საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

დავით მეტრეველი

დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

თბილისი

2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. ლევან გიორგაშვილი

რეცენზენტები: ______________________________

____

დაცვა შედგება ---------- წლის „--------„ --------------------, ----- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -------------------------------------- -------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ------, აუდიტორია ----------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა და გამოყენების სფერო . კლასიკური დრეკადობის თეორიის მათემატიკური მოდელი არ ითვალისწინებს ტემპერატურულ ცვლილებებს, მაგრამ სხეულის დეფორმაციას თან სდევს ტემპერატურის ცვლილება, ხოლო ტემპერატურის ცვლილებას, მაშინაც კი, როცა სხეულზე არ მოქმედებს გარე ძალები, თან სდევს მისი დეფორმაცია. ტემპერატურული ველისა და დეფორმაციის ველის სხვადასხვა პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ დრეკადობის თეორიის სხვადასხვა მოდელს: თერმოდრეკადობის არაბმული თეორია, თერმოდრეკადობის ბმული თეორია, განზოგადებული თერმოდრეკადობა და სხვა.

უკანასკნელი ორმოცი წლის განმავლობაში ინტენსიურად დაიწყო გამოკვლევები ტემპერატურულ ძაბვათა თეორიასთან შედარებით უფრო ზოგადბმულ თერმოდრეკადობის თეორიაში, სადაც გათვალისწინებულია დეფორმაციისა და ტემპერატურული ველების ურთიერთქმედება. არსებობს კლასიკური თერმოდრეკადობის თეორიის ორი სხვადასხვა განზოგადება: გრინ-ლინდსეის და ლორდ-შულმანის. ამასთან პირველს ტემპერატურული პროცესისათვის შემოაქვს რელაქსაციის ორი კოეფიციენტი, ხოლო მეორეს კი - ერთი. რელაქსაციის მუდმივობის შემოტანა საგრძნობლად ართულებს ძირითად დეფრენციალურ განტოლებათა სისტემებს, რის გამოც საკმარისად რთულდება განტოლებათა ამოცანების შესწავლა. ამ მიმართულებით უნდა აღინიშნოს თ. ბურჭულაძის, თ.გეგელიას, ლ. გიორგაშვილის, კ. დაფერმოსის, შ.ზაზაშვილის, ლ. იენტჩის, დ. ნატროშვილის, ვ. ნოვაცკის, მ.სვანაძის და სხვათა შრომები.

გასული საუკუნის სამოციანი წლებიდან, კ. ტრუსდელმა და რ. ტუპინმა თავიანთ შრომებში პირველად ჩამოაყალიბეს რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი სხეულებისთვის ახალი მოდელის ძირითადი მექანიკური პრინციპები და საფუძველი ჩაუყარეს დრეკადი სხეულების ნარევთა კონტინუალურ თეორიას. შემდგომში ეს თეორია განზოგადდა და განვითარდა სხვადასხვა მიმართულებით. კინემატიკური და

თერმოდინამიკური პრინციპების საფუძველზე შეიქმნა შემდეგი ტიპის ორკომპონენტიან ნარევთა თეორია: სითხე - სითხე, სითხე-მყარი სხეული, მყარი სხეული- მყარი სხეული.

დრეკადი ნარევისათვის (მყარი სხეული - მყარ სხეულთან) პირველი მათემატიკური მოდელი, ე.წ. დიფუზიური მოდელი, ააგეს ა. გრინმა და ტ. სტილმა 1966 წელს. ამ მოდელში კომპონენტებს შორის ურთიერთქმედების ძალა დამოკიდებულია კერძო გადაადგილებების სიჩქარეთა სხვაობაზე. იმავე წელს მათ მიერ აგებულია დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის ერთტემპერატურიანი თეორიის დიფუზიური მოდელი.

ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელი მარცვლოვანი, ბოჭკოვანი და ფენოვანი სტრუქტურების მქონე კომპოზიტებისათვის 1984 წელს აგებულ იქნა ლ. ხოროშუნისა და ნ. სოლტანოვის მიერ.

დრეკადობის და თერმოდრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთი ძირითადი მეთოდია ფურიეს მეთოდი, რომელიც ეფუძნება მოცემული ძირითადი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას ცვლადთა განცალების მეთოდით გარკვეულ მრუდწირულ კორდინატთა სისტემის მიმართ. დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის სტატიკისა და სტაციონარული რხევის შესაბამისი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემების ამოხსნები წარმოიდგინებიან ჰარმონიული, ბიჰარმონიული (სტატიკის შემთხვევაში) და მეტაჰარმონიული (რხევის შემთხვევაში) ფუნქციების საშუალებით. ამ მიმართულებით დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში საყოველთაოდაა ცნობილი უ. კელვინის, ჟ. ადამარის, ჟ. ბუსინესკის, მ. პაპკოვიჩის, გ. ნეიბერის, ე. ტრეფტცის, მ. სლობოდიანსკის, კოლოსოვ - მუსხელიშვილის და სხვათა შრომები, რომლებშიც გადაადგილების ვექტორი წარმოდგენილია ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქიებით. აღნიშნული წარმოდგენები საშუალებას იძლევა განვავითაროთ ცვლადთა განცალების მეთოდი (გარკვეულ მრუდწირულ კორდინატთა სისტემის მიმართ) დრეკადობის თეორიაში კანონიკური ზედაპირე-

ბით შემოსაზღვრული არეების შემთხვევაში. ამ მეთოდით სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მთელი სირთულე გადატანილია სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილებაზე. სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების ერთ-ერთი მიდგომა მოცემულია ა. ულიტკოს, პ. მორსის და ჰ. ფეშბახის, მ. ბაშელეიშვილის, ლ. გიორგაშვილის, დ. ნატროშვილის და სხვათა შრომებში.

სამუშაოს მიზანი, კვლევის ობიექტი და მეთოდები, ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე. სამგანზომილებიან ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა წრფივი თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$a_1\Delta u' + b_1 graddivu' + c\Delta u'' + dgraddivu'' = 0, \tag{1}$$

$$c\Delta u' + dgraddivu' + a_2\Delta u'' + b_2 graddivu'' = 0,$$

სადაც $u' = (u_1', u_2', u_3')^\mathsf{T}$, $u'' = (u_1'', u_2'', u_3'')^\mathsf{T}$ კერძო გადაადგილების ვექტორებია, Δ ლაპლასის სამგანზომილებიანი ოპერატორია, T ტრანსპონირების სიმბოლოა, $a_j, b_j, c, d,\ j = 1,2$ გარკვეული ფიზიკური მუდმივებისგან შედგენილი მუდმივებია რომლებისთვისაც სამართლიანია შემდეგი უტოლობები

$$d_1 := a_1 a_2 - c^2 > 0,\ d_2 := (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (c + d)^2 > 0,\quad a_1 > 0,\ a_1 + b_1 > 0 .$$

ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სასტემას, როცა ნარევში შემავალი ორი დრეკადი სხეულის კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია, აქვს შემდეგი სახე

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu) graddivu - grad(\eta_1 \vartheta_1 + \eta_2 \vartheta_2) = 0, \tag{2}$$

$$\kappa_1 \Delta \vartheta_1 + \kappa_2 \Delta \vartheta_2 - \alpha(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0,$$

$$\kappa_2 \Delta \vartheta_1 + \kappa_3 \Delta \vartheta_2 + \alpha(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0, \tag{3}$$

სადაც $u = (u_1, u_2, u_3)^\mathsf{T}$ არის კომპოზიტურ მასალაში შემავალი ორი მყარი სხეულის ერთმანეთის ტოლი გადაადგილების ვექტორი, $\vartheta_1,\ \vartheta_2$ მყარი სხეულების ტემპერატურების ცვლილებებია, $\alpha,\ \kappa_j,\ j = 1,2,3$ გარკვეული ფიზიკური მუდმივებია, $\lambda,\ \mu$ დრეკადი მუდმივებია, η_1, η_2 თერმული

პროცესების დამახასიათებელი მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობებს

$$\mu > 0,\ 3\lambda + 2\lambda > 0\ ,\ \kappa_1\kappa_3 - \kappa_2^2 > 0,\ \mu_j > 0,\ \ j = 1,2\ .$$

