ნანა მაისურაძე

მათემატიკური მეთოდების გამოყენება პედაგოგიკურ გამოკვლევებში

გამომცემლობა „უნივერსალი"
თბილისი 2009

წინამდებარე კურსში გადმოცემულია პედაგოგიკური კვლევის დაგეგმვისა და შედეგების მათემატიკური მეთოდების გამოყენების სპეციფიკა.

განკუთვნილია განათლების ფაკულტეტის მაგინსტრანტებისათვის, სტუდენტებისათვის. დახმარებას გაუწევს პედაგოგებს, ფსიქოლოგებს, სოციოლოგებს.

რედაქტორი: პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი **ოთარ გუგუჩია**

რეცენზენტები: პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი **ქეთევან დარცმელია**

პედაგოგიკის მეცნიერებათა დოქტორი **თემურ ორმოცაძე**

გამომცემლობა „უნივერსალი", 2009

თბილისი, 0179, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 19, ☎: 22 36 09, 8(99) 17 22 30
E-mail: universal@internet.ge

ISBN 978-9941-12-779-3

შესავალი

დავსვათ ასეთი კითხვა

რომელი მათემატიკური მოდელია საჭირო პედაგოგიკურ გამოკვლევებში?

ჩვენი მიზანია ავამაღლოთ სწავლების ეფექტურობა სკოლაში ეს კი იმას ნიშნავს, რომ შედეგები უნდა იყოს უკეთესი. სწავლების პროცესში, როგორც წესი, მოსწავლე უნდა გამოვკითხოთ და დავსვათ ნიშანი. გამოკითხვა შეიძლება იყოს როგორც ზეპირი, ასევე წერითი. ექსპერიმენტისათვის უნდა ავიღოთ ორი კლასი, ერთში შეგვაქვს სიახლე, მეორეში კი – არა. ორივე კლასში გვექნება ნიშნები. როგორ შევაფასოთ ეს კლასები? ნიშნებით ვერ შევაფასებთ, მიღებული ნიშნები არის სტატისტიკა, ნიშნები არის შემთხვევითი ქულები, ამიტომაც გვჭირდება მათემატიკური სტატისტიკური მეთოდები.

ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი ნიშნები

$$\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 3 \end{array}$$

$$5 - 4 = 4 - 3$$

მათ შორის ტოლობის დაწერა არ შეიძლება, რადგან 5-ზე შეფასებულ ცოდნას გამოკლებული 4-ზე შეფასებული ცოდნა არ უდრის 4-ზე შეფასებულ ცოდნას გამოკლებული 3-ზე შეფასებული ცოდნა. ეს არის ცოდნის პირობითი ერთეული. მათ შორის არც ნაკლებობის და არც მეტობის ნიშნების დაწერა შეიძლება. შეფასება იგივე გაზომვაა, ჩვენ ვზომავთ ცოდნას. ცოდნის შეფასება კი არის გაზომვა, როდესაც ჩვენ არ გვაქვს ერთეული

1. გაზომვის ხერხები და სკალა

გაზომვა არის ობიექტისადმი ან მოვლენისადმი ციფრის (შეიძლება იყოს ნიშანი, ასო) მიწერის პროცედურა გარკვეული წესების მიხედვით.

ფიზიკური თვალსაზრისით არსებობს ორი სახის გაზომვა: თვისებრივი და რაოდენობრივი.

თვისებრივი არის ისეთი სახის გაზომვა, როდესაც არ გაქვს გაზომვის მყარი ერთეული. რაოდენობრივი კი ისეთი სახის გაზომვაა, როდესაც გვაქვს ერთეული. ფიზიკაში, მათემატიკაში გვაქვს მხოლოდ რაოდენობრივი გაზომვა, ხოლო ფსიქოლოგიაში, პედაგოგიკაში, მედიცინაში გვაქვს თვისებრივი გაზომვა. ამ გაზომვას ადრე გაზომვად არც თვლიდნენ.

მოცემული ორი სახის გაზომვა (თვისებრივი და რაოდენობრივი) დაიყო ოთხ სკალად: ორი თვისებრივი და ორი რაოდენობრივი დავასახელოთ ეს სკალები.

1. სახელდების (ნომინალური) სკალა;
2. რიგის (რანგის) სკალა;
3. ინტერვალთა სკალა;
4. შეფარდებითი სკალა.

სახელდებისა და რიგის სკალები თვისებრივი სახის სკალებია, ხოლო ინტერვალთა და შეფარდებითი სკალები რაოდენობრივი. სახის სკალებს მიეკუთვნება.

დაწვრილებით, მიმოვიხილოთ თითოეული მათგანი.

რას წარმოადგენს სახელდების სკალა? სახელდების სკალა არის ისეთი სკალა, რომლის მიხედვითაც შეიძლება ერთი ობიექტი (მოვლენა) განვასხვავოთ მეორისაგან მხოლოდ და მხოლოდ გარკვეული თვისებებით, მაგრამ შეუძლებელია დავადგინოთ მათ შორის ნაკლებობა, მეტობა ან ტოლობა. მოვიყვანოთ გაზომვის მაგალითი სახელდების სკალაზე. კლასში განვასხვაოთ სქესის მიხედვით გოგოები და ბიჭები. გოგონებს მივაწეროთ ციფრი 1, ბიჭებს კი – ციფრი 2. მათ შორის არის მხოლოდ თვისებრივი განსხვავება.

მათემატიკური მეთოდების გამოყენება სახელდების სკალაზე მაინც შესაძლებელია. გაზომვის სკალაზე, მიღებულ ციფრებზე არ შეიძლება არითმეტიკული მოქმედებების შესრულება, მაგრამ ამ ციფრების მიხედვით შესაძლებელია ობიექტების განსხვავება. მიღებულ ციფრებში მაინც არის მახასიათებელი მოდა. მოდა არის ციფრი, რომელიც ყველაზე ხშირია სახელდების სკალაზე.

რიგის სკალაზე გაზომვისას შესაძლებელია ერთი ობიექტი განვასხვაოთ მეორისაგან გარკვეული თვისებების მიხედვით ისე, რომ შეგვეძლოს $a=b$ თუ $a \neq b$ დადგენა. თუ $a \neq b$, მაშინ $a>b$ ან $a<b$. სამი ობიექტისთვის ავიღოთ a, b, c. თუ $a>b$ და $b>c$, მაშინ $a>c$. ხოლო თუ $a=b$, $b=c$, მაშინ $a=c$.

რიგის სკალაზე აუცილებლად უნდა იყოს დაცული ტრანზიტულობის თვისება მოჭადრაკეების თვისებების გაზომვა. რიგის სკალაზე შეუძლებელია.

რიგის სკალაზე ერთობლიობის მახასიათებელია მოდა. ციფრთა მიღებული სიმრავლის საუკეთესო მახასიათებელი მოდასთან ერთად არის მედიანა.

მედიანა განსაზღვრავს იმ ობიექტს, რომელსაც აღემატება ობიექტთა 50% და რომელზეც ნაკლებია ობიექტთა 50%. 5 ქულას მინუს 4 ქულა არ უდრის 4 ქულას მინუს 3 ქულა ($5-4 \neq 4-3$). ეს მაგალითი თვალსაჩინოდ მიგვითითებს, რომ ამ სკალაზე არ შეიძლება რიცხვებზე არითმეტიკული მოქმედების შესრულება, ამიტომ აზრი არა აქვს საშუალო არითმეტიკულის გამოთვლას. ზოგადი სურათის მისაღებად კვლავ ვადგენთ ობიექტთა სიხშირის განაწილებას კლასების მიხედვით.

სიხშირეთა დიაგრამაზე ნომინალურ სკალაზე აზრი აქვს როგორც დიაგრამათა სიმაღლეს, ასევე დიაგრამების ურთიერთმიმდევრობას.

რას წარმოადგენს ინტერვალთა სკალა? ამ სკალაზე ერთეული გვაქვს, მაგრამ არ გვაქვს აბსოლუტური ნული. ამი-

ტომ შეიძლება მხოლოდ სხვაობის ანუ ინტერვალის დადგენა. მაგალითად, შეიძლება იმის მტკიცება, რომ 15-12=9-6. მაგრამ, მოცემული თვისებების მიხედვით, ვერ დავადგენთ თუ რამდენჯერ მეტია ერთი ობიექტი მეორეზე, რადგან არ ვიცით აბსოლუტური ნული.

მოვიყვანოთ ინტერვალთა სკალის კლასიკური მაგალითი – ტემპერატურის გაზომვა ცელსიუსის სკალაზე. ნული აღებულია პირობითად, რადგან აბსოლუტური ნულის ცნება მაშინ არ იცოდნენ, ამიტომ ვერ ვიტყვით, რომ 10°C ორჯერ მეტია 5ºC-ზე, მაგრამ შეიძლება ვთქვათ, რომ 10°C-5ºC=5ºC.

რიცხვთა სიმრავლის საუკეთესო დამხასიათებელია მოდა, მედიანა და საშუალო არითმეტიკული.

შეფარდებითი სკალის დროს გვაქვს როგორც ერთეული, ასევე აბსოლუტური ნული. ამიტომ შეიძლება დავადგინოთ თუ რამდენჯერ მეტია ერი ობიექტი მეორე ობიექტზე მოცემული ნიშნის მიხედვით. განვიხილოთ კლასიკური მაგალითი, კელვინის სკალა. შეიძლება ვთქვათ, რომ 10K ორჯერ მეტია 5K-ზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ამ სკალაზე შეიძლება ობიექტებს შორის შეფარდებათა დადგენა. შეფარდებით სკალაზე შეიძლება ვაწარმოოთ ყველა სტატისტიკური ოპერაცია: მიმატება, გამოკლება, გამრავლება, გაყოფა და ა.შ.

ზოგად სურათს გვაძლევს ისევ სიხშირეთა განაწილება, ხოლო საუკეთესო მახასიათებელი რიცხვთა სიმრავლისა არის მოდა, მედიანა, საშუალო არითმეტიკული და საშუალო გეომეტრიული.

რისთვის გვჭირდება ეს სკალები?

ზოგადი შენიშვნა ასეთია: მათემატიკური მეთოდების გამოყენება არსებითად არის დამოკიდებული გაზომვის სკალაზე.

პედაგოგიკაში სადღეისოდ გვაქვს მხოლოდ თვისებრივი (1 და 2) სკალა. არ გვაქვს არც ინტერვალთა და არც შე-

ფარდებითი სკალები. ეს სწორიც არის, პედაგოგიკაში არ გვექნება ისინი. თუმცა არის მცდელობა შემოაპარონ პედაგოგიკაში რაოდენობრივი სკალა, რაც თავის მოტყუებაა. პედაგოგიკაში დღეს გვაქვს მხოლოდ თვისებრივი სკალა.

ჩვენ გამოვიყენებთ მხოლოდ იმ მეთოდებს, რომლებიც თვისებრივი გაზომვებისათვის გამოგვადგება.

1) ჩამოვწეროთ რიცხვების ორი სიმრავლე:

I. 1,3,3,5,6,7,8 მოდა=3, მედიანა=5, საშ.არითმეტ. =33/7.

II. 1,3,3,5,6,7,16 მოდა=3, მედიანა=5, საშ.არითმეტ. =41/7.

უდიდესი მნიშვნელობა სიმრავლეში მოდაზე და მედიანაზე არ ახდენს გავლენას, ის გავლენას ახდენს საშუალო არითმეტიკულზე.

2) მოვიყვანოთ მაგალითი მათემატიკური მეთოდების კორექტული გამოყენების თაობაზე პედაგოგიკიდან. შევადაროთ მოსწრება ორ კლასში. ვთქვათ, ორივე კლასში არის 20-20 მოსწავლე. ჩავატაროთ საკონტროლო, რომლის შედეგად მივიღებთ ქულებს. ვთქვათ, პირველ კლასში მივიღეთ ათი ხუთიანი და ათი ორიანი, ხოლო მეორეში ათი ოთხიანი და ათი სამიანი.

ისმის კითხვა: სად არის უკეთესი მიღწევა? შეფარდებითი სკალის გამოყენება პედაგოგიკაში არ შეიძლება, რადგან არ გვაქვს აბსოლუტური ნული. საშუალო ქულა ორივე კლასში არის 3,5, ე.ი. საშუალო არითმეტიკული არ არის მახასიათებელი, იმიტომ რომ არ გვაძლევს შედეგს. ეს არის თვისებრივ-რანგის სკალაზე მიღებული შედეგები, მათი შეკრება და საშუალოს გამოთვლა არ შეიძლება, არ ვარგა.

მოდით გავაღრმავოთ ეს მაგალითი. გარდავქმნათ ხუთქულიანი სისტემა. შემოვიღოთ ქულათა ასეთი სისტემა: 1,2,4,8,12. შევაფასოთ ამ სისტემის მიხედვით საშუალო არითმეტიკული ორივე კლასისათვის. პირველში არის 7, მეორეში კი-6. ე.ი. პირველ კლასში მოსწრება თითქოს უკეთე-

სია. საწინააღმდეგო დასკვნა მივიღეთ, მაგრამ მაინც არასწორი.

ისევე შევცვალოთ ქულები და დავწეროთ ასეთი სისტემა 1,2,6,8,10. გამოვთვალოთ საშუალო არითმეტიკული. პირველ კლასში ის არის 6, ხოლო მეორეში-7. როგორც ვხედავთ, ახლა, პირიქით გამოგვივიდა.

დასკვნა: ეს ქულები ჩნდება რანგის სკალაზე და მას რანჟირება ჰქვია. რანჟირებისას ციფრებს ვირჩევთ ნებისმიერად, დასკვნა კი არ უნდა იყოს დამოკიდებული რანჟირების შერჩევაზე. ჩანს, რომ საშუალო არითმეტიკულის გამოყენება არ შეიძლება თვისებრივ სკალაზე და გვჭირდება ისეთი მეთოდები, რომლებიც ინვარიანტული იქნება რანჟირების მიმართ.

განვიხილოთ რა მიმართებაშია ერთმანეთთან მოდა, მედიანა და საშუალო არითმეტიკული.

მოდის და მედიანის ინტერპრეტაცია მოვახდინოთ რიცხვთა ღერძზე.

მოდა არის მნიშვნელობა, რომლის სიხშირე უდიდესია.

მედიანა არის მნიშვნელობა, რომლიდანაც აბსოლუტურ გადახრათა ჯამი მინიმალურია.

საშუალო არითმეტიკული არის მნიშვნელობა, რომლიდანაც გადახრების ჯამი მინიმალურია.

მცირე ჯგუფებისათვის მოდა შეიძლება ძალზე არასტაბილური იყოს და არ ივარგებს.

სიმეტრიული განაწილებისას სამივე მახასიათებელი ემთხვევა ერთმანეთს. ასიმეტრიულ განაწილებაში კი ეს მახასიათებლები განსხვავებულია. ზოგიერთ ჯგუფს არა აქვს ცენტრალური სიმეტრიის ტენდენცია, ამიტომ ეს მახასიათებლები არ გამოდგება, განსაკუთრებით, მცირე ჯგუფებზე.

