საქართველოს საპატრიარქოს წმ. ანდრია პირველწოდებულის სახელობის
ქართული უნივერსიტეტი

ინფორმატიკის, მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ბექარ მელაძე

ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელირება

ინფორმატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად
წარმოდგენილი ნაშრომის

სადისერტაციო მაცნე

ინფორმატიკა - 0401

თბილისი
2013

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის ინფორმატიკის, მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტზე.

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: **ბესარიონ დოჭვირი-** ფიზიკა-მათემატიკი ს მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი.

პეტრე ბაბილუა-ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი.

ოფიციალური რეცენზენტები:

ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. **თემურ ჩილაჩავა**
ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. **გურამ ცერცვაძე**
ფიზიკა - მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფ. **გრიგოლ სოხაძე**

დისერტაციის დაცვა შედგება 2013 წლის „15“ აპრილს, 16 საათზე, საქართველოს საპარტიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის ინფორმატიკის, მათემატიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა სადისერტაციო კომისიის სხდომაზე.

მისამართი: 0162, თბილისი, ილია ჭავჭავაძის №53ა. მეორე კორპუსი, აუდიტორია № 104.
დისერტაციის გაცნობა შეიძლება საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში

სადისერტაციო მაცნე დაიგზავნა 2013 წლის „13“ მარტს

სადისერტაციო საბჭოს სწავლული
მდივანი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი, პროფ. /თ. თევზაძე/

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

კვლევითი თემის აქტუალობა

თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. შევნიშნავთ, რომ ანალოგიურ რისკებთან არის დაკავშირებული სადაზღვევო საქმე, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას შეისწავლის სადაზღვეო ანუ აქტუარული მათემატიკა. ფინანსურ და სადაზღვეო ინსტიტუტებს მჭიდრო კავშირი აქვთ საბანკო სისტემასთან და სწორედ მათი ერთობლივი საქმიანობა განაპირობებს საბაზრო ეკონომიკის ნორმალურ ფუნქციონირებას.

გამოკვლევები სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის თეორიული და პრაქტიკული მიმართულებებით დღესაც ინტენსიურად მიმდინარეობს მსოფლიოს წამყვან სამეცნიერო ცენტრებსა და უნივერსიტეტებში.

ნაშრომის მიზანია

დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური ნაკადების (პროცესების) აღმწერი მათემატიკური მოდელების აგება და შესწავლა. კერძოდ, მარტივი და რთული პროცენტების დროითი სტრუქტურის დადგენა, პოპულარული წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასდადების ამოცანის გადაწყვეტა, შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამების შედგენა. მოტანილი მიზნის მისაღწევად გამოყენებულია ალბათურ–სტატისტიკურიდა ფინანსური მათემატიკის მეთოდები, რომელიც დაკავშირებულია შესასწავლი ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელების ანალიზთან.

დაცვაზე გამოტანილი ძირითადი შედეგები

1) დისკრეტული ფინანსური ნაკადებისათვის შესწავლილია აქტუალიზაციის, კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონები. შექმნილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამები.

2) შესწავლილია ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესების ოპტიმალური გაჩერების პრობლემატიკა სასრულ დროით ინტერვალზე, როდესაც პროცესზე დაკვირვება გარკვეულ გადასახადთან არის დაკავშირებული. მიღებულია ფასისა და ოპტიმალური გაჩერების

მომენტების ცხადი გამოსახულებები.
3) $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ ალბათურ სივრცეზე განხილულია ორი აქტივისაგან – ობლიგაციისაგან და აქციისაგან შემდგარი ფინანსური (B, S) ბაზარი. აღნიშნული აქტივების დროში ევოლუციის აღმწერი სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით შესწავლილია ამერიკული ოფციონის ფასდადების ზოგიერთი საკითხი და შესაბამისი ოპტიმალური გაჩერების ფასის ფუნქციის თვისებები.
4) ორაქტივიანი ფინანსური (B, S) ბაზრის კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელისათვის განხილულია ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანა არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისათვის. ამოცანათა ამ კლასისათვის განსაზღვრულია ოფციონის სამართლიანი ფასი, მინიმალური ჰეჯი და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი.

მეცნიერული სიახლე

1) შექმნილია ფინანსური კანონები სკომპიუტერული პროგრამები და ამოხსნილია რიცხვითი მაგალითები.
2) სასრულ დროით ინტერვალზე არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანისათვის და შესაბამისი ფასის ფუნქციისათვის აგებულია შესაბამისი ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესი და ნაჩვენებია, რომ ამ ორი პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანების შესაბამისი ფასები ერთმანეთს ემხვევა. მიღებულია აგრეთვე ფასის ექსცესიური დახასიათება და ნაპოვნია ε–ოპტიმალური (ოპტიმალური) გაჩერების მომენტების ცხადი სახე.
3) დადგენილია ამერიკული ოფციონის ფასის ფუნქციის თვისებები. სამართლიანი ფასის ფუნქცია, როგორც ოპტიმალური გაჩერების ამოცანის ამონახსნი, წარმოდგენილია კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსენის სახით.
4) ართვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასის შემოტანა ორაქტივიანი ფინანსური (B, S) ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელისათვის ევროპული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში, ამ კლასის ამოცანებისათვის ოფციონის სამართლიანი ფასის, მინიმალური ჰეჯის და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

თეორიული დაპრაქტიკული მნიშვნელობა

დისერტაციაში შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელები და

კომპიუტერული პროგრამები ფინანსურ მათემატიკაში ახალი და საინტერესოა თეორიული და პრაქტიკული თვალსაზრისით. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნას როგორც საბანკო ოპერაციებში, აგრეთვე ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად აქციებით და ობლიგაციებით ვაჭრობის ოპერაციებში.

