საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის
ქართული უნივერსიტეტი

ინფორმატიკის, მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ბექარ მელაძე

ინფორმატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი სადისერტაციო

ნაშრომი

კომპიუტერული მეცნიერებები - 04.01.04

ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დოქტორანტის სამეცნიერო ხელმძღვანელები:
ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფესორი ბ. დოჭვირი

ფიზიკა–მათემატიკის მეცნიერებათა
კანდიდატი პ. ბაბილუა

თბილისი

2013

სარჩევი

ანოტაცია

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. ანალოგიურ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვეო ანუ აქტუარული მათემატიკა. ფინანსურ და სადაზღვეო ინსტიტუტებს მჭიდრო კავშირი აქვთ საბანკო სისტემასთან და სწორედ მათი ერთობლივი საქმიანობა განაპირობებს საბაზრო ეკონომიკის ნორმალურ ფუნქციონირებას.

საკითხები, რომლებიც წარმოდგენილ სადისერტაციო ნაშრომშია განხილული, ეხება დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური ნაკადების (პროცესების) აღმწერი მათემატიკური მოდელების აგებასა და შესწავლას. კერძოდ, მარტივი და რთული პროცენტების დროითი სტრუქტურის დადგენას, პოპულარული წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასდადების ამოცანის გადაწყვეტას და ასევე კომპიუტერული პროგრამების შედგენას საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნისათვის.

ამ საკითხების გადაჭრის მიზნით დისერტაციაში განვითარებულია მიდგომა, რომელიც არსებითად ეფუძნება ალბათურ–სტატისტიკური და ფინანსური მათემატიკის მეთოდებს, რომელიც დაკავშირებულია შესასწავლი ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელების ანალიზთან.

Anotation

Monetary policy takes central place in modern market economies basic instrument for management and control of this policy on financial markets are operations with securities. These operations include some risks and these risks should be learnt and analyzed. Insuranse case is related to the same risks, mathematical problematic of which is learnt by insurance or actuarial mathematics. Financial and insurance institutions have close relationship with banking system and exactly their joint activity conditions normal functioning of market economies.

Issues considered in the thesis refer to building and learning of mathematical models describing deterministic and stochastic financial streams (processes). Namely, determination of time structure of simple and difficult percentages, solution of american and european option pricing models, formation of computer programs for solving illustrating numeric examples.

In order to settle this question, in this thesis an approach is developed which is essentially grounded probability-statistical and financial mathematical methods that is connected to analysis of mathematical models of financial processes to be learnt.

შესავალი

ფასიანი ქაღალდებთან დაკავშირებულ ოპერაციებს ფინანსების თეორია სწავლობს, რომლის მათემატიკურ პრობლემებს იკვლევს ფინანსური (სტოქასტური ფინანსური) მათემატიკა და იგი ინტენსიურად ვითარდება ბოლო ათწლეულების განმავლობაში. ამ კვლევაში გადამწყვეტი როლი ალბათობის თეორიისა და მატემატიკური სტატისტიკის, შემთხვევით პროცესთა თეორიისა და, განსაკუთრებით, თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდებს მიეკუთვნება. სწორედ ამ მეთოდების გამოყენებით გახდა შესაძლებელი ძირითადი (საბაზისო, პირველადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ობლიგაციების , აქციების ევოლუციის (ტრაექტორიის) ადეკვატური აღწერა, ფინანსური ბაზრების დროში დისკრეტულად და უწყვეტად ფუნქციონირებადი მატემატიკური მოდელების შექმნა და წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების გათვლის ამოცანების გადაწყვეტა.

პირველი მათემატიკოსი, რომელმაც აქციის ფასების ევოლუციის უწყვეტ დროში შესწავლა დაიწყო, იყო ფრანგი ლ. ბაშელიე. მან აქციის ფასების ცვლილების აღწერისათვის გამოიყენა სპეციალური შემთხვევითი პროცესი, ე.წ. ბროუნის მოძრაობა. მიღებული შედეგი ბაშელიემ 1900 წელს სადოქტორო დისერტაციის სახით [1] წარმოუდგინა პარიზის მათემატიკურ საზოგადოებას. რამდენიმე წლის შემდეგ, 1905 წელს, ბროუნის მოძრაობის მათემატიკური საკითხების შესწავლა დაიწყო ა. აინშტაინმა, ხოლო ბროუნის მოძრაობის სრულყოფილი მათემატიკური თეორია [2] ააგო ნ. ვინერმა 1923 წელს. სამეცნიერო ლიტერატურასა და ტერმინოლოგიაში ბროუნის მოძრაობა დამკვიდრდა ვინერის პროცესის სახელწოდებით.

ბაშელიეს გამოკვლევებმა საკმაოდ დიდი ხნის განმავლობაში ვერ მოიპოვა სათანადო აღიარება და გამოყენება. მხოლოდ 1965 წელს პ. სამუელსონი დაინტერესდა ბაშელიეს ნაშრომით და მოუწოდა ეკონომისტებსა და მათემატიკოსებს ყურადღება მიექციათ აღნიშნული ნაშრომისათვის. თვითონ სამუელსონმა შემოგვთავაზა აქციის ფასების უწყვეტ დროში ევოლუციის აღმწერი ბაშელიეს მოდელის გაუმჯობესებული და მოდიფიციეწზული ე.წ. გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის მოდელი [3], რომელიც კიდევ „ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობის“ სახელწოდებით არის ცნობილი.

1973 წელს სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში გამოქვეყნდა ფ. ბლეკის, მ. შოულსის [4] და რ. მერტონის [5] ნაშრომები, რომელსიც უწყვეტი დროის შემთხვევაში მიღებული იყო ოფციონის ფასის გათვლის და ჰეჯირების ფორმულები. შემდეგ 1979 წელს ფ. კოკსმა, რ. როსმა და მ. რუბინშტეინმა ანალოგიური შედეგები მიიღეს დისკრეტული დროის შემთხვევაში[6]. კლასიკურად აღიარებულმა ამ ფუნდამენტურმა ნაშრომებმა რევოლუციური ძვრები გამოიწვია ფინანსურ სამყაროში და, კერძოდ, ფინანსურ ბაზრებზე: დაიწყო სპეციალიზებული ბირჟების გახსნა და გაიზარდა წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით ვაჭრობა. აღსანიშნავია, რომ ფინანსურ მათემატიკაში მიღებული შედეგების ზოგიერთმა ავტორმა (მაგ . მ. შოულსმა, რ. მერტონმა) ნობელის პრემია დაიმსახურა ეკონომიკაში.

გამოკვლევები სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის თეორიული და პრაქტიკული მიმართულებებით დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში.

ამკვლევაში არსებითი მნიშვნელობა აქვს ალბათურ-სტატისტიკური მეთოდების გამოყენებას. დისერტაციის დეტერმინისტულ ნაწილში ძირითადად გამოყენებულია

[7], [8] ნაშრომები სადაც შესწავლილია მარტივი და რთული პროცენტის დროითი სტრუქტურა, ფინანსური აქტივებისა და პორტფელების შემოსავლიანობის საკითხები და აგრეთვე პორთფელის მართვისა და ფასდადების პრობლემატიკა. [8] ნაშრომში ასევე განხილულია პირველი და მეორე რიგის დისკრეტული ფინანსური ნაკადები და ძირითადი ფინანსური ოპერაციების საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია შემთხვევითი პროცესების (მიმდევრობების) ოპტიმალური გაჩერების თეორიას, კერძოდ, ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების ამოცანაში ფასისა და ოპტიმალური გაჩერების მომენტის პოვნის პრობლემატიკას. შემთხვევითი პროცესების ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები გამოიყენება აგრეთვე სადაზღვევო საქმეში, ტექნოლოგიური პროცესების ოპტიმალურ მართვაში, საზოგადოდ ოპტიმალურ-სტოქასტურ მართვაში და სხვა. უსასრულო დროით ინტერვალზე მარკოვის შემთხვევითი პროცესების ოპტიმალური გაჩერების თეორია

სესწავლილია [9]-[14] ნაშრომებში.

ამერიკული ოფციონის ფასდადების პრობლემატიკაში საჭიროა გამოვიყენოთ სასრულ დროით ინტერვალზე ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია [15]- [21] ნაშრომები სადაც მოცემულია ფასის ექსცესიური და სუპერმარტინგალური დახასიათება, ნაპოვნია ოპტიმალური გაჩერების მომენტების ცხადი სახეები და დადგენილია კავშირი უსასრულო დროით ინტერვალზე ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგებთან.

[22] -[27] ნაშრომებში შესწავლილია დროში დისკრეტული და უწყვეტი ფინანსური ბაზრების მოდელებისათვის ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების პრობლემატიკა, კერძოდ, გამოკვლეულია ჰეჯირების და ოპტიმალური სტრატეგიების აგების საკითხები სხვადასხვა სახის გადახდის ფუნქციებისათვის. განხილულია როგორც თვითდაფინანსებადი ასევე არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების შემთხვევები.

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

კვლევითი თემის აქტუალობა.

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. შევნიშნავთ, რომ ანალოგიურ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვეო ანუ აქტუარული მათემატიკა. ფინანსურ და სადაზღვეო ინსტიტუტებს მჭიდრო კავშირი აქვთ საბანკო სისტემასთან და სწორედ მათი ერთობლივი საქმიანობა განაპირობებს საბაზრო ეკონომიკის ნორმალურ ფუნქციონირებას.

გამოკვლევები სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის თეორიული და პრაქტიკული მიმართულებებით დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში.

ნაშრომის მიზანია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური ნაკადების (პროცესების) აღმწერი მათემატიკური მოდელების აგება და შესწავლა. კერძოდ, მარტივი და რთული პროცენტების დროითი სტრუქტურის დადგენა, პოპულარული წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასდადების ამოცანის გადაწყვეტა, კომპიუტერული პროგრამების შედგენა საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითების ამოხსნისათვის.

მოტანილი მიზნის მისაღწევად გამოყენებულია ალბათურ–სტატისტიკური და ფინანსური მათემატიკის მეთოდები, რომელიც დაკავშირებულია შესასწავლი ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელების ანალიზთან.

დაცვაზე გამოტანილი ძირითადი შედეგები.

1) დისკრეტული ფინანსური ნაკადებისათვის შესწავლილია და დადგენილია აქტუალიზაციის, კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონები,

2) შესწავლილია ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესების ოპტიმალური გაჩერების პრობლემატიკა სასრულ დროით ინტერვალზე, როდესაც პროცესზე დაკვირვება გარკვეულ გადასახადთან არის დაკავშირებული. მიღებულია ფასისა და ოპტიმალური გაჩერების მომენტების ცხადი გამოსახულებები.

3) $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ ალბათურ სივრცეზე განხილულია ორი აქტივისაგან – ობლიგაციისაგან და აქციისაგან შემდგარი ფინანსური (B, S) ბაზარი. აღნიშნული აქტივების დროში ევოლუციის აღმწერი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით შესწავლილია ამერიკული ოფციონის ფასდადების ზოგიერთი საკითხი და შესაბამისი ოპტიმალური გაჩერების ფასის ფუნქციის თვისებები.

4) ორაქტივიანი ფინანსური (B, S) ბაზრის კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელისათვის განხილულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისათვის. ამოცანათა ამ კლასისათვის განსაზღვრულია ოფციონის სამართლიანი ფასი, მინიმალური ჰეჯი და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი.

თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა. დისერტაციაში შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელები და კომპიუტერული პროგრამები ფინანსურ მათემატიკაში ახალი და საინტერესოა თეორიული და პრაქტიკული თვალსაზრისით. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნას როგორც საბანკო ოპერაციებში, აგრეთვე ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად აქციებით და ობლიგაციებით ვაჭრობის ოპერაციებში.

კვლევის მეთოდები. ნაშრომში დასმული ამოცანების გადაწყვეტისათვის გამოყენებულ იქნა მათემატიკური მოდელების აგების პრინციპები და მეთოდები და ასევე თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდები. სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა. კერძოდ, შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების ყოფაქცევა დროში და აგებულია სათანადო მათემატიკური მოდელები. დისკრეტული და უწყვეტი ფინანსური ნაკადების (პროცესების) შემთხვევაში შესწავლილია წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მეთოდების გამოყენებით. კერძოდ, ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანაში გამოყენებულია შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები. მოტანილია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები და აგებულია სათანადო კომპიუტერული პროგრამები.

საიმედობა და საფუძვლიანობა. მიღებული შედეგების საიმედობა და საფუძვლიანობა განპირობებულია კარგად აპრობირებული ფინანსური მათემატიკისა და შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების მათემატიკური თეორიის მეთოდების გამოყენებით.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენიებულლია შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე:

1. საქართველოს მათემატიკოსთა მეხუთე ყრილობა, ბათუმი/ქუთაისი, 9-12 ოქტომბერი, 2009;
2. Stochastic Analysis and Random Dynamics , International Conference, Lvov, Ukraine, 2009
3. საერთაშორისო კონფერენცია: ”ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები”, თბილისი, 2010;

4. The International Scientific Conference: “Information and Computer Technologies, Modeling, Control”, Tbilisi, 2010.
5. The third international conference: Problems of Cybernetics and Informatics, Baku 2010.

მოხსენებები გაკეთებულია აგრეთვე საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის სამეცნიერო სემინარებზე:

6. ”ინფორმაციული ტექნოლოგიები და კომპიუტერული მოდელირება” (თბილისი, 19 დეკემბერი 2012 წელი).
7. ”ინფორმაციული ტექნოლოგიები და კომპიუტერული მოდელირება” (თბილისი, 9 ივლისი 2012 წელი).

ავტორის პუბლიკაციები დისერტაციის თემაზე. დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებსა და თეზისებში:

შრომები

- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping for time-dependent gain function, Theory of Stochastic Processes, Vol. 15. N 2, 2009, Kyiv, pp 54-61;
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the construction of a homogeneous standard Markov process, PCI, Vol. II, Baku, 2010, p. 263-265
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment Process, , Computer Science, Technology And Applications, New York, 2012, p.p. 519-523.
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the pricing of American option, Промлемы управления безопасностью сложных систем, XVIII, Москва, 2010, 155-159.
- პ. ბაბილუა, ბ. დოჭვირი, თ. დოჭვირი, ბ.მელაძე, ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელირების შესახებ, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია, შრომები, ტ. 2, 2012. გვ 16-24.

თეზისები

- ბ. დოჭვირი, გ. ლომინაშვილი, ბ. მელაძე, ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება, საქართველოს მათემატიკოსთა V ყრილობა. ბათუმი/ქუთაისი, თეზისები, 2009, გვ. 125.
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping of homogeneous Markov process with finite lifetime, Modern Stochastics: theory and applications II, Abstracts, Kiev, 2010, p.47-48
- პ. ბაბილუა, ბ. მელაძე, მ ფაცაცია, ამერიკული გაყიდვის ოფციონისფასდადების მოდელირება, ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები, თეზისების კრებული, თბილისი 2010, 13–16.
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment

Process, The International Scientific Conference "Information and computer Technologies, Modeling, Control", Tbilisi, 2010, Book of abstracts, p. 201.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა. დისერტაცია შედგება შესავალის, სამი თავის, დასკვნის, გამოყენებული ლიტერატურის სიისა და 5 დანართისაგან. ძირითადი ტექსტი (შესავალი, სამი თავი, დასკვნა) გადმოცემულია 120 გვერდზე. სულ დანართებიანად ნაშრომი მოიცავს 163 გვერდს. გამოყენებული ლიტერატურის სია მოიცავს 36 დასახელებას.

ახლა განვიხილოთ ნაშრომის მოკლე შინაარსი:

ნაშრომის პირველი თავი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან.

თავი I. დეტერმინისტული ფინანსური ნაკადების მათემატიკური მოდელირება.

§1. შესავალი ფინანსურ მათემატიკაში. ამ პარაგრაფში შემოტანილია საბანკო ანგარიშის დროითი სტრუქტურა მარტივი და რთული პროცენტის გამოყენებით. კერძოდ, მარტივი პროცენტით დარიცხვის შემთხვევაში თანხის ევოლუცია (ტრაექტორია) მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობით.

$$B_n = B_0(1 + r \cdot n) \tag{1}$$

სადაც B_0 ანგარიშზე შეტანილი საწყისი თანხაა, r არის მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, $n > 0$ დროის გარკვეული მომენტია, ხოლო B_n არის დროის n მომენტში თანხის რაოდენობა. რთული პროცენტით დარიცხვის შემთხვევაში

$$B_n = B_0(1 + r)^n \tag{2}$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში m −ჯერ $r(m)$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ

$$B_n(m) = B_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{n \cdot m}. \tag{3}$$

პრაქტიკაში უწყვეტ დარიცხვაში იგულისხმება ყოველდღიური დარიცხვა. ასეთ შემთხვევაში

$$B_n(m) = B_0 \cdot e^{r \cdot n} \tag{4}$$

სადაც e არის კარგად ცნობილი ნეპერის რიცხვი $e \approx 2.7182$.

მოტანილია აგრეთვე საილუსტრაციო მაგალითები, ცხრილები, ობლიგაციის (ბონის), აქციების განმარტებები და ზოგიერთი თვისება.

§2. ფინანსური ნაკადები. ამ პარაგრაფში შემოტანილია პირველი რიგის ფინანსური (ფულადი) ნაკადის განმარტება

$$CF = \{(t_1, C_1), \dots, (t_n, C_n)\}, \tag{5}$$

სადაც (t_i, C_i) აღნიშნავს დროის t_i მომენტში არსებულ C_i თანხას, $i = 1, \dots n$. განხილულია ნაკადის რიცხვზე გამრავლების და ორი ნაკადის შეკრების ოპერაციები. შემოტანილია აგრეთვე მეორე რიგის (ინტერვალური) ნაკადი

$$\overline{CF} = \{\, (J_1, C_1), \dots, (J_n, C_n)\}, \tag{6}$$

სადაც $J_i = [t_{i-1},\ t_i)$ $i = ,1, \dots, n$; ამ ნაკადებისათვის განმარტებულია აქტუალიზაციის ორი ოპერაცია: ავანსირება $\mathrm{Adv}(\overline{CF})$ და ფინალიზაცია $\mathrm{Fin}(\overline{CF})$.

გარდა ამისა რენტის p –ჯერ დაყოფის $D^{(p)}$ ოპერაციის შემთხვევაში ნაჩვენებია შემდეგი თვისებების სამართლიანობა

$$\mathrm{Adv}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big) = D^{(p)}(\,\mathrm{Adv}\,(\overline{CF})) \tag{7}$$

$$\mathrm{Fin}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big) = D^{(p)}(\,\mathrm{Fin}\,(\overline{CF})) \tag{8}$$

მოტანილია აგრეთვე საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

§3. ფინანსური ოპერაციები და სქემები. ამ პარაგრაფში შემოტანილია დროის p მომენტისათვის ორი ფინანსური კანონი:

კაპიტალიზაციის და დისკონტირების ფინანსური კანონი:

$$FV_p(t, C) = A(t,\ p;\ C)\ p \geq t, \tag{9}$$

$$D(t,\ p;\ C) = PV_p(t, C),\ p \leq t, \tag{10}$$

მოტანილია აგრეთვე ფინანსური გარიგების ზოგიერთი ძირითადი წესი და საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

§4. მარტივი პროცენტი. ამ პარაგრაფში შემოტანილია ფინანსური ოპერაციების ერთ – ერთი ძირითადი სახეობა – საკრედიტო გარიგება და განხილულია მასთან

დაკავშირებული მარტივი პროცენტისა და ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთის საკითხები. აქვე განმარტებულია საკრედიტო გარიგების ძირითადი დროითი და ფულადი (ფინანსური) პარამეტრები, მოტანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

ნაშრომის მეორე თავი შედგება სამი პარაგრაფისაგან.

თავი II. ოპტიმალური გაჩერება და ამერიკული ოფციონის ფასდადება.

§1. ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება. ამ პარაგრაფში განხილულია ერთგვაროვანი $X = (X_t), \quad 0 \le t \le T$, მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა ფასით

$$s(T, x) = \sup_{\tau \le T} E_x \left[g(X_\tau) * I_{(\tau \le T)} + \varliminf_{t \uparrow T} g(X_t) * I_{(\tau = T)} \right], \tag{11}$$

სადაც მოგების $g(x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$g(\mathrm{X_t}) = f(\mathrm{X_t}) - \int_0^t c(\mathrm{X_s}) ds. \tag{12}$$

ფაზური სივრცისა და ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის გაფართოების გამოყენებით აგებულია X–ის ექვივალენტური ერთგვაროვანი $Y' = Y'_t$ მარკოვის პროცესი (თეორემა 1.1) და ნაჩვენებია, რომ ამ ორი პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ფასები ერთმანეთს ემთხვევა (თეორემა 1.2):

$$s'(T, x') = s(T - t, x), \;\; t < T, \tag{13}$$

სადაც $x' = (s, x)$.

§2.არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება. ამ პარაგრაფში განხილულია არაერთგვაროვანი $X = (X_t), \quad 0 \le t \le T$, მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა ფასით

$$v(s, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{s,x}\, g(\tau, X_\tau) \tag{14}$$

სადაც მოგების ფუნქცია

$$g(t, X_t) = f(t, X_t) - \int_0^t c(s, X_s)ds, \tag{15}$$

აგებულია X–ის შესაბამისი ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესი X' (ლემა 2.1) და ნაჩვენებია, რომ ამ ორი პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანების შესაბამისი ფასები ერთმანეთს ემხვევა (ლემა 2.2):

$$v(s, x) = v'(s, x), \tag{16}$$

დამტკიცებულია აგრეთვე $v(s, x)$ ფასის ექსცესიური დახასიათება (თეორემა 2.1) და ნაპოვნია ε–ოპტიმალური (ოპტიმალური) გაჩერების მომენტების ცხადი სახე (თეორემა 2.2).

§3ამერიკული ოფციონის ფასდადება. ამ პარაგრაფში მარკოვის პროცესების ოპტიმალური გაჩერების ამოცანანაში მიღებული შედეგები გამოყენებულია ამერიკული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენის ამოცანაში. კერძოდ, განხილულია ფინანსური (B, S) ბაზრის ბლეკ–შოულსის მოდელი

$$dB_t = r \cdot B_t \cdot dt, \tag{17}$$

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma S_t dt \cdot S_t \cdot dW_t, \tag{18}$$

და ამერიკული ტიპის ოფციონის გადახდის ფუნქცია

$$f_t = \max_{u \le t} S_u - S_t. \tag{19}$$

ოფციონის სამართლიანი ფასი მოიძებნება როგორც გარკვეული ოპტიმალური გაჩერების ამოცანის ფასი (ლემა 3.1) და მიღებულია ოპტიმალური გაჩერების მომენტის (ლემა 3.2) და აგრეთვე ოპტიმალური საზღვრის გამოსახულებები (თეორემა 3.1). ანალოგიური საკითხები შესწავლილია აგრეთვე ფინანსური (B, S) ბაზრის ზოგადი დიფუზიური მოდელის შემთხვევაში. განხილულია აგრეთვე ფინანსური (B, S) ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი

$$B_n = (1 + r)B_{n-1} \qquad B_0 > 0 \tag{20}$$

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1} \qquad S_0 > 0 \tag{21}$$

ამერიკული ტიპის $f = f_{(x)}$ გადახდის ფუნქციისათვის კაპიტალის პროცესი ჩაწერილია გარკვეული T ოპერატორის საშუალებით (ლემა 3.3) და ოფციონის სამართლიანი ფასისათვის მიღებულია რეკურენტული განტოლება (ლემა 3.4). გარდა ამისა T ოპერატორის გამოყენებით დადგენილია ოფციონის „განაღდების“, „არ განაღდების“ და „განურჩევლობის“ არეები (თეორემა 3.3). მოტანილია აგრეთვე სამართლიანი ფასის გამოსათვლელი რეკურენტული მოდელი არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის და რიცხვითი მაგალითები.

ნაშრომის მესამე თავი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან

თავი III. სტოქასტური ფინანსური ნაკადების მათემატიკური მოდელირება.

§1. ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების მოდელირება. ამ პარაგრაფში განხილულია ორაქტივიანი ფინანსური (B, S) ბაზრის კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ობლიგაციებისა და აქციის ფასებს აღწერს დროში და (20), (21) რეკურენტული განტოლებებით არის განმარტებული. ამ განტოლებებში $r > 0$ არის რთული საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო $\rho = \rho_n$ არის დამოუკიდებლად და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $n = 0,1 \dots N$. ამასთან, ყოველი ρ_n–ის განაწილების კანონია

ρ_n	b	a
$P\rho_n$	P	$1-P$

$n = 0,1 \dots N$

სადაც იგულისხმება, რომ $-1 < a < r < b$.

ინვესტორის საწყისი $X_0 = x$ კაპიტალის საშუალებით იგება აქტივების პორტფელი (სტრატეგია) $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ სადაც β_n და γ_n დროის n მომენტში სესაბამისად ობლიგაციებისა და აქციების რაოდენობებია. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X_n^{\pi} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} \tag{22}$$

შემოტანილია თვითდაფინანსებადი სტრატეგიების მათემატიკური გამოსახულება

$$\Delta\beta_n\, B_n \,+\, \Delta\gamma_n\, S_n = 0 \tag{23}$$

ასევე განმარტებულია ჰეჯი და მინიმალური ჰეჯი. შემოტანილია აგრეთვე ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონები შესაბამისი გადახდის ფუნქციებით

$$f_N = f(S_N) = \max(S_N - K, 0) \tag{24}$$

$$f_N = f(S_N) = \max(K – S_N, 0) \tag{25}$$

გარდა ამისა განმარტებულია ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = \min\{x > 0: \prod(\, x, f_N) \neq \Phi\} \tag{26}$$

სადაც $\prod$ აღნიშნავს ყველა სესაძლო ჰეჯის ერთობლიობას.

ჩამოყალიბებულია ოფციონის ფასდადების ამოცანა, რომელიც ოფციონის სამართლიანი ფასის, მინიმალური ჰეჯისა და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრაში მდგომარეობს.

§2. ბინომური ხეები. ამ პარაგრაფში რეკურენტული ფორმულების გამოყენებით აგებულია ე.წ. ბინომური ხეები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება აქციის შესაძლო ფასები, გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები და ოფციონის სამართლიანი ფასი.

თვითდაფინანსებადი და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისათვის მოტანილია ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურა და აგრეთვე ფინანსური ბაზრის მხოლოდ საწყის პარამეტრებზე დამოკიდებული სამართლიანი ფასის ფორმულა:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k\, (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^N \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k\, (1-p^*)^{N-k} \tag{27}$$

სადაც

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0. \tag{28}$$

შევნიშნავთ, რომ როცა , $c_1 = c_2 \equiv 0$, მაშინ (27), (28) გვაძლევს ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიან ფასს თვითდაფინანსებადი სტრატეგიისათვის.

§3. მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. ამ პარაგრაფში მიღებულია მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები. ე.წ. მოპასუხე პორტფელის შემდეგი პირობის გამოყენებით:

$$X_{n+1}^{\pi} = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1} = f(S_{n+1}). \tag{29}$$

რომლის საშუალებითაც $\pi_{n+1}^* = (\beta_{n+1}^*, \gamma_{n+1}^*)$ მინიმალური ჰეჯის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big) - (1+a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n}, \tag{30}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big) - f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \tag{31}$$

§4. ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება. ამ პარაგრაფში განხილულია ამერიკული ოფციონის ფასდადების საკითხები. ევროპული ოფციონისგან განსხვავებით ამერიკული ოფციონის მფლობელს მისი განაღდება შეუძლია დროის $1, \dots, N$ მომენტების ნებისმიერ n შემთხვევით მომენტში. ამიტომ ოფციონის ფასდადების ამოცანებს ემატება კიდევ ერთი ამოცანა: დროის რა მომენტში უნდა გავაღდოთ ოფციონი, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება? ამრიგად, ასეთი რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტის და ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების ამოცანას.

ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი მოცემული $f_n = f(S_n)$ გადახდის ფუნქციისათვის ჩაიწერება ოპტიმალური გაჩერების შემდეგი ამოცანის სახით

$$C_N^A = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_{\tau}, \tag{32}$$

სადაც E^* აღნიშნავს $p^* = \frac{r-a}{b-a}$ ალბათური ზომით მათემატიკურ ლოდინს. დროის ისეთ τ^* მომენტს, რომლისთვისაც მიიღწევა (32) სუპრემუმი ეწოდება ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი. იგი გამოითვლება შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\tau^* = \min\{n : f(S_n) \geq C_n^A\}, \tag{33}$$

სადაც C_n^A არის ამერიკული ოფციონის გადახდის ფუნქციის შიგა ღირებულება (ოფციონის ფასი n მომენტში).

ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით მოტანილია ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურა და ჩატარებულია ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასების შედარებითი ანალიზი. მოტანილი აგრეთვე საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები, რომლისთვისაც აგებულია სათანადო კომპიუტერული პროგრამები.

თ ა ვ ი I. დეტერმინისტული დისკრეტული ფინანსური ნაკადების მათემატიკური მოდელირება

§1. შესავალი ფინანსურ მათემატიკაში

ფინანსური მათემატიკა ფინანსების თეორიის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს. შეიძლება ითქვას, რომ იგი ორი ძირითადი მიმართულებისაგან შედგება: პირველი ეს არის დეტერმინისტული ანუ კლასიკური ფინანსური მათემატიკა, ხოლო მეორე – სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. ფინანსური პროცესების აღმწერ დეტერმინისტულ მათემატიკურ მოდელებში იგულისხმება დროში ცვალებადი ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების მომავალში მნიშვნელობების სრული განსაზღვრულობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ გვაქვს ფინანსური პროცესების აღმწერი ფორმულები და დროის $n = 0$ მომენტში საწყისი მონაცემების საფუძველზე ჩვენ მომავალში დროის ნებისმიერი n მომენტისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ საჭირო მახასიათებლები. მარტივი და რთული პროცენტების გამოყენებით ასეთი გამოთვლები დაკავშირებულია, მაგალითად, ვექსელებთან, ობლიგაციებთან, დეპოზიტურ სერთიფიკატებთან და სხვა სავალო ფინანსურ ინსტრუმენტებთან, აგრეთვე ფინანსურ მენეჯმენტთან და სხვა.

რეალურ ფინანსურ ოპერაციებს, როგორც წესი, თან ახლავს გარკვეული რისკი და განუსაზღვრელობა, რომელიც ამ ოპერაციების მახასიათებლებზე უამრავი შემთხვევითი ფაქტორის (მაგალითად, ინფლაციის, ეკონომიკური კრიზისის, ბუნებრივი კატასტროფების) ზეგავლენით არის გამოწვეული. ამ შემთხვევაში მახასიათებლების დროში მომავალი მნიშვნელობების ცალსახად განსაზღვრა შეუძლებელია. სწორედ ამ შემთხვევითი ფაქტორების გათვალისწინებით ხდება ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების შესწავლა და ანალიზი ფინანსური პროცესების აღმწერ სტოქასტურ მეტემატიკურ მოდელებში.

სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის კვლევაში გადამწყვეტი როლი ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის, შემთხვევით პროცესთა თეორიისა და, განსაკუთრებით, თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდებს მიეკუთვნება. სწორედ ამ მეთოდების გამოყენებით გახდა შესაძლებელი ძირითადი (საბაზისო, პირველადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად, ობლიგაციების, აქციების ევოლუციის (ტრაექტორიის)

ადეკვატური აღწერა, ფინანსური ბაზრების დროში დისკრეტული და უწყვეტი მათემატიკური მოდელების შექმნა და წარმოებული (მეორადი) ფასიანი ქაღალდების, მაგალითად ოფციონების, ფორვარდების, ფიუჩერსების გათვლის ამოცანების გადაწყვეტა. სახელწოდება „წარმოებული ფასიანი ქაღალდი“ მიუთითებს იმაზე, რომ იგი წარმოადგენს გარკვეულ პირობებში რაიმე აქტივის ყიდვა–გაყიდვის ხელშეკრულებას (კონტრაქტს) ორ მხარეს – მყიდველსა და გამყიდველს შორის. მაგალითად, ოფციონის (ოფციონური კონტრაქტის) საფუძველი შეიძლება იყოს აქცია, ვალუტა, საქონელი, თვითონ ოფციონი და სხვა.

თანამედროვე ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის (როგორც უცხოური ქვეყნის ფულის), კეთილშობილი (ძვირფასი) ლითონებისა და სხვადასხვა ფინანსური ინსტრუმენტების, მათ შორის ფასიანი ქაღალდების ბაზრების ერთობლიობას. როგორც აღვნიშნეთ, განასხვავებენ ძირითად (პირველად, საბაზისო) და წარმოებულ (მეორად) ფასიან ქაღალდებს. პირველს მიეკუთვნება, მაგალითად, ობლიგაციები, საბანკო ანგარიში, აქციები მეორეს – ოფციონი, რომელიც შეიძლება იყოს აქციის ყიდვა–გაყიდვის სხვადასხვა ტიპის კონტრაქტი (ხელშეკრულება).

საინტერესოა აღვნიშნოთ, რომ საბანკო ტიპის ოპერაციები ბანკის მსგავსი ინსტიტუტების მიერ ტარდებოდა ჯერ კიდევ ძველ ეგვიპტეში, ხოლო ძველ ბაბილინსა და ასურეთში კი უკვე არსებობდა საპროცენტო განაკვეთის შედეგად მოგების მომტანი სასესხო კაპიტალი და გარკვეული სახის ვექსილი (ფასიანი ქაღალდი). თანამედროვე ტიპის ბანკი პირველად შეიქმნა იტალიის ქ. გენუაში 1407 წელს, ხოლო აქციებით ვაჭრობის დასაწყისად ითვლება ქ. ამსტერდამში საფონდო ბირჟაზე აქციონერთა კომპანიების მიერ აქციების გაყიდვა 1602 წელს.

რაც შეეხება მეორად ფინანსურ ინსტრუმენტებს, მათი ინტენსიური განვითარება დაიწყო XX საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან (თუმცა, მაგალითად, ოფციონი ადრეც არსებობდა) და ძირითადად დაკავშირებული იყო შემდეგ გარემოებებთან:

1) 1973 წლიდან დაწყებული, ვალუტის ფიქსირებული გაცვლითი კურსების მაგივრად შემოღებული იყო ცვალებადი („მცურავი“) კურსები. ზოგიერთი მათგანისათვის კი

დაწესებული იქნა ცვალებადობის გარკვეული შუალედი („დერეფანი“). ამას დაემატა საპროცენტო განაკვეთების ცვალებადობა;

2) გასული საუკუნის სამოცდაათიანი წლებიდან დაიწყო დოლარის გაუფასურება ოქროსთან მიმართებაში. 1971 წლის შემდეგ, ოქროს სტაბილურმა ფასმა (ერთი უნცია – 28,28 გრამი ოქრო ღირდა 35 დოლარი) მკვეთრად იწყო მატება და უკვე 1980 წელს ერთი უნცია ოქრო 570 დოლარი ღირდა;
3) წარმოიშვა ნავთობის მსოფლიო კრიზისი ნავთობის ფასების ცვალებადობასთან დაკავშირებით
4) მსოფლიო ფინანსურ ბაზრებზე მოხდა აქციების რეალიზაციის შემცირება;
5) ქვეყნები აღმოჩნდნენ განსხვავებულ ეკონომიკურ სიტუაციებში განსაკუთრებით მეორე მსოფლიო ომის დამანგრეველი შედეგების შემდეგ.

ამ მოვლენებმა ბუნებრივად გაზარდა რისკი ფინანსურ ურთიერთობებში. აუცილებელი გახდა ფინანსური რისკებისაგან თავის დაცვა და მისი გარკვეულად განეიტრალების მიზნით ახალი ფინანსური პროდუქციისა და ტექნოლოგიის შექმნა. ასე დაიწყო ე. წ. ფინანსური ინჟინერიის ჩამოყალიბება და განვითარება, რომლის ძირითად ფინანსურ ინსტრუმენტს სწორედ წარმოებული ფასიანი ქაღალდები წარმოადგენს.

ამასთან ერთად სულ უფრო იზრდებოდა ქვეყნებს შორის ფინანსური ურთიერთობების მოცულობა და სისწრაფე. სხვადასხვა გარემოებებთან ერთად ამას ხელი შეუწყო მეცნიერულ–ტექნიკურმა პროგრესმა და განსაკუთრებით კომპიუტერული მეცნიერების განვითარებამ. გარდა ამისა, ფინანსურ ურთიერთობებში არსებულმა რეალურმა რისკმა, განუზღვრელობამ დააჩქარა ფინანსების თეორიისა და ფინანსური ინჟინერიის პრობლემატიკაში ალბათურ–სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება და სათანადო მათემატიკური აპარატის შექმნა. ყოველივე ამის საფუძველზე შეიქმნა და განვითარდა თანამედროვე სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ფინანსურმა ბაზრებმა საკმაოდ სწრაფი რეაგირება მოახდინა ზემოთ აღნიშნულ გარემოებებზე. 1973 წელს ამერიკის შეერთებული შტატების ქალაქ ჩიკაგოში გაიხსნა სტანდარტული ოფციონების ბირჟა. საინტერესოა მოვიყვანოთ ინვესტორების რეაგირების ზოგიერთი მაჩვენებელი ინვესტირების ახალ შესაძლებლობებთან დაკავშირებით. გახსნის

დღეს, 26 აპრილს, 16 სახის აქციაზე დაიდო 911 კონტრაქტი ყიდვის ოფციონზე. ერთი წლის შემდეგ იდებოდა 20,000–ზე მეტი, ხოლო სამი წლის შემდეგ 100,000–ზე მეტი კონტრაქტი ყოველდღე. 1987 წელს მაჩვენებელმა 700 ათასი კონტრაქტი შეადგინა 100 სახის აქციაზე, ე. ი. ყოველდღიურ ბრუნვაში იყო 70 მილიონი აქცია. საინტერესოა, აგრეთვე, შევნიშნოთ, რომ იმავე 1987 წელს ქალაქ ნიუ–იორკის ბირჟაზე ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა 190 მილიონი აქცია.

ფინანსურ სამყაროში ასეთმა მნიშვნელოვანმა ძვრებმა ბუნებრივად გაზარდა მოსახლეობაში ფინანსურ ურთიერთობებში აქტიური მონაწილეობისა და ამის საშუალებით „ფულის კეთების“ სურვილი. თითქმის ყოველი ამერიკული ოჯახი ასობით აქციის მფლობელია და თავიანთი დანაზოგებით ინვესტირებას ეწევა ამერიკის საბაზრო ეკონომიკაში.

ფინანსურ ბაზრებზე სხვადასხვა სახის ძირითად ფასიან ქაღალდებთან ერთად ვაჭრობენ უამრავი მეორადი ფასიანი ქაღალდებით. ყიდვა–გაყიდვის კონტრაქტების ნაწილის სახელწოდებების უბრალო ჩამონათვლითაც კი ადვილად დავინახავთ ფინანსურ ურთიერთობებში მეორადი ფასიანი ქარალდების მნიშვნელობას და მრავალფეროვნებას: ფიუჩერსები, ფორვარდები, ფინანსური ფიუჩერსები, ფიუჩერსები ობლიგაციებზე და საბირჟო ინდექსებზე, ევროპული და ამერიკული ტიპის სტანდარტული ოფციონები, ეგზოტიკური ოფციონები: ბოსტონის ოფციონი, რუსული ოფციონი, აზიური ოფციონი, კალათის ოფციონი. სვოპები, კეპები, ფლორები, სვოპციონები. ეს არის მეორადი ფასიანი ქაღალდების სახეობის არასრული ჩამონათვალი.

შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ორი აქტივისაგან – ობლიგაციებისაგან (საბანკო ანგარიშებისაგან) და აქციებისაგან შემდგარ ფინანსურ ბაზრებს. შევნიშნოთ, რომ საბანკო ანგარიში ობლიგაციის ტიპის ფასიანი ქაღალდია. ჩვენ მოკლედ შევეხებით საბანკო ანგარიშთან, ობლიგაციასთან და აქციასთან დაკავშირებულ ზოგიერთ საკითხს.საბანკო ანგარიშის გახსნის შემდეგ ბანკი ვალდებულია შეტანილ საწყის თანხას გარკვეული წესით დაარიცხოს საპროცენტო შემოსავალი. თუ ანაზარი (თანხა) შეტანილია ერთ წელზე ნაკლები ვადით, მაშინ საპროცენტო შემოსავლის დარიცხვისათვის გამოიყენება მარტივი პროცენტის ფორმულა.

$$B_n = B_0(1 + r_0 \cdot n), \tag{1.1.1.1}$$

სადაც B_0 არის საბანკო ანგარიშზე შეტანილი საწყისი თანხა, r_0 – საპროცენტო განაკვეთი, n–ერთი წლის ნაწილი, ხოლო B_n $-n$ დროის შემდეგ ანაბრის სიდიდე $0 < n < 1$ შევნიშნოთ რომ (1.1.1.1) ფორმულის გამოყენება ხშირად ხდება, აგრეთვე $n > 1$ შემთხვევაშიც. მაგალითად, თუ საპროცენტო განაკვეთი რვა პროცენტია, მაშინ $r_0 = 0{,}08$ და თუ B_0 თანხა შეტანილი იყო ექვსი თვის ვადით, მაშინ $n = 0.5$. ამრიგად გვექნება

$$B_{0,5} = B_0(\ 1\ +\ 0{,}08\ \cdot\ 0{,}5)$$

r_0 – სიდიდეს წელიწადში ერთჯერ მარტივად დარიცხული საპროცენტო განაკცეთი ეწოდება. ასევე თუ, მაგალითად, $B_0 = 1000$, $n = 0{,}5$ და $r = 0{,}06$ (წლიური საპროცენტო განაკვეთი 6%_ის ტოლია), მაშინ გვექნება

$$B_{0,5} = 1000(\ 1\ +\ 0{,}06\ \cdot\ 0{,}5) = 1030$$

თუ ანაბარი შეტანილია ერთ წელზე მეტი ვადით, ნაშინ გამოიყენება რთული პროცენტის ფორმულები. თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში ერთჯერ $\hat{r}$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, ნაშინ n წლის შემდეგ B_0 საწყისი თანხა გახდება B_n თანხის ტოლი, რომელიც დაიტვლება შემდეგი ტოლობით

$$B_n = B_0(1 +\ \hat{r})^n \tag{1.1.1.2}$$

თუ მაგალითად $B_0 = 1000$, $\hat{r} = 0{,}06$ და $n = 3$, მაშინ გვექნება

$$B_3 = B_0(1 +\ \hat{r})^3 = 1000(1 + 0.06)^3 = 1191{,}016$$

თუ დარიცხვა ხდება m-ჯერ $r(m)$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ საწყისი B_0 თანხა n წლის შემდეგ ტოლი გახდება შემდეგი სიდიდის:

$$B_n(m) =\ B_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{nm}. \tag{1.1.3}$$

ვთქვათ, მაგალითად, დარიცხვა ხდება ყოველი კვარტლის სიხშირით (წელიწადში ოთხჯერ) ანუ $m = 4$, $B_0 = 1000$, $r(4) = 0{,}06$, მაშინ გვექნება

$$B_3(4) =\ 1000\left(1 + \frac{0{,}06}{4}\right)^{3\cdot 4} = 1000(1{,}015)^{\,12} = 1195{,}618.$$

თუ ანაბრის ვადა წლებში წილადი რიცხვით გამოისახება, მაგალითად $n+\frac{k}{m},\ 0<k<m$, მაშინ შესაბამისი თანხა მოიცემა ტოლობით

$$B_{n+\frac{k}{m}}(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{n+\frac{k}{m}\cdot m}. \tag{1.1.4}$$

წელიწადში სხვადასხვა სიხშირის $(m=1,\ (m=4)$ რთული პროცენტით დარიცხვის რიცხვითი მაგალითები გვაფიქრებინებს, რომ როცა დარიცხვათა რაოდენობა უსასრულოდ გაიზრდება, მაშინ საწყისი თანხის მომავალი ღირებულებაც უსასრულოდ დიდი იქნება. მაგრამ ეს ასე არ არის, რადგანაც ასეთ შემთხვევაში სამართლიანია ე. წ. უწყვეტი დარიცხვის ფორმულა, რომლის თანახმად საწყისი თანხის მომავალი ღირებულება (თუ წლების რაოდენობა სასრულია) ყოველთვის სასრული სიდიდეა. მართლაც, თუ დარიცხვა ხორციელდება უწყვეტად $r=r(+\infty)$ წლიური საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ n წლის შემდეგ შესაბამისი თანხა მოიცემა ტოლობით

$$B_n(\infty) = B_0\cdot e^{r(\infty)\cdot n} = B_0\cdot e^{r\cdot n} \tag{1.1.5}$$

სადაც e კარგად ცნობილი ნეპერის რიცხვია $e\approx 2{,}7182$.

