საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

დავით მეტრეველი

დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2016

საავტორო უფლება © 2016 წელი, მეტრეველი დავითი

თბილისი
2016 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით მეტრეველი დავითის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფესორი ლევან გიორგაშვილი

რეცენზენტი: ________________

რეცენზენტი: ________________

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. ლევან გიორგაშვილი

რეცენზენტები: ___________________________

____

დაცვა შედგება ---------- წლის „--------„ --------------------, ----- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის --------------------------------------
-------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე,
კორპუსი ------, აუდიტორია ----------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2016

ავტორი: მეტრეველი დავით

დასახელება: „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში“

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

დავით მეტრეველის სადისერტაციო ნაშრომი „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში“ ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სტსტიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესწავლას ორკომპონენტიანი დრეკადი ნარევებისაგან შედგენილი სხეულებისათვის.

თანამედროვე ტექნოლოგიურ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასალებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამოდენიმე დრეკადი მასალისაგან დამზადებული ნარევები და სხვა. ასეთი მასალების მექანიკის პრაქტიკული ამოცანების გამოკვლევას ბუნებრივად მივყავართ ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობამდე, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს უფრო ზუსტად აღვწეროთ ექსპერიმენტის დროს მიმდინარე რეალური პროცესები. ბუნებრივია ასეთი მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური თერმული და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით, თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. დრეკადი ნარევისათვის (მყარი სხეული - მყარ სხეულთან) პირველი მათემატიკური მოდელი, ე.წ. დიფუზიური მოდელი, ააგეს ა.გრინმა და ტ.სტილმა 1966 წელს. იმავე წელს მათ მიერ აგებულია დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის ერთტემპერატურიანი თეორიის დიფუზიური მოდელი. ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელი მარცვლოვანი, ბოჭკოვანი და ფენოვანი სტრუქტურების მქონე კომპოზიტებისათვის 1984 წელს აგებულ იქნა ლ.ხოროშუნისა და ნ.სოლტანოვის მიერ. უნდა აღინიშნოს, რომ კომპოზიტური მასალებისათვის მათემატიკური მოდელები სხვადასხვა ტემპერატურული ველების გათვალისწინებით გამოირჩევიან თავიანთი რთული სტრუქტურით და მათი გამოკვლევა თანამედროვე მძლავრი მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდ ძალისხმევას. ამდენად მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავიანთი მეცნიერული ღირებულებებითა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ფრიად აქტუალურია.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ორკომპონენტიანი დრეკად ნარევთა და ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა (როცა ნარევში შემავალი კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) თეორიის სტატიკის არაკლასიკური სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების შესწავლა კონკრეტული არეების შემთხვევაში, კერძოდ ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, ნახევარ სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული

ღრუთი და ნახევარ სივრცისათვის. შესწავლილია გრინის ფორმულების გამოყენებით ყველა ამოცანისათვის ერთადერთობის თეორემები.

ერთადერთობის საკითხის გაანალიზებისას, ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში დისერტაციის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან შედეგს წარმოადგენს გარე ამოცანების შემთხვევაში დადგენილი სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნის ერთადერთობას.

სადისერტაციო ნაშრომში გამოყენებულია დრეკადობის და თერმოდრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდი ფურიეს მეთოდი, რომელიც ეფუძნება მოცემული ძირითადი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ცვლადთა განცალების მეთოდით გარკვეულ მრუდწირულ კორდინატთა სისტემის მიმართ. ამ მეთოდით სასაზღვრო ამოცანების შესწავლისას მთელი სიძნელე გადატანილია სასაზღვრო პირობების დაკმაყიფილებაში. დისერტაციაში მიღებულია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის (როდესაც კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა, რომელიც გამოსახულია ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით. მიღებული წარმოდგენა საშუალებას იძლევა, როგორც გადაადგილების ვექტორი ასევე ძაბვის ვექტორი წარმოდგენილი იქნას ფურიელაპლასის მწკრივად ერთსა და იმავე ორთონორმირებულ ვექტორთა სრულ სისტემაში, რაც ამარტივებს სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებას. ამოცანების ამონახსნები წარმოდგენილი არიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივების სახით, რაც მეტად ალგორითმულია რიცხვითი შედეგების მისაღებად.

დისერტაციაში შესწავლილია ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა თეორიის, ასევე ორტემპერატურიან დრეკდ ნარევთა თეორიის სტსტიკის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები ნახევარ სივრცისათვის. მიგნებულია ამოცანების ამოხსნის მარტივი გზა, რომელიც დაკავშირებულია ჰარმონიული ფუნქციებისათვის დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამოხსნებთან ნახევარ სივრცის შემთხვევაში. ამოცანის ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.

ნაშრომში შესწავლილია ასევე სასაზღვრო ამოცანები მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი, ასევე ნახევარ სივრცის ამოცანა ბირთვული ღრუთი. ორივე ამოცანის შესწავლა დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე. ნაჩვენებია, რომ ეს სისტემები არიან კვაზირეგულარულნი. ამოცანების ამოხსნები მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივების სახით.

SUMMARY

David Metreveli's dissertation work “The Solution of Laundry conditions of Elasticity and thermoelasticity theory, in the case of specific areas”, is dedicated to the Mathematical Physics, in particular to the study of the tasks of three-dimensional boundary and boundary-contact of elasticity and thermoelasticity theory statistics. They are designed for flexible two-component mixtures which consist of elastic bodies.

In modern technological processes complex structural flexible composite materials are often used as well as composited structures of materially different physical properties.

In such composited materials and structures class belong to: the hemitropul elastic materials, the mixtures which are made of two or more flexible materials and etc. The practical examination of such materials mechanics naturally leads us to the necessity of creation of such mathematical model, which gives us the opportunity to describe the current real processes more accurately at the experiment period. In order to set the appropriate mechanical thermal and other physical properties, naturally the creation of such models, also their researches and analysis have great theoretical and practical importance. For elastic mixture (hard body – with hard body) the first mathematical model – so called Diffusion Model- was constructed by A. Agarin and T. Stil in 1966. On the same year they had also constructed Diffusion Model of the theory of elastic mixtures thermoelasticity of the one temperature. The mathematical model of the two temperature elastic mixtures thermoelasticity linear theory for the composites of granular fiber and layered structures was constructed by L. Khoroshurin and N.Soltanov in 1984. It must be mentioned that according the different temperature fields, the mathematical models for the compositive materials are distinguished of it's complex structure. Using mathematical methods their examination needs the hard work. That is why we think that the obtained results in this direction are the most actual according it's scientific value and practical usage.

The main aim of the dissertation work is the following: the study of not classical three-dimensional boundary and contact problems, of the theory statistics of two component elastic mixtures and two temperature elastic mixtures (when the mix consisting private movies are equal) in the case of concrete areas. In particular this is for the core of the whole space with nuclear hole, for the whole space with not inter crossing nuclear hole and for half space. Using Grin's formulas it is explored the sameness theories for all the problems.

While analyzing the issue of the sameness in the case of the solving problems of the statistics theory of two temperature elastic mixtures the most important result of the dissertation work is the following: in external tasks case the existence of sufficient conditions in infinity area of established structural and asymptotic limits, which provide the sameness of searched solution.

In dissertation work it is used the Furie's method, which is one of the general methods of the three-dimensional problems of elastic and thermoelasticity theory. That is based on the following: on the solution of the given main differential equation, against the defined curved coordinate system, with variables separation. While studying boundary problems using this method the the whole difficulty is moved to the satisfaction of board conditions. The dissertation has obtained the general submission formula of the solution the differential equations system of the statistic theory of two temperature elastic mixtures (when the private movies are equal). They are featured through four harmonic and one metaharmonic functions. The obtained submission gives us the opportunity for both the displacement vector and the stress vector to be represented in one and the same orthonormal vector full system of vector in Furie's laplace rows. The above mentioned simplifies the satisfaction of boundary conditions. The solutions of the problem are represented in the forms of absolutely equally converging rows. That is most algoritmical to receive numerical results.
The Dissertation work obtains the theory of two component elastic mixtures, also not classical boundary solutions theory statistics of two temperature elastic mixtures for half space. There is found the simple way of the solution of the problem. This is related to the Direkhle's and Neiman's solutions of the problems in the case of half space. Through boundary vector functions we obtained the solutions of the problems in Squares.
In the thesis we also obtained the board problems for the the whole space with two not crossing nuclear hollow and the problem of half space with nuclear hollow. The both problem studying are reduced to the infinite system research of linear algebraic equations. It is shown that these systems are kvazregular. The solutions of the problems are obtained absolutely in equally converging rows.

შინაარსი

შესავალი

დრეკადობის კლასიკური თეორია არის მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის უძრავ ან მოძრავ მდგომარეობაში მყოფ დრეკად სხეულზე გარე ძალების მოქმედების შედეგად გამოწვეულ გადაადგილებებს, დეფორმაციებს და ძაბვებს. მყარი დეფორმადი სხეულების მექანიკაში ამ თეორიას საპატიო ადგილი უკავია.

დრეკადობის თეორია, როგორც მყარი დეფორმადი სხეულების მექანიკის დამოუკიდებელი ნაწილი შეიქმნა ისეთი მეცნიერების ძალისხმევით, როგორებიც იყვნენ კოში, პუასონი, ლაგრანჟი, სენ-ვენანი, კირხოფი, ბეტი და სხვა. 1852 წელს ლამემ შექმნა დრეკადობის თეორიის პირველი სახელმძღვანელო, რომელსაც არ დაუკარგავს თავისი მნიშვნელობა და ამ დარგში დღესაც ითვლება კლასიკურ სახელმძღვანელოდ. დრეკადობის თეორიამ, რომელიც ვითარდებოდა მეცნიერების მიერ, მეოცე საუკუნის 20-30 წლებამდე შეინარჩუნა თავისი კლასიკური ფორმა. ამ წლებში შეიქმნა მყარი დეფორმადი სხეულების მექანიკის ახალი მიმართულებები: პლასტიკურობის თეორია, თერმოდრეკადობა, დრეკადობის მომენტური თეორია და სხვა.

რამდენადაც სხვადასხვა სახის საინჟინრო კონსტრუქციები მუშაობენ საკმარისად მაღალ ტემპერატურებზე, მკვლევართა მთელი ყურადღება გადატანილი იქნა ტემპერატურული დაძაბულობის თეორიის შესწავლაზე. ამასთან დაკავშირებით შეიქმნა ახალი დარგი - თერმოდრეკადობა, რომელიც წარმოადგენს კლასიკური დრეკადობის თეორიის და სითბოგამტარობის თეორიის სინთეზს, ენერგეტიკული დანადგარების, ბირთვული რეაქტორების, თვითმფრინავმშენებლობისა და რაკეტმშენებლობის ტექნიკის განვითარების სწრაფმა ტემპმა განაპირობა თერმოდრეკადობის თეორიის მძაფრი ზრდა.

კლასიკური დრეკადობის თეორიის მათემატიკური მოდელი არ ითვალისწინებს ტემპერატურულ ცვლილებებს, მაგრამ სხეულის დეფორმაციას თან სდევს ტემპერატურის ცვლილება, ხოლო ტემპერატურის ცვლილებას, მაშინაც კი, როცა სხეულზე არ მოქმედებს გარე ძალები, თან სდევს მისი

დეფორმაცია. ტემპერატურული ველისა და დეფორმაციის ველის სხვადასხვა პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ დრეკადობის თეორიის სხვადასხვა მოდელს: თერმოდრეკადობის არაბმული თეორია, თერმოდრეკადობის ბმული თეორია, განზოგადებული თერმოდრეკადობა და სხვა.

უკანასკნელი ორმოცი წლის განმავლობაში ინტენსიურად დაიწყო გამოკვლევები ტემპერატურულ ძაბვათა თეორიასთან შედარებით უფრო ზოგადბმულ თერმოდრეკადობის თეორიაში, სადაც გათვალისწინებულია დეფორმაციისა და ტემპერატურული ველების ურთიერთქმედება. არსებობს კლასიკური თერმოდრეკადობის თეორიის ორი სხვადასხვა განზოგადება: გრინ-ლინდსეის და ლორდ- შულმანის. ამასთან პირველს ტემპერატურული პროცესისათვის შემოაქვს რელაქსაციის ორი კოეფიციენტი, ხოლო მეორეს კი - ერთი. რელაქსაციის მუდმივობის შემოტანა საგრძნობლად ართულებს ძირითად დეფრენციალურ განტოლებათა სისტემებს, რის გამოც საკმარისად რთულდება განტოლებათა ამოცანების შესწავლა. ამ მიმართულებით უნდა აღინიშნოს თ. ბურჭულაძის. ლ. გიორგაშვილის, კ. დაფერმოსის, ლ. იენტჩის, დ. ნატროშვილის, ვ. ნოვაცკის, ი. პოდსტრიგაჩის და სხვათა შრომები.

თანამედროვე ტექნოლოგიურ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასალებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამოდენიმე დრეკადი მასალისგან დამზადებული მასალები და სხვა. ასეთი მასალების მექანიკის პრაქტიკული ამოცანების გამოკვლევას ბუნებრივად მივყავართ ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობამდე, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს უფრო ზუსტად აღვწეროთ ექსპერიმენტის დროს მიმდინარე რეალური პროცესები. ბუნებრივია ასეთი მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. კერძოდ, ფრიად დიდი

თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა და ადექვატური გამოთვლი-თი ალგორითმების შექმნა პრაქტიკული გამოყენების მიზნით. ასეთი ტიპის მასალებისთვის მათემატიკური მოდელების აგება სათავეს იღებს გასული საუკუნის სამოციანი წლებიდან, კ. ტრუსდელმა და რ. ტუპინმა თავიანთ შრომებში პირველად ჩამოაყალიბეს რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი სხეულებისთვის ახალი მოდელის ძირითადი მექანიკური პრინციპები და საფუძველი ჩაუყარეს დრეკადი სხეულების ნარევთა კონტი-ნუალურ თეორიას. შემდგომში ეს თეორია განზოგადდა და განვითარდა სხვადასხვა მიმართულებით. კინემატიკური და თერმოდინამიკური პრინცი-პების საფუძველზე შეიქმნა შემდეგი ტიპის ორკომპონენტიან ნარევთა თეორია: სითხე - სითხე, სითხე-მყარი სხეული, მყარი სხეული- მყარი სხეული.

დრეკადი ნარევისათვის (მყარი სხეული - მყარ სხეულთან) პირველი მათემატიკური მოდელი, ე.წ. დიფუზიური მოდელი, ააგეს ა. გრინმა და ტ. სტილმა 1966 წელს. ამ მოდელში კომპონენტებს შორის ურთიერთქმედების ძალა დამოკიდებულია კერძო გადაადგილებების სიჩქარეთა სხვაობაზე. იმავე წელს მათ მიერ აგებულია დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის ერთტემპერატურიანი თეორიის დიფუზიური მოდელი.

მე-20 საუკუნის ბოლოს მნიშვნელოვანი გამოკვლევები მიეძღვნა დრე-კად ნარევთა ფიზიკური და მექანიკური თვისებების, ტემპერატურული ველებისა და დაძაბული მდგომარეობის შესწავლას. ამ გამოკვლევათა შედე-გებმა პრაქტიკული გამოყენება ჰპოვა გათვლებში არაერთგვაროვანი მასალე-ბის კონსტრუქციების მდგრადობაზე, მათი დამზადების ტექნოლოგიური რეჟიმის შემუშავებაში, აგრეთვე ახალი კომპოზიტური მასალების და ოპტიმალური სტრუქტურის შერჩევაში.

კომპოზიტური მასალებისგან დამზადებული კონსტრუქციის ელემენტებში, მათი არათანაბარი გაცხელების პირობებში წარმოშობილი თერმოდრეკადი დაძაბულობის შესწავლა დაკავშირებულია ისეთი მათემატიკური მოდელის შესწავლასთან, რომელიც აღწერს კომპოზიტის სითბოგამტარებლობას და მექანიკურ ყოფაქცევას მიკრომოცულობაში. ამასთან ერთად გასათვალისწინებელია, რომ კომპოზიტური მასალების კომპონენტების მექანიკურ თვისებებს შორის განსხვავებები იწვევს მათი ტემპერატურების სხვადასხვაობას. ასეთი ეფექტის ტიპიური მაგალითია ელექტრო და რადიომოწყობილობებში ფართოდ გავრცელებულ მაგნიტოდიელექტრიკებში ტემპერატურული ველი. აქედან გამომდინარე გაჩნდა აუცილებლობა ასეთი ტიპის კომპოზიტური მასალებისთვის აგებულიყო ისეთი მათემატიკური მოდელი, რომელიც აღწერს ორტემპერატურიან ველს და მათ მიერ გამოწვეულ თერმოდრეკად ძაბვებს.

ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელი მარცვლოვანი, ბოჭკოვანი და ფენოვანი სტრუქტურების მქონე კომპოზიტებისათვის 1984 წელს აგებულ იქნა ლ. ხოროშუნისა და ნ. სოლტანოვის მიერ.

ჩვეულებრივ, სხეულში მიმდინარე პროცესების შესწავლა მიიყვანება შესაბამისი მათემატიკური მოდელისათვის, რომელიც კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით აღიწერება, სასაზღვრო, შერეული ტიპის და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევაზე.

თეორიული თვალსაზრისით დიდი ინტერესის საგანს წარმოადგენს აგრეთვე შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების (ამოხსნათა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) გამოკვლევა და ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნა პრაქტიკული გამოყენების მიზნით.

სამეცნიერო ლიტერატურაში ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა ორტემპერატურიანი წრფივი თეორიის სამგანზომილებიანი და ბრტყელი სასაზღვრო, შერეული და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები ჯერჯერობით ნაკლებადაა შესწავლილი. არ არის შესწავლილი იგივე ამოცანები ბზარის

ტიპის დეფექტების შემცველი სხეულებისათვის. ამ უკანასკნელებში განსაკუთრებით საინტერესოა დადგენილი იქნეს ბზარის ბოლოების მახლობლობაში ძაბვების კონცენტრაციის ზონები და შესაბამისი სინგულარობის მაჩვენებელი. სინგულარული ძაბვების წარმოშობა მოსალოდნელია აგრეთვე შერეული ამოცანების შემთხვევაშიც იმ წერტილების მიდამოში, სადაც იცვლება სასაზღვრო პირობების ტიპი. ეს სინგულარობები ხშირად დამოკიდებულია დრეკად და სხვა ფიზიკურ პარამეტრებზე და მათი ეფექტურად გამოსათვლელი ფორმულების მიღება მეტად მნიშვნელოვანია, როგორც თეორიული, ასევე პრაქტიკული თვალსაზრისით.

ტექნოლოგიური და ინდუსტრიული განვითარების თნამედროვე დონემ, აგრეთვე ბიოლოგიაში და მედიცინაში მიღწეულმა პროგრესმა, არსებითად განაპირობა რთული მიკროსტრუქტურის მქონე, როგორც უწყვეტ ტანთა მექანიკაში დრეკადი კომპოზიტების, ასევე ჰიდროდინამიკაში ბლანტი სითხეების დაზუსტებული მათემატიკური მოდელების შესწავლა. ამ მოდელებით აღიწერება რთული შინაგანი ბმის კომპოზიტური სხეულები, რომელთა მიკროსტრუქტურა ისეთია, რომ თითოეულ მატერიალურ ნაწილაკს გააჩნია მექანიკური თავისუფლების ექვსი ხარისხი, სამი გადაადგილების კომპონენტი (მყარი სხეულის შემთხვევაში) ან სამი სიჩქარის კომპონენტი (სითხის შემთხვევაში) და მათგან დამოუკიდებული სამი მიკრობრუნვის კომპონენტი. ასეთ სხეულებს (სითხეებს) მიკროპოლარულ სხეულებს (სითხეებს) უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ ბლანტ არაკუმშვად სითხეთა კლასიკური თეორია უშვებს თავისუფლების სამ ხარისხს, სიჩქარის ვექტორის სამი კომპონენტი. ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა ორტემპერატურიანი თეორია უშვებს თავისუფლების რვა ხარისხს, კერძო გადაადგილებების ვექტორების ექვს და ტემპერატურის ორ კომპონენტს.

როგორც ექსპერიმენტულმა გამოკვლევებმა დაადასტურა მიკროპოლარულ სხეულებს არსებითად განსხვავებული მექანიკური თვისებები აღმოაჩნდათ. უწყვეტ ტანთა მექანიკის არაცენტრულად სიმეტრიულ მიკროპოლარულ სხეულებში, რომელთაც ჰემიტროპულ სხეულებს უწოდებენ,

შესაძლებელია მარცხენა და მარჯვენა მოგეზულობის დრეკადი ტალღების ერთდროულად გავრცელება. გარდა ამისა, ღერძული გაჭიმვა იწვევს გრეხვის ეფექტს, რაც არ გვხვდება კლასიკურ თეორიაში. აღმოჩნდა, რომ ჰემიტროპული თვისებები შეიძლება გამომჟღავნდეს, როგორც მიკრო-ატომურ - მოლეკულურ დონეზე ასევე მაკრო დონეზე (სპირალური, შრუპის ანუ სჭვალის, ბოჭკოვანი და თხელი მემბრანული ტიპის ჩართვების შემცველი კომპოზიტები, ნანო მასალების და სხვა).

უნდა აღინიშნოს, რომ კომპოზიტური მასალებისათვის მათემატიკური მოდელები სხვადასხვა ტემპერატურული ველების გათვალისწინებით გამოირჩევიან თავიანთი რთული სტრუქტურით და მათი გამოკვლევა თანამედრომე მძლავრი მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდ ძალისხმევას. ამდენად მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავიანთი მეცნიერული ღირებულებებითა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ფრიად აქტუალური იქნება.

საზოგადოდ სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნა საკმარისად რთულია. ზუსტი ანალიზური ამონახსნები მიიღება ზოგიერთ კონკრეტულ შემთხვევებში. მაგალითად, თუ ვიხილავთ ამოცანას სპეციალური კონფიგურაციის მქონე სხეულებისათვის - ნახევარსივრცე, ბირთვი, ზოგიერთი ბრუნვითი სხეულებისთვის და სხვა. არსებობს დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდი: ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდი, ვარიაციული მეთოდი, პოტენციალთა მეთოდი და სხვა.

ვარიაციული და ფუნქციონალური ანალიზის მეთოდი გამოირჩევა დიდი ზოგადობით, რომელიც მოიცავს იმ შემთხვევასაც, როცა წონასწორობის განტოლებებში შემავალი კოეფიციენტები ცვალებადია და სასაზღვრო ზედაპირები საკმარისად რთული კონფიგურაციისაა. ამ მეთოდით სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა საკმარისი სიზუსტით გადმოცემულია გ. ფიკერას, კ. დაფერმოსის და სხვათა შრომებში.

მიუხედავად იმისა, რომ პოტენციალთა და მრავალ განზომილებიანი სიგნგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, რომელიც წარმოადგენს ჰარმონიულ პოტენციალთა და ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის იდეის უშუალო განზოგადებას, ჩამორჩება პირველ მიმართულებას ზოგადობაში, მაინც ითვლება ერთ-ერთ ძლიერ მეთოდად, რომლის საშუალებითაც შეისწავლება დრეკადობის თეორიის და თერმოდრეკადობის თეორიის მნიშვნელოვანი სასაზღვრო ამოცანები. ამ ამოცანების ამოხსნის ერთადერთობისა და არსებობის თეორემები გადმოცემულია შემდეგ ავტორთა მონოგრაფიებში: ვ. კუპრაძე, თ. გეგელია, მ. ბაშელეიშვილი და თ. ბურჭულაძე - „დრეკადიბისა და თერმოდრეკადობის სამგანზომილებიანი ამოცანები" , ვ. ნოვაცკის - „დრეკადობის თეორია ", ა. ლურიე - „დრეკადობის თეორია", ასევე თ. ბურჭულაძის, თ. გეგელიას მ. ბაშელეიშვილის, ლ. გიორგაშვილის, შ. ზაზაშვილის, დ. ნატროშვილის, ო. ჭკადუას, რ. გაჩეჩილაძის და სხვათა ნაშრომებში.

დრეკადობის და თერმოდრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია ფურიეს მეთოდი, რომელიც ეფუძნება მოცემული ძირითადი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ცვლადთა განცალების მეთოდით გარკვეულ მრუდწირულ კორდინატთა სისტემის მიმართ. დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის სტატიკისა და სტაციონარული რხევის შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ამოხსნები წარმოიდგინებიან ჰარმონიული, ბიჰარმონიული (სტატიკის შემთხვევაში) და მეტაჰარმონიული (რხევის შემთხვევაში) ფუნქციების საშუალებით. ამ მიმართულებით დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში საყოველთაოდაა ცნობილი უ. კელვინის, ჟ.ადამარის, ჟ. ბუსინესკის, მ. პაპკოვიჩის, გ. ნეიბერის, ე. ტრეფტცის, მ. სლობოდიანსკის, კოლოსოვ - მუსხელიშვილის და სხვათა შრომები, რომლებშიც გადაადგილების ვექტორი წარმოდგენილია ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქიებით. აღნიშნული წარმოდგენები საშუალებას იძლევა განვავითა-

როთ ცვლადთა განცალების მეთოდი (გარკვეულ მრუდწირულ კორდინატთა სისტემის მიმართ) დრეკადობის თეორიაში კანონიკური ზედაპირებით შემოსაზღვრული არეების შემთხვევაში. ამ მეთოდით სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მთელი სირთულე გადატანილია სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებაში. სასაზღვრო პირობების დაკმაყოპილების ერთ-ერთი მიდგომა მოცემულია ა. ულიტკოს, პ. მორსის და ჰ. ფეშბახის, მ. ბაშელეიშვილის ლ. გიორგაშვილის, დ. ნატროშვილის და სხვათა შრომებში.

როცა არის საზღვარს სიბრტყეები წარმოადგენს, მაშინ ასეთი არეებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ეფექტური ამოხსნები მიიღება სიმეტრიის პრინციპის გამოყენებით, რომელიც დრეკადობის თეორიაში პირველად დაამტკიცა ე. ობოლაშვილმა. ვ. კუპრაძისა და თ. ბურჭულაძის მიერ შესწავლილია თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანები $\pi/2^n$ ($n \geq 0$ - მთელი რიცხვია) ხაზოვანი კუთხის შემცველი ორწახნაგა კუთხეებისათვის. ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში.

ზემოთ აღნიშნული პაპკოვიჩ-ნეიბერის, ბუსინესკის, სლობოდიანსკის წარმოდგენები საშუალებას იძლევიან ამოვხსნათ სასაზღვრო ამოცანები ისეთი არეებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრულნი არიან სიბრტყეებით. ტრეფტცის წარმოდგენა მოსახერხებელია სფერული ზედაპირებით შემოსაზღვრული არეებისათვის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესასწავლად, თუმცა სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების ალგორითმი საკმარისად რთულია. 1980 წელს პრფესორ ლ. გიორგაშვილმა მიიღო ლამეს დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ისეთი წარმოდგენა, რომელიც საშუალებას იძლევა, როგორც გადაადგილების ვექტორი, ასევე ძაბვის ვექტორი წარმოდგენილი იქნას ფურიე-ლაპლასის მწკრივად, ერთი და იმავე ორთონორმირებულ ვექტორთა სრულ სისტემაში. ასეთ შემთხვევაში სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესწავლა დაიყვანა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევაზე. თუ სასაზღვრო პირობებზე მოვითხოვთ სიგლუვის გარკვეულ საკმარის პირობებს, მაშინ სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები მიიღება

აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით. სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სტაციონარული რხევის შემთხვევაში შეისწავლება ანალოგიურად სტატიკის ამოცანებისა. ამ ამოცანების ამოხსნის ერთადერთობის თეორემების შესწავლა ხდება გრინის ფორმულების გამოყენებით. შევნიშროთ, რომ როცა ვიხილავთ ერთადერთობის თეორემებს გარე ამოცანებისათვის, საჭიროა სტატიკის შემთხვევაში გადაადგილების ვექტორს და მის პირველი რიგის წარმოებულებს უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში მოვთხოვოთ ქრობის გარკვეული პირობები, ხოლო სტაციონარული რხევის შემთხვევაში კი გადაადგილების ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში უნდა აკმაყოფილებდეს ეგრეთწოდებულ ზომერფელდ-კუპრაძის გამოსხივების პირობას, 1997 წელს ლ.გიორგაშვილმა (იხ. Georgian Math. J.,4 , N5 (1997), 421 -438) ზომერფელდ-კუპრაძის გამოსხივების პირობების გარეშე დაამტკიცა თერმოდრეკადობის თეორიის სტაციონარული რხევის სასაზღვრო ამოცანების ერთადერთობის თეორემები გარე არისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი თავისა და ლიტერატურის ჩამონათვალისაგან.

შესავალში გადმოცემულია დრეკადობის კლასიკური თეორიიდან დრეკად ნარევთა თეორიამდე განვითარების მოკლე ისტორიული ფაქტები. საუბარია სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის ფურიეს მეთოდზე და მის უპირატესობაზე სხვადასხვა კანონიკური ზედაპირებით შემოსაზღვრული არეების შემთხვევაში.

პირველ თავში მოყვანილია ზოგიერთი დამხმარე თეორემა და ფორმულა. კერძოდ მოყვანილია, თუ რა სახე აქვს ორ კომპონენტიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას, ასევე ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისიტემას, როდესაც ნარევში მონაწილე დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილება ერთმანეთის

ტოლია. ამავე თავში მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა, რომელიც გამოსახულია ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით.

მეორე თავში, პირველ თავში მიღებული ზოგადი ამოხსნის წარმოდგენის ფორმულის საშუალებით, ამოხსნილია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემისათვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები ბირთვისათვის და უსასრულო სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. კერძოდ შესწავლილია შემდეგი ამოცანები:

1) როდესაც საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელის, ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელის და ტემპერატურული ცვლილების ან ტემპერატურული ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები.
2) როდესაც საზღვარზე მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელის, გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელის და ტემპერატურული ცვლილების ან ტემპერატურული ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები.
3) როდესაც საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელის, ბრუნვის ვექტორის მხები მდგენელის და ტემპერატურული ცვლილების ან ტემპერატურული ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები. დამტკიცებულია ამ ამოცანების ამოხსნის ერთადერთობის თეორემები. ამოცანების ამოხსნები მიღებულია ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით. შესწავლილია ამ მწკრივების კრებადობის საკითხი.

მესამე თავში შესაწავლილია ორკომპონენტიანი დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები ნახევარსივრცისათვის, როდესაც ნახევარსივრცის საზღვარზე მოცემულია:

1) კერძო გადაადგილებების ნორმალური მდგენელებისა და ძაბვის ვექტორების მხები მდგენელების ზღვრული მნიშვნელობები.
2) კერძო ძაბვების ნორმალრი მდგენელებისა და კერძო გადაადგილებების მხები მდგენელების ზღვრული მნიშვნელობები.

3) კერძო გადაადგილებების ნორმალური მდგენელებისა და ბრუნვის ვექ-ტორის მხები მდგენელების ზღვრული მნიშვნელობები. ასევე შესწავლილია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის (როდესაც კერძო გადაად-გილებები ერთმანეთის ტოლია) სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები, როდესაც ნახევარსივრცის საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ნორმალური მდგენელის, ბრუნვის ვექტორის მხები მდგენელის და ტემპერატურული ცვლილებებისა ან ტემპერატურული ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები. გამოყენებულია ამ ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდი, რომელიც დაკავში-რებულია ჰარმონიული ფუნქციებისათვის ნახევარსივრცის შემთხვევაში დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამოხსნასთან. ამ თავში შესწავლილი ამოცანების ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.

მეოთხე თავში შესწავლილია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის (როდესაც კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) სტატი-კის სასაზღვრო ამოცანები მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკ-ვეთი ბირთვული ღრუთი, როდესაც სფერულ ზედაპირებზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელის, ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელისა და ტემპერატურული ცვლილებების ან სითბური ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები. ამ თავში შესწავლილია ასევე ნახევარ-სივრცის სასაზღვრო ამოცანები ბირთვული ღრუთი, როცა ნახევარ-სივრცისა და ბირთვის საზღვარზე მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელის, გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელისა და ტემპერატურული ცვლილებების ან სითბური ნაკადების ზღვრული მნიშვ-ნელობები. ამ ამოცანების ამოხსნები დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტო-ლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე. ნაჩვენებია, რომ ეს უსასრულო სისტემები არიან კვაზი რეგულარულნი. ამოცანების ამოხსნები მიღებუ-ლია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივების სახით.

თავი I. ძირითდი განტოლებები და მათი ამონახსნების წარმოდგენები

§1. ზოგიერთი აღნიშვნა და ტერმინი

აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^n$ სიმბოლოთი ევკლიდეს n- განზომილებიანი სივრცე. ვთქვათ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$-თი ავღნიშნოთ Ω არის საზღვარი, $\overline{\Omega}$-თი კი Ω არის ჩაკეტვა, ე.ი. $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$.

განსაზღვრება 1.1. ნამდვილ, უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე Ω არეში აღვნიშნოთ $C(\Omega)$- თი. $C^k(\Omega)$-თი, სადაც k მთელი დადებით რიცხვია, ავღნიშნოთ Ω არეზე განსაზღვრულ იმ ნამდვილ ფუნქციათა სიმრავლე რომლებსაც ამ არეში გააჩნიათ უწყვეტი წარმოებული k - რიგამდე ჩათვლით.

განსაზღვრება 1.2. ვიტყვით, რომ $\Psi(x)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელე-ბადია საზღვრის $y \in \partial\Omega$ წერტილში, თუ არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{\Omega \ni x \to y} \psi(x)$.

განსაზღვრება 1.3. $C^k(\overline{\Omega})$სიმბოლოთი ავღნიშნოთ სიმრავლე $C^k(\Omega)$ კლასის იმ ფუნქციებისა, რომელთა ყველა კერძო წარმოებულები k - რიგამდე ჩათვლით უწყვეტად გაგრძელებადია $\partial\Omega$ საზღვრის ყოველ წერტილში.

განსაზღვრება 1.4. ვთქვათ $\Psi(x)$ არის ვექტორი ან მატრიცა, რომელიც განსაზღვრულია Ω არეში. მაშინ $\psi \in C^k(\Omega)\left[\psi \in C^k(\overline{\Omega})\right]$ ნიშნავს, რომ მისი ყოველი კომპონენტი ეკუთვნის $C^k(\Omega)$ $[C^k(\Omega)]$ კლასს. აღვნიშნოთ Ω^+-ით $\mathbb{R}^n$ სივრცის სასრული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ ზედაპირით, ხოლო Ω^- -ით კი $\overline{\Omega}^+$ არის დამატება $\mathbb{R}^n$ სივრცემდე, ე.ი. $\Omega^-=\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}^+$.

განსაზღვრება 1.5. ვთქვათ Ω^+ (Ω^-) არეში განსაზღვრული $\psi(x)$ ფუნქცია უწყვეტად გაგრძელებადია $z \in \partial\Omega$ წერტილში. მაშინ $\{\psi(z)\}^+$ $\left(\{\psi(z)\}^-\right)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ შემდეგი ზღვარი

$$\{\psi(z)\}^+ = \lim_{\Omega^+ \ni x \to z} \psi(x) \qquad \left(\{\psi(z)\}^- = \lim_{\Omega^- \ni x \to z} \psi(x)\right).$$

§2. ძირითადი განტოლებები

სამგანზომილებიან ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სის-ტემას აქვს სახე [26]

$$a_1\Delta u' + b_1 graddivu' + c\Delta u'' + dgraddivu'' = 0\,, \tag{1}$$

$$c\Delta u' + dgraddivu' + a_2\Delta u'' + b_2 graddivu'' = 0, \tag{2}$$

სადაც $u' = (u_1', u_2', u_3')^{\mathrm{T}}$, $u'' = (u_1'', u_2'', u_3'')^{\mathrm{T}}$ კერძო გადაადგილების ვექტორებია, Δ ლაპლასის სამგანზომილებიანი ოპერატორია, T ტრანსპონირების სიმბოლოა

$$a_1 = \mu_1 - \lambda_5, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_5 + \lambda_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha', \quad a_2 = \mu_2 - \lambda_5,$$

$$b_2 = \mu_2 + \lambda_5 + \lambda_2 + \frac{\rho_1}{\rho}\alpha', \qquad c = \mu_3 + \lambda_5, \quad \alpha' = \lambda_3 - \lambda_5,$$

$$d = \mu_3 + \lambda_3 - \lambda_5 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha', \qquad \rho = \rho_1 + \rho_2,$$

ρ_1, ρ_2 დრეკად ნარევის კერძო სიმკვრივეებია, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$, μ_1, μ_2, μ_3 ნარევის დრეკადი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს [26]

$$\mu_1 > 0, \qquad \mu_1 \mu_2 - \mu_3^2 > 0, \quad \lambda_5 < 0, \quad \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha' > 0\,,$$

$$\left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha'\right)\left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right) > \left(\lambda_3 + \frac{2}{3}\mu_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)^2.$$

ამ უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ [38]

$$d_1 := a_1 a_2 - c^2 > 0\,,\ d_2 := (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (c + d)^2 > 0, \quad a_1 > 0\,,\ a_1 + b_1 > 0\,. \tag{3}$$

ძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე [38]

$$\mathrm{T}(\partial, n)U = \left[\mathrm{P}^{(1)}(\partial, n)U, \mathrm{P}^{(2)}(\partial, n)U\right]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

სადაც $U = (u', u'')^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{P}^{(1)}(\partial, n)U = \mathrm{T}^{(1)}(\partial, n)u' + \mathrm{T}^{(2)}(\partial, n)u'',$$

$$\mathrm{P}^{(2)}(\partial, n)U = \mathrm{T}^{(3)}(\partial, n)u' + \mathrm{T}^{(4)}(\partial, n)u'',$$

$$\mathrm{T}^{(1)}(\partial, n)u' = 2\mu_1 \frac{\partial u'}{\partial n} + \left(\lambda_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha'\right) n divu' + (\mu_1 + \lambda_5)[n \times rotu'],$$

$$\mathrm{T}^{(2)}(\partial,n)u'' = 2\mu_3 \frac{\partial u''}{\partial n} + \left(\lambda_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right) n\,div u'' + (\mu_3 - \lambda_5)[n \times rot u''],$$

$$\mathrm{T}^{(3)}(\partial,n)u' = 2\mu_3 \frac{\partial u'}{\partial n} + \left(\lambda_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right) n\,div u' + (\mu_3 - \lambda_5)[n \times rot u'],$$

$$\mathrm{T}^{(4)}(\partial,n)u'' = 2\mu_2 \frac{\partial u''}{\partial n} + \left(\lambda_2 + \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right) n\,div u'' + (\mu_2 + \lambda_5)[n \times rot u''],$$

$n = (n_1, n_2, n_3)^{\mathrm{T}}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, $[a \times b]$ სიმბოლო აღნიშნავს ორი ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს $\mathbb{R}^3$-ში, $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{j=1}^{3} n_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას, როცა ნარევში შემავალი ორი დრეკადი სხეულის კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია, აქვს შემდეგი სახე [27]

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) grad div u - grad(\eta_1 \vartheta_1 + \eta_2 \vartheta_2) = 0; \tag{5}$$

$$\kappa_1 \Delta \vartheta_1 + \kappa_2 \Delta \vartheta_2 - \alpha(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0\,,$$

$$\kappa_2 \Delta \vartheta_1 + \kappa_3 \Delta \vartheta_2 + \alpha(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0\,, \tag{6}$$

სადაც Δ ლაპლასის სამგანზომილებიანი ოპერატორია, $u = (u_1, u_2, u_3)^{\mathrm{T}}$ არის კომპოზიტურ მასალაში შემავალი ორი მყარი სხეულის ერთმანეთის ტოლი გადაადგილების ვექტორი, ϑ_1, ϑ_2 მყარი სხეულების ტემპერატურების ცვლილებებია, $\alpha,\ \kappa_j\ , j = 1,2,3$ დადებითი ფიზიკური მუდმივებია, λ, μ დრეკადი მუდმივებია, η_1, η_2 თერმული პროცესების დამახასიათებელი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$\mu > 0,\quad 3\lambda + 2\mu > 0\,,\quad \kappa_1\kappa_3 - \kappa_2^2 > 0\,,\quad \eta_j > 0,\ j = 1,2\,. \tag{7}$$

ვთქვათ $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathrm{T}}$. ძაბვის ვექტორს, რომელსაც $\mathrm{P}(\partial,n)U$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ აქვს შემდეგი სახე [27]

$$\mathrm{P}(\partial,n)U = \mathrm{T}(\partial,n)u - n(\eta_1 \vartheta_1 + \eta_2 \vartheta_2), \tag{8}$$

სადაც n არის ერთეულოვანი ვექტორი, ხოლო

$$\mathrm{T}(\partial,n)u = 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n\,div u + \mu[n \times rot u]\,.$$

§ 3 ზოგიერთი დამხმარე ფორმულა და თეორემა

ვთქვათ r,ϑ,φ $\left(0\le r<+\infty,\ 0\le\vartheta\le\pi,\ 0\le\varphi<2\pi\right)$ $x\in\mathbb{R}^3$ წერტილის სფერული კოორდინატებია. $\sum_1$ - ით აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^3$ სივრცეში ერთეულ-რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

განვიხილოთ $L_2\left(\sum_1\right)$ სივრცეში ორთონორმირებულ ვექტორთა სრული სისტემა [8], [33]

$$\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)=e_r\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\qquad k\ge 0,$$

$$\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\left(e_\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{e_\varphi}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\quad k\ge 1,$$

$$\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\left(\frac{e_\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-e_\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ \ k\ge 1, \tag{9}$$

სადაც $|m|\le k$, $e_r,e_\vartheta,e_\varphi$ ორთონორმირებული ვექტორებია: $\mathbb{R}^3$-ში,

$$e_r=(\cos\varphi\sin\vartheta,\sin\varphi\sin\vartheta,\cos\vartheta)^{\mathsf{T}},$$

$$e_\vartheta=(\cos\varphi\cos\vartheta,\sin\varphi\cos\vartheta,-\sin\vartheta)^{\mathsf{T}},$$

$$e_\varphi=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}}\mathrm{P}_k^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi},$$

$\mathrm{P}_k^{(m)}(\cos\vartheta)$ ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომია.

