

ნინო ნოზაძე

მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი
და მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
მარტი, 2012 წელი

© საავტორო უფლება ნინო ნოზაძე, 2012 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერი ვადასტურებთ, რომ გავაცანით ნინო ნოზაძის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „მალივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი და მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფესორი ანზორ შავგულიძე

პროფესორი ზურაბ კვინიკაძე _____

რეცენზენტი: პროფესორი ინესა ხატისკაცი _____

რეცენზენტი: პროფესორი ირინა ჩხეიძე _____

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2012 წელი

ავტორი: ნინო ნოზაძე
დასახელება: მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი და მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა
ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების
აკადემიური ხარისხი: დოქტორი
სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პროცენტების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

საინჟინრო გრაფიკის ზოგადი კურსი ჩვეულებრივად, ითვალისწინებს სივრცითი საგნების გრაფიკული გამოსახულების მიღების მხოლოდ ძირითადი და პრაქტიკაში გავრცელებული მეთოდების შესწავლას. ტექნიკურ სპეციალობათა სიმრავლის გამო საინჟინრო გრაფიკის მოქმედ პროგრამებში არ არის და არც შეიძლება იყოს შეტანილი ცალკეული ვიწრო დარგების სპეციფიკა (სხვაგვარად სასწავლო წიგნების მოცულობა ყოველგვარ ნორმებს გადააჭარბებს და ამის გამო ხშირად ჩნდება საინჟინრო გრაფიკის დარგობრივი გამოყენების პრობლემა. ამ პრობლემის გადასაჭრელად საინჟინრო გრაფიკის მეცნიერებაში ხშირად ღირებულია ისეთი ახალი მეთოდების კვლევა-ძიება, რომლებიც საინჟინრო პრაქტიკის ერთი რომელიმე კონკრეტული ჯგუფისათვის იქნება განკუთვნილი. მაგალითად მოვიყვანოთ შემთხვევა, როდესაც დასაგეგმილებელი ობიექტის ერთი მიმართულებით გავრცელება საგრძნობლად აღემატება მის მეორე მიმართულებით გავრცელებას (ტოპოგრაფიული ზედაპირი). ასეთ მოცემულობაში რეკომენდებულია ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება. ამ მეთოდის კლასიკურ ინტერპრეტაციას მრავალ დადებით მხარესთან ერთად, ერთი მნიშვნელოვანი უარყოფითი მხარეც აქვს. ეს არის ორი ანასახის არსებობა ერთ გეგმილთა სიბრტყეზე და, აქედან გამომდინარე, დასაგეგმილებელი ობიექტების გეგმილების ურთიერთდამთხვევა. ამ გარემოების გამო, დაგეგმილების ამ მეთოდში, ძირითადია გეგმილთა სიბრტყის დამხმარე გამოსახულებებისაგან განტვირთვის საშუალებათა მოძიება. ამ მიმართულებით ჩატარებული კვლევებიდან აღსანიშნავია პროფ. შავგულიძის `ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის ახალი ინტერპრეტაცია (იხ. ა. შავგულიძე, საინჟინრო გრაფიკის სპეციალური კურსი, გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1977) და ამავე ავტორის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების იდეა (იხ. Шавгулидзе А.С., Проекции с высотными отметками, ГПИ, Тбилиси, 1981). სწორედ ამ იდეის ხორცშესხმას და გამოყენების არეალის გაფართოებას ეძღვნება ეს

სადისერტაციო ნაშრომი (იხ. შესავალი, სადისერტაციო თემის აქტუალობა და სიახლე).

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და განსჯა გადმოცემულია ოთხნაწილიან ტექსტში, რომელსაც თან ერთვის სათანადო გრაფიკული ილუსტრაციები.

პირველ ნაწილში გადმოცემულია მხაზველობითი გეომეტრია სივრცის გეომეტრიული მოდელირების შუქზე პროფ. ი. ჯაფარიძის მიხედვით. სახელდობრ, აქ შესწავლილია სამგანზომილებიანი სივრცის აქსიომატიკური ბრტყელი მოდელები, სიმბოლიკა და ტერმინოლოგია, მოდელების აგება, ძირითადი ბინალური მოდელების გადაგვარებული სახეები, პროექციული სამგანზომილებიანი სივრცის ძირითადი ბინარული მოდელები და წარმოებული აქსიომატიკური ბინარული მოდელები.

მეორე ნაწილი დათმობილი აქვს პროფ. ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის იდეას. სახელდობრ, აქ მოცემულია იდეის გეომეტრიული საფუძვლები, მაღლივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (პირველი და მეორე ვარიანტები).

მესამე ნაწილში მოცემულია მაღლივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის პრაქტიკაში გამოყენების საკითხები. კერძოდ, აქ განხილულია პოზიციური ამოცანების ამოხსნა სამ და ოთხგანზომილებიან სივრცეში და საინჟინრო გრაფიკის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნა მაღლივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენებით.

მეოთხე ნაწილში აღწერილია მაღლივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის კომპიუტერული მხარდაჭერა. სახელდობრ, აქ დაზუსტებულია ინტუიციური ალგორითმის ცნება მოცემული კონკრეტული შემთხვევისათვის და ნაჩვენებია მაგალითები.

ნაშრომის მე-3 პუნქტში ჩამოთვლილია კვლევის შედეგად მიღებული დასკვნები.

ნაშრომი სრულდება გამოყენებული ლიტერატურის ჩამონათვალით.

Abstract

General engineering graphic course usually provides only basic and practical methods for graphical representation of space objects. Due to the multitude of engineering specialties, in current engineering graphic programs, specificity of particular engineering fields is not and can not be introduced. (In other way, learning books capacity will exceed all standards). Frequently, there are problems of using engineering graphic in particular engineering sector. For solving these problems in engineering graphic science such new methods researches are valuable, which will be designated for one particular group. For example we can bring the case, when spread of projected object in one direction significantly exceeds spread of this object in other direction (topography surface). In this case we recommend using of method of elevations. Classical interpretation of this method with many positive sides has a significant negative side as well. It is the existence of two reflections of object on one projection plane, and coincidence of projections of object. Due to these circumstances, in this method the main problem is searching of means for simplification of the projection plane by relieving of auxiliary elements.

Among researches, conducted in this direction, prof. A. Shavgulidze's "New interpretation of method of elevations" (A. Shavgulidze, "special course of engineering graphic, „GANATLEBA", Tbilisi, 1977), and author's idea of high level elevations should be noted. (Шавгулидзе А.С., Проекции с высотными отметками, ГПИ, Тбилиси, 1981). This dissertation is dedicated to realization and expansion of using area of this idea. (Introduction, Importance and actuality of dissertation thesis).

The main results of work and discussions are described in four-sectional text, which includes the appropriate graphical illustrations.

In first section descriptive geometry according to geometrical modeling of space by prof. Japaridze is described. In particular, there are considered axiomatic flat models of three-dimensional space, symbols and terminology, building of models, basic types of binary models, basic binary models of three-dimensional projection space, produced axiomatic binary models.

In second section prof. A. Shavgulidze's idea of high level elevation method is described. In particular, there are given geometrical foundations of this idea, generalization of high level elevation method for Euclidean four-dimensional space. (first and second versions)

In third section practical applications of high level elevations are given. In particular, there are considered solution of positional problems in three-and four-dimensional space, also solution of specific tasks of engineering graphic, applying of high level elevations method.

The fourth section describes the computer support of high level elevation method. In particular, for given particular case intuitive algorithm notion is determined and the examples are shown.

In fifth section survey result conclusions are listed.

In sixth section the set used literature is given.

შინაარსი:

	შესავალი	xiii
1	ლიტერატურის მიმოხილვა	16
2	შედგენი და მათი განსჯა	
2.1	პირველი ნაწილი - მხაზველობითი გეომეტრია სივრცის გეომეტრიული მოდელირების შუქზე პროფ. ი. ჯაფარიძის მიხედვით	19
2.1.1.	სამგანზომილებიანი პროექციული სივრცის აქსიომატიკური ბრტყელი მოდელები	19
2.1.2.	სიმბოლიკა და ტერმინოლოგია	20
2.1.3.	მოდელების აგება	21
2.1.4.	პროექციული სამგანზომილებიანი სივრცის ძირითადი ბინარული მოდელები	25
2.1.5.	ძირითადი ბინარული მოდელების გადაგვარებული სახეები	34
2.1.6.	წარმოებული აქსიომატიკური ბინარული მოდელები	36
2.1.7.	ბინარული მოდელებისაგან წარმოებული წრფივი მოდელები	41
2.2.	მეორე ნაწილი-პროფ.ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი	45
2.2.1.	გეომეტრიული საფუძვლები;	45
2.2.2.	მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის - პირველი ვარიანტი;	51
2.2.3.	მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის - მეორე ვარიანტი	56
2.3.	მესამე ნაწილი - მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება	61
2.3.1.	პოზიციური ამოცანების ამოხსნა სამგანზომილებიან სივრცეში	61
2.3.2	პოზიციური ამოცანების ამოხსნა ოთხგანზომილებიან სივრცეში	64
2.3.3.	საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნა მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენებით;	72

2.4.	მეოთხე ნაწილი - მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის კომპიუტერული მხარდაჭერა	84
2.4.1.	ინტუიციური ალგორითმის ცნება და მისი გამოყენება მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში	84
2.4.2.	კომპიუტერული საშუალებების მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში გამოყენების არსი	89
3.	დასკვნა	95
	გამოყენებული ლიტერატურა	98

ნახაზების ნუსხა:

სურ.1.	R2+1 მონომოდელი	21
სურ.2.	R2+1 მონომოდელი	24
სურ.3.	R2+1 ბინარული მოდელი	26
სურ.4.	R2+1 ბინარული მოდელი	27
სურ.5.	R2+1 ბინარული მოდელი	27
სურ.6.	წრფის განსაზღვრა ზოგადი სახის R2+1 ბინარულ მოდელში	28
სურ.7.	გადაკვეთილი წრფეები ზოგადი სახის R2+1 ბინარულ მოდელში	29
სურ.8.	R2+1 ძირითადი ბინარული მოდელის კერძო შემთხვევები	32
სურ.9.	R2+1 ძირითადი ბინარული მოდელი	34
სურ.10.	R2+1 ძირითადი ბინარული მოდელის გადაგვარებული სახეები	35
სურ.11.	R2+1 ბინარული მოდელი	38
სურ.12.	მოდელების ცხრილი	43
სურ.13.	a-5 ტიპის მოდელის სქემა	45
სურ.14.	ორთოგონალური კონგრუენციის გრაფიკული ინტერპრეტაცია.	47
სურ.15.	მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გრაფიკული ინტერპრეტაცია. (კომპლექსური ნახაზი).	48
სურ.16.	წრფის განსაზღვრა მალლივნიშნულებიანი გეგმილების გეგმაზე	49
სურ.17.	სიბრტყის განსაზღვრა მალლივნიშნულებიანი გეგმილების გეგმაზე	50
სურ.18.	მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გრაფიკული ინტერპრეტაცია ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (პირველი ვარიანტი)	52
სურ.19.	მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გრაფიკული ინტერპრეტაცია ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (პირველი ვარიანტი) - კომპლექსური ნახაზი.	53
სურ.20.	R ₄ სივრცის კუთვნილი წრფის კომპლექსური ნახაზი	53
სურ.21.	R ₄ სივრცის კუთვნილი სიბრტყის კომპლექსური ნახაზი	54
სურ.22.	ჰიპერსიბრტყის კომპლექსური ნახაზი	55
სურ.23.	მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის	57

	გრაფიკული ინტერპრეტაცია ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (მეორე ვარიანტი)	
სურ.24.	მალლიენიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გრაფიკული ინტერპრეტაცია ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (მეორე ვარიანტი) - კომპლექსური ნახაზი.	58
სურ.25.	R_4 სივრცის კუთვნილი წრფის კომპლექსური ნახაზი	58
სურ.26.	R_4 სივრცის კუთვნილი სიბრტყის კომპლექსური ნახაზი	59
სურ.27.	ჰიპერსიბრტყის კომპლექსური ნახაზი	60
სურ.28.	მოცემულ C_0 წერტილზე მოცემული l_0 წრფის მკვეთი t_0 წრფის აგება.	61
სურ.29.	ორი მოცემული წრფის ურთიერთმდებარეობის გამორკვევა.	62
სურ.30.	წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის სტერეომეტრიული სქემა.	63
სურ.31.	წრფისა და სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის აგება.	64
სურ.32.	ზოგადი მდებარეობის სიბრტყისა და მაგეგმილებელი ჰიპერსიბრტყის თანაკვეთის წრფის აგება.	65
სურ.33.	ზოგადი მდებარეობის ჰიპერსიბრტყისა და ზოგადი მდებარეობის წრფის თანაკვეთის წერტილის აგება.	66
სურ.34.	R_4 სივრცის კუთვნილი ორი ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის თანაკვეთის წერტილის განსაზღვრა	68
სურ.35.	R_4 სივრცის კუთვნილი ორი საერთო წერტილის მქონე ორი ჰიპერსიბრტყის საერთო სიბრტყის აგება.	69
სურ.36.	R_4 სივრცის კუთვნილი ორი ჰიპერსიბრტყის საერთო სიბრტყის აგება.	71
სურ.37.	ფენის განვრცობისა და დახრის კუთხის განსაზღვრა	73
სურ.38.	ფენის შვეული, თარაზული და ნორმალური სიმძლავრის განსაზღვრა	74

სურ.39.	მოცემული M_0 წერტილიდან ორი მოცემული გვირაბის მკვეთი უმოკლესი გვირაბის გაყვანა	75
სურ.40.	მოცემული D_0 წერტილიდან ფენის სიბრტყის პარალელური და მოცემული დირექციული კუთხით მიმართული გვირაბის გაყვანა.	76
სურ.41.	ფენის განლაგების ელემენტების, განვრცობის და ვარდნილობის განსაზღვრა	78
სურ.42.	ერთ მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარე M_0 წერტილსა და $t_0(A_0B_0)$ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილის განსაზღვრა	79
სურ.43.	ერთ მაგეგმილებელ სიბრტყეში მდებარე M_0 წერტილსა და $t_0(A_0B_0)$ წრფეს შორის უმოკლესი მანძილის განსაზღვრა (სტერეომეტრიული სქემა)	80
სურ.44.	მოცემული M_0 წერტილიდან ფენთან შეხვედრამდე უმოკლესი ჭაბურღილის გაყვანა	81
სურ.45.	მოცემული M_0 წერტილიდან და ორი $a(A_0D_0)$ და $b(B_0C_0)$ გამონამუშევარის ღერძების გადაკვეთის წერტილამდე ახალი გამონამუშევარის ღერძის აგება.	83
სურ.46.	მოცემული M_1 წერტილის აფინურად შესაბამისი M_4 წერტილის აგება	86
სურ.47.	ფენის შვეული, თარაზული და ნორმა-ლური სიმძლავრის განსაზღვრა	89

შესავალი

სადისერტაციო თემის აქტუალობა

თანამედროვე პირობებში, განსაკუთრებით გრაფიკული სამუშაოების კომპიუტერული მხარდაჭერით შესრულების დროს, ძალზე აქტუალურია დაგეგმილების ისეთი ახალი მეთოდების დამუშავება და პრაქტიკაში მათი დანერგვის გზების მოძიება, რომელიც დაკავშირებული იქნება პროგრამირების უახლეს სისტემებთან. სწორედ ამ მოთხოვნებს ეხმიანება და გარკვეულწილად აკმაყოფილებს კიდეც სადისერტაციო ნაშრომში განხილული პრობლემატიკა. სახელდობრ, აქ შესწავლილია მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის (იხ. შავგულიძე A.C. – Метод проекции с высотными отметками изд. ГПИ, Тбилиси, 1981), გამოყენებითი ნაწილი, რომელიც დღემდე დაუმუშავებელია და შესაძლოა წარმატებით იქნას დანერგილი მთელი რიგი გრაფიკული ამოცანების ამოხსნაში, ეკლიდეს, როგორც სამგანზომილებიანი (R₃), ასევე ოთხგანზომილებიანი (R₄), სივრცეებისათვის. მნიშვნელოვანია ისიც, რომ ამ მეთოდის გამოყენება შესაძლებელია გრაფიკული სამუშაოების კომპიუტერული მხარდაჭერის შემთხვევაშიც. სადისერტაციო ნაშრომში თავმოყრილი და შესწავლილი მასალა უპირატესად განკუთვნილია სამთო-გეოლოგიური ხასიათის გრაფიკული ამოცანებისათვის, მაგრამ მისი გამოყენება ასევე წარმატებით შეიძლება საინჟინრო პრაქტიკის სხვა კონკრეტულ ამოცანებშიც. ნაშრომის კონსტრუქციულ სქემაში გათვალისწინებულია უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკისა და პედაგოგიური ფსიქოლოგიის მოთხოვნები, რაც ამდიდრებს მის აქტუალობას, აკადემიური ხარისხის მოპოვების თვალსაზრისით.

სადისერტაციო თემის სიახლე

სივრცის გეომეტრიული მოდელირება მსოფლიო მეცნიერებისათვის შედარებით ახალი დარგია. საქართველოში იგი 60-იანი წლების

დასაწყისიდან იღებს სათავეს(პროფ. ი. ჯაფარიძე) და სადღეისოდ ყოველი ახალი პრობლემის კვლევა, რომელიც სინთეზური გეომეტრიის ამ საინტერესო განშტოებასთან არის დაკავშირებული, თავისუფლად ითვლება მეცნიერულ სიახლედ, რაც შეეხება სადისერტაციო ნაშრომს, რომელიც ამ პრობლემატიკის ნაწილს წარმოადგენს, მისთვის დამახასიათებელია a-5 მოდელის ბაზაზე შექმნილი დაგეგმილების ახალი მეთოდის გადრმავებული შესწავლა, სამთო-გეოლოგიური საინჟინრო პრაქტიკის გრაფიკული ამოცანების ამოხსნაში ამ მეთოდის გამოყენების თვალსაზრისით. ამასთან ნაშრომში განხილული ამოცანები შეეხება ევკლიდეს როგორც სამ-განზომილებიან (R_3), ასევე ოთხგანზომილებიან (R_4) სივრცეებს. ყოველივე ამას ემატება ისიც, რომ გრაფიკული ამოცანების ამოხსნები განხორციელებულია კომპიუტერული მხარდაჭერით, რაც აგრეთვე არის სიახლე. სიახლეთა ჩამონათვალში აღსანიშნავია აგრეთვე ის, რომ ნაშრომის კონსტრუქციაში გათვალისწინებულია უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკისა და პედაგოგიური ფსიქოლოგიის მოთხოვნები, რაც სასწავლო პროცესში მისი გამოყენების ფართო შესაძლებლობებს იძლევა.

ნაშრომის მიზანი

ნაშრომის მიზანია სივრცის გეომეტრიულ მოდელირებაში არსებული სამეცნიერო მიღწევების ბაზაზე, დაგეგმილების ახალი მოდელის შესწავლა და მისი გამოყენება R_3 და R_4 სივრცეების სიბრტყეზე დაგეგმილების ამოცანებში.

კვლევის ობიექტი

საინჟინრო გეომეტრია და სივრცის გეომეტრიული მოდელირების პრობლემატიკა და პრაქტიკაში დანერგვა.

კვლევის მეთოდები

წინამდებარე ნაშრომში გამოყენებულია ზოგადად გრაფიკული მეთოდების კონსტრუქციული სქემები და კერძოდ სივრცის გეომეტრიული მოდელირებისათვის გავრცელებული ხერხები. გრაფიკული ამოცანების კომპიუტერული მხარდაჭერით ამოხსნის გამო, ნაშრომში ფართოდაა გამოყენებული კომპიუტერული საინჟინრო გრაფიკის გავრცელებული მეთოდებიც.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

წინამდებარე ნაშრომის თემით („მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი და მისი კომპიუტერული მხარდაჭერა“) დაინტერესება განაპირობა ჯერ კიდევ „გამოყენებითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის“, როგორც მეცნიერების მოქმედების პერიოდში გაჩენილმა ინტერესმა გეომეტრიული მოდელირების მიმართ. ჩვენ შევისწავლეთ ამ მიმართულებით გამოქვეყნებული და ფართოდ აღიარებული შრომები:

1. Джапаридзе И.С. О некоторых направлениях исследований в области геометрического моделирования. – В кн.: Начертательная геометрия и её приложения, вып. I, Саратов, 1976 с. 71-77;
2. Джапаридзе И.С. Связь плоских моделей пространства с методами начертательной геометрии.- В сб.: Труды ГПИ, 1964, №3, (96)б с. 55;
3. Джапаридзе И.С. Независимые плоскостные модели 4-мерного пространства.- сб.: Труды ГПИ, 1965, №1, (99)б с. 31;
4. Джапаридзе И.С. Основные плоскостные модели пространства и их производные.- В.сб.: Труды ГПИ, 1964, №3, (96), с. 37;
5. Джапаридзе И.С. О погружении геометрических соответствий в модели многомерных пространств.- сб.: Прикладная геометрия и инженерная графика, вып. 6, Киев, 1968, с. 13;
6. Джапаридзе И.С. Изображение некоторых гиперповерхностей в бинарных моделях R_4 . – В сб.: Труды ГПИ, 1970, №5, (140), с. 52;
7. Начертательная геометрия : Сб. Научных трудов ГПИ, Тбилиси, 1981, №1 (233);
8. Шавгулидзе А.С. – Проекции с высотными отметками, изд. ГПИ, Тбилиси, 1981;
9. Шавгулидзе А.С. – Разработка одной интерпретации метода проекций
с отметками для R_3 и R_4 , изд. “Технический Университет”.
Тбилиси, 2001;

10. Шавгулидзе А.С. – Мирозренческие вопросы в теоретических основах прикладной геометрии, изд. “Технический Университет”. Тбилиси, 2001.

ზემოთ მოცემული შრომების (დანარჩენი მითითებულია გამოყენებულ ლიტერატურის სიაში) შესწავლის შემდეგ, მიზნად დავისახეთ მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის იდეის გაფართოება და მათი დანერგვა საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტულ ამოცანებში - გრაფიკული აგებების კომპიუტერული მხარდაჭერით.

დამოუკიდებელი (აქსიომატიკური) და კონსტრუქციული (პროექციული) მეთოდების ურთიერთკავშირის საკითხების კვლევა R_3 და R_4 გეგმიურ სივრცეებში ერთ-ერთი მსხვილი სამეცნიერო მიმართულებაა და ამ მიმართულებაში რაიმე ნიშის გამოძებნა და მასთან დაკავშირებული კვლევების ჩატარება ერთობ ღირებულ საქმედ მივიჩნიეთ, ამიტომ ჩვენი ნაშრომის კონსტრუქციული სქემაც სწორედ ამ ამოცანის გარშემოა ჩამოყალიბებული და მხაზველობითი გეომეტრიის ქართულ სკოლაში შესრულებული სამუშაოების მოკრძალებული გაგრძელებაა.

როგორც ზემოთ აღნიშნულიდან ჩანს, ჩვენი კვლევის ძირითადი საფუძველია პროფ. ი. ჯაფარიძის მიერ შექმნილი სივრცის გეომეტრიული მოდელირების თეორია და ამ თეორიაში პროფ. ა. შავგულიძის ახალი მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების შემოღების იდეა.

რასაკვირველია, ჩვენ მიერ შესრულებული სამუშაოს თითოეული ბაზა არ შემოიფარგლება მხოლოდ ზემოთ ჩამოთვლილი გამოცემებით და მას საფუძვლად უდევს არაერთი სხვა გამოცემაც. სახელდობრ:

1. ა. შავგულიძე. მხაზველობითი გეომეტრიის მოკლე კურსი. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2003
2. ა. შავგულიძე. ტექნიკური ხაზვის პროპედევტიკური კურსი. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2005
3. ა. შავგულიძე, ნ. ნიკვაშვილი. გრაფიკული დისციპლინების პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების გეომეტრიული საფუძვლები. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2004

4. Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. М., Гос. изд. Физико-математической литературы. 1959
5. გ. ვახნაძე. მხაზველობითი გეომეტრიის კურსი. თბილისი, „განათლება“, 1979
6. Вернер Зоммер. Auto CAD 2008. Руководство конструктора. Изд-во „Бином“, М., 2008.,
7. Финкельштейн Э. Auto CAD 2007 и Auto CAD LT 2007. Библия пользователя. „диалектика“, М., 2007.,

2. შედეგები და მათი განსჯა

2.1 — მხაზველობითი გეომეტრია სივრცის გეომეტრიული მოდელირების შუქზე პროფ. ი. ჯაფარიძის მიხედვით.

2.1.1. სამგანზომილებიანი პროექციული სივრცის აქსიომატიკური ბრტყელი მოდელები

სივრცესა და სიბრტყეს შორის კავშირი შეიძლება დამყარდეს კონსტრუქციულად, ანუ დაგეგმილებისა და თანაკვეთის საშუალებით. დაგეგმილების დროს ცენტრალური ელემენტი შეიძლება იყოს არა მხოლოდ წერტილი (ცენტრი), არამედ წრფეც (დაგეგმილების ღერძი), 2 - სიბრტყე ან ზოგადად k -სიბრტყე. ანლოგიურად კვეთა ხორციელდება არა მარტო 2 - სიბრტყით, არამედ 3 -სიბრტყითაც და ზოგადად k სიბრტყით. ამა თუ იმ ელემენტის არჩევა დამოკიდებულია მოდელირებულ სივრცეზე. შეიძლება გამოსახულება არც იყოს კონსტრუქციულად დაკავშირებული სივრცესთან. ორივე შემთხვევაში გამოსახულების სიბრტყეს ენიჭება სპეციფიური თვისებები – იგი ხდება წერტილოვანი ველის, წრფოვანი ველის ან კონიკების ველის სიმრავლეთა მატარებელი. ყველა ეს თვისება გვიქმნის სრულიად განსხვავებულ წარმოდგენას გამოსახულებების სიბრტყეზე ჩვეულებრივ სიბრტყესთან შედარებით. კერძოდ, გამოსახულებების სიბრტყე ხდება თავისებური მოდელი საწყისი სივრცისა, რომელშიც ძირითადი ელემენტების როლს ასრულებს:

1. გამოსახულების სიბრტყის განსაზღვრული გეომეტრიული ელემენტები ან ელემენტთა ჯგუფები (გრაფიკული მოდელი);
2. გეომეტრიული ელემენტებისა და რიცხვების ჯგუფები (გრაფიკულ-ანალიტიკური მოდელი).

ამასთან, პროექციულ (კონსტრუქციული ასახვა) და დამოუკიდებელ (აქსიომატიკური) მოდელებს აქვთ შემდეგი რეალიზაცია: პროექციული მოდელი ასახულ სივრცესთან ხისტადაა დაკავშირებული. ყოველი “წერტილი”

(მაგალითად წერტილთა წყვილი მონჟის მეთოდში) ცალსახად დაკავშირებულია სივრცის კონკრეტულ წერტილთან.

დამოუკიდებელი მოდელი თვითონ იძენს სივრცის ყველა თვისებას, როგორც კი განსაზღვრული იქნება მისი საწყისი ელემენტი (ანუ ჩამოყალიბებული იქნება ე.წ. ლექსიკონი, რომელიც განმარტავს რას ეწოდება წერტილი, წრფე და სიბრტყე). ამასთან იგი შეიძლება დაუკავშირდეს ანალოგიურ გადაუგვარებელ სივრცეს სხვადასხვა გზით. მაგალითად, სივრცესა და მოდელს შორის პროექციული შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს ამგვარად: ავიღოთ სივრცის 5 ნებისმიერი "წერტილი" და შევუსაბამოთ მას მოდელის 5 ნებისმიერი "წერტილი", ამის შემდეგ შეგვიძლია განვსაზღვროთ შესაბამისი ელემენტების ნებისმიერი წყვილი.

დამოუკიდებელი მოდელი შეიძლება ისე ავაგოთ, რომ არ დაუკავშიროთ რომელიმე გარკვეულ სივრცეს. იგი შეიძლება გავხადოთ მეტრულად განსაზღვრული თუ შევირჩევთ შესაბამისი მეტრიკის სივრცეს (ევკლიდეს, არაევკლიდეს, ფსევდოევკლიდეს და ა.შ.).[2]

2.1.2 სიმბოლიკა და ტერმინოლოგია

სამი, ოთხი და n განზომილებიანი სივრცე ავლნიშნოთ $R_3, R_4, \dots . \dots R_n$. მათი ბრტყელი მოდელები კი — $R_{2+1}, R_{2+2}, R_{2+3}, \dots R_{2+(n-2)}$. ე.ი. პირველი ინდექსი გვიჩვენებს, რომ მოდელი შექმნილია R_2 სიბრტყეში, ხოლო ინდექსების ჯამი გვაძლევს მოდელირებული სივრცის განზომილებას. მაგალითად, R_4 სივრცის მოდელი შეიძლება ავაგოთ R_3 -ში ან R_2 -ში. ეს სიმბოლურად ჩაიწერება ასე: R_{3+1} და R_{2+2} . ზოგადად, ჩანაწერი R_{K+L} ნიშნავს, რომ ვაგებთ $(K+L)$ -განზომილებიანი სივრცის მოდელს K -განზომილებიან სივრცეში.

მოდელების აგება დავიწყოთ წერტილის აგებით. იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ ან ერთი რომელიმე გეომეტრიული ელემენტით (მაგალითად, ციკლოგრაფიაში "წერტილი" გამოსახულების სიბრტყეზე მოდელირდება წრეწირით), ან ორი (მაგალითად, მონჟის მეთოდში "წერტილი" მოდე-

ლირდება წერტილთა წყვილით), ან სამი (მაგალითად სხოუტეს ეპიურზე R_4 სივრცისათვის) და ა.შ. გეომეტრიული ელემენტით.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც “წერტილი” არის წერტილთა წყვილი R_{2+1} -ში. ამ შემთხვევაში, ცხადია, წრფე არის ერთპარამეტრიან წერტილოვან სიმრავლეთა წყვილი, ხოლო სიბრტყე - ორპარამეტრიან წერტილოვან სიმრავლეთა წყვილი. ისეთ მოდელს, რომელშიც წერტილები ინტერპირებულია ერთი ელემენტით ვუწოდოთ მონომოდელი, ორით - ბინარული მოდელი, სამით - ტრენარული, ოთხით - კვატერნარული. ასე მოდელები დაყოფილია თვისობრივად განსხვავებულ ჯგუფებად. მეორეს მხრივ, მოდელები იყოფა ჯგუფებად მოდელირებული სივრცის განზომილების მიხედვით. აქედან გამომდინარე შეიძლება გვქონდეს, მაგალითად, მონომოდელი R_{2+2} , ბინარული მოდელი R_{2+1} და ა.შ.

აუცილებელია ავღნიშნოთ, რომ მოდელების შესწავლის დროს მათემატიკოსებს უპირატესად აინტერესებთ მონომოდელები, როგორც თეორიულად უფრო მოსახერხებელი: სივრცის ყოველი წერტილი დაკავშირებულია სიბრტყის ერთ ელემენტთან, ანუ ადგილი აქვს ურთიერთცალსახა შესაბამისობას. თუმცა საინჟინრო პრაქტიკაში უფრო ხშირად და ეფექტურად გამოიყენება ბინარული მოდელები.

სივრცის გეომეტრიული მოდელირების დროს დიდი როლი ენიჭება პარამეტრების გამოთვლებს. აქსიომატიკური მოდელირების დროს სივრცის ძირითადი ელემენტები (წერტილები, წრფეები, სიბრტყეები) ინტეგრირებულია სიბრტყის გარკვეული ელემენტებით (წრეწირები, კონიკები), აგრეთვე ტიპიური ან განსხვავებული ელემენტებით (წერტილთა წყვილი, წერტილთა სამეული, წერტილი და წრფე და ა.შ.). აქსიომატიკური მოდელირების საწყის სტადიაზე პარამეტრული გამოთვლები საშუალებას გვამლევს თავიდანვე გამოვრიცხოთ მოდელების შეუძლებელი ვარიანტები. გეომეტრიული ანასახების ერთობლიობა, რომლებითაც ხდება R_n სივრცის მოდელირება უნდა იყოს n -პარამეტრიანი (∞^n), აქედან გამომდინარე ცხადი ხდება შერჩეული ერთობლიობა აკმაყოფილებს თუ არა ამ კონკრეტულ პირობებს. მაგალითად, შეუძლებელია R_8 სივრცის ისეთი ბინარული მოდელის (წერტილი მოცემული

უნდა იყოს გეომეტრიული ელემენტების წყვილით) აგება, სადაც სივრცის ყოველი წერტილი ინტერპრეტირებულია წერტილითა და კონიკის წყვილით. მართლაც, სიბრტყეზე ასეთი წერტილების რაოდენობა 7-პარამეტრიანია (∞^7), რადგან შედგება ∞^2 წერტილებისა და ∞^5 კონიკისაგან. ამ შემთხვევაში გვაკლია ერთი პარამეტრი. თუ გვინდა R_6 სივრცის მოდელირება წინა მაგალითის ანალოგიური პირობებით, აუცილებელია მოდელის სქემა ისე შევარჩიოთ, რომ მოვაშოროთ ზედმეტი პარამეტრი. კერძოდ, შეიძლება არ განვიხილოთ სიბრტყის ყველა ∞^5 კონიკა და განვიხილოთ 4-პარამეტრიანი კონიკების სიმრავლიდან ნებისმიერი, მაგალითად კონიკების სიმრავლე, რომელთაც აქვთ ერთი საერთო წერტილი ან საერთო მხები. ამ შემთხვევაში ყველა წერტილისა და კონიკების წყვილთა სიმრავლე აღმოჩნდება 6 პარამეტრიანი და ეს სიმრავლე შეიძლება ავიღოთ კვლევის საფუძვლად.

სივრცის გეომეტრიული მოდელირების დროს, ძალზე მნიშვნელოვანია სხვადასხვა შესაბამისობაში მყოფი სიმრავლეების განზომილების საკითხი. სხვადასხვა სივრცე შეიცავს ალგებრული ზედაპირებისა და სიბრტყეების განსაზღვრულ სიმრავლეს, ამიტომ შესაბამის მოდელებში ამ სიმრავლეებს უნდა ჰქონდეს იგივე განზომილება, რაც ჰქონდა სივრცეში.