ადვილი საჩვენებილია რომ

$$B_n(m) \ \to\ B_n(\infty),\ \text{როცა}\ r(m)\ \to\ r(\infty)\ ,\quad m\to\infty$$

შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში უწყვეტად დარიცხვაში ყოველდღიური დარიცხვა იგულისხმება.

უწყვეტად დარიცხული $r=r(+\infty)$ საპროცენტო განაკვეთის შესაბამისი $m-$ჯერ დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r(m)$ განიმარტება ტოლობით

$$r(m) = m\cdot\left(e^{\frac{r}{m}}-1\right), \tag{1.1.6}$$

საიდანაც მარტივად მივიღებთ $r=r(+\infty)$ –ის დამოკიდებულებას $r(m)$–ზე შემდეგი ტოლობით

$$r = m\cdot ln\left(1+\frac{r(m)}{m}\right) \tag{1.1.7}$$

სადაც $ln\,x$ აღნისნავს $x>0$ რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს, ანუ ლოგარითმს ნეპერის e რიცხვის ფუძით. იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $m=1$, მაშინ $\hat{r}=1$ და $r=r(\infty)$ საპროცენტო განაკვეთებისათვის გვექნება ურთიერთგადათვლის შემდეგი ფორმულები

$$\hat{r} = e^r - 1 \tag{1.1.8}$$

$$r = \ln(1 + \tilde{r}) \tag{1.1.9}$$

შეიძლება დავინტერესდეთ, მაგალითად, შემდეგ კითხვაზე პასუხის გაცემით: უწყვეტად დარიცხული პროცენტის შემთხვევაში რამდენი წელია საჭირო იმისათვის, რომ საწყისი თანხა გაორმაგდეს? ვთქვათ, უწყვეტად დარიცხული საპროცენტო განაკვეთი $r = \alpha/100$. ამრიგად ჩვენ უნდა ვიპოვოთ წლების რაოდენობა n ისეთი, რომ საწყისი B_0 თანხა n წლის შემდეგ გახდეს $2 \cdot B_0$ სიდიდის ტოლი. ადვილი მისახვედრია, რომ საძებნი n წლების რაოდენობისათვის უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$2 \cdot B_0 = B_0 \cdot e^{\frac{\alpha}{100} \cdot n}$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$2 = e^{\frac{\alpha}{100} \cdot n}$$

ტოლობის e ფუძით გალოგარითმების შემდეგ ადვილად მოვიღებთ საძებნი n წლების მნიშვნელობას

$$n = \frac{\ln 2 \cdot 100}{\alpha} = \frac{70}{\alpha} \tag{1.1.10}$$

ამ ტოლობიდან მივიღებთ, რომ თუ მაგალითად $\alpha = 5$ ან $\alpha = 7$, მაშინ თანხის გაორმაგება მოხდება, შესაბამისად, 14 და 10 წლის შემდეგ.

საინტერესოა თვალი გავადევნოთ, თუ როგორ იზრდება ბანკში შეტანილი საწყისი თანხა სხვადასხვა წესით დარიცხული საპროცენტო განაკვეთების დროს, მაგალითად, (1.1.3) ტოლობის შემთხვევაში. ვთქვათ

$B_0 = 10000, \;\; r(m) = 0{,}1;$

$$m = 1,2,3,4,5,12,\infty, \quad n = 0,1,\dots,10$$

$B_n(m)$ სიდიდის მნიშვნელობები მოცემულია 1.1 ცხრილში.

შევნიშნოთ, რომ მუდმივ საპროცენტო განაკვეთთან ერთად განიხილება და შეისწავლება დროში შემთხვევით ცვალებადი საპროცენტო განაკვეთები, რომელიც, ფაქტობრივად, შემთხვევით პროცესებს წარმოადგენს. ასეთი საპროცენტო განაკვეთების სტოქასტური მოდელების აღწერა შეიძლება, მაგალითად, ვინერის პროცესის (ბროუნის მოძრაობის) საშუალებით და მოითხოვს საკმაოდ რთული მათემატიკური მოდელების გამოყენებას. ჩვენ ამ საკითხებს არ განვიხილავთ.

ცხრილი 1.1.

$n \backslash m$	1	2	3	4	6	12	∞
0	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	11000	11025	11034	11038	11043	11047	11052
2	12100	12155	12174	12184	12194	12204	12214
3	13310	13401	13433	13449	13465	13482	13499
4	14641	14775	14821	14845	14869	14894	14918
5	16105	16289	16353	16386	16419	16453	16487
6	17716	17959	18044	18087	18131	18176	18221
7	19487	19799	19909	19965	20022	20079	20138
8	21436	21829	21967	22038	22182	22182	22255
9	23579	25066	24238	24325	24414	22504	24596
10	25937	26533	26743	26851	26960	27070	27183

ობლიგაცია ანუ **ბონი** – ეს არის ვალდებულება ფასიანი ქაღალდის სახით, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები, სააქციო საზოგადოებები და სხვა ფინანსური ინსტიტუტები კაპიტალის აკუმულაციის (მოზიდვის) მიზნით. ობლიგაციები განსაკუთრებული პოპულარობით სარგებლობს ინვესტორებში და მათში ინვესტირება სჭარბობს სხვა ფასიან ქაღალდებში ინვესტირებას, ობლიგაციებში ინვესტირების ძირითადი მიმზიდველობა მდგომარეობს იმაში, რომ მის მფლობელს რეგულარულად უხდიან თანხას გარკვეული წესით და ობლიგაციის დაფარვის მომენტში კი ხდება სრული თანხის გადახდა. ობლიგაციის მთლიანად ურისკო ფასიან ქაღალდად მიჩნევა არ შეიძლება, მაგალითად იმიტომ, რომ არსებობს კორპორაციის გაკოტრების რისკი. ამ თვალსაზრისით სახელმწიფო ობლიგაციები ნაკლებად რისკიანია, ვიდრე კორპორაციის

ობლიგაციები, სამაგიეროდ, საკუპონო გადასახადები (დივიდენდები) კორპორაციების ობლიგაციებზე მეტია, ვიდრე სახელმწიფო ობლიგაციებზე.

ვთქვათ, ობლიგაცია გამოშვებულია დროის საწყის $n = 0$ მომენტში. გვინდა მოკლედ აღვნიშნოთ ობლიგაციის რამდენიმე რიცხვითი მახასიათებელი (პარამეტრი):

1. ობლიგაციის ნომინალური ღირებულება $B(N, N)$, ანუ ის თანხა, რომელსაც ობლიგაციის გამომშვები (ემიტენტი) გადაუხდის ობლიგაციის მფლობელს დროის ბოლო N მომენტში.
2. ობლიგაციის დაფარვის მომენტი N, ანუ ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობა. ამასთან, თუ ობლიგაციის დაფარვის ვადა ერთ წელზე ნაკლებია (ან ტოლია) $N \leq 1$, მაშინ ობლიგაციას მოკლევადიანი ეწოდება, საშუალო ვადიანი ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობა ერთიდან ათ წლამდეა $1 < N < 10$, ხოლო გრძელვადიანისათვის კი ათ წელზე მეტია (ტოლია) $N \geq 10$.

3. ობლიგაციის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი r_c, რომლის გათვალისწინებითაც ემიტენტი უხდის ობლიგაციის მფლობელს წლიურ საკუპონო გადასახადებს (დივიდენდებს) და ეს გადასახადი $r_c \cdot B(N, N)$ სიდიდის ტოლია.

4. ობლიგაციის საწყისი ფასი $B(0, N)$, რომელიც გამოშვებულია დროის $n = 0$ მომენტში სიცოცხლის ხანგრძლივობით N წელიწადი.

5. ობლიგაციის მიმდინარე საბაზრო ფასი $B(n, N)$, $n = 0,1, \dots, N$, რომელიც შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა (უწყვეტი დროის შემთხვევაში კი შემთხვევითი პროცესია) და, ისევე როგორც საპროცენტო განაკვეთი, რთული სტოქასტური მათემატიკური მოდელებით აღიწერება.

6. მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთი $r_c(n, N)$ $n = 0,1, \dots, N$, რომელიც წლიური საკუპონო გადასახადისა და მიმდინარე საბაზრო ფასის შეფარდების ტოლია

$$r_c(n, N) = \frac{r_c \cdot B(N,N)}{B(n,N)} \tag{1.1.11}$$

7. ობლიგაციის შემოსავალი დაფარვის მომენტამდე $\rho = \rho\big(N - n, N\big)$, სადაც $N - n$, არის ობლიგაციის დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა, რომელიც განიმარტება როგორც $\rho-$ ს მიმართ შემდეგი განტოლების ფესვი

$$B(n, N) = \sum_{K=1}^{N-n} \frac{r_c \cdot B(N, N)}{(1 + \rho)^K} + \frac{B(N, N)}{(1 + \rho)^{N-n}} \tag{1.1.12}$$

სადაც $n = 0,1, \dots, N$ და იზომება წლებში. იმ შემთხვევაში, როცა ობლიგაციის საბაზრო ფასი უდრის ობლიგაციის ნომინალურ ღირებულებას, ე. ი.

$$B(n, N) = B(N, N),$$

მაშინ ობლიგაციის საკუპონო საპროცენტო განაკვეთი დაფარვის მომენტამდე ობლიგაციის შემოსავლის ტოლია ე. ი. $r_c = \rho$. მართლაც, $B(n, N) = B(N, N)$ ტოლობის შემთხვევაში r_c და ρ სიდიდეებისათვის (1.1.12) ფორმულის გათვალისწინებით უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$1 = \sum_{K=1}^{N-n} \frac{r_c}{(1+\rho)^K} + \frac{1}{(1+\rho)^{N-n}}$$

საიდანაც გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის საშუალებით ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\frac{r_c}{\rho}\left(\frac{1}{(1+\rho)^{N-n}} - 1\right) = \frac{1}{(1+\rho)^{N-n}}$$

საიდანაც ვღებულობთ საჩვენებელ r_c=ρ ტოლობას.

აქცია – ეს არის საწილო ფასიანი ქაღალდი, რომელსაც უშვებენ კორპორაციები, კომპანიები, ფირმები კაპიტალის აკუმულაციისა და გაზრდის მიზნით (ისე როგორც ობლიგაციის შემთხვევაში). აქციები ძირითადად ორი სახისაა – ჩვეულებრივი და პრივილეგიური. ჩვეულებრივი აქციის მფლობელი კომპანიისაგან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე კომპანიის წარმატებულ საქმიანობაზეა დამოკიდებული. კომპანიის გაკოტრების შემთხვევაში ასეთი აქციონერი მთლიანად კარგავს თავის ინვესტიციას. პრივილეგიური აქციის მფლობელს კი გარანტირებული აქვს თავისი ინვესტიციის მთლიანად დაკარგვის ნაკლები რისკი. სამაგიეროდ ასეთი ინვესტორი კომპანიისაგან ღებულობს დივიდენდს, რომლის სიდიდე არ იზრდება კომპანიის ზრდასთან ერთად. შევნიშნოთ, რომ არსებობს აქციის სხვა სახეებიც, რომელიც განსაზღვრავს კომპანიის საქმიანობის მართვაში აქციონერის მონაწილეობის წესს, დივიდენდების გადახდის საკითხებს და მრავალი სხვა. ქცია რისკიანი ფასიანი ქაღალდია, რადგან მისი მნიშვნელობები დროში შემთხვევით იცვლება და დამოკიდებულია უამრავ ფაქტორზე. აქციებში თანხის ინვესტირება ძირითადად მიმზიდველია არა დივიდენდების მიღებით, არამედ სწორედ აქციის ფასების შესაძლო მკვეთრი ცვლილებით: ინვესტორს აქვს შანსი „გააკეთოს“ ფული აქციის დაბალ ფასში ყიდვით და მისი მაღალ ფასში გაყიდვით.

ფინანსურ ბაზარზე (საფონდო ბირჟაზე) აქციების ყიდვა–გაყიდვა ხდება ბირჟის წევრი საბროკერო ფირმების საშუალებით. იმისთვის, რომ კომპანიამ შეძლოს აქციებით ვაჭრობა, მან უნდა გაითვალისწინოს კონკრეტულ ბირჟაზე ვაჭრობის გარკვეული წესები, მოთხოვნები და შეზღუდვები. მაგალითად, NYSE (New York Stock Exchange) ბირჟაზე აქციებით ვაჭრობის მსურველი კომპანია უნდა იყოს არანაკლებ 1,1 მილიონი აქციის მფლობელი, რომლის საბაზრო ფასი 18 მილიონ ამერიკულ დოლარზე ნაკლები არ არის. ზოგიერთ საფონდო ბირჟაზე, მაგალითად, ფასიანი ქაღალდების ბირჟაზე OTC (Over – the – counter), რომლის მონაწილეა დაახლოებით 40 ათასი დიდი, საშუალო და განვითარებადი კომპანია, აქციებით ვაჭრობა წარმოებს კომპიუტერულ–სატელეფონო ქსელით დილერების საშუალებით. OTC ფინანსური ბაზრის მთავარი მიმზიდველობა ინვესტორებისათვის იმაში მდგომარეობს, რომ მასში მონაწილეები არ არიან (ან ძალიან მცირედ არიან) შეზღუდულები სხვადასხვა მოთხოვნით, მაგალითად, მონაწილე კომპანიის კაპიტალის რაოდენობით და სხვა.

ბუნებრივია, ინვესტორისათვის საინტერესოა ინფორმაციის რეგულარული მიღება ფინანსური ბაზრის მდგომარეობის შესახებ, სხვადასხვა კომპანიების აქციათა კურსების და ევოლუციის შესახებ და, აგრეთვე, ზოგადად ეკონომიკური მდგომარეობის შესახებ. თუ აქციის ფასზე დაკვირვება ხდება დროის მომენტებში $n = 0,1, \dots, N$, მაშინ აქციის ფასის ევოლუცია შეიძლება ჩავწეროთ, გარკვეული ყოფაქცევის მქონე შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობის სახით

$$S = (S_n), \qquad n = 0,1, \dots, N.$$

სხვადასხვა სახის ინფორმაცია ფინანსური ბაზრების მდგომარეობის შესახებ, მათ შორის აქციათა ფასების ჩვლილების შესახებ რეგულარულად ქვეყნდება სპეციალურ ჟურნალ–გაზეთებში. ამასთან, კონკრეტული ქვეყნის გარდა, ქვეყნდება სხვა ქვეყნების ფინანსური ბაზრების შესახებ ინფორმაცია. მაგალითად მსოფლიოს 16 უდიდესი ბირჟის შესახებ ყოველდღიური ინფორმაცია იბეჭდება გაზეთში “The Wall Street Journal”.

ხშირად უშუალოდ S_n სიდიდეების ევოლუციის ამსახველი გრაფიკების მაგივრად ქვეყნდება გარკვეული აზრით უფრო „მოსახერხებელი“

$$h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

სიდიდეების ევოლუციის ამსახველი გრაფიკები. h_n სიდიდეების ინტერპრეტაციას „ლოგარითმული შემოსავლის“ შინაარსი აქვს და მათი ყოფაქცევა უფრო „ერთგვაროვანია“, ვიდრე თვითონ S_n სიდიდეების.

გარდა ამისა, ქვეყნდება, აგრეთვე, ინფორმაცია ეკონომიკის გლობალური მდგომარეობის მახასიათებლების შესახებ სხვადასხვა სახის საშუალოების და ინდექსების სახით. მაგალითად, დოუ ჯონსის ერთ–ერთი კარგად ცნობილი ინდექსია DJIA – Dow Jones Industrial Average, რომელიც შეიცავს ამერიკის 30 წამყვანი ინდუსტრიული კომპანიის მდგომარეობის შესახებ ინფორმაციას.

გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ფინანსური სამყარო მთლიანობაში საკმაოდ რისკიანია, მისი მდგომარეობა სტაბილურობის თვალსაზრისით უამრავ ფაქტორზეა დამოკიდებული, რაც დროდადრო იწვევს კრიზისულ სიტუაციას და კრახსაც კი. ასე მაგალითად 1987 წლის ბოლოს დოუ ჯონსის ინდექსი DJIA მკვეთრად დაეცა, რის გამოც ინვესტორებმა „ყველაფრის დაკარგვის“ შიშით თავიანთი აქციების ფინანსურ ბაზარზე გამოტანა და მასიური გაყიდვა დაიწყეს. მაგალითისათვის საინტერესოა მოვიყვანოთ შემდეგი მონაცემები: NYSE ბირჟაზე 1987 წლის იანვარში ყოველდღიურ ბრუნვაში მონაწილეობდა დაახლოებით 300 მილიონი აქცია, კრახის დღეს კი 1987 წლის 19 ოქტომბერს ბრუნვაში იყო უკვე 604 მილიონი აქცია, ხოლო 20 ოქტომბერს ამ რიცხვმა 608 მილიონი შეადგინა. ეს გამოიწვია იმან, რომ 1987 წლის 19 ოქტომბერს 1986 წლის 31 დეკემბერთან შედარებით DJIA ინდექსი 22,6%–ით დაეცა, რამაც აბსოლიტურ ფინანსურ გამოსახულებაში 500 მილიარდი ამერიკული დოლარი შეადგინა.

ფინანსური კრიზისის ერთერთი ძირითადი გამომწვევი მახასიათებელია ინფლაცია – ფასების საერთო დონის ზრდა, რომელიც არსებით გავლენას ახდენს მაკროეკონომიკაზე. ინფლაცია ფასების ინდექსით იზომება და ურთულესი მათემატიკური მოდელებით აღიწერება. ინფლაციის სათანადო მართვა სპეციალისტებისთვის მუდმივ თავსატეხს წარმოადგენს. საინტერესოა მოვიტანოთ ზოგიერთი ფაქტი. მაგალითად გერმანიაში 1923 წელს ფასების დონე დაახლოებით 10^{12}–ჯერ გაიზარდა. ამასთან ინფლაცია ისე სწრაფად იზრდებოდა, რომ რესტორანში სადილის შემდეგ ორჯერ მეტი თანხა იყო გადასახდელი, ვიდრე სადილის შეკვეთის დროს. ინფლაციის რეკორდული ტემპი კი დაფიქსირდა

უნგრეთში 1949 წლის აგვისტოში, როდესაც ფასების დონე მიახლოებით 10^{25}–ჯერ გაიზარდა. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ საქართველოში 1990–იან წლებში ეროვნული ვალუტის – ლარის შემოღებამდებრუნვაში იყო სრულიად გაუფასურებული მილიარდობით კუპონი.

გვინდა შევნიშნოთ, რომ სამწუხაროდ, სხვადასხვა ობიექტურმა და სუბიექტურმა მიზეზებმა 2008 წელს გამოიწვია მსოფლიო ფინანსური კრიზისი, რომელმაც უამრავი სახის უარყოფითი გავლენა იქონია თითქმის ყველა ქვეყანაზე და, ცხადია, საქართველოზეც.

§2. ფინანსური ნაკადები

ფინანსურ ოპერაციებში ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი ცვლადი სიდიდეებია ფული და დრო. სწორედ ეს ორი ცვლადი შეადგენს დეტერმინისტული ფინანსური მოდელების ძირითად ელემენტებს. ფულს დროითი ღირებულება აქვს: ფულის ერთი და იგივე რაოდენობას დროის სხვადასხვა მომენტში სხვადასხვა ღირებულება აქვს. დრო გაიზომება T აბცისთა ღერძზე, ხოლო ფული M –ორდინატთა ღერძზე, რაც საშუალებას იძლევა დროსა და ფინანსური ოპერაციის შესაბამის თანხას შორის დამოკიდებულება გამოვსახოთ გრაფიკულად, ან სხვადასხვა სქემის სახით.

განასხვავებენ ფინანსური ოპერაციების ორ კლასს: პირველ კლასს შეადგენს ე.წ. მყისიერი სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროის მომენტებში (მაგ. ფასი, კურსი), ხოლო მეორე კლასს – ე.წ. ინტერვალური სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროით ინტერვალებში (მაგ. საპროცენტო განაკვეთები, მოგება, დივიდენდი).

აღვნიშნოთ დროის t მომენტში რაიმე აქტივის, მაგალითად, აქციის, ღირებულება ან ფინანსური ოპერაციის შესაბამისი თანხის რაოდენობა C_t სიმბოლოთი. (t, C_t) წყვილს მყისიერი ფინანსური ხდომილობა ან პირველი რიგის ხდომილობა ეწოდება. ვთქვათ, გვაქვს დროის მომენტები $t_0, t_1, \dots, t_n$ და ამ მომენტებში შეტანილი (გატანილი) თანხის მნიშვნელობებია $C_{t_0}, C_{t_1}, \dots, C_{t_n}$. ხშირად$(t_k, C_{t_k})$ ხდომილობებისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ ჩაწერას (t_k, C_k), $k = 0,1, \dots, n$. პირველი რიგირ ხდომილობების მიმდევრობას

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), \dots, (t_n, C_n)\} \tag{1.2.1}$$

ეწოდება პირველი რიგის ფინანსური ან ფულადი ნაკადი. ამასთან C_k, $k = 0,1,\ldots,n$, შეიძლება იყოს შეტანილი ან გაცემული თანხა. პირველ შემთხვევაში C_k ჩაიწერება დადებითი, ხოლო მეორე შემთხვევაში - უარყოფითი რიცხვებით. მაგალითად, თუ დროის ერთეულია თვე და $t_0 = 0$ მომენტში შეტანილი იყო საწყისი თანხა 10000, შემდეგ პირველი და მეორე თვის ბოლოს გატანილი იყო, შესაბამისად, 500 და 300, ხოლო მესამე თვის ბოლოს შეტანილი იყო 400, მაშინ გვექნება ფინანსური ნაკადი

$$CF = \{(0,10000),(1,-500),(2,-300),(3,400)\}$$

ინტერვალური ფინანსური ხდომილობა დაკავშირებულია ინტერვალურ ფინანსურ სიდიდესთან და განიმარტება შემდეგნაირად. ვთქვათ J რაიმე დროითი ინტერვალი (შუალედი), მაგალითად, $[t_1,\ t_2)$ ან $(t_1,\ t_2]$ ხოლო C იყოს ამ დროითი ინტერვალის პერიოდში შეტანილი ან გაცემული თანხის რაოდენობა. (J,C) წყვილს ინტერვალური ხდომილობა ან მეორე რიგის ხდომილობა ეწოდება,

შევნიშნოთ, რომ პრაქტიკაში ძირითადად, გამოიყენება პირველი რიგის ხდომილობები. ამ მიზნით ხდება (J,C) ინტერვალური ხდომილობის გარდაქმნა (τ,C) მყისიერ ხდომილობად. ამ ოპერაციას აქტუალიზაცია ეწოდება. თუ $J = [t_1,\ t_2]$ და ფინანსური ოპერაცია ხდება $\tau = t_1$ ან $\tau = t_2$ მომენტში, მაშინ ასეთ აქტუალიზაციის სქემას შესაბამისად ავანსირება და ფინალიზაცია ეწოდება.

ცხადია, შეიძლება პირველი რიგის ხდომილობების საშუალებით მეორე რიგის ხდომილობების განხილვა. მაგალითად, თუ გვაქვს პირველი რიგის ორი ხდომილობა $(t_1,C_1),(t_2,C_2)$, მაშინ შეიძლება განვიხილოთ მეორე რიგის ხდომილობა (J,C) სადაც $J = [t_1,\ t_2]$ და $C = C_{t_2} - C_{t_1}$. შემოვიტანოთ ახლა პირველი რიგის ფინანსური ნაკადის რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია. $CF = \{t_k,C_k\}$, $k = ,1,\ldots,n$, ნაკადის α რიცხვზე ნამრავლი არის ნაკადი, რომელიც აღინიშნება და განიმარტება ტოლობით.

$$\alpha CF = \{\,(t_1,\alpha C_1),\ldots,(t_n,\alpha C_n)\} \tag{1.2.2}$$

ვთქვათ გვაქვს ორი ნაკადი

$$CF_1 = \left\{(t_i^{(1)},C_i^{(1)})\right\},\ \ i = ,1,\ldots,m, \tag{1.2.3}$$

$$CF_2 = \left\{(t_k^{(2)},C_k^{(2)})\right\},\ \ k = ,1,\ldots,n, \tag{1.2.4}$$

ამ ორი ნაკადის ჯამი აღინიშნება $CF_1 + CF_2$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად. ჯამი შედგება $(t_i^{(1)}, C_i^{(1)})$ და $(t_k^{(2)}, C_k^{(2)})$ ხდომილობებისაგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} \neq t_k^{(2)}$ და, აგრეთვე, და $(t_i, C_i^{(1)} + C_k^{(2)})$ ხდომილობებისაგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} = t_k^{(2)}$. თუ $C_i^{(1)} + C_k^{(2)} = 0$, მაშინ ჯამში $(t_i, 0)$ ხდომილობის ჩაწერა არ ხდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. განვიხილოთ ორი ნაკადი

$$CF_1 = \{(0,100), (2,-200), (3,400), (5,100), (6,-300)\ \}$$

$$CF_2 = \{(2,400), (4,700), (5,-150), (6,650), (7,800)\ \}$$

იპოვეთ $2CF_1 + CF_2$ ნაკადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გამოვთვალოთ $2CF_1$ ნაკადი, გვაქვს

$$2CF_1 = \{(0,200), (2,-400), (3,800), (5,200), (6,-600)\ \}$$

შემდეგ გვაქვს

$$2CF_1 + CF_2 = \{(0,200), (3,800), (4,700), (5,50), (6,50), (7,800)\}.$$

შევნიშნავთ, რომ რადგან $t = 2$ მომენტში $22C_2^{(1)} + C_2^{(2)} = 400 - 400 = 0$, ამიტომ ხდომილობა (2,0) არ შედის $2CF_1 + CF_2$ ჯამში განმარტების თანახმად.

ფინანსური ნაკადი $CF = \{t_k, C_k\}$, $k = ,1, \dots, n$, ხშირად ჩაიწერება არა როგორც მიმდევრობა, არამედ როგორც დროის გარკვეული ფუნქცია. CF ნაკადის ფულადი ანუ გადახდის ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$C(t) = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad t \neq t_k \\ C_k, & \text{თუ} \quad t = t_k \end{cases} \tag{1.2.5}$$

ვთქვათ $CF = \{t_k, C_k\}$, $k = ,1, \dots, n$, გადახდის ფუნქციაა $C(t)$. აღვნიშნოთ $\tilde{C}(t)$–ით λ რიცხვის CF ნაკადზე ნამრავლის ანუ $\lambda \cdot CF$ ნაკადის გადახდის ფუნქცია. სამართლიანია ტოლობა

$$\tilde{C}(t) = \lambda \cdot C(\,t) \tag{1.2.6}$$

ვთქვათ, ახლა $C_1(t)$ და $C_2(t)$ არის (1.2.3) და (1.2.4) ტოლობებით მოცემული CF_1და CF_2 ნაკადების გადახდის ფუნქციები, შესაბამისად, ხოლო $C(\,t)$ არის $CF = CF_1 + CF_2$ჯამის გადახდის ფუნქცია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$C(t) = C_1(t)\ +\ C_2(t) \tag{1.2.7}$$

მეორე რიგის ან ინტერვალური ფინანსური ნაკადი ეწოდება მეორე რიგის ხდომილობების მიმდევრობას

$$\overline{CF} = \{ (J_1, C_1), \dots, (J_n, C_n)\}, \tag{1.2.8}$$

სადაც $J_i = [t_{i-1},\ t_i)\ \ i = ,1, \dots, n,$ წყვილ–წყვილად თანაუკვეთი დროითი ინტერვალებია, $J_i \cap J_k = \emptyset,\ \ i \neq k \quad i, k = ,1, \dots, n.$ მეორე რიგის აქტუალიზაციის ოპერაციის ანალოგიურად შეიძლება მეორე რიგის ნაკადის აქტუალიზაცია, მართლაც მეორე რიგის (1.2.8) ნაკადის ყოველი ხდომილობის აქტუალიზაციით მივიღებთ შესაბამის პირველი რიგის ნაკადს. ამასთან ავანსირებული და ფინალიზირებული პირველი რიგის ნაკადები ჩაიწერება

$$\mathrm{Adv}(\overline{CF}) = CF^a = \{ (t_0, C_1), \dots, (t_{n-1}, C_n)\}, \tag{1.2.9}$$

$$\mathrm{Fin}(\overline{CF}) = CF^f = \{ (t_1, C_1), \dots, (t_n, C_n)\}, \tag{1.2.10}$$

შესაბამისად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 2. განვიხილოთ მეორე რიგის ნაკადი

$$\overline{CF} = \{ (J_1, C_1), (J_2, C_2), (J_3, C_3)\},$$

სადაც $J_1 = [0, 1),\ J_2 = [1, 2),\ J_3 = [2, 3),\ C_1 = 100, C_2 = 200, C_3 = 300$

იპოვეთ ავანსირებული CF^a და ფინალიზირებული CF^f ნაკადები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . თუ გამოვიყენებთ ავანსირების და ფინალიზაციის ოპერატორებს, მაშინ გვექნება

$$CF^a = \{ (0, 100), (1, 200), (2, 300)\},$$

$$CF^f = \{ (1, 100), (2, 200), (3, 300)\}$$

შეგვიძლია, აგრეთვე, განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადის მეორე რიგის ნაკადად გარდაქმნის ოპერაცია. თუ გვაქვს, მაგალითად, (1.2.2) ნაკადი, მაშინ ის შეიძლება ჩავწეროთ (1.2.8) ნაკადის სახით. მაგალითად, თუ გვაქვს ნაკადი

$$CF = \{ (t_1, C_2), (t_2, C_2), (t_3, C_3), (t_4, C_4)\},$$

მაშინ

$$\overline{CF} = \{ (J_1, B_1), (J_2, B_2)\},$$

სადაც $J_1 = [t_1, t_2],\ J_2 = [t_3, t_4] \quad B_1 = C_2 - C_1,\ B_2 = C_4 - C_3.$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.3. განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადი

$$CF = \{(0, 100), (2, 200), (3, 400), (5, 700) \}$$

ჩავწეროთ ამ მონაცემებით მეორე რიგის ნაკადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . განვიხილოთ არაგადამკვეთი ინტერვალები $J_1 = [0, 2]$, $J_2 = [3, 5]$ და სიდიდეები $B_1 = 200 - 100 = 100$, $B_2 = 700 - 400 = 300$. CF ნაკადის შესაბამისი მეორე რიგის ნაკადი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\overline{CF} = \{([0, 2], 100), ([3, 5], 300)\}$$

ფინანსური ნაკადების გამოყენების საილუსტრაციოდ მოკლედ შევეხებით სპეციალურ ინტერვალურ ნაკადს, რომელსაც რენტა ეწოდება.

განვიხილოთ ე. წ. გადახდების რეგულარული ნაკადები, რომელიც ბუნებრივად წარმოიშობა უამრავ ფინანსურ ოპერაციასა და გარიგებაში. ასეთია მაგალითად, ობლიგაციაზე და ანაბარზე საპროცენტო სარგებლის დარიცხვა, დივიდენდების გადახდა, პენსიის გადახდა და სხვა. აქ საჭიროა დროითი და ფინანსური ასპექტის განხილვა. სწორედ დროითი ასპექტია დაკავშირებული რეგულარობასთან. მაგალითად, გადახდები წარმოებს რეგულარულად ყოველი თვის, კვარტლის ან წლის ბოლოს. ფინანსური ასპექტი დაკავშირებულია უშუალოდ გადახდების სტრუქტურასთან და რაოდენობასთან. მაგალითად, გადახდები ერთნაირია, იზრდება ან კლებულობს ერთი და იგივე სიდიდით. რენტა არის მეორე რიგის რეგულარული ფინანსური ნაკადი.

$$\overline{CF} = \{ (J_1, C_1), \dots, (J_n, C_n), \dots. \}, \qquad (1.2.11)$$

სადაც იგულისხმება, რომ $J_1, \dots, J_n, \dots$, ინტერვალების (რენტის პერიოდების) სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია

$$|J_1| = \dots = J_n = \dots = h \qquad (1.2.12)$$

h რიცხვს რენტის პერიოდი ეწოდება, ხოლო $J_k = (t_{k-1}, t_k)$ ინტერვალების ბოლოებს ანუ t_k, $k = 0,1, \dots$, დროის მომენტებს რენტის კრიტიკული მომენტები ეწოდება. ეს მომენტები ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია t_0 რენტის დასაწყისი, ხოლო სხვაობა h–ის ტოლია. ამრიგად, გვაქვს $t_k = t_0 + kh, k = 0,1, \dots$; რენტას ეწოდება ვადიანი, თუ J_k ინტერვალების რაოდენობა სასრულია, $k = 0,1, \dots n$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – უვადო. ბოლო $J_n = (t_{n-1}, t_n)$ ინტერვალის t_n მომენტს ვადიანი რენტის ბოლო ეწოდება, ხოლო $T = t_n - t_0$ რიცხვს რენტის ჰორიზონტი (სიგანე) ეწოდება.

რენტის ზოგიერთი გადასახადი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. J_k ინტერვალს ეწოდება გადამხდელი პერიოდი, თუ მას შეესაბამება არანულოვანი C_k გადახდა,

წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – ნულოვანი (ცარიელი). გადამხდელი პერიოდების რაოდენობას რენტის ვადა ეწოდება. პირველი გადამხდელი პერიოდის დასაწყისს რენტის ეფექტური დასაწყისი, ხოლო ბოლო გადამხდელი პერიოდის ბოლოს – რენტის ეფექტური დასასრული ეწოდება. თუ რენტის დასაწყისი და ეფექრური დასაწყისი ერთმანეთს ემთხვევა – რენტას მყისიერი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – გადავადებული წეწოდება. თუ რენტის ბოლო და ეფექტური დასასრული ერთმანეთს ემთხვევა რენტას დასრულებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი – არადასრულებული ეწოდება. თუ პერიოდი ერთი წლის ტოლია, რენტას ანუიტეტი ეწოდება. თუ რენტის ყველა გადახდა ერთმანეთის ტოლია $C_1 = \cdots = C_n$, რენტას მუდმივი ეწოდება, ხოლო თუ გადასახადები მონოტონურად იზრდება ან კლებულობს, რენტას მონოტონური ეწოდება. პრაქტიკაში ხდება რენტის აქტუალიზაცია პირველი რიგის ნაკადად. ასეთ შემთხვევაში ავანსირებული პირველი რიგის ნაკადს ავანსირებული, წინმსწრები ანუ პრენუმერანდო რენტა ეწოდება, ხოლო ფინალიზებულ პირველი რიგის ნაკადს – ფინალური, ჩვეულებრივი ანუ პოსტნუმერანდო რენტა ეწოდება.

ხშირად რენტის თითოეული პერიოდი (ან რომელიმე პერიოდი) იყოფა p ნაწილად და ყოველ ნაწილში გაიცემა ერთმანეთის ტოლი გადახდები. ასეთი სახის რენტებს p – ჯერადი ეწოდება. ასეთია, მაგალიტად, აქციაზე რენტა, როდესაც წლიური დივიდენდის გაცემა წარმოებს ყოველკვარტლურად ($p = 4$), ან კიდევ კუპონური რენტა ობლიგაციაზე, როდესაც წლიური კუპონური გადახდები გაიცემა ყოველი ნახევარი წლის პერიოდით და სხვა. თუ, მაგალითად, გვაქვს p –ჯერადი ერთწლიანი რენტა (p –ჯერადი ანუიტეტი) C–ს ტოლი წლიური გადახდით, მაშინ ხდება C/p სიდიდის p–ჯერ გადახდა. შევნიშნავთ, რომ ასეთი გადახდები (გადახდების ნაკადები) თითონ წარმოადგენს რენტას, რომელსაც მიკრორენტა ეწოდება.

$\overline{CF}$ რენტის p–ჯერადი დანაწილების ოპერაცია $D^{(p)}$-თი აღინიშნება, ხოლო ამ ოპერაციით მიღებული შესაბამისი რენტა აღინიშნება $D^{(p)}(\overline{CF})$ სიმბოლოთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 4. განვიხილოთ რენტა

$\overline{CF} = \{((0,1), 100), ((1,2), 200), ((2,3), 300)\}$.

1. იპოვეთ მესამე პერიოდის შესაბამისი 3–ჯერადი მიკრორენტა;

2. იპოვეთ მთლიანი რენტის შესაბამისი 2–ჯარადი მიკრორენტა

ა მ ო ხ ს ნ ა . ადვილი შესამოწმებელია, რომ საძებნ მიკრორენტებს, შესაბამისად აქვს შემდეგი სახე

1. $D^{(3)} = \big((2,3), 300\big) =$

$$= \left\{\left(\left(2, \frac{7}{3}\right), 100\right), \left(\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right), 100\right), \left(\left(\frac{8}{3}, 3\right), 100\right)\right\}$$

2. $D^{(2)}(\overline{CF}) = \left\{\left(\left(0, \frac{1}{2}\right), 50\right), \left(\left(\frac{1}{2}, 1\right), 50\right), \left(\left(1, \frac{3}{2}\right), 50\right), \left(\left(1, \frac{3}{2}\right), 100\right), \left(\left(\frac{3}{2}, 2\right), 100\right),\right.$

2, 52, 150, 52, 3, 150

თუ $\overline{CF}$ რენტის p–ჯერადი მიკრორენტისათვის გამოვიყენებთ აქტუალიზაციის ორ ოპერაციას – ავანსირებას და ფინალიზაციას, მაშინ მივიღებთ, p–ჯერად ავანსირებულ და ფინალიზირებულ მიკრორენტებს (რენტებს), რომელიც აღინიშნება $\mathrm{Adv}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big)$ და $\mathrm{Fin}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big)$ სიმბოლოებით, შესაბამისად. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ სიდიდეებს გააჩნიათ შემდეგი თვისება

$$\mathrm{Adv}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big) = D^{(p)}(\,\mathrm{Adv}\,(\overline{CF})) \tag{1.2.13}$$

$$\mathrm{Fin}\big(D^{(p)}(\overline{CF})\big) = D^{(p)}(\,\mathrm{Fin}\,(\overline{CF})) \tag{1.2.14}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 5. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.4–ში განხილული რენტა

$$\overline{CF} = \big\{\big((0,1), 100\big), ((1,2), 200), ((2,3), 300)\big\}\,.$$

1. შევამოწმოთ (1.2.13) თვისება 2–ჯერადი მიკრორენტისათვის
2. შევამოწმოთ (1.2.14) თვისება 2–ჯერადი მიკრორენტისათვის

ა მ ო ხ ს ნ ა . გამოვთვალოთ (1.2.13) და (1.2.14) ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეები და, შესაბამისად, შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

1. გამოვთვალოთ (1.2.13) ტოლობის მარცხენა მხარე. მაგალითი 2.4–ში გამოთვლილი გვაქვს მიკრორენტა

   $D^{(2)}(\overline{CF}) =$

$$\left\{(0, 50), \left(\frac{1}{2}, 50\right), (1, 100), \left(\frac{3}{2}, 100\right), (2, 150), \left(\frac{5}{2}, 150\right)\right\}$$

გამოვთვალოთ ახლა (1.2.13) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$\text{Adv}\ (\overline{CF}) = \{(0,100),(1,200),(2,300)\}$$

მივიღეთ პირველი რიგის ავანსირებული ნაკადი. მისი შესაბამისი 2–ჯერადი რენტის გამოსათვლელად საჭიროა დროის ყველა მომენტთან ერთად განვიხილოთ, აგრეთვე, მათგან მარჯვნივ 1/2 –ის ტოლი სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. რიცხვი ½ გვაქვს იმიტომ, რომ ვიხილავთ 2–ჯერად რენტას და დასაყოფი ნაკადის მომენტებს შორის მანძილები ერთის ტოლია. გვექნება

$$D^{(2)}(\ \text{Adv}\ (\overline{CF})) =$$

$$= \left\{(0,50),\left(\frac{1}{2},50\right),(1,100),\left(\frac{3}{2},100\right),(2,150),\left(\frac{5}{2},150\right)\right\}$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$\text{Adv}\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = D^{(2)}(\ \text{Adv}\ (\overline{CF})).$$

2. გამოვთვალოთ (1.2.14) ტოლობის მარცხენა მხარე. $D^{(2)}(\overline{CF})$ მიკრორენტა გამოთვლილია შემდეგ გვაქვს

$$\text{Fin}\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) =$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2},50\right),(1,50),\left(\frac{3}{2},100\right),(2,100),\left(\frac{5}{2},150\right),(3,150)\right\}.$$

გამოვთვალოთ ახლა (1.2.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$\text{Fin}\ (\overline{CF}) = \{(1,100),(2,200),(3,300)\}.$$

მივიღეთ ისევ პირველი რიგის, მხოლოდ უკვე ფინალიზირებული ნაკადი. მისი შესაბამისი 2–ჯარადი რენტის გამოსათვლელად ამ შემთხვევაში საჭიროა დროის ყოველ მომენტთან ერთად განვიხილოთ, აგრეთვე, მათგან მარცხნივ 1/2 –ის ტოლი სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. ამ პროცედურის ჩატარებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\text{Fin}\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = D^{(2)}(\ \text{Fin}\ (\overline{CF}))$$

პირველი რიგის ნაკადისათვის (1.2.5) გადახდის ფუნქციის ანალოგი დროითი J შუალედისათვის განიმარტება შემდეგნაირად. ნაკადის ნეტო სიდიდე ეწოდება გამოსახულებას

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}; J) = \sum_{k:t_k \in J} C_k \tag{1.2.15}$$

ანუ ნაკადის ნეტო სიდიდე არის ჯამი ნაკადის იმ C_k სიდიდდეებისა, რომლისთვისაც დროითი t_k მომენტები ეკუთვნის დროითი J ინტერვალს. შევნიშნავთ, ამასთან , რომ (1.2.15) რიცხვითი მნიშვნელობები დამოკიდებულია J ინტერვალის ბოლო წერტილების ინტერვალისათვის მიკუთვნებაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.6. განვიხილოთ ნაკადი

$$CF = \{(0, 300), (1, 100), (2, -200), (3, 400)\}$$

იპოვეთ NV(CF; [0,2)) და NV(CF; (0,3]) ნეტო სიდიდეები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (1.2.15) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}; [0,2)) = 300 + 100 = 400$$

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}; (0,3]) = 100 + (-200) + 400 = 300$$

ნეტო სიდიდეს გააჩნია შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $t_1 < t_2 < t_3$ დროის მომენტებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\mathrm{NV}(\mathrm{CF}; [t_1, t_3]) = \mathrm{NV}(\mathrm{CF}; [t_1, t_2]) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}; (t_2, t_3]) \tag{1.2.16}$$

როდესაც ხდება ინვესტორის მიერ თანხის დაგროვება, ე. ი. გვაქვს დაგროვების ანგარიში ანუ ფონდი, მაშინ ფონდის სიდიდე დროის t მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ ნეტო სიდიდეების საშუალებით. მართლაც ვთქვათ დროის საწყის t_0 მომენტში ფონდის სიდიდეა V_0, ხოლო დროის $t > t_0$ მომენტში – V_t. ფონდთან დაკავშირებული CF ნაკადისათვის V_t სიდიდე დროის t მომენტის ჩათვლით მოიცემა შემდეგი სახით

$$V_t \quad = V_0 + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}; (t_0, t]) \tag{1.2.17}$$

რომელსაც ბალანსის განტოლება ეწოდება. თუ გვაქვს დროის ნებისმიერი სამი მომენტი $t_0 < t_1 < t_2$, მაშინ (1.2.17) განტოლებიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$V_{t_2} \quad = V_{t_1} + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}; (t_1, t_2]) \tag{1.2.18}$$

რომელსაც, აგრეთვე, ბალანსის განტოლება ეწოდება. მართლაც, გვაქვს

$$V_{t_2} \quad = V_0 \ + \mathrm{NV}(\mathrm{CF}; (t_0, t_2]) =$$

$$= V_0 \ + \mathrm{NV}(\mathrm{CF};(t_0,t_1]) + \mathrm{NV}(\mathrm{CF};(t_1,t_2]) =$$
$$= V_{t_1} \ + \mathrm{NV}(\mathrm{CF};(t_1,t_2]).$$

ამრიგად, ნეტო სიდიდე გვაძლევს დროის $(t_1,t_2]$ შუალედში ფონდში შესული და ფონდიდან გასული თანხების საერთო ბალანსს, ანუ დროის მოცემულ შუალედში ფონდის სიდიდის ცვლილებას

$$V_{t_2} – V_{t_1} = \mathrm{NV}(\mathrm{CF};(t_1,t_2]) \tag{1.2.19}$$

4. ფინანსური ნაკადები გამოიყენება სხვადასხვა სახის ფინანსური ოპერაციების ანალიზში, მაგალითად, ფინანსურ გარიგებაში, რომელიც მდგომარეობს რაიმე საქონლის ან ფინანსური აქტივის ყიდვა–გაყიდვაში. ვთქვათ დროის t_1 მომენტში ვიყიდე რაიმე აქტივი p_1 ფასად, ხოლო დროის $t_2 > \ t_1$ მომენტში გავყიდე იგი p_2 ფასად. ამრიგად, გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \{(t_1,-p_1),(t_2,\ p_2)\} \tag{1.2.20}$$

რომელსაც წარმოქმნილი ნაკადი ეწოდება. გარიგების პერიოდში მყიდველმა შეძლება მიიღო მიმდინარე შემოსავალი. ასე მაგალითად, აქციის მფლობელმა შეიძლება მიიღოს გარკვეული დივიდენდი, ხოლო აქციის მფლობელმა მიიღოს საპროცენტო (საკუპონო) შემოსავალი. შევნიშნოთ, რომ მიმდინარე შემოსავალი შეიძლება მიიღოს, აგრეთვე, რაიმე ქონების მყიდველმაც, მაგალითად, არენდის გადასახადის სახით.

