

მზევინარ კეკენაძე

არანიუტონისეული სითხის სასაზღვრო ფენი

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
თებერვალი, 2016 წელი

საავტორო უფლება © კეკენაძე მზევინარ 2016 წელი,

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით კეკენაძე მზევინარის მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით: „არანიუტონისული სითხის სასაზღვრო ფენი“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელები:

რეცენზენტები:

ფ.მ.მ.დ., პროფესორი
ჯონდო შარიქაძე

ფ.მ.მ.კ., აკადემიური
დოქტორი, პროფესორი
ზურაბ ციციშვილი

ფ.მ.მ.კ., აკადემიური
დოქტორი, პროფესორი
ლევან ჯიქიძე

ფ.მ.მ.კ., აკადემიური
დოქტორი, პროფესორი
ბადრი ცუცქერიძე

ხარისხის უზრუნველყოფის სამსახურის უფროსი,

პროფესორი:

მარინა ჯავახიშვილი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2016 წელი

ავტორი: მზევინარ კვეენაძე

დასახელება: „არანიუტონისეული სითხის სასაზღვრო ფენი

ფაკულტეტი: სამშენებლო

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ შემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

მზევინარ კვეენაძე

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

მიძღვნა

*ნაშრომს ვუძღვნი ჩემს საყვარელ ოჯახს. მათი თანადგომა და სრული
გაგება მუდამ მამხნევებდა დისერტაციის მისაყვანად ლოგიკურ
დასასრულამდე.*

რეზიუმე

თითქმის ას წელზე მეტია, რაც არანიუტონური სითხეები გახდა მეცნიერული კვლევის საგანი. მაგრამ მხოლოდ ამ ბოლო დროს დაიწყო მისი ინტენსიური შესწავლა, რაც გამოწვეულია მათი ფართო გამოყენებით მრეწველობაში, საყოფაცხოვრებო ტექნიკაში, საავიაციო მშენებლობაში და სხვა.

ამის დამადასტურებლად საკმარისია დავასახელოთ ყველა ის პოლიმერული სითხეები, რომელთა დენადობის თვისებების თეორიულ-ექსპერიმენტულმა შესწავლამ საშუალება მოგვცა შექმნილიყო ინჟინრული საფუძვლები პოლიმერული მასალებიდან სხვადასხვა ნაკეთობის დამზადებისათვის.

არანიუტონური სითხეების შესწავლასა და გამოკვლევას მიეძღვნა ისეთი ცნობილი მეცნიერების შრომები, როგორებიცაა: ასტარიტა დ.ჟ., მარუჩი დ.ჟ., რეინერი მ., შელმანი ზ.პ., უილკინსონი უ.ლ., შლიხტინგი გ., სებისი ტ., ბრედშოუ პ., ბენეტ რ.ო., მაიერსი დ.ჟ., მაზო ა.ბ., ლოიციანსკი ლ.გ., მეიზ დ.ჟ., პრანდტლი, ი. ნიკურაძე და სხვები.

საქართველოში ამ და მის მონათესავე საკითხებზე გამოქვეყნებულია დ. დოლიძის, ნ. ჯორბენაძის, გ. აბესაძის, ზ. კერესელიძის, ჯ. შარიქაძის, ლ. აზმაიფარაშვილის, ლ. ჯიქიძის და ბ. ცუცქირიძის შრომები.

არანიუტონური სითხეების ქვეშ იგულისხმება საკმარისად ფართო ჯგუფი სხვადასხვა მასალისა. პოლიმერების გამოყენება სამშენებლო მასალების (ლინონიუმი, მოსაპირკეთებელი ფილები და ა.შ.), საავტომობილო საბურავების, ქიმიურ და რადიოელექტრო წარმოებაში უზარმაზარია. ძნელად წარმოსადგენია წარმოების რომელიმე დარგი, რომელშიც არ გამოიყენება სინთეტიკური ან არამეტალური მასალები.

არანიუტონისეული სითხეების დინების შესწავლის რამდენიმე მიდგომა არსებობს, ნაშრომში გამოყენებულია მათემატიკურ-რეოლოგიური მოდელი. ამ მიდგომით იქმნება შედარებით რთული, მაგრამ რეალობასთან მიახლოებული მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეყრდნობა ჰიდროდინამიკის ძირითად პრინციპებსა და მიდგომებს; ამის შემდეგ შეისწავლება და ხასიათდება არსებული სითხის ქცევის თავისებურებები.

არანიუტონისეული სითხეების დინების შესწავლისას, მათი სიბლანტისა და პლასტიკურობის ბუნებიდან გამომდინარე განსაკუთრებით საინტერესოა სასაზღვრო ფენაში, თავისუფალი კონვექციის არსებობის პირობებში, როდესაც სითხის ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი იცვლება სიჩქარის მიხედვით, როგორც სტაციონარული ისე არასტაციონარული დინებისათვის დინამიკური და სითხური სისქის ურთიერთკავშირის განსაზღვრა. ასევე საინტერესოა სასაზღვრო ფენის სისქის განსაზღვრა, რომელიც პირდაპირ კავშირშია ძვრის სიჩქარესთან.

სადისერტაციო ნაშრომის თეორიულ და მეთოდოლოგიურ საფუძვლად გამოყენებულია ბლანტი უკუმში სითხის მოდელი, როცა სასაზღვრო ფენაში სითხის მოძრაობა ლამინარულია. სასაზღვრო ფენის გარეთ სითხის

მოძრაობაზე სიბლანტის გავლენა უგულვებელყოფილია და სითხე ითვლება იდეალურად. ასეთი მოდელისათვის შექმნილი მაგნიტური ჰიდროდინამიკის კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა არაწრფივი სისტემა საკმაოდ რთული ამოსახსნელია. უგანზომილებო სიდიდეებზე გადასვლით მიღებული განტოლებათა სისტემა შესაბამის სასაზღვრო პირობებთან ერთად იხსნება თანდათანობით მიახლოების მეთოდით.

ნაშრომში დასმულია და ამოხსნილია შემდეგი ამოცანები:

- სხეულის სტაციონარული გარსდენა ხარისხოვანი ბლანტი უკუმში გამტარი სითხით.
- სხეულების გარსდენა არასტაციონარული ელექტროგამტარი ბლანტი უკუმში სითხით, თბოგადაცემის გათვალისწინებით.
- სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექცია განივ მაგნიტურ ველში.

Abstract

Almost a hundred years ago as the object of scientific investigation are the non-Newtonian liquids. But only recently has begun its intense study that is caused due their wide application in industry, household equipment, aircraft engineering and so on.

To prove this is enough to mention all polymer fluids, the theoretical and experimental study of flow properties of that gives the possibility to create engineering basis for manufacture different products from polymeric materials.

To studies and research of non-Newtonian liquids are devoted works of such famous scientists as: Astarita D.J., Marucci D.J., Rainer M., Shelmann Z.P., Wilkinson U.L., Schlichting G., Sebis T., Bradshaw P., Bennett R.O., Myers J.E., Mazo A.B., Loitsianski L.G., Meiz D.J., Prandtl, Nikuradze I. and others.

In Georgia on this and related issues are published works of D. Dolidze, N. Jorbenadze, G. Abesadze, Z. Kereselidze, J. Sharikadze, L. Azmaiparashvili, L. Jikia and B. Tsutskiridze.

Non-Newtonian liquids means sufficiently broad group of different materials. Polymers application in production of construction materials (linonium, facing tiles, etc.), automobile tires, chemical and radio electronics industries is huge. Is hard to imagine any type of production, in that is not used the synthetic or non-metal materials.

There are several approaches in study of the non-Newtonian liquids flow, in the work is applied the mathematical and rheological model. By this approach is created relatively complex, but close to the reality mathematical model, which is based on fundamental hydrodynamic principles and approaches; after this is studied and characterized the singularities of behavior of fluid.

At study on non-Newtonian liquids flow, due the nature of their viscosity and plasticity particularly interesting is in boundary layer, in the conditions of existing of free convection, when the fluid coefficient of electroconductivity varies according to the rate at stationary as well as in non-stationary flow. It is also interesting to determine the thickness of boundary layer that is directly related to the shear rate.

As theoretical and methodological basis of the dissertation work is applied viscous in vacuum fluid model, when in boundary layer of motion is laminar. Outside the boundary layer of fluid the influence of viscosity on motion is neglected and fluid is considered as ideal. For such model created a system of nonlinear differential equations with magnetic hydrodynamic partial is quite complex for solution. Obtained due the transition on dimensionless values corresponding simultaneous equations with the boundary conditions is solved by method of gradual approximation.

In the work are set and solved the following tasks:

- The stationary flow of body in qualitatively viscous in infinity conducting fluid.
- The flow of body by non-stationary electricity electrically conducting viscous in infinity fluid with taking into account the heat transfer.
- Free convection of weakly conducting qualitatively fluid in transverse magnetic field.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა	10
მადლობის გზავნილი	11
შესავალი	12
1. ლიტერატურის მიმოხილვა	
§ 1. არანიუტონისეული სითხეები	14
§ 2. ხარისხოვანი სითხეების სასაზღვრო ფენი	16
§ 3. ხარისხოვანი არანიუტონისეული სითხის თავისუფალი კონვექციის გადატანის განტოლებები	25
§ 4. საწყისი და სასაზღვრო პირობები	31
2. შედეგები და მათი განსჯა	
თავი 1. არანიუტონისეული გამტარი სითხის სტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი ცვლადი ელექტროგამტარებლობისას	35
თავი 2. არანიუტონისეული სითხის არასტაციონარული მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება	51
§ 2.1. მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი არანიუტონისეული გამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენისათვის	54
§ 2.2. ფირფიტის არასტაციონარული გარსდენა გამტარი ხარისხოვანი სითხით ელექტროგამტარებლობის ცვლადი კოეფიციენტით და თბოგადაცემით	67
§ 2.3. არანიუტონისეული გამტარი სითხის ავტომოდელური ამოცანების შესახებ სითბოგადაცემის გათვალისწინებით	79
თავი 3. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექცია განივ მაგნიტურ ველში	85
§ 3.1. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული თავისუფალი კონვექციის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა	87
§ 3.2. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი ბლანტი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანის ამოხსნის ინტეგრალური მეთოდი	97
3. ძირითადი შედეგები და დასკვნები	109
გამოყენებული ლიტერატურა	111

ნახაზების ნუსხა

ნახაზი 1. არანიუტონისეული და ნიუტონისეული სითხეების კლასიფიკაცია	15
ნახაზი 2. სასაზღვრო ფენის არსი	19
ნახაზი 3. სასაზღვრო ფენის სისქის კავშირი შეჟონვისა და გაჟონვის სიჩქარესთან	47
ნახაზი 4. სიჩქარის პროფილი მაგნიტური ველის გაზრდისას	48
ნახაზი 5. დილატანტური და ფსევდოპლასტიკური სითხეებისათვის მაგნიტური ველის დამოკიდებულება სიბლანტის კოეფიციენტზე	49
ნახაზი 6. ძვრის ძაბვის დამოკიდებულება მაგნიტურ ველზე	50
ნახაზი 7. მუდმივი მხები ძაბვის დროს სასაზღვრო ფენის სისქის დამოკიდებულება ველის მაგნიტურ რიცხვზე და სიმკვრივეზე	66
ნახაზი 8. ცვლადი ელექტრული გამტარებლობის ხასიათის გავლენა სასაზღვრო ფენის სისქეზე	67
ნახაზი 9. ფსევდოპლასტიკური სითხის ტემპერატურის დაცემის კავშირი ტემპერატურაზე დამოკიდებულ სიბლანტის კოეფიციენტთან	78
ნახაზი 10. დილატანტური სითხისათვის ტემპერატურის დაცემის კავშირის ტემპერატურაზე დამოკიდებულ სიბლანტის კოეფიციენტთან	78
ნახაზი 11. სითხის სიჩქარის განაწილება მსრბოლი ტალღის შემთხვევაში	84
ნახაზი 12. სითბური და დინამიკური სასაზღვრო ფენის ფარდობის დამოკიდებულება პრანდტლის რიცხვზე	87

მადლობის გზავნილი

ამ ნაშრომის მომზადებაში მრავალ პირს აქვს მიღებული მონაწილეობა ინტელექტუალური, მეცნიერული, მორალური თუ ტექნიკური თვალსაზრისით. მათი მეგობრული განწყობა და უნგარო დახმარება უდიდესი პატივია ჩემთვის.

განსაკუთრებულ მადლიერებას გამოვხატავ ჩემი სამეცნიერო ხელმძღვანელების პროფესორების ჯონდო შარიქაძის და ზურაბ ციციშვილის მიმართ, რომელთა ყოველდღიური ყურადღების, მზრუნველობისა და ფასდაუდებელი შენიშვნების, ასევე ხანგრძლივი საუბრების საფუძველზე შესაძლებელი გახდა ნაშრომის საბოლოო სტრუქტურისა და შინაარსის ჩამოყალიბება.

სასიამოვნო მოვალეობად მიმაჩნია გულწრფელი მადლობა გადავუხადო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის პროფესორ-მასწავლებლებს გულწრფელი ყურადღებისა და მუდმივი ინტერესის გამო.

შესავალი

არანიუტონისეული სითხეების დინებათა კანონზომიერების გამოკვლევა დიდ მნიშვნელობას იძენს მშენებლობაში, მრეწველობასა და ტექნიკაში ახალი მასალების შექმნისა და ფართო გამოყენებისათვის, ასევე სხვადასხვა ბიოლოგიური გარემოს შესწავლისას, როგორებიცაა სისხლი, ლიმფის დინება.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია როგორც სტაციონარული, ასევე არასტაციონარული დინებები და ელექტროგამტარი არანიუტონისეული სითხის თავისუფალი კონვექცია, როდესაც ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი იცვლება სიჩქარის მიხედვით.

ნაშრომი შეიცავს შესავალს და სამ თავს.

ნაშრომში დასაბუთებულია განხილული ამოცანების აქტუალობა, მიღებულია მაგნიტური ჰიდროდინამიკის, მაგნიტოჰიდროდინამიკური სასაზღვრო ფენისა და თავისუფალი კონვექციის ძირითადი განტოლებები და დებულებები. პირველ თავში მიახლოებითი მეთოდით ამოხსნილია ცვლადი ელექტროგამტარებლობის მქონე სუსტადგამტარი არაკუმშვადი ხარისხოვანი არანიუტონისეული სითხის მოძრაობის სტაციონარული ამოცანები, ხოლო მეორე თავში გამოკვლეულია არაკუმშვადი სუსტადგამტარი არანიუტონისეული სითხის არასტაციონარული მოძრაობის ამოცანები. ამ თავის პირველ პარაგრაფში შესწავლილია არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის სასაზღვრო ფენის არასტაციონარული ამოცანა,

როდესაც სითხის ელექტროგამტარებლობა $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)^m$ სასაზღვრო

ფენაში სითხის სიჩქარის ცვლადია და მისი ამონახსნი მიღებულია მიახლოებითი მეთოდით. მეორე პარაგრაფში შესწავლილია სითხოგადაცემის გათვალისწინებით სუსტადგამტარი ხარისხოვანი ბლანტი სითხით ფირფიტის არასტაციონარული გარსდენა, როდესაც სითხის

ელექტროგამტარებლობა $\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)^m$ ცვლადია. მესამე პარაგრაფში

ნაპოვნია რამოდენიმე ავტომოდელური ამონახსნი ამოცანის, რომელიც ეხება არაგამტარ ფირფიტაში სითხის გაჟონვის გათვალისწინებით არანიუტონისეული სითხის დინებას, რომელიც ემორჩილება რეოლოგიის ხარისხოვან კანონს, ამავე დროს გათვალისწინებულია სითხოვადაცემა და მიიჩნევა, რომ ელექტროგამტარებლობა $\sigma = \sigma_0 U^{m-1}$ –სახისაა. ამ ამონახსნებს აქვთ მოძრავი ტალღების სახე, რომელთა ფრონტი ვრცელდება გარემოს მოძრაობის სიჩქარის, გაჟონვის მიმართულებით.

მესამე თავში განიხილება ელექტროგამტარი არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექციური დინების ამოცანა, როდესაც σ ელექტროგამტარებლობის ცვლილება დამოკიდებულია სასაზღვრო ფენაში სითხის სიჩქარეზე. ამ თავის პირველ პარაგრაფში შესწავლილია არასტაციონარული კონვექციური დინება იმ შემთხვევაში, როცა $\sigma = \sigma_0 U^m$, $m \geq 0$ და მიღებულია ამონახსნი მიახლოებითი მეთოდით, ხოლო მეორე პარაგრაფში სტაციონარული კონვექციური დინება შეისწავლება ინტეგრალური მეთოდით, როდესაც $\sigma = \sigma_0 U^a$ $a \geq 0$.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

§ 1. არანიუტონისეული სითხეები

ნიუტონისეული სითხის დინამიკური სიბლანტე μ დამოკიდებულია მხოლოდ ტემპერატურაზე და წნევაზე და არაა დამოკიდებული მოძრაობის სიჩქარეზე, ხოლო ძაბვისა და სიჩქარის დამოკიდებულების გრაფიკი ე.წ. დინების მრუდი წარმოადგენს სწორ ხაზს დახრის კუთხის ტანგენტით μ , და ეს ერთადერთი მუდმივი სრულად ახასიათებს სითხეს. არანიუტონისეული სითხეებისთვის „დინების მრუდი“ უკვე აღარაა წრფივი, ე.წ. სიბლანტე არანიუტონისეული სითხეებისა დამოკიდებულია არა მხოლოდ ტემპერატურასა და წნევაზე, არამედ ისეთ ფაქტორებზე, როგორებიცაა: მოძრაობის დეფორმაციის სიჩქარე, გარემოს კონსტრუქციული თავისებურებები, რომელშიც იმყოფება სითხე და სითხის დინების წინაისტორია [1, 2, 3].

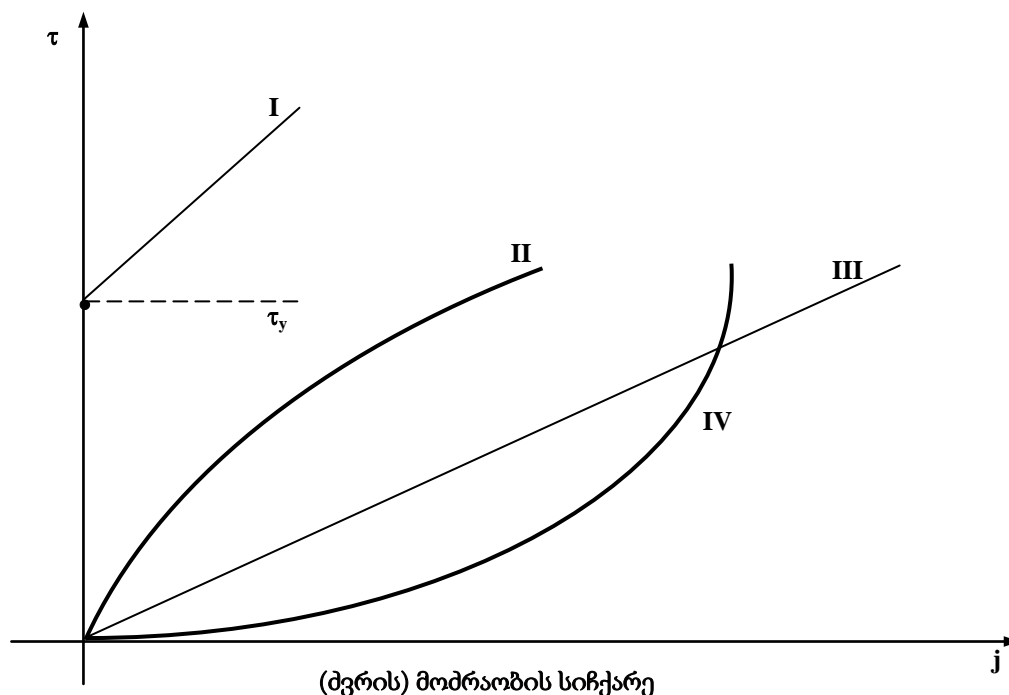
დინების არაწრფივი მრუდის მქონე რეალური სითხეების სისტემები, რომელთა მოძრაობის სიჩქარე ყოველ წერტილში წარმოადგენს ამავე წერტილში მხოლოდ ძვრის მოძრაობის ძაბვის რაიმე ფუნქციას და არაა დამოკიდებული დროზე, შეიძლება აღიწეროს რეოლოგიური განტოლებით:

$$\dot{\gamma} = f(\tau). \quad (0.1.1)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ სითხის ყოველ წერტილში ძვრის მოძრაობის სიჩქარე წარმოადგენს ამავე წერტილში ძაბვის წრფივ ფუნქციას. ასეთი ნივთიერებები იწოდებიან არანიუტონისეულ ბლანტ სითხეებად. მათ ყოფენ სამ ჯგუფად (0.1.1) ფუნქციის (ნახ. 1) გამოსახულების მიხედვით:

- ა) ბინგამისეული პლასტიკური სითხე;
- ბ) ფსევდოპლასტიკური სითხეები;
- გ) დილატანტური სითხეები.

ბინგამისეული გარემოს დინების მრუდი წარმოადგენს წრფეს, რომელიც კვეთს ძაბვის ღერძს მისი სათავიდან τ_y დაშორებით. რეოლოგიური განტოლება ბინგამისეული გარემოსთვის ჩაიწერება შემდეგი სახით



ნახ. 1. არანიუტონისეული და ნიუტონისეული სითხეების კლასიფიკაცია

- I – ბინგამისეული პლასტიკური (ბლანტპლასტიკური)
- II – ფსევდოპლასტიკური ($n < 1$)
- III – ნიუტონისეული
- IV – დილატანტური ($n > 1$).

$$\tau - \tau_y = \mu_3 j \quad (\tau > \tau_y), \quad (0.1.2)$$

სადაც μ_3 არის პლასტიკური სიბლანტე, ანუ სიმტკიცის კოეფიციენტი ძვრისას, იგი რიცხობრივად ტოლია დინების მრუდის დახრის კუთხის ტანგენტის.

ფსევდოპლასტიკურ გარემოს არ გააჩნია **გადინების** ზღვარი და ამიტომ დინების მრუდი გვიჩვენებს ძვრის ძაბვასა და ძვრის სიჩქარეს შორის დამოკიდებულებას, ე.ი. მიმხები სიბლანტე μ ძვრის სიჩქარის ზრდისას თანდათან მცირდება. დინების მრუდი წრფივი ხდება მხოლოდ ძვრის სიჩქარის სიდიდის ძალიან დიდი მნიშვნელობებისას.

ძვრის ძაბვასა და მის სიჩქარეს შორის დამოკიდებულება პირველად წარმოგვიდგინა **ოსტვალდმა** [1], შემდეგ კი გააუმჯობესა რეინერმა [2]. მას აქვს სახე:

$$\tau = k \cdot \dot{\gamma}^n, \quad (0.1.3)$$

სადაც k და n მუდმივებია ($n < 1$) მოცემული გარემოსათვის: k - სითხის კონსისტენციის ზომაა, რაც დიდია სითხის სიბლანტე, მით მეტია k , n - ახასიათებს მასალის არანიუტონისეულობის ხარისხს და რაც უფრო მეტად განსხვავდება n ერთისგან, მით უფრო მკაფიოდ ვლინდება მისი არანიუტონისეული ხასიათი.

დილატანტური გარემო იმით ჰგავს ფსევდოპლასტიკურს, რომ არც მას გააჩნია გადინების ზღვარი, მხოლოდ მათი მიმხები სიბლანტე იზრდება ძვრის სიჩქარის გაზრდისას. ამ შემთხვევაში ხარისხოვანი კანონი ხანდახან გამოსადეგია, მაგრამ ხარისხის მაჩვენებელი n როცა აჭარბებს ერთს ($n > 1$) დინების ასეთი ტიპი პირველად აღმოაჩინა რეინოლდსმა მყარი ფაზის დიდი შემცველობისას.

კლასიკური ჰიდროდინამიკის საფუძველზე ბლანტი არაკუმშვადი იზოტროპული სითხისთვის სამართლიანია კანონი:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ik} + 2\mu\dot{e}_{ij}. \quad (0.1.4)$$

ძაბვის τ_{ij} ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის \dot{e}_{ij} ტენზორს შორის არის წრფივი დამოკიდებულება.

ნივთიერებანი, რომელთა დინება ემორჩილება (0.1.4) კანონს იწოდებიან ნიუტონისეულად და ითვლებიან ნორმალურად.

არანიუტონისეული სითხეებისთვის კავშირი ძაბვის \dot{e}_{ij} ტენზორსა და დეფორმაციის სიჩქარის τ_{ij} ტენზორს შორის უფრო რთული ხასიათისაა და აქვს სახე:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ik} + k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{me} e_{em} \right|^{\frac{n-1}{2}} \dot{e}_{ij}, \quad (0.1.5)$$

სადაც δ_{ij} არის კრონეკერის სიმბოლო.

§ 2. ხარისხოვანი სითხეების სასაზღვრო ფენი

განვიხილოთ არანიუტონისეულ სითხეებში სასაზღვრო ფენის იდეის გამოყენების შესაძლებლობანი. ცნობილია, რომ ნიუტონისეულ ბლანტი

სითხის დინამიკურ სასაზღვრო ფენში მოიაზრება დინების ის არე, რომელშიც დიდ როლს თამაშობს შინაგანი ხახუნის ძალები. სიბლანტის ძალების შინაგანი ინტენსივობა ნიუტონის კანონის მიხედვით წრფივ კავშირშია ძვრის სიჩქარესთან, ხოლო რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისას ძალიან სწრაფად ეცემა გარსმოდენადი ზედაპირიდან მოშორებით.

მახასიათებელ ზომებთან შედარებით თხელი არე, რომელშიც ხახუნის ძაბვა ეცემა კედელზე მაქსიმალური სიდიდიდან გარე საზღვარზე უსასრულო მცირემდე იწოდება ბლანტ სასაზღვრო ფენად.

განასხვავებენ ლამინარულ და ტურბულენტურ სასაზღვრო ფენს იმის მიხედვით, თუ როგორია მათში დინების ლამინარული თუ ტურბულენტური რეჟიმი. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ლამინარულ სასაზღვრო ფენს [3].

ცხადია, რომ ანომალური-ბლანტი სითხეების დინებაში, რომელიც ნიუტონისეულისგან განსხვავდება მხოლოდ სიბლანტის ძალებსა და ძვრის სიჩქარეს შორის განსხვავებული დამოკიდებულებით, შეიძლება ასევე იარსებოს არემ, რომელშიც შეინიშნება შინაგანი ხახუნის ძალების მოქმედება ინერციულთან შედარებით, ე.ი. ბლანტმა სასაზღვრო ფენამ.

ამავე დროს ანომალურ-ბლანტ სითხეებში სასაზღვრო ფენის იდეის გავრცობისას ფრთხილად უნდა ვიყოთ. ანომალურ-ბლანტ სითხედ წარმოვიდგინოთ ისეთი სითხე, რომლისთვისაც ხახუნის ძაბვა სუსტად ან ძალიან სუსტადაა დამოკიდებული ძვრის სიჩქარეზე (ხარისხოვან კანონში მცირე მნიშვნელობები). მაშინ, ცხადია სიბლანტის ძალების შემცველი არე არ იარსებებს და სასაზღვრო ფენის თეორია კარგავს აზრს. სასაზღვრო ფენი გადაიწევს დინების მთელ არეზე [3].

ცხადია, რომ რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობისას მოსალოდნელია, რომ სიბლანტის მოქმედება წარმოიქმნება იმ თხელი ფენის საზღვრებზე, რომელიც გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე მდებარეობს. ამ თხელ სასაზღვრო ფენაში სხეულის ზედაპირის მხების

გასწვრივ სიჩქარის მდგენელი იცვლება ნულიდან (სხეულის ზედაპირზე) გარკვეულ მნიშვნელობამდე (ფენის გარე საზღვარზე).

იმის მიუხედავად, რომ რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა დიდია, სასაზღვრო ფენის საზღვრებზე, ნავიე–სტოქსის განტოლებებში სიბლანტისა და ინერციის წევრების სიდიდეების მნიშვნელობები დიდია.

გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე რაც უფრო დიდია რეინოლდსის რიცხვის მნიშვნელობა, მით უფრო დიდია სიჩქარის გრადიენტი და მით მეტად მცირეა იმ არის ზომები, რომლის საზღვრებშიც სიბლანტის მოქმედება არსებითია, ე.ი. იგულისხმება სასაზღვრო ფენის ზომები. როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, დინების მახასიათებელ გრძივ ზომებთან შედარებით სასაზღვრო ფენის სისქის სიმცირე საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ სასაზღვრო ფენის საზღვრებზე ბლანტი სითხის მოძრაობის განტოლება.

სასაზღვრო ფენის გარეთ სითხის მოძრაობაზე სიბლანტის გავლენა შეგვიძლია უგულვებელყოთ და სითხე ჩავთვალოთ იდეალურად,

ამგვარად, რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისთვის სითხის მოძრაობის მთელი არე შეგვიძლია გავყოთ ორ არედ:

- ა) თხელი სასაზღვრო ფენი, რომელშიც ინერციისა და სიბლანტის წევრები სიდიდით ტოლია.
- ბ) არე, რომელშიც სიბლანტის გავლენა უგულვებელყოფილია, ეგრეთ წოდებული გარე ნაკადი [4].

საჭიროა აგრეთვე მივუთითოთ ხარისხოვანი კანონის წმინდა მათემატიკურ ნაკლზე, რომელიც ზღუდავს მის გამოყენებას სასაზღვრო ფენის თეორიაში.

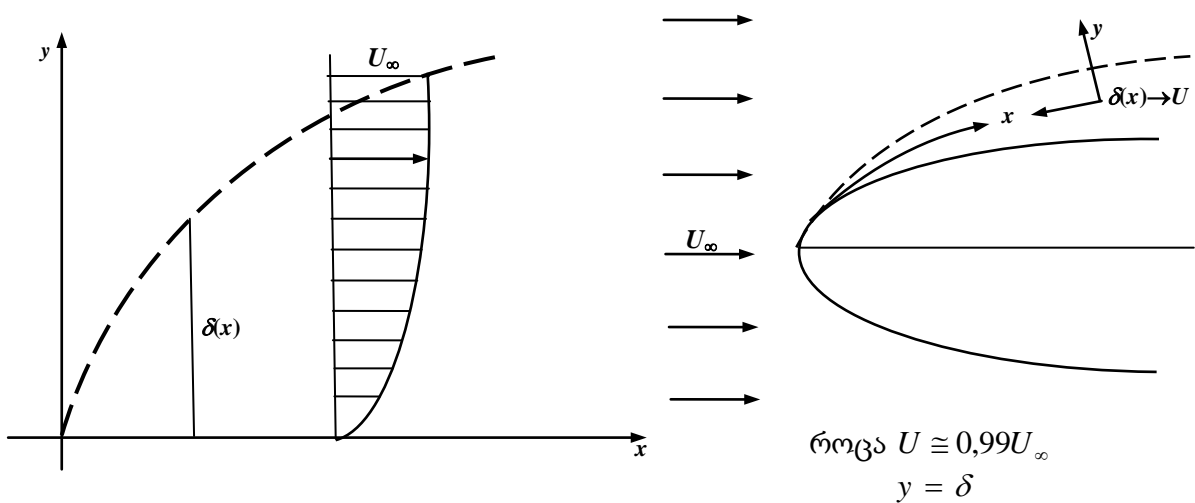
ეფექტური სიბლანტე

$$\mu_{\text{eff}} = k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{em} \dot{e}_{me} \right|^{\frac{n-1}{2}}$$

ძვრის მცირე სიჩქარის დროს მიისწრაფვის ნულისაკენ ყველა დილატანტური სითხისათვის ($n > 1$) და უსასრულობისკენ ყველა

ფსევდოპლასტიკურთათვის ($n < 1$). გამოცდილებამ აჩვენა, რომ ასეთი უკიდურესობები არ შეიმჩნევა. ამიტომ, ცხადია, კრიტიკულ წერტილის უშუალო მახლობლობაში სასაზღვრო ფენის გარე საზღვრის ახლოს მიღებული შედეგები არასაიმედოა. ასეთ კრიტიკულ წერტილებში $\dot{\epsilon}_{ij} \approx 0$. ანალოგიური სირთულე წარმოიქმნება ასევე ძვრის ძალიან დიდი სიჩქარეებისთვისაც.

მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ სასაზღვრო ფენის სისქის შეფასებას ვახდენთ, იმ შემთხვევაში, როდესაც სხეულის გარსდენა უწყვეტია. საგულისხმოა, რომ სასაზღვრო ფენის სისქის ცნება პირობითია, რადგან სასაზღვრო ფენში სითხის სიჩქარე ასიმპტოტურად უახლოვდება გარე ნაკადის სიჩქარეს, იმისთვის, რათა ამ ცნებას მივცეთ განმარტება, სასაზღვრო ფენის სისქე ვუწოდოთ გარსმოდენადი ზედაპირიდან ისეთ დაშორებას, რომელშიც სითხის სიჩქარე განსხვავდება გარე ნაკადის სიჩქარისაგან რაიმე მოცემული სიდიდით, მაგალითად 1%-ით (ნახ. 2).



ნახ. 2. სასაზღვრო ფენის არსი

გამოვიყენოთ ელექტროგამტარი არანიუტონისეული სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლება [5, 6]. ამისათვის განვიხილოთ არაკუმშვადი ელექტროგამტარი ხარისხოვანი სითხის დინება იზოლირებულ ზედაპირზე ელექტრომაგნიტური ველის არსებობისას. ამ შემთხვევაში ელექტრომაგნიტურ ძალებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\vec{f} = \frac{1}{\rho} [\vec{J} \vec{B}], \quad (0.2.1)$$

სადაც \vec{J} დენის სიმკვრივეა, ომის კანონი გვაძლევს:

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + [\vec{U} \vec{B}]), \quad (0.2.2)$$

სადაც $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ არის ელექტრული ველის დამაბულობის ვექტორი, $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ კი მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი, ხოლო σ – გარემოს გამტარებლობა [5].

