საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მაია აფციაური

ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2016

თბილისი
2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ასოც. პროფ. ზურაბ კიღურაძე

რეცენზენტები: ---------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის „--------„ --------------------, ----- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ------------------------------------ -------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,

კორპუსი ------, აუდიტორია ----------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით აფციაური მაიას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელები: პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ასოც. პროფ. ზურაბ კიღურაძე

რეცენზენტები: ---

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2016

ავტორი: აფციაური მაია

დასახელება: „ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა“

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემოთმოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

მაია აფციაურის მიერ შესრულებული საკვალიფიკაციო ნაშრომი “ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა“ ეძღვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესის აღმწერი მაქსველის სისტემაზე დაფუძნებული არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ზოგიერთი თვისების შესწავლას.

ნაშრომში განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების გამოკვლევისა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს. კერძოდ, მათთვის მოცემულია: საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ერთადერთობის თეორემები, ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას, დასმული ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, კომპიუტერზე რეალიზაციის ალგორითმები და შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა, რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები. ამდენად, მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავიანთი მეცნიერული ღირებულებებით და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, უდაოდ აქტუალურია.

სადისერტაციო ნაშრომში დასაწყისში აღწერილია მაქსველის ცნობილ სისტემაზე დაფუძნებული ელექტრომაგნიტური ველის გარემოში გავრცელების არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფუზიური მოდელი და მისი ინტეგრო-დიფერენციალური ანალოგები.

ინტეგრო-დიფერენციალურ სახეზე მაქსველის არაწრფივი სისტემის რედუქცია პირველად 1983 წელს განხორციელდა დავით გორდეზიანის, თემურ ჯანგველაძის და თენგიზ ყორშიას ნაშრომში, რასაც შედეგად მოჰყვა მრავალი გამოხმაურება და სამეცნიერო პუბლიკაციები, როგორც საქართველოში, ასევე უცხოეთში. ამ ნაშრომზე დაყრდნობით გენადი ლაპტევმა 1990 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში მოიყვანა ამ მოდელის ე.წ. გასაშუალებული ვარიანტი. მან აღნიშნა, რომ ამონახსნის არსებობის საკითხების შესასწავლად მის მიერ წინა მოდელში მონოტონურობის ცნობილი პრინციპის გარკვეული მოდიფიცირებით მიღებული შედეგების გადატანა აქ ვერ მოხერხდა. აქედან გამომდინარე, მან დაასკვნა, რომ გასაშუალებული მოდელი ცალკე კვლევის საგანს წარმოადგენდა.

მ.აფციაურის დისერტაციაში ჩატარებული გამოკვლევები გვიჩვენებს, რომ იმ საკითხების შესწავლა, რაც მასში არის გადმოცემული გარკვეული აზრით მსგავსად მიმდინარეობს და ამან განაპირობა დისერტაციის სათაურში სიტყვათა კონსტრუქცია „ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური“.

ნაშრომში მოცემულია ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური სისტემის სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობის საკითხები და ჰოფის ბიფურკაციის შესაძლებლობა. ერთი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ასევე დაფიქსირებულია გლობალურად მდგრადობის საკითხი. აგებულია შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემები და რიცხვითი ამოხსნის

ალგორითმები. მათზე დაყრდნობით ჩატარებულია კომპიუტერული ექსპერიმენტები და მოყვანილია რიცხვითი გათვლების გრაფიკული ილუსტრაციები.

გამოკვლეულია პარაბოლური ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები. აქაც მოცემულია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების ტესტურ ამოცანებზე მიღებული შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციები.

აღსანიშნავია სადისერტაციო ნაშრომის დანართიც, სადაც განხილული ალგორითმების რეალიზაციისთვის ავტორისეული პროგრამული პაკეტებია მოყვანილი.

დისერტაციაში შესწავლილი მოდელების სირთულე განაპირობებდა როგორც თეორიული, ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა როგორც უწყვეტი ამოცანების გამოკვლევას, ასევე რიცხვითი ანალოგების აგებას და შესწავლას, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული მრავალი რიცხვითი გათვლებით და მათი ანალიზით. ნაშრომი ასევე მდიდარია გრაფიკული ილუსტრაციებით.

SUMMARY

The dissertation performed by Maia Aptsiauri “Investigation and Approximate Solution of One Nonlinear Integro-Differential Model” is dedicated to study of some properties of nonlinear differential and integro-differential models, which are based on Maxwell system describing diffusion process of electromagnetic field.

In the work the main attention is paid to investigation and numerical solution of parabolic type integro-differential models. In particular, the following issues are studied: uniqueness theorems of initial-boundary value problems; large time behavior of solutions; construction and investigation of semi-discrete and discrete analogs; realization algorithms and corresponding software; results of numerical experiments and appropriate graphical illustrations. Thus, we believe that in this respect the obtained results with their scientific values and practical applications point of view, is undoubtedly important.

In the beginning of the dissertation work the nonlinear partial differential models and its integro-differential analogs based on Maxwell system, describing process of electromagnetic field propagation into a substance is described. At first reduction to the integro-differential form was made in 1983 by David Gordeziali, Temur Jangveladze and Tengiz Korshiya. Many scientific works were followed after that work in Georgia as well as abroad. Based on that work, in 1990 Genady Laptev proposed the so called average model of the considered model in his doctoral dissertation. He noted that it is not possible to apply the results obtained by the generalization of the theory of monotonic operator, which he applied for his previous models, for the mentioned averaged model. Therefore, he concluded that the average model was the subject of a separate study.

A study in the dissertation shows that the focus here, in a sense, is proceeding likewise as given there, and this has led to the construction of the words in the title of the thesis "of the nonlinear integro-differential".

The linear stability and possibility of Hopf bifurcation with justification for stationary solution of one-dimensional differential system is studied in the work. The global stability of one initial-boundary value problem is also investigated. The corresponding finite difference scheme and numerical algorithms are constructed. Based on those schemes and algorithms the computer experiments are carried out. And appropriate graphical illustrations are given. Asymptotic behavior of solutions of parabolic type nonlinear integro-differential models is investigated. Relevant semi-discrete and discrete analogs and iterative algorithms for their solution are constructed. The graphical illustrations for test examples are given.

One must note the appendix of the dissertation where author’s realization program codes for considered algorithms are given.

The complexity of the studied models required application of theoretical researches as well as methods of computational mathematics. Dissertation focuses on investigation of continuous problems as well as study and construction of numerical analogs, results of which is confirmed by carried out various numerical calculations and their analysis. The presented work is also rich by graphical illustrations.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირება, გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა თანამედროვე მათემატიკისა და ინფორმაციული ტექნოლოგიების გამოყენების ერთ-ერთ აქტუალურ სფეროს წარმოადგენს.

ასეთი ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესები ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე. ამ და მისი მსგავსი პროცესების აღმწერ მოდელებს ეძღვნება უამრავი ნაშრომი (იხილეთ მაგალითად, [1-30] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები).

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, დიფუზიის ასეთი ამოცანების მა-თემატიკურ მოდელირებას, გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება.

აღნიშნული პროცესის, ისევე როგორც სხვა მრავალრიცხოვანი მსგავსი ამოცანის მათემატიკური მოდელირებისას, ვღებულობთ არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ, ინტეგრო-დიფერენციალურ გან-ტოლებებს და განტოლებათა სისტემებს, რომელთა გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას ეძღვნება უამრავი სამეცნიერო ნაშრომი (იხილეთ მაგალითად, [1-102] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). აღსანიშნავია, რომ ამ მიმართულებებით საკმაოდ ვრცელი და შედარებით სრულყოფილი ლიტერატურული ციტირებები მოცემულია ახლახანს გამოცემულ [75] მონოგრაფიაში Temur Jangveladze, Zurab Kiguradze, Beny Neta. Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Elsevier. Academic Press, 2015, 254 p.

აღნიშნული დიფერენციალური სისტემების ძირითადი თავისე-ბურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შეიცავენ სხვადასხვა რიგის გან-ტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული სისტემისთვის განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია

ამგვარი წრფივი სისტემებისთვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითა-რებული. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობის საკითხი, რაც თავის მხრივ არანაკლები სირთულეების დაძლევასთან არის დაკავშირებული. გამოკვლევისთვის საჭირო და მოსახერხებელი ყოველი მეთოდის თავისებურება ძირითადად ვლინდება შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების და მათი დისკრეტული ანალოგებისთვის აუცილებელი აპრიორული შეფასებების მიღებასა და მათ შემდგომ გამოყენებაში.

შესასწავლი მოდელების სირთულე განაპირობებს მათი კომპლექსუ-რად კვლევის აუცილებლობას. კერძოდ, როგორც თეორიული ასევე გამოთ-ვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. ბუნებრივია, რომ მნიშვნელოვანი როლი აქ უნდა ითამაშოს რიცხვითმა ექსპერიმენტმა.

სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია მათემატიკური გამოკვლე-ვები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა ზოგიერთი დიფუზიური მოდელისათვის. ამოცანაში შემავა-ლი ყველა პარამეტრისთვის, კერძოდ, არაწრფივობის მახასიათებლების-თვის, როგორც უწყვეტი ასევე დისკრეტული ანალოგების სრულყოფილი თეორიული შესწავლა ფაქტიურად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა მსგავსი სახის თეორიულ გამოკვლევებს, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარე-ბული მრავალი რიცხვითი გამოთვლებით. ამ შემთხვევებისთვის შემუშა-ვებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების ეფექტურმა გამოყენებამ საშუალება მოგვცა ჩაგვეტარებინა რიცხვითი ექსპერიმენტები პარამეტრების სხვა მნიშვნელობებისთვისაც. რაც თავის მხრივ მნიშვნელოვნად აიოლებს შესასწავლი პროცესის პრაქტიკული შინაარსის გააზრებას.

აღსანიშნავია, რომ მრავალი მეტად საინტერესო და მნიშვნელოვანი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელდება ინტეგრო-დიფერენციალუ-რი განტოლებებით და მათი სისტემებით. განტოლებები, რომლებიც საძიე-ბელ ფუნქციებთან ერთად შეიცავენ ინტეგრალებს ამ ფუნქციებიდან და მათი

წარმოებულებიდან, ფაქტიურად წარმოიშვნენ კერძოწარმოებულებიან განტოლებებთან ერთად. მიუხედავად ამისა, აღნიშნული განტოლებების გამოკვლევა დაიწყო შედარებით გვიან.

ზემოთ მითითებულ სამეცნიერო ლიტერატურასთან ერთად, სხვადასხვა სახის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენცილური განტოლებები შეისწავლება მრავალ სხვა სამეცნიერო ნაშრომშიც (იხილეთ მაგალითად, [103-109] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). დისერტაციაში განხილული ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი პირველად შემოთავაზებულ იქნა დ.გორდეზიანის, თ.ჯანგველაძის და თ.ყორშიას [37] ნაშრომში. აღნიშნული და მსგავსი მოდელები წარმოიშვნენ ერთის მხრივ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას, ხოლო მეორეს მხრივ – არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შესწავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი (იხილეთ მაგალითად, [110-113] და სხვა). ამ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება არაწრფივი კოეფიციენტები, რომლებიც დამოკიდებულია სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ საძიებელი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე.

გ.ლაპტევმა 1990 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში მოიყვანა ზემოთაღნიშნული მოდელის ე.წ. გასაშუალებული ვარიანტი [54]. რომელმაც შემდეგში ასევე მრავალი მეცნიერის ყურადღება მიიქცია. აღსანიშნავია, რომ ამ ტიპის მოდელების გამოკვლევა პირველად [39] ნაშრომში ჩატარდა.

დიფუზიის მრავალი პროცესის აღმწერი არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებათა სისტემები იყო და კვლავაც არის მრავალი მეცნიერის კვლევის ობიექტი. ამ სისტემების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისობრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების

აგება, გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე გამოთვლითი მათემატიკის მეტად აქტუალურ და სწრაფად განვითარებად ნაწილს.

დისერტაციის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ზემოთ დაფიქსირებული ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი და ძირითადად კი შესაბამისი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

სხვადასხვა ბუნების დიფუზიური ამოცანების მოდელირება და მათემატიკური ასპექტები, რომლებიც დაკავშირებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის, არსებობის, ერთადერთობის თეორემებთან და ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხებთან შესწავლილია ზემოთ მოყვანილ და სხვა მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში.

რეალური გამოყენებითი ამოცანების შესწავლა თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. არწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობა ნათელია. მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები განხილულია მაგალითად შემდეგ ნაშრომებში [114-123] და მრავალ სხვა სამეცნიერო პუბლიკაციაში.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება რეზიუმეს, შესავალის, სამი თავის, დასკვნის, გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისა და დანართისაგან.

პირველ თავში განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური მოდელირება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის დიფერენციალურ სისტემაზე დაყრდნობით მოყვანილია დიფუზიის

ზოგადი ამოცანის დასმა. ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის განხილულია ამოცანის ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. კერძოდ, მოცემულია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებული და გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. მოცემულია მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და მოყვანილია გრაფიკული ილუსტრაციები.

პირველ ორ პარაგრაფში მაქსველის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საფუძველზე მოცემულია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. ამავე პარაგრაფებში განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება.

მეორე პარაგრაფში განსაკუთრებული ყურადღება არის გამახვილებული ამ მოდელის ინტეგრო-დიფერენციალურ სახემდე რედუქციაზე. აღსანიშნავია, რომ მაქსველის განტოლებათა სისტემისთვის აღნიშნული რედუქცია, როგორც ზემოთ ეს უკვე აღინიშნა, პირველად [37] ნაშრომში იქნა ჩატარებული. შედეგად მიღებულ იქნა არაწრფივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა ახალი კლასი, რომლის მიმართაც სამეცნიერო ინტერესი სულ უფრო იზრდება {31-46, 48-56, 58, 59, 64, 67, 68, 70-80, 83-102}.

აღნიშნული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი რთულია და მისი გამოკვლევა ჯერჯერობით მხოლოდ კერძო კლასებისთვის ხერხდება. სხვადასხვა ვარიანტები განხილულია მრავალ ნაშრომში (იხილეთ მაგალითად, {31-46, 48-56, 58, 59, 64, 67, 68, 70-80, 83-102} და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები).

ერთგანზომილებიანი ვარიანტისათვის ამ მოდელის სხვადასხვა შემთხვევების შესწავლა დაიწყო [32, 37] ნაშრომებში. მათში პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები. ამონახსნების არსებობის თეორემების დასამტკიცებლად ამ ნაშრომებში გამოყენებულია გალიორკინის

მეთოდის ერთი მოდიფიცირებული ვარიანტი და კომპაქტურობის პრინციპი. გამოკვლევის აღნიშნული სქემა არაწრფივი პარაბოლური განტოლებებისათვის პირველად შემოთავაზებული იყო [113] ნაშრომში და შემდეგ ხშირი გამოყენება ჰპოვა მრავალ სამეცნიერო გამოკვლევაში (იხილეთ მაგალითად, [13, 127] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). მრავალგანზომილებიანი სივრცული ცვლადების შემთხვევა პირველად განხილული იქნა [31, 33] ნაშრომებში. სხვებთან ერთად გ.ლაპტევმაც ზევრი სამეცნიერო გამოკვლევა ჩაატარა ამ მიმართულებით [52-55] და [31-33, 37] ნაშრომებზე დაყრდნობით, მან როგორც ზემოთაც აღვნიშნეთ, [54]-ში მოიყვანა ამ მოდელის ე.წ. გასაშუალებული ვარიანტი. რომელმაც შემდეგ ასევე მრავალი მეცნიერის ყურადღება მიიქცია. გ.ლაპტევმა დააფიქსირა, რომ იმ მიდგომით, რომელიც მან არაგასაშუალებულ მოდელებში გამოიყენა აქ გამოკვლევა ვერ ხერხდებოდა. კერძოდ, მან აღნიშნა, რომ მის მიერ არაწრფივ მონოტონურ ოპერატორთა თეორიის მოდიფიცირებით მიღებული ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თეორემების დამტკიცება ამ შემთხვევისთვის ალბათ სხვა მიდგომით უნდა ჩანაცვლებულიყო. როგორც უკვე აღინიშნა ამ მიმართულებით გასაშუალებული მოდელების გამოკვლევა კომპაქტურობის მეთოდის ერთი მოდიფიცირებული ვარიანტის გამოყენებით პირველად [39] ნაშრომში განხორციელდა.

არაგასაშუალებული და გასაშუალებული ამ ტიპის მოდელების შესწავლას და განსაკუთრებით, საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევისა და მიახლოებითი ამონახსნების აგების საკითხებს მრავალი ნაშრომი მიეძღვნა (იხილეთ მაგალითად, {31-46, 48-56, 58, 59, 64, 67, 68, 70-80, 83-102} და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები).

ასეთი ტიპის საკითხების კერძო შემთხვევების შესწავლას ეძღვნება დისეტრაციის მეორე და მესამე თავიც. კერძოდ, მეორე თავში არაგასაშუალებულ და ხოლო მესამეში გასაშუალებულ ამოცანებზეა ყურადღება გამახვილებული.

დისერტაციის ავტორს სწორედ ამ მიმართულებებით აქვს დამოუ-კიდებლად და თანაავტორობით რამოდენიმე ნაშრომი გამოქვეყნებული [87-102].

პირველ თავში ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანისთვის ასევე მოყვა-ნილია ამონახსნის გლობალური ყოფაქცევა ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. ამავე თავში ერთ-ერთი დიფუზიური ამოცანისთვის ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების საშუალებით მოცემულია ამონახ-სნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. კერძოდ, განხილულია საკმაოდ ზოგადი ხარისხოვანი სახის არაწრფივი მო-დელის სტაციონალური ამონახსნის წრფივად მდგრადობის და ერთი კონ-კრეტული არაწრფივობისა და შერეული სასაზღვრო პირობებიანი ამოცანის ამონახსნის გლობალურად მდგრადობის საკითხები. ამ საკითხების განხილ-ვა პირველად განხორციელდა [35] ნაშრომში, განზოგადებული სისტემი-სთვის კი [50] ნაშრომში.

პირველი თავის ბოლო მეხუთე პარაგრაფი ეძღვნება განხილული სასრულ-სხვაობიანი სქემებით რიცხვითი ამოხსნის საკითხებს. კერძოდ, აქ მოცემულია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

მეორე თავში შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან. პირველ ოთხ პარაგრაფ-ში გამოკვლეულია არაგასაშუალებული პარაბოლური ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის ზოგიერთი ვარიანტისთვის ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები.

ამ თავის ბოლო მეხუთე პარაგრაფში მოცემულია ტესტურ ამოცანებზე ჩატარებული ექსპერიმენტებით მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი და შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.

მესამე თავი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან. პირველი სამი პარაგრაფი ეძღვნება მეორე თავში შესწავლილი საკითხების ანალოგიურების გამოკვლევას პარაბოლური ტიპის არაწრფივი გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის ზოგიერთი ვარიანტისთვის. კერძოდ, ამ პარაგრაფებში შესწავლილია ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევას დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები.

ბოლო მეოთხე პარაგრაფში აქაც მოცემულია ტესტურ ამოცანებზე ჩატარებული ექსპერიმენტებით მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი და შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.

დისერტაციის ბოლოში მოყვანილია დანართი, სადაც მოცემული და აღწერილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ერთობლიობა, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია გათვლები.

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოსმენილ იქნა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ მომზადდა და ჩატარდა თემატური კოლოქვიუმები და სემინარები.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებში [87-102] და მოხსენებული იყო: რესპუბლიკურ და საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენციებზე: თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარების სხდომებზე (1995, 2000, 2001, 2009-2015 წწ.) [90, 91, 95-97, 99-102], საერთაშორისო კონფერენციაზე გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე პრობლემები (თბილისი, 2008) [87], საქართველოს მათემატიკოსთა V კონგრესზე (ბათუმი-ქუთაისი, 2009) [88], საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის VI საერთაშორისო კონფერენციაზე (ბათუმი, 2015 წ.) [89].

თავი I. ელექტრომაგნიტური ველის გარემოში გავრცელების კერძოწარმოებულებიანი და ინტეგრო-დიფერენციალური არაწრფივი მოდელების შესახებ

ამ თავში განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პრო-ცესის მათემატიკური მოდელირება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტრო-გამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის დიფერენციალურ სისტემაზე დაყრდნობით მოყვანილია დიფუზიის ზო-გადი ამოცანის დასმა. განხილულია ამოცანის ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. მოცემულია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის ასიმ-პტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებული და გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. მოცემულია ამოხსნის ალ-გორითმები და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და გრა-ფიკული ილუსტრაციები.

§1. მაქსველის კერძოწარმოებულებიანი არაწრფივი მოდელი

განვიხილოთ მასიური სხეული, რომელიც მოთავსებულია ცვლად მაგნიტურ ველში. აღვწეროთ ასეთ სიტუაციაში მაგნიტური ველის განაწი-ლება სხეულის შიგნით დროის სხვადასხვა მომენტისათვის.

კარგად არის ცნობილი, რომ ელექტრომაგნიტური ველის გარემოში გავრცელების პროცესი აღიწერება მაქსველის განტოლებათა სისტემით, რო-მელსაც აქვს შემდეგი სახე(იხილეთ მაგალითად, [1-3]:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=rot\,E\,, \qquad (1)$$

$$div\,H=0\,, \qquad (2)$$

$$\frac{4\pi}{c}J=rot\,H\,, \qquad (3)$$

$$J=\sigma E\,. \qquad (4)$$

განვსაზღვროთ (4) ტოლობიდან E სიდიდე და ჩავსვათ (3) სისტემაში. მივიღებთ

$$E = \rho \frac{c}{4\pi} rot\, H\ ,$$

სადაც $\rho = \dfrac{1}{\sigma}$ სხეულის წინაღობაა. მიღებული ტოლობის (1) სისტემაში ჩასმით გვექნება

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} rot\left(\rho rot\, H\right) = 0\,. \tag{5}$$

როგორც კი შეაღწევს ცვლადი მაგნიტური ველი სხეულში, იგი მასში აღძრავს ცვლად ელექტრულ ველს, რის შედეგადაც წარმოიქმნება დენი. ამის შემდეგ ხდება სხეულის ტემპერატურის ცვლილება, კერძოდ, მისი θ ტემპერატურის ზრდა, რომელიც გავლენას ახდენს ρ წინაღობაზე. ტემპერატურის ზრდა, როგორც წესი, იწვევს წინაღობის ხარისხოვანი დამოკიდებულებით ცვლილებას. ასე, რომ ტემპერატურის დიდი ცვლილებისას აუცილებლად უნდა გავითვალისწინოთ $\rho = \rho\left(\theta\right)$ დამოკიდებულება. ბოლო არსებითი შეზღუდვა რაც უნდა გაკეთდეს პროცესის აღწერისას, მდგომარეობს იმაში, რომ სხეულის ტემპერატურის ცვლილება, რომელიც გამოწვეულია J დენის მოქმედებით, უნდა ემორჩილებოდეს ჯოულ-ლენცის კანონს, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2\,, \tag{6}$$

სადაც ρ_0 – ნივთიერების სიმკვრივეა, c_v კი – კუთრი სითბოტევადობა, რომლებიც საზოგადოდ ასევე დამოკიდებული არიან ტემპერატურაზე. (6) განტოლება არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სითბოგამტარობის ან გამოსხივების საშუალებით. არ განიხილება აგრეთვე მთელი რიგი ფიზიკური ეფექტები. მიუხედავად ამისა, მათემატიკური თვალსაზრისით, (5), (6) განტოლებები საკმაოდ რთულია.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (7) და (10) სისტემებში არ არის გათვალისწინებული მრავალი ფიზიკური ეფექტი. ამოცანის უფრო ზოგადად დასმისთვის, პირველ რიგში, აუცილებელია ნივთიერების სითბოგამტარობის გათვალისწინება. ამ შემთხვევაში ჯოულ-ლენცის კანონში გაჩნდება დამატებითი შესაკრები, რომელიც ითვალისწინებს სითბოგამტარობის პროცესს და იგი მიიღებს შემდეგ სახეს (იხილეთ მაგალითად, [3])

$$\rho_0 c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \rho J^2 + \nabla(\chi \nabla \theta),$$

სადაც χ სითბოგამტარობის კოეფიციენტია, რომელიც საზოგადოდ, აგრეთვე დამოკიდებულია ტემპერატურაზე.

ამ ეფექტის გათვალისწინებითაც სამეცნიერო ლიტერატურაში მრავალი თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობის გამოკვლევაა ჩატარებული (იხილეთ მაგალითად, [14, 82, 75] და მათში მოცემული ლიტერატურული მითითებები).

§2. მაქსველის განტოლებათა სისტემის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელებამდე

გადავიდეთ (5), (6) არაწრფივი სისტემის ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემამდე რედუქციის საკითხის შესწავლაზე, რომელიც მიმდინარეობს [37] ნაშრომში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად.

გადავწეროთ (6) განტოლება შემდეგი სახით

$$\rho_0(\theta) \frac{c_v}{\rho(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial t} = J^2 .$$

თუ შემოვიღებთ ფუნქციას

$$S(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \rho_0(\xi) \frac{c_v}{\rho(\xi)} d\xi ,$$

მაშინ უკანასკნელი განტოლებიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial S}{\partial t} = J^2 .$$

დავუშვათ, რომ პროცესი იწყება დროის $t=0$ მომენტში, რომელსაც შეესაბამება ნივთიერების θ_0 ტემპერატურა.

ამ განტოლების $[0,t]$ შუალედზე ინტეგრებით მივიღებთ

$$S[\theta(x,t)] = \int_0^t J^2 d\tau .$$

ფიზიკური თვალსაზრისით ρ_0, c_v და ρ ფუნქციები არის დადებითი, ამიტომ $S(\theta)$ ფუნქცია მონოტონურად ზრდადია. აქედან გამომდინარე ცალსახად განისაზღვრება მისი შებრუნებული $\theta=\varphi(S)$ ფუნქცია, რომელიც $S(\theta)$ ფუნქციასთან დაკავშირებულია $\varphi[S(\theta)]=\theta$ თანაფარდობით. ამრიგად, შიეძლება ჩაიწეროს

$$\theta(x,t) = \varphi\left(\int_0^t J^2 d\tau\right).$$

თუ გავითვალისწინებთ (3) სისტემას, გვექნება

$$J = \frac{c}{4\pi} rot\, H ,$$

ანუ

$$\theta(x,t) = \varphi\left(\int_0^t \left|\frac{c}{4\pi} rot\, H\right|^2 d\tau\right).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება (5) განტოლებაში, როგორც $\rho=\rho(\theta)$ ფუნ-ქციის არგუმენტი, რის შედეგადაც მივიღებთ

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{4\pi} rot\left\{\rho\left[\varphi\left(\int_0^t \left|\frac{c}{4\pi} rot\, H\right|^2 d\tau\right)\right] rot\, H\right\} = 0 ,$$

$$div\, H = 0 .$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a(S) = \frac{c^2}{4\pi}\rho(\varphi(S)), \quad W = \frac{c}{4\pi} H ,$$

მაშინ სისტემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\frac{\partial W}{\partial t} + rot\left[a\left(\int_0^t |rot W|^2 d\tau\right) rot W\right] = 0 , \tag{7}$$

$$divW = 0.$$

თუ განვიხილავთ ბრტყელ ველს $W(0,U,V)$, სადაც $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ფუნქციები დამოკიდებულია ერთ სივრცით ცვლადზე, მაშინ

$$rotW = \left(0, -\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

ხოლო

$$rot\left(a(S)rotW\right) = \left(0, -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right), -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right)$$

და შესაბამისად (7) ვექტორული დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

აღვნიშნოთ, რომ (7) სახის განტოლებები პირველად განხილული იყო [32, 37] ნაშრომებში. ამ სტატიებში, ისევე როგორც [86] ნაშრომში, სხვა საკითხებთან ერთად, $a = a(S)$ ფუნქციაზე საკმაოდ ზოგადი შეზღუდვების შემთხვევაში, დამტკიცებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობა.

დავუშვათ, რომ ρ_0 და c_v სიდიდეები მუდმივებია. განვიხილოთ $a(S)$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციების მაგალითები (ქვემოთ მოყვანილ ოთხივე მაგალითში c_0 და c_1 სიდიდეები აღნიშნავენ დადებით მუდმივებს).

