფით ნიშნიანი წევრები უცვლელი დარჩება. ეს კი - (1) ტოლობის მართებულობას ნიშნავს.

აქედან გამომდინარე შეიძლება ითქვას, რომ დეტერმინანტის სტრიქონები და სვეტები ერთნაირი უფლებისაა. თვისებებს, რომელსაც ადგილი აქვს სტრიქონების მიმართ, ადგილი ექნება სვეტების მიმართ, და პირიქით.

II. თუ ორ სტრიქონს (სვეტს) ადგილებს შეუცვლით, მაშინ დეტერმინანტს ნიშანი შეეცვლება, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

ამ ტოლობის შემოწმება ადვილია. საკმარისია (2) ტოლობაში a_{1i} შევცვალოთ a_{2i}-ით და პირიქით. მაშინ (2) ტოლობის მარცხენა მხარეს მიიღება (3) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი დეტერმინანტი, ხოლო მარჯვენა მხარეს ნიშანი შეეცვლება. ეს კი (3) ტოლობის მართებულობას ნიშნავს.

III. თუ დეტერმინანტს აქვს ორი ერთნაირი სტრიქონი ან სვეტი, მაშინ ის ნულის ტოლია.

მართლაც, ერთის მხრივ, თუ ერთნაირ სტრიქონებს (სვეტებს) ადგილებს შეუცვლით, მაშინ ცხადია დეტერმინანტი არ შეიცვლება. მეორეს მხრივ, წინა თვისების თანახმად ის ნიშანს შეიცვლის, ე.ი. $\Delta = -\Delta$. აქედან კი $\Delta = 0$.

IV. დეტერმინანტი ნულის ტოლია, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტი ნულია.

(2) ტოლობის მარჯვენა მხარის ყველა წევრი შეიცავს მამრავლის სახით დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ერთ წარმომადგენელს (ელემენტს). ამიტომ, თუ რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ (2) ტოლობის მარჯვენა მხარის ყველა შესაკრები ნულის ტოლი იქნება. აქედან კი უშუალოდ გამომდინარეობს დასამტკიცებელი თვისება.

V. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონი ან სვეტი შეიცავს საერთო მამრავლს, მაშინ ის შეგვიძლია გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

ვთქვათ, მაგალითად (2) ტოლობის მარცხენა მხარეში მდგომი დეტერმინანტის პირველი სტრიქონი შეიცავს საერთო მამრავლს, $a_{1i} = ka'_{1i}$, $(i = 1, 2, 3)$. მაშინ (2) ტოლობის მარჯვენა მხარის

ყველა წევრში შევა ეს საერთო მამრავლი. თუ მას გავიტანთ ფრჩხილებს გარეთ, მაშინ ფრჩხილებს შიგნით მოთავსებული გამოსახულება იქნება დეტერმინანტი, რომლის პირველი სტრიქონია a'_{1i} ელემენტები, ხოლო დანარჩენი სტრიქონები იგივეა, რაც თავიდან მოცემული დეტერმინანტის. ამით ნაჩვენებია მეხუთე თვისების მართებულობა.

VI. თუ Δ დეტერმინანტის i-ური $(i = 1, 2, 3)$ სტრიქონის ელემენტები a_{ij}, $(j = 1, 2, 3)$ წარმოიდგინება როგორც ჯამი $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, მაშინ $\Delta = \Delta' + \Delta''$, სადაც Δ'-ის და Δ''-ის i-ური სტრიქონებია შესაბამისად a'_{ij} და a''_{ij}, ხოლო დანარჩენი სტრიქონები იგივეა რაც Δ დეტერმინანტის შესაბამისი სტრიქონები.

ცხადია ეს თვისება სვეტების მიმართაც ასევე მართებული იქნება.

ვთქვათ Δ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტები წარმოიდგინება როგორც ჯამი $a_{1j} = a'_{1j} + a''_{1j}$. მაშინ გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a'_{12} + a''_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a'_{11} + a''_{11})a_{22}a_{33} + (a'_{12} + a''_{12})a_{23}a_{31} + (a'_{13} + a''_{13})a_{21}a_{32} -$$

$$-(a'_{13} + a''_{13})a_{31}a_{22} - (a'_{12} + a''_{12})a_{21}a_{33} - (a'_{11} + a''_{11})a_{32}a_{23} =$$

$$= (a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{31}a_{22}a'_{13} - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{11}a_{32}a_{23}) +$$

$$+(a''_{11}a_{22}a_{33} + a''_{12}a_{23}a_{31} + a''_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$-a_{31}a_{22}a''_{13} - a''_{12}a_{21}a_{33} - a''_{11}a_{32}a_{23}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{21} & a''_{22} & a''_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ამით დამტკიცდა მეექვსე თვისების მართებულობა.

შემდგომი თვისებების დასადგენად ჩვენ დაგვჭირდება დეტერმინანტის მინორისა და ალგებრული დამატების ცნებების შემოტანა.

ვთქვათ, მოცემულია დეტერმინანტი:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

თუ ამოვშლით ამ დეტერმინანტის i-ურ სტრიქონს და j-ურ სვეტს, რომელთა თანაკვეთაზე მდებარეობს a_{ij} ელემენტი, მაშინ მივიღებთ მეორე რიგის დეტერმინანტს, რომელსაც Δ დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის შესაბამის **მინორს** უწოდებენ და აღნიშნავენ M_{ij}-ით.

მაგალითად, a_{21} ელემენტის შესაბამისი მინორი იქნება

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

დეტერმინანტის a_{ij} ელემენტის **ალგებრულ დამატებას** აღნიშნავენ A_{ij}-ით და უწოდებენ შემდეგ გამოსახულებას:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

ამრიგად, დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის და სვეტის თანაკვეთაზე მდებარე ელემენტის **ალგებრული დამატება** არის ამ ელემენტის შესაბამისი მინორი აღებული $(+)$ ან $(-)$ ნიშნით იმის და მიხედვით, სტრიქონის და სვეტის ნომრების ჯამი ლუწია, თუ კენტი.

მაგალითად, a_{21} ელემენტის შესაბამისი ალგებრული დამატება იქნება:

$$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}.$$

Δ დეტერმინანტის გამოსახულება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები შესაბამისად წარმოადგენენ a_{11}, a_{12} და a_{13} ელემენტების ალგებრულ დამატებებს. მართლაც, გვაქვს:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23},$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33},$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22},$$

ამრიგად, Δ დეტერმინანტისათვის მართებულია წარმოდგენა:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

ადვილია საჩვენებელია, რომ ანალოგიურ წარმოდგენას ადგილი ექნება ნებისმიერი სხვა სტრიქონის მიმართ და რა თქმა უნდა, პირველი თვისების თანახმად, ნებისმიერი სვეტის მიმართაც.

დატკიცებული თვისება სიტყვიერად ასე ჩამოყალიბდება:

VII. დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელემენტების მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი თვით ამ დეტერმინანტის ტოლია.

ამ თვისებიდან და მესამე თვისებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თვისება:

VIII. დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების მისი პარალელური სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი

ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

თუ მაგალითად, მეორე სტრიქონის ელემენტებს გავამრავლებთ პირველი სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე, მაშინ მე-8 თვისების თანახმად მივიღებთ დეტერმინანტს, რომლის პირველი და მეორე სტრიქონი ერთნაირია (თავიდან მოცემულ დეტერმინანტში პირველი სტრიქონი შეიცვლება მეორე სტრიქონით). მიღებული დეტერმინანტი კი - ნულის ტოლია მესამე თვისების თანახმად.

IX. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს დავუმატებთ მისი პარალელური სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს k რიცხვზე, მაშინ დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

მართლაც, თუ Δ დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტებს დავუმატებთ მეორე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს გამრავლებულს k რიცხვზე, მაშინ მიღებული დეტერმინანტი მე-6 თვისების თანახმად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი დეტერმინანტის ჯამი. პირველი მათგანი ცხადია Δ-ს ტოლი იქნება, ხოლო მეორე დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტები იქნება მეორე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების k-ზე ნამრავლი. მე-5 თვისების თანახმად საერთო მამრავლი k შეგვიძლია დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ. მაშინ მივიღებთ დეტერმინანტს, რომელსაც პირველი და მეორე სტრიქონი ერთნაირი ექნება. ასეთი დეტერმინანტი კი ნულის ტოლია მე-3 თვისების თანახმად. ამრიგად, საბოლოოდ ჯამი Δ-ს ტოლი იქნება.

ბუნებრივად იბადება კითხვა: საზოგადოდ, როგორ შეიძლება განისაზღვროს $n > 3$ რიგის დეტერმინანტი?

$n > 3$ რიგის დეტერმინანტი ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ ინდუქციის წესისა და მე-7 თვისების საფუძველზე.

a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ ელემენტებისაგან შედგენილი მე-4 რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის

საშუალებით:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{34} \end{vmatrix} = \Delta = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} A_{ik} \tag{4}$$

ან

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}, \tag{5}$$

სადაც A_{ij} არის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება, ე.ი. მე-3 რიგის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის ამოშლით, გამრავლებული $(-1)^{(i+j)}$-ზე.

მე-3 რიგის დეტერმინანტის თვისებების თანახმად ადვილად მტკიცდება, რომ (4) და (5) ფორმულების მარჯვენა მხარეები არ არის დამოკიდებული სტრიქონის ან სვეტის არჩევაზე.

ამრიგად, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ ელემენტებისაგან შედგენილი მე-4 რიგის დეტერმინანტი შეიძლება ვუწოდოთ მისი რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ელენენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამს.

ანალოგიურად განისაზღვრება n-ური $(n > 4)$ რიგის დეტერმინანტი $n - 1$ რიგის დეტერმინანტის საშუალებით ინდუქციის წესით.

§3. ორუცნობიანი ორ წრფივ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევა

1. **ერთგვაროვანი სისტემა.** ერთგვაროვანს ვუწოდებთ ისეთ სისტემას, რომლის მარჯვენა მხარეები ნულის ტოლია. განვიხილოთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

როგორც წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ (1) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1 = 0,\\ \Delta x_2 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

სადაც

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

ცხადია (1) სისტემას აკმაყოფილებს $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$. თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (2) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$. რადგანაც (1) სისტემის ყველა ამონახსენი აკმაყოფილებს (2) სისტემას, ამიტომ (1) სისტემას $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$ ამონახსნის გარდა სხვა ამონახსენი არ ექნება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\Delta = 0$. მაშინ (2) სისტემას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1 და x_2. (1) სისტემას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1 და x_2, როცა ყველა a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ვთქვათ, a_{ij} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, $a_{11} \neq 0$. (1) სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{21}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას. მაშინ მეორე განტოლებიდან x_1 უცნობი გამოირიცხება და მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0,\\ a'_{22}x_2 = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ცხადია (3) სისტემა (1) სისტემის ეკვივალენტურია.

დეტერმინანტის თვისების თანახმად (3) სისტემის დეტერმინატი ტოლია (1) სიტემის დეტერმინანტის, ე.ი.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a'_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a'_{22}$$

რადგანაც $\Delta = 0$ და $a_{11} \neq 0$, ამიტომ $a'_{22} = 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ (3) სისტემის მეორე განტოლებას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი $x_2 = k$, სადაც k-ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ცხადია, (3) სისტემის პირველი განტოლებიდან მიიღება: $x_1 = ak$, სადაც $a = -a_{12}/a_{11}$.

ამრიგად, როცა $\Delta \neq 0$, მაშინ (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $x_1 = 0$ და $x_2 = 0$. თუ $\Delta = 0$, მაშინ (1) სისტემას აკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1 და x_2, როცა ყველა a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ კოეფიციენტი ნულის ტოლია. როცა a_{ij} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ (1) სისტემას დააკმაყოფილებს ისეთი $(x_1; x_2)$ წყვილი, რომლის ერთ-ერთი კომპონენტი აღებულია ნებისმიერად, ხოლო მეორე - განისაზღვრება იმ განტოლებიდან, სადაც მისი კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან.

ჩამოვაყალიბოთ ახლა შენიშვნის სახით ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტი, რომელიც შედეგია ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის.

შენიშვნა. ვექტორთა სისტემა:

$$\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}), \;\; \overline{a_2} = (a_{21}, a_{22}),$$

წრფივად დამოუკიდებელია (დამოკიდებულია), მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისგან (ტოლია ნულის).

2. არაერთგვაროვანი სისტემა. განვიხილოთ ორუცნობიანი არაერთგვაროვანი წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

როგორც ადრე ვაჩვენეთ (4) სისტემა მიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_1 = \Delta_1, \\ \Delta x_2 = \Delta_2, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

სადაც

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\Delta_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12},$$

$$\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

შევუდგეთ (4) სისტემის გამოკვლევას. თუ (4) სისტემის კოეფიციენტები ყველა ერთდროულად ნულის ტოლია და თავისუფალი კოეფიციენტებიდან (მარჯვენა მხარეებიდან) ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ სისტემას ამონახსნი არ ექნება. ცხადია, თუ ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ სისტემას აკმაყოფილებს ნებისმიერი $(x_1; x_2)$ წყვილი.

ვთქვათ, (1) სისტემის კოეფიციენტები ყველა ერთდროულად არ უდრის ნულს. მაშინ გვექნება შემთხვევები:

I. (4) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $\Delta \neq 0$, რომელიც გამოისახება კრამერის ფორმულებით:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

II. (4) სისტემას არა აქვს ამონახსნი, როცა $\Delta = 0$ და $\Delta_1 \neq 0$ ან $\Delta = 0$ და $\Delta_2 \neq 0$. ეს ფაქტი გამომდინარეობს იქიდან, რომ (4) სისტემის ყველა ამონახსნი აკმაყოფილებს (5) სისტემას. ამიტომ, თუ (5) სისტემას არა აქვს ამონახსნი, მაშინ (4) სისტემას არ ექნება ამონახსნი.

III. თუ $\Delta = 0$ და $\Delta_i = 0$ $(i = 1, 2)$ მაშინ (5) სისტემას აკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1 და x_2. მაგრამ (4) სისტემის ამონახსნი არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი $(x_1; x_2)$ წყვილი, რადგანაც მისი კოეფიციენტები, დაშვების თანახმად, ყველა

ერთდროულად არ უდრის ნულს. ვთქვათ, $a_{11} \neq 0$. მაშინ ტოლობებიდან:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0, \ \ \Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = 0,$$

შესაბამისად მიიღება: $a_{22} = a_{12}k$, $b_2 = b_1 k$, სადაც $k = \frac{a_{21}}{a_{11}}$. ცხადია ასევე ტოლობა: $a_{21} = a_{11}k$.

ამრიგად, (4) სისტემის მეორე განტოლების კოეფიციენტები მიიღება პირველი განტოლების შესაბამისი კოეფიციენტების k-ზე გამრავლებით. ან რაც იგივეა (4) სისტემის მეორე განტოლება მიიღება პირველი განტოლების ორივე მხარის k-ზე გამრავლებით.

მივცეთ x_2 უცნობს რაიმე მნიშვნელობა და განვსაზღვროთ x_1 პირველი განტოლებიდან. ცხადია მიღებული მნიშვნელობები დააკმაყოფილებს (4) სისტემას.

ამრიგად, როცა $\Delta = 0$ და $\Delta_i = 0$ $(i = 1, 2)$, მაშინ (4) სისტემას აკმაყოფილებს ისეთი $(x_1; x_2)$ წყვილი, რომლის ერთ-ერთი კომპონენტი აღებულია ნებისმიერად, ხოლო მეორე - განისაზღვრება იმ განტოლებიდან, სადაც მისი კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისგან.

თუ სისტემის პირველ განტოლებაში ან მეორე განტოლებაში შემავალი კოეფიციენტებიდან არც ერთი არ უდრის ნულს, მაშინ ზემოთ მოყვანილი პირობები შეიძლება უფრო მოკლედ ჩაიწეროს.

ვთქვათ, სისტემის მეორე განტოლებაში შემავალი კოეფიციენტებიდან არცერთი არ არის ნულის ტოლი, მაშინ მართებულია შემდეგი თვისებები:

ა). თუ a_{11} და a_{12} კოეფიციენტები შესაბამისად არ არის პროპორციული a_{21} და a_{22} კოეფიციენტების, ე.ი. $\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$, მაშინ (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. ამ შემთხვევაში (1) სისტემაში შემავალი განტოლებებით განსაზღვრული წრფეები არაპარალელურია (იხ. $\S IV.1$) და იკვეთება ერთადერთ წერტილში, რომლის კორდინატები აკმაყოფილებენ

სისტემას.

ბ). თუ $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2}$, მაშინ (1) სისტემას არა აქვს ამონახსენი. ამ შემთხვევაში (1) სისტემაში შემავალი განტოლებებით განსაზღვრული წრფეები პარალელურია (იხ. $\S IV.1$), ე.ი. მათ არა აქვთ საერთო წერტილი.

გ). თუ a_{11}, a_{12} და b_1 კოეფიციენტები შესაბამისად პროპორციულია a_{21}, a_{22} და b_2 კოეფიციენტების, ე.ი.

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2},$$

მაშინ (1) სისტემის ამონახსენთა წყვილების სიმრავლე უსასრულოა, რაც გამომდინარეობს იქიდან, რომ ჩვენ ფაქტიურად გვაქვს ერთი განტოლება (პირველი განტოლება მიიღება მეორე განტოლებისგან k რიცხვზე გამრავლებით, სადაც k არის პროპორციულობის კოეფიციენტი). ამ შემთხვევაში სისტემაში შემავალი განტოლებებით განსაზღვრული წრფეები ემთხვევა ერთმანეთს და ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (1) სისტემას.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 2x + 5y = 19. \end{cases}$$

ამოხსნა. გამოვთვალოთ Δ, Δ_1 და Δ_2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 2 = 11,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 19 & 5 \end{vmatrix} = 12 \times 5 - 2 \times 19 = 22,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 19 \end{vmatrix} = 3 \times 19 - 2 \times 12 = 33.$$

როგორც ვიცით, უცნობები x და y განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{22}{11} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{11} = 3.$$

მაგალითი 2. m პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს განტოლებათა სისტემას

$$\begin{cases} (3+m)x + 4y = 5 - 3m \\ 2x + (5+m)y = 8 \end{cases}$$

უამრავი ამონახსენი?

ამოხსნა. გ) თვისების თანახმად სისტემას ექნება უამრავი ამონახსენი, როცა

$$\frac{3+m}{2} = \frac{4}{5+m} = \frac{5-3m}{8}. \qquad (*)$$

საკმარისია ამოვხსნათ განტოლება

$$\frac{3+m}{2} = \frac{4}{5+m} \qquad (**)$$

და მიღებული ფესვებისთვის შევამოწმოთ სრულდება თუ არა $(*)$ პროპორცია. $(**)$ განტოლების ფესვებია $m = -1$ და $m = -7$. როცა $m = -1$, გვაქვს

$$\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}.$$

როცა $m = -7$, გვაქვს

$$-\frac{4}{2} = -\frac{4}{2} \neq \frac{26}{8}.$$

ამრიგად, როცა $m = -1$ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსენი.
ცხადია, როცა $m = -7$, მაშინ სისტემას არა აქვს ამონახსენი; ხოლო, როცა $m \neq -1$ და $m \neq -7$, მაშინ სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსენი.

§4. სამუცნობიან სამ წრფივ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევა

1. ერთგვაროვანი სისტემა. განვიხილოთ სამუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა:.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

როგორც ადრე ვაჩვენეთ (1) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 = 0, \\ dx_2 = 0, \\ dx_3 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

სადაც d არის (1) სისტემის დეტერმინანტი.

· (1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, როცა $d \neq 0$. ეს ფაქტი გამომდინარეობს იქიდან, რომ (1) სისტემის ყველა ამონახსენი აკმაყოფილებს (2) სისტემას, რომელსაც ნულოვანი ამონახსენის გარდა სხვა ამონახსენი არა აქვს, როცა $d \neq 0$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $d = 0$. მაშინ (2) სისტემას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1, x_2 და x_3. (1) სისტემას დააკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1, x_2 და x_3, როცა ყველა a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ კოეფიციენტი ნულის ტოლია. ვთქვათ a_{ij} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, $a_{11} \neq 0$. (1) სისტემის პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{21}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას. შემდეგ პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{31}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას. მაშინ მეორე და მესამე განტოლებებიდან x_1 უცნობი გამოირიცხება და მივიღებთ შემდეგ სის-

ტემას:

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= 0,\\
a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}
$$

ცხადია (3) სისტემა (1) სისტემის ეკვივალენტურია.

დეტერმინანტის თვისების თანახმად (3) სისტემის დეტერმინანტი ტოლია (1) სისტემის დეტერმინანტის, ე.ი.

$$
d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta',
$$

სადაც

$$
\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.
$$

რადგანაც $d = 0$ და $a_{11} \neq 0$, ამიტომ $\Delta' = 0$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ (3) სისტემის ბოლო ორი განტოლებისაგან შედგენილ სისტემას აქვს უამრავი ამონახსენი. მაშინ მთლიანად (3) სისტემასაც და რა თქმა უნდა მის ეკვივალენტურ (1) სისტემასაც ექნება უამრავი ამონახსენი. ამრიგად (1) სისტემას, როცა მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ნულოვანი ამონახსენის გარდა აქვს არანულოვანი ამონახსნებიც.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ მნიშვნელოვანი შენიშვნა, რომელიც დაკავშირებულია განსახილველ საკითხთან და ეფუძნება ზემოთ ჩატარებულ მსჯელობას.

შენიშვნა. ვექტორთა სისტემა:

$$
\overline{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),
$$

$$
\overline{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),
$$

$$
\overline{a_3} = (a_{31}, a_{32}, a_{33}),
$$

წრფივად დ. მოუკიდებულია (დამოკიდებულია), მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა დეტერმინანტი

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

განსხვავებულია ნულისაგან (ტოლია ნულის).

დავუბრუნდეთ (1) სისტემას. როგორც ვაჩვენეთ, მას უამრავი ამონახსენი აქვს, როცა $d = 0$. ვიპოვოთ ეს ამონახსნები. ვთქვათ a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილ დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. მაშინ წინა პარაგრაფში გაკეთებული შენიშვნის თანახმად, $\overline{a_1}$ და $\overline{a_2}$ ვექტორები იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, ხოლო რადგან აც $d = 0$, ამიტომ $\overline{a_3}$ ვექტორი წრფივად გამოისახება $\overline{a_1}$ დ. $\overline{a_2}$ ვექტორების საშუალებით, ე.ი. არსებობს ისეთი α_1 და α_2 რიცხვები, რომ

$$\overline{a_3} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (1) სისტემის მესამე განტოლება შედეგია პირველი ორი განტოლების (თუ პირველ განტოლებას გავამრავლებთ α_1-ზე და მეორეს-α_2-ზე და შევკრებთ, მივიღებთ მესამე განტოლებას).

სისტემის პირველ და მეორე განტოლებაში x_3 უცნობიანი წევრები გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს და ამასთან x_3 უცნობს მივცეთ რაიმე მნიშვნელობა. მაშინ მიიღება ორუცნობიანი (x_1 და x_2) ორი წრფივი განტოლების სისტემა, რომლის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაან. მისი ამონახსენი შეგვიძლია ვიპოვოთ კრამერის ფორმულების გამოყენებით. ამრიგად, (1) სისტემას აკმაყოფილებს ისეთი $(x_1; x_2; x_3)$ სამეულები, სადაც x_3 ნებისმიერად არის აღებული, ხოლო x_1 და x_2 განისაზღვრება პირველი ორი განტოლებიდან. თუ ყველა მეორე რიგის დეტერმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ $(x_1; x_2; x_3)$ სამეულიდან,

რომელიმე ორი აღებულია ნებისმიერად, ხოლო მესამე უცნობი განისაზღვრება იმ განტოლებიდან, სადაც მისი კოეფიციენტი განსხვავებულია ნულისაგან. ცხადია ეს ამონახსნები დააკმაყოფილებს დანარჩენ ორ განტოლებასაც.

2. არაერთგვაროვანი სისტემა. განვიხილოთ სამუცნობიან არაერთგვაროვან წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

როგორც ადრე ვაჩვენეთ (4) სისტემა მიიყვანება შემდეგ სისტემაზე:

$$\left.\begin{aligned} dx_1 &= d_1, \\ dx_2 &= d_2, \\ dx_3 &= d_3, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

სადაც d არის სისტემის დეტერმინანტი,

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

ხოლო დეტერმინანტი d_i $(i = 1, 2, 3)$ მიიღება სისტემის დეტერმინანტისაგან მისი i-ური სვეტის შეცვლით მარჯვენა მხარეებისაგან შედგენილი სვეტით,

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

(d_2 და d_3 ანალოგიურად იწერება).

I. (4) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, როცა $d \neq 0$, რომელიც გამოისახება კრამერის ფორმულებით:

$$x_i = \frac{d_i}{d}, \quad i = 1, 2, 3.$$

II. (4) სისტემას არა აქვს ამონახსნი, როცა $d = 0$ და ერთი მაინც d_i $(i = 1, 2, 3)$ განსხვავებულია ნულისაგან. ეს ფაქტი გამომდინარეობს იქიდან, რომ (4) სისტემის ყველა ამონახსენი აკმაყოფილებს (5) სისტემას. ამიტომ, თუ (5) სისტემას არა აქვს ამონახსენი, მაშინ (4) სისტემასაც არ ექნება ამონახსენი.

III. თუ $d = 0$ და $d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, მაშინ (5) სისტემას აკმაყოფილებს ნებისმიერი x_1, x_2 და x_3. მაგრამ (4) სისტემის ამონახსენი არ შეიძლება იყოს ნებისმიერი x_1, x_2 და x_3, რადგან მისი კოეფიციენტები, დაშვების თანახმად, ყველა ერთდროულად არ უდრის ნულს.

ეს შემთხვევა შეიცავს სამ ქვეშემთხვევას. განვიხილოთ თითოეული მათგანი დაწვრილებით.

III_1. განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები. ვთქვათ, (4) სისტემის a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

განვიხილოთ ვექტორთა სისტემა:

$$\overline{c_i} = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, b_i), \ \ i = 1, 2, 3.$$

რადგანაც $\Delta \neq 0$, ამიტომ $\overline{c_1}$ და $\overline{c_2}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო ვექტორთა სისტემა: $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$, $\overline{c_3}$, წრფივად დამოკიდებულია, რადგანაც $d = 0$ და $d_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არსებობს α_1 და α_2 რიცხვები ისეთი, რომ

$$\overline{c_3} = \alpha_1 \overline{c_1} + \alpha_2 \overline{c_2}. \tag{6}$$

მართლაც, ვინაიდან ვექტორთა სისტემა: $\overline{c_1}, \overline{c_2}, \overline{c_3}$, წრფივად დამოკიდებულია, ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lambda_1 \overline{c_1} + \lambda_2 \overline{c_2} + \lambda_3 \overline{c_3} = 0, \tag{7}$$

სადაც λ_i $(i = 1,2,3)$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ცხადია $\lambda_3 \neq 0$, რადგანაც წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება:

$$\lambda_1 \overline{c_1} + \lambda_2 \overline{c_2} = 0,$$

სადაც λ_1 ან λ_2 არ უდრის ნულს. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ $\overline{c_1}$ და $\overline{c_2}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. ამრიგად, თუ (7) ტოლობიდან განვსაზღვრავთ $\overline{c_3}$, ვექტორს მივიღებთ (6) გამოსახულებას.

გავამრავლოთ (4) სისტემის პირველი განტოლება α_1-ზე, ხოლო მეორე - α_2-ზე და შევკრიბოთ. მაშინ (6)-ის თანახმად მივიღებთ სისტემის მე-3 განტოლებას. პირველ და მეორე განტოლებაში x_3 უცნობიანი წევრები გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს და ამასთან x_3 უცნობს მივცეთ რაიმე მნიშვნელობა, $x_3 = k$ (k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია). მაშინ მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{12}k, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}k, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

რომლის დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$.

(8) სისტემის ამონახსენი შეგვიძლია ვიპოვოთ კრამერის ფორმულების გამოყენებით,

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 - a_{13}k & a_{12} \\ b_2 - a_{23}k & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right), \tag{9}$$

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \right). \tag{10}$$

ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში (4) სისტემის ამონახსენია ისეთი (x_1, x_2, x_3) სამეული, სადაც x_1 და x_2 განისაზღვრება შესაბამისად (9) და (10) ფორმულებით, ხოლო $x_3 = k$ (k ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია).

III_2. ვთქვათ, სისტემის დეტერმინანტის ყველა მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია. თუ ამასთან ერთად ნულის ტოლია შემდეგი დეტერმინანტები:

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix},$$

მაშინ $\overline{c_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ ვექტორებიდან ნებისმიერი ორი ვექტორი ქმნის წრფივად დამოკიდებულ სისტემას. რადგანაც a_{ij} კოეფიციენტები ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ $\overline{c_i}$ ვექტორებიდან ერთი მაინც იქნება წრფივად დამოუკიდებელი. ვთქვათ, $a_{11} \neq 0$, მაშინ $\overline{c_1}$ ვექტორი იქნება წრფივად დამოუკიდებელი, ხოლო დანარჩენი გამოისახება $\overline{c_1}$ ვექტორის საშუალებით, ე.ი. არსებობს α_1 და α_2 რიცხვები ისეთი, რომ $\overline{c_2} = \alpha_1 \overline{c_1}$ და $\overline{c_3} = \alpha_2 \overline{c_1}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ სისტემის მეორე განტოლება მიიღება პირველი განტოლების α_1 გამრავლებით, მესამე კი - პირველი განტოლების α_2-ზე გამრავლებით.