ითვლება, რომ გარემოს ფიზიკური მახასიათებლები არიან ერთგვაროვნები, იზოტროპულები და სიმკვრივის გარდა არ არიან დამოკიდებულები ტემპერატურაზე და დანარჩენ ფაქტორებზე.

ამგვარი დაშვებით მაგნიტური ჰიდროდინამიკის განტოლებათა სისტემა მოიცემა შემდეგი განტოლებებით:

იმპულსის გადატანის

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \nabla \tau_i + [\vec{J} \vec{B}]. \quad (0.2.3)$$

ენერჯიის განტოლება:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + k |\Phi| + \frac{|J|^2}{\sigma}. \quad (0.2.4)$$

უწყვეტობის

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0, \quad (0.2.5)$$

მაქსველის განტოლებები

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (0.2.6)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{B}, \quad (0.2.7)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E}, \quad (0.2.8)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{E_0}, \quad (0.2.9)$$

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + k \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{me} \dot{e}_{em} \right|^{\frac{n-1}{2}} \dot{e}_{ij}.$$

თუ მხედველობაში მივიღოთ (0.2.1), (0.2.2)–ს, განტოლება (0.2.3) მიიღებს სახეს:

$$\frac{DU_i}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\sigma}{\rho} \left([\vec{E}\vec{B}] + [(\vec{U} \cdot \vec{B})\vec{B}] \right)_i. \quad (0.2.10)$$

(0.2.4) განტოლებისთვის გვექნება:

$$\frac{DT}{Dt} = a \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{k}{\rho C_p} |\Phi| + \frac{|J|^2}{\rho C_p \sigma}, \quad (0.2.11)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Phi = & \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}, \end{aligned} \quad (0.2.12)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \dot{e}_{ji},$$

$$\tau_{xx} = -p + 2kI \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = kI \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{yy} = -p + 2kI \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = kI \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right), \quad (0.2.13)$$

$$\tau_{zz} = -p + 2kI \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = kI \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right).$$

$$\begin{aligned} I = & \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned} \quad (0.2.14)$$

შემოვიტანოთ უგანზომილებო სიდიდეები:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad t' = \frac{\Pi_0}{L} \cdot t,$$

$$\begin{aligned}
U' &= \frac{U}{\Pi_0}, \quad W' = \frac{W}{\Pi_0}, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \\
V' &= \frac{V}{\Pi_0} R_e^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}, \quad Y' = \frac{y}{L} R_e^{\left(\frac{1}{n+1}\right)}, \quad P' = \frac{P}{\rho \Pi_0^2}, \\
\bar{J}' &= \frac{\bar{J}}{J_0}, \quad \bar{B}' = \frac{\bar{B}}{B_0}, \quad \bar{E}' = \frac{\bar{E}}{E_0},
\end{aligned} \tag{0.2.15}$$

სადაც L , Π_0 არიან კოორდინატისა და სიჩქარის გრძივი მასშტაბები, T_0 – ტემპერატურის მასშტაბი, J_0 – დენის მასშტაბი, B_0 – მაგნიტური ინდუქციის მასშტაბი, E_0 – ელექტრონული ველის მასშტაბი.

შევადგინოთ სასაზღვრო ფენის განტოლებები, ამისათვის შემოვიღოთ უგანზომილებო კომპლექსები:

$$\frac{\text{ინერციის ძალა}}{\text{ხახუნის ძალა}} \approx \frac{\rho U \frac{\partial U}{\partial x}}{k \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n} \sim \frac{\Pi_0^{2-n} L^n}{\frac{k}{\rho}} = R_e. \tag{0.2.16}$$

$$\frac{\text{ინერციის ძალა}}{\text{სიმძიმის ძალა}} \approx \frac{\rho U \frac{\partial U}{\partial x}}{\rho g} \sim \frac{\Pi_0^2}{Lg} = F_r,$$

$$\left(\frac{\Pi_0 L}{a} \right) R_e^{-\frac{2}{1+n}} = P_2 = P_e \cdot R_e^{-\frac{2}{1+n}}, \tag{0.2.17}$$

$M = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho \Pi_0}$ – მჰდ – მაგნიტური ურთიერთქმედების კოეფიციენტი,

$E_c = \frac{k}{\rho C_p T_0} \left(\frac{\Pi_0}{L} \right)^n$ ეკერტის რიცხვია,

$Q = J_0^2 L / \sigma \rho C_p \Pi_0 T_0$ პარამეტრი განსაზღვრავს ჯოულის სითბოგამოყოფის

ფარდობით სიმძლავრეს, $k = \frac{E_0}{B_0 \Pi_0}$ არის დატვირთვის პარამეტრი.

ამოვწეროთ მიღებული უგანზომილებო სისტემა:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} U &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(I \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\
&+ R_e^{-\frac{n}{n+1}} \frac{\partial}{\partial y} \left[I \left(R_e^{\frac{1}{n+1}} \frac{\partial u}{\partial y} + R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left[I \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$-M(B_y^2 + B_z^2)U - MB_x \left(B_y VR_e^{-\frac{1}{n+1}} + WB_z \right) + Mk(E_y B_z - E_z B_y), \quad (0.2.18)$$

$$\begin{aligned} R_e^{-\frac{2}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial t} = & -\frac{\partial P}{\partial y} + 2R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(I \frac{\partial V}{\partial y} \right) + R_e^{-\frac{2+n}{1+n}} \frac{\partial}{\partial x} = \left[I \left(R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial U}{\partial y} + R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \\ & + R_e^{-\frac{2+n}{1+n}} \frac{\partial}{\partial z} \left[I \left(R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial W}{\partial y} + R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] + \\ & + kM(E_z B_x - E_x B_z) - M(B_x^2 + B_z^2)VR_e^{-\frac{1}{1+n}} - MB_y(B_x U + B_z W), \end{aligned} \quad (0.2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{DW}{Dt} = & -\frac{\partial P}{\partial z} + 2R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(I \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \\ & + R_e^{-\frac{n}{1+n}} \frac{\partial}{\partial y} \left[I \left(R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial W}{\partial y} + R_e^{-\frac{1}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] + R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[I \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \\ & + kM(E_x B_y - E_y B_x) - M(B_x^2 + B_y^2)W - MB_z \left(B_x U + B_y VR_e^{-\frac{1}{1+n}} \right), \end{aligned} \quad (0.2.20)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{P_r} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \right] + E_c |\Phi| + Q |J|^2, \quad (0.2.21)$$

(უგანზომილებო სიდიდეების შტრიხები მოცილებულია), სადაც

$$\begin{aligned} I = & \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \quad (0.2.22)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ & \left. + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + R_e^{-\frac{2}{1+n}} \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \quad (0.2.23)$$

(0.2.18)–(0.2.21) სისტემას რეინოლდსის დიდი რიცხვებისთვის გააჩნია მცირე პარამეტრი (წევრი), რომლისთვისაც მოსახერხებელია

ავიღოთ $R_e^{-\frac{1}{1+n}}$. ამიტომ რეინოლდსის რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის ამონახსნი ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} U &= U_0 + R_e^{-\frac{1}{1+n}} U_1 + U_2 R_e^{-\frac{2}{n+1}} + \dots +, \\ V &= V_0 + R_e^{-\frac{1}{1+n}} V_1 + V_2 R_e^{-\frac{2}{1+n}} + \dots + \\ W &= W_0 + R_e^{-\frac{1}{1+n}} W_1 + W_2 R_e^{-\frac{2}{1+n}} + \dots + \\ P &= P_0 + R_e^{-\frac{1}{1+n}} P_1 + P_2 R_e^{-\frac{2}{1+n}} + \dots +. \end{aligned} \quad (0.2.24)$$

(0.2.24) ჩავსვათ (0.2.18)–(0.2.21)–ში და გავუტოლოთ ნულს მცირე პარამეტრის ხარისხები, ამოვწეროთ ნულოვანი მიახლოების განტოლებები:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \\ &\quad - M(B_y^2 + B_z^2)U - MB_x B_z W + MK(E_y B_z - E_z B_y), \end{aligned} \quad (0.2.25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = KM(E_z B_x - E_x B_z) - MB_y(B_x U + B_z W), \quad (0.2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial W}{\partial y} \right] - \\ &\quad - M(B_y^2 + B_z^2)W - MB_x B_z U + MK(E_x B_y - E_y B_x) \end{aligned} \quad (0.2.27)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + E_c \left(\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{n+1}{2}} + Q|J|^2 \quad (0.2.28)$$

როდესაც y , V ძალიან მცირეა (0.2.21)–(0.2.28) აღწერს დენის ნულოვანი წირის მახლობლობაში მდებარე თხელ არეში სითხის მოძრაობას. სწორედ ამ არეს ვუწოდებთ სასაზღვრო ფენს, ხოლო (0.2.25)–(0.2.28) განტოლებებს – სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებებს.

განვიხილოთ არანიუტონისეული არაკუმშვადი ელექტროგამტარი სითხის დინება ბრტყელ სასაზღვრო ფენში ელექტრომაგნიტური ველის

არსებობისას, როდესაც მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი \vec{B} მართობულია ზედაპირის, რომელზეც არის სასაზღვრო ფენი, ელექტრული ველის დამაბულობა \vec{E} მართობულია \vec{B} ვექტორის და სასაზღვრო ფენის გასწვრივი სიჩქარის მიმართულების. თუ x კოორდინატი მიმართულია გარსმოდენადი ზედაპირის გასწვრივ, y – ზედაპირის მართობულად, ხოლო z – დინების სიბრტყის მართობულად, მაშინ $\vec{E} \equiv (0,0,E)$, $\vec{B} \equiv (0,B,0)$. ხარისხოვანი სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებათა სისტემა უინდუქციო მიახლოებაში მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma B^2}{\rho} U - \frac{\sigma B}{\rho} E, \quad (0.2.29)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n+1} + \sigma B^2 U^2, \quad (0.2.30)$$

აქ U და V არიან სასაზღვრო ფენში სიჩქარის მდგენელები.

§ 3. ხარისხოვანი არანიუტონისეული სითხის თავისუფალი კონვექციის გადატანის განტოლებები

ერთგვაროვანი სითბოგამტარი და ელექტროგამტარი სითხის მაკროსკოპული მოძრაობა ელექტრომაგნიტური ველის ურთიერთქმედების გათვალისწინებით აღიწერება განტოლებებით [7, 8]:

უწყვეტობის

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho U_i) = 0. \quad (0.3.1)$$

იმპულსის მუდმივობის

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i + [\vec{J}\vec{B}]_i,$$

სადაც $J = \sigma(\vec{E} + [\vec{U}\vec{B}])$,

ე.ი.

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} + \rho g_i + \sigma B_e U_e B_i - \sigma B^2 U_i + \sigma \sum_{j,k} E_k B_j \epsilon_{ijk}, \quad (0.3.2)$$

და ენერჯის მუდმივობის

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \tau_{ij} \dot{e}_{ij}, \quad (0.3.3)$$

მოძრაობის რაოდენობის შენახვის განტოლება სითხისათვის, რომელიც შიგა ძალების მომენტების განაწილება არ გვაქვს, დაიყვანება ძაბვის ტენზორის სიმეტრიულობის პირობაზე

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}. \quad (0.3.4)$$

სითხეგამტარობის კოეფიციენტი λ მივიჩნით ცნობილად და დავამატოთ გარემოს მდგომარეობის განტოლება

$$\rho = \rho(T, p), \quad (0.3.5)$$

მივიღებთ 14 უცნობიან, 8 განტოლებიან სისტემას.

(0.3.1)–(0.3.5) განტოლებები მდგომარეობის რეოლოგიურ განტოლებებთან ერთად აღწერს სითხეების დინებისა და თბოცვლის ამოცანების უფრო ფართო კლასს. თავისუფალი კონვექციის კერძო შემთხვევაში ეს განტოლებები შეიძლება მნიშვნელოვნად გამარტივდეს, თუ გამოვიყენებთ ბუსინესკის მიახლოებას. წარმოვადგინოთ თერმოდინამიკური ცვლადები – ტემპერატურა T , წნევა P შემდეგი სახით:

$$T = \bar{T} + T', \quad P = \bar{P} + P'.$$

ჩავთვალოთ, რომ დამატებანი T' და P' არიან შედარებით მცირენი, ვიდრე \bar{T} და \bar{P} , შესაბამისად $P' \ll \rho$, თუ ρ -ს გავშლით ტეილორის მწკრივად, მივიღებთ

$$\rho = \rho(\bar{T}, \bar{P}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\bar{P}} T' + \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\bar{T}} P' = \rho_0 (1 - \beta_T T' + \beta_P P'), \quad (0.3.6)$$

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\bar{P}}, \quad \beta_P = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_{\bar{T}}, \quad \rho_0 = \rho(\bar{T}, \bar{P}).$$

თუ მივიჩვეთ, რომ სითხე იკუმშება მხოლოდ თერმულად, ე.ი. ტემპერატურის ველის გრადიენტით განპირობებული სიმკვრივის

არაერთგვაროვნება უფრო დიდია, ვიდრე წნევის ცვლილებით გამოწვეული, მივიღებთ:

$$|\beta_P P'| \ll |\beta_T T'|.$$

შედეგად მდგომარეობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho = \rho_0 = (1 - \beta_T T'). \quad (0.3.7)$$

ამის გარდა უგულებელვყოთ დანარჩენი ფიზიკური მუდმივების დამოკიდებულება ტემპერატურაზე, წნევაზე.

$$\text{დაშვება } \rho' \ll \rho_0 \text{ საშუალებას გვაძლევს უწყვეტობის} \quad (0.3.1)$$

განტოლება ჩავწეროთ ფორმით:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (0.3.8)$$

ხოლო იმპულსის მუდმივობის კანონი (0.3.2)

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = & - \frac{\partial P'}{\partial x_i} - \rho_0 g_i \beta_T T' + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \\ & + \sigma \sum_{j,k} E_k B_j \epsilon_{ijk} - \sigma B^2 U_i + \sigma (\bar{B} \bar{U}) B_i. \end{aligned} \quad (0.3.9)$$

ენერჯის შენახვის (0.3.3) განტოლებას აქვს წინანდებული სახე, მხოლოდ ბუსინესკის მიახლოების თანახმად მათში ρ შეცვლილია ρ_0 -ით.

შევნიშნოთ, რომ ბუსინესკის მიახლოების მნიშვნელოვან მომენტს წარმოადგენს ის, რომ განიხილება შედარებით სუსტი კონვექცია: სიმკვრივის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრა, რომელიც გამოწვეულია ტემპერატურის არაერთგვაროვნებით ითვლება, რომ საკმაოდ მცირეა. ასე რომ, შეგვიძლია ის ყველა განტოლებაში უკუვაგდოთ, გარდა მოძრაობის განტოლებისა, სადაც ეს გადახრა გათვალისწინებულია ამომგდები ძალის შემცველ წევრში. ბუსინესკის მიახლოებით განტოლებათა ამონახსნის მრავალრიცხოვან ექსპერიმენტულ მონაცემების შედეგებთან შედარებამ აჩვენა, რომ ეს განტოლებები საკმაოდ კარგად გამოსახავენ თავისუფალი კონვექციის ყველა მნიშვნელოვან განსაკუთრებულობას [9].

(0.3.3), (0.3.8), (0.3.9) განტოლებათა სისტემა (0.1.5)–ის გათვალისწინებით სათანადო სასაზღვრო პირობებით სრულყოფილად აღწერს „ხარისხოვანი“

არანიუტონისეული ელექტროგამტარი სითხის ბინარული ნარევის თავისუფალ კონვექციას. თუმცა ამოცანის ამოხსნა წარმოადგენს სერიოზულ მათემატიკურ სირთულეს. ამავე დროს სასაზღვრო ფენის შედარებით მნიშვნელოვნად მარტივი განტოლებები, რომლებიც მიიღებინა გამოსავალი განტოლებებიდან, როგორც ცნობილია საკმაოდ ზუსტად აღწერენ თავისუფალი კონვექციის ამოცანებს [7, 9].

გამოვიყვანოთ მოძრაობისა და სითბოგადაცემის განტოლებები „ხარისხოვანი“ სითხის სასაზღვრო ფენისათვის ნებისმიერ ზედაპირზე. ამისთვის შემოვიღოთ უგანზომილებო კომპლექსები:

$$\left[\frac{\text{ამომგდები ძალები, რომლებიც განპირობებულია ტემპერატურის გრადიენტით}}{\text{სიბლანტის ხახუნის ძალები}} \right]^2 \equiv$$

$$\equiv \left[\frac{\rho\beta + g(T_0 - T_\infty)L^3}{K \Pi_T^n L^{2-n}} \right]^2 = \frac{\rho^2 L^{n+2} [g\beta_T (T_0 - T_\infty)]^{2-n}}{K^2} = G_r -$$

გრასჰოფის განზოგადებული თერმული რიცხვი:

$$P_r = \frac{\rho C_p}{\nu} \left(\frac{K}{\rho} \right)^{\frac{2}{1+n}} L^{\frac{1-n}{1+n}} [L\beta_T g(T_0 - T_\infty)]^{\frac{3(n-1)}{2(n+1)}}$$

არის პრანდტლის მოდიფიცირებული რიცხვი. ამ კომპლექსების გამოყენისას მახასიათებელი სიჩქარის თვისებად შეირჩა შესაბამისად

$$\Pi_T = [Lg\beta_T (T_0 - T_\infty)]^{\frac{1}{2}}, \quad T_0 > T_\infty.$$

გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე (0.3.3), (0.3.8), (0.3.9) (0.1.5)

განტოლებებში

$$x' = xL, \quad x^2 = yL, \quad x^3 = zL, \quad U_1 = U \Pi_T,$$

$$U_2 = V \Pi_T, \quad U_3 = W \Pi_T, \quad t = t' L / \Pi_T,$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad P = P' K \Pi_T^n L^{-n}, \quad (0.3.10)$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{E}', \quad \vec{B} = B_0 \cdot \vec{B}'.$$

მაშინ მივიღებთ

$$G_r^{\frac{1}{2}} \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} (h^{n-1} e_{ij}) + \frac{g_i}{g} \theta - \frac{\partial P}{\partial x_i} + M(\bar{B}\bar{U})B_i -$$

$$-MU_i + MK \sum_{j,k=1}^3 E_k B_j \epsilon_{ijk}, \quad (0.3.11)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) + B_r h^{n+1}, \quad (0.3.12)$$

სადაც

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad U_1 = U, \quad U_2 = V,$$

$$U_3 = W, \quad t = t', \quad P = P',$$

$$B_r = K \left(\frac{g\beta_T}{L} \right)^{\frac{n}{2}} (T_0 - T_\infty)^{\frac{n-2}{2}},$$

$$M = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho \Pi_T} - \text{მჰდ-ის ურთიერთქმედების კოეფიციენტი};$$

$$K = \frac{E_0}{B_0 \Pi_T} - \text{დატვირთვის კოეფიციენტი}$$

$$h = \left| \frac{1}{2} \dot{e}_{me} \cdot \dot{e}_{em} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (0.3.13)$$

ϵ_{ijk} – III რიგის ერთეულოვანი ტენზორი (0.3.11), (0.3.12)-ში x, y, z, U, V, W ცვლადებიდან გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე $x = x_1, y = y_1, z = \epsilon z_1, U = U_1, V = V_1, W = \epsilon W_1$. მაშინ

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2}, \quad \text{ანუ } h \sim \frac{1}{\epsilon}.$$

იმისათვის, რომ გამოვიყვანოთ სასაზღვრო ფენის განტოლება (0.3.11)-სა და (0.3.12)-ში შევასრულოთ ზღვარზე გადასვლა $\epsilon \rightarrow 0$, მიღებული დამოკიდებულებების გათვალისწინებით ϵ გავაიგივოთ $G_r^{-\frac{1}{2(1+n)}}$ -თან, მივიღებთ „ხარისხოვანი“ არანიუტონისეული ელექტროგამტარი სითხის სასაზღვრო ფენში თავისუფალი კონვექციის განტოლებას.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = G_r^{-\frac{1}{2}} h^{n-3} \left[(n-1) \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \left[n \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_x}{g} \theta - \frac{\partial P}{\partial x} + M(\bar{B}\bar{U})B_x - MU + MK(E_y B_z - E_z B_y), \\
\frac{\partial V}{\partial t} = & G_r^{-\frac{1}{2}} h^{n-3} \left[(n-1) \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \left[n \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \right] + \\
& + \frac{g_y}{y} \theta - \frac{\partial P}{\partial y} + M(\bar{B}\bar{V})B_y - MV + MK(E_z B_x - E_x B_z), \tag{0.3.15}
\end{aligned}$$

$$0 = \frac{g_z}{g} \theta - \frac{\partial P}{\partial z} + M(\bar{B}\bar{U})B_z - MW + MK(E_x B_y - E_y B_x), \tag{0.3.16}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + B_r h^{n+1}. \tag{0.3.17}$$

(0.3.14)– (0.3.17) სისტემის სასაზღვრო პირობები იქნება

$$U = V = W = 0, \quad \theta = 0, \quad \text{როცა } t = 0, \tag{0.3.18}$$

$$U = V = W = 0, \quad \theta = f(t, x, y), \quad \text{როცა } z = 0, \tag{0.3.19}$$

$$U \rightarrow 0, \quad V \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0; \quad \text{როცა } z \rightarrow \infty. \tag{0.3.20}$$

თავისუფალი კონვექციის ამოცანებში მექანიკური ენერჯის დისიპაცია შეგვიძლია არ გავითვალისწინოთ ($B_T \sim 10^{-3}$).

განვიხილოთ არანიუტონისეული არაკუმშვადი ელექტროგამტარი სითხის თავისუფალი კონვექცია, როდესაც სასაზღვრო ფენში არსებობს ელექტრომაგნიტური ველი, ხოლო მაგნიტური ინდუქციის ვექტორია $\bar{B} = (0, B, 0)$, ელექტრული ველის დამაბულობაა $\bar{E} = (0, 0, E)$, მივიღებთ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \theta - MU - MKEB,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial x} + V \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}.$$

აქ

$$x = \frac{x'}{L}, \quad U = \frac{U'}{\Pi_T},$$

$$y = \frac{y'}{L} G_r^{\frac{1}{2(1+n)}}, \quad V = \frac{V'}{\Pi_T} G_r^{\frac{1}{2(1+n)}}.$$

§ 4. საწყისი და სასაზღვრო პირობები

გავარკვიოთ როგორ საწყის და სასაზღვრო პირობებში უნდა ვაინტეგრირებთ ხარისხოვანი რეოლოგიური სითხის სასაზღვრო ფენის განტოლებანი. სასაზღვრო ფენი განიხილება როგორც ასიმპტოტური.

უძრავ გაუმტარ მყარ $y=0$ საზღვარზე დინამიკური ამოცანისთვის, როგორც ექსპერიმენტებმა აჩვენა მრავალ ერთფაზიან არანიუტონისეულ სითხეებთან, სამართლიანი რჩება ზედაპირზე მიკვრის კლასიკური პირობები

$$U(x,0,z,t) = V(x,0,z,t) = W(x,0,z,t) = 0. \quad (0.4.1)$$

საქმე იმაშია, რომ მყარ ზედაპირს შეუძლია ხელი შეუწყოს მის მახლობელ მოლეკულებსა და სითხის ნაწილაკების მნიშვნელოვან ორიენტირებას. ამასთან ზედაპირის გასწვრივ წარმოიქმნება გასრიალების მახასიათებელი ქმედება. ასეთი მოვლენები განსაკუთრებით კარგად დაიკვირვება მრავალფაზიან სისტემებში [4, 6, 10, 11].

ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ასეთ სითხეებს, რომელთათვის მყარი ზედაპირის მახლობლობაში სრიალი შეიძლება უგულებელყოფილი იქნეს.

საზოგადოდ მოძრავ გამჭოლ ზედაპირზე სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგი სახით:

$$U = U_0(x,z,t), \quad V = V_0(x,z,t), \quad W = W_0(x,z,t). \quad (0.4.2)$$

გადავიდეთ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე არსებულ სასაზღვრო პირობებზე.

ფიზიკურად სასაზღვრო ფენის იდეა ეფუძნება იმას, რომ სიბლანტის ძალების გავლენა აისახება მხოლოდ გამყოფი (მყარი, თხევადი) ზედაპირის სიახლოვეს თხელ არეში. მის გარეთ მოძრავი სითხე შეიძლება ჩაითვალოს იდეალურად. სხვა სიტყვებით, სასაზღვრო ფენის სხეულის ზედაპირის მართობული კვეთის ყველა წერტილში წნევას გააჩნია ერთი და იგივე მნიშვნელობა. ამასთან სასაზღვრო ფენი არსებობს, თუ სიჩქარის ზედაპირის მართობული მდგენელი ფენის ნებისმიერ წერტილში არის მხებ მდგენელთან შედარებით მცირე, ე.ი. სასაზღვრო ფენის არეში სიჩქარეს

გააჩნია იგივე ფარდობითი რიგი, როგორც ფენის სისქეს. ამიტომ სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე სამართლიანია იდეალური სითხის განტოლებები, რომლებშიც $V \frac{\partial V}{\partial y}$, $V \frac{\partial W}{\partial y}$ წევრები შეგვიძლია

უგულვებელყოთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{dV}{dx} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} - MB_x B_z W - \\ - M(B_y^2 + B_z^2)U + MK(E_y B_z - E_z B_y), \end{aligned} \quad (0.4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + V \frac{dW}{dx} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} - MB_x B_z V - \\ - M(B_x^2 + B_y^2)W + MK(E_x B_y - E_y B_x), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = MK(E_z B_x - E_x B_z) - MB_y (B_x V + B_z W),$$

$$U = \lim_{y \rightarrow \infty} U, \quad W = \lim_{y \rightarrow \infty} W. \quad (0.4.4)$$

თუ ჩვენ გვეცოდინება წნევის განაწილება გარე საზღვარზე, მაშინ (0.4.3)-ის ამოხსნით ვიპოვით საჭირო სიდიდეებს U , W -ს. მაშასადამე, საკმარისია ექსპერიმენტალურად გავზომოთ წნევის განაწილება გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე, რომ ვიცოდეთ იგი სასაზღვრო ფენის ნებისმიერ წერტილში, მათ შორის გარე საზღვარზე.

ამგვარად, სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე საძიებელი სასაზღვრო პირობები მოიძებნება (0.4.3) განტოლების ამონახსნებიდან, (0.4.3) განტოლებაში $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ და $\frac{\partial P}{\partial y}$ დაითვლება ექსპერიმენტულად ცნობილი გაზომილი წნევის განაწილების მიხედვით გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე.

დინამიკური სასაზღვრო ფენის სასაზღვრო ამოცანის უფრო კონკრეტულად დასმისთვის, აუცილებელია ასევე საწყის კვეტებში მოცემული იყოს სიჩქარის მხები და ტრანსვერსიალური მდგენელები

$$\begin{aligned} x = x_0, \quad z = z_0 \\ U_1 = U(x_0, y, z, t), \quad W_1 = W(x_0, y, z, t) \\ U_2 = U(x, y, z_0, t), \quad W_2 = W(x, y, z_0, t). \end{aligned} \quad (0.4.5)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემაში სიჩქარის ნორმალური მდგენელისათვის გვაქვს მხოლოდ ერთი სასაზღვრო პირობა, რომლის როლშიც საზოგადოდ იღებენ სასაზღვრო პირობას გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე.

დაუდგენელი არამდგრადი მოძრაობისას მოცემული უნდა იყოს კიდევ დროის საწყის მომენტში სიჩქარის მხები და ტრანსვერსიალური მდგენელები

$$U_3 = U(x, y, z, t_0), \quad W_3 = W(x, y, z, t_0). \quad (0.4.6)$$

სითბური სასაზღვრო ფენის განტოლებისათვის განვიხილოთ საწყისი და სასაზღვრო პირობები. გარსმოდენილი სხეულის ზედაპირზე შეიძლება მოცემული იყოს არა მხოლოდ მუდმივი და ცვლადი ტემპერატურა, არამედ სითბოს ნაკადი:

$$T_0 = T(x, 0, z, t), \quad q_0 = q(x, 0, z, t). \quad (0.4.7)$$

სითბური სასაზღვრო ფენის გარე საზღვარზე ტემპერატურა შეიძლება იყოს მუდმივი ან მოცემული იყოს რაიმე კანონით:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T = T_\infty(x, z, t). \quad (0.4.8)$$

და ბოლოს, აუცილებელია მივუთითოთ ტემპერატურის პროფილი საწყის კვეთებში

$$x = x_0, \quad z = z_0: \\ T_1 = T(x_0, y, z, t); \quad T_2 = T(x, y, z_0, t). \quad (0.4.9)$$

არასტაციონარულ ამოცანებში, ამას გარდა მხედველობაში უნდა მივიღოთ საწყისი პირობები, რომლებიც გვაძლევს დროის საწყის მომენტში ტემპერატურის განაწილებას $t = t_0$:

$$T_3 = T(x, y, z, t_0). \quad (0.4.10)$$

ამასთანავე სასაზღვრო პირობებიც შეიძლება დამოკიდებული იყოს დროზე.

თუ განიხილება სასრული სისქის სასაზღვრო ფენი, მაშინ უსასრულობაში სასაზღვრო პირობის ნაცვლად ავიღებთ პირობას:

$$\lim_{y \rightarrow \delta(x,z,t)} U = U_\infty(x,z,t), \quad \lim_{y \rightarrow \delta(x,z,t)} W = W_\infty(x,z,t), \quad (0.4.11)$$

ხოლო უცნობი $\delta(x,z,t)$ სისქის განსასაზღვრავად მოვითხოვთ სასაზღვრო ფენიდან გარე ნაკადში სიჩქარის კომპონენტების უწყვეტად გადასვლის პირობა:

$$\lim_{y \rightarrow \delta(x,z,t)} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \delta(x,z,t)} \frac{\partial W}{\partial y} = 0. \quad (0.4.12)$$

2. შედეგები და მათი განსჯა

თავი 1

არანიუტონისეული გამტარი სითხის სტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი ცვლადი ელექტროგამტარებლობისას

ამ თავში განვიხილავთ სხეულების სტაციონარულ გარსდენას ხარისხოვანი ბლანტი გამტარი სითხით, ჩავთვალოთ, რომ ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)^m, \quad m \geq 0.$$

[12, 13, 14] შრომებში განიხილებოდა მაგნიტურ ჰიდროდინამიკაში არანიუტონისეული სითხის სასაზღვრო ფენის ავტომოდელური ამონახსნები, როდესაც ფენის გარე საზღვრის გასწვრივ სიჩქარე ვრცელდება ხარისხობრივად და ელექტროგამტარებლობა მუდმივია ყველა დინებაში. თუმცა მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება ბევრი გამტარი გარემოსი, როგორებიცაა ნარევები ან გამდნარი ლითონები, არ აღიწერება ნიუტონისეული სითხეების მაგნიტური ჰიდროდინამიკის განტოლებებით. არანიუტონისეული სითხის სასაზღვრო ფენის ავტომოდელური ამონახსნები ელექტრომაგნიტური ველის მოქმედების გაუთვალისწინებლად შესწავლილია [14]-ში.

[15, 16] შრომებში ამონახსნები მიღებულია მცირე პარამეტრით გაშლის ასიმპტოტური მეთოდის გამოყენებით, ხოლო კერძო შემთხვევაში [17]-ში განსაზღვრული პარამეტრის სპეციალური მოცემით შესაძლებელი გახდა რამდენიმე ზუსტი ანალიზური ამონახსნის მიღება. ორივე შრომაში არაა ნახსენები აგებული ამონახსნების ფიზიკური ინტერპრეტაცია და ხარისხოვანი სითხეების მაგნიტოჰიდროდინამიკური სასაზღვრო ფენის სტრუქტურის საერთო პრინციპული თავისებურება.

[4, 18, 19]-ში დამტკიცებულია, რომ დილატანტური სითხეების შემთხვევაში სასაზღვრო ფენი სივრცულად უნდა იქნეს ლოკალიზებული.

ამასთანავე აღნიშნული იყო დილატანტური სითხის რეოლოგიურ კანონში მუდმივას მნიშვნელობის განსაზღვრული დიაპაზონისთვის სასაზღვრო ფენის სივრცული ლოკალიზაციის არსებითი ანომალიები. [20]-ში მიღებულია ამ ამოცანის განსაკუთრებული ამონახსნები. ნაშრომში [21] განხილულია ავტომოდელურ შემთხვევაში სიჩქარის გასწვრივი მდგენელის ცვლილების არის ლოკალიზაციის საკითხი და სიჩქარის ლოკალიზაცია გამართლებულია იმით, რომ მაგნიტური ველი შედის განტოლებაში მხოლოდ წრფივ წევრში და არ შეუძლია პრინციპულად შეცვალოს შემფოთების გავრცელების ხასიათი. გავრცელების სასაზღვრო სიჩქარე განპირობებულია მხოლოდ გარემო რეოლოგიური თვისებებით. მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს ასევე, რომ შემფოთების გავრცელების სიჩქარე მცირდება სიდიდით

$$N = \frac{(n+1)\sigma B^2}{c\rho r},$$

სადაც $r = (2n-1)m + 1 \geq 0$.

ნაშრომში [22] დამტკიცებულია მაგნიტურ ველში გამტარი ფსევდოპლასტიკური სითხის ($n < 1$) სასაზღვრო ფენის განტოლებათა სისტემის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა.