თუ $\rho(\theta) = \theta^{\alpha}$, $\alpha > 1$, მაშინ $a(S) = c_1(c_0 - S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. ამრიგად, $\rho(\theta)$ წინაღობის ხარისხოვან ზრდას მივყავართ მხოლოდ სასრულ შუალედზე განსაზღვრულ $a(S)$ კოეფიციენტამდე. შევნიშნოთ, რომ ფიზიკურ ნივთიერებას ასეთი თვისება არ გააჩნია.

თუ $\rho(\theta)=\theta$, მაშინ $a(S)=c_1e^{c_0S}$. აქედან ჩანს, რომ წრფივი ზრდა გვაძლევს მაჩვენებლიან $a(S)$ ფუნქციას. ტემპერატურის ზრდისას წინაღობის წრფივი ზრდა დამახასიათებელია მეტალებისთვის.

თუ $\rho(\theta)=\theta^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, მაშინ $a(S)=c_1(c_0+S)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ და $\rho(\theta)$ ფუნქციის ზრდა გვაძლევს $a(S)$ კოეფიციენტის ხარისხოვან ზრდას.

თუ $\rho(\theta)=\theta^{-\alpha}$, $\alpha>0$, მაშინ $a(S)=c_1(c_0+S)^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}$. მაშასადამე, კლებადი $\rho(\theta)$ ფუნქციიდან ვღებულობთ კლებად $a(S)$ ფუნქციას. ეს არის ზოგადი ფაქტი, თუ ρ_0 და c_v სიდიდეები მუდმივებია. მართლაც, დავუშვათ, რომ როცა $\theta\geq\theta_0$, მაშინ $\rho(\theta)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ განსაზღვრების თანახმად გვექნება

$$\frac{da}{dS}=\frac{c^2}{4\pi}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dS}=\frac{c^2}{4\pi}\frac{d\rho/d\theta}{dS/d\theta}=\frac{c^2}{4\pi\rho c_v}\rho(\theta)\rho'(\theta).$$

აქედან ნათლად ჩანს, რომ $a(S)$ ფუნქცია იზრდება და კლებულობს $\rho(\theta)$ ფუნქციასთან ერთად. აღვნიშნოთ, რომ $\rho(\theta)$ წინაღობის შემცირება ტემპერატურის ზრდასთან ერთად დამახასიათებელია ნახევარგამტარებისთვის მყარ ფაზაში, გაზებისთვის და აგრეთვე პლაზმისთვის, რომლისთვისაც გვაქვს $\rho(\theta)=K\theta^{-3/2}$.

ახლა გადავიდეთ ე.წ. გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოყვანაზე [54], რომელიც კვლავ აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელებას გარემოში [1-3].

ჯოულ-ლენცის (6) კანონი წარმოადგენს სითბოს გამოყოფის [1] ლოკალურ კანონს

$$dQ=\int_{\Omega}JEdxdt\,. \tag{9}$$

აქ dQ – სითბური ენერგიის ნაკადია დროის dt შუალედში, სხეულის მთელ მოცულობაში, რომელიც უკავია $\Omega\subset R^3$ არეს. ჯოულ-ლენცის კანონი არ ითვალისწინებს სითბოს გადაცემის პროცესს სხეულის შიგნით. ეს კი სამართლიანია, თუ ჩავთვლით ტემპერატურას მუდმივს სხეულის გასწვრივ,

ე.ი. დამოკიდებულს დროზე, მაგრამ დამოუკიდებელს სივრცითი ცვლადე-ბისგან. ამრიგად, ამ შემთხვევაში შეიძლება დავუშვათ, რომ $\theta = \theta(t)$. ამ დაშვებაში $dQ = mc_v d\theta$, სადაც m – ნივთიერების მასაა, მაშინ (6) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$mc_v(\theta)\frac{d\theta}{dt} = \int_{\Omega} JEdx\,.$$

ომის $E = \rho(\theta)J$ კანონის გამოყენებით და გამორიცხვის მეთოდის გა-მეორებით, ვღებულობთ (7) სისტემის შემდეგნაირ ანალოგს [54]

$$\frac{\partial W}{\partial t} + rot\left[a\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_0^t\int_{\Omega}|rot\,W|^2 dxd\tau\right)rot\,W\right] = 0\,,$$

$$div\,W = 0\,.$$

აქ $|\Omega|$ სხეულის მოცულობაა. Ω არის მიმართ გასაშუალების გამო ამ განტოლების $a(S)$ კოეფიციენტი დამოკიდებულია მხოლოდ t ცვლადზე და ამიტომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად გადავწეროთ

$$\frac{\partial W}{\partial t} - a\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_0^t\int_{\Omega}|rot\,W|^2 dxd\tau\right)rot\,rot\,W = 0\,. \qquad (10)$$

ბრტყელი ველისთვის $W = W(0,U,V)$, სადაც $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ერთი სივრცული ცვლადის ფუნქციებია, (10) ვექტორული ტოლობიდან მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} - a\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0\,,\\
&\frac{\partial V}{\partial t} - a\left(\int_0^t\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0\,,
\end{aligned} \qquad (11)$$

სადაც $\Omega = [0,1]$.

ზემოთ მიღებული (10), (11) სისტემის გამოკვლევა, როგორც ეს [54] ნაშრომშია აღნიშნული, რთულია და მოითხოვს დამოუკიდებელ შესწავლას.

ზემოთ მოყვანილი (7) და (10) ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების სხვადასხვა ვარიანტი შესწავლილია მრავალ სამეცნიერო

ნაშრომში (იხილეთ მაგალითად, {31-46, 48-56, 58, 59, 64, 67, 68, 70-80, 83-102} და მათში მითითებული ლიტერატურული მითითებები).

ინტეგრო-დიფერენციალური (7) მოდელის გამოკვლევა $H=(0,0,U)$ შემთხვევისთვის პირველად ჩატარებული იყო [37] ნაშრომში. კერძოდ, ამ ნაშრომში დამტკიცებულია პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის განზოგადებული ამონახსნის არსებობის თეორემა ერთგანზომილებიანი სივრცითი ცვლადის შემთხვევაში, როცა $a(S)=1+S$, ხოლო ერთადერთობის თეორემები უფრო ზოგადი შემთხვევებისთვისაც.

ერთგანზომილებიანი ვარიანტი $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$ შემთხვევისთვის შესწავლილია [32] ნაშრომში. ამ ნაშრომში პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისთვის დამტკიცებულია არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები $L_{2p+2}\left(0,T;\overset{o}{W}{}^{1}_{2p+2}(0,1)\right)$ სივრცეში. აღვნიშნოთ, რომ აქ და შემდეგში ყველგან დისერტაციაში გამოყენებულია სობოლევის სივრცეები ცნობილი აღნიშვნებით.

მრავალგანზომილებიანი სივრცული ცვლადების შემთხვევაში აღნიშნული (7) ტიპის მოდელები პირველად განხილული და გამოკვლეული იყო [31, 33] ნაშრომებში.

მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი მიეძღვნა პარაბოლური ტიპის მაქსველის ცნობილ განტოლებათა სისტემაზე დაფუძნებული ზემოთაღწერილი მოდელებისთვის სხვადასხვა ტიპის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევისა და მიახლოებითი ამონახსნების აგების თვალსაზრისით.

სადისერტაციო ნაშრომში სწორედ ამ მიმართულებით აღნიშნული მოდელების შესწავლაა ძირითად საკვლევ თემად ქცეული. აქვე აღვნიშნავთ, რომ დისერტაციაში ორკომპონენტიანი და წყაროს წევრებიანი სისტემებისკენ არის მეტი ყურადღება გადატანილი.

აღნიშნული მოდელები ასეთი გაერთიანებული სახით შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(S\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+f(U),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(S\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+f(U),$$

სადაც (8) ტიპის მოდელისთვის გვაქვს

$$S\left(x,t\right)=\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau,$$

ხოლო (11) ტიპის მოდელისთვის

$$S\left(t\right)=\int_0^1\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau,$$

ამასთან აქ $f=f(U)$ არის თავისი არგუმენტის მოცემული ფუნქცია, ე.წ. წყაროს წევრი.

§ 3. ერთი დიფერენციალური მოდელის ამონახსნის წრფივი და გლობალური მდგრადობის შესახებ

ამ პარაგრაფში მოცემულია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. ამ ტიპის საკითხების გამოკვლევა პირველად განხორციელდა [35] ნაშრომში, განზოგადებული სისტემისთვის კი [50] ნაშრომში. ჩვენი ამოცანაა მეხუთე პარაგრაფში რიც-ხვითი ექსპერიმენტებით აღნიშნული ნაშრომების შედეგების დადასტურება. [35] ნაშრომში საკმაოდ ზოგადი ხარისხოვანი არაწრფივობის მქონე მოდე-ლის ერთი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისთვის ჯერ შესწავლილია ამონახსნის წრფივი მდგრადობა, შემდეგ კი ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა. ბოლოში ერთი კონკრეტული არაწრფივობი-სათვის შესწავ-ლილია ამონახსნის გლობალური მდგრადობის საკითხიც.

პირველ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე [35]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(V^{\alpha}\,\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-V^{\beta}+V^{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2},$$

(12)

$$U\left(0,t\right)=0,\ V^{\alpha}\,\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1}=\psi,$$

$$U\left(x,0\right)=U_{0}\left(x\right),\ V\left(x,0\right)=V_{0}\left(x\right),$$

სადაც $\alpha\neq 0,\quad 2\alpha+\beta-\gamma\neq 0,$ ხოლო U_0 და V_0 კი $\left[0,1\right]$ არეზე მოცემული ფუნქციებია.

(12) ამოცანის სტაციონალური ამონახსნია $\left(\psi^{\frac{\beta-\gamma}{2\alpha+\beta-\gamma}},\psi^{\frac{2}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right).$ შემდეგი აღნიშვნის შემოღებით $W(x,t)=V^{\alpha}\,\frac{\partial U}{\partial x}$ (12) ამოცანა [35]-ში ჩაწერილია U და W ფუნქციების ტერმინებში და ამ სიტუაციისთვის სტაციონარული ამონახსნია

$$\left(\psi,\psi^{\frac{2}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right).$$

სამართლიანია შემდეგი დებულება [35].

თეორემა 1.1. თუ $2\alpha+\beta-\gamma>0,$ მაშინ (12) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი $\left(\psi,\psi^{\frac{2}{2\alpha+\beta-\gamma}}\right)$ წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა სრულდება უტოლობა

$$\left(\gamma-\beta\right)\psi^{\frac{2\left(\beta-\alpha-1\right)}{2\alpha+\beta-\gamma}}<\frac{\pi^{2}}{4}.$$

თუ $\gamma-\beta>0,\quad \beta-\alpha-1\neq 0$ და

$$\psi_{c}=\left[\frac{\pi^{2}}{4\left(\gamma-\beta\right)}\right]^{\frac{2\left(\beta-\alpha-1\right)}{2\alpha+\beta-\gamma}},$$

მაშინ როცა $0<\psi<\psi_c$ (12) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, ხოლო როცა $\psi>\psi_c$ მაშინ კი – არამდგრადი.

სტაციონარული ამონახსნის გლობალური მდგრადობის საკითხი კი შესწავლილია შემდეგი ამოცანისთვის [35]:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(V\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-V+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2, \tag{13}$$

$$U(0,t)=0,\ V\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=1}=\psi,$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x).$$

თეორემა 1.2. საწყის-სასაზღვრო (13) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი $\left(\psi^{\frac{1}{3}}x,\psi^{\frac{2}{3}}\right)$ გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით.

ზემოთ აღნიშნულ [50] ნაშრომში გამოკვლეულ ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\ \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right], \tag{14}$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0,\ U(1,t)=\psi_1,\ V(1,t)=\psi_2,$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x),\ S(x,0)=S_0(x)>0, \tag{15}$$

სადაც $\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R,\ \alpha\neq 0,\ a,b\in R^{+},\ \psi_1=Const>0,\ \psi_2=Const>0.$

ნაშრომში [50] დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები.

თეორემა 1.3. თუ $2\alpha+\beta-\gamma>0$ და $\beta\neq\gamma$, მაშინ (14), (15) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი ($\psi_1 x, \psi_2 x, \left(\frac{b(\psi_1^2+\psi_2^2)}{a}\right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}}$) წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი უტოლობა

$$a(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}}<\pi^2.$$

ერთი კონკრეტული არაწრფივობისთვის [50] ნაშრომში ასევე დამტკიცებულია გლობალური მდგრადობის დებულებაც.

თეორემა 1.4. თუ $\alpha=\beta=a=b=1, \gamma=0,$ მაშინ (14), (15) ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი $(\psi_1 x, \psi_2 x, \psi_1^2+\psi_2^2)$ გლობალურად მდგრადია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით.

§ 4. სხვაობიანი სქემები დიფერენციალური მოდელისათვის

ამ პარაგრაფში ჯერ მოცემულია ზოგადი ერთგანზომილებიანი მოდელის შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგი. შედეგ კი ერთი არაწრფივი კონკრეტული დიფერენციალური ამოცანის ამოსახსნელი სამშრიანი სასრულსხვაობიანი სქემა კრებადობის დასაბუთებით. ეს ამოცანა ამ შემთხვევისთვის არის ჩაწერილი დიფერენციალური ფორმით, თორემ ადვილი შესამჩნევია, რომ ის ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელის სახეზეც ადვილად დაიყვანება.

გამოვიყენოთ ცნობილი აღნიშვნები და შემოვიღოთ $\overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\omega_\tau$ ბადე $\overline{Q}=\{0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ მართკუთხედზე, სადაც T არის მოცემული დადებითი რიცხვი:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=ih, i=0,..,M, hM=1\},$$

$$\omega_\tau=\{x_j=j\tau, j=0,..,N, N\tau=T\}.$$

აქ h არის ბიჯი x ცვლადის მიმართ, ხოლო τ კი დროითი ცვლადის ბიჯი $[0,T]$ შუალედზე.

ასევე შემოვიღოთ შემდეგი ცნობილი აღნიშვნები:

$$y = y_i^j = y\left(x_i, t_j\right), \; y = y_i^{j+1} = y\left(x_i, t_{j+1}\right),$$

$$y_t = \frac{y - y}{\tau}, \; y_{\bar{x}} = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}, \; y_x = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h},$$

$$y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}.$$

U და W აღნიშვნებში ჩაწერილ (12) ამოცანას შევუსაბამოთ შემდეგი სხვაობიანი სქემა:

$$w_t = \hat{v}^{\alpha} w_{\bar{x}x} + a\left(v^{\gamma-2\alpha-1}w^2 - v^{\beta-1}\right)w, \tag{16}$$

$$v_t = -v^{\beta} + v^{\gamma-2\alpha}w^2, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{x=0} = 0, \; w(1,t) = \psi, \tag{18}$$

$$w(x,0) = v_0^{\alpha}\frac{\partial U_0(x)}{\partial x}, \quad v(x,0) = V_0(x). \tag{19}$$

(16)-(19) სხვაობიანი სქემა ადვილად რეალიზებადია, ვინაიდან $t = t_{j+1}$ შრეზე მიახლოებითი ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა მიმდევრობით ამოიხსნას (17) განტოლებათა სისტემა $\hat{v}$ ფუნქციის მიმართ, შემდეგ კი (16) განტოლებათა სისტემა w ფუნქციის მიმართ უკვე ნაპოვნი $\hat{v}$ ფუნქციის გამოყენებით. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ მოყვანილი ალგორითმი არ საჭიროებს იტერაციული პროცესის გამოყენებას, რადგან $\hat{v}$ ფუნქციას (17) ტოლობიდან ცხადად ვპოულობთ, შემდეგ კი w ფუნქციას სამდიაგონალური მატრიცის მქონე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ფაქტორიზაციის ძალიან ცნობილი მეთოდის საშუალებით ამოხსნით.

ახლა განვიხილოთ ამოცანა, რომლითვისაც აგებული და გამოკვლეულია სამშრიანი სასრულ-სხვაობიანი სქემა.

მართკუთხედში $\overline{Q}$ განვიხილოთ სამშრიანი სასრულ-სხვაობიანი სქემა შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(V^{p}\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{2}V^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}, \tag{20}$$

$$U\left(0,t\right)=V\left(1,t\right)=0,\ U\left(x,0\right)=U_0\left(x\right), \tag{21}$$

$$V\left(x,0\right)=V_0\left(x\right)\geq\delta_0=Const. \tag{22}$$

(20)-(22) სისტემაც არის ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის გავრცელების ერთგანზომილებინი ანალოგი და მისი კვლევა დაწყებულია [32, 37] ნაშრომში. (20)-(22) სახის ამოცანების ამონახსნების არსებობა და ერთადერთობა შესწავლილია [31- 33, 37] ნაშრომებში და კიდევ სხვა მრავალ სამეცნიერო პუბლიკაციაში.

აგრეთვე შესწავლილია (20)-(22) ამოცანის სასრულ-სხვაობიანი სქემა $p=1$ შემთხვევისათვის [34]. ჩვენს ნაშრომში [90] განხილულია შემთხვევა, როცა $-1\leq p\leq 1$.

ახლა მოვიყვანოთ [90] ნაშრომის მთავარი შედეგი დამტკიცებითურთ. ვთქვათ, U და V არის (20)-(22) ამოცანის საკმაოად გლუვი ამონახსნი. განვიხილოთ ბადე $\omega_{h\tau}=\omega_h\times\omega_\tau,\quad \omega^*_{h\tau}=\omega^*_h\times\omega_\tau$, სადაც

$$\omega_h=\left\{x_i=ih, i=0,..,M-1; h=1/M\right\},\ \overline{\omega}_h=\omega_h\cup\left\{x_0=0, x_M=1\right\},$$

$$\omega^*_h=\left\{x_i=\left(i-1/2\right)h, i=1,..,M\right\},\ \omega_\tau=\left\{x_j=j\tau, j=0,1,..,N, \tau=T/N\right\}.$$

განვსაზღვროთ სკალარული ნამრავლები და ნორმები:

$$\left(u,v\right)=\sum_{i=1}^{M-1}u_iv_ih,\qquad \left(u,v\right]=\sum_{i=1}^{M}u_iv_ih,$$

$$\left\|u\right\|=\left(u,u\right)^{1/2},\quad \left\|u\right]\!\!\right|=\left(u,u\right]^{1/2}.$$

განვიხილოთ (20)-(22) ამოცანის შესაბამისი შემდეგი სამშრიანი სასრულ-სხვაობიანი მოდელი:

$$u_{\tau}+\beta\tau u_{\bar{t}t}=\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^{p}u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)_{x},$$
$$v_{\tau}+\beta\tau v_{\bar{t}t}=\frac{1}{2}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2}, \tag{23}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\in\omega_{h}, \tag{24}$$

$$u(x,0)=U_{0}(x),\ u(x,t)=U_{0}(x)+\tau\left(\left(V_{0}^{(\alpha)}\right)^{p}U_{0\bar{x}}^{(\alpha)}\right)_{x}, \tag{25}$$

$$v(x,0)=V_{0}(x),\ v(x,t)=V_{0}(x)+\frac{1}{2}\tau\left(V_{0}^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(U_{0\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2}, \tag{26}$$

სადაც $w^{(\alpha)}=\alpha w+(1-\alpha)w;$ α,β არის პარამეტრები და გამოყენებულია გავრცელებული აღნიშვნები.

(23)-(26) ამოცანაში u შეესაბამება $\omega_{h\tau}$ ბადის კვანძებს, ხოლო v შეესაბამება $\omega_{h\tau}^{*}$ ბადის კვანძებს.

თუ (23)-ის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ სკალარულად $u^{(\alpha)}$ ფუნქციაზე, ხოლო მეორეს $2v^{(\alpha)}$ ფუნქციაზე, მარტივი გარდაქმნებით ვღებულობთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\left(u_{t}+\beta\tau u_{\bar{t}t},u^{(\alpha)}\right)=-\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^{p},\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2}\right),$$
$$2\left(v_{t}+\beta\tau v_{\bar{t}t},v^{(\alpha)}\right)=\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^{p},\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2}\right).$$

და ბოლოს

$$\left(u_{t}+\beta\tau u_{\bar{t}t},u^{(\alpha)}\right)+2\left(v_{t}+\beta\tau v_{\bar{t}t},u^{(\alpha)}\right)=0. \tag{27}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ბადური ფუნქციისთვის სამართლიანია მარტივად შესამოწმებელი იგივეობა

$$2\left(\eta_{t}+\beta\tau\eta_{\bar{t}t}\right)\eta^{(\alpha)}=\left(J^{2}(\eta)\right)_{t}+\alpha\beta\tau^{3}\left(\eta_{\bar{t}t}\right)^{2}+$$
$$+\tau\left(\alpha-0.5-\beta\right)\left(\left(\eta_{t}\right)^{2}+\left(\eta_{\bar{t}}\right)^{2}\right), \tag{28}$$

სადაც

$$J^{2}(\eta)=\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\eta^{2}+\left(\alpha-0.5-\beta\right)\left(\eta-\breve{\eta}\right)+\beta\left(\frac{1+\alpha}{\sqrt{\alpha}}\eta-\sqrt{\alpha}\eta\right)^{2}.$$

გარდა ამისა, თუ α და β პარამეტრები აკმაოფილებენ პირობას $\alpha-0.5\geq\beta\geq 0,$ მაშინ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა

$$J^2(\eta)=\frac{1}{2\alpha}\eta^2. \tag{29}$$

საბოლოოდ, (27)-(29) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{gathered}\left(\left\|J^2(u)\right\|+\left\|J^2(v)\right\|\right)_t=0,\\ \|u\|^2+\|v\|^2\leq\|\breve{u}\|^2+\|\breve{v}\|^2.\end{gathered} \tag{30}$$

(30) აპრიორული შეფასება ამტკიცებს (23)-(26) სქემის მდგრადობას. აღსანიშნავია, რომ ადვილია საჩვენებელია შესაბამისი ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობაც.

ახლა მოვიყვანოთ კრებადობის დებულება, რომელიც დამტკიცებულია [90] ნაშრომში.

თეორემა 1.5. თუ $-1\leq p\leq 1$ და $\alpha-0.5\geq\beta\geq 0,$ მაშინ (20)-(22) ამოცანის საკმაოდ გლუვი ამონახსნისათვის, (23)-(26) სქემის ამონახსნი კრებადია (20)-(22) ამოცანის ამონახსნისაკენ $O\left(\tau^2+h^2+(\alpha-0.5-\beta)\tau\right)$ რიგით.

დამტკიცება. თუ (23)-(26) ამოცანის ამონახსნს ჩავსვავთ (20)-(22) ამოცანაში, მივიღებთ ცდომილობას $z=u-U,$ $s=v-V,$ რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$z_t+\beta\tau z_{\bar{t}t}=\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^p u_{\bar{x}}^{(\alpha)}-\left(v^{(\alpha)}\right)^p U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)+\varphi_1, \tag{31}$$

$$s_t+\beta\tau s_{\bar{t}t}=\frac{1}{2}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2-\frac{1}{2}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2+\varphi_2, \tag{32}$$

$$z(0,t)=z(1,t)=0,\quad t\in\omega_\tau, \tag{33}$$

$$z(x,0)=0,\ \ z(x,\tau)=v(x)=O\left(\tau^2+h^2\right),\ \ x\in\omega_h, \tag{34}$$

$$s(x,0)=0,\ \ s(x,\tau)=\mu(x)=O\left(\tau^2+h^2\right),\ \ x\in\omega_h, \tag{35}$$

სადაც

$$\varphi_1=-\left(U_t+\beta\tau U_{\bar{t}t}\right)+\left(\left(V^{(\alpha)}\right)^p U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)_x=O\left(\tau^2+h^2+(\alpha-0.5-\beta)\tau\right),$$

$$\varphi_2 = -\left(V_t + \beta\tau V_{\bar{t}t}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(V^{(\alpha)}\right)^{p-1} U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2 = O\left(\tau^2 + h^2 + \left(\alpha - 0.5 - \beta\right)\tau\right).$$

გავამრავლოთ (31) სკალარულად $z^{(\alpha)}$-ზე და (32) $s^{(\alpha)}$-ზე, მივიღებთ:

$$\left(z_t + \beta\tau z_{\bar{t}t}, z^{(\alpha)}\right) = -\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^p u_{\bar{x}}^{(\alpha)} - \left(v^{(\alpha)}\right)^p U_{\bar{x}}^{(\alpha)}, z_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right] + \left(\varphi_1, z^{(\alpha)}\right), \tag{36}$$

$$\left(s_t + \beta\tau z_{\bar{t}t}, s^{(\alpha)}\right) = -\left(\frac{1}{2}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(V^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2, s^{(\alpha)}\right) + \left(\varphi_2, s^{(\alpha)}\right], \tag{37}$$

ცხადია, რომ თუ $-1 \le p \le 1$, მაშინ

$$\left(\omega_1^{p-1} - \omega_2^{p-1}\right)\left(\omega_1^{p+1} - \omega_2^{p+1}\right) \le 0.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ (36) და (37) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\left(z_t + \beta\tau z_{\bar{t}t}, z^{(\alpha)}\right) + \left(s_t + \beta\tau s_{\bar{t}t}, s^{(\alpha)}\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left(\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2, \left(v_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2 + V^{(\alpha)}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^2, v^{(\alpha)}\left(V^{(\alpha)}\right)^{p-1} + \left(V^{(\alpha)}\right)^p\right] +$$
$$\left(\left(V^{(\alpha)}\right)^p + \left(v^{(\alpha)}\right)^p, u_{\bar{x}}^{(\alpha)} U_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right] + \left(\varphi_1, z^{(\alpha)}\right) + \left(\varphi_2, s^{(\alpha)}\right] \le$$
$$\le \left\|z^{(\alpha)}\right\|^2 + \left\|s^{(\alpha)}\right]\!\Big|^2 + \left\|\varphi_1\right\|^2 + \left\|\varphi_2\right]\!\Big|^2.$$

გამოვიყენოთ (28) და (29). თუ $\alpha - 0.5 \ge \beta \ge 0$, $\tau < \tau_1 = \dfrac{1}{4\alpha^2}$, გვექნება

$$\frac{1}{4\alpha}\|z\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\|\breve{z}\|^2 + \frac{1}{4\alpha}\left\|s\right]\!\Big|^2 + \frac{1}{4\alpha}\left\|\breve{s}\right]\!\Big|^2 \le \tau\left(\|\varphi_1\|^2 + \left\|\varphi_2\right]\!\Big|^2\right) +$$
$$+\alpha\tau\|z\|^2 + \tau(1-\alpha)\|\breve{z}\|^2 + \alpha\tau\left\|s\right]\!\Big|^2 + \tau(1-\alpha)\left\|\breve{s}\right]\!\Big|^2.$$

აქედან,

$$\|z(t)\|^2 + \left\|s(t)\right]\!\Big|^2 \le C\left(\|z(0)\|^2 + \|z(\tau)\|^2 + \left\|s(\tau)\right]\!\Big|^2 + \right.$$
$$\left. +\tau\sum_{t'=2\tau}^{t}\left(\left\|\varphi_1(t')\right\|^2 + \left\|\varphi_2(t')\right]\!\Big|^2\right)\right),$$

სადაც φ_1, φ_2, $z(0)$, $z(\tau)$, $s(0)$ და $s(\tau)$ განსაზღვრულია (31)-(35) დამოკიდებულებებით და C არის დადებითი მუდმივა, რომელიც არ არის დამოკიდებული τ და h ბიჯებზე.

ამრიგად, თეორემა 1.5 დამტკიცებულია.

§ 5. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები

წინა პარაგრაფში მოცემული სასრულ-სხვაობიანი სქემებითა და აგებული რიცხვითი ალგორითმების პროგრამული უზრუნველყოფით ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. შედეგები ადასტურებენ ამონახსნის წრფივი მდგრადობისა და ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის მესამე პარაგრაფში მოყვანილ თეორიულ გამოკვლევებს.

