

სოფიო ოქრომჭედლიშვილი

დინამიკურ მონაცემთა (სისტემების) კვლევა კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

აგვისტო, 2013 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით სოფიო ოქრომჭედლიშვილის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით “**დინამიკურ მონაცემთა (სისტემების) კვლევა კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით**” და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

2013 წელი

ხელმძღვანელი: ტ.მ.დ., სრული პროფესორი

ირინა ჩხეიძე _____

რეცენზენტი:

ოთარ ლაბაძე _____

რეცენზენტი:

ნინო მჭედლიშვილი _____

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2013 წელი

ავტორი: **სოფიო ოქრომჭედლიშვილი**

დასახელება: **დინამიკურ მონაცემთა (სისტემების) კვლევა კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით**

ფაკულტეტი: **ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი**

ხარისხი: **დოქტორი**

სხდომა ჩატარა: 2013 წლის

ინდივიდუალური პროცენტების ან ინსტიტუტების მიერ ზემო მოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცულ მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

ექვნება
ბატონ ირაკლი ზედგინიძის
ნათელ ხსოვნას

რეზიუმე

კვლევის აქტუალობა. დისერტაციის დასახელებიდან გამომდინარე სამეცნიერო კვლევა ეხება დინამიკური სისტემების ანუ დინამიკური მონაცემების დამუშავებას თანამედროვე უახლესი კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით. აქ იგულისხმება არაწრფივი სისტემები, ვინაიდან მხოლოდ ამ სისტემებისათვის დამახასიათებელი საინტერესო და საკვლევი თვისებები, რომლებიც კლასიკური მიდგომების ფარგლებში აწყდებიან გადაულახავ პრობლემებს და მოითხოვენ ახალი ანალიტიკური და გამოთვლითი მიდგომების შექმნის აუცილებლობას.

სადოქტორო ნაშრომის ძირითადი მიზანი. დისერტაციის კვლევათა ძირითად მიზანს წარმოადგენს დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ღრმა შესწავლის და დაუფლების საფუძველზე მისი ძირითადი მეთოდების მისადაგება გამოსაკვლევი რეალური ობიექტების და პროცესების (მსვლელობის) რაოდენობრივი შეფასებისათვის და პრაქტიკული შედეგების მიღებისათვის. დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის მეთოდები დაფუძნებულია თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე. კვლევა გულისხმობს ახალი, უფრო მარტივი ხერხებით, პროცესების მოდელირებას, ალგორითმების შექმნას და რეალიზაციას MathCad პროგრამულ გარემოში. ეს პროგრამა მოიცავს მზა ფუნქციებს, მოდულებს, რაც ძალიან გაამარტივებს მათ პრაქტიკულ რეალიზაციას და დანერგვას.

სადისერტაციო ნაშრომის პრაქტიკული ღირებულება. სადისერტაციო ნაშრომი შეიცავს ყველა საჭირო მონაცემებს, მეთოდიკას და რეკომენდაციებს დინამიკურ მონაცემთა (სისტემების) კვლევისას კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენების თვალსაზრისით.

ძირითადი პრაქტიკული ღირებულება და გამოყენებითი ასპექტი: ჩატარებული კვლევის შედეგად მიღებული ძირითადი შედეგები შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

1. დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის, არაწრფივი დინამიკური სისტემების მიმართებაში, განხილვამ აჩვენა, რომ დინამიკურ არაწრფივ სისტემებში ხშირად შეინიშნება ქაოსური ქცევა, რომლის მიზეზი მდგომარეობს არაწრფივი სისტემების უნარში ექსპონენციალურად გაზარდოს თავდაპირველად ახლო მდებარე ტრაექტორიები.

2. ჩატარებულია დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ექსპერიმენტული კვლევა სეისმოგრამისათვის (გარკვეული მონაკვეთის), კარდიოთიმის სისშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) და ამინდის ცვლილების ანათვლებისთვის, მიღებულია ქაოსოგრამების სახე.

შემოთავაზებულია ქაოსოგრამის ანალიზის მეთოდოლოგია, რომელიც დაფუძნებულია მიღებული ქაოსოგრამის ჰისტოგრამით აღწერაზე და ენტროპიის გამოთვლაზე.

3. დინამიკური სისტემის ყოფაქცევის ანალიზმა დაადასტურა, რომ დეტერმინირებული ქაოსის თეორია სრულყოფილად აღწერს დინამიკური არაწრფივი სისტემების ყოფაქცევას.

4. გაანალიზებულია ჰერსტის ნორმირებული გაქანების მეთოდი – ემპირიული კანონი დროითი მწკრივების დამუშავების და კვლევის კუთხით. მიღებულია, რომ ჰერსტის პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობის მიხედვით შეიძლება განხორციელდეს კვლევის პროცესების კლასიფიკაცია: თუ $H=0.5$ მაშინ გვაქვს კლასიკური ბროუნის მოძრაობა. თუ $0 < H < 0.5$ პროცესი არის ანტიპერსისტენტული, თუ $0.5 < H \leq 1$ – პროცესი არის პერსისტენტული.

5. ჰერსტის ემპირიული კანონის შემოწმება განხორციელებულია კარდიოთიმის სისშირის ცვლილებებისთვის, სეისმოგრამის მონაკვეთისთვის და ამინდის ტემპერატურის ცვლილებისათვის ერთი წლის განმავლობაში. პირველ შემთხვევაში $H=0.795$, მეორე შემთხვევაში $H=0.749$, მესამე შემთხვევაში კი $H=0.844$.

მიღებული შედეგები ცხადყოფს, რომ სამივე პროცესი ატარებს პერსისტენტულ ხასიათს, ვინაიდან $H > 0.5$, მაშასადამე განხილული პროცესები არ მიეკუთვნებიან მთლიანად შემთხვევით პროცესებს.

6. შემოთავაზებული ალგორითმის მიხედვით მიღებულია ბროუნის მოძრაობის განზოგადოებული მოდელი შემთხვევითობის ყველა დონისათვის MathCad პროგრამულ გარემოში.

7. შემოთავაზებულია მეთოდი დროის მწკრივების ანალიზისათვის: დროით-სისშირული ანალიზი, რომელიც დაფუძნებულია ვეივლეტ და კოსინუს გადაქმნების გამოყენებაზე. მიღებული შედეგების შედარებამ ცხადყოფს, რომ სიგნალის ენერჯის უკეთესი განაწილება შეესაბამება კოსინუს გარდაქმნის გამოყენებას. მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ კოსინუს გარდაქმნა მოითხოვს “ფანჯრის” შემოღებას და სხვა სირთულეებს, შეიძლება უპირატესობა მიენიჭოს ვეივლეტ-პაკეტის გამოყენებას.

8. გაანალიზებულია, განაწილებული ქსელის კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის ტოპოლოგიის მოდელირება და ფრაქტალური განზომილების რიცხობრივი შეფასება.

ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: ქსელის კვანძების (წერტილების სიმრავლის) ფრაქტალური განზომილება $D_F < D_E$, ანუ ფრაქტალური განზომილება D_F ნაკლებია ევკლიდურ განზომილებაზე D_E -ზე.

9. ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: რომ ფრაქტალური განზომილების (D) რიცხვითი შეფასება ცხადყოფს, რომ ყველა განხილული რეალური პროცესი: კარდიოლოგიის სისშირის ცვლილება, სეისმოგრაფიის მონაცემების მონაკვეთი და ამინდის ტემპერატურის ცვლილება მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესებს, როცა პროცესის გაზრდის ტენდენცია შენარჩუნდება მომავალშიც გარკვეული დროის მონაკვეთით და ალბათობით.

10. არაწრფივი დინამიკური სისტემების და მათ მიერ წარმოქმნილი დროითი მწკრივების დეტერმინირებული ქაოსის მეთოდების მეშვეობით

შესწავლამ და ანალიზმა აჩვენა, რომ პრაქტიკაში სარეალიზაციოდ სიმარტივის მხრივ უპირატესობა ენიჭება ჰერსტის ნორმირებული გაქანების ემპირიულ კანონს, ჰერსტის პარამეტრის რაოდენობრივი შეფასებით. თუმცა ფრაქტალური განზომილების და ქაოსოგრაფის დამუშავების მეთოდებსაც თავისი მნიშვნელობა გააჩნიათ. ყოველივე ეს კიდევ ერთხელ ადასტურებს თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენების მიზანშეწონილობას ჩვენს გარშემო მყოფი, პრაქტიკით მოთხოვნილი პროცესების შესწავლის დროს.

Abstract

Research actuality. Thesis theme refers to the scientific study of dynamical systems, or dynamic data using the latest computer technology. This means non-linear systems, because only the characteristic of interest and study of the properties of these systems are faced with insurmountable problems and the classical approaches require the creation of new analytical and computational approaches.

The main purpose of a doctoral dissertation. The main purpose of the dissertation represents the theory of deterministic chaos in-depth study and development of the basic methods employed on the basis of consideration of real-world objects and processes (process) and quantitative evaluation of the practical implications of decisions. Determinate chaos theory, methods based on the use of modern computer technology. The study will include a new much more simple process modeling methods, algorithms and software for the creation and sale of MathCad. This program contains predefined functions, modules, and simplify them in a very practical realization and implementation.

The practical value of a doctoral dissertation. The thesis contains all the necessary data, methods and recommendations for dynamic data (system) in the field of research, the use of computer technology.

The main value of practical and applied aspects:

1. Determinate chaos theory of nonlinear dynamical systems in relation to the review found that the nonlinear dynamical systems often chaotic behavior, the reason lies in the ability of nonlinear systems exponentially increase initially close trajectories.

2. We conducted a pilot reserch seismogram certain chaos theory (for a period), changes in the frequency of heart rate (24 hours), and changes in weather points, adopted chaos graph face.

chaos graph analysis technique is proposed, which is based on the description of entropy to calculate the histogram of chaos graph.

3. The analysis of the dynamic behavior of the system confirmed that the deterministic chaos theory completely describes the dynamic behavior of nonlinear systems.

4. Herst's normal fixed speed is analyzed - empirical time series in terms of treatment and research. It is believed that herst's numeric value may be carried out in accordance with the classification of the research process: if $0 < H < 1/2$ - the process antipersistent.

5. Herst's empirical rule is develop by cheking of the frequency of changes in heart rate, seismogramis stretching temperature and weather changes throughout the year. In the first case $H = 0.795$, in the second case $H = 0,749$, in the third case $H = 0,844$.

The results show that all three processes hard in nature, since $H > 0,5$, therefore, the processes are not fully random processes.

6. The proposed algorithm is based on a generalized model adopted Broun accidents every level programming of MathCad.

7. We propose a method for the analysis of time series: time - frequency analysis based on Wavelet transform and cosine. Comparison of the results shows that the energy distribution signal corresponds best using of cosine transform. But, if we consider that the cosine transformation requires a "window" of administration, and other difficulties, it may be preferable wavelet - use package.

8. It is analyzed, distributed topology network of nodes and fractal dimension of the numerical modeling of the relief galore set for evaluation.

Experiments and studies have shown that network nodes (points) of the fractal dimension $D_F < D_E$ or D_F fractal dimension of less than mathematical size of D_E

9. The experiments and studies have shown that the fractal dimension (D) Numerical estimates show that all of the real process: changing the frequency kardioritmis, seismogramis data segment, and the weather temperature changes are associated with the ever-processes when the process will tend to continue in the future for a period of time and probability.

10. Nonlinear dynamical systems and chaos are determined by methods of investigation and depletion time series analysis revealed that the practice of selling, simple, on the other hand, preferred to carry out a fixed speed herstis Quantify empirical law herstis. However, the fractal dimension and processing methods kaosogramis have their own importance. All this once again proves the ability to use modern computer technology around us who practice the processes required in the course of the study.

შინაარსი

რეზიუმე.....	4
Abstract.....	8
მადლიერება.....	14
შესავალი.....	16
თავი I. დეტერმინირებული ქაოსი და ინფორმაციული ტექნოლოგიები.....	23
1.1 დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ზოგადი მიმოხილვა.....	23
1.2 დინამიკური სისტემების აღწერის მოდელები.....	39
1.3 ლორენცის სიტემა, როგორც დეტერმინირებული ქაოსის სისტემის კლასიკური მაგალითი.....	43
1.4 დეტერმინირებული ქაოსის ექსპერიმენტული კვლევა.....	47
1.5 ქაოსოგრაფიის ანალიზის მეთოდოლოგია.....	51
1.6 I თავის დასკვნები.....	61
თავი II. დინამიკური სისტემების დროითი მწკრივების კვლევა ორიენტირებული კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე....	64
2.1 დროითი მწკრივების (დინამიკის მწკრივების) დამუშავების საკითხები.....	64
2.2 ჰერსტის ემპირიული კანონი და ნორმირებული გაქანების მეთოდი.....	66
2.3 ჰერსტის კანონის ექსპერიმენტული კვლევა MathCad პროგრამულ გარემოში.....	72
2.4 II თავის დასკვნები.....	81
თავი III. დროებითი მწკრივების მოდელირება სხვადასხვა დონის შემთხვევითობით. სიგნალების დროით-სიხშირული წარმოდგენა (ანალიზი).....	84
3.1 მათემატიკური მოდელირების ზოგადი საკითხები.....	84
3.2 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირება.....	87
3.3 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირება, დაფუძნებული ვეივლეტ-კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე.....	89
3.4 დროითი მწკრივების დროით-სიხშირული ანალიზი კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე.....	101
3.5 III თავის დასკვნები.....	107
თავი IV. ფრაქტალური ტექნოლოგიები დინამიკური სისტემების და დროითი მწკრივების კვლევის დროს.....	109
4.1 ზოგადი ცნებები ფრაქტალების შესახებ.....	109

4.2 ფრაქტალური განზომილება.....	110
4.2.1 ფრაქტალური განზომილების ზოგადი განსაზღვრა და ფრაქტალური ობიექტების კონსტრუირების მაგალითები.....	110
4.2.2 ფრაქტალური განზომილების “პრაქტიკული” განმარტება.....	122
4.3 ფრაქტალური განზომილების გამოყენება ტოპოლოგიური ქსელების მოდელებისათვის.....	124
4.3.1 ტოპოლოგიური ქსელების ზოგადი მიმოხილვა.....	124
4.3.2 დიდი ქსელების ტოპოლოგიის ფრაქტალური ხასიათი.....	126
4.3.3 ქსელის კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის ფრაქტალური განზომილების შეფასება და მოდელირება.....	127
4.4 დროითი მწკრივის კორელაციური განზომილების განსაზღვრა..	133
4.5 IV თავის დასკვნები.....	137
ზოგადი დასკვნები.....	139
ლიტერატურა და ვებლიოგრაფია.....	144

ცხრილების ნუსხა

ცხრილი №1 კარდიორითმის სიხშირის ცვლილებები 24 საათის განმავლობაში.....	48
---	----

ნახაზების ნუსხა

ნახ.1 კონფიდენციალური ინფორმაციის გადაცემის სქემა, დეტერმინირებული ქაოსის გამოყენებით.....	26
ნახ.2 მსხვერპლი X^1 და მტაცებლები X^2 -ის რაოდენობის ცვლილება დროის მიხედვით.....	40
ნახ.3 მსხვერპლისა და მტაცებლების რაოდენობის ურთიერთდამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში.....	40
ნახ.4 მსხვერპლი X^1 და მტაცებლები X^2 -ის რაოდენობის ცვლილება T დროის მიხედვით შიდა კონკურენციის პირობებში.....	41
ნახ.5 შიდა კონკურენციის პირობებში მსხვერპლისა და მტაცებლების რაოდენობის ურთიერთდამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში.....	41
ნახ.6 მიღებული სიგნალის ცვლილება დროის მიხედვით.....	42
ნახ.7 სიგნალის და მისი ცვლილების დამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში.....	42
ნახ.8 ლორენცის სიტემის X ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა.....	43

ნახ.9 ლორენცის სიტემის Y ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა.....	43
ნახ.10 ლორენცის სიტემის Z ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა.....	44
ნახ.11 ამონახსნთა ფაზური პორტრეტი.....	45
ნახ.12 ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა: ანუ სიგნალის ცვლილება დროის მიხედვით.....	46
ნახ.13 სისტემის ამონახსნთა ფაზური პორტრეტი.....	46
ნახ.14 ჯანმრთელი ადამიანის მდგომარეობისათვის დამახასიათებელი ქაოსგრამის მაგალითი.....	49
ნახ.15 ავადმყოფობის ზღვარზე მყოფი პაციენტის მდგომარეობისათვის დამახასიათებელი ქაოსგრამის მაგალითი.....	49
ნახ.16 სეისმოგრამის მონაკვეთის ქაოსოგრამა.....	50
ნახ.17 ამინდის ტემპერატურის ცვლილებების ქაოსგრამა.....	50
ნახ.18 ამინდის რეალური ანათვლების ქაოსოგრამა.....	58
ნახ.19 ამინდის რეალური ანათვლების ჰისტოგრამა.....	59
ნახ.20 ამინდის ანომალური ანათვლების ქაოსოგრამა.....	60
ნახ.21 ამინდის ანომალური ანათვლების ჰისტოგრამა.....	61
ნახ.22 $\xi(t)$ – წლიური წყლის ჩამონადენის დამოკიდებულება დროის (წლების) მიხედვით. წყვეტილი ხაზი – ჩადინების დაგროვილი მნიშვნელობის გადახრის დამოკიდებულება დროზე.....	69
ნახ.23 $\xi(t)$ მოდინების და საშუალო ჩადინების $\langle \xi \rangle$ და R გაქანების დამოკიდებულების ასახვა.....	70
ნახ.24 სეისმოგრამით მიღებულ ანათვალთა დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.....	73
ნახ.25 მაქსიმალური გაქანების ნორმირებული მნიშვნელობის \log (ლოგარითმის) RHa ექსპერიმენტულად მიღებულ მნიშვნელობათა დამოკიდებულება შესაბამისი τ დროის ლოგარითმის მნიშვნელობებზე, მოცემული წერტილების სახით. y შეესაბამება წრფეს მიღებულს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საფუძველზე.....	78
ნახ.26 კარდიორითმის სისშირის დამოკიდებულება დროზე.....	78
ნახ.27 ამინდის ტემპერატურის რეალური ცვალებადობის მონაცემების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.....	79
ნახ.28 ამინდის ტემპერატურის ანომალური ცვალებადობის მონაცემების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.....	80
ნახ.29 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის სიგნალის დამოკიდებულება როდესაც ჰერსტის პარამეტრი $H=0.1$	92
ნახ.30 ვეივლეტ-უკუგარდაქმნის შედეგად მიღებული დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი როდესაც $H=0.1$	93
ნახ.31 “გაუსის ხმაურის” დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.....	93
ნახ.32 ბროუნის კლასიკური მოძრაობისთვის მიღებული გრაფიკი ვეივლეტ-გარდაქმნის გარეშე, როცა $H=1/2$ -ს.....	94

ნახ.33 ბროუნის კლასიკური მოძრაობისთვის მიღებული გრაფიკი ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენებით, როცა $H=1/2$ -ს.....	95
ნახ.34 ბროუნის კლასიკური მოძრაობის მოდელირების შედეგად მიღებული გრაფიკი ფაზურ სიბრტყეზე.....	96
ნახ.35 მოდელირების შედეგად მიღებული სიგნალის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, როდესაც $H=0.99$ -ს.....	96
ნახ.36 ბროუნის მოძრაობის კოორდინატის ცვლილება.....	97
ნახ.37 ბროუნის ნაწილაკის წანაცვლება.....	97
ნახ.38 ბროუნის მოძრაობის სპექტრული სიმძლავრე.....	98
ნახ.39 გამოსახულება, რომელიც მიღებულია ინტენსიობის ნორმირებული მნიშვნელობისთვის.....	99
ნახ.40 ბროუნის გამოსახულება ინტენსიობის ნორმირებული მნიშვნელობისთვის მოცემული პისტოგრამის სახით.....	100
ნახ.41 გამოსახულება მოცემული კონტურების სახით.....	100
ნახ.42 მოდელირებული სიგნალი.....	102
ნახ.43 ბაზისური ფუნქცია.....	102
ნახ.44 ბროუნის მოძრაობის დროით-სიხშირული წარმოდგენა ვეივლეტ პაკეტის ბაზაზე.....	105
ნახ.45 ბროუნის მოძრაობის დროით-სიხშირული წარმოდგენა კოსინუს პაკეტის ბაზაზე.....	106
ნახ.46 კოსის “მრუდის” კონსტრუირების მაგალითი.....	116
ნახ.47 კოსის “მრუდი”, მიღებული 6 იტერაციით MathCad პროგრამით.....	118
ნახ.48 კანტორის სიმრავლის კონსტრუირების მაგალითი.....	119
ნახ.49 სერპინსკის ხაღიჩა.....	122
ნახ.50 $P_1(X_1, Y_1)$ და $P_2(X_2, Y_2)$ წერტილებს შორის მანძილის ასახვა....	131
ნახ.51ა წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია თანაბრად განაწილებული წერტილებისთვის.....	132
ნახ.51ბ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია ნორმალურად განაწილებული წერტილებისთვის.....	132
ნახ.51გ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია ლოგისტიკურად განაწილებული წერტილებისთვის.....	132
ნახ.52ა წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგიის კორელაციური განზომილება თანაბრად განაწილებული წერტილებისთვის.....	133
ნახ.52ბ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგიის კორელაციური განზომილება ნორმალურად განაწილებული წერტილებისთვის.....	133
ნახ.52გ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგიის კორელაციური განზომილება ლოგისტიკურად განაწილებული წერტილებისთვის.....	133
ნახ.53 კორელაციური ფუნქციის ლოგარითმის დამოკიდებულება ϵ მნიშვნელობის ლოგარითმზე.....	135
ნახ.54 კორელაციური ფუნქციის დამოკიდებულება დაყოვნების მნიშვნელობა.....	135

მადლიერება

დიდი პატივისცემით და სიყვარულით მინდა მადლობა გადავუხადო ჩემი თემის ხელმძღვანელს პროფესორ ირინა ჩხეიძეს, რომელმაც საკუთარი პროფესიული ხედვა და დიდი გამოცდილება უანგაროდ და უშურველად გამიზიარა თემაზე მუშაობის განმავლობაში. მისი კონსულტაციები, რჩევები, შენიშვნები ჩემთვის იყო ძვირფასი შენაძენი, რამაც განაპირობა ნაშრომის (დისერტაციის) ჩამოყალიბება და დასრულება. ამასთან, თანმიმდევრული მუშაობის, მეცნიერული დაკვირვებებისა და კონკრეტული განზოგადოების უნარჩვევებსაც მიყალიბებდა სწორედ ქალბატონი ირინა. ქალბატონი ირინა თავისი გამორჩეული პედაგოგიური ალღოთი და მაღალი პროფესიონალიზმით საჭირო მიმართულებას აძლევდა ჩვენს სამეცნიერო კვლევით მუშაობას.

მადლობელი ვარ ამ უანგარო დახმარებისთვის და ვეცდები გავამართლო ქალბატონ ირინას მოლოდინი ჩემი მომავალი პროფესიული ზრდის თვალსაზრისით.

შესავალი

დისერტაციის დასახელებიდან გამომდინარე სამეცნიერო კვლევა ეხება დინამიკური სისტემების, დინამიკური მონაცემების დამუშავებას თანამედროვე უახლესი კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით.

უკანასკნელი ათწლეულების ნამუშევრებმა აჩვენა, რომ არსებობს მრავალი საკითხები არაწრფივი დინამიკური სისტემების ყოფაქცევაში, რომლებიც მოითხოვენ დამატებით შესწავლას, დამუშავებას და კვლევას. [2] გამოკვლევას მოითხოვს უამრავი რეალური პროცესების “გრძელვადიანი არაპროგნოზირებადობა”. ამ პროცესებს მიეკუთვნებიან შედარებით მარტივი მექანიკური, ფიზიკური, ქიმიური და ეკოლოგიური სისტემები. შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ პროგნოზირებადობა მცირე და არა პროგნოზირებადობა დროის დიდ პერიოდებზე დამახასიათებელია უამრავი ობიექტებისთვის, რომლებიც არსებობენ ჩვენს გარშემო და დიდ როლს თამაშობენ ეკონომიკაში, მედიცინაში, ფსიქოლოგიაში და სოციოლოგიაში. მაგალითად, ჩვენი ორგანიზმის მრავალი სისტემა მუშაობს ქაოსურ ან მასთან მიახლოებულ რეჟიმში. ამავე დროს ქაოსი გვევლინება, როგორც ჯანმრთელობის მაჩვენებელი, ხოლო გადაჭარბებული მოწესრიგება კი – როგორც ავადმყოფობის სიმპტომი [4].

თუ ადრეულად გამოყოფდნენ ობიექტების ორ კლასს: 1) დეტერმინირებულს, რომლისთვისაც ყოველთვის შესაძლებელია მათი ყოფაქცევის პროგნოზირების გაკეთება ნებისმიერი სასურველი მომავალი დროისათვის და 2) სტოქასტიკურს – რომლისთვისაც წინასწარმეტყველება შეუძლებელია და შეფასება ხდება ალბათური მახასიათებლებით: მათემატიკური ლოდინით (საშუალო მნიშვნელობით, დისპერსიით და ალბათობის განაწილებით). ბოლო ოცწლეულების გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ არსებობს ობიექტთა მნიშვნელოვანი მესამე კლასი, რომლებსაც გააჩნიათ როგორც დეტერმინირებული პროცესების თვისებები, ასევე სტატისტიკური თვისებების გარკვეული დონე. ამ დროს სისტემა იქცევა ქაოტურად. ეს თვისება და მასთან

დაკავშირებული თავისეურებანი დამახასიათებელია მხოლოდ არაწრფივ დინამიკურ სისტემებისთვის.

სხვადასხვა სახის და ბუნების პროცესების ღრმა ანალიზის შედეგად დადგინდა, რომ “ქაოს”-ს გააჩნია “მოწესრიგების” სხვადასხვა დონე. ძალიან ბევრი გამოსაკვლევი ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელია დინამიკური (დეტერმინირებული) ქაოსის თეორიის საფუძველზე [8].

წრფივი სისტემები არასდროს არ არიან ქაოსური. იმისათვის, რომ სისტემა იყოს ქაოსური, იგი უნდა იყოს არაწრფივი. უწყვეტ დინამიკურ სისტემას ექნება ქაოსური ქცევის ხასიათი თუ იგი როგორც მინიმუმ წარმოადგენს სივრცულ სისტემას [13]. დისკრეტული დინამიკური სისტემა ავლენს ქაოსურ ყოფაქცევას მაშინაც, როცა იგი არსებობს ერთგანზომილებიან და ორგანზომილებიან სივრცეში.

ქაოსური ქცევა შეიძლება გააჩნდეს ძალიან მარტივ სისტემასაც. მაგალითად, შეიძლება მოყვანილი იყოს ლოგისტიკური ასახვა, რომელიც აღწერს მოსახლეობათა რაოდენობის ცვლილებას დროის გაზრდასთან დაკავშირებით. ლოგისტიკური ასახვა წარმოადგენს პოლინომიალურ მეორე რიგის ასახვას და ხშირად მიიჩნევა როგორც ტიპური მაგალითი იმისა თუ როგორ ჩნდება ქაოსური ყოფაქცევა ძალიან მარტივ არაწრფივ სისტემებში [8].

დინამიკური სისტემა, რომელიც კლასიფიცირდება როგორც ქაოსური, უნდა იყოს პირველ რიგში მგრძობიარე საწყისი პირობებისადმი. ასეთ სისტემაში მგრძობიარობა საწყისი პირობებისადმი გულისხმობს, რომ ყველა წერტილი, რომლებიც პირველად – საწყისად ძალიან ახლოს მდებარეობდნენ ერთმანეთის მიმართ, მომავალში დაშორდებიან ერთმანეთს ძალიან დიდ მანძილზე. მაშასადამე, მიმდინარე ტრაექტორიის ძალიან მცირე ცვლილება შეიძლება შეიცვალოს მომავალში უზარმაზარი ცვლილებით. საწყისი პირობებისადმი მგრძობიარობა ცნობილია, როგორც “პეპელას ეფექტი”. ეს ტერმინი გაჩნდა იმ სტატიასთან დაკავშირებით, რომელიც ედვარდ ლორენცმა გამოაქვეყნა 1972 წელს და გადასცა ვაშინგტონში

ამერიკულ ასოციაციას “შეცნიერების განვითარება”. ამ სტატიას ერქვა “წინასწარმეტყველება: პეპელას ფრთების აქნევა ბრაზილიაში გამოიწვევს ტორნადოს ტექსასის შტატში”. პეპელას ფრთების აქნევა გულისხმობს სისტემის საწყის მდგომარეობის მცირე ცვლილებებს, რომლებიც გამოიწვევენ ხდომილობათა ჯაჭვს, რის შედეგად მიიღება ძალიან მსხვილი მასშტაბური ცვლილებები. რომ არ ყოფილიყო პეპელას ფრთების აქნევა, სისტემის ტრაექტორია იქნებოდა სულ სხვანაირი [4].

არაწრფივი დინამიკური სისტემების ყოფაქცევის კვლევის კლასიკური მეთოდები ძალიან ხშირად აწყდებიან პრობლემებს, რომლებსაც არ გააჩნია ამოხსნის საშუალება კლასიკური მიდგომების ფარგლებში. საქმე იმაშია, რომ ტრადიციული ამოხსნის მეთოდები შექმნილი იყო ისეთი პროცესებისთვის, რომლებისთვისაც დამახასიათებელი იყო არც თუ ისე საგრძნობი გადახრა წონასწორობის მდგომარეობიდან. თავისი არსით ისინი არ ითვალისწინებდნენ სწრაფ ცვლილებებს, გაუთვალისწინებელ ნახტომებს და პროცესების ცალკეული შემდგენების რთულ ურთიერთობებს. პროცესების ხარისხობრივი გამოვლინებები [6] გახდა იმდენად მოულოდნელი, რომ ცხადი გახდა ახალი ანალიტიკური და გამოთვლითი მიდგომების შექმნის აუცილებლობა. რთული სისტემების თეორიაში ძალიან მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს არაწრფივ სისტემებს უკუკავშირით, როცა ინფორმაცია მიღებული სისტემის გამოსასვლელზე მიეწოდება ისევ შესასვლელს და ხდება შემავალი მონაცემების ახალი მიმდევრობა. ყველაფერმა ამან განაპირობა ახალი არაწრფივი მოდელების პოვნა, რომლებსაც შესწევს უნარი აღექვატურად აღწარმოოს რთული დინამიკური პროცესები. არსებობს რამოდენიმე მაკონკურირებელი მიდგომა რომელიც ითვალისწინებს არაწრფივი იდეის გამოყენებას. მაგრამ ის შეზღუდვები, რომელიც თან ახლავს მოდელის შექმნას მისი პრაქტიკული გამოყენებისათვის, სპობენ ამ პროცესებისთვის დამახასიათებელ “სირთულეს” და არსებითობას, რომელიც წარმოადგენს ამ პროცესების არსს.

ამასთან დაკავშირებით დროის უკანასკნელ პერიოდში ინტენსიურად ვითარდება ალტერნატიული მიდგომა არასწორფიგობის ანალიზისადმი. ამ მიდგომას ეწოდება დეტერმინირებული ქაოსის თეორია. ეს თეორია გულისხმობს, სისტემის ანომალური ყოფაქცევის ახსნას. კერძოდ, თუ სისტემა თავისი ბუნებით არ არის სტოქასტიკური მასში აღინიშნება შემთხვევითობისთვის დამახასიათებელი თვისებები. ქაოსის თეორია გულისხმობს სულ ახალ კონცეფციებს და დროითი მწკრივების ანალიზისათვის ახალი ალგორითმების შექმნას და რეალიზაციას დაფუძნებულს თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების ბაზაზე.

რთული ტექნოლოგიური სისტემების ანალიზისა და ყოფაქცევის წინასწარმეტყველებისათვის შეუძლებელია არ იყოს გამოყენებული ისეთი მძლავრი ინსტრუმენტი, როგორც არის ნანო და ნეიროქსელური ტექნოლოგიები.

ცხადია, რომ დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის გამოყენება ტექნიკურ და პრაქტიკულ ამოცანების გადასაწყვეტად შესაძლებელი, უმნიშვნელოვანესი და რეალიზებადი გახდა მხოლოდ თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების განვითარებასთან და საინჟინრო დარგებში დანერგვასთან ერთად. ზემოდ აღწერილი გარემოებების გათვალისწინებით შეიძლება დამაჯერებლად მივიჩნიოთ დასამუშავებელი თემის აქტუალობა, საჭიროება და დანერგვის შესაძლებლობა სხვადასხვა პრაქტიკულ სფეროში.

დისერტაციის კვლევათა ძირითად მიზანს წარმოადგენს დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ღრმა შესწავლის და დაუფლების საფუძველზე მისი ძირითადი მეთოდების მისადაგება გამოსაკვლევი რეალური ობიექტების და პროცესების (მსვლელობის) რაოდენობრივი შეფასებისათვის და პრაქტიკული შედეგების მიღებისათვის. დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის მეთოდები დაფუძნებულია თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე. კვლევა გულისხმობს ახალი უფრო მარტივი ხერხებით პროცესების მოდელირებას, ალგორითმების შექმნას და რეალიზაციას MathCad

პროგრამულ გარემოში. ეს პროგრამა მოიცავს მზა ფუნქციებს, მოდულებს, რაც ძალიან გაამარტივებს მათ პრაქტიკულ რეალიზაციას და დანერგვას.

დასმული მიზნის მისაღწევად საჭიროა კვლევის ძირითადი ამოცანების ჩამოყალიბება და შესრულება. ეს ამოცანები შემდეგია: პირველ რიგში უნდა მოხდეს დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის, როგორც არაწრფივი დინამიკური სისტემის ყოფაქცევის, შედეგიანი შესწავლა ახალი ანალიტიკური და გამოთვლითი მიდგომით და კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით.

დისერტაციის ეს ნაწილი უნდა შეიცავდეს ქაოსის თეორიის ზოგად მიმოხილვას არსებული ლიტერატურის ანალიზის საფუძველზე. აგრეთვე უნდა აღწერილი იყოს რეალური დინამიკური სისტემა და ლორენცის სისტემა, როგორც დეტერმინირებული ქაოსის სისტემის კლასიკური მაგალითი, მისი ამონახსნის წარმოდგენა MathCad პროგრამაში.

თვალსაჩინოებისათვის ამონახსნი (კვლევა) გულისხმობს ფაზურ სიბრტყეში ქაოსოგრამის შექმნას. ქაოსოგრამის ანალიზის მეთოდოლოგია დაფუძნებული იქნება ჰისტოგრამის აგებაზე და რაოდენობრივ შეფასებაზე ენტროპიის გამოთვლის მეშვეობით.

ვინაიდან უფრო ხშირად, პრაქტიკაში დინამიკური სისტემების და პროცესების შესწავლა ხორციელდება დროითი მწკრივების ანალიზის საფუძველზე [52], უნდა განიხილებოდეს დროითი მწკრივების დამუშავების თანამედროვე ახალი მეთოდები. ამ მეთოდებს მიეკუთვნებიან ჰერსტის ემპირიული მეთოდი, ფრაქტალური განზომილების გამოყენების და განსაზღვრის მეთოდი, განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირების მეთოდი, ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენების მეთოდი. ყველა ეს მეთოდი მიეკუთვნება კომპიუტერულ ტექნოლოგიებს და ამავე დროს მჭიდროდ არის დაკავშირებული ქაოსის თეორიასთან. ამ მეთოდების საშუალებით ხდება უშუალო დაკავშირება თეორიული ხასიათის ინფორმაციისა პრაქტიკულ და რეალურ პროცესებთან. სწორედ კომპიუტერული

ტექნიკის შესაძლებლობათა განვითარებამ განაპირობა დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის მრავალ შეკითხვებზე დადებითი პასუხის გაცემა, მნიშვნელობა და აღიარება პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას.

შემდეგ ეტაპზე უნდა განიხილებოდეს ყველა ზემოდ ჩამოთვლილი მეთოდი, ამ მეთოდების კავშირი დეტერმინირებული ქაოსის თეორიასთან და მათ რეალიზაციასთან კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე.

პირველ რიგში განხილვას, გაანალიზებას მიეკუთვნება ჰერსტის ემპირიული კანონი. ამ კანონის საფუძველზე შეიქმნა “ნორმირებული განანების” მეთოდი, რომელიც იძლევა საშუალებას მოხდეს რეალური პროცესების კლასიფიკაცია მათში შემთხვევითობის დონის მნიშვნელობის მიხედვით: რამდენად შეიძლება ვივარაუდოთ მომავალში პროცესის განვითარების ტენდენცია. ჰერსტის ემპირიული კანონის საფუძველზე უნდა ჩატარდეს ექსპერიმენტული კვლევა რეალურად მიღებული მონაცემების ანალიზისათვის. ამ საკითხებთან მჭიდრო კავშირშია სასურველი პარამეტრით დროითი მწკრივების მოდელირების საკითხი, რომელსაც ეწოდება განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირების რეალიზაცია. [63] ლიტერატურაში მოცემულია ბროუნის მოძრაობის მოდელირების საკითხი. მაგრამ ალგორითმი ძალიან დიდია და მისი რეალიზაცია იმდენად რთულია, რომ მისი განხორციელება არაეფექტურია. ამიტომ ამოცანა მდგომარეობს მოდელირების ისეთი ალგორითმის და ხერხის შედგენაში, რომელიც იქნება უფრო ეფექტური და ეკონომიური დროის დახარჯვის თვალსაზრისით. ამ დროს მეთოდი უნდა ითვალისწინებდეს კალასიკური ბროუნის მოძრაობის მოდელირებას, როგორც კერძო შემთხვევას. ეს იმიტომ, რომ ბროუნის კალასიკური მოძრაობა მიჩნეულია როგორც შემთხვევითი, ნორმალური განაწილების მქონე, შემთხვევითობის ეტალონი.

ცნობილია, რომ დროითი მწკრივების ანალიზისათვის შეიძლება გამოყენებულ იქნას დისკრეტული სიგნალის დროით სიხშირული წარმოდგენა [39] კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე.

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოხდეს სხვადასხვა წრფივი გარდაქმნის შედარება, სათანადო რეკომენდაციის თანხლებით. უნდა გამოკვლეული იყოს ფრაქტალური ტექნოლოგიები, როგორც დეტერმინირებული ქაოსის სისტემის კვლევის უმნიშვნელოვანესი ნაწილი. ამისათვის საჭიროა პირველ რიგში ფრაქტალების უნიკალური თვისებების შესწავლა და ფრაქტალური განზომილების თეორიულად ჩამოყალიბება და განსაზღვრა სხვადასხვა ფრაქტალური სახის ობიექტებისათვის. მაგრამ ცნობილია [30], რომ ფრაქტალური განზომილების განსაზღვრა დროითი მწკრივებისათვის პრაქტიკაში ხდება კორელაციური ფრაქტალური განზომილების საფუძველზე. ამიტომ სასურველია მოინახოს კორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის უფრო მარტივი ალგორითმი, რომელიც MathCad პროგრამის გარემოში რეალიზაციის დროს იქნება განსაკუთრებით მარტივი. შემოწმდეს დროითი მწკრივების (სიგნალების) დროით-სიხშირული წარმოდგენა ეტალონური სიგნალებისთვის.

საინტერესოა ფრაქტალური განზომილების გამოთვლის ჩატარება ტოპოლოგიური ქსელების გაანალიზების დროს.

რაც მთავარია დისერტაცია უნდა მოიცავდეს ექსპერიმენტულ კვლევას, ჩატარებულს რეალურად მოპოვებულ მონაცემებზე და რეალიზებულს MathCad პროგრამულ გარემოში.

ყველა ზემოდ ჩამოთვლილი კვლევის ძირითადი ამოცანების შესრულებას ეძღვნება დისერტაციის შემდგომი ოთხი თავი და დასკვნები.

**თავი I. დეტერმინირებული ქაოსი და ინფორმაციული
ტექნოლოგიები**

**1.1 დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ზოგადი
მიმოხილვა.**

დეტერმინირებული ქაოსი ეხება არაწრფივ სისტემებში ქაოტური მოძრაობის მოვლენას. ამ მოძრაობას აგრეთვე უწოდებენ დინამიკურ ქაოსს (ქაოსს უწოდებდნენ უძველეს საბერძნეთში უწესრიგო მატერიას და უორგანიზაციო სტიქიას). ეს მოძრაობა წარმოიშვება არაწრფივი დეტერმინირებული სისტემის საკუთარი დინამიკის შედეგად. ფაზურ სივრცეში სისტემის ასეთ ქცევას შეესაბამება ე.წ უცნაური ატრაქტორი [1]. ატრაქტორი (attractor) ინგლისურად ნიშნავს მიმზიდველს, ზღვარს რომლისკენაც მიისწრაფებიან დინამიკის ტრაექტორები. ტერმინი “უცნაური” გამოიყენება იმისათვის, რომ ხაზი გაესვას ატრაქტორის უჩვეულო თვისებას, დაკავშირებულს ქაოსთან. დინამიკური სისტემის არარეგულარობის ქცევის მიზეზს წარმოადგენს არაწრფივი სისტემის თვისება ექსპონენციურად სწრაფად განაშოროს პირველად ახლოს მდებარე ტრაექტორიები ფაზურ სივრცეში [3], აქედან გამომდინარე სისტემის ქცევის წინასწარმეტყველების შეუძლებლობა დიდი დროის მომავლისთვის. ეს გამოწვეულია ძალიან მაღალი მგრძობიარობით საწყისი პირობების მიმართ, რომლებიც, როგორც ფიზიკურ ექსპერიმენტებში, ასევე კომპიუტერულ მოდელირებაში შეიძლება მოცემული იყოს გარკვეული სიზუსტით.

საწყისი პირობების მიმართ მაღალი მგრძობიარობა, რომელიც იწვევს დროში ქაოტურ ქცევას წარმოადგენს მრავალი დინამიკური სისტემების ტიპურ თვისებას. არაწრფივი სისტემების კვლევამ მაღალსისწრაფის მქონე კომპიუტერების საფუძველზე მიგვიყვანა ამ დასკვნების მიღებამდე. ცნობილია [6], რომ ასეთი ყოფაქცევა აღინიშნება გულის უჯრედების პერიოდულ მოძრაობაში, ელექტრულ წრედებში, აირის და სითხის ტურბულენტურ სტადიაში გასვლის დროს, ქიმიურ რეაქციებში, ლაზერებში, ბილოგიურ, მეტეოროლოგიურ და ეკონომიკურ პროცესებში, რომლებშიც ყოფაქცევის

წინასწარმეტყველება დროის დიდი ინტერვალისათვის ხდება შეუძლებელი.

შეიძლება მოვიყვანოთ ამ თვისების მარტივი მაგალითი. თუ განვიხილავთ მონეტას, რომელსაც დავაყენებთ წიბოზე. ის გვერდი, რომელზედაც დაეცემა მონეტა დამოკიდებულია ძალიან სუსტ შეხებაზე. “საფასურის” და “გერბის” მიმდევრობა იჩენს ქაოტურ ქცევას დროის მიხედვით. აქ საწყის პირობებს წარმოადგენს სუსტი შეხება წიბოზე დაყენებულ მონეტასთან. აქ საწყისი პირობები იწვევენ საპირისპირო შედეგების მიღებას.

მაგრამ არსებობენ ფიზიკური სისტემები, რომლისთვისაც საწყისი პირობების ცვლილება იწვევს შედეგის მცირე შეცვლას. მაგალითად, ავტომანქანის მიმართულება მცირედ შეიცვლება, თუ საჭეს მსუბუქად მოვაბრუნებთ.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ქაოტური ტრაექტორიების ქცევა დროის დიდი ინტერვალისთვის არ შეიძლება იყოს ნაწინასწარმეტყველები [17]. სისტემების მოძრაობის ტრაექტორიების პროგნოზირება ხდება უფრო და უფრო განუსაზღვრელი, როცა ვცდილებით საწყის პირობებს.

ინფორმაციის თეორიის თვალსაზრისით [10] ეს ნიშნავს, რომ თვით სისტემა წარმოქმნის ინფორმაციას, რომელიც იზრდება ქაოტიურობის გაზრდასთან ერთად.

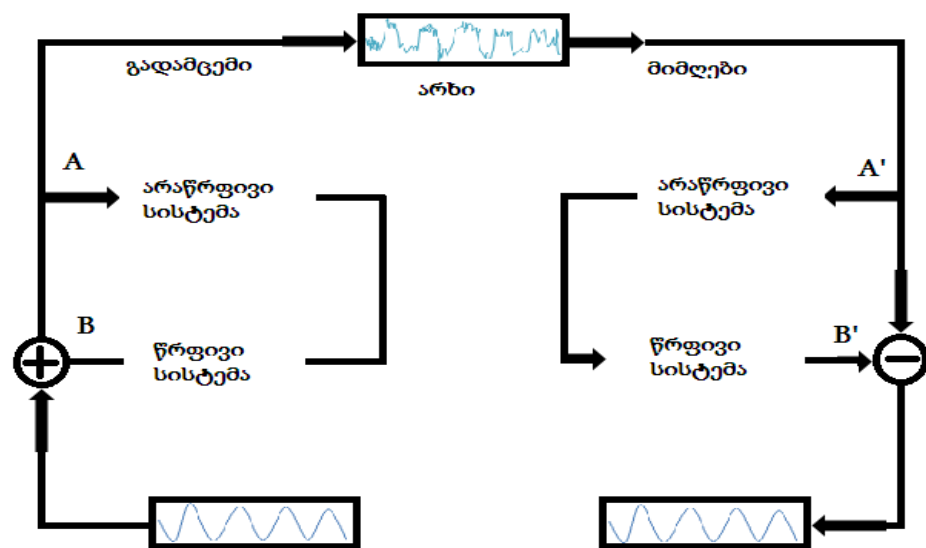
მეცნიერების მიერ დაისვა საკითხი: შეიძლება თუ არა მიღებული ტრაექტორის ნაწილს შეუსაბამოთ ინფორმაციის გარკვეული მიმდევრობა? ტრაექტორიას ვღებულობთ დინამიკური სისტემის განტოლებათა ამოხსნით. მიიღეს [14], რომ ინფორმაცია იმახსოვრება და ინახება დინამიკური ტრაექტორიების სახით და მას გააჩნია ასოცირების თვისება. დამუშავებული ტექნოლოგია საშუალებას იძლევა ნებისმიერი ტიპის მონაცემების ჩაწერის, შენახვის და ამოკითხვის შესაძლებლობას.