მაგნიტურ ჰიდროდინამიკაში ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონის ქვემდებარე სითხეების დინების შესწავლამ აჩვენა თვისებრივი განსხვავება დილატანტურ და ფსევდოპლასტიკურ გარემოთა დინებებისთვის. ეს განსხვავება შეიმჩნევა უკვე სტაციონარულ დინებებშიც, როდესაც დილატანტური სითხის მოძრაობისას განივ მაგნიტურ ველში შეიძლება წარმოიქმნას ზონები, რომლებშიც გარემო იმოძრაავს მუდმივი სიჩქარით. კვაზიმყარი ზონების წარმოშობის ეფექტი მკვდ-ში გამტარი დილატანტური სითხეების დინებებში ბუნებრივია იწოდება მაგნიტური პლასტიკურობის ეფექტად [19]. ფსევდოპლასტიკური და ნიუტონისეული სითხეებისთვის ამ ეფექტს არ აქვს ადგილი. მაგნიტური პლასტიკურობის ეფექტი საინტერესოა შედეგის ანალიზური ბუნების თვალსაზრისით, როდესაც არაწრფივი

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს გააჩნია სხვადასხვა აღწერილობა განსხვავებულ არეებში. ფაქტიურად ამ შემთხვევებში ამოცანის ამონახსნი არის დიფერენციალური განტოლების განზოგადებული ამონახსნი, ამასთან განზოგადებული ამონახსნის ინტეგრალური მრუდი შედგება კერძო და განსაკუთრებული ამონახსნებისაგან [4], რომლებიც მიკერებულნი არიან კვაზიმყარი ზონის საზღვარზე, თუ უწყვეტად ჩავთვლით შესაბამისად სიჩქარეს და დამაბულობას. ამასთან კვაზიმყარი მოძრაობის ზონა ეთანადება განსაკუთრებულ ამონახსნს.

მკდ-ში არხებში ხარისხოვანი სითხის დინების განმსაზღვრელ უგანზომილები პარამეტრს წარმოადგენს ჰარტმანის განზოგადებული რიცხვი H_{an} . ამასთან

$$H_{an}^2 \equiv \frac{\sigma B_0^2}{K} L^{n+1} \Pi^{1-n}.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა $n \rightarrow 1$, ეს პარამეტრი გადადის ჰარტმანის ჩვეულებრივ რიცხვში, $H_{a1} = \frac{\sigma B_0^2}{K} L^2$, ხოლო როდესაც $n \neq 1$, დამოკიდებულია ნაკადის მახასიათებელ სიჩქარეზე.

ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონის მქონე გარემოთათვის სტაციონარული მკდ დინებებისთვის ცნობილია ჰარტმანის და კუეტის ამონახსნები ბრტყელ არხში [24] და განივი მაგნიტური ველითურთ სასაზღვრო ფენში დინებისთვის [25]. როგორც [24]-ში იყო ნაჩვენები, დილატანტური სითხის დინებისათვის კვაზიმყარი მოძრაობის ზონები არხში წარმოიქმნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ჰარტმანის განზოგადებული რიცხვი გადასცილდება რაიმე კრიტიკულ მნიშვნელობას. [25]-ში შესწავლილ იქნა ხარისხოვანი სითხის სითბოცვლა სტაციონარულ ბრტყელ გრადიენტულ მკდ-ურ დინებებში. აღსანიშნავია, რომ ზოგ შემთხვევაში სტაციონარული განაწილებანი შეიძლება მიღებული იქნეს როგორც არასტაციონარულ ამოცანების ზღვრული ამონახსნები [26].

ჩამოთვლილი გამოკვლევებისგან განსხვავებით ჩვენ შევისწავლით ხარისხოვანი გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენის ელექტროგამტარებლობის ცვლადი კოეფიციენტით

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m$$

სასაზღვრო ფენის ყველა მახასიათებლის საძიებლად ვისარგებლოთ ფენის სასრული სისქის ცნებით.

განვიხილოთ სხეულის სტაციონარული გარსდენა სუსტადგამტარი ხარისხოვანი ბლანტი სითხით, რომლის სიჩქარე უსასრულოებაში არის $U_\infty(x)$.

გარე მაგნიტურ ველში არსებული ხარისხოვანი ბლანტი სითხის სასაზღვრო ფენის ძირითად განტოლებებს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{nK}{\rho} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma B^2}{\rho} U - \frac{\sigma B}{\rho} E, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.0.1)$$

ჩავთვალოთ, რომ $\vec{E} = 0$, თუ ვიხელმძღვანელებთ შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma_\infty B^2 U_\infty}{\rho} - \frac{\sigma_\infty B}{\rho} E,$$

მაშინ (1.0.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{nK}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \\ &+ \frac{B^2}{\rho} [\sigma_\infty U_\infty - \sigma U] + \frac{BE}{\rho} [\sigma_\infty - \sigma]. \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

ჩავთვალოთ, რომ სითხის ელექტროგამტარებლობა ცვლიდა და წარმოადგენს სიჩქარის ხარისხოვან ფუნქციას:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m, \quad m \geq 0. \quad (1.0.3)$$

ამგვარად (1.0.2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{nK}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{\sigma_0 B^2}{\rho} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m - \frac{BE}{\rho} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m. \quad (1.0.4)$$

უწყვეტობისა და (1.0.4) განტოლებაში გადავიდეთ ახალ ცვლადებზე

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L} R_e^{1+n}, \quad V' = \frac{V}{U} R_e^{1+n}$$

$$U' = \frac{U}{V}, \quad \Phi = \frac{U_\infty}{U}, \quad V'_0 = \frac{V_0}{U} R_e^{1+n},$$

$$\delta' = \frac{\delta}{L} R_e^{1+n}, \quad \tau' = \frac{\tau}{KU^n} L^n R_e^{-\frac{n}{1+n}},$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = \Phi \frac{d\Phi}{dx} + n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} - MU \left[1 - \frac{U}{\Phi} \right]^m = \\ = \Phi \frac{d\Phi}{dx} + n \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} + M\Phi \left[\left(1 - \frac{U}{\Phi} \right)^{m+1} - \left(1 - \frac{U}{\Phi} \right)^m \right] - MK \left(1 - \frac{U}{\Phi} \right)^m, \quad (1.0.5)$$

სადაც $M = \frac{\sigma_0 B^2 L}{\rho V}$ არის მჰდ ურთიერთქმედების კოეფიციენტი

(უგანზომილებო სიდიდეებს შტრიხები მოცილებული აქვს).

ამასთან სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე

$$U(x,0) = 0, \quad V(x,0) = V_0(x),$$

$$U(x,0) = \Phi(x). \quad (1.0.6)$$

თუ შემოვიტანთ დენის ფუნქციას $\Psi(x, y)$ ფორმულებით:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

(1.0.5) სისტემიდან და (1.0.6) სასაზღვრო პირობებიდან $\Psi(x, y)$ დენის

ფუნქციისთვის მივიღებთ განტოლებას

$$n \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right)^{n-1} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} -$$

$$-\Phi \frac{d\Phi}{dx} + M\Phi \left[\left(1 - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^m - \left(1 - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^{m+1} \right], \quad (1.0.7)$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0, & \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{y=0} &= -V_0(x), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=\infty} &= \Phi(x). \end{aligned} \quad (1.0.8)$$

(1.0.7), (1.0.8) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით [28]. ამისათვის შემოვიტანოთ სასაზღვრო ფენის სასრული სისქე $\delta(x)$, იგი განვსაზღვროთ სასაზღვრო ფენის გასწვრივი სიჩქარის გარე ნაკადის სიჩქარეში მდორედ გადასვლის პირობიდან. ეს პირობა ჩაიწერება ასეთი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{y=\delta(x)} = 0. \quad (1.0.9)$$

ფენის სასრული სისქის შემოტანით (1.0.8) პირობა უსასრულოებაში შეიცვლება პირობით $\delta(x)$ -ზე, ე.ი.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} = \Phi(x). \quad (1.0.10)$$

ვიპოვოთ ორი მიახლოება დასმული ამოცანის

$$\Psi(x, y) \approx \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y), \quad (1.0.11)$$

სადაც $\Psi_1(x, y)$ -ის ქვეშ აღებულია ამონახსნი განტოლებისა

$$\frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial y^3} = 0, \quad (1.0.12)$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \Big|_{y=0} = -V_0(x), \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \Big|_{y=\delta(x)} = \Phi(x). \quad (1.0.13)$$

ამ ამონახსნს აქვს სახე:

$$\Psi_1(x, y) = \left[\frac{\Phi(x)}{2\delta(x)} \right] y^2 - \int_0^x V_0(\xi) d\xi. \quad (1.0.14)$$

ამონახსნი $\Psi_2(x, y)$ არის ამონახსნი განტოლების:

$$\frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y^2} \right)^{1-n} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \Phi \frac{d\Phi}{dx} + \right. \\ \left. + M\Phi \left(\left[1 - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right]^m - \left[1 - \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right]^{m+1} \right) \right],$$

და აკმაყოფილებს (1.0.13) სასაზღვრო პირობებს. ამაში (1.0.14) განტოლების ჩასმით, 3-ჯერ ინტეგრებით, ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებით, მივიღებთ:

$$\Psi(x, y) = \frac{\Phi}{2\delta} y^2 + \frac{\delta^{n-1}}{n\Phi^{n-2}} \cdot \left[\frac{y^5}{120\delta} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi}{\delta} \right) + (V_0 - \delta\Phi') \frac{y^3}{6\delta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{11}{48} \delta \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\Phi}{48} \frac{d\delta}{dx} - \frac{V_0}{4} \right) y^2 - \frac{M\delta^2 y}{H} \left(2 - \frac{y}{\delta} + \right) \right. \\ \left. + \frac{M\delta^3}{(m+4)H} \left(3 + (m+1) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+4} - (m+4) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+3} \right) \right] - \int_0^x V_0(\xi) d\xi,$$

ამგვარად სიჩქარისათვის მივიღებთ:

$$U(x, y) = \Phi \frac{y}{\delta} + \frac{\delta^{n-1}}{n\Phi^{n-2}} \cdot \left[\frac{y^4}{24\delta} \frac{d}{dx} \left(\frac{\Phi}{\delta} \right) + (V_0 - \delta\Phi') \frac{y^2}{2\delta} + \right. \\ \left. + -\frac{M\delta^2}{H} \left(-2 + (m+3) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+1} - (m+1) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+2} \right) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{11}{24} \delta \frac{d\Phi}{dx} + \frac{\Phi}{24} \frac{d\delta}{dx} - \frac{V_0}{4} \right) y \right]. \quad (1.0.16)$$

ანალოგიურად შეიძლება განისაზღვროს $V(x, y)$.

ზედაპირული τ ხახუნისათვის გვაქვს გამოსახულება:

$$\tau_1 = L \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}^n = K \frac{U^n}{L^n} R_e^{-\frac{n}{1+n}} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^n, \quad \tau = \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^n,$$

სადაც

$$\tau = \left(\frac{\tau_1}{\frac{K \Pi^n}{L^n}} \right) R_w^{-\frac{n}{1+n}} = \left(\frac{\tau_1 \cdot L^n}{L \Pi^n} \right) R_e^{-\frac{n}{1+n}},$$

$$\tau = \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{u=0}^n = \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{y=0}^n = \left[\frac{\Phi}{\delta} + \frac{\Phi^{2-n} \delta^{n-1}}{n} \times \right. \\ \left. \pm \left(-\frac{V_0}{2} + \frac{11}{24} \Phi' \delta + \frac{\Phi \delta'}{24} - \frac{M \delta}{(m+3)(m+2)} \right) \right]^n. \quad (1.0.17)$$

სასაზღვრო ფენის უცნობი სიგანე $\delta(x)$ განსაზღვროთ (1.0.9) პირობიდან. $\delta(x)$ -ის განსაზღვრავად გვექნება განტოლება

$$\frac{d\delta^{n+1}}{dx} + (n+1) \left[\frac{3\Phi'}{\Phi} - \frac{16M}{\Phi H} \right] \delta^{n+1} = \frac{4(n+1)}{\Phi} V_0(x) \delta^n + 8n(n+1) \Phi^{n-2}. \quad (1.0.18)$$

მიღებული განტოლება $\delta(x)$ -ის მიმართ არაწრფივია ცვლადი კოეფიციენტებით და მისი ამოხსნა ზოგად შეთხვევაში დაკავშირებულია დიდ მათემატიკურ სირთულეებთან.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც (1.0.18)-ის ამონახსნი შეიძლება მიღებულ იქნეს ცხადი სახით.

(I) სიჩქარე იყოს $V_0(x) = \alpha \delta(x)$, მაშინ $\delta(x)$ -ისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d}{dx} \delta^{n+1} + (n+1) \left[3 \frac{d}{dx} \ln \Phi - \frac{4}{\Phi} \left(\alpha + \frac{4M}{H} \right) \right] \delta^{n+1} = 8n(n+1) \Phi^{n-2}$$

ამ განტოლების ამონახსნს $\delta(0) = 0$ პირობისას აქვს სახე:

$$\delta^{n+1}(x) = 8n(n+1) \Phi^{-3(n+1)} e^{N \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi(\xi)}} \left[\int_0^x \Phi^{4n+1} \exp(-N) \int_0^\xi \left(\frac{d\theta}{\Phi(\theta)} \right) d\xi \right].$$

თუ აქ $\Phi = const$, მაშინ

$$\delta^{n+1}(x) = \frac{8n(n+1) \Phi^{n-1}}{N} \cdot \left[e^{-\frac{Nx}{\Phi}} - 1 \right], \quad (1.0.19)$$

$$\text{სადაც } N = 4(n+1) \left[\alpha + \frac{4M}{H} \right].$$

როდესაც $n=1$ მივიღებთ სუსტადგამტარი სითხის სასაზღვრო ფენის სისქეს [15]

$$\delta^2(x) = \frac{16}{N_1} \cdot \left[e^{-\frac{M_1 x}{\Phi}} - 1 \right], \quad (1.0.20)$$

სადაც $N_1 = 8 \left[\alpha + \frac{4M}{H} \right]$.

როდესაც $\frac{N_1 x}{\Phi}$ მცირეა,

$$\delta = 4 \sqrt{\frac{x}{\Phi}}. \quad (1.0.21)$$

ზედაპირული ხახუნი (1.0.17)-დან მიიღებს სახეს

$$\tau = \left(\frac{\Phi}{\delta} \right)^n \cdot \left[\frac{4}{3} - \frac{\Phi^{n-1}}{3n} \left(\alpha + \Phi' + \frac{(1+3n)M}{H} \right) \delta^{n+1} \right].$$

თუ აქ $\Phi = const$, მაშინ

$$\tau = \left(\frac{4}{3} \frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[1 - \frac{\Phi^{n-1}}{4n} \left(\alpha + \frac{(1+3n)M}{H} \right) \delta^{n+1} \right]^n.$$

თუ აქ ჩავსვამთ (1.0.19)-ს, მივიღებთ

$$\tau = \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1)\Phi^{-2} \right]^{\frac{n}{n+1}} \left[\frac{e^{\frac{Nx}{\Phi}}}{B} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left[1 - \frac{2(n+1)}{N} A \left(e^{\frac{Nx}{\Phi}} - 1 \right) \right]^n,$$

$$A = \alpha + (1+3n) \frac{M}{H}.$$

მცირე $\frac{Nx}{\Phi}$ სიდიდისთვის ის გვაძლევს

$$\tau = \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1)\Phi^{-3} x \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \left[1 - \frac{2n(n+2)}{\Phi} - \frac{2nM[4 + (n+1)(1+3m)]}{H\Phi} x + \dots \right].$$

(II) სიჩქარე იყოს $V_0(x) = \beta/\delta^n(x)$, მაშინ $\delta(x)$ -ისთვის მივიღებთ

განტოლებას

$$\frac{d}{dx} \delta^{n+1} + (n+1) \left[3 \frac{d}{dx} \ln \Phi - \frac{16M}{H} \right] \delta^{n+1} = \frac{4(n+1)}{\Phi} \beta + 8n(n+1)\Phi^{n-2},$$

რომლის ამონახსნი იქნება:

$$\delta^{n+1}(x) = 4(n+1)\Phi^{-3(n+1)} \exp \left(K \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi(\xi)} \right) \cdot \left[\beta \int_0^x \Phi^{3n+2} \exp \left(-K \int_0^\xi \frac{d\theta}{\Phi(\theta)} \right) d\xi + \right. \\ \left. + 2n \int_0^x \Phi^{4n+1} \exp \left(-K \int_0^\xi \frac{d\theta}{\Phi(\theta)} \right) d\xi \right].$$

თუ აქ $\Phi = const$, მაშინ

$$\delta(x)^{n+1} = \frac{4n+1}{K} [\beta + 2n\Phi^{n-1}] \left[e^{\frac{Kx}{\Phi}} - 1 \right].$$

სადაც

$$K = \frac{16(n+1)M}{H}.$$

როდესაც $\frac{Kx}{\Phi}$ მცირეა, გვექნება

$$\delta(x) = \left[\frac{4(n+1)}{\Phi} (\beta + 2n\Phi^{n-1}) \right]^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}}. \quad (1.0.23)$$

ხახუნის დაძაბულობა ამ დროს გამოისახება ფორმულით:

$$\tau = \left(\frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[\frac{4}{3} - \frac{5\beta}{6n} \Phi^{1-n} + \frac{\Phi}{3n} \left(\Phi' - \frac{(1+3m)M}{H} \right) \delta^{n+1} \right]^n.$$

როდესაც $\Phi = const$ და $m = 0$ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\frac{4}{3} \frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[1 - \frac{5\beta}{8n} \Phi^{1-n} - \frac{M}{24n} \Phi^{1-n} \delta^{n+1} \right]^n = \\ &= \left[\frac{4}{3} \Phi^{\frac{n+2}{n+1}} \right]^n [4(n+1)(\beta + 2n\Phi^{n-1})x]^{-\frac{n}{n+1}x} \\ &\times \left[1 - \frac{5\beta}{8n} \Phi^{1-n} - \frac{M(n+1)}{6n} \Phi^{-n} (\beta + 2n\Phi^{n-1})x \right]^n, \\ [\tau]_{\beta=0} &= \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[\frac{8n(n+1)x}{\Phi^3} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \left[1 - \frac{n+1}{3} \frac{Mx}{\Phi} \right]^n, \\ [\tau]_{n=1} &= \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,333 - 0,222 \frac{Mx}{\Phi} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.0.24)$$

(III) სიჩქარე იყოს $V_0(x) = -\frac{3M}{H} \delta(x)$, მაშინ სასაზღვრო ფენის სისქე

არაა დამოკიდებული მაგნიტურ ველზე და ტოლია:

$$\delta^{n+1}(x) = 8n(n+1)\Phi^{-3(n+1)} \int_0^x \Phi^{4n+1}(\xi) d\xi.$$

თუ აქ $\Phi = const$, მივიღებთ

$$\delta(x) = [8n(n+1)\Phi^{n-2}]^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}}, \quad (1.0.25)$$

რომელიც ემთხვევა [23] შედეგს.

τ დაძაბულობისთვის გვექნება

$$\tau = \left(\frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[\frac{4}{3} + \frac{\Phi^{1-n}}{n} \left(\frac{\Phi'}{3} + \frac{(1-m)M}{H} \right) \delta^{n+1} \right]^n.$$

როდესაც $\Phi = const$, (1.0.25)-ის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\tau = \left(\frac{4}{3} \right)^n [8n(n+1)\Phi^{n-3}x]^{-\frac{n}{n+1}} \left[1 + \frac{6(n+1)(1-m)Mx}{H\Phi} \right]^n.$$

როდესაც $n=1$ ხახუნის დაძაბულობას განსხვავებული m -ებისთვის ექნება სახე:

$$[\tau]_{m=0} = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,333 + 0,666 \frac{Mx}{\Phi} \right],$$

$$[\tau]_{m=1} = 0,333 \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}},$$

$$[\tau]_{m=2} = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,333 - 0,166 \frac{Mx}{\Phi} \right].$$

ეს ნიშნავს, რომ m -ის გაზრდით ხახუნი შემცირდება.

(IV) სიჩქარისთვის გვექნება $\frac{V_0(x)}{\Phi(x)} = \epsilon \ll 1$, მაშინ (1.0.18) განტოლება

სასაზღვრო ფენის სისქისთვის მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dx} \delta^{n+1} \left(\frac{n+1}{\Phi} \right) \left[3\Phi' - \frac{16M}{H} \right] \delta^{n+1} - 8n(n+1)\Phi^{n-2} = 4 \epsilon (n+1) \delta_n. \quad (1.0.26)$$

ამ განტოლების ამონახსნი ვეძებთ ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$\delta(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon^s \delta_s \approx \delta_0 + \epsilon \delta_1. \quad (1.0.27)$$

(1.0.27)-ის ჩასმით (1.0.26)-ში და ϵ -ს ერთნაირი ხარისხის მქონე წევრების გატოლებით δ_0 და δ_1 -ისთვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d}{dx} \delta_0^{n+1} (n+1) \left[3 \frac{d}{dx} \ln \Phi - \frac{16M}{H\Phi} \right] \delta_0^{n+1} = 8n(n+1)\Phi^{n-2},$$

$$\frac{d}{dx} \delta_1 + \left[\frac{d}{dx} \ln \delta_0^n + (n+1) \left(3 \frac{d}{dx} \ln \Phi - \frac{16M}{H\Phi} \right) \right] \delta_1 = 4.$$

ამ განტოლებათა ამონახსნებს აქვთ სახეს:

$$\delta_0^{n+1}(x) = 8n(n+1)\Phi^{-3(n+1)} \exp \left(D \int_0^x \frac{dx}{\Phi} \left[\int_0^x \Phi^{4n+1}(\xi) e^{-D \int_0^\xi \frac{d\alpha}{\Phi(\alpha)}} \right] d\xi \right),$$

$$\delta_1(x) = 4\delta_0^{-n}(x)\Phi^{-3(n+1)} e^{D \int_0^x \frac{d\alpha}{\Phi(\alpha)}} \left[\int_0^x \Phi^{3(n+1)}(\xi) \delta_0^n(\xi) \cdot e^{-D \int_0^\xi \frac{d\alpha}{\Phi(\alpha)}} d\xi \right],$$

როდესაც $\Phi = const$, მივიღებთ:

$$\delta_0^{(n+1)}(x) = \frac{8n(n+1)}{D} \Phi^{n-1} \left[e^{\frac{Dx}{\Phi}} - 1 \right],$$

$$\delta_1(x) = 4\delta_0^{-n} e^{\frac{Dx}{\Phi}} \left[\int_0^x \delta_0^n(\xi) e^{-\frac{D\xi}{\Phi}} d\xi \right], \quad (1.0.28)$$

სადაც $D = 16(n+1)M/H$.

(V) სიჩქარე იყოს

$$V_0(x) = \frac{3n+2}{4(n+1)} \Phi' \delta - 2n\Phi^{n-1} \delta^{-1} + \beta \delta^{-n} - \frac{4M\delta}{H},$$

მაშინ სასაზღვრო ფენის სისქე გამოისახება მარტივი ფორმულით

$$\delta(x) = \left[\frac{4(n+1)}{\Phi} \beta \right]^{\frac{1}{n+1}} x^{\frac{1}{n+1}},$$

სადაც β რაიმე მუდმივია, ხოლო ხახუნის დამაბულობა იქნება

$$\tau = \left(\frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[2 + \frac{\Phi^{1-n}}{n} \left(\left[\frac{n+2}{12(n+1)} \Phi' + \frac{(1-m)}{H} M \right] \delta^{n+1} \right)^n = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{\Phi}{\delta} \right)^n \left[2 + \frac{\Phi^{1-n}}{n} \left(\frac{\beta}{6} + \frac{(1-m)M}{H} \delta^{n+1} \right) \right]^n.$$

როდესაც $\Phi = const$, $n=1$, მივიღებთ:

$$\tau = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\beta}} + \frac{1}{12} \sqrt{\frac{\beta}{2}} \left(1 + \frac{48(1-m)M}{H\Phi} x \right) \right].$$

თუ $\beta = 8$ გვექნება:

$$\tau = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,416 + \frac{8(1-m)M}{\Phi H} x \right],$$

$$[\tau]_{n=1}^{m=0} = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,416 + 1,333 \frac{Mx}{\Phi} \right],$$

$$[\tau]_{n=1}^{m=1} = 0,416 \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}},$$

$$[\tau]_{n=1}^{m=1} = \sqrt{\frac{\Phi^3}{x}} \left[0,416 + 1,333 \frac{Mx}{\Phi} \right].$$

(VI) თუ $V_0 = const$

$$x = \int \frac{\delta^n d\delta}{\frac{4V_0\delta^n}{\Phi} + 8n\Phi^{n-2} + \left[\frac{16M}{H\Phi} - \frac{3\Phi'}{\Phi} \right] \delta^{n+1}}.$$

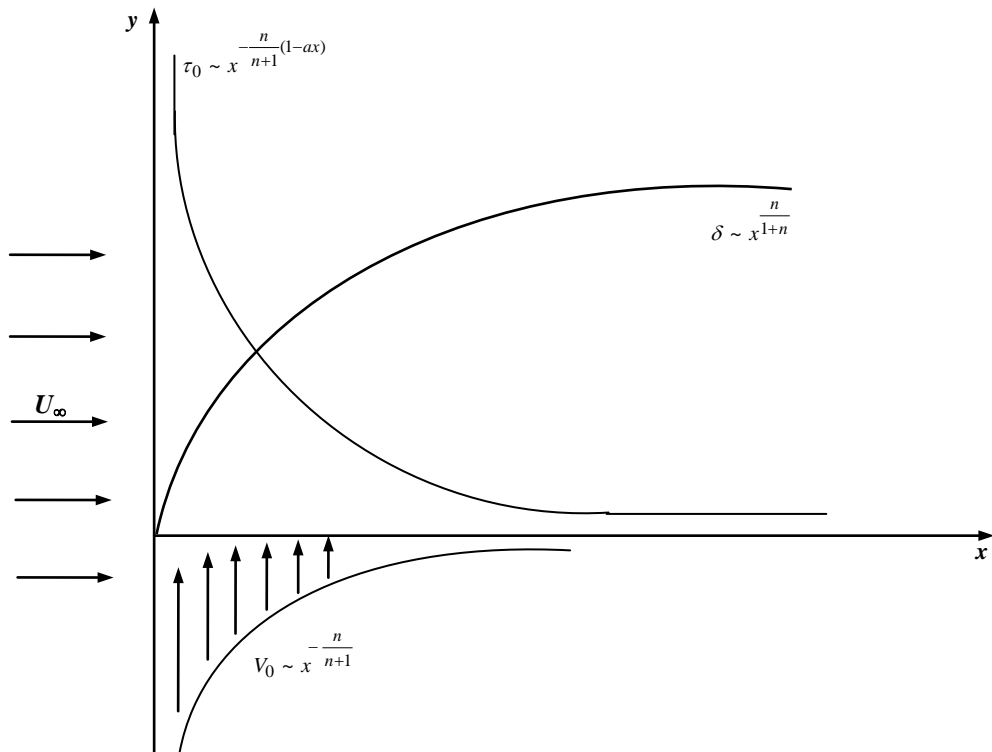
როცა $M = 0, V_0 = 0, n = 1, \Phi = const$, გვექნება

$$\delta = 4\sqrt{\frac{x}{\Phi}},$$

რომელიც ემთხვევა იმ შედეგს, რომელიც გვხვდება ჰიდროდინამიკაში [5].

როცა $n = 1, V_0 = 0, \Phi = const$ გვექნება

$$\delta^2(x) = \frac{H}{2M} \left[\exp\left(\frac{32Mx}{H\Phi}\right) - 1 \right].$$



ნახ. 3. სასაზღვრო ფენის სისქის კავშირი შეჯონვისა და გაჟონვის სიჩქარესთან

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი ბლანტი სითხის სასაზღვრო ფენის სისქის პოვნა შეიძლება მხოლოდ შეჟონვის ან გამოჟონვის განსაზღვრული სიჩქარისთვის, როცა

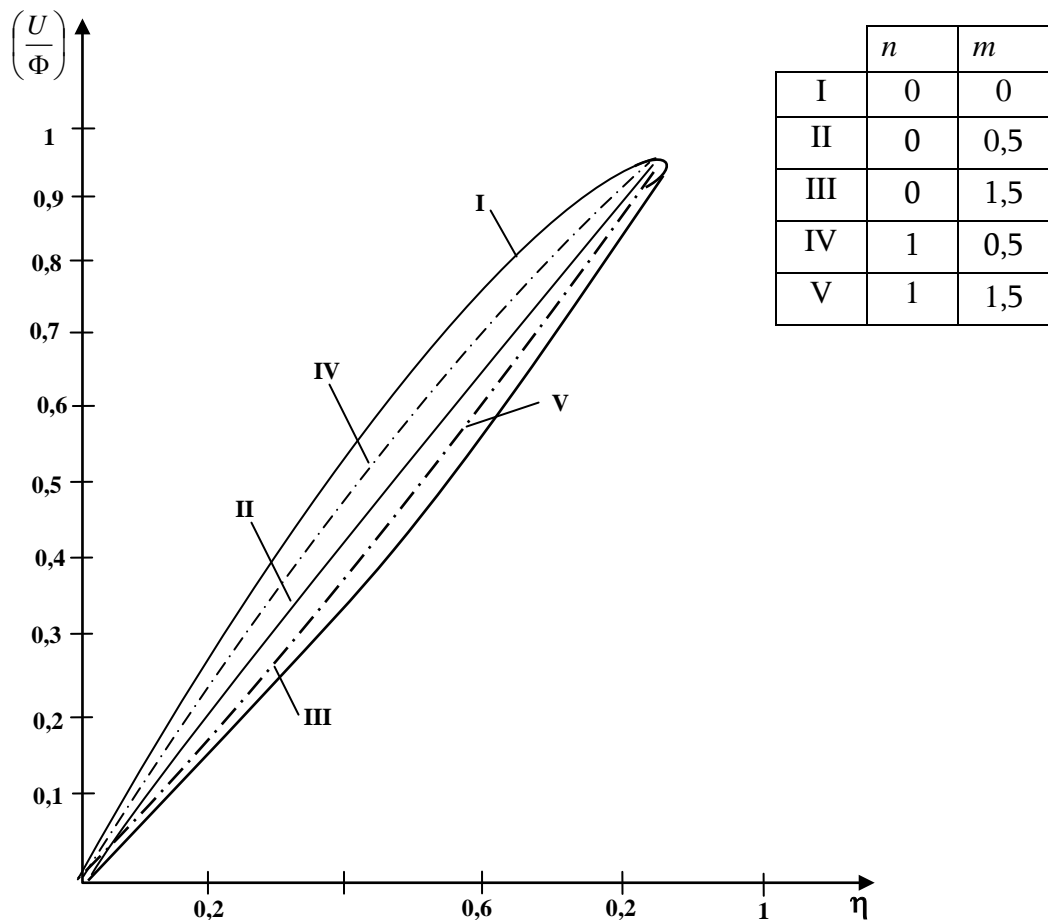
$$V_0(x) \sim \left[\exp\left(\frac{Mx}{H\Phi}\right) - 1 \right],$$

და როცა

$$V_0(x) \sim x^{\frac{1}{n+1}},$$

ე.ი. როდესაც შეჟონვის ან გამოჟონვის ინტენსივობა კედლის გასწვრივ იზრდება. ამის საწინააღმდეგოდ ამოცანის ავტომოდელური ამონახსნი იარსებებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც შეჟონვის ან გამოჟონვის განაწილების ინტენსივობა მცირდება კედლის გასწვრივ კანონით:

$$V_0(x) \sim x^{-\frac{1}{n+1}}$$



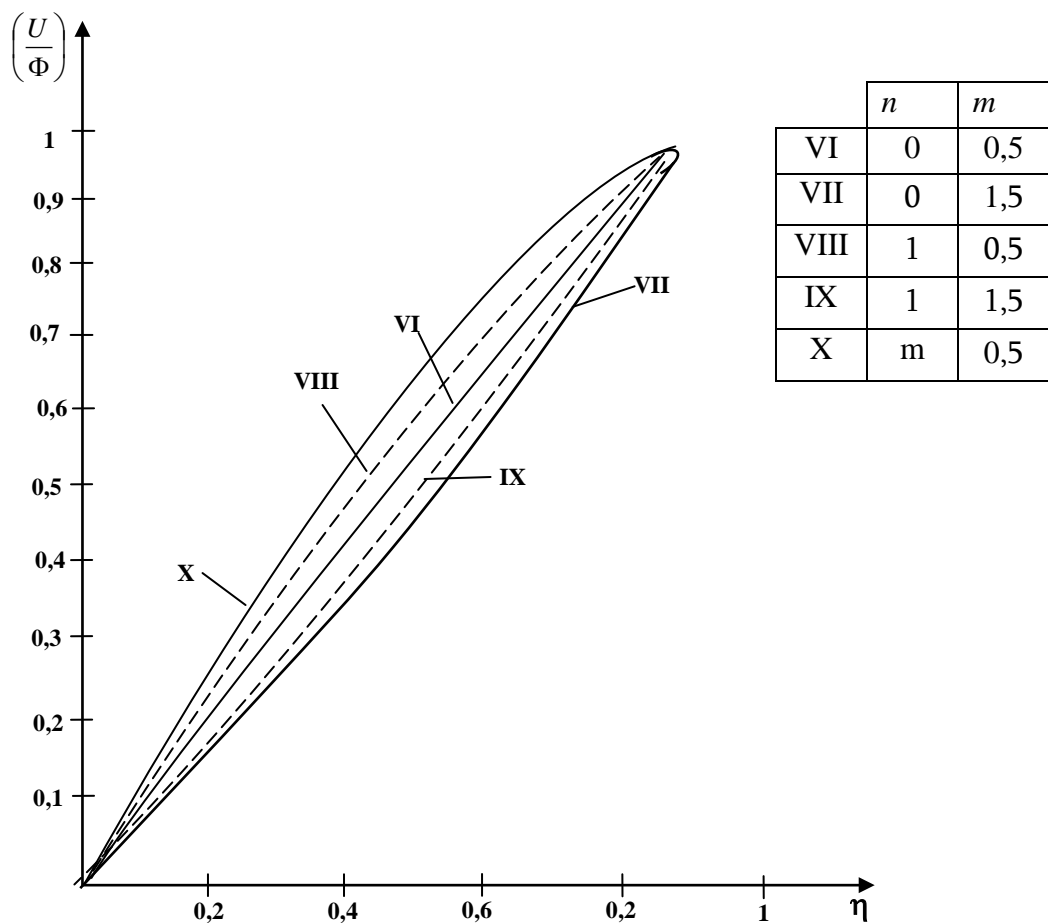
ნახ. 4. სიჩქარის პროფილი მაგნიტური ველის გაზრდისას

ზღვარში ფსევდოპლასტიკურ სითხეებში, ე.ი. როცა $n = 0$, გვაქვს:

$$V_0 \sim \left[e^{\frac{Mx}{\Phi}} - 1 \right], V_0 \sim x \text{ და } V_0 = const$$

ხოლო ავტომოდელური ამონახსნი არსებობს მხოლოდ მაშინ, როდესაც $V_0 = const$.

