

შესავალი

უკანასკნელ წლებში სხვადასხვა დარგის მეცნიერთა და მსოფლიოს ფართო საზოგადოების მნიშვნელოვან ყურადღებას იპყრობს რთულ პრობლემათა კომპლექსი, რომელიც ცნობილია "თანამედროვეობის გლობალური პრობლემების" სახელწოდებით. მათ შორის ერთ-ერთი პირველი ადგილი უჭირავს დედამიწის რესურსების ათვისებასა და რაციონალურ გამოყენებას, აგრეთვე ადამიანისა და ბუნებრივი გარემოს ურთიერთობას. აღნიშნული თემები ურთიერთკავშირშია ერთმანეთთან, ვინაიდან მეცნიერულ და ტექნიკურ პროგრესს თან სდევს გარემოს ეკოლოგიური წონასწორობის დარღვევა, კერძოდ კი გეოლოგიური გარემოს პირობების შეცვლა. გეოლოგიური გარემოს გამოვლენის მასშტაბურ ფორმას წარმოადგენს ბუნებრივი (მათ შორის სტიქიური მოვლენები) და ადამიანის ზემოქმედებით გამოწვეული გეოდინამიკური პროცესები [1, 51, 52].

წყლის რესურსების გამოყენება კაცობრიობის მიერ ბოლო ათეული წლების განმავლობაში წარმოებს საკმაოდ მკვეთრად განსაზღვრულ მიმართულებებით, რაც განპირობებულია თანამედროვე საზოგადოების მაღალი მოთხოვნილებებით. იმ დონისძიებათა ერთობლიობას, რომელიც მიმართულია წყლის ბუნებრივი რესურსების შესწავლისა და მათი საზოგადოებისა და სახელმწიფოს ინტერესების გამოყენებისათვის წყალთა მეურნეობა ეწოდება. წყალთა მეურნეობის მიმართულებებიდან გამოვყოთ ჰიდროენერგეტიკა, ჰიდრომელიორაცია და წყალმომარაგება. წყალთა მეურნეობის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს წყლის სტიქიის დამანგრეველი ზემოქმედების წინააღმდეგ ბრძოლა. ასეთი ზემოქმედებები შეიძლება იყოს განპირობებული წყალდიდობებით, შტორმებით, მოდინებებით, სხვადასხვა წყალსატევებში გეოდინამიკური პროცესებით წარმოქმნილი ექსტრემალური ტალღებით (ნაშრომის შესწავლის ძირითადი საგანი). წყლის მეურნეობის სხვადასხვა ამოცანის გადაჭრის ერთ-ერთ ქმედით და ძირითად საშუალებას წარმოადგენს კონკრეტული

(ენერგეტიკული, სამელიორაციო და სხვ.) და კომპლექსური დანიშნულების ჰიდროკვანძები და მათში შემავალი ჰიდროტექნიკურ ნაგებობათა სისტემები. ამ სისტემების მთავარი ნაგებობებია – კაშხალი, წყალსაკუმულაციო და წყალგამტარი ობიექტები, როგორცაა წყალსატევი, არხები, სადაწნეო მილსადენები. მთისა და მთისწინა რაიონების წყლისა და მიწის რესურსების დაცვის, მათი პოტენციალის მაქსიმალურად გამოყენებისა და გარემოს ეკოლოგიური წონასწორობის შენარჩუნების პრობლემები უშუალოდ დაკავშირებულია ჰიდროკვანძების ნაგებობების საიმედო ფუნქციონირების უზრუნველყოფის ამოცანებთან და მოიცავს როგორც ექსტრემალურ პირობებში ამ ნაგებობათა მდგრადობის გაანგარიშებას, ასევე გეოდინამიკური პროცესების პარამეტრების პროგნოზირების მეთოდების დამუშავებასა და სრულყოფას, ყველანაირ სპეციფიკურ პირობისა და მრავალრიცხოვან მოქმედ ფაქტორთა გათვალისწინებით. [17, 68].

ამგვარად, საქართველოს ენერგეტიკისა და მრავალდარგობრივი სოფლის მეურნეობის პრობლემების გადაჭრაში ერთ-ერთი აქტუალური და მნიშვნელოვანი ადგილი ენიჭება საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია სხვადასხვა დანიშნულების ჰიდროკვანძების ექსტრემალურ პირობებში შეუფერხებელი და საიმედო ფუნქციონირებისა და გარემოს ეკოლოგიური წონასწორობის მაქსიმალურად შენარჩუნების ამოცანებთან. აღნიშნული ექსტრემალური პირობები გამოხატულებას პოულობენ მთიან და მთისწინა სეისმოაქტიურ რაიონებში (რომლებიც საქართველოს ტერიტორიის მნიშვნელოვან ნაწილს მოიცავენ), ისეთი მსხვილმასშტაბიანი გეოდინამიკური პროცესების სახით, როგორცაა მეწყერები და ღვარცოფები, აგრეთვე სეისმოტექტონიკური დისლოკაციები (რომლებიც ვლინდებიან დედამიწის ზედაპირზე, როგორც ე.წ. პირველადი, ანუ ნარჩენი დეფორმაციები). ექსტრემალური პირობები იქმნება აგრეთვე, ინტენსიური წყალმოვარდნის, წყლის ქარისმიერი მოდენის დროს და სხვ [1, 29, 40, 48, 53, 54, 68].

გეოდინამიკური პროცესების ზემოქმედება შეიძლება განხორციელდეს უშუალოდ ჰიდროკვანძის ნაგებობებზე ძალისმიერი იმპულსის სახით, კერძოდ მეწყერის ან ღვარცოფის დინამიკური (დარტყმითი) მოქმედებისას კაშხალზე. მაგრამ, ზოგჯერ, უფრო დიდ საშიშროებას წარმოადგენენ გეოდინამიკური პროცესების შედეგად წყალსაცავში წარმოქმნილი მაღალი დამანგრეველი ტალღები. როგორც ჰიდროტექნიკური მშენებლობის მრავალწლიანი პრაქტიკა გვიჩვენებს, ამ ტალღების ზემოქმედებისას კაშხალზე, კერძოდ მათ გადადინების შედეგად, შეიძლება ადგილი ჰქონდეს ქვედა ბიეფში, როგორც ფართო ტერიტორიების, მათ შორის დასახლებული ობიექტებისა და სავარგულების დატბორვას, ასევე სატრანსპორტო, საირიგაციო სისტემების და სხვათა დანგრევას. არცთუ იშვიათად ამ მოვლენებს თან სდევს ეკოლოგიური კატასტროფა დასახლებული ობიექტების მოსპობისა და ადამიანთა მსხვერპლის სახით. ასე მაგალითად, ვაიონტის წყალსაცავში (იტალია, 1963 წ.) უზარმაზარი მეწყერის ჩამოზვავების შედეგად წარმოქმნილი ტალღის გადადინების სიმაღლე ბეტონის თაღოვან კაშხლის ქიმზე დაახლოებით 70 მ აღწევდა. ამ კატასტროფულმა ტალღამ რამოდენიმე წუთში წალეკა ქვედა ბიეფში განლაგებული რამდენიმე სოფელი და ქალაქი (ლონჟერონე), რასაც შეეწირა დაახლოებით 3000 ადამიანის სიცოცხლე. ასეთი შემთხვევების რიგი სამწუხაროდ საკმაოდ გრძელია [1, 21, 48, 54].

როგორც თეორიული გათვლების შედეგები აჩვენებს, გეოდინამიკური პროცესების დროს (მაგალითად მეწყერული მასა მთლიანად ჩაიძირა წყალში) ინტენსიური ტალღური პროცესის წარმოქმნას უნდა ველოდოთ ერთნაირი ალბათობით ჰიდროკვანძების სხვადასხვა მოცულობის მქონე წყალსაცავებში. აღვნიშნოთ, რომ საშუალო და მცირე მოცულობის წყალსაცავები მიეკუთვნება უმთავრესად საირიგაციო დანიშნულების ჰიდროკვანძებს, რომელთა რიცხვი საქართველოში საკმაოდ დიდია. ზემოთქმულიდან ნათელი ხდება თუ რა დიდი ტექნიკურ-ეკონომიკური და სოციალურ-ეკოლოგიური მნიშვნელობა ენიჭება ჰიდროკვანძების საიმედო

მუშაობის უზრუნველყოფას ექსტრემალურ პირობებში და გარემოს ეკოლოგიური წონასწორობის შეძლებისდაგვარად შენარჩუნების მიზნით მეცნიერულად დასაბუთებული ღონისძიებათა კომპლექსის განხორციელებას. ამ კომპლექსში ერთერთი მნიშვნელოვანი საკითხია წყალსაცავებში ღვარცოფებით და ზოგიერთი ტიპის მეწყერით გენერირებული ექსტრემალური ჰიდროდინამიკური პროცესების პროგნოზირება, რაც წარმოადგენს საფუძველს შევასაოთ საშიშროება რომელსაც ეს პროცესები უქმნის კაშხლის ნორმალურ ფუნქციონირებას და იწვევს ქვედა ბიეფში ეკოლოგიური წონასწორობის დარღვევას ტალღის კაშხალზე გადადინების შედეგად [68, 70, 73].

ზემოაღნიშნულმა ფაქტორმა განაპირობა საქართველოს ენერგეტიკისა და ენერგეტიკულ ნაგებობების სამეცნიერო-კვლევით ინსტიტუტში მრავალრიცხოვანი თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევების ჩატარება (სამეცნიერო თემატიკის ხელმძღვანელი თ.გველესიანი), რის შედეგადაც შეიქმნა საწყისი მეცნიერული საფუძვლები რომლებიც ძირითადად შეეხებოდა ჰიდროკვანძის წყალსაცავის რაიონში საგანგებო სიტუაციებით გამოწვეული საშიში ჰიდროდინამიკური ზემოქმედების მათემატიკურ მოდელირებასა და პროგნოზირებას. ამის მიუხედავად აღნიშნული პრობლემის სირთულის გამო ბევრი მნიშვნელოვანი საკითხია არასაკმარისად შესწავლილი ან განხილვის გარეშე დარჩენილი. დღის წესრიგში დადგა არსებული საანგარიშო მეთოდების დახვეწა და მთელი რიგი საკითხების ახლებური გადაწყვეტა [11, 28, 39, 48, 68].

ნაშრომის ძირითად მიზანს წარმოადგენს საკითხის ახლებური შესწავლა, რომელიც ეხება ღვარცოფის შედეგად წყალსაცავში ექსტრემალური ტალღების წარმოქმნასა და გადადინების საფრთხის პროგნოზირებას შესაბამისი პროცესების მათემატიკური მოდელირების საფუძველზე. დასახულია შემდეგი ამოცანების განხილვა:

- წყალსაცავის ფსკერზე ღვარცოფის შემოსვლით განპირობებული გრძივი ტალღური რყევების არასტაციონარული სასაზღვრო

- ამოცანის ორ განზომილებიანი (2D) მათემატიკური მოდელირება და რიცხვითი ამონახსნის მიღება სასრულ სხვაობითი მეთოდით;
- დახრილ ფერდობების მქონე კანიონის ტიპის წყალსაცავებსა და არხებში ღვარცოფის შემოსვლით განპირობებული განივი ტალღური რყევების არასტაციონარული სასაზღვრო ამოცანის ორ განზომილებიანი (2D) მათემატიკური მოდელირება და რიცხვითი ამონახსნის მიღება სასრულ სხვაობითი მეთოდით;
 - რეალური ფორმის წყალსაცავის ფსკერზე და დახრილ ფერდობების მქონე კანიონის ტიპის წყალსაცავებსა და არხებში ღვარცოფის შემოსვლით განპირობებული გრძივი და განივი ტალღური რყევების არასტაციონარული სასაზღვრო ამოცანის სამ განზომილებიანი (3D) მათემატიკური მოდელირება და რიცხვითი ამონახსნის მიღება სასრულ სხვაობითი მეთოდით;
 - სქემატიზირებული წყალსაცავის ფსკერზე მოძრავი ღვარცოფით წარმოქმნილი გრძივი და განივი ტალღური რყევების არასტაციონარული ჰიდროდინამიკური ტალღური პროცესის კანონზომიერების შესწავლა სასაზღვრო ამოცანის ორგანზომილებიანი (2D) ანალიზური მოდელის საფუძველზე;
 - წყალსაცავში წარმოქმნილი მაღალი ღვარცოფული და მეწყერული ტალღის კაშხალზე გადადინების მახასიათებლების განსაზღვრა და გადადინების საფრთხის რისკის შეფასება ქვედა ბიეფში.

1. თემის აქტუალურობა, მიზნები ამოცანები და ლიტერატურული წყაროების მიმოხილვა

1.1. ღვარცოფული და მეწყერული მოვლენები წყალსატევებისა და მდინარეების ხეობების ფერდობებზე

მთიან და სეისმოაქტიურ რაიონებში, რომლებიც საქართველოს ტერიტორიის უმეტეს ნაწილს შეადგენენ, მეწყერულ მოვლენებს მთისა და ხეობების ფერდობებზე ხშირად, თან სდევს მნიშვნელოვანი მატერიალური ზარალი, ზოგჯერ კი – კატასტროფული შედეგები. კერძოდ, ჰიდროკვანძის რაიონში მეწყერის ზემოქმედება გამოიხატება, როგორც უშუალოდ ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე ავარიული პირობების წარმოქმნით, ასევე წყალსაცავში დამანგრეველი ტალღების გენერაციის სახით. ხეობის ფერდიდან ჩამოზვავებულმა მეწყერმა შეიძლება გადახერგოს მდინარის კალაპოტი და შექმნას ბუნებრივი კაშხალი, რომლის წარეცხვა ხელოვნური ნაგებობებისგან განსხვავებით, ბევრად უფრო ადვილად შესაძლებელი, რასაც უცილობლად ვრცელი ტერიტორიების დატბორვა მოსდევს. მეწყერის დარტყმითი ზემოქმედება ჰიდროტექნიკურ და საინჟინრო ნაგებობებზე (კაშხლებზე, მილსადენებზე, ნავთობსადენებზე და სხვ.) იწვევს მათ ავარიებს. ყველაფერი ეს განაპირობებს შესაბამის უარყოფით ეკოლოგიურ და სოციალურ შედეგებს, რომელთა თავიდან აცილების (ან მათი მასშტაბების შემცირების) ღონისძიებების განხორციელება უნდა ეფუძნებოდეს პოტენციური მეწყერების შესაძლო დინამიკური ზეგავლენის მეცნიერულად დასაბუთებულ პროგნოზს [1, 3, 20, 21, 22, 48, 52, 76].

ქვემოთ მოყვანილია მოკლე ცნობები რამდენიმე ტიპიური მეწყერის შესახებ, რომლებსაც ადგილი ქონდათ მდინარის ხეობების ან წყალსატევების (ტბების, წყალსაცავების) ფერდობებზე. ამ მეწყერული მოვლენების თავისებურებები მდგომარეობს იმაში, რომ ისინი ჩამოზვავების შედეგად მდინარის ხეობებში ან წყალსატევებში, ბუნებრივი კაშხლების, წყლის საგუბრების (ანუ ახალი ტბების) და მაღალი დამანგრეველი წყლის

ტალღების წარმოქმნის მიზეზები ხდებოდნენ. ქვემოთ, აღწერილია აგრეთვე, ისეთი მეწყერის შემთხვევაც, რომელიც განვითარდა მიწის კაშხლის ზედა (დაწნევით) ფერდოზე. ყველა აღნიშნულ მოვლენას თან ახლდა კატასტროფული შედეგები, რაც განპირობებული იყო, როგორც მეწყერის უშუალო, ასევე არაპირდაპირი ზემოქმედებით.

- 1911 წ. კამირის მთებში დაბა უსოის მახლობლად, მიწისძვრის შედეგად წარმოიქმნა უზარმაზარი მეწყერი (მოცულობით 2,5 მლრდ მ³), მეწყერი შედგებოდა თიხისა და დამსხვრეული კლდოვანი ქანისაგან. მეწყერმა მთლიანად მოსპო აღნიშნული დაბა თავისი 54 მცხოვრებით და გადაფარა მდ.მურგაბი, რის შედეგად წარმოიქმნა დიდი ტბა. ამ ტბაში წყლის დონე თანდათან მატულობდა, რამაც მალე გამოიწვია მეორე დაბა – სარეზის მთლიანი დატბორვა. ტბის (რომელსაც მოგვიანებით სარეზის ტბა დაარქვეს) ფორმირება დასრულდა მას შემდეგ, რაც წყალმა მეწყერულ მასაში გაჭრა ახალი კალაპოტი და ტბიდან გამოდინების მოცულობა გაუთანაბრდა მდინარის შედინების რაოდენობას. მეწყერით წარმოქმნილი კაშხლის (დამბის) სიმაღლემ მიაღწია უზარმაზარ სიდიდეს – 301 მ, ხოლო მაქსიმალურმა სიღრმემ ტბაში შეადგინა 284 მ. რაც შეეხება ტბის სიგრძეს, ის გაუტოლდა 53 კმ-ს. მიწისძვრის სიმძლავრე შეფასებული იყო მაგნიტუდით $M = 7,6$ (რიხტერის შკალით), რაც მიაკუთვნებს მას ძალიან ძლიერი მიწისძვრების რიგს;
- მდ.გრო-ვენტრის ხეობა მდებარეობს განთქმული იელოუსტონის ნაციონალური პარკის (აშშ) სამხრეთით. 1925 წ. 25 ივნისს, ძლიერი წვიმებისა და თოვლის დნობის შედეგად, შიპ-მაუნტონის მაღლობიდან ხეობაში ჩამოზვავდა კირქვის ქანების მასა, რომლის სიგრძე (ფერდობის გასწვრივ) შეადგენდა 1,5 კმ; მისი სიმაღლე აღწევდა 60 მ, ხოლო სიგანე – 600 მ. ამ მასამ გადალობა მდინარე და შექმნა 70 მ სიმაღლის კაშხალი. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ეს

უზარმაზარი მოცულობის მეწყერი მოძრაობდა ძირითადად, როგორც ერთი მონოლითური მასივი (ბლოკი), ისე რომ ტყემ, რომელიც ფარავდა შიპ-მაუნტინის მალლობს, მეწყერის შედეგად გადაინაცვლა მასივთან ერთად პრაქტიკულად უცვლელად, გრო-ვენტრის ხეობაში, მეწყერით მდინარის შეტბორვის შედეგად წარმოიქმნა ტბა, რომელმაც წყლით დატბორა რამდენიმე ფერმა ხეობის ზედა ნაწილში. თითქმის ორი წლის განმავლობაში არსებობდა ბალანსი მდინარეში მოდინებული და მეწყერულ მასაში გაჟონილ წყლის ხარჯებს შორის. მაგრამ 1927 წელს, გაზაფხულის წყალმოვარდნამ დაარღვია ეს ბალანსი. დაიწყო კაშხლის გარეცხვა. ქვედა ბიეფში მცხოვრები მოსახლეობის უმეტესობამ მოასწრო თავისი სახლ-კარის მიტოვება, მაგრამ კაშხლის გარღვეული უბნიდან (ნაღვარევიდან) მოვარდნილმა ტალღამ მთლიანად დაფარა სოფელი კელი და 6 კაცის დაღუპვის მიზეზი გახდა;

- 1939 წ. 13 სექტემბერს, ძლიერმა წვიმებმა ნორვეგიაში, გამოიწვიეს მეწყერი, რომელიც შეიცავდა კლდოვან (გრანიტისა და გნეისის) ქანებს. ამ მეწყერულ მასას, რომელიც მოწყდა ციცაბო მთის ფერდობებიდან მართალია, არ გამოუწვევია უშუალოდ რაიმე ნგრევა, მაგრამ აღნიშნული მთის ქანი ჩამოინგრა ლოენის ტბაში და წარმოქმნა მაღალი ტალღა, რომელმაც ჩამორეცხა ტბის მოპირდაპირე ნაპირზე განლაგებული სოფელი და გამოიწვია მისი მოსახლეობის უმეტესი ნაწილის დაღუპვა;
- პამირის მეწყერის მსგავსი მოვლენები თან სდევდა ბევრ სხვა მიწისძვრას, თუმცა ისინი ასეთი დიდი მასშტაბით არ ხასიათდებოდნენ. ასე მაგალითად, 1959 წ. აგვისტოში, შტ.მონტანაში (აშშ) მომხდარი მიწისძვრა აღწევდა მაგნიტუდას 7,1. ამ დროს წარმოქმნილმა მეწყერმა (მოცულობით 27 მლნ მ3) გადაკეტა მდინარე მედისონის ხეობა, ხებგენის წყალსაცავის ქვედა

ბიეფში. მეწყერმა დაანგრია ტურისტული ბანაკი, რასაც 47 ადამიანი შეეწირა. მეწყერის მასის მდინარეში ჩამონგრევის შედეგად შეიქმნა ბუნებრივი კაშხალი, ხოლო წარმოქმნილ საგუბარში წყლის დონემ დაიწყო სწრაფი მატება. აღნიშნული მეწყერული კაშხლის წყლის მიერ გარღვევის შემთხვევაში წარმოქმნილი დამანგრეველი ტალღა შეუქმნიდა საშიშროებას, როგორც მოსახლეობას, ასევე შენობა-ნაგებობებს, რომლებიც განლაგებული იყო მდ.მედისონის ქვედა წელში. ამიტომ, მიღებული იქნა სასწრაფო ზომები, რის შედეგად აშშ-ს საინჟინრო ჯარების ნაწილებმა გათხარეს მეწყერულ კაშხალში არხი შეტბორილი წყლის გასაყვანად. რის შედეგადაც თავიდან აიცილეს შესაძლო კატასტროფა;

- ანალოგიურ, მაგრამ უფრო დიდი მასშტაბის მოვლენას ადგილი ჰქონდა იტალიაში (1963 წ. ოქტომბერში), ვაიონტის წყალსაცავის ფერდობიდან უზარმაზარი მეწყერული მასის (250 მლნ მ3) უეცარი ჩამოქცევის შედეგად. ეს წყალსაცავი შეიქმნა მაღალი თაღოვანი (267 მ სიმაღლის) კაშხლის აგების (1960-1962 წწ.) შედეგად. აღნიშნულ ჩამოქცევამდე შემჩნეული იყო ფერდობებზე გრუნტის ნელი მოძრაობა, თუმცა ამან არ მისცა საშუალება სპეციალისტ-გეოლოგებს გაეკეთებინათ მოვლენის განვითარების სწორი და დროული პროგნოზი. მეწყერის მასების წყალსაცავში ჩამონგრევამ გამოიწვია კატასტროფული ტალღა. ამ ტალღის ენერგია იმდენად დიდი იყო, რომ მან გადაუარა კაშხალს (ამ დროს წყლის ფენამ 70 მ მიაღწია), გავრცელდა უზარმაზარი სიჩქარით ქვედა ბიეფში და სულ რაღაც 3-4 წუთში წალეკა ქალაქი ლანჟერონე და რამდენიმე სოფელი თავისი მცხოვრებლებით. ტალღა ავარდა აგრეთვე, წყალსაცავის მოპირდაპირე ფერდობზე 230 მ სიმაღლემდე და აქაც, სოფელ კასოს ნაწილი ჩამორეცხა;

- 1971 წ. მიწისძვრამ სან-ფერნანდოს ხეობაში (კალიფორნია) გამოიწვია დიდი რაოდენობის სხვადასხვა ზომის მეწყერი, მაგრამ მათ შორის ყველაზე მნიშვნელოვანი იყო ის, რომელიც წარმოიქმნა სან-ფერნანდოს 60 მ-იან კაშხლის ზედა ბიეფის ფერდოზე. საბედნიეროდ ამ დროს წყალი წყალსაცავში იდგა საკმაოდ დაბალ დონეზე, ასე რომ ნაწილობრივად დანგრეული კაშხლის მხრიდან არ მოხდა წყალსაცავიდან წყლის მნიშვნელოვანი ნაკადის გავრცელება ქვედა ბიეფში. ამის მიუხედავად, შეიქმნა იმდენად საშიში პირობები, რომ ქვედა ბიეფიდან 80 ათასიანი მოსახლეობის სასწრაფო ევაკუაცია გახდა საჭირო. როგორც ავარიის შემდეგ ჩატარებულმა ანალიზმა და კვლევებმა აჩვენეს, კაშხლის მიწაყრილის ზონაში მოხდა მასალის გათხევადება და მისი სიმტკიცის დაკარგვა, რის შედეგად კაშხლის ფერდობი ჩამოინგრა წყალში. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ამ მასამ, რომელიც ფაქტიურად ღვარცოფს წარმოადგენდა წყალსაცავის ფსკერზე გადაინაცვლა თითქმის 200 მ მანძილზე (კაშხლიდან). აღნიშნულმა მიწისძვრამ წყალსაცავის სანაპირო ფერდობებზეც გამოიწვია რამდენიმე მეწყერი, თუმცა მათი გავლენის ხარისხი შედარებით მცირე იყო;
- თბილისი, 2015 წლის 13 ივნისი ისტორიში შევიდა, როგორც ერთ-ერთი ყველაზე მტკივნეული და ტრაგიკული დღე. ძლიერმა წვიმამ მდინარე ვერეს ხეობაში გამოიწვია მეწყერის ჩამოწოლა და კალაპოტის გადაკეტვა, შეიქმნა ბუნებრივი კაშხალი, რომელიც საკმაოდ სწრაფად შეივსო და დაიწყო გადადინების პროცესი. გადადინების ხარჯის სიდიდემ გამოიწვია ბუნებრივი კაშხლის წარეცხვა და შემდგომი სწრაფი რღვევა, რამაც თავის მხრივ წარმოშვა ექსტრემალური, სტრატეგიცირებული, ღვარცოფული ნაკადი. წყალმა მთლიანად დატბორა ზოოპარკის ტერიტორია, განადგურდა ქალაქის მიმდებარე ინფრასტრუქტურა, დაინგრა და

დაიტბორა საცხოვრებელი სახლები, დაიხოცა ცხოველები და იმსხვერპლა 20-ზე მეტი ადამიანი.

აღსანიშნავია, რომ ანალოგიური სიტუაცია მდინარე ვერეზე, დაფიქსირდა 1924 წლის ასევე 13 ივნისს, რომელიც ასევე დასრულდა ადამიანთა მსხვერპლით.

მეწყერული მოვლენების გამოვლენა ხდება სხვადასხვა სახით. ამასთან, ძირითადად განასხვავებენ მეწყერის ვარდნით, სრიალით და დინებით მოძრაობას. მის სახეს განაპირობებს, უპირველეს ყოვლისა, მეწყერის წარმომქმნელი ფაქტორების მოქმედება, მეწყერის ქანის ფიზიკურ-მექანიკური თვისებები და მისი კერის რელიეფი. ღვარცოფები ძირითადად იყოფა ორ ჯგუფად:

- ბმული-სტრუქტურული ნაკადები, რომლებიც წარმოგვიდგებიან ერთგვაროვანი კონგლომერატივ ქვატალახიანი მასის შემადგენლობით 80-90 % მყარი კლდის მონატეხებით, ქვებით, კენჭებით, ტალახიანი მასით, რომელთა გაჩერების შემთხვევაში არ ეკარგებათ სტრუქტურა. ამ ნაკადებისათვის საშუალო სიმკვრივე იცვლება 1700-2500 კგ/მ³;
- არაბმული ღვარცოფები, რომლებიც ასევე ხასიათდებიან მყარი ფრაქციების კონცენტრაციით 15-60%-მდე მასაში, მაგრამ ითვლება წყლის მექანიკურ ნარევად. ასეთი ნაკადების საშუალო სიმკვრივე იცვლება 1100-1700 კგ/მ³.

სიმკვრივის მიხედვით ღვარცოფების დაყოფა ორ ძირითად ჯგუფად აუცილებელია, მაგრამ არა ძირითადი. ბმული ღვარცოფებისათვის დამატებით საანგარიშო სიდიდედ უნდა ჩაითვალოს რეოლოგიური მაჩვენებლები - დინამიკური სიბლანტე, ძვრის საწყისი წინაღობა და მოდული, რომლებიც პრაქტიკულად ძირითადად ახასიათებენ ღვარცოფული მასის, როგორც დამაბულობას, ასევე დეფორმაციის მდგომარეობას. ღვარცოფის ტურბულენტურ რეჟიმს ადგილი აქვს მაშინ როდესაც მყარი შემადგენლის კონცენტრაცია მცირეა, ხოლო მოძრაობის

სიჩქარე მაქსიმალური. აღნიშნული საკითხის შესწავლის მიზნით გამოიყენება, როგორც ტრადიციული კალაპოტის ჰიდრავლიკის მეთოდები, ასევე შედეგიანად მუშაობს მექანიკის კანონები, კერძოდ რეოლოგიის (არანიუტონისებური) მეთოდები, რომლებმაც გამოიყენა პოვა, როგორც სამამულო, ასევე საზღვარგარეთის მკვლევარების შრომებში [77].

ანალოგიურად შეიძლება დავახასითოდ არაბმული ღვარცოფები, რომელთა ერთ-ერთ მახასიათებელ სიდიდედ უნდა ჩაითვალოს ჰიდრავლიკური სიმსხო. არაბმული ღვარცოფების წარმოშობის მექანიზმის დასადგენად არსებობს მრავალი შრომები რომლებიც ექვემდებარებიან ნატანდატვირთული ნაკადების მექანიკის კანონებს დეფორმირებულ კალაპოტებში. რაც შეეხება მდინარის კალაპოტის გარეცხვისა და წყალდენის ფსკერის მდგრადობის ფუნდამენტურ შესწავლაში დიდი ღვაწლი მიუძღვის აწ გარდაცვლილ საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოს ც. მირცხულავას [67].

საქართველო მსოფლიოში მთიან სახელმწიფოებს შორის ერთ-ერთ ყველაზე ღვარცოფსაშიშ რესპუბლიკას წარმოადგენს. დღეისათვის საქართველოში ასზე მეტი აქტიური მოქმედი კერაა აღრიცხული, საიდანაც მოსახლეობას და სახალხო მეურნეობის ობიექტებს ღვარცოფის მუდმივი საფრთხე ემუქრება. ღვარცოფული ნაკადები საქართველოში ძირითადად გავრცელებულია ჩრდილო ტროპიკულ სარტყელსა და 50-ე პარალელს შორის, გეოლოგიური თვალსაზრისით ახალგაზრდა წარმოშობის მთიან ზონაში – კერძოდ კავკასიის ქედზე (ძირითადად მთავარი კავკასიონის ცენტრალური და აღმოსავლეთი ნაწილი), სადაც ინტენსიურად მიმდინარეობს თანამედროვე ტექნიკური პროცესები, იმ ადგილებში სადაც წარსულში ადგილი ქონდა ადამიანის მიერ მცენარეული საფარის (განსაკუთრებით მდინარეთა სათავეებში) განადგურებას. ინფორმაცია საქართველოში ღვარცოფული ნაკადების გავლის შესახებ მოიპოვება მხოლოდ 1775 წლიდან. ამ წელს ღვარცოფის გავლას ადგილი ქონდა მდ. ყაბახზე (მდ. თერგის შენაკადი). ცნობილია ღვარცოფის გავლა მდინარე

დურუჯზე (1888 წ.), თეთრი არაგვის მარჯვენა შენაკადებზე: ნაღვარევის ხევი, (1897 წ.), მლეთის ხევი (1902 წ.), და ა.შ. [66].

საქართველოს ღვარცოფული ნაკადების მოქმედების არეშია, როგორც მოსახლეობა ასევე მთელი რიგი ობიექტები, როგორცაა: საავტომობილო და სარკინიგზო გზები, საირიგაციო და კომუნიკაციური ნაგებობანი და მთელი რიგი დასახლებული პუნქტები (თელავი, ყვარელი, მცხეთა, დუშეთი, გორი, ყაზბეგი, ლენტეხი, ონი, ქედი, შუახევი, სხვა ქალაქები და რაიონები). ღვარცოფული ნაკადებისაგან გამოწვეული ზარალი ყოველწლიურად რამდენიმე ათეულ მილიონ ლარს აღწევს. ძალზედ შემაშფოთებელია, რომ მარტო ყვარელში მდ. დურუჯის ხეობაში, სხვადასხვა დროს გავლილმა ღვარცოფებმა მრავალი ადამიანის სიცოცხლე შეიწირა. ამ მხრივ მდ. დურუჯი, სამწუხაროდ „რეკორდსმენია“ საქართველოში [67].

საქართველოს ტერიტორია ღვარცოფული ნაკადების გავრცელების მიხედვით შეიძლება დაიყოს ორ რეგიონად:

- მდ. მტკვრის აუზში ჩამდინარე ღვარცოფული ხასიათის წყალდენები;
- შავ ზღვაში ჩამდინარე მდინარეების ღვარცოფული ხასიათის შენაკადები.

მდ. მტკვრის აუზის რეგიონი თითქმის მთლიანად მოიცავს აღმოსავლეთ საქართველოს. ამ ტერიტორიაზე ძირითად აქტიურ ღვარცოფული ხასიათის მდინარეებს მიეკუთნება მდ. ალაზნისა და მდ. არაგვის შენაკადები. მდ. ალაზნის შენაკადებიდან, ყველაზე აქტიურ ღვარცოფულ მდინარედ ითვლება დურუჯი, რომლის წყალშემკრები აუზი მდებარეობს კახეთის კავკასიონის სამხრეთ ფერდობზე. იგი ზემო წყალში ორი ტოტით, შავი და თეთრი დურუჯით არის წარმოქმნილი. მთავარ კალაპოტად მიჩნეულია შავი დურუჯი, რომლის სათავეც მდებარეობს ალპურ და სუბალპურ ზონაში. ხეობის ფერდობზე გვხვდება ვრცელი გაშიშვლებები, რომელთა ფერდობის სიმაღლე 500 მ. - დან 1კმ. – მდე აღწევს, ხოლო სიგანე კი 4,0 კმ. – ს აღემატება.

ყველაზე ვრცელი გამოიშვლება შავი კლდის სახელწოდებით არის ცნობილი, რომლის ფერდობზე აქტიურად მიმდინარეობს როგორც ეროზიული, ასევე მეწყრული პროცესები. მდინარე დურუჯმა მრავალჯერ მიაყენა სერიოზული ზარალი ქ. ყვარელს. 91 წელიწადში მდინარე დურუჯის კალაპოტში 15-ჯერ ჰქონდა ადგილი კატასტროფული ღვარცოფული ნაკადების გავლას. მდ.ალაზნის ღვარცოფ-წარმომშობ ფაქტორებსა და ღვარცოფულ ნაკადებზე დაკვირვებები აჩვენებს, რომ აქ ძირითადად მოსალოდნელია ტურბულენტური ტიპის ღვარცოფული (იშვიათად სტრუქტურულიც), რომელიც დიდ ზიანს აყენებს როგორც დასახლებულ პუნქტებს, ასევე ალაზნის ვაკის სასოფლო-სამეურნეო სავარგულებს [67].



(ნახ.1.1.1) მდ. დურუჯის ეროზიული დრანტეების ხედი შავი კლდის მიდამოში

მდ. თეთრი არაგვი და მდ. თერგის აუზი წარმოადგენს ტიპიურ ღვარცოფული სახის აუზებს, სადაც ძლიერად მიმდინარეობს, როგორც ეროზიული, ასევე მეწყრული პროცესები, რომლებიც გამოწვეულია სხვადასხვა ფაქტორის გავლენით (ტყის გაკაფვა, სამოვრების გადატვირთვა,

რომელმაც გამოიწვია მცენარეული საფარის დეგრადირება და თავის მხრივ ხელი შეუწყო ეროზიული პროცესების გააქტიურებას). ყურადღებას იპყრობს აგრეთვე საველე დაკვირვებების საფუძველზე მიღებული შედეგიც, რომელიც გამოიხატება მდ. თეთრი არაგვის კალაპოტის ნიშნულების ინტენსიური აწევით. მდ. თეთრი არაგვის შენაკადზე შედარებით მცირე მონაკვეთზე (10 კმ.) საშუალო ქანობით (0.2-0.4) ღვარცოფულ შენაკადებზე 1897წ.-დან დღემდე ღვარცოფის მოვარდნა აღნიშნულია 137-ჯერ, აქედან მლეთის ხევზე 29-ჯერ, ნაღვარევის ხევზე 26-ჯერ, კოტორას ხევზე 8-ჯერ, ჩადის ციხის ხევზე 6-ჯერ, ჩოხელთ ხევზე 3-ჯერ და სხვა. [67]

უნდა აღინიშნოს, რომ ღვარცოფული შენაკადები ღვარცოფული მასის გამოტანის მოცულობით და დამანგრეველი ძალით ნაკლებად განსხვავდებიან საქართველოს ღვარცოფული ხასიათის მრავალი მდინარისაგან, რომლებსაც შეუძლიათ გამოიტანონ მილიონი და მეტი კუბომეტრი მყარი მასალა. ყველაზე ხშირად ღვარცოფული ნაკადების გავლა აგვისტოს თვეში ხდება (46-ჯერ, ანუ 33.8%), ხოლო ნაკლები (3-ჯერ, ანუ 2.2%) დაფიქსირებულია აპრილის თვეშიც. მდინარეთა განსაკუთრებით დიდი აქტიურობა შეიმჩნეოდა 1987 წლის აპრილ-აგვისტოში. მდინარე ჩოხელთ ხევზე (მდ. თერგი არაგვის მარჯვენა შენაკადი) 1987 წ. 2-3 ივნისს კალაპოტში წამოვიდა ბმული ღვარცოფული ნაკადი, რომელმაც დიდი ზიანი მიაყენა მოსახლეობას. ამოტანილი ღვარცოფული მასის მოცულობამ თითქმის 1 მილ.მ³ შეადგინა. ღვარცოფმა შეიწირა ოთხი ადამიანის სიცოცხლე. თეთრი არაგვის ხეობაში განსაკუთრებით ღვარცოფსაშიშ მდინარედ ითვლება ნაღვარევის ხევი, რომლის სიგრძე და წყალშემკრები აუზის სიდიდეები გაცილებით დიდია ვიდრე სხვა მდინარეების [67].

1.2. ექსტრემალური ტალღების კვლევებთან დაკავშირებული ლიტერატურის მიმოხილვა და ანალიზი

ქვემოთ წარმოდგენილია ექსტრემალური ტალღური პროცესების შესწავლისთვის მიძღვნილი ნაშრომების მოკლე ისტორიული მიმოხილვა.

პირველი ნაშრომები, რომლებიც შეეხებოდა მარჩხი წყლის განტოლებათა ინტეგრირების ამოცანას მეწყერით გენერირებული ტალღების შემთხვევაში რიცხვითი მეთოდების, კერძოდ, სასრულ ელემენტების და სასრულ-სხვაობითი მეთოდების საშუალებით, გამოქვეყნებულია ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 70-იან წლებში კუტიტასის, რონი და ბატლერის, აგრეთვე ვ.მ.ლიატხერისა, ა.ნ.მილიტევის და სხვ. მიერ. სასრულ-სხვაობითი მეთოდი შეიძლება იქნას რეალიზებული სხვადასხვა (ხშირად სტანდარტული) სხვაობითი სქემის მეშვეობით, რომელთა რაოდენობა დღეისათვის საკმაოდ დიდია, რაც მოწმობს იმაზე, რომ მათი სრულყოფის პროცესი ჯერ კიდევ არ არის დასრულებული. ტალღური ამოცანების განხილვისას საწყისი მონაცემების სახით უნდა იყოს მოცემული კონკრეტული "შემფოთების" (მეწყერი, ღვარცოფი, მიწისძვრა, წყალმოვარდნა) პარამეტრები წყალსატევის საზღვრის რომელიმე უბანზე. ამასთან, ჩასატარებელია აღნიშნული შემფოთებით განპირობებული ჰიდროდინამიკური პროცესის მახასიათებლების (ტალღა, სიჩქარეები და სხვ.) რიცხვითი გაანგარიშება. საჭიროა აღინიშნოს, რომ რიცხვითი მეთოდების საშუალებით აღნიშნული გაანგარიშებების ჩატარება აუცილებელი ხდება მაშინ, როდესაც განსახილველი წყალსატევი (მაგალითად წყალსაცავი) ხასიათდება რთული კონფიგურაციით და მისი სქემატიზირება მარტივი გეომეტრიული არეს მეშვეობით (მაგალითად, სწორკუთხა პარალელებიპედის სახით) უმართებულოა, აგრეთვე იმ შემთხვევაში, როცა საჭიროა მკვეთრად გამოხატული მაღალი არაწრფივი ტალღების ზომების შეფასება შედარებით მცირე სიღრმეების შემთხვევაში [16, 19, 44, 47].

მარჩხი წყლის თეორიის გამოყენება მეწყერით ან მიწისძვრით გამოწვეული ტალღების შესწავლის მიზნით საშუალო და დიდი სიღრმის წყალსაცავებში არ არის ეფექტური და მიზანშეწონილი, ვინაიდან ამ დროს, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, სითხის მოძრაობის ვერტიკალური მდგენელი არ მიიღება მხედველობაში, რაც გაანგარიშების შედეგებში

მნიშვნელოვან ცდომილებას გვაძლევს მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების (მატ) თეორიის გამოყენების შემთხვევასთან შედარებით. ამასთან, სწორედ ღრმა წყალსაცავებში შეიძლება წარმოიქმნას მაქსიმალურად მაღალი ტალღები, ვინაიდან, მეწყერის ჩამონგრევისას, ჩვეულებრივ, მისი მთელი მასის ჩადირვა ხდება წყალში (განსხვავებით, მცირე სიღრმის წყალსაცავებისაგან) და სითხეს გადაეცემა მაქსიმალური ენერგია. აღნიშნულ შემთხვევებში მხოლოდ (მატ) თეორიაზე დაყრდნობით აგებული ალგორითმების საშუალებით შეიძლება სანდო შედეგების მიღება [48].

პირველი ნაშრომები, რომლებიც გამოქვეყნებული იყო 1968-69 წლებში და შეეხებოდა წყალსაცავში მიწისძვრის შედეგად წარმოქმნილ "ცუნამის" ტიპის ტალღების შესწავლას (მატ) თეორიის საფუძველზე ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანის ჩარჩოებში, როგორც ჩანს ეკუთვნის თ.გველესიანს. ოდნავ მოგვიანებით, მეწყერით გამოწვეული ბრტყელი ტალღების თეორიული და ექსპერიმენტული კვლევის შედეგები აისახა ვიგელის და ნოდას შრომებში. შემდგომი, სეისმოგენური და მეწყერით გენერირებული ტალღების ფართო და სხვადასხვა ასპექტით კვლევა თეორიული და ექსპერიმენტული მეთოდების საფუძველზე წარმოებდა, ძირითადად, საქართველოს ენერგეტიკის ინსტიტუტში გ.მამრადის, ი.მუზაევის, გ.ჯინჯიხაშვილის, ლ.როზენტურისა და თ.გველესიანის მიერ მოგვიანებით კი, ი.ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში, გამოყენებითი მათემატიკის კათედრაზე ჰ.მელაძის, ნ.ჯღამაძისა და ა.ჭანტურიას მიერ. აღნიშნული საკითხების შესწავლა წარმოებდა აგრეთვე, აშშ, ავსტრიის, ნორვეგიის, რუსეთის, უკრაინის და სხვ. სამეცნიერო ცენტრებში (კერძოდ, მოსკოვის ჰიდრომელიორაციულ ინსტიტუტში, ლენინგრადის უმაღლეს სამხედრო საინჟ. ტექნ. სასწავლებელში, უკრაინის მეცნ. აკადემიის ჰიდრომექანიკის ინსტიტუტში და სხვ.) [2-5, 9, 11-14, 18, 22, 23, 25-28, 41, 47, 48, 55].

საქართველოს ენერგეტიკისა და ენერგეტიკულ ნაგებობათა სამეცნიერო კვლევით ინსტიტუტში დამუშავებული, წყალსაცავებში

წარმოშობილი სეისმოგენური და მეწყერული ტალღების გაანგარიშების მეთოდოლოგია და კვლევის შედეგები, რომლის სამეცნიერო თემატიკის ხელმძღვანელი იყო თ. გველესიანი ფართოდ იქნა გამოყენებული საკავშირო სამშენებლო ნორმებსა და წესებში (სნიიპ), აგრეთვე მთელი რიგი მაღალდაწვევიანი ჰიდროკვანძების კაშხლების დაპროექტების, მშენებლობისა და ექსპლუატაციის დროს, მათ შორისაა საიანო-შუმენსკოე (ციმბირში), მიატლი, ირგანაი (დაღესტანი), გეტიკი (სომხეთი), ზარამაგი (აზერბაიჯანი), ჟინვალი, ალგეთი, ახალციხე, ბირკიანი (საქართველო). საკავშირო მინისტრთა საბჭოს დაკვეთით (1980წ.) ზემოაღნიშნული მეთოდის საფუძველზე ჩატარებული სარეზის ტბაში (ტაჯიკეთი) შესაძლო ექსტრემალური ტალღური პროცესის შესწავლა. ეს ტბა წარმოიქმნა 1911 წ. მიწისძვრის შემდეგ, მეწყერის მიერ მდინარის კალაპოტის ჩახერგვის შედეგად და სწორედ ამ მეწყერის არამდგრადი ნაწილის ტბაში ჩამოზავების შემთხვევაში შესაძლებელია მაღალი ტალღის წარმოქმნა. გაანგარიშებების შედეგებმა აჩვენეს, რომ ეს ტალღა ეკოლოგიური კატასტროფის სერიოზულ საფრთხეს წარმოადგენს სარეზის ტბის მიმდებარე დასახლებული რაიონისათვის და ამ საფრთხის პრევენციის მიზნით საჭიროა სპეციალური ღონისძიებების ჩატარება [28, 34-37, 39].