ვთქვათ, $J = [t_1,t_2]$ პერიოდში მიმდინარე შემოსავალი არის D_j. მაშინ ინანსური გარიგება შეიძლება აღვწეროთ ნაკადის წყვილით: პირველი რიგის ნაკადით

$$\mathrm{CF}_1 = \{(t_1,-p_1),(t_2,\ p_2)\} \tag{1.2.21}$$

და მეორე რიგის ნაკადით

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \{\ (J,D_j)\} \tag{1.2.22}$$

ჯამური ანუ სრული მიმდინარე შემოსავალი იქნება

$$I_J = \ D_j + \ P_J \tag{1.2.23}$$

სადაც $P_J = P_2 – P_1$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 8. ვთქვათ, $J = [t_1, t_2]$ პერიოდია ერთი წელი. წლის დასაწყისში (t_1 მომენტში) ვიყიდეთ აქცია $p_1 = 100$ ფასად, რომელიც გავყიდეთ წლის ბოლოს (t_2 მომენტში) $p_2 = 140$ ფასად, ამასთან ერთად, J პერიოდში მივიღეთ დივიდენდი $D_j = 10$. იპოვეთ სრული მიმდინარე შემოსავალი და ფინანსური გარიგების შესაბამისი პირველი და მეორე რიგის ნაკადები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (1.2.22) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$I_J = 10 + (140 - 100) = 50$$

(1.2.21) და (1.2.22) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \{(t_1, -100), (t_2, 140)\},$$

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \{([t_1, t_2], 10)\}$$

შევნიშნავთ, რომ მიმდინარე შემოსავლის გადახდა ხდება, როგორც წესი $J = [t_0, t_1]$ პერიოდის ბოლო t_1 მომენტში ან სერიული გადახდებით. მაგალითად, დივიდენდები აქციაზე შეიძლება გადავიხადოთ ერთჯერ წლის ბოლოს ან ყოველი კვარტლის ბოლოს. მიმდინარე შემოსავლის ერთჯერ გადახდა პერიოდის ბოლოს ფაქტობრივად წარმოადგენს $\overline{\mathrm{CF}}_2$ ნაკადის ფინალიზაციას და გვაქვს.

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \{ (t_2, D_j)\} \tag{1.2.24}$$

რომელიც მხოლოდ ერთი $\{ (t_2, D_j)\}$ ფინანსური ხდომილობისგან შედგება. ეს ხდომილობა წარმოადგენს დროის t_2 მომენტში D_j მიმდინარე შემოსავლის გადახდას. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვაქვს ფინანსური გარიგება განსხვავებული რიგის (1.2.21) და (1.2.22) ნაკადების მაგივრად აღვწეროთ ერთი პირველი რიგის ნაკადის საშუალებით.

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 \tag{1.2.25}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.9. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.6_ის მონაცემები. ჩაწერეთ (1.2.25) ტოლობა ფინანსური გარიგებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველ რიგში ჩავწეროთ $\overline{\mathrm{CF}}_2$ნაკადის შესაბამისი ფინალიზირებული ნაკადი. გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \{t_2, 10\}.$$

ახლა, თუ გავიხსენებთ პირველი რიგის ორი ნაკადის ჯამის სტრუქტურას, მაშინ გვექნება

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 =$$

$$\{(t_1, -100), (t_2, 140)\} + \{(t_2, 10)\} = \{(t_1, -100)\} + \{(t_2, 150)\}$$

ზემოთ აღწერილი ფინანსური გარიგების ანალოგიურ სიტუაციასთან გვაქვს საქმე მარტივი საკრედიტო გარიგების შემთხვევაშიც. ვთქვათ კრედიტორმა გასცა დროის t_0 მომენტში p რაოდენობის სესხი (ძირითადი ვალი), რომელიც დებიტორმა (სესხის ამღებმა) უნდა დაფაროს დროის $t_1 > t_0$ მომენტში გარიგების პროცენტის გათვალისწინებით $[t_0, t_1]$ პერიოდში. კრედიტორის პოზიციიდან მისი მიმდინარე შემოსავალია I_J, სადაც $J = [t_0, t_1]$. ამ გარიგებისათვის გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \{(t_0, -p), (t_1, p)\}$$

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \{(J, I_J)\}$$

დებიტორის მიერ პროცენტის გადახდა ხდება ან გარიგების დასაწყისში (t_0 მომენტში) ან გარიგების ბოლოს (t_1 მომენტში). პირველ შემთხვევაში გვაქვს

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \{ (t_1, I_J)\}$$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(t_0, -p), (t_1, p + I_J)\}$$

მეორე შემთხვევაში გვაქვს

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \{ (t_0, I_J)\}$$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(t_0, -p + I_J), (t_1, p)\}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. 10. ვთქვათ, კრედიტორმა $t_0 = 0$ მომენტში გასცა სესხი $p = 1000$ ერთი წლის ვადით, რომელიც დებიტორმა უნდა დააბრუნოს $t_1 = 1$ მომენტში წლის ბოლოს სესხის 10%_ის გათვალისწინებით. ცაწერეთ გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადები ფინალიზაციისა და ავანსირების შემთხვევაში.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველ რიგში გამოვთვალოთ მიმდინარე სემოსავალი. გვაქვს $I_J = 100$, $J = [0,1]$. შემდეგ გვაქვს

$$\mathrm{CF}_1 = \{(0,-1000),(1{,}1000)\},$$

$$\overline{\mathrm{CF}}_2 = \{([0,1],100)\}$$

ფინალიზაციის შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Fin}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \{\,(1,100)\},$$

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(0,-1000),(1{,}1000)\} + \{(1,100)\} =$$

$$\{(0,-1000),(1{,}1100)\}$$

ავანსირების შემთხვევაში გვექნება

$$\mathrm{CF}_2 = \mathrm{Adv}(\overline{\mathrm{CF}}_2) = \{\,(0,100)\},$$

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(0,-1000),(1{,}1000)\} + \{(0,100)\} =$$

$$\{(0,-900),(1{,}1000)\}$$

§3. ფინანსური ოპერაციები და სქემები

1. განვიხილოთ მარტივი საკრედიტო გარიგება P_0 საწყისი თანხით დროის t_0 მომენტში და P_1თანხით დაფარვის t_1 მომენტში. ეს ოპერაცია წარმოადგენს დისკრეტულ ნაკადს

$$\mathrm{CF} = \{(t_0,B_0),(t_1,\ B_1)\} \tag{1.3.1}$$

სადაც $B_0 = P_0$ და $B_1 = P_1$. აქ არაფერია ნათქვამი საკრედიტო გარიგების მდგომარეობის შესახებ დროის იმ მომენტებისათვის, რომელიც (t_0,t_1) შუალედში მდებარეობს. თუ, მაგალითად, ხდება პროცენტის დარიცხვა ამ შუალედის ნებისმიერ t მომენტში $t_0 < t < t_1$, მაშინ გვაქვს ე.წ. დაგროვებული (დარიცხული) პროცენტის შესაბამისი თანხა I_t და დროის t მომენტისათვის გარიგების მდგომარეობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$B_t = B_0 + I_t \tag{1.3.2}$$

ცხადია თუ $t = t_0$, მაშინ $I_{t_0} = 0$ და $B_{t_0} = B_0$. თუ $t = t_1$, მაშინ გვექნება

$$B_{t_1} = B(t) = B_0 + I_{t_1} = B_1 \qquad (1.3.3)$$

(1.3.2), (1.3.3) ტოლობებში მთავარია შევნიშნოთ, რომ საკრედიტო გარიგების შესაბამისი ფინანსური პროცესი B_t დამოკიდებულია მხოლოდ დროზე და, აგრეთვე, ფიქსირებულ პარამეტრებზე t_0–ზე და B_0–ზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფინანსურ პროცესებზე შემთხვევითი ფაქტორების გავლენას გამოვრიცხავთ (არ ვითვალისწინებთ), ანუ ვიხილავთ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცესებს. ასეთი პროცესების დინამიკა (საწყისიB_0 თანხის ევოლუცია დროში) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი განტოლების სახით

$$B_t = B(t; t_0, B_0). \qquad (1.3.4)$$

შევიშნოთ, რომ ხშირად (t, C) ფინანსურ ხდომილობას აღნიშნავენ C_t სიმბოლოთთი, რომელსაც კიდევ (t მომენტში) „დათარიღებული“ თანხა ეწოდება. თუ გვაქვს ხდომილობა (τ, C) და $t_0 = \tau$, $B_0 = C$, მაშინ გვექნება კონკრეტული (ინდივიდუალური) ფინანსური პროცესი.

$$B_t = B(t; \tau, C).$$

ასეთ სემთხვევაში B_t–ს ეწოდება დროის t მომენტში (τ, C) ხდომილობის (C თანხის) მომავალი (დაყვანილი) მნიშვნელობა და აღინიშნება შემდეგნაირად

$$B_t = FV_t(\tau, C) \qquad t > \tau \qquad (1.3.5)$$

აქვე შევნიშნოთ რომ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცესში მისი საწყისი მდგომარეობა მთლიანად და ცალსახად განსაზღვრავს (წარმოქმნის) მის ყველა შემდგომ მომავალ მდგომარეობას .

ვიტყვით, რომ (t_2, C_2) ხდომილობა უშუალოდ ცვლის (ენაცვლება) (t_1, C_1) ხდომილობას დეტერმინისტული პროცესის მიმართ, თუ

$$C_2 = B(t_2, t_1, C_1), \quad \textit{როცა}\ t_2 \geq t_1,$$

$$C_1 = B(t_1, t_2, C_2), \quad \textit{როცა}\ t_1 \geq t_2.$$

B_t პროცესს ეწოდება სრულიად დეტერმინისტული (განსაზღვრული), თუ ნებისმიერი (τ, C) ხდომილობისათვის და დროის P მომენტისათვის არსებობს ერთადერთი

ხდომილობა (P, V), რომელიც უშუალოდ ცვლის (τ, C) ხდომილობას. ამრიგად, სრულად დეტერმინისტული პროცესისათვის გვაქვს: თუ (P, V) ცვლის (τ, C)– ს, $p \geq \tau$, მაშინ

$V = B(p, \tau, C)$ ანუ $V = FV_p(\tau, C)$

ხოლო თუ (τ, C) ცვლის (P, V)– ს, $\tau \geq p$, მაშინ

$C = B(p, \tau, V)$ ანუ $C = FV_p(\tau, V)$

თუ ხდომილობა (P, V) წარმოქმნის მომავალში (τ, C) ხდომილობას, რაც $C = FV_\tau(p, V)$ ტოლობით ჩაიწერება, ანალოგიურად შეიძლება ჩავწეროთ $p < \tau$ მომენტისათვის (τ, C) ხდომილობის (ანუ C თანხის) დღევანდელი ანუ მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლობით

$$V = V_p = PV_p(\tau, C)\ p < \tau, \tag{1.3.6}$$

ამრიგად (1.3.5) და (1.3.6) ტოლობების თანახმად გვაქვს: თუ $p \geq \tau$, მაშინ $B_p = FV_p(\tau, C)$ არის C თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის p მომენტში და თუ $p < \tau$, მაშინ $V_p = PV_p(\tau, C)$ არის მომავალში τ მომენტში C თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის p მომენტში ანუ მიმდინარე (დღევანდელი p მომენტში) მნიშვნელობა.

ორ (t_1, C_1) და (t_2, C_2) ხდომილობას ეწოდება ექვივალენტური დროის p მომენტის მიმართ, თუ ისინი ცვლიან ერთი და იგივე (p, V) ხდომილობას. ამ ფაქტს $C_1 \overset{p}{\sim} C_2$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამასთან p მომენტს პოლუსი ეწოდება.

ვთქვათ გვაქვს (t, C) ხდომილობა და p პოლუსი. გამოსახულებას

$$V_p = FV_p(t, C) = A(t,\ p;\ C)\ p \geq t, \tag{1.3.7}$$

ეწოდება კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილობის მომავალ მდგომარეობას. ანალოგიურად, გამოსახულებას

$$V_p = PV_p(t, C) = D(t,\ p;\ C)\ p \leq t, \tag{1.3.8}$$

ეწოდება დისკონტირების ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილობის მიმდინარე მდგომარეობას.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

$$(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2 C_2) \Leftrightarrow PV_p(t_1, C_1) = PV_p(t_2, C_2),$$

$$A(p,p;\ C) = D(p,p;\ C) = C.$$

ბოლო ტოლობას კიდევ ნორმირების თვისება ეწოდება.

თუ $C\ = 1$, მაშინ (1.3.7), (1.3.8) ტოლობებიდან გვექნება

$$A(p,t;\ C) = C \cdot A(p,t\ ;1) = a(t,\ p), \quad\ p \geq t \tag{1.3.9}$$

$$D(p,t;\ C) = C \cdot D(p,t;1) = d(t,\ p), \quad\ p \leq t \tag{1.3.10}$$

შევნიშნავთ რომ $a(t,\ p)$ და $d(t,\ p)$ ფუნქციებს ზრდის და დისკონტირების კოეფიციენტები ეწოდება, შესაბამისად, ხოლო (1.3.9), (1.3.10) ტოლობებს C თანხის მიმართ ერთგვაროვნების თვისება.

კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ფინანსური კანონები შეიძლება ერთი ზოგადი ფინანსური კანონის სახით ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$F(t,p;C) = \begin{cases} A(t,p;\ C),\ \textit{თუ}\ \ p \geq t, \\ \\ D(t,p;\ C),\ \textit{თუ}\ p \leq t, \end{cases}$$

$$v(t,p =)F(t,p;1) = \begin{cases} a(t,p), & \textit{თუ}\ \ p \geq t, \\ \\ d(t,p), & \textit{თუ}\ \ p \leq t. \end{cases}$$

კაპიტალიზაციის და დისკონტირების კანონები დროში ერთგვაროვანია, ანუ ნებისმიერი $T > 0$ სიდიდისათვის გვაქვს

$$a(t+T,p+T) = a(t,p)$$

$$d(t+T,p+T) = d(t,p)$$

ვთქვათ, სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი ტოლობები:

$$a(t,p)\cdot\ d(p,t\ ) = 1,\ \ t \geq\ p$$

$$a(t,\tau)a(\tau,t) = a(\mathrm{t,p}),$$

$$d(t,\tau)d(\tau,t) = d(\mathrm{t,p}),$$

ასეთ შემთხვევაში პირველ ტოლობას შეუღლების თვისება ეწოდება, ხოლო ბოლო ორს – ტრანზიტულობის თვისება. ამასთან, თუ ტრანზიტულობის თვისება ერთდროულად სრულდება კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონებისათვის, მაშინ

$$v(t,p) = v(t,\tau)\cdot v(\tau,p),$$

ანუ რაც იგივეა

$$PV_p(t,C) = PV_p(PV_\tau(t,C))$$

კაპიტალიზაციის ორი კანონი $a_1(t,p)$ და $a_2(t,p)$ ექვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t,C) ხდომილობისათვის დროის p მომენტში, $p > t$, ისინი ერთი და იგივე ხდომილობას ცვლის. ანალოგიურად, დისკონტირების ორი კანონი $d_1(t,p)$ და $d_2(t,p)$ თუ ნებისმიერი (t,C) ხდომილობისათვის ისინი ერთი და იგივე ხდომილობას ცვლის.

იმ შემთხვევაში, როცა ზოგადი ფინანსური კანონი $F(t,p;C)$ ერთგვაროვანია, მაშინ გვაქვს დაყვანის ოპერაციის ადიციურიბის და ერთგვაროვნობის შესაბამისი თვისებები p და t ფიქსირებული მომენტებისათვის

$$PV_p(t,C_1+C_2) = PV_p(t,C_1) + PV_p(t,C_2)$$
$$PV_p(t,\lambda C_1) = \lambda PV_p(t,C_1)$$

ერთგვაროვან შემთხვევაში დაყვანის PV_p ოპერაციისათვის გვექნება:

$$PV_p(t,C) = PV_p(t,C \cdot 1) = CPV_p(t,1).$$

რიცხვს $PV_p(t,1) = v(t,p)$ ეწოდება დაყვანის კოეფიციენტი, ანუ დისკონტირების განზოგადოებული კოეფიციენტი.

განვიხილოთ რაიმე ხდომილობა (t,C_t) მოცემული p და τ დროითი მომენტებისათვის დაყვანის ფარდობითი ოპერაცია განიმარტება ტოლობით

$$PV_\tau^{(p)}(t,C_t) = C_t \cdot \frac{v(t,p)}{v(\tau,p)}\,. \qquad (1.3.11)$$

შევნიშნოთ, რომ, როცა $p = \tau$, მაშინ $PV_p^{(p)} = PV_p$.

ფინანსურ გარიგებებში დროის ძირითად (საბაზისო) ერთეულად განიხილება წელი, თვე, თვის რიცხვი. წუთი, წამი და სხვა. ამიტომ ფინანსური ხდომილობის დათარიღებას (კალენდარის შემოღებას) არსებითი მნიშვნელობა აქვს. ჩვენ განვიხილავთ დათარიღების შემდეგ სამეულს:

თარიღი=⟨დღე, თვე, წელი⟩.

ამასთან იგულისხმება, რომ თარიღის ყოველ კომპონენტს გააჩნია ცვლილების ბუნებრივი დიაპაზონი. ასე მაგალითად, დღის და თვის შესაძლო მნიშვნელობებია, სესაბამისად, სიმრავლეები {1,2, . . . , 31}, {1,2, . . . , 12}, ხოლო წელმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვითი მნიშვნელობა {1,2, . . .}. ამრიგად, სამეული <21, 7, 2005> აღწერს თარიღს: „2005 წლის 21 ივლისი“ ან შემოკლებით „21.07.05“.

თარიღისა და მისი კომპონენტებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\partial = \langle\, d, m, y \,\rangle,$$

სადაც, d, m და y სიმბოლოები აღნიშნავს დღეს, თვეს დაწელს, შესაბამისად. წლის შუალედისათვის განიხილება ორი შემთხვევა: y წლის (წელი y ნომრით) $[\langle\, 1, 1, y \,\rangle$, $\langle\, 31, 12, y \,\rangle]$ შუალედი არის სტანდარტული კალენდარული წელი ანუ კიდევ $[\langle\, 1, 1, y \,\rangle$, $\langle\, 1, 1, y+1 \,\rangle]$ შუალედი, კალენდარული წლის შუალედის მაგალითია $[\langle\, 31, 03, 1998 \,\rangle$, $\langle 3\ 1, 03, 1999 \,\rangle]$ შუალედი. ამასთან ნაკიანი წლის დროს გვაქვს 366 დღე, წინააღმდეგ შემთხვევაში –365 დღე, სტანდარტული წელი არის ნულოვანი, თუ მისი ნომერი y იყოფა ოთხზე და არ იყოფა ასზე, ან იყოფა ათასზე, ცხადია რომ გაყოფაში იგულისხმება უნაშთო გაყოფა.

ორ თარიღს $\partial_1 = \langle\, d_1, m_1, y_1 \rangle$ და $\partial_2 = \langle\, d_2, m_2, y_2 \rangle$ ეწოდება ერთსახელა, თუ ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ წლის ნომრით, ანუ $d_1 = d_2$, $m_1 = m_2$ და $y_1 \neq y_2$.

ვთქვათ, J რაიმე კალენდარული შუალედია წლებში. განვიხილოთ ორი ერთსახელა თარიღი $\partial_1 = \langle\, d_1, m_1, y_1 \rangle$ და $\partial_2 = \langle\, d_2, m_2, y_2 \rangle$ ე. ი. გვაქვს $|y_2 - y_1|$ სიგრძის J შუალედი. მაშინ ამ თარიღებს შორის დღეების ზუსტი რაოდენობა გამოითვლება ტოლობით

$$D(\partial_1,\ \partial_2) = 365\ \cdot |y_2 - y_1| + k, \tag{1.3.12}$$

სადაც k არის J შუალედში ოთხის ჯერადი რიცხვი, ანუ ნაკიანი თარიღების რაოდენობა. მაგალითად, თუ $\partial_1 = \langle\, 12, 4, 1980 \rangle$, $\partial_2 = \langle\, 12,4, 2002 \rangle$, მაშინ გვექნება

$$D(\partial_1, \partial_2) = 365\ \cdot 22 + 5 = 8035.$$

კალენდარული დროითი შუალედის დღეების რაოდენობა გამოითვლება ე.წ. $N(\partial)$ სტანდარტული ფუნქციის საშუალებით, რომელიც წარმოადგენს ∂ თარიღის რიგით ნომერს სტანდარტულ კალენდარულ წელში. შევნიშნავთ, რომ ნაკიანი და არანაკიანი წლებისათვის შედგენილია ცხრილები, რომლის მიხედვით ყოველ ∂ თარიღს გააჩნია თავისი რიგითი ნომერი $N(\partial)$. ამრიგად, თუ გვაქვს ორი თარიღი ∂_1 და ∂_2, მაშინ მათ შორის დღეების რაოდენობა დაითვლება ტოლობით:

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2\,) - N(\partial_1\,).$$

დროითი J შუალედის ხანგრძლივობა დღეებში გამოითვლება სხვადასხვა წესის გამოყენებით. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ზოგიერთ ძირითად წესს. მაგალითად, ზოგიერთი

სტანდარტული წესი, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დროითი შუალედის ხანგრძლივობას დღეებში და წლებში, მოიცემა ფორმულით

$$T = \frac{D(J)}{Y} \tag{1.3.13}$$

სადაც T და D დროის ხანგრძლივობაა, შესაბამისად წლებში და დღეებში, Y წლის გარკვეული წესით არჩეული რაოდენობაა, რომელსაც დივიზორი ეწოდება. წლიური დივიზორის ტიპიური მნიშვნელობებია: $Y = 360$ და $Y = 365$. თუ $D(J)$ არის J შუალედში დღეების ზუსტი რაოდენობა, მაშინ $Y = 365$ და $Y = 360$ წლიური დივიზორებისათვის (1.3.13) ფორმულის თანახმად გვექნება ორი სხვადასხვა წესი.

წ ე ს ი ACT/ 3 6 5. ამ წესის თანახმად (1.3.13) ტოლობისთვის გვაქვს:

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{Y}$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. შევნიშნოთ რომ ნაკიანი წელისთვის $D(J) = 366$, ე.ი. $T(J) > 1$, ხოლო არანაკიანი წელისთვის $D(J) = 365$ და $T(J) = 1$. თუ J_n არის n რაოდენობის წლების შუალედი, რომელშიც k რაოდენობის ნაკიანი წელია, მაშინ (1.3.13) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$T(J_n) = n + \frac{k}{365}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $k \approx n/4$, მაშინ ბოლო ტოლობაში აბსოლიტური ცდომილობა იქნება

$$\delta = \frac{n}{4 \cdot 365} = \frac{n}{1460} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-2} \cdot n$$

განვიხილოთ T–ს გამოთვლის შემდეგი მაგალითები:

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. ვთქვათ J არის პერიოდი: 14.02.1996–27.08.1996, მაშინ გვექნება

$$T = \frac{D(J)}{365} = \frac{195}{365} = 0{,}5243(\text{წელი})$$

წ ე ს ი ACT/ 3 6 0. ამ წესს კიდევ ბანკის (საბანკო) წესი ეწოდება, რომლის თანახმად გვაქვს

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{360}$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. ეს წესი ნაკიანი და არანაკიანი წლებისათვის, შესაბამისად, გვაძლევს

$$T = \frac{366}{360} = 1{,}0167 \text{ (წელი)},$$

$$T = \frac{365}{360} = 1{,}0139 \text{ (წელი)}$$

შევნიშნავთ, რომ ზოგჯერ ხდება ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა მუდმივი – 365 დღიანი დივიზორის დროს, ზოგჯერ კი ხდება დივიზორის მნიშვნელობად 366 დღის განხილვა. პირველი შემთხვევა მიღებულია ე. წ. იაპონურ წესში, რომლის თანახმად ხდება ყველა ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა.

წ ე ს ი ACT / 3 6 5, ი ა პ ო ნ ი ა . თუ J არის პერიოდი k რაოდენობის ნაკიანი თარიღით, მაშინ

$$T = T(J) = \frac{D(J) - k}{365}$$

ეს წესი გამოიყენება იაპონიის სახელმწიფო ობლიგაციების გათვლის დროს. თუ, მაგალითად, J არის პერიოდი: 14.02.1996–27.08.1996, მაშინ

$$T = T(J) = \frac{195-1}{365} = 0{,}5315(\text{წელი}).$$

იმ შემთხვევაში, როცა ხდება დივიზორის ცვლილება, გამოიყენება ე. წ. ძირითადი წესი ნებისმიერი სიგრძის და მოკლე (ერთ წელზე ნაკლები) შუალედებისათვის.

წ ე ს ი ACT / ACT , ძირითადი. ვთქვათ, J პერიოდი განსაზღვრულია $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1 \rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2 \rangle$ თარიღებით. დავყოთ ეს პერიოდი სამ ნაწილად

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

სადაც

$$J = [\partial_1, \partial_1^*), \quad \partial_1^* = \langle 01{,}01, (y_1 + 1) \rangle,$$

$J_2 = |y_2 - y_1|$ არის ∂_1 და ∂_2 თარიღებს შორის სრული კალენდარული წლების პერიოდი,

$$J_3 = [\partial_2^*, \partial_2\,), \quad \partial_2^* = \langle 01{,}01, y_2 \rangle,$$

მაშინ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{D(J_1)}{Y_1} + \frac{D(J_2)}{Y_2} + n,$$

სადაც $D(J_k)$ არის დღეების რაოდენობა J_k, k=1,3 შუალედში,

$$Y_k = \begin{cases} 366, & \text{თუ} \quad y_k \text{ ნაკიანია} \\ 365, & \text{თუ} \quad y_k \text{ არანაკიანია} \end{cases}$$

ხოლო $n = y_2 - y_1$ არის ∂_2 და ∂_1 თარიღებს შორის სრული სტანდარტული კალენდარული წლების რაოდენობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2. ვთქვათ $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1999 \rangle$. დავყოთ ამ თარიღებს შორის J პერიოდი სამ პერიოდად.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველი J_1 პერიოდი არის 14.02.1996 და 31.12.1996 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობა. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ 1996 წელი არის ნაკიანი წელი არის ნაკიანი, მაშინ გვექნება

$$D(J_1) = 366 - 45 = 321 \text{ (დღე)}.$$

J_2 პერიოდი წარმოადგენს 01.01.1997 და 31.12.1998 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობას,

$J_2 = 365 + 365 = 730$ (დღე),

ე.ი.

$n = 1996 - 1996 = 2$ სრული კალენდაეული წელი.

J_3 პერიოდისათვის გვაქვს 01.01.1996 და 27.08 1999 თარიღებს სორის დღეების რაოდენობა, რომელიც 238 დღისაგან შედგება ამრიგად, ACT / ACT ძირითადი წესის მიხედვით გვექნება

$$T = T(Y) = \frac{321}{366} + \frac{238}{365} + 2 = 3{,}5291 \text{(წელი)}$$

კერძო შემთხვევებში J_2 და J_3 პერიოდები შეიძლება ცარიელი იყოს. ასე მაგალითად თუ ∂_1 და ∂_2 თარიღები ერთ სტანდარტულ კალენდარულ წელიწადშია, მაშინ $J_2 = \emptyset$ და $J_3 = \emptyset$, ხოლო თუ ეს თარიღები მომიჯნავე წლებშია, მაშინ $J_2 = \emptyset$.

იმ შემთხვევაში, როცა J პერიოდი ერთ წელზე ნაკლებია, მაშინ გამოიყენება ACT / ACT ძირითადი წესის ე.წ. მოკლე მოდიფიკაცია.

წ ე ს ი ACT / ACT მ ო დ ი ფ ი კ ა ც ი ა. ეს წესი გამოიყენება, მაგალითად, ობლიგაციაზე დაგროვებული კუპონების დასათვლელად და აქვს სემდეგი სახე

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{Y}$$

სადაც

$$Y = \begin{cases} 366 \text{ დღე}, & \text{თუ } J \text{ ნაკიანია} \\ 365 \text{ დღე}, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. ვთქვათ, J არის ნაკიანი 1996 წლის პერიოდი თარიღებით $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$, $\partial_2 = \langle 27.08.1996 \rangle$. გამოთვალეთ T–ს ხანგრძლივობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა . რადგან 1996 წელი ნაკიანია, ამიტომ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{195}{166} = 0{,}5315 \text{ (წელი)}$$

შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 3.2–3.3–ში განხილული თარირებისათვის იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ ACT / ACT ძირითადი წესს, რადგანაც თარირები ერთი სტანდარტული წელის თარირებია. თუ თარიღები მომიჯნავე წლებს ეკუთვნის, მაშინ ძირითადმა და მოკლე წესებმა შეიძლება სხვადასხვა შედეგებამდე მიგვიყვანოს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4. ვთქვათ, J არის პერიოდი თარირებს შორის: $\partial_1 = \langle 27.08.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 14.02.1997 \rangle$.

1. გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა ძირითადი წესის მიხედვით.
2. გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა მოკლე წესის მიხედვით.

ა მ ო ხ ს ნ ა . 1. ძირითადი წესის მიხედვით გვაქვს

$$J_1 = 125 \text{ დღე}, \quad J_2 = \emptyset, \quad J_3 = 144 \text{ დღე}.$$

ამრიგად, გვექნება

$$T = T(J) = \frac{125}{366} + \frac{44}{365} = 0{,}4621 \text{ (წელი)}$$

2. რადგან J პერიოდი არის ნაკიანი, ამიტომ მოკლე წესის თანახმად გვექნება

$$T = T(J) = \frac{125+44}{365} = 0{,}4630 \text{ (წელი)}$$

შევნიშნავთ, რომ ACT / ACT მოკლე წესი ემთხვევა ACT / 365 ISDA წესს, რომელიც, გამოიყენება სვოპ დილერების საერთაშორისო ასოციაციის მიერ.

აქამდე განხილულ წესებში ხდებოდა პერიოდის ხანგრძლივობის ზუსტი დათვლა დღეებში (წლებში). ფინანსურ ბაზარზე მირებულია მიახლოებითი (გამარტივებული) დათვლა, რომელიც იმასი მდგომარეობს, რომ ყველა თვეში დღეების რაოდენობა 30–ის

ტოლად ითვლება. ასეთ შემთხვევაში წელი შედგება $12 \times 30 = 360$ დღისგან და (1.3.13) ფორმულა ჩაიწერება სემდეგი სახით

$$T = \frac{\widetilde{D}(J)}{Y} = \frac{\widetilde{D}(J)}{360},$$

სადაც $Y = 360$ დივიზორია, ხოლო $\widetilde{D}(J)$ არის დღეების ხანგრძლივობა, რომელიც სხვადასხვა წესით შეირჩევა.

წ ე ს ი 30 / 360 ძ ი რ ი თ ა დ ი . ვთქვათ, J პერიოდისათვის გვაქვს ორი თარიღი: $\partial_1 =\langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 =\langle d_2, m_2, y_2\rangle$. დღეების მიახლოებითი რაოდენობა დაითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\widetilde{D}(\partial_1, \partial_2) = 360 \cdot (y_2 - y_1) + 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$$

ხოლო ხანგრძლივობა წლებში

$$T = T(J) = \frac{\widetilde{D}(J)}{360}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5. ვთქვათ, J არის $\partial_1 =\langle 14.02.1996\rangle$ და $\partial_2 =\langle 27.08.1996\rangle$ თარიღებს შორის პერიოდი. გამოთვალეთ $\widetilde{D}$ და T ხანგრძლივობები დღეებში და წლებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დღეების მიახლოებითი რაოდენობაა

$$\widetilde{D} = 360 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + (27 - 14) = 1273,$$

ხოლო წლების ხანგრძლივობა

$$T = T(J) = \frac{1273}{360} = 3{,}5361$$

შევნიშნავთ, რომ მაგალითი 3.1–ში $y_2 - y_1$ სხვაობა ორის ტოლი იყო, ხოლო ზუსტი დღეების რაოდენობა კი – 1291 დღე.

მიახლოებით ძირითად წესს აქვს სხვადასხვა მოდიფიკაციები, რომლებიც სეეხება თვეების ხანგრძლივობების გარდაქმნებს. ჩვენ განვიხილავთ ოთხ ასეთ მოდიფიკაციას $\partial_1 =\langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 =\langle d_2, m_2, y_2\rangle$ ორი თარიღისთვის.

წ ე ს ი 30 / 360 ISDA. თუ d_1=31, მაშინ ვიღებთ $d_1^* = 30$ ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ d_2=31 და $d_1^* = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

წ ე ს ი 30 / 360 PSA. (Public Securities Associates) თუ d_1=31 ან d_1 თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1^* = 30$ ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ d_2=31 და $d_1^* = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$

წ ე ს ი 30E / 360 ISDA. თუ d_1=31, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ d_2=31 მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

ეს წესი გამოიყენება ევროპაში და წარმოადგენს წინა ორი წესის კომბინაციას.

წ ე ს ი 30 / 360 SIA. (Securities Industry Association) თუ d_1=31 ან d_1 ობლიგაციის კუპონის გადახდის დღეა და, ამავე დროს თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1^* = 30$ ე. ი. $d_1^* = d_1$. თუ d_2=31 და $d_1^* = 30$, მაშინ $d_2^* = 30$, ე. ი. $d_2^* = d_2$.

შევნიშნავთ რომ არსებობს ცხრილები, რომლის საშუალებითაც ხდება ამ წესების მიხედვით დღეების მიახლოებითი რაოდენობის გამოთვლა. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მოტანილი წესების წარმოშობა და გამოყენება დამოკიდებულია ქვეყანაზე, ვალუტაზე, ფინანსური ინსტრუმენტის სახეზე, ემიტენტის მიერ დადგენილ შეთანხმებებზე და სხვა.

წ ე ს ი ACT / 3 6 5 გამოიყენება ბაზრის ინსტრუმენტებისათვის დიდ ბრიტანეთში და იაპონიაში (იაპონური ვარიანტი).

წ ე ს ი ACT / 3 6 0 გამოიყენება საფრანგეთში ფულის ბაზარზე.

წ ე ს ი 30 / 360 გამოიყენება ამერიკაში ობლიგაციების ბაზარზე.

წ ე ს ი 30 / 360 გამოიყენება ევროობლიგაციების ბაზარზე , აგრეთვე, გერმანიასა და ჰოლანდიაში.

წ ე ს ი AC T / AC T გამოიყენება ამერიკის ხაზინის მიერ და, აგრეთვე, საფრანგეთისა და ავსტრალიის ფინანსურ ბაზრებზე.

ამრიგად, მოტანილი ქრონოლოგიის მიხედვით საკმაოდ შრომატევადია დროითი შეთანხმებების სესაბამისი ფინანსური გარიგების ანალიზი. ამასთან ერთად, საჭიროა სხვადასხვა დროითი ერთეულების ერთმანეთთან დაკავშირება და გადათვლა. ასე, მაგალითად, დრო თვეებში შეიძლება გარდავქმნათ წლების მიხედვით დროით სკალაზე შემდეგი ფორმულით

$$T = \frac{M}{12}$$

სადაც M არის ვადა თვეებში, T– წლებში, ან კიდევ W - ვადა კვირეებში შეიძლება გამოვსახოთ წლებში ფორმულით

$$T = \frac{W}{52}$$

ანალოგიურად, შეიძლება გარდავქმნათ წლებში ვადები, მოცემულ დღეებში, კვარტალებში და სხვა.

§ 4. მარტვი პროცენტი

განვიხილოთ ფინანსური ოპერაციების ერთ – ერთი ძირითადი სახეობა – საკრედიტო გარიგება და მასთან დაკავშირებული მარტივი პროცენტის საკითხები. ზოგადად რომ ვთქვათ, მარტივი საკრედიტო გარიგება – ეს არის კრედიტორის მიერ კრედიტის (სესხის) გაცემა დებიტორზე, რომელიც ვალდებულია განსაზღვრულ ვადაში დააბრუნოს სესხი გარკვეული პროცენტის დარიცხვით. იგულისხმება, რომ ეს გარიგება გაფორმებულია სათანადო ხელშეკრულებით, რომელსაც გააჩნია იურიდიული უზრუნველყოფა.

საკრედიტო გარიგება შეიცავს შემდეგ ძირითად დროით და ფულად (ფინანსურ) პარამეტრებს: t_0 – სესხის გაცემის თარიღი, T – სესხის ვადა, $t_1 = t_0 + T$ – სესხის დაბრუნების თარიღი, P – სესხის რაოდენობა, I–სესხის გადასახადი (დარიცხული პროცენტის შესაბამისი თანხა), B– სესხის დასაფარი თანხა დროის t_1 მომენტში. ამრიგად, გვექნება,

$$B = P + I \tag{1.4.1}$$

ანუ დროის მიხედვით

$$B_1 = B_{t_1} = B_{t_0} + I_T = B_0 + I_T \tag{1.4.2}$$

ცხადია, მარტივი საკრედიტო გარიგება შეიძლება ჩავწეროთ ფინანსური ხდომილობის ნაკადის სახით

$$\mathrm{CF} = \mathrm{CF}_1 + \mathrm{CF}_2 = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1)\}$$

ან კიდევ FV ოპერაციის საშუალებით

$$\mathrm{FV}_{t_1} = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1)\} \tag{1.4.3}$$

შევნიშნოთ, რომ, კრედიტორის B_0 პოზიციით თანხა დანახარჯია, ხოლო დებიტორის პოზიციით – შემოსავალი. ამიტომ კრედიტორის პოზიციისათვის ნაკადი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად: $\{(t_0, -B_0), (t_1, B_1)\}$. შევნიშნოთ, აგრეთვე, რომ ხშირად (1.4.3) ტოლობას წერენ შემდეგი სახით

$$\mathrm{FV}_{t_1}(B_0) = B_1 \tag{1.4.4}$$

დროის $[t_0, t_0 + T]$ პერიოდში საკრედიტო გარიგების მარტივი პროცენტი (მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, შემოსავალი) ეწოდება სიდიდეს

$$r = \frac{I}{P} = \frac{B-P}{P} = \frac{B}{P} - 1 \tag{1.4.5}$$

ანუ რაც იგივეა

$$r = \frac{I}{B_0} = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{B_1}{B_0} - 1 \tag{1.4.6}$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტოლობები

$$I = P \cdot r = B_0 \cdot\ r, \tag{1.4.7}$$

$$B_1 = B_0\ +\ I = B_0 \cdot r = B_0 \cdot (1 + r) \tag{4.8}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.1. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში გაიცა $B_0 = 5000$ კრედიტი ვადით $T = 2$ წელი. $t_1 = t_0 + T = 2$ დროის მომენტში დასაბრუნებელი თანხაა $B_1 = 10000$ იპოვეთ. გარიგების საპროცენტო განაკვეთი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (1.4.6) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$r =\ \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{10000 - 5000}{5000} = 1$$

ანუ პროცენტებში $r = 100\%$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4.2. ვთქვათ, დროის $t_0 = 0$ მომენტში გაიცა $B_0 = 2000$ სესხი $T = 3$ წლის ვადით. იპოვეთ დროის $t_1 = t_0 + T = 3$ მომენტში სესხის დაფარვის თანხა $B_1 = 10000$, თუ საპროცენტო განაკვეთია $r = 60\%$.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (1.4.8) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$B_1 =\ B_0 \cdot (1 + r) = 2000 \cdot (1 + 0{,}6) = 3200.$$

მარტივი საპროცენტო r განაკვეთის საშუალებით განიმარტება მარტივი ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთი შემდეგი ტოლობით

$$i = \frac{r}{T} = \frac{r}{t_1 - t_0}$$

თ ა ვ ი II. ოპტიმალური გაჩერება და ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება

§ 1. ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება სასრულ დროით ინტერვალზე

განვიხილოთ ერთგვაროვანი შეუწყვეტადი

$$(\Omega, M, M_t, X_t, \theta_t, P_x), \quad t \geq 0,$$

მარკოვის შემთხვევითი პროცესი, მნიშვნელობებით (ξ, β) ფინანსურ სივრცეში.

ვთქვათ, $f(x)$ მოგების ფუნქცია და $C(x) \geq 0$ გადასახადის ფუნქცია არის თითქმის ბორელის და

$P_x\,(\lim\limits_{t\downarrow 0} f(\mathrm{X_t}) = f_{(x)}) = 1 \quad x \in E,$

$P_x\,(\lim\limits_{t\downarrow 0} C(\mathrm{X_t}) = C_{(x)}) = 1 \quad x \in E,$

C_0 – უწყვეტი ფუნქციები.

ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ X პროცესზე დაკვირვებას შევწყვიტავთ დროის $t>0$ მომენტში, მაშინ მივიღებთ შემდეგ მოგებას:

$$g(\mathrm{X_t}) = f(\mathrm{X_t}) - \int_0^t c(\mathrm{X_s})ds. \tag{2.1.1}$$

განვიხილოთ ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა სტანდარტული X= (Ω, M, M_t, X_t, θ_t, Px) მარკოვის პროცესისათვის [0, T], 0< T <∞, სასრულ ინტერვალზე, განსაზღვრული $g(x)$ მოგების ფუნქციით

$$s(T,x) = \sup_{\tau\leq T} E_x\left[g(X_\tau) *\ I_{(\tau\leq T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) * I_{(\tau=T)}\right] \tag{2.1.2}$$

სადაც sup აღებულია ყველა M_t გაჩერების τ(ω), τ(ω)≤T, მომენტით. აქ $s(T,x)$ სიდიდეს ეწოდება ფასი, ხოლო τ_ε გაჩერების მომენტი, სადაც τ_ε(ω)≤T ეწოდება ε–ოპტიმალური, თუ

$$s(T,x) \leq$$

$$\leq E_x\left[g\left(X_{\tau_\varepsilon}\right) *\ I_{(\tau_\varepsilon\leq T)} + \frac{\lim}{t\to T} g(X_t) * I_{(\tau_\varepsilon=T)}\right] + \varepsilon, \forall\, x \in E, \varepsilon > 0 \tag{2.1.3}$$

აღვნიშნოთ W–თი ყველა იმ $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ ფუნქციათა სიმრავლე მნიშვნელობით E-ში, რომლებიც მარჯვნიდან უწყვეტია და გააჩნიათ ზღვრები მარცხნიდან. განვსაზღვროთ $Y_t(\boldsymbol{\mathcal{W}}) = \boldsymbol{\mathcal{W}}(t)$, $t \geq 0$, შემთხვევითი ფუნქცია და შემოვიღოთ

$$y^0 = \sigma(Y_u, u \geq 0), \qquad y_t^0 = \sigma(Y_u, u \leq t)$$

σ –ალგებრები. აგრეთვე შემოვიღოთ

$\varphi_t \colon W \to W,\ (\varphi_t \mathcal{W})(u) = \mathcal{W}(u+t),\ t \geq 0,\ u \geq 0,$

გადატანის ოპერატორები (ცხადია, რომ $Y_u(\varphi_t \mathcal{W}) = Y_{u+t}(\mathcal{W})$). განვიხილოთ შემდეგი გარდაქმნა:

$$\pi : \Omega \to W, \qquad (\pi\omega)(t) = X_t(\omega)$$

გვექნება $Y_t(\pi\mathcal{W}) = (\pi\mathcal{W})(t),\ t \geq 0$, ცხადია რომ

$$\pi^{-1}(\omega : Y_t(\omega) \in B)) \equiv (\omega\colon\ Y_t(\pi\omega) \in B)) = \ (\omega :\ X_t(\omega) \in B)$$

მაშასადამე,

$$\pi^{-1} y^0 = \mathcal{F}^0, \qquad \pi^{-1} c Y_t^0 = \mathcal{F}_t^0, \tag{2.1.4}$$

სადაც განმარტების თანახმად გვექნება

$$\mathcal{F} = \sigma(X_u, u \geq 0), \quad cF_t^0 = \sigma(X_u), u \leq t)$$

ახლა ($\boldsymbol{\mathcal{W}}$, У^0)სივრცეზე შემოვიღოთ

$$\hat{P}_x(G) = P_x(\pi^{-1} G) \tag{2.1.5}$$

ზომები, სადაც $G \in y^0$.

ვაჩვენოთ, რომ $Y = (W, У^0, У_{t+}^0, Y_t, \varphi_t, \hat{P}_x)$, $t \geq 0$, შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს მკაცრად მარკოვის პროცესს და ექვივალენტურია $X = (\Omega, M, M_t, X_t, \Theta_t, P_x)$ მარკოვის პროცესის . მართლაც, გვაქვს $\hat{P}_x(Y_n \in B) =$

$P_x(X_n \in B)$. შემდეგ უნდა ვაჩვენოთ

$$(Y_{\hat{\tau}+h} \in B \mid y_{\tau+}^0) = \hat{P}_{Y_{\hat{\tau}}}(\, Y_h \in B) \tag{2.1.6}$$

მკაცრად მარკოულობის პირობა, სადაც $\hat{\tau}$ რაიმე მარკოვის მომენტია $y^0_{\tau+}$ ოჯახის მიმართ, ხოლო $y^0_{\hat{\tau}+}$ ისეთ G სიმრავლეთა σ ალგებრაა $У^0$ –დან, რომ $G\cap\{\hat{\tau}\le t\}\in y^0_{t+}$, რაც ექვივალენტურია შემდეგის $G\cap\{\hat{\tau}<t\}\in y^0_t$. ამისთვის კი აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ტოლობა

$$\widehat{M}_x\left[f(Y_{\hat{\tau}+h})\cdot I_{(\hat{\tau}<\infty)}\right]=\widehat{M}_x\left[M(Y_{\hat{\tau}})f(Y_h)\cdot I_{(\hat{\tau}<\infty)}\right], \tag{2.1.7}$$

სადაც $\hat{\tau}$ ნებისმიერი y^0_t მარკოვის მომენტია და $f(x)$ ნებისმიერი შემოსაზღვრული B– ზომადი ფუნქციებია.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ $\hat{P}_x$ – ზომების განსაზღვრის თანახმად გვაქვს:

$$\hat{E}_x\to\hat{E}_x\eta(\omega)=E_x\eta(\pi\omega), \tag{2.1.8}$$

სადაც $\eta(\omega)$ შემოსაზღვრული და y^0 -ზომადი ფუნქციაა.

მაშასადამე უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$E_x\left[f\left(Y_{\hat{\tau}(\pi\omega)+h}(\pi\omega)\right)\cdot I_{(\hat{\tau}(\pi\omega)<\infty)}\right]=E_x\left[E_{Y_{\hat{\tau}(\pi\omega)}(\pi\omega)}f(X_n)\cdot I_{(\hat{\tau}(\pi\omega)<\infty)}\right]$$

ახლა, რადგან $\tau(\omega)\equiv\hat{\tau}(\pi\omega)$–თვის,

$(\omega\colon\tau(\omega)<t)=\pi^{-1}(\omega\colon\hat{\tau}(\omega)<t)\ \in\mathcal{F}^0_t$,

ამიტომ შემთხვევითი სიდიდე $\tau(\omega)$ წარმოადგენს $\mathcal{F}^0_{t+}$ მარკოვის მომენტს და დასამტკიცებელი ტოლობა მიიღებს სახეს:

$$E_x\left[f(X_{\tau+h}))\cdot I_{(\tau<\infty)}\right]=E_x\left[E_{X_\tau}f(X_n)\cdot I_{(\tau<\infty)}\right],$$

რასაც ადგილი აქვს იმ მოთხოვნის გამო, რომ X წარმოადგენს მკაცრად M_t მარკოვის პროცესს σ-ალგებრების ოჯახის მიმართ (შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{F}^0_{t+}\subseteq M_{t^+}=M_t$)

განვიხილოთ $\varphi_s^{-1}y^0,\varphi_s^{-1}\varphi_t^0$ σ - ალგებრები ნებისმიერი s$\geq 0, t\geq 0$ −თვის.

ადვილი შესამოწმებელია შემდეგი:

$$\varphi_s^{-1}y^0=\sigma(Y_u,u\ge s),\ \ \varphi_s^{-1}y^0_t=\sigma(Y_u,s\le u\le s+t) \tag{2.1.9}$$

აქ შევნიშნოთ რომ გადატანის $\varphi_s, s\geq 0$, ოპერატორებს გააჩნიათ ის თვისება, რომ ნებისმიერი W' ტრაექტორია წარმოიდგინება

$$W' = \varphi_s \cdot \mathcal{W} \tag{2.1.10}$$

სახით, სადაც $\mathcal{W}$ რაიმე ტრაექტორიაა.

აგვარად, $\varphi_s^{-1} y^0$ სიმრავლეებს σ - ალგებრიდან გააჩნიათ ერთადერთი წარმოდგენა $\varphi_s^{-1} G$ სახით, სადაც $G \in y^0$.

ამ ერთადერთობის საფუძველზე $(W, \ \varphi_s^{-1} \, y^0)$ ზომად სივრცეზე შეგვიძლია შემოვიღოთ

$$\hat{P}_{s,x}(\varphi_s^{-1} G) \equiv \hat{P}_x(G), s \geq 0 \tag{2.1.11}$$

ზომები (შევნიშნოთ რომ $\hat{P}_{0,x}(G) = \hat{P}_x(G), \quad G \in cY^0$).

მაშინ მონოტონური კლასების თეორემის თანახმად მივიღებთ, რომ ნებისმიერი შემოსაზღვრული y^0 –ზომადი $\eta(\mathcal{W})$ ფუნქციისათვის ადგილი ექნება ტოლობას

$$\hat{E}_{s,x} \eta(\varphi_s \mathcal{W}) = \hat{E}_x \eta(\pi \mathcal{W}), \quad s \ \geq 0 \tag{2.1.12}$$

სადაც ცხადია, $\eta(\varphi_s \mathcal{W})$ არის $\varphi_s^{-1} y^0$ – ზომადი.

მეორეს მხრივ, ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\varphi_s^{-1} y^0$ – ზომადი ფუნქცია $\eta_s(\mathcal{W})$ სასრული მნიშვნელობებით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი

$$\eta_s(\mathcal{W}) = \eta(\varphi_s \mathcal{W}) \tag{2.1.13}$$

სახით, სადაც $\eta(\mathcal{W})$ სასრულია, y^0 კი ზომადი ფუნქციაა.

ამისათვის კვლავ გამოვიყენოთ თეორემა მონოტონური კლასების შესახებ.

განვიხილოთ $\varphi_s^{-1} y^0$ ყველა ზომად სასრულ $\eta_s(\mathcal{W})$ ფუნქციათა სისტემა, რომელიც აღნიშნული სახით წარმოიდგინება. ეს სისტემა წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს, რომელიც შეიცავს $\eta(s(\mathcal{W}) = 1)$ ერთეულს და შემდეგ სიმრავლეთა

$(\mathcal{W} : \ Y_{u_1}(\mathcal{W}) \in \ B_{1,} \ . \ . \ . \ . \ , Y_{u_k}(\mathcal{W}) \in \ B_{k,}), \quad s \leq u_1 \leq \ \cdot \cdot \cdot \ u_k$ ინდიკატორებს.

მართლაც,

$$I_{\left(Y_{u_1}(\mathcal{W}) \in \ B_{1,} \ . \ . \ . \ . \ , Y_{u_k}(\mathcal{W}) \in \ B_{k,}\right)} = \ \eta(\varphi_s \mathcal{W}),$$

სადაც

$$\eta(\mathcal{W}) = I_{\left(Y_{u_1-s}(\mathcal{W}) \in B_1, \ldots, Y_{u_k-s}(\mathcal{W}) \in B_k,\right)}.$$

ეს სისტემა აკნაყოფილებს მონოტონურობის პირობას, თუ $\eta_s^n(\mathcal{W})$ არაუარყოფითი ზრდადი მიმდევრობისათვის ამ სისტემიდან, $\eta_s(\mathcal{W}) = \lim_{n \to \infty} \eta_s^n(\mathcal{W})$ ზღვარი სასრულია.

მონოტონური კლასების შესახებ თეორემის თანახმად გვექნება, რომ განხილული სისტემა შეიცავს ყველა სასრულ $\varphi_s^{-1} y^0$ –ზომად $\eta_s(\mathcal{W})$ ფუნქციებს.

ვთქვათ, ახლა ნებისმიერი $s \geq 0$–თვის მოცემულია ისეთი $\tau_s(\mathcal{W})$არაუარყოფითი ფუნქცია, რომ

$$(\mathcal{W}:\ \tau_s(\mathcal{W}) < t\ ) \in \varphi_s^{-1} y_t^0, t \geq 0, \tag{2.1.14}$$

მაშინ მოიძებნება $y_{t^+}^0$ -მარკოვის $\hat{\tau}(\mathcal{W})$ მომენტი, ისეთი, რომ

$$\tau_s(\mathcal{W}) = \hat{\tau}(\varphi_s \mathcal{W}) \tag{2.1.15}$$

ეხლა განვიხილოთ W –ტრაექტორიების გაფართოებული სივრცე. შემოვიღოთ ახალი $W' = [0, \infty) \times \mathrm{W}$ სივრცე $W' = (s, \mathcal{W}),\ s \geq 0$, ელემენტებით. განვიხილოთ ახალი $E' = [0, \infty) \times \mathrm{E}$ ფაზური სივრცე σ–ალგებრით, რომელიც მიიღება $\beta' = [0, \infty) \otimes \beta$ ნამრავლით. განვიხილოთ ასევე ახალი

$$Y_t'(\mathcal{W}') = Y_t'(s, \mathcal{W}) = \left(s + t, Y_{s+t}(\mathcal{W})\right), \qquad t \geq 0, \qquad s \geq 0, \tag{2.1.16}$$

შემთხვევითი პროცესი E'–ში, ახალი

$$\varphi_t'(s, \mathcal{W}) = (s + t, \mathcal{W}),\ \ t \geq 0,\ s \geq 0,$$

გადატანის ოპერატორებით. თანაც ცხადია, რომ

$$Y_u'(\varphi_t \mathcal{W}') = Y_{u+t}'(\mathcal{W}')\ t \geq 0, \qquad s \geq 0,$$

W' სივრცეში შემოვიღოთ

$$N^0 = \sigma(Y_u', u \geq 0),\ \ N_t^0 = \sigma(Y_u', u \leq t)$$

σ -ალგებრები, ხოლო N^0 σ -ალგებრაზე შემოვიღოთ

$$P_{x'}'(A) = P_{(s,x)}'(A) \equiv \hat{P}_{(s,x)}(A_{\ s}) \tag{2.1.17}$$

ალბათური ზომები, სადაც $A \in N^0$ და $A_{\ s}$ წარმოადგენს A სიმრავლის კვეთას

$s:\ A_s = \{\mathcal{W} : (s, \mathcal{W}) \in A\}$ წერტილში. ადვილად ჩანს რომ თუ $A \in N^0$, მაშინ

$A_s \in \varphi_s^{-1} y^0$ და თუ $A \in N_t^0$, მაშინ $A_s \in \varphi_s^{-1} y_t^0$. შევნიშნავთ, რომ

$Y' = \left(W', N^0, N_{t^+}^0, Y_t', \varphi_t', P_{x'}'\right),\ \ t \geq 0,$ შემთხვევითი პროცესი მკაცრად მარკოვის პროცესია. ადვილი შესამოწმებელია ტოლობები

$$E'_{x'}\left[f'\left(Y'_{\tau'+h}\right) \cdot I_{(\tau'<\infty)}\right] = E'_{x'}\left[E'_{Y'_{\tau'}} f(Y'_h) \cdot I_{(\tau'<\infty)}\right], \tag{2.1.18}$$

$$E'_x \eta(\omega') = \hat{E}_{(s,x)} f \eta(s, \omega) \qquad \left(x' = (s, x)\right). \tag{2.1.19}$$

განვიხილოთ N^0 და N_t^0 σ- ალგებრების გასრულება $P'_{N'}$ –ზომების სისტემების მიმართ. აღვნიშნოთ ისინი N' და N'_t და დავადგინოთ შემდეგი ფაქტი.

თ ე ო რ ე მ ა 1.1. $Y' = (\mathrm{W}', N', N_\mathrm{t}', Y_\mathrm{t}', \varphi_\mathrm{t}', P'_{x'})$ შემთხვევითი პროცესი წარმოადგენს სტანდარტულ მარკოვის პროცესს (E', B') ფაზურ სივრცეში

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც Y_t' არის მარკოვის პროცესი $N_{t^+}^0$ ის მიმართ, მაშინ $N_t' = N_{t^+}'$. Y' პროცესის ტრაექტორიები არიან მარჯვნიდან უწყვეტები და გააჩნიათ ზღვრები მარცხნიდან, რადგან ასეთია Y პროცესის ტრაექტორიები. რადგან მკაცრად მარკოულობის პირობას ადგილი აქვს ნებისმიერი$N_{t^+}^0$ მარკოვის τ' მომენტისათვის, მაშინ მას ადგილი აქვს აგრეთვე ნებისმიერი N_t' მარკოვის τ' მომენტისათვის. ახლა შევამოცმოთ Y' პროცესის კვაზიუწყვეტობა მარცხნიდან:

ყოველი არაკლებადი მიმდევრობისათვის $\tau_n' \uparrow \tau'$, სადაც τ_n' N_t' მარკოვის მომენტებია, უნდა შესრულდეს

$$P_x'(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \to Y'_{\tau'}) = 0 \tag{2.1.20}$$

შევამოწმოთ (2.1.20) ჯერ ყველა $N_{t^+}^0$ მარკოვის მომენტებისთვის გვექნება

$(x' = (s, x))$

$$P_x'(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \to Y'_{\tau'}) = \hat{P}_{(s,x)}(\tau' < \infty, Y'_{\tau'_n} \to Y'_{\tau'}(s, \omega)) =$$

$$= \hat{P}_{(s,\omega)}(\tau' < \infty, (s + \tau_n', Y'_{\tau'_n}(\omega) \nrightarrow \left(s + \tau', Y'_{s+\tau'}(\omega)\right).$$

შემდეგ გამოვიყენოთ წარმოდგენა

$$\tau_n'(s,\omega) = \hat{\tau}_n(\varphi_s\omega), \quad \tau'(s,\omega) = \hat{\tau}(\varphi_s\omega),$$

სადაც $\hat{\tau}_n$, $\hat{\tau}$ არიან $y_{t^+}^0$–მარკოვის მომენტები, თანაც ადვილი შესამოწმებელია რომ $\hat{\tau}_n \uparrow \hat{\tau}$. მაშინ გვექნება

$$\hat{P}_{(s,x)}(\tau' < \infty, Y'_{\tau_n'} \nrightarrow Y'_{\tau'}) = \hat{P}_x(\hat{\tau} < \infty, (s+\tau_n', Y_{\hat{\tau}_n}) \nrightarrow (s+\hat{\tau}, Y_{s+\hat{\tau}})$$

ე.ი. თუ შემოვიღებთ $\tau_n(\omega) \equiv \hat{\tau}_n(\pi\omega)$, $\tau(\omega) \equiv \tau(\pi\omega)$ აღნიშვნას, მაშინ τ_n, τ აღმოჩნდებიან $\mathcal{F}_{t^+}^0$–მარკოვის მომენტები, $\tau_n \uparrow \tau$, და ბოლო ალბათობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$P_x(\tau < \infty, s+\tau_{n,}\ X_{\tau_{n,}}) \nrightarrow (s+\tau, X_\tau)$$

რადგანაც დაშვების თანახმად, X მარცნიდან კვაზიუწყვეტი პროცესია ეს ალბათობა არის 0_ის ტოლი.

დაგვრჩა შესამოწმებელი (2.1.20)_ის მართებულობა N_t'–მარკოვის ისეთი მომენტებისათვის, რომ $\tau_n' \uparrow \tau'$, მოიძებნება $N_{t^+}^0$ და σ_n' σ' –მარკოვის მომენტები ისეთები, რომ

$$P'_{x'}(\tau_n' = \sigma_n', \tau' = \sigma') = 1.$$

განვიხილოთ N_t'–მარკოვის მომენტების $\tilde{\sigma}_n' = \max(\sigma_1', \dots, \sigma_n')$ მიმდევრობა და ამ მიმდევრობის ზღვარი ავღნიშნოთ $\tilde{\sigma}_1$-თი. მაშინ გვექნება

$$P'_{x'}\left(\tilde{\sigma}' < \infty, \qquad Y'_{\tilde{\sigma}_n'}\ \tau' \nrightarrow Y'_{\tilde{\sigma}'}\right) = 0.$$

მაგრამ ცხადია, რომ

$$P'_{x'}(\tau_n' = \tilde{\sigma}_n', \tau' = \tilde{\sigma}') = 1.$$

და ე. ი.

$$P'_{x'}\left(\tau' < \infty, \qquad Y'_{\tau_n'} \to Y'_{\tau'}\right) = 0.$$

რაც ამტკიცებს თეორემა1.1–ს.

ყოველი n=1,2, . . . -თვის შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$Q_n g(x) = \max\{ g(x), E_n g(X_{2^{-n}\cdot\tau})\} \qquad (2.1.21)$$

$\sigma_n = \min\{k \cdot 2^{-n}T, k = 0,1,2 \dots, 2^n - 1: X_{k\cdot 2^{-n}\cdot T} \in B_k^n\}$,

სადაც $B_0^n, B_1^n, \dots, B_{2^n-1}^n$ სიმრავლეები ეკუთვნის $\mathcal{B}$ σ-ალგებრას, თანაც $B_{2^n-1}^n = E$. Q_n^k-თი აღვნიშნოთ Q_nოპერატორის k ხარისხი. ეხლა ვაჩვენოთ რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$s(T, x) = \sup_{\tau<T} E_x g(X_\tau) = \lim_n \uparrow Q_n^{2^n-1} g(x), \tag{2.1.22}$$

თანაც

$$Q_n^{2^n-1} g(x) = E_x g\left(X_{\sigma_n}\right)$$

სადაც σ_n ზემოთ აღნიშნული ტიპის გაჩერების მომენტებია.

მართლაც, ვთქვათ, τ წარმოადგენს ისეთ M_t-გაჩერების მომენტს, რომ $\tau(\omega) < T$. განვიხილოთ გაჩერების მომენტების $\tau_n = \min\,(\tau, T - \frac{1}{n})$ მიმდევრობა, გვექნება

$$g(X_\tau) \cdot I_{(\tau< T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau= T)} \le \varliminf_n g(X_{\tau_n})$$

აქედან, ფატუს ლემის თანახმად, ვღებულობთ

$$E_x[g(X_\tau) \cdot I_{(\tau<T)} + \varliminf_{t\uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau=T)}] \le \varliminf_n E_x\, g(X_\tau).$$

აქედან კი

$$S(T, x) \le \sup_{\tau<T} E_x\, g(X_\tau).$$

რადგანაც შებრუნებული უტოლობა ცხადია, ე. ი. ეს სიდიდეები ემთხვევა.

ახლა განვიხილოთ რაიმე τ M_t–გაჩერების მომენტი, ისეთი, რომ $\tau(\omega) < T$.

მისთვის ავაგოთ გაჩერების მომენტების შემდეგი

$$\tau_n = \begin{cases} k \cdot 2^{-n} \cdot T, & \text{თუ } (k-1) \cdot 2^{-n} \cdot T \le \tau < k \cdot 2^{-n} \cdot T \\ & \quad k = 1,2, \dots 2^n - 2, \\ (2^n - 1) \cdot 2^{-n} \cdot T, & \text{თუ } \qquad \tau \ge k(2^n - 2) \cdot 2^{-n} \cdot T \end{cases}$$

მიმდევრობა (n=1,2,……..)

ნათელია, რომ დაწყებული რომელიმე $n(\omega)$ −დან მიმდევრობა კლებადია, თანაც $\tau_n \downarrow$ τ. აქედან, თუ გავიტვალისწინებთ, რომ ყოველი $x \in E$-თვის $g(X_t)$-ს ტრაექტორიები არიან მარჯვნიდან უწყვეტი, ვღებულობთ:

$$g(X_\tau) = \varliminf_{n} g\left(X_{\tau_n}\right)$$

ე. ი. ფატუს ლემიდან გვექნება

$$E_x g(X_\tau) \le \varliminf_{n} E_x g\left(X_{\tau_n}\right)$$

შემდეგ, თუ ყველა M_t−გაჩერების მომენტების კლასს, მნიშვნელობებით სასრულ სიმრავლეში $0, 2^{-n} \cdot T, \ldots, \ \ (2^n - 1) \cdot 2^{-n} \cdot T$, აღვნიშნავთ $\mathfrak{M}_T^n$-ით წინა უტოლობიდან მივიღებთ შემდეგს

$$S(T,x) = \sup_{\substack{\tau \in \cup \mathfrak{M}_T^n \\ n}} E_x\, g(X_\tau) = \lim_{n} \uparrow \sup_{\substack{\tau \in \cup \mathfrak{M}_T^n \\ n}} E_x\, g(X_\tau)$$

გვექნება

$$\sup_{\tau \in \mathfrak{M}_T^n} E_x\, g(X_\tau) = Q_n^{2^{n-1}} g(x) = E_x\, g\left(X_{\sigma_n}\right),$$

სადაც σ_n წარმოადგენენ (2.1.21) ტიპის გაჩერების მომენტებს. რითაც (2.1.22) დამტკიცდა.

განვიხილოთ ახლა ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა სტანდარტული $Y' = (W', N', N_t', Y_t', \varphi_t', P_{x'}')$ სტანდარტული მარკოვის პროცესისათვის, t≥ 0 $(x' = (s,x))$ და

$$G'(T,x') \equiv G(T,s,x) = g(x) I_{(\tau<T)} + (-A) I_{(s \ge T)}, \tag{2.1.23}$$

$$s'(T,x') = \sup_{\tau'} E_{x'}'\, G'\left(T, Y_{\tau'}'\right) \tag{2.1.24}$$

მოგების ფუნქციისათვის, სადაც sup აღებულია ყველა N_t' გაჩერების τ'-მომენტებით. ანუ შესრულებულია $P_{x'}'(\tau' < \infty) = 1$ ნებისმიერი $x' \in E'$-თვის. რადგან $G(T,s,x)$ არის s-ით მარჯვნიდან უწყვეტი, და $g(x)$ დაშვების თანახმად G_0 უწყვეტია, ამიტომ ადვილად ჩანს რომ $'(T', x')$ ასევე c_0 უწყვეტია Y'პროცესის მიმართ.

შევნიშნოთ რომ ნებისმიერი N_t' გაჩერების τ' მომენტისათვის და ფიქსირებული $x' = (s,x)$-თვის ყოველთვის მოიძებნება $\mathcal{F}_{t+}^0$ გაჩერების τ მომენტი ისეთი, რომ

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{\tau'}\right) = E_x G(T, s+\tau, X_\tau) \tag{2.1.25}$$

შეგვიძლია პირდაპირ ჩავთვალოთ, რომ τ'წარმოადგენს $N^0_{t^+}$-გაჩერების მომენტს, რადგან ნებისმიერი ფიქსირებული $x' =' (s,x)$-თვის ყოველთვის მოიძებნება $N^0_{t^+}$-მარკოვის $\tilde{\tau}'$-მომენტი, ისეღი რომ $P'_{x'}(\tau' = \tilde{\tau}')$.

გვექნება

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{x'}\right) = \hat{E}_{(s,x)}G\left(T, Y'_{\tau'}(s,\omega)\right) = \hat{E}_{(s,x)}G\left(T, s+\tau', Y'_{s+\tau'}(\omega)\right)$$

სადაც $\tau' =' \tau'(s,\omega)$ შეიზლება ცავწეროთ შემდეგი სახით

$$\tau'(s,\omega) = \hat{\tau}(\varphi_s\omega)$$

სადაც $\hat{\tau}(\omega)$ $y^0_{t^+}$-გაჩერების მომენტი (ფიქსირებული x-თვის $P_x(\hat{\tau} < \infty) = 1$). თუ ამ წარმოდგენას ჩავსვამთ წინა ტოლობაში და გამოვიყენებთ (2.1.10)_ს, მივიღებთ

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{\tau'}\right) = \hat{E}_x G(T, s+\hat{\tau}, Y_{\hat{\tau}})$$

შემდეგ აღვნიშნოთ $\tau(\omega) = \hat{\tau}(\pi\omega)$, მაშინ τ იქნება $\mathcal{F}^0_{t^+}$ გაჩერების მომენტი $P_x\{\tau < \infty\} = 1$ ამავე x-თვის და გვექნება

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{\tau'}\right) = E_x G(T, s+\tau, Y_\tau) \tag{2.1.26}$$

თ ე ო რ ე მ ა 1.2. სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულებები:

1) $s'(T,x') = s(T-s,x)$ *როცა* $\quad$ $s < T$,

სადაც $x' = (s,x)$, $\qquad$ (2.1.27)

2) $s'(T,x') = -A$ *როცა* $\quad$ $s \geq T$,

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ ნებისმიერი $\tau' - N'_t$ –გაჩერების მომენტი. (2.1.25)-ის თანახმად გვექნება

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{\tau'}\right) =$$

$$= E_x G(T, s+\tau, X_\tau) = E_x\left[g(X_\tau)\cdot I_{(\tau<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\tau\geq T-s)}\right]$$

დავუშვათ ჯერ–ჯერობით, რომ 0≤s≤ T და განვიხილოთ σ=min$(\tau, T-s)$ გაჩერების მომენტი. ადვილად ჩანს, რომ

$$E_x G(T, s+\tau, X_\tau) = E_x\left[g(X_\tau)\cdot I_{(\tau<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\tau\geq T-s)}\right] \leq$$

$$\leq E_x\left[g(X_\sigma)\cdot I_{(\sigma<T-s)} + \lim_{t\uparrow T-s} G(X_t)\cdot I_{(\tau=T)}\right] \leq (-A)\cdot I_{(\sigma=T-s)}\Big] \leq s(T-s,x).$$

აქედან გამომდინარე

$s'(T,x') \leq s(T-s,x)$ როცა $x<T$

მეორეს მხრივ, (2.1.25) ფორმულის მიხედვით გვექნება

$$s(T-s,x) = \lim_n \uparrow E_x g(X_{\sigma_n})$$

სადაც

$$\sigma_n = min\{k\cdot 2^{-n}(T-s), \qquad k=0,1,\dots,2^n-1\colon\ X_{k\cdot 2^{-n}\cdot(T-s)} \in B_k^n\}.$$

შემოვიღოთ შემდეგი N_t^0 –გაჩერების მომენტი:

$$\sigma_n = min\{k\cdot 2^{-n}T, \qquad k=0,1,\dots,2^n-1\colon\ Y_{k\cdot 2^{-n}\cdot T} \in [0,\infty)\times B_k^n\}.$$

ადვილად ჩანს, რომ

$$E'_{x'}G'\left(T, Y'_{\sigma'_n}\right) = E_x G\left(T, s+\sigma_n, X_{\sigma_n}\right) =$$

$$= E_x\left[g\left(X_{\sigma_n}\right)\cdot I_{(\sigma_n<T-s)} + (-A)\cdot I_{(\sigma_n\geq T-s)}\right] = E_x g\left(X_{\sigma_n}\right)$$

რადგან $\sigma_n < T-s$.

ამრიგად ვღებულობთ შემდეგ უტოლობას

$$s(T-s,x) \leq s'(T,x')$$

ე. ი. ტოლობას

$$s'(T,x') = s(T-s,x) \quad \text{როცა} \qquad s<T.$$

როცა $s \geq T$, მაშინ $S'(T,x') = -A$ ტოლობის შემოწმება ტრივიალურია. ვთქვათ $g(x) \in \mathbb{B}_0$ აკმაყოფილებს სემდეგ პირობებს:

$$g(x) \geq -A \ \ (0<A<\infty),$$

$$M_x \sup_{0\leq t\leq T}\{0, g(X_t)\} < \infty, x\in E,$$

მაშინ

1) ნემისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის (2.1.2) ამოცანაში τ_ε-გაცერების მომენტი არის ε ოპტიმალური

2) თუ არსებობს ოპტიმალური გაჩერების მომენტი, მაშინ τ_0^T არის ოპტიმალური.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . 1) პირველ რიგში ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $x' = (s, x)$-თვის

$$E'_{x'} \sup_{t \geq 0} \max\,(0, G'(T', Y'_t)) < \infty \tag{2.1.28}$$

მართლაც,

$$G'(T', Y'_t(s, \omega)) =$$

$$= G(T, s + t, Y_{s+t}(\omega)) = g\big(Y_{s+t}(\omega)\big) \cdot\ I_{(s+t<T)} + (-A) \cdot I_{(s+t \geq T)}$$

ასე, რომ $\omega'(s, \omega)$-თვის

$$\sup_{t \geq 0} \max\,(0, G'(T', Y'_t)) \leq \sup_{t \leq T} \max\Big(0, g\big(, Y_{s+t}(\omega)\big)\Big).$$

მაშასადამე

$$E'_{(s,x)} \sup_{t \geq 0} \max\big(0, G'(T', Y'_t)\big) \leq$$

$$\leq \hat{E}_{s,x} \sup_{t<T} \max\Big(0, g\big(, Y_{s+t}(\omega)\big)\Big) = E_x \sup_{t<T} \max\big(0, g(, X_t)\big) < \infty$$

ნემისმიერი $\varepsilon > 0$-თვის

$$\tau'_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 \colon s'(T, Y'_t) \leq G'(T, Y'_t) + \varepsilon\}$$

მომენტი წარმოადგენს

$$E'_{x'} G'\left(T, Y'_{\tau'_\varepsilon}\right) \geq s'(T, x') - \varepsilon$$

ε-ოპტიმალური გაჩერების მომენტს; თანაც, ცხადია, რომ $\tau'_\varepsilon(\omega') \leq T$.

გვექნება

$$E'_{(0,x)} G'\left(T, Y'_{\tau'_\varepsilon}\right) = E_x G\big(T, \tau_\varepsilon, X_{\tau_\varepsilon}\big),$$

სადაც

$$\tau_\varepsilon^T = \inf\{t \geq 0 \colon s'(T, (t, X_t)) \leq G(T, t, X_t) + \varepsilon\}$$

თუ გამოვიყენებთ (2.1.26)_ს, მივიღებთ

$$\tau_v e^T = \begin{cases} \inf\{t \geq 0: \quad s(T-t, X_t)) \leq g(\,X_t) + \varepsilon\}, & \text{თუკი ასეთი } t \text{ არსებობს} \\ T, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

თანაც

$$E_x \left[g\big(X_{\tau_\varepsilon^T}\big) \cdot I_{(\tau_\varepsilon^T < T)} + \underline{\lim}_{t \uparrow T} g(X_t) \cdot I_{(\tau_\varepsilon^T = T)} \right] \geq s(T,x) - \varepsilon$$

ანუ აგებული τ_ε გაჩერების მომენტიწარმოადგენს ε– ოპტიმალური გაჩერების მომენტს.

2) τ_0^T გაჩერების მომენტის ოპტიმალურობა უშუალოდ გამომდინარეობს τ_ε^T მომენტის განმარტებიდან.

§ 2. არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება სასრულ დროით ინტერვალზე

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი შეუწყვეტადი სტანდარტული

$$X = \big(\,\Omega, M^s, M_t^s, X_t, P_{s,x}\big), \;\; t \geq 0, 0 \leq s \leq t,$$

მარკოვის პროცესი(E, B) ფაზურ სივრცეში.

ვთქვათ, $f(t,x)$ მოგების ფუნქცია და $c(t,x)$ გადასახადის ფუნქცია ბორელის ფუნქციებია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იგულისხმება, რომ ისინი $\mathcal{B}' = \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{B}$ σ–ალგებრის მიმართ ზომადებია, განმარტებულია $[0,\infty) \times E$ სიმრავლეზე, ღებულობენ მნიშვნელობებს $[-\infty, +\infty]$ სიმრავლეში.

ვიგულისხმოთ, რომ თუ ჩვენ X პროცესზე დაკვირვებას შევწყვეტთ დროის $t > 0$ მომენტში, მაშინ მივიღებთ მოგებას

$$g(t, X_t) = f(t, X_t) - \int_0^t c(s, X_s) ds, \tag{2.2.1}$$

სადაც $f(t,x)$, $x \in E$, ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$E_{s,x}\left[\sup_{t \geq s} g^-(t, X_t)\right] < \infty, \qquad s \leq 0, \qquad x \in E. \tag{2.2.2}$$

შემოვიღოთ ფასი შემდეგნაირად:

$$v(s,x) = \sup_{\tau\in\mathfrak{W}_s} E_{s,x}\, g(\tau, X_\tau) \tag{2.2.3}$$

სადაც $\mathfrak{W}_s$ წარმოადგენს ყველა M_t^s–გაჩერების მომენტების კლასს ($t \geq s$).

$\tau_\varepsilon \in \mathfrak{W}_s$, $\varepsilon \geq 0$, გაჩერების მომენტს ეწოდება ε–ოპტიმალური, თუკი ნებისმიერი $x \in E$–თვის

$$E_{s,x} g(\tau, X_\tau) \geq v(s,x) - \varepsilon$$

O-ოპტიმალურობიდან გაჩერების მომენტებს ვუწოდოთ ჩვეულებრივ ოპტიმალური, როგორც ზემოთ.

შემოვიღოთ ახალი $\Omega' = (0,\infty) \times \Omega$ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე $\omega' = (s,\omega)$ ელემენტებით და ახალი $E' = [0,\infty) \times E$ ფაზური სივრცე შესაბამისი $\mathcal{B}' = \mathcal{B}[0,\infty)\otimes\mathcal{B}$ σ–ალგებრით.

განვსაზღვროთ Ω'–სივრცეზე ახალი X' შემთხვევით პროცესი მნიშვნელობებით $(E',\mathcal{B}')$–ში:

$$X_t'(\omega') = X_t'(s,\omega) \equiv \big(s+t, X_{s+t}(\omega)\big), \qquad s \geq 0, \qquad t \geq 0$$

და განვსაზღვროთ ასევე Θ_t' გადატანის ოპერატორები:

$$\Theta_t'(\omega') = \Theta_t'(s,\omega) = (s+t,\omega), \qquad s \geq 0, \qquad t \geq 0$$

მაშინ ცხადია

$$X_u'\big(\Theta_t'(\omega')\big) = X_{u+t}'(\omega'), \qquad s \geq 0, \qquad t \geq 0$$

Ω'–სივრცეში შემოვიღოთ σ–ალგებრები

$$N^0 = \sigma\{X_u', \qquad u \geq 0\},$$

$$N_t' = \sigma\{X_u', \qquad 0 \leq u \leq t\},$$

N^0 σ–ალგებრზე შემოვიღოთ ალბათური ზომები

$$P_{x'}'(A) = P_{s,x}'(A) \equiv P_{s,x}(A_s)$$

სადაც $A \in N^0$, ხოლო A_s წარმოადგენს A სიმრავლის კვეთას s წერტილში: $A_s = \{\omega: (s,\omega) \in A\}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ $A \in N^0$, მაშინ $A_s \in \mathcal{F}^0 \equiv \sigma\{X_u, u \geq s\}$ და თუკი $A \in N_t^0$, მაშინ

$$A_s \in \mathcal{F}_{s+1}^s \equiv \sigma\{X_u, s \leq s \leq s+t\}$$

განვიხილოთ

$$P'(h,x',B') \equiv P'_{x'}(X'_h \in B)$$

ფუნქცია და ვაჩვენოთ, რომ ეს ფუნქცია არის ზომადი x'–ით ყოველი ფიქსირებული $h \geq 0$ და $B' \in \mathcal{B}'$.

$B' = \Gamma \times B, \Gamma \in \mathcal{B}[0,\infty), B \in \mathcal{B}$, მართკუთხედები წარმოქმნიან $\mathcal{B}'$ σ–ალგებრას და გვექნება

$$P'(h,x',B') \equiv P'_{s,x}\big(\omega: \big(s+h, X_{s+h}(\omega)\big) \in B\big) \in \Gamma \times B =$$

$$= I_{(s+h\in\Gamma)} \cdot P_{s,x}(X_{s+h} \in B)$$

ასე რომ B'–თვის $P'(h,x',B')$ ფუნქცია არის არის ზომადი x'–ით ფიქსირებული $h \geq 0$–თვის. შემდეგ განვიხილოთ ყველა იმ B', $B' \in \mathcal{B}'$, სიმრავლეთა სისტემა რომელთათვისაც $P'(h,x',B')$ ფუნქცია ზომადია x'–ით.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს სისტემა აკმაყოფილებს მონოტონური კლასების შესახებ თეორემის ყველა პირობებს და ამიტომ ის ემთხვევა $\mathcal{B}'$ σ–ალგებრას. $P'_{x'}(x'_h \in B)$ ფუნქციის x'–ით ზომადობის გამო შეგვიძლია განვიხილოთ $P'_{\mu'}$ ზომები N^0 σ–ალგებრზე ყოველი სასრული μ'–თვის $(E',\mathcal{B}')$–ზე. განვიხილოთ N', რომელიც არის N^0 σ–ალგებრის გასრულება ყველა $P'_{\mu'}$ ზომათა სისტემის მიმართ და ასევე N'_t, რომელიც არის N_t^0 σ–ალგებრის გასრულება იგივე ზომათა სისტემის მიმართ N'–ში.

ვიგულისხმოთ ახლა, რომშესრულებულია შემდეგი პირობებუ:

$$P_{s,x}\left\{\omega: \lim_{t\downarrow s} g(t,X_t) = g(s,x)\right\} = 1, \qquad x \in E, \tag{2.2.4}$$

$$E'_{x'}\left[\sup_{t\geq 0} g^-(X'_t)\right] < \infty, \qquad x' \in E', \tag{2.2.5}$$

$$P'_{x'}\left\{\omega': \lim_{t\downarrow 0} g(X_t) = g(x')\right\} = 1, \qquad x \in E', \tag{2.2.6}$$

განვიხილოთ X' პროცესის

$$v'(x') = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}'} E'_{x'}\, g\big(X'_{\tau'}\big), \tag{2.2.7}$$

ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა, სადაც $\mathfrak{M}'$ არის N'_t გაჩერების მომენტთა კლასი. §1–ის ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი.

ლ ე მ ა 2.1. შემთხვევითი პროცესი

$$X' = \big(\Omega', N', M'_t, X'_t, \theta'_t, P'_{x'}\big),\ \ t \geq 0, \tag{2.2.8}$$

ერთგვაროვანი შეუწყვეტადი სტანდარტული მარკოვის პროცესია.

ლ ე მ ა 2.2. ვთქვათ, შესრულებულია (2.2.2), (2.2.4)–(2.2.6) პირობები. მაშინ (2.2.3) და (2.2.7) ფასები ერთმანეთს ემთხვევა

$$v(s,x) = v'(s,x), \qquad x \in E, \tag{2.2.9}$$

ახლა შემოვიღოთ ექსცესიური ფუნქციის ცნება.

$f(t,x)$ ფუნქციას, განსაზღვრულს $[0,\infty) \times E$ სიმრავლეზე მნიშვნელობებით $(-\infty,+\infty]$ –ში და ზომადს ისინი $\mathcal{B}' = \mathcal{B}[0,\infty) \otimes \mathcal{B}$ σ–ალგებრის $\mathcal{B}'$ უნივერსალური გასრულების მიმართ ეწოდება X პროცესის მიმართ ექსცესიური ფუნქცია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$E_{s,x} f^{-}(t, X_t) < \infty, 0 \leq s \leq t < \infty, x \in E, \tag{2.2.10}$$

$$E_{s,x} f(t, X_t) < f(s,x), t \geq s, \qquad x \in E, \tag{2.2.11}$$

$$E_{s,x} f(t, X_t) \to f(s,x), t \downarrow s, \qquad x \in E, \tag{2.2.12}$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. ვთქვათ $g(t,x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (2.2.2) და (2.2.4) პირობებს მაშინ:

1) $v(s,x)$ ფასი წარმოადგენს $g(s,x)$ ფუნქციის უმცირეს ექსცესიურ მაჟორანტს.

2) $v(s,x)$ ფასი წარმოადგენს ბორელის ($\mathcal{B}'$–ზომად) ფუნქციას და მიიღება სემდეგნაირად

$$v(s,x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N\, g(s,x), \tag{2.2.13}$$

სადაც

$$Q_n g(s,x) = \max\big\{g(s,x), E_{s,x} g(s + 2^{-n}, x_{s+2^{-n}})\big\}, \tag{2.2.14}$$

ხოლო Q_n^N არის Q_n ოპერატორის N ხარისხი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ლემა 2.2–ის თანახმად $v(s,x)$ და $v'(x')$ ფასები ემთხვევა, რაც გვაძლევს საშუალებას $v(s,x)$ ფასის ასაგებად გამოვიყენოთ $v'(x')$ ფასის აგების მეთოდი. გვექნება

$$v'(x') = \lim_{n\to\infty} \lim_{N\to\infty} Q_n^N \, g(s,x),$$

სადაც

$$Q_n g(x') = \max\{g(x'), E'_{x'} g(X'_{2^{-n}})\},$$

აქ $E'_{x'} g(X'_{2^{-n}})$ არის $\mathcal{B}'$–ზომადი x'-ით და ამიტომ ასეთივე გამოდის $Q_n g(x')$, $Q_n^N g(x')$ და $v'(x')$ კი მიიღება ზღვარზე გადასვლით.

შემდეგ, რადგან $v(s,x)$ ბორელის ფუნქციას წარმოადგენს, თუ განვიხილავთ $v(t, X_t(\omega))$ შემთხვევით პროცესს, აღმოვაჩენთ, რომ

$$B_s \equiv \begin{cases} \omega\text{: რომლისთვისაც } v(t, X_t(\omega)) \text{ პროცესს გააჩნია} \\ \quad \text{მარჯვნიდან უწყვეტი ტრაექტორიები} \\ \quad \text{დროის } [0,\infty) \text{ინტერვალზე} \end{cases}$$

სიმრავლე ეკუთვნის M^s σ–ალგებრას.