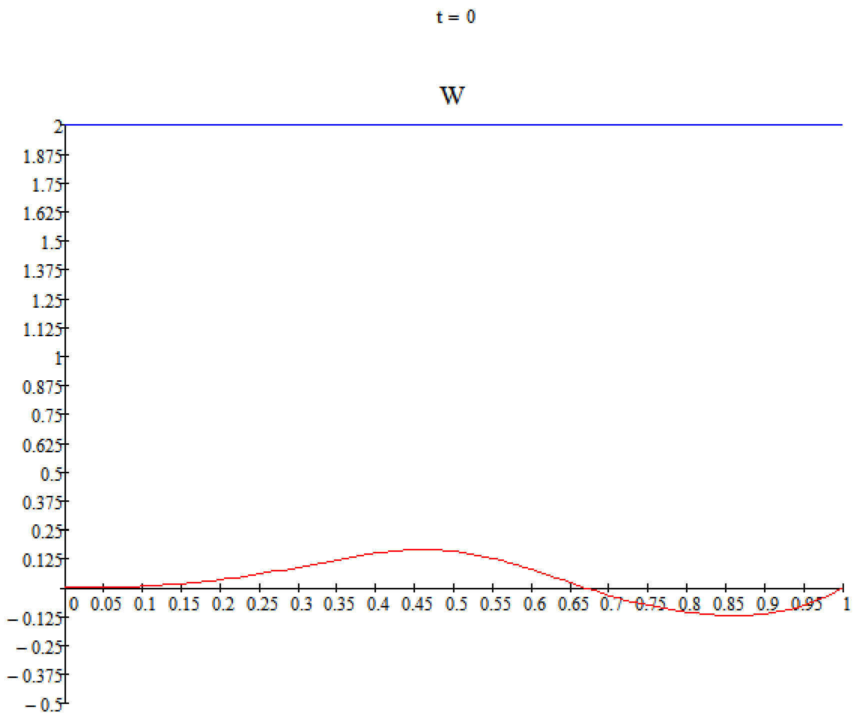
ჩვენი მიზანი იყო რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება მათი შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციებით [35] ნაშრომში დამტკიცებული ამონახსნების ყოფაქცევის აღწერა. ქვემოთ მოყვანილია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

მეოთხე პარაგრაფში მოყვანილი (16)-(19) სქემის გამოყენებით ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები შესაბამისობაშია თეორიულ კვლევებთან. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

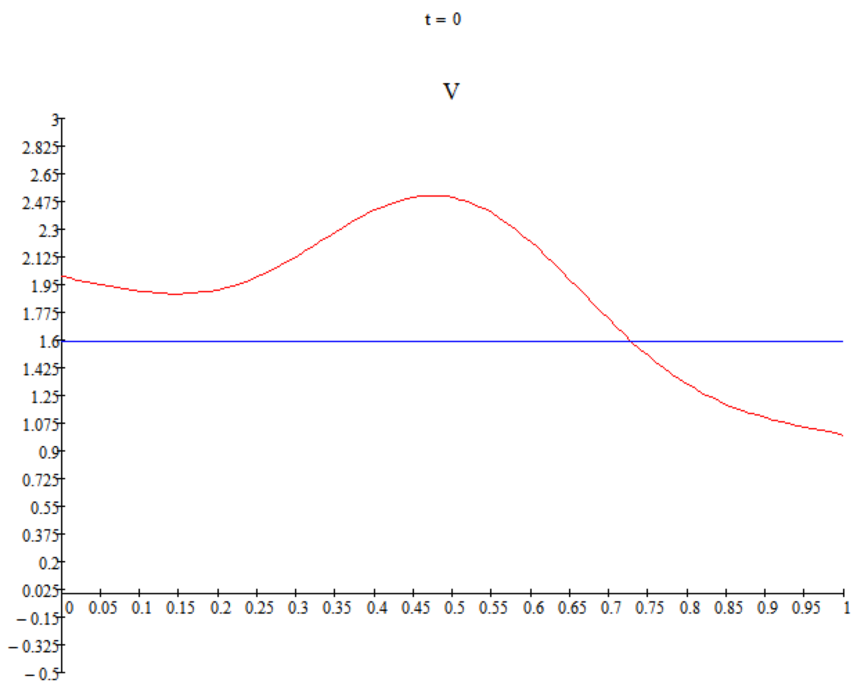
ტესტურ ექსპერიმენტებში პარამეტრების მნიშვნელობები შემდეგია: $h=0.01,\ \tau=0.00004,\ M=100.$

ტესტი 1 (სტაციონალური ამონახსნი): $\alpha=1,\ \beta=1,\ \gamma=0,\ \psi=1,$ შესაბამისი ნახაზებია 1-8.

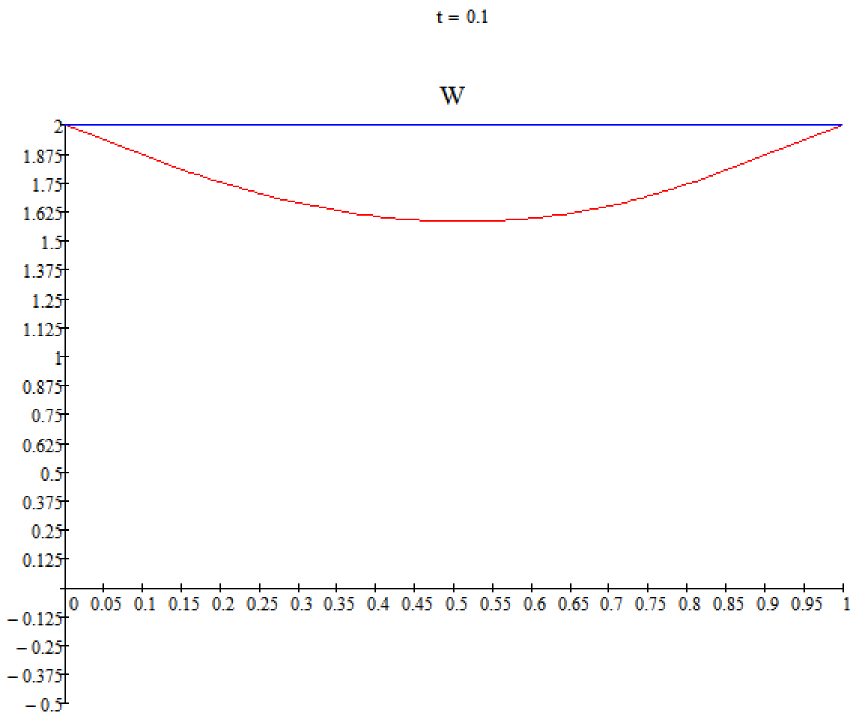
ტესტი 2 (ბიფურკაცია): $\alpha=1,\ \beta=3,\ \gamma=4,\ \psi=1,$ შესაბამისი ნახაზებია 9-13.



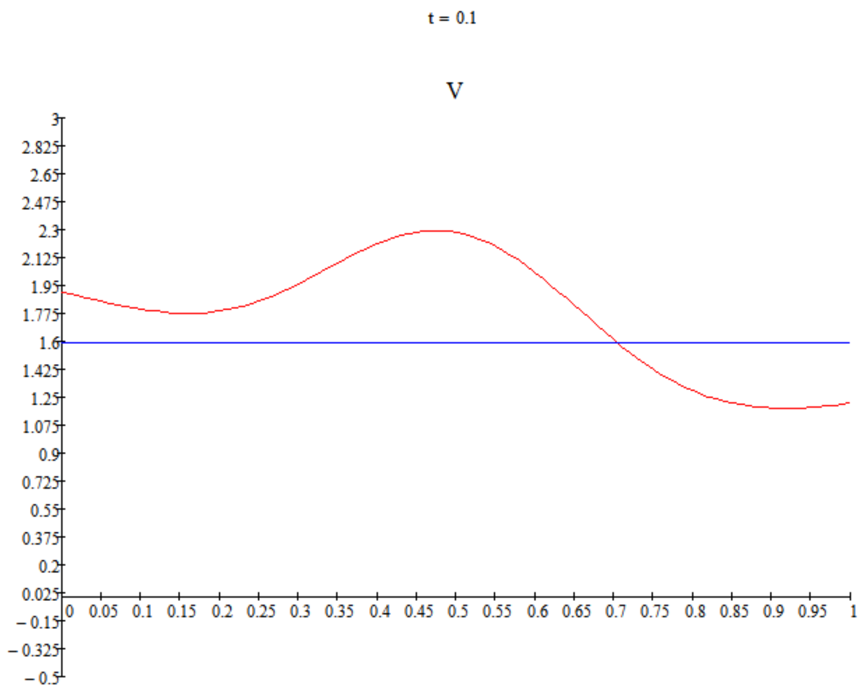
ნახ. 1



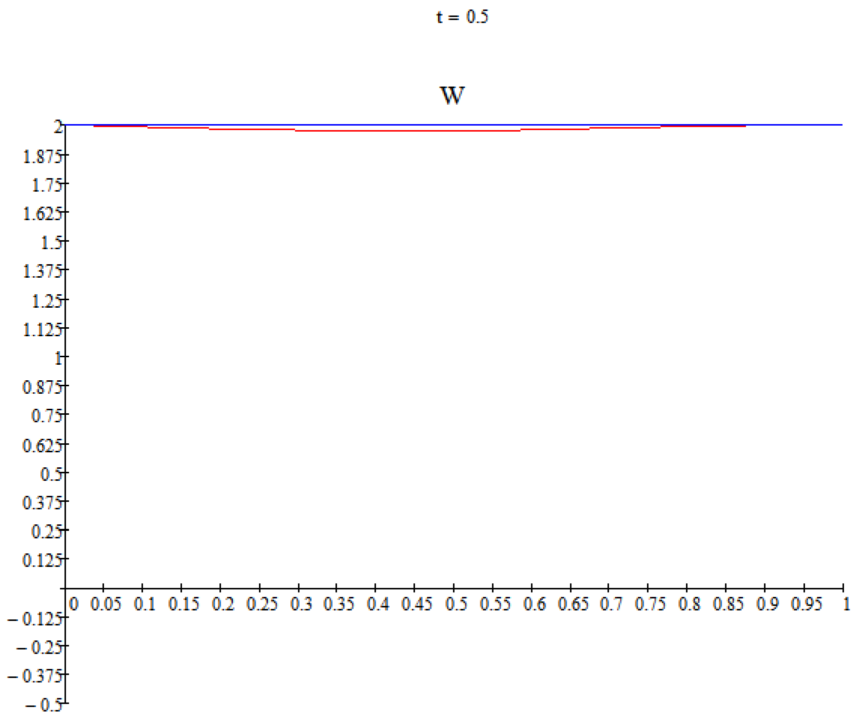
ნახ. 2



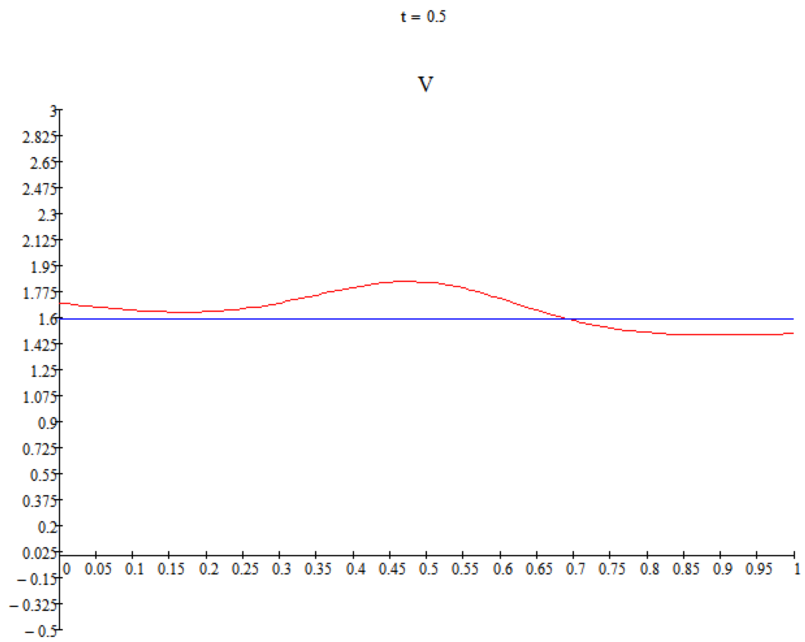
ნახ. 3



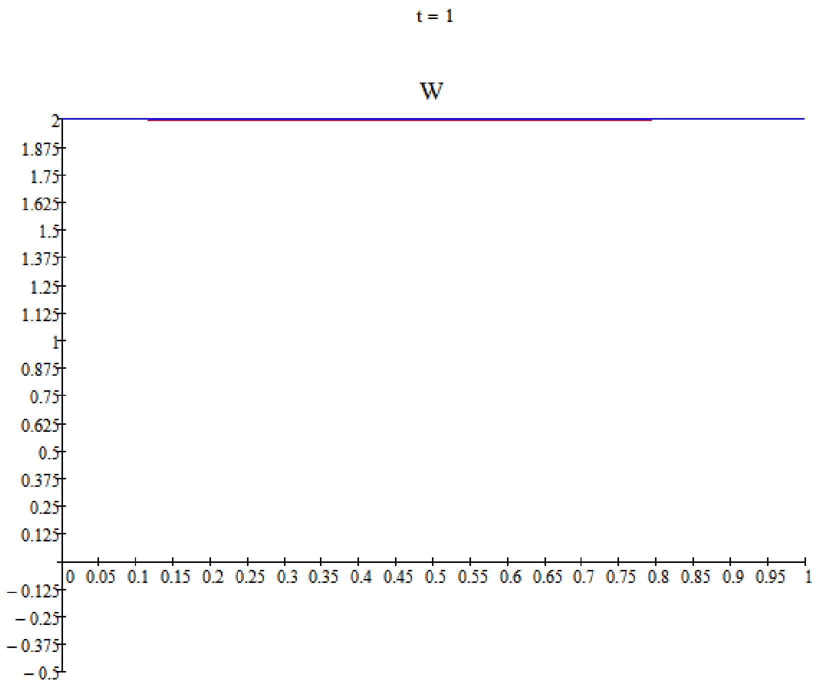
ნახ. 4


t = 0.5
W
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
− 0.125
− 0.25
− 0.375
− 0.5
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

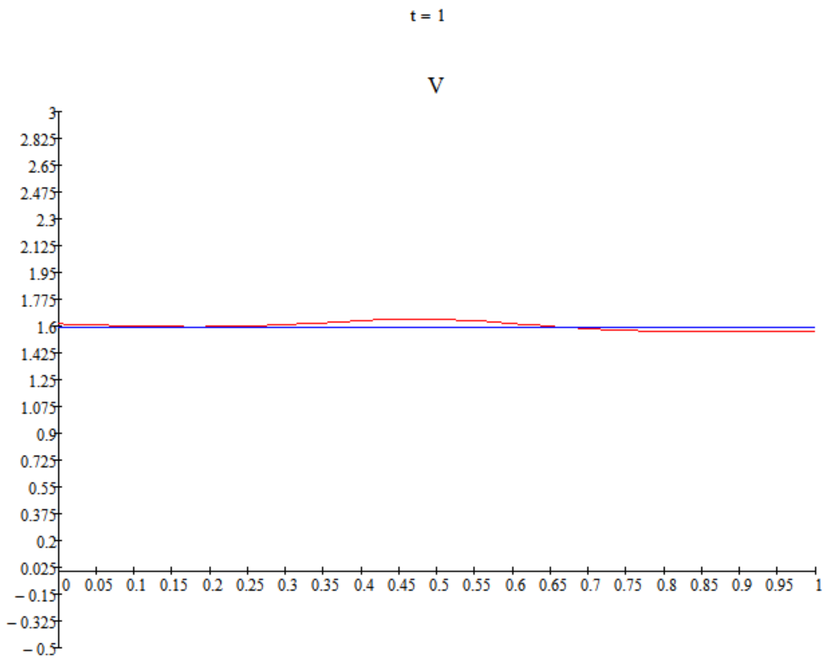
ნახ. 5


t = 0.5
V
3
2.825
2.65
2.475
2.3
2.125
1.95
1.775
1.6
1.425
1.25
1.075
0.9
0.725
0.55
0.375
0.2
0.025
− 0.15
− 0.325
− 0.5
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

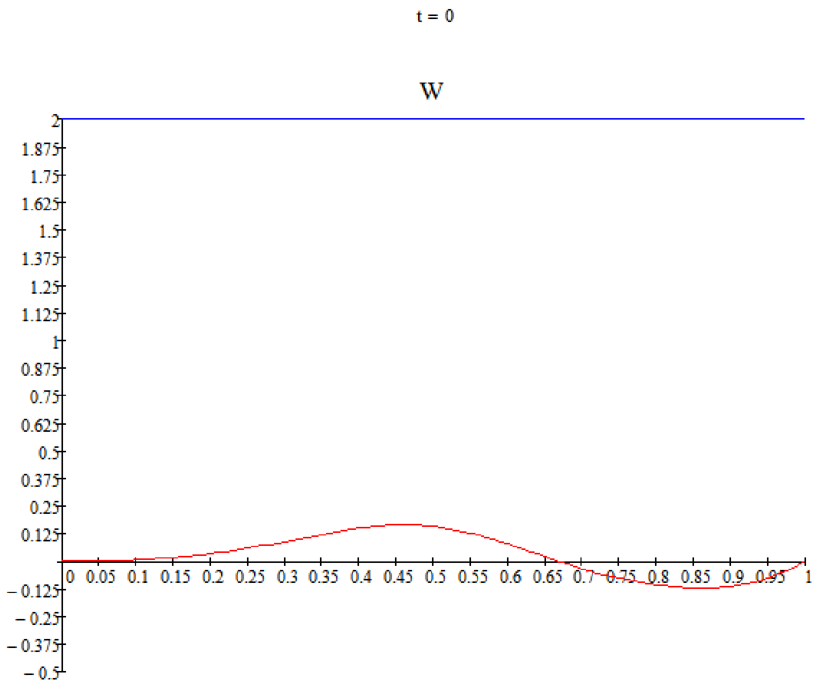
ნახ. 6



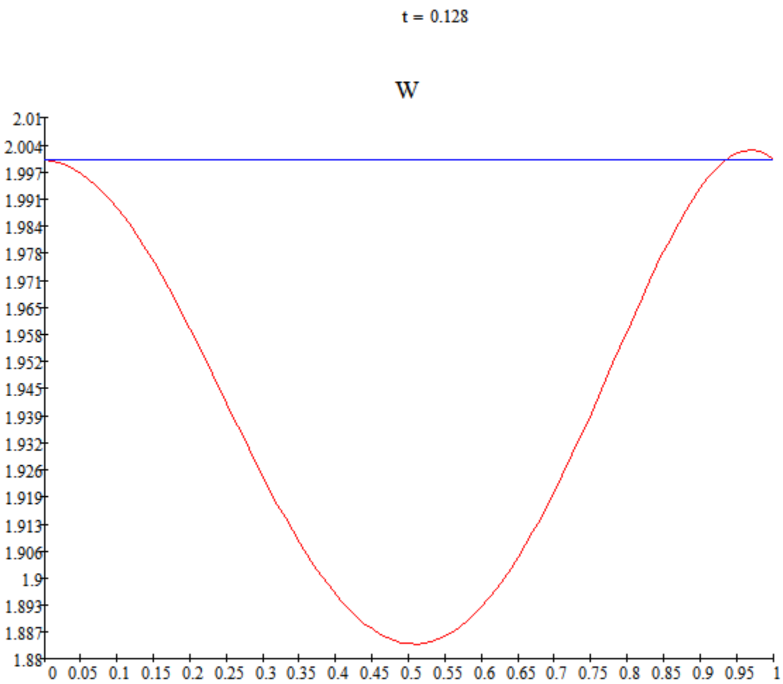
ნახ. 7



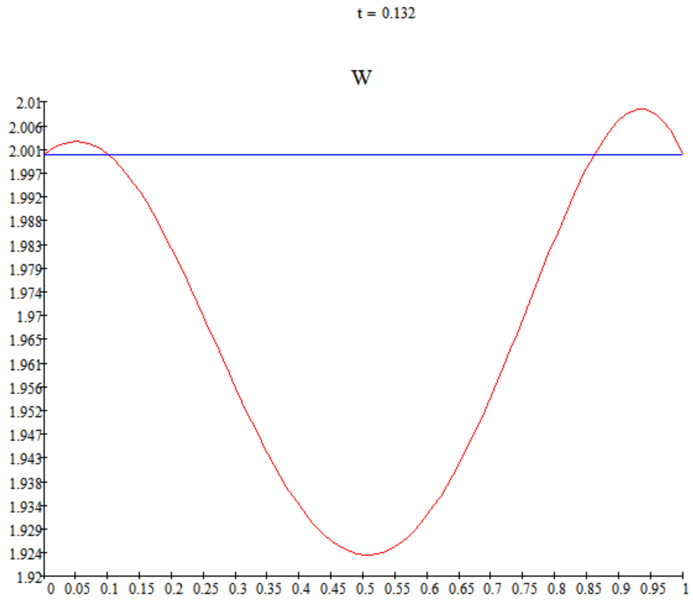
ნახ. 8



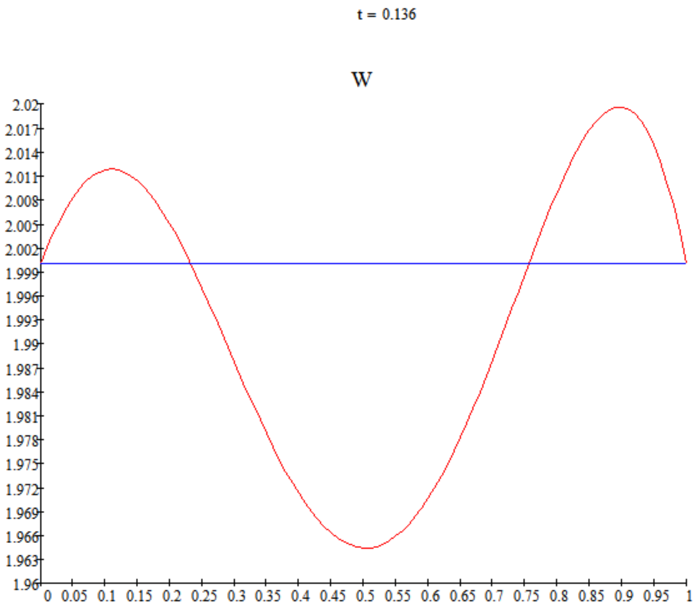
ნახ. 9



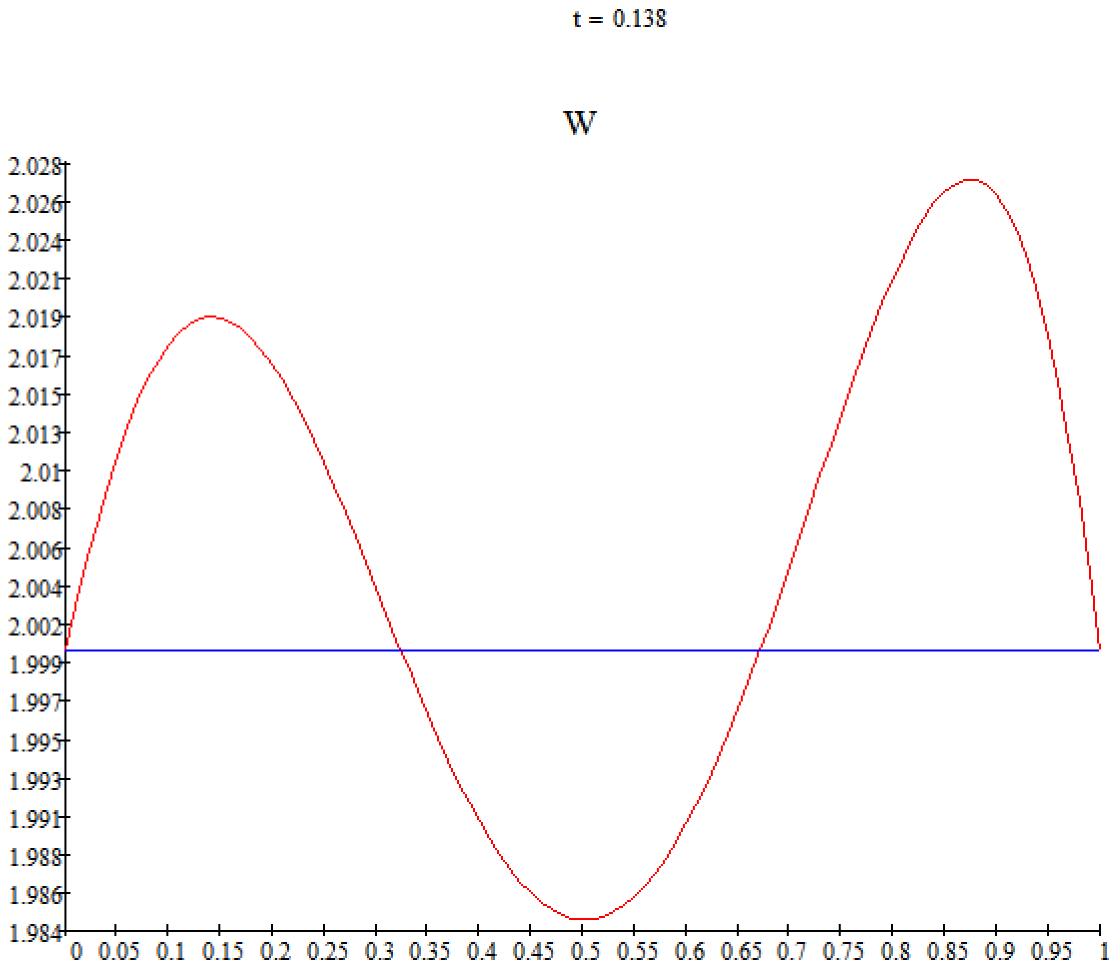
ნახ. 10



ნახ. 11



ნახ. 12


t = 0.138
W
2.028
2.026
2.024
2.021
2.019
2.017
2.015
2.013
2.01
2.008
2.006
2.004
2.002
1.999
1.997
1.995
1.993
1.991
1.988
1.986
1.984
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 13

ახლა მოვიყვანოთ [50] ნაშრომში შესწავლილი თეორიული საკითხების შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

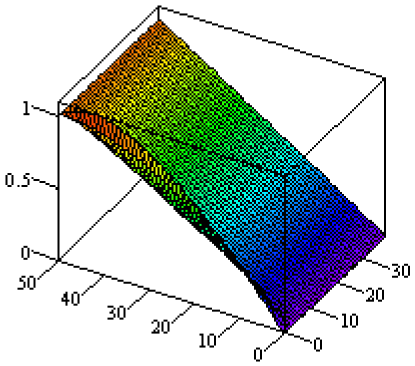
ვთქვათ, $\gamma = 1/2$ და $\beta = 1$, ე.ი. $\gamma - \beta < 0$. მაშასადამე, სამართლიანია

$$\alpha(\gamma-\beta)\left[\frac{b}{a}\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2$$

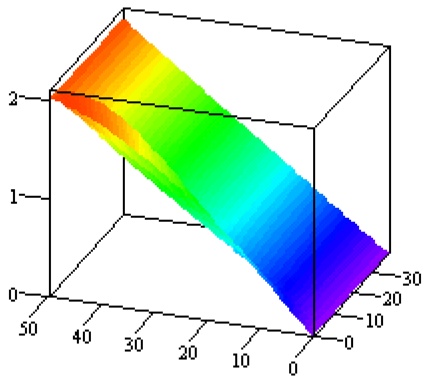
უტოლობა და შესაბამისად ადგილი აქვს წრფივად მდგრადობას.

ქვემოთ მოყვანილ სურათებში ა), ბ), გ) ნახაზები აღნიშნავენ შესაბამისად U, V და S ფუნქციების გრაფიკებს.