ამრიგად, განსახილველ შემთხვევაში, საკმარისია ამოვხსნათ მარტო პირველი განტოლება x_1-ის მიმართ,

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}.$$

რაც შეეხება x_2 და x_3 უცნობებს, მათი მნიშვნელობები აიღება სავსებით ნებისმიერად.

გვრჩება კიდევ ერთი შემთხვევა.

III_3. თუ სისტემის დეტერმინანტის ყველა მეორე რიგის მინორი ნულის ტოლია და D_1 ან D_2 დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ (4) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

დეტერმინანტის თვისების და დაშვების თანახმად გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 - a_{13}x_3 \\ a_{21} & b_2 - a_{23}x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = D_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

თუ დავუშვებთ, რომ (4) სისტემას ამონახსენი აქვს, მაშინ ზედა ტოლობების მარცხენა მხარეები ტოლია და გვექნება $D_1 = 0$. ანალოგიურად მივიღებთ $D_2 = 0$. დაშვების თანახმად კი გვაქვს $D_1 \neq 0$ ან $D_2 \neq 0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (4) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 9 - 2 - 6 + 30 = 28.$$

რადგანაც სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ კრამერის წესი. გამოვთვალოთ d_1, d_2 და d_3.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & -5 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 35 + 21 - 14 - 14 = 28,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -28 + 21 - 7 + 70 = 56,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 7 + 21 - 42 = 0.$$

როგორც ვიცით, ამონახსნები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_1 = \frac{d_1}{d} = \frac{28}{28} = 1, \quad x_2 = \frac{d_2}{d} = \frac{56}{28} = 2, \quad x_3 = \frac{d_3}{d} = \frac{0}{28} = 0.$$

მაგალითი 2. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7, \\ 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

გამოვთვალოთ სისტემის დეტერმინანტი

$$d = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 24 - 16 - 6 + 16 + 24 = 0.$$

რადგანაც $d = 0$, ამიტომ სისტემას ან უამრავი ამონახსენი აქვს ან საერთოდ არ აქვს ამონახსენი.

ვინაიდან

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 28 - 1 + 28 + 16 = 15 \neq 0,$$

ამიტომ სისტემას არ ექნება ამონახსენი.

მაგალითი 3. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

გამოვთვალოთ სისტემი დეტერმინანტი:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 4 - 48 - 12 + 48 - 4 = 0.$$

გამოვთვალოთ d_1, d_2 და d_3,

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 24 + 8 - 60 - 24 + 60 - 8 = 0,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 + 48 - 4 - 30 - 48 + 4 = 0,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 20 - 32 - 8 + 32 + 20 = 0.$$

განვიხილოთ სისტემის პირველ და მეორე განტოლებაში x_1 და x_2 უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი. ის განსხვავებულია ნულისაგან,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 = 8 = 10.$$

ამ განტოლებაში შემავალ x_3 უცნობს მივცეთ რაიმე მნიშვნელობა, $x_3 = k$ და გადავიტანოთ მარჯვენა მხარეს. მაშინ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 - 3k, \\ 4x_1 + 2x_2 = 5 + k. \end{cases}$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა კრამერის წესის გამოყენებით. სისტემის დეტერმინანტი Δ ნაპოვნი გვაქვს. ვიპოვოთ Δ_1 და Δ_2.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2-3k & -2 \\ 5+k & 2 \end{vmatrix} = 4 - 6k + 10 + 2k = 14 - 4k,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2-3k \\ 4 & 5+k \end{vmatrix} = 5 + k - 8 + 12k = 13k - 3.$$

სისტემის ამონახსნები იქნება:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{7-2k}{5}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{13k-3}{10}.$$

საბოლოოდ თავიდან მოცემული სისტემის ამონახსნებია:

$$x_1 = \frac{7-2k}{5}, \; x_2 = \frac{13k-3}{10}, \; x_3 = k,$$

სადაც k ნებისმიერია.

შევნიშნავთ, რომ ზემოთ განხილულ ორუცნობიან განტოლებათა სისტემის ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი სხვა ორუცნობიანი სისტემა, თუ ამ უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მეორე რიგის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.

მაგალითი 4. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 12. \end{cases}$$

სისტემის დეტერმინანტი -

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

მისი ყველა მინორი ასევე ნულის ტოლია. გარდა ამისა ნულის ტოლია შემდეგი დეტერმინანტები:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}.$$

ამიტომ მოცემული სისტემა მიიყვანება ერთ განტოლებაზე, რაშიც ადვილად დავრწმუნდებით, თუ მეორე და მესამე განტოლებას შევკვეცავთ შესაბამისად 2-ზე და 3-ზე. აქედან გამომდინარე საკმარისია ამოვხსნათ მარტო პირველი განტოლება. ამრიგად, სისტემის ამონახსენი იქნება:

$$x_3 = 4 - 2x_1 - x_2,$$

სადაც x_1 და x_2 ნებისმიერია.

მაგალითი 5. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

განსახილველი სისტემის დეტერმინანტი იგივეა, რაც წინა მაგალითში. რის გამოც თვით ეს დეტერმინანტი და ყველა მისი მინორი ნულის ტოლია. გარდა ამისა

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

განსხვავებული ნულისაგან, ამიტომ მოცემულ სისტემას არა აქვს ამონახსენი, რაშიც უშუალოდ შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, თუ პირველი განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ 2-ზე ან 3-ზე.

§5. გაუსის მეთოდი

წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის გავრცელებული ხერხია უცნობთა თანმიმდევრობითი გამორიცხვის ალგორითმი, რომელსაც გაუსის მეთოდს უწოდებენ.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ ოთხი განტოლებისაგან შედგენილი ოთხუცნობიანი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ვთქვათ $a_{11} \neq 0$. გავყოთ სისტემის პირველი განტოლების ორივე მხარე a_{11}-ზე, მივიღებთ:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)}, \tag{2}$$

სადაც

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j > 1)$$

გავამრავლოთ (2) განტოლება a_{21}-ზე და გამოვაკლოთ (1) სისტემის მეორე განტოლებას. შემდეგ გავამრავლოთ (2) განტოლება a_{31}-ზე და გამოვაკლოთ (1) სისტემის მესამე განტოლებას და ა.შ. ამ გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ (1) სისტემის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 &= a_{15}^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 &= a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 &= a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 &= a_{45}^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სადაც

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)} \qquad (i \neq 1,\ j > 1).$$

ამრიგად, (1) სისტემის პირველი განტოლების საშუალებით ჩვენ გამოვრიცხეთ x_1 უცნობი სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან. ახლა (3) სისტემის მეორე განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან.

ვთქვათ, $a_{22}^{(1)} \neq 0$. გავყოთ (3) სისტემის მეორე განტოლება $a_{22}^{(1)}$-ზე, მივიღებთ:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 = a_{25}^{(2)}, \tag{4}$$

სადაც

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (j > 2)$$

გავამრავლოთ (4) განტოლება $a_{12}^{(1)}$-ზე და გამოვაკლოთ (3) სისტემის პირველ განტოლებას. შემდეგ გავამრავლოთ (4) განტოლება $a_{32}^{(1)}$-ზე და გამოვაკლოთ (3) სისტემის მესამე განტოლებას და ა.შ. ამ გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ (3) სისტემის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + \qquad\quad a_{13}^{(2)} x_3 + a_{14}^{(2)} x_4 &= a_{15}^{(2)}, \\
x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 &= a_{25}^{(2)}, \\
a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 &= a_{35}^{(2)}, \\
a_{43}^{(2)} x_3 + a_{44}^{(2)} x_4 &= a_{45}^{(2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

სადაც

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(2)} \qquad (i \neq 2,\ j > 2).$$

თუ (5) სისტემიდან ანალოგიური გზით გამოვრიცხავთ x_3

უცნობს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{array}{llll} x_1 + & & & a_{14}^{(3)} x_4 = a_{15}^{(3)}, \\ & x_2 + & & a_{24}^{(3)} x_4 = a_{25}^{(3)}, \\ & & x_3 + & a_{34}^{(3)} x_4 = a_{35}^{(3)}, \\ & & & a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

სადაც

$$a_{3j}^{(3)} = \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \qquad (j > 3)$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)} a_{3j}^{(3)} \qquad (i \neq 3,\ \ j > 3).$$

საბოლოოდ, თუ (6) სისტემის მეოთხე განტოლების საშუალებით გამოვრიცხავთ x_4 უცნობს ამ სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან, მაშინ მივიღებთ (1) სისტემის ამონახსნებს:

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = a_{15}^{(4)}, \\ & x_2 & & & = a_{25}^{(4)}, \\ & & x_3 & & = a_{35}^{(4)}, \\ & & & x_4 & = a_{45}^{(4)}. \end{array}\right\}$$

სადაც

$$a_{4j}^{(4)} = \frac{a_{4j}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \qquad (j > 4)$$

$$a_{ij}^{(4)} = a_{ij}^{(3)} - a_{i4}^{(3)} a_{4j}^{(4)} \qquad (i \neq 4,\ \ j > 4).$$

ზემოთ აღწერილი ალგორითმი ჩვენ გამოვიყენეთ ისეთი სისტემისათვის, რომლისთვისაც დიაგონალზე მდგომი კოეფიციენტები a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$ და $a_{44}^{(3)}$, რომელთაც წამყვან ელემენტებს უწოდებენ, განსხვავებულია ნულისაგან. საზოგადოდ, ეს მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ეკვივალენტური გარდაქმნებით ნებისმიერი წრფივი სისტემა მივიყვანოთ ისეთ სისტემაზე, რომლის საფუძველზე ადვილად შეიძლება გაკეთდეს დასკვნა

თავიდან მოცემული სისტემის ამოხსნადობის შესახებ, და იმ შემთხვევაში, როცა სისტემას აქვს ამონახსნი, ვიპოვოთ ყველა მისი ამონახსნი.

სხვადასხვა შემთხვევების საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოხსენით შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 4, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 5. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(7) სისტემის განტოლებები ავღნიშნოთ შესაბამისად (7_1), (7_2) და (7_3)-ით.

გამოვრიცხოთ (7_1) განტოლების საშუალებით x_1 უცნობი (7_2) და (7_3) განტოლებებიდან. გავამრავლოთ (7_1) 2-ზე და გამოვაკლოთ (7_2) განტოლებას. შემდეგ (7_3)განტოლებას გამოვაკლოთ (7_1). მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -3x_2 - 2x_3 &= 2, \\ -7x_2 - 5x_3 &= 4. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

გამოვრიცხოთ ანალოგიური გზით (8) სისტემის პირველი და მესამე განტოლებიდან x_2 უცნობი მეორე განტოლების გამოყენებით. მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 + \tfrac{1}{3}x_3 &= \tfrac{11}{3}, \\ x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= -\tfrac{2}{3}, \\ -\tfrac{1}{3}x_3 &= -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}\right\}$$

გავყოთ მესამე განტოლება $\left(-\frac{1}{3}\right)$ და მიღებული განტოლების საშუალებით გამოვრიცხოთ x_3 უცნობი პირველი და მეორე

განტოლებიდან. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 + 0 &= 3, \\ x_2 + 0 &= -2, \\ x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

ამრიგად (7) სისტემის ამონახსნებია $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ და $x_3 = 2$.

მაგალითი 2. ამოხსენით შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 2, \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 14, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

როგორც წინა მაგალითში, გამოვიყენოთ პირველი განტოლება იმისათვის, რომ გამოვრიცხოთ x_1 უცნობი დანარჩენი ორიდან. მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 2, \\ -2x_2 - 10x_3 &= 12, \\ -x_2 - 5x_3 &= 6. \end{aligned}\right\}$$

ახლა გამოვიყენოთ მეორე განტოლება x_2 უცნობის გამოსარიცხავად დანარჩენი ორიდან. მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 + 7x_3 &= -10, \\ x_2 + 5x_3 &= -6, \\ 0 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

როგორც ვხედავთ, სისტემის მესამე განტოლება მთლიანად გამოირიცხა (მივიღეთ ჭეშმარიტი ტოლობა $0 = 0$). გარდა ამისა, თუ x_3 უცნობს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობას, $x_3 = k$, მაშინ მივიღებთ:

$$x_1 = -10 - 7k, \qquad x_2 = -6 - 5k.$$

ამრიგად, თავიდან მოცემული სისტემის ამონახსნებია:

$$x_1 = -10 - 7k, \qquad x_2 = -6 - 5k, \qquad x_3 = k,$$

სადაც k – ნებისმიერი რიცხვია.

მაგალითი 3. (9) სისტემის მესამე განტოლების მარჯვენა მხარე შევცვალოთ 2-ით. გვექნება:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 2, \\ x_1 - 4x_2 - 13x_3 &= 14, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

თუ ჩავატარებთ ზუსტად იგივე გადაქმნებს, რაც წინა მაგალითში, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 + 7x_3 &= -10, \\ x_2 + 5x_3 &= -6, \\ 0 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

როგორც ვხედავთ, სისტემის მესამე ტოლობა მცდარია. ამრიგად, (10) სისტემას არა აქვს ამონახსენი.

მაგალითი 4. განვიხილოთ ორი განტოლებისაგან შედგენილი სამუცნობიანი სისტემა (შემთხვევა, როცა განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე):

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -2, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

სისტემის პირველი განტოლება გავყოთ (-4)-ზე, შედეგი გავამრავლოთ 5-ზე და გამოვაკლოთ სისტემის მეორე განტოლებას, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= \tfrac{1}{2}, \\ -\tfrac{1}{4}x_2 + \tfrac{7}{2}x_3 &= \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\}$$

სისტემის მეორე განტოლება გავყოთ $(-\frac{1}{4})$-ზე, შედეგი გავამრავლოთ (-3)-ზე და გამოვაკლოთ პირველ განტოლებას, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 - 11x_3 &= -1, \\ x_2 - 14x_3 &= -2. \end{aligned}\right\}$$

თუ ამ სისტემაში x_3 უცნობს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობას, $x_3 = k$, მივიღებთ:

$$x_1 = 11k - 1, \quad x_2 = 14k - 2.$$

ამრიგად (11) სისტემის ამონახსნებია:

$$x_1 = 11k - 1, \quad x_2 = 14k - 2, \quad x_3 = k,$$

სადაც k - ნებისმიერი რიცხვია.

მაგალითი 5. დავგრჩა შემთხვევა, როცა სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვი მეტია უცნობთა რიცხვზე. განვიხილოთ შემდეგი სისტემა:

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 &= 2, \\ 5x_1 - 4x_2 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 &= a. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

სადაც a - ნებისმიერი რიცხვია.

თუ პირველი განტოლების გამოყენებით გამოვრიცხავთ x_1 უცნობს სისტემის დანარჩენი განტოლებებიდან, მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - \tfrac{3}{4}x_2 &= -\tfrac{1}{2}, \\ -\tfrac{1}{4}x_2 &= \tfrac{5}{2}, \\ \tfrac{1}{2}x_2 &= a + 1. \end{aligned}\right\}$$

სისტემის პირველი და მესამე განტოლებიდან გამოვრიცხოთ x_2 უცნობი სისტემის მეორე განტოლების გამოყენებით. მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 0 &= -8, \\ x_2 &= -10, \\ 0 &= a + 6. \end{aligned}\right\}$$

ამრიგად, როცა $a \neq -6$ (12) სისტემას ამონახსენი არა აქვს, ხოლო როცა $a = -6$ (12) სისტემის ამონახსნებია $x_1 = -8$ და $x_2 = -10$.

თავი მესამე

მატრიცთა ალგებრის ელემენტები

§1. მატრიცის ცნება

განვიხილოთ ისეთი მაგალითი, რომელსაც მივყავართ მატრიცის ცნებამდე. ვთქვათ, რამოდენიმე ქვეყანას ერთმანეთთან სავაჭრო ურთიერთობა აქვთ. სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა მათი რიცხვი სამია. აღვნიშნოთ ეს ქვეყნები X_1-ით, X_2-ით და X_3-ით. ვთქვათ, X_1 ქვეყანას X_2 და X_3 ქვეყნებში საექსპორტოდ გააქვს გარკვეული სახეობის პროდუქცია. ამ ქვეყნებიდან გატანილი პროდუქციის სანაცვლოდ, ერთი წლის განმავლობაში X_1 ქვეყანაში შემოსული თანხის ოდენობა დოლარებში აღვნიშნოთ შესაბამისად a_{12}-ით და a_{13}-ით. ანალოგიურად განისაზღვრება a_{21} და a_{23}, a_{31} და a_{32}. ბუნებრივია, a_{11}-ით აღვნიშნოთ იმ თანხის ოდენობა, რომელიც შემოუვა X_1 ქვეყანას თავის თავთან ვაჭრობის შედეგად. მაგრამ ქვეყანა არ შეიძლება თავის თავთან ვაჭრობდეს, ამიტომ $a_{11} = 0$. ანალოგიურად გვაქვს: $a_{22} = 0, a_{33} = 0$.

ამრიგად, შეგვიძლია შევადგინოთ შემდეგი ცხრილი:

$$
\begin{array}{cccc}
 & X_1 & X_2 & X_3 \\
X_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13}, \\
X_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23}, \\
X_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33},
\end{array}
$$

სადაც a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ არის ერთი წლის განმავლობაში X_j ქვეყნიდან X_i ქვეყანაში შემოსული თანხის ოდენობა დოლარე-

ბში. ცხადია, დიაგონალზე მდგომი a_{11}, a_{22} და a_{33} რიცხვები ნულის ტოლია.

კონკრეტულ შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილ ცხრილს შეიძლება ჰქონდეს შემდეგი სახე:

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	15	7,
X_2	8	0	11,
X_3	9	18	0.

ამ ცხრილში, მაგალითად მეორე სტრიქონისა და მესამე სვეტის თანაკვეთაზე მოთავსებული რიცხვი 11 გვიჩვენებს, რომ X_3 ქვეყნიდან X_2 ქვეყანაში შემოსული თანხის ოდენობა შეადგენს დაუშვათ 11 მილიონ დოლარს.

მეცნიერების სხვადასხვა დარგებში გვხვდება ისეთი ამოცანები, რომელთა შესწავლა მოსახერხებელია მართკუთხოვანი ცხრილების საშუალებით.

ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილ მართკუთხოვან ცხრილს, ჩაწერილს შემდეგი ფორმით

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

მატრიცას უწოდებენ.

m არის სტრიქონების რიცხვი, ხოლო n -სვეტების რიცხვი. თუ $m = n$, მაშინ A მატრიცას n-ური რიგის **კვადრატულ მატრიცას** უწოდებენ. მაგალითად, მესამე რიგის კვადრატულ მატრიცას ექნება სახე:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ რიცხვებს მატრიცის ელემენტებს უწოდებენ (სიმარტივისათვის ჩვენ შემდეგში ძირითადად განვიხილავთ მეორე და მესამე რიგის მატრიცებს).

მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხიდან ქვედა მარჯვენა კუთხისაკენ გავლებულ დიაგონალს **მთავარი დიაგონალი** ეწოდება. მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტებია a_{11}, a_{22} და a_{33}.

A მატრიცას **ნულოვანი მატრიცა** ეწოდება, თუ მისი ყველა ელემენტი ნულის ტოლია. კვადრატულ მატრიცას **დიაგონალური მატრიცა** ეწოდება, თუ მისი ყველა ელემენტი, რომელიც მთავარ დიაგონალზე არ დგას, ნულის ტოლია. მესამე რიგის დიაგონალურ მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

დიაგონალურ მატრიცას **ერთეულოვანი მატრიცა** ეწოდება, თუ მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტები ყველა ერთის ტოლია. ერთეულოვანი მატრიცა აღინიშნება E ან I ასოთი,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A მატრიცის სვეტებს **სვეტ-ვექტორებს** უწოდებენ, ხოლო სტრიქონებს **სტრიქონ-ვექტორებს**. მესამე რიგის მატრიცის შემთხვევაში სვეტ-ვექტორებია:

$$\overline{a}^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad \overline{a}^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \overline{a}^3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},$$

სტრიქონ-ვექტორებია:

$$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),$$

$$\overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),$$

$$\overline{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

სვეტ-ვექტორების და სტრიქონ-ვექტორების საშუალებით A მატრიცა შეგვიძლია ჩავწეროთ ასეთი სახით:

$$A = (\overline{a}^1, \overline{a}^2, \overline{a}^3)$$

ან

$$A = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 \end{pmatrix}.$$

§2. მოქმედებანი მატრიცებზე

1. **მატრიცების შეკრება.** ვთქვათ, მოცემულია A მატრიცა, რომლის სტრიქონების რიცხვია m, ხოლო სვეტების- n. ჩანაწერი $m \times n$ აღნიშნავს A მატრიცის განზომილებას. თუ მისი ელემენტებია a_{ij}, მაშინ A მატრიცას მოკლედ ასე აღვნიშნავთ:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}.$$

ორი ერთნაირი განზომილების მატრიცების ჯამი არის იგივე განზომილების მატრიცა, რომლის ელემენტები წარმოადგენს შესაკრები მატრიცების შესაბამისი ელემენტების ჯამს. მაგალითად, თუ A და B – (2×3) განზომილების მატრიცებია, მაშინ გვაქვს:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

მოვიყვანოთ შემდეგი რიცხვითი მაგალითები:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 10 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 10\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 11\\ 11 & 4\end{pmatrix}.$$

საზოგადოდ, თუ $A = (a_{ij})_{m\times n}$ და $B = (b_{ij})_{m\times n}$, მაშინ

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი თვისებები:

1) $A + B = B + A$,
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$.

2. მატრიცის რიცხვზე (სკალარზე) გამრავლება. ვთქვათ A არის მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა,

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

ცხადია გვაქვს:

$$A + A = \begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}.$$

თუ $A + A$-ს ავღნიშნავთ $2A$-თი, მაშინ

$$2A + A = \begin{pmatrix}3a & 3b\\ 3c & 3d\end{pmatrix}.$$

ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის ინდუქციით მივიღებთ:

$$nA = \begin{pmatrix}na & nb\\ nc & nd\end{pmatrix}.$$

ეს ტოლობა მიგვანიშნებს იმაზე, რომ λ რიცხვის და A მატრიცის ნამრავლი შეგვიძლია განვმარტოთ ფორმულით:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

საზოგადოდ, თუ $A = (a_{ij})_{m\times n}$, მაშინ

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

ადვილად შესამოწმებელია შემდეგი თვისებები:

$$\begin{aligned} &1)\ \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A, \\ &2)\ (\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A, \\ &3)\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B, \end{aligned}$$

სადაც A და B ერთიდაიგივე განზომილების მატრიცებია, ხოლო λ და μ სკალარები.

3. მატრიცის მატრიცზე გამრავლება. განვიხილოთ ისეთი მაგალითი, რომელიც მიგვანიშნებს მატრიცის მატრიცზე გამრავლების წესზე.

ვთქვათ, რომელიმე სამშენებლო ფირმას მისცეს შეკვეთა 5 საბავშო ბაღის, 7 სკოლისა და 12 საცხოვრებელი სახლის მშენებლობაზე. წარმოვადგინოთ ეს შეკვეთა სტრიქონ-ვექტორის საშუალებით $\overline{x} = (5, 7, 12)$. ცხადია, სამშენებლო ფირმისათვის წინასწარ ცნობილია თითეული ტიპის სახლის ასაშენებლად საჭირო მასალისა და მუშახელის რაოდენობა.

შევადგინოთ მატრიცა, რომლის ელემენტები გვიჩვენებს თითოეული ტიპის სახლის მშენებლობისათვის საჭირო სხვადასხვა მასალისა და მუშახელის რაოდენობას შესაბამის ერთეულებში. მას ექნება შემდეგი სახე (ქვემოთ მოცემული რიცხვები აღებულია ნებისმიერად და არ შეესაბამება რეალურ მონაცემებს);

$$\begin{array}{ccccc} \text{რკინა} & \text{ხე-ტყე} & \text{მინა} & \text{სალებავი} & \text{მუშახელი} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} = A.$$

A მატრიცის პირველი, მეორე და მესამე სტრიქონის ელემენტები შესაბამისად წარმოადგენს საბავშო ბაღის, სკოლის და საცხოვრებელი სახლის მშენებლობისათვის საჭირო თითოეული დასახელებული მასალისა და მუშახელის რაოდენობას შესაბამის ერთეულებში.

ვთქვათ, სამშენებლო ფირმას აინტერესებს მთლიანი შეკვეთის შესასრულებლად საჭირო თითოეული სახეობის მასალისა და მუშახელის რაოდენობა. ამის გასაგებად $\overline{x}$ ვექტორი უნდა გავამრავლოთ A მატრიცაზე იმგვარად, რომ მიღებული ნამრავლიდან ჩანდეს რა რაოდენობის მასალა და მუშახელია საჭირო სამივე ტიპის ყველა სახლის მშენებლობისათვის. ამოცანის პირობიდან გამომდინარე, ადვილი მისახვედრია, რომ $\overline{x}$ სტრიქონ-ვექტორის და A მატრიცის ნამრავლს უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$\overline{x}A = (5, 7, 12)\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} =$$

$$= (5 \times 5 + 7 \times 7 + 12 \times 6,\ 5 \times 20 + 7 \times 18 + 12 \times 25,$$
$$5 \times 16 + 7 \times 12 + 12 \times 8,\ 5 \times 7 + 7 \times 9 + 12 \times 5,$$
$$5 \times 17 + 7 \times 21 + 12 \times 13) = (146, 526, 260, 158, 388).$$

ამრიგად, სამშენებლო ფირმამ უნდა შეუკვეთოს 146 ერთეული რკინა, 526 ერთეული ხე-ტყე, 260 ერთეული მინა, 158 ერთეული სალებავი და 388 ერთეული მუშახელი. შევნიშნავთ, რომ ჩვენ, ამოცანის პასუხი წარმოადგენს ხუთგანზომილებიან სტრიქონ-ვექტორს, რომლის კომპონენტები მიიღება $\overline{x}$ ვექტორის გამრავლებით A მატრიცის შესაბამის სვეტ-ვექტორებზე.

ვთქვათ, ახლა ფირმას აინტერესებს თითოეული ტიპის სახლის მშენებლობისათვის საჭირო მასალისა და მუშახელის საერთო ღირებულება. დავუშვათ, რომ ერთეული რკინა, ხე-ტყე, მინა, საღებავი და მუშახელი შესაბამისად ღირს $15, 8, 5, 1$ და 10 ლარი. მაშინ ეს ფასები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სვეტ-ვექტორის სახით:

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

ცხადია, თითოეული ტიპის სახლის ღირებულება განისაზღვრება $A\overline{y}$ ნამრავლით. ამ ნამრავლს უნდა ჰქონდეს შემდეგი სახე:

$$A\overline{y} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \times 15 + 20 \times 8 + 16 \times 5 + 7 \times 1 + 17 \times 10 \\ 7 \times 15 + 18 \times 8 + 12 \times 5 + 9 \times 1 + 21 \times 10 \\ 6 \times 15 + 25 \times 8 + 8 \times 5 + 5 \times 1 + 13 \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, საბავშო ბაღის მშენებლობისათვის საჭირო მასალის და მუშახელის ღირებულება შეადგენს 492 ლარს, სკოლის–528 ლარს და საცხოვრებელი სახლის–465 ლარს.

საბოლოოდ ყველა სახის მშენებლობისათვის საჭირო მასალისა და მუშახელის საერთო ღირებულება $\overline{x}A\overline{y}$ ნამრავლის ტოლია,

რომელიც შეგვიძლია გამოვთვალოთ ორი გზით:

$$\bar{x}A\bar{y} = (\bar{x}A)\bar{y} = (146, 526, 260, 158, 388)\begin{pmatrix}15\\8\\5\\1\\10\end{pmatrix} = 11736,$$

ან

$$\bar{x}A\bar{y} = \bar{x}(A\bar{y}) = (5, 7, 12)\begin{pmatrix}492\\528\\465\end{pmatrix} = 11736.$$

ამრიგად, მშენებლობისათვის საჭირო მთლიანი თანხის ოდენობა შეადგენს 11736 ლარს.

ამ მაგალითში გამოყენებული სტრიქონ-ვექტორის მატრიცაზე გამრავლებისა და მატრიცის სვეტ-ვექტორზე გამრავლების წესის განზოგადება გვაძლევს მატრიცის მატრიცზე გამრავლების წესს.

განსაზღვრება. $A = (a_{ij})_{m\times k}$ მატრიცისა და $B = (b_{ij})_{k\times n}$ მატრიცის ნამრავლი ეწოდება ისეთ $C = (c_{ij})_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ელემენტები გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{kj}\end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}.$$

მაგალითად, თუ A და B შესაბამისად (2×3) და (3×2) მა-

ტრიცებია, მაშინ AB ნამრავლი გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

სტრიქონ-ვექტორებისა და სვეტ-ვექტორების გამოყენებით AB ნამრავლი შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$AB = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \end{pmatrix} (\overline{b}^1, \overline{b}^2) = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \cdot \overline{b}^1 & \overline{a}_1 \cdot \overline{b}^2 \\ \overline{a}_2 \cdot \overline{b}^1 & \overline{a}_2 \cdot \overline{b}^2 \end{pmatrix},$$

სადაც

$$\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), \quad \overline{b}^i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

თუ I ერთეულოვანი n განზომილებიანი მატრიცაა, მაშინ

$$IA = A \ \& \ BI = B,$$

სადაც A და B შესაბამისად $(n \times m)$ და $(m \times n)$ განზომილების მატრიცებია.