ციფრების ან რიცხვების ერთობლიობას ახასიათებს არა მარტო საშუალო არითმეტიკული, არამედ გაბნევა.

რა არის გაბნევის მახასიათებელი ნომინალურ ან რანგის სკალაზე?

თვისებრივ სკალაზე გაბნევას ახასიათებენ შემდეგი მახასიათებლებით: ცენტინი, დეცინი, კვარტინი.

კვარტინი არის სამი ისეთი რიცხვი, რომელთაგან პირველი აღემატება ობიექტების 25%-ს, მეორე აღემატება 50%-ს, მესამე კი აღემატება 75%-ს. კვარტინი გამოდგება მცირე შერჩევისათვის, ცენტინი და დეცინი მხოლოდ დიდი შერჩევისათვის გამოდგება.

დეცინი არის ათი ისეთი რიცხვის რიგი, რომელთაგან პირველი აღემატება შერჩევის ობიექტების რიცხვის 10%-ს, შემდეგი–20%-ს, მომდევნო – 30%-ს და ა.შ., ხოლო ბოლო აღემატება 90%-ს.

ცენტინი არის 99 რიცხვი, რომელთაგან პირველი აღემატება შერჩევის ობიექტების რაოდენობის 1%-ს, მომდევნო – 2%-ს, შემდეგი 3%-ს, ბოლო კი – 99%-ს.

მათემატიკური მეთოდების გამოყენება დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელ სკალაზე ვაწარმოებთ გაზომვას.

რა თქმა უნდა მათემატიკური სტატისტიკის დასკვნას აქვს ალბათური ხასიათი და არა კატეგორიული.

§1. პარამეტრული და არაპარამეტრული მათემატიკური სტატისტიკა

ობიექტთა სრულ სიმრავლეს გენერალურ ერთობლიობას უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითები პედაგოგიკიდან. თუ გვაინტერესებს საქართველოს მოსწავლეთა მოსწრების შედეგები, მაშინ გენერალური ერთობლიობა იქნება საქართველოს ყველა მოსწავლე. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაში გენერალური ერთობლიობა არის სასრული ანუ თვლადი. მაგრამ, გენერალური ერთობლიობა შეიძლება იყოს უსასრულოც და აგრეთვე შეიძლება იყოს წარმოსახვითი. უსასრულოა მაგალითად, კამათელის გაგორება. ცდის, ექსპერიმენტის დროს არა გვაქვს სასრული გენერალური ერთობლიობა. შეუძლებელია ქვიშის ყველა მარცვალი გადავთვალოთ.

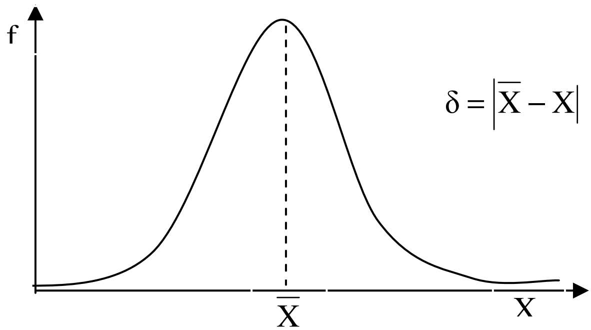
ცდას, გაზომვებს ჩვენ ვატარებთ ობიექტთა რაღაც ამონაკრებზე გენერალური ერთობლიობიდან. ამ ამონაკრებს უწოდებენ შერჩევის ერთობლიობას ანუ შერჩევას.

ჩვენ ვსწავლობთ შერჩევის თვისებებს და ამის მიხედვით უნდა ვიწინასწარმეტყველოთ გენერალური ერთობლიობის თვისებები. ეს არის მათემატიკური სტატისტიკის ამოცანები. შერჩევა უნდა იყოს რეპრეზენტატული ანუ წარმომადგენლობითი. მათემატიკური სტატისტიკა ზუსტად არ წყვეტს საკითხს, მხოლოდ გარკვეულ ალბათობას იძლევა.

შერჩევის მახასიათებლებს, რომლებიც იზომება ცდის დროს, უწოდებენ სტატისტიკებს.

შერჩევის მახასიათებლებს პარამეტრებს უწოდებენ. მაგალითად, შემთხვევითი ცდომილებების განაწილება ხშირად ექვემდებარება გაუსის განაწილების კანონს.

თუ f არის განაწილების ფუნქცია, მაშინ $f(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$, სადაც δ არის გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება, σ- საშუალო კვადრატული ცდომილება.



ამ განაწილების პარამეტრებია $\bar{x}$ (საშუალო არითმეტიკული) და საშუალო კვადრატული გადახრა. $\bar{x}$ ყველაზე კარგი მიახლოებაა ჭეშმარიტებასთან.

როგორც ვხედავთ, ძირითადი ცნება არის განაწილების ფუნქცია. მისი დადგენა ძნელია. ამიტომ გენერალურ ერთობლიობას ახასიათებენ პარამეტრებით. ჩვენი მიზანია დავადგინოთ ეს პარამეტრები ამიტომაც ამ სტატისტიკას ეწოდება პარამეტრული მათემატიკური სტატისტიკა.

პარამეტრულ მათემატიკურ სტატისტიკაში უნდა ვიცოდეთ განაწილების მრუდი და პარამეტრები. ამისათვის კი აუცილებელია საქმე გვქონდეს რაოდენობრივ გაზომვებთან. თვისებრივი პედაგოგიკური გაზომვებისათვის პარამეტრულ მათემატიკურ სტატისტიკას ვერ გამოვიყენებთ.

სტატისტიკას, რომელსაც იყენებენ თვისებრივი გაზომვებისას, ეწოდება არაპარამეტრული მათემატიკური სტატისტი-

კა. თუ არ გვაქვს რაოდენობრივი გაზომვა, ვერ დავადგენთ ვერც განაწილების მრუდს და ვერც პარამეტრს. ამიტომ არაპარამეტრული მათემატიკური სტატისტიკა ნიშნავს ისეთი სტატისტიკური მეთოდებისა და კრიტერიუმების შემუშავებას, რომელიც თავისუფალია, არ არის დამოკიდებული განაწილების მრუდისაგან ანუ განაწილებისაგან. ზოგიერთი ავტორი თვლის, რომ ტერმინი არაპარამეტრული სტატისტიკა არ არის კარგი, ეს უფრო სუსტი მეთოდია, ვიდრე პარამეტრული. მაგრამ სადღეისოდ ისეთი მძლავრი გახდა ეს მეთოდები, რომ მიუახლოვდა პარამეტრულს. არაპარამეტრულ სტატისტიკაზე შრომები XIX საუკუნის ბოლოს გაჩნდა: პირსონის სტატიები, ნიშანთა კრიტერიუმები ფიშერის წიგნში, მოგვიანებით ფოტელინმა და ჰაბოტმა გამოაქვეყნეს შრომა რანგულ კოლერაციაზე.

არაპარამეტრულ სტატისტიკაში სამი გარღვევა იყო. პირველი იყო 1933 წელს კოლმოგოროვის თეორემის სახით. შერჩევის მოცულობის გაზრდისას ერთის ტოლი ალბათობით ემპირიული განაწილების ფუნქცია (თანაბრად არგუმენტის მიმართ) მიისწრაფვის თეორიული განაწილების ფუნქციისაკენ. მაგრამ ეს თეორემა მართებულია მხოლოდ რაოდენობრივი გაზომვებისათვის; მეორე იყო 1945 წელს უილქოქსონის მიერ რანგული კრიტერიუმის აღმოჩენა; მესამე კი – 1963 წელს, როდესაც ჰოჯერმა და ლემანმა გამოიყენეს რანგული კრიტერიუმები უცნობი პარამეტრის შეფასებისათვის.

ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური სტატისტიკის ორი ძირითადი ამოცანა.

I. პარამეტრების შეფასება. განვიხილოთ მაგალითი. შერჩევაში გამოვთვალოთ საშუალო არითმეტიკული. ჩვენ გვაინტერესებს გენერალური ერთობლიობის საშუალო არითმეტიკული, ე.ი. შერჩევის საშუალო არითმეტიკულის მიხედვით უნდა შევაფასოთ გენერალური ერთობლიობის საშუალო არითმეტიკული. რასაკვირველია, ეს ამოცანა დგას მხოლოდ

პარამეტრულ მათემატიკურ სტატისტიკაში. არაპარამეტრულ მათემატიკურ სტატისტიკაში შეიძლება არა პარამეტრული, არამედ გასაზომი სიდიდეების შეფასება ანუ დამუშავების ეფექტის შეფასება. პედაგოგიკურ გამოკვლევებში შეფასების ამოცანები არ გვხვდება.

II. მეორე ძირითად ამოცანას ჰქვია ჰიპოთეზების შემოწმება. ეს ხდება როგორც პარამეტრულ, ასევე არაპარამეტრულ მათემატიკურ სტატისტიკაში. განვიხილოთ მაგალითი. ავაგდოთ ხურდა ფულის მონეტა ათჯერ. ცხრაჯერ დაჯდა გერბი, ერთჯერ – ფასი. ერთგვაროვანია თუ არა ფული? შერჩევა არის ათი, გენერალური ერთობლიობა – უამრავი. დავწეროთ ალბათობის განაწილება. P იყოს გერბზე დაჯდომის ალბათობა და P=1/2, q იყოს ფასზე დაჯდომის ალბათობა და q=1/2, n – ცდათა რიცხვი შერჩევაში, m კი – ხელსაყრელ შემთხვევათა რიცხვი. ბინომური განაწილების ალბათობა იქნება

$$P = C_n^m p^m q^{n-m}\text{, სადაც } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

ძირითადი ჰიპოთეზა H_0 მდგომარეობს იმაში, რომ ფული ერთგვაროვანია, ალტერნატიული H_1 ჰიპოთეზა კი – იმაში, რომ ფული არ არის ერთგვაროვანი.

გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ მონეტის ათი აგდების შემთხვევაში, ცხრაჯერ დაჯდება გერბი ან 10-ჯერვე დაჯდება გერბი. რა იქნება ეს ალბათობა?

$$P = C_{10}^9 (\frac{1}{2})^9 (\frac{1}{2}) + C_{10}^{10} (\frac{1}{2})^{10} (\frac{1}{2})^0 = 0{,}0107$$

მივიღეთ 9-ჯერ ან 10-ჯერ გერბის დაჯდომის ალბათობა. ის არის მცირე. ვთქვათ, გვაქვს 100 აგდება, მაშინ ეს ალბათობა იქნება 1-ის ტოლი.

ეს არის ჰიპოთეზების შემოწმების მაგალითი მათემატიკურ სტატისტიკაში.

§2. არაპარამეტრული მათემატიკური სტა-ტისტიკის ძირითადი ამოცანა პედაგოგიკურ გამოკვლევებში.

არაპარამეტრული მათემატიკური სტატისტიკის ძირითადი ამოცანა პედაგოგიკურ გამოკვლევებში არის ჰიპოთეზების შე-მოწმება. გავარკვიოთ რა სახის ჰიპოთეზა არსებობს.

პედაგოგიკურ გამოკვლევებში მრავალფეროვანი ჰიპოთე-ზები არსებობს. ჩვენ შევჩერდეთ იმ ჰიპოთეზებზე, რომლებიც განიხილება მხოლოდ არაპარამეტრული მათემატიკური სტა-ტისტიკის საფუძველზე. ასეთი არის ორი სახის ჰიპოთეზა. ესენია:

I. ჰიპოთეზა სტოქასტიკური (ალბათური) დამოკიდებუ-ლების თაობაზე ორ ან რამდენიმე ნიშან-თვისებას შორის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს არის კორელაციის ამოცანა. მა-გალითად, უფრო მაღალ დონეზე ფიზიკის სწავლება სტო-ქასტიკურად არის დამოკიდებული მასწავლებლის კვალიფი-კაციაზე.

II. ჰიპოთეზა შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონე-ბის (რომლებიც უცნობია) ტოლობის ან განსხვავების შესა-ხებ ორ ან რამდენიმე შერჩევაში. ამ შემთხვევაში H_0 ძირი-თადი ჰიპოთეზა იქნება – ამ ორ ნაკრებს შორის განსხვავება არის შემთხვევითი. ალტერნატიული H_1 ჰიპოთეზა იქნება – განსხვავება არის გამოწვეული ექსპერიმენტული ფაქტორით.

პედაგოგიკურ გამოკვლევებში გვექნება II სახის ჰიპოთე-ზა.

§3.ᲡᲢᲐᲢᲘᲡᲢᲘᲙᲣᲠᲘ ᲰᲘᲞᲝᲗᲔᲖᲘᲡ ᲨᲔᲛᲝᲬᲛᲔᲑᲘᲡ ᲖᲝᲑᲘᲔᲠᲗᲘ ᲞᲠᲘᲜᲪᲘᲞᲘ

ორ შერჩევას შორის განსხვავება შემთხვევითია, თუ ორივე შერჩევა ანუ კლასი ეკუთვნის ისეთ გენერალურ ერთობლიობას, რომელთა განაწილების ფუნქცია ერთნაირია (თუმცა განაწილების კანონი უცნობია თვისობრიობიდან გამომდინარე).

1. ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზა

საზოგადოდ, სტატისტიკური ჰიპოთეზების შემოწმების თეორია საკმაოდ რთული და მძლავრი თეორიაა. ჩვენს მიზანს მისი შესწავლა არ შეადგენს, მაგრამ ზოგიერთი პრინციპის შერჩევა დაგვჭირდება.

ჰიპოთეზას, რომლის მიხედვითაც შერჩევებს შორის განსხვავება შემთხვევითია, უწოდებენ ძირითად ანუ ნულოვან ჰიპოთეზას და აღნიშნავენ H_0 –ით. ზოგად თეორიაში განიხილება შერჩევათა ნებისმიერი რაოდენობა. პედაგოგიკურ გამოკვლევებში კი საკმარისია ორი შერჩევა.

ჩვენ უშუალოდ H_0 ჰიპოთეზას არ ვამოწმებთ, არამედ – მისგან გამომდინარე შედეგებს ალბათობის გარკვეულ დონეზე. H_0 ან რჩება ან იცვლება ალტერნატიული ჰიპოთეზით.

ალტერნატიულ ჰიპოთეზას აღნიშნავენ H_1 –ით. ალტერნატიული ჰიპოთეზა მდგომარეობს იმაში, რომ ორ შერჩევას შორის განსხვავება არ არის შემთხვევითი, ე.ი. განპირობებულია არაშემთხვევითი ფაქტორებით (მაგალითად, პედაგოგიკურ გამოკვლევებში სწავლების ახალი მეთოდით).

2. პრაქტიკულად შეუძლებლობის პრინციპი. მნიშვნელობის დონე და უტყუარობის დონე

მათემატიკურ სტატისტიკაში ამა თუ იმ ჰიპოთეზის შემოწმება, შემთხვევითი სიდიდის ან მოვლენის შესახებ, დაფუძნებულია პრაქტიკულად შეუძლებლობის პრინციპზე.