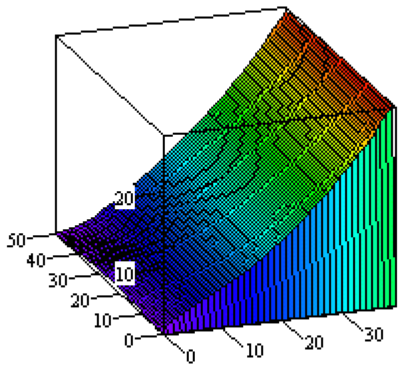
თუ დავუშვებთ, რომ $a = b = 1$, $\alpha = 1/2$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$ და $U_0(x) = \psi_1 x + \sin(\pi x)$, $V_0(x) = \psi_2 x + \cos(2\pi x) - 1$ და $S_0(x) = 1$, მაშინ გვაქვს შემდეგი სურათი:



ა



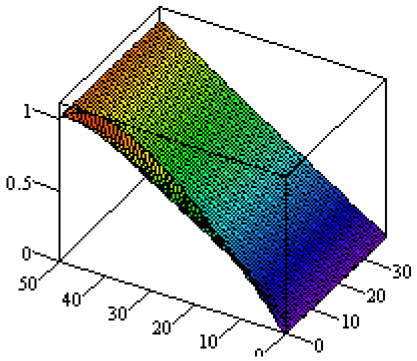
ბ

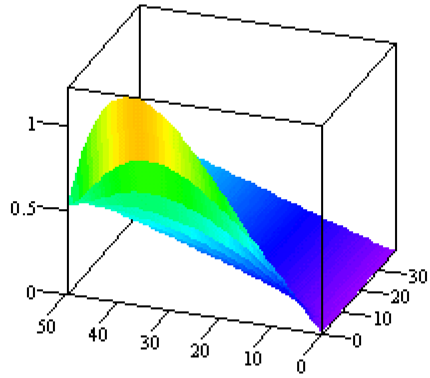


გ

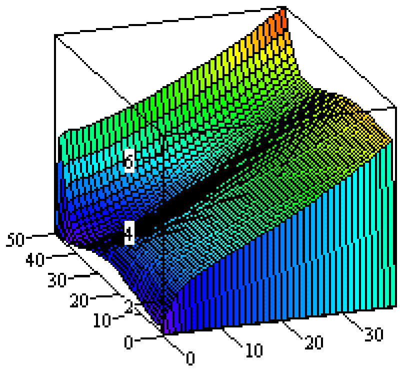
ნახ. 14

დავუშვათ, რომ $a=b=1$, $\alpha=\gamma=1/2$, $\beta=1/4$, $\psi_1=1$, $\psi_2=1/2$. ე.ი. $\gamma-\beta<0$, მაგრამ ზემოთ მოყვანილი უტოლობა მაინც სამართლიანია და იგივე საწყისი ფუნქციების შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი სურათი:





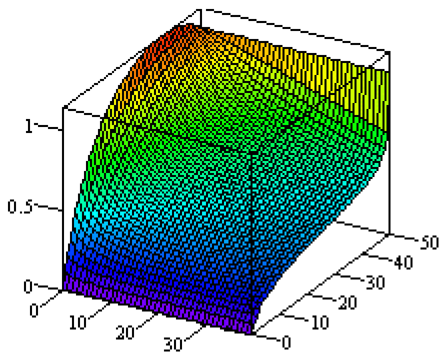
ა ბ

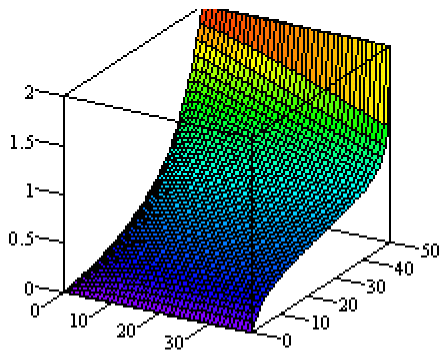


გ

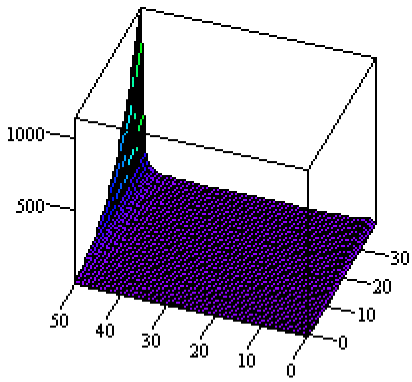
ნახ. 15

ვთქვათ, $a=b=1$, $\alpha=-0.8$, $\beta=-1$, $\gamma=0$, $\psi_1=1$, $\psi_2=2$, $U_0(x)=\psi_1 x+1-x^2$, $V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)(e^x-e^{-x})$, $S_0(x)=1$. ამ შემთხვევაში უტოლობა ირღვევა და შესაბამისად გვაქვს შემდეგი სურათი:





ა ბ

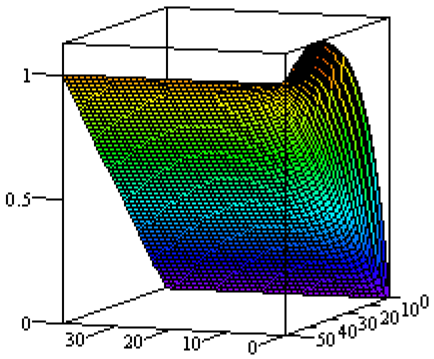


გ

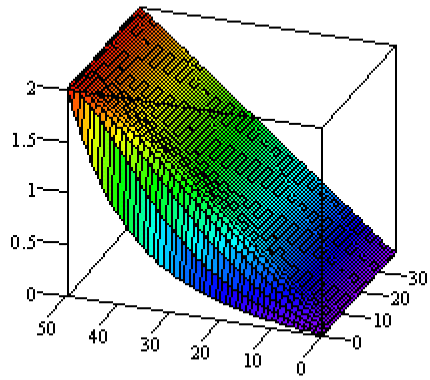
ნახ. 16

აქვე მოვიყვანოთ გლობალური მდგრადობის დამადასტურებელი სურათი. თუ $a=b=\alpha=\beta=1,\ \gamma=0,\quad \psi_1=1,\quad \psi_2=2,$ მაშინ ადგილი აქვს გლობალურად მდგრადობას [50] (იხილეთ თეორემა 1.4).

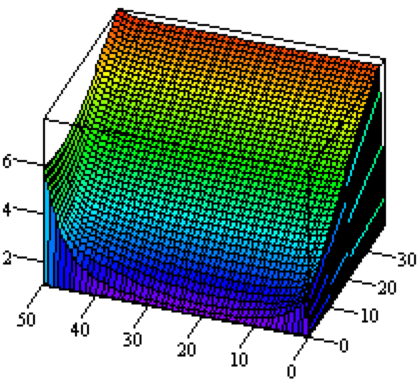
შესატყვისი გრაფიკული ილუსტრაცია მოყვანილია ნახ. 17-ზე



ა



ბ



გ

ნახ. 17

თავი II. არაგასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა და რიცხვითი ამოხსნა

ამ თავში შესწავლილია არაგასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ერთადერთობა, ასიმპტოტური ყოფაქცევა, ნახევ-რად-დისკრეტული და სასრულ-სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრება-დობა. აგებულია მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები, მოყვანილია ჩა-ტარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები და მათი ანალიზი.

§ 1. საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ერთი ორკომპონენტიანი სისტემისათვის. ერთადერთობის თეორემა

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორი ორკომპონენტიანია $H=(0,U,V)$, სადაც $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$ − დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციაა. ამ შემ-თხვევაში $rot\,H=\left(0,-\dfrac{\partial V}{\partial x},\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)$ და შედეგად მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგ-რო–დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right],\quad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right], \tag{38}$$

სადაც

$$S(x,t)=\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau, \tag{39}$$

განვიხილოთ (38), (39) სისტემის შესაბამისი წყაროს წევრებიანი მოდელი

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+|U|^{q-2}U=0, \tag{40}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+|V|^{q-2}V=0$$

და დავსვათ მისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0\ ,\ \ U(1,t)=\psi_1,\ \ V(1,t)=\psi_2,\ \ t\ge 0\,, \tag{41}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ \ V(x,0)=V_0(x),\ \ x\in[0,1], \tag{42}$$

$\psi_1=Const\ge 0,\ \ \psi_2=Const\ge 0,$ ხოლო a, U_0, V_0 თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია. დავუშვათ, რომ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$ და $q\ge 2.$ შევნიშნოთ, რომ როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\ne 0,$ მაშინ გვაქვს საწყის-სასაზღვრო ამოცანა საზღვრის მარჯვენა ბოლოზე ერთი მაინც არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი საქმე გვაქვს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებიან ამოცანასთან.

შევისწავლოთ (40)–(42) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

თეორემა 2.1. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1,\ \ q\ge 2$ და (40)–(42) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ (40)–(42) ამოცანას გააჩნია ორი განსხვავებული ამონახსნი $(U_1,\,V_1)$ და (U_2,V_2). განვიხილოთ სხვაობები $Z=U_1-U_2$ და $W=V_1-V_2$. აღნიშნული სხვაობებისთვის (40)–(42) ამოცანიდან ვღებულობთ:

$$\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial U_1}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial U_2}{\partial x}\right\}+|U_1|^{q-2}U_1-|U_2|^{q-2}U_2=0\,, \tag{43}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial V_1}{\partial x}-\right.$$

$$-\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial V_2}{\partial x}\Bigg\}+\left|V_1\right|^{q-2}V_1-\left|V_2\right|^{q-2}V_2=0$$

$$Z(0,t)=W(0,t)=Z(1,t)=W(1,t)=0,\quad t\geq 0\,, \tag{44}$$

$$Z(x,0)=0,\quad W(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{45}$$

გავამრავლოთ (43) სისტემის პირველი განტოლება Z ფუნქციაზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ $(0,1)$ არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის და (44) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Z\|^2+\int_0^1\Bigg\{\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial U_1}{\partial x}-\\&-\left(1+\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)^p\frac{\partial U_2}{\partial x}\Bigg\}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)dx+\\&+\int_0^1\left[\left|U_1\right|^{q-2}U_1-\left|U_2\right|^{q-2}U_2\right](U_1-U_2)\,dx=0\,.\end{aligned} \tag{46}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}&\left\{\left(1+\int_0^t\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)^2d\tau\right)^p\frac{\partial U_1}{\partial x}-\left(1+\int_0^t\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2d\tau\right)^p\frac{\partial U_2}{\partial x}\right\}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)=\\&=p\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2d\tau\right)^{p-1}\times\\&\times\frac{d}{d\tau}\left(\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)d\tau\right)^2d\xi+\\&+\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2d\tau\right)^p d\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2.\end{aligned}$$

ამ ტოლობის (46) ტოლობაში ჩასმით, მიღებული უტოლობის $(0,t)$ შუალედ-ზე ინტეგრებით და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვექნება

$$\|z\|^2 \le 2\int_0^1\int_0^t\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2 d\tau'\right)^p\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)^2 d\xi d\tau dx+$$

$$+p\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2 d\tau\right)^{p-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^t\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)d\tau\right)^2 d\xi-$$

$$-p(p-1)\int_0^1\int_0^t\int_0^1\left(1+\int_0^{t'}\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2 d\tau'\right)^{p-2}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]^2\times$$

$$\times\left(\int_0^{t'}\left[\frac{\partial U_2}{\partial x}+\xi\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)d\tau'\right)^2 d\xi d\tau=0.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, $0<p\le 1$ შეზღუდვის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\|z(t)\|^2\le 0.$$

მაშასადამე, $U_1\equiv U_2$. ამრიგად, თეორემა 2.1 ამონახსნის ერთადერთობის შესახებ დამტკიცებულია.

ანალოგიური შედეგები საწყის-სასაზღვრო ამოცანების სხვადასხვა შემთხვევებისთვის მიღებულია სხვა ნაშრომშიც.

§2. ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას

განვიხილოთ კვლავ წინა პარაგრაფში მოყვანილი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი და შევისწავლოთ ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას.

პირველად შევისწავლოთ ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა შემდეგი ერთკომპონენტიანი წყაროს წევრიანი ამოცანისათვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+|U|^{q-2}U=0, \qquad (47)$$

$$U(0,t)=U(1,t)=0,$$
$$U(x,0)=U_0(x), \qquad (48)$$

სადაც $U_0=U_0(x)$ არის მოცემული ფუნქცია.

თეორემა 2.2. თუ $a(S)\geq a_0=Const>0,\ U_0\in L_2(0,1),$ ხოლო $q\geq 2,$ მაშინ (47), (48) ამოცანის ამონახსნისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ასიმპტოტურ შეფასებას

$$\|U(x,t)\|\leq Ce^{-a_0 t}.$$

აქ $\|\cdot\|$ არის $L_2(0,1),$ სივრცის ნორმა.

დამტკიცება. გავამრავლოთ (47) განტოლება სკალარულად U ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და სასაზღვრო პირობების გამოყენებით გვაქვს:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2+\int_0^1 a(S)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx+\int_0^1|U|^{q-2}U^2dx=0.$$

აქედან, $a=a(S)$ ფუნქციის ქვემოდან შემოსაზღვრულობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\frac{d}{dt}\|U\|^2+2a_0\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\leq 0.$$

უკანასკნელი უტოლობის e^{2a_0} ფუნქციაზე გამრავლება გვაძლევს

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2a_0}\|U\|^2\right)\leq 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს თეორემა 2.2–ის სამართლიანობა.

ანალოგიური დებულება ასევე ადვილად მიიღება ორკომპონენტიანი წყაროს წევრებიანი (38), (39) სისტემისთვისაც. წყაროს წევრის გარეშე ხარისხოვანი სახის არაწრფივობას ჩვენ ქვემოთ განვიხილავთ და ამონახსნის ასიმპტოტურ ყოფაქცევას უფრო ძლიერ ნორმაშიც დავადგენთ.

ახლა განვიხილოთ კონკრეტული არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენცია-ლური მოდელი, რომელიც აღწერს გარემოში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესს ორკომპონენტიანი მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორის შემთხვევაში და შევისწავლოთ შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხი დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას.

გამოსაკვლევ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=0, \quad \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right]=0, \qquad (49)$$

$$U(0,t)=V(0,t)=0, \; U(1,t)=\psi_1, \; V(1,t)=\psi_2, \; t\ge 0, \qquad (50)$$

$$U(x,0)=U_0(x), \; V(x,0)=V_0(x), \; x\in\Omega, \qquad (51)$$

სადაც

$$S(x,t)=\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau, \qquad (52)$$

$\psi_1=Const\ge 0$, $\psi_2=Const\ge 0$, ხოლო $a=a(S)$, $U_0=U_0(x)$ და $V_0=V_0(x)$ კი თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

შევისწავლოთ (49)-(52) ამოცანის ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხი, როცა $t\to\infty$.

ვთქვათ, $Q=\Omega\times[0,\infty)$, $\Omega=(0,1)$. აღვნიშნოთ Ω არეზე p ხარისხით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე $L_p(\Omega)$ სიმბოლოთი, $C^k(\Omega)$ სიმბოლოთი k-ჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სივრცე, ხოლო $W_2^k(\Omega)$ სიმბოლოთი კი სობოლევის კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სივრცე, რომლებიც ინტეგრებადნი არიან თავიანთ k-ური რიგის განზოგადოებულ წარმოებულებთან ერთად.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\ne 0$. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.3. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$, $\psi_1^2+\psi_2^2\ne 0$ და U_0, V_0 ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: $U_0(0)=V_0(0)=0$, $U_0(1)=\psi_1$, $V_0(1)=\psi_2$, , $U_0, V_0 \in W_2^2(0,1)$ მაშინ (49)-(52) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური ფორმულები:

$$\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right| = \psi_1 + O\left(t^{-1-p}\right), \quad \left|\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right| = \psi_2 + O\left(t^{-1-p}\right).$$

თეორემა 2.3-ის დასამტკიცებლად წინასწარ ვაჩვენოთ რამდენიმე დამხმარე დებულების სამართლიანობა.

ლემა 2.4. (49)-(52) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შეფასე-ბები:

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial \tau}\right)^2 dxd\tau \le C, \quad \int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)^2 dxd\tau \le C, \quad t\ge 0\,.$$

დამტკიცება. გავაწარმოოთ (49) სისტემის პირველი განტოლება t ცვლადით

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[S^p \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} + pS^{p-1}\left(\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^3 + \frac{\partial U}{\partial x}\left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2\right)\right]. \tag{53}$$

გავამრავლოთ (53) განტოლება $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ სიდიდეზე და ვაინტეგროთ Ω არეზე. შედეგად გვექნება

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2 dx + p\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^3\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}dx \\ + p\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}dx = 0\,.\end{gathered} \tag{54}$$

(54) ტოლობის $(0,t)$ ინტერვალზე ინტეგრებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^t\int_0^1 S^p\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau + \frac{p}{4}\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4 dx$$

$$-\frac{p(p-1)}{4}\int_0^t\int_0^1 S^{p-2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau$$

$$+\frac{p}{2}\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}\right)^2 dx+\frac{p}{4}\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^4 dx\,.$$

რადგან $S(x,t)\ge 0$ და $0<p\le 1$, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+2\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau+p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\le C\,.$$

ანალოგიურად, (49) სისტემის მეორე განტოლების გამოყენებით გვექნება

$$\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx+2\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau+p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\le C$$

და შესაბამისად,

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+2\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2\right]dxd\tau$$

$$+\;p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\le C\,.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$p\int_0^t\int_0^1 S^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau=p\int_0^1 S^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$-p\int_0^1\left(\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V(x,0)}{\partial x}\right)^2 dx-p(p-1)\int_0^t\int_0^1 S^{p-2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dxd\tau\,.$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+2\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\le C. \tag{55}$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau\le\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

$$\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)^2 dxd\tau\le\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\tau\,\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

მივიღებთ ლემა 2.4-ის სამართლიანობას.

ლემა 2.5. $S(x,t)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია შეფასება

$$c\phi^{\frac{1}{1+2p}}(t)\le S(x,t)\le C\phi^{\frac{1}{1+2p}}(t),\qquad t\ge 0,\ x\in\Omega,$$

სადაც

$$\phi(t)=1+\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dxd\tau, \tag{56}$$

ხოლო $\sigma_1=S^p\frac{\partial U}{\partial x}$, $\sigma_2=S^p\frac{\partial V}{\partial x}$.

დამტკიცება. გადავწეროთ (52) შემდეგი ფორმით

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,\qquad S(x,0)=0.$$

თუ ამ განტოლებას გავამრავლებთ $(1+S)^{2p}$ ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$\frac{1}{1+2p}\frac{\partial(1+S)^{1+2p}}{\partial t}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2(1+S)^{2p}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 S^{2p}.$$

ჩავწეროთ (49) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_1}{\partial x},\ \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}.$$

გვაქვს

$$\frac{1}{1+2p}\frac{\partial(1+S)^{1+2p}}{\partial t}=\sigma_1^2+\sigma_2^2, \tag{57}$$

$$\sigma_1^2(x,t)=\int_0^1\sigma_1^2(y,t)\,dy+2\int_0^1\int_y^x\sigma_1(\xi,t)\frac{\partial U(\xi,t)}{\partial t}\partial\xi\,dy,$$

$$\sigma_2^2(x,t)=\int_0^1\sigma_2^2(y,t)\,dy+2\int_0^1\int_y^x\sigma_2(\xi,t)\frac{\partial V(\xi,t)}{\partial t}d\xi\,dy.$$

ლემა 2.4-ისა და (56), (57) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{1+2p}(1+S)^{1+2p}=\int_0^t\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)d\tau+\frac{1}{1+2p}$$

$$=\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right)dy\,d\tau+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_1(\xi,\tau)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi\,dy\,d\tau$$

$$+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_2(\xi,\tau)\frac{\partial V(\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi\,dy\,d\tau+\frac{1}{1+2p}$$

$$\le 2\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right)dy\,d\tau+C+\frac{1}{1+2p}\le C_1\phi(t).$$

ე.ი

$$S(x,t)\le C\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t)\ . \tag{58}$$

ანალოგიურად,

$$\frac{1}{1+2p}(1+S)^{1+2p}=\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,\tau)+\sigma_2^2(y,\tau)\right)dy\,d\tau$$

$$+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_1(\xi,\tau)\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi\,dy\,d\tau+2\int_0^t\int_0^1\int_y^x\sigma_2(\xi,\tau)\frac{\partial V(\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi\,dy\,d\tau \tag{59}$$

$$+\frac{1}{1+2p}\ \ge\ \frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\left(\sigma_1^2(y,t)+\sigma_2^2(y,t)\right)dy\,d\tau-\ C_2\ =\frac{1}{2}\varphi(t)-C_3.$$

რადგან $1+2p>0$ და (52) ტოლობიდან გამომდინარე $S(x,t)\ge 0,$ ამიტომ

$$C_3(1+S)^{1+2p}\ \ge C_3. \tag{60}$$

შევკრიბოთ (59) და (60) უტოლობები, მივიღებთ

$$\left(\frac{1}{1+2p}+C_3\right)(1+S)^{1+2p}\ge\frac{1}{2}\varphi(t),$$

ანუ

$$S(x,t)\ge c\,\varphi^{\frac{1}{1+2p}}(t). \tag{61}$$

საბოლოოდ, (58) და (61) შეფასებებიდან გამომდინარეობს ლემა 2.5-ის სამართლიანობა.

ლემა 2.6. სამართლიანია შეფასება

$$c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\le\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t).$$

დამტკიცება. ლემა 2.5-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx=\int_0^1(1+S)^{2p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$\ge c\phi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\ge c\phi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left\{\left[\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}dx\right]^2+\left[\int_0^1\frac{\partial V}{\partial x}dx\right]^2\right\}$$

$$=\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t),$$

ანუ

$$\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\ge c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t). \tag{1.24}$$

შევნიშნოთ, რომ (55) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2dx\le C,\quad \int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2dx\le C,\qquad t\ge 0\cdot \tag{1.25}$$

გავამრავლოთ (49) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად U და V ფუნქციებზე. Ω არეზე ინტეგრებით (50) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით გვექნება:

$$\int_0^1 U\frac{\partial U}{\partial t}dx+\int_0^1(1+S)^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx=\psi_1\sigma_1(1,t),$$

$$\int_0^1 V\frac{\partial V}{\partial t}dx+\int_0^1(1+S)^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx=\psi_2\sigma_2(1,t).$$

საბოლოოდ, თუ გავითვალისწინებთ უკანასკნელ ტოლობებს, (58), (62), (63) შეფასებებს, კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობას და გამოვიყენებთ მაქსიმუმის პრინციპს

$$\left|U(x,t)\right|\le\max_{0\le y\le 1}\left|U_0(y)\right|,\quad \left|V(x,t)\right|\le\max_{0\le y\le 1}\left|V_0(y)\right|,\ 0\le x\le 1,\quad t\ge 0,$$

გვექნება

$$\left\{\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\right\}^2 \le 2\left\{\int_0^1\sigma_1^2(x,t)dx\right\}^2$$

$$+\,2\left\{\int_0^1\sigma_2^2(x,t)dx\right\}^2 \le 2C_1\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)$$

$$\left[\left\{\int_0^1(1+S)^p\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx\right\}^2+\left\{\int_0^1(1+S)^p\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx\right\}^2\right]$$

$$\le 4C_1\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1\,\sigma_1(1,t)\right)^2+\left(\int_0^1U\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dx\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\psi_2\,\sigma_2(1,t)\right)^2+\left(\int_0^1V\,\frac{\partial V}{\partial t}\,dx\right)^2\right]\le 4C_1\,\phi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)$$

$$\times\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left(\sigma_1^2(1,t)+\sigma_2^2(1,t)\right)+2\left\{\left(\max_{0\le y\le 1}\left|U_0(y)\right|\right)^4+\left(\max_{0\le y\le 1}\left|V_0(y)\right|\right)^4+C_2\right\}\right]$$

$$\le 4C_1\phi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left(\int_0^1\frac{\partial\sigma_1^2}{\partial x}dx+\sigma_1^2(0,t)+\int_0^1\frac{\partial\sigma_2^2}{\partial x}dx+\sigma_2^2(0,t)\right)+C_3\right]$$

$$\le\ 4C_1\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_2^2\right)\left\{\int_0^1\sigma_1^2dx+\int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}\right)^2dx\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^1\sigma_2^2dx+\int_0^1\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}\right)^2dx+C_4\right\}+C_3\right]\le\ 4C_1\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)$$

$$\left[\left(\psi_1^2+\psi_1^2\right)\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx+C_5\right]$$

$$\le\ 4C_1\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\left[\left(\psi_1^2+\psi_1^2\right)\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx+\frac{C_5}{\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)}\int_0^1\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)dx\right]C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)$$

$$\times\int_0^1\left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right)dx\,.$$

ე.ი.

$$\int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t) + \sigma_2^2(x,t)\right) dx \le C\,\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t).$$

უკანასკნელი შეფასებისა და (62) თანაფარდობებიდან გამომდინარეობს ლემა 2.6-ის სამართლიანობა.

ლემა 2.7. ადგილი აქვს შეფასებებს:

$$c\,t^{2p} \le \int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx \le Ct^{2p},$$

$$ct \le S(x,t) \le Ct, \quad x\in\Omega, \quad t\ge 1.$$

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\frac{d\,\varphi(t)}{dt} = \int_0^1 \left(\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\right) dx,$$

გვექნება

$$c\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t) \le \frac{d\,\varphi(t)}{dt} \le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t), \quad t\ge 1.$$

აქედან კი ინტეგრებით ვღებულობთ

$$ct^{1+2p} \le \phi(t) \le Ct^{1+2p}, \quad t\ge 1.$$

უკანასკნელი შეფასება ლემა 2.5 და ლემა 2.6-თან ერთად გვაძლევს ლემა 2.7-ის სამართლიანობას.

ლემა 1.5. $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციებისთვის სამართლიანია შეფასება

$$\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right] dx \le Ct^{-2}, \quad t\ge 1.$$

დამტკიცება. კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გათვალისწინებით (54) გვაძლევს

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^1 (1+S)^p \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2 dx \le 2p^2 \int_0^1 (1+S)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^6 dx$$
$$+ 2p^2 \int_0^1 (1+S)^{p-2} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4 dx. \qquad (64)$$

ლემა 2.7-ის, $\sigma_1 = S^p \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\sigma_2 = S^p \dfrac{\partial V}{\partial x}$ დამოკიდებულებების და

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}\right)^2 dx = -\int_0^1 \sigma_1 \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} dx, \qquad \int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right)^2 dx = -\int_0^1 \sigma_2 \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2} dx$$

ტოლობების გამოყენებით (64) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + ct^p \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right)^2 dx \le C_1 \frac{t^{p-2}}{t^{6p}} \int_0^1 \left(\sigma_1^6 + \sigma_1^2 \sigma_2^4\right) dx$$

$$\le C_1 t^{-5p-2} \int_0^1 \sigma_1^2 (x,t) dx \left(\left\{ \max_{0 \le x \le 1} \sigma_1^2 (x,t) \right\}^2 + \left\{ \max_{0 \le x \le 1} \sigma_2^2 (x,t) \right\}^2 \right)$$

$$\le C_2 t^{-3p-2} \left(\left\{ \int_0^1 \sigma_1^2 \, dx + 2 \left[\int_0^1 \sigma_1^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \sigma_2^2 dx + 2 \left[\int_0^1 \sigma_2^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \right)$$

$$\le C_2 t^{-3p-2} \left(\left\{ \int_0^1 \sigma_1^2 dx + 2 \left[\int_0^1 \sigma_1^2 dx \right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{4}} \right\}^2 \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_0^1 \sigma_2^2 dx + 2 \left[\int_0^1 \sigma_2^2 dx \right]^{\frac{3}{4}} \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{4}} \right\}^2 \right)$$

$$\le C_3 t^{p-2} + C_4 t^{-3p-2} t^{3p} \left(\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\le C_3 t^{p-2} + C_5 t^{-p-4} + \frac{c t^p}{4} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} \right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \right).$$

აქედან კი, რადგან $p-2 > -p-4$, გვაქვს

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{c}{4} t^p \int_0^1 \left[3\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x}\right)^2 \right] dx \le C t^{p-2}, \quad t \ge 1.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx+\frac{c}{4}t^p\int_0^1\left[3\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2\right]dx\le C\,t^{p-2},\quad t\ge 1.$$

უკანასკნელი უტოლობების შეკრებით ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+\frac{c}{2}t^p\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}\right)^2\right]dx\le Ct^{p-2},\ t\ge 1. \tag{65}$$

პუანკარეს უტოლობის შემდეგი ფორმით გამოყენება

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|\le\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right\|,\qquad \left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|\le\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}\right\|, \tag{66}$$

და (65) გვაძლევს

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx+\frac{c\,t^p}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]dx\le Ct^{p-2},$$

საიდანაც გრონუოლის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ ლემა 2.8-ის სამართლიანობას.

ლემა 2.9. $\frac{\partial S}{\partial x}$ ფუნქციისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\int_0^1\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|dx\le Ct^{-p}.$$

დამტკიცება. გავაწარმოოთ (57) ტოლობა x ცვლადით

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1+S)^{2p}\frac{\partial S}{\partial x}\right]=2\sigma_1\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+2\sigma_2\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}=2\sigma_1\frac{\partial U}{\partial t}+2\sigma_2\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{67}$$

ლემა 2.7 და ლემა 2.8-დან კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის გამოყენებით გამომდინარეობს, რომ:

$$\left|\int_0^1\sigma_1\frac{\partial U}{\partial t}dx\right|\le Ct^pt^{-1}=Ct^{p-1},\qquad \left|\int_0^1\sigma_2\frac{\partial V}{\partial t}dx\right|\le Ct^pt^{-1}=Ct^{p-1},$$

საიდანაც ლემა 2.7 და (67) ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$(1+S)^{2p}\frac{\partial S}{\partial x}=\int_0^t\left(2\sigma_1\frac{\partial U}{\partial\tau}+2\sigma_2\frac{\partial V}{\partial\tau}\right)d\tau,$$

$$\int_0^1\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|dx\le\frac{1}{c}t^{-2p}\int_0^t C_1\tau^{p-1}d\tau=Ct^{-p}.$$

ამრიგად, ლემა 2.9 დამტკიცებულია.