კვლევის მეთოდები

ნაშრომში დასმული ამოცანების გადაწყვეტისათვის გამოყენებულ იქნა მათემატიკური მოდელების აგების პრინციპები და მეთოდები და ასევე თანამედროვე სტოქასტური ანალიზის მეთოდები. სადისერტაციო ნაშრომში გამოკვლეულია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა. კერძოდ შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების ყოფაქცევა დროში და აგებულია სათანადო მათემატიკური მოდელები. დისკრეტული და უწყვეტი ფინანსური ნაკადების (პროცესების) შემთხვევაში შესწავლილია წარმოებული ფასიანი ქაღალდის – ევროპული და ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მეთოდების გამოყენებით. კერძოდ, ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანაში გამოყენებულია შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები. მოტანილია საილუ-სტრაციო რიცხვითი მაგალითები და აგებულია სათანადო კომპიუტერული პროგრამები.

საიმედობა და საფუძვლიანობა

მიღებული შედეგების საიმედობა და საფუძვლიანობა განპირობებულია კარგად აპრობირებული ფინანსური მათემატიკისა და შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების მათემატიკური თეორიის მეთოდების გამოყენებით.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსენიებულლია შემდეგ სამეცნიერო კონფერენციებზე:

1. საქართველოს მათემატიკოსთა მეხუთე ყრილობა, ბათუმი/ქუთაისი, 9-12 ოქტომბერი, 2009;
2. Stochastic Analysis and Random Dynamics , International Conference, Lvov, Ukraine, 2009
3. საერთაშორისო კონფერენცია: ”ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები”, თბილისი, 2010;

4. The International Scientific Conference: “Information and Computer Technologies, Modeling, Control”, Tbilisi, 2010.
5. The third international conference: Problems of Cybernetics and Informatics, Baku 2010.

მოხსენებები გაკეთებულია აგრეთვე საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის სამეცნიერო სემინარებზე:

1. ”ინფორმაციული ტექნოლოგიები და კომპიუტერული მოდელირება” (თბილისი, 19 დეკემბერი 2012 წელი).
2. ”ინფორმაციული ტექნოლოგიები და კომპიუტერული მოდელირება” (თბილისი, 9 ივლისი 2012 წელი).

ავტორის პუბლიკაციები დისერტაციის თემაზე

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ ნაშრომებსა და თეზისებში:

შრომები

- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping for time-dependent gain function, Theory of Stochastic Processes, Vol. 15. N 2, 2009, Kyiv, pp 54-61;
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the construction of a homogeneous standard Markov process, PCI, Vol. II, Baku, 2010, p. 263-265
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment Process, Computer Science, Technology and Applications, New York, 2012, p.p. 519-523.
- *P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the pricing of American option, Промлемы управления безопасностью сложных систем, XVIII, Москва, 2010, 155-159.*
- *პ. ბაბილუა, ბ. დოჭვირი, თ. დოჭვირი, ბ.მელაძე, ფინანსური პროცესების მათემატიკური მოდელირების შესახებ, ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია, შრომები, ტ. 2, 2012. გვ. 16-24.*

თეზისები

- ბ. დოჭვირი, გ. ლომინაშვილი, ბ. მელაძე, ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება, საქართველოს მათემატიკოსთა V ყრილობა. ბათუმი/ქუთაისი, თეზისები, 2009, გვ. 125.

- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping of homogeneous Markov process with finite lifetime, Modern Stochastics: theory and applications II, Abstracts, Kiev, 2010, p.47-48
- პ. ბაბილუა, ბ. მელაძე, მ ფაცაცია, ამერიკული გაყიდვის ოფციონის ფასდადების მოდელირება, ინფორმაციული და გამოთვლითი ტექნოლოგიები, თეზისების კრებული, თბილისი 2010, 13–16.
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze,The American Option and Modeling of Investment Process, The International Scientific Conference "Information and computer Technologies, Modeling, Control", Tbilisi, 2010, Book of abstracts, p. 201.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა

დისერტაცია შედგება შესავალის, სამი თავის, დასკვნის, გამოყენებული ლიტერატურის სიისა და 5 დანართისაგან. ძირითადი ტექსტი (შესავალი, სამი თავი, დასკვნა) გადმოცემულია 120 გვერდზე. გამოყენებული ლიტერატურის სია მოიცავს 36 დასახელებას.

ნაშრომის მოკლე შინაარსი

შესავალში განხილულია კვლევითი თემის აქტუალობა და მნიშვნელობა; დასმულია კვლევის მიზნები და ამოცანები; მოკლედ აღწერილია მიღებული შედეგები; მოყვანილია შესაბამისი ლიტერატურის მიმოხილვა

თავიI. დეტერმინისტული ფინანსური ნაკადების მათემატიკური მოდელირება

პირველი თავი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან.

§1. შესავალი ფინანსურ მათემატიკაში

ამ პარაგრაფში მოყვანილია საბანკო ანგარიშის დროითი სტრუქტურა მარტივი და რთული პროცენტის გამოყენებით. კერძოდ მარტივი პროცენტით დარიცხვის შემთხვევაში თანხის ევოლუცია (ტრაექტორია) მოიცემა შემდეგი რეკურენტული ტოლობით.

$$B_n = B_0(1 + r \cdot n) \tag{1}$$

სადაც B_0 საბანკო ანგარიშზე შეტანილი საწყისი თანხაა, r არის მარტივი საპროცენტო განაკვეთი, $n > 0$ დროის გარკვეული მომენტია, ხოლო B_n არის

დროის n მომენტში თანხის რაოდენობა. რთული პროცენტით დარიცხვის შემთხვევაში თანხის ევოლუცია მოიცემა შემდეგი ტოლობით.

$$B_n = B_0(1+r)^n \tag{2}$$

თუ დარიცხვა ხდება წელიწადში m −ჯერ $r(m)$ წლიური რთული საპროცენტო განაკვეთით, მაშინ ტოლობას აქვს შემდეგი სახე

$$B_n(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{n\cdot m}. \tag{3}$$

პრაქტიკაში უწყვეტ დარიცხვაში იგულისხმება ყოველდღიური დარიცხვა. ასეთ შემთხვევაში

$$B_n(m) = B_0 \cdot e^{r\cdot n} \tag{4}$$

სადაც e არის კარგად ცნობილი ნეპერის რიცხვი $e \approx 2.7182$.