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $v'(X'_t(\omega'))$ შემთხვევითი პროცესისათვის

$$B \equiv \begin{cases} \omega\text{: რომლისთვისაც } v'(X'_t(\omega')) \text{ პროცესს გააჩნია} \\ \quad \text{მარჯვნიდან უწყვეტი ტრაექტორიები} \\ \quad \text{დროის } [0,\infty) \text{ინტერვალზე} \end{cases}$$

სიმრავლე ეკუთვნის N' σ–ალგებრას.

$v'(x')$ ფასი წარმოადგენს ექსცესიურ ფუნქციას X' პროცესის მიმართ და

$$E'_{x'} \sup_{t\geq s} g^-\left(t, X_t(\omega)\right) = E_{s,x} \sup_{t\geq s} g^-\left(t, X_t(\omega)\right) < \infty, s \geq 0, x \in E.$$

ასეთ შემთხვევაში ცნობილია, რომ $v'(X'_t(\omega'))$ პროცესს აქვს მარჯვნიდან უწყვეტი ტრაექტორიები, ანუ სრულდება პირობა

$$P'_{x'}(B) = 1, \qquad x' \in E'.$$

შემდეგ შევნიშნოთ, რომ რადგან $\mathcal{B}$ სიმრავლის კვეთა s წერტილში ემთხვევა B_s სიმრავლეს, ვღებუობთ

$$P_{s,x}(B_s) = 1, \qquad s \geq 0, x \in E,$$

ანუ ე.ი. $v(t, X_t(\omega))$ შემთხვევით პროცესს გააჩნია მარჯვნიდან უწყვეტი ტრაექტორიები $[s, \infty)$ ინტერვალზე.

თეორემა 2.1 დამტკიცებულია.

ლემა 2.2–ით დადგენილი ფაქტი $v(s, x)$ და $v'(x')$ ფასების დამთხვევის შესახებ საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ ε–ოპტიმალური და ოპტიმალური გაჩერების მომენტების სტრუქტურა და დავადგინოთ მათი სახე X პროცესის ოპტიმალური გაჩერების (2.2.3) ამოცანაში.

დავუშვათ, რომ (2.2.4) პირობასთან ერთად $g(t, x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობასაც

$$E_{s,x}\left[\sup_{t \geq s} |g(t, X_t)|\right] < \infty, s \geq 0, x \in E. \tag{2.2.15}$$

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. ვთქვათ $g(t, x)$ ბორელის ფუნქცია აკმაყოფილებს X პროცესის მიმართ (2.2.4) და (2.2.15) პირობებს მაშინ

1) ნებისმიერი $\varepsilon > 0$–თვის

$$\tau_\varepsilon = \inf\{t \geq s: v(t, X_t) \leq g(t, X - t) + \varepsilon\}$$

მომენტები წარმოადგენენ ε–ოპტიმალური გაჩერების მომენტებს;

2) თუკი $g(t, x)$ ფუნქცია უწყვეტია ზემოდან, ანუ

$$g(s, x) \geq \varlimsup_{\substack{y \to x \\ t \to s}} g(t, y)$$

და

$$\tau_0 = \inf\{t \geq s: v(t, X_t) = g(t, X_t)\}$$

მომენტი სასრულია, $x \in E$ მაშინ τ_0წარმოადგენს გაჩერების ოპტიმალურ მომენტს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . რადგან აგებული X' პროცესი არის ერთგვაროვანი სტანდარტული მარკოვის პროცესი, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$–თვის გვექნება, რომ

$$\tau'_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : v'(X'_t) \leq g(X'_t) + \varepsilon\}$$

მომენტი არის ε გაჩერების მომენტი:

$$E'_{x'} g\left(X'_{\tau'_\varepsilon}\right) \geq v'(x') - \varepsilon, x' \in E$$

$$P'_{x'}\{\tau_\varepsilon < \infty\} = 1, \qquad x' \in E'.$$

საიდანაც მივიღებთ ,რომ

$$E_{s,x} g\left(X'_{\tau'_\varepsilon(s,\omega)}(s,\omega)\right) \geq v(s,x) - \varepsilon$$

ანუ

$$E_{s,x} g\left(s + \tau_\varepsilon(s,\omega), X_{s+\tau'_\varepsilon(s,\omega)}(\omega)\right) \geq v(s,x) - \varepsilon$$

მაგრამ ცხადია, რომ

$$s + \tau'_\varepsilon(s,\omega) = \tau_\varepsilon(\omega)$$

აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$E_{s,x} g\left(\tau_\varepsilon, X_{\tau_\varepsilon}\right) \geq v(s,x) - \varepsilon$$

ანუ τ_ε წარმოადგენს ε–ოპტიმალური გაჩერების მომენტს.

შემდეგ, თუ განოვიყენებთ $g(t,x) = g(x')$ ფუნქციის ზემოდან უწყვეტობას მივიღებთ, რომ τ'_0 წარმოადგენს

$$\tau'_0 = \inf\{t \geq 0 : v'(X'_t) = g(X'_t)\}$$

ოპტიმალური გაჩერების მომენტს. აქედან, თუ შევნიშნავთ, რომ

$$E'_{x'} g\left(X'_{\tau'_0}\right) = v'(x')$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $s + \tau_0(s,\omega) = \tau_0(\omega)$ არის τ_0 ოპტიმალური გაჩერების მომენტი.

თეორემა 2.2. დამტკიცებულია.

§ 3. ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება ფინანსური ბაზრის დიფუზიურ მოდელში

განვიხილოთ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ალბათური სივრცე და მასზე განსაზღვრული სტანდარტული ვინერის პროცესი $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \leq t \leq T$. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ T არის სასრული და ფილტრაცია $F = (\mathcal{F}_t)$, $0 \leq t \leq T$, არის ნატურალური $(\mathcal{F}_t^W)$, $0 \leq t \leq T$, ფილტრაციის გასრულება P ალბათური ზომით. $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t, P)$–ზე, $0 \leq t \leq T$, განვიხილოთ ფინანსური ბაზარი ორი აქტივით $\left(\hat{B}_t, S_t\right)$, $0 \leq t \leq T$, სადაც $\hat{B}_t$ არის ერთეულოვანი საბანკო ანგარიშის ღირებულება t მომენტში, ხოლო S_t – აქციის ღირებულება t მომენტში. ამ აქტივების ევოლუცია მოცემულია შემდეგი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებებით

$$d\hat{B}_t = r \cdot \hat{B}_t \cdot dt, \qquad 0 \leq t \leq T, \hat{B}_0 = 1 \tag{2.3.1}$$

$$dS_t = r \cdot S_t \cdot dt + \sigma(S_t) \cdot S_t \cdot dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T, S_0 > 0 \tag{2.3.2}$$

სადაც $r \geq 0$, ხოლო ვოლატილობის ფუნქცია $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot x, x \geq 0$, აკმაყოფილებს პირობებს

$$1)\ 0 < \bar{\sigma} \leq \sigma(x) \leq C,$$

$$2)\ \left|\ \tilde{\sigma}(x) – \tilde{\sigma}(y)\ \right| \ \leq K \cdot |x - y| \tag{2.3.3}$$

ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი სტოქასტური დიდერენციალური განტოლება საწყისი პირობით:

$$\begin{gathered} dS_u(t,x) = r \cdot S_u(t,x) \cdot du + \\ +\sigma\left(S_u(t,x)\right) \cdot S_u(t,x) \cdot dW_u, \qquad t \leq u\ \leq T, \\ S_u(t,x) = x, \qquad x > 0 \end{gathered} \tag{2.3.4}$$

(2.3.3) პირობები გარანტირებს (2.3.2) და (2.3.4) ერთადერთი ძლიერი ამონახსნის არსებობას. ჩვენ განვიხილავთ ამერიკული გაყიდვის ოფციონს აქციებზე S_t ფასით t მომენტში და $g(x) = (c - x)^+$ გადახდის ფუნქციით. მასთან დაკავშირებული გადახდის პროცესს აქვს სახე: $g(S_t)$, $0 \le t \le T$, ხოლო ამერიკული გაყიდვის ოფციონის V_t , $0 \le t \le T$, ფასის პროცესს აქვს სახე:

$$V_t = \underset{t \le \tau \le T}{ess\ sup}\, \mathrm{E}(\exp(-r \cdot (\tau - t) \cdot g(S_\tau) | \mathcal{F}_t)\,, 0 \le t \le T \tag{2.3.5}$$

სადაც არსებითი სუპრემუმი აღებულია ყველა τ, $t \le \tau \le T$, გაჩერების მომენტებზე $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$, ფილტრაციის მიმართ.

ცხადია, რომ $V_t = \hat{B}_t \cdot Y_t$, სადაც

$$\hat{B}_t = \exp(r \cdot t),$$

$$Y_t = \underset{t \le \tau \le T}{ess\ sup}\, \mathrm{E}(\exp(-r \cdot \tau) \cdot g(S_\tau) | \mathcal{F}_t)\,, 0 \le t \le T \tag{2.3.6}$$

პროცესი $Y_t, 0 \le t \le T$, არის X_t დისკონტირებული გადასახადის პროცესის სნელის მომვლები

$$X_t = \exp(-r \cdot \tau) \cdot g(S_t), \qquad 0 \le t \le T \tag{2.3.7}$$

ე. ი. მინიმალური სუპერმარტინგალი, რომელიც მაჟორირებს X_t, $0 \le t \le T$ პროცესს.

ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასის პროცესთან ერთად შემოვიღოთ ამ ოფციონის

$$v^T(t, x) = \sup_{t \le \tau \le T} E\left(\mathrm{e}^{-r \cdot (\tau - t)} \big(c - S_\tau(t, x)\big)^+\right), \quad 0 \le t \le T, \qquad x > 0 \tag{2.3.8}$$

ფასის ფუნქცია. S_t, $0 \le t \le T$, ძლიერად მარკოულობის თვისების გამოყენებით სეიძლება ნაჩვენები იყოს კავშირი ოფციონის ფასის ფუნქციასა და ფასის პროცესს შორის.

$$V_t = v^T(t, S_t), 0 \le t \le T, \tag{2.3.9}$$

განვსაზღვროთ $P(t, x; u, y), u \ge t,\ x > 0,\ y > 0$, გადასვლის ალბათობის ფუნქცია S_t ერთგვაროვანი დიფუზიური პროცესისა:

$$P(t, x; u, y) = P(S_u(t, x) \le y). \tag{2.3.10}$$

ძირითადი მიზანია დავადგინოთ ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასის პროცესის ადრეული აღსრულების პრემიალური წარმოდგენა

$$V_t = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau-t)}(c-S_T)^+ | \mathcal{F}_t\right) +$$

$$+E\left(\int_t^T c\cdot r\cdot \mathrm{e}^{-r\cdot(u-t)}\cdot I_{(S_u<b^T(u))} | \mathcal{F}_t\right), \qquad 0\le t\le T, \tag{2.3.11}$$

$$\mathcal{V}^T(t,x) = E\left(\mathrm{e}^{-r\cdot(T-t)}\cdot\left(c-S_\tau(t,x)\right)^+\right) +$$

$$+\int_t^T c\cdot r\cdot \mathrm{e}^{-r\cdot(u-t)}\cdot P(t,x;u,b^T(u))du \quad 0\le t\le T, \qquad x>0, \tag{2.3.12}$$

სადაც $b^T(t)$ არის ოფციონის გაგრძელების არის საზღვარი.

დავწეროთ (2.3.8) ფასის ფუნქციის წარმოდგენა $x<y$–თვის:

$$v^T(t,x) = \sup_{t\le\tau\le T} E\left(\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau-t)}\left(c-S_\tau(t,x)\right)^+\right), \quad 0\le t\le T, \tag{2.3.13}$$

$$v^T(t,y) = \sup_{t\le\tau\le T} E\left(\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau-t)}\left(c-S_\tau(t,y)\right)^+\right), \quad 0\le t\le T, \tag{2.3.14}$$

ლ ე მ ა 3.1. განვიხილოთ (2.3.1 სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამოხსნა განსხვავებული $x<y$ საწყისი პირობით. მაშინ

$$S_u(t,x)\le S_u(t,y) \text{ თ. ყ. ყველა } u\text{–თვის}, \ t\le u\le T. \tag{2.3.15}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . ცხადია, $S_u(t,x)\le S_u(t,y)$ უტოლობა ექვივალენტურია $\left(S_u(t,x)-S_u(t,y)\right)^+=0$ ტოლობისა

$$d\left(S_u(t,x)-S_u(t,y)\right) = r\cdot\left(S_u(t,x)-S_u(t,y)\right)\cdot du +$$

$$+\left(\tilde\sigma\left(S_u(t,x)\right)-\tilde\sigma\left(S_u(t,y)\right)\right)\cdot dW_u, \ t\le u\le T. \tag{2.3.16}$$

თუ დავწერთ ტანკა–მეირის ფორმულას $\left(S_u(t,x)-S_u(t,y)\right)^+$ პროცესისათვის, მივიღებთ

$$\left(S_u(t,x)-S_u(t,y)\right)^+ = (x-y)^+ +$$

$$+\int_t^u I_{(S_v(t,x)-S_v(t,y)>0)} d\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)+\frac{1}{2}L_u^{\circ}\big(S(t,x)-(t,y)\big)=$$

$$\int_t^u I_{(S_v(t,x)-S_v(t,y)>0)}\cdot r\cdot\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)\,dv+$$

$$+\int_t^u I_{(S_v(t,x)-S_v(t,y)>0)}\cdot r\cdot\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)\Big(\tilde{\sigma}\big(S_v(t,x)\big)-\tilde{\sigma}\big(S_v(t,y)\big)\Big)\cdot\,dW_v+$$

$$+\frac{1}{2}L_u^{\circ}\big(S(t,x)-(t,y)\big)$$

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი სტოქასტური ინტეგრალი არის კვადრატით ინტეგრებადი მარტინგალი, ხოლო მისი მათემატიკური ლოდინი ნულია. თუ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხარეს მოვდებთ მათემატიკურ ლოდინს მივიღებთ

$$\mathbf{E}\big(S_u(t,x)-S_u(t,y)\big)^+=$$

$$=\mathbf{E}\int_t^u r\cdot\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)^+dv+\frac{1}{2}\,\mathbf{E}L_u^{\circ}\big(S(t,x)-(t,y)\big) \qquad (2.3.17)$$

შემდეგ გვექნება

$$\mathbf{E}L_u^{\circ}\big(S(t,x)-(t,y)\big)=$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\varepsilon}\int_t^u I_{(0<S_v(t,x)-S_v(t,y)\le\varepsilon)}\cdot\Big(\tilde{\sigma}\big(S_v(t,x)\big)-\tilde{\sigma}\big(S_v(t,y)\big)\Big)^2\cdot dv\le$$

$$\le\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\frac{1}{\varepsilon}\int_t^u I_{(0<S_v(t,x)-S_v(t,y)\le\varepsilon)}\cdot K^2\cdot\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)^2\cdot dv\le$$

$$\le\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}K^2\cdot\,\varepsilon\cdot(u-t)=0,$$

მაშასადამე,

$$\mathbf{E}\big(S_u(t,x)-S_u(t,y)\big)^+=r\cdot\mathrm{E}\int_t^u\big(S_v(t,x)-S_v(t,y)\big)^+\cdot dv,\ t\le u\le T, \qquad (2.3.18)$$

გრონუოლის ლემის ძალით მივიღებთ

$$\mathbf{E}\big(\,S_u(t,x) - S_u(t,y)\big)^+ = 0, \qquad t \le u \le T,$$

რაც ამტკიცებს (2.3.3) უტოლობას.

ლემა 3.1. დამტკიცებულია.

ეხლა შემოვიღოთ ე.წ.

$$D^T = \{(t,x) \colon 0 \le t \le T, x > 0,\ \ v^T(t,x) > g(x)\} \tag{2.3.19}$$

გაგრძელების არე (2.3.1) ოპტიმალური გაჩერების ამოცანისათვის და მისი

$$D_t^T = \{x \colon (t,x) \in D^T\}$$

კვეთა t წერტილში.

ლ ე მ ა 3. 2. D^T–ს კვეთას t წერტილში აქვს შემდეგი სახე

$$D_t^T = (b^T(t), +\infty), 0 \le t \le T, \tag{2.3.20}$$

სადაც $b^T(t)$ გარკვეული ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$0 < b^T(t) < c \text{ ყველა } 0 \le t \le T\text{–თვის}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . $v^T(t,x)$ფასის ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს $v^T(t,x) \le c = g(0)$, ამიტომ $0 \notin D_t^T$. (2.3.1)–დან ჩვენ გვაქვს

$$v^T(t,x) \ge \mathrm{e}^{-r\cdot(T-t)} \cdot \mathrm{E}\big(c - S_T(t,x)\big)^+ > 0,\ \ 0 \le t \le T, \tag{2.3.21}$$

საიდანაც $g(x) = 0$, თუ $x \ge c$, ამიტომ $[c, +\infty) \subseteq D_t^T, 0 \le t \le T$. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ თუ $x \in D_t^T$ და $y > x$, მაშინ $y \in D_t^T$.

შევნიშნოთ, რომ (2.3.1) ოპტიმალური გაჩერების ამოცანისათვის არსებობს $\tau^*(t,x)$ გაჩერების მომენტი.განვიხილოთ სხვაობა

$$v^T(t,y) - v^T(t,x) =$$

$$= v^T(t,y) - \ E\ \left[\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau^*(t,x)-t)}\ .\ \mathrm{E}\left(c - S_{\tau^*(t,x)}(t,x)\right)^+\right] \ge$$

$$\ge E\left[\ \mathrm{e}^{-r\cdot(\tau^*(t,x)-t)}\ .\left(c - S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\right)^+\ - \right.$$

$$-\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau^*(t,x)-t)}\cdot\left(c-S_{\tau^*(t,x)}(t,x)\right)^+\Big].$$

ლემა 3.1–ის გამოყენებით გვაქვს

$$S_{\tau^*(t,x)}(t,x)\leq S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\ \text{თ. ყ.},$$

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\left(c-S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\right)^+-\left(c-S_{\tau^*(t,x)}(t,x)\right)^+\geq$$

$$\left(c-S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\right)-\left(c-S_{\tau^*(t,x)}(t,x)\right)=$$

$$S_{\tau^*(t,x)}(t,x)-S_{\tau^*(t,x)}(t,y)$$

თუ ამას გამოვიყენებთ წინა უტოლობაში მივიღებთ

$$v^T(t,y)-v^T(t,x)\geq$$

$$E\ \left[\mathrm{e}^{-r\cdot(\tau^*(t,x)-t)}\cdot\left(S_{\tau^*(t,x)}(t,x)-S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\right)\right],$$

მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ

$$\mathrm{e}^{-r\cdot(u-t)}\cdot\left(S_{\tau^*(t,x)}(t,x)-S_{\tau^*(t,x)}(t,y)\right),t\leq u\leq T,\tag{2.3.22}$$

სტოქასტური პროცესი არის მარტინგალი და საბოლოოდ მივიღებთ

$$v^T(t,y)-v^T(t,x)\geq\ x-y\tag{2.3.23}$$

ვთქვათ $x\in D_t^T$, გვაქვს $v^T(t,x)>(c-x)^+$ და, მაშასადამე,

$$v^T(t,y)>\left(x-y\right)+(c-x)^+\geq\ \left(x-y\right)+(c-x)=c-y$$

(2.3.9)–დან გვაქვს $v^T(t,y)>0$, უკანასკნელის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$v^T(t,y)>(c-y)^+$$

ე. ი. $y\in D_t^T$.

ლემა 3.2 დამტკიცებულია.

ლ ე მ ა 3.3. გაგრძელების არის $b^T(t)$საზღვარი არის მარჯვნიდან უწყვეტი არაკლებადი ფუნქცია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $v^T(t,x)$ ფუნქცია არის არაზდადი t–თი. S_t დიფუზიური პროცესის ერთგვაროვნების გამო

$$v^T(t,x) = \sup_{0\le\tau\le T-t} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-r\cdot\tau} \cdot \left(c - S_\tau(0,x)\right)^+\right), \tag{2.3.24}$$

$$v^T(s,x) = \sup_{0\le\tau\le T-s} \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-r\cdot\tau} \cdot \left(c - S_\tau(0,x)\right)^+\right),$$

მაშასადამე, $s \le t$-თვის გვაქვს

$$v^T(t,x) \le v^T(s,x). \tag{2.3.25}$$

ავიღოთ $x = b^T(t) + \varepsilon$ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$–თვის, მივიღებთ

$$g\ (b^T(t)+\varepsilon) < v^T(t, b^T(t)+\varepsilon) \le v^T(s, b^T(t)+\varepsilon),$$

რომლიდანაც

$$b^T(t) + \varepsilon > b^T(s).$$

თუ ε–ს მივასწრაფებთ ნულისაკენ, მოვიღებთ

$$b^T(t) + \varepsilon > b^T(s), \qquad s \le t.$$

მაშასადამე, $b^T(t)$ საზღვარი არის არაკლებადი ფუნქცია. ორივე $v^T(t,x)$ და $g(x)$ ფუნქცია არის უწყვეტი, ამიტომ

$$D^T = \{(t,x)\colon 0 \le t \le T, x > 0,\ \ v^T(t,x) > g(x)\}$$

სიმრავლე არის ღია, ხოლო მისი $\overline{D}^T$ დამატება ჩაკეტილი. ავიღოთ $t_n \downarrow t$ მიმდევრობა, მაშინ $(b^T(t_n), t_n) \in \overline{D}^T$ და, მაშასადამე, მივიღებთ, რომ $(b^T(t+), t) \in \overline{D}^T$. ეს არის $b^T(t+) \le b^T(t)$, მაგრამ $b^T(t)$ ფუნქცია არის არაკლებადი. მაშასადამე, ის არის მარჯვნიდან უწყვეტი არაკლებადიფუნქცია. ლემა 3.3. დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასის ფუნქციისათვის სამართლიანია წარმოდგენა

$$v^T(t,x) = E\left(\mathrm{e}^{-r\cdot(T-t)}\left(c - S_T(t,x)\right)^+\right) +$$

$$+\int_{t}^{T} c \cdot r \cdot \mathrm{e}^{-r\cdot(u-t)} \cdot P(t,x;u,b^T(u))du \quad 0 \le t \le T, \qquad x > 0, \tag{2.3.26}$$

სადაც $b^T(t)$ არის ოპტიმალური გაჩერების საზღვრის ფუნქცია და $P(t,x;u,y)$ არის S_u, $0 \le u \le T$, ერთგვაროვანი დიფუზიური პროცესის გადასვლის ალბათობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა . უშუალოდ მიიღება ლემა 3.1–ლემა 3.2–ის გამოყენებით

თეორემა 3.1. დამტკიცებულია.

თ ა ვ ი I I I. სტოქასტური ფინანსური დისკრეტული პროცესების მოდელირება

§1. ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონების გათვლის ამოცანა

განვიხილოთ უმარტივესი ფინანსური (B,S) – ბაზრის კარგად ცნობილი კოკსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ფუნქციონირებს დროის მომენტებში $n = 0,1 \dots N < \infty$ და შედგება მხოლოდ ორი აქტივისაგან $B = (B_n)$ არის ობლიგაციები (საბანკო ანგარიში) და $S = (S_n)$ არის აქციები. აღნიშნული მოდელის თანახმად, B_n და S_n სიდიდეების მნიშვნელობები დროში მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობების საშუალებით:

$$B_n = (1+r)B_{n-1} \qquad B_0 > 0 \tag{3.1.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1} \qquad S_0 > 0 \tag{3.1.2}$$

სადაც $r > 0$ არის საპროცენტო განაკვეთი, რომელიც არ იცვლება, ხოლო $\rho = \rho_n$ არის დამოუკიდებლად და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $n = 0,1 \dots N$. ამასთან, ყოველი ρ_n შემთხვევითი სიდიდე იღებს ან a-ს ან b-ს ტოლ შესაძლო რიცხვით მნიშვნელობებს, $a < b$, შემდეგი ალბათობებით:

$$P(\rho_n = b) = p > 0 \tag{3.1.3}$$

$$P(\rho_n = a) = 1 - p > 0 \tag{3.1.4}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ ρ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

ρ_n	b	a
$P\rho_n$	P	$1-P$

$$n = 0,1 \dots N \tag{3.1.5}$$

შევნიშნოთ რომ ჩვენთვის საინტერესოა განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევა:

$$a < r < b \tag{3.1.6}$$

მართლაც თუ $r \le a$ მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ აქციები ხოლო თუ $r \ge b$, მაშინ ხელსაყრელია შევიძინოთ მხოლოდ ობლიგაციები ან თანხა დავდოთ მხოლოდ

საბანკო ანგარიშზე. ამ მოსაზრების საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითები:

დავუშვათ $B_0 = 20,\ S_0 = 100$ და დროის საწყის n=0 მომენტში ჩვენი თანხა 100–ს ტოლია. ვთქვათ, $r < a$ და $r = \frac{1}{5}$, $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{3}{5}$. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ვიყიდოთ ერთი აქცია ან ხუთი ობლიგაცია. ვნახოთ რა შეიძლება მოხდეს დროის შემდეგ n=1 მომენტში. ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება:

$B_1 = (1 + r)B_0 = \left(1 + \frac{1}{5}\right) * 20 = 24$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი – 120. თუ $\rho_1 = a = \frac{2}{5}$, მაშინ

$$S_1 = (1 + \rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{2}{5}\right) \cdot 100 = 140$$

და გვექნება $5B_1 < S_1$. თუ $\rho_1 = b = \frac{3}{5}$, მაშინ

$S_1 = (1 + \rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \cdot 100 = 160$

და კვლავ გვექნება $5B_1 < S_1$

ვთქვათ, ახლა $r > b$ და $r = \frac{1}{10}$, $a = \frac{2}{10}$, b=$\frac{3}{10}$. დროის $n = 1$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასი იქნება.

$$B_1 = (1 + r)B_0 = \left(1 + \frac{3}{10}\right) \cdot 20 = 26$$

ხოლო ხუთი ობლიგაციის კი – 130. $\rho_1 = a = \frac{1}{10}$, და $\rho_1 = b = \frac{2}{10}$ შემთხვევებში შესაბამისად გვექნება:

$$S_1 = (1 + \rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{1}{10}\right) \cdot 100 = 110.$$

$$S_1 = (1 + \rho_1)S_0 = \left(1 + \frac{2}{10}\right) \cdot 100 = 120$$

და ამგვარად ორივე შემთხვევაში $5B_1 > S_1$ ანალოგიური სიტუაციები გვექნება დროის სხვა მომენტებშიც

ჩვენ შეგვიძლია (3.1.6) უტოლობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$1 + a < 1 + r < 1 + b \qquad (3.1.7)$$

რადგანაც აქციის ფასი დადებითი სიდიდეა, ამიტომ

$0 < 1 + a < 1 + r < 1 + b$

საიდანაც ფინანსური ბაზრის a, r და b პარამეტრებისათვის მივიღებთ პირობას:

$$-1 < a < r < b \qquad (3.1.8)$$

გარდა ამისა, შევნიშნოთ რომ (3.1.1), (3.1.2) მოდელში B_n სიდიდე ითვლება ურისკო ფასიან ქაღალდად (საპროცენტო განაკვეთი $r > 0$ მუდმივი სიდიდეა და არ ხდება ინფლაციის გათვალისწინება და სხვ.), ხოლო S_n სიდიდე ითვლება რისკიან ფასიან ქაღალდად, რადგანაც აქციის აფსები დროში შემთხვევითად იცვლება.

წარმოვიდგინოთ ეხლა ინვესტორი, რომელსაც დროის საწყისს $n = 0$ მომენტში გააჩნია გარკვეული საწყისი კაპიტალი (თანხა) $X_0=x>0$ და სურს (3.1.1), (3.1.2) ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით თავისი საწყისი კაპიტალი მომავალში, დროის N მომენტში გახადოს რაიმე $f_N > 0$ თანხის ტოლი. ინვესტორის ამ სურვილს საინვესტიციო პრობლემა ეწოდება.

ინვესტორს შეუძლია თავისი საწყისი თანხა მთლიანად განათავსოს მხოლოდ ობლიგაციებში (საბანკო ანგარიშებზე) ან მხოლოდ აქციებში. ინვესტორთა უმრავლესობა, როგორც წესი, თავისი საწყისი თანხის ნაწილს ათავსებს ობლიგაციებში, ნაწილს კი – აქციებში ჩვენ სწორედ ამ შემთხვევას განვიხილავთ.

ვიგულისხმოთ, რომ დროის საწყის $n = 0$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0, ხოლო ერთი აქციის ფასია S_0 და ინვესტორმა შეიძინა შესაბამისად β_o და γ_o რაოდენობის ობლიგაცია და აქცია. ამასთან ერთად ჩვენ ვუშვებთ, რომ β_o და γ_o სიდიდეები შეიძლება იყოს წილადი და უარყოფითი რიცხვებიც. მაგალითად $\beta_o \frac{3}{2} =$ ნიშნავს, რომ ნაყიდია ერთნახევარი ობლიგაცია ხოლო $\gamma_o = -\frac{1}{2} =$ ნიშნავს, რომ ნასესხებია ნახევარი აქცია. ადვილი მისახვედრია რომ ინვესტორის საწყისი თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0 = \beta_o B_0 + \gamma_o S_0 \tag{3.1.9}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ ინვესტორის პორტფელი(სტრატეგია) დროის საწყის $n = 0$ მომენტში არის $\pi_0 = (\beta_o, \gamma_o)$ რომლის შესაბამისი თანხა მოიცემა (3.1.9) ტოლობით. დროის $n = 1$ მომენტის დადგომამდე ინვესტორს გარკვეული მოსაზრების გამო შეუძლია $\pi \quad 0 = (\beta_o, \gamma_o)$ შეცვალოს ახალი $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ პორტფელით, სადაც $\beta_1 \neq \beta_o, \gamma_1 \neq \gamma_o$ ასეთ შემთხვევაში X_0 თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0 \tag{3.1.10}$$

დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ინვესტორის თანხა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1 \tag{3.1.11}$$

სავსებით ანალოგიურად დროის n– 1 და n მომენტებში $\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1})$ და $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელების შესაბამისი თანხები შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n-1} = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} \tag{3.1.12}$$

$$X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \tag{3.1.13}$$

$$X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \tag{3.1.14}$$

ამრიგად ინვესტორის X_n თანხა დროის n მომენტებში მოიცემა (3.1.14) ტოლობით. X_n სიდიდეს, $n = 0,1 \dots N$ ინვესტორის კაპიტალის პროცესი ეწოდება. მის ფორმირებაში (განსაზღვრაში) მონაწილეობს ე.წ. თვითდაფინანსების პირობა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: ინვესტორის X_n კაპიტალის პროცესის ფორმირების დროს არ ხდება დამატებითი კაპიტალის არც შემოდინება და არც გადინება, ე.ი. ამ პროცესში მონაწილეობს მხოლოდ საწყისი კაპიტალი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ცვლილებები ობლიგაციების რაოდენობაში ხდება ნხოლოდ აქციების რაოდენობებში ცვლილებების ხარჯზე და პირიქით. ადვილი საჩვენებელია, რომ დროის $n - 1$ მომენტიდან დროის n მომენტამდე ინვესტორის კაპიტალის ნაზრდი (ცვლილება) დროში ობლიგაციებისა და აქციების ფასების დროში ნაზრდების საშუალებით (3.1.13) და (3.1.14) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n \tag{3.1.15}$$

ასევე ΔX_n ნაზრდი (3.1.12) და (3.1.14) ტოლობების გამოყენებით შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\Delta X_n = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n + \Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} \tag{3.1.16}$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$ და $\Delta \gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$ წარმოადგენს შესაბამისად ობლიგაციებისა და აქციების რაოდენობების ნაზრდებს დროის $n-1$ მომენტიდან დროის n მომენტამდე. (3.1.15) და (3.1.16) ტოლობების გამოყენებით გვექნება თვითდაფინანსების შემდეგი პირობა:

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0 \tag{3.1.17}$$

ჩავწეროთ თვითდაფინანსების (3.1.17) პირობა დროის $n = 1$ და $n = 2$ მომენტებისათვის

$$\Delta\beta_1 B_0 + \Delta\gamma_1 S_0 = 0 \tag{3.1.18}$$

$$\Delta\beta_2 B_1 + \Delta\gamma_2 S_1 = 0 \tag{3.1.19}$$

როგორც ზემოთ დავინახეთ X_n კაპიტალის ფორმირება დაკავშირებულია ინვესტორის *პორტფელების* $\pi = (\pi_n)$ $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ $n = 0,1 \dots N$ მიმდევრობასთან. ამის გათვალისწინებით X_n სიდიდეებსაც ჩავწერთ მიმდევრობის სახითშემდეგნაირად:

$X^n = (X_n^\pi)$ n=*0,1…N*

გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ X_n^π კაპიტალი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ჯამის სახით

$$X_n^\pi = X_0 + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k)$$

ამასთან ერთად, (3.1.17) პირობის გათვალისწინებით ამბობენ, რომ $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელები აგებულია თვითდაფინანსების პრინციპით და ამ შემთხვევაში $\pi = (\pi_n)$ პორტფელების მიმდევრობას თვითდაფინანსებადი ეწოდება.

ადვილი მისახვედრია, რომ საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტა ანუ დროის N მომენტისათვის f_n თანხის დაგროვება გარკვეულ რისკების გარდა დამოკიდებულია $X_0 = x$

თანხაზე და $\pi = (\pi_n)$ სტრატეგიაზე. ამასთან დაკავშირებით საჭიროა შემოვიღოთ სპეციალური სტრატეგია – ე.წ. ჰეჯი (hedge).

მოცემული $X_0 = x > 0$ საწყისი ტანხისათვის და არაუარყოფითი f_N ფუნქციისათვის თვითდაფინანსებად $\pi = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება ჰეჯი ან კიდევ (X, f_N) – ჰეჯი, თუ

$$X_0^\pi = X_0 = x \qquad X_n^\pi \geq f_\mathrm{N} \tag{3.1.20}$$

იმ შემთხვევაში როცა

$$X_0^\pi = X_0 = x \qquad X_n^\pi = f_N \tag{3.1.21}$$

მაშინ $\pi = (\pi_n)$ სტრატეგიას ეწოდება მინიმალური ჰეჯი.

ამრიგად, ჰეჯი არის ისეთი სტრატეგია, რომლის საშუალებით $X_0 = x > 0$ საწყისი თანხის მქონე ინვესტორს ობლიგაციებისა და აქციების ყიდვა–გაყიდვით (სტრატეგიის სათანადოდ აგების შემთხვევაში) დროის ბოლო N მომენტში ექნება f_N –ზე არანაკლები თანხა.

აღვნიშნოთ $\prod(x, f_N)$-ით ყველა (x, f_N) ჰეჯის ერთობლიობა.

სიდიდეს

$$C_N = \min\{x > 0 \colon \prod(x, f_N) \neq \Phi\} \tag{3.1.22}$$

სადაც Φ არის ცარიელი სიმრავლე (ე.ი. ისეთი სიმრავლე, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს), ეწოდება საინვესტიციო თანხა (ფასი). ამრიგად C_N არის ის უმცირესი (მინიმალური) საწყისი თანხა, რომელიც ინვესტორს აძლევს საინვესტიციო პრობლემის გადაწყვეტის საშუალებას, ანუ დროის ბოლო N მომენტში f_N თანხის მიღების გარანტიას. შევნიშნოთ რომ ჰეჯის (მინიმალური ჰეჯის) აგების პროცესს ჰეჯირება ეწოდება. ფინანსურ ბაზარზე ერთ ერთი პოპულარული ფასიანი ქაღალდი ე.წ. ოფციონი ანუ ოფციონური კონტრაქტი. იგი წარმოადგენს ორ მხარეს (ოციონის გამყიდველსა და მყიდველს) შორის შეთანხმებას წინასწარ განსაზღვრულ პირობებში რაიმე ფინანსური ინსტრუმენტის ან საქონლის ყიდვა გაყიდვის შესახებ. ოფციონური კონტრაქტის საგანი შეიძლება იყოს ობლიგაცია, აქცია, ვალუტა, ოქრო და სხვ. ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ აქციის ყიდვა გაყიდვის ოფციონურ კონტრაქტს.

ოფციონის მფლობელს (მყიდველს) აქვს უფლება მომავალში წინასწარ განსაზღვრულ დროს, ანუ ოფციონის აღსრულების (განაღდების) დროს, იყიდოს ან გაყიდოს აქცია წინასწარ შეთანხმებულ ფასად, რომელსაც შეთანხმების ფასი ეწოდება.

ოფციონის გამყიგველი (ემიტენტი, ოფციონის გამომშვები) ვალდებულია საჭიროების შემთხვევაში შეასრულოს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებული პირობები. შემდგომში ჩვენ განვიხილათ აქციების ყიდვა გაყიდვის ე.წ. ევროპული ტიპის ოფციონურ კონტრაქტებს. შევნიშნავთ, რომ სიტყვა ევროპული მიუთითებს იმაზე რომ, ოფციონის განაღდება შეიძლება მხოლოდ კონტრაქტრით წინასწარ განსაზღვრულ დროს. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ რადგან ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ აქციების ყიდვა გაყიდვის ოფციონებს, ამიტომ ოფციონური კონტრაქტი წარმოადგენს აქციის ფასის გარკვეულ ფუნქციას, რომელსაც გადახდის ფუნქცია ეწოდება.

ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_N) = \max(S_N - K, 0) \qquad (3.1.23)$$

არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას, იყიდოს ემიტენტისაგან აქცია მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში წინასწარ შეთანხმებულ K>0 ფასად. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი გაანაღდებს ოფციონს. ანუ იყიდის აქციას K ფასად, მყისვე გაყიდის მას S_N ფასად დამიიღებს მოგებას $f_N = S_N - K$. თუ $S_N \le K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანადებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_N = f(S_N) = \max(K - S_N, 0) \qquad (3.1.24)$$

არის მეორადი ფასიანი ქაღალდი, რომელიც მის მფლობელს აძლევს უფლებას, გაყიდოს აქცია მხოლოდდროის ბოლო N მომენტში წინასწარ შეთანხმებულ $K > 0$ ფასად. თუ $S_N < K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი იყიდის აქციას S_N ფასად, მყისვე გაყიდის მას K ფასად და მიიღებს მოგებას $f_N = K - S_N$. თუ $S_N \ge K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი არ გაანადებს ოფციონს, რადგან ამ შემთხვევაში მას მოგება არ ექნება და მისი დანაკარგი იქნება ოფციონში გადახდილი თანხა.

შევნიშნავთ, რომ მაგ., ყიდვის სტანდარტული ოფციონის მფლობელის რეალური მოგება $S_N > K$ შემთხვევაში ტოლი იქნება $S_N - K$ სიდიდეს გამოკლებული ოფციონში გადახდილი თანხა, ანუ $S_N - K - C_N$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა. ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხა მან ისე უნდა გამოიყენოს ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გათვალისწინებით , რომ დროის ბოლო N მომენტში მას გააჩნდეს ზუსტად f_N –ის ტოლი ან f_N –ზე არანაკლები თანხა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი ან ჰეჯი, რომ აუცილებლობის შემთხვევაში შეძლოს ოფციონის კონტრაქტის პირობების შესრულება.

ამრიგად, ოფციონის კონტრაქტის გაყიდვით მიღებული თანხით ემიტენტი ფინანსურ ბაზარზე გამოდის როგორც ინვესტორი.

ბუნებრივია, რომ ოფციონის ფასი არ შეილება იყოს ძალიან დიდი ან ძალიან პატარა. პირველ შემთხვევაში ემიტენტი უბრალიდ ვერ გაყიდის ოფციონს ან დარჩება ურისკო მოგება, ხოლო მეორე შემთხვევაშიმან შეიძლება ვერ შეძლოს ოფციონური კონტრაქტის პირობების შესრულება. ამ სიტუაციების გათვალისწინებით, ევროპული ტიპის ოფციონის ფასად მიღებულია (3.1.22)ტოლობით განმარტებული C_N სიდიდე, რომელსაც ოფციონის სამართლიანი ფასი ეწოდება. ჩამოვაყალიბოთ ეხლა ევროპული ტიპის (ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული) ოფციონების გათვლის ამოცანა. იგი მდგომარეობს შემდეგი სამი საკითხის გადაწყვეტაში:

1) ოფციონის C_N სამართლიანი ფასის დადგენა
2) მინიმალური (x, f_N) ჰეჯის აგება, ანუ ისეთი $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ $n = 0,1 \dots N.$ სტრატეგიის აგება, რომლისთვისაც სრულდება (21) პირობა;
3) π_n^* სტრატეგიის შესაბამისი $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა;

§2 ბინომური ხეები

1. ფინანსური ბაზრის (3.1.1), (3.1.2) ბინომური მოდელის შემთხვევაში აქციის შესაძლო ფასების, ოფციონის მიმდინარე ფასების (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობების) აღწერისთვის და, აგრეთვე, ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენისათვის გამოიყენება ე. წ. ბინომური ხეები.

ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეების აგების საკითხებს. მოკლედ შევეხებით, აგრეთვე, მრავალნაბიჯიანი (N – ნაბიჯიანი) ბინომური ხის აგების საკითხს.

გავიხსენოთ, რომ (3.1.8) დამოკიდებულების თანახმად (3.1.1), (3.1.2) მოდელის პარამეტრები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: $-1 < a < r < b$. აქედან ჩანს, რომ a პარამეტრი შეიძლება იყოს როგორც უარყოფითი, ასევე ნულის ტოლი ან დადებითი. ამის გათვალისწინებით დროის ყოველ n მომენტში, $n = 0,1 \dots N$, გვექნება შემდეგი სამი შემთხვევიდან ერთ–ერთი:

1. თუ a<0 მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი არ შეიცვლება, ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგ.,

$$S_0 > S_1 = (1 + \mathrm{a})S_0$$

$$S_0 < S_1 = (1 + \mathrm{b})S_0$$

2. თუ a=0 მაშინ აქციის ერთი შესაძლო ფასი ნაკლები, ხოლო მეორე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგ.,

$$S_0 = S_1 = (1 + \mathrm{a})S_0$$

$$S_0 < S_1 = (1 + \mathrm{b})S_0$$

3. თუ a>0 მაშინ აქციის ორივე შესაძლო ფასი მეტი იქნება აქციის წინა ფასზე. მაგ.,

$$S_0 < S_1 = (1 + \mathrm{a})S_0$$

$$S_0 < S_1 = (1 + \mathrm{b})S_0$$

ამრიგად, პირველ შემთხვევაში აქციის ფასი დროის ყოველ მომენტში ან იკლებს ან იზრდება, მეორე შემთხვევაში ან არ იცვლება ან იზრდება, მესამე შემთხვევაში კი

ყოველთვის იზრდება. **2.** განვიხილოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის აგების საკითხი. ვიგულისხმოთ რომ N=1, ე. ი. n=0,1.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S_1 = S_{1,j} = S_0(1 + \mathrm{b})^j(1 + \mathrm{a})^{1-j}, \tag{3.2.1}$$

$$f_1 = f_{1,j} = f\left(S_{1,j}\right) \tag{3.2.2}$$

სადაც $j = 0{,}1$, ხოლო $f = f_1$, რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის n=1 მომენტში იმის მიხედვით $\rho_1 = \mathrm{a}$ $(j = 0)$, თუ $\rho_1 = \mathrm{b}$ $(j = 1)$, აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება შესაბამისად (3.2.1) და (3.2.2) ტოლობებით. გვექნება:

$$S_1 = S_{1,0} = S_0(1 + a), \tag{3.2.3}$$

$$S_1 = S_{1,1} = S_0(1 + \mathrm{b}), \tag{3.2.4}$$

$$f_1 = f_{1,0} = f\left(S_{1,0}\right) \tag{3.2.5}$$

$$f_1 = f_{1,1} = f\left(S_{1,1}\right) \tag{3.2.6}$$

დროის $n = 0$ მომენტში ცნობილია S_0, a, r და b სიდიდეების მნიშვნელობები. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია (3.2.3) – (3.2.6) ტოლობებით განსაზღვრული სიდიდეების გამოთვლა. ოფციონის სამართლიანი და მიმდინარე ფასების გამოთვლისათვის შემდგომში ჩვენ გამოვიყენებთ ე.წ. რისკ–ნეიტრალური ფასდადების პრინციპს, რომლის თანახმად *საჭიროა* $\rho-$ r სხვაობის მათემატიკური ლოდინი (საშუალო მნიშვნელობა) გავუტოლოთ ნულს. (3.1.5) განაწილების კანონის საშუალებით გვექნება

$$E(\rho_\mathrm{n} - r) = E(\rho_\mathrm{n}) - r = bp + a(1 - p) - r = (b - a)p - (r - a) = 0,$$

სადაც E აღნიშნავს p ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას.