თუ A და B ერთიდაიგივე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ როგორც AB, ისე BA ნამრავლი, მაგრამ ეს ნამრავლები შეიძლება ტოლი არ იყოს. მაგალითად, თუ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \& \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

მაშინ გვაქვს:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ე.ი. $AB \neq BA$.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი თვისებები:

1) $(A + B)C = AC + BC$ (განრიგებადობა მარჯვნიდან),

2) $A(B + C) = AB + AC$ (განრიგებადობა მარცხნიდან),

3) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$,

4) $A(BC) = (AB)C$ (ნამრავლის ჯუფთებადობა).

იგულისხმება, რომ A, B და C მატრიცების განზომილებები ისეთია, რომ ჩამოთვლილ ოპერაციებს აზრი აქვს.

§3. ვექტორთა სისტემის რანგი

1. დამოკიდებულება ვექტორთა სისტემის რანგსა და განზომილებას შორის.

შემოვიღოთ ვექტორთა სისტემის რანგისა ცნება.

ვექტორთა სისტემის **რანგს** უწოდებენ ამ სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალურ რიცხვს.

განვიხილოთ შემდეგი სახის წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0,
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობებია, ხოლო a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$) კოეფიციენტები ცნობილი რიცხვებია. (*) სახის სისტემას უწოდებენ ერთგვაროვან სისტემას.

ამ პარაგრაფში მიღებული ძირითადი შედეგები მტკიცდება შემდეგი ლემის გამოყენებით.

ლემა. *თუ $m < n$ (განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე), მაშინ (*) სისტემას ნულოვანი ამონახსენის გარდა გააჩნია არანულოვანი ამონახსენიც.*

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქცია m-ის მიმართ. განვიხილოთ შემთხვევა $m = 1$. მაშინ გვექნება ერთი განტოლება,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0.$$

თუ ყველა $a_{1i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, მაშინ ნებისმიერი x_i იქნება ამონახსენი. ვთქვათ ყველა a_{1i} არ უდრის ნულს. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. თუ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ უცნობებს მივცემთ ნებისმიერ არანულოვან მნიშვნელობებს, მაშინ x_1 განისაზღვრება ტოლობით:

$$x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n).$$

ამრიგად, ერთ განტოლებას ერთზე მეტი უცნობით აქვს არანულოვანი ამონახსენი.

ვთქვათ, ახლა ლემა მართებულია $m - 1$ განტოლებისათვის $m - 1$-ზე მეტი უცნობით და ვაჩვენოთ, რომ აქედან გამომდინარეობს მისი მართებულობა m განტოლებისათვის m-ზე მეტი უცნობით. როგორც წინა შემთხვევაში, თუ ყველა $a_{ij} = 0$ $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, მაშინ ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ იქნება $(*)$ სისტემის ამონახსენი. ვთქვათ $a_{11} \neq 0$. გავამრავლოთ პირველი განტოლება a_{21}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას. შემდეგ გავამრავლოთ პირველი განტოლება a_{31}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას და ა.შ. ბოლოს, პირველ განტოლებას ვამრავლებთ a_{m1}/a_{11}-ზე და ვაკლებთ უკანასკნელ განტოლებას. ამ გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ $(*)$ სისტემის ეკვივალენტურ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0,\\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0,\\
&\vdots \qquad\qquad (**)\\
a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}$$

რადგანაც x_1 უცნობი შედის (**) სისტემის მხოლოდ პირველ განტოლებაში, ამიტომ დანარჩენი $m-1$ განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა წარმოადგენს $n-1$ უცნობიანს. ინდუქციის დაშვებით ამ სისტემას ექნება არანულოვანი $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ამონახსენი, რადგანაც $m-1 < n-1$. თუ $x_2, x_3, \ldots, x_n$ უცნობების მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (**) სისტემის პირველ განტოლებაში და განვსაზღვრავთ x_1 უცნობს, მაშინ თავიდან მოცემულ (*) სისტემის არანულოვანი ამონახსენი იქნება $x_1, x_2, \ldots, x_n$, უცნობების ნაპოვნი მნიშვნელობები. ამით ლემის სამართლიანობა ნაჩვენებია.

ამ ლემის გამოყენებით მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. *თუ გვაქვს m განზომილებიანი n წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა, მაშინ $n \leq m$.*

დამტკიცება. თეორემას ვამტკიცებთ, როცა $n = 3$ (ნებისმიერი n-სათვის ანალოგიურად მტკიცდება).

ვთქვათ, $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ და $\overline{a}_3$ წარმოადგენს წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\overline{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ ვექტორების კომპონენტების რიცხვი არ შეიძლება 3-ზე ნაკლები იყოს. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, მათი რიცხვია ორი (ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როცა მათი რიცხვი ერთის ტოლია),

$$\overline{a}_1 = (a_{11}, a_{12}), \ \overline{a}_2 = (a_{21}, a_{22}), \ \overline{a}_3 = (a_{31}, a_{32}).$$

რადგანაც ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ განმარტების თანახმად, ტოლობა

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{0} \tag{1}$$

სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა x_i $(i = 1, 2, 3)$ ნულის ტოლია.

(1) ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

მაგრამ (2) სისტემას, ლემის ძალით, გარდა ნულოვანი ამონახსენისა გააჩნია არანულოვანი ამონახსენიც.

მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას.

შედეგი. ვექტორთა სისტემის რანგი არ აღემატება ამ სისტემაში შემავალ ვექტორთა განზომილებას.

2. თეორემა ვექტორთა სისტემის რანგის შესახებ. ვთქვათ, გვაქვს n ვექტორისაგან შედგენილი m-განზომილებიანი ვექტორთა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა (ვექტორის განზომილებას განსაზღვრავს მისი კომპონენტების რიცხვი):

$$\begin{aligned}
\overline{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}),\\
\overline{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2m}),\\
&\vdots\\
\overline{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}).
\end{aligned}$$

როგორც უკვე ვაჩვენეთ $n \leq m$.

განვიხილოთ ვექტორთა შემდეგი სისტემა:

$$\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \ldots \overline{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}.$$

მათ ვუწოდოთ სვეტ-ვექტორთა სისტემა.

ამ სისტემის რანგი აღვნიშნოთ s-ით, $s \leq n$.

ვაჩვენოთ, რომ $s = n$. ვთქვათ $s < n$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემას ქმნის პირველი s ვექტორი:

$$\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_s.$$

რადგანაც ვექტორთა სისტემა

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$$

წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ განსაზღვრების თანახმად ტოლობა

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = \bar{0} \tag{3}$$

მართებულია მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა x_k $(k = 1, \ldots, n)$ ნულის ტოლია. (3) ტოლობა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით ასე ჩაიწერება:

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{x} = 0, \; \bar{b}_2 \cdot \bar{x} = 0, \ldots, \bar{b}_m \cdot \bar{x} = 0, \tag{4}$$

სადაც $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

რადგანაც $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s$ არის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემა, ამიტომ მათი საშუალებით წრფივად გამოისახება დანარჩენი $\bar{b}_{s+1}, \ldots, \bar{b}_m$ ვექტორები. აქედან გამომდინარეობს, რომ (4) სისტემის ბოლო $m-s$ ტოლობა პირველი s ტოლობის შედეგია.

განვიხილოთ (4)-ის პირველი s ტოლობა:

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{x} = 0, \; \bar{b}_2 \cdot \bar{x} = 0, \ldots, \bar{b}_s \cdot \bar{x} = 0. \tag{5}$$

რადგანაც (5) სისტემა ერთგვაროვანია და განტოლებათა რიცხვი ნაკლებია უცნობთა რიცხვზე, ამიტომ ლემის თანახმად მას გარდა ნულოვანი ამონახსენისა გააჩნია არანულოვანი ამონახსენიც, რომელიც ასევე დააკმაყოფილებს (4) სისტემას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს იმას, რომ ჩვენი დაშვება არასწორია, ე.ი. $s = n$.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. *ვექტორთა სისტემის რანგი და ამ სისტემის ვექტორების შესაბამისი კოორდინატებისაგან (კომპონენტებისაგან) შედგენილი სვეტ-ვექტორთა სისტემის რანგი ტოლია.*

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ვექტორთა სისტემა:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}),\\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}),\\ &\vdots\\ \bar{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}).\end{aligned}$$

სვეტ-ვექტორთა სისტემა იქნება:

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix} \quad \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{n2}\end{pmatrix} \dots \bar{b}_n = \begin{pmatrix} a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{nm}\end{pmatrix}.$$

პირველი სისტემა აღვნიშნოთ A-თი, მეორე-B-თი. A და B სისტემების რანგი აღვნიშნოთ შესაბამისად s-ით და s'-ით. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ A სისტემაში წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ქმნის პირველი s ვექტორი. ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატებისაგან შედგენილ სვეტ-ვექტორთა სისტემა იქნება:

$$\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{s1}\end{pmatrix} \quad \bar{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{s2}\end{pmatrix} \dots \bar{c}_m = \begin{pmatrix} a_{1m}\\ a_{2m}\\ \vdots\\ a_{sm}\end{pmatrix}.$$

აღვნიშნოთ ეს სისტემა C-თი. ზემოთ დამტკიცებულის ძალით C სისტემის რანგი ტოლია s-ის. რადგანაც $\bar{c}_k$ $(k = 1, \dots, m)$ ვექტორის კომპონენტები ემთხვევა $\bar{b}_k$ ვექტორის პირველ s კომპონენტს, ამიტომ ის ვექტორები, რომლებიც წრფივად დამოუკიდებელია C სისტემაში, წრფივად დამოუკიდებელი დარჩება B სისტემაშიც. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $s \leq s'$. შებრუნებული მსჯელობით მივიღებთ, რომ $s' \leq s$. ამრიგად, $s = s'$, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§4. მატრიცის რანგი

ჩვენ წინა პარაგრაფში შემოვიღეთ ვექტორთა სისტემის რანგის ცნება და ვაჩვენეთ, რომ სვეტ-ვექტორთა სისტემის რანგი სტრიქონ-ვექტორთა სისტემის რანგის ტოლია. ახლა დგას საკითხი მისი პრაქტიკულად გამოთვლის შესახებ. ამ მიზნით შემოგვაქვს მატრიცის რანგის ცნება.

განვიხილოთ მართკუთხოვანი მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

შემოვიღოთ ჯერ მინორის ცნება. ავირჩიოთ ნებისმიერად k სტრიქონი და k სვეტი ($k \leq min(m,n)$). მათ თანაკვეთაზე მოთავსებული ელემენტები ქმნიან k-ური რიგის დეტერმინანტს, რომელსაც k-ური რიგის მინორი ეწოდება.

მატრიცის რანგს უწოდებენ მისი ნულისაგან განსხვავებული მინორების უმაღლეს რიგს. A მატრიცის რანგი აღინიშნება $r(A)$-თი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, r რიცხვს უწოდებენ A **მატრიცის რანგს**, თუ A მატრიცის რომელიმე r რიგის მინორი განსხვავებულია ნულისაგან, ხოლო მისი ნებისმიერი მინორი, რომლის რიგი r-ზე მეტია, ნულის ტოლია.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა მატრიცთა რანგის შესახებ. *მატრიცის რანგი მისი სვეტ-ვექტორთა (სტრიქონ-ვექტორთა) სისტემის რანგის ტოლია.*

თეორემას დავამტკიცებთ შემდეგი ლემის გამოყენებით.

ლემა. *იმისთვის, რომ განტოლებათა სისტემას:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსენი, აუცილებელი და საკმარისია სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ნულს უდრიდეს.

დამტკიცება. აუცილებლობა ცხადია. მართლაც, თუ $\Delta \neq 0$, მაშინ (1) სისტემას ექნება ერთადერთი ამონახსენი, $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, რომელიც მიიღება კრამერის წესით. ეს კი ეწინააღმდეგება იმას, რომ (1) სისტემას ნულოვანი ამონახსენის გარდა არანულოვანი ამონახსენიც გააჩნია, ე.ი. $\Delta = 0$.

საკმარისობას ვამტკიცებთ ინდუქციით. როცა $n = 1$, ლემა ცხადია. მართლაც, ამ შემთხვევაში გვექნება ერთი განტოლება ერთი უცნობით შემდეგი სახის: $a_{11}x_1 = 0$. პირობის ძალით გვაქვს: $a_{11} = 0$. ამიტომ x_1 ნებისმიერია.

ვთქვათ, ახლა ლემა მართებულია $n-1$-სათვის და ვაჩვენოთ n-სათვის. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა a_{ij} კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან (თუ ყველა $a_{ij} = 0$, მაშინ ლემა ცხადია). ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{21}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლებას. ამით მეორე განტოლებიდან x_1 უცნობი გამოირიცხება. შემდეგ პირველი განტოლება გავამრავლოთ a_{31}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას. ამით მესამე განტოლებიდან x_1 უც-

ნობი გამოირიცხება. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცესს, მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$
\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\
a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n &= 0, \\
&\vdots \\
a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n &= 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

სადაც

$$
a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1} \cdot a_{1j}}{a_{11}}, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n.
$$

რადგანაც (2) სისტემის დეტერმინანტი მიიღება (1) სისტემის დეტერმინანტისგან ელემენტარული გარდაქმნების შედეგად, ამიტომ ორივე ეს დეტერმინანტი დეტერმინანტის თვისების თანახმად ტოლია, ე.ი.

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\
\vdots & & & \\
0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

აქედან კვლავ დეტერმინანტის თვისების თანახმად, მიიღება:

$$
\Delta = a_{11} \cdot \Delta',
$$

სადაც

$$
\Delta' = \begin{vmatrix}
a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\
a'_{32} & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\
\vdots & & & \\
a'_{n2} & a'_{n3} & \cdots & a'_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

რადგანაც $\Delta = 0$ და $a_{11} \neq 0$, ამიტომ $\Delta' = 0$. ცხადია Δ' წარმოადგენს (2) სისტემის შტრიხიანი კოეფიციენტების შემცველი ქვესისტემის დეტერმინანტს. ვინაიდან ეს სისტემა შეიცავს

$n-1$ განტოლებას $n-1$ უცნობით $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, ამიტომ ინდუქციის ძალით მას ექნება არანულოვანი $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ამონახსენი. თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (3) სისტემის პირველ განტოლებაში და განვსაზღვრავთ x_1 უცნობს, მაშინ

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

უცნობების ნაპოვნი მნიშვნელობები (რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან) დააკმაყოფილებს (1) სისტემას. ამით ლემა დამტკიცებულია.

უშუალოდ ლემიდან გამომდინარეობს:

შედეგი 1. კვადრატული მატრიცის:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

სვეტ-ვექტორთა (სტრიქონ-ვექტორთა) სისტემა წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| = 0$ ($|A|$ არის A მატრიცის დეტერმინანტი).

შედეგი 2. A მატრიცის სვეტ-ვექტორთა (სტრიქონ-ვექტორთა) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $|A| \neq 0$.

ახლა უკვე შეგვიძლია დავამტკიცოთ ძირითადი თეორემა.

ვთქვათ, A მატრიცის რანგი ტოლია r-ის, ხოლო მისი სვეტ-ვექტორთა (სტრიქონ-ვექტორთა) სისტემის რანგი s-ის ტოლია. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ნულისაგან განსხვავებულია ზედა მარცხენა კუთხეში მოთავსებული r რიგის მინორი. მაშინ შედეგი 2-ის თანახმად წრფივად დამოუკიდებელი იქნება ამ მინორის სვეტ-ვექტორთა (სტრიქონ-ვექტორთა) სისტემა. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ A მატრიცის პირველი r სვეტი (სტრიქონი) ქმნის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. ეს იმას ნიშნავს, რომ $s \geq r$.

ვაჩვენოთ, რომ $s = r$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ქმნის A მატრიცის პირველი s სვეტი. განვიხილოთ ამ სვეტების შესაბამისი ელემენტებისგან შედგენილი სტრიქონ-ვექტორთა შემდეგი სისტემა:

$$\breve{b}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

რადგან სვეტ-ვექტორთა სისტემის რანგი ტოლია სტრიქონ-ვექტორთა სისტემის რანგის (იხ. წინა პარაგრაფი), ამიტომ (3) სისტემის რანგი იქნება s-ის ტოლი.

ვთქვათ, (3)-ის პირველი s ვექტორი ქმნის წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. მაშინ ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც წარმოადგენს A მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეში მოთავსებულ s რიგის მინორს, განსხვავებული იქნება ნულისაგან შედეგი 2-ის თანახმად. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $r \geq s$. ადრე ვაჩვენეთ, რომ $r \leq s$. ამრიგად გვაქვს $r = s$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცის რანგი არ შეიცვლება, თუ რომელიმე სტრიქონს ნულისაგან განსხვავებულ რიცხვზე გავამრავლებთ ან ერთ სტრიქონს დაუმატებთ მეორე სტრიქონს ან ორ სტრიქონს ადგილებს შეუცვლით, რადგან ამ გარდაქმნების შედეგად ვექტორთა სისტემის რანგი (წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი) არ შეიცვლება. ცხადია, იგივე შედეგს აქვს ადგილი სვეტების მიმართაც.

§5. კრონეკერ-კაპელის თეორემა

განვიხილოთ შემდეგი სისტემა:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{array}\right. \tag{1}$$

სვეტ-ვექტორების გამოყენებით (1) სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2 + x_3\overline{a}_3 = \overline{b}, \tag{2}$$

სადაც

$$\overline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overline{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overline{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ამ ვექტორებისაგან შევადგინოთ შემდეგი ორი სისტემა:

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3 \tag{3}$$

და

$$\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{b}. \tag{4}$$

ვიპოვოთ ამ სისტემების რანგი (წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი). (3) სისტემის რანგი ტოლია 2-ის. მართლაც, $\overline{a}_1$ და $\overline{a}_2$ ვექტორების კომპონენტებისგან შედგენილი დეტერმინანტი იქნება:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7 \neq 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\overline{a}_1$ და $\overline{a}_2$ ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. რადგანაც (3) სისტემა წარმოადგენს (4)-ის ქვესისტემას, ამიტომ (4) სისტემის რანგი მეტია ან ტოლი (3) სისტემის რანგზე. ადრე ვაჩვენეთ, რომ ვექტორთა სისტემის რანგი არ აღემატება ამ სისტემაში შემავალ ვექტორთა განზომილებას (იხ. §3). ამიტომ (4) სისტემის რანგი ტოლი

იქნება 2-ის. ამრიგად (3) სისტემის რანგი არ შეიცვლება $\bar{b}$ ვექტორის მიერთებით. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი x_1, x_2 და x_3 რიცხვები, რომ შესრულდება (2) ტოლობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ (1) სისტემას ამონახსენი აქვს.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases} \tag{5}$$

სვეტ-ვექტორების გამოყენებით (5) სისტემა ასე ჩაიწერება:

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 = \bar{b}, \tag{6}$$

სადაც

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

როგორც წინა შემთხვევაში ვიპოვოთ

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \tag{7}$$

და

$$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b} \tag{8}$$

ვექტორთა სისტემების რანგი.

რადგანაც $\bar{a}_2$ და $\bar{a}_3$ ვექტორები გამოისახება $\bar{a}_1$ ვექტორის საშუალებით, $\bar{a}_2 = (-1)\bar{a}_1$ და $\bar{a}_3 = 3\bar{a}_1$, ამიტომ (2) სისტემის რანგი 1-ის ტოლია. (3) სისტემის რანგი კი ტოლია 2-ის. მართლაც, $\bar{a}_1$ და $\bar{b}$ ვექტორების კომპონენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი იქნება:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\bar{a}_1$ და $\bar{b}$ ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას. ამ შემთხვევაში (7) სისტემის რანგი

იცვლება $\bar{b}$ ვექტორის მიერთებით. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\bar{b}$ ვექტორი არ გამოისახება $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ და $\bar{a}_3$ ვექტორების საშუალებით, ე.ი არ არსებობს ისეთი x_1, x_2 და x_3 რიცხვები, რომ შესრულდეს (6) ტოლობა, რაც იმას ნიშნავს, რომ (5) სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

ამრიგად, განხილული მაგალითების საფუძველზე, საზოგადოდ შეგვიძლია გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნა: თუ წრფივ განტოლებათა სისტემის უცნობებთან მდგომი კოეფიციენტებისგან შედგენილი სვეტ-ვექტორთა სისტემის რანგი არ შეიცვლება მარჯვენა მხარეებისაგან შედგენილი ვექტორის მიერთებით, მაშინ მოცემულ სისტემას ამონახსენი ექნება, წინააღმდეგ შემთხვევაში სისტემას ამონახსენი არა აქვს.

ჩვენ §4-ში ვაჩვენეთ, რომ მატრიცის რანგი მისი სვეტ-ვექტორთა სისტემის რანგის ტოლია (თეორემა მატრიცის რანგის შესახებ). ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ფაქტი თეორემის სახით ასე ჩამოყალიბდება:

კრონეკერ-კაპელის თეორემა. *წრფივ განტოლებათა სისტემა*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}
$$

თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

მატრიცის რანგის ტოლია.

წრფივ განტოლებათა სისტემას უწოდებენ **თავსებადს**, თუ მას ამონახსენი აქვს.

$\overline{A}$ მატრიცას უწოდებენ **გაფართოებულ** მატრიცას.

კრონეკერ-კაპელის თეორემა მოკლედ ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

წრფივ განტოლებათა სისტემა თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სისტემის მატრიცის რანგი გაფართოებული მატრიცის რანგის ტოლია.

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ამოხსენით სისტემა

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

სისტემის მატრიცაა:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

გამოვთვალოთ A მატრიცის რანგი. A მატრიცის ზედა მარცხენა კუთხეში მოთავსებული მეორე რიგის მინორი არ უდრის ნულს,

$$M = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 2 = 7 \neq 0.$$

M მინორის შემცველი ორივე მესამე რიგის მინორები ნულის ტოლია. მართლაც, გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -30 - 4 - 12 - 2 - 12 + 60 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 25 + 2 - 6 - 1 + 10 - 30 = 0.$$

ამრიგად, A მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია.

გამოვთვალოთ გაფართოებული მატრიცის რანგი. გაფართოებული მატრიცაა:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

მისი რანგი 3-ის ტოლია, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 - 42 - 7 + 15 = -35 \neq 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ მოცემულ სისტემას ამონახსნი არა აქვს.

მაგალითი 2. ამოხსენით სისტემა

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11. \end{cases}$$

სისტემის მატრიცაა:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

A მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია, რადგანაც

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -14 - 3 = -17 \neq 0.$$

გაფართოებული მატრიცის რანგი ასევე 2-ის ტოლია, რადგანაც მისი დეტერმინანტი უდრის ნულს,

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = -154 - 36 + 18 + 16 + 189 - 33 = 0.$$

ამრიგად, მოცემული სისტემა თავსებადია. ვაჩვენოთ, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. მართლაც, პირველი ორი განტოლებისაგან შედგენილი სისტემის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან. ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$x_1 = -\frac{5}{17}, \quad x_2 = \frac{23}{17}.$$

ცხადია, ეს ამონახსნები აკმაყოფილებენ მესამე განტოლებასაც.

§6. თეორემა მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტის შესახებ

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა. *ერთნაირგანზომილებიანი A და B კვადრატული მატრიცების ნამრავლის დეტერმინანტი თანამამრავლთა დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია, ე.ი.*

$$|AB| = |A||B|, \tag{1}$$

($|A|$ აღნიშნავს A მატრიცის დეტერმინანტს).

დამტკიცება. ვთქვათ, სიმარტივისათვის A და B მესამე რიგის მატრიცებია,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

მათი ნამრავლი იქნება:

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

სადაც

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}, \ \ (i, j = 1, 2, 3),$$

ვაჩვენოთ, რომ თუ A მატრიცის რომელიმე სტრიქონის ელემენტებს გამოვაკლებთ ან დაუმატებთ მისი პარალელური სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს, გამრავლებულს k რიცხვზე, მაშინ მიღებული მატრიცისა და B მატრიცის ნამრავლის დეტერმინანტი იგივეა, რაც AB მატრიცის დეტერმინანტი.

მართლაც, ვთქვათ

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A + kS,$$

სადაც

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშინ გვაქვს:

$$A'B = (A + kS)B = AB + kSB,$$

სადაც

$$SB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

დეტერმინანტის თვისების თანახმად მიიღება:

$$|A'B| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} + kc_{11} & c_{22} + kc_{12} & c_{23} + kc_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = |AB|.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ A მატრიცის რომელიმე ორ სტრიქონს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ $|AB|$ დეტერმინანტს ნიშანი შეეცვლება. მართლაც, თუ A მატრიცის პირველ და მეორე სტრიქონს ადგილებს შევუცვლით, მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

ცხადია, მიღებული მატრიცის დეტერმინანტი ტოლი იქნება AB მატრიცის დეტერმინანტისა, მოპირდაპირე ნიშნით.

ამ თვისებების დადგენის შემდეგ დავუბრუნდეთ (1) ფორმულის დამტკიცებას.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|A| = 0$. მაშინ A მატრიცის სტრიქონ-ვექტორებისაგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია (იხ. §4), ე.ი. რომელიმე სტრიქონი წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას. ამიტომ ეს სტრიქონი შეგვიძლია გავანულოთ, თუ მის ელემენტებს დავაკლებთ დანარჩენი სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების გარკვეულ კომბინაციას. ამ გარდაქმნის შედეგად მიღებული მატრიცა ავღნიშნოთ A'-ით. ზემოთ დამტკიცებული თვისების თანახმად $|A'B| = |AB|$. რადგანაც A' მატრიცის ერთ-ერთი სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ამიტომ $A'B$ მატრიცის შესაბამისი სტრიქონის ყველა ელემენტი ასევე ნულის ტოლი იქნება. აქედან კი, დეტერმინანტის თვისების თანახმად გამომდინარეობს, რომ $|A'B| = 0$, ე.ი.

$$|AB| = |A||B|.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $|A| \neq 0$. ცხადია, პირველი სვეტის ელემენტებიდან რომელიმე განსხვავებული იქნება ნულისაგან, რადგანაც $|A| \neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $a_{11} \neq 0$. თუ $a_{11} = 0$ და ვთქვათ, $a_{21} \neq 0$, მაშინ ადგილებს შევუცვლით პირველ და მეორე სტრიქონს. ამ გარდაქმნის შედეგად, ზემოთ დამტკიცებული თვისების ძალით, $|AB|$ დეტერმინანტის ნიშანი შეიცვლება. ამასთან, თვით $|A|$ დეტერმინანტსაც ნიშანი შეეცვლება, დეტერმინანტის თვისების ძალით.

გავამრავლოთ A მატრიცის პირველი სტრიქონის ელემენტები a_{21}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მეორე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს. შემდეგ პირველი სტრიქონის ელემენტები გავამრავლოთ a_{31}/a_{11}-ზე და გამოვაკლოთ მესამე სტრიქონის შესაბამის ელემენტებს. მაშინ მივიღებთ შემდეგი სახის მატრიცას:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

რადგანაც დეტერმინანტის თვისების ძალით გვაქვს:

$$|A| = |A'| = a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix},$$

ამიტომ ან $a'_{22} \neq 0$ ან $a'_{32} \neq 0$. ვთქვათ $a'_{22} \neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ადგილებს შევუცვლით მეორე და მესამე სტრიქონს). გავამრავლოთ მეორე სტრიქონი a'_{32}/a'_{22}-ზე და გამოვაკლოთ მესამე სტრიქონს. შემდეგ მეორე სტრიქონი გავამრავლოთ a_{12}/a'_{22}-ზე და გამოვაკლოთ პირველ სტრიქონს. მივიღებთ:

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a''_{13} \\ 0 & a'_{22} & a''_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix}.$$

რადგანაც

$$|A'| = |A''| = a_{11}a'_{22}a''_{33},$$

ამიტომ $a''_{33} \neq 0$. თუ ჩავატარებთ A'' მატრიცისათვის იგივე გარდაქმნას, რაც წინა შემთხვევაში, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ დიაგონალურ მატრიცას,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}.$$

ზემოთ დამტკიცებული თვისების ძალით გვაქვს:

$$|AB| = |DB|. \tag{2}$$

ამასთან, ცხადია ტოლობა

$$|D| = |A|. \tag{3}$$

გამოვთვალოთ DB ნამრავლი,

$$DB = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}d_1 & b_{12}d_1 & b_{13}d_1 \\ b_{21}d_2 & b_{22}d_2 & b_{23}d_2 \\ b_{31}d_3 & b_{32}d_3 & b_{33}d_3 \end{pmatrix}.$$

აქედან, დეტერმინანტის თვისების ძალით, მიიღება:

$$|DB| = \begin{vmatrix} b_{11}d_1 & b_{12}d_1 & b_{13}d_1 \\ b_{21}d_2 & b_{22}d_2 & b_{23}d_2 \\ b_{31}d_3 & b_{32}d_3 & b_{33}d_3 \end{vmatrix} =$$

$$= d_1d_2d_3 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |D||B|. \tag{4}$$

ამრიგად, (2) ტოლობიდან (3) და (4) ტოლობების გათვალისწინებით, მიიღება:

$$|AB| = |A||B|,$$

რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§7. შებრუნებული მატრიცა

ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის არაგადაგვარებული მატრიცა (მატრიცას ეწოდება არაგადაგვარებული, თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ შემდეგი სისტემები:

$$a_{11}x + a_{12}y = 1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = 0,$$

და

$$a_{11}x + a_{12}y = 0,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = 1.$$

ვთქვათ x_1 და y_1 არის პირველი სისტემის ამონახსნები, ხოლო x_2 და y_2 -მეორე სისტემის. რადგან სისტემის დეტერმინანტი $|A|$ განსხვავებულია ნულისაგან, ამიტომ x_i, y_i $(i = 1, 2)$ ამონახსნები შეგვიძლია ვიპოვოთ კრამერის წესით:

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{22}}{|A|},$$

$$y_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{a_{21}}{|A|},$$

$$x_2 = -\frac{a_{12}}{|A|}, \;\; y_2 = \frac{a_{11}}{|A|}.$$

ალგებრული დამატებების გამოყენებით ეს ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$x_i = \frac{A_{i1}}{|A|}, \;\; y_i = \frac{A_{i2}}{|A|}, \;\; i = 1, 2.$$

განვიხილოთ შემდეგი მატრიცა:

$$B = (\overline{u}_1, \overline{u}_2),$$

სადაც

$$\overline{u}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \;\; i = 1, 2.$$

ვაჩვენოთ, რომ A და B მატრიცების AB ნამრავლი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია. მართლაც, გვაქვს:

$$AB = (A\overline{u}_1, A\overline{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ ახლა ნებისმიერი n-ური რიგის $A = (a_{ij})_{n\times n}$ მატრიცა. შევადგინოთ შემდეგი სახის სისტემები:

$$A\overline{x} = \overline{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

სადაც $\overline{b}_i$ ისეთი ვექტორია, რომლის i-ური კომპონენტი ერთის ტოლია, ხოლო ყველა დანარჩენი კომპონენტი ნულია.

$$\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \overline{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ (1) სისტემის ამონახსნებია:

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

კრამერის წესის გამოყენებით მივიღებთ:

$$x_{ik} = \frac{A_{ik}}{|A|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

განვიხილოთ შემდეგი მატრიცა:

$$B = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n),$$

სადაც

$$\overline{u}_i = \begin{pmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ცხადია გვექნება:

$$AB = (A\overline{u}_1, A\overline{u}_2, \ldots, A\overline{u}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, მაშინ არსებობს ისეთი B მატრიცა, რომლისთვისაც AB ნამრავლი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია.