ახლა უკვე შესაძლებელია თეორემა 2.3-ის დამტკიცება. ამისთვის შევაფასოთ $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ წარმოებული $L_1(\Omega)$ სივრცის ნორმით. გვაქვს:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sigma_1 (1+S)^{-p}, \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}(1+S)^{-p} - p\sigma_1 (1+S)^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\sigma_1^2(x,t) \le \int_0^1 \sigma_1^2(y,t)\,dy + 2\int_0^1 |\sigma_1(y,t)| \left|\frac{\partial U(y,t)}{\partial t}\right| dy \le C_1 t^{2p} + C_2 t^{-2}.$$

აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\sigma_1(x,t) \le Ct^p, \quad t \ge 1. \tag{68}$$

საბოლოოდ ლემა 2.7, ლემა 2.8, ლემა 2.9-სა და (68) თანაფარდობის გათვალისწინებით ვასკვნით

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right| dx \le \int_0^1 \left|\frac{\partial U}{\partial t}(1+S)^{-p}\right| dx + |p| \int_0^1 \left|\sigma_1 (1+S)^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x}\right| dx$$

$$\le \left[\int_0^1 (1+S)^{-2p}\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^1 \left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} + |p| \int_0^1 \left|\sigma_1 (1+S)^{-p-1}\frac{\partial S}{\partial x}\right| dx \le Ct^{-1-p}.$$

მაშასადამე, გვაქვს

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}\right| dx \le Ct^{-1-p}, \quad t \ge 1.$$

აქედან კი, შემდეგი ტოლობის მხედველობაში მიღებით

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial U(y,t)}{\partial y} dy + \int_0^1 \int_y^x \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}\, d\xi\, dy,$$

გამომდინარეობს შეფასება

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - \psi_1 = \int_0^1 \int_y^x \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}\, d\xi\, dy \le \int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U(y,t)}{\partial y^2}\right| dy \le Ct^{-1-p}.$$

ანალოგიურად,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} - \psi_2 \le Ct^{-1-p}.$$

ამრიგად, თეორემა 2.3 დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\psi_1 = \psi_2 = 0.$ ანუ განვიხილოთ ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები და უსასრულო Q ცილინდრში შევისწავლოთ ამონახსნის სტაბილიზაციის საკითხი შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 , \tag{69}$$

$$U(0,t) = U(1,t) = V(0,t) = V(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{70}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \quad V(x,0) = V_0(x), \quad x \in (0,1) \tag{71}$$

სადაც

$$S(x,t) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau , \tag{72}$$

ხოლო $a(S) = (1+S)^p$, $0 < p \leq 1.$

ლემა 2.10. (69)-(72) ამოცანის ამონახსნისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|U\| + \|V\| \leq C \exp(-t).$$

დამტკიცება. გავამრავლოთ (69) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად U და V ფუნქციებზე. ვაინტეგროთ მიღებული ტოლობები (0,1) შუალედზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და (70) სასაზღვრო პირობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U\|^2 + \|V\|^2\right) + \int_0^1 (1+S)^p \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx = 0. \tag{73}$$

აქედან პუანკარეს უტოლობა გვაძლევს

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U\|^2 + \|V\|^2\right) + \|U\|^2 + \|V\|^2 \leq 0. \tag{74}$$

არ არის ძნელი იმის ჩვენება რომ (74) უტოლობიდან გამომდინარეობს ლემა 2.10-ის სამართლიანობა.

შევნიშნოთ, რომ ლემა 2.10 გვაძლევს (69)-(72) ამოცანის ამონახსნის ექსპონენციალურ სტაბილიზაციას $L_2(0,1)$ ნორმის აზრით. ვაჩვენოთ, რომ სტაბილიზაცია არის აგრეთვე მიღწევადი $C^1(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრითაც.

ამისათვის ჯერ ვაჩვენოთ რომ სტაბილიზაციას ადგილი აქვს $H^1(0,1)$ სივრცეში. კერძოდ, ვაჩვენოთ რომ სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.11. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$, $U_0,V_0\in H^2(0,1)$, $U_0(0)=V_0(0)=U_0(1)=V_0(1)=0$, მაშინ (69)-(72) ამოცანის ამონახსნისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი შეფასება

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|\le C\exp\left(-\frac{1}{2}t\right).$$

დამტკიცება. გავაწარმოოთ დროით ცვლადით (69) სისტემის პირველი განტოლება და (73) ტოლობა. გვაქვს:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\frac{d}{dt}\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx=0. \tag{75}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial(1+S)^p}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}+(1+S)^p\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right]=0. \tag{76}$$

გავამრავლოთ (76) სკალარულად $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ ფუნქციაზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის, $S(x,t)\ge 0$ უტოლობისა (70) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+2\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right\|^2+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4dx\\+p\int_0^1(1+S)^{p-1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx\le 0.\end{gathered} \tag{77}$$

ანალოგიურად,

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+2\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial t\partial x}\right\|^2+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4dx\\+p\int_0^1(1+S)^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx\le 0.\end{gathered} \tag{78}$$

პუანკარეს (66) უტოლობის გამოყენებით (77) და (78) თანაფარდობებიდან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+2\left(\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial t\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+$$

$$+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx+ \tag{79}$$

$$+p\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le 0.$$

გავამრავლოთ (73)-(75) დამოკიდებულებები შესაბამისად α,β და γ დადებით მუდმივებზე და მიღებულ თანაფარდობებს დავუმატოთ (79) შეფასება

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\frac{d}{dt}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\alpha\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$\beta\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx+\frac{d}{dt}\left(\left[\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right]\right)$$

$$+2\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^4+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^4\right]dx+$$

$$+p\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le 0.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\frac{2\beta}{\alpha+\beta}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)\right]+$$

$$+\gamma\left\{\frac{d}{dt}\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx+\frac{\alpha}{\gamma}\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\} \tag{80}$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+2\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)$$

$$\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\le 0.$$

თუ მოვითხოვთ რომ $\dfrac{2\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}=1,$ მაშინ $\alpha=\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\gamma.$ ამ ტოლო-ბების გათვალისწინებით (80)-დან გვექნება

$$\gamma\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)\right]+\gamma\frac{d}{dt}\left\{\exp(t)\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}$$

$$+\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\right]+\exp(t)\left\{\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right.$$

$$\left.\frac{\gamma}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\frac{p}{2}\int_0^1(1+S)^p\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\right\}\le 0.$$

მიღებული შეფასების ინტეგრება, (71) საწყისი პირობების გათვალის-წინებით გვაძლევს

$$\begin{gathered}\gamma\exp(t)\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\gamma\exp(t)\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\\
+\exp(t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+\int_0^1\exp(\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial \tau}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial \tau}\right\|^2\right)d\tau\\
+\frac{\gamma}{2}\int_0^1\exp(t)\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau \qquad (81)\\
+\frac{p}{2}\int_0^1\exp(t)\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\,d\tau\le C.\end{gathered}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{gathered}\int_0^1\exp(t)\int_0^1(1+S)^{p-1}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2\right\}dx\,d\tau \qquad (82)\\
=\exp(t)\int_0^1(1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2dx\end{gathered}$$

$$-\int_0^1 (1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dx\Bigg|_{t=0}$$

$$-\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dxd\tau$$

$$-(p-1)\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^{p-2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dxd\tau$$

$$\geq \int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dxd\tau - C.$$

ასევე

$$\int_0^1 \exp(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\|U\|^2\,d\tau = \exp(t)\frac{d}{dt}\|U\|^2 - \int_0^t \exp(\tau)\frac{d}{d\tau}\|U\|^2\,d\tau - \frac{d}{dt}\|U\|^2\Bigg|_{t=0}$$

$$= 2\exp(t)\int_0^1 U\frac{dU}{dt}dx - \exp(t)\|U\|^2 + \int_0^t \exp(\tau)\|U\|^2\,d\tau + \|U_0\|^2 - \frac{d}{dt}\|U\|^2\Bigg|_{t=0}.$$

ანალოგიურად,

$$\int_0^1 \exp(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\|V\|^2\,d\tau = 2\exp(t)\int_0^1 V\frac{dV}{dt}dx - \exp(t)\|V\|^2$$

$$+\int_0^t \exp(\tau)\|V\|^2\,d\tau + \|V_0\|^2 - \frac{d}{dt}\|V\|^2\Bigg|_{t=0}.$$

უკანასკნელი ტოლობებიდან კოშის უტოლობის გამოყენებით, ვღებულობთ

$$\int_0^1 \exp(\tau)\frac{d^2}{d\tau^2}\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)d\tau \geq -(\varepsilon+1)\exp(t)\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\exp(t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+C. \tag{83}$$

გავამრავლოთ (76) სკალარულად U ფუნქციაზე, გვაქვს

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} U dx + \int_0^1 \frac{\partial \left(1+S\right)^p}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+S\right)^p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx = 0.$$

აგრეთვე,

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} V dx + \int_0^1 \frac{\partial \left(1+S\right)^p}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1+S\right)^p \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx = 0.$$

მარტივი გარდაქმნების შემდეგ უკანასკნელი ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\mu\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} U + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} V\right) dx d\tau$$

$$+\mu p\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dx d\tau$$

$$+\frac{\mu}{2}\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^p \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx d\tau = 0.$$

სადაც $\mu = const > 0.$.

აქედან, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით, გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}
&\mu \exp(t)\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} U dx - \mu\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial x} U dx d\tau - \mu\int_0^t \exp(\tau)\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 d\tau \\
&+\mu \exp(t)\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x} V dx - \mu\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x} v dx d\tau - \mu\int_0^t \exp(\tau)\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2 d\tau \\
&+\mu p\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2 dx d\tau + \\
&+\frac{\mu}{2}\int_0^t \exp(\tau)\int_0^1 (1+S)^p \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx d\tau = C.
\end{aligned} \tag{84}$$

გავამრავლოთ (69) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები სკალა-რულად შესაბამისად $\frac{\partial U}{\partial t}$ და $\frac{\partial V}{\partial t}$ ფუნქციებზე. გვაქვს:

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1(1+S)^p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2dx=0,$$

$$\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1(1+S)^p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2dx=0.$$

ამ თანაფარდობების და (73) ტოლობის გამოყენებით (84) დამოკიდებულები-დან ვღებულობთ

$$\begin{gathered}-\varepsilon'\mu\exp(t)\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)-\frac{\mu\exp(t)}{4\varepsilon'}\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)\\
+\mu\int_0^t\exp(\tau)\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dxd\tau\\
-\mu\int_0^t\exp(\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)d\tau \qquad (85)\\
+\mu p\int_0^t\exp(\tau)\int_0^1(1+S)^p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]^2dxd\tau\\
-\mu\int_0^t\exp(\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|^2\right)d\tau\le C.\end{gathered}$$

ლემა 2.10-დან ნებისმიერი $\eta=const>0$-თვის ვღებულობთ

$$\eta\exp(t)\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)\le C. \qquad (86)$$

გვაქვს

$$\begin{gathered}\exp(t)\left[\left(\gamma-\frac{\gamma(\varepsilon+1)}{2}-\mu\varepsilon'+\eta\right)\right]\left(\|U\|^2+\|V\|^2\right)+\gamma\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)\\
+\left(1-\frac{\gamma}{2\varepsilon}-\frac{\mu}{4\varepsilon'}\right)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)+(1-2\mu)\int_0^t\exp(t)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)d\tau\\
+p\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\int_0^t\exp(t)\int_0^1(1+S)^{p-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right]^2dxd\tau\end{gathered}$$

$$+\mu\int_0^t \exp(\tau)\left(\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|^2\right)d\tau \le C.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ მიღებული უტოლობების მარცხენა ნაწილში მყოფი კოეფიციენტები შეიძლება ავარჩიოთ ისეთნაირად რომ ისინი იყვნენ დადებითები (მაგალითად: $\mu=1/2$, $\varepsilon=\varepsilon'=1$, $\gamma<7/4$ და $\eta\ge 1/2$).

ამგვარად, უკანასკნელი უტოლობიდან ვღებულობთ თეორემა 2.11-ის სამართლიანობას.

თეორემა 2.12. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$, $U_0,V_0\in H^2(0,1)$, $U_0(0)=V_0(0)=U_0(1)=V_0(1)=0$, მაშინ (69)-(72) ამოცანის ამონახსნისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი შეფასებები:

$$\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|\le C\exp\left(-\frac{t}{2}\right),\qquad \left|\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|\le C\exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

დამტკიცება. თეორემა 2.11-ის გამოყენებით შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ ლემა 2.5 სამართლიანია (69)-(72) ამოცანისთვისაც. აღნიშნული ლემის, (56) ტოლობის და თეორემა 2.11-ის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=\int_0^1(1+S)^{2p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le C\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\exp(-t),$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\frac{2p}{1+2p}}(t)\right)\le C\exp(-t).$$

მიღებული შეფასების $(0,t)$ ინტერვალზე ინგტეგრებით და (56) ტოლობის გათვალისწინებით ვასკვნით, რომ ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას

$$1\le\varphi(t)\le C.$$

აქედან, ლემა 2.5-ის გამოყენებით, გვექნება

$$1\le 1+S(x,t)\le C. \tag{87}$$

თუ გავითვალისწინებთ (57) ტოლობებს, (87) შეფასებას და თეორემა 2.11-ს, მივიღებთ

$$\sigma_1^2(x,t)+\sigma_2^2(x,t)\le 2\int_0^1 (1+S)^{2p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx$$

$$+\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\le C\exp(-t),$$

ანუ:

$$\left|\sigma_1(x,t)\right|\le C\exp\left(-\frac{t}{2}\right),\qquad \left|\sigma_2(x,t)\right|\le C\exp\left(-\frac{t}{2}\right),$$

მიღებული შეფასებები, (87) შეფასებასთან და σ_1, σ_2 ფუნქციების განსაზღვრებებთან ერთად ამტკიცებს თეორემა 2.12-ს.

§3. ნახევრად-დისკრეტული სქემა ერთგანზომილებიანი ერთკომპონენტიანი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის

ახლა ერთგანზომილებიანი ერთკომპონენტიანი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის შემთხვევისთვის შევისწავლოთ შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული სქემის კრებადობა. გარკვეული მრავალფეროვნებისთვის განვიხილოთ შერეული სასაზღვრო პირობებიანი შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1+\int_0^t\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau\right)^p\frac{\partial U}{\partial x}\right]+|U|^{q-2}U=0, \tag{88}$$

$$U_0(0,t)=\left.\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|_{x=1}=0, \tag{89}$$

$$U(x,0)=U_0(x), \tag{90}$$

სადაც $0<p\le 1$ და $q\ge 2$.

არეზე $[0,1]$ შემოვიტანოთ ბადე, რომლის კვანძითი წერტილებია $x_i = ih,\ i = 0,1,...,M,\ h = 1/M$ ბიჯით. საზღვრები კი განსაზღვრულია $i = 0$ და $i = M$ წერტილებით. ნახევრად-დისკრეტული მიახლოება (x,t) წერტილში აღვნიშნოთ $u_i = u_i(x)$ ბადური ფუნქციით, ხოლო ამოცანის ზუსტი ამონახსნი იმავე წერტილში კი $U_i = U_i(x)$ ფუნქციით. კვლავ შემოვიტანოთ სკალარული ნამრავლების, შესაბამისი ნორმების და გაყოფილი სხვაობების ცნობილი აღნიშვნები:

$$(u,v) = h\sum_{i=1}^{M-1} u_i v_i,\ (u,v] = h\sum_{i=1}^{M} u_i v_i,$$

$$\|u\| = (u,u)^{1/2},\ \ \|u]| = (u,u]^{1/2},$$

$$u_{x,i}(t) = \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{h},\ \ u_{\bar{x},i}(t) = \frac{u_i(t) - u_{i-1}(t)}{h},$$

და შევუსაბამოთ (88)-(90) ამოცანას შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული სქემა:

$$\frac{du_i}{dt} - \left\{ \left(1 + \int_0^t \left(u_{\bar{x},i}\right)^2 d\tau\right)^p u_{\bar{x},i} \right\}_x + |u_i|^{q-2} u_i = 0, \tag{91}$$

$$i = 1,...,M-1,$$

$$u_0(0,t) = u_{\bar{x}}(1,t) = 0, \tag{92}$$

$$u_0(0) = U_{0,i},\ i = 0,...,M, \tag{93}$$

მაშასადამე, მივიღეთ (91)-(93) კოშის ამოცანა ჩვეულებრივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემისთვის.

გავამრავლოთ (91) განტოლება $u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{M-1}(t))$, ფუნქციაზე სკალარულად. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + h\sum_{i=1}^{M}\left(1 + \int_0^t \left(u_{\bar{x},i}\right)^2 d\tau\right)^p \left(u_{\bar{x},i}\right)^2 \le 0.$$

აქედან კი გამომდინარეობს შემდეგი შეფასება

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{\bar{x}}]|^2 d\tau \le C, \tag{94}$$

სადაც, ამ პარაგრაფში აქ და შემდეგშიც C აღნიშნავს დადებით მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული h ბიჯზე.

(94) აპრიორული შეფასება უზრუნველყოფს (88)-(90) ამოცანის გლობალურ ამოხსნადობას.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.13. თუ $0 < p \le 1$, $q \ge 2$ და (88)-(90) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x,t)$, მაშინ (91)-(93) ნახევრად-დისკრეტული სქემის ამონახსნი $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_{M-1}(t))$ კრებადია (88)-(90) ამოცანის $U = U(t) = (U_1(t), U_2(t), ..., U_{M-1}(t))$ ამონახსნისაკენ, როცა $h \to 0$ და სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\| u(t) - U(t) \right\| \le Ch. \tag{95}$$

დამტკიცება. $U = U(x,t)$ ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\frac{dU_i}{dt} - \left\{ \left(1 + \int_0^t \left(U_{\bar{x},i} \right)^2 d\tau \right)^p U_{\bar{x},i} \right\}_x + \left| U_i \right|^{q-2} U_i = \psi_i(t), \tag{96}$$

$$i = 1, ..., M-1,$$

$$U_0(0,t) = U_{\bar{x},M}(t) = 0, \tag{97}$$

$$U_i(0) = U_{0,i}, \ i = 0, ..., M, \tag{98}$$

სადაც

$$\psi_i(t) = O(h).$$

ვთქვათ, $z_i(t) = u_i(t) - U_i(t)$. (88)-(90) და (96)-(98) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{dz_i}{dt} - \left\{ \left(1 + \int_0^t \left(u_{\bar{x},i} \right)^2 d\tau \right)^p u_{\bar{x},i} - \left(1 + \int_0^t \left(U_{\bar{x},i} \right)^2 d\tau \right)^p U_{\bar{x},i} \right\}_x$$

$$+ \left| u_i \right|^{q-2} u_i - \left| U_i \right|^{q-2} U_i = -\psi_i(t), \tag{99}$$

$$z_0(t) = z_{\bar{x},M}(t) = 0,$$

$$z_i(0) = 0.$$

გავამრავლოთ (99) განტოლება $z(t)=\left(z_1(t),z_2(t),...,z_{M-1}(t)\right)$ ფუნქცია-ზე სკალარულად. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დისკრეტული ანა-ლოგის გამოყენებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z\|^2+\left\{\sum_{i=1}^{M}\left(1+\int_0^t\left(u_{\bar{x},i}\right)^2d\tau\right)^p u_{\bar{x},i}-\left(1+\int_0^t\left(U_{\bar{x},i}\right)^2d\tau\right)^p U_{\bar{x},i}\right\}z_{\bar{x},i}h+$$
$$+h\sum_{i=1}^{M}\left(|u_i|^{q-2}u_i-|U_i|^{q-2}U_i\right)\left(u_i-U_i\right)=-h\sum_{i=1}^{M}\psi_i z_i. \tag{100}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left\{\left(1+\int_0^t\left(u_{\bar{x},i}\right)^2d\tau\right)^p u_{\bar{x},i}-\left(1+\int_0^t\left(U_{\bar{x},i}\right)^2d\tau\right)^p U_{\bar{x},i}\right\}\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)=$$
$$p\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2d\tau\right)^{p-1}\times$$
$$\times\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)d\tau\right)^2d\xi+$$
$$+\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2d\tau\right)^p d\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)^2.$$

ამ ტოლობის (100) ტოლობაში ჩასმით, მიღებული უტოლობის $(0,t)$ შუალედზე ინტეგრებით და ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყე-ნებით გვექნება

$$\|z\|^2\le 2h\sum_{i=1}^{M}\int_0^t\int_0^1\left(1+\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2d\tau'\right)^p\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)^2d\xi d\tau+$$
$$+ph\sum_{i=1}^{M}\left(1+\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2d\tau'\right)^{p-1}d\tau\times$$
$$\times\left(\int_0^t\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)d\tau\right)^2d\xi-$$

$$-p(p-1)\sum_{i=1}^{M}\int_0^t\int_0^1\left(1+\int_0^{t'}\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2 d\tau'\right)^{p-2}\times$$

$$\times\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]^2\times$$

$$\times\left(\int_0^{t'}\left[U_{\bar{x},i}+\xi\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)\right]\left(u_{\bar{x},i}-U_{\bar{x},i}\right)d\tau'\right)^2 d\xi d\tau=-2h\sum_{i=1}^{M-1}\psi_i z_i.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან, $0<p\le 1$ შეზღუდვის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\left\|z(t)\right\|^2\le\int_0^t\left\|z(\tau)\right\|^2 d\tau+\int_0^t\left\|\psi_i\right\|^2 d\tau. \qquad (101)$$

საბოლოოდ, (101) შეფასებიდან გამომდინარეობს (95) და მაშასადამე, თეორემა 2.13 დამტკიცებულია.

§4. სასრულ-სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის

შევისწავლოთ ამ თავის მეორე პარაგრაფში განხილული (69) - (72) ამოცანის შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემის მდგრადობისა და კრებადობის საკითხი.

კვლავ მოვახდინოთ Q_T არის დისკრეტიზაცია და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\tau=\frac{T}{N},\quad t_j=j\tau,\quad u_i^j=u(x_i,t_j),$$

$$\omega_\tau=\left\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,N\right\},\quad \overline{\omega}_{h\tau}=\overline{\omega}_h\times\omega_\tau,\ ,$$

$$u_i=u_i^{j+1},\quad u_t=\frac{u_i-u_i^j}{\tau}.$$

განვიხილოთ (69) - (72) ამოცანისთვის შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}\right]\right)u_{\bar{x},i}\right\}_{x}+\left|u_{i}\right|^{q-2}u_{i}=0,$$

$$v_{t,i}^{j}-\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}+\left(v_{\bar{x},i}^{k}\right)^{2}\right]\right)v_{\bar{x},i}\right\}_{x}+\left|v_{i}\right|^{q-2}v_{i}=0, \tag{102}$$

$$i=1,2,\ldots,M-1,\ j=0,1,\ldots,N-1,$$

$$u_{0}^{j}=u_{M}^{j}=v_{0}=v_{M}^{j}=0,\ \ j=0,1,\ldots,N, \tag{103}$$

$$u_{i}^{0}=U_{0,i},\ v_{i}^{0}=V_{0,i},\ i=1,2,\ldots,M, \tag{104}$$

თუ (102) სისტემის პირველ და მეორე განტოლებებს სკალარულად გავამრავლებთ შესაბამისად u და v ფუნქციებზე, გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა და პუანკარეს უტოლობის სხვაობიან ანალოგებს, მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ მდგრადობის შემდეგ აპრიორულ შეფასებებს:

$$\left\|u^{m}\right\|^{2}+\sum_{j=1}^{m}\left\|u_{\bar{x}}^{j}]\right|^{2}\tau\leq C\,,\quad \left\|v^{m}\right\|^{2}+\sum_{j=1}^{m}\left\|v_{\bar{x}}^{j}]\right|^{2}\tau\leq C\,,\ \ m=1,2,\ldots,N.$$

საიდანაც ადვილად გამომდინარეობს (102)-(104) ამოცანის ამოხსნადობაც.

ქვემოთ ჩატარებულის ანალოგიური მსჯელობა ადვილად გვაძლევს (102)-(104) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობასაც.

თეორემა 2.14. თუ $a(S)=1+S,\ \ q\geq 2$ და (69) - (72) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U(x,t),\ \ V=V(x,t),$ მაშინ (102)-(104) სქემის ამონახსნი $u^{j}=\left(u_{1}^{j},u_{2}^{j},\ldots,u_{M-1}^{j}\right)$ $v^{j}=\left(v_{1}^{j},v_{2}^{j},\ldots,v_{M-1}^{j}\right)$ მიისწრაფის შესაბამისად $U^{j}=\left(U_{1}^{j},U_{2}^{j},\ldots,U_{M-1}^{j}\right),\ V^{j}=\left(V_{1}^{j},V_{2}^{j},\ldots,V_{M-1}^{j}\right)$ ფუნქციებისკენ, როცა $\tau\rightarrow 0,\ h\rightarrow 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^{j}-U^{j}\right\|\leq C\left(\tau+h\right), \tag{105}$$

$$\left\| v^j - V^j \right\| \le C\left(\tau + h\right),$$

$$j = 1, 2, \ldots, N.$$

დამტკიცება. $U = U(x,t)$ და $V = V(x,t)$ ფუნქციებისთვის გვაქვს:

$$U_{t,i}^j - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(U_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + \left| U^{j+1} \right|^{q-2} U^{j+1} = -\psi_{1,i}^j,$$

$$V_{t,i}^j - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(U_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + \left| V^{j+1} \right|^{q-2} V^{j+1} = -\psi_{2,i}^j, \tag{106}$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1, \; j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$U_0^j = U_M^j = V_0^j = V_M^j = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \tag{107}$$

$$U_i^0 = U_{0,i}, \, V_i^0 = V_{0,i}, \;\; i = 0, 1, \ldots, M, \tag{108}$$

სადაც

$$\psi_{k,i}^j = O\left(\tau + h\right), \;\; k = 1, 2.$$

ცდომილებებისთვის $z_i^j = u_i^j - U_i^j$ და $s_i^j = v_i^j - V_i^j$, (102) - (104) და (106) - (108) ტოლობებიდან ვღებულობთ:

$$\frac{z_i^{j+1} - z_i^j}{\tau} - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) u_{\bar{x},i}^{j+1} - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(U_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) U_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + \left| u_i^{j+1} \right|^{q-2} u_i^{j+1} - \left| U_i^{j+1} \right|^{q-2} U_i^{j+1} = \psi_{1,i}^{j+1},$$

$$\frac{s_i^{j+1} - s_i^j}{\tau} - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) v_{\bar{x},i}^{j+1} - \right. \tag{109}$$

$$\left. - \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(U_{\bar{x},i}^k \right)^2 + \left(V_{\bar{x},i}^k \right)^2 \right] \right) V_{\bar{x},i}^{j+1} \right\}_x + \left| v_i^{j+1} \right|^{q-2} v_i^{j+1} - \left| V_i^{j+1} \right|^{q-2} V_i^{j+1} = \psi_{2,i}^{j+1},$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1, \; j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$z_0^j = z_M^j = s_0^j = s_M^j = 0, \;\; j = 0, 1, \ldots, N, \tag{110}$$

$$z_i^0 = s_i^0 = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, M. \tag{111}$$

გავამრავლოთ (109) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებები შესაბამისად $z^{j+1}=\left(z_1^{j+1},z_2^{j+1},...,z_{M-1}^{j+1}\right)$ და $z^{j+1}=\left(z_1^{j+1},z_2^{j+1},...,z_{M-1}^{j+1}\right)$ ფუნქციებზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის სხვაობიანი ანალოგის და (110) პირობების გამოყენებით ვღებულობთ:

$$
\begin{gathered}
\left\|z^{j+1}\right\|^2-\left(z^{j+1},z^j\right)+\tau h\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)u_{\bar{x},i}^{j+1}-\right.\\
\left.-\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)U_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}z_{\bar{x},i}^{j+1}\le\tau\left(\psi_1^j,z^{j+1}\right),\\
\left\|s^{j+1}\right\|^2-\left(s^{j+1},s^j\right)+\tau h\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)v_{\bar{x},i}^{j+1}-\right.\\
\left.-\left(1+\tau\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right)V_{\bar{x},i}^{j+1}\right\}s_{\bar{x},i}^{j+1}\le\tau\left(\psi_2^j,s^{j+1}\right),
\end{gathered}
\tag{112}
$$

შევნიშნოთ, რომ

$$
\left(r^{j+1},r^j\right)=\frac{1}{2}\left\|r^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|r^j\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|r^{j+1}-r^j\right\|^2,
$$

$$
\begin{gathered}
\left(\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]u_{\bar{x},i}^{j+1}-\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}-U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)=\\
=\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2+\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\\
-u_{\bar{x},i}^{j+1}U_{\bar{x},i}^{j+1}\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]=\\
=\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}-U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]-\\
-\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]-\frac{1}{2}\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]+\\
+\frac{1}{2}\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]+\frac{1}{2}\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\left[\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\ge\\
\ge\frac{1}{2}\left[\left(u_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^{j+1}\right)^2\right]\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2-\left(U_{\bar{x},i}^k\right)^2-\left(V_{\bar{x},i}^k\right)^2\right].
\end{gathered}
$$