თანამედროვე კავშირგაბმულობის სისტემებში ინფორმაციის მზიდად გამოიყენება ჰარმონიული სიგნალები. საინფორმაციო სიგნალი ახორციელებს ამ სიგნალების მოდულაციას ამპლიტუდის, სიხშირის და ფაზის მიხედვით. მიმღებში ხორციელდება დემოდულაცია საინფორმაციო სიგნალის გამოყოფის ნიშნად. ანალოგიური მეთოდით შეიძლება ინფორმაციის მზიდად გამოყენებული იქნას ქაოტური სიგნალი. ამ სიგნალის შესაძლებლობანი გაცილებით ფართეა. ამ შემთხვევაში პარამეტრის უმნიშვნელო ცვლილება იძლევა პროცესის საიმედოდ ფიქსირებულ ცვლილებას, ეს ნიშნავს რომ, ვინაიდან ქაოსური სიგნალები არიან ფართეზოლოვანი, რაც რადიოტექნიკაში და კავშირის სისტემებში გამოიყენება ინფორმაციის გადაცემის სიჩქარისა და მუშაობის მდგრადობის ასამაღლებლად [15]. ცნობილია, რომ თანამგზავრთა, მობილური, ფიჭური და ოპტიკურ-ბოჭკოვანი საკომუნიკაციო სისტემებში დიდი ყურადღება ექცევა სიგნალებს გაფართოებული სპექტრით, სადაც გადასაცემი სიგნალის სიხშირის ზოლი შეიძლება ბევრად აჭარბებდეს საინფორმაციო სიგნალის სიხშირის ზოლს [20]. ხმაურმსგავსება და თვითსინქრონიზირება იმ სისტემების, რომლებიც დაფუძნებულია ქაოსზე, განაპირობებენ ამ სისტემის პოტენციურ უპირატესობას იმ ტრადიციულ სისტემებთან შედარებით, რომლებიც დაფუძნებულია ფსევდოშემთხვევითი მიმდევრობების გამოყენებაზე. გარდა ამისა ქაოსზე დაფუძნებული სისტემების აპარატურული რეალიზაცია მარტივია და ენერგეტიკულად უფრო ეფექტურია.

გარდა ამისა ქაოტური სიგნალები შეიძლება გამოყენებული იქნას გადასაცემი ინფორმაციის მასკირებისათვის, ინფორმაციის გადაცემის კონფიდენციურობისა და მისი დაცვისათვის (სხვადასხვა დანიშნულების ინფორმაციისა).

შემდეგ ნახაზზე ილუსტრირებულია კავშირის სქემის მაგალითი, დაფუძნებული ქაოსის გამოყენებაზე ინფორმაციის გადამტანის როლში. სისტემის გადამცემი და მიმღები შეიცავენ წყაროს მსგავს წრფივ და არაწრფივ სისტემებს. დამატებით გადამცემში ჩართულია ამჯამავი, ხოლო მიმღებში კი გამოკლების ბლოკები. ამჯამავში ხდება ქაოსური

სიგნალისა და საინფორმაციო სიგნალების შეკრება, ხოლო მიმღებში ხდება საინფორმაციო სიგნალის გამოყოფა მიღებული ჯამური სიგნალიდან გამოკლების ოპერაციით. არხში სიგნალი ატარებს ქაოსურ ხასიათს, რომელიც არ მოიცავს საინფორმაციო სიგნალის ხილული (ხილვადი) ნიშნების არსებობას. ეს იძლევა საშუალებას კონფიდენციალური ინფორმაციის შეუმჩნეველად გადაცემას. A და A', B და B' წერტილებში სიგნალები წყვილურად ტოლებია. ამიტომ შემაჯავლი საინფორმაციო სიგნალი და მიმღებში გამოყოფილი სიგნალები იდენტურია.



ნახ.1 კონფიდენციალური ინფორმაციის გადაცემის სქემა, დეტერმინირებული ქაოსის გამოყენებით.

გავარჩიოთ ზემოთ მოცემული საკითხები უფრო დაწვრილებით.

დავიწყოთ ზოგადი განსაზღვრებების ახსნით. ბრიტანეთის ენციკლოპედიის თანახმად სიტყვა “ქაოსი” წარმოშობილია ბერძნულიდან “*χαι*”. თავდაპირველად ის ნიშნავდა უსასრულო სივრცეს, რომელიც არსებობდა ყველა დანარჩენის წარმოქმნამდე [57]. ცოტა მოგვიანებით რომაელებმა ქაოსი გააიგივეს როგორც საწყისი ნედლი უფორმო მასა, რომელშიც გამჩენმა მოიტანა წესრიგი და ჰარმონია. თანამედროვე გაგებით, რომლითაც ჩვენ ვისარგებლებთ ”ქაოსი” ნიშნავს მდგომარეობის უწესრიგობას და არარეგულარობას.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ფიზიკურ სისტემებს, რომელთა ყოფაქცევა დროში არის დეტერმინირებული, ე.ი. არსებობს წესი დიფერენციალური ან სხვაობითი განტოლებების სახით, რომლებიც განსაზღვრავენ მის მომავალს გამომდინარე მოცემული საწყისი პირობებიდან.

ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ დეტერმინირებული მოძრაობა (აღწერილი მაგალითად დიფერენციალური განტოლებით) საკმაოდ რეგულარულია, შორს არის ქაოსურობისაგან: ვინაიდან თანამიმდევრული მდგომარეობები უწყვეტად ვითარდება ერთი – მეორედან. ჯერ კიდევ მეოცე საუკუნის დასაწყისში ა.პუანკარემ აღმოაჩინა, რომ ზოგიერთ მექანიკურ სისტემებში, რომელთა ევოლუცია დროში განისაზღვრება ჰამილტონის განტოლებებით, შეიძლება გაჩნდეს ქაოსური მოძრაობები. სამწუხაროდ ბევრმა მეცნიერმა ეს მიიღო, როგორც კურიოზი და გავიდა საკმაოდ დიდი დრო, ვიდრე მეტროლოგმა ე.ნ.ლორენცმა (1963წ) არ აღმოაჩინა, რომ უბრალო სისტემაც კი, შემდგარს სამი ერთმანეთთან დაკავშირებული პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებებისაგან, მიყვარათ მთლიანად ქაოსურ მოძრაობებამდე. ლორენცმა ერთ-ერთმა პირველმა აღმოაჩინა დისიპატიურ სისტემებში დეტერმინირებული ქაოსის მაგალითი.

შემდეგში დეტერმინირებული ქაოსის ქვეშ იგულისხმება არარეგულარული ან ქაოსური მოძრაობა, წარმოქმნილი არაწრფივი სისტემებით, რომელთათვის დინამიკური კანონები ცალსახად განსაზღვრავენ ცნობილი წინა ისტორიისას სისტემის მდგომარეობის ევოლუციას დროში. ბოლო წლებში მიღებული ახალი თეორიების გამოყენებით, თანამედროვე კომპიუტერული და ექსპერიმენტის ტექნიკის განვითარებამ ცხადყო [57], რომ ეს მოვლენა ხშირად გვხვდება ბუნებაში და მას აქვს შორს მიმავალი შედეგები მეცნიერების ბევრ დარგში.

შევნიშნოთ, რომ არაწრფივობა აუცილებელი, მაგრამ არასაკმარისი პირობაა ქაოსური მოძრაობის წარმოქმნისათვის (წრფივი

დიფერენციალური ან სხვაობითი განტოლებები შეიძლება ამოიხსნას ფურიეს გარდაქმნებით და არ მიყვარათ ქაოსამდე).

დროში დაკვირვებადი ქაოსური ყოფაქცევა წარმოიშობა არა გარეშე წყაროების ხმაურით (ისინი არ არიან ლორენცის განტოლებებში), არა უსასრულოდ დიდი თავისუფლების ხარისხის გამო (ლორენცის სისტემაში მხოლოდ 3) და არა განუსაზღვრელობის გამო.

ძირითადი პირველმიზეზია არაწრფივი სისტემის თვისება ექსპონენციალურად სწრაფად დააშოროს ერთმანეთს პირვანდელი მახლობელი ტრაექტორიები ფაზური სივრცის შეხლულულ მიდამოში (მაგალითად, სამგანზომილებიანი ლორენცის სისტემაში).

ამრიგად, პრაქტიკულად შეუძლებელია წინასწარმეტყველება ასეთი სისტემების ხანგრძლივი მოქმედებისა, ვინაიდან რეგულარულად საწყისი პირობები შეიძლება მოცემული იყოს მხოლოდ სასრული სიზუსტით, ხოლო შეცდომები ექსპონენციალურად მატულობს. თუ შევეცდებით ამოვხსნათ ეგმ-ზე ასეთი არაწრფივი სისტემა, რეზულტატები დიდი ხნის დაკვირვებისათვის დამოკიდებულია საწყის პირობებზე, რომელთა რიცხვითი მნიშვნელობები ირაციონალური იყო ვინაიდან ციფრები ირაციონალურ გამოსახულებებში განაწილებული არის არარეგულარულად, ტრაექტორია ხდება ქაოსური. ზემოთქმულის გააზრებისას წარმოიშობა რამოდენიმე ფუნდამენტალური კითხვა:

- შეიძლება თუ არა წინასწარმეტყველება (დიფერენციალური განტოლების სახე), იმისა, რომ სისტემაში მოხვდება დეტერმინირებული ქაოსის რეალიზაცია?

- როგორია ამ შედეგების გავლენა მეცნიერების და ტექნიკის სხვადასხვა რეფორმაზე? ნიშნავს თუ არა დეტერმინირებული ქაოსის არსებობა ბუნების მეტყველებაში? ზოგიერთი არაწრფივი სისტემისათვის ხანგრძლივი წინასწარმეტყველების დასასრულს, ქაოსური სიგნალით შეიძლება რამის გაგება?

ჯერჯერობით ამ კითხვაზე დამაჯერებელი პასუხი არ არის მიღებული

დინამიკური სისტემების ქვეშ ჩვენ გვესმის ნებისმიერი სისტემა, როგორც არ უნდა იყოს მისი ბუნება (ფიზიკური, ქიმიური, ელექტრომაგნიტური, ბიოლოგიური, ეკონომიკური და ა.შ.), რომელსაც შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა მათემატიკური ფორმები:

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებები, კერძო წარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებები, წრფის ან სიბრტყის სახეების ასახვა (შექცევადი ან შეუქცევადი). ამრიგად კვლევის არე ძალიან ფართოა ვინაიდან მოიცავს დროზე დამოკიდებულ ყველა მოვლენას თავიდან აუცილებელია დავინახოთ მკაფიო განსხვავება ხახუნის და ხახუნის არამქონე სისტემებს შორის, ვინაიდან ამ სახის სისტემებს არ მივყავართ ერთი და იგივე ტიპის ამოცანამდე. შინაგან ხახუნს მოსდევს ე.წ. ტრაექტორიის არსებობა, ე.ი ამოხსნის ასიმპტოტური ($t \rightarrow \infty$), რომელზეც ვერ ახდენს პირდაპირ გავლენას საწყისი პირობები – საწყისი წერტილი. მექანიკაში, სადაც ხახუნს მივყევართ ენერჯის კარგვამდე. შესაბამის სისტემებს უწოდებენ დისიპატიურს.

ამ ტერმინით ვისარგებლებთ ჩვენ არამექანიკურ სისტემებშიც სადაც ადგილი აქვს ენერჯის კარგვას. სისტემებს ხახუნის გარეშე უწოდებენ კონსერვატიულს ან ჰამელტონის სისტემებს. ასეთ სისტემებში გამოიყენება კვლევის სპეციფიკური მეთოდები რაც ძირითადად გამოწვეულია ატრაქტორის არ ქონით და ამიტომ საწყის პირობებს ეძლევათ გადამწვეტი როლი [11].

ისმის შეკითხვა: რისთვის სჭირდებათ ინჟინრებს ქაოსური დინამიკა?

ინჟინრებმა დიდი ხანია იცოდნენ ქაოსის შესახებ, უწოდებდნენ მას ხმაურს, ხელშეშლას ან ტურბოლენცობას, ხოლო განუსაზღვრელობის ფაქტორს ან საიმედოობის ფაქტორს იყენებდნენ ტექნიკურ პროექტებში გარეშე შემთხვევითი, უცნობი სიდიდეების აღრიცხვისათვის. მაშინ რა არის ახალი ქაოსზე?

პირველი, აღმოჩნდა, რომ ქაოსური რხევები შეიძლება წარმოიშვას დაბალი რივის არაწრფივ დეტერმინირებულ სისტემებში. მოგვეცა იმედი განისაზღვროს მოუწესრიგებელი ხმაურის წყარო და მოხდეს მისი მართვა. მეორეც, არაწრფივი დინამიკის ახალმა აღმოჩენებმა მოიტანა ქაოსური დინამიკის კვლევისათვის ახალი მეთოდები, ისეთები, როგორცაა ფრაქტალური ზომა და ლიაპუნოვის მახასიათებლები. ამან მიგვიყვანა და ალბად კიდევ უფრო შორს წაგვიყვანს არაწრფივი მექანიკური და ელექტრო მოწყობილობების დაპროექტების ახალ შედეგებამდე. ქაოსის წყაროებია:

- არაწრფივი დრეკადი ელემენტები, ზამბარები;
- ხახუნის ტიპის არაწრფივი მიღევა;
- მკვდარი სვლა, ღრეხო ან შემზღუდელები და ბიწრფივი ზამბარები, სითხეების მიერ შექმნილი ძალები;
- არაწრფივი სასაზღვრო პირობები;
- მართვის სისტემებში უკუკავშირების მიერ შექმნილი ძალები;
- არაწრფივი წინააღმდეგობა, ტევადობა ან ელექტრული წრედების ინდუქტიური ელემენტები, დიოდები;
- ტრანზიტორების დიდი კომპლექსები და სხვა აქტიური ელემენტები;
- ელექტრული და მაგნიტური ძალები. ქაოსური რხევები შეიძლება შეგვხვდეს ბევრ ფიზიკურ სისტემებში;
- ამოზნექილი დრეკადი სტრუქტურების რხევა;
- მექანიკური სისტემები მკვდარი სვლით ან ღრეხოთი;
- აეროდრეკადი სისტემები;
- ბორბალი-ლიანდაგის სისტემების დინამიკა;
- მაგნიტომექანიკური ამძრავი;

- კოჭის და გარსის რხევა;
- ბრუნვითი სისტემები ან ჰიროსკოპები;
- მაკონტროლებადი სისტემები უკუკავშირით;
- ლაზერები და ოპტიკური სისტემები;
- ენერგოსისტემები და მასში წარმოშობილი ავარიები და კიდევ ბევრი სხვა.
- ცალკე საკითხია არაწრფივი დინამიკის მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობა ეკონომიკურ და სოციალურ საკითხებში.

ფიზიკური სისტემების დინამიკის ჰამილტონისებრ აღწერას საფუძვლად უდევს ჰამილტონის განტოლებები, რომლებიც წარმოადგენენ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$i=(1,2,\dots,n)$$

$t=t_0$ შემთხვევაში სრულდება საწყისი პირობები

$$q_i(t_0)=q_i^0, \quad p_i(t_0)=p_i^0$$

p_i და q_i ცვლადებს ეწოდება შესაბამისად განზოგადოებული კოორდინატები და განზოგადოებული იმპულსები, ხოლო მათ ერთობლიობას $(p_i, q_i)=(p, q)$ კანონიკური ცვლადები [17].

დამოუკიდებელი განზოგადოებული კოორდინატების n რიცხვს უწოდებენ თავისუფლების ხარისხს, ხოლო $H=H(p, q)$ ფუნქციას, რომელიც ახასიათებს სისტემის ფიზიკურ მდგომარეობას, უწოდებენ ჰამილტონის ფუნქციას, ან ჰამილტონიანს. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ $H(p, q)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული დროზე და მოქმედი ძალები პოტენციალურნი არიან. ამ შემთხვევაში ჰამილტონიანი წარმოადგენს სისტემის სრულ ენერგიას, გამოსახულს კანონიკური ცვლადებით. განტოლების ამონახსნი განსაზღვრავს დამოკიდებულებას $p(t)$ და $q(t)$ შორის, დამოკიდებულს p_0 და q_0 საწყის მნიშვნელობაზე. ეს

ეკოლოციური პროცესი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც წერტილის მოძრაობა p და q კოორდინატებიან $2n$ -განზომილებიან სივრცეში. ასეთ გაერთიანებულ (p,q) სივრცეს უწოდებენ ფაზურ სივრცეს, ხოლო ამ სივრცის წერტილებს ფაზურ წერტილებს. ფაზური წერტილების მოძრაობას უწოდებენ ფაზურ ტრაექტორიებს ან ფაზურ მრუდებს.

ჰამილტონის სისტემების ფაზური სივრცე ხასიათდება შემდეგი სამი მნიშვნელოვანი თვისებით:

1. დროის ნებისმიერ მომენტში ტრაექტორიები განსაზღვრული განტოლებით ფაზურ სივრცეში არ გადაიკვეთება. ეს თვისება გამომდინარეობს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნის არსებობის და ერთადერთობის თეორემიდან.

2. ფაზური სივრცის არსი მოცულობის მუდმივობაა (ლიუვილის თეორემა). ბოლო მტკიცების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ თუ საწყის t_0 მომენტში ფაზური წერტილები უწყვეტად შეავსებენ (p,q) ფაზური სივრცის რომელიღაც სასრულ D_0 არეს და დროის მიმდინარეობისას გადავლენ ამ სივრცის D_t არედან სხვა არეში.

მაშინ შესაბამისი ფაზური მოცულობები ერთმანეთის ტოლია

$$\int_{D_0} dq_0 dp_0 = \int_{D_t} dq dp$$

მაშასადამე, ჰიდროდინამიკასთან ანალოგიით, წერტილების მოძრაობა, რომელიც ასახავს სისტემის მდგომარეობას (p,q) სივრცეში შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც სითხის შეუკუმშავი ნაკადის მოძრაობა. ამიტომ ხშირად (p,q) სივრცეში ფაზური მრუდების ერთობლიობას უწოდებენ ნაკადს [19].

3. S_0 უწყვეტი საზღვარი, რომელიც მოიცავს t_0 დროის მომენტში ფაზური სივრცის რომელიღაც D_0 არეს, დროის მიმდინარეობისას ტრანსფორმირდება (არ წყდება) S_t უწყვეტ

სახლვარში, მოიცავს იმ D_0 არეს, რომელშიაც D_0 ევოლუციონირდება t მომენტში.

სისტემებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ მეორე პირობას უწოდებენ კონსერვატიულს.

არსებობს მთელი რიგი ზოგადი წესებისა, რომლებიც იძლევა საშუალებას მოიძებნოს ჰამილტონის განტოლების ამოხსნა. მაგრამ ეს ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ბევრ შემთხვევაში განტოლება არაინტეგრირებადია ელემენტარულ ფუნქციებში. მიუხედავად ამისა ხშირად არის შესაძლებელი მივიღოთ საკმარისი ცნობები სისტემის ეოფაქცივის შესახებ, ისე რომ არ მოვახდინოთ განტოლების ინტეგრირება, მოძრაობის ინტეგრალების მოძებნით, რომლებიც მუდმივია მოძრაობის დროს: $f(q,p)=const$.

ნებისმიერ სისტემაში, რომელშიც $H(q,p)$ არ არის დროზე დამოკიდებული, ჰამილტონიანი წარმოადგენს მოძრაობის ინტეგრალს მოცემული საწყისი პირობებისათვის. ჰამილტონიანის მუდმივი მნიშვნელობა არის სისტემის სრული ენერგია $E=H(q,p)$. აქედან ვიპოვიოთ $q_1=g(q_2...q_n,p,E)$, სადაც g – არის რომელიღაც ფუნქცია.

თუ სისტემის ფაზური ტრაექტორიები მოცემული ენერგიის მნიშვნელობის დროს არ მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, მაშინ ამბობენ, რომ სისტემა არის ფინიტური. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ფინიტურ მოძრაობებს.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ჰამილტონის ზოგიერთი სისტემა ხასიათდება მოძრაობის არარეგულირებადი ან ქაოსური რეჟიმებით. ასეთი რეჟიმების წარმოშობა – ეს თვითონ სისტემის თვისებაა, არ არის დამოკიდებული მის დინამიკაზე, გარეშე შემთხვევითი ძალების მოქმედებაზე, ჰამილტონის სიტემები საკმაოდ ვიწრო კლასია. უმრავლესობა შესასწავლი სისტემებისა – ბილოგიური, ქიმიური, ეკოლოგიური, ფიზიკური და ა.შ. – დისიპატიურია. ეი სისტემები, რომელთათვის არ არის სამართლიანი ლიუვილის თეორემა და რომელთათვის ფაზური მოცულობა დროის მიხედვით არ არის მუდმივი,

არამედ იკუმშება. ფაზური მოცულობის შემცირებას მივყევართ იქამდე, რომ $t \rightarrow \infty$ დისიპატიური სისტემის ყველა ამონახსნი თავს მოიყრის ფაზური სივრცის რომელიმე ცხვესიმრავლეში, რომელსაც უწოდებენ ატრაქტორს [7].

ისიპატიური სისტემის დინამიკური თვისებების შესწავლა გვიჩვენებს, რომ მათ აქვთ მოძრაობის რთული რეჟიმები, ისინი დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორია ატრაქტორი – მარტივი თუ რთული. იმისდა მიხედვით გვაქვს რეგულარული ან ქაოსური მოძრაობები.

ატრაქტორი ეწოდება M ფაზური სივრცის B ქვესიმრავლეს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

ა) B ინვარიანტულია ნაკადის მიმართ;

ბ) არსებობს u არე, რომელიც იკუმშება B -კენ ნაკადის მოქმედებით;

გ) B არ შეიძლება დავშალოთ ორ თანაუკვეთ ინვარიანტულ სიმრავლედ.

უნდა აღინიშნოს, რომ დღეისათვის არ არის ერთი აზრი ატრაქტორის განსაზღვრის საუკეთესო წესზე. ზემოთ ჩამოთვლილი პირობები ეკუთვნის ლენფორდს. არსებობს სხვა ექვივალენტური განსაზღვრებებიც.

ატრაქტორის მიზიდულების B არე ეს არის X_0 საწყისი წერტილების ერთობლიობა, ისეთების, როდესაც $t \rightarrow \infty$ ფაზური ტრაექტორიები დაწყებული ამ წერტილებში მიისწრაფიან B ატრაქტორისაკენ. ჩვეულებრივ დინამიკურ სისტემას აქვს ატრაქტორების სასრული რიცხვი $B_1 \dots B_k$, მაგრამ ცნობილია მარტივი სისტემები, რომლებსაც აქვთ უსასრულოდ დიდი რაოდენობა სხვადასხვა სახის ატრაქტორების. ნებისმიერი დინამიკური სისტემისათვის, რომელსაც აქვს ატრაქტორები, ყველა საწყისი წერტილები ფაზურ სივრცეში, გარდა ნულის – განზომილების

სიმრავლისა, მდებარეობს ურთიერთმათგანის მიზიდვის არეში (გავიხსენოთ ფაზური სიბრტყის მეთოდი, განსაკუთრებული წერტილები, მდგრადობის თეორია).

ადვილი სანახავია, რომ მიზიდვის განსაკუთრებული წერტილები, ისეთები, როგორცაა მდგრადი კვანძი და მდგრადი ფოკუსი, წარმოადგენს ატრაქტორებს, მაგრამ ისიპატიურ სისტემებში ატრაქტორები შეიძლება იყვნენ არამარტო მდგრადი სტაციონარული წერტილები, არამედ შეკრული ფაზური ტრაექტორიები, რომლებიც შეესაბამებიან პერიოდულ მოძრაობებს, როგორც ვიცით, ასეთ იზოლირებულ შეკრულ ტრაექტორიებს უწოდებენ ზღვრულ ციკლებს. მდგრადი ზღვრული ციკლები წარმოადგენს ატრაქტორებს. მათ ის თვისება ახასიათებთ, რომ საკმაოდ მცირე არეში არ არსებობს სხვა შეკრული ტრაექტორიები, ხოლო ყველა სხვა ფაზური მრუდები ამ მიდამოდან დაეხვევიან ამ ერთად-ერთ შეკრულ ტრაექტორიას. თუ ყველა ტრაექტორია გადაიხვევა ზღვრული ციკლიდან, მაშინ ისინი არიან აბსოლუტურად არამდგრადი. ამ შემთხვევაში ზღვრული ციკლი არ იქნება ატრაქტორი.

ზემოთ ჩამოთვლილი ატრაქტორები, მდგრადი სტაციონარული წერტილები, მდგრადი ზღვრული ციკლები და ინვარიანტული ტორები – წარმოადგენს მარტივ ატრაქტორებს. ვინაიდან დინამიკური სისტემები ამ შემთხვევაში არ წარმოადგენს ქაოსურს და ატარებს, ყველაზე რთულ, ეკროდიკულ ხასიათს. მარტივი ატრაქტორები წარმოადგენს დინამიკური სისტემების ფაზური სივრცის ქვემრავალ სახეობას [9]. M სივრცის ქვემრავალსახეობა ეწოდება W ქვესიმრავლეს M' სივრცეში $M' \subseteq M$ ისეთს, რომ ლოკალურად ის გამოიყურება როგორც M' სივრცის ნაჭკერი და აქვს ყოველ წერტილში ერთადერთი ჰიპერ სიბრტყე, ე.ი W ჩადებულია M -ში გლუვად. მაგალითად, ზღვრული ციკლი და ორ განზომილებიანი ინვარიანტული ტორი – ეს არის შესაბამისად ერთ განზომილებიანი და ორ განზომილებიანი ქვემრავალსახეობები; მაგრამ დისიპატიურ დინამიკურ სისტემებში რომელთა ფაზური სივრცის განზომილება $n \geq 3$, არსებობს შემოსაზღვრული მიმზდიველი სიმრავლეები, რომლებიც წარმოადგენს ატრაქტორებს და ამავე დროს

არ წარმოადგენს ქვემრავალსახეობებს. ასეთ ატრაქტორებს უწოდებენ “საკვირველ ატრაქტორებს”. ეს ტერმინი შემოიტანეს დრიუელმა და ფ. ტაკენსმა. ის ნიშნავდა ატრაქტორს, რომელიც განსხვავებულია სტაციონალური წერტილისაგან და ზღვრული ციკლისაგან. დისიპატიური დინამიკური სისტემის ფაზური მოცულობის შეკუმშვას მიეყვება იქამდე, რომ ფაზური მრუდები დროთა განმავლობაში მიიზიდებიან ზღვრული სიმრავლისაკენ – საკვირველი ატრაქტორისაკენ, მოხვდებიან რა მასზე, სამუდამოდ იქ დარჩებიან. თვითონ მოძრაობა საკვირველ ატრაქტორზე არის არამდგრადი: სისტემის ნებისმიერი ორი ტრაექტორია გაიშლება პონენციალურად სწრაფად და რასაკვირველია დარჩება საკვირველ ატრაქტორზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ სისტემის ყოფაქცევა საკვირველი ატრაქტორით ხასიათდება ფაზური მოცულობის გლობალური შეკუმშვით ფაზური ტრაექტორიის ლოკალურ არამდგრადობასთან შეთავსებით.

ვინაიდან ფაზური მრუდები საკვირველ ატრაქტორზე განიშლება, ამიტომ სისტემის დინამიკა ანალოგიურია ასეთი ატრაქტორით შეზღუდულ მოცულობაში ჰამილტონის სისტემის დინამიკის შერევით. ე.ი ის ქაოსურია. დისიპატიურ დინამიკურ სისტემებში ქაოსური მოძრაობის მათემატიკურ სახეს წარმოადგენს საკვირველი ატრაქტორი. სისტემის მცირე შეშფოთებებს შეუძლიათ საკვირველი ატრაქტორის სტრუქტურის შეცვალა. ისინი მას შლიან: ყველა მახლობელი დინამიკური სისტემების მოძრაობა იქნება ქაოსური. სისტემის ევოლუციის გრძელვადიანი პროგნოზირება შეუძლებელია, ვინაიდან ის დამოკიდებულია საწყისის პირობების და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობების კომბინაციაზე. პრაქტიკულად ეს შეუძლებელია სამგანზომილებიანი არაწრფივი სისტემებისთვისაც კი.

1963 წელს ე. ლორენცმა გამოთქვა მოსაზრება იმის შესახებ, რომ ატმოსფეროს დინამიკა ძალიან მგრძობიარეა საწყის პირობებზე, ამ ჰიპოთეზიდან გამდინარეობს ძალიან სერიოზული შედეგები ამინდის პროგნოზირებისათვის იმ შემთხვევაშიც კი თუ ჩვენ შევძლებდით

მეტეოროლოგიური მოდელის გაუმჯობესებას და მონაცემების შეკრებას.

უკანასკნელი წლების ნამუშევრები, რომლებიც დაკავშირებულია “წინასწარმეტყველებასთან” და ე.წ. დინამიურ ქაოსთან, ცხადყოფენ, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია პრინციპულადაც განვსაზღვროთ წინასწარ ნებისმიერი მარტივი სისტემისთვისაც კი მისი ყოფაქცევა გრძელი ვადით, გრძელვადიანი პროგნოზის გაცემა შეუძლებელია მრავალი ობიექტისათვის, რომელსაც შეისწავლის ეკონომიკა, მედიცინა, ფსიქოლოგია და სოციოლოგია [8].

ადრე გამოიყოფოდა ორი კლასის ობიექტები: დეტერმინირებული და შემთხვევით დეტერმინირებული. თუ ზუსტად ვიცით ამ სისტემის მიმდინარე მდგომარეობა, შეიძლება დავადგინოთ, რა მოხდება ამ სისტემისათვის რა გინდ დიდი დროის შემდგომ მაგრამ, როგორც ბოლო დროის გამოკვლევებმა აჩვენა, მისი წინასწარმეტყველება შეიძლება მხოლოდ შეზღუდული დროისათვის. ნებისმიერი უზუსტობა მის საწყის მდგომარეობაში იზრდება დროის მიხედვით და გარკვეული დროისათვის ჩვენ ვკარგავთ შესაძლებლობას წინასწარმეტყველებისა ანუ სისტემა ხდება ქაოტური.

სტოქასტიკური ანუ შემთხვევითი სისტემის განხილვაში წინასწარ ცნობილია, რომ მათთვის შეუძლებელია დეტერმინირებული პროგნოზი. აქ ვსარგებლობთ სტატისტიკური მახასიათებლებით [8].

არაწრფივი დინამიკის ფუნდამენტურ რეზულტატს წარმოადგენს ის, რომ არსებობს პრინციპული შეზღუდვები პროგნოზის დადგენაში, რაც პირველ რიგში განპირობებულია მათი მგრძობიარობით საწყისი მონაცემების მიმართ.

დინამიკური სისტემის განხილვისას: ახლომდებარე ტრაექტორიები (ამონახსნები) დასაწყისში ექსპონენციალურად შეცვლიან თავის მდებარეობას და დაშორდებიან დიდი მანძილით. ასეთ სისტემებს მიეკუთვნებიან კარდიორითმი და სხვა.

ასეთ სისტემებს მიეკუთვნებიან ე.წ. დინამიკური ქაოსის სისტემები. უნდა აღინიშნოს, რომ ფრაქტალური გამოსახულებებისთვისაც დამახასიათებელია დინამიკური ქაოსის თვისება.

ეს ამტკიცებს, რომ დინამიკური ქაოსი არ ნიშნავს არეულობას ჩვეულებრივი საყოფაცხოვრებო ქაოსის გაგებით. დინამიკური ქაოსი შეიცავს გარკვეულ დეტერმინირებას ე.ი. ექვემდებარება გარკვეულ კანონზომიერებას.

აქედან გამომდინარე შეიძლება ვთქვათ, რომ დეტერმინირებული და სტოქასტიკური სისტემების გარდა ტექნიკის და მეცნიერების განვითარების დღევანდელ ეტაპზე არსებობს მთელი კლასი სისტემებისა, რომელიც მოიცავენ როგორც დეტერმინირებად თვისებებს ასევე შემთხვევითსაც.

ამიტომ მას შეიძლება ვუწოდოთ დეტერმინირებულ-სტოქასტიკური სისტემები. ამ სისტემებს მიეკუთვნებიან ბიო-სამედიცინო სისტემები, როდესაც ობიექტზე მოქმედებენ მრავალი ფაქტორები, რის შედეგად ასეთი დინამიკური არაწრფივი სისტემა იძენს დინამიკური ქაოსის თვისებას, როცა პაციენტის მდგომარეობა (მაგ.: კარდიორითმის ცვლილების მიხედვით) ნორმალურია, მისი ფაზურ სიბრტყეში მიღებული ამონახსნის წარმოდგენა, ატარებს ქაოტურ ხასიათს, ხოლო თუ პაციენტს გააჩნია პრობლემები და მისი კარდიორითმის ცვლილება დაავადების ზღვარზეა, იგი სხვა სახისაა [15].

ფაზური სიბრტყის მეთოდი – არის დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მეთოდი (არის თანდათანობითი მიახლოების მეთოდი, ეილერის ამოხსნის მეთოდი და სხვა).

ჩვენს შემთხვევაში ჩვენ ვიხილავთ ამ მეთოდს, იმიტომ რომ იგი მიეკუთვნება ამოხსნის გრაფიკულ მეთოდებს. ამ მეთოდისთვის დამახასიათებელია ის, რომ დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა ამოხსნის შედეგი აისახება გრაფიკით: აბსცისათა ღერძზე მოცემულია ნაპოვნი ამონახსნის შედეგები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე მისი ცვლილების

სიჩქარე (პირველი რიგის წარმოებული) ან პირიქით. სტაციონალური წერტილი იქნება ის, სადაც წარმოებული უდრის ნულს.

1.2 დინამიკური სისტემების ალგორითმის მოდელები

დეტერმინირებული ქაოსის თეორია წარმოადგენს თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების უახლესი მეთოდების გამოყენების მნიშვნელოვან მაგალითს.

კომპიუტერული ტექნოლოგიების ქვეშ ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ დინამიკური სისტემის კვლევას და რეალიზაციას დეტერმინირებული ქაოსის საფუძველზე.

დინამიკური პროცესების კვლევა დავიწყეთ დინამიკური დეტერმინირებული სისტემის ანალიზით „ლოტკი-ვოლტერ“-ის მაგალითზე.

დინამიკური დეტერმინირებულ სისტემად განვიხილოთ „მტაცებელი-მსხვერპლი“-ს სისტემა, რომელიც აღიწერება ქვემოთ მოყვანილი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემით. სადაც x_1 არის მსხვერპლი, x_2 –მტაცებელი, a –მსხვერპლის გამრავლების სიჩქარე, $b x_2$ –მტაცებლებით გამოწვეული დანაკარგი, $-c$ –მტაცებლების პოპულაციის სიჩქარე.

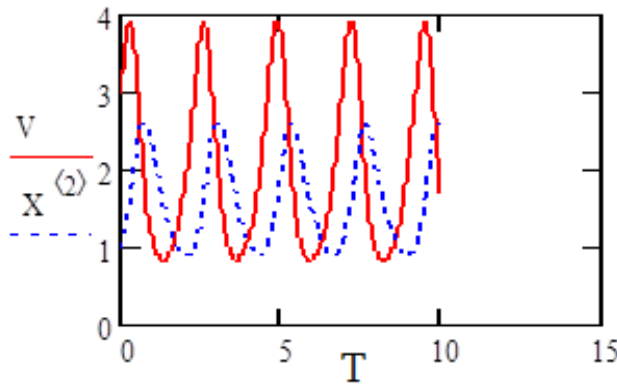
$$\frac{d}{dt}x_1 = (a - b \cdot x_2) \cdot x_1$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 \quad a := 4 \quad b := 2.5 \quad c := 2 \quad d := 1$$

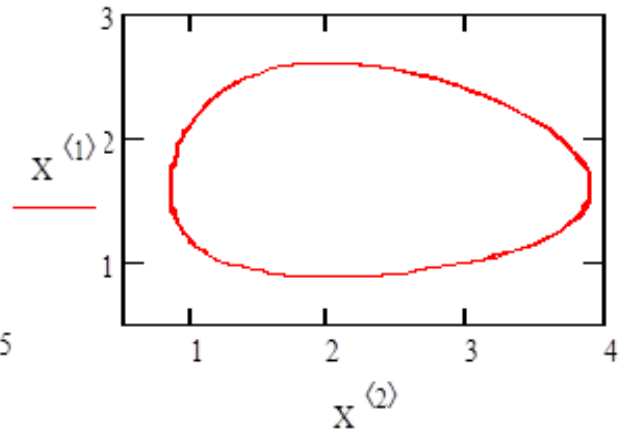
$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F(t, x) := \begin{bmatrix} (a - b \cdot x_2) \cdot x_1 \\ (-c + d \cdot x_1) \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

$$X := \text{rkfixed}(x, 0, 10, 400, F)$$

$$V := X(2)$$



ნახ.2 მსხვერპლი X^1 და მტაცებლები X^2 -ის რაოდენობის ცვლილება დროის მიხედვით



ნახ.3 მსხვერპლისა და მტაცებლების რაოდენობის ურთიერთდამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში

ჩვენ ვხედავთ, რომ იგი ატარებს რხევით ხასიათს.

შემდეგ ნახაზზე მოცემული გვაქვს მოდელი რომელიც ითვალისწინებს ამ მტაცებლებისა და მსხვერპლის კონკურენციას.

```

ORIGIN := 1
a := 4    b := 2.5    d := 1    c := 2
alpha := 0.1

x := ( 3
      1 )

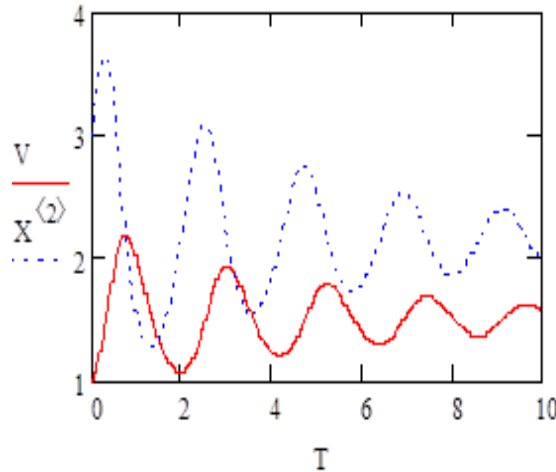
F(t,x) := [ (a - b*x2)*x1 - alpha*(x1)^2
            (-c + d*x1)*x2 - alpha*(x2)^2 ]

X := rkfixed(x, 0, 10, 1000, F)

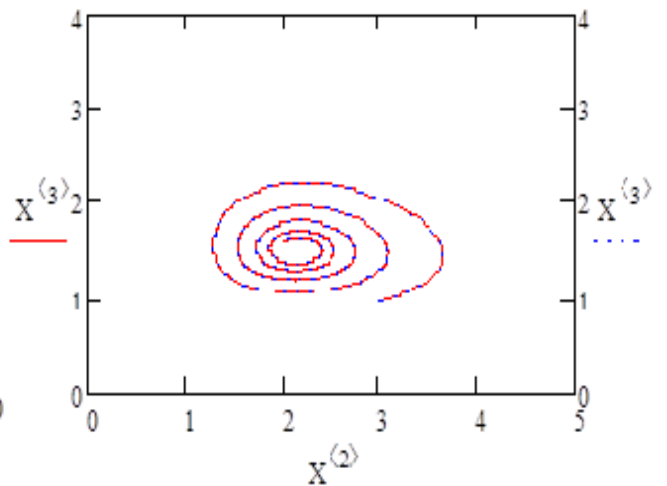
i := 0..length(X<1>)

V := X<3>
T := X<1>

```

ნახ.4 მსხვერპლი X^1 და მტაცებლები X^2 -ის რაოდენობის ცვლილება T დროის მიხედვით შიდა კონკურენციის პირობებში



ნახ.5 შიდა კონკურენციის პირობებში მსხვერპლისა და მტაცებლების რაოდენობის ურთიერთდამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში

ამ შემთხვევაში ეს რხევითი ხასიათი დებულობს მიღვევადობის სახეს.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი რომელშიც გვაქვს ჰარმონიული სიგნალი.

ავიღოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t) + c \cdot \frac{d}{dt}x(t) \right) + x(t)^3 = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

სადაც c , A , და ω მუდმივებია, კვლევისას ჩნდება ქაოსი და დინამიკური სისტემები, რომლებიც ცნობილია Duffing-ის განტოლებით.

ქვემოთ ჩვენ ამოვსხნით Duffing-ის განტოლებას არჩეული პარამეტრებით

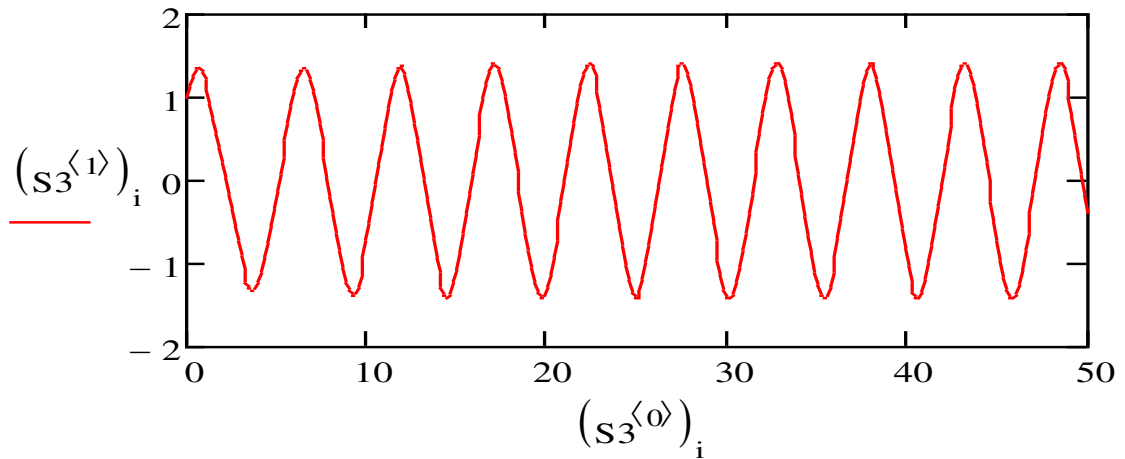
$$\underline{c} := 0.1 \quad \underline{\omega} := 1.2 \quad \underline{A} := 0.5$$

და პირობის საწყისი ვექტორი

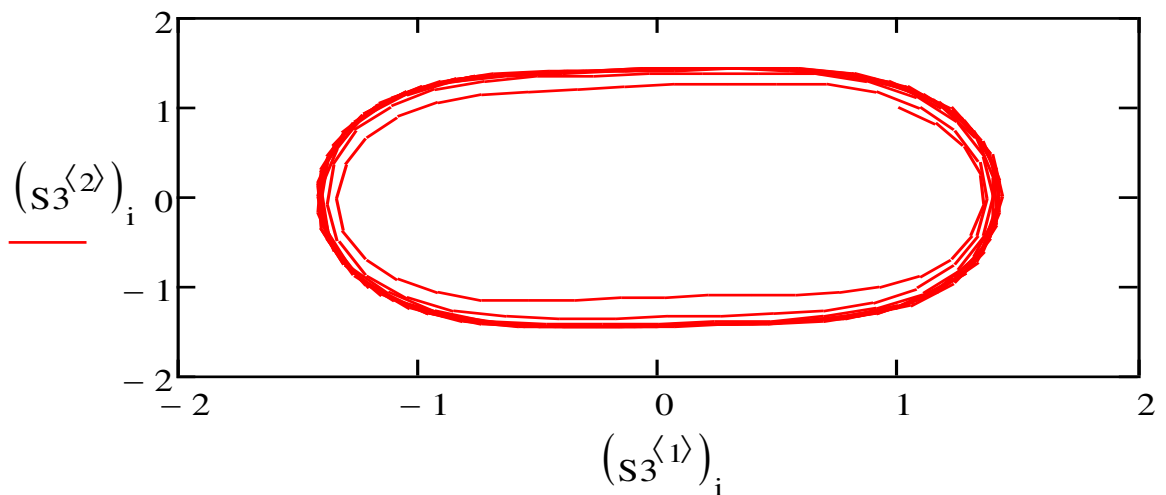
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) - (X_0)^3 - c \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

S3 := rkfixed(ic, 0, 50, 300, D)

i := 0..last(S3<0>)



ნახ.6 მიღებული სიგნალის ცვლილება დროის მიხედვით.



ნახ.7 სიგნალის და მისი ცვლილების დამოკიდებულება ფაზურ სიბრტყეში

1.3 ლორენცის სისტემა, რომორც დეტერმინირებული ქაოსის სისტემის კლასიკური მაგალითი.

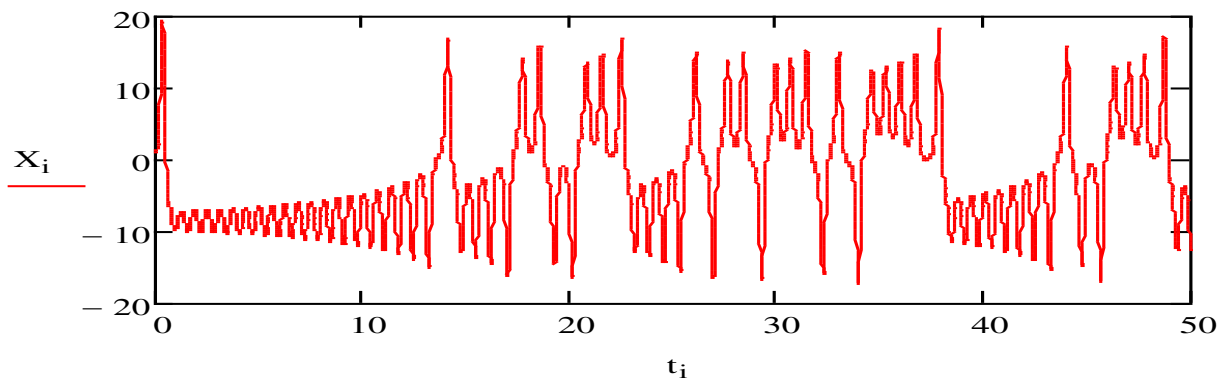
მოცემულია სისტემა, რომელიც აღწერს Lorenz Attractor დინამიკურ პროცესს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებით და პარამეტრებით $\alpha=10$ $\beta=28$ $\gamma=8/3$.