აღვნიშნოთ p–ს მიმართ ამ განტოლების ამოხსნა p^*–ით. გვექნება

$$p^* = \frac{r - a}{b - a}, \quad 1 - p^* = \frac{b - r}{b - a} \tag{3.2.7}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ $0 < p^* < 1$. ახალი p^* ალბათობის საშუალებით ρ_nსიდიდეების განაწილების კანონი მოიცემა შემდეგი სახით

ρn	b	A
$P^*_{\rho_n}$	P^*	1-P^*

, $n = 0,1 \dots N.$ (3.2.8)

ამრიგად, ρ_nსიდიდეები იღებს b ან a მნიშვნელობებს შემდეგი ალბათობებით:

$P^*(\ \rho_n = b) = p^*, \qquad P^*(\ \rho_n = a) = 1 - p^*$ (3.2.9)

სადაც p^* განმარტებულია (3.2.7) ტოლობით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ (3.2.8) განაწილების კანონის თანახმად ρ_n შემთხვევითი სიდიდეების მათემატიკური ლოდინი r საპროცენტო განაკვეთის ტოლია. მართლაც, გვაქვს

$$E^*(\ \rho_n) = bp^* + a(\ 1 - \ p^*) = b\frac{r-a}{b-a} + \ a\frac{b-r}{b-a} = r$$

სადაც E^* აღნიშნავს p^* ალბათობით მათემატიკური ლოდინის ოპერაციას.

შევნიშნოთ, რომ (5.9) ტოლობების გამოყენებით გვექნება:

$$P^*\left(S_1 = S_{1,1}\right) = P^*\left(f_1 = f_{1,1}\right) = p^*, \qquad (3.2.10)$$

$$P^*\left(S_1 = S_{1,0}\right) = P^*\left(f_1 = f_{1,0}\right) = 1 - p^*, \qquad (3.2.11)$$

ამ ტოლობების საშუალებით შეიძლება გამოვთვალოთ f_1–ის მათემატიკური ლოდინი შემდეგნაირად

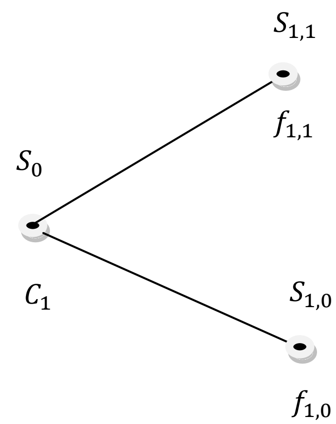
$$E^*(f_1) = p^* f_{1,1} + (1 - p^*) f_{1,0}$$

ხოლო ოფციონის სამართლიანი ფასი C_1, რომელსაც კიდევ $C_{0,0}$–ით აღვნიშნავთ, r საპროცენტო განაკვეთის გათვალისწინებით გამოითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_1 = C_{0,0} = (1 + r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1 - p^*) f_{1,0}\right] \qquad (3.2.12)$$

ბინომური ხის კვანძებში ზედა მხარეზე წერენ აქციის ფასებს, ხოლო ქვედა მხარეზე ოფციონის ფასების მნიშვნელობებს. დროის $n = 0$ მომენტს შეესაბამება ბინომური ხის საწყისი კვანძი (წვერო), რომელშიც წერენ აქციის საწყისი ფასის მნიშვნელობას და ოფციონის სამართლიან ფასს. დროის $n = 1$ მომენტს შეესაბამება წვეროდან გამომავალი ორი შტოს ბოლოს ორი ფინალური (ბოლო) კვანძი. (3.2.3)–(3.2.6) და (3.1.12) ტოლობების

გათვალისწინებით სქემატურად ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად:



ნახაზი 3.2.1.

3. გადავიდეთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხის აგებაზე. ვიგულისხმოთ, რომ $N = 2$ ე.ი. $n = 0,1,2.$ ადვილი მისახვედრია, რომ ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება სამი ფინალური კვანძი. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$S_2 = S_{2,j} = S_0(1+\mathrm{b})^j(1+\mathrm{a})^{2-j}, \tag{3.2.13}$$

$$f_2 = f_{2,j} = f\left(S_{2,j}\right) \tag{3.2.14}$$

სადაც $j = 0,1,2$ ხოლო $f = f_2$, რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

დროის $n = 1$ მომენტში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება (3.2.3), (3.2.4) ტოლობებით.

დროის $n = 2$ მომენტში აქციის და ოფციონის ფასები დაითვლება შესაბამისად (3.2.13), (3.2.14) ტოლობებით. ორნაბიჯიანი ბინომური ხის სამ ფინალურ კვანძში $j = 0,\ j = 1,\ j = 2$ შემთხვევების შესაბამისად გვექნება:

$$S_2 = S_{2,0} = S_0(1+\mathrm{a})^2, \tag{3.2.15}$$

$$S_2 = S_{2,1} = S_0(1+\mathrm{a})(1+\mathrm{b}), \tag{3.2.16}$$

$$S_2 = S_{2,2} = S_0(1+\mathrm{b})^2, \tag{3.2.17}$$

$$f_2 = f_{2,0} = f\left(S_{2,0}\right) \tag{3.2.18}$$

$$f_2 = f_{2,1} = f(S_{2,1}) \tag{3.2.19}$$

$$f_2 = f_{2,2} = f(S_{2,2}) \tag{3.2.20}$$

დროის $n = 1$ მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასებისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$C_{1,0} = f(S_{1,0}) \tag{3.2.21}$$

$$C_{1,1} = f(S_{1,1}) \tag{3.2.22}$$

ეს სიდიდეები (3.2.18), (3.2.19) და (3.2.20) ტოლობის გათვალისწინებით დაითვლება შესაბამისად შემდეგი ტოლობებით:

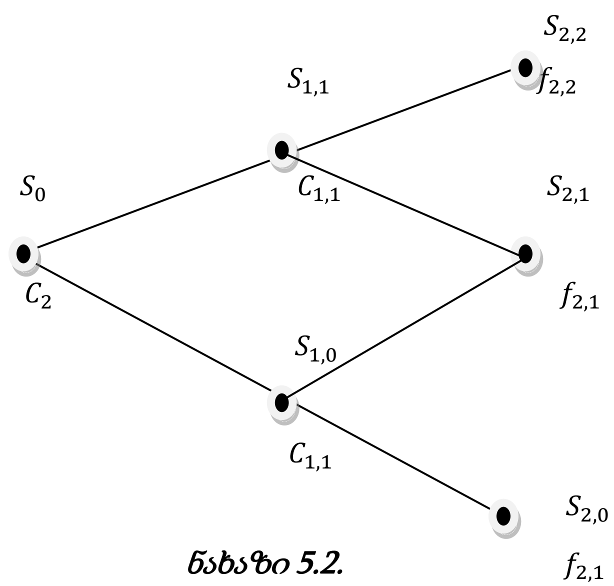
$$C_{1,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] \tag{3.2.23}$$

$$C_{1,1} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] \tag{3.2.24}$$

რაც შეეხება ოფციონის სამართლიან ფასს, იგი დაითვლება (3.2.23) და (3.2.24) ტოლობების საშუალებით შემდეგი ტოლობით

$$C_2 = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] \tag{3.2.25}$$

ორნაბიჯიანი ბინომური ხე (3.2.15) – (3.2.20) და (3.2.23) – (3.2.25) ტოლობების გათვალისწინებით სქემატურად შეიძლება დავხაზოთ შემდეგნაირად



ნახაზი 5.2.

4. განვიხილოთ ახლა N–ნაბიჯიანი ბინომური ხის აგების საკითხი. ადვილი მისახვედრია, რომ ამ შემთხვევაში გვექნება $N+1$ ფინალური კვანძი. დროის $n = 0,1 \dots N$ მომენტებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_n = S_{n,j} = S_0(1+\mathrm{b})^j(1+\mathrm{a})^{n-j}, \tag{3.2.26}$$

$$j \ = \ 0,1 \dots N.$$

დროის ბოლო $n = N$ მომენტში $N+1$ ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობით.

$$f_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{N},j} = f\left(S_{\mathrm{N},j}\right) \tag{3.2.27}$$

სადაც j = 0,1…N, ხოლო $f = f_{\mathrm{N}}$ რაიმე გადახდის ფუნქციაა.

ამის შემდეგ ახლა N–ნაბიჯიანი ბინომური ხის ფინალურის წინა N კვანძში დროის $n = N$– 1 მომენტში ოფციონის მიმდინარე ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_{N-1,j} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}\right] \tag{3.2.28}$$

$$j \ = \ 0,1 \dots N-1.$$

შემდეგ დროის $n = N-2$ მომენტში N– 1 კვანძში გვექნება

$$C_{N-2,j} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{N-1,j+1} + (1-p^*) C_{N-1,j}\right] \tag{3.2.29}$$

$$j = 0,1 \dots \mathrm{N}\text{-}2.$$

ამ პროცედურის გაგრძელებით დროის $n = N-k$ მომენტში N– $k+1$ კვანძში გვექნება

$$C_{N-k,j} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{N-k+1,j+1} + (1-p^*) C_{N-k+1,j}\right] \tag{3.2.30}$$

$$j \ = \ 0,1 \dots N-k.$$

პროცედურის კვლავ გაგრძელებით დროის $n = N-N$ მომენტში მივაღწევთ N– ნაბიჯიანი ბინომური ხის საწყის კვანძს ანუ წვეროს, რომელშიც ოფციონის სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$C_N = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] \tag{3.2.31}$$

ამრიგად $N-$ ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასების დათვლა ხდება ხის წვეროდან ფინალური N +1 კვანძების მიმართულებით დროის $n = 0,1 \dots N$ მომენტებში (3.2.26) ტოლობების გამოყენებით. რაც შეეხება ოფციონის ფასების გამოთვლას, იგი იწყება $N-$ნაბიჯიანი ბინომური ხის $N + 1$ ფინალური კვანძიდან და მთავრდება საწყისს კვანძში ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლით (3.2.27) – (3.2.31) ტოლობების გამოყენებით.

ადვილი მისახვედრია, რომ რეალურ სიტუაციაში ჩვენ გვექნება $N-$ნაბიჯიანი ბინომური ხის შტოების მიხედვით აქციის შესაძლო ფასების ერთი კონკრეტული ტრაექტორია. შევნიშნავთ, აგრეთვე, რომ ყოველ კვანძში დროის $n = 0,1,\dots, N-1$ მომენტებში საჭირო იქნება დროის შემდეგი მომენტისათვის აქციის და ოფციონის მხოლოდ ორი შესაძლო ფასის გათვალისწინება.

5. მეხუთე პარაგრაფის ბოლოს გვინდა მოვიყვანოთ ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასის ფორმულა, რომელიც ფინანსური ბაზრის (3.1.1) – (3.1.2) ბინომური მოდელის ავტორებს ეკუთვნით. ეს ფორმულა იმით არის საინტერესო, რომ მასში შედის მხოლოდ მოდელის საწყისი პარამეტრები ანუ S_0, a, r, b, K და N სიდიდეები.

აღვნიშნოთ k_0-ით ის უმცირესი მთელი რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$S_0(1+\mathrm{a})^N \cdot \left(\frac{1+b}{1+\mathrm{a}}\right)^{k_0} > K. \tag{3.2.32}$$

შევნიშნოთ, რომ k_0-ის გამოვლა სეიძლება როგორც (3.2.32) უტოლობის გამოყენებით, ასევე შემდეგი დამოკიდებულებებიდან, რომელიც უშუალოდ (3.2.32) უტოლობიდან გამომდინარეობს:

$$\mathrm{k}_0 = 1 + \left[\ln\frac{\mathrm{K}}{S_0(1+\mathrm{a})^N} \Big/ \ln\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right], \tag{3.2.33}$$

სადაც [X] სიმბოლო აღნიშნავს X რიცხვის მთელ ნაწილს და განმარტებით არის ის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატრება X რიცხვს, მაგალითად $[7.5] = 7$.

სამართლიანი ფასის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k \, (1-p^*)^{N-k} \, \left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^N \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k \, (1-p^*)^{N-k} \qquad (3.2.34)$$

სადაც p^* განსაზღვრულია (3.2.7) ტოლობით, ხოლო C_N^k არის N ელემენტიდან k ელემენტიანი ჯუფდება და განიმარტება ტოლობით

$$C_N^k = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}, \quad k \le N \qquad (3.2.35)$$

შევნიშნავთ, რომ თუ $\mathrm{k}_0 > N$, მაშინ $C_N = 0$.

განვიხილოთ ახლა ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი (3.1.24) გადახდის ფუნქციით და აღვნიშნოთ P_N–ით მისი სამართლიანი ფასი. მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$P_N = C_N - S_0 + K(1+r)^{-N}. \qquad (3.2.36)$$

ამ ტოლობას „ყიდვა–გაყიდვის პარიტეტის“ ფორმულა ეწოდება. იგი ადგენს კავშირს ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების სამართლიან ფასებს შორის.

§3. მოპასუხე პორტფელის პრინციპი

განვიხილოთ ფინანსური (B, S) – ბაზრის ბინომური მოდელი (3.1.1), (3.2.2). გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ , რომ გვაქვს აქციის ყიდვის ან გაყიდვის ევროპული ტიპის ოფციონი რაიმე გადახდის ფუნქციით $f = f_{\mathrm{N}}$.

ვთქვათ, დროის n მომენტში ინვესტორს (ემიტენტს) აგებული აქვს პორტფელი $\pi_{\mathrm{n}} = (\beta_{\mathrm{n}}, \gamma_{\mathrm{n}})$, რომლის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით

$$X_n^\pi = \beta_{\mathrm{n}} \mathrm{B}_{\mathrm{n}} + \gamma_{\mathrm{n}} S_{\mathrm{n}} \qquad (3.3.1)$$

დროის n+1 მომენტის დადგომამდე შეიძლება ავაგოთ ახალი პორტფელი $\pi_{\mathrm{n+1}} = (\beta_{\mathrm{n+1}}, \gamma_{\mathrm{n+1}})$, რომლის საშუალებით (3.3.1) ტოლობით მოცემული X_n^π კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_n^\pi = \beta_{n+1}B_n + \gamma_{n+1}S_n \tag{3.3.2}$$

დროის n+1 მომენტის დადგომის შემდეგ B_{n+1} და S_{n+1} სიდიდეების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π_{n+1} პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი მოიცემა ტოლობით

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1} \tag{3.3.3}$$

ჩვენი ამოცანაა დროის ყოველ n მომენტში, $n = 0,1 \dots N-1$ აგებული პორტფელი იყოს მინიმალური ჰეჯი, ანუ იყოს ისეთი, რომ დროის n=N მომენტში შესრულდეს (3.1.21) პირობა. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად ჩვენ გამოვიყენებთ მოპასუხე პორტფელის პრინციპს, რომელიც შემდგში მდგომარეობს: დროის n მომენტში აგებული $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალისათვის დროის n+1 მომენტში უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1} = f(S_{n+1}). \tag{3.3.4}$$

ფინანსური ბაზრის (3.1.1), (3.1.2) მოდელის გათვალისწინებით, (3.3.4) ტოლობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი ორი ტოლობის სახით:

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+b)S_n = f((1+b)S_n), \tag{3.3.5}$$

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+b)S_n = f((1+a)S_n), \tag{3.3.6}$$

როგორც ვხედავთ, β_{n+1} და γ_{n+1} უცნობი სიდიდეების მიმართ მივიღეთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა სისტემა. აღვნიშნოთ β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეებით ამ სისტემის ამონახსნი. ადვილად დავრწმუნდებით იმაში, რომ ეს ამონახსნი მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big) - (1+a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n} \tag{3.3.7}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big) - f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \tag{3.3.8}$$

ამრიგად, თუ დროის n=0,1, . . . ,N−1 მომენტებში პორტფელს ავაგებთ (3.3.7), (3.3.8) ტოლობების გამოყენებით, მაშინ დროის ბოლო N მომენტში $\pi_N^*= (\beta_N^*, \gamma_N^*)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი, მოპასუხე პორტფელის პრინციპის თანახმად, დააკმაყოფილებს პირობას

$$X_N^{\pi^*} = \beta_N^* \mathrm{B_N} + \gamma_N^* S_\mathrm{N} = f(S_\mathrm{N}). \tag{3.3.9}$$

სხვანაირად ეს იმას ნიშნავს, რომ $\pi^* = (\pi_N^*), \pi_N^*= (\beta_N^*, \gamma_N^*)$ პორტფელი (პორტფელების მიმდევრობა) არის მინიმალური ჰეჯი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის ბოლო N მომენტში ზუსტად პასუხობს ოფციონის გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობას. ამასთან ერთად, მინიმალური ჰეჯის აგების კონსტრუქციის გათვალისწინებით, ადვილად მივიღებთ, რომ იგი არის თვითდაფინანსებადი.

შევიტანოთ ეხლა β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* სიდიდეების (3.3.7) და (3.3.8) გამოსახულებები X_n^π კაპიტალის (3.3.2) წარმოდგენაში $\beta_{\mathrm{n}+1}$ და $\gamma_{\mathrm{n}+1}$ სიდიდეების მაგივრად. მაშინ მარტივი გარდაქმნით მივიღებთ

$$X_n^{\pi^*} = \beta_{n+1}^* \mathrm{B_n} + \gamma_{n+1}^* S_\mathrm{n} =$$

$$= \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B_n}} \cdot \mathrm{B_n} +$$

$$+ \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S_n}} \cdot \mathrm{S_n} =$$

$$= (1+\mathrm{r})^{-1} \left[\frac{\mathrm{r}-\mathrm{a}}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big) + \frac{\mathrm{b}-\mathrm{r}}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big)\right] \tag{3.3.10}$$

თუ გამოვიყენებთ (3.2.7) ტოლობებს, მაშინ π_{n+1}^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი (3.3.10) წარმოდგენის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი ტოლობით:

$$X_n^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1} \left[p^* \mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big)\right] \tag{3.3.11}$$

შევნიშნავთ, რომ (3.3.7) – (3.3.11) ტოლობებში f გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები დროის $n = 0,1 \dots N-1$ მომენტებში, ფაქტობრივად წარმოადგენს (3.2.28) – (3.2.31) ტოლობებით მოცემულ ოფციონის ფასებს.

2. მომავალში ჩვენ დაგვჭირდება მინიმალური ჰეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ცხადი გამოსახულებები ერთნაბიჯიანი და ორნაბიჯიანი ბინომური ხეებისათვის.

განვიხილოთ ჯერ შემთხვევა N=1 ე.ი. n=0,1. საჭიროა დროის n=0 მომენტში ავაგოთ π_1^*= (β_1^* ,γ_1^*) მინიმალური ჰეჯი. (3.3.7), (3.3.8) ტოლობების და (3.2.1), (3.2.2) აღნიშვნების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_0\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_0\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} =$$

$$= \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big(S_{1,0}\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big(S_{1,1}\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}_{1,0} - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}_{1,1}}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} \tag{3.3.12}$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_0\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_0\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} =$$

$$\frac{\mathrm{f}\big(S_{1,0}\big) - \mathrm{f}\big(S_{1,1}\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0}$$

$$= \frac{\mathrm{f}_{1,0} - \mathrm{f}_{1,1}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} \tag{3.3.13}$$

დროის n=0 მომენტში (3.3.12), (3.3.13) ტოლობებით აგებული π_1^*= (β_1^* ,γ_1^*) მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი (3.3.2), (3.3.11) ტოლობების თანახმად ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^*\mathrm{B}_0 + \gamma_1^* S_0 \tag{3.3.14}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\ \big[p^*\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_0\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_0\big)\big] =$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\ \big[p^*\mathrm{f}\big(S_{1,1}\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big(S_{1,0}\big)\big] =$$

$$= (1+\mathrm{r})^{-1}\ \big[p^*\mathrm{f}_{1,1} + (1-p^*)\mathrm{f}_{1,0}\big] =$$

შევნიშნოთ, რომ (3.2.12) ტოლობით მოცემული C_1 სამართლიანი ფასის და (3.3.14), (3.3.15) ტოლობებით მოცემული $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობები ერთმანეთის ტოლია.

დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასის ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით π_1^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი $X_1^{\pi^*}$ტოლი იქნება

(ზუსტად უპასუხებს) გადახდის ფუნქციის $f(S_1)$–ის მნიშვნელობებს ე.ი. შესრულდება ტოლობა

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = f(S_1) \tag{3.3.15}$$

ამრიგად, N=1 შემთხვევაში დროის n=0 მომენტში აგებული π_1^*= (β_1^* , γ_1^*) მინიმალური ჰეჯისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{3.3.16}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,0} - f_{1,1}}{(b-a)S_0} \tag{3.3.17}$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის (3.3.14) ტოლობასთან ერთად გვაქვს შემდეგი ფორმულა:

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1} \left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] \tag{3.3.18}$$

3. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა N=2, ე.ი. n=0,1,2. ამ შემთხვევაში დროის n=0 მომენტში საჭიროა ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი π_1^*= (β_1^* , γ_1^*), რომლის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალით დროის n=1 მომენტში უნდა ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი π_2^*= (β_2^* , γ_2^*). (3.2.21), (3.2.22) აღნიშვნებისა და (6.7), (6.8) ტოლობების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_0\big) - (1+a)f\big((1+b)S_0\big)}{(1+r)(b-a)B_0}$$

$$= \frac{(1+b)f\big(S_{1,0}\big) - (1+a)f\big(S_{1,1}\big)}{(1+r)(b-a)B_0} =$$

$$= \frac{(1+b)C_{1,0} - (1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{3.3.19}$$

$$\gamma_1^* = \frac{f\big((1+b)S_0\big) - f\big((1+a)S_0\big)}{(b-a)S_0} =$$

$$= \frac{f\big(S_{1,0}\big) - f\big(S_{1,1}\big)}{(b-a)S_0} = \frac{C_{1,0} - C_{1,1}}{(b-a)S_0} \tag{3.3.20}$$

ადვილი მისახვედრია რომ (3.3.19), (3.3.20) ტოლობით დროის n=0 მომენტში აგებული $\pi_1^* = (\beta_1^* , \gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი, (3.3.2), (3.3.11) ტოლობების

თანახმად, ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 \tag{3.3.21}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] \tag{3.3.22}$$

სადაც $C_{1,0}$ და $C_{1,1}$ სიდიდეები, ისე როგორც (3.3.19), (3.3.20) ტოლობებში, მოიცემა შესაბამისად (3.2.23), (3.2.24) ტოლობებით.

ცხადია, $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალის (3.1.21), (3.1.22) ტოლობებით მოცემული მნიშვნელობა (3.2.25) ტოლობით მოცემული C_2 სამართლიანი ფასის ტოლია.

ამრიგად, დროის n=0 მომენტში $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯისათვის გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0} - (1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} \tag{3.3.23}$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,0} - C_{1,1}}{(b-a)S_0} \tag{3.3.24}$$

ხოლო π_1^* პორტფელის შესაბამისი $X_0^{\pi^*}$ კაპიტალისათვის გვაქვს (3.3.21), (3.3.22) ფორმულები. დროის n=1 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასის ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, π_1^* მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის მნიშვნელობა ოფციონის $f(S_1)$ ფასის მნიშვნელობის ტოლი იქნება

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = f(S_1) \tag{3.3.25}$$

ამ თანხით დროის n=1 მომენტში ჩვენ უნდა ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$. (3.3.7) და (3.3.8) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_1\big) - (1+a)f\big((1+b)S_1\big)}{(1+r)(b-a)B_0}, \tag{3.3.26}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f\big((1+b)S_1\big) - f\big((1+a)S_1\big)}{(b-a)S_1} \tag{3.3.27}$$

დროის n=1 მომენტში $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალი (3.3.2), (3.3.11) ტოლობების თანახმად მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_1 \tag{3.3.28}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\ \left[p^*\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)\right] \tag{3.3.29}$$

დროის n=2 მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასის ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი $X_2^{\pi^*}$ ტოლი იქნება (ზუსტად უპასუხებს) გადახდის ფუნქციის $\mathrm{f}(S_2)$–ის მნიშვნელობებს ე.ი. შესრულდება ტოლობა

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_2 + \gamma_2^* S_2 = \mathrm{f}(S_2) \tag{3.3.30}$$

ამრიგად, მეხუთე პარაგრაფში განხილული ბინომური ხეების აგებით და მეექვსე პარაგრაფში მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული მინიმალური ჰეჯის საშუალებით ჩვენ გადავწყვიტეთ ევროპული ტიპის ოფციონის გათვლის ამოცანა. კერძო შემთხვევაში ერთნაბიჯიანი (N=1, n=0,1) და ორნაბიჯიანი (N=2, n=0,1,2) ამოცანებისათვის მოვიყვანეთ ოფციონის სამართლიანი ფასის, მინიმალური ჰეჯისა და მისი შესაბამისი კაპიტალის ფორმულები, რომელსაც ჩვენ მომავალში გამოვიყენებთ რიცხვითი მაგალითებისათვის.

ახლა განვიხილოთ ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა იმ შემთხვევაში როდესაც ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის შემოდინება ობლიგაციებისა და აქციების რაოდენობისა და ფასების პროპორციულად:

$$g_n = c_1\beta_n B_{n-1} + c_2\gamma_n S_{n-1} \tag{3.3.31}$$

ასეთ შემთხვევაში სტრატეგიას ეწოდება არათვითდაფინანსებადი, რომლისთვისაც ადვილი დასამტკიცებელია ოფციონის ფასის ცხადი გამოსახულება:

$$\begin{aligned} C_N = {} & S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k\,(1-p^*)^{N-k}\,\left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^N \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^k - \\ & -K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k\,(1-p^*)^{N-k} \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

სადაც

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0. \tag{3.3.33}$$

თუ $c_1 = c_2 \equiv 0$, მაშინ მიიღება ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიან ფასი თვითდაფინანსებადი სტრატეგიისათვის (კოქსის, როსის და რუბინშტეინის კარგად ცნობილი ფორმულა).

რაც შეეხება მინიმალური ჰეჯის აგებას, ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით, მიღებულია მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big) - (1+a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n}, \tag{3.3.34}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big) - f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \tag{3.3.35}$$

§4 ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა

ამერიკული ოფციონი ევროპული ოფციონის მსგავსად წარმოადგენს წარმოებულ ფასიან ქაღალდს, რომლის მფობელს აქვს რაიმე საბაზრო აქტივის ყიდვის ან გაყიდვის უფლება. როგორც ვიცით, ევროპული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის მხოლოდ ბოლო მომენტში. ამისგან განსხვავებით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი განაღდება ოფციონის სიცოცხლის პერიოდის დროის ნებისმიერ შემთხვევით მომენტში.

ბუნებრივია, ამერიკული ოფციონი ევროპულ ოფციონზე უფრო მიმზიდველია, ვინაიდან მის მფლობელს ფინანსურ ბაზარზე მიმდინარე პროცესში აქტიური მონაწილეობის საშუალება ეძლევა. მართლაც, მაქსიმალური სარგებლის (გასამრჯელოს) მიღების მიზნით, ბაზრის მიმდინარე ინფორმაციის გამოყენებით, სასურველია ოფციონის განაღდების გადაწყვეტილების მიღება დროის, გარკვეული აზრით, ოპტიმალურ შემთხვევით მომენტში. შევნიშნოთ, რომ ასეთი გადაწყვეტილების მიღება წარმოადგენსშემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის საინტერესო და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. კერძოდ, ჩვენთვის საინტერესო აქტივის ყოფაქცევაზე დაკვირვების საშუალებით, საჭიროა ვიპოვოთ ოფციონის განაღდების ისეთი შემთხვევითი

მომენტი (ოპტიმალური გაჩერების მომენტი), რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება ანუ ფასი. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ამერიკული ოფციონის გათვლის ზოგიერთ მარტივ საკითხს ფინანსური (B, S) −ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში.

ვიგულისხმოთ, რომ ჩვენ ვიხილავთ ფინანსური (B, S) −ბაზრის ბინომური მოდელს

$$B_n = (1 + r)B_{n-1} \qquad B_0 > 0 \tag{3.4.1}$$

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1} \qquad S_0 > 0 \tag{3.4.2}$$

სადაც $n = 1, 2. . . N$. ამერიკული ოფციონის მფლობელს შეუძლია მისი წარდგენა გასანარდებლად დროის ამ მომენტიდან ნებისმიერ (შემთხვევით) არჩეულ მომენტში. ვიგულისხმოთ აგრეთვე, რომ გვაქვს გადახდის ფუნქცია, რომელიც n მომენტისათვის ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$f = f_n = f_n(S_0, S_1, . . . , S_n), \qquad n = 1, 2. . . N, \tag{3.4.3}$$

ანუ გვაქვს შემდეგი სიდიდეების მიმდევრობა

$$f_0 = f_0(S_0)$$

$$f_1 = f_1(S_0, S_1,),$$

$$. . . . .$$

$$f_n = f_n(S_0, S_1, . . . , S_n),$$

$$. . . . .$$

$$f_N = f_N(S_0, S_1, . . . , S_n, . . . , S_N).$$

ცხადია, თუ ოფციონის მფლობელი წარმოადგენს ოფციონს დროის რაიმე τ შემთხვევით მომენტში. იგი მიიღებს თანხას (გასამრჯელოს), რომელიც ტოლია $f_\tau(S_0, S_1, . . . , S_\tau)$, $\tau = 1, 2. . . N$, სიდიდის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.1. ვთქვათ $N = 7$ და $f_n = \max(S_0, S_1, . . . , S_n)$. დავუშვათ აგრეთვე, რომ აქციის ფასების მნიშვნელობები დროში ტოლია შემდეგი სიდიდეების

$$S_0 = 80, \qquad S_1 = 60, \qquad S_2 = 90, \qquad S_3 = 100,$$

$$S_4 = 90, \qquad S_5 = 85, \qquad S_6 = 110, \quad S_\tau = 110,$$

ადვილი მისახფედრია, რომ აქციის ამ შესაძლო ფასების შესაბამისი გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები იქნება

$$f_0 = 80, \qquad f_1 = 80, \qquad f_2 = 90, \qquad f_3 = 100,$$

$$f_4 = 100, \qquad f_5 = 100, \qquad f_6 = 110, \quad f_\tau = 110,$$

თუ ოფციონის განაღდება მოხდება , მაგალითად, დროის $n = 4$ მომენტში, მაშინ მისი მფლობელი მიიღებს $f_4 = 100$ გასამრჯელოს. ცხადია, უკეთესია ოფციონის განაღდება დროის $n = 6$ ან $n = 7$ მომენტში, რადგანაც ოფციონის გასამრჯელო ამ შემთხვევაში 110–ის ტოლი იქნება.მაგრამ მთელი სირთულე იმაში მდგომარეობს, რომ დროის $n = 4$ მომენტში ოფციონის მფლობელმა არ იცის დროის შემდეგ მომენტებში არც აქციის და, მაშასადამე, არც გადახდის ფუნქციის შესაძლო მნიშვნელობები. აქვე შევნიშნოთ, რომ ისევე როგორც აქციის ფასებს ასევე გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებს შემთხვევითი ხასიათი აქვს, რადგანაც იგი დამოკიდებულია აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.2. განვიხილოთ ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$f_n = (S_n - K)^+ = \max(S_n - K, 0) \tag{3.4.4}$$

სადაც $K > 0$ შეთანხმების ფასია. ვიგულისხმოთ, რომ $K = 85$, $N = 7$, ხოლო აქციის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები იგივეა, რაც **3.7.1** მაგალითში. თუ ოფციონის განაღდება მოხდება დროის $n = 4$ მომენტში, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ ამ სემთხვევაში

$$f_4 = \max(90 - 85, 0) = 5.$$

ცხადია, უკეთესი იქნებოდა ოფციონის განაღდება დროის $n = 6$ მომენტში. მართლაც გვაქვს

$$f_6 = \max(110 - 85, 0) = 25.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.3. განვიხილოთ ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი, რომლის გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$f_n = (K - S_n)^+ = \max(K - S_n, 0) \tag{3.4.5}$$

სადაც $K > 0$ შეთანხმების ფასია. ისევ ვიგულისხმოთ, რომ $K = 85$, $N = 7$, ხოლო აქციის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები იგივეა, რაც **3.7.1** მაგალითში. თუ ოფციონის განაღდება მოხდება დროის $n = 4$ მომენტში, მაშინ ადვილი დასანახია, რომ ამ სემთხვევაში

$$f_4 = \max(85 - 90, 0) = 0.$$

ასევე ადვილი დასანახია, რომ საუკეთესო იქნებოდა ოფციონის განაღდება დროის $n = 1$ მომენტში. მართლაც გვაქვს

$$f_1 = \max(85 - 60, 0) = 25.$$

რომელიც ყველა შესაძლო გასამრჯელოებს შორის უდიდესია.

როგორც განხილული მაგალითები გვიჩვენებს, ოფციონის განაღდების მომენტი, საზოგადოდ, შემთხვევითი სიდიდეა. ეს შემთხვევითი სიდიდე შეირჩევა ე. წ. გაჩერების (მარკოვის) მომენტთა სიმრავლიდან. გაჩწერების მომენტი ისეთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც დროის ყოველ n მომენტში განისაზღვრებამხოლოდ დროის ამ მომენტისათვის აქციის ფასების შესახებ ინფორმაციის საშუალებით. მაგალითად თუ დროის τ მომენტი არის გაჩერების მომენტი, მაშინ იგი განისაზღვრება მხოლოდ $(S_0, S_1, . . . , S_n)$ მნიშვნელობების საშუალებით. ცხატია, τ მომენტის შესაძლო მნიშვნელობებია $\{0, 1, . . . , N\}$.

როგორც ვიცით ევროპული ოფციონის გათვლის დროს ემიტენტის ამოცანებია: ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა, მინიმალური ჰეჯის აგება და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა. ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს ამ ამოცანებს ემატება, აგრეთვე, ოფციონის განაღდების ე. წ. რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტების პოვნა, რომელიც საკმაოდ ართულებსამერიკული ოფციონის გათვლას. ამრიგად, ამ სემთხვევაში დამატებით საჭიროა ისეთი გაჩერების მომენტის (განაღდების მომენტის) პოვნა, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო გასამრჯელო.

განვიხილოთ ახლა ფინანსური (B, S) −ბაზრის მონაწილე ემიტენტის ამოცანა, რომელმაც ოფციონის გაყიდვით მიიღო გარკვეული საწყისი თანხა $X_0 = x > 0$. ვთქვათ გადახდის ფუნქცია მოცემულია 3.7.3 ტოლობით. ვიყვიტ, რომ ემიტენტის სტრატეგია (პორტფელი) $\pi = \pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ არის (x, f, N) ჰეჯი (ამერიკული ტიპის ჰეჯი), თუ

ემიტენტის საწყისი კაპიტალი

$$X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0 = x \tag{3.4.6}$$

და ნებისმიერი $n, 0 \leq \ n \leq \ N$, მომენტისათვის გვაქვს

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \geq f_n(S_0,\ S_1, .\ .\ ., S_n\ ) \tag{3.4.7}$$

ამასთან ერთად თუ რომელიმე გაჩერების τ მომენტი ისეთია, რომ

$$X_\tau^\pi = \beta_\tau B_\tau + \gamma_\tau S_\tau = f_n(S_0,\ S_1, .\ .\ ., S_\tau\ ) \tag{3.4.8}$$

მაშინ $\pi = \pi_\tau = (\beta_\tau\ , \gamma_\tau)$ სტრატეგიას მინიმალური (x, f, N) ჰეჯი ეწოდება.

აღვნიშნოთ ამერიკული ტიპის ჰეჯების ერთობლიობა $\Pi^A(x, f, N)$ სიმბოლოი. შევნიშნოთ, რომ თუ π სტრატეგია აკმაყოფილებს 3.7.8 ტოლობას, მაშინ ნებისმიერი $\tau \leq N$ გაჩერების მომენტისათვის სრულდება (3.4.7) უტოლობა.

საინვესტიციო თანხა (ოფციონის სამართლიანი ფასი) ეწოდება სიდიდეს

$$C_N^A = \inf\{x > 0 \colon \Pi^A(x, f, N) \neq \emptyset\} \tag{3.7.9}$$

გაჩერების მომენტს $\tau^* \leq N$ ეწოდება რაციონალური (ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი), თუ C_N^A საწყისი თანხისათვის (კაპიტალისათვის) და თვითდაფინანსებადი π სტრატეგიისათვის სამართლიანია უტოლობა:

$$X_{\tau^*}^\pi \geq f_{\tau^*}(S_0,\ S_1, .\ .\ ., S_{\tau^*}\ ) \tag{3.4.10}$$

და სინამდვილეში გვაქვს ტოლობა

$$X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}(S_0,\ S_1, .\ .\ ., S_{\tau^*}\ ) \tag{3.4.11}$$

გავიხსენოთ, რომ $\pi_n = (\beta_\mathrm{n}\ , \gamma_\mathrm{n})$ სტრატეგიას ეწოდება თვითდაფინანსებადი, თუ დროის n მომენტში სრულდება

$$B_{n-1}\,\Delta\beta_n + \ S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0$$

ტოლობა, სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \ \beta_{n-1},\ \Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. ასეთ შემთხვევაში გვაქვს

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta\ B_k\ + \gamma_k \Delta S_k),$$

სადაც $\Delta B_k = B_k - B_{k-1}$, $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

განვიხილოთ ეხლა ე. წ. დისკონტირებული კაპიტალი

$$M_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n} \tag{3.4.12}$$

M_n^π შემთხვევით მიმდევრობას გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: ნებისმიერი $\tau \le N$ გაჩერების მომენტისათვის

$$E^*(M_\tau^\pi) = M_0^\pi, \tag{3.4.13}$$

სადაც E^* აღნიშნავს

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} \tag{3.4.14}$$

ალბათობით გასაშუალოებას (მათემატიკური ლოდინის ოპერაცია). (3.4.13) ტოლობის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$X_0^\pi = E^*(1+r)^{-\tau} \cdot X_\tau^\pi. \tag{3.4.15}$$

ცხადია, რომ თუ π სტრატეგია არის (x, f, N) ჰეჯი , მაშინ

$$x \ge \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \tag{3.4.16}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. იმ შემთხვევაში, როცა π არის მინიმალური ჰეჯი, ანუ არსებობს ისეთი გაჩერების მომენტი $\tau^* \le N$, რომ $X_{\tau^*}^\pi = f_{\tau^*}$, მაშინ

$$x = X_0^\pi = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}^\pi = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f_\tau, \tag{3.4.17}$$

და

$$x = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \tag{3.4.18}$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \le N$. ამრიგად (3.4.18) ტოლობა წარმოადგენს π ჰეჯის მინიმალურობის აუცილებელ პირობას.

შეიძლება ჩვენება, რომ (3.4.18) ტოლობა ემიტენტის საწყის x თანხასა და f_n გადახდის ფუნქციას შორის დამოკიდებულებას წარმოადგენს, აგრეთვე, π ჰეჯის მინიმალურობის

საკმარის პირობას . აქედან გამომდინარე, ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$C_N^A = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \tag{3.4.19}$$

სადაც ისე როგორც ზემოთ, სუპრემუმი აიღება ყველა გაჩერების მომენტით $\tau \leq N$.

გაჩერების მომენტს $\tau^* \leq N$, რომლისთვისაც მიიღწევა (3.4.19) სუპრემუმი, ეწოდება ამერიკული ოფციონის განაღდების (დაფარვის) რაციონალური მომენტი. ამრიგად, გვაქვს τ^*–თვის

$$C_N^A = \sup_\tau E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau = E^*(1+r)^{-\tau^*} \cdot f_{\tau^*}, \tag{3.4.20}$$

შევნიშნოთ, რომ სწორედ (3.4.19) სახის სუპრემუმებისა და τ^* სახის გაჩერების (რაციონალური, ოპტიმალური) მომენტების სტრუქტურის გარკვევა და მათი მონახვა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების თეორიის ძირითად ამოცანებს.

ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს (ისევე, როგორც ევროპული ოფციონის გათვლის დროს) ჩვენ შეიძლება გამოვიყენოთ ბინომური ხეები და მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. N–ნაბიჯიანი ბინომური ხის კვანძებში აქციის შესაძლო ფასები დაითვლება შემდეგი ტოლობებით

$$S_N = S_{N,j} = S_0(1+\mathrm{b})^j(1+\mathrm{a})^{N-j}, \qquad j = 0,1,\ldots,N, \tag{3.4.21}$$

ხოლო ბოლო $n = N$ მომენტში $N+1$ ფინალურ კვანძში ოფციონის ფასები (გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებით) დაითვლება შემდეგი ტოლობით

$$f = f_{N\,j} = f(S_{N,j}), \qquad j = 0,1,\ldots,N, \tag{3.4.22}$$

სადაც f არის რაიმე გადახდის ფუნქცია.

ოფციონის მიმდინარე (შიგა) ფასები და სამართლიანი ფასი დაითვლება შემდეგი სქემის მიხედვით.

დროის $n = N-1$ მომენტში (ფინალურის წინა N კვანძებში) გვექნება

$$C_{N-1,j}^A = \max\{f_{N-1,j};\ (1+r)^{-1}\left[p^* f_{N,j+1} + (1-p^*) f_{N,j}\right]\}\ j = 0,1,\ldots,N-1$$

დროის $n = N-2$ მომენტში გვექნება

$$C^A_{N-2,j} = \max\{f_{N-2,j};\ (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{N-1,j+1} + (1-p^*)C^A_{N-1,j}\right]\} \quad j = 0, 1,\ \dots, N-1$$

დ. ა. შ. დროის $n = N - k$ მომენტში გვექნება

$$C^A_{N-k,j} = \max\{f_{N-k,j};\ (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{N-k+1,j+1} + (1-p^*)C^A_{N-k+1,j}\right]\} \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

დ. ა. შ. დროის $n = N - N = 0$ მომენტში გვექნება

$$C^A_N = C^A_{0,0} = \max\{f(S_0);\ (1+r)^{-1}\left[p^* C^A_{1,1} + (1-p^*)C^A_{1,0}\right]\}$$

სადაც $f(S_0) = f(S_{0,0}) = f_{0,0.}$

ამ დამოკიდებულებაში p^* სიდიდე განიმარტება (3.4.14 ტოლობით). ამრიგად, ბინომური ხეები გამოიყენება ევროპული და ამერიკული ოფციონების გათვლის (ფასდადების) ამოცანების გადაწყვეტაში . კერძოდ, შესაძლებელია აქციისა დაოფციონის ფასების ევოლუციის აღწერა და ბინომური ხის კვანძებში მათი ყველა შესაძლო მნისვნელობის გამოთვლა ოფციონის სამართლიანი ფასის ჩათვლით.

