

ლაშა იაშვილი

რთული ფორმის საინჟინრო ნაგებობათა აეროდინამიკური
დატვირთვების მათემატიკური მოდელირება

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2014

საავტორო უფლება©წელი,იაშვილი ლაშა, 2014

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკის მართვის სისტემები

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავაცანით იაშვილი ლაშა მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: რთული ფორმის საინჟინრო ნაგებობათა აეროდინამიკური დატვირთვების მათემატიკური მოდელირება და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის "ფაკულტეტის დასახელება" სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელები: სრული პროფესორი თამაზ ოზგაძე

სრული პროფესორი ნინო მჭედლიშვილი

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
წელი

ავტორი: იაშვილი ლაშა

დასახელება: რთული ფორმის საინჟინრო ნაგებობათა აეროდინამიკური
დატვირთვების მათემატიკური მოდელირება

ფაკულტეტი: ინფორმატიკის და მართვის სისტემები

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ
ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით
მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა
და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ
უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც
მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების
გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია
ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო
უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა
(გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ
სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს
მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა
მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

ნაშრომს ვუძღვნი ჩემს ოჯახს

რეზიუმე

საცხოვრებელი თუ სამრეწველო მაღლივი შენობა-ნაგებობის ასაგებად, საჭიროა, გაანგარიშებული იქნას ქარის დატვირთვებიც, ასეთი ამოცანის უყურადღებოდ დატოვება არაა სასურველი, რადგან სხვა ფაქტორებთან ერთად ნაგებობათა უსაფრთხოება ქარის დატვირთვებზეცაა დამოკიდებული.

ტრადიციულად, ეს პრობლემა საქართველოში წყდებოდა ქარის დინამიკის განსაზღვრის ნახევრადემპირიული ფორმულებით, რომლებიც მოცემულია სამშენებლო ნორმებში (СНиП 2.01.07-85), ან, ხდებოდა შენობის ან შენობათა მასივი მაკეტის დამზადება და აეროდინამიკურ მილში ჰაერის დაბერვა, რაც საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტულად შევისწავლოთ შენობებზე ქარის მოსალოდნელი დატვირთვები, რეგიონების გათვალისწინებით.

ქარის დატვირთვების СНиП-ით გაანგარიშება მეტად უხეშია და მიახლოებული, განსაკუთრებით, როდესაც საქმე გვაქვს რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობებთან. ასე, რომ ნორმების გამოყენების არეალი მეტად შეზღუდულია.

ხოლო, აეროდინამიკურ მილში ქარის ბერვის ექსპერიმენტი იწვევს დიდ ენერგეტიკულ ხარჯებს, ამიტომაც, მას იშვიათად იყენებენ.

შესაბამისი დინამიკის განტოლებების არსებული ანალიზური ამონახსნები, არ იძლევიან ქარის დატვირთვების გათვლის საშუალებას, რადგან ანალიზური ამონახსნები არსებობს ძირითადად, გაწრფივებული ამოცანებისათვის, რაც ქარისათვის მეტად უხეში მიახლოებაა.

აქედან გამომდინარე, საჭირო იყო დაიხვეწილიყო და განვითარებულიყო კომპიუტერული მეთოდები და პროგრამული უზრუნველყოფა, ქარის დატვირთვებთან მიმართებაში. პროგრამული პაკეტით უნდა გამოვთვალოთ ქარის დატვირთვა სხვადასხვა, რთული გეომეტრიული შენობა-ნაგებობების პროექტირებისას. გასათვალისწინებელია, არამარტო ჯამური მოქმედი ძალა, არამედ, შენობის ზედაპირის გასწვრივ წნევებისა და სიჩქარეთა ველის გადაწილების სურათიც, რაც საშუალებას იძლევა გავთვალოთ, როგორც ჯამური გადამტრიალებელი ძალის სიდიდე, ასევე, ქარის ინფილტრაცია ნაგებობათა კონსტრუქციის ზედაპირის გასწვრივ

აგებული იქნა ქარის ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელები, შემუშავებული იქნა რვაჩოვ-ობგადის RO - გეომეტრიული კოდირების მეთოდის გამოყენების ალგორითმი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის მოდელირებისათვის, ქარის ნაკადის ნაგებობებზე მიკვრის პირობების გასათვალისწინებლად RO - ფუნქციებზე დაყრდნობით, აგებული იქნა ფუნქციათა კონის განტოლებები, რომლებიც ავტომატურად აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს, ქარის ნაკადის დინამიკური მოდელისათვის, აგებულ იქნა ლიონს-ტემამის სუსტი ფორმულირება და კუპრამე-ბრეზიას შებრუნებული ვარიაციული ფორმულირების

ამოცანები, შემუშავებული იქნა შესაბამისი ამოხსნის ალგორითმი და პროგრამა MathCAD და Comsol გარემოში.

გათვლილი იქნა მართკუთხედის ფორმის ნაგებობის გარსდენა სასრულ-სხვაობათა მეთოდით და ვარიაციული მეთოდით. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი აეროდინამიკური პარამეტრები და წინაღობის კოეფიციენტები რეინოლდსის რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ასევე გათვლილი იქნა მაღლივი მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ნაგებობის გარსდენის ამოცანა. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი აეროდინამიკური კოეფიციენტები ქარის სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის ასევე დაისვა საკვამურის გარსდენის ამოცანა და განსაზღვრული იქნა გარსდენის შესაბამისი განმსაზღვრელი პარამეტრები

შესწავლილი იქნა ნაგებობათა კომპლექსების გარსდენის ამოცანები გათვლებმა აჩვენა, რომ ნორმატიული, ნახევრადემპირიული ფორმულები ნაგებობათა კომპლექსების შემთხვევაში ცუდად ითვალისწინებენ ბაფტინგის პრობლემას და საჭიროებენ შემდგომ დაზუსტებას.

Abstract

To build residential or industrial high-rise buildings and structures it's necessary to calculate wind loads to neglect this task is not desirable as the structures stability among other factors depends on wind load.

In Georgia traditionally this problem was solved by halfempirical formulae of wind dynamics definition, which are given in building codes (СНП 2.01.07-85) or a model of a building or a massif of buildings was prepared and the air was blown in to the aerodynamic pipe, which gives possibility to study expected wind load on a building experimentally according to the regions.

Calculation of wind load according to СНП is rough and approximate, especially when it concerns to complex geometrical configuration structures. So the area of the codes application is very limited, and the experiment of blowing the air into the aerodynamic pipe causes great power consumption and that's why it is used very seldom.

Available analytic solution of particular dynamic equations do not permit to calculate wind load as there are analytic solutions mainly for linear tasks which is rough for the wind.

Hence it was necessary to perfect and develop computer methods and its software with respect to wind loads. When designing various complex geometrical buildings and structures, wind load must be computed with the program packet.

The diagram of the pressure and velocity distribution area has to be taken into consideration together with summed up active force across the building. This will give possibility to calculate the volume of summed turning force and also wind flow across the structure.

Wind two and three dimensional mathematic models has been constructed, an algorithm of Rvachov-Obgadze RO-geometrical coding method for boundary modelling of complex geometrical configuration structures has been developed. A functional array of equations for considering the state of wind flow across the structures, based on RO functions have been constructed and they automatically meet boundary conditions.

For wind current dynamic model Lion-Temam accurate formulation and kupradze-Brebia variation formulation tasks have been constructed, individual solution algorithm and program in MATHCAD and COMSOL have been worked out. Wind flow along rectangular structure has been calculated using finite-differential and variation methods. Special aerodynamic parameters and resistance coefficients have been determined for different values of Reynolds number. The problem of wind flow along high-rise rectangular parallelepiped structure has been calculated.

Specific aerodynamic coefficients for different values of wind velocity have been defined and also wind flow across the chimney and its particular defining parameters.

When studying the problem of wind flow across complex structures the calculations showed that normative, halfempirical formulae didn't consider Baptings problems and need further confirmatione

შინაარსი

შესავალი.....	14
თავი I რთული გეომეტრიის საინჟინრო ნაგებობებზე მოქმედი, ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ლიტერატურული მიმოხლვა.....	20
1.1. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ამერიკის შეერთებულ შტატებში.....	20
1.2. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები რუსეთში.....	26
1.3. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ბელორუსიაში.....	27
1.4. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ევროპის ქვეყნებში.....	31
1.5 ქარის აეროდინამიკური მოდელირება COMSOL Multiphysics –სის ბაზაზე.....	40
თავი II. რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ფიგურათა ანალიზური გამოსახვა და ფუნქციონალური სიმრავლეები.....	56
2.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა.....	56
2.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა.....	61
2.3. რელაციური სისტემები.....	64
2.4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები (ხელოვნური ინტელექტი) გამოყენებანი.....	66
2.5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგადის გეომეტრიული კოდირების RO–მეთოდის გამოყენება რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის მოდელირებისათვის.....	67
2.6. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე.....	70
2.7. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე.....	72
2.8. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე.....	75
2.9. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის.....	76
თავი III. გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების ამოხსნა და საინჟინრო ნაგებობებზე ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების განსაზღვრა.....	77
3.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი.....	78
3.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი.....	80
3.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები.....	82
3.4. სიმბოლური აღნიშვნები.....	87
3.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები.....	89

3.6. მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები. ჰამილტონ-კელის თეორემა.....	91
3.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები.....	95
3.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები,დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით.....	99
3.9. ნიუტონის განზოგადოებული კანონი სითხეებისათვის.....	101
3.10.ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით.ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები.....	102
3.11.ვარიაციული მეთოდების გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის.....	107
3.12.მათემატიკური მოდელირება და ქარის დატვირთვების საანგარიშო ფორმულები.....	108
3.13.ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის რიცხვითი ალგორითმი.....	109
3.14.სასრული-სხვაობის მეთოდის გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის.....	111
3.15.რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობებზე და ნაგებობათა კომპლექსებზე ქარის დატვირთვების გათვლის შედეგები.....	112
დასკვნები.....	122
გამოყენებული ლიტერატურა.....	123

ცხრილების ნუსხა

ცხრილი.1.1 შენობაზე სიჩქარის ზეწოლა.....	20
ცხრილი.1.2 ქარის ძალის ზემოქმედება შენობა.....	22
ცხრილი.1.3 ქარის ზეწოლა	26
ცხრილი.1.4 ღერძის დიამტერი და შენობის სიმაღლე	27
ცხრილი.1.5 პარამეტრები სხვადასხვა უხეში ზედაპირის.....	36
ცხრილი.2.1 დიზიუნქციის ოპერაციისათვის	56
ცხრილი.2.2 კონიუნქციის ოპერაციისათვის	57
ცხრილი.2.3 ექვივალენტობის ცნება	57
ცხრილი.2.4 უნარული ოპერაცია	58
ცხრილი.2.5 ძირითადი კანონები	58
ცხრილი.2.6 დე მორგანის პირველი კანონი.....	59
ცხრილი.2.7 გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციები.....	64
ცხრილი.3.1 აეროდინამიკური კოეფიციენტების სიდიდეები	113

ნახაზების ნუსხა

ნახ.1.1 ორი წრეწირი R და r რადიუსები.....	17
ნახ.1.2 ქარის ძალის ზემოქმედება შენობაზე	20
ნახ.1.3 მოცემულია შენობა.....	21
ნახ.1.4 შენობის გეგმილი ქარის დატვირთვებისას.....	25
ნახ.1.5 მონაცემებით გამოსახულია ქარის სიჩქარის დროსთან დამოკიდებულების გრაფიკი	27
ნახ.1.6. შენობის ქარის ნაკადით გარსდენის სურათი	29
ნახ.1.7 ქარის ზემოქმედება შენობაზე	31
ნახ.1.8 სტანდარტული გადახრა და პიკ ფაქტორი	32
ნახ.1.9 სიმაღლის z_s გამოთვლა $C_s C_d$ -ით.....	33
ნახ.1.10 სიმაღლის დამოკიდებულება h და b და წნევის სიჩქარე	34
ნახ.1.11. სტრუხალის რიცხვი მართკუთხედის კვეთისას.....	37
ნახ.1.12. სტრუხალის რიცხვი მართკუთხედის კვეთისას	37
ნახ.1.13 დატვირთვის ჩვენება ხვეული და არახვეული ღერძების	38
ნახ.1.14 ქარის ნაკადის მოდელირება COMSOL Multiphysics-ს გარემოში.....	41
ნახ.1.15. შენობის გარსდენის სქემა.....	42
ნახ.1.16. ქარის ნაკადის დენების წირების ანგარიში COMSOL Multiphysics - სის გარემოში	42
ნახ.1.17. სამგანზომილებაში ქარის ტურბულენტური დინება	43
ნახ.1.18 წნევის გრაფიკი მოცემულია	43
ნახ.1.19 წნევის ზემომქედება შენობა ნაგებობაზე	44
ნახ.1.20 აღნიშნულია წნევის ფაქტორები სხვადასხვა წერტილებში	44
ნახ.1.21 კავთისხევის სახლზე ხდება ქარის გარსდენის მოდელირება.....	45
ნახ.1.22 ნაჩვენებია ქარის ნაკადის ძვრა	45

ნახ.1.23 სახლის ქარის ნაკადით გარსდენა	47
ნახ.1.24 წარმოქმნება ტურბულენტობა	48
ნახ.1.25 სახლის გარშემო ხდება ტურბულენტური ზონების წარმოქმნა...	48
ნახ.1.26 შენობაზე ზემოქმედება აღნიშნულია ისრებით	49
ნახ.1.27 შენობის უკან წარმოიქმნება ტურბულენტობა	49
ნახ.1.28 ხედიდან წარმოდგენილი ზეწოლა და ტურბულენტობა	50
ნახ.1.29 მოცემულია ქარის დინებები შენობა ნაგებობის გარშემო	50
ნახ.1.30 მოცემულია წნევის ზემოქმედება შენობა ნაგებობებზე	52
ნახ.1.31 შენობის მაქსიმალური სიმაღლე 80 მეტრია	53
ნახ.1.32 ქარის დინებისა და წნევის ზემოქმედება შენობა-ნაგებობაზე ..	54
ნახ.1.33 ქარის სიჩქარე 3მ/წ წნევა 108კპს	55
ნახ.3.1 θ^i და x^i მრუდწირული კოორდინატთა სისტემებია	82
ნახ.3.2. \vec{a} -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	84
ნახ.3.3. \vec{a} -ვექტორის კოვარიანტული	86
ნახ.3.4. მექანიკური ძაბვა	95
ნახ.3.5. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრის ინტერპრეტაცია	97
ნახ.3.6. ბლანტი სითხის მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა	101
ნახ.3.7 ნახაზე ნაჩვენებია ქარის ნაკადი შენობაზე	112
ნახ.3.9 მართკუთხედის გარსდენის გათვლის სქემა	114
ნახ.3.10 (ა) და (ბ) ეროდინამიკური კოეფიციენტების მნიშვნელობები შენობებისათვის	120

მადლიერება

უპირველეს ყოვლისა მადლიერება მინდა გამოვხატო ოჯახის წევრების მიმართ.

ასევე მადლიერება მინდა გამოვხატო ჩემი ხელმძღვანელების მიმართ თამაზ ოზგაძის და ნინო მჭედლიშვილის მიმართ, რომელებიც წლების განმავლობაში მზრდიდა, მაძლევდა რჩევა დარიგებებს და მიბიძგებდა სწორი გზისკენ.

უზამოდ მადლიერი ვარ 71-კათედრის თანამშრომლების, რომელებიც აქტიურად მხარს მიჭერდენ ამ ხნის მაძილზე, განსკუთრებით, მადლობა მინდა გამოვხატო: ნანა კურკუმულის, როზიტა დემანიას, ლელა გაჩეჩილაძის, სოფო ბარნოვის, ლია ნონიკაშვილის, ქეთი კოტრიკაძის, ოლღა და თეა ხუციშვილების მიმართ, ასევე რამაზი ბერიტაშვილი და გოჩა დალაქიშვილის მიმართ.

შესავალი

თემის აქტუალობა. საცხოვრებელი თუ სამრეწველო მაღლივი შენობა-ნაგებობის ასაგებად, საჭიროა, გაანგარიშებული იქნას ქარის დატვირთვებიც, ასეთი ამოცანის უყურადღებოდ დატოვება არაა სასურველი, რადგან სხვა ფაქტორებთან ერთად ნაგებობათა უსაფრთხოება ქარის დატვირთვებზეცაა დამოკიდებული.