განსხვავებით ზემოთ აღნიშნული ტალღური თეორიებისა, ზოგიერთ ნაშრომში მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონის საფუძველზე განისაზღვრებოდა წყალსაცავში გენერირებული ტალღის მაქსიმალური ამპლიტუდა, მეწყერის (ან ღვარცოფის) წყალსაცავში უშუალოდ შემოსვლის შედეგად ლოკალურ უბანზე. ამასთან, ტალღების წყალსაცავში გავრცელებისა და კაშხლიდან არეკვლის საკითხები არ განიხილებოდა. ფაქტიურად იგივე ხერხით წარმოებდა "მეწყერული ტალღის" მხოლოდ მაქსიმალური ამპლიტუდის (სიმაღლის) შეფასება სხვა ნაშრომებშიც. როგორც ცნობილია, ზოგ შემთხვევაში მდინარის კალაპოტებში, არხებსა და წყალსაცავებში ჩნდება სპეციფიკური სახის ტალღა ე.წ. ბორი, რომელიც ხასიათდება იმით, რომ მისი ტალღის ფრონტი საკმაოდ ციცაბოა, ხოლო

თხემი ბრტყელია და გაშლილი. ზოგიერთ ნაშრომში "მეწყერული ტალღა" გენერირების საწყის ფაზაში მიახლოებით სწორედ ბორის სახით იყო აპროქსიმირებული [49, 50].

ზემოაღნიშნული, ნათლად აჩვენებს, თუ რა დიდი ყურადღება ექცეოდა თავიდანვე მსოფლიოს სხვადასხვა მეცნიერის მხრივ ექსტრემალური ტალღების წყალსაცავებში წარმოქმნის პროცესების შესწავლას, რაც განპირობებული იყო, ამ პრობლემის როგორც სერიოზული სოციალური და ეკოლოგიური მნიშვნელობით, ასევე მისი კვლევის სირთულით.

მოკლედ შევხვით იმ კვლევებს, რომლებიც გრძელი ტალღების სანაპირო ფერდობზე (ან მიწის კაშხლის სადაწნეო ფერდობზე) მიგორვის (ან აგორვის) პროცესს შეეხება. საანგარიშო სქემები, რომლებიც გრძელი ტალღების მიგორვის პროცესებს აღწერენ დღეისათვის დამუშავებულია, ძირითადად, ზღვის სანაპირო ზოლზე ცუნამის ტიპის ტალღების ზემოქმედების შესწავლის მიზნით. ამასთან, კვლევები წარმოებდა ან ჰიდროდინამიკური გაანგარიშების საფუძველზე მარჩხი წყლის თეორიისა და რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით, ან განსაზღვრული ფორმის ტალღების დახრილ ზედაპირზე აგორვის ლაბორატორიული მოდელირების ბაზაზე. საინტერესოა აღინიშნოს, რომ ექსპერიმენტებმა, რომლებიც დაკავშირებული იყო ცალმაგი ტალღის ფერდობზე აგორვის პროცესის შესწავლასთან, აჩვენეს, რომ ტალღის აგორვის ფარდობით სიმაღლეს გააჩნია სხვადასხვა მაქსიმუმი, ფერდობის ჰორიზონტთან დახრის კუთხის ცვლილების სხვადასხვა საზღვრებში, რაც ძირითადად განპირობებულია ტალღების მსხვრევის რეჟიმზე გადასვლით. შედარებით ციცაბო ფერდობების შემთხვევაში, ანუ როდესაც აგორვისას მის მსხვრევას ადგილი არ აქვს, ტალღის აგორვის სიმაღლე იზრდება კუთხის ზრდასთან ერთად, ხოლო დამრეცი ფერდობების შემთხვევაში მცირდება. პირველ შემთხვევაში აღნიშნული ეფექტი განპირობებულია ტალღის არეკვლით, მეორე შემთხვევაში – ტალღის მსხვრევით. გრძელი ცალმაგი ტალღის ტრანს-

ფორმაციის ხასიათი დამოკიდებულია ზოგად შემთხვევაში, ტალღის არა-წრფივობის პარამეტრის $\gamma = \eta/h$, (სადაც η – ტალღის სიმაღლეა, h – წყლის სიღრმეა) მნიშვნელობაზე, აგრეთვე α – კუთხეზე და სანაპირო ფერდობის ზედაპირის ხორკლიანობაზე და ტალღის მსხვრევას ადგილი არ აქვს როდესაც ფერდობის დახრილობა შეადგენდა $\text{ctg } \alpha < 5$, (ფარდობითი სიღრმეების საკმაოდ დიდ დიაპაზონში ცვლილებებისას). საჭიროა აღინიშნოს, რომ ჰიდროკვანძების ადგილობრივი მასალისაგან აგებული კაშხლის სადაწნეო (ზედა) ფერდობის ქანობები ჩვეულებრივ ხასიათდებიან $\text{ctg } \alpha < 5$ მნიშვნელობებით და თუ მივიღებთ მხედველობაში, რომ სეისმოგენური და მეწყერული ტალღებს გააჩნიათ შედარებით დიდი სიგრძეები, უნდა ვივარაუდოთ, რომ მათი კაშხლის ფერდობზე მიგორვა მოხდება მსხვრევის გარეშე [25].

ლიტერატურული მასალის ანალიზი საშუალებას გვაძლევს დავასკვნათ, რომ ამა თუ იმ წყალსატევში (წყალსაცავი, ტბა და სხვ.) ტალღების წარმოქმნა შეიძლება გამოწვეულ იქნას როგორც ბუნებრივი (სტიქიური) მოვლენების შედეგად (მიწისძვრა, მეწყერი, ღვარცოფი, წყალმოვარდნა და სხვ.) ასევე ხელოვნური (მაგალითად, აფეთქება) მიზეზებით. ტალღების წარმოქმნის, გავრცელების, ფერდობებიდან (ან კაშხლიდან) არეკვლისა და ინტერფერენციის რთული პროცესები მკვეთრად გამოხატული არასტაციონარულობით ხასიათდებიან. ამ ტალღების შესწავლისადმი მიდგომები (მატ) ან (მწ) თეორიის გამოყენების საფუძველზე, დამოკიდებულია პირველ რიგში, როგორც წყალსაცავის ფორმაზე და მის სიღრმეზე, ასევე გარე ზემოქმედების ინტენსივობაზე. ამასთან, აღნიშნული ტალღური პროცესები შეიძლება აღწერილი იქნას:

- ერთგანზომილებიანი სითხის მოძრაობის მოდელით, მარჩხი წყლის (მწ) არაწრფივი თეორიის გამოყენებით;
- ორგანზომილებიანი (ვერტიკალურ სიბრტყეში) მოძრაობის მოდელით, წრფივი მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების (მატ)

თეორიის გამოყენებით ან ორგანოზომილებიანი (გეგმაში) მოძრაობის მოდელით, (მწ) თეორიის საშუალებით;

- სამგანზომილებიანი (სივრცითი) მოძრაობის მოდელით, (მატ) თეორიის საფუძველზე.

(მწ) თეორიის საფუძველზე ფორმულირებული სასაზღვრო ამოცანა არის არაწრფივი და მისი ანალიზური ამოხსნა უმეტეს შემთხვევაში შეუძლებელია. ამიტომ, მისი ამოხსნის მიზნით გამოიყენება ესა თუ ის რიცხვითი (სასრულ-სხვაობითი ან სასრულ ელემენტების) მეთოდი, რომლის საშუალებით, მოცემული არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა დაიყვანება ალგებრული განტოლებების სისტემის ამოხსნამდე. აღნიშნული მიდგომა საშუალებას იძლევა ბევრ შემთხვევაში, გათვალისწინებული იყოს გარკვეული შეზღუდვებით წყალსატევის რეალური ფორმა განივკვეთშიც და გეგმაშიც.

(მატ) თეორიის საფუძველზე ფორმირებული ტალღური წრფივი სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნისას, წყალსატევის ფორმის წარმოდგენა ჩვეულებრივ ხდება გამარტივებული (სქემატიზირებული) სახით (მაგალითად, სწორკუთხედით ან სწორკუთხა პარალელებიპედით, შესაბამისად ბრტყელი ან სივრცითი ამოცანის განხილვის დროს). ამ შემთხვევაში, აღნიშნული ტალღური ამოცანის ამოხსნა ბევრ შემთხვევაში შესაძლებელია ანალიზური მეთოდების გამოყენებით, რის შედეგად მიიღება ამონახსენი გარკვეული ანალიზური გამოსახულების (ფორმულის) სახით. თუმცა, ეს ამონახსენი საკმაოდ რთულია თავისი ფორმით და რიცხვითი მონაცემების მიღება შესაძლებელია მხოლოდ ეგმ-ის გამოყენების შედეგად.

როგორც ანალიზური, ასევე რიცხვითი მეთოდების საფუძველზე მიღებულ ამონახსნებს გააჩნია თავისი დადებითი და უარყოფითი მხარეები. სახელდობრ, ანალიზური ამონახსენი ადვილად გამოსაყენებელია სამგანზომილებიანი (3D) ამოცანის განხილვის შემთხვევაშიც კი. რის შედეგად შესაძლებელია დადგენილ იქნას განსახილველი პროცესის ძირითადი კანონზომიერებანი. ის აგრეთვე აუცილებელია ტესტური

ანალიზების დროს. ითვალისწინებს სიჩქარის ვერტიკალური მდგენელის გავლენას ტალღის პარამეტრებზე და ტალღის წარეცხვის პროცესებზე, მაგრამ ზუსტ შედეგებს იძლევა მხოლოდ სქემატიზებული არეებისათვის. რაც შეეხება რიცხვით ამონახსენს, მისი მიღება დაკავშირებულია რიგ მათემატიკურ პრობლემასთან (მდგრადობის, კრებადობის უზრუნველყოფა, დაგროვილ ცდომილებათა შეფასება და სხვ.). მისი გამოყენების არე შემოფარგლულია შედარებით მცირე მოცულობის წყალსატევებით გამოთვლების შემცირების მიზნით, მაგრამ შესაძლებელია გავითვალისწინოთ განსახილველი მოვლენის მთელ რიგი ფაქტორები, როგორცაა წყალსატევის ფორმა, ტალღის არაწრფივობა, წინააღობის ძალები და სხვა.

2. ტალღური მოძრაობის ძირითადი თეორიები, დებულებები და დაშვებები

2.1. იდეალური არაკუმშვადი სითხის მოძრაობა, ეილერის განტოლება

ტალღური მოძრაობის ჰიდროდინამიკური ამოცანების მათემატიკური მოდელირებისათვის გამოიყენება დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები, რომლებიც ასახავენ ძირითად ფუნდამენტალურ კანონებს. მათ შორის:

- მასის შენახვის კანონი (უწყვეტობის განტოლება);
- იმპულსის შენახვის კანონი (მოძრაობის რაოდენობის განტოლება);
- ენერგიის შენახვის კანონი (სითბოს გადატანის განტოლება);

მოცემული კანონები ამყარებენ შესაბამისობას ρ, \vec{V}, p, τ სითხის მოძრაობის კინემატიკურ, დინამიკურ და ფიზიკურ თვისებებს შორის.

თუ დავუშვებთ რომ მასისა და ენერგიის შემოდინება/გადინებას ადგილი არ აქვს, ანუ მასისა და ენერგიის წყარო ნულოვანია, მაშინ ეს დამოკიდებულებები აღიწერება შემდეგი განტოლებათა სისტემით:

უწყვეტობის განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1.1)$$

მოძრაობის რაოდენობის განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \operatorname{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{F} \quad (2.1.2)$$

სითბოს გადატანის განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) + (\vec{V} \operatorname{grad}) \left(\varepsilon + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} p \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{F} \vec{V} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{W} \quad (2.1.3)$$

მდგომარეობის განტოლებები

$$p = p(\rho, \vec{V}, \tau) \quad (2.1.4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, \vec{V}, \tau) \quad (2.1.5)$$

$$\chi = \chi(\rho, \vec{V}, \tau) \quad (2.1.6)$$

გამოყენებულია აღნიშვნები

$\rho = \rho(x, y, z, t)$	სითხის სიმკვრივე;
$\vec{V} = (u, v, w)$	ნაკადის სიჩქარის ვექტორი;
	$u = u(x, y, z, t)$ და $v = v(x, y, z, t)$
	ჰორიზონტალური და $w = w(x, y, z, t)$ ვერტიკალური მდგენელები;
$p = p(x, y, z, t)$	წნევა;
$\vec{F} = (f_u, f_v, f_w)$	გარე მოძქმედი ძალების ვექტორი (სიბლანტე, ხახუნი, გრავიტაცია);
$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$	ერთეული მოცულობის შინაგანი ენერჯია;
$\vec{W} = \chi \text{ grad } \tau$	სითბური ნაკადის სიმკვრივე;
$\chi = \chi(x, y, z, t)$	სითბოგამტარობის კოეფიციენტი;
$\tau = \tau(x, y, z, t)$	ტემპერატურა;
grad	s სკალარის გრადიენტი არის ვექტორი:
	$\text{grad } s = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) s = \left(\frac{\partial}{\partial x} s, \frac{\partial}{\partial y} s, \frac{\partial}{\partial z} s \right)$
div	$\vec{S} = (s_{(x)}, s_{(y)}, s_{(z)})$ ვექტორის დივერგენცია არის სკალარი:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{S} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) (s_{(x)}, s_{(y)}, s_{(z)}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} s_{(x)} + \frac{\partial}{\partial y} s_{(y)} + \frac{\partial}{\partial z} s_{(z)} \end{aligned}$$

ვინაიდან ზოგადი სახით ჩამოყალიბებული ამოცანების ფორმულირება და ამოხსნა დაკავშირებულია სირთულეებთან, ამიტომ საჭირო ხდება გარკვეული დაშვებების (შეზღუდვების) შემოღება, რომელიც ამარტივებს განტოლებებს და არ ეწინააღმდეგება განსახილველი ამოცანისათვის აუცილებელ პირობებს [43, 45, 46].

ერთერთი ასეთი დაშვებაა *იდეალური სითხე*, როდესაც სითხის მოძრაობის დროს არ განიხილება და უგულვებელყოფილია თბოგამტარობა, ანუ სითხის ფიზიკური თვისებები და წნევის ცვალებადობაც არაა

დამოკიდებული ტემპერატურის ცვლილებაზე. ამ დაშვების შედეგად განტოლებათა სისტემა (2.1.1)-(2.1.6) მიღებს სახეს:

იდეალური სითხის მოძრაობის განტოლება (ეილერის განტოლება)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \operatorname{grad}) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{F} \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \rho \vec{V} &= 0 \\ p &= p(\rho, \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

შემდგომი დაშვებაა არაკუმშვადი სითხე, როდესაც სითხის მოძრაობის დროს უგულვებელყოფილია ნაკადის სიბლანტე და სიმკვრივის ცვლილება, ანუ სითხე არის ერთგვაროვანი და არაკუმშვადი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\rho = \rho_0 = \text{const}$ განტოლებათა სისტემა (2.1.7) მიიღებს შემდეგ სახეს:

იდეალური არაკუმშვადი სითხის მოძრაობის განტოლება

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \operatorname{grad}) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \frac{1}{\rho} \vec{F} \\ \operatorname{div} \vec{V} &= 0 \\ p &= p(\rho, \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

მდგომარეობის განტოლება წნევისათვის შესაძლებელია გამოვითვალოთ მოძრაობის რაოდენობის განტოლების დივერგენციით და შემდგომ უწყვეტობის განტოლების ჩასმით:

მდგომარეობის განტოლება წნევისათვის (პუასონის განტოლება)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \Delta p + \operatorname{div} (\vec{V} \operatorname{grad}) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{F} \\ \Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

რაც შეეხება მოქმედი ძალების ვექტორს თუ დავუშვებთ, რომ ღია კალაპოტის შემთხვევაში ვერტიკალურად ადგილი აქვს მხოლოდ \vec{F}_g სიმძიმისა, ხოლო ჰორიზონტალურად \vec{F}_f კალაპოტის ხორკლიანობით გამოწვეულ წინააღმდეგობის ძალებს და გამოვიყენებთ სენ-ვენანის განზოგადოებულ ემპირიულ ფორმულას გვექნება:

მოქმედი ძალები

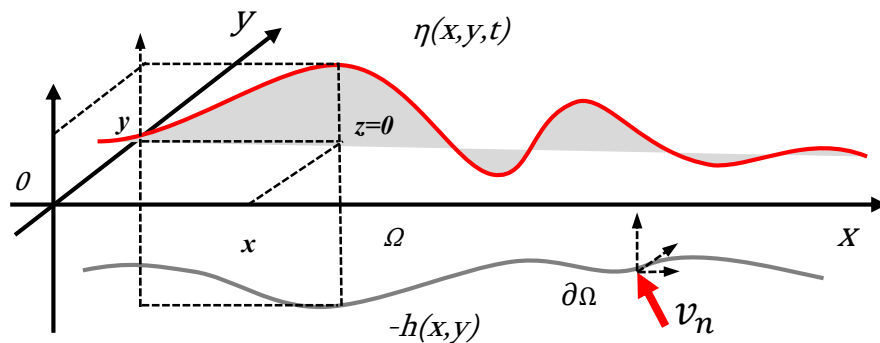
$$\vec{F}_f = \rho \frac{g}{C^2} \cdot \frac{|\vec{V}|}{\eta + h} \cdot \left(\frac{\eta - z}{\eta + h}\right)^m \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_f + \vec{F}_g$$

ამოცანის სრულყოფილად დასმისათვის მოცემულ განტოლებებთან ერთად აუცილებელია განვსაზღვროთ სასაზღვრო პირობები. დავუშვათ შეუშვოთებელი წყლის ზედაპირი ემთხვევა XOY კორიზონტალურ სიბრტყეს როდესაც $z=0$, და oZ მიმართულია ზევით (ნახ.2.1.1).

განვიხილოთ შემოუსაზღვრელი არე $\Omega = \{x, y \in (-\infty, +\infty), z \in [-h, \eta]\}$ და აღვნიშნოთ $\eta = \eta(x, y, t)$ თავისუფალი ზედაპირისა და $h = h(x, y)$ ფსკერის სიბრტყის ფუნქცია. კინემატიკური სასაზღვრო პირობები ვერტიკალურ საზღვრებზე გამომდინარეობს $z = -h$ და $z = \eta$ ტოლობების გაწარმოებით t -ს მიმართ.



(ნახ.2.1.1) საანგარიშო სქემა შემოუსაზღვრელ არეზე ტალღური ამოცანის შესწავლის მიზნით

დინამიკური სასაზღვრო პირობა აიღება იმ მოსაზრებიდან რომ წნევა თავისუფალ ზედაპირზე p_a ატმოსფერული წნევის ტოლია.

კინემატიკური სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} (\vec{V} grad)h + w &= 0 & : z = -h \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta + (\vec{V} grad)\eta - w &= 0 & : z = \eta \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

დინამიკური სასაზღვრო პირობები

$$p = p_a, \quad z = \eta \quad (2.1.12)$$

საბოლოოდ, აღნიშვნების გათვალისწინებით ეილერის განტოლებათა სისტემა იდეალური არაკუმშვადი სითხის მოძრაობისათვის გამწვანებული არადივერგენტული ფორმით სასაზღვრო პირობების ჩათვლით იქნება შემდეგი:

მოძრაობის რაოდენობის განტოლება

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{1}{\rho} f_u &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p + \frac{1}{\rho} f_v &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} w + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} p + \frac{1}{\rho} f_w &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

უწყვეტობის განტოლება

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{\partial}{\partial z} w = 0 \quad (2.1.14)$$

მდგომარეობის განტოლება

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p + \operatorname{div} (\vec{V} \operatorname{grad}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} f_u + \frac{\partial}{\partial y} f_v + \frac{\partial}{\partial z} f_w \right) \quad (2.1.15)$$

სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) h + w &= 0 \quad : z = -h \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta - w &= 0 \quad : z = \eta \\ p &= p_a \quad : z = \eta \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

შევნიშნოთ, რომ მდგომარეობის განტოლების მეორე წევრის სრულ გარდაქმნას ამ ნაწილში არ განვიხილავთ.

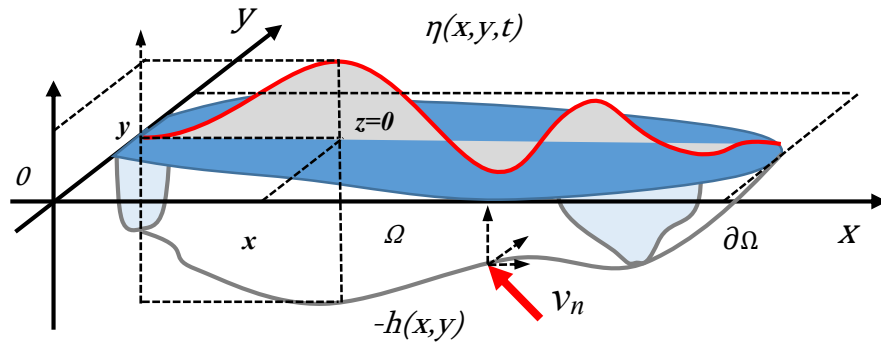
2.2. მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორია, სამგანზომილებიანი (3D) პოტენციური მოძრაობა, კოში-პუასონის სასაზღვრო ამოცანა

საინჟინრო ტალღური ამოცანების განხილვისას მიმართავენ მიახლოებით თეორიებს, რომლებიც ეფუძნება გარკვეულ დაშვებებს და საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ განტოლებათა სისტემა. პრაქტიკული

გამოყენების მიზნით საკმაოდ ფართო წრის ამოცანების გადაჭრისათვის სასვებით მისაღებია დავუშვათ, რომ

$$\text{rot } \vec{V} = 0 \quad (2.2.1)$$

ანუ მოძრაობა არის არაგრიგალური [21, 31, 32].



(ნახ.2.2.1) საანგარიშო სქემა შემოსაზღვრულ არეზე ტალღური სამგანზომილებიანი (3D) ამოცანის შესწავლის მიზნით

ასეთი მოძრაობის დახასიათება შეიძლება $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ სიჩქარის პოტენციალის შემოღებით და გვაქვს შემდეგი ტოლობები

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \text{grad } \varphi \\ u &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi, \quad v = \frac{\partial}{\partial y} \varphi, \quad w = \frac{\partial}{\partial z} \varphi \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

მოცემული დაშვების გათვალისწინებით ეილერის განტოლებათა სისტემის (2.1.13)(2.1.8),(2.1.11)-დან მივიღებთ კოში-პუასონის ამოცანას, რომელიც აღიწერება შემდეგი განტოლებებით:

ლაპლასის განტოლება (უწყვეტობის განტოლება)

$$\nabla^2 \varphi = \text{div grad } \varphi = 0 \quad (2.2.3)$$

ბერნულის ან კოში/ლაგრანჟის განტოლება (მოძრაობის განტოლება)

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 + \frac{1}{\rho} p + gz = 0 \quad (2.2.4)$$

კინემატიკური სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} ((\text{grad } \varphi) \text{ grad})h + \frac{\partial}{\partial z} \varphi &= 0 & : z = -h \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta + ((\text{grad } \varphi) \text{ grad})\eta - \frac{\partial}{\partial z} \varphi &= 0 & : z = \eta \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

განვსაზღვროთ დამატებითი სასაზღვრო პირობები რომელთაც ადგილი აქვს სითხის გარემომცველ არის საზღვრებზე. ამისთვის ავიღოთ შემოსაზღვრული არე (ნახ.2.2.1). განსახილველ არეზე გვაქვს რამდენიმე ტიპის საზღვარი: მყარი (ფსკერი, ფერდები), სველი (ნაკადის შემოდინება/გადინების კვეთი) და თავისუფალი (ნაკადის ჰაერთან შემხები) ზედაპირი. კინემატიკურ პირობებს (2.2.5) შემოსაზღვრული Ω არეზე $m\Omega$ საზღვრით შესაძლებელია დავამატოთ ეგრედწოდებული მეორე გვარის სასაზღვრო პირობები მყარ და სველ (თუ განსაზღვრულია სიჩქარის წყარო) საზღვრებზე:

ნეიმანის (მეორე გვარის) სასაზღვრო პირობა

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \varphi &= v_n; z < 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} &= \cos \alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

სადაც

n არის მყარი (სველი) საზღვრის ნორმალის მიმართულებით არის შიგნით

v_n სიჩქარის წყარო საზღვარზე ნორმალის გასწვრივ

$$v_n = v_n(x, y, z, t)$$

$v_n = 0$ ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს არეკვლას

$\cos \alpha_x$
 $\cos \alpha_y$
 $\cos \alpha_z$ n ერთეული ვექტორის პროექცია შესაბამისად OX, OY, OZ ღერძებზე

რაც შეეხება თავისუფალი ზედაპირის დინამიკურ პირობას, მისი გამოყვანისათვის ავიღოთ კოში-ლაგრანჟის განტოლება როდესაც $z = \eta$. მივიღებთ:

დინამიკური სასაზღვრო პირობა

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 + \frac{1}{\rho} p|_{z=\eta} + g\eta = 0 : z = \eta \quad (2.2.7)$$

ამრიგად სიჩქარის პოტენციალის არსებობის შემთხვევაში, ტალღური ამოცანა დაიყვანება φ -ს გამოთვლამდე და შემდეგ მისი გამოყენებით ხდება

ნაკადის ყველა ჰიდროდინამიკური პარამეტრის გამოთვლა. მიღებული არაწრფივი პოტენციური მოძრაობის განტოლებათა სისტემას გაშლილი ფორმით აქვს შემდეგი სახე:

უწყვეტობის განტოლება

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2.8)$$

მყარი საზღვრის სასაზღვრო პირობები

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{z=-h} = v_n; z = -h \quad (2.2.9)$$

თავისუფალი ზედაპირის სასაზღვრო პირობები

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + g\eta + \left. \frac{p}{\rho} \right|_{z=\eta} &= 0 \quad : z = \eta \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

უნდა აღინიშნოს რომ უკანასკნელი ორი (2.2.10) განტოლება განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ტალღური თეორიებისათვის, ვინაიდან გვაქვს სამი $\varphi, \eta, p(\eta)$ უცნობი და მისი ამოხსნა დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან. ამიტომ გამოიყენება არაწრფივი თეორიის მაგივრად მისი გამარტივებული მოდიფიკაცია [4, 45, 46].

მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის თანახმად თუ წარმოქმნილი ტალღების შესაბამისი ამპლიტუდა $\eta = \eta(x, y, z, t)$ რიცხობრივად მცირეა სხვა შესაბამის მახასიათებლებთან, მაგ. ტალღის სიგრძესთან ან საშუალო სიღრმესთან h_0 , მაშინ η -ს წარმოებულები და მათი ნამრავლები წარმოადგენს ასევე მეორე რიგის მცირე სიდიდეებს რომელთა უგულვებელყოფა განტოლებებში შესაძლებელია [4, 43, 46, 64, 65].

ზემოთ აღნიშნული დაშვებიდან გამომდინარეობს კიდევ ერთი, რომ (2.2.5), (2.2.7) კინემატიკური და დინამიკური პირობები თავისუფალ ზედაპირზე შეგვიძლია განვიხილოთ $z = 0$ სიბრტყეზე ნაცვლად $z = \eta$. გარდა ამისა წნევის გავლენა მოძრაობის განტოლებაზე ნულოვანია, ამიტომ მივიღებთ გამარტივებულ სასაზღვრო პირობებს.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \eta - \frac{\partial}{\partial z} \varphi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi + g\eta &= 0 \end{aligned} \quad : z = 0 \quad (2.2.11)$$

თუ გავაწარმოებთ t -თი მეორე განტოლებას და ჩავსვამთ პირველში, გვექნება:

კოში-პუასონის თავისუფალი ზედაპირის პირობა

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \varphi = 0 \quad : z = 0 \quad (2.2.12)$$

თუ ზემოთ მიღებულ განტოლებებს დავამატებთ საწყის პირობებს მომენტისათვის $t = 0$, გვექნება იდეალური სითხის პოტენციური მოძრაობის სასაზღვრო ამოცანა შემოსაზღვრულ არეზე, მეორე სახის სასაზღვრო პირობებით მყარ საზღვარზე, რომელიც საბოლოო გაშლილი ფორმით შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

უწყვეტობის განტოლება

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z, t) = 0 \quad (2.2.13)$$

კინემატიკური სასაზღვრო პირობა

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi(x, y, z, t) \Big|_{z=-h} = v_n(x, y, z, t) \quad (2.2.14)$$

თავისუფალი ზედაპირის პირობა

$$-\frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, y, z, t) \Big|_{z=0} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, y, z, t) \Big|_{z=0} \quad (2.2.15)$$

საწყისი პირობები

$$\varphi(x, y, z, t) \Big|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z) \quad (2.2.16)$$

φ ფუნქციის საშუალებით შესაძლებელია განისაზღვროს სიჩქარეები, ამპლიტუდა თავისუფალ ზედაპირზე, ჰიდროტექნიკური წნევები და მათი განაწილება როგორც წყალსატევის ნებისმიერ ვერტიკალურ განაკვეთში, ისე სითხის წყალშეუღწევად გარემომცველ ზედაპირებსა და ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე. შესაბამისად გვექნება განტოლებები:

ამპლიტუდა

$$\eta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) \Big|_{z=0} \quad (2.2.17)$$

სიჩქარეები

$$u = \frac{\partial}{\partial x} \varphi, \quad v = \frac{\partial}{\partial y} \varphi, \quad w = \frac{\partial}{\partial z} \varphi \quad (2.2.18)$$

ჰიდროდინამიკური წნევა

$$\frac{1}{\rho} p(x, y, z, t) = -gz - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) \quad (2.2.19)$$

მთელი რიგი მეცნიერების აზრით მცირეამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის გამოყენება, მიუხედავად ზემოთ აღნიშნული დაშვებებისა, შესაძლებლობას იძლევა გადაწყვეტილი იქნას საინჟინრო ამოცანების ფართო არეალი.

ცნობილი ფრანგი მკვლევარი ლე-მეოტე თავის მონოგრაფიაში აღნიშნავს რომ მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის „განსაკუთრებული ნაყოფიერება დადასტურებული იყო იმ შემთხვევებისათვისაც კი, როდესაც ტალღები მნიშვნელოვანი სიმაღლით ხასიათდებოდა“ [46].

იგივე თვალსაზრისით ლ.ი.სრეტენსკი თავის მონოგრაფიაში აღნიშნავს, რომ „მცირე ფარდობითი ამპლიტუდის თეორია, მიუხედავად თავისი ძირითად დებულებათა თითქოსდა უზუსტობისა, თამაშობს მთავარ როლს იმ საკითხების ანალიზისათვის და გადაწყვეტაში, რომლებიც დაკავშირებულია ტალღურ მოძრაობასთან. ამ აზრის სამართლიანობის ერთ-ერთ ძირითად საფუძველს წარმოადგენს ის, რომ მცირე ამპლიტუდის თეორია მნიშვნელოვან დადასტურებას პოულობს მრავალრიცხოვან ცდების შედეგებში“ [64].

2.3. მარჩხი წყლის თეორია, ორგანზომილებიანი (2D) დაუმყარებელი ნაკადის მოძრაობა, სენ-ვენანის განტოლებათა სისტემა

ავიღოთ ეილერის განტოლებათა სისტემა იდეალური არაკუმშვადი სითხისათვის (2.1.13)-(2.1.16). დავუშვათ, რომ ვერტიკალური სიჩქარეები ჰორიზონტალურ სიჩქარეებთან მიმართებაში საკმარისად მცირეა $w \ll u, v$ და ჰორიზონტალური სიჩქარეები პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული ვერტიკალურ კოორდინატზე $u = u(x, y, t), v = v(x, y, t)$. დამატებით თუ ჩავთვლით რომ \vec{F} ვექტორის ვერტიკალური მდგენელია მხოლოდ სიმძიმის ძალის ტოლქმედი $f_w = -\rho g$, ხოლო ჰორიზონტალური მდგენელებია მხოლოდ ხახუნის ძალები, რომლებიც ასევე არაა დამოკიდებული ვერტიკალურ კოორდინატზე, მაშინ ნაკადის მოძრაობა შესაძლებელია განვიხილოთ XoY სიბრტყეზე [4, 44, 65].

მოცემული დაშვების სხვაგვარი ფორმულირებაა ვერტიკალური აჩქარების საკმარისი სიმცირე, ჰორიზონტალურსა და ჰიდროსტატიკური წნევის განაწილებასთან მიმართებაში, იმდენად რომ მისი მოქმედება ჰიდროდინამიკურ წნევებზე უმნიშვნელოა. ანუ წნევის განაწილება სიბრტყეზე ემორჩილება ჰიდროსტატიკურ კანონს:

$$p = p_a + \rho g(\eta - z) = p_a + \begin{cases} 0 & : z = \eta \\ \rho g \eta & : z = 0 \\ \rho g(\eta + h) & : z = -h \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\text{grad } p = \text{grad } p_a + \rho g \text{ grad } \eta + \vec{F}_g \quad (2.3.2)$$

გავითვალისწინოთ ზემოთ მოყვანილი დაშვებები (2.1.13)-ის პირველ და მეორე განტოლებაში, გვექნება:

მარჩხი წყლის განტოლებათა სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p_a + g \frac{\partial}{\partial x} \eta + \frac{1}{\rho} f_u &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} p_a + g \frac{\partial}{\partial y} \eta + \frac{1}{\rho} f_v &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \eta + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) (\eta + h) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

სადაც

$$f_u = \rho \frac{g}{C^2} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\eta + h} \cdot u$$

$$f_v = \rho \frac{g}{C^2} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{\eta + h} \cdot v$$
(2.3.4)

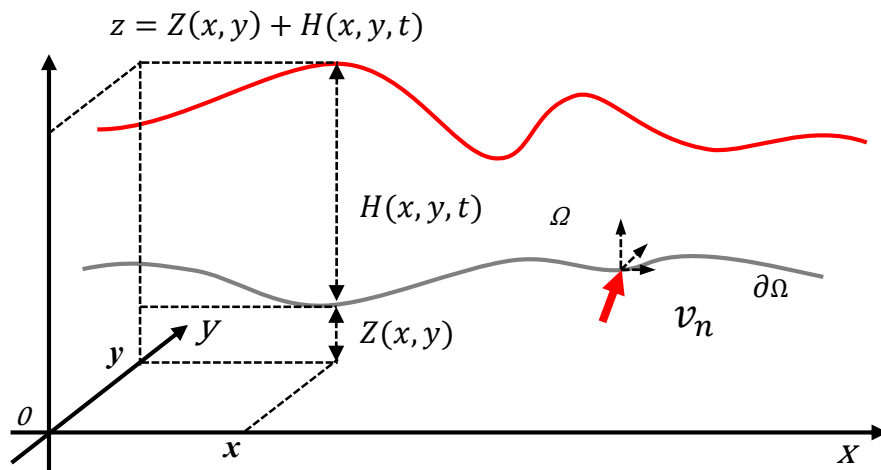
შევნიშნოთ, რომ მესამე განტოლება მიიღება უწყვეტობის განტოლების ინტეგრირებით და კინემატიკური სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით. წინააღმდეგობის ძალა გამოითვლება სენ-ვენანის ემპირიული ფორმულებით, სადაც C არის შეზის კოეფიციენტი. ხშირად პრაქტიკაში გამოიყენება n მანინგის ან k_s სტრიკლერის კოეფიციენტი, რომელიც ახასიათებს კალაპოტის ხორკლიანობას და ადგილი აქვს დამოკიდებულებას:

$$C = k_s \sqrt[n]{R} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{R}$$

$$k_s = \frac{C}{\sqrt[n]{R}} = \frac{1}{n}$$

$$n = \frac{1}{C} \sqrt[n]{R} = \frac{1}{k_s}$$
(2.3.5)

სადაც R არის ჰიდრაულიკური რადიუსი [4, 44, 46].



(ნახ.2.3.1) საანგარიშო სქემა მარჩხი წყლის ტალღური ამოცანის შესწავლის მიზნით

დავუშვათ ატმოსფერული წნევა მუდმივია $p_a = const; grad p_a = 0$. ავიღოთ გარკვეული $Z_{min} \leq \max(h)$ მინიმალური ნიშნული და აღვნიშნოთ

$Z = Z_{min} - h$; $grad Z = -grad h$ ფსკერის და $H = \eta + h$ ნაკადის სიღრმის ფუნქციები და განვიხილოთ საანგარიშო სქემა (ნახ.2.3.1).

დამატებით შემოვიღოთ $S_f = (S_{f,x}, S_{f,y}), S_g = (S_{g,x}, S_{g,y})$ შესაბამისად თავისუფალი ზედაპირისა და ფსკერის მხები სიბრტყის ქანობის ვექტორები. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ სენ-ვენანის ორგანზომილებიანი (2D) განტოლებათა სისტემის ერთერთ ფორმას:

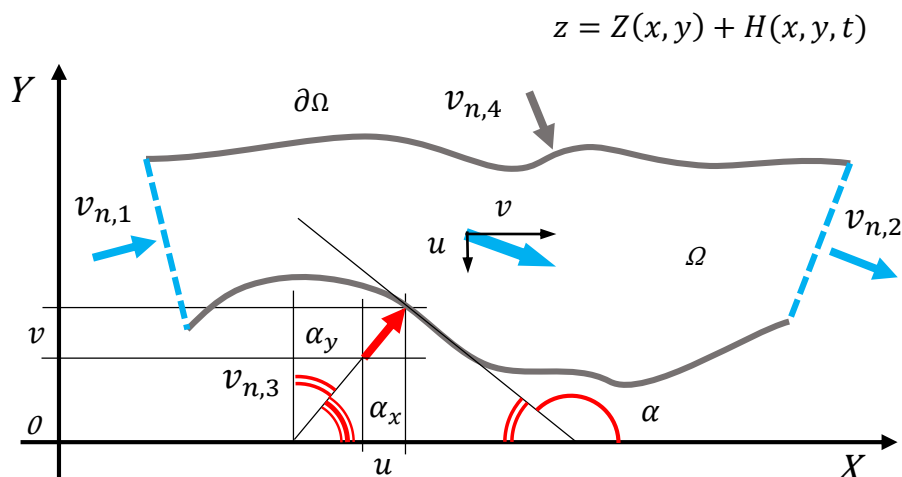
მარჩხი წყლის ორგანზომილებიანი (2D) განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} + gH \right) + v \frac{\partial}{\partial y} u + g(S_{f,x} - S_{g,x}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} + gH \right) + g(S_{f,y} - S_{g,y}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} H + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) + \frac{\partial}{\partial y} (Hv) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

სადაც

$$\begin{aligned} S_f &= \begin{pmatrix} S_{f,x} \\ S_{f,y} \end{pmatrix} = \frac{n^2}{\sqrt[3]{R}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{H} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ S_g &= \begin{pmatrix} S_{g,x} \\ S_{g,y} \end{pmatrix} = -grad(Z) \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

არსებობს მიღებული განტოლებათა სისტემის დივერგენტული ფორმა, მაგრამ ჩვენს განსახილველ ამოცანაში არ შევხვებით.



(ნახ.2.3.2) საანგარიშო სქემა მარჩხი წყლის სასაზღვრო ამოცანის შესწავლის მიზნით

სასაზღვრო ამოცანის სრულყოფისათვის განვსაზღვროთ *სასაზღვრო პირობები* რომელთაც ადგილი აქვს სითხის გარემომცველ არის საზღვრებზე. ამისთვის ავიღოთ შემოსაზღვრული არე (ნახ.2.3.2). განსახილველ არეზე გვაქვს რამდენიმე ტიპის საზღვარი: მყარი (ფერდები), სველი (ნაკადის შემოდინება/გადინების კვეთი). განტოლებათა სისტემას შესაძლებელია დავამატოთ სასაზღვრო პირობები მყარ და სველ (თუ განსაზღვრულია სიჩქარის წყარო) საზღვრებზე:

სასაზღვრო პირობები სველ საზღვარზე

$$\begin{aligned} v_n &= v_0(x, y, t) \\ H &= H_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

სასაზღვრო პირობები მყარ საზღვარზე

$$v_n = 0 \quad (2.3.9)$$

სადაც

n არის მყარი (სველი) საზღვრის ნორმალის მიმართულებით არის შიგნით

სიჩქარის წყაროს სიდიდე საზღვარზე ნორმალის გასწვრივ

$$v_n \quad v_n = v_n(x, y, z, t) = u \cdot \cos \alpha_x + v \cdot \cos \alpha_y$$

$v_n = 0$ ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს არეკვლას

$\cos \alpha_x$
 $\cos \alpha_y$ n ერთეული ვექტორის პროექცია შესაბამისად OX , OY ღერძებზე

უნდა აღინიშნოს, რომ

$$v_n = \mp u \sin \alpha \pm v \cos \alpha \quad (2.3.10)$$

სადაც

α არის საზღვრის მხების OX ღერძთან გადაკვეთის კუთხე;

$\alpha = 0, \pi$ მხები პარალელურია OX -ის და $v_n = \pm v$, ჰორიზონტალური სიჩქარე არ განისაზღვრება;

$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ მხები პარალელურია OY -ის და $v_n = \pm u$, ვერტიკალური სიჩქარე არ განისაზღვრება;

\pm აიღება ნორმალის პროექციის მიმართულების მიხედვით OX და OY ღერძების შესაბამისად.

მიჩნეულია, რომ მიღებული სისტემის გამოყენება მიზანშეწონილია როდესაც $B_{min} > 5H_{max}$, ანუ B_{min} ნაკადის სველი ზედაპირის მინიმალური სიგანე ხუთჯერ მაინც აღემატება H_{max} ნაკადის მაქსიმალურ სიღრმეს, სხვა შემთხვევაში უმჯობესია ერთგანზომილებიანი (1D) ამოცანა [44, 46, 47].

ანუ მიღებული განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია გამოვიყენოთ სამთო განიერ წყალსაცავებსა და მდინარის დატბორილ ხეობებში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების რიცხვითი მოდელირებისათვის, რაც შეეხება ვიწრო წყალსაცავებსა და მდინარეებს უფრო ხშირად პრაქტიკაში გამოიყენება ერთგანზომილებიანი ფორმა.

2.4. ტალღური ამოცანები არაგანზომილებიანი სახით

ტალღური მოძრაობის ჰიდროდინამიკურ ამოცანათა ამოხსნისათვის სასურველია მოხდეს განტოლებათა არაგანზომილებიანი სახით წარმოდგენა. არაგანზომილებიანი სახით ჩაწერის აუცილებლობა შემდეგი მიზეზებითაა გამოწვეული:

- არაგანზომილებიან არეზე გადაყვანილი ამოცანის დისკრეტიზაცია გამოთვლით ბადეზე ხდება სივრცითი და დროის ბიჯით, რომელთა მნიშვნელობები მოთავსებულია შუალედში (0,1). რაც იმას ნიშნავს რომ ამოცანის აპროქსიმაციით მიღებული სხვაობა გამოთვლებისა და ხარისხში აყვანის დროს მცირდება, ასევე მცირდება გამოთვლების დროს დაგროვილი მანქანური დამრგვალების ცდომილების გავლენა.
- შესაძლებლობას იძლევა საინჟინრო მიზნებისათვის განისაზღვროს ერთნაირი არაგანზომილებიანი მახასიათებლების მქონე ამოცანების ერთობლიობა და განზოგადდეს ამოცანის ამონახსნის გამოყენების არე ცხრილების ან გრაფიკების სახით. მარტივი გარდაქმნებით საძიებო ამოცანის საწყისი პარამეტრების არაგანზომილებიანში გადაყვანით შესაძლებელია მოიძებნოს

ჩვენთვის საჭირო პარამეტრი და გადავიდეს განზომილებაში შემდგომი გამოყენებისათვის.

- ექსპერიმენტალური ფიზიკური მოდელების პარამეტრების არაგანზომილებიან ფორმაში გადაყვანა და შედარება არაგანზომილებიან მათემატიკურ მოდელთან საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ და განვაზოგადოდ ექსპერიმენტული მოდელით განსაზღვრულ ამოცანათა გამოყენების არე.

არაგანზომილებიან პარამეტრებზე გადასვლის კოეფიციენტები ავიღოთ შემდეგნაირად:

$$M = h_0, \quad S = \sqrt{\frac{M}{g}}, \quad \frac{M}{S} = \sqrt{Mg}, \quad \frac{M^2}{S} = M\sqrt{Mg} \quad (2.4.1)$$

სადაც

M	მეტრი - სივრცითი შესაბამისობა;
S	წამი - დროის შესაბამისობა;
$\frac{M}{S}$	მ/წმ - სიჩქარის შესაბამისობა;
g	თავისუფალი ვარდნის აჩქარება;
h_0	მახასიათებელი სიღრმე.

მახასიათებელი სიღრმის h_0 შერჩევას განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა იმ გაგებით, რომ არაგანზომილებიან პარამეტრებში გადაყვანილი, გამოსათვლელი სიღრმეები და ამპლიტუდები არ აღემატებოდეს 1-ს, კომპიუტერული გამოთვლების შედეგად დაგროვილი ცდომილებების მინიმიზაციის მიზნით.