შევნიშნოთ, რომ ამერიკული ოფციონის გათვლის დროს მინიმალური ჰეჯის და მისი შესაბამისი კაპიტალის პროცესის აგება ისევ მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით ხდება. გავიხსენოთ, რომ (იხ (3.4.42), (3.4.43))

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B_n}} \tag{3.4.23}$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S_n}} \tag{3.4.24}$$

$$X^{\pi^*}_n = \beta^*_{n+1}B_n + \gamma^*_{n+1}S_n =$$

$$= (1+r)^{-1}\left[p^* f\big((1+b)S_n\big) + (1-p^*)f\big((1+a)S_n\big)\right] \tag{3.4.25}$$

რაც შეეხება ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის პოვნას, როგორც აღვნიშნეთ, იგი, საზოგადოდ რთულ ამოცანას წარმოადგენს, ჩვენ მოვიტანთ ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტის არჩევის ერთ მარტივ წესს ბინომური ხის გამოყენების შემთხვევაში. წესი შემდეგში მდგომარეობს: ამერიკული ოფციონის აღსრულების მომენტი არის დროის ის პირველი მომენტი, როდესაც ოფციონის ფასი

(გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობა) გაუტოლდება ან აღემატება მის შინაგან ფასს. ამრიგად, რაციონალური მომენტისათვის გვაქვს

$$\tau^* = \min\{n: f(S_n) \geq C_N^A\}. \tag{3.4.26}$$

ავაგოთ ახლა ამერიკული ოფციონისათვის ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. ქვემოთ სწორედ ამ შემთხვევისათვის განვიხილავთ ევროპული და ამერიკული ოფციონების სამართლიანი ფასების შედარების და ამერიკული ოფციონის გათვლის რიცხვით მაგალითებს.

(3.4.21)–(3.4.26) ტოლობების მიხედვით $N = 2$, $j = 0, 1,2$ შემთხვევაში

$$S_2 = S_{2,j} = S_0(1 + \mathrm{b})^j(1 + \mathrm{a})^{2-j}, \quad j = 0, 1,2 \tag{3.4.27}$$

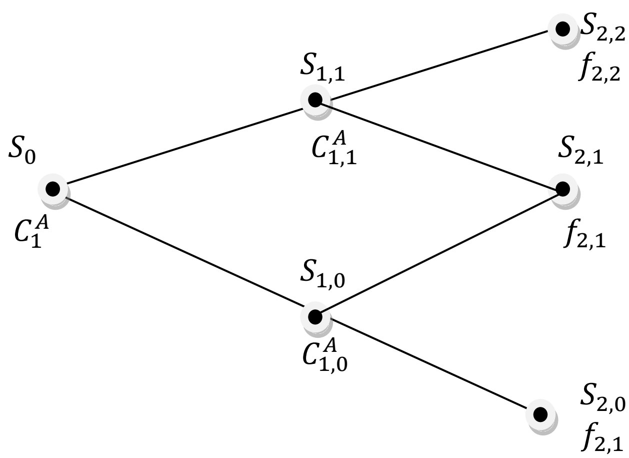
$$f = f_2 = f_{2,j} = f\left(S_{2,j}\right), \ \ j = 0, 1,2 \tag{3.4.28}$$

$$C_{1,j}^A = \max\left\{f_{1,j};\ (1 + r)^{-1}\left[p^* f_{2,j+1} + (1 - p^*)f_{2,j}\right]\right\}, \quad j = 0, 1, \tag{3.4.29}$$

$$C_{0,j}^A = C_2^A =$$

$$= \max\left\{f_{0,j};\ (1 + r)^{-1}\left[p^* C_{1,j+1}^A + (1 - p^*)C_{1,j}^A\right]\right\} \quad j = 0, 1, \tag{3.4.30}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახაზი 3.7.1.

განვიხილოთ ახლა ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს შემდეგი მონაცემები

$$B_0 = 20, \qquad r = \frac{1}{5}, \qquad S_0 = 100, \qquad a = -\frac{2}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \qquad K = 100. \tag{3.4.31}$$

გამოთვლებში, როგორც ადრე, ჩვენ გვჭირდება შემდეგი სიდიდეები

$$1 + a = \frac{3}{5}, \quad 1 + b = \frac{8}{5}, \qquad b - a = 1$$

$$p^* = \frac{3}{5}, \quad 1 - p^* = \frac{3}{5}, \qquad (1 + r)^{-1} = \frac{5}{6} \tag{3.4.32}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.7.4. განვიხილოთ (3.4.1), (3.4.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ $N = 2$, ე. ი. $n = 0,1,2$ და შესრულებულია (3.4.31) პირობა. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ამერიკული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f = f_2 = f_2(S_2) = \max(K - S_2, 0) \tag{3.4.33}$$

გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე. გვაქვს

$$f_{1,0} = f(S_{1,0}) = \max(100 - 60, 0) = 40$$

$$f_{1,1} = f(S_{1,1}) = \max(100 - 160, 0) = 0 \tag{3.4.34}$$

$$f_{0,0} = f(S_{0,0}) = f(S_0) = \max(100 - 100, 0) = 0$$

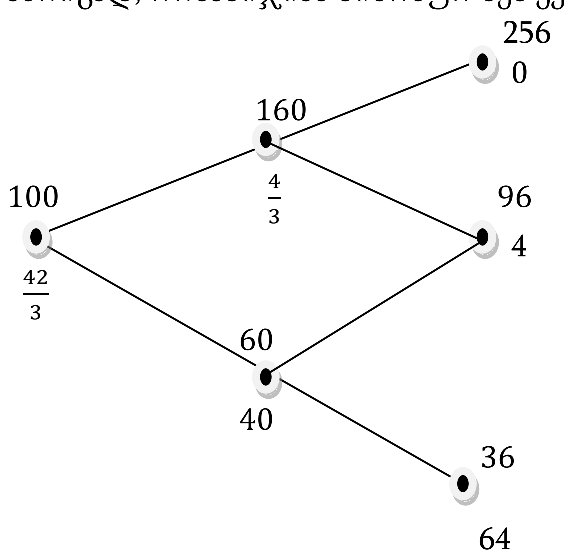
შემდეგ გვაქვს

$$P_{1,0}^A = \max\{f_{1,0};\ (1 + r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1 - p^*) f_{2,0}\right]\} = \max\left\{40; \frac{70}{3}\right\} = 40 \tag{3.4.35}$$

$$P_{1,1}^A = \max\{f_{1,1};\ (1 + r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1 - p^*) f_{2,1}\right]\} = \max\left\{0; \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3} \tag{3.4.36}$$

$$P_2^A = \max\{f(S_0);\ (1 + r)^{-1}\left[p^* C_{1,1}^A + (1 - p^*) C_{1,0}^A\right]\} = \max\left\{0; \frac{42}{3}\right\} = \frac{42}{3} \tag{3.4.37}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე :



ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი დროის $n = 0$ მომენტში. (3.4.23), (3.4.24) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+\mathrm{b})P_{1,0}^A - (1+\mathrm{a})P_{1,1}^A}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 40 - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{79}{30}$$

$$\gamma_1^* = \frac{P_{1,1}^A - P_{1,0}^A}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} = \frac{\frac{4}{3} - 40}{1\cdot 100} = -\frac{29}{75}$$

ამრიგად, $\pi_1^*(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{79}{30}, -\frac{29}{75}\right)$ და გვაქვს

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{79}{30}\cdot 20 - \frac{29}{75}\cdot 100 = \frac{42}{3}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* P_{1,1}^A + (1-p^*)P_{1,0}^A\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot 40\right) = \frac{42}{3}$$

შემდეგ გვაქვს

I. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$$

I I. თუ $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ

$$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{125}{36}, -1\right)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ აქციის შესაძლო ფასების ნებისმიერი ევოლუციისათვის და ოფციონის განაღდების ნებისმიერი შემთხვევითი მომენტისათვის აგებული მინიმალური ჰეჯის საშუალებით ემიტენტი შეასრულებს ოფციონური კონტრაქტით გათვალისწინებულ ვალდებულებას.

განვიხილოთ ახლა ოფციონის განაღდების τ^* რაციონალური მომენტის არჩევის საკითხი. (3.4.26) ტოლობის ანალოგიური

$$\tau^* = \min\{n : f(S_n) \geq P_n^A\}. \tag{3.4.38}$$

ტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია:

I. თუ $S_0 \to S_{1,1} = 160$, მაშინ $\tau^* = 2$;

I I. თუ $S_0 \to S_{1,0} = 60$, მაშინ $\tau^* = 1$.

მართლაც, ვთქვათ, ვიმყოფებით $S_{1,1}$ კვანძში, მაშინ დროის $n = 1$ მომენტში ოფციონის განაღდებით ჩვენ მივიღებთ გასამრჯელოს $f_1(S_{1,1}) = f(160) = 0$, ხოლო მოსალოდნელი საშუალო გასამრჯელო დროის $n = 2$ მომენტში ტოლია $P_{1,1}^A = \frac{4}{3}$ სიდიდის, ამიტომ $\tau^* = 2$. ვთქვათ, ახლა ვიმყოფებით $S_{1,0}$ კვანძში, მაშინ გვაქვს $f_1(S_{1,0}) = f(60) = 40$, $P_{1,0}^A = 40$ და ამიტომ $\tau^* = 1$.

საინტერესოა (3.4.1)–(3.4.2) მოდელის შემთხვევაში $r \geq 0$ პარამეტრის გათვალისწინებით შევადაროთ ერთმანეთს ევროპული და ამერიკული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონების სამართლიანი ფასები ანუ C_N და C_N^A, P_N და P_N^A სიდიდეები.

სამართლიანია შემდეგი ფაქტები

შემთხვევა I. თუ $r = 0$, მაშინ $C_N = C_N^A$ და $P_N = P_N^A$ (3.4.39)

შემთხვევა II. თუ $r > 0$, მაშინ $C_N = C_N^A$ (3.4.40)

განვიხილოთ ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის. ასეთ დროს ინვესტირების პროცესში ხდება გარკვეული თანხის შემოდინება ობლიგაციებისა და აქციების რაოდენობისა და ფასების პროპორციულად:

$$g_n = c_1\beta_n B_{n-1} + c_2\gamma_n S_{n-1}$$

შემოვიტანოთ გარკვეული T ოპერატორი

$$Tf(x) = \frac{1+c_1}{1+r}\left[p^* f\big((1+b)\big)x + (1-p^*) f\big((1+a)x\big)\right], \tag{3.4.41}$$

სადაც

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)} \tag{3.4.42}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $f = f_{(x)}$ გადახდის ფუნქციისათვის კაპიტალის პროცესი ჩაწერილია შემდეგი სახით

$$X_n = Tf_{n+1}(S_n) \quad (3.4.43)$$

გარდა ამისა T ოპერატორის გამოყენებით დგინდება ოფციონის „განაღდების“, „არ განაღდების“ და „განურჩევლობის“ არეები

სამართლიანია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 4. დავუშვათ გაყიდვისა და ყიდვის სტანდარტული ამერიკული ოფციონის გადახდის ფუნფუნქციები შესაბამისად მოიცემა სემდეგი სახით:

$$f(x) = \max(x - K, 0) \quad (3.4.44)$$

$$f(x) = \max(K - x, 0) \quad (3.4.45)$$

სადაც K >0 წარმოადგენს შეთანხმების ფასს მაშინ

1) $f(S_n) > TP_{n+1}(S_n)$ არის „გაჩერების არე“
2) $f(S_n) < TP_{n+1}(S_n)$ არის „გაგრძელების არე“
3) $f(S_n) = TP_{n+1}(S_n)$ არის „განურჩევლობის არე“

ასევე სამართლიანია ფასის გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა:

$$P_{N-k,j} = \max\left\{f_{N-k,j}, \frac{1 + c_1}{1 + r}\left[p^* P_{N-k+,j+1} + (1 - p^*) P_{N-k+1,j}\right]\right\} \quad (3.4.46)$$

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომში მიღწეულია დასახული მიზნები - გადაწყვეტილია რიგი ამოცანებისა ამერიკული და ევროპული ოფციონების ფასდადების ამოცანების მოდელირების ახალი მიმართულებით. ნაშრომში გამოკვლეულია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა. კერძოდ, შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების ყოფაქცევა დროში და აგებულია სათანადო მათემატიკური მოდელები. დისკრეტული და უწყვეტი ფინანსური ნაკადების (პროცესების) შემთხვევაში შესწავლილია წარმოებული ფასიანი ქაღალდის ევროპული და ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მეთოდების გამოყენებით. კერძოდ, ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანაში გამოყენებულია შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები. მოტანილია საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები და აგებულია სათანადო კომპიუტერული პროგრამები. ეს პროგრამები წარმოდგენილია ნაშრომის ბოლოს დანართების სახით.

ლიტერატურა

1. L. Bachelier. Théorie de la spéculation. Annales Scientifques de l' École Normale Supérieure,III-17:21-86, 1900. Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences (defended March 29, 1900). Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995. English translation in The random character of stock market prices, Ed. P. Cootner, pp. 17-78, Cambridge, MIT Press, 1964.
2. N. Wiener, "Differential Space," Journal of Mathematics and Physics, vol.2, pp.131-174, 1923;
3. Samuelson, Paul A., *Proof That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly* , Industrial Management Review, 6:2 (1965:Spring) p.41
4. Black, F. & Scholes, M. *"The Pricing of Options & Corporate Liabilities",* The Journal of Political Economy (May 1973)
5. Merton, R.,(b) *"Theory of Rational Option Pricing"*, Bell Journal of Economics & Management (June1973)
6. Cox, J., Ross, S., & Rubinstein M., *"Option Pricing: A Simplified Approach."* Journal of Financial Economics, 7. (Sept '79).
7. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ.მირზაშვილი, თ. ტორონჯაძე, ო. ღლონტი, დ. ჯამბურია, ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები, ფინანსური და სადაზღვევო მათემატიკა, ფინანსური ინჟინერია, ფონდი „ევრაზია“, თბილისი 1999.
8. Бочаров П., Касимов Ю.,Финансовая Математика., ФизМат-гиз, Москва, 2007.
9. Ширяев А.Н., Статистический последовательный анализ, М., Наука, 1976
10. Энгельберт А., Об оптимальности марковских моментов в задаче остановки марковских процессов с непрерывным временем, math. Nachr. , N: 70, 1975, 251-257.
11. Энгельберт Г. Ю. , К теории оптимальных правил остановки марковских процессов, теория вероятн. и ее примен., ХУШ, , N: 72, 1973, 312-320.
12. Энгельберт Г. Ю. , Об оптимальных правилах остановки марковских случайных процессов, с непрерывным временем, теория вероятн. и ее примен XIX, , N: 2, 1974, 289-307.

13. Taylor H.M. , Optimal stopping in Markov process, Ann. Math. Statist., 39, N 4, 1968 1334-1344.
14. Thompson M. E. , Continous parameter optimal stopping problems , Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. , 19 1971, 302-318.
15. P. Babilua, I. Bokuchava, B. Dochviri and M. Shashiashvili, Optimal stopping problem on a finite time interval*Bull. Geoergian Acad. Sci.* **173** (2006)*,* No. 2, 250-253
16. P. babilua, B. Dochviri, M. Patsatsia, and G. Lominashvili, On optimal stopping problem of inhomogeneous Markov process AMIM **13** (2008) No. 2.
17. Дочвири Б.М., О супермартингальной характеризации цены в задаче оптимальной остановки марковских процессов, Сообщ. АН ГССР, т.59. N: I 1970, 29-31.
18. Дочвири Б.М., Об интегральных и «дифференциальных» уравнениях для цены в задаче Оптимальной остановки марковских процессов, Сообщения. АН ГССР, т.59. N: 3 1970, 549-551.
19. Дочвири Б.М., Шашиашвили М. А., Об оптимальной остановке однородного марковского процесса на конечном интервале времени, math. Nachr. 156, 1992, 269-281.
20. Дочвири Б.М., оптимальная остановка однородного необрывающегося стандартного марковского процесса на конечном интервале времени, Труды Московского математического института им. В.А. Стеклова , т. 202, 1993 120-131
21. Dochviri B. On optimal stopping of In homogeneous Standart Markov Process. Georgian Mathematical Journal,. Vol. 2 N 4 1995 335-346.
22. ო. ღლონტი, სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა, თსუ თბილისი, 2002.
23. P. Babilua, I. Bokuchava , B. Dochviri, On the modeling of the European option pricing theory *Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied mathematics* **21** (2006) No. 1, 5-7
24. P. Babilua, I. Bokuchava, B. Dochviri and M. Shashiashvili, On The Simulation of the American option pricing process. *Appl. Math. Infor. Mech.* **11** (2006) No. 1, 1-5
25. P. Babilua, I. Bokuchava, B. Dochviri and M. Shashiashvili, The American put option in a one-dimencional diffusion model with level-dependent volatility, *Stochastics* **79** (2007) No. 1, 1-5

26. P. babilua, B. Dochviri, On the pricing of a European option *Problems of Cybernetics and Informatics, Baku* II (2008), 246-248.
27. P. babilua, B. Dochviri, H. Meladze, On the modeling of the European option pricing *Bulletin of St. Andrew the First-Called Georgian University of the Patriarchy of Georgia*, 2009,) No. 1, 89-94
28. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping for time-dependent gain function, Theory of Stochastic Processes, Vol. 15. N 2, 2009, Kyiv, pp 54-61;
29. ბ. დოჭვირი, გ. ლომინაშვილი, ბ. მელაძე, ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება, საქართველოს მათემატიკოსთა V ყრილობა. ბათუმი/ქუთაისი, თეზისები, 2009, გვ. 125.
30. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the construction of a homogeneous standard Markov process, PCI, Vol. II, Baku, 2010, p. 263-265
31. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping of homogeneous Markov process with finite lifetime, Modern Stochastics: theory and applications II, Abstracts, Kiev, 2010, p.47-48
32. პ. ბაბილუა, ბ. მელაძე, მ ფაცაცია, ამერიკული გაყიდვის ოფციონისფასდადების მოდელირება, ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები, თეზისების კრებული, თბილისი 2010, 13–16.
33. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment Process, The International Scientific Conference "Information and computer Technologies, Modeling, Control", Tbilisi, 2010, Book of abstracts, p. 201.
34. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment Process, Computer Science, Technology And Applications, New York, 2012, p.p. 519-523
35. P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the pricing of American option, Промлемы управления безопасностью сложных систем, XVIII, Москва, 2010, 155-159.
36. პ. ბაბილუა, ბ. დოჭვირი, თ. დოჭვირი, ბ.მელაძე, ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელირების შესახებ, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია, შრომები, ტ. 2, 2012. გვ 16-24.

დანართი 1

საბანკო კრედიტის ეფექტური საპროცენტო განაკვეთის დათვლის მაგალითები და მათი რეალიზაციისათვის საჭირო კომპიუტერული პროგრამები

ჩვენს მიერ რეალიზებულია კომპიუტეროლი პროგრამები საპროცენტო განაკვეთების დასადგენად სხვადასხვა შემთხვევებში, რომალსაც ხვდებით საბანკო პრაქტიკაში

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. საპროცენტო განაკვეთის დათვლა სესხის თახის არათანაბარი დაფარვების დროს

დავუშვათ ბანკმა დროის $t_0 = 0$ მომენტში გასცა B_0 თანხის ოდენობის სესხი $T = n$ წლის ვადით შემდეგი პირობებით: სესხის დათაფრვა ხორციელდება ეტაპობრივად ყოველი წლის ბოლოს შემოტანილი A_i $i = \overline{1,n}$ თანხის მეშვეობით. ჩვენი მიზანია დავთვალოთ წლიური საპროცენტო განაკვეთი r, რა საპროცენტო განაკვეთითაც იქნა გაცემული B_0 თანხა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია, რომ ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი A_i $i = \overline{1,n}$ თანხის დისკონტირებული ღირებულებათა ჯამი ტოლი უნდა იყოს $t_0 = 0$ მომენტში გასცემი თანხის. ეს უკანასკნელი კი გულისხმობს შემდეგი ტოლობის შესრულებას:

$$B_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(1+r)^n}$$

r წლიური საპროცენტო განაკვეთის საპოვნელად საჭიროა აღნიშნული განტოლების ამოხსნა. შევადგენთ კომპიუტერულ პროგრამას რომელიც დაითვლის აღნიშნულ საპროცენტო განაკვეთს. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, რომლის დროსაც $t_0 = 0$ მომენტში გასცემი თანხა $B_0 = 100$, სესხი გაიცემა 4 წლის ვადით და ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი თანხები განისაზღვრება შემდეგნაირად $A_1 = 25, A_2 = 25, A_3 = 30,$ და $A_4 = 30.$ ფაქტიურად გვაქვს შემდეგი სახის ფინანსური ნაკადი:

$$CF = \{(0, 100\ ), (1, -25), (2, -25), (3, -30), (3, -30)\ \}$$

გამოთვლების შედეგად მივიღებთ რომ წლიური საპროცენტო განაკვეთი r=3.78%

პროგრამული რეალიზაცია.

პროგრამა შესრულებულია Java დაპროგრამირების ენაზე. აღნიშნული პროგრამის შესრულების შედეგად გამოითვლება ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი.

```
/*
* To change this template, choose Tools | Templates
* and open the template in the editor.
*/
package procentebi;
import java.applet.*;
import java.awt.*;
import java.math.*;
import java.text.*;
/**
*
 *
 * @author bmeladze
*/

public class Procentebi  extends Applet{
    /**
     * @param args the command line arguments
     */
    public  void paint(Graphics m) {
        // TODO code application logic here
        m.setColor(Color.black);
Font font = new Font("Arial", Font.PLAIN, 12);
m.setFont(font);
double a, b, av;
a=0;
b=0.5;
int  i;
i=0;
while (Math.abs(a-b)>0.001) {
    i=i+1;
    if (f(a)*f((b+a)*0.5)<0) {
    b=(b+a)*0.5;
    }
    if (f((a+b)*0.5)<0) {
    a=(a+b)/2;
    }
```

```
}
Font font2 = new Font("Sylfaen", Font.PLAIN, 18);
m.setFont(font2);
m.drawString("ეფექტური საპროცენტო განაკვეთი ტოლია
"+Double.toString(roundTwoDecimals(b)),  20,  100);
 }
 public   double f (double r)
       {
       int N = 11;
       int i;
       double A[] = new double[N];
       double s=0;
       A[0]=1000;
       A[1]=180;
       A[2]=160;;
       A[3]=190;
       A[4]=175;
       A[5]=180;
       A[6]=150;
       A[7]=200;
       A[8]=160;
       A[9]=185;
       //A[10]=176.98;
       A[10]=100;
       s=A[0];
       for (i=1; i<N; i++)
       {
       s=s-A[i]*Math.pow(1+r, -1*i);
       }
       return s;
   }
 double roundTwoDecimals(double d) {
    DecimalFormat twoDForm = new DecimalFormat("#.####");
    return Double.valueOf(twoDForm.format(d));}
}
```

გამოთვლილი საპროცენტო განაკვეთი: **11.23%**

საპროცენტო დაფარვის გრაფიკის დადენა სესხის თახის თანაბარი დაფარვების დროს.

დავუშვათ ბანკმა დროის $t_0 = 0$ მომენტში გასცა B_0 თანხის ოდენობის სესხი $T = n$ წლის ვადით r წლიური საპროცენტო განაკვეთით. სესხის დათაფრვა უნდა განხორციელდეს

თანაბარი თანხებით ეტაპობრივად ყოველი წლის ბოლოს შემოტანილი $A_i = const = a, i = \overline{1,n}$ თანხის მეშვეობით. ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი თანხა შეიცავს იმ დროისათვის დაგროვილ სესხის პროცენტს და სესხის თანხის ნაწილს რითაც ფაქტობრივად მცირდება სესხის თანხა. სესხის გაცემისას ბანკმა კლიენტს უნდა წარუდგინოს სესხის დაფარვის გრაფიკი რომელიც შეიცავს დაფარვის თარიღს, იმ დროისათვის დაგროვილ დასაფარ პროცენტს და დასაფარი სესხის ნაწილს..

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამ ამოცანის გადასაჭრელად პირველ რიგში ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი თანხის ოდენობა. ცხადია, რომ ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი $A_i = const = a, i = \overline{1,n}$ თანხის დისკონტირებული ღირებულებათა ჯამი ტოლი უნდა იყოს $t_0 = 0$ მომენტში გასცემი თანხის. ეს უკანასკნელი კი გულისხმობს შემდეგი ტოლობის შესრულებას:

$$B_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{(1+r)^n}$$

ამ განტოლებიდან ჩვენ ადვილად ვიპოვით წლის ბოლოს შემოსატანი $A_i = const = a$ თანხის ოდენობას. როგორც უკვე ავღნიშნეთ a სიდიდე შედგება დასაფარი პროცენტისგან და დასაფარი სესხის თანხის ნაწილისაგან. იმისათვის რომ გამოვყოთ ეს ორი სიდიდე განვიხილოთ კერძო შემთხვევა. ვთქვათ გასცემი თანხა $B_0 = 100$, სესხი გაიცემა 4 წლის ვადით და წლიური საპროცენტო განაკვეთი r =4%. საჭიროა გამოვთვალოთ სესხის დაფარვის გრაფიკი. ასევე ჩვენი კომპიუტერული პროგრამის საშუალებით მივიღებთ შემდეგს:

i	სესხის ოდენობა პერიოდის ბოლოსათვის	გადასახდელი თანხა	დასაფარი პროცენტი	დასაფარი სესხის თანხა
	200	55.10	8	47.10
	152.90	55.10	6.12	48.92
	103.92	55.10	4.16	50.94

	52.98	55.10	2.12	52.98

საპოვნელად საჭიროა აღნიშნული განტოლების ამოხსნა. შევადგენთ კომპიუტერულ პროგრამას რომელიც დაითვლის აღნიშნულ საპროცენტო განაკვეთს. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, რომლის დროსაც $t_0 = 0$ მომენტში და ყოველი წლის ბოლოს შემოსატანი თანხები

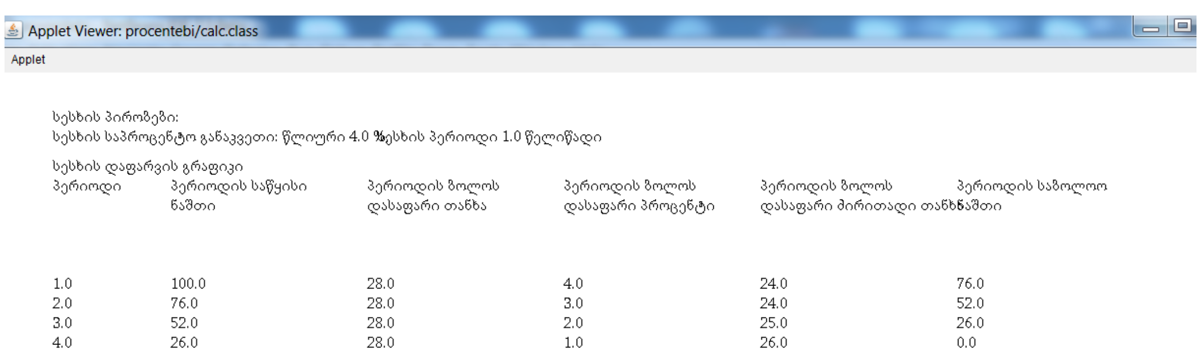
პროგრამული რეალიზაცია.

პროგრამა შესრულებულია Java დაპროგრამირების ენაზე. აღნიშნული პროგრამის შესრულების შედეგად გამოითვლება სესხის დაფარვის გრაფიკი.

```
/*
* To change this template, choose Tools | Templates
* and open the template in the editor.
*/
package procentebi;
import java.applet.*;
import java.awt.*;
import java.math.*;
import java.text.*;
/**
*


 *
 * @author bmeladze
*/
public class calc  extends Applet{
    /**
     * @param args the command line arguments
     */
  int  L=12;
  int j;
  double tanxa=100;
  double procenti=0.04;
  int vada=4;
  double A[] = new double[L+1];
  double B[] = new double[L+1];
  double C[] = new double[L+1];
```

```
  double D[] = new double[L+1];
  double E[] = new double[L+1];
    public  void paint(Graphics m) {
        // TODO code application logic here
        m.setColor(Color.black);

Font font = new Font("Sylfaen", Font.PLAIN, 14);
m.setFont(font);
A[0]=tanxa;
B[0]=pmt(procenti, tanxa, vada);
C[0]=A[0]*procenti;
D[0]=B[0]-C[0];
E[0]=A[0]-D[0];
m.drawString("სესხის პირობები:  ",    50, 50);
m.drawString("სესხის საპროცენტო განაკვეთი: წლიური
"+Double.toString(roundTwoDecimals(procenti*1200))+" %,",    50, 70);
m.drawString("სესხის პერიოდი "+Double.toString(roundTwoDecimals(L/12))+" წელიწადი",
380, 70);
m.drawString("სესხის დაფარვის გრაფიკი",    50, 100);
m.drawString("პერიოდი",    50, 120);
m.drawString(Double.toString(1),    50, 220);
m.drawString("პერიოდის საწყისი",    170, 120);
m.drawString("ნაშთი",    170, 140);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(A[0]))),  170,  220);
m.drawString("პერიოდის ბოლოს",    370, 120);
m.drawString("დასაფარი თანხა",     370, 140);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(B[0]))),  370,  220);
m.drawString("პერიოდის ბოლოს",      570, 120);
m.drawString("დასაფარი პროცენტი",    570, 140);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(C[0]))),  570,  220);
m.drawString("პერიოდის ბოლოს",           770, 120);
m.drawString("დასაფარი ძირითადი თანხა",    770, 140);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(D[0]))),  770,  220);
m.drawString("პერიოდის საბოლოო",    970, 120);
m.drawString("ნაშთი",    970, 140);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(E[0]))),  970,  220);
for  (j=1; j< vada; j++) {
A[j]=E[j-1];
B[j]=pmt(procenti, tanxa, vada);
C[j]=A[j]*procenti;
D[j]=B[j]-C[j];
E[j]=A[j]-D[j];
```

```
m.drawString(Double.toString(j+1),    50, 220+20*j);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(A[j]))),  170,  220+20*j);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(B[j]))),  370,  220+20*j);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(C[j]))),  570,  220+20*j);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(D[j]))),  770,  220+20*j);
m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(Math.round(E[j]))),  970,  220+20*j);
}

//m.drawString("Interest Rate ",  20,  100);
//m.drawString(Double.toString(roundTwoDecimals(pmt(0.01,10000,120))),  180,  100);
  }

 public   double pmt (double r, double p0, int N)
       {

       int i;
       double A[] = new double[N];
       double s=0;
       for (i=1; i<N+1; i++)
       {
       s=s+Math.pow(1+r, -1*i);
       }

       return p0/s;

    }
 double roundTwoDecimals(double d) {
    DecimalFormat twoDForm = new DecimalFormat("#.####");
    return Double.valueOf(twoDForm.format(d));}
}
```



Applet Viewer: procentebi/calc.class

Applet

სესხის პირობები:
სესხის საპროცენტო განაკვეთი: წლიური 4.0 %სესხის პერიოდი 1.0 წელიწადი

სესხის დაფარვის გრაფიკი

პერიოდი	პერიოდის საწყისი ნაშთი	პერიოდის ბოლოს დასაფარი თანხა	პერიოდის ბოლოს დასაფარი პროცენტი	პერიოდის ბოლოს დასაფარი ძირითადი თანხა	პერიოდის საბოლოო ნაშთი
1.0	100.0	28.0	4.0	24.0	76.0
2.0	76.0	28.0	3.0	24.0	52.0
3.0	52.0	28.0	2.0	25.0	26.0
4.0	26.0	28.0	1.0	26.0	0.0

დანართი 2
ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების მოდელირება

განვიხილოთ §1–ის (3.1.1), (3.1.2) ტოლობებით განსაზღვრული ფინანსური (B, S) – ბაზრის კოქსის, როსის და რუბენშტეინის დისკრეტული მოდელი

$$B_n = (1+r)B_{n-1} \qquad B_0 > 0 \tag{3.5.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1} \qquad S_0 > 0 \tag{3.5.2}$$

ქვემოთ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

I. $B_0 = 20, \quad r = \frac{1}{5}$ (3.5.3)

II. $S_0 = 100, \ \ \rho_n = b = \frac{3}{5},$ ან

$\rho_n = a = -\frac{2}{5}, \quad n = 0,1 \dots N$ (3.5.4)

III. ევროპული ტიპის ყიდვის (გაყიდვის) სტანდარტული ოფციონის გადახდის ფუნქციაში შეთანხმების ფასი

$$K = 100 \tag{3.5.5}$$

ჩვენ შემდგომში ხშირად დაგვჭირდება შემდეგი სიდიდეები და მათი რიცხვითი მნიშვნელობები

$$1 + a = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5},$$

$$1 + b = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5},$$

$$b - a = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1,$$

$$p^* = \frac{r-a}{b-a} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}, \tag{3.5.6}$$

$$1 - p^* = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5},$$

$$1 + r = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5},$$

$$(1+r)^{-1} = \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{6}$$

განვიხილოთ ყიდვის სტანდარტული ოფციონის რამოდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5.1. განვიხილოთ (3.5.1), (3.5.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 1$ ე. ი. $n = 0,1$. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (3.5.1)–(3.5.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$\mathrm{f}_1 = \mathrm{f}_1(\mathrm{S}_1) = \max(\mathrm{S}_1 - \mathrm{K}, 0) \tag{3.5.7}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n = 1$ მომენტში აქციისა და ოფციონის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები, (3.5.7) და (3.2.1)–(3.2.6) ტოლობების თანახმად, შესაბამისად ტოლი იქნება:

$$S_{1,0} = S_0(1+a) = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60, \tag{3.5.8}$$

$$S_{1,1} = S_0(1+\mathrm{b}) = 100 \cdot \frac{8}{5} = 160, \tag{3.5.9}$$

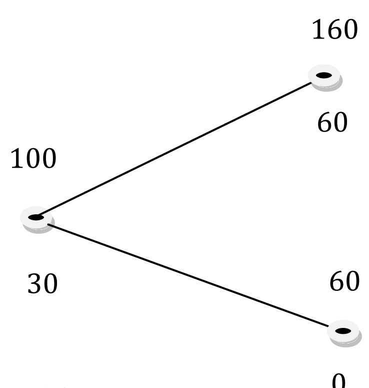
$$f_{1,0} = \max\left(S_{1,0} - K, 0\right) = \max(60 - 100, 0) = 0 \tag{3.5.10}$$

$$f_{1,1} = \max\left(S_{1,1} - K, 0\right) = \max(160 - 100, 0) = 60 \tag{3.5.11}$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, დროის $n = 0$ მომენტში ოფციონის სამართლიანი ფასი. (3.5.6) ტოლობების გათვალისწინებით და (3.2.12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_1 = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] =$$
$$= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 60 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 30 \tag{3.5.12}$$

ამრიგად ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახაზი 3.5.1.

გამოვთვალოთ C_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, კოსის, როსის და რუბინშტეინის (3.2.34) ფორმულის საშუალებით ამისათვის გამოვიყენოთ (3.2.32) უტოლობა N=1 შემთხვევაში. გვექნება

$$S_0(1+\mathrm{a})\left(\frac{1+b}{1+\mathrm{a}}\right)^{k_0} > K.$$

ვთქვათ k_0=0, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^{0} > 100$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{3}{5} > 1$. ამიტომ k_0=0 მნიშვნელობა k_0 განმარტების თანახმად არ გამოდგება.

ვთქვათ k_0=1, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^{1} > 100$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{8}{5} > 1$. ამრიგად, k_0=1. შევნიშნავთ, რომ k_0–ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე, (3.2.33) ფორმულის გამოყენებით. (3.2.34) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_1 = S_0\cdot C_1^1\cdot p^*\,(1-p^*)^0\cdot\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\cdot\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}} -$$

$$-K(1+r)^{-1}C_1^1\cdot p^*\,(1-p^*)^0$$

$$= 100\cdot 1\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^0\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} - 100\cdot\frac{5}{6}\cdot 1\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^0 = 30.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული თანხით დროის $n=0$ მომენტში მან უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი π_1^*= (β_1^* , γ_1^*). ეს იმას ნიშნავს რომ C_1 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) მან უნდა შეიძინოს β_1^* რაოდენობის ობლიგაცია და γ_1^* რაოდენობის აქცია, ანუ ააგოს π_1^*= (β_1^* , γ_1^*) პორთფელი, რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი

მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_1)$ სიდიდის ტოლი იქნება.

(3.3.16),(3.3.17) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}_{1,0} - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}_{1,1}}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 60}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = -\frac{3}{2} \tag{3.5.13}$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}_{1,0} - \mathrm{f}_{1,1}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} = \frac{60-0}{1\cdot 100} = \frac{3}{5} \tag{3.5.14}$$

ამრიგად, მივიღეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი (დროის $n = 1$ მომენტის დადგომამდე) (3.3.14), (3.3.18) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^*\mathrm{B}_0 + \gamma_1^* S_0 = -\frac{3}{2}\ 20 + \frac{3}{5}\ 100 = 30 \tag{3.5.15}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\left[p^*\mathrm{f}_{1,1} + (1-p^*)\mathrm{f}_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 60 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 30 \tag{3.5.16}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.5.1. დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ სტრატეგია

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$

1. $C_1 = 30$–ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე საწყისი სტრატეგია

$\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$,

2. შეამოწმეთ ტოლობა

$X_0^{\pi} = \beta_0\mathrm{B}_0 + \gamma_0 S_0$

3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.18) პირობა

$\Delta\beta_1^*\mathrm{B}_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0$

სადაც $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0$, $\Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 30–ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{3}{2}$ ობლიგაცია და იყიდა $\frac{3}{5}$ აქცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს რადგან

$\frac{3}{5}100 = 60 = 30 + 30 = 60.$

დროის $n = 1$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით (3.3.15) ფორმულის თანახმად, π_1^*= $(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -\frac{3}{2} B_1 + \frac{3}{5} S_1 = f(S_1) \tag{3.5.17}$$

ნახაზ 3.5.1.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$ ობლიგაციის ფასია

$$B_1 = (1+r)B_0 = \frac{6}{5} \cdot 20 = 24$$

ასეთ შემთხვევაში (3.5.17)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{3}{2} \cdot 24 + \frac{3}{5} \cdot 160 = 60$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 60$.

ამრიგად, დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5} \cdot 160 = 96$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2} \cdot 24 = 36$– ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 96–36=60 ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას

შემთხვევა I I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში (3.5.17)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{3}{2} \cdot 24 + \frac{3}{5} \cdot 60 = 0$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{3}{5}$ აქციას და მიიღებს $\frac{3}{5} \cdot 60 = 36$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{3}{2}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{3}{2} \cdot 24 = 36$– ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს არ იხდის, რადგან $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 0$.

ამრიგად , მაგალითი 1.1.–ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგალითი 3.5.2. განვიხილოთ (3.5.1), (3.5.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=2 ე. ი. $n = 0, 1, 2$. ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (3.5.3)–(3.5.5) პირობები. დავუშვათ,

ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2 = f_2(S_2) = \max(S_2 - K, 0) \tag{3.5.18}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n = 2$ მომენტში ბინომური ხის ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისათვის (3.2.15)–(3.2.20) ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$S_{2,0} = S_0(1+\mathrm{a})^0(1+\mathrm{a})^2 = 100\left(\frac{8}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 36 \tag{3.5.19}$$

$$S_{2,1} = S_0(1+\mathrm{a})(1+\mathrm{b}) = 100\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5} = 96 \tag{3.5.20}$$

$$S_{2,2} = S_0(1+\mathrm{b})^2(1+\mathrm{a})^0 = 100\left(\frac{8}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 256 \tag{3.5.21}$$

$$f_{2,0} = f\left(S_{2,0}\right) = \max\left(S_{2,0} - K, 0\right) = \max(36 - 100{,}0) = 0, \tag{3.5.22}$$

$$f_{2,1} = f\left(S_{2,1}\right) = \max\left(S_{2,1} - K, 0\right) = \max(96 - 100{,}0) = 0, \tag{3.5.23}$$

$$f_{2,2} = f\left(S_{2,2}\right) = \max\left(S_{2,2} - K, 0\right) = \max(256 - 100{,}0) = 156, \tag{3.5.24}$$

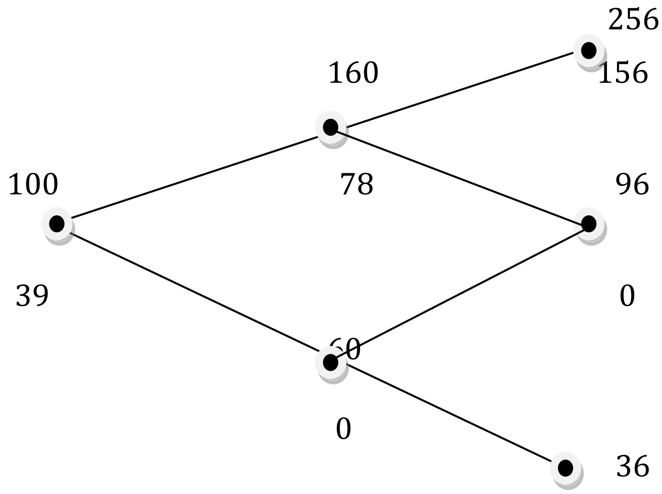
დროის $n = 1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს აქციის შესაძლო ფასები (3.5.8), (3.5.9) ტოლობებით, რომლის თანახმად $S_{1,0} = 60, S_{1,1} = 160.$ შემდეგ (3.2.23)–(3.2.25) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$C_{1,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 0, \tag{3.5.25}$$

$$C_{1,1} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 78, \tag{3.5.26}$$

$$C_2 = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* C_{1,1} + (1-p^*) C_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 39. \tag{3.5.27}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახაზი 3.5.2

გამოვთვალოთ C_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, (3.2.34) ფორმულით N=2 შემთხვევაში. (3.2.32) უტოლობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$S_0(1+\mathrm{a})^2\left(\frac{1+b}{1+\mathrm{a}}\right)^{k_0} > K.$$

ვთქვათ k_0=0, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^0 > 100$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{9}{25} > 1$. ვთქვათ k_0=1, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} > 100$$

საიდანაც მივიღებთ კვლავ არასწორ უტოლობას $\frac{24}{25} > 1$. ვთქვათ k_0=2, მაშინ გვექნება

$$100\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 > 100$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{64}{25} > 1$. ამრიგად, k_0=2. კიდევ ერთხელ შევნიშნავთ შევნიშნავთ, რომ k_0–ის მნიშვნელობა შეიძლება გამოვთვალოთ, აგრეთვე, (3.2.33) ფორმულის გამოყენებით. (3.2.34) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$C_2 = S_0 \cdot C_2^2 \cdot (p^*)^2 (1-p^*)^0 \cdot \left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^2 -$$

$$-K(1+r)^{-2} C_2^2 \cdot (p^*)^2 \, (1-p^*)^0$$

$$= 100 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 - 100 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 39.$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული C_2 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) დროის $n = 0$ მომენტში მან უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი π_1^*= (β_1^*, γ_1^*). დროის $n = 2$ მომენტში მან უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი π_2^*= (β_2^*, γ_2^*), რომლის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 2$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_2)$ სიდიდის ტოლი იქნება. (3.3.23),(3.3.24) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+\mathrm{b})C_{1,0} - (1+\mathrm{a})C_{1,1}}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 78}{\frac{6}{5}\cdot 1 \cdot 20} = -\frac{39}{20} \tag{3.5.28}$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,0} - C_{1,1}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} = \frac{78-0}{1\cdot 100} = \frac{39}{50} \tag{3.5.29}$$

ამრიგად, მივიღეთ π_1^*= $(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში (3.3.21), (3.3.22) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^*\mathrm{B}_0 + \gamma_1^* S_0 = -\frac{39}{20}\, 20 + \frac{39}{50}\, 100 = 39 \tag{3.5.30}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1} \left[p^*\mathrm{f}_{1,1} + (1-p^*)\mathrm{f}_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 39 \tag{3.5.31}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.5.2 დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ სტრატეგია

π_1^*= $(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$

1. $C_2 = 39$–ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე საწყისი სტრატეგია

$\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$,

2. შეამოწმეთ ტოლობა

$X_0^{\pi} = \beta_0 \mathrm{B}_0 + \gamma_0 S_0$

3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.18) პირობა

$\Delta\beta_1^* \mathrm{B}_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0$

სადაც $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0, \Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 39–ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{39}{20}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{39}{20} \cdot 20$–ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{50}$ აქცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს რადგან

$$\frac{39}{50} 100 = 78 = 39 + 39 = 78.$$

დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.25) ფორმულის თანახმად, $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* \mathrm{B}_1 + \gamma_1^* S_1 = -\frac{39}{20} \mathrm{B}_1 + \frac{39}{50} S_1 = f(S_1) \tag{3.5.32}$$

ნახაზ 3.5.2.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$.