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) \cdot y(t) - \frac{8}{3} \cdot z(t)$$

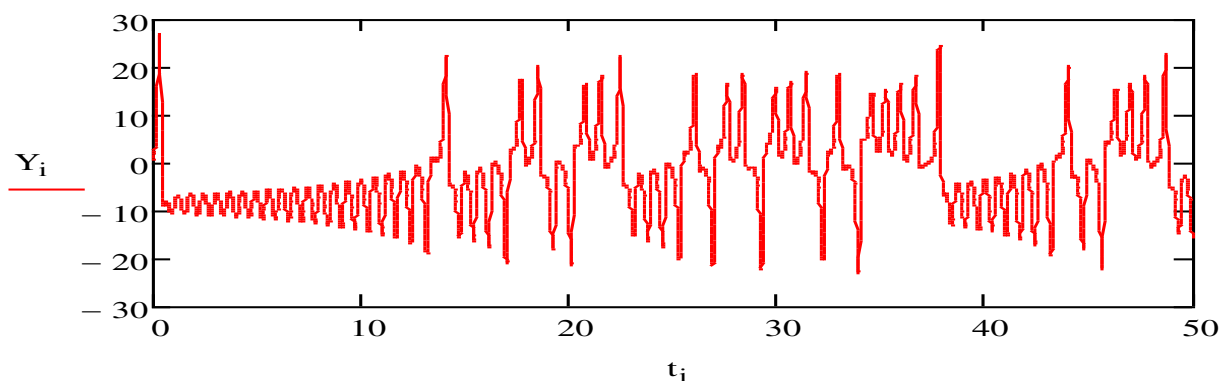
$$\frac{d}{dt}x(t) = 10 \cdot y(t) - 10 \cdot x(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t) \cdot z(t) + 28 \cdot x(t)$$

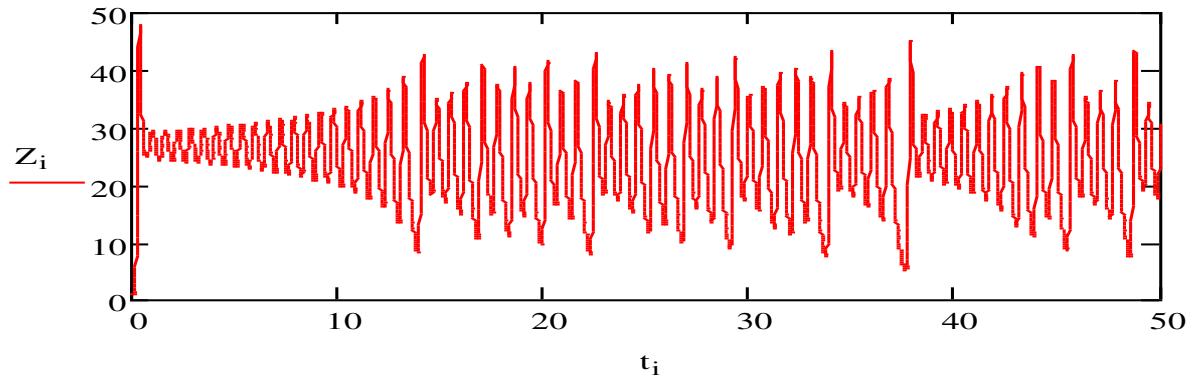
ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ X, Y, Z ფუნქციების დამოკიდებულებას დროის მიხედვით.



ნახ.8 ლორენცის სისტემის X ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა



ნახ.9 ლორენცის სისტემის Y ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა



ნახ.10 ლორენცის სიტემის Z ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა

ეს ამონახსნი მიღებულია ქვემოთ მოყვანილი გამოსახულების მონაცემების მიხედვით

Npts := 3000

$L := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, \text{Npts}, D \right]$

$t := L^{(0)} \quad Y := L^{(2)} \quad Z := L^{(3)}$

$X := L^{(1)}$

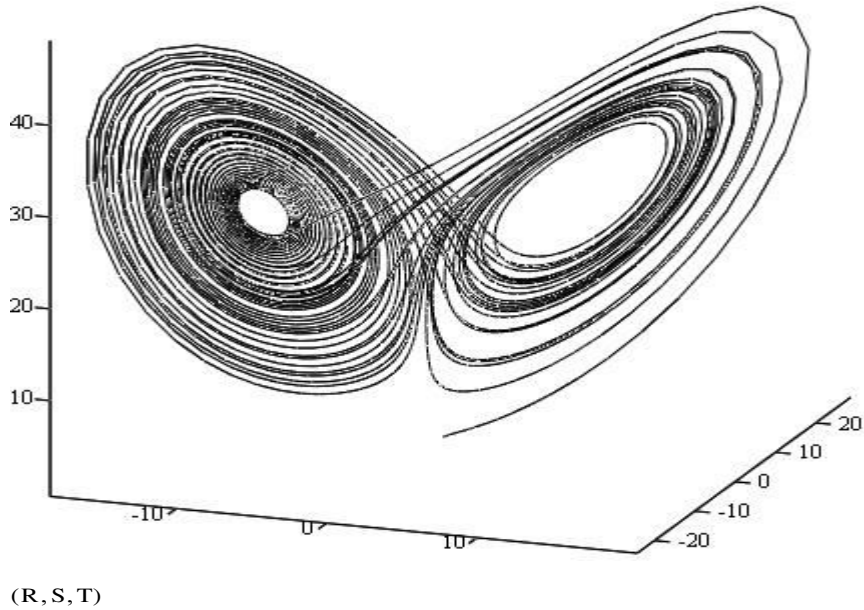
თუ გაითვალისწინებთ მცირე შეცდომას ϵ , სივრცეში მივიღებთ სურათს, რომელიც ასახავს **Lorenz Attractor**-ს.

$R^{(0)} := X \quad R^{(1)} := X + \epsilon$

$i := 0..Npts$

$S^{(0)} := Y \quad S^{(1)} := Y + \epsilon$

$T^{(0)} := Z \quad T^{(1)} := Z + \epsilon$



ნახ.11 ამონახსნთა ფაზური პორტრეტი.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

ავილოთ დიფერენციალური განტოლება

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \cdot \frac{d}{dt} x(t) \right) + x(t)^3 = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

სადაც c , A , და ω მუდმივებია, კვლევისას ჩნდება ქაოსი და დინამიკური სისტემები, რომლებიც ცნობილია Duffing-ის განტოლებით.

ქვემოთ ჩვენ ამოვხსნით Duffing-ის განტოლებას არჩეული პარამეტრებით

$$\underline{c} := 0.0; \quad \omega := 0.7 \quad \underline{A} := 2.5$$

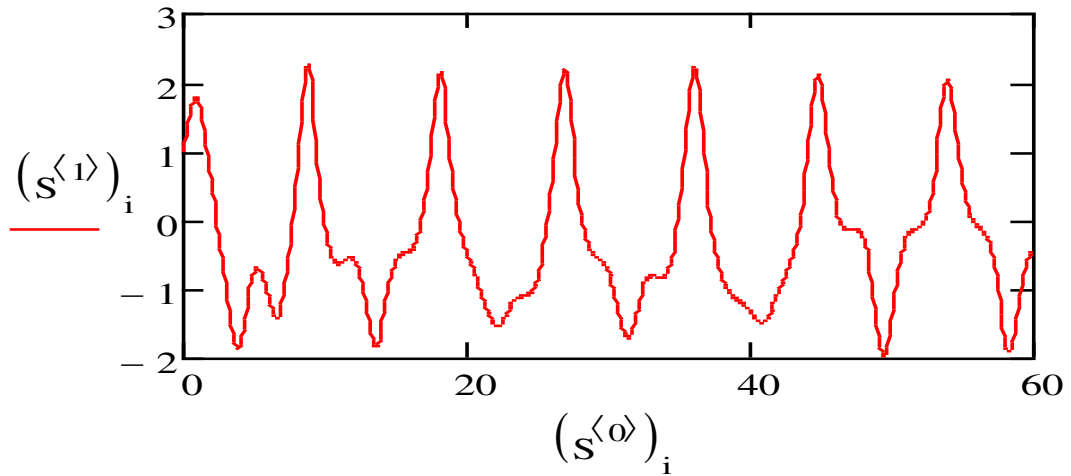
საწყისი პირობების ვექტორით

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

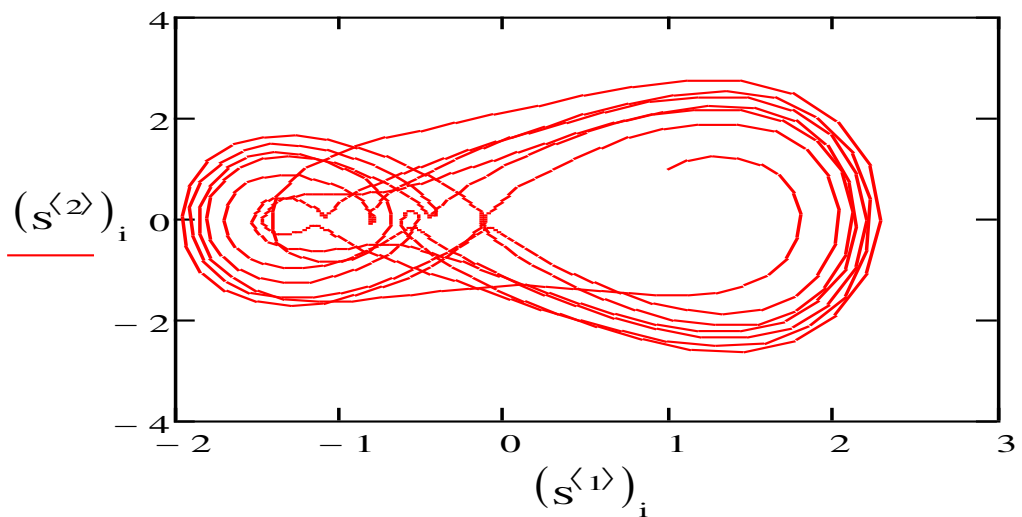
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) - (X_0)^3 - c \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$$S_{\text{sol}} := \text{rkfixed}(ic, 0, 60, 500, D)$$

$$i := 0..last(S^{(0)}) \quad last(S^{(0)}) = 500$$



ნახ.12 ამონახსნის გრაფიკული წარმოდგენა: ანუ სიგნალის ცვლილება დროის მიხედვით



ნახ.13 სისტემის ამონახსნთა ფაზური პორტრეტი

1.4 დეტერმინირებული ქაოსის ექსპერიმენტული

კვლევა

ამ პარაგრაფში მოყვანილია ქაოსოგრაფის მიღების ალგორითმები, დაფუძნებული რეალური მონაცემებისთვის, რომლებიც მოპოვებული იყო კარდიორითმის სისწირის ცვლილებების, სეისმოგრაფის მონაკვეთის და ამინდის ტემპერატურის ცვლილებისთვის ერთი წლის პერიოდში. მონაცემები პირველ შემთხვევაში წარმოდგენილია ცხრილის სახით, რომელიც ნაჩვენებია 24 საათის განმავლობაში, ყოველ ერთ საათში მიღებულ მონაცემებს, ხოლო საათის განმავლობაში მონაცემები ავიღეთ დამატებითი გრაფიკებიდან. №1 ცხრილში მოცემულია ზემოდ ნახსენები მონაცემები.

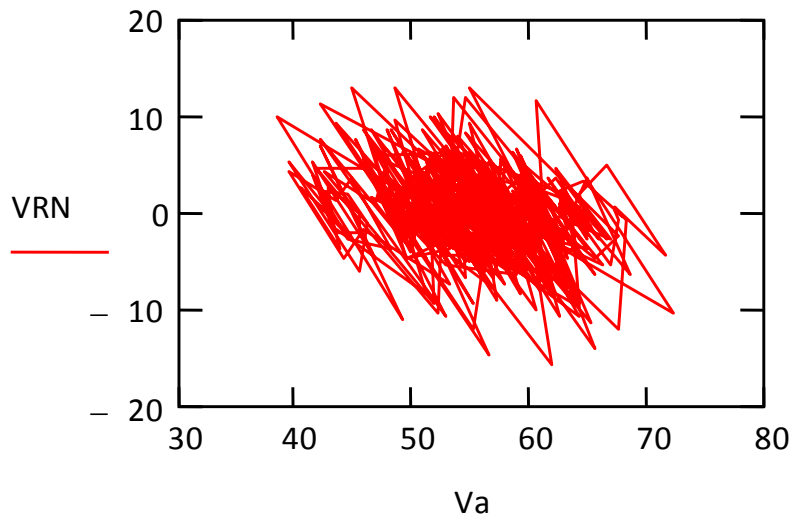
არაწრფივი დინამიკის კანონების თანახმად საკვლევი პროცესი უნდა განვიხილოთ ფაზურ სიბრტყეში [57,8]. კარდიორითმის სისწირის დინამიკის მიმართებაში გარდა რითმის სისწირის განსაზღვრისა უნდა გამოითვალოს ამ პარამეტრის ცვლილების სინქარეც [8]. არაწრფივი დინამიკა ამ პროცესისა განისაზღვრება ქაოსოგრაფის აგებით. სამუშაოში ასახულია მიღებული ქაოსოგრაფები ჯანმრთელი და ავადმყოფობის ზღვარზე მყოფი პაციენტისათვის.

ნახ.14-ზე მოცემულია ჯანმრთელი ადამიანისათვის მიღებული კარდიორითმის ცვლილების გრაფიკული წარმოდგენა ფაზურ სიბრტყეში (ქაოსგრამა) [53,54]. აბსცისათა ღერძზე გადაზომილია რითმოგრაფის სისწირის ცვლილება დროის მიხედვით, ორდინატათა ღერძზე კი გადაზომილია რითმოგრაფის სისწირის ცვლილების სინქარე.

კარდიორითმის სიხშირის ცვლილებები 24 საათის განმავლობაში

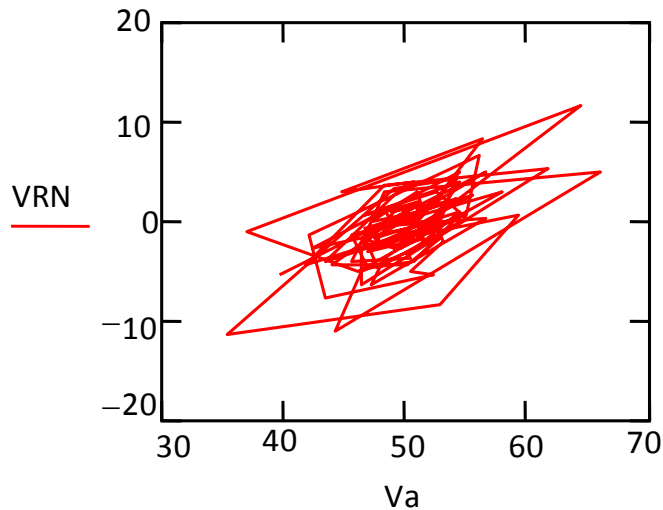
data :=

	0	1	2	3	4
0	1	$2.845 \cdot 10^3$	72	96	156
1	2	$4.394 \cdot 10^3$	64	89	157
2	3	$4.342 \cdot 10^3$	60	77	112
3	4	$4.23 \cdot 10^3$	62	76	124
4	5	$4.257 \cdot 10^3$	62	84	144
5	6	$4.888 \cdot 10^3$	73	107	169
6	7	$5.206 \cdot 10^3$	73	104	158
7	8	$5.702 \cdot 10^3$	74	105	175
8	9	$4.749 \cdot 10^3$	67	83	116
9	10	$4.696 \cdot 10^3$	66	88	129
10	11	$4.358 \cdot 10^3$	62	79	109
11	12	$4.6 \cdot 10^3$	64	86	157
12	13	$4.343 \cdot 10^3$	61	83	117
13	14	$4.25 \cdot 10^3$	61	78	122
14	15	$4.044 \cdot 10^3$	58	75	109
15	16	$4.267 \cdot 10^3$	56	73	109
16	17	$3.905 \cdot 10^3$	59	79	131
17	18	$3.995 \cdot 10^3$	55	69	100
18	19	$4.04 \cdot 10^3$	55	71	106
19	20	$4.175 \cdot 10^3$	54	75	111
20	21	$4.034 \cdot 10^3$	56	69	115
21	22	$4.278 \cdot 10^3$	55	74	135
22	23	$4.565 \cdot 10^3$	57	82	156
23	24	$4.089 \cdot 10^3$	74	99	142
24	25	37	0	0	...
25					



ნახ.14 ჯანმრთელი ადამიანის მდგომარეობისათვის დამახასიათებელი ქოსოგრამის მაგალითი.

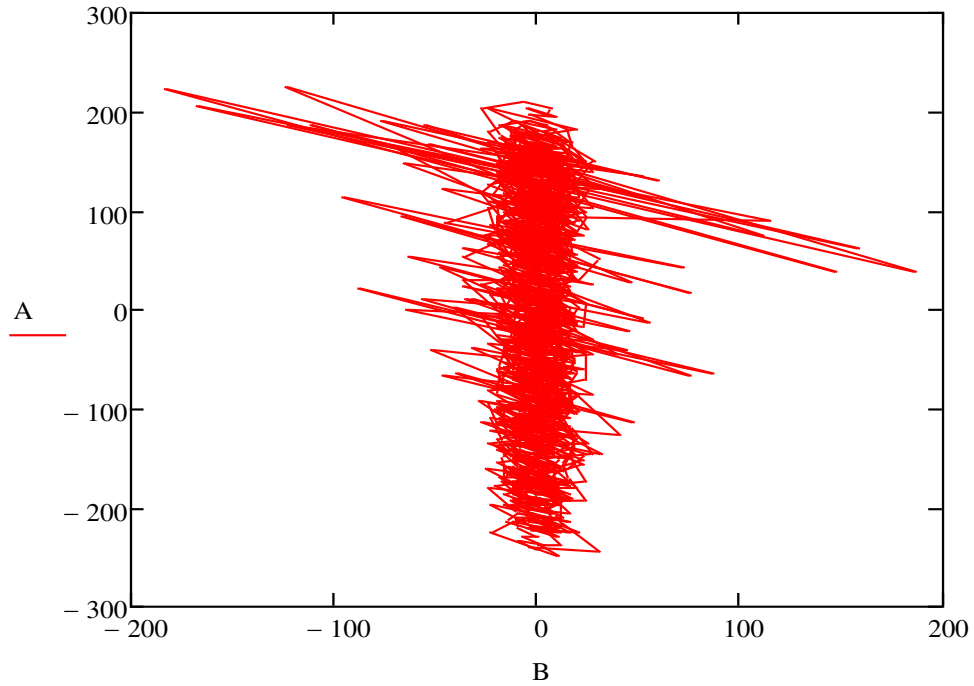
ქვედა ნახაზზე მოცემულია ქოსოგრამა იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს სისტემის დისბალანსს.



ნახ.15 ავადმყოფობის ზღვარზე მეოფი პაციენტის მდგომარეობისათვის დამახასიათებელი ქოსოგრამის მაგალითი.

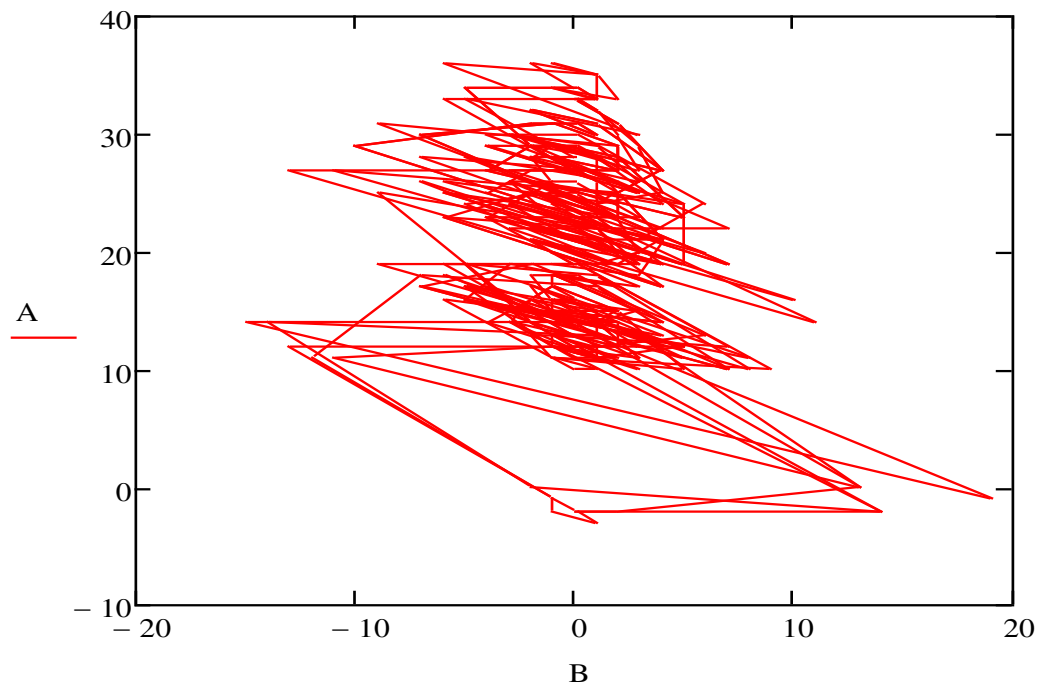
როგორც ვხედავთ, ნახ.15-ზე ჩნდება კარდიორითმის დინამიკის “ქოტირების” დარღვევა. ქოსოგრამის დამუშავება ცნობილი მეთოდიკით, მაგ. ჰისტოგრამის აგებით იძლევა საშუალებას გაკეთდეს დასკვნა არა მხოლოდ პაციენტის მდგომარეობის შესახებ მოცემულ მომენტში, არამედ ნაწინასწარმეტყველები იქნეს მოსალოდნელი დარღვევები.

განვიხილოთ შემდეგი ექსპერიმენტი, სადაც ქაოსოგრამა მიღებული გვაქვს სეისმოგრამის მონაცემებზე, რომლებიც მოგვაწოდა გეოფიკის ინსტიტუტმა.



ნახ.16 სეისმოგრამის მონაცემების ქაოსოგრამა

ასევე მივიღეთ შემდეგი სახის ქაოსოგრამა, რომელიც აგებულია ერთი წლის განმავლობაში აღებულ ამინდის ანათემების მონაცემებზე.



ნახ.17 ამინდის ტემპერატურის ცვლილებების ქაოსოგრამა.

ყველა მიღებული შედეგი ქაოსოგრამის სახით შეიძლება დამუშავდეს ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდით, რომელიც მიესადაგება ქაოსოგრამის ანალიზს და დაფუძნებულია მიღებული ქაოსოგრამისთვის ენტროპიის განსაზღვრით.

1.5 ქაოსოგრამის ანალიზის მეთოდობა

ვიდრე განვიხილავდეთ ქაოსოგრამის ანალიზის მეთოდობას ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ მეთოდობას მოვიყვანოთ ინფორმაციის რაოდენობის და ენტროპიის ცნებების აღწერა.

ინფორმაციის თეორია ეწოდება მეცნიერებას, რომელიც სწავლობს ინფორმაციის გადაცემასთან, დამუშავებასა და შენახვასთან დაკავშირებულ რაოდენობრივ კანონზომიერებებს. წარმოიშვა რა ჩვენი საუკუნის 40-იან წლებში ინფორმაციის თეორია ამჟამად იქცა მართვის ყველანაირ შესაძლო პროცესების შესწავლის აუცილებელ მათემატიკურ აპარატად [56].

შემთხვევითობის ნიშნები, რომლებიც თან ახლავს ინფორმაციათა გადაცემის პროცესებს, გვაიძულებენ მივმართოთ ამ პროცესების შესწავლისას ალბათობით მეთოდებს. ამასთან ვერ ხერხდება შემოვიფარგლოთ ალბათობათა თეორიის კალსიკური მეთოდებით და წარმოიშობა ახალი ალბათობითი კატეგორიების შექმნის აუცილებლობა. მის გამო, ინფორმაციის თეორია წარმოადგენს არა უბრალოდ გამოყენებით მეცნიერებას, რომელშიც გამოიყენება კვლევის ალბათობითი მეთოდები, არამედ უნდა განხილულ იქმნას, როგორც ალბათობათა თეორიის განყოფილება.

სხვადასხვა სახის ინფორმაციის მიღება, დამუშავება, გადაცემა და შენახვა – აუცილებელი პირობაა ნებისმიერი მმართველი სისტემის მუშაობისა. ამ პროცესში ყოველთვის ხდება ინფორმაციათა გაცვლა სისტემის სხვადასხვა რგოლებს შორის. უმარტივესი შემთხვევა – ინფორმაციის გადაცემა მმართველი მოწყობილობიდან შემსრულებელ ორგანოზე (ბრძანების გადაცემა). უფრო რთული შემთხვევაა – მართვის შეკრული კონტური, რომელშიც ინფორმაცია ბრძანების შესრულების შესახებ გადაცემა მმართველ მოწყობილობას ე.წ. “უკუკავშირი”-ს

მეშვეობით. ნებისმიერი ინფორმაცია, რომ გადაცემულ იქნას აუცილებელია ჯერ მათი “კოდირება” ე.ი მისი გადატანა სპეციალურ სიმბოლოებისა და სიგნალების ენაზე.

ინფორმაციის გადამცემ სიგნალებად შესაძლებელია იყვნენ ელექტრული იმპულსები, სინათლის ან ბგერითი რხევები, მექანიკური გადაადგილებანი და ა.შ.

ინფორმაციის თეორიის ერთ-ერთ ამოცანას წარმოადგენს კოდირების ეკონომიური მეთოდების გამონახვა [56], რომლებიც საშუალებას იძლევიან გადაცემულ იქნას მოცემული ინფორმაცია სიმბოლოთა მინიმალური რაოდენობის საშუალებით. ეს ამოცანა წყდება როგორც კავშირის არხში დამახინჯებათა არ არსებობის შემთხვევაში, ისე მათი არსებობის პირობებში.

ინფორმაციის თეორიის მეორე ტიპური ამოცანა ისმება შემდეგნაირად: გვაქვს ინფორმაციის წყარო (გადამცემი), რომელიც უწყვეტად გამოიმუშავებს ინფორმაციას და კავშირის არხი, რომლითაც ეს ინფორმაცია გადაეცემა მეორე ინსტანციას (მიმღებს). როგორი უნდა იყოს კავშირის არხის გამტარუნარიანობა იმისათვის, რომ არხი “სძლებდეს” თავის ამოცანას, ე.ი გადასცემდეს ყველა შემოსულ ინფორმაციას შეუფერხებლად და დაუმახინჯებლად.

ინფორმაციის თეორიის მთელი რიგი ამოცანებისა მიეკუთვნება დამმასხოვრებელი მოწყობილობათა მოცულობის განსაზღვრას, რომლებიც განკუთვნილია ინფორმაციათა შენახვისათვის, ამ დამმასხოვრებელ მოწყობილობებში. ინფორმაციის შეყვანის და მისი უშუალო გამოყენების მიზნით მისი გამოყვანის ხერხებს.

რომ გადავწყვიტოთ ასეთი ამოცანები, უწინარესყოფლისა უნდა ვისწავლოთ რაოდენობრივად გავზომოთ გადასაცემი ანდა შესანახი ინფორმაციის მოცულობა, კავშირის არხის გამტარუნარიანობა და მათი მგრძობელობა დაბრკოლებათა მიმართ. ძირითადი ცნებები ინფორმაციის თეორიისა, რომელიც გადმოიცემა მოცემულ თავში, საშუალებას იძლევა ინფორმაციის გადაცემის პროცესების რაოდენობრივი აღწერისა და ზოგიერთი მატემატიკური

კანონზომიერებათა მონიშვნისა, რომლებიც მიეკუთვნებიან ამ პროცესებს [56].

ყოველი შეტყობინება, რომელთანაც ჩვენ გვაქვს საქმე ინფორმაციის თეორიაში, წარმოადგენს რომელიღაც ფიზიკურ სისტემაზე ცნობათა ერთობლიობას. მაგალითად, მწარმოებელი საამქროს მართვის ავტომატიზებული სისტემის შესასვლელში შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება წუნის ნორმალურ ან გადიდებულ პროცენტზე, ღუმელში ნედლეულის ქიმიურ შემადგენლობაზე ან ტემპერატურაზე. მართვის სისტემის შესასვლელში საპაერო თავდაცვის საშუალებებით შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება იმაზე, რომ ჰაერშია ორი მიზანი, რომლებიც მიფრინავენ გარკვეულ სიმაღლეზე გარკვეული სიჩქარით, მაგრამ იმავე შესასვლელით შეიძლება გადაცემულ იქნას შეტყობინება იმის შესახებ, რომ გარკვეულ აეროდრომზე მოცემულ მომენტში იმყოფება გამანადგურებელთა რაღაც რაოდენობა საბრძოლო მდგომარეობაში, ან აეროდრომი გამოყვანილია წყობიდან მოწინააღმდეგის საცეცხლე მოქმედებით, ან პირველი მიზანი ჩამოგდებულია, ხოლო მეორე განაგრძობს ფრენას შეცვლილი კურსით [56]. ამ ცნობებიდან ნებისმიერი – აღწერს რომელიღაც ფიზიკური სისტემის მდგომარეობას.

ცხადია, თუ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობა ცნობილი იქნებოდა წინასწარ, არ ექნებოდა აზრი ცნობის გადაცემას. ცნობა ღებულობს აზრს მხოლოდ მაშინ, როდესაც სისტემის მდგომარეობა წინასწარ უცნობია, შემთხვევითია.

ამიტომ ობიექტად, რომელზედაც გადაიცემა ინფორმაცია, ჩვენ განვიხილავთ რომელიღაც ფიზიკურ X სისტემას, რომელიც შემთხვევით შეიძლება აღმოჩნდეს ამა თუ იმ მდგომარეობაში. ე.ი სისტემას, რომელსაც აუცილებლად ახასიათებს განუსაზღვრელობის რომელიღაც ხარისხი. ცხადია ცნობები სისტემაზე იქნება ზოგადად რომ ვთქვათ უფრო მეტი ფასის და შინაარსიანი, რაც მეტი იქნება სისტემის განუსაზღვრელობა ამ ცნობათა მიღებამდე (აპრიორი). ისმის

ბუნებრივი კითხვა: რას ნიშნავს განუსაზღვრელობის “მეტი” ან “ნაკლები” ხარისხი და რით შეიძლება იგი გაიზომოს?

რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვაზე, შევადაროთ თითოეულ მათგან აქვს განუსაზღვრელობა.

პირველ სისტემად ავიღოთ მონეტა, რომელიც ასროლის შედეგად შეიძლება აღმოჩნდეს ორიდან ერთ-ერთ მდგომარეობაში: 1) მოვიდა ღერბი და 2) მოვიდა ციფრი. მეორედ – კამათელი, რომელსაც ექვსი შესაძლო მდგომარეობა აქვს: 1, 2, 3, 4, 5, 6. ისმის კითხვა განუსაზღვრელობა რომელი სისტემისაა უფრო მეტი? ცხადია მეორის, რადგან მასში მეტია შესაძლო მდგომარეობანი, რომელთაგან თითოეულში ის შეიძლება აღმოჩნდეს ერთნაირი ალბათობით [56].

შეიძლება გვეჩვენოს, რომ განუსაზღვრელობის ხასიათი განისაზღვრება სისტემის შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვით, მაგრამ საერთოდ ეს ასე არ არის. განვიხილოთ მაგალითად ტექნიკური მოწყობილობა, რომელიც შეიძლება იყოს ორ მდგომარეობაში: 1) გამართული და 2) დაზიანებული. ვივარაუდოთ, რომ ცნობების მიღებამდე (აპრიორი) მოწყობილობის გამართული (დაზიანებული) მუშაობის ალბათობა 0.99-ია, ხოლო დაზიანების ალბათობაა 0.01. ასეთ სისტემას გააჩნია განუსაზღვრელობის მხოლოდ მცირე ხარისხი: თითქმის შეუცდომლად შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ მოწყობილობა წესიერად იმუშავებს. მონეტის ასროლის დროსაც აგრეთვე გვაქვს ორი შესაძლო მდგომარეობა, მაგრამ განუსაზღვრელობის ხარისხი გაცილებით მეტია. ჩვენ ვხედავთ, რომ ფიზიკური სისტემის განუსაზღვრელობის ხარისხი განისაზღვრება, არამარტო მისი შესაძლო მდგომარეობათა რიცხვით, არამედ მდგომარეობის ალბათობითაც [56].

გადავიდეთ ზოგად შემთხვევაზე. განვიხილოთ რომელიღაც სისტემა X , რომელსაც შეუძლია მიიღოს მდგომარეობათა სიმრავლე: x_1, x_2, \dots, x_n , ალბათობებით p_1, p_2, \dots, p_n სადაც

$$p_i = P(X \sim x_i) \quad (1.5.1)$$

არის ალბათობა იმისა, რომ X სისტემა მიიღებს x_i მდგომარეობას (სიმბოლოთი $X \sim x_i$ აღინიშნება ხდომილობა: სისტემა იმყოფება x_i მდგომარეობაში).

ცხადია
$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

ჩავწეროთ ეს მონაცემები ცხრილის სახით, სადაც ზემო სტრიქონში ჩამოთვლილია სისტემის შესაძლო მდგომარეობანი, ხოლო ქვედაში – შესაბამისი ალბათობანი:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

ეს ცხრილი ჩაწერის მიხედვით წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდის განაწილების მწკრივისა შესაძლო x_1, x_2, \dots, x_n , მნიშვნელობებით, რომელთაც აქვთ p_1, p_2, \dots, p_n ალბათობები. და მართლაც, მდგომარეობათა სასრულო სიმრავლის მქონე ფიზიკურ X სისტემას და წყვეტილ შემთხვევით სიდიდეს შორის მრავალია საერთო; იმისათვის, რომ დავიყვანოთ პირველი მეორეზე, საკმარისია მივაწეროთ თითოეულ მდგომარეობას რომელიღაც რიცხვითი მნიშვნელობა (ვთქვათ მდგომარეობის ნომერი). ავლნიშნავთ, რომ სისტემის განუზღვრელობის ხარისხი აღსაწერად სრულებითაც არ არის მნიშვნელოვანი, სახელდობრ, თუ რომელი მნიშვნელობანი x_1, x_2, \dots, x_n , – არის ჩაწერილი ცხრილის ზედა სტრიქონში. მნიშვნელოვანია მხოლოდ რაოდენობა ამ მნიშვნელობებისა და მათი ალბათობები.

სისტემის (ან წყვეტილი შემთხვევითი X სიდიდის) აპრიორული განუზღვრელობის ზომად ინფორმაციის თეორიაში გამოიყენება სპეციალური მახასიათებელი, რომელსაც ეწოდება ენტროპია. ინფორმაციის თეორიაში ენტროპიის ცნება ძირითადია.

სისტემის ენტროპია ეწოდება სისტემის სხვადასხვა მდგომარეობათა ალბათობების მათ ლოგარითმზე ნამრავლების ჯამს შებრუნებული ნიშნით.

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (1.5.2)$$

ენტროპიას $H(X)$, როგორც ჩვენ შემდგომში დავინახავთ, გააჩნია მთელი რიგი თვისებებისა, რომლებიც ამართლებენ მის არჩევას განუზღვრელობის ხარისხის მახასიათებლად. ჯერ ერთი ის იქცევა ნულად, როცა სისტემის ერთ-ერთი მდგომარეობათაგანი უტყუარია (უეჭველია) ხოლო სხვა – შეუძლებელი, მეორე – მდგომარეობათა მოცემული რიცხვისას იგი იქცევა მაქსიმუმად, როცა ეს მდგომარეობანი თანაბრად სააღბათოა, ხოლო მდგომარეობათა რიცხვის გაზრდისას – იზრდება და ბოლოს, რაც ყველაზე მთავარია – მას გააჩნია ადიტიურობის თვისება, ე.ი როცა რამდენიმე დამოუკიდებელი სისტემა გაერთიანდება ერთში, მათი ენტროპიები იკრიბებიან.

ქაოსოგრაფიის მიღებისას [8], რომელიც მიღებული იყო ჯანმრთელი და ინფექტის წინამდებარე კარდიოგრაფიის სისშირის ცვლილების პაციენტისათვის ცხადად მეტყველებს მათთვის სურათების სხვაობაზე, არსებობს ქაოსოგრაფების ანალიზისთვის დამუშავებული მეთოდები [11], რომლებსაც მიეკუთვნება ფაქტორული ანალიზი, სპექტრალური ანალიზი და დროით სისშირული წარმოდგენა, რომელიც შეისწავლის კარდიოგრაფიის ფორმის დინამიკას, ვეივლეტ – გადრაქმნის საფუძველზე [8]. ჩვენ ვთავაზობთ განსხვავებულ მარტივ მეთოდიკას, რომელიც დაფუძნებულია ქაოსოგრაფიისთვის ჰისტოგრაფიის აგებაზე და შემდგომ კი ენტროპიის განსაზღვრაზე. ამ სისტემისთვის ინფორმაციის თეორიიდან ცნობილია [56], რომ თუ ობიექტის სისტემის მდგომარეობის შესახებ უნდა გადაიცეს ინფორმაცია, ეს ობიექტი უნდა შეიცავდეს გარკვეულ განუსაზღვრელობის ხარისხს, რომ მიღებულ ინფორმაციას ჰქონდეს გარკვეული მნიშვნელობა. შეტყობინებას გააჩნია აზრი, მაშინ, როცა სისტემის მდგომარეობა წიანასწარ არ არის ცნობილი.

მიღებული ინფორმაცია მით უფრო ღირებული იქნება, რაც უფრო დიდი განუსაზღვრელობა გააჩნდა სისტემას თავდაპირველად. სწორედ ამ განუსაზღვრელობის შესაფასებლად შემოღებულია ენტროპიის ცნება. თუ განვიხილავთ X სისტემას რომელსაც შეუძლია მიიღოს

მდგომარეობათა სასრული რაოდენობა: X_1, X_2, \dots, X_n შესაბამისი ალბათობებით P_1, P_2, \dots, P_n მაშინ

$$H(x) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (1.5.3)$$

იმისათვის, რომ განისაზღვროს $H(x)$ არ არის საჭირო რა მნიშვნელობებს მიიღებს X_1, X_2, \dots, X_n . საჭიროა განისაზღვროს შესაძლო მნიშვნელობათა რაოდენობა და მათი შესაბამისი ალბათობები.

იმისათვის, რომ ენტროპიის მნიშვნელობა დაუკავშიროთ ქაოსოგრაფას, უნდა ჩავატაროთ შემდეგი ოპრეაციების მიმდევრობა:

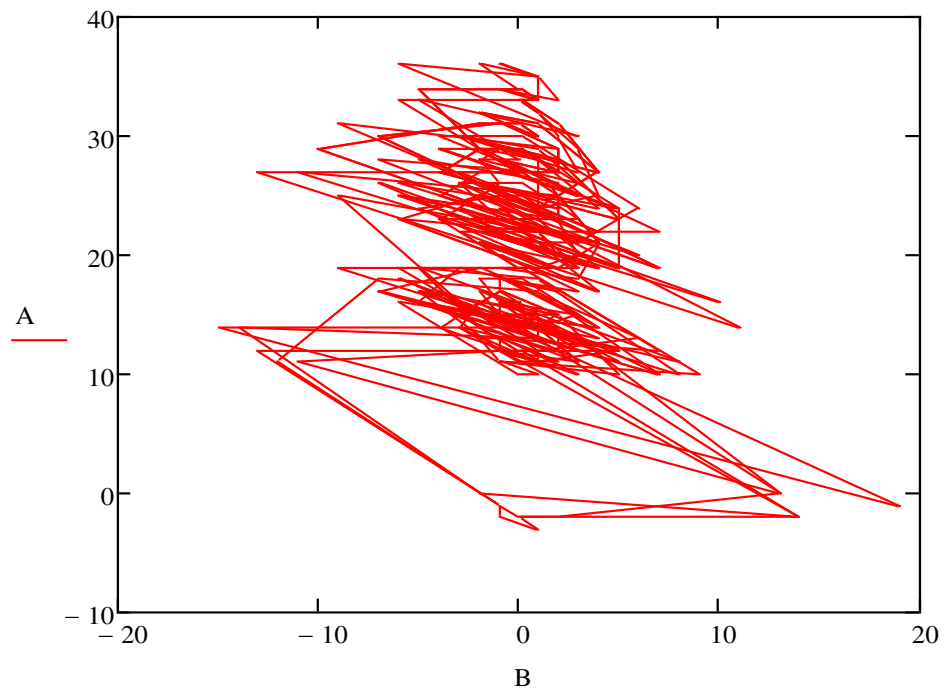
- 1) ქაოსოგრაფა წარმოადგენს ფაზურ სიბრტყეზე მონაცემების ვექტორის შესაბამის ასახვას. ამ მონაცემების ცვლილებათა (წარმოებულის დისკრეტული ვარიანტის) X ვექტორის მიხედვით [56]. დაუშვათ, რომ Y ვექტორად გამოვიყენოთ სისტემის გამოსასვლელზე მიღებული თანმიმდევრული მნიშვნელობები. X - ვექტორად მივიჩნიოთ მონაცემები, რომლებიც ასახავენ $(Y_{i+1} - Y_i)$ სხვაობას. $i=0 \dots n-1$ -მდე.
- 2) ქაოსოგრაფის მიხედვით შევქმნათ მატრიცა $M=Y \cdot X^T$, განვსაზღვროთ მიღებული მატრიცის მინიმალური და მაქსიმალური მნიშვნელობები: $X_{\max} - X_{\min}$.
- 3) წინასწარ დავთქვათ რამდენ ჯგუფად დავყოთ მიღებული ინტერვალი $X_{\max} - X_{\min}$.
- 4) დაუშვათ რომ ეს რიცხვი იყოს 20-ის ტოლი $\frac{X_{\max} - X_{\min}}{20}$.
- 5) მზა ფუნქციების ჩამონათვალიდან ავირჩიოთ $\text{hist}(nM)$, სადაც პირველი არგუმენტი უნდა იყოს მთელი რიცხვი. იმიტომ, რომ ის ასახავს ჰისტოგრამაში რამდენი მნიშვნელობა უნდა მივიღოთ. ამიტომ, ავირჩიოთ ფუნქცია $\text{floor} \left(\frac{X_{\max} - X_{\min}}{20} \right)$ და ბოლოს მივიღებთ $\text{hist}(\text{floor}, M)$ ჰისტოგრამას, სადაც ორდინატოა დერძზე გადაზომილი იქნება იმ ელემენტების რაოდენობა, რომელიც შეესაბამება მის შესაბამის $X_{i+1} - X_i$ ინტერვალს.

6) ალბათობა შეესაბამება $\frac{n_i}{N^2}$ სადაც N^2 არის აგებული მატრიცის სვეტების და სტრიქონების ნამრავლი.

7) მაშინ ენტროპიას განვსაზღვრავთ (1.5.3) გამოსახულების მიხედვით: $HE = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ – ფორმულის მიხედვით.

ამ მეთოდის ექსპერიმენტული შემოწმება და ასახვა მივიღეთ ამინდის ცვლილების ანათვლებისთვის, რომელიც მოვიპოვეთ ინტერნეტ საიტის მეშვეობით www.gismeteo.ru.