ტრადიციულად, ეს პრობლემა საქართველოში წყდებოდა ქარის დინამიკის განსაზღვრის ნახევრადემპირიული ფორმულებით, რომლებიც მოცემულია სამშენებლო ნორმებში (СНиП 2.01.07-85), ან, ხდებოდა შენობის ან შენობათა მასივი მაკეტის დამზადება და აეროდინამიკურ მილში ჰაერის დაბერვა, რაც საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტულად შევისწავლოთ შენობებზე ქარის მოსალოდნელი დატვირთვები, რეგიონების გათვალისწინებით.

ქარის დატვირთვების СНиП-ით გაანგარიშება მეტად უხეშია და მიახლოებული, განსაკუთრებით, როდესაც საქმე გვაქვს რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობებთან. ასე, რომ ნორმების გამოყენების არეალი მეტად შეზღუდულია.

ხოლო, აეროდინამიკურ მილში ქარის ბერვის ექსპერიმენტი იწვევს დიდ ენერგეტიკულ ხარჯებს, ამიტომაც, მას იშვიათად იყენებენ.

შესაბამისი დინამიკის განტოლებების არსებული ანალიზური ამონახსნები, არ იძლევიან ქარის დატვირთვების გათვლის საშუალებას, რადგან ანალიზური ამონახსნები არსებობს ძირითადად, გაწრფივებული ამოცანებისათვის, რაც ქარისათვის მეტად უხეში მიახლოებაა.

თუმცადა, არსებობს ქარის დატვირთვების საანგარიშო არაწრიფივი მათემატიკური მოდელების რიცხვითი ამონახსნების პოვნის პროგრამული პაკეტები, მაგრამ მათაც გააჩნიათ რიგი ნაკლოვანებები:

- 1) არ იძლევიან საკმარისად ზუსტ ინფორმაციას, რომელიც დააკმაყოფილებს მშენებლებს რთული გეომეტრიის ნაგებობათა შემთხვევაში;
- 2) არ არიან უნივერსალური და თითოეულ მათგანს გააჩნია გამოყენების ვიწრო არეალი;
- 3) არ იძლევიან საშუალებას გავთვალოთ ნაგებობათა მასივები.

აქედან გამომდინარე, საჭირო იყო დაიხვეწილიყო და განვითარებულიყო კომპიუტერული მეთოდები და პროგრამული უზრუნველყოფა, ქარის დატვირთვებთან მიმართებაში. პროგრამული პაკეტით უნდა გამოვთვალოთ ქარის დატვირთვა სხვადასხვა, რთული გეომეტრიული შენობა-ნაგებობების პროექტირებისას. გასათვალისწინებელია, არამარტო ჯამური მოქმედი ძალა, არამედ, შენობის ზედაპირის გასწვრივ წნევებისა და სიჩქარეთა ველის გადაწილების სურათიც, რაც საშუალებას იძლევა გავთვალოთ, როგორც ჯამური გადამტრიალებელი ძალის სიდიდე, ასევე, ქარის ინფილტრაცია ნაგებობათა კონსტრუქციის ზედაპირის გასწვრივ.

საშუალების მიზანი და ამოცანები. სამუშაოს მიზანია, შემუშავებული იქნას რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის სამშენებლო ნაგებობებზე, ქარის დატვირთვების გამოსათვლელი მათემატიკური მოდელი და შესაბამისი რიცხვითი ამონახსნების პოვნის ალგორითმები, რაც საშუალებას მოგვცემს დაზუსტებულ იქნას ნახევრადემპირირებული ანალიზის შედეგები და შემუშავებული იქნას დატვირთვების გამოანგარიშების შესაბამისი მეთოდიკა. დასმულია შემდეგი ამოცანები:

- 1) გამოთვლითი ჰიდროდინამიკის მეთოდებზე დაყრდნობით, შემუშავებული იქნას, რთული გეომეტრიის საანჟინრო ნაგებობებზე, აეროდინამიკური დატვირთვების გაანგარიშების ალგორითმები;
- 2) შესწავლილ იქნას ნაგებობათა აეროდინამიკის ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი ამოცანები. გათვლის შედეგების შედარება სხვა, ცნობილი საინჟინრო მეთოდებით გათვლის შედეგებსა და აეროდინამიკური ექსპერიმენტების შედეგებთან;
- 3) ჩამოყალიბდეს რვაჩოვ-ობგადის ფუნქციების გამოყენების ალგორითმი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობების ზედაპირის გასწვრივ სასაზღვრო-მიკვრის პირობების გათვალისწინებისათვის;
- 4) შემუშავებული ალგორითმები, გამოყენებული იქნას ნაგებობათა და ნაგებობათა კომპლექსების ქარის დატვირთვებზე გაანგარიშებისათვის.

კვლევის მეთოდები. პრობლემის გადასაჭრელად გამოიყენება გამოთვლითი ჰიდროდინამიკის, რიცხვითი მეთოდებისა და გეომეტრიული კოდირების მეთოდები.

მეცნიერული სიახლე და პრაქტიკული ღირებულება. მეცნიერული სიახლე მდომარეობს შემდეგში:

- 1) შემუშავებულ იქნა ქარის დატვირთვების გათვლის ახალი ალგორითმები, რისთვისაც გამოყენებულ იქნა ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემისათვის:
 - ა) გეომეტრიული კოდირების რვაჩოვ-ობგადის მეთოდი,
 - ბ) სასრულ-სხვაობათა და ვარიაციული მეთოდები;
 - გ) ობგადე-გაბრიჩიდის რეგულარულ წყაროთა მეთოდი;
- 2) შემუშავებულ იქნა ახალი ალგორითმების შესაბამისი პროგრამები Mathcad-ის და Comsol ბაზაზე;
- 3) გათვლილ იქნა ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობების, ქართ გასდენის ამოცანები და შესწავლილ იქნა შესაბამისი დატვირთვები;

4) გათვლილ იქნა ნაგებობათა კომპლექსების გარსდენა ქარის ტურბულენტური ნაკადით.

შემუშავებული იქნა კომპიუტერული პროგრამები Comsol-ის ბაზაზე, რომლებიც საშუალებას იძლევიან გამოვთვალოთ აეროდინამიკური დატვირთვები შემდეგი ტიპის შენობა-ნაგებობაზე;

- მართკუთხა პარალელიპედის ფორმების შენობები;
- ცილინდრული ფორმის ნაგებობები: კოშკები, საკვამური მილები, ანძები;
- შენობათა მასივები რთული რელიეფის გავლენის გათვალისწინებით.

დანერგვა. ნაშრომის შედეგები შეიძლება გამოყენებული იქნას ნაგებობათა და ნაგებობათა მასივების პროექტირებისას.

ნაშრომის აპრობაცია. ნაშრომი მოხსენებული იქნა ხელსაწყოთმშენებლობის, ავტომატიზაციისა და მართვის სისტემების კოლეგიის ორ სემინარზე, ასევე მოხსენებული იქნა საერთაშორისო კონფერენციაზე (МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ, 2013 წ)

პუბლიკაციები. ნაშრომის შედეგები გამოქვეყნებულია 3 სტატიასა და 1 კონფერენციის მასალებში.

სამუშაოს ძირითადი შინაარსი

შესავალში დასაბუთებულია სადისერტაციო თემის აქტუალობა, გადმოცემულია სამუშაოს მიზანი და ამოცანები, განხილულია, სამეცნიერო კვლევის მეთოდები, ჩამოყალიბებულია კვლევის შედეგების მეცნიერული სიახლე და პრაქტიკული ღირებულება. გადმოცემულია დაცვაზე გამოტანილი სამუშაოს ძირითადი შინაარსი

I თავში განხილულია საინჟინრო ნაგებობებზე, ქარის დატვირთვების განსაზღვრის არსებული ნახევრადემპირიული თეორიები და ნაშრომები. გაანალიზებულია სხვადასხვა ქვეყნის გამოცდილება დისერტაციის თემის მიმართულებით და შედგენილია შესაბამისი ანალიტიკური მიმოხილვა. მიმოხილულია აგრეთვე, არსებული პროგრამული პაკეტები და მათი გამოყენების არეალი.

დისერტაციის II თავში, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ფიგურათა ანალიზური გამოსახვა და ფუნქციონალური სიმრავლეები, განხილულია პრედიკატებისა და გეომეტრიული კოდირების თეორიის გამოყენება რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის გეომეტრიული ფიგურების საზღვრის მათემატიკური ფორმულებით აღსაწერად. განხილულია ბულის ალგებრების კატეგორია, სადაც მორფიზმები ინდუცირებულია ჰომომორფიზმებით. რაც საშუალებას იძლევა, რვაჩოვობგადის ჰომომორფიზმების გამოყენებით ავაგოთ რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის ანალიზური გამოსახულებები, რომლებიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას მიიღებენ

მხოლოდ ამ საზღვრის წერტილებისათვის. ამ თავში გეომეტრიული კოდირების მეთოდი პირველად გამოყენებული მაღლივი ნაგებობების მასივისათვის, რაც საშუალებას იძლევა, მარტივად გავითვალისწინოთ ბლანტი სითხის ნაგებობის კედლებზე მიკვრის სასაზღვრო პირობები. სიმარტივისათვის, განხილულია ორი სხვადასხვა დიამეტრის საკვამური მილის, ჰორიზონტული კვეთისათვის (მიიღება ორი წრეწირი) შესაბამისი RO - ფუნქციის აგების ალგორითმი:

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r, \quad (1)$$

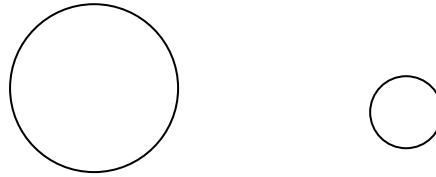
სადაც L_1 - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_2 - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_r - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განიხილება კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია(ნახ.1.). სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ გვაქვს ორი სხვადასხვა დიამეტრის მილი, მაშინ შეგვიძლია სიბრტყეზე მათი კვეთი გამოვსახოთ ერთი ანალიზური ფორმულით.



ნახ.1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(1) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ საყრდენ სიმრავლეებს, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (2)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 \geq 0\}, \quad (3)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x - c)^2 + (y - d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (4)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x - c)^2 - (y - d)^2 \geq 0\}. \quad (5)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (6)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით L_2 -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_2 -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (7)$$

სადაც P_1 – არის გამონათქვამი $x_1 \geq 0$,

P_2 – არის გამონათქვამი $x_2 \geq 0$,

P_3 – არის გამონათქვამი $x_3 \geq 0$,

P_4 – არის გამონათქვამი $x_4 \geq 0$,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \quad (8)$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ეხლა, გადავიდეთ L_r -ში რვაჩოვის ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (9)$$

მივიღებთ R – ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \quad (10)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (9) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია ობგადის ჰომომორფიზმი სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (12)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი” \Leftrightarrow “უდრის ნულს”;

“მცდარი” \Leftrightarrow “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (13)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (14)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (15)$$

ე.ი. $P = P_1 \vee P_2 ; \quad (16)$

სადაც

$$P_1 - \text{არის გამონათქვამი } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (17)$$

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ; \quad (18)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2]. \quad (19)$$

როგორც ვხედავთ, ობგამის ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად მარტივდება R – ფუნქციის ანალიზური სახეც. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, რვაჩოვ-ობგამის RO –მეთოდს ეძახიან. აქვე, განხილულია ფუნქციონალური სიმრავლეების კონსტრუქციული აგების ალგორითმიც. აგებულია L_2 ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე და სობოლევის W_2^k სივრცე, რომლებიც საშუალებას იძლევიან, ავავოთ ქარის ნაკადის მათემატიკური მოდელის რიცხვითი ამონახსნის პოვნის შესაბამისი ალგორითმები ვარიაციული და სასრულ-სხვაობიანი მეთოდების ბაზაზე.

III თავში, გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების ამოხსნა და საინჟინრო ნაგებობებზე, ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების განსაზღვრა, გადმოცემულია ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის ალგორითმებისა და საინჟინრო ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ისტორიული მიმოხილვა. განხილულია ლიუვილისა და ბოლცმანის განტოლებები სტატისტიკური აეროდინამიკის ამოცანებისათვის. გამოყვანილია ნავიე-სტოქსისა და ეილერის განტოლებები ქარის ნაკადისათვის. აგებულია დინამიკის განტოლებების ამოხსნის ვარიაციული მეთოდი, რომელიც ემყარება კუპრაძე-ბრეზიას შებრუნებულ ვარიაციულ ფორმულირებასა და რვაჩოვ-ობგამის გეომეტრიული კოდირების მეთოდს. აგებულია ასევე, ქარის დინამიკის შესწავლის სასრულ-სხვაობიანი სქემები და გათვლილია როგორც ორგანზომილებიანი, ასევე, სამგანზომილებიანი ამოცანები.

გამოყვანილია ქარის დატვირთვების განსაზღვრის საინჟინრო ფორმულების დამაზუსტებელი ფორმულები და შემუშავებულია, რთული გეომეტრიული ფორმის ნაგებობების ქარის დატვირთვებზე გათვლის ალგორითმები, რომლებიც რეალიზებულია MathCad და COMSOL Multiphysics გარემოში

თავი I. რთული გეომეტრიის საინჟინრო ნაგებობებზე მოქმედი,
ქარის დატვირთვების განსაზღვრის არსებული ლიტერატურის
მიმოხილვა

1.1 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები
ამერიკის შეერთებულ შტატებში

ბევრ ქვეყანაში, მათ შორის ამერიკის შეერთებულ შტატებში შენობა-ნაგებობების უსაფრთხოებისთვის შემუშავებული იქნა უსაფრთხოების ზომები ქარის დატვირთვებისთვის.

ქარის სიჩქარით გამოწვეული ზეწოლა (q_z), რომელიც დამოკიდებულია z-სიმაღლეზე, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$q_z = 0.00256K_zK_dV^2I_w \quad (1.1)$$

სადაც:

q_z – სიჩქარის ზეწოლაა z-სიმაღლაზე.

K_z – სიჩქარის ზეწოლისას გამოწვეული ზემოქმედების კოეფიციენტი z-სიმაღლაზე, ზემოქმედება B, C და D (ცხრილი 1.1)

K_d – ქარის მიმართულების ფაქტორი. სპექტრში 0.85(შენობის) \Rightarrow 0.95 (საკვამური მილი)

v – სიჩქარე MPH (MPH (Miles per hour – მილ საათში) = 0.44704 მ/წ) 3-წამიანი ნაკადით 33 ფუტი (1 ფუტი=30.48 სმ, 33*30.48=1005,48სმ, 1005,48/100=10მ ანუ შენობა-ნაგებობა არის 10 მეტრის სიმაღლის) მიწის ზემოდან, ცხრილ 1.1-ში ნაჩვენებია C კატეგორიაში.