ანალოგიურად,

$$\left(\left[\left(u^k_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^k_{\bar{x},i}\right)^2\right]v^{j+1}_{\bar{x},i}-\left[\left(U^k_{\bar{x},i}\right)^2+\left(V^k_{\bar{x},i}\right)^2\right]V^{j+1}_{\bar{x},i}\right)\left(v^{j+1}_{\bar{x},i}-V^{j+1}_{\bar{x},i}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[\left(v^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2\right]\left[\left(u^k_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^k_{\bar{x},i}\right)^2\right].$$

მიღებული შეფასებებისა და (112) ტოლობების გამოყენებით გვაქვს:

$$\begin{gathered}\left\|z^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|z^{j+1}-z^j\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|z^{j+1}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|z^j\right\|^2+\tau\left\|z^{j+1}_{\bar{x}}\right]\Big|^2+\\ +\left\|s^{j+1}\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|s^{j+1}-s^j\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|s^{j+1}\right\|^2-\frac{1}{2}\left\|s^j\right\|^2+\tau\left\|s^{j+1}_{\bar{x}}\right]\Big|^2+\\ +\frac{\tau^2h}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u^k_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^k_{\bar{x},i}\right)^2\right]\left[\left(u^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2-\right.\\ \left.-\left(U^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^k_{\bar{x},i}\right)^2\right]\leq\frac{\tau}{4\varepsilon}\left(\left\|\psi_1^j\right\|^2+\left\|\psi_2^j\right\|^2\right)+\varepsilon\,\tau\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2+\left\|s^{j+1}\right\|^2\right),\\ \forall\varepsilon>0,\quad j=0,1,\ldots,N-1.\end{gathered}\tag{113}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\xi_i^j=\tau\sum_{k=0}^{j}\left[\left(u^k_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U^k_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^k_{\bar{x},i}\right)^2\right],$$

მაშინ

$$\xi^j_{t,i}=\left(u^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2+\left(v^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2-\left(U^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2-\left(V^{j+1}_{\bar{x},i}\right)^2.$$

ამრიგად, ვღებულობთ

$$\begin{gathered}\left\|z^{j+1}\right\|^2-\left\|z^j\right\|^2+\tau^2\left\|z^j_t\right\|^2+\tau^2\left\|z^{j+1}_{\bar{x}}\right]\Big|^2+\\ +\left\|s^{j+1}\right\|^2-\left\|s^j\right\|^2+\tau^2\left\|s^j_t\right\|^2+\tau^2\left\|s^{j+1}_{\bar{x}}\right]\Big|^{2\,2}+\tau^2\left\|\xi^j_t\right\|^2+\\ +\tau\left(\xi^j,\xi^j_t\right]\leq\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\left\|\psi_1^j\right\|^2+\left\|\psi_2^j\right\|^2\right)+2\varepsilon\,\tau\left(\left\|z^{j+1}\right\|^2+\left\|s^{j+1}\right\|^2\right).\end{gathered}\tag{114}$$

პუანკარეს უტოლობის დისკრეტული ანალოგის, (111) პირობისა და შემდეგი დამოკიდებულების

$$\tau\left(\xi^j, \xi_t^j\right] = \frac{1}{2}\left\|\xi^{j+1}\right]\Big|^2 - \frac{1}{2}\left\|\xi^j\right]\Big|^2 - \frac{\tau^2}{2}\left\|\xi_t^j\right]\Big|^2,$$

გათვალისწინებით, (114) შეფასებიდან ვღებულობთ

$$\left\|z^m\right\|^2 + \tau^2\sum_{j=0}^{m-1}\left\|z_t^j\right\|^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|z_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2 + \left\|s^m\right\|^2 + \tau^2\sum_{j=1}^{m-1}\left\|s_t^j\right\|^2 +$$

$$+\frac{\tau}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|s_{\bar{x}}^{j+1}\right]\Big|^2 + \frac{\tau^2}{2}\sum_{j=0}^{m-1}\left\|\xi_t^j\right]\Big|^2 + \frac{1}{2}\left\|\xi^m\right]\Big|^2 \le C\tau\sum_{j=0}^{m-1}\left(\left\|\psi_1^j\right\|^2 + \left\|\psi_2^j\right\|^2\right),$$

$$m = 1, 2, ..., N,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (105) შეფასებები.

ამრიგად, თეორემა 2.14 დამტკიცებულია.

§5. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები

გამოყენებული რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმების ეფექტურობას ადასტურებს აგებული კერძო ამონახსნებისთვის ჩატარებული შესაბამისი ტესტური გამოთვლები.

გადავიდეთ თეორიული შედეგების დამადასტურებელ გრაფიკული ილუსტრაციების განხილვაზე.

მეორე თავის მეორე პარაგრაფში ჩატარებული თეორიული კვლევა გვიჩვენებს, რომ შემდეგი განტოლებათა სისტემისთვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

$$S(x,t) = 1 + \int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau$$

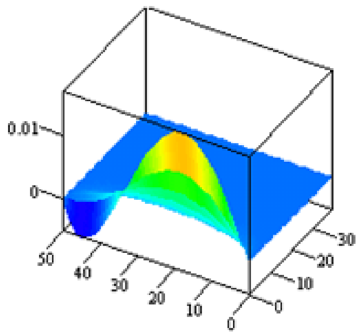
დასმული ერთგვაროვანი პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი, $a(S)$ ფუნქციაზე გარკვეული შეზღუდვის დადების შემდეგ, დროის უსასრულოდ ზრდისას მიისწრაფის ნულისაკენ.

მართლაც, როცა $a(S)=S^{\alpha}$, $\alpha=1/2$, მაშინ

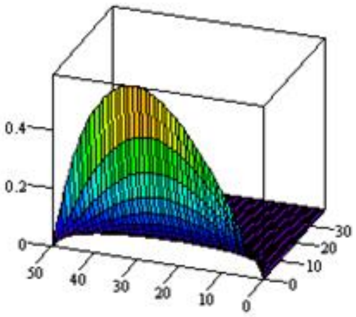
$$U_0(x)=\psi_1 x+(1-x)\left(e^{x}-\cos(x)\right),$$

$$V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)\left(e^{-x}-\cos(x)\right)$$

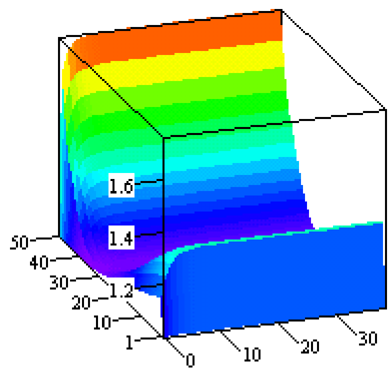
საწყისი ფუნქციების დროს გვაქვს სურათი (ნახ. 18)



ა



ბ



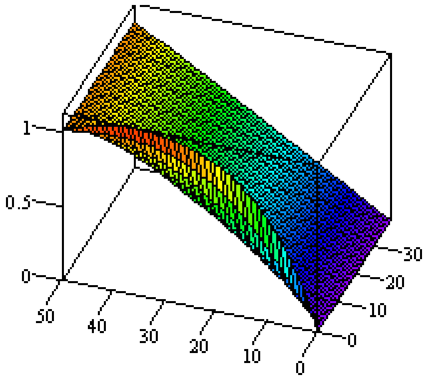
გ

ნახ. 18

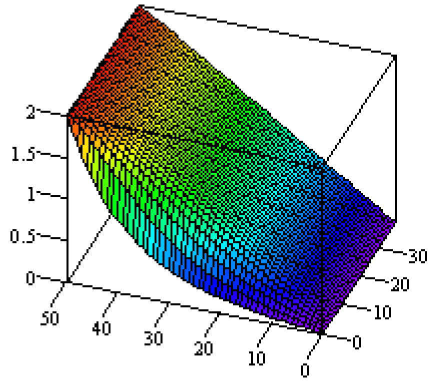
ამავე თავის მესამე პარაგრაფში განტოლებათა სისტემისთვის დასმულია არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა. როცა $a(S)=S^{\alpha}$, $\alpha\in(0;1]$, მაშინ დამტკიცებულია თეორემა ამონახსნის სტაბილიზაციის შესახებ.

მართლაც, როცა $\alpha=1/2$, $\psi_1=1$, $\psi_2=2$, $U_0(x)=\psi_1 x+1-x^2$, $V_0(x)=\psi_2 x+(1-x)\left(e^{x}-e^{-x}\right)$

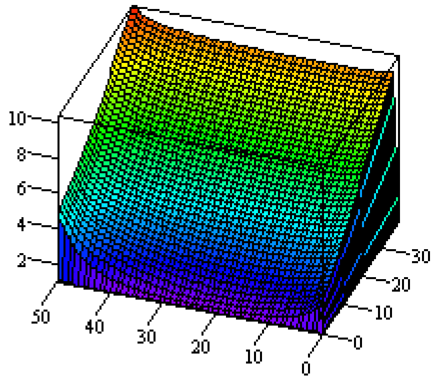
მაშინ გვაქვს (ნახ. 19):



ა



ბ

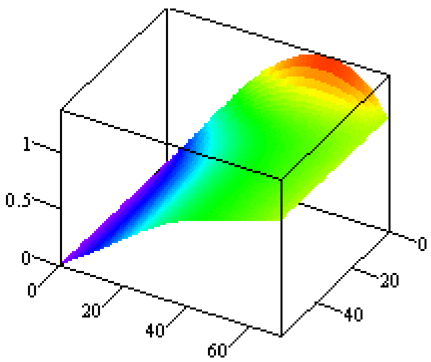


გ

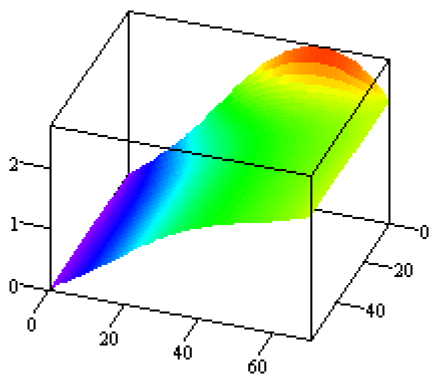
ნახ. 19

მსგავს სურათებს ვღებულობთ α პარამეტრის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც მოცემული ინტერვალიდან.

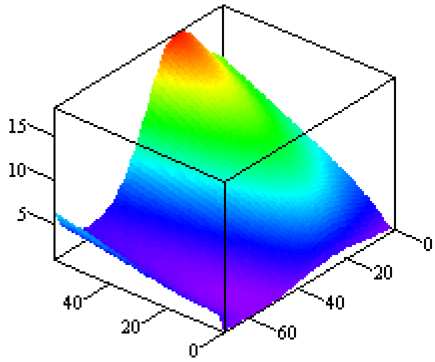
როცა $\alpha = -1/2$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 2$, მაშინ იგივე საწყისი ფუნქციების შემთხვევაში გვაქვს სურათი (ნახ. 20):



ა



ბ



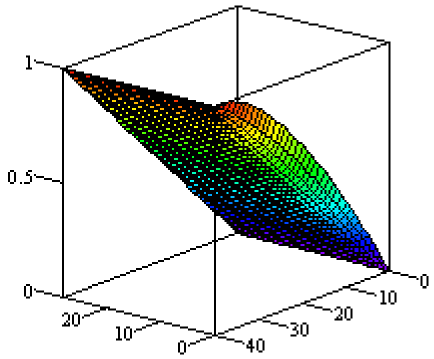
გ

ნახ. 20

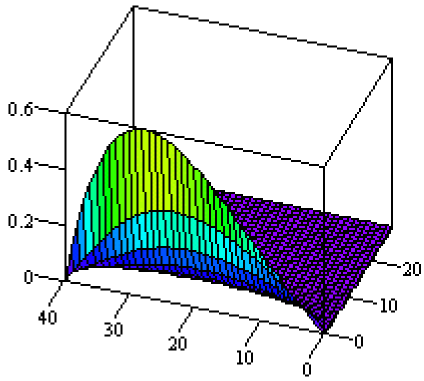
როგორც ეს ნახ. 20-დან ჩანს ამ შემთხვევაში სტაბილიზაციას არ აქვს ადგილი.

უნდა აღინიშნოს, რომ ψ_1, ψ_2 სიდიდეებიდან ერთ-ერთი შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს. როგორც ჩატარებული თეორიული კვლევა გვიჩვენებს ამ შემთხვევაში სურათი შეიცვლება მხოლოდ შესაბამისი ფუნქციისთვის.

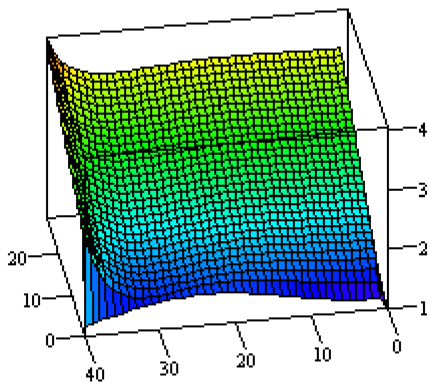
მართლაც, თუ $\alpha = 1/2$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = 0$, მაშინ გვაქვს (ნახ. 21):



ა



ბ



გ

ნახ. 21

ზემოთ მოყვანილი სურათები (ნახ. 18-21) ცხადად გვიჩვენებენ მიახლოებითი გამოთვლების შესაბამისობას დისერტაციაში ჩატარებულ თეორიულ გამოკვლევებთან. ეს სურათები ისევე როგორც სხვა მრავალი ჩატარებული რიცხვითი ექპერიმენტი, ადასტურებენ შემუშავებული რიცხვითი ალგორითმების ეფექტურობას.

თავი III. გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა და რიცხვითი ამოხსნა

ამ თავში შესწავლილია გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ერთადერთობა, ასიმპტოტური ყოფაქცევა, სასრულ-სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა. აგებულია მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები, მოყვანილია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები და მათი ანალიზი.

§1. საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ერთი ორკომპონენტიანი სისტემისთვის. ერთადერთობის თეორემა

განვიხილოთ კვლავ გარემოში ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის ერთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც შემოთავაზებილი იყო [54] ნაშრომში.

მსგავსად მეორე თავის პირველ პარაგრაფში შესწავლილი მოდელისა, ამ პარაგრაფშიც ვაჩვენებთ შესაბამისი საწყის–სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას გასაშუალებული მოდელის შესაბამისი ერთგანზომილებიანი ანალოგისათვის.

ვთქვათ, $H=\left(0,U,V\right)$, სადაც $U=U\left(x,t\right), V=V\left(x,t\right)$ – დროისა და ერთი სივრცული ცვლადის სკალარული ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში $rot\, H=\left(0,-\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial x}\right)$ და შედეგად მივიღებთ შემდეგი სახის ინტეგრო–დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=a\left(S\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,,\;\;\frac{\partial V}{\partial t}=a\left(S\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{115}$$

სადაც

$$S(t)=\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\,, \tag{116}$$

განვიხილოთ (115), (116) სისტემის შესაბამისი წყაროს წევრებიანი მოდელი

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+|U|^{q-2}U=0,\\ \frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+|V|^{q-2}V=0\end{gathered} \tag{117}$$

და დავსვათ მისთვის შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0\ ,\ \ U(1,t)=\psi_1,\ \ V(1,t)=\psi_2,\ \ t\ge 0\,, \tag{118}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ \ V(x,0)=V_0(x),\ \ x\in\Omega\,, \tag{119}$$

$\psi_1=Const\ge 0,$ $\psi_2=Const\ge 0,$ ხოლო a, U_0, V_0 და $q\ge 2.$ დავუშვათ, რომ $a(S)=(1+S)^p$. შევნიშნოთ, რომ როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\neq 0,$ მაშინ აქაც მეორე თავის ანალოგიურად გვაქვს საწყის-სასაზღვრო ამოცანა მარჯვენა საზღვარზე ერთი მაინც არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი საქმე გვაქვს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებიან ამოცანასთან.

შევისწავლოთ (117)–(119) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

თეორემა 3.1. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$ და $q\ge 2,$ მაშინ (117)–(119) ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ (117)–(119) ამოცანას გააჩნია ორი განსხვავებული ამონახსნი (U_1,V_1) და (U_2,V_2). განვიხილოთ სხვაობები $Z=U_1-U_2$ და $W=V_1-V_2$. აღნიშნული სხვაობებისთვის (117)–(119) ამოცანიდან ვღებულობთ:

$$\frac{\partial Z}{\partial t}-\left(1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)^p\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}\right)+$$

$$+|U_1|^{q-2}U_1-|U_2|^{q-2}U_2=0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}-\left(1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)^p\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right)+ \tag{120}$$

$$+|V_1|^{q-2}V_1-|V_2|^{q-2}V_2=0$$

$$Z(0,t)=W(0,t)=Z(1,t)=W(1,t)=0,\quad t\geq 0, \tag{121}$$

$$Z(x,0)=0,\quad W(x,0)=0,\quad x\in\Omega, \tag{122}$$

გავამრავლოთ (120) სისტემის პირველი განტოლება Z ფუნქციაზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ $(0,1)$ არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის და (121) პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|Z\|^2+\left(1+\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)^p\left\|\frac{\partial Z}{\partial x}\right\|^2+$$

$$+\int_0^1\left[|U_1|^{q-2}U_1-|U_2|^{q-2}U_2\right](U_1-U_2)\,dx=0, \tag{123}$$

საწყისი (122) პირობების გათვალისწინების შედეგად (123)-დან მარტივად გამომდინარე უტოლობის $(0,t)$ შუალედზე ინტეგრებით გვექნება

$$\|z(t)\|^2\leq 0.$$

მაშასადამე, $U_1\equiv U_2$ და ამონახსნის ერთადერთობა დამტკიცებულია.

§2. ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას

$Q=(0,1)\times(0,\infty)$ არეში განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=(1+S)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ (x,t)\in Q, \tag{124}$$

$$W(0,t)=0,\ W(1,t)=\psi,\ t\geq 0,$$

$$W(x,0)=W_0(x),\ \ x\in[0,1],$$

სადაც

$$S(t)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

$W_0(x)$ მოცემული ფუნქციაა და $\psi=Const\geq 0.$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$U(x,t)=W(x,t)-\psi x. \tag{125}$$

ასე, რომ (124) ამოცანის ნაცვლად მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=(1+S)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ (x,t)\in Q, \tag{126}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\geq 0, \tag{127}$$

$$U(x,0)=W_0(x)-\psi x,\ x\in[0,1], \tag{128}$$

სადაც

$$S(t)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\psi\right)dxd\tau.$$

თეორემა 3. 2. თუ $W_0\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, მაშინ (124) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|W-\psi x\|+\left\|\frac{\partial W}{\partial x}-\psi\right\|\leq C\exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ ამ პარაგრაფში აქ და შემდეგშიც C დადებითი მუდმივია და იგი დამოუკიდებულია t-ზე.

დამტკიცება. გავამრავლოთ (126) განტოლება U ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $(0,1)$ არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით და (127) სასაზღვრო პირობით მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2+\int_0^1(1+S)\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx=0.$$

საიდანაც $1+S\geq 1$ პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2+\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\le 0. \qquad (129)$$

(129)-დან პუანკარეს უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U\|^2+\|U\|^2\le 0. \qquad (130)$$

გავამრავლოთ (126) განტოლება $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ (0,1) არეზე. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით და (127) სასაზღვრო პირობით მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_0^1-\int\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{U}{\partial x^2}=\int_0^1(1+S)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+(1+S)\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2\le 0 \qquad (131)$$

ან

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\le 0. \qquad (132)$$

(129), (130) და (132) შეფასებებიდან ვღებულობთ

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(t)\left(\|U\|^2+\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2\right)\right]\le 0.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს თეორემა 3.2-ის სამართლიანობა.

გასათვალისწინებელია, რომ თეორემა 3.2 გვაძლევს (124) ამოცანის ამონახსნის ექსპონენციალურ მდგრადობას $W_2^1(0,1)$ სივრცის ნორმით. ვაჩვენოთ, რომ ამონახსნის მდგრადობა ასევე მიიღწევა $C^1(0,1)$ სივრცის ნორმით. სამართლიანია შემდეგი დებულება:

თეორემა 3.3. თუ $W_0\in W_2^4(0,1)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, მაშინ (124) ამოცანის ამონახსნისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\left|\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}-\psi\right|\le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{\partial W\left(x,t\right)}{\partial x}\right|\le C\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right).$$

სადაც $\alpha=const,\ \ \beta=const,\ \ 0<\beta<\alpha<1.$

ქვემოთ მოყვანილი ლემა საშუალებას მოგვცემეს დავამტკიცოთ თეორემის სამართლიანობა.

ლემა 3.4. სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|\le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right).$$

დამტკიცება. (126) განტოლების t ცვლადით ინტეგრებით მივიღებთ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\left(1+S\right)\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}+\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\psi\right)^2dx\right]\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \qquad (133)$$

გავამრავლოთ (133) $\dfrac{\partial U}{\partial t}$ -ზე და ვაინტეგროთ (0,1) არეზე. (127) პირობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2dx+2\left(1+S\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2dx=\\ =-2\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\psi\right)^2dx\right]\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}dx.\end{gathered} \qquad (134)$$

შევაფასოთ (134) ტოლობის მარჯვენა მხარე

$$\begin{gathered}-2\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\psi\right)^2dx\right]\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}dx=\\ =-2\int_0^1\left\{\left(1+S\right)^{-1/2}\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\psi\right)^2dx\right]\right\}\frac{\partial U}{\partial x}\times\left\{\left(1+S\right)^{1/2}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right\}dx.\end{gathered} \qquad (135)$$

აქედან შვარცის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{gathered}=-2\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\psi\right)^2dx\right]\int_0^1\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}dx\le\\ \le\left(2-\alpha\right)\left(1+S\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2dx+\end{gathered} \qquad (136)$$

$$+\frac{1}{2-\alpha}\left(1+S\right)^{-1}\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\psi\right)^2 dx\right]\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx \le$$

$$\le\left(2-\alpha\right)\left(1+S\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2 dx+$$

$$+\frac{8}{2-\alpha}\left(1+S\right)^{-1}\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^3+$$

$$+\frac{8\psi^4}{2-\alpha}\left(1+S\right)^{-1}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx.$$

(134)-(136)-ის გაერთიანებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+\alpha\left(1+S\right)\int_0^1\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right)^2 dx \le$$

$$+\frac{8}{2-\alpha}\left(1+S\right)^{-1}\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx\right]^3+$$

$$+\frac{8\psi^4}{2-\alpha}\left(1+S\right)^{-1}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 dx.$$

პუანკარე-ფრიდრიხის უტოლობის, აღნიშვნის $U\left(x,t\right)=W\left(x,t\right)-\psi x,$ თეორემა 3.2 და $S\left(t\right)$ ფუნქციის არაუარყოფითობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx+\alpha\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx \le C\exp\left(-t\right).$$

ბოლო უტოლობის $\exp\left(\alpha t\right)$-ზე გამრავლებით ვღებულობთ უტოლობას

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left(\alpha t\right)\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2\right)\le C\exp\left(-\left(1-\alpha\right)t\right).$$

აქედან გამომდინარე,

$$\exp\left(\alpha t\right)\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|^2 \le C\int_0^t \exp\left(-\left(1-\alpha\right)\tau\right)d\tau \le \frac{C}{1-\alpha},$$

ანუ

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\| \le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right).$$

ასე, რომ ლემა 3.4 დამტკიცებულია.

ახლა $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ შევაფასოთ $L_1(0,1)$ სივრცის ნორმით. (126)-დან ვღებულობთ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = (1+S)^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{137}$$

(0,1)- ზე ინტეგრებით და შვარცის უტოლობის გამოყენებით

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right| dx = \int_0^1 \left|(1+S)^{-1}\frac{\partial U}{\partial t}\right| dx \le \left[\int_0^1 (1+S)^{-2}\,dx\right]^{1/2}\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 dx\right]^{1/2}.$$

ლემა 3.4-ის გამოყენებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $S(t)$ ფუნქცია არაუარყოფითია, ჩვენ ვღებულობთ

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right| dx \le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right).$$

აქედან თუ გათვალისწინებთ

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} = \int_0^1 \frac{\partial U(y,t)}{\partial y} + \int_0^1\int_y^x \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}\partial\xi\partial y$$

(127) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს

$$\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right| = \left|\int_0^1\int_y^x \frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial \xi^2}\partial\xi\partial y\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \frac{\partial U(y,t)}{\partial y} \le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right).$$

ასე, რომ (124) საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისათვის ჩვენ გვაქვს

$$\left|\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} - \psi\right| \le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right).$$

ახლა შევაფასოთ $\frac{\partial U}{\partial t}$ ფუნქცია $C^1\left(0,1\right)$ სივრცის ნორმით. ახლა (126) გავამრავლოთ $\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}$ და ვაინტეგროთ $\left(0,1\right)$ ინტერვალზე. ინტეგრების შემდეგ ვღებულობთ

$$\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\Big|_0^1 - \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 = \left(1+S\right)\int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}dx. \tag{138}$$

შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2$$

და (127) სასაზღვრო პირობით, ვღებულობთ

$$\frac{1+S}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 = 0,$$

ანუ

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 \le 0, \tag{139}$$

შევნიშნოთ, რომ (138)-დან გვაქვს

$$\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 \le \frac{\left(1+S\right)}{2}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 + \frac{\left(1+S\right)}{2}\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2. \tag{140}$$

ახლა (133) სკალარულად გავამრავლოთ $\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}$-ზე და ვაინტეგროთ მარცხენა მხარე, მივიღებთ

$$\frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}dx = \left(1+S\right)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 +$$

$$\left[\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\psi\right)^2 dx\right]\int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}dx.$$

(127) სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 + 2\left(1+S\right)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 =$$

$$= -2\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \psi\right)^2 dx\right] \int_0^1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} dx.$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 + (1+S)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 \le$$

$$= (1+S)^{-1}\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \psi\right)^2 dx\right]^2 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 dx \le$$

$$= 8(1+S)^{-1}\left\{\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \psi\right)^2 dx\right]^2 + \psi^4\right\} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

თეორემა 3.2, (137) და ლემა 3.4-ის გამოყენებით გვაქვს

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 + (1+S)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 \le C\exp(-\alpha t). \tag{141}$$

(129)-(131), (139), (140) და (141)-ის გაერთიანებით ვღებულობთ, რომ

$$\|U\|^2 + \frac{d}{dt}\|U\|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + 2(1+S)\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 + \beta\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 +$$

$$+ (1+S)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 \le \frac{\beta}{2}(1+S)\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 +$$

$$+ \frac{\beta}{2}(1+S)\left\|\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right\|^2 + C\exp(-\alpha t).$$

აქედან მიღებული შეფასებით, $S(t)$ ფუნქციის არაუარყოფითობით და $0 < \beta < \alpha < 1$, უტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\beta\|U\|^2 + \frac{d}{dt}\|U\|^2 + \beta\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 +$$

$$+ \beta\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 + \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2 + \beta\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 +$$

$$+ \frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t}\right\|^2 \le C\exp(-\alpha t)$$

მას შემდეგ, რაც გავამრავლებთ $\exp(\beta t)$ ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(\beta t)\left(\|U\|^2+\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\|^2+\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right\|^2\right)\right]\le$$

$$\le C\exp\left(-(\alpha-\beta)t\right).$$

რადგან $\beta<\alpha$ ჩვენ ვღებულობთ

$$\left\|\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right\|^2\le C\exp(-\beta t)$$

აქედან, შემდეგი შესაბამისობის გათვალისწინებით

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}=\int_0^1\frac{\partial U(y,t)}{\partial t}dy+\int_0^1\int_y^x\frac{\partial^2 U(\xi,t)}{\partial t\partial\xi}d\xi dy$$

და ლემა 3.4-დან, გვაქვს

$$\left|\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right|=\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}\right|\le C_1\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right)+C_2\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right)$$

ამრიგად, თეორემა 3.3 დამტკიცებულია

თეორემა 3.3 გვიჩვენებს, რომ ადგილი აქვს არაერთგვაროვანი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ექსპონენციალურ ქრობას არაწრფივობის ერთი კონკრეტული შემთხვევისთვის.