ქაოსოგრამას აქვს შემდეგი სახე:



ნახ.18 ამინდის რეალური ანათვლების ქაოსოგრამა

შემდეგ დავითვალეთ ენტროპია და ავაგეთ ჰისტოგრამა:

$$j := 0.. \tau - 2 \qquad B_j := C_{j+1} - C_j \qquad r := 0 \qquad C_{j+1} := \text{repl}(A, B1, r)$$

$$\text{repl}(A, B1, r) := \begin{cases} U \leftarrow A \\ \text{for } i \in 0.. \text{rows}(B1) - 1 \\ \quad U_{r+i} \leftarrow B1_i \\ U \end{cases}$$

$$M := B \cdot C^T \quad \min(M) = -1.239 \times 10^3$$

$$\text{lower} := \text{floor}(\min(M)) \quad \text{upper} := \text{ceil}(\max(M))$$

$$h := \frac{(\text{upper} - \text{lower})}{20} \quad k := 0..20$$

$$\text{int}_k := \text{lower} + h \cdot k \quad f := \text{hist}(\text{int}, M)$$

$$f1 := \frac{f}{\text{rows}(M)^2} \quad f1_2 = 7.491 \times 10^{-3}$$

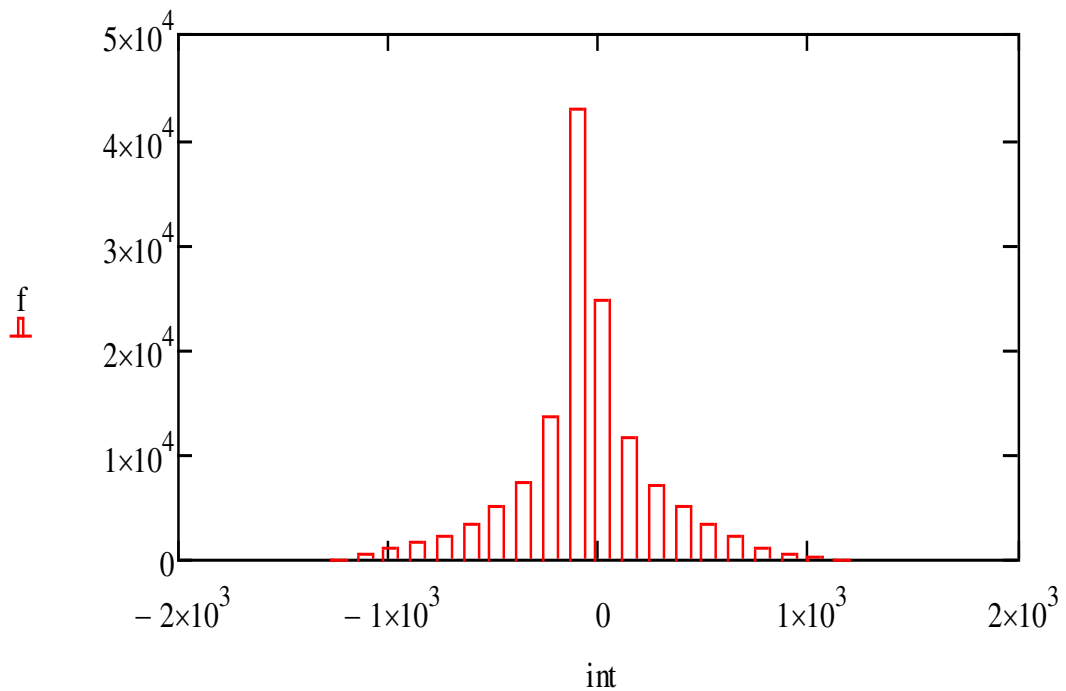
$$\sum_{k1=0}^{19} f1_{k1} = 1.003$$

$$k1 := 0..20 - 1$$

$$HE := \sum_{k1=0}^{19} h1_{k1} \quad h1_{k1} := \overrightarrow{\text{if}[f1_{k1} > 0, (-f1)_{k1} \cdot \log(f1_{k1}), 0]}$$

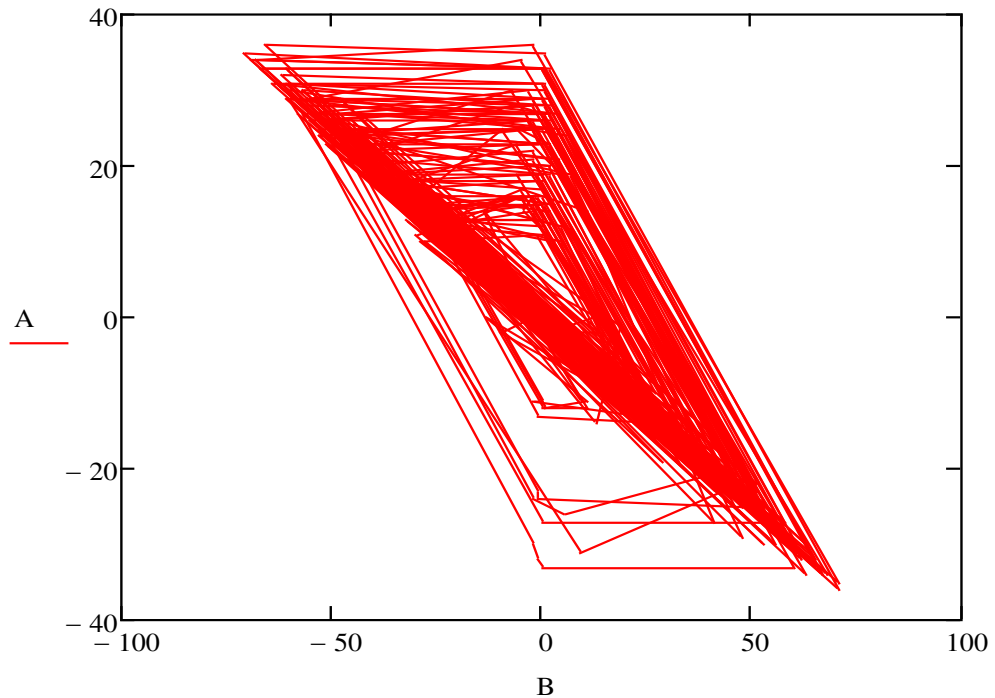
$$HE = 0.735$$

ნახ.19-ზე ასახულია შესაბამისი ჰისტოგრამა.



ნახ.19 ამინდის რეალური ანათვლების ჰისტოგრამა

ზემოდ წარმოდგენილი ალგორითმის მსგავსად დაგამუშავეთ ამინდის ცვლილების ანომალური მონაცემები და მივიღეთ შემდეგი სახის ქაოსოგრამა:



ნახ.20 ამინდის ანომალური ანათვლების ქაოსოგრამა

B – ვექტორი ასახავს სხვაობით მონაცემებს, ყოველ მომდევნო და წინამდებარე ანათვალს შორის

$$j := 0..t - 2 \quad B_j := C_{j+1} - C_j \quad r := 0 \quad \underline{C} := \text{repl}(A, B1, r)$$

$$\text{repl}(A, B1, r) := \begin{cases} U \leftarrow A \\ \text{for } i \in 0.. \text{rows}(B1) - 1 \\ \quad U_{r+i} \leftarrow B1_i \\ U \end{cases}$$

$$M := B \cdot C^T \quad \min(M) = -2.442 \times 10^3$$

$$\text{lower} := \text{floor}(\min(M)) \quad \text{upper} := \text{ceil}(\max(M))$$

$$h := \frac{(\text{upper} - \text{lower})}{20} \quad k := 0..2t$$

$$\text{int}_k := \text{lower} + h \cdot k \qquad f := \text{hist}(\text{int}, M)$$

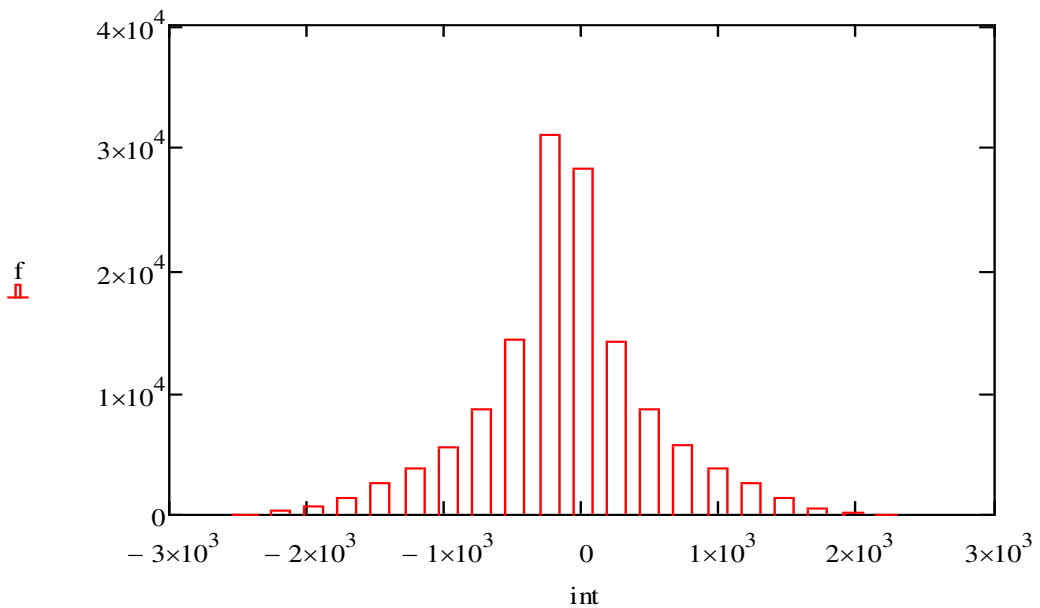
$$f1 := \frac{f}{\text{rows}(M)^2} \qquad k1 := 0..20 - 1$$

$$\sum_{k1=0}^{19} f1_{k1} = 1.003$$

$$h1_{k1} := \overrightarrow{\text{if}[f1_{k1} > 0, (-f1)_{k1} \cdot \log(f1_{k1}), 0]}$$

$$HE := \sum_{k1=0}^{19} h1_{k1}$$

$$HE=1.97$$



ნახ.21 ამინდის ანომალური ანათვლების ჰისტოგრამა

1.6. I თავის დასკვნები

1. დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ზოგადმა განხილვამ აჩვენა, რომ დინამიკურ არაწრფივ სისტემებში ხშირად შეინიშნება ქაოტური ეოფაქცევა, რომელიც წარმოიშევა არა გარეთ არსებული ხმაურის მოქმედების გამო, არამედ არაწრფივი დეტერმინირებული სისტემის დინამიკით. მათი არარეგულარული ქცევის მიზეზი მდგომარეობს

არაწრფივი სისტემების უნარში ექსპონენციალურად გაზარდოს თავდაპირველად ახლო მდებარე ტრაექტორიები ფაზური სივრცის შემოსაზღვრულ არეში.

ქაოსური სისტემების ტრაექტორიების ყოფაქცევის წინასწარ მეტყველება დროს დიდ ინტერვალზე შეუძლებელია, ვინაიდან მგრძობიარობა საწყისი პირობების მიმართ ძალიან მაღალია. ამავე დროს შესაძლებელია ამ სისტემების მართვა, ინფორმაციის წარმოქმნის შესაძლებლობა, ჩაწერა, გადაცემა, შენახვა და დაცვა (კონფიდენციალურობა). თუ კონფიდენციალურობა, არც თუ ისე შორს წარსულში, ითვლებოდა მხოლოდ სამხედრო გამოყენების სფეროდ, ახლა ის გახდა სამოქალაქო გამოყენების სფეროდ.

2. დეტერმინირებული სისტემების მოდელირებამ MathCad პროგრამის გარემოში და ბიოსისტემის ამონახსნის ფაზურ სიბრტყეში გეომეტრიულმა წარმოდგენამ ცხადჰყო, რომ სისტემის გართულება შესაბამისად აისახება ფაზურ სიბრტყეზე მიღებული ტრაექტორიების სახეზე, რამაც მიგვიყვანა დასკვნამდე: რომ ფაზური სიბრტყის მეთოდი კარგად აისახება დეტერმინირებული ქაოსის სისტემის ლორენცის მაგალითზე, რაც მარტივად განხორციელდა MathCad პროგრამის მეშვეობით. მიღებული სურათის მეშვეობით. მიღებული სურათის სახე ცხადად ადასტურებს “პეპელას” ეფექტს.

3. მიღებულია ქაოსოგრამების სახე ჯანმრთელი და ავადმყოფი ადამიანების კარდიოგრამის სიხშირის ცვლილებისთვის. სისტემის დისბალანსის დროს, რაც ახასიათებს ავადმყოფ პაციენტს, ჩნდება კარდიორითმის დინამიკის “ქაოტირების” დარღვევა. ქაოსოგრამის ანალიზი იძლევა საშუალებას გაკეთდეს დასკვნა არა მხოლოდ პაციენტის მდგომარეობის შესახებ მოცემულ მომენტში, არამედ ნაწინასწარმეტყველები იქნეს მოსალოდნელი დარღვევები.

4. შემოთავაზებულია ქაოსოგრამის შეფასების მეთოდიკა, დაფუძნებული პროცესის ენტროპიის გამოთვლაზე. მეთოდი გულისხმობს ჰისტოგრამის მიღებას ქაოსოგრამისთვის და შემდგომში

ენტროპიის გამოთვლას. იგი გვაძლევს საშუალებას ძალიან მარტივად, რაოდენობრივად შევაფასოთ ქაოსოგრაფით მიღებული შედეგები.

შემოთავაზებული ხერხი გამოვცადეთ მონაცემებისთვის, რომელიც ეხებოდა ამინდის ტემპერატურის ცვლილებას ერთი წლის განმავლობაში. ანათვლები აღებულია ინტერნეტ საიტიდან, რომლის მისამართია www.gismeteo.ru. შემდეგ იგივე გავიმეორეთ ანომალური მონაცემებისთვის.

ექსპერიმენტმა აჩვენა: როდესაც ტემპერატურა ანომალურად იცვლება შესაბამისი ჰისტოგრამაც იცვლის სახეს. ეს თავისთავად აისახება ენტროპიის გაზრდაზე მაგ: ენტროპია 0.735 bit-ერთეულიდან მნიშვნელობიდან გაიზარდა 1.97 bit ერთეულამდე. რაც უფრო მეტია შემთხვევითობა, მით უფრო დიდია ენტროპია.

აქედან შეიძლება დავასკვნათ, რომ ენტროპიის რაოდენობით შეიძლება შევადაროთ რაოდენობრივადაც ქაოსოგრაფები ძალიან მარტივად.

5. დინამიკური სისტემის ყოფაქცევის ანალიზმა დაადასტურა, რომ დეტერმინირებული ქაოსის თეორია სრულყოფილად აღწერს დინამიკური არაწრფივი სისტემების ყოფაქცევას. ამ დროს დინამიკური ქაოსის თეორიის მეთოდებად მივიჩნევთ დროითი მწკრივების კვლევის კლასიკურ მეთოდებს ჰერსტის ემპირიული კანონისა და ფრაქტალების განზომილების გამოყენების სახით. ბროუნის შემთხვევითი პროცესების მოდელირებას რომლებიც იქნება განხილული და ამ მწკრივების დროთ-სისშირული აღწერით ვეივლეტ გარდაქმნის გამოყენებით მოცემული დისერტაციის მომდევნო თავებში.

**თავი II. დინამიკური სისტემების დროითი მწკრივების
კვლევა ორიენტირებული კომპიუტერული
ტექნოლოგიების გამოყენებაზე**

**2.1 დროითი მწკრივების (დინამიკის მწკრივების)
დამუშავების საკითხები**

სამეცნიერო-ტექნიკურ პროგრესთან უშუალოდ დაკავშირებულია ტექნიკურ ობიექტთა სირთულესა და სახესხვაობათა გაზრდა და მათი ფუნქციონირების ეფექტურობის ამაღლება. ამ მაჩვენებლების დაკმაყოფილების უზრუნველყოფისთვის განსაკუთრებული როლი უკავია დიაგნოსტიკას, რომლის შედეგად განისაზღვრება ამ მაღიაგნოსტიკური ობიექტის რეალური ტექნიკური მდგომარეობა. დიაგნოსტიკის ტექნოლოგიის შემუშავებისათვის დიდი მნიშვნელობა აქვს დიაგნოსტიკური პარამეტრების და სიგნალების დამუშავების მეთოდების სწორე შერჩევას. ტექნიკური ობიექტების დიაგნოსტიკისთვის, როგორც წესი, იყენებენ დროით მწკრივებს, რომლის მეშვეობით ფიქსირდებიან მაკონტროლებელი პარამეტრების ცვლილებები. უკანასკნელ ათწლეულებში შემოთავაზებულია ახალი მეთოდები, რომლებიც ორიენტირებულია კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე. ერთ-ერთ ასეთ მეთოდს წარმოადგენს ჰერსტის ემპირიული კანონი [22].

რთული სისტემის თვისებების შესწავლისათვის და ექსპერიმენტულ კვლევისთვის, ფართოდ გამოიყენება მიდგომა, რომელიც დაფუძნებულია იმ სიგნალების ანალიზზე, რომლებიც მიიღებიან სისტემის გამოსასვლელზე. ამიტომ სისტემის ანალიზის დროს, განსაკუთრებით ექსპერიმენტებში, რეალიზაცია ხორციელდება რეგისტრირებული სიგნალებით. მაგალითად, არითმოლოგიაში ასეთ სიგნალს წარმოადგენს ელექტროკარდიოგრამა, სეისმოლოგიაში – მიწის ქერქი, მეტეოროლოგიაში – მეტეორო დაკავირვების სიგნალი და სხვა. დინამიკური სისტემების თეორიის ამ დანაყოფს უწოდებენ დროითი მწკრივების ანალიზს.

მრავალგვარ, და კერძოდ, ბუნებრივ საყოფაცხოვრებო პროცესებზე დაკვირვებამ ცხადყო, რომ ისინი წარმოადგენენ დროზე დამოკიდებულ პროცესებს [24]. მათი სტრუქტურის ანალიზი და პროგნოზირება აუცილებელია გადაწყვეტილებათა მიღების ეფექტურობისათვის.

დროითი მწკრივი ანუ დინამიკის მწკრივი [21] – ეს არის სტატისტიკური მონაცემების ცვლილება რაიმე პარამეტრის ცვლილების მიხედვით, რომელიც შეესაბამება დროის სხვადასხვა მომენტებს. ამ სტატისტიკურ მონაცემთა ყოველ ანათვალს უნდა ჰქონდეს რიგითი ნომერი დროის გაზრდის მიხედვით.

დროითი მწკრივი განსხვავდება ჩვეულებრივ მონაცემთა ამონარჩევისაგან, ვინაიდან ანალიზის დროს აუცილებლად გათვალისწინებული უნდა იყოს ანათვალთა მიღების დროსთან ურთიერთ კავშირი. ცნობილია [29], რომ სტანდარტული სტატისტიკური მეთოდების გამოყენება, მაგალითად ავტოკორელაციური ანალიზი, არ იძლევა სასურველ შედეგს პროცესების კლასიფიკაციის თვალსაზრისით.

მათემატიკურად დროითი მწკრივი $\{X_i\}_{i=1}^N$ ეწოდება N რიცხვთა მასივს, რომელიც წარმოადგენს დაკვირვების შედეგად მიღებულ $X(t)$ დინამიკური ცვლადის მნიშვნელობებს, რომლებიც მიღებულია მუდმივი ბიჯის τ -ს მიხედვით: $t_i = t_0 + (i - 1)\tau$; $X_i = X(t_i)$; $i = 1, \dots, N$. დროითი მწკრივების ანალიზის დროს იკვეთება ორი ძირითადი ამოცანა: იდენტიფიკაციის ამოცანა და პროგნოზირების ამოცანა. იდენტიფიცირების ამოცანა გულისხმობს დაკვირვებათა ანალიზის დროს პასუხს კითხვაზე: რას უდრის სისტემის პარამეტრები, რომლის შედეგად მიღებული იყო დაკვირვებათა მწკრივი, მისი კორელაციური განზომილება, ენტროპია და სხვა. პროგნოზირების ამოცანის მიზანია საკვლევი ობიექტის დაკვირვებათა მახასიათებლების წინასწარმეტყველების განხორციელება ანუ მომავალ დროის მონაკვეთისათვის პროგნოზირების გაკეთება. დროითი მწკრივების კვლევა დაფუძნებულია იდეაზე [30], რომ დამაკმაყოფილებელი გეომეტრიული სურათი შეიძლება მივიღოთ, თუ გამოყენებული იქნება

დაკვირვებათა დაყოვნების ვექტორი $Z_i = \{X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+m-1}\}$ ამ მიდგომის სამართლიანობა პირველად დაამტკიცა ფ.ტანკენსმა. ეს არის ძალიან მნიშვნელოვანი დინამიკური სისტემების ყოფაქცევის პროგნოზირებისათვის. სწორედ ამ მეორე ამოცანის გადაწყვეტა ხდება ჰერსტის ემპირიული კანონის გამოყენების ბაზაზე, რაზედაც საუბარი გვექნება მომავალ პარაგრაფებში.

2.2 ჰერსტის ემპირიული კანონი და ნორმირებული გაქანების მეთოდი

დისერტაციის ეს პარაგრაფი მიძღვნილია ბუნებრივი და საკვლევი პროცესების კლასიფიკაციას და ანალიზის პრობლემის გადაწყვეტას მათი სტოქასტიურობის დონის შეფასების მიხედვით. მას უდიდესი პრაქტიკული მნიშვნელობა გააჩნია რეალური პროცესების მიმდინარეობის პროგნოზირებისათვის [24].

კლასიფიკაციის ქვეშ ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ პროცესების დაყოფას დეტერმინირებულ, შემთხვევით და ქაოსურ (დეტერმინირებულ) ან (ფრაქტალურ) სიგნალებით. ქაოსურად დეტერმინირებულ სიგნალებს უკავია შუალედური ადგილმდებარეობა დეტერმინირებულ და შემთხვევით სიგნალებს შორის.

ამ ამოცანის გადაწყვეტა შესაძლებელი გახდა ახალი კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებით. ექსპერიმენტისთვის გამოყენებული გვაქვს MathCad 14 პროგრამის გარემო. MathCad პროგრამული გარემო მოიცავს არსებულ მოდულებს, მზა ფუნქციებს. ამიტომ სხვადასხვა მეთოდების რეალიზაცია არ მოითხოვს დაპროგრამების მაღალი დონის ენების ცოდნას და რთული ალგორითმების შედგენას. შეიძლება ითქვას, რომ როგორც LabVIEW-ს გამოყენებისას MathCad-ში ხორციელდება „დაპროგრამება პროგრამის შედგენის გარეშე“, რაც ძალიან მნიშვნელოვანია მკვლევარებისა და ინჟინრებისათვის [20]. ეს იძლევა საშუალებას ახალი თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების მოხმარებას ექსპერიმენტულ და საინჟინრო საქმიანობაში [21]. ჰერსტის მეთოდი ჰერსტის მაჩვენებლის განსაზღვრით საშუალებას იძლევა განვასხვაოთ შემთხვევითი მწკრივი

არა შემთხვევითისაგან იმ შემთხვევაშიც, როცა შემთხვევითი მწკრივი არ ექვემდებარება ნორამლური განაწილების კანონს და ის ექვემდებარება მართვის ცნობილ კანონს [25]. ჰერსტი ზომავდა რეზერვუარში წყლის დონის რხევებს. მან დაამტკიცა, რომ შემთხვევითი მწკრივის რხევათა მანძილი იზრდება გაზომვათა დროითი ინტერვალის გაზრდის მიხედვით. მან აჩვენა, რომ ბურნებრივ მოვლენათა უმრავლესობა: ტემპერატურა, ნალექი, მზის ლაქები და სხვა ექვემდებარებიან წანაცვლებულ შემთხვევით პროცესს – ე.წ ხმაურიან ტრენდს, რომლისთვისაც ჰერსტის მაჩვენებლის მნიშვნელობა ახასიათებს ტრენდის სიმძლავრის (დეტერმინირებულ ფაქტორს) ფარდობას ხმაურის დონესთან (შემთხვევითი ფაქტორი). ჰერსტის მეთოდს უწოდებენ ნორმირებული გაქანების მეთოდს. ხოლო ჰერსტის მაჩვენებელი k , H , აჩვენებს, რამდენად განსხვავდება საკვლევი დროითი მწკრივი ბროუნის მაჩვენებლისაგან [29]. ბროუნის მოძრაობა ითვლება, როგორც შემთხვევითობის მაჩვენებელი. მისთვის ჰერსტის მუდმივა უდრის 0.5-ს. თუ $H=0.5$ მაშინ გვაქვს კლასიკური ბროუნის მოძრაობა. თუ $0 < H < 0.5$ პროცესი არის ანტიპერსისტენტული, როცა პროცესის გაზრდის ტენდენცია შეიცვლება შემცირების ტენდენციით (ალბათურად). თუ $0.5 < H \leq 1$ – პროცესი არის პერსისტენტული, როცა გაზრდის ტენდენცია მომავალშიც არ შეიცვლის მიმართულებას (ალბათურად). ამ შემთხვევაში ზოგჯერ ამბობენ, რომ იგი მოიცავს დეტერმინირებულ მდგენელსაც ანუ „ტრენდს“. დეტერმინირებული პროცესებისათვის ჰერსტის მუდმივა აღემატება 1, რაც ადასტურებს მართვის კანონის არსებობას.

ჰერსტის მაჩვენებლის გამოთვლა წარმოებს შემდეგი სქემის მიხედვით:

აღნიშნოთ $\{ e_1, e_2, e_3, \dots \}$ დროითი პროცესის მიღებული მნიშვნელობები.

1. დასაწყისში გამოითვლება მიღებული მონაცემების საშუალო მნიშვნელობა \bar{e}

$$\bar{e} = \frac{1}{\tau} \sum_{u=1}^{\tau} e_u \quad (2.2.1)$$

სადაც e_u - არის მონაცემთა ვექტორის u - რი ანათვალი; τ - დრო, რომელიც შეესაბამება დროის მწკრივის სიგრძეს, ეს იგივეა, რაც ანათვალია რაოდენობა.

2. გამოითვლება დაგროვილ მნიშვნელობათა გადახრა საშუალო მნიშვნელობიდან.

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t (e_u - \bar{e}) \quad (2.2.2)$$

3. განისაზღვრება $X(t, \tau)$ გაქანება

$$R = \max(X(t, \tau)) - \min(X(t, \tau))$$

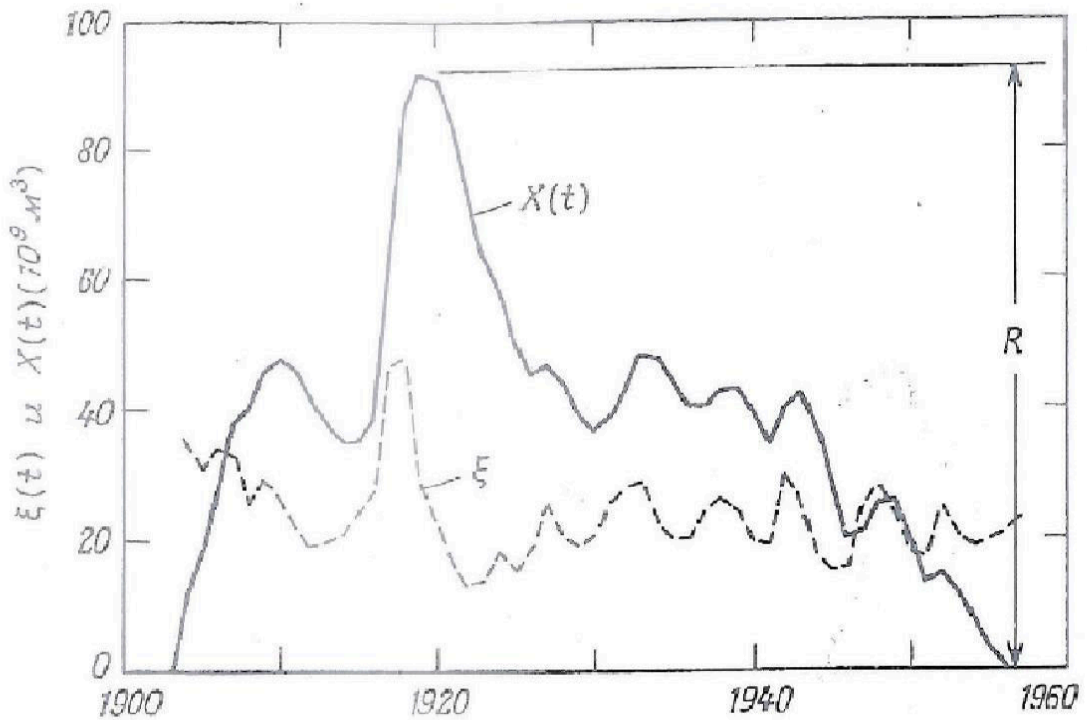
4. ხდება მიღებული გაქანების ნორმირება: $\frac{R}{S}$,

სადაც S არის პრიცესის სტანდარტული გადახრა

5. აიგება $\log \frac{R}{S}$ დამოკიდებულება $\log(\tau)$ -საგან. $H = \frac{\log \frac{R}{S}}{\log \tau}$ ამით მივიღებთ ჰერსტის მუდმივას.

იმისდამიხედვით, რას უდრის ჰერსტის პარამეტრი, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ როგორი სახის პროცესთან გვაქვს საქმე. უნდა აღვნიშნოთ, რომ რაც უფრო მეტია ამონარჩევის მოცულობა (დროითი ინტერვალი) მით უფრო დამაჯერებელი შედეგები მიიღება.

მთელი ცხოვრება ჰერსტი მუშაობდა რათა გამოეკვლია “ნილოსი” და ამოეხსნა ამოცანა, რომელიც დაკავშირებული იყო წყლის რესურსების შეგროვებასთან. მან მიაკვლია ახალ სტატისტიკურ მეთოდს “ნორმირებული გაქანების მეთოდს” (მეთოდი R/S). შესავალში ამ მეთოდს განვიხილავთ როგორც ივ.ალბერტ-ის მაგალითი, მოყვანილი ჰერსტის მიერ. 22 ნახაზზე მოცემულია დანალექის გაზომვა წლიური ჩადინებისას როგორც დროის ფუნქცია.



ნახ.22 $\xi(t)$ – წლიური წყლის ჩამონადენის დამოკიდებულება დროის (წლების) მიხედვით. წყვეტილი ხაზი – ჩადინების დაგროვილი მნიშვნელობის გადახრის დამოკიდებულება დროზე

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ მოიძებნოს ოპტიმალური მოცულობის რეზერვუარი ზღვიდან წყლის ნაკადის გასაზომად. ოპტიმალურია ის რეზერვუარი, რომელიც არასდროს არ გადაივსება და არ დაიცლება. ყოველი წლის განმავლობაში t ასეთი რეზერვუარი იღებს შენაკადებს ზღვიდან $\xi(t)$, იმ დროს როდესაც რეგულირებული წყლის მოცულობა (ნაკადი) $\langle \xi \rangle_t$, ეშვება წყლის საცავიდან. რამდენი წყალი უნდა ინახებოდეს წყლის საცავში, რომ ყოველ წელს საცავიდან შესაძლებელი იყოს წყლის მოცულობის დაშვება. τ წლიური საშუალო დინების დროს უდრის

$$\langle \xi \rangle_t = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t)$$

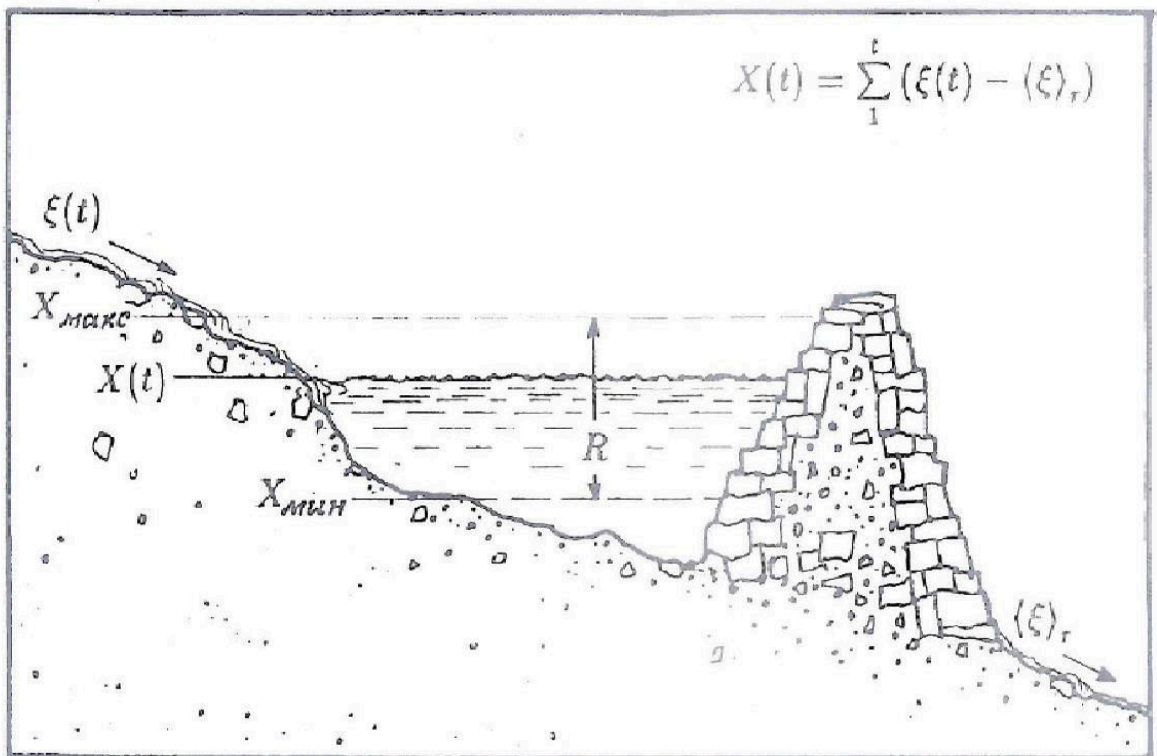
ეს საშუალოდ უნდა უთანაბრდებოდეს მოცულობას ყოველწლიურად დაშვებულს რეზერვუარიდან. ვთქვათ $X(t)$ არის ჩადინების დაგროვილი გადახრა $\xi(t)$ საშუალო $\langle \xi \rangle_t$ -დან.

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}$$

ეს მრუდი გამოსახულია ნახ.2.2.1-ზე. განსხვავებას მაქსიმალური და მინიმალური დაგროვების დინებისას X-ს დავარქვათ R გაქანება. ეს სიდიდე ტოლია იმ ტევადობის, რომელიც აუცილებელია ჩადინების საშუალო მნიშვნელობის შესანარჩუნებლად არჩეულ პერიოდში. უფრო დიდი რეზერვუარისთვის, რომელიც არასდროს არ გადაივსება და არ დაიცლება ბოლომდე, R წარმოადგენს განსხვავებას მაქსიმალურ და მინიმალურ წყლის ხარისხს შორის რეზერვუარში. R გამოითვლება ფორმულით:

$$R(\tau) = \max X(t, \tau) - \min X(t, \tau)$$

სადაც t დისკრეტული დროა აღებული რიცხვის მთლიანი მნიშვნელობისათვის, ხოლო τ განსახილველი პერიოდის ხანგრძლიობა. ამ სიდიდეების განსაზღვრა მოცემულია 23 ნახაზზე.



ნახ.23 $\xi(t)$ მოდინების და საშუალო ჩადინების $\langle \xi \rangle$ და R გაქანების დამოკიდებულების ასახვა.

ცხადია, რომ გაქანება დამოკიდებულია განსახილველ დროზე τ , და ჩვენ ველოდებით რომ R გაზრდის τ -ს.

ჰერსტი იკვლევდა მრავალ ბუნებრივ პროცესებს, როგორცაა მდინარის დინება, შლამის გადატანა და ხის რგოლების ზრდა. ამისთვის ის იყენებდა უგანზომილებო დამოკიდებულებას R/S , სადაც S სტანდარტული გადახრაა, ე.ი კვადრატული ფესვი დისპერსიიდან. ამ უგანზომილებო დამოკიდებულების გამოყენებით შესაძლებელია გაქანება გავუტოლოთ სხვადასხვა გამოვლინებას.

სტანდარტული გადახრა შესაძლებელია შეფასდეს დაკვირვებით

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2}$$

ჰესრტმა აღმოაჩინა და ექსპერიმენტულად დაამტკიცა, რომ R/S ნორმირებული გაქანება აღიწერება ემპირიული თანაფარდობით, რომელიც იზრდება დაკვირვების დაგროვილი დროის გაზრდასთან ერთად; კერძოდ

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2} \right)^H$$

სადაც R/S – არის დაკვირვების შედეგად მიღებული ნორმირებული გაქანება, τ - არის პროცესზე დაკვირვების დრო, რომელიც უნდა იყოს ძალიან დიდი მნიშვნელობის. ხოლო H ხარისხი – არის ჰერსტის პარამეტრი. ამ დროს H პარამეტრი გამოთვლება ტანგენსის კუთხით, რომელიც შექმნილია $\log(\frac{R}{S})$ და $\log(\frac{\tau}{2})$ წრფეებს შორის.

ჰესრტმა აღმოაჩინა, რომ დროითი მწკრივების უმეტესობისთვის მაჩვენებელი სიმეტრიულად განაწილებულია საშუალო მნიშვნელობის 0.73 გარშემო, სტანდარტული გადახრით, რომელიც მიახლოებით უდრის 0.09-ს.

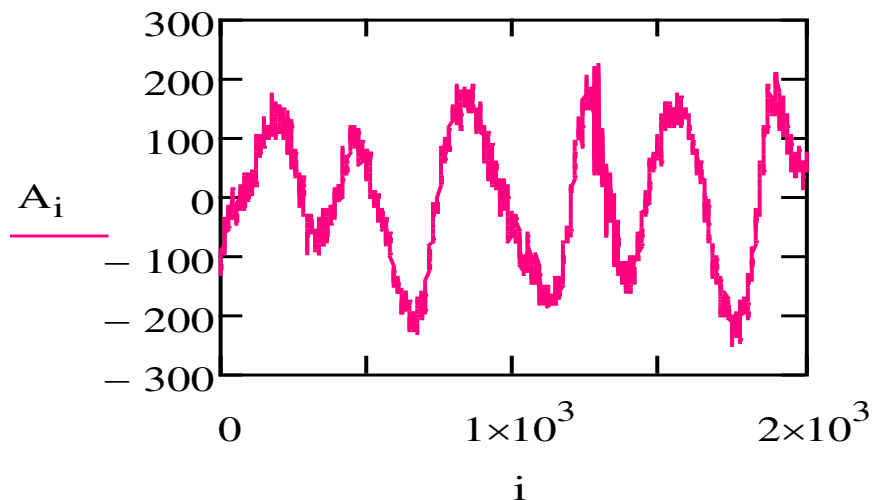
ამჟამად ძნელია ჩამოვთვალოთ ყველა ის ლიტერატურა, სადაც საუბარია ჰერსტის ემპირიული კანონის გამოყენებაზე და ე.წ (R/S) ნორმირებული გაქანების მეთოდზე. მაგალითისათვის შეიძლება მოვიყვანოთ ენაიმანის სტატია [27], სადაც ხდება ეფექტური ბაზრის და ფრაქტალური ბაზრის ჰიპოთეზების შემოწმება. ჩატარებულმა კვლევამ და ანგარიშებმა აჩვენეს, რომ საბაზრო მოვლენები და მათი ეკონომიკური ინდიკატორები არ არიან მთლიანად შემთხვევითი, ისინი მიეკუთვნებიან დეტერმინირებული ქაოსის კლასის პროცესებს ჰერსტის პარამეტრის მნიშვნელობით. [54] სტატიაში შემოთავაზებულია ალგორითმი, რომელიც აფასებს ჰერსტის მაჩვენებელს უფრო ზუსტად. სტატია მიძღვნილია პროცესების კლასიფიკაციის პრობლემას და ავტორები აკეთებენ დასკვნას პროცესის დროითი მწკრივის საწინასწარმეტყველო ინტერვალის პოვნის შესახებ. ისინი განიხილავენ ყოველდღიური ვალუტის კურსის USD/DM ქცევას 1994-1996 წლების პერიოდში. აღმოჩნდა, რომ პროგნოზირება შეიძლება გაკეთდეს 10 დღის ინტერვალისათვის. [ფ] ეძღვნება ფასიან ქაღალდებში შენატანის რისკის შემცირებას (R/S) ანალიზის საფუძველზე. არსებული ლიტერატურის განხილვის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ჰერსტის ემპირიული კანონი დღევანდელობაში სრულყოფილად არის მისადაგებული ეკონომიკურ და ფინანსურ სფეროებს, ამიტომაც მიზანშეწონილად მიგვაჩნია გამოვიკვლიოთ თანამედროვე და რეალობიდან აღებული სხვა სახის პროცესები ჰერსტის ემპირიული კანონის მიხედვით.

2.3 ჰერსტის კანონის ემპირიული კვლევა

MathCad პროგრამულ ბარემოში

ჩვენ ჩავატარეთ ჰერსტის ემპირიული კანონის მაჩვენებლის განსაზღვრა სხვადასხვა პროცესებისთვის: სეისმოგრამისათვის, (გარკვეული მონაკვეთის), კარდირითმის სიხშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) და ამინდის ტემპერატურის ცვლილების ანათვლებისთვის.

ზემოდ მოყვანილი ჰერსტის მეთოდის მიხედვით ჩავატარეთ გამოთვლები გეოფიზიკის ინსტიტუტის მიერ მოცემულ სეისმოგრამის 2000 ანათვალზე და მივიღეთ შემდეგი შედეგი:



ნახ.24 სეისმოგრამით მიღებულ ანათვალთა დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

ამ ნახაზზე მოცემულია სეისმოგრამით მიღებულ ანათვალთა გრაფიკი. ზემოდ აღწერილ ჰერსტის პარამეტრის განსაზღვრის მეთოდის მიხედვით, მივიღეთ დაგროვილ მნიშვნელობათა გადახრა, სადაც mean არის A ვექტორის მათემატიკური ლოდინი.

$$X(t, \tau) := \sum_{u=1}^t (A1_u - \text{mean}(A1)) \quad i1 := 0..\text{rows}(A1)$$

$X(t, \tau)$ - არის დაგროვილ მნიშვნელობათა გადახრა საშუალო მნიშვნელობიდან.

$X(t, \tau)$ ფუნქცია ვაქციეთ ვექტორად, განვსაზღვრეთ გაქანება და ნორმირებული მისი მნიშვნელობა R.

$$X1_{i1} := X(i1, \tau)$$

$$\max(X1) = 1.713 \times 10^4$$

$$\min(X1) = -1.651 \times 10^4$$

$$S := \text{stdev}(A1)$$

$$R := \frac{\max(X1) - \min(X1)}{S}$$

$$R = 296.859$$

$$H := \frac{\log(R)}{\log(\tau)} \quad H = 0.749$$

რადგან H-ის მნიშვნელობა =0.749-ს ეს ნიშნავს, რომ პროცესი არის პერსისტენტული და მომავალში შეგვიძლია ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ პროცესს მომავალში ექნება მსგავსი სახე.

ანალოგიური გამოთვლები ჩავატარეთ აღნიშნული მონაკვეთის სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის და მივიღეთ შემდეგი შედეგები:

$$k1 := 0.. \frac{\text{rows}(A - 1)}{2} - 1 \quad A1_{k1} := A_{k1}$$

$$\text{length}(A1) = 1 \times 10^3 \quad t1 := 0.. \text{rows}(A1)$$

$$\text{mean}(A1) = 11.864 \quad \tau1 := \text{rows}(A1)$$

$$X1(t1, \tau1) := \sum_{u=1}^{t1} (A1_u - \text{mean}(A1)) \quad i2 := 0.. \frac{\text{rows}(A - 1)}{2} - 1$$

$$X1_{i2} := X1(i2, \tau1)$$

$$\max(X1) = 1.079 \times 10^4 \quad \min(X1) = -1.807 \times 10^4$$

$$S1 := \text{stdev}(A1)$$

$$R1 := \frac{\max(X1) - \min(X1)}{S1} \quad R1 = 287.546$$

$$H1 := \frac{\log(R1)}{\log(\tau1)} \quad H1 = 0.82$$

$$\begin{aligned}
k2 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{4}\right) - 1 & A2_{k2} &:= A_{k2} & \text{rows}(A2) &= 500 \\
\text{length}(A2) &= 500 & t2 &:= 0.. \text{rows}(A2) & \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{4}\right) &= 500 \\
\text{mean}(A2) &= 31.624 & \tau2 &:= \text{rows}(A2) \\
X2(t2, \tau2) &:= \sum_{u=1}^{\tau2} (A2_u - \text{mean}(A2)) & i3 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{4}\right) - 1 & X2_{i3} &:= X2(i3, \tau2) \\
\max(X2) &= 5.462 \times 10^3 & \min(X2) &= -5.291 \times 10^3 & S2 &:= \text{stdev}(A2) \\
R2 &:= \frac{\max(X2) - \min(X2)}{S2} & R2 &= 155.242 \\
H2 &:= \frac{\log(R2)}{\log(\tau2)} & H2 &= 0.812
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k3 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{8}\right) - 1 & A3_{k3} &:= A_{k3} & \text{rows}(A3) &= 250 \\
\text{length}(A3) &= 250 & t3 &:= 0.. \text{rows}(A3) \\
\text{mean}(A3) &= 51.7 & \tau3 &:= \text{rows}(A3) \\
X3(t3, \tau3) &:= \sum_{u=1}^{\tau3} (A3_u - \text{mean}(A3)) & i4 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{8}\right) - 1 & X3_{i4} &:= X3(i4, \tau3) \\
\max(X3) &= 180.7 & \min(X3) &= -7.681 \times 10^3 & S3 &:= \text{stdev}(A) \\
R3 &:= \frac{\max(X3) - \min(X3)}{S3} & R3 &= 69.36 \\
H3 &:= \frac{\log(R3)}{\log(\tau3)} & H3 &= 0.768
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k4 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{6}\right) - 1 & A4_{k4} &:= A_{k4} & \text{rows}(A4) &= 333 \\
\text{length}(A4) &= 333 & t4 &:= 0.. \text{rows}(A4) & \text{mean}(A4) &= 33.883 \\
X4(t4, \tau4) &:= \sum_{u=1}^{\tau4} (A4_u - \text{mean}(A4)) & \tau4 &:= \text{rows}(A4) \\
i5 &:= 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{6}\right) - 1 & X4_{i5} &:= X4(i5, \tau4)
\end{aligned}$$

$$\max(X4) = 4.87 \times 10^3$$

$$\min(X4) = -5.56 \times 10^3$$

$$S4 := \text{stdev}(A)$$

$$R4 := \frac{\max(X4) - \min(X4)}{S4} \quad R4 = 92.016$$

$$H4 := \frac{\log(R4)}{\log(\tau4)}$$

$$H4 = 0.779$$

$$k5 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{3}\right) - 1$$

$$A5_{k5} := A_{k5} \quad \text{rows}(A5) = 666$$

$$\text{length}(A5) = 666$$

$$t5 := 0.. \text{rows}(A5) \quad \text{mean}(A5) = -0.236$$

$$\tau5 := \text{rows}(A5)$$

$$X5(t5, \tau5) := \sum_{u=1}^{t5} (A5_u - \text{mean}(A5))$$

$$i6 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{3}\right) - 1$$

$$X5_{i6} := X5(i6, \tau5)$$

$$\max(X5) = 1.707 \times 10^4$$

$$\min(X5) = -2.401 \times 10^3 \quad S5 := \text{stdev}(A)$$

$$R5 := \frac{\max(X5) - \min(X5)}{S5}$$

$$R5 = 171.745$$

$$H5 := \frac{\log(R5)}{\log(\tau5)}$$

$$H5 = 0.792$$

$$k6 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{5}\right) - 1$$

$$A6_{k6} := A_{k6} \quad \text{rows}(A6) = 400$$

$$\text{length}(A6) = 400$$

$$t6 := 0.. \text{rows}(A6) \quad \text{mean}(A6) = 22.273$$

$$\tau6 := \text{rows}(A6)$$

$$X6(t6, \tau6) := \sum_{u=1}^{t6} (A6_u - \text{mean}(A6))$$

$$i7 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{5}\right) - 1$$

$$X6_{i7} := X6(i7, \tau6)$$

$$\max(X6) = 7.948 \times 10^3$$

$$\min(X6) = -4.269 \times 10^3 \quad S6 := \text{stdev}(A)$$

$$R6 := \frac{\max(X6) - \min(X6)}{S6}$$

$$R6 = 107.78$$

$$H6 := \frac{\log(R6)}{\log(\tau6)}$$

$$H6 = 0.781$$

$$k7 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{7}\right) - 1$$

$$A7_{k7} := A_{k7}$$

$$\text{rows}(A7) = 285$$

$$\text{length}(A7) = 285$$

$$t7 := 0.. \text{rows}(A7)$$

$$\text{mean}(A7) = 49.221$$

$$\tau7 := \text{rows}(A7)$$

$$X7(t7, \tau7) := \sum_{u=1}^{t7} (A7_u - \text{mean}(A7))$$

$$i8 := 0.. \text{floor}\left(\frac{\text{rows}(A - 1)}{7}\right) - 1$$

$$X7_{i8} := X7(i8, \tau7)$$

$$\max(X7) = 880.968$$

$$\min(X7) = -7.385 \times 10^3$$

$$S7 := \text{stdev}(A)$$

$$R7 := \frac{\max(X7) - \min(X7)}{S7}$$

$$R7 = 72.929$$

$$H7 := \frac{\log(R7)}{\log(\tau7)}$$

$$H7 = 0.759$$

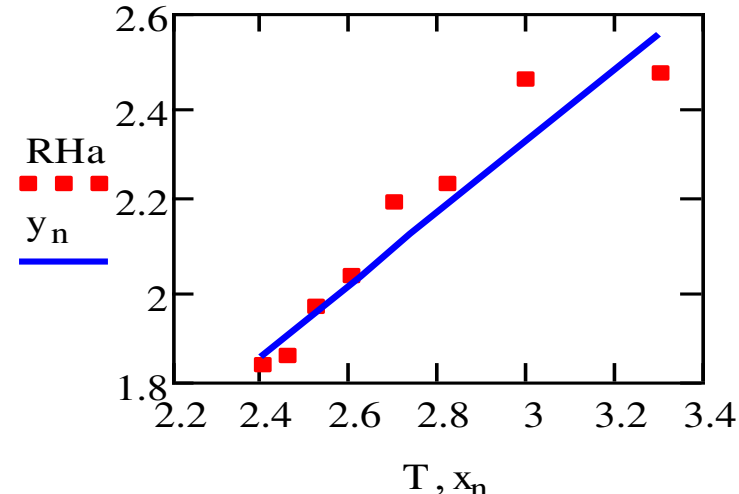
იმისათვის რომ მიგვეღო უფრო დაზუსტებული დამოკიდებულება გაქანებასა და დაკვირვების დროის შორის გამოვიყენოთ უმცირეს კვადრატთა მეთოდი.

$$RH_a := \log \begin{pmatrix} R \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ R5 \\ R6 \\ R7 \end{pmatrix} \quad RH_a = \begin{pmatrix} 2.473 \\ 2.459 \\ 2.191 \\ 1.841 \\ 1.964 \\ 2.235 \\ 2.033 \\ 1.863 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} \log(\tau) \\ \log(\tau1) \\ \log(\tau2) \\ \log(\tau3) \\ \log(\tau4) \\ \log(\tau5) \\ \log(\tau6) \\ \log(\tau7) \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 3.301 \\ 3 \\ 2.699 \\ 2.398 \\ 2.522 \\ 2.823 \\ 2.602 \\ 2.455 \end{pmatrix}$$

დაგუშვათ რომ მააპროქსიმებელი ფუნქცია არის წრფივი. MathCad პროგრამაში მზა ფუნქციის საფუძველზე განვსაზღვრეთ ამ ფუნქციის პარამეტრები. უნდა აღვნიშნოთ, რომ მონაცემები RHa და T-თვის მიღებულია გალოგარითმების შედეგად.