3. სამთო ვიწრო წყალსაცავში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების მათემატიკური მოდელირება მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის ორი და სამ განზომილებიანი (2D, 3D) განტოლების რიცხვითი ამონახსენის გამოყენებით

3.1. ნაკადის პოტენციური მოძრაობის ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანა; არაგანზომილებიანი სახე მართკუთხედისა და ტრაპეციის ფორმის არეზე

გარკვეულ შემთხვევებში საკმარისია განვიხილოთ ორგანზომილებიანი (2D) ამოცანა მხოლოდ ვერტიკალურ X და Z სიბრტყეში. ასეთი დაშვებით განტოლებები (2.2.13)-(2.2.15) კიდევ უფრო გამარტივდება და მიიღებს შემდეგ სახეს:

უწყვეტობის განტოლება

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, z, t) = 0 \quad (3.1.1)$$

კინემატიკური სასაზღვრო პირობა

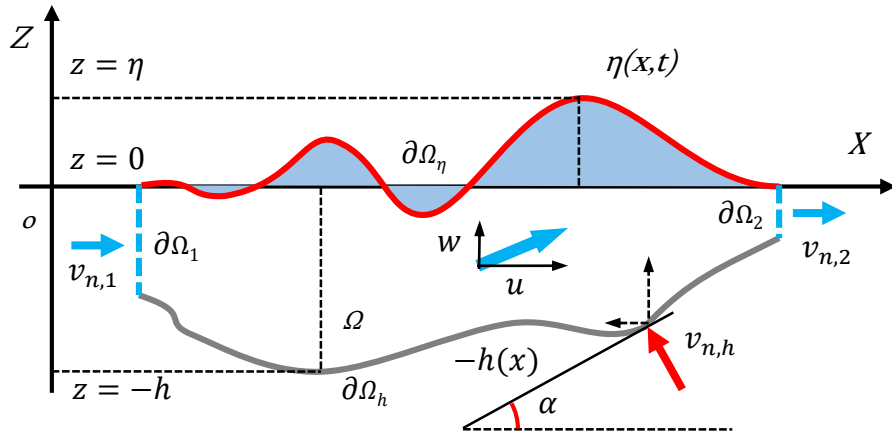
$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi(x, z, t) \Big|_{z=-h} = v_n(x, z, t) \quad (3.1.2)$$

თავისუფალი ზედაპირის პირობა

$$-\frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, z, t) \Big|_{z=0} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, z, t) \Big|_{z=0} \quad (3.1.3)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია გამოვიყენოთ საკმარისად ღრმა, ვიწრო ან განიერი, ერთგვაროვანი სიგანის სამთო წყალსაცავებში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების რიცხვითი მოდელირებისათვის.

განვიხილოთ შემოსაზღვრული Ω არე OXZ ვერტიკალურ სიბრტყეზე (ნახ.3.1.1) საზღვრით $\partial\Omega = \partial\Omega_1 + \partial\Omega_h + \partial\Omega_2 + \partial\Omega_\eta$, რომელიც შეესაბამება შედინების (სველი), ფსკერის (მყარი), გადინების (სველი) და თავისუფალი ზედაპირის წირებს.



(ნახ.3.1.1) საანგარიშო სქემა შემოსაზღვრულ არეზე ტალღური ორგანოზომილებიანი (2D) პოტენციური ამოცანის შესწავლის მიზნით

სასაზღვრო პირობის წარმოდგენა $\partial\Omega_h$ საზღვარზე შესაძლებელია მისი საზღვრის მხების oX ღერძთან გადაკვეთის α კუთხის საშუალებით.

$$\mp \frac{\partial\varphi}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \alpha = v_n \quad (3.1.4)$$

სადაც

- α არის საზღვრის მხების oX ღერძთან გადაკვეთის კუთხე;
- $\alpha = 0, \pi$ მხები პარალელურია oX -ის და $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_n$ და ჰორიზონტალური სიჩქარე არ განისაზღვრება;
- $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ მხები პრალელურია oZ -ის და $\pm \frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_n$ და ვერტიკალური სიჩქარე არ განისაზღვრება;
- \pm აიღება ნორმალის პროექციის მიმართულების მიხედვით oX ღერძის შესაბამისად;
- $v_n = 0$ ადგილი აქვს ტალღის არეკვლას საზღვარზე.

შევნიშნოთ, რომ როგორც ნახაზიდან ჩანს $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ სველი საზღვრები აიღება oZ ღერძის პარალელურად ამიტომ ადგილი აქვს გამარტივებულ სასაზღვრო პირობებს. კერძოდ $\partial\Omega_1$ საზღვარზე სიჩქარეს აქვს ნორმალის მიმართულება და ნორმალს oX ღერძის მიმართულება, ამიტომ

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, z, t) \Big|_{\partial\Omega_1} = v_{n,1}(z, t); \quad v_{n,1} \geq 0$$

და ვინაიდან $\partial\Omega_2$ საზღვარზე სიჩქარის მიმართულება არის ნორმალის მიმართულების საწინააღმდეგო და ნორმალი მიმართულია OX ღერძის საწინააღმდეგოდ, ამიტომ გადინების პირობა იქნება

$$-\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, z, t) \Big|_{\partial\Omega_2} = v_{n,2}(z, t); \quad v_{n,2} \leq 0$$

არაგანზომილებიან ფორმაზე გადასვლისათვის ვიგულისხმობთ რომ $h_0 = h_{max}$ და გამოვიყენოთ არაგანზომილებიანი პარამეტრები:

$$\begin{aligned} x^* &= x \frac{1}{M}, & z^* &= z \frac{1}{M}, & t^* &= t \frac{1}{S} \\ \varphi^* &= \varphi \frac{S}{M^2}, & u^* &= u \frac{S}{M}, & w^* &= w \frac{S}{M} \\ M &= h_0, & S &= \sqrt{\frac{M}{g}}, & \frac{M}{S} &= \sqrt{Mg} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

შესაბამისად განტოლებები (3.1.1)-(3.1.3) საწყისი პირობებისა და გამომავალი პარამეტრების გამოთვლის ფორმულების ჩათვლით მიიღებს შემდეგ სახეს:

უწყვეტობის განტოლება

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}} \right) \varphi^* = 0, \quad (x^*, z^*) \in \Omega^* \quad (3.1.6)$$

სასაზღვრო პირობა თავისუფალი ზედაპირზე

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \varphi^* = 0, \quad (x^*, z^*) \in \partial\Omega^*, z^* = 0 \quad (3.1.7)$$

სასაზღვრო პირობა მყარ (სველ) საზღვარზე

$$\mp \sin \alpha \frac{\partial \varphi^*}{\partial x^*} + \cos \alpha \frac{\partial \varphi^*}{\partial z^*} = v_n^*, \quad (x^*, z^*) \in \partial\Omega^*, z^* < 0 \quad (3.1.8)$$

საწყისი პირობა

$$\varphi^* |_{t^*=0, \Omega^* + \partial\Omega^*} = \varphi_0^*, \quad (x^*, z^*) \in \Omega^* + \partial\Omega^* \quad (3.1.9)$$

გამომავალი პარამეტრები

$$\eta^* = -\frac{\partial}{\partial t^*} \varphi^*, \quad z^* = 0 \quad (3.1.10)$$

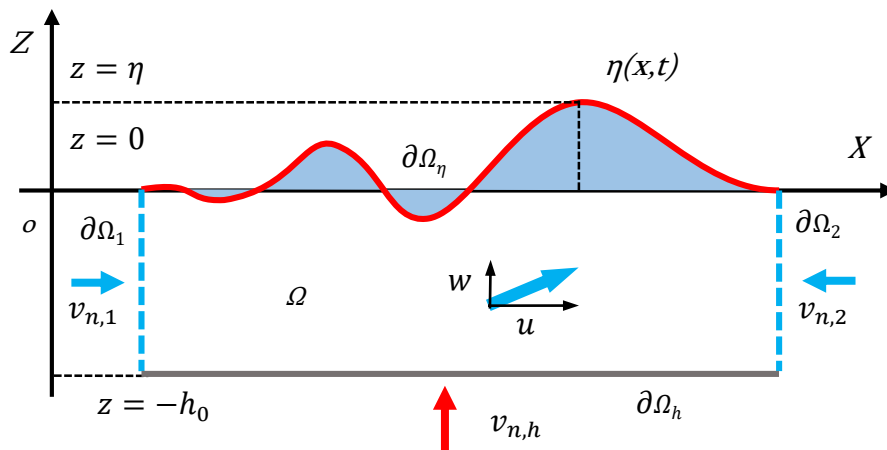
$$u^* = \frac{\partial}{\partial x^*} \varphi^*, \quad w^* = \frac{\partial}{\partial z^*} \varphi^* \quad (3.1.11)$$

$$\left(\frac{1}{\rho}p\right)^* = -z^* - \frac{\partial}{\partial t^*}\varphi^* \quad (3.1.12)$$

მიღებული შედეგების არაგანზომილებიანი პარამეტრებიდან განზომილებიანზე გადასვლისათვის (3.1.5)-ის ანალოგიურად, გვექნება შემდეგი ფორმულები:

$$\begin{aligned} x &= x^*M & z &= z^*M & t &= t^*S \\ u &= u^*\frac{M}{S} & w &= w^*\frac{M}{S} & \varphi &= \varphi^*\frac{M^2}{S} \\ \eta &= \eta^*M & \left(\frac{1}{\rho}p\right) &= \left(\frac{1}{\rho}p\right)^*\frac{M^2}{S^2} \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

სასაზღვრო ამოცანის განხილვისას ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი ფაქტორია კალაპოტის ფორმის აპროქსიმაცია. რიცხვით მოდელირებაში ორი ყველაზე მეტად გავრცელებული ფორმაა მართკუთხედი და ტრაპეცია (სამკუთხედი), რომელთა შესაბამისი ანალიზური ამოცანების ამონახსნებიც მთელ რიგ შემთხვევაში არსებობს და შესაძლებელია მათი შედარება რიცხვით ამონახსნთან.



(ნახ.3.1.2) საანგარიშო სქემა მართკუთხედის ფორმის შემოსაზღვრულ არეზე ტალღური ორგანზომილებიანი (2D) პოტენციური ამოცანის შესწავლის მიზნით

დავუშვათ $\Omega + \partial\Omega$ წარმოადგენს მართკუთხა არეს, ასევე მართკუთხა საზღვრით (ნახ.3.1.2). ეს ნიშნავს, რომ $h = h_0 = const$. განტოლებათა

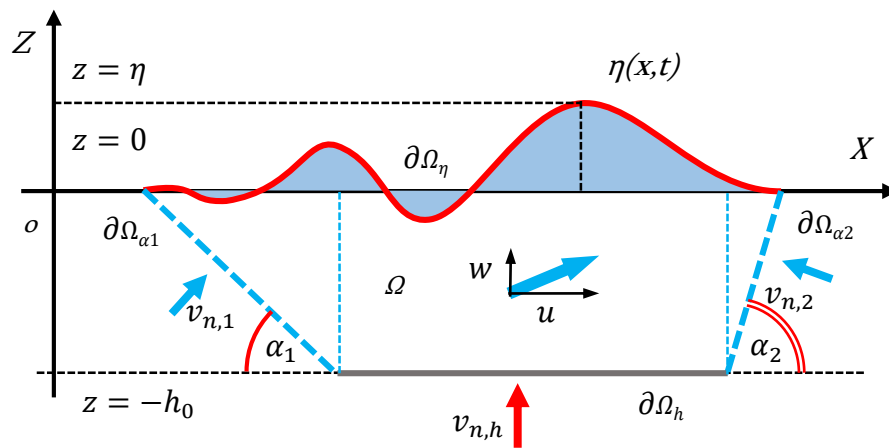
სისტემაში (3.1.6)-(3.1.9) იცვლება მხოლოდ სასაზღვრო პირობა მყარ საზღვარზე (3.1.8) და ექნება შემდეგი სახე:

სასაზღვრო პირობები მართკუთხა ფორმის მყარ საზღვარზე

$$\begin{aligned}
 +\frac{\partial}{\partial x}\varphi^* \Big|_{\partial\Omega_1^*} &= v_{n,1}^* \\
 -\frac{\partial}{\partial x}\varphi^* \Big|_{\partial\Omega_2^*} &= v_{n,2}^* \\
 \frac{\partial}{\partial z}\varphi^* \Big|_{\partial\Omega_h^*} &= v_{n,h}^*
 \end{aligned}
 \tag{3.1.14}$$

სადაც v_n ნორმალური სიჩქარეებია საზღვრიდან არეს შიგნით მიმართულებით.

მართკუთხედის ფორმის არეზე ამოცანის აპროქსიმაცია ხდება გრძივი ტალღური რყევების შესწავლის დროს, როდესაც ფსკერის დახრის კუთხე არ აღემატება $\pi/6$ -ს ან ფსკერის დახრის კუთხე აღემატება $\pi/3$ -ს.



(ნახ.3.1.3) საანგარიშო სქემა ტრაპეციის ფორმის შემოსაზღვრულ არეზე ტალღური ორგანოზომილებიანი (2D) პოტენციური ამოცანის შესწავლის მიზნით

დავუშვათ $\Omega + \partial\Omega$ წარმოადგენს ტრაპეციოდალურ არეს, შესაბამისი საზღვრით (ნახ.3.1.3). ეს ნიშნავს, რომ განტოლებათა სისტემაში (3.1.6)-(3.1.9) კვლავ იცვლება მხოლოდ სასაზღვრო პირობა მყარ საზღვარზე (3.1.8) და ექნება შემდეგი სახე:

სასაზღვრო პირობები ტრაპეციის ფორმის მყარ საზღვარზე

$$\begin{aligned}
\left(+\sin \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_1^*} &= v_{n,1}^* \\
\left(-\sin \alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos \alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_2^*} &= v_{n,2}^* \\
+\frac{\partial}{\partial z} \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_h^*} &= v_{n,h}^* \\
0 < \alpha_1, \alpha_2 &\leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{3.1.15}$$

ახ

$$\begin{aligned}
\left(+\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{ctg} \alpha_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_1^*} &= \frac{1}{\sin \alpha_1} v_{n,1}^* \\
\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{ctg} \alpha_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_2^*} &= \frac{1}{\sin \alpha_2} v_{n,2}^* \\
+\frac{\partial}{\partial z} \varphi^* \Big|_{\partial \Omega_h^*} &= v_{n,h}^* \\
0 < \alpha_1, \alpha_2 &\leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\tag{3.1.16}$$

ტრაპეციის ფორმის არეზე ამოცანის აპროქსიმაცია ხდება განივი ტალღური რყევების შესწავლის დროს, როდესაც ფსკერის დახრის კუთხეა არანაკლებ $\pi/6$ -ისა, ან ფსკერის დახრის კუთხე არ აღემატება $\pi/3$ -ს.

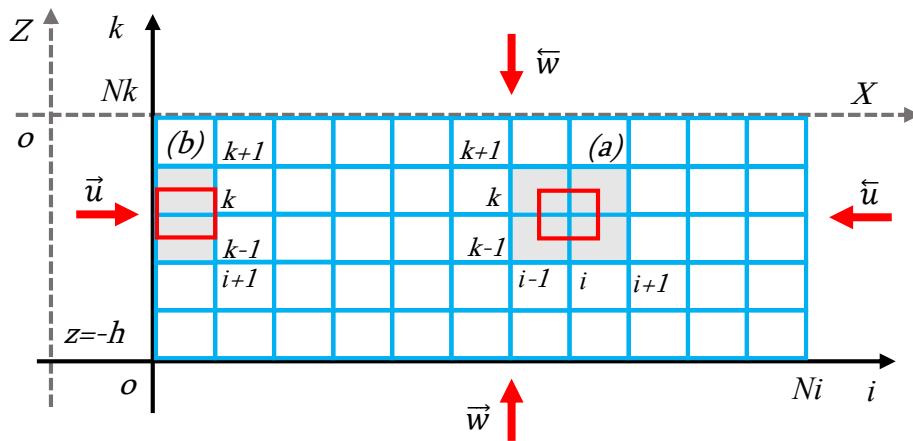
რიცხვითი ამონახსენის უპირატესობა კალაპოტის შეძლებისდაგვარად ზუსტი აპროქსიმაცია, მაგრამ საკმარისად ზუსტი მიახლოება ართულებს ამოცანის ამოხსნას. ჩვენ განვიხილავთ მიდგომას რომლის თანახმადაც შესაძლებელია გამოთვლითი არის დაყოფა რამოდენიმე მარტივ მართკუთხედის, სამკუთხედის ან/და ტრაპეციის ფორმის ქვეარედ. თვითოეული ფორმისათვის განისაზღვრება რიცხვითი ბადე, არეების ბმის სასაზღვრო პირობები და შემდგომ მიიღება მათი ერთობლივი რიცხვითი ამონახსენი, რაც გაცილებით ამარტივებს გამოთვლის პროცესს.

ქვემოთ განხილულ რიცხვით მათემატიკურ მოდელში ამონახსენი და ყველა პარამეტრი განიხილება არაგანზომილებიანი სახით და აღნიშვნების გამარტივების მიზნით *-ვარსკვლავით აღარ მოინიშნება.

3.2. ნაკადის პოტენციური მოძრაობის ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი მოდელირება მართკუთხედის ფორმის არეზე

ავიღოთ $\Omega + \partial\Omega$ მართკუთხა არე შესაბამისი საზღვრით და მოვახდინოთ ამ არის დისკრეტიზაცია (ნახ.3.1.2) დისკრეტიზაციის არგუმენტებით i, k, n :

$$\Omega_{i,k}^n + \partial\Omega_{i,k}^n = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, z_k), t_n: \\ 0 \leq i \leq N_i, 0 \leq k \leq N_k \\ 0 \leq n \end{array} \right\} \quad (3.2.1)$$



(ნახ.3.2.1) საანგარიშო სქემა შემოსაზღვრულ მართკუთხა რიცხვით ბადეზე ტალღური ორგანზომილებიანი (2D) ამოცანის შესწავლის მიზნით

განვსაზღვროთ დისკრეტიზაციის არგუმენტები და უწყვეტი ფუნქციების შესაბამისი დისკრეტული არგუმენტების მქონე ეგრეთწოდებული ბადური ფუნქციები

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^n &= f(x_i, z_k, t_n) \\ x_i &= x_{i-1} + \bar{\Delta}_{x,i}, & x_0 &= 0 \\ z_k &= z_{k-1} + \bar{\Delta}_{z,k}, & z_0 &= -h_0 \\ t_n &= t_{n-1} + \bar{\Delta}_{t,n}, & t_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

სადაც

$f_{i,j,k}^n$

არის დისკრეტულ არეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია;

$\bar{\Delta}_{x,i}; \bar{\Delta}_{z,i}; \bar{\Delta}_{t,i}$ შესაბამისად გრძივი, ვერტიკალური და დროის ბიჯი.

დისკრეტიზაციის თანახმად ზოგადობის შეუზღუდავად ადგილი აქვს

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{\xi,m} &= \xi_m - \xi_{m-1} \neq \bar{\Delta}_{\xi,m1}, m \neq m1 \\ \Delta_{\xi,m} &= \xi_{m+1} - \xi_m \neq \Delta_{\xi,m1}, m \neq m1 \\ \bar{\Delta}_{\xi,m} &\neq \Delta_{\xi,m}, \bar{\Delta}_{\xi,m+1} = \Delta_{\xi,m}, \bar{\Delta}_{\xi,m} = \Delta_{\xi,m-1} \\ \xi &= x, z, t \\ m, m1 &= m_\xi = i, k, n \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

სადაც $\bar{\Delta}, \Delta$ არის შესაბამისად მარცხენა (არგუმენტის ზრდის საწინააღმდეგოდ) და მარჯვენა (არგუმენტის ზრდის მიმართულებით) სხვაობა.

დავუშვათ რომ ბიჯი თვითოეული განზომილების ქრილში არის თანაბარი და შემოვიღოთ აღნიშვნები, რომელიც განსაზღვრის არგუმენტისა და ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა სხვაობას

$$\begin{aligned} \Delta_\xi &= \bar{\Delta}_{\xi,m} = \Delta_{\xi,m} = const, \\ \Delta_{f,\xi} &= f(\xi_m + \Delta_\xi) - f(\xi_m) = f_{m+1} - f_m \\ \bar{\Delta}_{f,\xi} &= f(\xi_m) - f(\xi_m - \Delta_\xi) = f_m - f_{m-1} \\ \xi &= x, z, t \\ m &= m_\xi = i, k, n \\ \xi_m &= \xi_0 + m\Delta_\xi \\ \xi_0 &= \begin{cases} 0, & \xi = x, t \\ -h_0 = -N_k * \Delta_\xi, & \xi = z \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

შემოვიღოთ დამატებითი აღნიშვნები

$$\begin{aligned} f_\xi &= \frac{\Delta_{f,\xi}}{\Delta_\xi} = \frac{1}{\Delta_\xi} (f_{m+1} - f_m), & f_{\bar{\xi}} &= \frac{\bar{\Delta}_{f,\xi}}{\Delta_\xi} = \frac{1}{\Delta_\xi} (f_m - f_{m-1}) \\ f_{\bar{\xi}\bar{\xi}} &= \frac{1}{\Delta_\xi^2} (f_{m+1} - 2f_m + f_{m-1}), & f_m &= f(\xi_m) \\ \ddot{f}_\xi &= \frac{1}{2} (f_\xi + f_{\bar{\xi}}) = \frac{1}{2\Delta_\xi} (f_{m+1} - f_{m-1}) \\ \xi &= x, z, t \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

შესაძლებელია ვაჩვენოთ რომ (3.2.5) ტოლობები არის ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის კერძო წარმოებულების ანალოგი თანაბარ ბადეზე [56, 57, 58].

გამოვიყვანოთ მეორე რიგის აპროქსიმაციის მქონე განტოლებათა სისტემა დისკრეტულ არეზე სასრული მოცულობების (სხვანაირად ინტეგრალური იგივეობის) მეთოდის გამოყენებით [59].

Ω არეზე გამოვიყვანოთ საკონტროლო მოცულობა (ნახ.3.2.1)(a)

$$x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}, \quad z_{k-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{k+\frac{1}{2}}$$

აღვნიშნოთ

$$D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi, \quad \xi = x, z \quad (3.2.6)$$

$$D_{\xi, m \pm \frac{1}{2}} = D_{m \pm \frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \varphi \right)_{m \pm \frac{1}{2}}, \quad \int_{\xi_{m-1}}^{\xi_{m+1}} d\xi = \int_{m-1}^{m+1} d\xi$$

ვანტეგროთ და გამოვიყენოთ აღნიშვნები

$$\int_m^{m+1} D_\xi d\xi = \int_m^{m+1} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi d\xi = \varphi_{m+1} - \varphi_m$$

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m = \int_m^{m+1} D_\xi d\xi \approx D_{m+\frac{1}{2}} \int_m^{m+1} d\xi = D_{m+\frac{1}{2}} \Delta_\xi$$

ანალოგიურად

$$\int_{m-1}^{m+1} D_\xi d\xi = \int_{m-1}^{m+1} \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi d\xi = \varphi_{m+1} - \varphi_{m-1}$$

$$\varphi_{m+1} - \varphi_{m-1} = \int_{m-1}^{m+1} D_\xi d\xi = \int_{m-1}^m D_\xi d\xi + \int_m^{m+1} D_\xi d\xi \approx$$

$$\approx D_{m-\frac{1}{2}} \Delta_\xi + D_{m+\frac{1}{2}} \Delta_\xi = D_m 2\Delta_\xi$$

საიდანაც

$$D_{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_\xi} (\varphi_{m+1} - \varphi_m), \quad D_{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_\xi} (\varphi_m - \varphi_{m-1})$$

$$D_{m+\frac{1}{2}} - D_{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_\xi} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}) \quad (3.2.7)$$

$$D_m = \frac{1}{2\Delta_\xi} (\varphi_{m+1} - \varphi_{m-1})$$

ვანტეგროთ (3.1.6) უწყვეტობის განტოლება საკონტროლო მოცულობაზე (ნახ.3.2.1)(a):

$$\begin{aligned} & \iint_{i-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \, dx dz = \\ & = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi \, dz \right) dx = 0 \end{aligned}$$

განვიხილოთ პირველი წევრი

$$\begin{aligned} & \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(D_{i+\frac{1}{2}} - D_{i-\frac{1}{2}} \right) dz = \\ & = \left(\frac{1}{\Delta_x} (\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}) \right)_k \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} dz = \\ & = \frac{\Delta_z}{\Delta_x} (\varphi_{i+1,k} - 2\varphi_{i,k} + \varphi_{i-1,k}) = (\Delta_x \Delta_z) \varphi_{\bar{x}x} \end{aligned}$$

ანალოგიურად მივიღებთ დანარჩენ წევრებს და საბოლოოდ გვექნება

$$(\Delta_x \Delta_z) (\varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{z}z}) = 0$$

ან

$$\varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{z}z} = 0 \quad (3.2.8)$$

ახლა განვიხილოთ (3.1.14) მყარი ზედაპირის სასაზღვრო პირობა არაგანზომილებიანი სახით, როცა $i = 0$ ($x = 0$). (3.2.7) აღნიშვნის მიხედვით

$$D_{i+1} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi \right)_{i+1}, D_{i=0} = \frac{\partial}{\partial x} \varphi \Big|_{i=0} = v_{n,1} = \vec{u} \quad (3.2.9)$$

ისევ ვაინტეგრირებთ (3.1.6) უწყვეტობის განტოლებას $\partial \Omega + \Omega$ არის საკონტროლო მოცულობაზე (ნახ.3.2.1)(b):

$$\begin{aligned} & \iint_{i=0, k-\frac{1}{2}}^{i+1, k+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \, dx dz = \\ & = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\int_{i=0}^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz + \int_{i=0}^{i+1} \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi \, dz \right) dx = 0 \end{aligned}$$

განვიხილოთ პირველი წევრი და გამოვიყენოთ (3.2.7),(3.2.9)

ფორმულები

$$\begin{aligned} & \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\int_{i=0}^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (D_{i+1} - D_{i=0}) dz = \\ & = \left(\frac{1}{2\Delta_x} (\varphi_{i+2} - \varphi_i) - \vec{u} \right)_k \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} dz = \Delta_z \left(\frac{1}{2\Delta_x} (\varphi_{i+2,k} - \varphi_{i,k}) - \vec{u} \right) = \\ & = \Delta_z (\varphi_{\dot{x},i+1,k} - \vec{u}) \end{aligned}$$

განვიხილოთ მეორე წევრი

$$\begin{aligned} & \int_{i=0}^{i+1} \left(\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi \, dz \right) dx = \int_{i=0}^{i+1} (D_{k+\frac{1}{2}} - D_{k-\frac{1}{2}}) dx = \Delta_z \int_{i=0}^{i+1} \varphi_{\bar{z}\bar{z}} \, dx = \\ & = \Delta_z \frac{1}{2} (\varphi_{\bar{z}\bar{z},i+1} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}}) \int_{i=0}^{i+1} dx = \Delta_x \Delta_z \frac{1}{2} (\varphi_{\bar{z}\bar{z},i+1} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}}) \end{aligned}$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \Delta_z (\varphi_{\dot{x},i+1,k} - \vec{u}) + \Delta_x \Delta_z \frac{1}{2} (\varphi_{\bar{z}\bar{z},i+1} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}}) = 0 \\ & (\Delta_x \Delta_z) \left(\frac{1}{\Delta_x} \varphi_{\dot{x},i+1} + \frac{1}{2} \varphi_{\bar{z}\bar{z},i+1} - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} \right) + (\Delta_x \Delta_z) \frac{1}{2} \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \end{aligned}$$

განტოლების (3.2.8) თანახმად

$$\varphi_{\bar{z}\bar{z},i+1} = -\varphi_{\bar{x}\bar{x},i+1}$$

ჩავსვათ წინა განტოლებაში

$$(\Delta_x \Delta_z) \left(\frac{1}{\Delta_x} \varphi_{\dot{x},i+1} - \frac{1}{2} \varphi_{\bar{x}\bar{x},i+1} - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} \right) + (\Delta_x \Delta_z) \frac{1}{2} (\varphi_{\bar{z}\bar{z}}) = 0$$

განვიხილოთ პირველი წევრის მეორე მამრავლი

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_x} \varphi_{\bar{x},i+1} - \frac{1}{2} \varphi_{\bar{x}x,i+1} - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} &= \\ &= \frac{1}{\Delta_x} \frac{1}{2} (\varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1}) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_x} (\varphi_{x,i+1} - \varphi_{\bar{x},i+1}) - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} = \\ &= \frac{1}{2\Delta_x} (\varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1} - \varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1}) - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} = \\ &= \frac{1}{\Delta_x} \varphi_{\bar{x},i+1} - \frac{1}{\Delta_x} \vec{u} = \frac{1}{\Delta_x} (\varphi_x - \vec{u}) \end{aligned}$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$(\Delta_x \Delta_z) \frac{1}{\Delta_x} (\varphi_x - \vec{u}) + (\Delta_x \Delta_z) \frac{1}{2} (\varphi_{\bar{z}z}) = 0$$

ან

$$\frac{2}{\Delta_x} (\varphi_x - \vec{u}) + \varphi_{\bar{z}z} = 0 \quad (3.2.10)$$

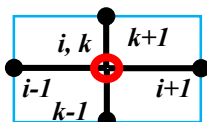
ანალოგიური ინტეგრირებით და გარდაქმნებით გამოვიყვანოთ (3.1.6)-
(3.1.12),(3.1.14) ამოცანის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებათა
სისტემის დისკრეტულ ანალოგს მეორე რიგის აპროქსიმაციით სივრცითი და
დროის ბიჯის მიმართ, ჩაწერილს სასრული სხვაობების გამოყენებით
მართკუთხედის ფორმის არისათვის.

3.3. ნაკადის პოტენციური მოძრაობის ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანა სასრულ სხვაობითი სახით მართკუთხედის ფორმის არეზე

პოტენციური მოძრაობის ტალღური ორგანზომილებიანი (2D)
ამოცანის აპროქსიმაცია *ინტეგრალურ იგივეობათა მეთოდის* გამოყენებით
დროის კონკრეტული ფენისათვის გვაძლევს სტაციონალურ განტოლებათა
სისტემას, მართკუთხა თანაბარი დისკრეტული არის შიდა და საზღვრის
სხვადასხვა წერტილების გამოთვლისათვის. მოცემულ ამონახსენს უნდა
დავამატოთ არასტაციონალური პირობა, დროის ახალ ფენაზე
გადასვლისათვის.

ქვემოთ მოყვანილია მართკუთხედის ფორმის რიცხვით არეზე განსაზღვრული ყველა განტოლება (ნახ.3.2.1). თვითოეულ ფორმულას შეესაბამება თითო საანგარიშო სქემა, რომელიც განტოლების მარცხნივაა მითითებული:

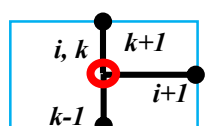
ძირითადი არის შიდა (რეგულარული) წერტილები



$$\varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

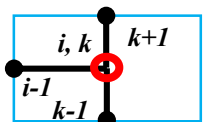
$$0 < i < N_i; \quad 0 < k < N_k \quad (3.3.1)$$

საზღვრის წირის წერტილები



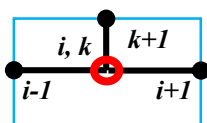
$$\frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

$$i = 0; \quad 0 < k < N_k \quad (3.3.2)$$



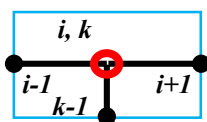
$$\frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_{\bar{x}} - \vec{u}) + \varphi_{\bar{z}\bar{z}} = 0$$

$$i = N_i; \quad 0 < k < N_k \quad (3.3.3)$$



$$\varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0$$

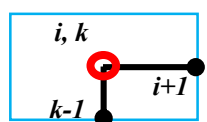
$$0 < i < N_i; \quad k = 0 \quad (3.3.4)$$



$$\varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \vec{w}) = 0$$

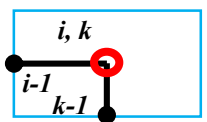
$$0 < i < N_i; \quad k = N_k \quad (3.3.5)$$

საზღვრის ორი წირის კვეთის წერტილები



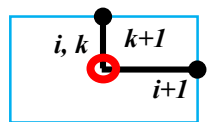
$$\frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \vec{w}) = 0$$

$$i = 0; \quad k = N_k \quad (3.3.6)$$



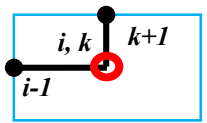
$$\frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_{\bar{x}} - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \vec{w}) = 0$$

$$i = N_i; \quad k = N_k \quad (3.3.7)$$



$$\frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0$$

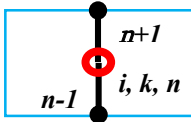
$$i = 0; \quad k = 0 \quad (3.3.8)$$



$$\frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_{\bar{x}} - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0$$

$$i = N_i; \quad k = 0 \quad (3.3.9)$$

თავისუფალი ზედაპირის არასტაციონალური პირობა



$$\bar{w} = \varphi_{\bar{t}t} \quad 0 \leq i \leq N_i; k = N_k; n > 0 \quad (3.3.10)$$

მოცემული პირობის შეტანა (3.3.5)-(3.3.7) ტოლობებში გვადლევს არასტაციონალურ პირობებს და გამოიყენება დროის ახალ ფენაზე გადასვლისათვის:

თავისუფალი ზედაპირის პირობები გაშლილი სახით

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}t} + \varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) &= 0; \quad 0 < i < N_i; k = N_k \\ -\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}t} + \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) &= 0; \quad i = 0; k = N_k \\ -\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}t} + \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_{\bar{x}} - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) &= 0; \quad i = N_i; k = N_k \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

მიღებული სქემა მდგრადია თუ აკმაყოფილებს მაქსიმუმის პრინციპს. რაც შეეხება მდგრადობის პირობების უფრო დაწვრილებით შესწავლას ჩვენ ამ ნაშრომში არ განვიხილავთ [61, 62].

შევნიშნოთ, რომ მიღებული განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია ამოიხსნას ფაქტორიზაციის მეთოდით, ხოლო (3.3.11) პირობები გვადლევს დროის ერთი ფენიდან მეორეზე ცხადი ალგორითმის გამოყენებით გადასვლის საშუალებას. ქვემოთ განვიხილავთ არაცხადი სქემით ამოხსნის განსხვავებულ მეთოდს [57, 63].

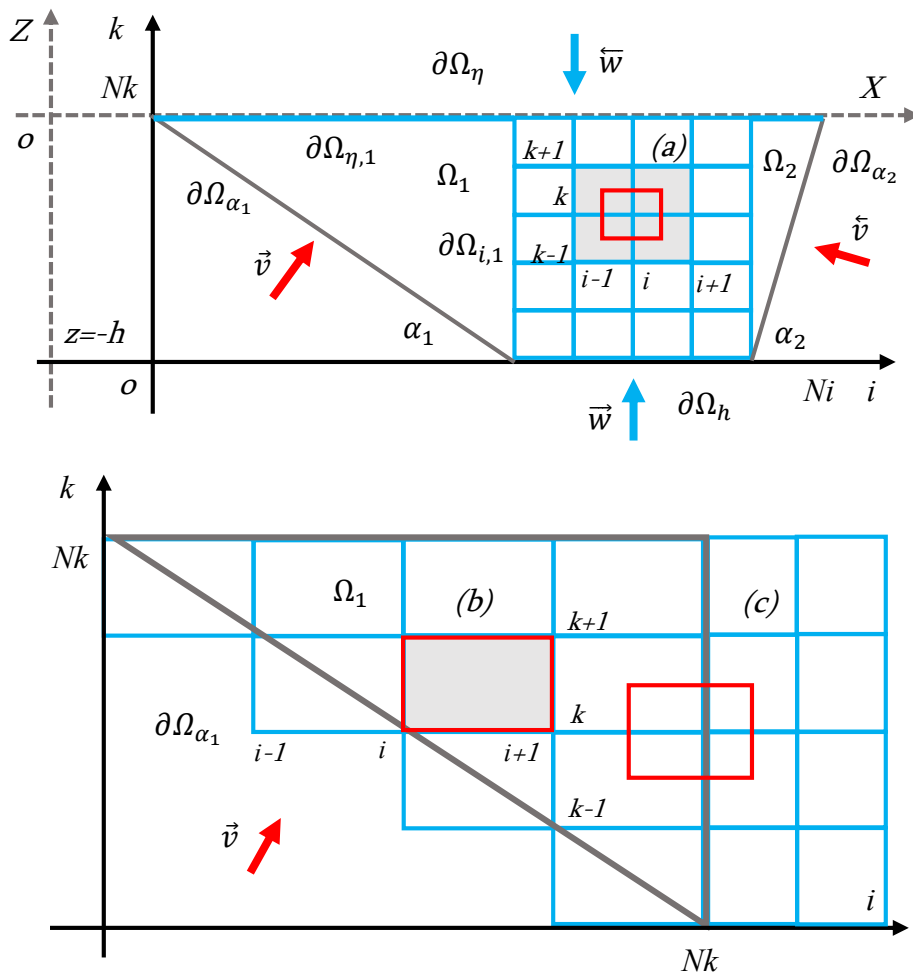
3.4. ნაკადის პოტენციური მოძრაობის ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამონახსენი ტრაპეციის ფორმის არის შემთხვევაში

ავიღოთ $\Omega + \partial\Omega$ ტრაპეციოდალური ფორმის არე შესაბამისი საზღვრით და მოვახდინოთ ამ არის დაყოფა Ω_0 მართკუთხედისა და Ω_1, Ω_2 მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის ქვეარეებად $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2$ საანგარიშო სქემის (ნახ.3.1.3) შესაბამისად. მიღებულ არეებს გააჩნიათ ეგრედწოდებული შიდა და გარე საზღვრები, რომელზეც უნდა განისაზღვროს სასაზღვრო (გარე საზღვრებზე) და ბმის (შიდა საზღვრებზე) პირობები. შიდა საზღვრები

წარმოადგენს Ω_0, Ω_1 და Ω_0, Ω_2 არეების კვეთის წერტილებს. აღვნიშნოთ $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2$ არის საზღვარები

$$\begin{aligned} \partial\Omega_1 &= \partial\Omega_{\alpha_1} + \partial\Omega_{\eta,1} + \partial\Omega_{i,1} \\ \partial\Omega_2 &= \partial\Omega_{\alpha_2} + \partial\Omega_{\eta,2} + \partial\Omega_{i,2} \\ \partial\Omega_0 &= \partial\Omega_h + \partial\Omega_\eta + \partial\Omega_{i,1} + \partial\Omega_{i,2} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

სადაც $\partial\Omega_{\alpha_1}, \partial\Omega_{\alpha_2}$ გარე საზღვრებია. ცხადია შიდა საზღვრები $\partial\Omega_{i,1}, \partial\Omega_{i,2}$ ეკუთვნის მართკუთხა Ω_0 არესაც.



(ნახ.3.4.1) საანგარიშო სქემა შემოსაზღვრულ ტრაპეციის ფორმის რიცხვით ბადეზე ტალღური ორგანზომილებიანი (2D) ამოცანის შესწავლის მიზნით

ავაგოთ რიცხვითი ბადე (ნახ.3.4.1) ნახაზის შესაბამისად. მოვახდინოთ Ω_0 არის დისკრეტიზაცია წინა პარაგრაფებში მართკუთხედის ფორმის არისათვის განსაზღვრული მეთოდებით და მიდგომებით და შევარჩიოთ

Δ_x, Δ_z ისეთნაირად, რომ რიცხვითი ბადის წერტილები განთავსდნენ შიდა საზღვრებზე, როგორც ნახაზზეა მოცემული [56, 57, 58].

რაც შეეხება სამკუთხედის ფორმის არეების დისკრეტიზაციას, მოვახდინოთ ბიჯით $\Delta_{x,m}, \Delta_{z,m}; m = 1,2$ ისე, რომ ვერტიკალური ბიჯი იყოს მართკუთხა არეზე განსაზღვრული ბიჯის ტოლი და ჰორიზონტალური ბიჯი შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ საზღვრის წერტილები განთავსდეს საზღვარზე ზუსტად. აქედან ცხადია შერჩევის მეთოდის და მოკიდებულია დახრის კუთხეზე და შესაძლებელია გამოვიყენოთ შემდეგი დამოკიდებულება

$$\tan \alpha_m = \frac{\Delta_z}{\Delta_{x,m}}; m = 1,2 \quad (3.4.2)$$

აქედან თუ აღვნიშნავთ Δ_m -ით ბიჯს $\partial\Omega_{\alpha_m}$ საზღვრზე მივიღებთ

$$\Delta_m = \Delta_{\alpha,m} = \begin{cases} \Delta_{x,m} = \cot \alpha_m \Delta_z \\ \sqrt{\Delta_{x,m}^2 + \Delta_z^2} = \frac{\Delta_z}{\sin \alpha_m} = \frac{\Delta_{x,m}}{\cos \alpha_m} \end{cases} m = 1,2 \quad (3.4.3)$$

ზემოთ მოყვანილი პრინციპით არის დაყოფა ნიშნავს, რომ წერტილების რაოდენობა მართკუთხა სამკუთხედის ფერდებზე არის ერთი და იგივე და ტოლია N_k .

სხვაობითი სქემების აპროქსიმაციას მართკუთხა Ω_0 არეზე განხილულია ზემოთ ამიტომ აქ აღარ განვიხილავთ. მაგალითისათვის განვიხილოთ სამკუთხა Ω_1 არეზე განტოლებათა სისტემის რიცხვით აპროქსიმაცია.

დავუშვათ, რომ Ω_1 არეზე დისკრეტიზაციის არგუმენტებია i, k, n :

$$\Omega_{1,i,k}^n + \partial\Omega_{1,i,k}^n = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, z_k), t_n: \\ 0 \leq k \leq N_k, \quad i = N_k - k \\ 0 \leq n \end{array} \right\} \quad (3.4.4)$$

მიღებულ ბადეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციების შესაბამისი დისკრეტული არგუმენტების მქონე ბადური ფუნქციები იქნება

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^n &= f(x_i, z_k, t_n) \\ x_i &= x_{i-1} + \Delta_{x,1}, \quad x_0 = 0 \\ z_k &= z_{k-1} + \Delta_z, \quad z_0 = -h_0 \\ t_n &= t_{n-1} + \Delta_t, \quad t_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

სადაც

$f_{i,j,k}^n$ არის დისკრეტულ არეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია;

$\Delta_{x,1}; \Delta_z; \Delta_{t,i}$ შესაბამისად გრძივი, ვერტიკალური და დროის ბიჯი.

გამოვიყვანოთ მეორე რიგის აპროქსიმაციის მქონე განტოლებათა სისტემა დისკრეტულ არეზე სასრული მოცულობების (სხვანაირად ინტეგრალური იგივეობის) მეთოდის გამოყენებით [59,61].

$\partial\Omega_1 + \Omega_1$ არეზე გამოვიყენოთ საკონტროლო მოცულობა (ნახ.3.4.1)(b)

$$x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad z_k \leq z \leq z_{k+1}$$

ვინტეგრირებთ (3.1.6) უწყვეტობის განტოლებას $\partial\Omega_1 + \Omega_1$ არის საკონტროლო მოცულობაზე

$$\iint_{i,k}^{i+1,k+1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \, dx dz = \int_k^{k+1} \left(\int_i^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz + \int_i^{i+1} \left(\int_k^{k+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi \, dz \right) dx = 0$$

განვიხილოთ პირველი წევრი

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \left(\int_i^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi \, dx \right) dz &= \int_k^{k+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i \right)_{k+1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_i \right)_k \right) \int_k^{k+1} dz = \\ &= \frac{\Delta_z}{2} \left(\frac{1}{2\Delta_{x,1}} (\varphi_{i+2} - \varphi_i - \varphi_{i+1} + \varphi_{i-1})_{k+1} + \varphi_{\dot{x},i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} \right) = \\ &= \frac{\Delta_z \Delta_{x,1}}{4} \left(\frac{1}{\Delta_{x,1}} \left((\varphi_{i+2} + \varphi_i - \varphi_{i+1}) - 2\varphi_i + \varphi_{i-1} \right)_{k+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\varphi_{\dot{x},i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} \right) \right) \\ &= \frac{\Delta_z \Delta_{x,1}}{4} \left(\varphi_{\ddot{x},k+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\varphi_{\dot{x},i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} \right) \right) \end{aligned}$$

ანალოგიურად მეორე წევრისათვის გვექნება

$$\int_i^{i+1} \left(\int_k^{k+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi \, dz \right) dx = \frac{\Delta_z \Delta_{x,1}}{4} \left(\varphi_{\ddot{z},i+1} + \frac{2}{\Delta_{z,1}} \left(\varphi_{\dot{z},k+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) \right)$$

საიდანაც მივიღებთ აპროქსიმაციას საზღვარზე

$$\varphi_{\bar{x}x,k+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\varphi_{\bar{x},i+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} \right) + \varphi_{\bar{z}z,i+1} + \frac{2}{\Delta_z} \left(\varphi_{\bar{z},k+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) = 0$$

დავაჯგუფოთ შემდეგნაირად

$$\left(\varphi_{\bar{z}z,i+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_{\bar{x},i+1} \right) + \left(\varphi_{\bar{x}x,k+1} + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{z},k+1} \right) - \left(\frac{2}{\Delta_{x,1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) = 0$$

განვიხილოთ პირველი წევრი

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{z}z,i+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_{\bar{x},i+1} &= -\varphi_{\bar{x}x,i+1} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_{\bar{x},i+1} = \\ &= -\frac{1}{\Delta_{x,1}} (\varphi_{x,i+1} - \varphi_{\bar{x},i+1}) + \frac{1}{\Delta_{x,1}} (\varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1}) = \\ &= \frac{1}{\Delta_{x,1}} (-\varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1} + \varphi_{x,i+1} + \varphi_{\bar{x},i+1}) = \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_{\bar{x},i+1} = \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_x \end{aligned}$$

ანალოგიურად მეორე წევრი

$$\varphi_{\bar{x}x,k+1} + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{z},k+1} = \frac{2}{\Delta_z} \varphi_z$$

რაც შეეხება მესამეს

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_{x,1}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} &= \frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{\Delta_{x,1}}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \cot \alpha_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) \end{aligned}$$

ჩავსვათ (3.1.16) სასაზღვრო პირობა $\partial \Omega_{\alpha_1}$ საზღვარზე

$$\frac{2}{\Delta_{x,1}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \cot \alpha_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) = \frac{2}{\Delta_{x,1}} \frac{\vec{v}}{\sin \alpha_1} = 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_{x,1} \Delta_z} \vec{v}$$

საბოლოოდ მივიღებთ სასაზღვრო პირობას დახრილ საზღვარზე

$$\begin{aligned} + \frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_x + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_z - 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_{x,1} \Delta_z} \vec{v} &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_1} \\ - \frac{2}{\Delta_{x,2}} \varphi_{\bar{x}} + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_z - 2 \frac{\Delta_2}{\Delta_{x,2} \Delta_z} \vec{v} &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_2} \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

ან თუ გავამრავლებთ $\frac{\Delta_{x,m}}{2}$

$$\begin{aligned} + \varphi_x + \varphi_z \cot \alpha_1 - \frac{\vec{v}}{\sin \alpha_1} &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_1} \\ - \varphi_{\bar{x}} + \varphi_z \cot \alpha_2 - \frac{\vec{v}}{\sin \alpha_2} &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_2} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

ან თუ გავამრავლებთ $\frac{\Delta_z}{2}$

$$\begin{aligned}
 +\varphi_x \tan \alpha_1 + \varphi_z - \frac{\vec{v}}{\cos \alpha_1} &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_1} \\
 -\varphi_{\bar{x}} \tan \alpha_2 + \varphi_z - \frac{\vec{v}}{\cos \alpha_2} &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.8}$$

ან თუ გავამრავლებთ $\frac{\Delta_{x,m}\Delta_z}{2\Delta_m}$

$$\begin{aligned}
 +\varphi_x \sin \alpha_1 + \varphi_z \cos \alpha_1 - \vec{v} &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_1} \\
 -\varphi_{\bar{x}} \sin \alpha_2 + \varphi_z \cos \alpha_2 - \vec{v} &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.9}$$

მიღებული ფორმულებში იგულისხმება რომ წარმოებულების დისკრეტული ანალოგები x -ით გამოითვლება $\Delta_{x,m}$ ბიჯით. შემდგომში არის ზუსტად მითითების მიზნით რიცხვითი წარმოებულები m არეზე აღნიშნოთ შემდეგნაირად $\varphi_{x,m}, \varphi_{\bar{x},m}, \varphi_{\bar{x}x,m}$.