მოვიყვანოთ ელემენტარული ცნებები გეომეტრიული ელემენტების უსასრულო სიმრავლეების შესახებ:

წრფის (მრუდი), სიბრტყის (ზედაპირის), R_3, R_4, R_5, \dots სივრცის კუთვნილ წერტილთა სიმრავლე შესაბამისად იქნება ∞^1 (ერთპარამეტრიანი), $\infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^5, \dots$

სიბრტყის, R_3, R_4, R_5, \dots სივრცის კუთვნილ წრფეთა სიმრავლე შესაბამისად იქნება $\infty^2, \infty^4, \infty^6, \dots$

R_3, R_4, R_5, \dots სივრცეების კუთვნილი სიბრტყეები შესაბამისად იქნება ∞^3 (სამპარამეტრიანი), $\infty^6, \infty^9, \dots$

წერტილთა წყვილი წრფეზე, სიბრტყეზე R_3, R_4, R_5, \dots სივრცეში შესაბამისად არის ∞^2 (ორპარამეტრიანი), $\infty^4, \infty^6, \infty^8, \dots$

K წერტილისგან შემდგარი ჯგუფი იგივე გეომეტრიულ სახეობებზე ქმნის $\infty^k, \infty^{2k}, \infty^{3k}, \infty^{4k}, \dots$ პარამეტრიან სიმრავლეს.

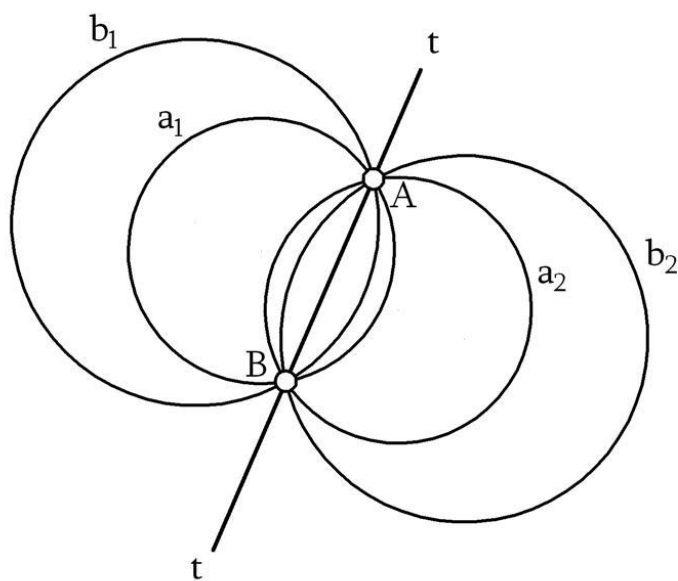
∞^1 კონიკები იგივე სახეობებზე იქნება $\infty^5, \infty^8, \infty^{11}, \dots$

მაგალითისთვის გამოვთვალოთ R_3 სივრცის კუთვნილი კონიკების სიმრავლე. R_3 სივრცე შეიცავს ∞^3 სიბრტყეს, თითოეულ ამ სიბრტყეზე გვაქვს ∞^5 კონიკა (კონიკა დამოკიდებულია ხუთ პარამეტრზე), ამიტომ საძიებელი სიმრავლე იქნება ∞^8 პარამეტრიანი ($\infty^3 \times \infty^5 = \infty^8$).

2.1.3 მოდელების აგება

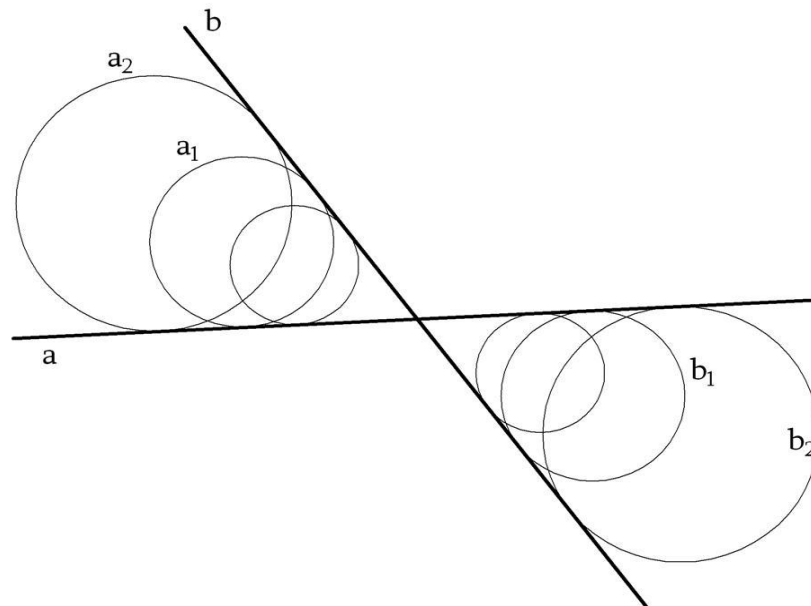
საზოგადოდ, R_2 -ში „წერტილის“ მოდელირებისათვის შეიძლება გამოყენებული იყოს: წერტილი, წრფე, კონიკა (კერძოდ წრეწირი), ან მესამე რიგის მრუდი (k^3). მოდელის აგების დროს აუცილებელ პირობას წარმოადგენს მის ელემენტებსა და მოდელირებული სივრცის ელემენტებს შორის ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობის არსებობა, ამისათვის კი საჭიროა ორივე სიმრავლეს ჰქონდეს ერთიდაიგივე სიმძლავრე. აქედან გამომდინარე R_{2+1} სივრცის მონომოდელში „წერტილი“ არ შეიძლება იყოს არც წერტილი და არც წრფე, რადგან სიბრტყეზე გვაქვს ამ წერტილებისა და წრფეების ორპარამეტრიანი სიმრავლე ∞^2 , ხოლო „წერტილი“ R_{2+1} -ში უნდა იყოს ∞^3 .

სიბრტყეზე გვაქვს წრეწირების ∞^3 სიმრავლე (R_2 -ში ∞^2 წერტილთა სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი შეიძლება მივიღოთ ∞^1 კონცენტრული წრეწირების ცენტრად). აქედან გამომდინარე, არსებობს იმის შესაძლებლობა,



სურ. 1

რომ R_3 წერტილოვანი სივრცის R_{2+1} მოდელის აგების დროს „წერტილი“ დავარქვათ R_2 სიბრტყის ნებისმიერ წრეწირს (ციკლოგრაფიული გეგმილები). ამ დროს თვისობრივად განსხვავებული მოდელები წარმოიქმნება იმისგან დამოკიდებულებით, თუ რას მივიჩნევთ „წრფედ“ (აქ უნდა გამოვიდეთ იმ წინაპირობიდან, რომ ორი „წერტილი“ განსაზღვრავს „წრფეს“ და მის კუთვნილ „წერტილთა მწკრივს“). მოდელირების დროს, ციკლოგრაფიული გამოსახულების გამოყენების შემთხვევაში, გამოკვლეული უნდა იყოს წრეწირების რომელი ერთპარამეტრიანი სიმრავლე განისაზღვრება ორი ნებისმიერად ალებული წრეწირით (ორი „წერტილით“). ეს შეიძლება იყოს წრეწირების კონა, რომელიც გადის ორ **A** და **B** საერთო (ნამდვილ ან წარმოსახვით) წერტილზე, ე.ი. წრეწირების ეს კონა შეიძლება ჩავთვალოთ „წერტილთა მწკრივად“, თვით ეს ორი **A** და **B** წერტილი კი იქნება ამ მწკრივის მზიდი ანუ „წრფე“ (სურ.1). ორი ნებისმიერი წრეწირი განსაზღვრავს მათ საერთო ორ მხებ **m** და **n** წრფეს. თუ წერტილთა მწკრივად მივიჩნევთ ყველა იმ ∞^1 წრეწირს, რომელთათვისაც აღნიშნული მხებები საერთოა, მივიღებთ სულ სხვა მოდელს (სურ.2).



სურ. 2

R_{2+1} მონომოდელი შეიძლება აიგოს აგრეთვე ω^3 კონიკების ერთობლიობის საშუალებით. ამის საფუძველს გვაძლევს ციკლოგრაფიული მოდელის არსებობა. თუ დამტკიცებულია ციკლოგრაფიული მოდელის არსებობა, მაშინ წრეწირი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ზოგადი სახის კონიკა, რომელიც გადის სიბრტყის აბსოლუტურ წერტილებზე. ეს წერტილებია არასაკუთრივ წრეზე მდებარე შეუღლებული და წარმოსახვითი ორმაგი წერტილები ელიფსური ინვოლუციისა, რომელიც წარმოშობილია ამ სიბრტყეზე ნებისმიერი ორთოგონალურ ინვოლუციურ წრფეთა კონის საშუალებით.

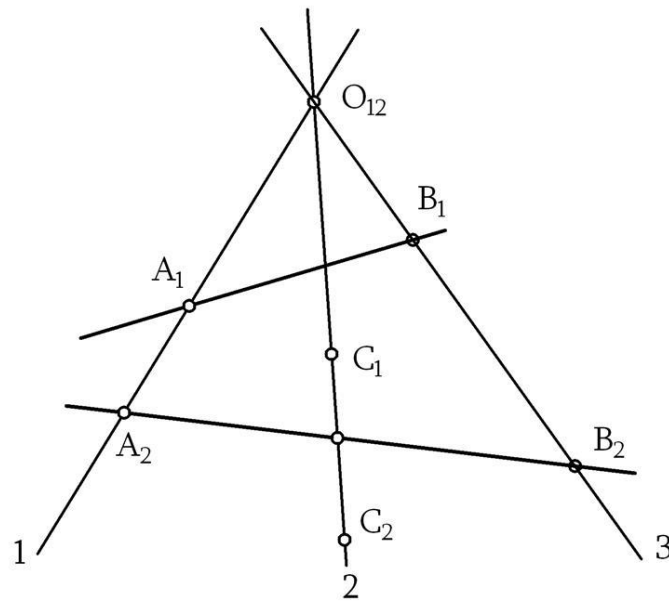
R_{2+2} სივრცის მონომოდელის აგების დროს წრეწირი აღარ გამოგვადგება, რადგან გვაკლია ერთი პარამეტრი. ამ დანაკლისის შესავსებად შესაძლებელია ყოველი წერტილი დავუკავშიროთ ω^1 რომელიმე დამატებით ელემენტს — მაგალითად, წრეწირის კუთვნილ რომელიმე წერტილს და „წერტილად“ ჩავთვალოთ წრეწირი და მისი კუთვნილი წერტილი. ამ შემთხვევაში სიბრტყეზე უკვე გვექნება ასეთი წრეწირების ω^4 სიმრავლე. მაგრამ, ასეთი მოდელი უკვე აღარ ჩაითვლება მონომოდელად, რადგან სივრცის ყოველი ელემენტი მოცემული იქნება სიბრტყის ორი ელემენტით — ანუ მოდელი იქნება ბინარული.

გამოვარკვიოთ გამოგვადგება თუ არა, R_{2+2} მონომოდელის აგების დროს კონიკა, რომელიც სიბრტყეზე გვაქვს ω^5 . ამ შემთხვევაში გვჭირდება ω^4 ელემენტების სიმრავლე. ასეთი სიმრავლე იქნება ერთი საერთო წერტილის მქონე კონიკების სიმრავლე. აქედან გამომდინარე ასეთი კონიკების სიმრავლე შეიძლება გამოყენებული იყოს R_{2+2} მონომოდელის აგების დროს. ω^5 კონიკების ერთობლიობა კი, შეიძლება გამოვიყენოთ R_{2+3} მონომოდელში.[1][2]

2.1.4. R_{2+1} ძირითადი ბინარული მოდელები

თეორიულად შესაძლებელია მრავალი სხვადასხვაგვარი ბინარული მოდელის აგება, სადაც „წერტილების“ როლს ასრულებს სიბრტყის ელემენტთა წყვილები (რა თქმა უნდა იქნება პარამეტრების გამოთვლასთან დაკავ-

ვშირებული გარკვეული შეზღუდვები): ორი წერტილი, ორი წრფე, წერტილი და წრფე, წერტილი და წრეწირი და ა.შ.

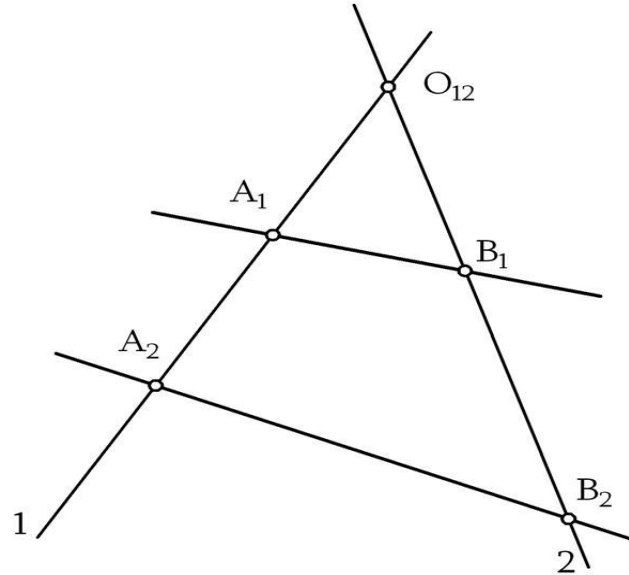


სურ. 3

დავუშვათ, რომ მოცემულ სიბრტყეში მოდელის „წერტილი“ არის A_1 და A_2 წერტილთა წყვილი. ცხადია, რომ ყველა ასეთ წერტილთა წყვილის ∞^4 სიმრავლე არ შეიძლება გამოყენებული იყოს R_{2+1} მოდელისათვის (რადგან სივრცეში, რომლის მოდელირებასაც ვახდენთ, არის ∞^3 წერტილი, თუმცა წერტილთა ასეთი წყვილი შეიძლება ავიღოთ R_{2+2} მოდელის საფუძვლად (R_4 სივრცის ბრტყელი მოდელი). წერტილთა წყვილი R_2 -ში შეიძლება ჩავთვალოთ R_{2+1} -ის „წერტილად“, თუ ეს წყვილი ერთპარამეტრიან დამოკიდებულებების პირობას ასრულებს. რაც ნიშნავს იმას, რომ წერტილთა წყვილი უნდა ეკუთვნოდეს სიბრტყის რომელიმე წრფეს ან მრუდ წირს. (სურ.3)-ზე ნაჩვენებია ერთ-ერთი შესაძლებელი ვარიანტი ასეთი დამოკიდებულებისა. აქ წერტილი არის წერტილთა ნებისმიერი წყვილი, რომელიც მდებარეობს O_{12} ცენტრის მქონე წრფეთა კონის რომელიმე წრფეზე, რომელსაც კავშირის წრფე ეწოდება. ასეთი წყვილი სიბრტყეზე ∞^3 იქნება, რადგან თითოეულ წრფეზე არის ∞^2 წერტილთა წყვილი, კონაში კი არის ∞^1 ასეთი წრფე). ამგვარად ერთ-

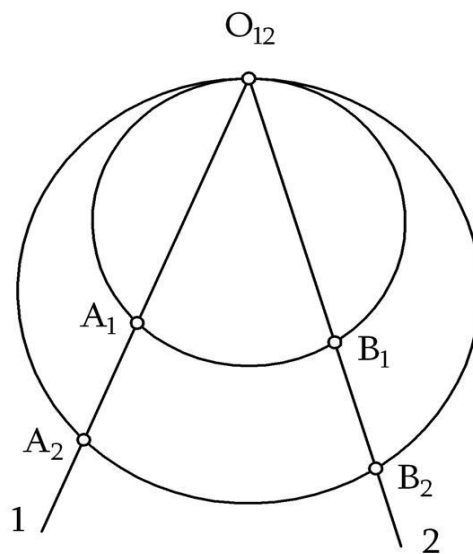
პარამეტრიანი დამოკიდებულების პირობა შესრულებულია. „წრფე“ განი-
საზღვრება ორი „წერტილით“.

ავილოთ ორი ნებისმიერი „წერტილი“ A_1, A_2 და B_1, B_2 და ვაჩვენოთ გეომე-



სურ. 4

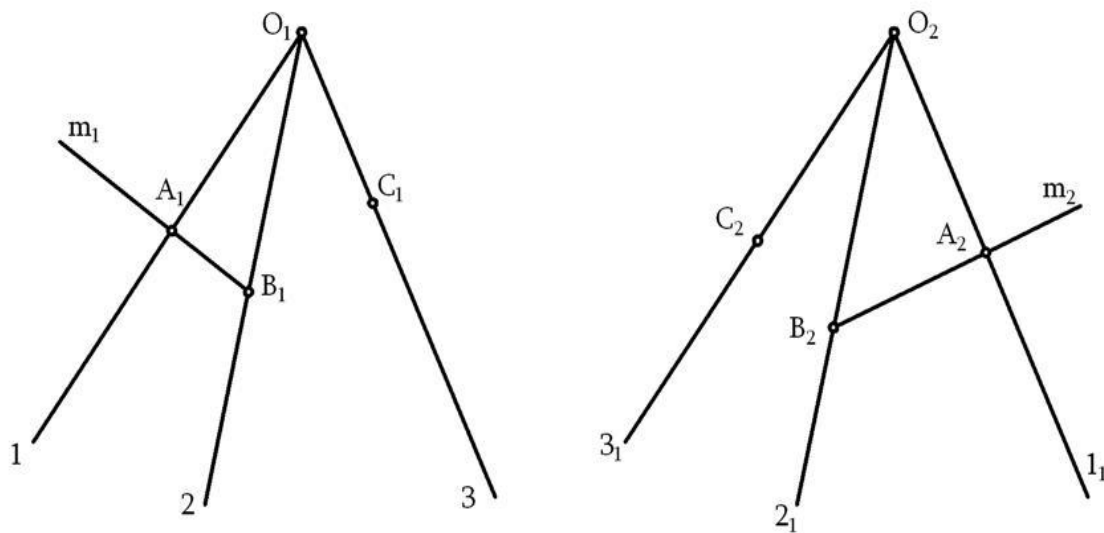
ტრიული ელემენტების რომელმა წყვილმა შეიძლება შეასრულოს „წრფის“
როლი. A_1 და B_1 -ის შეერთებით მივიღებთ m_1 წრფეს, ხოლო A_2 და B_2 -ის
შეერთებით — m_2 წრფეს. ჩვთვალთ , რომ m_1 და m_2 წრფეთა წყვილი არის
„წრფე“ R_{2+1} -ში (სურ.4).



სურ. 5

„წრფედ“ შეიძლება ჩავთვალოთ აგრეთვე $O_1A_1B_1$ და $O_2A_2B_2$ წრეწირების წყვილი. ამ შემთხვევაში მივიღებთ სივრცის სრულიად განსხვავებულ მოდელს. ასეთ მოდელში „წრფის“ როლს ასრულებს ∞^4 წრეწირების წყვილი, რომლებსაც აქვს ერთი საერთო წერტილი(სურ.5). როგორც ვნახეთ მოდელის სახის განსაზღვრისათვის საკმარისი არ არის მისი „წერტილის“ განსაზღვრა. მთავარია სიბრტყის კუთვნილი გეომეტრიული ელემენტებიდან რომელს მივიჩნევთ „წრფედ“.[4] [7]

ამრიგად, R_{2+1} ბინარული მოდელის თითოეული წერტილის მეწყვილე ელემენტი (ამ შემთხვევაში წერტილი) მასთან ერთპარამეტრიან დამოკიდებულებაში იმყოფება. R_{2+2} მოდელში წერტილებსა და მის მეწყვილე ელემენტებს შორის დამოკიდებულება იქნება ∞^2 ორპარამეტრიანი, ხოლო R_{2+4} - ისათვის ∞^4 (ოთხპარამეტრიანი). განვმარტოთ ბინარულ მოდელში მეორე ინდექსის მნიშვნელობა: იგი გვიჩვენებს მეორე ველის იმ ელემენტების ზომას, რომელიც პირველი ველის თითოეულ წერტილთან ერთად განსაზღვრავს „წერტილს“.

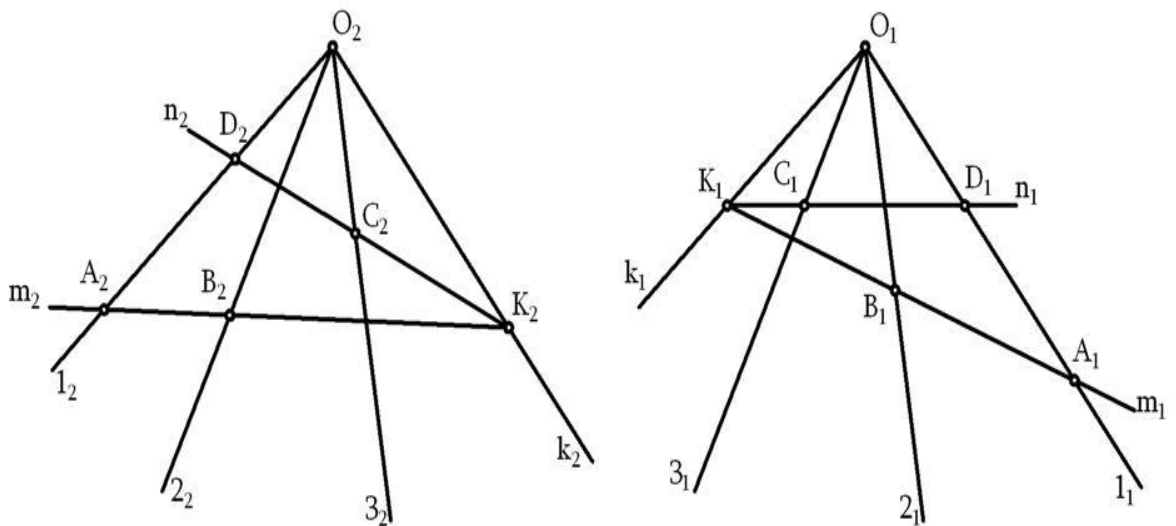


სურ. 6

მაგალითად, R_{2+3} ბინარული მოდელისათვის (ხუთგანზომილებიანი სივრცის ბრტყელი მოდელი) ადვილად დავადგენთ, რომ „წერტილი“ არ შეიძლება იყოს წერტილთა წყვილი, მაგრამ სიბრტყის თითოეული წერტილი

ასრულებს „წერტილის როლს სიბრტყის ელემენტების ნებისმიერ სამ-პარამეტრიან სიმრავლესთან ერთად, მაგალითად, სიბრტყის კუთვნილ ნებისმიერ წრეწირთან ერთად. ამის შემდეგ უნდა განისაზღვროს „წრფე“.

ავაგოთ ზოგადი სახის ბინარული R_{2+1} მოდელი. (სურ.6). ავიღოთ წრფეთა გეგმილური კონების წყვილი $O_1(1,2,3) \bar{\wedge} O_2(1^1,2^1,3^1)$, რომლებსაც დავარქვათ ძირითადი კონები. ვუწოდოთ „წერტილი“ ძირითადი კონების შესაბამის წრფეებზე (კავშირის წრფეები) მდებარე A_1 და A_2 წერტილთა წყვილს ($A_1 \in 1; A_2 \in 1^1$), მაშინ ცხადია, რომ „წერტილები“ R_{2+1} -ში იქნება ∞^3 , რადგან გვაქვს ∞^2 წერტილთა წყვილი შესაბამის წრფეების წყვილზე, ხოლო ასეთი წრფეთა წყვილი არის ∞^1 წრფეთა კონაში. თუ 1 წრფეზე ავიღებთ ნებისმიერ A_1 წერტილს, მაშინ A_2 წერტილი შეიძლება იყოს 1^1 წრფის ნებისმიერი წერტილი. ორი „წერტილი“ განსაზღვრავს „წრფეს“. ე.ი. „წრფის“ ანასახად უნდა მივიღოთ წრფეთა m_1 და m_2 წყვილი, რომელიც A_1B_1 და A_2B_2 წერტილთა წყვილით განისაზღვრება. ამ „წრფეზე“ მდებარე წერტილი განისაზღვრება იმ წერტილთა წყვილით, რომელიც მიიღება ძირითადი კონების შესაბამის წრფეებთან გადაკვეთაში. ნათელია, რომ „წრფედ“ შეიძლება ჩავთვალოთ მოდელის სიბრტყის ნებისმიერ წრფეთა წყვილი (გამონაკლისს წარმოადგენს O_1 და O_2



სურ. 7

ძირითადი კონების წრეები). სულ გვექნება ∞^4 „წრე“. მართლაც, როგორც არ უნდა ავიღოთ m_1 და m_2 წრე, ისინი ძირითადი კონებს გადაკვეთს ისე, რომ მივიღებთ წერტილთა გეგმილური მწკრივების წყვილს. „წრეთა“ ეს სიმრავლე შეიცავს „წრეთა“ ∞^2 ქვესიმრავლეს ერთი გადაგვარებული გამოსახულებით.

წერტილთა ყველა წყვილი A_1, A_2 და B_1, B_2 , სადაც $A_1=B_1$, წარმოადგენს ასეთ „წრეს“. აგრეთვე შეიძლება შეთავსებული იყოს A_2 და B_2 წერტილები. ორი „წრე“ m_1, m_2 და n_1, n_2 იკვეთება, თუ K_1 და K_2 წერტილები ($m_1 \cap n_1 = K_1$; $m_2 \cap n_2 = K_2$) ინციდენტურია ძირითადი კონების შესაბამის წრეთა წყვილისა (სურ.7). სხვა შემთხვევაში წრეები აცდენილია. „სიბრტყე“ განისაზღვრება „წერტილთა“ ნებისმიერი სამეულით, რომლებიც O_1 და O_2 წერტილებთან ერთად განსაზღვრავს რომელიმე კოლინეაციას, ანუ R_{2+1} -ში ყველა „სიბრტყეთა“ სიმრავლე მოდელირდება ყველა იმ კოლინეაციის სიმრავლით, რომელთაც გააჩნიათ საერთო წრეთა შესაბამისი კონების წყვილი. განვსაზღვროთ ამ სიმრავლის სიმბლავრე. დავაფიქსიროთ A_1, B_1 და C_1 წერტილების სამეული, მაშინ A_2, B_2 და C_2 წერტილებიდან თითოეულს შეიძლება ქონდეს ∞^1 სხვადასხვა მდებარეობა $1^1, 2^1$ და 3^1 წრეებზე, ანუ ∞^3 მდებარეობა. ამით ამოიწურება კოლინეაციის ყველა შესაძლო შემთხვევა.[1][2][4]

ყველა „სიბრტყის“ სიმრავლე შეიცავს გადაგვარებული „სიბრტყეების“ ∞^2 ქვესიმრავლეს და ორჯერ გადაგვარებული „სიბრტყეების“ ∞^1 ქვესიმრავლეს. გადაგვარებულ „სიბრტყეების“ ქვესიმრავლე მიიღება თუ A_1, A_2 ; B_1, B_2 ; C_1, C_2 „წერტილთა“ სამეულის A_1, B_1 და C_1 წერტილები (ან A_2, B_2 და C_2 წერტილები) იქნება კოლინეარული, ხოლო ორჯერ გადაგვარებული ქვესიმრავლე — თუ ორივე სამეული (A_1, B_1 და C_1) და (A_2, B_2 და C_2), იქნება კოლინეარული. განხილული დამოუკიდებელი მოდელი იდენტურია მიულერის პროექციული მოდელისა, რომელიც მიღებულია ორი გამოსახულების გეგმილთა ველების კოლინეარული გარდაქმნების შედეგად. ამ მოდელების იდენტურობა ბუნებრივია, რადგან ორივე მათგანი დამყარებულია წრევიკ ურთიერთკავშირზე მოდელსა და იმ სივრცეზე რომლის მოდელირებასაც ვახდენთ. მიულერის მოდელში ეს განხორციელებულია კონსტრუქციულად, ჩვენს მიერ განხილულ ი.ს. ჯაფარიძის მოდელებში კი კონსტრუქციული ოპერაციებისგან

დამოუკიდებლად. პროექციული (კონსტრუქციული) მიდგომა კვლევების დროს შემოიფარგლება პროექციული აპარატის ელემენტების განლაგების კერძო შემთხვევებით, მაშინ როდესაც აქსიომატიკური მიდგომა ბრტყელი მოდელების ფართო სისტემის მიღების საშუალებას იძლევა. ეს განპირობებულია იმით, რომ ამ შემთხვევაში სხვადასხვა სქემებს შორის მყარდება გარკვეული ურთიერთკავშირი.[5][8]

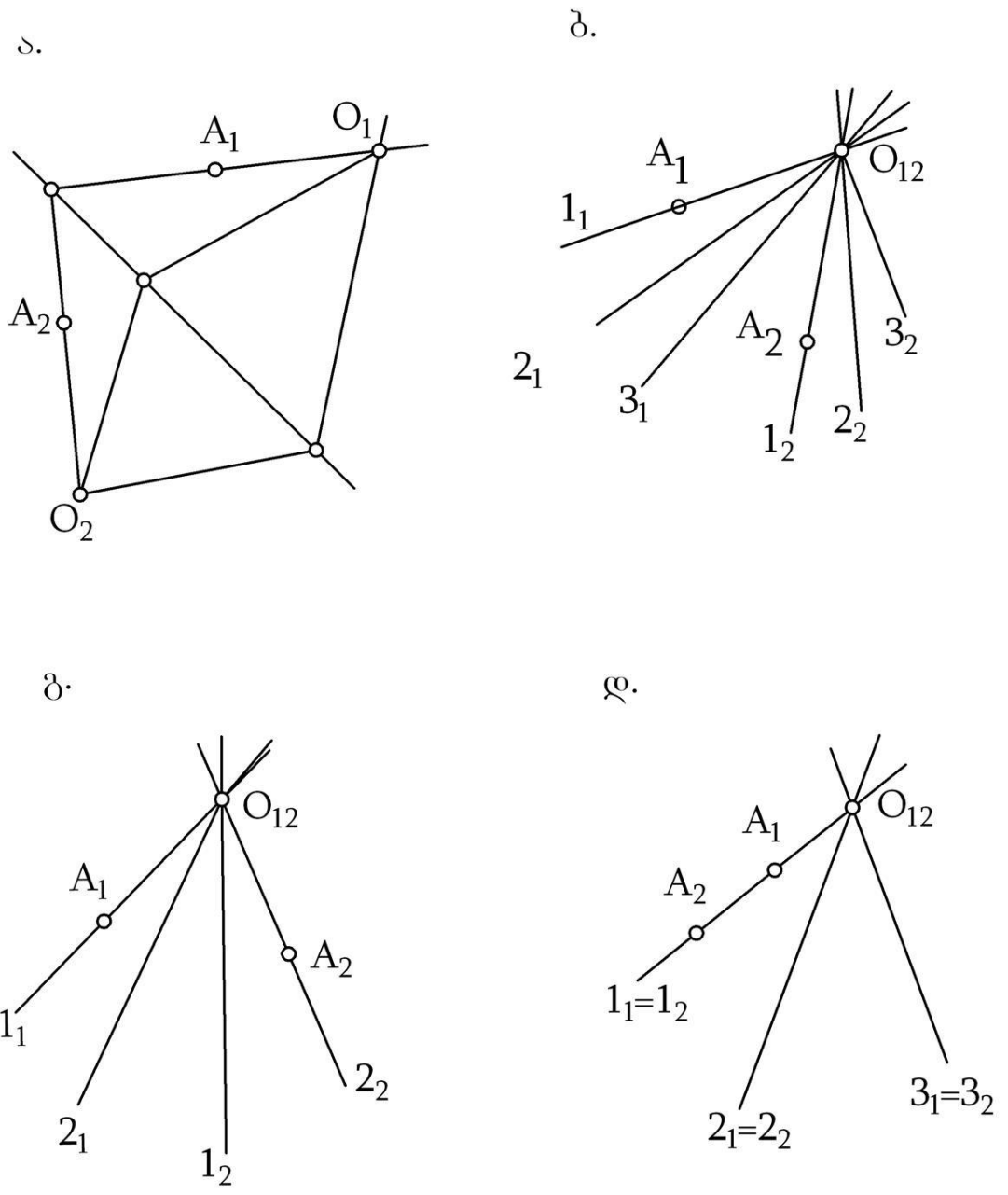
საინტერესო იქნება გამოვარკვიოთ ძალაშია თუ არა R_3 გეგმილური სივრცის აქსიომები ძირითადი R_{2+1} . ბინარული მოდელისათვის. ეს გამოგვადგება R_4 სივრცის მოდელირების დროს. ამავე დროს ცხადი გახდება თუ როგორი მჭიდრო კავშირი არსებობს გეგმილური გეომეტრიის ამოცანებსა და მოდელირებულ სივრცით გამოსახულებებს შორის.

მაგალითისათვის განვიხილოთ აქსიომა: ორი სხვადასხვა „სიბრტყე“ მათ საერთო ერთადერთ „წრფეს“ განსაზღვრავს – ანუ ორ სხვადასხვა $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$ და $\beta_1 \bar{\beta}_2$ კოლინეაციას, რომელიც განსაზღვრულია წრფეთა გეგმილური კონების საერთო წყვილით, ყოველთვის აქვს საერთო წყვილი შესაბამისი წრფეებისა (იმ წრფეების გარდა, რომელიც ეკუთვნის O_1 და O_2 -ს). დასამტკიცებლად, α_1 და β_1 ველები იყოს შეთავსებული. ჩავთვალოთ, რომ მოდელის სიბრტყის ყოველი წერტილი ეკუთვნის როგორც α_1 -ს, ისე β_1 ველს, მაშინ α_2 და β_2 ველები აღმოჩნდება გეგმილურ შესაბამისობაში — $\alpha_2 \bar{\beta}_2$ (რადგან $\alpha_1 = \beta_1$ და $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$; $\beta_1 \bar{\beta}_2$). ამავე დროს α_2 და β_2 იქნება ჰომოლოგიური და ჰომოლოგიის ცენტრი იქნება O_2 წერტილი. ე.ი. მათ ექნებათ ორმაგი წერტილების m_2 წრფე. ამ წრფეს $\alpha_1 = \beta_1$ ველებში შეესაბამება ერთიდაიგივე m_1 წრფე. ამრიგად, „წრფის“ როლს ორი „სიბრტყის“ გადაკვეთაში ასრულებს m_1 და m_2 წრფეთა წყვილი.

განვიხილოთ აქსიომა: „სიბრტყე“ და „წრფე“, რომელიც მოცემულ „სიბრტყეს არ ეკუთვნის, განსაზღვრავს „წერტილს“, რომელიც მათ ეკუთვნის. ანუ კოლინეაცია $\alpha_1 \bar{\alpha}_2$ და m_1, m_2 წრფეთა წყვილი, რომელიც ამ კოლინეაციას არ შეესაბამება, განსაზღვრავს მოცემული კოლინეაციის შესაბამის K_1 და K_2 წერტილთა წყვილს ისე, რომ $K_1 \in m_1$ და $K_2 \in m_2$.