ავირჩიოთ ალბათობის გარკვეული მნიშვნელობა, ჩვეულებრივ, მცირე. თუ რას ნიშნავს მცირე, დამოკიდებულია ამოცანაზე. პედაგოგიკური გამოკვლევებისათვის საკმარისია ეს მცირე მნიშვნელობა ავიღოთ ხუთი მეასედი ან ზოგჯერ ერთი მეასედიც ანუ 5%-იანი და 1%-იანი დონე. ალბათობის ამ შერჩეულ მნიშვნელობას ეწოდება მნიშვნელობის დონე და მას α–თი აღნიშნავენ.

თუ შემთხვევითი მოვლენის ალბათობა $P \leq \alpha$, მაშინ ამბობენ, რომ ასეთი შემთხვევა პრაქტიკულად შეუძლებელია. თუ კი ასეთი მოვლენა მაინც მოხდება, ჩვენ უკვე ვიცით, რომ ეს მოვლენა შემთხვევითი არ არის და ის უკვე ჩვენთვის არის მნიშვნელოვანი. საჭიროა მისი არაშემთხვევითობის მიზეზების ამოხსნა, გარკვევა.

თვალსაჩინოდ ვაჩვენოთ თუ რას ნიშნავს მნიშვნელობის დონე. წარმოვიდგინოთ შემთხვევათა დიდი რაოდენობა. მაგალითად, ფულის მონეტის აგდების დიდი რაოდენობა. ვთქვათ, α=5. ეს ნიშნავს, რომ აგდების დიდი რაოდენობისას 100-დან 5-ჯერ შეგვეშლება თუ კი ვიტყვით, რომ მოცემული მოვლენა არაშემთხვევითია.

განვიხილოთ სიდიდე θ=1-α. ეს არის ალბათობა იმისა, რომ თუ კი ვიტყვით, მოცემული მოვლენა არაშემთხვევითია, ვიქნებით სწორი. ამიტომ მას ეწოდება უტყუარობის დონე. ცხადია, ჩვენ გვჭირდება კრიტერიუმები, რომლის უტყუარობის დონე მაღალი იქნება, ხოლო მნიშვნელობათა დონე – დაბალი.

3. ნულოვანი ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმი

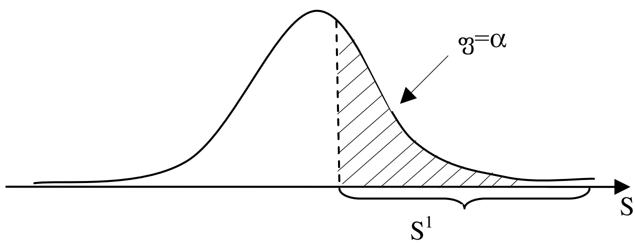
დავუშვათ, გვაქვს ორი შერჩევა. ამა თუ იმ მათემატიკური ფორმით განვსაზღვროთ სიდიდე, რომელიც ახასიათებს განსხვავებას ამ ორ სიდიდეს შორის. აღვნიშნოთ ეს სიდიდე S-ით. ის აფიქსირებს განსხვავებას ორ შერჩევას შორის. დავუშვათ, რომ ნულოვანი ჰიპოთეზის ჭეშმარიტება საშუალე-

ბას გვაძლევს დავადგინოთ თეორიული განაწილების კანონი S-ისთვის. მაშინ S-ს ეწოდება შერჩევის სტატისტიკები. ავირჩიოთ მნიშვნელობის გარკვეული დონე α და მივუთითოთ S-ის მნიშვნელობათა ის არე, რომელშიც მოხვედრის ალბათობა არ აღემატება α-ს. სტატისტიკების მნიშვნელობათა ასეთ არეს ეწოდება კრიტიკული არე. შემდეგ დავითვალოთ S-ის მნიშვნელობა ჩვენი შერჩევათა მიხედვით, შეიძლება გვქონდეს ორი შემთხვევა:

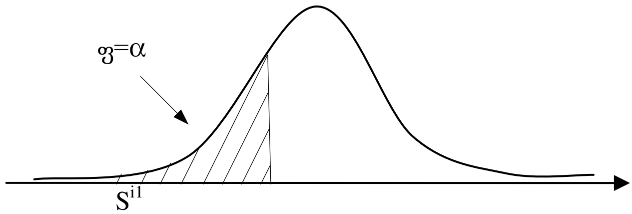
1. ჩვენ მიერ გამოთვლილი S-ის მნიშვნელობა მოხვდა კრიტიკულ არეში, ე.ი. ეს მოვლენა არ არის შემთხვევითი. პრაქტიკულად შეუძლებლობის პრინციპის თანახმად ის არაშემთხვევითია. მნიშვნელობის ამ დონეზე უგულებელვყოთ H_0-ს და ავიღებთ H_1 –ს.

2. ჩვენს მიერ გამოთვლილი S სტატისტიკების მნიშვნელობა არ მოხვდა კრიტიკულ არეში, ე.ი. ეს მოვლენა არის შემთხვევითი და რჩება H_0.

ზემოთ ნათქვამი გამოვსახოთ გეომეტრიულად.



ეს არის განაწილების სიმკვრივის მრუდი. მისი ფართობი არის 1. ავირჩიოთ კრიტიკული არე. ეს ფართობი არის ალბათობა იმისა, რომ S-ის მნიშვნელობა მოხვდა კრიტიკულ არეში და ტოლია α-სი.



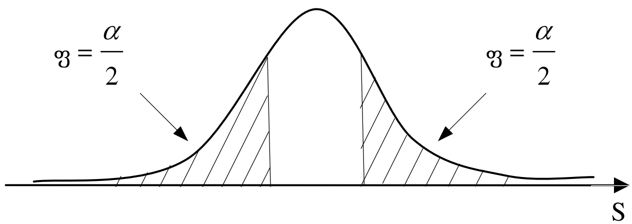
S' და S'' სტატისტიკებს უწოდებენ სტატისტიკების კრი-ტიკულ მნიშვნელობებს ან ზღვრულ მნიშვნელობებს.

ჩამოვაყალიბოთ H_0 –ის უგულებელყოფისა და H_0 –ის კრიტერიუმები.

S> S'

S'> S'' - არის ცალმხრივი კრიტერიუმები

ორმხრივი კრიტერიუმის დროს გვექნება.



H_0 –ის უგულებელყოფის კრიტერიუმებია S> S' და S< S''. თუ პირიქით გვექნება, მაშინ რჩება H_0.

ორმხრივი კრიტერიუმი უფრო ძლიერია, ვიდრე ცალ-მხრივი.

4. პირველი და მეორე გვარის შეცდომები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს

1) H_0 ჭეშმარიტია, მაგრამ ჩვენ უგულებელვყოფთ მას;

2) H_0 ჭეშმარიტია და ჩვენ ვიღებთ მას;
3) H_0 მცდარია და ჩვენ მაინც ვიღებთ მას;
4) H_0 მცდარია და ჩვენ უგულებელვყოფთ მას.

ჩამოვაყალიბოთ ლოგიკურად რამდენი შეცდომა გვაქვს.

მეორე და მეოთხე სწორი ამონახსენია, პირველი და მესამე კი – შეცდომაა. პირველში აღწერილ შეცდომას ეწოდება I გვარის შეცდომა. მესამეში აღწერილ შეცდომას ეწოდება II გვარის შეცდომა.

რას უდრის ალბათობა I გვარის შეცდომისა? ეს ისევ არის α.

I გვარის შეცდომის ალბათობა არის α და α დონის მცირე მნიშვნელობა გვაძლევს, რომ ჭეშმარიტ H_0–ს არ უგულებელვყოფთ. II გვარის შეცდომის ალბათობა აღვნიშნოთ β -თი. $\gamma=1-\beta$ ეს იქნება ალბათობა იმისა, რომ H_0 მცდარია და მას უგულებელვყოფთ. γ არის კრიტერიუმის სიმძლავრე. γ უნდა იყოს დიდი, ეს ნიშნავს, რომ β არ უნდა იყოს მცირე.

ისეთ კრიტერიუმს, რომლისთვისაც β მცირეა, ეწოდება საფუძვლიანი კრიტერიუმი. ჩვენი მიზანია ყოველთვის ავარჩიოთ საფუძვლიანი კრიტერიუმი.

ნულოვანი ჰიპოთეზის შემოწმების კრიტერიუმი საფუძვლიანია, თუ განსხვავებულ შერჩევათა მოცულობების უსასრულოდ გაზრდისას, II გვარის შეცდომის ალბათობა $\beta\to 0$. შერჩევათა ალბათობა უნდა ავიღოთ რაც შეიძლება დიდი, რომ β იყოს მცირე.

ორმხრივი კრიტერიუმი α მნიშვნელობის დონეზე მიიღება თუ გავაერთიანებთ ორივე კრიტერიუმს $\alpha/2$ მნიშვნელობის დონეზე.

§4. ორი დამოკიდებული შერჩევის შედეგების შედარება

1. დამოკიდებული და დამოუკიდებელი შერჩევა

სტატისტიკური მეთოდის გამოყენება გარდა გაზომვის მეთოდისა, დამოკიდებულია შერჩევის თავისებურებაზე. კერძოდ, თუ ორი შერჩევა ისეთია, რომ პირველი შერჩევის ობიექტების რაიმე თვისების გაზომვის შედეგები არ ახდენს გავლენას მეორე შერჩევის ობიექტების ამავე თვისების გაზომვის შედეგებზე, მაშინ ეს ორი შერჩევა დამოუკიდებელია. თუ კი ეს პირობა არ სრულდება, ორი შერჩევა არის დამოკიდებული. ე.ი. ერთში გაზომვის შედეგები გავლენას ახდენს მეორის გაზომვის შედეგებზე. მაგალითად, ერთსა და იმავე ჯგუფში ორჯერ ვატარებთ გამოკითხვას. ეს არის დამოკიდებული შერჩევის მაგალითი. გავეცნოთ იმ მეთოდებს, რომლებიც მუშაობს დამოკიდებულ შერჩევაზე.

2. მაკნამარას კრიტერიუმი.

ამ კრიტერიუმის საფუძველზე ვადარებთ ორ შერჩევას, როდესაც მათი გამოსაკვლევი თვისებები გაზომილია სახელდების სკალით მაინც. მაგალითად, პროფესიული ორიენტაციის განმარტება კლასში. მოსწავლეებს დავუსვათ შემდეგი კითხვა – ვის რა პროფესია აინტერესებს? პასუხის რამდენიმე კატეგორია იქნება. ეს კატეგორიებია: მომწონს, არ მომწონს, მაინტერესებს, არ მაინტერესებს, არ მიფიქრია. საზოგადოდ, სახელდების სკალაზე შეიძლება ბევრი კატეგორია მოხვდეს. კრიტერიუმი დამუშავებულია მხოლოდ იმ შემთხვევისათვის, როდესაც სახელდების სკალაზე გვაქვს მხოლოდ ორი კატეგორია. ერთ-ერთ კრიტერიუმს მივაწეროთ ციფრი 0, ხოლო მეორეს – ციფრი 1.

X სიდიდით აღვნიშნოთ შემთხვევითი ცვლადი, რომელიც ახასიათებს დამოკიდებული შერჩევის ობიექტების რაღაც

თვისებას პირველადი გაზომვისას, Y სიდიდით აღვნიშნოთ შემთხვევითი ცვლადი, რომელიც ამავე თვისებას ახასიათებს მეორე გაზომვისას. დავუშვათ, რომ გაზომვის შედეგად x და y სიდიდეები გარკვეულ მნიშვნელობებს იღებენ. x ცვლადის კონკრეტული მნიშვნელობები გაზომვის შედეგად იქნება x_1, x_2, x_3,..... x_n,. y ცვლადის კონკრეტული მნიშვნელობები გაზომვის შედეგად იქნება y_1, y_2, y_3, ... y_n. (x_i, y_i) არის ერთი და იმავე მოსწავლის ერთი და იგივე თვისების ორჯერადი გაზომვის შედეგი, რა თქმა უნდა, ორი კატეგორიის სკალაზე. ორკატეგორიანი სახელდების სკალაზე გვექნება შემდეგი სახის წყვილები: 0,0; 0,1, 1,0; 1,1. შევადგინოთ ცხრილი, რომელსაც ეწოდება ცხრილი ორი ორზე (2X2).

II გაზომვა

		$y_{i=0}$	$y_{i=1}$	
I გაზომვა	$x_i=0$	a (0;0)	b (0;1)	a+b
	$x_i=1$	c (1;0)	d (1;1)	a+c+d
		a+c	b+d	N

რა შემთხვევაშია მაკნამარას კრიტერიუმები სამართლიანი? განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

I. დაშვებები:

1). შერჩევები შემთხვევითია ანუ რეპრეზენტატიული;

2). შერჩევები დამოკიდებულია, ე.ი. ერთსა და იმავე კლასში ვატარებთ ორ გაზომვას.

3). ყოველი x_i y_i N წყვილი აუცილებლად დამოუკიდებელია. ეს ნიშნავს, რომ ერთმანეთთან კონტაქტისა და გადაწერის საშუალება არ არის.

4). გაზომვის სკალა არის სახელდების სკალა ორი კატეგორიით. მაგალითად, მაღალი-დაბალი, კარგი-ცუდი, მეტი-ნაკლები, არა-კი, მომწონს – არ მომწონს.

II. ჰიპოთეზები

მაკნამარას კრიტერიუმისათვის H_0 ჰიპოთეზა ყალიბდება შემდეგნაირად: $P(x_i=0,\ y_i=1)=P(x_i=1,\ y_i=0)$, ანუ ალბათობები ერთნაირია. ეს ნიშნავს, რომ განსხვავება ორ შერჩევას შორის შემთხვევითია, არ არის გამოწვეული პედაგოგიური საშუალებით.

H_1 ჰიპოთეზას აქვს სახე: $P(x_i=0,\ y_i=1)\neq P(x_i=1,\ y_i=0)$. ეს ალბათობები ერთნაირი არ არის და განსხვავება ორ შერჩევას შორის შემთხვევითი არ არის, ის გამოწვეულია პედაგოგიური საშუალებით.

III. კრიტერიუმის სტატისტიკა

განვასხვაოთ ორი შემთხვევა. პირველი, თუ $b+c>20$, მაშინ მუშაობას ე.წ. T_1 კრიტერიუმი ანუ $T_1=\dfrac{(b-c)^2}{b+c}$; მეორე, თუ $b+c\leq 20$, მაშინ მუშაობს ე.წ. T_2 კრიტერიუმი ანუ $T_2=\min(b,c)$.

a და d გამოხატავს იმ შემთხვევას, როცა თვისება არ იცვლება. ეს წყვილები არის ინდეფერენტული პედაგოგიური საშუალების მიმართ, ამიტომაც არ მონაწილეობს კრიტერიუმში.

IV. გადაწყვეტილების მიღების წესი.

შევამოწმოთ ნულოვანი ჰიპოთეზის ჭეშმარიტება. ავირჩიოთ მნიშვნელობის გარკვეული α დონე. პედაგოგიკურ გამოკვლევებში $\alpha=0{,}05$, ზოგჯერ კი $\alpha=0{,}01$. დაგვჭირდება $b+c=n$ რიცხვი. არსებობს ცხრილები, რომლებშიც ნაჩვენებია მოცემული α-სთვის როგორ არის დამოკიდებული T_1 და T_2 კრიტერიუმები n რიცხვზე ანუ $b+c$-ზე. განვასხვავოთ კვლავ ორი

შემთხვევა. T_2 –თვის ცხრილები შედგენილია ბინომური განაწილების კანონის მიხედვით, ხოლო T_1 –თვის კარგად მუშაობს ხიკვადრატის განაწილების კანონი, როდესაც თავისუფლების ხარისხი არის 1.