I_w – მნიშვნელოვანი ფაქტორები ქარის დატვირთვებისას

სიჩქარის ზეწოლის კოეფიციენტი K_z

სიმაღლე მიწის ზედაპირიდან Z		ადგილმდებარეობა			
		B		C	D
ft	(m)	შემთხვევა 1	შემთხვევა 2	შემთხვევა 1&2	შემთხვევა 1&2
0-15	(0-4.6)	0.70	0.57	0.85	1.03
20	(6.1)	0.70	0.62	0.90	1.08
25	(7.6)	0.70	0.66	0.94	1.12
30	(9.1)	0.70	0.70	0.98	1.16
40	(12.2)	0.76	0.76	1.04	1.22
50	(15.2)	0.81	0.81	1.09	1.27
60	(18)	0.85	0.85	1.13	1.31
70	(21.3)	0.89	0.89	1.17	1.34
80	(24.4)	0.93	0.93	1.21	1.38
90	(27.4)	0.96	0.96	1.24	1.40
100	(30.5)	0.99	0.99	1.26	1.43
120	(36.6)	1.04	1.04	1.31	1.48
140	(42.7)	1.09	1.09	1.36	1.52
160	(48.8)	1.13	1.13	1.39	1.55
180	(54.9)	1.17	1.17	1.43	1.58
200	(61.0)	1.20	1.20	1.46	1.61
250	(76.2)	1.28	1.28	1.53	1.68
300	(91.4)	1.35	1.35	1.59	1.73
350	(106.7)	1.41	1.41	1.64	1.78
400	(121.9)	1.47	1.47	1.69	1.82
450	(137.2)	1.52	1.52	1.73	1.86
500	(152.4)	1.56	1.56	1.77	1.89

ცხრილი.1.1 შენობაზე სიჩქარის ზეწოლისას მასზე

შენობის გარე ნაწილზე ქარის ზეწოლა არის p , რომელიც ანგარიშდება შემდეგნაირად:

$$p = q_z G C_p - q_z (G C_{pi}) \quad (1.2)$$

სადაც:

p – ქარის ზეწოლა, ქარის ძალა-წინააღობის მეთოდი, psf(psf-force per square foot-ძალის ზეწოლა თითოეულ ფუტზე და $1 \text{ psf} = 0.047880258906 \text{ კპ}$)

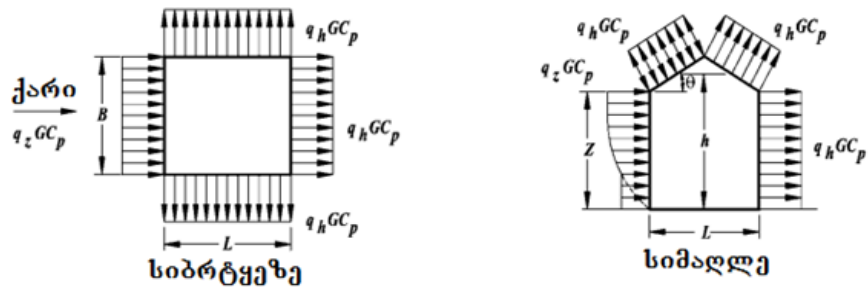
q_z – სიჩქარის ზეწოლა z -ი სიმაღლეზე

G – 0.85 (C-კატეგორიიდან)

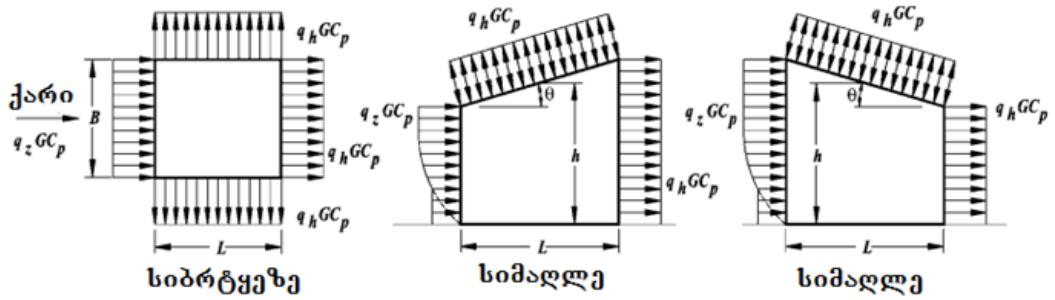
C_p – სხვა ზეწოლის კოეფიციენტი (ცხრილი 1.2)

$$G C_{pi} = \begin{cases} -0.0 & \text{ღია შენობისთვის} \\ +0.55 & \text{ან } -0.55 & \text{ნაწილობრივ დახურული შენობისთვის} \\ +0.18 & \text{ან } -0.18 & \text{დახურული შენობა} \end{cases}$$

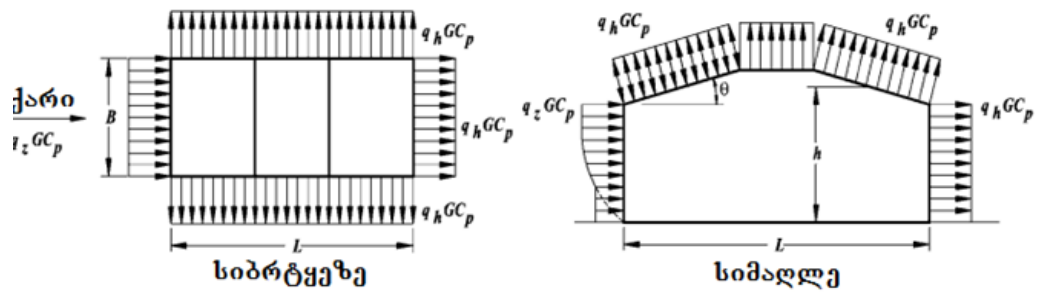
წვეტიანი სახურავი



ფერდიანი სახურავი



მანსარდი



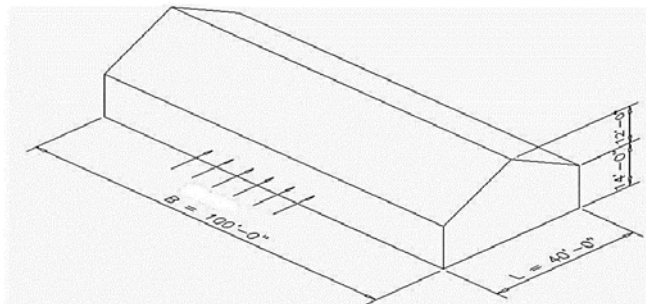
ნახ.1.2 ქარის ძალის ზემოქმედება შენობაზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი C_p

კედელზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი C_p			
ზედაპირი	L/B	C_p	გამოყენება
ქარის მხარე (კედელი)	ყველა სიდიდე	0.8	q_z
საქარე კედელი	0-1	-0.5	q_h
	2	-0.3	
	≥ 4	-0.2	
გვერდითი კედელი	ყველა სიდიდე	-0.7	q_h

კედელზე ზემოქმედების აეროდინამიკური კოეფიციენტი გამოყენებით q_h													
ქარის მიმართულება	ქარისმხარე										საქარე		
	კუთხე θ (გრადუსულად)												
	h/L	10	15	20	25	30	35	45	$\geq 60^\circ$	10	15	≥ 20	
კედელზე ნორმა $\theta \geq 10^\circ$	≤ 0.25	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	-0.2	0.0*	0.4	0.4	0.01 θ	-0.3	-0.5	-0.6
	0.5	-0.9	-0.7	-0.4	-0.3	-0.2	-0.2	0.0*	0.4	0.01 θ	-0.5	-0.5	-0.6
	≥ 1.0	-1.3**	-1.0	-0.7	-0.5	-0.3	-0.2	0.0*	0.3	0.01 θ	-0.7	-0.6	-0.6
კედელზე ნორმა $\theta < 10^\circ$ და ყველა პარალელური კედლები θ	≤ 0.5	პირი ზონატლური და შორებით საქარე მხარის პირას			C_p		ღირებულება გათვალისწინებულია ინტერპოლაციით სიდიდე შეიძლება შემცირდეს ერთი და იმავე ტერიტორიაზე მყისიერად ამიტომ						
		0 . h/2			-0.9, -0.18								
		h/2 . h			-0.9, -0.18								
		h . 2h			-0.5, -0.18								
	> 2h			-0.3, -0.18									
	≥ 1.0	0 h/2			-1.3**, -0.18		ფართი (ფტ)		შემც. ფაქტორი				
		> h/2			-0.7, -0.18		≤ 100 (9.3 sq m)		1.0				
200 (23.2 sq m)							0.9						
> h/2			-0.7, -0.18		≥ 1000 (92.9 sq m)		0.8						

ცხრილი.1.2 ქარის ძალის ზემოქმედება შენობაზე

განვიხილოთ მაგალითი, სადაც გათვლილია შენობაზე ქარის დატვირთვები

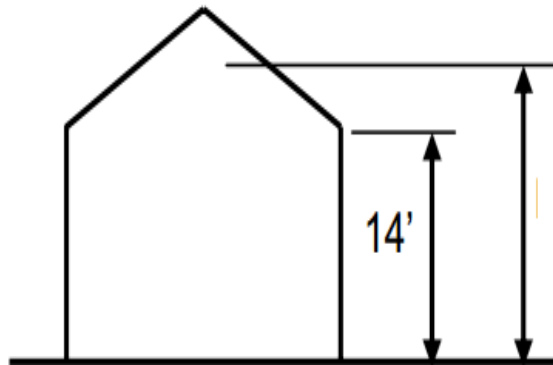


ნახ.1.3 მოცემულია შენობა

ჯერ განისაზღვრება ქარის ზეწოლა კედელზე ქარის მხრიდან

- ა) კედელი, საქარე მხრიდან(საითკენაც ნაკლებად დუბერავს)
- ბ) სახურავი, ქარის მხრიდან;
- გ) თავხეები;

1) სახურავის სიმაღლის განსაზღვრა მიწის ზედაპირიდან



$$\text{სახურავი "h" = } 14' + \frac{1}{2}(12') = 20'$$

2) ქარის ზეწოლის განსაზღვრება

$$q_z = 0.00256 K_z K_d V^2 I_W$$

სადაც:

K_z – 0.90 მოცემულია (სიმაღლე $h_t=20$ მ, რომელიც აღებულია ცხრილიდან 1.1(C-ადგილმდებარეობიდან))

K_d – 0.85 (შენობის სტრუქტურა)

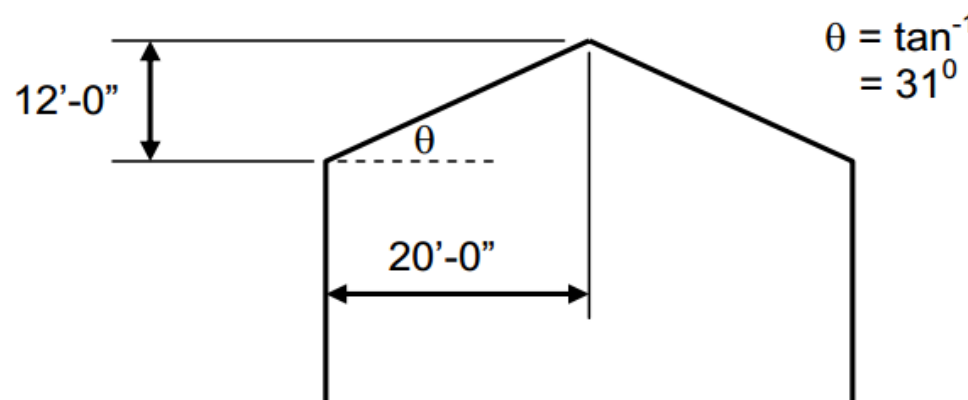
V – 150MPH (150*0,44704=67,056 მ/წ)

$$q_z = 0.00256(0.90)(0.85)(150MPH)^2(1.15) = 50psf \approx 2,4კპ$$

3) ქარის ზეწოლის განსაზღვრა კედელის, ქარის მხრიდან

$$p = q_z G C_p - q_z (G C_{pi})$$

სადაც:



$$\theta = \tan^{-1}(12/20) = 31^\circ$$

$$q_z = 50.7 psf \approx 2.42კპ$$

$$G = 0.85$$

$C_p = 0.8$ ცხრილ1.2-შია მოცემული

$(GC_{pi}) = \pm 0.18$ რადგან არის დახურული შენობა
 $p = 50.7psf(0.85)(-0.5) - 50.7(\pm 0.18)$

$$p = 43.6 psf = 2.42 კპ ან 25.4psf = 1.21 კპ$$

4) ქარის ზეწოლის განსაზღვრება ქარის კედელზე:

მოცემულია იგივე სიდიდეები, როგორც ზემოთ უგულელყოფილია C_p განსაზღვრით $L/B = 40/100 = 0.4$

გამოვიყენოთ $C_p = 0.5 L/B$ -სთვის (ცხრილი 1.2-დან)

$$p = q_z GC_p - q_z (GC_{pi})$$

$$p = 50.7psf(0.85)(-0.5) - 50.7(\pm 0.18)$$

$$p = -0.5 psf = -0.023 კპ ან -12.4psf = -0.59 კპ$$

ხაზგასმული აღნიშნავს რომ უარყოფითი ძალა რომელიც შთაინთქმება

5) ქარის ზეწოლის სახურავზე განსაზღვრული ქარის მხარეს

იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა C_p

პირველად განისაზღვრება h/L ფართი = $20/40 = 0.5$

განისაზღვრება სახურავის კუთხე θ რომელიც გაზომილია ჰორიზონტალურად

C_p განსაზღვრულია ცხრილი 1.2-დან “კიდეზე ქარის ნორმა” $\theta \geq 10^\circ$

$C_p = -0.2$ და 0.3 (ინტერპოლაცია $h/L = 0.5$ და 31°)

განვსაზღვროთ ქარის ზეწოლა P იქნება:

$$p = q_z GC_p - q_z (GC_{pi})$$

$$p = 50.7psf(0.85)(-0.2) - 50psf(\pm 0.18)$$

$$p = -17.7 psf = 0.85 კპ ან + 0.5psf = 0.02 კპ$$

ან

$$p = 50.7psf(0.85)(0.03) - 50psf(+0.18)$$

$$p = 22.1 psf = 1.58 კპ ან 3.8psf = 0.18 კპ$$

6) ქარის ზეწოლის განსაზღვრა სახურავის საქარე ხარეს (საითკენაც ნაკლებად უბერავს)

იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა C_p

C_p განსაზღვრულია ცხრილი 1.2-დან “კიდეზე ქარის ნორმა” $\theta \geq 10^\circ$

$C_p = -0.6$ $\theta > 20^\circ$

განვსაზღვროთ ქარის ზეწოლა P იქნება:

$$p = q_z GC_p - q_z (GC_{pi})$$

$$p = 50.7psf(0.85)(-0.6) - 50.7psf(+0.18)$$

$$p = -35 psf = 1.67 კპ ან -16.7psf = -0.79 კპ$$

7) ქარის ზეწოლის განსაზღვრა გვერდით კედლებზე

იგივე სიდიდეები გვაქვს ზემოთ, გარდა C_p

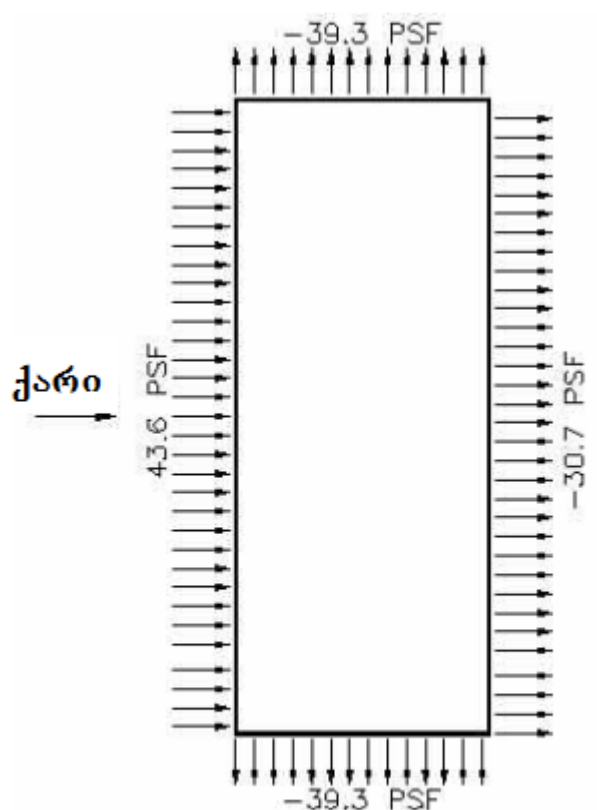
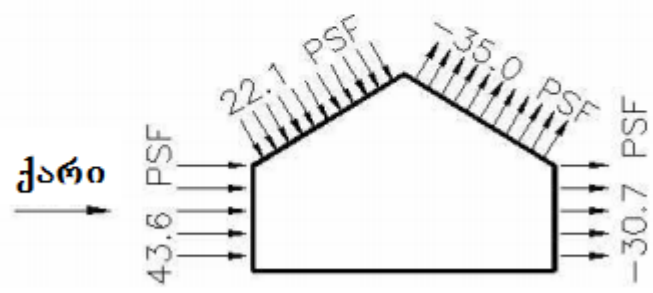
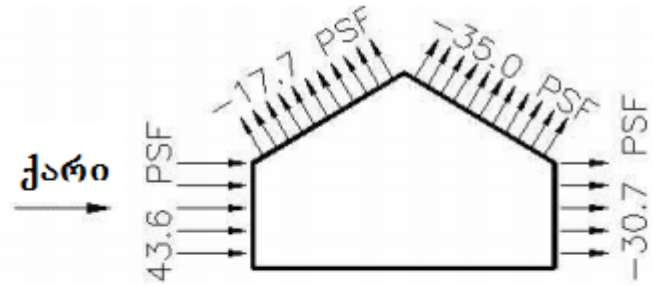
C_p განსაზღვრულია ცხრილი 1.2-დან გვერდით “კედლები” $C_p = -0.7$

ყველა სიდიდეებისთვის L/B

განვსაზღვროთ ქარის ზეწოლა P იქნება: $p = q_z GC_p - q_z (GC_{pi})$

$$p = 50.7psf(0.85)(-0.7) - 50.7psf(\pm 0.18)$$

ნახაზე ნაჩვენებია ყველაზე ცუდი დატვირთვა



ხელი გეგმაში

ნახ1.4 შენობის გეგმილი ქარის დატვირთვებისას

1.2. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები რუსეთში

ქარის დატვირთვებისას (p) გაითვალისწინება შენობის სიმაღლე (z) უნდა გავითვალისწინოთ. მოცემული გვაქვს ფორმულა:

$$P=qkc_n \tag{1.3}$$

სადაც q არის ქარის ზეწოლა, ვიღებთ მონაცემებს ცხრილი 1.3 დან

ქარის დატვირთვების მაჩვენებლები	რაიონები სსრკ						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
ქარის სიჩქარე v, მ/წ	21	24	27	30	33	37	40
დინამიკური ნაკადი q	270	350	450	550	700	850	1000

ცხრილი.1.3 ქარის ზეწოლა

k-არის კოეფიციენტი რომელიც აღნიშნავს ქარის ცვლილებას სიმაღლის მიხედვით

C-აეროდინამიკული ძალა

n-გადატვირთვის კოეფიციენტი

ქარის დინამიკური ბერვა q დაკავშირებულია ქარის სიმკვრივესთან v ფორმულა:

$$q = \frac{\rho v^2}{2} \tag{1.4}$$

v-ქარის სიჩქარე მ/წ

ქარის დატვირთვა კედელზე F, რომლის ფორმულა გვაქვს:

$$F=pA \tag{1.5}$$

A-აეროდინამიკული კოეფიციენტი

ქარის ძალის საწინააღმდეგოდ, ნაკადის მრგვალ ღერძზე, მისი დიამეტრიც განისაზღვრება ცხრილი 1.3-დან დამოკიდებული qkd^2 პარამეტრზე

$$A=ld \tag{1.6}$$

l-გრძელი ღერძი

d-დიამეტრი ღერძის

ღერძის საშუალოდ მრგვალი კვეთის დიამეტრიც მნიშვნელობა d განისაზღვრება ფორმულით:

$$d_{\varphi} = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (1.7)$$

სადაც d_1 და d_2 არის საწყისი და ბოლო ღერძის.