ჩვენი კვლევის მთავარი საგანია (1) - (3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებისთვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა ნახევარ სივრცისათვის. მიგნებულია ახალი მეთოდი, რომლის საშუალებითაც ნახევარ სივრცისათვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა დაიყვანება ჰარმონიული ფუნქციისათვის დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნაზე, რაც არსებითად ამარტივებს ამ ამოცანების შესწავლას. ამოცანები მიღებულია კვადრატურებში. (2)-(3) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის შესწავლილია არაკლასიკური ამოცანები ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, ასევე მთელი სივრცისათვის ურთიერთ არაგადამკვეთი ორი ბირთვული ღრუთი და ნახევარ სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. მიღებულია (2)-(3) სისტემის ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა გამოსახული ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუმქციების საშუალებით. ამ წარმოდგენის საშუალებით ამოცანების ამოხსნები მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი მწკრივების სახით. გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია ყველა ამოცანისთვის ერთადერთობის თეორემები. გარე ამოცანების შემთხვევაში ერთადერთობის თეორემების დამტკიცების დროს საჭირო ხდება ამონახსნთა კლასის დაზუსტება და ისეთი ასიმპტოტური პირობების დადგენა უსასრულობაში, რომელიც უზრუნველყოფს ერთადერთობის თეორემების დამტკიცებას, გრინის ფორმულების გამოყენებას. დისერტაციაში ეს პრობლემა წარმატებითაა გადაჭრილი.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის მრავალ სემინარზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო

კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური კოლოკვიუმები და სემინარები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია მოიცავს რეზიუმეს (ქართულ და ინგლისურ ენაზე), შესავალს, ოთხ თავს, ოცდაორ პარაგრაფს, დასკვნას და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხას (51 დასახელება) დისერტაცია მოიცავს 146 ნაბეჭდ გვერდს.

დისერტაციის შინაარსი

თავი I. ზოგიერთი აღნიშვნა და თეორემები

პირველ თავში მოყვანილია ზოგიერთი დამხმარე თეორემა და ფორმულა. კერძოდ მოყვანილია, თუ რა სახე აქვს ორ კომპონენტიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას, ასევე ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისიტემას, როდესაც ნარევში მონაწილე დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია. ამავე თავში მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის ერთგვაროვან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა, რომელიც გამოსახულია ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით.

ამავე თავში ამოწერილია, როგორც ორკომპონენტიან, ასევე ორტემპერატურიან (როცა კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) დრეკად ნარევთა თეორიის ველის ძირითადი მახასიათებლები, კერძოდ შემოტანილია ძაბვის ვექტორები, რომლებსაც გააჩნიათ შემდეგი სახე

$$\mathrm{T}(\partial,n)U=\left[\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U,\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U\right]^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

სადაც $U=(u',u'')^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U=\mathrm{T}^{(1)}(\partial,n)u'+\mathrm{T}^{(2)}(\partial,n)u'',\qquad \mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U=\mathrm{T}^{(3)}(\partial,n)u'+\mathrm{T}^{(4)}(\partial,n)u'',$$

$$\mathrm{T}^{(1)}(\partial,n)u'=2\mu_1\frac{\partial u'}{\partial n}+\left(\lambda_1-\frac{\rho_2}{\rho}\alpha'\right)n\,divu'+(\mu_1+\lambda_5)[n\times rotu'],$$

$$\mathrm{T}^{(2)}(\partial,n)u''=2\mu_3\frac{\partial u''}{\partial n}+\left(\lambda_3-\frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n\,divu''+(\mu_3-\lambda_5)[n\times rotu''],$$

$$\mathrm{T}^{(3)}(\partial,n)u'=2\mu_3\frac{\partial u'}{\partial n}+\left(\lambda_3-\frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n\,divu'+(\mu_3-\lambda_5)[n\times rotu'],$$

$$\mathrm{T}^{(4)}(\partial,n)u''=2\mu_2\frac{\partial u''}{\partial n}+\left(\lambda_2+\frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n\,divu''+(\mu_2+\lambda_5)[n\times rotu''],$$

$n=(n_1,n_2,n_3)^{\mathsf{T}}$ არის ერთეულოვანი ვექტორი, $[a\times b]$ სიმბოლო აღნიშნავს ორი ვექტორის ვექტორულ ნამრავლს $\mathbb{R}^3$-ში, $\dfrac{\partial}{\partial n}=\sum\limits_{j=1}^{3}n_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

ვთქვათ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$. ძაბვის ვექტორს, რომელსაც $\mathrm{P}(\partial,n)U$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ აქვს შემდეგი სახე

$$\mathrm{P}(\partial,n)U=\mathrm{T}(\partial,n)u-n(\eta_1\vartheta_1+\eta_2\vartheta_2),\tag{5}$$

სადაც n არის ერთეულოვანი ვექტორი, ხოლო

$$\mathrm{T}(\partial,n)u=2\mu\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda n\,divu+\mu[n\times rotu]\,.$$

ამავე თავში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 1.10. იმისათვის, რომ $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ვექტორი იყოს (2)-(3) სისტემის რეგულარული ამონახსნი $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ არეში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ იგი წარმოიდგინებოდეს შემდეგი სახით:

$$u(x)=grad\Phi_1(x)-agradr^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}+1\right)\Phi_2(x)+rotrot\left(xr^2\Phi_2(x)\right)+$$
$$rot\left(x\Phi_3(x)\right)+(\eta_1+\eta_2)x\Phi_4(x)+a_1grad\Phi_5(x),$$

$$\vartheta_1(x)=\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_2+\kappa_3)\Phi_5(x),\tag{6}$$

$$\vartheta_2(x)=\left[(\lambda+\mu)r\frac{\partial}{\partial r}+3\lambda+5\mu\right]\Phi_4(x)-(\lambda+2\mu)\lambda_1^2(\kappa_1+\kappa_2)\Phi_5(x),$$

სადაც $\Delta\Phi_j\ (x)=0,\quad j=1,2,3,4,\quad (\Delta-\lambda_1^2)\Phi_5(x)=0,\quad \lambda_1^2=\alpha(\kappa_1+\kappa_3+2\kappa_2)/d',$

$$d' = \kappa_1\kappa_3 - \kappa_2^2, \quad a = \mu/(\lambda + 2\mu), \; a_1 = \eta_1(\kappa_2 + \kappa_3) - \eta_2(\kappa_1 + \kappa_2),$$

$$x = (x_1, x_2 x_3)^{\mathsf{T}}, \quad r = |x|, \; r\frac{\partial}{\partial r} = x \cdot grad.$$

აღვნიშნოთ Ω^+-ით ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ სფერული ზედაპირით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R. $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}^+$

თეორემა 1.11. $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ვექტორი წარმოდგენილი (6) სახით ცალსახად იქნება განსაზღვრული $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში $\Phi_j(x), j = \overline{1,5}$ ფუნქციებით, თუ სრულდება შემდეგი პირობა

$$\int_{\Sigma_r} \Phi_j(x) d\sum\nolimits_r = 0, \quad j = 1,3, \quad r = |x| < R, \tag{7}$$

$$\int_{\Sigma_r} \Phi_j(x) d\sum\nolimits_r = 0, \quad j = 2,3, \quad r = |x| > R, \tag{8}$$

ე.ი. $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ვექტორის ნულოვან მნიშვნელობას შეესაბამება $(\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_5)^{\mathsf{T}}$ ვექტორის ნულოვანი მნიშვნელობა და პირიქით.

თეორემა 1.12. თუ (2)-(3) სისტემის $U = (u, \vartheta_1, \vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ამონახსნი უსას-რულოდ დაშორებული წერტილის მახლობობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობას

$$u(x) = O(1), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad j = 1,2,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\Sigma_r} n(x) \cdot u(x) d\sum\nolimits_r = 0, \tag{9}$$

მაშინ უსასრულობაში მას გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტიკა

$$u(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad \partial_k u(x) = O\left(|x|^{-2}\right), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-2}\right), j = 1,2, k = 1,2,3.$$

(7)-(9)-ში $\sum_r$ არის სფერული ზედაპირი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით r.