§3. სასრულ-სხვაობიანი სქემის მდგრადობა და კრებადობა გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის პირველი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის

განვიხილოთ (117)-(119) ამოცანა ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში და ავაგოთ მისი შესაბამისი სხვაობიანი ანალოგი:

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}&=\left\{1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{x,i}^k\right)^2+\left(v_{x,i}^k\right)^2\right]\right\}u_{\bar{x}x,i}^{j+1}-\left|u_i^{j+1}\right|^{q-2}u_i^{j+1},\\ \frac{v_i^{j+1}-v_i^j}{\tau}&=\left\{1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{x,i}^k\right)^2+\left(v_{x,i}^k\right)^2\right]\right\}v_{\bar{x}x,i}^{j+1}-\left|v_i^{j+1}\right|^{q-2}v_i^{j+1},\end{aligned}\qquad(142)$$

$$i = 1,2,\dots,M-1; \quad j = 0,1,\dots,N-1;$$

$$u_0^j = v_0^j = 0, \ u_M^j = 0, \ v_M^j = 0, \quad j = 0,1,\dots,N; \tag{143}$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \ v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\dots,M; \tag{144}$$

მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი მიეძღვნა ამ ტიპის მოდელების დისკრეტული ანალოგების გამოკვლევასაც.

მარტივია (142)-(144) სქემისთვის შემდეგი შეფასებების მიღება:

$$\begin{aligned} &\left\|u^n\right\|_h^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\|u_{\bar{x}}^j\right\|_h^2 \tau \le C, \\ &\left\|v^n\right\|_h^2 + \sum_{j=1}^{n} \left\|v_{\bar{x}}^j\right\|_h^2 \tau \le C, \\ &n = 1,2,\dots,N. \end{aligned} \tag{145}$$

აპრიორული შეფასება (145) ნიშნავს (142)-(144) სქემის მდგრადობას. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.5. თუ (117)-(119) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x,t)$, $V = V(x,t)$, მაშინ (142)-(144) სქემის ამონახსნი $u^j = \left(u_1^j, u_2^j, \dots, u_{M-1}^j\right)$, $v^j = \left(v_1^j, v_2^j, \dots, v_{M-1}^j\right)$, მიისწრაფის $U^j = \left(U_1^j, U_2^j, \dots, U_{M-1}^j\right)$, $V^j = \left(V_1^j, V_2^j, \dots, V_{M-1}^j\right)$, ფუნქციებისაკენ შესაბამისად, როცა $j = 1,2,\dots,N$, $\tau \to 0$, $h \to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^j - U^j\right\|_h \le C(\tau + h), \ \left\|v^j - V^j\right\|_h \le C(\tau + h),$$

$$j = 1,2,\dots,N.$$

§4. სხვაობიანი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნა და გრაფიკული ილუსტრაციები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ (124) ამოცანის რიცხვით აპროქსიმაციას. გამოვიკვლიოთ (124) ამოცანის ექვივალენტური (126)-(128) ამოცანა.

შევუსაბამოთ მას შემდეგი სხვაობიანი სქემა:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}-\left[1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]u_{\bar{x}x,i}^{j+1}=f_i^j, \tag{146}$$

$$i=1,2,\ldots,M-1;\quad j=0,1,\ldots,N-1;$$

$$u_0^j=u_M^j=0,\quad j=0,1,\ldots,N, \tag{147}$$

$$u_i^0=U_{0,i},\quad i=0,1,\ldots,M, \tag{148}$$

სადაც $f_i^j=f\left(x_i,t_j\right)$ ცნობილი ფუნქციაა.

(126)-(128) ამოცანისათვის $f_i^j=0$. შესაბამის ამოცანაში კრებადობა დამტკიცებულია [38] ნაშრომში.

თეორემა 3.6. თუ (126)-(128) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U\left(x,t\right)$, მაშინ (146)-(148) სქემის ამონახსნი $u^j=\left(u_1^j,u_2^j,\ldots,u_{M-1}^j\right)$, $j=1,2,\ldots,N$, მიისწრაფის $U^j=\left(U_1^j,U_2^j,\ldots,U_{M-1}^j\right)$, ფუნქციისაკენ, როცა $j=1,2,\ldots,N$, $\tau\to 0$, $h\to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\left\|u^j-U^j\right\|_h\le C\left(\tau+h\right),\quad j=1,2,\ldots,N.$$

განვიხილოთ (146)-(148) დისკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნა. გასათვალისწინებელია, რომ (146) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{\tau}u_i^{j+1}-A\left(u^{j+1}\right)\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}-f_i^j-\frac{1}{\tau}u_i^j=0,$$

$$i=1,2,\ldots,M-1.$$

სადაც

$$A\left(u^{j+1}\right)=1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left(\frac{u_i^k-u_{i-1}^k}{h}\right).$$

ეს სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცულად

$$H\left(u^{j+1}\right)\equiv G\left(u^{j+1}\right)-\frac{1}{\tau}u^j-f^j=0.$$

G ვექტორი მოცემულია შემდეგი სახით

$$G\left(u^{j+1}\right)=T\left(u^{j+1}\right)u^{j+1},$$

სადაც T არის სამდიაგონალური სიმეტრიული მატრიცა

$$T_{ir}=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}+2\dfrac{A}{h^2}, & r=i,\\ -\dfrac{A}{h^2}, & r=i\pm1,\end{cases}$$

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენოთ ნიუტონის მეთოდი, რომელსაც მიღებული სისტემისათვის აქვს შემდეგი სახე

$$\nabla H\left(u^{j+1}\right)\Big|^{(n)}\left(u^{j+1}\Big|^{(n+1)}-u^{j+1}\Big|^{(n)}\right)=-H\left(u^{j+1}\right)\Big|^{(n)},$$

რომლის ელემენტებია:

$$\nabla Hu^{j+1}\Big|_{ir}=\begin{cases}\dfrac{1}{\tau}+\dfrac{2}{h^2}A\left(u^{j+1}\right)-\dfrac{\partial A\left(u^{j+1}\right)}{\partial u_i^{j+1}}\delta_i^{j+1}, & r=i,\\ -\delta_i^{j+1}\dfrac{\partial A\left(u^{j+1}\right)}{\partial u_r^{j+1}}-\dfrac{1}{h^2}A\left(u^{j+1}\right), & r=i\pm1,\\ -\delta_i^{j+1}\dfrac{\partial A\left(u^{j+1}\right)}{\partial u_r^{j+1}}, & \text{სხვა შემთხვევა}\end{cases}$$

სადაც

$$\delta_i^{j+1}=\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}.$$

გვაქვს

$$\frac{\partial A}{\partial u_r^{j+1}}=\frac{\partial}{\partial u_r^{j+1}}\left[1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left(\frac{u_i^k-u_{i-1}^k}{h}\right)^2\right]=$$

$$\frac{\partial A}{\partial u_r^{j+1}}=\frac{\partial}{\partial u_r^{j+1}}\left[R+\tau h\left(\frac{u_r^{j+1}-u_{r-1}^{j+1}}{h}\right)^2+\tau h\left(\frac{u_{r+1}^{j+1}-u_r^{j+1}}{h}\right)^2\right]=$$

$$2\tau h\frac{u_r^{j+1}-u_{r-1}^{j+1}}{h}\frac{1}{h}+2\tau h\frac{u_{r+1}^{j+1}-u_r^{j+1}}{h}\left(-\frac{1}{h}\right)=$$

$$-2\tau h\frac{u_{r+1}^{j+1}-2u_r^{j+1}+u_{r-1}^{j+1}}{h^2}.$$

გასათვალისწინებელია, რომ R მუდმივი არ არის დამოკიდებული u_r^{j+1}-ზე.

ასე, რომ ჩვენ გვაქვს არაწრფივი განტოლებათა სისტემა $H_i\left(u_1^{j+1},\dots,u_{M-1}^{j+1}\right)=0,\quad i=1,2,\dots,M-1.$

როგორც ცნობილია [130], თუ H_i ფუნქციების იაკობიანი არ მიისწრაფის ნულისაკენ, მაშინ ნიუტონის მეთოდი კრებადია $\xi_1,\dots,\xi_{M-1}$ ამონახსნისაკენ და სულ ცოტა მეორე რიგით.

ჩვენი შემთხვევისათვის იაკობიანი ∇H გამოთვლილია ზემოთ. $\dfrac{1}{\tau}$ წევრი უზრუნველყოფს, იმას რომ იაკობიანი არ ნულდება. დიფერენცირებადობა გარანტირებულია, ∇H კვადრატულია. აქედან გამომდინარე, ნიუტონის მეთოდი ჩვენი ამოცანისთვის კრებადია სულ ცოტა მეორე რიგით.

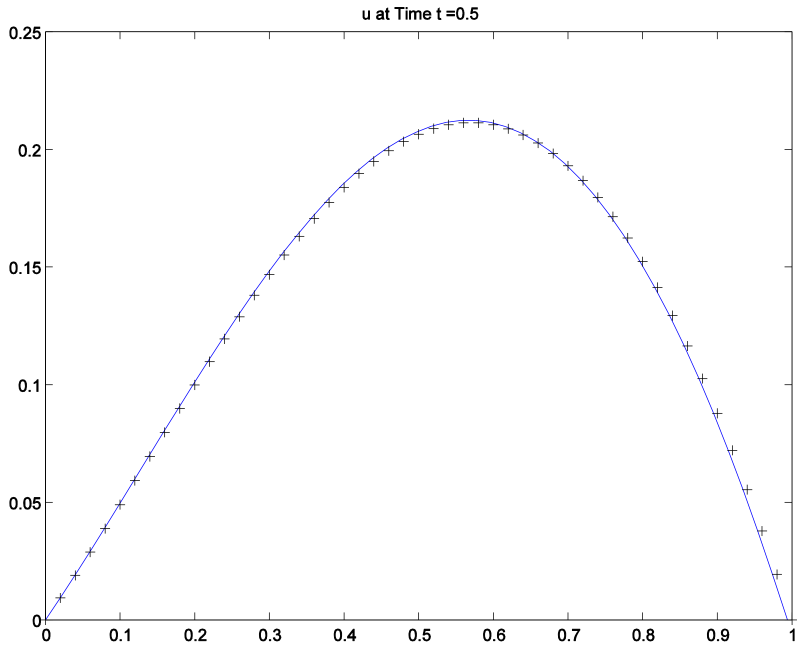
პირველ რიცხვით ექსპერიმენტში ჩვენ ავირჩიეთ (146) განტოლებისთვის მარჯვენა მხარე ისე, რომ (124) ამოცანის ზუსტი ამონახსნია:

$$W(x,t)=x(1-x)\cos t,$$

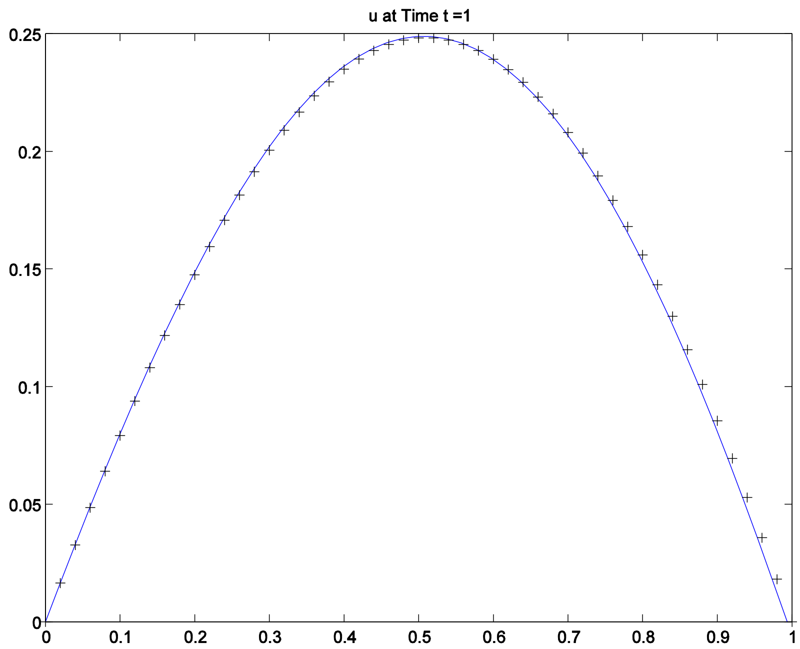
რომელიც აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს $(\psi=0)$.

ნახაზებზე მოცემულია ზუსტი და რიცხვითი ზუსტი ამონახსნები მოცემულია წირით, ხოლო რიცხვითი ამონახსნები აღინიშნება ჯვრებით.

ამ ექსპერიმენტებში აღებულია $M=100$, რომლისთვისაც $h=0.01$. ნახაზებზე 22 და 23 მოცემულია მიახლოებითი და ზუსტი ამოხსნები, როცა $t=0.5$ და $t=1$. როგორც ნახაზიდან ჩანს რიცხვითი და ზუსტი ამონახსნები თითქმის იდენტურია.



ნახ. 22

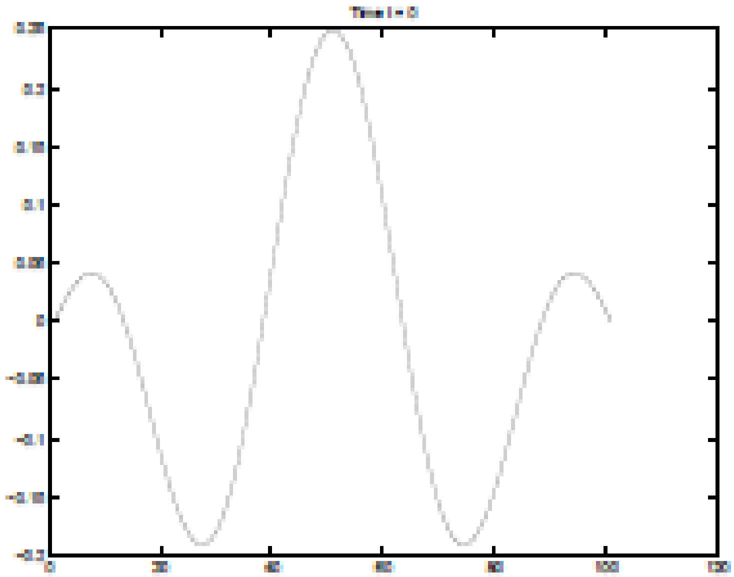


ნახ. 23

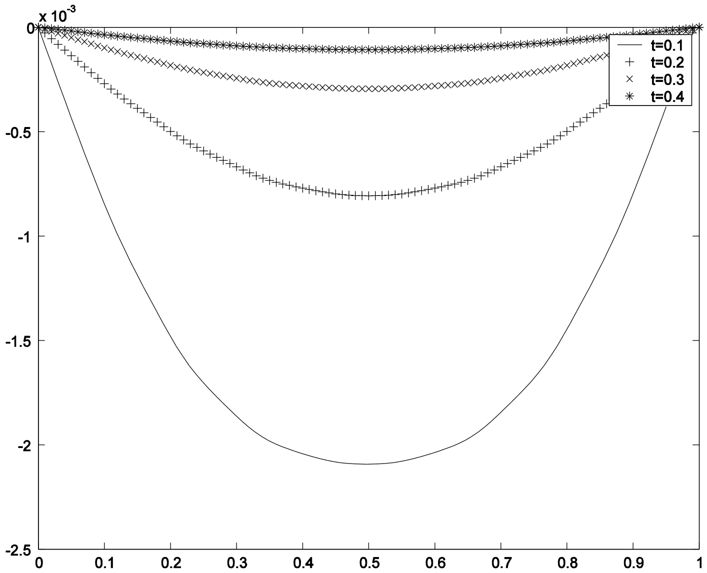
მეორე ექსპერიმენტში აღებულია ნულოვანი მარჯვენა მხარე და შემდეგი საწყისი ფუნქცია

$$W_0\left(x,t\right)=x\left(1-x\right)\cos\left(4\pi x\right).$$

M,h,τ იგივე პარამეტრებია. მეორე ტესტში შედეგები გამოტანილია დროის ოთხი სიდიდისთვის. კარგად ჩანს, რომ რიცხვითი ამონახსნები მიისწრაფის ნულისაკენ ყველა x-სთვის.



ნახ. 24



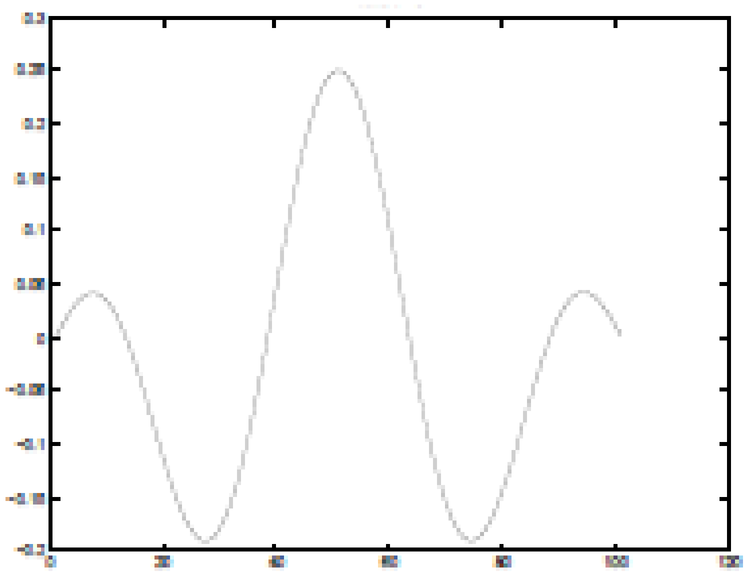
ნახ. 25

ნახაზებზე 24 და 25 მოცემულია საწყისი მონაცემები და რიცხვითი ამონახსნები, როცა $t = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4.$

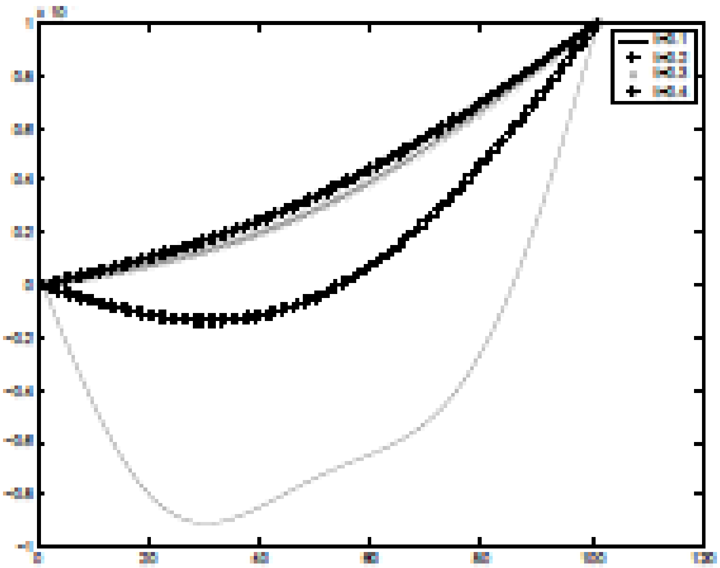
არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობის მქონე ამოცანისათვის აგრეთვე განხორციელდა რიცხვითი ექსპერიმენტები. შემდეგ ექსპერიმენტში აღებულია ნულოვანი მარჯვენა მხარე და შემდეგი საწყისი ფუნქცია

$$W_0(x,t) = x(1-x)\cos(4\pi x) + 0.001x.$$

ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიცით, რომ ამონახსნები მიისწრაფიან სტაციონალურ ამონახსნისკენ, რომელიც აქ არის $W(x,t) = 0.001x.$ M, h, τ იგივე პარამეტრებია.



ნახ. 26



ნახ. 27

ნახაზებზე 26 და 27 წინანდელის მსგავსად არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობისთვის მოცემულია საწყისი მონაცემები და რიცხვითი ამონახსნები, როცა $t = 0.1; 0.2; 0.3; 0.4.$

განვიხილოთ (142)-(144) დისკრეტული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნაც. გასათვალისწინებელია, რომ (142) შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - A^{j+1}\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0,$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - A^{j+1}\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1; \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

სადაც

$$A^j = 1 + \tau h \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j}\left[\left(\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h}\right)^2 + \left(\frac{v_i^k - v_{i-1}^k}{h}\right)^2\right].$$

იმისათვის, რომ სისტემას მივცეთ მატრიცული სახე, უნდა განვსაზღვროთ ვექტორები $u^j = \left[u_1^j, \ldots, u_{M-1}^j\right]^T$ და ანალოგიურად v^j. ასევე უნდა განვსაზღვროთ სიმეტრიული სამდიაგონალური T მატრიცა $(M-1)\times(M-1)$ შემდეგი სახით

$$T_{rs}^{j+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{h^2} A^{j+1}, & s = r-1, \\ \dfrac{2}{h^2} A^{j+1}, & s = r, \\ -\dfrac{1}{h^2} A^{j+1}, & s = r+1, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევა} \end{cases}$$

ამდენად, (142) სისტემა მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} u^{j+1} \\ v^{j+1} \end{bmatrix} - \frac{1}{\tau}\begin{bmatrix} u^{j} \\ v^{j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^{j+1} & 0 \\ 0 & T^{j+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u^{j+1} \\ v^{j+1} \end{bmatrix} = 0. \qquad (149)$$

(149) არაწრფივი სისტემის ამოსახსნელად ჩვენ კვლავ ვიყენებთ ნიუტონის მეთოდს. ვთქვათ, $P^j = \left[u^j, v^j\right]^T$ და განვსაზღვროთ

$$H\left(P^{j+1}\right) = \frac{1}{\tau}P^{j+1} - \frac{1}{\tau}P^{j} + \hat{T}^{j+1}P^{j+1}, \qquad (150)$$

სადაც $\hat{T}^{j+1}$ არის 2×2 ბლოკურ-დიაგონალური მატრიცა, სადაც T^{j+1} არის დიაგონალი. ნიუტონის მეთოდი (150) სისტემისთვის მიიღებს სახეს

$$\nabla H\left(P^{j+1}\right)\Big|^{(n)}\left(P^{j+1}\Big|^{(n+1)} - P^{j+1}\Big|^{(n)}\right) = -H\left(P^{j+1}\right)\Big|^{(n)}.$$

იაკობიანი ∇H გამოთვლილია ზემოთ. $\dfrac{1}{\tau}$ წევრი უზრუნველყოფს, რომ იაკობიანი არ ნულდება. დიფერენცირებადობა გარანტირებულია. აქედან გამომდინარე, ნიუტონის მეთოდი ასეთი ამოცანისთვისაც კრებადია სულ ცოტა მეორე რიგით.

რიცხვითი გათვლები აქაც სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ გამოკვლევებთან.

დასკვნა

გამოყენებითი პროცესების აღმწერი ამოცანების გამოკვლევა, მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლა და კომპიუტერული რეალიზაცია წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის მეტად აქტუალურ სფეროს.

დიფუზიური პროცესების მათემატიკურ მოდელებს მივყავართ არასტაციონარულ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ და ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებზე და მათ სისტემებზე. ამ ამოცანათა უდიდესი ნაწილი, როგორც წესი, არაწრფივია. ამ სისტემების ძირითადი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შეიცავენ განტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული მოდელისათვის განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია ამგვარი წრფივი სისტემებისათვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობა, რაც კვლავ არსებით სირთულეებთან არის დაკავშირებული.

სადისერტაციო ნაშრომი “ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა“ ეხება ერთი ასეთი დიფუზიური მოდელისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანათა გამოკვლევას, მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლას და კომპიუტერულ რეალიზაციას. კერძოდ, ნაშრომი ეძღვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი მაქსველის სისტემაზე დაფუძნებული არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ზოგიერთი თვისების შესწავლას.

ნაშრომში განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების გამოკვლევისა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს.

ინტეგრო-დიფერენციალურ სახეზე მაქსველის არაწრფივი სისტემის რედუქცია პირველად 1983 წელს განხორციელდა დავით გორდეზიანის,

თემურ ჯანგველაძის და თენგიზ ყორშიას ნაშრომში, რასაც შედეგად მოყვა მრავალი გამოხმაურება და სამეცნიერო პუბლიკაციები, როგორც საქართველოში, ასევე უცხოეთში. ამ ნაშრომზე დაყრდნობით გენადი ლაპტევმა 1990 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში მოიყვანა ამ მოდელის ე.წ. გასაშუალებული ვარიანტი. რომელმაც ასევე მრავალი მეცნიერის ყურადღება მიიქცია. აღსანიშნავია, რომ ასეთი მოდელის გამოკვლევა პირველად თ. ჯანგველაძის ნაშრომში განხორციელდა.

სადისერტაციო ნაშრომში მოცემულია ერთგანზომილებიანი დიფერენციალური სისტემის სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობისა და ჰოფის ბიფურკაციის შესაძლებლობები. ერთი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ასევე გამოკვლეულია გლობალურად მდგრადობის საკითხი. აგებულია შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემები და რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. მათზე დაყრდნობით ჩატარებულია კომპიუტერული ექსპერიმენტები და მოყვანილია რიცხვითი გათვლების გრაფიკული ილუსტრაციები.

გამოკვლეულია პარაბოლური ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები. მოცემულია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების ტესტურ ამოცანებზე მიღებული შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციებიც.

აღსანიშნავია სადისერტაციო ნაშრომის დანართიც, სადაც განხილული ალგორითმების რეალიზაციისთვის ავტორისეული პროგრამული პაკეტებია მოყვანილი.

დისერტაციაში შესწავლილი მოდელების სირთულე განაპირობებდა როგორც თეორიული, ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა როგორც უწყვეტი ამოცანების გამოკვლევას, ასევე რიცხვითი ანალოგების აგებას და შესწავლას, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული

მრავალი რიცხვითი გათვლებით და მათი ანალიზით. ნაშრომი ასევე მდიდა-რია გრაფიკული ილუსტრაციებით.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- მაქსველის ერთგანზომილებიანი სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამო-ცანების სტაციონარული ამონახსნების წრფივი და გლობალური მდგრადობა;
- ჰოფის ბიფურკაციული პროცესის დაფიქსირება და კომპიუტერული მოდელირება;
- ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების საწყის-სასაზღვრო ამოცა-ნების ამონახსნების ერთადერთობა;
- ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტო-ტური ყოფაქცევის გამოკვლევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას;
- ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის დასმული ამოცა-ნების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალო-გების აგება და გამოკვლევა;
- კომპიუტერზე რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმების აგება-გა-მოკვლევა. შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების ანალიზი შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციების გამოყენებით.

ლიტერატურა

1. Landau L., Lifschitz E. Electrodynamics of Continuous Media. (Russian) Moscow, 1958.
2. Purcell E. M. Electricity and Magnetism. Education Development Center, Inc. 1963.
3. Sedov L.I. Mechanics of Continuous Media. (Russian) Third ed., Moscow: Nauka, 1976.
4. Bien M. Existence of Global Weak Solutions for a Class of Quasilinear Equations Describing Joule's Heating. Math. Meth. Apl. Sci., 1998, V. 23, p.1275–1291.
5. Cimatti G. Existence of Weak Solutions for the Nonstationary Problem of the Joule Heating of a Conductor. Ann. Mat. Pura Apl., 1992, V. 162, 4, p. 33-42.
6. Dafermos C.M. Stabilizing Effects of Dissipacion. Lect. Notes Math., 1983, N1017, p.140-147.
7. Dafermos C.M., Hsiao L. Adiabatic Shearing of Incompressible Fluids with Temperature-dependent Viscosity. Quart. Apl. Math., 1983, V.41, N1, p.45-58.
8. Ding S.J., Guo B.L., Lin J.Y., Zeng M. Global Existence of weak Solutions for Landau– Lifshitz-Maxwell Equations. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2007, V. 17, 4, p.867-890.
9. Edelvik F., Ledfelt G. Explicit Hybrid Solver for the Maxwell Equations in 3D. J. Sci. Comput. 2000, V. 15, N1, p.61-78.
10. Elliott C.M., Larsson S. A Fnite Element Model for the Time-dependent Joule Heating Problem. Math. Comp., 1995,64, p1433-1453.
11. Kirane M., Kouachi S. Global Solution to a System of Strongly Coupled Reaction-Diffusion Equations. Nonlinear Anal., 1996, V. 8, p.1387-1396.
12. Kuiper H.J. Existence and Comparison Theorems for Nonlinear Diffusion Systems. J. Math. Anal. Apl., 1977, V. 60, p.166-181.