ნახ. 4, 5-ზე გამოსახულია $\frac{U}{\Phi}$ შეფარდების η -ზე დამოკიდებულების მრუდები, როცა $V_0 = 0$ და $V_0 \neq 0$. ისინი გვიჩვენებენ, რომ ეს ფარდობები

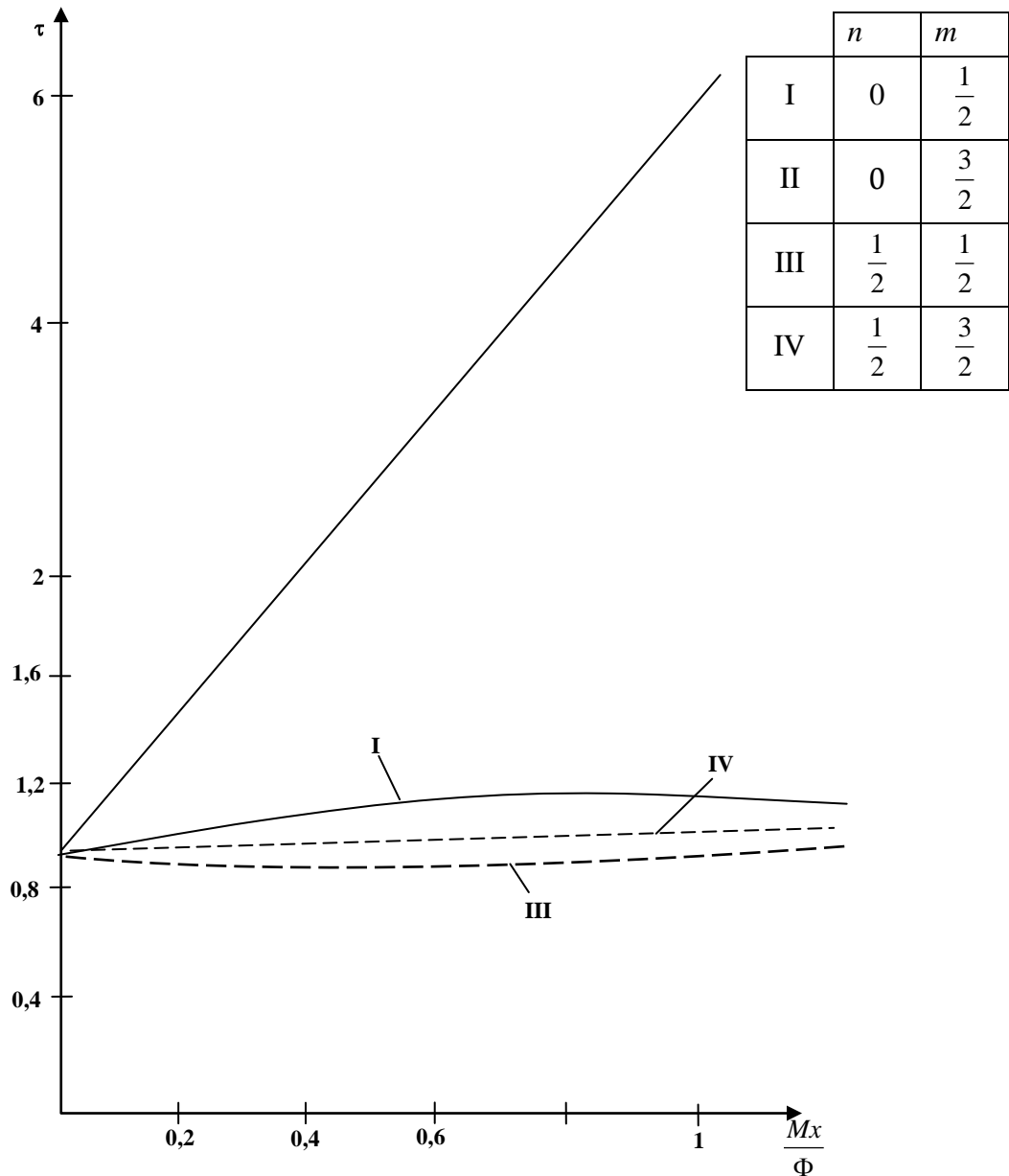


ნახ. 5. დილატანტური და ფსევდოპლასტიკური სითხეებისათვის მაგნიტური ველის დამოკიდებულება სიბლანტის კოეფიციენტზე

იზრდება ფირფიტისა და მოშორებისას მაგნიტური ველის გაზრდისას. ნახ. 6-

ზე გამოსახულია $\frac{\tau_m}{\tau_0}$ შეფარდების გრაფიკი. ისინი გვიჩვენებენ, რომ

ესშეფარდებები იზრდებიან $\frac{Mx}{\Phi}$ კომპლექსის გაზრდისას დილატანტური სითხეებისთვის ($n > 1$) უფრო ჩქარა, ვიდრე ფსევდოპლასტიკური სითხეებისთვის ($n < 1$), როდესაც $\sigma = const$ ($m = 1$). ცვლადი σ -ებისათვის ($m \neq 0$) ეს გაზრდა უფრო ნელია.



ნახ. 6. ძვრის ძაბვის დამოკიდებულება მაგნიტურ ველზე

თავი 2

არანიუტონისეული სითხის არასტაციონარული მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება

ამ თავში განიხილება არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენი; ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right)^m, \quad m \geq 0 \quad (2.0.1)$$

სადაც U არის სასაზღვრო ფენში სითხის სიჩქარე, ხოლო U_∞ მონაწყდომი ნაკადის სიჩქარე.

შევნიშნოთ, რომ ხარისხოვანი სითხის უბრალო არასტაციონარული ამოცანების ამოხსნაც კი მაგნიტურ ჰიდროდინამიკაში წარმოადგენს მნიშვნელოვან მათემატიკურ სირთულეს. ამიტომ ზუსტი ამონახსნების მიღება შესაძლებელია მხოლოდ იშვიათ შემთხვევებში თუ დინება ავტომოდელურია. საზოგადოდ მათი ამოხსნისათვის აუცილებელია გამოვიყენოთ მიახლოებითი ან რიცხვითი მეთოდები.

[28] ნაშრომში განხილულია ბრტყელი ფირფიტის ბლანტი არაკუმშვადი გამტარი სითხით არასტაციონარული გარსდენა მიახლოებითი მეთოდით, როდესაც გარემოს ელექტროგამტარებლობა წარმოადგენს ხარისხოვან ფუნქციას (2.0.1), აქვე მოტანილია მაგალითები, როდესაც შესაძლებელია სასაზღვრო ფენის სისქის გამოსახულება, მივიღოთ ცხადად, და ნაჩვენებია, რომ მაგნიტური ველის მოქმედებისას ზედაპირული ხახუნის მაქსიმალური შემცირება ხდება, როდესაც $m = 0$, ე.ი. იმ შემთხვევაში, როცა სითხის ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი მუდმივია სასაზღვრო ფენის შიგნით და ტოლია ნულის ფენის გარეთ. როცა $m = 1$ ხახუნის კოეფიციენტი განსხვავებულია 6%-ით. როსის [22] მიერ იმავე გზით ადრე მიღებული ხახუნის კოეფიციენტისაგან.

ამ თავის პირველ პარაგრაფში შეისწავლება ანალოგიური ამოცანა არანიუტონისეული სითხეებისთვის. ელექტროგამტარებლობის მუდმივი კოეფიციენტის შემთხვევაში ამოცანა განხილულია [29]-ში.

მკვდ არასტაციონარული დინების განსაკუთრებულობების გამოკვლევამ ხარისხოვანი სითხეებისთვის საშუალება მოგვცა ნათლად წარმოგვედგინა განხილული მაგნიტური პლასტიკურობის ეფექტის ფიზიკური ინტერპრეტაცია. აღმოჩნდა, რომ ეს ეფექტი მჭიდროდაა დაკავშირებული დილატანტური გარემოს განსაკუთრებულობებთან, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ასეთ გარემოში ძვრითი შემფოთებები ვრცელდება სასრული სიჩქარით. განსხვავებით ნიუტონისეული და ფსევდოპლასტიკური სითხეებისგან, რომელთათვის მსრბოლი შემფოთების გავრცელების სიჩქარე უსასრულოა.

დილატანტურ სითხეებში მსრბოლი შემფოთების გავრცელების სიჩქარის სასრულობის ეფექტს ადგილი აქვს აგრეთვე მაგნიტური ველის არარსებობისას, თუმცა მაგნიტური ველის არარსებობისას გამტარ გარემოში წარმოიქმნება დარტყმითი ტალღის ფრონტის მოძრაობის სიჩქარის შენელება და ზოგიერთ შემთხვევაში ფრონტის გაჩერება, რომელიც ვრცელდება დამაგნიტებულ სითხეში შემფოთების წყაროდან (როგორებიცაა ფირფიტა, კედელი, არხი და ა.შ.) მხოლოდ სასრულ მანძილზე.

ზუსტი ანალიზური ამონახსნი რიგი ამოცანებისა უინდუქციო მიახლოებაში გამტარი, ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონის მქონე სითხისათვის არასტაციონარული მსრბოლი დინებისას, როდესაც სითხეს უჭირავს არაგამტარი ფირფიტით შემოსაზღვრული ნახევარსიბრტყე და როდესაც ფირფიტის მოძრაობა წარმოშობს სითხის დინებას განივ მაგნიტურ ველში, მიღებულია ნაშრომში [30].

[31]-ში განხილულია მუდმივ მაგნიტურ ველში ავტომოდელური დინებანი ფირფიტის მოძრაობის კანონის რამოდენიმე სპეციალურ შემთხვევაში. [32]-ში განზოგადებულია ერთ-ერთი ასეთი ამოცანა სითხის მოძრაობისა, ფირფიტაზე დროის საწყის მომენტში იმპულსის

მოქმედებისას, იმ შემთხვევაში, როდესაც მაგნიტური ველი დროში იცვლება ნებისმიერად. სტაციონარული და არასტაციონარული მსრბოლი დინება გამტარი არანიუტონისეული სითხისა ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონით განივ მაგნიტურ ველში განხილულია ნაშრომში [33]; დილატანტური სითხეებისათვის კერძო შემთხვევაში მიღებული ამონახსნები ხასიათდებიან ისეთი ზედაპირების არსებობით, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფენ მხები ძვრითი დამაბულობის ნულოვან არეებსა და ნულისაგან განსხვავებულ არეებს.

[34] და [35] შრომებში განხილულია არასტაციონარული მსრბოლი დინებანი, როდესაც $B \sim t^{\frac{1}{2}}$ ამასთან [34]-ში $t > 0$ -ისთვის ფირფიტის მოძრაობის სიჩქარე ითვლებოდა მუდმივად, ხოლო [35]-ში განიხილებოდა ფირფიტის სიჩქარის დროზე ნებისმიერი ხარისხოვანი დამოკიდებულების შემთხვევა. [34]-ში ამონახსნი აგებულია მკვდ ურთიერთქმედების კოეფიციენტით, როგორც პარამეტრით გაშლის სახით, ხოლო [35]-ში ავტომოდელური ცვლადის ხარისხოვანი მწკრივის სახით.

[36]-ის გამოკვლევებმა გვიჩვენა, რომ განივი შეჟონვა დილიტანტური სითხეების მსრბოლ ჰიდროდინამიკურ დინებებში გავლენას ახდენს მსრბოლი ტალღის ფრონტის მოძრაობის სიჩქარეზე, ზოგიერთ შემთხვევაში იწვევს ფრონტის გაჩერებას ძვრითი შეშფოთების წყაროდან სასრულ მანძილზე.

[37] და [38]-ში შესწავლილია დილატანტური სითხის არასტაციონარული დინებებზე განივი წყვეტის გავლენა როდესაც შეინიშნება იმავდროული გავლენა მაგნიტური ველისა და ფოროვან ფირფიტაში სითხის შეჟონვისა (გამოჟონვისა) მსრბოლი ტალღის ფრონტის მოძრაობის სიჩქარეზე § 3-ში განხილულია ასეთივე ამოცანა სითბოგადაცემის გათვალისწინებით და მიღებულია მხედველობაში ელექტროგამტარებლობის ცვლადობა

$$\sigma = \sigma_0 U^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (2.0.2)$$

შრომაში [39] გადმოცემულია ფსევდოპლასტიკური სითხის სასაზღვრო ფენის მკვდარასტაციონარული სისტემისთვის რამოდენიმე შედეგი. ამიტომ შესწავლა სასაზღვრო ფენისა, რომელიც წარმოიშობა დროში ცვლადი შექონვის (გამოქონვის) საშუალებით მოდებული მაგნიტური ველის ინტენსივობისას, გარე დინების სიჩქარეს გააჩნია დიდი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა. ამასთან სითხის დინების პირობები იცვლებიან ისეთ საზღვრებში რომ გამართლებულია სასაზღვრო ფენის მიახლოების შემოღება. ნაჩვენებია პირობები, რომელთა დროსაც არსებობს სისტემის ერთადერთი ამონახსნი სიმეტრიული დინების დროს. ეს პირობები გვამღებენ ამონახსნის არსებობის გარანტიას პირდაპირი კრიტიკული წერტილის რაიმე მიდამოში დროის უსასრულო შუალედში, ასევე გვიჩვენებენ, რომ განივი მაგნიტური ველის ძალის მოქმედება გამორიცხავს სასაზღვრო ფენის წყვეტას.

დასახრულს მიღებულია გარსმოდენადი სხეულის ზედაპირზე ბლანტი ხახუნის დაძაბულობის მხები მდგენელის ასიმპტოტის პირველი წევრი. არაკუმშვადი გამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენის ამოცანებისთვის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი გამოყენებულია შრომებში [40, 41, 42].

§ 2.1. მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი არანიუტონისეული გამტარი სითხის არასტაციონარული სასაზღვრო ფენისთვის

განიხილება არასტაციონარული სასაზღვრო ფენი არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხისა, რომლის ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით [43]:

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m, \quad m \geq 0 \quad (2.1.1)$$

სადაც U არის სასაზღვრო ფენში სითხის სიჩქარე, ხოლო U_∞ არის ნაკადის სიჩქარე გარე მაგნიტურ ველში $R_{em} \ll 1$ მყოფი. ხარისხოვანი ბლანტი სითხის სასაზღვრო ფენის ძირითადი განტოლებებია:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{nk}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} - \frac{\sigma B^2 U}{\rho}, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial U_\infty}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma_\infty B^2}{\rho} U_\infty, \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (2.1.4)$$

(2.1.1)-ის ჩასმით (2.1.2), (2.1.3)-ში მივიღებთ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{nk}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} + \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + U_\infty - NU \left[1 - \frac{U}{U_\infty} \right]^m. \quad (2.1.5)$$

$$\text{აქ } N = \frac{\sigma_0 B^2}{\rho}.$$

უცნობმა U და V ფუნქციებმა უნდა დააკმაყოფილონ შემდეგი პირობები:

$$U(x, 0, t) = 0, \quad V(x, 0, t) = V_0(x, t),$$

$$U(x, \infty, t) = U_\infty(x, t). \quad (2.1.6)$$

დენის ფუნქციის $\Psi(x, y, t)$ -ის შემოტანით

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

(2.1.4), (2.1.5) განტოლებებიდან დენის ფუნქციისათვის მივიღებთ განტოლებას

$$\begin{aligned} \frac{nk}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \\ & - \frac{\partial U_\infty}{\partial t} - U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial y} + NU_\infty \left(1 - \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^m - \left(1 - \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^{m+1} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

და სასაზღვრო პირობებს:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{y=0} = -V_0(x, t), \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=\infty} = U_\infty(x, t). \quad (2.1.8)$$

(2.1.7), (2.1.8) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით [28]. ამისათვის შემოვიტანოთ სასაზღვრო ფენის „სასრული სისქე“ $\delta(x, t)$, რომელიც ჯერჯერობით უცნობი ფუნქციაა და მოვითხოვთ

პირობების შესრულება არა უსასრულოდ, არამედ $\delta(x,t)$ მანძილზე. მაშინ გვექნება სასაზღვრო პირობები:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=\delta(x,t)} = U_\infty(x,t). \quad (2.1.9)$$

მოვძებნოთ ამონახსნი (2.1.7)-(2.1.8) შემდეგი სახით:

$$\Psi(x, y, t) \approx \Psi_1(x, y, t) + \Psi_2(x, y, t), \quad (2.1.10)$$

სადაც $\Psi_1(x, y, t)$ არის ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = 0, \quad (2.1.11)$$

რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$\left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{y=0} = -V_0(x,t), \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right|_{y=\delta(x,t)} = U_\infty(x,t). \quad (2.1.12)$$

ამ ამონახსნს აქვს სახე:

$$\Psi_1(x, y) = \frac{U_\infty(x,t)}{2\delta(x,t)} y^2 - \int_0^x V_0(\xi, t) d\xi. \quad (2.1.13)$$

შემდეგი მიახლოებისთვის ავიღოთ ამონახსნი განტოლებისა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi_2}{\partial y^3} = \frac{\rho}{nk} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} \right)^{1-n} & \left[\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \right. \\ & \left. - U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + N U_\infty \left(1 - \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^m - \left[\left(1 - \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right)^{m+1} \right] \right]. \end{aligned}$$

თუ აქ ჩავსვამთ (2.1.13) განტოლებას და ვაინტეგრებთ 3-ჯერ, ერთგვაროვანი საწყისი პირობების დაკმაყოფილებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \Psi_2(x, y) = A & \left[\frac{y^2}{120} \left(\frac{U_\infty}{\delta^2} U'_\infty - \frac{U_\infty^2}{\delta^3} \delta' \right) + \frac{y^4}{24} \left(\frac{\dot{U}_\infty}{\delta} - \frac{U_\infty \dot{\delta}}{\delta^2} \right) - \frac{V_0 U_\infty}{12\delta} (3\delta - 2y) y^2 + \right. \\ & + \frac{\dot{U}_\infty}{6} \delta y^2 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) + \frac{V_\infty U'_\infty}{48} \left(11 - \frac{8y}{\delta} \right) + \frac{y^2}{48} U_\infty (U_\infty \delta' + 4\dot{\delta}) + \\ & \left. + \frac{N U_\infty \delta^3}{(m+4)H} \left[3 + (m+1) \left(1 + \frac{y}{\delta} \right)^{m+4} - (m+4) \left(1 + \frac{y}{\delta} \right)^{m+3} + \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right] \right], \end{aligned}$$

სადაც $\dot{U}_\infty = \frac{\partial U_\infty}{\partial t}$, $\delta' = \frac{\partial \delta}{\partial x}$.

საბოლოოდ ორი მიახლოება დენის ფუნქციისთვის გვაძლევს:

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, y, t) = & \left(\frac{U_\infty}{2\delta} y^2 \right) + A \left[\frac{y^5}{120} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^2 + \frac{y^4}{24} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right) - \right. \\
 & - \frac{V_0 U_\infty y^2}{12\delta} (3\delta - 2y) + \frac{y^2 \delta}{6} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty}{48} y^2 \delta \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \left(11 - \frac{8y}{\delta} \right) + \\
 & + \frac{U_\infty y^2}{48} \left(U_\infty \frac{y\delta}{\partial x} + 4 \frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \frac{M U_\infty \delta^3}{(m+4)H} \left[3 + (m+1) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+4} - \right. \\
 & \left. \left. - (m+4) \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} + \left[1 - \frac{y}{\delta} \right]^{m+3} \right) \right] \right] - \int_0^x V_0(\xi, t) d\xi, \tag{2.1.14}
 \end{aligned}$$

სადაც

$$A = \left(\frac{\rho}{nk} \right) \cdot \left(\frac{\delta}{U_\infty} \right)^{n-1}. \tag{2.1.15}$$

სიჩქარის კომპონენტებისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned}
 U = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = & U_\infty \eta + A \left[\frac{\delta^4}{24} (\eta^4 - \eta) \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^2 + \frac{\delta^3}{6} (\eta^3 - \eta) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right) + \right. \\
 & + \frac{\delta^2}{2} \eta (1 - \eta) \left(\frac{\partial U_\infty}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial U_\infty}{\partial x} \right) - \frac{V_0 U_\infty}{2} \eta \delta (1 - \eta) + \\
 & \left. + \frac{M U_\infty \delta^2}{H} \left(-2 + (m+3)(1 - \eta)^{m+1} - (m+1)(1 - \eta)^{m+2} \right) (1 - \eta) \right],
 \end{aligned}$$

სადაც $\eta = \frac{y}{\delta}$.

$$\begin{aligned}
 V(x, y, t) = & - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = V_0(x, t) - f_1(x, y) y^2 + f_2(x, t) y^3 - f_3(x, t) y^4 + \\
 & + f_4(x, t) y^5 + N \left[f_5(x, t) y + f_6(x, t) y + f_7(x, t) y^2 - f_8(x, t) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+4} + \right. \\
 & \left. + f_9(x, t) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+3} - f_{20}(x, t) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+2} \right], \tag{2.1.16}
 \end{aligned}$$

აღნიშვნები $f_i \dots, i = \overline{1, 10}$.

ცხადია (2.1.14)-დან ზედაპირული ხახუნის დამაბულობისთვის გვექნება:

$$\tau = K \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}^n = K \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{y=0} = K \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^n \left[1 + \frac{\rho \delta^n}{nkU_\infty^n} \left(\frac{\delta}{3} \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \frac{U_\infty}{6} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{11}{24} U_\infty \delta \frac{\partial U_\infty}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{24} \frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{NU_\infty \delta}{(m+2)(m+3)} - \frac{V_0 V_\infty}{2} \right) \right]^n. \quad (2.1.17)$$

სასაზღვრო ფენის უცნობი სისქე $\delta(x, t)$ განვსაზღვროთ პირობიდან

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \text{ როცა } y = \delta(x, t). \text{ ის გვაძლევს განტოლებას სასაზღვრო ფენის}$$

სისქის განსაზღვრისათვის:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial \delta^{n+1}}{\partial t} + \frac{U_\infty}{16} \frac{\partial \delta^{n+1}}{\partial x} + (n+1) \left[\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial t} \ln U_\infty + \frac{3}{16} \frac{\partial U_\infty}{\partial x} - \frac{N}{H} \right] \delta^{n+1} = \\ = \frac{n(n+1)K}{2\rho} U_\infty^{n-1} + \left(\frac{n+1}{4} \right) V_0(x, t) \delta^n. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

განვიხილოთ რამოდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც შეიძლება მივიღოთ ამონახსნი (2.1.18) ცხადი სახით:

ა) ავიღოთ $V_0(x, t) = \alpha \delta(x, t)$, α ნებისმიერი რიცხვია, მაშინ $\delta(x, t)$ -სთვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial \delta^{n+1}}{\partial t} + \frac{U_\infty}{16} \frac{\partial \delta^{n+1}}{\partial x} + (n+1) \left[\frac{1}{12} \frac{\partial \ln U_\infty}{\partial t} + \frac{3}{16} \frac{\partial U_\infty}{\partial x} - \frac{\alpha}{4} - \frac{N}{H} \right] \delta^{n+1} = \\ = \frac{n(n+1)}{2\rho} K U_\infty^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

შემოვიტანოთ $\Phi = U_\infty \delta^{n+1}$ და (2.1.19) ჩავწეროთ ასე:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6U_\infty} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{16} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{n(n+1)}{2\rho} K U_\infty^{n-1} - \left(\frac{n-1}{12U_\infty} \cdot \frac{\partial \ln U_\infty}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3n+2}{16} \frac{\partial \ln U_\infty}{\partial x} - \frac{n+1}{U_\infty} \left[\frac{N}{H} + \frac{\alpha}{4} \right] \right) \right] \Phi, \end{aligned}$$

რომლის მახასიათებლები განისაზღვრებიან სისტემიდან:

$$\begin{aligned} \sigma U_\infty dt = 16 dx = \left[\frac{n(n+1)}{2\rho} K U_\infty^{n-1} - \left(\frac{n-1}{12U_\infty} \cdot \frac{\partial \ln U_\infty}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{16} \frac{\partial \ln U_\infty^{3n+2}}{\partial x} - \frac{n+1}{U_\infty} \cdot \left[\frac{N}{H} + \frac{\alpha}{4} \right] \right) \right]^{-1} d\Phi. \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

(2.1.20)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \Phi U_\infty^{3n+2} - \left[\frac{8n(n+1)K}{\rho} \right] \exp \left[-\frac{4(n-1)}{3} \int_0^x \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \ln U_\infty d\xi + \right. \\ \left. + M \int_0^x \frac{d\xi}{U_\infty(\xi, t)} \right] \cdot \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi, t) \exp \left[\frac{4(n-1)}{3} \int_0^\xi \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \ln U_\infty d\xi - \right. \\ \left. - M \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi}{U_\infty} \right] d\xi_1 = f \left[\frac{8}{3}x - \int_0^t U_\infty(x, \eta) d\eta \right], \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

სადაც $f(z)$ არის თავისი არგუმენტის ნებისმიერი ფუნქცია

$$M = 4(n+1) \left[\alpha + \frac{4N}{H} \right]. \quad (2.1.22)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა $f(z)$ ნებისმიერი ფუნქციის განსასაზღვრავად.

(I). ვთქვათ $\Phi(x, t) = 0$, როცა $x = 0$. ეს ნიშნავს, რომ $f \equiv 0$, ხოლო (2.1.21)-დან სასაზღვრო ფენის სისქისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(x, t) = \frac{8n(n+1)K}{\rho U_\infty^{3+3n}} \exp \left[-\frac{3}{4}(n-1) \int_0^x \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \ln U_\infty d\xi + \right. \\ \left. + M \int_0^x \frac{d\xi}{U_\infty} \right] \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi, t) \exp \left[\frac{4}{3}(n-1) \int_0^\xi \frac{1}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial t} \ln U_\infty d\xi_1 - M \int_0^\xi \frac{d\xi_1}{U_\infty} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

თუ გარე ნაკადის სიჩქარე წარმოიდგინება $U_\infty(x, t) = f_1(t) \cdot f_2(x)$ სახით, როდესაც სტაციონარული შემთხვევისთვის ავიღებთ $f_1(t) = 1$ და (2.1.23)-დან მივიღებთ:

$$\delta^{n+1}(x) = \left[\frac{8n(n+1)K}{\rho f_2^{3n+3}} \right] \exp \left[M \int_0^x \frac{d\xi}{f_2(\xi)} \right] \int_0^x f_2(\xi) \exp \left[-M \int_0^\xi \frac{d\xi_1}{f_2(\xi_1)} \right] d\xi. \quad (2.1.24)$$

ნიუტონისეული სითხეებისთვის $n=1$, მივიღებთ ბრტყელი ფირფიტის გარსდენისას სასაზღვრო ფენის სისქეს.

მიღებული განტოლება როცა $m=0$, $\alpha=0$ გამოისახება შემდეგნაირად [44].

$$\delta^2(x) = \frac{16\nu}{f_2^6} \exp \left[\frac{16N}{3} \int_0^x f_2^5(\xi) d\xi \right] \exp \left[-\frac{16N}{3} \int_0^\xi \frac{d\xi_1}{f_2(\xi_1)} \right] d\xi.$$

თუ $f_2(x) = const = \Pi$ (2.1.24) მოგვეცემს სასაზღვრო ფენის სისქეს ფორფიტის სტაციონარული გარსდენისას:

$$\delta^{n+1}(x,t) = \frac{8n(n+1)K}{\rho M} \Pi^{n-1} \left[\exp \frac{Mx}{\Pi} - 1 \right]. \quad (2.1.25)$$

ზედაპირული ხახუნისთვის (2.1.17)-დან გვექნება:

$$\tau = K \cdot \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^n \left[1 + \frac{\rho}{nKU_\infty^{n-1}} \left(\frac{\dot{U}_\infty}{3U_\infty} + \frac{11}{24} U'_\infty - \frac{\alpha}{2} - \frac{N}{(m+2)(m+3)} \right) \delta^{n+1} + \frac{\rho U_\infty^{2-n}}{24n(n+1)K} (\delta^{n+1})^1 \right]^n. \quad (2.1.26)$$

როცა $f_1(t) = 1$, $f_2(x) = \Pi = const$ მაშინ:

$$\tau = K \left(\frac{\Pi}{\delta} \right)^n \left[1 + \frac{\rho \Pi^{2-n}}{24n(n+1)K} (\delta^{n+1}(x))^1 - \frac{\rho \Pi^{1-n}}{nK} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{N}{(m+2)(m+3)} \right) \delta^{n+1} \right]^n.$$

ამ შემთხვევაში ხახუნის კოეფიციენტი მოიცემა გამოსახულებით:

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho \Pi} = 2 \left[\frac{\left(\frac{K}{\rho} \right) \cdot U^{n-2}}{(8n(n+1))^n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{e^{\frac{Mx}{\Pi}} - 1}{\frac{M}{\Pi}} \right]^{\frac{n}{n+1}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{3} e^{\frac{Mx}{\Pi}} - \frac{8(n+1)}{M} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{M}{(m+2)(m+3)} \right) \left(e^{\frac{Mx}{\Pi}} - 1 \right) \right]^n,$$

მცირე $\frac{Mx}{\Pi}$ -ებისათვის განსხვავებული m -ებისთვის ის გადავა:

$$C_f = \left[\frac{2^{2n^2+1}}{n(n+1)3^{n(n+1)} R_{ex}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left[1 - \frac{2n(n+2)}{\Pi} dx - \frac{2n(4+(n+1)(1+3m)Nx)}{H\Pi} \right] + \dots$$

$$C_f^{m=0} = \left[\frac{2^{1+2n^1}}{n(n+1)3^{n(n+1)} R_{ex}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{1}{1+n}} \left[1 - \frac{2n(n+2)\alpha x}{\Pi} - \frac{n(5+n)Nx}{3\Pi} + \dots \right],$$

$$C_f^{m+1} = \left[\frac{2^{1+2n^2}}{n(n+1)3^{n(n+1)}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{1}{1+n}} \left[1 - \frac{2n(n+2)\alpha x}{\Pi} - \frac{n(2+n)}{3\Pi} Nx + \dots \right], \quad (2.1.27)$$

$$\left[C_f^{m=0} \right]_{n=1} = R_{ex}^{-\frac{1}{2}} \left[0,666 - 1,332 \frac{Nx}{\Pi} - \frac{4\alpha x}{\Pi} + \dots \right];$$

$$\left[C_f^{m=0} \right]_{n=2} = R_{ex}^{-\frac{1}{3}} \left[0,589 - 2,28 \frac{Nx}{\Pi} - 7,82 \frac{4\alpha x}{\Pi} + \dots + \right],$$

$$\text{სადაც } R_{ex} = \frac{x^2 \Pi^{2-n}}{K} \rho.$$

ეს ნიშნავს, რომ m -ის გაზრდით იზრდება C_f -იც.