რაც შეეხება განტოლების ფორმის არჩევას დამოკიდებულია ასევე დახრის კუთხეზე და ამოცანის სხვა დამატებით პირობებზე, რომელსაც აქ არ შევხებით. ალგებრული ოპერატურული ფორმით გამარტივებული ჩაწერის მიზნით ქვემოთ გამიყენება (3.4.6) ფორმულის შესაბამისი ფორმულა

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\Delta_{x,1}}(+\varphi_{x,1} - \vec{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}(\varphi_z - \vec{v}_z) &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_1} \\
 \frac{2}{\Delta_{x,2}}(-\varphi_{\bar{x},1} - \vec{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}(\varphi_z - \vec{v}_z) &= 0; \quad \partial\Omega_{\alpha_2} \\
 \vec{v}_x &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_1}{\Delta_z} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{2 \sin \alpha_1} \\
 \vec{v}_z &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_1}{\Delta_{x,1}} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{2 \cos \alpha_1} \\
 \vec{v}_x &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta_z} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{2 \sin \alpha_2} \\
 \vec{v}_z &= \frac{1}{2} \frac{\Delta_2}{\Delta_{x,2}} \vec{v} = \frac{\vec{v}}{2 \cos \alpha_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.10}$$

გამოვიყვანოთ სასაზღვრო პირობა $\partial\Omega_{\alpha_1}, \partial\Omega_h$ კვეთის წერტილში. ისევ ვაინტეგრირებთ უწყვეტობის განტოლება მოცემული წერტილის შესაბამის არეზე ბიჯით Δ_x, Δ_z , მივიღებთ საზღვრის განტოლებას

$$+\frac{2}{\Delta_x} \varphi_x + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_z - \left(\frac{2}{\Delta_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) = 0$$

განვიხილოთ მესამე წევრი და ჩავსვათ სასაზღვრო პირობები (3.1.16)

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} &= \frac{2}{\Delta_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{\Delta_x}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta_x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,k} + \frac{\Delta_{x,1}}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} + \frac{\Delta_x - \Delta_{x,1}}{\Delta_z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{i,k} \right) \\ &= \frac{2}{\Delta_x} \left(\frac{1}{\sin \alpha_1} \vec{v} + \frac{\Delta_x - \Delta_{x,1}}{\Delta_z} \vec{w} \right) \end{aligned}$$

ჩავსვათ საზღვრის განტოლებაში

$$+ \frac{2}{\Delta_x} \varphi_x + \frac{2}{\Delta_z} \varphi_z - \frac{2}{\Delta_x} \frac{\vec{v}}{\sin \alpha_1} - 2 \frac{\Delta_x - \Delta_{x,1}}{\Delta_x \Delta_z} \vec{w}$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z} \left(\varphi_z - \frac{\Delta_{x,1}}{\Delta_x} (\vec{v}_z - \vec{w}) - \vec{w} \right) &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_1} \cap \partial \Omega_h \\ \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \vec{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z} \left(\varphi_z - \frac{\Delta_{x,2}}{\Delta_x} (\vec{v}_z - \vec{w}) - \vec{w} \right) &= 0; \quad \partial \Omega_{\alpha_2} \cap \partial \Omega_h \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

ანალოგიური ინტეგრირებით და გარდაქმნებით გამოვიყვანოთ (3.1.6)-(3.1.12),(3.1.16) ამოცანის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის დისკრეტულ ანალოგს მეორე რიგის აპროქსიმაციით სივრცითი და დროის ბიჯის მიმართ, ჩაწერილს სასრული სხვაობების გამოყენებით ტრაპეციის ფორმის არისათვის.

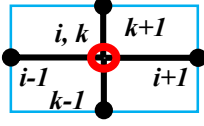
3.5. ნაკადის პოტენციური მოძრაობის ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანა სასრულ სხვაობითი სახით ტრაპეციის ფორმის არეზე

პოტენციური მოძრაობის ტალღური ორგანზომილებიანი (2D) ამოცანის აპროქსიმაცია ინტეგრალურ იგივეობათა მეთოდის გამოყენებით დროის კონკრეტული ფენისათვის გვამძლევს სტაციონარულ განტოლებათა სისტემას, მართკუთხა თანაბარი დისკრეტული არის შიდა და საზღვრის სხვადასხვა წერტილების გამოთვლისათვის. მოცემულ ამონახსენს უნდა დავამატოთ არასტაციონარული პირობა, დროის ახალ ფენაზე გადასვლისათვის.

ქვემოთ მოყვანილია ტრაპეციის ფორმის რიცხვით არეზე განსაზღვრული ყველა განტოლება (ნახ.3.4.1). თვითეულ ფორმულას

შეესაბამება თითო საანგარიშო სქემა, რომელიც განტოლების მარცხნივას მითითებული:

ძირითადი არის შიდა (რეგულარული) წერტილები



$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x,1} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ 0 < i < N_k; \quad N_k - i < k < N_k \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

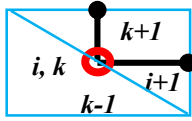
$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta_{x,1} + \Delta_x} \right) (\varphi_x - \varphi_{\bar{x},1}) + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ i = N_k; \quad 0 < k < N_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ N_k < i < N_i - N_k; \quad 0 < k < N_k \end{aligned}$$

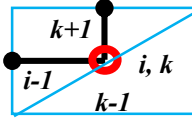
$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta_x + \Delta_{x,2}} \right) (\varphi_{x,2} - \varphi_{\bar{x}}) + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ i = N_i - N_k; \quad 0 < k < N_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x,2} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ N_i - N_k < i < N_i; \quad i - (N_i - N_k) < k < N_k \end{aligned}$$

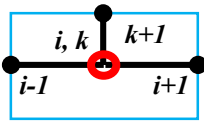
საზღვრის წირის წერტილები



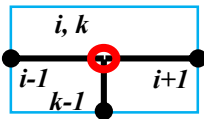
$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_{x,1}} (+\varphi_{x,1} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z} (\varphi_z - \bar{v}_z) &= 0 \\ i = N_k - k; \quad 0 < k < N_k \end{aligned} \quad (3.5.2)$$



$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_{x,2}} (-\varphi_{\bar{x},2} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z} (\varphi_z - \bar{v}_z) &= 0 \\ i = N_i - (N_k - k); \quad 0 < k < N_k \end{aligned} \quad (3.5.3)$$



$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \bar{w}) &= 0 \\ N_k < i < N_i - N_k; \quad k = 0 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$



$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x,1} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) &= 0 \\ 0 < i < N_k; \quad k = N_k \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\Delta_{x,1} + \Delta_x} \right) (\varphi_x - \varphi_{\bar{x},1}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) &= 0 \\ i = N_k; \quad k = N_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) &= 0 \\ N_k < i < N_i - N_k; \quad k = N_k \end{aligned}$$

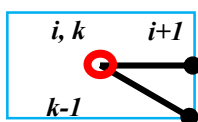
$$\left(\frac{2}{\Delta_x + \Delta_{x,2}}\right)(\varphi_{x,2} - \varphi_{\bar{x}}) + \frac{2}{\Delta_z}(-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

$$i = N_i - N_k; \quad k = N_k$$

$$\varphi_{\bar{x},2} + \frac{2}{\Delta_z}(-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

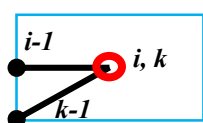
$$N_i - N_k < i < N_i; \quad k = N_k$$

საზღვრის ორი წირის კვეთის წერტილები



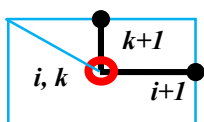
$$\frac{2}{\Delta_{x,1}}(+\varphi_{x,1} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}(-\bar{v}_z - \bar{w}) = 0$$

$$i = 0; \quad k = N_k \quad (3.5.6)$$



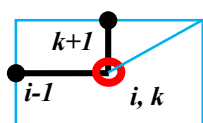
$$\frac{2}{\Delta_{x,2}}(-\varphi_{\bar{x},2} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}(-\bar{v}_z - \bar{w}) = 0$$

$$i = N_i; \quad k = N_k \quad (3.5.7)$$



$$\frac{2}{\Delta_x}(+\varphi_x - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}\left(\varphi_z - \frac{\Delta_{x,1}}{\Delta_x}(\bar{v}_z - \bar{w}) - \bar{w}\right) = 0$$

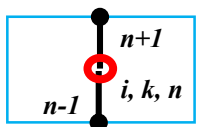
$$i = N_k; \quad k = 0 \quad (3.5.8)$$



$$\frac{2}{\Delta_x}(-\varphi_{\bar{x}} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}\left(\varphi_z - \frac{\Delta_{x,2}}{\Delta_x}(\bar{v}_z - \bar{w}) - \bar{w}\right) = 0$$

$$i = N_i - N_k; \quad k = 0 \quad (3.5.9)$$

თავისუფალი ზედაპირის არასტაციონალური პირობა



$$\bar{w} = \varphi_{\bar{t}t}$$

$$0 \leq i \leq N_i; \quad k = N_k; \quad n > 0 \quad (3.5.10)$$

მოცემული პირობის შეტანა (3.5.5)-(3.5.7) ტოლობებში გვაძლევს არასტაციონარულ პირობებს და გამოიყენება დროის ახალ ფენაზე გადასვლისათვის:

თავისუფალი ზედაპირის პირობები გაშლილი სახით

$$-\frac{2}{\Delta_z}\varphi_{\bar{t}t} + \frac{2}{\Delta_{x,1}}(+\varphi_{x,1} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z}(-\bar{v}_z) = 0$$

$$i = 0; \quad k = N_k \quad (3.5.11)$$

$$-\frac{2}{\Delta_z}\varphi_{\bar{t}t} + \varphi_{\bar{x},1} + \frac{2}{\Delta_z}(-\varphi_{\bar{z}}) = 0$$

$$0 < i < N_k; \quad k = N_k$$

$$-\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}\bar{t}} + \left(\frac{2}{\Delta_{x,1} + \Delta_x} \right) (\varphi_x - \varphi_{\bar{x},1}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) = 0$$

$$i = N_k; k = N_k$$

$$-\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}\bar{t}} + \varphi_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

$$N_k < i < N_i - N_k; k = N_k$$

$$-\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}\bar{t}} + \left(\frac{2}{\Delta_x + \Delta_{x,2}} \right) (\varphi_{x,2} - \varphi_{\bar{x}}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) = 0$$

$$i = N_i - N_k; k = N_k$$

$$-\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}\bar{t}} + \varphi_{\bar{x}x,2} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}}) = 0$$

$$N_i - N_k < i < N_i; k = N_k$$

$$-\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{t}\bar{t}} + \frac{2}{\Delta_{x,2}} (-\varphi_{\bar{x},2} - \bar{v}_x) + \frac{2}{\Delta_z} (-\bar{v}_z) = 0$$

$$i = Ni; k = Nk$$

მიღებული სქემა მდგრადია თუ აკმაყოფილებს მაქსიმუმის პრინციპს. ანალოგიურად წინა მართკუთხედის ფორმის არეზე განხილული ამოცანისა, მიღებული განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია ამოიხსნას იტერაციული მეთოდებით, ხოლო (3.5.11) პირობები გვაძლევს დროის ერთი ფენიდან მეორეზე ცხადი ალგორითმის გამოყენებით გადასვლის საშუალებას [59, 62,].

3.6. ტალღური ამოცანა ალგებრული ოპერატორული ფორმით; იტერაციული ამონახსენი

ჩაწეროთ განტოლებები არასტაციონარული პირობის გარეშე ოპერატორული სახით იმ დაშვებით, რომ ნაკადი თავისუფალ ზედაპირზე ნულოვანია და ყველა ოპერატორი და სამიებელი $\varphi = \varphi_{i,j,k}^n$ ფუნქცია განსაზღვრულია დისკრეტულ არეზე

$$A\varphi - f = 0 \quad (3.6.1)$$

სადაც

$$A = \sum_{\xi}^{x,z} A_{\xi}; \quad f = \sum_{\xi}^{x,z} f_{\xi} \quad (3.6.2)$$

მართკუთხედის ფორმის არეს შემთხვევაში ოპერატორები განისაზღვრება (3.3.1)-(3.3.9) ფორმულების თანახმად

$$A_\xi \varphi = \begin{cases} +\frac{2}{\Delta_\xi} \varphi_\xi & m = 0 \\ \varphi_{\bar{\xi}\xi} & m \in (0, N_m) \quad \xi = x, z \\ -\frac{2}{\Delta_\xi} \varphi_{\bar{\xi}} & m = N_m \end{cases} \quad (3.6.3)$$

$$f_x = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_x} \vec{u} & i = 0 \\ 0 & i \in (0, N_i) \\ \frac{2}{\Delta_x} \vec{u} & i = N_i \end{cases} \quad f_z = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_z} \vec{w} & k = 0 \\ 0 & k \in (0, N_k] \end{cases} \quad (3.6.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\xi &= \frac{1}{\Delta_\xi} (\varphi_{m+1} - \varphi_m); & \varphi_{\bar{\xi}} &= \frac{1}{\Delta_\xi (\varphi_m - \varphi_{m-1})} \\ \varphi_{\bar{\xi}\xi} &= \frac{1}{\Delta_\xi^2} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}) \\ \varphi_m &= \varphi(\xi_m), & \xi_m &= \xi_0 + m\Delta_\xi \\ \xi_0 &= \begin{cases} 0 & \xi = x \\ -h_0 & \xi = z \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

ტრაპეციის ფორმის არეს შემთხვევაში ოპერატორები განისაზღვრება (3.5.1)-(3.5.9) ფორმულების თანახმად

$$A_x \varphi = \begin{cases} +\frac{2}{\Delta_{x,1}} \varphi_{x,1} & \{i \in [0, N_{i,1}) \quad k = N_{i,1} - i \\ +\frac{2}{\Delta_x} \varphi_x & \{i = N_{i,1} \quad k = 0 \\ \varphi_{\bar{x}x,1} & \{i \in (0, N_{i,1}) \quad k \in (N_{i,1} - i, N_k] \\ \frac{2}{\Delta_{x,1} + \Delta_x} (\varphi_x - \varphi_{\bar{x},1}) & \{i = N_{i,1} \quad k = (0, N_k] \\ \varphi_{\bar{x}x} & \{i \in (N_{i,1}, N_{i,2}) \quad k = [0, N_k] \\ \frac{2}{\Delta_x + \Delta_{x,2}} (\varphi_{x,2} - \varphi_{\bar{x}}) & \{i = N_{i,2} \quad k = (0, N_k] \\ \varphi_{\bar{x}x,2} & \{i \in (N_{i,2}, N_i) \quad k \in (i - N_{i,2}, N_k] \\ -\frac{2}{\Delta_x} \varphi_{\bar{x}} & \{i = N_{i,2} \quad k = 0 \\ -\frac{2}{\Delta_{x,2}} \varphi_{\bar{x},2} & \{i \in (N_{i,2}, N_i] \quad k = i - N_{i,2} \end{cases} \quad (3.6.6)$$

$$A_z \varphi = \begin{cases} 0 & \{i = 0 \quad k = N_k\} \\ +\frac{2}{\Delta_z} \varphi_z & \begin{cases} i \in (0, N_{i,1}] & k = N_{i,1} - i \\ i \in (N_{i,1}, N_{i,2}) & k = 0 \\ i \in [N_{i,2}, N_i) & k = i - N_{i,2} \end{cases} \\ \varphi_{zz} & \begin{cases} i \in (0, N_{i,1}] & k \in (N_{i,1} - i, N_k) \\ i \in (N_{i,1}, N_{i,2}) & k \in (0, N_k) \\ i \in [N_{i,2}, N_i) & k \in (i - N_{i,2}, N_k) \end{cases} \\ -\frac{2}{\Delta_z} \varphi_{\bar{z}} & \{i \in (0, N_i) \quad k = N_k\} \\ 0 & \{i = N_i \quad k = N_k\} \end{cases} \quad (3.6.7)$$

$$f_x = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_{x,1}} \vec{v}_x & \{i \in [0, N_{i,1}) \quad k = N_{i,1} - i\} \\ \frac{2}{\Delta_x} \vec{v}_x & \{i = N_{i,1} \quad k = 0\} \\ 0 & \begin{cases} i \in (0, N_{i,1}) & k \in (N_{i,1} - i, N_k] \\ i \in [N_{i,1}, N_{i,2}] & k = [0, N_k] \\ i \in (N_{i,2}, N_i) & k \in (i - N_{i,2}, N_k] \end{cases} \\ \frac{2}{\Delta_{x,2}} \vec{v}_x & \{i = N_{i,2} \quad k = 0\} \\ \frac{2}{\Delta_{x,2}} \vec{v}_x & \{i \in (N_{i,2}, N_i] \quad k = i - N_{i,2}\} \end{cases} \quad (3.6.8)$$

$$f_z = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_z} \vec{v}_z & \{i \in [0, N_{i,1}) \quad k = N_{i,1} - i\} \\ \frac{2}{\Delta_z} \vec{w} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\Delta_{x,1}}{\Delta_x} (\vec{v}_z - \vec{w}) & \{i = N_{i,1} \quad k = 0\} \\ \frac{2}{\Delta_z} \vec{w} & \{i \in (N_{i,1}, N_{i,2}) \quad k = 0\} \\ \frac{2}{\Delta_z} \vec{w} + \frac{2}{\Delta_z} \frac{\Delta_{x,2}}{\Delta_x} (\vec{v}_z - \vec{w}) & \{i = N_{i,2} \quad k = 0\} \\ \frac{2}{\Delta_z} \vec{v}_z & \{i \in (N_{i,2}, N_i] \quad k = i - N_{i,2}\} \\ 0 & \begin{cases} i \in (0, N_{i,1}) & k \in (N_{i,1} - i, N_k] \\ i \in [N_{i,1}, N_{i,2}] & k = (0, N_k) \\ i \in (N_{i,2}, N_i) & k \in (i - N_{i,2}, N_k] \end{cases} \end{cases} \quad (3.6.9)$$

მიღებული განტოლება შესაძლებელია ამოვხსნათ ზედა რელაქსაციის იტერაციული მეთოდის გამოყენებით [63].

განვიხილოთ ორშრიანი სტაციონარული იტერაციული განტოლება (s იტერაციული პარამეტრით) კანონიკური სახით:

$$B \frac{\varphi^{s+1} - \varphi^s}{\sigma^s} + (A\varphi - f) = 0 \quad (3.6.10)$$

შემოვილოთ აღნიშვნები

$$\begin{aligned} A &= A^{\mp D} + A^+ \\ B &= (D + \sigma A^-) \\ \sigma &= \sigma^s = \text{const} \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

მივიღებთ

$$\varphi^{s+1} = (1 - \sigma)\varphi^s - \sigma D^{-1}[A^- \varphi^{s+1} + A^+ \varphi^s - f] = 0 \quad (3.6.12)$$

სადაც

$$\begin{aligned} D &= -\delta E, \quad D^{-1} = -\frac{1}{\delta} E \\ A^- &= \sum_{\xi}^{x,z} A_{\xi}^-, \quad D = \sum_{\xi}^{x,z} D_{\xi}, \quad A^+ = \sum_{\xi}^{x,z} A_{\xi}^+ \\ A_{\xi} &= A_{\xi}^{\mp D} + A_{\xi}^+ \\ A_{\xi}^- \varphi &= \begin{cases} \emptyset, & m = 0 \\ \frac{1}{\Delta_{\xi}^2} \varphi_{m-1}, & m \in (0, N_m) \\ \frac{2}{\Delta_{\xi}^2} \varphi_{m-1}, & m = N_m \end{cases}, \quad A_{\xi}^+ \varphi = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_{\xi}^2} \varphi_{m+1}, & m = 0 \\ \frac{1}{\Delta_{\xi}^2} \varphi_{m+1}, & m \in (0, N_m) \\ \emptyset, & m = N_m \end{cases}' \\ D_{\xi} \varphi &= -\frac{2}{\Delta_{\xi}^2} \varphi_m, m \in [0, N_m] \end{aligned}$$

რაც შეეხება δ მართკუთხედის შემთხვევაში

$$\delta = 2 \left(\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_z^2} \right) = \text{const}$$

ტრაპეციის შემთხვევაში

$$\delta = 2 \left(\left(\begin{array}{c} \frac{1}{\Delta_{x,1}^2} \quad i \in [0, N_{i,1}) \\ \frac{2}{(\Delta_{x,1} + \Delta_x)\Delta_x} \quad i = N_{i,1} \\ \frac{1}{\Delta_x^2} \quad i \in (N_{i,1}, N_{i,2}) \\ \frac{2}{(\Delta_{x,2} + \Delta_x)\Delta_x} \quad i = N_{i,2} \\ \frac{1}{\Delta_{x,2}^2} \quad i \in (N_{i,2}, N_i] \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \quad i = 0 \\ \frac{1}{\Delta_z^2} \quad i \in (0, N_i) \\ 0 \quad i = N_i \end{array} \right) \right)$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ჩავწერთ უფრო მოსახერხებელი ფორმით

$$\varphi^{s+1} = \varphi^s - \sigma D^{-1}[A^- \varphi^{s+1} + (D + A^+) \varphi^s - f] = 0 \quad (3.6.13)$$

მივიღებთ

$$\varphi^{s+1} = \varphi^s + \frac{\sigma}{\delta} (A \varphi^{s,s+1} - f) = 0 \quad (3.6.14)$$

სადაც $\varphi^{s,s+1}$ წარმოადგენს უკვე გამოთვლილი და გამოსათვლელი მნიშვნელობების შერეულ ვექტორს, იმისდა მიხედვით თუ რა მიმართულებით მოვახდენთ მატრიცის დაშლას პროგრამული ალგორითმის რეალიზების დროს.

განვიხილოთ თავისუფალი ზედაპირის განტოლება და გამოვიყვანოთ არასტაციონარული ამონახსენი ოპერატორული სახით

$$-\vartheta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi + (A\varphi - f) = 0, (z = 0) \quad (3.6.15)$$

სადაც

$$\vartheta = \frac{2}{\Delta_z}$$

A, f განისაზღვრება შესაბამისად (3.6.3)-(3.6.4) მართკუთხედისა და (3.6.6)-(3.6.9) ტრაპეციის არეს ფორმულებით, როცა $z = 0$. მიღებული განტოლება შესაძლებელია ამოიხსნას სამშრიანი არასტაციონარული სხვაობითი მეთოდით.

განვიხილოთ სამშრიანი არასტაციონარული განტოლება კანონიკური სახით

$$B \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n-1}}{2\Delta_t} + R(\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) + (A\varphi^n - f) = 0 \quad (3.6.16)$$

დავუშვათ

$$B = 0; R = -\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} E + \tau A; \vartheta = \frac{2}{\Delta_z}; \tau \in [0,1] \quad (3.6.17)$$

მივიღებთ

$$\begin{aligned} & -\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} (\varphi^{n+1} - 2\varphi^n + \varphi^{n-1}) + \\ & + (\tau A (\varphi^{n+1} + \varphi^{n-1}) + (1 - 2\tau) A \varphi^n) - f = 0 \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

ადვილია ვაჩვენოთ, რომ როდესაც $\tau = 0$ გვაქვს ცხადი ამონახსენი

$$\varphi^{n+1} = -(-2\varphi^n + \varphi^{n-1}) + \frac{\Delta_t^2}{\vartheta} (A\varphi^n - f^n) = 0 \quad (3.6.19)$$

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც $\tau > 0$. ამ შემთხვევაში (3.6.18) წარმოადგენს არაცხად სქემას და საჭიროებს ამოიხსნას (3.6.14) სქემასთან ერთად როდესაც $z < 0$.

გადავწეროთ (3.6.18) დროის n ფენისთვის შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} E + \tau A \right) \varphi^n \\ & - \left(f^{n-1} - \left(2\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} E + (1-2\tau)A \right) \varphi^{n-1} \right. \\ & \left. - \left(-\vartheta\frac{1}{\Delta_t^2} E + \tau A \right) \varphi^{n-2} \right) = 0 \end{aligned}$$

გვექნება

$$\begin{cases} \tilde{A}\varphi - \tilde{f} = 0 & k = N_k \\ A\varphi - f = 0 & 0 \leq k < N_k \end{cases}; n = 1, 2, \dots \quad (3.6.20)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \tilde{A} = R &= -\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} E + \tau A = -\tilde{\vartheta} E + \tau A \\ \vartheta &= \frac{2}{\Delta_z}, \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta \frac{1}{\Delta_t^2} = \frac{2}{\Delta_z \Delta_t^2} \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \bar{f} - \left(2\tilde{\vartheta} E + (1-2\tau)A \right) \varphi^{n-1} - \left(-\tilde{\vartheta} E + \tau A \right) \varphi^{n-2} \\ \bar{f} &= f^{n-1} \approx \bar{\tau} f^n + (1-2\bar{\tau}) f^{n-1} + \bar{\tau} f^{n-2}, \quad \bar{\tau} \in [0, 1] \end{aligned}$$

თუ დავუშვებთ რომ $\bar{\tau} = \tau$ მივიღებთ

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \tau f^n + \tilde{\vartheta}(-2\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}) - (1-2\tau)(A\varphi^{n-1} - f^{n-1}) \\ & - \tau(A\varphi^{n-2} - f^{n-2}) \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

მიღებული განტოლების იტერაციული ამოხსნისათვის გამოვიყენოთ ისევ ზევით განხილული ორშრიანი იტერაციული მეთოდი. აღვნიშნოთ

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \tilde{A}^- + \tilde{D} + \tilde{A}^+ \\ \tilde{B} &= (\tilde{D} + \tilde{\sigma} \tilde{A}^-) \\ \tilde{D} &= -\frac{\vartheta}{\Delta_t^2} E + \tau D = (-\tilde{\vartheta} - \tau \delta) E = -\tilde{\delta} E \\ \tilde{\delta} &= \tilde{\vartheta} + \tau \delta = 2 \left(\frac{1}{\Delta_z \Delta_t^2} + \tau \delta \right) \end{aligned}$$

მივიღებთ (3.6.20) განტოლების შესაბამის ტალღური ამოცანის იტერაციულ ამონახსენს ოპერატორული ფორმით

$$\varphi^{s+1} = \varphi^s + \begin{cases} \frac{\sigma}{\delta} (\tilde{A}\varphi^{s,s+1} - \tilde{f}) & k = N_k \\ \frac{\sigma}{\delta} (A\varphi^{s,s+1} - f) & 0 \leq k < N_k \end{cases} ; n = 1, 2, \dots \quad (3.6.23)$$

აღნიშნოთ

$$r^{s+1} = A\varphi^{s+1} - f, \quad \tilde{r}^{s+1} = \tilde{A}\varphi^{s+1} - \tilde{f} \quad (3.6.24)$$

იტერაციული პროცესი გრძელდება ვიდრე არ შესრულდება ერთდროულად ორივე პირობა

$$\|r^{s+1}\| < \varepsilon \|r^0\|, \quad \|\tilde{r}^{s+1}\| < \varepsilon \|\tilde{r}^0\| \quad (3.6.25)$$

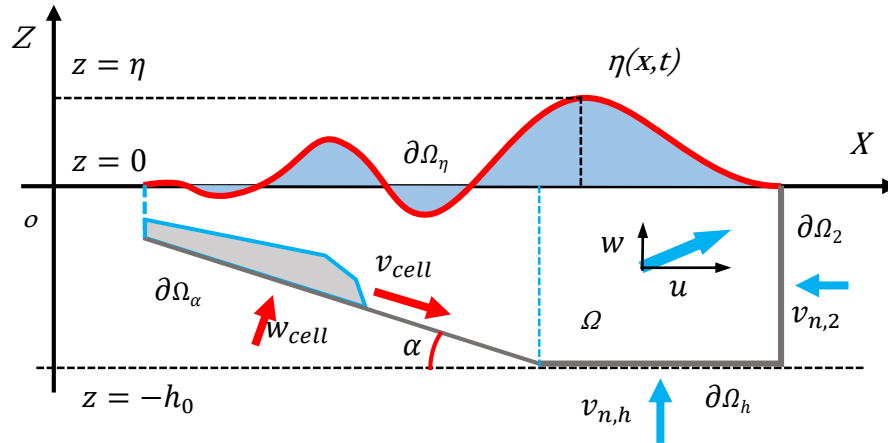
სადაც ε არის ამონახსენის სიზუსტე.

3.7. სამთო ვიწრო წყალსაცავში ღვარცოფული ნაკადის გრძივი და განივი შემოდინების რიცხვითი მოდელირება ორგანზომილებიანი (2D) ამონახსენის გამოყენებით

მთიან რეგიონებში ხშირია ღვარცოფების წარმოქმნა, რასაც თან სდევს გარემოზე უარყოფითი ეკოლოგიური გავლენა და მნიშვნელოვანი მატერიალური ზარალი. ასეთ რეგიონებში წყალშემტბორი ნაგებობების (კაშხლები, დამბები და სხვ.) საიმედო ფუნქციონირების უზრუნველსაყოფად უნდა ჩატარდეს საინჟინრო პროგნოზული გაანგარიშებები, რომლებიც შეეხება ღვარცოფული (სელური) ნაკადის ჰიდროტექნიკურ ნაგებობაზე ზემოქმედების საკითხს. ეს გულისხმობს არა მხოლოდ სელური ნაკადის უშუალოდ ნაგებობაზე დინამიკურ ზემოქმედების განსაზღვრას, არამედ იმ ჰიდროდინამიკური ძალების მოქმედების გათვალისწინებასაც, რომლებიც წარმოიქმნებიან ტალღებისა და ჰიდროდინამიკური წნევების სახით, სელური ნაკადის წყალსაცავში შემოდინებისა და მასში გავრცელების შედეგად.

აღნიშნული პროცესის სირთულის გამო, დღეისათვის წყალსაცავში სელური ნაკადის წყალთან ურთიერთქმედების მხოლოდ ზოგიერთი კერძო საკითხია განხილული. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ მაქსიმალური ტალღის ამპლიტუდა უშუალოდ სელური ნაკადის წყალსაცავში შემოსვლის ადგილას. ამასთან, გენერირებული ტალღის კაშხლის მიმართულებით

გავრცელების, ტრანსფორმაციისა და არეკვლის საკითხებს ამ ნაწილში არ შევხებით [48, 53].



(ნახ.3.7.1) საანგარიშო სქემა ღვარცოფული ნაკადის წყალსატევში შესვლით გამოწვეული ექსტრემალური ტალღების გრძივი რყევების შესწავლის მიზნით

განვიხილოთ საანგარიშო სქემა (ნახ.3.7.1). ჩვენ შევჩერდებით უფრო განზოგადებული მათემატიკური მოდელის განხილვაზე, რომლის მიხედვით სქემატიზებულ წყალსაცავში საწყის ($t = 0$) მომენტში წარმოიქმნება ტალღური პროცესი მის ერთ-ერთი ფერდის მხრიდან სტრატეფიცირებული $D_{cell}(x, z, t)$ სისქის ღვარცოფული ნაკადის შემოდინებისა და შემდეგ $t > 0$ ფსკერზე მისი $v_{cell}(x, z, t)$ სიჩქარით გავრცელების შედეგად. ღვარცოფი ფსკერის გასწვრივ მოძრაობს t_{cell} დროის განმავლობაში. იგულისხმება, რომ ამ დროს (სანამ ღვარცოფული ნაკადი გაჩერდება), სტრატეფიცირებული ნაკადის მთელ სიგრძეზე და ფრონტის წინ წყლის გამოდევნის შედეგად, წარმოიქმნება $B_{cell} > S_{cell}$ სიგრძის "შეშფოთების ზონა", სადაც წყლის ნაწილაკების მოძრაობა უპირატესად მიმართულია ფსკერის ნორმალის გასწვრივ და თუ ადგილი აქვს ნაკადის სიმაღლის შემცირებას მიმართულია ფსკერის ნორმალის საწინააღმდეგოდ. შეშფოთების არეზე წყლის გამოდევნის სიჩქარე აღვნიშნოთ $w_{cell}(x, z, t)$

სიდიდით. ნაკადის არაერთგვაროვნების გათვალისწინებით ღვარცოფული ნაკადის შემოსვლის სიგრძე გამოითვლება ნებისმიერი t_n დროისათვის

$$S_{cell} = \int_0^{t_n} v_{cell}(x, z, t) dt$$

$$w_{cell} = \frac{\partial}{\partial t} D_{cell}(x, z, t) \quad (3.7.1)$$

ფსკერზე (ფერდზე) სტრატეფიცირებული ღვარცოფული ნაკადის გავრცელების ამოცანა ცალკე გამოკვლევის საგანია, ამიტომ ვინაიდან ჩვენ განვიხილავთ განზოგადოებულ ამოცანას, გამარტივების მიზნით დავუშვათ, რომ ამ მოძრაობის სიჩქარე მთელ უბანზე თანაბარია და მუდმივი და შეშფოთების ზონა წარმოიქმნება მხოლოდ ღვარცოფული ნაკადის ფრონტის წინ.

$$D_{cell} = const, \quad B_{cell} = const$$

$$v_{cell} = const, \quad w_{cell} = const$$

სელის მოძრაობასთან ერთად ხდება $B_{cell} < S_{cell}$ შეშფოთების ზონის გადაადგილებაც ფსკერის გასწვრივ $0 < t \leq t_{cell}$ დროის განმავლობაში მუდმივი v_{cell} სიჩქარით. როდესაც $t > t_{cell}$ ღვარცოფის მოძრაობა წყდება და ამ მომენტიდან $w_{cell} = 0$. ამ დროს ღვარცოფის ნაკადის S_{cell} გადაადგილების სიგრძე გამოითვლება შემდეგნაირად

$$S_{cell} = \begin{cases} v_{cell} \cdot t & t \leq t_{cell} \\ v_{cell} \cdot t_{cell} & t > t_{cell} \end{cases} \quad (3.7.2)$$

ცხადია $S_0 = v_{cell} \cdot t_{cell}$ იქნება ღვარცოფის ფრონტის მიერ განვლილი მთლიანი მანძილი. განვსაზღვროთ სიჩქარეების სიდიდე იმ მოსაზრებით რომ ღვარცოფის მიერ სრული მანძილის გავლის შედეგად გამოდევნილი წყლის მოცულობა უნდა ემთხვეოდეს თავად ღვარცოფის მოცულობას

$$w_{cell}(t) = \begin{cases} \frac{D_{cell} v_{cell}}{B_{cell}} & t \leq t_{cell}; (x, z) \in [S_{cell}, S_{cell} + B_{cell}] \\ 0 & t \leq t_{cell}; (x, z) \notin [S_{cell}, S_{cell} + B_{cell}] \\ 0 & t > t_{cell} \end{cases} \quad (3.7.3)$$

მიღებული სასაზღვრო პირობაში იგულისხმება რომ წერტილი $(x, z) \in \partial\Omega_\alpha$ და S_{cell} წირი განიხილება $\partial\Omega_\alpha$ -ზე.

გამოთვლები აჩვენებს რომ შემფოთების ზონის სიდიდეზე მცირედაა დამოკიდებული წარმოქმნილი ტალღების ამპლიტუდის სიდიდე, ამიტომ შესაძლებელია ავიღოთ $B_{cell} = D_{cell}$ და შესაბამისად $w_{cell} = v_{cell}$.

განხილული ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას ტრაპეციის ფორმის საანგარიშო სქემის (ნახ.3.4.1) გამარტივებული ფორმით და (3.5, 3.6) პარაგრაფებში განხილული მეთოდით იმ დაშვებით, რომ

$$\alpha_1 = \alpha \geq \frac{\pi}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

და ვერტიკალურ და ჰორიზონტალურ ბიჯს შევარჩევთ ისე, რომ

$$\Delta_{x,1} = \Delta_x, \quad \Delta_{x,2} = 0$$

ამოცანას რიცხვითი ფორმულირებაში (3.6.6)-(3.6.9) შეიცვლება ამ შემთხვევისათვის ალგებრული ოპერატორები $\circ X$ -ის მიმართულებით

$$A_x \varphi = \begin{cases} +\frac{2}{\Delta_x} \varphi_x & \{i \in [0, N_{i,1}] \quad k = N_{i,1} - i \\ \varphi_{\bar{x}x} & \{i \in (0, N_{i,1}] \quad k \in (N_{i,1} - i, N_k] \\ & \{i \in (N_{i,1}, N_i) \quad k = [0, N_k] \\ -\frac{2}{\Delta_x} \varphi_{\bar{x}} & \{i = N_i \quad k = [0, N_k] \end{cases} \quad (3.7.4)$$

და თავისუფალი წევრი

$$f_x = 0$$

$$f_z = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_z} \vec{v}_z & \{i \in [0, N_{i,1}] \quad k = k_i = N_{i,1} - i \\ 0 & \{i \in [0, N_{i,1}] \quad k \in (k_i, N_k] \\ & \{i \in (N_{i,1}, N_i) \quad k = [0, N_k] \end{cases} \quad (3.7.5)$$

$$\vec{v}_z = \frac{w_{cell}}{\cos \alpha}$$

განივი რყევების შესწავლისათვის ისევ გამოვიყენოთ ტრაპეციის ფორმისთვის განსაზღვრული მეთოდის გამარტივებული ვარიანტი (ნახ.3.4.1) საანგარიშო სქემის მიხედვით, როდესაც

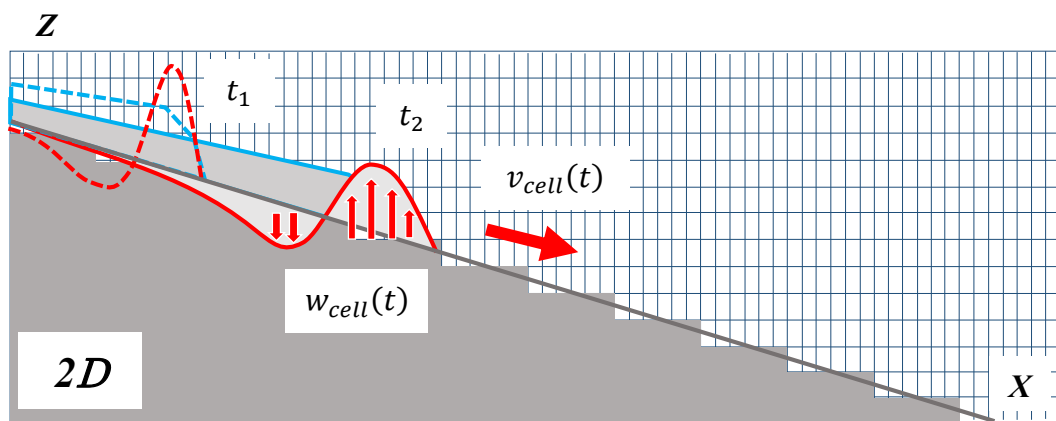
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \geq \frac{\pi}{6}$$

$$\Delta_{x,1} = \Delta_{x,2} = \Delta_x, \quad \Delta_z = \Delta_x \tan \alpha \quad (3.7.6)$$

მიღებული სქემა გამოიყენება ვიწრო კანიონის ტიპის წყალსაცავში ან მდინარის ხეობაში განივი რყევების შესწავლისათვის.

შეგნიშნოთ რომ, ზემოთ განხილულ შემთხვევებში შეზღუდულები ვართ ვერტიკალური ბიჯის შერჩევის დროს. ქვემოთ განვიხილავთ ჩვენს მიერ შემუშავებულ მეთოდს თუ როგორ შეიძლება მართკუთხედის ფორმის არისათვის განსაზღვრული მეთოდის გამოყენება დახრილი ფერდის მქონე რთულ არეზე.

ავაგოთ საანგარიშო ბადე (ნახ.3.7.2) სქემის შესაბამისად. მოცემული ბადეზე დახრილი ფერდობის აპროქსიმაცია ხდება იმ მოსაზრებით, რომ თუ ერთეული მართკუთხედის ფართობის დახრის წირით გაყოფის დროს ნახევარზე მეტი ნაწილი რჩება არეს გარეთ, მაშინ ასეთი მართკუთხედი არ განიხილება საანგარიშო არეზე. შესაბამისად მივიღებთ საფეხურების ფორმის წირს, რომელზეც უნდა განისაზღვროს სასაზღვრო პირობები. არე რომელზეც არ განიხილება ამოცანა მოცემულია მუქი ნაცრისფერით.



(ნახ.3.7.2) დახრილი ფსკერის მქონე სამთო ვიწრო წყალსაცავში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების საანგარიშო რიცხვითი ბადე სასრულ სხვაობითი მეთოდის (მართკუთხა აპროქსიმაცია) საფუძველზე

გამოვიყვანოთ სასაზღვრო პირობები. ვინაიდან ფსკერის საფეხური მიმართულია OX ღერძის გასწვრივ საზღვრის ნორმალი მიმართულია OZ -ის გასწვრივ (3.6.3)-(3.6.4) რიცხვით ამონახსენში სასაზღვრო პირობებად ფსკერის დახრილ საზღვარზე გამოვიყენებთ (3.3.8) განტოლებებს და შეგვეცვლება მხოლოდ თავისუფალი წევრები

$$f_x = 0$$

$$f_z = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_z} \vec{w} & \{i \in [0, N_{i,1}] \quad k = k_i \\ 0 & \begin{cases} i \in [0, N_{i,1}] & k \in (k_i, N_k] \\ i \in (N_{i,1}, N_i] & k \in [0, N_k] \end{cases} \end{cases} \quad (3.7.7)$$

$$\vec{w} = \frac{w_{cell}}{\cos \alpha}$$

სასაზღვრო პირობაში უნდა გავითვალისწინოთ გადაადგილების ჰორიზონტალური მდგენელები გამოთვლების სისწორისათვის

$$S_x = S_{cell} \cos \alpha, \quad B_x = B_{cell} \cos \alpha \quad (3.7.8)$$

აქვე უნდა აღვნიშნოთ, რომ იმ წერტილებში რომელიც მოყვა განსახილველი არეს გარეთ გვაქვს პირობა

$$\varphi_{i,k}^n = 0 \quad (3.7.9)$$

შესაძლებელია დახრილი ფსკერის აპროქსიმაცია არა მართკუთხა ქიმების, არამედ ბლაგვი ქიმების საშუალებით, რაც ართულებს ამოცანას და ამ ნაწილში არ შევხებით.