სიმაღლე მიწიდან M	10	20	40	60	100	200	350
k	1,00	1,25	1,55	1,75	2,10	2,60	3,10

ცხრილი 1.4 ღერძის დიამტერი და შენობის სიმაღლე

1.3. ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ბელორუსიაში

ცნობილია, რომ მაღლივი ნაგებობებისათვის ძირითად დატვირთვას წარმოადგენს ქარი. განვიხილოთ, მოკლედ, მოცემული ნაგებობების ქარის დატვირთვაზე ინჟინრული გათვლის ინჟინრული საფუძვლები

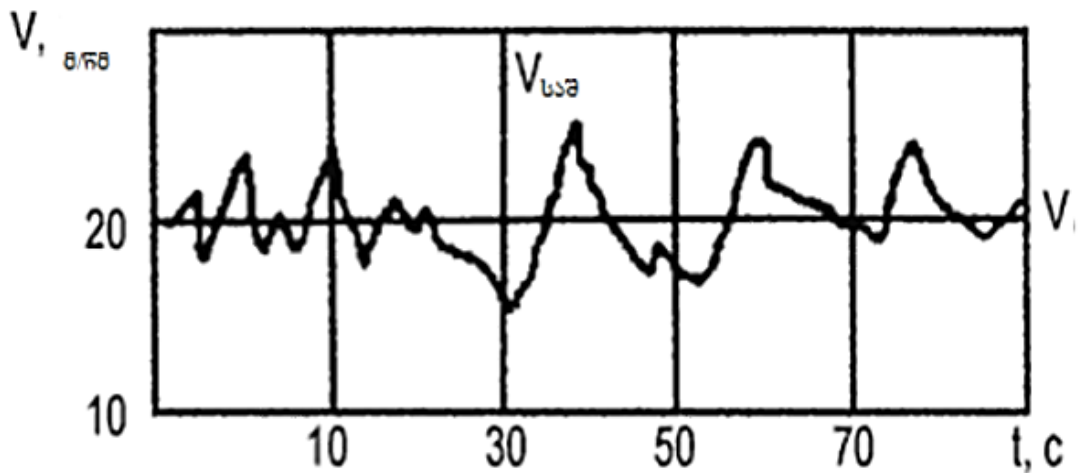
$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (1.8)$$

V - ქარის სიჩქარე მ/წ;

ρ - ჰაერის სიმკვრივე, კგ/მ³ დამოკიდებულია მის სინესტეზე,

ტემპერატურაზე და ატმოსფერულ წნევაზე

მოცემულ წერტილში სიჩქარე და ქარის მიმართულება ითვლება, დროზე დამოკიდებულად. ნახაზზე მონაცემებით გამოსახულია ქარის სიჩქარის დროსთან დამოკიდებულების გრაფიკი, საიდანაც ჩანს, რომ ქარის სიჩქარე ოსცილირებს, ანუ, პულსირებს $V_{საშ}$ საშუალო მნიშვნელობის მახლობლობაში. ყოფაცხოვრებაში ამ მოვლენას ქარის ბერვას უწოდებენ. უნდა აღინიშნოს რომ ქარის სიჩქარის რხევა საშუალო მნიშვნელობებთან ახლოს, არ იწვევს ძაბვისა და დამაბულობის ნიშნის ცვლილებას ნაგებობების უმრავლესი ელემენტებისთვის



ნახ.1.5 მონაცემებით გამოსახულია ქარის სიჩქარის დროსთან დამოკიდებულების გრაფიკი

ქარის დატვირთვის ნორმებში ω_e ნაგებობაზე წარმოადგენენ სტატიკური მდგენელის ω_m სახით, რომელიც შეესაბამება ქარის საშუალო სიჩქარეს $V_{საშ}$ და დინამიკურ დანამატის ω_p (პულსირებული მდგენელი, რომელიც შეესაბამება ქარის სხვაობას საშუალო და ჭეშმარიტ სიჩქარებს შორის).

$$\omega_e = \alpha_f (\omega_m + \omega_p) \quad (1.9)$$

α_f -საიმედობის კოეფიციენტი ქარის დატვირთვაზე, ≈ 1.4

ω_m ქარის დატვირთვის საშუალო ნორმატიული მნიშვნელობაა z სიმაღლეზე დედმიწის ზედაპირიდან;

ω_p -ქარის დატვირთვის პულსაციური მდგენელის ნორმატიული მნიშვნელობაა z სიმაღლეზე (დინამიკური დანამატი, გამოწვეული ჰაერის პულსაციით) სიდიდე

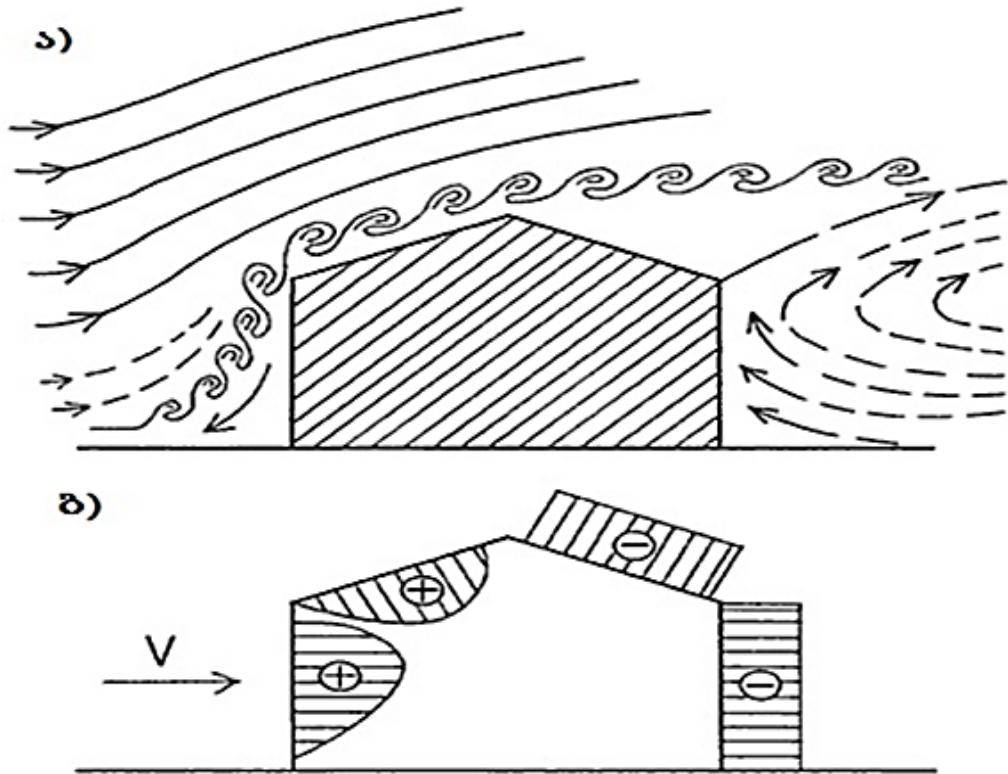
ω_m ნორმატივების გათვალისწინებით გამოითვლება ფორმულით;

$$\omega_m = \omega_0 * k * c \quad (1.10)$$

ω_0 -ქარის წნევის ნორმატიული მნიშვნელობაა მიიღება იმისდა მიხედვით, თუ რომელ რაიონში შენდება ნაგებობა.

C-აეროდინამიკური კოეფიციენტი-ფიზიკურ არსზე უფრო დაწვრილებით გავჩერდეთ.

K-კოეფიციენტი ქარის ცვლილება სიმაღლის მიხედვით თითოეული შენობა აეროდინამიკიდან გამომდინარე წარმოადგენს ცუდად გარსდენად დაბრკოლებას.



ნახ.1.6(ა). გამოსახულია შენობის ქარის ნაკადით გარსდენის სურათი, სადაც ნათლად ჩანს გრიგალის წარმოქმნის ზონები, ტურბულენტური ზონა, ხოლო ნახ.1.6(ბ) -ქარის წნევის განაწილება ამ შენობის გარე ზედაპირზე. ავლნიშნოთ, რომ ქარის სიჩქარის, ჰაერის სიმკვრივიდან, შენობის ფორმის და მისი გარე კედლების ხაოიანიებიდან გამომდინარე, წნევის სურათი შეიძლება იყოს განსხვავებული.

ვინაიდან ქარის წნევის ალბათობითი მახასიათებლები დროთა განმავლობაში არ იცვლება, ქარის სიჩქარის პულსაცია, ტურბულენტური ნაკადის წერტილში, განიხილება როგორც სტაციონარული შემთხვევითი პროცესი. დგინდება რა ტურბულენტური ქარის ნაკადის კორელაციური ფუნქციები ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების საფუძვლებზე, ვპოულობთ სპექტრულ სიმკვირვეს და რეაქციის საშუალო კვადრატულ მნიშვნელობას ნაგებობისათვის. ეს იძლევა საშუალებას, განისაზღვროს ნაგებობის საშუალო გადაადგილებების დინამიურობის კოეფიციენტი. შემდეგ, იგება ნორმატიული დინამიური კოეფიციენტის გრაფიკი იმ მასალის გათვალისწინებით, რისგანაცაა შესრულებულია ნაგებობა

ω_p -ის მიხედვით ნაგებობის დინამიკურ მახასიათებლებზე დამოკიდებულებით (საკუთრივ სიხშირე, თავისუფლების ხარისხი და შინაგანი ხახუნის კოეფიციენტი), რომელზედაც მოქმედებს ქარის

დატვირთვა. ქარის წნევა წარმოადგენს არსებითად დინამიურ დატვირთვას, ვინაიდან მისი მოქმედებისას შესაძლოა შეიცვალოს დატვირთვის სიდიდე, მისი მოდების წერტილი და მიმართულება. ქარის მოქმედებით ნაგებობა ირხევა, რხევების დროს ნაგებობების ელემენტებში წარმოიქმნება ინერციის ძალები, რომელებიც გავლენას ახდენენ ნაგებობის დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობაზე. ნაგებობის საკუთრივი რხევების სიხშირისა და ქარის პულსაციების სიხშირემ, შეიძლება გამოიწვიოს რეზონანსი. ამიტომ, ნორმებში სეზონის მიხედვითაა მოყვანილია რეაქციის ძალების ზღვრული მნიშვნელობები f_1 , ნაგებობის საკუთრივ რხევების სიხშირეების ქარიანი რაიონების და ნაგებობის მასალისაგან დამოკიდებულებით, როდესაც დაშვებულია ქარის დატვირთვის პულსაციური მდგენელის არ გათვალისწინება. თუ f_1 იმყოფება ნაგებობების საკუთრივ სიხშირის ქვედა ნაწილის სპექტრში, მაშინ ნორმები რეკომენდაციას უწევენ განხილული იქნას სამი შემთხვევა.

შემთხვევა ა)

$f_e < f_1$ მაშინ $\omega_f = \omega_{m0} * \zeta * v$ ხოლო ζ -ქარის წნევის პულსაციის

კოეფიციენტი

v-ქარის წნევის პულსაციის სივრცობრივი კორელაციის კოეფიციენტი. ვინაიდან ქარის დატვირთვა განისაზღვრება გარკვეული ალბათობით (შემთხვევითი ხასიათისაა), სიდიდე განისაზღვრება მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდების საფუძველზე.

შემთხვევა ბ)

$f_1 < f_1$ $\omega_p = \omega_m \zeta * \zeta * v$ $\varepsilon = \frac{\sqrt{2} f_1 w_0}{940 f_1}$ ζ -დინამიურობის კოეფიციენტია

ერთი თავისუფლების ხარისხის სისტემებისათვის (წყალდაწნევის კოშკი, ქარენერგეტიკული დანადგარები, რეტრანსლიატორები და სხვა ანძიანი ნაგებობები).

შემთხვევა გ)

$f_1 < f_1 < f_2$

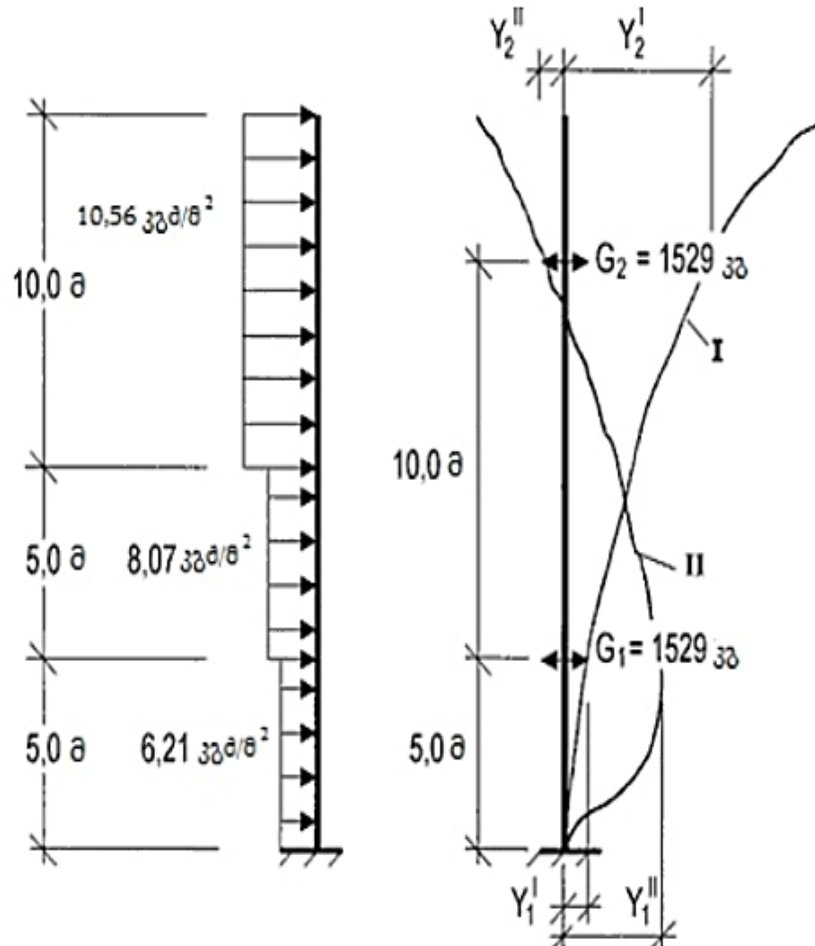
გეგმაში სიმეტრიული ნაგებობისათვის $f_1 < f_e$ $\omega_p = \omega_m \zeta * \psi * y$

m-ნაგებობის მასაა z დონეზე, რომელიც შეფარდებულია ამ ზედაპირის ფართობთან, რომელზედაც მოდებულია ქარის დატვირთვა;

y -პირობითი ჰორიზონტალური გადაადგილება z-ის დონეზე საკუთრივი რხევების პირველი ფორმით.

ψ -კოეფიციენტი, რომელიც განისაზღვრება ნაგებობის დაყოფით ნაწილებათ, რომელთა კვეთებშიც, ქარის დატვირთვა მუდმივადაა მიჩნეული.

მოვიყვანოთ მაგალითი მილის გოსტზე და შემოვიღოთ საწყისი მონაცემები



-მილი გოსტი 1074-76 $cdH = 630$ მმ და $dB = 610$ მმ

6-მილის სიმაღლე-20მ

-ქარიანი რაიონი-I, ადგილმდებარეობის ტიპი- ;

-საკუთრივი რხევის სიხშირის ზღვრული მნიშვნელობა $f = 2,9$ ჰც ქარის დატვირთვების განსაზღვრამდე, ჯერ ვპოულობთ მილის საკუთრივი რხევების სიხშირებს f_1 და f_2 , ასევე საკუთრივი რხევების ფორმებს.