ვთქვათ $f=(f_1,f_2,f_3)^{\mathsf{T}}$ ვექტორ-ფუნქცია და f_4 ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგი ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით.

$$f(\vartheta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=-k}^{k}\left\{\alpha_{mk}\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[\beta_{mk}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\gamma_{mk}Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right\}\right.,$$

$$f_4(\vartheta,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{m=-k}^{k}\delta_{mk}\,Y_k^{(m)}(\vartheta,\varphi), \tag{10}$$

სადაც $\alpha_{mk},\beta_{mk},\gamma_{mk},\delta_{mk}$ ფურიეს კოეფიციენტებია, რომლებიც გამოითვლებიან შემდეგი ფორმულებით.

$$\alpha_{mk}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\vartheta,\varphi)\cdot\overline{\mathrm{X}}_{mk}(\vartheta,\varphi)\sin\vartheta d\vartheta,\qquad k\ge 0,$$

$$\beta_{mk} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\vartheta,\varphi) \cdot \overline{\mathrm{Y}}_{mk}(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta d\vartheta, \qquad k \geq 1, \tag{11}$$

$$\gamma_{mk} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\vartheta,\varphi) \cdot \overline{\mathrm{Z}}_{mk}(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta d\vartheta, \quad k \geq 1,$$

$$\delta_{mk} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f_4(\vartheta,\varphi) \cdot \overline{\mathrm{Y}}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi) \sin\vartheta d\vartheta, \quad k \geq 0.$$

აქ $\overline{\mathrm{X}}_{mk}, \overline{\mathrm{Y}}_{mk}, \overline{\mathrm{Z}}_{mk}$ ვექტორები და $\overline{\mathrm{Y}}_k^{(m)}$ ფუნქცია წარმოადგენენ შესაბამისად $\mathrm{X}_{mk}, \mathrm{Y}_{mk}, \mathrm{Z}_{mk}$ ვექტორებისა და $\mathrm{Y}_k^{(m)}$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებულ ვექტორ-ფუნქციებს. სიმბოლო $\alpha \cdot b$ აღნიშნავს ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს $\mathbb{R}^3$-ში.

შევნიშნოთ, რომ (10) ფორმულაში და შემდგომში ანალოგიური მწკრი-ვების იმ შესაკრებებში, რომლებიც შეიცავენ $\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)$ და $Z_{mk}(\vartheta,\varphi)$ ვექტორებს, შეჯამების ინდექსი იცვლება 1-დან $+\infty$-მდე.

ჩამოვაყალიბოთ რამოდენიმე მნიშვნელოვანი თეორემა [8] , [32]

თეორემა 1.6. თუ $f_4(z) \in w_2^{(\ell)}(\sum_1),$, მაშინ δ_{mk} კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრულია (1.11) ფორმულით, უშვებს შემდეგ შეფასებას

$$\delta_{mk} = k^{-\ell} \beta_k^{(m)}, \ell \geq 1, \tag{12}$$

სადაც $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{k} \left| \beta_k^{(m)} \right|^2 < \infty.$

თეორემა 1.7. თუ $f(z) \in C^{(\ell)}(\sum_1),$ სადაც $\sum_1$ ერთეულრადიუსიანი სფეროა, მაშინ $\alpha_{mk}, \beta_{mk}, \gamma_{mk}$ კოეფიციენტები, რომლებიც განსაზღვრულნი არიან (11) ფორმულებით, უშვებენ შემდეგ შეფასებებს

$$\alpha_{mk} = O\left(k^{-\ell}\right), \qquad \beta_{mk} = O\left(k^{-\ell-1}\right), \ \gamma_{mk} = O\left(k^{-\ell-1}\right), \ \ell \geq 1. \tag{13}$$

თეორემა 1.8. ნებისმიერი $k \geq 0$-თვის $\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)$ ფუნქცია და $\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi),$ $\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi),$ $Z_{mk}(\vartheta,\varphi)$ ვექტორები უშვებენ შემდეგ შეფასებებს:

$$\left|\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\right| \leq \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}}, \ \left|\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right| \leq \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}}, \quad k \geq 0,$$

$$\left|\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right| < \sqrt{\frac{2k(k+1)}{2k+1}}, \ \left|Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right| < \sqrt{\frac{2k(k+1)}{2k+1}}, \quad k \geq 1. \tag{14}$$

შემდგომში ჩვენ ვისარგებლებთ შემდეგი ტოლობებით [8]

$$e_r \cdot \mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi) = \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi), \quad e_r \cdot \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi) = 0, \quad e_r \cdot \mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi) = 0.$$

$$[e_r \times \mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = 0, \quad [e_r \times \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = -\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi), \; [e_r \times \mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

$$div[a(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)a(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),$$

$$div[a(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = -\frac{\sqrt{k(k+1)}}{r}a(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),$$

$$div[a(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = 0,$$

$$grad\left[a(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\right] = \frac{da(r)}{dr}\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi) + \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r}a(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

$$rot\left[xa(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\right] = \sqrt{k(k+1)}a(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi), \tag{15}$$

$$rot[a(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r}a(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

$$rot[a(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)a(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

$$rot[a(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)] = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{r}a(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)a(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

$$rotrot\left[xa(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\right] = \frac{k(k+1)}{r}a(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi) + \sqrt{k(k+1)}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)a(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi),$$

სადაც $x = (x_1, x_2, x_3)$, $a(r)$ – r-ის ნებისმიერი (წარმოებადი) ფუნქციაა.

ვთქვათ $\Omega^+ = B(R) \subset \mathbb{R}^3$ არის ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\sum_R = \partial\Omega$ სფერული ზედაპირით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega}^+$.

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები [8], [44]

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)ds = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}R^2, & \text{როცა } k = m = 0, \\ 0, & \text{ყველა სხვა შემთხვევაში,} \end{cases}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)ds = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}\left[(\delta_{-1m} - \delta_{1m})e_1 - i(\delta_{-1m} + \delta_{1m})e_2 + \sqrt{2}\delta_{0m}e_3\right]R^2, \; k = 1, \; m = 0, \pm 1, \\ 0, \quad k \text{ და } m\text{-ის ყველა სხვა მნიშვნელობისათვის,} \end{cases}$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)ds = \sqrt{2}\int_{\partial\Omega} \mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)ds, \tag{16}$$

$\int_{\partial\Omega} Z_{mk}(\vartheta,\varphi)ds = 0,$ ყოველი k და m რიცხებისთვის, სადაც $e_j = (\delta_{j1}, \delta_{j2}, \delta_{j3})^{\mathrm{T}}$,

$j = 1,2,3,$ საბაზისო ვექტორებია, δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა,

$$\text{ე.ი.}\quad \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{როცა } k = j, \\ 0, & \text{როცა } k \neq j. \end{cases}$$

განსაზღვრება 1.9. Ω არეში განსაზღვრული $u(x)$ ვექტორ-ფუნქციას ვუწოდოთ რეგულარული, თუ $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$.

§ 4. ორ ტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნის წარმოდგენა

თეორემა 1.10. იმისათვის, რომ $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი იყოს (5)-(6) სისტემის რეგულარული ამონახსნი Ω არეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი წარმოიდგინებოდეს შემდეგი სახით:

$$u(x) = grad\Phi_1(x) - agradr^2\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 1\right)\Phi_2(x) + rotrot\left(xr^2\Phi_2(x)\right) +$$
$$+ rot\left(x\Phi_3(x)\right) + (\eta_1 + \eta_2)x\Phi_4(x) + a_1 grad\Phi_5(x),$$
$$\vartheta_1(x) = \left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r} + 3\lambda + 5\mu\right]\Phi_4(x) + (\lambda + 2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2 + \kappa_3)\Phi_5(x), \tag{17}$$
$$\vartheta_2(x) = \left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r} + 3\lambda + 5\mu\right]\Phi_4(x) - (\lambda + 2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1 + \kappa_2)\Phi_5(x),$$

სადაც

$$\Delta\Phi_j\ (x) = 0, \quad j = 1,2,3,4, \quad \left(\Delta - \lambda_1^2\right)\Phi_5(x) = 0, \quad \lambda_1^2 = \alpha(\kappa_1 + \kappa_3 + 2\kappa_2)/d',$$

$$d' = \kappa_1\kappa_3 - \kappa_2^2, \quad a = \mu/(\lambda + 2\mu), \quad a_1 = \eta_1(\kappa_2 + \kappa_3) - \eta_2(\kappa_1 + \kappa_2),$$

$$x = (x_1, x_2 x_3)^{\mathrm{T}}, \quad r = |x|, \quad r\frac{\partial}{\partial r} = x \cdot grad.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი არის (5)-(6) სისტემის ამონახს-ნი. (6) სისტემიდან ვღებულობთ, რომ

$$\Delta\left[(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(x)+(\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(x)\right]=0,$$
$$\left(\Delta-\lambda_1^2\right)\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)=0, \tag{18}$$

სადაც Δ ლაპლასის სამგანზომილებიანი ოპერატორია, ხოლო

$$\lambda_1^2=\alpha(\kappa_1+\kappa_3+2\kappa_2)/d', \qquad d'=\kappa_1\kappa_3-\kappa_2^2>0.$$

(18) სისტემიდან ვღებულობთ, რომ

$$(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(x)+(\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(x)=(\kappa_1+\kappa_3+2\kappa_2)\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+(3\lambda+5\mu)\right]\Phi_4(x),$$
$$\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)=(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_3+2\kappa_2)\Phi_5(x),$$

სადაც $\quad \Delta\Phi_4(x)=0, \quad \left(\Delta-\lambda_1^2\right)\Phi_5(x)=0$.

უკანასკნელი სისტემიდან ვღებულობთ, რომ

$$\vartheta_1(x)=\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\Phi_5(x),$$
$$\vartheta_2(x)=\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\Phi_5(x). \tag{19}$$

თუ $\vartheta_1(x)$ და $\vartheta_2(x)$ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned}\mu\Delta u+(\lambda+\mu)graddivu=(\eta_1+\eta_2)grad\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)+\\ +(\lambda+2\mu)\lambda_1^2a_1grad\Phi_5(x),\end{aligned} \tag{20}$$

სადაც

$$a_1=\eta_1(\kappa_2+\kappa_3)-\eta_2(\kappa_1+\kappa_2), \qquad r\frac{\partial}{\partial r}=x\cdot grad.$$

(20) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი წარმოიდგინება შემ-დეგი სახით

$$u(x)=u_0(x)+\tilde{u}(x), \tag{21}$$

სადაც $\tilde{u}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3)^{\mathrm{T}}$ არის (20) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რაიმე კერძო ამონახსნი, ხოლო $u_0=(u_{10},u_{20},u_{30})^{\mathrm{T}}$ ვექტორი არის შემდეგი ერთგვაროვანი

$$\mu\Delta u_0(x)+(\lambda+\mu)graddivu_0(x)=0, \qquad (22)$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი.

(20) სისტემის კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$\tilde{u}(x)=(\eta_1+\eta_2)x\Phi_4(x)+a_1grad\Phi_5(x). \qquad (23)$$

(22) სისტემის ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით [9]

$$u_0(x)=grad\Phi_1(x)-agradr^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_2(x)+rotrot\left(xr^2\Phi_2(x)\right)+rot\left(x\Phi_3(x)\right), \qquad (24)$$

სადაც $\Delta\Phi_j(x)=0, \quad j=1,2,3, \quad a=\mu/(\lambda+2\mu)$.

თუ $\tilde{u}(x)$ და $u_0(x)$ ვექტორების მნიშვნელობებს (23) და (24)-დან შევიტანთ (21)-ში, მივიღებთ დასამტკიცებელ (17) ფორმულას.

უშუალო შემოწმებით მტკიცდება, რომ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი წარმოდგენილი (17) სახით არის (5)-(6) სისტემის ამონახსნი.

§ 5. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თეორემა

თეორემა 1.11. $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი წარმოდგენილი (17) სახით ცალსახად იქნება განსაზღვრული $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში $\Phi_j(x), j=\overline{1,5}$ ფუნქციებით, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$\int_{\sum_r}\Phi_j(x)d\sum\nolimits_r=0\,, \quad j=1,3\,, \quad r=|x|<R\,, \qquad (25)$$

$$\int_{\sum_r}\Phi_j(x)d\sum\nolimits_r=0\,, \quad j=2,3\,, \quad r=|x|>R\,, \qquad (26)$$

ე.ი. $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორის ნულოვან მნიშვნელობას შეესაბამება $(\Phi_1,\Phi_2,....,\Phi_5)^{\mathrm{T}}$ ვექტორის ნულოვანი მნიშვნელობა და პირიქით.

დამტკიცება. ვთქვათ $u(x)=0, \quad \vartheta_j(x)=0, \quad j=1,2, \quad x\in\Omega^+$. მაშინ (17)-დან ვღებულობთ, რომ $\Phi_4(x)=0, \quad \Phi_5(x)=0, \quad x\in\Omega^+$ და

$$grad\Phi_1(x) - agradr^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_2(x) + rotrot\left(xr^2\Phi_2(x)\right) + rot\left(x\Phi_3(x)\right) = 0. \qquad (27)$$

ტოლობის ორივე მხარეს მოვახდინოთ div ოპერატორი, მივიღებთ

$$\left(2r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_2(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \qquad (28)$$

Ω^+ არეში $\Phi_2(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(2)},$$

სადაც $\mathrm{A}_{mk}^{(2)}$ ნებისმიერი მუდმივია.

თუ $\Phi_2(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (28)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}(k+1)(2k+3)\left(\frac{r}{R}\right)^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(2)} = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $r \to R$, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}(k+1)(2k+3)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(2)} = 0, \qquad x \in \sum\nolimits_1,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(2)} = 0, \quad k \ge 0,$ ე.ი. $\Phi_2(x) = 0, \quad x \in \Omega^+.$

თუ (27)-ში გავითვალისწინებთ, რომ $\Phi_2(x) = 0,$ მივიღებთ

$$grad\Phi_1(x) + rot\left(x\Phi_3(x)\right) = 0, \quad x \in \Omega^+. \qquad (29)$$

ტოლობის ორივე მხარეს მოვახდინოთ rot-ის ოპერაცია და გავითვალისწი-ნოთ ტოლობები $rotgrad = 0, \ rotrot = graddiv - \Delta,$ მივიღებთ

$$grad\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_3(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

თუ ტოლობის ორივე მხარეს სკალარულად გავამრავლებთ $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_3(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \qquad (30)$$

$\Phi_3(x)$ ფუნქცია Ω^+ არეში წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(3)}, \qquad x \in \Omega^+. \qquad (31)$$

თუ $\Phi_3(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (30)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} k(k+1)\left(\frac{r}{R}\right)^{k} \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(3)} = 0, \qquad x\in\Omega^{+}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $r\to R$, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} k(k+1)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(3)} = 0, \qquad x\in\sum{}_1,$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(3)}=0,\ k\ge 1$. თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (31)-ში, მივიღებთ

$$\Phi_3(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{A}_{00}^{(3)}, \qquad x\in\Omega^{+}.$$

თუ $\Phi_3(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (25)-ში, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(3)}=0$, ე.ი. $\Phi_3(x)=0,\ x\in\Omega^{+}$. ამ ტოლობის გათვალისწინებით (29)-დან ვღებულობთ $grad\Phi_1(x)=0$, ანუ $\Phi_1(x)=c=const.$ თუ $\Phi_1(x)$, ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (25)-ში, მივიღებთ, რომ $c=0$, ე.ი. $\Phi_1(x)=0$, $x\in\Omega^{+}$.

ვთქვათ ახლა $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}=0,\ x\in\Omega^{-}$, მაშინ (17)-ის მეორე და მესამე ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $\Phi_5(x)=0,\ x\in\Omega^{-}$ და

$$\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)=0, \qquad x\in\Omega^{-}. \tag{32}$$

Ω^{-} არეში განსაზღვრული $\Phi_4(x)$, ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_4(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(4)}, \qquad x\in\Omega^{-}, \tag{33}$$

სადაც $\mathrm{A}_{mk}^{(4)}$, ნებისმიერი მუდმივია.

თუ $\Phi_4(x)$ ფუნქციის (33) მნიშვნელობას შევიტანთ (32)-ში მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(2(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)k\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(4)}=0, \quad x\in\Omega^{-}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2(\lambda+2\mu)-(\lambda+\mu)k \neq 0, \quad k \geq 0,$ მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(4)}=0, \quad k \geq 0,$ ანუ $\Phi_4(x)=0, \quad x \in \Omega^-.$

(27) ტოლობის ორივე მხარეს მოვახდინოთ div-ის ოპერაცია, მივიღებთ

$$\left(2r\frac{\partial}{\partial r}+3\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_2(x)=0, \quad x \in \Omega^-. \tag{34}$$

Ω^- არეში $\Phi_2(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Phi_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(2)}, \quad x \in \Omega^-. \tag{35}$$

თუ $\Phi_2(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (34)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}k(2k-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(2)}=0, \quad x \in \Omega^-.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(2)}=0, \; k \geq 1.$ თუ ამ ტოლობას გავითვალის-წინებთ (35)-ში, მივიღებთ

$$\Phi_2(x)=\frac{R}{2\sqrt{\pi}r}\mathrm{A}_{00}^{(2)}, \quad x \in \Omega^-.$$

თუ $\Phi_2(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას გავითვალისწინებთ (26)-ში, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(2)}=0,$ და მაშასადამე $\Phi_2(x)=0, \quad x \in \Omega^-.$

$\Phi_2(x)=0, \quad x \in \Omega^-$ გავითვალისწინოთ (27)-ში, მივიღებთ

$$grad\Phi_1(x)+rot(x\Phi_3(x))=0, \quad x \in \Omega^-. \tag{36}$$

ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოდ $x=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ ვექ-ტორზე და გავითვალისწინოთ, რომ $x \cdot grad = r\frac{\partial}{\partial r}, \quad x \cdot rot(x\Phi_3(x))=0,$ მი-ვიღებთ

$$r\frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(x)=0, \quad x \in \Omega^-. \tag{37}$$

$\Phi_1(x)$ ჰარმონიული ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(1)}, \quad x \in \Omega^-.$$

თუ $\Phi_1(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (37)-ში, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}(k+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(1)}=0, \qquad x\in\Omega^-.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(1)}=0, \quad k\ge 0,$ ანუ $\Phi_1(x)=0, \quad x\in\Omega^-.$

(37) ტოლობიდან $\Phi_1(x)=0,$ ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$rot(x\Phi_3(x))=0, \quad x\in\Omega^-. \tag{38}$$

$\Phi_3(x)$ ჰარმონიული ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_3(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(3)}, \quad x\in\Omega^-.$$

თუ $\Phi_3(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (38)-ში და გავითვალისწინებთ (15) ფორმულას, მივიღებთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(3)}=0, \quad x\in\Omega^-.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\mathrm{A}_{mk}^{(3)}=0, \quad k\ge 1,$ ანუ

$$\Phi_3(x)=\frac{R}{2\sqrt{\pi}r}\mathrm{A}_{00}^{(3)}. \tag{39}$$

(26)-დან (39)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(3)}=0,$ ანუ $\Phi_3(x)=0, \quad x\in\Omega^-.$ ამრიგად მივიღეთ, რომ თუ სრულდება (25) და (26) ტოლობები, მაშინ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}=0,$ ტოლობიდან გამომდინარეობს $\Phi_j(x)=0, \quad j=1,2,....,5$ ტოლობა შესაბამისად Ω^+ და Ω^- არეებში. პირიქით, თუ $\Phi_j(x)=0, j=1,2,....,5 \quad x\in\Omega^+$ ან $x\in\Omega^-$ არეში, მაშინ (17) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $U(x)=0$ შესაბამისად Ω^+ და Ω^- არეში.

თეორემა 1.12. თუ (5)-(6) სისტემის $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობას

$$u(x)=O(1), \quad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-1}\right), \quad j=1,2,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\sum_r} n(x)\cdot u(x)d\sum{}_r=0, \tag{40}$$

მაშინ უსასრულობაში მას გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტიკა

$$u(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\quad \partial_k u(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\qquad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\ j=1,2,k=1,2,3.$$

(40)-ში $\sum_r$ არის სფერული ზედაპირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით r .

დამტკიცება. Ω^- არეში (5)-(6) სისტემის ამონახსნი ვეძებოთ (17) ფორმულის სახით, სადაც $\Phi_j(x),\ j=1,2,\ldots,5$ ფუნქციებს აქვს შემდეგი სახე

$$\Phi_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\ j=1,2,3,4,$$

$$\Phi_5(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad (41)$$

სადაც $\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\ j=1,2,\ldots,5$ საძიებელი მუდმივებია, ხოლო

$$h_k(\lambda_1 r)=\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{K_{k+1/2}(\lambda_1 r)}{K_{k+1/2}(\lambda_1 R)},$$

$K_{k+1/2}(\lambda_1 r)$ მაკდონალდის ფუნქცია, ანუ წარმოსახვით არგუმენტიანი ჰანკელის ფუნქციაა.

თუ (41)-დან $\Phi_j(x),\ j=2,3$ ფუნქციის მნიშვნელობებს შევიტანთ (26) და ვისარგებლებთ (16)-ის პირველი ტოლობით, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(j)}=0$, $j=2,3$.

თუ $\Phi_j(x),\ j=1,2,\ldots\ldots,5$ ფუნქციების (41) მნიშვნელობებს შევიტანეთ (17)-ში და ვისარგებლებთ (15) ტოლობებით, მივიღებთ, რომ

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{u_{mk}^-(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}^-(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+w_{mk}^-(r)Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\},$$

$$x\in\Omega^-,\qquad (42)$$

$$\vartheta_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ j=1,2,\quad x\in\Omega^-,\qquad (43)$$

სადაც $u_{mk}^-(r)=-\dfrac{k+1}{R}\left(\dfrac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+Rk(bk+a+1)\left(\dfrac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+(\eta_1+\eta_2)R\left(\dfrac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+$

$$+a_1\frac{d}{dr}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\ge 0,$$

$$v_{mk}^{-}(r)=\frac{1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}-R(bk-2)\left(\frac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+\frac{a_1}{r}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 1,$$

$$w_{mk}^{-}(r)=\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(3)},\qquad k\geq 1,$$

$$\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(r)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 0,$$

$$\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(r)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\quad k\geq 0\,.$$

(42) განტოლებიდან (15)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$n(x)\cdot u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}u_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\qquad x\in\Omega^{-},$$

თუ $n(x)\cdot u(x)$-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (40)-ში, და გავითვალისწინებთ (16)-ის პირველ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(4)}=0$, თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (42)-(43) -ში, მივიღებთ, რომ

$$u(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\ \partial_k u(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\ \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\ j=1,2,k=1,2,3.\quad \partial_k=\partial/\partial x_k \quad (44)$$

შენიშვნა 1.13. შევნიშნოთ რომ, თუ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორს უსასრულობაში გააჩნია (40) ასიმპტოტიკა, მაშინ Ω^{-} არეში შეგვიძლია დავწეროთ (5) - (6) სისტემის შესაბამისი გრინის ფორმულები.

თავი II. არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები სფერული ზედაპირით შემოსაზღვრული არეებისათვის

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის არაკლასიკურ ამოცანებს ბირთვისთვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ხვრელით იმ შემთხვევისთვის, როცა ნარევში შემავალი დრეკადი მასალების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია.

§ 1. ამოცანების დასმა. ერთადერთობის თეორემები

აღვნიშნოთ Ω^+-ით ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ სფერული ზედაპირით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R. $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}^+$.

ამოცანა $(III)^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში (5) - (6) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{\pm} = f_4(z), \qquad z\in\partial\Omega,$$

$$\{\mathrm{P}(\partial,n)U(z)-n(z)(n(z)\cdot \mathrm{P}(\partial,n)U(z))\}^{\pm} = f(z), \qquad z\in\partial\Omega, \tag{45}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm} = f_5(z), \qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm} = f_6(z), \qquad z\in\partial\Omega, \tag{46}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm} = f_5(z), \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm} = f_6(z), \; z\in\partial\Omega, \tag{47}$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$, f_j, $j=1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$, წერტილში გამავალი Ω^+ არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი, $\mathrm{P}(\partial,n)U$ ძაბვის ვექტორს აქვს (8) სახე.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს:

$$u(x)=O(1), \qquad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-1}\right), \qquad j=1,2, \tag{48}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\sum_r} n(x)\cdot u(x)d\sum{}_r=0, \tag{49}$$

$(III)^{\pm}$ ამოცანა (45), (46) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{I})^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (45), (47) სასაზღვრო პირობით კი $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II})^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(\mathrm{I}V)^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში (5)-(6) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot \mathrm{P}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}=f_4(z), \qquad z\in\partial\Omega,$$

$$\{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^{\pm}=f(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{50}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm}=f_5(z), \qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm}=f_6(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{51}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_5(z), \quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_6(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{52}$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$, f_j, $j=1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$, წერტილში გამავალი Ω^+ არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი. $\dfrac{\partial}{\partial n(z)}$ არის ნორმალის მიმართულებით წარმოებული.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (48)-(49) პირობებს.

$(IV)^{\pm}$ ამოცანა (50)-(51) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(IV\cdot I)^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (50), (52) სასაზღვრო პირობით კი $(IV\cdot II)^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(\mathrm{N})^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში (5) - (6) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{\pm}=f_4(z), \quad \{n(z)\times rot u(z)\}^{\pm}=f(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{53}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm} = f_5(z), \qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm} = f_6(z), \qquad z \in \partial\Omega, \tag{54}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm} = f_5(z), \quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm} = f_6(z), \qquad z \in \partial\Omega, \tag{55}$$

სადაც $f = (f_1, f_2, f_3)^{\top}$, f_j, $j = 1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციები.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (48)-(49) პირობებს.

$(\mathrm{N})^{\pm}$ ამოცანა (53)-(54) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (53), (55) სასაზღვრო პირობით კი $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ Ω^{+} არე შევსებულია ორკომპონენტიანი დრეკადი კომპოზიტური მასალით, ხოლო Ω^{-} სკალარული ველი განსაზღვრულია ჰარმონიული ფუნქციით.

ამოცანა (C). ვიპოვოთ Ω^{+} არეში (5) - (6) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\top}$ ამონახსნი და Ω^{-} არეში ისეთი რეგულარული ჰარმონიული $\upsilon(x)$ ფუნქცია, რომლებიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო პირობებს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{+} - d_1\left\{\frac{\partial\upsilon(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-} = f_4(z), \qquad z \in \partial\Omega,$$

$$\{\mathrm{P}(\partial, n)U(z)\}^{+} - d_2\{n(z)\upsilon(z)\}^{-} = f(z), \qquad z \in \partial\Omega, \tag{56}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{+} = f_5(z), \qquad \{\vartheta_2(z)\}^{+} = f_6(z), \qquad z \in \partial\Omega, \tag{57}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{+} = f_5(z), \qquad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{+} = f_6(z), \qquad z \in \partial\Omega, \tag{58}$$

სადაც $f = (f_1, f_2, f_3)^{\top}$, f_j, $j = 1,2,....,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, d_1 და d_2 მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $d_1 d_2 > 0$.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $\upsilon(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობას

$$\upsilon(x)=O\left(|x|^{-1}\right), \quad \frac{\partial \upsilon(x)}{\partial x_k}=O\left(|x|^{-2}\right), \quad |x|\to\infty. \tag{59}$$

(C) ამოცანა (56) - (57) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ $(C\cdot \mathrm{I})$ სიმბოლოთი, ხოლო (56); (57) სასაზღვრო პირობებით კი $(C\cdot \mathrm{II})$ სიმბოლოთი.

თეორემა 2.1. თუ $(III)^{\pm}$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(III)^{-}$ და $(III.I)^{+}$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო $(III.II)^{+}$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=[b\times x]$, $\vartheta_1(x)=c$, $\vartheta_2(x)=c$, შესაკრების სიზუსტით, სადაც b სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორია, c ნებისმიერი მუდმივაა.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(III)_0^{-}$ და $(III.I)_0^{+}$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ხოლო $(III.II)_0^{+}$ ერთგვაროვან ($f_j=0,\ j=1,2,....,6$) ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნია $u(x)=[b\times x]$, $\vartheta_1(x)=c$, $\vartheta_2(x)=c$.

თუ (6) სისტემის პირველ განტოლებას გავამრავლებთ ϑ_1-ზე, ხოლო მეორეს ϑ_2 -ზე და ვაინტეგრირებთ Ω^{+} არეზე, მაშინ სტოქსის ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\int_{\partial\Omega}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(z)+\kappa_2\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(z)+\kappa_3\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right]^{+}ds- \tag{60}$$

$$-\int_{\Omega^{+}}\left[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+\alpha\left(\vartheta_i(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\right]dx=0\,.$$

თუ (60) ტოლობაში გავითვალისწინებთ $(III)_0^{+}$ ერთგვაროვანი ამოცანის ნულოვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^{+}}\left[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+\alpha\left(\vartheta_i(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\right]dx=0\,. \tag{61}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|gzad\vartheta_2(x)|^2=$$
$$=\frac{\kappa_1\kappa_3-\kappa_2^2}{\kappa_3}|grad\vartheta_1(x)|^2+\frac{1}{\kappa_3}|\kappa_2\, grad\vartheta_1(x)+\kappa_3 grad\vartheta_2(x)|^2\geq 0,$$

ვინაიდან $\kappa_3>0,\quad \kappa_1\kappa_3-\kappa_2^2>0.$

ამრიგად (61) ტოლობაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითი ფუნქციაა, ამიტომ (61)-დან ვღებულობთ

$$grad\vartheta_j(x)=0,\quad j=1,2,\ \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x),\ x\in\Omega^+.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=c=const,\qquad x\in\Omega^+. \tag{62}$$

$(III.I)_0^+$ ამოცანის შემთხვევაში $c=0$, ხოლო $(III.II)_0^+$ ამოცანის შემთხვევაში კი $c=const$.

თუ ϑ_j, $j=1,2,$ ფუნქციების (62) მნიშვნელობებს შევიტანთ (5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\mathrm{A}(\partial)u(x):=\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)graddivu(x)=0,\qquad x\in\Omega^+.$$

ამ განტოლებისათვის Ω^+. არეში გრინის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე [28]

$$\int_{\Omega^+}u(x)\cdot\mathrm{A}(\partial)u(x)dx=\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^+\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^+ds-\int_{\Omega^+}E(u,u)dx. \tag{63}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$u\cdot\mathrm{T}(\partial,n)u=(n\cdot u)(n\cdot\mathrm{T}(\partial,n)u)-[u-n(n\cdot u)]\,[\mathrm{T}(\partial,n)u-n(n\cdot\mathrm{T}(\partial,n)u)]. \tag{64}$$

$(III)_0^+$ ერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობების თანახმად (64)-დან ვღებულობთ, რომ $\{u(z)\}^+\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^+=0,$ რის გამოც (63) გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\int_{\Omega^+}E(u,u)dx=0. \tag{65}$$

$E(u,u)$ კვადრატულ ფორმას აქვს შემდეგი სახე [28]

$$E(u,u)=\frac{3\lambda+2\mu}{3}(divu)^2+\frac{\mu}{2}\sum_{k\neq j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^2+\frac{\mu}{3}\sum_{k,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)^2\geq 0. \tag{66}$$

(65)-დან ვღებულობთ, რომ $E(u(x),u(x))=0,\ x\in\Omega^+$. ამ განტოლების ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე [28]

$$u(x) = d'' + [b \times x], \quad x \in \Omega^+. \tag{67}$$

სადაც b და d'' სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. თუ $u(x)$ ვექტორის (67) მნიშვნელობას შევიტანთ (45) ერთგვაროვან $(f_j = 0, j = 1,2,3,4)$ სასაზღვრო პირობებში, მივიღებთ, რომ $d'' = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

$\partial\Omega_r$-ით აღვნიშნოთ სფერო, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით $r(r > R)$. Ω_r-ით აღვნიშნოთ სფერული რგოლი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ და $\partial\Omega_r$ კონცენტრული სფერული ზედაპირებით. დავწეროთ გრინის (60) ფორმულა Ω_r არეში, მივიღებთ

$$\int_{\partial\Omega_r} [(\kappa_1 \vartheta_1(x) + \kappa_2 \vartheta_2(x))\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial n(x)} + (\kappa_2 \vartheta_1(x) + \kappa_3 \vartheta_2(x))\frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial n(x)}]ds - \int_{\partial\Omega} [\kappa_1 \vartheta_1(z) +$$

$$+ \kappa_2 \vartheta_2(z))\frac{\partial \vartheta_1(z)}{\partial n(z)} + (\kappa_2 \vartheta_1(z) + \kappa_3 \vartheta_2(z))\frac{\partial \vartheta_2(z)}{\partial n(z)}]^- ds - \int_{\Omega_r} [\kappa_1 |grad \vartheta_1(x)|^2 +$$

$$+ 2\kappa_2 grad \vartheta_1(x) \cdot grad \vartheta_2(x) + \kappa_3 |grad \vartheta_2(x)|^2 + \alpha(\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x))^2]dx = 0.$$

ტოლობის ორივე მხარეს გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r \to \infty$ და გავითვალისწინოთ (48)-(49) ქრობის პირობები, მივიღებთ

$$\int_{\partial\Omega} [(\kappa_1 \vartheta_1(z) + \kappa_2 \vartheta_2(z))\frac{\partial \vartheta_1(z)}{\partial n(z)} + (\kappa_2 \vartheta_1(z) + \kappa_3 \vartheta_2(z))\frac{\partial \vartheta_2(z)}{\partial n(z)}]^- ds + \int_{\Omega^-} [\kappa_1 |grad \vartheta_1(x)|^2 +$$

$$+ 2\kappa_2 gzad \vartheta_1(x) \cdot grad \vartheta_2(x) + \kappa_3 |grad \vartheta_2(x)|^2 + \alpha(\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x))^2]dx = 0. \tag{68}$$

თუ (68) ფორმულაში გავითვალისწინებთ $(III)_0^-$ ერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობებს ($f_j = 0, j = 1,2,...,6$) მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-} [\kappa_1 |grad \vartheta_1(x)|^2 + 2\kappa_2 \, grad \vartheta_1(x) \cdot grad \vartheta_2(x) +$$

$$\kappa_3 |grad \vartheta_2(x)|^2 + \alpha(\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x))^2]dx = 0 \tag{69}$$

ამ ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$grad \vartheta_j(x) = 0, \ j = 1,2, \quad \vartheta_1(x) = \vartheta_2(x), \quad x \in \Omega^-.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_2(x) = c = const, \quad x \in \Omega^-.$$

ვინაიდან $\vartheta_j(x)$, $j=1,2$, ფუნქცია უსასრულობაში მიისწრაფვის ნულისაკენ, ამიტომ $c=0$, ე. ი. $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=0,\ x\in\Omega^-$. ამის გათვალისწინებით (5) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\mathrm{A}(\partial)u:=\mu\Delta u+(\lambda+\mu)graddivu=0,\quad x\in\Omega^-.$$

ამ განტოლებისთვის Ω^- არეში გრინის ფორმულას აქვს სახე [28]

$$\int_{\Omega^-}u(x)\cdot \mathrm{A}(\partial)u(x)dx=-\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^-\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^-ds-\int_{\Omega^-}E(u,u)dx, \tag{70}$$

სადაც $\mathrm{E}(u,u)$ კვადრატულ ფორმას აქვს (66) სახე.

(64) ტოლობის თანახმად, $(III)_0^-$ ამოცანის ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$\{u(z)\}^-\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^-=0.$$

ამის გათვალისწინებით (70) -დან ვღებულობთ, რომ $\int_{\Omega^-}\mathrm{E}(u,u)dx=0.$ აქედან ვღებულობთ, რომ $\mathrm{E}(u,u)=0,$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $u(x)=d+[b\times x],\ x\in\Omega^-$. ვინაიდან $u(x)$, მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $|x|\to\infty$, ამიტომ $d=0$, $b=0$, ე. ი. $u(x)=0,\ x\in\Omega^-$. ამრიგად $(III)_0^-$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

თეორემა 2.2. თუ $(IV)^\pm$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(IV)_0^\pm$ ერთგვაროვან ($f_j=0,\ j=1,2,...,6$) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. თუ გავიმეორებთ სიტყვა-სიტყვით თეორემა 2.1-ში ჩატარებულ მსჯელობას, მივიღებთ, რომ

$$u(x)=d+[b\times x],\quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C,\quad x\in\Omega^\pm.$$

თუ $u(x)$, ვექტორისა და $\vartheta_j(x)$, $j=1,2$ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (50) ერთგვაროვან ($f_j=0,\ j=1,2,3,4$) სასაზღვრო პირობებში, მივიღებთ, რომ $d=0$, $b=0$, $c=0$, ე. ი. $(IV)_0^\pm$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

თეორემა 2.3. თუ $(\mathrm{N})^{\pm}$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^{+}$ და $(\mathrm{N})^{-}$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=0,\quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const,$ შესაკრების სიზუსტით.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})_0^{+}$ და $(\mathrm{N})_0^{-}$ ერთგვაროვან ($f_j=0,\ j=1,2,...,6$) ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ხოლო $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^{+}$ ერთგვაროვანი ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნია $u(x)=0,\ \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const.$

(61) და (69) ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const,\quad x\in\Omega^{\pm}. \tag{71}$$

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})_0^{\pm}$ და $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})_0^{-}$ ამოცანების შემთხვევაში $C=0$, ხოლო $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})_0^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში კი $C=const.$

თუ $\vartheta_1(x)$ და $\vartheta_2(x)$ ფუნქციების (71) მნიშვნელობებს შევიტანთ (5)-ში, მაშინ იგი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mathrm{A}(\partial)u(x):=\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)graddivu(x)=0,\quad x\in\Omega^{\pm}. \tag{72}$$

(72) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $u(x)$ ვექტორზე, მივიღებთ

$$u(x)\cdot\mathrm{A}(\partial)u(x)=\mu u(x)\cdot\Delta u(x)+(\lambda+\mu)u(x)\cdot graddivu(x)=0.$$

თუ ამ ტოლობაში ვისარგებლებთ შემდეგი იგივური ტოლობებით

$$u\cdot\Delta u=div(udivu)+div[u\times rotu]-(divu)^2-(rotu)^2,$$

$$u\cdot graddivu=div(udivu)-(divu)^2,$$

მივიღებთ

$$u(x)\cdot\mathrm{A}(\partial)u(x)=div[(\lambda+2\mu)u(x)divu(x)+u(x)\times rotu(x)]-\widetilde{\mathrm{E}}(u,u), \tag{73}$$

სადაც

$$\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)=(\lambda+2\mu)(divu)^2+\mu(rotu)^2\geq 0. \tag{74}$$

თუ ვისარგებლებთ სტოქსის ფორმულით, მაშინ (73)-დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega^{+}}u(x)\cdot\mathrm{A}(\partial)u(x)dx=\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^{+}\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^{+}ds-\int_{\Omega^{+}}\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)dx, \tag{75}$$

სადაც

$$u(z)\cdot\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)=(\lambda+2\mu)(n(z)\cdot u(z))divu(z)-u(z)\cdot[n(z)\times rotu(z)]. \qquad (76)$$

აქ ვისარგებლებთ ტოლობით

$$n(z)\cdot[u(z)\times rotu(z)]=-u(z)[n(z)\times rotu(z)].$$

(76) ტოლობაში თუ გავითვალისწინებთ $(\mathrm{N})_0^+$ ერთგვაროვანი ამოცანის ნულოვან სასაზღვრო პირობებს მივიღებთ, რომ

$$\{u(z)\}^+\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^+=0.$$

ამ ტოლობისა და (72) ტოლობის გათვალისწინებით, (75)-დან მივიღებთ

$$\int_{\Omega^+}\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)dx=0. \qquad (77)$$

ვინაიდან $\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)\geq 0$, ამიტომ (77)-დან ვღებულობთ

$$divu(x)=0,\quad rotu(x)=0,\quad x\in\Omega^+.$$

ამ სისტემის ამონახსნს აქვს სახე

$$u(x)=grad\varphi(x),\ x\in\Omega^+. \qquad (78)$$

სადაც $\varphi(x)$, ჰარმონიული ფუნქციაა.

$\{n(z)\cdot u(z)\}^+=0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\varphi(x)$, ფუნქცია აკმაყოფილებს ნეიმანის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\frac{\partial\varphi(z)}{\partial n(z)}\right\}^+=0,\qquad z\in\partial\Omega.$$

ცნობილია, რომ ნეიმანის ამოცანის ამონახსნია $\varphi(x)=C'=const$, $x\in\Omega^+$. თუ $\varphi(x)=C'$ მნიშვნელობას შევიტანთ (78)-ში, მივიღებთ $u(x)=0$, $x\in\Omega^+$. ამრიგად მივიღებთ, რომ $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})_0^+$ ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ხოლო $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})_0^+$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნია $u(x)=0$, $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C$, $x\in\Omega^+$.

აღვნიშნოთ $\partial\Omega_r$-ით სფერული ზედაპირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით $r(r>R)$. Ω_r-ით აღვნიშნოთ სფერული შრე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ და $\partial\Omega_r$ სფერული ზედაპირებით. Ω_r არეში დავწეროთ (75) გრინის ფორმულა

$$\int_{\Omega_r} u(x)\cdot \mathrm{A}(\partial)u(x)dx = -\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^{-}\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^{-}ds + \int_{\partial\Omega_r} u(x)\cdot\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(x)ds - \int_{\Omega_r}\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)dx, \tag{79}$$

(76) ტოლობაში თუ გავითვალისწინებთ $(\mathrm{N})_0^-$ ამოცანის ნულოვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\{u(z)\}^{-}\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^{-} = 0.$$

ამ ტოლობისა და (72) ტოლობის გათვალისწინებით, (79) ტოლობა გადაიწერება ასე

$$\int_{\partial\Omega_r}\{u(x)\}\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(x)\}ds + \int_{\Omega_r}\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)ds = 0.$$

ტოლობის ორივე მხარეს გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $r\to\infty$ და გავითვალისწინოთ უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორის (48) ასიმპტოტიკა, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-}\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)dx = 0.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\widetilde{\mathrm{E}}(u,u)=0$, საიდანაც გამომდინარეობს $divu(x)=0,\ rotu(x)=0,\ x\in\Omega^-$. ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u(x) = grad\psi(x), \quad x\in\Omega^- \tag{80}$$

სადაც $\psi(x)$ ჰარმონიული ფუნქციაა.

