საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

მაია აფციაური

ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

თბილისი

2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფესორი თემურ ჯანგველაძე

ასოც. პროფ. ზურაბ კიღურაძე

რეცენზენტები: --------------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის „--------„ --------------------, ----- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -------------------------------------- -------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ------, აუდიტორია ----------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა და გამოყენების სფერო. პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირება, გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა თანამედროვე მათემატიკის და ინფორმაციული ტექნოლოგიების გამოყენების ერთ-ერთ აქტუალურ სფეროს წარმოადგენს.

ასეთი ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესები ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე.

აღნიშნული პროცესის, ისევე როგორც სხვა მრავალრიცხოვანი გამოყენებითი ამოცანის მათემატიკური მოდელირებისას, ვღებულობთ არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ, ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებს და განტოლებათა სისტემებს. ძალიან ხშირად აღნიშნული დიფერენციალური სისტემების ძირითადი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შეიცავენ სხვადასხვა რიგის განტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული სისტემისთვის განაპირობებს კვლევის ინდივიდუალურად მისადაგებული მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია ამგვარი წრფივი სისტემებისთვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითარებული. ხშირად გამოსაკვლევი პროცესები აღიწერებიან ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებით. არცთუ იშვიათად გამოკვლევისათვის მოსახერხებელია პროცესის მათემატიკური აღწერისას მიღებული დიფერენციალური მოდელების ინტეგრო-დიფერენციალურზე რედუცირება და პროცესის მათი საშუალებით შესწავლა. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობის საკითხიც, რაც თავის მხრივ არანაკლები სირთულეების დაძლევასთან არის დაკავშირებული. გამოკვლევისთვის საჭირო და მოსახერხებელი ყოველი მეთოდის თავისებურება ძირითადად ვლინდება შესაბამისი ამოცანების და მათი დისკრეტული ანალოგებისთვის აუცილებელი აპრიორული შეფასებების მიღებასა და მათ შემდგომ გამოყენებაში.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე, დიფუზიის ასეთი ამოცანების მათემატიკური მოდელირება მეტად აქტუალურია და ამ კუთხით დიფერენციალურ მოდელებთან ერთად არანაკლები მნიშვნელობისაა ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და სისტემები.

აღსანიშნავია, რომ რამოდენიმე ათეული წელია რაც ელექტრომაგნიტური ველის გარემოში დიფუზიის პროცესის აღმწერი და მაქსველის ცნობილ არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან სისტემაზე დაფუძნებული პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელებზე რედუცირებული სტრუქტურების შესწავლაც საკმაოდ ინტენსიურად მიმდინარეობს. მათ გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას არსებითი მნიშვნელობა ენიჭება. პირველად ზემოთაღნიშნული მოდელი 1983 წელს დაფიქსირდა დ.გორდეზიანის, თ.ჯანგველაძის და თ.ყორშიას ნაშრომში (Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshia T.K. Existence and Uniqueness of the Solution of a Class of Nonlinear Parabolic Problems. Differ. Uravn, 1983, 19, 7, p. 1197-1207 (Russian). English translation: Differ. Equ., 1984, V. 19, 7, p. 887-895). შემდეგ 1990 წელს გ.ლაპტევის მიერ იგივე დიფუზიური პროცესის შესწავლისას მოხდა მისი განზოგადება და წარმოიშვა კვლავ პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური ე.წ. გასაშუალებული მოდელი.

ამ მოდელების გამოკვლევას და მიახლოებით ამოხსნას მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი მიეძღვნა როგორც საქართველოში ასევე უცხოეთში და მათ ახლა სულ უფრო და უფრო ინტენსიურად იკვლევენ. ამ მიმართულებით საკმაოდ ვრცელი და შედარებით სრულყოფილი ლიტერატურული ციტირებები მოცემულია ახლახანს გამოცემულ მონოგრაფიაში Temur Jangveladze, Zurab Kiguradze, Beny Neta. Numerical Solutions of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Elsevier. Academic Press, 2015, 254 p.

შესასწავლი მოდელების სირთულე განაპირობებს მათი კომპლექსურად კვლევის აუცილებლობას. კერძოდ, როგორც თეორიული ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. ბუნებრივია, რომ მნიშვნელოვანი როლი აქ უნდა ითამაშოს რიცხვითმა ექსპერიმენტმა.

სადისერტაციო ნაშრომში ჩატარებულია მათემატიკური გამოკვლევები არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა ზოგიერთი დიფუზიური მოდელისათვის. ამოცანაში შემავალი ყველა პარამეტრისთვის, კერძოდ, არაწრფივობის მახასიათებლებისთვის, როგორც უწყვეტი ასევე დისკრეტული ანალოგების სრულყოფილი თეორიული შესწავლა ფაქტიურად შეუძლებელია. მიუხედავად ამისა, სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა მსგავსი სახის თეორიულ გამოკვლევებს, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული მრავალი რიცხვითი გამოთვლით. ამ შემთხვევებისთვის შემუშავებული რიცხვითი გამოთვლების ალგორითმების ეფექტურმა გამოყენებამ საშუალება მოგვცა ჩაგვეტარებინა რიცხვითი ექსპერიმენტები პარამეტრების სხვა მნიშვნელობებისთვისაც, რაც თავის მხრივ მნიშვნელოვნად აიოლებს შესასწავლი პროცესის პრაქტიკული შინაარსის გააზრებას.

ზემოთ უკვე აღინიშნა, რომ მრავალი მეტად საინტერესო და მნიშვნელოვანი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელდება ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებით და მათი სისტემებით. განტოლებები, რომლებიც საძიებელ ფუნქციებთან ერთად შეიცავენ ინტეგრალებს ამ ფუნქციებიდან და მათი წარმოებულებიდან, ფაქტიურად წარმოიშვნენ ლოკალურ კერძოწარმოებულებიან განტოლებებთან ერთად. მიუხედავად ამისა, აღნიშნული განტოლებების გამოკვლევა დაიწყო შედარებით გვიან.