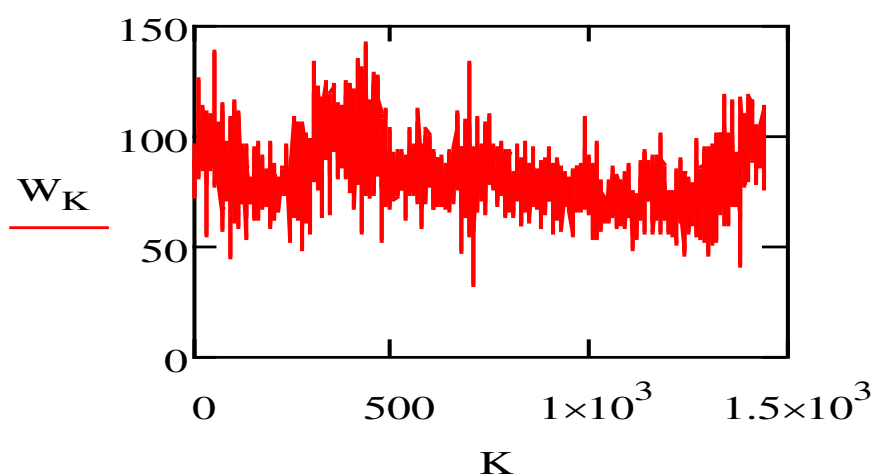
$$n := 0..8 \quad x_n := 2.398 + \frac{(3.301 - 2.398 \cdot n)}{8}$$

$$\text{line}(T, RHa) = \begin{pmatrix} 0.012 \\ 0.778 \end{pmatrix} \quad y_n := 0.778x_n - 0.012$$



ნახ.25 მაქსიმალური გაქანების ნორმირებული მნიშვნელობის log (ლოგარითმის) RHa ექსპერიმენტულად მიღებულ მნიშვნელობათა დამოკიდებულება შესაბამისი τ დროის ლოგარითმის მნიშვნელობებზე, მოცემული წერტილების სახით. y შეესაბამება წრფეს მიღებულს უმცირეს კვადრატთა მეთოდის საფუძველზე.

მსგავსი გამოთვლები ჩავატარეთ კარდიორითმის სისშირის ანათვლებზე, რომელიც მოგვაწოდა მე-9 საავადმყოფოსთან არსებულმა გულის კარდიოლოგიურმა კლინიკამ და მივიღეთ შემდეგი შედეგები:



ნახ.26 კარდიორითმის სისშირის დამოკიდებულება დროზე

ამ ნახაზზე მიღებულია კარდიოლოგიის სისწორის დამოკიდებულება დროზე. ამ შემთხვევაშიც გამოვთვალეთ ჰერსტის პარამეტრის მნიშვნელობა $H=0.795$

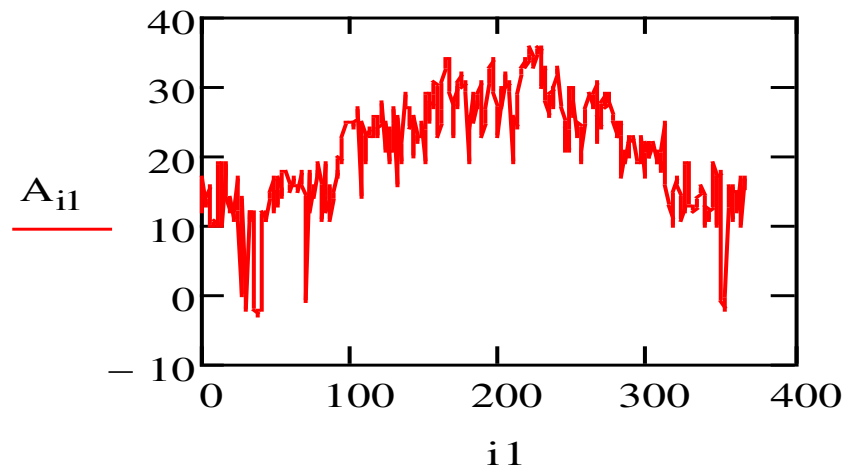
შესაბამისი გამოთვლები ჩავატარეთ ამინდის ტემპერატურის ცვალებადობის მონაცემებზე, როგორც რეალური ასევე დამახინჯებული (ანომალური) ანათვლებისათვის და მივიღეთ შემდეგი შედეგები:

```

k := 0..rows(A - 1)
rows(A) = 366
length(A) = 366
mean(A) = 20.806
X(t, τ) := ∑u=1t (Au - mean(A))
X(rows(A) - 1, τ) = 8.806
max(X) = 452.451
S := stdev(A)
R := (max(X) - min(X)) / S
H := log(R) / log(τ)

k := 0..rows(A) - 1
i := 0..rows(A) - 1
t := 0..rows(A)
τ := rows(A)
i1 := 0..rows(A) - 1
Xi1 := X(i1, τ)
min(X) = -721.765
R = 145.664
H = 0.844

```



ნახ.27 ამინდის ტემპერატურის რეალური ცვალებადობის მონაცემების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი

განვიხილოთ აგრეთვე ამინდის ანომალური ტემპერატურის ცვალებადობის მონაცემები, რომელიც ასახულია ნახ.28-ზე.

```

k := 0..rows(A) - 1      i := 0..rows(A) - 1
rows(A) = 366           k := 0..rows(A) - 1
length(A) = 366        t := 0..rows(A)
mean(A) = 4.822        τ := rows(A)

X(t, τ) := ∑u=1t (Au - mean(A))

i1 := 0..rows(A) - 1

X(rows(A) - 1, τ) = -7.178   Xi1 := X(i1, τ)

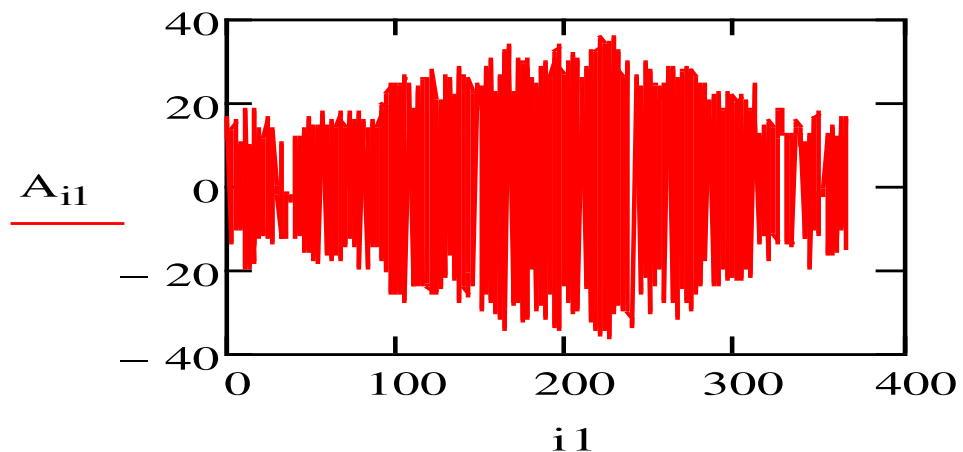
max(X) = 110.205          min(X) = -274.781

S := stdev(A)

R :=  $\frac{\max(X) - \min(X)}{S}$       R = 17.672

H :=  $\frac{\log(R)}{\log(\tau)}$       H = 0.487

```



ნახ.28 ამინდის ტემპერატურის ანომალური ცვალებადობის მონაცემების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

ნახ.27-ზე და ნახ.28-ზე ჩანს, რომ ნახ.28 ასახავს შემთხვევით პროცესს დეტერმინირებული მდგენელის გარეშე, რაც აისახა (H)

ჰერსტის პარამეტრის მნიშვნელობაზე: თუ ნახ.27-ზე მოცემული პროცესისთვის $H=0.844$ და ის მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესს. ნახ.28-ზე ნაჩვენები პროცესისთვის კი $H=0.487$, რაც ცხადყოფს, რომ ის არის ანტიპერსისტენტული ხასიათის.

დასკვნა: 1. როგორც სეისმოგრამისათვის (გარკვეული მონაკვეთის), კარდირითმის სიხშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) და ასევე ამინდის ტემპერატურის ცვლილების ანათვლებისთვის, საქმე გვაქვს პერსისტენტულ პროცესთან, ვინაიდან $H>0.5$ ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ სიგნალი მომავალშიც შეინარჩუნებს მიღებულ ტენდენციას. იქ სადაც სიგნალს ჰქონდა ზრდადობის ხასიათი, ის ახლო მომავალშიც შეინარჩუნებს, ხოლო იქ, სადაც მცირდებოდა მომავალშიც უნდა მოველოდოთ შემცირებას.

2. განხილული პროცესები არ მიეკუთვნებიან მთლიანად შემთხვევით პროცესებს, რომლის კლასიკური მაგალითია, მცირე ნაწილაკების ბროუნის მოძრაობა. ($H=0.5$) ამ დროს შემთხვევითობას ერთვის დეტერმინირებული მდგენელიც. განხილული სიგნალები შეიძლება მივაკუთვნოთ ქაოსურად დეტერმინირებულ ან ფრაქტალურ პროცესებს, რომლებსაც გააჩნიათ როგორც შემთხვევითი, ასევე დეტერმინირებული სიგნალების თვისებები.

3. პროცესი რომელიც წარმოდგენილია ნახ.28-ზე მიეკუთვნება ანტიპერსისტენტულ პროცესებს, რომელიც მთლიანად არის სტოქასტიკური ხასიათის. ჰერსტის პარამეტრი H მისთვის იღებს მნიშვნელობას, რომელიც ნაკლებია 0.5 მნიშვნელობაზე, კერძოდ $H=0.487$.

2.4. II თავის დასკვნები

1. ტექნიკური ობიექტების დიაგნოსტიკებისა და მართვის მიზნით იყენებენ ამ ობიექტების დინამიკის აღსაწერად დროით მწკრივებს, რომლის მეშვეობით ფიქსირდებიან მაკონტრირებელი პარამეტრების ცვლილებები. მეთოდებს, რომლებიც ორიენტირებულია დროითი მწკრივების კვლევაზე კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე,

მიეკუთვნება ჰერსტის ემპირიული კანონი. ეს კანონი თავისთავად დაკავშირებულია ქაოსის თეორიასთან და ფრაქტალებთან.

2. ჰესრტმა აღმოაჩინა და ექსპერიმენტულად დაამტკიცა, რომ “R/S ნორმირებული გაქანება” აღიწერება ემპირიული თანაფარდობით, რომელიც იზრდება დაკვირვების დაგროვილი დროის გაზრდასთან ერთად; კერძოდ

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H$$

სადაც R/S – არის დაკვირვების შედეგად მიღებული ნორმირებული გაქანება, τ - არის პროცესზე დაკვირვების დრო, რომელიც უნდა იყოს ძლიან დიდი მნიშვნელობის. ხოლო H ხარისხი – არის ჰერსტის პარამეტრი. ამ დროს, H პარამეტრი გამოითვლება ტანგენსის (tg) კუთხით, რომელიც შექმნილია $\log(\frac{R}{S})$ და $\log(\frac{\tau}{2})$ წრფეებს შორის. MathCad პროგრამაში შედგენილია ალგორითმი, რომლის მიხედვით ჩატარდა ჰერსტის ემპირიული კანონის გაანალიზება რიგი რეალური პროცესებისთვის.

3. MathCad პროგრამის გარემოში ჩატარებულმა ექსპერიმენტებმა აჩვენა, რომ როგორც სეისმოგრამისათვის (გარკვეული მონაკვეთის) $H=0.749$, კარდირითმის სიხშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) $H=0.795$ და ასევე ამინდის ტემპერატურის ცვლილების ანათვლებისთვის $H=0.844$, საქმე გვაქვს პერსისტენტულ პროცესთან, ვინაიდან $H>0.5$. ეს მიგვითითებს იმაზე, რომ შეიძლება ვიწინასწარმეტყველოთ, რომ სიგნალი მომავალშიც შეინარჩუნებს მიღებულ ტენდენციას: იქ, სადაც სიგნალს ჰქონდა ზრდადობის ხასიათი, ის ახლო მომავალშიც შეინარჩუნებს ზრდადობას, ხოლო იქ, სადაც მცირდებოდა, მომავალშიც უნდა მოველოდოთ შემცირებას.

4. განხილული პროცესები არ მიეკუთვნებიან მთლიანად შემთხვევით პროცესებს, რომლის კლასიკური მაგალითია, მცირე ნაწილაკების ბროუნის მოძრაობა ($H=0.5$). მოყვანილ პროცესებში შემთხვევითობას ერთვის დეტერმინირებული მდგენელიც. განხილული

სიგნალები შეიძლება მიგაკუთვნოთ ქაოსურად-დეტერმინირებულ ან ფრაქტალურ პროცესებს, რომლებსაც გააჩნიათ როგორც შემთხვევითი, ასევე დეტერმინირებული სიგნალების თვისებები.

5. განხილულია პროცესი, რომელიც არის მთლიანად შემთხვევითი და შეესაბამება ამინდის ტემპერატურის ანომალურ ცვლილებას. ამ შემთხვევაში ჰერსტის პარამეტრი $H=0.487$, პროცესი არის ანტიპერსისტენტული. ეს შედეგი კიდევ ერთხელ ადასტურებს ჰერსტის ემპირიული კანონის მიხედვით რეალური პროცესების კლასიფიკაციის შესაძლებლობას ანტიპერსისტენტულ და პერსისტენტულ პროცესებად.

თავი III. დროებითი მწკრივების მოდელირება სხვადასხვა დონის შემთხვევითობით. სიბნალების დროით-სიხშირული წარმოდგენა (ანალიზი)

3.1 მათემატიკური მოდელირების ზოგადი საკითხები.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა დაკავშირებულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. მოდელირებასთან არის დაკავშირებული ნებისმიერი მოვლენის ძირფესვიანი შესწავლა და კვლევა [31]. განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც იცვლება. მოცემული პროცესის სქემატურ ან ფორმალურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები, მოდელირება ეწოდება.

სავსებით გასაგებია, რომ დროებითი მწკრივების მოდელირებას მნიშვნელოვანი ადგილი ეკუთვნის არაწრფივი დინამიკური სისტემების ყოფაქცევის კვლევის დროს. ჰერსტის ემპირიული კანონის შესწავლის დროს დადგინდა, რომ ძალიან ბევრ ბუნებრივ პროცესებისთვის

$$H > 1/2 \text{ და } R/S = (\pi\tau/2)^{1/2} \quad (3.1.1)$$

ჰერსტმა გადაწყვიტა შეემოწმებინა (3.1) გამოსახულების სისწორე “მონტე-კარლოს მეთოდი“-ს მეშვეობით.

დადგინდა [33], რომ H მიისწრაფის 0,5-სკენ ძალიან მდორედ და მოითხოვს დაკვირვებათა ძალიან დიდი დროის განმავლობაში ამონარჩევის მიღებას [35]. მოგვიანებით, მანდელბროტმა, უოლიმომ [34] და რობერტ ბრაუნმა შეისწავლეს ეს პროცესები. ბროუნი პირველი მიხვდა, რომ მიკრონაწილაკების (მტვერის) მოუწესრიგებელ მოძრაობას გააჩნია არა ბიოლოგიური ბუნება, როგორც ეგონათ მანამდე, არამედ ფიზიკური. ყველაფერი ექვემდებარება სითბურ ფლუქტუაციებს. ნაწილაკები იმყოფებიან მარადიულ მოძრაობაში ერთმანეთთან შემთვევით დაჯახებაში, რაც განპირობებულია მათი თბური ენერგიით. ამ მოძრაობას ეწოდება “ბროუნის მოძრაობა”. მიკროსკოპის

საშუალებით შეიძლება დანახულ იქნას “ბროუნის ნაწილაკის მოძრაობა”, რომელიც წარმოადგენს ბიჯების ანაკრეფს შემთხვევითი მიმართულებით. ბროუნის მოძრაობაში დამოუკიდებელი არიან არა ნაწილაკის კოორდინატები (მდებარეობა) სხვადასხვა მომენტებში, არამედ ნაწილაკის წანაცვლებები დროის სხვადასხვა მონაკვეთში. ვინერმა[39] შემოიღო შემთხვევითი ფუნქცია, რომელიც აღწერს ბროუნის მოძრაობას, რომელიც ექვემდებარება გაუსის განაწილების კანონს. თუ ბროუნის ნაწილაკის ნაზრდს ავლნიშნავთ $X(t)-X(t_0)$ გამოსახულებით ნებისმიერ t და t_0 დროის წყვილისათვის, მაშინ ის მიახლოებით შეიძლება აღიწეროს გამოსახულებით [42]

$$X(t)-X(t_0) \sim |t-t_0|^H \quad t > t_0 \quad (3.1.2)$$

ξ - წარმოადგენს გაუსის პროცესის შესაძლო მნიშვნელობას და როცა $H=1/2$ მიიღება კლასიკური ბროუნის მოძრაობა.

ამ გაუსის პროცესის მათემატიკური ლოდინი იქნება 0-ის ტოლი, დისპერსია კი 1-ის ტოლი, თუ შემოვიღებთ ნორმირებულ ახალ ცვლადს. მანდელბროტმა [42] შემოიღო ახალი მცნება: “განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობა”. თუ (3.2.) გამოსახულებაში $H=1/2$ მაჩვენებლის ნაცვლად მივანიჭებთ მას ნებისმიერ ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას ინტერვალიდან $0 < H < 1$ მივიღებთ განზოგადოებულ ბროუნის მოძრაობას.

ამ განზოგადოების შედეგი ავლნიშნოთ $B_H(t)$, თუ გვაქვს კლასიკური ბროუნის მოძრაობა $B(t)=B_{1/2}(t)$ ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს [43], რომ, თუ წერტილის კოორდინატის ავნიშნავს $X(t)$ შევცვლით $B_H(t)$ მივიღებთ, რომ ბროუნის განზოგადოებულ პროცესს გააჩნია 0-ის ტოლი საშუალო ნაზრდი

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0 \quad (3.1.3)$$

ხოლო ამ ნაზრდის დისპერსია კი მიიღებს შემდეგი ფორმულის სახეს

$$V(t - t_0) = \langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2D\tau(|(t - t_0)/\tau|)^{2H} \sim |t - t_0|^{2H} \quad (3.1.4)$$

როგორც ვხედავთ განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობისთვის დროის გაზრდით იზრდება მისი დისპერსია. მანდელბროტმა დაამტკიცა ამავე დროს, რომ სამართლიანია გამოსახულება:

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H^2(t) \rangle} = 2^{H-1} - 1 \quad (3.1.5)$$

უნდა ავლნიშნოთ, რომ თუ $H=1/2$ -ს ნაზრდის კორელაცია წარსული და მომავალი მნიშვნელობების უდრის ნულს. ეს ასეც უნდა ყოფილიყო, თუ შემთხვევით პროცესს გააჩნია ურთიერთ დამოუკიდებელი ნაზრდები. მაგრამ როდესაც $H \neq 1/2$ -ს ვღებულობთ კორელაციის მნიშვნელობას $C(t) \neq 0$ -ს ნებისმიერ t დროისათვის. ეს ღირსშესანიშნავი თვისება განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობისა მდგომარეობს პერსისტენტობის და ანტიპერსისტენტობის თვისებაში. პერსისტენტობა გაიგება, როგორც ტენდენციის შენარჩუნება. თუ $H > 1/2$ -ზე, მაშინ არსებული ტენდენცია შენარჩუნდება; კერძოდ, თუ ამ შემთხვევაში ნაზრდები იყო დადებითი რაიმე დროის განმავლობაში წარსულში, რაც იგივეა ხდებოდა პროცესის ზრდა, მაშინ მომავალშიც საშუალოდ იქნება მოსალოდნელი ზრდა. მაშასადამე $H > 1/2$ -ზე პროცესისთვის ზრდის ტენდენცია წარსულში ნიშნავს მომავალშიც ტენდენციას ზრდადობისკენ. ეს სამართლიანია დიდი დროის მონაკვეთებისთვის. საპირისპიროდ, შემცირების ტენდენცია წარსულში ნიშნავს მომავალშიც შემცირების გაგრძელებას. შემთხვევა $H < 1/2$ -ზე ხასიათდება ანტიპერსისტენტობით. ამ შემთხვევაში წარსულში პროცესის ზრდა ნიშნავს შემცირებას მომავალში, ხოლო ტენდენცია შემცირებისკენ წასულში ქმნის გაზრდას მომავალში.

ჰერსტის მეთოდის განხილვისას, ჩვენ მივიღეთ, რომ ბუნებრივი პროცესები ხასიათდებიან პერსისტენტობით დროის დიდ მასშაბში. ასეთი პროცესების მოდელირებისათვის მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელი.

3.2 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდერირება.

განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის ცნება, როგორც ვთქვით, პირველად შემოიღო მანდელბროტმა [42] $X(t)$ შემთხვევითი ფუნქციის განზოგადოებით (3.1.2) გამოსახულებაში $H=1/2$ მაჩვენებლის შეცვლით ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვით ინტერვალიდან $0 < H < 1$ [42].

განზოგადოების შედეგი მან აღნიშნა $B_H(t)$ -თი. $H \neq 1/2$ შესაბამება განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობას, ხოლო $H=1/2$ -ს შესაბამება შემთხვევას, როცა ადგილი აქვს მიკრო ნაწილაკის დამოუკიდებელ წანაცვლებას, ანუ კლასიკური ბროუნის მოძრაობას. შემთხვევა, როცა $H \neq 1/2$ აღწერს ბროუნის განზოგადოებული მოძრაობის უნიკალურ თვისებას, რომელიც მდგომარეობს მიღებული მოძრაობის პერსისტენტობაში და ანტიპერსისტენტობაში. ეს ტერმინები გამოყენებული იყო ჩვენს მიერ ჰერსტის კონონის განხილვისას. როცა $H > 1/2$ პროცესი ინარჩუნებს არსებულ ტენდენციას ზრდადობის ან შემცირების თვალსაზრისით. ე.ი. თუ პროცესის ნაზრდი იყო დადებითი წარსულში გარკვეული დროის განმავლობაში, გაზრდის ტენდენცია შეუნარჩუნდება მომავალშიც გარკვეული დროის განმავლობაში (აღბათურად) და პირიქით, შემცირებისკენ ტენდენცია შეუნარჩუნდება მომავალშიც. შემთხვევა $H < 1/2$ ხასიათდება ანტიპერსისტენტულობით. ამ დროს წარსულში პროცესის მნიშვნელობათა გაზრდა ნიშნავს მოსალოდნელ შემცირებას მომავალში (აღბათურად).

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{n^{-H}}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t K(t-t') dB(t') \quad (3.2.1)$$

იმისათვის, რომ უფრო ღმად გავიგოთ ბროუნის მოძრაობის ბუნება და მისი არსი, მიზანშეწონილია ამ პროცესის რეალიზება რიცხვითი მოდელირების საშუალებით. კლასიკური ბროუნის მოძრაობა მიიღება, როგორც კერძო შემთხვევა $H=(1/2)$. მანდელბროტმა მიიღო ფორმულა, რომლის მიხედვით უნდა მოხდეს განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირება. როგორც პარაგრაფში 3.1 იყო აღნიშნული

განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის აღსაწერად მან შემოიღო აღნიშვნა $B_H(t)$ და შემოგეთავაზა ფორმულა:

დისერტაციის მეორე თავში, როცა განიხილებოდა დაკვირვება დროითი მწკრივებით აღწერა და კვლევა რეალური პროცესებისა (სეისმოგრაამისათვის, (გარკვეული მონაკვეთის), კარდირითმის სისშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) და ამინდის ცვლილების ანათვლებისთვის), დაერწმუნდით, რომ ყველა ბუნებრივი პროცესი, ჩვენს მიერ შესწავლილი, და ჰერსტის მიერ გამოკვლეული, ხასიათებიდან პერსისტენტულობით დროითი ფართო ინტერვალისთვის.

აქედან დასკვნა, რომ რეალური დროითი მწკრივების (პროცესების) მოდელირებისთვის მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნას განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობა.

მანდელბროტის მიხედვით შესაბამისი ბირთვი $K(t - t')$ შერჩევით და იგი უნდა უდრიდეს.

$$K(t - t') = \begin{cases} (t - t')^{H-1/2} & 0 \leq t' \leq t \\ \{(t - t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2}\} & t' < 0 \end{cases} \quad (3.2.2)$$

სადაც t და t' - არის დროის მომენტები.

$B_H(t) - B_H(t-1)$ აღიწერება გამოსახულებით:

$$\begin{aligned} & B_H(t) - B_H(t-1) \\ &= \frac{n^{-H}}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \sum_{i=1}^{nt} (i)^{H-1/2} \xi_{(1+n(M+t)-i)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n(M-1)} \left((n+i)^{H-1/2} - (i)^{H-1/2} \right) \xi_{(1+n(M-1+t)-i)} \right\} \quad (3.2.3) \end{aligned}$$

სადაც n - არის ინტერვალის რაოდენობა, $t' = in$.

$\{\xi_i\}$ - არის გაუსის შემთხვევითი სიდიდე ნულის ტოლი საშუალო მნიშვნელობით და ერთის ტოლი საშუალო კვადრატული გადახრით. გარდა ამისა, მან აღნიშნა, რომ n -ის გადიდება აუცილებელია. მიზანშეწონილია, რომ $n \geq 8$, $\Gamma(x)$ - არის გამა ფუნქცია. $M=700$, $t=1,2,\dots,M$.

მოყვანილი გამოსახულებიდან ჩვენ ვხედავთ, რომ მოდელირება ამ შემთხვევაში დაკავშირებულია ძალიან დიდ გამოთვლებთან. ეს ალგორითმი არაეკონომიურია, იმიტომ რომ მოითხოვს ყოველი მნიშვნელობისათვის წევრთა გამოთვლას. შემდეგი პარაგრაფი ეძღვნება ბროუნის განზოგადოებული მოძრაობის მოდელირების დისკრეტული ვარიანტის რეალიზებას, დაფუძნებულს ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენებაზე.

3.3 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირება, დაფუძნებული ვეივლეტ-კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენებაზე.

ამ პარაგრაფში ჩვენ გთავაზობთ განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირებას მარტივი გზით. მოდელირება გულისხმობს ბროუნის განზოგადოებული მოძრაობის შექმნას ანტიპერსისტენტული, პერსისტენტული და კლასიკური ბროუნის მოძრაობებისთვის, რომელიც იყენებს ორთოგონალურ ვეივლეტ-ტრანსფორმანტას და უკუგარდაქმნას მოდელირებისათვის. ალგორითმების რეალიზაცია ხორციელდება MathCad პროგრამაში, სადაც მოცემულია მზა ფუნქციები და მოდულები.

ვეივლეტ-ტექნოლოგიები ვეივლეტ-გარდაქმნა წარმოადგენს თანამედროვე პერსპექტიული ინფორმაციის დამუშავების მეთოდს. ვეივლეტ-ანალიზმა დაიწყო განვითარება მეოცე საუკუნის ოთხმოციან წლებში ჰაარის ფუნქციების გამოყენებით. დაუბემა [46] დაამუშავა ორთოგონალური ვეივლეტები, რომლებიც წარმოადგენენ ფაარის ფუნქციების შემდგომ განვითარებას. მე-20 საუკუნის ბოლოს კომპიუტერული მათემატიკის სისტემებში (MathCad, mathLab, Mathematica)

გამოჩნდა ვეივლეტების გამოყენების სხვადასხვა ღირსშესანიშნავი შესაძლებლობები. შედეგებმა, რომლებიც იქნა მიღებული ვეივლეტ-ანალიზის საშუალებით, სხვადასხვა დარგში, განაპირობა ამ მიმართულებისადმი ინტერესის გაძლიერება და ხელი შეუწევს მის მზარდ განვითარებას [47]. ვეივლეტ ანალიზის მეთოდები [50] შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას სხვადასხვა ბუნების ინფორმაციის დასამუშავებლად. განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს დისკრეტულ (DWT) ვეივლეტ გარდაქმნას. MathCad პროგრამულ გარემოში დისკრეტულ ვეივლეტ-გარდაქმნას ეთმობა განსაკუთრებული მნიშვნელობა: მოცემულია მზა ფუნქციები და მოდულები ვეივლეტ-დაუბების და სხვა ვეივლეტ-გარდაქმნისათვის [63]. გავანალიზებთ რა ვეივლეტ-გარდაქმნების უნიკალური თვისებები და შესაძლებლობანი, გადავწყვიტოთ ბროუნის განზოგადოებული მოძრაობის მოდელირებისათვის შეგვედგინა მარტივი ალგორითმი, რომელიც ითვალისწინებს ვეივლეტ-პირამიდულ აგებას. ალგორითმი გულისხმობს ვეივლეტ-ტრანსფორმანტის შექმნას იმ დონეების რაოდენობისათვის, რომელიც შეესაბამება ორობით ლოგარითმს ანათვალთა მოცემული რაოდენობისათვის. რაოდენობა უნდა იყოს ტოლი 2 – მთელ ხარისხში აღებული. ჩვენ ავიღეთ $2^{10}=1024$. შევქმენით ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ვექტორი. უნდა აღვნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ნებისმიერი განაწილების გამოყენება. მაგრამ ვინაიდან, საქმე ეხებოდა ბროუნის მოძრაობას – ამიტომ ავირჩიეთ ნორმალური განაწილება. მასშტაბი (პირამიდის) დონე ავიღეთ $\log(\text{len},2)$ ტოლი და ვეივლეტ-გარდაქმნის არეში მივიღეთ V – ვექტორი იმისათვის, რომ შედეგები ყოფილიყო მიღებული დროის არეში. გამოვიყენეთ ვეივლეტ-უკუგარდაქმნა $\text{Symmle}(8)$ ფუნქციების ბაზაზე.

მოყვანილია შედეგები, ალგორითმები, გრაფიკები განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირებისათვის, როცა $H=0,1$; $H=0,5$; $H=0,9$. ალგორითმის სამართლიანობა შევამოწმეთ ბროუნის კლასიკური მოძრაობისათვის, როცა $H=0,5$ და ვეივლეტ-გარდაქმნის გარეშე მიღებული ბროუნის მოძრაობისათვის.

წარმოდგენილი მასალა ეხება განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირებას ვეივლეტ-გარდაქმნის გამეყენებით; რეალიზებული MATHCAD პროგრამის გარემოში. მოდელირება ხდება ჰერსტის პარამეტრის საფუძველზე. პირველ შემთხვევაში დაეუშვებთ, რომ ჰერსტის პარამეტრი უდრის $H=0,1$. როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული ეს შემთხვევა შეესაბამება ანტიპერსისტენტული პროცესის შექმნას. როცა პროცესი არის მთლიანად შემთხვევითი ყოველი პროგნოზირების გარეშე.

$H := 0,1$ ეს არის ჰერსტის პარამეტრიც

$sd := 0,5$ არის სტანდარტული გადახრა

$len := 1024$ ეს არის დროის მონაკვეთი, რომელითაც მოცემულია ანათვლების რაოდენობა. მათი რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია ორის მეთექვსმეტე ხარისხად

$noise := morm(len,0,1)$ ეს არის ერთად-ერთი ვექტორი ნორმალურად განაწილებული სიდიდეების.

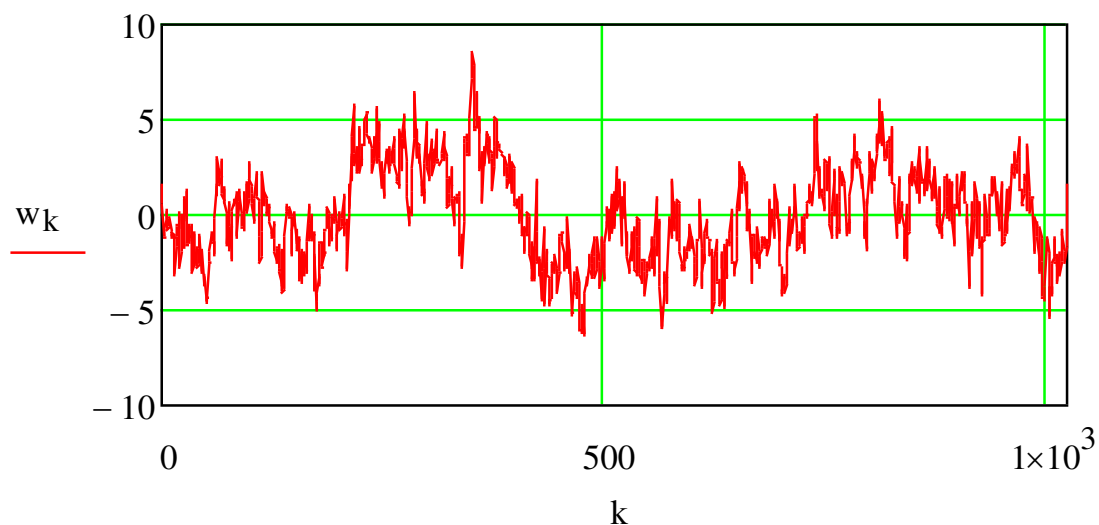
შემდეგი ფუნქცია ქმნის აპროქსიმაციას თეთრი ხმაურის ვეივლეტ-ტრანსფორმანტის არეში [47] ვეივლეტ-ტრანსფორმანტა მოიცავს გარდაქმნის i -ურ დონეს, რომელიც მრავლდება სტანდარტულ გადახრაზე და მრავლდება $(2^i)^{H+\frac{1}{2}}$.

```
fBmScal(noise, H, sd) :=
| len ← rows(noise)
| numLev ← log(len, 2)
| v0 ← 0
| for i ∈ numLev..1
|   v ← stack
|     [ v, submatrix(
|       noise,
|       len / 2^i,
|       len / 2^(i-1) - 1, 0, 0 )
|     ] · sd · (2^i)^(H + 1/2)
| v
```

$v := fBmScal(noise, H, sd)$

V – არის ვეივლეტ-გარდაქმნის შედეგად მიღებული ვექტორი. ჩვენ გვირჩევნია მივიღოთ გარდაქმნის შედეგი დროით არეში და ამიტომ ვიყენებთ ვეივლეტ-უკუგარდაქმნას

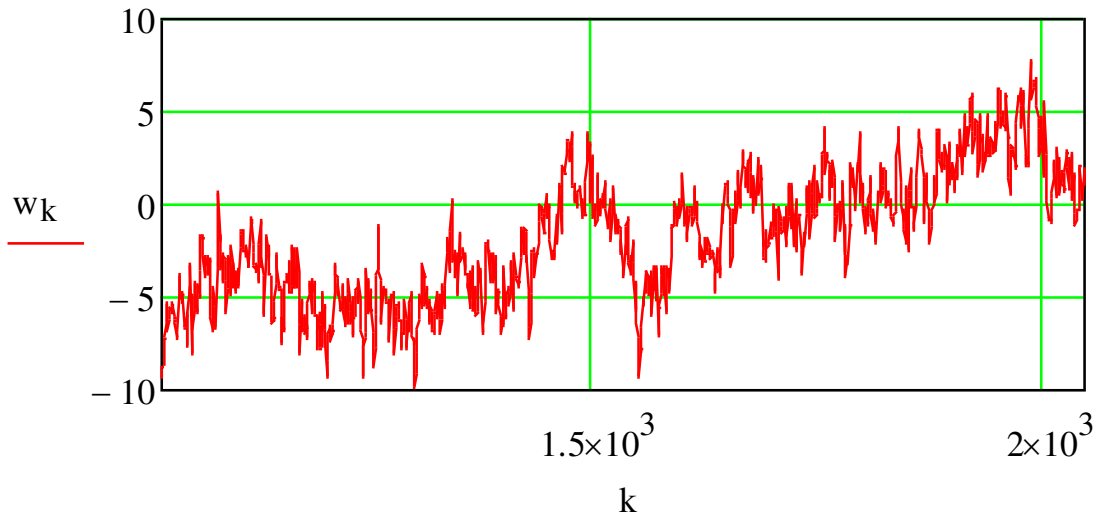
```
filter:= symmle(8)
w := idwt(v ,log(rows(v) ,2) ,filter)
k := 0..len - 1
kp := 1..len - 1
```



ნახ.29 განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის სიგნალის დამოკიდებულება როდესაც ჰერსტის პარამეტრი $H=0.1$

ნახაზზე მოცემულია გარდაქმნის შედეგი. ვინაიდან ვეივლეტ-გარდაქმნას ამ შემთხვევაში გააჩნია პერიოდული ხასიათი, უკეთესი შედეგების მისაღებად გამოვიყენოთ ანათოვლები, რომლებიც მიიღებიან მეორე პერიოდისთვის [48]

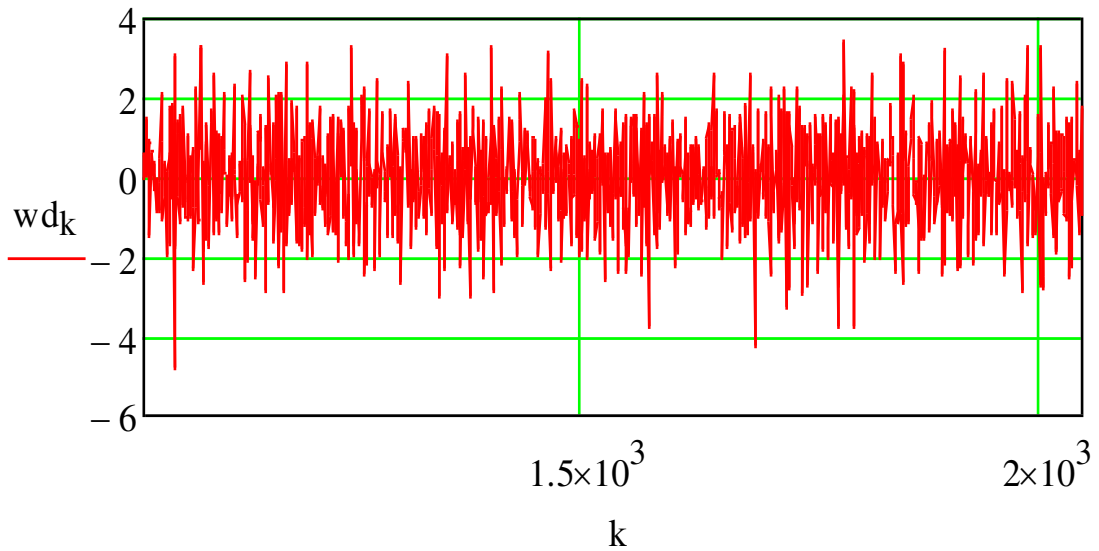
```
noise:= rnorm(len-4,0,1)      v := fBmScale(noise,H,sd)      start:= 1
mx := (start+ 1)·len - 1      mn := start·len
k := mn..mx
w := idwt(v ,log(rows(noise) ,2) ,filter)
```



ნახ.30 ვეივლეტ-უკუგარდაქმნის შედეგად მიღებული დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი როდესაც $H=0.1$

აქ მოცემულია გრაფიკი, რომელიც ასახავს w_k -ს დამოკიდებულებას. ე.წ. ჰაუსის - k ხმაური მიიღება გამოსახულებით

$$wd_{k+1} := w_{k+1} - w_k$$



ნახ.31 “გაუსის ხმაურის” დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

როცა $H=1/2$ განზოგადებული ბროუნის მოძრაობა გარდაიქმნება კლასიკურ ბროუნის მოძრაობად. აქ ნაჩვენებია ალგორითმი ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენების გარეშე.

$$B_0 := 0$$

$$sd := .01$$

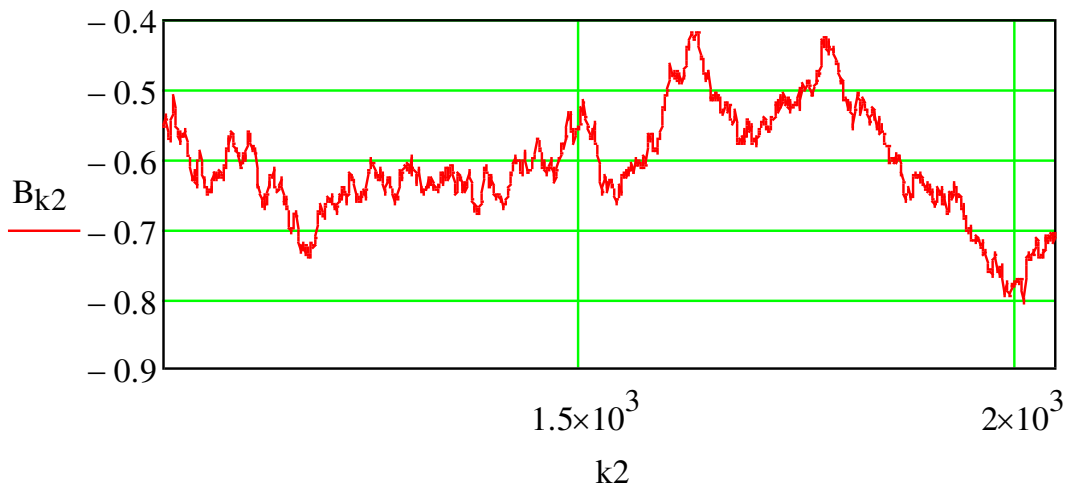
$B_{k+1} := B_k + sd \cdot noise_k \quad k := 0..4 \cdot len - 1$

$D_{k+1} := B_{k+1} - B_k \quad mean(noise) = -0.038$

$i := 1..len - 1$

mn := start-len $stdev(noise) = 1.006$

$k2 := mn..mx \quad \underline{mx} := (start + 1) \cdot len - 1$



ნახ.32 ბროუნის კლასიკური მოძრაობისთვის მიღებული გრაფიკი
ვეიველემ-გარდაქმნის გარეშე, როცა $H=1/2$ -ს

H := .5 $\underline{sd} := .5$

new_noise := rnorm(4·len, 0, 1)

more_noise := rnorm(16·len, 0, 1)

noise := rnorm(4·len, 0, 1)

start := 2

mn := start-len

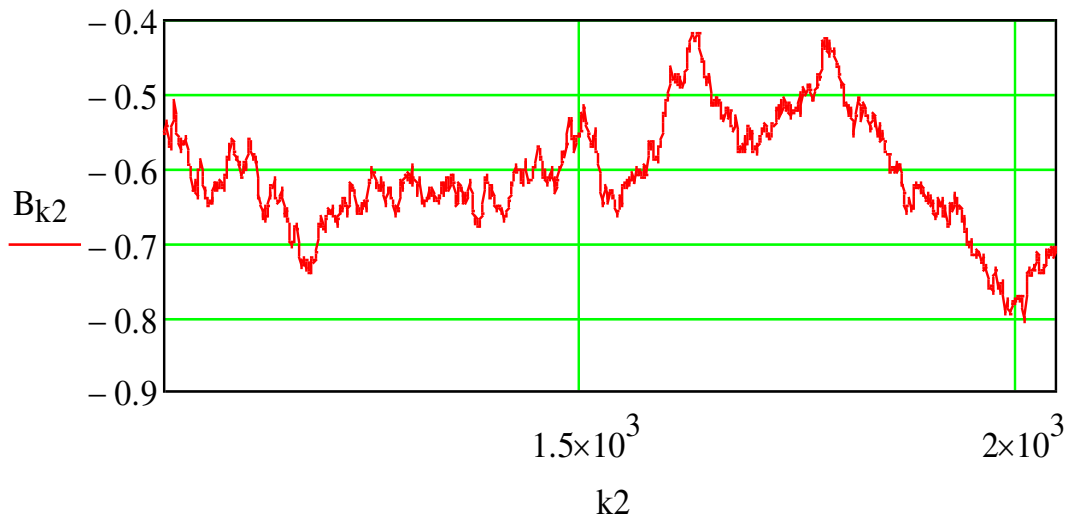
mx := (start + 1)·len - 1

ks := mn..mx

v := fBmScale(new_noise, H, sd)

w := idwt(v, 12, filter)

აქვე მივიღეთ სურათი მიღებული ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენებით



ნახ33 ბროუნის კლასიკური მოძრაობისთვის მიღებული გრაფიკი ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენებით, როცა $H=1/2$ -ს

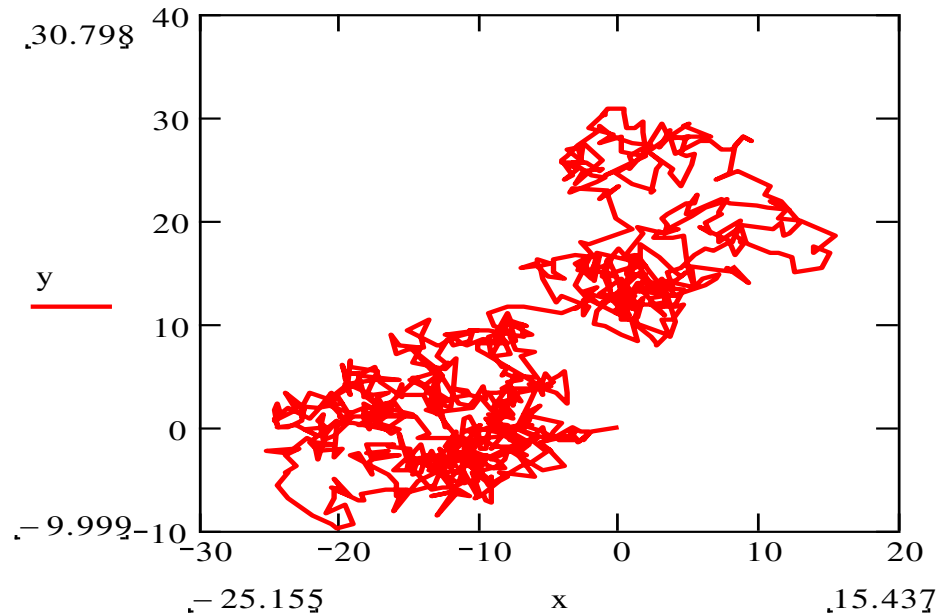
როგორც შედეგებმა აჩვენა ბროუნის კლასიკური მოძრაობისთვის გრაფიკები ვეივლეტ-გარდაქმნით და ვეივლეტ-გარდაქმნის გარეშე თითქმის იდენტურია, აქედან შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა რომ განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირება მიზანშეწონილია განსორციელდეს ვეივლეტ-გარდაქმნის გამოყენებით.