(II). ვთქვათ $\Phi(x,t) = 0$, როცა $t = 0$, მაშინ $f_2(x) = 1 + ax$ (2.1.21)-დან

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \delta(x,t) &= \frac{8(n+1)Kf_1(t)}{a\rho[4n+2-\alpha_1][1-\alpha x]^{3+3n}} \times \\ &\times \left[\left[(1+\alpha x)^{4n+2} \cdot \left(1 - \left[1 - \frac{3a}{8} \int_0^t f_2(\tau) d\tau \right]^{4n+2} \right) \right] - \right. \\ &\left. - (1+\alpha x)^{\alpha_1} \left(1 - \left[1 - \frac{3a}{8} \int_0^t f_1(\tau) d\tau \right]^{\alpha_1} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

სადაც

$$\alpha_1 = \frac{4(n+1)}{af_1(t)} \left[\frac{4N}{H} + \alpha + \frac{a(n-1)}{3(n+1)} \frac{d}{dt} \ln f_1 \right].$$

t -ს მცირე მნიშვნელობისათვის სასაზღვრო ფენის სისქისთვის:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(x,t) &= \frac{3n(n+1)Kf_1^{n-2}(t)}{\rho[4n+2-\alpha_1][1+\alpha x]^{3+3n}} \left[\int_0^t f_1(\tau) d\tau \right] \times \\ &\times [(4n+2)(1+\alpha x)^{4n+2} - \alpha_1(1+\alpha x)^{\alpha_1}], \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

რომელიც $n=1$ და $\alpha_1=0$ მნიშვნელობებისათვის გვაძლევს

$$\delta^2(t) = \frac{6v}{f_1(t)} \int_0^t f_1(\tau) d\tau \quad (2.1.30)$$

რომელიც ემთხვევა [45]-ის შედეგს.

$$\text{ბ) ავიღოთ } V_0(x,t) = - \left[\frac{2n-1}{3(n+1)} \frac{\partial}{\partial t} l_n U_\infty \right] \delta(x,t).$$

მაშინ (2.1.18) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{6U_\infty} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{16} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left[\frac{n(n+1)}{2\rho} R U_\infty^{n-1} - \left(\frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\infty^{3n+2} - \frac{(n+1)N}{H U_\infty} \right) \Phi \right], \quad (2.1.31)$$

რომლის მახასიათებლები განისაზღვრება სისტემიდან

$$6U_\infty dt = 16dx = \frac{d\Phi}{\frac{n(n+1)}{2\rho} RU_\infty^{n-1} - \left[\left(\frac{1}{16} \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\infty^{3n+2} - \frac{(n+1)N}{HU_\infty} \right) \Phi \right]} \quad (2.1.32)$$

(2.1.32)-ის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \Phi U_\infty^{3n+2} - \left[\frac{8n(n+1)R}{\rho} \right] \exp \left[\frac{16(n+1)N}{H} \int_0^x U_\infty(\xi, t) d\xi \right] \times \\ \times \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi, t) \exp \left[\frac{-16(n+1)N}{H} \int_0^\xi U_\infty(\xi_1, t) d\xi_1 \right] d\xi \equiv \\ \equiv f \left(\frac{8}{3}x - \int_0^t U_\infty(x, \tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

განვიხილოთ $f(z)$ ნებისმიერი ფუნქციის განსაზღვრისათვის ორი შემთხვევა:

1) ვთქვათ $\Phi(x, t) = 0$, როცა $x = 0$. ეს ნიშნავს $f \equiv 0$. (2.1.33)-დან სასაზღვრო ფენის სისქისთვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(x, t) = \left[\frac{8n(n+1)R}{\rho U_\infty^{3n+3}} \right] \exp \left[\frac{16(n+1)N}{H} \int_0^x U_\infty(\xi, t) d\xi \right] \times \\ \times \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi, t) \exp \left[\frac{-16(n+1)N}{H} \int_0^\xi U_\infty(\xi_1, t) d\xi_1 \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.34)$$

თუ გარე ნაკადის სიჩქარე წარმოდგენილია ნამრავლის სახით $U_\infty(x, t) = g_1(t)g_2(x)$, მაშინ $g_1(t)$ შემთხვევისთვის მივიღებთ ბრტყელი ფირფიტის გარსდენისას სასაზღვრო ფენის სისქეს.

ამ შემთხვევაში მიღებული გამოსახულება:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(x) = \left[\frac{8n(n+1)}{\rho g_2^{3+3n}(x)} R \right] \exp \left[\frac{16(n+1)N}{H} \int_0^x \frac{d\xi}{g_2(\xi)} \right] \times \\ \times \int_0^x g_2^{4n+1}(\xi) \exp \left[\frac{-16(n+1)N}{H} \int_0^\xi \frac{d\alpha}{g_2(\alpha)} \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

როდესაც $m = 0$, $n = 1$ გადავა გამოსახულებაში []

$$\delta^2(x) = \frac{v}{[g_2(x)]^6} \exp \left(\frac{16N}{3} \int_0^x \frac{d\xi}{g_2(\xi)} \right) \int_0^x g_2^5(\xi) \exp \left(\frac{-16N}{3} \int_0^\xi \frac{d\alpha}{g_2(\alpha)} \right) d\xi.$$

როდესაც $g_2 = const = V$ ის გვაძლევს საშუალებას სასაზღვრო ფენის სისქის განსაზღვრისა ფირფიტის სტაციონარული გარსდენისას მუდმივი სიჩქარით.

$$\delta^{n+1}(x) = \frac{HRV^{n-1}}{2\rho N} \left[\exp\left(\frac{16(n+1)Nx}{HV}\right) - 1 \right]. \quad (2.1.36)$$

2) ვთქვათ $\Phi(x,t) = 0$, როცა $t = 0$, მაშინ $g_2(x) = (1+ax)$ სასაზღვრო ფენის სისქისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(x,t) = & \frac{8n(n+1)Rg_1^{n-2}}{\rho[4n+2-j][1+ax]^{3+3n}} \times \\ & \times \left[(1+ax)^{2+4n} \left[1 - \left(1 - \frac{3a}{8} \int_0^t g_1(\tau) d\tau \right)^{n+4n} \right] - \right. \\ & \left. - (a+ax)^j \left[1 - \left(1 - \frac{3a}{8} \int_0^t g_1(\tau) d\tau \right)^j \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

t -ს მცირე მნიშვნელობებისთვის (2.1.37) მიიღებს სახეს:

$$\delta^{n+1}(x,t) = \frac{3n(n+1)Rg_1^{n-2}(t)}{\rho[4n+2-j][1+ax]^{3+3n}} \left[\int_0^t g_1(\tau) d\tau \right] \left[(2+4n)(1+ax)^{4n+2} - j(1+ax)^j \right],$$

სადაც $j = 16(n+1)N/Hag_1(t)$.

3) ვთქვათ $V_0(x,t) = -\frac{4N}{H}\delta(x,t)$, მაშინ სასაზღვრო ფენის სისქე არაა დამოკიდებული მაგნიტურ ველზე. ამასთან (2.1.18)-დან მივიღებთ სისტემას, რომლის ზოგად ამონახსნს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \Phi U_\infty^{3n+2} - \frac{8n(n+1)}{\rho} R \exp\left[-\frac{4}{3}(n-1) \int_0^x \frac{U_\infty}{U_\infty^2} d\xi\right] \times \\ \times \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi,t) \exp\left[\frac{4}{3}(n-1) \int_0^\xi \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty^2} d\alpha\right] d\xi = F \left(\frac{8}{3}x - \int_0^t U_\infty(x,\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

(I) ვთქვათ $\Phi(x,t) = 0$, მაშინ როცა $x = 0 \Rightarrow F \equiv 0$, ხოლო (2.1.39)-დან სასაზღვრო ფენის სისქისთვის გვექნება

$$\delta^{n+1}(x,t) = \frac{8n(n+1)}{\rho U_\infty^{3+3n}} R \exp\left[-\frac{4}{3}(n-1) \int_0^x \frac{U_\infty}{U_\infty^2} d\xi\right] \times$$

$$\times \int_0^x U_\infty^{4n+1}(\xi, t) \exp \left[\frac{4}{3}(n-1) \int_0^\xi \frac{\dot{U}_\infty}{U_\infty^2} d\alpha \right] d\xi. \quad (2.1.40)$$

თუ $U_\infty(x, t) = const = U$, მივიღებთ:

$$\delta(x) = \left[\frac{8n(n+1)R}{\rho} U^{n-2} \right]^{\frac{1}{1+n}} \cdot x^{\frac{1}{1+n}}. \quad (2.1.41)$$

რომელიც ემთხვევა [45]-ის რეზულტატს.

(2.1.7)-დან ზედაპირული ხახუნის დამაბულობისათვის, როცა $U_\infty(x, t) = U(x)U_1(t)$, $U_1(t) = 1$ მივიღებთ:

$$\tau = R \left(\frac{U}{\delta} \right) \left[1 + \frac{\rho U^{2-n}}{24n(n+1)R} \frac{d}{dx} \delta^{n+1} + \left(\frac{11}{24} \frac{dU}{dx} + \frac{N(1-m)}{H} \right) \frac{\rho U^{1-n} \delta^{n+1}}{nR} \right]^n,$$

რომელიც თავის მხრივ, როცა $U = const$ (2.1.41)-ის გათვალისწინებით გვაძლევს:

$$\tau = \left(\frac{4}{3} \right)^n \rho U^2 \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} R_{ex}^{-\frac{1}{1+n}} \left[1 + \frac{6(n+1)(1-m)Nx}{HU} \right], \quad (2.1.42)$$

სადაც $R_{ex} = \frac{x^n U^{2-n}}{R} \rho$ არის რეინოლდსის განზოგადებული რიცხვი. ამ დროს ხახუნის კოეფიციენტი.

$$C_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} \cdot \left[1 + \frac{6(n+1)(1-m)Nx}{HU} \right]^n. \quad (2.1.43)$$

მცირე $\frac{Nx}{U}$ -ებისათვის, (2.1.43)-ს ექნება სახე:

$$C_f = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{n}{1+n}} \left[1 + \frac{6(n+1)(1-m)Nx}{HU} + \dots + \right],$$

$$[C_f]^{m=0} = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{n}{1+n}} \left[1 + n(n+1) \frac{Nx}{U} + \dots + \right],$$

$$[C_f]^{m=1} = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{n}{1+n}},$$

$$[C_f]^{m=2} = 2 \left(\frac{4}{3} \right)^n \left[8n(n+1) \right]^{-\frac{n}{n+1}} \cdot R_{ex}^{-\frac{n}{1+n}} \left[1 - \frac{n(n+1) Nx}{10 U} + \dots + \right].$$

ეს ნიშნავს, რომ m -ის გაზრდით C_f შემცირდება სხვადასხვა n -ებისათვის მივიღებთ:

$$[C_f]_{n=1}^{m=0} = R_{ex}^{\frac{1}{2}} \left[0,666 + 1,333 \frac{Nx}{U} + \dots + \right],$$

$$[C_f]_{n=2}^{m=0} = R_{ex}^{\frac{1}{2}} \left[0,269 + 1,615 \frac{Nx}{U} + \dots + \right].$$

ეს ნიშნავს, რომ n -ისა და N -ის გაზრდით C_f გაიზრდება.

(II) ვთქვათ $\Phi(x,t) = 0$, როცა $t = 0$. მაშინ, როდესაც $U(x) = (1+ax)$,

(2.1.39)-დან მივიღებთ:

$$\delta^{n+1}(x,t) = \left[\frac{8n(n+1)RU_1^{2-n}(t)}{a\rho[4n+2-\rho][1+ax]^{3+3n}} \right] \times \left[(1+ax)^{4n+2} \left[1 - \left(1 - \frac{3a}{8} \int_0^t U_1(\tau) d\tau \right)^{4n+2} \right] - (1+ax)^\beta \left[1 - \left(1 - \frac{3a}{8} \int_0^t U_1(\tau) d\tau \right)^\beta \right] \right],$$

ხოლო მცირე t -ებისთვის.

$$\delta^{n+1}(x,t) \equiv \left[\frac{3n(n+1)RU_1^{n-2}}{[4n+2-\beta]\rho[1+ax]^{3+3n}} \right] \left[\int_0^t U_1(\tau) d\tau \right] \times \left[(4n+2)(1+ax)^{4n+2} - \beta(1+ax)^\beta \right],$$

სადაც $\beta = \frac{4}{3} \left(\frac{n-1}{U_1^2} \right) \frac{dU_1}{dt}$.

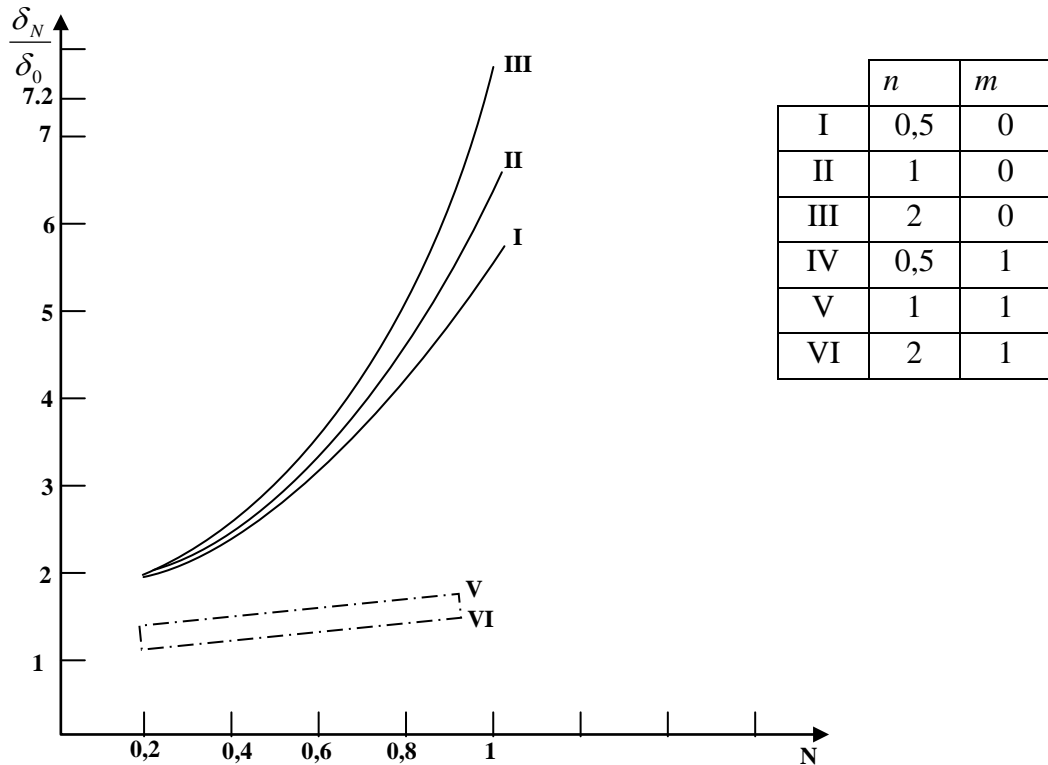
ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ მაგალითები, რომელიც სასაზღვრო ფენისთვის გვაძლევს ცხად გამოსახულებას და ვიპოვოთ მათი ყველა მახასიათებელი.

(1)-ში $n = 1$, $\alpha_1 = 0$ -თვის მიღებული გამოსახულებანი, ხოლო (2)-ში

$n = 1$, $j = 0$ (3)-ში $n = 1$ -ისთვის გადავლენ [45]-ის გამოსახულებაში.

ნახ. 7-ზე $\frac{\delta_N}{\delta_0}$ სისქეთა ფარდობა გვიჩვენებს, რომ როცა $\sigma = const$ -ის

იზრდება უფრო სწრაფად დილატანტური სითხეებისთვის, ვიდრე ფსევდოპლასტიკურთათვის მაგნიტური ველის გაზრდისას, ხოლო ცვლადი σ -ებისთვის გაზრდა არ ხდება.

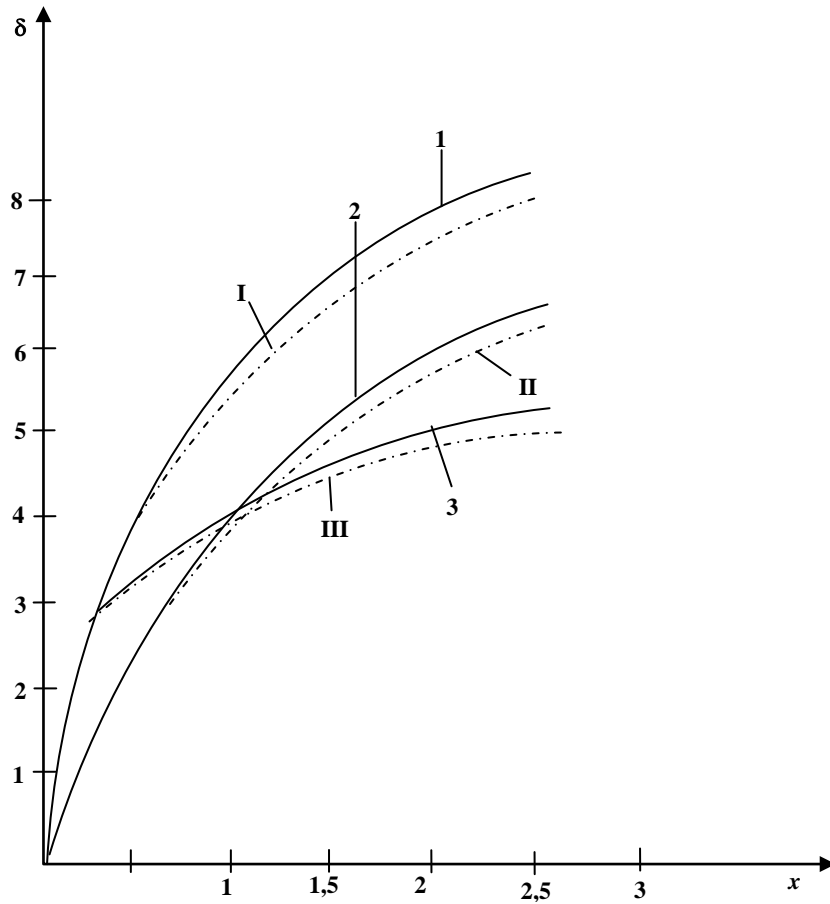


ნახ. 7. მუდმივი მხები ძაბვის დროს სასაზღვრო ფენის სისქის დამოკიდებულება ველის მაგნიტურ რიცხვზე და სიმკვრივეზე

ნახ. 8-ზე ნაჩვენებია ცვლადი ელექტრული გამტარებლობის გავლენის ეფექტი ნახევრადუსასრულო ბრტყელ ფირფიტის დინამიკური სასაზღვრო ფენის სისქეზე. ერთგვაროვანი წირები (1.2.3) ეთანადებიან სითხეებს, რომელთათვის ხარისხის მაჩვენებელია $n = 1, 0, 5, 2$ მუდმივი ელექტროგამტარებლობისას, პუნქტირები (I, II, III) ცვლადი გამტარებლობის

სითხეებს $\sigma = \sigma_0 \left[1 - \frac{U}{U_\infty} \right]$. ცხადია, რომ მცირე X -ებისთვის ცვლადი ელ.

გამტარებლობის გავლენა δ -ზე არის უმნიშვნელო. X -ის ზრდისას ეფექტი უფრო შესამჩნევი ხდება. ამასთანავე სითხის ხარისხოვანი დამოკიდებულების ხასიათი არ ახდენს არსებით გავლენას სასაზღვრო ფენის სისქეზე.



ნახ. 8. ცვლადი ელექტრული გამტარებლობის ხასიათის გავლენა სასაზღვრო ფენის სისქეზე

§ 2.2. ფირფიტის არასტაციონარული გარსდენა გამტარი ხარისხოვანი სითხით ელექტროგამტარებლობის ცვლადი კოეფიციენტით და თბოგადაცემით

სუსტადგამტარი ხარისხოვანი ბლანტი სითხის სხეულის არასტაციონარული გარსდენის ამოცანის შესწავლას თბოგადაცემის გათვალისწინებით გააჩნია დიდი პრაქტიკული და თეორიული ინტერესი. როგორც ზემოთ იყო ნახსენები განიხილება ამოცანა სუსტადგამტარი სითხით ფირფიტის გარსდენისა ცვლადი ელექტროგამტარებლობით [7, 8, 9, 46, 47]

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \frac{U}{U_\infty} \right]^m, \quad m \geq 0, \quad (2.2.1)$$

სადაც U წარმოადგენს სასაზღვრო ფენაში სითხის სიჩქარეს, ხოლო U_∞ - დამცემი ნაკადის სიჩქარეს.

ბლანტი ხარისხოვანი სითხით ფირფიტის გარსდენის არასტაციონორული ამოცანა გარე მაგნიტური ველისა და თბოგადაცემის გათვალისწინებით, რეინოლდსის მაგნიტური რიცხვის მცირე მნიშვნელობებისათვის აღიწერება შემდეგი ძირითადი განტოლებებით [48]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{nR}{\rho} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma B^2}{\rho} U, \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial U_\infty}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma_0 B^2}{\rho} U_\infty, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{R}{\rho C_p} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n+1}. \quad (2.2.5)$$

(2.2.1) შევიტანოთ (2.2.2)-ში და (2.2.4)-ში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{nR}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \\ &+ N U_\infty \left[\left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m - \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^{m+1} \right], \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

სადაც $N = \sigma_0 B^2 / \rho$.

უცნობებია სიჩქარე $U(y,t)$ და ტემპერატურა $T(y,t)$. სითხის ნაკადი აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } y=0 & \quad U(y,t) = 0 \\ \text{როცა } y=\delta & \quad U(y,t) = U_\infty(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{როცა } y=0 & \quad T = T_0 = \text{const}, \\ \text{როცა } y=\delta_T & \quad T = T_\infty. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.8)$$

(2.2.6) და (2.2.7) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდით [27, 28]. ამისათვის შემოვიტანოთ სასაზღვრო ფენის სასრული სისქე $\delta(t)$, რომელიც განისაზღვრება პირობიდან:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = \delta(t). \quad (2.2.9)$$

ანალოგიურად შემოვიტანოთ სასაზღვრო ფენის სასრული სითბური სისქე $\delta_T(t)$, რომელიც განისაზღვრება პირობიდან:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \text{ როდესაც } y = \delta_T(t). \quad (2.2.10)$$

ვიპოვოთ დასმული ამოცანის ორი მიახლოება

$$U(y,t) \approx U_1(y,t) + U_2(y,t),$$

სადაც $U_1(y,t)$ -ს ქვეშ იგულისხმება ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$U_1(y,t)|_{y=0} = 0, \quad U_1(y,t)|_{y=\delta} = U_\infty(t).$$

ამ ამონახსნს აქვს სახე:

$$U_1(y,t) = [U_\infty(t)/\delta(t)]y.$$

$U_2(y,t)$ არის ამონახსნი განტოლებისა:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \frac{\rho}{nR} \left| \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|^{1-n} & \left[\frac{\partial U_1}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{\partial U_\infty}{\partial t} + \right. \\ & \left. + NU_\infty \left[\left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^m - \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right)^{m+1} \right] \right], \end{aligned}$$

შემდეგ პირობებში:

$$U_2|_{y=0} = 0, \quad U_2|_{y=\delta} = 0.$$

მასში (2.2.11) განტოლების ჩასმით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \frac{\rho}{nR} \left[\frac{\delta}{U_\infty} \right]^{n-1} & \left[\left(\frac{\dot{U}_\infty}{\delta} - \frac{U_\infty}{\delta^2} \dot{\delta} \right) y + \left(\frac{V_0 U_\infty}{\delta} - U_\infty \right) + \right. \\ & \left. + NU_\infty \left[\left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^m - \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+1} \right] \right]. \end{aligned}$$

ინტეგრებითა და სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებით მივიღებთ:

$$U_2(y,t) = \frac{\rho\delta^{n-1}}{nRU_\infty^{n-1}} \left[\frac{y^3}{6} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right) + \frac{y^2}{2} \left(\frac{V_0 U_\infty}{\delta} - \frac{dU_\infty}{dt} \right) + \right. \\ \left. + y \left(\frac{\delta}{3} \frac{dU_\infty}{dt} + \frac{U_\infty}{6} \frac{d}{dt} \delta - \frac{V_0 U_\infty}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{NU_\infty \delta^2}{H} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) \left(-2 + (m+3) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+1} - (1+m) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+2} \right) \right].$$

საბოლოოდ ორი მიახლოება მოგვცემს:

$$U(y,t) = [U_\infty(t)/\delta(t)]y + \frac{\rho\delta^{n-1}}{nRU_\infty^{n-1}} \left[\frac{y^3}{6} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{2} \left(\frac{V_0 U_\infty}{\delta} - \frac{dU_\infty}{dt} \right) + \left(\frac{\delta}{3} \frac{dU_\infty}{dt} + \frac{U_\infty}{6} \frac{d\delta}{dt} - \frac{V_0 U_\infty}{2} \right) y + \right. \\ \left. + \frac{NU_\infty \delta^2}{H} \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) \left[-2 + (m+3) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+1} - (1+m) \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^{m+2} \right] \right]. \quad (2.2.12)$$

ზედაპირული ხახუნის დამაბულობისთვის გვექნება:

$$\tau = R \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0}^n = R \left[\frac{U_\infty}{\delta} + \frac{\rho\delta^{n-1}}{nRU_\infty^{n-1}} \left(\frac{\delta}{3} \frac{dU_\infty}{dt} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{U_\infty}{6} \frac{d}{dt} \delta - \frac{V_0 U_\infty}{2} - \frac{NU_\infty \delta}{(m+2)(m+3)} \right) \right]. \quad (2.2.13)$$

სასაზღვრო ფენის უცნობ $\delta(t)$ სისქეს განვსაზღვრავთ (2.2.9) პირობიდან. სასაზღვრო ფენის სისქის განსაზღვრავად ის გვამღებს განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} \delta^{n+1} + \frac{n+1}{2} \left[\frac{d}{dt} l_n U_\infty - \frac{12N}{H} \right] \delta^{n+1} = \frac{3(n+1)}{2} V_0(t) \delta^n + 3\nu(n+1) U_\infty^{n-1}. \quad (2.2.14)$$

მიღებული განტოლება $\delta(t)$ -ს მიმართ არის არაწრფივი ცვლადი კოეფიციენტებით და მისი ამოხსნა ზოგად შემთხვევაში წარმოადგენს დიდ მათემატიკურ სირთულეს.

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც შესაძლებელი იქნება (2.2.14)-ის ამონახსნი მოიძებნოს ცხადი სახით.

ა) ვთქვათ გაჟონვის სიჩქარეა $V_0(t) = C_1 \delta(t)$, მაშინ $\delta(t)$ -სთვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{d}{dt}\delta^{n+1} + \frac{n+1}{2}\left[\frac{d}{dt}\ln U_\infty - 3\left(C_1 + \frac{4N}{H}\right)\right]\delta^{n+1} = 3v_1(n+1)U_\infty^{n-1}.$$

ამ განტოლების ამონახსნს $\delta(o) = 0$ -ისთვის აქვს სახე

$$\delta^{n+1}(t) = 3v_1(n+1)U_\infty^{-\frac{n+1}{2}} \exp(\mu t) \int_0^t U_\infty^{\frac{3n-1}{2}}(\tau) \exp(-\mu\tau) d\tau. \quad (2.2.15)$$

თუ აქ $U_\infty(t) = const$, მაშინ

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{3v_1(n+1)}{\mu} U_\infty^{n-1} [e^{\mu t} - 1], \quad (2.2.16)$$

სადაც $\mu = \frac{3(n+1)}{2}\left[C_1 + \frac{4N}{\mu}\right]$, $v_1 = \frac{nR}{\rho}$, ამგვარად $V_0(t) = \frac{3v_1 C_1}{\mu} (n+1) I_\infty^{n-1} [e^{\mu t} - 1]$;

ეს ნიშნავს, რომ როცა $C_1 > 0$ გვექნება კედელში გაქონვა. ასეთ შემთხვევაში

$$U(y,t) = U_\infty \eta + \frac{U_\infty}{2} (1-\eta) \left[\eta(1-\eta) + \frac{3(n+1)}{\mu} (e^{\mu t} - 1) \times \right. \\ \left. \times \left[-C_1 \eta + \frac{2N}{H} (-2 + (m+3)(1-\eta)^{m+1} - (1+m)(1-\eta)^{m+2}) \right] \right], \quad (2.2.17)$$

სადაც $\eta = \frac{y}{\delta}$.

ზედაპირული ხახუნის დამაბულობისთვის გვექნება:

$$\tau = R \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^n \left[\frac{3}{2} + \frac{\rho U_\infty^{1-n}}{4nR} \left[\left(\frac{d}{dt} I_n U_\infty - \frac{4mN}{H} \right) \delta^{n+1} - V_0 \delta^n \right] \right]^n,$$

როცა $U_\infty(t) = const$, $V_0 = C_1 \delta$ მივიღებთ:

$$\tau = \left(\frac{3}{2} \right)^n R \left[\frac{3n(n+1)}{\rho U_\infty^2} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \left[\frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \left[1 - \frac{n+1}{2} \left(C_1 + \frac{4mN}{H} \right) \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{\mu} \right) \right]^n.$$

ხახუნის კოეფიციენტი მცირე μt -სთვის იქნება

$$C_f = \frac{2\tau}{\rho U_\infty^2} = 2 \left[\frac{3}{2} \right]^n \left[\frac{R}{\rho U_\infty^2 (3n(n+1))^n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \frac{2n+5}{4} c_1 n t - \right. \\ \left. - \left(\frac{3+2m(n+1)}{H} \right) n N t + \dots \right] t^{-\frac{n}{n+1}}. \quad (2.2.18)$$

$$[C_f]^{n=0} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^n \left[\frac{R}{\rho U_\infty^2 [3n(n+1)]^n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[1 - \frac{2n+5}{4} c_1 n t - \frac{n N t}{2} + \dots \right] t^{-\frac{n}{n+1}}$$

$$[C_f]_{n=1}^{m=0} = \sqrt{\frac{v}{U_\infty^2 t}} [1,229 - 2,143c_1 t - 0,613Nt + \dots +],$$

$$[C_f]_{n=2}^{m=0} = \sqrt[3]{\frac{k}{\rho U_\infty^2 t}} [2,779 - 12,505c_1 t - 2,779Nt + \dots +],$$

$$[C_f]_{n=1}^{m=1} = \sqrt{\frac{v}{U_\infty^2 t}} [1,225 - 2,143c_1 t - 0,357Nt + \dots +],$$

$$[C_f]_{n=1}^{m=2} = \sqrt{\frac{v}{U_\infty^2 t}} [1,225 - 2,143c_1 t - 0,224Nt + \dots +],$$

$$[C_f]_{N=0} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^n \left[\frac{R}{\rho U_\infty^2 (3n(n+1))^n} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left[1 - \frac{2n+5}{4} nc_1 t \right] t^{-\frac{1}{n+1}},$$

$$[C_f]_{n=1} > [C_f]_{n=2}, \quad [C_f]_{n=0} < [C_f]_{m=1},$$

$$[C_f]_{N=0} > [C_f]_{N \neq 0}.$$

აქედან ჩანს, რომ (2.2.1) ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტის მქონე სითხით ბრტყელი ფირფიტის გარსდენისას ხახუნის კოეფიციენტი მცირდება როგორც მაგნიტური ველის გაზრდით, ასევე n -ის გაზრდით, ხოლო $V_0(t) = \frac{\alpha}{\delta^n(t)}$ -ის გაზრდით იზრდება.

ბ) ავიღოთ $V_0(t) = \frac{\alpha}{\delta^n(t)}$, მაშინ

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{3(n+1)}{2} U_\infty^{-\frac{n+1}{2}} \exp(M, t) \times \left[2v_1 \int_0^t U_\infty^{\frac{3n-1}{2}} \exp(-M\tau) d\tau + \alpha \int_0^t U_\infty^{\frac{n+1}{2}}(\tau) \exp(-M, \tau) d\tau \right].$$

თუ $U_\infty = const$. ეს გვაძლევს

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{J}{4N} [\alpha + 2v_1 U_\infty^{n-1} [1 - e^{-\mu t}]], \quad (2.2.19)$$

$$M_1 = 6(n+1)N/H.$$

გ) როდესაც $V_0(t) = -\frac{4N}{H} \delta(t)$, მაშინ სისქე $\delta(t)$ არაა დამოკიდებული

მაგნიტურ ველზე და აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} \delta^{n+1}(t) + \left[\frac{n+1}{2} \frac{d}{dt} \ln U_\infty \right] \delta^{n+1} = 3v_1(n+1)U_\infty^{n-1}(t).$$

ამ განტოლების ამონახსნი $\delta(o) = 0$ -თვის იქნება

$$\delta^{n+1}(t) = 3v_1(n+1)U_\infty^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^t U_\infty^{\frac{3n-1}{2}}(\tau) d\tau.$$

როდესაც $U_\infty(t) = const$

$$\delta(t) = \left[3v_1(n+1)U_\infty^{\frac{n-1}{2}} \right]^{\frac{1}{n+1}} t^{\frac{1}{n+1}}. \quad (2.2.20)$$

დ) თუ $V_0(t) = -2v_1 U_\infty^{n-1}(t) / \delta^n(t)$ მივიღებთ, რომ

$$\delta^{n+1}(t) = A U_\infty^{-\frac{n+1}{2}} e^{\mu t}, \quad S = const. \quad (2.2.20')$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ სხვა შემთხვევები, რომლებიც გვაძლევენ სასაზღვრო ფენის სისქის ცხად გამოსახულებებს.

ტემპერატურის $T(y,t)$ განსასაზღვრავად ვეძებთ (2.2.5)–(2.2.8)

ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$T(y,t) \approx T_1(y,t) + T_2(y,t),$$

ამასთან $T_1(y,t)$ იყოს ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0,$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$T_1(y,t)|_{y=0} = T_0 = const, \quad T_1(y,t)|_{y=\delta_T} = T_\infty,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ T_1 იქნება

$$T_1(y,t) = T_0 + (T_\infty - T_0)y / \delta_T(t). \quad (2.2.21)$$

მეორე მიახლოებად ვეძებთ ამონახსნი განტოლები:

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial T_1}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial T_1}{\partial y} - \frac{R}{\rho c} \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)^{n+1} \right].$$

თუ აქ ჩავსვამთ (2.2.11) და (2.2.21) განტოლებებს, შემდეგ ვაინტეგრებთ და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ:

$$T(y, t) = T_0 + \theta(t) y / \delta_T + \\ + \frac{y}{6a} (y - \delta_T) \left[\frac{3V_0}{\delta_T} \theta + (y - \delta_T) \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta}{\delta_T} \right) - \frac{3R}{\rho c} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} \right],$$

$$\theta(t) = T_\infty(t) - T_0.$$

ამგვარად (2.2.10) პირობიდან მივიღებთ განტოლებას სითბური სასასაზღვრო ფენის δ_T სისქის განსასაზღვრავად.

$$\frac{d}{dt} \delta_T^2 + \left[\frac{3R}{\rho C_p \theta} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} - 2 \frac{d}{dt} \ln \theta \right] \delta_T^2 = 3V_0 \delta_T + 6a. \quad (2.2.23)$$

განვიხილოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც შესაძლებელია (2.2.23)-ის ამონახსნი მოვძებნოთ ცხადი სახით:

ა) თუ $V_0(t) = \left[\frac{R}{\rho C_p \theta} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} \right] \delta_T$ მივიღებთ:

$$\delta_T(t) = (6a \theta^2(t) \int_0^t \theta^2(\tau) d\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

ვთქვათ $\theta(t) = T_\infty(t) - T_0 = 6t^\beta$, $\beta \geq 0$ მაშინ:

$$\delta_T(t) = \sqrt{\frac{6a}{1-2\beta}} \sqrt{t},$$

ხოლო როცა $\theta = const$, $\beta = 0$ და

$$\delta_T(t) = \sqrt{6a} \sqrt{t}. \quad (2.2.24)$$

თუ შევადარებთ გამოქონვის ან შექონვის სიჩქარეებს დინამიკური და სითბური სასაზღვრო ფენებისა, მივიღებთ კავშირს δ -სა და δ_T -ს შორის:

$$V_0(t) = \frac{\alpha}{\delta^n} = \frac{R}{\rho C_p \theta} \left[\frac{U_\infty}{\delta} \right]^{n+1} \delta_T,$$

ე.ი.