თავი II. არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები სფერული ზედაპირით შემოსაზღვრული არეებისათვის

მეორე თავში, პირველ თავში მიღებული ზოგადი ამოხსნის წარმოდგენის ფორმულის საშუალებით, ამოხსნილია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემისა-თვის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები ბირთვისათვის და უსასრულო სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. კერძოდ შესწავლილია შემდეგი ამოცანები:

ამოცანა $(III)^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^{+}\left(\Omega^{-}\right)$ არეში (2) –(3) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=\left(u,\vartheta_1,\vartheta_2\right)^{\mathrm{T}}$ რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{\pm}=f_4(z),\qquad z\in\partial\Omega,$$

$$\{\mathrm{P}(\partial,n)U(z)-n(z)(n(z)\cdot\mathrm{P}(\partial,n)U(z))\}^{\pm}=f\ (z),\qquad z\in\partial\Omega,\tag{10}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm}=f_5(z),\qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm}=f_6(z),\qquad z\in\partial\Omega,\tag{11}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_5(z),\ \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_6(z),\ z\in\partial\Omega,\tag{12}$$

სადაც $f=\left(f_1,f_2,f_3\right)^{\mathrm{T}}$, f_j, $j=1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$, წერტილში გამავალი Ω^{+} არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი, $\mathrm{P}(\partial,n)U$ ძაბვის ვექტორს აქვს (5) სახე.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს:

$$u(x)=O(1),\qquad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\qquad j=1,2,\tag{13}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\sum_r}n(x)\cdot u(x)d\sum{}_r=0,\tag{14}$$

$(III)^{\pm}$ ამოცანა (10), (11) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{I})^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (10), (12) სასაზღვრო პირობით კი $(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II})^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(IV)^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^{+}(\Omega^{-})$ არეში (1.5)-(1.6) განტოლებათა სისიტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\top}$, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot \mathrm{P}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}=f_4(z),\qquad z\in\partial\Omega,$$

$$\{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^{\pm}=f(z),\quad z\in\partial\Omega,\tag{15}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm}=f_5(z),\qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm}=f_6(z),\quad z\in\partial\Omega,\tag{16}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_5(z),\quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_6(z),\ z\in\partial\Omega,\tag{17}$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^{\top}$, f_j, $j=1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$, წერტილში გამავალი Ω^{+} არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი. $\frac{\partial}{\partial n(z)}$ არის ნორმალის მიმართულებით წარმოებული.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (13)-(14) პირობებს.

$(IV)^{\pm}$ ამოცანა (15)-(16) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(IV\cdot I)^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (15),(17) სასაზღვრო პირობით კი $(IV\cdot II)^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(N)^{\pm}$. ვიპოვოთ $\Omega^{+}(\Omega^{-})$ არეში (2)-(3) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული ამონახსნი $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\top}$, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{\pm}=f_4(z),\quad \{n(z)\times rotu(z)\}^{\pm}=f\ (z),\quad z\in\partial\Omega,\tag{18}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{\pm}=f_5(z),\qquad \{\vartheta_2(z)\}^{\pm}=f_6(z),\quad z\in\partial\Omega,\tag{19}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_5(z),\quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{\pm}=f_6(z),\quad z\in\partial\Omega,\tag{20}$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^{\top}$, f_j, $j=1,2,....,6$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (13)-(14) პირობებს.

$(N)^{\pm}$ ამოცანა (18)-(19) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(N\cdot\mathrm{I})^{\pm}$ სიმბოლოთი, ხოლო (18), (20) სასაზღვრო პირობით კი $(N\cdot\mathrm{II})^{\pm}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ Ω^+ არე შევსებულია ორკომპონენტიანი დრეკადი კომპოზიტური მასალით, ხოლო Ω^- სკალარული ველი განსაზღვრულია ჰარმონიული ფუნქციით.

ამოცანა (C). ვიპოვოთ Ω^+ არეში (2)-(3) განტოლებათა სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი და Ω^- არეში ისეთი რეგულარული ჰარმონიული $v(x)$ ფუნქცია, რომლებიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო პირობებს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{+}-d_1\left\{\frac{\partial v(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-}=f_4(z),\quad z\in\partial\Omega,$$

$$\{\mathrm{P}(\partial,n)U(z)\}^{+}-d_2\{n(z)v(z)\}^{-}=f(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{21}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{+}=f_5(z),\qquad \{\vartheta_2(z)\}^{+}=f_6(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{22}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{+}=f_5(z),\qquad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{+}=f_6(z),\quad z\in\partial\Omega, \tag{23}$$

სადაც $f=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$, f_j, $j=1,2,....,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, d_1 და d_2 მუდმივებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $d_1d_2>0$.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $v(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობას

$$v(x)=O\left(|x|^{-1}\right)\quad \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}=O\left(|x|^{-2}\right),\quad |x|\to\infty. \tag{24}$$

(C) ამოცანა (21)-(22) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ $(C\cdot\mathrm{I})$ სიმბოლოთი, ხოლო (21)- (23) სასაზღვრო პირობებით კი $(C\cdot\mathrm{II})$ სიმბოლოთი.

გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია ერთადერთობის შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2.1. თუ $(III)^{\pm}$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(III)^{-}$ და $(III.I)^{+}$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო $(III.II)^{+}$

ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=[b\times x]$, $\vartheta_1(x)=c$, $\vartheta_2(x)=c$, შესაკრების სიზუსტით, სადაც b სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორია, c ნებისმიერი მუდმივია.

თეორემა 2.2. თუ $(IV)^{\pm}$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

თეორემა 2.3. თუ $(N)^{\pm}$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(N\cdot\mathrm{I})^{+}$ და $(N)^{-}$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, ხოლო $(N\cdot\mathrm{II})^{+}$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=0$, $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C=const$, შესაკრების სიზუსტით.

თეორემა 2.4. თუ (C) ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ $(C\cdot\mathrm{I})$ ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი განისაზღვრება $u(x)=[a'\times x]$, $v(x)=0$, $\vartheta_j(x)=0,\ j=1,2$ შესაკრების სიზუსტით, ხოლო $(C\cdot\mathrm{II})$ ამოცანის ამონახსნი კი $u(x)=[a'\times x]+\dfrac{\sigma C'}{R}x$, $v(x)=-\dfrac{\sigma C' R^2}{d_1|x|}$, $\vartheta_1(x)=\vartheta_2(x)=C'$, შესაკრების სიზუსტით, სადაც a' სამგანზომილებიანი ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია, C' ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო

$$\sigma=d_1R(\eta_1+\eta_2)/\left(d_1(3\lambda+2\mu)+R^2d_2\right).$$

დასმული ამოცანების ამოხსნები მიღებულია მწკრივების სახით. სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებზე მოთხოვნილია სიგლუვის ის საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მიღებული მწკრივების აბსოლუტურად თანაბრად კრებადობას.

თავი III. დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები ნახევარ სივრცისათვის

მესამე თავში შესწავლილია დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის არაკლასიკური ამოცანები ნახევარ - სივრცისათვის. ამოცანების ამოხსნები წარმოდგენილია კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.

აღვნიშნოთ Ω^{-}-ით $x_3>0$ ნახევარ - სივრცე, ხოლო $\partial\Omega$ -თი $x_3=0$ სიბრტყე

ამოცანა (M).ვიპოვოთ Ω^{-} არეში (1) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u',u'')^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$$\{n(z)\cdot u'(z)\}^{-}=f_3'(z),\ \{n(z)\cdot u''(z)\}^{-}=f_3''(z),$$

$$\left\{\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)-n(z)\left(n(z)\cdot\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)\right)\right\}^{-}=F'(z), \tag{25}$$

$$\left\{\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)-n(z)\left(n(z)\cdot\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)\right)\right\}^{-}=F''(z),\ z\in\partial\Omega,$$

ან
$$\left\{n(z)\cdot\mathrm{P}^{(1)}(\partial,n)U(z)\right\}^{-}=f_3'(z),\ \left\{n(z)\cdot\mathrm{P}^{(2)}(\partial,n)U(z)\right\}^{-}=f_3''(z),$$

$$\{u'(z)-n(z)(n(z)\cdot u'(z))\}^{-}=F'(z), \tag{26}$$

$$\{u''(z)-n(z)(n(z)\cdot u''(z))\}^{-}=F''(z),\ z\in\partial\Omega,$$

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს:

ა) $U_j(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\ \partial_k U_j(x)=O\left(|x|^{-2}\right),$

$k=1,2.3,\ j=1,2,\ldots,6,\ x_3>0,\qquad |x|\to\infty,$

ბ) $U_j(x)=o(1),\ \partial_k U_j(x)=o\left(|x|^{-1}\right),$ (27)

$k=1,2,\ j=1,2,\ldots.,6,\ x_3=0,\qquad |x|\to\infty,$

სადაც $F'=\left(f_1',f_2',F_3'\right)^{\mathrm{T}}$, $F''=\left(f_1'',f_2'',F_3''\right)^{\mathrm{T}}$, $f_j',\ f_j'',\ j=1,2,3,\ F_3',\ F_3'',$ $\partial\Omega$ საზღვარ-ზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილზე გამავალი Ω^{-} არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $z=(z_1,z_2,0)$, $\partial_k=\partial/\partial x_k$, $k=1,2.3.$

(M) ამოცანა (25) სასაზღვრო პირობით აღვნიშნოთ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ სიმბოლოთი, ხოლო (26) სასაზღვრო პირობით კი $(\mathrm{M}\cdot IV)$ სიმბოლოთი.