სხვადასხვა სახის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენცილური განტოლებები შეისწავლება მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში. დისერტაციაში განხილული ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი და მსგავსი მოდელები წარმოიშვნენ ერთის მხრივ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას, ხოლო მეორეს მხრივ – არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შესწავლას ეძღვნება მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი. ამ განტოლებების და განტოლებათა სისტემების დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი რიგის წარმოებულებთან გვხვდება

არაწრფივი კოეფიციენტები, რომლებიც დამოკიდებულია სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ საძიებელი ფუნქციებისა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე.

დიფუზიის მრავალი პროცესის აღმწერი არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები და განტოლებათა სისტემები იყო და კვლავაც არის მრავალი მეცნიერის კვლევის ობიექტი. ამ სისტემების შესაბამისი საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების თვისობრივი და სტრუქტურული მახასიათებლების დადგენა, დისკრეტული ანალოგების აგება, გამოკვლევა და რიცხვითი ალგორითმების შესწავლა წარმოადგენს თანამედროვე გამოთვლითი მათემატიკის მეტად აქტუალურ და სწრაფად განვითარებად ნაწილს.

სამუშაოს მიზანი, კვლევის ობიექტი და მეთოდები, ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე. დისერტაციის ძირითად მიზანს წარმოადგენს ზემოთ დაფიქსირებული ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური და ასევე ძირითადად შესაბამისი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ზოგიერთი თვისების შესწავლა, შესაბამისი დისკრეტული ანალოგების აგება და გამოკვლევა, სარეალიზაციო ალგორითმების შედგენა, პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ამოხსნა.

სხვადასხვა ბუნების დიფუზიური ამოცანების მოდელირება და მათემატიკური ასპექტები, რომლებიც დაკავშირებულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მდგრადობის, არსებობის, ერთადერთობის თეორემებთან და ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხებთან შესწავლილია მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში.

დისერტაციაში შესწავლილია: საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის, წრფივი და გლობალური მდგრადობის, დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას ასიმპტოტური ყოფაქცევის, ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგების აგება-გამოკვლევის საკითხები.

კვლევისათვის მეტად საინტერესო ზემოთ აღნიშნული მოდელების სირთულე განაპირობებდა არაწრფივი ანალიზისა და მიახლოებითი ანალიზის თანამედროვე მეთოდების არსებით გამოყენებას. რეალური გამოყენებითი ამოცანების შესწავლა თანამედროვე კომპიუტერების გარეშე წარმოუდგენელია. ამდენად, არაწრფივი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების განვითარება და მათ ბაზაზე სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის მოდელირებისთვის გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობაც სავსებით ნათელია.

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი შედეგები სწორედ არაწრფივობის ახალი შემთხვევებისთვის უწყვეტი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის, წრფივი და გლობალური ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლას ეძღვნება. შესამამისი დისკრეტული ანალოგების აგება-ანალიზი და რიცხვითი ამონახსნების აგება-გააზრებაც დისერტაციის მთავარ სიახლეს წარმოადგენს.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა როგორც ადგილობრივ, ასევე საერთაშორისო კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ მომზადდა და ჩატარდა თემატური კოლოკვიუმები და სემინარები.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია მოიცავს რეზიუმეს (ქართულ და ინგლისურ ენაზე), შესავალს, სამ თავს, თოთხმეტ პარაგრაფს, დასკვნას, დანართს და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხას, რომელიც შედგება ასოცდაათი დასახელების სამეცნიერო ნაშრომისაგან. დისერტაცია მოიცავს 127 ნაბეჭდ გვერდს.

დისერტაციის შინაარსი

თავი I. ელექტრომაგნიტური ველის გარემოში გავრცელების კერძოწარმოებულებიანი და ინტეგრო-დიფერენციალური არაწრფივი მოდელების შესახებ

პირველ თავში, რომელიც შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან, განიხილება ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელების პროცესის მათემატიკური მოდელირება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. მაქსველის არაწრფივ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე დაყრდნობით მოყვანილია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. ერთგანზომილებიანი შემთხვევისათვის განხილულია ამოცანის ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. მოყვანილია ერთი დიფუზიური მოდელის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებული და გამოკვლეულია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. მოცემულია არაწრფივი რიცხვითი განტოლებათა შესაბამისი სისტემების ამოხსნის ალგორითმები და ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და ანალიზი. მოყვანილია გრაფიკული ილუსტრაციები.

პირველ ორ პარაგრაფში მაქსველის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის საფუძველზე მოცემულია დიფუზიის ზოგადი ამოცანის დასმა. ამავე პარაგრაფებში განხილულია მათი ზოგიერთი მათემატიკური თავისებურება. აქვე მოყვანილია ამ ამოცანის რედუქცია ინტეგრო-დიფერენციალურ სახემდე.

დავუშვათ, ელექტრომაგნიტური ველი ვრცელდება ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ტემპერატურაზე. კარგად არის ცნობილი, რომ კვაზისტაციონარულ მიახლოებაში მაქსველის შესაბამის განტოლებათა სისტემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot(\nu_m rotH), \quad (1)$$

$$c_v \frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu_m (rotH)^2, \quad (2)$$

სადაც $H = (H_1, H_2, H_3)$ – მაგნიტური ველის დაძაბულობის ვექტორია, θ – ტემპერატურა, c_v და ν_m – ახასიათებენ შესაბამისად გარემოს სითბოტევადობას და ელექტროგამტარობას. (1) განტოლებით აღიწერება მაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში, (2) განტოლებით კი ტემპერატურის ცვლილება ჯოულის სითბოგამოყოფის ხარჯზე.