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \frac{R U_\infty^{n+1}}{\rho C_p \theta \alpha} = f(t).$$

თუ პრანდტლის განზოგადებულ რიცხვს შევარჩევთ შემდეგნაირად:

$$Pr = R U_\infty^{n+1} / \rho C_p \theta \alpha,$$

და ჩავთვლით, რომ $f(t) = const$, მაშინ მივიღებთ:

$$\delta(t) = Pr \delta_T, \quad V_0(t) = \left[\frac{RU_\infty^{n+1}}{\rho C_p \theta Pr} \right] / \delta^n.$$

თუ $n=1$ გვექნება:

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{H}{4N}(\alpha + 2\nu)} [1 - e^{-\mu t}]^{\frac{1}{2}},$$

ხოლო (2.2.24)-დან $m=0$ -სთვის მივიღებთ:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\left(Pr + \frac{\alpha}{2a} \right)} \left[(1 - e^{-2Nt}) / 2Nt \right]^{\frac{1}{2}},$$

თუ კვადრატულ ფრჩხილებში მყოფ გამოსახულებას გავშლით მცირე Nt -ებისთვის მწკრივად, გვექნება:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\left(Pr + \frac{\alpha}{2a} \right)} (1 - Nt),$$

საიდანაც ჩანს, რომ δ/δ_T მცირდება მაგნიტური ველის გაზრდით.

ბ) თუ $V_0(t) = -\frac{2a}{\delta_T}$, $T_\infty = const$, მაშინ

$$\delta_T = \delta_{0T} \exp \left[\frac{-3R}{2\rho C_p \theta} \int_0^t (U_\infty / \delta)^{n+1} d\tau \right],$$

სადაც $\delta_{0T} = \delta_T$.

როცა $t=0$.

ამ შემთხვევაში $V_0 = \frac{-2a}{\delta_T} = \frac{2nR}{\rho} U_\infty^{n-1} / \delta^n$, ე.ი. $\delta^n = \left(\frac{nR}{\rho a} U_\infty^{n-1} \right) \delta_T$. თუ

მხედველობაში მივიღებთ (2.2.20')-ს, გვექნება:

$$\delta_T = A_1 \frac{a\rho}{nR} U_\infty^{1-\frac{3n}{2}} \exp \left[\frac{6nNt}{H} \right].$$

გ) თუ $V_0(t) = \gamma \delta_T$, γ არის ნებისმიერი მუდმივი, $\theta = T_\infty - T_0 = const$,

მაშინ δ_T -სთვის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{d}{dt} \delta_T^2 + \left[\frac{3R}{\rho C_p \theta} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} - 3\gamma \right] \delta_T^2 = 6a,$$

რომელსაც გააჩნია ამონახსნი

$$\delta_T^2(t) = 6a \exp \left[3\gamma t - \frac{3R}{\rho C_p \theta} \int_0^t \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} d\tau \right] \times$$

$$\times \left[\int_0^t \exp \left[-3\gamma\tau + \frac{3R}{\rho C_p \theta} \int_0^\tau \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} d\xi \right] d\tau \right] \quad (2.2.25)$$

როდესაც $U_\infty = const$, გვექნება

$$\int \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} dt = \frac{U_\infty^2}{3\nu_1(n+1)} \ln[1 - e^{-Mt}].$$

(2.2.25)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\delta_T^2(t) = 6a [1 - e^{-Mt}]^{-\beta} e^{3\gamma t} \int_0^t [1 - e^{-M\tau}]^{\beta-3\gamma\tau} d\tau.$$

თუ ჩვენ შევარჩევთ γ -ს ასეთნაირად:

$$3\gamma = M = \frac{3(n+1)}{2} \left[C_1 + \frac{4N}{H} \right],$$

მაშინ ტემპერატურული სასაზღვრო ფენის სისქისთვის გვექნება:

$$\delta_T^2(t) = \frac{6a}{M(1+\beta)} [e^{Mt} - 1].$$

თუ აქ შევიტანთ $\beta = \frac{U_\infty^2}{nC_p\theta(n+1)} = -\frac{E_c}{n(n+1)}$, მივიღებთ

$$\delta_T^2(t) = \frac{6an(n+1)}{M[n(n+1) - E_c]} [e^{Mt}]. \quad (2.2.26)$$

სადაც $E_c = \frac{U_\infty^2}{C_p(T_0 - T_\infty)}$ ეკერტის რიცხვია [49].

აუცილებელია მხედველობაში მივიღოთ, რომ შეჟონვის (გაჟონვის) სიჩქარეს აქვს ერთი მნიშვნელობა, ამიტომ უნდა არსებობდეს კავშირი δ და δ_T სისქეებს შორის:

$$V_0 = \frac{M}{3} \delta_T = C_1 \delta, \quad T_0 \frac{\delta}{\delta_T} = \frac{M}{3C_1}.$$

თუ შევადარებთ (2.2.16) და (2.2.26)-ს $n=1$ -ისთვის, გვექნება:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\text{Pr} \left(1 - \frac{E_c}{2} \right)}. \quad (2.2.27)$$

ეს დამოკიდებულება განსაზღვრავს C_1 კოეფიციენტს. დასასრულ V_0 სიჩქარისთვის გვექნება:

$$V_0 = C_1 \delta = \frac{4N}{H \left[\sqrt{\text{Pr} \left(1 - \frac{E_c}{2} \right) - 1} \right]} \delta. \quad (2.2.28)$$

ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი n -ისთვის კავშირი δ და δ_T სიდიდეებს შორის იქნება:

$$\frac{\delta(t)}{\delta_T(t)} = \left[\frac{3n(n+1)R}{\rho M} U_\infty^{n-1} \right]^{n+1} \left[\frac{M(n(n+1) - E_c)}{6an(n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[e^{Mt} - 1 \right]^{\frac{1-n}{2(1+n)}}. \quad (2.2.29)$$

სითბოგადაცემის $\alpha(t)$ კოეფიციენტისთვის გვექნება:

$$\alpha(t) = \frac{q_w}{T_0 - T_\infty} = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} / (T_0 - T_\infty) =$$

$$= \lambda \left[\frac{3}{2\delta_T} - \frac{V_0}{4a} + \frac{R}{4\rho a C_p \theta} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} \right] \delta_T,$$

$$\alpha(t) = \frac{3\lambda}{2\delta_T} = \sqrt{\frac{3(1-2\beta)}{8at}}$$

როდესაც

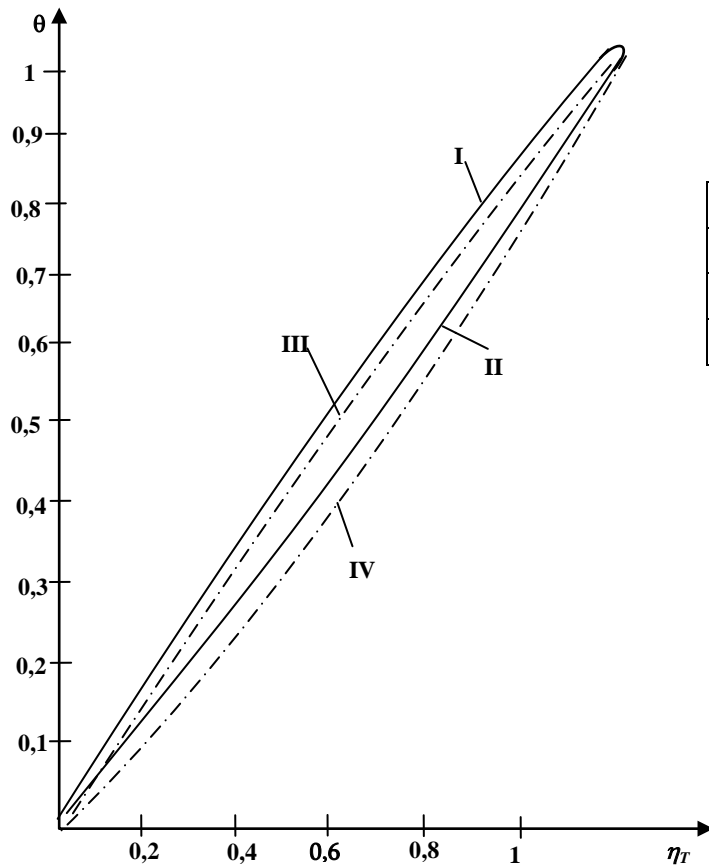
$$V_0(t) = \frac{R}{\rho C_p \theta} \left(\frac{U_\infty}{\delta} \right)^{n+1} \delta_T$$

და

$$\alpha(t) = \lambda \sqrt{\frac{2M[n(n+1) - E_c]}{3an(n+1)}} \left[1 - \frac{n(n+1)e^{Mt}}{4(n(n+1) - E_c)} \right] \cdot \left[e^{Mt} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

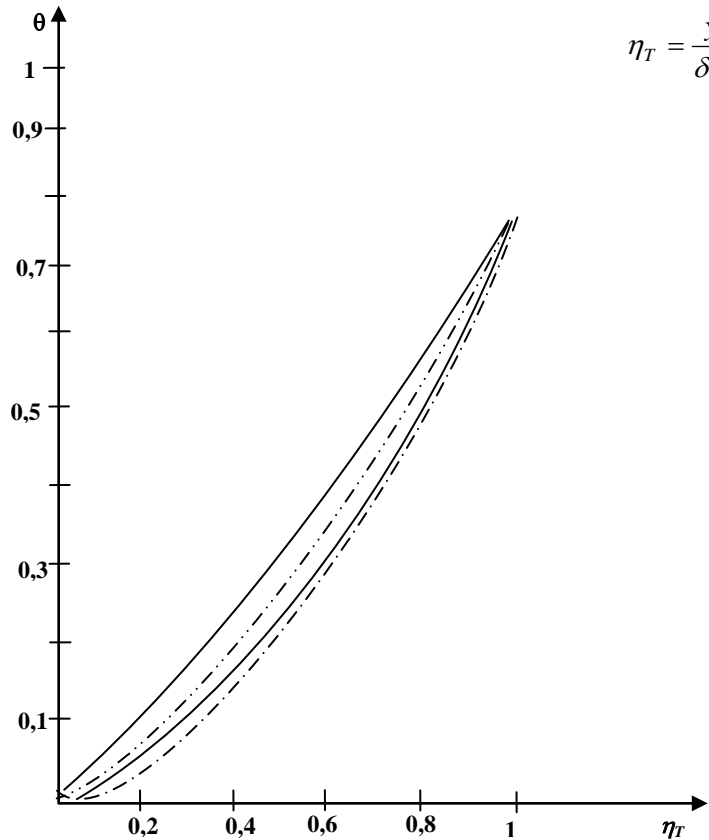
როცა $V_0 = \frac{M}{3} \delta_T$.

ნახ. 9, 10-ზე გამოსახულია θ -ს η_T -ზე დამოკიდებულების მრუდები ფსევდოპლასტიკური და დილატანტური სითხეებისათვის. ისინი გვიჩვენებენ, რომ სითხის ტემპერატურა მცირდება მაგნიტური ველის გაზრდისას როგორც $\sigma = const$ -სთვის, ასევე მაშინაც, როცა σ არის ცვლადი.



	N	n	m
I	0	m	0,5
II	0,2	0	0,5
III	2,2	1	0,5
IV	1	1	0,5

ნახ. 9. ფსევდოპლასტიკური სითხისათვის ტემპერატურის დაცემის კავშირი ტემპერატურაზე დამოკიდებული სიბლანტის კოეფიციენტთან



$$\eta_T = \frac{y}{\delta_T}$$

	N	m	n
I	0	m	$\frac{3}{2}$
II	0,2	0	$\frac{3}{2}$
III	0,2	1	$\frac{3}{2}$
IV	1	1	$\frac{3}{2}$

ნახ. 10. დილატანტური სითხისათვის ტემპერატურის დაცემის კავშირი ტემპერატურაზე დამოკიდებულ სიბლანტის კოეფიციენტთან

§ 2.3. არანიუტონისეული გამტარი სითხის ავტომოდელური ამოცანების შესახებ სითხოვადაციემის გათვალისწინებით

ამ პარაგრაფში განიხილება გამტარი არაკუმშვადი არანიუტონისეული სითხის მოძრაობა. სითხის რეოლოგიური კანონი ხარისხოვანია და კავშირი ძვრის τ დამაბულობასა და სიჩქარის $\frac{\partial U}{\partial y}$ გრადიენტს შორის ბრტყელი მოძრაობის შემთხვევაში არის [19, 45, 50] სახის.

$$\tau = k \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad n > 0. \quad (2.3.1)$$

აქ k და n არის გარემოს რეოლოგიური მუდმივები. მჰდ-ის სტაციონარული დინებები ნაჩვენები გარემოსი, გამოკვლეულია შრომებში [51, 52, 53, 54]. ამასთან, როგორც ამ ნაშრომებშია შენიშნული, დილატანტური ($n > 1$) სითხის დინების ხასიათი არსებითად განსხვავდება ფსევდოპლასტიკური ($b < 1$) სითხის დინების ხასიათისაგან.

კერძოდ, გამტარი დილატანტური სითხეების არხებში დინებისას ამ კონკრეტული გარემოთათვის ჰარტმანის განზოგადებული რიცხვებისათვის, რომლებიც აჭარბებენ რაიმე კრიტიკულ მნიშვნელობას, წარმოიქმნება დინების კვაზიმყარი ზონები, რომლებშიც სითხე მოძრაობს არხის კვეთაში მუდმივი სიჩქარით (მაგნიტური პლასტიკურობის ეფექტი) [55, 56, 57]. ეს საშუალებას გვაძლევს, რომ ველოდეთ ასეთ გარემოთათვის არასტაციონარულ მჰდ დინებებში ისეთ განსაკუთრებულობებს, რომელნიც კავშირშია სითხის არანიუტონისეულ თვისებებთან.

განვიხილოთ არასტაციონარული მსრბოლი მჰდ დინება ხარისხოვანი რეოლოგიური კანონის მქონე (2.3.1) სითხისა, როდესაც არსებობს სიჩქარის განივი მდგენელი, რომელიც წარმოიქმნება სასაზღვრო ზედაპირში გამოჟონვის შედეგად, როდესაც გარე მაგნიტური ველი ერთგვაროვანი და მუდმივია. ჩავთვალოთ, რომ გარემოს ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი წარმოიდგინება [45] სახით:

$$\sigma = \sigma_0 U^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (2.3.2)$$

ვთქვათ სითხეს უჭირავს ნახევარსიბრტყე $y > 0$. ამასთან იგულისხმება, რომ გარე მაგნიტური ველი y ინდუქციით მიმართულია B_0 ღერძის გასწვრივ, ხოლო ელექტრული ველი განსახილველ შემთხვევაში არ არსებობს $\vec{E} = 0$. არაგამტარ ფირფიტაში, რომელიც სითხეში ძევს $y = 0$ სიბრტყეზე ხორციელდება სითხის გაჟონვა $V_y = V(t)$ სიჩქარით.

ფირფიტის მოძრაობისას სითხეში წარმოიქმნება სითხის არასტაციონარული დინება, ამასთან დროის ნებისმიერ მომენტში $\frac{\partial U}{\partial y} > 0$.

რეინოლდსის მცირე რიცხვებისთვის, ე.ი. $Re_m \ll 1$ განტოლებები, რომლებიც აღწერენ არასტაციონარულ დინებას და თბოცვლას განივ მაგნიტურ ველში, დისიპაციური სითბოგამოყოფის გათვალისწინებით. უგრადიენტო მჰდ დინების შემთხვევაში, ჩაიწერება სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V(t) \frac{\partial U}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} U, \quad (2.3.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V(t) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{v}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{a}{C_p} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n+1}, \quad (2.3.4)$$

სადაც $a = \frac{k}{\rho}$, $U(y, t)$ არის სითხის დინების სიჩქარე, $T(y, t)$ ტემპერატურა.

(2.3.2)-ის ჩასმით (2.3.3)-ში მივიღებთ:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V(t) \frac{\partial U}{\partial y} = a \frac{\partial}{\partial y} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial U}{\partial y} \right] - NU^m, \quad (2.3.5)$$

სადაც $N = \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho}$.

ნულოვანი საწყისი პირობებით და შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$U(y, t) = \Pi(t), \text{ როცა } y = 0,$$

$$U(y, 0) = 0, \text{ როცა } t = 0, \quad (2.3.6)$$

$$U(y, t) = 0, \text{ როცა } y \rightarrow \infty.$$

$T = T_w(t)$, როცა $y = 0$, $T = T_\infty \rightarrow 0$ როცა $y \rightarrow \infty$ შემოვიფარგლოთ ისეთ გარემოთა განხილვით, რომელთათვისაც რეოლოგიური კონსტანტა $n > 1$,

ე.ი. $n > m$. თუ გავითვალისწინებთ [58, 59] ნაშრომების შედეგებს, რომელშიც განხილულ ავტომოდელურ ამოცანებში, ზუსტი ამოხსნის შემთხვევაში გათვალისწინებული იყო მაგნიტურ ველში გამტარი დილატანტური სითხის არასტაციონარული მსრბოლი დინებისას ტალღის ფრონტის გავრცელების სიჩქარის სასრულობის და ძვრითი შემფოთებების სივრცითი ლოკალიზაციის ეფექტი, მაშინ ზემოთ დასმული ამოცანის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi_i(y,t) = \begin{cases} \Phi_i(y,t), & y_0 > y > 0, \\ 0, & y_0 < y, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$i = 1, 2$, სადაც $\Phi_1(y,t) = U(y,t)$.

ამგვარად სასაზღვრო (2.3.6), (2.3.7) პირობების გათვალისწინებით უნდა მოიძებნოს (2.3.4) (2.3.6) განტოლებების ამონახსნი $\Phi(y,t)$, როდესაც $y_0 > y > 0$ და ძვრითი შემფოთების ტალღის ფრონტის მოძრაობის კანონი, როცა $y = y_0$.

$V(t)$ და $\Pi(t)$ დამოკიდებულების ნებისმიერობის შემთხვევაში (2.3.3) და (2.3.6) არაწრფივი ამოცანის ანალიზური ამონახსნი არ მოიძებნება. მხოლოდ რამოდენიმე სპეციალურ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს განსაზღვრული კავშირი გაჟონვის $V(t)$ სიჩქარესა და ფირფიტის მოძრაობის $\Pi(t)$ სიჩქარეს შორის, შესაძლებელი ხდება პოვნა (2.3.3)–(2.3.7) ამოცანის ავტომოდელური ამონახსნისა, თუ ავტომოდელურ ცვლადად ავიღებთ:

$$\eta = \int_0^t V(\tau) d\tau - y.$$

ვთქვათ

$$U(t) = A \left[\int_0^t V(\tau) d\tau \right]^{\frac{n+1}{n-m}}, \quad (2.3.8)$$

სადაც $A = \left[\frac{N(n-m) \cdot (n-m)}{na(1+m)(n+1)^n} \right]^{\frac{1}{n-m}}$.

ამგვარად, (2.3.5) განტოლებას ექნება სახე:

$$a \frac{d}{d\eta} \left[\left(\frac{dU}{d\eta} \right)^n \right] = NU^m,$$

მაშინ ამოცანას (2.3.5), (2.3.6) გააჩნია ავტომოდელური ამონახსნი:

$$U(y,t) = U(\eta) = \begin{cases} A\eta^{\frac{n+1}{n-m}}, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leq 0. \end{cases} \quad (2.3.9)$$

ასეთი ამონახსნი ერთნადება იმას, რომ დილატანტურ $t > 0$ სითხეებში დროის ნებისმიერ ($n > 1$) მომენტში ფირფიტის მოძრაობით გამოწვეული დამაბულობები ასწრებენ გავრცელებას მხოლოდ სასრული სისქის $0 < y < y_0$ სითხის ფენაში, ამ ფენის გარეთ მხები დამაბულობები ნულის ტოლია და სითხე არაა შეშფოთებული ანუ უძრავია.

სხვა სიტყვებით, ამონახსნი (2.3.9) ეთანადება მსრბოლ ტალღას, რომლის ფრონტი გადაადგილდება $V(t)$ გარემოს სიჩქარით y ღერძის მიმართულებით.

მსრბოლ ტალღაში ფრონტის მდებარეობა $y_0(t)$ დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება მოიძებნოს $\eta = 0$ პირობიდან, რომელიც (2.3.8)-ის გათვალისწინებით განსაზღვრავს გამოსახულებას:

$$Y_0 = \int_0^t V(\tau) d\tau. \quad (2.3.10)$$

წერტილი $y = y_0(t)$ წარმოადგენს მსუბუქი წყვეტის წერტილს. ამ წერტილში $U(y,t)$ და $\frac{\partial U}{\partial y}$ უწყვეტნი არიან. ეს უზრუნველყოფს სიჩქარისა და τ მხები დამაბულობის უწყვეტობის ფიზიკური მოთხოვნის შესრულებას ნებისმიერ წერტილში, სადაც:

$$\tau = k \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|_n \Big|_{y=0} = k \left(\frac{n+1}{n-m} \right)^{n+1} \cdot A^{n-m} \cdot \Pi^{m+1}(t) \Big|_{n+1}^n. \quad (2.3.11)$$

გამთბარი სხეულისთვის მიზანშეწონილია ავიღოთ:

$$T_w(t) = B \left[\int_0^t V(\tau) d\tau \right]^{\frac{\alpha}{n-m}}, \quad (2.3.12)$$

სადაც $\alpha = [n(3+m) + (1-m)]$,

$$B = \left[\frac{a\rho(m-n)(n+1)}{\nu\alpha[n(m+2)+1]} \cdot \left(\frac{n+1}{n-m} \right)^n A^{n+1} \right].$$

ამგვარად ამოცანას (2.3.4), (2.3.7) გააჩნია განზოგადებული ავტომოდელური ამონახსნი

$$T(y,t) = T(\eta) = \begin{cases} B\eta^{\frac{\alpha}{n-m}}, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leq 0. \end{cases} \quad (2.3.14)$$

ეს ამონახსნი ასევე ეთანადება მსრბოლ ტალღაც, რომლის ფრონტი გადაადგილდება სიჩქარით $V(t)$.

განვიხილოთ გაქონვის სიჩქარისა და ფირფიტის მოძრაობის სიჩქარის დროზე ხარისხოვანი დამოკიდებულების კერძო შემთხვევა:

$$V(t) = Ct^{e-1}, \quad \Pi(t) = U_0 t^{\frac{e(n+1)}{n-m}}, \quad e \geq 1, \quad (2.3.15)$$

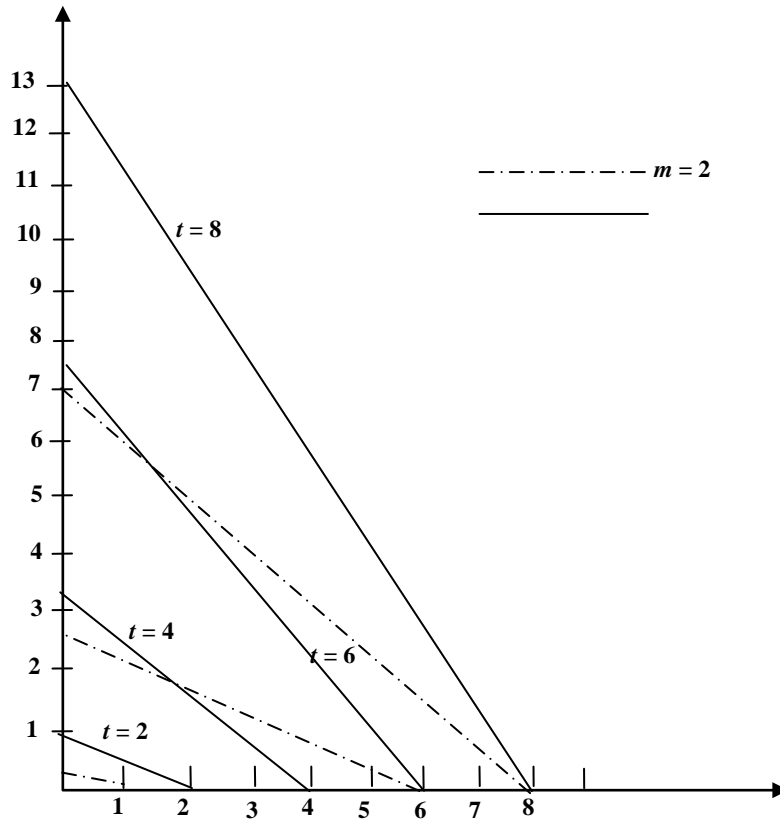
$$T_w(t) = \theta_0 t^{\frac{\alpha e}{n-m}}, \quad \text{სადაც } U_0 = A \left(\frac{c}{e} \right)^{\frac{n+1}{n-m}}, \quad \theta_0 = B \left(\frac{c}{e} \right)^{\frac{\alpha}{n-m}}.$$

(2.3.9) ამონახსნს აქვს სახე:

$$U(y,t) = \begin{cases} A \left[\frac{c}{e} t^e - y \right]^{\frac{n+1}{n-m}}, & y < y_0, \\ 0, & y \geq y_0 = \frac{ct^e}{e}. \end{cases}$$

როდესაც $m=1$ (2.3.9) ამონახსნი ემთხვევა ამონახსნს [50].

ნახ. 11-ზე ნაჩვენებია სითხის Π სიჩქარის განაწილება დროის განსხვავებული მომენტებში, როცა $n=3$ და $a = N = c = e = 1$, როცა მსრბოლი ტალღის ფრონტი ვრცელდება მუდმივი სიჩქარით და როცა $m=1$, ე.ი. $\sigma = const$; $m=2$, ე.ი. $\sigma = \sigma_0 \Pi$ და ნაჩვენებია, რომ m -ის გაზრდით სიჩქარე მცირდება.



ნახ. 11. სითხის სიჩქარის განაწილება მსრბოლი ტალღის შემთხვევაში

თავი 3

სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექცია განივ მაგნიტურ ველში

ამ თავში განიხილება ელექტროგამტარი არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანები, როდესაც σ ელექტროგამტარებლობის ცვლილება დამოკიდებულია სიჩქარეზე. § 1-ში შესწავლილია არასტაციონარული შემთხვევა, როდესაც

$$\sigma = \sigma_0 U^m, \quad m \geq 0, \quad (3.1)$$

ხოლო § 2-ში სტაციონარული შემთხვევა, როდესაც ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტს აქვს სახე:

$$\sigma = \sigma_0 U^\alpha, \quad \alpha \geq 0. \quad (3.2)$$

ბლანტი სითხეების წრფივი ბუნებრივი კონვექციის გამოკვლევების დაწყებას სათავე დაედო 60-იანი წლების დასაწყისში, თუმცა ინტენსიურად ეს ამოცანები განვითარდა 80-იან წლებში. ხარისხოვანი სითხისათვის ბუსინესკის მიერ დასმულ ავტომოდელური ამოცანების მიახლოებით ამონახსნების მიღების შესაძლებლობას ანალიზი გაუკეთდეს საუნდელგეკარმა [61] ინტეგრალური მეთოდებით, ხოლო ჰანსენმა [15] და ლი აბესმა [62] ჯგუფთა თეორიის გამოყენებით მოიძებნა, რომ ავტომოდელობა (წრფივი ჯგუფისათვის) შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც ზედაპირის ტემპერატურა იცვლება $x^{-\frac{1}{3}}$ კანონით. სპირალური ჯგუფის შემთხვევისათვის ავტომოდელობა შეუძლებელია [63].

ხარისხოვან სითხეთათვის თავისუფალი კონვექციური დინების გამოკვლევების განვითარებისათვის დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა აკრივოსის ნაშრომს [64]. მასში პირველად გადმოიცა ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენის იდეა იმ სითხეთათვის, რომელთაც გააჩნდათ პრანდტლის დიდი რიცხვი; იდეამ ჰპოვა განვითარება რიგ ნაშრომებში და სხვადასხვა სხეულთა მახლობლობაში იზოთერმული ზედაპირებისთვის ჩატარდა თავისუფალი კონვენციის ამოცანათა ანალიზი. ამ გამოკვლევების

რეზულტატები შემდეგ დადასტურებული იქნა ექსპერიმენტულად. ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექცია ბრტყელ ვერტიკალურ ფენებში ექსპერიმენტულად გამოიკვლია ემერმა, ცზიმ [65] და დეილომმა. მათ მოახდინეს მეორე რიგის სასაზღვრო პირობების რეალიზება, თუმცა შედეგები გადამუშავდა კომპლექსებში, გამომდინარე კრიტერიალური დამოკიდებულებიდან, რომელიც წარმოადგინა აკრივოსმა [64].

აუცილებელია იმის აღნიშვნა, რომ [66] ნაშრომში ჩატარდა კომპლექსური გამოკვლევა ტიპური ტექნოლოგიური სითხეების (ნატრიუმ კარბოქსიმეტილ ცელულოზის წყალხსნარები და კარბოლიპოლიმეთილების (პოლუფისი, წყალხსნარები). ნაჩვენები იქნა, რომ ძვრის სიჩქარის დიაპაზონში თავისუფალი კონვექციის პირობებში, ეს გარემოებები ახდენენ რეოლოგიური ქცევის შესამჩნევ ანომალიას.

ნაშრომში [] გამოკვლეულია მეორე რიგის სასაზღვრო პირობებში თავისუფალი კონვექცია. ბადეთა სასრულ-სხვაობითი მეთოდით ჩატარებულ გამოთვლებში, გამოყენებული იქნა სითხის შემადგენელი მოდელი, ძვრის მცირე სიჩქარეებისათვის – ნიუტონისეული, ძვრის სიჩქარის დანარჩენ დიაპაზონში – ხარისხოვანი.

მიღებული თეორიული შედეგები დაუპირისპირდნენ ავტორის საკუთარ ექსპერიმენტებს, რიცხვითი გამოთვლების შეთანხმება ექსპერიმენტის მონაცემებთან იყო კარგი. ვერტიკალური ფირფიტის მახლობლობაში კონვექციას მუდმივი სითბური ნაკადის შემთხვევაში ანალიზი ჩატარდა აკრივოსის დაშვებებში, ნაშრომში [68] განხილულია გარე ამოცანა, ძირითადი ნაკადის შემფოთების პარამეტრად შერჩეულია

$$\Phi = Gr Re^{\frac{2}{n-2}}.$$

რიცხვითი გამოთვლები ჩატარებულია კედლის მუდმივი ტემპერატურის შემთხვევაში როგორც თანამიმართული იძულებითი და თავისუფალი კონვექციური ნაკადების შემთხვევისათვის ($\Phi > 0$), ასევე ურთიერთსაპირისპირო ნაკადებისთვის ($\Phi < 0$). თუმცა პარამეტრი $\Phi \neq 1$

შემთხვევისთვის ცხადადაა დამოკიდებული განივ კოორდინატზე, ე.ი. ამოცანა ლოკალურად ავტომოდელურია.

არანიუტონისეული ბუნებრივი კონვექციის ამოცანების ამოხსნა წარმოადგენს მნიშვნელოვან მათემატიკურ სირთულეს.

ნაშრომში [69] შესწავლილია ამოცანა, როდესაც გამტარებლობის ტემპერატურაზე დამოკიდებულება განსაზღვრულია ემპირიული გამოსახულებით

$$\sigma = \sigma_0 \left[\frac{T}{T_\infty} \right]^n.$$

ამოცანის ამოხსნისთვის გამოყენებულია არაცხადი სხვაობითი სქემა. [65]-ში გამოკვლეულია თავისუფალი კონვექციის ამოცანები და ამ ამოცანებისთვის მიღებული სხვაობითი განტოლებების სისტემა ამოიხსნა პროგონკის მეთოდით. შრომებში [70, 71] ამოხსნილია არავტომოდელური ამოცანა ბლანტი სითბოგამტარი და ელექტროგამტარი სითხის ფირფიტასთან ბუნებრივი კონვექციის შესახებ, ფირფიტის ტემპერატურის ნებისმიერი განაწილებისას. ამონახსნი მიღებულია ძლიერი მაგნიტური ველის შემთხვევაში გარე და შიგა გაშლის მეთოდით. ნაშრომში [72] ელექტროგამტარი არანიუტონისეული სითხის შემთხვევაში განხილულ იქნა დინება პრანდტლის განზოგადებული რიცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის. ($Pr \gg 1$) იმ პირობით, რომ ლორენცის ძალა ფარდობითია ამომგდები ძალისა და სიბლანტის ძალებისა.

§ 3.1. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული თავისუფალი კონვექციის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა

განიხილება ბლანტი სითბოგამტარი და სუსტადელექტროგამტარი ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული თავისუფალი კონვექცია, რომელიც გამოწვეულია თავის სიბრტყეში ბრტყელი ვერტიკალური უსასრულო ფირფიტის გადაადგილებით.

ვთქვათ ფირფიტის ტემპერატურაა T_0 , ფირფიტის სიჩქარეა $Y'_0(t)$, სითხის ტემპერატურა ფირფიტიდან მოშორებით – $T_\infty = const$, ფირფიტაში სითხის გაჟონვა – $V_y = V(t)$.