მართლაც, m_1 წრფე მივაკუთვნოთ α_1 -ს. მაშინ კოლინეაციაში მას შეესაბა-

მება m_2 -საგან განსხვავებული, რომელიმე m_2 წრფე, მაგრამ m_2 და m_2 წრფეები გადაიკვეთება ერთ რომელიმე K_2 წერტილზე. K_2 -ს კოლინეაციაში უნდა შესაბამებოდეს $K_1 \in m_1$, რადგან K_2 წერტილი ინციდენტურია m_2 წრფისა.



სურ. 8

O_1 და O_2 ძირითადი კონების ცენტრები ასრულებს განსაკუთრებულ როლს. დავუშვათ, რომ O_1 და O_2 წერტილები წარმოადგენს რომელიმე წერტილის გამოსახულებას. ასეთი დაშვების დროს ვაწყდებით წინააღმდეგობას: როგორც ვიცით O_1 და O_2 შესაბამისია ყველა იმ ∞^3 კოლინეაციისათვის, რომლითაც „სიბრტყის“ ინტერპრეტაცია არის შესაძლებელი. ასეთი დაშვებით მივიღებთ ისეთ დასკვნას, რომელსაც არ შეიძლება ჰქონდეს ადგილი. R_3 -ში — ყველა „სიბრტყის“ სიმრავლეს R_{2+1} -ში აქვს საერთო „წერტილი“.[8][11]

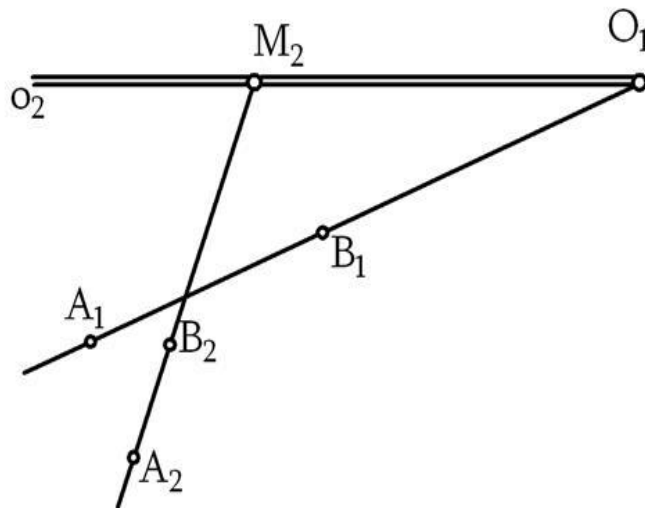
ახლა დავუშვათ, რომ O_1 და O_2 წერტილთა წყვილი არის რომელიმე u „წრფის“ გამოსახულება. ამ შემთხვევაში აღარ არსებობს არანაირი წინააღმდეგობა. ყოველი „წერტილი“ $u(O_1O_2)$ „წრფეზე“ ეკუთვნის ერთ რომელიმე „სიბრტყეს“—კოლინეაციას. ორი „სიბრტყის“ თანაკვეთის m_1m_2 წრფე $u(O_1O_2)$ „წრფეს“ გადაკვეთს ან არ გადაკვეთს იმის მიხედვით, ინციდენტურია თუ არა m_1 და m_2 წრფე შესაბამისი O_1 და O_2 წერტილებისა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $u(O_1O_2)$ „წრფე“ არის კონის ღერძი ორჯერ გადაგვარებული „სიბრტყეებისა“, რომლებიც განსაზღვრულია კავშირის წრფეებით, ამრიგად, მიუხედავად იმისა, რომ $u(O_1O_2)$ „წრფე“ ორჯერ გადაგვარებულია, მისი კუთვნილი „წერტილებისათვის“ შესაძლებელია ყველა ოპერაციის შესრულება.

განვიხილოთ R_{2+1} ძირითადი ბინარული მოდელის განსაზღვრის კერძო შემთხვევები(სურ.8), რომლებიც მიიღება ძირითადი კონების O_1 და O_2 ცენტრების კერძო მდებარეობის დროს. წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ზოგად შემთხვევაში (იხ სურ.6.) შესაბამისი კავშირის წრფეების გადაკვეთის წერტილები ეკუთვნის ერთ კონიკას. — ა) შემთხვევაში ძირითადი კონები ისეა განლაგებული, რომ მათ აქვთ პერსპექტივის ღერძი. ბ) შემთხვევაში ძირითად კონებს აქვთ საერთო ცენტრი (O_1 და O_2 წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა). გ) შემთხვევაში კი, მოცემულია წინა შემთხვევის კერძო შემთხვევა, როდესაც კონები ინვოლუციურია და ამიტომ საკმარისია მოცემული იყოს კონის სხივების ორი შეასაბამისი წყვილი. და ბოლოს, დ) შემთხვევაში, ორივე კონა ურთიერთდამთხვეულია — კონის ყველა წრფეთა წყვილის შესაბამისი წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა. აქ „წერტილი“ იქნება ნებისმიერ წერტილთა წყვი-

ლი აღებული ორმაგი კონების ნებისმიერ წრფეზე (დამთხვეული სხივების აღნიშვნა საჭირო არ არის). ყველა ჩამოთვლილი სქემა ერთიდაიგივე R_{2+1} მოდელის სახესხვაობაა. ყველა ამ მოდელში „წერტილი“ არის წერტილთა წყვილი კონის შესაბამის სხივებზე; „წრფე“—წრფეთა ნებისმიერი წყვილი, ხოლო „სიბრტყე“—კოლინეაცია. სურ.8 -ის ა), ბ) და გ) შემთხვევებში ეს იქნება ზოგადი სახის კოლინეაცია, ხოლო დ) შემთხვევაში —ჰომოლოგია.[8]

2.1.5. R_{2+1} ძირითადი ბინარული მოდელის გადაგვარებული სახეები

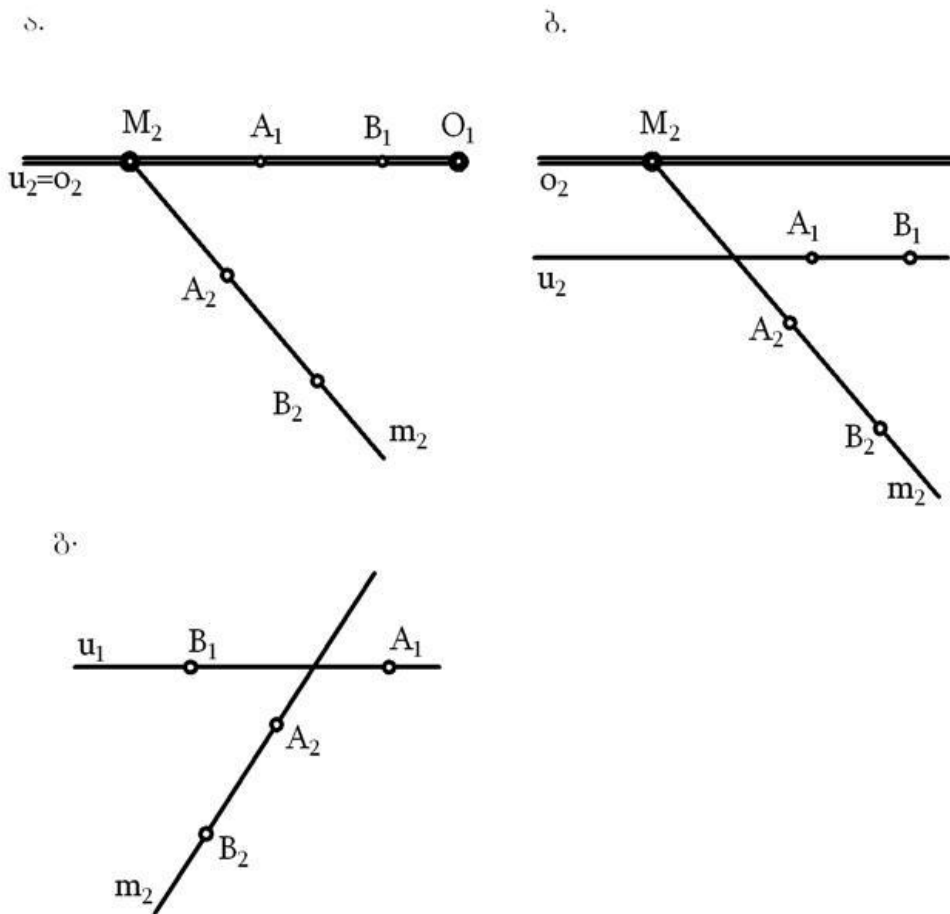
განვიხილოთ ბინარული მოდელის აგების კიდევ ერთი შესაძლებლობა. ავიღოთ მუდმივი u_1 წრფე და ჩავთვალოთ, რომ „წერტილი“ არის წერტილთა წყვილი — u_1 წრფის კუთვნილი ნებისმიერი A_1 წერტილი და მოდელის სიბრტყის ნებისმიერი A_2 წერტილი(სურ.9), ანუ „წერტილები“ მოდელში იქნება ∞^3 . „წრფის“ განსაზღვრისათვის საჭიროა დამატებითი პირობების შემოღება: „წერტილთა“ A_1A_2 და B_1B_2 წყვილი განსაზღვრავს m „წრფეს“. ანუ უნდა იყოს განსაზღვრული წერტილების ორი პროექციული წყვილი.



სურ. 9

ერთი მწკრივის მზიდი იქნება $m_1=u_1$; მეორე მწკრივის მზიდი — $m_2=A_2B_2$. ამისათვის კი საჭიროა გვქონდეს შესაბამის წერტილების კიდევ ერთი წყვილი.

ამ დანაკლისის შესავსებად u_1 წრფეზე გამოვყოთ მუდმივი o_2 წრფე ისე, რომ $O_1 \in o_2$, მესამე წვეილად ჩავთვალოთ O_1 და M_2 წერტილები ($M_2 = m_2 \cap o_2$). მაშინ, $A_2 B_2 M_2 \bar{A}_1 B_1 O_1$ შესაბამისობის თანახმად, m_2 წრფის კუთვნილ ყოველ C_2 წერტილს u_1 წრფეზე ცალსახად შეესაბამება C_1 წერტილი და პირიქით. ორი m და n „წრფე“ იკვეთება $C_1 C_2$ „წერტილში“, თუ C_2 წერტილს ($C_2 = m_2 \cap n_2$) შეესაბამება ერთიდაიგივე C_1 წერტილი u_1 წრფეზე, წერტილთა მჭკრივების იმ პროექციული შესაბამისობის თანახმად, რომლებიც წარმოიქმნება ამ „წრფეებით“. წინააღმდეგ შემთხვევაში წრფეები აცდენილია.



სურ. 10

სამი დამოუკიდებელი „წერტილი“ $A_1 A_2$; $B_1 B_2$ და $C_1 C_2$ განსაზღვრავს „სიბრტყეს“—კოლინეაციას Π_2 ბრტყელ ველსა და u_1 წრფეში გადაგვარებულ ველს შორის. ეს კოლინეაცია განსაზღვრულია პროექციულ წერტილთა

მწკრივის სამი წყვილით რომლებიც მოცემულია (A_1A_2, A_2B_2) ; (B_1C_1, B_2C_2) და (A_1C_1, A_2C_2) წრფეებით. ვაჩვენოთ, რომ „სიბრტყეთა“ სიმრავლე სამ-პარამეტრიანია. დავაფიქსიროთ წერტილთა სამეული $A_2B_2C_2$, მას u_1 წრფეზე შევუსაბამოთ წერტილთა ნებისმიერი სამეული. ამ შესაბამისობით განი-საზღვრება ერთი რომელიმე კოლინეაცია, ანუ ერთი „სიბრტყე“. წერტილთა ასეთი სამეული წრფეზე არის ∞^3 . ამ მოდელის სპეციფიკა მდგომარეობს იმაში, რომ გვაქვს „სიბრტყეები“ ინტერპრეტირებული Π_2 ბრტყელი ველი-სა და u_1 წრფის ერთიდაიგივე წერტილით. ამ თვისებას აქვს არსებითი მნიშვნელობა ოთხგანზომილებიანი სივრცის მოდელირების დროს. ასეთი „სიბრტყეები“ გვექნება ∞^1 — u_1 წრფის ყოველ წერტილთან დაკავშირებულია ერთი სიბრტყე.

მოდელების კერძო შემთხვევები მოცემულია მე-10-ე სურათზე: ა) შე-მთხვევაში ნაჩვენებია მოდელი, რომელშიც $u_1 = o_2$, ბ) შემთხვევაში — $u_1 \parallel o_2$ და მათი თანაკვეთის O_1 წერტილი არასაკუთრივი წერტილია. ძალზე საინტე-რესოა გ) შემთხვევა — აქ წარმოდგენილ მოდელში o_2 არასაკუთრივი წრფეა და O_1 წერტილი არასაკუთრივი წერტილია. ამ შემთხვევაში შესაბამისობა $m_2(A_2B_2M_2^{\infty}) \bar{\wedge} u_1(A_1B_1O_1^{\infty})$ იქნება აფინური. რაც იმას ნიშნავს, რომ წერტილთა მწკრივები მსგავსია და კერძო შემთხვევაში შეიძლება ტოლიც იყოს. მაგალითად, C_1C_2 „წერტილი“ ინციდენტურია (A_1B_1, A_2B_2) „წრფისა“ თუ $A_1B_1 : B_1C_1 = A_2B_2 : B_2C_2$. როდესაც (A_1B_1) და (A_2B_2) მონაკვეთები ტოლია, მაშინ ასეთი „წრფეების“ „წერტილები“ შეიძლება მარტივად აიგოს, კერძოდ — $B_1C_1 = B_2C_2$.
[2][4][8]

2.1.6. წარმოებული აქსიომატიკური ბინარული მოდელები

1. წინათქმა. ზემოთ განხილული დამოუკიდებელი ბრტყელი მოდელები R_3 პროექციული სივრცის მოდელებია. რაც ნიშნავს:

- იმ წრფეებსა და სიბრტყეებზე რომლის მოდელირებაც ხდება არ არის არანაირი განსაკუთრებული (არასაკუთრივი ელემენტი) ელემენტი;

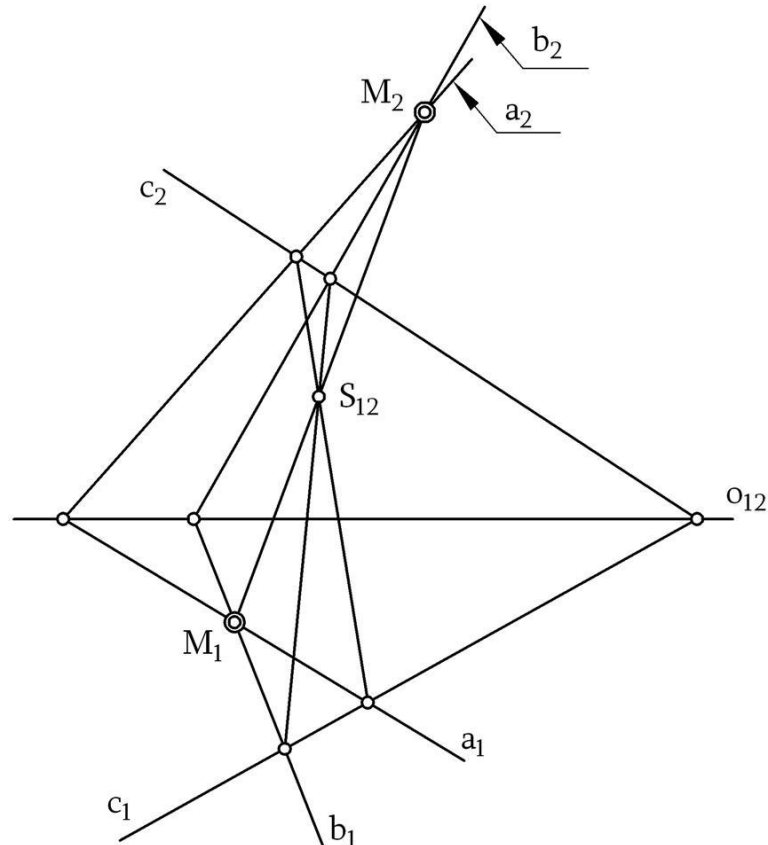
- მოდელებზე შენარჩუნებულია ყველა ინციდენცია, რომელსაც ადგილი აქვს პროექციულ სივრცეში;
- მეტრული ცნებები (მონაკვეთის სიგრძე, პარალელობა, პერპენდიკულარობა და ა.შ) არ განიხილება;
- მოდელის სიბრტყე ევკლიდეს გაფართოებული სიბრტყეა.

ამ პარაგრაფში საწყისი ცნებები რჩება იგივე. აქ განვიხილავთ პროფ. ი.ჯაფარიძის მიერ შექმნილ მოდელების სისტემას. ამ სისტემაში ნაჩვენებია კავშირი ძირითად მოდელებთან და აგრეთვე ურთიერთკავშირი მოდელებს შორის. ამჯერად R_3 სივრცის ძირითადი გეომეტრიული ელემენტების როლს ასრულებს უფრო რთული სახეობების წყვილები, როგორცაა: წრფეები, წრეწირები და კონიკები.

2. ძირითადი წინადადებები R_{2+1} ბინარული მოდელების წრფივი დამოკიდებულების შესახებ. ვთქვათ, გვინდა ავაგოთ ისეთი ბინარული მოდელი, რომელშიც „წერტილის“ როლს ასრულებს არა წერტილთა, არამედ წრფეთა წყვილი. ამ შემთხვევაშიც საჭიროა შესრულდეს ერთპარამეტრიანი დამოკიდებულების პირობა (სურ.3). სიბრტყეზე სულ გვაქვს ∞^4 წრფეთა წყვილი, მოდელისათვის კი საჭიროა ∞^3 ასეთი წყვილებისა.

ავაგოთ O_{12} მუდმივი წრფე (სურ.11) და R_{2+1} მოდელის „წერტილად“ ჩავთვალოთ a_1, a_2 და b_1, b_2 წრფეთა ნებისმიერი წყვილი, რომლებიც იკვეთებიან O_{12} წერტილზე. ასეთ წრფეთა წყვილი იქნება ∞^3 , რადგან O_{12} -ზე გვაქვს ∞^1 წერტილი და ყოველ ასეთ წერტილზე გადის ∞^2 წრფეთა წყვილი. „წრფის“ გამოსახულებად შეიძლება ჩავთვალოთ M_1, M_2 წერტილთა წყვილი, რომლებიც ინციდენტურია ორი „წერტილის“ გამოსახულებისა (მაგალითად, $M_1 = a_1 \cap b_1$; $M_2 = a_2 \cap b_2$). ცხადია, რომ წერტილთა წყვილი O_{12} წრფესთან არანაირი პირობით არ არის დაკავშირებული. ისინი შეიძლება ავიღოთ ნებისმიერად. სულ ასეთი „წრფე“ იქნება ∞^4 . ამასთან ერთად სამი ნებისმიერი „წერტილი“: a_1, a_2 ; b_1, b_2 და c_1, c_2 განსაზღვრავს „სიბრტყეს“— O_{12} ღერძის მქონე ჰომოლოგიას. მე-11-ე სურათზე აგებულია ამ ჰომოლოგიის S_{12} ცენტრი. თუ მიღებულ შედეგებს შევადარებთ მე-3-ე სურათზე შესრულებულ აგებებს, შევნიშნავთ, რომ მათ შორის არსებობს კავშირი ორმაგობის მცირე პრინციპის მიხედვით. მართლაც,

O_{12} მუდმივი წერტილის მაგივრად გვაქვს მუდმივი o_{12} წრფე, O_{12} ცენტრის კოლინერულ წერტილთა წყვილის მაგივრად გვაქვს წრფეთა წყვილი, რომელიც o_{12} -ის კონგრუენტულია (წრფეთა ყოველი წყვილი იკვეთება o_{12} -ის კუთვნილ წერტილზე) და ა. შ.



სურ. 11

განხილული შემთხვევის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თუ გვაქვს სივრცის განსაზღვრული მოდელი, შეიძლება მოდელის ბრტყელი ველების გარკვეული გარდაქმნების საშუალებით მივიღოთ ახალი „წარმოებული“ მოდელები.[5][8]

წინადადება 1. ნებისმიერი R_{2+1} ბინარული მოდელის ველების კორელაციურ გარდაქმნას მიყვავართ ახალი R'_{2+1} მოდელის წარმოშობამდე.

მართლაც, R_{2+1} მოდელის ველების ნებისმიერი პროექციული გარდაქმნა, კერძოდ კორელაციური, არ ცვლის „წერტილების“, „წრფეების“ და „სიბრტყე-

ების“ ინციდენტობას და სიმძლავრეს, რადგან ეს გარდაქმნები არის ურთიერთცალსახა. თუ R_{2+1} -ში „წერტილები“ არის ∞^3 , მაშინ მისი შესაბამისი ელემენტები R'_{2+1} -ში იქნება ∞^3 და ა.შ. შეიცვლება მხოლოდ მათი გეომეტრიული სახე. თუ მაგალითად, საწყის მოდელში „წერტილი“ გამოისახებოდა წერტილთა წყვილით, ახალ მოდელში იგი გამოისახება წრფეთა წყვილით. ამიტომ ახალი მოდელის კუთვნილების აქსიომები იქნება შენარჩუნებული, ასევე შენარჩუნებული იქნება განლაგებისა და უწყვეტობის აქსიომები, რაც გამომდინარეობს იქიდან, რომ კორელაციური შესაბამისობა, რომელიც წარმოშობს R'_{2+1} მოდელს, ისევე როგორც ნებისმიერი სხვა პროექციული შესაბამისობა, არ ცვლის R_{2+1} -ის ელემენტების განლაგებას და უწყვეტობას. სახვაგვარად რომ ვთქვათ, R'_{2+1} მოდელის აქსიომების სისტემა იზომორფულია საწყისი მოდელის აქსიომების სისტემისა. [8]

წინადადება 2. R_{2+1} ბინარული მოდელის ორი ველიდან ერთი რომელიმეს კორელაციურ გარდაქმნას მიყვავართ ახალი R''_{2+1} მოდელის წარმოშობამდე.

მაგალითად, თუ Π_2 ველი გარდაქმნილია Π''_2 -ში, მაშინ Π_1 და Π''_2 ველები განსაზღვრავს ახალ R''_{2+1} მოდელს, რომელიც წარმოქმნილია R_{2+1} მოდელისაგან. ამ წინადადების დამტკიცება წინა წინადადების დამტკიცების ანალოგიურია. მოდელის სიბრტყეში გვაქვს განსაკუთრებული ელემენტები: O_1 ცენტრის მქონე წრფეთა კონა და o_2 წრფის კუთვნილი წერტილთა მწკრივი. „წერტილი“ იქნება ნებისმიერი წყვილი A_1, a_2 , რომლებიც ინციდენტურია O_1 ცენტრის მქონე კონისა და o_2 საერთო მზიდი წრფის მქონე წერტილთა მწკრივის შესაბამისი ელემენტებისა. ორი „წერტილის“: A_1, a_2 და B_1, b_2 შემადგენელი „წრფე“ იქნება $m_1 M_2$ წყვილი, სადაც $m_1 = (A_1 B_1)$, ხოლო $M_2 = a_2 \cap b_2$.

ამრიგად, თუ „წერტილი“ არის ერთმანეთთან განსაზღვრული პირობებით დაკავშირებული წყვილი: წერტილი + წრფე, მაშინ „წრფე“ იქნება ნებისმიერი წყვილი: წერტილი + წრფე, გამონაკლისია წყვილი $O_1 o_2$.

„სიბრტყე“ მოდელირდება კორელაციით, რომელიც განსაზღვრულია სამი ნებისმიერი „წერტილით“. მაგალითად, წერტილები a_1, a_2 ; b_1, b_2 და c_1, c_2 განსაზღვრავს „სიბრტყეს“ — კორელაციას $O_1 A_1 B_1 C_1 \bar{A} o_2 a_2 b_2 c_2$. ნებისმიერი

„წერტილი“ D_1, d_2 ინციდენტურია ამ „სიბრტყისა“, თუ D_1 და d_2 არის მოცემული კორელაციის შესაბამისი ელემენტები. აღვნიშნოთ, რომ O_1 და o_2 წყვილი შესაბამისია ყველა იმ ω^3 კოლინეაციაში, რომლებითაც ხდება „სიბრტყის“ მოდელირება.

ამრიგად, ყოველი მოდელი და მისი წარმოებული მოდელი იზომორფულია. როგორც ცნობილია მოდელს ეწოდება იზომორფული, თუ ერთი მოდელის ელემენტებს შორის (ანუ ძირითად ცნებებს შორის) და მეორე მოდელის ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს ისეთი ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობა, რომლის დროსაც ელემენტებს შორის შენარჩუნებულია აქსიომებში მოცემული ძირითადი დამოკიდებულებები. ჩვენს შემთხვევაში ასეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა არის კორელაცია.[8]

წინადადება 3. ნებისმიერი R_{2+1} მოდელისთვის შეიძლება მივუთითოთ ახალი მოდელი, რომელსაც შემდგომში ვუწოდებთ მოცემული მოდელის „ანტიმოდელს“ და პირიქით, ამასთან „წრფეს“ ორივე მოდელში უნდა ჰქონდეს ერთიდაიგივე სახე.

ამ წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ R_3 პროექციულ სივრცეში წერტილების და სიბრტყეების სიმრავლეს აქვს ერთიდაიგივე ω^3 სიმძლავრე და კუთვნილების ყველა აქსიომა არის ორმაგი ორმაგობის დიდი პრინციპის მიხედვით.

ნებისმიერი მოდელი და მისი „ანტიმოდელი“ გრაფიკულად იდენტურია, თუმცა მათში სხვადასხვა აზრი დევს. ასე მაგალითად, თუ საწყის მოდელში წერტილთა წყვილი ასრულებს „წერტილის“ როლს, მაშინ „ანტიმოდელში“ წერტილთა იგივე წყვილი „სიბრტყის“ როლშია. საზოგადოდ არ აქვს მნიშვნელობა რომელ მოდელს დავარქმევთ საწყის მოდელს ან „ანტიმოდელს“. შევთანხმდეთ, რომ ძირითად და მათ წარმოებულ მოდელებს ვუწოდოთ საწყისი მოდელები: „წერტილი“ – ელემენტთა წყვილი, „სიბრტყე“ – ველების შესაბამისობა, ხოლო საპირისპირო შემთხვევას – ანტიმოდელი: „სიბრტყე“ – ელემენტთა წყვილი, ხოლო „წერტილი“ – ველების შესაბამისობა. აქ არ უნდა დაგვაბნიოს იმან, რომ „წერტილი“ ანტიმოდელში განსაზღვრავს ველების შესაბამისობას, რადგან ამ შემთხვევაში იგი მოიაზრება როგორც „წრფეებისა“ და „სიბრტყე-

ების“ შეკვრის მზიდი ელემენტი. ზუსტად ასევე „სიბრტყე“ საწყის მოდელში განსაზღვრავს შესაბამისობას იმის გამო, რომ იგი არის მზიდი ელემენტი „წერტილების“ და „წრფეების“ ველისა.

1, 2, და 3 წინადადეგები შემდგომში გაგვიადვილებს R_{2+1} სივრცის მოდელების სისტემატიზაციას. მართლაც, ყოველი ბინარული მოდელიდან შეგვიძლია მივიღოთ ხუთი „წარმოებული“ მოდელი: მთელი მოდელის კორელაციური გარდაქმნით, მოდელის ერთერთი ველის გარდაქმნით და სამი „ანტიმოდელი“ წინა სამი მოდელისათვის. ამ კანონზომიერებების საშუალებით შესაძლებელია გამოკვლეული იყოს მოდელების გარკვეული ჯგუფები, ხოლო მიღებული დასკვნები გავრცელდეს მათგან წარმოებულ მოდელებზე.[7][8]

2.1.7. ბინარული მოდელებისგან წარმოებული წრფივი მოდელები

1* ცხრილში (სურ.12) სისტემაშია მოყვანილი ყველა ძირითადი ბინარული მოდელი და წარმოებული მოდელები, რომლებიც მიღებულია მოდელის სიბრტყეთა ველების წრფივი გარდაქმნის (კოლინეაცია და კორელაცია) საშუალებით.

პირველ ჰორიზონტალურ (a) მწკრივში მოცემულია ძირითადი მოდელები („წერტილი“ – წერტილთა წყვილი); მეორე (b) რიგში „წერტილი“ გამოისახება წერტილით და წრფით, ხოლო მესამე (c) რიგში – წრფეთა წყვილით.

ვერტიკალურ სვეტებში მოცემული სქემები დაკავშირებულია ერთმანეთთან მოდელის სიბრტყის კორელაციური გარდაქმნით. a და c რიგის მოდელებისათვის გარდაიქმნება მოდელის მთელი სიბრტყე, ხოლო b და c, ან a და c რიგის მოდელებისათვის – მოდელის ერთ-ერთი ველი.

ვერტიკალური სვეტები გაყოფილია ორ ჯგუფად:

- **A ჯგუფი:** a-1, a-2, a-3 და a-4 – ძირითადი ბინარული მოდელები და მათი წარმოებული მოდელები;
- **B ჯგუფი:** მოდელები: a-5 და a-6; ძირითადი მოდელების გადაგვარებული სახეები და მათი წარმოებული მოდელები.

რადგან B ჯგუფში მოდელების ველები არაერთგვაროვანია b რიგში გვაქვს მოდელების ორი ტიპი b_1 და b_2 იმის მიხედვით, თუ მოდელის სიბრტყის რომელი ველის გარდაქმნა მოხდა კორელაციის საშუალებით.

ყველა მოდელის სქემაში გვაქვს: ორი „წერტილი“ – A (A_1A_2 ან A_1a_2 ან a_1a_2) და B, აგრეთვე ამ წერტილების ინციდენტური m წრფე (m_1, m_2 ან m_1, M_2 ან M_1m_2)

ყველა სქემაში „წერტილები“ და „წრფეები“ გამოსახულია ელემენტთა წყვილით, ხოლო „სიბრტყეები“ – ველების შესაბამისობით (კოლინეაციური ან კორელაციური). თითოეულ ამ სქემას გააჩნია თავისი ანტიმოდელი. სიცხადისათვის დაწვრილებით განვიხილოთ b-2 და b-3 მოდელები:

მოდელი b-2. გვაქვს სახეობათა მუდმივი წყვილი – წრფეთა კონა O_1 ცენტრით და ამ კონის წერტილთა მწკრივი o_2 . „წერტილი“ იქნება ნებისმიერი წყვილი A_1 და a_2 ელემენტებისა, რომლებიც ინციდენტურია O_1 და o_2 სახეობების შესაბამისი ელემენტებისა. ე.ი. თუ $A_1 \in 1_1$, მაშინ $a_2 \in 1_2$. ნებისმიერ A_1 წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ∞^1 წრფე 1_2 ცენტრის მქონე წრფეთა კონიდან, ხოლო ყოველ a_2 წრფეს – ∞^1 წერტილი 1_1 მზიდი წრფის წერტილთა მწკრივიდან. ორი „წერტილი“ (A_1, a_2) და (B_1, b_2) განსაზღვრავს $m_1 = (A_1 B_1)$ წრფეს და $m_2 = a_2 \cap b_2$ წერტილს. ე.ი. „წრფე“ განისაზღვრება როგორც ელემენტების წყვილი: წერტილი+წრფე, ხოლო „წერტილთა მწკრივი“ ამ „წრფე-ზე“: წერტილთა მწკრივი $m_1(A_1, B_1, \dots)$ და მის მიმართ პროექციული წრფეთა კონა $M_2(a_2, b_2, \dots)$. (A_1, a_2); (B_1, b_2) და (C_1, c_2) „წერტილებით“ განსაზღვრული „სიბრტყის“ როლს ასრულებს კორელაცია, ოღონდ არა ზოგადი სახის, არამედ ე.წ. „პერსპექტიული კორელაცია“.

ამრიგად, ყველა „სიბრტყის“ ერთობლიობა გამოისახება ყველა იმ ∞^3 „პერსპექტიული კორელაციის“ სიმრავლით, რომელთაც აქვთ საერთო ცენტრი და საერთო ღერძი.

მართლაც, ნებისმიერი სამი A_1, B_1 და C_1 წერტილებიდან თითოეულს შეესაბამება ∞^1 წრფე, რითაც ამოიწურება ყველა შესაძლებელი შესაბამისობა.[2][8]

		A						B					
		1	2	3	4	5	6	7					
წიგნის ბაზის ღმრთე													
წიგნის ღმრთე $A_1 A_2$	a												
წიგნის ღმრთე და წიგნის $A_1 a_2$	b				b-1		—						
წიგნის ღმრთე $a_1 a_2$	c												

სურ. 12

მოდელი b-3. ამ მოდელშიც გვაქვს სახეობათა მუდმივი წყვილი: O_1 ცენტრის მქონე წრფეთა კონა და O_2 მზიდი წრფის კუთვნილი წერტილთა მწკრივი, იმ განსხვავებით, რომ ეს სახეობები ინვოლუციურია. ე.ი. წრფეთა O_1 კონისა და O_2 წრფის კვეთაში მიღებული $1, 2, \dots$ წერტილთა მწკრივი ინვოლუციურია $12, 22, \dots$ წერტილთა მწკრივისა. „წერტილი“, „წრფე“ და „სიბრტყე“ განისაზღვრება ისე, როგორც b-2 მოდელში. „სიბრტყეების“ როლს ასრულებს ზოგადი სახის კოლინეაცია – ეს არის ∞^3 კორელაცია, რომლებსაც აქვთ საერთო ელემენტთა წყვილი: წრფეთა O_1 კონა და მის მიმართ ინვოლუციური O_2 წერტილთა მწკრივი.

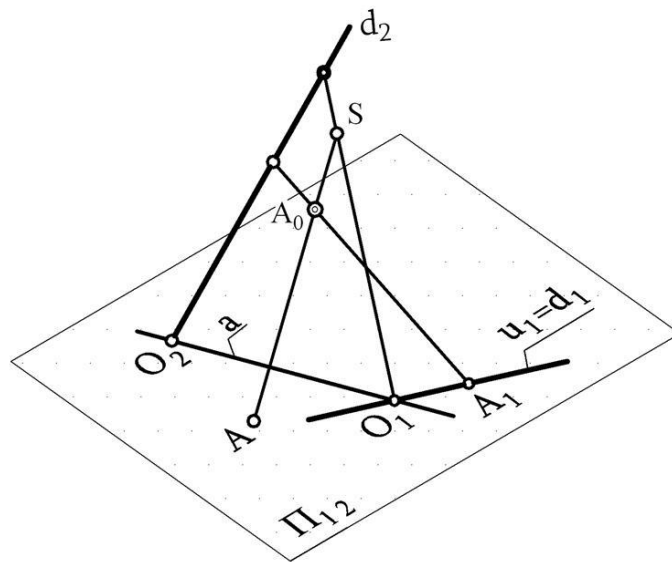
და ბოლოს, განვიხილოთ ურთიერთკავშირი ი.ს. ჯაფარიძის მოდელების ცხრილის შემადგენელ მოდელებს შორის. ამ ცხრილს საფუძვლად უდევს a-1 მოდელი, ხოლო დანარჩენი მოდელები საწყის მოდელთან (a-1) დაკავშირებულია ძირითადი კონების კერძო მდებარეობით (სვეტები 2, 3 და 4) ან მოდელის ველის გარდაქმნით.