აქვე მოვიყვანოთ MathCad პროგრამულ გარემოში განზოგადოებული ბროუნის კლასიკური მოძრაობის მაგალითი, რომელიც ასახულია ფაზურ სიბრტყეზე. ალგორითმი მოცემულია რეკურენტული ანუ იტერაციული ფორმულის სახით და აქვს შემდეგი სახე:

1. იტერაციების რაოდენობა $n=1000$;
2. წერტილების საწყისი კოორდინატები: $x_0 = 0$ $y_0 = 0$
3. საშუალო კვადრატული გადახრა ნორმალური განაწილების შემთხვევაში $\sigma = 1$
4. იტერაციული გამოთვლები:
 $i := 1..N$

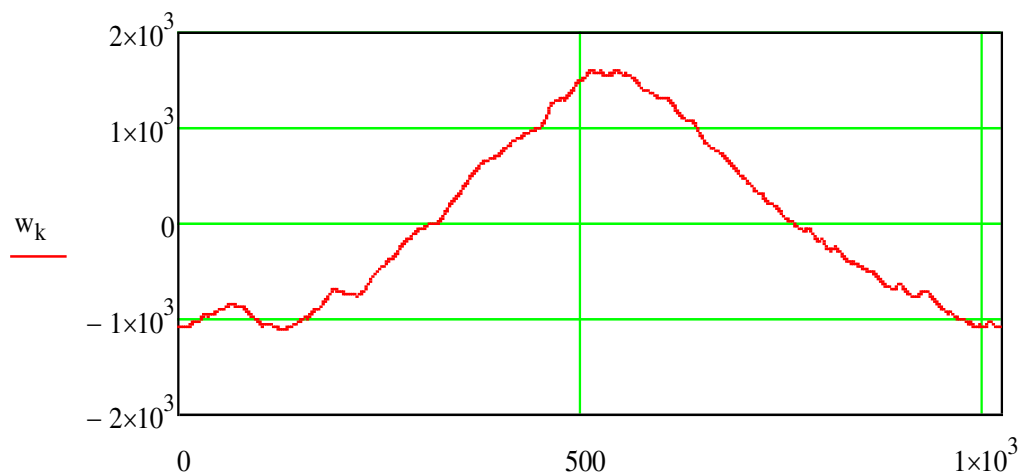
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i + 1 \\ y_i + 1 \end{pmatrix} + \text{norm}(2, 0, \sigma)$$

გამოთვლების შედეგად მიღებული მნიშვნელობების გრაფიკული გამოსახულება მოცემულია ნახ.34-ზე.



ნახ.34 ბროუნის კლასიკური მოძრაობის მოდელირების შედეგად მიღებული გრაფიკი ფაზურ სიბრტყეზე.

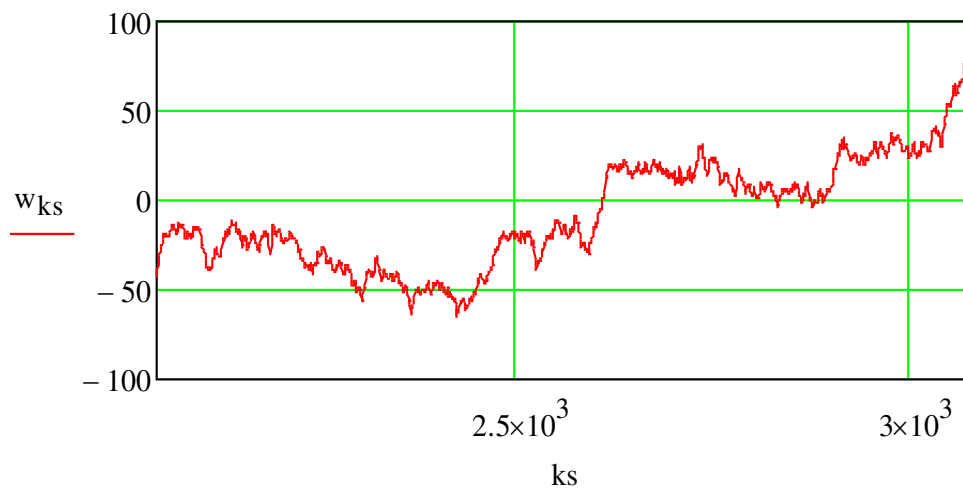
როდესაც $H=0.99$ -ს მოდელირების შემდეგ გრაფიკმა მიიღო შემდეგი სახე.



ნახ.35 მოდელირების შედეგად მიღებული სიგნალის დროზე დამოკიდებულების გრაფიკი, როდესაც $H=0.99$ -ს.

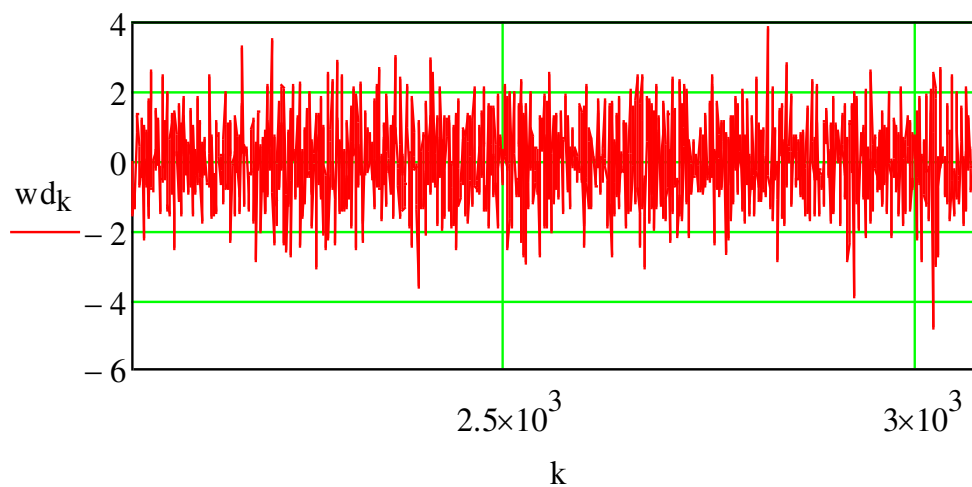
ბროუნის მოძრაობა აღნიშნული იქნება fBm-ით. ჰერსტის პარამეტრი $H=0.5$ -ს. ვინაიდან იქმნება კლასიკურ ბროუნის მოძრაობა. სტანდარტული საშუალო კვადრატული გადახრა $S=0.5$ -ს, len - არის ბროუნის, გენერირებული, მოძრაობის არსებობის დრო. ეს მნიშვნელობა აუცილებლად უნდა იყოს 2-ის მთელი ხარისხის ტოლი, $len=2^{10}$. noise - არის ვექტორი, რომელიც მოიცავს ნორმალურად განაწილებულ რიცხვებს, რომლის საშუალო მნიშვნელობა უდრის 0-ს, ხოლო საშუალო კვადრატული გადახრა კი ერთს. ვექტორი შედგება 2^{10} წევრისაგან.

მოდელირების შედეგად ბროუნის მოძრაობის კოორდინატის ცვლილება ასახულია ნახ.36-ზე.



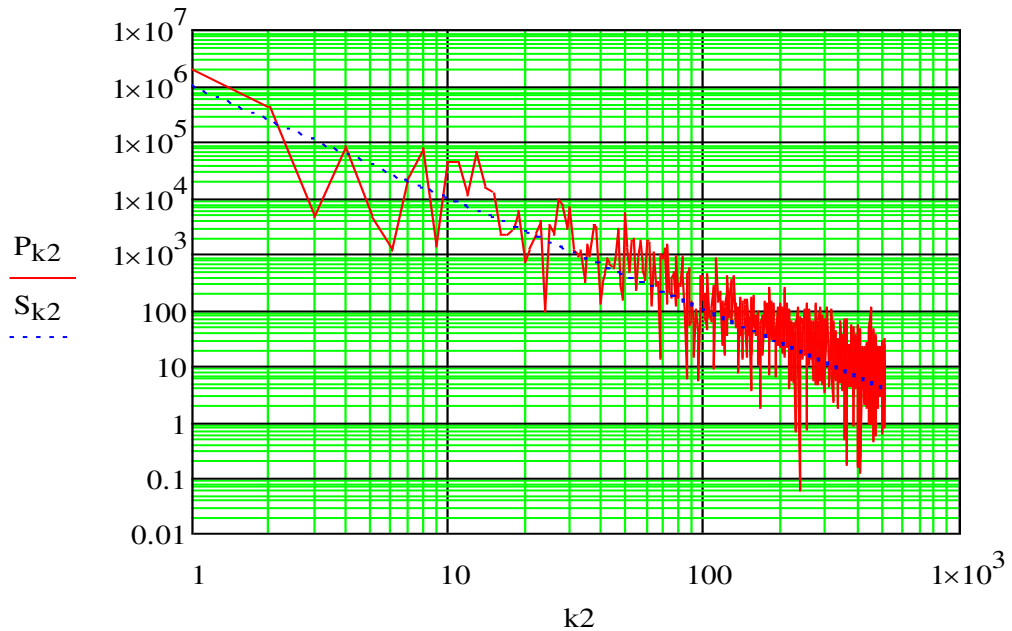
ნახ.36 ბროუნის მოძრაობის კოორდინატის ცვლილება

ნახ.37-ზე მოყვანილია ბროუნის ნაწილაკის წანაცვლების გრაფიკი



ნახ.37 ბროუნის ნაწილაკის წანაცვლება.

შემდეგში ჩვენ გამოვთვალეთ მიღებული ფუნქციის სპექტრული სიმძლავრე, რომელიც ასახულია შემდეგ ნახაზზე:



ნახ.38 ბროუნის მოძრაობის სპექტრული სიმძლავრე.

P მიღებული სიმძლავრეა, ხოლო $S_{kp} := 1000000 \cdot kp^{-2}$,
 $kp := 1..len - 1$

გრაფიკი მოცემულია ლოგარითმულ მასშტაბში.

ეს მონაცემები მიეკუთვნება, ბროუნის მოძრაობის მოდელირების ორგანზომილებიან შემთხვევას.

```
fBmScale(noise, H, sd) :=
  len ← rows(noise)
  numLev ← log(len, 2)
  v0,0 ← 1
  for i ∈ numLev..1
    v ← stack [ v, submatrix ( noise, len/2^i, len/2^(i-1) - 1, 0, len/2^i - 1 ) · sd · (4^i)^(H+1/2) ]
    temp ← stack ( submatrix ( noise, 0, len/2^i - 1, len/2^i, len/2^(i-1) - 1 ), submatrix ( noise, len/2^i, len/2^(i-1) - 1, len/2^i, len/2^(i-1) - 1 ) )
    v ← augment [ v, temp · sd · (4^i)^(H+1/2) ]
  v
```

```

myRnorm(row, col, mean, stdev) := | temp ← rnorm(row·col, mean, stdev)
                                | for i ∈ 0..col-1
                                |   M(i) ← submatrix(temp, i·row, (i+1)·row-1, 0, 0]
                                | M

```

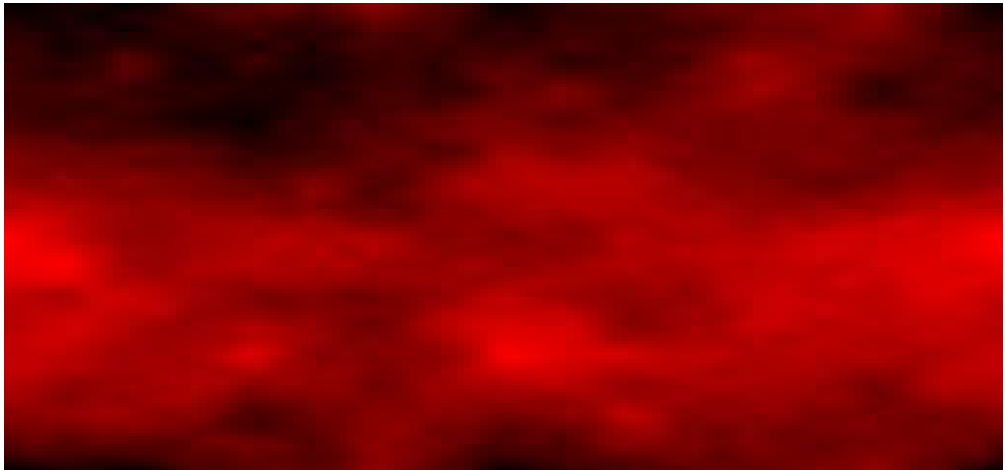
```
size := 128
```

```
Noise := myRnorm(size, size, 0, 1)
```

```
M := fBmScale(Noise, H, sd)
```

```
N := idwt(M, log(size, 2), filter)
```

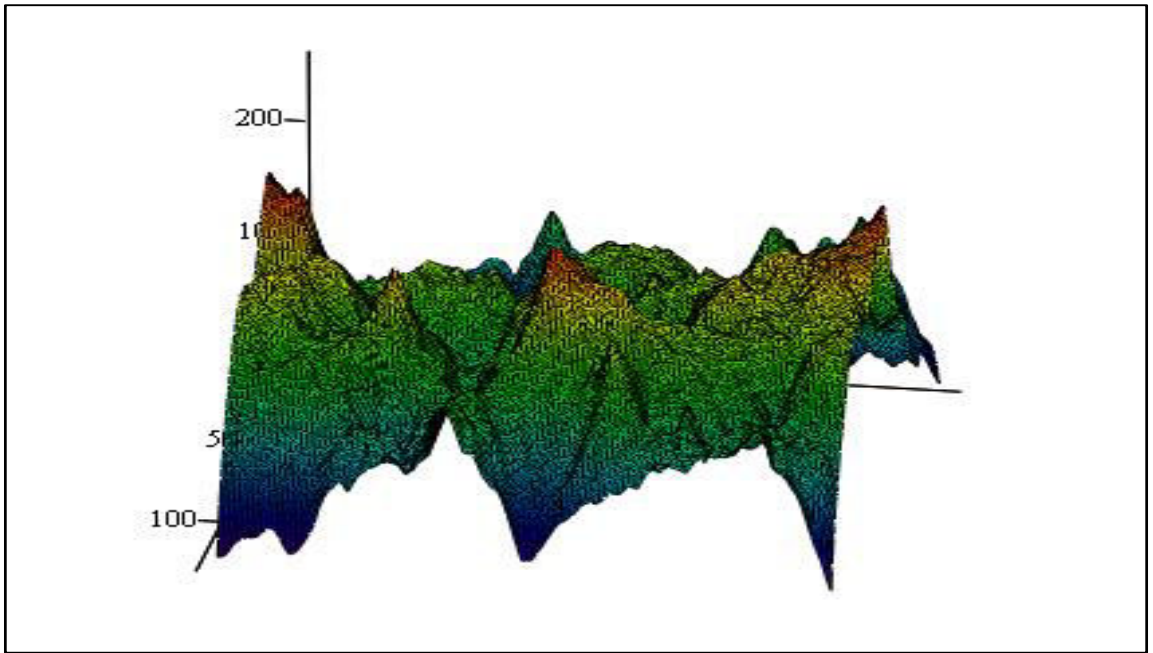
```
N :=  $\frac{255}{\max(N) - \min(N)} \cdot (N - \min(N))$ 
```



N, N·O, N·O

ნახ.39 გამოსახულება, რომელიც მიღებულია ინტენსიობის ნორმირებული მნიშვნელობისთვის.

აქ N – არის გამოსახულება ნორმირებული მნიშვნელობისთვის, როცა გამოსახულების ინტენსიობა ნორმირებულია 256 დონით [0 – 255] ინტერვალში.

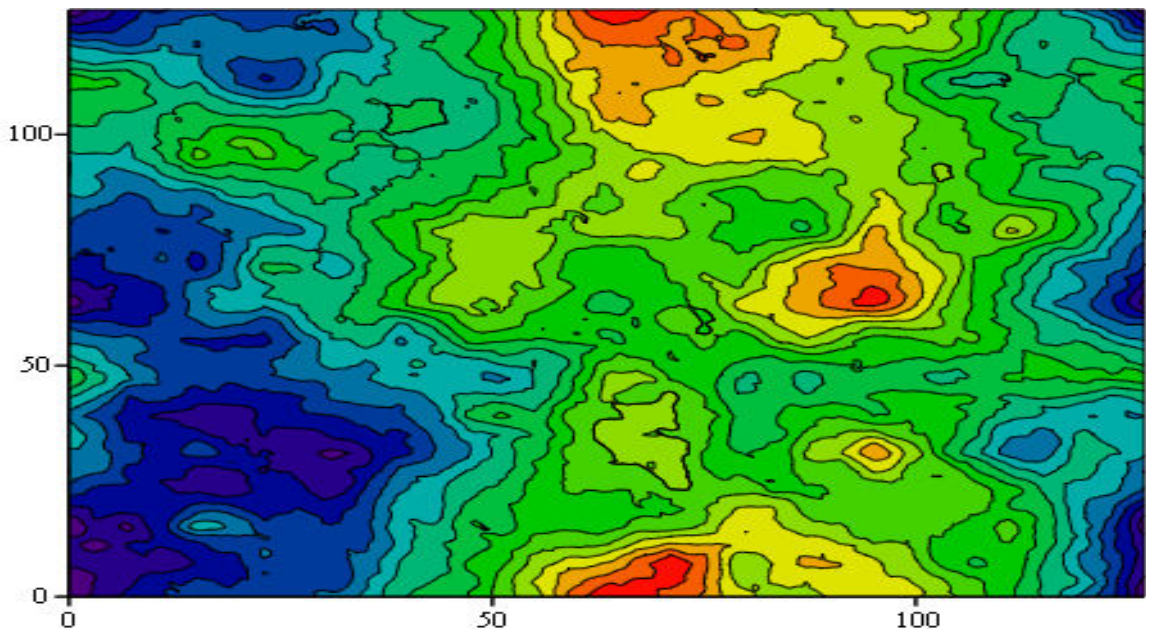


N

ნახ.40 ბროუნის გამოსახულება ინტენსიობის ნორმირებული მნიშვნელობისთვის მოცემული ჰისტოგრამის სახით.

$$\min(N) = 0 \quad \max(N) = 255$$

გამოსახულება როგორც ჰისტოგრამული წარმოდგენა.



N

ნახ.41 გამოსახულება მოცემული კონტურების სახით

აქ მოცემულია გამოსახულება კონტურებით და ინტენსიობის დონეების მიხედვით.

3.4 დროითი მუკრივების დროით-სიხშირული ანალიზი

კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე

დროით-სიხშირული ანალიზი გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება სიგნალის სიხშირული შემადგენლობა დროის მიხედვით. *wavelet*, *wavelet packets* და კოსინუს *packets* ლოკალიზებული არიან როგორც დროის ასევე სიხშირის მიხედვით და ამით ისინი შეიძლება გამოყენებულ იქნენ სიგნალის სტრუქტურის აღწერისათვის დროით-სიხშირულ არეში. ქვემოთ გრაფიკზე x აბსცისათა ღერძზე გადაიხომება დრო, ხოლო ორდინატთა ღერძზე კი სიხშირე. დროით-სიხშირული სიბრტყე დაყოფილი იქნება მართკუთხედებად, რომლებიც შეესაბამებიან ლოკალიზებულ სიხშირეს მოცემული საბაზო ვექტორისათვის. მართკუთხედის სიგრძე x ღერძის მიმართ შეესაბამება ვექტორის სიგრძეს. მართკუთხედის სიგანე y ღერძზე, შეესაბამება ვექტორის სიხშირის გამტარობის ზოლს. ყოველი მართკუთხედი ინარჩუნებს მუდმივ არეს, ვინაიდან სიხშირული ზოლი სიგნალისა უკუპროპორციულია მისი სიგრძისა. კოეფიციენტების მოდული განისაზღვრება ნაცრისფერი დონით ყოველი მართკუთხედისათვის, უფრო მუქი მართკუთხედი აჩვენებს უფრო მაღალ ენერგიას მოცემული დროით-სიხშირული პოზიციისათვის.

დროით სიხშირული ანალიზი ვეივლეტ-გარდაქმნისათვის *Mathcad* პროგრამულ გარემოში ხორციელდება *tfPlotFromWPT(w,basis,hsize,vsize)* ფუნქციის გამოყენებით.

w – ვეივლეტ გარდაქმნის (ტრანსფორმანტის) კოეფიციენტები,

$basis$ – ვეივლეტ ან ვეივლეტ-პაკეტის ბაზისური ფუნქცია,

$hsize$ – პიქსელების რაოდენობა x – ღერძის მიმართ,

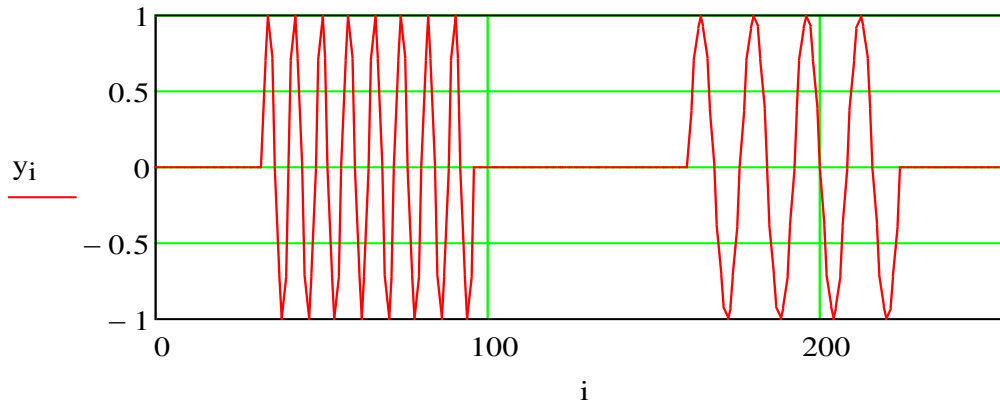
$vsize$ – პიქსელების რაოდენობა y – ღერძის მიმართ.

ქვემოთ მოყვანილია მოდელირებული სიგნალი, რომელიც შეიცავს ორი სინუსოიდის ჯამს ორი სიხშირისათვის, ორჯერ განსხვავებულს.

$$i := 0..N-1$$

$$N := 256$$

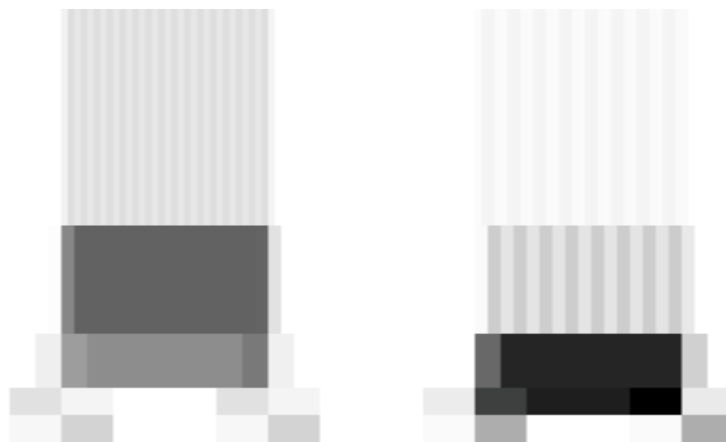
$$y_i := \text{if} \left[\frac{1 \cdot N}{8} \leq i < \frac{3 \cdot N}{8}, \sin \left(2 \cdot \pi \cdot 32 \cdot \frac{i}{N} \right), \left(\text{if} \left(\frac{5 \cdot N}{8} \leq i < \frac{7 \cdot N}{8}, \sin \left(2 \cdot \pi \cdot 16 \cdot \frac{i}{N} \right), 0 \right) \right) \right]$$



ნახ.42 მოდულირებული სიგნალი

ქვემოთ მოყვანილი გრაფიკები x ღერძის მიმართ წარმოადგენენ დროით არეს, ხოლო y ღერძის მიმართ კი წარმოადგენს სიხშირეს.

დროით-სიხშირული სიბრტყე წარმოდგენილია მართკუთხედით, რომელიც შეესაბამება ბაზისური ვექტორის სიგრძეს x ღერძზე, ხოლო y ღერძზე მის სიხშირულ ზოლს. შესაბამისი კოეფიციენტის მოდული განაპირობებს ყოველი მართკუთხედის ნაცრისფერ დონეს. უფრო შავი ფონი აჩვენებს მაღალ ენერგიას დროით-სიხშირული ლოკალიზაციის დროს.



QQ

ნახ.43 ბაზისური ფუნქცია

43 ნახაზზე ბაზისურ ფუნქციად გამოყენებულია დაუბემის ფუნქცია 4-ის ტოლი კოეფიციენტით:

```

filter:= daublet(4)           J:=4
w:= dwt(y, J, filter)       QQ:= tfPlotFromWPT(w, wavebs(J,1),1,1)

```

დროით-სიხშირული სიბრტყე გვიჩვენებს ორ განსხვავებულ მაქსიმუმს, რომლებიც აღინიშნება t ღერძზე, რაც შეეხება სიხშირულ არეს, ვხედავთ უფრო ცუდ შედეგს ფილტრაციის თვალსაზრისით. ამიტომ შევექმნით ვეივლეტ პაკეტს. გარდა ამისა ჩვენ გამოვიყენებთ ოპტიმალურ ბაზისს, რომელიც ხორციელდება ენტროპიის ფუნქციის გამოყენებით. ამ ორი შედეგის შედარება გვიჩვენებს, რომ პაკეტის გამოყენებისას მიიღება უფრო კარგი შედეგი დროით-სიხშირულ არეში, ვინაიდან უფრო მაღალი სიხშირეების დროს შევკვლით სიგნალის მდგენელის შესაბამისი გამოყენება.

```
T := wpt(y, J, filter)      nrm := sqrt(y · y)
```

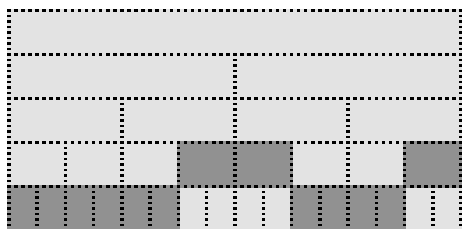
$$entropy(x) := -\left(\frac{x}{nrm}\right)^2 \cdot \ln\left[\left(\frac{x}{nrm}\right)^2\right]$$

```
basis := best_basis(T, entropy)
```

```
Q := pgridlot(basis, J)
```

```
QQ := tfplotFromWPT(w, basis, 1, 1)
```

```
w := extract_basis(T, basis)
```



Q



QQ

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ამ სახის სიგნალისათვის, როცა ვიხილავთ ორ სინუსოიდას კიდევ უფრო კარგი შედეგები მიიღება, თუ ვვივლევთ გარდაქმნის ნაცვლად გამოვიყენებთ კოსინუსის გარდაქმნას, მაგრამ ამ შემთხვევაში საჭიროა გაიხსნას ცალკე „ფანჯარა“, რომელიც შეზღუდავს კოსინუსის სიგნალის არსებობას უსასრულო დროის განმავლობაში.

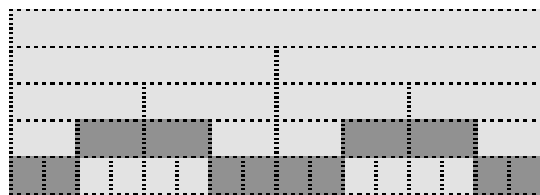
$T := \text{lct}(y, J, \text{trig})$

$\text{basis} := \text{best_basis}(T, \text{entropy})$

$w := \text{extract_basis}(T, \text{basis})$

$Q := \text{pgridplot}(\text{basis}, J)$

$QQ := \text{tfPlotFromLCT}(w, \text{basis}, 1, 1)$



QQ

Q

მიღებული შედეგი უფრო კარგია ამ კერძო შემთხვევისათვის, ვინაიდან ბაზისური ფუნქცია უკეთ შეერწყმება ორდონიან სინუსოიდას, მაგრამ სხვა სახის სიგნალისათვის და განსაკუთრებით „ხმაურიან“ დისკრეტული სიგნალისათვის მივიღეთ საპირისპირო დასკვნა.

ბროუნის მოძრაობა აღიწერება შემთხვევითი ფუნქციით, რომელიც ექვემდებარება მსგავსობის კანონს და წარმოადგენს ფრაქტალური ობიექტის მაგალითს.

შემდეგ ეტაპზე ჩატარდა მიღებული ბროუნის მოძრაობის სიგნალის დროით-სიხშირული ანალიზი.

დროით-სიხშირული ანალიზი აჩვენებს როგორ იცვლება სიხშირის შემადგენლობა დროის მიხედვით. X – კორიზონტალურ ღერძზე გადაზომილია დრო, ხოლო ვერტიკალურზე კი სიხშირე. დროით-სიხშირული არე იყოფა მართკუთხედებად, რომელიც შეესაბამება

ლოკალიზაციის და სიხშირის საბაზო ვექტორს. მართკუთხედის სიგრძე X ღერძის მიმართ ასახავს ვექტორის არსებობის დროს, ხოლო სიგანე Y ღერძზე შესაბამეა ვექტორის სიხშირის ზოლს. კოეფიციენტის მოღული შეესაბამება მართკუთხედის ფერს, რაც უფრო მუქია მართკუთხედის ფერი, მით უფრო მაღალი ენერგია შეესაბამება მას.

ბაზისურ ფუნქციად გამოყენებული იყო ვეივლეტ ფუნქციის პაკეტი და დროით-სიხშირული გადაქმნის ფუნქცია: `tPlotFromWPT(w,basis,1,1)`.



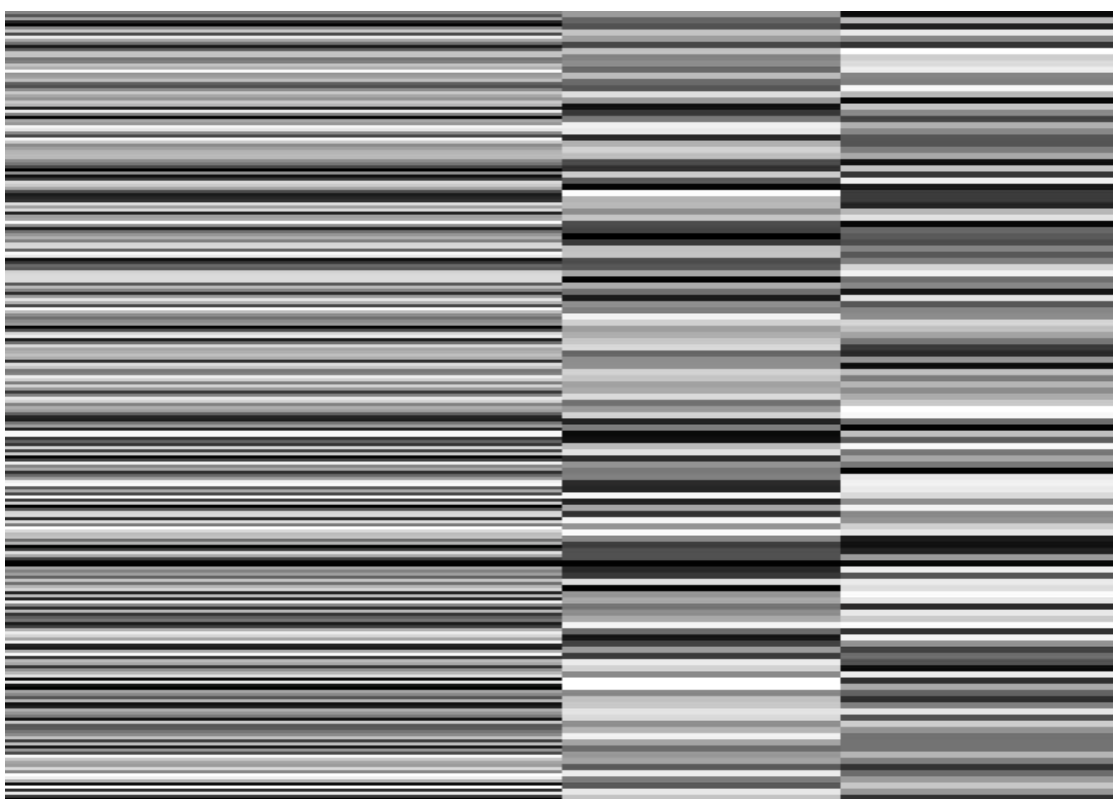
255 · $-QQ_{wpt}$

ნახ.44 ბროუნის მოძრაობის დროით-სიხშირული წარმოდგენა ვეივლეტ პაკეტის ბაზაზე.

მიღებული შედეგები ასახულია გრაფიკზე, მაგრამ თვალსაჩინოების მიზნით იძულებულები ვიყავით, რომ წარმოგვედგინა ინვერსიული გამოსახულება 255-wpt., სადაც 255 არის სიგნალის მაქსიმალური ინტენსიობა. ამ შემთხვევაში მაქსიმალური სიმძლავრის არე (მართკუთხედი) მოცემულია არა შავი მართკუთხედით, არამედ თეთრით.

გარდა ამისა მიღებულია დროით-სიხშირული წარმოდგენა ამავე სიგნალისათვის. ბაზისურ ფუნქციად არჩეულ იქნა კოსინუს გარდაქმნა. ამ შემთხვევაში დროით-სიხშირული წარმოდგენა აღინიშნება $tPlotFromLCT(w,basis,1,1)$.

ნახ.44-ზე და ნახ.45-ზე მიღებული გრაფიკების შედარება ცხადყოფს ენერჯის უკეთეს განაწილებაზე კოსინუს გარდაქმნის გამოყენების შემთხვევაში, მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ სიგნალის შეკუმშვას, მაშინ უპირატესობას მიანიჭებენ ვეივლეტ პაკეტის გამოყენებას.



255 · $-Q_{1ct}$

ნახ.45 ბროუნის მოძრაობის დროით-სიხშირული წარმოდგენა კოსინუს პაკეტის ბაზაზე.

ყველა კომპიუტერული ექსპერიმენტები და ანგარიშები რეალიზებულია MathCad პროგრამულ გარემოში. MathCad პროგრამაში მზა ფუნქციების და მოდულების არსებობის გამო როგორც მოდელირება, ასევე დროით-სიხშირული წარმოდგენა ხასიათდება რეალიზაციის სიმარტივით და შედეგების თვალსაჩინოებით.

3.5 III თავის დასკვნები

ჩატარებული კვლევის საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ:

1. დროითი მწკრივების შემთხვევითობის დონის შესაფასებლად მიზანშეწონილია გამოყენებული იქნას ბროუნის მოძრაობის ე.წ განზოგადოებული მოდელი, რომლის ქვაკუთხედს წარმოადგენს ბროუნის კლასიკური მოძრაობა, რომელიც შეესაბამება $H=1/2$ პარამეტრის მნიშვნელობას.

2. ბროუნის მოძრაობის განზოგადოებული მოდელი შემოიღო მანდელბროტმა და განახორციელა მოდელირება. მან განსაზღვრა ბროუნის განზოგადოებული მოძრაობის უნიკალური თვისება, რომელიც მდგომარეობს მიღებული მოძრაობის პერსისტენტობაში და ანტიპერსისტენტობაში. რაც შეეხება დაკვირვებათა დროით მწკრივებს, ექსპერიმენტების შედეგად დადგინდა, რომ უმეტესი საბუნებისმეტყველო პროცესები ატარებენ პერსისტენტულ ხასიათს.

3. როგორც ანალიზმა გვიჩვენა, მოდელირება დაკავშირებულია ბევრ სირთულეებთან, თეორიული და პრაქტიკული ხასიათის. ამიტომ ჩვენ ვთავაზობთ განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელს, რომელიც დაფუძნებულია ვეივლეტ ორთოგონალური ფუნქციების გამოყენებაზე. შემოთავაზებული ალგორითმის მიხედვით ადვილად მიღებულია ბროუნის მოძრაობის განზოგადოებული მოდელი შემთხვევითობის ყველა დონისათვის $H=0.1; H=0.5; H=0.99$ MathCad პროგრამულ გარემოში.

ალგორითმის სისწორე შემოწმებულია ჩვეულებრივ კლასიკურ ალგორითმთან, როცა $H=0.5$. რომელიც არ იყენებს ვეივლეტ-ფუნქციებს და წარმოადგენს იტერაციულ ნორმალურ პროცესს ნაწილაკის წანაცვლებისთვის. მიღებულია აგრეთვე სპექტრული სიმძლავრე.

4. შემოთავაზებულია კიდევ ერთი მეთოდი დროის მწკრივების დროით-სიხშირული ანალიზისა, რომელიც დაფუძნებულია ვეივლეტ ფუნქციების პაკეტის გამოყენებაზე. დროით სიხშირული წარმოდგენა იძლევა საშუალებას საკვლევი სიგნალის უფრო დეტალურ და

თვალსაჩინო გაანალიზებისა. ჩატარებულია შედარება კოსინუს ბაზური ფუნქციით დროით-სიხშირულ წარმოდგენასთან.

მიღებული გრაფიკების შედარება ცხადყოფს სიგნალის ენერჯის უკეთეს განაწილებას კოსინუს გარდაქმნის გამოყენების შემთხვევაში. მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ კოსინუს გარდაქმნა მოითხოვს “ფანჯრის” შემოღებას და სხვა სირთულეებს, შეიძლება უპირატესობა მიენიჭოს ვეივლეტ-პაკეტის გამოყენებას.

თავი IV. შრატალური ტექნოლოგიები დინამიკური სისტემების და ღრითი მწკრივების კვლევის ღრის.

4.1 ზოგადი ცნებები შრატალუების შესახებ.

ფრაქტალის და ფრაქტალური გეომეტრიის ცნებები შემოიღეს მეოცე საუკუნის 70-80 წლებში და პოპულარული გახდა მათემატიკოსების, პროგრამისტების და ინჟინრების სფეროში. სიტყვა ფრაქტალი წარმოიშვა ლათინური სიტყვა *fructus*, რომელიც ნიშნავს ფრაგმენტებისაგან შემდგარს, ეს დასახელება შემოიღო ბენუა მანდელბროტმა 1975 წელს. ფრაქტალური გეომეტრიის დაბადება დაკავშირებულია 1977 წელს მანდელბროტის წიგნის გამოსვლასთან “The Fractal Geometry of nature” [30]. ფრაქტალური გეომეტრია - ეს არის დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის უმნიშვნელოვანესი ნაწილი. მიუხედავად იმისა, რომ მეცნიერთა დიდი ნაწილი (პუანკარე, ჟულია, კანტორი, ჰაუსდორფი და სხვები) მუშაობდნენ ფრაქტალების თეორიის დახვეწაზე და განვითარებაზე, მხოლოდ ბოლო ოც წლებში გახდა შესაძლებელი მათი ნამუშევრების გაერთიანება ერთ სისტემაში, რომელმაც ფართო გამოყენება ჰპოვა კომპიუტერული ტექნოლოგიების ყველა დარგში დამკვიდრების შემდეგ.

ფრაქტალების კლასიფიკაცია შეიძლება დაიყოს გეომეტრიულ, ალგებრულ და სტოქასტიკურ ფრაქტალებად.

ფრაქტალების გამოყენება უდიდესია. მაგალითად, გეომეტრიული ფრაქტალები გამოიყენებიან ხეების, ბუჩქების, სანაპირო ზოლების მისაღებად, სხვადასხვა სახის გამოსახულებათა გენერირებისათვის. მეცნიერებაში და ტექნიკაში, მაგალითად, სითხეებში ტურბულენტური და დინამიკური მოვლენების წარმოსადგენად, ნავთობქიმიაში, ბიოლოგიაში, გამოსახულებათა შეკუმშვისათვის, ფრაქტალური ანტენების მოწყობილობებში, კავშირების ქსელების ანალიზისათვის და სხვა. ფრაქტალს გააჩნია ორი ღირსშესანიშნავი თვისება: მსგავსება და წილადური განზომილება.

დისერტაციის პირველ თავში ჩვენ გვქონდა საუბარი იმის შესახებ, რომ დინამიკური ქაოსის სისტემებში დეტერმინირებულ განტოლებებს მიმყევართ ქაოსურ ამონახსნამდე. ქაოსური იმ თვალსაზრისით, რომ მათში დასაწყისში ძალიან ახლოს მდებარე ტრაექტორები ექსონენციალურად გაშორდებიან ერთმანეთს და იქმნება არამდგრადობა. ამ დროს გაირკვა, რომ ფრაქტალების დახმარებით შეიძლება აღიწეროს ამ ტრაექტორიების ასეთი ყოფაქცევა. შეიძლება ითქვას, რომ ფრაქტალები არიან ქაოსის გეომეტრიული წარმოსახვა [51].

4.2 შრაქტალური განზომილება.

4.2.1. ფრაქტალური განზომილების ზოგადი განსაზღვრა და ფრაქტალური ობიექტების კონსტრუირების მაგალითები.

ფრაქტალები ჩვენს გარშემო ყველგანაა, მთების აღწერილობაში, ზღვის ნაპირის კლაკნილ ხაზებში და ა.შ. ზოგიერთი ფრაქტალები უწყვეტად იცვლებიან, მოძრავი ღრუბლების ან ცეცხლის ციმციმის მსგავსად, ხოლო სხვები ინარჩუნებენ სტრუქტურას, რომელიც მათ შეიძინეს ევოლუციის შედეგად, ასეთებია: ხეები, ჩვენი სისხლძრღვთა სისტემა და ა.შ. შეიძლება გაუკვირდეთ ის, რომ ასეთი ჩვეულებრივი ობიექტები მოექცა თანამედროვე მეცნიერების კვლევის ფოკუსში, ჩვეულებრივობა არ ნიშნავს იმას, რომ მეცნიერებს შეუძლიათ მათი ახსნა. ბევრი ფრაქტალი ჩვენთვის ცნობილია, მაგრამ ბოლო დრომდე ჩვენში სამყაროს მეცნიერულ წარმოდგენაში მათ არ ჰქონდათ ადგილი. ეს წარმოდგენა მოდის გალილეო გალილეიდან. მისი გაგებით სამყაროს აღწერისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ ისეთი მათემატიკური ობიექტები, როგორცაა სამკუთხედი, წრეწირები, კონუსი და სხვა გეომეტრიული ფიგურები. მათ გარეშე ადამიანი სიბნელეში მოხეტიალეს ემსგავსება [55].

გავიდა თითქმის 350 წელი, რომ კაცობრიობა გამოსულიყო გალილეის წარმოდგენებიდან – მანამდე, სანამ ბენუა მანდელბროტმა არ დაამუშავა ფრაქტალის ცნება. 1984 წელს ის წერდა: “რატომ უწოდებენ ხშირად გეომეტრიას ცივს და მშრალს? ერთ-ერთი მიზეზი

მდგომარეობს მის უნარობაში აღწეროს ღრუბლის, მთების, ხეების ან ზღვის სანაპიროს ფორმები. ღრუბლები ეს არ არის სფეროები, მთები – ეს არ არის კონუსები, ზღვის ნაპირები არ არიან წრეწირები, ქერქი არაა გლუვი და ელვა არ ვრცელდება სწორხაზობრივად. ბუნება დემონსტრირებას გვიკეთებს არა მაღალი ხარისხის, არამედ სხვა დონის სირთულისას. სტრუქტურებში სხვადასხვა სიგრძის მასშტაბების რიცხვი უსასრულოა. ამ სტრუქტურების არსებობა გვიწვევს ჩვენ, რომ შევისწავლოთ ის ფორმები, რომელიც ეკლიდემ უკუაგდო, როგორც უფორმოები – ამორფული მორფოლოგიის შესწავლის ამოცანები. მათემატიკოსებმა უკუაგდეს ეს გამოწვევა და აირჩიეს ბუნებისაგან, სულ უფრო და უფრო გარიყვა, ისეთი თეორიების გამოგონება, რომლებიც არ შეესაბამებიან იმას, რასაც ჩვენ “ვხედავთ და ვგრძნობთ” [58].