განხილულია აგრეთვე საილუსტრაციო მაგალითები, ცხრილები, ობლიგაციის (ბონის), აქციების განმარტებები და ზოგიერთი თვისება.

§2. ფინანსური ნაკადები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია პირველი რიგის ფინანსური (ფულადი) ნაკადის განმარტება

$$CF = \{(t_1, C_1), \dots, (t_n, C_n)\}, \tag{5}$$

სადაც (t_i, C_i) აღნიშნავს დროის t_i მომენტში არსებულ C_i თანხას, $i = 1, \dots n$. განხილულია ნაკადის რიცხვზე გამრავლების და ორი ნაკადის შეკრე-ბის ოპერაციები. შემოტანილია აგრეთვე მეორე რიგის (ინტერვალური ნაკადი)

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), \dots, (J_n, C_n)\}, \tag{6}$$

სადაც $J_i = [t_{i-1},\ t_i)$ $i = ,1, \dots, n$; ამ ნაკადებისათვის განმარტებულია აქტუალიზაციის ორი ოპერაცია: ავანსირება $\mathrm{Adv}(\overline{CF})$ და ფინალიზაცია $\mathrm{Fin}(\overline{CF})$.გარდა ამისა რენტის p −ჯერ დაყოფის $D^{(p)}$ ოპერაციისშემთხვევაში ნაჩვენებია შემდეგი თვისებების სამართლიანობა

$$\mathrm{Adv}\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}(\mathrm{Adv}\,(\overline{CF})) \tag{7}$$

$$\mathrm{Fin}\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}(\mathrm{Fin}\,(\overline{CF})) \tag{8}$$

მოტანილია აგრეთვე საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

§3. ფინანსური ოპერაციები და სქემები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია დროის p მომენტისათვის ორი ფინანსური კანონი: კაპიტალიზაციის და დისკონტირების ფინანსური კანონი:

$$FV_p(t, C) = A(t, p;\ C)p \geq t, \tag{9}$$

$$D(t, p;\ C) = PV_p(t, C), p \leq t, \tag{10}$$

მოტანილია აგრეთვე ფინანსური გარიგების ზოგიერთი ძირითადი წესი და საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

§4. მარტივი პროცენტი

ამ პარაგრაფში განხილულია ფინანსური ოპერაციების ერთ–ერთი ძირითადი სახეობა – საკრედიტო გარიგება და მასთან დაკავშირებული მარტივი პროცენტისა და ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთის საკითხები. აქვე განმარტებულია საკრედიტო გარიგების ძირითადი დროითი და ფულადი (ფინანსური) პარამეტრები, მოტანილია სათანადო საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითები.

თავი II.ოპტიმალური გაჩერება და ამერიკული ოფციონის ფასდადება

მეორე თავი შედგება სამი პარაგრაფისაგან.

§1. ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება

ამ პარაგრაფში განხილულია ერთგვაროვანი $X = (X_t)$, $0 \leq t \leq T$, მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა ფასით

$$s(T, x) = \sup_{\tau \leq T} E_x \left[g(X_\tau) *\ I_{(\tau \leq T)} + \varliminf_{t \uparrow T} g(X_t) * I_{(\tau = T)} \right], \tag{11}$$

სადაც მოგების $g(x)$ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$g(\mathrm{X_t}) = f(\mathrm{X_t}) - \int_0^t c(\mathrm{X_s}) ds. \tag{12}$$

ფაზური სივრცისა და ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცის გაფართოების გამოყენებით აგებულია X–ის ეკვივალენტური ერთგვაროვანი $Y' = Y'_t$ მარკოვის პროცესი (თეორემა 1.1) და ნაჩვენებია, რომ ამ ორი პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ფასები ერთმანეთს ემთხვევა (თეორემა 1.2):

$$s'(T, x') = s(T-t, x), \quad t < T, \tag{13}$$

სადაც $x' = (s, x)$.

§2. არაერთგვაროვანი მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერება

ამ პარაგრაფში განხილულია არაერთგვაროვანი $X = (X_t), \quad 0 \leq t \leq T$, მარკოვის პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანა ფასით

$$v(s, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{s,x}\, g(\tau, X_\tau) \tag{14}$$

სადაც მოგების ფუნქცია

$$g(t, X_t) = f(t, X_t) - \int_0^t c(s, X_s) ds, \tag{15}$$

აგებულია X–ის შესაბამისი ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესი X' (ლემა 2.1) და ნაჩვენებია, რომ ამ ორი პროცესის ოპტიმალური გაჩერების ამოცანების შესაბამისი ფასები ერთმანეთს ემთხვევა (ლემა 2.2):

$$v(s, x) = v'(s, x), \tag{16}$$

მოტანილია აგრეთვე $v(s, x)$ ფასის ექსცესიური დახასიათება (თეორემა 2.1) და ნაპოვნია ε–ოპტიმალური გაჩერების მომენტების ცხადი სახე (თეორემა 2.2).

§3. ამერიკული ოფციონის ფასდადება

ამ პარაგრაფში მარკოვის პროცესების ოპტიმალური გაჩერების ამოცანანაში მიღებული შედეგები გამოყენებულია ამერიკული ტიპის ოფციონის სამართლიანი ფასის დადგენის ამოცანაში. კერძოდ განხილულია ფინანსური (B, S) ბაზრის ბლეკ–შოულსის მოდელი

$$dB_t = r \cdot B_t \cdot dt, \tag{17}$$

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma S_t dt \cdot S_t \cdot dW_t, \tag{18}$$

და ამერიკული ტიპის ოფციონის გადახდის ფუნქცია

$$f_t = \max_{u \leq t} S_u - S_t. \tag{19}$$

ოფციონის სამართლიანი ფასი მოიძებნება როგორც გარკვეული ოპტიმალური გაჩერების ამოცანის ამონახსნი (ლემა 3.1) და მიღებულია ოპტიმალური გაჩერების მომენტის (ლემა 3.2) და აგრეთვე ოპტიმალური