$\{n(z)\cdot u(z)\}^{-}=0$ სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\psi(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ნეიმანის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\frac{\partial\psi(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-} = 0, \quad z\in\partial\Omega.$$

ნეიმანის ამოცანის ამონახსნია $\psi(x)=C'=const.$

$\psi(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას თუ შევიტანთ (80) -ში, მივიღებთ $u(x)=0,$ $x\in\Omega^-$. ამრიგად მივიღეთ, რომ $(\mathrm{N})_0^-$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ
ტრივიალური ამონახსნი.

თეორემა 2.4. თუ (C) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(C\cdot \mathrm{I})$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=[a'\times x]$, $v(x)=0$, $\vartheta_j(x)=0,\ j=1{,}2$ შესაკრების სიზუსტით, ხოლო $(C\cdot \mathrm{II})$ ამოცანის ამონახსნი კი $u(x)=[a'\times x]+\dfrac{\sigma C'}{R}x,\ v(x)=-\dfrac{\sigma C'R^2}{d_1|x|},\quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'$, შესაკრების სიზუსტით, სადაც a' სამგანზომილებიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია, C' ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\sigma=d_1R(\eta_1+\eta_2)/\left(d_1(3\lambda+2\mu)+R^2d_2\right)$.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(C\cdot \mathrm{I})_0$ ერთგვაროვანი ($f_j=0,\ j=1{,}2{,}\ldots 6$) ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნია $u(x)=[a'\times x]$, $v(x)=0,\quad \vartheta_j(x)=0,\ j=1{,}2$, ხოლო $(C\cdot \mathrm{II})_0$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$u(x)=[a'\times x]+\frac{\sigma C'}{R}x,\quad v(x)=-\frac{\sigma C'R^2}{d_1|x|},\qquad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'.$$

(61) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $grad\,\vartheta_j(x)=0,\quad j=1{,}2,$ $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x),\quad x\in\Omega^+$. აქედან ვღებულობთ, რომ $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'=c\ o\ n.$ $x\in\Omega^+$. $(C\cdot \mathrm{I})_0$ ამოცანის შემთხვევაში $C'=0$, ხოლო $(C\cdot \mathrm{II})$ ამოცანის შემთხვევაში კი $C'=const$.

თუ $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'$ ტოლობას გავითვალისწინებთ $(C)_0$ ერთგვაროვან ამოცანაში, მაშინ $u(x)$ ვექტორისა და $v(x)$ ფუნქციისათვის მივიღებთ შემდეგ საკონტაქტო ამოცანას

$$\mathrm{A}(\partial)u(x):=\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)\,grad\,div\,u(x)=0,\quad x\in\Omega^\pm,\quad \Delta v(x)=0,\quad x\in\Omega^-;\quad (81)$$

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^+-d_1\left\{\frac{\partial v(z)}{\partial n(z)}\right\}^-=0,\qquad z\in\partial\Omega,$$

$$\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^+-d_2\{n(z)v(z)\}^-=C(\eta_1+\eta_2)n(z),\qquad z\in\partial\Omega,\qquad (82)$$

ვთქვათ $C'=0$ ე. ი. განვიხილოთ $(C\cdot \mathrm{I})_0$ ამოცანის შემთხვევა.

(81) განტოლებებისათვის დავწეროთ გრინის ფორმულები [28], [44]

$$\int_{\Omega^+}u(x)\cdot \mathrm{A}(\partial)u(x)dx=\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^+\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^+ds-\int_{\Omega^+}\mathrm{E}(u,u)dx,\qquad (83)$$

$$\int_{\Omega^-} v(x)\Delta v(x)dx = -\int_{\partial\Omega} \{v(z)\}^- \left\{\frac{\partial v(z)}{\partial n(z)}\right\}^- ds - \int_{\Omega^-} |grad\, v(x)|^2 dx,$$

სადაც $\mathrm{E}(u,u)$ კვადრატულ ფორმას აქვს (66) სახე.

(82) საკონტაქტო ($C'=0$ შემთხვევაში) პირობებიდან ვღებულობთ

$$\{u(z)\}^+ \cdot \{\mathrm{T}(\partial,n)u(z)\}^+ = d_1 d_2 \{v(z)\}^- \left\{\frac{\partial v(z)}{\partial n(z)}\right\}^- . \tag{84}$$

თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (83) ტოლობებში, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^+} \mathrm{E}(u,u)dx + d_1 d_2 \int_{\Omega^-} |gradv(x)|^2 dx = 0. \tag{85}$$

(85) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ ვინაიდან $d_1 d_2 > 0$, $\mathrm{E}(u,u) \geq 0$, ამიტომ

$$\mathrm{E}(u(x),u(x)) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad gradv(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

აქედან (59)-ის თანახმად გვაქვს

$$u(x) = b + [a' \times x], \quad x \in \Omega^+, \ v(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

სადაც b და a' სამგანზომილებიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია. (82)-ის პირველი ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ $b=0$. ამრიგად $(C\cdot\mathrm{I})_0$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნია $u(x) = [a' \times x]$, $\vartheta_j(x) = 0$, $j=1,2$, $x \in \Omega^+$ და $v(x) = 0$, $x \in \Omega^-$.

$(C\cdot\mathrm{II})_0$ ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში $(C' \neq 0)$, (81)-(82) ამოცანის კერძო ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$u_0(x) = \frac{\sigma C'}{R} x, \quad x \in \Omega^+, \quad v(x) = -\frac{\sigma C' R^2}{d_1 |x|}, \quad x \in \Omega^-, \tag{86}$$

სადაც $\sigma = d_1 R(\eta_1 + \eta_2)/(d_1(3\lambda + 2\mu) + R^2 d_2)$.

ამრიგად $(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$u(x) = [a' \times x] + \frac{\sigma C'}{R} x, \quad \vartheta_j(x) = C', \ j=1,2, \ x \in \Omega^+,$$

$$v(x) = -\frac{\sigma C' R^2}{d_1 |x|}, \quad x \in \Omega^-.$$

§2. $(\mathrm{III})^+$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც

$$\Phi_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{r}{R}\right)^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\ j=1,2,3,4,$$

$$\Phi_5(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} g_k(\lambda_1 r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(5)}, \tag{87}$$

$\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\ j=1,2,....,5$ საძიებელი მუდმივებია, (r,ϑ,φ) x წერტილის სფერული კოორდინატებია, $\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)$ სფერული ფუნქციაა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე.

$$\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}}\mathrm{P}_k^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}, \tag{88}$$

$\mathrm{P}_k^{(m)}(\cos\vartheta)$ ლეჟანრის მიკავშირებული პოლინომია, ხოლო

$$g_k(\lambda_1 r)=\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{\mathrm{I}_{k+1/2}(\lambda_1 r)}{\mathrm{I}_{k+1/2}(\lambda_1 R)},$$

$\mathrm{I}_{k+1/2}(x)$ წარმოსახვით არგუმენტიანი ბესელის ფუნქციაა. თუ $\Phi_j(x),\ j=1,3$ ფუნქციის მნიშვნელობებს (87)-დან შევიტანთ (25)-ში და გავითვალისწინებთ (16)-ის პირველ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(j)}=0,\ j=1,3.$

თუ $\Phi_j(x),\ j=1,2,...,5$ ფუნქციის (87) მნიშვნელობებს შევიტანთ (17)-ში და გავითვალისწინებთ (15) ტოლობებს, მივიღებთ

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{u_{mk}^{+}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+w_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\},$$

$$x\in\Omega^{+}. \tag{89}$$

$$\vartheta_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\vartheta_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ j=1,2,\qquad x\in\Omega^{+}.$$

სადაც

$$u_{mk}^{+}(r)=\frac{k}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+R(k+1)(bk-2a)\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+(\eta_1+\eta_2)R\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+$$

$$+a_1\frac{d}{dr}g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\ge 0,$$

$$v_{mk}^{+}(r)=\frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+R(bk+b+2)\left(\frac{r}{R}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+a_1\frac{1}{r}g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\ge 1,$$

$$w_{mk}^{+}(r)=\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(3)},\quad k\geq 1,\quad b=1-a,$$

$$\vartheta_{mk}^{(1)}(r)=[(\lambda+\mu)k+3\lambda+2\mu]\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 0,$$

$$\vartheta_{mk}^{(2)}(r)=[(\lambda+\mu)k+3\lambda+2\mu]\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 0\,.$$

(89)- ის მეორე ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\frac{\partial\vartheta_j(x)}{\partial n(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\frac{d}{dr}\vartheta_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ j=1,2,x\in\Omega^{+}. \tag{90}$$

თუ $u(x)$ ვექტორისა და $\vartheta_j(x),\ j=1,2$ ფუნქციის მნიშვნელობებს (89)-დან შევიტანთ (8)-ში მაშინ ძაბვის ვექტორს ექნება შემდეგი სახე

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{a_{mk}^{+}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+c_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\},$$

$$x\in\Omega^{+}, \tag{91}$$

სადაც

$$a_{mk}^{+}(r)=\frac{2\mu k(k-1)}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+2\mu(k+1)[bk(k-1)+1-4b]\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+$$

$$+\mu(\eta_1+\eta_2)(k-3)\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}-\frac{2\mu a_1}{r}\left(2\frac{d}{dr}-\frac{k(k+1)}{r}\right)g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 0,$$

$$b_{mk}^{+}(r)=\frac{2\mu k(k-1)}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+2\mu\left[b(k+1)^2-1\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+\mu(\eta_1+\eta_2)\left(\frac{r}{R}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+$$

$$+2\mu a_1\frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}-\frac{1}{r}\right)g_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 1,$$

$$c_{mk}^{+}(r)=\frac{\mu(k-1)}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{k-1}\mathrm{A}_{mk}^{(3)},\qquad k\geq 1.$$

(91) -დან ვღებულობთ

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)-n(n\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U(x))=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+c_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right],x\in\Omega^{+}.$$

$$\tag{92}$$

(89)-დან ვღებულობთ, რომ

$$n(x)\cdot u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}u_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\, x\in\Omega^{+}\,. \qquad (93)$$

ვთქვათ $f(z)$ ვექტორი და $f_j(z),\, j=4,5,6$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ სიგლუვის ისეთ საკმარის პირობებს, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ წარმოვადგინოთ ისინი ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\alpha_{mk}\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[\beta_{mk}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\gamma_{mk}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\}, \qquad (94)$$

$$f_j(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\delta_{mk}^{(j)}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\, j=4,5,6, \qquad (95)$$

სადაც α_{mk}, β_{mk}, γ_{mk}, $\delta_{mk}^{(j)}$, $j=4,5,6$ ფურიე-ლაპლასის კოეფიციენტებია. ვინაიდან $n(z)\cdot f(z)=0$, ამიტომ $n(z)\cdot \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)=0$, $n(z)\cdot \mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)=0$, $n(z)\cdot \mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)=\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)$ ტოლობების გათვალისწინებით, (94) ტოლო-ბიდან ვღებულობთ, რომ $\alpha_{mk}=0$, რის გამოც (94) ტოლობა გადაიწერება ასე

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[\beta_{mk}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\gamma_{mk}Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]. \qquad (96)$$

(18) სისტემის პირველი განტოლებიდან სტოქსის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\kappa_1+\kappa_2)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+(\kappa_2+\kappa_3)\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right]^{+}ds=0.$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვალისწინებთ (47) სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ

$$\int_{\partial\Omega}\left[(\kappa_1+\kappa_2)f_5(z)+(\kappa_2+\kappa_3)f_6\right]ds=0. \qquad (97)$$

$f_j(z)$, $j=5,6$ ფუნქციის (95) მნიშვნელობა შევიტანოთ (97) ტოლობაში და გავითვალისწინოთ (16)-ის პირველი ტოლობა, მივიღებთ

$$(\kappa_1+\kappa_2)\delta_{00}^{(5)}+(\kappa_2+\kappa_3)\delta_{00}^{(6)}=0. \qquad (98)$$

$(\mathrm{III})^{+}$ ამოცანის ამონახსნის არსებობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს შემდეგი ტოლობა

$$\int_{\partial\Omega}[z \times f(z)]ds = 0. \tag{99}$$

თუ $f(z)$ ვექტორის (96) მნიშვნელობას შევიტანთ (99)-ში და გავითვალისწინებთ (16) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\gamma_{m1} = 0, \quad m = -1,0,1. \tag{100}$$

თუ (92), (93) ტოლობებში და $\vartheta_j(x)$, $j = 1,2$ ფუნქციის (89) მნიშვნე-ლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to z \in \partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ (45)-(46) სასაზღვრო პირობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)}$, $j = 1,2,...,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას, რომელიც შეესაბამება $(\mathrm{III} \cdot \mathrm{I})^{+}$ ამოცანას

$$u_{mk}^{+}(R) = \delta_{mk}^{(4)}, \quad \vartheta_{mk}^{(1)}(R) = \delta_{mk}^{(5)}, \quad \vartheta_{mk}^{(2)}(R) = \delta_{mk}^{(6)}, \quad k \ge 0,$$

$$b_{mk}^{+}(R) = \beta_{mk}, \quad C_{mk}^{+}(R) = \gamma_{mk}, \quad k \ge 1 \tag{101}$$

თეორემა 1.11, თეორემა 2.1-ის და (100)-ის თანახმად (101) ალგებ-რულ განტოლებათა სისტემა თავსებადია, განუსაზღვრელი რჩება მხოლოდ სამი მუდმივი $\mathrm{A}_{m1}^{(3)}, m = -1,0,1.$ ეს ბუნებრივიცაა, რადგან $(\mathrm{III} \cdot \mathrm{I})^{+}$ ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება $u(x) = [b \times x]$, $\vartheta_j(x) = 0$, $j = 1,2$ შესაკრებების სიზუსტით.

შევისწავლოთ (89), (91) მწკრივების კრებადობის საკითხი. სამართლიანია შემდეგი ასიმპტოტური წარმოდგენა, როცა $k \to +\infty$

$$g_k(\lambda_1 r) \approx \left(\frac{r}{R}\right)^k, \quad g_k'(\lambda_1 r) \approx \frac{k}{r}\left(\frac{r}{R}\right)^k, \quad r < R. \tag{102}$$

თუ $x \in \Omega^{+}$ $(r < R)$, მაშინ (102)-ის თანახმად ზემოთ აღნიშნული მწკრივები არიან კრებადნი.

თუ $x \in \partial\Omega$, $(r = R)$, მაშინ თეორემა 1.8-ისა და (102) ასიმპტოტიკის თანახმად ზემოთ აღნიშნული მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი, თუ კრებადი იქნება შემდეგი მაჟორანტული მწკრივი

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} k^{3/2}\left[\left|\delta_{mk}^{(4)}\right| + k\left(\left|\beta_{mk}\right| + \left|\gamma_{mk}\right| + \left|\delta_{mk}^{(5)}\right| + \left|\delta_{mk}^{(6)}\right|\right)\right]. \tag{103}$$

მოცემული მაჟორანტული მწკრივი იქნება კრებადი, თუ მოცემული ფურიე-ლაპლასის კოეფიციენტები უშვებენ შემდეგ შეფასებებს:

$$\beta_{mk} = 0\left(k^{-4}\right), \quad \gamma_{mk} = 0\left(k^{-4}\right), \quad \delta_{mk}^{(4)} = 0\left(k^{-3}\right),$$

$$\delta_{mk}^{(5)} = 0\left(k^{-4}\right), \quad \delta_{mk}^{(6)} = 0\left(k^{-4}\right), \tag{104}$$

თეორემა 1.6 და თეორემა 1.7-ის ძალით ადგილი ექნება (104) შეფასებებს, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ შემდეგ სიგლუვეს

$$f(z) \in C^3(\partial\Omega), \quad f_4(z) \in C^3(\partial\Omega), \quad f_j(z) \in C^4(\partial\Omega), \quad j = 5{,}6. \tag{105}$$

ამგვარად ვაჩვენეთ, რომ $f(z)$ ვექტორი და $f_j(z)$, $j = 4{,}5{,}6$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ სიგლუვის (105) პირობებს, მაშინ $(\mathrm{III} \cdot \mathrm{I})^+$ ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება (89) მწკრივების სახით.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $u(x)$ ვექტორი შეიცავს შესაკრების სახით ნებისმიერ $[b \times x]$ სახის ვექტორს, სადაც b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორია. ამ მიზნით (89) ფორმულით წარმოდგენილი $u(x)$ ვექტორი გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\begin{aligned} u(x) = \sqrt{2}\sum_{m=-1}^{1} w_{m1}^{+}(r)\mathrm{Z}_{m1}(\vartheta,\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} \Big\{ & u_{mk}^{+}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi) + \\ + \sqrt{k(k+1)}\Big[v_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi) + (1-\delta_{k1})w_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\Big] & \Big\}, \end{aligned} \qquad x \in \Omega^+ \tag{106}$$

$$\sqrt{2}\sum_{m=-1}^{1} w_{m1}^{+}(r)\mathrm{Z}_{m1}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{R}\sum_{m=-1}^{1} r\mathrm{A}_{m1}^{(3)}\mathrm{Z}_{m1}(\vartheta,\varphi) = -\frac{1}{R}\left[x \times grad \sum_{m=-1}^{1} r\mathrm{Y}_{1}^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{m1}^{(3)}\right],$$

$$x \in \Omega^+. \tag{107}$$

(88) ფორმულიდან ვღებულობთ, რომ

$$\mathrm{Y}_{1}^{(m)}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \cdot \frac{(1-m)!}{(1+m)!}}\,\mathrm{P}_{1}^{(m)}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}.$$

თუ ვისარგებლებთ ლეჟანდრის პოლინომებისათვის ცნობილი ფორმულებით [44]

$$\mathrm{P}_{k}^{(m)}(\cos\vartheta) = (-1)^m \sin^m\vartheta \frac{d^m \mathrm{P}_k(\cos\vartheta)}{d\cos\vartheta^m},$$

$$\mathrm{P}_{k}^{(-m)}(\cos\vartheta) = (-1)^m \frac{(k-m)!}{(k+m)!}\mathrm{P}_{k}^{(m)}(\cos\vartheta),$$

$$\mathrm{P}_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta,$$

მივიღებთ, რომ

$$r\mathrm{Y}_1^{(0)}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x_3,\qquad r\mathrm{Y}_1^{(1)}(\vartheta,\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(x_1+ix_2),$$

$$r\mathrm{Y}_1^{(-1)}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}(x_1-ix_2),$$

$$\frac{1}{R}grad\sum_{m=-1}^{1}r\mathrm{Y}_1^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{m1}^{(3)}=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[e_1\left(\mathrm{A}_{-11}^{(3)}-\mathrm{A}_{11}^{(3)}\right)-ie_2\left(\mathrm{A}_{-11}^{(3)}+\mathrm{A}_{11}^{(3)}\right)+\sqrt{2}e_3\mathrm{A}_{01}^{(3)}\right],$$

სადაც

$$e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}},$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\left[e_1\left(\mathrm{A}_{-11}^{(3)}-\mathrm{A}_{11}^{(3)}\right)-ie_2\left(\mathrm{A}_{-11}^{(3)}+\mathrm{A}_{11}^{(3)}\right)+\sqrt{2}e_3\mathrm{A}_{01}^{(3)}\right]=b\,, \tag{108}$$

სადაც b სამგანზომილებიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია.

თუ (108) აღნიშვნას გავითვალისწინებთ (107)-ში, მივიღებთ

$$\sqrt{2}\sum_{m=-1}^{1}w_{m1}^{+}(r)\mathrm{Z}_{m1}(\vartheta,\varphi)=[b\times x],$$

რის გამოც $u(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (106) ფორმულით მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned}u(x)=[b\times x]+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\ &\{u_{mk}^{+}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\\ +\sqrt{k(k+1)}&\left[v_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+(1-\delta_{k1})w_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\},\qquad x\in\Omega^{+},\end{aligned} \tag{109}$$

δ_{k1} კრონეკერის სიმბოლოა.

შევისწავლოთ ახლა $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანა.

თუ (90), (92) და (93) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე როცა $x\to z\in\partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ (95) და (96) ტოლობებს, მივიღებთ $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის შესაბამის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$u_{mk}^{+}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\geq 0,$$

$$b_{mk}^{+}(R)=\beta_{mk},\qquad c_{mk}^{+}(R)=\gamma_{mk},\qquad k\geq 1. \tag{110}$$

თეორემა 1.11, თეორემა 2.1-სა და (98), (100) ტოლობების თანახმად (110) სისტემა თავსებადია, განუსაზღვრელი რჩება მხოლოდ ოთხი მუდმივი, $A_{00}^{(4)}$ და $A_{m1}^{(3)}$, $m=-1,0,1.$ ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან $U(x)$ ვექტორი განისაზღვრება $u(x)=[b\times x]$ ვექტორისა და $\vartheta_j(x)=c$, $j=1,2$ შესაკრების სიზუსტით.

თუ (110) სისტემის ამონახსნს შევიტანთ (89)-ში მივიღებთ $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის ამონახსნს. თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებისგან მოვითხოვთ, რომ

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_j(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad j=4,5,6.$$

მაშინ (89)-(91) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი.

§3. $(\mathrm{III})^{-}$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც

$$\Phi_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\qquad j=1,2,3,4,$$

$$\Phi_5(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad (111)$$

$\mathrm{A}_{mk}^{(j)}, j=1,2,...,5$ საძიებელი მუდმივებია, (r,ϑ,φ), x წერტილის სფერული კოორდინატებია, $\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)$ სფერულ ფუნქციას აქვს (88) სახე, ხოლო

$$h_k(\lambda_1 r)=\sqrt{\frac{R}{r}}\,\frac{K_{k+1/2}(\lambda_1 r)}{K_{k+1/2}(\lambda_1 R)},$$

$K_{k+1/2}(\lambda_1 r)$ წარმოსახვით არგუმენტიანი ჰანკელის ფუნქციაა.

თუ $\Phi_j(x), j=2,3$ ფუნქციის მნიშვნელობას (111)-დან შევიტანთ (26)-ში და გავითვალისწინებთ (16)-ის პირველ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(j)}=0,\ j=2,3.$

$\Phi_j(x),\ j=1,2,\ldots,5$ ფუნქციის (111) მნიშვნელობები შევიტანოთ (17)-ში და გავითვალისწინოთ (15) ტოლობები, მივიღებთ

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{u_{mk}^{-}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+w_{mk}^{-}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\}$$

$$x\in\Omega^{-},\quad (112)$$

$$\vartheta_j(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ j=1,2,\quad x\in\Omega^{-},\qquad (113)$$

სადაც

$$u_{mk}^{-}(r)=-\frac{k+1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}+Rk(bk+a+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+(\eta_1+\eta_2)R\left(\frac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+$$

$$+a_1\frac{d}{dr}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\qquad k\geq 0,$$

$$v_{mk}^{-}(r)=\frac{1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}-R(bk-2)\left(\frac{R}{r}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+\frac{a_1}{r}h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},\quad k\geq 1,$$

$$w_{mk}^{-}(r)=\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(3)},\quad k\geq 1,$$

$$\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(r)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},k\geq 0,$$

$$\widetilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(r)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},k\geq 0.$$

თუ $u(x)$ ვექტორის მნიშვნელობას (112)-დან, და $\vartheta_j(x),\ j=1,2$ ფუნქციის მნიშვნელობას (113)-დან შევიტანთ (8)-ში, მაშინ ძაბვის ვექტორს ექნება შემდეგი სახე

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{a_{mk}^{-}(r)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+c_{mk}^{-}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]\right\},$$

$$x\in\Omega^{-},(114)$$

სადაც

$$a_{mk}^{-}(r)=\frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(1)}-2\mu k[b(k+1)(k+2)+1-4b]\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}-$$

$$-\mu(\eta_1+\mu_2)(k+4)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)}-\frac{2\mu a_1}{r}\left(2\frac{d}{dr}-\frac{k(k+1)}{r}\right)h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)},k\geq 0,$$

$$b_{mk}^{-}(r) = -\frac{2\mu(k+2)}{R^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+3} \mathrm{A}_{mk}^{(1)} + 2\mu(bk^2-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \mathrm{A}_{mk}^{(2)} + \mu(\eta_1+\eta_2)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1} \mathrm{A}_{mk}^{(4)} +$$
$$+ 2\mu a_1 \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\right) h_k(\lambda_1 r)\mathrm{A}_{mk}^{(5)}, k \ge 1,$$

$$c_{mk}^{-}(r) = -\frac{\mu(k+2)}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2} \mathrm{A}_{mk}^{(3)}, k \ge 1.$$

(112)-(114)-დან ვღებულობთ, რომ

$$n(x)\cdot u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} u_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi), \quad x \in \Omega^{-},$$

$$\mathrm{P}(\partial_1 n)U(x) - n(n\cdot \mathrm{P}(\partial_1 n)U(x)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} \sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi) + c_{mk}^{-}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right],$$
$$x \in \Omega^{-}, \quad (115)$$

$$\frac{\partial \vartheta_j(x)}{\partial n(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} \frac{d}{dr}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi), \quad j=1,2, \quad x \in \Omega^{-}.$$

თუ (113), (115) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to z \in \partial\Omega$ გავითვალისწინებთ $(\mathrm{III})^{-}$ ამოცანის (45) - (47) სასაზღვრო პირობებს და (95) - (96) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)}, j=1,2,\ldots,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას.

$(\mathrm{III}\cdot \mathrm{I})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{-}(R) = \delta_{mk}^{(4)}, \quad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R) = \delta_{mk}^{(5)}, \quad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(R) = \delta_{mk}^{(6)}, \quad k \ge 0,$$
$$b_{mk}^{-}(R) = \beta_{mk}, \quad c_{mk}^{-}(R) = \gamma_{mk}, \quad k \ge 1, \quad (116)$$

$(\mathrm{III}\cdot \mathrm{II})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{-}(R) = \delta_{mk}^{(4)}, \quad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R) = \delta_{mk}^{(5)}, \quad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R) = \delta_{mk}^{(6)}, \quad k \ge 0,$$
$$b_{mk}^{-}(R) = \beta_{mk}, \quad c_{mk}^{-}(R) = \gamma_{mk}, \quad k \ge 1, \quad (117)$$

თეორემა 1.11 და თეორემა 2.1-ის თანახმად (116) და (117) სისტემები არიან თავსებადნი. თუ ამ სისტემების ამონახსნებს შევიტანთ (112) და (113) გამოსახულებაში, მივიღებთ შესაბამისად $(\mathrm{III}\cdot \mathrm{I})^{-}$ და $(\mathrm{III}\cdot \mathrm{II})^{-}$ ამოცანის ამონახსნს.

იმისათვის, რომ (112)-(114) მწკრივები იყვნენ აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი, საკმარისია სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებიდან მოვითხოვოთ სიგლუვის შემდეგი პირობები

$(\mathrm{III}\cdot \mathrm{I})^-$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_4(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_j(z)\in C^4(\partial\Omega),\qquad j=5,6.$$

$(\mathrm{III}\cdot \mathrm{II})^-$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_j(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad j=4,5,6.$$

ზემოთ ნახსენები მწკრივების კრებადობის დასადგენად ვისარგებლებთ შემდეგი ასიმპტოტიკით [ ]

$$h_k(\lambda_1 r)\sim\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1},\qquad h_k'(\lambda_1 r)\sim\frac{1}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1},\qquad k\to+\infty.$$

§4. $(\mathrm{IV})^+$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც $\Phi_j(x)$, $j=1,2,....,5$ ფუნქციები წარმოდგენილნი არიან (87) სახით. თუ $\Phi_j(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (17)-ში, მივიღებთ $u(x)$ ვექტორისა და $\vartheta_j(x)$, $j=1,2$ ფუნქციების (89) მნიშვნელობებს. ძაბვის ვექტორს აქვს (91) სახე.

(89) და (91) ფორმულებიდან ვღებულობთ, რომ

$$n(x)\cdot \mathrm{P}(\partial,n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}a_{mk}^{+}(r)Y_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\quad x\in\Omega^+,\tag{118}$$

$$u(x)-n(n\cdot u(x))=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+w_{mk}^{+}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right],\quad x\in\Omega^+.$$

თუ (90), (118) და (89)-ის მეორე ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ $(\mathrm{IV})^+$ ამოცანის, როგორც (2.6) - (2.8) სასაზღვრო პირობებს, ასევე (95) - (96) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი

$\mathrm{A}_{mk}^{(j)}$, $j=1,2,...,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას.

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{I})^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$a_{mk}^{+}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\quad \vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\quad \vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\quad k\geq 0,$$

$$v_{mk}^{+}(R)=\beta_{mk},\quad w_{mk}^{+}(R)=\gamma_{mk},\quad k\geq 1; \tag{119}$$

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$a_{mk}^{+}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\geq 0,$$

$$v_{mk}^{+}(R)=\beta_{mk},\quad w_{mk}^{+}(R)=\gamma_{mk},\qquad k\geq 1. \tag{120}$$

თეორემა 1.11, თეორემა 2.2 და (98) ($(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში) ტოლობის გათვალისწინებით (119) და (120) სისტემები არიან თავსებადნი.

თუ ამ სისტემების ამონახსნებს შევიტანთ (89)-ში, მივიღებთ შესაბამისად $(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{I})^{+}$ და $(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანების ამონახსნს.

(89), (90) და (91) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს:

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{I})^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში $f(z)\in C^{4}(\partial\Omega)$, $f_{j}(z)\in C^{4}(\partial\Omega)$, $j=4,5,6.$

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში $f(z)\in C^{4}(\partial\Omega)$, $f_{j}(z)\in C^{3}(\partial\Omega)$, $j=4,5,6.$

§5. $(\mathrm{I}V)^{-}$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც $\Phi_{j}(x)$, $j=1,2,....,5$ ფუნქციები წარმოდგენილნი არიან (111)-ის სახით. თუ $\Phi_{j}(x)$ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (17)-ში, მივიღებთ (112) და (113) გამოსახულებებს. ძაბვის ვექტორს აქვს (114) სახე.

(113)-დან $\vartheta_j(x),\ j=1,2$ ფუნქციების ნორმალით წარმოებული წარმოიდგინება შემდეგი მწკრივის სახით

$$\frac{\partial \vartheta_j(x)}{\partial n(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\frac{d}{dr}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(j)}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\quad x\in\Omega^{-}. \tag{121}$$

(112) და (114) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$n(x)\cdot \mathrm{P}(\partial_1 n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}a_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),$$

$$u(x)-n(n\cdot u(x))=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+w_{mk}^{-}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right] \tag{122}$$

თუ (113), (121) და (122) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ $(\mathrm{I}V)^{-}$ ამოცანის, როგორც (50)-(52) სასაზღვრო პირობებს, ასევე (95)-(96) ტოლობებს. მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)},\ j=1,2,\ldots,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლე-ბათა შემდეგ სისტემას:

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{I})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$a_{mk}^{-}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\ge 0,$$
$$v_{mk}^{-}(R)=\beta_{mk},\qquad w_{mk}^{-}(R)=\gamma_{mk},\qquad k\ge 1, \tag{123}$$

$(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$a_{mk}^{-}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\ge 0,$$
$$v_{mk}^{-}(R)=\beta_{mk},\qquad w_{mk}^{-}(R)=\gamma_{mk},\qquad k\ge 1. \tag{124}$$

თეორემა 1.11 და თეორემა 2.2-ის გათვალისწინებით (123) და (124) სისტემები არიან თავსებადნი.

თუ ამ სისტემის ამონახსნებს შევიტანთ (112)-(113) გამოსახულებაში, მივიღებთ შესაბამისად $(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{I})^{-}$ და $(\mathrm{I}V\cdot\mathrm{II})^{-}$ ამოცანების ამონახსნს.

(112)-(114) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს

$(IV \cdot I)^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z) \in C^4(\partial\Omega), \qquad f_j(z) \in C^4(\partial\Omega), \qquad j = 4,5,6.$$

$(IV \cdot II)^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z) \in C^4(\partial\Omega), \qquad f_j(z) \in C^3(\partial\Omega), \qquad j = 4,5,6.$$

§6. $(\mathrm{N})^{+}$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც $\Phi_j(x)$, $j = 1,2,....,5$ ფუნქციები წარმოდგენილნი არიან (87) სახით . თუ $\Phi_j(x)$ ფუნქციების ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (17)-ში, მივიღებთ $u(x)$ ვექტორის და $\vartheta_j(x)$, $j = 1,2$ ფუნქციების (89) მნიშვნელობებს. ძაბვის ვექტორს აქვს (91) სახე.

(89)-დან ვღებულობთ

$$n(x) \cdot u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{k} u_{mk}^{+}(r) \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta, \varphi), \qquad x \in \Omega^{+} \tag{125}$$

თუ ვისარგებლებთ (15) ტოლობებით, მაშინ (89)-დან მივიღებთ

$$n(x) \times rotu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=-k}^{k} \sqrt{k(k+1)} \left[\tilde{v}_{mk}^{+}(r) \mathrm{Y}_{mk}(\vartheta, \varphi) + \tilde{w}_{mk}^{+}(r) \mathrm{Z}_{mk}(\vartheta, \varphi) \right], \quad x \in \Omega^{+} \tag{126}$$

სადაც
$$\tilde{v}_{mk}^{+}(r) = -2(2k+3) \left(\frac{r}{R} \right)^{k} \mathrm{A}_{mk}^{(2)} + (\eta_1 + \eta_2) \left(\frac{r}{R} \right)^{k} \mathrm{A}_{mk}^{(4)},$$

$$\tilde{w}_{mk}^{+}(r) = \frac{k+1}{R} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} \mathrm{A}_{mk}^{(3)}, \qquad k \geq 1.$$

თუ (125), (126), (90) და (89)-ის მეორე ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to z \in \partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ $(\mathrm{N})^{+}$ ამოცანის, როგორც (53)-(55) სასაზღვრო პირობებს, ასევე (95)-(96) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)}$, $j = 1,2,..,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^+$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^+(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\geq 0,$$

$$\tilde{v}_{mk}^+(R)=\beta_{mk},\qquad \tilde{w}_{mk}^+(R)=\gamma_{mk},\qquad k\geq 1, \tag{127}$$

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^+$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^+(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\geq 0,$$

$$\tilde{v}_{mk}^+(R)=\beta_{mk},\qquad \tilde{w}_{mk}^+(R)=\gamma_{mk},\qquad k\geq 1. \tag{128}$$

თეორემა 1.11 და თეორემა 2.3-ის თანახმად (127) სისტემა თავსებადია. თეორემა 1.11, თეორემა 2.3 და (98) ტოლობის გათვალის-წინებით (128) სისტემა თავსებადია განუსაზღვრელი რჩება მხოლოდ $\mathrm{A}_{00}^{(4)}$ მუდმივი ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^+$ ამოცანა განისაზღვრება $u(x)=0,\quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const$ შესაკრების სიზუსტით.

თუ (127) და (128) სისტემების ამონახსნებს ევიტანთ (89)-ში, მივიღებთ შესაბამისად $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^+$ და $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^+$ ამოცანების ამონახსნს.

(89)-(91) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებად-ნი, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს:

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^+$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_4(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad j=5,6.$$

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^+$ ამოცანის შემთხვევაში:

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_j(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad j=4,5,6.$$

§7. $(\mathrm{N})^-$ ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც $\Phi_j(x),\ j=1,2,\ldots,5$ ფუნქციები წარმოდგენილნი არიან (111) სახით. თუ $\Phi_j(x)$ ფუნქციების

(111) მნიშვნელობებს შევიტანთ (17)-ში და გავითვალისწინებთ (15) ტოლობებს, მივიღებთ (112) და (113) ტოლობებს.

(112) ტოლობიდან (15)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$n(x)\cdot u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}u_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{k}^{(m)}(\vartheta,\varphi),\ x\in\Omega^{-},$$

$$n(x)\times rotu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[\tilde{v}_{mk}^{-}(r)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\tilde{w}_{mk}^{-}(r)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right],\quad x\in\Omega^{-},\tag{129}$$

სადაც

$$\tilde{v}_{mk}^{-}(r)=2(2k-1)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(2)}+(\eta_1+\eta_2)\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(4)},$$

$$\tilde{w}_{mk}^{-}(r)=-\frac{k}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(3)}.$$

თუ (113), (121) და (129) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, $x\to z\in\partial\Omega$, გავითვალისწინებთ $\left(\mathrm{N}^{-}\right)$ ამოცანის, როგორც (53) – (55) სასაზღვრო პირობებს, ასევე (95) –(96) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)}$, $j=1,2,,.....5$ მუდმივობისათვის მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{-}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \tilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\ge 0,$$

$$\tilde{v}_{mk}^{-}(R)=\beta_{mk},\quad \tilde{w}_{mk}^{-}(R)=\gamma_{mk},\quad k\ge 1,\tag{130}$$

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{-}(R)=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \frac{d}{dR}\tilde{\vartheta}_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\ge 0,$$

$$\tilde{v}_{mk}^{-}(R)=\beta_{mk},\qquad \tilde{w}_{mk}^{-}(R)=\gamma_{mk},\qquad k\ge 1.\tag{131}$$

თეორემა 1.11 და თეორემა 2.3-ის თანახმად (130) და (131) სისტემები არიან თავსებადნი. თუ ამ სისტემების ამონახსნებს შევიტანთ (112)-(113) ტოლობებში, მივიღებთ შესაბამისად $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^{-}$ და $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^{-}$ ამოცა-ნების ამონახსნებს. (112)-(113), (129) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად

და თანაბრად კრებადნი, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს:

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{I})^-$ ამოცანის შემთხვევაში

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_4(z)\in C^3(\partial\Omega),\quad f_j(z)\in C^4(\partial\Omega),\qquad j=5,6.$$

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{II})^-$ ამოცანის შემთხვევაში

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad f_j(z)\in C^3(\partial\Omega),\qquad j=4,5,6.$$

§8. (C) ამოცანის ამოხსნა

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ (17) სახით, სადაც $\Phi_j(x)$, $j=1,2,\ldots,5$ ფუნქციები წარმოდგენილნი არიან (87) მწკრივების სახით. $v(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(6)},\qquad x\in\Omega^-,\tag{132}$$

(89)-დან ვღებულობთ, რომ

$$n(x)\cdot u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}u_{mk}^{+}(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi),\quad x\in\Omega^+,\tag{133}$$

(132)-დან ვღებულობთ

$$\frac{\partial v(x)}{\partial n(x)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\frac{k+1}{R}\left(\frac{R}{r}\right)^{k+2}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk}^{(6)},\qquad x\in\Omega^-,\tag{134}$$

თუ (132)-(134), (91), (90) და (89)-ის მეორე ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ, როგორც (C) ამოცანის (56)-(58) საკონტაქტო პირობებს, ასევე (94)-(95) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,6$ მუდმივობისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$(C\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{+}(R)+d_1\frac{k+1}{R}\mathrm{A}_{mk}^{(6)}=\delta_{mk}^{(4)},\qquad \vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)},\qquad \vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)},\qquad k\geq 0,$$

$$a_{mk}^{+}(R)-d_2\mathrm{A}_{mk}^{(6)}=\alpha_{mk}, \quad k\geq 0, \quad b_{mk}^{+}(R)=\beta_{mk}, \quad c_{mk}^{+}(R)=\gamma_{mk}, \quad k\geq 1, \quad (135)$$

$(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის შემთხვევაში

$$u_{mk}^{+}(R)+d_1\frac{k+1}{R}\mathrm{A}_{mk}^{(6)}=\delta_{mk}^{(4)}, \quad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(1)}(R)=\delta_{mk}^{(5)}, \quad \frac{d}{dR}\vartheta_{mk}^{(2)}(R)=\delta_{mk}^{(6)}, \quad k\geq 0,$$

$$a_{mk}^{+}(R)-d_2\mathrm{A}_{mk}^{(6)}=\alpha_{mk}, \quad k\geq 0, \quad b_{mk}^{+}(R)=\beta_{mk}, \quad c_{mk}^{+}(R)=\gamma_{mk}, \quad k\geq 1. \quad (136)$$

თეორემა 1.11, თეორემა 2.4-ისა და (100) ტოლობის გათვალისწინებით (135) სისტემა თავსებადია, განუსაზღვრელი რჩება, მხოლოდ სამი მუდმივი $\mathrm{A}_{m1}^{(3)}, m=-1,0,1.$ ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან $(C\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=[a'\times x]$, $v(x)=0$, $\vartheta_j(x)=0$, $j=1,2$ შესაკრების სიზუსტით.

თეორემა 1.11, თეორემა 2.4, (100) და (98) ტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ (136) სისტემა თავსებადია. განუსაზღვრელი რჩება მხოლოდ ოთხი $\mathrm{A}_{m1}^{(3)}, m=-1,0,1,$ $\mathrm{A}_{00}^{(4)}$ მუდმივი. ეს ბუნებრივიცაა, ვინაიდან $(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის ამონახსნი განისაზღვრება

$$u(x)=[a'\times x]+\frac{\sigma C'}{R}x, \quad v(x)=\frac{\sigma C' R^2}{d_1|x|}, \quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'$$

შესაკრების სახით, სადაც C' ნებისმიერი მუდმივია, a' ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ვექტორია, $\sigma=d_1R(\eta_1+\eta_2)/(d_1\times(3\lambda+2\mu)+R^2d_2)$.

თუ (135) და (136) სისტემების ამონახსნს შევიტანთ (89) და (132) გამოსახულებაში, მივიღებთ შესაბამისად $(C\cdot\mathrm{I})$ და $(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანების ამონახსნებს.

(89), (91), (132)-(133) მწკრივები იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებისაგან მოვითხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს:

$(C\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის შემთხვევაში

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega), \quad f_4(z)\in C^3(\partial\Omega), \quad f_j(z)\in C^4(\partial\Omega), \quad j=5,6.$$

$(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის შემთხვევაში

$$f(z)\in C^3(\partial\Omega), \quad f_j(z)\in C^3(\partial\Omega), \quad j=4,5,6.$$

თავი III. დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები ნახევარსივრცისათვის

ამ თავში ჩვენ შევისწავლით დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის არაკლასიკურ ამოცანებს ნახევარსივრცისათვის. ამოცანების ამოხსნები ჩაიწერება კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.

§1. სასაზღვრო ამოცანების დასმა

აღვნიშნოთ Ω^{-}-ით $x_3 > 0$ ნახევარსივრცე, ხოლო $\partial\Omega$-ით $x_3 = 0$ სიბრტყე.