გარე მაგნიტურ ველში ნებისმიერ ზედაპირზე ხარისხოვანი სითხის სასაზღვრო ფენის ძირითადი განტოლებანი მოძრაობისა და სითბოცვლისა იქნება შემდეგი სახის [42]:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t_1} + V_1(t) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} = \frac{nk}{\rho} \left| \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\sigma B^2}{\rho} U_1, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t_1} + V_1(t) \frac{\partial T}{\partial y_1} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2}, \quad (3.1.2)$$

აქ U_1 არის სიჩქარე z -ის მიმართულებით, g – თავისუფალი ვარდნის აჩქარება, β – სითბური გაფართოების კოეფიციენტი, σ – ელექტროგამტარებლობა, B – მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის მდგენელი y ღერძის გასწვრივ.

ჩავთვალოთ, რომ სითხის ელექტროგამტარებლობა ცვლია და არის შემდეგი სახის ხარისხოვანი ფუნქცია [42]

$$\sigma = \sigma_0 U_1^m, \quad m \geq 0 \quad (3.1.3)$$

შედეგად მივიღებთ განტოლებათა (3.1.1), (3.1.2) სისტემის შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial t_1} + V_1(t) \frac{\partial U_1}{\partial y_1} &= \frac{nk}{\rho} \left| \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\sigma_0 B^2}{\rho} U_1^{m+1}, \\ \frac{\partial T}{\partial t_1} + V_1(t) \frac{\partial T}{\partial y_1} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4)$$

(3.1.4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\begin{aligned} U_1(y_1, t_1) &= U'_0(t), & \text{როცა } y_1 &= 0, \\ U_1(y_1, t_1) &= 0, & \text{როცა } y_1 &= \delta_1, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$T = T_0 = const$, როცა $y_1 = 0$; $T = T_\infty$ როცა $y_1 = \delta_{1T}$.

ვთქვათ $Y = \left[\frac{k}{\rho} / V^{2-n} \right]^{\frac{1}{n}}$ არის მიმართულების მახასიათებელი ზომა,

$\Delta T = T_0 - T_\infty$ – ტემპერატურის მახასიათებელი სხვაობა. მაშინ შეიძლება

შემოვიტანოთ პრანდტლის განზოგადებული რიცხვი, გრასკოფის და გარსდენის მახასიათებელი სიჩქარე:

$$P_r = \frac{1}{a} \left[\frac{k}{\rho} \right]^{\frac{5n-1}{2n(n+1)}} \left[g\beta\Delta T / V^{\frac{2-n}{3n}} \right]^{\frac{3(n-1)}{2(n+1)}},$$

$$G_r = \left[g\beta\Delta T \left[\frac{k/\rho}{V^{2+n}} \right]^{\frac{1}{n}} \right]^{2-n}, \quad \Pi = [Yg\beta\Delta T]^{\frac{1}{2}}.$$

ამგვარად, უგანზომილებო სიდიდეები, y , U , V_0 , U_0 , t , θ , δ და δ_T შემოტანილია ფორმულებით:

$$y = \frac{y_1}{Y} G_r^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad U = \frac{U_1}{\Pi}, \quad V_0 = \frac{V_1}{\Pi} G_r^{\frac{1}{2(n+1)}}.$$

$$U_0 = \frac{a'_0}{\Pi}, \quad t = \frac{t_1}{T} \Pi, \quad T = T_\infty + \theta\Delta T,$$

$$\delta = \frac{\delta_1}{Y} G_r^{\frac{1}{2(n+1)}}, \quad \delta_T = \frac{\delta_{1T}}{Y} G_r^{\frac{1}{2(n+1)}}. \quad (3.1.7)$$

მაშინ (3.1.4) განტოლებებს და (3.1.5) სასაზღვრო პირობებს უგანზომილებო ცვლადებში აქვთ სახე:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \quad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} + V_0(t) \frac{\partial U}{\partial y} = n \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y_1^2} + \theta - MU^{m+1}, \quad (3.1.9)$$

$$\theta = 1, \text{ როცა } y = 0; \quad \theta = 0, \text{ როცა } y = \delta_T; \quad (3.1.10)$$

$$U = U_0, \text{ როცა } y = 0; \quad +U = 0, \text{ როცა } y = \delta. \quad (3.1.11)$$

აქ $M = \sigma_0 B^2 Y / \rho \Pi^{1-m}$ არის მპდ-ის ურთიერთქმედების კოეფიციენტი.

(3.1.8)–(3.1.10) ამოცანის ამონახსნი ვეძებთ მიმდევრობითი მიახლოებით [27, 74, 75, 76, 77]. ამისათვის შემოვიტანოთ სასაზღვრო ფენის სასრული სისქე $\delta(t)$, რომელსაც განვსაზღვრავთ სასაზღვრო ფენის სიჩქარის გარე ნაკადის სიჩქარეში უწყვეტად გადასვლის პირობიდან; ეს პირობა ჩაიწერება სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = \delta(t). \quad (3.1.12)$$

ანალოგიურად შემოვიტანოთ სასრული სითბური სისქე $\delta_T(t)$, რომელიც განისაზღვრება პირობიდან

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \text{ როცა } y = \delta_T(t). \quad (3.1.13)$$

ვიპოვოთ დასმული (3.1.8), (3.1.10) ამოცანის ორი მიახლოება, ე.ი.

$$\theta(y,t) \approx \theta_1(y,t) + \theta_2(y,t),$$

რომელშიც $\theta_1(y,t)$ -ს ქვეშ აიღება ამონახსნი განტოლებისა:

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = 0,$$

და აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს

$$\theta_1 = 1, \text{ როცა } y = 0; \theta_1 = 0, \text{ როცა } y = \delta_T.$$

ამ ამონახსნს აქვს სახე:

$$\theta_1(y,t) = 1 - (y/\delta_T). \quad (3.1.14)$$

ამონახსნი $\theta_2(y,t)$ არის ამონახსნი განტოლებისა

$$\frac{1}{P_r} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial \theta_1}{\partial y}.$$

თუ უკანასკნელ განტოლებაში შევიტანთ (3.1.14) განტოლებას, ვაინტეგრებთ 2-ჯერ და დავაკმაყოფილებთ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ:

$$\theta(y,t) = (1 - y/\delta_T) + P_r \frac{y}{6} \left(1 - \frac{y}{\delta_T}\right) \left[3V_0(t) - \delta_T \left(1 + \frac{y}{\delta_T}\right) \right],$$

სადაც $(\bullet) \equiv \frac{d}{dt}$.

უცნობი $\delta_T(t)$ სისქე განვსაზღვროთ (3.1.13) პირობიდან. ამისათვის გვექნება განტოლება

$$\frac{d}{dt} \delta_T^2 - 3V_0(t) \delta_T = \frac{6}{P_r}. \quad (3.1.16)$$

(ა) თუ $V_0 = \frac{c}{3} \delta_T(t)$, მაშინ $\delta_T(t)$ -სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{d}{dt} \delta_T^2 - c \delta_T^2 = \frac{6}{P_r},$$

რომლის ამონახსნი $\delta_T(0) = 0$ -სას იქნება

$$\delta_T(t) = \sqrt{\frac{6}{cP_r}} [e^{ct} - 1]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.17)$$

მცირე ct – ებისთვის, $\delta_T(t) = \sqrt{6/P_r} \sqrt{t}$.

ამგვარად

$$V_0(t) = c \sqrt{\frac{2}{3P_r}} \sqrt{t}.$$

(ბ) თუ $V_0(t) = \alpha_1 / \delta_T(t)$, სადაც α_1 ნებისმიერია, მაშინ მივიღებთ

$$\delta_T(t) = \sqrt{\left(3\alpha_1 + \frac{6}{P_r}\right)} \sqrt{t}. \quad (3.1.18)$$

(გ) თუ $V_0 = const = \gamma_1$, $\delta_T(t)$ – სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$\delta_T \frac{d}{dt} \delta_T = \frac{3\gamma_1}{2} \left[\delta_T + \frac{2}{\gamma_1 P_r} \right].$$

ამ განტოლების ამონახსნი, როცა $\delta_T(0) = 0$ იქნება:

$$\left(1 + \delta_T \frac{\gamma_1 P_r}{2}\right) \exp\left[-\frac{\gamma_1 P_r}{2} \delta_T\right] = \exp\left[-\frac{3\gamma_1^2}{4} P_r t\right],$$

როცა $r_1 = 0$, $\delta_T(t) = \sqrt{\frac{6}{P_r}} \sqrt{t}$.

ეხლა (3.1.14)-ის გათვალისწინებით, ამოვხსნათ (3.1.9) განტოლება. ვიპოვოთ ორი მიახლოება ამოცანისა (3.1.9), (3.1.11), ე.ი.

$$U(y,t) \approx U_1(y,t) + U_2(y,t),$$

სადაც $U_1(y,t)$ არის ამონახსნი განტოლებისა

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0,$$

რომელსაც აქვს სახე:

$$U_1(y,t) = U_0(t) \left[1 - \frac{y}{\delta(t)}\right]. \quad (3.1.19)$$

ის აკმაყოფილებს პირობებს:

$$U_1 = U_0, \text{ როცა } y = 0, \quad U_1(y,t) = 0, \text{ როცა } y = \delta(t).$$

ამონახსნი $U_2(y,t)$ არის ამონახსნი განტოლებისა

$$n \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \left| \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|^{1-n} \left[\frac{\partial U_1}{\partial t} + V_0(t) \frac{\partial U_1}{\partial y} - \theta_1 + M U_1^{m+1} \right].$$

თუ აქ შევიტანთ (3.1.14), (3.1.19) ტოლობებს, ვაინტეგრებთ მიღებულ განტოლებას და დავაკმაყოფილებთ სასაზღვრო პირობებს:

$$U_2 = 0, \text{ როცა } y = 0; U_2 = 0, \text{ როცა } y = \delta.$$

მივიღებთ

$$U(y,t) = U_0(t)[1 - \xi] + \frac{\delta^{n+1}}{n U_0^{n-1}} [1 - \eta] \left[\frac{(m+1)M}{H} U_0^{n+1} ([1 - \eta]^{n+1} - 1) - \frac{\eta}{6} \left(3 \left(\dot{U}_0 - \frac{U_0 V_0}{\delta} - 1 \right) + \delta(1 + \eta) \left[\frac{1}{\delta_T} - \left(\frac{\dot{U}_0}{\delta} \right) \right] \right) \right], \quad (3.1.20)$$

სადაც $\eta = \frac{y}{\delta}$.

სასაზღვრო ფენის სისქე განისაზღვრება (3.1.12) პირობებიდან. ის გვაძლევს დინამიკური სასაზღვრო ფენის სისქის განსაზღვრისათვის შემდეგ განტოლებებს:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{n+1}}{dt} + \frac{n+1}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln U_0 - \frac{3}{U_0} + \frac{6M(m+1)}{H} U_0^m \right] \delta^{n+1} + \\ + \frac{n+1}{U_0} \cdot \frac{\delta^{2+n}}{\delta_T} - \frac{3(n+1)}{2} V_0 \delta^n \equiv 3n(n+1) U_0^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

განვიხილოთ რამოდენიმე კერძო შემთხვევა, როდესაც (3.1.21)-ის ამონახსნი მიიღება ცხადი სახით:

$$(I) \text{ ვთქვათ } V_0 = t = \frac{2}{3U_0} (\delta^2 / \delta_T), \text{ მაშინ } \delta(t)\text{-სთვის მივიღებთ}$$

განტოლებას:

$$\frac{d}{dt} \delta^{n+1} + \frac{n+1}{2} \left[\frac{d}{dt} \ln U_0 - \frac{3}{U_0} + \frac{6(m+1)M U_0^m}{H} \right] \delta^{n+1} \equiv 3n(n+1) U_0^{n-1}.$$

ამ განტოლების ამონახსნს, როცა $\delta(0) = 0$ აქვს სახე:

$$\delta^{n+1}(t) = 3n(n+1) U_0^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \exp \left[\frac{3(n+1)}{2} \right] \left[\int_0^t \frac{d\tau}{U_0} - \frac{2(m+1)}{H} M \int_0^t U_0^m d\tau \right] \times$$

$$\times \int_0^t U_0^{\frac{3n+1}{2}} \exp\left[\frac{3(n+1)}{2}\right] \left[-\int_0^\tau \frac{d\xi}{U_0} + \frac{2(m+1)}{H} M \int_0^t U_0^m d\xi \right] d\tau, \quad (3.1.22)$$

ხოლო, როდესაც $U_0 = const$.

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{3n(n+1)}{A} U_0^{n-1} [1 - e^{-At}], \quad (3.1.23)$$

სადაც

$$A = \frac{3(n+1)}{2U_0} \left[\frac{2(m+1)}{H} M U_0^{m+1} - 1 \right].$$

მცირე At – თათვის გვექნება

$$\delta(t) \approx [3n(n+1)U_0^{n-1}]^{\frac{1}{1+n}} t^{\frac{1}{n+1}}, \quad (3.1.24)$$

რომელიც როცა $n=1$ ნიუტონისეული სითხის სისქისათვის მოგვცემს

$$\delta = \sqrt{6t},$$

შედეგად (3.1.17)-დან მივიღებთ:

$$\delta = \sqrt{P_r} \delta_T,$$

ეს ნიშნავს, რომ როცა $P_r = 1$, $\delta = \delta_T$.

რადგან ფირფიტაში გაჟონვის სიჩქარე უნდა იყოს ერთნაირი, როგორც დინამიკური, ისე სითბური სასაზღვრო ფენისათვის, ამიტომ უნდა არსებობდეს ფუნქციონალური დამოკიდებულება $\delta(t)$ -სა და $\delta_T(t)$ -ს შორის. ის მოიცემა ფორმულით

$$V_0(t) = \frac{c}{3} \delta_T = \frac{2}{3U_0} \left(\frac{\delta^2}{\delta_T} \right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\delta = \sqrt{cU_0/2} \delta_T, \quad c = \frac{2P_r}{U_0},$$

ხოლო გაჟონვის სიჩქარისათვის გვექნება

$$V_0(t) = \sqrt{\frac{8P_r}{3U_0^2}} \sqrt{t}.$$

(II) ვთქვათ $\delta/\delta_T = \alpha$, $V_0 = \beta\delta$, მაშინ $\delta(t)$ -სთვის მივიღებთ განტოლებას

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta^{n+1} + \left(\frac{n+1}{2} \right) \left[\frac{d}{dt} \ln U_0 - 3\beta - \left(\frac{3-2\alpha}{U_0} \right) + \frac{6(m+1)U_0^m M}{H} \right] \delta^{n+1} = \\ = 3n(n+1)U_0^{n-1}. \end{aligned}$$

ამონახსნი ამ განტოლებისა, როცა $\delta(0) = 0$ იქნება:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(t) = 3n(n+1)U_0^{\frac{n+1}{2}} \exp\left[\frac{3(n+1)}{2}\right] \left[\beta t + \left(\frac{3-2\alpha}{3} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{U_0} - \frac{2(m+1)M}{H} \int_0^t U_0^m d\tau \right] \times \\ \times \int_0^t U_0^{\frac{3n-1}{2}} \exp\left[\frac{3(n+1)}{2}\right] \left[-\beta\tau - \left(\frac{3-2\alpha}{3} \right) \int_0^\tau \frac{d\xi}{U_0} + \frac{2(m+1)M}{H} \int_0^\tau U_0^m d\xi \right] d\tau. \end{aligned}$$

თუ აქ $U_0 = const$, მაშინ

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{3n(n+1)}{N} U_0^{n-1} [1 - e^{-Nt}], \quad (3.1.25)$$

$$N = \frac{3(n+1)}{2} \left[\frac{2(m+1)U_0^m}{H} M - \beta - \left(\frac{3-2\alpha}{3U_0} \right) \right].$$

მცირე Nt -ათვის

$$\delta^{n+1}(t) = [3n(n+1)U_0^{n-1}] t.$$

ნიუტონისეული სითხეებისათვის $n=1$ და გვექნება

$$\delta^2 = \frac{6}{N_1} (e^{N_1 t} - 1), \quad \delta_T^2 = \frac{6}{cP_r} (e^{cT} - 1).$$

აქედან, თუ $c = N_1$, სადაც

$$N_1 = 3 \left(\beta - \frac{2(m+1)U_0^m M}{H} \right) + \frac{3-2\alpha}{U_0}.$$

მიიღება, რომ

$$\delta = \sqrt{P_r} \delta_T,$$

და

$$V_0(t) = \frac{\sqrt{P_r}}{\sqrt{P_r} - 1} \left(\frac{2(m+1)U_0^m}{H} M - \frac{(3-2\sqrt{P_r})}{3U_0} \right) \delta_T.$$

(III) ვთქვათ $V_0 = \frac{a}{\delta^n}$, $\delta = \gamma \delta_T$, მაშინ (3.1.21)-დან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \delta^{n+1} + \left(\frac{n+1}{2} \right) \left[\frac{d}{dt} \ln U_0 - \frac{3-2\gamma}{U_0} + \frac{6(m+1)U_0^m M}{H} \right] \delta^{n+1} =$$

$$= 3n(n+1) \left(nU_0^{n-1} + \frac{a}{2} \right).$$

რომლის ამონახსნს აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \delta^{n+1}(t) = & 3(n+1)U_0^{\frac{n+1}{2}} \exp \left[\frac{3(n+1)}{2} \left[\left[\frac{3-2\alpha}{3} \int_0^t \frac{d\tau}{U_0} - \frac{2M(m+1)}{H} \int_0^t U^m d\tau \right] \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times n \int_0^t U_0^{\frac{3n-1}{2}}(\tau) \exp \left(\frac{3(n+1)}{2} \left[\frac{2M(m+1)}{H} \int_0^\tau U_0^m d\xi - \left(\frac{3-2\gamma}{3} \right) \int_0^\tau \frac{d\xi}{U_0} \right] \right) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{a}{2} \int_0^t U_0^{\frac{n+1}{2}} \exp \left(\frac{3(n+1)}{2} \left(\frac{2M(m+1)}{H} \int_0^\tau U_0^m d\xi - \left[\frac{3-2\gamma}{3} \right] \int_0^\tau \frac{d\xi}{U_0} \right) \right) d\tau. \right. \right. \end{aligned}$$

როდესაც $U_0 = const$ მივიღებთ

$$\delta^{n+1}(t) = \frac{3(n+1)}{A} \left(nU_0^{n-1} + \frac{a}{2} \right) (1 - e^{-At}), \quad (3.1.26)$$

სადაც

$$A = \frac{3(n+1)}{2} \left[\frac{2(m+1)U_0^m}{H} M - \left(\frac{3-2\gamma}{3U_0} \right) \right].$$

როცა $n=1$ მცირე At -ათავის გვექნება

$$\delta^2(t) = 3(2+a)t, \quad \delta_T^2 = \frac{3}{P_r} (2 + \alpha_1 P_r) t.$$

მაშასადამე

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2(2+a)}{a} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{B(2+a)}{a^2 P_r}} \right]^{-1} \delta_T, \\ V_0(t) &= \frac{a}{\delta} = \frac{a^2}{2(2+a)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8(2+a)}{a^2 P_r}} \right) / \delta_T. \end{aligned}$$

პირველი როცა $P_r = 1$, $\alpha_1 = a$ მოგვცემს $\delta = \delta_T$.

ზედაპირული ხახუნისათვის ზემოთმიღებული გამოსახულებიდან მივიღებთ

$$\tau_1 = k \left. \frac{\partial U_1}{\partial y_1} \right|_{y_1=0}, \quad \tau = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0},$$

სადაც

$$\tau = \frac{\tau_1}{k(\Pi/Y)^n} G_r^{-\frac{n}{2(n+1)}},$$

საიდანაც

$$\tau = \left(\frac{U_0}{\delta}\right)^n \left[\frac{3}{2} + \frac{\delta^{n+1}}{4nU_0^n} \left(\dot{U}_0 - 1 + \frac{(2m+3)U_0^{m+1}M}{(m+2)(m+3)} \right) - \frac{V_0\delta^n}{4nU_0^{n-1}} \right]^n. \quad (3.1.27)$$

როდესაც $V_0 = \beta\delta$ და $U_0 = const$ (3.1.25)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left[\frac{3n(n+1)}{U_0^2} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \left[\frac{1-e^{-Nt}}{N} \right]^{-\frac{n}{n+1}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{n+1}{2U_0} \left(-1 - \beta U_0 + \frac{(2m+3)U_0^{m+1}M}{(m+2)(m+3)} \right) \left(\frac{1-e^{-Nt}}{N} \right) \right]^n. \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

მცირე Nt -ათვის ხახუნისათვის (3.1.28)-დან მივიღებთ

$$\tau = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left[\frac{3n(n+1)}{U_0^2} \right]^{-\frac{n}{n+1}} t^{-\frac{n}{n+1}} [1 - A_1 t + \dots],$$

სადაც

$$A_1 = \frac{n\beta}{4}(2n+5) + \frac{n}{4U_0}[2(n-\alpha)+5] - \frac{nU_0^n[3+(2m+3)(n+1)]M}{2(m+2)(m+3)}.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$[\tau]_{n=1}^{m=0} = \frac{U_0}{\sqrt{t}} \left(0,612 - 0,153 \left(\frac{7-2\alpha}{U_0} \right) t - 1,072\beta t + 0,459Mt + \dots \right),$$

$$[\tau]_{n=1}^{m=0} = \frac{U_0}{\sqrt{t}} \left(0,612 - 0,153 \left(\frac{7-2\alpha}{U_0} \right) t - 1,072\beta t + 0,33MU_0 t + \dots \right),$$

$$[\tau]_{n=2}^{m=0} = U_0 \left(\frac{U_0}{t^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(0,328 - 0,164 \left(\frac{9-2\alpha}{U_0} \right) t - 1,47\beta t + 0,626Mt + \dots \right),$$

$$[\tau]_{n=2}^{m=1} = U_0 \left(\frac{U_0}{t^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(0,328 - 0,164 \left(\frac{9-2\alpha}{U_0} \right) t - 1,47\beta t + 0,49MU_0 t + \dots \right).$$

ზემოთ მიღებული ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ მაგნიტური ველის თანაარსებობა, როდესაც ელექტროგამტარებლობა $\sigma = \sigma_0 U_1^m$, ზრდის სითხის ხახუნის ძალას ფირფიტაზე.

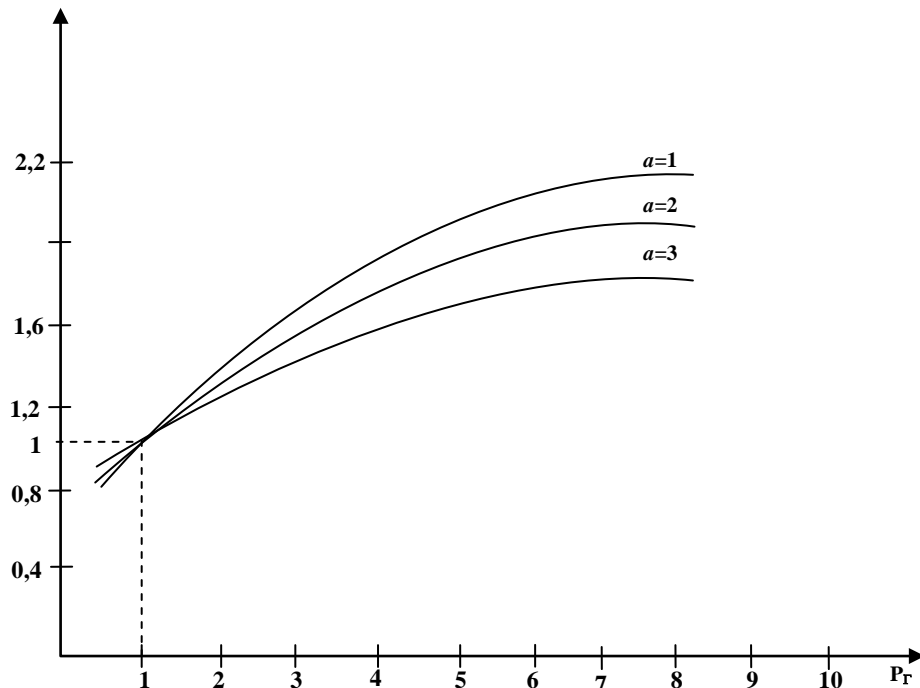
სითხური ნაკადის სიმკვრივისათვის გვექნება გამოსახულება

$$q = -\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{\delta_T} - \frac{V_0 P_r}{2} \right],$$

რომელიც, როცა $V_0 = \frac{c\delta_T}{3}$ მოგვცემს

$$q = \frac{P_r}{2\sqrt{3}U_0} \left[4 - e^{\frac{2P_r t}{U_0}} \right] \left[e^{\frac{2P_r t}{U_0}} - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

ნახ. 12-ზე ნაჩვენებია δ/δ_T შეფარდების დამოკიდებულება P_r პრანდტლის რიცხვზე. ეს შეფარდება იზრდება P_r -ს გაზრდით, მცირდება გაჟონვის სიჩქარის გაზრდით, ხოლო როცა $P_r = 1$, $\delta = \delta_T$ გაჟონვის ნებისმიერი სიჩქარისათვის.



ნახ. 12. სითბური და დინამიკური სასაზღვრო ფენის ფარდობის დამოკიდებულება პრანდტლის რიცხვზე

§ 3.2. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი ბლანტი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანის ამოხსნის ინტეგრალური მეთოდი

ვთქვათ ელექტროგამტარ არანიუტონისეულ ხარისხოვან სითხეში მოთავსებულია ბრტყელი კედელი, რომლის ზედაპირის ტემპერატურაა T_w , სითხის ტემპერატურა კედლიდან მოშორებით T_∞ . სითხის დინება

გამოწვეულია გაცხელებული სხეულის ახლოს თავისუფალი კონვექციით, როდესაც მართობულად მოქმედებს გარე მაგნიტური ველი. რეინოლდსის მაგნიტური რიცხვი ითვლება მცირედ, ე.ი. $R_{em} \ll 1$.

თუ კედლის ტემპერატურა იცვლება ნებისმიერი კანონით, მაშინ ასიმპტოტური ავტომოდელური ამოცანების მეთოდი არაა გამოსადეგი. ამ მიზეზის გამო გამოიყენება ნიუტონისეული სითხისათვის საკმაოდ ეფექტური ინტეგრალური მეთოდები სასრული სისქის სასაზღვრო ფენის თეორიისა [68].

მაშასადამე, განვიხილოთ მათი გამოყენება სამი ტიპისათვის თერმული სასაზღვრო პირობებში, როდესაც ელექტროგამტარებლობის კოეფიციენტი ცვალებადია და წარმოადგენს სიჩქარის ფუნქციას სახით [42]

$$\sigma = \sigma_0 U^\alpha, \quad (3.2.1)$$

სადაც $\alpha \geq 0$ ნებისმიერი რიცხვია.

ა) იზოთერმული კედელი

ტემპერატურულ და ელექტროგამტარ სასაზღვრო ფენში სითხის ბრტყელი დინება აღიწერება განტოლებებით:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (3.2.2)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\sigma B^2}{\rho} U, \quad (3.2.3)$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.2.4)$$

(3.2.2)–(3.2.4) განტოლებათა სისტემის ამონახსნმა უნდა დააკმაყოფილოს შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$\text{როცა } y = 0, \text{ მაშინ } U = 0, V = 0, T = T_w \quad (3.2.5)$$

$$\text{როცა } y \rightarrow \infty, \text{ მაშინ } U \rightarrow 0, T \rightarrow T_\infty.$$

ამგვარად, (3.2.3) -ში და (3.2.1) -ის ჩასმით ის მიიღებს სახეს:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho} U^{\alpha+1}. \quad (3.2.6)$$

ფენის სიგანით თუ ვაინტეგრებთ განტოლებებს (3.2.4), (3.2.6) და გამოვიყენებთ (3.2.2) განტოლებას და (3.2.5) სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U^2 dy = g\beta\Delta T \int_0^{\infty} \theta dy - \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho} \int_0^{\infty} U^{\alpha+1} dy - \frac{R}{\rho} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n \Big|_{y=0}, \quad (3.2.7)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} U \theta dy = -a \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad (3.2.8)$$

სადაც $\theta = (T - T_{\infty})/\Delta T$ უგანზომილებო ტემპერატურის დაცემაა, $\Delta T = T_w - T_{\infty}$ ტემპერატურული დაწოლა.

შემდგომ სასრული სისქის სასაზღვრო ფენად ტრადიციულად მოიციმა ფენის კვეთში სიჩქარისა და ტემპერატურის ავტომოდელური პროფილების ერთპარამეტრიანი ოჯახი:

$$U = \Pi(x)\Phi(\eta), \quad (3.2.9)$$

$$\theta = \theta(\eta), \quad (3.2.10)$$

სადაც

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)}. \quad (3.2.11)$$

ავტომოდელური ცვლადია; $\delta(x)$ – სასაზღვრო ფენის სისქეა, $\Pi(x)$ – მახასიათებელი სიჩქარეა.

(3.2.8) განტოლება ახალი ცვლადების ჩასმით მიიღებს სახეს:

$$\Pi(x) = \left(\frac{a}{L} \right) \left(\frac{E}{D} \right) \left[\frac{1}{\delta_i(x)} \int_0^{x_i} \frac{dx}{\delta_i(x)} \right], \quad (3.2.12)$$

სადაც

$$D = \int_0^{\infty} \Phi(\eta)\theta(\eta)d\eta, \quad R = -\theta'(0). \quad (3.2.13)$$

უგანზომილებო სიდიდეებია

$$x_1 = \frac{x}{L},$$

$$\delta_1 = \frac{\delta}{L}.$$

(3.2.7) განტოლებაში (3.2.9)–(3.2.11)-ის ჩასმით მივიღებთ:

$$A \frac{d}{dx_1 \left(\prod^2 \delta_1 \right)} = (g\beta\Delta T)BL\delta_i(x) - \frac{R \prod^b c}{\rho \delta_1^n L^n} - \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho} FL \prod^{\alpha+1} \delta_i(x_1). \quad (3.2.14)$$

თუ ამაში ჩავსვამთ (3.2.12) განტოლებას, მივიღებთ:

$$A \left(\frac{E}{D} \right)^2 \left(\frac{a}{L} \right)^2 \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\delta_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{dx^2}{\delta_1} \right) \right] = (g\beta\Delta T)BL\delta_1 - \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho} FL \left(\frac{a}{L} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{E}{D} \right)^{\alpha+1} \times \\ \times \frac{1}{\delta_i^\alpha} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^{\alpha+1} - \frac{R}{\rho} \cdot \frac{c}{L^{2n}} \cdot \frac{a^n}{\delta_i^{2n}} \left(\frac{E}{D} \right)^n \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n, \quad (3.2.15)$$

მიზანშეწონილია ავიღოთ $2\alpha + 1 = 3n$, ე.ი. $\alpha = \frac{3n-1}{2}$, იმისათვის, რომ

განვსაზღვროთ $\delta(x)$ ცხადი სახით. მაშასადამე (3.2.15) განტოლებას ექნება სახე:

$$\left[\frac{a^{2-n}}{L^{2-2n} \left(\frac{R}{\rho} \right)} \right] \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\delta_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right)^2 \right] \left[\frac{g\beta\Delta T}{L^{2-2n} \left(\frac{R}{\rho} \right)} L^{2-n} \right] \times \\ \times \left[\frac{B}{A} \right] \cdot \left[\frac{D}{E} \right]^2 \delta_1 - \left[\frac{F}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{\frac{3}{2}(n-1)} \left[\frac{\sigma_0 B_0^2 (aL)^{\frac{n+1}{2}}}{\rho \cdot \frac{R}{\rho}} \right] \times \\ \times b^2(x_1) \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^{\frac{3n+1}{2}} \delta_1^{\frac{1-3n}{2}} - \left[\frac{c}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{n-2} \frac{1}{\delta_1^{2n}} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n. \quad (3.2.16)$$

აქ აღნიშნულია

$$A = \int_0^\infty \Phi^2(\eta) d\eta, \quad B = \int_0^\infty \theta(\eta) d\eta, \quad c = [\Phi'(o)]^n, \\ F = \int_0^\infty \Phi^{n+1} d\eta = \int_0^\infty \Phi^{\frac{3n+1}{2}} d\eta. \quad (3.2.17)$$

$B(x) = B_0 b(x)$, სადაც B_0 არის მაგნიტური ინდუქციის მახასიათებელი მნიშვნელობა.