თუ $c_v = c_v(\theta)$ და $\nu_m = \nu_m(\theta)$, მაშინ (2) განტოლების დროითი ცვლადით ინტეგრებისა და (1) სისტემაში ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -rot\left[a\left(\int_0^t |rotH|^2 d\tau\right) rotH\right], \quad (3)$$

სადაც $a(S)$ კოეფიციენტი განისაზღვრება c_v და ν_m ფუნქციების საშუალებით.

აღნიშნული (3) ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელი რთულია და მისი გამოკვლევა ჯერჯერობით მხოლოდ კერძო კლასებისთვის ხერხდება. (3) ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის სხვადასხვა ვარიანტები განხილულია მრავალ სამეცნიერო ნაშრომში.

ამავე თავის მესამე პარაგრაფში მოყვანილია არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფუზიური ამოცანისთვის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. კერძოდ, განხილულია საკმაოდ ზოგადი ხარისხოვანი სახის არაწრფივი მოდელის სტაციონალური ამონახსნის წრფივად მდგრადობის და ერთი კონკრეტული არაწრფივობისა და შერეული სასაზღვრო პირობებიანი ამოცანის ამონახსნის გლობალურად მდგრადობის საკითხები. მეოთხე პარაგრაფში ამ მოდელებისათვის აგებულია სასრულ-სხვაობიანი სქემები და შესაბამისი არაწრფივი რიცხვითი განტოლებათა სისტემების იტერაციული ალგორითმები.

მეხუთე პარაგრაფი ეძღვნება სხვადასხვა მონაცემებისათვის ჩატარებული კომპიუტერული გამოთვლებით მიღებული რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების გრაფიკულ ილუსტრაციებს და ანალიზს.

თეორიული გამოკვლევის დასაბუთებისა და შესაბამისი პრაქტიკული გათვლების თვალსაზრისით არსებითი ყურადღება ეთმობა შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის სასრულ-სხვაობიანი სქემის აგება-გამოკვლევისა და მისი საშუალებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება-ანალიზის საკითხებს:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(V^{p}\frac{\partial U}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{2}V^{p-1}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}, \tag{4}$$

$$U(0,t)=V(1,t)=0,\ U(x,0)=U_0(x),$$

$$V(x,0)=V_0(x)\geq\delta_0=Const.$$

(4) ამოცანისათვის აგებული და გამოკვლეულია შემდეგი სამშრიანი სასრულ-სხვაობიანი სქემა:

$$u_\tau+\beta\tau u_{\bar{t}t}=\left(\left(v^{(\alpha)}\right)^{p}u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)_x,$$

$$v_\tau+\beta\tau v_{\bar{t}t}=\frac{1}{2}\left(v^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(u_{\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2},$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ t\in\omega_h, \tag{5}$$

$$u(x,0)=U_0(x),\ u(x,t)=U_0(x)+\tau\left(\left(V_0^{(\alpha)}\right)^{p}U_{0\bar{x}}^{(\alpha)}\right)_x,$$

$$v(x,0)=V_0(x),\ v(x,t)=V_0(x)+\frac{1}{2}\tau\left(V_0^{(\alpha)}\right)^{p-1}\left(U_{0\bar{x}}^{(\alpha)}\right)^{2},$$

სადაც $w^{(\alpha)} = \alpha w + (1-\alpha)w;$ $\alpha,\ \beta$ არის პარამეტრები და გამოყენებულია გავრცელებული აღნიშვნები.

დამტკიცებულია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 1.5. თუ $-1 \le p \le 1$ და $\alpha - 0.5 \ge \beta \ge 0,$ მაშინ (4) ამოცანის საკმაოდ გლუვი ამონახსნისათვის, (5) სქემის ამონახსნი კრებადია (4) ამოცანის ამონახსნისაკენ $O\left(\tau^2 + h^2 + \left(\alpha - 0.5 - \beta\right)\tau\right)$ რიგით.

პირველი თავის მეხუთე პარაგრაფში მოცემულია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

თავი II. არაგასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა და რიცხვითი ამოხსნა

მეორე თავში, რომელიც შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან, გამოკვლეულია პირველ თავში მოყვანილი პარაბოლური ტიპის არაწრფივი არაგასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის ზოგიერთი ვარიანტისთვის ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები. მოცემულია ტესტურ ამოცანებზე ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტებით მიღებული შედეგების შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები და ანალიზი.

პირველ პარაგრაფში განხილულია წყაროს წევრებიანი ინტეგრო-დიფერენციალური სისტემა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \right] d\tau \right) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \left|U\right|^{q-2} U = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]d\tau\right)\frac{\partial V}{\partial x}\right]+|V|^{q-2}V=0$$

და მისთვის დასმულია შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$U(0,t)=V(0,t)=0\ ,\ \ U(1,t)=\psi_1,\ \ V(1,t)=\psi_2,\ \ t\ge 0\ , \tag{7}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ \ V(x,0)=V_0(x),\ \ x\in\Omega,$$

სადაც $\psi_1=Const\ge 0,\ \ \psi_2=Const\ge 0,$ ხოლო a, U_0, V_0 თავიანთი არგუმენტე-ბის მოცემული ფუნქციებია. შევნიშნოთ, რომ როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\ne 0,$ მაშინ გვაქვს საწყის-სასაზღვრო ამოცანა საზღვრის ერთ ნაწილზე მაინც არაერთგვაროვა-ნი სასაზღვრო პირობებით. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი საქმე გვაქვს ერთ-გვაროვან სასაზღვრო პირობებიან ამოცანასთან.