ამოცანა (M). ვიპოვოთ Ω^{-} არეში (1)-(2) სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u', u'')^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთერთს

$$\{n(z)\cdot u'(z)\}^{-} = f_3'(z), \qquad \{n(z)\cdot u''(z)\}^{-} = f_3''(z),$$

$$\left\{\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z) - n(z)\left(n(z)\cdot \mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)\ \right)\right\}^{-} = F'(z), \tag{137}$$

$$\left\{\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z) - n(z)\left(n(z)\cdot \mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)\ \right)\right\}^{-} = F''(z), \qquad z\in\partial\Omega,$$

ან

$$\left\{n(z)\cdot \mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)\right\}^{-} = f_3'(z), \qquad \left\{n(z)\cdot \mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)\right\}^{-} = f_3''(z),$$

$$\{u'(z) - n(z)(n(z)\cdot u'(z))\}^{-} = F'(z), \tag{138}$$

$$\{u''(z) - n(z)(n(z)\cdot u''(z))\}^{-} = F''(z), \qquad z\in\partial\Omega,$$

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს:

ა) $U_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad \partial_k U_j(x) = O\left(|x|^{-2}\right),$

$k = 1,2.3, \quad j = 1,2,\ldots\ldots,6, \quad x_3 > 0, \quad |x|\to\infty,$

ბ) $U_j(x) = o(1), \quad \partial_k U_j(x) = o\left(|x|^{-1}\right),$ (139)

$k = 1,2, \quad j = 1,2,\ldots\ldots,6, \quad x_3 = 0, \quad |x|\to\infty,$

სადაც $F'=\left(f_1', f_2', F_3'\right)^{\mathrm{T}}$, $F''=\left(f_1'', f_2'', F_3''\right)^{\mathrm{T}}$, f_j', f_j'', $j=1,2,3$, F_3', F_3'', $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილზე გამავალი Ω^- არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $z=(z_1,z_2,0)$, $\partial_k=\partial/\partial x_k$, $k=1,2.3.$

(M) ამოცანა (137) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ სიმბოლოთი, ხოლო (138) სასაზღვრო პირობით კი $(\mathrm{M}\cdot IV)$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(\tilde{\mathrm{M}})$. ვიპოვოთ Ω^- არეში (1)-(2) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u',u'')^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{n(z)\cdot u'(z)\}^- = f_3'(z)\ , \qquad \{n(z)\times rotu'(z)\}^- = f'(z),$$

$$\{n(z)\cdot u''(z)\}^- = f_3''(z), \quad \{n(z)\times rotu''(z)\}^- = f''(z), \qquad z\in\partial\Omega, \tag{140}$$

სადაც $f'=\left(f_1', f_2', f_3'\right)^{\mathrm{T}}$, $f''=\left(f_1'', f_2'', f_3''\right)^{\mathrm{T}}$, f_j', f_j'', $j=1,2,3$, F_3', F_3'', საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილში გამავალი Ω^- არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი. უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U=(u',u'',)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (139) პირობას.

ამოცანა $(\tilde{\mathrm{N}})$. ვიპოვოთ Ω^- არეში (5)-(6) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^- = f_3(z), \qquad \{n(z)\times rotu(z)\}^- = f(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{141}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^- = f_4(z), \qquad \{\vartheta_2(z)\}^- = f_5(z), \qquad z\in\partial\Omega \tag{142}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_4(z), \qquad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_5(z), \qquad z\in\partial\Omega, \tag{143}$$

სადაც $f' = (f_1, f_2, F_3)^{\mathrm{T}}$, F_3, f_j, $j = 1,2,....,5$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z \in \partial\Omega$ წერტილში გამავალი Ω^- არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

ა) $u(x) = O\left(|x|^{-1}\right)$, $\partial_k u(x) = O\left(|x|^{-2}\right)$, $k = 1,2.3,$

$$\partial_k \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-2}\right), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad j = 1,2, \quad k = 1,2.3,$$

$$x_3 > 0\,, \ |x| \to \infty, \tag{144}$$

ბ) $u(x) = o(1)$, $\partial_k u(x) = o\left(|x|^{-1}\right)$, $k = 1,2$,

$$\vartheta_j(x) = o(1), \quad \partial_k \vartheta_j(x) = o\left(|x|^{-1}\right), \quad k, j = 1,2. \quad x_3 = 0\,, \ |x| \to \infty.$$

$(\tilde{\mathrm{N}})$ ამოცანა (141)-(142) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ $(\tilde{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{I})$ სიმბოლოთი, ხოლო (141) და (143) სასაზღვრო პირობებით $(\tilde{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{II})$ სიმბოლოთი.

§2. ერთადერთობის თეორემები.

თეორემა 3.1. თუ $(M \cdot \mathrm{III})$ და $(\mathrm{M} \cdot IV)$ ამოცანებს გააჩნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა, $\Omega_R := \Omega^- \bigcap \mathrm{B}(0,R)$, სადაც $\mathrm{B}(0,R)$, არის ბირთვი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R. $\partial\Omega_R$-ით აღვნიშნოთ $\mathrm{B}(0,R)$ ბირთვის ზედაპირის ის ნაწილი, რომელიც მდებარეობს Ω^- არეში, ხოლო $S(0,R)$ იყოს წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R, რომელიც მოთავსებულია $x_3 = 0$ სიბრტყეში.

თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ერთგვაროვან $\left(f_j'=0,\ f_j''=0,\ j=1,2,3,\ F_3'=0,\ F_3''=0\right)$ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})_0$ და $(\mathrm{M}\cdot IV)_0$ ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

შემოვიღოთ მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი $\mathrm{M}(\partial)$:

$$\mathrm{M}(\partial):=\begin{bmatrix}\mathrm{M}^{(1)}(\partial)\mathrm{M}^{(2)}(\partial)\\ \mathrm{M}^{(3)}(\partial)\mathrm{M}^{(4)}(\partial)\end{bmatrix}_{6\times6},\quad \mathrm{M}^{(\ell)}(\partial)=\left[\mathrm{M}_{kj}^{(\ell)}\right]_{3\times3},\quad \ell=1,2,3,4, \tag{145}$$

$$\mathrm{M}_{kj}^{(1)}(\partial)=a_1\delta_{kj}\Delta+b_1\partial_k\partial_j,$$

$$\mathrm{M}_{kj}^{(\ell)}(\partial)=c\delta_{kj}\Delta+d\partial_k\partial_j,\quad \ell=2,3,$$

$$\mathrm{M}_{kj}^{(4)}(\partial)=a_2\delta_{kj}\Delta+b_2\partial_k\partial_j,$$

სადაც δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა, $\partial_k=\partial/\partial x_k,\ k=1,2,3,\ \partial=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$.

(145) აღნიშვნის გათვალისწინებით (1)-(2) სისტემა ასე ჩაიწერება

$$\mathrm{M}(\partial)U(x)=0, \tag{146}$$

სადაც $U=(u',u'')^{\mathrm{T}}$.

Ω_R არეში დავწეროთ გრინის ფორმულა (146) განტოლებისათვის [37]

$$\int_{\Omega_R}U(x)\cdot\mathrm{M}(\partial)U(x)dx=\int_{\partial\Omega_R}U(x)\cdot\mathrm{T}(\partial,n)U(x)ds-\int_{S(0,R)}\{U(z)\}^-\cdot\{\mathrm{T}(\partial,n)U(z)\}^-ds-$$
$$-\int_{\Omega_R}E(U,U)dx, \tag{147}$$

სადაც [37]

$$E(U,U)=(a_1+b_1)(divu')^2+(a_2+b_2)(div'')^2+2(c+d)divu'\,divu''+$$
$$+\frac{\mu_1}{2}\sum_{k\neq j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right)^2+\frac{\mu_2}{2}\sum_{k\neq j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}\right)^2+ \tag{148}$$
$$+\mu_3\sum_{k\neq j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_k''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}\right)-\frac{\lambda_5}{2}\sum_{k,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k'}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k''}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''}{\partial x_k}\right)^2.$$

(3) უტოლობების თანახმად $E(U,U)\geq0,\quad x\in\Omega^-$. მარტივი საჩვენებელია, რომ

$$
\begin{aligned}
&\{U(z)\cdot \mathrm{T}(\partial,n)U(z)\}^- = \{n(z)\cdot u(z)\}^- \{n(z)\cdot \mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)\}^- + \\
&+\{n(z)\cdot u''(z)\}^- \{n(z)\cdot \mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)\}^- + \\
&+\{u'(z)-n(z)(n(z)\cdot u'(z))\}^- \cdot \{\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)-n(z)(n(z)\cdot \mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z))\}^- + \\
&+\{u''(z)-n(z)(n(z)\cdot u''(z))\}^- \cdot \{\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)-n(z)(n(z)\cdot \mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z))\}^-.
\end{aligned}
\tag{149}
$$

თუ (149) ტოლობაში გავითვალისწინებთ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})_0$ და $(\mathrm{M}\cdot IV)_0$ ამოცანების ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ

$$
\{U(z)\cdot \mathrm{T}(\partial,n)U(z)\}^- = 0. \tag{150}
$$

(146) და (150) ტოლობები გავითვალისწინოთ (147) ტოლობაში, მივიღებთ

$$
-\int_{\Omega_R} E(U,U)dx + \int_{\partial\Omega_R} U(x)\cdot \mathrm{T}(\partial,n)U(x)ds = 0.
$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$ და გავითვალისწინებთ (139) ასიმპტოტიკას, მივიღებთ

$$
\int_{\Omega^-} E(U,U)dx = 0.
$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $E(U,U)=0,\quad x\in\Omega^-$, საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები:

$$
divu'(x)=0,\quad divu''(x)=0,
$$

$$
\frac{\partial u_k'(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'(x)}{\partial x_k}=0,\quad \frac{\partial u_k''(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''(x)}{\partial x_k}=0,
$$

$$
\frac{\partial u_k'(x)}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j'(x)}{\partial x_k}-\frac{\partial u_k''(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j''(x)}{\partial x_k}=0,\quad x\in\Omega^-.
$$

ამ სისტემის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე [37]

$$
u'(x)=[a'\times x]+b',\quad u''(x)=[a'\times x]+b'',\quad x\in\Omega^-,
$$

სადაც a', b', b'' სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია.

ვინაიდან (139)-ის ძალით $u'(x)$ და $u''(x)$ ვექტორები უსასრულობაში მიისწრაფვიან ნულისკენ, ამიტომ $a'=b'=b''=0$, ე. ი. $U(x)=0,\ x\in\Omega^-$.

თეორემა (3.2). თუ $(\tilde{\mathrm{M}})$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ერთგვაროვან

$\left(f_j'=0,\quad f_j''=0,\quad j=1,2,3,\quad F_3'=0,\quad F_3''=0\right)\ \left(\tilde{\mathrm{M}}\right)_0$ ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

გამოვთვალოთ შემდეგი სკალარული ნამრავლი

$$\begin{aligned} U\cdot \mathrm{M}(\partial)U &= \left(a_1u'+cu''\right)\cdot\Delta u'+\left(cu'+a_2u''\right)\cdot\Delta u''+\left(b_1u'+du''\right)\cdot draddivu'+\\ &+\left(du'+b_2u''\right)\cdot graddivu''. \end{aligned} \tag{151}$$

ვთქვათ $u=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ და $v=(v_1,v_2,v_3)^{\mathrm{T}}$ სამკომპონენტიანი ვექტორებია. მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ, რომ

$$u\cdot\Delta v=div\left(udiv\upsilon\right)+div\left[u\times rotv\right]-divudiv\,v-rotu\cdot rotv,$$

$$u\cdot graddiv\,v=div\left(udiv\,v\right)-divudiv\ v.$$

თუ ამ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (3.15)-ში მივიღებთ

$$\begin{aligned} U\cdot \mathrm{M}(\partial)U &= div\{[(a_1+b_1)u'+(c+d)u'']divu'+[(c+d)u'+(a_2+b_2)u'']divu''+\\ &+a_1[u'\times rotu']+c[u'\times rotu'']+c[u''\times rotu']+a_2[u''\times rotu'']\}-E(U,U), \end{aligned} \tag{152}$$

სადაც

$$\begin{aligned} E(U,U) &= \frac{1}{a_1+b_1}\left[\left((a_1+b_1)divu'+(c+d)divu''\right)^2+d_2\left(divu''\right)^2\right]+\\ &+\frac{1}{a_1}\left[\left(a_1rotu'+crotu''\right)^2+d_1\left(rotu''\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{153}$$

სტოქსის ფორმულის გამოყენებით, (152)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_R}U(x)\cdot\mathrm{M}(\partial)U(x)dx &= \int\limits_{\partial\Omega_R}U(x)\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U(x)ds-\int\limits_{\overline{S(0,R)}}\{U(z)\}^-\cdot\{\mathrm{P}(\partial,n)U(z)\}^-ds-\\ &-\int\limits_{\Omega_R}E(U,U)dx, \end{aligned} \tag{154}$$

სადაც

$$\begin{aligned} U\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U &= (n\cdot u')[(a_1+b_1)divu'+(c+d)divu'']+\\ &+(n\cdot u'')[(c+d)divu'+(a_2+b_2)divu'']-\\ &-(a_1u'+cu'')\cdot[n\times rotu']-(cu'+a_2u'')\cdot[n\times rotu'']. \end{aligned} \tag{155}$$

აქ ვისარგებლებთ ტოლობით

$$n\cdot[u\times rotu]=-u\cdot[n\times rotu].$$

თუ $\left(\tilde{\mathrm{M}}\right)_0$ ერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობებს გავითვალისწინებთ (155)-ში, მივიღებთ

$$\{U(z)\}^- \cdot \{\mathrm{P}(\partial, n)U(z)\}^- = 0, \quad z \in S(0,R).$$

ამ ტოლობისა და (146)-ის გათვალისწინებით (154)-დან ვღებულობთ

$$\int_{\Omega_R} E(U,U)dx - \int_{\partial\Omega_R} U(x)\cdot \mathrm{P}(\partial, n)U(x)ds = 0.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $R \to \infty$ და გავითვალისწინებთ (139) ასიმპტოტიკას, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-} E(U,U)dx = 0. \tag{156}$$

(3) უტოლობის თანახმად $E(U,U) \geq 0, \ x \in \Omega^-$, ამიტომ (156)-დან ვღებულობთ

$E(U,U) = 0, \ \ x \in \Omega^-.$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (153)-დან ვღებულობთ

$$div u'(x) = 0, \ \ div u''(x) = 0, \quad rot u'(x) = 0, \quad rot u''(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

ამ სისტემის ამონახსნია

$$u'(x) = grad\psi_1(x), \quad u''(x) = grad\psi_2(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{157}$$

სადაც $\psi_j(x), \quad j = 1{,}2$ ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქციებია.

$\{n(z)\cdot u'(z)\}^- = 0$ და $\{n(z)\cdot u''(z)\}^- = 0$ სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ ჰარმონიული $\psi_j(x), \quad j = 1{,}2$ ფუნქცია $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს ნეიმანის შემდეგ პირობას

$$\left\{\frac{\partial \psi_j(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = 0, \quad z \in \partial\Omega.$$

ცნობილია, რომ ნეიმანის ამოცანის ამონახსნია $\psi_j(x) = C = const, \ \ j = 1{,}2.$

თუ $\psi_j(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (157)-ში, მივიღებთ

$u'(x) = 0, \ \ u''(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$

ამრიგად მივიღეთ, რომ $\left(\tilde{\mathrm{M}}\right)_0$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი.

თეორემა 3.3. თუ $(\tilde{\mathrm{N}})$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ერთგვაროვან $(f=0,\ \ f_j=0,\ \ j=3,4,5)$ $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})_0$ და $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})_0$ ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

Ω_R არეში დავწეროთ გრინის ფორმულა (6) განტოლებათა სისტემისათვის, მივიღებთ

$$\int\limits_{\partial\Omega_R}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(x)+\kappa_2\vartheta_2(x)\right)\frac{\partial\vartheta_1(x)}{\partial n(x)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(x)+\kappa_3\vartheta_3(x)\right)\frac{\partial\vartheta_2(x)}{\partial n(x)}\right]ds-$$
$$\int\limits_{\overline{S(0,R)}}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(z)+\kappa_2\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(z)+\kappa_3\vartheta_3(z)\right)\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right]^- ds- \tag{158}$$
$$-\int\limits_{\Omega_R}\Big[\kappa_1\left|grad\,\vartheta_1(x)\right|^2+2\kappa_2 grad\,\vartheta_1(x)\cdot grad\,\vartheta_2(x)+\kappa_3\left|grad\,\vartheta_2(x)\right|^2+$$
$$+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\Big]ds=0$$

თუ (158) ტოლობაში გავითვალისწინებთ $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})_0$ და $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})_0$ ერთგვაროვანი ამოცანების სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ

$$\int\limits_{\partial\Omega_R}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(x)+\kappa_2\vartheta_2(x)\right)\frac{\partial\vartheta_1(x)}{\partial n(x)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(x)+\kappa_3\vartheta_2(x)\right)\frac{\partial\vartheta_2(x)}{\partial n(x)}\right]ds-\int\limits_{\Omega_R}\Big[\kappa_1\left|grad\,\vartheta_1(x)\right|^2+$$
$$+2\kappa_2 grad\,\vartheta_1(x)\cdot grad\,\vartheta_2(x)+\kappa_3\left|grad\,\vartheta_2(x)\right|^2+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\Big]dx=0$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$ და გავითვალისწინებთ (144) ქრობის პირობებს, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^-}\Big[\kappa_1\left|grad\,\vartheta_1(x)\right|^2+2\kappa_2 grad\,\vartheta_1(x)\cdot grad\,\vartheta_2(x)+\kappa_3\left|grad\,\vartheta_2(x)\right|^2+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\Big]dx=0. \tag{159}$$

ვინაიდან $\kappa_1\kappa_3-\kappa_2^2>0,\ \ \kappa_3>0,$ ამიტომ

$$\kappa_1\left|grad\,\vartheta_1(x)\right|^2+2\kappa_2 grad\,\vartheta_1(x)\cdot grad\,\vartheta_2(x)+\kappa_3\left|grad\,\vartheta_2(x)\right|^2+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2=$$
$$=\frac{\kappa_1\kappa_3-\kappa_2^2}{\kappa_3}\left|grad\,\vartheta_1(x)\right|^2+\frac{1}{\kappa_3}\left(\kappa_2 grad\,\vartheta_1(x)+\kappa_3 grad\,\vartheta_2(x)\right)^2+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\geq 0.$$

ამ უტოლობის თანახმად (159) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x),\quad grad\,\vartheta_j(x)=0,\quad j=1,2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const.$$

მეორეს მხრივ, ვინაიდან $\vartheta_j(x)\to 0,$ როცა $|x|\to\infty,$ ამიტომ $C=0,$ ე. ი. $\vartheta_j(x)=0, \quad j=1,2, \quad x\in\Omega^-.$

თუ $\vartheta_j(x)=0, \quad j=1,2$ მნიშვნელობას შევიტანთ (5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)gzaddivu(x)=0, \quad x\in\Omega^-.$$

ამ განტოლებისათვის გრინის ფორმულას Ω_R არეში აქვს სახე

$$\int_{\partial\Omega_R} u(x)\cdot\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(x)dS-\int_{\overline{S(0,R)}}\{u(z)\}^-\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^- ds-\int_{\Omega_R}\widetilde{E}(u,u)dx=0, \tag{160}$$

სადაც $u(z)\cdot\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)$ და $\widetilde{E}(u,u)$ სიდიდეებს აქვთ შესაბამისად (76) და (2.30) სახე.

თუ (141) ერთგვაროვან $(f=0, \quad f_3=0)$ სასაზღვრო პირობებს გავითვალისწინებთ (76)-ში, მივიღებთ

$$\{u(z)\}^-\cdot\{\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(z)\}^-=0.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (160)-დან ვღებულობთ

$$\int_{\partial\Omega_R} u(x)\cdot\widetilde{\mathrm{P}}(\partial,n)u(x)ds-\int_{\Omega_R}\widetilde{E}(u,u)dx=0\cdot$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$ და გავითვალისწინებთ (144) ასიმპტოტიკას, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-}\widetilde{E}(u,u)dx=0,$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\widetilde{E}(u,u)=0,$ ანუ

$$divu(x)=0, \quad rotu(x)=0, \quad x\in\Omega^-.$$

ამ სისტემის ამონახსს აქვს სახე

$$u(x)=grad\psi(x), \quad x\in\Omega^-, \tag{161}$$

სადაც $\psi(x)$ ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქციაა.

(161)-დან, $\{n(z)\cdot u(z)\}^-=0, \quad z\in\partial\Omega$ სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\left\{\frac{\partial\psi(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-}=0,\quad z\in\partial\Omega.$$

როგორც ცნობილია ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი $\psi(x)=C=const.$ თუ $\psi(x)$ ფუნქციის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (161)-ში, მივიღებთ, რომ $u(x)=0,\quad x\in\Omega^{-},$ ე. ი. $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})_0$ და $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})_0$ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

§.3. $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ ამოცანის ამოხსნა

თუ (137) სასაზღვრო პირობებში გავითვალისწინებთ, რომ $n(z)=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მაშინ იგი ასე გადაიწერება

$$\{u_3'(z)\}^{-}=f_3'(z),\quad \{u_3''(z)\}^{-}=f_3''(z),$$

$$\left\{\frac{\partial u_j'(z)}{\partial x_3}\right\}^{-}=f_j^{(1)}(z),\qquad \left\{\frac{\partial u_j''(z)}{\partial x_3}\right\}^{-}=f_j^{(2)}(z),\quad j=1,2,\quad z\in\partial\Omega,\tag{162}$$

სადაც

$$f_j^{(1)}(z)=\frac{1}{d_1}\left[a_2f_j'(z)-cf_j''(z)-\alpha_1\frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_j}+2\lambda_5(\mu_2+\mu_3)\frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_j}\right],\quad j=1,2,$$

$$f_j^{(2)}(z)=\frac{1}{d_1}\left[a_1f_j''(z)-cf_j'(z)+2\lambda_5(\mu_1+\mu_3)\frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_j}-\alpha_2\frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_j}\right],\quad j=1,2,$$

$$\alpha_1=\mu_1\mu_2-\mu_3^2+(\mu_2-\mu_1)\lambda_5,\qquad \alpha_2=\mu_1\mu_2-\mu_3^2-(\mu_2-\mu_1)\lambda_5.$$

(162) ფორმულაში და შემდგომში x_3-ით წარმოებულის ზღვრული მნიშვნელობის ქვეშ გვესმის შემდეგი

$$\left\{\frac{\partial v(z)}{\partial x_3}\right\}^{-}=\lim_{\Omega^{-}\ni x\to z\in\partial\Omega}\frac{\partial v(x)}{\partial x_3}.$$

(1)-(2) განტოლებათა სისტემიდან ვღებულობთ, რომ

$$\Delta rotu'(x)=0,\quad \Delta rotu''(x)=0,\quad x\in\Omega^{-}.\tag{163}$$

(162) სასაზღვრო პირობებიდან ვღებულობთ

$$\{rotu'(z)\}_j^{-}=f_j^{(3)}(z),\quad \{rotu''(z)\}_j^{-}=f_j^{(4)}(z),\quad j=1,2,\tag{164}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3} rotu'(z)\right\}_3^- = f_3^{(3)}(z), \quad \left\{\frac{\partial}{\partial x_3} rotu''(z)\right\}_3^- = f_3^{(4)}(z), \quad z \in \partial\Omega, \tag{165}$$

სადაც

$$f_1^{(3)}(z) = \frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_2} - f_2^{(1)}(z), \qquad f_2^{(3)}(z) = -\frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_1} + f_1^{(1)}(z),$$

$$f_1^{(4)}(z) = \frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_2} - f_2^{(2)}(z), \qquad f_2^{(4)}(z) = -\frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_1} + f_1^{(2)}(z),$$

$$f_3^{(3)}(z) = \frac{\partial f_2^{(1)}(z)}{\partial z_1} - \frac{\partial f_1^{(1)}(z)}{\partial z_2}, \qquad f_3^{(4)}(z) = \frac{\partial f_2^{(2)}(z)}{\partial z_1} - \frac{\partial f_1^{(2)}(z)}{\partial z_2}.$$

(138)-(139) წარმოადგენს დირიხლეს ამოცანას, ხოლო (138), (140) კი ნეიმანის ამოცანას. თუ გავიხსენებთ ჰარმონიული ფუნქციისათვის, ნახევარსივრცეში დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამონახსნებს რა სახე აქვთ, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\left[rotu'(x)\right]_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j^{(3)}(y)dy, \qquad j = 1,2,$$

$$\left[rotu''(x)\right]_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j^{(4)}(y)dy, \qquad j = 1,2,$$

$$\left[rotu'(x)\right]_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r} f_3^{(3)}(y)dy,$$

$$\left[rotu''(x)\right]_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r} f_3^{(4)}(y)dy,$$

$$r = (x-y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + x_3^2}.$$

ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$[x\times rotu'(x)]_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{x_1\delta_{2j}-x_2\delta_{1j}}{r}f_3^{(3)}(y)dy+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j}f_2^{(3)}(y)-\delta_{2j}f_1^{(3)}(y)\right)dy,\quad j=1,2,$$
$$[x\times rotu''(x)]_j=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{x_1\delta_{2j}-x_2\delta_{1j}}{r}f_3^{(4)}(y)dy+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j}f_2^{(4)}(y)-\delta_{2j}f_1^{(4)}(y)\right)dy,\quad j=1,2,$$
$$[x\times rotu'(x)]_3=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(x_2f_1^{(3)}(y)-x_1f_2^{(3)}(y)\right)dy,$$
$$[x\times rotu''(x)]_3=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(x_2f_1^{(4)}(y)-x_1f_2^{(4)}(y)\right)dy.\qquad(166)$$

თუ (1)-(2) განტოლებებში გავითვალისწინებთ, რომ $graddivu=\Delta u+rotrotu,$ მივიღებთ

$$(a_1+b_1)\Delta u'(x)+b_1rotrotu'(x)+(c+d)\Delta u''(x)+drotrotu''(x)=0,\qquad(167)$$
$$(c+d)\Delta u'(x)+drotrotu'(x)+(a_2+b_2)\Delta u''(x)+b_2rotrotu''(x)=0,\quad x\in\Omega^-.$$

მეორეს მხრივ, თუ (167)-ში გავითვალისწინებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\Delta[x\times rotu'(x)]=2rotrotu'(x),\qquad\Delta[x\times rotu''(x)]=2rotrotu''(x),$$

მივიღებთ, რომ

$$\Delta v'(x)=0,\quad\Delta v''(x)=0,\quad x\in\Omega^-,\qquad(168)$$

სადაც

$$v'(x)=2(a_1+b_1)u'(x)+2(x+d)u''(x)+b_1[x\times rotu'(x)]+d[x\times rotu''(x)],$$
$$v''(x)=2(c+d)u'(x)+2(a_2+b_2)u''(x)+d[x\times rotu'(x)]+b_2[x\times rotu''(x)].\qquad(169)$$

(162), (164)-(165) სასაზღვრო პირობებიდან, (169)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\{v_3'(z)\}^-=f_3^{(5)}(z),\qquad\{v_3''(z)\}^-=f_3^{(6)}(z),\qquad(170)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}v_j'(z)\right\}^-=f_j^{(5)}(z),\qquad\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}v_j''(z)\right\}^-=f_j^{(6)}(z),\quad j=1,2,\quad z\in\partial\Omega,\qquad(171)$$

სადაც

$$f_3^{(5)}(z)=2(a_1+b_1)f_3'(z)+2(c+d)f_3''(z)+z_1\left[b_1f_2^{(3)}(z)+df_2^{(4)}(z)\right]-z_2\left[b_1f_1^{(3)}(z)+df_1^{(4)}(z)\right],$$

$$f_3^{(6)}(z)=2(c+d)f_3'(z)+2(a_2+b_2)f_3''(z)+z_1\left[df_2^{(3)}(z)+b_2f_2^{(4)}(z)\right]-z_2\left[df_1^{(3)}(z)+b_2f_1^{(4)}(z)\right],$$

$$f_j^{(5)}(z)=2(a_1+b_1)f_j^{(1)}(z)+2(c+d)f_j^{(2)}(z)-b_1(-1)^j\left[z_{3-j}f_3^{(3)}(z)-f_{3-j}^{(3)}(z)\right]-$$
$$-d(-1)^j\left[z_{3-j}f_3^{(4)}(z)-f_{3-j}^{(4)}(y)\right],\quad j=1,2,$$

$$f_j^{(6)}(z)=2(c+d)f_j^{(1)}(z)+2(a_2+b_2)f_j^{(2)}(z)-d(-1)^j\left[z_{3-j}f_3^{(3)}(z)-f_{3-j}^{(3)}(z)\right]-$$
$$-b_2(-1)^j\left[z_{3-j}f_3^{(4)}(z)-f_{3-j}^{(4)}(z)\right],\qquad j=1,2.$$

(168), (170) დირიხლესა და (168), (171) ნეიმანის ამოცანის ამოხსნებს აქვთ შემდეგი სახე

$$v_3'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(5)}(y)dy,$$

$$v_3''(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(6)}(y)dy; \tag{172}$$

$$v_j'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}f_j^{(5)}(y)dy,\quad j=1,2,$$

$$v_j''(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}f_j^{(6)}(y)dy,\quad j=1,2. \tag{173}$$

(169)-დან გვაქვს

$$u'(x)=\zeta_2v'(x)-\zeta_3v''(x)+\zeta_4\left[x\times rotu'(x)\right]+\zeta_5\left[x\times rotu''(x)\right],$$

$$u''(x)=\zeta_1v''(x)-\zeta_3v'(x)+\zeta_6\left[x\times rotu'(x)\right]+\zeta_7\left[x\times rotu''(x)\right], \tag{174}$$

სადაც

$$\zeta_1=(a_1+b_1)/2d_2,\qquad \zeta_2=(a_2+b_2)/2d_2,\qquad \zeta_3=(c+d)/2d_2,$$

$$\zeta_4=\left(d(c+d)-b_1(a_2+b_2)\right)/2d_2,\qquad \zeta_5=\left(b_2(c+d)-d(a_2+b_2)\right)/2d_2,$$

$$\zeta_6=\left(b_1(c+d)-d(a_1+b_1)\right)/2d_2,\qquad \zeta_7=\left(d(c+d)-b_2(a_1+b_1)\right)/2d_2.$$

თუ (166), (172) - (173) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (174)-ში, მივიღებთ

$$U(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K(x,y)f(y)dy, \tag{175}$$

სადაც

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & K^{(2)}(x,y)\\ K^{(3)}(x,y) & K^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times6},\qquad K^{(p)}(x,y)=\left[K_{lj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times3},$$

$$p=1,2,3,4,\quad f=(f',f'')^{\mathrm{T}},\quad f'=(f_1',f_2'f_3')^{\mathrm{T}},\quad f''=(f_1'',f_2'',f_3'')^{\mathrm{T}},$$

$$K_{lj}^{(p)}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left[\frac{1}{d_1}\left(-a_2\delta_{1p}+c(\delta_{2p}+\delta_{3p})-a_1\delta_{4p}\right)\delta_{lj}\frac{1}{r}-\beta'_p\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\partial x_j}\right]+$$

$$+\delta_{3j}(1-\delta_{l3})\left[-a''_p\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}+\beta''_p x_3\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_3}\frac{1}{r}\right]-\delta_{l3}(1-\delta_{3j})\beta'_p x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}-$$

$$-\delta_{l3}\delta_{3j}\left[(\delta_{1p}+\delta_{4p})\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-\beta''_p x_3\frac{\partial^2}{\partial_3^2}\frac{1}{r}\right],\ p=1,2,3,4,$$

$$\beta'_l=\frac{1}{d_1}\left(a_2\zeta_{l+3}-c\zeta_{l+4}\right),\qquad l=1,3,$$

$$\beta'_l=\frac{1}{d_1}\left(a_1\zeta_{l+3}-c\zeta_{l+2}\right),\qquad l=2,4,$$

$$\beta''_l=\frac{1}{d_1}\left[(\alpha_2-d_1)\zeta_{l+4}-(\alpha_1+d_1)\zeta_{l+3}\right],\qquad l=1,3,$$

$$a''_l=\beta''_l+(-1)^l\frac{\alpha_1}{d_1}-\delta_{2l},\qquad l=1,2,$$

$$\beta''_l=\frac{1}{d_1}\left[(\alpha_1-d_1)\zeta_{l+2}-(\alpha_2+d_1)\zeta_{l+3}\right],\qquad l=2,4,$$

$$a''_l=\beta''_l-(-1)^l\frac{\alpha_2}{d_1}-\delta_{3l},\qquad l=3,4.$$

აქ ვისარგებლებთ შემდეგი ტოლობებით

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}\frac{\partial f_j(y)}{\partial y_k}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}f_j(y)dy,\quad k,\ j=1,2,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int(x_\ell-y_\ell)\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\frac{\partial f_j(y)}{\partial y_k}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial^3 r}{\partial x_\ell\partial x_k\partial x_3}f_j(y)dy,\qquad k,\ell,\ j=1,2,$$

(175) ფორმულის საშუალებით გამოვთვალოთ ძაბვის $\mathrm{T}(\partial,n)U(x)$ ვექტორი, მივიღებთ

$$\mathrm{T}(\partial,n)U(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L(x,y)f(y)dy,\tag{176}$$

სადაც

$$L(x,y)=\begin{bmatrix}L^{(1)}(x,y) & L^{(2)}(x,y)\\ L^{(3)}(x,y) & L^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times6},\qquad L^{(l)}(x,y)=\left[L_{kj}^{(l)}(x,y)\right]_{3\times3},\qquad l=1,2,3,4,$$

$$L_{kj}^{(l)}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[-(\delta_{1l}+\delta_{4l})\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-\gamma_l x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}\right]+$$
$$+\delta_{3j}(1-\delta_{k3})\delta_l\, x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\delta_{k3}(1-\delta_{3j})\left[(\gamma_l+\eta_l)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}-\gamma_l x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+$$
$$+\delta_{k3}\delta_{3j}\left[\left(\frac{4\lambda_5 d_3}{d_1}\zeta_l'-\delta_l\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\delta_l x_3\frac{\partial^3}{\partial_3^3}\frac{1}{r}\right],\qquad l=1,2,3,4,$$

$\gamma_l=2(\mu_1\beta_l'+\mu_3\beta_{l+2}'),\quad l=1,2,\quad \gamma_l=2(\mu_3\beta_{l-2}'+\mu_2\beta_l'),\quad l=3,4,$

$\delta_l=2(\mu_1\beta_l''+\mu_3\beta_{l+2}''),\quad l=1,2,\quad \delta_l=2(\mu_3\beta_{l-2}''+\mu_2\beta_l''),\quad l=3,4,$

$\eta_l=\alpha_1\delta_{1l}+(d_1-\alpha_2)\delta_{2l}+(d_1-\alpha_1)\delta_{3l}+\alpha_2\delta_{4l},$

$\zeta_l'=\delta_{1l}+\delta_{4l}-\delta_{2l}-\delta_{3l},\qquad l=1,2,3,4,$

$d_3=\mu_1\mu_2-\mu_3^2,\quad \delta_{kj}$ კრონეკერის სიმბოლოა.

თუ მოვითხოვთ, რომ $f_j'(z),\ f_j''(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega),\quad f_3'(z),\quad f_3''(z)\in C^{\prime,\alpha}(\partial\Omega),$ $j=1,2,\ 0<\alpha<1,$ მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (175) ინტეგრალის სახით წარმოადგენს (1)-(2) სისტემის ამონახსნის Ω^- არეში. თუ (176)-დან $\{\mathrm{P}^{(\ell)}(\partial,n)U(x)\}_j,\ \ell,\ j=1,2$ ფუნქციისა და (175)-დან $u_3'(x),\ u_3''(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega\ \ (x_3\to 0)$ და გავითვალისწინებთ შემდეგ ტოლობას

$$\lim_{x\to z}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f(y)dy=-f(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{177}$$

მივიღებთ რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (175) ფორმულით დააკმაყოფილებს (137) სასაზღვრო პირობებს.

თუ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ ამოცანის სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ შემდეგ პირობებს:

$$|f_j'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\qquad |f_j''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\quad j=1,2,$$

$$|f_3'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\qquad |f_3''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\quad z\in\partial\Omega,\quad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორს, წარმოდგენილი (175) ფორმულით, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში ექნება შემდეგი ასიმპტოტიკა

$$u_j'(x),\quad u_j''(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),\quad j=1,2,$$

$$u_3'(x),\quad u_3''(x)=O\left(|x|^{-1}\right),$$

$$\partial_k u_j'(x),\quad \partial_k u_j''(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\quad j=1,2,$$

$$\partial_k u_3'(x),\quad \partial_k u_3''(x)=O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),\quad k=1,2,3.$$

§4. $(\mathrm{M}\cdot \mathrm{I}V)$ ამოცანის ამოხსნა

(138) სასაზღვრო პირობებში ვიგულისხმოთ, რომ $n(z)=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მაშინ იგი შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\{u_j'(z)\}^- = f_j'(z),\quad \{u_j''(z)\}^- f_j''(z),\quad j=1,2,$$

$$\left\{\frac{\partial u_3'(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_3^{(1)}(z),\qquad \left\{\frac{\partial u_3''(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_3^{(2)}(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{178}$$

სადაც

$$f_3^{(1)}(z)=\frac{1}{d_2}\left[(a_2+b_2)f_3'(z)-(c+d)f_3''(z)-\alpha_1'\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_2}\right)+\alpha_1''\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_2}\right)\right],$$

$$f_3^{(2)}(z)=\frac{1}{d_2}\left[(a_1+b_1)f_3''(z)-(c+d)f_3'(z)+\alpha_2'\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_2}\right)-\alpha_2''\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_2}\right)\right],$$

$$\alpha_1'=d_2-2\mu_1(a_2+b_2)+2\mu_3(c+d),$$

$$\alpha_1''=2\mu_3(a_2+b_2)-2\mu_2(c+d),$$

$$\alpha_2'=2\mu_3(a_1+b_1)-2\mu_1(c+d),$$

$$\alpha_2''=d_2-2\mu_2(a_1+b_1)+2\mu_3(c+d).$$

(1)-(2) განტოლებათა სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta div u'(x)=0,\quad \Delta div u''(x)=0,\quad x\in\Omega^-. \tag{179}$$

(138) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\{div u'(z)\}^- = f_3^{(3)}(z),\quad \{div u''(z)\}^- = f_3^{(4)}(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{180}$$

სადაც

$$f_3^{(3)}(z)=\frac{1}{d_2}\left[(a_2+b_2)f_3'(z)-(c+d)f_3''(z)+(d_2-\alpha_1')\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha_1''\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_2}\right)\right],$$

$$f_3^{(4)}(z)=\frac{1}{d_2}\left[(a_1+b_1)f_3''(z)-(c+d)f_3'(z)+\alpha_2'\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_2}\right)+\right.$$
$$\left.+(d_2-\alpha_2'')\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_2}\right)\right].$$

(179)-(180) დირიხლეს ამოცანების ამონახსნებია

$$divu'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(3)}(y)dy,\quad x\in\Omega^-,$$

$$divu''(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(4)}(y)dy,\quad x\in\Omega^-,\tag{181}$$

სადაც $r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}$.