შემოვიტანოთ პრანდტლის, გრასჰოფისა და მაგნიტური ჰიდროდინამიკის ურთიერთქმედების კოეფიციენტის განზოგადება:

$$\begin{aligned}
Pr &= \frac{1}{a} \left[\frac{R}{\rho} L^{2(1-n)} \right]^{\frac{1}{2-n}}, \\
Gr &= g\beta\Delta T \left[L^{2+n} / \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2-n}}, \\
M &= \sigma_0 B_0^2 (aL)^{\frac{n+1}{2}} / R,
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

მაშინ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Pr} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\delta_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right)^2 \right] &= \left[\frac{B}{A} \right] \left[\frac{D}{E} \right]^2 [Gr Pr] \delta_1 - \\
-M \left[\frac{F}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{\frac{3}{2}(n-1)} Pr^{1-n} b^2(x_1) \left[\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\delta_1} \right]^{\frac{2n+1}{2}} \delta_1(x_1)^{\frac{1-3n}{2}} - \\
-\left[\frac{c}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{n-2} Pr^{1-n} \frac{1}{\delta_1^{2n}} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n.
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

განვიხილოთ პრანტლის განზოგადებული როცხვის დიდი მნიშვნელობებისათვის $Pr \gg 1$ დინება, იმ პირობით, რომ ლორენცის ძალა ფარდობითია სიბლანტისა და ამომგდები ძალებისა. როცა $Pr \rightarrow \infty$ (3.2.19) განტოლებაში მარცხენა მხარე შეგვიძლია გამოვრიცხოთ, რაც ნიშნავს ინერციული წევრების იგნორირებას, მაშასადამე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
\delta_1^{2n+1}(x_1) - \left[\left(\frac{E}{D} \right)^n \left(\frac{C}{B} \right) \frac{1}{Cr Pr^n} \right] \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n - \\
- \left[M \left(\frac{F}{B} \right) \left(\frac{E}{D} \right)^{\frac{3n+1}{2}} \cdot \frac{1}{Gr Pr^n} \right] b^2(x_1) \delta_1^{\frac{n+1}{2}} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^{\frac{3n+1}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

თუ გავითვალისწინებთ შესაძლო პარაბოლურ და მონოტონურად ზრდად ხასიათს სასაზღვრო ფენის გავრცელებისა ზედაპირის გასწვრივ, რომელიც ეყრდნობა როგორც მათემატიკურ, ისე ფიზიკურ მოსაზრებებს, უნდა დავუშვათ

$$\delta_1(x) = Nx_1^{\alpha_1}, \quad b(x_1) = x_1^\alpha. \tag{3.2.21}$$

(3.2.21)-ის ჩასმით (3.2.20)-ში მივიღებთ α_1 , j , N კონსტანტების განსასაზღვრავად განტოლებებს:

$$N^{3n+1} x_1^{(2n+1)\alpha_1} - \left[\left(\frac{C}{B} \right) \left(\frac{E}{(1-\alpha_1)D} \right)^n \frac{1}{Gr Pr^n} \right] x_1^{(1-\alpha_1)n} - \\ - \left[M \left[\frac{F}{B} \right] \left[\frac{E}{D(1-\alpha_1)} \right]^{\frac{3n+1}{2}} \frac{1}{Gr Pr^n} \right] x_1^{2j-\alpha_1 n + \frac{3n+1}{2}} = 0.$$

ეს განტოლება რომ დააკმაყოფილოს ნებისმიერმა x_1 -მა, აუცილებელია დაფუძვით:

$$(2n+1)\alpha_1 = (1-\alpha_1)n = 2\gamma - \alpha_1 b + \frac{3n+1}{2}.$$

აქედან განისაზღვრება მუდმივები α_1 და γ .

$$\alpha_1 = \frac{n}{3n+1}, \quad \gamma = -\frac{n+1}{4}.$$

ამგვარად

$$\delta_1(x_1) = N x_1^{\frac{n}{3n+1}}, \quad (3.2.22)$$

$$B(x_1) = B_0 x_1^{-\frac{n+1}{4}}, \quad (3.2.23)$$

სადაც

$$N = \left[\frac{C}{BCr Pr^n} \left(\frac{1+3n}{1+2n} \cdot \frac{E}{D} \right)^n \right]^{\frac{1}{1+3n}} \cdot \left[1 + \frac{MF}{C} \left(\frac{1+3n}{1+2n} \cdot \frac{E}{D} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{1}{1+3n}}. \quad (3.2.24)$$

აქედან ჩანს, რომ მჰდ ურთიერთქმედების პარამეტრის გაზრდისას სასაზღვრო ფენის სისქე დამოკიდებულია M -ზე (3.2.24) ფორმულით.

ნუსელტის რიცხვის ლოკალური მნიშვნელობები ტოლია

$$N_{Ux} = \frac{q_x L}{v \Delta T} = -\frac{\theta'(o)}{\delta_i} = \frac{E}{\delta_1},$$

ე.ო.

$$N_{Ux} = C_1(n, m) [Cr Pr^n]^{\frac{1}{3n+1}} x_1^{-\frac{n}{3n+1}}, \quad (3.2.25)$$

სადაც:

$$C_1(n, \mu) = E \left(\frac{1+2n}{1+3n} \right)^{\frac{n}{3n+1}} \left[\left(\frac{B}{C} \right) \cdot \left(\frac{D}{E} \right)^n \right]^{\frac{1}{1+3n}} \times$$

$$\times \left[1 + M \frac{F}{C} \left(\frac{1+3n}{1+2n} \cdot \frac{E}{D} \right)^{-\frac{1}{n+1}} \right]. \quad (3.2.26)$$

ფირფიტის მთელ სიგრძეზე ნუსელტის რიცხვის საშუალო მნიშვნელობა იქნება:

$$N_{U_{\text{საშ}}} = C_2(n,m) \left[Gr Pr^n \right]^{\frac{1}{1+3n}}. \quad (3.2.27)$$

სადაც

$$C_2(n,m) = \left(\frac{1+3n}{1+2n} \right) C_1(n,m). \quad (3.2.28)$$

C_1 და C_2 კოეფიციენტების გამოსათვლელად აუცილებელია U და θ სიჩქარისა და ტემპერატურის პროფილების ოჯახი დავაკონკრეტოთ. ამისათვის გამოვიყენოთ ფუნქციათა ნაკრები:

$$\Phi(\eta) = m\eta e^{-m\eta}, \quad 0 \leq \eta < \infty, \quad (3.2.29)$$

$$\theta(\eta) = \begin{cases} (1+\eta)(1-\eta)^3, & 0 < \eta < 1, \\ 0, & 1 < \eta < \infty, \end{cases}$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.2.4) სასაზღვრო პირობებს კედელზე და ფირფიტიდან მოშორებით. ამას გარდა სიჩქარის პროფილი ხდება ცნობილი სიჩქარის η_m -ში მაქსიმუმის მქონე არამონოტონური მრუდის სახით გავრცელების ზუსტი გათვლებიდან. (3.2.13) და (3.2.17)-ის გამოთვლას მივყავართ ტოლობებზე:

$$A = \frac{1}{4m}, \quad B = \frac{3}{10}, \quad C = m^n, \quad E = 2,$$

$$F = \frac{1}{m} \left[\frac{2}{3n+1} \right]^{\frac{3}{2}(n+1)} \Gamma\left(\frac{3(n+1)}{2}\right), \quad (3.2.30)$$

$$D = \left[\frac{1}{m} - \frac{4}{m^2} + \frac{48}{m^4} - \frac{120}{m^5} \right] + 12e^{-m} \left[\frac{1}{m^3} + \frac{6}{m^4} + \frac{10}{m^5} \right],$$

სადაც Γ არის გამა ფუნქცია:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

კონსტანტა m გამოითვლება ფირფიტის კედელზე იმპულსების ბალანსიდან, ე.ი. მოძრაობის განტოლებებიდან, როცა $y = 0$.

$$g\beta\Delta T + \frac{R}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n \right]_{y=0} = 0. \quad (3.2.31)$$

თუ (3.2.30), (3.2.11) და (3.2.12)-ს ჩავსვამთ (3.2.31)-ში და მხედველობაში მივიღებთ

$$g\beta\Delta T = a^n \frac{R}{\rho} Gr Pr^n / L^{2n+1},$$

მივიღებთ:

$$2nm^{n+1}B = C + MF \left[\frac{1+3n}{1+2n} \frac{E}{D} \right]^{\frac{n+1}{2}}.$$

(3.2.30)-დან ვიპოვიტ

$$\left(\frac{3}{2}nm - 1 \right) m^{n+1} = M \left[\frac{1+3n}{1+2n} \cdot \frac{2}{D} \right]^{\frac{n+1}{2}} \left[\frac{2}{3n+1} \right]^{\frac{3}{2}(n+1)} \Gamma \left(\frac{3}{2}(n+1) \right). \quad (3.2.32)$$

აქედან ჩანს, რომ როცა $M = 0$, მაშინ $m = \frac{5}{3n}$, მაშასადამე,

$$C_1(n, m) = 2 \left[\frac{D}{2m} (2nm)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1+2n}{1+3n} \right)^{\frac{n}{1+3n}} \right], \quad (3.2.33)$$

$$C_2(n, m) = \frac{1+3n}{1+2n} C_1(n, m). \quad (3.2.34)$$

Φ ფუნქციაში სიჩქარესთან მდგომი m კოეფიციენტი დამოკიდებულია როგორც n -ზე, ისევე M -ზე. თუ შევარჩევთ რეოლოგიური კანონის ხარისხს და მაგნიტური ურთიერთქმედების კოეფიციენტს, ჩვენ მივიღებთ m მუდმივის განსაზღვრულ მნიშვნელობას.

ბ) კედელზე სითბური ნაკადის მუდმივი სიმკვრივე

ამ შემთხვევისთვის სასაზღვრო ამოცანის გამომავალი ფორმულირება ინახება ისეთივე, როგორც განხილულ პირველ შემთხვევაში იზოთერმული კედლის დროს, ხოლო იცვლება მხოლოდ ფირფიტის ზედაპირზე თერმული სასაზღვრო პირობა. (3.2.5) პირობის ნაცვლად გვექნება:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = q_w, \quad \text{როცა } y=0 \quad (3.2.35)$$

ითვლება, რომ $\theta = (T - T_\infty)/\Delta T$ (3.2.35) პირობა დაიყვანება დამოკიდებულებაზე:

$$\Delta T = -\frac{q_w \delta}{\nu \theta'(0)} = \frac{q_w \delta(x)}{E \nu}. \quad (3.2.36)$$

სითბური (3.2.8) ენერჯის ინტეგრალური პირობა სასაზღვრო ფენში ჩაიწერება სახით:

$$D \frac{d}{dx} (\Pi \delta) = \frac{aE}{\delta}, \quad (3.2.37)$$

ხოლო (3.2.14) განტოლებას ექნება სახე:

$$D \frac{d}{dx} (\Pi^2 \delta) = \frac{g\beta B \delta^2 q_w}{\nu E} - \frac{R}{\rho} C \left(\frac{\Pi}{\delta} \right)^n - \frac{\sigma_0 B^2(x)}{\rho} F \Pi^{\frac{3n+1}{2}} \delta. \quad (3.2.38)$$

თუ (3.2.37)-დან $\Pi(x)$ -ს შევიტანთ (3.2.38)-ში და შემოვიტანთ გრასჰოფის განზოგადებულ რიცხვს:

$$Gr = \frac{g\beta L q_w}{\nu} \left[L^{2+n} \left(\frac{R}{\rho} \right)^{\frac{1}{2-n}} \right], \quad (3.2.39)$$

მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pr} \frac{d}{dx_1} \left[\frac{1}{\delta x_1} \left(\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right)^2 \right] &= Gr Pr \left[\frac{B}{A} \right] \left[\frac{D^2}{E^3} \right] \delta_1^2 - \\ - M \left[\frac{F}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{\frac{3}{2}(n-1)} Pr^{1-n} b^2(x_1) \delta_1^{\frac{1-3n}{2}} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\delta_1} \right]^{\frac{3n+1}{2}} - \\ - \left[\frac{C}{A} \right] \left[\frac{E}{D} \right]^{n-1} Pr^{1-n-2n} \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n. \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

როცა $Pr \rightarrow \infty$ ისევ მივალთ ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენის განტოლებამდე:

$$\begin{aligned} \delta_1^{2n+2}(x_1) - \left[\frac{Ec}{BGr Pr^n} \left(\frac{E}{D} \right)^n \right] \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^n - \\ - \left[M \left(\frac{EF}{B} \right) \left(\frac{E}{D} \right)^{\frac{3n+1}{2}} \frac{1}{Gr Pr^n} \right] \cdot \left[\int_0^{x_1} \frac{dx}{\delta_1} \right]^{\frac{3n+1}{2}} \cdot b^2(x_1) \delta_1^{\frac{n+1}{2}}(x_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

ანალოგიურად, როგორც პირველ შემთხვევაში, მივიღებთ:

$$\delta_1(x_1) = Kx_1^{\frac{n}{2+3n}}, \quad (3.2.42)$$

$$B(x_1) = B_0x_1^{\frac{n+1}{4}}, \quad (3.2.43)$$

სადაც

$$K = \left[\frac{EC}{BGrPr^n} \left(\frac{E}{2D} \cdot \frac{2+3n}{1+n} \right)^n \right]^{\frac{1}{2+3n}} \times \left[1 + M \left(\frac{F}{C} \right) \left(\frac{E}{20} \cdot \frac{2+3n}{1+n} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{1}{2+3n}}. \quad (3.2.44)$$

ნუსელტის ლოკალური რიცხვი მოიცემა გამოსახულებით:

$$N_{Ux} = \frac{\alpha_x L}{\nu} = \frac{E}{\theta(o)\delta_1} = \frac{E}{\theta(o)K} x_1^{-\frac{n}{2+3n}},$$

ე.ი.

$$M_{1x}(n, m) = N_{Ux} Pr^{\frac{n}{2+3n}} Gr^{\frac{1}{2+3n}} x_1^{\frac{n}{2+3n}}, \quad (3.2.45)$$

სადაც $M_1(n, m)$ არის მახასიათებელი ადგილობრივი სითბოს ნაკადი,

$$M_1(n, M) = \frac{E}{\theta(o)} \left[\frac{Ec}{B} \left(\frac{E}{2D} \cdot \frac{2+3n}{1+n} \right)^n \right]^{-\frac{1}{2+3n}} \times \left[1 + m \left(\frac{F}{C} \right) \left(\frac{E}{2D} \cdot \frac{2+3n}{1+n} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2+3n}}. \quad (3.2.46)$$

ეს კოეფიციენტი დამოკიდებულია არა მარტო რეოლოგიურ ფაქტორზე, არამედ მაგნიტურ ველზე.

ფორფიტის სიგრძის გასწვრივ ნუსელტის საშუალო რიცხვი იქნება:

$$N_{U_{საშ}} = M_2(n, M) [GrPr^n]^{\frac{1}{2+3n}}, \quad (3.2.47)$$

სადაც

$$M_2(n, M) = \left[\frac{2+3n}{2(1+n)} \right] M_1(n, M). \quad (3.2.48)$$

გ) კედლის ცვლადი ტემპერატურა

ამ შემთხვევაში სითბური სასაზღვრო ფენის (3.2.4) განტოლებაში დაემატება ტემპერატურული დაწნევის გასწვრივი გრადიენტი, ე.ი.

$$\frac{d}{dx}[T_w(x) - T_\infty] = \frac{d}{dx}t. \quad (3.2.49)$$

როგორც ადრე, ფენის კვეთში, ტემპერატურის დაცემის უგანზომილებო პროფილის განსაზღვრა ხასიათდება სიდიდით:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w(x) - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{t(x)}, \quad (3.2.50)$$

ხოლო მოძრაობის განტოლება ინარჩუნებს ძველ სახეს (3.2.6).

(3.2.3) განტოლებიდან (3.2.50)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\Pi(x_1) = \frac{aE}{LDt_1(x)} \left(\frac{1}{\delta_1(x_1)} \int_0^{x_1} \frac{t_1(x) dx}{\delta_1(x)} \right). \quad (3.2.51)$$

როგორც ადრე, თუ (3.2.19)-ში გადავალთ ზღვარზე ასიმპტოტური სასაზღვრო ფენისკენ, როცა $Pr \rightarrow \infty$, მივიღებთ ინტეგრალურ პირობებს:

$$t_1 \delta_1^{2n+1}(x_1) - \left[\left(\frac{C}{B} \right) \left(\frac{E}{D} \right)^n \frac{1}{Gr Pr^n} \right] \cdot \left[\int_0^{x_1} \frac{t_1(x)}{\delta_1(x)} dx \right]^n t_1^{-n} - \\ = \left[M \frac{F}{B} \cdot \left(\frac{E}{D} \right)^{\frac{3n+1}{2}} \frac{1}{Gr Pr^n} \right] \left[\int_0^{x_1} \frac{t_1}{\delta_1} dx \right]^{\frac{3n+1}{2}}.$$

სადაც $t_1(x) = \frac{t(x)}{t(o)}$, ხოლო $t(o)$ არის მკვეთრი ვარდნა ფირფიტის წინა ნაპირზე.

როგორც ზემოთ განხილულ შემთხვევაში, თუ გავითვალისწინებთ შესაძლო პარაბოლურ და მონოტონურ ზრდად ხასიათს ზედაპირის მახლობლად სასაზღვრო ფენის გავრცელებისა, ასევე მაგნიტური ველის არსებობას, როდესაც $t_1(x_1) = x_{1p}$, $P \geq 0$, მაშინ $\delta_1(x_1)$ სისქე და გარე მაგნიტური ველი $B(x_1)$ მიიღებს სახეს:

$$\delta_1(x_1) = \Delta x_1^{\frac{n-P}{1+3n}}, \quad (3.2.52)$$

$$B(x_1) = B_0 x_1^{-\frac{n+1}{4}}, \quad (3.2.53)$$

სადაც

$$\Delta = \left[\frac{c}{BGrPr^n} \left(\frac{1+3n}{(1+2n)+(2+3n)P} \cdot \frac{E}{D} \right)^n \right]^{\frac{1}{1+3n}} \times$$

$$\times \left[1 + M \frac{F}{C} \left(\frac{1+3n}{(1+2n)+(2+3n)P} \cdot \frac{E}{D} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{1}{1+3n}}. \quad (3.2.54)$$

ამასთანავე ნუსელტის ლოკალურ რიცხვს ექნება სახე:

$$N_{Ux} = \frac{\alpha_x L}{\nu} = - \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} L}{t(x)} = \frac{E}{\delta_1} = \frac{E}{\Delta} x_1^{\frac{P-n}{1+3n}},$$

ე.ი.

$$N_{Ux} = Q [GrPr^n]^{\frac{1}{1+3n}} x_1^{\frac{P-n}{1+3n}}, \quad (3.2.55)$$

სადაც

$$Q = E \left[\frac{C}{B} \left(\frac{1+3n}{(1+2n)+(2+3n)P} \cdot \frac{E}{D} \right)^n \right]^{\frac{1}{1+3n}} \times$$

$$\times \left[1 + M \frac{F}{C} \left(\frac{1+3n}{(1+2n)+(2+3n)P} \cdot \frac{E}{D} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{1}{1+3n}}. \quad (3.2.56)$$

როგორც ვხედავთ კედლის არაიზოთერმულობამ არ იმოქმედება ნუსელტის, პრანდტლის და გრასჰოფის კრიტერიუმებს შორის კავშირის კანონზე, რომელიც დარჩა ისეთივე სახის, როგორც მუდმივი ტემპერატურის მქონე კედლის ფირფიტისათვის. იმ შემთხვევაში როდესაც $P=0$ ($t_1=1$) მივალთ ადრე მიღებული (3.2.24)–(3.2.27) ფორმულებამდე.

საჭიროა შევნიშნოთ, რომ როდესაც $M=0$, ე.ი. მაგნიტური ველის არარსებობისას, მიღებული შედეგები ემთხვევა [65] ნაშრომის მონაცემებს, როდესაც $n=1$ გამოთვლილი შედეგების შედარება გვიჩვენებს შესაბამისობას [73] ნაშრომის მონაცემებთან პირველი შემთხვევისთვის, [72]–ს მეორესთან [71]–ის მონაცემებთან მესამე შემთხვევისათვის. ჩანს, რომ ყველა შემთხვევისათვის მაგნიტური ინდუქციის ვექტორის ნორმალური მდგენელი არის ერთიდაიგივე ფორმის $B_0 x_1^{\frac{n+1}{4}}$.

3. ძირითადი შედეგები და დასკვნები

ელექტროგამტარი არაკუმშვადი არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის სტაციონარული და არასტაციონარული ამოცანების გამოკვლევებისთვის შერჩეულია ისეთი მოდელები, რომელთა ამონახსნები მიღებულია ან ზუსტად, ან მიახლოებით ანალიზურად:

1. გამოკვლეულია დინამიკური სტრუქტურა და სითბოგადაცემა ცვალებადი გამტარებლობის არაკუმშვადი არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის, რომელიც იმყოფება გარე მაგნიტურ ველში. მკვდ განტოლებათა სისტემის მიახლოებითი ანალიზური ამოხსნის საფუძველზე მიღებულია დინამიკური და ტემპერატურული სასაზღვრო ფენების სისქეთა განსასაზღვრავად გამოსახულებანი. სასაზღვრო ფენები წარმოიქმნება ბრტყელი ნახევრადუსასრულო ფოროვან ფირფიტაზე, რომელშიც გაჟონვა დამოკიდებულია სასაზღვრო ფენის პარამეტრებზე.

ნაჩვენებია, რომ პარამეტრების შერჩევის გზით, რომლებიც განსაზღვრავენ არანიუტონისეული სითხის რეოლოგიას და მის ელექტროგამტარებლობას, შესაძლებელია ვმართოთ ზედაპირული ხახუნი და გარსმოდენად ზედაპირზე სითბური ნაკადი.

3. მიღებულია გარსმოდენად სხეულში გაჟონვის გათვალისწინებით არანიუტონისეული ხარისხოვანი ცვალებადი გამტარებლობის სითხის ბრტყელი დინების ამოცანის განზოგადებული ავტომოდელური ამონახსნი.

4. მიღებულია ბრტყელ ფოროვანი ვერტიკალური კედლის მახლობლად ცვლადი გამტარებლობის არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანის მიახლოებითი ანალიზური ამონახსნი. გამოკვლეულია გარე მაგნიტური ველისა და კედლის გაჟონვის გავლენის ეფექტები თავისუფალი კონვექციის სასაზღვრო ფენის სისქეზე.

5. მიღებულია გარემოს სუსტადგამტარებლობისას პირობითად ცვლადი გამტარებლობის არანიუტონისეული ხარისხოვანი სითხის თავისუფალი კონვექციის ამოცანის ამონახსნი ინტეგრალური მეთოდით. ასევე განზოგადებული ამონახსნი მიღებულია ისევე როგორც ჰიდროდინამიკაში რეოლოგიური სითხეებისთვის. ნაჩვენებია, რომ კედლის

არაიზოთერმულობა არ ახდენს გავლენას ამოცანის მჭდ კრიტერიუმების კავშირის კანონზე, რომელიც ინარჩუნებს ამ კავშირს მიღებისა და არხების შესასვლელ ადგილებში და ბრტყელ ჩაძირულ ჭავლში. ამავე დროს სასაზღვრო ფენის გამოკვლევა გარსდენისა და სითბოცვლის ამოცანებში მხოლოდ საწყის ეტაპზეა. არსებობს რამდენიმე ნაშრომი, რომელიც ეხება დინამიკური სასაზღვრო ფენის ავტომოდელურ ამოცანებს. თუმცა აქამდე არ დამდგარა და არ გამოკვლეულა საკითხი სტაციონარული და არასტაციონარული არასასაზღვრო ფენის შესაძლო ავტომოდელური ამოცანების შესახებ. იძულებითი, ერთობლივი (თავისუფალი და იძულებითი), ასევე თავისუფალი კონვექციის შემთხვევებში.

აქამდე არ განხილულა არანიუტონისეული სითხეებით ფოროვანი სხეულების გარსდენა, თუ არის განხილული ძალიან ცოტაა ზუსტი ამონახსნები და თითქმის ყველა არ ასახავს ამოცანის არაწრფივობის სპეციფიკას. ავტორმა ამ საკითხებს დაუთმო დიდი ყურადღება.

ნაშრომში დაწვრილებითაა გამოკვლეული სასაზღვრო ფენის ავტომოდელური ამოცანების კლასი და ზოგიერთი მათგანი ამოხსნილია ანალიზურად. ნაჩვენებია ზუსტი რიცხვითი ამოხსნები ფსევდოპლასტიკური სითხის ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ფენის რიგი ავტომოდელური ამოცანებისა, რომლებიც მიღებული იქნა ადრე ცდის მეთოდით.

ნაპოვნი ზუსტი ამონახსნები, ჩვენი აზრით, წარმოადგენენ დამოუკიდებელ თეორიული და გამოყენებით ინტერესს. მათი გამოყენება შესაძლებელია ასევე გამოთვლის მიახლოებითი მეთოდების აგებისთვის და მიღებული მათემატიკური და ფიზიკური დაშვებების შემოწმებისთვის.

ნაშრომში გადმოცემულია ასევე ხარისხოვანი სითხეების სასაზღვრო ფენის დინამიკური და სითბური ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდები.

დასკვნით თავში გაკეთებულია არანიუტონისეულ სითხეებში სითბოგადატანის განტოლებათა სისტემის ზოგადი სახით აგების ცდა. განხილულია სასაზღვრო ფენში კონვექციური სითბოცვლის ავტომოდელური ამოცანა, სითბოგამტარებლობისა და სიბლანტის ძვრის სიჩქარეზე დამოკიდებულების გათვალისწინებით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Ostwald W. Kolloidzeitschrift, 38, 261, 1926.
2. Reiner M. Deformation and Flow. Lewis LTD. 1949.
3. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М.-Л., Физматгиз. 1962.
4. Шлятинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностранной литературы. 1956. 528 с.
5. Астрита Д.Ж., Марруччи Д.Ж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. Пер. с англ., М., 1978.
6. Грановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Фитматгиз, 1970. 379 с.
7. Сибиси Т., Брэдшоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир, 1987. 592 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. И., Гостехиздат, 1957.
9. Беннет К.О., Майерс Дж.У. Гидродинамика, теплообмен и массообмен. М.: Недра, 1966. 725 с.
10. Рейнер М. Реология. Пер. с англ. М., 1965.
11. Регирер С.А. Неустановившиеся течение электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля. Инж. физ. ж., 1959, т. 2, № 8. с. 43-50.
12. Боев А.Г. Автомодельные решения нестационарных уравнений плоского ламинарного магнитогидродинамического пограничного слоя. ТМТФ, № 1. 1966. 15-20.
13. Карякин Ю.Е. Автомодельные задачи пространственного пограничного слоя. Труды ЛПИ, 1965, 248. 74-81.
14. Шарикадзе Д.В. О приближенном решении некоторых автомодельных задач гидродинамики. Совместное заседание семинара им. И.Г. Петровского и Моск. мат. общества. 18-21 января 1981.
15. Hansen A.G. Nrans. ASME. Octomber, 1553, 1958.
16. Шарикадзе Д.В. О решениях автомодельных задач пограничного слоя проводящей жидкости. Доклады расширенных заседании семинара ИПМ им. И.Н. Векуа, Тбилисского ун-та, 1986. Инг. Н2, 131-134.
17. Шарикадзе Д.В., Еззат М.А. Об автомодельной задаче струйного течения проводящей степенной жидкости. Труды Тбилисского ун-та. Серия Математики, механики и астрономии. 1988, 278, 246-254.
18. Acrivos A., Shah M.J., Petefrsen E.E., Aiche J., 6, 332, 1960.
19. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Перевод с англ. Изд-во «Мир». 1964.
20. Китанин Э.Л. Пространственный пограничный слой проводящей жидкости влоль линии пересечения двух поверхностей с электромагнитном поле. Магнитная гидродинамика. 1965, 1, 37-42.
21. Шульман З.П. ИФЖ. IV, № 8, 11. 1961.
22. Rossow V.J. ZAMP 96, Fasc 5/6. 1968.
23. Добрышман Е.М. ПММ, 20, 3. 1956.

24. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Физматгиз. 1970. 379 с.
25. Бритов Н.А. Двухмерные МГД течения в сильных магнитных полях. Магнитная гидродинамика, 3, 1979, 10-16. 40.
26. Долидзе Д.Е. Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой жидкости. Тбилиси. Изд. АН Гр. ССР. 1960, 332 с.
27. Швец М.Е. Прикладная математика и механика. XIII, № 3. 1949.
28. Хелми К.А. Приближенный метод решения нестационарного пограничного слоя неньютоновской проводящей жидкости. Труды ТГУ 278. Серия Математика, Механика, Астрономия 24. 1988. с. 200-206.
29. Азмаипарашвили Л.Г., Шарикадзе Д.В. О численном решении одной нестациональной задачи магнитной гидродинамики. Труды ТГУ. Серия Математика, Механика, Астрономии. 1987, 270, 154-161.
30. Кереселидзе З.А., Шарикадзе Д.В. Расчет пограничного слоя у пористой пластины с переменным отсосом в магнитном поле. МГ, 1974, 2. 138-140.
31. Цинобер А.Б., Шербинин Э.В. О некоторых свойствах МГД пограничного слоя на пластинке. Магнитная гидродинамика, 1968, 3, 34-42.
32. Цуцкиридзе В.Н. Пульсационное течение вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитном поле с учетом теплопередачи (на груз. языке). кандидатская диссертация. Тбилисский Гос. ун-тет. 1994.
33. Мартинсон Л.К., Павлов К.Б. Магнитная гидродинамика. 3, 1966.
34. Цинобер А.Б. МГД Обтекание тел. Рига. Зинатне. 1970. 291 с.
35. Шарикадзе Д.В. Об одной нестационарной задаче магнитной гидродинамики. ДАН СССР, 1961. 138. № 3. 568-571.
36. Тарг С.М. Основные задачи теории ламинарных течений. М., ГИТТЛ, 1951.
37. Шарикадзе Д.В. Магнитногидродинамическое обтекание плоской пластины. Конф. по физике плазмы и ее применению. Будапешт, 1969.
38. Шарикадзе Д.В. Об одной решении уравнения нестационарного движения слабопроводящей жидкости. Труды Тбилисского ун-та. 1(137), А, 1971. 131-135.
39. Шарикадзе Д.В. О некоторых решениях задач движения вязкой жидкости области критической точки. Труды Тбилисского ун-та. серия Математика, Механика, Астрономия. 218, 1981. 87-105.
40. შარიქაძე ჯ., ციცქიშვილი ზ., კეკენაძე მ. პარალელურ ფოროვან კედლებს შორის ბლანტი უკუმში სუსტადგამტარი სითხის არასტაციონარული მოძრაობა სითბოგადაცემის გათვალისწინებით. სამეც. ტექნ. ჟურნ. „მშენებლობა“. № 4(31). 2013. გვ. 12-20.
41. შარიქაძე ჯ., კეკენაძე მ. არანიუტონისეული გამტარი სითხის სასაზღვრო ფენაში მოძრაობის ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნის ინტეგრალური მეთოდი. სამეც. ტექნ. ჟურნ. „მშენებლობა“. № 2(33). 2014. გვ. 35-40.
42. შარიქაძე ჯ., ციცქიშვილი ზ., კეკენაძე მ. სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის არასტაციონალური თავისუფალი კონვექციის ამოცანის

- მიახლოებითი ამოხსნა. სამეც. ტექნ. ჟურნ. „მშენებლობა“. № 4(35). 2014. გვ. 69–74.
43. Станюкович К.П. Неустановившиеся движение сплошной среды. М.: ГИТТЛ. 1955.
 44. Джумкулов Т. Магнитная гидродинамика. 1969. № 3. 134-137.
 45. Шульман З.П., Берковский Б.М. Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, 1966.
 46. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. М.: «Наука». 1978.
 47. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: «Мир». 1974. 320 с.
 48. Джалурия Й. Естественная конвекция. Тепло и массообмен. М.: Мир, 1983. 399 с.
 49. Эккерт Э.Р., Дрейк Р.М. Теория тепло-массообмена. М.-Л., Госэнергоиздат, 1961.
 50. L. Jikidze, V. Tsutskiridze. Approximate method for solving unsteady rotation problem on porous plate in the conducting fluid with account heat transfer in case of variable electroconductivity. Several problems of applied mathematics and mechanics. Series: Mathematics Research Developments (e-book), New York, 2013, p. 157-164.
 51. Рейнер М. Реология. Пер. с англ. М., 1965.
 52. Шульман З.П. Беседы о реофизике. Минск, 1976.
 53. კვეციანი მ., ციციშვილი ზ. არანუტონისეული გამტარი სითხის ავტომოდელური ამოცანების შესახებ სიტბოგადაცემის გათვალისწინებით. Georgian Engineering News. № 4. 2015.
 54. Reiner M. Deformation and Flow. Lewis LTD, 1949.
 55. Баренблатт Г.И. ПММ, 16, вып.6. 1952.
 56. Баренблатт Г.И. ПММ, 17, вып. 4, 1954.
 57. Oldroyd J.G. Rheology. Academic Press, New York-London. 1956.
 58. Шарикадзе Д.В. Один класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики. ПММ, 1959, 23, № 5, 953.
 59. Шарикадзе Д.В. О некоторых точных решениях нестационарных уравнений вязкой проводящей жидкости. Труды Тбилисского ун-та. Серия Математика, Механика и Астрологии, 1982, 232-233, 272-279.
 60. Шарикадзе Д.В. О некоторых автомодельных задачах вязкой несжимаемой жидкости. Труды Тбилисского ун-та. Серия Математика, Механика и Астрологии, 1984, 252, 204-221.
 61. Саундалгекар В.М., Витнесам Н.В. Теплоперенос при МГД обтеканий полубесконечной пластины с осцилирующей температурной поверхности. Магнитная гидродинамика, 1983. 3. 36-40.
 62. Ерошенко В.М., Зайчик А.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984, 274 с.
 63. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
 64. Acrivos J. Aerospace. Sci., 27, 314, 1960.

65. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975. 352 с.
66. Торнер Р.В. Коллоидный журнал. 22, № 5, 1960.
67. Hansen A.G. Similarity Analysis of Boundary – Value Problems in Engineering Prentice – Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
68. S.H. De Young, G.F. Sheele. AICHE Journ. 16.5.1970.
69. C. Tien. Appl – Sci. Res. 233. 1967.
70. K. Sharmak, M. Adelman. Canad. Journ. Chem. Eng. № 4.1966.
71. A.S. Gupta. ZAMP. 13, 324. 1962.
72. G. Wilks and R. Hunt. ZAMP. 35. 34. 1983.
73. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., «Наука». 1986.
74. L. Jikidze, B. Tsutskiridze. Unsteady rotation problem on infinite porous plate in the conducting fluid with account magnetic field and heat transfer in case of variable electric conductivity and injection velocity. Technical University of Georgia. Transactions. 2014, № 3(493).
75. Шульман З.П., Байков В.И., Зальцгендлер Э.А. Тепло- и массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях. Минск, 1975, 136 с.
76. შარიქაძე ჯ., ციციშვილი ზ., კეკენაძე მ. არანიუტონისეული სუსტად გამტარი სითხის დინება სასაზღვრო ფენაში. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამეცნიერო შრომების კრებული № 3(497). 2015.
77. კეკენაძე მ. დინამიკური სასაზღვრო ფენის სისქის განსაზღვრის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა სუსტადგამტარი ხარისხოვანი სითხის არასტაციონარული თავისუფალი კონვექციის დროს. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სტუდენტთა 83–ე ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია. თბილისი. 2015.