საზღვრის გამოსახულებები (თეორემა 3.1). ანალოგიური საკითხები შესწავლილია აგრეთვე ფინანსური (B,S) ბაზრის ზოგადი დიფუზიური მოდელის შემთხვევაში. განხილულია აგრეთვე ფინანსური (B,S) ბაზრის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი

$$B_n = (1+r)B_{n-1}\, B_0 > 0 \tag{20}$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}S_0 > 0 \tag{21}$$

ამერიკული ტიპის $f = f_{(x)}$გადახდის ფუნქციისათვის კაპიტალის პროცესი ჩაწერილია გარკვეული T ოპერატორის საშუალებით (ლემა 3.3) და ოფციონის სამართლიანი ფასისათვის მიღებულია რეკურენტული განტოლება (ლემა 3.4). გარდა ამისა T ოპერატორის გამოყენებით დადგენილია ოფციონის „განაღდების", „არ განაღდების" და „განურჩევლობის" არეები (თეორემა 3.3). მოტანილია აგრეთვე სამართლიანი ფასის გამოსათვლელი რეკურენტული მოდელი არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიებისათვის და რიცხვითი მაგალითები.

თავი III. სტოქასტური ფინანსური ნაკადების მათემატიკური მოდელირება

მესამე თავი შედგება 4 პარაგრაფისაგან.

§1. ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების მოდელირება

ამ პარაგრაფში განხილულია ორაქტივიანი ფინანსური (B,S) ბაზრის კარგად ცნობილი კოქსის, როსის და რუბინშტეინის დისკრეტული ბინომური მოდელი, რომელიც ობლიგაციებისა და აქციის ფასებს აღწერს დროში და (20), (21) რეკურენტული განტოლებებით არის განმარტებული. ამ განტოლებებში $r > 0$ არის რთული საპროცენტო განაკვეთი, ხოლო $\rho = \rho_n$ არის დამოუკიდებლად და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $n = 0,1 \dots N$. ამასთან, ყოველი ρ_n–ის განაწილების კანონია

ρ_n	b	a
$P(\rho_n)$	P	$1-P$

$n = 0,1 \dots N$

სადაც იგულისხმება, რომ $-1 < a < r < b$. ინვესტორის საწყისი $X_0 = x$ კაპიტალის საშუალებით იგება აქტივების პორტფელი (სტრატეგია) $\pi_n =$

(β_n, γ_n) სადაც β_n და γ_n დროის n მომენტში შესაბამისად ობლიგაციებისა და აქციების რაოდენობებია. ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალის პროცესი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X_n^\pi = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} \qquad (22)$$

განხილულია თვითდაფინანსებადი სტრატეგიების მათემატიკური გამოსახულება

$$\Delta\beta_n B_n + \Delta\gamma_n S_n = 0 \qquad (23)$$

ასევე განმარტებულია ჰეჯი და მინიმალური ჰეჯი. შემოტანილია აგრეთვე ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონები შესაბამისი გადახდის ფუნქციებით

$$f_N = f(S_N) = \max(S_N - K, 0) \qquad (24)$$

$$f_N = f(S_N) = \max(K - S_N, 0) \qquad (25)$$

გარდა ამისა განმარტებულია ოფციონის სამართლიანი ფასი

$$C_N = \min\{x > 0: \prod(x, f_N) \neq \Phi\} \qquad (26)$$

სადაც $\prod$ აღნიშნავს ყველა შესაძლო ჰეჯის ერთობლიობას.

ჩამოყალიბებულია ოფციონის ფასდადების ამოცანა, რომელიც ოფციონის სამართლიანი ფასის, მინიმალური ჰეჯისა და ამ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის განსაზღვრაში მდგომარეობს.

2. ბინომური ხეები

ამ პარაგრაფში რეკურენტული ფორმულების გამოყენებით აგებულია ე.წ. ბინომური ხეები, რომლის საშუალებითაც გამოითვლება აქციის შესაძლო ფასები, გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობები და ოფციონის სამართლიანი ფასი. თვითდაფინანსებადი და არათვითდაფინანსებადი სტრატეგიების ერთი კლასისათვის მოტანილია ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურა და აგრეთვე ფინანსური ბაზრის მხოლოდ საწყის პარამეტრებზე დამოკიდებული სამართლიანი ფასის ფორმულა:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^N \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N}\sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k\,(1-p^*)^{N-k} \tag{27}$$

სადაც

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)}, \quad c_1 > 0, c_2 > 0. \tag{28}$$

შევნიშნავთ, რომ როცა, $c_1 = c_2 \equiv 0$, მაშინ (27), (28) გვაძლევს ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიან ფასს თვითდაფინანსებადი სტრატეგიისათვის.

§3. მოპასუხე პორტფელის პრინციპი

ამ პარაგრაფში მიღებულია მინიმალური ჰეჯის ცხადი გამოსახულებები ე.წ. მოპასუხე პორტფელის პირობის გამოყენებით:

$$X_{n+1}^{\pi} = \beta_{n+1}B_{n+1} + \gamma_{n+1}S_{n+1} = f(S_{n+1}). \tag{29}$$

რომლის საშუალებითაც $\pi_{n+1}^{*} = (\beta_{n+1}^{*}, \gamma_{n+1}^{*})$ მინიმალური ჰეჯის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი ტოლობებით:

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\big((1+a)S_n\big) - (1+a)f\big((1+b)S_n\big)}{(1+r)(b-a)B_n}, \tag{30}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\big((1+b)S_n\big) - f\big((1+a)S_n\big)}{(b-a)S_n} \tag{31}$$

§4. ამერიკული ოფციონის ფასდადების მოდელირება

ამ პარაგრაფში განხილულია ამერიკული ოფციონის ფასდადების საკითხები. ევროპული ოფციონისგან განსხვავებით ამერიკული ოფციონის მფლობელს მისი განაღდება შეუძლია დროის $1, \dots, N$ მომენტების ნებისმიერ r შემთხვევით მომენტში. ამიტომ ოფციონის ფასდადების ამოცანებს ემატება კიდევ ერთი ამოცანა: დროის რა მომენტში უნდა გავაღდოთ ოფციონი, რომ მივიღოთ მაქსიმალური საშუალო მოგება? ამრიგად, ასეთი რაციონალური (ოპტიმალური) მომენტის და ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასის პოვნა წარმოადგენს ოპტიმალური გაჩერების ამოცანას.