თუ განტოლებათა (1)-(2) სისტემაში გავითვალისწინებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\Delta(xdivu'(x))=2graddivu'(x),\quad \Delta(xdivu''(x))=2graddivu''(x),$$

მაშინ მოცემული სისტემა ასე გადაიწერება

$$\Delta v'(x)=0,\quad \Delta v''(x)=0,\quad x\in\Omega^-,\tag{182}$$

$$v'(x)=2a_1u'(x)+2cu''(x)+b_1xdivu'(x)+dxdivu''(x),$$
$$v''(x)=2cu'(x)+2a_2u''(x)+dxdivu'(x)+b_2xdivu''(x).\tag{183}$$

დავაგეგმილოთ (182) ვექტორული ტოლობები $0x_j$, $j=1,2,$ საკოორდინატო ღერძებზე, მივიღებთ

$$\Delta v_j'(x)=0,\quad \Delta v_j''(x)=0,\quad j=1,2,\quad x\in\Omega^-.\tag{184}$$

მეორეს მხრივ (178) და (180) სასაზღვრო პირობებიდან, (183)-ის გათვალისწინებით, ვღებულობთ

$$\{v_j'(z)\}^-=f_j^{(5)}(z),\quad \{v_j''(z)\}^-=f_j^{(6)}(z),\quad j=1,2,\ z\in\partial\Omega,\tag{185}$$

სადაც

$$f_j^{(5)}(z) = 2a_1 f_j'(z) + 2cf_j''(z) + b_1 z_j f_3^{(3)}(z) + dz_j f_3^{(4)}(z),$$

$$f_j^{(6)}(z) = 2 f_j'(z) + 2a_2 f_j''(z) + dz_j f_3^{(3)}(z) + b_2 z_j f_3^{(4)}(z), \qquad j = 1,2.$$

(184)-(185) დირიხლეს ამოცანების ამონახსნებს აქვთ შემდეგი სახე

$$v_j'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j^{(5)}(y)dy, \quad j = 1,2, \quad x \in \Omega^-, \tag{186}$$

$$v_j''(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j^{(6)}(y)dy, \quad j = 1,2, \quad x \in \Omega^-.$$

(182) ვექტორული ტოლობები დავაგეგმილოთ $0x_3$ ღერძზე, მივიღებთ

$$\Delta v_3'(x) = 0, \quad \Delta v_3''(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \tag{187}$$

(178), (180) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (183)-დან ვღებულობთ

$$\left\{\frac{\partial v_3'(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_3^{(5)}(z), \qquad \left\{\frac{\partial v_3''(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_3^{(6)}(z), \quad z \in \partial\Omega, \tag{188}$$

სადაც

$$f_3^{(5)}(z) = 2a_1 f_3^{(1)}(z) + 2cf_3^{(2)}(z) + b_1 f_3^{(3)}(z) + df_3^{(4)}(z),$$

$$f_3^{(6)}(z) = 2cf_3^{(1)}(z) + 2a_2 f_3^{(2)}(z) + df_3^{(3)}(z) + b_2 f_3^{(4)}(z).$$

(187)-(188) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნებია

$$v_3'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r} f_3^{(5)}(y)dy, \quad x \in \Omega^-, \tag{189}$$

$$v_3''(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r} f_3^{(6)}(y)dy, \quad x \in \Omega^-.$$

(183)-დან ვღებულობთ

$$u'(x) = \frac{1}{2d_1}\left[a_2 v'(x) - cv''(x) + (cd - a_2 b_1)x\,div\,u'(x) + (cb_2 - da_2)x\,div\,u''(x)\right], \tag{190}$$

$$u''(x) = \frac{1}{2d_1}\left[a_1 v''(x) - cv'(x) + (cb_1 - da_1)x\,div\,u'(x) + (cd - a_1 b_2)x\,div\,u''(x)\right].$$

თუ (181), (186) და (189) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (190)-ში, მივიღებთ

$$U(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{K}(x,y) f(y)dy, \tag{191}$$

სადაც

$$\widetilde{K}(x,y)=\begin{bmatrix}\widetilde{K}^{(1)}(x,y) & \widetilde{K}^{(2)}(x,y)\\ \widetilde{K}^{(3)}(x,y) & \widetilde{K}^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times 6}, \qquad \widetilde{K}^{(p)}(x,y)=\left[\widetilde{K}^{(p)}_{lj}(x,y)\right]_{3\times 3},$$

$$p=1,2,3,4, \quad f=(f', f'')^{\mathrm{T}}, \quad f'=(f_1', f_2' f_3')^{\mathrm{T}}, \quad f''=(f_1'', f_2'', f_3'')^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{K}^{(p)}_{lj}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left[(\delta_{1p}+\delta_{4p})\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+\eta_{1p}\frac{\partial^3 r}{\partial x_l\,\partial x_j\partial x_3}\right]+$$

$$+\delta_{3j}(1-\delta_{l3})\eta_{2p}x_3\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}++\delta_{l3}(1-\delta_{3j})\left(\eta_{3p}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}+\eta_{1p}x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right)+$$

$$+\delta_{l3}\delta_{3j}\left(\eta_{4p}\frac{1}{r}+\eta_{2p}x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right), \qquad p=1,2,3,4,$$

$$\eta_{1p}=\beta_1'\delta_{1p}+\beta_1''\delta_{2p}+\beta_3'\delta_{3p}+\beta_3''\delta_{4p},$$

$$\eta_{2p}=\beta_2'\delta_{1p}+\beta_2''\delta_{2p}+\beta_4'\delta_{3p}+\beta_4''\delta_{4p},$$

$$\eta_{3p}=-\left(\beta_1'+\frac{\alpha_1'}{d_2}\right)\delta_{1p}+\left(\frac{\alpha_1''}{d_2}-\beta_1''\right)\delta_{2p}+\left(\frac{\alpha_2'}{d_2}-\beta_3'\right)\delta_{3p}-\left(\frac{\alpha_2''}{d_2}+\beta_3''\right)\delta_{4p},$$

$$\eta_{4p}=\left(\frac{a_2+b_2}{d_2}-\beta_2'\right)\delta_{1p}-\left(\frac{c+d}{d_2}+\beta_2''\right)\delta_{2p}-\left(\frac{c+d}{d_2}+\beta_4'\right)\delta_{3p}+\left(\frac{a_1+b_1}{d_2}+\beta_4''\right)\delta_{4p},$$

$$\beta_1'=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cd-a_2b_1)(d_2-\alpha_1')+(cb_2-da_2)\alpha_2'\right],$$

$$\beta_2'=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cd-a_2b_1)(a_2+b_2)-(cb_2-da_2)(c+d)\right],$$

$$\beta_1''=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cd-a_2b_1)\alpha_1''+(cb_2-da_2)(d_2-\alpha_2'')\right],$$

$$\beta_2''=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cb_2-da_2)(a_1+b_1)-(cd-a_2b_1)(c+d)\right],$$

$$\beta_3'=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cb_1-da_1)(d_2-\alpha_1')+(cd-a_1b_2)\alpha_2'\right],$$

$$\beta_4'=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cb_1-da_1)(a_2+b_2)-(cd-a_1b_2)(c+d)\right],$$

$$\beta_3''=\frac{1}{2d_1d_2}\left[(cb_1-da_1)\alpha_1''+(cd-a_1b_2)(d_2-\alpha_2'')\right],$$

$$\beta_4'' = \frac{1}{2d_1 d_2}\left[(cb_1 - da_1)(c+d) - (cd - a_1 b_2)(a_1 + b_1)\right],$$

δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა.

გამოვთვალოთ ძაბვის ვექტორი (191)-დან, მივიღებთ

$$\mathrm{T}(\partial, n)U(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \widetilde{L}\ (x,y) f(y)dy, \tag{192}$$

სადაც

$$\widetilde{L}(x,y) = \begin{bmatrix} \widetilde{L}^{(1)}(x,y) & \widetilde{L}^{(2)}(x,y) \\ \widetilde{L}^{(3)}(x,y) & \widetilde{L}^{(4)}(x,y) \end{bmatrix}_{6\times 6}, \qquad \widetilde{L}^{(p)}(x,y) = \left[\widetilde{L}_{kj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times 3}, \qquad p = 1,2,3,4,$$

$$\widetilde{L}_{kj}^{(1)}(x,y) = (1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\Bigg[a_1\delta_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r} + \left(a_1\beta_1' + c\beta_3' + (\mu_1+\lambda_5)\eta_{31} + (\mu_3-\lambda_5)\eta_{33}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\frac{1}{r} +$$
$$+ 2(\mu_1\beta_1' + \mu_3\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg] + \delta_{3j}(1-\delta_{k3})\Bigg[\left(a_1\beta_2' + c\beta_4' + (\mu_1+\lambda_5)\eta_{41} + (\mu_3-\lambda_5)\eta_{43}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r} +$$
$$+ 2(\mu_1\beta_2' + \mu_3\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg] + \delta_{k3}(1-\delta_{kj})2(\mu_1\beta_1' + \mu_3\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_3^2}\frac{1}{r} +$$
$$+ \delta_{k3}\delta_{3j}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} + 2(a_1\beta_2' + \mu_3\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right],$$

$$\widetilde{L}_{kj}^{(2)}(x,y) = (1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\Bigg[c\delta_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r} + \left(a_1\beta_1'' + c\beta_3'' + (\mu_1+\lambda_5)\eta_{32} + (\mu_3-\lambda_5)\eta_{34}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r} +$$
$$+ 2(\mu_1\beta_1'' + \mu_3\beta_3'')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg] + \delta_{3j}(1-\delta_{k3})\Bigg[\left(a_1\beta_2'' - c\beta_4'' + (\mu_1+\lambda_5)\eta_{42} + (\mu_3-\lambda_5)\eta_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r} +$$
$$+ 2(\mu_1\beta_2'' - \mu_3\beta_4'')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg] + \delta_{k3}(1-\delta_{3j})2(\mu_1\beta_1'' + \mu_3\beta_3'')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_3^2}\frac{1}{r} +$$
$$+ \delta_{k3}\delta_{3j}2(\mu_1\beta_2'' - \mu_3\beta_4'')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r},$$

$$\widetilde{L}^{(3)}_{kj}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[c\delta_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\left(c\beta_1'+a_2\beta_3'+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{31}+(\mu_2+\lambda_5)\eta_{33}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_3\beta_1'+\mu_2\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{3j}(1-\delta_{k3})\left[\left(c\beta_2'-a_2\beta_4'+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{41}+(\mu_2+\lambda_5)\eta_{43}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_3\beta_2'+\mu_2\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{k3}(1-\delta_{3j})2(\mu_3\beta_1'+\mu_2\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_3^2}\frac{1}{r}+$$
$$+\delta_{k3}\delta_{3j}2(\mu_3\beta_2'+\mu_2\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r},$$

$$\widetilde{L}^{(4)}_{kj}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[a_2\delta_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\left(c\beta_1''+a_2\beta_3''+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{32}+(\mu_2+\lambda_5)\eta_{34}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_3\beta_1''+\mu_2\beta_3'')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{3j}(1-\delta_{k3})\left[\left(c\beta_2''-a_2\beta_4''+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{42}+(\mu_2+\lambda_5)\eta_{44}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_3\beta_2''-\mu_2\beta_4'')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{k3}(1-\delta_{3j})2(\mu_3\beta_1''+\mu_2\beta_3'')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_3^2}\frac{1}{r}+$$
$$+\delta_{k3}\delta_{3j}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2(\mu_3\beta_2''-\mu_2\beta_4'')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right].$$

მოვითხოვოთ, რომ სასაზღვრო ფუნქციები $f_j'(z)$, $f_j''(z)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $f_3'(z)$, $f_3''(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, $j=1,2$, $0<\alpha<1$, მაშინ უშუალო შემოწმებით მტკიცდება, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (191) სახით წარმოადგენს (1)-(2) სისტემის ამონახსნს. თუ $u_j'(x)$, $u_j''(x)$, $\mathrm{P}^{(j)}(\partial,\Omega)U(x)$, $j=1,2$ ფუნქციებში (191)-(192)-დან გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega$ $(x_3\to 0)$ და გავითვალისწინებთ (177) ტოლობას, მივიღებთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (191) ფორმულით აკმაყოფილებს (138) სასაზღვრო პირობებს.

თუ სასაზღვრო ფუნქციებიდან მოვითხოვთ, რომ

$$\left|f_3'(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\qquad \left|f_3''(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},$$

$$\left|f_j'(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\qquad \left|f_j''(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\quad z\in\partial\Omega,\quad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (191) ფორმულით წარმოადგენს $(\mathrm{M}\cdot IV)$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს, რომელსაც უსასრულობაში გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტიკა:

$$u_j'(x),\ \ u_j''(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\ \ u_3'(x),\ \ u_3''(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_j'(x),\ \ \partial_k u_j''(x)=O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_3'(x),\ \ \partial_k u_3''(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\quad j=1,2\quad k=1,2,3.$$

§.5. $(\widetilde{\mathrm{M}})$ ამოცანის ამოხსნა

(140) საკონტაქტო პირობებში თუ გავითვალისწინებთ, რომ $n(z)=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მაშინ იგი ასე გადაიწერება:

$$\{u_3'(z)\}^- = f_3'(z),\quad \{u_3''(z)\}^- = f_3''(z),$$

$$\left\{\frac{\partial u_j'(z)}{\partial x_3}\right\}^- = \frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_j}-f_j'(z),\quad \left\{\frac{\partial u_j''(z)}{\partial x_3}\right\}^- = \frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_j}-f_j''(z),\quad j=1,2,\quad z\in\partial\Omega. \quad (193)$$

(1)-(2) სისტემიდან ვღებულობთ

$$\Delta rotu'(x)=0,\quad \Delta rotu''(x)=0,\quad x\in\Omega^-. \quad (194)$$

(193) სასაზღვრო პირობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\{rotu'(z)\}_j^- = \delta_{1j}f_2'(z)-\delta_{2j}f_1'(z),$$

$$\{rotu''(z)\}_j^- = \delta_{1j}f_2''(z)-\delta_{2j}f_1''(z),\quad j=1,2,\ z\in\partial\Omega; \quad (195)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}rotu'(z)\right\}_3^- = \frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_1},$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}rotu''(z)\right\}_3^- = \frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_1},\quad z\in\partial\Omega. \quad (196)$$

(194)-(196) დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამონახსნები ჩაიწერება ასე:

$$[rotu'(x)]_j = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j} f_2'(y) - \delta_{2j} f_1'(y)\right)dy, \quad j = 1,2,$$

$$[rotu''(x)]_j = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j} f_2''(y) - \delta_{2j} f_1''(y)\right)dy, \quad j = 1,2,$$

$$[rotu'(x)]_3 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_1'(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2'(y)}{\partial y_1}\right)dy,$$

$$[rotu''(x)]_3 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_1''(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2''(y)}{\partial y_1}\right)dy,$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$[x \times rotu'(x)]_j = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{x_2\delta_{1j} - x_1\delta_{2j}}{r}\left(\frac{\partial f_1'(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2'(y)}{\partial y_1}\right)dy -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j'(y)dy, \quad j = 1,2,$$

$$[x \times rotu''(x)]_j = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{x_2\delta_{1j} - x_1\delta_{2j}}{r}\left(\frac{\partial f_1''(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2''(y)}{\partial y_1}\right)dy -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j''(y)dy, \quad j = 1,2, \qquad (197)$$

$$[x \times rotu'(x)]_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}(x_1 f_1'(y) + x_2 f_2'(y))dy,$$

$$[x \times rotu''(x)]_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}(x_1 f_1''(y) + x_2 f_2''(y))dy,$$

δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა.

თუ (1)-(2) განტოლებებში გავითვალისწინებთ, რომ $graddivu = \Delta u + rotrotu,$ მაშინ იგი ასე გადაიწერება

$$(a_1 + b_1)\Delta u'(x) + b_1 rotrotu'(x) + (c + d)\Delta u''(x) + drotrotu''(x) = 0, \qquad (198)$$
$$(c + d)\Delta u'(x) + drotrotu'(x) + (a_2 + b_2)\Delta u''(x) + b_2 rotrotu''(x) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

მეორეს მხრივ, თუ (198)-ში გავითვალისწინებთ შემდეგ ტოლობებს

$$\Delta[x \times rotu'(x)] = 2rotrotu'(x), \qquad \Delta[x \times rotu''(x)] = 2rotrotu''(x),$$

მაშინ იგი ასე გადაიწერება

$$\Delta v'(x)=0, \quad \Delta v''(x)=0, \quad x\in\Omega^-, \tag{199}$$

სადაც

$$v'(x)=2(a_1+b_1)u'(x)+2(c+d)u''(x)+b_1[x\times rotu'(x)]+d[x\times rotu''(x)], \tag{200}$$
$$v''(x)=2(c+d)u'(x)+2(a_2+b_2)u''(x)+d[x\times rotu'(x)]+b_2[x\times rotu''(x)].$$

(183), (185)-(186) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, (200)-დან ვღებულობთ

$$\{v_3'(z)\}^- = f_3'(z), \quad \{v_3''(z)\}^- = f_3^{(2)}(z), \quad z \in\partial\Omega, \tag{201}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}v_j'(z)\right\}^- = f_j^{(1)}(z), \quad \left\{\frac{\partial}{\partial x_3}v_j''(z)\right\}^- = f_j^{(2)}(z), \quad j=1,2, \quad z\in\partial\Omega. \tag{202}$$

სადაც

$$f_3^{(1)}(z)=2(a_1+b_1)f_3'(z)+2(c+d)f_3''(z)-b_1(z_1f_1'(z)+z_2f_2'(z))-d_2(z_1f_1''(z)+z_2f_2''(z)),$$
$$f_3^{(2)}(z)=2(c+d)f_3'(z)+2(a_2+b_2)f_3''(z)-d(z_1f_1'(z)+z_2f_2'(z))-b_2(z_1f_1''(z)+z_2f_2''(z)),$$

$$f_j^{(1)}(z)=2(a_1+b_1)\left(\frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_j}-f_j'(z)\right)+2(c+d)\left(\frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_j}-f_j''(z)\right)+$$
$$+(z_2\delta_{1j}-z_1\delta_{2j})\left[b_1\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_1}\right)+d\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_1}\right)\right],$$

$$f_j^{(2)}(z)=2(c+d)\left(\frac{\partial f_3'(z)}{\partial z_j}-f_j'(z)\right)+2(a_2+b_2)\left(\frac{\partial f_3''(z)}{\partial z_j}-f_j''(z)\right)+$$
$$+(z_2\delta_{1j}-z_1\delta_{2j})\left[d\left(\frac{\partial f_1'(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2'(z)}{\partial z_1}\right)+b_2\left(\frac{\partial f_1''(z)}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2''(z)}{\partial z_1}\right)\right], \quad j=1,2.$$

(199), (201) დირიხლეს და (199), (202) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$v_3'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(1)}(y)dy,$$

$$v_3''(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_3^{(2)}(y)dy, \tag{203}$$

$$v_j'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}f_j^{(1)}(y)dy, \quad j=1,2,$$

$$v_j''(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}f_j^{(2)}(y)dy, \quad j=1,2.$$

(200)-დან ვღებულობთ, რომ

$$u'(x)=\zeta_2 v'(x)-\zeta_3 v''(x)+\zeta_4[x\times rotu'(x)]+\zeta_5[x\times rotu''(x)],$$

$$u''(x)=\zeta_1 v''(x)-\zeta_3 v'(x)+\zeta_6[x\times rotu'(x)]+\zeta_7[x\times rotu''(x)], \qquad (204)$$

სადაც

$$\zeta_1=(a_1+b_1)/2d_2,\quad \zeta_2=(a_2+b_2)/2d_2,\quad \zeta_3=(c+d)/2d_2,$$

$$\zeta_4=(d(c+d)-b_1(a_2+b_2))/2d_2,\quad \zeta_5=(b_2(c+d)-d(a_2+b_2))/2d_2,$$

$$\zeta_6=(b_1(c+d)-d(a_1+b_1))/2d_2,\quad \zeta_7=(d(c+d)-b_2(a_1+b_1))/2d_2.$$

(204) ტოლობებიდან, (197) და (203) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K\,(x,y)f(y)dy,\quad x\in\Omega^-, \qquad (205)$$

სადაც

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & K^{(2)}(x,y)\\ K^{(3)}(x,y) & K^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times6},\qquad K^{(p)}(x,y)=\left[K^{(p)}_{l\,j}(x,y)\right]_{3\times3},$$

$$p=1,2,3,4,\quad f=(f',f'')^{\mathrm{T}},\quad f'=(f_1',f_2',f_3')^{\mathrm{T}},\quad f''=(f_1'',f_2'',f_3'')^{\mathrm{T}},$$

$$K^{(1)}_{l\,j}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left(\delta_{l\,j}(\xi_4-1)\frac{1}{r}-\xi_4\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\partial x_j}\right)+(1-\delta_{l3})\delta_{l3}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}-$$

$$-\xi_4(1-\delta_{3j})\delta_{3l}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\delta_{l3}\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r},$$

$$K^{(2)}_{l\,j}(x,y)=\zeta_5(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left(\delta_{l\,j}\frac{1}{r}-\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\,\partial x_j}\right)-\zeta_5(1-\delta_{3j})\delta_{l3}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r},$$

$$K^{(3)}_{l\,j}(x,y)=\zeta_6(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left(\delta_{l\,j}\frac{1}{r}-\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\,\partial x_j}\right)-\zeta_6(1-\delta_{3j})\delta_{l3}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r},$$

$$K^{(4)}_{l\,j}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left(\delta_{l\,j}(\zeta_7-1)\frac{1}{r}-\zeta_7\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\,\partial x_j}\right)+(1-\delta_{l3})\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}-$$

$$-\zeta_7(1-\delta_{3j})\delta_{3l}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\delta_{l3}\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}.$$

აქ ჩვენ ვისარგებლებთ ტოლობებით

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{1}{r}\frac{\partial f_l(y)}{\partial y_j}dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}\,f_l(y)dy,\qquad l,\,j=1,2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int (x_l - y_l)\frac{1}{r}\frac{\partial f_k(y)}{\partial y_j}dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial^2 r}{\partial x_l \partial x_j} f_k(y)dy, \qquad l,\, j = 1,2. \qquad (206)$$

თუ $U(x)$ ვექტორის (205) მნიშვნელობას შევიტანთ $\mathrm{T}(\partial, n)U(x)$ ძაბვის ვექტორის (4) მნიშვნელობაში, მივიღებთ

$$\mathrm{T}(\partial, n)U(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L\,(x,y) f(y)dy,$$

სადაც $L(x,y) = \begin{bmatrix} L^{(1)}(x,y) & L^{(2)}(x,y) \\ L^{(3)}(x,y) & L^{(4)}(x,y) \end{bmatrix}_{6\times 6}$, $\quad L^{(p)}(x,y) = \left[L^{(p)}_{kj}(x,y)\right]_{3\times 3}$, $\quad l = 1,2,3,4,$

$$L^{(l)}_{kj}(x,y) = (1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[(c\zeta_6 + a_1\zeta_4 - a_1)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} - 2(\mu_1\zeta_4 + \mu_3\zeta_6)\frac{\partial^3 r}{\partial x_k \partial x_j \partial x_3}\right] +$$
$$+ 2\mu_1(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_3}\frac{1}{r} - (1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left[\left(-2\mu_1 + a_1 + \frac{b_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} +\right.$$
$$\left. + 2(\mu_1\zeta_4 + \mu_3\zeta_6)x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\frac{1}{r}\right] + 2\mu_1\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\,,$$

$$L^{(2)}_{kj}(x,y) = (1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[(a_1\zeta_5 + c\zeta_7 - c)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} - 2(\mu_1\zeta_5 + \mu_3\zeta_7)\frac{\partial^3 r}{\partial x_k \partial x_j \partial x_3}\right] +$$
$$+ 2\mu_3(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_3}\frac{1}{r} - (1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left[\left(-2\mu_3 + c + \frac{d}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} +\right.$$
$$\left. + 2(\mu_1\zeta_5 + \mu_3\zeta_7)x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\frac{1}{r}\right] + 2\mu_3\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\,,$$

$$L^{(3)}_{kj}(x,y) = (1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[(a_2\zeta_6 + c\zeta_4 - c)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} - 2(\mu_2\zeta_6 + \mu_3\zeta_4)\frac{\partial^3 r}{\partial x_k \partial x_j \partial x_3}\right] +$$
$$+ 2\mu_3(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_3}\frac{1}{r} - (1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left[\left(c + \frac{d}{2} - 2\mu_3\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} +\right.$$
$$\left. + 2(\mu_2\zeta_6 + \mu_3\zeta_4)x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\frac{1}{r}\right] + 2\mu_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\,,$$

$$L_{kj}^{(4)}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[(c\zeta_5+a_2\zeta_7-a_2)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-2(\mu_3\zeta_5+\mu_2\zeta_7)\frac{\partial^3 r}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\right]+$$
$$+2\mu_2(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}-(1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left[\left(a_2+\frac{b_2}{2}-2\mu_2\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_3\zeta_5+\mu_2\zeta_7)x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+2\mu_2\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\,.$$

თუ მოვითხოვთ, რომ სასაზღვრო ფუნქციები $f_j'(z)$, $f_j''(z)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $f_3'(z)$, $f_3''(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, $j=1,2$, $0<\alpha<1$, მაშინ უშუალო შემოწმებით მტკიცდება, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (205) ფორმულის სახით წარმოადგენს (1)-(2) სისტემის ამონახსნს. თუ $\frac{\partial u_j'(x)}{\partial x_3}$, $\frac{\partial u_j''(x)}{\partial x_3}$, $j=1,2$, $u_3'(x)$, $u_3''(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობებში (205)-დან გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega$ $(x_3\to 0)$ და გავითვალისწინებთ (177) ტოლობას, მივიღებთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (205) ფორმულით, აკმაყოფილებს (140) სასაზღვრო პირობებს.

თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებისაგან მოვითხოვთ, რომ

$$|f_j'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\qquad |f_j''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\qquad j=1,2,$$

$$|f_3'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\qquad |f_3''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\quad z\in\partial\Omega,\quad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (205) სახით, წარმოადგენს $(\widetilde{\mathrm{M}})$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს, რომელიც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს:

$$u_j'(x),\ \ u_j''(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_j'(x),\ \ \partial_k u_j''(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\qquad j=1,2,$$

$$u_3'(x),\ \ u_3''(x)=O\left(|x|^{-1}\right),$$

$$\partial_k u_3'(x),\quad \partial_k u_3''(x) = O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),\quad k = 1,2,3.$$

§.6. $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის ამოხსნა

თუ (141)-(142) სასაზღვრო პირობებში გავითვალისწინებთ, რომ $n(z) = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მაშინ $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის სასაზღვრო პირობები ასე გადაიწერება:

$$\{u_3(z)\}^- = f_3(z),\qquad \left\{\frac{\partial u_j(z)}{\partial x_3}\right\}^- = \frac{\partial f_3(z)}{\partial z_j} - f_j(z),\quad j = 1,2, \tag{207}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^- = f_4(z),\qquad \{\vartheta_2(z)\}^- = f_5(z),\qquad z \in \partial\Omega. \tag{208}$$

(6) სისტემიდან მარტივი გარდაქმნების შემდეგ ვღებულობთ

$$\Delta\left[(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(x) + (\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(x)\right] = 0, \tag{209}$$

$$\left(\Delta - \lambda_1^2\right)\left(\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x)\right) = 0, \tag{210}$$

სადაც $\lambda_1^2 = \alpha d_2 / d'$, $d' = \kappa_1\kappa_3 - \kappa_2^2$, $d_2 = \kappa_1 + 2\kappa_2 + \kappa_3$.

(208) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\{(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(z) + (\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(z)\}^- = (\kappa_1+\kappa_2) f_4(z) + (\kappa_2+\kappa_3) f_5(z), \tag{211}$$

$$\{\vartheta_1(z) - \vartheta_2(z)\}^- = f_4(z) - f_5(z). \tag{212}$$

(209), (211) და (210), (212) დირიხლეს ამოცანების ამონახსნები Ω^- არეში წარმოიდგინებიან შემდეგი სახით

$$(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(x) + (\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left((\kappa_1+\kappa_2) f_4(y) + (\kappa_2+\kappa_3) f_5(y)\right)dy,$$

$$\vartheta_1(x) - \vartheta_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r}\left(f_4(y) - f_5(y)\right)dy.$$

ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\vartheta_1(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_4(y) + \frac{\kappa_2+\kappa_3}{d_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right)\right]dy, \qquad (213)$$

$$\vartheta_2(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}f_5(y) - \frac{\kappa_1+\kappa_2}{d_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right)\right]dy.$$

თუ $\vartheta_1(x)$ და $\vartheta_2(x)$ ფუნქციების (213) მნიშვნელობებს შევიტანთ (5) განტოლებაში, მივიღებთ

$$\mu\Delta u(x) + (\lambda+\mu)graddivu(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} grad\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\eta_1 f_4(y) + \eta_2 f_5(y)\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{d_2}\left(\eta_1(\kappa_2+\kappa_3) - \eta_2(\kappa_1+\kappa_2)\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\,\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right)\right]dy. \qquad (214)$$

ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ (214) არაერთგვაროვანი განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (207) სასაზღვრო პირობებს. ამ ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$u(x) = u_0(x) + \tilde{u}(x), \quad x\in\Omega^-, \qquad (215)$$

სადაც $u_0(x)$ ვექტორი Ω^- არეში აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mu\Delta u_0(x) + (\lambda+\mu)graddivu_0(x) = 0, \quad x\in\Omega^-, \qquad (216)$$

ხოლო $\partial\Omega$ საზღვარზე კი (207) სასაზღვრო პირობებს.

$\tilde{u}(x)$ არის (214) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

$$\{\tilde{u}_3(z)\}^- = 0, \qquad \left\{\frac{\partial\tilde{u}_j(z)}{\partial x_3}\right\}^- = 0, \quad z\in\partial\Omega. \qquad (217)$$

(214) განტოლების კერძო ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს (144) სასაზღვრო პირობებს, აქვს შემდეგი სახე

$$\tilde{u}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left\{ \left[-grad\,\frac{\partial}{\partial x_3}\Phi(x,y) + e_3\,\frac{1}{r} + x_3 grad\,\frac{1}{r} \right] (\alpha_1 f_4(y) + \alpha_2 f_5(y)) - \right.$$

$$\left. -\alpha_3 grad\,\psi(x,y)(f_4(y) - f_5(y)) \right\},$$

(218)

სადაც

$$\alpha_1 = \frac{(\eta_1+\eta_2)(\kappa_1+\kappa_2)}{2(\lambda+2\mu)d_2},\ \alpha_2 = \frac{(\eta_1+\eta_2)(\kappa_2+\kappa_3)}{2(\lambda+2\mu)d_2},\ \alpha_3 = \frac{\eta_1(\kappa_2+\kappa_3) - \eta_2(\kappa_1+\kappa_2)}{(\lambda+2\mu)d_2\lambda_1^2},$$

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left[e^{-x_3\sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}} - \frac{\sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}}{|\xi|} e^{-x_3|\xi|} \right] e^{-i(\tilde{x}-y)\cdot\xi} d\xi_1 d\xi_2. \tag{219}$$

$$\Phi(x,y) = x_3 \ln(r+x_3) - r, \qquad e_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, 0), \quad \tilde{x} = (x_1, x_2, 0).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\Delta\Phi(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Phi(x,y) = \frac{1}{r}, \quad \Delta\psi(x,y) = -\lambda_1^2 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r}.$$

(219)-დან ვღებულობთ

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\psi(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}\left[e^{-x_3\sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}} - e^{-x_3|\xi|} \right] e^{-i(\tilde{x}-y)\cdot\xi} d\xi_1 d\xi_2.$$

მტკიცდება, რომ (იხ. [1], გვ. 464)

$$\lim_{x_3\to 0}\frac{\partial}{\partial x_3}\psi(x,y) = 0.$$

ახლა ვიპოვით (216) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (207) სასაზღვრო პირობებს. (146) განტოლებიდან ვღებულობთ

$$\Delta rotu_0(x) = 0, \quad x \in \Omega^- . \tag{220}$$

(207) სასაზღვრო პირობებიდან ვღებულობთ

$$\{rotu_0(z)\}_j^- = \delta_{1j} f_2(z) - \delta_{2j} f_1(z), \quad j = 1,2, \tag{221}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3} rotu_0(z)\right\}_3^- = \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2(z)}{\partial z_1}, \tag{222}$$

δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა.

(220)-(221) დირიხლესა და (220), (222) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნებს აქვთ შემდეგი სახე

$$\left(rotu_0(x)\right)_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j} f_2(y) - \delta_{2j} f_1(y)\right)dy, \quad j = 1,2, \quad x \in \Omega^-,$$

$$\left(rotu_0(x)\right)_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2(y)}{\partial y_1}\right)dy, \quad x \in \Omega^-.$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\left[x \times rotu_0(x)\right]_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left[x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r} f_j(y) + \frac{1}{r}\left(x_2\delta_{1j} - x_1\delta_{2j}\right)\left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2(y)}{\partial y_1}\right)\right]dy,$$

$$j = 1,2, \quad x \in \Omega^- \qquad (223)$$

$$\left[x \times rotu_0(x)\right]_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \left[-\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(x_1 f_1(y) + x_2 f_2(y)\right)\right]dy, \quad x \in \Omega^-.$$

თუ (216) განტოლებაში გავითვალისწინებთ $graddivu_0(x) = \Delta u_0(x) +$ $+ rotrotu_0(x)$ ტოლობას, მივიღებთ

$$(\lambda + 2\mu)\Delta u_0(x) + (\lambda + \mu) rotrotu_0(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \qquad (224)$$

მეორეს მხრივ $\Delta\left[x \times rotu_0(x)\right] = 2rotrotu_0(x)$, რის გამოც (224) განტოლება გადაიწერება ასე

$$\Delta\left[2(\lambda + 2\mu)u_0(x) + (\lambda + \mu)\left(x \times rotu_0(x)\right)\right] = 0, \quad x \in \Omega^-. \qquad (225)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v(x) := 2(\lambda + 2\mu)u_0(x) + (\lambda + \mu)\left[x \times rotu_0(x)\right], \quad x \in \Omega^-. \qquad (226)$$

ამ აღნიშვნის თანახმად (3.89) ჩაიწერება ასე

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \qquad (227)$$

(227) ვექტორული ტოლობა დავაგეგმილოთ $0x_j$, $j = 1,2,3$ საკოორდინატო ღერძზე, მივიღებთ

$$\Delta v_j(x) = 0, \quad j = 1,2,3, \quad x \in \Omega^-. \qquad (228)$$

(226)-დან, (207) და (221) – (222) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\{v_3(z)\}^- = -(\lambda + \mu)\left(z_1 f_1(z) + z_2 f_2(z)\right) + 2(\lambda + 2\mu) f_3(z), \quad z \in \partial\Omega, \qquad (229)$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3} v_j(z)\right\}^- = -(\lambda+3\mu) f_j(z) + (\lambda+\mu)(\delta_{1j} z_2 - \delta_{2j} z_1)\left(\frac{\partial f_1(z)}{\partial z_2} - \frac{\partial f_2(z)}{\partial z_1}\right) + \\ + 2(\lambda+2\mu)\frac{\partial f_3(z)}{\partial z_j}, \qquad j=1,2, \qquad z \in \partial\Omega. \tag{230}$$

(228), (229) დირიხლესა და (228), (230) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნები Ω^- არეში შესაბამისად მოიცემა შემდეგი სახით:

$$v_3(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left[-(\lambda+\mu)(y_1 f_1(y) + y_2 f_2(y)) + 2(\lambda+2\mu) f_3(y)\right]dy, \quad x \in \Omega^-, \tag{231}$$

$$v_j(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{1}{r}\left[-(\lambda+3\mu) f_j(y) + (\lambda+\mu)(\delta_{1j} y_2 - \delta_{2j} y_1)\left(\frac{\partial f_1(y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2(y)}{\partial y_1}\right) + \right. \\ \left. + 2(\lambda+2\mu)\frac{\partial f_3(y)}{\partial y_j}\right]dy, \qquad j=1,2, \qquad x \in \Omega^-.$$

(226) ტოლობიდან მივიღებთ

$$u_0(x) = \frac{1}{2(\lambda+2\mu)} v(x) - a[x \times rot u_0(x)], \qquad x \in \Omega^-. \tag{232}$$

(223) და (231) ტოლობების გათვალისწინებით (232) მოიღებს შემდეგ სახეს

$$u_0(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K^{(1)}(x,y) f'(y) dy, \tag{233}$$

სადაც $f' = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$,

$$K^{(1)}(x,y) = \left[K^{(1)}_{\ell j}(x,y)\right]_{3\times 3},$$

$$K^{(1)}_{\ell j}(x,y) = (1-\delta_{\ell 3})(1-\delta_{3j})\left(-\frac{1}{r}\delta_{\ell j} + a\frac{\partial^2 r}{\partial x_\ell \partial x_j}\right) + (1-\delta_{\ell 3})\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{1}{r} + \\ a(1-\delta_{3j})\delta_{\ell 3} x_3 \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r} + \delta_{\ell j}\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}, \qquad a = \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}. \tag{234}$$

თუ $\tilde{u}(x)$ და $u_0(x)$ ვექტორების (218) და (233) მნიშვნელობებს შევიტანთ (215)-ში და გავითვალისწინებთ (213) ტოლობებს, მაშინ $(\tilde{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{I})$ ამოცანის ამონახსნი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$U(x) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K(x,y) f'(y) dy, \tag{235}$$

სადაც $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathrm{T}}$, $f = (f', f_4, f_5)^{\mathrm{T}}$,

$$K(x,y)=\begin{bmatrix} K^{(1)}(x,y) & K^{(2)}(x,y) \\ K^{(3)}(x,y) & K^{(4)}(x,y) \end{bmatrix}_{5\times 5}, \qquad K^{(3)}(x,y)=[0]_{2\times 2},$$

$$K^{(2)}(x,y)=\left[K^{(2)}_{\ell j}(x,y)\right]_{3\times 2}, \qquad K^{(4)}(x,y)=\left[K^{(4)}_{\ell j}(x,y)\right]_{2\times 2},$$

$K^{(1)}(x,y)$ აქვს (234) სახე

$$K^{(2)}_{\ell j}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\alpha_j\left(\delta_{\ell 3}\frac{1}{r}-\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_\ell \partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{1}{r}\right)+\left(\delta_{2j}-\delta_{1j}\right)\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_e}\Psi(x,y),$$

$$K^{(4)}_{\ell j}(x,y)=\delta_{\ell j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+\frac{\delta_{1j}-\delta_{2j}}{d_2}\left[\delta_{\ell 1}(\kappa_2+\kappa_3)-\delta_{\ell 2}(\kappa_1+\kappa_2)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_r r}-1}{r}.$$

თუ $U(x)$ ვექტორის (235) მნიშვნელობას შევიტანთ ძაბვის ვექტორის (8) მნიშვნელობაში, მივიღებთ

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L(x,y)f(y)dy, \quad x\in\Omega^-, \tag{236}$$

სადაც

$$L(x,y)=\left[L^{(1)}(x,y),\, L^{(2)}(x,y)\right]_{3\times 5},$$

$$L^{(1)}(x,y)=\left[L^{(1)}_{kj}(x,y)\right]_{3\times 3}, \qquad L^{(2)}(x,y)=\left[L^{(2)}_{kj}(x,y)\right]_{3\times 2},$$

$$\begin{aligned}
L^{(1)}_{kj}(x,y)&=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left(-\mu\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2\mu a x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}\right)+2\mu(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}+\\
&+(1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+2\mu a x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right)+2\mu\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}, \quad k,j=1,2,3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L^{(2)}_{kj}(x,y)&=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\left[\left(2(\lambda+\mu)\alpha_j-\eta_1\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2\mu\alpha_j x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right]\delta_{k3}+\\
&+2\mu\alpha_j(1-\delta_{k3})x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg]+\left(\delta_{2j}-\delta_{1j}\right)\alpha_3\Bigg[\delta_{k3}\Bigg(2\mu\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Psi(x,y)-\\
&-2(\lambda+\mu)\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg)+\\
&+2\mu(1-\delta_{k3})\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\Psi(x,y)\Bigg], \quad k=1,2,3, \quad j=1,2.
\end{aligned} \tag{237}$$

ვთქვათ ფუნქციები $f_j(z)\in C^{0,\beta}(\partial\Omega),\ j=1,2,\ f_\ell(z)\in C^{1,\beta}(\partial\Omega),\ \ell=3,4,5,$ $0<\beta<1,$ მაშინ უშუალო შემოწმებით ვაჩვენებთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (235) სახით, აკმაყოფილებს (5)-(6) სისტემას.

(235) ფორმულიდან ვღებულობთ, რომ

$$[rotu(x)]_j = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\left(\delta_{1j} f_2(y) - \delta_{2j} f_1(y)\right)dy, \quad j = 1,2, \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{238}$$

თუ (235) ფორმულიდან $u_3(x)$ ფუნქციის, (213) ფორმულებით განსაზღვრულ $\vartheta_j(x)$, $j = 1,2$ ფუნქციების, (238) ფორმულით განსაზღვრული $(rotu(x))_j$, $j = 1,2$ ფუნქციების მნიშვნელობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to z \in \partial\Omega$ $(x_3 \to 0)$ და გავითვალისწინებთ (177) ტოლობას, მივიღებთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (235) ფორმულის სახით აკმაყოფილებს (141)-(143) სასაზღვრო პირობებს.

თუ სასაზღვრო ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს

$$\left|f_j(z)\right| < \frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2}, \qquad \left|f_\ell(z)\right| < \frac{\mathrm{A}}{1+|z|}, \qquad \ell = 3,4,5,$$

$$z \in \partial\Omega, \qquad \mathrm{A} = const > 0,$$

მაშინ (235) ფორმულით წარმოდგენილი $U(x)$ ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

$$u_j(x) = O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right),$$

$$\partial_k u_j(x) = O\left(|x|^{-2}\right), \qquad \partial_k u_j(x) = O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),$$

$$u_3(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \qquad \partial_k u_3(x) = O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right), \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,2.$$

ამრიგად მივიღეთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (235) ფორმულით წარმოადგენს $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს Ω^- არეში.

§.7. $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის ამოხსნა

თუ (141), (143) სასაზღვრო პირობებში გავითვალისწინებთ, რომ $n(z)=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მაშინ $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის სასაზღვრო პირობები გადაიწერება ასე

$$\{u_3(z)\}^- = f_3(z), \quad \left\{\frac{\partial u_j(z)}{\partial x_3}\right\}^- = \frac{\partial f_3(z)}{\partial z_j} - f_j(z), \quad j=1,2, \quad z\in\partial\Omega, \tag{239}$$

$$\left\{\frac{\partial \vartheta_1(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_4(z), \quad \left\{\frac{\partial \vartheta_2(z)}{\partial x_3}\right\}^- = f_5(z), \qquad z\in\partial\Omega\ . \tag{240}$$

(240) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\left((\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(z)+(\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(z)\right)\right\}^- = (\kappa_1+\kappa_2)f_4(z)+(\kappa_2+\kappa_3)f_5(z), \quad z\in\partial\Omega, \tag{241}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\vartheta_1(z)-\vartheta_2(z)\right)\right\}^- = f_4(z)-f_5(z), \quad z\in\partial\Omega\ . \tag{242}$$

(209), (241) და (210), (242) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნები Ω^- არეში წარმოიდგინებიან შემდეგი სახით

$$(\kappa_1+\kappa_2)\vartheta_1(z)+(\kappa_2+\kappa_3)\vartheta_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\left((\kappa_1+\kappa_2)f_4(y)+(\kappa_2+\kappa_3)f_5(y)\right)dy,$$

$$\vartheta_1(z)-\vartheta_2(z)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right).$$

ამ ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\vartheta_1(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\left[\frac{1}{r}f_4(y)+\frac{\kappa_2+\kappa_3}{d_2}\,\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right)\right]dy, \tag{243}$$

$$\vartheta_2(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\left[\frac{1}{r}f_5(y)-\frac{\kappa_1+\kappa_2}{d_2}\,\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\left(f_4(y)-f_5(y)\right)\right]dy.$$

თუ $\vartheta_1(x)$ და $\vartheta_2(x)$ ფუნქციების (243) მნიშვნელობებს შევიტანთ (5)-ში, მივიღებთ

$$\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)graddivu(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int grad\left[\frac{1}{r}(\eta_1 f_4(y)+\eta_2 f_5(y))+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{d_2}(\eta_1(\kappa_2+\kappa_3)-\eta_2(\kappa_1+\kappa_2))\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}(f_4(y)-f_5(y))\right]dy,\qquad x\in\Omega^-. \tag{244}$$

ამ არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (239) სასაზღვრო პირობებს მოიცემა (215)-ის სახით, სადაც $u_0(x)$ ვექტორი Ω^- არეში აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (216) განტოლებას, ხოლო $\partial\Omega$ საზღვარზე კი (239) სასაზღვრო პირობას. $\tilde{u}(x)$ ვექტორი წარმოადგენს (244) არაერთგვაროვანი განტოლების ისეთი კერძო ამონახსნს, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს (217) ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობას.

$u_0(x)$ ვექტორს აქვს (233) სახე, ხოლო $\tilde{u}(x)$ ვექტორი წამოიდგინება შემდეგი სახით

$$\tilde{u}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int grad\left[r(\alpha_1 f_4(y)+\alpha_2 f_5(y))+\alpha_3\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}(f_4(y)-f_5(y))\right]dy,\quad x\in\Omega^- \tag{245}$$

სადაც α_j, $j=1,2,3$ მუდმივებს აქვს (219) სახე.