ა)საკუთრივი რხევების სიხშირე: $f_1 = 1,6672$ ჰც; $f_2 = 13,8748$ ჰც

ბ)მასების ჰორიზონტალური გადაადგილება საკუთრივი რხევების ფორმით შესაბამისად ქარის დატვირთვების განსაზღვრამდე, ჯერ

ვპოლობთ მილის საკუთრივი რხევების სიხშირებს f_1 და f_2 , ასევე საკუთრივი რხევების ფორმებს.

ა) საკუთრივი რხევების სიხშირე: $f_1=1,66723\text{ც}$; $f_2=13,87483\text{ც}$

ბ) მასების ჰორიზონტალური გადაადგილება საკუთრივი რხევების ფორმით შესაბამისად

— ფორმა I — $II= 100$ მმ; $2II= 667$ მმ;

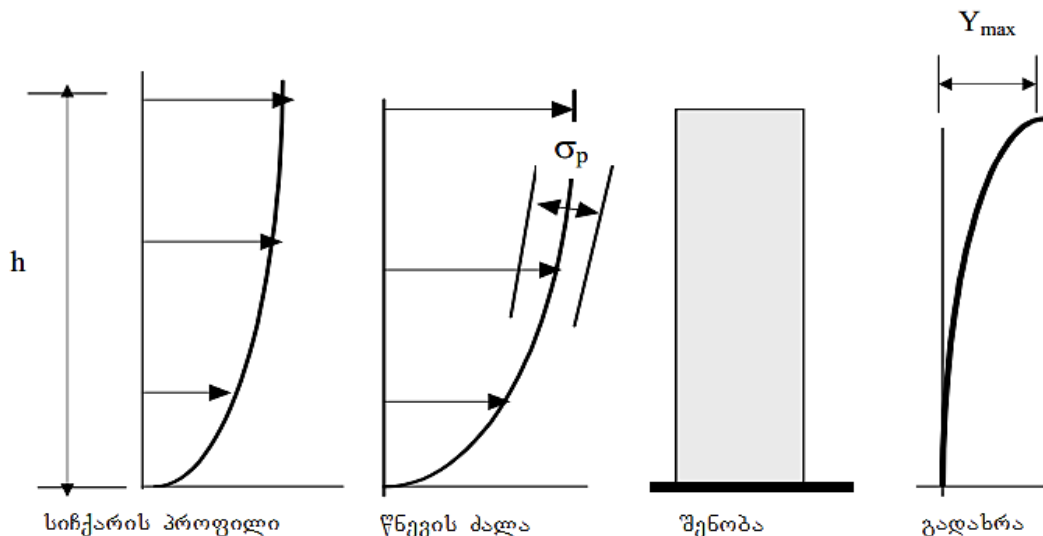
— ფორმა II — $III= 674$ მმ; $2III= -101$ მმ.

აეროდინამიკური კოეფიციენტი C განისაზღვრება

$$c = \kappa \times c_x h = 0,91 \times 0,59 = 0,54$$

1.4 ქარის დატვირთვების განსაზღვრის ნორმები და მეთოდები ევროპის ქვეყნებში

ევროპის ქვეყნებში განიხილება შენობა-ნაგებობებზე ქარის დატვირთვები არსებობს CEN -ს დოკუმენტი რომელშიც აღწერილია ქარის დატვირთვები, ამ დოკუმენტს ასევე მოიხსენიებენ ევროკოდით, უნდა აღინიშნოს რომ თითოეული ქვეყნებისთვის თუ რეგიონებისთვის საჭიროებს დამატებითი კვლევებს.



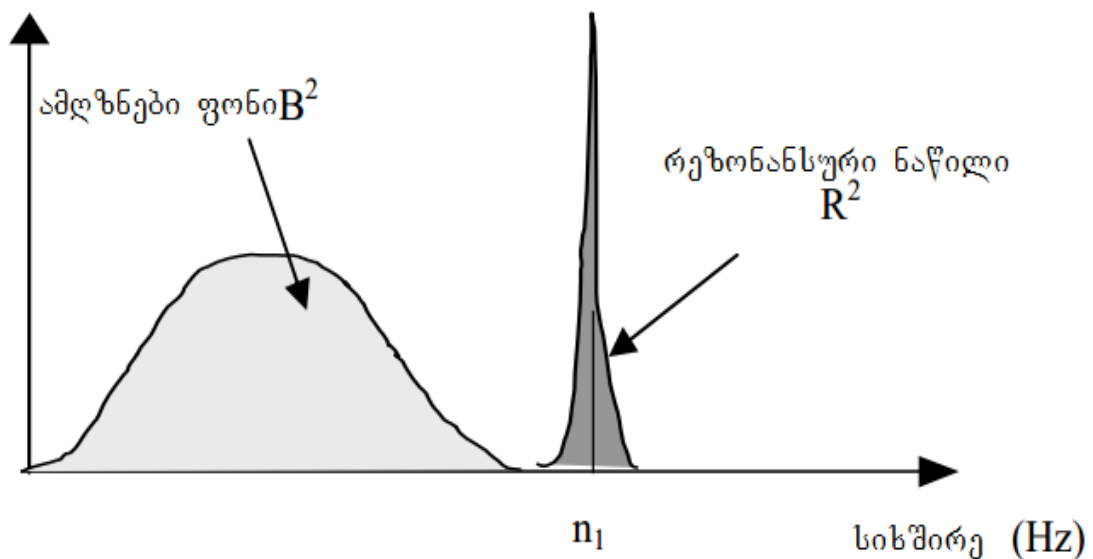
ნახ.1.7 ქარის ზემოქმედება შენობაზე

დამოკიდებულია სიმაღლისა და შენობის დიზაინზე, ქარის ძალამ შეიძლება გამოწვიოს შენობის რხევა ხოლო ტურბელენტობის დონე გვეხმარება, რომ ავლწერთ დინამიკურად, შენობაზე ქარის ზემოქმედება.

ქარის ძალის ნაკადის შემთხვევითი მახასიათებლიდან გამომდინარე, შენობის ზემოთა ნაწილი მაქსიმალურად გადაირხევა და ვადგენთ შენობის სტანდარტულ გადახრას და პიკ ფაქტორს აქედან გამომდინარე გვაქვს მოცემულობა:

$$X_{max}(h) = x_m(h) + k_p \sigma_x(h) \quad (1.11)$$

სტანდარტული გადახრა σ_x მიღებულია B^2 ნაწილში, ხოლო დინამიკური ნაწილი (რეზონანსური ნაწილი R^2) ნაჩვენებია ნახაზ 1.8-ზე. k_p -პიკ ფაქტორი რომელიც დაკავშირებულია სტანდარტულ გადახრასთან. B^2 – არის ამღვნიები ფონი, რომელიც გამოწვეულია ქარის ბერვის მოქმედებით და რომელიც მოქმედებს შენობა-ნაგებობაზე როგორც სტატიკური ძალა. რეზონანსური R^2 –წარმოდგება ინტერაქტიური შენობის დინამიკის პარამეტრებსა და ქარის ბერვის შორის.



ნახ.1.8 სტანდარტული გადახრა და პიკ ფაქტორი

განტოლება (1.11) მოცემულია ქარის აქტივობის შესახებ, ნაჩვენებია მაქსიმალური დატვირთვისას:

$$F_w(z) = f_m(z) [1 + 2k_p I_v(z) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (1.12)$$

$$f_m(z) = \frac{1}{2} \rho v_m^2(z) c_f A_{ref} \quad (1.13)$$

განტოლებები (1.12) და (1.13) დაფუძნებულია ევროკოდის და შვედეთის კოდის საფუძველზე (**BSV 97**)

ევროკოდი EN 1991-1-4 ქარის აქტივობა

ევროკოდის ჩანაწერებიდან, ქარის დატვირთვა შენობის ბჯენებზე ვიბრაციისას გვაქვს:

$$F_w = c_s c_d c_f q_p(z_e) A_{ref} \quad (1.14)$$

c_s არის განმსაზღვრელი ფაქტორი:

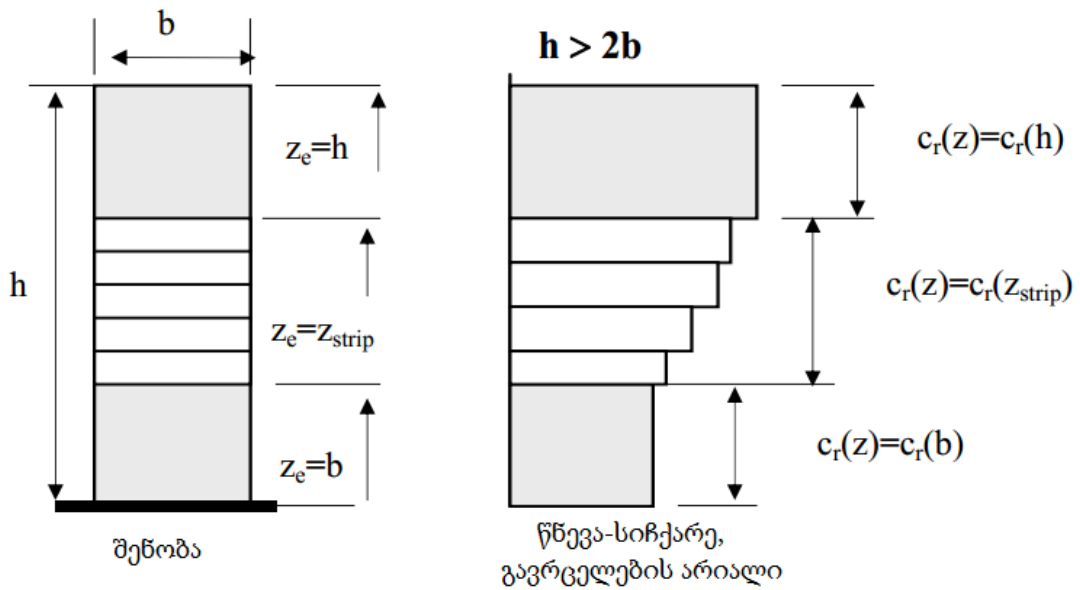
$$c_s = \frac{1+7I_v(z_s)\sqrt{B^2}}{1+7I_v(z_s)} \quad (1.15)$$

c_d არის დინამიკური ფაქტორი რომელიც შედგება სტატიკური და რეზონანსური ნაწილებისგან და განისაზღვრება როგორც:

$$c_d = \frac{1+7I_v(z_s)\sqrt{B^2+R^2}}{1+7I_v(z_s)\sqrt{B^2}} \quad (1.16)$$

სტატიკური ქარის დატვირთვისთვის რეზონანსური ნაწილი $R^2 = 0$ და განტოლება (1.17) ჩაიწერება როგორც:

$$c_d = \frac{1+7I_v(z_s)\sqrt{B^2}}{1+7I_v(z_s)\sqrt{B^2}} \quad (1.17)$$



ნახ.1.9 სიმაღლის z_s გამოთვლა c_s, c_d -ით

მაქსიმალური წნევის სიჩქარე $q_p(z_s)$ რითაც განისაზღვრება საშუალო სიჩქარე, უსწორმასწორო ზედაპირი და ტურბულენტობის ინტესივობა, მოცემულობა გვაქვს:

$$q_p(z_s) = [1 + 7I_v(z_s)] \frac{1}{2} \rho v_m^2(z_s) = q_b c_r(z_s)^2 [1 + 7I_v(z_s)] \quad (1.18)$$

ტურბულენტობის ინტესივობა I_v განისაზღვრება როგორც:

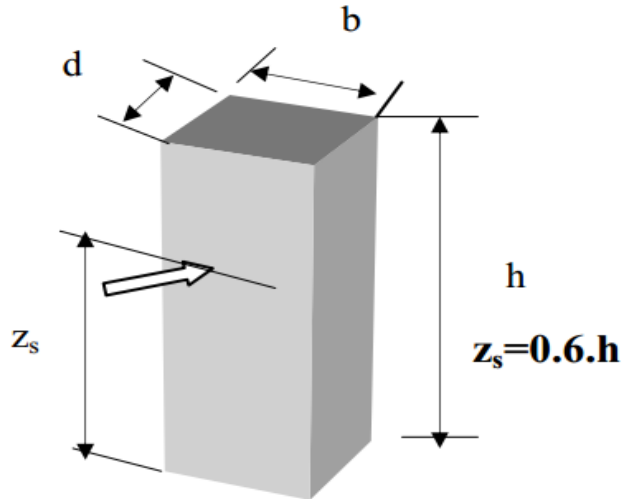
$$I_v(z_s) = \frac{1}{\ln(z_s/z_0)} \quad (1.19)$$

დაუცველობის ფაქტორი c_r განისაზღვრება ზედაპირის სიუხიშესა მიხედვით და განისაზღვრება:

$$c_r(z_s) = k_r \ln \left[\frac{z_s}{z_0} \right] \quad (1.20)$$

q_b არის ძირითადი წნევის სიჩქარე საშუალო 10 წუთიანი და 10 მეტრიანი სიმაღლის მახასიათებლებით ღია ადგილზე ($z_0 = 0.05$) პირობისთვის

$$q_b = \frac{1}{2} \rho v_b^2 \quad (1.21)$$



ნახაზი.1.10 z_s სიმაღლის დამოკიდებულება h და b და წნევის სიჩქარის პარამეტრი

შევცვალოთ განტოლება (1.17) განტოლება (1.21)-ით და მივიღებთ (1.22):

$$F_w = [1 + 2k_p I_v \sqrt{B^2 + R^2}] \sum_{strip} c_f q_b c_r (z_s)^2 b \quad (1.22)$$

შვედური კოდი BSV 97

BSV97 ასევე გამოვიყენებთ განტოლება (1.23)-ს, მაგრამ წინასწარ უნდა გამოვითვალოთ ცოტა ქარის დატვირთვა, გადავწეროთ განტოლება (1.23) და განვსაზღვროთ დინამიკური ფაქტორი:

$$F_w(z) = f_m(z) [1 + 2k_p I_v(z) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (1.23)$$

$$f_m(z) = \frac{1}{2} \rho v_m^2(z) c_f A_{ref} \quad (1.24)$$

ვიღებთ:

$$C_{დინ} = [1 + 2k_p I_v(h) \sqrt{B^2 + R^2}] \quad (1.25)$$

$$F_w(z) = C_{დინ} c_f c_r q_p(z)^2 A_{ref} \quad (1.26)$$

k_p არის პიკ ფაქტორი და დაახლოებით ტოლია დატვირთვა 3-ს სტატიკური სტრუქტურაზე. განტოლება (1.25) არავიზრაციული შენობა შეიძლება ჩაიწეროს:

$$C_{დინ} = 1 + 6I_v(h) \quad (1.27)$$

z_0 ნაჩვენებია რელიეფური ზედაპირის სიუხიშე და ნაჩვენებია ცხრილ.1.5-ში.