ამერიკული ოფციონის სამართლიანი ფასი მოცემული $f_n = f(S_n)$ გადახდის ფუნქციისათვის ჩაიწერება ოპტიმალური გაჩერების შემდეგი ამოცანის სახით

$$C_N^A = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \qquad (32)$$

სადაც E^* აღნიშნავს $p^* = \frac{r-a}{b-a}$ ალბათური ზომით მათემატიკურ ლოდინს. დროის ისეთ τ^* მომენტს, რომლისთვისაც მიიღწევა (32) სუპრემუმი ეწოდება ამერიკული ოფციონის განაღდების რაციონალური მომენტი. იგი გამოითვლება შემდეგი ტოლობის საშუალებით:

$$\tau^* = \min\{n: f(S_n) \geq C_n^A\}, \qquad (33)$$

სადაც C_n^A არის ამერიკული ოფციონის გადახდის ფუნქციის შიგა ღირებულება (ოფციონის ფასი n მომენტში). ბინომური ხეებისა და მოპასუხე პორტფელის პრინციპის გამოყენებით მოტანილია ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლის რეკურენტული პროცედურა და ჩატარებულია ევროპული და ამერიკული ოფციონების ფასების შედარებითი ანალიზი. მოტანილია რიცხვითი მაგალითები, და აგებულია კომპიუტერული პროგრამები.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომში მიღწეულია დასახული მიზნები, გადაწყვეტილია რიგი ამოცანებისა ამერიკული და ევროპული ოფციონების ფასდადების ამოცანების მოდელირების ახალი მიმართულებით. ნაშრომში გამოკვლეულია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა. კერძოდ შესწავლილია დისკრეტული ფინანსური ნაკადების ყოფაქცევა დროში და აგებულია სათანადო მათემატიკური მოდელები. დისკრეტული და უწყვეტი ფინანსური ნაკადების (პროცესების) შემთხვევაში შესწავლილია წარმოებული ფასიანი ქაღალდის ევროპული და ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანა სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის მეთოდების გამოყენებით. კერძოდ, ამერიკული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანაში გამოყენებულია შემთხვევით პროცესთა ოპტიმალური გაჩერების თეორიის შედეგები. მოტანილია რიცხვითი მაგალითები და აგებულია სათანადო კომპიუტერული პროგრამები. ეს პროგრამები წარმოდგენილია ნაშრომის ბოლოს დანართების სახით.

Факультет информатики, математики и естественных наук.

на правах рукописи

Бекар Меладзе

Математическое моделирование финансовых процессов

Автореферат

дисертации, представленной на соискание академической степени доктора информатики - 0401

Тбилиси

2013

Диссертационная работа выполнена в Грузинском Университете им. Св. Андрея Первозванного Патриаршество Грузии, на факультете информатики, математики и естественных наук.

Научные руководители: **Бесарион Дочвири,** доктор физико-математических наук, профессор.

Петр Бабилуа-кандидат физико-математических наук

Официальные рецензенты: **Темур Чилачава,** доктор физико-математических наук, профессор.

Гурам Церцвадзе, доктор физико-математических наук, профессор

Григол Сохадзе, доктор физико-математических наук, профессор.

Защита диссертации состоится 15 апреля 2013 г. в 16 часов, на заседании диссертационной комиссии факультета информатики, математики и естественных наук, Грузинского Университета им. Св. Андрея Первозванного Патриаршества Грузии.
Адрес: 0162, г. Тбилиси, ул. Ильи Чавчавадзе д. 53а, аудитория №104.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Грузинского Университета им. Св. Андрея Первозванного Патриаршества Грузии, по адресу: 0162, г. Тбилиси, ул. Ильи Чавчавадзе д. 53[а] .

Автореферат разослан «13 » марта 2013 г

Учёный секретарь диссертационного совета
Доктор физико-математических наук, профессор Т. Тевзадзе

Общий обзор работы

Актуальность исследуемой проблемы

В современной рыночной экономике центральное место занимает денежно-кредитная политика. Главным рычагом управления данной политики является операции с ценными бумагами на финансовых рынках. Данные операции содержат определенный риск и следовательно возникает вопрос об изучении и анализа этих рисков. Надо отметить, что аналогичным рискам подвержен страховой бизнес, математическую проблематику которого изучает страховая, или актуарная математика. Финансовые и страховые институты тесно связаны с банковской системой и их совместная деятельность является основой нормального функционирования рыночной экономики.

Интенсивные исследования теории и практики стохастической финансовой математикина сегодняшний день ведутся во многих ведущих научных центрах и университетах мира.

Цель исследования

Построение и изучение математических моделей, описывающих детерминистические и стохастические финансовые потоки (процессы). В частности, установление временной структуры простых и сложных процентов, решение задачи ценообразования популярных ценных бумаг европейских и американских опционов, создание соответствующих компьютерных программ.

Для решения этих задач, были использованы вероятно-статистические методы и методы финансовой математики, которые связаны с анализом математических моделей исследуемых финансовых процессов.

Основные результаты представленные на защиту

1) Для дискретных финансовых потоков изучены законы актуализации, капитализации и дисконтирования. Созданы соответствующие компьютерные программы.

2) Изучена проблематика оптимальной остановки однородных и неоднородных процессов Маркова в конечном временном интервале, когда наблюдение за процессом связано с определенным платежом. Получена четкая картина цены и момента оптимальной остановки.

3) $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$ вероятностом пространстве рассматривается два актива – состоящий из облигаций и акций финансового (B, S) рынка. С использованием стохастических дифференциальных уравнений, описывающих эволюции во времени упомянутых активов, изучены некоторые вопросы ценообразования американских опционов и свойство функции цены соответственной оптимальной остановки.