თუ $u_0(x)$ ვექტორის მნიშვნელობას (233)-დან და $\tilde{u}(x)$ ვექტორის მნიშვნელობას (245)-დან შევიტანთ (215) ფორმულაში და გავით-ვალისწინებთ $\vartheta_1(x)$ და $\vartheta_2(x)$ ფუნქციების (243) მნიშვნელობებს, მივიღებთ

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\tilde{K}(x,y)f(y)dy,\ x\in\Omega^-, \tag{246}$$

სადაც $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$, $f=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)^{\mathsf{T}}$,

$$\tilde{K}(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & \tilde{K}^{(2)}(x,y)\\ \tilde{K}^{(3)}(x,y) & \tilde{K}^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{5\times5},\qquad \tilde{K}^{(3)}(x,y)=[0]_{2\times3},$$

$$\tilde{K}^{(2)}(x,y)=\left[\tilde{K}^{(2)}_{\ell j}(x,y)\right]_{3\times2},\qquad \tilde{K}^{(4)}(x,y)=\left[\tilde{K}^{(4)}_{\ell j}(x,y)\right]_{2\times2},$$

$K^{(1)}_{\ell j}(x,y)$-ს აქვს (234) სახე,

$$\widetilde{K}_{\ell j}^{(2)}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\alpha_j\frac{\partial r}{\partial x_e}+\left(\delta_{1j}-\delta_{2j}\right)\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r},$$

$$\widetilde{K}_{\ell j}^{(4)}(x,y)=\delta_{\ell j}\frac{1}{r}+\frac{\delta_{1j}-\delta_{2j}}{d_2}\left(\delta_{1\ell}\left(\kappa_2+\kappa_3\right)-\delta_{2\ell}\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\right)\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}.$$

(246) ტოლობით განსაზღვრული $U(x)$ ვექტორის საშუალებით გამოვთვალოთ ძაბვის $\mathrm{P}(\partial,n)U(x)$ ვექტორი, რომელსაც აქვს (8) სახე. გამოთვლის შედეგად ვღებულობთ

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\widetilde{L}(x,y)f(y)dy\,,\,x\in\Omega^-,\qquad(247)$$

სადაც

$$\widetilde{L}(x,y)=\left[L^{(1)}(x,y)\ \widetilde{L}^{(2)}(x,y)\right]_{3\times 5},\qquad \widetilde{L}^{(2)}(x,y)=\left[\widetilde{L}_{kj}^{(2)}(x,y)\right]_{3\times 2},$$

$L_{kj}^{(1)}(x,y)$ -ს აქვს (237) სახე,

$$L_{kj}^{(2)}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\left\{\left[\ 2(\lambda+\mu)\alpha_1-\eta_j\frac{1}{r}+2\mu\alpha_j x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right]\delta_{k3}+2\mu\alpha_j\left(1-\delta_{k3}\right)x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right\}+$$

$$+\left(\delta_{1j}-\delta_{2j}\right)\alpha_3\left\{\left[\lambda\lambda_1^2\frac{1}{r}+2\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_3^2}-\lambda_1^2\right)\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\right]\delta_{k3}+2\mu\left(1-\delta_{k3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\right\}.$$

თუ $f_j(z)$, $j=1,2,...,5$ ფუნქციებისაგან მოვითხოვთ, რომ $f_j(z)\in C^{0,\beta}(\partial\Omega)$, $j=1,2,4,5,$ $f_3(z)\in C^{1,\beta}(\partial\Omega)$, ასევე თუ

$$\left|f_j(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\quad j=1,2,4,5,\qquad\left|f_3(z)\right|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},$$

$$z\in\partial\Omega,\qquad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (246) სახით, წარმოადგენს (5)-(6) სისტემის ამონახსნს, რომელიც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში უშვებს შემდეგ ასიმპტოტიკას

$$u_j(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),\quad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_j(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\qquad \partial_k\vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\ j=1,2,$$

$$u_3(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\qquad \partial_k u_3(x)=O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),\quad k=1,2,3,$$

თუ (246) ფორმულიდან $u_3(x)$, (243) ფორმულიდან $\partial_3\vartheta_j(x)$, $j=1,2$ და (238) ფორმულიდან $(rot\,u(x))_j$, $j=1,2$ ფუნქციების მნიშვნელობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to z \in \partial\Omega$ და გავითვალისწინებთ (177) ტოლობას, მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (246) სახით და აკმაყოფილებს (141), (143) სასაზღვრო პირობებს. ამრიგად, მივიღებთ, რომ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (246)-ის სახით არის $(\tilde{\mathrm{N}} \cdot \mathrm{II})$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი Ω^- არეში.

თავი IV. ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე

§1. ამოცანის დასმა. ერთადერთობის თეორემა

ვთქვათ $\partial\Omega_j$, $j=1,2$ სფერული ზედაპირია ცენტრით O_j კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R_j. აღვნიშნოთ Ω_j-ით, $j=1,2$ ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega_j$ სფერული ზედაპირით, ხოლო $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. ვიგულისხმოთ $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \varnothing$. ჩავთვალოთ, რომ ერთგვაროვანი სხეული ავსებს Ω^- არეს.

ვიგულისხმოთ, რომ $O_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$, $j=1,2$ კოორდინატთა სისტემის შესაბამისი საკოორდინატო ღერძები არიან პარალელურნი და ერთნაირად მოგეზილნი. აღვნიშნოთ $\left(x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}\right)$ და $(r_j, \vartheta_j, \varphi_j)$-ით, $j=1,2$, x წერტილის დეკარტისა და სფერული კოორდინატები $O_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$ სისტემის მიმართ. O_2 წერტილის სფერული კოორდინატები $O_1 x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)}$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ $(d, \vartheta_0, \varphi_0)$-ით.

რადგან საკოორდინატო ღერძები ერთმანეთის პარალელურია და ერთნაირადაა მოგეზილი, ამიტომ

$$x^{(1)} = x^{(2)} + d e_0 \tag{248}$$

სადაც $x^{(j)}$, $j=1,2$ არის x წერტილის მნიშვნელობა $O_j x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$ სისტემის მიმართ, $d = |O_1 O_2|$, $e_0 = (\cos\varphi_0 \sin\vartheta_0, \sin\varphi_0 \sin\vartheta_0, \cos\vartheta_0)^{\mathsf{T}}$.

ამოცანა (A). ვიპოვოთ Ω^- არეში (5)-(6) სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega_j$, $j=1,2$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

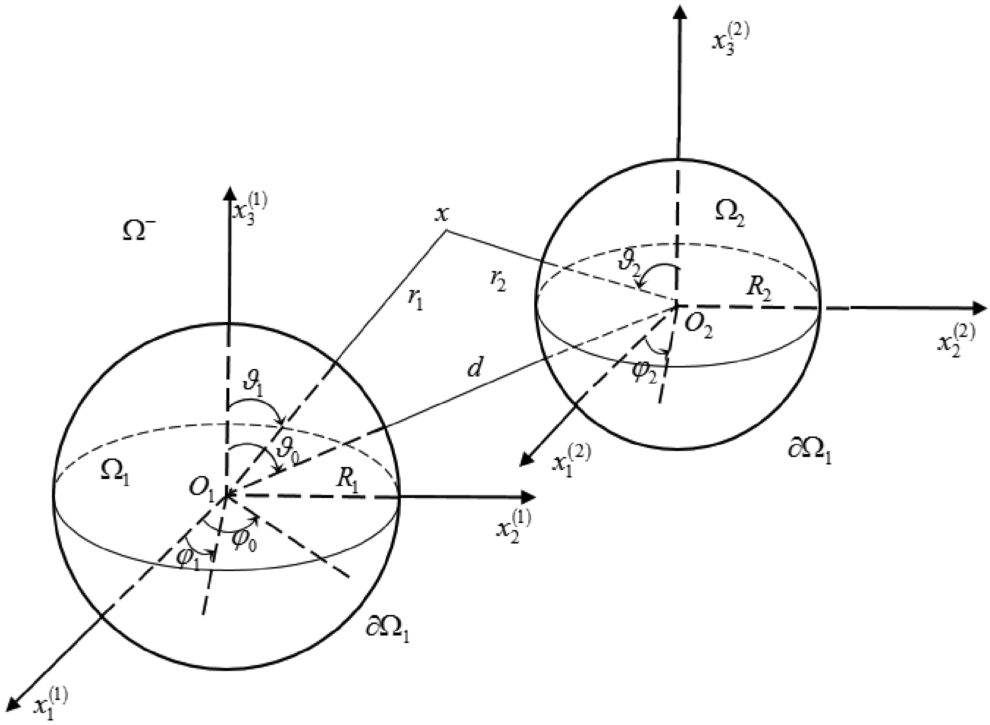
$$\{n(z)\cdot u(z)\}^- = f_4^{(j)}(z), \quad z \in \partial\Omega_j,$$

$$\{P(\partial,n)U(z) - n(z)(n(z)\cdot P(\partial,n)U(z))\}^- = f^{(j)}(z), \quad z \in \partial\Omega_j, \tag{249}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^- = f_5^{(j)}(z), \quad \{\vartheta_2(z)\}^- = f_6^{(j)}(z), \quad z \in \partial\Omega_j, \quad j=1,2, \tag{250}$$

ან
$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_5^{(j)}(z), \quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_6^{(j)}(z), \quad z \in \partial\Omega_j, \quad j=1,2, \tag{251}$$

სადაც $f^{(j)} = \left(f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)}\right)^{\mathsf{T}}$, $f_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, $\ell=1,2,\ldots,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z \in \partial\Omega_j$ წერტილზე გამავალი Ω_j არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.



ნახ. 1

$U(x)$ ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

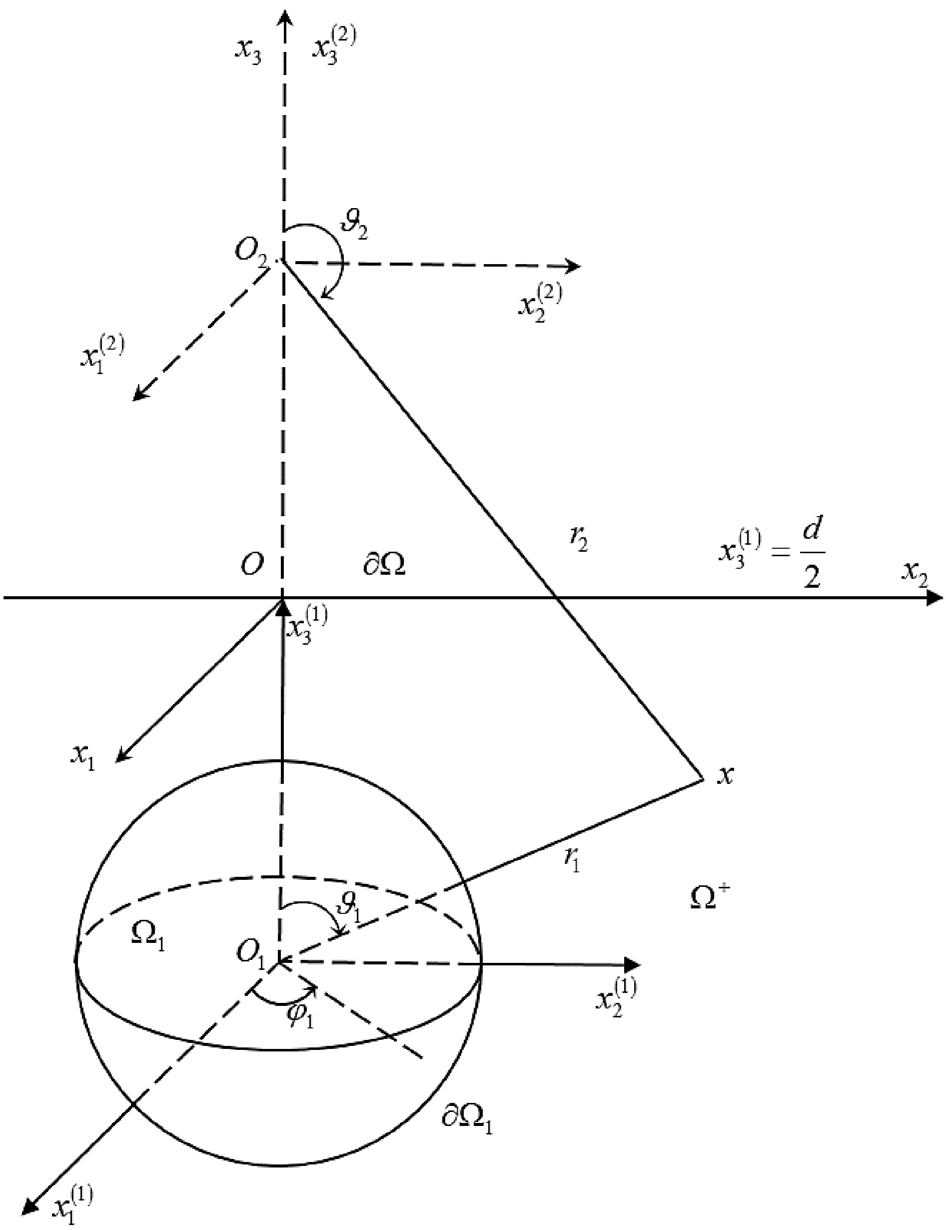
$$u(x) = O(1), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad j = 1,2,$$

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{1}{4\pi r_1^2} \iint_{\sum_{r_1}} n(x) \cdot u(x) d\sum\nolimits_{r_1} = 0, \tag{252}$$

სადაც $\sum_{r_1}$ არის სფერო ცენტრით O_1 წერტილში და რადიუსით $r_1 = |x|$ $(r_1 > d + R_2)$.

ამოცანა (A) (249)-(250) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ (A.I) სიმბოლოთი, ხოლო (249), (251) სასაზღვრო პირობები კი (A.II)სიმბოლოთი.

ვთქვათ $\partial\Omega$ არის $x_3^{(1)} = \dfrac{d}{2}$ სიბრტყე. აღვნიშნოთ $\partial\Omega_1$ სფერული ზედაპირი ცენტრით O_1 წერტილში და რადიუსით R_1. Ω_1-ით აღვნიშნოთ ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega_1$ სფერული ზედაპირით. Ω^+-ით აღვნიშნოთ $x_3^{(1)} < \dfrac{d}{2}$ ნახევარ-სივრცე Ω_1 ბირთვული ღრუთი. ვიგულისხმოთ, რომ Ω^+ არე შევსებულია დრეკადი კომპოზიტური მასალით.



ნახ. 2

ამოცანა (B). ვიპოვოთ Ω^+ არეში (5)-(6) სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^\top$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega_j$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$\{n(z) \cdot P(\partial, n) U(z)\}^- = f_4^{(1)}(z), \quad z \in \partial\Omega_1,$$

$$\{u(z) - n(z)(n(z) \cdot u(z))\}^- = f^{(1)}(z), \quad z \in \partial\Omega_1, \tag{253}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^- = f_5^{(1)}(z), \quad \{\vartheta_2(z)\}^- = f_6^{(1)}(z), \quad z \in \partial\Omega_1, \tag{254}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_5^{(1)}(z), \quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_6^{(1)}(z), \quad z\in\partial\Omega_1, \tag{255}$$

სადაც $f^{(j)} = \left(f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$, $f_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, $\ell=1,2,\ldots,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega_1$ წერტილზე გამავალი Ω_1 არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.

$\partial\Omega$ სიბრტყეზე შემდეგ სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$\{n(z)\cdot P(\partial,n)U(z)\}^+ = 0, \quad \{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^+ = 0, \quad \{\vartheta_j(z)\}^+ = 0, \quad j=1,2, \tag{256}$$

ან

$$\{n(z)\cdot P(\partial,n)U(z)\}^+ = 0, \quad \{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^+ = 0, \left\{\frac{\partial\vartheta_j(z)}{\partial n(z)}\right\}^+ = f_5^{(j)}(z), \quad j=1,2, \tag{257}$$

სადაც $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილზე გამავალი Ω^+ არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.

$U(x)$ ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

$$u(x) = O(1), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad j=1,2,$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma_R} n(x)\cdot u(x)\,d\Sigma_R = 0, \tag{258}$$

სადაც $\sum_R$ არის Ω^+ არეში მოთავსებული R რადიუსიანი სფერული ზედაპირის ნაწილი, ცენტრით O_1 წერტილში $\left(R>\frac{d}{2}\right)$.

ამოცანა (B) (253)-(254) და (256) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ (B.I) სიმბოლოთი, ხოლო (253), (255) და (257) სასაზღვრო პირობებით კი (B.II) სიმბოლოთი.

თეორემა 4.1 თუ (A.I) და (A.II) ამოცანებს გააჩნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენეთ, რომ (A.I)₀ და (A.II)₀ ერთგვაროვან $\left(f^{(j)}=0,\ f_{\ell}^{(j)}=0,\ j=1,2,\quad \ell=4,5,6\ \right)$ ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

შენიშვნა 1.13-ის თანახმად Ω^- არეში შეგვიძლია დავწეროთ (1.6) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი გრინის (68) ფორმულა

$$\int\limits_{\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(z)+\kappa_2\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(z)+\kappa_3\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right]^- ds+$$
$$+\int\limits_{\Omega^-}\Big[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+$$
$$+\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\Big]dx=0\,.$$

თუ ამ ტოლობაში ვისარგებლებთ (A.I)₀ და (A.II)₀ ერთგვაროვანი ამოცანების სასაზღვრო პირობებით, მაშინ მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^-}\Big[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+$$
$$\alpha\left(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x)\right)^2\Big]dx=0\,.$$

აქედან, რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითად განსაზღვრული ფუნქციაა, ამიტომ ვღებულობთ

$$grad\vartheta_j(x)=0,\quad j=1,2,\quad \vartheta_1(x)=\vartheta_2(x),\quad x\in\Omega^-\,,$$

ანუ $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=c=const$, $x\in\Omega^-$. ვინაიდან $\vartheta_j(x),\ j=1,2$ ფუნქციები უსასრულობაში მიისწრაფიან ნულისკენ, ამიტომ $c=0$, ე.ი. $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=0$, $x\in\Omega^-$. ამ ტოლობის საფუძველზე (A.I)₀ და (A.II)₀ ამოცანები დაიყვანება შემდეგ ამოცანაზე: ვიპოვოთ Ω^- არეში ისეთი რეგულარული $u=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი, რომელიც ამ არეში აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)graddivu(x)=0\,,\quad x\in\Omega^-\,,$$

ხოლო $\partial\Omega_j$, $j=1,2$ საზღვარზე კი შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^-=0\,,\quad \{T(\partial,n)u(z)-n(z)(n(z)\cdot T(\partial,n)u(z))\}^-=0\,,\quad z\in\partial\Omega_j\,,$$

სადაც $T(\partial,n)u(z)$ ძაბვის ვექტორია.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $u(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (44) პირობებს.

ცნობილია, რომ (იხ. [28]) ამ ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი. $u(x)=0$, $x\in\Omega^-$.

თეორემა 4.2. თუ (B.I) და (B.II) ამოცანებს გააცნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენეთ, რომ $(B.I)_0$ და $(B.II)_0$ ერთგვაროვანამოცანებს გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი. ამ მიზნით დავწეროთ (6) სისტემის შესაბამისი გრინის ფორმულა Ω^+ არეში.

$$\int_{\partial\Omega}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(z)+\kappa_2\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(z)+\kappa_3\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right]^+ds-$$

$$\int_{\partial\Omega_1}\left[\left(\kappa_1\vartheta_1(z)+\kappa_2\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}+\left(\kappa_2\vartheta_1(z)+\kappa_3\vartheta_2(z)\right)\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right]^-ds-$$

$$-\int_{\Omega^+}\Big[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+$$

$$+\alpha(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x))^2\Big]dx=0.$$

თუ ამ უტოლობაში გავითვალისწინებთ $(B.I)_0$ და $(B.II)_0$ ამოცანების ნულოვან სასაზღვრო პირობებს, მივირებთ

$$\int_{\Omega^+}\Big[\kappa_1|grad\vartheta_1(x)|^2+2\kappa_2 grad\vartheta_1(x)\cdot grad\vartheta_2(x)+\kappa_3|grad\vartheta_2(x)|^2+$$

$$+\alpha(\vartheta_1(x)-\vartheta_2(x))^2\Big]dx=0.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=c=const$. მეორეს მხრივ, ვინაიდან $\vartheta_j(x)\to\infty,\ j=1,2$, როცა $|x|\to\infty$, ამიტომ $c=0$, ე.ი. $\vartheta_j(x)=0$, $j=1,2$, $x\in\Omega^+$. თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ $(B.I)_0$, $(B.II)_0$ ამოცანებში, მაშინ ჩვენ დავალთ შემდეგ ამოცანაზე: ვიპოვოთ Ω^+ არეში ისეთი $u=(u_1,u_2,u_3)^{\top}$ ვექტორი, რომელიც ამ არეში აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას

$$\mu\Delta u(x)+(\lambda+\mu)graddivu(x)=0,\quad x\in\Omega^+, \tag{259}$$

$\partial\Omega_1$ საზღვარზე შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{n(z)\cdot T(\partial,n)u(z)\}^-=0,\ \ \{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^-=0,\ \ z\in\partial\Omega_1 \tag{260}$$

$\partial\Omega$ საზღვარზე კი შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{n(z)\cdot T(\partial,n)u(z)\}^{+}=0\,,\quad \{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^{+}=0\,,\quad z\in\partial\Omega\,. \tag{261}$$

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $u(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (44) პირობებს.

დავწეროთ (259) განტოლების შესაბამისი გრინის ფორმულა Ω^{+} არეში, გვექნება

$$\int_{\partial\Omega}\{u(z)\}^{+}\cdot\{T(\partial,n)n(z)\}^{+}ds-\int_{\partial\Omega_1}\{u(z)\}^{-}\cdot\{T(\partial,n)u(z)\}^{-}ds-\int_{\Omega^{+}}E(u,u)dx=0\,, \tag{262}$$

სადაც $E(u,u)$ კვადრატულ ფორმას აქვს (66) სახე, $T(\partial,n)u(z)$ ძაბვის ვექტორია. თუ (262) ტოლობაში გავითვალისწინებთ (B)₀ ამოცანის სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^{+}}E(u,u)dx=0\,.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ $u(x)=b+[a\times x]$, სადაც a და b სამკომპონენტიანი მუდმივი ვექტორებია. ვინაიდან $u(x)\to 0$, როცა $|x|\to\infty$, ამიტომ $a=b=0$, ე.ი. $u(x)=0$, $x\in\Omega^{+}$.

§2. (A) ამოცანის ამოხსნა

ჰარმონიული და მეტაჰარმონიული ფუნქციებისათვის შეკრების ფორმულებს აქვთ შემდეგი სახე [45], [47]

$$r_q^{-k-1}Y_k^{(m)}(\vartheta_q,\varphi_q)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)r_j^{p}Y_p^{(s)}(\vartheta_j,\varphi_j),\ j\neq q=1,2\,,\quad r_j<d\,, \tag{263}$$

$$\tilde{h}_k(\lambda r_q)Y_k^{(m)}(\vartheta_q,\varphi_q)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}H_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)\tilde{g}(\lambda r_j)Y_p^{(s)}(\vartheta_j,\varphi_j),\ j\neq q=1,2\,,\quad r_j<d\,, \tag{264}$$

სადაც

$$G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)=(-1)^s\left[(-1)^k\delta_{1q}+(-1)^p\delta_{2q}\right]\frac{1}{d^{k+p+1}}\times$$

$$\times\left[\frac{4\pi(2k+1)(k+p+m-s)!(k+p-m+s)!}{(2p+1)(2k+2p+1)(k+m)!(k-m)!(p+s)!(p-s)!}\right]^{1/2}Y_{k+p}^{(m-s)}(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$H_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)=(-1)^{p-s}\sum_{l=|p-k|}^{p+k}\left(\delta_{1q}+(-1)^l\delta_{2q}\right)\tilde{b}_{pk,l}^{(s,m)}\tilde{h}_l(\lambda d)Y_l^{(m-s)}(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$\tilde{b}_{pk,l}^{(s,m)}=\alpha_{pk,l}^{(s,m)}\int_{-1}^{1}P_k^{(m)}(x)P_p^{(s)}(x)P_l^{(m-s)}(x)dx,$$

$$\alpha_{pk,l}^{(s,m)}=\left[\frac{\pi(2k+1)(2p+1)(2l+1)(k-m)!(p-s)!(l-m+s)!}{(k+m)!(p+s)!(l+m-s)!}\right]^{1/2},$$

$$\tilde{h}_k(\lambda r)=\frac{1}{\sqrt{r}}K_{k+1/2}(\lambda r),\qquad \tilde{g}_k(\lambda r)=\frac{1}{\sqrt{r}}I_{k+1/2}(\lambda r),$$

λ ნებისმიერი დადებითი ნამდვილი რიცხვია, $P_\nu^{(\sigma)}(x)$ ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომია.

თუ (4.16)-ში ვიგულისხმებთ, რომ

$$r_q^2=r_j^2+d^2-(-1)^q 2dr_j\cos\gamma_j,\ \ j\neq q=1,2,$$

სადაც $\cos\gamma_j=\sin\vartheta_j\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\cos\vartheta_j\cos\vartheta_0$ და ვისარგებლებთ ლეჟანდრის პოლინომისათვის შემდეგი რეკურენტული ფორმულებით [25]

$$(k-m+1)\sin\vartheta P_k^{(m-1)}(\cos\vartheta)=\cos\vartheta P_k^{(m)}(\cos\vartheta)+P_{k-1}^{(m)}(\cos\vartheta),$$

$$(2k+1)\sin\vartheta P_k^{(m-1)}(\cos\vartheta)=P_{k-1}^{(m)}(\cos\vartheta)-P_{k+1}^{(m)}(\cos\vartheta),$$

$$\sin\vartheta P_k^{(m+1)}(\cos\vartheta)=(k-m)\cos\vartheta P_k^{(m)}(\cos\vartheta)-(k+m)P_{k-1}^{(m)}(\cos\vartheta),$$

$$\sin\vartheta\frac{d}{d\vartheta}P_k^{(m)}(\cos\vartheta)=\sin\vartheta P_k^{(m+1)}(\cos\vartheta)+m\cos\vartheta P_k^{(m)}(\cos\vartheta),$$

მივიღებთ

$$r_q^{-k-1}Y_k^{(m)}(\vartheta_q,\varphi_q)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\left[\alpha_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)r_j^{p+2}+\right.$$

$$\left.+b_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)r_j^p\right]Y_p^{(s)}(\vartheta_j,\varphi_j),\quad j\neq q=1,2, \tag{265}$$

სადაც

$$\alpha_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)=G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)+(-1)^{q-1}d\zeta_{mskp}^{(1,q)}(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$b_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)=d^2G_{pk,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)+(-1)^q d\zeta_{mskp}^{(2,q)}(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$\zeta_{mskp}^{(1,q)}(\vartheta_0,\varphi_0)=\sin\vartheta_0\left[e^{-i\varphi_0}\sqrt{\frac{(p-s+1)(p-s+2)}{(2p+1)(2p+3)}}G_{p+1k,q}^{(s-1,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)-\right.$$

$$\left.-e^{-i\varphi_0}\sqrt{\frac{(p+s+1)(p+s+2)}{(2p+1)(2p+3)}}G_{p+1k,q}^{(s+1,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)\right]+2\cos\vartheta_0\sqrt{\frac{(p+1)^2-s^2}{(2p+1)(2p+3)}}G_{p+1k,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0),$$

$$\zeta_{mskp}^{(2,q)}(\vartheta_0,\varphi_0)=\sin\vartheta_0\left[e^{-i\varphi_0}\sqrt{\frac{(p+s)(p+s-1)}{4p^2-1}}G_{p-1k,q}^{(s+1,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)-\right.$$

$$\left.-e^{i\varphi_0}\sqrt{\frac{(p-s)(p-s-1)}{4p^2-1}}G_{p-1k,q}^{(s+1,m)}(\vartheta_0,\varphi_0)\right]-2\cos\vartheta_0\sqrt{\frac{p^2-s^2}{4p^2-1}}G_{p-1k,q}^{(s,m)}(\vartheta_0,\varphi_0).$$

(A) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u(x)=\sum_{j=1}^{2}\left\{grad\Phi_1^{(j)}(x^{(j)})-agrad\,r_j^2\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+1\right)\Phi_2^{(j)}(x^{(j)})+rotrot\left(x^{(j)}r_j^2\Phi_2^{(j)}(x^{(j)})\right)+\right.$$

$$\left.+rot\left(x^{(j)}\Phi_3^{(j)}(x^{(j)})\right)+(\eta_1+\eta_2)x^{(j)}\Phi_4^{(j)}(x^{(j)})+a_1grad\Phi_5^{(j)}(x^{(j)})\right\}, \qquad (266)$$

$$\vartheta_1(x)=\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[(\lambda+\mu)r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4^{(j)}(x^{(j)})+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\Phi_5^{(j)}(x^{(j)})\right\},$$

$$\vartheta_2(x)=\sum_{j=1}^{2}\left\{\left[(\lambda+\mu)r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4^{(j)}(x^{(j)})-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\Phi_5^{(j)}(x^{(j)})\right\},$$

სადაც $\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})$, $j=1,2$, $\ell=1,2,3,4$ ჰარმონიული ფუნქციებია, ხოლო $\Phi_5^{(j)}(x^{(j)})$ მეტაჰარმონიული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს $(\Delta-\lambda_1^2)\Phi_5^{(j)}(x^{(j)})=0$ განტოლებას, $x^{(j)}=(x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)})$ არის $x=(x_1,x_2,x_3)$ წერტილის მნიშვნელობა $O_j\,x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ საკოორდინატო სისტემის მიმართ, $r_j=\left|x^{(j)}\right|$, $r_j\dfrac{\partial}{\partial r_j}=x^{(j)}\cdot grad$

.

$\Phi_l^{(j)}(x^{(j)})$, $j=1,2$, $\ell=1,2,\ldots,5$ ფუნქციები ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$\Phi_\ell^{(j)}(x^j)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,\ell)},\quad j=1,2,\quad \ell=1,2,3,4,$$

$$\Phi_5^{(j)}(x^j)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad j=1,2, \qquad (267)$$

სადაც $\mathrm{A}_{mk}^{(j,\ell)}$, $j=1,2$, $\ell=1,2,...,5$ საძიებელი მუდმივებია, ხოლო

$$h_k\left(\lambda_1 r_j\right)=\sqrt{\frac{R_j}{r_j}}\ \frac{K_{k+1/2}\left(\lambda_1 r_j\right)}{K_{k+1/2}\left(\lambda_1 R_j\right)}, \qquad j=1,2.$$

თეორემა 1.11-ის თანახმად $\Phi_{\ell}^{(j)}\left(x^{(j)}\right)$, $\ell=2,3$ ფუნქიებისგან მოვითხოვთ, რომ

$$\int_{\partial\Omega_j'} \Phi_{\ell}^{(j)}\left(x^{(j)}\right) dS=0, \quad j=1,2, \quad \ell=2,3, \tag{268}$$

სადაც $\partial\Omega_j'$ არის სფერული ზედაპირი ცენტრით 0_j წერტილში და რადიუსით R_j' $\left(R_q+d<R_j'<+\infty,\ q\neq j=1,2\right)$.

თუ $\Phi_{\ell}^{(j)}\left(x^{(j)}\right)$, $\ell=2,3$ ფუნქციების მნიშვნელობებს (267)-დან შევიტანთ (268)-ში და გავითვალისწინებთ (16)-ის პირველ ტოლობას, მივიღებთ, რომ $\mathrm{A}_{00}^{(j,\ell)}=0$, $j=1,2$, $\ell=2,3$.

(263)-(265) და (267) ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ

$$\Phi_{l}^{(j)}\left(x^{j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} r_q^k \mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_q,\varphi_q\right) B_{mk}^{(q,\iota)}, \quad \iota=1,3,4,$$

$$r_j^2\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+1\right)\Phi_2^{(j)}\left(x^{j}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left[r_q^{k+2}B_{mk}^{(q,2)}+r_q^k C_{mk}^{(q,2)}\right]\mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_q,\varphi_q\right),$$

$$r_j^2\left(r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\right)\Phi_2^{(j)}\left(x^{j}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left[r_q^{k+2}D_{mk}^{(q,2)}+r_q^k E_{mk}^{(q,2)}\right]\mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_q,\varphi_q\right), \tag{269}$$

$$\left(2r_j\frac{\partial}{\partial r_j}+3\right)\Phi_2^{(j)}\left(x^{j}\right)=-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} r_q^k \mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_q,\varphi_q\right) H_{mk}^{(q,2)},$$

$$\Phi_5^{(j)}\left(x^{j}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\tilde{g}_k\left(\lambda_1 r_q\right)\mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_q,\varphi_q\right) B_{mk}^{(q,5)},$$

სადაც $q\neq j=1,2$,

$$B_{mk}^{(q,l)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} R_j^{p+1} G_{kp,j}^{(m,s)}\left(\vartheta_0,\varphi_0\right)\mathrm{A}_{sp}^{(j,l)}, \qquad l=1,4,$$

$$B_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} pR_j^{p+1} a_{kp,j}^{(m,s)}\left(\vartheta_0,\varphi_0\right)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)},$$

$$B_{mk}^{(q,3)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} R_j^{p+1} G_{kp,j}^{(m,s)}\left(\vartheta_0,\varphi_0\right)\mathrm{A}_{sp}^{(j,3)},$$

$$B_{mk}^{(q,5)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_j)H_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,5)},$$

$$C_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}pR_j^{p+1}b_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)}, \tag{270}$$

$$D_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(p-2)R_j^{p+1}a_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)},$$

$$E_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(p-2)R_j^{p+1}b_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)},$$

$$H_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(2p-1)R_j^{p+1}G_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)}.$$

თუ $\Phi_\ell^{(j)}(x^{(j)})$, $j=1,2$, $\ell=1,2,...,5$ ფუნქციების (267) მნიშვნელობას შევიტანთ (266)-ში და გავითვალისწინებთ (15) და (269) ტოლობებს, მივიღებთ

$$u(x^{(j)})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-}^{k}\Big\{\Big[\tilde{u}_{mk}(r_j)+k\left(B_{mk}^{(j,1)}+B_{mk}^{(j,6)}\right)r_j^{k-1}+\left((k+2)B_{mk}^{(j,7)}+2H_{mk}^{(j,2)}+(\eta_1+\eta_2)B_{mk}^{(j,4)}\right)r_j^{k+1}+$$

$$+a_1\frac{d}{dr_j}\tilde{\mathcal{g}}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)}\Big]\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\Big[\tilde{v}_{mk}(r_j)+\left(B_{mk}^{(j,1)}+B_{mk}^{(j,6)}\right)r_j^{k-1}+B_{mk}^{(j,7)}r_j^{k-1}+$$

$$+a_1\frac{1}{r_j}\tilde{\mathcal{g}}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)}\Big]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\Big[\tilde{w}_{mk}(r_j)+B_{mk}^{(j,3)}r_j^k\Big]Z_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\Big\}+ \tag{271}$$

$$+(-1)^j de_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}r_j^k\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)\left((\eta_1+\eta_2)B_{mk}^{(j,4)}+2H_{mk}^{(j,2)}\right)+$$

$$+(-1)^{j-1}de_0\times grad\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}r_j^k\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)B_{mk}^{(j,3)},$$

$$\vartheta_\ell(x^{(j)})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\Big\{\Big[\tilde{w}_{mk}(r_j)-C_{mk}^{(j,4)}r_j^k+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2\big(\delta_{1l}(\kappa_2+\kappa_3)-$$

$$-\delta_{2\ell}(\kappa_1+\kappa_2)\big)\tilde{\mathcal{g}}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)}\Big]\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)\Big\},\qquad l=1,2,$$

სადაც

$$\tilde{u}_{mk}(r_j)=-\frac{k+1}{R_j}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}+R_jk(bk+a+1)\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+(\eta_1+\eta_2)R_j\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+$$

$$+a_1\frac{d}{dr_j}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0,$$

$$\tilde{v}_{mk}(r_j)=\frac{1}{R_j}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}-R_j(bk-2)\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+a_1\frac{1}{r_j}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\ k\geq 1, \qquad (272)$$

$$\tilde{w}_{mk}(r_j)=\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,3)},\quad k\geq 1,$$

$$\tilde{w}_{mk}^{(1)}(r_j)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+$$
$$+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad k\geq 0,$$

$$\tilde{w}_{mk}^{(2)}(r_j)=[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}-$$
$$-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad k\geq 0,$$

$$B_{mk}^{(q,6)}=aC_{mk}^{(q,2)}-E_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(2-bp)R_j^{p+1}b_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)},$$

$$B_{mk}^{(q,7)}=aB_{mk}^{(q,2)}-D_{mk}^{(q,2)}=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(2-bp)R_j^{p+1}a_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,2)}, \qquad (273)$$

$$C_{mk}^{(q,4)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}(\lambda+2\mu)(2-bp)R_j^{p+1}G_{kp,j}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0)\mathrm{A}_{sp}^{(j,4)}.$$

ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომების რეკურენტული თანა-ფარდობისა და (9) სისტემის ორთოგონალურობის თანახმად ვღებულობთ [15].

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}e_j\,a_k(r)Y_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)=-a_1(r)\eta_{00}^{(j,1)}(\mathrm{A}_{00})\mathrm{X}_{00}(\vartheta,\varphi)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\{[a_{k-1}(r)\eta_{mk}^{(j,2)}(\mathrm{A}_{mk})-$$
$$-a_{k+1}(r)\eta_{mk}^{(j,1)}(\mathrm{A}_{mk})]\mathrm{X}_{mk}^{(\vartheta,\varphi)}+\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{k}a_{k-1}(r)\eta_{mk}^{(j,2)}(\mathrm{A}_{mk})+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k+1}a_{k+1}(r)\eta_{mk}^{(j,1)}(\mathrm{A}_{mk})\right]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+(-1)^{j+1}\frac{a_k(r)}{\sqrt{k(k+1)}}\eta_{mk}^{(j,3)}(\mathrm{A}_{mk})\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\},$$
$$j=1,2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} e_3\, a_k(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk} = \frac{1}{\sqrt{3}}a_1(r)\mathrm{A}_{01}\mathrm{X}_{00}(\vartheta,\varphi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\left[\sqrt{\frac{k^2-m^2}{4k-1}}\,a_{k-1}(r)\mathrm{A}_{mk-1}+\sqrt{\frac{(k+1)^2-m^2}{(2k+1)(2k+3)}}\,a_{k+1}(r)\mathrm{A}_{mk+1}\right]\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\right.$$

$$+\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2-m^2}{4k-1}}a_{k-1}(r)\mathrm{A}_{mk-1}-\frac{1}{k+1}\sqrt{\frac{(k+1)^2-m^2}{(2k+1)(2k+3)}}a_{k+1}(r)\mathrm{A}_{mk+1}\right]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+ \tag{274}$$

$$\left.+\frac{im}{\sqrt{k(k+1)}}\,a_k(r)\mathrm{A}_{mk}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right\},$$

$$\eta_{mk}^{(j,1)}(\mathrm{A}_{mk})=\frac{\delta_{1j}+i\delta_{2j}}{2}\left[\sqrt{\frac{(k+m+1)(k+m+2)}{(2k+1)(2k+3)}}\,\mathrm{A}_{m+1k+1}+\right.$$

$$\left.+(-1)^j\sqrt{\frac{(k-m+1)(k-m+2)}{(2k+1)(2k+3)}}\mathrm{A}_{m-1k+1}\right],$$

$$\eta_{mk}^{(j,2)}(\mathrm{A}_{mk})=\frac{\delta_{1j}+i\delta_{2j}}{2}\left[\sqrt{\frac{(k-m)(k-m-1)}{4k^2-1}}\,\mathrm{A}_{m+1k-1}+(-1)^j\sqrt{\frac{(k+m)(k+m-1)}{4k^2-1}}\mathrm{A}_{m-1k-1}\right], \tag{275}$$

$$\eta_{mk}^{(j,3)}(\mathrm{A}_{mk})=\frac{\delta_{2j}+i\delta_{1j}}{2}\left[\sqrt{(k-m)(k+m+1)}\,\mathrm{A}_{m+1k}-\right.$$

$$\left.-(-1)^j\sqrt{(k+m)(k-m+1)}\mathrm{A}_{m-1k}\right],\quad j=1,2,$$

$a_k(r)$ არის r-ის ფუნქცია, A_{mk} მუდმივია, δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა,

$$i=\sqrt{-1},$$

$$e_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad e_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\quad e_2=(0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(15) ფორმულებისა და შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით

$$e_j\times grada_k(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)=-rot\left[e_j a_k(r)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\right],\quad j=1,2,3,$$

(274)-დან ვღებულობთ

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\partial_j\, a_k(r) Y_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^j \left\{\frac{a_k(r)}{r}\eta_{mk}^{(j,3)}(\mathrm{A}_{mk})\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)a_k(r)\eta_{mk}^{(j,3)}(\mathrm{A}_{mk})\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+$$

$$+(-1)^j\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{k+1}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+2}{r}\right)a_{k+1}(r)\eta_{mk}^{(j,1)}(\mathrm{A}_{mk})+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{k}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k-1}{r}\right)a_{k-1}(r)\eta_{mk}^{(j,2)}(\mathrm{A}_{mk})\right]\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right\}, \qquad j=1,2,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\partial_3\, a_k(r) Y_k^{(m)}(\vartheta,\varphi)\mathrm{A}_{mk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}(-1)^j \left\{\frac{im}{r}a_k(r)\mathrm{A}_{mk}\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)-\right.$$

$$-\frac{im}{\sqrt{k(k+1)}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)a_k(r)\mathrm{A}_{mk}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)+$$

$$+\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{k}\sqrt{\frac{k^2-m^2}{4k^2-1}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)a_{k-1}(r)\mathrm{A}_{mk-1}-\frac{1}{k+1}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\sqrt{\frac{(k+1)^2-m^2}{(2k+1)(2k+3)}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)a_{k+1}(r)\mathrm{A}_{mk+1}\right]\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right\},$$

სადაც $\partial_j := e_j \times grad$, $\eta_{mk}^{(j,\ell)}$ -ს $j=1,2,3$ $\ell=1,2,3$ აქვს (275) სახე.