	უხეში ადგლები	k_r	z_0	$z_{მინ}$ ევროკოდი	$z_{მინ}$ BSV 97
0	სანაპირო ადგილები	0.16	0.003	1	
1	ტბები	0.17	0.01	1	2

2	ღია	0.19	0.05	2	4
3	აშენებული ადგილები	0.22	0.3	5	8
4	ქალაქის ცენტრები	0.24	1.0	10	16

ცხრილი 1.5 პარამეტრები სხვადასხვა უხეში ზედაპირის

გამოთვლა B^2 და R^2

სტატისტიკური ნაწილი B^2 და რეზონანსული ნაწილი R^2 არის აღებული BSV97 –დან და მოიცავს NAD-s, ევროკოდი დანართში იმყოფება B და C

$$1. B^2 = \exp \left[-0.05 \left(\frac{h}{h_{ref}} \right) + \left\{ 1 - \frac{b}{h} \right\} \left\{ 0.04 + 0.01 \left(\frac{h}{h_{ref}} \right) \right\} \right] \quad (1.27)$$

2. რეზონანსული ნაწილი

$$R^2 = \frac{2\pi F \varphi_b \varphi_h}{\delta_s + \delta_a} \quad (1.29)$$

3. პიკ ფაქტორი

$$k_p = \sqrt{2 \ln(600v)} + \frac{0.58}{\sqrt{2 \ln(600v)}} \quad (1.30)$$

4. ტურბელენტობის ინტენსივობა

$$I_v = \frac{1}{\ln(h/z_0)} \quad (1.31)$$

5. ქარის ენერჯია

$$F = \frac{4C}{[1 + 70.8 (x)^{2/5}]^2} \quad (1.32)$$

$$C = \frac{L_c n_{1,x}}{v_m(h)} \quad L_c = 150m \quad (1.33)$$

6. ზომის ეფექტი (შენობის სიგანე)

$$\varphi_b = \frac{1}{1 + \left[\frac{0.2 n_{1,x} b}{v_m(h)} \right]} \quad (1.34)$$

7. ზომის ეფექტი (შენობის სიმაღლე)

$$\varphi_b = \frac{1}{1 + \left[\frac{0.7 n_{1,x} h}{v_m(h)} \right]} \quad (1.35)$$

8. აეროდინამიკული ბიძგები

$$\delta_a = \frac{p c_f b v_m(h)}{n_{1,x} M_s} \quad (1.36)$$

M_s - მასის ექვივალანტი

m - მასა სიგრძილს ერთეულზე (კგ/მ)

$\varphi(z)$ - მოდების ზომა

მაქსიმალური აჩქარება შენობის ბჯენის ვიბრაციისას პირველი წარმოებლიდან ვიღებთ:

$$\ddot{X}_{max}(z) = k_p \sigma_{\ddot{x}}(z) \quad (1.37)$$

$\sigma_{\ddot{x}}(z)$ - არის სტანდარტული გადახრა ქარის აჩქარება და ჩაიწერება როგორც:

$$\sigma_{\ddot{x}}(z) = (2\pi n_{1,x})^2 \sigma_x(z) \quad (1.38)$$

$\sigma_x(z)$ -არის რხევისას სტანდარტული გადახრა და ჩაიწერება როგორც:

$$\sigma_x(z)^2 = \sigma_{x,B}(z)^2 + \sigma_{x,R}(z)^2 \quad (1.39)$$

$\sigma_{x,B}(z)^2$ და $\sigma_{x,R}(z)^2$ არიან სტატიკური და რეზონანსური ნაწილები რომელიც ნაჩვენებია ნახაზ 1.7-ზე, აჩქარების გამომწვევ მიზეზად შეიძლება მივიჩნიოთ რეზონანსური ნაწილი და სტატიკური ნაწილი რომელიც შეიძლება უგულვლყოთ გამოთვლებისას. სტანდარტული გადახრა მოძრაობისას რეზონანსულია და ჩაიწერება მე-1.23 განტოლებაში ასე:

$$\sigma_B(z) = 0.0 \quad (1.40)$$

$$\sigma_B(z) = 2I_v R x_m(z) \quad (1.41)$$

რეზონანსული ნაწილი R გვაქვს მოცემულ განტოლება (1.43)

$x_m(z)$ არის საშუალო გადახრა და მოცემული გვაქვს:

$$x_m(z) = \varphi_1(z) \gamma_1 \left[\frac{P_1}{(2\pi n_{1,x})^2 M_x} \right] \quad (1.42)$$

P_1 არის განზოგადებული ძალა და განისაზღვრება როგორც:

$$P_1 = q_b b c_f \frac{\int_0^h c_f(z)^2 \varphi_1(z) dz}{\int_0^h \varphi_1(z) dz} \quad (1.43)$$

γ_1 არის კონსტანტა და განისაზღვრება:

$$\gamma_1 = \frac{\int_0^h \varphi_1(z) dz}{\int_0^h \varphi_1(z)^2 dz} \quad (1.44)$$

$\varphi_1(z)$ -პირველ წარმოებულ ბრჯენის. ქარის სიჩქარე 1 წლის T_a განმავლობაში და მოცემულობა გვაქვს:

$$v_{T_a} = 0.75 v_{50} \sqrt{\left\{ 1 - 0.2 \ln \left(-\ln \left(1 - \frac{1}{T_a} \right) \right) \right\}} \quad (1.45)$$

სადაც T_a არის წლის რიცხვი, 10 წლის შემთხვევაში გვაქვს:

$$v_{T_a} = 0.75 v_{50} \quad (1.46)$$

რეინოლდის რიცხვი

რეინოლდისის რიცხვისა, სიჩქარის და შენობის ზომას შორის გვექნება მოცემულობა:

$$Re = \frac{v_{gr} b}{14.5 \times 10^{-6}} \quad (1.47)$$

რეინოლდის რიცხვის მეშვეობით შეგვიძლია განვსაზღვროთ და გამოვყოთ რეგულაური სიჩქარე, პერიოდული და სხვა ცვლადი მახასიათებლები. წრიული ცილინდრული, სამი მახასიათებლები რეინოლდისი რიცხვი განისაზღვრება:

$$Re < 3 \times 10^5$$

$$3 \times 10^5 < 3.5 \times 10^6$$

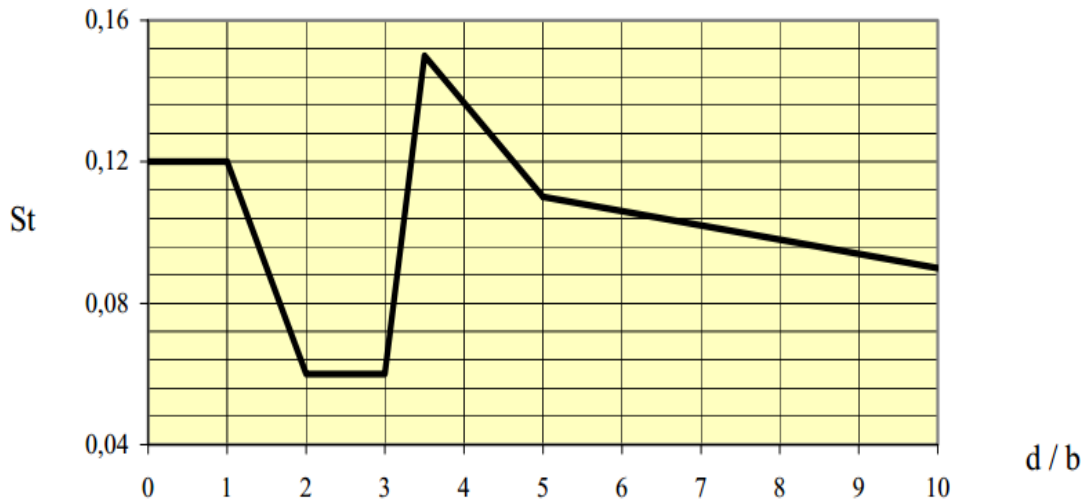
$$Re > 3.5 \times 10^6$$

სტრუხალის რიცხვი და წვეის კოეფიციენტი

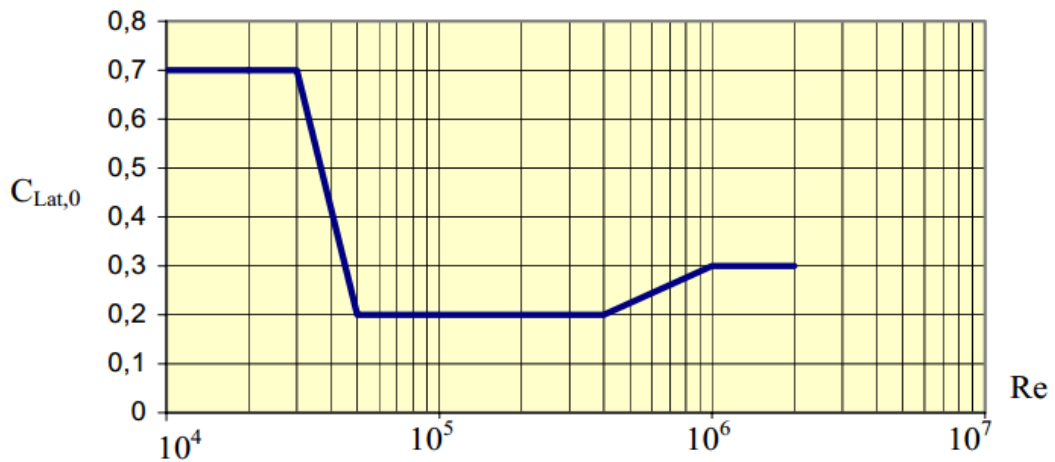
სტრუხალის რიცხვი ჩაიწერება ასე:

$$St = \frac{n_{st} b}{v_{cr}} \quad (1.48)$$

სადაც n_{st} წარმოადგენს ვორტეხსის სიხშირეს და რეზონანსი ხდება, როდესაც ფიზიკური და ვორტექსის სიხშირეები არიან ახლოს.



ნახ.1.11. სტრუხალის რიცხვი მართკუთხედის კვეთისას



ნახ.1.12 წვეის კოეფიციენტი წრიული ცილინდრისთვის

წვეის კოეფიციენტი და რეინოლდსის რიცხვი

აეროდინამიკური სტაბილურობა:

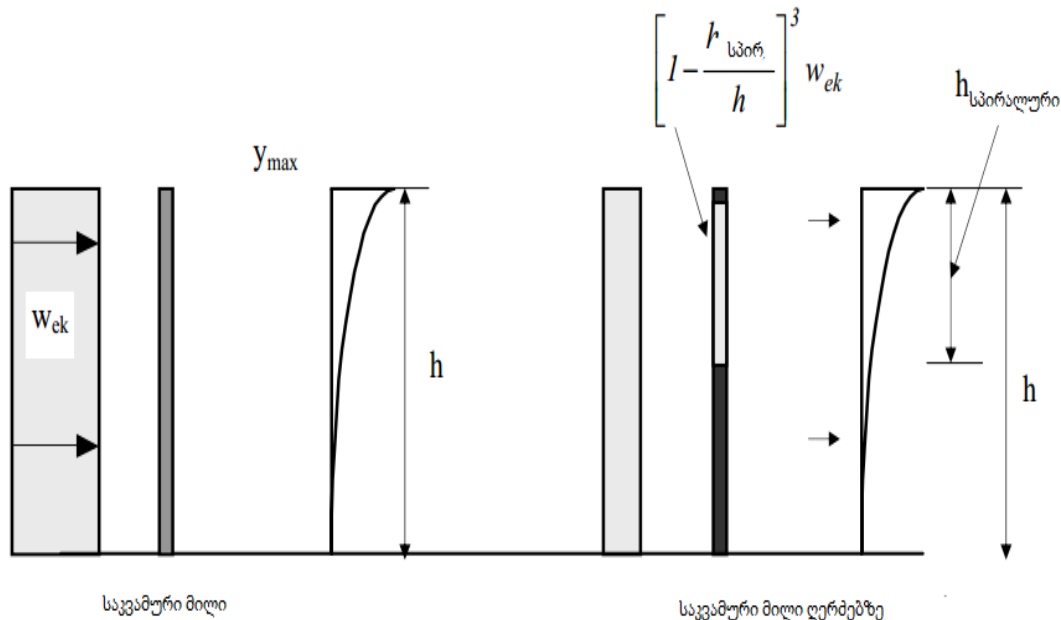
თუ მაქსიმალურად შემცირდა რხევა 0.06-მდე, და შევადარებთ საკვამური მილის აეროდინამიკურ სტაბილურობას და:

$$\frac{y_d(h)}{b} \leq 0.06 \quad (1.49)$$

მარტო მყოფი დიდი მილის რადიუსის ამპლიტა არის $\frac{(h)y_d}{b} \geq 0.06$, თანდათანობით ხვეული ღერძები მცირდება მისაღებ დონემდე, ქარის დატვირთვა ხდება:

$$w_{ek} = p_m(h) \left(\frac{\pi}{\delta_{\text{ფქ}}'} \right) \left[1 - \frac{h_{\text{სპირ}}}{h} \right] \quad (1.50)$$

რამეთუ საკვამური შენობების ტერიტორიაზე, ხვეული მილი არ არის ეფექტური და არ შეამცირებს ამპლიტუდას



ნახ.1.14 დატვირთვის ჩვენება ხვეული და არახვეული ღერძების შემთხვევაში

ციკლური დატვირთვები ვორტექსის ძალების გამო არის გამოწვეული საერთო რაოდენობა ციკლები N, ხდება T წლის პერიოდში

$$N = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \times T \times n_1 \times P(v) \quad (c/s) \quad (1.51)$$

T-შენობის სიცოცხლის უნარიანობა (წლები)

P(v)-აღბათობა ქარის სიჩქარის ხდება დროის ინტერვალით v_{cr} და εv_{cr}

P(v)-სავარაუდოთ მოცემულია წნევის განაწილება და ჩაიწერება:

$$P(v) = \left[\exp \left[- \left\{ \frac{v_{cr}}{v(z)} \right\}^2 \right] \right] - \exp \left[- \left\{ \frac{\varepsilon v_{cr}}{v(z)} \right\}^2 \right] \quad (1.52)$$

კოეფიციენტი ε არის აღებული 1.25, მინიმალური ინტერვალი v_{cr} და εv_{cr} -ს შორის არის 2მ/წ.

v(z) გვაჩვენებს წლების განმავლობაში საშუალო ქარის სიჩქარეს, Z სიმაღლეზე და მოცემული სიუხემეთი მიღებულია განტოლება (1.42)

$$v(z) = 5.5 c_r(z) \quad (1.53)$$

ევროკოდისა შეგვიძლია გამოვყოთ ორი მნიშვნელოვანი ფაქტორი.

1. განიხილება ნაკადების დატვირთვისას
2. განიხილება ვორტექსის შემცველი ძალა.

მომცემული ორი მეთოდინდან ქარის ნაკადის დატვირთვისას ევროკოდები, რომელიც არ გვამლევს ზუსტ და საკმარის ინფორმაციას და ითხოვს დამატებით ინფორმაციას სხვადასხვა ქვეყნებისა თუ რეგიონებისთვის. პრაქტიკულად პიკური სიდიდეებისთვის აღმოჩნდა რეკომენდირებული ნაკადის დატვირთვის განტოლები. აქედან გამომდინარე *BSV97* უნდა იქნას გამოყენებული ნაკადების დატვირთვისას.

ევროკოდი მოიცავს ასევე ვორტექსის ძალას, და გაყოფილია 2 სხვადასხვა ნაწილად. ამ ორი მეთოდის გამოყენებამ აჩვენა აქტუალურ რკინის მილის დიზაინზე, რომელიც სტრუქტურის შეუფასებლად შეუძლია დეფორმაცია მიიღოს.

1.5 ქარის აეროდინამიკური მოდელირება COMSOL Multiphysics –სის ბაზაზე

COMSOL Multiphysics კომპანია დაარსდა 1986 წელს შვედეთში, კომპიუტერის ევოლუციასთან ერთად იხვეწებოდა არც თუ ისე, ცნობილი პროგრამული პაკეტი, რომელიც თავიდან მოგვევლინა როგორც MATLAB-ის დამხმარე ხელსაწყო. დღეს უკვე, ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი საინჟინრო პროექტების შექმნა შეიძლება. 2010 წლიდან ის აქტიურად გამოიყენება სხვადასხვა ქვეყნებში. ნელნელა იწერება COMSOL Multiphysics ევროპის ქვეყნებში და იხსნება კომპანიის ფილიალები.

COMSOL Multiphysics არის პროგრამული პაკეტი რომელიც უზრუნველყოფს, მათემატიკური და ფიზიკური მოდელების მარტივ მოდელირებას სხვადასხვა განზომილებაში, პროგრამულ პაკეტში ჩადებულია ყველა ის მათემატიკური ფორმულა, რომელიც დღეს-დღეისობით აქტუალურია სხვადასხვა სამეცნიერო კვლევებისათვის. პროგრამა განკუთვნილია ფიზიკოსებისთვის, ინჟინრებისთვის, მათემატიკოსებისთვის.

COMSOL Multiphysics-ის პროგრამაში თავიდან შევადგინეთ გარსმდენი ქარის დინამიკის პროექტი.

გავთვალეთ ქარის ნაკადის დინებები, ტურბულენტური ზონები და შევადგინეთ მისი ორ და სამგანზომილებიანი მოდელები

ქარის სიჩქარე - 4მ/წმ;

წნევა - 102.02 კპს.

შევადგინეთ ნახ. 2 - ზე მოცემული სახლის გარსდენის მოდელირება ორ განზომილებაში.

ვხედავთ, რომ სახლის გარშემო წამროიქმნა ნაკადის ტურბულენტური ზონა, გრაფიკი შექმნილია 2D განზომილებაში

რეინოლდსის რიცხვი Re ჰიდროდინამიკაში არის უგანზომილებო რიცხვი, რომელიც ახასიათებს დინების ხასიათს, რეინოლდსის რიცხვი ხშირად ჩნდება ჰიდროდინამიკური პრობლემების განზომილებითი ანალიზის დროს. რეინოლდსის რიცხვი, ასევე, გამოიყენება დინების სხვადასხვა რეჟიმების დახასიათებისას, როგორცაა ტურბულენტური და ლამინარული რეჟიმები. ლამინარული დინებები გვხვდება შედარებით დაბალი რეინოლდსის რიცხვების დროს, როდესაც სიბლანტის ძალების გავლენა ძლიერია, ხოლო ტურბულენტური ნაკადები შეინიშნება მაღალი რეინოლდსის რიცხვების დროს, როდესაც სითხის მოძრაობა ძირითადად განისაზღვრება ინერციული ძალების მოქმედებით.