შესწავლილია (6), (7) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

თეორემა 2.1. თუ $a(S)=(1+S)^p\ ,\ \ 0<p\le 1,\ \ \ q\ge 2$ და (6), (7) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ ის ერთადერთია.

მეორე პარაგრაფში გამოკვლეულია ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქ-ცევა შემდეგი ერთკომპონენტიანი წყაროს წევრიანი ამოცანისათვის:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(\int_0^t\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2d\tau\right)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+|U|^{q-2}U=0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}U(0,t)=U(1,t)=0,\\ U(x,0)=U_0(x),\end{gathered} \tag{9}$$

სადაც $U_0=U_0(x)$ არის მოცემული ფუნქცია.

თეორემა 2.2. თუ $a(S)\ge a_0=Const>0,\ \ U_0\in L_2(0,1),$ ხოლო $q\ge 2,$ მაშინ (8), (9) ამოცანის ამონახსნისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ასიმპტოტურ შეფასებას

$$\|U(x,t)\| \le Ce^{-a_0 t}.$$

თეორემა 2.2-ში და ქვემოთაც, თუ სხვა კომენტარი არ არის გაკეთებული, $\|\cdot\|$ აღნიშნავს $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმას, ხოლო C კი დადებითი მუდმივია, რომელიც აქ და შემდეგშიც, როცა საკითხი ეხება ამონახსნების ასიმპტოტურ ყოფაქცევას, არ არის დამოკიდებული დროით ცვლადზე.

აქვე, პარაგრაფ ორში არის დაფიქსირებული, რომ ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის თეორემა 2.2-ის მსგავსი დებულება ასევე ადვილად მიიღება წყაროს წევრებიანი ორკომპონენტიანი (8) განტოლების ანალოგიური სისტემისთვისაც.

მეორე პარაგრაფში არის შესწავლილი ისეთი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევის საკითხიც დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას, როცა სასაზღვრო პირობები საზოგადოდ არაერთგვაროვანია.

გამოსაკვლევ საწყის-სასაზღვრო ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial U}{\partial x}\right] = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[a(S)\frac{\partial V}{\partial x}\right] = 0,$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0, \ U(1,t) = \psi_1, \ V(1,t) = \psi_2, \ t \ge 0, \tag{10}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \ V(x,0) = V_0(x), \ x \in (0,1),$$

სადაც

$$S(x,t) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] d\tau, \tag{11}$$

$\psi_1 = Const \ge 0$, $\psi_2 = Const \ge 0$, ხოლო $a = a(S)$, $U_0 = U_0(x)$ და $V_0 = V_0(x)$ კი თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

ჯერ შესწავლილია შემთხვევა, როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\neq 0$, ანუ, როცა $(0,1)$ შუალედის ერთერთ ბოლოზე მაინც სასაზღვრო პირობა არაერთგვაროვანია. სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.3. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$, $\psi_1^2+\psi_2^2\neq 0$ და U_0, V_0 ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: $U_0(0)=V_0(0)=0$, $U_0(1)=\psi_1$, $V_0(1)=\psi_2$, $U_0, V_0\in W_2^2(0,1)$, მაშინ (10), (11) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური ფორმულები:

$$\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\right|=\psi_1+O\left(t^{-1-p}\right),\quad \left|\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right|=\psi_2+O\left(t^{-1-p}\right).$$

შემდეგ განხილულია ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების შემთხვევა, ანუ, როცა $\psi_1=\psi_2=0$.

შევნიშნოთ, რომ ჯერ ზოგადი არაწრფივობისათვის მიღებულია ერთგვაროვანი სასაზღვო პირობებიანი ამოცანის ამონახსნის ექსპონენციალური სტაბილიზაცია $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. შემდეგ უფრო კონკრეტიზირებული ხარისხოვანი არაწრფივობისათვის ნაჩვენებია, რომ სტაბილიზაცია არის აგრეთვე მიღწევადი $W_2^1(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრითაც. ასევე ნაჩვენებია ორივე კომპონენტის დროის მიმართ წარმოებულების ექსპონენციალური ქრობა $L_2(0,1)$ სივრცის ნორმით.

კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.11. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$, $\psi_1=\psi_2=0$, $U_0,V_0\in W_2^2(0,1)$, $U_0(0)=V_0(0)=U_0(1)=V_0(1)=0$, მაშინ (10), (11) ამოცანის ამონახსნისათვის ჭეშმარიტია შემდეგი შეფასება

$$\left\|\frac{\partial U}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial U}{\partial t}\right\|+\left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|+\left\|\frac{\partial V}{\partial t}\right\|\le C\exp\left(-\frac{1}{2}t\right).$$

მეორე თავში საკმაოდ დიდი ყურადღება ეთმობა არაგასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგების აგებას და მათი მდგრადობისა და კრებადობის საკითხების შესწავლას.

გარკვეული მრავალფეროვნებისთვის მესამე პარაგრაფში ჯერ განხილულია შერეული სასაზღვრო პირობებიანი შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1+\int_0^t\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 d\tau\right)^p\frac{\partial U}{\partial x}\right]+\left|U\right|^{q-2}U=0, \tag{12}$$

$$U_0\left(0,t\right)=\left.\frac{\partial U\left(x,t\right)}{\partial x}\right|_{x=1}=0, \tag{13}$$

$$U\left(x,0\right)=U_0\left(x\right), \tag{14}$$

სადაც $0<p\le 1$ და $q\ge 2.$

აგებულია (12)-(14) ამოცანის შესაბამისი შემდეგი ნახევრად-დისკრეტული სქემა, კერძოდ, ისეთი მოდელი, როცა დისკრეტიზაცია ჩატარებულია მხოლოდ სივრცული ცვლადის მიმართ:

$$\frac{du_i}{dt}-\left\{\left(1+\int_0^t\left(u_{\bar{x},i}\right)^2 d\tau\right)^p u_{\bar{x},i}\right\}_x+\left|u_i\right|^{q-2}u_i=0, \tag{15}$$

$$i=1,\ldots,M-1,$$

$$u_0\left(0,t\right)=u_{\bar{x}}\left(1,t\right)=0, \tag{16}$$

$$u_0\left(0\right)=U_{0,i},\; i=0,\ldots,M. \tag{17}$$

მიღებული (15)-(17) ჩვეულებრივ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა არაწრფივი სისტემის კოშის ამოცანისათვის ადვილად მიიღება შემდეგი შეფასება

$$\left\|u\left(t\right)\right\|^2+\int_0^t\left\|u_{\bar{x}}\right]\right|^2 d\tau\le C, \tag{18}$$