ამ ტოლობებისა და (274) ტოლობების გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$(-1)^j\, 2de_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}r_j^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)H_{mk}^{(j,2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\left[-r_j^{k+1}\sigma_{mk}^{(j,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+r_j^{k-1}\sigma_{mk}^{(j,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)\right]\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\left[\frac{1}{k+1}r_j^{k+1}\sigma_{mk}^{(j,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{k}r_j^{k-1}\sigma_{mk}^{(j,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)\right]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right]+\sqrt{k(k+1)}\,r_j^k\sigma_{mk}^{(j,3)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\Big\}, \qquad j=1,2,$$

(276)

$$(-1)^j\, de_0\times grad\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}r_j^k \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)B_{mk}^{(j,3)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{\left[r_j^{k-1}\sigma_{mk}^{(j,4)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left[\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\frac{\sqrt{k(k+1)}}{k}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right]+\sqrt{k(k+1)}\,r_j^k\sigma_{mk}^{(j,5)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right\}, \qquad j=1,2,$$

სადაც

$$\sigma_{mk}^{(j,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)=(-1)^j\,2d\left[\cos\varphi_0\sin\vartheta_0\,\eta_{mk}^{(1,1)}\left(H_{mk}^{(j,3)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\varphi_0\sin\vartheta_0\eta_{mk}^{(2,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)-\cos\vartheta_0\sqrt{\frac{(k+1)^2-m^2}{(2k+1)(2k+3)}}\left(H_{mk+1}^{(j,2)}\right)\right],$$

$$\sigma_{mk}^{(j,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)=(-1)^j\,2d\left[\cos\varphi_0\sin\vartheta_0\,\eta_{mk}^{(1,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\varphi_0\sin\vartheta_0\eta_{mk}^{(2,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)+\cos\vartheta_0\sqrt{\frac{k^2-m^2}{4k^2-1}}\left(H_{mk-1}^{(j,2)}\right)\right],$$

$$\sigma_{mk}^{(j,3)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)=\frac{2d(-1)^j}{k(k+1)}\left[\cos\varphi_0\sin\vartheta_0\eta_{mk}^{(1,3)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\varphi_0\sin\vartheta_0\eta_{mk}^{(2,3)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)+im\cos\vartheta_0\,H_{mk-1}^{(j,2)}\right],$$

$$\sigma_{mk}^{(j,4)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)=(-1)^j\,d\left[-\cos\varphi_0\sin\vartheta_0\eta_{mk}^{(1,3)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)+\right.$$
$$\left.+\sin\vartheta_0\sin\varphi_0\eta_{mk}^{(2,3)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)-im\cos\vartheta_0\,B_{mk}^{(j,3)}\right],$$

$$\sigma_{mk}^{(j,5)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)=(-1)^j\,\frac{(2k+3)d}{k+1}\left[\eta_{mk}^{(1,1)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)+\eta_{mk}^{(2,1)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{(k+1)^2-m^2}{(2k+1)(2k+3)}}B_{mk+1}^{(j,3)}\right],\quad j=1,2.$$

თუ (276) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (271)-ში, მივიღებთ

$$u\left(x^{(j)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{u_{mk}(r_j)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}(r_j)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+w_{mk}(r_j)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right]\right\} \tag{277}$$

$$\vartheta_1\left(x^{(j)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{w_{mk}^{(l)}(r_j)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j)\right\},\quad l=1,2,\quad j=1,2, \tag{278}$$

სადაც

$$u_{mk}(r_j)=\tilde{u}_{mk}(r_j)+r_j^{k+1}l_{mk}^{(j,1)}+r_j^{k-1}l_{mk}^{(j,2)}+a_1\frac{d}{dr_j}\tilde{g}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)},$$

$$v_{mk}(r_j)=\tilde{v}_{mk}(r_j)+r_j^{k+1}l_{mk}^{(j,3)}+\frac{1}{k}r_j^{k-1}l_{mk}^{(j,2)}+a_1\frac{1}{r_j}\tilde{g}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)}, \tag{279}$$

$$w_{mk}(r_j)=\tilde{w}_{mk}(r_j)+r_j^k l_{mk}^{(j,4)},$$

$$w_{mk}^{(l)}(r_j)=\tilde{w}_{mk}^{(\ell)}(r_j)-r_j^k C_{mk}^{(j,4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2\left(\delta_1\ell(\kappa_2+\kappa_3)-\delta_{2l}(\kappa_1+\kappa_2)\right)\tilde{g}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)},$$
$$l=1,2.$$

აქ

$$l_{mk}^{(j,1)} = (k+2)B_{mk}^{(j,7)} + 2H_{mk}^{(j,2)} + (\eta_1+\eta_2)B_{mk}^{(j,4)} - \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(j,1)}\left(B_{mk}^{(j,4)}\right) - \sigma_{mk}^{(j,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right),$$

$$l_{mk}^{(j,2)} = k\left(B_{mk}^{(j,1)} + B_{mk}^{(j,6)}\right) + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(j,2)}\left(B_{mk}^{(j,4)}\right) + \sigma_{mk}^{(j,2)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right) - \sigma_{mk}^{(j,4)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right),$$

$$l_{mk}^{(j,3)} = B_{mk}^{(j,7)} + \frac{1}{k+1}\left[\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\sigma_{mk}^{(j,1)}\left(B_{mk}^{(j,4)}\right) + \sigma_{mk}^{(j,1)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right)\right],$$

$$l_{mk}^{(j,4)} = B_{mk}^{(j,3)} + \frac{\eta_1+\eta_2}{2}\sigma_{mk}^{(j,3)}\left(B_{mk}^{(j,4)}\right) + \sigma_{mk}^{(j,3)}\left(H_{mk}^{(j,2)}\right) - \sigma_{mk}^{(j,5)}\left(B_{mk}^{(j,3)}\right), \tag{280}$$

(277)-(278) ფორმულების გამოყენებით გამოვთვალოთ ძაბვის $\mathrm{P}(\partial,n)U\left(x^{(j)}\right)$, $j=1,2$ ვექტორი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathrm{P}(\partial,n)U\left(x^{(j)}\right) = 2\mu\frac{\partial u\left(x^{(j)}\right)}{\partial n\left(x^{(j)}\right)} + \lambda n\left(x^{(j)}\right)divu\left(x^{(j)}\right) + \mu\left[n\left(x^{(j)}\right)\times rotu\left(x^{(j)}\right)\right] - \\ - n\left(x^{(j)}\right)\left(\eta_1\vartheta_1\left(x^{(j)}\right) + \eta_2\vartheta_2\left(x^{(j)}\right)\right). \tag{281}$$

თუ $u\left(x^{(j)}\right)$ ვექტორის (277) და $\vartheta_\ell\left(x^{(j)}\right)$ ფუნქციის (278) მნიშვნელობას შევიტანთ (281)-ში და გავითვალისწინებთ (15) ტოლობებს, მივიღებთ

$$\mathrm{P}(\partial,n)U\left(x^{(j)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{a_{mk}(r_j)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j) + \sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}(r_j)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j) + \right.\right. \\ \left.\left. + c_{mk}(r_j)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right]\right\}, \qquad j=1,2, \tag{282}$$

სადაც

$$a_{mk}(r_j) = \tilde{a}_{mk}(r_j) + \left((k+1)(3\lambda+2\mu) - \lambda k(k+3)\right)r_j^k\ell_{mk}^{(j,1)} + 2\mu(k-1)r_j^{k-2}\ell_{mk}^{(j,2)} + \\ + (\eta_1+\eta_2)r_j^k c_{mk}^{(j,4)} + 2\mu a_1\left(\frac{d_2}{dr_j^2} - \lambda_1^2\right)\tilde{g}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)},$$

$$b_{mk}(r_j) = \tilde{b}_{mk}(r_j) + \mu(k+1)r_j^k\ell_{mk}^{(j,3)} + 2\mu\frac{k-1}{k}r_j^{k-2}\ell_{mk}^{(j,2)} + 2\mu a_1\frac{1}{r_j}\left(\frac{d}{dr_j^2} - \frac{1}{r_j}\right)\tilde{g}_k(\lambda_1 r_j)B_{mk}^{(j,5)},$$

$$c_{mk}(r_j) = \tilde{c}_{mk}(r_j) + \mu(k-1)r_j^{k-1}\ell_{mk}^{(j,4)},$$

აქ

$$\tilde{a}_{mk}(r_j) = \frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R_j^2}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)} - 2\mu k\left[b(k+1)(k+2)+1-4b\right]\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)} - \\ - \mu(\eta_1+\eta_2)(k+4)\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)} - \frac{2\mu a_1}{r_j}\left(2\frac{d}{dr_j} - \frac{k(k+1)}{r_j}\right)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}, \qquad k\geq 0,$$

$$\widetilde{b}_{mk}(r_j)=-\frac{2\mu(k+2)}{R_j^2}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}+2\mu(bk^2-1)\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+$$
$$+\mu(\eta_1+\eta_2)\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+2\mu a_1\frac{1}{r_j}\left(\frac{d}{dr_j}-\frac{1}{r_j}\right)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\qquad k\geq 1,$$

$$\widetilde{c}_{mk}(r_j)=-\frac{\mu(k+2)}{R_j^2}\left(\frac{R_j}{r_j}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,3)},\qquad k\geq 1.$$

ვთქვათ $f^{(j)}(z),\quad j=1,2$ ვექტორ-ფუნქცია და $f_\ell^{(j)}(z),\quad \ell=4,5,6$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სიგლუვის იმ საკმარის პირობებს, რომელიც საშუალებას იძლევა წარმოვადგინოთ ისინი ფურიე-ლაპლასის შემდეგ მწკრივებად

$$f^{(j)}(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\Big\{\alpha_{mk}^{(j,1)}\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\Big[\alpha_{mk}^{(j,2)}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+$$
$$+\alpha_{mk}^{(j,3)}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\Big]\Big\},\tag{283}$$

$$f_\ell^{(j)}(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\alpha_{mk}^{(j,\ell)}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j),\quad j=1,2,\quad \ell=4,5,6,\tag{284}$$

ვინაიდან $n(z)\cdot f^{(j)}(z)=0,\quad j=1,2,$ ამიტომ (283) ტოლობა გადაიწერება ასე

$$f^{(j)}(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[\alpha_{mk}^{(j,2)}\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\alpha_{mk}^{(j,3)}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right],\quad j=1,2\tag{285}$$

(277) და (282) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$n(x^{(j)})\cdot u(x^{(j)})=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}u_{mk}(r_j)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j),\quad j=1,2,$$

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x^{(j)})-n(x^{(j)})\left(n(x^{(j)})\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U(x^{(j)})\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}(r_j)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+c_{mk}(r_j)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right],\quad j=1,2.\tag{286}$$

თუ (278), (286) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x\to z\in\partial\Omega_j\quad (r_j\to R_j),\quad j=1,2$ და გავითვალისწინებთ, როგორც (249)-(250) სასაზღვრო პირობებს ასევე (284)-(285) ტოლობებს, მაშინ საძიებელი $\mathrm{A}_{mk}^{(j,\ell)},\ j=1,2,\ \ell=1,2,\ldots,5$ მუდმივებისადმი მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას

$$-\frac{k+1}{R_j}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}+R_j k(bk+a+1)\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+(\eta_1+\eta_2)R_j\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+$$

$$+a_1\frac{d}{dR_j}h_k(\lambda_1 R_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}=x_{mk}^{(j,1)},\qquad k\ge 0,$$

$$-\frac{2\mu(k+2)}{R_j^2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}+2\mu(bk^2-1)\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+\mu(\eta_1+\eta_2)\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+$$

$$+2\mu a_1\frac{1}{R_j}\left(\frac{d}{dR_j}-\frac{1}{R_j}\right)h_k(\lambda_1 R_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}=x_{mk}^{(j,2)},\qquad k\ge 1,$$

$$(2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu))\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}=x_{mk}^{(j,4)},\quad k\ge 0,\tag{287}$$

$$(2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu))\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}=x_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0,$$

$$-\frac{\mu(k+2)}{R_j}\mathrm{A}_{mk}^{(j,3)}=x_{mk}^{(j,3)},$$

სადაც

$$x_{mk}^{(j,1)}=\alpha_{mk}^{(j,4)}-R_j^{k+1}\ell_{mk}^{(j,1)}-R_j^{k-1}\ell_{mk}^{(j,2)}-a_1\frac{d}{dR_j}\tilde{g}_k(\lambda_1 R_j)B_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0,$$

$$x_{mk}^{(j,2)}=\alpha_{mk}^{(j,2)}-2\mu\frac{k-1}{k}R_j^{k-2}\ell_{mk}^{(j,2)}-\mu(k+1)R_j^{k}\ell_{mk}^{(j,3)}-$$

$$-2\mu a_1\frac{1}{R_j}\left(\frac{d}{dR_j}-\frac{1}{R_j}\right)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_j)B_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 1,$$

$$x_{mk}^{(j,3)}=\alpha_{mk}^{(j,3)}-\mu(k-1)R_j^{k-1}\ell_{mk}^{(j,4)},\qquad k\ge 1,\tag{288}$$

$$x_{mk}^{(j,4)}=\alpha_{mk}^{(j,5)}+R_j^kC_{mk}^{(j,4)}-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_j)B_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0,$$

$$x_{mk}^{(j,5)}=\alpha_{mk}^{(j,6)}+R_j^kC_{mk}^{(j,4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_j)B_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{mk}^{(j)}=\left(\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)},\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)},\ldots,\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\right)^{\mathsf{T}},\qquad x_{mk}^{(j)}=\left(x_{mk}^{(j,1)},x_{mk}^{(j,2)},\ldots,x_{mk}^{(j,5)}\right)^{\mathsf{T}},$$

$$\mathrm{N}^{(j)}(k)=\left[\mathrm{N}_{\ell q}^{(j)}(k)\right]_{5\times 5},\tag{289}$$

სადაც

$$\mathrm{N}_{11}^{(j)}(k)=\frac{2\mu(bk^2-1)}{\Delta'(k)},\qquad \mathrm{N}_{12}^{(j)}(k)=\frac{R_j k(bk+a+1)}{\Delta'(k)},\qquad \mathrm{N}_{13}^{(j)}(k)=0,$$

$$\mathrm{N}_{14}^{(j)}(k)=\frac{1}{\Delta'(k)}\left[2\mu\,a_1\,a_2\left((k(a+1)+1)\frac{d}{dR_j}-\frac{k(bk+a+1)}{R_j}\right)h_k(\lambda_1 R_j)-\right.$$

$$\left.-\mu(\eta_1+\eta_2)(\kappa_1+\kappa_2)a_3(k)(k+1)(bk-2)R_j\right],$$

$$\mathrm{N}_{15}^{(j)}(k)=\frac{-1}{\Delta'(k)}\left[2\mu\,a_1\,a_2\left((k(a+1)+1)\frac{d}{dR_j}-\frac{k(bk+a+1)}{R_j}\right)h_k(\lambda_1 R_j)+\right.$$

$$\left.+\mu(\eta_1+\eta_2)(\kappa_2+\kappa_3)a_3(k)(k+1)(bk-2)R_j\right],$$

$$\mathrm{N}_{21}^{(j)}(k)=\frac{2\mu(k+2)}{\Delta'(k)R_j^2}\,,\qquad \mathrm{N}_{22}^{(j)}(k)=\frac{k+1}{\Delta'(k)R_j^2}\,,\qquad \mathrm{N}_{23}^{(j)}(k)=0\,,$$

$$\mathrm{N}_{24}^{(j)}(k)=-\frac{2\mu}{\Delta'(k)R_j}\left[(3k+5)a_3(k)(\kappa_1+\kappa_2)+\frac{a_1a_2}{R_j}\left((2k+3)\frac{d}{dR_j}-\frac{k+1}{R_j}\right)h_k(\lambda_1 R_j)\right],$$

$$\mathrm{N}_{25}^{(j)}(k)=-\frac{2\mu}{\Delta'(k)R_j}\left[\frac{a_1a_2}{R_j}\left((2k+3)\frac{d}{dr_j}-\frac{k+1}{R_j}\right)h_k(\lambda_1 R_j)-(3k+5)a_3(k)(\kappa_2+\kappa_3)\right],$$

(290)

$$\mathrm{N}_{33}^{(j)}(k)=-\frac{R_j}{\mu(k+2)},\quad \mathrm{N}_{3\ell}^{(j)}(k)=0,\quad \ell=1,2,4,5,$$

$$\mathrm{N}_{4\ell}^{(j)}(k)=0,\quad \ell=1,2,3,\quad \mathrm{N}_{44}^{(j)}(k)=a_3(k)(\kappa_1+\kappa_2),\quad \mathrm{N}_{45}^{(j)}(k)=a_3(k)(\kappa_2+\kappa_3),$$

$$\mathrm{N}_{5\ell}^{(j)}(k)=0,\quad \ell=1,2,3,\quad \mathrm{N}_{54}^{(j)}(k)=a_2\,,\quad \mathrm{N}_{55}^{(j)}(k)=-a_2\,,$$

აქ

$$a_2=\frac{1}{(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+2\kappa_2+\kappa_3)},\qquad a_3(k)=\frac{1}{(\kappa_1+2\kappa_2+\kappa_3)[2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)]}\,,$$

$$\Delta'(k)=(k+1)(k(a+1)+1).$$

ამრიგად, (289) აღნიშვნებისა და (290) ტოლობების თანახმად (287) სისტემის ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$a_{mk}^{(j)}=\mathrm{N}^{(j)}(k)x_{mk}^{(j)},\quad k\geq 0. \tag{291}$$

თუ (280)-ში გავითვალისწინებთ (270) და (273) ტოლობებს, მაშინ მივიღებთ

$$l_{mk}^{(j,1)}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}R_q^{p+1}\left[C_{smpk}^{(j,1)}A_{sp}^{(q,2)}+C_{smpk}^{j,2}A_{sp}^{(q,4)}\right],$$

$$l_{mk}^{(j,2)} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} R_q^{p+1}\Big[kC_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0\varphi_0)A_{sp}^{(q,1)} + C_{smpk}^{(j,3)}A_{sp}^{(q,2)} - \sigma_{mk}^{(j,4)}\Big(G_{kp}^{(m,s)}\Big)A_{sp}^{(q,3)} + \\ + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(j,2)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)A_{sp}^{(q,4)}\Big], \tag{292}$$

$$l_{mk}^{(j,3)} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} R_q^{p+1}\left[C_{smpk}^{(j,4)}A_{sp}^{(q,2)} + \frac{\eta_1+\eta_2}{2(k+1)}\sigma_{mk}^{(j,1)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)A_{sp}^{(q,4)}\right],$$

$$l_{mk}^{(j,4)} = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} R_q^{p+1}\Big[(2p-1)\sigma_{mk}^{(j,3)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)A_{sp}^{(q,2)} + C_{smpk}^{(j,5)}A_{sp}^{(q,3)} + \\ + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(j,3)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)A_{sp}^{(q,3)} + A_{sp}^{(q,4)}\Big],$$

$$C_{smpk}^{(j,1)} = (k+2)(2-bp)a_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) + 2(2p-1)G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) - (2p-1)\sigma_{mk}^{(j,1)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big),$$

$$C_{smpk}^{(j,2)} = (\eta_1+\eta_2)\left[G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) - \frac{1}{2}\sigma_{mk}^{(j,1)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)\right],$$

$$C_{smpk}^{(j,3)} = k(2-bp)b_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) + (2p-1)\sigma_{mk}^{(j,2)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big),$$

$$C_{smpk}^{(j,4)} = (2-bp)a_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) + \frac{2p-1}{k+1}\sigma_{mk}^{(j,1)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big),$$

$$C_{smpk}^{(j,5)} = G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0,\varphi_0) - \sigma_{mk}^{(j,5)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big), \qquad j=1,2\,.$$

თუ (292)-დან $\ell_{mk}^{(j,\ell)}$, $\ell = 1,2,3,4$ მნიშვნელობებს შევიტანთ (288)-ში, მივიღებთ

$$x_{mk}^{(j)} = \tilde{\alpha}_{mk}^{(j)} + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p} L_{smpk}^{(j)}a_{sp}^{(q)}, \qquad j \neq q = 1,2, \tag{293}$$

სადაც $x_{mk}^{(j)}$ და $a_{sp}^{(j)}$ ვექტორებს აქვს (289), ხოლო

$$\tilde{\alpha}_{mk}^{(j)} = \Big(\alpha_{mk}^{(j,4)}, \alpha_{mk}^{(j,2)},\ \alpha_{mk}^{(j,3)},\ \alpha_{mk}^{(j,5)},\ \alpha_{mk}^{(j,6)}\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$L_{smpk}^{(j)} = \Big[L_{smpk}^{(j,\ell q)}\Big]_{5\times5}, \tag{294}$$

$$L_{smpk}^{(j,11)} = -kR_q^{p+1}R_j^{k-1}G_{kp,q}^{(m,s)}\big(\vartheta_0\ ,\ \varphi_0\big),$$

$$L_{smpk}^{(j,12)} = -R_q^{p+1}\Big[R_j^{k+1}C_{smpk}^{(j,1)} + R_j^{k-1}C_{smpk}^{(j,3)}\Big],$$

$$L_{smpk}^{(j,13)} = R_q^{p+1}R_j^{k-1}\sigma_{mk}^{(j,4)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big),$$

$$L_{smpk}^{(j,14)} = -R_q^{p+1}\left[R_j^{k+1}C_{smpk}^{(j,2)} + \frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(j,2)}\Big(G_{kp,q}^{(m,s)}\Big)\right],$$

$$L_{smpk}^{(j,15)} = -a_1 \frac{d}{dR_j} \tilde{g}_k(\lambda_1, R_j) \tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1, R_q) H_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0, \varphi_0),$$

$$L_{smpk}^{(j,21)} = -2\mu(k-1) R_q^{p+1} R_j^{k-2} G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0, \varphi_0),$$

$$L_{smpk}^{(j,22)} = -2\mu R_q^{p+1}\left[\frac{k-1}{k} R_j^{k-2} C_{smpk}^{(j,3)} + \frac{k+1}{2} R_j^k C_{smpk}^{(j,4)}\right],$$

$$L_{smpk}^{(j,23)} = 2\mu \frac{k-1}{k} R_q^{p+1} R_j^{k-2} \sigma_{mk}^{(j,4)}\left(G_{kp,q}^{(m,s)}\right), \tag{295}$$

$$L_{smpk}^{(j,24)} = -\mu(\eta_1+\eta_2) R_q^{p+1}\left[\frac{k-1}{k} R_j^{k-2} \sigma_{mk}^{(j,2)}\left(G_{kp,q}^{(m,s)}\right) + \frac{1}{2} R_j^k \sigma_{mk}^{(j,1)}\left(G_{kp,q}^{(m,s)}\right)\right],$$

$$L_{smpk}^{(j,25)} = -2\mu a_1 \frac{1}{R_j}\left(\frac{d}{dR_j} - \frac{1}{R_j}\right) \tilde{g}_k(\lambda_1, R_j) \tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1, R_q) H_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0, \varphi_0),$$

$$L_{smpk}^{(j,32)} = -\mu(k-1)(2p-1) R_q^{p+1} R_j^{k-1} \sigma_{mk}^{(j,3)}\left(G_{kp,q}^{(m,s)}\right),$$

$$L_{smpk}^{(j,33)} = -\mu(k-1) R_q^{p+1} R_j^{k-1} C_{smpk}^{(j,5)}, \quad L_{smpk}^{(j,31)} = 0, \qquad L_{smpk}^{(j,35)} = 0,$$

$$L_{smpk}^{(j,34)} = -\frac{1}{2}\mu(k-1)(\eta_1+\eta_2) R_q^{p+1} R_j^{k-1} \sigma_{mk}^{(j,3)}\left(G_{kp,q}^{(m,s)}\right),$$

$$L_{smpk}^{(j,44)} = L_{smpk}^{(j,54)} = (\lambda+2\mu)(2-bp) R_q^{p+1} R_j^k G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0, \varphi_0),$$

$$L_{smpk}^{(j,\ell 5)} = (\lambda+2\mu)\lambda_1^2\left(\delta_{\ell 5}(\kappa_1+\kappa_2) - \delta_{\ell 4}(\kappa_2+\kappa_3)\right) \tilde{g}_k(\lambda_1 R_j) H_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0, \varphi_0), \quad \ell = 4,5,$$

$$L_{smpk}^{(j,4\ell)} = L_{smpk}^{(j,5\ell)} = 0, \quad \ell = 1,2,3.$$

თუ $x_{mk}^{(j)}$ ვექტორის (293) მნიშვნელობას შევიტანთ (291) ტოლობაში, მივიღებთ

$$a_{mk}^{(j)} = \alpha_{mk}^{(j)} + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^{p} M_{smpk}^{(j)} a_{sp}^{(q)}, \quad k \ge 0, \tag{296}$$

სადაც $a_{mk}^{(j)}$ - ის აქვს (4.42) სახე, ხოლო

$$\alpha_{mk}^{(j)} = N^{(j)}(k) \tilde{\alpha}_{mk}^{(j)}, \qquad M_{smpk}^{(j)} = \left[M_{smpk}^{(j,\ell q)}\right]_{5\times 5},$$

$$M_{smpk}^{(j)} = N^{(j)}(k) L_{smpk}^{(j)}, \quad j = 1,2.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{mk} = \left(a_{mk}^{(1)}, a_{mk}^{(2)}\right)^{\mathsf{T}}, \qquad \alpha_{mk} = \left(\alpha_{mk}^{(1)}, \alpha_{mk}^{(2)}\right)^{\mathsf{T}},$$

$$M_{smpk} = \begin{bmatrix} [0]_{5\times 5} & M_{smpk}^{(1)} \\ M_{smpk}^{(2)} & [0]_{5\times 5} \end{bmatrix}_{10\times 10}.$$

ამ აღნიშვნების საფუძველზე (296) გადაიწერება ასე

$$a_{mk}=\alpha_{mk}+\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}M_{smpk}a_{sp}\,. \tag{297}$$

გამოვიკვლიოთ (297) სისტემა. ამოსათვის საჭიროა შევაფასოთ $M_{smpk}^{(j)}$ მატრიცის ელემენტები p და k პარამეტრების მიმართ. სამართლიანია შემდეგი შეფასება [47]

$$\left[\frac{(p+k+m-s)!(p+k-m+s)!}{(k+m)!(k-m)!(p+s)!(p-s)!}\right]^{1/2}\le\frac{(p+k)!}{p!k!},\quad k\ge1,\quad p\ge1. \tag{298}$$

(14) და (298) უტოლობების გამოყენებით ვღებულობთ, რომ

$$\begin{gathered}\left|G_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0\,,\,\varphi_0)\right|\le\frac{1}{d^{k+p+1}}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\frac{(p+k)!}{p!\,k!},\\ \left|a_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0\,,\,\varphi_0)\right|<\frac{3}{d^{k+p+1}}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\frac{(p+k+1)!}{p!\,(k+1)!},\\ \left|b_{kp,q}^{(m,s)}(\vartheta_0\,,\,\varphi_0)\right|\le\frac{3}{d^{k+p-1}}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\frac{(p+k)!}{p!\,k!},\end{gathered} \tag{299}$$

სამართლიანია შემდეგი უტოლობები [47]

$$\left|\tilde{g}_k(x)\right|<\frac{1}{\Gamma\left(k+\dfrac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^k,\quad \left|\tilde{h}_k(x)\right|<\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right)^k,\ x>0,\ k\to\infty, \tag{300}$$

სადაც $\Gamma(k+1/2)$ - გამა ფუნქციაა.

თუ ვისარგებლებთ (14), (298)-(299) უტოლობებით, მივიღებთ

$$\left|H_{kp,q}^{(s,m)}(\vartheta_0\,,\,\varphi_0)\right|<\Gamma\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\lambda_1 d}\right)^{p+k+1}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\frac{(p+k+1)!}{p!\,(k+1)!}, \tag{301}$$

აქ ვისარგებლებთ ტოლობით [47]

$$\tilde{b}_{pk,\,p+k}^{(s,m)}=(-1)^s\left[\frac{(2k+1)(2p+1)(p+k+m-s)!(p+k-m+s)!}{2(2p+2k+1)\,(k+m)!(k-m)!(p+s)!(p-s)!}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\ \frac{(p+k)!(2k)!(2p)!}{p!k!\,(2k+2p)!}.$$

(296) ტოლობაში, თუ ვისარგებლებთ (298) – (301) უტოლობებით, მივიღებთ

$$\left|M_{smpk}^{(j,\ell\xi)}\right|<\beta\,(p+1)(k+1)\left(\frac{R_j}{d}\right)^k\left(\frac{R_q}{d}\right)^{p+1}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\cdot\frac{(k+p+1)!}{p!\,(k+1)!},\quad j\ne q=1{,}2, \tag{302}$$

სადაც β დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული p და k პარამეტრებზე.

ვაჩვენებთ, რომ (297) უსასრულო სისტემა კვაზირეგულარულია, ე.ი. რეგულარობის პირობა სრულდება გარკვეული ნორმიდან დაწყებული ყველა სტრიქონისათვის, ანუ [48]

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|<1 \quad k=N+1,N+2,\ldots,N, \quad \ell=1,2,\ldots,10, \tag{303}$$

გარდა ამისა

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|<\infty, \quad k=1,2,\ldots,N, \quad \ell=1,2,\ldots,10, \tag{304}$$

უნდა არსებობდეს ისეთი $M>0$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\left|\alpha_{mk,\ell}^{(j)}\right|\leq M\left(1-\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right), \quad k=N+1,\ N+2,\ldots,\ \ell=1,2,\ldots,10, \tag{305}$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ, როცა $k>N$ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|<1-\rho, \tag{306}$$

სადაც $0<\varepsilon'<\rho<\varepsilon<1,\ k=N+1,\ N+2,\ldots,\ \ell=1,2,\ldots,10.$

(302) უტოლობისა და შემდეგი ტოლობის [47]

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(k+p)!}{k!\,p!}\,t^{p}=\left(\frac{1}{1-t}\right)^{k+1}, \quad 0<t<1, \tag{307}$$

გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|<\sigma_1k^2\left(\frac{d}{d-R_2}\right)^3\left(\frac{R_1}{d-R_2}\right)^k+\sigma_2k^2\left(\frac{d}{d-R_1}\right)^3\left(\frac{R_2}{d-R_1}\right)^k<\sigma k^2\left(\frac{R_1}{d-R_2}\right)^k, \tag{308}$$

სადაც σ,σ_1,σ_2 დადებითი მუდმივებია, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი k პარამეტრზე.

სამართლიანია შემდეგი ლემა [15]

ლემა 4.3 თუ $0 < a = const < 1$, $c = const > 0$, m და k ნატურალური რიცხვებია, მაშინ $k^m\ a^k < c$ უტოლობა სამართლიანია ყოველი

$$k > N = \max\left\{2, \left[4a^{2/m}c^{-1/m}\left(1 - a^{1/m}\right)^{-2}\right]\right\},$$

სადაც $[\bullet]$ სიმბოლო აღნიშნავს ბრჩხილებში მოთავსებული რიცხვის მთელ ნაწილს.

ამ ლემის თანახმად, უტოლობა

$$\sigma k^2\left(\frac{R_1}{d - R_2}\right)^k < 1 - \rho$$

სამართლიანია ყოველი $k > N$ -თვის, სადაც

$$N = \max\left\{2, \left[4\sigma^{1/2}(1-\rho)^{-1/2}(d - R_2)\left(\sqrt{d - R_2} - \sqrt{R_1}\right)^{-2}\right]\right\}.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ (306) უტოლობა და მასთან ერთად (303) უტოლობა.

(308) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right| < \sigma k^2 \le \sigma N^2 < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad \ell = 1,2,\dots,10,$$

ამით (304) უტოლობა დამტკიცებულია.

შევარჩიოთ M რიცხვი შემდეგნაირად:

$$M = \frac{1}{\varepsilon'}\max\left|\alpha_{mk,\ell}\right|, \ k \ge 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, 10. \tag{4.62}$$

აქედან (306)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$\left|\alpha_{mk,\ell}\right| \le \max\left|\alpha_{mk,\ell}\right| = M\varepsilon' =< M\rho < M\left(1 - \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right) < M\left(1 - \sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{s=-p}^{p}\sum_{\xi=1}^{10}\left|M_{smpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right),$$

$k = N+1, N+2, \dots, \quad \ell = 1, 2, \dots, 10.$

ამით (305) უტოლობა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ (296) სისტემა არის კვაზირეგულარული. ცნობილია, რომ ასეთი სისტემების მიახლოებითი ამონახსნები მიიღება რედუქციის მეთოდით.

(288) სისტემიდან გამომდინარეობს, როცა $k \to \infty$

$$\left| x_{mk}^{(j,\ell)} \right| \sim \left| \tilde{\alpha}_{mk,\ell}^{(j,\ell)} \right|, \quad j = 1,2, \quad \ell = 1,2,\ldots,5. \tag{310}$$

(278), (286) ფორმულაში შემავალი მწკრივები, რომლებიც შეიცავენ $B_{mk}^{(j,\ell)}$, $\ell = 1,2,...,7$, $C_{mk}^{(j,\ell)}$, $\ell = 2,4$, $D_{mk}^{(j,2)}$, $E_{mk}^{(j,2)}$, $H_{mk}^{(j,2)}$ მუდმივებს არიან კრება-დი იმისდა მიუხედავად $x \in \Omega^+$ თუ $x \in \partial\Omega_j$, $j = 1,2$. $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექ-ტორის რეგულარობა Ω^+ არეში დამოკიდებულია (278), (286) ფორმულებ-ში შემავალი იმ მწკრივების კრებადობაზე, რომლებიც შეიცავენ $A_{mk}^{(j,\ell)}$, $j = 1,2$, $\ell = 1,2,...,5$ მუდმივებს. თუ $x \in \Omega^+$, ე. ი. $r_j > R_j$, $j = 1,2$, მაშინ ხსენებული მწკრივები არიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი. თუ $x \in \partial\Omega_j$, მაშინ (14) უტოლობებისა და (311) ეკვივალენ-ტობის გათვალისწინებით (278), (286) მწკრივების კრებადობისთვის საკმარისია ფურიეს $\alpha_{mk}^{(j,\ell)}$, $\ell = 2,3,...,6$ კოეფიციენტები, როცა $k \to \infty$ უშვებენ შემდეგ შეფასებებს

$$\alpha_{mk}^{(j,\ell)} = O\left(k^{-3}\right), \ \ell = 4,5,6, \ \alpha_{mk}^{(j,\ell)} = O\left(k^{-4}\right), \ \ell = 2,3, \ \ j = 1,2. \tag{311}$$

თეორემა 1.6, თეორემა 1.7 -ის თანახმად $\alpha_{mk}^{(j,\ell)}$, $j = 1,2$, $\ell = 2,3,...,6$ კოეფიციენტებს ექნებათ (311) რიგი, როცა $k \to \infty$, თუ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებისაგან მოვითხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს

$$f^{(j)}(z) \in C^3\left(\partial\Omega_j\right), \quad f_\ell^{(j)}(z) \in C^3\left(\partial\Omega_j\right), \quad j = 1,2, \quad \ell = 4,5,6. \tag{312}$$

შენიშვნა 4.4 ვინაიდან $\alpha_{mk}^{(j,\ell)}$, $j = 1,2$, $\ell = 2,3,...,6$ კოეფიციენტები მიისწრაფვიან ნულისაკენ, როცა $k \to \infty$, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ $M > 0$ რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს (309) ტოლობა.

ამრიგად მივიღეთ, რომ, თუ $f^{(j)}(z)$ ვექტორი და $f_\ell^{(j)}(z)$, $\ell = 4,5,6$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ სიგლუვის (312) პირობებს, მაშინ $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი წარმოდგენილი (277)-(278) სახით წარმოადგენს $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{I})$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს.

ანალოგიურად იხსნება $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{II})$ ამოცანა.

§3. (B) ამოცანის ამოხსნა

ვთქვათ O_1 და O_2 წერტილები სიმეტრიულნი არიან $\partial\Omega$ სიბრტყის მიმართ. ვიგულისხმოთ, რომ $O_j\, x_1^{(j)} x_2^{(j)} x_3^{(j)}$, $j = 1{,}2$ სისტემების საკოორდინატო ღერძები ერთმანეთის პარალელურია და ერთნაირადაა ორიენტირებული (იხ. ნახ. 2) O_1 და O_2 წერტილებს შორის მანძილი d -ს ტოლია. O_2 წერტილის სფერული კოორდინატები $O_1 x_1^{(1)}\, x_2^{(1)}\, x_3^{(1)}$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ $(d, \vartheta_0, \varphi_0)$ -ით, ამასთან $\vartheta_0 = 0$. თუ ამ უკანასკნელ ტოლობას გავითვალისწინებთ (263) , (265) ტოლობებში, მივიღებთ

$$r_2^{-k-1} \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{p=|m|}^{\infty} G_{pk}^{(m)}\; r_1^p\; \mathrm{Y}_p^{(m)}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{313}$$

სადაც

$$G_{pk}^{(m)} = \frac{(-1)^{p+m}(k+p)!\sqrt{2k+1}}{d^{k+p+1}\left[(2p+1)\,(k+m)!(k-m)!(p+m)!(p-m)!\right]^{1/2}}\ ,$$

ასევე

$$r_2^{-k+1} \mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_2, \varphi_2) = \sum_{p=|m|}^{\infty} \left[a_{pk}^{(m)}\; r_1^{p+2} + b_{pk}^{(m)}\, r_1^{p}\right] \mathrm{Y}_p^{(m)}(\vartheta_1, \varphi_1), \tag{314}$$

$$a_{pk}^{(m)} = G_{pk}^{(m)} - 2d\,\sqrt{\frac{(p+1)^2 - m^2}{(2p+1)(2p+3)}}\, G_{p+1k}^{(m)}\ ,$$

$$b_{pk}^{(m)} = d^2\, G_{pk}^{(m)} - 2d\,\sqrt{\frac{p^2 - m^2}{4p^2 - 1}}\, G_{p-1k}^{(m)}\ .$$

(248) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$x^{(1)} = x^{(2)} + de_3\,, \tag{315}$$

სადაც $e_3 = (0{,}0{,}1)^{\mathsf{T}}$.

თუ $\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)$, $\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta,\varphi)$, $Z_{mk}(\vartheta,\varphi)$, ვექტორთა (9) გამოსახულებაში გავითვალისწინებთ, რომ

$$\mathrm{Y}_k^{(m)}(\pi-\vartheta,\varphi) = (-1)^{k-m}\,\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta,\varphi), \tag{316}$$

მივიღებთ

$$\left[\mathrm{X}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_j=(-1)^{k-m}\left[\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_j,\quad j=1,2,$$

$$\left[\mathrm{X}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_3=(-1)^{k-m+1}\left[\mathrm{X}_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_3,$$

$$\left[\mathrm{Y}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_j=(-1)^{k-m}\left[Y_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_j,\quad j=1,2,$$

$$\left[\mathrm{Y}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_3=(-1)^{k-m+1}\left[Y_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_3, \tag{317}$$

$$\left[\mathrm{Z}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_j=(-1)^{k-m+1}\left[Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_j,\quad j=1,2,$$

$$\left[\mathrm{Z}_{mk}(\pi-\vartheta,\varphi)\right]_3=(-1)^{k-m}\left[Z_{mk}(\vartheta,\varphi)\right]_3.$$

თუ (256) და (257) სასაზღვრო პირობებში გავითვალისწინებთ, რომ $n(z)=e_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, მივიღებთ

$$\{u_3(z)\}^+=0,\quad \left\{\frac{\partial u_2(z)}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3(z)}{\partial z_2}\right\}^+=0,\quad \left\{\frac{\partial u_1(z)}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3(z)}{\partial z_1}\right\}^+=0,\quad \{\vartheta_j(z)\}^+=0,\ j=1,2, \tag{318}$$

ან

$$\{u_3(z)\}^+=0,\quad \left\{\frac{\partial u_2(z)}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3(z)}{\partial z_2}\right\}^+=0,\quad \left\{\frac{\partial u_1(z)}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3(z)}{\partial z_1}\right\}^+=0,\ \left\{\frac{\partial \vartheta_j(z)}{\partial x_3}\right\}^+\ j=1,2. \tag{319}$$

(318) – (319) სასაზღვრო პირობები შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\{u_3(z)\}^+=0,\quad \{rot\, u(z)\}_j^+=0,\quad \{\vartheta_j(z)\}^+=0,\quad j=1,2,\quad z\in\partial\Omega, \tag{320}$$

ან

$$\{u_3(z)\}^+=0,\quad \{rot\, u(z)\}_j^+=0,\quad \left\{\frac{\partial \vartheta_j(z)}{\partial x_3}\right\}^+=0,\quad j=1,2,\quad z\in\partial\Omega. \tag{321}$$

(B) ამოცანის ამოხსნა ვეძებოთ (266) სახით, სადაც $\Phi_\ell^{(j)}\left(x^{(j)}\right)$, $j=1,2,\quad \ell=1,2,\ldots,5$ ფუნქციებს აქვს შემდეგი სახე

$$\Phi_\ell^{(j)}\left(x^{(j)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_j,\varphi_j\right)\mathrm{A}_{mk}^{(j,\ell)},\ \ell=1,2,3,4,$$

$$\Phi_5^{(j)}\left(x^{(j)}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}h_k\left(\lambda_1 r_j\right)\mathrm{Y}_k^{(m)}\left(\vartheta_j,\varphi_j\right)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad j=1,2, \tag{322}$$

სადაც $\mathrm{A}_{mk}^{(j,\ell)}$, $j=1,2,\quad \ell=1,2,\ldots,5$ საძიებელი მუდმივებია.

$\Phi_\ell^{(1)}\left(x^{(1)}\right)$, $\ell = 2,3$ ფუნქციებისაგან მოვითხოვოთ, რომ

$$\int_{\partial\Omega'} \Phi_\ell^{(1)}\left(x^{(1)}\right) ds = 0, \quad \ell = 2,3, \tag{323}$$

სადაც $\partial\Omega'$ არის სფერული ზედაპირი ცენტრით O_1 წერტილში და რადიუსით R' $\left(R_1 < R' < d/2\right)$.

(323) ტოლობაში შევიტანოთ $\Phi_\ell^{(1)}\left(x^{(1)}\right)$, $\ell = 2,3$ ფუნქციების მნიშვნელობები (322)- დან, და გავითვალისწინოთ (16)-ის პირველი ტოლობა, მივიღებთ რომ $\mathrm{A}_{00}^{(1,\ell)} = 0$, $\ell = 2,3$.