ცხრილებიდან ვპოულობთ ალბათობას იმისა, რომ T_2 არ აღემატება T_{2k} (კრიტიკულს): $P(T_2 \leq T_{2k})$. განვიხილოთ ორმხრივი კრიტერიუმი. თუ კი ეს ალბათობა $P<\alpha/2$, მაშინ H_0 –ს უგულებელვყოფთ და ვიღებთ H_1 –ს მნიშვნელობის α დონეზე. ეს ცხრილები შედგენილია $n=25$-სთვის.

T_{1k} (კრიტიკულის) მნიშვნელობა უნდა ამოვწეროთ სხვა ცხრილებიდან. $T_{1k}=3,84$, როდესაც $\alpha=0,05$ და $T_{k1}=6,64$. თუ $\alpha=0,01$. H_0 –ს უგულებელვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე და ვიღებთ H_1 –ს, თუ ფორმულით გამოთვლილი T_1 მეტი აღმოჩნდა T_k –ზე. ე.ი. გავლენა მოახდინეს პედაგოგიურმა საშუალებებმა. თუ რა გავლენა მოახდინა პედაგოგიურმა საშუალებამ, ეს დამოკიდებულია იმაზე, თუ რომელია მეტი b თუ c. თუ $b>c$, გავლენა იქნება დადებითი, ხოლო თუ $b<c$ – უარყოფითი. თუ $b=c$, მაშინ მაკნამარას კრიტერიუმი არ მუშაობს.

განვიხილოთ მაგალითი. გავარკვიოთ საუბრის ან ლექციების ციკლის, ექსკურსიების გავლენა სწავლების პროფორიენტაციაზე. დავსვათ კითხვა – როგორია თქვენი დამოკიდებულება ფიზიკოსის პროფესიისადმი? განვიხილოთ პასუხების ორი კატეგორია: I კატეგორია- მომწონს, II კატეგორია – არ მომწონს. გამოიკითხა 150 მოსწავლე სხვადასხვა სკოლიდან. მოსწავლეთა შერჩევა შემთხვევითია და შედგება 20 მოსწავლისაგან. გამოკითხვა ჩატარდა ორჯერ. პირველი იყო საუბრის, ლექციებისა და ექსკურსიების ჩატარებამდე, ხოლო მეორე მათი ჩატარების შემდეგ. ავაგოთ ცხრილი 2X2.

II გამოკითხვა

I გამოკითხვა	a 2	b 2	4
	c 11	d 5	16
	13	7	

a=2; b=2; c=11; d=5

$b+c=13<20$ ე.ი. ვიყენებთ T_{2k} კრიტერიუმს.

$b=2$, T_2 ემთხვევა b –ს მნიშვნელობას ე.ი. $T_2=2$. ცხრილიდან გვექნება $P=0,0011$ – ეს არის ალბათობა იმისა, რომ T_2 მოხვდება კრიტიკულ არეში, ე.ი. H_0 –ს უგულებელვყოფთ. $\alpha/2=0,025$, ე.ი. $P<\alpha/2$.

განხორციელდა შემთხვევა, როდესაც H_0-ს უგულებელვყოფთ H_1 –ის სასარგებლოდ 5% მნიშვნელობის დონეზე ($\alpha=0,05$); პედაგოგიურმა საშუალებებმა მოახდინეს გავლენა პროფესიის არჩევაზე. ეს გავლენა არის დადებითი, რადგან პასუხები ,,მომწონს" მეტია.

მაკნამარას კრიტერიუმით შეიძლება გადავწყვიტოთ შემდეგი სახის პედაგოგიური ამოცანები:

1). პედაგოგიური დამუშავების გავლენა სწავლების ინტერესზე;

2). პედაგოგიური ზემოქმედების (ცოდნის კონტროლის ფორმის) გავლენის გამოკვლევა მოსწავლეთა განაწილებაზე ცოდნის მიხედვით;

3). პედაგოგიური დამუშავების გავლენის გამოკვლევა ცოდნის შეთვისების დონეზე.

საკითხის შესწავლის შემდეგ, ცოდნის კონტროლის სხვადასხვა ფორმის გავლენის შესასწავლად მოსწავლეთა განაწილებაზე ცოდნის მიხედვით, ჩაატარეს პედაგოგიური ექსპერიმენტი. ჩატარდა ორნაირი გამოკითხვა:

1. წერითი დავალება – საკონტროლო წერა, რომელშიც იყო სამი საკითხი, თითოეული ფარსდებოდა 5-ქულიანი სის-ტემით:

ა) ვინც მართლა აითვისა (3;4;5) და ბ) არ აითვისა (1;2).

2. ტესტური გამოცდა – ტესტში იყო 20 კითხვა. დადე-ბითად ითვლება შემთხვევა, თუ მოსწავლემ უპასუხა 13 კით-ხვას, ხოლო თუ – არა, უარყოფითად ითვლება. შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით შეირჩა 100 მოსწავლე. ერთიმეორის მი-ყოლებით შესრულდა ორივე დავალება.

შევადგინოთ ცხრილი ორი ორზე

	აითვისა	არ აითვისა	ტესტი
აითვისა	a=63	b=21	a+b=84
არ აითვისა	c=4	d=12	c+d=16
საკონტროლო	a+c=67	b+d=33	100

H_0 ჰიპოთეზა გვაქვს, როდესაც ცოდნის კონტროლის ფორმა გავლენას არ ახდენს მოსწავლეთა განაწილებაზე ცოდნის მდგომარეობის მიხედვით. H_1 ჰიპოთეზა – როდესაც ცოდნის კონტროლის ფორმა გავლენას ახდენს მოსწავლეთა განაწილებაზე ცოდნის მიხედვით.

b+c=21+4=25>20

$$T_1 = \frac{(b-c)^2}{b+c} = \frac{(21-4)^2}{25} = 11,56$$

$\alpha = 0,01$, მაშინ $\mathrm{T_{1K}} = 6,64$, ე.ი. $\mathrm{T_1} > T_{1K}$

H_0-ს უარვყოფთ მნიშვნელობის $\alpha=0,01$ დონეზე და ვიღებთ H_1 –ს. ე.ი. კონტროლის ყველა ფორმა არ არის ტოლფასი.

ამგვარად, მაკნამარს კრიტერიუმის მუშაობს, თუ ორი შერჩევა დამოკიდებულია და გაზომვა ხდება სახელდების სკალაზე.

3. ნიშანთა კრიტერიუმი

ნიშანთა კრიტერიუმი გამოიყენება ორი დამოკიდებული შერჩევის შედარებისას და გაზომვის სკალა არის არანაკლები რანგის სკალაზე.

I. მოცემულობა

ვთქვათ, X არის შემთხვევითი ცვლადი, რომელიც ახასიათებს აღებული შერჩევის ობიექტების ჩვენთვის საინტერესო თვისებას პირველი გაზომვისას. Y იყოს ასევე შემთხვევითი ცვლადი, რომელიც ახასიათებს იმავე შერჩევის ობიექტების თვისებას მეორე გაზომვისას. ეს ცვლადები იღებენ შემდეგ მნიშვნელობებს $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ და $y_1, y_2, y_3, \ldots. y_n$. შესაბამისად $(x_i\ ,\ y_i\ )$ წყვილი არის ერთი და იმავე ობიექტის ერთი და იგივე თვისების ორჯერადი გაზომვის შედეგი. შევადაროთ ამ წყვილის ელემენტები ერთმანეთს სიდიდის მიხედვით რიგის სკალაზე. თუ $x_i<y_i$, მაშინ თვისებას აქვს გაზრდის ტენდენცია და ამ წყვილს მივაწერთ „+“ ნიშანს. თუ პირიქით, $x_i>y_i$, მაშინ შესასწავლ თვისებას აქვს შემცირების ტენდენცია. ასეთ წყვილს მივაწერთ „-“ ნიშანს. იმ შემთხვევაში, თუ $x_i=y_i$, მივაწერთ „0“-ს.

II. აუცილებელი და საკმარისი პირობები. დაშვებები.

1) შერჩევები შემთხვევითია;

2) შერჩევები დამოკიდებულია;

3) $(x_i y_i\ )$ წყვილები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია;

4) შესასწავლი თვისება ობიექტებისა განაწილებულია უწყვეტად.

უწყვეტობა ნიშნავს, რომ განაწილების რაღაც ფუნქცია უწყვეტია $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, $x < x_0$ – უწყვეტია მარცხნიდან. თუ კი უწყვეტია მარცხნიდანაც და მარჯვნიდანაც, მაშინ გვაქვს შემთხვევითი სიდიდე.

5) გაზომვის სკალა არ არის რიგის სკალაზე დაბალი.

III. ჰიპოთეზები.

H_0 ჰიპოთეზის თანახმად, განსხვავება ორ შერჩევას შორის შემთხვევითია, ე.ი. არ არის განპირობებული რაიმ ექსპერიმენტული ფაქტორით. მათემატიკურად ასე ჩაიწერება $P(x_i<y_i)=P(x_i>y_i)$ ყველა i წყვილისათვის. H_1 ჰიპოთეზის თანახმად, განსხვავება ორ შერჩევას შორის არ არის შემთხვევითი, არამედ გამოწვეულია რაიმე ექსპერიმენტული ფაქტორით. მათემატიკურად კი ჩაიწერება $P(x_i<y_i) \neq P(x_i>y_i)$

IV. სტატისტიკის კრიტერიუმი

T კრიტერიუმის გამოთვლისას არ ითვალისწინებენ იმ წყვილებს, რომელთაც ინდექსი 0 მივაწერეთ დავუშვათ, N წყვილთა რაოდენობას გამოვაკლეთ 0-ის მქონე წყვილთა რაოდენობა და დაგვრჩა n წყვილთა რაოდენობა. ახლა დავთვალოთ „+"- ნიშნიანი წყვილების რაოდენობას.

V. გადაწყვეტილების მიღების წესი.

n არის წყვილთა ის რაოდენობა, რომელთათვისაც $x_i \neq y_i$ ავირჩიოთ მნიშვნელობის α დონე. განვასხვაოთ ორმხრივი და ცალმხრივი კრიტერიუმი.

ორმხრივი კრიტერიუმი. არსებობს ცხრილები, რომლებიც შედგენილია n არ აღემატება 100-თვის. ამ ცხრილებში n- ის და α-ს მიხედვით შეიძლება ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნე-

ლობა t_α , $n\text{-}t_\alpha$. თუ $T_+<t_\alpha$ ან $T_+>n\text{-}t_\alpha$, მაშინ მნიშვნელობის α დონისთვის H_0 -ს უარვყოფთ H_1 -ის სასარგებლოდ:

ცალმხრივი კრიტერიუმი. განვიხილოთ ორი შემთხვევა

ა) x_i –ს აქვს კლების ტენდენცია. H_0 ჰიპოთეზის დროს იქნება ალბათობა $P(x_i < y_i) \geq P(x_i > y_i)$ – განსხვავება შემთხვევითია. H_1 ჰიპოთეზის დროს იქნება ალბათობა $P(x_i < y_i) < P(x_i > y_i)$ - განსხვავება არსებითია. ცხრილებიდან ვპოულობთ t_a და H_0-ს უარვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე თუ $T_+<t_\alpha$.

ბ) x_i –ს აქვს ზრდის ტენდენცია. H_0 –ჰიპოთეზის დროს $P(x_i < y_i) \leq P(x_i > y_i)$ და H_1 ჰიპოთეზის დროს $P(x_i < y_i) > P(x_i > y_i)$.

იმავე ცხრილებიდან ვპოულობთ უკვე $n\text{-}t_\alpha$ და H_0-ს უარვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე, თუ $T_+>n\text{-}t_a$.

როგორ მოვიქცეთ თუ $n>100$? ცხრილების ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ბინომური განაწილების ფორმულები

$$t_\alpha = 0.5(n + w_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{n}) - \text{ ორმხრივი კრიტერიუმისთვის}$$

$$t_\alpha = 0.5(n + w_\alpha\sqrt{n}) - \text{ ცალმხრივი კრიტერიუმისთვის}$$

W არის ნორმალური განაწილების (გაუსის განაწილების) კვანტილი. ავიღოთ ალბათობის რაღაც P მნიშვნელობა და მისი საშუალებით განვსაზღვროთ შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობა $F(x_p)=P$, სადაც P არის ჩვენს მიერ აღებული ალბათობა, ხოლო შემთხვევით სიდიდეს x_p, -ს ეწოდება კვანტილი თუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მოხვდება $(-\infty;x_p)$ ინტერვალში, უდრის აღებულ P –ს, ანუ $P(x<x_p)=P$.

თუ $\alpha = 0,05$ მაშინ $w_{\frac{\alpha}{2}} = -1,96$ ხოლო $w_\alpha = -1,64$

თუ $\alpha = 0,01$ მაშინ $w_{\frac{\alpha}{2}} = -3,29$ ხოლო $w_\alpha = -2,58$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. მოსწავლეებს მისცეს საკონტროლო სამუშაო გარკვეული ცნების შეთვისების შესამოწმებლად. ნამუშევარი შეფასდა 5 ქულიანი სისტემით. ამოირჩა 15 სუსტი მოსწავლის სამუშაო. შვიდმა მიიღო 2, ხოლო რვამ – 3. შემდეგ გამოიყენეს პროგრამული თანასახელმძღვანელო, რომელიც გათვალისწინებული იყო სუსტი მოსწავლეების დამოუკიდებელი მეცადინეობისთვის. ჩაატარეს ისევ საკონტროლო იმავე ცნების შეთვისების შემოწმებაზე. შედეგები შეაფასეს 5 ქულიანი სისტემით. მიღებული მონაცემებისათვის გავაკეთოთ შემდეგი ცხრილი.

მოსწავლე	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
I საკონტროლო	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	3	3	3
II საკონტროლო	2	3	3	4	3	2	3	4	4	3	4	3	2	4	4
ნიშანი	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	+	+	-	+	+

დავამუშავოთ ექსპერიმენტის შედეგები

$$n = 12$$

$$T_+ = 10$$

$$H_1 : P(x_i < y_i) > P(x_i < y_i)$$

$$\alpha = 0,05$$

$n - t_\alpha = 9; T_+ > n - t_\alpha$ ე.ი. $10 > 9$ და H_0 - ს

უარვყოფთ H_1 – ის სასარგებლო დ.