- ინერციის ძალა ($\rho u L$)
- სიბლანტის კოეფიციენტი (μ)

თანაფარდობა არის

- დინამიკური ძალასთან (ρu^2)
- წნევაზე ($\mu u / L$)

და შეიძლება ჩაიწეროს შემდგენაირად

$$\begin{aligned} Re &= (\rho u^2) / (\mu u / L) \\ &= \rho u L / \mu \\ &= u L / \nu \end{aligned} \tag{1.54}$$

სადაც:

Re = რეინოლდსის რიცხვი (უგანზომილებო რიცხვი)

ρ = სითხის სიმკვრივე (კგ/მ^3)

u = სითხის საშუალო სიჩქარე (მ/წ)

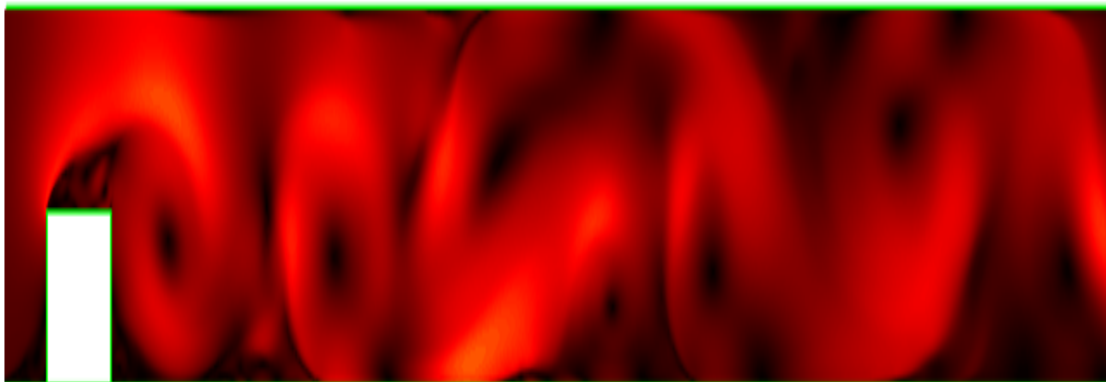
μ = დინამიკური სიბლანტე (ნწ/მ^2)

L = სიგრძის მახასიათებელი ზომა (მ)

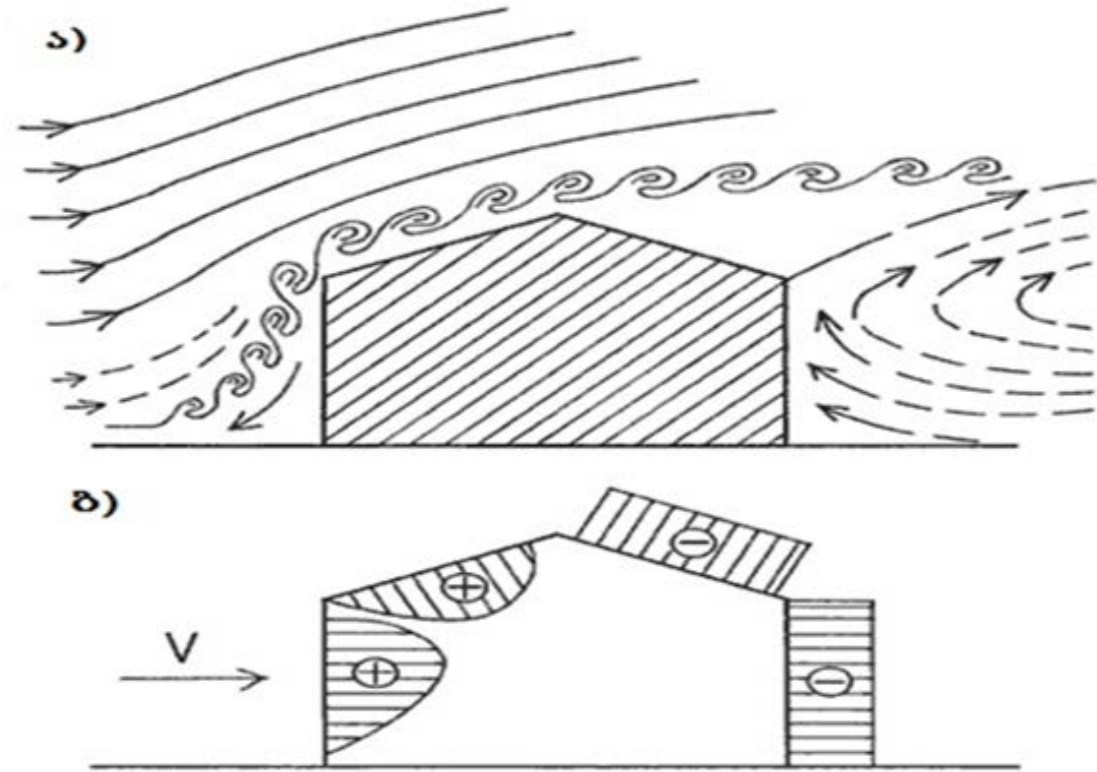
ν = კინემატიკური სიბლანტე ($\text{მ}^2/\text{წ}$)

რეინოლდის რიცხვით, შეიძლება განისაზღვროს დინების ხასიათი

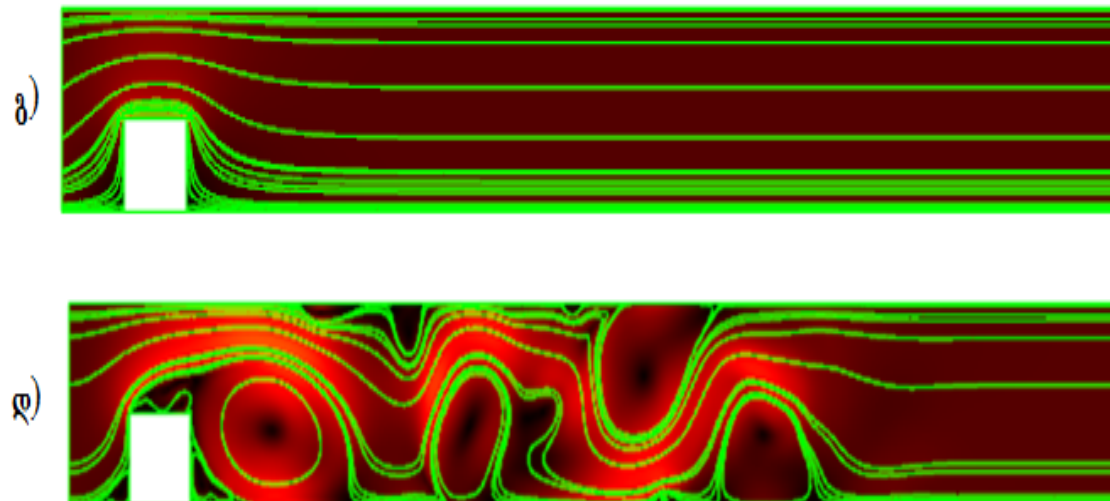
- ლამინარული, როცა $Re < 2300$
- ტრანზიტული, როცა $2300 < Re < 4000$
- ტურბულენტრი, როცა $Re > 4000$



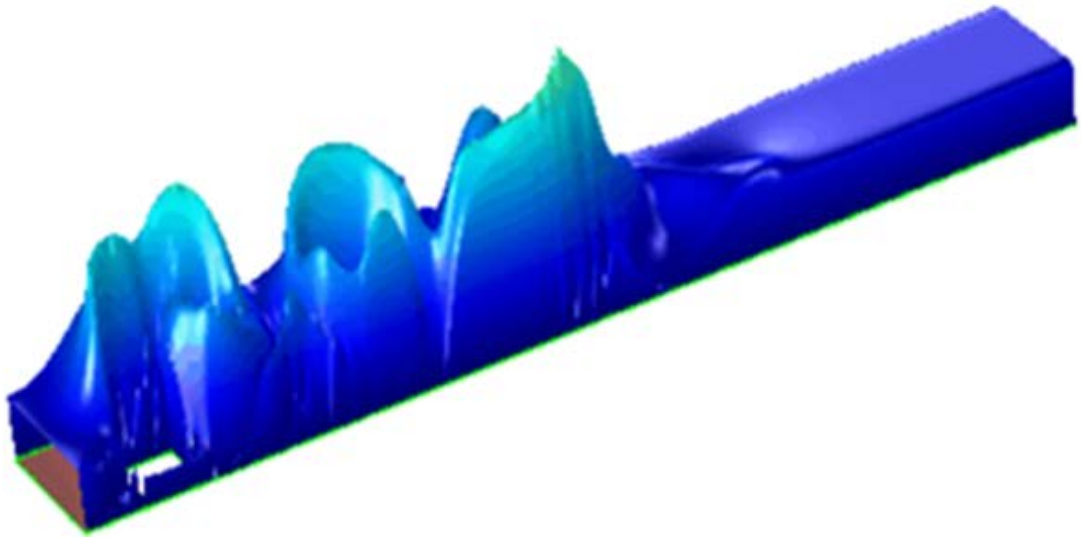
ნახ.1.14 ქარის ნაკადის მოდელირება COMSOL Multiphysics -სის გარემოში



ნახ.1.15. შენობის გარსდენის სქემა

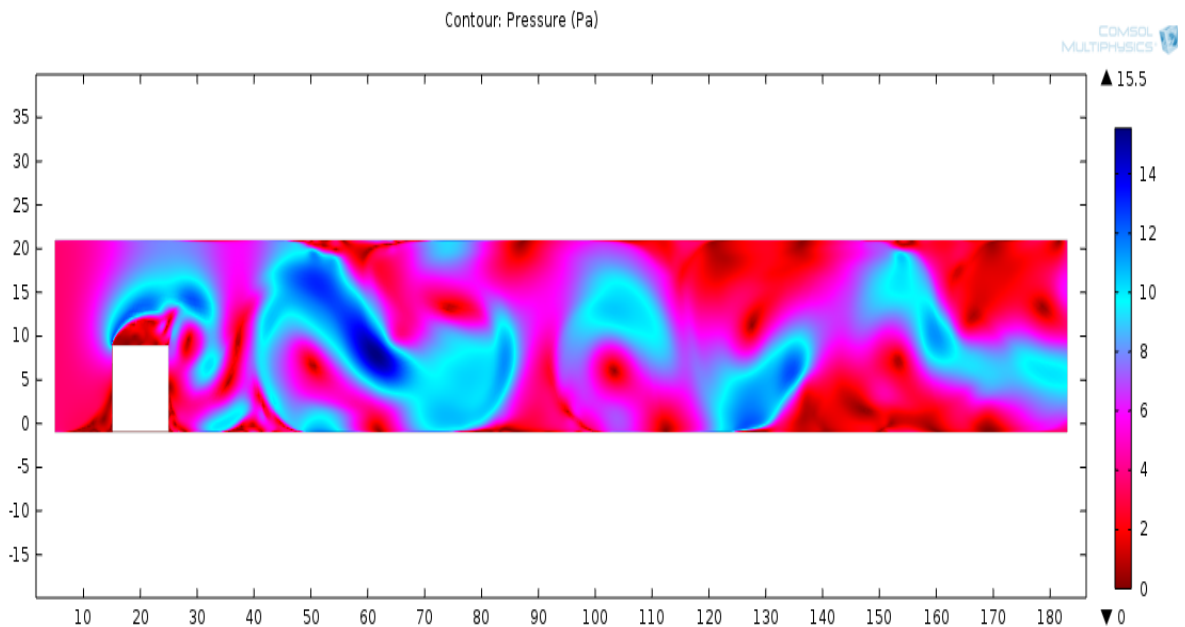


ნახ.1.16. ქარის ნაკადის დენების წირების ანგარიში COMSOL Multiphysics -სის გარემოში



ნახ.1.17. მოცემულია სამგანზომილებაში ქარის ტურბულენტური დინება

ჰიდროლოგიური მონაცემების დაყრდნობით ავეგთ მოდელი სადაც: ქარის სიჩქარე-3.6მ/წ წნევა-104 კპს

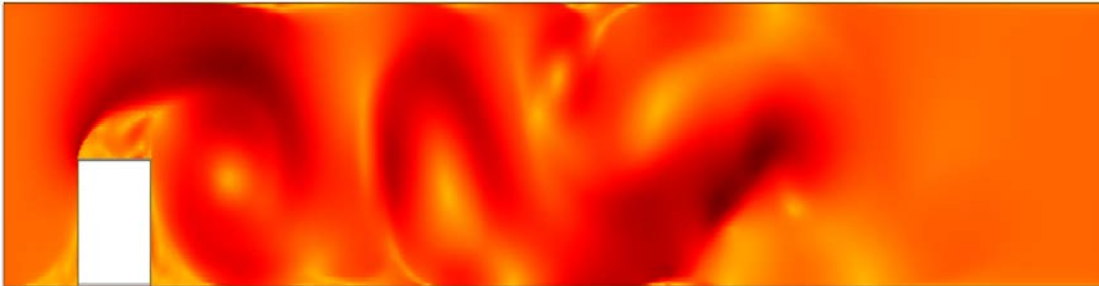


ნახ.1.18 წნევის გრაფიკი მოცემულია

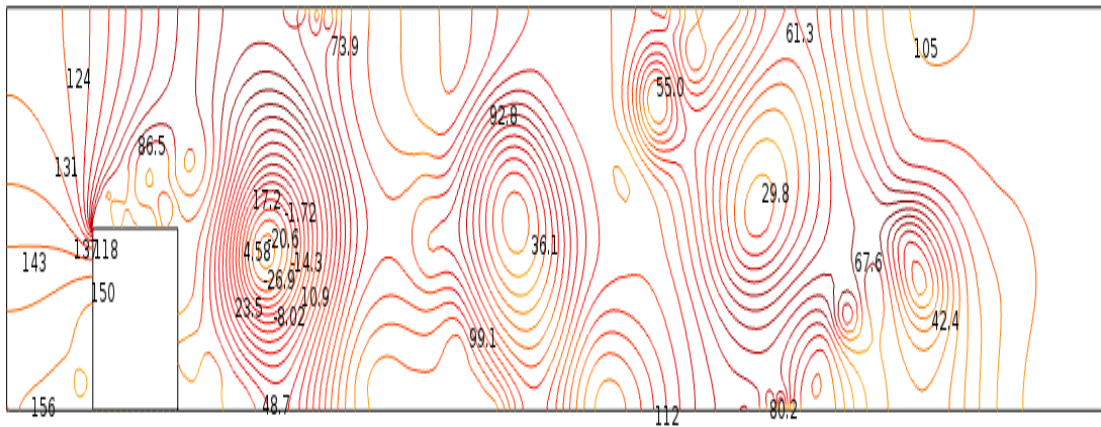
გრაფიკზე მოცემულია წნევის ზემოქმედება შენობა ნაგებობაზე (ნახ.1.20) წნევა არის 102.02 კპს, და გრაფიკზე კი ნაჩვენებია შენობაზე

წეზოლის შედეგად როგორ ხდება ზემოქმედება 180კილომეტრის სიგრძე (თუ ხელმშეშლელი პირობები არაა)

ნახ.1.19 და ნახ.1.20 -ზე არის წარმოდგენილი წნევის ზემოქმედება და მნიშვნელობები თუ როგორ მოქმედებს



ნახ.1.19 წნევის ზემოქმედება შენობა ნაგებობაზე



ნახ 1.20 აღნიშნულია წნევის ფაქტორები სხვადასხვა წერტილებში თუ როგორც იცვლება წნევა

როგორც ვხედავთ კედლის მიდამოებში წნევა მოქმედებს 131.18კპს და 150 კპს-ით, ხოლო რეინოლდსის რიცხვი არის:

$$\rho = 1 \text{ (კგ/მ}^3\text{)}$$

$$u = 3.6111 \text{ (მ/წ)}$$

$$\mu = 1 \text{ (ნწ/მ}^2\text{)}$$

$$L = 12 \text{ მ)}$$

$$\nu = 1 \text{ (მ}^2\text{/წ)}$$

$$Re = 43$$

როგორც ვხედავთ ასეთი დინება არის ლამინარული, შენობა ნაგებობაზე ურთეროქმედებისას, წარმოიქმნება ტურბულენტური ზონები

შემდეგ გამოვიკვლიე ქარის დინება სოფელ კავთისხევში საკუთარ სახლზე, რომლის მონაცემებია:

სიმაღლე-5მ;

სიგრძე-12მ;

სიგანე-11მ.