4) Для хорошо известной дискретной биномной модели Кокса, Росса и Рубинштейна двух активного (B, S)финансового рынка рассматривается задача ценообразования европейского опциона для одного класса несамофинансированных стратегий. Для задач данного класса определена справедливая цена, минимальный хедж и соответственный процесс капитала для этого хеджа.

Научная новизна

1) Созданы компьютерные программы финансовых законов и решены численные задачи.

2) Для задачи оптимальной остановки на конечном временном интервале неоднородного процесса Маркова и функции соответствующей цены построен однородный процесс Маркова и показано, что цены задач оптимальной остановки двух этих процессов сходятся. Получена также эксцесивная характеристика цены и найден явный образ ε–оптимальных моментов остановки.

3)Установлены свойства функции цены американских опционов. Функция справедливой цены, как решение задачи оптимальной остановки, представлена в виде решения дифференциального уравнения в частных производных.

4) Внесение одного класса несамофинансированых стратегии для двух активной (B, S) биномиальной модели финансового рынка, Кокса, Росса и Рубинштейна в задаче ценообразования европейского опциона, для задач этого класса нахождение справедливой цены опциона, минимального хеджа и для этого хеджа определение соответственного процесса капитала.

Теоретическое и практическое значение

Представленные в диссертационной работе математические модели и компьютерные программы новые и представляют определённый теоретический и практический интерес в финансовой математике. Полученные результатымогут быть использованы как в банковских операциях, так и при торговле ценными бумагами на финансовых рынках, например при торговых операциях акциями и облигациями.

Методы исследования

Для решения поставленных задач были использованы принципы и методы построения математических моделей, а также современные методы стохастического анализа. В работе исследованы проблемы детерминистической и стохастической финансовой математики. В частности, исследовано поведение дискретных финансовых потоков во времени и построена соответствующая математическая модель. В условиях дискретных и непрерывных финансовых потоках (процессах) изучена задача ценообразования произведенных ценных бумаг – европейского и американского опциона с использованием стохастических математических методов. В частности, в задаче ценообразования американского опциона использованы результаты теории оптимальной остановки случайных процессов. Созданы соответствующие компьютерные программы и приведены иллюстрационные численные примеры.

Надежность и достоверность

Надежность и достоверность полученных итогов определяется использованием хорошо апробированных методов финансовой математики и математической теорией оптимальной остановки случайных процессов.

Апробация работы

Основные итоги диссертации были представлены на следующих научных конференциях:

1. Пятый съезд математиков Грузии, Батуми/Кутаиси, 9-12 октября, 2009 г.;
2. Stochastic Analysis and Random Dynamics, International Conference, Lvov, Ukraine, 2009
3. Международная конференция: «Информационные и вычислительные технологии», Тбилиси, 2010г.;

4. The International Scientific Conference: “Information and Computer Technologies, Modeling, Control”, Tbilisi, 2010.
5. The third international conference: Problems of Cybernetics and Informatics, Baku 2010.

Доклады также сделаны на семинаре Грузинского университета имени Святого Андрея Первозванного Патриаршества Грузии:

1. «Информационные технологии и компьютерное моделирование», Тбилиси, 19 декабря 2012г.;
2. «Информационные технологии и компьютерное моделирование», Тбилиси, 9 июля 2012г.

Публикации автора по теме диссертации. Основные итоги диссертации опубликованы в следующих тезисах и трудах:

Труды

- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping for time-dependent gain function, Theory of Stochastic Processes, Vol. 15. N 2, 2009, Kyiv, pp 54-61;
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the construction of a homogeneous standard Markov process, PCI, Vol. II, Baku, 2010, p. 263-265
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, The American Option and Modeling of Investment Process, Computer Science, Technology And Applications, New York, 2012, p.p. 519-523.
- *P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On the pricing of American option, Промлемы управления безопасностью сложных систем, XVIII, Москва, 2010, 155-159.*
- *П. Бабилуа, Б. Дочвири, Т. Дочвири, Б. Меладзе, Оматематических моделях финансовых процессов, Цхум-Абхазскаяакадемиянаук, труды, т.2, 2012, стр. 16-24.*

Тезисы

- Б. Дочвири, Г. Ломинашвили, Б. Меладзе, Моделирование ценообразования американского опциона, Пятый съезд математиков Грузии, Батуми/Кутаиси, 9-12 октября, 2009 г. стр. 125;
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze, On optimal stopping of homogeneous Markov process with finite lifetime, Modern Stochastics: theory and applications II, Abstracts, Kiev, 2010, p.47-48
- П. Бабилуа, Б. Меладзе, М. Пацация, Моделирование ценообразования американского опциона, Информационные и вычислительные технологии, сборник тезисов, Тбилиси, 2010 г. 13-16;
- P.Babilua, B. Dochviri, B. Meladze,The American Option and Modeling of Investment Process, The International Scientific Conference "Information and computer Technologies, Modeling, Control", Tbilisi, 2010, Book of abstracts, p. 201.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и 5 приложений. Основной текст (введение, три главы, заключение) занимают 120 страниц. Список использованной литературы содержит 36 наименований.

Краткое содержание работы

Введение

Рассмотрены актуальность и значение исследуемой проблемы; поставлены цели и задачи исследования. В ведении также приводится обзор соответствующий литературы.

Глава I. Математическое моделирование детерминистических финансовых потоков

Первая глава состоит из четырех параграфов.

§ 1. Введение в финансовую математику

В данном параграфе приведена временная структура банковского счета при использовании сложных и простых процентов. В частности, при начислении простым процентом эволюция (траектория) суммы дана следующим рекуррентным равенством:

$$B_n = B_0(1 + r \cdot n) \tag{1}$$

где B_0 начальная сумма внесенная на банковский счет, r простая процентная ставка, $n > 0$ определенный момент времени, а B_n количество денег в момент времени n . При начислении сложным процентом эволюция суммы дана следующим равенством:

$$B_n = B_0(1 + r)^n \tag{2}$$

Если начисление происходит в год m −раз и $r(m)$ годовая сложная процентная ставка, тогда равенство имеет следующий вид:

$$B_n(m) = B_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{n \cdot m}. \tag{3}$$

На практике в непрерывном начислении подразумевается ежедневное начисление. В таком случае

$$B_n(m) = B_0 \cdot e^{r \cdot n} \tag{4}$$

где e число Непера,$e \approx 2.7182$.