მაგალითი 2. მასწავლებლებს დაუსვეს ასეთი კითხვა – სავარჯიშოთა რიცხვი უნდა გაიზარდოს თუ უნდა შემცირდეს? გამოკითხეს 200 მასწავლებელი. გამოკითხვა ჩაატარეს ორჯერ. პირველი გამოკითხვა იყო სექტემბერში, სასწავლო წლის დასაწყისში, მეორე კი – მაისში სასწავლო წლის ბოლოს. პასუხების ვარიანტი იყო ორი სახის: 1. გაიზარდოს სავარჯიშოთა რიცხვი; 2. შემცირდეს სავარჯიშოთა რიცხვი. პასუხები, რომლებშიც პირველი გამოკითხვის შედეგად ეწერა შემცირდეს, ხოლო მეორე გამოკითხვის შედეგად – გაიზარდოს, აღვნიშნოთ „+“ ნიშნით. პასუხები, რომლებშიც პირველი გამოკითხვის შედეგად ეწერა გაიზარდოს, ხოლო მეორე გამოკითხვის შედეგად – შემცირდეს, აღვნიშნოთ „-“ ნიშნით. პასუხები, რომლებშიც ორივე გამოკითხვის შედეგად ეწერა ან მხოლოდ შემცირდეს ან მხოლოდ გაიზარდოს, აღვნიშნოთ „0“-ით.

I აზრი	გაზრდა	გაზრდა	შემცირება	შემცირება
II აზრი	გაზრდა	შემცირება	გაზრდა	შემცირება
ნიშანი	0	-	+	0
მასწავლებლთა რაოდენობა	52	74	36	38

დავამუშავოთ ექსპერიმენტის შედეგები

$$n=110=200-90>100; \qquad T_{+}=36$$

უნდა ვისარგებლოთ ორმხრივი კრიტერიუმით და გამოვიყვანოთ

$$t_{\alpha} = 0.5(n + W_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{n}) = 0.5(110 - 1.96\sqrt{110}) = 44{,}72 \approx 45$$

$$T_{+} = 36 < t_{\alpha}$$

დასკვნა: H_0 –ს უარვყოფთ H_1 –ის სასარგებლოდ.

მაგალითი 3. VII კლასელებს მისცეს ხუთი ამოცანა აზროვნების განზოგადების ხერხზე. ითვლება, რომ ამ ხერხს მოსწავლე ფლობს იმ შემთხვევაში, თუ ამოხსნა არანაკლებ სამი ამოცანისა. გაზომვის სკალა უნდა იყოს რიგის სკალა. შეფასება ხდება შემდეგი კრიტერიუმებით:

თუ სწორად ამოხსნილია სამი ამოცანა იწერება 1;

თუ სწორად ამოხსნილია ოთხი ამოცანა იწერება 2;

თუ სწორად ამოხსნილია ხუთი ამოცანა, იწერება 3.

გამოკითხეს 35 მოსწავლე. საკონტროლო ჩატარდა ორჯერ: სექტემბერში და მაისში.

მოსწავლე	I ნიშანი	II ნიშანი	სხვაობის ნიშანი
1	1	1	0
2	1	0	-
3	1	0	-
4	2	2	0
5	0	1	+
6	0	0	0
7	0	1	+
8	0	0	0
9	0	0	0
10	1	1	0
11	0	1	+
12	3	3	0
13	2	2	0
14	1	0	-
15	0	1	+
16	0	1	+
17	1	1	0
18	0	1	+
19	1	1	0
20	0	1	+
21	0	1	+

22	1	2	+
23	2	1	-
24	0	1	+
25	0	1	+
26	1	2	+
27	0	0	0
28	1	0	-
29	1	0	-
30	0	1	+
31	0	0	0
32	1	2	+
33	1	0	-
34	3	2	-
35	0	1	0

დავამუშავოთ ექსპერიმენტის შედეგები

$$n=35-12=23$$

$$T_+=15$$

$$y>x,$$

$n-t_\alpha=16>15$ ე.ი. H_0 –ს ვერ უარვყოფთ.

§5. უილქოქსონის კრიტერიუმის გამოყენების თაობაზე

უილქსოქსონის კრიტერიუმის გამოყენების აუცილებელი პირობა იმაში მდგომარეობს, რომ ორი შერჩევია დამოუკიდებელია და გაზომვის სკალა არის არანაკლებ ინტერვალურისა, ე.ი. გადავდივართ რაოდენობრივ სკალაზე. აქ ორი შერჩევის შედეგების შედარება ხდება არა მხოლოდ ნიშნის გათვალისწინებით, არამედ სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობის გათვალისწინებით. ამის გამო კრიტერიუმი უფრო მძლავრია. უილქოქსონის რანგული კრიტერიუმის გამოყენება შეიძლება მაშინაც, როდესაც გვაქვს ერთი შერჩევა. პედაგოგიკურ გამოკვლევებში ასეთი შერჩევა გვხვდება.

როგორ შემოაქვთ რაოდენობრივი სკალა ფსიქოლოგიურ-პედაგოგიკურ გამოკვლევებში? იმისათვის, რომ ეს სკალა შემოვიტანოთ უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

I. დავალებები არც ძალიან რთული უნდა იყოს და არც ძალიან მარტივი. ასეთ შემთხვევაში ობიექტის შესასწავლი თვისების განაწილება შეიძლება ჩაითვალოს სიმეტრიულად. უილქოქსონის კრიტერიუმი გამოდგება მხოლოდ სიმეტრიული განაწილებისთვის. თუ ამ პირობას დავარღვევთ, მაშინ განაწილება ხდება ასიმეტრიული, მისი ფორმა დამოკიდებული ხდება დავალებაზე და უილქოქსონის კრიტერიუმს ვერ გამოვიყენებთ.

II. ყველა დავალება (კითხვა, ამოცანა...) უნდა იყოს მიმართული ერთი და იმავე ფსიქოლოგიური თვისების შესწავლაზე.

III. დავალება უნდა იყოს გარკვეულად ინტელექტუალური, ე.ი. მექანიკური დამახსოვრების დონეზე პასუხი არ უნდა არსებობდეს. პასუხი უნდა მოითხოვდეს გარკვეულ მსჯელობას, გააზრებას.

IV. შეფასება უნდა ხდებოდეს „სწორია და არ არის სწორი“ დონეზე.

თუ პედაგოგიკური საკონტროლო ყველა ამ პირობას აკმაყოფილებს, ფსიქოლოგები და პედაგოგებიც თვლიან, რომ უნდა გამოვიყენოთ ინტერვალური სკალა და უილქოქსონის კრიტერიუმი. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი: 1) ამოცანა განტოლების შედგენაზე; 2) მაგალითი გამოსახულების რიცხვითი მნიშვნელობის გამოთვლაზე; 3) მაგალითი იგიკურ გარდაქმნაზე; 4) კითხვა, რომელიც ამოწმებს რომელიმე გეომეტრიული ცნების შეთვისებას; 5) კითხვა გარკვეული ცნების განსაზღვრებაზე. ინტერვალურ სკალაზე დათვლიან სწორია (არასწორია) პასუხების რაოდენობას.

§6. ორი დამოუკიდებელი შერჩევის შედეგების შედარება

1. მედიანური კრიტერიუმი

ვიყენებთ პედაგოგიკის კლასიკურ მაგალითს: ვირჩევთ ექსპერიმენტულ კლასს და საკონტროლო კლასს. ექსპერიმენტულში შეგვაქვს სიახლე, ხოლო საკონტროლოში ყველაფერი ძველებურად ტარდება. შემდეგ ვადარებთ შედეგებს.

პედაგოგიკურ გამოკვლევებში ხშირად საჭიროა ცენტრალური ტენდენციიდან გადახრის შესწავლა. ცენტრალური ტენდენციის მაჩვენებელი კი არის მედიანა.

I. მოცემულობა

ვთქვათ, X არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ახასიათებს ობიექტის შესასწავლ თვისებას პირველ შერჩევაში, ხოლო Y არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ახასიათებს ობიექტის შესასწავლ იმავე თვისებას მეორე შერჩევაში. რა თქმა უნდა, ხდება ამ სიდიდეების გაზომვა, რომლებიც ღებულობენ გარკვეულ მნიშვნელობებს: (x_1, x_2, x_3...... x_n) და (y_1, y_2, y_3.... y_n) შესაბამისად.

ორივე სერია დაკვირვებებისა გავაერთიანოთ ერთ შერჩევაში, რომლის მოცულობა იქნება $N=n_1+n_2$. განვსაზღვროთ m მედიანა გაერთიანებული ერთი შერჩევისთვის. მედიანის მიხედვით ახალი შერჩევა დავყოთ ორ კატეგორიად: 1. ამოვკრიფოთ ის შედეგები, რომლისთვისაც დაცულია m-ზე მეტობის პირობა; 2. ამოვკრიფოთ ის შედეგები, რომლისთვისაც დაცულია m-ზე ნაკლებობის ან ტოლობის პირობა.

მივიღეთ ორი კატეგორია, ამიტომ გავაკეთოთ ცხრილი ორი ორზე.

შერჩევა №1 შერჩევა №2

A რიცხვი x_i, რომელიც >m	B რიცხვი y_i, რომელიც >m	> m
C რიცხვი x_i, რომელიც ≤ m	D რიცხვი y_i, რომელიც ≤ m	≤ m

Σ N

თუ მიმდევრობაში გვაქვს რიცხვების კენტი რაოდენობა, მაშინ მედიანა იქნება ის რიცხვი, რომელიც შუაში ზის.

თუ მიმდევრობაში გვაქვს რიცხვების ლუწი რაოდენობა, მაშინ შუაში მოხვდება არა ერთი, არამედ ორი რიცხვი და მედიანა იქნება ამ ორი რიცხვის საშუალო არითმეტიკული. მაგალითად, გვაქვს 5,5,6,7,8,8,9,9,

მედიანა m=(7+8)/2=15/2=7,5.

II. დაშვებები. აუცილებელი და საკმარისი პირობები

1) ორივე შერჩევა შემთხვევითია.
2) ორივე შერჩევა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და თითოეული შერჩევის წევრები დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან.
3) გაზომვის სკალა არის არანაკლები რიგის სკალისა, რადგან სახელდების სკალაზე მედიანას ვერ გამოვთვლით.
4) ორივე შერჩევის წევრთა საერთო რაოდენობა მეტი უნდა იყოს 20-ზე. ($n_1 + n_2 > 20$)

III ჰიპოთეზები

H_0 ჰიპოთეზა: ზოგადი – განსხვავება შემთხვევითია, ამიტომ განაწილების კანონი ერთნაირია;

კონკრეტული – მედიანები ერთნაირია.

H_1 ჰიპოთეზა: ზოგადი – განსხვავება არ არის შემთხვევი-თი, ამიტომ განაწილების კანონი არ არის ერთნაირი.

კონკრეტული – მედიანები ერთნაირი არ არის.

IV. სტატისტიკის კრიტერიუმი.

სტატისტიკის კრიტერიუმს აღნიშნავენ ტრადიციულად T –თი და ითვლიან შემდეგი ფორმულით

$$T = \frac{N(|AD - BC| - \frac{N}{2})^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

V. გადაწყვეტილების მიღების წესი

გამოიყენება ისევ χ^2-ის ცხრილები, რომლებშიც თავი-სუფლების ხარისხი არის 1. ამ ცხრილებში მოცემულია T_k კრიტიკული, მნიშვნელობის α დონე, აგრეთვე N.

თავისუფლების ხარისხი ავიღოთ 1, შევარჩიოთ მნიშვნე-ლობის დონე და ცხრილიდან ამოვწეროთ T_k.

თუ $T_გ$ (გამოთვლილი) მეტია x_α -ზე, სადაც x_α არის ცხრილიდან ნაპოვნი კვანტილი χ^2-ის განაწილებისათვის, მა-შინ H_0 ჰიპოთეზას უარვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე.

არ არის რეკომენდირებული მედიანური კრიტერიუმის გა-მოყენება ჰიპოთეზის შესამოწმებლად თუ $20 < n_1 + n_2 < 40$ და ერთ-ერთი მნიშვნელობა მაინც A,B,C,D-დან ნაკლებია 5-ზე.

მედიანური კრიტერიუმის გამოყენება არ არის რეკომენდი-რებული იმ შემთხვევაშიც, თუ ზრდის მიხედვით დალაგებუ-ლი რიგის შუა ნაწილში მოხვდება ერთნაირი მნიშვნელობის საგრძნობი რიცხვი.

მაგალითები:

მაგალითი 1. აიღეს ქალაქის ორი რაიონის VIII კლასები. გადაწყვიტეს შეემოწმებინათ შემდეგი საკითხის სწავლება – ამოცანის ამოხსნა განტოლებების შედგენის მიხედვით. მოს-

წავლეებს მისცეს სამი შინაარსის სხვადასხვა ამოცანა. დავყოთ ამოცანის ამოხსნა ოთხ ეტაპად:

I ეტაპი – უცნობის აღნიშვნა;

II ეტაპი – განტოლების შედგენა;

III ეტაპი – განტოლების ამოხსნა;

IV ეტაპი – პასუხი.

შეფასება არის „სწორია – არ არის სწორი“ სახით. ყოველ ეტაპზე სწორი პასუხისათვის – ერთი ქულა. მაქსიმალური ქულა არის 4, ხოლო სამივე ამოცანისათვის – 12. ყოველი ეტაპის გასწორება ხდება წინა ეტაპისაგან დამოუკიდებლად.

შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით აიღეს პირველი რაიონიდან 28 ნაშრომი, მეორე რაიონიდან – 32 ნაშრომი. ნაშრომები გაასწორეს.

შედეგები მოცემულია ცხრილში.

ქულების რაოდენობა	აბსოლუტური სიხშირე I შერჩევაში-f_1	აბსოლუტური სიხშირე II შერჩევაში-f_2	$f_1 + f_2$	დაგროვილი სიხშირე Σf
12	2	1	3	60
11	1	2	3	57
10	-	1	1	54
9	-	5	5	53
8	3	3	6	48
7	4	7	11	42
6	6	3	9	31
5	5	5	10	22
4	4	3	7	12
3	1	-	1	5
2	2	2	4	4
1	-	-	-	-
0	-	-	-	-
	$n_1 = 28$	$n_2 = 32$	$N = n_1 + n_2 = 60$	

მედიანა ტოლი იქნება $m = (6+6)/2 = 6$

შევადგინოთ ცხრილი ორი ორზე

	I შერჩევა	II შერჩევა	Σ
m<	A=10	B=19	29
m≥	C=18	D=13	31
Σ			

$$T=\frac{N(|AD-\mathrm{B}C|-\frac{N}{2})^2}{(\mathrm{A}+\mathrm{B})(C+D)(\mathrm{A}+C)(\mathrm{B}+D)}=\frac{60(|\ 10\cdot 13-18\cdot 19\ |-30)^2}{(10+19)(18+13)(10+18)(19+13)}\approx 2{,}47$$

ავიღოთ χ^2-ის ცხრილი, თავისუფლების ხარისხია 1, მნიშვნელობის დონეა 0,05, მაშინ $x_\alpha=3{,}841$.

ჩვენს მიერ მიღებული $2{,}47<3{,}841$ ანუ $T<x_\alpha$, ამიტომ H_0 –ს ვერ უარვყოფთ. ეს ნიშნავს, რომ განაწილება ერთნაირია, ე.ი. მედიანები ერთნაირია.