თუ $\Phi_\ell^{(j)}\left(x^{(j)}\right)$, $j = 1,2$, $\ell = 1,2,\dots,5$ ფუნქციის (322) მნიშვნელობას შევიტანთ (266)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\Bigg\{\Bigg[-\frac{k+1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2} \mathrm{A}_{mk}^{(j,1)} + R_1 k(bk+a+1)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k} \mathrm{A}_{mk}^{(j,2)} + \\ + (\eta_1+\eta_2)R_1\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k} \mathrm{A}_{mk}^{(j,4)} + a_1\frac{d}{dr_j}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\Bigg]\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j) + \\ + \sqrt{k(k+1)}\Bigg[\frac{1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2} \mathrm{A}_{mk}^{(j,1)} - R_1(bk-2)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k} \mathrm{A}_{mk}^{(j,2)} + \\ + a_1\frac{1}{r_j}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\Bigg]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j) + \sqrt{k(k+1)}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1} \mathrm{A}_{mk}^{(j,3)}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\Bigg\}; \end{aligned} \tag{324}$$

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\Bigg[(2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu))\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1} \mathrm{A}_{mk}^{(j,4)} + \\ + (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\Bigg]\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j), \\ \vartheta_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\Bigg[(2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu))\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1} \mathrm{A}_{mk}^{(j,4)} - \\ - (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\Bigg]\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j). \end{aligned} \tag{325}$$

(324) – (325) ფორმულების გამოყენებით გამოვთვალოთ $\mathrm{P}(\partial,n)U(x)$ ძაბვის ვექტორი, გვექნება

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\left\{\tilde{a}_{mk}(r_j)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\sqrt{k(k+1)}\left[\tilde{b}_{mk}(r_j)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\tilde{c}_{mk}(r_j)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right]\right\},$$

(326)

სადაც

$$\tilde{a}_{mk}(r_j)=\frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}-2\mu k\bigl(b(k+1)(k+2)+1-4b\bigr)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}-$$

$$-\mu(\eta_1+\eta_2)(k+4)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}-\frac{2\mu a_1}{r_j}\left(2\frac{d}{dr_j}-\frac{k(k+1)}{r_j}\right)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 0,$$

$$\tilde{b}_{mk}(r_j)=-\frac{2\mu(k+2)}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}+2\mu\left(bk^2-1\right)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+$$

$$+\mu(\eta_1+\eta_2)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}+2\mu a_1\frac{1}{r_j}\left(\frac{d}{dr_j}-\frac{1}{r_j}\right)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)},\quad k\ge 1, \qquad (327)$$

$$\tilde{c}_{mk}(r_j)=-\frac{\mu(k+2)}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,3)},\quad k\ge 1.$$

(324) და (326)-დან ვღებულობთ, რომ

$$n(x)\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+3}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}-\right.$$

$$-2\mu k\bigl(b(k+1)(k+2)+1-4b\bigr)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}-\mu(\eta_1+\eta_2)(k+4)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,4)}- \qquad (328)$$

$$\left.-\frac{2\mu a_1}{r_j}\left(2\frac{d}{dr_j}-\frac{k(k+1)}{r_j}\right)h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\right\}\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_j,\varphi_j),$$

$$u(x)-n(x)\bigl(n(x)\cdot u(x)\bigr)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sum_{j=1}^{2}\sqrt{k(k+1)}\left\{\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(j,1)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-R_1(bk-2)\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(j,2)}+a_1\frac{1}{r_j}h_k(\lambda_1 r_j)\mathrm{A}_{mk}^{(j,5)}\right]\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)+\left(\frac{R_1}{r_j}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(j,3)}\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_j,\varphi_j)\right\}.$$

თუ (325) , (328) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x_3^{(1)}\to\frac{d}{2}$ და გავითვალისწინებთ (316) – (317) ტოლობებს, მაშინ ვნახავთ, რომ (256) და (257) სასაზღვრო პირობები დაკმაყოფილდება, თუ $\mathrm{A}_{mk}^{(2,\ell)}$, $\ell=1,2,\dots,5$ მუდმივებს შევარჩევთ, ასე

$$\mathrm{A}_{mk}^{(2,\ell)} = (-1)^{k-m+1}\mathrm{A}_{mk}^{(1,\ell)}, \quad \ell = 1,2,4,5, \quad \mathrm{A}_{mk}^{(2,3)} = (-1)^{k-m}\mathrm{A}_{mk}^{(1,3)}. \tag{329}$$

იმისათვის, რომ დავაკმაყოფილოთ (253)- (254) სასაზღვრო პირობები, საჭიროა, როგორც $u(x)$ ვექტორი, ასევე $\mathrm{P}(\partial,n)U(x)$ ძაბვის ვექტორი და $\vartheta_j(x)$ ფუნქციები წარმოვადგინოთ ფურიე-ლაპლასის მწკრივად $\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)$, $\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)$, $\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)$, ვექტორთა სისტემის მიმართ.

$u(x)$, $\mathrm{P}(\partial,n)U(x)$ ვექტორებისა და $\vartheta_j(x)$, $j=1,2$ ფუნქციის მნიშვნელობები მიიღებენ (277) – (278) , (282) ტოლობებისგან, თუ მათში ვიგულისხმებთ $j=1$, $\vartheta_0=0$. ამრიგად

$$u\left(x^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\left\{u_{mk}(r_1)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1) + \sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}(r_1)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1) + w_{mk}(r_1)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)\right]\right\}, \tag{330}$$

$$\vartheta_\ell\left(x^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} w_{mk}^{(\ell)}(r_1)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_1,\varphi_1), \ell = 1,2, \tag{331}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(\partial,n)U\left(x^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\{a_{mk}(r_1)\mathrm{X}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1) + \\ + \sqrt{k(k+1)}\left[b_{mk}(r_1)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1) + c_{mk}(r_1)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)\right]\},\end{gathered} \tag{332}$$

სადაც

$$u_{mk}(r_1) = \widetilde{u}_{mk}(r_1) + r_1^{k+1}\ell_{mk}^{(1)} + r_1^{k-1}\ell_{mk}^{(2)} + a_1\frac{d}{dr_1}\widetilde{g}_k(\lambda_1 r_1)B_{mk}^{(5)},$$

$$v_{mk}(r_1) = \widetilde{v}_{mk}(r_1) + r_1^{k+1}\ell_{mk}^{(3)} + \frac{1}{k}r_1^{k-1}\ell_{mk}^{(2)} + a_1\frac{1}{r_1}\widetilde{g}_k(\lambda_1 r_1)B_{mk}^{(5)},$$

$$w_{mk}(r_1) = \widetilde{w}_{mk}(r_1) + r_1^k\ell_{mk}^{(4)},$$

$$w_{mk}^{(\ell)}(r_1) = \widetilde{w}_{mk}^{(\ell)}(r_1) - r_1^k C_{mk}^{(4)} + (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\delta_{1\ell}(\kappa_2+\kappa_3) - \delta_{2\ell}(\kappa_1+\kappa_2))\widetilde{g}(\lambda_1 r_1)B_{mk}^{(5)},$$

$$\begin{gathered}a_{mk}(r_1) = \widetilde{a}_{mk}(r_1) + [(k+1)(3\lambda+2\mu) - \lambda k(k+3)]r_1^k\ell_{mk}^{(1)} + 2\mu(k-1)r_1^{k-2}\ell_{mk}^{(2)} + \\ + (\eta_1+\eta_2)r_1^k C_{mk}^{(4)} + 2\mu a_1\left(\frac{d^2}{dr_j^2} - \lambda_1^2\right)\widetilde{g}_k(\lambda_1 r_1)B_{mk}^{(5)},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}b_{mk}(r_1) = \widetilde{b}_{mk}(r_1) + \mu(k+1)r_1^k\ell_{mk}^{(3)} + 2\mu\frac{k-1}{k}r_1^{k-2}\ell_{mk}^{(2)} + \\ + 2\mu a_1\frac{1}{r_1}\left(\frac{d}{dr_1} - \frac{1}{r_1}\right)\widetilde{g}_k(\lambda_1 r_1)B_{mk}^{(5)},\end{gathered}$$

$$c_{mk}(r_1)=\tilde{c}_{mk}(r_1)+\mu(k-1)r_1^{k-1}\ell_{mk}^{(4)}.$$

აქ

$$\tilde{u}_{mk}(r_1)=-\frac{k+1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1,1)}+R_1k(bk+a+1)\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(1,2)}+(\eta_1+\eta_2)R_1\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(1,4)}+$$

$$+a_1\frac{d}{dr_1}h_k(\lambda_1r_1)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)},$$

$$\tilde{v}_{mk}(r_1)=\frac{1}{R_1}\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+2}\mathrm{A}_{mk}^{(1,1)}-R_1(bk-2)\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k}\mathrm{A}_{mk}^{(1,2)}+a_1\frac{1}{r_1}h_k(\lambda_1r_1)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)},$$

$$\tilde{w}_{mk}(r_1)=\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(1,3)},$$

$$w_{mk}^{(\ell)}(r_1)=\left(2(\lambda+2\mu)-k(\lambda+\mu)\right)\left(\frac{R_1}{r_1}\right)^{k+1}\mathrm{A}_{mk}^{(1,4)}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2\big(\delta_{1\ell}(\kappa_2+\kappa_3)-$$

$$-\delta_{2\ell}(\kappa_1+\kappa_2)\big)h_k(\lambda_1r_1)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)},\qquad \ell=1,\,2,$$

$\tilde{a}_{mk}(r_1)$, $\tilde{b}_{mk}(r_1)$, $\tilde{c}_{mk}(r_1)$, სიდიდეებით მიიღებიან (327)-დან, თუ მასში ავიღებთ $j=1$,

$$\ell_{mk}^{(1)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}R_1^{p+1}(-1)^{k-m+1}\left[C_{mpk}^{(1)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,2)}+C_{mpk}^{(2)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,4)}\right],$$

$$\ell_{mk}^{(2)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}R_1^{p+1}(-1)^{k-m+1}\Big[k\,G_{kp}^{(m)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,1)}+C_{mpk}^{(3)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,2)}+\sigma_{mk}^{(1,4)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\mathrm{A}_{mp}^{(1,3)}+$$

$$+\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(1,2)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\mathrm{A}_{mp}^{(1,4)}\Big],\qquad (333)$$

$$\ell_{mk}^{(3)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}R_1^{p+1}(-1)^{k-m+1}\left[C_{mpk}^{(4)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,2)}+\frac{\eta_1+\eta_2}{2(k+1)}\sigma_{mk}^{(1,1)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\mathrm{A}_{mp}^{(1,4)}\right],$$

$$\ell_{mk}^{(4)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}R_1^{p+1}(-1)^{k-m+1}\Big[(2p-1)\sigma_{mk}^{(1,3)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\mathrm{A}_{mp}^{(1,2)}-C_{mpk}^{(5)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,3)}+$$

$$+\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(1,3)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\mathrm{A}_{mp}^{(1,4)}\Big],$$

$$C_{mpk}^{(1)}=(k+2)(2-bp)a_{kp}^{(m)}+2(2p-1)G_{kp}^{(m)}-(2p-1)\sigma_{mk}^{(1,1)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$C_{mpk}^{(2)}=(\eta_1+\eta_2)\left(G_{kp}^{(m)}-\frac{1}{2}\sigma_{mk}^{(1,1)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\right),$$

$$C_{mpk}^{(3)}=k(2-bp)b_{kp}^{(m)}+(2p-1)\sigma_{mk}^{(1,2)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$C_{mpk}^{(4)}=(2-bp)a_{kp}^{(m)}+\frac{2p-1}{k+1}\sigma_{mk}^{(1,1)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$C_{mpk}^{(5)} = G_{kp}^{(m)} - \sigma_{mk}^{(1,5)}\left(G_{kp}^{(m)}\right).$$

(330) და (332) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$u\left(x^{(1)}\right) - n\left(x^{(1)}\right)\left(n\left(x^{(1)}\right)\cdot u\left(x^{(1)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k}\sqrt{k(k+1)}\left[v_{mk}(r_1)\mathrm{Y}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1) + w_{mk}(r_1)\mathrm{Z}_{mk}(\vartheta_1,\varphi_1)\right],$$

(334)

$$u\left(x^{(1)}\right)\cdot \mathrm{P}(\partial, n)U\left(x^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=-k}^{k} a_{mk}(r_1)\mathrm{Y}_k^{(m)}(\vartheta_1,\varphi_1).$$

თუ (331) და (334) ტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x^{(1)} \to z \in \partial\Omega_1 \ (r_1 \to R_1)$ და გავითვალისწინებთ, როგორც (253) – (254) სასაზღვრო პირობებს, ასევე (284) – (285) ტოლობებს, მაშინ საძიებელ $\mathrm{A}_{mk}^{(1,\ell)}$, $\ell = 1,2,\ldots,5$ მუდმივებისათვის მივიღებთ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{gathered}
\frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R_1^2}\mathrm{A}_{mk}^{(1,1)} - 2\mu k\left(b(k+1)(k+2)+1-4b\right)\mathrm{A}_{mk}^{(1,2)} - \\
-\mu(\eta_1+\eta_2)(k+4)\mathrm{A}_{mk}^{(1,4)} - \frac{2\mu a_1}{R_1}\left(2\frac{d}{dR_1} - \frac{k(k+1)}{R_1}\right)h_k(\lambda_1 R_1)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)} = x_{mk}^{(1)}, \quad k \ge 0, \\
\frac{1}{R_1}\mathrm{A}_{mk}^{(1,1)} - R_1(bk-2)\mathrm{A}_{mk}^{(1,2)} + a_1\frac{1}{R_1}h_k(\lambda_1 R_1)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)} = x_{mk}^{(2)}, \quad k \ge 1, \\
\mathrm{A}_{mk}^{(1,3)} = x_{mk}^{(3)}, \quad k \ge 1, \qquad (335) \\
\left(2(\lambda+2\mu) - k(\lambda+\mu)\right)\mathrm{A}_{mk}^{(1,4)} + (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)} = x_{mk}^{(4)}, \quad k \ge 0, \\
\left(2(\lambda+2\mu) - k(\lambda+\mu)\right)\mathrm{A}_{mk}^{(1,4)} - (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\mathrm{A}_{mk}^{(1,5)} = x_{mk}^{(5)}, \quad k \ge 0,
\end{gathered}$$

სადაც

$$\begin{gathered}
x_{mk}^{(1)} = \alpha_{mk}^{(1,4)} - \left((k+1)(3\lambda+2\mu) - \lambda k(k+3)\right)R_1^k\ell_{mk}^{(1)} - 2\mu(k-1)R_1^{k-2}\ell_{mk}^{(2)} - (\eta_1+\eta_2)R_1^k C_{mk}^{(4)} - \\
-2\mu a_1\left(\frac{d^2}{dR_1^2} - \lambda_1^2\right)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)B_{mk}^{(5)}, \\
x_{mk}^{(2)} = \alpha_{mk}^{(1,2)} - R_1^{k+1}\ell_{mk}^{(3)} - \frac{1}{k}R_1^{k-1}\ell_{mk}^{(2)} - a_1\frac{1}{R_1}\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)B_{mk}^{(5)}, \\
x_{mk}^{(3)} = \propto_{mk}^{(1,3)} - R_1^k\ell_{mk}^{(4)}, \qquad (336) \\
x_{mk}^{(4)} = \alpha_{mk}^{(1,5)} + R_1^k C_{mk}^{(4)} - (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)B_{mk}^{(5)}, \\
x_{mk}^{(5)} = \alpha_{mk}^{(1,6)} + R_1^k C_{mk}^{(4)} + (\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)B_{mk}^{(5)},
\end{gathered}$$

სადაც

$$C_{mk}^{(4)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}(-1)^{k-m+1}(\lambda+2\mu)(2-bp)R_1^{p+1}G_{kp}^{(m)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,4)}, \quad (337)$$

$$B_{mk}^{(5)}=\sum_{p=|m|}^{\infty}(-1)^{k-m+1}\tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_1)H_{kp}^{(m)}\mathrm{A}_{mp}^{(1,5)}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$a_{mk}=\left(\mathrm{A}_{mk}^{(1,1)},\ \mathrm{A}_{mk}^{(1,2)},\ \ldots,\ \mathrm{A}_{mk}^{(1,5)}\right)^{\mathrm{T}},\qquad x_{mk}=\left(\mathrm{A}_{mk}^{(1)},\ \mathrm{A}_{mk}^{(2)},\ \ldots,\ \mathrm{A}_{mk}^{(5)}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$N(k)=\left\lfloor N_{\ell q}(k)\right\rfloor_{5\times 5}, \quad (338)$$

$$N_{11}(k)=\frac{R_1(2-bk)}{\Delta''(k)},\quad N_{12}(k)=\frac{2\mu k}{\Delta''(k)}\left(b(k+1)(k+2)+1-4b\right),\quad N_{12}(k)=0,$$

$$N_{14}(k)=-\frac{\mu a_3(k)}{\Delta''(k)}(\eta_1+\eta_2)(\kappa_1+\kappa_2)R_1(k+4)(bk-2)-\frac{2\mu a_1 a_2}{R_1\Delta''(k)}\Bigg[2(bk-2)\frac{d}{dR_1}-$$

$$-\left(2k(k+1)(1+b)-1+4b\right)\frac{1}{R_1}\Bigg]h_k(\lambda_1 R_1),$$

$$N_{15}(k)=-\frac{\mu a_3(k)}{\Delta''(k)}(\eta_1+\eta_2)(\kappa_2+\kappa_3)R_1(k+4)(bk-2)+\frac{2\mu a_1 a_2}{R_1\Delta''(k)}\Bigg[2(bk-2)\frac{d}{dR_1}-$$

$$-\left(2k(k+1)(1+b)-1+4b\right)\frac{1}{R_1}\Bigg]h_k(\lambda_1 R_1),$$

$$N_{21}(k)=-\frac{1}{R_1\Delta''(k)},\quad N_{22}(k)=\frac{2\mu(k+1)(k+2)}{R_1^2\Delta''(k)},\quad N_{23}(k)=0,$$

$$N_{24}(k)=-\frac{\mu a_3(k)}{R_1\Delta''(k)}(\eta_1+\eta_2)(\kappa_1+\kappa_2)(k+4)-\frac{4\mu a_1 a_2}{R_1^2\Delta''(k)}\left(\frac{d}{dR_1}-\frac{k+1}{R_1}\right)h_k(\lambda_1 R_1),$$

$$N_{25}(k)=-\frac{\mu a_3(k)}{R_1\Delta''(k)}(\eta_1+\eta_2)(\kappa_2+\kappa_3)(k+4)+\frac{4\mu a_1 a_2}{R_1^2\Delta''(k)}\left(\frac{d}{dR_1}-\frac{k+1}{R_1}\right)h_k(\lambda_1 R_1),$$

$$N_{33}(k)=1,\quad N_{3\ell}(k)=0,\quad \ell=1,2,4,5,$$

$$N_{4\ell}(k)=0,\quad \ell=1,2,3,\quad N_{44}(k)=a_3(k)(\kappa_1+\kappa_2),\quad N_{45}(k)=a_3(k)(\kappa_2+\kappa_3),$$

$$N_{5\ell}(k)=0,\quad \ell=1,2,3,\quad N_{54}(k)=a_2,\quad N_{55}(k)=-a_2,$$

სადაც $\Delta''(k)=\frac{2\mu}{R_1}\left[2(k^2+2)+k(1-4b)\right]$, $a_1=\eta_1(\kappa_2+\kappa_3)-\eta_2(\kappa_1+\kappa_2)$,

a_2 და a_3-ს აქვს (290) სახე.

ამ აღნიშვნების საფუძველზე (334) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ჩაიწერება ასე

$$a_{mk} = N(k)x_{mk}\,,\;\; k \ge 0. \tag{339}$$

თუ (333)-ს შევიტანთ (336)-ში და გავითვალისწინებთ (337)-ს, მივიღებთ

$$x_{mk} = \widetilde{\alpha}_{mk} + \sum_{p=|m|}^{\infty} L_{mpk} a_{mp}\,, \tag{340}$$

სადაც

$$L_{mpk} = \left[L_{mpk}^{(\ell,q)}\right]_{5\times5}, \qquad \widetilde{\alpha}_{mk} = \left(\alpha_{mk}^{(1,4)},\, \alpha_{mk}^{(1,2)},\quad \alpha_{mk}^{(1,3)},\quad \alpha_{mk}^{(1,5)},\, \alpha_{mk}^{(1,6)}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$L_{mpk}^{(1,1)} = (-1)^{k-m}\, 2\mu k(k-1)R_1^{k+p-1}G_{kp}^{(m)}\,,$$

$$L_{mpk}^{(1,2)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p-1}\left[\left((k+1)(3\lambda+2\mu)-\lambda k(k+3)\right)R_1^2 C_{mpk}^{(1)} + 2\mu(k-1)C_{mpk}^{(3)}\right],$$

$$L_{mpk}^{(1,3)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p-1}\,\sigma_{mk}^{(1,4)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$L_{mpk}^{(1,4)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p-1}\Big[\left((k+1)(3\lambda+2\mu)-\lambda k(k+3)\right)R_1^2 C_{mpk}^{(2)} +$$
$$+\,\mu(k-1)(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(1,2)}\left(G_{kp}^{(m)}\right) + (\eta_1+\eta_2)(\lambda+2\mu)(2-bp)G_{kp}^{(m)}\Big].$$

$$L_{mpk}^{(1,5)} = 2\mu\, a_1 \widetilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_1)H_{kp}^{(m)}\left(\frac{d^2}{dR_1^2} - \lambda_1^2\right)\widetilde{g}_k(\lambda_1 R_1),$$

$$L_{mpk}^{(2,1)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p}G_{kp}^{(m)}\,,$$

$$L_{mpk}^{(2,2)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p}\left[\frac{1}{k}C_{mpk}^{(3)} + R_1^2 C_{mpk}^{(4)}\right],$$

$$L_{mpk}^{(2,3)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p}\sigma_{mk}^{(1,4)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$L_{mpk}^{(2,4)} = \frac{1}{2}(-1)^{k-m}\, R_1^{k+p}\left[(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(1,2)}\left(G_{kp}^{(m)}\right) + \frac{\eta_1+\eta_2}{k+1}R_1^2\sigma_{mk}^{(1,4)}\left(G_{kp}^{(m)}\right)\right],$$

$$L_{mpk}^{(2,5)} = a_1(-1)^{k-m}\,\frac{1}{R_1}\,\widetilde{g}_k(\lambda_1 R_1)\widetilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_1)H_{kp}^{(m)}\,,$$

$$L_{mpk}^{(3,\ell)} = 0,\quad \ell = 1{,}5,\qquad L_{mpk}^{(3,2)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p+1}(2p-1)\sigma_{mk}^{(1,3)}\left(G_{kp}^{(m)}\right),$$

$$L_{mpk}^{(3,3)} = (-1)^{k-m+1}\, R_1^{k+p+1}C_{mpk}^{(5)}\,,$$

$$L_{mpk}^{(3,4)} = (-1)^{k-m}\, R_1^{k+p+1}\,\frac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)\sigma_{mk}^{(1,3)}\left(G_{kp}^{(m)}\right), \tag{341}$$

$$L_{mpk}^{(4,\ell)} = 0,\quad \ell = 1{,}2{,}3,\qquad L_{mpk}^{(4,4)} = (-1)^{k-m+1}\, R_1^{k+p+1}(\lambda+2\mu)(2-bp)G_{kp}^{(m)}\,,$$

$$L_{mpk}^{(4,5)} = (-1)^{k-m}\,(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_1)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)H_{kp}^{(m)}\ ,$$

$$L_{mpk}^{(5,\ell)} = 0,\quad \ell = 1,2,3,\qquad L_{mpk}^{(5,4)} = (-1)^{k-m+1}\,R_1^{k+p+1}(\lambda+2\mu)(2-bp)G_{kp}^{(m)},$$

$$L_{mpk}^{(5,5)} = (-1)^{k-m+1}\,(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\tilde{h}_p^{-1}(\lambda_1 R_1)\tilde{g}_k(\lambda_1 R_1)H_{kp}^{(m)}\ ,$$

თუ x_{mk} ვექტორის (340) მნიშვნელობას შევიტანთ (339)-ში, მივიღებთ

$$a_{mk} = \alpha_{mk} + \sum_{p=|m|}^{\infty} M_{mpk}\, a_{mp}\,,\quad k \ge 0, \tag{342}$$

სადაც $$\alpha_{mk} = N(k)\tilde{\alpha}_{mk}\,,\ \ M_{mpk} = N(k)\, L_{mpk}^{(5,5)} = \left[M_{mpk}^{(\ell,q)}\right]_{5\times5} \tag{343}$$

გამოვიკვლიოთ (342) სისტემა. ამისათვის საჭიროა შევაფასოთ M_{mpk} მატრიცის ელემენტები p და k პარამეტრების მიმართ.

(343) ტოლობაში თუ ვისარგებლებთ (298) – (301) უტოლობებით, მივიღებთ

$$\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < (p+1)k^2\left(\frac{R_1}{d}\right)^{k+p+1}\sqrt{\frac{2p+1}{2k+1}}\,\frac{(k+p+1)!}{p!\,(k+1)!}, \tag{344}$$

სადაც β დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული p და k პარამეტრებზე.

ვაჩვენოთ, რომ (342) ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემა კვაზირეგულარულია, ე. ი. რეგულარობის პირობა სრულდება გარკვეული ნორმიდან დაწყებული ყველა სტრიქონისათვის, ანუ [48]

$$\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < 1,\qquad k = N+1,\ N+2,\ldots,\ \ \ell = 1,2,\ldots,5, \tag{345}$$

გარდა ამისა

$$\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < +\infty,\qquad k = 1,\ 2,\ldots N\,,\ \ \ell = 1,2,\ldots,5, \tag{346}$$

უნდა არსებობდეს ისეთი $\mathrm{M} > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\left|\alpha_{mk,\ell}\right| \le M\left(1 - \sum_{p=N+1}^{\infty}\ \sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right),\qquad k = N+1,\ N+2,\ldots,\ \ \ell = 1,2,\ldots,5, \tag{347}$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური N რიცხვი, რომ, როცა $k > \mathrm{N}$ ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას

$$\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < 1-\rho, \tag{348}$$

სადაც $0 < \varepsilon' < \rho < \varepsilon < 1,\ \ k = N+1,\ N+2,\ldots,\ \ \ell = 1,2,\ldots,5.$

(344) და (307) უტოლობების თანახმად გვაქვს

$$\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < \sigma\ k^{3}\left(\frac{R_1}{d-R_1}\right)^{k}, \tag{349}$$

სადაც σ დადებითი მუდმივია, რომლებიც არ არიან დამოკიდებულნი k პარამეტრზე.

ლემა 4.3 - ის თანახმად, უტოლობა

$$\sigma\ k^{3}\left(\frac{R_1}{d-R_1}\right)^{k} < 1-\rho$$

სამართლიანია ყოველი $k > \mathrm{N}$ - თვის, სადაც

$$N = max\left\{2,\left[4\sigma^{1/3}R_1^{2/3}\left(1-\rho\right)^{-1/3}\left(\sqrt[3]{d-R_1}-\sqrt[3]{R_1}\right)^{-2}\right]\right\}.$$

ამრიგად დავამატკიცეთ (348) უტოლობა და მასთან ერთად (345) უტოლობა.

(349) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right| < \sigma\ k^{3} \le \sigma N^{3} < +\infty,\ \ k = 1,2,\ldots,N,\ \ \ell = 1,2,\ldots,5, \tag{350}$$

ამით (346) უტოლობა დამტკიცებულია.

შევარჩიოთ M რიცხვი შემდეგნაირად:

$$M = \frac{1}{\varepsilon'}ma\,x\left|\alpha_{mk,\ell}\right|,\ \ k \ge 0,\quad \ell = 1,2,\ldots,5. \tag{351}$$

აქედან (348)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ, რომ

$$\left|\alpha_{mk,\ell}\right| \le \max_{k\ge0}\left|\alpha_{mk,\ell}\right| M\varepsilon' < M\rho < M\left(1-\sum_{p=|m|}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right) < M\left(1-\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{\xi=1}^{5}\left|M_{mpk}^{(\ell,\xi)}\right|\right),$$

$k = N+1,\ N+2,\ldots,\quad \ell = 1,2,\ldots,5.$

ამით (347) უტოლობა დამტკიცებულია.

ამრიგად ვაჩვენებთ, რომ (342) სისტემა არის კვაზირეგულარული. ასეთი სისტემების მიახლოებითი ამონახსნები მიიღება რედუქციის მეთოდით.

(336) სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ როცა $k \to \infty$

$$\left|x_{mk}^{(\ell)}\right| \sim \left|\tilde{\alpha}_{mk,\ell}\right|, \quad \ell = 1,2,\ldots,5. \tag{352}$$

თუ $x \in \Omega^{+} \quad \left(r_1 > R_1\right)$, მაშინ (325) , (328) იქნებიან აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადნი. თუ $x \in \partial\Omega_1$, მაშინ (14) უტოლობებისა და (352) ეკვივალენტობის გათვალისწინებით (325) , (328) მწკრივების კრებადობიათვის საკმარისია ფურიეს $\tilde{\alpha}_{mk,\ell}$, $\ell = 1,2,\ldots,5$ კოეფიციენტები, როცა $k \to \infty$ უშვებდნენ შემდეგ ასიმპტოტიკას

$$\alpha_{mk}^{(1,\ell)} = O\left(k^{-3}\right), \quad \ell = 4,5,6, \qquad \alpha_{mk}^{(1,\ell)} = O\left(k^{-4}\right), \quad \ell = 2,3. \tag{353}$$

თეორემა 1.6, თეორემა 1.7 - ის თანახმად $\alpha_{mk}^{(1,\ell)}$, $\ell = 2,3,\ldots,6$ კოეფიციენტებს ექნებათ (353) რიგი, როცა $k \to \infty$, თუ სასაზღვრო ვექტორ - ფუნქციებისგან მოვითხოვთ სიგლუვის შემდეგ პირობებს

$$f^{(1)}(z) \in C^3\left(\partial\Omega_1\right), \quad f_\ell^{(1)}(z) \in C^3\left(\partial\Omega_1\right), \quad \ell = 4,5,6. \tag{354}$$

ამრიგად მივიღეთ, რომ, თუ $f_\ell^{(1)}(z)$, $\ell = 4,5,6$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ სიგლუვის (353) პირობებს, მაშინ $U = \left(u, \vartheta_1, \vartheta_2\right)^{\mathrm{T}}$ ვექტორი წარმოდგენილი (330)-(327) მწკრივების სახით წარმოადგენს $(\mathrm{B}\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს.

ანალოგიურად იხსნება $(\mathrm{B}\cdot\mathrm{II})$ ამოცანა.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში“ ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესწავლას ორკომპონენტიანი დრეკადი ნარევისაგან შედგენილი სხეულისათვის.

თანამედროვე ტექნოლოგიურ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასალებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამოდენიმე დრეკადი მასალისგან დამზადებული მასალები და სხვა. ასეთი მასალების მექანიკის პრაქტიკული ამოცანების გამოკვლევას ბუნებრივად მივყავართ ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობამდე, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს უფრო ზუსტად აღვწეროთ ექსპერიმენტის დროს მიმდინარე რეალური პროცესები. ბუნებრივია ასეთი მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს დრეკადი ნარევისათვის (მყარი სხეული - მყარ სხეულთან) პირველი მათემატიკური მოდელი, ე.წ. დიფუზიური მოდელი, ააგეს ა. გრინმა და ტ. სტილმა 1966 წელს. იმავე წელს მათ მიერ აგებულია დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის ერთტემპერატურიანი თეორიის დიფუზიური მოდელი. ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელი მარცვლოვანი, ბოჭკოვანი და ფენოვანი სტრუქტურების მქონე კომპოზიტებისათვის 1984 წელს აგებულ იქნა ლ. ხოროშუნისა და ნ. სოლტანოვის მიერ. უნდა აღინიშნოს, რომ კომპოზიტური მასალებისათვის მათემატიკური მოდელები სხვადასხვა ტემპერატურული ველების გათვალისწინებით

გამოირჩევიან თავიანთი რთული სტრუქტურით და მათი გამოკვლევა თანამედრომე მძლავრი მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდ ძალისხმევას. ამდენად მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავიანთი მეცნიერული ღირებულებებითა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ,ფრიად აქტუალური იქნება.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა და ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულისათვის კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) თეორიის სტატიკის არაკლასიკური სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების შესწავლა კონკრეტული არეების შემთხვევაში, კერძოდ ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, ნახევარ სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი და ნახევარ სივრცისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების შემთხვევაში დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას.
- გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია დისერტაციაში განხილული ყველა ამოცანისთვის ერთადერთობის თეორემები.
- მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო და საკონტაქტო არაკლასიკური ამოცანების ამონახსნები ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. ამოცანები მიღებულია ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით. სასაზღვრო პირობებზე მოთხოვნილია სიგლუვის ის საკმარისი

პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მიღებული მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობას.

- მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი, ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა გამოსახული ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით.
- შესწავლილია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა და ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები ნახევარ სივრცისათვის. შემუშავებულია ამ ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდი, რომელიც დაკავშირებულია ჰარმონიული ფუნქციისათვის დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნებთან ნახევარ სივრცისათვის. ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.
- შესწავლილია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი და ნახევარსივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. ამ ამოცანების შესწავლა დაყვანილია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე. ნაჩვენებია, რომ ეს სისტემები არიან კვაზირეგულარულნი. ამოხსნები მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით, რომლებიც არიან მეტად ალგორითმული რიცხვითი შედეგების მისაღებად.

ლიტერატურა

1. Barber. J. The solution of elasticity problems for the half-space by method of Green and Collins, *Applied Scientific Research, 40 (1983),* 135-157.
2. Basheleishvili M. Two-dimensional boundary value problems of statics of the theory of elastic mixtures. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 6 (1995), 59-105.
3. Basheleishvili M., Bitsadze. L. Explicit solutions of the boundary value problems of the theory of consolidation with double porosity for half-space, *Bulletin of TICMI*, 14 (2010), 9-15.
4. Basheleishvili M. and Zazashvili Sh. The basic mixed plane boundary value problem of statics in the elastic mixture theory. *Georgian Math. J.*, 7 (2000), No. 3, 427-440.
5. Burchuladze T. and Svanadze M. Potential method in the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids*. J. Thermal Stresses*, 2323 (2000), No. 6, 601-626.
6. Chkadua O., Duduchava R. Asymptotic of functions represented by potentials. *Russian J. Math. Phys.*, 2000, Vol. 7, №1, 15-47.
7. Gales C., A mixture theory for micropolar thermoelastic solids. *Mathematical Problem in Engineering*, 30 (2007), 1-21.
8. Giorgashvili L. Solution of the basic boundary value problems of stationary thermoelastic oscillations for domains bounded by spherical surfaces. *Georgian Math. J.*, 4 (1997), No. 5, 421-438.
9. Giorgashvili L., Solutions of the value boundary value problems of thery of elasticity for the solid sphere. IAM of TSU, 1981, 10, pp 32 -37.
10. Giorgashvili L., Karseladze G. and Sadunishvili G. Solution of a boundary value problem of statics of two-component elastic mixtures for a space with two nonintersecting spherical cavities. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 45 (2008), 85-115.

11. Giorgashvili L., Karseladze G. and Sadunishvili G. Main Boundary Value Problems of Stationary Oscillation of the Micropolar Thermoelasticity Theory for Domains Bounded by Spherical Surface. *International Journal of Science and Technology. Nova Science Publishers, Inc.*, 3 Issue 1, (2011), 1-15.
12. Giorgashvili L., Kharashvili M., Skhvitaridze K., Elerdashvili E. The Representation Formula of a General Solution of the Homogeneous System of Differential Equations. *Proceedings of the international conference and Workshop Lie groups, Differential equations and geometry*, *June 10-22, Batumi, Georgia,* (2013), vol.1, 136-148.
13. Giorgashvili L., Metreveli D. Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. V *Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, September 8-12,* 2014, pp. 96
14. Giorgashvili L., Metreveli D. Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.* 2015, Vol. 167, pp. 43-61.
15. Giorgashvili L., Skhvitaridze K. Motion of viscous incompressible fluid in infinite space bounded by two sphere surfaces. *Modern problems of computer modeling, Moscow, MSU, Collection of articles of computational mathematics and cybernetics faculty*, 2002, pp. 14-28.
16. Giorgashvili L., Skhvitaridze K. Boundary problems of viscous incompressible fluid bounded by sphere surfaces. *Modern problems of computer modeling, Moscow, MSU, Collection of articles of computational mathematics and cybernetics faculty*, 2002, pp. 29-38.
17. Giorgashvili L. and Skhvitaridze K. Problems of statics of two-component elastic mixtures. *Georgian Math. J.*, 12 (2005), No. 4, 619-635.
18. Giorgashvili L. and Skhvitaridze K. Solution of a nonclassical problem of oscillation of two-component mixtures. *Georgian Math. J.*, 13 (2006), No. 1, 35-53.

19. Giorgashvili L., Skhvitaridze K. and Kharashvili M. Effective solution of the Neumann boundary value problem for a half-space with double porosity, *Georgian int. J. of Science and technology. Nova Science Publishers, Inc.*, (2012), 143-154.

20. Giorgashvili L., Zazashvili Sh., Sadunishvili G. and Karseladze G. Fundamental Solution of the System of Differential Equation of Stationary Oscillations of Two-temperature Elastic Mixtures Theory. *Mechanics of the Continuous Environment Issues Dedicated to the 120th Birth. Anniv. of Academician Nikoloz Muskelishvili, Nova Science Publishers, Inc.*, (2011), 141-163.

21. Green A. E. and Naghdi P.M. On basic equations for mixtures. *Quart. J. Mech. Appl. Math.,* 22 (1969), 427-438.

22. Green A. and Naghdi P. On thermodynamics and the nature of the second law for mixtures of intersecting continua. *Q. J. Mech. Appl. Math.,* 31, part 3, (1978), 265-293.

23. Green A. E. and Steel T. R. Constitutive equations for interacting continua. *Int. J. Eng. Sci.*, 4 (1966), No. 4, 483-500.

24. Grinchenko V., Ulitko A. Equilibrium of elastic bodies of canonical form. Naukova Dumka, Kiev, 1985 (in Russian).

25. Hobson E. W. Theory of spherical and ellipsoidal functions. Moscow, Izdat. Inostr. Literaturi, 1952 (translated into Russian).

26. Iesan D. On the theory of mixtures of thermoelastic solids. *Journal of Thermal Stresses,* 1414, (1991), 389-408.

27. Khoroshun L. P. and Soltanov N. S. Thermoelasticity of two-component mixtures. Naukova Dumka, Kiev, 1984, p. 110 (in Russian).

28. Kupradze V., Gegelia T., Basheleishvili M. and Burchuladze T. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity, Translated from the second Russian edition. Edited by V.D. Kupradze. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 25, North-Holland publishing Co., Amsterdam New York, 1979, p. 664.

29. Metreveli D. Problems of Statics of Linear Thermoelasticity, for a Half-Space. VI *International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, July 12-16,* 2015, pp. 152.
30. Metreveli D. Solution of Nonclassical Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. AMIM, 2015, Vol. 20, №1, pp. 21-35.
31. Metreveli D. Boundary Value Problems of Statics of Two-Temperature Elastic Mixtures Theory for a Half-Space. AMIM, 2015, Vol. 20, №2, pp. 34-41.
32. Mikhlin S. G. Multidimensional singular integrals and integral equations. (in Russian). Fizmatgiz, Moscow, 1962. p. 250.
33. Morse P. M. and Feshbach H. Methods of Theoretical Physics. Mc Graw-Hill, New York, II, 1953, p. 686.
34. Natroshvili D., Gachechiladze R., Gachechiladze A., Stratis I. G. Transmission problems in the theory of elastic hemitropic materials. Applicable Analysis, 2007, Vol 86, №12, pp. 1463-1508.
35. Natroshvili D., Giorgashvili L., Stratis I. Mathematical Problems of the theory of elasticity of chiral materials. Tbilisi, AMIM, 2003, Vol. 8, №1, pp. 47-103.
36. Natroshvili D., Giorgashvili L. and Zazashvili Sh. Mathematical Problems of Thermoelasticity for hemitropic solids. *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics,* 48, (2009), 97-174.
37. Natroshvili D.G., Jaghmaidze A. and Svanadze M. G. Some problems in the linear theory of elastic mixtures (Russian), Gos. Univ. Tbilisi, (1986), p. 216.
38. Natroshvili D., Jaghmaidze A. and Svanadze M. G. Problems of the linear theory of elastic mixtures. *Tbilisi University*, 2008. p. 213.
39. Sherief H. and Saleh H. A half-space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. of Solids and Structures*, 42 (2005), p. 4484-4493.
40. Singh B., Kumar R. Reflaction of plane waves from the flat boundary of a micropolar generalized thermoelastic half-space. Int. J. of Engineering Science, 36 (1998), p. 866-890.

41. Skhvitaridze K., kharashvili M. Investigation of the Dirichlet and Neumann Boundary value problems for a half-space filled a viscous incompressible fluid., *Mechanics of the continuous environmemt issues. Published by Nova Science Publishers*, Inc. New York, (2012), p. 85-98.
42. Svanadze M. The fundamental solution of the equation of steady oscillations for a thermoelastic mixtures. *Prikladnaia Mechanika, (Eng. Tr. Int. Applied Mech.),* 31, (1995), No. 7, p. 63-71.
43. Svanadze M. On the linear of thermoelasticity with microtemperatures, *Tec. Mechanik*, 32, 2-5 (2012), 564-576.
44. Tikhonov A. and Samarski A. Equations of mathematical physics. (Russian) "Nauka", Moscow, 1966, p. 736.
45. Ulitko A. F. The method of eigenvector functions in three-dimensional problems of the theory of elasticity. (Russian) "Naukova Dumka", 1979, p. 250.
46. Гримченко В. Т. Улитко А. Ф., Равновесие упругих тел канонической формы. Киев. Наукова Думка, 1985, с.27.
47. Гузь А.Н., Головчан В. Т. Диффракция упругих волн в многосвязных телах. Киев. Наукова Думка, 1972, с.254.
48. Канторович Л. В., Кримов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. Физматгиз, М-Л. 1962. с. 708.
49. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Физматгиз, М-Л. 1970. с. 941.
50. Новацкий В. Теория упругости. М.: Изд-во „Мир“, 1975, с. 872.
51. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. Киев Наукова Думка, 1979, с.240.