Приведены также примеры для иллюстрации, таблицы, определения и некоторые особенности облигаций (бонов) и акций.

§ 2. Финансовые потоки

В данном параграфе приведена определение финансового (денежного) потока первого ранга:

$$CF = \{(t_1, C_1), \ldots, (t_n, C_n)\}, \tag{5}$$

где (t_i, C_i) обозначает в момент времени t_i существующую C_i сумму, $i = 1, \ldots n$. Рассмотрено умножение потока на число и операции сумм двух потоков. Внесен также интервальный поток второго ранга:

$$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), \ldots, (J_n, C_n)\}, \tag{6}$$

где $J_i = [t_{i-1},\ t_i)\ i = ,1, \ldots, n$; определены две операции актуализации для этих потоков: авансирование $\mathrm{Adv}(\overline{CF})$ и финализация $\mathrm{Fin}(\overline{CF})$. Кроме того, в случае разделения ренты $D^{(p)}$ на p −части показана справедливость следущих свойств

$$\mathrm{Adv}\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}(\mathrm{Adv}\ (\overline{CF})) \tag{7}$$

$$\mathrm{Fin}\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}(\mathrm{Fin}\ (\overline{CF})) \tag{8}$$

Для иллюстрации приведены также численные примеры.

§ 3. Финансовые операции и схемы

В данном параграфе приведены два финансовых закона для момента времени р. Финансовый закон капитализации и дисконтирования:

$$FV_p(t, C) = A(t, p;\ C) p \geq t, \tag{9}$$

$$D(t, p;\ C) = PV_p(t, C), p \leq t, \tag{10}$$

приведен также основной закон финансовой сделки и численные примеры для иллюстрации.

§ 4. Простой процент

В данном параграфе рассмотрен один из основных видов финансовых операций – кредитная сделка и рассмотрены связанные с ним вопросы простого процента и нормированной процентной ставки. Тут же приводится определение основной временной кредитной сделки и денежные (финансовые) параметры, приведены также численные примеры для иллюстрации.

Глава II. Оптимальная остановка и ценообразования американского опциона

Вторая глава состоит из трех параграфов.

§ 1. Оптимальная остановка однородного процесса Маркова

В данном параграфе рассматривается задача оптимальной остановки однородного процесса Маркова $X = (X_t), \quad 0 \le t \le T$, ценой

$$s(T, x) = \sup_{\tau \le T} E_x \left[g(X_\tau) * \ I_{(\tau \le T)} + \lim_{t \uparrow T} g(X_t) * I_{(\tau = T)} \right], \tag{11}$$

где функция дохода $g(x)$имеет следующий вид:

$$g(\mathrm{X_t}) = f(\mathrm{X_t}) - \int\limits_0^t c(\mathrm{X_s}) ds. \tag{12}$$

использованием фазового пространства и расширением пространства элементарных событий построен эквивалентный X однородный процесс Маркова $Y' = Y_t'$ (Теорема 1.1) и показано, что цены оптимальной остановки этих двух процессов равны друг другу (Теорема 1.2)

$$s'(T, x') = s(T - t, x), \ \ t < T, \tag{13}$$

где $x' = (s, x)$.

§ 2. Оптимальная остановка неоднородного процесса Маркова

В данном параграфе рассматривается задача оптимальной остановки неоднородного процесса Маркова $X = (X_t), \quad 0 \le t \le T$, ценой

$$v(s, x) = \sup_{\tau \in \mathfrak{M}} E_{s,x} \, g(\tau, X_\tau) \tag{14}$$

где функция дохода

$$g(t, X_t) = f(t, X_t) - \int_0^t c(s, X_s) ds, \tag{15}$$

построен соответствующий X однородный процесс Маркова X' (Лемма 2.1) и показано, что соответствующие цены задачи оптимальной остановки этих двух процессов совпадают (Лемма 2.2):

$$v(s, x) = v'(s, x), \tag{16}$$

также приводится эксцессивная характеристика цены $v(s, x)$ (Теорема 2.1) и найден явный образ $\varepsilon -$ оптимальных моментов остановки (Теорема 2.2)

§ 3. Ценообразования американского опциона

В данном параграфе результаты, полученные в задаче оптимальной остановки процессов Маркова, используются в задаче установления справедливой цены американского опциона. В частности рассмотрен модель финансового рынка Блек-Шоулса (B, S)

$$dB_t = r \cdot B_t \cdot dt, \tag{17}$$

$$dS_t = \mu \cdot S_t \cdot dt + \sigma S_t dt \cdot S_t \cdot dW_t, \tag{18}$$

и функция оплаты опциона американского типа

$$f_t = \max_{u \le t} S_u - S_t. \tag{19}$$

Справедливую цену опциона можно найти как решение определенной задачи оптимальной остановки (Лемма 3.1). Кроме того, получены момент оптимальной остановки (Лемма 3.2) и выражения оптимальных границ (Теорема 3.1). Аналогичные задачи также изучены для общей диффузионной модели (B, S) финансового рынка. Рассмотрена также дискретная биномиальная модель Кокса, Росси и Рубенштейна (B, S) финансового рынка

$$B_n = (1 + r)B_{n-1}\, B_0 > 0 \tag{20}$$

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}S_0 > 0 \tag{21}$$

для функции оплаты американского типа $f = f_{(x)}$ процесс капитала записан с помощью определенного T оператора (Лемма 3.2) и для справедливой цены опциона получено рекуррентное уравнение (Лемма 3.4). Кроме того, с помощью оператора T установлены области «обналичивания», «не обналичивания» и «неопределенности» (Теорема 3.3). Приводятся рекуррентная модель вычисления справедливой цены для несамофинансированных стратегий и численные примеры.

Глава III. Математическое моделирование стохастических финансовых потоков

Третья глава состоит из четырех параграфов.