მაგალითი 2. ახლა გავზარდოთ რაოდენობა. ორივე რაიონში ავიღოთ 40-40 გავაკეთოთ ახალი ცხრილი.

ქულების რაოდენობა	f_1	f_2	f_1+f_2	Σf
12	2	2	4	80
11	1	2	3	76
10	-	2	2	73
9	1	7	8	71
8	3	3	6	63
7	7	10	17	57
6	8	4	12	40
5	9	5	14	28
4	4	3	7	14
3	3	-	3	7
2	2	2	4	4
1	-	-	-	-
0	-	-	-	-
	$n_1=40$	$n_2=40$	N= 80	

მედიანა იქნება m= (6+7)/2=6,5
შევადგინოთ ცხრილი ორი ორზე

	I შერჩევა	II შერჩევა	
m<	A=14	B=26	=40
m≥	C=26	D=14	=40

$$T=\frac{80(|14\cdot 14-26\cdot 26|-40)^2}{40\cdot 40\cdot 40\cdot 40}=7.4$$

ვიცით, რომ ცხრილიდან მნიშვნელობის 0,05 დონეზე, როდესაც თავისუფლების ხარისხია 1, x_α=3,841. ე.ი. Tგ>x_α ანუ მოხვდა კრიტიკულ ზონაში, II რაიონში შედეგები უკეთესია.

მაგალითი 3. შეადარეს ქალაქისა და სოფლის გამოსაშვები კლასები შემდეგი საკითხის ცოდნაში – ნიუტონის I კანონი. ისმის კითხვა – როგორ შევამოწმოთ ცოდნა? ამისათვის უნდა მივცეთ საკონტროლო. გამოვყოთ დონეები საკითხის ცოდნაში:

I დონე – ფაქტოლოგიური (ფაქტების ცოდნა).

II დონე – ოპერატიული (მოქმედების ან ლოგიკური ოპერაციების განხორციელება ნიმუშის მიხედვით);

III დონე – ანალიტიკო-სინთეთიკური (კავშირების განსაზღვრა, ანალოგიების პოვნა ცნებებს შორის და ძირითადი იდეის გამოყოფა);

IV დონე – შემოქმედებითი დონე (ცოდნის გადატანა უცნობ სიტუაციაში).

სწორი პასუხისათვის შეფასება შემდეგია: I დონეზე – 1 ქულა, II დონეზე – 2 ქელა. III დონეზე – 3 ქულა, IV

დონეზე – 4 ქულა (ტრავინსკის მეთოდით). ჩავატაროთ 4 დონიანი საკონტროლო ნიუტონის I კანონზე. სოფლის ოთხი სხვადასხვა სკოლიდან დაწერა 42 მოსწავლემ, ქალაქის ოთხი სხვადასხვა სკოლიდან – 40 მოსწავლემ. საბოლოო ჯამში სოფლის სკოლებიდან დარჩა 41 ნამუშევარი, ქალაქის სკოლებიდან – 36 ნამუშევარი.

ქულების რაოდენობა	სოფელი, f_1	ქალაქი, f_2	$f_1 + f_2$	Σf
10	1	-	1	77
9	-	2	2	76
8	5	-	5	74
7	3	2	5	69
6	7	4	11	64
5	3	7	10	53
4	2	3	5	43
3	8	10	18	38
2	3	4	7	20
1	4	6	10	13
0	-	3	3	3
	$n_1 = 36$	$n_2 = 41$		

მედიანა არის $m = 4$

შევადგინოთ ცხრილი ორი ორზე

	I შერჩევა	II შერჩევა	
m<	A=19	B=15	=34
m≥	C=17	D=26	=43

$$T = \frac{77\left(\left|19 \cdot 26 - 15 \cdot 17\right| - \frac{77}{2}\right)^2}{(19+15)(17+26)(19+17)(15+26)} = 0.14$$

მნიშვნელობის 0,05 დონეზე, როდესაც თავისუფლების ხარისხია 1, $x_\alpha=3{,}841$. ჩვენი $T_გ=0{,}14<x_\alpha$

2. χ^2 მეთოდი.

χ^2-მეთოდით პედაგოგიკურ გამოკვლევებში ვადარებთ ორი დამოუკიდებელი შერჩევის შედეგებს. გაზომვის სკალა არის სახელდების.

I. მონაცემები

შესასწავლი თვისების მახასიათებელი ცვლადები აღვნიშნოთ X და Y-ით შესაბამისად პირველ და მეორე შერჩევაში. გაზომვის შედეგად ეს ცვლადები მიიღებენ შემდეგ მნიშვნელობებს.

X: $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n1}$

Y: $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_{n2}$

ავიღოთ გაზომვის სკალა ორი კატეგორიით (სწორია - არასწორია), შევადგინოთ ცხრილი ორი ორზე

	I შერჩევა (+)	II შერჩევა (-)	Σ
№1 შერჩევა	O_{11}	O_{12}	n_1
№2 შერჩევა	O_{21}	O_{22}	n_2
Σ	V +	V →	N

II. დაშვებები

1) ორივე შერჩევა შემთხვევითია;

2) ორივე შერჩევა დამოუკიდებელია და თითოეული წევრი ორივე შერჩევისა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია (გადაწერას ადგილი არა აქვს);

3) გაზომვის სკალა შეიძლება იყოს სახელდების, ე.ი. ყველაზე მარტივი.

III. ჰიპოთეზები

ალბათობა იმისა, რომ პირველი შერჩევიდან შემთხვევით აღებული ნაშრომი (ობიექტი) ეკუთვნის პირველ კატეგორიას, „+“ ნიშნით, აღვნიშნოთ P_1 –ით. ალბათობა იმისა, რომ მეორე შერჩევიდან შემთხვევით აღებული ნაშრომი (საკონტროლო) ეკუთვნის ისევ პირველ კატეგორიას, მაგრამ „-“ ნიშნით, აღვნიშნოთ P_2 –ით.

განვასხვაოთ ორმხრივი და ცალმხრივი კრიტერიუმი.

ორმხრივი კრიტერიუმისთვის

თუ $P_1 = P_2$, მაშინ განსხვავება არ არის და რჩება H_0 ჰიპოთეზა.

თუ $P_1 \neq P_2$, მაშინ H_0 –ს უგულებელვყოფთ H_1 –ის სასარგებლოდ.

ცალმხრივი კრიტერიუმისთვის:

თუ $P_1 \leq P_2$ გვაქვს H_0 ჰიპოთეზა. ეს ნიშნავს, რომ შედეგი ან ისეთივეა ან უარესი.

თუ $P_1 \geq P_2$, გვაქვს H_1 ჰიპოთეზა ანუ შედეგი გვაქვს.

ჩვენ არ ვიცით არც P_1 –ის მნიშვნელობა და არც P_2 –ის მნიშვნელობა. ჩვენი გაზომვები არის თვისებრივი, მაგრამ ვიცით მათ შორის თანაფარდობა.

IV. სტატისტიკის კრიტერიუმი.

$$T = \frac{N(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21})}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})}$$

ამ სტატისტიკის ცხრილები არ არსებობს, ამიტომ ვიყენებთ χ^2 –ის ცხრილების პირველი თავისუფლების ხარისხით ანუ $T \rightarrow \chi^2$.

ეს მეთოდი ცუდ შედეგს იძლევა თუ 1) $n_1 + n_2 = N < 20$; 2) ერთ-ერთი აბსოლუტური სიხშირე $O_{ik} < 5$; 3). თუ ერთ-ერთი აბსოლუტური სიხშირე $O_{ik} > 5$, მაგრამ $10 > O_{ik} > 5$, მაშინ

$$T = \frac{N(\left|O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21}\right| \; - \frac{N}{2})^2}{n_1 n_2 (O_{11} + O_{21})(O_{12} + O_{22})}$$

V გადაწყვეტილების მიღების წესი

χ^2-ცხრილიდან ორმხრივი კრიტერიუმის შემხთვევაში პირველი თავისუფლების ხარისხით ვითვლით სტატიკის კრიტიკულ მნიშვნელობას $T_k = \chi_{1-\alpha}$ მნიშვნელობის α დონეზე. თუ $T>T_k$, მაშინ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას, თუ $T \le T_k$, მაშინ H_0 ჰიპოთეზა რჩება.

ცალმხრივი კრიტერიუმის შემთხვევაში $T_k = \chi_{1-2\alpha}$ თუ $T>T_k$, მაშინ უარვყოფთ H_0 ჰიპოთეზას H_1 –ის სასარგებლოდ. თუ $T \le T_k$, H_0 ჰიპოთეზა რჩება.

განვიხილოთ მაგალითი, ორი ახალი სახელმძღვანელოს შესაფასებლად ჩაატარეს პედაგოგიკური ექსპერიმენტი. შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით აირჩიეს ორი რაიონი. პირველ რაიონში სწავლება ხდება ერთი სახელმძღვანელოთი, ხოლო მეორე რაიონში – მეორე სახელმძღვანელოთი. შეფასება არის წლიური, სემესტრული და ა.შ. გამოკითხვებით. უკეთესი სახელმძღვანელოს დასადგენად შეადარეს შედეგები. გამოკითხეს ორივე რაიონის მასწავლებლები. მათ დაუსვეს შემდეგი კითხვა – მისაწვდომია თუ არა სახელმძღვანელო მოსწავლეებისათვის დამოუკიდებელი მუშაობისას. პასუხის ორი ვარიანტია: კი (+) და არა (-). გამოკითხვის შედეგად შეადგინეს ცხრილი ორი ორზე. პირველ რაიონში გამოკითხულთა რაოდენობაა 20, მეორეში 15.

n_1=20	15	5	20
n_1=15	7	8	15
	22	13	35

$$n_1+ n_2=35>20$$

$O_{ik}<5$, ე.ი. χ^2 მეთოდი გამოდგება, მაგრამ $10> O_{ik}>5$, ამი-ტომ

$$T=\frac{35(\left|15\cdot 8-5\cdot 7\right|)-\frac{35}{2})^2}{20\cdot 15(15+7)(5+8)}=1.86$$

მნიშვნელობის $\alpha=0,05$ დონეზე, როდესაც თავისუფლების ხარისხია 1, $T_k=3,84$. ეს ნიშნავს, რომ $1,86<3,84$. ე.ი. $T< T_k$ და ვტოვებთ H_0 ჰიპოთეზას. ამრიგად, ამ ორი სახელმძღვანე-ლოდან უპირატესობა არც ერთს არა აქვს.

3. χ^2 კრიტერიუმი მრავალი კატეგორიის სკალით

ჩვენ განვიხილეთ სკალა ორი კატეგორიით. ახლა განვი-ხილოთ χ^2 კრიტერიუმი მრავალი კატეგორიის სკალით.

I. მონაცემები

განვიხილოთ 5-ქულიანი სისტემა, რომელიც რეალურად იქნება 4 ქულიანი. გვაქვს ორი დამოუკიდებელი შერჩევა. პირველის მოცულობა იყოს n_1, მეორის კი-n_2. შევადგინოთ ცხრილი 2Xc, სადაც c=4 ე.ი. გვექნება 2X4.

	I კატ.(2)	II კატ.(3)	III კატ.(4)	IV კატ.(5)
№1 შერჩევა	O_{11}	O_{12}	O_{13}	O_{14}
№2 შერჩევა	O_{21}	O_{22}	O_{23}	O_{24}

II დაშვებები:

1) ორივე შემხვევა შემთხვევითია. ეს არის აუცილებელი პირობა, მაგრამ არასაკმარისი;

2) ორივე შერჩევა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და თითოეული შერჩევის წევრები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. ეს ნიშნავს, რომ მოსწავლეები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ასრულებენ დავალებას;

3) გაზომვის სკალა შეიძლება იყოს არა უმეტეს სახელდების სკალისა რამდენიმე კატეგორიით.

III ჰიპოთეზები

ალბათობა იმისა, რომ პირველი შერჩევიდან შემთხვევით აღებული ობიექტი (საკონტროლო სამუშაო) ეკუთვნის i კატეგორიას, აღვნიშნოთ P_{1i}-ით, სადაც i=1,2,3,4... ალბათობა იმისა კი, რომ მეორე შერჩევიდან შემთხვევით აღებული ობიექტი ეკუთვნის i კატეგორიას, აღვნიშნოთ P_{2i} –ით. ჩამოვაყალიბოთ H_0 და H_1 ჰიპოთეზები.

თუ $P_{1i} = P_{2i}$ ყველა კატეგორიისათვის, მაშინ გვექნება H_0 ჰიპოთეზა. მაგალითად, $P_{11}=P_{21}$, $P_{12} =P_{22}$, $P_{13} =P_{23}$, $P_{14} =P_{24}$.

თუ $P_{1i} \neq P_{2i}$, თუნდაც ერთი კატეგორიისთვის მაინც, მაშინ იქნება H_1 ჰიპოთეზა.

ცნობილი არ არის არც P_{1i} და არც $P_{2i,}$ მაგრამ მათ შორის თანაფარდობის დადგენა შეიძლება. მრავალკატეგორიანი სკალა განსხვავდება ორკატეგორიანი სკალისაგან იმით, რომ გვაქვს მხოლოდ ორმხრივი კრიტერიუმი, ცალმხრივი კრიტერიუმი კი-არა. ცალმხრივი კრიტერიუმი არ არსებობს მაშინაც, როდესაც გაზომვის სკალა მეტია სახელდების სკალაზე.

IV. სტატისტიკის კრიტერიუმი

χ^2 ის ცხრილებიდან ითვლიან T სტატისტიკის კრიტერიუმს შემდეგი ფორმულით

$$T = \frac{1}{n_1 \cdot n_2} \sum_{i=1}^{c} \frac{(n_1 O_{2i} - n_2 O_{1i})^2}{O_{1i} + O_{2i}}$$

$$\chi^2 \to c - 1 = 4 - 1 = 3$$

V. გადაწყვეტილების მიღების წესი.

დავაფიქრისროთ გადაწყვეტილების მიღების წესი. ავირჩიოთ მნიშვნელობის α დონე. როგორც წესი, ის არის ან 0,01 ან 0,05. ჩვენ ავიღოთ α=0,05. χ^2-ის ცხრილებში c-1 თავისუფლების ხარისხისათვის და α-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა T სტატისტიკისთვის $T_K=\chi_{1-\alpha}$. თუ T გამოთვლილი მეტია კრიტიკულზე $T>T_K$, მაშინ უარვყოფთ Ho ნულოვან ჰიპოთეზას მნიშვნელობის მოცემულ დონეზე და ვიღებთ ალტერნატიულ H_1 ჰიპოთეზას. თუ ($T \leq T_K$), მაშინ არა გვაქვს საფუძველი, რომ უარვყოთ Ho ჰიპოთეზა, ე.ი. რჩება Ho.

თუ O_{1i} –დან ან O_{2i} –დან რომელიმე მნიშვნელობა ნაკლებია 5-ზე, მაშინ $\chi 2$ მეთოდი არ არის რეკომენდირებული, ცუდ შედეგებს იძლევა.

მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს ორი სახელმძღვანელო. ერთ რაიონში სწავლება მიმდინარეობს ერთი სახელმძღვანელოთი, მეორე რაიონში კი – მეორეთი. საკონტროლო სამუშაო ჩაატარეს ორივე რაიონის სხვადასხვა სკოლაში მოსწავლეებს შორის. დაგროვდა ბევრი ნამუშევარი. შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით პირველი რაიონიდან ამოარჩიეს 50 ნაწერი, მეორე რაიონიდანაც – 50 ნაწერი, ე.ი. n_1 =50 და n_2 =50. შეფასება ჩატარდა 5ქულიანი სისტემით. მიღებული შედეგების საფუძველზე გვაქვს ცხრილი.

	I კატ.(2)	II კატ.(3)	III კატ.(4)	IV კატ.(5)	
№1 შერჩევა	$O_{11}=3$	$O_{12}=19$	$O_{13}=18$	$O_{14}=10$	$n_1=50$
№2 შერჩევა	$O_{21}=9$	$O_{22}=24$	$O_{23}=12$	$O_{24}=5$	$n_2=50$

$$T=\frac{1}{50\cdot 50}\left[\frac{(50\cdot 9-50\cdot 3)^2}{3+9}+\frac{(50\cdot 24-50\cdot 19)^2}{19+24}+\frac{(50\cdot 12-50\cdot 18)^2}{18+12}+\right.$$
$$\left.+\frac{(50\cdot 5-50\cdot 10)^2}{10+5}\right]=\frac{1}{2500}(7500+1453+3000+4166)=$$
$$=\frac{1}{2500}\cdot 16119=6.4$$
$$T=6.4$$

χ^2 ცხრილიდან, როდესაც c=3, $\alpha=0{,}05$ გვაქვს $T_k=7{,}815$. $6{,}4<7{,}815$ ანუ $T<T_k$ ე.ი. რჩება H_0 ჰიპოთეზა.

4. უილქოქსონ – მანი – უიტნის კრიტერიუმი

ეს კრიტერიუმი გამოიყენება ორი დამოუკიდებელი შერჩევის შედეგების შედარებისათვის, როდესაც გაზომვის სკალა არის არანაკლებ რიგის სკალისა, ე.ი. დაგვჭირდება რიგის სკალა. χ^2-მეთოდის გარდა, ყველა კრიტერიუმი მოითხოვს რიგის (რანგის) სკალას.

უილქოქსონ-მანი-უიტნის კრიტერიუმი უფრო მგრძნობიარეა, ვიდრე მედიანური კრიტერიუმი. ამიტომ შეძლებისდაგვარად უპირატესობა მას უნდა მივანიჭოთ.

შევუდგეთ ამ კრიტერიუმს ზუსტ აღწერას.

I. მონაცემები

ცვლადები პირველ და მეორე შერჩევებში ტრადიციულად აღვნიშნოთ X-ით და Y-ით შესაბამისად. გვაქვს გაზომვის შედეგები.

X: x_1, x_2, x_3...... x_{n1}

Y: y_1, y_2, y_3.... y_{n2}

გავაერთიანოთ ეს ორი შერჩევა ერთ შერჩევად - n_1 + n_2 და აღვნიშნოთ N-ით. N არის გაერთიანებული შერჩევის მოცულობა ანუ ობიექტთა რიცხვი. მოვახდინოთ გაერთიანებული შერჩევის რანჟირება ანუ მივაწეროთ რანგი. დავთვალოთ ობიექტები (საკონტროლო სამუშაოები) მახასიათებელი სიდიდის (ქულა) მნიშვნელობათა ზრდის მიხედვით. პირველს მივაწერთ 1, მეორეს – 2, მესამეს – 3, ..., ბოლოს კი-N. ამ მინიჭებულ ნომრებს ეწოდება რანგი. როგორ მივაწეროთ რანგი იმ ობიექტებს, რომელთა მახასიათებელ სიდიდეებს ერთნაირი მნიშვნელობა გააჩნიათ? რასაკვირველია, თითოეულს მიენიჭება ერთნაირი რანგი, რომელიც უდრის საშუალო არითმეტიკულ მნიშვნელობას მახასიათებელი სიდიდის მიხედვით.

II დაშვებები.

1) ორივე შერჩევა შემთხვევითია. ეს აუცილებელი პირობაა, მაგრამ არასაკმარისი.

2) ორივე შერჩევა დამოუკიდებულია და თითოეული შერჩევის წევრებიც ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია;

3) გაზომვის სკალა არ უნდა იყოს რიგის სკალაზე ნაკლები;

4) ობიექტები შესასწავლი თვისება უწყვეტად არის განაწილებული, ე.ი. განაწილების კანონი უწყვეტია, თუმცა ამისი მკაცრი დასაბუთება არ გაგვაჩნია.

III. ჰიპოთეზები

თუ $P(x<y)=1/2$, მაშინ გვაქვს H_0 ჰიპოთეზა, ე.ი. განაწილება შესასწავლი თვისების მიხედვით ორივე შერჩევაში ერთნაირია.

თუ $P(x<y)\neq 1/2$, მაშინ გვაქვს H_1 ჰიპოთეზა, ე.ი. განაწილება შესასწავლი თვისების მიხედვით ორივე შერჩევაში არ არის ერთნაირი.

ჩამოვაყალიბოთ ორივე ჰიპოთეზა განსხვავებულად. ახლა შევადაროთ არა განაწილებები, არამედ ორი დამოუკიდებელი შერჩევის მედიანები:

H_0 ჰიპოთეზა გვაქვს, თუ ორი შერჩევის მედინები ერთმანეთის ტოლია.

H_1 ჰიპოთეზა გვაქვს, თუ ორი შერჩევის მედიანები ერთმანეთის ტოლი არ არის.

საშუალო მნიშვნელობების შედარებაც შეიძლება, მაგრამ პედაგოგიკურ გამოკვლევებში საშუალოს გამოთვლას აზრი არა აქვს. ამიტომ არ გვექნება

VI. სტატისტიკის კრიტერიუმი

ერთ-ერთ შერჩევაში დავთვალოთ რანგების ჯამი. როგორც წესი, ილებენ მცირე მოცულობის შერჩევას. $S=\sum_{i=1}^{n} R_i$, სადაც n არის უმცირესი n_1, და n_2 შორის. T სტატისტიკას ითვლიან შემდეგი ფორმულით.

$$T = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

V. გადაწყვეტილების მიღების წესი

თუ $n_1 \leq 20$ და $n_2 \leq 20$, მაშინ T-ს სტატისტიკის ცხრილებიდან ვპოულობთ $T_k = W_\alpha$ სადაც α არის მნიშვნელობის დონე.

1) ორმხრივი კრიტერიუმი. თუ აღმოჩნდა, რომ $T < W_{\alpha/2}$ ან $T > W1\text{-}_{\alpha/2} = n_1\ n_2 - W_{\alpha/2}$ მაშინ H_0 -ს უგულებელვყოფთ

და ვტოვებთ H_1 –ს. თუ ეს პირობა არ შესრულდა, მაშინ რჩება H_0 ჰიპოთეზა.

თუ ერთ-ერთი $n_1>20$, მაშინ

$$W_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{n_1 n_2}{e} + X_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

სადაც $X_{\frac{\alpha}{2}}$ არის ნორმალური განაწილების კვანტილი.

თუ $\alpha = 0{,}01$, მაშინ $X_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$; ხოლო თუ $\alpha = 0{,}05$,

მაშინ $X_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

2) ცალმხრივი კრიტერიუმი. ეს კრიტერიუმი უკეთესია გამოვიყენოთ მაშინ, როდესაც გვაქვს საკმარისი საფუძველი იმისა, რომ ერთ-ერთ შერჩევაში ცვლადის მნიშვნელობა საშუალოდ მეტია, ვიდრე მეორე შერჩევაში.

ა) $P(x<y)\geq 1/2$, მაშინ გვაქვს H_0 ჰიპოთეზა

$P(x<y)<1/2$, მაშინ გვაქვს H_1 ჰიპოთეზა.

თუ $n_1 \leq 20$ და $n_2\leq 20$, მათში ცხრილებიდან ვიპოვით W და გამოვთვლით $T_k = W_{1-\alpha} = n_1\, n_2 - w_\alpha$. თუკი აღმოჩნდა, რომ $T>T_k$, H_0 -ს უგულებელვყოფთ H_1 -ის სასარგებლოდ. თუ არ აღმოჩნდა, მაშინ ვტოვებთ H_0 -ს.

ბ) თუ $P(x<y)\leq 1/2$, მაშინ გვაქვს H_0 ჰიპოთეზა

თუ $P(x<y)>1/2$, მაშინ გვაქვს H_1 ჰიპოთეზა.

ცხრილებიდან ვპოულობთ $T_k = W_\alpha$. თუ $T<T_k$, უგულებელვყოთ H_0 –ს და თუ $T>T_k$, მაშინ H_0 -ს ვტოვებთ.

თუ ერთ-ერთი მაინც, ვთქვათ, $n_1 >20$, მაშინ

$$W_\alpha = \frac{n_1 n_2}{2} + x_\alpha \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

სადაც x_α არის ნორმალური განაწილების კვანტილი. თუ $\alpha=0{,}01$, მაშინ $x_\alpha=2{,}33$, ხოლო თუ $\alpha=0{,}05$, მაშინ $x_\alpha=1{,}64$.

როდის მუშაობს უილქოქსონ-მანი –უიტნის კრიტერიუმი ცუდად? თუ გვაქვს რანგების ერთნაირ მნიშვნელობათა ერთობლიობა ორივე შერჩევაში და ეს ერთობლიობა დიდია, მაშინ ამ მეთოდის სიზუსტე მნიშვნელოვნად ნაკლებია. საუბარია ერთნაირ რანგებზე ორივე შერჩევაში. თუ კი ერთნაირი რანგები მხოლოდ ერთ შერჩევაშია, მაშინ ის არ ახდენს გავლენას კრიტერიუმის სიზუსტეზე.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ IX კლასის ქიმიის კურსის ათვისება ექსპერიმენტულ და საკონტროლო კლასებში. შეთვისებას ადარებენ ორ სხვადასხვა რაიონში. საკონტროლო ჩატარდა ორივე რაიონში, იყო ოთხი სხვადასხვა სახის დავალება, თითოეული დავალება შეიცავდა კითხვებს. ზოგი მათგანი მოითხოვდა მოკლე პასუხს, ზოგიც – გრძელს (გაშლილს). ყოველ კითხვაზე გამოყოფდნენ ცოდნის ელემენტს, რომლის გამოყენება საჭირო იყო მოცემულ კითხვაზე პასუხისთვის. ცოდნის ელემენტები დაყვეს კატეგორიებად სიძნელის მიხედვით. პირველი კატეგორიის ელემენტის გამოყენებისას ანიჭებდნენ 1 ქულას, მეორე კატეგორიის ელემენტის გამოყენებისას – 2 ქულას, მესამე კატეგორიის ელემენტის გამოყენებისას – 3 ქულას. შემდეგ ამის მიხედვით ითვლიდნენ ქულებს, რომელიც მოსწავლეს შეეძლო შეეგროვებინა ოთხივე დავალებაში. გამოვიდა 42 ქულა.

თითოეული კითხვის ბოლოს იყო შემდეგი მოთხოვნა: დაწერეთ სრული და შემოკლებული პასუხი. იმ შემთხვევაში, თუ მოსწავლე მიხვდა კითხვა რას ეხება, მას აქვს 1 ქულა, შემოკლებული პასუხის შემთხვევაში აქვს 3 ქულა, ხოლო ვრცელი პასუხის დროს – 6 ქულა. ერთ რაიონში შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით აიღეს 34 ნაშრომი, მეორეში კი – 27, ანუ $n_1 = 34$ და $n_2 = 27$.

ნაშრომების შეფასების შემდეგ გვაქვს

I შერჩევა, $n_1 = 34$

1, 5, 6, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 16, 21, 23, 25, 28, 29, 30, 32, 32, 33, 33, 34, 35, 35, 35, 35, 37, 37, 39, 40, 40, 40, 42, 42.

II შერჩევა, $n_2 = 27$

6, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 20, 23, 26, 28, 30, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 31, 34, 34, 37, 37, 38, 40, 40, 40.

N	X_i	Y_i	R
1	1		1
2	5		2
3	6		4
4	6		4
5		6	4
6	8		6,5
7		8	6,5
8	9		8
9	10		9,5
10		11	9,5
11	12		11,5
12		12	11,5
13	14		13,5
14			13,5
15	16	14	15
16	16		16
17		18	17
18		20	17
19		20	18
20	21		19
21	23	23	21,5
22		22	
23	25		21,5
24		26	
25	28		24
26		28	25,5

27	29		25,5
28	30		27
29		30	30,5
30		30	30,5
31		30	30,5
32		30	30,5
33		30	30,5
34		31	35
35		31	35
36		31	35
37	32		37
38	32		38
39	33		39
40	33		40
41	34		42
42		34	42
43		43	42
44	35		44
45	35		45
46	35		46
47	35		47
48	37		49,5
49	37		49,5
50		37	49,5
51		37	52
52		38	53
53	39		56,5
54	40		56,5
55	40		56,5
56	40		56,5
57		40	56,5
58		40	56,5
59		40	56,5
60	42		60
61	42		61

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = S = 832; \mathrm{T} = S - \frac{n(n+1)}{2} = 832 - \frac{27 \cdot 28}{2} = 454$$

n_1, n_2>20

α=5%=0,05; $x_{\alpha/2}$ = 1,96

$$W_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{27 \cdot 34}{2} + 1.96\sqrt{\frac{27 \cdot 34(27+35)}{12}} = 459 + 134.98 = 597$$

T < $W_{\alpha/2}$, ამრიგად ათვისების დონე ორ რაიონში არის სხვადასხვა.

5. კოლმოგოროვ-სმირნოვის მეთოდი

ეს მეთოდი ცნობილია როგორც, პარამეტრული სტატისტიკის მეთოდი.

I. მოცემულობა

ერთმანეთს ვადარებთ ორ დამოუკიდებელ შერჩევას. პირველ შერჩევაში შესასწავლი, გასაზომი თვისების მახასიათებელი სიდიდე აღვნიშნოთ X-ით. გაზომვის შედეგად ის იღებს შემდეგ მნიშვნელობებს $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, სადაც n, არის პირველი შერჩევის მოცულობა. მეორე შერჩევაში იმავე თვისების მახასიათებელი ცვლადი აღვნიშნოთ Y- ით, რომელიც გაზომვის შედეგად იღებს მნიშვნელობებს. $y_1, y_2, y_3, \ldots y_{n2}$, n_2 არის მეორე შერჩევის მოცულობა. F(x) და G(x) იყოს უცნობი თეორიული განაწილების ფუნქციები შესაბამისად პირველი და მეორე შერჩევებისათვის. ჩავწეროთ გაზომვის შედეგად მიღებული პირველი შერჩევის მონაცემები და გამოვთვალოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია შემდეგნაირად $S_1(x)=a/n_1$, სადაც n_1 არის პირველი შერჩევის მოცულობა, ხოლო a არის x_i მნიშვნელობის ის რაოდენობა, რომელიც

აკმაყოფილებს $x_i \leq x$ პირობას. x არის ნებისმიერი მნიშვნელობა.