ამოცანა $(\tilde{\mathrm{M}})$. ვიპოვოთ Ω^{-} არეში (1) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u',u'')^{\mathrm{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{n(z)\cdot u'(z)\}^{-} = f_3'(z), \{n(z)\times rotu'(z)\}^{-} = f'(z),$$

$$\{n(z)\cdot u''(z)\}^{-} = f_3''(z), \{n(z)\times rotu''(z)\}^{-} = f''(z), \ z\in\partial\Omega, \tag{28}$$

სადაც $f' = \left(f_1', f_2', F_3'\right)^{\mathsf{T}}$, $f'' = \left(f_1'', f_2'', F_3''\right)^{\mathsf{T}}$, $f_j', \ f_j'', \ j=1,2,3, \ F_3', \ F_3''$, საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილში გამავალი Ω^{-} არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U=(u', u'',)^{\mathsf{T}}$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის (27) პირობას.

ამოცანა $(\tilde{\mathrm{N}})$. ვიპოვოთ Ω^{-} არეში (2)-(3) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^{-} = f_3(z), \ \{n(z)\times rotu(z)\}^{-} = f(z), \ z\in\partial\Omega, \tag{29}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^{-} = f_4(z), \ \{\vartheta_2(z)\}^{-} = f_5(z), \ z\in\partial\Omega \tag{30}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-} = f_4(z), \ \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^{-} = f_5(z), \ z\in\partial\Omega, \tag{31}$$

სადაც $f' = (f_1, f_2, F_3)^{\mathsf{T}}$, $F_3, \ f_j, \ j=1,2,.....,5$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილში გამავალი Ω^{-} არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი.

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

ა) $u(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \ \partial_k u(x) = O\left(|x|^{-2}\right), \ k=1,2.3,$

$\partial_k\vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-2}\right), \ \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \ j=1,2, \ k=1,2.3,$

$x_3>0$, $|x|\to\infty,$ (32)

ბ) $u(x) = o(1), \ \partial_k u(x) = o\left(|x|^{-1}\right), \ k=1,2$,

$\vartheta_j(x) = o(1), \ \partial_k\vartheta_j(x) = o\left(|x|^{-1}\right), \ k, \ j=1,2. \ x_3=0$, $|x|\to\infty.$

$(\tilde{\mathrm{N}})$ ამოცანა (29)-(30) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{I})$ სიმბოლოთი, ხოლო (29) და (31) სასაზღვრო პირობებით $(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II})$ სიმბოლოთი.

გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია განხილული ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები:

თეორემა 3.1. თუ $(M\cdot \mathrm{III})$ და $(\mathrm{M}\cdot IV)$ ამოცანებს გააჩნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

თეორემა 3.2.თუ $(\tilde{\mathrm{M}})$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

თეორემა 3.3.თუ$(\tilde{\mathrm{N}})$ ამოცანას გააჩნია ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერ-თია.

დასმული ამოცანების ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში სა-საზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით. ამოცანების ამოხსნისას არსე-ბითად ვსარგებლობთ ჰარმონიული ფუნქციებისათვის დირეხლესა და ნეიმანის ამოცანების ამოხსნით ნახევარსივრცისათვის.

$(M.III)$ ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$U(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K(x,y)f(y)dy, \tag{33}$$

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & K^{(2)}(x,y)\\ K^{(3)}(x,y) & K^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times6}, \qquad K^{(p)}(x,y)=\left[K_{lj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times3},$$

$$p=1,2,3,4,\quad f=(f',f'')^{\mathrm{T}},\quad f'=(f_1',f_2'f_3')^{\mathrm{T}},\quad f''=(f_1'',f_2'',f_3'')^{\mathrm{T}},$$

$$K_{lj}^{(p)}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left[\frac{1}{d_1}\left(-a_2\delta_{1p}+c(\delta_{2p}+\delta_{3p})-a_1\delta_{4p}\right)\delta_{lj}\frac{1}{r}-\beta_p'\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\partial x_j}\right]+$$
$$+\delta_{3j}(1-\delta_{l3})\left[-a_p''\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}+\beta_p''x_3\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_3}\frac{1}{r}\right]-\delta_{l3}(1-\delta_{3j})\beta_p'x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}-$$
$$-\delta_{l3}\delta_{3j}\left[(\delta_{1p}+\delta_{4p})\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-\beta_p''x_3\frac{\partial^2}{\partial_3^2}\frac{1}{r}\right],\ p=1,2,3,4,$$

სადაც $\beta_l',\beta_l'',\ l=1,2,3,4,$ გარკვეული მუდმივებია

ძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე

$$\mathrm{T}(\partial,n)U(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L(x,y)f(y)dy, \tag{34}$$

სადაც

$$L(x,y)=\begin{bmatrix} L^{(1)}(x,y) & L^{(2)}(x,y) \\ L^{(3)}(x,y) & L^{(4)}(x,y) \end{bmatrix}_{6\times 6}, \qquad L^{(l)}(x,y)=\left[L^{(l)}_{k\,j}(x,y)\right]_{3\times 3}, \qquad l=1,2,3,4,$$

$$L^{(l)}_{k\,j}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[-(\delta_{1l}+\delta_{4l})\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-\gamma_l x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\frac{1}{r}\right]+$$

$$+\delta_{3j}(1-\delta_{k3})\delta_l\, x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_3^2}\frac{1}{r}+\delta_{k3}(1-\delta_{3j})\left[(\gamma_l+\eta_l)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}-\gamma_l x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_3}\frac{1}{r}\right]+$$

$$+\delta_{k3}\delta_{3j}\left[\left(\frac{4\lambda_5 d_3}{d_1}\xi'_l-\delta_l\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\delta_l x_3\frac{\partial^3}{\partial_3^3}\frac{1}{r}\right], \qquad l=1,2,3,4,$$

$\delta_l,\gamma_l,\eta_l,\varsigma_l,d_3$ გარკვეული მუდმივებია.

თუ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ ამოცანის სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციებს მოვთხოვთ შემდეგ პირობებს:

$$f_j'(z), f_j''(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega), \quad f_3'(z), f_3''(z)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega), \quad j=1,2, \quad 0<\alpha<1,$$

$$|f_j'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2}, \qquad |f_j''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2}, \quad j=1,2,$$

$$|f_3'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|}, \qquad |f_3''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|}, \quad z\in\partial\Omega, \quad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი, წარმოდგენილი (41) ფორმულით, წარმოადგენს $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{III})$ ამიცანის რეგულარულ ამონახსნს, რომელსაც უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა

$$u_j'(x), \quad u_j''(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right), \quad j=1,2, \qquad u_3'(x), \quad u_3''(x)=O\left(|x|^{-1}\right),$$

$$\partial_k u_j'(x), \quad \partial_k u_j''(x)=O\left(|x|^{-2}\right), \quad j=1,2, \qquad \partial_k u_3'(x), \quad \partial_k u_3''(x)=O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right), \quad k=1,2,3.$$

$(\mathrm{M}\cdot IV)$ამოცანის ამონახსნს შემდეგი სახე

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \widetilde{K}(x,y)f(y)dy, \tag{35}$$

სადაც $\widetilde{K}(x,y)=\begin{bmatrix} \widetilde{K}^{(1)}(x,y) & \widetilde{K}^{(2)}(x,y) \\ \widetilde{K}^{(3)}(x,y) & \widetilde{K}^{(4)}(x,y) \end{bmatrix}_{6\times 6}, \qquad \widetilde{K}^{(p)}(x,y)=\left[\widetilde{K}^{(p)}_{l\,j}(x,y)\right]_{3\times 3},$

$$p=1,2,3,4, \qquad f=(f',f'')^{\mathrm{T}}, \qquad f'=(f_1', f_2' f_3')^{\mathrm{T}}, \qquad f''=(f_1'', f_2'', f_3'')^{\mathrm{T}},$$

$$\widetilde{K}_{lj}^{(p)}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left[(\delta_{1p}+\delta_{4p})\delta_{lj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+\eta_{1p}\frac{\partial^3 r}{\partial x_l\partial x_j\partial x_3}\right]+$$
$$+\delta_{3j}(1-\delta_{l3})\eta_{2p}x_3\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}+\delta_{l3}(1-\delta_{3j})\left(\eta_{3p}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}+\eta_{1p}x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right)+$$
$$+\delta_{l3}\delta_{3j}\left(\eta_{4p}\frac{1}{r}+\eta_{2p}x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right),\quad p=1,2,3,4,$$

$\beta_l',\beta_l'',\eta_{lp}$, გარკვეული მუდმივებია.

ძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე

$$\mathrm{T}(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{L}\ (x,y)f(y)dy,$$

სადაც

$$\widetilde{L}(x,y)=\begin{bmatrix}\widetilde{L}^{(1)}(x,y) & \widetilde{L}^{(2)}(x,y)\\ \widetilde{L}^{(3)}(x,y) & \widetilde{L}^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times6},\qquad \widetilde{L}^{(p)}(x,y)=\left[\widetilde{L}_{kj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times3},\qquad p=1,2,3,4,$$

$$\widetilde{L}_{kj}^{(1)}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[a_1\delta_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}+\left(a_1\beta_1'+c\beta_3'+(\mu_1+\lambda_5)\eta_{31}+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{33}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_1\beta_1'+\mu_3\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{3j}(1-\delta_{k3})\left[\left(a_1\beta_2'+c\beta_4'+(\mu_1+\lambda_5)\eta_{41}+(\mu_3-\lambda_5)\eta_{43}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_1\beta_2'+\mu_3\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+\delta_{k3}(1-\delta_{kj})2(\mu_1\beta_1'+\mu_3\beta_3')x_3\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_3^2}\frac{1}{r}+$$
$$+\delta_{k3}\delta_{3j}\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2(a_1\beta_2'+\mu_3\beta_4')x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right],$$

ანალოგიური სახე აქვთ $L_{kj}^{(l)}(x,y),\ l=2,3,4,$ ფუნქციებს

თუ სასაზღვრო ფუნქციებიდან მოვითხოვთ, რომ $f_j'(z),\ f_j''(z)\in C^{1,\alpha}(\partial\Omega),\ f_3'(z),\ f_3''(z)\in C^{0,\alpha}(\partial\Omega),\ j=1,2,0<\alpha<1,$

$$|f_3'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},\qquad |f_3''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|^2},$$

$$|f_j'(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\qquad |f_j''(z)|<\frac{\mathrm{A}}{1+|z|},\quad z\in\partial\Omega,\quad \mathrm{A}=const>0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი წარმოდგენილი (35) ფორმულით წარმოადგენს $(M\cdot IV)$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს, რომელსაც უსასრულობაში გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტიკა:

$$u_j'(x),\quad u_j''(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\quad u_3'(x),\quad u_3''(x)=O\left(|x|^{-1}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_j'(x),\quad \partial_k u_j''(x)=O\left(|x|^{-2}\ln|x|\right),$$

$$\partial_k u_3'(x),\quad \partial_k u_3''(x)=O\left(|x|^{-2}\right),\quad j=1,2\qquad k=1,2,3.$$

$(\tilde{M})$ ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \mathrm{K}(x,y)\,f(y)\,dy,\quad x\in\Omega^-,$$

სადაც $\mathrm{K}(x,y)=\begin{bmatrix}\mathrm{K}^{(1)}(x,y) & \mathrm{K}^{(2)}(x,y)\\ \mathrm{K}^{(3)}(x,y) & \mathrm{K}^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times 6},\qquad \mathrm{K}^{(p)}(x,y)=\left[\mathrm{K}_{lj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times 3},$

$$p=1,2,3,4,\qquad f=(f',f'')^{\mathsf T},\qquad f'=(f_1',f_2',f_3')^{\mathsf T},\qquad f''=(f_1'',f_2'',f_3'')^{\mathsf T},$$

$$\mathrm{K}_{lj}^{(1)}(x,y)=(1-\delta_{l3})(1-\delta_{3j})\left(\delta_{lj}(\xi_4-1)\frac{1}{r}-\xi_4\frac{\partial^2 r}{\partial x_l\partial x_j}\right)+(1-\delta_{l3})\delta_{l3}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{1}{r}-$$
$$-\xi_4(1-\delta_{3j})\delta_{3l}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\delta_{l3}\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r},$$

ანალოგიური სახე აქვთ $K_{lj}^{(p)}(x,y),\ p=2,3,4$ ფუნქციებს.

ძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე

$$T(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L(x,y)\,f(x)dy\ ,$$

სადაც $L(x,y)=\begin{bmatrix}L^{(1)}(x,y) & L^{(2)}(x,y)\\ L^{(3)}(x,y) & L^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{6\times 6},\qquad L^{(p)}(x,y)=\left[L_{kj}^{(p)}(x,y)\right]_{3\times 3},\quad l=1,2,3,4,$

$$L_{kj}^{(l)}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left[(c\zeta_6+a_1\zeta_4-a_1)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}-2(\mu_1\zeta_4+\mu_3\zeta_6)\frac{\partial^3 r}{\partial x_k\partial x_j\partial x_3}\right]+$$
$$+2\mu_1(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}-(1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left[\left(-2\mu_1+a_1+\frac{b_1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\right.$$
$$\left.+2(\mu_1\zeta_4+\mu_3\zeta_6)+x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right]+2\mu_1\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r},$$

ანალოგიური სახე აქვს $L_{kj}^{(l)}(x,y),\ l=2,3,4$ ფუნქციებს.

$(\tilde{\mathrm{N}}\cdot \mathrm{I})$ ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int K(x,y)f'(y)dy,$$

სადაც $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}, \quad f=(f',f_4,f_5)^{\mathsf{T}}, \qquad f'=(f_1,f_2,f_3)^{\mathsf{T}},$

$$K(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & K^{(2)}(x,y)\\ K^{(3)}(x,y) & K^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{5\times 5}, \qquad K^{(3)}(x,y)=[0]_{2\times 2},$$

$$K^{(1)}_{\ell j}(x,y)=(1-\delta_{\ell 3})(1-\delta_{3j})\left(-\frac{1}{r}\delta_{\ell j}+a\frac{\partial^2 r}{\partial x_\ell \partial x_j}\right)+(1-\delta_{\ell 3})\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\frac{1}{r}+$$

$$a(1-\delta_{3j})\delta_{\ell 3}x_3\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+\delta_{\ell j}\delta_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}, \qquad a=\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}. \tag{36}$$

$$K^{(2)}_{\ell j}(x,y)=(\delta_{1j}+\delta_{2j})\alpha_j\left(\delta_{\ell 3}\frac{1}{r}-\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x_\ell \partial x_3}+x_3\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{1}{r}\right)+(\delta_{2j}-\delta_{1j})\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_e}\Psi(x,y),$$

$$K^{(4)}_{\ell j}(x,y)=\delta_{\ell j}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+\frac{\delta_{1j}-\delta_{2j}}{d_2}\left[\delta_{\ell 1}(\kappa_2+\kappa_3)-\delta_{\ell 2}(\kappa_1+\kappa_2)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_r r}-1}{r}.$$

აქ $\Phi(x,y)=x_3\ln(r+x_3)-r, \quad r=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+x_3^2}$

$$\Psi(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\left[e^{-x_3\sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}}-\frac{\sqrt{|\xi|^2+\lambda_1^2}}{|\xi|}e^{-x_3|\xi|}\right]e^{-i(\tilde{x}-y)\cdot\xi}d\xi_1 d\xi_2$$

$\xi=(\xi_1,\xi_2,0), \quad \tilde{x}=(x_1,x_2,0), \quad y=(y_1,y_2,0)$

ძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int L(x,y)f(y)dy, \qquad x\in\Omega^-,$$

სადაც

$$L(x,y)=\left[L^{(1)}(x,y),\ L^{(2)}(x,y)\right]_{3\times 5},$$

$$L^{(1)}(x,y)=\left[L^{(1)}_{kj}(x,y)\right]_{3\times 3}, \qquad L^{(2)}(x,y)=\left[L^{(2)}_{kj}(x,y)\right]_{3\times 2},$$

$$L^{(1)}_{kj}(x,y)=(1-\delta_{k3})(1-\delta_{3j})\left(-\mu\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2\mu a x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{1}{r}\right)+2\mu(1-\delta_{k3})\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}+$$

$$+(1-\delta_{3j})\delta_{k3}\left(\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r}+2\mu a x_3\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_3}\frac{1}{r}\right)+2\mu\delta_{k3}\delta_{3j}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}, \quad k,j=1,2,3, \tag{37}$$

$$L_{kj}^{(2)}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\left[\left(2(\lambda+\mu)\alpha_j-\eta_1\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}+2\mu\alpha_j x_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{1}{r}\right]\delta_{k3}+$$

$$+2\mu\alpha_j\left(1-\delta_{k3}\right)x_3\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{1}{r}\Bigg]+\left(\delta_{2j}-\delta_{1j}\right)\alpha_3\left[\delta_{k3}\left(2\mu\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\Psi(x,y)-\right.\right.$$

$$\left.-2(\lambda+\mu)\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}}{r}+(\lambda+2\mu)\lambda_1^2\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right)+$$

$$\left.+2\mu\left(1-\delta_{k3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\Psi(x,y)\right],\quad k=1,2,3,\quad j=1,2.$$