§ 1. Моделирование ценообразования стандартного опциона европейского типа

В данном параграфе рассматривается хорошо известная дискретная биномиальная модель Кокса, Росса и Рубинштейна двухактивного финансового (B, S) рынка, которая описывает во времени цены облигаций и акций и определена рекурентными уравнениями (20), (21). В этих уравнениях $r > 0$ является сложной процентной ставкой, а $\rho = \rho_n$ является последовательностью независимо и одинаково распределенных случайных величин $(n = 0,1 \dots N)$. Вместе с этим, каждый ρ_n − закон распределения

ρ_n	b	a
$P(\rho_n)$	P	$1 - P$

$n = 0,1 \dots N$

где подразумевается, что $-1 < a < r < b$.

С помощью стартового капитала инвестора $X_0 = x$ строится портфель активности (стратегия) $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ где β_n и γ_n в момент времени n являются, соответственно, количеством облигаций и акций. Соответствующий процесс капитала этого портфеля будет записан следующим образом

$$X_n^\pi = \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} \quad (22)$$

Рассмотрено математическое выражение стратегии самофинансирования

$$\Delta\beta_n B_n + \Delta\gamma_n S_n = 0, \quad (23)$$

также определен хедж и минимальный хедж. Введены соответствующие функции купли и продажи стандартных европейских опционов

$$f_N = f(S_N) = \max(S_N - K, 0) \quad (24)$$

$$f_N = f(S_N) = \max(K - S_N, 0). \quad (25)$$

Кроме того, дано определение справедливой цены опциона

$$C_N = \min\{x > 0 \colon \prod(x, f_N) \neq \Phi\}, \quad (26)$$

где П является объединением всех возможных хеджов.

Сформулирована задача ценообразования опциона, который состоит в определении минимального хеджа и справедливой цены опциона, а также процесса капитала, соответствующего минимальному хеджу.

§ 2. Биномиальные деревья

В данном параграфе, используя рекуррентные формулы, построены так называемые биномные деревья, с помощью которых можно вычислить вероятную цену акций, значения функции оплаты и справедливую цену опциона.

Для одного класса самофинансированных и несамофинансированных стратегий приводится рекуррентная процедура вычисления справедливой цены опциона, а также формула справедливой цены, зависящая только от начальных параметров:

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k \, (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+\mathrm{a}}{1+\mathrm{r}}\right)^N \left(\frac{1+\mathrm{b}}{1+\mathrm{a}}\right)^k -$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k \, (1-p^*)^{N-k} \qquad (27)$$

где

$$p^* = \frac{r - c_1(1+a) + c_2(1+r) - a}{(b-a)(1+c_1)}, \quad c_1 > 0, c_2 > 0. \qquad (28)$$

Отметим, что, когда $c_1 = c_2 \equiv 0$, тогда (27), (28) дает справедливую цену европейского стандартного опциона купли для самофинансированной стратегии.

§ 3. Принцип ответного портфеля

В данном параграфе, получены явные выражения минимального хеджа с помощью следующего условия так называемого ответного портфеля:

$$X_{n+1}^{\pi} = \beta_{\mathrm{n+1}} \mathrm{B}_{\mathrm{n+1}} + \gamma_{\mathrm{n+1}} S_{\mathrm{n+1}} = f(S_{n+1}). \qquad (29)$$

С помощью которого компоненты минимального хеджа - $\pi^*_{\mathrm{n+1}}$= $(\beta^*_{\mathrm{n+1}}, \gamma^*_{\mathrm{n+1}})$ представлены следующими равенствами:

$$\beta^*_{n+1} = \frac{(1+\mathrm{b})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big) - (1+\mathrm{a})\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big)}{(1+\mathrm{r})(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{B_n}}, \tag{30}$$

$$\gamma^*_{n+1} = \frac{\mathrm{f}\big((1+\mathrm{b})S_n\big) - \mathrm{f}\big((1+\mathrm{a})S_n\big)}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})\mathrm{S_n}} \tag{31}$$

§ 4. Моделирование ценообразования американского опциона

В данном параграфе рассмотрены вопросы ценообразования американских опционов. В отличие от европейских опционов владельцы американских опционов могут обналичить их в любой случайный момент времени $r, (1 \le r \le N)$. По этому к задачам ценапроизводства опционов добавляется еще одна задача: в какой момент времени нужно обналичить опцион, чтобы получить максимальный средний доход? Таким образом, нахождение рационального (оптимального) момента и нахождение справедливой цены американского опциона представляет собой задачу оптимальной остановки.

Справедливая цена американского опциона представленая для $f_n = f(S_n)$ функции оплаты, может быть записана в виде следующей задачи оптимальной остановки

$$C_N^A = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau, \tag{32}$$

где E^*обозначает математическое ожидание с мерой $p^* = \frac{r-a}{b-a}$. Момент времени τ^*, для которого достигается супремум (32) , называется рациональным моментом обналичивания американского опциона. Он вычисляется посредством следующего равенства:

$$\tau^* = \min\{n: f(S_n) \ge C_n^A\}, \tag{33}$$

где C_n^A является внутренней стоимостью функции выплаты американского опциона (цена опциона вмомент n).

Используя принцип биномиальных деревьев и ответного портфеля, введена рекурсивная процедура вычисления справедливой цены американского опциона, а также проведен сравнительный анализ цен европейских и американских опционов. Приведены численные примеры и составлены компьютерные программы.

Заключение

В диссертации достигнуты поставленные цели: решен ряд задач ценообразования американских и европейских опционов путем использования нового направления математического моделирования. В работе исследована проблематика детерминистической и стохастической финансовой математики. В частности, изучено поведение дискретных финансовых потоков и построены соответствующие математические модели. В случае дискретных и непрерывных финансовых потоков (процессов) изучена задача ценообразования производных ценных бумаг – европейских и американских опционов путем использования методов стохастической финансовой математики. В частности, в задаче ценообразования американских опционов использованы результаты теории оптимальной остановки случайных процессов. Приведены численные примеры, для которых построены соответствующие компьютерные программы. Программы представлены в виде исходного кода и приведены в приложениях в конце работы.