13. Lions J.-L. Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non-lineaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
14. Sun D., Manoranjan V.S., Yin H.-M. Numerical Solutions for a Coupled Parabolic Equations Arising Induction Heating Processes. Discrete Contin. Dyn. Syst., Suplement, 2007, p.956-964.
15. Yin H.-M. Global Solutions of Maxwell's Equations in an Electromagnetic Field with a Temperature-dependent Electrical Conductivity. European J. Apl. Math., 5, 1994, p.57-64.
16. Yin H.-M. On a Nonlinear Maxwell's System in Quasi-Stationary Electromagnetic Fields. Math. Models Methods Apl. Sci., 2004, V. 14, 10, p. 1521-1539.
17. Ding S.J., Guo B.L., Lin J.Y., Zeng M. Global Existence of Weak Solutions for Landau-Lifshitz-Maxwell Equations. Discrete Contin. Dyn. Syst., 17, 2007, p.867-890.
18. Elliott C.M., Larsson S. A Fnite Element Model for the Time-Dependent Joule Heating Problem. Math. Comp., 1995,64, p.1433-1453.
19. Eller M., Lagnese J.E., Nicaise S. Stabilization of Heterogeneous Maxwell's Equations by Linear or Nonlinear Boundary Feedbacks. Electronic J. Diff. Equ., 2002(21), 2002, p.1-26.
20. Estep D.J., Verduyn Lunel S. M., Williams R.D. Analysis of Shear Layers in a Fluid with Temperature-dependent Viscosity J. Comput. Physics, 173, 2001, p.17-60.
21. Lu T., Zhang P., Cai W. Discontinuous Galerkin Methods for Dispersive and Lossy Maxwell's Equations and PML Boundary Conditions. J. Comput. Phys., 200, 2004, p.549-580.
22. Ma C. Finite-Element Method for Time-Dependent Maxwell's Equations Based on an Explicit Magnetic-Field Scheme. J. Comput. Appl. Math., 194, 2006, p.409-424.

23. Miranda F., Rodrigues J.-F., Santos L. A Class of Stationary Nonlinear Maxwell Systems, Math. Models Methods Appl. Sci., 19, 2009, p.1883-1905.
24. Mitrea M. Boundary Value Problems for Dirac Operators and Maxwell's Equations in Non-Smooth Domains. Math. Methods Appl. Sci., 25, 2002, p.1355-1369.
25. Monk P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford University Press, New York, 2003.
26. Wollman S. A Deterministic Particle Method for the Vlasov-Maxwell-Fokker-Planck System in Two Dimensions, Neural Parallel Sci. Comput., 18, 2010, p.461-470.
27. Xu X., A Degenerate Stefan-Like Problem with Joule's Heating. SIAM J. Math. Anal., 23, 1992, p.1417-1438.
28. Yee K.S., Numerical Solution of Initial Boundary Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. IEEE Trans. Antennas Propag., 14, 1966, p.302-307.
29. Yin H.-M., On Maxwell's Equations in an Electromagnetic Field with the Temperature Effect. SIAM J. Math. Anal., 29, 1998, p.637-651.
30. Zhao J., Analysis of Finite Element Approximation for Time Dependent Maxwell Problems. Math. Comp., 73, 2004, p.1089-1105.
31. Dzhangveladze T. An Investigation of the First Boundary-Value Problem for Some Nonlinear Parabolic Integrodifferential Equations. (Russian) Tbilisi State University,Tbilisi, 1983.
32. Dzhangveladze T.A. First Boundary-Value Problem for a Nonlinear Equation of Parabolic Type. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1983, V. 269, 4, p.839-842. English translation: Soviet Phys. Dokl., 1983, V. 28, 4, p.323-324.
33. Dzhangveladze T.A. Nonlinear Integro-Differential Equation of Parabolic Type. Differ. Uravneniya, 1985, V. 21, p.41-46. English translation: Differ. Equ., 1985, V. 21, 1, p.32-36 (Russian).

34. Dzhangveladze T.A. On the Convergence of the Difference Scheme for one Nonlinear System of Partial Differential Equations. (Russian) Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, 1987, V. 126, 2, p.257-260.

35. Dzhangveladze T.A. Stability of the Stationary Solution of a System of Nonlinear Partial Differential Equations. Proc. All-Union Symp. Curr. Probl. Math. Phys., Tbilisi, 1987, V.1, p.214-221 (Russian).

36. Dzhangveladze T.A., Kiguradze Z.V. Asymptotic Behavior of the Solution to Nonlinear Integrodifferential Diffusion Equation. (Russian) Differ. Uravn., 2008, V. 44, 4, p.517-529. English translation:Differ. Equ., 2008, V. 44, 4, p.538-550.

37. Gordeziani D., Dzhangveladze T., Korshia T. Existence and Uniqueness of the Solution of a Class of Nonlinear Parabolic Problems. Differ. Uravn, 1983, 19, 7, p.1197-1207 (Russian). English translation: Differ. Equ., 1984, V. 19, 7, p.887-895.

38. Jangveladze T. Convergence of a Difference Scheme for a Nonlinear Integro-Differential Equation. Proc. of I.Vekua Inst. Apl. Math., 1998, V. 48, p.38-43.

39. Jangveladze T. On one Class of Nonlinear Integro-Differential Equations. Semin. I.Vekua Inst. Apl. Math. Rep., 1997, V. 23, p.51-87.

40. Jangveladze T., Kiguradze Z. Asymptotics of a Solution of a Nonlinear System of Diffusion of a Magnetic Field into a Substance. Siberian Math. J., 47, 2006, p.1058-1070.

41. Jangveladze T., Kiguradze Z. Estimates of a Stabilization Rate as $t \to \infty$ of Solutions of a Nonlinear Integro-Differential Equation. Georgian Math. J., 2002, V. 9, 1, p.57-70.

42. Jangveladze T., Kiguradze Z., Gagoshidze M. Large Time Behavior of Solution and Semi-Discrete Scheme for One Nonlinear Integro-Differential Equation with Source Terms. J. Apl. Math. Inform. Mech., 2014,V.19, N2, p.10-17.

43. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Finite Difference Aproximation of a Nonlinear Integrodifferential System. Apl. Math.Comput., 2009, V. 215, 2, p.615-628.

44. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Large Time Asymptotic and Numerical Solution of a Nonlinear Diffusion Model with Memory. Comput.Math. Apl., 2010, V. 59, p.254-273.

45. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Large Time Behavior of Solutions to a Nonlinear Integrodifferential System. J. Math. Anal. Apl., 2009, V. 351, 1, p. 382-391.

46. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B., Reich S. Finite Element Aproximations of a Nonlinear Diffusion Model with Memory. Numer. Algorithms, 2013, V. 64, 1, p.127-155.

47. Abuladze I.O., Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshiya T.K. On the Numerical Modeling of a Nonlinear Problem of the Diffusion of a Magnetic Field with Regard to Heat Conductivity. Proc. I.Vekua Inst. Appl. Math. (Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Math. Trudy), 1986, V.18, p.48-67 (Russian, Georgian and English summaries).

48. Kiguradze Z. On Asymptotic Behavior and Numerical Resolution of one Nonlinear Maxwell's Model. Proccedings of the 15th WSEAS Int. Conf. Aplied Math. (MATH '10), 2010, p.55-60.

49. Kiguradze Z. The Asymptotic Behavior of the Solutions of one Nonlinear Integro-Differential Model. Semin. I.Vekua Inst. Apl. Math. Rep., 2004, V. 30, p.21-32.

50. Kiguradze Z.V. On the Stationary Solution for one Diffusion Model. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Aplied Mathematics, 2001,V. 16, N1, p.17-20.

51. Kiguradze Z.V. The Difference Scheme for one System of Nonlinear Partial Differential Equations. Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Aplied Mathematics, 1999, V.14, N3, p.67-70.

52. Laptev G. Mathematical Singularities of a Problem on the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1988, V. 28, p.1332-1345.

53. Laptev G. I. Degenerate Quasilinear Evolution Equations Containing a Volterra Operator in the Coeffcients, Arabian J. Sci. Engrg., 17, 1992, p.591-598.

54. Laptev G.I. Quasilinear Evolution Partial Differential Equations with Operator Coeficients. (Russian) Doctoral Dissertation. Moscow, 1990.

55. Laptev G.I. Quasilinear Parabolic Equations which Contains in Coefficients Volterra's Operator. (Russian) Math. Sbornik, 1988, V. 136, p.530–545. English translation: Sbornik Math., 1989, V. 64, p.527– 542.

56. Lin Y.,Yin H.M. Nonlinear Parabolic Equations with Nonlinear Functionals. J. Math. Anal. Apl., 1992, V. 168, p.28-41.

57. Liu J.H. A necessary condition for asymptotic property in integro-differential equations. Proceedings of Dynamic Systems and Aplications, V.2 (Atlanta, GA, 1995), Dynamic, Atlanta, GA, 1996, p.341-348.

58. Long N., Dinh A. Nonlinear Parabolic Problem Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. Math. Meth. Apl. Sci., 1993, V. 16, p.281-295.

59. Long N.T., Dinh A.P.N. Periodic Solutions of a Nonlinear Parabolic Equation Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. Comput. Math. Apl., 1995, V. 30, N1, p.63-78.

60. MacCamy R.C. An Integro-Differential Equation with Aplication in Heat Flow. Quart. Apl. Math., 1977, N35, p.1-19.

61. Neta B. Numerical Solution of a Nonlinear Integro-Differential Equation. J. Math. Anal. Apl., 1982, N89, p. 589-611.

62. Akrivis G., Larsson S. Linearly Implicit Finite Element Methods for the Time-Dependent Joule Heating Problem. BIT, 45, 2005, p.429-442.

63. Dehghan M., Shakeri F. Solution of Parabolic Integro-differential Equations Arising in Heat Conduction in Materials with Memory Via He's Variational Iteration Technique. Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng., 26, 2010, p.705-715.

64. Dzhangveladze T.A., Kiguradze Z.V. On the Stabilization of Solutions of an Initial-boundary Value Problem for a Nonlinear Integro-differential Equation. Differential'nye Uravnenyia, 43, 2007, p.833-840 (Russian). English translation: Differential Equations, 43, 2007, p.854-861.

65. Dzhangveladze T.A., Lybimov B.I., Korshia T.K. On the Numerical Solution of a Class of Nonisothermic Problems of the Diffusion of an Electromagnetic Field. Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math. (Tbilisi. Gos. Univ. Inst. Prikl. Math. Trudy), 18, 1986, p.5-47 (Russian).

66. Hyman J.M., Shashkov M. Mimetic Discretizations for Maxwells Equations. J. Comput. Phys., 151, 1999, p.881-909.

67. Jangveladze T., Investigation and Numerical Solution of System of Nonlinear Integro-Differential Equations Associated with the Penetration of a Magnetic Field in a Substance. Recent Researches in Applied Mathematics, 15th WSEAS Int. Conf. Applied Mathematics (MATH '10), Vouliagmeni, Athens, Greece, December 29-31, 2010, p.79-84.

68. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta, B. Galerkin Finite Element Method for One Nonlinear Integro-Differential Model. Appl. Math. Comput., 217, 2011, p.6883-6892.

69. Ponomarev S.M., On the Diffusion of an Intense Magnetic Field into a thin Incompressible Conductor. Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz., 27, 1987, p.1424-1428 (Russian). English translation: USSR Comput. Math. Math. Phys., 27(5), 1987, p.98-101.

70. Liao H., Zhao Y. Linearly Localized Difference Schemes for the Nonlinear Maxwell Model of a Magnetic Field into a Substance. Appl. Math. Comput. 233, 2014, p.608–622.

71. Jangveladze T., Kiguradze Z. On Some Nonlinear Partial Differential and Integro-Differential Diffusion Models. Proc. 2nd International Conference on Applied, Numerical and Computational Mathematics, Recent Advances in Mathematical Methods and Computational Techniques in Modern Science 2013, p.124-129.
72. Sharma N., Sharma K.K. Unconditionally Stable Numerical Method for a Nonlinear Integro-differential Equation. Comp. Math. Appl. 67, 2014, p.62-76.
73. Sharma N., Sharma, K. K. Finite Element Method for a Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equation in Higher Spatial Dimensions. Applied Mathematical Modelling, 39(23), 2015, p.7338-7350.
74. Kiguradze Z.V. Investigation and Numerical Solution of Some Systems of Partial Integro-differential Equations. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE - 2014, Dedicated to the 125th birthday anniversary of Professor Andrea Razmadze, 2014, p.81-85.
75. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Elsevier. Academic Press, 2015, p.254.
76. Jangveladze T. Long-Tiime Behavior of Solution and Semi-Discrete Scheme for One Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equation. Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, 2016, 170, p.47-55.
77. Chen F. Crank-Nicolson Fully Discrete-Galerkin Mixed Finite Element Approximation of One Nonlinear Integrodifferential Model. Abstract and Applied Analysis 2014 May 25 (Vol. 2014). p.8.
78. Sharma N., Khebchareon M., Sharma K., Pani AK. Finite Element Galerkin Approximations to a Class of Nonlinear and Nonlocal Parabolic Problems. (in press).

79. Bai Y. Backward Solutions to Nonlinear Integro-Differential Systems. Central European Journal of Mathematics, 2010, V. 8, p.807-815.
80. Bai Y., Zhang P. On a Class of Vterra Nonlinear Equations of Parabolic Type. Apl. Math. Comp., 2010, V. 216, p.236-240.
81. Baxevanis Th., Katsaounis Th., Tzavaras A.E. Adaptive Fnite Element Computations of Shear Band Formation. Math. Mod. Meth. Apl. Sci., 2010, V. 20, 3, p.423-448.
82. Abuladze I.O., Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Discrete Models for a Nonlinear Magnetic-Field Scattering Problem with Thermal Conductivity. (Russian) Differ. Uravn., 1986, V. 22, 7, p.1119-1129. English translation: Differ. Equ., 1986, V. 22, 7, p.769-777.
83. Gagoshidze M. Numerical Resolution of one Nonlinear Parabolic System. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Apl. Math., 2010, V. 24, p.40-44.
84. Gagoshidze M., Jangveladze G., Jangveladze T., Kiguradze Z. Large Time Behavior and Semi-Discrete Scheme for One Nonlinear Partial Integro-Differential Equation. SIAM SEAS Conference, Florida Institute of Technology Melbourne, USA, Florida, March 29-30, 2014. SIAM Abstracts Book, 2014, p.47.
85. Gagoshidze M., Jangveladze T., On One Nonlinear Diffusion System. Rep. Enl. Sess. Sem. I. Vekua Inst. Apl. Math., 2011, V.25, p.39-43.
86. Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshiya T.K. A Class of Nonlinear Parabolic Equations, that Arise in Problems of the Diffusion of an Electromagnetic Field. Proc. I.Vekua Inst. Apl. Math. (Tbiliss. Gos. Univ. Inst. Prikl. Math. Trudy), 1983, V.13, p.7-35 (in Russian, Georgian and English summaries).
87. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Large Time Behavior and Numerical Solution of Nonlinear Integral-Differential System Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. Theses. Int. Conf. Modern Probl. Appl. Math., Dedicated to the 90th Anniversary of the Iv.

Javakhishvili Tbilisi State University & 40th Anniversary of the I. Vekua Inst. Appl. Math., 2008, p.58.

88. Aptsiauri M. On One Averaged Integro-Differential Parabolic Equation. Fifth Congress of Matematicians of Georgia Abstracts of Contributed Talks. Batumi/Kutaisi, October 9 – 12, 2009.

89. Aptsiauri M., Kiguradze Z. On One Two-Dimensional Nonlinear Integro-Differential Equation Based on Maxwell System. VI Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, July 12 – 16, 2015, p.62.

90. Aptsiauri M. Three-Level Difference Schemes for One Nonlinear System of Partial Differential Equations. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 1995, V.10, №1, p.1-3.

91. Aptsiauri M. Finite Difference Schemes for One System of Nonlinear Partial Differential equations, Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2000-2001, V.50-51, p.1-4.

92. Jangveladze T., Aptsiauri M. The Asymptotic Behavior of Solutions and Finite Difference Scheme for One Nonlinear Integral-Differential Equation. Bull. Georg. Acad. Sci., 2006, V.174, N1, p.25-28.

93. Kiguradze Z. Aptsiauri M. Large Time Behavior of the Solutions and Finite Difference Scheme for One System of Nonlinear Integral-Differential Equations. Bull. Georg. Acad. Sci., 2006, V.174, N2, p.211-214.

94. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Large Time Behavior of Solutions and Numerical Approximation of Nonlinear Integro-Differential Equation Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. J. Appl. Math. Inform. Mech., 2008, V.13, N2, p.3-17.

95. Jangveladze T., Aptsiauri M., Kiguradze Z. On Asymptotic Behavior of Solution of One Nonlinear One-Dimentianal Integro-Differential Analogue of Maxwell's System. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2009, V.23, p.5-10.

96. Aptsiauri M., Kiguradze Z. On One Nonlinear Integro-Differential Equation. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua. Inst. Appl. Math., 2010, V.24, p.9-12.

97. Aptsiauri M. On One Averaged Integro-differential Model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua. Inst. Appl. Math., 2011, V.25, p.10-13.

98. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Asymptotic Behavior of the Solution of a System of Nonlinear Integro-Differential Equations, Differ. Uravn., 48, 2012, p.1-9 (Russian). English translation: Diff. Eq., 48, p.70-78.

99. Aptsiauri M. Asymptotic Behavior of the Solution of One Nonlinear Integro-differential Model with Source Term. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2012, V.26, p.1-4.

100. Aptsiauri M., Gagoshidze M. Semi-Discrete Scheme for One System of Nonlinear Averaged Integro-Differential Equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2013,V.27, p. 1-4.

101. Aptsiauri M., Gagoshidze M. On One Nonlinear Averaged Integro-Differential System with Source Terms. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2014, V.28, p.5-8.

102. Aptsiauri M., Gagoshidze M. Approximate Solution of One-dimensional Nonlinear Maxwell Model with Heat Conductivity Term. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2015, V.29, p.12-15.

103. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. Ural'ceva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. (Russian) Moscow, 1968.

104.Silvestre L. Holder Continuity for Integro-Differential Parabolic Equations with Polynomial Growth Respect to the Gradient. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 28, 2010, p.1069-1081.

105.Teo K.L. Existense and Uniqueness of Solutions of System Governed by Second-Order Quasilinear Intrego-Partial Differential Equations of Parabolic Type. A, Equationes Math. 1980, V. 2, N2-3, p.133-148.

106.Agarwal R., Bohner M., Domoshnitsky A., Goltser Y. Floquet Theory and Stability of Nonlinear Integro-Differential Equations. Acta Math. Hungar. 109 (4), 2005, p.305-330.

107.Engler H. Global Smooth Solutions for a Class of Parabolic Integro-differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc., 348, 1996, p.267-290.

108.Fakhar-Izadi F., Dehghan M. The Spectral Methods for Parabolic Volterra Integro-Differential Equations. J. Comput. Appl. Math., 235, 2011, p.4032-4046.

109.MacCamy R.C. An Integro-Differential Equation with Application in Heat Hlow. Quart. Appl. Math., 35, 1977, p.1-19.

110.Browder F.E. Nonlinear Equations of Evolution. Ann. Math., 80, 1964, p.485-523.

111.Raviart P.A. Sur la Resolution de Certaines Equations Paraboliques Non lineares. J. Funct. Anal., 1970, V. 5, N2, p.299-328.

112.Sacks P.E. The Initial and Boundary Value Problem for a Class of Degenerate Parabolic Equations. Commun. Part. Different. Equat., 1983, V. 8, N7, p.693-733.

113.Vishik M.I. On Solvability of the Boundary Value Problems for Higher Order Quasilinear Parabolic Equations. Math. Sbornik, 1962, V. 59(101), p.189-225 (Russian).

114.Budak B.M., Pavlov A.R. A Difference Method of Solving Boundary Value Problems for a Quasilinear Integro-Differential Equation of Parabolic Type. Soviet Math. Dokl., 14, 1974, p.565–569.

115. Camino P. A Numerical Method for a Partial Differential Equation with Memory. Proc. 9th CEDYA. Secretariado de Publicaciones, Universidad de Valladolid, Valladolid, 1988, p.107–112.

116. Cannon J.R., Lin Y. Nonclassical $H1$ Projection and Galerkin Methods for Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Calcolo, 25, 1988, p.187-201.

117. Han H., Zhu L., Brunner H., Ma J.T. The Numerical Solution of Parabolic Volterra Integro-Differential Equations on Unbounded Spatial Domains, Appl. Numer. Math., 55, 2005, p.83-99.

118. Matejicka L. On Approximate Solutions of Degenerate Integro-differential Parabolic Problems. Mathematica Slovaca, 45, 1995, p.91-103.

119. Neta B. Numerical Solution of a Nonlinear Integro-Differential Equation. J. Math. Anal. Appl., 89, 1982, p.589-611.

120. Neta B., Igwe J.O. Finite Differences Versus Finite Elements for Solving Nonlinear Integro-Differential Equations. J. Math. Anal. Appl., 68, 1985, p.607-617.

121. Pani A., Thomee V., Wahlbin L. Numerical Methods for Hyperbolic and Parabolic Integro-Differential Equations. J. Integral Equ. Appl., 4, 1992, p.533–584.

122. Sloan I.H., Thomee V. Time Discretization of an Integro-differential Equation of Parabolic Type. SIAM J. Numer. Anal., 23, 1986, p.1052-1061.

123. Thomee V., Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer-Verlag, New York, NY, 2006.

124. Rogava J. L. Semi-Discrete Schemes for Operator Differential Equations. Georgian Technical University Press, Tbilisi, 1995.

125. Samarskii A.A. The Theory of Finite-Difefrence Schemes. Moscow, 1977.

126. Minty, G.J., Monotone (Non Linear) Operators in Hilbert Space. Duke Math. J., 29, 1962, p.341-346.

127.Dubinskii Yu. A. Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations. J. Math. Sci., 12(5), 1979, p.475-554.

128.Sattinger D.H. Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems. Indiana Univ. Math. J., 21, 1972, p.979-1000.

129.Showalter R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. AMS, Providence, RI, 1997.

130.Rheinboldt W.C. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia,1970.

დანართი

დანართში მოცემულია პროგრამული კოდის ძირითადი ფრაგმენტები, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები.

პროგრამული კოდი დაწერილია C++-ზე Visual Studio-ს გამოყენებით, ხოლო გრაფიკები აგებულია Mathcad 15-ში.

პროგრამის გამშვები ფუნქციაა main, რომელიც განსაზღვრულია main.cpp ფაილში. შესაბამისი კლასები განსაზღვრულია Source.h და Source.cpp ფაილებში. ამ კლასის მეშვეობით ხდება მონაცემების დათვლა და შემდეგ დათვლილი მონაცემების შენახვა prn გაფართოების ფაილში. ფაილში მონაცემების შესანახად გამოიყენება PrintMethods.h და PrintMethods.cpp ფაილში არსებული ფუნქციები. Fuctions.h და Fuctions.cpp ფაილში განსაზღვრულია ამოცანის საწყისი ფუნქციები დამარჯვენა მხარეები. MethodsMath კლასი განსაზღვრულია MethodsMath.h და MethodsMath.cpp ფაილში, ამ კლასში განსაზღვრულია ფაქტორიზაციის მეთოდები.

პროგრამაში გამოყენებულია შემდეგი ცვლადები:

- h - ბიჯი x -ის მიმართულებით
- τ - ბიჯი დროითი ცვლადის მიმართ
- T -დრო
- ε – ორ იტერაციას შორის სხვაობა
- $M = \frac{1}{h}$ - წერტილთა რაოდენობა სივრცული ცვლადის მიმართ
- $N = \frac{T}{\tau}$ - წერტილთა რაოდენობა დროითი ცვლადის მიმართ
- $\eta_0 = \eta_1 = 0$ - სასაზღვრო პირობები
- $k_0 = k_1 = 0$ - სასაზღვრო პირობები

სამდიაგონალური მატრიცა:

$a=\frac{\tau}{h^2}$ - მთავარი დიაგონალის ქვემოთ მდებარე დიაგონალი

$b=\frac{\tau}{h^2}$ - მთავარი დიაგონალის ზემოთ მდებარე დიაგონალი

$c=1+a+b$ - მთავარი დიაგონალი

პროგრამული პაკეტი შედგება შემდეგი ფაილებისგან:

- ***Variables.h*** - განკუთვნილია პროგრამის ძირითადი ცვლადებისთვის.
- ***Functions.h, Functions.cpp,*** - ამ ფაილებში განსაზღვრულია ზუსტი ამონახსნი და მარჯვენა მხარე.
- ***MethodsMath.h, MethodsMath.cpp*** - ფაქტორიზაციის მეთოდი.
- ***PrintMethods.h, PrintMethods.cpp*** - დათვლილი მონაცემების შენახვა prn გაფართოების ფაილში.
- ***Source.h, Source.cpp*** - მონაცემების დათვლა შესაბამისი ალგორითმებით
- ***main.cpp*** - პროგრამის გამშვები ფაილი

ქვემოთ მოყვანილია რამდენიმე ფაილის დაწვრილებითი აღწერა.

MethodsMath.h

```
#ifndef _METHODSMATH_H_
#define _METHODSMATH_H_

class MethodsMath
{
public:
// ფაქტორიზაციის მეთოდი
void Factorization(double *, int, double , double , double , double *, double *,
double *);
void Factorization(double *, int, double *, double *, double *, double *, double *,
double *);
```

```
};

#endif
```

PrintMethods.h

```
#ifndef _PRINTMATHODS_H_
#define _PRINTMATHODS_H_

#include "Variables.h"

// ფაილში მონაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში
დააბრუნებს true
bool PrintFile(double *, char *);
// ფაილის სახელის შექმნა
void FileName(char *, double);

#endif
```

MethodsMath.cpp

```
#include "MethodsMath.h"
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

/* ფაქტორიზაციის მეთოდი
 x - მასივი რომელიც უნდა დაბრუნდეს
 m - მასივის სიგრძე
 a - სამდიაგონალური მატრიცის ქვედა დიაგონალი
 c - სამდიაგონალური მატრიცის ცენტრალური დიაგონალი
```

```
 b - სამდიაგონალური მატრიცის ზედა დიაგონალი
 k, niu - მარცხენა და მარჯვენა საზღვარი
        y[0] = k[0]*y[1]   + niu[0]
        y[m] = k[1]*y[m-1] + niu[1]
 f - მარჯვენა მხარე
*/

void MethodsMath::Factorization(double *x, int m, double a, double c, double b,
double *k, double *niu, double *f)
{
        int i;
        double *alfa = new double[m+1];
        double *beta = new double[m+1];

        alfa[1] = k[0];
        beta[1] = niu[0];

        for(i=1; i<m; i++)
        {
                x[i] = 0;
        }

        for(i=0; i<m+1; i++)
        {
                alfa[i+1] = b / (c-a*alfa[i]);
                beta[i+1] = (a*beta[i]-f[i]) / (c-a*alfa[i]);
        }

        x[m] = (k[1]*beta[m]+niu[1]) / (1-k[1]*alfa[m]);
```

```
		for(i=m-1; i>=0; i--)
		{
			x[i] = alfa[i+1] * x[i+1] + beta[i+1];
		}

		delete alfa;
		delete beta;
};

void MethodsMath::Factorization(double *x, int m, double *a, double *c, double *b,
double *k, double *niu, double *f)
{
		int i;
		double *alfa = new double[m+1];
		double *beta = new double[m+1];

		alfa[1] = k[0];
		beta[1] = niu[0];

		for(i=0; i<m+1; i++)
		{
			x[i] = 0;
		}

		for(i=1; i<m; i++)
		{
			alfa[i+1] = b[i] / (c[i]-a[i]*alfa[i]);
			beta[i+1] = (a[i]*beta[i]-f[i]) / (c[i]-a[i]*alfa[i]);
```

```
        }

        x[m] = (k[1]*beta[m]+niu[1]) / (1-k[1]*alfa[m]);

        for(i=m-1; i>=0; i--)
        {
            x[i] = alfa[i+1] * x[i+1] + beta[i+1];
        }

        delete alfa;
        delete beta;

};
```

PrintMethods.cpp

```
#include "PrintMethods.h"
#include "Variables.h"

#include <string.h>
#include <iostream>
#include <stdio.h>

// ფაილში მონაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში
დააბრუნებს true
bool PrintFile(double *x, char *FileName)
{
    FILE *f;
    f = fopen(FileName, "w");
```

```
	if(f==NULL)
	{
		return false;
	}
	fprintf(f,"U1\t U2\t V1\t V2\n");
	printf("\n\n\n");
	printf("U1\t U2\t V1\t V2\n");
	for(int i=0; i<4; i++)
	{
		fprintf(f,"%f\t",x[i]);
		printf("%f\t",x[i]);
	}
	fclose(f);
	printf("\n\n\n");
	return true;
}
// ფაილის სახელის შექმნა
void FileName(char *_FileName, double t)
{
	int n;
	_FileName[0] = '\0';
	n = sprintf (_FileName, "File\\t=%f.prn", t);
}
```

main.cpp

```
int main()
{
```

```
        MA MA;
        MA.Calculation();
        NM.Print(0.5);
        NM.Print(1.0);

        system("pause");

        return 0;

}
```