აუცილებლად უნდა ავლნიშნოთ, რომ მოდელების ცხრილის საფუძვლად შეიძლება ავიღოთ ცხრილის ნებისმიერი მოდელი და მისგან მივიღოთ სხვა დანარჩენი. მართლაც, თუ მაგალითად ცხრილის საფუძვლად ავიღებთ a-4 მოდელს (საერთო ცენტრის მქონე ყველა ჰომოლოგიის ერთობლიობა), მაშინ 1, 2 და 3 სვეტები შეიძლება მივიღოთ ძირითადი O_1 და O_2 შეთავსებული კონების განცალკევებით და მათთვის მკვეთრად გამოხატული მახასიათებელი ურთიერთკავშირის მინიჭებით: O_1 და O_2 კონების პერსპექტიულობის შემთხვევაში მივიღებთ a-2 მოდელს, ხოლო ზოგად შემთხვევაში – a-1 მოდელს და ა. შ. b და c მწკრივების მიღების გზა უცვლელია.[1][4][8]

2.2. პროფ. ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი

2.2.1. გეომეტრიული საფუძვლები

პროფ. ი. ჯფარიძის მიერ დამუშავებული დამოუკიდებელი მოდელების სისტემის შემადგენელ თითოეულ სქემას შეიძლება ჰქონდეს სხვადასხვაგვარი პროექციული რეალიზაცია, რასაც მივყავართ სივრცის სიბრტყეზე შექცევადი ასახვის გარკვეულ გრაფიკულ სქემებამდე. სივრცის სიბრტყეზე



სურ. 13

შექცევადი ასახვის ერთ-ერთი საინტერესო და ორიგინალური იდეის ავტორია პროფ. ა. შავგულიძე. ეს იდეა საფუძვლად დაედო „მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს“. ჩვენი სამუშაოს მიზანი არის გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა პროფ. ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის საშუალებით. [9]

განვიხილოთ პროექციული რეალიზაციის ერთ-ერთი შესაძლო სქემა **a-5** ტიპის მოდელებისათვის (სურ.13). ამ შემთხვევაში სივრცის თითოეული წერტილის დაგეგმილება ხდება ერთის მხრივ S ცენტრიდან ცენტრალური დაგეგმილებით, მეორეს მხრივ კი ჰიპერბოლური წრფივი კონგრუენციის საშუალებით, რომლის ერთ-ერთი დირექტრისა d_1 ინციდენტურია Π_{12} -ის.

ადვილად დავრწმუნდებით, რომ R_{2+1} და R_3 შორის არსებობს ურთიერთ-ცალსახა შესაბამისობა. O_1 წერტილი არის S ცენტრის ანასახი წრფივი კონგრუენციის სხივების საშუალებით. a წრფე კი d_2 დირექტრისის ცენტრალური გეგმილია. ნებისმიერი წყვილი წერტილებისა $A_1 \in d_1$ და $A \in \Pi_{12}$ ცალსახად განსაზღვრავს A_0 წერტილს R_3 სივრცეში.

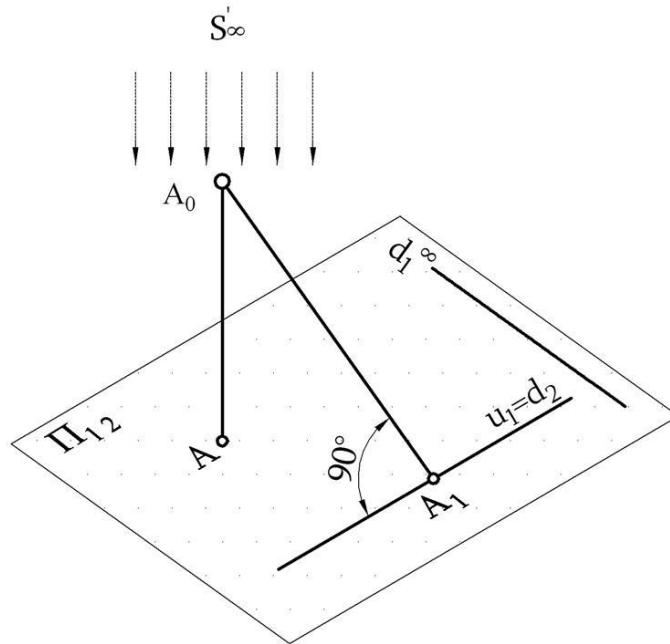
ცნობილია, რომ პროექციული სივრცის რომელიმე მოდელის ზოგადი სქემიდან კერძო სქემაზე გადასვლის დროს (მაგალითად, არასაკუთრივი სიბრტყის მქონე გაფართოებული ევკლიდეს სივრცის მოდელებისათვის) ცენტრალური ელემენტები მოდელირებული სივრცის არასაკუთრივი სიბრტყის ინციდენტური უნდა იყოს. განვიხილოთ $a-5$ მოდელის კონსტრუქციული აპარატის ერთ-ერთი კერძო სქემა.

ვთქვათ, კონგრუენციის ერთ-ერთი დირექტრისა, მაგალითად d_1 , არასაკუთრივი წრფეა. ამ შემთხვევაში კონგრუენციის ყველა სხივი d_2 დირექტრისას ისევ გადაკვეთს. ამასთან, მათ ექნებათ პარალელიზმის სიბრტყე. ე.ი. ამ სხივებით შეიქმნება პარალელურ ω^1 წრფეთა კონების ერთობლიობა ცენტრებით d_2 -ზე.

სხვაგვარად რომ ვთქვათ, კონგრუენციის ω^1 პოლუკვადრიკებიდან ნებისმიერი პოლუკვადრიკა წარმოადგენს ჰიპერბოლური პარაბოლოიდის მსახველების ოჯახს. იმ შემთხვევაში, როდესაც d_1^ω დირექტრისა ორთოგონალურად არის დაკავშირებული d_2 -თან, წრფეთა კონის სიბრტყეებიც d_2 -ის მიმართ ორთოგონალურად იქნება განლაგებული. ე.ი. წრფეთა კონის ყველა სხივი მართობულია d_2 -ის, ხოლო ყველა პოლუკვადრიკა წარმოადგენს ტოლფერდა ჰიპერბოლურ პარაბოლოიდს. კონგრუენციის ასეთი კერძო შემთხვევის პირობითი სახელწოდებაა „ორთოგონალური კონგრუენცია“.

მე-14-ე სურათზე ნაჩვენებია ორთოგონალური კონგრუენციის გრაფიკული ინტერპრეტაცია. სადაც d_2 დირექტრისა ისევ Π_{12} სიბრტყის ინციდენტურია, ხოლო $d_1 \notin \Pi_{12}$ არასაკუთრივი წრფეა, რომელიც ორთოგონალურად შეუღლებულია d_2 -თან. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი წერტილი (მაგ. A_0) კონგრუენციის სხივებით ორთოგონალურად დაგეგმილებულია d_2 -ზე (A_1

წერტილი). მე-14-ე სურათზე S ცენტრი Π_{12} სიბრტყესთან ორთოგონალურად შეუღლებული არასაკუთრივი წერტილია. რაც იმას ნიშნავს, რომ ცენტრა-



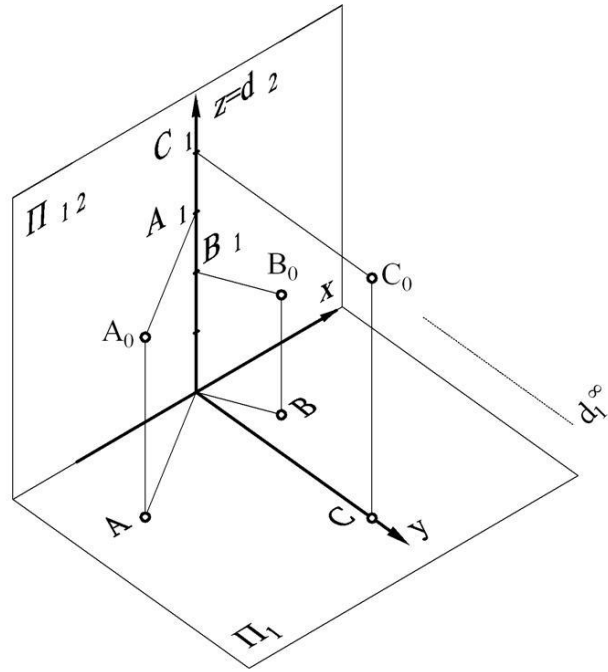
სურ. 14

ლური დაგეგმილების ნაცვლად (სურ.13), გვაქვს ორთოგონალური დაგეგმილება Π_{12} სიბრტყეზე. A_1 წერტილი წარმოადგენს \mathbf{d}_z დირექტორისას მართობული α სიბრტყის ყველა წერტილის ანასახს.

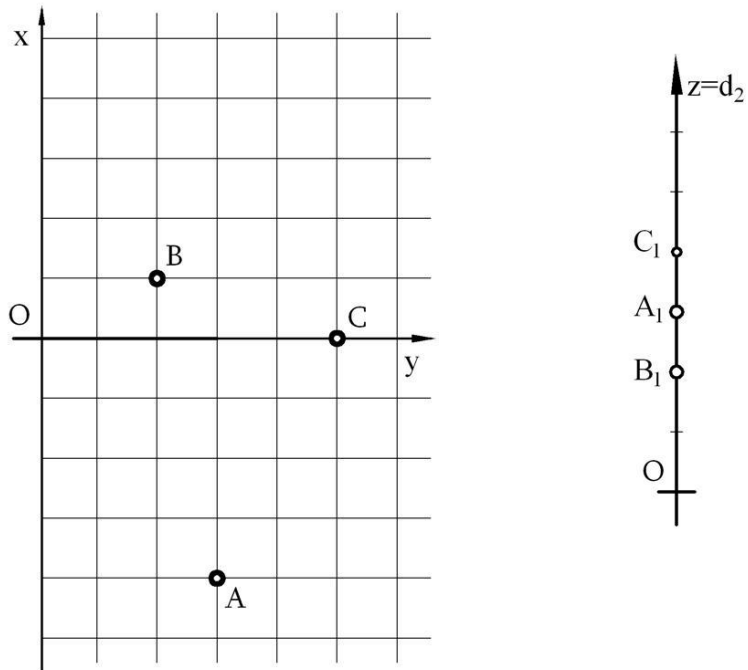
იმის გამო, რომ α სიბრტყე არ არის დონის, მე-14-ე სურათზე განხილული კონსტრუქციული აპარატი არ გამოდგება რიცხვით ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდისათვის, მაგრამ აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს მეორე ვარიანტი, როდესაც დაგეგმილება ხდება ისეთი ორთოგონალური კონგრუენციის სხივებით, რომლის ერთი დირექტორისა \mathbf{d}_z ინციდენტურია Π_2 -ის და მართობულია Π_1 -ის, ხოლო მეორე დირექტორისა \mathbf{d}_1 არის Π_1 სიბრტყის არასაკუთრივი წრფე (სურ. 15.ა).

სამგანზომილებიანი სივრცის ეს მოდელი გეგმილთა სიბრტყეების შეთავსების შემდეგ მიიღებს შემდეგ სახეს (სურ.15.ბ): ნახაზის თავისუფალ ადგილზე აღებულია წრფე, რომელზეც დანიშნულია O სათავე. ამ წრფეს

ს).

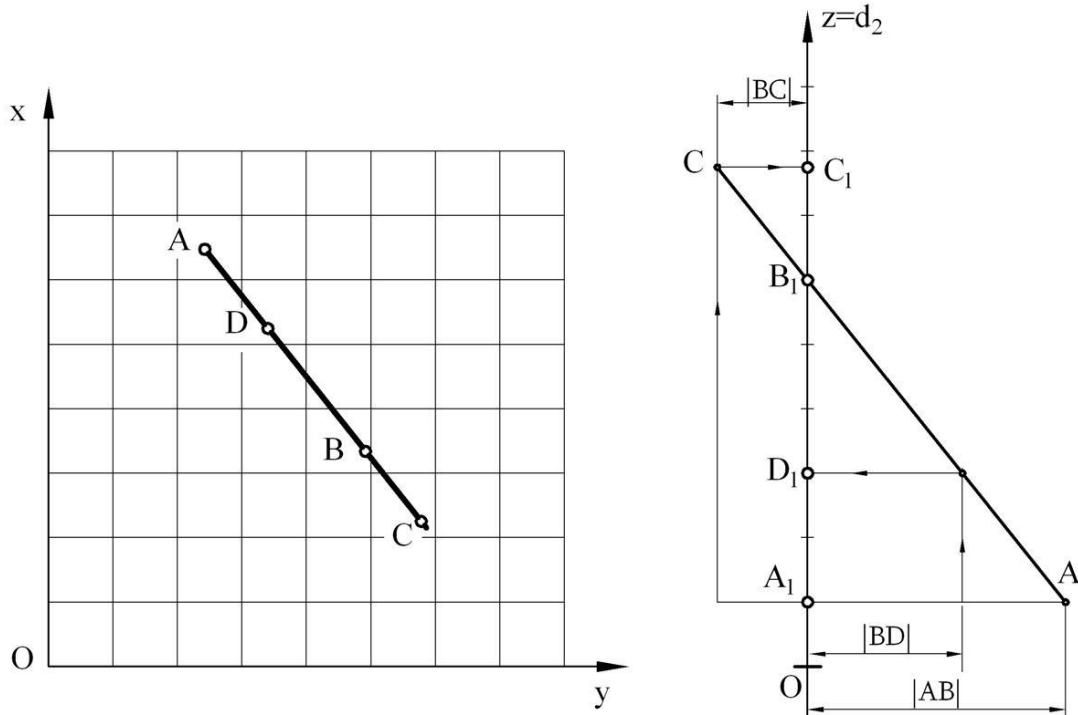


ბ).



სურ. 15

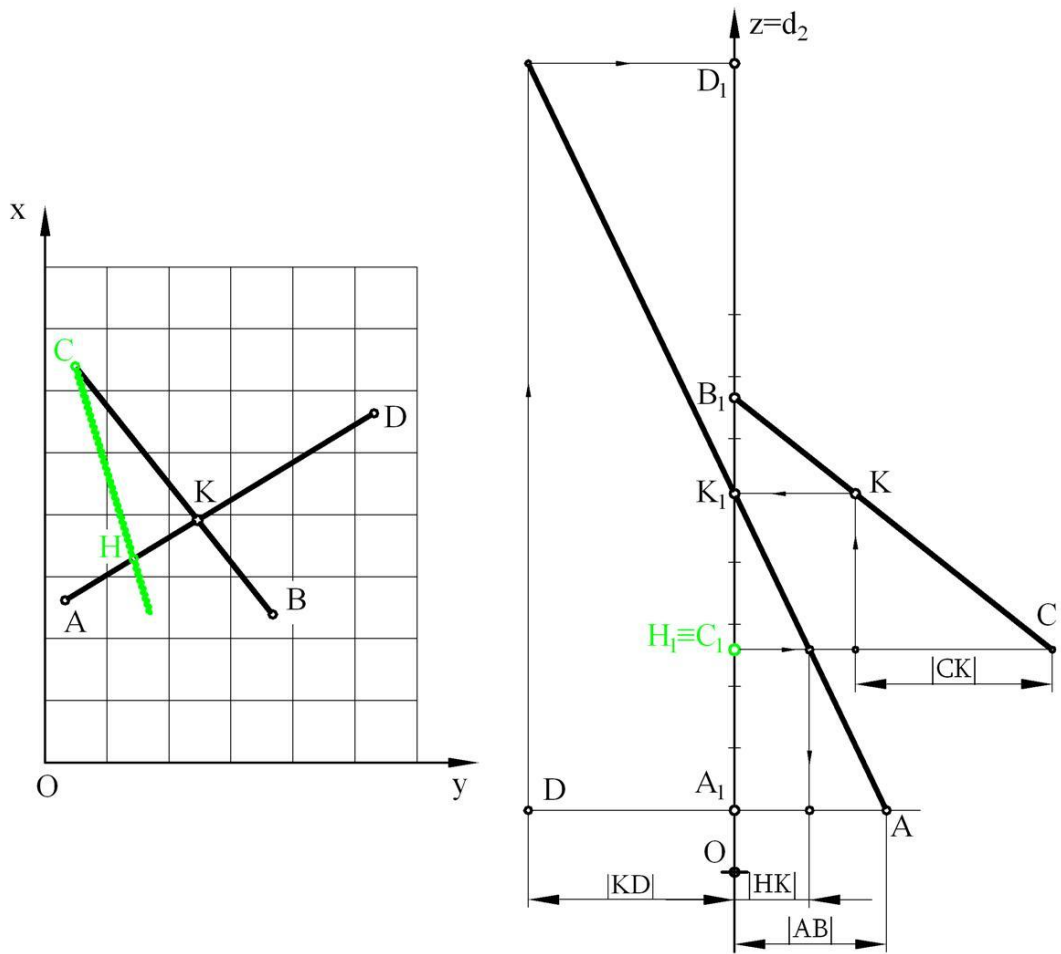
პირობითად ეწოდება მაღლივი ნიშნულების წრფე, ხოლო ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის ასეთ ინტერპრეტაციას — „მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი“.



სურ. 16

R_3 სივრცის ყველა წერტილი გამოწვევის გარეშე კოორდინირებულია დეკარტეს მართკუთხა O_{xyz} კოორდინატთა სისტემაში, რომლის xoy საკოორდინატო სიბრტყე შეთავსებულია Π_1 -თან, ხოლო მაღლივი ნიშნულების dz წრფე — z ღერძთან. ამრიგად, განხილული მოდელის კომპლექსური ნახაზი წარმოადგენს R_3 სივრცის ორთოგონალური გეგმილების ნახაზს (გეგმას) შევსებულს მაღლივი ნიშნულებით $z=dz$ -ზე.

მე-16-ე სურათზე მოცემულია R_3 სივრცის კუთვნილი წრფე მისი ორი წერტილით A_0 და B_0 . ამ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი C_0 ან D_0 ცალსახად განისაზღვრება მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით. გრაფიკული აგებულის თანმიმდევრობა ნახაზზე ნაჩვენებია ისრებით.



სურ. 17

მე-17-ე სურათზე მოცემულია R_3 სივრცის კუთვნილი სიბრტყე სამი არაკოლინეარული A_0, B_0 და C_0 წერტილით. ამ სიბრტყის კუთვნილი ნებისმიერი წერტილი $D_0(DD_1)$ განისაზღვრება წერტილისა და სიბრტყის ურთიერთკუთვნილების პირობის თანახმად: შევაერთოთ D წერტილი A წრტილთან, ხოლო B წერტილი C წერტილთან. მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით ჯერ განვსაზღვროთ K_0 წერტილის K_1 გეგმილს – $K_0 = (A_0D_0) \cap (B_0C_0)$, ხოლო შემდეგ D_0 წერტილის დანაკლის D_1 გეგმილს მაღლივი ნიშნულების $z = d_2$ წრფეზე. მე-17-ე სურათზე აგებულია აგრეთვე $A_0B_0C_0$ სიბრტყის კუთვნილი CH ჰორიზონტალი.

მალივი ნიშნულების წრფეს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება სივრცის გეომეტრიული მოდელირების თვალსაზრისით, კერძოდ იგი წარმოადგენს ბინარული მოდელის გადაგვარებულ ველს. მიუხედავად იმისა, რომ ველი გადაგვარებულია, შესაძლებელია დამხმარე გრაფიკული აგებების სააშუალებით გადაწყვეტილი იქნას სივრცითი ამოცანები.[10][11]

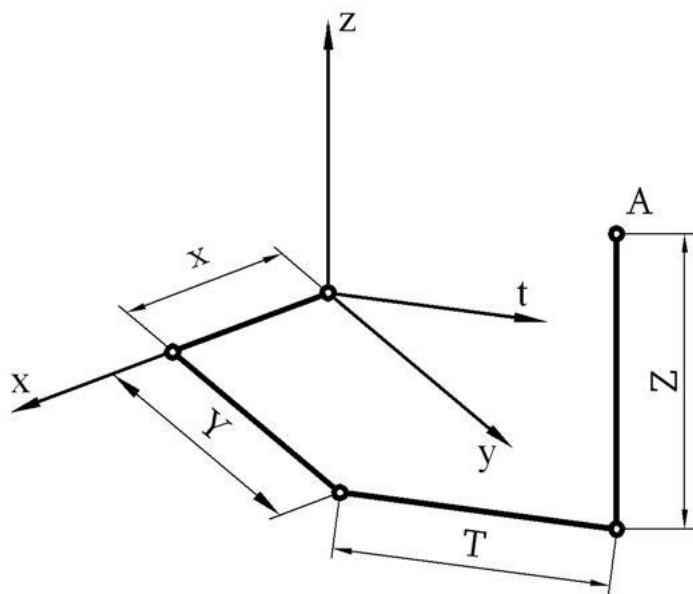
მალივი ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი რიცხვითნიშნულებიანი გეგმილებისაგან იმით განსხვავდება, რომ R_3 სივრცის კუთვნილი წერტილის რიცხვითი ნიშნული შეცვლილია წრფის მონაკვეთით, რომელიც მონიშნულია მალივი ნიშნულების $z = d_2$ წრფეზე.

მალივი ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდით პოზიციური და მეტრული ამოცანების ამოხსნის დროს ვსარგებლობთ რიცხვითნიშნულ-ბიანი გეგმილების მეთოდისათვის მიღებული ძირითადი ტერმინებითა და განმარტებებით.[12]

2.2.2. მალივი ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (პირველი ვარიანტი)

1. გეომეტრიული დასაბუთება. ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი R_4 სივრცის ელემენტების ანალიზური განსაზღვრის დროს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა მოცემული ოთხგანზომილებიანი სივრცის წერტილებსა და ამ წერტილების ანასახებს შორის სიბრტყეზე ხორციელდება შემდეგნაირად:

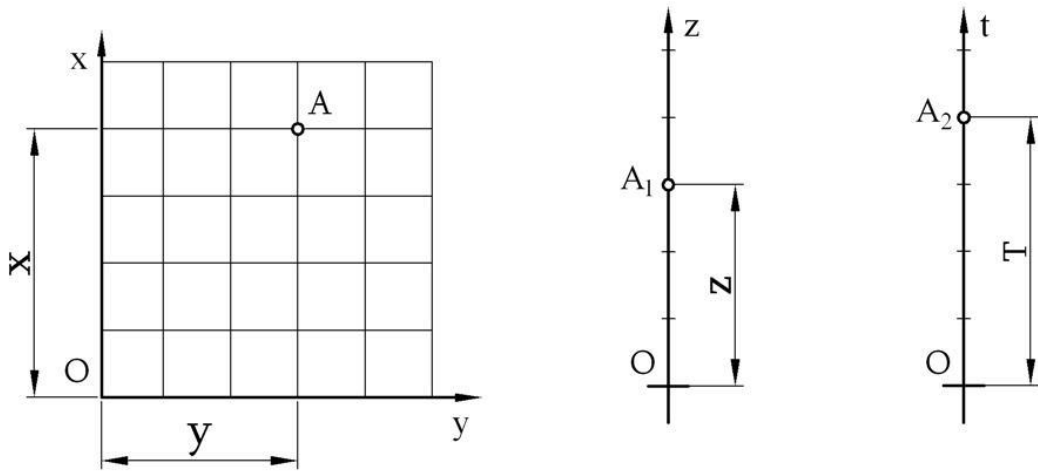
სიბრტყის წერტილები კოორდინირებულია დეკარტეს Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ამ სისტემას შემდეგ მიბმული აქვს კიდევ ორი ღერძი z და t , შედეგად მიიღება დეკარტეს სისტემა $Oxyzt$, რომლის მიმართაც კოორდინირებულია R_4 სივრცის წერტილები (სურ.18). თუ ამ სისტემას მივუსადაგებთ მალივი ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს, მივიღებთ R_4 სივრცის კომპლექსური ნახაზის აგების ახალ გზას: მივაკუთვნოთ



სურ. 18

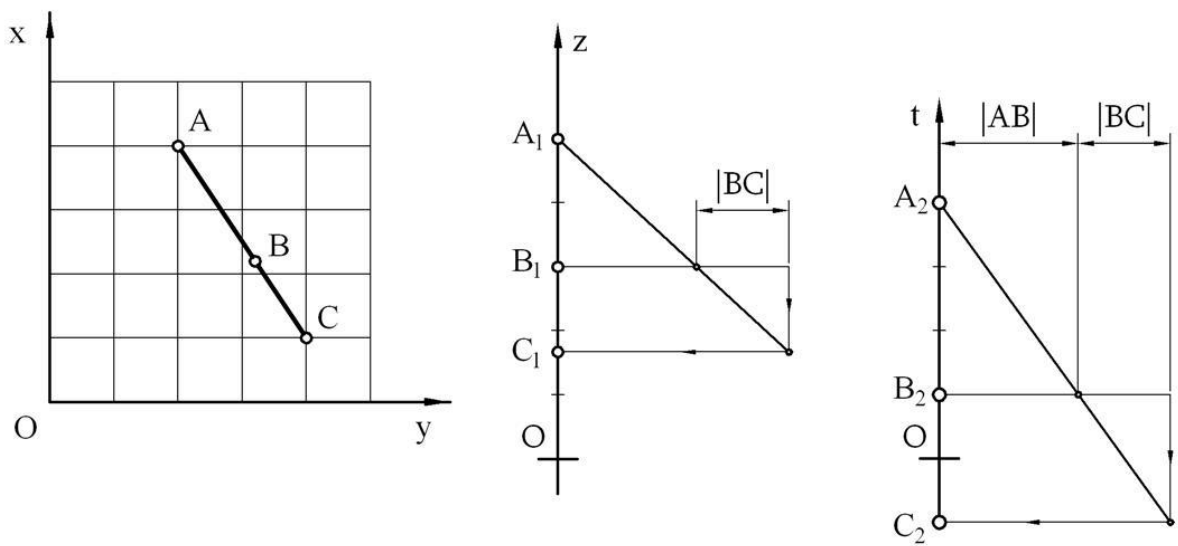
A_0 წერტილი $Oxyz$ სისტემას, რომლის XOY საკოორდინატო სიბრტყე ემთხვევა Π სიბრტყეს. დავუშვათ, რომ მოცემულ A_0 წერტილზე გადის ჰიპერსიბრტყე, რომელიც პარალელურია $\Pi = xOy$ სიბრტყისა. ეს ჰიპერსიბრტყე z და t ღერძებთან გადაიკვეთება და მოცემულ A_0 წერტილისათვის განსაზღვრავს Z და T მაღლივ ნიშნულებს.

ამრიგად, R_4 სივრცის ნებისმიერი წერტილი განსაზღვრული იქნება ოთხი კოორდინატით — X, Y, Z და T . მოცემული მოდელის კომპლექსური ნახა-ზის მისაღებად z და t ღერძები შევუთავსოთ Π სიბრტყეს თავისუფალ ადგილზე (სურ.19). ამ გზით მიღებული კომპლექსური ნახაზი შექცევადია, რადგან ერთ-ერთი გეგმილი, მაგ. A , როგორც xOy სიბრტყის კუთვნილი, განისაზღვრება ორი კოორდინატით (x და y), ხოლო დანარჩენი ორი გეგმილი A_1 და A_2 , როგორც წრფეზე მდებარე წერტილები განისაზღვრება ერთი პარამეტრით (შესაბამისად Z და T). მართლაც, წერტილთა ყოველ AA_1A_2 სამეულს R_4 სივრცეში შეესაბამება ერთადერთი A_0 წერტილი. [5][6]

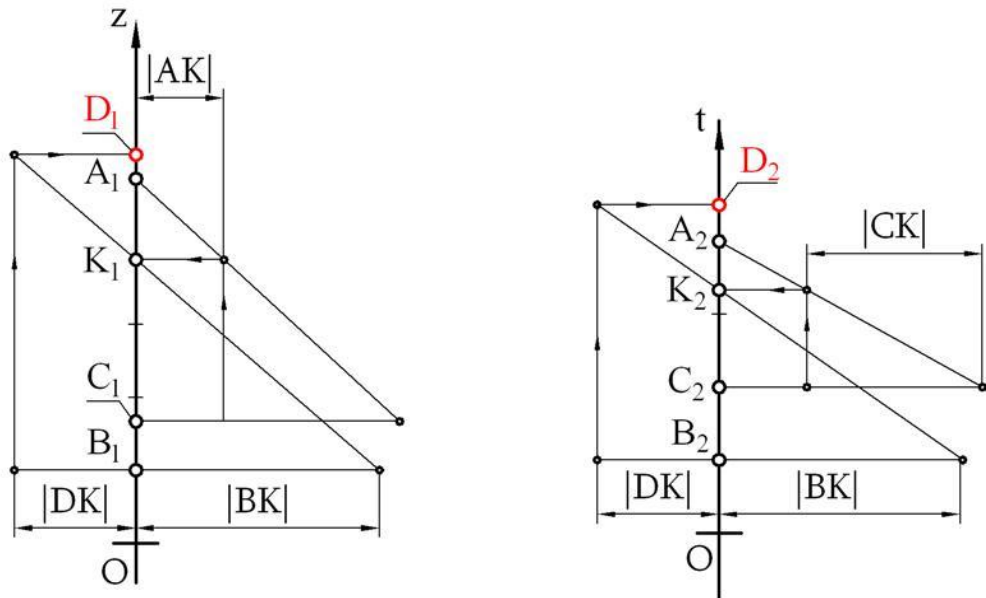
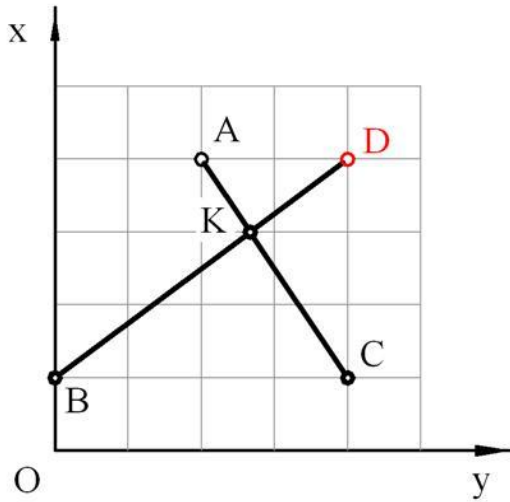


სურ. 19

როგორც ცნობილია, წრფე R_4 სივრცეში, ისევე როგორც R_3 სივრცეში, განისაზღვრება ორი წერტილით (მაგალითად, A_0 და B_0). A წრფის კუთვნილი ნებისმიერი C_0 წერტილი ცალსახად განისაზღვრება მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით (სურ.20).



სურ. 20

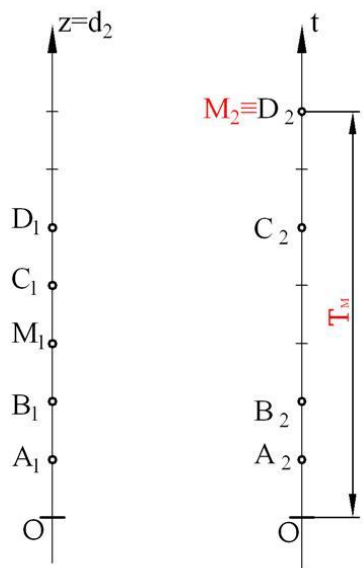
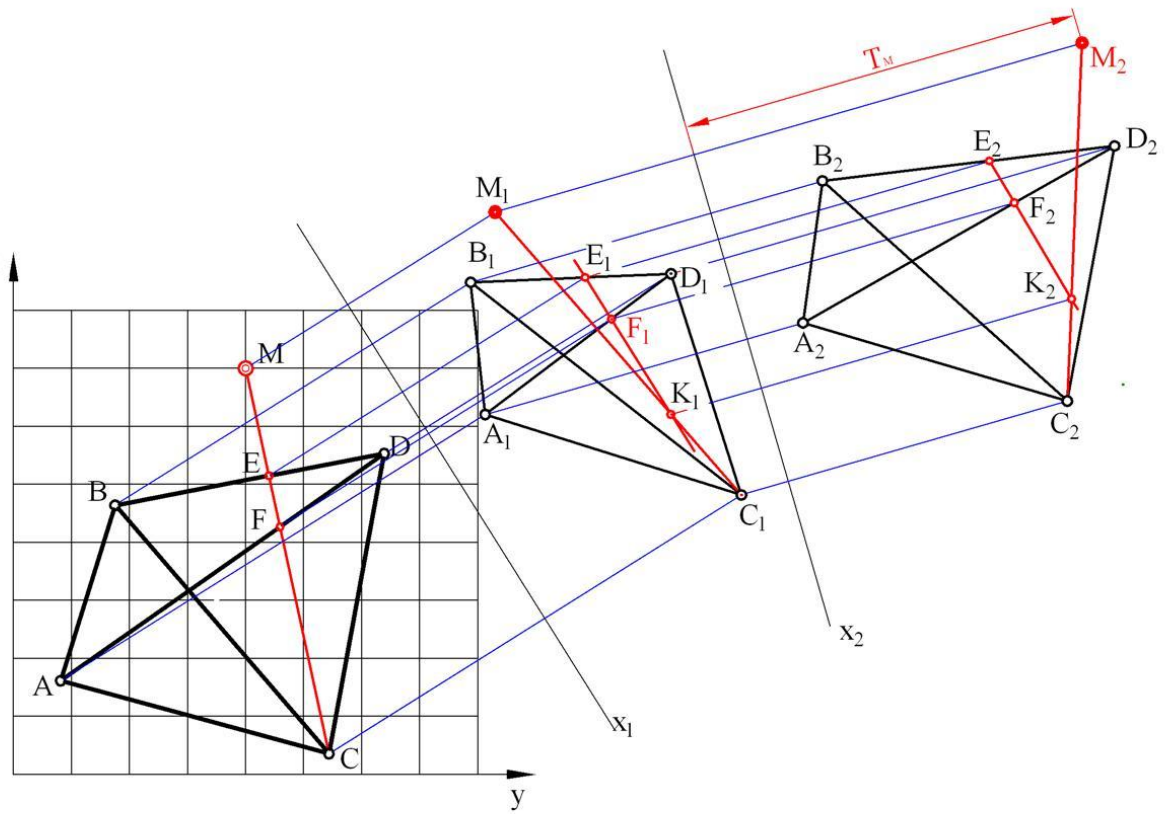


სურ. 21

სიბრტყე R_4 სივრცეში განისაზღვრება სამი წერტილით – მაგ., $\alpha(A_0B_0C_0)$ სიბრტყის კუთვნილი ნებისმიერი D_0 წერტილი შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად: A წერტილი შევაერთოთ B წერტილთან, ხოლო C წერტილი – D წერტილთან. მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით განისაზღვრება ჯერ K_0 წერტილი, შემდეგ D_0 წერტილი(სურ.21).