ფრაქტალის მათემატიკური ცნება გამოყოფს ობიექტებს, რომელთაც გააჩნიათ სხვადასხვა სტრუქტურის მასშტაბები, როგორც დიდი, ასევე პატარა და ამრიგად, აირეკლავს ორგანიზაციის იერარქიულ პრინციპს. ამ განსაზღვრებაში ჩადებულია სინამდვილის ერთი მნიშვნელოვანი იდეალიზაცია: ფრაქტალური ობიექტები თვით მსგავსია, ე.ი მათი სახე არსებითად არ იცვლება თუ მათ მიკროსკოპში ვნახავთ ნებისმიერი გადიდებისას ან შემცირებისას. მიუხედავად სინამდვილის ასეთი იდეალიზაციისა, ის მაინც ხელს უწყობს რამდენიმე რიგით ბუნების აღწერის მათემატიკურ სიღრმეს.

ბ. მანდელბროტის ნაშრომებმა დიდი აღიარება ჰპოვეს. მან აღმოაჩინა პრინციპი, რომელითაც მოულოდნელად წარმოიშობა თვითმსგავსი სტრუქტურების მთელი სამყარო.

არაკერიოდული მოძრაობების აღსაწერად, რომელიც თავისი სირთულით ჰგავს შემთხვევით მოძრაობებს, ჩვენ გამოვიყენეთ ტერმინები “საკვირველი ატრაქტორები”. როდესაც ატრაქტორს უწოდებთ ქაოსურს, ჩვენ ვგულისხმობთ ინფორმაციის კარგვას ან წინასწარმეტყველების უნარობას. ვუწოდებთ რა ატრაქტორს საკვირველს უპირველესყოფლისა გვინდა ხაზი გავუსვათ გეომეტრიული

სტრუქტურების არაჩვეულებრივობას, რომელზედაც ფაზურ სივრცეში გადის ტრაექტორია.

დინამიკური რეჟიმი შეიძლება დავახასიათოთ ფურიეს ანალიზის საშუალებით. ფურიეს ანალიზი არ იძლევა საშუალებას განვასხვაოთ ერთმანეთისაგან დეტერმინირებული ქაოსი და თეთრი ხმაური. თეთრი ხმაურის ქვეშ ჩვენ გვესმის (დეტერმინირებული ქაოსისაგან განსხვავებით) ქაოსური რეჟიმი, რომლის საფუძველია ძალიან დიდი დამოუკიდებელი მოდების ან თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. ამ შემთხვევაში პუნკარეს ასახვის მეთოდით ფაზური ტრაექტორიების გამოკვლევას აქვს საკმაოდ დიდი უპირატესობა. მიიღება მხოლოდ თვისობრივი ინფორმაცია. ამის გარდა პრაქტიკაში ასახვა შეზღუდულია სამგანზომილებიანი ფაზური სივრცით.

რაოდენობრივად ქაოსური რეჟიმი შეიძლება შეფასდეს თუ განისაზღვრება ლიაპუნოვის უდიდესი მაჩვენებელი [54]. როგორც ჩვენ ავლნიშნეთ, “საკვირველი ატრაქტორები” ახლოს არიან თავისი სტრუქტურით კანტორის სიმრავლესთან. მოსალოდნელია, რომ საკვირველი ატრაქტორის განზომილება იქნება წილადური, ამრიგად განზომილების მნიშვნელობა შეიძლება გამოვიყენოთ კრიტერიუმად მარტივი ატრაქტორების საკვირველი ატრაქტორებისაგან განსასხვავებლად.

თავის ფუნდამენტალურ ნაშრომში დ. რიუელმა და ტაკენსმა ტერმინი “საკვირველი ატრაქტორი” შემოიტანეს იმისათვის, რომ ხაზი გაესვათ, ერთ-ერთ თვისებაში – ისინი არ არიან გლუვი მრავალსახეობები [52].

ფრაქტალური განზომილება მნიშვნელოვანი საკითხია დინამიკური სისტემების ამა თუ იმ ატრაქტორების განსაზღვრისათვის.

მანდელბროტმა მოგვცა ფრაქტალის შემდეგი განსაზღვრება:

ფრაქტალი ეწოდება სიმრავლეს, რომლის ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განზომილება მკაცრად მეტია მის ტოპოლოგიურ განზომილებაზე. ეს თავისთავად ითხოვს ტერმინების: სიმრავლე, ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის

განზომილება D და D_T ტოპოლოგიური განზომილების განსაზღვრას, რომელიც ყოველთვის მთელი რიცხვია.

შემდეგში მანდელბროტმა [29] ფრაქტალის განსაზღვრა უფრო შეავიწროვა:

ფრაქტალი ეწოდება სტრუქტურას, შედგენილს ნაწილებისაგან, რომლებიც გარკვეული აზრით მთელის მსგავსია. დღეისათვის ფრაქტალის ყველსათვის მისაღები განსაზღვრება არ არსებობს.

ცენტრალური ადგილი ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის განსაზღვრაში ე.ი ფრაქტალური განზომილების განსაზღვრაში უკავია სივრცეში ორ წერტილს შორის მანძილის ცნებას. როგორ გაიზომოს l სიმრავლის წერტილებს შორის ეს სიდიდე? ყველაზე მარტივი მეთოდი გაიზომოს მრუდის სიგრძე, ზედაპირის ფართი ან სხეულის მოცულობა მდგომარეობს იმაში, რომ დაიყოს სივრცე პატარა δ კუბებად. კუბების ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ მცირე სფეროები δ დიამეტრით. თუ მოვათავსებთ მცირე სფეროს სიმრავლის ცენტრის რომელიღაც წერტილში, მაშინ ყველა წერტილი რომელიც მდებარეობს ცენტრიდან $r < (1/2)\delta$ მანძილით, იქნებიან ამ სფეროთი დაფარული. თუ დავითვლით სფეროების რიცხვს რომელიც საჭიროა სიმრავლის დასაფარავად, ჩვენ მივიღებთ სიმრავლის ზომის მნიშვნელობას. მრუდი შეიძლება გაიზომოს, თუ განვსაზღვრავთ δ სიგრძის $N(\delta)$ რაოდენობის წრფივი მონაკვეთების რიცხვს, აუცილებელს იმისათვის, რომ ის დაიფაროს.

ჩვეულებრივი მრუდისათვის $N(\delta) = L_0/\delta$, მრუდის სიგრძე განისაზღვრება სრული გადასვლით

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^0 \quad (4.2.1)$$

ზღვარში $\delta \rightarrow 0$ შემთხვევაში L ზომა ხდება ასიმპტოტურად ტოლი მრუდის სიგრძის და არ არის დამოკიდებული δ -ზე. წერტილების სიმრავლეს შეიძლება მივუყენოთ შესაბამისად ფართიც. მაგალითად, მრუდის ფართი შეიძლება განისაზღვროს, თუ მივუთითებთ რგოლების

რიცხვს, ხოლო თუ δ^2 თითოეული მათგანის ფართია, მაშინ მრუდის ფართი ტოლია

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1 \quad (4.2.2)$$

ანალოგიურად, მრუდის მოცულობა განისაზღვრება ფორმულით

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^2 \quad (4.2.3)$$

რასაკვირველია ჩვეულებრივი მრუდეებისათვის A და V ნულის ტოლი ხდება $\delta \rightarrow 0$ შემთხვევაში.

განვიხილოთ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც ქმნიან ზედაპირს. ასეთი სიმრავლეების ნორმალურ ზომად გვევლინება A ფართი და ჩვენ გვექნება:

$$A = N(\delta)\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0\delta^0 \quad (4.2.4)$$

ჩვეულებრივი ზედაპირისათვის კვადრატების რიცხვი, აუცილებელი მისი დაფარვისათვის განისაზღვრება ზღვარში, როდესაც $\delta \rightarrow 0$, გამოსახულებით:

$N(\delta) = A_0/\delta^2$, სადაც A_0 - არის ზედაპირის ფართი. ზედაპირს შეიძლება მივუყენოთ შესაბამისად მოცულობაში, შევქმნით რა კუბების მოცულობების ჯამს, აუცილებელს ზედაპირის დასაფარავად:

$$V = N(\delta)\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^1 \quad (4.2.5)$$

როდესაც $\delta \rightarrow 0$ ეს მოცულობა როგორც მოსალოდნელია ხდება ნულის ტოლი.

შეიძლება თუ არა ზედაპირს მივუყენოთ შესაბამისად რომელიმე სიგრძე? ფორმალურად ასეთ სიგრძედ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ:

$$L = N(\delta)\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L_0\delta^{-1} \quad (4.2.6)$$

რომელიც არაკრებადია $\delta \rightarrow 0$ შემთხვევაში. ამ შედეგებს აქვს აზრი, ვინაიდან ზედაპირი შეუძლებელია დაიფაროს სასრული რაოდენობის

წრფივი მონაკვეთებით. ჩვენ ვასკვნით, რომ წერტილების სიმრავლის შინაარსობრივი ზომა, რომელიც სამგანზომილებიან სივრცეში ქმნის ზედაპირს, არის ფართი.

განვიხილოთ ფრაქტალური ობიექტის კონსტრუირების მაგალითი: კოხის (ტრიადული მრუდის) მიღებისა.

ნახ.46-ზე მოცემულია თუ როგორ უნდა ავაგოთ ტრიადული კოხის მრუდი. ეს მრუდი ერთ-ერთი სტანდარტული მაგალითია, რომელიც გვიჩვენებს რომ ფრაქტალური განზომილება $1 < D < 2$.

კოხის მრუდის აგება დავიწყოთ ერთეულოვანი სიგრძის $L(1)=1$ წრფივი მონაკვეთით. ამ საწყის ელემენტს უწოდებენ საფალიეს [57]. ის შეიძლება შეიცვალოს რომელიმე მრავალკუთხედით, მაგალითად, ტოლგვერდა სამკუთხედით, კვადრატით და ა.შ. საფალიე ეს არის 0-ვანი თაობის კოხის მრუდი (ჩვენს შემთხვევაში ერთეულოვანი მონაკვეთი).

კოხის მრუდის აგება გრძელდება: საფალიეს თითოეული რგოლი უნდა შევცვალოთ წარმოქმნილი ელემენტით, რომელიც მოცემულია და ის აღნიშნულია $n=1$. ასეთი შეცვლის შედეგად ჩვენ მივიღებთ მრუდის პირველ თაობას, რომლის თითოეულის სიგრძე $1/3$. პირველი თაობის მრუდის საერთო სიგრძე $4/3$. იმიტომ, რომ $1/3$ მონაკვეთების რაოდენობა უდრის ოთხს. შემდეგი თაობა მიიღება თითოეული სწორხაზა რგოლის წარმოქმნილი ელემენტის შემცირებით. მივიღებთ მეორე თაობის მრუდს, რომელიც შესდგება $N=4^2=16$ რგოლისაგან, თითოეული $\delta=3^{-2}=1/9$ სიგრძით. მეორე თაობის მრუდის სიგრძე ტოლია $L(1/9)=(4/3)^2=16/9$. ეს პროცედურა შეგვიძლია ჩავატაროთ n -ჯერ. n თაობის მრუდს, ნებისმიერი n შემთხვევაში, უწოდებენ წინაფრაქტალს. n -ური თაობის წინაფრაქტალის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$L(\delta)=(4/3)^n. \quad (4.2.7)$$

თითოეული რგოლის სიგრძეა $\delta=3^{-n}$.

n თაობის რიცხვი წარმოვადგინოთ

$$n = -\ln \delta / \ln 3. \quad (4.2.8)$$

წინაფრაქტალის სიგრძეა

$$L(\delta) = (4/3)^n = \exp\left(-\frac{\ln \delta [\ln 4 - \ln 3]}{\ln 3}\right) = \delta^{1-D} \quad (4.2.9)$$

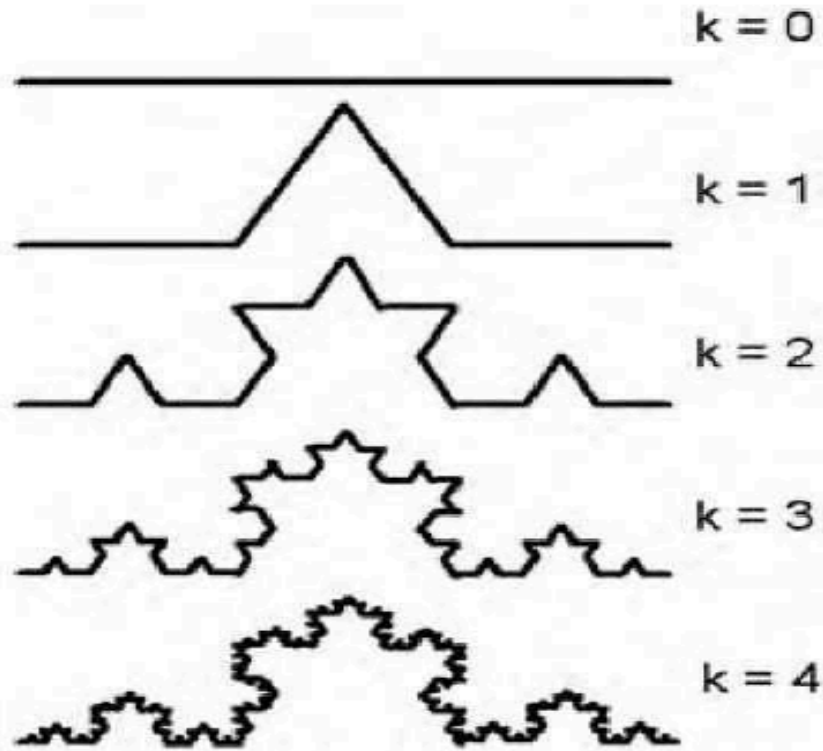
სადაც $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,262$.

სეგმენტების რიცხვი ტოლია $N(\delta) = 4^n = 4^{-\ln \delta / \ln 3}$ და შეიძლება ჩაიწეროს

$$N(\delta) = \delta^{-D}$$

D - კოხის ტრიადული მრუდის ფრაქტალური განზომილებაა. უნდა შევნიშნოთ, რომ კოხის მრუდის აგება საშუალებას გვაძლევს ნებისმიერი თაობისათვის მივიღოთ სასრული სიგრძის ნორმალური მრუდი.

როგორც ვნახეთ კოხის “მრუდის” კონსტრუირება იწყება მარტივი სწორე ხაზის მონაკვეთით. შემდეგ ის იყოფა სამ ნაწილად და შუა ერთი მესამედი ქმნის სამკუთხედის ორ მხარეს.



ნახ.46 კოხის “მრუდის” კონსტრუირების მაგალითი

ჩვენ ეს გავაკეთეთ MathCad პროგრამაში შედგენილი ალგორითმით.

იტერაციების რაოდენობა არის 5. მე-5 იტერაციის შემდეგ მიიღება $4^5+1=1025$ წერტილების რაოდენობა. ეს პროგრამა იძლევა საშუალებას მივიღოთ (X,Y) კოორდინატები წერტილებისთვის, რომლებიც ქმნიან მრუდს “კოხის ფიფქისათვის”. მიღება ხდება იტერაციების დახმარებით.

```

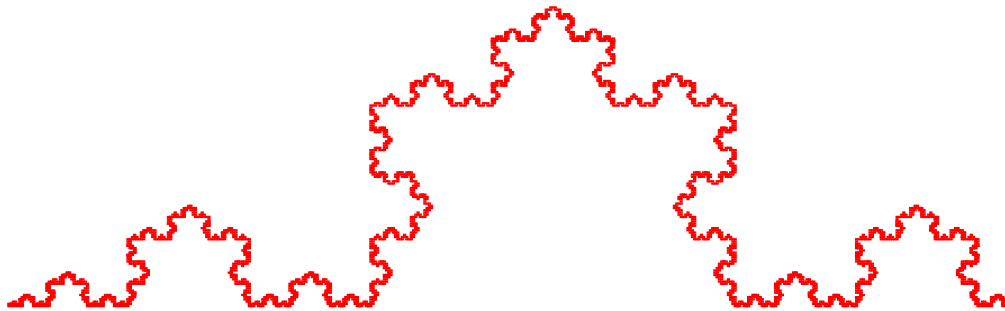
Next(Pts) :=
Temp ← PtsT
T ←  $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ 
New ← Temp<0>
for j ∈ 0..cols(Temp) - 2
    P0 ← Temp<j>
    P1 ← Temp<j+1>
    Q1 ←  $\frac{2}{3}P0 + \frac{1}{3}P1$ 
    Q3 ←  $\frac{1}{3}P0 + \frac{2}{3}P1$ 
    Q2 ← Q1 + T·(Q3 - Q1)
    New ← augment(New, Q1)
    New ← augment(New, Q2)
    New ← augment(New, Q3)
    New ← augment(New, P1)
NewT

```

ეს პროგრამული ბლოკე ქმნის “n” იტერაციას შემდეგი ალგორითმით. ჩვენს შემთხვევაში n=6.

$$\text{Flake}(n) := \left\{ \begin{array}{l} M \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{return } M \text{ if } n = 0 \\ \text{for } i \in 1..n \quad \text{otherwise} \\ \quad M \leftarrow \text{Next}(M) \\ \text{return } M \end{array} \right.$$

S := Flake(6)



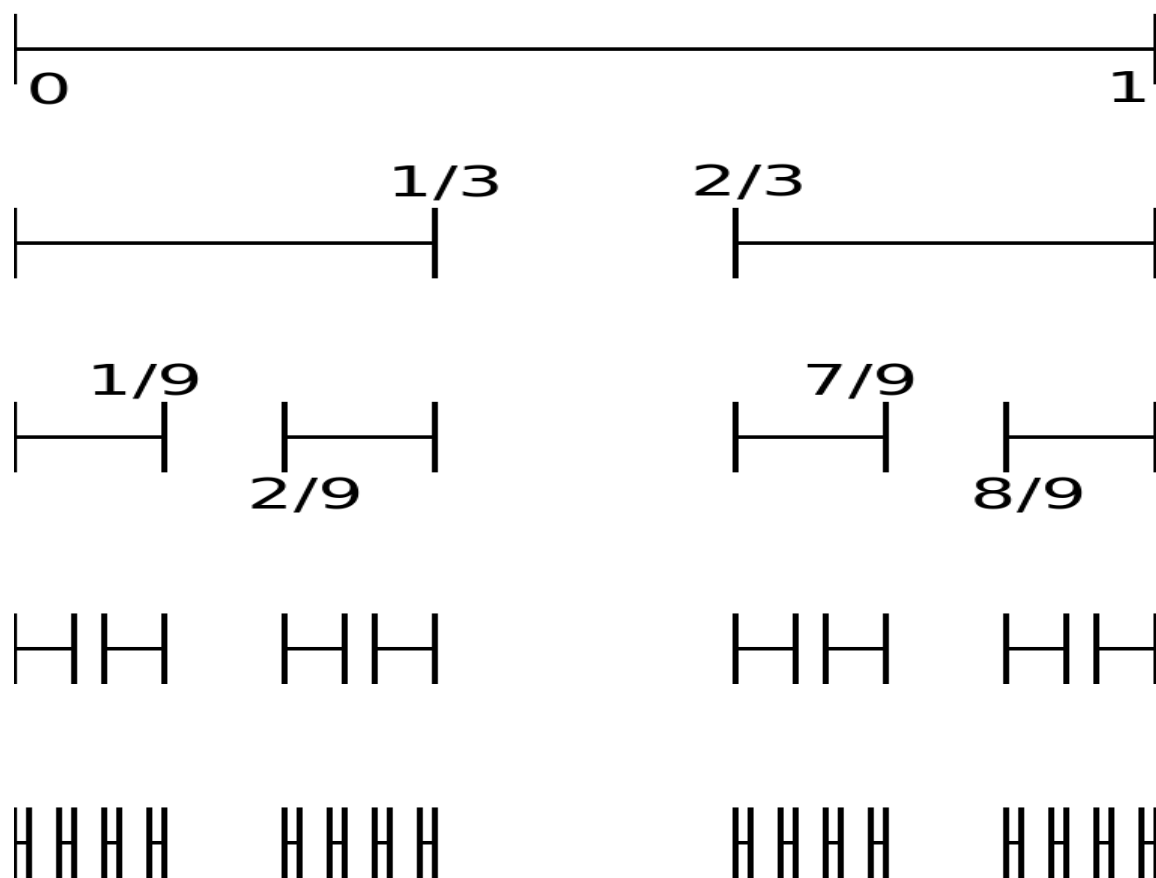
ნახ.47 კოხის “მრუდი”, მიღებული 6 იტერაციით MathCad პროგრამით.

ცხადია, რომ მიღებული გამოსახულება დაემთხვა ნახ.46-ზე მიღებულ გამოსახულებას.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც აიგება ფრაქტალური განზომილებით. ეს ეხება კანტორის სიმრავლის მიღებას. კანტორის სიმრავლის კონსტრუირების მაგალითი ასახულია ნახ.48-ზე.

ავიღოთ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთი $[0,1]$. დავეყოთ ის სამ ტოლ ნაწილად და ამოვჭრაოთ მისი შუა ნაწილი $-\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, ინტერვალი. ყველა დარჩენილი მონაკვეთისათვის მოვიქცეთ ასევე. მაშინ ჩვენ მივიღებთ სიგრძის კლებად მონაკვეთების ერთობლიობას. აგების პირველ ეტაპზე გვაქვს ერთი მონაკვეთი, მეორეზე ორი, მესამეზე ოთხი, K -ზე გვექნება 2^K მონაკვეთი (ერთმანეთთან დაუკავშირებელი), თითოეული სიგრძით 3^{-K} , როდესაც $K \rightarrow \infty$ მივიღებთ წერტილების სიმრავლეს, რომლებსაც უწოდებენ კანტორის სიმრავლეს. ყველა ამოჭრილი მონაკვეთების ჯამური სიგრძე ტოლია ერთის:

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1/3}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$



ნახ.48 კანტორის სიმრავლის კონსტრუირების მაგალითი.

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ კანტორის სიმრავლის განზომილება, განვსაზღვროთ ε -ელემენტის $\varepsilon = \frac{1}{3^k}$. ყოველ ეტაპზე ჩვენ ვინარჩუნებთ 2 მონაკვეთს, რომელიც აუცილებელია, რომ დაიფაროს კოხის სიმრავლე

$$N(\varepsilon) = 2^k$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^k} = \ln \frac{2}{3} \approx 0,6309$$

თუ ვიმსჯელებთ მიღებული ობიექტის გეომეტრიაზე, შეიძლება ითქვას, რომ კანტორის სიმრავლე არის რაღაცა რაც ნაკლებია

ინტერვალზე $L=1$, მაგრამ მეტია ვიდრე წერტილის განზომილება, რომელიც უდრის ნულს.

უნდა შევნიშნოთ [57], რომ სულ არ არის აუცილებელი კანტორის სიმრავლის აგებისას მონაკვეთი დაიყოს სამ ნაწილად თანაც თანატოლებად. კანტორის სიმრავლე შეიძლება მივიღოთ თუ დავყოფთ მონაკვეთს ნებისმიერ რიცხვის ნაწილებად (≥ 3).

როგორც ვნახეთ, არსებობს კანტორის სიმრავლის მნიშვნელოვანი რაოდენობრივი მახასიათებელი – წილადური განზომილება, რომელიც მიუთითებს ამ სიმრავლის სიანგლოვეს შესაბამის გლუვ ქვემრავალსახეობასთან. არსებობს წილადური განზომილების რამდენიმე განმარტება. ისინი დაფუძნებულია სიმრავლეების მეტრიკულ თვისებებზე. საკვირველი ატრაქტორებისათვის იყენებენ აგრეთვე ალბათურ განზომილებებს. მათ გამოთვლაში მთავარ როლს თამაშობს სისშირე, რომელთან ერთად ტიპური ფაზური ტრაექტორია ეწვევა ატრაქტორების სხვადასხვა არეებს. ჩვენ განვიხილოთ ყველაზე ძალიან გავრცელებული მეტრიკული განზომილება – სიმრავლის ტევადობა.

ზოგადად, [52] შეიძლება განვიხილოთ დინამიკური სისტემის n – განზომილებიან ფაზურ სივრცეში რომელიღაც A სიმრავლე. დავფაროთ ეს სიმრავლე n – განზომილებიანი კუბებით, რომელთა გვერდებია ε , ისეთნაირად, რომ ეს კუბები შეიცავდეს A სიმრავლის ყველა წერტილებს. ვთქვათ, N – არის კუბების მინიმალური რაოდენობა. ამ სიმრავლის დასაფარავად განვიხილოთ ზღვარი:

$$d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon)] \quad (4.2.10)$$

$d(A)=d_F$ სიდიდე წარმოადგენს მეტრიკულ განზომილებას და უწოდებენ ტევადობას ან ფრაქტალურ განზომილებას. ლიტერატურაში მას აგრეთვე უწოდებენ ჰაუსდორფის ან ენტროპიულ განზომილებას.

რეგულარული სიმრავლეებისათვის (მაგალითად, ევკლიდის სამგანზომილებიანი სივრცის “ნაწილისათვის”, ზედაპირისათვის ან წირისათვის). d_F ფრაქტალური მთელი რიცხვია და თანხვედება ჩვეულებრივ განზომილებას. მართლაც, მცირე ε -თვის მივიღებთ

$$N \sim k e^{-d} \quad (4.2.11)$$

ε -გვერდიანი კუბების რიცხვი, აუცილებელი რომლიდაც მოცულობის დასაფარავად. 3-განზომილებიან სივრცეში ის პროპორციულია $V\varepsilon^3$, ზედაპირის დაფარვისათვის $-N \sim \frac{1}{\varepsilon^2}$ და წრფის $-N \sim \frac{1}{\varepsilon}$. მაშასადამე, თუ ჩვენ გვაქვს მარტივი ატრაქტორი, მაგალითად ზღვრული ციკლი, მაშინ მისი ფრაქტალური განზომილება ტოლია ერთის. ინვარიანტული ტორისათვის $d_F=2$ და ა.შ.

არარეგულარული სიმრავლეებისათვის, რომლებსაც აქვს მასშტაბურ-ინვარიანტული სტრუქტურა, ფრაქტალურ განზომილებას აქვს წილადური სახე. კიდევ ერთხელ შევხერდეთ ამაზე დაწვრილებით.

განვიხილოთ სერპინსკის ხალიჩა. გვაქვს

$$k = 1, \quad N = 8 = 8^1, \quad \varepsilon = \frac{l}{3^1}$$

$$k = 2, \quad N = 8 * 8 = 8^2, \quad \varepsilon = \frac{l}{3^2}$$

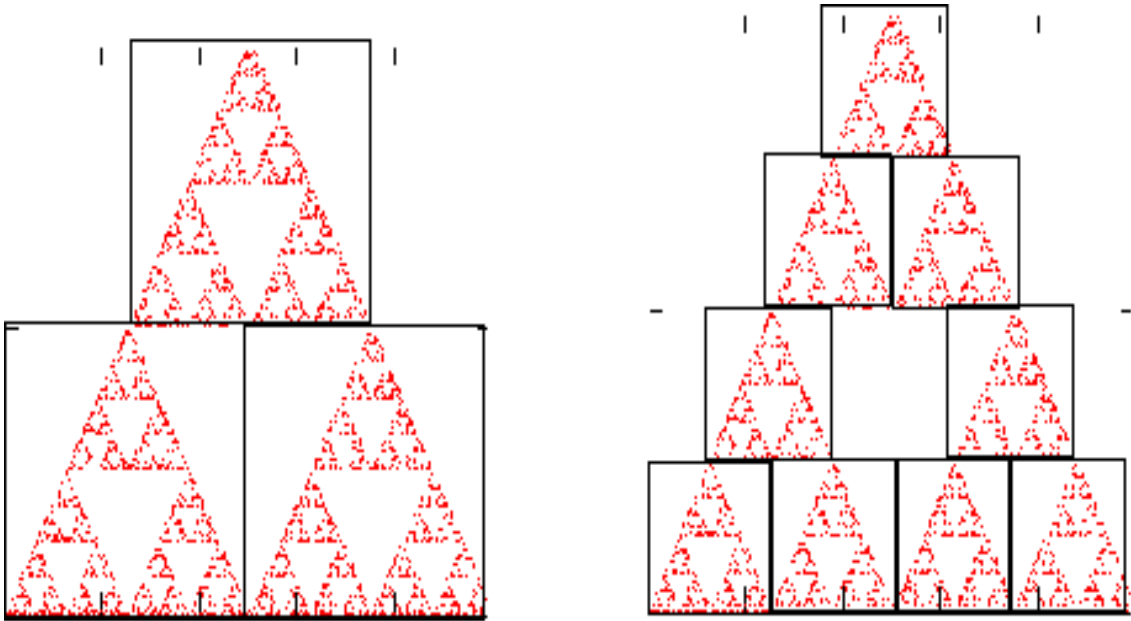
$$k = 3, \quad N = 8 * 8 * 8 = 8^3, \quad \varepsilon = \frac{l}{3^3}$$

$$k = m, \quad N = 8^m, \quad \varepsilon = \frac{l}{3^m}$$

აქედან:

$$d_F = \lim_{m \rightarrow \infty} (\ln 8^m / \ln 3^m) = \ln 8 / \ln 3 = 1,893.$$

ამრიგად, სერპინსკის ხალიჩა ეს უკვე წრფეა, რომლის განზომილება ერთის ტოლია, მაგრამ ჯერ კიდევ არ არის ზედაპირი, რადგან მისი განზომილება 2-ის ტოლია. ეს არის რაღაცა წრფესა და სიბრტყეს შორის. ყველაზე საკვირველი ის არის, რომ ბუნებაში მართლაც არსებობენ ობიექტები, რომლებიც ანალოგები არიან სერპინსკის ხალიჩის, იმ აზრით, რომ მათი განზომილება d_F ერთზე მეტია და ორზე ნაკლები.



ნახ.49 სერპინსკის ხაღიხა

ნახ.49-ზე მოცემულია სერპინსკის სამკუთხედი, როგორც ნახაზიდან ჩანს, იმისათვის რომ გადაიფაროს სამკუთხედი, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, საჭიროა სამი $1/2$ სიგრძის მქონე ბლოკი და $1/4$ სიგრძის მქონე 9 ბლოკი. ზოგად შემთხვევაში $N_s(1/2)^n = 3^n$, სადაც $N_s(1/2)^n - 1/2^n$ სიგრძის მქონე ბლოკების რაოდენობაა. განზომილება d_s , S სიმრავლისათვის გამოითვლება გამოსახულებით

$$d_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(3^n)}{\ln(2^n)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

ამრიგად, სერპინსკის სამკუთხედის განზომილება არ არის მთელი რიცხვი, ის დაახლოებით 1,58-ის ტოლია.

4.2.2 ფრაქტალური განზომილების “პრაქტიკული” განმარტება

ჩვენ გავეცანით განზომილების განმარტებას ჰაუსდორფ-ბეზიკოვიჩის ცნებით, მაგრამ მისი გამოთვლა დაკავშირებულია რიგ სიძნელეებთან. ამიტომ პრაქტიკაში გამოიყენებენ უფრო ხშირად “ტევადურ” განზომილებას. დაუვუშვათ რომ ρ - წარმოადგენს “ R ” სივრცეში სიმრავლეს, რომელიც დაიფარება კუბიკებით, (ზომით ε). თუ კუბიკების რაოდენობას აღვნიშნავთ $N(\varepsilon)$, მაშინ “ტევადური” განზომილება განისაზღვრება

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad (4.2.12)$$

ეს სიდიდე გვიჩვენებს, როგორ იცვლება დაფარვის ელემენტების რაოდენობა, როცა იცვლება ε .

1) თუ განვიხილავთ იზოლირებულ წერტილს $N(\varepsilon)=1$ და $N \sim \varepsilon^0 \Rightarrow D_0=0$.

2) თუ ანალიზს ექვემდებარება წრფის მონაკვეთი L სიგრძის, მაშინ

$$N(\varepsilon)=L/\varepsilon \sim \varepsilon^{-1} \Rightarrow D=1$$

როცა ფართობთან გვაქვს საქმე, რომლის ზედაპირი უდრის P -ს, მაშინ:

$$N(\varepsilon) = \frac{P}{\varepsilon^2} \sim \varepsilon^{-2} \Rightarrow D = 2$$

ყველა ეს განზომილება მოცემულია მთელი რიცხვით და ემთხვევა ტოპოლოგიურ განზომილებას. როგორც განვსაზღვრეთ კანტორის სიმრავლის განზომილება იგი ტოლი იყო 0.63 ვინაიდან

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2^k}{\ln(\frac{1}{3})^k} = \ln \frac{2}{3} \approx 0.63$$

პრაქტიკული შემთხვევებისთვის უფრო გამოსადეგია ატრაქტორის კორელაციური განზომილება. კორელაციური განზომილების გამოთვლისათვის უწყვეტ ტრაექტორიას წარმოადგენენ ფაზურ სივრცეში N_i წერტილების სიმრავლით. ამის შემდეგ გამოითვლება მანძილი წერტილთა წყვილს შორის S_{ij} .

$$S_{ij} = |X_j - X_i| \quad (4.2.13)$$

კორელაციური ფუნქცია გამოითვლება

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{l}{N^2} \quad (4.2.13)$$

სადაც l - (i,j) წყვილთა რიცხვი, რომლისთვისაც $S_{ij} < 2$.

უცნაური ატრაქტორებისთვის ეს ფუნქცია დამოკიდებულია r -ზე მაჩვენებლიანი კანონით:

$$\lim_{r \rightarrow 0} C(r) = ar^d \quad (4.2.14)$$

ამიტომ

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (4.2.15)$$

ან ფორმულით;

$$C(r) = \lim \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H(r - |X_i - X_j|), \quad (4.2.16)$$

სადაც H -ით არის აღნიშნული ჰევისაიტის ფუნქცია \square

$$H(s) = \begin{cases} 1 & s > 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

4.3. შრატალური განზომილების გამოყენება ტოპოლოგიური ქსელების მოდულებისათვის.

4.3.1 ტოპოლოგიური ქსელების ზოგადი მიმოხილვა

განაწილებული ქსელების განვითარების არსებული ტენდენციები ცხადყოფს უზარმაზარი ზომის ქსელების ოპტიმიზაციისა და მოდელირების აუცილებლობაზე [62]. ამასთან დაკავშირებით ძალიან აქტუალური ხდება რთული საკომუნიკაციო ქსელების ანალიზის ამოცანათა გადაწყვეტა სისტემურ დონეზე, დეტალური აღწერის გარეშე. ამავე დროს აუცილებელია მათი თავისებურებების შესწავლა, რომელიც განპირობებულია ამ ქსელების რთული გეომეტრიით და ტოპოლოგიით [62]. საქმე იმაშია, რომ საინფორმაციო და საკომუნიკაციო თვისებები განაწილებული ობიექტების დიდი ერთობლიობის (ანსამბლის) თვისობრივად და რაოდენობრივად განსხვავდებიან ცალკეული ობიექტის ანალოგიურ თვისებებისგან [64]. მაგალითად, ქსელის სტრუქტურებში, რომლებიც მოიცავენ საკვანძო სადგურების სიმრავლეს, ჩნდებიან სრულიად ახალი თვისებები,

როგორც არიან საიმედოობა, მარშრუტების სიმრავლე მომხმარებლისათვის შეტყობინების მიწოდებისთვის, არამდგრადობა, კონფლიქტურობა, სიხოსცლის უნარიანობა და სხვ. მაგალითად, ჰაერის თვისებები, ჭურჭელში განისაზღვრებიან, როგორც მრავალი მოლეკულის და ნაწილაკის ურთიქეროქმედების შედეგი – მაკროსკოპიული თვისებები. ამავდროულად იზოლირებული მოლეკულა სრულად არ იჩენს ამ თვისებებს. მაგალითად (წნევა, ტემპერატურა, ნაკადი). ამრიგად შეიძლება ითქვას, რომ ასეთი კლასის ქსელების თვისებები განპირობებულნი და დამოკიდებულნი ხდებიან მათ გეომეტრიაზე ანუ ტოპოლოგიაზე [61]. ამ დროს ამ ქსელების ფუნდამენტურ მახასიათებელს წარმოადგენს მათი ტოპოლოგიური განზომილება D . ქსელების თვისებები კი წარმოადგენენ განზომილების ფუნქციას $f(D)$. თუ გამოვთვლით D -ს, შესაძლებელი გახდება რაოდენობრივად შევადაროთ ქსელების სისტემური თვისებები და ვიპოვოთ საერთო ინფორმაციული კანონზომიერებები. რთული ქსელები, მიუხედავად მათი არარეგულირებული გარე სტრუქტურისა, ხასიათდებიან გარკვეული წესრიგით, რომელიც განპირობებულია მათი ზრდის შეზღუდულობით [53]. ეს იძლევა საშუალებას გამოყენებულ იქნას ამ ქსელების ტოპოლოგიის განზომილება, რომელიც დაკავშირებულია ფრაქტალურ განზომილებასთან [62]. ამ დროს გლობალურ ინფორმაციულ ქსელს შეესაბამება შემთხვევითი ფრაქტალი. ვინაიდან ქსელის მცირე ნაწილი მსგავსია მთლიანისა [54]. ფიჭური კავშირის ქსელის ტოპოლოგია ქალაქის ცალკეული რაიონისა მსგავსია მთლიანი ქალაქის ქსელისა. როგორც მოგვიანებით განვიხილავთ, [53] სამუშაოში შემოღებულია დიდი ქსელების მოდელირებისა და სინთეზის მეთოდიკა, რომელიც დაფუძნებულია კვანძების სიმკვრივის ფუნქციის გამოყენებაზე. ქსელური გრაფიკის ფრაქტალური ხასიათი აღწერილია [62] და მიღებულია ფრაქტალური პროცესების მახასიათებლები უსადენო ქსელებში და მიღებული შედეგების გამოყენების შესახებ ამ პროცესების მართვის დროს.

შემდეგი პარაგრაფის მიზანს შეადგენს ფრაქტალური განზომილების განსაზღვრა კორელაციური ფუნქციის მეშვეობით

განაწილებული ობიექტების დიდი სიმრავლისათვის ამ ქსელების მოდელირების მიზნით.

4.3.2. დიდი ქსელების ტოპოლოგიის ფრაქტალური ხასიათი.

ქალაქის საკომუნიკაციო ქსელებს გააჩნიათ ფრაქტალური ხასიათი [62]. გამოკვლევებმა [53] აჩვენა, რომ ქსელების კვანძები თავმოყრილია საინფორმაციო ნაკადის არეებში (მომხმარებელთა მაღალი სიმკვრივით) და გაცილებით იშვიათია არეებში დაბალი ინტენსიობით (მომხმარებელთა დაბალი სიმკვრივით). საკომუნიკაციო ქსელები (სატრანსპორტო, მობილური ტელეფონების, მაღაზიების ქსელები) განაპირობებენ ქალაქების განვითარებას და ზრდას, ამავე დროს, ძლიერი უკუკავშირით. მაშასადამე ქალაქის საკომუნიკაციო ქსელები შეიძლება დავაკავშიროთ კორელაციური კავშირით ქალაქის ქუჩების და რაიონების გეოგრაფიულ გეომეტრიასთან [51]. ნაშრომში მოყვანილია პარიზის და კაზანის სატრანსპორტო ქსელის ფრაქტალური ხასიათი. $N(R)$ -ით იანგარიშებოდა კვანძების რაოდენობა. განლაგებული წრეწირები R რადიუსით და კაზანის კრემლის ცენტრით ეს $N(R)$ მნიშვნელობა აღმოჩნდა R^{D_c} -სადაც D_c -საკომუნიკაციო ქსელის ფრაქტალური განზომილებაა. აღმოჩნდა აგრეთვე, რომ ქსელის კვანძების რაოდენობაც ყაზანში და პარიზში აღიწერება მსგავსი დამოკიდებულებით. ეს მეტყველებს იმის შესახებ, რომ არსებობს საერთო გლობალური კანონზომიერება ქსელების ტოპოლოგიის მხრივ მსხვილ მეგაპოლისებში და მათ ფუნდამენტურ მახასიათებელს შეადგენს ფრაქტალური განზომილება, D_c . ქსელის ტოპოლოგიის განზომილების შემოდება საშუალებას იძლევა შედარდეს, და გაანალიზდეს სხვადასხვა ქსელები. ამავე დროს, თუ ობიექტის გეომეტრიის ფრაქტალური განზომილება არის D_0 , მაშინ იმისათვის რომ ობიექტი მთლიანად დაიფაროს საკომუნიკაციო ქსელით, უნდა შესრულდეს თანაფარდობა: $D_t \geq D_0$, სადაც D_t არის ქსელის განზომილება. ყაზანისთვის ფრაქტალური განზომილება კვანძების სისტემისთვის აღმოჩნდა $D_t=1,32$.

$D_i = D_0$ წარმოადგენს დიდი ქსელის ტოპოლოგიის შეთანხმებულობის კრიტერიუმს ობიექტის გეომეტრიასთან, სადაც განლაგებულია ქსელი. სატელეკომუნიკაციო ქსელები, გულისხმობენ მომხმარებლისთვის შეტყობინების მისაღებად მრავალ მარშრუტებს. ეს აისახება მათ ფრაქტალურ განზომილებაზე. სინამდვილეში ქსელის კვანძები ქმნიან სიმრავლეს (ფიგურა რ) $1 < D_i < 2$. რაც უფრო დიდია ქსელის კვანძების სიმკვრივე, მით უფრო ახლოს მიუახლოვდება იგი 2-ის განზომილების მნიშვნელობას. ქსელის ტოპოლოგიის განზომილების განსაზღვრა, იძლევა საშუალებას შეფასდეს ქსელის სისტემური თვისებები და განისაზღვროს საერთო საინფორმაციო მახასიათებლები მონაცემთა ნაკადებისთვის როგორც განზომილების ფუნქცია.

4.3.3. ქსელის კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის ფრაქტალური განზომილების შეფასება და მოდელირება.

ობიექტების განლაგების და განაწილების თვისებები არსებითად დამოკიდებულნი არიან მათი განლაგების გეომეტრიაზე, მათ შორის მანძილსა და სხვა პარამეტრებზე. მაგალითად, გლობალური ინტერნეტის ქსელი შეიძლება მივიჩნიოთ როგორც უზარმაზარი რაოდენობის განაწილებული კვანძების (წერტილების) ერთობლიობა, რომლებიც ურთიერთქმედებაში იმყოფებიან კავშირგაბმულობის არხების მეშვეობით. მსგავსი მაგალითებია ქსელები, ფიჭური, გადამწოდთა ერთობლიობა და სხვა.

დიდი ერთობლიობის საინფორმაციო და კომუნიკაციური (ურთიერთ კავშირული) ობიექტების თვისებები განსხვავებულია ცალკეული ობიექტის თვისებებისაგან. მაგალითად, აირის თვისებები მოცულობაში ფიჭურ ქსელში განისაზღვრებიან როგორც მოლეკულათა და ნაწილაკთა კოლექტიური ურთიერთქმედება, მაკროსკოპიული თვისებები. ამ დროს იზოლირებულ ნაწილაკს სრულებით არ გააჩნია ეს მაკროსკოპიული თვისებები (მაგალითად წნევა, ტემპერატურა, დიფუზია, მოცულობა). ქსელებს ახასიათებს საიმედოობა, მარშრუტების სიმრავლე შეტყობინებათა გადსაცემად მომხმარებლისათვის. იგივე სამართლიანია ტელესაკომუნიკაციო სისტემებისათვის. მაშასადამე

სისტემის თვისებები დამოკიდებულია მასში შემავალი ელემენტების გეომეტრიაზე, განლაგებაზე და როგორც იტყვიან, ტოპოლოგიაზე.

ამბობენ, რომ ქსელების ძირითად მახასიათებელს წარმოადგენს მისი ტოპოლოგიური განზომილება D . D განზომილება შეიძლება ავსახოს ფუნქციური დამოკიდებულებით $f(D)$ თუ გამოითვლება ტოპოლოგიის განზომილება D , შესაძლებელი გახდება რაოდენობრივად შევაფასოთ ექსპერიმენტულად მიღებული ქსელის თვისებები და აღვწეროთ ინფორმაციული კანონზომიერებები მონაცემთა ნაკადის მოძრაობისას.

ქსელების ტოპოლოგიის განზომილება ვერ გამოითვლება რაოდენობრივად ჩვეულებრივი ევკლიდის განზომილებით, რომელიც ღებულობს მხოლოდ მთელ რიცხვთა მნიშვნელობებს. წერტილი-0; წრფე-1; სიბრტყე-2; მოცულობა-3. ქსელის ობიექტთა ერთობლიობის განზომილება კი ღებულობს წილადურ მნიშვნელობებს.

ცნობილია, რომ წილადური განზომილება გააჩნიათ ფრაქტალებს.

ფრაქტალური განზომილების რიცხვითი მნიშვნელობის განსაზღვრა წარმოადგენს ამ სამუშაოს მიზანს.

ფრაქტალის ცნება პირველად შემოიღო მანდელბროტმა. მის ფუნდამენტალურ სამუშაოში “ფრაქტალები, ფორმა, ქაოსი და განზომილება”, რომელიც მან გამოიყენა თვითმსგავსი გეომეტრიული სტრუქტურების აღნიშვნისათვის.

ფრაქტალების ძირითადი თვისებებია თვითმსგავსება. გამოდის, რომ ფრაქტალის მცირე ნაწილი მოიცავს ინფორმაციას მთლიანი ფრაქტალის შესახებ. მანდელბროტმა განსაზღვრა ფრაქტალი როგორც სტრუქტურა, რომელიც შედგება ნაწილებისაგან, რომლებიც გარკვეულწილად მსგავსნი არიან მთლიანობისა.

მაშასადამე ფრაქტალი შეიძლება განესაზღვროთ როგორც გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე ფრაგმენტი მეორდება. ყოველი მასშტაბის შემცირებისას მომდევნო ეტაპზე

ფრაქტალი მიიღება. წრფივი კუმშვადი ასახვების პროცესში ინფორმაციული ქსელის ტოპოლოგია წარმოადგენს ფრაქტალს, ვინაიდან მისი მცირე ნაწილი მსგავსია მთლიანისა.