ასევე ადვილად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ BA ნამრავლი ერთეულოვანი მატრიცის ტოლია. შემოვიღოთ აღნიშვნა $S = BA$. ცხადია გვაქვს:

$$S^2 = S. \tag{2}$$

მართლაც,

$$S^2 = BABA = BIA = BA = S.$$

რადგან

$$|S| = |BA| = |B||A| = |AB| = 1,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი T მატრიცა, რომ

$$ST = I. \tag{3}$$

ცხადია (2)-დან მიიღება:

$$S^2T = ST.$$

აქედან კი (3)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$S = BA = I.$$

ამრიგად, საბოლოოდ ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ A მატრიცა არაგადაგვარებულია, მაშინ არსებობს ისეთი B მატრიცა, რომლისთვისაც მართებულია დამოკიდებულება:

$$AB = BA = I.$$

B-ს უწოდებენ A-ს შებრუნებულს და აღნიშნავენ A^{-1}-ით, ე.ი. გვაქვს:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

თუ B მატრიცა ისეთია, რომ $AB = I$ ან $BA = I$, მაშინ ის ემთხვევა A^{-1}-ს. მართლაც გვაქვს:

$$B = A^{-1}AB = A^{-1}I = A^{-1},$$
$$B = BAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}.$$

ამით ჩვენ ვაჩვენეთ შებრუნებული მატრიცის ერთადერთობაც.

ცხადია, თუ A მატრიცის შებრუნებული არის A^{-1}, მაშინ A^{-1}-ის შებრუნებული იქნება A, ე.ი. $(A^{-1})^{-1} = A$.

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, თუ განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარედ ერთეულოვან სვეტ-ვექტორებს ავიღებთ, მაშინ მატრიცა, რომლის სვეტები წარმოადგენს შესაბამისი ამონახსნებისაგან შედგენილ სვეტ-ვექტორებს, იქნება სისტემის მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. აქედან გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტი: თუ A მატრიცას გაუსის გამორიცხვის მეთოდის გამოყენებით მივიყვანთ ერთეულოვან მატრიცაზე და პარალელურად ზუსტად იგივე გარდაქმნებს ჩავატარებთ ერთეულოვანი მატრიცისათვის, მაშინ მიღებული მატრიცა იქნება A-ს შებრუნებული.

დაწვრილებით ალვწეროთ ეს ალგორითმი კონკრეტული მაგალითის შემთხვევაში.

ვიპოვოთ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

თუ პირველ სტრიქონს დაუმატებთ მეორე სტრიქონს, ხოლო შემდეგ პირველ სტრიქონს გავამრავლებთ 1/2-ზე და გამოვაკ-

ლებთ მესამე სტრიქონს, მივიღებთ:

$$A \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A_1.$$

იგივე გარდაქმნით ერთეულოვანი მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_1.$$

თუ A_1 მატრიცას მეორე სტრიქონს გამოვაკლებთ პირველ სტრიქონს, ხოლო შემდეგ მეორე სტრიქონს გავამრავლებთ 3/2-ზე და გამოვაკლებთ მესამე სტრიქონს, მივიღებთ:

$$A_1 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_2.$$

იგივე გარდაქმნით I_1 მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$I_1 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

თუ A_2 მატრიცის მესამე სტრიქონს გავამრავლებთ 2/5-ზე და გამოვაკლებთ პირველ სტრიქონს, ხოლო შემდეგ მესამე სტრიქონს გავამრავლებთ 3/5-ზე და დავუმატებთ მეორე სტრქონს

მივიღებთ:

$$A_2 \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A_3.$$

იგივე გარდაქმნით I_2 მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$I_2 \to \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

თუ A_3 მატრიცის პირველ და მესამე სტრიქონს გავყოფთ შესაბამისად 2-ზე და -5-ზე, მივიღებთ:

$$A_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

იგივე გარდაქმნით I_3 მატრიცა მიიღებს სახეს:

$$I_3 \to \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = I_4.$$

I_4 მატრიცა იქნება A-ს შებრუნებული. მართლაც, გვაქვს: $AI_4 = I$, ე.ი. $A^{-1} = I_4$.

თუ A მატრიცის a_{11} ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ ადგილებს შევუცვლით პირველ სტრიქონს და ერთ-ერთ იმ სტრიქონს, რომლის პირველი ელემენტი ნულისაგან განსხვავებულია. ცხადია, ერთეულოვანი მატრიცის შესაბამის სტრიქონებსაც ადგილები უნდა შევუცვალოთ.

განვიხილოთ ასეთი შემთხვევა.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A_1,$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_1,$$

$$A_1 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A_2,$$

$$I_1 \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

$$A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_2 \to \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = I_3.$$

A-ს შებრუნებული იქნება I_3 მატრიცა, ე.ი. $A^{-1} = I_3$.

§8. მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები

1. **საკუთრივი ვექტორების თვისება.** ვთქვათ, მოცემულია კვადრატული A მატრიცა, რომლის ელემენტებია ნამდვილი რიცხვები.

არანულოვან $\overline{x}$ ვექტორს უწოდებენ A მატრიცის **საკუთრივ ვექტორს**, თუ არსებობს ისეთი λ რიცხვი, რომ

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}. \tag{1}$$

ასეთ λ რიცხვს უწოდებენ A მატრიცის **საკუთრივ რიცხვს**. $\overline{x}$ ვექტორი არის ამ λ საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი.

სიმარტივისათვის განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A არის მეორე რიგის მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

მაშინ (1) ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

სადაც x_1 და x_2 არის $\overline{x}$ ვექტორის კომპონენტები.

მივიღეთ წრფივი ერთგვაროვანი სისტემა, რომლის მატრიცა შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda I.$$

როგორც ცნობილია (2) სისტემას არანულოვანი ამონახსენი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ე.ი.

$$|A - \lambda I| = 0.$$

(3) განტოლებას უწოდებენ A მატრიცის **მახასიათებელ** განტოლებას. სწორედ მისი ფესვები წარმოადგენს საკუთრივ რიცხვებს.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 1. *განსხვავებული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.*

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_m \tag{4}$$

წარმოადგენს A მატრიცის $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ განსხვავებული საკუთრივი რიცხვების შესაბამის საკუთრივ ვექტორთა სისტემას. ვაჩვენოთ ინდუქციით, რომ (4) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ცხადია $\overline{x}_1$ ვექტორი წრფივად დამოუკიდებელია ($\overline{x}_1 \neq \overline{0}$). ვთქვათ

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{k-1} \quad (k < m)$$

სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია და ვაჩვენოთ, რომ

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k$$

სისტემაც წრფივად დამოუკიდებელი იქნება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ ცხადია გვექნება

$$\overline{x}_k = \alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \overline{x}_{k-1}. \tag{5}$$

აქედან ვღებულობთ

$$A\overline{x}_k = \alpha_1 A\overline{x}_1 + \alpha_2 A\overline{x}_2 + \cdots + \alpha_{k-1} A\overline{x}_{k-1}. \tag{6}$$

რადგან პირობის ძალით $A\overline{x}_i = \lambda_i \overline{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, ამიტომ (6) ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$\lambda_k \overline{x}_k = \alpha_1 \lambda_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} \overline{x}_{k-1}. \tag{7}$$

თუ (5) ტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ λ_k-ზე და გამოვაკლებთ მე-7 ტოლობას, მივიღებთ:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\overline{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)\overline{x}_2 + \\ + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\overline{x}_{k-1} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ:

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{8}$$

ვინაიდან ვექტორთა სისტემა $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ ინდუქციის თანახმად წრფივად დამოუკიდებელია.

თეორემის პირობის თანახმად $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ საკუთრივი რიცხვები განსხვავებულია, ამიტომ (8)-დან თავის მხრივ გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0.$$

მაშინ (5)-დან მიიღება: $\overline{x}_k = \overline{0}$, რაც ეწინააღმდეგება საკუთრივი ვექტორის განმარტებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

2. მსგავსი მატრიცების საკუთრივი რიცხვები. ერთნაირი რიგის A და B კვადრატულ მატრიცებს უწოდებენ **მსგავს მატრიცებს**, თუ არსებობს არაგადაგვარებული C მატრიცა ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა:

$$B = C^{-1}AC. \tag{9}$$

ცხადია, თუ A და B მატრიცები მსგავსია, მაშინ მსგავსი იქნება B და A მატრიცები, რადგანაც (9) წარმოდგენიდან გამომდინარეობს:

$$A = S^{-1}BS,$$

სადაც $S = C^{-1}$.

მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. *მსგავს მატრიცებს ერთნაირი საკუთრივი რიცხვები აქვთ.*

დამტკიცება. თუ ვაჩვენებთ, რომ მსგავსი მატრიცების მახასიათებელი განტოლებები ემთხვევა ერთმანეთს, ამით თეორემის მართებულობა ნაჩვენები იქნება.

ვთქვათ A და B მატრიცები მსგავსია, ე.ი. ადგილი აქვს (9) წარმოდგენას. მაშინ მარტივი გარდაქმნით მიიღება:

$$B - \lambda I = C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C = C^{-1}(A - \lambda I)C.$$

აქედან კი, მატრიცთა ნამრავლის დეტერმინანტის თვისების თანახმად, ვღებულობთ:

$$|B - \lambda I| = |C^{-1}(A - \lambda I)C| = |C^{-1}||A - \lambda I||C| =$$

$$= (|C^{-1}||C|)|A - \lambda I| = |C^{-1}C||A - \lambda I| = |A - \lambda I|,$$

რისი ჩვენებაც გვინდოდა.

3. სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები. სანამ სიმეტრიულ მატრიცას განვმარტავდეთ, განვმარტოთ ტრანსპონირებული მატრიცა.

A მატრიცის **ტრანსპონირებული** ეწოდება ისეთ A' მატრიცას, რომლის სტრიქონები (სვეტები) წარმოადგენს შესაბამისად A მატრიცის სვეტებს (სტრიქონებს), ე.ი. $A' = (a_{ji})$ $(A = (a_{ij}))$.

მაგალითად, ვთქვათ გვაქვს:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

მაშინ A' მატრიცა იქნება:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

A მატრიცას ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ $A = A'$, ე.ი. $a_{ij} = a_{ji}$.

თუ A კვადრატული მატრიცაა, მაშინ ნებისმიერი $\overline{x}$ და $\overline{y}$ ვექტორისათვის მართებულია ტოლობა:

$$A\overline{x}\cdot\overline{y} = \overline{x}\cdot A'\overline{y}, \tag{10}$$

სადაც გამრავლების ქვეშ გვესმის სკალარული ნამრავლი.

ვაჩვენოთ (10) ტოლობა მესამე რიგის მატრიცისათვის

$$\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), \quad \overline{a}^i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix},$$

მაშინ გვექნება:

$$A\overline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 \end{pmatrix} \overline{x} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{a}_1\cdot\overline{x} \\ \overline{a}_2\cdot\overline{x} \\ \overline{a}_3\cdot\overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1\overline{a}^1 + x_2\overline{a}^2 + x_3\overline{a}^3.$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$A'\overline{y} = \begin{pmatrix} \overline{a}^1\cdot\overline{y} \\ \overline{a}^2\cdot\overline{y} \\ \overline{a}^3\cdot\overline{y} \end{pmatrix} = y_1\overline{a}_1 + y_2\overline{a}_2 + y_3\overline{a}_3.$$

ამ ფორმულების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$A\overline{x}\cdot\overline{y} = (\overline{a}_1\cdot\overline{x})y_1 + (\overline{a}_2\cdot\overline{x})y_2 + (\overline{a}_3\cdot\overline{x})y_3 =$$

$$= \overline{x}\cdot(y_1\overline{a} + y_2\overline{a}_2 + y_3\overline{a}_3) = \overline{x}\cdot A'\overline{y}.$$

ზოგად შემთხვევაში (10) ტოლობა ანალოგიურად მტკიცდება.

ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან თეორემას.

თეორემა 3. *ნამდვილი სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია.*

დამტკიცება. დაწვრილებით განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A არის მეორე რიგის მატრიცა,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

შევადგინოთ მახასიათებელი განტოლება:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \qquad (11)$$

რადგან პირობის თანახმად A მატრიცა სიმეტრიულია ($a_{12} = a_{21}$), ამიტომ (11) კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტისათვის გვაქვს:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ (11) მახასიათებელი განტოლების ფესვები ნამდვილია. ცხადია, თუ $D = 0$, მაშინ (11) განტოლების ფესვები ტოლია, ამასთან $a_{11} = a_{22}$ და $a_{12} = 0$. ამ შემთხვევაში A მატრიცას ექნება სახე:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, თუ მეორე რიგის სიმეტრიული A მატრიცას საკუთრივი რიცხვები ((11) მახასიათებელი განტოლების ფესვები) λ_1 და λ_2 ტოლია, მაშინ A მატრიცა დიაგონალურია, ამასთან დიაგონალზე მდგომი ელემენტები ტოლია.

განვიხილოთ ახლა შემთხვევა, როცა A არის მესამე რიგის მატრიცა,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

ცხადია, მისი მახასიათებელი განტოლება $|A - \lambda I| = 0$ იქნება მესამე ხარისხის. როგორც ცნობილია, მესამე ხარისხის განტოლებას ერთი ფესვი მაინც აქვს ნამდვილი. ვთქვათ ეს ფესვია $\lambda = \lambda_1$. A მატრიცის λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი ავღნიშნოთ $\overline{x}_1 = (\alpha, \beta, \gamma)$-ით. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\overline{x}_1$ ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლია,

$$|\overline{x}_1| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1.$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში ავიღებთ $\overline{y}_1 = \frac{\overline{x}_1}{|\overline{x}_1|}$ ვექტორს. ცხადია მისი სიგრძე ერთის ტოლია და $A\overline{y}_1 = \lambda_1 \overline{y}_1$.

ავაგოთ ისეთი ერთეულოვანი სიგრძის $\overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები, რომ $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები მართობული იყოს. ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ეს ყოველთვის არის შესაძლებელი. მართლაც, თუ α, β და γ კომპონენტებიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია (დანარჩენი ორი კომპონენტი ერთდროულად ნულის ტოლი არ იქნება, რადგან $\overline{x}_1$ საკუთრივი ვექტორია), ვთქვათ მაგალითად $\gamma = 0$, მაშინ (ნიშნის სიზუსტით) $\overline{x}_2 = (-\beta, \alpha, 0)$ და $\overline{x}_3 = (0, 0, 1)$. თუ არცერთი კომპონენტი არ უდრის ნულს, მაშინ საძებნი ვექტორები იქნება (ნიშნის სიზუსტით):

$$\overline{x}_2 = \gamma_0(-\beta, \alpha, 0), \quad \overline{x}_3 = \gamma_0(\alpha\gamma, \beta\gamma, -(\alpha^2 + \beta^2)),$$

სადაც

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

მართლაც გვაქვს:

$$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = (\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma_0 = 0,$$

$$\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 = \gamma_0\Big(\alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - (\alpha^2 + \beta^2)\gamma\Big) = 0,$$

$$\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = (\alpha\beta - \beta\alpha)\gamma\gamma_0 = 0,$$

$$|\overline{x}_2|^2 = \gamma_0^2(\alpha^2 + \beta^2) = 1,$$

$$|\overline{x}_3|^2 = \gamma_0^2\Big((\alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2\Big) =$$

$$= \gamma_0^2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 1.$$

განვიხილოთ T მატრიცა, რომლის სვეტებია $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები:

$$T = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3).$$

მაშინ T' არის მატრიცა, რომლის სტრიქონებია $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები:

$$T' = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix}.$$

იმის გამო, რომ $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები მართობულია (ორთოგონალურია), ვღებულობთ:

$$T'T = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_1 & \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 & \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 & \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_2 & \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1 & \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_2 & \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$T'T = TT' = I. \tag{12}$$

მატრიცას, რომელიც აკმაყოფილებს ამ თვისებას უწოდებენ **ორთოგონალურ** მატრიცას.

(12) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $T^{-1} = T'$, ე.ი. ორთოგონალური მატრიცის შებრუნებული მატრიცა მის ტრანსპონირებულს ემთხვევა.

განვიხილოთ მატრიცა

$$B = T'AT.$$

A და B მატრიცების საკუთრივი რიცხვები ემთხვევა ერთმანეთს, როგორც მსგავსი მატრიცების (იხ. წინა პუნქტი). ჩავწეროთ გაშლილი სახით B მატრიცა. ჯერ ვიპოვოთ AT ნამრავლი, ხოლო შემდეგ კი - $T'(AT)$. აღვნიშნოთ A მატრიცის სტრიქონ-ვექტორები $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ და $\overline{a}_3$-ით. მაშინ AT ნამრავლი ასე ჩაიწერება:

$$AT = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \\ \overline{a}_2 \\ \overline{a}_3 \end{pmatrix} (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = \begin{pmatrix} \overline{a}_1 \cdot \overline{x}_1 & \overline{a}_1 \cdot \overline{x}_2 & \overline{a}_1 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{a}_2 \cdot \overline{x}_1 & \overline{a}_2 \cdot \overline{x}_2 & \overline{a}_2 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{a}_3 \cdot \overline{x}_1 & \overline{a}_3 \cdot \overline{x}_2 & \overline{a}_3 \cdot \overline{x}_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (A\overline{x}_1, A\overline{x}_2, A\overline{x}_3).$$

ანალოგიურად მიიღება

$$B = T'(AT) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} (A\overline{x}_1, A\overline{x}_2, A\overline{x}_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_1 & \overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_2 & \overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_3 \\ \overline{x}_2 \cdot A\overline{x}_1 & \overline{x}_2 \cdot A\overline{x}_2 & \overline{x}_2 \cdot A\overline{x}_3 \\ \overline{x}_3 \cdot A\overline{x}_1 & \overline{x}_3 \cdot A\overline{x}_2 & \overline{x}_3 \cdot A\overline{x}_3 \end{pmatrix}$$

რადგანაც $\overline{x}_1$ ვექტორი არის სიმეტრიული A მატრიცის λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი ვექტორი, ხოლო $\overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები $\overline{x}_1$-ის ორთოგონალურია, ამიტომ გვექნება:

$$\overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_1 = \overline{x}_1 \cdot \lambda_1 \overline{x}_1 = \lambda_1(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_1) = \lambda_1,$$

$$\overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_2 = \overline{x}_2 \cdot A\overline{x}_1 = \lambda_1(\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1) = 0,$$

$$\overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_3 = \overline{x}_3 \cdot A\overline{x}_1 = \lambda_1(\overline{x}_3 \cdot \overline{x}_1) = 0,$$

$$\overline{x}_2 \cdot A\overline{x}_3 = \overline{x}_3 \cdot A\overline{x}_2.$$

ამრიგად, B მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

სადაც $b_{23} = b_{32}$.

დავწეროთ B მატრიცის მახასიათებელი განტოლება:

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

ცხადია, განტოლება

$$\begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

წარმოადგენს მეორე რიგის სიმეტრიული მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას, ამიტომ მისი ფესვები ნამდვილია. ამით ვაჩვენეთ, რომ მესამე რიგის სიმეტრიული ნამდვილი მატრიცის ყველა საკუთრივი რიცხვი ნამდვილია.

შემდეგი თეორემა ეხება სიმეტრიული მატრიცის საკუთრივ ვექტორებს.

თეორემა 4. *ნამდვილი სიმეტრიული მატრიცის განსხვავებული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ორთოგონალურია.*

დამტკიცება. ვთქვათ $\overline{x}_1$ და $\overline{x}_2$ არის სიმეტრიული A მატრიცის λ_1 და λ_2 საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები, $A\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_1$ და $A\overline{x}_2 = \lambda_2\overline{x}_2$. ცხადია ტოლობები:

$$A\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 = \lambda_1(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2), \quad \overline{x}_1 \cdot A\overline{x}_2 = \lambda_2(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2).$$

A მატრიცის სიმეტრიულობის გამო ამ ტოლობის მარცხენა მხარეები ტოლია, ამიტომ ტოლი იქნება მარჯვენა მხარეებიც. ე.ი. გვაქვს:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) = 0.$$

თუ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, მაშინ ცხადია $(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) = 0$. რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

§9. მატრიცის დიაგონალიზაცია

ბევრი პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნისათვის დიდი გამოყენება აქვს მატრიცის დიაგონალიზაციას, რაც ნიშნავს არაგადაგვარებული გარდაქმნით მატრიცის მიყვანას დიაგონალურ სახეზე. მკაცრი განმარტება კი ასეთია:

A მატრიცის **დიაგონალიზაციას** უწოდებენ ისეთი არაგადაგვარებულ T მატრიცის აგებას, რომლისთვისაც გვაქვს:

$$T^{-1}AT = D, \tag{1}$$

სადაც D არის დიაგონალური მატრიცა.

იბადება კითხვა: რა გზით და როგორი სახის მატრიცები მიიყვანება დიაგონალურ სახეზე? (1) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ A და D მატრიცების საკუთრივი რიცხვები

ემთხვევა ერთმანეთს, როგორც მსგავსი მატრიცების. ვინაიდან D მატრიცა დიაგონალურია, ამიტომ მის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ელემენტები იქნება A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები. ამრიგად, (1) ტოლობიდან მიიღება:

$$AT = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

სადაც $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ არის A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები.

ვთქვათ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ არის T მატრიცის სვეტ-ვექტორები. მაშინ (2) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$A\overline{x}_i = \lambda_i \overline{x}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\overline{x}_i$ ვექტორები წარმოადგენს A მატრიცის საკუთრივ ვექტორებს.

ვთქვათ, A მატრიცის ყველა λ_i საკუთრივი რიცხვი განსხვავებულია. თუ T არის მატრიცა, რომლის სვეტები წარმოადგენენ A მატრიცის შესაბამის საკუთრივ ვექტორებს, მაშინ მართებულია (2) წარმოდგენა. ჩვენ წინა პარაგრაფის დასაწყისში ვაჩვენეთ, რომ განსხვავებული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. აქედან გამომდინარეობს, რომ T არაგადაგვარებული მატრიცაა, ე.ი. არსებობს T^{-1}, მაშინ (2) წარმოდგენიდან მიიღება:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ამრიგად, მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. თუ A მატრიცის $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ საკუთრივი რიცხვები განსხვავებულია, მაშინ არსებობს არაგადაგვარებული T მატრიცა ისეთი, რომ ადგილი აქვს (3) წარმოდგენას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ისეთი მატრიცები, რომლებიც არაგადაგვარებული გარდაქმნით არ მიიყვანება დიაგონალურ სახეზე. განვიხილოთ მეორე რიგის მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ, არსებობს ისეთი არაგადაგვარებული T მატრიცა, რომ

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

მაშინ T-ს სვეტები უნდა იყოს A-ს საკუთრივი ვექტორები.
მახასიათებელ განტოლებას

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

აქვს $\lambda = 1$ ორჯერადი ფესვი. საკუთრივი ვექტორები განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1, \\ x_2 &= x_2. \end{aligned}$$

მისი ამონახსენია $x_1 = k$ და $x_2 = 0$, k - ნებისმიერია. ამრიგად, A მატრიცის ყველა საკუთრივი ვექტორი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\overline{x} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ეს ნიშნავს, რომ T მატრიცა გადაგვარებულია, ე.ი. $|T| = 0$.
სიმეტრიული მატრიცებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 2. ყოველი ნამდვილი სიმეტრიული A მატრიცა ორთოგონალური გარდაქმნით მიიყვანება დიაგონალურ სახეზე. ან რაც იგივეა, არსებობს ორთოგონალური ისეთი T მატრიცა, რომ

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

სადაც λ_i – A მატრიცის საკუთრივი რიცხვებია.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ განსხვავებულია. მაშინ წინა პარაგრაფის თეორემა 4-ის თანახმად შესაბამისი

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$$

საკუთრივი ვექტორები ორთოგონალურია. ამასთან შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მათი სიგრძეები ერთის ტოლია $|x_i| = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. წინააღმდეგ შემთხვევაში განვიხილავთ $\overline{y}_i = \frac{\overline{x}_i}{|\overline{x}_i|}$ ვექტორებს.

ცხადია, საძებნი მატრიცა იქნება:

$$T = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n).$$

მართლაც, გვაქვს:

$$AT = (A\overline{x}_1, A\overline{x}_2, \dots, A\overline{x}_n) = (\lambda_1\overline{x}_1, \lambda_2\overline{x}_2, \dots, \lambda_n\overline{x}_n),$$

გავამრავლოთ ახლა AT მატრიცა მარცხნიდან T' მატრიცაზე,

მივიღებთ:

$$T'(AT) = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} (\lambda_1 \overline{x}_1, \lambda_2 \overline{x}_2, \ldots, \lambda_n \overline{x}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1(\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2) & \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 & \cdots & \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_n \\ \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_1 & \lambda_2(\overline{x}_2 \cdot \overline{x}_2) & \cdots & \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_n \\ \vdots & & & \\ \overline{x}_n \cdot \overline{x}_1 & \overline{x}_n \cdot \overline{x}_2 & \cdots & \lambda_n(\overline{x}_n \cdot \overline{x}_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

განვიხილოთ ჯერადი საკუთრივი რიცხვების შემთხვევა მეორე და მესამე რიგის მატრიცებისათვის. წინა პარაგრაფში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ მეორე რიგის სიმეტრიული მატრიცა ავტომატურად დიაგონალური სახისაა, თუ მას აქვს ჯერადი საკუთრივი რიცხვები.

ვთქვათ, ახლა A არის ისეთი მესამე რიგის სიმეტრიული მატრიცა, რომლის საკუთრივი რიცხვები ჯერადია. რაც იმას ნიშნავს, რომ A-ს საკუთრივი რიცხვებიდან ორი მათგანი მაინც არის ერთმანეთის ტოლი. ვთქვათ $\lambda_2 = \lambda_3$ და $\overline{x}_1$ არის λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი. ავაგოთ ისეთი ორთოგონალური $\overline{x}_2$ და $\overline{x}_3$ ვექტორები, რომლებიც ორთოგონალურია $\overline{x}_1$ ვექტორის, ამასთან იგულისხმება, რომ მათი სიგრძეები ერთის ტოლია. წინა პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ ასეთი ვექტორები ყოველთვის შეგვიძლია ავაგოთ.

საძებნი მატრიცა იქნება:

$$T = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

მართლაც გვაქვს (იხ. წინა პარაგრაფი):

$$T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

სადაც $b_{23} = b_{32}$.

ცხადია, მახასიათებელი განტოლება იქნება:

$$(\lambda_1 - \lambda) \begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

რადგან A და $T'AT$ მატრიცების საკუთრივი რიცხვები ერთიდაიგივეა, როგორც მსგავსი მატრიცების, ამიტომ (5) განტოლების ფესვებია λ_1 და $\lambda_2 = \lambda_3$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{vmatrix} b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

განტოლების, რომელიც წარმოადგენს მეორე რიგის სიმეტრიული მატრიცის მახასიათებელ განტოლებას, ფესვებია $\lambda_2 = \lambda_3$. მაშინ გვაქვს (იხ. წინა პარაგრაფის თეორემა 3-ის დამტკიცება):

$$b_{22} = b_{33} = \lambda_2 = \lambda_3, \quad b_{23} = b_{32} = 0.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს (4)-ში, მივიღებთ:

$$T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

ზოგად შემთხვევაში ორთოგონალური გარდაქმნის არსებობა მტკიცდება ინდუქციის გამოყენებით.