ახლა ავაგოთ ჰიპერსიბრტყის კომპლექსური ნახაზი (სურ.22). R_4 სივრცეში ჰიპერსიბრტყე განისაზღვრება ოთხი წერტილით – მაგ., $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$.

ჰიპერსიბრტყის ნებისმიერი M_0 წერტილის განსაზღვრისათვის საჭიროა მოცემული იყოს ამ წერტილი სამი კოორდინატი. მეოთხე (მაგ. T) კოორდინატი



სურ. 22

შიდლება განისაზღვროს მონჟის ეპიურის ანალოგის საშუალებით მრავალგანზომილებიანი სივრცისათვის. ამ ამოცანის გადაწყვეტისას გამოყენებულია ზოგადი მდებარეობის სიბრტყის გადაკვეთა მაგეგმილებელ ჰიპერსიბრტყესთან (იხ. ამოცანა№1). [10][11]

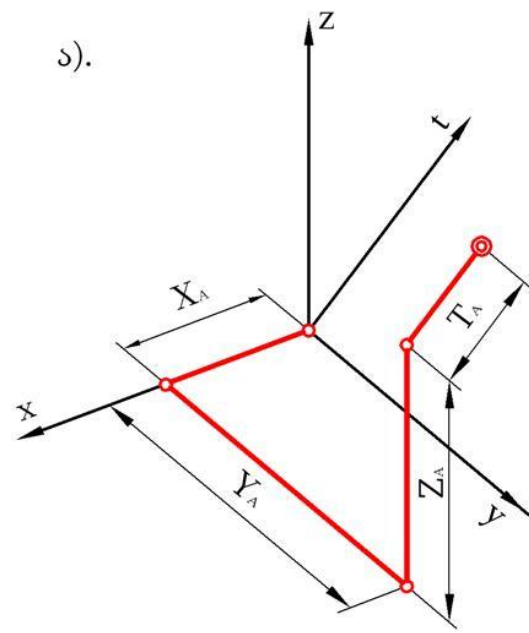
2.2.3. მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი სივრცისათვის (მეორე ვარიანტი)

1. გეომეტრიული დასაბუთება. განვიხილოთ ევკლიდეს R_4 სივრცის ასახვა სიბრტყეზე, რაც მიგვიყვანს ისეთ კომპლექსურ ნახაზამდე, რომლის კომპონენტებია R_3 სივრცის გრაფიკულ-ციფრული მოდელი და მეოთხე განზომილების მალლივი ნიშნულების ღერძი.

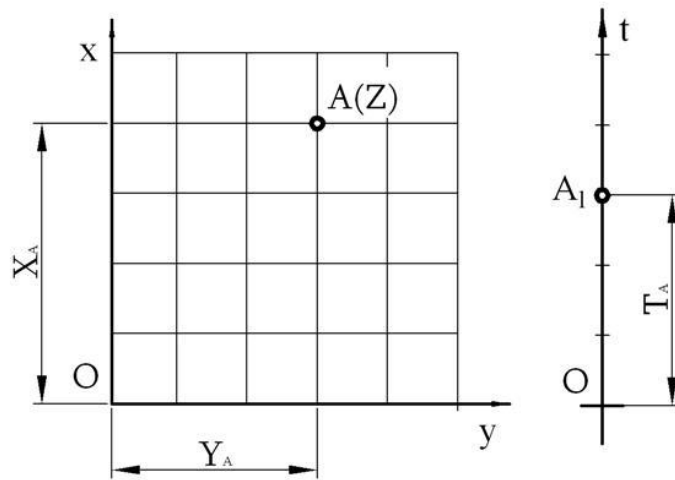
ნაშრომის ამ ნაწილში ჩვენი მიზანია რიცხვით ნიშნულებიანი გეგმილების კლასიკური მეთოდისა და მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის ერთობლივი გამოყენებით აიგოს ევკლიდეს R_4 სივრცის სიბრტყეზე ასახვის ახალი მოდელი.

ვთქვათ, დეკარტეს $Oxyz$ მართკუთხა კოორდინატა სისტემას კოორდინატა O სათავეზე მიბმული აქვს კიდევ ორი ღერძი z და t , რომლებიც სრულიად პერპენდიკულარულია Oxy სიბრტყისა. შედეგად მივიღებთ $Oxyzt$ დეკარტეს სისტემას, რომლის მიმართაც კოორდინირებულია ევკლიდეს R_4 სივრცის წერტილები. თუ Oxy სისტემას ერთდროულად დავუკავშირებთ რიცხვით ნიშნულებიანი გეგმილების და მალლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდს, მივიღებთ ევკლიდეს R_4 სივრცის კომპლექსური ნახაზის აგების ახალ გზას.

A_0 წერტილი მივაკუთვნოთ $Oxyzt$ დეკარტეს სისტემას, რომლის ერთი საკოორდინატო სიბრტყე (მაგ. Oxy) შეთავსებულია Π სიბრტყესთან. დავუშვათ, რომ მოცემულ A_0 წერტილზე გადის ჰიპერსიბრტყე სრულიად პარალელური $\Pi = Oxy$ სიბრტყისა. ეს ჰიპერსიბრტყე გადაიკვეთება z და t ღერძებთან და მოცემული A_0 წერტილისათვის გვამღებს Z და T მალლივ ნიშნულებს (სურ.23ა).



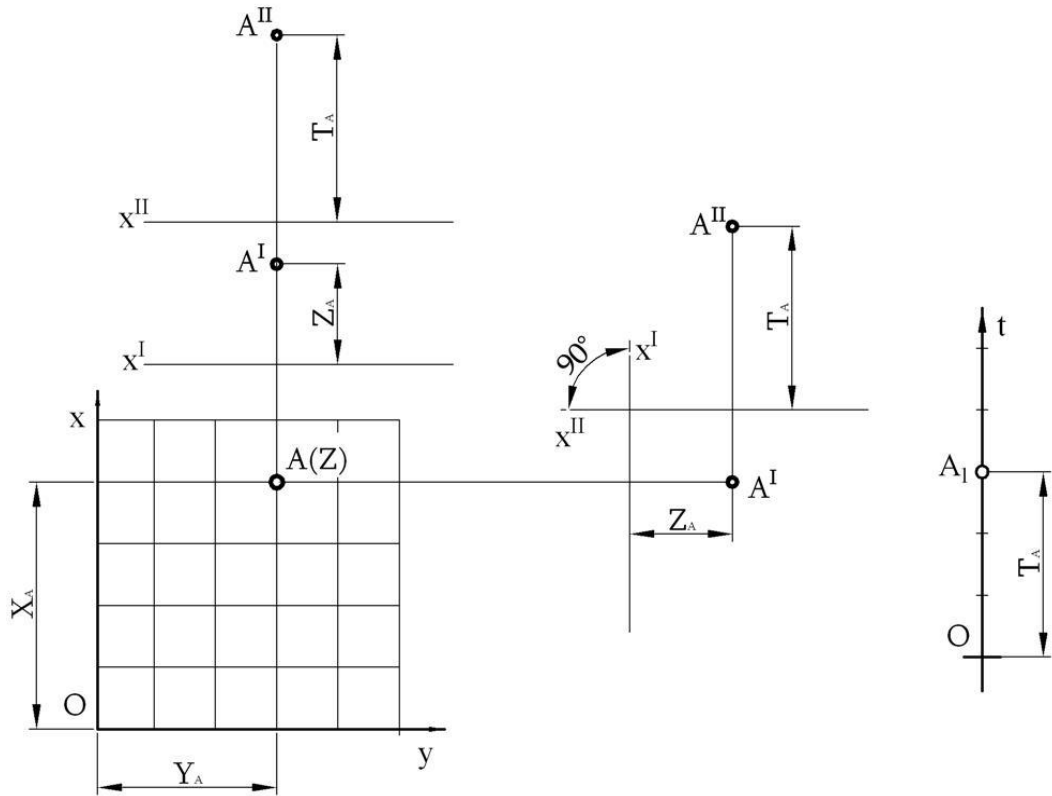
ბ).



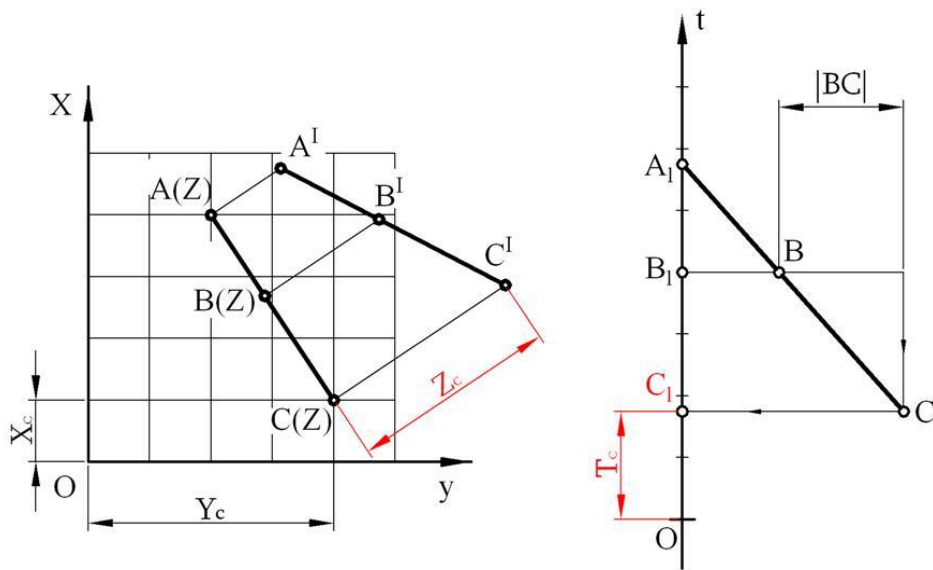
სურ. 23

ამ მოდელის მიხედვით აგებული კომპლექსური ნახაზი შედგება კლასიკური რიცხვითნიშნულეზნიანი გეგმილების მეთდით აგებული ნახაზისა და მალღივნიშნულეზნიანი წრფისაგან (სურ.23ბ). ცნობიღია, რომ ამ გზით აგებული ნახაზი შექცევაღია, რადგან R_4 სივრცის კუთვნიღი A_0 წერტიღის განმსაზღვრელი ოთხივე კომპონენტი X, Y, Z და T მოცემულია.[9][10][11]

2. ზოგიერთი პოზიციური ამოცანის ამოხსნა. 24-ე სურათზე მოცემულია A_0 წერტილი ორი კომპონენტით — $A(Z)$ და A_1 , ნაჩვენებია აგრეთვე გრაფიკულ მოდელზე გადასვლის ორი ვარიანტი.

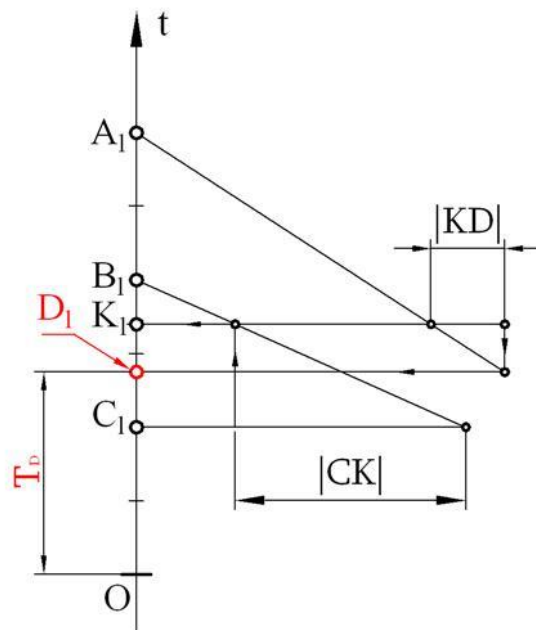
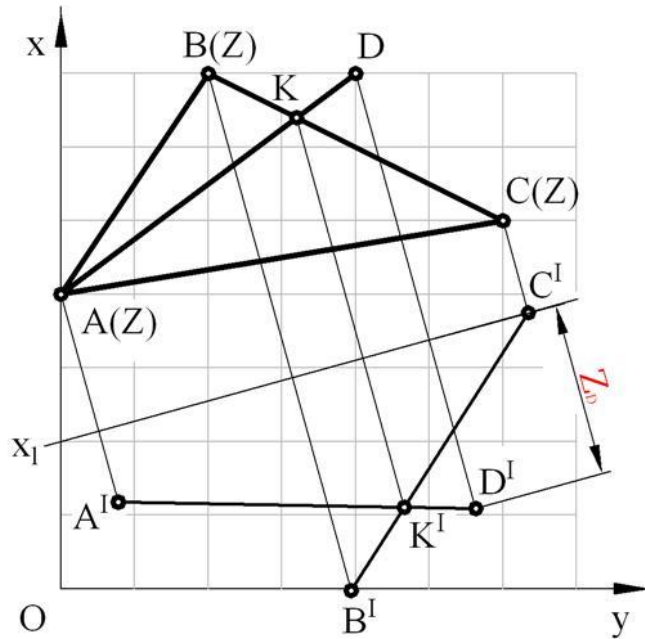


სურ. 24



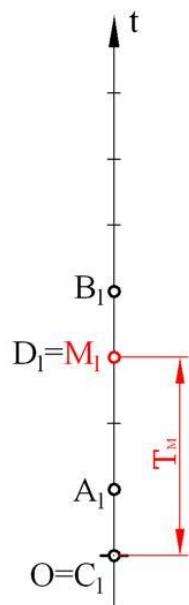
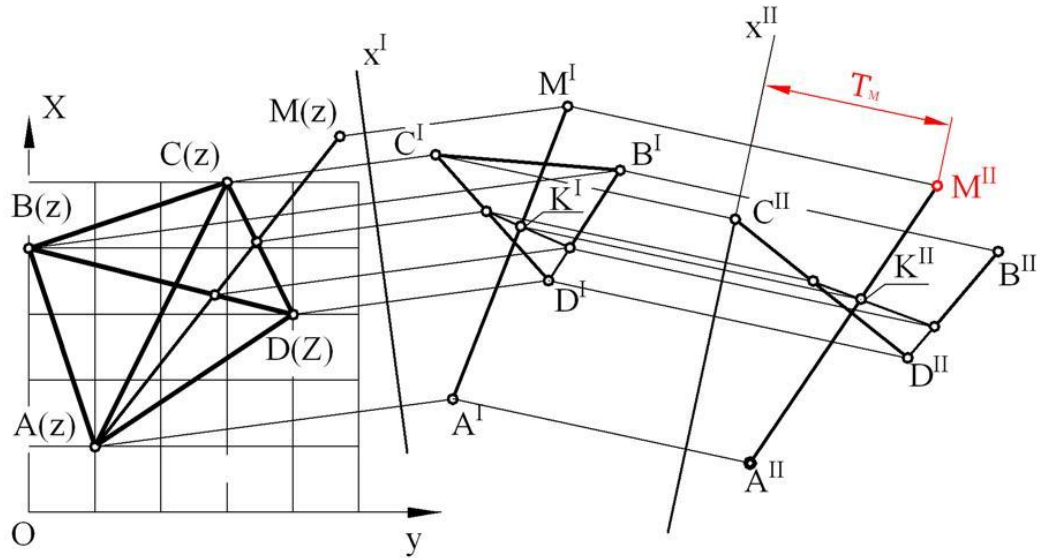
სურ. 25

როდესაც დამხმარე x_1 და x_2 ღერძები არ არის პარალელური ვლებულობით მონჟის მეთოდის ანალოგს მრავალგანზომილებიანი სივრცისათვის. იმ შემთხვევაში როდესაც $x_1 \parallel x_2$ გვეყენება რადიშჩევის ეპიურის სქემა. გრაფიკულ მოდელზე ასეთი გადასვლები ძალზე მოსახერხებელია პრაქტიკული მიზნებიდან გამომდინარე.



სურ. 26

25-ე სურათზე ნაჩვენებია მოცემული (A_0B_0) წრფის ინციდენტური C_0 წერტილის აგება, ხოლო 26-ე სურათზე — მოცემული $\alpha(A_0B_0C_0)$ სიბრტყის კუთვნილი D_0 წერტილის აგება.



სურ. 27

ვაჩვენოთ როგორ განისაზღვრება ჰიპერსიბრტყე კომპლექსურ ნახაზზე (სურ.27). R_4 სივრცეში ჰიპერსიბრტყე განისაზღვრება ოთხი წერტილით (მაგ. $A_0B_0C_0D_0$). ამ ჰიპერსიბრტყის კუთვნილი ნებისმიერი M_0 წერტილის განსა-

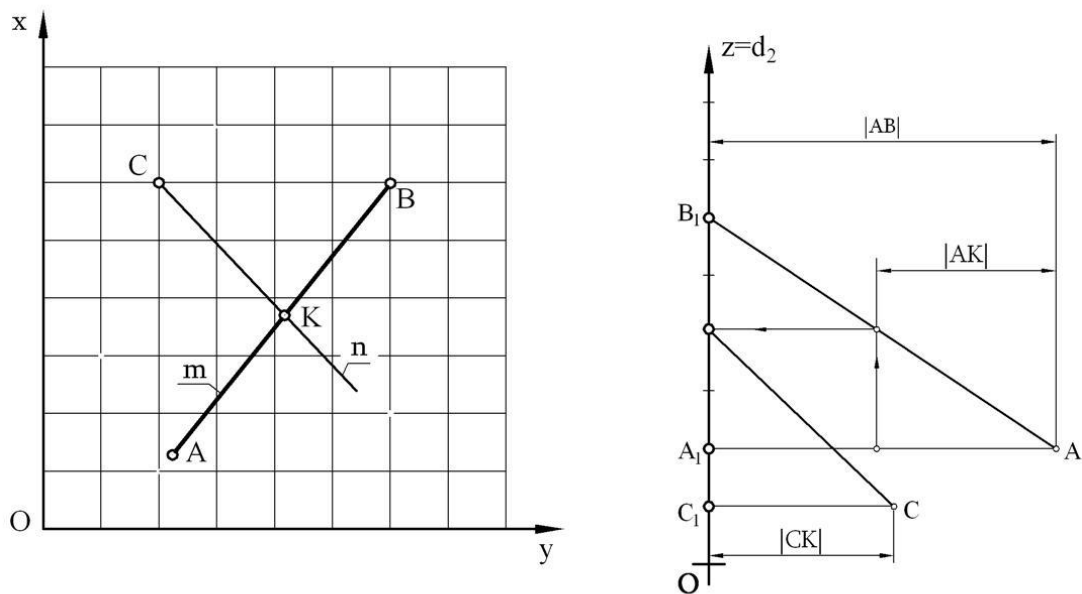
ზღვრისათვის საჭიროა ეს წერტილი მოცემული იყოს მინიმუმ სამი კოორდინატით. მეოთხე კოორდინატის (მაგ. T) განსაზღვრა შიძლება მონჟის ეპიურის ანალოგის მიხედვით მრავალგანზომილებიანი სივრცისათვის. ამოცანის ამოხსნის დროს წარმოქმნილი ყველა ინციდენცია ნათლად ჩანს ნახაზზე.[9][10]

2.3 მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება

2.3.1. პოზიციური ამოცანების ამოხსნა სამგანზომილებიან სივრცეში

განვიხილოთ მხაზველობითი გეომეტრიის ზოგიერთი პოზიციური ამოცანის ამოხსნა მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენებით:

ამოცანა 1 მოცემულია ზოგადი მდებარეობის წრფე მისი ორი წერტილით $m_0 (A_0B_0)$. მოცემულ C_0 წერტილზე ავაგოთ მოცემული m_0 წრფის მკვეთი n_0 წრფე(სურ.28). C_0 წერტილზე გადის m_0 წრფის მკვეთი ∞^1 წრფე. ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე ავაგოთ $n \in C$, რომელიმე n_0 წრფის გეგმილი. $K = m \cap n$ წერტილი არის m_0 და n_0 წრფეების გადაკვეთის K_0 წერტილის გეგმილი ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე, ხოლო K_1 მაღლივი ნიშნული განისაზღვრება მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით. [12][13]

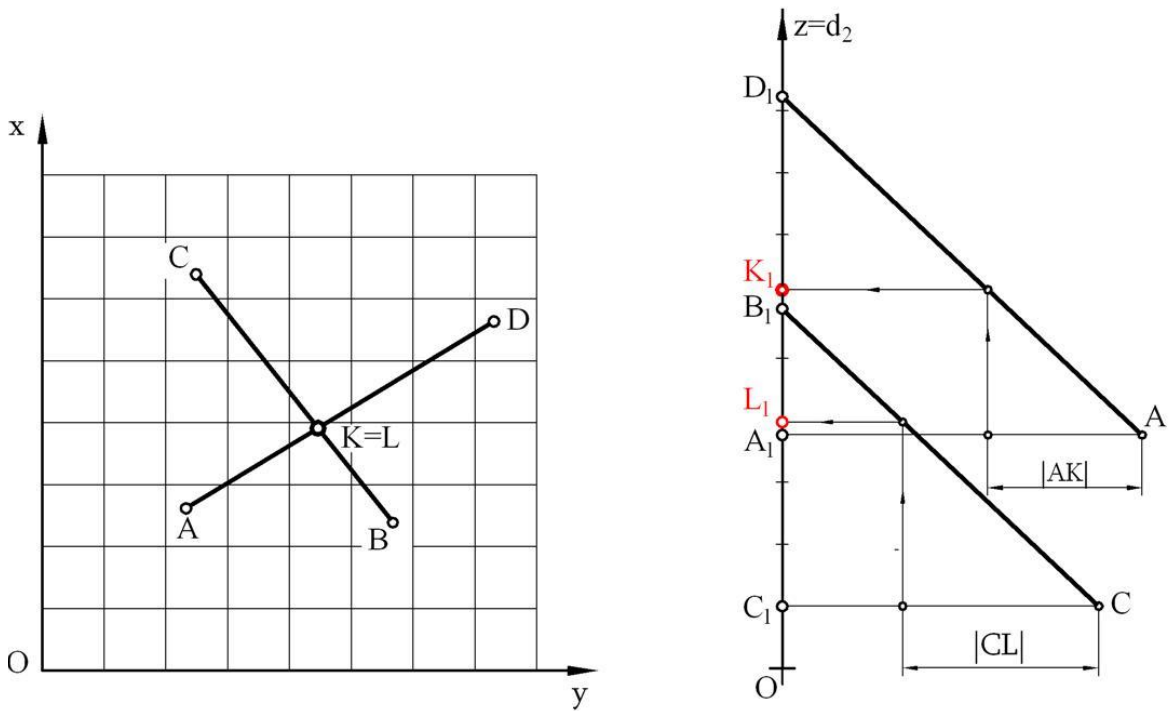


სურ. 28

ამოცანა 2.

მოცემულია ორი $a_0(A_0D_0)$ და $b_0(C_0B_0)$ წრფე. გამოვარკვიოთ მათი ურთიერთმდებარეობა (სურ. 29).

ეს წრფეები სივრცეში შეიძლება იყოს გადაკვეთილი ან აცდენილი. a და b გეგმილების გადაკვეთის წერტილი მივაკუთვნოთ ჯერ $a_0(A_0D_0)$ წრფეს და მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით განვსაზღვროთ მისი მაღლივი ნიშნული K_1 . შემდეგ იგივე წერტილი მივაკუთვნოთ $b_0(C_0B_0)$ წრფეს და განვსაზღვროთ მისი მაღლივი ნიშნული L_1 . როგორც ვხედავთ $T_1 \neq K_1$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $a_0(A_0D_0)$ და $b_0(C_0B_0)$ წრფეების a და b გეგმილების გადაკვეთის წერტილში შეთავსებულია ორი — K_0 და T_0 წერტილის გეგმილი. ე.ი. მოცემული $a_0(A_0D_0)$ და $b_0(C_0B_0)$ წრფეები აცდენილი წრფეებია.[12][14][15]

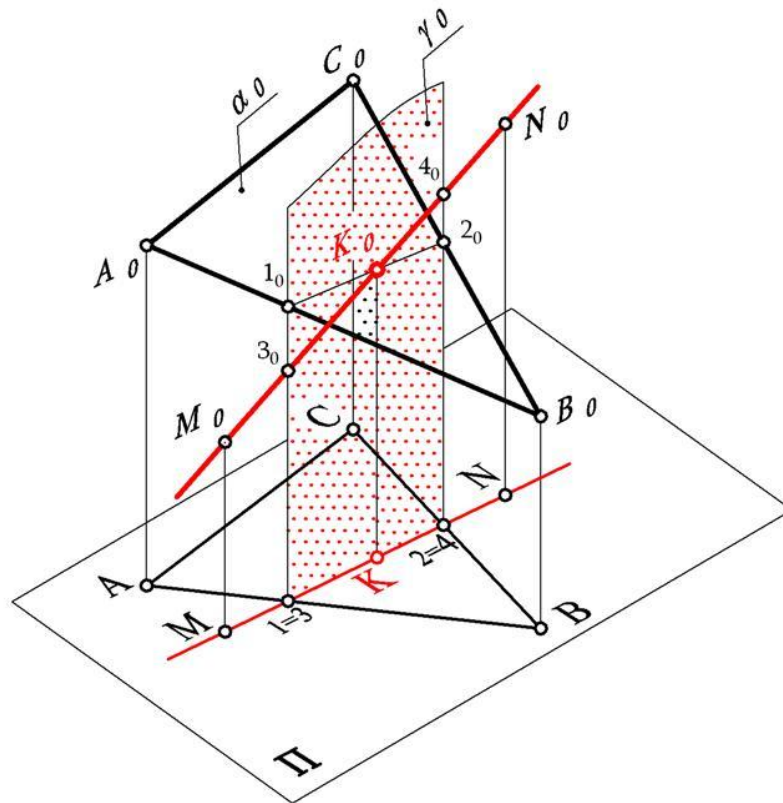


სურ. 29

ამოცანა 3.

მოცემულია ზოგადი მდებარეობის $\alpha_0(\text{A}_0\text{B}_0\text{C}_0)$ სიბრტყე და წრფე $t_0(\text{M}_0\text{N}_0)$. ვიპოვოთ წრფისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი (სურ.11).

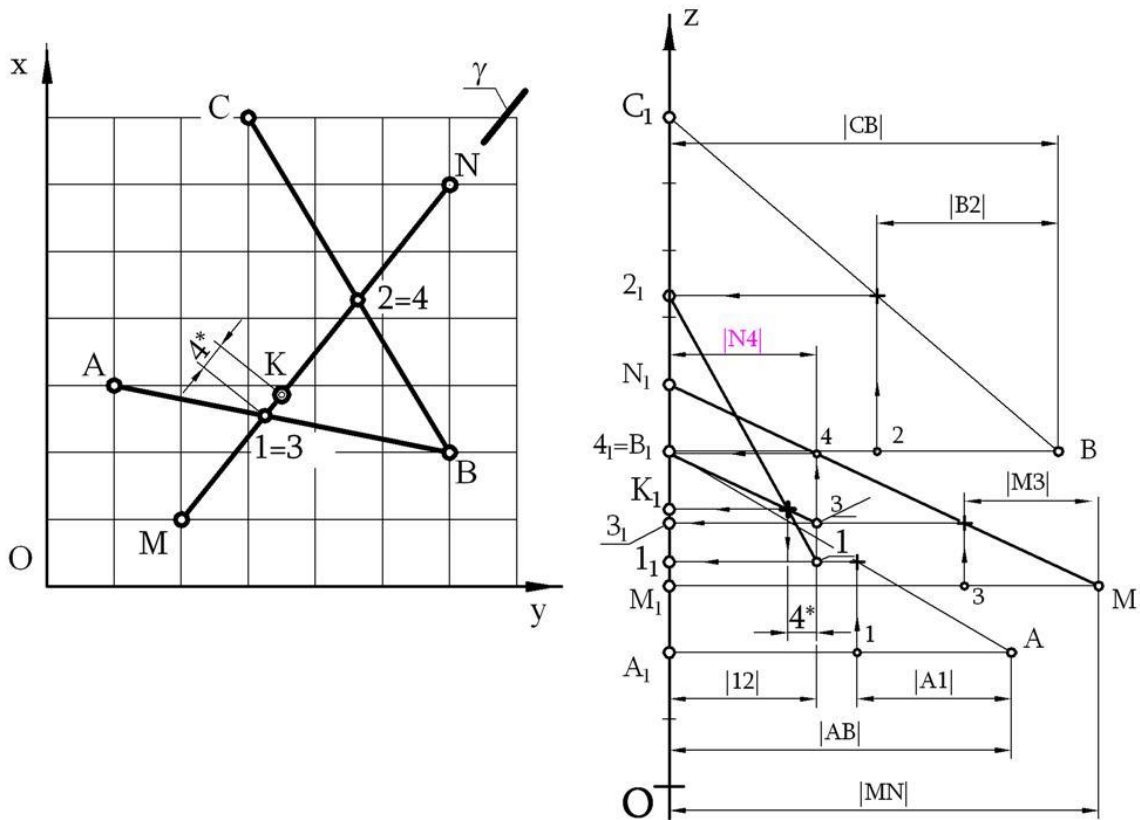
30-ე სურათზე ნაჩვენებია ამ ამოცანის გადაწყვეტის სტერეომეტრიული სქემა. $\alpha_0(\text{M}_0\text{N}_0)$ წრფეს Π_{12} სიბრტყეზე აგეგმილებს Π_{12} მართობული γ_0 სიბრტყე. γ_0 სიბრტყე $\alpha_0(\text{A}_0\text{B}_0\text{C}_0)$ სიბრტყეს გადაკვეთს $n_0(1_02_0)$ წრფეზე. $\alpha_0(\text{M}_0\text{N}_0)$ და $n_0(1_02_0)$ წრფეების $l(\text{MN})$ და $n(12)$ გეგმილები Π_{12} სიბრტყეზე იქნება შეთავსებული. მოცემული $\alpha_0(\text{M}_0\text{N}_0)$ და $n_0(1_02_0)$ წრფეების თანაკვეთის K_0 წერტილი საძიებელი წერტილია. K_0 წერტილი განისაზღვრება მისი K გეგმილით ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე და K_1 მაღლივი ნიშნულით $z=d_1$ მაღლივი ნიშნულების წრფეზე.



სურ. 30

K_1 მაღლივი ნიშნულის გასაგებად $z=d_1$ მაღლივი ნიშნულების წრფეზე ავაგოთ „დამხმარე მართკუთხა სამკუთხედები“ 1_0 და 2_0 წერტილებით განსაზღვრული წრფის მონაკვეთისათვის და 3_0 და 4_0 წერტილებით

განსაზღვრული წრფის მონაკვეთებისათვის ($3_0 \in l_0$ და $4_0 \in l_0$). ამ სამკუთხედების



სურ. 31

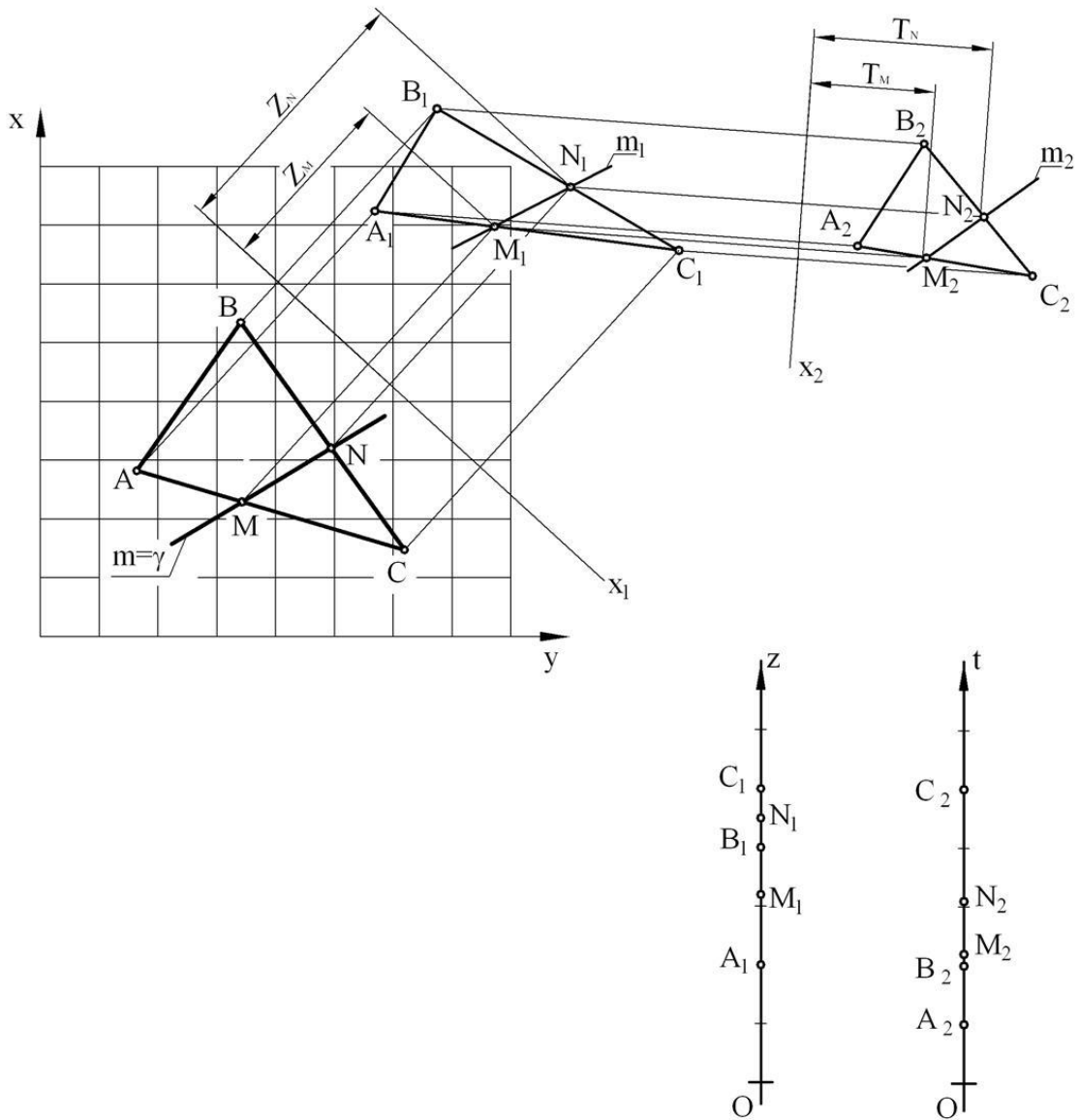
ჰიპოტენუზების გადაკვეთის წერტილის მაღლივი ნიშნული საძიებელი K_0 წერტილის მაღლივი ნიშნულია, ხოლო ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე K წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით (სურ.31).