ფიჭური კავშირის ქსელის ტოპოლოგია ქალაქის ცალკეული რაიონისა მსგავსია ქალაქის მასშტაბის მთლიანი ქსელისა [55]. რეალური ფიზიკური პროცესების უზარმაზარ რაოდენობას გააჩნია ფრაქტალური ბუნება. ფრაქტალური განზომილება გამოითვლება შემდეგნაირად:

დაეუშვათ ნებისმიერი გეომეტრიული სტრუქტურის შესავსებად საჭიროა $N(\varepsilon)$ სფეროთა (ან წრეების) რაოდენობა, სადაც ε არის წრის ან სფეროს რადიუსი. როცა ε მცირდება ($\varepsilon \rightarrow 0$) სფეროების მოცულობათა ჯამი მიისწრაფის მოცულობისაკენ, რომელიც უკავია გეომეტრიულ ობიექტს.

D-თი აღვნიშნოთ გეომეტრიული სტრუქტურის ევკლიდური განზომილება. ამ დროს ფრაქტალური განზომილება გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

წრფისათვის $D_F = D_E = 1$.

მაშასადამე გლუვი ფორმის ობიექტს გააჩნია განზომილება, რომელიც წარმოადგენს მთელ რიცხვს. მაშასადამე, ფრაქტალური განზომილება, განსხვავებულია ევკლიდის განზომილებისაგან და ახასიათებს ობიექტს უფრო რთული სტრუქტურით. ფრაქტალური განზომილების პრაქტიკული გამოთვლებისთვის იყენებენ ე.წ. კორელაციურ განზომილებას, რომელიც გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln(d\varepsilon)}$$

სადაც $C(d)$ არის კორელაციური ფუნქცია, რომელიც იანგარიშება

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{n}{N^2}$$

n – იმ წერტილების რაოდენობა, რომლებს შორის წყვილური მანძილი არ აღემატება ε -ს. N არის წერტილების მთლიანი რაოდენობა. აქ იგულისხმება ევკლიდეს მანძილი. როცა ε იცვლება, იცვლება $C(\varepsilon)$ -ის მნიშვნელობა, ვინაიდან იცვლება n . მანძილი d ორ $P_1(X_1, Y_1)$ და $P_2(X_2, Y_2)$ წერტილს შორის გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

მაშასადამე: პირველად უნდა გამოვთვალოთ იმ წერტილების რაოდენობა, რომელთა შორის მანძილი არ აღემატება ε -ს. ფრაქტალის საფუძველზე შემოტანილი განზომილების ცნება წარმოადგენს მძლავრ მათემატიკურ საშუალებას ქსელების რაოდენებრივი შედარებისთვის, ანალიზისთვის და სინთეზისთვის. მაგალითად, მოცემული ტერიტორიის ფუჭური სადგურების კვანძების ქსელებით. დაფარვა, რომელიც უზრუნველყოფს მდგრად კავშირს, შეიძლება გადაწყვეტილ იქნეს, როგორც ქსელის სინთეზის ამოცანა, საჭირო ფრაქტალური განზომილებით.

ჩვენ მოვიყვანეთ მაგალითი ქ. კაზანისა და ქ. პარიზის სატრანსპორტო ქსელის კვანძების რიცხვის გამოთვლის, რომელიც დამოკიდებულია ქალაქის ცენტრიდან მისი გავრცელების რადიუსზე. ქ.კაზანისთვის სისტემის კვანძების ფრაქტალური გამზომილება $D_c=1,32$. სატელეკომუნიკაციო ქსელი დიდი გამტარობით ხელს უწყობს ინფორმაციის მიწოდებას ნებისმიერი მიმართულებით. ამის მიხედვით იცვლება მისი ფრაქტალური განზომილების მნიშვნელობა. და ეს მნიშვნელობა იცვლება $1 < D_c < 2$.

როგორც ცნობილია ფრაქტალური განზომილება პრაქტიკულად გამოითვლება

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

სადაც $C(\varepsilon)$ არის კორელაციური ფუნქცია, რომელიც გამოითვლება როგორც ფარდობა n -ის (იმ წერტილების რაოდენობა რომელთა შორის

მანძილი არ აღემატება ε -ს) N საერთო წერტილების რაოდენობის კვადრატზე.

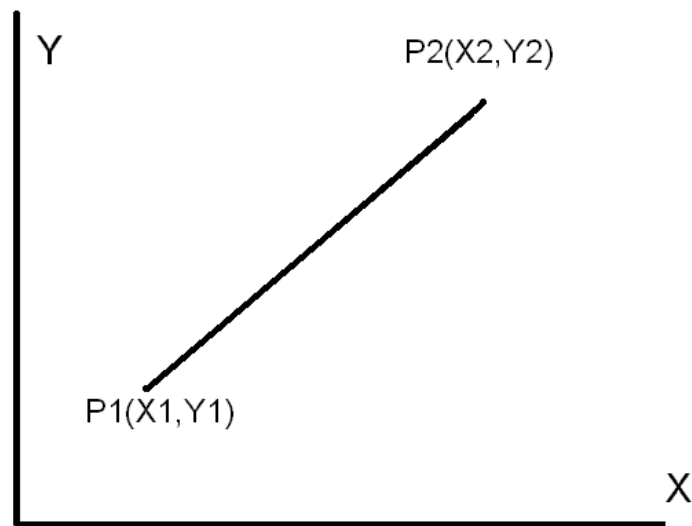
$$C(\varepsilon) = \frac{n}{N^2}$$

აქ მანძილში იგულისხმება ევკლიდეს მანძილი. როცა ε იცვლება, იცვლება $C(\varepsilon)$ -ს მნიშვნელობა, ვინაიდან იცვლება n .

მანძილი d ორ $P_1(X_1, Y_1)$ და $P_2(X_2, Y_2)$ წერტილს შორის გამოითვლება შემდეგი გამოსახულებით:

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

მაშასადამე: პირველად უნდა გამოვთვალოთ იმ წერტილების რაოდენობა, რომელთა შორის მანძილი არ აღემატება ε , $d \leq \varepsilon$, მაგალითად $\varepsilon = 0.1; 0.2; 0.3 \dots$

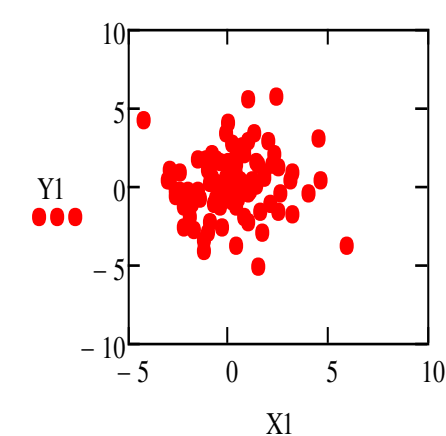
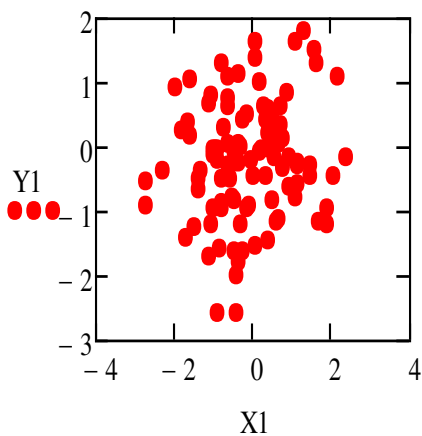
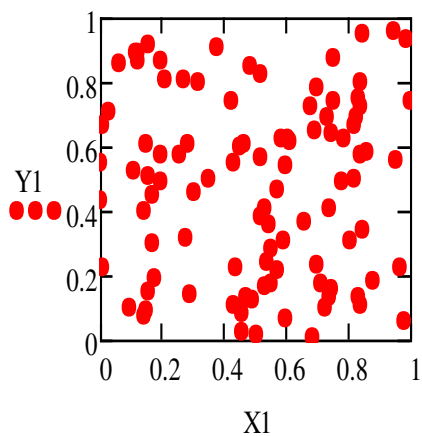


ნახ.50 $P_1(X_1, Y_1)$ და $P_2(X_2, Y_2)$ წერტილებს შორის მანძილის ასახვა

ჩვენ ავირჩიეთ ეს კანონები ვინაიდან ცნობილია თანაბარი და ნორმალური განაწილების კანონების გამოყენების მრავალი სფერო, რაც შეეხება ლოგისტიკურ კანონს იგი ყველაზე კარგად აღწერს მოვლენებს, რომელიც დაკავშირებულია ვალუტის ცვლილებების პროცესთან და გააჩნია ფრაქტალური ხასიათი.

ზემოდ აღწერილი კორელაციური განზომილების გამოთვლის მეთოდი გამოიყენება მაშინ როდეს საქმე გვაქვს ქსელების ტოპოლოგიასთან.

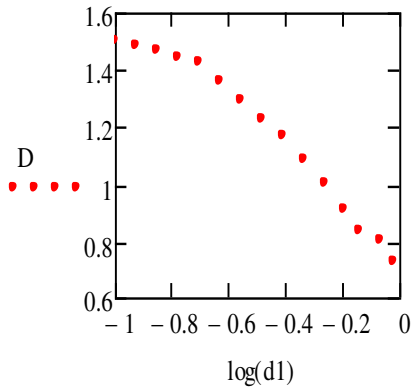
კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის ფრაქტალური განზომილების მოდელირებისთვის და შეფასებისთვის ჩვენს მიერ იყო გენერირებული თანაბრად, ნორმალურად და ლოგისტიკური განაწილებული სიდიდეების მიმდევრობა. ყველა ეს ოპერაციები სრულდება MathCad გარემოში, სადაც როგორც გენერირება, ასევე წერტილების რაოდენობის განსაზღვრა ინტერვალში, რომელიც არ აღემატება ϵ -ს, არ შეადგენს სირთულეს. წერტილების (კვანძების) კოორდინატები ფორმირდებოდა შემთხვევით რიცხვთა გენერატორით და ლაგდებოდნენ კვადრატის ღერძებზე რომლის გვერდის მაქსიმალური მნიშვნელობა უდრიდა გენერირებული შემთხვევითი რიცხვების მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ნახ.51ა, ნახ.51ბ და ნახ.51გ-ზე მოყვანილია წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია (განლაგება) თანაბრად, ნორმალურად და ლოგისტიკურად განაწილებული წერტილებისთვის. ხოლო ნახ.52ა, ნახ.52ბ და ნახ.52გ-ზე ასახულია ამ ტოპოლოგიის შესაბამისი კორელაციური განზომილების მიღებული დამოკიდებულება სტრუქტურული ფრაქტალური ელემენტის ზომის ლოგარითმზე.



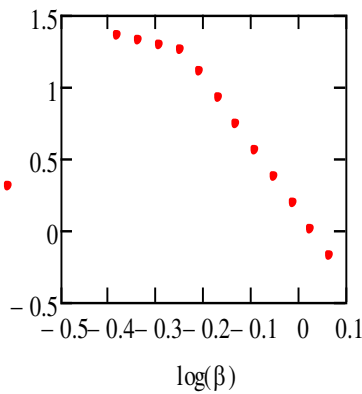
ნახ. 51ა წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია თანაბრად განაწილებული წერტილებისთვის

ნახ.51ბ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია ნორმალურად განაწილებული წერტილებისთვის

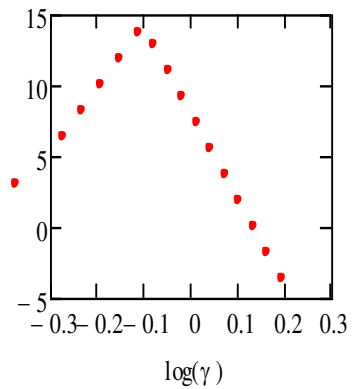
ნახ.51გ წერტილების ერთობლიობის ტოპოლოგია ლოგისტიკურად განაწილებული წერტილებისთვის



ნახ.52ა წერტილების კორელაციური განზომილების დამოკიდებულება სტრუქტურული ელემენტის ზომაზე. თანაბრად განაწილებული წერტილებისთვის



ნახ.52ბ წერტილების კორელაციური განზომილების დამოკიდებულება სტრუქტურული ელემენტის ზომაზე. ნორმალურად განაწილებული წერტილებისთვის



ნახ.52გ წერტილების კორელაციური განზომილების დამოკიდებულება სტრუქტურული ელემენტის ზომაზე. ლოგისტიკურად განაწილებული წერტილებისთვის

წერტილების (კვანძების) სიმრავლის ერთობლიობის ფრაქტალური განზომილების ანგარიშმა გვიჩვენა რომ:

1. ფრაქტალური განზომილება ნაკლებია ევკლიდეს განზომილებაზე $D_c < D_E$, სადაც D_E ევკლიდეს განზომილებაა, $D_E = 2$.
2. D_c კორელაციური განზომილების განაწილების დამოკიდებულებამ ϵ -ზე, აჩვენა, რომ ϵ -ის გაზრდით ფრაქტალური განზომილება ($D_E \rightarrow 0$) მიისწრაფის ნულისაკენ. ϵ -ის შემცირებისას ($\epsilon \rightarrow 0$) წერტილების განზომილება იზრდება (მიისწრაფის D_E -კენ).

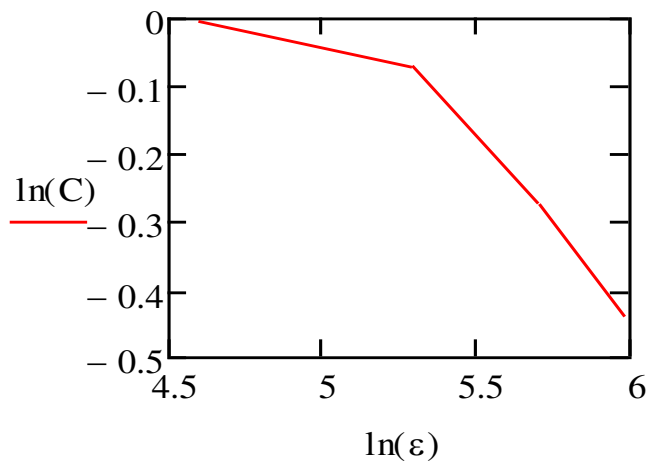
4.4. დროითი მწკრივის კორელაციური განზომილების განსაზღვრა.

ზემოდ აღწერილი მეთოდი კორელაციური განზომილების განსაზღვრისა თვალსაჩინოა, როცა გვაქვს კვანძების ქსელი. მაგრამ თუ საჭიროა განისაზღვროს დროითი მწკრივის განზომილება, როდესაც იგი აღწერს რეალურ პროცესს, სადაც მონაცემთა რაოდენობა ბევრად აღემატება 1000-ს, მოყვანილი მეთოდი მოითხოვს ძალიან დიდი დროის დახარჯვას გამოთვლაზე და არ იქნება ეფექტური. ამ შემთხვევაში შეიძლება გამოვიყენოთ ორი გზა:

1) დისერტაციის მე-2 თავში განხილული იყო ჰერსტის ნორმირებული გაქანების მეთოდი (R/S მეთოდი). ამ დროს ფრაქტალური განზომილება D დაკავშირებულია ჰერსტის პარამეტრთან (H -თან) შემდეგი გამოსახულებით $D=2-H$, სადაც H არის ჰერსტის მაჩვენებელი. ჩვენ განვსაზღვრეთ H სამი პროცესისთვის, რომელიც ასახავდა კარდიორითმის სისწირის ცვლილებას, სეისმოგრამის მონაკვეთს და ამინდის ტემპერატურის ცვლილებას ერთი წლის პერიოდისათვის. $H_1=0.795$ პირველ შემთხვევაში, $H_2=0.749$ და ამინდის ცვლილებისთვის $H_3=0.844$ შესაბამისად პირველი პროცესის ფრაქტალური განზომილებაა $D_1=2-0.795=1.205$; $D_2=2-0.749=1.251$; $D_3=2-0.844=1.156$

2) დროითი მწკრივების კვლევა ეფუძნება იდეას, რომ დამაკმაყოფილებელი გეომეტრიული სურათი სისტემის ყოფაქცევისა შეიძლება მივიღოთ [64], თუ იმ ცვლადების ნაცვლად, რომლის საშუალებითაც მიიღება ამონახსნი, გამოყენებული იქნება დაკვირვების ვექტორის დაყოვნების მნიშვნელობები $Z_i=\{X_i, X_{i+1}, \dots, X_{i+m-1}\}$; m არის დაყოვნების რიგის მაჩვენებელი. პირველად ეს მიდგომა დროითი მწკრივების ანალიზისათვის შემოიღო და დაამტკიცა ფ. ტაკენსმა [54].

MathCad პროგრამულ გარემოში არის საშუალება კორელაციური ფუნქციის განსაზღვრისა მზა კორელაციური ფუნქციებით და სასურველი დაყოვნებით ლგ. თუ გამოვიყენებთ ტაკენსის აღწერას დინამიკური სისტემისა ყოფაქცევისათვის [51], ყოველგვარი გართულების გარეშე შესაძლებელი გახდება განისაზღვროს კორელაციური ფუნქციის ლოგარითმის დამოკიდებულება, როგორც $\log(\varepsilon)$ -ზე ასევე დაყოვნებაზე. შემდეგ ნახაზზე წარმოდგენილია კორელაციის ფუნქციის ლოგარითმის დამოკიდებულება გეომეტრიული (ფრაქტალური აგების) სრუქტურის ზომაზე (ε)-ზე.



ნახ.53 კორელაციური ფუნქციის ლოგარითმის დამოკიდებულება ε მნიშვნელობის ლოგარითმზე

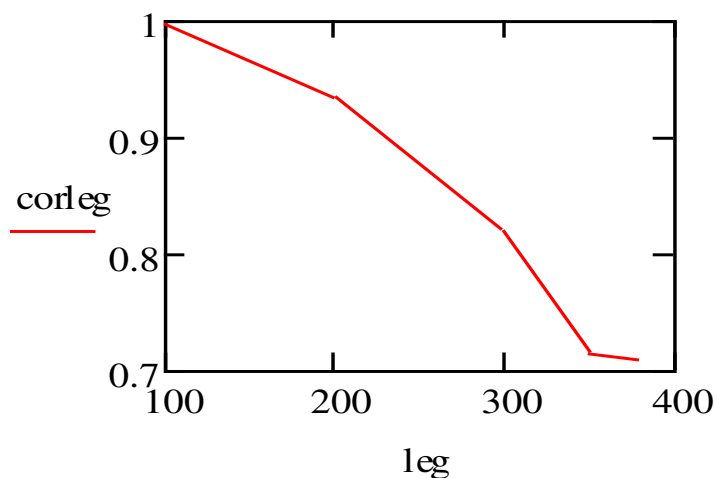
ეს საშუალებას იძლევა განისაზღვროს განზომილება

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

ფორმულის მხედვით.

4.4.2 ნახაზზე ასახულია კორელაციური ფუნქციის დამოკიდებულება (log) დაყოვნების მნიშვნელობაზე.

მოყვანილი შედეგები ცხადყოფს, რომ დაყოვნების გაზრდისას (log) კორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობა მცირდება. იგივე აღნიშნება 4.4.1. ნახაზისათვის.



ნახ.54 კორელაციური ფუნქციის დამოკიდებულება დაყოვნების მნიშვნელობა

ყველაფერი ცხადყოფს ფრაქტალური განზომილების შემცირებაზე ε გაზრდით და დაყოვნების მნიშვნელობის გაზრდით.

ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: ა) ქსელის კვანძების (წერტილების სიმრავლის) ფრაქტალური განზომილების ანგარიშმა აჩვენა: ფრაქტალური განზომილება $D_F < D_E$, ნაკლებია ევკლიდურ განზომილებაზე.

კორელაციური განზომილების დამოკიდებულებამ ε (ფრაქტალური სტრუქტურის) მნიშვნელობაზე აჩვენა, რომ ε -ის გაზრდისას ფრაქტალური განზომილება მცირდება $D \rightarrow 0$. ε შემცირებისას კი $\varepsilon \rightarrow 0$ განზომილება იზრდება და მიისწრაფის ევკლიდის D_E მნიშვნელობისაკენ.

ქსელების თვისებების დამოკიდებულების ფრაქტალურ განზომილებაზე შეიძლება შეასრულოს მნიშვნელოვანი როლი ქსელების განვითარების და მათი გამოყენების ეფექტიანობის მიმართებით.

MathCad პროგრამის გარემოში შემოთავაზებული ალგორითმების შედგენამ დარეალიზაციამ საგრძნობლად გაამარტივა ფრაქტალური განზომილების გამოთვლა. ფრაქტალური განზომილების D რიცხვითი შეფასება ცხადყოფს, რომ ყველა განხილული რეალური პროცესი; კარდიორითმის სიხშირის ცვლილება, სეისმოგრამის მონაცემების მონაკვეთი და ამინდის ტემპერატურის ცვლილება მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესებს, როცა პროცესის გაზრდის ტენდენცია შენარჩუნდება მომავალშიც (გარკვეული პერიოდით) ალბათობით.

გამოკვლევების შედეგად დავასკვნით, რომ შედგენილი ალგორითმების რეალიზაციით MathCad პროგრამამ გაცილებით გაადვილა დროითი მწკრივების ფრაქტალური განზომილების გამოთვლა. ფრაქტალური განზომილების მნიშვნელობის D განსაზღვრა ცნობილი დამოკიდებულებით $D=2-H$ სადაც D -არის პროცესის ფრაქტალური განზომილება, ხოლო H -პერსტის ემპირიული კანონის მაჩვენებელი. როგორც დავითვალეთ კარდიორითმის სიხშირისთვის და

სეისმოგრამის მონაკვეთისთვის $H=0.795$ და 0.749 . ამის მიხედვით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ რომ ორივე პროცესი მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესებს.

4.5 IV თავის ღასკვნები

1. ფრაქტალური მეთოდების შესახებ არსებული ლიტერატურის ანალიზის საფუძველზე გაირკვა, რომ ფრაქტალებს გააჩნიათ ორი ღირსშესანიშნავი თვისება, მსგავსება და წილადური განზომილება. დადასტურდა, რომ ფრაქტალების დახმარებით შეიძლება აღიწეროს ზოგიერთი - არაწრფივი დინამიკური სისტემების ყოფაქცევა. კერძოდ, დასაწყისში ძალიან ახლო მდებარე ტრაექტორიები (ამონახსნი) ექსპონენციურად შორდებიან ერთმანეთს ძალიან დიდ მანძილზე (“პეპელას ეფექტი”). შეიძლება ითქვას, რომ ფრაქტალები არიან ქაოსის გეომეტრიული წარმოსახვა.

ფრაქტალების ამ უნიკალურმა თვისებებმა განაპირობა მათი უმნიშვნელოვანესი გამოყენება მეცნიერების, ტექნიკის, ხელოვნების, ეკონომიკის და სხვა დარგებში.

2. რიცხობრივად შეფასებულია ფრაქტალური განზომილება სხვადასხვა მაგალითისთვის: კერძოდ, კანტორის სიმრავლისთვის, კოხის სიმრავლისათვის, ლორენცის სისტემის ამონახსნისთვის. დამტკიცდა, რომ პრაქტიკულად უფრო რეალიზებადია ფრაქტალური განზომილების კორელაციური ფუნქციით განსაზღვრა.

3. გაანალიზებულია არსებული ლიტერატურული წყაროების საფუძველზე დიდი ქსელების ტოპოლოგიის ფრაქტალური ხასიათი. განხორციელებულია ქსელის კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის (თანაბარი, ნორმალური და ლოგისტიკური ალბათობის განაწილების კანონებისათვის) ტოპოლოგიის, მოდელირება და ფრაქტალური განზომილების რიცხობრივი შეფასება.

ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: ქსელის კვანძების (წერტილების სიმრავლის) ფრაქტალური

განზომილება $D_F < D_E$, ფრაქტალური განზომილება D_F ნაკლებია ევკლიდურ განზომილებაზე D_E -ზე.

კორელაციური ფუნქციის საფუძველზე განზომილების დამოკიდებულებამ ε (ფრაქტალური სტრუქტურის) მნიშვნელობაზე აჩვენა, რომ ε -ის გაზრდისას ფრაქტალური განზომილება მცირდება $D \rightarrow 0$. ε შემცირებისას კი $\varepsilon \rightarrow 0$, განზომილება იზრდება და მიისწრაფის ევკლიდის D_E მნიშვნელობისაკენ.

ქსელების თვისებების დამოკიდებულებამ ფრაქტალურ განზომილებაზე შეიძლება შეასრულოს მნიშვნელოვანი როლი ქსელების განვითარების და მათი გამოყენების ეფექტიანობის მიმართებით.

4. ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: დროითი მწკრივების კორელაციური განზომილების განსაზღვრა უფრო მარტივია MathCad პროგრამის ფუნქციების ბაზაზე. MathCad პროგრამის გარემოში შემოთავაზებული ალგორითმების შედეგნამ და რეალიზაციამ საგრძნობლად გაამარტივა ფრაქტალური განზომილების გამოთვლა. ფრაქტალური განზომილების (D) რიცხვითი შეფასება ცხადყოფს, რომ ყველა განხილული რეალური პროცესი: კარდიორითმის სისშირის ცვლილება, სეისმოგრამის მონაცემების მონაკვეთი და ამინდის ტემპერატურის ცვლილება მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესებს, როცა პროცესის გაზრდის ტენდენცია შენარჩუნდება მომავალშიც გარკვეული დროის მონაკვეთით და ალბათობით.

ზოგადი დასკვნები

1. დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის არაწრფივი დინამიკური სისტემების მიმართებაში განხილვამ აჩვენა, რომ დინამიკურ არაწრფივ სისტემებში ხშირად შეინიშნება ქაოსური ქცევა, რომლის მიზეზი მდგომარეობს არაწრფივი სისტემების უნარში ექსპონენციალურად გაზარდოს თავდაპირველად ახლო მდებარე ტრაექტორიები. ეს გარემოება განპირობებულია სისტემის საწყისი პირობების მიმართ ძალიან მაღალი მგრძობიარობით. ასეთი სისტემის ტრაექტორიების ყოფაქცევის წინასწარმეტყველება შეუძლებელია დროის დიდი ინტერვალებისთვის. თვალსაჩინოებისათვის რეკომენდებულია ფაზურ სიბრტყეში დიაგრამის – ქაოსოგრამის აგება. მიღებულია ლორენცის სისტემის დიაგრამა ფაზურ სიბრტყეში MathCad პროგრამულ გარემოში, როგორც დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის კლასიკური მაგალითი.

2. ჩატარებულია დეტერმინირებული ქაოსის თეორიის ექსპერიმენტული კვლევა სეისმოგრამისათვის (გარკვეული მონაკვეთის), კარდირითმის სიხშირის ცვლილებისთვის (24 საათის განმავლობაში) და ამინდის ცვლილების ანათვლებისთვის, მიღებულია ქაოსოგრამების სახე.

შემოთავაზებულია ქაოსოგრამის ანალიზის მეთოდოლოგია, რომელიც დაფუძნებულია მიღებული ქაოსოგრამის ჰისტოგრამით აღწერაზე და ენტროპიის გამოთვლაზე, განხილულია მაგალითი, რომელიც ეხება ამინდის ცვლილების რეალურ და ანომალურ ანათვლებს. ჩატარებული ექსპერიმენტების საფუძველზე შეიძლება დავასკვნათ, რომ ენტროპიის გამოთვლით შეიძლება შევაფასოთ ქაოსოგრამაში შემთხვევითობის დონე.

3. დინამიკური სისტემის ყოფაქცევის ანალიზმა დაადასტურა, რომ დეტერმინირებული ქაოსის თეორია სრულყოფილად აღწერს დინამიკური არაწრფივი სისტემების ყოფაქცევას. ამ დროს დინამიკური ქაოსის თეორიის მეთოდებად მივიჩნევთ: ქაოსოგრამის დამუშავების მეთოდს, დროით მწკრივების კვლევის კლასიკურ მეთოდს ჰერსტის

ემპირიული კანონის სახით, ფრაქტალების განზომილების გამოყენების და განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელირების მეთოდებს.

4. გაანალიზებულია ჰერსტის ნორმირებული გაქანების მეთოდი – ემპირიული კანონი დროითი მწკრივების დამუშავების და კვლევის კუთხით. მიღებულია, რომ ჰერსტის პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობის მიხედვით შეიძლება განხორციელდეს კვლევის პროცესების კლასიფიკაცია: თუ $0 < H < 1/2$ – პროცესი არის ანტიპერსისტენტული, როდესაც პროცესის გაზრდის ტენდენცია შეიცვლება კლებადობით და შეუძლებელია პროცესის ყოფაქცევის პროგნოზირება ზრდადობის და კლებადობის კუთხით; თუ $0.5 < H < 1$ პროცესი არის პერსისტენტული, რაც მიგვითითებს პროცესის მსვლელობის ხასიათის შენარჩუნებაზე მომავალში დროის გარკვეულ პერიოდში. თუ $H > 1$ -ზე, მაშინ პროცესი ხდება დეტერმინირებული, ხოლო $H = 1/2$ -ს წარმოადგენს კლასიკური ბროუნის მოძრაობის მაგალითს, როცა მიკრონაწილაკების წანაცვლება წარმოადგენს ნორმალურ დამოუკიდებელ პროცესს.

5. ჰერსტის ემპირიული კანონის შემოწმება განხორციელებულია კარდიორითმის სისშირის ცვლილებებისთვის, სეისმოგრამის მონაკვეთისთვის და ამინდის ტემპერატურის ცვლილებისათვის ერთი წლის განმავლობაში. პირველ შემთხვევაში $H = 0.795$, მეორე შემთხვევაში $H = 0.749$, მესამე შემთხვევაში კი $H = 0.844$.

მიღებული შედეგები ცხადყოფს, რომ სამივე პროცესი ატარებს პერსისტენტულ ხასიათს, ვინაიდან $H > 0.5$, მაშასადამე განხილული პროცესები არ მიეკუთვნებიან მთლიანად შემთხვევით პროცესებს, რომლის კლასიკური მაგალითია, მცირე ნაწილაკების ბროუნის მოძრაობა. ($H = 0.5$) ამ დროს შემთხვევითობას ერთვის დეტერმინირებული მდგენელიც. განხილული სიგნალები შეიძლება მივაკუთვნოთ ქაოსურად-დეტერმინირებულ ან ფრაქტალურ პროცესებს, რომლებსაც გააჩნიათ როგორც შემთხვევითი, ასევე დეტერმინირებული სიგნალების თვისებები.

6. ჩატარებულია დროითი მწკრივების მოდელირება სხვადასხვა დონის შემთხვევითობით, რომელიც ცნობილია განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის სახელით. მოდელირების კლასიკური მეთოდის სირთულის გამო შემოთავაზებულია განზოგადოებული ბროუნის მოძრაობის მოდელი, დაფუძნებული ვეივლეტ-ორთოგონალური ფუნქციების გამოყენებაზე.

შემოთავაზებული ალგორითმის მიხედვით მიღებულია ბროუნის მოძრაობის განზოგადოებული მოდელი შემთხვევითობის ყველა დონისათვის MathCad პროგრამულ გარემოში.

ალგორითმის სისწორე შემოწმებულია ჩვეულებრივ ალგორითმთან შედარებით, რომელიც არ იყენებს ვეივლეტ-ფუნქციებს და წარმოდგენს იტერაციულ ნორმალურ პროცესს ნაწილაკის წანაცვლებისთვის. მიღებულია აგრეთვე სპექტრული სიმძლავრე.

7. შემოთავაზებულია კიდევ ერთი მეთოდი დროის მწკრივების ანალიზისათვის: დროით-სისშირული ანალიზი, რომელიც დაფუძნებულია ვეივლეტ ფუნქციების პაკეტის გამოყენებაზე. დროით სისშირული წარმოდგენა იძლევა საშუალებას საკვლევი სიგნალის უფრო დეტალურ და თვალსაჩინო გაანალიზებისა. ჩატარებულია შედარება კოსინუს ბაზური ფუნქციით დროით-სისშირულ წარმოდგენასთან.

შედარებამ ცხადყო, რომ სიგნალის ენერჯის უკეთესი განაწილება შეესაბამება კოსინუს გარდაქმნის გამოყენებას. მაგრამ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ კოსინუს გარდაქმნა მოითხოვს “ფანჯრის” შემოღებას და სხვა სირთულეებს, შეიძლება უპირატესობა მიენიჭოს ვეივლეტ-პაკეტის გამოყენებას.

8. გაანალიზებულია, არსებული ლიტერატურული წყაროების საფუძველზე, დიდი ქსელების ტოპოლოგიის ფრაქტალური ხასიათი. განხორციელებულია ქსელის კვანძების სიმრავლის ერთობლიობისათვის (თანაბარი, ნორმალური და ლოგისტიკური ალბათობის განაწილების კანონებისათვის) ტოპოლოგიის მოდელირება და ფრაქტალური განზომილების რიცხობრივი შეფასება.

ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: ქსელის კვანძების (წერტილების სიმრავლის) ფრაქტალური განზომილება $D_F < D_E$, ანუ ფრაქტალური განზომილება D_F ნაკლებია ევკლიდურ განზომილებაზე D_E -ზე.

კორელაციური ფუნქციის საფუძველზე განზომილების დამოკიდებულებამ ε (ფრაქტალური სტრუქტურის) მნიშვნელობაზე აჩვენა, რომ ε -ის გაზრდისას ფრაქტალური განზომილება მცირდება $D \rightarrow 0$. ε შემცირებისას კი $\varepsilon \rightarrow 0$ განზომილება იზრდება და მიისწრაფის ევკლიდის D_E მნიშვნელობისაკენ.

ქსელების თვისებების დამოკიდებულებამ ფრაქტალურ განზომილებაზე შეიძლება შეასრულოს მნიშვნელოვანი როლი ქსელების განვითარების და მათი გამოყენების ეფექტიანობის მიმართებით.

9. ჩატარებული ექსპერიმენტების და კვლევის შედეგად დადგინდა: დროითი მწკრივების კორელაციური განზომილების განსაზღვრა უფრო მარტივია MathCad პროგრამის ფუნქციების ბაზაზე. MathCad პროგრამის გარემოში შემოთავაზებული ალგორითმების შედგენამ და რეალიზაციამ საგრძნობლად გაამარტივა ფრაქტალური განზომილების გამოთვლა. ფრაქტალური განზომილების (D) რიცხვითი შეფასება ცხადყოფს, რომ ყველა განხილული რეალური პროცესი: კარდიორითმის სისწირის ცვლილება, სეისმოგრამის მონაცემების მონაკვეთი და ამინდის ტემპერატურის ცვლილება მიეკუთვნება პერსისტენტულ პროცესებს, როცა პროცესის გაზრდის ტენდენცია შენარჩუნდება მომავალშიც გარკვეული დროის მონაკვეთით და ალბათობით.

10. არაწრფივი დინამიკური სისტემების და მათ მიერ წარმოქმნილი დროითი მწკრივების დეტერმინირებული ქაოსის მეთოდების მეშვეობით შესწავლამ და ანალიზმა აჩვენა, რომ პრაქტიკაში სარეალიზაციოდ სიმარტივის მხრივ უპირატესობა ენიჭება ჰერსტის ნორმირებული გაქანების ემპირიულ კანონს, ჰერსტის პარამეტრის რაოდენობრივი შეფასებით. თუმცა ფრაქტალური განზომილების და ქაოსოგრამის დამუშავების მეთოდებსაც თავისი მნიშვნელობა გააჩნიათ. ყოველივე ეს

კიდევ ერთხელ ადასტურებს თანამედროვე კომპიუტერული ტექნოლოგიების გამოყენების მიზანშეწონილობას ჩვენს გარშემო მყოფი, პრაქტიკით მოთხოვნილი პროცესების შესწავლის დროს.

ლიტერატურა და ვებლინკები

1. Ю.К. Евдокимов, Д.Ф. Шахтурин. Фрактальное моделирование топологии сложных сетей // Труды Казанского научного семинара «Методы моделирования». – Казан: Изд-во КГТУ, 2007, Вып.3. с.218-233.
2. <http://forum.forexsignal.ru/viewtopic.php?f=6&t=4>
3. В. Бутаков, А. Граковский. Оценка уровня стохастичности временных рядов произвольного происхождения при помощи показателя хёрста. *Computer Modeling and New Technologies, 2005, Vol.9, #2, 27-32. Transport and Telecommunication Institute, Lomonosov1, LV-1019, Riga, Latvia.*
4. L. Bachelier, Theory of Speculation. in Cootner P. edition, The random Character of Stock Market Price. Cambridge: MIT Press, 1964. (Originally published in 1900.)
5. Ю.К. Евдокимов, Д.Ф. Шахтурин. Фрактальный характер топологии сложных сетей // Материалы IV Междунар. конф. «Методы и средства управления технологическими процессами». – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2007, с.244-251.
6. <http://www.adamaz.ru/artikles/almazov/164-fraktaly-na-foreks-model-i-cena.html>
7. Ю.К. Евдокимов, А.А. Потапов, Д.В. Шахтурин. Фрактальное моделирование задержек сообщений в больших сетях. – Нелинейный мир, 2008, т. 6, №8, с.444-451.
8. Э. Петерс, Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.:Мир, 2000.
9. <http://pustota-2009.livejournal.com/17562.html>
10. H.E. Hurst, Long-term Storage of Reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 1951.
11. А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. Основы теории сложных систем. – Москва, Регулярная и хаотич. Динамика, 2007.
12. G. Gouesbet, S. Meunier-Guttin-Cluzel, O. Menard (eds.), Chaos and Its Reconstruction (New York: Nova Sci. Publ., 2003)
13. Б.П. Бузручко, Д.А. Смирнов, Математическое моделирование и хаотические временные ряды (саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005)
14. В.С. Афраимович, А.М. Рейман. Размерность и энтропия в многомерных системах. – В сб. Нелинейные волны. Динамика и эволюция. Ред. А.В. Гапонов-Грехов, И.М. Рабинович. – М., Наука, 1989, с.238-262.

15. А.Ю. Лоскутов, О.Л. Котляров, И.А. Истомина, Д.И. Журавлев. Проблемы нелинейной динамики. III. Локальные методы прогнозирования временных рядов. – Вестн. Моск. Ун-та, сер. Физ.-астр., 2002, №6, с.3-21.
16. А.Ю. Лоскутов. Очарование хаоса. – Успехи физ. Наук, 2010, е.180, №12, с.1305-1329.
17. Ю.К. Евдокимов, Е.Ф. Базлов. Количественная мера топологии множества датчиков методами фрактальной геометрии // Материалы Всероссийской науч.-технич. Конф. «Датчики и преобразователи информации систем измерения, контроля и управления (Датчик - 95)». – Москва – Гурзуф, 1995, е. 3, с.538-539.
18. Ю.К. Евдокимов. Распределенные измерительные среды. Принципы, топология, моделирование // Вестник КГТУ им. А.Н. туполева, 2004, №1, с.165-191.
19. Ю.К. Евдокимов. Распределенные измерительные среды и континуум-измерения: Принципы, топология, алгоритмы // Нелинейный мир, 2007, №10-11, с.639-656.
20. L. Benguigui, M. Daoud. Is the Suburban Railway System a fractal? // Geographical Analysis. 1991, v.23, #4, pp.362-368
21. M. Batty. Cities as Fractals: Simulating Growth and Form // Fractal and Chaos / Ed. By A. Grilly, R. Earnshaw, H.Jones. – N. Y.: Springer, 1991, pp.43-69.
22. G.K. Zipf. Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology. Reading, MA: Addison-Wesley Press, 1949, 250p.
23. Б.М. Смирнов. Физика Фрактальных кластеров. – М.: Наука. Гл. Ред. Физ-мат. Лит., 1991, 136с.
24. P. Grassberger, I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors // physica D, 1983, v.9. p. 188-208.
25. А.Х. Мирзаджанзаде, А.Х. Шахвердиев. Динамические процессы в нефтегазоводобыче. Системный анализ, диагноз, прогноз. М.: Наука, 1997.
26. А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. Этюды о моделировании сложных систем нефтедобычи. Нелинейность, перановесность, неоднородность. Уфа: Гилем, 1999.
27. B. Mandelbrot. Fractals, Hasard et Finance. Paris: Flammarion, 1997.
28. Э. Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала. М.: Мир, 2000
29. B. Mandelbrot. Statistical self-similarity and fractional dimension. //Science, New Series. – 1967. –V.156. - #3775. – P.636.

30. В. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. New York: W.H. Freeman, 1982.
31. А.Х. Мирзаджанзаде, Ч.А. Султанов. Диакоптика процессов нефтеотдачи пластов. Б.: «азербайджан», 1995.
32. Н. Hardy, R. Beier. Fractals in reservoir engineering. London: World Scientific, 1994.
33. Б.А. Сулейманов. Особенности фильтрации гетерогенных систем. М.: ИКИ, 2006.
34. J. Chang, Y. Yortsos. Pressure-transient analysis of fractal reservoirs //SPE Formation Evaluation. – 1990. #5. – P.31.
35. A. Katz, A. Thompson. Fractal sandstone pores: implications for conductivity and pore formation // Physical Review Letters. – 1985. – V.54. – P.1325.
36. О.Ю. Динариев. Движение жидкостей и газов в пористых средах с фрактальной геометрией // Известия РАН Механика жидкости и газа. – 1992. - №5. –С.101-109.
37. А.А. Suleymanov. Analysis of technological data of the operation of oil and gas wells //Petroleum Science and Technology. – 1999. –V.17(5-6). – P.663.
38. М.М. Дубовик, А.В. Крянев, Н.В. Старченко. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов //Вестник РУДН, Серия Прикладная и компьютерная математика. – Москва. – 2004. –Т.3. -№1. –С.30-44.
39. Р.Омнее, А.Эноксон «Прикладной анализ временных рядов». Изд. «Мир», Москва, 1982, 428с.
40. Э. Питер. «Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике». Fractal Market Analyses. Интернет –трейдинг, 2004, 304с 5-902360-03-х.
41. <http://wikipedia.org/wiki/%d0%92%.....>
42. Е.Федер. «Фракталы» Москва, Изд. «Мир», 1991, 249с.
43. Ю.К. Евдовижев, В.Р. Линдваль, Г.И. Щербаков. LabVIEW для радиоинженера, от виртуальной модели до реального прибора.

44. Jens Feder. "Fractals", Plenum Press, New York, 1988, 260 pp.
45. Jun Yu. "Empirical characteristic function in time series estimation and test statistic in financial modeling", National Library of Canada, 2006, 162 pp.
46. <http://www.nanotechnology.bessmertie.ru/nano-main.html>
47. H.C. Berg. Random Walks in Biology Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
48. Е.В. Жалейко, В.А. Воропаева. «Исследование характеристик фрактальных процессов потоков данных мультисервисных сетей».
49. <http://masters/donntu.edu.ua/2011/fkita/zhaleyko/diss/index.htm/>
50. В. Бугаков, А. Граковский «Оценка уровня стохастичности временных рядов произвольного происхождения при помощи показателя Херста.» Computer Modelling and New Technologies, 2005, vol 9, #2, 27-32.
51. А.С. Дмитриев, Ф.И. Панас, С.О. Старков. Динамический хаос как парадигма современных систем связи, *Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники*. 1997. №10, стр. 4-26.
52. Ю.В. Андреев, А.С. Дмитриев, Д.А. Куминов. Хаотические процессоры, *Успехи современной радиоэлектроники (Зарубежная радиоэлектроника)*, 1997, №10, стр.50-79.
53. А.С. Дмитриев, С.О. Старков. Передача сообщений с использованием хаоса и классическая теория информации. *Успехи современной радиоэлектроники*. 1998. №11, стр. 4-32.
54. <http://www.cplire.ru/win/informchaoslab/chaoscomputerra/Dmitriev.html>
55. Stud24.ru/mathematic/determinirovanni-haos/339395-1023731-bade1/html
56. ე. ვენტცელი, "ალბათობათა თეორია". "განათლება", 1980წ.
57. ა. გუგუშვილი, რ. ხუროძე, თ. იმედაძე, დ. გარგი, ო. კოტრიკაძე, ნ. მჭედლიშვილი, მ. ასობაძე, ნ. ნარიმანაშვილი, დ. კვერცხიშვილი, ი. კუცია, ო. ხუციშვილი, ა. გაბელაია. "მართვის თეორია", სინერგეტიკა, წიგნი3. თბილისი, სტუ-ს გამომცემლობა, 2000წ. 869გვ.

58. ს. ოქრომჭედლიშვილი. “დეტერმინირებული ქაოსის საფუძველზე დინამიკური პროცესის კვლევის საკითხები”. სტუდენტთა 79 ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თეზისების კრებული. 2011წ. 201გვ.

59. www.gismeteo.ru

60. ს. ოქრომჭედლიშვილი. “ბუნებრივ პროცესებში შემთხვევითობის წილის განსაზღვრა ემპირიული კანონის საფუძველზე”. სტუდენტთა 80 ღია საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თეზისების კრებული. 2012წ. 177გვ.

61. ი. ჩხეიძე, ს. ოქრომჭედლიშვილი. “ბროუნის მოძრაობის დროით-სიხშირული ანალიზი კომპიუტერული ტექნოლოგიების საფუძველზე”. მე-2 საერთაშორისო კონფერენცია “ნანოტექნოლოგიები” ნანო-2012. შინაარსები. 2012წ. 46გვ.

62. И.М. Чхеидзе, Л.Ш. Токадзе, С.Н. Окромчедлишвили. “*Фрактальная размерность применительно к анализу временных рядов и моделированию топологических сетей*”. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ, РАСО’2012. ТРУДЫ ШЕСТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ. Москва, 2012 г. ТОМ 2. 209-214сс.

63. I. Chkheidze, L. Tokadze, S. Okromtchedlishvili. “Modeling of a Generalized Brownian Motion Based on Wavelet – Computer Technology”. IV International Conference “Problems of Cybernetics and Informatics”, (PCI’2012). IEEE, 52P.

64. ი. ჩხეიძე, ს. ოქრომჭედლიშვილი. “ჰერსტის მახვენებლის მეთოდის მიხედვით დროითი პროცესების სტოქასტიურობის დონის შეფასება”. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი. შრომები, მართვის ავტომატიზირებული სისტემები, №2(13). თბილისი-2012წ. გვ.32.