თავი მეოთხე

წრფე და სიბრტყე

§1. წრფე სიბრტყეზე

1. წრფის ზოგადი განტოლება. განვიხილოთ შემდეგი სახის განტოლება:

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

სადაც A და B კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან, $(x; y)$ წარმოადგენს წერტილის კოორდინატებს სიბრტყეზე.

ვაჩვენოთ, რომ სიბრტყის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, წარმოადგენს წრფეს.

ვთქვათ $B \neq 0$, მაშინ (1) განტოლება ასე ჩაიწერება:

$$y = ax + b, \tag{2}$$

სადაც $a = -A/B$ და $b = -C/B$.

ავიღოთ სიბრტყეზე ნებისმიერი სამი წერტილი $A(x_1; y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3; y_3)$, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (2) განტოლებას, ე.ი. გვაქვს:

$$y_k = ax_k + b, \quad k = 1, 2, 3.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3$$

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის გამოყენებით ვიპოვოთ AB, BC და AC მონაკვეთების სიგრძეები:

$$|AC| = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$|AB| = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \qquad |BC| = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

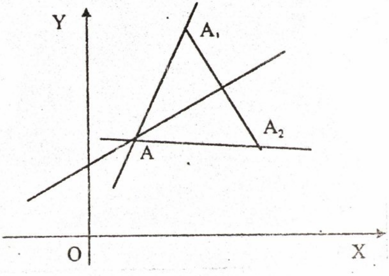
ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|AC| = |AB| + |BC|.$$

რადგანაც ეს ტოლობა სრულდება მხოლოდ წრფეზე მდებარე წერტილებისათვის, ამიტომ აქედან ვასკვნით, რომ (2) განტოლება ან რაც იგივეა (1) განსაზღვრავს წრფეს.

ახლა ვაჩვენოთ პირიქით. სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი წრფის განტოლება მოიცემა (1)-ის სახით.

I. **ხერხი**. ვთქვათ $A_1(x_1; y_1)$ და $A_2(x_2; y_2)$ მოცემული წრფის მიმართ სიმეტრიულად განლაგებული განსხვავებული წერტილებია (სურ. 24).



სურ. 24.

მაშინ წრეის ნებისმიერი $A(x;y)$ წერტილი თანაბრად არის დაშორებული A_1 და A_2 წერტილებიდან და პირიქით, A_1 და A_2 წერტილებიდან თანაბრად დაშორებული A წერტილი ძევს წრფეზე.

თუ გაუტოლებთ $|AA_1|$ და $|AA_2|$ მანძილებს, მივიღებთ:

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2.$$

გამარტივების შედეგად გვექნება:

$$2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0.$$

ცხადია, ეს განტოლება წარმოადგენს (1) სახის განტოლებას.

II. **ხერხი.** ავიღოთ წრფეზე ორი განსხვავებული წერტილი, $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$. ვთქვათ $M(x;y)$ არის ამავე წრფის ნებისმიერი წერტილი. ცხადია

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)\ \&\ \overline{AM}=(x-x_1;y-y_1).$$

განვიხილოთ შემდეგი ვექტორი:

$$\overline{a}=(y_2-y_1;-(x_2-x_1))$$

იგი მართობულია $\overline{AB}$ ვექტორის. მართლაც გვაქვს:

$$\overline{a}\cdot\overline{AB}=(y_2-y_1)(x_2-x_1)-(x_2-x_1)(y_2-y_1)=0.$$

რადგანაც $\overline{AM}$ და $\overline{AB}$ ვექტორი ერთ წრფეზე ძევს, ამიტომ ცხადია

$$\overline{a}\cdot\overline{AM}=0.$$

გაშლილი სახით გვაქვს:

$$(y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0. \tag{3}$$

აქედან გამარტივების შედეგად მიიღება:

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y+x_2y_1-x_1y_2=0,$$

რაც (1) სახის განტოლებას წარმოადგენს.

შენიშვნა. რადგანაც $\overline{AM}$ და $\overline{AB}$ ვექტორები კოლინეარულია, ამიტომ ამ ვექტორებისგან შედგენილი სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

ეს პირობაც ასევე მოგვცემს (3) ტოლობას.

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ სიბრტყის წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებს (1) განტოლებას, წარმოადგენს წრფეს და პირიქით სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი წრფის განტოლება მოიცემა (1)-ის სახით.

(1) განტოლებას უწოდებენ წრფის ზოგადი სახის განტოლებას.

თუ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$, მაშინ (3) ტოლობა შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

ამ განტოლებას უწოდებენ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებას.

ამოცანა 1. დაწერეთ $A(1;2)$ და $B(3;4)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

(4)-ის თანახმა გვაქვს:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{4-2},$$

ანუ

$$y = x + 1.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს საძებნი წრფის განტოლებას.

ამოცანა 2. დაწერეთ $0X$ და OY ღერძების განტოლებები.

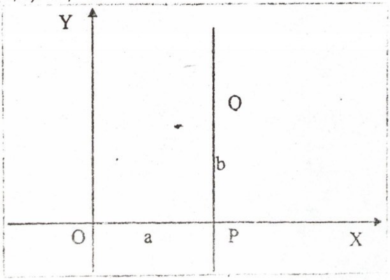
ცხადია, კოორდინატთა სათავეზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლება იქნება

$$Ax + By = 0. \qquad (5)$$

დავწეროთ OX ღერძის განტოლება. ავიღოთ OX ღერძზე ნებისმიერი წერტილი სათავისგან განსხვავებული, მაგალითად $(1;0)$. თუ ჩავსვამთ მის კოორდინატებს (5)-ში, მივიღებთ $A = 0$. მაშინ (5) განტოლება მიიღებს სახეს $By = 0$. რადგანაც A და B ერთდროულად არ უდრის ნულს, ამიტომ $y = 0$. ანალოგიურად მიიღება, რომ $x = 0$ არის OY ღერძის განტოლება.

ამოცანა 3. დაწერეთ $P(a;0)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც პარალელურია OY ღერძის.

ავიღოთ საძებნ წრფეზე P წერტილისაგან განსხვავებული რაიმე Q წერტილი (სურ. 25). Q წერტილის კოორდინატები იქნება $(a;b)$, $b \neq 0$.



სურ. 25.

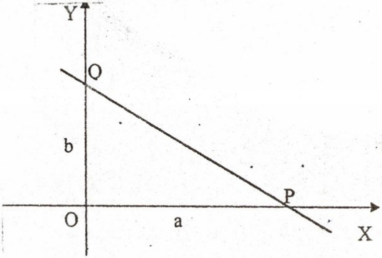
(3) განტოლების თანახმა გვაქვს:

$$(b-0)(x-a)-(a-a)(y-0)=0,$$

ანუ $x = a$.

ანალოგიურად მიიღება OX ღერძის პარალელური წრფის განტოლება. მას აქვს შემდეგი სახე: $y = a$ (a-ს აბსოლუტური სიდიდე წარმოადგენს ამ წრფის მიერ OY ღერძზე მოჭრილი მონაკვეთის სიგრძეს).

2. წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში. განვიხილოთ წრფე, რომელიც არ გადის კოორდინატთა სათავეზე და კვეთს OX და OY ღერძებს შესაბამისად P და Q წერტილებში (სურ. 26). ვთქვათ P წერტილის კოორდინატებია $(a;0)$, ხოლო Q წერტილის – $(0;b)$. დავწეროთ PQ წრფის განტოლება.



სურ. 26.

(4) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

ანუ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (6)$$

ვთქვათ წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით:

$$Ax + By + C = 0.$$

თუ კოეფიციენტები A, B და C არცერთი არ უდრის ნულს, მაშინ ამ განტოლებას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს (6)-ის სახის განტოლებას.

(6) განტოლებას უწოდებენ წრფის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში, რადგანაც a და b კოეფიციენტების აბსოლუტური სიდიდეები წარმოადგენენ შესაბამისად ამ წრფის მიერ OX და OY ღერძებზე მოჭრილი მონაკვეთების სიგრძეებს.

3. წრფის მიმმართველი ვექტორი. ვაჩვენოთ, რომ ვექტორი $\overline{a} = (-B; A)$ პარალელურია (1) წრფის. (1) განტოლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$Ax + B(y + \frac{C}{B}) = 0, \quad B \neq 0. \qquad (7)$$

თუ $x = 0$, მაშინ $y = -C/B$, ე.ი წერტილი $P(0; -C/B)$ ძევს (1) წრფეზე. ავიღოთ ამ წრფეზე ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილი. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\overline{a}$ ვექტორი პარალელურია $\overline{PM}$ ვექტორის, რომელიც ძევს (1) წრფეზე. ცხადია $\overline{PM}$ ვექტორის კოორდინატებია $(x; y + C/B)$.

(7) განტოლება მეორენაირად ასე ჩაიწერება: $\overline{n} \cdot \overline{PM} = 0$, სადაც $\overline{n} = (A; B)$. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\overline{n}$ და $\overline{PM}$ ვექტორები მართობულია. მართობულია ასევე $\overline{a}$ და $\overline{n}$ ვექტორები, რადგანაც გვაქვს:

$$\overline{a} \cdot \overline{n} = -BA + AB = 0.$$

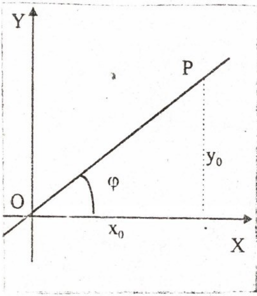
ამრიგად, $\bar{a}$ და $\overline{PM}$ ვექტორები პარალელურია.

$\bar{a}$ ვექტორს უწოდებენ (1) წრფის მიმმართველ ვექტორს.

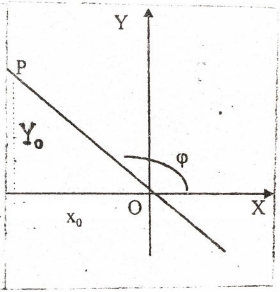
4. წრფის საკუთხო კოეფიციენტი და ორი წრფის პარალელურობის პირობა. განვიხილოთ

$$y = ax + b, \quad (a \neq 0), \tag{8}$$

სახის განტოლებით განსაზღვრული წრფე. ამ წრფის მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ φ-თი. ვაჩვენოთ, რომ $tg\varphi = a$.



სურ. 27.



სურ. 28.

ცხადია, (8) წრფის ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ მისი პარალელური $y = ax$ წრფე (მათი მიმმართველი ვექტორები ერთიდაიგივეა). ჩვენ უნდა განვიხილოთ ორი შემთხვევა (იხ. სურ. 27 და სურ. 28): ა) $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ და ბ) $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. ავიღოთ $y = ax$ წრფეზე ზედა ნახევარსიბრტყეში $P_0(x_0; y_0)$ წერტილი. მაშინ ტანგენსის განმარტების თანახმად, ორივე

შემთხვევაში გვექნება:

$$tg\varphi = \frac{y_0}{x_0} = \frac{ax_0}{x_0} = a.$$

თუ $a = 0$, მაშინ $\varphi = 0$ და $tg\varphi = a$ ტოლობა ამ შემთხვევაშიც სამართლიანია.

წრფის საკუთხო კოეფიციენტს უწოდებენ ამ წრფის მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხის ტანგენსს. თუ წრფის განტოლება მოცემულია (8)-ის სახით, მაშინ როგორც ვაჩვენეთ, მისი საკუთხო კოეფიციენტი a-ს ტოლია. (8) განტოლებას უწოდებენ წრფის განტოლებას **საკუთხო კოეფიციენტით.**

ჩამოვაყალიბოთ ახლა ორი წრფის პარალელურობის პირობ . წრფეები:

$$y = a_1x + b_1$$

და

$$y = a_2x + b_2$$

პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ წრფეების მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეების ტანგენსები ტოლია, ე.ი.

$$tg\varphi_1 = tg\varphi_2,$$

ანუ

$$a_1 = a_2.$$

5. მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლება. შევადგინოთ $A(x_0; y_0)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს φ კუთხეს, ე.ი. საძებნი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი $a = tg\varphi$. ბუნებრივია ასეთი წრფის განტოლება უნდა ვეძებოთ (8)-ის სახით. სადაც უცნობი b უნდა განისაზღვროს პირობიდან:

$$y_0 = ax_0 + b,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ (8) წრფე გადის A წერტილზე. თუ ამ პირობიდან განვსაზღვრავთ b, და ჩავსვამთ (8) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y - y_0 = a(x - x_0). \tag{9}$$

ამრიგად, (9) წარმოადგენს მოცემულ წერტილზე მოცემული მიმართულებით გამავალი წრფის განტოლებას.

ცხადია, (9) განტოლების სახით მოიცემა A წერტილზე გამავალი OY ღერძის არაპარალელური ნებისმიერი წრფის განტოლება (A წერტილზე გამავალი OY ღერძის პარალელური წრფის განტოლება იქნება $x = x_0$).

თუ (9) განტოლებაში a მივცემთ ყველა შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ A წერტილზე გამავალ ყველა წრფეს, რომელთა ერთობლიობას წრფეთა **კონას** უწოდებენ.

ამოცანა 4. დაწერეთ $A(-3;4)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის განტოლება, რომელიც OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს $135°$-იან კუთხეს.

საძებნი წრფის განტოლებას ვადგენთ (9) განტოლების სახით. ჩვენს შემთხვევაში გვაქვს:

$$x_0 = -3, \ y_0 = 4, \ a = tg135° = -tg45° = -1.$$

ამრიგად, საძებნი განტოლება იქნება

$$y - 4 = -1(x + 3),$$

ანუ

$$y = 1 - x.$$

ამოცანა 5. დაწერეთ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $A(1;2)$ წერტილზე და პარალელურია $2x - 3y + 1 = 0$ წრფის.

რადგანაც პარალელურ წრფეებს საკუთხო კოეფიციენტები ტოლი აქვთ, ამიტომ საძებნი წრფის საკუთხო კოეფიციენტი

ტოლი იქნება მოცემული წრფის საკუთხო კოეფიციენტის, $a = 2/3$. თუ ჩავსვავთ (9) განტოლებაში შემდეგ მონაცემებს:

$$x_0 = 1, \;\; y_0 = 2, \;\; a = \frac{2}{3},$$

მივიღებთ საძებნი წრფის განტოლებას:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1),$$

ანუ

$$2x - 3y + 4 = 0.$$

6. ორი წრფის მართობულობის პირობა. ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია ორი წრფე, რომელთა განტოლებები მოცემულია ზოგადი სახით:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \tag{10}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{11}$$

მათი მიმმართველი ვექტორები შესაბამისად იქნება:

$$\overline{a_1} = (-B_1; A_1) \;\; \& \;\; \overline{a_2} = (-B_2; A_2).$$

რადგანაც $\overline{a_1}$ ვექტორი პარალელურია (10) წრფის, ხოლო $\overline{a_2}$ ვექტორი - (11) წრფის, ამიტომ ეს წრფეები მართობულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{a_1}$ ვექტორი მართობულია $\overline{a_2}$ ვექტორის, რაც ეკვივალენტურია პირობის:

$$\overline{a_1} \cdot \overline{a_2} = 0.$$

გაშლილი სახით გვაქვს

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{12}$$

თუ წრფეების განტოლებები მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტებში,

$$y = a_1x + b_1$$

და

$$y = a_2x + b_2,$$

მაშინ (12) პირობა მიიღებს სახეს:

$$a_1a_2 + 1 = 0 \qquad (13)$$

ამოცანა 6. იპოვეთ k-ს მნიშვნელობები, რომელთათვისაც $y = kx + 1$ და $y = (k-2)x + 3$ წრფეები მართობულია.

მოცემული წრფეების საკუთხო კოეფიციენტებია შესაბამისად $a_1 = k$ და $a_2 = k - 2$. (13) პირობის თანახმა გვექნება:

$$k(k-2) + 1 = 0,$$
$$(k-1)^2 = 0,$$
$$k = 1.$$

მიღებულ მნიშვნელობას შეესაბამება შემდეგი მართობული წრფეები:

$$y = x + 1 \;\; \& \;\; y = -x + 3.$$

ამოცანა 7. შეადგინეთ $3x - y + 2 = 0$ წრფის მართობულად $A(-1;1)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება.

მოცემული და საძებნი წრფის საკუთხო კოეფიციენტები აღვნიშნოთ შესაბამისად a_1 და a_2-ით. ცხადია გვაქვს: $a_1 = 3$. თუ გამოვიყენებთ ორი წრფის პერპენდიკულარობის პირობას, $a_1a_2 = -1$, მივიღებთ:

$$3a_2 = -1.$$

აქედან

$$a_2 = -\frac{1}{3}.$$

ამრიგად, საძებნი წრფის განტოლება იქნება

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 1),$$

ანუ

$$x + 3y - 2 = 0.$$

7. კუთხე ორ წრფეს შორის. ვთქვათ, სიბრტყეზე ალებულია ორი წრფე. თუ ეს წრფეები პარალელურია ან ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ იგულისხმება, რომ მათ შორის კუთხე ნულის ტოლია. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა წრფეები კვეთს ერთმანეთს (სურ. 29).

კუთხე ორ წრფეს შორის ვუწოდოთ ამ წრფეების მიერ შედგენილ ვერტიკალურ კუთხეებს შორის უმცირეს.

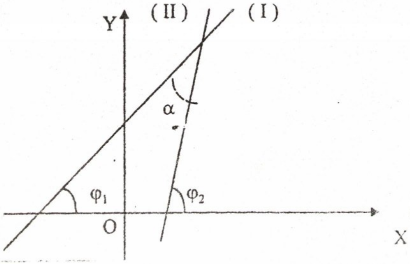
ვთქვათ, (I) და (II) წრფის განტოლებებია შესაბამისად

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

და

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

მაშინ მათი მიმმართველი ვექტორები იქნება $\overline{a_1} = (-B_1; A_1)$ და $\overline{a_2} = (-B_2; A_2)$.



სურ. 29.

ამ ვექტორების მიერ შედგენილი კუთხე ავღნიშნოთ φ-თი, ხოლო მოცემულ წრფეებს შორის კუთხე α-თი (სურ. 29). ცხადია გვექნება $\alpha = \varphi$ ან $\alpha = \pi - \varphi$.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}}{|\overline{a_1}||\overline{a_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

რადგანაც $\cos\alpha = \cos\varphi$ ან $\cos\alpha = \cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, ამიტომ გვექნება:

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{14}$$

ვთქვათ, ორივე წრფის განტოლება მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტებში:

$$y = k_1x + b_1,$$

$$y = k_2x + b_2.$$

ამ წრფეების მიერ OX ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხეები აღვნიშნოთ შესაბამისად φ_1-ით და φ_2-ით (სურ. 29). ცხადია გვექნება $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ ან $\alpha = \pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$. ადრე ვაჩვენეთ, რომ $tg\varphi_1 = k_1$ და $tg\varphi_2 = k_2$. ამ ტოლობების გათვალისწინებით მიიღება:

$$tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{15}$$

რადგანაც $tg\alpha = tg(\varphi_2 - \varphi_1)$ ან $tg\alpha = tg(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) = -tg(\varphi_2 - \varphi_1)$, ამიტომ გვექნება

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

ამოცანა 8. იპოვეთ კუთხე

$$y = 2x - 3$$

და

$$y = -3x + 2$$

წრფეებს შორის.

მოცემული წრფეების საკუთხო კოეფიციენტებია შესაბამისად $k_1 = 2$ და $k_2 = -3$. (15) ფორმულის თანახმად მივიღებთ:

$$tg\alpha = \left|\frac{-3-2}{1-2\cdot 3}\right| = 1.$$

აქედან $\alpha = 45^\circ$.

ამოცანა 9. იპოვეთ კუთხე

$$x - 2y + 3 = 0$$

და

$$x - 3 = 0$$

წრფეებს შორის.

ამ შემთხვევაში გამოვიყენოთ (14) ფორმულა. თუ ჩავსვამთ (14) ფორმულაში შესაბამის მნიშვნელობებს მივიღებთ:

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 1 + (-2)\cdot 0|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

აქედან

$$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

8. ორ პარალელურ წრფეს შორის მანძილის ფორმულა. ვთქვათ, მოცემულია ორი პარალელური წრფე:

$$Ax + By + C_1 = 0 \qquad (16)$$

და

$$Ax + By + C_2 = 0. \qquad (17)$$

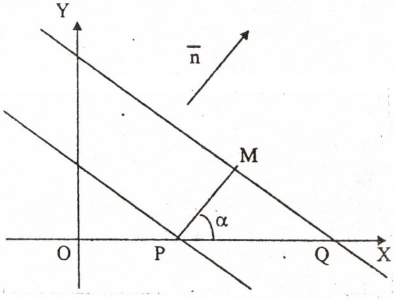
ვიპოვოთ მანძილი მათ შორის.

როგორც ცნობილია, A და B კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ, A არ უდრის ნულს. მაშინ ცხადია, მოცემული წრფეები გადაკვეთენ OX ღერძს. (16) წრფის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი

აღვნიშნოთ P-თი, ხოლო (17) წრფის - Q-თი (სურ. 30). მათი კოორდინატები შესაბამისად იქნება $(x_1; 0)$ და $(x_2; 0)$, სადაც $x_1 = -C_1/A$ და $x_2 = -C_2/A$. დავუშვათ P-დან მეორე წრფეზე PM მართობი.

განვიხილოთ შემდეგი ვექტორი: $\overline{n} = (A; B)$. ცხადია $\overline{n}$ ვექტორი მართობული იქნება მოცემული წრფეების (იხ. პუნქტი 3). მაშინ ამ წრფეების მართობული PM წრფის მიერ OX ღერძთან შედგენილი ვერტიკალური კუთხეებიდან უმცირესს, თუ აღვნიშნავთ, α-თი გვექნება:

$$\cos\alpha = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



სურ. 30.

მოცემულ წრფეებს შორის მანძილი აღვნიშნოთ d-თი. ცხადია, d ტოლია PM მონაკვეთის სიგრძის. PMQ მართკუთხა სამკუთხედიდან გვაქვს:

$$d = |PQ| cos\alpha.$$

თუ ამ ფორმულებში ჩავსვამთ $\cos\alpha$-ს და $|PQ|$-ს მნიშვნელობას,

$$|PQ| = |x_2 - x_1| = \frac{|C_2 - C_1|}{|A|},$$

მივიღებთ:

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{18}$$

9. წერტილიდან წრფემდე მანძილის ფორმულა. ვთქვათ, მოცემულია $M(x_0; y_0)$ წერტილი და წრფე

$$Ax + By + C = 0. \tag{19}$$

ვიპოვოთ მანძილი M წერტილიდან მოცემულ წრფემდე.

გავავლოთ M წერტილზე (19) წრფის პარალელური წრფე. მისი განტოლება იქნება:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

ანუ

$$Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0. \tag{20}$$

M წერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი იგივეა რაც (20) წრფესა და მოცემულ წრფეს შორის მანძილი, რომელიც (18) ფორმულის საშუალებით განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{21}$$

ამრიგად, წერტილიდან წრფემდე მანძილი გამოითვლება (21) ფორმულით.

ამოცანა 10. დაწერეთ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

და

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

წრფეების მიერ შედგენილი კუთხეების ბისექტრისების განტოლებები (იგულისხმება, რომ ეს წრფეები კვეთენ ერთმანეთს).

აღვნიშნოთ $(x_0; y_0)$-ით ბისექტრისებზე აღებული წერტილის კოორდინატები. რადგანაც ბისექტრისაზე მდებარე წერტილები თანაბრადაა დაშორებული კუთხის გვერდებიდან, ამიტომ (21) ფორმულის თანახმად, გვექნება:

$$\frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x_0 + B_2y_0 + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

აქედან მიიღება:

$$(A_1 \pm \lambda A_2)x_0 + (B_1 \pm \lambda B_2)y_0 + (C_1 \pm \lambda C_2) = 0, \quad (22)$$

სადაც

$$\lambda = \sqrt{\frac{A_1^2 + B_1^2}{A_2^2 + B_2^2}}.$$

ვინაიდან $(x_0; y_0)$ წერტილი სავსებით ნებისმიერად არის აღებული ბისექტრისაზე, ამიტომ (22) განტოლებაში x_0 და y_0 შეგვიძლია შევცვალოთ შესაბამისად x და y ცვლადებით. ამრიგად, ორი გადამკვეთი წრფის მიერ შედგენილი კუთხეების ბისექტრისების განტოლებებია:

$$(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2) = 0$$

და

$$(A_1 - \lambda A_2)x + (B_1 - \lambda B_2)y + (C_1 - \lambda C_2) = 0.$$

ცხადია, ეს წრფეები მართობულია. მართლაც, მათი მიმმართველი ვექტორების სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(A_1^2 - \lambda^2 A_2^2) + (B_1^2 - \lambda^2 B_2^2) =$$

$$= (A_1^2 + B_1^2) - \lambda^2(A_2^2 + B_2^2) = 0,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წრფეები მართობულია.

ამოცანა 11. იპოვეთ მანძილი

$$3x + 4y - 15 = 0$$

და

$$3x + 4y + 20 = 0$$

პარალელურ წრფეებს შორის.

(18) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$d = \frac{|20 - (-15)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{35}{5} = 7.$$

ამოცანა 12. დაწერეთ $A(5; 2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება, რომელიც 4 ერთეულითაა დაშორებული $B(-3: 1)$ წერტილიდან.

შევადგინოთ A წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლება.

(9)-ის თანახმად A წერტილზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$y - 2 = k(x - 5), \tag{23}$$

ანუ

$$kx - y - 5k + 2 = 0.$$

ვინაიდან საძებნი წრფე 4 ერთეულითაა დაშორებული B-დან, ამიტომ (21) ფორმულის თანახმად, (23) წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უნდა განისაზღვროს პირობიდან:

$$\frac{|-3k - 1 - 5k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 4,$$

ანუ

$$|1 - 8k| = 4\sqrt{k^2 + 1}.$$

თუ ტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ კვადრატში და გავამარტივებთ, მივიღებთ:

$$45k^2 - 16k - 15 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია:

$$k_1 = \frac{11}{16}, \quad k_2 = -\frac{1}{4}.$$

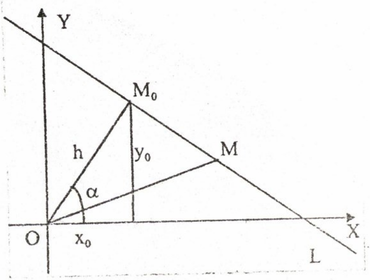
საძებნი წრფის განტოლებები იქნება:

$$y - 2 = \frac{11}{16}(x - 5) \ \& \ y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 5).$$

გამარტივების შემდეგ მიიღება:

$$11x - 16y - 23 = 0, \ \& \ 4y + x - 13 = 0.$$

10. წრფის ნორმალური განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია L წრფე, რომელიც დაშორებულია კოორდინატთა სათავიდან h-ის ტოლი მანძილით. დავუშვათ კოორდინათტა სათავიდან L-ზე მართობი. მისი ფუძე აღვნიშნოთ $M_0(x_0; y_0)$-ით (იხ. სურ. 31). ვთქვათ, $M(x; y)$ არის L წრფის ნებისმიერი წერტილი.



სურ. 31.

პითაგორას თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$|M_0M|^2 + h^2 = |OM|^2,$$

ანუ

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + h^2 = x^2 + y^2.$$

გამარტივების შემდეგ ვღებულობთ:

$$x_0x + y_0y - h^2 = 0. \qquad (24)$$

აღვნიშნოთ α-ტი OM_0 მართობის მიერ OX ღერძთან შედგენილი კუთხე. ცხადია გვაქვს:

$$x_0 = hcos\alpha, \qquad y_0 = hsin\alpha.$$

თუ ჩავსვამთ x_0 და y_0-ის მნიშვნელობებს (24) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$xcos\alpha + ysin\alpha - h = 0.$$

ამ განტოლებას უწოდებენ წრფის ნორმალური სახის განტოლებას.

ვთქვათ ახლა მოცემულია წრფის განტოლება ზოგადი სახით,

$$ax + by + c = 0, \qquad (25)$$

და დავიყვანოთ ის ნორმალურ სახეზე.

განვიხილოთ (25) განტოლების ნაცვლად მისი ეკვივალენტური შემდეგი განტოლება:

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c) = 0, \qquad (26)$$

სადაც

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

აღვნიშნოთ α-ტი (26) წრფის ნორმალური $\overline{n} = (a; b)$ ვექტორის მიერ OX ღერძთან შედგენილი კუთხე ($\overline{n}$ მართობულია (25)

წრფის, ამიტომ მას უწოდებენ ნორმალურ ვექტორს). ცხადია, გვაქვს:

$$cos\alpha = \lambda a, \qquad sin\alpha = \lambda b, \tag{27}$$

სადაც

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(27) ფორმულებს შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$cos(\pi - \alpha) = \lambda a, \qquad sin(\pi - \alpha) = \lambda b, \tag{28}$$

სადაც

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ კოორდინატთა სათავიდან (25) წრფემდე h მანძილი ტოლია $|\lambda c|$-ის, მაშინ (27) და (30) ფორმულების თანახმად (9) განტოლებიდან მიიღება:

$$xcos\alpha + ysin\alpha - h = 0,$$

როცა $c < 0$,

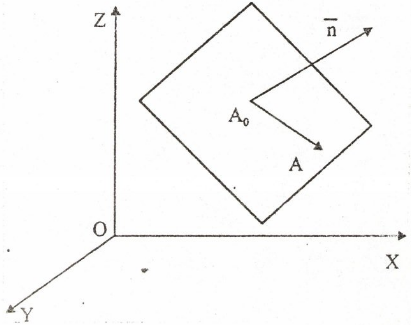
$$xcos(\pi - \alpha) + ysin(\pi - \alpha) - h = 0,$$

როცა $c > 0$. λ-ს ეწოდება მანორმირებელი მამრავლი. მისი ნიშანი c-ს ნიშნის საპირისპიროა. თუ $c = 0$, მაშინ λ-ს ნიშანი ნებისმიერად შეგვიძლია ავიღოთ.