სადაც აღნიშვნებში გამოყენებულია დისკრეტული ნორმების გავრცელებული ანალოგები, ხოლო C კი დადებითი მუდმივი, რომელიც არ არის დამოკიდებული h სივრცული ცვლადის მიმართ ბადის ბიჯზე.

აპრიორული შეფასება (18) უზრუნველყოფს (15)-(17) ამოცანის გლობალურ ამოხსნადობას.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 2.13. თუ $0 < p \le 1$, $q \ge 2$ და (12)-(14) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x,t)$, მაშინ (15)-(17) ნახევრად-დისკრეტული სქემის ამონახსნი $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_{M-1}(t))$ კრებადია ამოცანის $U = U(t) = (U_1(t), U_2(t), \ldots, U_{M-1}(t))$ ამონახსნისაკენ, როცა $h \to 0$ და სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|u(t) - U(t)\| \le Ch.$$

მეორე თავის მეოთხე პარაგრაფში ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებიანი (10), (11) ამოცანისთვის განხილულია შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$u_{t,i}^{j} - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^{k} \right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^{k} \right)^2 \right] \right) u_{\bar{x},i} \right\}_x + |u_i|^{q-2} u_i = 0,$$

$$v_{t,i}^{j} - \left\{ \left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(u_{\bar{x},i}^{k} \right)^2 + \left(v_{\bar{x},i}^{k} \right)^2 \right] \right) v_{\bar{x},i} \right\}_x + |v_i|^{q-2} v_i = 0, \qquad (19)$$

$$i = 1, 2, \ldots, M-1, \; j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

$$u_0^j = u_M^j = v_0 = v_M^j = 0, \; j = 0, 1, \ldots, N, \qquad (20)$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \; v_i^0 = V_{0,i}, \; i = 1, 2, \ldots, M, \qquad (21)$$

დამტკიცებულია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 2.14. თუ $a(S)=1+S$, $q\geq 2$, $\psi_1=\psi_2=0$ და (10), (11) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$, მაშინ (19)-(21) სასრულ-სხვაობიანი სქემის ამონახსნი $u^j=\left(u_1^j,u_2^j,...,u_{M-1}^j\right)$, $v^j=\left(v_1^j,v_2^j,...,v_{M-1}^j\right)$, მიისწრაფის $U^j=\left(U_1^j,U_2^j,...,U_{M-1}^j\right)$, $V^j=\left(V_1^j,V_2^j,...,V_{M-1}^j\right)$ ფუნქციებისკენ შესაბამისად, როცა $\tau\to 0$, $h\to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^j-U^j\right\|\leq C(\tau+h),\quad \left\|v^j-V^j\right\|\leq C(\tau+h),\quad j=1,2,...,N.$$

აქ C აღნიშნავს დადებით მუდმივს, რომელიც არ არის დამოკიდებული განხილული არის დროის და სივრცული ცვლადების მიმართ ბადის τ და h ბიჯებზე.

აქვე არის მითითებული, რომ თეორემა 2.14-ის დამტკიცებისას ჩატარებულის ანალოგიური მსჯელობა ადვილად იძლევა (19)-(21) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობასაც.

მეორე თავის მეხუთე პარაგრაფში მოცემულია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

თავი III. გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევა და რიცხვითი ამოხსნა

მესამე თავი ეძღვნება მეორე თავში შესწავლილი საკითხების ანალოგიურების გამოკვლევას პარაბოლური ტიპის არაწრფივი გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის ზოგიერთი ვარიანტისთვის. კერძოდ, ამ თავში შესწავლილია ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას და აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები და მათი იტერაციული მეთოდით ამოხსნის ალგორითმები. აქაც მოცემულია ჩატარებული ექსპერიმენ-

ტების ტესტურ ამოცანებზე მიღებული რიცხვითი შედეგების ანალიზი და შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციები.

ეს თავი იწყება წყაროს წევრებიანი გასაშუალებული ინტეგრო-დიფერენციალური სისტემისათვის

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+|U|^{q-2}U=0,\\ \frac{\partial V}{\partial t}-a\left(\int_0^t\int_0^1\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d\tau\right)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+|V|^{q-2}V=0\end{gathered} \tag{22}$$

შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანის განხილვით:

$$U(0,t)=V(0,t)=0\ ,\ U(1,t)=\psi_1,\ V(1,t)=\psi_2,\ t\ge 0, \tag{23}$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ V(x,0)=V_0(x),\ x\in\Omega, \tag{24}$$

სადაც $\psi_1=Const\ge 0,\ \psi_2=Const\ge 0,$ ხოლო $a,\ U_0,\ V_0$ და $q\ge 2.$

შევნიშნოთ, რომ როცა $\psi_1^2+\psi_2^2\ne 0,$ მაშინ მეორე თავში განხილულის მსგავსად გვაქვს საწყის-სასაზღვრო ამოცანა საზღვრის ერთ ნაწილზე არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით. წინააღმდეგ შემთხვევაში კი საქმე გვაქვს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებიან ამოცანასთან.