$\left(\tilde{\mathrm{N}}\cdot\mathrm{II}\right)$ ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{K}(x,y)f(y)dy,\ \ x\in\Omega^-, \tag{38}$$

სადაც $\quad U=\left(u,\vartheta_1,\vartheta_2\right)^{\mathrm{T}},\qquad f=\left(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5\right)^{\mathrm{T}},$

$$\tilde{K}(x,y)=\begin{bmatrix}K^{(1)}(x,y) & \tilde{K}^{(2)}(x,y)\\ \tilde{K}^{(3)}(x,y) & \tilde{K}^{(4)}(x,y)\end{bmatrix}_{5\times5},\qquad \tilde{K}^{(3)}(x,y)=[0]_{2\times3},$$

$$\tilde{K}^{(2)}(x,y)=\left[\tilde{K}_{\ell j}^{(2)}(x,y)\right]_{3\times2},\qquad \tilde{K}^{(4)}(x,y)=\left[\tilde{K}_{\ell j}^{(4)}(x,y)\right]_{2\times2},$$

$K_{\ell j}^{(1)}(x,y)$- აქვს (36) სახე

$$\tilde{K}_{\ell j}^{(2)}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\alpha_j\frac{\partial r}{\partial x_e}+\left(\delta_{1j}-\delta_{2j}\right)\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r},$$

$$\tilde{K}_{\ell j}^{(4)}(x,y)=\delta_{\ell j}\frac{1}{r}+\frac{\delta_{1j}-\delta_{2j}}{d_2}\left(\delta_{1\ell}\left(\kappa_2+\kappa_3\right)-\delta_{2\ell}\left(\kappa_1+\kappa_2\right)\right)\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}.$$

(38) ტოლობით განსაზღვრული $U(x)$ ვექტორის საშუალებით გამოვთვალოთ ძაბვის $\mathrm{P}(\partial,n)U(x)$ ვექტორი, რომელსაც აქვს (5) სახე, მივიღებთ

$$\mathrm{P}(\partial,n)U(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \tilde{L}(x,y)f(y)dy,\, x\in\Omega^-,$$

სადაც $\tilde{L}(x,y)=\left[L^{(1)}(x,y)\ \tilde{L}^{(2)}(x,y)\right]_{3\times5},\quad \tilde{L}^{(2)}(x,y)=\left[\tilde{L}_{kj}^{(2)}(x,y)\right]_{3\times2},$

$L_{kj}^{(1)}(x,y)$ - აქვს (37) სახე

$$\tilde{L}_{kj}^{(2)}(x,y)=\left(\delta_{1j}+\delta_{2j}\right)\left\{2(\lambda+\mu)\alpha_1-\eta_j\frac{1}{r}+2\mu\alpha_j x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right]\delta_{k3}+2\mu\alpha_j\left(1-\delta_{k3}\right)x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{r}\right\}+$$
$$+\left(\delta_{1j}-\delta_{2j}\right)\alpha_3\left\{\left[\lambda\lambda_1^2\frac{1}{r}+2\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_3^2}-\lambda_1^2\right)\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\right]\delta_{k3}+2\mu\left(1-\delta_{k3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_3}\frac{e^{-\lambda_1 r}-1}{r}\right\}.$$

თავი IV. ამოცანები, რომლებიც დაიყვანება განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე

მეოთხე თვში შესწავლილია ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა თეორიის (როდესაც კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი, როდესაც სფერულ ზედაპირებზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელის, ძაბვის ვექტორის მხები მდგენელისა და ტემპერატურული ცვლილებების ან სითბური ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები. ამ თავში შესწავლილია ასევე ნახევარ-სივრცის სასაზღვრო ამოცანები ბირთვული ღრუთი, როცა ნახევარ-სივრცისა და ბირთვის საზღვარზე მოცემულია ძაბვის ვექტორის ნორმალური მდგენელის, გადაადგილების ვექტორის მხები მდგენელისა და ტემპერატურული ცვლილებების ან სითბური ნაკადების ზღვრული მნიშვნელობები, კერძოდ, შესწავლილია შემდეგი ამოცანები: ვთქვათ $\partial\Omega_j$, $j=1,2$ სფერული ზედაპირია ცენტრით O_j კოორდინატთა სათავეში და რადიუსით R_j. აღვნიშნოთ Ω_j-ით, $j=1,2$ ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega_j$ სფერული ზედაპირით, ხოლო $\Omega^-=\mathbb{R}^3\setminus\left(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\right)$. ვიგულისხმოთ $\overline{\Omega}_1\cap\overline{\Omega}_2=\varnothing$. ჩავთვალოთ, რომ ერთგვაროვანი სხეული ავსებს Ω^- არეს.

ვიგულისხმოთ, რომ $O_j x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$, $j=1,2$ კოორდინატთა სისტემის შესაბამისი საკოორდინატო ღერძები არიან პარალელურნი და ერთნაირად მოგეზილნი. აღვნიშნოთ $\left(x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}\right)$ და $\left(r_j,\vartheta_j,\varphi_j\right)$-ით, $j=1,2$, x წერტილის დეკარტისა და სფერული კოორდინატები $O_j x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ სისტემის მიმართ. O_2

წერტილის სფერული კოორდინატები $O_1x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}$ სისტემის მიმართ აღვნიშნოთ $(d,\vartheta_0,\varphi_0)$-ით.

რადგან საკოორდინატო ღერძები ერთმანეთის პარალელურია და ერთნაირადაა მოგეზილი, ამიტომ

$$x^{(1)}=x^{(2)}+de_0$$

სადაც $x^{(j)}$, $j=1,2$ არის x წერტილის მნიშვნელობა $O_j\,x_1^{(j)}x_2^{(j)}x_3^{(j)}$ სისტემის მიმართ, $d=|O_1O_2|$, $e_0=(\cos\varphi_0\sin\vartheta_0,\sin\varphi_0\sin\vartheta_0,\cos\vartheta_0)^{\mathsf{T}}$.

ამოცანა (A).ვიპოვოთ Ω^- არეში (2)-(3) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega_j$, $j=1,2$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\{n(z)\cdot u(z)\}^-=f_4^{(j)}(z),\quad z\in\partial\Omega_j,$$

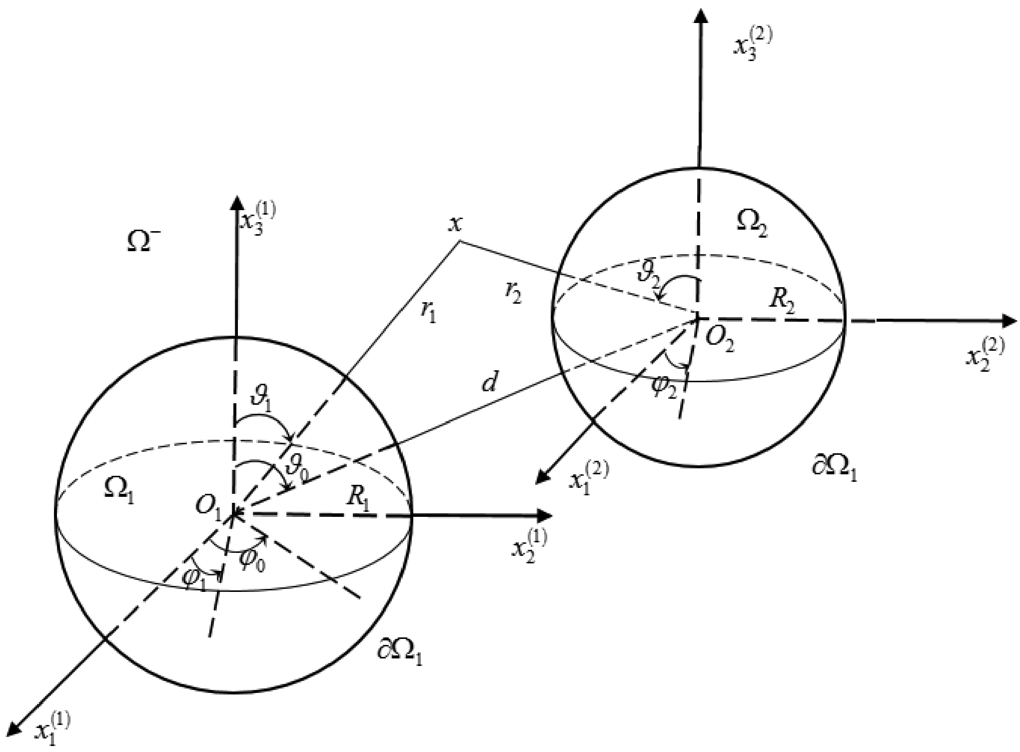
$$\{P(\partial,n)U(z)-n(z)(n(z)\cdot P(\partial,n)U(z))\}^-=f^{(j)}(z),\quad z\in\partial\Omega_j,\tag{39}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^-=f_5^{(j)}(z),\quad \{\vartheta_2(z)\}^-=f_6^{(j)}(z),\quad z\in\partial\Omega_j,\quad j=1,2,\tag{40}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^-=f_5^{(j)}(z),\quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^-=f_6^{(j)}(z),\quad z\in\partial\Omega_j,\quad j=1,2,\tag{41}$$