§2. სიბრტყე

1. სიბრტყის ზოგადი განტოლება. შევადგინოთ სიბრტყის განტოლება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ვთქვათ, $A_0(x_0;y_0;z_0)$ სიბრტყის ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $\overline{n}(a;b;c)$ არის ამ სიბრტყის მართობული არანულოვანი ვექტორი. მაშინ სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი $A(x;y;z)$ წერტილისათვის, $\overline{A_0A}$ და $\overline{n}$ ვექტორები მართობულია (იხ. სურ. 32).



სურ. 32.

ამრიგად, გვაქვს:

$$\overline{A_0A}\cdot\overline{n}=0. \tag{1}$$

რადგანაც

$$\overline{A_0A}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$$

ამიტომ (1) ტოლობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

ანუ

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3}$$

სადაც

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

ამრიგად, ნებისმიერი სიბრტყის განტოლება წრფივია წერტილის x, y და z კოორდინატების მიმართ.

ვაჩვენოთ, რომ (3) სახის ნებისმიერი განტოლება (a, b და c ერთდროულად არ უდრის ნულს) განსაზღვრავს სიბრტყეს.

ვთქვათ, x_0, y_0 და z_0 წარმოადგენს (3) განტოლების რომელიმე ამონახსნს (მაგალითად, თუ $a \neq 0$, მაშინ $x_0 = -\frac{d}{a}$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$).

გავავლოთ $A_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილზე $\overline{n}(a; b; c)$ ვექტორის მართობული სიბრტყე. ამ სიბრტყის ნებისმიერი $A(x; y; z)$ წერტილისათვის გვაქვს:

$$\overline{A_0A} \cdot \overline{n} = 0.$$

თუ ამ ტოლობას გაშლილი სახით ჩავწერთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0,$$

მივიღებთ (3) განტოლებას. ამრიგად (3) განტოლება განსაზღვრავს სიბრტყეს, რომელიც გადის $A_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილზე და მართობულია $\overline{n}(a; b; c)$ ვექტორის.

თუ (2) განტოლებაში a, b და c კოეფიციენტებს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, გარდა $a = 0$, $b = 0$ და $c = 0$, მაშინ მივიღებთ $A_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილზე გამავალ ყველა სიბრტყეს. მათ უწოდებენ სიბრტყეთა **კონას** ცენტრით A_0 წერტილში.

ამოცანა 1. დაწერეთ XOY სიბრტყის განტოლება.

ავიღოთ XOY სიბრტყეზე სამი წერტილი, რომლებიც ერთ წრფეზე არ ძევს. ასეთი წერტილებია მაგალითად: $(0;0;0)$, $(1;0;0)$ და $(0;1;0)$. თუ ჩავსვამთ მათ კოორდინატებს (3) განტოლებაში, მივიღებთ: $d=0$, $a=0$ და $b=0$. რადგან a, b და c კოეფიციენტები ერთდროულად არ შეიძლება ნულის ტოლი იყოს, ამიტომ $c\neq 0$. მაშინ (3)-დან მიიღება: $z=0$. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ XOZ და YOZ სიბრტყეების განტოლებებია შესაბამისად: $y=0$ და $x=0$.

ამოცანა 2. დაწერეთ $M(m;n;k)$ წერტილზე გამავალი და XOY სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლება.

ავიღოთ OZ ღერძზე ვექტორი $\bar{e}(0;0;1)$. ცხადია, $\bar{e}$ ვექტორი მართობული იქნება საძებნი სიბრტყის. ამიტომ (2)-ის თანახმად მისი განტოლება იქნება:

$$0\cdot(x-m)+0\cdot(y-n)+1\cdot(z-k)=0.$$

ანუ

$$z=k.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $M(m;n;k)$ წერტილზე შესაბამისად YOZ და XOZ სიბრტყეების პარალელურად გამავალი სიბრტყეების განტოლებებია: $x=m$ და $y=n$.

2. სამ წერტილზე გამავალი სიბრტის განტოლება. ვთქვათ, $A_0(x_0;y_0;z_0)$, $A_1(x_1;y_1;z_1)$ და $A_2(x_2;y_2;z_2)$ წერტილები ერთ წრფეზე არ ძევს. მაშინ $\overline{A_0A_1}$ და $\overline{A_0A_2}$ ვექტორები არაკოლინეარულია. ავიღოთ A_0, A_1 და A_2 წერტილებზე გამავალ სიბრტყეზე ნებისმიერი $A(x;y;z)$ წერტილი. ცხადია, ამ სიბრტყეზე მოთავსებული ნებისმიერი ვექტორი წარმოადგენს $\overline{A_0A_1}$ და $\overline{A_0A_2}$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე.ი. მოიძებნება ისეთი α და β რიცხვები, რომ (იხ. §$I.2$)

$$\overline{A_0A}=\alpha\overline{A_0A_1}+\beta\overline{A_0A_2}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ვექტორთა სისტემა:

$$\overline{A_0A_1},\ \overline{A_0A_2},\ \overline{A_0A}$$

წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ მათი კოორდინატებისგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლებას.

ამოცანა 3. დაწერეთ $A_0(2;0;0)$, $A_1(0;3;0)$ და $A_2(0;0;4)$ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

(4) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი მესამე სვეტის მიმართ):

$$z \cdot 6 + 4(3x - 6 + 2y) = 0,$$
$$12x + 8y + 6z = 24,$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$$

3. **სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.** განვიხილოთ სიბრტყე, რომელიც არ გადის კოორდინატთა სათავეზე და კვეთს OX, OY და OZ ღერძებს შესაბამისად $A(p;0;0)$, $B(0;q;0)$ და $C(0;0;r)$ წერტილებში. როგორც წინა პუნქტში განხილული ამოცანის შემთხვევაში, (4) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x-p & y & z \\ -p & q & 0 \\ -p & 0 & r \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი მესამე სვეტის მიმართ):

$$z \cdot pq + r(xq - pq + py) = 0,$$

$$pr \cdot x + pr \cdot y + pq \cdot z = pqr$$

თუ გავყოფთ ტოლობის ორივე მხარეს pqr-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{5}$$

ვთქვათ, სიბრტყის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით:

$$ax + by + cz + d = 0$$

თუ კოეფიციენტები არცერთი არ უდრის ნულს, მაშინ ამ განტოლებას შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$\frac{x}{-\frac{d}{a}} + \frac{y}{-\frac{d}{b}} + \frac{z}{-\frac{d}{c}} = 1.$$

მიღებული განტოლება წარმოადგენს (5)-ის სახის განტოლებას.

(5) განტოლებას უწოდებენ სიბრტყის განტოლებას ღერძთა მონაკვეთებში, რადგან p, q და r კოეფიციენტების აბსოლიტური სიდიდეები წარმოადგენენ შესაბამისად ამ სიბრტყის მიერ OX, OY და OZ ღერძებზე მოჭრილი მონაკვეთების სიგრძეებს.

4. სიბრტყის ნორმალური განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახით:

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{6}$$

თუ $d \neq 0$, მაშინ (6) სიბრტყე არ გადის კოორდინატთა სათავეზე. ვიპოვოთ ამ შემთხვევაში კოორდინატთა სათავიდან (6) სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძის კოორდინატები. აღვნიშნოთ $A(x_0; y_0; z_0)$-ით ამ მართობის ფუძე. ცხადია, $\overline{OA}$ ვექტორი პარალელურია (6) სიბრტყის ნორმალური $\overline{n} = (a; b; c)$ ვექტორის. ამიტომ მოიძებნება ისეთი t რიცხვი, რომ

$$\overline{OA} = t\overline{n},$$

ანუ

$$x_0 = at, \quad y_0 = bt, \quad z_0 = ct.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს (6) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$t = -\frac{d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

ამრიგად, A წერტილის კოორდინატებია:

$$x_0 = -\frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \qquad y_0 = -\frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$z_0 = -\frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{7}$$

ცხადია A წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილი იქნება:

$$h = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{8}$$

განვიხილოთ (6) განტოლების ნაცვლად მისი ეკვივალენტური შემდეგი განტოლება:

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + (\lambda d) = 0, \tag{9}$$

სადაც

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

აღვნიშნოთ შესაბამისად α, β და γ-თი (6) სიბრტყის ნორმალური $\overline{n} = (a; b; c)$ ვექტორის მიერ OX, OY და OZ ღერძებთან შედგენილი კუთხეები. მათი კოსინუსებისათვის გვაქვს:

$$\cos\alpha = \lambda a, \quad \cos\beta = \lambda b; \quad \cos\gamma = \lambda c, \tag{10}$$

სადაც

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(10) ფორმულებს შეგვიძლია მივცეთ სახე:

$$\cos(\pi-\alpha)=\lambda a,\ \ \cos(\pi-\beta)=\lambda b,\ \ \cos(\pi-\gamma)=\lambda c, \quad (11)$$

სადაც

$$\lambda=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

(8), (10) და (11) ფორმულების თანახმად, (9) განტოლებიდან მიიღება:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-h=0, \quad (12)$$

როცა $d<0$,

$$x\cos(\pi-\alpha)+y\cos(\pi-\beta)+z\cos(\pi-\gamma)-h=0, \quad (13)$$

როცა $d>0$.

(12) განტოლებას უწოდებენ სიბრტყის ნორმალური სახის განტოლებას (ცხადია, იგივე ითქმის (13) განტოლების მიმართაც). λ-ს ეწოდება მანორმირებელი მამრავლი. მისი ნიშანი d-ს ნიშნის საპირისპიროა. თუ $d=0$, მაშინ მანორმირებელი მამრავლის ნიშანი ნებისმიერად აიღება.

5. ორი სიბრტყის პერპენდიკულარობისა და პარალელურობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad (14)$$

და

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \quad (15)$$

სიბრტყეები.

მათი ნორმალური ვექტორები შესაბამისად იქნება:

$$\overline{n}_1=(a_1;b_1;c_1),\quad \overline{n}_2=(a_2;b_2;c_2).$$

რადგან $\overline{n}_1$ ვექტორი მართობულია (14) სიბრტყის, ხოლო $\overline{n}_2$ ვექტორი (15) სიბრტყის, ამიტომ ეს სიბრტყეები მართობულია

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{n}_1$ ვექტორი მართობულია $\overline{n}_2$ ვექტორის, რაც ეკვივალენტურია პირობის:

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0,$$

ანუ

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

ცხადია, ეს სიბრტყეები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{n}_1$ ვექტორი პარალელურია $\overline{n}_2$ ვექტორის, ე.ი.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

თუ სრულდება პირობა:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

მაშინ (14) და (15) სიბრტყეები ერთმანეთს ემთხვევა.

6. კუთხე ორ სიბრტყეს შორის. ვთქვათ, მოცემულია π_1 და π_2 სიბრტყეები. თუ ეს სიბრტყეები პარალელური არარიან, მაშინ ისინი ერთმანეთს კვეთენ და ქმნიან ორწახნაგა კუთხეებს. ერთ-ერთ მათგანს უწოდებენ კუთხეს π_1 და π_2 სიბრტყეებს შორის. ცხადია, ეს კუთხე ანდა მისი დამატება 180°-მდე იმ α კუთხის ტოლია, რომელსაც შეადგენენ ამ სიბრტყეების ნორმალური $\overline{n}_1$ და $\overline{n}_2$ ვექტორები.

ვთქვათ, π_1 და π_2 სიბრტყეების განტოლებებია შესაბამისად (14) და (15). მაშინ ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

7. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მანძილის ფორმულა. ვთქვათ,

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \tag{16}$$

და

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \tag{17}$$

სიბრტყეები პარალელურია, ე.ი.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

ამ პროპორციის თანახმად (17) განტოლებიდან მიიღება:

$$a_1x + b_1y + c_1z + kd = 0, \tag{18}$$

სადაც $k = a_1/a_2$.

ცხადია, (16) და (17) სიბრტყეებს შორის მანძილი იგივეა, რაც (16) და (18) სიბრტყეებს შორის. გავატაროთ კოორდინატთა სათავეზე ამ სიბრტყეების მართობული წრფე. თანაკვეთის წერტილები აღვნიშნოთ შესაბამისად A-თი და B-თი. (7) ფორმულის თანახმად მათი კოორდინატები შესაბამისად იქნება:

$$\lambda d_1(a_1; b_1; c_1), \quad \lambda k d_2(a_1; b_1; c_1),$$

სადაც

$$\lambda = -\frac{1}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად, მოცემულ სიბრტყეებს შორის მანძილი იქნება:

$$h = |AB| = |\lambda||kd_2 - d_1|\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2},$$

ანუ

$$h = \frac{|kd_2 - d_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}. \tag{19}$$

8. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის ფორმულა. ვთქვათ, მოცემულია $M(x_0; y_0; z_0)$ წერტილი და

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{20}$$

სიბრტყე. გავავლოთ M წერტილზე (20) სიბრტყის პარალელური სიბრტყე. მისი განტოლება იქნება:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

ანუ

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0. \qquad (21)$$

M წერტილიდან (20) სიბრტყემდე მანძილი იგივეა, რაც (20) და (21) სიბრტყეებს შორის. მაშინ (19) ფორმულის თანახმად მიიღება:

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (22)$$

ამრიგად, წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი გამოითვლება (22) ფორმულის საშუალებით.

ამოცანა 4. იპოვეთ მანძილი $M(-1;-2;3)$ წერტილიდან

$$x+2y+2z-4=0$$

სიბრტყემდე.

(22) ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$d=\frac{|-1+2\cdot(-2)-2\cdot 3-4|}{\sqrt{(1^2+2^2+2^2)}}=\frac{15}{3}=5.$$

1. წრფის სხვადასხვა სახის განტოლებანი. ავილოთ სივრცეში დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, მოცემულია $M_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილში გამავალი რაიმე L წრფე, რომელიც პარალელურია არანულოვანი $\bar{a} = (l; m; n)$ ვექტორის. მაშინ L წრფის ნებისმიერი $M(x; y; z)$ წერტილისათვის გვაქვს, რომ

$$\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

ვექტორი პარალელურია $\bar{a}$ ვექტორის. აქედან გამომდინარეობს:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{1}$$

$\bar{a}$ ვექტორს უწოდებენ l წრფის **მიმმართველ** ვექტორს, რადგან ის სავსებით განსაზღვრავს წრფის მიმართულებას. l, m და n სიდიდეებს უწოდებენ L წრფის **მიმართულების კოეფიციენტებს**. (1) განტოლებებს უწოდებენ განტოლებებს **მიმართულების კოეფიციენტებში**.

თუ მიმართულების კოეფიციენტებიდან, რომელიმე ნულის ტოლია, ვთქვათ, მაგალითად $l = 0$, $m \neq 0$ და $n \neq 0$, მაშინ (1) განტოლებაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ მისი შესაბამისი მრიცხველი $x - x_0 = 0$ და

$$\frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

თუ მაგალითად $l = 0$, $m = 0$ და $n \neq 0$, მაშინ $x - x_0 = 0$, $y - y_0 = 0$ და z ნებისმიერია.

თუ (1) დამოკიდებულების ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას ავღნიშნავთ t-თი, მივიღებთ:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \tag{2}$$

სადაც t პარამეტრი გაირბენს ყველა მნიშვნელობას $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

(2) განტოლებებს უწოდებენ წრფის **პარამეტრულ** განტოლებებს.

(1) განტოლებების საშუალებით ადვილად მიიღება ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლებები. მართლაც, ვთქვათ, მოცემულია $M_1(x_1; y_1; z_1)$ და $M_2(x_2; y_2; z_2)$ წერტილები. ცხადია, საძიებელი წრფის მიმმართველი ვექტორი იქნება

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

ამიტომ (1) განტოლების თანახმად მიიღება:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{3}$$

ცხადია, (1) დამოკიდებულება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგ განტოლებათა სისტემის სახით:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{z-z_0}{n}, \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \end{cases}$$

თუ ვიგულისხმებთ, რომ $n \neq 0$, მაშინ აქედან მიიღება

$$\begin{cases} x = a_1 z + b_1, \\ y = a_2 z + b_2, \end{cases} \tag{4}$$

სადაც

$$a_1 = \frac{l}{n}, \ a_2 = \frac{m}{n}, \ b_1 = x_0 - a_1 z_0, \ b_2 = y_0 - a_2 z_0.$$

(4) სისტემას ეწოდება წრფის **დაყვანილი** სახის განტოლებანი. ცხადია პირველი განტოლება წარმოადგენს OY ღერძის პარალელურ სიბრტყეს, ხოლო მეორე-OX ღერძის პარალელურ სიბრტყეს. ამრიგად, როგორც მოსალოდნელი იყო, წრფე სივრცეში წარმოადგენს ორი არაპარალელური სიბრტყის თანაკვეთას.

საზოგადოდ, ორი არაპარალელური სიბრტყის განტოლებისაგან შედგენილი სისტემა,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

ყოველთვის წარმოადგენს რაღაც წრფეს. ამ განტოლებების ერთობლიობას უწოდებენ წრფის **ზოგადი** სახის განტოლებებს.

(5) სისტემა ყოველთვის შეგვიძლია დავიყვანოთ (4) სახეზე (ან ანალოგიურ სახეზე, სადაც z-ის როლს ასრულებს x ან y). ამისთვის საკმარისია ამოვხსნათ (5) სისტემა x, y, z ცვლადთაგან რომელიმე ორის მიმართ. ეს კი ყოველთვის შესაძლებელია, ვინაიდან შემდეგი დეტერმინანტებიდან:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან. სამივე რომ ნულის ტოლი იყოს, გვექნებოდა:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

რაც პირობას ეწინააღმდეგება (ამ შემთხვევაში (5) სისტემის განტოლებებით განსაზღვრული სიბრტყეები პარალელური იქნებოდნენ).

(5) სისტემის განტოლებებით განსაზღვრულ წრფეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) +$$
$$+\lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

ანუ

$$(\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2)x + (\lambda_1b_1 + \lambda_2b_2)y +$$
$$+(\lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)z + (\lambda_1d_1 + \lambda_2d_2) = 0,$$

სადაც λ_1 და λ_2 მუდმივი რიცხვებია, რომლებიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან.

თუ λ_1 და λ_2 პარამეტრები ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად გაირბენენ ყველა მნიშვნელობას $-\infty$-დან $+\infty$-მდე, მაშინ მივიღებთ (5) სისტემის განტოლებებით განსაზღვრულ წრფეზე გამავალ ყველა სიბრტყეს. მათ ერთობლიობას უწოდებენ **სიბრტყეთა კონას**. (5) სისტემით განსაზღვრულ წრფეს უწოდებენ **კონის ღერძს**.

თუ (1) განტოლებაში l, m და n კოეფიციენტებს მივცემთ ნებისმიერ მნიშვნელობებს, გარდა $l=0$, $m=0$ და $n=0$, მაშინ მივიღებთ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ წერტილზე გამავალ ყველა წრფეს. მათ უწოდებენ **წრფეთა ძნულს** ცენტრით M_0 წერტილში.

2. კუთხე ორ წრფეს შორის. ორი წრფის პერპენდიკულარობისა და პარალელურობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია L_1 და L_2 წრფეები, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

თუ L_1 და L_2 წრფეები პარალელურია, მაშინ კუთხე მათ შორის შეიძლება ნულის ტოლად ჩავთვალოთ. თუ L_1 და L_2 წრფეები იკვეთებიან, მაშინ მათ მიერ შედგენილ ვერტიკალურ კუთხეებს შორის უმცირეს უწოდებენ მოცემულ წრფეთა შორის კუთხეს. თუ L_1 და L_2 წრფეები აცდენილია, მაშინ ვიღებთ სივრცეში ნებისმიერ წერტილს და ამ წერტილში ვატარებთ მოცემული წრფეების პარალელურ წრფეებს. მათ მიერ შედგენილ ვერტიკალურ კუთხეებს შორის უმცირეს უწოდებენ L_1 და L_2 წრფეებს შორის კუთხეს.

ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარე L_1 და L_2 წრფეებს შორის კუთხე ტოლია მათი მიმმართველი $\overline{a}_1=(l_1; m_1; n_1)$ და $\overline{a}_2=$

$(l_2; m_2; n_2)$ ვექტორების მიერ შედგენილი α კუთხის ან მისი დამატების 180°-მდე, იმის და მიხედვით ამ ვექტორების მიერ შედგენილი კუთხე მახვილია, თუ ბლაგვი.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$\cos\alpha = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ L_1 და L_2 წრფეების პერპენდიკულარობის პირობაა:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

ცხადია, L_1 და L_2 წრფეები პარალელურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{a}_1$ პარალელურია $\overline{a}_2$-ის, ე.ი.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

3. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის. წრფისა და სიბრტყის პერპენდიკულარობისა და პარალელურობის პირობები. ვთქვათ, მოცემულია L წრფე და π სიბრტყე, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

$$ax + by + cz + d = 0.$$

კუთხე L წრფესა და π სიბრტყეს შორის არის L წრფის მიერ π სიბრტყეზე მის ორთოგონალურ გეგმილთან შედგენილი კუთხეებიდან უმცირესი. ვთქვათ, ეს კუთხე α-ს ტოლია. მაშინ L წრფის მიმმართველი $\overline{a} = (l; m; n)$ ვექტორისა და π სიბრტყის ნორმალურ $\overline{n} = (a; b; c)$ ვექტორს შორის კუთხე იქნება $90^\circ - \alpha$ ან $90^\circ + \alpha$ იმის და მიხედვით ამ ვექტორების მიერ შედგენილი კუთხე მახვილია, თუ ბლაგვი.

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$|\cos(90^\circ \pm \alpha)| = \frac{|(\overline{a} \cdot \overline{n})|}{|\overline{a}||\overline{n}|},$$

ანუ

$$\sin \alpha = \frac{|la + mb + nc|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

სადაც $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ L წრფისა და π სიბრტყის პარალელურობის პირობაა:

$$la + mb + nc = 0.$$

ცხადია, L წრფე მართობულია π სიბრტყის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\overline{a}$ ვექტორი პარალელურია $\overline{n}$ ვექტორის, ე.ი.

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

4. წერტილიდან წრფემდე მანძილის ფორმულა. წერტილიდან წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია $M_1(x_1; y_1; z_1)$ წერტილი და L წრფე:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

ვიპოვოთ მანძილი M_1 წერტილიდან L წრფემდე, ე.ი. M_1-დან L-ზე დაშვებული მართობის სიგრძე (იხ. სურ. 33).

ავიღოთ L წრფეზე ნებისმიერი $M(x; y; z)$ წერტილი. ცხადია, $\overline{MM_1}$ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც სხვაობა $\overline{M_0M_1}$ და $\overline{M_0M}$ ვექტორებისა,

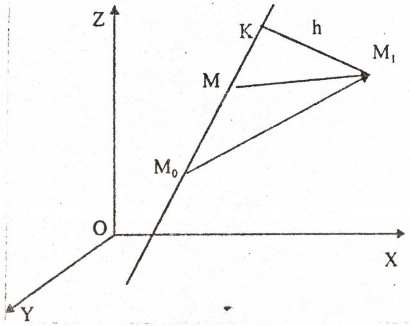
$$\overline{MM_1} = \overline{M_0M_1} - \overline{M_0M}.$$

ვინაიდან $\overline{M_0M}$ ვექტორი და L წრფის მიმმართველი ვექტორი $\overline{a} = (l; m; n)$ კოლინეარულია, ამიტომ მოიძებნება t სკალარი (რიცხვი) ისეთი, რომ

$$\overline{M_0M} = t\overline{a}.$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$\overline{MM_1} = \overline{M_0M} - t\overline{a}. \tag{6}$$



სურ. 33.

წერტილიდან წრფემდე მანძილის განსაზღვრის თანახმად t პარამეტრი უნდა შეირჩეს პირობიდან:

$$\overline{MM_1} \cdot \overline{a} = 0.$$

გაშლილი სახით გვაქვს:

$$\overline{M_0M_1} \cdot \overline{a} - t|\overline{a}|^2 = 0.$$

აქედან

$$t = t_0 = \frac{\overline{M_0M_1} \cdot \overline{a}}{|\overline{a}|^2}.$$

თუ t პარამეტრის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (6) ფორმულაში, მივიღებთ $\overline{KM_1}$ ვექტორს, რომელიც L წრფის მართობულია. ამრიგად, გვაქვს:

$$h^2 = (\overline{M_0M_1} - t_0\overline{a}) \cdot (\overline{M_0M_1} - t_0\overline{a}) =$$

$$= |\overline{M_0M_1}|^2 - 2t_0(\overline{M_0M_1} \cdot \overline{a}) + t_0^2|\overline{a}|^2 =$$

$$= |\overline{M_0M_1}|^2 - \frac{(\overline{M_0M_1} \cdot \overline{a})^2}{|\overline{a}|^2},$$

ანუ

$$h = \sqrt{|\overline{M_0M_1}|^2 - \frac{(\overline{M_0M_1} \cdot \overline{a})^2}{|\overline{a}|^2}}, \tag{7}$$

სადაც

$$\overline{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0).$$

ზემოთ მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ K წერტილის (M_1 წერტილიდან L წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძის) კოორდინატებია:

$$x_0' = x_0 + lt_0, \quad y_0' = y_0 + mt_0, \quad z_0' = z_0 + nt_0.$$

ამრიგად, M_1 წერტილიდან L სიბრტყეზე დაშვებული მართობის განტოლება იქნება:

$$\frac{x - x_1}{x_0' - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0' - y_1} = \frac{z - z_1}{z_0' - z_1}.$$

ამოცანა 1. იპოვეთ მანძილი $(1;0;1)$ წერტილიდან

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-0}{1}$$

წრფემდე.

ვიპოვოთ (7) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები:

$$\overline{M_0M_1}=(1;0;1)-(2;0;0)=(-1;0;1), \qquad |\overline{M_0M_1}|^2=2,$$

$$\overline{a}=(3;2;1), \qquad |\overline{a}|^2=3^2+2^2+1^2=14,$$

$$\overline{M_0M_1}\cdot\overline{a}=(-1)\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1=-2.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (7) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$h=\sqrt{2-\frac{4}{14}}=\frac{\sqrt{84}}{7}.$$

ამოცანა 2. იპოვეთ მოცემული წერტილიდან მოცემულ წრფეზე დაშვებული მართობის განტოლება წინა ამოცანის მონაცემების მიხედვით.

ვიპოვოთ t_0 პარამეტრის მნიშვნელობა,

$$t_0=\frac{\overline{M_0M_1}\cdot\overline{a}}{|\overline{a}|^2}=\frac{-2}{14}=-\frac{1}{7}.$$

მართობის ფუძის კოორდინატები განისაზღვრება ტოლობით:

$$(x_0';y_0';z_0')=(2;0;0)-\frac{1}{7}(3;2;1)=\left(\frac{11}{7};-\frac{2}{7};-\frac{1}{7}\right).$$

მართობის განტოლება იქნება (პარამეტრული სახით):

$$(x;y;z)=(1;0;1)+t\left[\left(\frac{11}{7};-\frac{2}{7};-\frac{1}{7}\right)-(1;0;1)\right]=$$

$$=(1;0;1)+t\left(\frac{4}{7};-\frac{2}{7};-\frac{8}{7}\right).$$

5. ორ აცდენილ წრფეს შორის მანძილის ფორმულა. ორი წრფის საერთო მართობის განტოლება. ვთქვათ, მოცემულია L_1 და L_2 აცდენილი წრფეები, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

და

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

მანძილი აცდენილ წრფეებს შორის შეიძლება განისაზღვროს, როგორც მათი საერთო მართობის სიგრძე.

ცხადია, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ წერტილი ძევს L_1 წრფეზე, ხოლო $M_2(x_2;y_2;z_2)$ კი - L_2 წრფეზე.

ავიღოთ L_1 და L_2 წრფეებზე შესაბამისად ნებისმიერი A_1 და A_2 წერტილები. თუ L_1 და L_2 წრფეების განტოლებებს ჩავწერთ პარამეტრული სახით, მაშინ A_1 და A_2 წერტილების კოორდინატები ასე ჩაიწერება:

$$A_1=(x_1+l_1s;y_1+m_1s;z_1+n_1s),$$

$$A_2=(x_2-l_2t;y_2-m_2t;z_2-n_2t),$$

სადაც s და t პარამეტრებია.

მარტივად მიიღება, რომ

$$\overline{A_1A_2}=\bar{a}-s\bar{a}_1-t\bar{a}_2, \tag{8}$$

სადაც

$$\bar{a}=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),$$

$$\bar{a}_1=(l_1;m_1;n_1), \qquad \bar{a}_2=(l_2;m_2;n_2).$$

თუ s და t პარამეტრები ისეთია, რომ შესრულებულია პირობები:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\bar{a}_1=0, \quad \overline{A_1A_2}\cdot\bar{a}_2=0, \tag{9}$$

მაშინ $\overline{A_1A_2}$ ვექტორი მართობულია L_1 და L_2 წრფეების და განსაზღვრების თანახმად, მანძილი მათ შორის, ცხადია, იქნება $\overline{A_1A_2}$ ვექტორის სიგრძე.