პირველ პარაგრაფში შესწავლილია (22)-(24) საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 3.1. თუ $a(S)=(1+S)^p$, $0<p\le 1$ და $q\ge 2,$ მაშინ (22)-(24) ამოცანას გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

მესამე თავის მეორე პარაგრაფში შესწავლილია მარჯვენა ბოლოზე როგორც ნულოვანი, ასევე არანულოვანი სასაზღვრო პირობის შემთხვევის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას.

კერძოდ, $Q=(0,1)\times(0,\infty)$ არეში განხილულია შემდეგი საწყის-სა-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=(1+S)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ (x,t)\in Q,$$

$$W(0,t)=0,\ W(1,t)=\psi, \tag{25}$$

$$W(x,0)=W_0(x),\ \ x\in[0,1],$$

სადაც

$$S(t)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 dxd\tau,$$

$W_0(x)$ მოცემული ფუნქციაა და $\psi=Const\geq 0.$

შემოღებულია აღნიშვნა

$$U(x,t)=W(x,t)-\psi x. \tag{26}$$

(26) აღნიშვნის გამოყენებით (25) დაყვანილია შემდეგი სახის საწყის-სასაზღვრო ამოცანაზე ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობებით:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=(1+S)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ (x,t)\in Q, \tag{27}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\ \ t\geq 0, \tag{28}$$

$$U(x,0)=W_0(x)-\psi x,\ \ x\in[0,1], \tag{29}$$

სადაც

$$S(t)=\int_0^t\int_0^1\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\psi\right)dxd\tau.$$

თეორემა 3.2. თუ $W_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, მაშინ (25) ამოცანის ამონახსნისთვის სამართლიანია შემდეგი შეფასება

$$\|W-\psi x\|+\left\|\frac{\partial W}{\partial x}-\psi\right\| \le C\exp\left(-\frac{t}{2}\right).$$

გასათვალისწინებელია, რომ თეორემა 3.2 გვაძლევს (25) ამოცანის ამონახსნის ექსპონენციალურ მდგრადობას $W_2^1(0,1)$ სივრცის ნორმის აზრით. ანუ მიღებულია (27)-(29) ამოცანის ამონახსნის მდგრადობაც.

აქვე, მეორე პარაგრაფში ასევე ნაჩვენებია, რომ ამონახსნის მდგრადობა სამართლიანია C^1 სივრცის ნორმის აზრითაც.

კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 3.3. თუ $W_0 \in W_2^4(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$, მაშინ (25) ამოცანის ამონახსნისათვის სამართლიანია შემდეგი შეფასებები:

$$\left|\frac{\partial W(x,t)}{\partial x}-\psi\right| \le C\exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right),$$

$$\left|\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}\right| \le C\exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right).$$

სადაც $\alpha = const$, $\beta = const$, $0<\beta<\alpha<1$.

მესამე პარაგრაფში (27)-(29) ამოცანისათვის აგებულია შემდეგი სასრულ-სხვაობიანი სქემა:

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau} = \left\{1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right\}u_{\bar{x}x,i}^{j+1}-\left|u_i^{j+1}\right|^{q-2}u_i^{j+1},$$

$$\frac{v_i^{j+1}-v_i^j}{\tau} = \left\{1+\tau h\sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{j+1}\left[\left(u_{\bar{x},i}^k\right)^2+\left(v_{\bar{x},i}^k\right)^2\right]\right\}v_{\bar{x}x,i}^{j+1}-\left|v_i^{j+1}\right|^{q-2}v_i^{j+1}, \tag{30}$$

$$i=1,2,\dots,M-1;\quad j=0,1,\dots,N-1;$$

$$u_0^j=u_M^j=v_0^j=v_M^j=0,\quad j=0,1,\dots,N; \tag{31}$$

$$u_i^0 = U_{0,i}, \ v_i^0 = V_{0,i}, \quad i = 0,1,\dots,M. \tag{32}$$

მარტივად მიიღება (30)-(32) სქემისთვის შემდეგი შეფასებები:

$$\left\|u^n\right\|_h^2 + \sum_{j=1}^{n}\left\|u_{\bar{x}}^j\right\|_h^2 \tau \le C,$$

$$\left\|v^n\right\|_h^2 + \sum_{j=1}^{n}\left\|v_{\bar{x}}^j\right\|_h^2 \tau \le C, \tag{33}$$

$$n = 1,2,\dots,N.$$

აპრიორული შეფასებები (33) გვაძლევს (30)-(32) სქემის მდგრადობას და მათი საშუალებით მიიღება სქემის ამონახსნის არსებობაც.

სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა 3.5. თუ (27)-(29) ამოცანას გააჩნია საკმაოდ გლუვი ამონახსნი $U = U(x,t)$, $V = V(x,t)$, მაშინ (30)-(32) სქემის ამონახსნი $u^j = \left(u_1^j, u_2^j, \dots, u_{M-1}^j\right)$, $v^j = \left(v_1^j, v_2^j, \dots, v_{M-1}^j\right)$, მიისწრაფის $U^j = \left(U_1^j, U_2^j, \dots, U_{M-1}^j\right)$, $V^j = \left(V_1^j, V_2^j, \dots, V_{M-1}^j\right)$, ფუნქციებისაკენ შესაბამისად, როცა $j = 1,2,\dots,N$, $\tau \to 0$, $h \to 0$ და ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებებს:

$$\left\|u^j - U^j\right\|_h \le C(\tau + h), \ \left\|v^j - V^j\right\|_h \le C(\tau + h),$$

$$j = 1,2,\dots,N.$$

მესამე თავის მეოთხე პარაგრაფში მოცემულია ამ თავში აგებული მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმებით ჩატარებული რიცხვითი ექსპერი-მენტების გრაფიკული ილუსტრაციები.