სადაც $f^{(j)}=\left(f_1^{(j)},f_2^{(j)},f_3^{(j)}\right)^{\mathsf{T}}$, $f_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, $\ell=1,2,\ldots,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega_j$ წერტილზე გამავალი Ω_j არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.



ნახ. 1

$U(x)$ ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

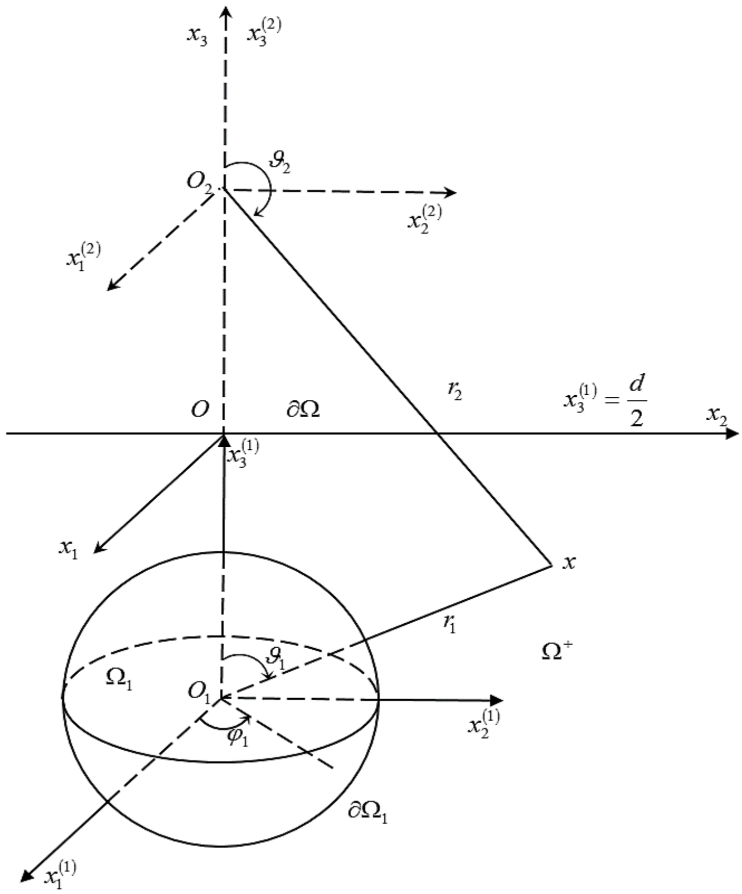
$$u(x) = O(1), \quad \vartheta_j(x) = O\left(|x|^{-1}\right), \quad j = 1,2,$$

$$\lim_{r_1 \to \infty} \frac{1}{4\pi r_1^2} \iint_{\sum_{r_1}} n(x) \cdot u(x) d\sum\nolimits_{r_1} = 0, \tag{42}$$

სადაც $\sum_{r_1}$ არის სფერო ცენტრით O_1 წერტილში და რადიუსით $r_1 = |x| \ (r_1 > d + R_2)$.

ამოცანა (A) (39)-(40) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ (A.I) სიმბოლოთი, ხოლო (39), (41) სასაზღვრო პირობებით კი (A.II) სიმბოლოთი.

ვთქვათ $\partial\Omega$ არის $x_3^{(1)} = \dfrac{d}{2}$ სიბრტყე. აღვნიშნოთ $\partial\Omega_1$ სფერული ზედაპირი ცენტრით O_1 წერტილში და რადიუსით R_1. Ω_1-ით აღვნიშნოთ ბირთვი, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega_1$ სფერული ზედაპირით. Ω^+-ით აღვნიშნოთ $x_3^{(1)} < \dfrac{d}{2}$ ნახევარ-სივრცე Ω_1 ბირთვული ღრუთი. ვიგულისხმოთ, რომ Ω^+ არე შევსებულია დრეკადი კომპოზიტური მასალით.



ნახ. 2

ამოცანა (B). ვიპოვოთ Ω^+ არეში (2)-(3) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta_1,\vartheta_2)^{\mathsf{T}}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega_j$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$\{n(z)\cdot P(\partial,n)U(z)\}^- = f_4^{(1)}(z), \quad z\in\partial\Omega_1,$$

$$\{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^- = f^{(1)}(z), \quad z\in\partial\Omega_1, \tag{43}$$

$$\{\vartheta_1(z)\}^- = f_5^{(1)}(z), \quad \{\vartheta_2(z)\}^- = f_6^{(1)}(z), \quad z\in\partial\Omega_1, \tag{44}$$

ან

$$\left\{\frac{\partial\vartheta_1(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_5^{(1)}(z), \quad \left\{\frac{\partial\vartheta_2(z)}{\partial n(z)}\right\}^- = f_6^{(1)}(z), \quad z\in\partial\Omega_1, \tag{45}$$

სადაც $f^{(j)}=\left(f_1^{(j)},f_2^{(j)},f_3^{(j)}\right)^{\mathsf{T}}$, $f_\ell^{(j)}$, $j=1,2$, $\ell=1,2,\ldots,6$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega_1$ წერტილზე გამავალი Ω_1 არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.

$\partial\Omega$ სიბრტყეზე შემდეგ სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს:

$$\{n(z)\cdot P(\partial,n)U(z)\}^{+}=0,\quad \{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^{+}=0,\ \{\vartheta_j(z)\}^{+}=0,\ j=1,2, \tag{46}$$

ან

$$\{n(z)\cdot P(\partial,n)U(z)\}^{+}=0,$$

$$\{u(z)-n(z)(n(z)\cdot u(z))\}^{+}=0,\left\{\frac{\partial\vartheta_j(z)}{\partial n(z)}\right\}^{+}=f_5^{(j)}(z),\quad j=1,2, \tag{47}$$

სადაც $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილზე გამავალი Ω^{+} არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი.

$U(x)$ ვექტორი უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

$$u(x)=O(1),\quad \vartheta_j(x)=O\left(|x|^{-1}\right),\ j=1,2,$$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\sum_R} n(x)\cdot u(x)d\sum_R=0, \tag{48}$$

სადაც $\sum_R$ არის Ω^{+} არეში მოთავსებული R რადიუსიანი სფერული ზედაპირის ნაწილი, ცენტრით O_1 წერტილში $\left(R>\frac{d}{2}\right)$.

ამოცანა (B) (43)-(44) და (46) სასაზღვრო პირობებით აღვნიშნოთ (B.I) სიმბოლოთი, ხოლო (43), (45) და (47) სასაზღვრო პირობებით კი (B.II) სიმბოლოთი.

დამტკიცებულია შემგეგი თეორემები:

თეორემა 4.1 თუ (A.I) და (A.II) ამოცანებს გააჩნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

თეორემა 4.2. თუ (B.I) და (B.II) ამოცანებს გააცნიათ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

(A) და (B) ამოცანების შესწავლა დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე. ნაჩვენებია, რომ მიღებული სისტემა არის კვაზირეგულარული. ასეთი სისტემების მიახლოებითი ამონახსნები მიიღება რედუქციის მეთოდით.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი „დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა კონკრეტული არეების შემთხვევაში“ ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ დრეკადობისა და თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შესწავლას ორკომპონენტიანი დრეკადი ნარევისაგან შედგენილი სხეულისათვის.