(9) პირობა გაშლილი სახით ასე ჩაიწერება:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\overline{a}_1|^2 s + (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)t = (\overline{a} \cdot \overline{a}_1), \\ (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)s + |\overline{a}_2|t = (\overline{a} \cdot \overline{a}_2), \end{array} \right. \tag{10}$$

მისი ამონახსნებია:

$$s = \frac{(\overline{a} \cdot \overline{a}_1)|\overline{a}_2|^2 - (\overline{a} \cdot \overline{a}_2)(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)}{|\overline{a}_1|^2|\overline{a}_2|^2 - (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)^2},$$

$$t = \frac{(\overline{a} \cdot \overline{a}_2)|\overline{a}_1|^2 - (\overline{a} \cdot \overline{a}_1)(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)}{|\overline{a}_1|^2|\overline{a}_2|^2 - (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)^2},$$

(8) ფორმულის თანახმად გვაქვს (h არის მანძილი L_1 და L_2 წრფეებს შორის):

$$h^2 = |\overline{A_1A_2}|^2 = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_2} = |\overline{a}|^2 + s^2|\overline{a}_1|^2 +$$

$$+ t^2|\overline{a}_2|^2 - 2s(\overline{a} \cdot \overline{a}_1) - 2t(\overline{a} \cdot \overline{a}_2) + 2st(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2). \tag{11}$$

გავამრავლოთ (10) სისტემის პირველი განტოლება s-ზე, ხოლო მეორე t-ზე და შევკრიბოთ, მივიღებთ:

$$|\overline{a}_1|^2 s^2 + |\overline{a}_2|^2 t^2 + 2st(\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2) = s(\overline{a} \cdot \overline{a}_1) + t(\overline{a} \cdot \overline{a}_2).$$

აქედან და (11) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$h^2 = |\overline{a}|^2 - s(\overline{a} \cdot \overline{a}_1) - t(\overline{a} \cdot \overline{a}_2).$$

ჩავსვათ (10) სისტემის ამონახსნები ამ ფორმულაში და გავამარტივოთ, მივიღებთ:

$$h = \sqrt{|\overline{a}|^2 - \frac{|(\overline{a} \cdot \overline{a}_1)\overline{a}_2 - (\overline{a} \cdot \overline{a}_2)\overline{a}_1|^2}{|\overline{a}_1|^2|\overline{a}_2|^2 - (\overline{a}_1 \cdot \overline{a}_2)^2}}. \tag{12}$$

(12) ფორმულას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$h = |\overline{a}|\sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda}{1-\lambda^2}},$$

სადაც

$$\lambda_i = \frac{(\overline{a}\cdot\overline{a}_i)}{|\overline{a}||\overline{a}_i|}, \quad i = 1,2, \quad \lambda = \frac{(\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2)}{|\overline{a}_2||\overline{a}_1|}.$$

ამ ფორმულის მისაღებად საკმარისია (12) ფორმულის მარჯვენა მხარეში შემავალი წილადის მრიცხველი წარმოვადგინოთ გაშლილი სახით:

$$|(\overline{a}\cdot\overline{a}_1)\overline{a}_2 - (\overline{a}\cdot\overline{a}_2)\overline{a}_1|^2 = (\overline{a}\cdot\overline{a}_1)^2|\overline{a}_2|^2 + $$
$$+(\overline{a}\cdot\overline{a}_2)^2|\overline{a}_1|^2 - 2(\overline{a}\cdot\overline{a}_1)(\overline{a}\cdot\overline{a}_2)(\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2), \qquad (13)$$

ხოლო შემდეგ კი ამ წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი გავყოთ $|\overline{a}_1|^2|\overline{a}_2|^2$-ზე, ამასთან ფესვის გარეთ გავიტანოთ $|\overline{a}|$.

თუ $\overline{a}$ ვექტორი მართობულია $\overline{a}_1$ და $\overline{a}_2$ ვექტორების, მაშინ $h = |\overline{a}|$. ცხადია, იგივე მიიღება (12) ფორმულის საშუალებითაც.

თუ L_1 და L_2 წრფეები იკვეთებიან, მაშინ (9) პირობის თანახმად გვაქვს $\overline{A_1A_2} = 0$, ანუ $h = 0$. მაშინ (12) ფორმულის თანახმად ვღებულობთ შემდეგ იგივეობას:

$$|(\overline{a}\cdot\overline{a}_1)\overline{a}_2 - (\overline{a}\cdot\overline{a}_2)\overline{a}_1|^2 = |\overline{a}|^2(|\overline{a}_1|^2|\overline{a}_2|^2 - (\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2)^2),$$

რომელიც ასევე მიიღება (13) ფორმულიდან ჩასმით:

$$\overline{a} = x\overline{a}_1 + y\overline{a}_2$$

(ეს წარმოდგენა მართებულია რადგან $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ და $\overline{a}$ ვექტორები ერთ სიბრტყეზე ძევს მოცემულობის თანახმად).

ბოლოს დავძენთ, რომ L_1 და L_2 წრფეების საერთო მართობი იქნება A_1 და A_2 წერტილებზე გამავალი წრფე, თუ s და t პარამეტრები წარმოადგენენ (10) სისტემის ამონახსნებს.

ამოცანა 3. იპოვეთ მანძილი

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$$

და

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{-1}$$

წრფეებს შორის.

გამოვითვალოთ (12) ფორმულაში შემავალი სიდიდეები:

$$\overline{a}_1=(2;2;1),\quad \overline{a}_2=(-2;2;-1),$$

$$\overline{a}=(1;-3;3)-(2;-1;1)=(-1;-2;2),$$

$$(\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2)=2\cdot(-2)+2\cdot 2+1\cdot(-1)=-1,$$

$$(\overline{a}\cdot\overline{a}_1)=(-1)\cdot(+2)+(-2)\cdot 2+2\cdot(-1)=-4,$$

$$(\overline{a}\cdot\overline{a}_2)=2\cdot(-2)+2\cdot 2+1\cdot(-1)=-1,$$

$$|\overline{a}_1|=|\overline{a}_2|=|\overline{a}|=3,$$

$$|(\overline{a}\cdot\overline{a}_1)\overline{a}_2-(\overline{a}\cdot\overline{a}_2)\overline{a}_1|^2=|(-4)\overline{a}_2-(-4)\overline{a}_1|^2=$$

$$=16|\overline{a}_2-\overline{a}_1|^2=16(4^2+0^2+2^2)=16\cdot 20=320.$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (12) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$h=\sqrt{9-\frac{320}{3^2+3^2+1}}=\sqrt{\frac{209}{41}}.$$

§4. ამოცანები წრფესა და სიბრტყეზე

განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის ამოცანები წრფესა და სიბრტყეზე სივრცეში.

ამოცანა 1. იპოვეთ $A(x_1; y_1; z_1)$ წერტილზე გამავალი და

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

წრფის მართობული სიბრტყის განტოლება.

ცხადია, მოცემული წრფის მიმმართველი ვექტორი $\bar{a} = (l; m; n)$ მართობული იქნება საძებნი სიბრტყის, ამიტომ სიბრტყეთა კონის განტოლების თანახმად საძიებელი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$l(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0. \tag{1}$$

ამოცანა 1°. იპოვეთ $A(2; -1; 0)$ წერტილზე გამავალი და

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{-2}$$

წრფის მართობული სიბრტყის განტოლება.

(1) განტოლების თანახმად საძებნი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$2(x - 2) + (-1)(y + 1) + (-2)(z - 0) = 0,$$

ანუ

$$2x - y - 2z - 5 = 0$$

ამოცანა 2. იპოვეთ $A(x_1; y_1; z_1)$ წერტილზე გამავალი და

$$ax + by + cz + d = 0$$

სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლება.

საძიებო სიბრტყის ნორმალური ვექტორი იქნება $\overline{n}(a;b;c)$, რომელიც წარმოადგენს მოცემული სიბრტყის ნორმალურ ვექტორს. სიბრტყეთა ძნულის განტოლების თანახმად საძიებო სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0. \tag{2}$$

ამოცანა 2°. იპოვეთ $A(1;2;-2)$ წერტილზე გამავალი და

$$3x+2y-2z+1=0$$

სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლება.

(2) განტოლების თანახმად საძიებო სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$3(x-1)+2(y-2)+(-2)(z+2)=0,$$

ანუ

$$3x+2y-2z-11=0.$$

ამოცანა 3. იპოვეთ $A(x_1;y_1;z_1)$ და $B(x_2;y_2;z_2)$ წერტილებზე გამავალი და

$$ax+by+cz+d=0$$

სიბრტყის მართობული სიბრტყის განტოლება (იგულისხმება, რომ $\overline{AB}$ ვექტორი მოცემული სიბრტყის ნორმალური ვექტორის არაპარალელურია).

ვთქვათ, $M(x;y;z)$ არის საძიებო სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1),\quad \overline{n}=(a;b;c)$$

და

$$\overline{AM}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$$

ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. მათი კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი ნულის ტოლია,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

ამოცანა 3°. იპოვეთ $A(1;2;0)$ და $B(-1;2;1)$ წერტილებზე გამავალი და

$$2x + y + z + 1 = 0$$

სიბრტყის მართობული სიბრტყის განტოლება.

რადგან $\overline{AB} = (-2;0;1)$ ვექტორი და მოცემული სიბრტყის ნორმალური ვექტორი $\overline{n} = (2;1;1)$ არაპარალელურია, ამიტომ საძებნი სიბრტყე ერთადერთია. (3)-ის თანახმად მისი განტოლება იქნება:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი მეორე სვეტის მიმართ):

$$-(y-2)(-4) - (x - 1 + 2z) = 0,$$

ანუ

$$x - 4y + 2z + 7 = 0.$$

ამოცანა 4. იპოვეთ

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

წრფეზე და მასზე არამდებარე $A_1(x_1;y_1;z_1)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ცხადია $A_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილი მოცემულ წრფეზე ძევს.

ვთქვათ, $M(x;y;z)$ არის საძიებელი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ

$$\overline{A_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0),$$
$$\overline{A_0A_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$$

და

$$\overline{a} = (l; m; n)$$

ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

ამოცანა 4°. იპოვეთ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

წრფეზე და $A(2;-1;0)$ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

(4) განტოლების თანახმად საძიებელი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სტრიქონის მიმართ):

$$(x-1)\cdot 5 - (y-2)\cdot(-4) + (z+1)\cdot 5 = 0,$$

ანუ

$$7x + 4y + 5z - 10 = 0.$$

ამოცანა 5. იპოვეთ

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

წრფეზე მისი არაპარალელური

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

წრფის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება.

ცხადია, $A(x_1;y_1;z_1)$ წერტილი ძევს პირველ წრფეზე. ვთქვათ, $M(x;y;z)$ არის საძიებელი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ

$$\bar{a}_1=(l_1;m_1;n_1),\quad \bar{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$$

და

$$\overline{AM}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1)$$

ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{5}$$

ამოცანა 5°. იპოვეთ

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

წრფეზე

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3}$$

წრფის პარალელურად გამავალი სიბრტყის განტოლება.

(5) განტოლების თანახმად საძიებელი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სტრიქონის მიმართ):

$$(x+1)\cdot(-7)-(y-2)\cdot 8+z\cdot 3=0,$$

ანუ

$$7x + 8y - 3z - 9 = 0.$$

ამოცანა 6. იპოვეთ

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

წრფეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც მართობულია

$$ax + by + cz + d = 0$$

სიბრტყის.

ცხადია, $A(x_0; y_0; z_0)$ წერტილი მოცემულ წრფეზე ძევს. ვთქვათ, $M(x; y; z)$ არის საძებნი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი, მაშინ

$$\overline{n} = (a; b; c), \quad \overline{a} = (l; m; n)$$

და

$$\overline{AM} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

ვექტორები კომპლანარულია, ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

ამოცანა 6°. იპოვეთ

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{1}$$

წრფეზე გამავალი იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც მართობულია

$$3x + 2y + z - 1 = 0$$

სიბრტყის.

(6) განტოლების თანახმად საძიებელი სიბრტყის განტოლება იქნება:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

აქედან ვღებულობთ (დავშალოთ დეტერმინანტი პირველი სტრიქონის მიმართ):

$$(x-1)(-4)-(y+1)(-1)+z\cdot 10=0,$$

ანუ

$$4x-y-10z-5=0.$$

ამოცანა 7. იპოვეთ სივრცეში ორი არაპარალელური გადამკვეთი წრფის მართობული წრფის განტოლება, რომელიც გადის მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილში.

ვთქვათ, მოცემულია $M_0(x_0;y_0;z_0)$ წერტილზე გამავალი ორი არაპარალელური L_1 და L_2 წრფე, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

და

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

ცხადია, საძებნი წრფის მიმმართველი ვექტორი $\bar{a}=(l;m;n)$ მართობული იქნება $\bar{a}_1=(l_1;m_1;n_1)$ და $\bar{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$ ვექტორების, რომლებიც წარმოადგენს შესაბამისად L_1 და L_2 წრფეების მიმმართველ ვექტორებს.

ამრიგად, საძებნი წრფის განტოლება იქნება

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

სადაც l, m და n განისაზღვრება შემდეგი სისტემიდან:

$$\begin{cases} l_1 \cdot l + m_1 \cdot m + n_1 \cdot n = 0, \\ l_2 \cdot l + m_2 \cdot m + n_2 \cdot n = 0. \end{cases} \tag{7}$$

ამ სისტემის ერთ-ერთი ამონახსენია, მაგალითად:

$$l = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_1 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_1 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_1 \end{vmatrix}.$$

ამოცანა 7°. იპოვეთ

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

და

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

წრფეების გადაკვეთის წერტილზე ამ წრფეების მართობულად გავლებული წრფის განტოლება.

ცხადია, $A_1(1;-1;0)$ და $A_2(2;3;1)$ წერტილები ძევს მოცემულ წრფეებზე.

(7) სისტემის თანახმად გვაქვს:

$$\begin{cases} 2l + 3m + 2n = 0, \\ 2l - 2m + 2n = 0. \end{cases}$$

ამ სიტემის არანულოვანი ამონახსნებია, მაგალითად: $l = 1$, $m = 0$, $n = -1$.

ცხადია, საძიებელი წრფის მიმმართველი ვექტორია $\bar{a} = (1;0;-1)$. რადგან ეს ვექტორი მართობულია

$$\overline{A_1A_2} = (2;3;1) - (1;-1;0) = (1;4;1)$$

ვექტორის, ამიტომ მოცემული წრფეები ერთ სიბრტყეზე ძევს. ვიპოვოთ მათი თანაკვეთის წერტილის კოორდინატები.

მოცემული წრფეების განტოლებებს შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x = z + 1, \\ y = \frac{3}{2}z - 1 \end{cases}$$

და

$$\begin{cases} x = z + 1, \\ y = -z + 4. \end{cases}$$

გაუტოლოთ y-ები ერთმანეთს, მივიღებთ:

$$\frac{3}{2}z - 1 = 4 - z.$$

აქედან $z = 2$.

ამრიგად, მოცემული წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებია: $(3; 2; 2)$.

მაშინ საძებნი წრფის განტოლება იქნება:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}.$$

თავი მეხუთე

მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

§1. ელიფსი

1. ელიფსის განმარტება და მისი კანონიკური განტოლება. ელიფსი ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების ჯამი მუდმივი სიდიდეა. F_1 და F_2 წერტილებს ელიფსის **ფოკუსები** ეწოდება. მანძილი მათ შორის ავღნიშნოთ $2c$-თი, ხოლო ელიფსის ნებისმიერი M წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი კი $2a$-თი.

განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$r_1 + r_2 = 2a, \tag{1}$$

სადაც $r_1 = |MF_1|$ და $r_2 = |MF_2|$.

რადგან მართებულია უტოლობა:

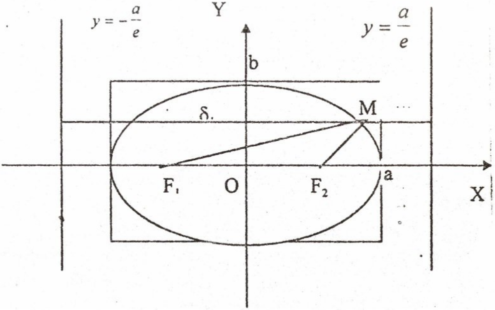
$$|MF_1| + |MF_2| \geq |F_1F_2|,$$

ამიტომ $2a \geq 2c$. ცხადია, თუ $2a = 2c$, მაშინ სიბრტყის ის წერტილები, რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, წარმოადგენს F_1F_2 მონაკვეთის წერტილებს. ეს შემთხვევა ინტერესს მოკლებულია და ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $2c < 2a$, ე.ი. $c < a$.

თუ $c = 0$, მაშინ F_1 და F_2 წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა და ელიფსი გადაიქცევა a რადიუსიან წრეწირად.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $0 < c < a$.

ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ F_1F_2 მონაკვეთის შუაწერტილი და OX ღერძი მივმართოთ $\overline{F_1F_2}$ ვექტორის გასწვრივ (იხ. სურ. 34).



სურ. 34.

ცხადია, F_1 და F_2 წერტილების კოორდინატები შესაბამისად იქნება: $(-c;0)$ და $(+c;0)$. ელიფსის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $(x;y)$-ით. მაშინ (1)-ის თანახმად გვექნება:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{2}$$

ეს არის ელიფსის განტოლება ჩვენს მიერ აღებულ კოორდინატთა სისტემაში.

გარდაქმნის შედეგად (2) განტოლება მიიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ავიყვანოთ (2) განტოლების ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ:

$$(x^2+y^2+a^2)+\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a^2,$$

ანუ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a^2-(x^2+y^2+c^2). \qquad (3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია. რადგან OM წარმოადგენს F_1F_2M სამკუთხედის მედიანას, ამიტომ მართებულია უტოლობა:

$$|OM| \le \frac{|F_1M|+|F_2M|}{2} = a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$|OM|^2 = x^2+y^2,$$

ე.ი.

$$x^2+y^2 \le a^2.$$

თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ c^2 და გავითვალისწინებთ, რომ $c<a$, მივიღებთ:

$$x^2+y^2+c^2 < 2a^2.$$

ამრიგად, (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია.

ავიყვანოთ (3) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ:

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2 =$$
$$= 4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)+(x^2+y^2+c^2)^2,$$

ანუ

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (4)$$

ცხადია, სიდიდე a^2-c^2 დადებითია. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $b=\sqrt{a^2-c^2}$ და გავყოფთ (4) ტოლობის ორივე მხარეს a^2b^2-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

რომელსაც **ელიფსის კანონიკური განტოლება** ეწოდება.

ვინაიდან ჩვენ ჩავატარეთ ეკვივალენტური გარდაქმნები, ამიტომ ცხადია შებრუნებული გარდაქმნებით (5) განტოლებიდან მიიღება (2) განტოლება. რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს განტოლებები ტოლფასია.

2. ელიფსის ფორმის დადგენა. ელიფსის კანონიკური განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია OX და OY ღერძების მიმართ, ასევე კოორდინატთა სათავის მიმართაც. მართლაც, თუ $M(x;y)$ წერტილი ეკუთვნის ელიფსს, მაშინ მასვე ეკუთვნის წერტილებიც $M(x;-y)$, $M(-x;y)$ და $M(-x;-y)$.

ცხადია, (5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

ამრიგად, გვაქვს:

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ (5) განტოლებით განსაზღვრული წირი მთლიანად მოთავსებულია მართკუთხედში, რომლის გვერდებია $2a$ და $2b$ (იხ. სურ. 34).

სიმეტრიულობის გამო საკმარისია ავაგოთ ელიფსის გრაფიკი პირველ მეოთხედში. ამოვხსნათ (5) განტოლება y-ის მიმართ და რადგან ვიხილავთ პირველ მეოთხედს, ამიტომ რადიკალის წინ ავიღოთ (+) ნიშანი:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \; 0 \leq x \leq a.$$

როცა x იზრდება, y მცირდება. შუალედების ბოლოებში გვაქვს: როცა $x = 0$, $y = b$; როცა $x = a$, $y = 0$.

ამგვარად ჩვენ მივიღეთ გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში. დანარჩენ მეოთხედებში გრაფიკს ვაგებთ სიმეტრიულობის საფუძველზე (იხ. სურ. 34).

$2a$ და $2b$ სიდიდეებს შესაბამისად ელიფსის დიდი და მცირე ღერძები ეწოდება, ხოლო a და b სიდიდეებს ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძები.

ელიფსის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებს ($x = \pm a$ და $y = \pm b$) ელიფსის წვეროები ეწოდება.

თუ $a = b$, მაშინ ელიფსის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

რომელიც წარმოადგენს a რადიუსიან წრეწირს. ამრიგად, თუ ელიფსის დიდი და მცირე ნახევარღერძები ტოლია, მაშინ ის გადაიქცევა წრეწირად. ამ შემთხვევაში ფოკუსებს შორის მანძილი

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0.$$

ფარდობას

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \tag{6}$$

ეწოდება ელიფსის **ექსცენტრისიტეტი**. იგი შეიძლება განვიხილოთ როგორც, ზომა წრიული ფორმიდან ელიფსის გადახრისა. მართლაც, (6)-დან მიიღება:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

აქედან ჩანს, რომ თუ e მცირეა, მაშინ b/a ახლოს არის ერთთან, ე.ი. ელიფსის ფორმა ახლოსაა წრიულ ფორმასთან. თუ e იზრდება, მაშინ ფარდობა b/a მცირდება (მცირე ნახევარღერძი გაცილებით ნაკლებია დიდ ნახევარღერძზე) და ელიფსი გაჭიმულია დიდი ნახევარღერძის გასწვრივ.

3. ელიფსის დირექტრისები. ელიფსის ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილები გამოისახება შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$r_1 = a - ex, \quad r_2 = a + ex \tag{7}$$

(r_1 არის მანძილი მარჯვენა ფოკუსამდე, ხოლო r_2–მარცხენა ფოკუსამდე).

დავამტკიცოთ (7) ფორმულები.

(5) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$x^2+y^2+c^2=x^2+c^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+c^2+b^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით, ვღებულობთ:

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2+c^2-2cx}=$$

$$=\sqrt{a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx}=a-\frac{c}{a}x=a-ex.$$

ცხადია, თუ r_1–ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ $r_1+r_2=2a$ ტოლობაში, მივიღებთ მეორე ფორმულას.

(7) ფორმულებს აქვთ მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა. განვიხილოთ წრფეები:

$$y=+\frac{a}{e},\quad y=-\frac{a}{e}.$$

აღვნიშნოთ ელიფსის ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილიდან ამ წრფეებამდე მანძილები შესაბამისად δ_1 და δ_2–ით. ცხადია, გვაქვს (იხ. სურ. 34):

$$\delta_1=\frac{a}{e}-x,\quad \delta_2=\frac{a}{e}+x.$$

მაშინ (7) ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$r_1=e\delta_1,\quad r_2=e\delta_2,$$

ანუ

$$\frac{r_1}{\delta_1}=e,\quad \frac{r_2}{\delta_2}=e.$$

წრფეებს:

$$y = +\frac{a}{e} \ \& \ y = -\frac{a}{e}$$

ელიფსის **დირექტრისები** ეწოდება.

ამრიგად, ელიფსის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა არის მუდმივი სიდიდე (ექსცენტრისიტეტის ტოლი).

§2. ჰიპერბოლა

1. ჰიპერბოლის განმარტება და მისი კანონიკური განტოლება. ჰიპრებოლა ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილიდან ორ მოცემულ F_1 და F_2 წერტილებამდე მანძილების სხვაობის მოდული მუდმივი სიდიდეა. F_1 და F_2 წერტილებს ჰიპერბოლის ფოკუსები ეწოდება. მანძილი მათ შორის აღვნიშნოთ $2c$-თი, ხოლო ჰიპერბოლის ნებისმიერი M წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების სხვაობის მოდული $2a$-თი.

განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \tag{1}$$

სადაც $r_1 = |MF_1|$ და $r_2 = |MF_2|$.

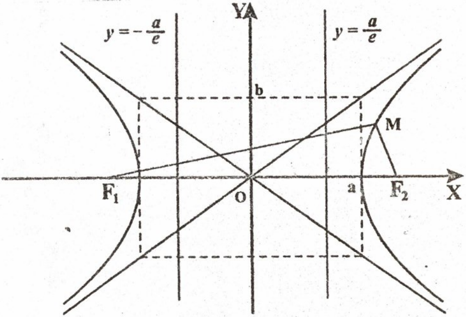
რადგან მართებულია უტოლობები:

$$|F_1F_2| \geq |F_1M| - |F_2M| = r_1 - r_2,$$

$$|F_1F_2| \geq |F_2M| - |F_1M| = r_2 - r_1,$$

ამიტომ $2c \geq 2a$. თუ $2c = 2a$, მაშინ სიბრტყის ის წერტილები; რომლებიც ამ პირობას აკმაყოფილებენ, წარმოადგენს F_1 და F_2 წერტილებზე გამავალი წრფის F_1F_2 მონაკვეთის გარეთ მდებარე წერტილებს. ეს შემთხვევა ინტერესს მოკლებულია და ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $2c > 2a$, ე.ი. $c > a$.

ავიღოთ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ F_1F_2 მონაკვეთის შუაწერტილი და OX ღერძი მივმართოთ $\overline{F_1F_2}$ ვექტორის გასწვრივ (იხ. სურ. 35).



სურ. 35.

ცხადია, F_1 და F_2 წერტილების კოორდინატები შესაბამისად იქნება: $(-c; 0)$ და $(+c; 0)$. ჰიპერბოლის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები აღვნიშნოთ $(x; y)$-ით. მაშინ (1)-ის თანახმად გვექნება:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (2)$$

ეს არის ჰიპერბოლის განტოლება ჩვენს მიერ აღებულ კოორდინატთა სისტემაში.

გარდაქმნის შედეგად (2) განტოლება მიიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ავიყვანოთ (2) განტოლების ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ:

$$(x^2+y^2+c^2)-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a^2,$$

ანუ

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x^2+y^2+c^2-2a^2. \quad (3)$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია. რადგან OM წარმოადგენს F_1F_2M სამკუთხედის მედიანას, ამიტომ მართებულია უტოლობები:

$$2|OM|\geq|F_1M|-|F_2M|,$$

$$2|OM|\geq|F_2M|-|F_1M|,$$

ანუ

$$|OM|\geq a.$$

ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვაქვს: $|OM|^2=x^2+y^2$, ე.ი. $x^2+y^2\geq a^2$. თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეს დავუმატებთ c^2 და გავითვალისწინებთ, რომ $c>a$, მივიღებთ:

$$x^2+y^2+c^2\geq 2a^2.$$

ამრიგად, (3) ტოლობის მარჯვენა მხარე დადებითია.

ავიყვანოთ (3) ტოლობის ორივე მხარე კვადრატში, მივიღებთ

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4x^2c^2=$$

$$=(x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^2,$$

ანუ

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \quad (4)$$

ცხადია, სიდიდე c^2-a^2 დადებითია. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $b=\sqrt{c^2-a^2}$ და გავყოფთ (4) ტოლობის ორივე

მხარეს a^2b^2-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

რომელსაც **ჰიპერბოლის კანონიკური განტოლება** ეწოდე-ბა.

ვინაიდან ჩვენ ჩავატარეთ ეკვივალენტური გარდაქმნები, ამი-ტომ ცხადია შებრუნებული გარდაქმნებით (5) განტოლებიდან მიიღება (2) განტოლება. რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს განტო-ლებები ტოლფასია.

2. ჰიპერბოლის ფორმის დადგენა. ასიმპტოტები. ისევე, როგორც ელიფსის შემთხვევაში, (5) განტოლებიდან გა-მომდინარეობს, რომ OX და OY ღერძები ჰიპერბოლის სი-მეტრიის ღერძებია. ამის გამო მათ ეწოდებათ ჰიპერბოლის ღერძები. ცხადია აგრეთვე, რომ ჰიპერბოლა სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ, რომელსაც, ამის გამო, ჰიპერ-ბოლის ცენტრი ეწოდება.

(5) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $|x| \geq a$. ამ უტოლობიდან იმ-ის გათვალისწინებით, რომ OY ღერძი ჰიპერბოლის სიმეტრიის ღერძია, გამომდინარეობს, რომ ჰიპერბოლის გრაფიკი შესდგება ორი სიმეტრიული შტოსაგან, რომლებიც მოთავსებული არიან $x = -a$ და $x = +a$ წრფეებს შორის მოთავსებული ზოლის გარეთ.

ცხადია, სიმეტრიულობის გამო საკმარისია ავაგოთ ჰიპერბო-ლის გრაფიკი პირველ მეოთხედში. ამოვხსნათ (5) განტოლება y-ის მიმართ და რადგან ვიხილავთ პირველ მეოთხედს, ამიტომ რადიკალის წინ ავიღოთ (+) ნიშანი:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \geq a.$$

როცა $x = a$, $y = 0$. როცა x იზრდება a-დან $+\infty$-მდე, y იზრდება აგრეთვე 0-დან $+\infty$-მდე; ამასთან ყოველთვის მართებულია დამოკიდებულება:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}x \quad x \geq a.$$

აქედან, სიმეტრიულობის გამო, გამომდინარეობს, რომ ჰიპერბოლა მთლიანად მოთავსებულია

$$y = +\frac{b}{a}x \ \& \ y = -\frac{b}{a}x$$

წრფეებით შედგენილი OX ღერძის შემცველი ვერტიკალური კუთხეების შიგნით.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს წრფეები წარმოადგენენ ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჰიპერბოლის გრაფიკი უახლოვდება აღნიშნულ წრფეებს, როცა $x \to \pm\infty$.