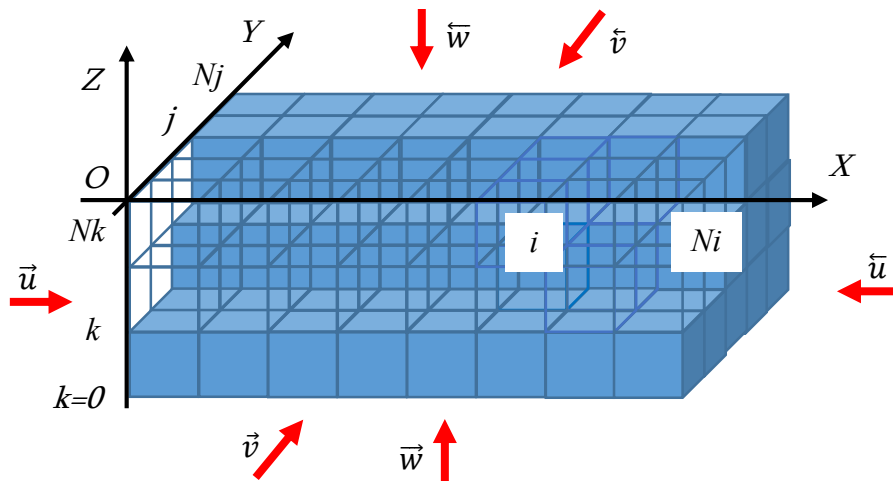
შევნიშნოთ, რომ მოცემული ამოცანის განხილვის შედეგად მიღებული რიცხვითი ამონახსნის ფორმა ერთი და იგივეა, როგორც ტრაპეციის, ისე მართკუთხედის ფორმის არეზე ამოხსნის რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით, რაც კიდევ ერთხელ ადასტურებს მართკუთხა არისათვის შემუშავებული მეთოდის გამოყენების შესაძლებლობას დახრილი ფორმის მქონე არეებისათვის. მოცემული მეთოდით შესაძლებელია რთული არეების შესაბამისად ზუსტი აპროქსიმაცია და თუ ბიჯი საკმარისად მცირეა იძლევა კარგ შედეგებს.

3.8. სამგანზომილებიანი (3D) რიცხვითი ამონახსენი

დავუშვათ $\Omega + \partial\Omega$ წარმოადგენს მართკუთხა არეს, ასევე მართკუთხა საზღვრით. მოვახდინოთ ამ არის დისკრეტიზაცია დისკრეტიზაციის არგუმენტებით i, j, k, n :

$$\Omega_{i,j,k}^n + \partial \Omega_{i,j,k}^n = \left\{ \begin{array}{l} (x_i, y_j, z_k), t_n: \\ 0 \leq i \leq N_i, 0 \leq j \leq N_j, 0 \leq k \leq N_k \\ 0 \leq n \end{array} \right\}$$

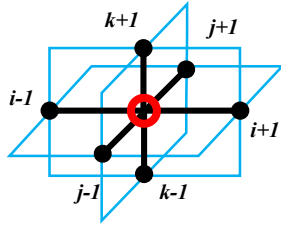
წინა პარაგრაფებში განხილული ამოცანების ანალოგიურად, პოტენციური მოძრაობის ტალღური სამგანზომილებიანი (3D) ამოცანის აპროქსიმაცია ინტეგრალურ იგივეობათა მეთოდის გამოყენებით დროის კონკრეტული ფენისათვის გვაძლევს სტაციონარულ განტოლებათა სისტემას, მართკუთხა თანაბარი დისკრეტული არის შიდა და საზღვრის სხვადასხვა წერტილების გამოთვლისათვის. მოცემულ ამონახსენს უნდა დავამატოთ არასტაციონარული პირობა, დროის ახალ ფენაზე გადასვლისათვის.



(ნახ.3.8.1) საანგარიშო სქემა შემოსაზღვრულ მართკუთხა რიცხვით ზადეზე ტალღური სამგანზომილებიანი (3D) ამოცანის შესწავლის მიზნით

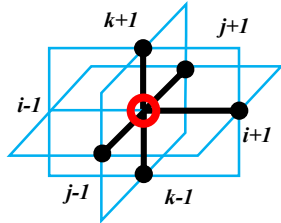
ქვემოთ მოყვანილია (ნახ.3.8.1) მართკუთხედის ფორმის რიცხვით არეზე განსაზღვრული ყველა განტოლება. თვითეულ ფორმულას შეესაბამება თითო საანგარიშო სქემა, რომელიც განტოლების მარცხნივაა მითითებული:

ძირითადი არეს შიდა (რეგულარული) წერტილები

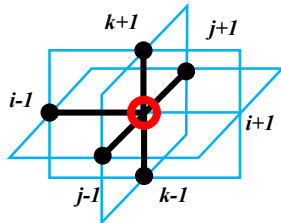


$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{y}y} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ 0 < i < N_i; 0 < j < N_j; 0 < k < N_k \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

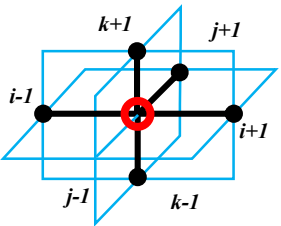
საზღვრის სიბრტყის წერტილები



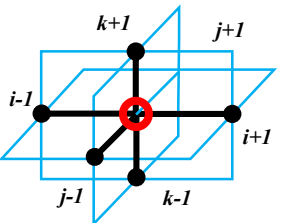
$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ i = 0; 0 < j < N_j; 0 < k < N_k \end{aligned} \quad (3.8.3)$$



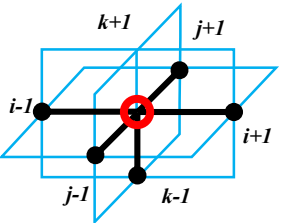
$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_{\bar{x}} - \vec{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ i = N_i; 0 < j < N_j; 0 < k < N_k \end{aligned} \quad (3.8.4)$$



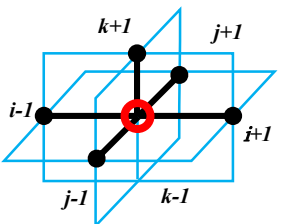
$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \vec{v}) + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ 0 < i < N_i; j = 0; k = 0 \end{aligned} \quad (3.8.5)$$



$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y} (-\varphi_{\bar{y}} - \vec{v}) + \varphi_{\bar{z}z} &= 0 \\ 0 < i < N_i; j = N_j; k = N_k \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

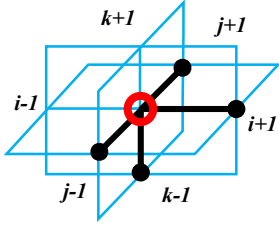


$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_{\bar{z}} - \vec{w}) &= 0 \\ 0 < i < N_i; 0 < j < N_j; k = N_k \end{aligned} \quad (3.8.7)$$



$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{x}x} + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) &= 0 \\ 0 < i < N_i; 0 < j < N_j; k = 0 \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

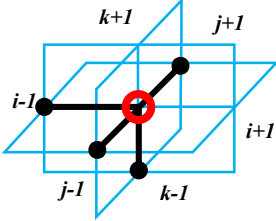
საზღვრის ორი სიბრტყის კვეთის წირის წერტილები



$$\frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \bar{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$i = 0; 0 < j < N_j; k = N_k$

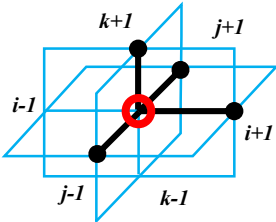
(3.8.9)



$$\frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \bar{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$i = N_i; 0 < j < N_j; k = N_k$

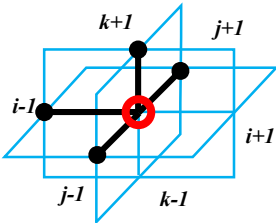
(3.8.10)



$$\frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \bar{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$i = 0; 0 < j < N_j; k = 0$

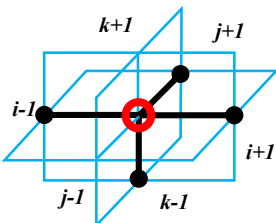
(3.8.11)



$$\frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \bar{u}) + \varphi_{\bar{y}y} + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$i = N_i; 0 < j < N_j; k = 0$

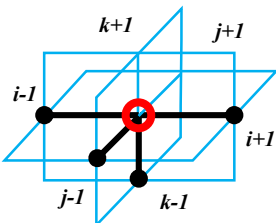
(3.8.12)



$$\varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \bar{v}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$0 < i < N_i; j = 0; k = N_k$

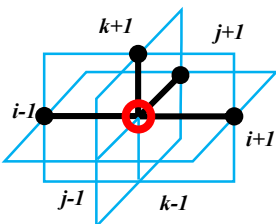
(3.8.13)



$$\varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y} (-\varphi_y - \bar{v}) + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

$0 < i < N_i; j = N_j; k = N_k$

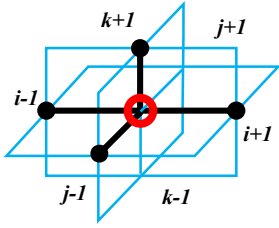
(3.8.14)



$$\varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \bar{v}) + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \bar{w}) = 0$$

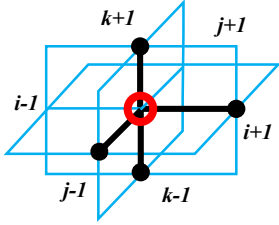
$0 < i < N_i; j = 0; k = 0$

(3.8.15)



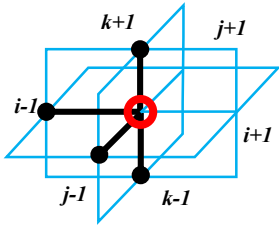
$$\varphi_{\bar{x}x} + \frac{2}{\Delta_y}(-\varphi_{\bar{y}} - \bar{v}) + \frac{2}{\Delta_z}(+\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

$$0 < i < N_i; j = N_j; k = 0$$
(3.8.16)



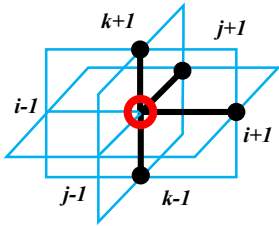
$$\frac{2}{\Delta_x}(+\varphi_x - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(-\varphi_{\bar{y}} - \bar{v}) + \varphi_{\bar{z}z} = 0$$

$$i = 0; j = N_j; 0 < k < N_k$$
(3.8.17)



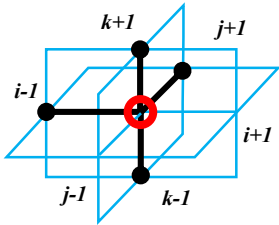
$$\frac{2}{\Delta_x}(-\varphi_{\bar{x}} - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(-\varphi_{\bar{y}} - \bar{v}) + \varphi_{\bar{z}z} = 0$$

$$i = N_i; j = N_j; 0 < k < N_k$$
(3.8.18)



$$\frac{2}{\Delta_x}(+\varphi_x - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(+\varphi_y - \bar{v}) + \varphi_{\bar{z}z} = 0$$

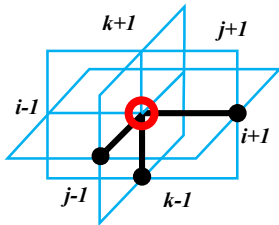
$$i = 0; j = 0; 0 < k < N_k$$
(3.8.19)



$$\frac{2}{\Delta_x}(-\varphi_{\bar{x}} - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(+\varphi_y - \bar{v}) + \varphi_{\bar{z}z} = 0$$

$$i = N_i; j = 0; 0 < k < N_k$$
(3.8.20)

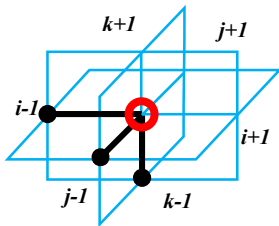
საზღვრის სამი სიბრტყის კვეთის წერტილები



$$\frac{2}{\Delta_x}(+\varphi_x - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(-\varphi_{\bar{y}} - \bar{v}) +$$

$$+\frac{2}{\Delta_z}(-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

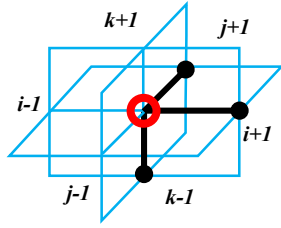
$$i = 0; j = N_j; k = N_k$$
(3.8.21)



$$\frac{2}{\Delta_x}(-\varphi_{\bar{x}} - \bar{u}) + \frac{2}{\Delta_y}(-\varphi_{\bar{y}} - \bar{v}) +$$

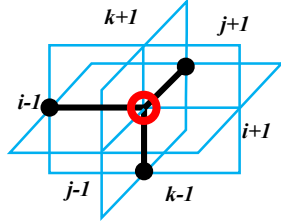
$$+\frac{2}{\Delta_z}(-\varphi_{\bar{z}} - \bar{w}) = 0$$

$$i = N_i; j = N_j; k = N_k$$
(3.8.22)



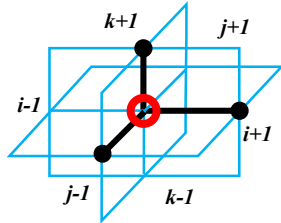
$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.23)$$

$i = 0; j = 0; k = N_k$



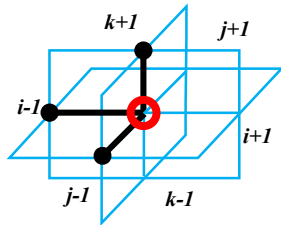
$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (-\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.24)$$

$i = N_i; j = 0; k = N_k$



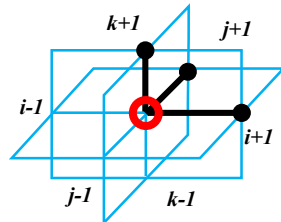
$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (-\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.25)$$

$i = 0; j = N_j; k = 0$



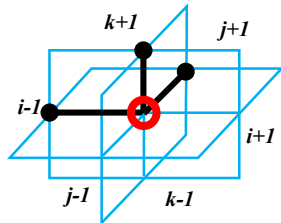
$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (-\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.26)$$

$i = N_i; j = N_j; k = 0$



$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (+\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.27)$$

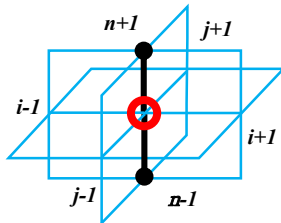
$i = 0; j = 0; k = 0$



$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta_x} (-\varphi_x - \vec{u}) + \frac{2}{\Delta_y} (+\varphi_y - \vec{v}) + \\ & + \frac{2}{\Delta_z} (+\varphi_z - \vec{w}) = 0 \end{aligned} \quad (3.8.28)$$

$i = N_i; j = 0; k = 0$

თავისუფალი ზედაპირის არასტაციონარული პირობა



$$\begin{aligned} & \vec{w} = \varphi_{\bar{t}t} \\ & 0 \leq i \leq N_i; 0 \leq j \leq N_j; k = N_k; n > 0 \end{aligned} \quad (3.8.29)$$

მოცემული პირობის შეტანა (3.8.7), (3.8.9)-(3.8.10), (3.8.13)-(3.8.14), (3.8.21)-(3.8.24) ტოლობებში გვაძლევს არასტაციონარულ პირობებს და გამოიყენება დროის ახალ ფენაზე გადასვლისათვის [59].

მიღებული განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ ოპერატორული სახით

$$A\varphi - f = 0 \quad (3.8.30)$$

და ამოვხსნათ ზემოთ განხილული შერეული (ორი და სამშრიანი) იტერაციული მეთოდის გამოყენებით

$$\varphi^{s+1} = \varphi^s + \begin{cases} \frac{\tilde{\sigma}}{\delta} (\tilde{A}\varphi^{s,s+1} - \tilde{f}), & k = N_k \\ \frac{\sigma}{\delta} (A\varphi^{s,s+1} - f), & 0 \leq k < N_k \end{cases}; n = 1, 2, \dots \quad (3.8.31)$$

სადაც $0 < \sigma, \tilde{\sigma} < 2$ და $\tau > 0$ არის იტერაციული პარამეტრები, სივრცითი და დროის მიხედვით და გამოყენებულია აღნიშვნები

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= -\tilde{\theta}E + \tau A \\ \tilde{f} &= \tau f^n + \tilde{\theta}(-2\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}) - (1 - 2\tau)r^{n-1} - \tau r^{n-2} \\ r &= A\varphi - f, \quad \delta = 2 \left(\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} + \frac{1}{\Delta_z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8.32)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{2}{\Delta_z \Delta_t^2}, \quad \tilde{\delta} = \tilde{\theta} + \tau \delta$$

$$A = \sum_{\xi}^{x,y,z} A_{\xi}; \quad f = \sum_{\xi}^{x,y,z} f_{\xi}$$

$$A_{\xi} \varphi = \begin{cases} +\frac{2}{\Delta_{\xi}} \varphi_{\xi}, & m = 0 \\ \varphi_{\xi\xi}, & m \in (0, N_m); \\ -\frac{2}{\Delta_{\xi}} \varphi_{\bar{\xi}}, & m = N_m \end{cases}; \quad f_{\xi} = \begin{cases} \frac{2}{\Delta_{\xi}} \bar{v}_{\xi}, & m = 0 \\ 0, & m \in (0, N_m) \\ \frac{2}{\Delta_{\xi}} \bar{v}_{\xi}, & m = N_m, \xi \neq z \\ 0 & m = N_m, \xi = z \end{cases} \quad (3.8.33)$$

$$\varphi_{\xi} = \frac{1}{\Delta_{\xi}} (\varphi_{m+1} - \varphi_m); \quad \varphi_{\bar{\xi}} = \frac{1}{\Delta_{\xi}} (\varphi_m - \varphi_{m-1})$$

$$\varphi_{\xi\xi} = \frac{1}{\Delta_{\xi}^2} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1})$$

$$\xi = x, y, z; \quad \varphi_m = \varphi(\xi_m)$$

$$\xi_m = \xi_0 + m\Delta_{\xi}; \quad \xi_0 = \begin{cases} 0, & \xi = x, y \\ -h_0 = -N_k * \Delta_{\xi}, & \xi = z \end{cases}$$

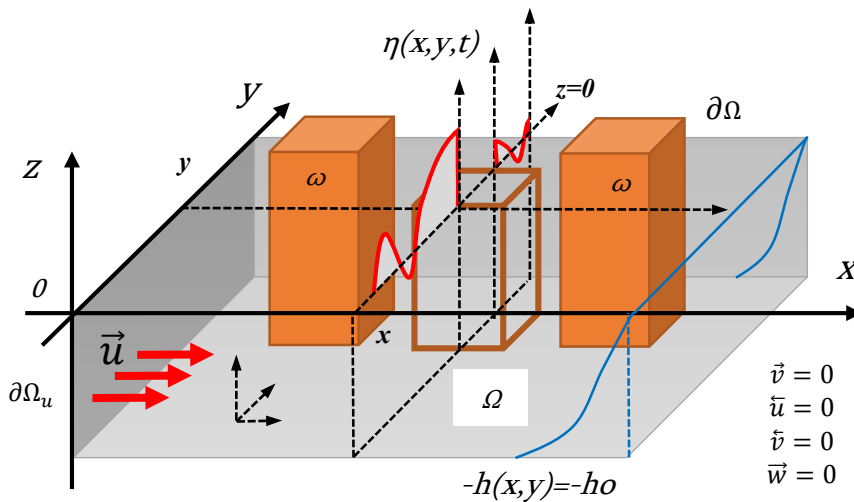
იტერაციული პროცესი გრძელდება ვიდრე არ შესრულდება ერთდროულად ორივე პირობა

$$\begin{cases} \|\tilde{r}^{s+1}\| < \varepsilon \|\tilde{r}^0\|; & \tilde{r}^{s+1} = \tilde{A}\varphi^{s+1} - \tilde{f}^{s+1} \\ \|r^{s+1}\| < \varepsilon \|r^0\|; & r^{s+1} = A\varphi^{s+1} - f^{s+1} \end{cases} \quad (3.8.34)$$

სადაც ε არის ამონახსნის სიზუსტე [62, 63].

3.9. წყალსატევში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების რიცხვითი მოდელირება სამგანზომილებიანი (3D) ამონახსნის გამოყენებით

სამგანზომილებიანი (3D) ამოცანის გამოყენება მიზანშეწონილია განიერი წყალსატევებისათვის ან/და დატბორილ ქვედა ბიეფში შემოდინებული ღვარცოფული ან მეწყერული ნაკადით გამოწვეული ექსტრემალური ტალღების გათვლებისათვის, ამასთან შესაძლებელია გათვალისწინებული იქნეს რეალური ფსკერის მოხაზულობა და დატბორილ ტერიტორიაზე არსებული ჰიდროტექნიკური, სამშენებლო, საგზაო თუ ნაპირდამცავი ნაგებობები. მაგალითისათვის განვიხილოთ დატბორილ ტერიტორიაზე არსებული მაგისტრალური ხიდი და მისი ბურჯები.



(ნახ.3.9.1) მაგისტრალურ ხიდთან ახლოს წყალდიდობის დროს დატბორილ ტერიტორიაზე ღვარცოფული/მეწყერული ნაკადის შედინების სქემატიზირებული საანგარიშო სქემა

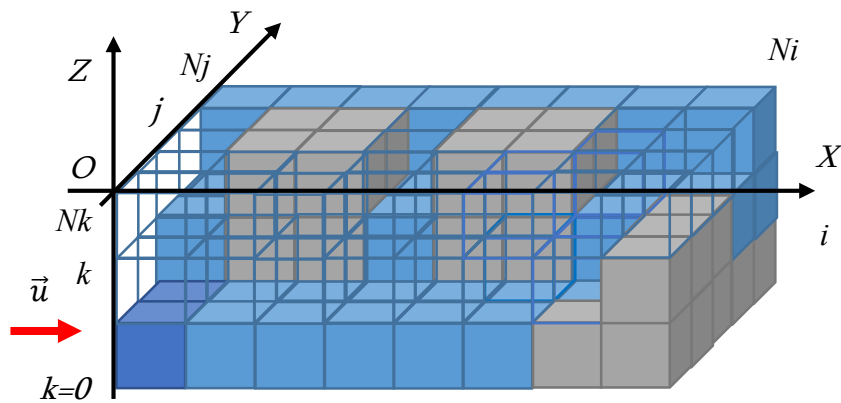
დავუშვათ რომ ღვარცოფული ან/და მეწყერული ნაკადის შემოსვლას აქვს იმპულსური ხასიათი $x = 0$ ფერდიდან და აღიწერება ფორმულით

$$\vec{u} = \begin{cases} u_{cell}(x, z, t) & t \leq t_{cell} \\ 0 & t > t_{cell} \end{cases} \quad (3.9.1)$$

ხოლო ყველა სხვა სიჩქარეები ნულოვანია

$$\vec{v} = \vec{w} = \vec{u} = \vec{w} = 0 \quad (3.9.2)$$

ცხადია $u_{cell}(x, z, t)$ ფუნქციის შერჩევა უნდა მოხდეს მრავალი ფაქტორის გათვალისწინებით რომელიც ცალკე კვლევის საგანს შეადგენს, მაგრამ ზოგადობის შეუზღუდავად ძალიან სწრაფი და ხანმოკლე (იმპულსური) შემოდინების დროს შესაძლებელია ავიღოთ როგორც გარკვეულ არეზე $(x, z) \in \partial\Omega_v$ განსაზღვრული მუდმივი ფუნქცია.



(ნახ.3.9.2) საანგარიშო რიცხვითი ბადე ნულოვანი არის გათვალისწინებით ძირითადი არის შიგნით და ძირითად საზღვარზე

გარდა ამისა მოცემულია აგრეთვე ნაგებობები/ბურჯები რომელთა არე და საზღვარი აღვნიშნოთ შესაბამისად $\omega + \partial\omega$, მოცემულ არის თანაკვეთა $\Omega + \partial\Omega$ არეზე გვაძლევს შიდა მყარ საზღვარს $\partial\omega$ და შიდა ეგრეთწოდებულ ნულოვან არეს ω . მიღებული არესათვის მართებულია ნეიმანის სასაზღვრო პირობები, ხოლო ნულოვან არეზე პოტენციალი ნულია.

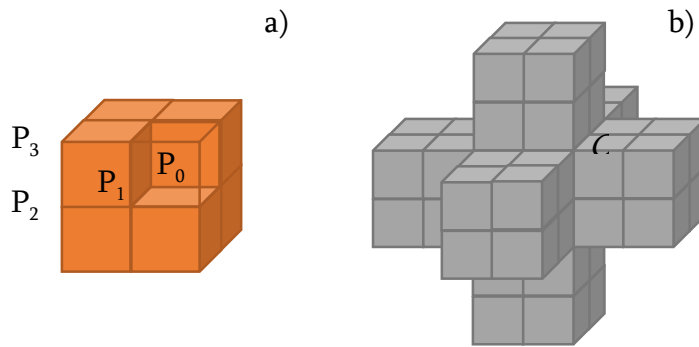
ნეიმანის (მეორე გვარის) სასაზღვრო პირობა ნულოვან საზღვარზე

$$\frac{\partial}{\partial n} \varphi \Big|_{\partial\omega} = 0 \quad (3.9.3)$$

განტოლება ნულოვან არეზე

$$\varphi|_{\omega} = 0 \quad (3.9.4)$$

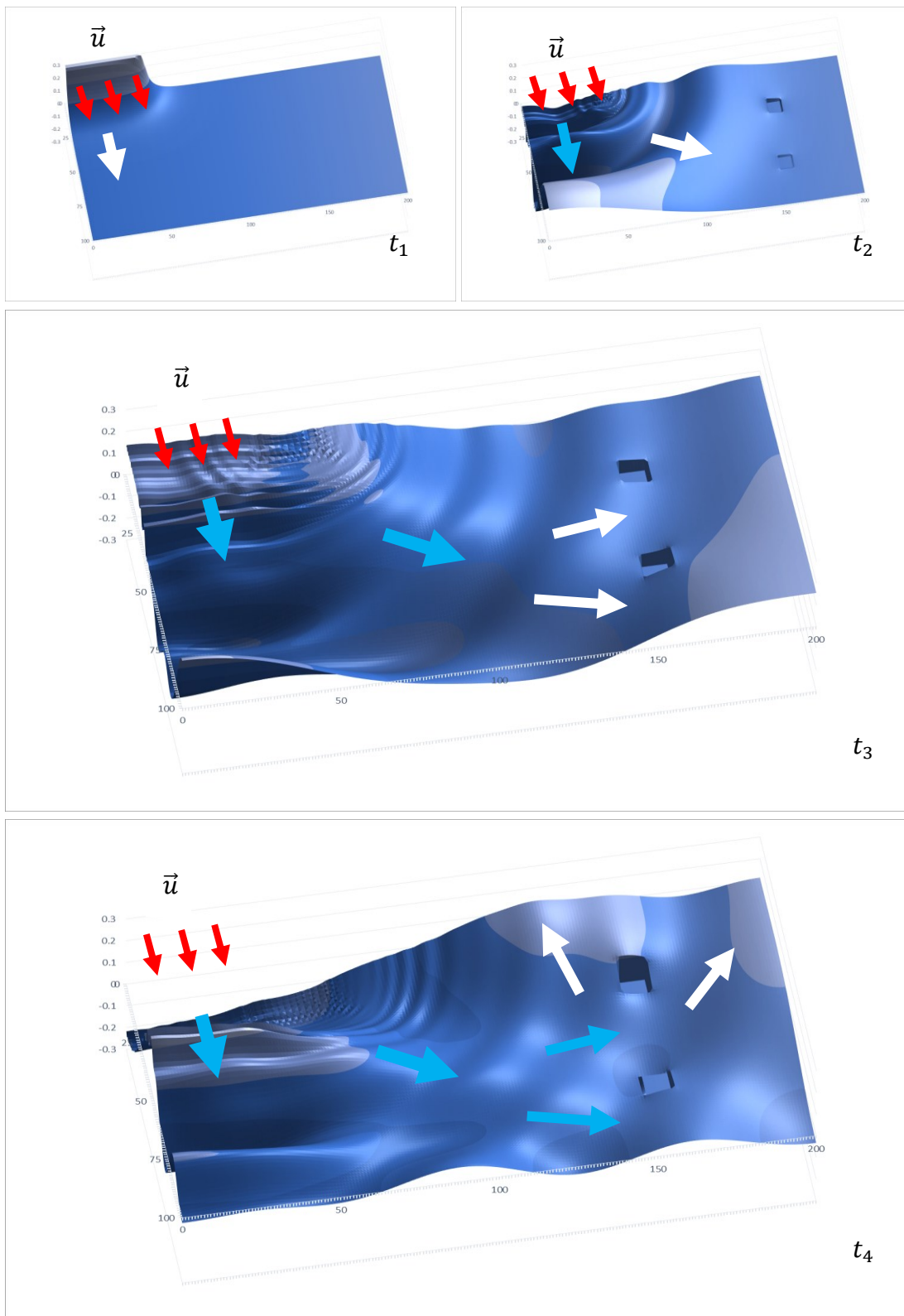
(3.9.1)-(3.9.4) პირობების დამატება სისტემაზე საკმარისია ამოცანის რიცხვითი მოდელირებისათვის. რაც შეეხება ფსკერისა და ფერდების ზუსტ აპროქსიმაციას აქაც ვიყენებთ მცირე ზომის მართკუთხა პარალელეპიპედებით არეს დეტალიზაციის პრინციპს და ნულოვანი არეებით შეივსება მყარი არე ძირითადი საზღვრის გარეთ.



(ნახ.3.9.3) საანგარიშო რიცხვითი ბადე ნულოვან არეზე და მის საზღვარზე. a) მარტივი ფორმა; b) რთული ფორმა ყველა შესაძლო სახის სასაზღვრო წერტილების ერთობლიობით

ამოცანის შესაბამისი რიცხვითი ბადე ნულოვანი არეს დამატებითი წერტილების გათვალისწინებით მოცემულია (3.9.2) ნახაზზე. განსახილველი ამოცანა გარდა რეგულარული და საზღვრის წერტილებისა შეიცავს განსაკუთრებულ წერტილებს, რომელიც წარმოადგენს არეს შიგნით მოთავსებული სხეულის ზედაპირს.

ნახაზზე (ფიგ.3.9.3) მოცემულია ნულოვანი არეს მაგალითები, მარტივი და რთული ფორმების სახით. შევაფასოთ მარტივი ფორმა (3.2.2.ა). მოცემული ფორმა შეიცავს მინიმალური აუცილებელი წერტილების რაოდენობას ამოცანის რიცხვით ბადეზე აპროქსიმაციისათვის. ფორმის შიგნით არის ნულოვანი წერტილი P_0 რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა $\varphi_{i,j,k}^n = 0$. წერტილისათვის P_m და მისი ანალოგური ნულოვანი საზღვრის წერტილებისათვის ადგილი აქვს უკვე განხილულ ნეიმანის სასაზღვრო პირობას, როდესაც სიჩქარეები ნულოვანია.



(ნახ.3.9.4) სამგანზომილებიანი 3D რიცხვითი ამონახსენით მიღებული ღვარცოფული ნაკადის შემოსვლის შედეგად წარმოქმნილი განივი, გრძივი და ინტერფერენციული რყევების ამსახველი პროფილები.

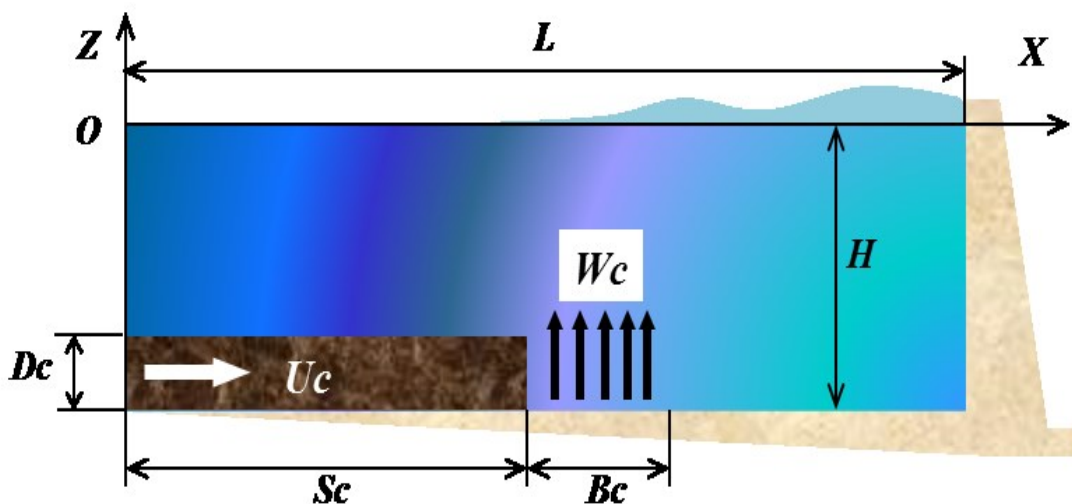
გრაფიკზე (ნახ.3.9.4) მოცემულია განხილული საანგრიშო სქემებით ამოხსნილი ამოცანის შედეგად მიღებული განივი, გრძივი და ინტერფერენციული რყევების ტალღური პროფილები. გრაფიკებიდან ჩანს თუ როგორ ხდება სხვადასხვა დროს ტალღის გავრცელება და შესაბამის ფერდზე არეკვლა, საათის ისრის საწინააღმდეგო თანამიმდევრობით, რაც ერთნაირად განაპირობებს ტალღებით გამოწვეულ საფრთხეს როგორც მთლიან მიდამოში, ისე ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე და კიდევ ერთხელ ადასტურებს სამგანზომილებიანი (3D) მოდელების გამოყენების აუცილებლობას ზუსტი გათვლების საჭიროებისათვის.

აღსანიშნავია, რომ დამუშავებული მეთოდიკით შესაძლებელია არა მარტო ღვარცოფული და მეწყერული მოვლენების დროს წარმოქმნილი ტალღების შესწავლა, არამედ წყალსატევებსა და მდინარეებში ნაპირსამაგრი და სხვა სახის ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე ექსტრემალური სიტუაციების მახასიათებლების, სიჩქარისა და წნევის გავლენის შეფასებაც. გარდა ამისა მოცემული მეთოდიკა შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ზღვის სანაპირო ზოლის ექსტრემალური სიტუაციების გამომწვევი მოვლენების შესწავლის დროსაც [8, 10, 15].

4. წყალსაცავში ღვარცოფული ნაკადის შემოდინების მათემატიკური მოდელირება, მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის ორგანზომილებიანი (2D) განტოლების ანალიზური ამონახსენის გამოყენებით

4.1. ამოცანის ფორმულირება, წყალსაცავში ღვარცოფული ნაკადის გრძივი შემოდინებით წარმოქმნილი დაუმყარებელი ამოცანის ანალიზური ამონახსენი

ამოცანის ფორმულირება წარმოებს მცირეამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის საფუძველზე, იმ დაშვებით რომ წყალსაცავში სითხე იდეალურია, არაკუმშვადი და მოძრაობა პოტენციურია. ამ შემთხვევაში ვერტიკალურად ბრტყელი ამოცანის ფორმულირება მდგომარეობს $\Delta\phi = 0$ ლაპლასის განტოლების ამოხსნაში, შესაბამისი საწყისი და სასაზღვრო პირობების დროს, სადაც $\phi(x, z, t)$ არის სიჩქარის პოტენციალი და $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ არის ლაპლასის ოპერატორი.



(ნახ.4.1.1) სტრატეფიცირებული ღვარცოფის წყალსაცავში შემოდინებისა და მის ფსკერზე მოძრაობის შედეგად წარმოქმნილი არასტაციონარული ტალღური პროცესის განსაზღვრის საანგარიშო სქემა

კერძოდ თუ განვიხილავთ L სიგრძისა და H სიღრმის მართკუთხედის ფორმის წყალსაცავის საანგარიშო სქემას (ნახ.4.1.1), ფსკერზე ღვარცოფის შემოდინების პირობა იქნება

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = w_{cell} = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, S_{cell}) \\ w_c = \frac{D_c u_c}{B_c} & ; x \in [S_{cell}, S_{cell} + B_c] \\ 0 & ; x \in (S_{cell} + L) \\ 0 & ; t_c < t \end{cases} \quad ; 0 \leq t \leq t_c \quad (4.1.1)$$

$$S_{cell} = \begin{cases} u_c t & ; 0 \leq t \leq t_c \\ S_c = u_c t_c & ; t_c < t \end{cases}$$

სხვა სასაზღვრო პირობები იგივე რჩება და ამოცანას აქვს შემდეგი სახე

უწყვეტობის განტოლება

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.2)$$

სასაზღვრო პირობა მყარ საზღვრებზე

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=-H} = w_{cell} \quad (4.1.3)$$

თავისუფალი ზედაპირის პირობა

$$\left. \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (4.1.4)$$

ამპლიტუდა

$$\eta = - \left. \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} \quad (4.1.5)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემის ანალიზური ამოხსნისათვის ჯერ გამოიყენება ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის მეთოდი t -ცვლადის მიმართ, შემდეგ კი ფურიეს სასრული კოსინუს-გარდაქმნის მეთოდი. მიღებული ϕ ფუნქცია-ასახვის საშუალებით იძებნება მისი შესაბამისი ფუნქცია-ორიგინალი $\varphi_m(z, t)$, შემდეგ კი საძიებელი ამოცანის ფუნქცია-ამონახსენი $\varphi(x, z, t)$, შემდეგი სახით

$$\varphi(x, z, t) = \frac{1}{2} \varphi_0(z, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\cos(a_m x) \cdot \varphi_m(z, t)) \quad (4.1.6)$$

პოტენციალის გამოთვლის გამოსახულებიდან განისაზღვრება წყალსაცავის წყლის ზედაპირზე ტალღური პროფილის ამსახველი ფუნქციონალური დამოკიდებულება შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \\ &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_0(z=0, t)}{\partial t} - \frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\cos(a_m x) \frac{\partial \varphi_m(z=0, t)}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

შესაძლებელია აგრეთვე განვსაზღვროთ, ჰიდროდინამიკური წნევები წყალსაცავის ნებისმიერ კვეთში, კერძოდ კაშხლის სადაწნეო ზედაპირზე, როდესაც $x = L$

$$p(z, t) = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=L} = \rho \frac{\partial \varphi_0(z, t)}{\partial t} + \rho \sum_{m=1}^{\infty} \left(\cos(a_m L) \frac{\partial \varphi_m(z, t)}{\partial t} \right) \quad (4.1.8)$$

φ_0, φ_m ფუნქციების გამოთვლა დეტალურად განხილულია თ.გველესიანის ნაშრომებში, მათ შორის [6, 7, 32, 33], ამიტომაც აქ აღარ განვიხილავთ.

ამავე შრომების თანახმად, ზოგადობის შეუზღუდავად $\eta(x, t)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\eta(x, t) = \eta_0(x, t) + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m(x, t) \quad (4.1.9)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \eta_0(x, t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^t w_0(x, \tau) d\tau & ; 0 \leq t \leq t_c \\ \eta_0(x, t_c) & ; t_c < t \end{cases} \\ \eta_m(x, t) &= E_m \int_0^t w_m(x, \tau) \cos(b_m(t - \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

მიღებულ განტოლებებში განვსაზღვროთ შემავალი სიჩქარეები მოცემული სიდიდეების მიხედვით

$$w_0(x, t) = \frac{2}{L} w_c \int_{S_c(t)}^{S_c(t)+B_c(t)} dx = \frac{2w_c}{L} B_c$$

$$w_m(x, t) = \frac{2}{L} w_c \int_{S_c(t)}^{S_c(t)+B_c(t)} \cos(a_m x) dx$$
(4.1.11)

შესაბამისი აღნიშვნებისა და ინტეგრალების გამოთვლის შემდეგ საბოლოოდ განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$\eta(x, t) = \eta_0(t) + \sum_{m=1}^{N_m} \eta_m(x, t)$$

$$\eta_0(t) = \frac{w_c}{L} (B_c I_0(t)), \quad \eta_m(x, t) = \frac{w_c}{L} \left(\frac{2}{a_m} E_m(x) I_m(t) \right)$$

$$E_m(x) = \frac{\cos(a_m x)}{\operatorname{ch}(a_m H)}, \quad w_c = \frac{D_c u_c}{B_c}$$

$$I_0(t) = \begin{cases} t & ; 0 \leq t \leq t_c \\ t_c & ; t_c < t \end{cases}$$

$$I_m(t) = \frac{(\cos b_m - 1) J_{1,m}(t) + \sin(b_m) J_{2,m}(t)}{c_m^2 - d_m^2}$$

$$J_{1,m}(t) = c_m \cos(d_m t) +$$

$$+ \begin{cases} -c_m \cos(c_m t) & 0 \leq t \leq t_c \\ d_m \sin(c_m t_c) \sin(d_m \Delta t) - c_m \cos(c_m t_c) \cos(d_m \Delta t) & t_c < t \end{cases}$$

$$J_{2,m}(t) = -d_m \sin(d_m t) +$$

$$+ \begin{cases} c_m \sin(c_m t) & 0 \leq t \leq t_c \\ d_m \cos(c_m t_c) \sin(d_m \Delta t) + c_m \sin(c_m t_c) \cos(d_m \Delta t) & t_c < t \end{cases}$$

$$a_m = \frac{\pi}{L} m, \quad b_m = a_m B_c, \quad c_m = a_m u_c$$

$$d_m = \sqrt{g a_m \operatorname{th}(a_m H)}, \quad \Delta t = t - t_c$$

$$N_m \rightarrow \infty$$
(4.1.12)

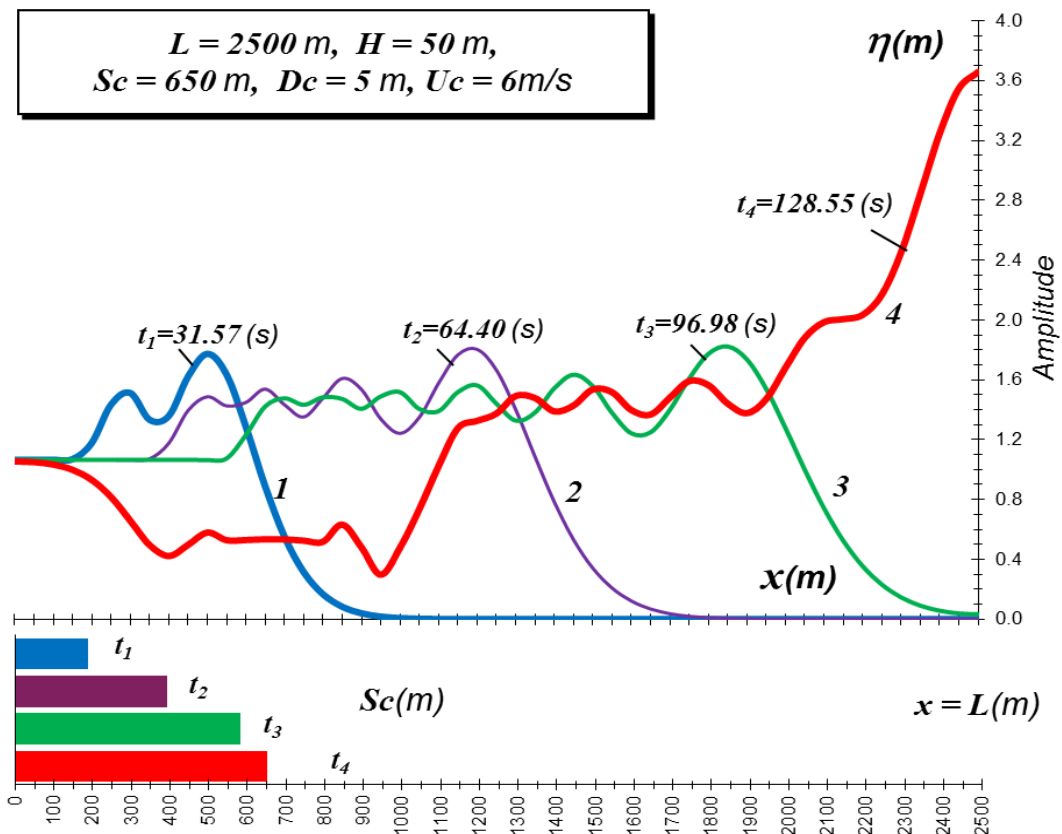
განვიხილოთ ღვარცოვით წარმოქმნილი ტალღური პროცესის მიღებული ფორმულით გაანგარიშების მაგალითი.

მაგალითი:

ღვარცოვი, რომლის სიმაღლეა $D_c=5\text{მ}$ შემოდის $L=2500\text{მ}$ სიგრძისა და $H=50\text{მ}$ სიღრმის წყალსაცავში $S_c=650\text{მ}$ მანძილზე $u_c=6\text{მ/წმ}$ სიჩქარით. შევაფასოთ გადადინების საფრთხე.

ამონახსენი:

ავილოთ საანგარიშო სქემა (ნახ.4.1.1). გამოვითვალოთ ამპლიტუდის მნიშვნელობები დროის სხვადასხვა მომენტისათვის $x = L$ კაშხლის ქიშხე და ავაგოთ $\eta(L, t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი, რომლის მიხედვითაც შეგვიძლია შევარჩიოთ t_{max} რომელსაც შეესაბამება η_{max} მაქსიმალური ამპლიტუდა. ავაგოთ ტალღური პროფილები რომელიც შეესაბამება დროის სხვადასხვა მომენტებს მაქსიმალური ამპლიტუდის შესაბამისი დროის ჩათვლით. (ნახ.4.1.2) გამოსახულია მოცემული მაგალითის შესაბამისი ტალღური პროფილები დროის სხვადასხვა მომენტისათვის $t_1 = 31.6, t_2 = 64.4, t_3 = 97.0$ წმ, რომელიც აღებულია ვიდრე ნაკადი მოძრაობს და $t_4 = 128.5$ წმ მაქსიმალური აგორების დროს, როდესაც ნაკადის მოძრაობა შეჩერებულია.



(ნახ.4.1.2) ღვარცოფის ფსკერზე მოძრაობის შედეგად დროის სხვადასხვა მომენტში წარმოქმნილი ტალღური პროფილები და ღვარცოფის მიერ განვლილი მანძილი

როგორც ნახაზიდან ჩანს, აღნიშნული ღვარცოფის წყალსაცავში დაახლოებით $\frac{1}{4}$ მანძილზე შემოსვლის შედეგად კაშხალთან მაქსიმალური დონის აწევა ტოლია $\eta_{max}=3.6$ მეტრის.