თანამედროვე ტექნოლოგიურ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასალებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამოდენიმე დრეკადი მასალისგან დამზადებული მასალები და სხვა. ასეთი მასალების მექანიკის პრაქტიკული ამოცანების გამოკვლევას ბუნებრივად მივყავართ ისეთი მათემატიკური მოდელის შექმნის აუცილებლობამდე, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს უფრო ზუსტად აღვწეროთ ექსპერიმენტის დროს მიმდინარე რეალური პროცესები. ბუნებრივია ასეთი მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს დრეკადი ნარევისათვის (მყარი სხეული - მყარ სხეულთან) პირველი მათემატიკური მოდელი, ე.წ. დიფუზიური მოდელი, ააგეს ა. გრინმა და ტ. სტილმა 1966 წელს. იმავე წელს მათ მიერ აგებულია დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის ერთტემპერატურიანი თეორიის დიფუზიური მოდელი. ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თერმოდრეკადობის წრფივი თეორიის მათემატიკური მოდელი მარცვლოვანი, ბოჭკოვანი და ფენოვანი სტრუქტურების მქონე კომპოზიტებისათვის 1984 წელს აგებულ იქნა ლ. ხოროშუნისა და ნ. სოლტანოვის მიერ. უნდა აღინიშნოს, რომ კომპოზიტური მასალებისათვის მათემატიკური მოდელები სხვადასხვა ტემპერატურული ველების გათვა-

ლისწინებით გამოირჩევიან თავიანთი რთული სტრუქტურით და მათი გამოკვლევა თანამედრომე მძლავრი მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით მოითხოვს დიდ ძალისხმევას. ამდენად მიგვაჩნია, რომ ამ მიმართულებით მიღებული შედეგები თავიანთი მეცნიერული ღირებულებებითა და პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით, ფრიად აქტუალური იქნება.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა და ორტემპერატურიანი დრეკად ნარევთა (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულისათვის კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) თეორიის სტატიკის არაკლასიკური სამგანზომილებიანი სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების შესწავლა კონკრეტული არეების შემთხვევაში, კერძოდ ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, ნახევარ სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი, მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი და ნახევარ სივრცისათვის.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების შემთხვევაში დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას.
- გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია დისერტაციაში განხილული ყველა ამოცანისთვის ერთადერთობის თეორემები.
- მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო და საკონტაქტო არაკლასიკური ამოცანების ამონახსნები ბირთვისათვის და მთელი სივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. ამოცანები მიღებულია ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით. სა-

საზღვრო პირობებზე მოთხოვნილია სიგლუვის ის საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მიღებული მწკრივების აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადობას.

- მიღებულია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის (როცა ნარევში შემავალი დრეკადი სხეულების კერძო გადაადგილებები ერთმანეთის ტოლია) სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი, ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა გამოსახული ოთხი ჰარმონიული და ერთი მეტაჰარმონიული ფუნქციების საშუალებით.
- შესწავლილია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა და ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანები ნახევარ სივრცისათვის შემუშავებულია ამ ამოცანების ამოხსნის ახალი მეთოდი, რომელიც დაკავშირებულია ჰარმონიული ფუნქციისათვის დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნებთან ნახევარ სივრცისათვის. ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციების საშუალებით.
- შესწავლილია ორტემპერატურიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანები მთელი სივრცისათვის ორი ურთიერთ არაგადამკვეთი ბირთვული ღრუთი და ნახევარსივრცისათვის ბირთვული ღრუთი. ამ ამოცანების შესწავლა დაყვანილია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის გამოკვლევაზე. ნაჩვენებია, რომ ეს სისტემები არიან კვაზირეგულარულნი. ამოხსნები მიღებულია აბსოლუტურად და თანაბრად კრებადი ფურიე-ლაპლასის მწკრივების სახით, რომლებიც არიან მეტად ალგორითმული რიცხვითი შედეგების მისაღებად.

კონფერენციებში მონაწილეობა

1. Giorgashvili L., Metreveli D., Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. V Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union.Batumi, 2014,September 8-12,pp. 96
2. Metreveli D. Problems of Statics of linear Thermoelasticity for a Haif-Space. VI International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi, 2015, July 12-16,pp.152

პუბლიკაციები

1. Giorgashvili L., Metreveli D. Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. Proc. A.Razmadze Math. Inst. 2015, Vol.167, pp.43-61.
2. Metreveli D. Solution of Nonclassical Problems of Statics of Two-Component Elastic Mixtures for a Half-Space. AMIM, 2015, Vol. 20, pp. 21-35.
3. Metreveli D. Boundary Value Problems of Statics if Two-Temoerature Elastic Mixtures Theory for a Half- Space. AMIM, 2015, Vol.20, №2,pp.34-41.

SUMMARY

David Metreveli's dissertation work "The Solution of Baundary conditions of Elasticity and thermoelasticity theory, in the case of specific areas", is dedicated to the Mathematical Physics, in particular to the study of the tasks of three-dimensional boundary and boundary-contact of elasticity and thermoelasticity theory statistics. They are designed for flexible two-component mixtures which consist of elastic bodies.

In modern technological processes complex structural flexible composite materials are often used as well as composit structures of materially different physical properties.

In such composite materials and structures classes belong to: the hemitropul elastic materials, the mixtures which are made of two or more flexible materials and etc. The practical examination of such materials mechanics naturally leads us to the necessity of creation of such mathematical model, which gives us the opportunity to describe the current real processes more accurately at the experiment period. In order to set the appropriate mechanical thermal and other physical properties, naturally the creation of such models, also their research and analysis have great theoretical and practical importance. For elastic mixture (hard body – with hard body) the first mathematical model – so called Diffusion Model- was constructed by A. Green and T. Steel in 1966. At the same year they had also constructed Diffusion Model of the theory of elastic mixtures thermoelasticity of the one temperature. The mathematical model of the two temperature elastic mixtures thermoelasticity linear theory for the composites of granular fiber and layered structures was constructed by L. Khoroshun and N.Soltanov in 1984. It must be mentioned that according to the different temperature fields, the mathematical models for the compositive materials are distinguished by it's complex structure. Using mathematical methods their examination needs the hard work. That is why we think that the obtained results in this direction are the most actual according to it's scientific value and practical usage.

The main aim of the dissertation work is the following: the study of non classical three-dimensional boundary and contact of problems, of the theory statistics of two component elastic mixtures and two temperature elastic mixtures (when the mix consisting private movies are equal) in the case of concrete areas.

In particular this is for the core of the whole space with nuclear hole, for the whole space with not inter crossing nuclear hole and for half space. Using Green's formulas the sameness theories for all the problems is explored.

While analyzing the issue of the sameness in the case of the solving problems of the statistics theory of two temperature elastic mixtures the most important result of the dissertation work is the following: in external tasks case the existence of sufficient conditions in infinity area of established structural and asymptotic limits, which provide the sameness of searched solution.

In dissertation work the Furie's method is used, which is one of the general methods of the three-dimensional problems of elastic and thermoelasticity theory. That is based on the following: on the solution of the given main differential equation, against the defined curved coordinate system, with variables separation. While studying boundary problems using this method the the whole difficulty is moved to the satisfaction of board conditions. The dissertation has obtained the general submission formula of the solution of the differential equations system of the statistic theory of two temperature elastic mixtures (when the private moves are equal). They are featured through four harmonic and one metaharmonic functions. The obtained submission gives us the opportunity for both the displacement vector and the stress vector, to be represented in one and the same orthonormal vector full system of vector in Fourier-laplace rows. The above mentioned simplifies the satisfaction of boundary conditions. The solutions of the problem are represented in the forms of absolutely equally converging rows. That is the best way for an algoritm to receive numerical results.

The Dissertation work obtains the theory of two component elastic mixtures, also non classical boundary solutions theory statistics of two temperature elastic mixtures for half space. There is found a simple way to solve the problem. This is related to the Dirichlet's and Neumann's solutions of the problems in the case of half space. Through boundary vector functions we obtained the solutions of the problems in Squares.

In the thesis we also obtained the board problems for the the whole space with two non crossing nuclear hollow and the problem of half space with nuclear hollow. Studying of both problems is reduced to the infinite system research of linear algebraic equations. It is shown that these systems are kvazregular. The solutions of the problems are obtained absolutely in equally converging rows.