დისერტაციის ბოლოში მოყვანილია დანართი, სადაც მოცემული და აღწერილია სხვადასხვა პროგრამული კოდების ერთობლიობა, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია რიცხვითი გათვლები.

დასკვნა

გამოყენებითი პროცესების აღმწერი ამოცანების გამოკვლევა, მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლა და კომპიუტერული რეალიზაცია წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის მეტად აქტუალურ სფეროს.

დიფუზიური პროცესების მათემატიკურ მოდელებს მივყავართ არასტაციონარულ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ და ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებებზე და მათ სისტემებზე. ამ ამოცანათა უდიდესი ნაწილი, როგორც წესი, არაწრფივია. ამ სისტემების ძირითადი თავისებურება იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი შეიცავენ განტოლებებს, რომლებიც ძლიერად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. აღნიშნული გარემოება ყოველი კონკრეტული მოდელისათვის განაპირობებს კვლევის შესაბამისი მეთოდების გამოყენებას, რადგან ზოგადი თეორია ამგვარი წრფივი სისტემებისათვისაც კი ჯერ კიდევ არასრულადაა განვითარებული. ბუნებრივად დგება მსგავსი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის აუცილებლობა, რაც კვლავ არსებით სირთულეებთან არის დაკავშირებული.

სადისერტაციო ნაშრომი “ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნა“ ეხება ერთი ასეთი დიფუზიური მოდელისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანათა გამოკვლევას, მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება-შესწავლას და კომპიუტერულ რეალიზაციას. კერძოდ, ნაშრომი ეძღვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესების აღმწერი მაქსველის სისტემაზე დაფუძნებული არაწრფივი დიფერენციალური და ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ზოგიერთი თვისების შესწავლას.

ნაშრომში განსაკუთრებული ყურადღება ექცევა პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების გამოკვლევისა და მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს.

ინტეგრო-დიფერენციალურ სახეზე მაქსველის არაწრფივი სისტემის რედუქცია პირველად 1983 წელს განხორციელდა დ.გორდეზიანის, თ.ჯან-

გველაძის და თ.ყორშიას ნაშრომში, რასაც შედეგად მოყვა მრავალი გამოხმაურება და სამეცნიერო პუბლიკაციები, როგორც საქართველოში, ასევე უცხოეთში. ამ ნაშრომზე დაყრდნობით გენადი ლაპტევმა 1990 წელს თავის სადოქტორო დისერტაციაში მოიყვანა ამ მოდელის ე.წ. გასაშუალებული ვარიანტი. რომელმაც ასევე მრავალი მეცნიერის ყურადღება მიიქცია. აღსანიშნავია, რომ ასეთი მოდელის გამოკვლევა პირველად თ. ჯანგველაძის ნაშრომში განხორციელდა.

დისერტაცია ძირითადად ამ სახის ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის დასმული სხვადასხვა ტიპის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნთა ერთადერთობის, ასიმპტოტური ყოფაქცევის, ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგების აგება-შესწავლას და მიახლოებითი ამონახსნების მოძებნას ეხება.

ნაშრომში მოყვანილია ერთგანზომილებიანი არაწრფივი კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებათა ერთი სისტემის სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობისა და ჰოფის ბიფურკაციის შესაძლებლობების რიცხვითი ექსპერიმენტებით მოდელირება. ასევე რიცხვითი ექსპერიმენტებითაა დადასტურებული ადრე სხვა ავტორების მიერ თეორიული გამოკვლევებით ნაჩვენები ერთი საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის გლობალურად მდგრადობა. აგებულია შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემები და რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმები. მათზე დაყრდნობით ჩატარებულია კომპიუტერული ექსპერიმენტები და მოყვანილია რიცხვითი გათვლების გრაფიკული ილუსტრაციები.

გამოკვლეულია პარაბოლური ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნთა ასიმპტოტური ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. აგებულია შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოგები. აგებული სასრულ-სხვაობიანი სქემებისთვის მოყვანილია მათი იტერაციული მეთოდებით ამოხსნის ალგორითმები. მოცემულია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების ტესტური ამო-

ცანებისათვის მიღებული რიცხვითი შედეგების გრაფიკული ილუსტრაციები.

აღსანიშნავია სადისერტაციო ნაშრომის დანართიც, სადაც განხილული ალგორითმების რეალიზაციისთვის ავტორისეული პროგრამული პაკეტებია მოყვანილი და აღწერილი.

დისერტაციაში შესწავლილი მოდელების სირთულე განაპირობებდა როგორც თეორიული, ასევე გამოთვლითი მათემატიკის საშუალებების ფართო გამოყენებას. სადისერტაციო ნაშრომში მნიშვნელოვანი ადგილი ეთმობა როგორც უწყვეტი ამოცანების გამოკვლევას, ასევე რიცხვითი ანალოგების აგებას და შესწავლას, რომელთა შედეგებიც დადასტურებულია ჩატარებული მრავალი რიცხვითი გათვლებით და მათი ანალიზით. ნაშრომი ასევე მდიდარია გრაფიკული ილუსტრაციებით.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- მაქსველის ერთგანზომილებიანი სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების სტაციონარული ამონახსნების წრფივი და გლობალური მდგრადობა;
- ჰოფის ბიფურკაციული პროცესის დაფიქსირება და კომპიუტერული მოდელირება;
- ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის გამოკვლევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას;
- ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელებისათვის დასმული ამოცანების შესაბამისი ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ანალოSგების აგება და გამოკვლევა;
- კომპიუტერზე რიცხვითი რეალიზაციის ალგორითმების აგება-გამოკვლევა. შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების ანალიზი შესაბამისი გრაფიკული ილუსტრაციების გამოყენებით.