ასეთ შემთხვევაში (3.5.32)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{39}{20} \cdot 24 + \frac{39}{50} \cdot 160 = 78 \tag{3.5.33}$$

შევნიშნოთ, რომ (3.5.33) ტოლობით გამოთვლილი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობა დროის $n = 1$ მომენტში ნახაზ 3.5.2.–ზე მოცემული $S_{1,1}$ კვანძში უფციონის $C_{1,1}$ ფასის მნიშვნელობის ტოლია.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = 78$–ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$. (3.3.26),(3.3.27) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1 + \mathrm{b})\mathrm{f}\big((1 + \mathrm{a})S_1\big) - (1 + \mathrm{a})\mathrm{f}\big((1 + \mathrm{b})S_1\big)}{(1 + \mathrm{r})(\mathrm{b} - \mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 156}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = -\frac{13}{4} \tag{3.5.34}$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_1} = \frac{156-0}{1\cdot 160} = \frac{39}{40} \quad (3.5.35)$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$. ამ პორტფელის სესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.28). (3.3.29) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_1 + \gamma_2^*\mathrm{S}_1 = -\frac{13}{4}\cdot 24 + \frac{39}{40}\cdot 160 \quad (3.5.36)$$

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\left[p^*\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 78 \quad (3.5.37)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.5.3. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$

$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$

1. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.19) პირობა

$\Delta\beta_2^*\mathrm{B}_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,1} = 0$

სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 1$ მომენტში. მას აქვს 78–ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{13}{4}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{13}{4}\cdot 24 = 78$–ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{40}$ აქცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს რადგან

$\frac{39}{40}\cdot 160 = 156 = 78 + 78 = 156.$

დროის $n = 2$ მომენტში (3.3.30) ფორმულის თანახმად, $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_2 + \gamma_2^* S_2 = \mathrm{f}(S_2) = -\frac{13}{4}\cdot B_2 + \frac{39}{40}\cdot S_2 \quad (3.5.38)$$

ნახაზ 3.5.2.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I-ის ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$ ობლიგაციის ფასია

$B_2 = (1+r)B_1 = \frac{6}{5}24 = \frac{144}{5}$

ასეთ შემთხვევაში (3.5.38)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} + \frac{39}{40} \cdot 256 = 156$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,2} = f\left(S_{2,2}\right) = 156.$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40} \cdot 256 = \frac{1248}{5}$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} = \frac{468}{5}$ – ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{1248}{5} - \frac{468}{5} = 156$–ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას–$f_{2,2} = 156$

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (3.5.38)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} + \frac{39}{40} \cdot 96 = 0$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = f\left(S_{2,1}\right) = 156.$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40} \cdot 96 = \frac{468}{5}$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} = \frac{468}{5}$ – ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს არ იხდის, რადგან $f_{2,1} = 0$

შემთხვევა I I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$.

ასეთ შემთხვევაში (3.5.32)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{39}{20} \cdot 24 + \frac{39}{50} \cdot 60 = 0 \qquad (3.5.39)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $C_{1,0}$–ის მნიშვნელობას

შევნიშნოთ, რომ (3.5.33) ტოლობით გამოთვლილი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობა დროის $n = 1$ მომენტში ნახაზ 3.5.2.–ზე მოცემული $S_{1,1}$ კვანძში უფციონის $C_{1,1}$ ფასის მნიშვნელობის ტოლია.

ავაგოთ ამ შემთხვევაში მინიმალური ჰეჯი π_2^*= (β_2^*, γ_2^*). (3.3.26),(3.3.27) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\left((1+\mathrm{a})S_1\right) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\left((1+\mathrm{b})S_1\right)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 0}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = 0 \qquad (3.5.40)$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_1} = \frac{0-0}{1\cdot 160} = 0 \qquad (3.5.41)$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_2^*= (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0, 0)$. ამ პორტფელის სესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.28). (3.3.29) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_1 + \gamma_2^*\mathrm{S}_1 = 0\cdot 24 + 0\cdot 60 = 0 \qquad (3.5.42)$$

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\left[p^*\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) + (1-p^*)\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 0 \qquad (3.5.43)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.5.4. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$\pi_1^*= (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$

$\pi_2^*= (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0, 0)$

1. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.19) პირობა

$\Delta\beta_2^*\mathrm{B}_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,0} = 0$

სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1^*$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 1$ მომენტში. იგი გაყიდის $\frac{39}{50}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{50}\cdot 60 = \frac{234}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{39}{20}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{39}{20}\cdot 24 = \frac{234}{5}$ – ის ტოლ თანხას. განხილული შემთხვევა II–ის ორივე ქვეშემთხვევაში დროის $n = 2$ მომენტში ემიტენტი არაფერს არ იხდის, რადგან $f_{2,1} = \mathrm{f}(S_{2,1}) = 0$.

ამრიგად, მაგალითი 3.5.2–ის პირობბში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

ბოლოს კიდევ ერთხელ გვინდა შევნიშნოთ, რომ რეალურ სიტუაციებში ემიტენტს დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში მხოლოდ თითოჯერ მოუწევს ერთნაბიჯიანი შემთხვევების განხილვა.

დანართი 3

ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების მოდელირება

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.6.1. განვიხილოთ (3.5.1), (3.5.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $N = 1$ ე. ი. $n = 0,1$. გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (3.5.3)–(3.5.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_1 = f_1(S_1) = \max(K - S_1, 0) \qquad (3.6.1)$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ერთნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n = 1$ მომენტში აქციისა და ოფციონის ფასების შესაძლო მნიშვნელობები ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს (3.5.8) და 3.5.9) ტოლობებით, რომლის თანახმად:

$$S_{1,0} = 60, \quad S_{1,1} = 160, \qquad (3.6.2)$$

გამოვთვალოთ დროის $n = 1$ მომენტში ოფციონის გადახდის ფუნქციის (ოფციონის ფასების) შესაძლო მნიშვნელობები ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის ორ ფინალურ (ბოლო) კვანძში. (3.6.1) და (3.2.2), (3.2.5), (3.2.6) ტოლობების თანახმად შესაბამისად გვექნება:

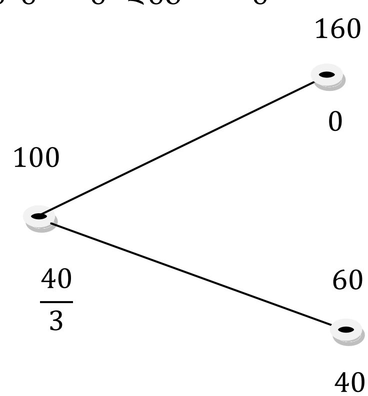
$$f_{1,0} = \max\left(K - S_{1,0}, 0\right) = \max(100 - 60, 0) = 40 \qquad (3.6.3)$$

$$f_{1,1} = \max\left(K - S_{1,1}, 0\right) = \max(100 - 160, 0) = 0 \qquad (3.6.4)$$

გამოვთვალოთ, აგრეთვე, დროის $n = 0$ მომენტში ოფციონის სამართლიანი ფასის P_1-ის მნიშვნელობა (3.5.6) ტოლობების გათვალისწინებით და (3.2.12) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$P_1 = (1 + r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1 - p^*) f_{1,0}\right] = = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 40\right) = 30 \qquad (3.6.5)$$

ამრიგად ერთნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე



ნახაზი 3.5.1.

საინტერესოა, გამოვთვალოთ P_1 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე, „ყიდვა გაყიდვის პარიტეტის“ (3.2.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიან ამოცანაში (3.5.15) ტოლობით მოცემული $C_1 = 30$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება

$$P_1 = C_1 - S_0 + K(1+r)^{-1} = 30 - 100 + 100\frac{5}{6} = \frac{40}{3}.$$

ავაგოთ დროის $n = 0$ მომენტში მინიმალური ჰეჯი $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$. (3.3.16) და (3.3.17) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)f_{1,0} - (1+a)f_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 40 - \frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{8}{3} \qquad (3.6.6)$$

$$\gamma_1^* = \frac{f_{1,0} - f_{1,1}}{(b-a)S_0} = \frac{0-40}{1\cdot 100} = -\frac{2}{5} \qquad (3.6.7)$$

ამრიგად მივიღეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი (დროის $n = 0$ მომენტის დადგომამდე) (3.3.14), (3.3.18) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{8}{3}\cdot 20 - \frac{2}{5}\cdot 100 = \frac{40}{3} \qquad (3.6.8)$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{1,1} + (1-p^*) f_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 40\right) = \frac{40}{3}. \qquad (3.6.9)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.6.1. დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ სტრატეგია

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$

1. $P_1 = \frac{40}{3}$–ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე საწყისი სტრატეგია

$\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$,

2. შეამოწმეთ ტოლობა

$X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$

3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.18) პირობა

$\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0$

სადაც $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0$, $\Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$

ახლა გავაანალიზოთ, რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო $\frac{40}{3}$–ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{2}{5}$ აქცია ანუ $\frac{2}{5} \cdot 100 = 40$–ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{8}{3}$ ობლიგაცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{8}{3}20 = \frac{160}{3} = \frac{40}{3} + 40 = \frac{160}{3}$$

დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.15) ფორმულის თანახმად, $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* \mathrm{B}_1 + \gamma_1^* S_1 = \frac{8}{3}\mathrm{B}_1 - \frac{2}{5}S_1 = f(S_1) \tag{3.6.10}$$

ნახაზ 3.6.1.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$. ასეთ შემთხვევაში (3.6.10)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3} \cdot 24 - \frac{2}{5} \cdot 160 = 0$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,1} = f(S_{1,1}) = 0$.
ამრიგად, დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$ ობლიგაციის და მიიღებს $\frac{8}{3} \cdot 24 = 64$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5} \cdot 160 = 64$– ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს არ იხდის, რადგან $f_{1,1} = 0$.

შემთხვევა I I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$. ასეთ შემთხვევაში (3.6.10)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{8}{3} \cdot 24 - \frac{2}{5} \cdot 60 = 40$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{1,0} = f(S_{1,0}) = 40$.
დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტი გაყიდის $\frac{8}{3}$ ობლიგაციის და მიიღებს $\frac{8}{3} \cdot 24 = 64$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{2}{5}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{2}{5} \cdot 60 = 24$– ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 64–24=40 თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას.

ამრიგად , მაგალითი 3.6.1.–ის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგალითი 3.6.2. განვიხილოთ (3.5.1), (3.5.2) ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, N=2 ე. ი. $n = 0, 1, 2.$ ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია (3.5.3)–(3.5.5) პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f_2 = f_2(S_2) = \max(K - S_2, 0) \tag{3.6.11}$$

ჩვენი მიზანია გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის პირველ რიგში ავაგოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხე.

დროის $n = 2$ მომენტში ბინომური ხის ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისათვის (3.5.19)–(3.5.21) ტოლობების თანახმად გვაქვს $S_{2,0} = 36$, $S_{2,1} = 96$, $S_{2,2} = 256$ შემდეგ (3.6.11) და(3.2.14), (3.2.18)–(3.2.20) ტოლობების თანახმად შესაბამისად გვექნება

$$f_{2,0} = f\left(S_{2,0}\right) = \max\left(K - S_{2,0}, 0\right) = \max(100 - 36, 0) = 64, \tag{3.6.12}$$

$$f_{2,1} = f\left(S_{2,1}\right) = \max\left(K - S_{2,1}, 0\right) = \max(100 - 96, 0) = 4, \tag{3.6.13}$$

$$f_{2,2} = f\left(S_{2,2}\right) = \max\left(K - S_{2,2}, 0\right) = \max(100 - 256, 0) = 0, \tag{3.6.14}$$

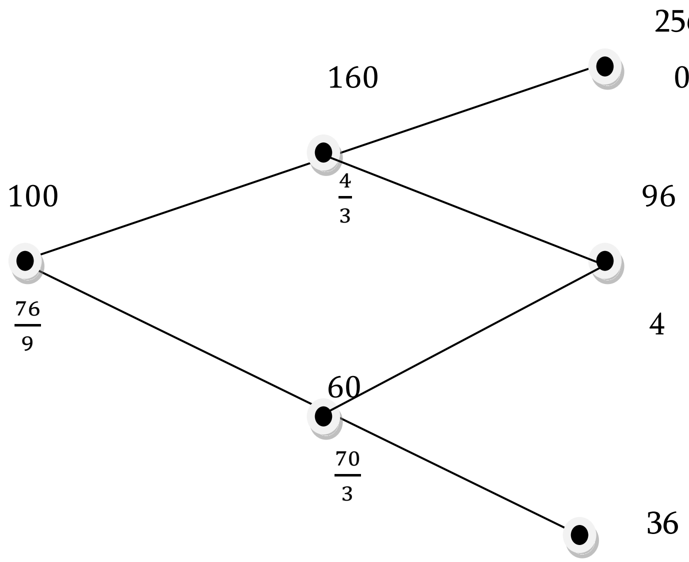
დროის $n = 1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში (3.6.2) ტოლობების თანახმად, გვაქვს $S_{1,0} = 60$, $S_{1,1} = 160$. შემდეგ (3.2.23)–(3.2.25) ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$P_{1,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{2}{5}\cdot 64\right) = \frac{70}{3}, \tag{3.6.15}$$

$$P_{1,1} = (1+r)^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4\right) = \frac{4}{3}, \tag{3.6.16}$$

$$P_2 = C_{0,0} = (1+r)^{-1}\left[p^* P_{1,1} + (1-p^*) P_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{70}{3}\right) = \frac{76}{9}. \tag{3.6.17}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



ნახაზი 3.6.2

გამოვთვალოთ P_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე „ყიდვა გაყიდვის პარიტეტის“ (3.2.36) ფორმულით. ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ერთნაბიჯიან ამოცანაში (3.5.27) ტოლობით მოცემული $C_2 = 39$ სამართლიანი ფასის მნიშვნელობის გათვალისწინებით გვექნება

$$P_2 = C_2 - S_0 + K(1+r)^{-2} = 39 - 100 + 100\left(\frac{6}{5}\right)^{-2} = \frac{76}{9}.$$

(3.3.23) და (3.3.24) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_1^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}_{1,0} - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}_{1,1}}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot\frac{70}{3} - \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = \frac{137}{90}$$

$$\gamma_1^* = \frac{\mathrm{f}_{1,0} - \mathrm{f}_{1,1}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_0} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{70}{3}}{1\cdot 100} = -\frac{11}{50} \tag{3.6.18}$$

ამრიგად მივიღეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 0$ მომენტში (3.3.21), (3.3.22) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^*\mathrm{B}_0 + \gamma_1^* S_0 = \frac{137}{90}\cdot 20 - \frac{11}{50}\cdot 100 = \frac{76}{9} \tag{3.6.19}$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\left[p^* P_{1,1} + (1-p^*)P_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{70}{3}\right) = \frac{76}{9}. \tag{3.6.20}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.6.2 დროის $n = 0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ სტრატეგია

$\pi_1^*= (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$

1. $P_2 = \frac{76}{9}$–ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე საწყისი სტრატეგია

$\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$,

2. შეამოწმეთ ტოლობა

$X_0^\pi = \beta_0 \mathrm{B}_0 + \gamma_0 S_0$

3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.18) პირობა

$\Delta\beta_1^* \mathrm{B}_0 + \Delta\gamma_1^* S_0 = 0$

სადაც $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - \beta_0$, $\Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$

დროის $n = 0$ მომენტში ემიტენტმა ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო $\frac{76}{9}$–ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{11}{50}$ აქცია ანუ $\frac{11}{50} \cdot 100 = 22$–ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{137}{90}$ ობლიგაცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს რადგან

$$\frac{137}{90} 20 = \frac{274}{9} = \frac{76}{9} + 22 = \frac{274}{9}.$$

დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.25) ფორმულის თანახმად, $\pi_1^*= (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* \mathrm{B}_1 + \gamma_1^* S_1 = \frac{137}{90} \mathrm{B}_1 - \frac{11}{50} S_1 = f(S_1) \quad (3.6.21)$$

ნახაზ 3.6.2.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა.

შემთხვევა I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,1} = 160$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$.

ასეთ შემთხვევაში (3.6.21)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{137}{90} \cdot 24 - \frac{11}{50} \cdot 160 = \frac{4}{3} \quad (3.6.22)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,1}$–ის მნიშვნელობას.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = 78$–ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს მინიმალური ჰეჯი $\pi_2^*= (\beta_2^*, \gamma_2^*)$. (3.3.26),(3.3.27) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 4 - \frac{3}{5}\cdot 0}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 24} = \frac{2}{9} \tag{3.6.23}$$

$$\gamma_2^* = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_1} = \frac{0-4}{1\cdot 160} = -\frac{1}{40} \tag{3.6.24}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$. ამ პორტფელის სესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.28). (3.3.29) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_1 + \gamma_2^*\mathrm{S}_1 = \frac{2}{9}\cdot 24 - \frac{1}{40}\cdot 160 = \frac{4}{3} \tag{3.6.25}$$

$$\mathrm{X}_1^{\pi^*} = (1+\mathrm{r})^{-1}\left[p^* f_{2,2} + (1-p^*) f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot 4\right) = \frac{4}{3} \tag{3.6.26}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.6.3. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$

$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$

1. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.19) პირობა

$\Delta\beta_2^*\mathrm{B}_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,1} = 0$

სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1^*$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*$

დროის $n = 1$ მომენტში ემიტენტს აქვს $\frac{4}{3}$ –ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{1}{40}$ აქცია ანუ $\frac{1}{40}\cdot 160 = 4$ –ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{2}{9}$ ობლიგაცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს რადგან

$\frac{2}{9}\cdot 24 = \frac{16}{3} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$.

დროის $n = 2$ მომენტში (3.3.30) ფორმულის თანახმად, $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{2}{9}, -\frac{1}{40}\right)$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^*\mathrm{B}_2 + \gamma_2^* S_2 = \mathrm{f}(S_2) = \frac{2}{9}\cdot B_2 - \frac{1}{40}\cdot S_2 = f(S_2) \tag{3.6.27}$$

ნახაზ 3.6.2.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I-ის ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$ ობლიგაციის ფასია $B_2 = \frac{144}{5}$ ასეთ შემთხვევაში (3.6.27)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{40} \cdot 256 = 0 \qquad (3.6.28)$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,2} = f\left(S_{2,2}\right) = 0.$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ აქციას და მიიღებს $\frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ აქციის ვალს ანუ $\frac{1}{40} \cdot 256 = \frac{32}{5}$ – ის ტოლ თანხას. ოფციონის ვალდებულებით კი ის არაფერს არ იხდის, რადგან $f_{2,2} = 0$

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$. ასეთ შემთხვევაში (3.6.27)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} - \frac{1}{40} \cdot 96 = 4$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = f\left(S_{2,1}\right) = 4.$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{2}{9}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{2}{9} \cdot \frac{144}{5} = \frac{32}{5}$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{1}{40}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{1}{40} \cdot 96 = \frac{12}{5}$ – ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{32}{5} - \frac{12}{5} = 4$–ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,1} = 4$

შემთხვევა I I. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$.

ასეთ შემთხვევაში (3.6.21)–ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{137}{90} \cdot 24 - \frac{11}{50} \cdot 60 = \frac{70}{3} \qquad (3.6.29)$$

რაც ზუსტად ემთხვევა $P_{1,0}$–ის მნიშვნელობას.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = \frac{70}{3}$ -ის ტოლი თანხით ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი π_2^*= (β_2^*, γ_2^*). (3.3.26),(3.3.27) ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_1\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_1\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B}_0} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 64 - \frac{3}{5} \cdot 4}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = \frac{125}{36} \qquad (3.6.30)$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,1} - f_{2,0}}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S}_1} = \frac{4 - 64}{1 \cdot 60} = -1 \qquad (3.6.31)$$

ამრიგად, მივიღებთ π_2^*= $(\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{125}{36}, -1\right)$. ამ პორტფელის Sესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში (3.3.28). (3.3.29) ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_1 = \frac{125}{36} \cdot 24 - 1 \cdot 60 = \frac{70}{3} \tag{3.6.32}$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1} \left[p^* f_{2,1} + (1-p^*) f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{2}{5} \cdot 64\right) = 0 \tag{3.6.33}$$

ა მ ო ც ა ნ ა 3.6.4. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

π_1^*= $(\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(\frac{137}{90}, -\frac{11}{50}\right)$

π_2^*= $(\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{125}{36}, -1\right)$

1. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების (3.1.19) პირობა

$\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,0} = 0$

სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - \beta_1^*$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1^*$

დროის $n = 1$ მომენტში ენტს აქვს $\frac{70}{3}$–ის ტოლი თანხა. ისესხა ერთი აქცია ანუ 60–ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{125}{36}$ ობლიგაცია, რის საშუალებაც მას მართლაც აქვს, რადგან,

$\frac{125}{36} \cdot 24 = \frac{250}{3} = \frac{70}{3} + 60 = \frac{250}{3}$

დროის $n = 2$ მომენტში (3.3.30) ფორმულის თანახმად, π_2^*= $(\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(\frac{125}{36}, -1\right)$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = f(S_2) = \frac{125}{36} \cdot B_2 - S_2 = f(S_2) \tag{3.6.34}$$

ნახაზ 3.6.2.–ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა II-ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქვეშემთხვევა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$ ობლიგაციის ფასია $B_2 = \frac{144}{5}$ ასეთ შემთხვევაში (3.6.34)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} - 96 = 4 \tag{3.6.35}$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,1} = f\left(S_{2,1}\right) = 0$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} = 100$-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 96– ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი 100–96=4 თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,1} = 4$

ქვეშემთხვევა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,0} = 36$. ასეთ შემთხვევაში (3.6.34)–ის თანახმად გვექნება

$$X_2^{\pi^*} = \frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} - 36 = 64$$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას – $f_{2,0} = f\left(S_{2,0}\right) = 64$.

ემიტენტი გაყიდის $\frac{125}{36}$ ობლიგაციას და მიიღებს $\frac{125}{36} \cdot \frac{144}{5} = 100$–-ის ტოლ თანხას, ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს ერთი აქციის ვალს ანუ 36– ის ტოლ თანხას, ხოლო დარჩენილი $100 - 36 = 64$–ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,0} = f\left(S_{2,0}\right) = 64$

ამრიგად, მაგალითი 3.6.2–ის პირობებში ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტილი ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

დანართი 4

ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამული რეალიზაცია.

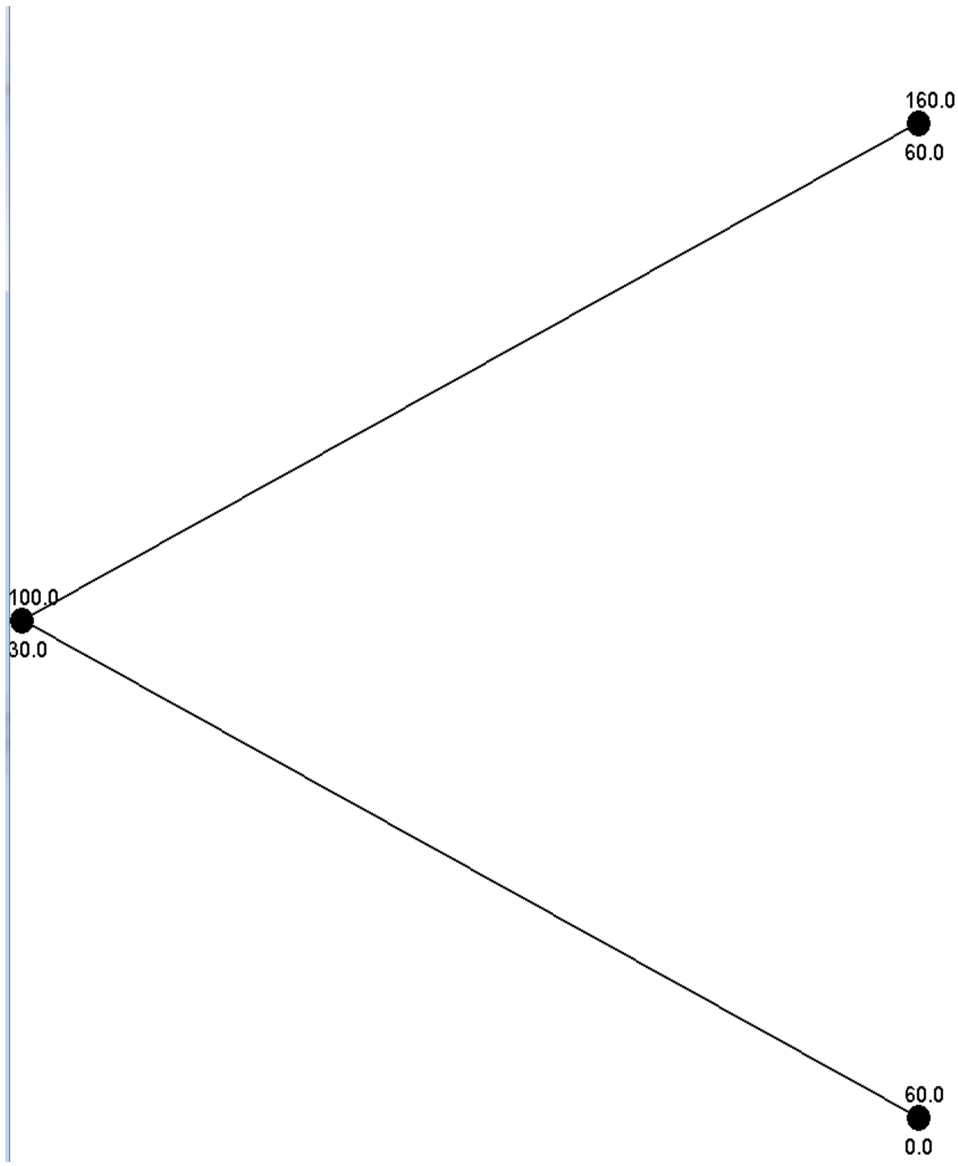
პროგრამა შესრულებულია Java დაპროგრამირების ენაზე. აღნიშნული პროგრამის შესრულების შედეგად ვიღებთ ბინომური ხის გამოსახულებას, რომელზედაც ასახულია როგორც აქციის ფასები ასევე ოფციონის ფასი.

```
/*
 * To change this template, choose Tools | Templates
 * and open the template in the editor.
 */
package firstapplet;
 import java.applet.*;
 import java.awt.*;
 import java.math.*;
/*
<applet code="EuropeanOption" width=700 height=50>
</applet>
*/
/**
 *
 * @author bmeladze
 */
public class EuropeanOption extends Applet{
    int m_height, m_width;
    int N, i, j, k, cxz, cyz, cxq, cyq;
    double y0, y1, y2;
    double x0, x1, x2;
    double  k1, k2, lx, tx, ty;
    double xz[], yz[], xq[], yq[];
  public void paint(Graphics m) {
m.setColor(Color.black);
N=4;
y0=500;
x0=10;
y2=900;
x2=800;
y1=100;
x1=800;
k1=(y1-y0)/(x1-x0);
k2=(y2-y0)/(x2-x0);
```

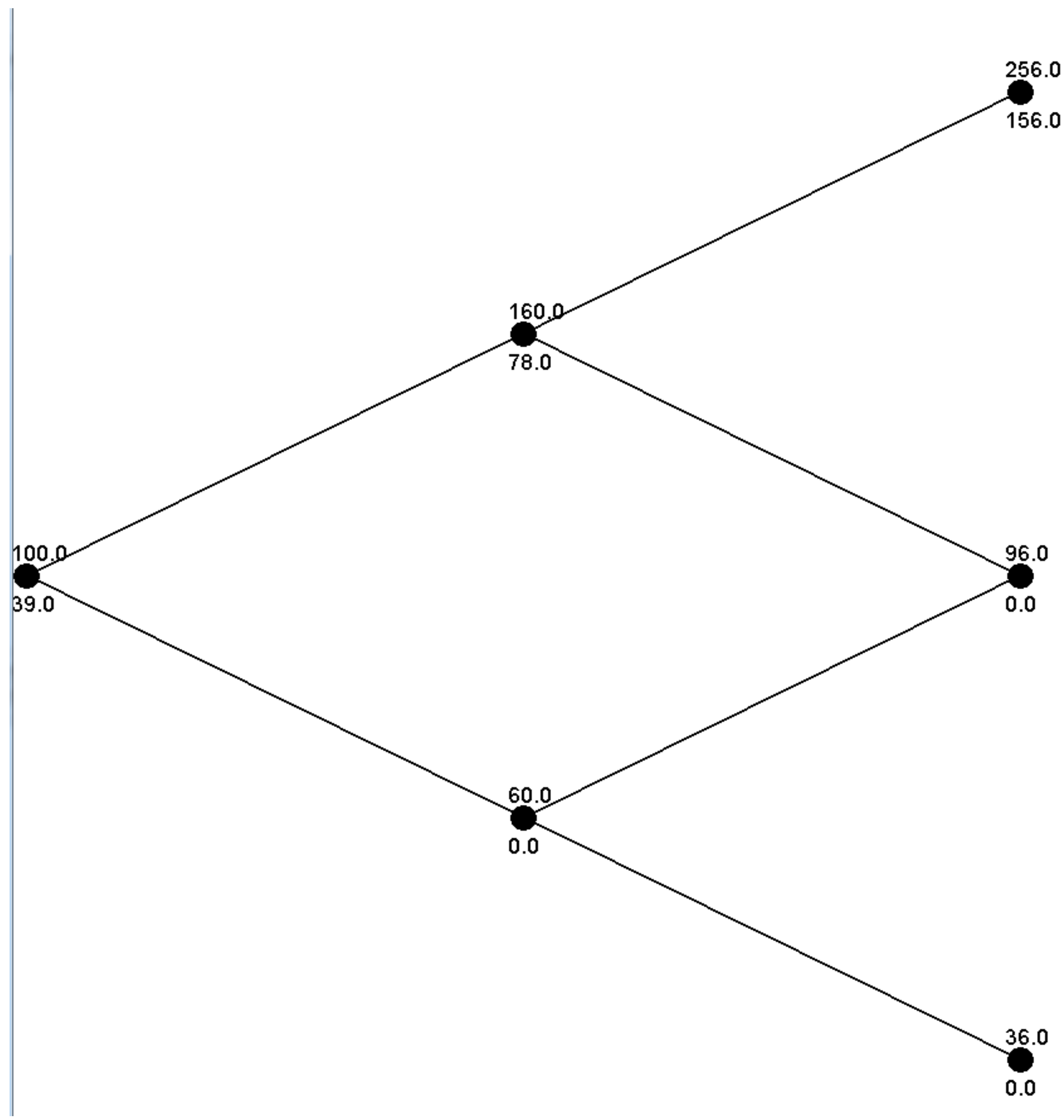
```
lx=x1-x0;
tx=lx/N;
ty=(y2-y1)/N;
xz = new double[N+1];
yz = new double[N+1];
xq = new double[N+1];
yq = new double[N+1];
Font font = new Font("Arial", Font.PLAIN, 18);
m.setFont(font);
double B0, S0, r;
double a, b, kk;
B0=20;
S0=100;
r=0.2;
a=-0.4;
b=0.6;
kk=100;
double p, CN;
double s[][]=new double[N+1][N+1];
double c[][]=new double[N+1][N+1];
double f[][]=new double[N+1][N+1];
p=(r-a)/(b-a);
//---------აქციის და ოფციონების ფასების დათვლა-------------------
for (i=0; i<N+1; i++){
for(k=1;  k<i+2; k++) {
s[i][i-k+1]=S0*Math.pow((1+b),i-k+1)*Math.pow((1+a),k-1);
if(i==N)
{
c[i][i-k+1]=Math.max(s[i][i-k+1]-kk,0.00);
}
}
}
for (i=N-1; i>0; i--){
   for(k=1;  k<i+2; k++) {
c[i][i-k+1]=Math.pow(1+r, -1)*(p*c[i+1][i-k+2]+(1-p)*c[i+1][i-k+1]);
   }
}
c[0][0]=Math.pow(1+r, -1)*(p*c[1][1]+(1-p)*c[1][0]);
for (i=0; i<N+1; i++){
xz[i]=x0+tx*i;
yz[i]=y0+k1*(xz[i]-x0);
cxz= (int) xz[i];
```

```
cyz= (int) yz[i];
m.drawLine(cxz, cyz,(int) x1, (int) (y2-ty*i));
m.drawLine(cxz, cyz-1,(int) x1, (int) (y2-ty*i)-1);
xq[i]=x0+tx*i;
yq[i]=y0+k2*(xq[i]-x0);
cxq= (int) xq[i];
cyq= (int) yq[i];
m.drawLine(cxq, cyq,(int) x1, (int) (y1+ty*i));
m.drawLine(cxq, cyq-1,(int) x1, (int) (y1+ty*i)-1);
for (j=0; j<N; j++) {

if (cxz+2*j*tx<x1+1) {
m.drawOval((int) (cxz+2*j*tx-10), cyz-10, 20, 20);
m.fillOval((int) (cxz+2*j*tx-10), cyz-10, 20, 20);
m.drawOval((int) (cxq+2*j*tx-10), cyq-10, 20, 20);
m.fillOval((int) (cxq+2*j*tx-10), cyq-10, 20, 20);
}
}
for(k=1;  k<i+2; k++) {
m.drawString(Double.toString(Math.round(s[i][i-k+1])), (int) (cxq-12),(int)  (cyz+(k-1)*ty-12));
m.drawString(Double.toString(Math.round(c[i][i-k+1])), (int) (cxq-12),(int)  (cyz+(k-1)*ty+30));
}
}
}
public void init() {
m_width = getSize().width;
m_height = getSize().height;
this.setSize(1200, 1000);
 //setBackground(Color.green);
}
}
```

პროგრამის რეალიზაცია N=1 (ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის) შემთხვევაში



პროგრამის რეალიზაცია N=2 (ორნაბიჯიანი ბინომური ხის) შემთხვევაში


256.0
156.0
160.0
78.0
100.0
39.0
96.0
0.0
60.0
0.0
36.0
0.0

დანართი 5

ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანის პროგრამული რეალიზაცია.

პროგრამა შესრულებულია Java დაპროგრამირების ენაზე. აღნიშნული პროგრამის შესრულების შედეგად ვიღებთ ბინომური ხის გამოსახულებას, რომელზედაც ასახულია როგორც აქციის ფასები ასევე ოფციონის ფასები. აღნიშნული პროგრამა დამატებით ასახავს გაჩერების, შეწყვეტის და განუსაზღვრელობის არეებს

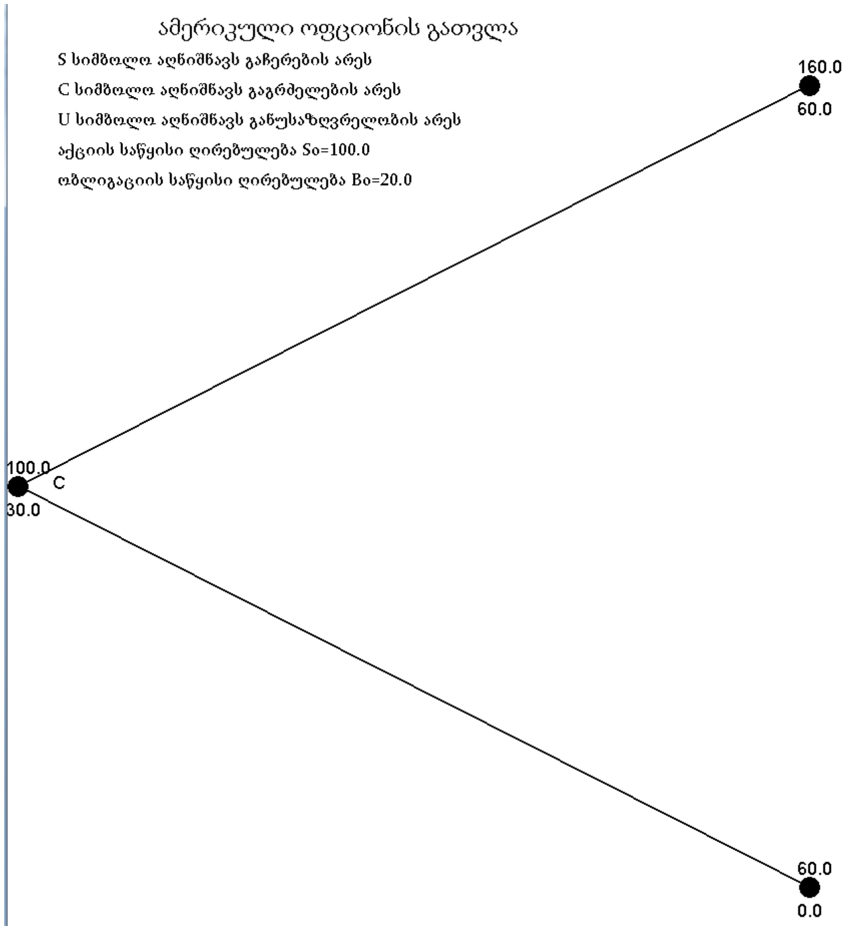
```
/*
* To change this template, choose Tools | Templates
* and open the template in the editor.
*/
package firstapplet;
import java.applet.*;
import java.awt.*;
import java.math.*;
/*
<applet code="EuropeanOption" width=700 height=50>
</applet>
*/
/**
*
* @author bmeladze
*/
public class AmericanOption extends Applet{
   int m_height, m_width;
   int N, i, j, k, cxz, cyz, cxq, cyq;
   double y0, y1, y2;
   double x0, x1, x2;
   double  k1, k2, lx, tx, ty;
   double xz[], yz[], xq[], yq[];
   double B0, S0, r, a, b, kk, p, CN;
   public void paint(Graphics m) {
m.setColor(Color.black);
N=2;
y0=500;
x0=10;
y2=900;
x2=800;
y1=100;
x1=800;
k1=(y1-y0)/(x1-x0);
```

```
k2=(y2-y0)/(x2-x0);
lx=x1-x0;
tx=lx/N;
ty=(y2-y1)/N;
double s[][]=new double[N+1][N+1];
double c[][]=new double[N+1][N+1];
double f[][]=new double[N+1][N+1];
double P[][]=new double[N+1][N+1];
xz = new double[N+1];
yz = new double[N+1];
xq = new double[N+1];
yq = new double[N+1];
B0=20;
S0=100;
r=0.2;
a=-0.4;
b=0.6;
kk=100;  //Shetanxmebis fasi
p=(r-a)/(b-a);
Font font = new Font("Sylfaen", Font.PLAIN, 25);
m.setFont(font);
m.drawString("ამერიკული ოფციონის გათვლა", (int) (150),(int)  (50));
Font font2 = new Font("Sylfaen", Font.PLAIN, 18);
m.setFont(font2);
m.drawString("S სიმბოლო აღნიშნავს გაჩერების არეს", (int) (50),(int)  (80));
m.drawString("C სიმბოლო აღნიშნავს გაგრძელების არეს", (int) (50),(int)  (110));
m.drawString("U სიმბოლო აღნიშნავს განუსაზღვრელობის არეს", (int) (50),(int)  (140));
m.drawString("აქციის საწყისი ღირებულება So="+Double.toString(S0), (int) (50),(int)  (170));
m.drawString("ობლიგაციის საწყისი ღირებულება Bo="+Double.toString(B0), (int) (50),(int)
(200));
Font font1 = new Font("Arial", Font.PLAIN, 18);
m.setFont(font1);
//------------aqciis da obligaciis maxasiatebeli cvladebi------------------
//double B0, S0, r, double a, b, kk;
//double a, b, kk;
//---------aqciis da ofcionis fasebis datvla-------------------
for (i=0; i<N+1; i++){
for(k=1;  k<i+2; k++) {
s[i][i-k+1]=S0*Math.pow((1+b),i-k+1)*Math.pow((1+a),k-1);
f[i][i-k+1]=Math.max(s[i][i-k+1]-kk,0.00);
if(i==N)
{
```

```
//drois N momentshi gadaxdis funqciis mniShvnelobebis datvla
//c[i][i-k+1]=Math.max(s[i][i-k+1]-kk,0.00);
P[i][i-k+1]=Math.max(s[i][i-k+1]-kk,0.00);
}
}
}

for (i=N-1; i>0; i--){
   for(k=1;  k<i+2; k++) {

//c[i][i-k+1]=Math.pow(1+r, -1)*(p*c[i+1][i-k+2]+(1-p)*c[i+1][i-k+1]);
 P[i][i-k+1]=Math.max(f[i][i-k+1], Math.pow(1+r, -1)*(p*P[i+1][i-k+2]+(1-p)*P[i+1][i-k+1]));
   }
}
P[0][0]=Math.pow(1+r, -1)*(p*P[1][1]+(1-p)*P[1][0]);
// zeda sazgvris daxazva
for (i=0; i<N+1; i++){
xz[i]=x0+tx*i;
yz[i]=y0+k1*(xz[i]-x0);
cxz= (int) xz[i];
cyz= (int) yz[i];
m.drawLine(cxz, cyz,(int) x1, (int) (y2-ty*i));
m.drawLine(cxz, cyz-1,(int) x1, (int) (y2-ty*i)-1);
xq[i]=x0+tx*i;
yq[i]=y0+k2*(xq[i]-x0);
cxq= (int) xq[i];
cyq= (int) yq[i];
m.drawLine(cxq, cyq,(int) x1, (int) (y1+ty*i));
m.drawLine(cxq, cyq-1,(int) x1, (int) (y1+ty*i)-1);
for (j=0; j<N; j++) {
if (cxz+2*j*tx<x1+1) {
```

```
m.drawOval((int) (cxz+2*j*tx-10), cyz-10, 20, 20);
m.fillOval((int) (cxz+2*j*tx-10), cyz-10, 20, 20);
m.drawOval((int) (cxq+2*j*tx-10), cyq-10, 20, 20);
m.fillOval((int) (cxq+2*j*tx-10), cyq-10, 20, 20);
}}
for(k=1;  k<i+2; k++) {
m.drawString(Double.toString(Math.round(s[i][i-k+1])), (int) (cxq-12),(int)  (cyz+(k-1)*ty-12));
//m.drawString(Double.toString(Math.round(c[i][i-k+1])), (int) (cxq-12),(int)  (cyz+(k-1)*ty+30));
m.drawString(Double.toString(Math.round(P[i][i-k+1])), (int) (cxq-12),(int)  (cyz+(k-1)*ty+30));
if (i<N) {
if (f[i][i-k+1]<Math.pow(1+r, -1)*(p*P[i+1][i-k+2]+(1-p)*P[i+1][i-k+1])) {
m.drawString("C", (int) (cxq+35),(int) (cyz+(k-1)*ty+3));
}
if (f[i][i-k+1]>Math.pow(1+r, -1)*(p*P[i+1][i-k+2]+(1-p)*P[i+1][i-k+1])) {
m.drawString("S", (int) (cxq+35),(int) (cyz+(k-1)*ty+3));
}
if (f[i][i-k+1]==Math.pow(1+r, -1)*(p*P[i+1][i-k+2]+(1-p)*P[i+1][i-k+1])) {
m.drawString("U", (int) (cxq+35),(int) (cyz+(k-1)*ty+3));
}
}}}}
public void init() {
m_width = getSize().width;
m_height = getSize().height;
this.setSize(1200, 1000);
//setBackground(Color.green);
}
// T ოპერატორის განსაზღვრა
double T(double Sn) {
   double Snx;
  Snx=Math.pow(1+r, -1)*(p*Math.max(Sn*(1+b)-kk,0.00)+(1-p)*Math.max(Sn*(1+a)-kk,0.00));
   return Snx;
}
}
```

პროგრამის რეალიზაცია N=1 (ერთნაბიჯიანი ბინომური ხის) შემთხვევაში



პროგრამის რეალიზაცია N=2 (ორნაბიჯიანი ბინომური ხის) შემთხვევაში