შეფასება:

მოცემულ მაგალითში განხილულია საშუალო სიმაღლის კაშხლის შემთხვევა, როდესაც მარაგი ნორმალური შეტბორვისა და კაშხლის ქიმის დონეს შორის შეადგენს 1.5...2.5 მეტრს. ამგვარად განხილული ღვარცოფული მოვლენის შემთხვევაში ადგილი ექნება ტალღის გადადინებას კაშხლის ქიმზე, რომელმაც დროის საკმარისი ხანგრძლივობის შემთხვევაში შეიძლება გამოიწვიოს კაშხლის წარეცხვა და ნგრევა ან/და ქვედა ბიეფში დატბორვა. რაც შეეხება გადადინების ხანგრძლივობის განსაზღვრას, განვიხილავთ შემდგომ თავებში.

4.2. წყალსაცავში გრძივი ტალღური რყევის პროცესის დამახასიათებელი ნიშნები

(ნახ.4.1.1) საანგარიშო სქემის თანახმად ღვარცოფის მიერ გამოდევნილი წყლის მოცულობა

$$D_c S_{cell}(t) = B_c w_c \int_0^t d\tau \quad 0 \leq t \leq t_c \tag{4.2.1}$$

$$D_c S_c = B_c w_c t_c \quad t_c < t$$

წარმოვდგინოთ (4.1.12) ზოგადი სახით შემდეგნაირად

$$\eta(x, t) = \eta_0(t) + \eta_k(x, t)$$

$$\eta_0(t) = \frac{w_c}{L} B_c \begin{cases} t & t \leq t_c \\ t_c & t > t_c \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$$\eta_k(x, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \eta_m(x, t) = \frac{w_c}{L} \psi(x, t, L, H, B_c, t_c)$$

ψ ფუნქციის განზომილებაა მ.წმ. ჩვენთვის საინტერესოა შემთხვევა როდესაც ღვარცოფის შემოდინება დასრულებულია ანუ $t > t_c$. (4.2.1)

ფორმულის თანახმად მივიღებთ

$$\eta_0(t) = \frac{D_c S_c}{L}, \quad \eta_k(x, t) = \frac{D_c S_c}{B_c t_c L} \psi = \frac{D_c u_c}{B_c L} \psi, \quad t > t_c \quad (4.2.3)$$

და

$$\eta(x, t) = \frac{D_c}{L} \left(S_c + \frac{u_c}{B_c} \psi \right), \quad t > t_c \quad (4.2.4)$$

მოცემული კვეთისთვის და დროის ფიქსირებული მომენტისათვის, მაგალითად, როდესაც $x = L$ და ამპლიტუდა აღწევს მაქსიმუმს $\eta = \eta_{max}$ ფორმულა (4.2.4) შეიძლება ასეთი სახით ჩაიწეროს

$$\eta = \frac{D_c}{L} \left(S_c + \frac{u_c}{B_c} \bar{\psi}(L, H, S_c, u_c, B_c) \right) \quad (4.2.5)$$

მიღებული (4.2.5) ამონახსენი შესაძლებელია განვაზოგადოთ თუ გადავწერთ არაგანზომილებიანი ფორმით

$$\eta^* = \frac{D_c^*}{L^*} \left(S_c^* + \frac{u_c^*}{B_c^*} \bar{\psi}^*(L^*, S_c^*, u_c^*, B_c^*) \right) = \eta_0^* + \eta_k^* \quad (4.2.6)$$

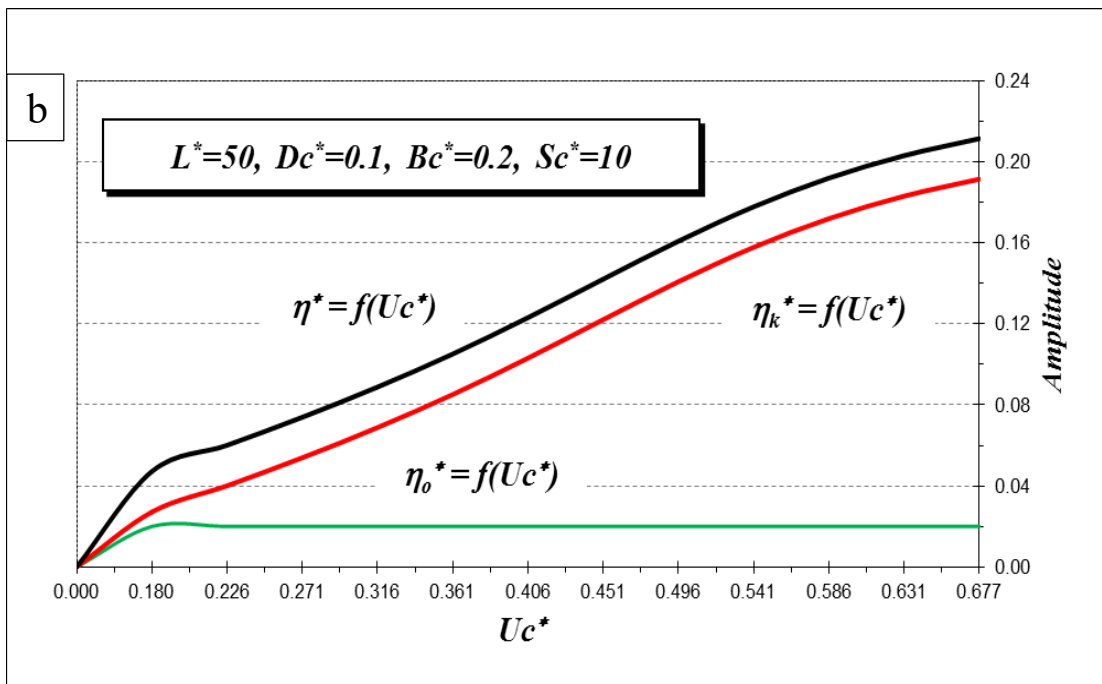
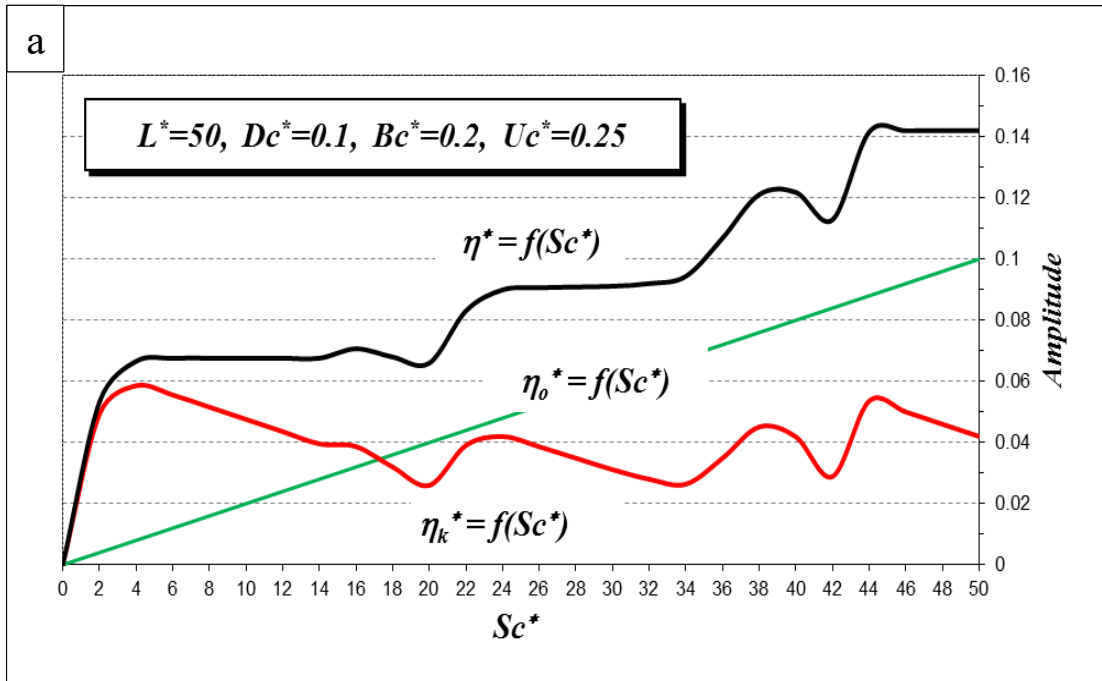
სადაც

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^*(L^*, S_c^*, u_c^*, B_c^*) &= \bar{\psi} \frac{1}{H} \sqrt{\frac{g}{H}} \\ \eta^* &= \frac{\eta}{H}, \quad \eta_0^* = \frac{D_c^*}{L^*} S_c^* = \frac{\eta_0}{H}, \quad \eta_k^* = \frac{D_c^*}{L^*} \frac{u_c^*}{B_c^*} \bar{\psi}^* = \frac{\eta_k}{H} \\ L^* &= \frac{L}{H}, \quad D_c^* = \frac{D_c}{H}, \quad S_c^* = \frac{S_c}{H}, \quad B_c^* = \frac{B_c}{H}, \quad u_c^* = \frac{u_c}{\sqrt{gH}} \end{aligned}$$

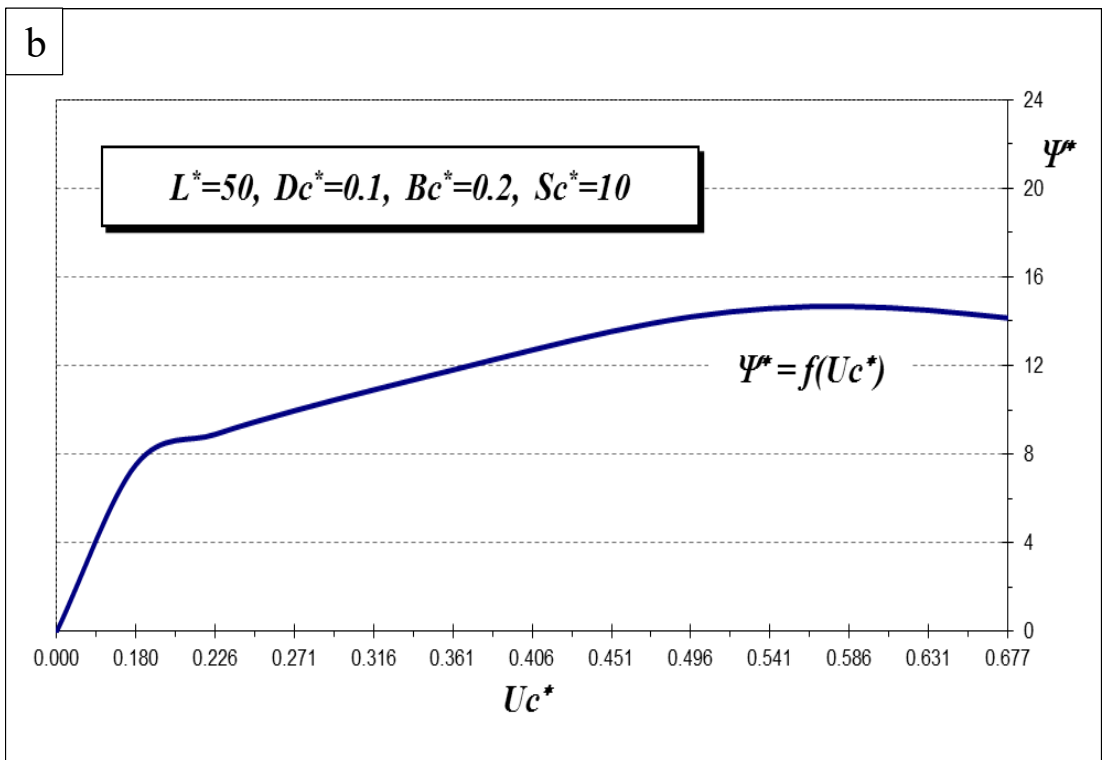
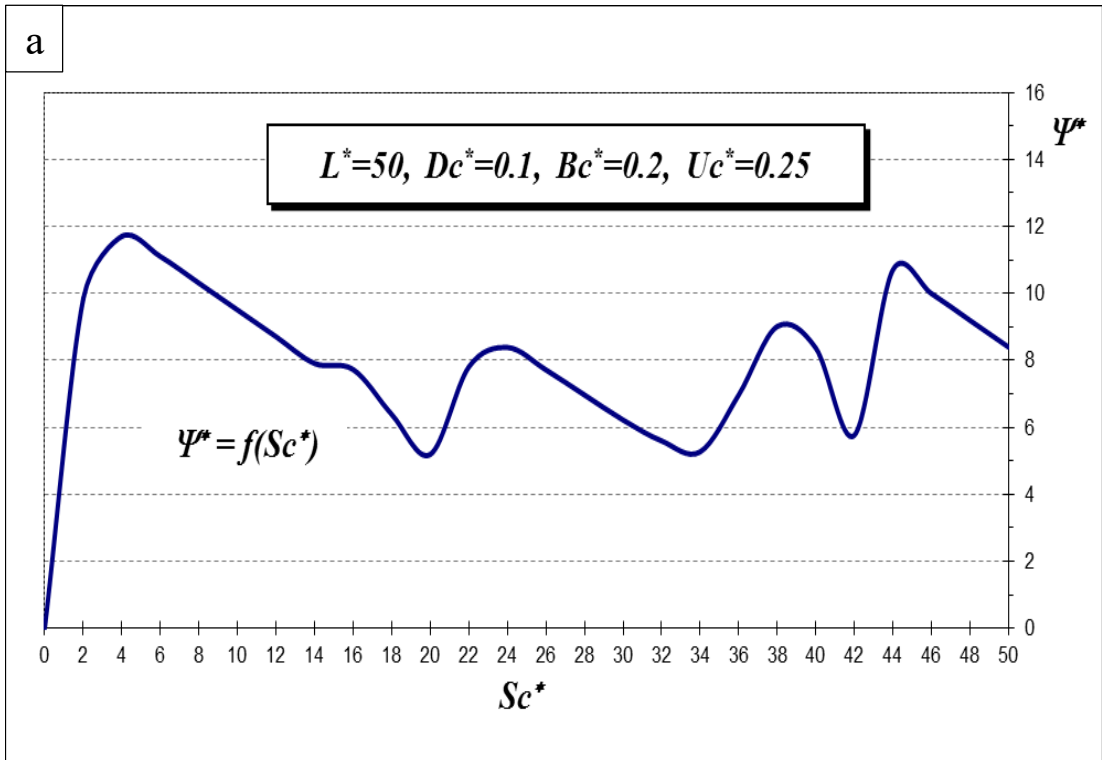
ფორმულებიდან უშუალოდ ჩანს, რომ ღვარცოფის მიერ გენერირებული ტალღის η ამპლიტუდა მისი D_c სისქის პირდაპირპროპორციულია. ტალღის ამპლიტუდაზე სხვა საანგარიშო პარამეტრების B_c, S_c, u_c გავლენის განსაზღვრის მიზნით ჩატარებული იყო კომპიუტერული გათვლები. შედეგებმა აჩვენეს, რომ B_c შემფოთების ზონის სიგრძე მნიშვნელოვნად არ ახდენს გავლენას მაქსიმალური ტალღის სიმაღლეზე, ამიტომ აღნიშნული გაანგარიშებების დროს ის აიღებოდა როგორც მუდმივი სიდიდე [72, 73, 75].

კაშხალთან S_c, u_c პარამეტრების გავლენა მოსული პირველი ტალღის η_{max} მაქსიმალურ ამპლიტუდაზე მოცემულია ნახ.4.2.1)(a,b), ხოლო

წყალსაცავში წარმოქმნილი რყევითი პროცესის შესახებ წარმოდგენას გვაძლევს (ნახ.4.2.2)(a,b) დამოკიდებულების გრაფიკები.



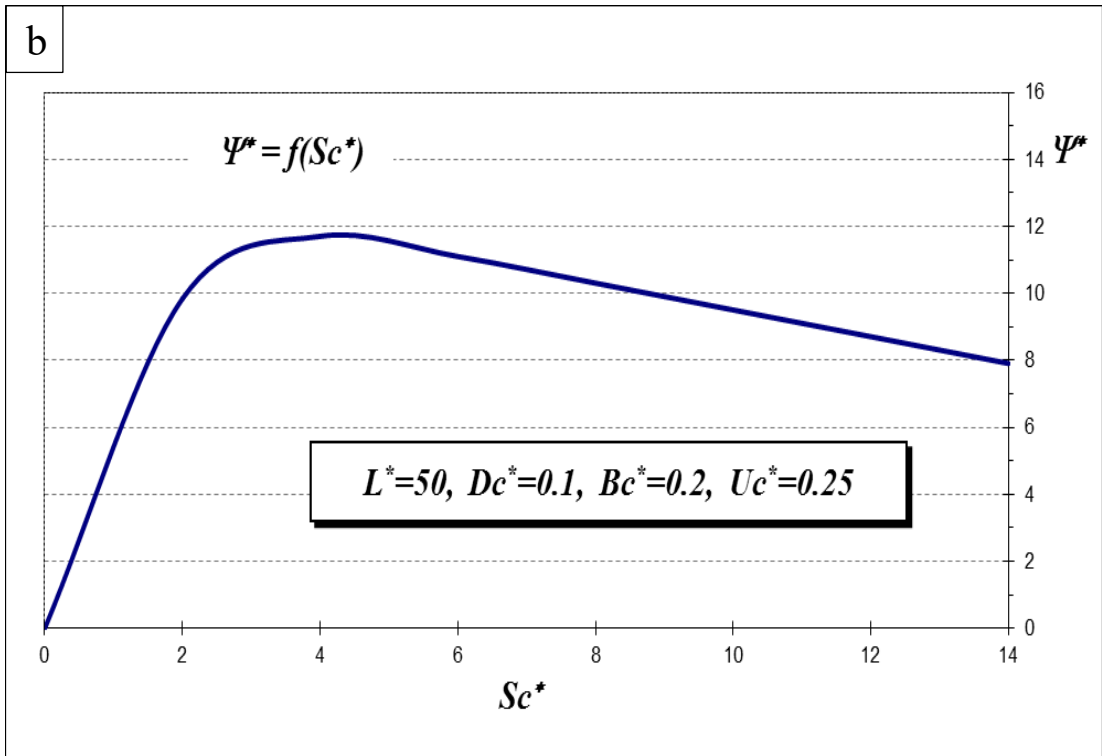
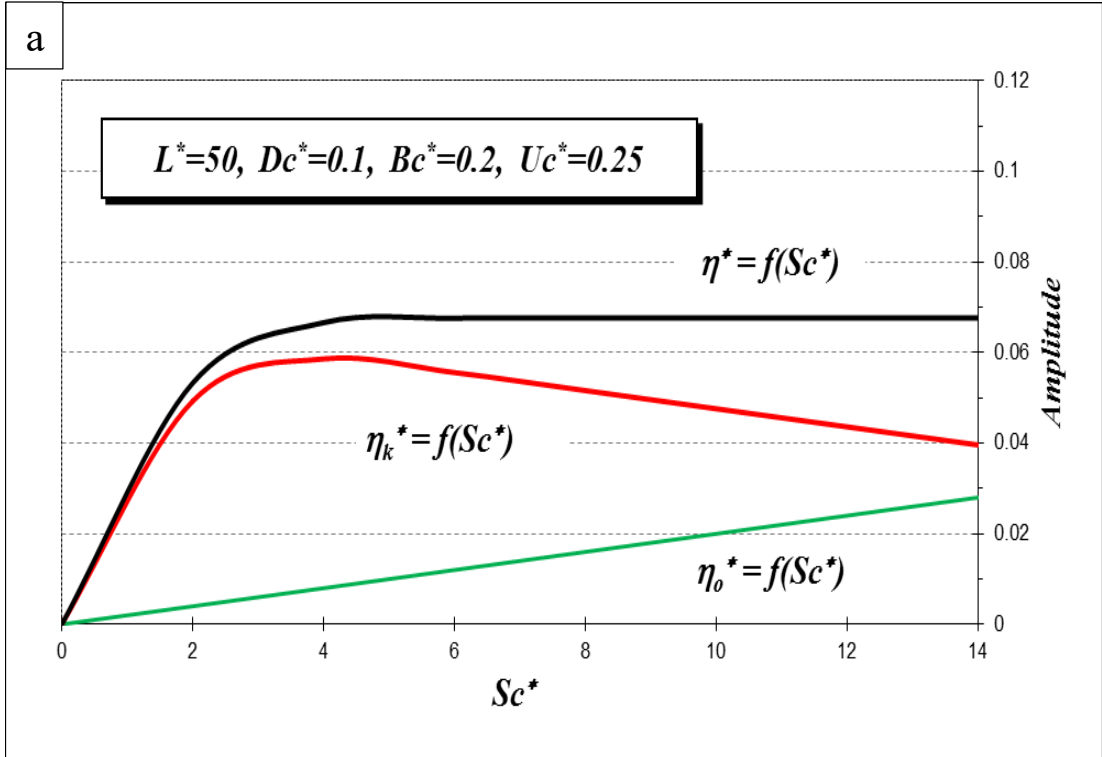
(ნახ.4.2.1) კაშხლის კვეთში მაქსიმალური ამპლიტუდის ღვარცოვის პარამეტრებზე დამოკიდებულების ამსახველი გრაფიკები ტალღების არეკვლისა და ინტერფერენციის გათვალისწინებით: (a) ღვარცოვის მიერ განვლილ მანძილზე $\eta^* = f(S_c^*)$ დამოკიდებულება; (b) ღვარცოვის სიჩქარეზე $\eta^* = f(u_c^*)$ დამოკიდებულება



(ნახ.4.2.2) კაშხლის კვეთში ტალღური ონდულაციების ღვარცოფის პარამეტრებზე დამოკიდებულების ამსახველი გრაფიკები არეკვლისა და ინტერფერენციის გათვალისწინებით: (a) ღვარცოფის მიერ განვლილ მანძილზე $\psi^* = f(Sc^*)$ დამოკიდებულება; (b) ღვარცოფის სიჩქარეზე $\psi^* = f(u_c^*)$ დამოკიდებულება

გრაფიკების ფორმას განაპირობებს ღვარცოფით გენერირებული პირდაპირი და წყალსაცავის ბორტებიდან $x = 0, x = L$ არეკლილი ტალღების ურთიერთზედდება, ანუ ინტერფერენციული ონდულაციები. გამოვლენილი პიკური აწევები ძირითადად განპირობებულია წყალსაცავის საკუთარი რხევების პირველი და მეორე ჰარმონიკის (ფორმის) რეზონირებით. მართლაც, როდესაც $S_c^* = 2 \dots 4, x = 0$ ბორტის სიახლოვეს (ნახ.4.2.1)(a)-ს მიხედვით წყალსაცავში აღიმკვრება ყველაზე გრძელი ტალღის შესაბამისი პირველი ჰარმონიკა, რომლის პერიოდია დაახლოვებით $T_1 = \frac{2L}{\sqrt{gH}}$. ამ დროს კაშხალთან მოსული მაქსიმალური ტალღის ამპლიტუდას ძირითადად η_k ონდულაციური შემადგენელი განაპირობებს. იგივე მიზეზით აიხსნება გრაფიკებზე (ნახ.4.2.1)(a) და (ნახ.4.2.2)(a), $\eta_k^* = f(S_c^*)$ და $\psi^* = f(S_c^*)$ მეორე მაქსიმალური პიკის არსებობა, როდესაც $S_c^* = 44 \dots 45, x = L$ კვეთის სიახლოვეს. ხოლო, როდესაც $S_c^* = 23 \dots 24, x = L/2$ მიდამოში, რეზონანს უკვე მეორე ფორმის ჰარმონიკა განაპირობებს, რომლის პერიოდია დაახლოვებით $T_2 = \frac{L}{2\sqrt{gH}}$ და შეესაბამება $\eta_k^* = f(S_c^*)$ და $\psi^* = f(S_c^*)$ შედარებით უფრო მცირე პიკური აწევა. დაახლოებით ასეთივე სურათი აღინიშნებოდა პროფესორ თ.გველესიანის მიერ წყალსაცავებში მიწისძვრის შედეგად წარმოქმნილი ცუნამის ტიპის ტალღების განხილვისას.

(ნახ.4.2.3) გამოსახულია $\eta_k^* = f(S_c^*)$ და $\psi^* = f(S_c^*)$ დამოკიდებულებების გრაფიკები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ღვარცოფმა შეწყვიტა მოძრაობა, ანუ $t > t_c$. და არეკვლის პროცესები $x = 0$ კვეთიდან არ არის მხედველობაში მიღებული. როგორც ამ გრაფიკებიდან ჩანს, ღვაცოფის მოცემული სიჩქარის შემთხვევაში $u_c^* = 0.25$, მაშინ როდესაც $S_c^* \leq 4.5$, კაშხალთან მოსული პირველი (პირდაპირი) ტალღის ამპლიტუდა S_c^* პარამეტრის მატებასთან ერთად იზრდება და აღწევს მაქსიმუმს $\eta_{max}^* \approx 0.07$. იმ შემთხვევაში თუ $S_c^* > 4.5$, პირველი ტალღა უკვე მოასწრებს კაშხალთან მოსვლას და შემდეგ მისგან არეკვლას, ამიტომ ამ დროს კაშხალთან წყლის დონის ზრდას ადგილი არ აქვს.



(ნახ.4.2.3) კაშხლის კვეთში მაქსიმალური ამპლიტუდისა და ტალღური ონდულაციების მახასიათებლის ღვარცოფის შემოდინების სიგრძეზე დამოკიდებულების ამსახველი გრაფიკები არეკვლისა და ინტერფერენციის გარეშე: (a) $\eta^* = f(Sc^*)$; (b) $\psi^* = f(Sc^*)$

მიღებული ფუნქციონალური დამოკიდებულებების საფუძველზე ჩატარებული კომპიუტერული გაანგარიშებათა შედეგები, რომლებიც წარმოდგენილია გრაფიკების სახით შესაძლებლობას იძლევა განისაზღვროს საანგარიშო პარამეტრების გავლენა ტალღების მაქსიმალურ ამპლიტუდებზე კაშხლის კვეთში. კერძოდ, აღნიშნული გრაფიკების დახმარებით ადვილია განხორციელდეს ღვარცოფის სიჩქარისა და მის მიერ ფსკერზე გავლილი მანძილის მოცემული (სავარაუდო) მნიშვნელობებზე დაყრდნობით კაშხალთან წყლის შესაძლო მაქსიმალური დონის აწევის სწრაფი პროგნოზი, როგორც კაშხალთან პირველი (პირდაპირი) ტალღის მოსვლის შემთხვევაში, ასევე ტალღების არეკვლის და ინტერფერენციის გათვალისწინებით. განვიხილოთ მოყვანილი გრაფიკების პრაქტიკული გამოყენების მაგალითები.

მაგალითი 1:

ღვარცოფი, რომლის სიმაღლეა $D_c = 3$ მ შემოდის $L = 1500$ მ სიგრძისა და $H = 30$ მ სიღრმის წყალსაცავში $S_c = 1/5 L = 300$ მ მანძილზე $u_c = 4.6$ მ/წმ სიჩქარით. შევაფასოთ როგორ იცვლება მაქსიმალური η ტალღის ამპლიტუდა კაშხალთან u_c ღვარცოფის სიჩქარის ცვლილებასთან ერთად.

ამონახსენი:

გადავიყვანოთ არაგანზომილებიან პარამეტრებში $D_c^* = 0.1$, $L^* = 50$, $S_c^* = 10$ და $u_c^* = \frac{u_c}{\sqrt{gH}} = 0.27$. ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკული დამოკიდებულება (4.2.6) ფორმულის მიხედვით, ჩვენს შემთხვევაში (ნახ.4.2.1)(b). გრაფიკიდან ჩანს რომ ტალღის ამპლიტუდა მოცემული სიჩქარისთვის აღწევს $\eta = \eta^* H = 0.07 \cdot 30 = 2.1$ მ.

შეფასება:

თუ სიჩქარეს გავზრდით 1.5-ჯერ, ანუ $u_c^* = 0.405$ მაქსიმალური ამპლიტუდა კაშხალთან იქნება $\eta = 0.13 \cdot 30 = 3.9$ მ. ანუ თუ ღვარცოფის

სიჩქარე მოიმატებს 1.5-ჯერ ამპლიტუდა კაშხალთან გაიზრდება 1.85-ჯერ რამაც შესაძლოა წარმოშვას გადადინების საფრთხე.

მაგალითი 2:

ღვარცოფი, რომლის სიმაღლეა $D_c = 3$ მ შემოდის $L = 1500$ მ სიგრძისა და $H = 30$ მ სიღრმის წყალსაცავში $S_c = 1/5 L = 300$ მ მანძილზე $u_c = 4.3$ მ/წმ სიჩქარით. შევაფასოთ როგორ იცვლება η^* ტალღის ფარდობითი სიმაღლე კაშხალთან $x = 0$ ბორტიდან არეკლილი ტალღების გათვალისწინებით და გათვალისწინების გარეშე.

ამონახსენი:

გადავიყვანოთ არაგანზომილებიან პარამეტრებში $D_c^* = 0.1$, $L^* = 50$, $S_c^* = 10$ და $u_c^* = u_c / \sqrt{gH} = 0.25$. ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკული დამოკიდებულებები (4.2.6) ფორმულის მიხედვით, ჩვენს შემთხვევაში (ნახ.4.2.1)(a) და (ნახ.4.2.3)(a).

გრაფიკიდან (ნახ.4.2.3)(a) ჩანს რომ კაშხალთან მაქსიმალური ტალღის ამპლიტუდა ბორტიდან $x = 0$ არეკვლების გარეშე მოცემული სიჩქარისთვის აღწევს $\eta = \eta^* H = 0.068 \cdot 30 = 2.0$ მ და უკვე $S_c^* > 4$ აღარაა დამოკიდებული ღვარცოფის შემოსვლის მანძილზე.

შეფასება:

გრაფიკიდან (ნახ.4.2.1)(a) ჩანს რომ კაშხალთან მაქსიმალური ტალღის ამპლიტუდა ბორტიდან $x = 0$ არეკლილი ტალღების ინტერფერენციის გათვალისწინებით დამოკიდებულია და მატულობს S_c^* ღვარცოფის შემოსვლის მანძილთან ერთად და უკვე $S_c^* > 20$ მივიღებთ, რომ $2.0 < \eta < 4.3$, ანუ ღვარცოფის შემოდინების მანძილის ზრდასთან ერთად შესაძლებელია ინტერფერენციული პროცესის გამო მივიღოთ კაშხალთან 2-ჯერ უფრო მეტი სიმაღლის ტალღები, რაც ზრდის გადადინების საფრთხის რისკს.

ამგვარად, (ნახ.4.1.1) საანგარიშო სქემის საფუძველზე ამოხსნილია ბრტყელი სასაზღვრო ამოცანა, რომელიც ეხება წყალსაცავში ფსკერზე მუდმივი სისქის ღვარცოფული ნაკადის გავრცელების შედეგად გენერირებულ ტალღურ პროცესს. აღნიშნული ამოცანის ამონახსენი საშუალებას იძლევა აღწერილ იქნას წყალსაცავში ტალღების, როგორც გენერაციისა და ტრანსფორმაციის, ასევე არეკვლისა და ინტერფერენციული ონდულაციის სრული სურათი.

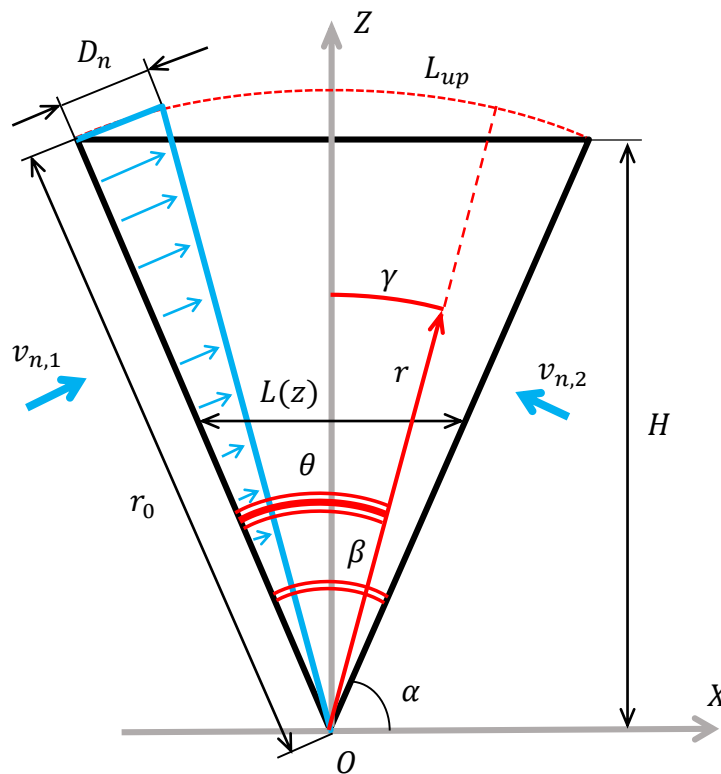
4.3. დახრილი ფერდობების მქონე კანიონის ტიპის წყალსაცავებსა და არხებში განივი ტალღური რყევების სასაზღვრო ამოცანის ფორმულირება და ანალიზური ამონახსენი

ჰიდროკვანძების წყალგამტარი ნაგებობების (არხების) და წყალსაცავების ბიეფების დაგეგმარებისა და ექსპლუატაციის ძირითადი საკითხების გადაჭრისას (წყალსაცავის ბიეფებისა და არხების ფერდობების მდგრადობის განსაზღვრა, არხების ზომებისა და ფორმების დადგენა და სხვა) მნიშვნელოვანი როლი ენიჭება წყლის ნაკადში ამა თუ იმ მიზეზით აღძრული ჰიდროდინამიკური პროცესების შესწავლას და მათი პარამეტრების სწორ დადგენას.

ჰიდროტექნიკური მშენებლობის პრაქტიკაში წყლის ნაკადი სხვადასხვა წყალგამტარ ტრაქტში განიხილება, ჩვეულებრივ, ერთგანზომილებიანი სტაციონალური ჰიდროდინამიკური მოდელის საფუძველზე, რასაც შეაქვს გარკვეული (ხანდახან მნიშვნელოვანი) ცდომილება ჰიდროდინამიკური პროცესების აღწერის დროს, კერძოდ ტალღური მოძრაობისა და სითხეში წარმოქმნილი წყლის დინამიკური წნევების გაანგარიშებისას. ამასთან დაკავშირებით საჭირო ხდება ნაკადში ჰიდროდინამიკური პარამეტრების დადგენის უფრო სრულყოფილი მეთოდების დამუშავება როგორც ორ (2D) ასევე სამ (3D) განზომილებიანი მათემატიკური მოდელების საფუძველზე, რომელთა რეალიზაცია შეიძლება

განხორციელდეს რიცხვითი და კერძო შემთხვევებში ანალიზური მეთოდის საშუალებით.

პროფ. თ.გველესიანის შრომებში პირველად იქნა განხილული ორ (2D) და სამ (3D) განზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანები სითხის დაუმყარებელი ტალღური მოძრაობის დროს, კანიონის ტიპის წყალსატევებში და წყალსადინარებში, მათი ფერდობების დახრის გათვალისწინებით. ამ ამოცანების ამონახსენი ტრაპეციული და სამკუთხა ფორმის განივკვეთის მქონე ღია კალაპოტებისათვის ჩვენს მიერ მიღებული იყო ანალიზური და რიცხვითი მეთოდის გამოყენებით [69].



(ნახ.4.3.1) კანიონის ტიპის წყალსაცავის (ან წყალგამტარი ტრაქტის) განივკვეთში არასტაციონარული ტალღების წარმოქმნის საანგარიშო სქემა ფერდობების სხვადასხვა დახრის კუთხის გათვალისწინებით

ქვემოთ მოცემულია ორგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს დახრილი ფერდობის მქონე წყალსატევში (წყალსაცავის ბიეფებში, არხებში) წყლის არასტაციონარულ ტალღურ რყევებს.

იგულისხმება, რომ ეს რყევები წარმოიქმნება წყალსატევში ან წყალსადინარში ცვლადი ხარჯების გვერდითი შემოდინების (ან გადინების) გამო ან სანაპირო ფერდობის მხრიდან გარკვეული მოცულობის მეწყერული მასის შემოსვლის შედეგად.

აღნიშნული ამოცანა განიხილება ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში. ამასთან წყალსაცავის ფორმა განივკვეთში მიახლოებით, წარმოდგენილია სამკუთხედის სახით (ნახ.4.3.1). ასეთი საანგარიშო სქემა პირველად შემოთავაზებული იყო კაცუბოსა და შულმანის მიერ და გამოიყენებოდა კაშხლებზე ჰიდროდინამიკური წნევების გაანგარიშებისას, წყლის ზედაპირზე ტალღების გათვალისწინების გარეშე.

განსახილველი ამოცანის ფორმულირებისას იგულისხმება, რომ წყალსაცავში წყლის რყევების წარმოქმნის მიზეზი არასტაციონარულ ხასიათს ატარებს. კერძოდ, ისევე როგორც მეწყერული პროცესის დროს, ღვარცოფული მასის გვერდითი შემოდინებისას, მოცემული წყალსაცავიდან ხდება წყლის გამოდევნა შედარებით მოკლე დროის $0 \leq t \leq t_0$ ინტერვალში იმ რაოდენობით, რომელიც შეესაბამება შემოდინებული მეწყერული მასის მოცულობას სადაც v_n არის შემოდინების სიჩქარის ნორმალური მდგენელი წყალსატევის სანაპირო ფერდობის ზედაპირის მიმართ. r_0 ფერდობის იმ ნაწილის სიგრძე (სიმაღლე) რომელზეც ხდება შემოდინება, კონკრეტულ შემთხვევაში წარმოადგენს ფერდობის მთლიან სიმაღლეს.

(ნახ.4.3.1) სქემის თანახმად θ კუთხე იცვლება 0-დან (მარცხენა სანაპირო ფერდობის სიბრტყეში) β -მდე (მარჯვენა ფერდობის სიბრტყეში). ბრტყელი ამოცანის განხილვისას, თანაფარდობა სწორკუთხა კოორდინატთა სისტემის XOZ და პოლარულ კოორდინატთა სისტემის $r\theta$ ცვლადებს შორის ასე შეიძლება იყოს წარმოდგენილი

$$\begin{aligned} z &= r \cos \gamma, & x &= r \sin \gamma \\ \gamma &= \theta - \frac{\beta}{2}, & \beta &= \pi - 2\alpha \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

განსახილველი ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება მცირე ამპლიტუდის თეორიის გამოყენების საფუძველზე მდგომარეობს ლაპლასის

განტოლების ამოხსნაში, რომელსაც ცილინდრულ კოორდინატებში შემდეგი სახე აქვს

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, \theta, t) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \varphi(r, \theta, t) = 0 \quad (4.3.2)$$

ან არადივერგენტული ფორმით

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \varphi(r, \theta, t) = 0 \quad (4.3.3)$$

სადაც $\varphi(r, \theta, t)$ არის სიჩქარის პოტენციალი. ამოცანის სრულყოფილად ფორმირებისათვის საჭიროა სასაზღვრო და საწყისი პირობები. როგორც ზემოთ აღნიშნა, იგულისხმება, რომ წყალსატევის ფერდების მხრიდან ადგილი აქვს სითხის შემოდინებას (ან გადინებას). განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა, როდესაც $v_n = v_n(r, t)$ შემოდინების სიჩქარე არის, როგორც r კოორდინატის, ასევე t დროის ფუნქცია. აღნიშნულის თანახმად ამოცანის სასაზღვრო პირობები წყალსატევის ფერდობების კვეთებში, ზოგად შემთხვევაში, მიიღებს შემდეგ სახეს

სასაზღვრო პირობები მყარ საზღვარზე

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(r, \theta, t) \Big|_{\theta=0} &= v_{n,1}(r, t) \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi(r, \theta, t) \Big|_{\theta=\beta} &= v_{n,2}(r, t) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

გამოვიყვანოთ თავისუფალი ზედაპირის პირობა. (4.3.1) გარდაქმნის თანახმად

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

შესაბამისად $r\theta$ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში (4.1.4)

განტოლება ზემოთ აღნიშნულის თანახმად, ჩაიწერება შემდეგნაირად

თავისუფალი ზედაპირის პირობა

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{r=r_0} + \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.3.5)$$

გადავწეროთ მიღებული პირობა შემდეგი სახით

$$\frac{1}{g_c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{r=r_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (4.3.6)$$

სადაც

$$\frac{1}{g_c} = \frac{\cos \gamma}{g}$$

ფერდობის $\alpha \geq \pi/3$ -ზე მაღალი დახრის დროს $-\pi/6 \leq \gamma \leq \pi/6$ და $0.87 \leq \cos \gamma \leq 1$. ყოველი ფიქსირებული α, β -სთვის შესაძლებელია მიღებული მნიშვნელობა გავასაშუალოთ და აღვნიშნოთ

$$\frac{1}{\bar{g}_c} = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\beta}{2} \right)}{g} = \frac{\frac{1}{2} (1 + \sin \alpha)}{g} = \frac{\bar{C}}{g} \quad (4.3.7)$$

$$\bar{C} = 0.93 \dots 1.0, \quad \alpha = \frac{\pi}{3} \dots \frac{\pi}{2}$$

როგორც მიღებული გამოთვლებიდან ჩანს მაღალი დახრის კუთხეების დროს შესაძლებელია დავუშვათ, რომ $\bar{C} \approx 1.0$ და $\bar{g}_c = g$. საბოლოოდ, თ.გველესიანის მიერ მიღებული ამონახსენი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, t) = & \frac{1}{4\beta} \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r_0} \right) v_0(t) - \frac{g}{2\beta} \int_0^t v_0(t)(t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{2r^2}{\beta r_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_m(t)}{(4 - a_m^2)} \cos(a_m \theta) - \\ & - \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^{a_m} r_0^{1-a_m}}{m(4 - a_m^2)} \times \int_0^t v_m(\tau) \sin(b_m(t - \tau)) d\tau + \left[\begin{array}{l} b_m \left(1 - \frac{a_m}{2} \right) \times \\ + \frac{a_m}{2} v_m(t) \end{array} \right] \cos(a_m \theta) \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$a_m = \frac{\pi}{\beta} m, \quad b_m = \sqrt{g \frac{a_m}{r_0}}$$

წყალსატევის თავისუფალ ზედაპირზე წარმოქმნილი ტალღების ამპლიტუდა გამოითვლება ფორმულით

$$\eta(\theta, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(r, \theta, t) \Big|_{r=r_0} \quad (4.3.9)$$

და (4.3.8) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
\eta(\theta, t) = & \frac{1}{2\beta} \int_0^t v_0(\tau) d\tau - \\
& - \frac{2r_0}{\beta g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_0(t)}{(4 - a_m^2)} \cos(a_m \theta) - \\
& - \frac{4r_0}{g\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_0}{m(4 - a_m^2)} \times \left[\begin{array}{l} b_m \left(1 - \frac{a_m}{2}\right) \times \\ \times \int_0^t v_m(\tau) \cos(b_m(t - \tau)) d\tau + \\ + \frac{a_m}{2} \frac{d}{dt} v_m(t) \end{array} \right] \cos(a_m \theta)
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

შევიხსნათ, რომ გამოსახულების მიღებისას გამოყენებული იყო ინტეგრალის დიფერენცირების ფორმულა, როდესაც ინტეგრირების ზედა ზღვარი წარმოადგენს პარამეტრს, ანუ

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_0^t v_m(\tau) \sin(b_m(t - \tau)) d\tau = \\
& = b_m \int_0^t v_m(\tau) \cos(b_m(t - \tau)) d\tau + [v_m(\tau) \sin(b_m(t - \tau))]_{\tau=t} = \\
& = b_m \int_0^t v_m(\tau) \cos(b_m(t - \tau)) d\tau
\end{aligned}$$

ფორმულა (4.3.10) საშუალებას იძლევა განისაზღვროს წყალსაცავში სრული ტალღური პროცესი დროის იმ მონაკვეთებისათვის, როდესაც:

- წყალსატევში ხდება სითხის შემოდინება (ან გადინება) $0 \leq t \leq t_0$;
- წყალსაცავში სითხის შემოდინება (ან გადინება) წყდება $t > t_0$ და $v_n = 0$.

აღნიშნულთან დაკავშირებით გასაგები ხდება, რომ პირველ შემთხვევაში ინტეგრირება გამოსახულებაში უნდა წარმოებდეს 0-დან t -მდე, ხოლო მეორე შემთხვევაში კი, 0-დან t_0 -მდე.