მეორე შერჩევის მონაცემები დავალაგოთ მნიშვნელობათა ზრდის მიხედვით და გამოვთვალოთ ემპირიული განაწილების ფუნქცია

$$S_2(x) = \frac{b}{n_2}$$

სადაც n_2 არის მეორე შერჩევის მოცულობა, ხოლო b არის y_i მნიშვნელობათა ის რაოდენობა, რომელიც აკმაყოფილებს $y_i \leq y$ პირობას. y არის ნებისმიერი მნიშვნელობა.

განვიხილოთ მაგალითები ემპირიული განაწილების ფუნქციის გამოთვლაზე.

მაგალითი 1. დავთვალოთ სწორ პასუხთა რიცხვი საკონტროლოში. მივიღებთ ორ მიმდევრობას. დავალაგოთ ისინი გაზომვის შედეგების მნიშვნელობათა ზრდის მიხედვით და შევადგინოთ ცხრილი.

$$x_i = 17,\ 10,\ 7,\ 9,\ 5,\ 4.$$
$$y_i = 2,\ 6,\ 7,\ 5,\ 8,\ 15,\ 3,\ 11$$

x_i	y_i	$S_1(x)$	$S_2(x)$
-	2	0	1/8
-	3	0	2/8
4	-	1/6	2/8
5	5	2/6	3/8
-	6	2/6	4/8
7	7	3/6	5/8
-	8	3/6	6/8
9	-	4/6	6/8
10	-	5/6	6/8
-	11	5/6	7/8
-	15	5/6	8/8
17	-	6/6	8/8

$n_1 = 6$ $n_2 = 8$

ემპირიული განაწილების ფუნქციების გამოთვლის ასეთი მეთოდი მარტივია, მაშინ როდესაც n_1 და n_2 მოცულობები დიდი არ არის. თუ გვაქვს დიდი მოცულობები, მაშინ უმჯობესია ემპირიული განაწილების ფუნქცია სხვანაირად გამოვთვალოთ. კვლავ ვალაგებთ გაზომვის შედეგებს მნიშვნელობათა ზრდადობის მიხედვით, მაგრამ შედეგებს ვწერთ ინტერვალური მწკრივის სახით. ინტერვალთა რაოდენობა ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ 8-ზე ნაკლები არ იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში კრიტერიუმი არ იძლევა სანდო შედეგების და 15-ზე მეტი არ იყოს, რადგან ამ შემთხვევაში გამოთვლები რთულდება (არ ითვალისწინებს კომპიუტერულ შესაძლებლობას). ორივე შერჩევის ყოველ ინტერვალში ვითვლით გასაზომის სიდიდის მნიშვნელობათა აბსოლუტურ სიხშირეს f_i, შემდეგ ვითვლით დაგროვილ სიხშირეს Σf_i და დაგროვილი სიხშირის გაყოფით შერჩევის მოცულობაზე ვითვლით ემპირიულ განაწილების ფუნქციას.

მაგალითი 2. ჩაატარეს პედაგოგიკური ექსპერიმენტი. აიღეს ექსპერიმენტული და საკონტროლო კლასები. ექსპერიმენტულ კლასში 40 საკონტროლო სამუშაო შესრულდა, ხოლო საკონტროლო კლასში – 50. თითეულ კლასში დაითვალეს სწორ პასუხთა პროცენტული რაოდენობა. შედეგი ასეთია, სწორი პასუხების პროცენტული რაოდენობა იცვლება 41%÷100% ფარგლებში. დავწეროთ შედეგები ინტერვალური მწკრივის მიხედვით და გავაკეთოთ ცხრილი (n_1=40; n_2 =50).

ინტერ-ვალი	f_i აბსო-ლუტური სიხშირე I შერჩევით	f_2 აბსო-ლუტური სიხშირე II შერჩე-ვით	დაგროვილი სიხშირე		$S_1 = \Sigma f_1 / n_1$	$S_1 = \Sigma f_2 / n_2$
			Σf_i	Σf_2		
100-96	15	18	40	50	1	1
95-91	10	8	25	32	0,63	0,64
90-86	4	2	15	24	0,38	0,48
85-81	3	5	11	22	0,28	0,44
80-76	2	6	8	17	0,20	0,34
75-71	1	2	6	11	0,15	0,22
70-66	1	2	5	9	0,13	0,18
65-61	1	4	4	7	0,10	0,15
60-56	-	1	3	3	0,08	0,06
55-51	1	1	3	2	0,08	0,04
50-46	1	-	2	1	0,05	0,02
45-41	1	1	1	1	0,03	0,02

$n_1 = 40$ $n_2 = 50$

II დაშვებები

1) ორივე შერჩევა შემთხვევითია;
2) ორივე შერჩევა დამოუკიდებელია და ყოველი შერჩევის თითოეული წევრიც დამოუკიდებელია;
3) შესასწავლი თვისება უწყვეტად არის განაწილებული;
4) გაზომვის სკალა არანაკლებია რიგის სკალაზე.

შენიშვნა: ეს მეთოდი გაზომვის რიგის სკალისათვის გამოდგება იმ შემთხვევაში თუ

ა) არატოლი ან განსხვავებული მოცულობის შერჩევის შემხვევისათვის $n_1 < 20$; $n_2 < 20$;

ბ) ტოლი მოცულობის შერჩევებისათვის ($n_1 = n_2$) $n < 40$

თუ ეს პირობები არ სრულდება, მაშინ აუცილებელია რაოდენობრივი გაზომვის, ე.ი. ინტერვალური ან შეფარდებითი

სკალების გამოყენება, რაც სცილდება პედაგოგიური გამოკვლევების ფარგლებს.

მოცემული კრიტერიუმის გამოყენება ადვილდება, როდესაც შერჩევათა მოცულობები ტოლია რასაც მივაღწევთ შემთხვევითი შერჩევის წესით.

III. ჰიპოთეზები

ა) ორმხრივი კრიტერიუმისათვის:

$F(X)=G(X)$ ცვლადების ყველა შესაძლო მნიშვნელობისათვის. განაწილების კანონი ორივესთვის ერთნაირია, განსხვავება შემთხვევითია, ე.ი. რჩება H_0 ჰიპოთეზა.

$F(x)\neq G(x)$ ცვლადების ერთი მნიშვნელობისათვის მაინც, განსხვავება შემთხვევითი არ არის და H_0-ს უგულებელვყოფთ H_1-ის სასარგებლოდ

ბ) ერთმხრივი კრიტერიუმისათვის:

თუ H_0 ჰიპოთეზა ჭეშმარიტია, მაშინ x ცვლადის მნიშვნელობები სტოქასტიკურად (ალბათურად, საშუალოდ) აღემატება y ცვლადის მნიშვნელობებს.

თუ H_1 ჰიპოთეზა ჭეშმარიტია, მაშინ x ცვლადის მნიშვნელობები სტოქასტიკურად ნაკლებია y ცვლადის მნიშვნელობებზე.

მეორე ვარიანტი ერთმხრივი კრიტერიუმისთვის:

$$H_0:\ F(x)\geq G(x)$$
$$H_1:\ F(x)<G(x)$$

თუ H_0 ჭეშმარიტია, მაშინ x ცვლადის მნიშვნელობები სტოქასტიკურად ნაკლებია y ცვლადის მნიშვნელობებზე;

თუ H_1 ჭეშმარიტია, მაშინ x ცვლადის მნიშვნელობები სტოქასტიკურად აღემატება y ცვლადის მნიშვნელობებს;

IV. სტატისტიკის კრიტერიუმი

ითვლიან შემდეგ სამ სტატისტიკას

$$T_1 = \max\left|S_1(x) - S_2(x)\right|;\ \ T_1 = \max\left|0.28 - 0.44\ \ \right| = 0.16$$

$$T_2 = \max\left|S_1(x) - S_2(x)\right|;\ \ \ T_1 = \max\left|0.08 - 0.04\ \ \right| = 0{,}04$$

$$T_3 = \max\left|S_2(x) - S_1(x)\right|;\ \ T_1 = \max\left|0.44 - 0.28\ \ \right| = 0.16$$

კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმი გაცილებით მარტივდება თუ ორივე შერჩევის მოცულობები ერთნაირია, ე.ი. $n_1=n_2=n$. ამის მიღწევა შეიძლება შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით. გათანაბრება არ ღირს იმ შემთხვევაში, თუ ერთ-ერთი შერჩევის მოცულობა მცირეა. იმიტომ რომ, მცირე მოცულობის შემთხვევაში ცდომილება საკმაოდ ალბათურია ანუ შედეგების სანდოობის დონე საკმაოდ მცირეა. კრიტერიუმები იღებენ შემდეგ სახეს:

$$T_1 = \frac{1}{n}\max\left|\Sigma f_1 - \Sigma f_2\ \ \right|$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\max\left|\Sigma f_1 - \Sigma f_2\ \ \right|$$

$$T_3 = \frac{1}{n}\max\left|\Sigma f_2 - \Sigma f_1\right|$$

V. გადაწყვეტილების მიღების წესი.

მოცემული α დონისათვის ვპოულობთ ცხრილებიდან კრიტერიუმის კრიტიკულ მნიშვნელობას $T_k = W_{1-\alpha}$, სადაც $W_{1-\alpha}$, არის ნორმალური განაწილების კვანტილი. ეს ცხრილები შედგენილია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც სკალა არის არაუმეტეს რიგის სკალისა, ე.ი. თუ $n_1 \neq n_2$ მათი მნიშვნელობები არ აღემატება 20-ს და თუ $n_1=n_2$ მათი მნიშვნელობები არ აღემატება 40-ს.

შენიშვნა: თუ შერჩევის მნიშვნელობები უფრო დიდია, მაშინ იყენებენ მიახლოებით ფორმულებს, მაგრამ ეს ფორმულა მოითხოვს ინტერვალურ სკალას და ის პედაგოგიკურ გამოკვლევებში არ გამოგვადგება.

ორმხრივი კრიტერიუმებისთვის: თუ $T_1>T_k=W_{1-\alpha}$ მაშინ H_0 –ს უგულებელვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე და ვტოვებთ H_1 –ს. $F(x)\neq G(x)$, ე.ი. განსხვავება არის, მაგრამ რომელია უკეთესი ვერ ვიტყვით.

ერთმხრივი კრიტერიუმისათვის: თუ $T_2 >T_k =W_{1-\alpha}$, მაშინ გვაქვს H_0 და $F(x)\leq G(x)$; H_0 –ს უგულებელვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე და ვირჩევთ H_1 –ს და $F(x)>G(x)$.

ერთმხრივი კრიტერიუმისათვის: თუ $T_3 >T_k =W_{1-\alpha}$, მაშინ გვაქვს H_0 და $F(x)\geq G(x)$; . H_0 –ს უგულებელვყოფთ მნიშვნელობის α დონეზე და ვტოვებთ H_1 –ს და $F(x)< G(x)$;

მაგალითი 3. შეადარეს ორი რაიონის მოსწრება ფიზიკაში. თითოეული მოსწავლის პასუხი ფარსდებოდა სწორ პასუხთა რიცხვით. ცდამ აჩვენა, რომ სწორ პასუხთა რიცხვი იცვლებოდა 0-დან 8-მდე. ერთი რაიონის შერჩევის მოცულობა n_1 არ აღემატებოდა 16-ს, მეორე რაიონის შერჩევის მოცულობა n_2 არ აღემატებოდა 20-ს. მანამდე იყო მონაცემები, რომ პირველ რაიონში ფიზიკის ცოდნა იყო უკეთესი, ვიდრე მეორე რაიონში.

$$H_0: F(x)\geq G(x);$$
$$H_1: F(x)<G(x);$$

მოცულობები არ არის ტოლი. დავიყვანოთ თუ არა შემთხვევითი შერჩევის წესით ტოლ მოცულობაზე? ამის გაკეთება არ ღირს, რადგან ამით უნდა შევამციროთ მეორის მოცულობა, რაც სანდოობას ამცირებს. (თუ $n_1=27$, $n_2=30$ საჭიროა ინტერვალური სკალა, რომელიც პედაგოგიკურ კვლევებში არ გვაქვს. ამიტომ აუცილებელია შემთხვევითი შერჩევის მეთოდით ტოლ მოცულობებზე დავიყვანოთ. სახელდობრ, $n=20$ თუ $n_1=57$, $n_2=43$, მაშინ დავიყვანთ $n=40$-ზე.
გავაკეთოთ ცხრილი და შევიტანოთ მონაცემები

სწორ პასუხთა რიცხვი	f_1 სწორ პასუხთა აბსოლუტური სიხშირე I შერჩევაში	f_2 სწორ პასუხთა აბსოლუტური სიხშირე I შერჩევაში	Σf_1 დაგროვილი სიხშირე I შერჩევაში	$\Sigma f2$ დაგროვილი სიხშირე II შერჩევაში	I შერჩევაში ემპირიული განაწილება	II შერჩევაში ემპირიული განაწილება	$T_3 = (S_2(x) - S_1(x))$
8	3	2	16	20	1,00	1,00	0
7	2	3	13	18	0,81	0,90	0,09
6	5	-	11	15	0,69	0,75	0,06
5	3	3	6	15	0,38	0,75	0,37
4	1	6	3	12	0,19	0,60	0,41
3	-	3	2	6	0,12	0,30	0,18
2	1	2	2	3	0,12	0,15	0,03
1	1	-	1	1	0,06	0,05	-0,01
0	-	1	0	1	0	0,05	0,05
	n_1=16	n_2=20					$T_{3\ max}$=0,41

ავირჩიოთ მნიშვნელობის α დონე: α=0,05

$$T_k = W_{\alpha-1} = 31/80 = 0,39$$

$T_3 > T_k$, ამიტომ H_0 –ს უგულებელვყოფთ და ვტოვებთ H_1 –ს. დავამტკიცეთ, რომ პირველ რაიონში შეთვისება მართლაც უკეთესია, ვიდრე მეორე რაიონში.

ლიტერატურა

1. მ. ნადარეიშვილი, ი. სხირტლაძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბ., 1990
2. Математическая лингвистика. Пиотровский Р.Г. Бектаев К.Б. Пиотровская А.М., Высшая школа, 1997.
3. Кыверялг А.А. Методы исследования в профессиональной педагогике. Таллин, Валгус, 1980.
4. Переработка информации у человека. Линсей П., Норман Д., Перевод с английского, М., Мир. 1995.
5. ნ. მაისურაძე ცოდნის გადაცემისა და შეთვისების მეთოდიკური სისტემის სპეციფიკა ფიზიკის სწავლების დაწყებით ეტაპზე. დისერტაცია, თბ., თსუ, 2004.
6. მ. ნადარეიშვილი, ი. სხირტლაძე, თ. ბუაძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ამოცანათა კრებული. თბ., 1990
7. Теория статистики – под ред Шмойловой Р. А. М.,. 2005

სარჩევი

გამომცემლობა „უნივერსალი“

თბილისი, 0179, ი. ჭავჭავაძის გამზ. 19, ☎: 22 36 09, 8(99) 17 22 30
E-mail: universal@internet.ge