კონფერენციებში მონაწილეობა:

1. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Large Time Behavior and Numerical Solution of Nonlinear Integral-Differential System Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. Theses. Int. Conf. Modern Probl. Appl. Math., Dedicated to the 90th Anniversary of the Iv. Javakhishvili Tbilisi State University & 40th Anniversary of the I. Vekua Inst. Appl. Math., 2008, p.58.
2. Aptsiauri M. On One Averaged Integro-Differential Parabolic Equation. Fifth Congress of Matematicians of Georgia Abstracts of Contributed Talks. Batumi/Kutaisi, October 9 – 12, 2009.
3. Aptsiauri M., Kiguradze Z. On One Two-Dimensional Nonlinear Integro-Differential Equation Based on Maxwell System. VI Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, July 12 – 16, 2015, p.62.

პუბლიკაციები:

1. Aptsiauri M. Three-Level Difference Schemes for One Nonlinear System of Partial Differential Equations. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 1995, V.10, №1, p.1-3.
2. Aptsiauri M. Finite Difference Schemes for One System of Nonlinear Partial Differential equations, Proc. I. Vekua Inst. Appl. Math., 2000-2001, V.50-51, p.1-4.
3. Jangveladze T., Aptsiauri M. The Asymptotic Behavior of Solutions and Finite Difference Scheme for One Nonlinear Integral-Differential Equation. Bull. Georg. Acad. Sci., 2006, V.174, N1, p.25-28.

4. Kiguradze Z. Aptsiauri M. Large Time Behavior of the Solutions and Finite Difference Scheme for One System of Nonlinear Integral-Differential Equations. Bull. Georg. Acad. Sci., 2006, V.174, N2, p.211-214.
5. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Large Time Behavior of Solutions and Numerical Approximation of Nonlinear Integro-Differential Equation Associated with the Penetration of a Magnetic Field into a Substance. J. Appl. Math. Inform. Mech., 2008, V.13, N2, p.3-17.
6. Jangveladze T., Aptsiauri M., Kiguradze Z. On Asymptotic Behavior of Solution of One Nonlinear One-Dimentianal Integro-Differential Analogue of Maxwell's System. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2009, V.23, p.5-10.
7. Aptsiauri M., Kiguradze Z. On One Nonlinear Integro-Differential Equation. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua. Inst. Appl. Math., 2010, V.24, p.9-12.
8. Aptsiauri M. On One Averaged Integro-differential Model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua. Inst. Appl. Math., 2011, V.25, p.10-13.
9. Aptsiauri M., Jangveladze T., Kiguradze Z. Asymptotic Behavior of the Solution of a System of Nonlinear Integro-Differential Equations, Differ. Uravn., 48, 2012, p.1-9 (Russian). English translation: Diff. Eq., 48, p.70-78.
10. Aptsiauri M. Asymptotic Behavior of the Solution of One Nonlinear Integro-differential Model with Source Term. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2012, V.26, p.1-4.
11. Aptsiauri M., Gagoshidze M. Semi-Discrete Scheme for One System of Nonlinear Averaged Integro-Differential Equations. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2013,V.27, p. 1-4.
12. Aptsiauri M., Gagoshidze M. On One Nonlinear Averaged Integro-Differential System with Source Terms. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2014, V.28, p.5-8.

13. Aptsiauri M., Gagoshidze M. Approximate Solution of One-dimensional Nonlinear Maxwell Model with Heat Conductivity Term. Rep. Enlarged Sess. Sem. I.Vekua Inst. Appl. Math., 2015, V.29, p.12-15.

SUMMARY

The dissertation work performed by Maia Aptsiauri "Investigation and Approximate Solution of One Nonlinear Integro-Differential Model" is dedicated to study of some properties of nonlinear differential and integro-differential models, which are based on Maxwell system describing diffusion process of electromagnetic field.

In the work the main attention is paid to investigation and numerical solution of parabolic type integro-differential models. In particular, the following issues are studied: uniqueness theorems of initial-boundary value problems; large time behavior of solutions; construction and investigation of semi-discrete and discrete analogs; realization algorithms and corresponding software; results of numerical experiments and appropriate graphical illustrations. Thus, we believe that in this respect the obtained results with their scientific values and practical applications point of view, is undoubtedly important.

In the beginning of the dissertation work the nonlinear partial differential models and its integro-differential analogs based on Maxwell system, describing process of electromagnetic field propagation into a substance is described.

At first reduction to the integro-differential form was made in 1983 by David Gordeziali, Temur Jangveladze and Tengiz Korshiya. Many scientific works were followed after that work in Georgia as well as abroad. Based on that work, in 1990 Russian Mathematician Genady Laptev proposed the so called average model of the considered model in his doctoral dissertation. He noted that it is not possible to apply the results obtained by the generalization of the theory of monotonic operator, which he applied for his previous models, for the mentioned averaged model. Therefore, he concluded that the average model was the subject of a separate study.

A study in the dissertation shows that the focus here, in a sense, is proceeding likewise as given there, and this has led to the construction of the words in the title of the thesis "of the nonlinear integro-differential".

The linear stability and possibility of Hopf bifurcation with justification for stationary solution of one-dimensional differential system is studied in the work. The global stability of one initial-boundary value problem is also investigated. The corresponding finite difference scheme and numerical algorithms are constructed.

Based on those schemes and algorithms the computer experiments are carried out. And appropriate graphical illustrations are given. Asymptotic behavior of solutions of parabolic type nonlinear integro-differential models is investigated. Relevant semi-discrete and discrete analogs and iterative algorithms for their solution are constructed. The graphical illustrations for test examples are given.

One must note the appendix of the dissertation where author's realization program codes for considered algorithms are given.

The complexity of the studied models required application of theoretical researches as well as methods of computational mathematics. Dissertation focuses on investigation of continuous problems as well as study and construction of numerical analogs, results of which is confirmed by carried out various numerical calculations and their analysis. The presented work is also rich by graphical illustrations.