ავიღოთ ჰიპერბოლაზე და $y = +\frac{b}{a}x$ წრფეზე შესაბამისად ისეთი M და M_1 წერტილები, რომელთაც ერთიდაიგივე აბცისები აქვთ (სიმეტრიულობის გამო ვიხილავთ პირველ მეოთხედს). ცხადია გვაქვს:

$$|MM_1| = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) > 0.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების ზღვარი მიისწრაფის ნულისკენ, როცა $x \to +\infty$. მართლაც,

$$\lim_{x \to \infty}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \lim_{x \to \infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

ამრიგად, $|MM_1| \to 0$, როცა $x \to +\infty$, ე.ი. $y = +\frac{b}{a}x$ წრფე ასიმპტოტს წარმოადგენს.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია პირველ მეოთხედში, ხოლო შემდეგ კი ეს ფრაგ-

მენტი გავაგრძელოთ დანარჩენ მეოთხედებში სიმეტრიულობის საფუძველზე (იხ. სურ. 35).

$2a$ და $2b$ სიდიდეებს შესაბამისად ეწოდება ჰიპერბოლის **ნამდვილი** და **წარმოსახვითი** ღერძები, ხოლო a და b სიდიდეებს – ჰიპერბოლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძები. ტერმინი „წარმოსახვითი„ იხმარება იმ აზრით, რომ თუ ვეძებთ ჰიპერბოლის გადაკვეთის წერტილებს OY ღერძთან, მაშინ (5) განტოლებაში ჩასმით $x = 0$, მივიღებთ: $y = \pm ib$, სადაც i არის წარმოსახვითი ერთეული, $i = \sqrt{-1}$.

ჰიპერბოლის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს ($x = \pm a$) ჰიპერბოლის **წვეროები** ეწოდება.

სიდიდეს

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

ჰიპერბოლის **ექსცენტრისიტეტი** ეწოდება.

3. **ჰიპერბოლის დირექტრისები.** ჰიპერბოლის ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილები გამოისახება შემდეგი ფორმულების საშუალებით:

$$r_1 = \pm(a - ex), \quad r_2 = \pm(a + ex) \tag{6}$$

(r_1 არის მანძილი მარჯვენა ფოკუსამდე, ხოლო r_2-მარცხენა ფოკუსამდე).

დავამტკიცოთ (6) ფორმულები.

(5) განტოლების თანახმად გვაქვს:

$$x^2 + y^2 + c^2 = x^2 + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) =$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2}x^2 + c^2 - b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$r_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2cx} =$$

$$= \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx} = |a - ex|,$$

ანუ

$$r_1 = \pm(a - ex).$$

თუ r_1-ის მნიშვნელობას ჩავსვამთ $r_1 - r_2 = \pm 2a$ ტოლობაში, მივიღებთ r_2-ის გამოსახულებას. მართლაც,

$$r_2 = \pm 2a - r_1 = \pm 2a \mp (a - ex) = \pm(a + ex).$$

(6) ფორმულებს მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ. განვიხილოთ წრფეები

$$y = +\frac{a}{e}, \quad y = -\frac{a}{e}.$$

აღვნიშნოთ ჰიპერბოლის ნებისმიერი $M(x; y)$ წერტილიდან ამ წრფეებამდე მანძილი შესაბამისად δ_1 და δ_2-ით. ცხადია, გვაქვს (იხ. სურ. 35):

$$\delta_1 = \left|\frac{a}{e} - x\right|, \quad \delta_2 = \left|\frac{a}{e} + x\right|$$

მაშინ (6) ფორმულები მიიღებს სახეს:

$$r_1 = e\delta_1, \quad r_2 = e\delta_2,$$

ანუ

$$\frac{r_1}{\delta_1} = e, \quad \frac{r_2}{\delta_2} = e.$$

წრფეებს:

$$y = +\frac{a}{e} \;\&\; y = -\frac{a}{e}$$

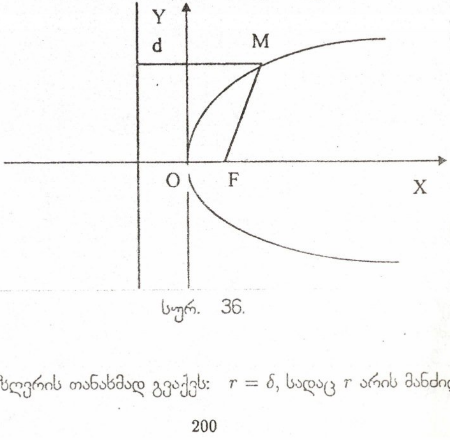
ჰიპერბოლის **დირექტრისები** ეწოდება.

ამრიგად, ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე და შესაბამის დირექტრისამდე მანძილების ფარდობა მუდმივი სიდიდეა (ექსცენტრისიტეტის ტოლი).

§3. პარაბოლა

პარაბოლი ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველი წერტილი თანაბრად არის დაშორებული მოცემული წერტილიდან (რომელსაც ფოკუსი ეწოდება) და მოცემული წრფიდან (რომელსაც დირექტრისი ეწოდება).

გამოვიყვანოთ პარაბოლის განტოლება. ვთქვათ, d პარაბოლის დირექტრისია, ხოლო F მისი ფოკუსი. დავუშვათ F წერტილიდან d-ზე მართობი. ამ მართობის სიგრძე აღვნიშნოთ p-თი. ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის სათავედ F-დან d-ზე დაშვებული მართობის შუაწერტილი და მივმართოთ OX ღერძი ისე, რომ F ფოკუსის კოორდინატები იყოს $\left(+\frac{p}{2};0\right)$, ხოლო დირექტრისი OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები $\left(-\frac{p}{2};0\right)$ (იხ. სურ. 36).



სურ. 36.

განსაზღვრის თანახმად გვაქვს: $r = \delta$, სადაც r არის მანძილი

პარაბოლის ნებისმიერი $M(x;y)$ წერტილიდან ფოკუსამდე,

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},$$

ხოლო δ–დირექტრისამდე, $\delta=x+\frac{p}{2}$. მაშასადამე, პარაბოლის განტოლებაა:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2},$$

ავიყვანოთ ორივე მხარე კვადრატში და გავამარტივოთ, მივიღებთ:

$$y^2=2px, \tag{1}$$

რომელსაც **პარაბოლის კანონიკური განტოლება** ეწოდება.

ცხადია, პარაბოლა მთლიანად მოთავსებულია OY ღერძის მარჯვნივ, რადგან (1)–დან გამომდინარეობს, რომ $x \geq 0$. იგი სიმეტრიულია OX ღერძის მიმართ, ვინაიდან, თუ $M(x;y)$ წერტილი ეკუთვნის პარაბოლას, მაშინ მასვე ეკუთვნის $M(x;-y)$ წერტილიც.

OX ღერძს ეწოდება პარაბოლის ღერძი; O წერტილს - პარაბოლის წვერო; p სიდიდეს - პარაბოლის პარამეტრი.

როცა x იზრდება, მაშინ $y=\sqrt{2px}$ მნიშვნელობაც აგრეთვე უსაზღვროდ იზრდება (როცა $x=0$, $y=0$).

ავაგოთ პარაბოლის გრაფიკი. ჯერ ავაგოთ გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია ზედა ნახევარსიბრტყეში, ხოლო შემდეგ კი ეს ფრაგმენტი გავაგრძელოთ ქვედა ნახევარსიბრტყეში OX ღერძის სიმეტრიულად (იხ. სურ. 36).

თუ (1) განტოლებაში x და y ცვლადებს როლებს შევუცვლით, მივიღებთ პარაბოლას ($y=2px^2$), რომლის სიმეტრიის ღერძი იქნება OY. ცხადია, იგი მოთავსებული იქნება ზედა ნახევარსიბრტყეში.

§4. მეორე რიგის ზედაპირები

1. ელიფსოიდი. ვთქვათ, სივრცეში აღებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა $OXYZ$. ავიღოთ OXZ სიბრტყეზე ელიფსი:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ \ (a>0, \ c>0),$$

ანუ

$$x=\pm a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}, \ \ -c\leq z\leq c.$$

ვაბრუნოთ

$$x=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$$

წირი OZ ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვით ზედაპირს, რომლის განტოლება იქნება:

$$x^2+y^2=a^2(1-\frac{z^2}{c^2}),$$

ანუ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

(1) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს **ბრუნვითი ელიფსოიდი** ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{2}$$

(a, b და c დადებითი რიცხვებია) რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (1) განტოლება.

(2) ზედაპირის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა h იცვლება $(-c)$-დან $(+c)$-მდე, ყოველთვის გვაძლევს ელიფსს, რომლის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1, \tag{3}$$

სადაც

$$p = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad q = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \tag{4}$$

(2) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს ეწოდება **ელიფსოიდი**, ხოლო a, b და c რიცხვებს – ელიფსოიდის ნახევარღერძები.

ვინაიდან (2) განტოლება შეიცავს მხოლოდ x, y და z ცვლადების კვადრატებს, ამიტომ, თუ $(x_0; y_0; z_0)$ წერტილი მდებარეობს ელიფსოიდზე, მაშინ $(\pm x_0; \pm y_0; \pm z_0)$ წერტილები ასევე მდებარეობენ ელიფსოიდზე (იგულისხმება, რომ კოორდინატებისათვის ნიშანს ვირჩევთ ნებისმიერად ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად). აქედან გამომდინარეობს, რომ ელიფსოიდი სიმეტრიულია, როგორც კოორდინატთა სათავის ასევე საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ელიფსოიდის თანაკვეთა $x = 0$, $y = 0$ და $z = 0$ საკოორდინატო სიბრტყეებთან იქნება ელიფსები, რომელთა განტოლებებია შესაბამისად:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

ადრე ვაჩვენეთ, რომ ელიფსოიდის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა h იცვლება $(-c)$-დან $(+c)$-მდე, ყოველთვის გვაძლევს (3) ელიფსს, რომლის ნახევარღერძები p და q განისაზღვრება (4) ტოლობებით. ამიტომ ელიფსოიდი შეგვიძლია

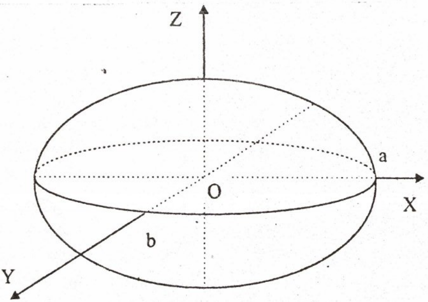
განვიხილოთ როგორც (3) ელიფსის მოძრაობის შედეგად წარმოქმნილი ზედაპირი, როცა მისი წვეროები სრიალებენ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

და

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ელიფსებზე (იხ. სურ. 37). ამასთან (3) ელიფსის მოძრაობის დროს მისი სიბრტყე XOY სიბრტყის პარალელური რჩება.



სურ. 37.

თუ $a = b = c = r$, მაშინ მიიღება r რადიუსიანი სფერო,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

2. ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი. ავილოთ OXZ სიბრტყეზე ჰიპერბოლა:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (a > 0, \ c > 0)$$

და ვაბრუნოთ იგი OZ ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვით ზედაპირს, რომლის განტოლება იქნება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{5}$$

(5) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს **ბრუნვითი ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი** ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{6}$$

(a, b და c დადებითი რიცხვებია) რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (5) განტოლება.

(6) ზედაპირის თანაკვეთა $z=h$ (h ნებისმიერია) სიბრტყე-თან გვაძლევს ელიფსს, რომლის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1, \tag{7}$$

სადაც

$$p=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\ \ q=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{8}$$

(6) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს ეწოდება **ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი**, ხოლო a, b და c რიცხვებს - მისი ნახევარღერძები.

ვინაიდან (6) განტოლება შეიცავს მხოლოდ x, y და z ცვლადების კვადრატებს, ამიტომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია, როგორც კოორდინატთა სათავის ასევე საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

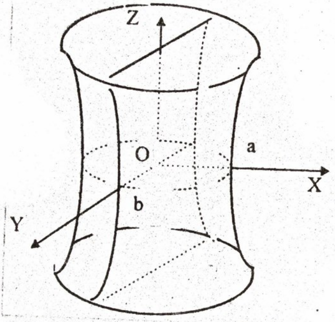
ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა $x=0$, $y=0$ და $z=0$ საკოორდინატო სიბრტყეებთან გვაძლევს შესაბამისად:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ \ \&\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

ჰიპერბოლებს და

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ელიფსს.



სურ. 38.

ადრე ვაჩვენეთ, რომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან გვაძლევს (7) ელიფსს, რომლის ნახევარღერძები p და q განისაზღვრება (8) ტოლობებით. ამიტომ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (7) ელიფსის მოძრაობის შედეგად წარმოქმნილი ზედაპირი (h იცვლება $(-\infty)$-დან $(+\infty)$-მდე), როცა მისი წვეროები სრიალებენ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

და

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ჰიპერბოლებზე (იხ. სურ. 38). ამასთან ელიფსის მოძრაობას დროს მისი სიბრტყე XOY სიბრტყის პარალელური რჩება.

3. ორკალთა ჰიპერბოლოიდი. ავიღოთ OXZ სიბრტყეზე ჰიპერბოლა:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \ \ (c > 0, \ b > 0)$$

და ვაბრუნოთ იგი OZ ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვით ზედაპირს, რომლის განტოლება იქნება:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{9}$$

(9) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს ეწოდება **ბრუნვითი ორკალთა ჰიპერბოლოიდი.**

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის განტოლება:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{10}$$

(a, b და c დადებითი რიცხვებია) რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (9) განტოლება.

(10) ზედაპირის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა $|h| > c$, გვაძლევს ელიფსს, რომლის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1, \tag{11}$$

სადაც

$$p = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \ \ q = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}. \tag{12}$$

(10) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს ეწოდება **ორკალთა ჰიპერბოლოიდი**, ხოლო a, b და c რიცხვებს – მისი ნახევარღერძები.

ვინაიდან (10) განტოლება შეიცავს მხოლოდ x, y და z ცვლადების კვადრატებს, ამიტომ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი სიმეტრიულია, როგორც კოორდინატთა სათავის ასევე საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

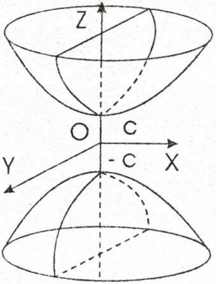
ორკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა $x = 0$, $y = 0$ და $z = 0$ საკოორდინატო სიბრტყეებთან გვაძლევს შესაბამისად:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \& \ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ჰიპერბოლებს და

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

წარმოსახვით ელიფსს.



სურ. 39.

ადრე ვაჩვენეთ, რომ ორკალთა ჰიპერბოლოიდის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა $|h| > c$, გვაძლევს (11) ელიფსს, რომლის ნახევარღერძები p და q განისაზღვრება (12) ტოლობე-

ბით. ამიტომ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (11) ელიფსის მოძრაობის შედეგად წარმოქმნილი ზედაპირი, როცა მისი წვეროები სრიალებენ

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

და

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ჰიპერბოლებზე (იხ. სურ. 39). ამასთან ელიფსის მოძრაობის დროს მისი სიბრტყე XOY სიბრტყის პარალელური რჩება.

4. ელიფსური პარაბოლოიდი. ავიღოთ OXZ სიბრტყეზე პარაბოლა:

$$x^2 = 2pz \ \ (p > 0)$$

და ვაბრუნოთ იგი OZ ღერძის გარშემო. მივიღებთ ბრუნვით ზედაპირს, რომლის განტოლება იქნება:

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{13}$$

(13) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს **ბრუნვითი პარაბოლოიდი** ეწოდება.

განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის განტოლება:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{14}$$

(p და q დადებითი რიცხვია) რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს (13) განტოლება.

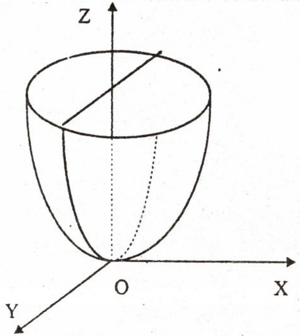
(14) ზედაპირის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა $h > 0$, გვაძლევს ელიფსს, რომლის განტოლებაა:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{15}$$

სადაც

$$a = \sqrt{2ph}, \quad b = \sqrt{2qh}. \qquad (16)$$

(14) განტოლებით განსაზღვრულ მეორე რიგის ზედაპირს **ელიფსური პარაბოლოიდი** ეწოდება.



სურ. 40.

ვინაიდან (14) განტოლება შეიცავს მხოლოდ x და y ცვლადების კვადრატებს, ამიტომ ელიფსური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია XOZ და YOZ საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

ელიფსური პარაბოლოიდის თანაკვეთა $x = 0$, $y = 0$ და $z = 0$ საკოორდინატო სიბრტყეებთან გვაძლევს შესაბამისად:

$$y^2 = 2qz \ \& \ x^2 = 2pz$$

პარაბოლებს და $O(0;0;0)$ წერტილს.

ადრე ვაჩვენეთ, რომ ელიფსური პარაბოლოიდის თანაკვეთა $z = h$ სიბრტყესთან, როცა $h > 0$, გვაძლევს (15) ელიფსს, რომლის ნახევარღერძები p და q განისაზღვრება (16) ტოლობებით. ამიტომ ელიფსური პარაბოლოიდი შეგვიძლია განვიხი–

ლოთ როგორც (15) ელიფსის მოძრაობის შედეგად წარმოქმნილი ზედაპირი, როცა მისი წვეროები სრიალებენ $x^2 = 2pz$ და $y^2 = 2qz$ პარაბოლებზე (იხ. სურ. 40). ამასთან ელიფსის მოძრაობის დროს მისი სიბრტყე XOY სიბრტყის პარალელური რჩება.

5. ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი. ვთქვათ, XOZ და XOY სიბრტყეებზე შესაბამისად გვაქვს $x^2 = 2pz$ $(p > 0)$ პარაბოლა და $x = \pm ky$ $(k > 0)$ წრფეები. გადავკვეთოთ ეს წრფეები და პარაბოლა $x = h$ სიბრტყით. წრფეებთან გადაკვეთის წერტილები შესაბამისად იქნება: $(h; \pm\frac{h}{k}; 0)$, ხოლო პარაბოლასთან - $(h; 0; \frac{h^2}{2p})$. გავატაროთ ამ წერტილებში პარაბოლა. რადგან ჩვენ ვიმყოფებით $x = h$ სიბრტყეზე, ამიტომ მისი განტოლება უნდა ვეძებოთ $z = ay^2 + by + c$ სახით. თუ ჩავსვამთ მოცემული წერტილის კოორდინატებს საძიებელი პარაბოლის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$a \cdot \frac{h^2}{k^2} + b \cdot \frac{h}{k} + c = 0,$$

$$a \cdot \frac{h^2}{k^2} - b \cdot \frac{h}{k} + c = 0$$

და $c = \frac{h^2}{2p}$. ზედა განტოლებებიდან მიიღება:

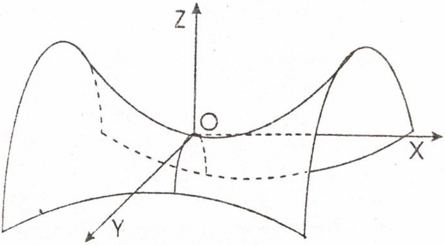
$$a = -\frac{k^2}{2p}, \;\; b = 0.$$

ამრიგად, საძიებელი პარაბოლის განტოლებები იქნება:

$$z = \frac{h^2}{2p} - \frac{k^2}{2p}y^2, \;\; x = h. \tag{17}$$

(17) პარაბოლის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს $y = 0$ და $x = h$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე. ამ წრფის $x^2 = 2pz$ პარაბოლასთან გადაკვეთის წერტილის z კოორდინატი იქნება $\frac{h^2}{2p}$. იგივე მნიშვნელობის ტოლია (17) პარაბოლის წვეროს z

კოორდინატი. აქედან ვასკვნით, რომ (17) პარაბოლის წვერო მდებარეობს $x^2 = 2pz$ პარაბოლაზე.



სურ. 41.

როცა h იცვლება $(-\infty)$-დან $(+\infty)$-მდე (17) პარაბოლა აღწერს ზედაპირს (იხ. სურ.41), რომელსაც **ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი** ეწოდება. მისი განტოლება (17) განტოლებების თანახმად იქნება:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{k^2}{2p} y^2,$$

ანუ

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{18}$$

სადაც $q = \frac{2p}{k^2}$.

(18) ზედაპირის თანაკვეთა $z = h$ (h ნებისმიერია) სიბრ-

ტყესთან გვაძლევს:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a = \sqrt{2ph}, \ b = \sqrt{2qh}),$$

ჰიპერბოლას, როცა $h > 0$,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \ (b = \sqrt{-2qh}, \ a = \sqrt{-2ph}),$$

ჰიპერბოლას, როცა $h < 0$,

$$x = \pm\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}y,$$

წრფეებს, როცა $h = 0$.

(18) ზედაპირის თანაკვეთა $y = h$ (h ნებისმიერია) სიბრტყესთან გვაძლევს:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{h^2}{2q} \tag{19}$$

პარაბოლას, რომლის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს $x = 0$ და $y = h$ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფე. ამ წრფის $y^2 = -2qz$ პარაბოლასთან გადაკვეთის წერტილის z კოორდინატი იქნება $\left(-\frac{h^2}{2q}\right)$. იგივე მნიშვნელობის ტოლია (19) პარაბოლის წვეროს z კოორდინატი. აქედან ვასკვნით, რომ (19) პარაბოლის წვერო მდებარეობს $y^2 = -2qz$ პარაბოლაზე.

ვინაიდან (18) განტოლება შეიცავს მხოლოდ x და y ცვლადების კვადრატებს, ამიტომ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი სიმეტრიულია XOZ და YOZ საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ.

6. მეორე რიგის კონუსი. ზედაპირს, რომელსაც წარმოქმნის მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემული წირის გადამკვეთი წრფეები, კონუსური ზედაპირი ეწოდება.

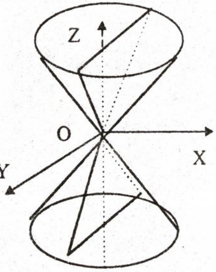
მოცემულ წირს კონუსის მიმმართველი წირი ეწოდება, მოცემულ წერტილს - კონუსის წვერო, ხოლო წრფეს, რომელიც

გადის კონუსის წვეროზე და კვეთს მიმმართველ წირს, კონუსის მსახველი ეწოდება.

შევადგინოთ იმ კონუსის განტოლება, რომლის წვეროა კოორდინატთა სათავე, ხოლო მიმმართველი წირი

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \ z = c, \tag{20}$$

ელიფსი (იხ. სურ. 42).



სურ. 42.

დავწეროთ მსახველის განტოლება, ე.ი წრფის, რომელიც გადის $O(0;0;0)$ წერტილზე და (20) წირის $M(x;y;z)$ წერტილზე. მისი მიმართულების კოეფიციენტები იქნება $\overline{OM} = (x;y;z)$ ვექტორის კოორდინატები. ამრიგად, მსახველის განტოლებები იქნება:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}, \tag{21}$$

სადაც X, Y და Z არის OM წრფეზე აღებული ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები.

გამოვრიცხოთ (20) და (21) განტოლებებიდან x, y და z. (21) განტოლებაში ჩავსვათ $z = c$ და განვსაზღროთ x და y. მივიღებთ:

$$x = c\frac{X}{Z}, \ y = c\frac{Y}{Z}.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს (20) განტოლებებიდან პირველში (ელიფსის განტოლებაში) მივიღებთ:

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{X^2}{Z^2} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{Y^2}{Z^2} = 1,$$

ანუ

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0. \tag{22}$$

(22) განტოლებით განსაზღვრულ ზედაპირს **მეორე რიგის კონუსს** უწოდებენ.

თუ $a = b$, მაშინ მიმმართველი წირი იქნება წრეწირი და ჩვენ მივიღებთ წრიულ კონუსს.

7. მეორე რიგის ცილინდრული ზედაპირები. ზედაპირს, რომელსაც წარმოქმნის მოცემული წირის გადამკვეთი წრფეები, რომლებიც ერთიდაიგივე წრფის პარალელურია, ცილინდრული ზედაპირი ეწოდება.

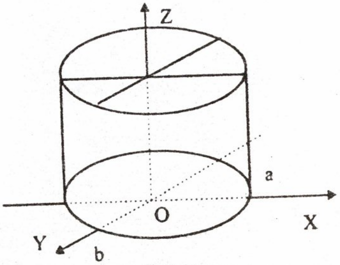
მოცემულ წირს ცილინდრის მიმმართველი წირი ეწოდება, ხოლო წრფეს, რომელიც კვეთს მიმმართველ წირს და მოცემული წრფის პარალელურია, ცილინდრის მსახველი ეწოდება.

ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის მიმმართველი წირია

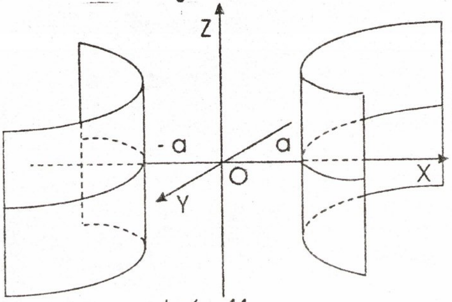
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > 0, \ b > 0)$$

ელიფსი, ხოლო მსახველები OZ ღერძის პარალელურია, **ელიფსური ცილინდრი** ეწოდება (იხ. სურ. 43).

ცხადია, როცა $a = b$, მივიღებთ ბრუნვით ზედაპირს ბრუნვის OZ ღერძით. მას ბრუნვითი ცილინდრი ეწოდება.



სურ. 43.



სურ. 44.

ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის მიმმართველი წირია

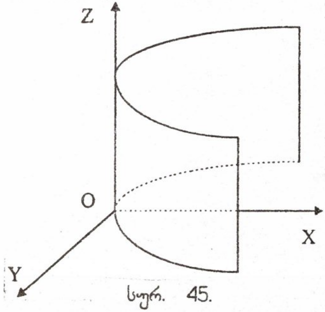
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, \ \ b > 0)$$

ჰიპერბოლა, ხოლო მსახველები OZ ღერძის პარალელურია, **ჰიპერბოლური ცილინდრი** ეწოდება (იხ. სურ. 44).

ცილინდრულ ზედაპირს, რომლის მიმმართველი წირია

$$y^2 = 2pz \ \ (p > 0)$$

პარაბოლა, ხოლო მსახველები OZ ღერძის პარალელურია, **პარაბოლური ცილინდრი** ეწოდება (იხ. სურ. 45).



სურ. 45.

ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ იმ ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მიმმართველი წირია $F(x, y) = 0$, ხოლო მსახველები OZ ღერძის პარალელურია, იქნება $F(X, Y) = 0$, სადაც X, Y და Z ცილინდრული ზედაპირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია. მართლაც, მსახველი, რომელიც გადის ცილინდრული ზედაპირის ნებისმიერ $(X; Y; Z)$ წერტილში OZ ღერძის პარალელურად, XOY სიბრტყეს კვეთს $(X; Y; 0)$ წერტილში. ცხადია ეს წერტილი მდებარეობს $F(x, y) = 0$ წირზე, ე.ი. $F(X, Y) = 0$.

ლიტერატურა

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., Наука, 1979.-512с.
2. Белман Р. Введение в теорию матриц. Наука, М., 1976.- 352 с.
3. Бугров Я.С., Никольски С. М. Элменты линейной алгебры и аналитической Геометрии. М., Наука, 1980.-174с.
4. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М., Наука, 1974.-336с.
5. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., Наук 1971.-271с.
6. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. Наука, М., 1971.-288 с.
7. Ефимов Н. В. Квадратичные формы и матрицы. Наука, М., 1972.-156 с.
8. Ланкастер П. Теория матриц. Наука, М., 1978.- 336с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Наука, М., 1971.- 431 с.
10. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. Наука, М., 1978.-208 с.
11. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1963.-272 с.
12. რ. დანელია. მატრიცები. თბილისი, გამომცემლობა ინტელექტი , 1997.-64გვ.
13. ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, ნ. მაჭარაშვილი, დ.გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი. წრფივი ალგებრისა და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი, განათლება , 1988.-320გვ.
14. ზ. ნაცვლიშვილი, გ. ტაბიძე, რ. დანელია, ჯ. გიორგობიანი, მ. კუბლაშვილი. დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. თბილისი, განათლება , 1990.-232გვ.
15. ნ.ი. მუსხელიშვილი. ანალიზური გეომეტრიის კურსი. თბილისი, გამომცემლობა ტექნიკა და შრომა, 1951.-671გვ.

სარჩევი

თავი პირველი. ვექტორული ალგებრის ელემენტები

თავი მეორე. წრფივ განტოლებათა სისტემა და დეტერმინანტი

ႧႠႥႨ ႫႤႭႧႾႤ. წრფე და სიბრტყე

გამომცემლობის რედაქტორი: რომანოზ დანელია

ტექრედაქტორი: ლაშა გადელია
ააწყო და დააკაბადონა: გიორგი რობაქიძე

გადაეცა ასაწყობად 12.03.97. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.09.97.
ქაღალდის ზომა 84X108 1/32. ნაბეჭდი თაბახი 14. სააღრიცხვო-
საგამომცემლო თაბახი 11.41. ტირაჟი 500. შეკვეთა №126/101
სსაუ-ის სტამბა, თბილისი – 31

წიგნი გამოდის ავტორების ხარჯით

ფასი სახელშეკრულებო

გამომცემლობა „ინტელექტი", თბილისი, ჩუბინაშვილის ქ. №50

1997