2.3.2 კოზიციური ამოცანების ამოხსნა ოთხგანზომილებიან სივრცეში

ამოცანა 1. მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე $\alpha(A_0B_0C_0)$ და მაგეგმილებელი ჰიპერსიბრტყე γ_0 . ავაგოთ მათი თანაკვეთის m_0 წრფე (სურ.32).

რადგან γ_0 ჰიპერსიბრტყე მაგეგმილებელია, ცნობილია საძიებელი m_0 წრფის ერთი გეგმილი $m \in \gamma$. (დანარჩენი ორი გეგმილი m_1 და m_2 აიგება $m_0 \in A_0B_0C_0$ კუთვნილებიდან გამომდინარე,) m_0 წრფე $A_0B_0C_0$ სამკუთხედის

გვერდებს გადაკვეთს M_0 და N_0 წერტილებში. ამ წერტილების M და N გეგმილები უშუალოდ ნახაზიდანაა ცნობილი:



სურ. 32

$$M = m \cap AB \quad \text{და} \quad N = m \cap BC$$

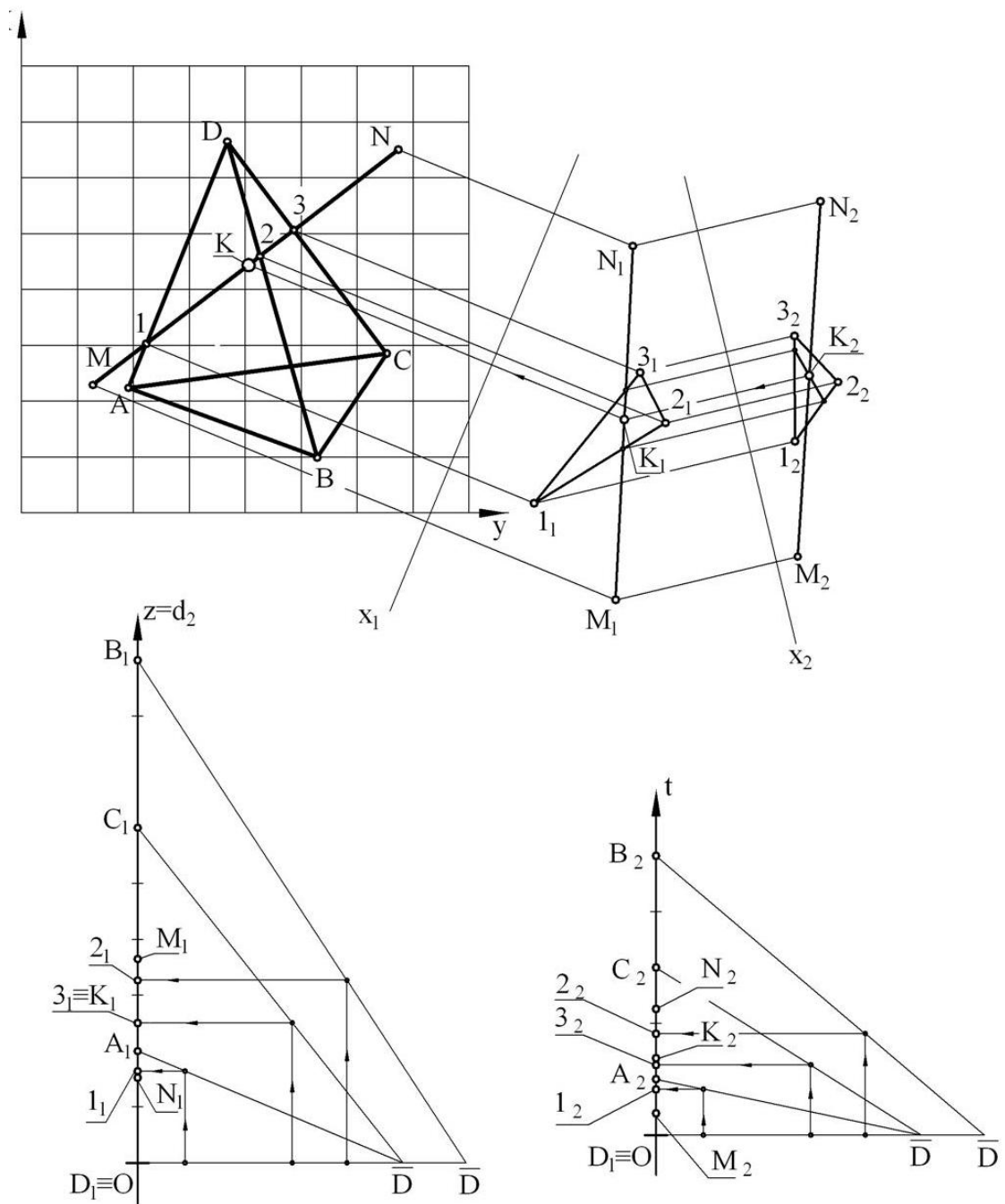
M_0 და N_0 წერტილების დანარჩენი გეგმილები მოიძებნება მონუსის ანალოგის საშუალებით მრავალგანზომილებიანი სივრცისათვის. კერძოდ:

$$M_1 \in A_1B_1; \quad N_1 \in B_1C_1; \quad M_2 \in A_2B_2; \quad N_2 \in B_2C_2$$

მანძილი M_1 წერტილიდან x_1 ღერძამდე ტოლია M_0 წერტილის მაღლივი ნიშნულისა z ღერძის მიმართ, ხოლო მანძილი M_2 წერტილიდან x_2 ღერძამდე – მაღლივი ნიშნულისა t ღერძის მიმართ. გადავიტანოთ ეს მანძილები z და t

დერძებზე. ანალოგიურად განისაზღვრება N_0 წერტილის მაღლივი ნიშნულები. ამრიგად, საძიებელი წრფე სრულადაა განსაზღვრული მისი გეგმილით ძირითად გეგმაზე, რომელიც შევსებულია ორი მაღლივი ნიშნულით მაღლივი ნიშნულების z და t დერძებზე.[9][10][11]

ამოცანა 2. მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე მოცემულია ზოგადი მგებარეობის $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ ჰიპერსიბრტყე და $m(M_0N_0)$ წრფე (სურ.33). განვსაზღვროთ მათი თანაკვეთის K_0 წერტილი.



სურ. 33

$M(MoNo)$ წრფეს შევუთავსოთ დამხმარე მაგეგმილებელი γ ჰიპერსიბრტყე. γ ჰიპერსიბრტყე მოცემულ $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ ჰიპერსიბრტყესთან იკვეთება $\delta(E_0F_0G_0)$ სიბრტყეზე. $m(MoNo)$ წრფე და $\delta(E_0F_0G_0)$ სიბრტყე ერთ მაგეგმილებელ γ ჰიპერსიბრტყეში მდებარეობს, მათი თანაკვეთის K_0 წერტილი საძიებელი წერტილია. [9][10]

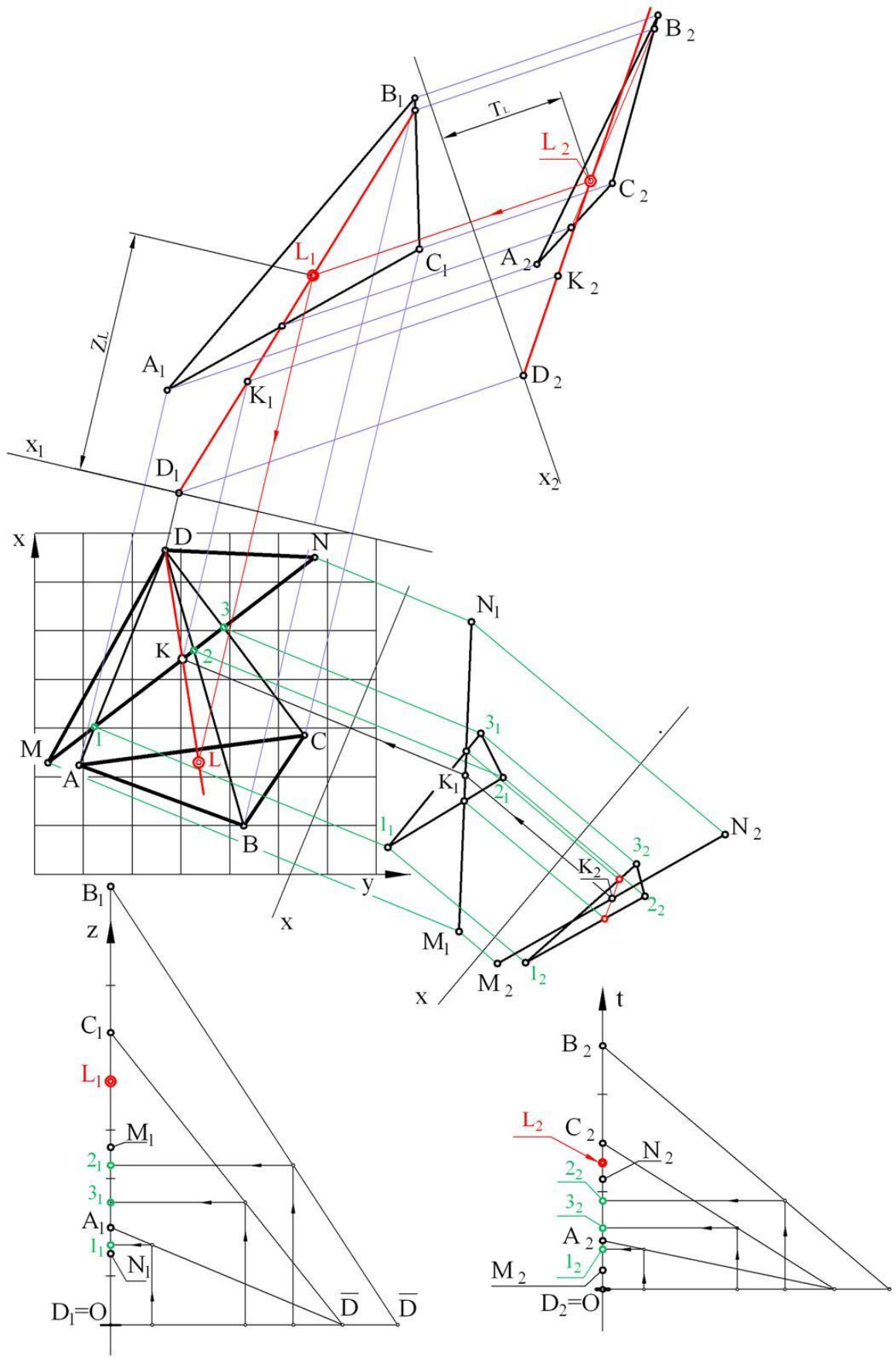
ამოცანა 3. მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე მოცემულია R_4 სივრცის კუთვნილი ორი $\alpha(A_0B_0C_0)$ და $\beta(D_0M_0N_0)$ ზოგადი მდებარეობის სიბრტყე (სურ.34). განვსაზღვროთ მათი თანაკვეთის წერტილი – $L_0 = \alpha(A_0B_0C_0) \cap \beta(D_0M_0N_0)$.

მოცემული ექვსი წერტილიდან ოთხი (მაგ. $A_0B_0C_0D_0$) წერტილი ჰიპერსიბრტყეს განსაზღვრავს. ვიპოვოთ წერტილი $K_0 = (A_0B_0C_0D_0) \cap (M_0N_0)$. შევაერთოთ K_0 წერტილი D_0 წერტილთან. (K_0D_0) წრფე და $\alpha(A_0B_0C_0)$ სიბრტყე ერთ $(A_0B_0C_0D_0)$ ჰიპერსიბრტყეს ეკუთვნის, ამიტომ მათი თანაკვეთის L_0 წერტილი მარტივად განისაზღვრება. L_0 წერტილი ეკუთვნის როგორც $\beta(D_0M_0N_0)$ სიბრტყის კუთვნილ (K_0D_0) წრფეს, ასევე $\alpha(A_0B_0C_0)$ სიბრტყეს. ე.ი. L_0 წერტილი საძიებელი წერტილია. [9][10]

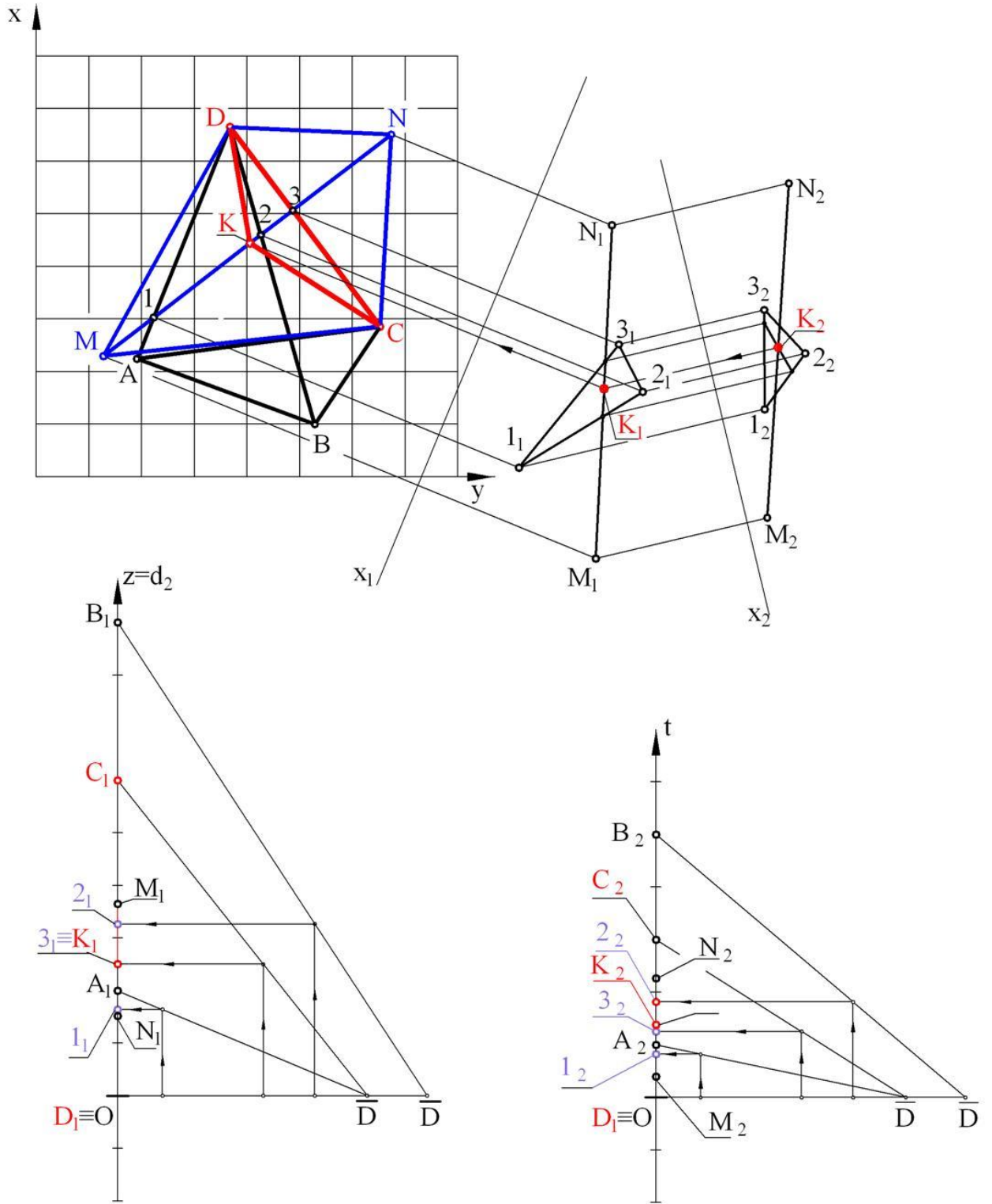
ამოცანა 4. მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე მოცემულია R_4 სივრცის კუთვნილი ორი საერთო წერტილის მქონე ორი ჰიპერსიბრტყე: $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ და $\beta(C_0D_0M_0N_0)$. ავაგოთ მათი საერთო სიბრტყე(სურ.35).

ამ შემთხვევაში ჰიპერსიბრტყეებს აქვთ ორი (D_0 და C_0) საერთო წერტილი. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისია ვიპოვოთ მესამე საერთო K_0 წერტილი. ჰიპერსიბრტყის მოცემული ოთხი წერტილიდან გამოვყოთ ორი წერტილი (მაგალითად M_0 და N_0) და განვსაზღვროთ წერტილი $K_0 = \alpha(A_0B_0C_0D_0) \cap (M_0N_0)$. მოცემული α და β ჰიპერსიბრტყეების საერთო სიბრტყე განისაზღვრება K_0 , D_0 და C_0 წერტილებით.

განხილული მოდელი საშუალებას იძლევა გავათავისუფლოთ ძირითადი გეგმა დამხმარე აგებულებისაგან, რაც ძალიან მნიშვნელოვანია გრაფიკული ამოცანების ამოხსნის დროს, განსაკუთრებით კი სამთო გეომეტრიისა და სამარკუშიდერო საქმის ამოცანებისათვის.[9][10]



სურ. 34



სურ. 35

ამოცანა 5.

მოცემულია რომელიმე R_4 სივრცის კუთვნილი ორი $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ და $\beta(E_0F_0G_0H_0)$ ჰიპერსიბრტყე. ავაგოთ მათი თანაკვეთის სიბრტყე. (სურ.36).

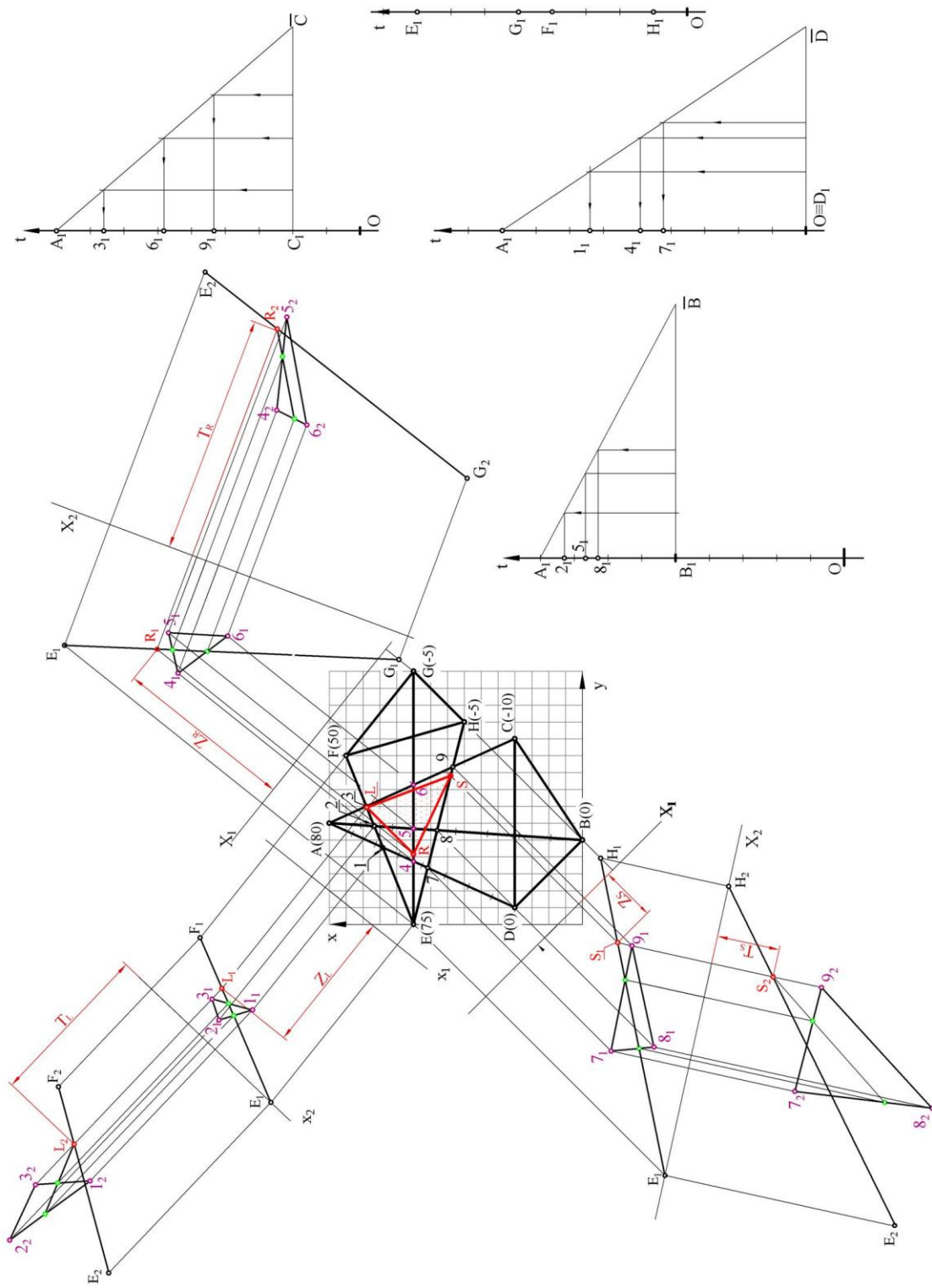
ერთერთი ჰიპერსიბრტყის, მაგ. $\beta(E_0F_0G_0H_0)$, ოთხი მოცემული წერტილიდან გამოვყოთ ორი E_0 და F_0 წერტილი. ვიპოვოთ $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ ჰიპერსიბრტყისა და (E_0F_0) წრფის თანაკვეთის S_0 წერტილი. ამისათვის (E_0F_0) წრფეს შევუთავსოთ დამხმარე მაგეგმილებელი γ_0 ჰიპერსიბრტყე. γ_0 ჰიპერსიბრტყე $\alpha(A_0B_0C_0D_0)$ ჰიპერსიბრტყესთან იკვეთება $1_02_03_0$ წერტილებით განსაზღვრულ სიბრტყეზე. (E_0F_0) წრფე და $1_02_03_0$ წერტილებით განსაზღვრულ სიბრტყე ერთ მაგეგმილებელ ჰიპერსიბრტყეს ეკუთვნის და მათი თანაკვეთის S_0 წერტილი საძიებელი წერტილია. ანალოგიურად მოიძებნება მოცემული ორი ჰიპერსიბრტყის საერთო სიბრტყის კუთვნილი დანარჩენი ორი R_0 და L_0 წერტილი.

S_0 , R_0 და L_0 წერტილების მოსაძებნად საჭირო გახდა კომპლექსური ნახაზის სამჯერ გარდაქმნა. თითოეული გარდაქმნისათვის t ღერძთან დაკავშირებული საჭირო დამხმარე აგებები შესაძლებელია შესრულდეს ცალ-ცალკე, რაც ძალიან მოსახერხებელს ხდის განხილული მოდელის კომპლექსური ნახაზის შესრულებას.

როგორც განხილული მაგალითებიდან ჩანს, მოცემულ მოდელში (მეორე ვარიანტი) ძირითადი პოზიციური ამოცანების ამოხსნა ანალოგიურია პირველი ვარიანტის მოდელებში პოზიციური ამოცანების ამოხსნისა.

საინტერესოა დამხმარე x_1 და x_2 ღერძების ურთიერთგანლაგების კერძო შემთხვევები: მაგ. როდესაც $x_1 \parallel x_2$ ხდება რადიშჩევის ეპიურზე გადასვლა, ხოლო როდესაც $x_1 \perp x_2$ – სხოუტეს ეპიურზე (სურ.24). რადიშჩევისა და სხოუტეს კომპლექსური ნახაზები საკმარისადაა შესწავლილი R_4 სივრცის ძირითადი პოზიციური და მეტრული ამოცანების ამოხსნის თვალსაზრისით.

ამრიგად, თუ გამოსაკვლევი სივრცითი გამოსახულებების სპეციფიკა ისეთია, რომ მათი ასახვა მიზანშეწონილია განხილული სქემის მიხედვით,



სურ. 36

ხოლო მიღებულ ნახაზზე ლოკალური ამოცანების ამოხსნა კი რთულია, გვაქვს საშუალება გადავიდეთ რადიშიკვის ან სკოუტეს ეპიურზე და პირიქით. ამასთან, საჭირო არ არის ნახაზის მთლიანად გარდაქმნა, საკმარისია გარდაიქმნას ნახაზის ჩვენთვის საინტერესო უბანი. ეს საშუალებას გვაძლევს მაქსიმალურად გავათავისუფლოთ ძირითადი გეგმა დამხმარე აგებულებისაგან.[9][10] [11]

2.3.3 საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტული ამოცანების ამოხსნა მალლიენიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენებით

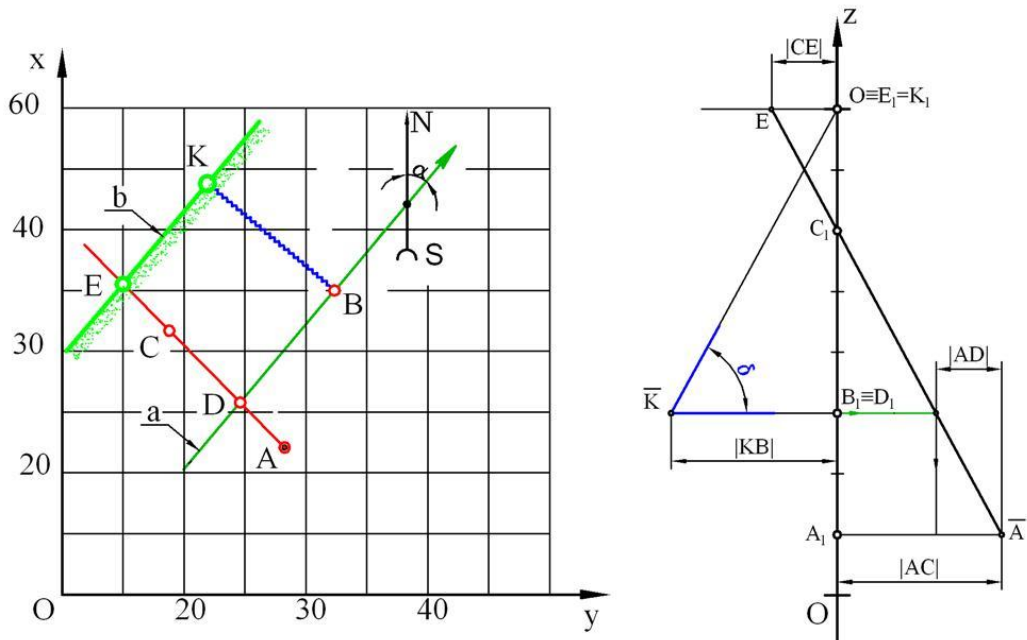
ამოცანა1. განვსაზღვროთ ფენის განვრცობისა და დახრის კუთხე და ფენის დღის ზედაპირზე გამოსვლის წრფე (სურ.37).

ვთქვათ ფენა დაზვერილია სამი ჭაბურღილით: A_0, B_0 და C_0 . ცნობილია, რომ „არამდგრადი“ ჩაწოლის დროს ფენას ყოფენ უბნებად და თითოეულ მათგანს განიხილავენ როგორც სიბრტყეს. მოცემული ფენის მცირე უბანი მივიღოთ სიბრტყედ და განვსაზღვროთ მისი განვრცობა:

A_0B_0 წრფეზე მოვნიშნოთ D_0 წერტილი, რომლის მალლივი ნიშნული ტოლია მოცემული B_0 წერტილის მალლივი ნიშნულისა (გრაფიკული აგებების თანმიმდევრობა ნახაზზე ნაჩვენებია ისრებით). D_0 და B_0 წერტილებზე ავაგოთ $A_0B_0C_0$ სიბრტყის კუთვნილი α ჰორიზონტალი. ფენის განვრცობა აღვნიშნოთ ისრით და იქვე გავზომოთ α განვრცობის კუთხე. ახლა ავაგოთ $A_0B_0C_0$ სიბრტყის უდიდესი დახრილობის წრფე (ნახაზზე სიბრტყის უდიდესი დახრილობის წრფე ნაჩვენებია ლურჯი ფერის ხაზით). ცნობილია, რომ სიბრტყის უდიდესი დახრილობის წრფით იზომება სიბრტყის დახრის კუთხე გეგმილთა სიბრტყესთან. დამხმარე ნახაზზე შეთავსების მეთოდის გამოყენებით გავზომოთ კუთხე δ , რომელიც წარმოადგენს ფენის მოცემული უბნის სიბრტყის დახრის კუთხეს.

A_0B_0 წრფეზე მოვნიშნოთ E_0 წერტილი ნულოვანი ნიშნულით. E_0 წერტილზე აგებული ჰორიზონტალი $b_0||a_0$ არის ფენის დღის ზედაპირზე გამოს-

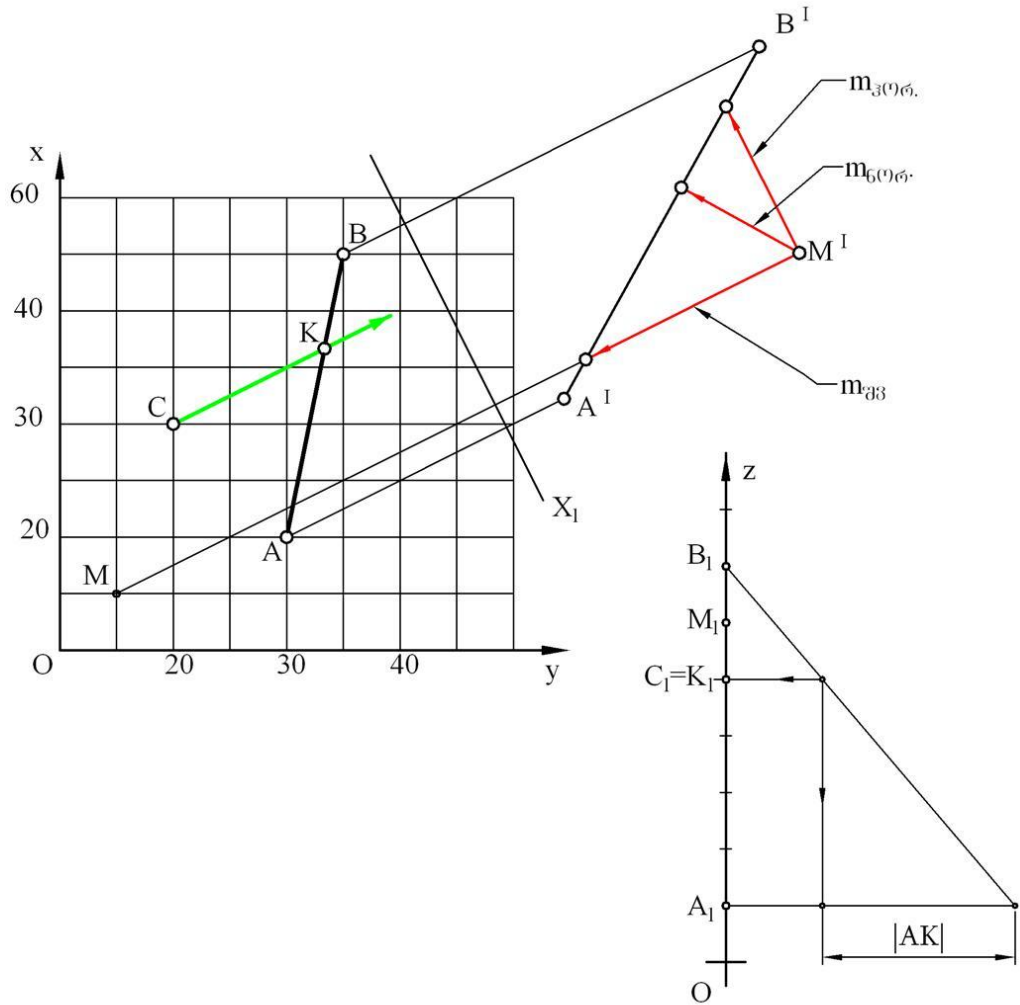
ვლის წრფე (პირობითად, მიწის ზედაპირის ნიშნული ნულის ტოლია), სხვაგვარად რომ ვთქვათ — b_0 არის $A_0B_0C_0$ სიბრტყის გადაკვეთა xoy სიბრტყესთან, ანუ $A_0B_0C_0$ სიბრტყის კვალი. [12][13]



სურ. 37

ამოცანა 2. მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე მოცემულია ფენის საგები გვერდის სამი წერტილი ($A_0B_0C_0$) და სახურავი გვერდის ერთი წერტილი (M_0). საჭიროა M_0 წერტილში განისაზღვროს ფენის შვეული, თარაზული და ნორმალური სიმძლავრე(სურ.38).