განვიხილოთ (ნახ.4.3.1) საანგარიშო სქემის მიხედვით კერძო შემთხვევა, როდესაც წყალსატევის (წყალსაცავი, არხი) მხოლოდ ერთი ფერდობის მხრიდან ხდება წყლის გამოდევნა $0 \leq t \leq t_0$ დროის შუალედში. ამ შემთხვევაში მიიღება

$$v_{n,1}(r, t) = v_{n,1}(t) \frac{r}{r_0} = v_1 f(t) \frac{r}{r_0}, \quad v_{n,2} = 0 \quad (4.3.11)$$

თუ დავუშვებთ რომ შემოდინების სიჩქარე მუდმივია და $v_1 = \max(v_{n,1}(t)) = const$ მაშინ სიჩქარისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$v_{n,1}(r, t) = \begin{cases} v_1 \frac{r}{r_0} & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & t_0 < t \end{cases} \quad (4.3.12)$$

და ამპლიტუდის გამოთვლის გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} \eta(\theta, t)|_{0 \leq t \leq t_0} &= \frac{v_1}{2\beta} \int_0^t d\tau + \\ &+ \frac{4v_1 r_0}{g\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2 \left(1 - \frac{a_m}{2}\right)}{m(4 - a_m^2)} \left[\int_0^t \cos(b_m(t - \tau)) d\tau \right] \cos(a_m \theta) \\ \eta(\theta, t)|_{t > t_0} &= \frac{v_1}{2\beta} + \\ &+ \frac{4v_1 r_0}{g\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2 \left(1 - \frac{a_m}{2}\right)}{m(4 - a_m^2)} \left[\int_0^{t_0} \cos(b_m(t_0 - \tau)) d\tau \right] \cos(a_m \theta) \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

ინტეგრალების განსაზღვრისა და იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\begin{aligned} b_m^2 &= g \frac{a_m}{r_0} = g \frac{\pi}{\beta r_0} m \\ \frac{\left(1 - \frac{a_m}{2}\right) 2}{(4 - a_m^2) 2} &= \frac{(2 - a_m)}{2(2 - a_m)(2 + a_m)} = \frac{1}{2(2 + a_m)} = \frac{\beta}{2(2\beta + \pi m)} \end{aligned}$$

მივიღებთ კიდევ უფრო გამარტივებულ ფორმას

$$\begin{aligned} \eta(\theta, t) &= \frac{v_1}{2\beta} \left\{ \begin{array}{l} t \quad ; 0 \leq t \leq t_0 \\ t_0 \quad ; t > t_0 \end{array} \right\} + \\ &+ 4v_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(a_m \theta)}{b_m(2\beta + \pi m)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(b_m t)}{2} \quad ; 0 \leq t \leq t_0 \\ \sin\left(b_m \frac{t_0}{2}\right) \cos\left(b_m \left(t - \frac{t_0}{2}\right)\right) \quad ; t > t_0 \end{array} \right\} \quad (4.3.14) \\ a_m &= \frac{\pi}{\beta} m, \quad b_m = \sqrt{g \frac{a_m}{r_0}}, \quad \beta = \pi - 2\alpha, \quad \theta \in [0, \beta] \end{aligned}$$

როგორც (4.3.14) ფორმულა გვიჩვენებს, ტალღის ამპლიტუდები როგორც v_1 შემოდინების სიჩქარის პირდაპირ-პროპორციულია. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $1/b_m = \sqrt{\beta r_0} 1/\pi g m$ ცხადია რომ ტალღების

ამპლიტუდები ასევე პროპორციულია $\sqrt{\beta r_0}$ სიდიდის რაც პრაქტიკულად განსაზღვრავს წყალსაცავის სიღრმესა და სიგანეს. რაც შეეხება ტალღების რყევით ხასიათს (ტალღების ფორმა, პერიოდები) ის დამოკიდებულია წყლის შემოდინების ხანგრძლივობაზე ანუ t_0 პარამეტრზე.

ანალოგიური ტიპის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი ტალღის ამპლიტუდის მიმართ, მხოლოდ L, H სიგრძისა და სიღრმის სწორკუთხოვანი ფორმის წყალსაცავის შემთხვევაში ასეთი სახით არის მიღებული

$$\eta(x, t) = \frac{u_1 H}{L} \left\{ \begin{array}{l} t \quad ; 0 \leq t \leq t_0 \\ t_0 \quad ; t > t_0 \end{array} \right\} + \frac{4u_1}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{th}(a_m H)}{a_m b_m} \cos(a_m x) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin(b_m t)}{2} \quad ; t \leq t_0 \\ \sin\left(b_m \frac{t_0}{2}\right) \cos\left(b_m \left(t - \frac{t_0}{2}\right)\right) \quad ; t > t_0 \end{array} \right\} \quad (4.3.15)$$

$$a_m = \frac{\pi}{L} m, \quad b_m = \sqrt{g a_m \text{th}(a_m H)}, \quad x \in [0, L]$$

ამ შემთხვევაშიც ნათლად ჩანს, რომ ამპლიტუდასა და v_1 შემოდინების სიჩქარეს შორის არის პირდაპირპროპორციული დამოკიდებულება. რაც შეეხება L, H პარამეტრის გავლენას η სიდიდეზე, ეს შეიძლება დადგინდეს იქნას მხოლოდ შესაბამისი კომპიუტერული გათვლების შედეგების ანალიზის საფუძველზე [11, 14].

ზემოთ მიღებული ფორმულები მიზანშეწონილია წარმოვადგინოთ არაგანზომილებიანი სახით:

სამკუთხედის ფორმის არე

$$\eta^*(\theta, t^*)|_{0 \leq t^* \leq t_0^*} = \frac{v_1^*}{2\beta} \left[t^* + 2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* \cos(a_m^* \theta) \sin(b_m^* t^*) \right]$$

$$\eta^*(\theta, t^*)|_{t^* > t_0^*} = \frac{v_1^*}{2\beta} \left[t_0^* + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{array}{l} c_m^* \cos(a_m^* \theta) \times \\ \times \sin\left(b_m^* \frac{t_0^*}{2}\right) \cos\left(b_m^* \left(t^* - \frac{t_0^*}{2}\right)\right) \end{array} \right) \right] \quad (4.3.16)$$

$$\theta \in [0, \beta]; \quad \beta = \pi - 2\alpha$$

სადაც

$$a_m^* = \frac{\pi}{\beta} m; b_m^* = \sqrt{g \frac{a_m}{r_0}} \sqrt{\frac{r_0}{g}} = \sqrt{a_m^*}; c_m^* = \frac{2}{b_m^*(2 + a_m^*)}$$

$$t^* = t \sqrt{\frac{g}{r_0}}; t_0^* = t_0 \sqrt{\frac{g}{r_0}}; v_1^* = \frac{v_1}{\sqrt{gr_0}}; \eta^* = \frac{\eta}{r_0}$$
(4.3.17)

მართკუთხედის ფორმის არე

$$\eta^*(x^*, t^*)|_{0 \leq t^* \leq t_0^*} = \frac{u_1^*}{L^*} \left[t^* + 2 \sum_{m=1}^{\infty} c_m^* \cos(a_m^* x^*) \sin(b_m^* t^*) \right]$$

$$\eta^*(x^*, t^*)|_{t^* > t_0^*} = \frac{u_1^*}{L^*} \left[t_0^* + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{c_m^* \cos(a_m^* x^*) \times}{\times \sin\left(b_m^* \frac{t_0^*}{2}\right) \cos\left(b_m^* \left(t^* - \frac{t_0^*}{2}\right)\right)} \right) \right]$$

$$x^* \in [0, L^*]$$
(4.3.18)

სადაც

$$a_m^* = \frac{\pi}{L^*} m; b_m^* = \sqrt{a_m^* \operatorname{th}(a_m^*)}; c_m^* = \frac{\operatorname{th}(a_m^*)}{a_m^* b_m^*}$$

$$t^* = t \sqrt{\frac{g}{H}}; t_0^* = t_0 \sqrt{\frac{g}{H}}; u_1^* = \frac{u_1}{\sqrt{gH}}$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{H}; L^* = \frac{L}{H}; x^* = \frac{x}{H}$$
(4.3.19)

კომპიუტერული გათვლების შედეგების შედარება მართებულია ტოლი მოცულობების სამკუთხოვანი და მართკუთხა ფორმის წყალსატევებისათვის, როდესაც დაცულია პირობა, რომ მათში შემოდინებული წყლის მოცულობებიც ერთი და იგივეა. ვინაიდან აქ განიხილება ბრტყელი ამოცანა, ამიტომ ერთეული სიგანის მართკუთხოვანი წყალსატევის მოცულობა აღვნიშნოთ როგორც $W = HL$, ხოლო მასში t_0 დროის განმავლობაში შემოდინებული წყლის მოცულობა შეადგენს $\partial W = DH; D = u_1 t_0$. სამკუთხედის ფორმის წყალსატევის შემთხვევაში (ნახ.4.3.1), თუ არ გავითვალისწინებთ თავისუფალი ზედაპირის სიმრუდეს, განივკვეთის მოცულობა ტოლია $W \approx 1/2 HL_{up}$, ხოლო მასში შემოდინებული წყლის მოცულობა კი შეადგენს $\partial W = \frac{1}{2} D_n r_0; D_n = v_1 t_0$, სადაც v_1 შემოდინების მაქსიმალური სიჩქარეა ფერდობის ნორმალის მიმართულებით. ამიტომ შედარების პირობა ჩაიწერება ასე

$$HL = \frac{1}{2}HL_{up}$$

$$u_1 t_0 H = \frac{1}{2}v_1 t_0 r_0 \quad (4.3.20)$$

აქედან გამომდინარე თუ მოცემულია H სიღრმე და α ფერდის დახრის კუთხე გამოვითვლით

$$L = \frac{1}{2}L_{up} = H \operatorname{ctg} \alpha \quad (4.3.21)$$

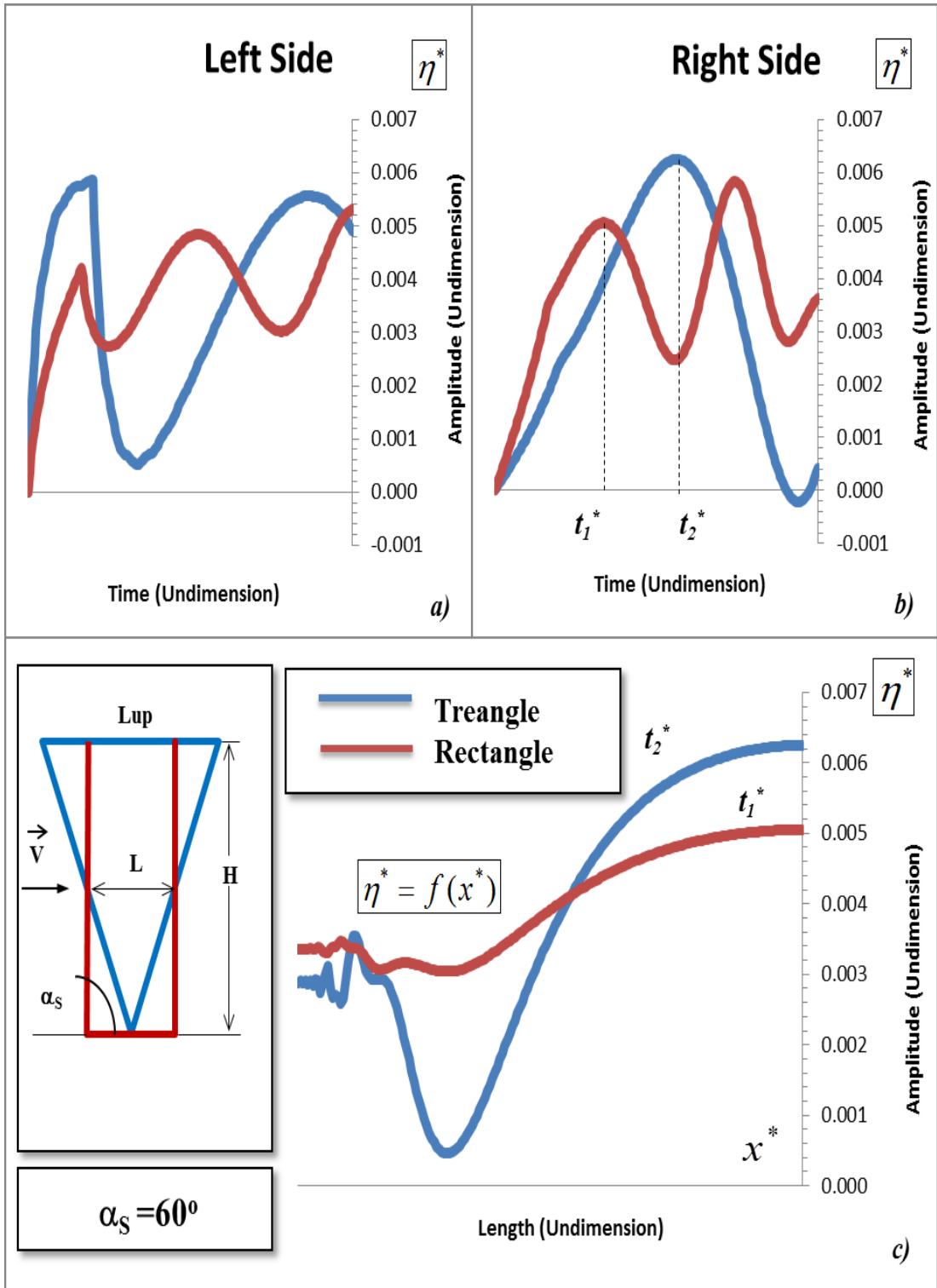
ანალოგიურად თუ მოცემულია v_1 მაქსიმალური სიჩქარე გამოვითვლით

$$u_1 = \frac{1}{2}v_1 \frac{r_0}{H} = \frac{v_1}{2 \sin \alpha} \quad (4.3.22)$$

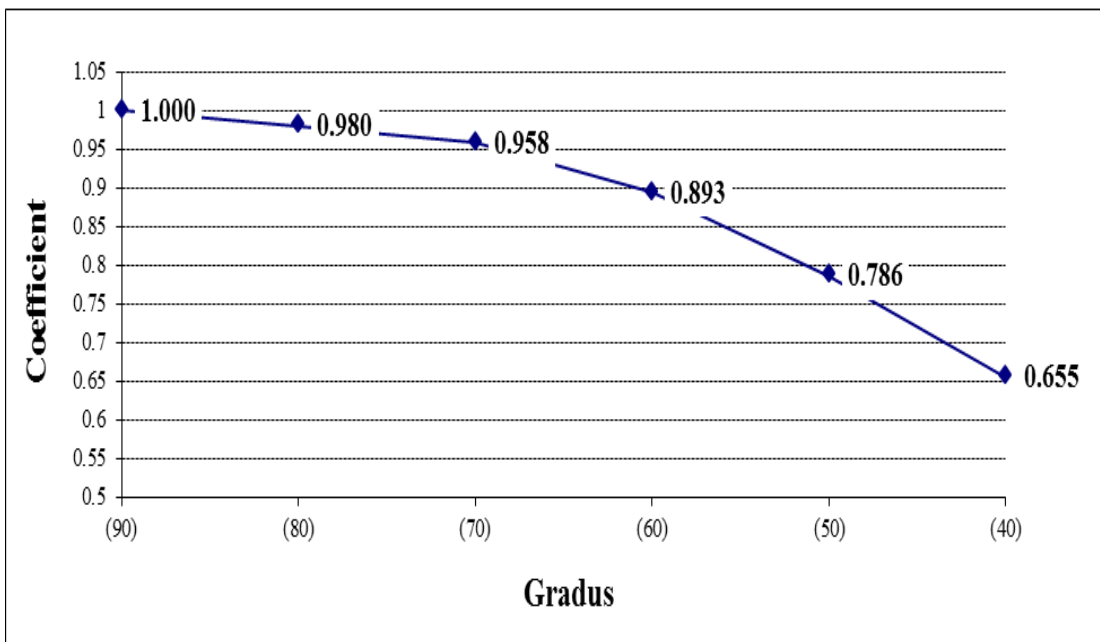
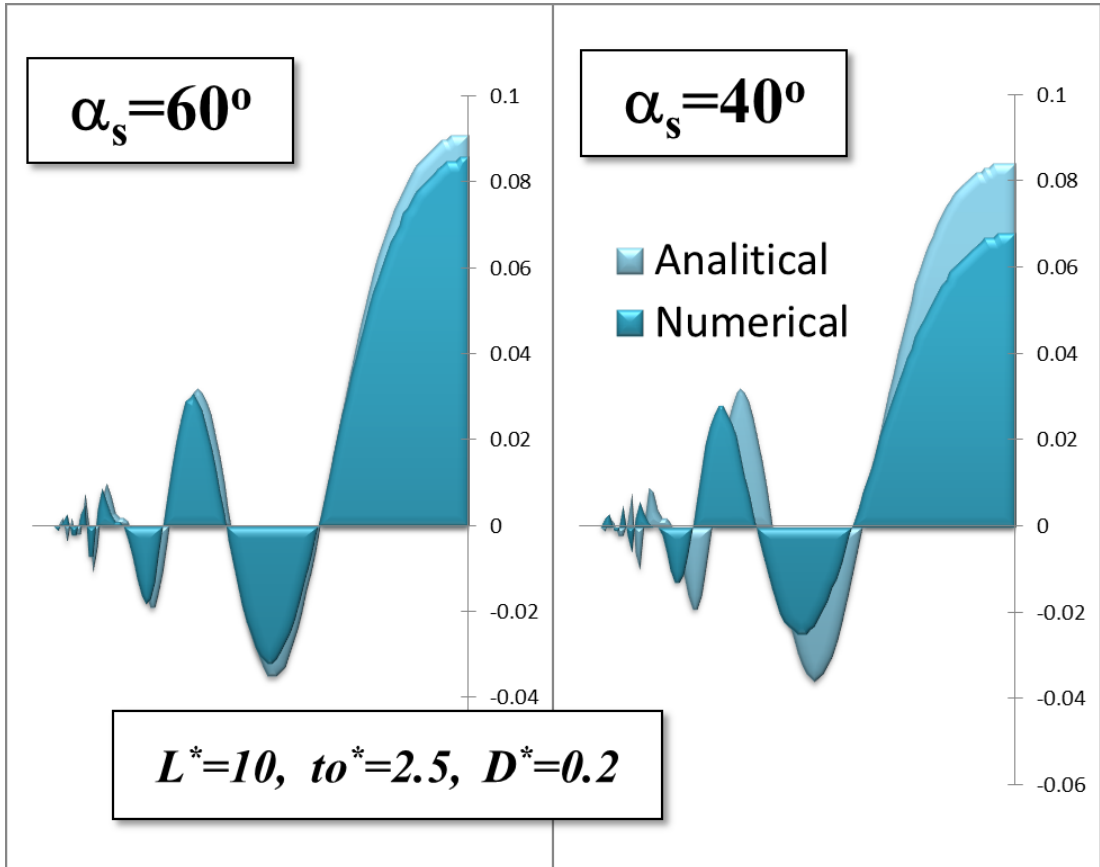
მიღებული (4.3.20)-(4.3.22) პირობების დაზუსტება შეიძლება თუ გავითვალისწინებთ არა სამკუთხედის, არამედ შესაბამის წრიული სექტორის მოცულობას.

გაანგარიშებათა შედეგები გვიჩვენებს, რომ სამკუთხა ფორმის წყალსატევში ტალღურ რყევათა ამპლიტუდები უფრო ინტენსიურია ვიდრე სწორკუთხა ფორმის წყალსატევში, რასაც მაგალითად, მოწმობს გაანგარიშებათა მონაცემები, რომლებიც გრაფიკების სახით არის წარმოდგენილი ნახაზზე (ნახ.4.3.2). კერძოდ მოყვანილია $\eta^*(t^*)$ დამოკიდებულების გრაფიკები წყალსატევის მარცხენა და მარჯვენა ფერდობის კვეთებში, მათ შორის მარჯვენა კვეთში $\eta_{max}^*(t^*)$ სამკუთხა და მართკუთხა ფორმის შეთავსებული წყალსატევებისათვის, როდესაც ფერდობის დახრის კუთხე შეადგენს 60° -ს.

ნახაზზე გამოსახული ტალღის პროფილები სამკუთხა და ოთხკუთხა ფორმის განივკვეთების მქონე წყალსატევებში სხვადასხვა ფერდობის დახრის შემთხვევაში და ადებულია სწორკუთხა ფორმის განივკვეთი, რომლის ფართობი ტოლია სამკუთხედის ფორმის განივკვეთის ფართობისა. აღნიშნული გრაფიკების აგება განხორციელებულია განხილული ამოცანის რიცხვითი მეთოდით მიღებული შედეგების საფუძველზე.



(ნახ.4.3.2) ტალღის ამპლიტუდის ცვლილება დროში სამკუთხა და მართკუთხა შეთავსებულ არეებზე და ტალღური პროფილი მართკუთხედისა და სამკუთხედის ფორმულების შედარებისათვის



(ნახ.4.3.3) მაქსიმალური ამპლიტუდის ფერდობის დახრის კუთხზე დამოკიდებულების გრაფიკი: a) მიღებული ანალიზური და რიცხვითი ამონახსნის შედარებითი პროფილები; b) ანალიზური და რიცხვითი ამონახსნის ფარდობითი გადხრის გრაფიკი

წარმოდგენილი გრაფიკების შედარება ადასტურებს, რომ სამკუთხედის ფორმის განივკვეთებისათვის ტალღის რყევების ამპლიტუდა უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე ტრაპეციული და სწორკუთხა ფორმის განივკვეთების შემთხვევებში.

ჩატარებულია გაანგარიშებები ანალიზური ამონახსნისა და სასრულ სხვაობითი-რიცხვითი სქემის საფუძველზე სამკუთხედის ფორმის წყალსატევისათვის (ნახ.4.3.3). მაგალითის სახით განხილულია შემთხვევა, როდესაც

$$\begin{aligned} L^* &= 10; D^* = 0.2; t_0^* = 5.0 \\ \alpha &= 20^\circ \dots 70^\circ \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

აგებულია მარჯვენა ფერდობზე მაქსიმალური ტალღის ამპლიტუდის დონის აწევის დამოკიდებულების გრაფიკები, სადაც ტალღის მაქსიმალური ფარდობითი ამპლიტუდა სამკუთხედის ფორმის წყალსატევის ფერდობზე მიღებულია ანალიზური და რიცხვითი მეთოდებით. ამავე ნახაზზე წარმოდგენილია ამპლიტუდების გაანგარიშების დროს გამოთვლილი ფარდობითი ცდომილებები ანალიზური და რიცხვითი მეთოდებით მიღებული შედეგების შედარებისას.

წარმოდგენილი გრაფიკები მოწმობს, რომ ანალიზური მეთოდით ტალღების გაანგარიშების სიზუსტე პრაქტიკული თვალსაზრისით სავსებით დამაკმაყოფილებელია, როდესაც ფერდობების დახრის კუთხე $\alpha \geq \pi/3$, ხოლო მიახლოებით შეფასების მიზნით ამ მეთოდით სარგებლობა შესაძლებელია აგრეთვე $\pi/6 \leq \alpha < \pi/3$.

5. კაშხალზე მაღალი მეწყერული ტალღის გადადინების მახასიათებლების განსაზღვრის მეთოდი

5.1. პირველი მაქსიმალური ტალღის კაშხალზე გადადინების ხანგრძლივობისა და სხვა მახასიათებლების განსაზღვრა ტალღის კაშხალზე აგორების გარეშე

განვიხილოთ ტალღის კაშხალზე გადადინების პარამეტრების გამოთვლა კაშხალთან აგორების გარეშე. კაშხალთან მოსული მეწყერული ტალღის ამპლიტუდა დროის მიხედვით შეიძლება აპროქსიმირებული იქნას სინუსოიდალური ფუნქციის სახით. ნახაზზე (ნახ.5.1.1) გამოსახულია სწრაფად და ნელა მოძრავი მეწყერის ან ღვარცოფული ნაკადის მოძრაობის დროს წარმოშობილი ტალღური პროფილის აპროქსიმაციის მაგალითები.

თუ აღვნიშნავთ h_{ov}^{max} გადადინების მაქსიმალურ სიმაღლეს და დავუშვებთ, რომ $\eta_{ov}^{max} = \eta^{max}$ ტალღის ამპლიტუდის სიმაღლეა კაშხალთან ახლოს მაშინ შესაბამისი აპროქსიმაციული ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით

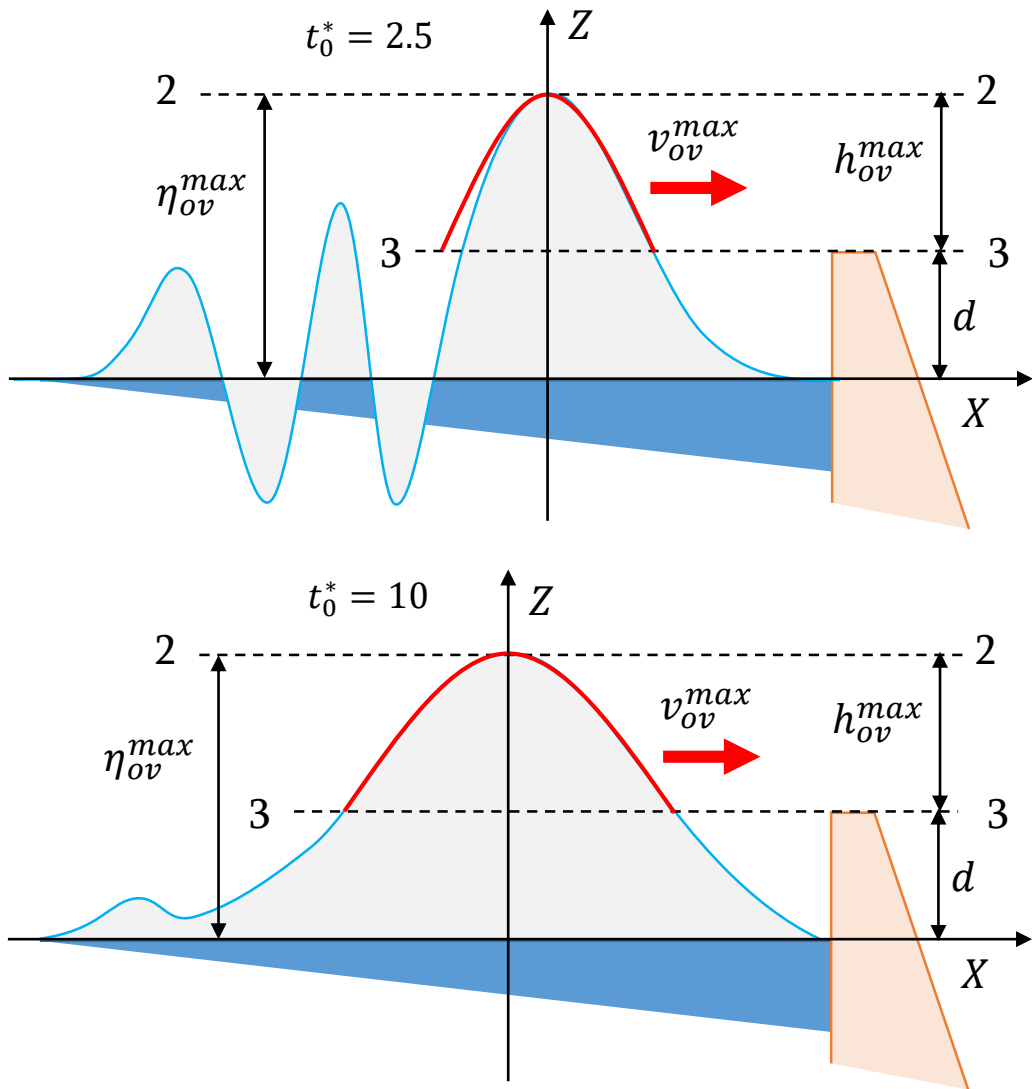
$$\begin{aligned} h_{ov}(t) &= h_{ov}^{max} \sin \frac{\pi}{t_{ov}} t \\ h_{ov}^{max} &= \eta_{ov}^{max} - d \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

სადაც t_{ov} არის გადადინების ხანგრძლივობა.

ვიგულისხმობთ, რომ მეწყერული ტალღის კაშხალზე გადადინების პროცესი იდენტურია ფართო ზღურბლის წყალგადასაშვებზე წყლის ნაკადის მოძრაობის. ამ შემთხვევაში მიიღება, რომ ხარჯის არაერთგვაროვნების კოეფიციენტი $\mu = m\sqrt{2} \approx 0.45, m \approx 0.32$ და თუ ცნობილია $h_{ov}(t)$ ფუნქცია, მაშინ შესაძლებელია განისაზღვროს კაშხლის ქიმზე (ანუ წყალგადასაშვების ზღურბლზე) ტალღის გადადინების სიჩქარე შემდეგი ფორმულით [45, 46]

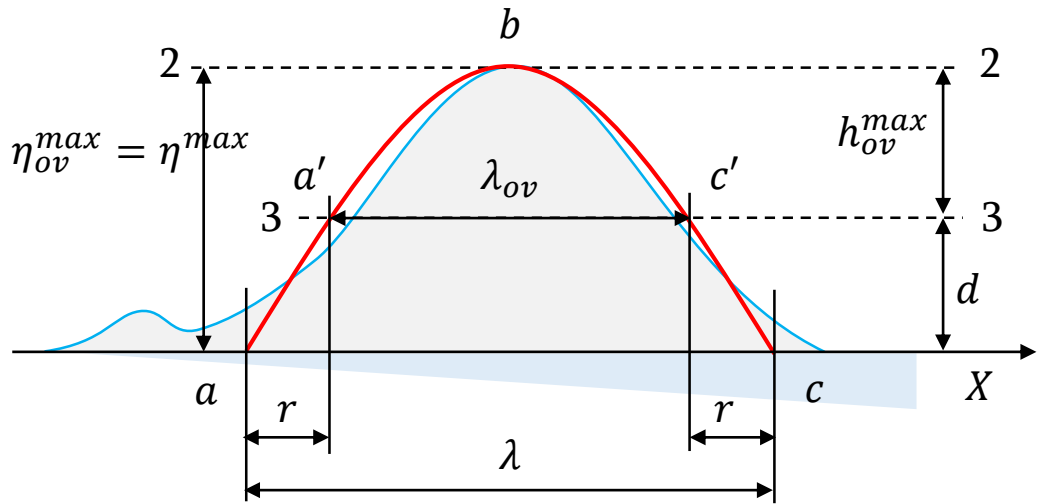
$$v_{ov}(t) = \mu \sqrt{gh_{ov}(t)} = \mu \sqrt{gh_{ov}^{max}} \sqrt{\sin \frac{\pi}{t_{ov}} t} \quad (5.1.2)$$

გადადინების t_{ov} ხანგრძლივობის განსაზღვრისათვის საჭიროა ნაპოვნი იქნას ტალღის ფარდობითი სიგრძე $\lambda^* = \lambda/H$, რომელიც ძირითადად დამოკიდებულია მხოლოდ t_0^* ღვარცოვის წყალში მოძრაობის დროსა და L^* წყალსაცავის სიგრძეზე.



(ნახ.5.1.1) "გადადინების ფუნქციის" $h_{ov}(t)$ აპროქსიმაცია სინუსოიდით, დისკრეტული დროის მიხედვით "სწრაფი" და "ნელი" მეწყერის შემთხვევაში

კაშხალზე ღვარცოვით გამოწვეული ექსტრემალური ტალღის გადადინების ხანგრძლივობის შეფასებისათვის აგორების გარეშე განვიხილოთ საანგარიშო სქემა (ნახ.5.1.2) რომელზეც გამოსახულია ტალღის პროფილი კაშხალთან ახლოს.



(ნახ.5.1.2) კაშხალზე გადადინების ტალღის სიგრძის განსაზღვრის საანგარიშო სქემა ტალღის კაშხალზე აგორების გარეშე

დავადგინოთ ტალღის λ მთლიანი სიგრძის ის λ_{ov} ნაწილი რომელიც იქმნება d სიმაღლეზე გავლებული 3-3 ჰორიზონტალის მიერ ტალღის "მოჭრით". ამ დროს ტალღის სინუსოიდალური პროფილი abc იკვეთება a', c' წერტილებში, ხოლო $a'c'$ მონაკვეთი წარმოადგენს საძიებელ λ_{ov} სიდიდეს, რომელსაც პირობითად ვუწოდოთ "გადადინების ტალღის სიგრძე". როგორც აღნიშნულ ნახაზიდან ჩანს, თუ გავითვალისწინებთ სინუსოიდალურ აპროქსიმაციას ეს სიდიდე განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\lambda_{ov} = \lambda - 2r = \lambda \left(1 - 2\frac{r}{\lambda}\right) \quad (5.1.3)$$

ფორმულაში შემავალი r მნიშვნელობა წინასწარ უცნობია, ამიტომ მისი გამოთვლისათვის განვიხილოთ შემდეგი განტოლება

$$\eta_{ov}^{max} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right) = d, \quad r = 0 \dots \frac{\lambda}{2} \quad (5.1.4)$$

ან სხვანაირად

$$\begin{aligned} \frac{d}{\eta_{ov}^{max}} &= \sin\left(\frac{\pi}{\lambda}r\right) \\ \frac{r}{\lambda} &= \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{d}{\eta_{ov}^{max}}\right) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

მიღებული d/η_{ov}^{max} და r/λ დამოკიდებულების შეფასების მიზნით (5.1.5) განტოლების საფუძველზე აგებულია ცხრილი (ნახ.5.1.1), რომელიდანაც ჩანს, რომ რაც უფრო მცირეა d/η_{ov}^{max} მით უფრო მეტად მცირეა r/λ და შესაბამისად იზრდება გადადინების ტალღის სიგრძე.

d/η_{ov}^{max}	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
r/λ	0.00	0.03	0.06	0.10	0.13	0.17	0.20	0.25	0.30	0.36	0.50
δ	1.00	0.94	0.87	0.81	0.74	0.67	0.59	0.51	0.41	0.29	0.00

(ცხრ.5.1.1) d/η_{ov}^{max} , r/λ , δ დამოკიდებულებების ცხრილი

ცხადია მოცემული ცხრილი საშუალებას გვაძლევს მარტივად განვსაზღვროთ λ_{ov} (5.1.3) ფორმულის მიხედვით

$$\lambda_{ov} = \lambda \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{d}{\eta_{ov}^{max}} \right) \right) = \lambda \left(1 - 2 \left(\frac{r}{\lambda} \right) \right) = \delta \lambda \quad (5.1.6)$$

პროფ. თ.გველესიანის მიერ მიღებული იქნა r/λ დამოკიდებულების განსაზღვრის კიდევ უფრო გამარტივებული ფორმულა, რომლით შესრულებული გამოთვლებიც თითქმის ზუსტად ემთხვევა ზემოთ განხილული მეთოდით მიღებულ მნიშვნელობებს და აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{2.75} \left(\frac{\eta_{ov}^{max}}{d} \right)^{-1.1} \quad (5.1.7)$$

სადაც $\eta_{ov}^{max} = \eta^{max}$ არის კაშხალთან მოსული ტალღის მაქსიმალური ამპლიტუდა კაშხალზე არეკვლის გარეშე, ხოლო d არის მარაგი წყლის საანგარიშო დონესა და კაშხლის თხემის ნიშნულს შორის.

თუ დავუშვებთ, რომ ღვარცოფული ტალღა ვრცელდება როგორც გრძელი ტალღა სიჩქარით \sqrt{gH} , მაშინ λ_{ov} გადადინების ტალღის სიგრძის განსაზღვრა საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ კაშხალზე ტალღის გადადინების ხანგრძლივობა შემდეგი ფორმულით

$$t_{ov} = \frac{\lambda_{ov}}{\sqrt{gH}} = \frac{\delta\lambda}{\sqrt{gH}} = \delta t_\lambda$$

$$\delta = \left(1 - 2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)\right)$$

$$\left(\frac{r}{\lambda}\right) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{d}{\eta_{ov}^{max}}\right)$$
(5.1.8)

აღნიშნოთ, რომ მიღებული ფორმულა სამართლიანია როდესაც ტალღაწარმოქმნის პროცესი ხასიათდება გრძელი ტალღებისათვის განსაზღვრული პარამეტრებით ანუ

$$L^* \geq 40.0; t^* \geq 4.0$$
(5.1.9)

თუ ეს პირობა არ სრულდება შესაძლებელია მივიღოთ ცდომილება, რომელიც პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრის დროს არის დაახლოებით 10%-ის ფარგლებში, რაც პროგნოზირებისათვის დასაშვებია.

5.2. პირველი მაქსიმალური ტალღის კაშხალზე გადადინების ხანგრძლივობისა და სხვა მახასიათებლების განსაზღვრა ტალღის კაშხალზე აგორების გათვალისწინებით

განვიხილოთ კაშხალთან აგორებული ტალღის გადადინების საანგარიშო სქემა (ნახ.5.2.1). გადადინების შემთხვევაში η_d^{max} სიმაღლე შემცირდება და გარკვეული $\delta_\eta < 1$ კოეფიციენტის გათვალისწინებით η_{ov}^{max} გადადინების ტალღის სიმაღლე შეიძლება გამოვსახოთ ასე

$$\eta_{ov}^{max} = \delta_\eta \eta_d^{max}$$
(5.2.1)

ხოლო h_{ov}^{max} გადადინების შრის მაქსიმალური სიმაღლე

$$h_{ov}^{max} = \eta_{ov}^{max} - d = \delta_\eta \eta_d^{max} - d$$
(5.2.2)

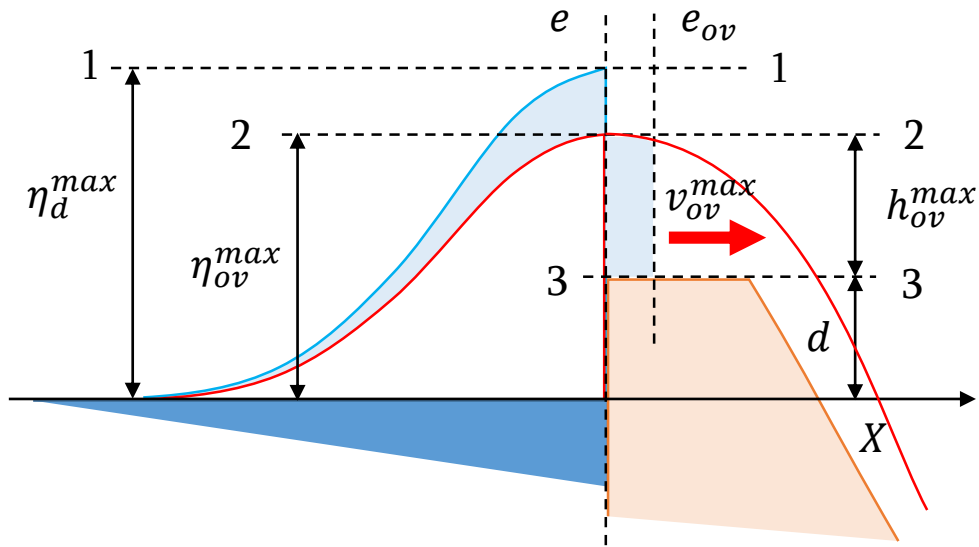
სადაც d არის მარაგი, ანო მანძილი წყლის თავისუფალ ზედაპირსა და კაშხლის ქიმს შორის (მარაგი).

განვსაზღვროთ δ_η პარამეტრის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ნახაზის მიხედვით 1-1 ჰორიზონტალის დონეზე ტალღის ერთეული მოცულობის მასის ენერგია e კვეთში წარმოადგენს მხოლოდ პოტენციურ ენერგიას, რომელიც ტოლია

$$E = \rho g \eta_d^{max} \quad (5.2.3)$$

ხოლო 2-2 ჰორიზონტალის დონეზე e_{ov} კვეთში ენერგია შეადგენს პოტენციური და კინეტიკური ენერგიების ჯამს

$$E_{ov} = \rho g h_{ov}^{max} + \frac{\rho (v_{ov}^{max})^2}{2} \quad (5.2.4)$$



(ნახ.5.2.1) ღვარცოფით გამოწვეული ტალღის კაშხალთან მოსვლისა და გადადინების საანგარიშო სქემა აგორების გათვალისწინებით

სრულიად შესაძლებელია დავუშვათ, რომ ხანგრძლივი გადადინების დროს, გარკვეული დროის განმავლობაში კაშხალთან ახლოს $e - e_{ov}$ მონაკვეთზე ნაკადის მოძრაობა არის დამყარებული და ენერგია e, e_{ov} კვეთებში ურთიერთტოლია. თუ განვიხილავთ იდეალურ სითხეს და არ გავითვალისწინებთ დანაკარგებს, მაშინ აღნიშნული ენერგიების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E = \rho g \eta_d^{max} = \rho g \eta_{ov}^{max} + \frac{\rho (v_{ov}^{max})^2}{2} = E_{ov}$$

და

$$\eta_d^{max} = \eta_{ov}^{max} + \frac{(v_{ov}^{max})^2}{2g} \quad (5.2.5)$$

დამყარებული მოძრაობის თავისუფალი გადადინების დროს გადადინებული ნაკადი იწყებს დაჩქარებულ მოძრაობას და აღწევს კრიტიკულ სიჩქარეს, ხოლო კაშხლის საკმარისად მაღალი კუთხის შემთხვევაში ადგილი აქვს მშვიდიდან მძაფრ მოძრაობაში გადასვლის პროცესსაც, რომლის დროს გადადინების სიჩქარეები კრიტიკულზე მეტია. ჰიდრავლიკაში ცნობილია სიჩქარის გამოთვლის ფორმულა მართკუთხედი განიკვეთის მქონე გადადინების არისათვის, რაც ჩვენი დაშვებით, პროგნოზირების მიზნით, სრულიად შეესაბამება კაშხალზე გადადინების პროცესს და თუ შემოვიღებთ μ ხარჯის არაერთგვაროვნების მახასიათებელ კოეფიციენტს, გადადინების სიჩქარე ტოლია

$$v_{ov}^{max} = \mu \sqrt{gh_{ov}^{max}}; \mu = 0.4 \dots 1.0 \quad (5.2.6)$$

შესაბამისად გვექნება

$$\eta_d^{max} = d + h_{ov}^{max} + \frac{(v_{ov}^{max})^2}{2g} = \eta_{ov}^{max} + \frac{\mu^2}{2} (\eta_{ov}^{max} - d)$$

$$\eta_d^{max} = \left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right) \eta_{ov}^{max} - \frac{\mu^2}{2} d$$

და თუ გამოვითვლით გადადინების სიმაღლეს

$$\eta_{ov}^{max} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)} \left(\eta_d^{max} + \frac{\mu^2}{2} d\right) \quad (5.2.7)$$

მიღებულ ფორმულაში არ არის გათვალისწინებული ხახუნის ძალა, თუ შემოვიღებთ σ_f კოეფიციენტს, რომელიც ახასიათებს ხახუნის ძალით გამოწვეულ შემცირებას, რომელიც პირობითად შესაძლებელია ავიღოთ $\sigma_f = 0.8 \dots 1.0$, მაშინ (5.2.1) ფორმულის მიხედვით შესაძლებელია გამოვთვალოთ გადადინების ამპლიტუდის ფარდობითი კოეფიციენტი

$$\delta_\eta = \frac{\eta_{ov}^{max}}{\eta_d^{max}} = \frac{\sigma_f}{\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)} \left(1 + \frac{\mu^2}{2} \frac{d}{\eta_d^{max}}\right) \quad (5.2.8)$$

შევნიშნოთ, რომ ხახუნისა და ხარჯის კოეფიციენტის მნიშვნელობის დადგენა წარმოადგენს ცალკე კვლევის საგანს, ამიტომ აქ არ შევხებით. როგორც ფორმულიდან ჩანს სავარაუდო ცვლილებების არე არის $\delta_\eta = 0.5 \dots 0.9$. შესაძლებელია ავაგოთ საანგარიშო ცხრილი, რომლის მიხედვითაც

გამოვითვლით $\delta_\eta = f\left(\frac{d}{\eta_d^{max}}\right)$ და შესაბამისად η_{ov}^{max} მნიშვნელობებს. წინასწარი შეფასებებისათვის მივიღოთ $\delta_\eta = 0.8$. მაგალითისათვის თუ $\sigma_f = 0.9, \mu = 0.45$, მაშინ გადადინების სისქე მიახლოებით ტოლია

$$h_{ov}^{max} = 0.8\eta_d^{max} - d \quad (5.2.9)$$

რაც შეეხება h_{ov}^{max} ფუნქციის განსაზღვრას ხახუნის დანაკარგებისა და ხარჯის არაერთგვაროვნების გათვალისწინების გარეშე მისი მიღება შეგვიძლია კვლავ (5.2.5),(5.2.6) ფორმულებიდან

$$\eta_d^{max} = d + h_{ov}^{max} + \frac{\mu^2}{2} h_{ov}^{max}$$

აქედან

$$h_{ov}^{max} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)} (\eta_d^{max} - d) \quad (5.2.10)$$

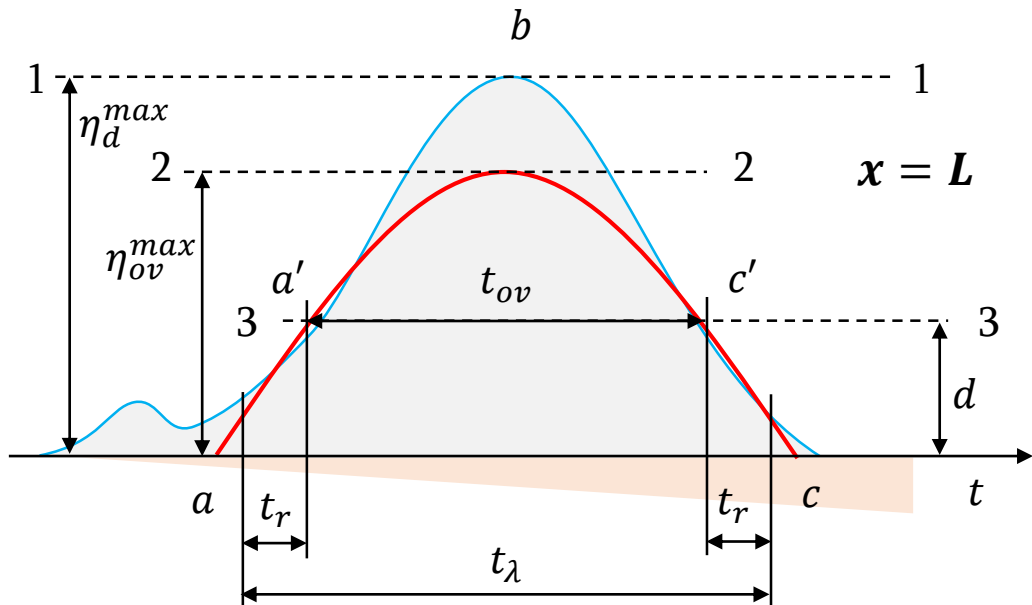
და თუ ავიღებთ მაქსიმალურ სიჩქარეს $\mu = 1$

$$\begin{aligned} h_{ov}^{max} &= \frac{2}{3} (\eta_d^{max} - d) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{d}{\eta_d^{max}}\right) \eta_d^{max} \\ \eta_{ov}^{max} &= h_{ov}^{max} + d = \frac{2}{3} \left(\eta_d^{max} + \frac{d}{2}\right) \\ \delta_\eta &= \frac{\eta_{ov}^{max}}{\eta_d^{max}} = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{d}{\eta_d^{max}}\right) \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

კაშხალთან მოსული და არეკლილი მეწყერული ტალღის ამპლიტუდის ცვლილება დროის მიხედვით შეიძლება აპროქსიმირებული იქნას სინუსოიდალური ფუნქციის სახით, ასეთივე აპროქსიმაცია შეეხება აღნიშნული ტალღის გადადინების პროცესს. კაშხალზე ღვარცოფით გამოწვეული ექსტრემალური ტალღის აგორებით გადადინების ხანგრძლივობის შეფასებისათვის განვიხილოთ საანგარიშო სქემა (ნახ.5.2.2) რომელზეც გამოსახულია აგორებული ტალღის ამპლიტუდის ცვლილება დროში. განვსაზღვროთ ნახაზზე მოყვანილი პარამეტრები, სადაც

t_λ - არის კაშხლის კვეთში ტალღის ამპლიტუდის ცვლილების პერიოდი, ანუ ტალღის აგორება $\eta_{ov}^{max} = \delta_\eta \eta_d^{max}$ გადადინების მაქსიმალური ამპლიტუდის ნიშნულამდე და შემდეგ არეკვლის ხანგრძლივობა გადადინების გარეშე;

t_r - დროის მონაკვეთი, რომლის სიდიდე განპირობებულია d კაშხლის ქიმის ამაღლებით წყლის საანგარიშო დონიდან და ტალღის ფორმის ანუ $\eta(t)$ დროზე დამოკიდებულებით.