ფენის საგები გვერდის $A_0B_0C_0$ მცირე უბანი მივიღოთ სიბრტყედ $\alpha_0(A_0B_0C_0)$ და ავაგოთ მისი ჰორიზონტალები. $\alpha_0(A_0B_0C_0)$ სიბრტყის მართობულად შემოვიტანოთ ახალი გეგმილთა სიბრტყე (Π). ავაგოთ ახალ სისტემაში $\alpha_0(A_0B_0C_0)$ სიბრტყის კვალი α' და M_0 წერტილის M' გეგმილი. M' გეგმილიდან α' კვალზე დაშვებული მართობის სიგრძე ფენის ნორმალური სიმძლავრის ($m_{ნორ.}$) ტოლი იქნება. M' გეგმილზე გავლებული x' ღერძის მართობული და პარალელური წრფის მონაკვეთები, M' გეგმილიდან α' კვალამდე, შესაბამისად ფენის შვეულ ($m_{შვ.}$) და თარაზულ ($m_{თარ.}$) სიმძლავრეებს განსაზღვრავს.[12][13]



სურ. 38

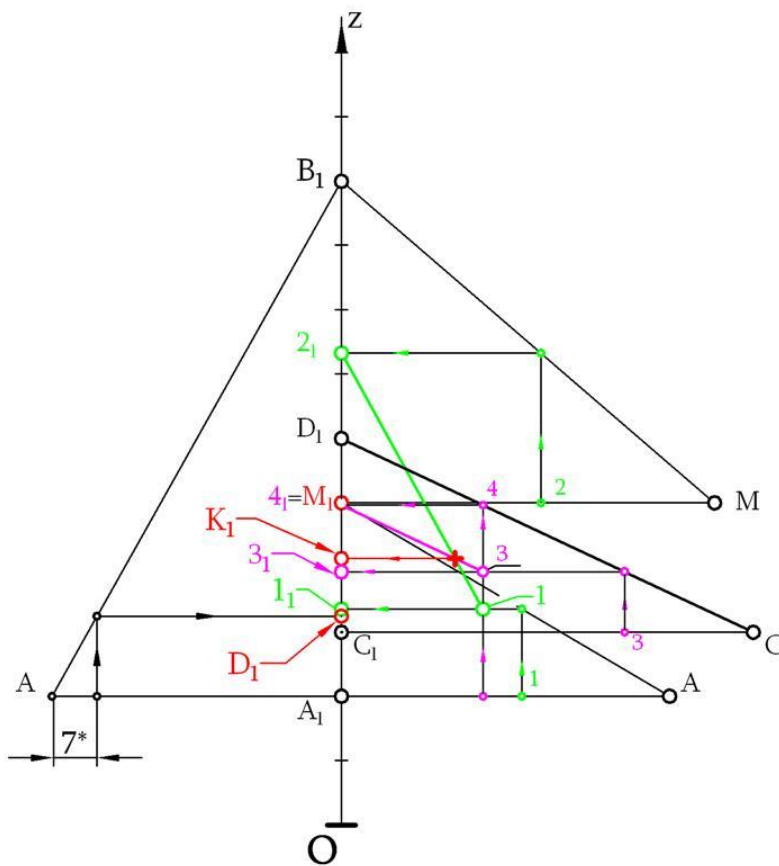
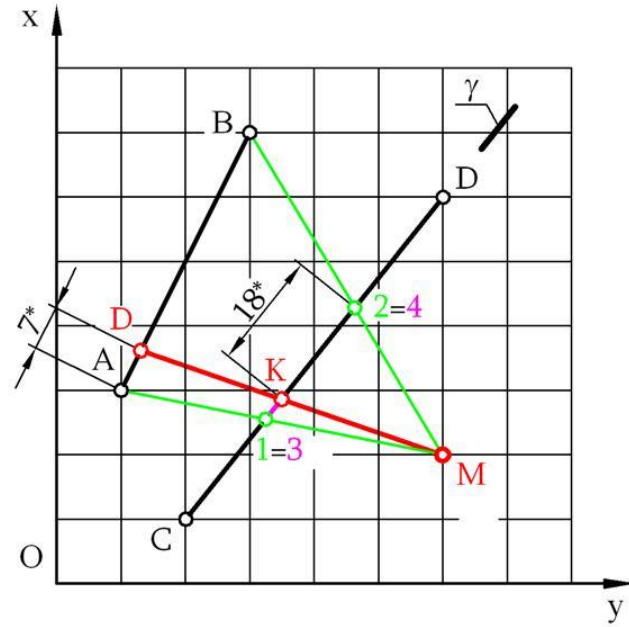
ამოცანა 3.

მოცემულია M_0 წერტილი და ორი არსებული გამონამუშევარის ღერძი — $a_0(A_0B_0)$ და $b_0(C_0D_0)$. საჭიროა მოცემული წერტილიდან გაყვანილი იქნეს უმოკლესი სიგრძის დამხმარე გვირაბი, რომელიც არსებულ გამონამუშევრებს გადაკვეთს (სურ.39).

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ შესაძლებელია თუ არა ამ პირობის დაცვა, მივმართოთ შემდეგ გრაფიკულ ანალიზს:

მოცემული M_0 წერტილი დავაკავშიროთ ერთ-ერთი, მაგ. $a_0(A_0B_0)$, ღერძის ორ წერტილთან. ვიპოვოთ მეორე, $b_0(C_0D_0)$ ღერძის, გადაკვეთის K_0 წერტილი $M_0A_0B_0$ წერტილებით განსაზღვრულ სიბრტყესთან. მოცემული M_0 წერტილი შევეერთოთ K_0 წერტილთან და გავაგრძელოთ $a_0(A_0B_0)$ ღერძის

გადაკვეთამდე. როგორც ვხედავთ, მოცემულ შემთხვევაში შესაძლებელია მოცემული წერტილიდან გაყვანილი იქნეს, მოცემული ორი გამონამუშევარის მკვეთი უმოკლესი სიგრძის გვირაბი.[12][13]

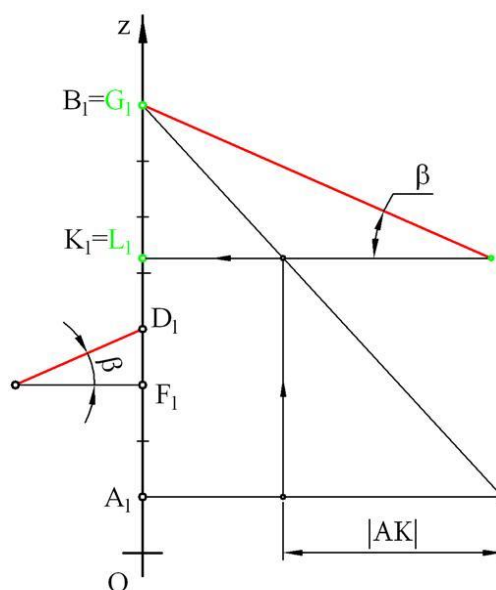
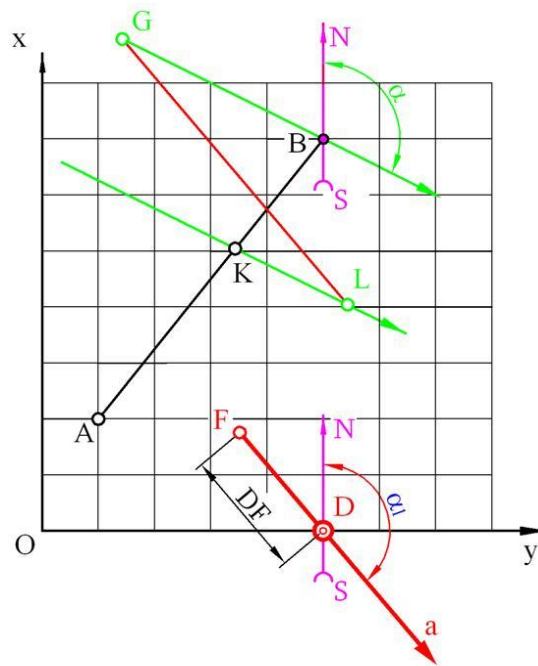


სურ. 39

ამოცანა 4.

მალივი ნიშნულების გეგმაზე მოცემულია ფენის ერთ-ერთი გვერდის ორი წერტილი – A_0 და B_0 და ფენის განვრცობის კუთხე – α . მოცემულია აგრეთვე ფენის სიბრტყის გარეთ მდებარე D_0 წერტილი.

საჭიროა გეგმაზე განისაზღვროს D წერტილიდან გასაყვანი, ფენის სიბრტყის პარალელური და მოცემული დირექციული კუთხით (α) მიმართული გამონამუშევარის a ღერძი(სურ.40).



სურ. 40

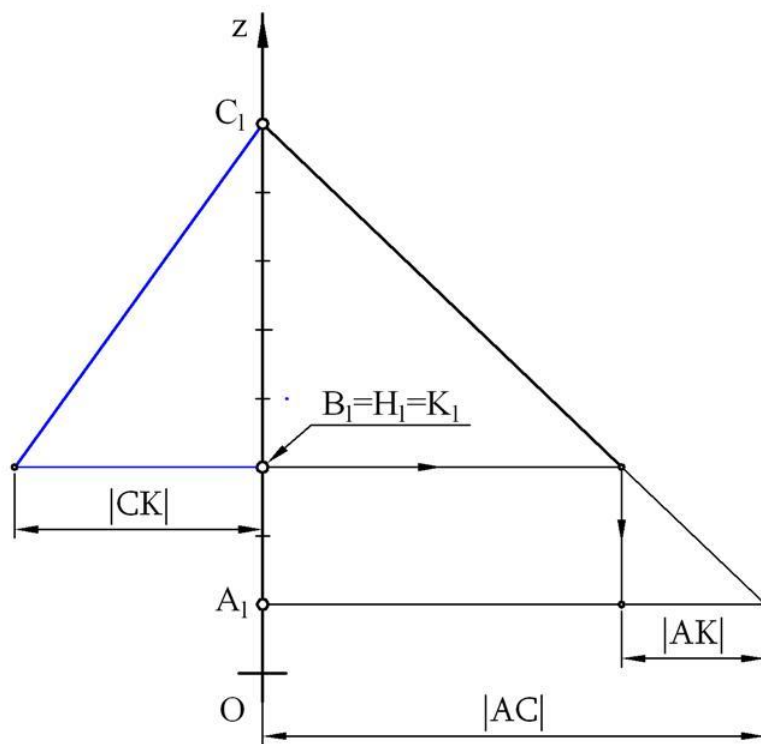
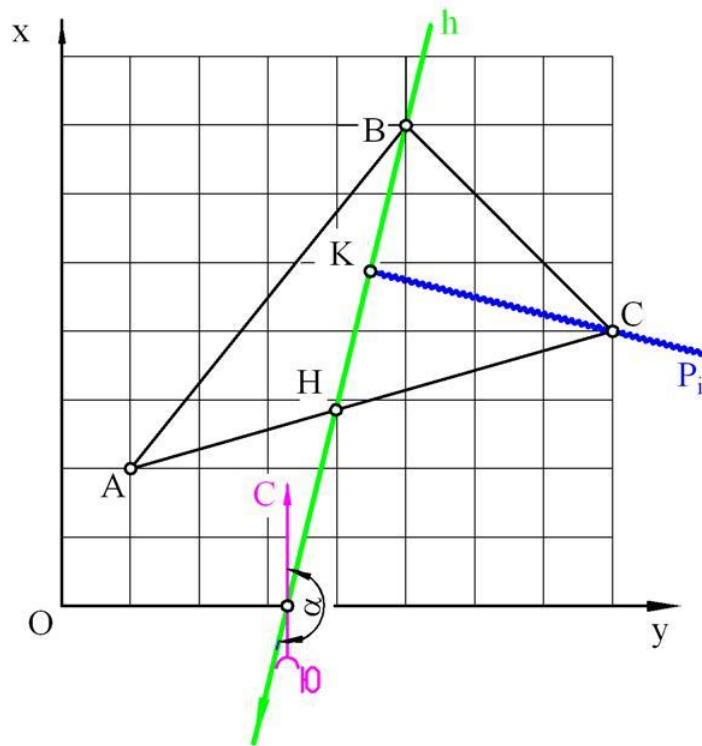
ავაგოთ D წერტილიდან α დირექციული კუთხით გამომავალი a სხივი. იმისათვის, რომ დავიცვათ ამ ღერძის პარალელობა ფენის სიბრტყესთან, საკმარისია ფენის სიბრტყეში ავაგოთ a ღერძის პარალელური GL წრფე და განვსაზღვროთ მისი დახრის კუთხე გეგმილთა სიბრტყესთან – β . ცხადია, რომ a ღერძის დახრის კუთხეც გეგმილთა სიბრტყესთან იქნება β -ს ტოლი. a ღერძის განსაზღვრისათვის საჭიროა განისაზღვროს მისი კუთვნილი რომელიმე F_0 წერტილი. F_0 წერტილი განისაზღვრება მისი F გეგმილით მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე და F_1 -ით მარლივი ნიშნულების წრფეზე. ერთ-ერთი მათგანი, მაგალითად F_1 , შეგვიძლია ავიღოთ ნებისმიერად, ხოლო მეორე F გეგმილი მარტივად განისაზღვრება „დამხმარე მართკუთხა სამკუთხედის“ საშუალებით. გრაფიკული აგებების თანმიმდევრობა ნათლად ჩანს ნახაზზე.[12][13]

ამოცანა 5. მოცემულია ფენის სახურავი გვერდის (პირობით მიღებულია სიბრტყედ) სამი წერტილი – A_0 , B_0 და C_0 რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. საჭიროა განისაზღვროს ფენის განლაგების ელემენტები – განვრცობა და ვარდნილობა (სურ.41).

მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე ავაგოთ ფენის სახურავი გვერდის ჰორიზონტალი $h(BC)$ და სიბრტყის უდიდესი ვარდნილობას წრფე ანუ ქანობის მასშტაბი P_1 (სურათზე ნაჩვენებია ლურჯი ფერით). ფენის სიბრტყის განვრცობა ჰორიზონტალზე ნაჩვენებია ისრით (თუ დამკვირვებელი პირისახით უდიდესი ვარდნილობის წრფის აღმავლობისაკენ დადგება, მაშინ მარჯვენა მიმართულებას პირობით სიბრტყის განვრცობას უწოდებენ), ხოლო სიბრტყის განვრცობის α კუთხე იქნება მარჯვენა ვექტორული კუთხე, რომელიც აითვლება მერიდიანების ჩრდილოეთის მიმართულებიდან სიბრტყის ჰორიზონტალების მიმართულებამდე.

ფენის სიბრტყის ვარდნილობის δ კუთხე იზომება სიბრტყის ქანობის მასშტაბის (უდიდესი ვარდნილობის წრფე) დახრის კუთხით გეგმილთა სიბრტყესთან. δ კუთხის გასაზომად საკმარისია უდიდესი ვარდნილობის

წრფის P_i კუთვნილი რომელიმე მონაკვეთის (მაგ. CK) გეგმილთა სიბრტყესთან დახრის კუთხის გაზომვა. [12][13][18]

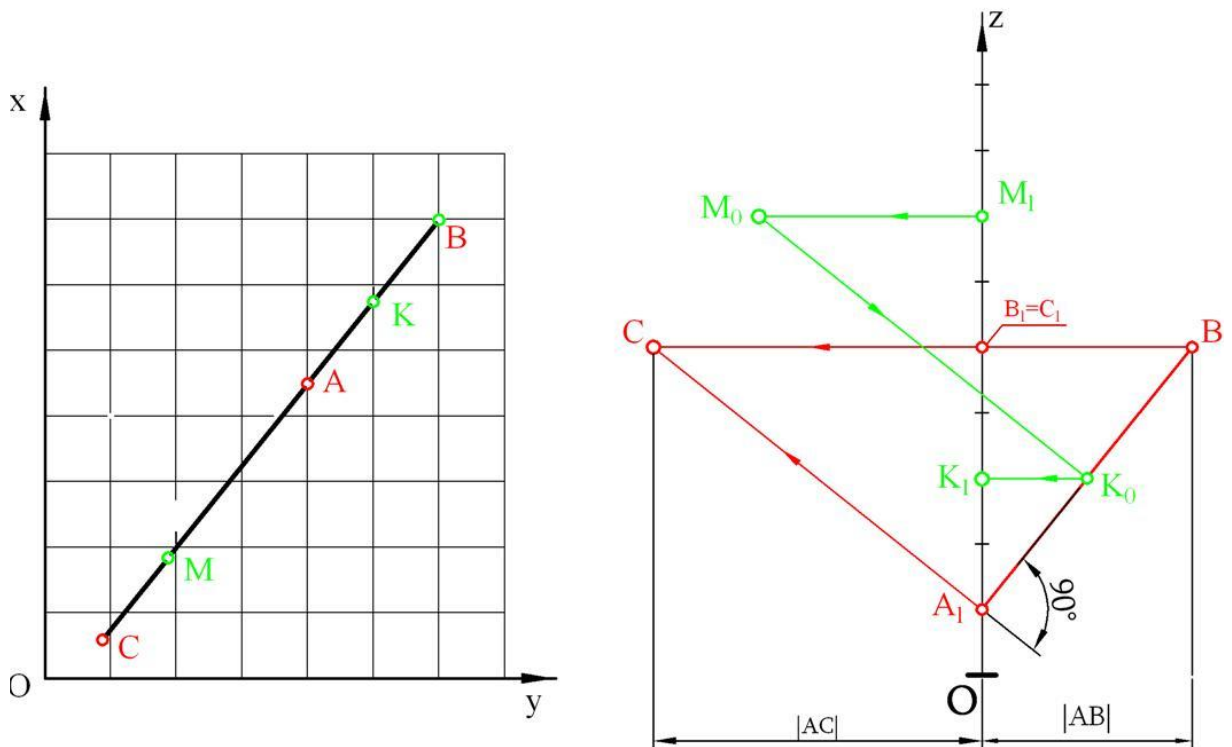


სურ. 41

ამოცანა 6 .

მოცემულია მიწისქვეშა ფენის სახურავი გვერდის ქანობის მასშტაბი P_i და მიწის ზედაპირზე მდებარე M წერტილი. საჭიროა M წერტილიდან ფენთან შეხვედრამდე გაყვანილი იქნას ჭაბურღილი, რომელსაც უმცირესი სიგრძე ექნება (სურ.44).

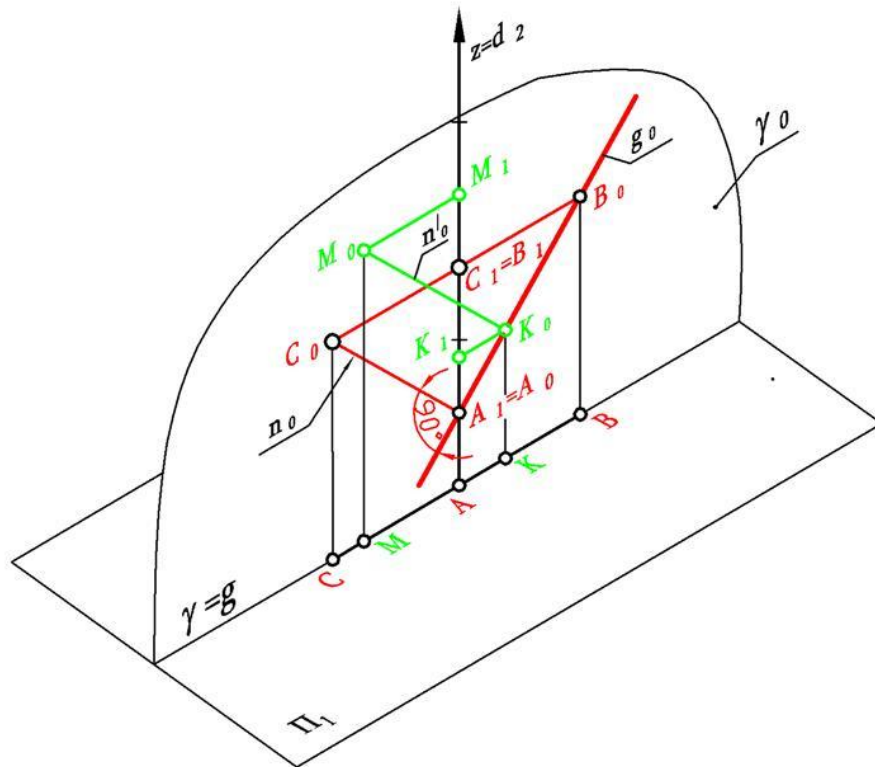
ვიღრე ამ ამოცანის გადაწყვეტას შევუდგებოდეთ, განვიხილოთ ასეთი დამხმარე ამოცანა: ვთქვათ მოცემული გვაქვს ძირითად გეგმილთა სიბრტყის მართობული γ_0 სიბრტყის კუთვნილი $t_0(A_0B_0)$ წრფე და ამავე სიბრტყის კუთვნილი M_0 წერტილი. ვიპოვოთ მანძილი M_0 წერტილიდან $t_0(A_0B_0)$ წრფემდე(სურ.42).



სურ. 42

მაღლივი ნიშნულების $z=d_1$ წრფე შევუთავსოთ A_0 წერტილს(სურ.41). A_0 წერტილიდან აღვმართოთ n_0 მართობი, რომელიც ეკუთვნის γ_0 სიბრტყეს. ამ მართობზე აღვნიშნოთ ისეთი C_0 წერტილი, რომლის მაღლივი ნიშნული B_0 წერტილის მაღლივი ნიშნულის ტოლია $C_1=B_1$. C_0 წერტილის C_1 გეგმილი

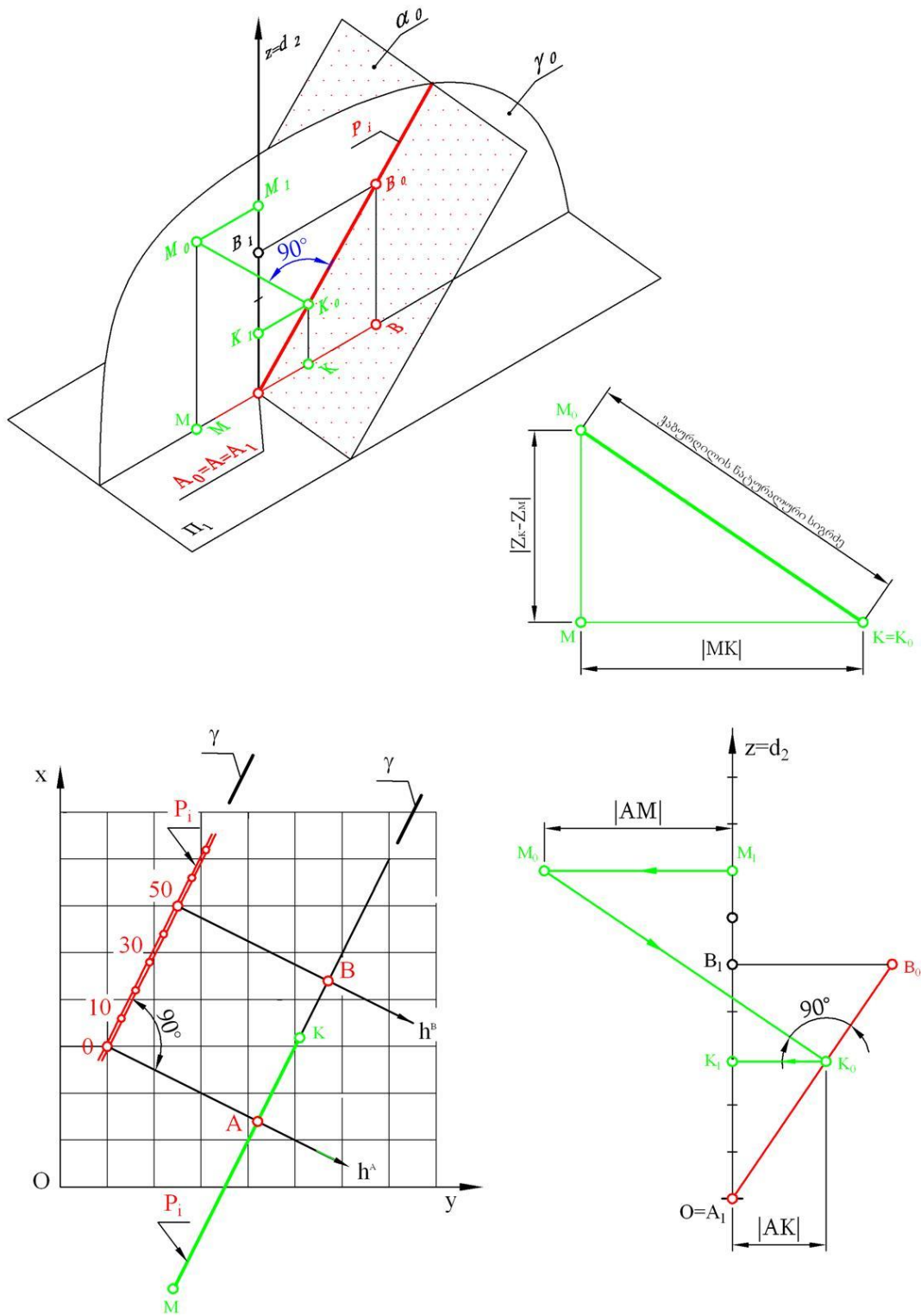
ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე მარტივად განისაზღვრება. მოცემული M_0 წერტილიდან $t(A_0B_0)$ წრფისადმი დაშვებული n_0^1 მართობი პარალელურია n_0 წრფისა. n_0^1 და $t_0(A_0B_0)$ წრფეების გადაკვეთის K_0 წეტილით და მოცემული M_0 წერტილით განსაზღვრული მონაკვეთის სიგრძე M_0 წერტილიდან $t_0(A_0B_0)$ წრფემდე მანძილის ტოლია. K_0 წეტილის K გეგმილი ძირითად გეგმილთა სიბრტყეზე და მალღივი K_1 ნიშნული $z=d_1$ მალღივი ნიშნულების წრფეზე განისაზღვრება მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით (სურ.43).



სურ. 43

დავუბრუნდეთ მე-6-ე ამოცანას (სურ.44). ეს ამოცანა შეგვიძლია დავიყვანოთ ზემოთ განხილულ დამხმარე ამოცანამდე, ამისათვის საჭირო იქნება M წერტილზე ავავოთ ისეთი γ_0 დამხმარე მაგეგმილებელი სიბრტყე, რომელიც პარალელური იქნება მოცემული მიწისქვეშა ფენის სახურავის გვერდის P_i ქანობის მასშტაბისა. γ_0 სიბრტყე მიწისქვეშა ფენის სახურავ გვერდს გადაკვეთს წრფეზე, რომელიც აგრეთვე იქნება მოცემული ფენის სახურავი გვერდის ქანობის მასშტაბი, ანუ უდიდესი დახრილობის წრფე – P_i . 44-ე

სურათზე ეს წრფე განსაზღვრულია A და B წერტილებით. მოცემული M წერტილი და AB წრფე ერთ მაგეგმილებელ γ_0 სიბრტყეს ეკუთვნის.



სურ. 44

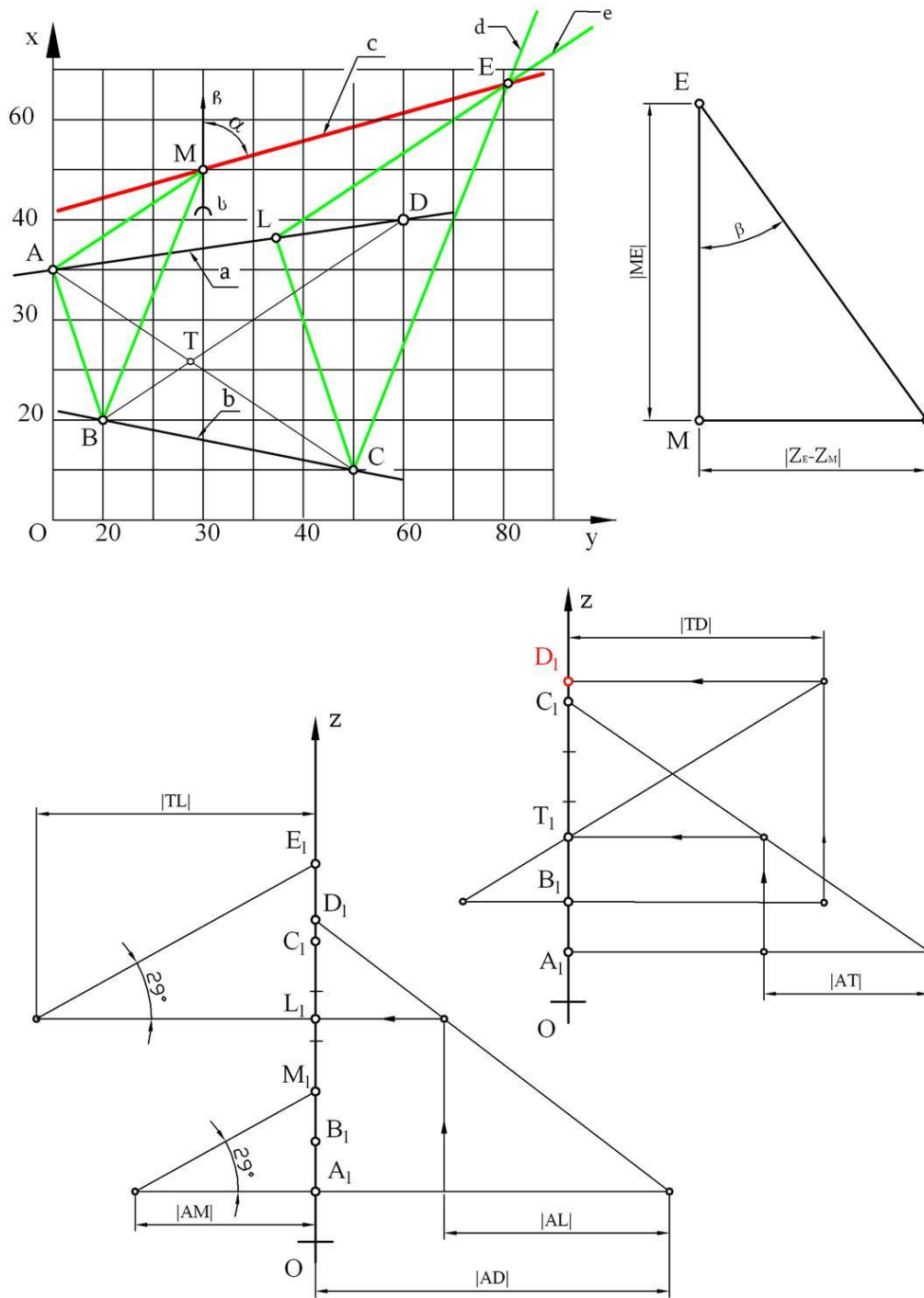
M წერტილიდან დაშვებული მართობი AB წრფეს გადაკვეთს K წერტილში (იხ. დამხმარე ამოცანა, სურ.41). K წერტილი იქნება მიწის ზედაპირზე მდებარე M წერტილიდან გასაყვანი უმოკლესი სიგრძის მქონე ჭაბუდილის ღერძის გადაკვეთის წერტილი ფენის სახურავ გვერდთან. ჭაბუდილის ნატურალური სიგრძე გავზომოთ სამკუთხედის წესით (სურათზე ნაჩვენებია ცალკე).

ამოცანა 7 . მოცემულია M_0 წერტილი და ორი $a(A_0D_0)$ და $b(B_0C_0)$ გამონამუშევარის ღერძი. ამ გამონამუშევარებს შემდგომში ექნებათ შეხვედრის N_0 წერტილი, რომელიც ჯერ გეგმაზე ცნობილი არ არის. საჭიროა განისაზღვროს ისეთი ახალი გამონამუშევარის c ღერძი, რომელიც M_0 და N_0 წერტილებზე გაივლის(სურ.45).

სანამ ამოცანის გადაწყვეტას შევუდგებოდეთ, უნდა აღვნიშნოთ შემდეგი: იმისათვის რომ $a_0(A_0D_0)$ და $b_0(B_0C_0)$ ღერძებს შეხვედრის წერტილი ჰქონდეთ, საჭიროა ისინი ეკუთვნოდეს ერთ სიბრტყეს, ამიტომ 44-ე სურათზე მაღლივი ნიშნულების გეგმაზე, მოცემულია A_0, D_0, B_0 და C_0 წერტილების A, D, B და C გეგმილები, ხოლო მაღლივი ნიშნულების წრფეზე მოცემულია A_1, B_1 და C_1 . ნახაზის განტვირთვის მიზნით D_1 -ის (D_0 წერტილის მაღლივი ნიშნული) განსაზღვრა ნაჩვენებია ცალკე.

ვისარგებლოთ დეზარგის თეორემის შედეგით (იხ.17.Глаголев Н., Проективная геометрия, 1963 გვ. 47) . a_0 და b_0 წრფეებზე აღებული ნებისმიერი A_0 და B_0 ორი წერტილის A და B გეგმილები შევაერთოთ M_0 წერტილის M გეგმილთან. ავაგოთ (A_0B_0) წრფის AB გეგმილის პარალელური $l(CL)$ წრფე ($l_0(C_0L_0)$ წრფის გეგმილი) და განვსაზღვროთ l_0 და a_0 წრფეების გეგმილების (l და a) გადაკვეთის L წერტილი. მსგავსი წერტილების რიგის საშუალებით, მაღლივი ნიშნულების წრფეზე განვსაზღვროთ L_1 .

C ($C \in b$) და L ($L \in a$) წერტილებზე ავაგოთ e და d სხივები ისე, რომ გეგმაზე $e \parallel (AM)$ და $d \parallel (BM)$. მივიღებთ E წერტილს (E წერტილი d, e და c წრფეების გადაკვეთის წერტილია. M და E წერტილებით განსაზღვრული c წრფე საძიებელი c_0 ღერძის გეგმილი იქნება, რადგან იგი გაივლის a და b წრფეების



სურ. 45

გადაკვეთის N წერტილზე. ცხადია (A_0M_0) და (L_0E_0) წრფეები სივრცეშიც პარალელური იქნება და მათი დახრის კუთხეები ძირითად გეგმილთა სიბრტყესთან იქნება ტოლი. E_0 წერტილის მაღლივი ნიშნული მარტივად

განსაზღვრება მსაგავსი წერტილების რიგის საშუალებით. (იგი ტოლია $O E_1$ მონაკვეთის სიგრძისა). საძიებელი ღერძი განსაზღვრულია $M_0(M, M_1)$ და $E_0(E, E_1)$ წერტილებით. 45-ე სურათზე განსაზღვრულია c_0 ღერძის განვრცობისა (α) და დახრილობის (β) კუთხეები[12][13][17].

2.4. მალღივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდის კომპიუტერული მხარდაჭერა

2.4.1. ინტუიციური ალგორითმის ცნება და მისი გამოყენება მალღივნიშნულეზიანი გეგმილების მეთოდში

გეომეტრიული გარდაქმნები, მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის ქართულ სკოლაში, ერთ-ერთი პრიორიტეტული სამეცნიერო მიმართულება იყო და ამ სკოლის გამოჩენილი მეცნიერების, ირაკლი ჯაფარიძისა და მისი მიმდევრების სამეცნიერო მემკვიდრეობაში, მას ყოველთვის მნიშვნელოვანი ადგილი ჰქონდა დათმობილი. ამდენად, წინამდებარე ნაშრომი, ამავე სკოლის მეცნიერული კვლევების ერთგვარ გაგრძელებად შეიძლება იქნას მიჩნეული და ჩვენი მცდელობა, რაზედაც ქვემოთ გვექნება საუბარი და რაც გეომეტრიული გარდაქმნების მეთოდების კომპიუტერულ საინჟინრო გრაფიკის პროგრამულ უზრუნველყოფაში ჩარევას გულისხმობს, გარკვეულ სიახლედ და შესაბამისად წინგადადგმულ ნაბიჯად მიგვაჩნია.

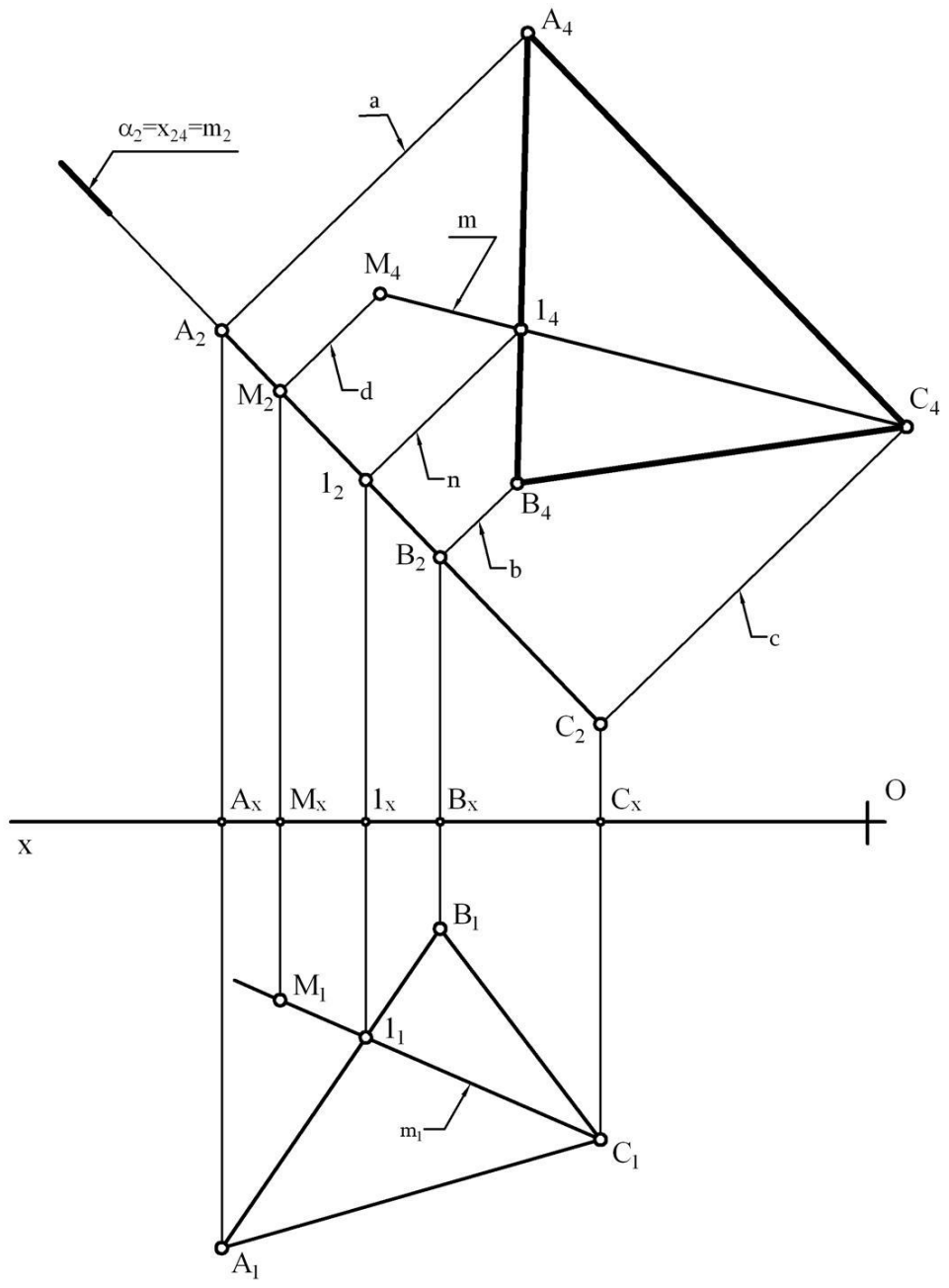
ცნობილია, რომ კომპიუტერის ფუნქციონირებისათვის, გარდა აპარატურული უზრუნველყოფისა (Hardware), აუცილებელია პროგრამული უზრუნველყოფა (Software). სწორედ პროგრამული უზრუნველყოფა იძლევა სხვადასხვა გამოყენებითი ამოცანის გარდაქმნის საშუალების და ადამიანის საქმიანობის ავტომატიზებულობის შესაძლებლობებს.[19]

ცნობილია ისიც, რომ კომპიუტერული პროგრამა არის ბრძანებათა თანმიმდევრობა, რომელთაგან თითოეული ატყობინებს პროცესორს, თუ რა

მოქმედება უნდა შეასრულოს ყოველ მოცემულ მომენტში. პროგრამული უზრუნველყოფის ღირებულება, როგორც წესი, ბევრად აღემატება თვით კომპიუტერის ღირებულებას. ამიტომაც პროგრამული უზრუნველყოფის ინდუსტრია დღეისათვის ერთ-ერთი ყველაზე მომგებიან და სწრაფად განვითარებად ბიზნესად ითვლება. მსოფლიოში გავრცელებულ პროგრამულ უზრუნველყოფის უდიდეს ნაწილს ქმნიან მძლავრი კორპორაციები, როგორცაა მაგალითად, Microsoft, Adobe Systems, IBM და სხვა. თუმცა არსებობს ათასობით წვრილმანი ფირმები და ინდივიდუალური პროგრამისტებიც კი, რომლებიც ქმნიან სპეციალური დანიშნულების პროგრამულ პროდუქციას. ჩვენი მოკრძალებული მიზანი, რასაკვირველია შემოფარგლულია ბოლო მოსაზრების საზღვრებით და ძირითადათ, კონკრეტულ შემთხვევებში ინდივიდუალური პროგრამის შედგენას და ავტომატიზებული პროექტირების ყველაზე მძლავრ სისტემაში (Auto CAD) მისი დანერგვის სურვილის რეალიზაციას გულისხმობს. საამისოდ ჩვენ შევისწავლეთ პერსონალური კომპიუტერების აპარატურული და პროგრამული უზრუნველყოფის ზოგადი თეორია და პრაქტიკა, ოპერაციული სისტემა Windows XP და გრაფიკული პროცესორები Word XP და Auto CAD-ი.

ვიდრე კონკრეტულ ამოცანას შევხებოდეთ, მიზანშეწონილად მივიჩნით, პერსპექტულ-აფინური შესაბამისობის გეომეტრიული არსის ჩვენეული თვალთახედვით წარმოჩენა. სახელდობრ, ცნობილია, რომ ერთი სიბრტყის მეორე სიბრტყეზე შექცევად ასახვას მაშინ ეწოდება აფინური, როცა წრფე წრფეზეა, პარალელური და გადაკვეთილი წრფეები, შესაბამისად პარალელურ და გადაკვეთილ წრფეებზეა და წრფის მონაკვეთი ისევ წრფის მონაკვეთზეა ასახული, ხოლო მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა უცვლელად არის დატოვებული. ორ სიბრტყეს შორის შესაბამისობას, რომელიც ზემომოყვანილი თვისებების მქონე აფინური ასახვის დროს მყარდება და რომელსაც აფინური შესაბამისობა ქვია, შეგვიძლია 46-ე სურათზე ნაჩვენები გრაფიკული ინტერპრეტაციით წარმოვიდგინოთ (სიმარტივისა და შემდგომი პრაქტიკული გამოყენებისათვის ასახვის პროცესი მონჟის ეპიურზეა წარმოდგენილი).

ზემოთქმულიდან გამომდინარე სიბრტყეთა შორის აფინური შესაბამისობა ცალსახად არის განსაზღვრული, მოცემულია შესაბამის სამკუთხედთა ერთი წყვილი (ჩვენს შემთხვევაში (იხ.სურ.46) ნაჩვენებია ორ სამკუთხედს ($\triangle ABC$ და $\triangle A_4B_4C_4$) შორის დამყარებული ზოგად-აფინური შესაბამისობა მონუსის ეპიურის გამოყენებით).



სურ. 46

თუ მოცემულია M_1 წერტილი, რომელიც $A_1B_1C_1$ ბრტყელი ველის კუთვნილია, ცალსახად შეგვიძლია განვსაზღვროთ $A_4B_4C_4$ ბრტყელი ველის კუთვნილი და M_1 -ის შესაბამისი M_4 წერტილი. ჩვენ შემთხვევაში (სურ. 46) ამოცანა გადაწყვეტილია, როგორც მონჟის ეპიურისათვის დამახასიათებელი აგებებით (კუთვნილების პირობა და მისი რეალიზაცია) ასევე აფინური ასახვის თვისებების გამოყენებით. სახელდობრ, არაკოლენიალური (არაერთწრფეზე მდებარე) წერტილთა სამი წყვილი ცალსახად განსაზღვრავს ორი სიბრტყის აფინურ შესაბამისობას, ხოლო ერთ სიბრტყეში აღებული ნებისმიერი მეოთხე წერტილის შესაბამისი წერტილის მოძებნა მეორე სიბრტყეში ითხოვს სპეციალურ გრაფიკულ აგებებს, რომლის კონკრეტული მაგალითი ნაჩვენებია ქვემოთ მოყვანილ პროგრამაში, რომელიც 46-ე სურათზე ნაჩვენებია მოქმედებების ინტუიციურ ალგორითმად შეიძლება იქნას მიჩნეული.

მოცემულია M_1 წერტილის აფინურად შესაბამისი M_4 წერტილის აგების ინტუიციური ალგორითმი:

1	$A_2 \in a \perp x_{24}$	A_2 წერტილზე გავატაროთ a წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად;
2	$ A_2A_4 = A_1A_x $	a წრფეზე, A_2 -დან გადავზომოთ $ A_1A_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი;
3	$B_2 \in b \perp x_{24}$	B_2 წერტილზე გავატაროთ b წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად;
4	$ B_2B_4 = B_1B_x $	b წრფეზე, B_2 -დან გადავზომოთ $ B_1B_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი;
5	$C_2 \in c \perp x_{24}$	C_2 წერტილზე გავატაროთ c წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად;
6	$ C_2C_4 = C_1C_x $	c წრფეზე, C_2 -დან გადავზომოთ $ C_1C_x $ -ის ტოლი მონაკვეთი;
$\Delta ABC \cong \Delta A_4B_4C_4$		
7	$m_1(M_1C_1)$	გავატაროთ M_1 და C_1 წერტილებზე m_1 წრფე;
8	$I_1 = m_1 \cap (A_1B_1)$	განვსაზღვროთ m_1 და (A_1B_1) წრფეების

		თანაკვეთის l_1 წერტილი;
9	$l_1 \in (l_1 l_2) \perp x_{12}$	l_1 წერტილზე გავატაროთ $(l_1 l_2)$ წრფე x_{12} -ის პერპენდიკულარულად;
10	$l_2 = (l_1 l_2) \cap \alpha_2$	განვსაზღვროთ $(l_1 l_2)$ და α_2 წრფეების თანაკვეთის l_2 წერტილი;
11	$l_2 \in n \perp x_{24}$	l_2 წერტილზე გავატაროთ n წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად;
12	$l_4 = n \cap (A_4 B_4)$	განვსაზღვროთ n და $(A_4 B_4)$ წრფეების თანაკვეთის l_4 წერტილი;
13	$m_4(C_4 l_4)$	გავატაროთ C_4 და l_4 წერტილებზე m_4 წრფე;
14	$M_1 \in (M_1 M_2) \perp x_{12}$	M_1 წერტილზე გავატაროთ $(M_1 M_2)$ წრფე x_{12} -ის პერპენდიკულარულად;
15	$M_2 = (M_1 M_2) \cap \alpha_2$	განვსაზღვროთ $(M_1 M_2)$ და α_2 წრფეების თანაკვეთის M_2 წერტილი;
16	$M_2 \in d \perp x_{24}$	M_2 წერტილზე გავატაროთ d წრფე x_{24} -ის პერპენდიკულარულად;
17	$M_4 = d \cap m_4$	განვსაზღვროთ d და m_4 წრფეების თანაკვეთის M_4 საძიებელი წერტილი;

შენიშვნა: M_4 -ის აგება შესაძლებელია წერტილისა და წრფის კუთვნილების პირობის და აფინური ასახვის იმ თვისების ერთობლიობით, რომლის ძალითაც, ამ ასახვაში, მონაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა უცვლელია. უკანასკნელი მოსაზრების მიხედვით შედგენილია

ფარდობები:
$$\frac{A_1 l_1}{l_1 B_1} = \frac{A_4 l_4}{l_4 B_4} \quad \text{და} \quad \frac{C_1 l_1}{l_1 M_1} = \frac{C_4 l_4}{l_4 M_4}.$$

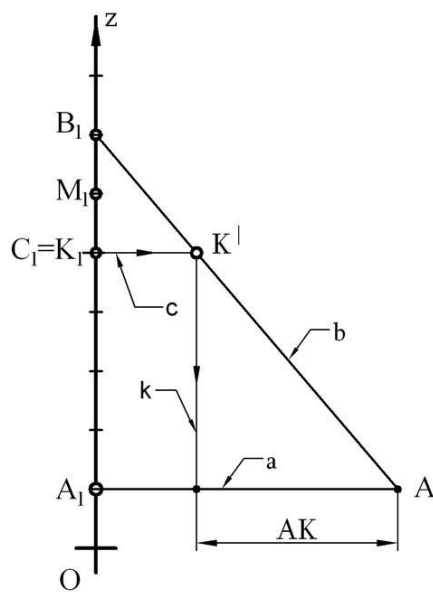
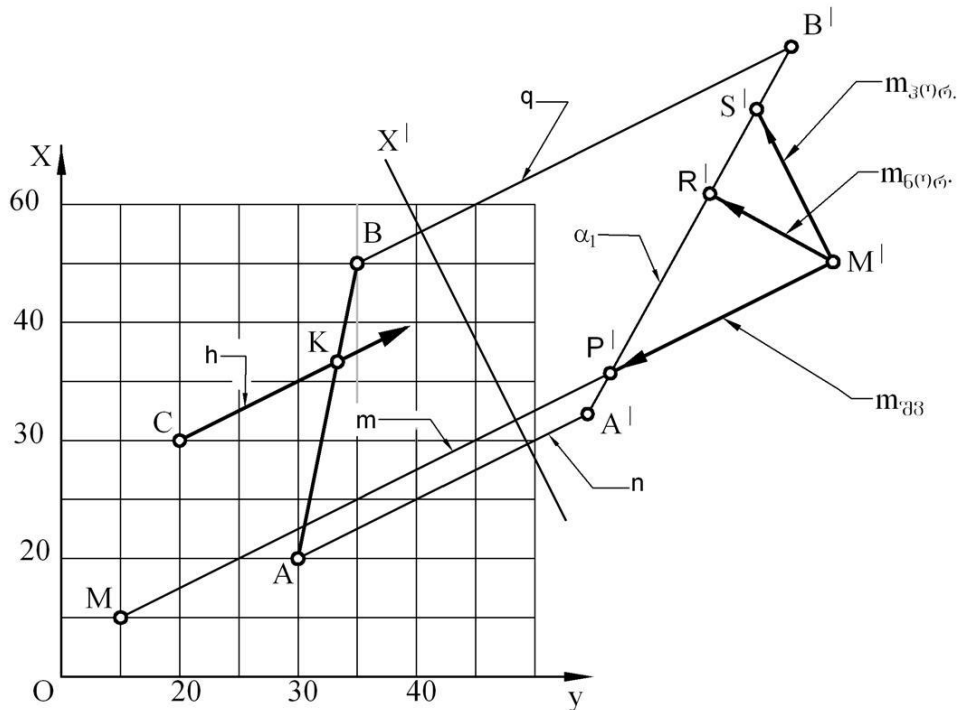
ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის საფუძველზე შედგენილია პროგრამა, Auto CAD – ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით;[19][20]

განხილული ამოცანის გადაწყვეტის ჩვენი ინტერპრეტაცია იმით არის განსხვავებული გავრცელებული შემთხვევებისაგან, რომ აქ გამორიცხულია კომპიუტერისათვის დამახასიათებელი მექანიკური აზროვნება და იგი შევსებულია ყოველი მოქმედების შინაარსში ჩაწვდომის საშუალებებით. აქ

შემუშავებული ინტუიციური ალგორითმი ყოველი ბრძანების შინაარსობრივ მხარეს აშუქებს და ამით ყოველ ბრძანებაში წარმოშობილ კითხვაზე — რატომ? — ადეკვატურად პასუხობს.

2.4.2. კომპიუტერული საშუალებების მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში გამოყენების არსი

§2.3.3-ის 1 — 7 ამოცანები ამოხსნილია ზემოთ განხილული მიდგომით,



სურ. 47

კერძოდ, გამოყენებულია ჩვენს მიერ რეკომენდებული ინტუიციური ალგორითმი და Auto CAD-ის ცნობილი ბაზური პრიმიტივები. მაგალითისათვის განვიხილოთ მე-2-ე ამოცანის (სურ.47) ამოხსნის ინტუიციური ალგორითმი:

1.	$A_1 \in a \perp z$	A_1 წერტილზე ავაგოთ a წრფე z -ის პერპენდიკულარულად;
2.	$ A_1A = AB $	a წრფეზე, A_1 -დან გადავზომოთ AB მონაკვეთის ტოლი მონაკვეთი A_1A ;
3.	$b(AB_1)$	A და B_1 წერტილებზე ავაგოთ b წრფე;
4.	$C_1 \in c \perp z$	C_1 წერტილზე ავაგოთ c წრფე z -ის პერპენდიკულარულად;
5.	$c \cap b(AB_1)=K_1$	განვსაზღვროთ c და $b(B_1A)$ წრფეების თანაკვეთის K_1 წერტილი;
6.	$K_1 \in k \perp a(A_1A)$	K_1 წერტილზე ავაგოთ k წრფე $a(A_1A)$ -ის პერპენდიკულარულად;
7.	$k \cap a(A_1A)=K$	განვსაზღვროთ k და $a(A_1A)$ წრფეების თანაკვეთის K წერტილი;
8.	$ AK $	გავზომოთ AK მონაკვეთი;
9.	$ AK \in l(AB)$	$ AK $ გადავზომოთ $l(AB)$ წრფეზე;
10.	$h(CK)$	შევაერთოთ C და K წერტილები;
11.	$x' \perp h(CK)$	x' ღერძი ავაგოთ $h(CK)$ -ს მართობულად;
12.	$A \in n \perp x'$	A წერტილზე გავატაროთ n წრფე x' -ის პერპენდიკულარულად;
13.	$n \cap x'=1$	ავაგოთ n და x' წრფეების გადაკვეთის 1 წერტილი;
14.	$B \in q \perp x'$	B წერტილზე გავატაროთ q წრფე x' -ის პერპენდიკულარულად;
15.	$q \cap x'=2$	ავაგოთ q და x' წრფეების გადაკვეთის 2

		წერტილი;
16	$ OA_1 = 1A \in n(A1)$	$n(A1)$ წრფეზე 1 წერტილიდან გადავზომოთ OA_1 მონაკვეთის ტოლი $1A$ მონაკვეთი;
17	$ OB_1 = 2B \in q(B2)$	$q(B2)$ წრფეზე 2 წერტილიდან გადავზომოთ OB_1 მონაკვეთის ტოლი $2B$ მონაკვეთი;
18	$\alpha^l (A B)$	შევაერთოთ $A $ და $B $ წერტილები (განვსაზღვროთ α^l);
19	$M \in m \perp x^l$	M წერტილზე გავატაროთ m წრფე x^l -ის პერპენდიკულარულად;
20	$m \cap x^l = 3$	ავაგოთ m და x^l წრფეების გადაკვეთის 3 წერტილი;
21	$ OM_1 = 3M \in m(M3)$	$m(M3)$ წრფეზე 3 წერტილიდან გადავზომოთ OM_1 მონაკვეთის ტოლი $3M$ მონაკვეთი;
22	$M^l \in m_{ნორმ} \perp \alpha^l$	M^l წერტილზე გავატაროთ $m_{ნორმ}$ წრფე α^l -ის პერპენდიკულარულად;
23	$m_{ნორმ} \cap \alpha^l = R^l$	ავაგოთ $m_{ნორმ}$ და α^l წრფეების გადაკვეთის R^l წერტილი;
24	$ R^l M^l = m_{ნორ.} $	გავზომოთ $R^l M^l$ მონაკვეთის სიგრძე;
25	$m \cap \alpha^l = P^l$	ავაგოთ m და α^l წრფეების გადაკვეთის P^l წერტილი;
26	$ P^l M^l = m_{გ.} $	გავზომოთ $P^l M^l$ მონაკვეთის სიგრძე;
27	$M^l \in m_{პორ.} \parallel x^l$	M^l წერტილზე გავატაროთ $m_{პორ.}$ წრფე x^l -ის პარალელურად;
28	$M_{პორ} \cap \alpha^l = S^l$	ავაგოთ $m_{პორ.}$ და α^l წრფეების გადაკვეთის S^l წერტილი;

29	$ SM = m_{\text{პორ.}} $	გავზომოთ S' M' მონაკვეთის სიგრძე;
----	--------------------------	-----------------------------------

ზემოთ მოყვანილი ინტუიციური ალგორითმის ბაზაზე შევადგინოთ პროგრამა Auto CAD-ის ბაზური პრიმიტივების გამოყენებით:

1.	$A_1 \in a \perp z$	Draw — Line specify first point: A; Specify next point or [Undo]: B+ Enter; Modify — Copy Select object: მოვნიშნოთ AB მონაკვეთი +Enter Specify base point: A ₁ : გადავიტანოთ ეს მონაკვეთი A ₁ წერტილში; Modify - Rotate Select object: : მოვნიშნოთ გადატანილი მონაკვეთი; Specify base point: A ₁ ; Specify Rotation angle: აქ უნდა მივუთითოთ მობრუნების კუთხე, თუ იგი ცნობილია, ან კურსორის საშუალებით ვაბრუნოთ იგი სანამ მისი 90 ⁰ -მდე შემავსებელი გვერდი არ გახდება z-ის მართობული.
2.	$ A_1A = AB $	
6.	$K' \in k \perp a (A_1A)$	Draw — Line მდგომარეობის სტრიქონში ჩავრთოთ Ortho რეჟიმი; specify first point: K'; Specify next point or [Undo]: K+ Enter; აღვნიშნოთ K წერტილი;
7.	$k \cap a (A_1A)=K$	
8.	$ AK =?$	Distance specify first point: A; specify second point: K; Distance=34,09
9.	$ AK \in l(AB)$	Draw — point — measure

10.	$h(CK)$	<p>(ამ დროს Format — Point Style წერტილის აღსანიშნად მონიშნულია +)</p> <p>Select object to measure; მოვნიშნოთ 1 წრფე Specify length of segments or: მივუთითოთ 34,09; აღვნიშნოთ მიღებული წერტილი K სიმბოლოთი ;</p> <p>Draw — Construction Line specify first point: C; Specify next point or [Undo]: K+ Enter;</p>
11 12 13 14 15	$x^l \perp h(CK)$ $A \in n \perp x^l$ $n \cap x^l = 1$ $B \in q \perp x^l$ $q \cap x^l = 2$	<p>Draw — Line (Drafting Setting —Object Snap — ალაში ჩართულია Perpendicular ჩარჩოში) ავაგოთ $x^l \perp h(CK)$; ავაგოთ $n \perp x^l$; აღვნიშნოთ 1 წერტილი. Draw — Line (Drafting Setting —Object Snap — ალაში ჩართულია Perpendicular ჩარჩოში) ავაგოთ $q \perp x^l$; აღვნიშნოთ 2 წერტილი.</p>
16 17	$ OA_1 = 1A^l \in n(A1)$ $ OB_1 = 2B^l \in q(B2)$	<p>Modify – Lengthen Select an object or, მივუთითოთ Delta = OA_1, Select an object to change (მოვნიშნოთ n წრფე); Select an object or, მივუთითოთ Delta = OB_1, Select an object to change (მოვნიშნოთ q წრფე); აღვნიშნოთ A^l წერტილი; აღვნიშნოთ B^l წერტილი.</p>
18	$\alpha^l (A^l B^l)$	<p>Draw — Construction Line specify first point: A^l, Specify next point or [Undo] B^l + Enter;</p>
21	$ OM_1 = 3M^l \in m(M3)$	<p>Modify – Lengthen Select an object or, მოვნიშნოთ m წრფე მივუთითოთ Delta = OM_1, Select an object to change (მოვნიშნოთ m წრფე); აღვნიშნოთ M^l წერტილი.</p>
22	$M^l \in m_{\text{ხორცის}} \perp \alpha^l$	<p>Draw — Line (Drafting Setting —Object Snap —</p>

23 24	$m_{\text{ნორმ}} \cap \alpha = R$ $ R M = m_{\text{ნორ.}} $	ალამი ჩართულია Perpendicular ჩარჩოში) M წერტილზე ავაგოთ $m_{\text{ნორმ}} \perp \alpha$; აღვნიშნოთ R წერტილი. გავზომოთ $m_{\text{ნორ.}}$.
25 26	$m \cap \alpha = P$ $ P M = m_{\text{შვ.}} $	აღვნიშნოთ P წერტილი. გავზომოთ $m_{\text{შვ.}}$.
27 28 29	$M \in m_{\text{პორ.}} \parallel x$ $M_{\text{პორ.}} \cap \alpha = S$ $ S M = m_{\text{პორ.}} $	Draw — Line (Drafting Setting —Object Snap — ალამი ჩართულია Parallel ჩარჩოში) M წერტილზე ავაგოთ $m_{\text{პორ.}} \parallel x$; აღვნიშნოთ S წერტილი. გავზომოთ $m_{\text{შვ.}}$.

3. დასკვნა

სივრცის გეომეტრიული მოდელირებისა და პრაქტიკაში ამ მოდელირების ბაზაზე შექმნილი მეთოდების გამოყენება მხაზველობითი გეომეტრიისა და საინჟინრო გრაფიკის ქართული სკოლის პრიორიტეტულ მიმართულებად ჯერ კიდევ წინა საუკუნის 60-იან წლებში იქნა გამოცხადებული (მიმართულების ფუძემდებელი პროფ. ი. ჯაფარიძე 1916-1987). წინამდებარე ნაშრომი კი ამ მიმართულებით სამეცნიერო-კვლევით საქმიანობის გაგრძელებად შეიძლება იქნეს მიჩნეული. ამ მიზნებიდან გამომდინარე, ჩვენ შევარჩიეთ ერთი გარკვეული იდეა, დაგეგმილების ახალი მეთოდის შექმნა და შევცადეთ ხორცი შეგვესხა ამ იდეისათვის მისი დეტალური შესწავლისა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით.

სამუშაოს ამგვარმა მიზანდასახულობამ განაპირობა ნაშრომის კონსტრუქციული სქემა: პირველ ნაწილში შესწავლილია მხაზველობითი გეომეტრია სივრცის გეომეტრიული მოდელირების შუქზე პროფ. ი. ჯაფარიძის მიხედვით, მეორე — პროფ. ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი, მესამეში — მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენება და მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის კომპიუტერული მხარდაჭერა.

პირველ ნაწილში (იხ.2.1) გამოკვლეულია სამგანზომილებიანი სივრცის აქსიომატიკური ბრტყელი მოდელები (იხ. 2.1.1), დადგენილია სიმბოლიკა და ტერმინოლოგია (იხ.2.1.2), მითითებულია მოდელის აგების სქემა (იხ.2.1.3), გამოყოფილია ბინარული მოდელების გადაგვარებული სახეები (იხ.2.1.4) და პროექციული სამგანზომილებიანი სივრცის ძირითადი ბინარული მოდელები (იხ.2.1.5), შესწავლილია წარმოებული აქსიომატიკური მოდელები (იხ.2.1.6) და ბინარული მოდელებისგან წარმოებული წრფივი მოდელები (იხ.2.1.7).

მეორე ნაწილში (იხ.2.2) დეტალურადაა შესწავლილი პროფ. ა. შავგულიძის მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გეომეტრიული არსი (იხ.2.1.1), შესწავლილია მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის განზოგადება

ევკლიდეს ოთხგანზომილებიანი (R_4) სივრცისათვის — პირველი (იხ. 2.1.2) და მეორე (იხ.2.1.3).

მესამე ნაწილში (იხ.2.3) ნაჩვენებია პოზიციური ამოცანები R_3 და R_4 სივრცეებში (იხ.2.3.1 და 2.3.2) და საინჟინრო პრაქტიკის კონკრეტული მაგალითების ამოხსნა მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის გამოყენებით.

მეოთხე ნაწილი დათმობილი აქვს გრაფიკული ამოცანების ამოხსნის კომპიუტერულ მხარდაჭერას. სახელდობრ, აქ შემოტანილია ინტუიციური ალგორითმის ცნება (იხ.2.4.1) და ნაჩვენებია მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდში კომპიუტერული მხარდაჭერის არსი(იხ.2.4.2). მეოთხე ნაწილი მთავრდება მაგალითების დემონსტრირებით.

მაღლივნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდი, რომელიც აქამდე იდეის დონეზე არსებობდა, შევეცადეთ დაგვეყვანა პოზიციური ამოცანების ამოხსნის დონეზე და გამოგვეკვეთა ამ მეთოდის უპირატესობა დაგეგმილების სხვა მეთოდებთან შედარებით. საქმე ისაა, რომ ნიშნულებიანი გეგმილების კლასიკური მეთოდი, რომელიც უხსოვარი დროიდან გამოიყენება გრაფიკულ ამოცანებში, ერთი მნიშვნელოვანი ხარვეზით ხასიათდება: ყველა გამოსახულება თავს იყრის ერთ გეგმილთა სიბრტყეზე და ამ გზით მიღებული ნახაზი რამდენადმე ბუნდოვანია. ძირითადი ნახაზის განტვირთვის მცდელობა პირველი არ არის, მაგალითისათვის შეიძლება დავასახელოთ პროფ. ა. შავგულიძის “ნიშნულებიანი გეგმილების მეთოდის ახალი ინტერპრეტაცია“, რომელსაც სწორედ ძირითადი ნახაზის განტვირთვა აქვს მიზნად დასახული. რაც შეეხება წინამდებარე ნაშრომში მიღებულ შედეგებს, ისინი შესაძლოა მივიჩნიოთ წინგადადგმულ ნაბიჯად, როგორც თეორიული საფუძველის, ასევე პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. რაც შეეხება კომპიუტერულ მხარდაჭერას, ჩვენს ნაშრომში განხილული მაგალითები ერთგვარი სიახლეა მეცნიერებისა და პრაქტიკისათვის. ზემოაღნიშნულიდან შეიძლება დავასკვნათ:

სივრცის გეომეტრიული მოდელირება მსოფლიო მეცნიერებისათვის შედარებით ახალი დარგია. საქართველოში იგი გასული საუკუნის 60-იანი წლების დასაწყისიდან იღებს სათავეს(პროფ. ი. ჯაფარიძე) და სადღეისოდ ყოველი ახალი პრობლემის კვლევა, რომელიც სინთეზური გეომეტრიის ამ

საინტერესო განშტოებასთან არის დაკავშირებული, თავისუფლად ითვლება მეცნიერულ სიახლედ, რაც შეეხება სადისერტაციო ნაშრომს, რომელიც ამ პრობლემატიკის ნაწილს წარმოადგენს, მისთვის დამახასიათებელია a-5 მოდელის ბაზაზე შექმნილი დაგეგმილების ახალი მეთოდის გაღრმავებული შესწავლა, სამთო-გეოლოგიური საინჟინრო პრაქტიკის გრაფიკული ამოცანების ამოხსნაში ამ მეთოდის გამოყენების თვალსაზრისით. ამასთან ნაშრომში განხილული ამოცანები შეეხება ევკლიდეს როგორც სამგანზომილებიან (R3), ასევე ოთხგანზომილებიან (R4) სივრცეებს. ყოველივე ამას ემატება ისიც, რომ გრაფიკული ამოცანების ამოხსნები განხორციელებულია კომპიუტერული მხარდაჭერით, რაც აგრეთვე არის სიახლე. სიახლეთა ჩამონათვალში აღსანიშნავია აგრეთვე ის, რომ ნაშრომის კონსტრუქციაში გათვალისწინებულია უმაღლესი სკოლის პედაგოგიკისა და პედაგოგიური ფსიქოლოგიის მოთხოვნები, რაც სასწავლო პროცესში მისი გამოყენების ფართო შესაძლებლობებს იძლევა.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Джапаридзе И.С. О некоторых направлениях исследований в области геометрического моделирования. – В кн.: Начертательная геометрия и её приложения, вып. I, Саратов, 1976 с. 71-77;
2. Джапаридзе И.С. Связь плоских моделей пространства с методами начертательной геометрии.- В сб.: Труды ГПИ, 1964, №3, (96) с. 55;
Джапаридзе И.С. Независимые плоскостные модели 4-мерного пространства.- сб.: Труды ГПИ, 1965, №1, (99) с. 31;
3. Джапаридзе И.С. Основные плоскостные модели пространства и их производные.- В.сб.: Труды ГПИ, 1964, №3, (96), с. 37;
4. Джапаридзе И.С. О погружении геометрических соответствий в модели многомерных пространств.- сб.: Прикладная геометрия и инженерная графика, вып. 6, Киев, 1968, с. 13;
5. Джапаридзе И.С. Изображение некоторых гиперповерхностей в бинарных моделях R_4 . – В сб.: Труды ГПИ, 1970, №5, (140), с. 52;
6. Начертательная геометрия : Сб. Научных трудов ГПИ, Тбилиси, 1981, №1 (233);
7. Джапаридзе И.С. Начертательная геометрия в свете геометрического моделирования, изд. Ганатлеба, Тбилиси, 1983;
8. Шавгулидзе А.С. – Проекция с высотными отметками изд. ГПИ, Тбилиси, 1981;
9. Шавгулидзе А.С. – Разработка одной интерпретации метода проекций с отметками для R_3 и R_4 , изд. “Технический Университет” , Тбилиси, 2001;
10. Шавгулидзе А.С. – Мирозренческие вопросы в теоретических основах прикладной геометрии, изд. “Технический Университет” , Тбилиси, 2001 .

11. ა. შავგულიძე, საინჟინრო გრაფიკის სპეციალური კურსი, გამომცემლობა „განათლება“, თბილისი, 1977;
12. ა. შავგულიძე. მხაზველობითი გეომეტრიის მოკლე კურსი. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2003;
13. ა. შავგულიძე. ტექნიკური ხაზვის პროპედევტიკური კურსი. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2005
14. ა. შავგულიძე, ნ. ნიკვაშვილი. გრაფიკული დისციპლინების პლანიმეტრიული და სტერეომეტრიული ამოცანების გეომეტრიული საფუძვლები. თბილისი, „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2004
15. Глаголев Н. , Проективная геометрия, 1963
16. Кокстер Х. С. М. Действительная проективная плоскость. М., Гос. изд. Физико-математической литературы. 1959
17. გ. ვაჩნაძე. მხაზველობითი გეომეტრიის კურსი. თბილისი, „განათლება“, 1979
18. Вернер Зоммер. Auto CAD 2008. Руководство конструктора. Изд-во „Бином“, М., 2008.,
19. Финкельштейн Э. Auto CAD 2007 и Auto CAD LT 2007. Библия пользователя. „диалектика“, М., 2007.,
20. Шам Тику, Эффективная работа: Auto CAD , „Питер“, 2002.