(ნახ.5.2.2) კაშხალზე გადადინების ხანგრძლივობის განსაზღვრის საანგარიშო სქემა ტალღის კაშხალზე აგორების შემთხვევაში

დავუშვათ რომ ტალღის abc სიმაღლე სინუსოიდალური კანონით იცვლება დროში მისი კაშხალზე აგორების პროცესში. გამოვსახოთ პირობითი λ, r გადადინების ტალღის სრული და მარაგამდე აგორების სიგრძე

$$t_\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{gH}}; t_r = \frac{r}{\sqrt{gH}} \quad (5.2.12)$$

წინა განხილული შემთხვევის მსგავსად

$$t_{ov} = t_\lambda - 2t_r = t_\lambda \left(1 - \frac{2t_r}{t_\lambda}\right) \quad (5.2.13)$$

$$\frac{t_r}{t_\lambda} = \frac{r}{\lambda}$$

და საბოლოოდ მივიღებთ

$$\begin{aligned}
t_{ov} &= \delta t_\lambda \\
\delta &= \left(1 - 2 \left(\frac{r}{\lambda}\right)\right) \\
\left(\frac{r}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{d}{\eta_{ov}^{max}}\right)
\end{aligned}
\tag{5.2.14}$$

ან შეგვიძლია გამოვიყენოთ თ.გველესიანის მიერ მიღებულ მიახლოებით ფორმულა

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{1}{2.75} \left(\frac{\eta_{ov}^{max}}{d}\right)^{-1.1}
\tag{5.2.15}$$

აღვნიშნოთ, რომ t_λ პარამეტრის მნიშვნელობა შეიძლება შემცირდეს, თუ გავითვალისწინებთ ტალღის გადადინების პროცესს. ეს ფაქტორი მოითხოვს სპეციალურ მათემატიკურ მოდელირებას და ანალიზს, ამიტომ აქ ჩვენ არ განვიხილავთ. რაც შეეხება მიახლოებითი შეფასებების მეთოდიკას, შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ გადადინების შედეგად t_λ პარამეტრის სიდიდე უცვლელია და საძიებელი t_{ov} მნიშვნელობა განისაზღვრება ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით.

5.3. გადადინების შეფასების ფორმულების გამოყენება და გადადინების დამატებითი მახასიათებლების პროგნოზირება

ზემოთ განხილული ფორმულები შესაძლებელია შევაჯამოთ და თუ ცნობილია η^{max} , η_d^{max} , d და σ_f , μ მივიღებთ:

გადადინების მახასიათებელი პარამეტრები

$$\begin{aligned}
\eta_{ov}^{max} &= \begin{cases} \eta^{max} & \text{აგორების გარეშე} \\ \delta_\eta \eta_d^{max} & \text{აგორებით} \end{cases} \\
t_{ov} &= \begin{cases} \delta \frac{\lambda}{\sqrt{gH}} & \text{აგორების გარეშე} \\ \delta t_\lambda & \text{აგორებით} \end{cases} \\
h_{ov}^{max} &= \eta_{ov}^{max} - d \\
v_{ov}^{max} &= \mu \sqrt{g} \sqrt{h_{ov}^{max}} \\
\delta_\eta &= \frac{\sigma_f}{2 + \mu^2} \left(2 - \mu^2 \frac{d}{\eta_d^{max}}\right) \\
\delta &= \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{d}{\eta_{ov}^{max}}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{5.3.1}$$

სადაც

- η^{max} ტალღის მაქსიმალური ამპლიტუდა კაშხალთან ახლოს ვიდრე დაიწყება არეკვლა;
- η_d^{max} ტალღის მაქსიმალური აწევის (აგორება) დონე კაშხალთან არეკვლის შედეგად;
- d მარაგი;
- σ_f, μ ხახუნისა და დანაკარგების კოეფიციენტები.

გამოთვლების გამარტივების მიზნით სასურველია არსებობდეს დამოკიდებულება η^{max}, η_d^{max} სიდიდეს შორის. აღვნიშნოთ k_r კაშხალთან მოსული ტალღის აგორების ინტენსივობა

$$k_r = \frac{\eta_d^{max}}{\eta^{max}} \quad (5.3.2)$$

კომპიუტერული გათვლების შედეგად ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ η_d^{max} ამპლიტუდის მნიშვნელობა, მაგრამ თუ წინასწარ ვიცით k_r კოეფიციენტის მნიშვნელობა, მაშინ ეს სიმაღლე განისაზღვრება უფრო ადვილად ამგვარად, თუ ვიცით η^{max} ამპლიტუდის სიდიდე კაშხალთან ახლოს, ტალღის კაშხალზე აგორების სიმაღლე (გადადინების გარეშე) განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$\eta_d^{max} = k_r \eta^{max} \quad (5.3.3)$$

აღნიშნულიდან გამომდინარე შესაძლებელია ავაგოთ გარკვეულ პარამეტრებზე დამოკიდებულების ცხრილი, მაგალითად t_0^* შემოდინების ხანგრძლივობაზე (ცხრ.5.3.1), რომლის საშუალებითაც მარტივად განვსაზღვრით k_r კოეფიციენტს.

t_0^*	5.0	7.5	10.0	12.5
k_r	1.75	1.82	1.88	1.95

(ცხრ.5.3.1) აგორების k_r ფარდობითი მახასიათებლის საანგარიშო ცხრილი

შევაფასოთ გადადინების ხანგრძლივობის განსაზღვრის ფორმულა არაგანზომილებიანი სახით

$$t_{\lambda}^* = t_{\lambda} \sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{\lambda}{\sqrt{gH}} \sqrt{\frac{g}{H}} = \frac{\lambda}{H} = \lambda^* \quad (5.3.4)$$

ტალლის λ^* ფარდობითი სიგრძის დასადგენად კვლავ საჭიროა აიგოს სხვადასხვა საანგარიშო ცხრილები და გრაფიკები კომპიუტერული გამოთვლების საფუძველზე, რომელთა მეშვეობითაც შესაძლებელი იქნება მარტივად მოიძებნოს ჩვენთვის საჭირო მნიშვნელობა. ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი ღვარცოფის შემოსვლის შემთხვევაში საკმაოდ ფართო დიაპაზონით მოცემულია (ცხრ.5.3.2)-ზე.

$\lambda^* = \frac{\lambda}{H}$		t_0^*					
		1.0	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0
L^*	10	6.81	8.10	-	-	-	-
	25	11.48	12.40	13.29	15.60	-	-
	50	16.18	16.96	17.71	18.08	20.78	23.86
	75	19.48	20.06	20.30	20.50	21.95	25.34
	100	22.22	23.56	24.17	25.08	27.41	28.68
	150	27.12	27.85	28.15	29.22	29.43	29.82
	200	30.87	31.28	31.53	31.57	32.25	32.62

(ცხრ.5.3.2) ღვარცოფის შემოსვლის შედეგად წარმოქმნილი ექსტრემალური ტალლის λ^* სიგრძის საანგარიშო ცხრილი კაშხალთან ახლოს

ზემოთ მოყვანილი ცხრილის გამოყენების მეთოდის ნათლად წარმოდგენისათვის განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი:

ღვარცოფული ნაკადი $t_0 = 10$ წმ-ის განმავლობაში შემოედინება წყალსატევში, რომლის სიღრმეა $H = 50$ მ და სიგრძე $L = 5000$ მ. განვსაზღვროთ წარმოშობილი ექსტრემალური ტალლის ფარდობითი და რეალური სიგრძე.

ამონახსენი:

მონაცემები გამოვსახოთ არაგანზომილებიან პარამეტრებში $L^* = L/H = 100$ და $t_0^* = t_0 \sqrt{g/H} = 4.4$, მოვძებნოთ ცხრილში შესაბამისი მნიშვნელობასთან მიახლოებული მნიშვნელობები:

$$t_1^* = 2.5; t_2^* = 5$$

$$\lambda_1^*(t_1^*, 100) = 23.56; \lambda_2^*(t_2^*, 100) = 24.17$$

გამოვთვალოთ λ^* -ის მნიშვნელობის δ_t წონითი კოეფიციენტი t_0^* -ის მიმართ

$$\delta_t = \frac{t_0^* - t_1^*}{t_2^* - t_1^*} = 0.76$$

$$\lambda^* = (1 - \delta_t)\lambda_1^* + \delta_t\lambda_2^* = 0.24 \cdot 23.56 + 0.76 \cdot 24.17 = 24$$

$$\lambda = \lambda^*H = 24 \cdot 50 = 1200(m)$$

შევნიშნოთ რომ ჩვენს შემთხვევაში L^* მნიშვნელობა ზუსტად დაემთხვა ცხრილში მოყვანილ პარამეტრს, წინააღმდეგ შემთხვევაში დაგჭირდებოდა კიდევ ერთი δ_L წონითი კოეფიციენტის გამოთვლა.

t_λ^*		t_0^*					
		1.0	2.5	5.0	7.5	10.0	15.0
L^*	30	10.7	11.8	12.0	12.6	13.1	13.8
	40	12.5	13.0	13.1	13.5	14.1	14.2
	50	13.3	13.7	14.1	14.2	14.5	15.5
	60	13.9	14.2	14.4	14.8	15.2	16.1
	75	14.6	14.9	15.6	16.2	16.2	17.1
	100	16.0	16.4	16.7	17.4	18.0	18.0

(ცხრ.5.3.3) ღვარცოფის შემოსვლის შედეგად წარმოქმნილი ექსტრემალური ტალღის t_λ^* კაშხალთან აგორება და არეკვლის ხანგრძლივობის საანგარიშო ცხრილი

ანალოგიურად ტალღის t_λ^* ფარდობითი ხანგრძლივობის დასადგენად საჭიროა აიგოს სხვადასხვა საანგარიშო ცხრილები და გრაფიკები

კომპიუტერული გამოთვლების საფუძველზე, რომელთა მეშვეობითაც შესაძლებელი იქნება მარტივად მოიძებნოს ჩვენთვის საჭირო მნიშვნელობა. ერთ-ერთი ასეთი ცხრილი ღვარცოფის შემოსვლის შემთხვევაში საკმაოდ ფართო დიაპაზონით მოცემულია (ცხრ.5.3.3)-ზე.

განვსაზღვროთ დამატებითი მახასიათებლები $\bar{h}_{ov}, \bar{v}_{ov}, \bar{Q}_{ov}, \bar{W}_{ov}$ გადადინების საშუალო სიღრმე, სიჩქარე, გადადინებული წყლის ხარჯი და მოცულობა.

h_{ov}^{max}	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
v_{ov}^{max}	1,42	1,74	2,00	2,23	2,46	2,66
\bar{v}_{ov}	0,90	1,10	1,27	1,42	1,56	1,68

(ცხრ.5.3.4) გადადინების სიჩქარეთა გადადინების სიმაღლეზე დამოკიდებულების ცხრილი

ვინაიდან ჩვენი დაშვებით ადგილი აქვს სინუსოიდალურ დამოკიდებულებას ტალღის სიჩქარესა და დროს შორის, ამიტომ

$$\bar{v}_{ov} = \frac{2}{\pi} v_{ov}^{max} = \frac{2\mu\sqrt{g}}{\pi} \sqrt{h_{ov}^{max}} \quad (5.3.5)$$

აღნიშნული სიჩქარეების მნიშვნელობების შეფასების მიზნით ქვემოთ წარმოდგენილია (ცხრ.5.3.4) გადადინების ტალღის სხვადასხვა მაქსიმალური სიმაღლის სიდიდის შესაბამისი მონაცემების ცხრილი.

გადადინების \bar{q}_{ov} ხვედრითი ხარჯი განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$\bar{q}_{ov} = \bar{v}_{ov} \cdot \bar{h}_{ov} = \bar{v}_{ov} \frac{2}{\pi} h_{ov}^{max} = \frac{4\mu\sqrt{g}}{\pi^2} \sqrt{(h_{ov}^{max})^3} \quad (5.3.6)$$

$$\bar{h}_{ov} = \frac{2}{\pi} h_{ov}^{max} \quad (5.3.7)$$

სადაც \bar{h}_{ov} წარმოადგენს საშუალო სიმაღლეს, ანუ ერთეული განივკვეთის ფართობს. თუ გავითვალისწინებთ B კაშხლის ქიმის სიგრძეს

და $\bar{A}_{ov} = \bar{h}_{ov}B$ განიკვეთის საშუალო ფართობს, მივიღებთ \bar{Q}_{ov} სრულ საშუალო ხარჯს

$$\bar{Q}_{ov} = \bar{v}_{ov} \cdot \bar{A}_{ov} = \bar{q}_{ov} \cdot B = \frac{4\mu\sqrt{g}}{\pi^2} \sqrt{(h_{ov}^{max})^3} \cdot B \quad (5.3.8)$$

კაშხალზე გადადინებული მთლიანი წყლის მოცულობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$W_{ov} = \bar{Q}_{ov} t_{ov} = \frac{4\mu\sqrt{g}}{\pi^2} \sqrt{(h_{ov}^{max})^3} \cdot B \cdot t_{ov} \quad (5.3.9)$$

რაც შეეხება (5.3.1) ფორმულების გამოყენების სპეციფიკას, იმ შემთხვევაში, როდესაც ტალღა იმდენად დიდია, რომ პრაქტიკულად თავის ფორმის შეუცვლელად გადაედინება კაშხალზე, გამოიყენება ტალღის გადადინება აგორების გარეშე. ხოლო თუ ტალღა იმდენად მცირეა, რომ ადგილი აქვს არეკვლას, გამოიყენება აგორებული ტალღის გადადინება.

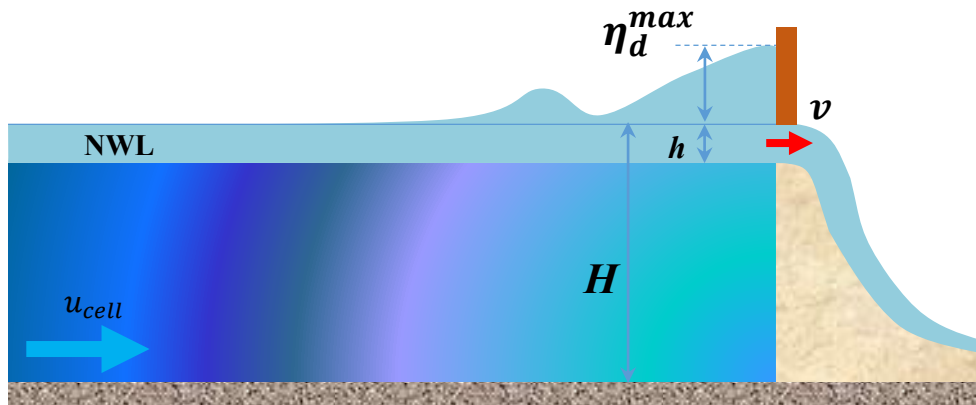
ამგვარად განვსაზღვრეთ ნაშრომის ძირითადი მიზნისათვის საჭირო მახასიათებლები, ანუ თუ ცნობილია h_{ov}^{max}, t_{ov} სიდიდეები შესაძლებელია გამოვთვალოთ ყველა სხვა პარამეტრი, რომელიც მეწყერული ტალღის კაშხალზე გადადინების პროცესის პროგნოზირებისა და მისი შედეგების შეფასების საშუალებას გვაძლევს.

შევნიშნოთ რომ უკვე გადადინებული ნაკადის ტალღური პროცესის ან გადადინების შედეგად კაშხლის რღვევისა და გავრცელების ამოცანა შესაძლებელია ამოიხსნას მარჩხი წყლის ერთ (1D) და ორ (2D) განზომილებიანი განტოლებათა სისტემით. თემატურად ეს საკითხი საჭიროებს დამოუკიდებელ ინდივიდუალურ შესწავლას კონკრეტული კაშხლებისა და ხეობებისათვის და განხილულია სხვადასხვა შრომებში, მათ შორის ავტორის მონაწილეობით [70, 71].

განვიხილოთ რეკომენდაცია, თუ როგორ შეიძლება ექსტრემალური ტალღის სიმაღლისა და შესაბამისად გადადინების რისკის შემცირება წყალსაშვი ფარების გამოყენებით (ნახ.5.3.1). ამ დროს გაღებული ფარიდან გამოდევნილი წყლის სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით

$$v = \mu\sqrt{gh} \quad (5.3.10)$$

თუ ჩვენ ამ პირობას დავამატებთ განხილულ სასაზღვრო ამოცანებს და შევასრულებთ კომპიუტერულ გამოთვლებს, მივიღებთ წყალსაშვის გაღებით შემცირებული ექსტრემალური ტალღის ეფექტს. ვინაიდან წყალსაშვის გავლენის გადადინების მახასიათებელზე ეფექტურობის შესწავლა ცალკე კვლევის საგანია, ამიტომ უფრო დეტალურად ამ საკითხს აქ აღარ შევხებით.



(ნახ.5.3.1) წყალსაშვი ფარის გამოყენების ეფექტურობის შესწავლის საანგარიშო სქემის მაგალითი სქემატიზირებული წყალსაცავისათვის

ნაშრომში მიღებული შედეგების საფუძველზე შესაძლებელია განხორციელდეს ოპტიმალური და მიზანდასახული ტექნიკური, ეკონომიკური, სოციალური და უსაფრთხოების საკითხებთან დაკავშირებული გადაწყვეტილებები ჰიდროკვანძის პროექტირების, მშენებლობის, ექსპლუატაციის და გარემოს დაცვის საკითხების გადაჭრის დროს, საგანგებო სიტუაციების გათვალისწინებით [10].

საგანგებო სიტუაციებში განხილული პოტენციური საფრთხის საწინააღმდეგო პრევენციული ზომები შემდეგია:

- მოსახლეობის შეტყობინება კაშხლის მოსალოდნელი გარღვევის ან/და ქვედა ბიეფში კატასტროფული ტალღის გადადინება, გავრცელების შესახებ, მსხვერპლის თავიდან აცილების მიზნით;
- წყალსაცავში „უსაფრთხო“ დონის დადგენა, როდესაც იქმნება პოტენციური ღვარცოფის შემოდინებისა და გადადინების საფრთხე (უხვი ნალექების, მიწისძვრის და სხვ. დროს);

- წყალსაცავში წყალსაში ფარების პროექტირებისა და ამუშავების ეფექტიანობის დადგენა, წყალუხვობის დროს უსაფრთხო ღონის დაცვის მიზნით;

აქვე შესაძლებელია დავამატოთ მიწისძვრების, ტერორისტული აქტის ან ომის დროს კაშხლის ნგრევისა და აფეთქების გზით წარმოქმნილი ღვარცოფის მოსალოდნელი საფრთხის გათვალისწინება და შეფასება.

ორგანიზაციები რომლებსაც ენიჭებათ პასუხისმგებლობა და კონტროლი ჰიდროკვანძების საიმედო მუშაობაზე, აგრეთვე სახელმწიფო დეპარტამენტები და არასამთავრობო ორგანიზაციები, რომლებიც დაკავშირებულია წყლის რესურსებისა და გარემოს დაცვის უზრუნველყოფის პრობლემებთან, წარმოადგენენ ნაშრომის შედეგების პოტენციურ მომხმარებლებს.

ზემოთ აღნიშნული პრევენციული გადაწყვეტილებების მიღება უნდა წარმოებდეს შესაბამისი ღონისძიებების ეფექტურობის შეფასების საფუძველზე, ამიტომ ნაშრომში დამუშავებული და მეცნიერულად დასაბუთებული პროგნოზირების მეთოდის გამოყენება მნიშვნელოვან ეკონომიკურ სარგებელს იძლევა არსებულ მიახლოებითი შეფასების მეთოდებთან შედარებით.

6. დასკვნა

საქართველოს ენერგეტიკისა და მრავალდარგობრივი სოფლის მეურნეობის პრობლემების გადაჭრაში ერთ-ერთი აქტუალური და მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია სხვადასხვა დანიშნულების ჰიდროკვანძების ექსტრემალურ პირობებში შეუფერხებელი და საიმედო ფუნქციონირებისა და გარემოს ეკოლოგიური წონასწორობის მაქსიმალურად შენარჩუნების ამოცანებს.

საქართველოს ტერიტორიის მნიშვნელოვან ნაწილს მოიცავს მთიანი და მთისწინა სეისმოაქტიური რაიონები, ისეთი მსხვილმასშტაბიანი გეოდინამიკური ექსტრემალური პროცესების ხშირი ალბათობით როგორცაა მეწყერები და ღვარცოფები, სეისმოტექტონიკური დისლოკაციები (ანუ ნარჩენი დეფორმაციები), ინტენსიური წყალმოვარდნები.

აღნიშნული გეოდინამიკური პროცესების ზემოქმედება შეიძლება განხორციელდეს უშუალოდ ჰიდროკვანძის ნაგებობებზე ძალისმიერი იმპულსის სახით. კერძოდ, მეწყერის ან ღვარცოფის დინამიკური (დარტყმითი) მოქმედება კაშხალზე, მაგრამ ხშირ შემთხვევაში უფრო დიდ საშიშროებას წარმოადგენენ გეოდინამიკური პროცესების შედეგად წყალსაცავში წარმოქმნილი ექსტრემალური დამანგრეველი ტალღები.

როგორც ჰიდროტექნიკური მშენებლობის მრავალწლიანი პრაქტიკა გვიჩვენებს, ამ ტალღების კაშხალზე გადადინება მინიმუმ იწვევს ქვედა ბიეფში როგორც ფართო ტერიტორიების, მათ შორის დასახლებული ობიექტებისა და სავარგულების დატბორვას, ასევე სატრანსპორტო, საირიგაციო სისტემების დანგრევას. ხოლო თუ კაშხალი აგებულია მიწის ან სხვა ბუნებრივი მასალისაგან, მაშინ ექსტრემალური ტალღების კაშხალზე გადადინებით შექმნილმა ნაკადმა შეიძლება გამოიწვიოს კაშხლის ნაწილობრივი ან მთლიანი წარეცხვა, რასაც თან სდევს ქვედა ბიეფში დამანგრეველი ღვარცოფული ნაკადის გავრცელება და კატასტროფული

შედეგი დასახლებული ობიექტების მოსპობისა და ადამიანთა მსხვერპლის სახით.

ნაშრომში შესწავლილია ახალი საკითხი, რომელიც ეხება წყალსაცავებში ღვარცოფებითა და სხვადასხვა ტიპის მეწყერით გენერირებული ექსტრემალური ჰიდროდინამიკური პროცესების მათემატიკურ მოდელირებასა და იმ საშიშროების შეფასებას რომელიც საფრთხეს უქმნის წყალსატევის ნორმალურ ფუნქციონირებას და იწვევს ქვედა ბიეფში ეკოლოგიური წონასწორობის დარღვევას, ტალღის კაშხალზე გადადინების შედეგად.

ნაშრომში დამუშავებულია მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის საფუძველზე მიღებული არასტაციონარული ტალღური სასაზღვრო ამოცანების ორ (2D) და სამ (3D) განზომილებიანი მათემატიკური მოდელების რიცხვითი ფორმულირება სასრულ-სხვაობითი სქემების საშუალებით და ახალი ტიპის არაცხადი, შერეული, ორი და სამ შრიანი იტერაციული ამონახსენი ალგებრული ოპერატორული მეთოდის გამოყენებით, როგორც სქემატიზირებული, ასევე რეალური ფორმის წყალსატევაში, ღვარცოფისა და მეწყერის დროს წარმოქმნილი ექსტრემალური ტალღური პროცესების შესასწავლად.

ნაშრომში წარმოდგენილია აგრეთვე მცირე ამპლიტუდიანი ტალღების თეორიის საფუძველზე მიღებული არასტაციონარული ტალღური ვერტიკალურად ორგანზომილებიანი (2D) სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები, მართკუთხედისა და სამკუთხედის ფორმის სქემატიზირებულ წყალსატევაში ღვარცოფის სტრატეფიცირებული ნაკადის შესვლით გამოწვეული გრძივი და განივი რყევების შესწავლისათვის.

ნაშრომში მოცემულია ანალიზური ფორმულების გამოყენების არეალი და ინტენსიური ტალღების კაშხალზე გადადინების სწრაფი პროგნოზირების ფორმულები. ნაშრომში განხილული თეორიული გათვლების შედეგები აჩვენებს, რომ გეოდინამიკური პროცესების დროს,

მაგალითად როდესაც მეწყერული მასა მთლიანად ჩაიძირა და შეიწონა წყალში, ინტენსიური ტალღური პროცესის წარმოქმნა შესაძლებელია ერთნაირი ალბათობით ნებისმიერი მოცულობის მქონე ჰიდროკვანძებში, მათ შორის საშუალო და მცირე მოცულობის მიწის კაშხლის მქონე საირიგაციო დანიშნულების წყალსაცავებში, რომელთა რიცხვი როგორც აღნიშნეთ საქართველოში საკმაოდ დიდია.

ნაშრომის ახალ შედეგებს, ორ (2D) და სამ (3D) განზომილებიანი ტალღური ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდიკა, რიცხვითი და ანალიზური ამონახსნის მეშვეობით ტალღური ზემოქმედების გათვლის მეთოდიკა, მათი გამოყენებით შესრულებული კომპიუტერული პროგრამები, გააჩნიათ მნიშვნელოვანი პოტენციალი პრაქტიკაში გამოყენების მიზნით.

ნაშრომში განხილული მათემატიკური მოდელირების შედეგები საშუალებას მოგვცემს კომპიუტერული გათვლების შედეგად სწრაფად აღვწეროთ წყალსაცავში ექსტრემალური ტალღური მოძრაობის სრული პროცესი, ტალღების წარმოქმნა, ტრანსფორმაცია–დისპერსია, კაშხლიდან არეკვლა, სუპერპოზიცია და სხვ. აგრეთვე განისაზღვრება მათი გარემოზე ზემოქმედების ხარისხი. აღნიშნულ მეთოდებს უპირატესობა გააჩნია სხვა მეთოდებთან შედარებით, ვინაიდან ითვალისწინებს მთელ რიგ ფაქტორს, რომლებიც ახასიათებენ, როგორც ჰიდროდინამიკურ, ასევე ღვარცოფულ პროცესებს. გათვლების პროცედურა შედარებით სწრაფია და ეკონომიური, ხოლო მათი შედეგები ზუსტია საანგარიშო პარამეტრების ცვლილებების ფართო დიაპაზონში.

აღსანიშნავია, რომ დამუშავებული მეთოდიკით შესაძლებელია არა მარტო ღვარცოფული და მეწყერული მოვლენების დროს წარმოქმნილი ტალღების შესწავლა, არამედ წყალსატევებსა და მდინარეებში ნაპირსამაგრი და სხვა სახის ჰიდროტექნიკურ ნაგებობებზე ექსტრემალური სიტუაციების მახასიათებლების, სიჩქარისა და წნევის გავლენის შეფასებაც. გარდა ამისა მოცემული მეთოდიკა შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ზღვის სანაპირო

ზოლის ექსტრემალური სიტუაციების გამომწვევი მოვლენების შესწავლის დროსაც.

ნაშრომში განხილული ღვარცოფით გამოწვეული გადადინების რისკების შეფასების მეთოდოლოგია არის ეკონომიკური თვალსაზრისით საკმაოდ ეფექტური მთის სეისმოაქტიურ რაიონებში წყალსაცავებისა და კაშხლების დაგეგმვის, მშენებლობისა და ექსპლუატაციის დროს, აგრეთვე ჰიდროკვანძების მონიტორინგის, მიმდებარე გარემოზე დამანგრეველი ტალღების ზემოქმედების პროგნოზირებისა და შეფასებისათვის, მოსალოდნელი კატასტროფებით გამოწვეული ეკონომიკური ზიანისა და ადამიანთა მსხვერპლის თავიდან აცილების მიზნით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Bolt B., Horn W., Macdonald G., Scott R. Geological Hazards. Springer-Verlag-Berlin-New York, 1977. 439p.;
2. Criado F., Gvelesiani T., Jgamadze N., Meladze H. Mathematical models for investigation wave generation in reservoirs. Applied Mathematics and Informatics. Tbilisi, University Press, 1997. V.2;
3. Davidson D., McCartney L. Water waves Generated by Landslides in Reservoirs. Hydraulic Div. Proc. ASCA, Dec. 1975. V.101, NHY 12, p.1489-1501;
4. Dean R., Dalrymple R. Water wave mechanics for Engineers and Scientists. World Scientific Publishing Co., Pte Ltd., 1992;
5. Gvelesiani T. et al. Influence of Water on Earthquake Stability of Dams and Pressure Tunnels Proc. 7-th European Conference on Earthquake Engin., Athens, Greece, Sept. 20-25 1982. p.135-142;
6. Gvelesiani T., Danelia R., Berdzenashvili G. Mathematical model of unsteady hydrodynamic processes caused by mobile mud flow on the bottom of reservoir. Bull. of the Georg. Academ of Scien., Tbilisi, 1999. V.159, 3, p.457-459;
7. Gvelesiani T., Danelia R., Kvatashidze V., Berdzenashvili G. The Problem of Transverse Water oscillations in Canals upper pools and Downstream (river) Channels. "Energy", Tbilisi 1998. 4, p.91-95;
8. Gvelesiani T., Iremashvili Kh., Akhmedov A., Berdzenashvili G. RIVR FLOW VELOCITIES DISTRIBUTION AT THE TRANSVERSAL COAST-PROTECTING STRUCTURE ZONE. 5-th International Scientific and Technical Conference, Modern Problems of Water Management, Enviromental Protection, Architecture and Construction. 16-19 July, 2015. p45-48;
9. Gvelesiani T., Jinjikhashvili G. et al. Consideration of Water Waves in Reservoirs in Designing of High Dams in Seismic Regions. ICOLD, XIII Congress. New Delhi, 1979. 34p;
10. Gvelesiani T., Jinjikhashvili G., Berdzenashvili G., Stepania T., Aronia G. ON PREDICTION AND PREVENTION OF DEBRIS FLOW CATASTROFIC IMPACTS ON HYDRAULIC PROJECTS IN MOUNTAIN AREAS (Georgia, Israel). 5-th International Scientific and Technical Conference. Modern Problems of Water Management, Enviromental Protection, Architecture and Construction. 16-19 July, 2015. p49-54;
11. Gvelesiani T., Jinjikhashvili G., Mamradze G. Methods of Investigation of Lanslide Generated Waves Considering the Form of Reservoirs. ICOLD, XIV Congress. Rio de Janeiro, Brazil, 1982. 29p;

12. Gvelesiani T., Jinjikhavili G., Berzenashvili G. Modeling of wave generation processes in reservoirs due to seismic effects. Transactions Seismic Resistance and Rehabilitation of buildings Universal, Tbilisi, 2014;
13. Gvelesiani T., Kilasonia J., Mamradze G. Water Waves Generation in a Reservoir and Hydrodynamic Pressure in Tunnel during an Earthquake. 6-th World Conf. on Earthquake Engneen. New Delhi, India, 1977. p.5305-5310;
14. Gvelesiani T., Rozentour L. et al. Water Waves Generated by Earthquake. 25-th Israel Conference on Mech. Engineering. Technion-Haifa, 1994. pp.399-403;
15. Gvelesiani T., Tsikhelashvili Z., Iremasvili Kh., Berdzenashvili G., Kodua M. On Research Aspects of a New-Type Floating Wave Damping Hydro-Technical Complex for Protection of Coastal Line and Open Ports from Storm Waves. 4-th International Scientific-Technical Conference, Modern Problems of Environmental Protection, Architecture and Construction. 27-30 September, 2014. p102-106;
16. Koutitas C. Finite Element Approach to Wave due to landslides. Hydraulic Div. Proc. ASCE, 1977. V.109, NHY 9, pp.43-59;
17. Mays L. Water resources engineering. John Wiley and Sons. Inc., 2005;
18. Noda E. Water waves generated by landslides. Journ. Proc. Amer. Soc. Civ. Enging., 1970. N4;
19. Roney D., Butler H.L. Landslide Generated Water Wave Model. Hydraulic Div. Proc. ASCE., Sept. 1976. V.102, NHY 9;
20. Steinbrugge K., Cloud W. Epicental intensities and damage in the Hebgen Lake. Montana, Earthquake of August 17, 1959. Bull. Seism. Soc. Am., 1962. V.52, 2;
21. Waltham T. Catastrophe: the violent earth. London, Macmillan, 1978. 220p.;
22. Wiegel R., Camatin D. The Earthquake at Hebgen Lake on August 18, 1959. Model Studies od Oscillations of Hebgen Lake. Bull. Seism. Soc. Am., 1962. Vol.52, 2;
23. Wiegel R., Noda E. et al. Water Waves Generated by Landslides in Reservoirs. Proc. of ASCE, J. of the Waterw. and Harb. Div., 1970. Vol.96, WW2;
24. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.; Вычислительная гидромеханика и теплообмен; Том 1, 1990;
25. Вольцингер Н., Клеванный К., Пелиновский Е. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.:Гидрометеоиздат, 1989. 271 с.;
26. Гвелесиани Т. Анализ основной зависимости для высоты образованной волны в водохранилищах при вертикальном смещении части их дна в результате тектонических землетрясений. Сообщения АН ГССР, 1968. т.51.3;

27. Гвелесиани Т. К вопросу о колебании вязкой жидкости, возникающем в результате возмущений на дне водоема. Сообщения АН ГССР, 1969. т.53.2;
28. Гвелесиани Т. Количественные характеристики волн на поверхности воды в водохранилище, возбуждаемые землетрясением. В кн.: Сейсмические воздействия на гидротехнические и энергетические сооружения. М.: Наука. 1980. с.159-174;
29. Гвелесиани Т. Решение задач инженерной гидроэкологии, связанных с проектированием и эксплуатацией различных гидротехнических сооружений в горных регионах. Энергия. 68./Сб. посвящ. 10-летию Грузинской Академии Энергетики. Тбилиси, 2004;
30. Гвелесиани Т., Бердзенашвили Г. Параметры потока в русле на участке его сужения. 2-nd International Scientific-Technical Conference, Modern Problems of Environmental Protection, Architecture and Construction. Tbilisi-Kobuleti (Georgia) July 24-31, 2012. (ISSN 1512-2344);
31. Гвелесиани Т., Бердзенашвили Г. Установление основных принципов гашения волн посредством демфера на основании аналитической модели. 3-th International Scientific-Technical Conference, Modern Problems of Environmental Protection, Architecture and Construction. Tbilisi, Borjomi, 2013. с.37-48;
32. Гвелесиани Т., Бердзенашвили Г. Математическая модель гидродинамического процесса в водо-хранилище при продвижении по его дну селевого потока. 5-th Межд. конф. "Динамика и термика рек, вод-хран. и прибреж. зоны морей". 275 лет Российс. АН. М. 1999. с.10-12;
33. Гвелесиани Т., Данелия Р., Бердзенашвили Г. Прогнозирование динамических параметров консеквентных (блоко-вых) оползней вдоль береговых склонов и по дну водоемов. Georgian Engineering News. Tbilisi. 4(8). 1998. p.61-64;
34. Гвелесиани Т., Джинджихашвили Г. Исследование волнообразования в водохранилище Ахалцихского КГУ. НТО ГрузНИИЭГС. 1988. Тема №06.04, 35с.;
35. Гвелесиани Т., Джинджихашвили Г. Исследования образования обвальных волн в водохранилище Саяно-Шушенской ГЭС при НПУ 530 м и 518 м. НТО ГрузНИИЭГС, 1983. Тема №17.6, 38с.;
36. Гвелесиани Т., Джинджихашвили Г. Расчет волн, возникающих вследствие обвалов и оползней на акватории Сарезского озера. НТО ГрузНИИЭГС, 1981. Тема №30.3, 33с.;
37. Гвелесиани Т., Музаев И. Расчет волн в водохранилище Зарамагской ГЭС. НТО ГрузНИИЭГС, 1978. 31с;
38. Гвелесиани Т., Островерх Б. и др. Прогноз образования высоких волн на горных водохранилищах при оползнях и обвалах (на примере Гетикского

- гидроузла в Армянской ССР). Гидротехническое строительство, М.:Энергоатомиздат, 1989.;
39. Гвелесиани Т., Чоговадзе Г., Мамрадзе Г., Джинджихашвили Г. Временное руководство по расчету параметров волн, возникающих в водохранилищах при обвально-оползневых явлениях. Госстрой ГССР, Тбилиси, 1986. 42 с;
 40. Гупта Х., Растоги Б. Плотины и землетрясения/Пер. с англ. М.:Мир, 1979. 251с.;
 41. Джинджихашвили Г., Розентур Л. Волнообразование в водохранилищах при обрушении крупного оползня вблизи плотины. Гидротехническое строительство в горных условиях. Сб. научных трудов. М.: Энергоатомиздат, 1987. с.107-112;
 42. Иремашвили Х., Гвелесиани Т., Бердзенашвили Г. Влияние берегозащитного сооружения на характеристики потока врусле реки. სამეცნიერო შრომათა კრებული №69 ეძღვნება წყალთა მეურნეობის ინსტიტუტის 85 წლის იუბილეს 2014წ, გვ.61-65;
 43. Кочин Н., Кибель И., Розе Н. Теоретическая гидромеханика. Т.1.М.: Физматгиз, 1963. 723 с;
 44. Кюнж Ж., Холли В., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики. Практическое применение: пер.с англ. М.: Энергоатомиздат, 1985. 256с;
 45. Ламб Г. Гидродинамика. М: Гостехиздат, 1947. 928с;
 46. Ле Меоте Б. Введение в гидродинамику и теорию волн на воде. М.:Гидрометеоиздат. 1974. 967с.;
 47. Лятхер В., Милитеев А. Исследование воздействий падающих камней на плотину и определение параметров волны всплеска, а также ее трансформации в нижнем бьефе Токтогульского гидроузла. НТО НИС Гидропроекта. М., 1972. 23с;
 48. Мамрадзе Г., Гвелесиани Т., Джинджихашвили Г. Прогнозирование волн в водохранилищах при сейсмических воздействиях. Москва, "Энергоатомиздат", 1991;
 49. Мишуев А., Иванов Л., Языков С. Погружение цилиндрических твердых тел в водоемы ограниченной глубины. Гидравлика и охрана водной среды. Сб. трудов МИСИ им.В.В.Куйбышева, М., 1984. с.11-16;
 50. Мишуев А., Сладкевич М. Отражение гидравлического бора от вертикальной стенки. Гидротехническое строительство. М.: Энергоатомиздат, 1982. 4, с.28-30;
 51. Молоков Л. Взаимодействие инженерных сооружений с геологической средой. Москва, Недра, 1989;

52. Молоков Л. Инженерно-геологические процессы. Москва, Недра, 1988;
53. Натишвили О., Тевзадзе В. Волны в селях. Тбилиси, Научн-техн. лит. изд., 2011. 160с.;
54. Натишвили О., Тевзадзе В. Основы динамики селей. Тбилиси, 2007. 213 с.;
55. Островерх Б., Лемберг Е. Исследование параметров волн на поверхности водохранилища в эпицентральной зоне землетрясения. Водные ресурсы, 1981. 3, с.105-113;
56. Самарский А. Введение в численные методы. М.Наука, 1982;
57. Самарский А. Михайлов А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.; 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001;
58. Самарский А. Теория разностных схем. М.Наука, 1977;
59. Самарский А., Андреев В. Разностные методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976;
60. Самарский А., Вабищевич П. Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 2001;
61. Самарский А., Вабищевич П. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕПЛО-ПЕРЕДАЧА. М: Едиториал УРСС, 2003;
62. Самарский А., Гулин А. Устойчивость разностных схем. М.Наука, 1973;
63. Самарский А., Николаев Е. Методы решения сеточных уравнений. М. Наука, 1978;
64. Сретенский Л. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816с;
65. Стокер Дж. Волны на воде/Пер. с англ. М.:изд-во ИЛ., 1959. 617с.;
66. გავარდაშვილი გ. ბუნებრივი და ტექნოგენური კატასტროფებისას მთის ლანდშაფტების უსაფრთხოების ღონისძიებები. თბილისი "უნივერსალი" 2011. 236გვ.;
67. გავარდაშვილი გ. მდინარე დურუჯის აუზში ეროზიულ-ღვარცოფული პროცესების პროგნოზირება და მათი საწინააღმდეგო ახალი საინჟინრო-ეკოლოგიური ღონისძიება. თბილისი "მეცნიერება", 2003. 180გვ.;
68. გედენიძე ზ., ამბროლაძე თ. წყლის მეურნეობა. თბილისი "ტექნიკური უნივერსიტეტი" 2009. 391გვ.;
69. გველესიანი თ., ბერძენაშვილი გ. არასტაციონარული ჰიდროდინამიკური მახასიათებლების განსაზღვრა ტრაპეციოდალური ფორმის წყალსატევებში მათი ფერდობების სხვადასხვა დახრილობისას. "ენერჯია", თბილისი, 1999. 3, გვ.78-82;
70. გველესიანი თ., ბერძენაშვილი გ. კატასტროფული ტალღის მათემატიკური მოდელირება ზონკარის კაშხლის გარღვევის

- შემთხვევაში. სტუ, წყალთა მეურნეობის ინსტიტუტი, სამეცნიერო ნაშრომთა კრებული, 2011. 66 (ISSN-1512-2344);
71. გველესიანი თ., ფალავანდიშვილი გ., მაღლაფერიძე ბ., ბერძენაშვილი გ. ალგეთისა და სიონის კაშხლების გარღვევის შედეგად ქვედა ბიეფში გამოწვეული ზემოქმედების პროგნოზირება. ენერჯია, 2008. 4(48);
 72. გველესიანი თ., ყირიმლიშვილი-დავითაშვილი თ., ბერძენაშვილი გ. მათემატიკური ფორმულირების საკითხი წყალქვეშ მოძრავი მეწყერის ან სელური ნაკადის ჰიდროდინამიკური ზემოქმედების განსაზღვრის დროს. ენერჯია/Energy, 2008. 2(46) (ISSN 1512-0120);
 73. გველესიანი თ., ყირმელაშვილი-დავითაშვილი თ. ამოცანის მათემატიკური ფორმულირების საკითხი წყალქვეშ მოძრავი მეწყერის ან ღვარცოფის ჰიდროდინამიკური ზემოქმედების განსაზღვრის დროს. ენერჯია / Energy, 2008. 2(46) (ISSN 1512-0120);
 74. გველესიანი თ., ციხელაშვილი ზ., ბერძენაშვილი გ., ირემაშვილი ხ. მცურავი ტალღაჩამქრობის (დემპფერის) მოქმედების მათემატიკური მოდელირების განხორციელების მეთოდის შესახებ. 5-th International Scientific and Technical Conference. Modern Problems of Water Management, Enviromental Protection, Architecture and Construction. 16-19 July, 2015. გვ.40-44;
 75. დანელია რ., ბერძენაშვილი გ. წყალსაცავში სელის ზემოქმედებით წარმოქმნილი ონდულაციური პროცესის ანალიზი კაშხალთან. აგრარული მეცნიერების პრობლემები. საქართველოს სახელმწიფო აგრარული უნივერსიტეტი. თბილისი, 1999;
 76. კილასონია ჯ., სხირტლაძე ნ., გველესიანი თ., ხელიძე გ., ჭანტურია ა. ვაიონტის წყალსაცავთან მომხდარი კატასტროფული ჩამოქცევის მოდელირება კომპიუტერზე. ენერჯია, თბილისი, 1998. 1;
 77. ნათიშვილი ო., თევზაძე ვ., დანელია ზ. ღვარცოფებისა და ღვარცოფსაწინააღმდეგო ნაგებობების ჰიდრავლიკა. თბილისი, 1995. 240გვ.;