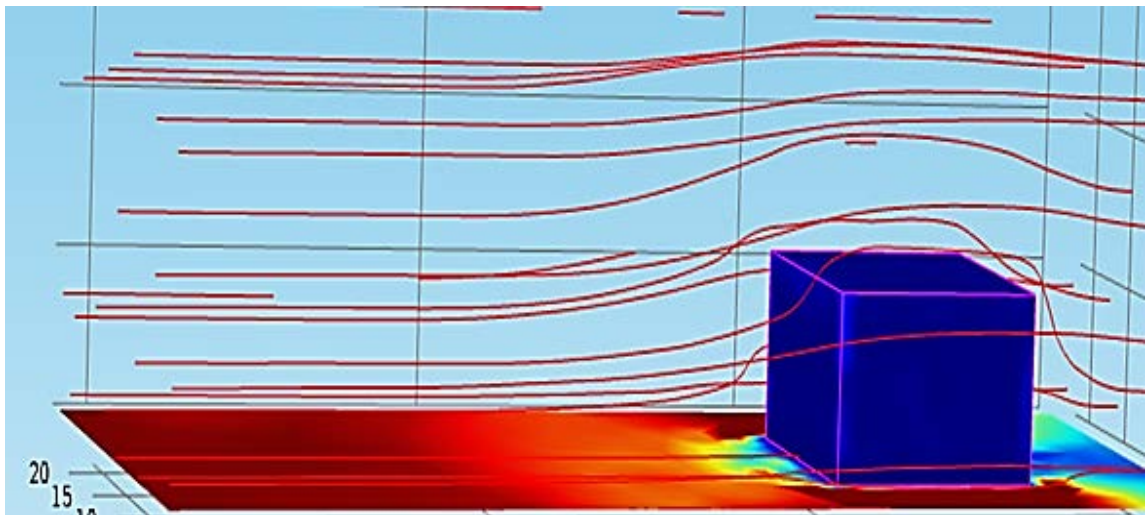
სახლი არის ბანური გადახურვის ამიტომაც 3D განზომილებაში აღწერილი მაქსიმალური სიზუსტით, სახლის წინა მხარეს 15 მეტრის მანძილზე ხელშეშლელი პირობები არ არის, ქარის სიჩქარე და წნევა აღებულია ჰიდროლოგიური მონაცემებზე დაყრდნობით.

მოდელის აგებისას გათვალისწინებულია ზემოქმედების პარამეტრები ქარი, წნევა და ტემპერატურა:

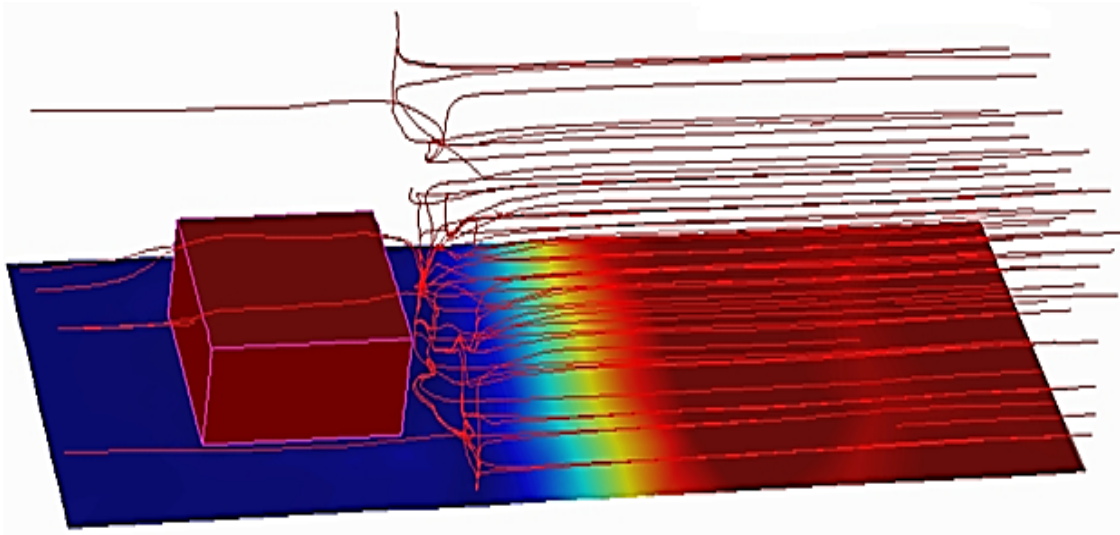
$$U_0 = 15 \text{ მ/წ}$$

$$P = 106.02 \text{ კპს}$$

$$T = 20^\circ \text{C}$$



ნახ.1.21 კავთისხევის სახლი სადადაც ხდება ქარის გარსდენის მოდელირება



ნახ.1.22 ნაჩვენებია ქარის ნაკადის ძვრა

ქარის ნაკადი დამვრა და ურთერთქმედება შენობასთან და მიწის ზედაპირთან

Fluid Properties (სიბლანტის პარამეტრი) მოცემულია განტოლება და სხვა პარამეტრები რომელიც დამოკიდებულია დროზე

$$\begin{aligned}
 & p \frac{du}{dt} + p(u * \nabla)u = \\
 & = \nabla * \left[-pl + (u + u_T)(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}(u + u_T)(\nabla * u)l - \frac{2}{3}pkl \right] + F \\
 & \frac{dp}{dt} + \nabla * (pu) = 0 \quad (1.55) \\
 & p \frac{dk}{dt} + p(u * \nabla)k = \nabla * \left[\left(u + \frac{u_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + p_k - p\epsilon \\
 & p \frac{d\epsilon}{dt} + p(u * \nabla)\epsilon = \nabla * \left[\left(u + \frac{u_T}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} p_k - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}, \\
 & \epsilon = ep
 \end{aligned}$$

აქვე არის **Wall**-კედლის ფუქციაც რომელიც განსაზღვრავს ძირითად ზეწოლას კედელზე და ჩაიწერება ფორმულით

$$\begin{aligned}
 & u * n = 0 \\
 & \left[(u + u_T)(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}(u + u_T)(\nabla * u)l - \frac{2}{3}pkl \right] n = -p \frac{U_x}{\delta_w^+} U_{tang} \\
 & U_{tang} = u * (u * n)n \\
 & \nabla k * n = 0 \quad (1.56) \\
 & \epsilon = p \frac{C_u k^2}{K \delta_w^+ u}
 \end{aligned}$$

Inlet-ქარის საიდანაც უბერავს ანუ ეწ და მბერავი და მისი ფორმულები და პარამეტრები, რომელიც დამოკიდებულია დროზე

$$\begin{aligned}
 & \underline{u} = -U_0 n \\
 & k = \frac{3}{2}(U_0 l_T)^2, \quad \epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{L_T}
 \end{aligned}$$

(1.58)

ტურბულენტური ინტენსივობა და სიგრძე

ტურბულენტობის ინტენსივობა

$I_T=0.05$

ტურბულენტობის დამახასიათებელი სიგრძე

$L_T=0.01$ მ

Outlet-ბერვა ანუ საითკენაც უბერავს და მისი განტოლება ხოლო წნევის განტოლება რომელიც რომელიც არ წარმოადგენს დაძაბულობას გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}} &= p_0, \left[(\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}(\mu + \mu_T)(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} - \frac{2}{3}\rho k\mathbf{I} \right] \mathbf{n} = \mathbf{0} \\ \nabla k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

ხოლო თუ გვსურს ჩვენს შემთხვევაში წნევის განსაზღვრაც იქნება შემდეგი

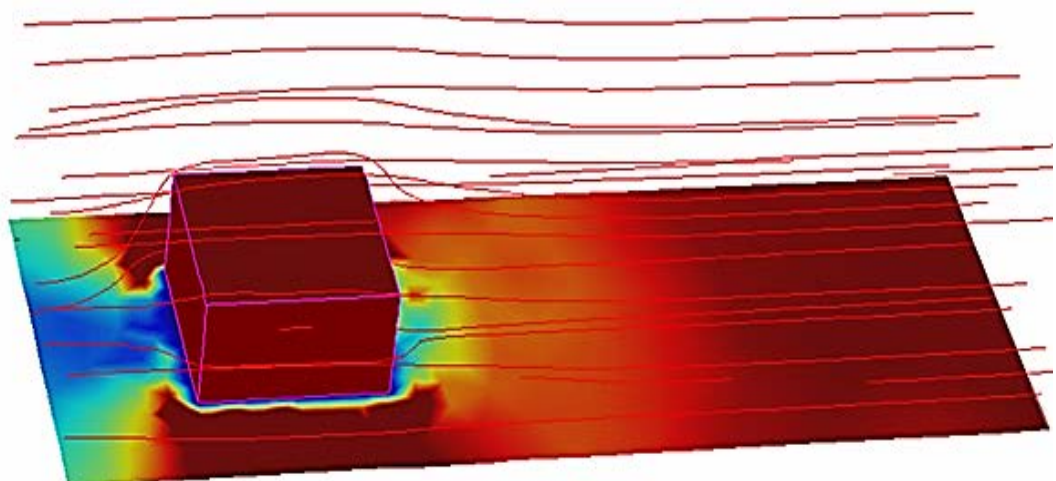
$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}} &= p_0 \\ \nabla k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (1.60)$$

წნევა $P=106.02$ კპა

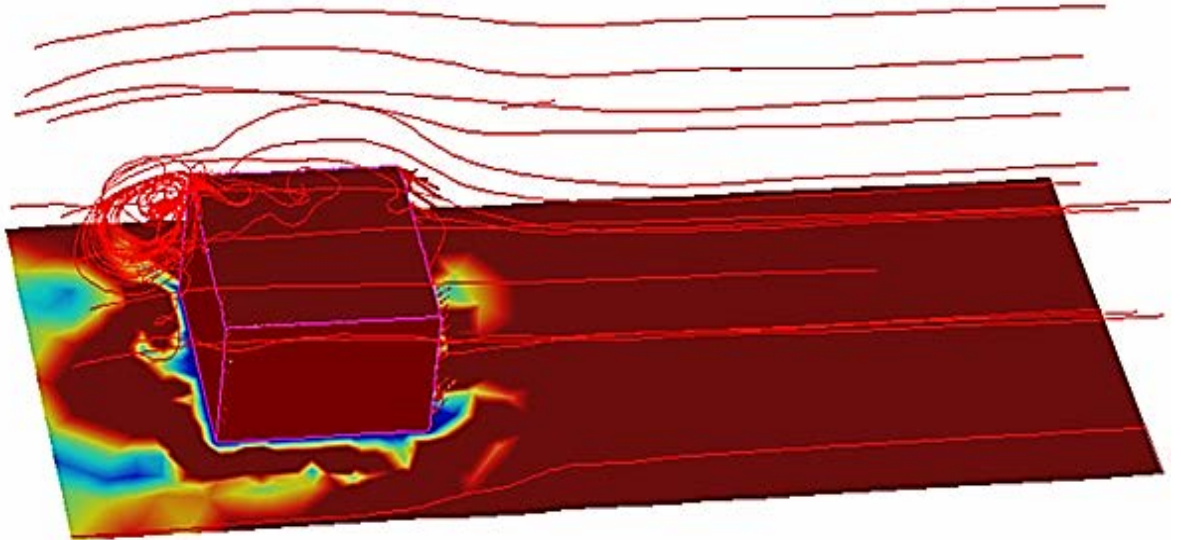
სასაზღვრო პირობები და სიმეტრიულობა

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{K} = \left[(\mu + \mu_T)(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{2}{3}\rho k\mathbf{I} \right] \\ \nabla k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \nabla \epsilon \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

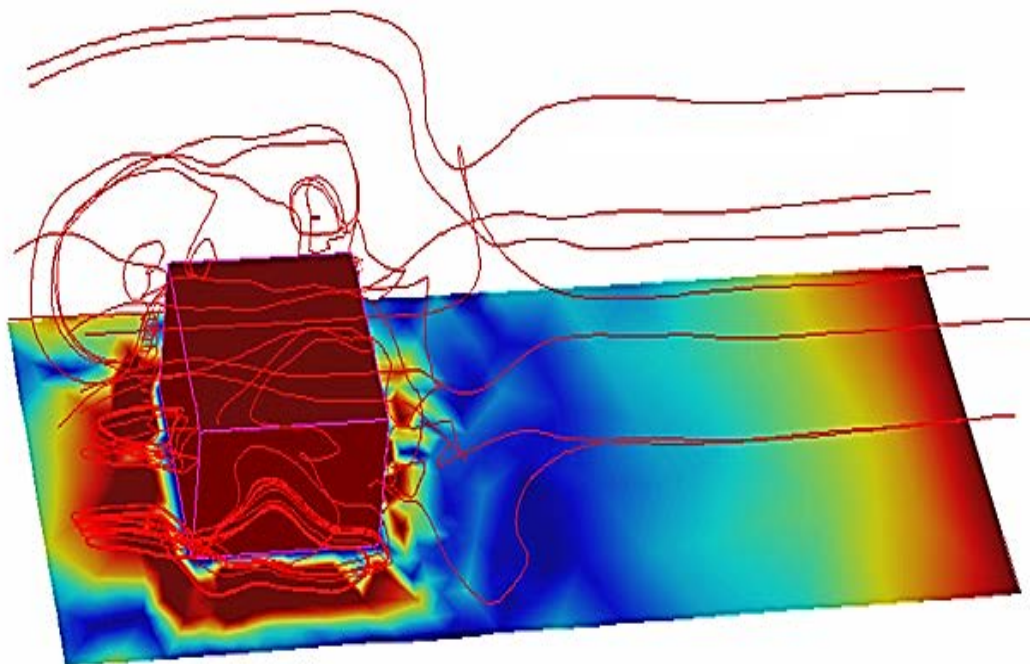
უნდა აღინიშნოს რომ დათვლისას, ანიმაციის მოდელის დროის ინტერვალი 30 წამია, კომპიუტერი ითვლიდა 0.01წმ ინტერვალით, და მაქსიმალური სიზუსტით, თავიდან შენობის გარსდენა ხდება ბოლოს კი ტურბულენტობა წარმოიქნება.



ნახ.1.23 სახლის ქარის ნაკადით გარსდენა

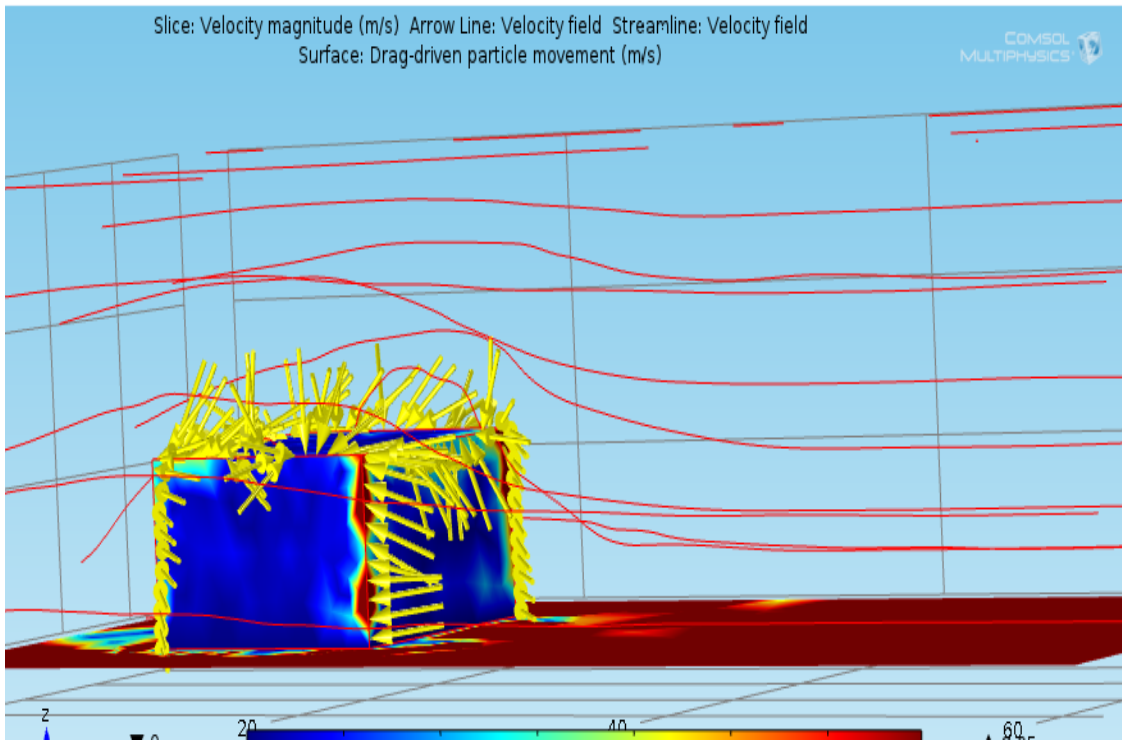


ნახ.1.24 წარმოქმნება ტურბულენტობა

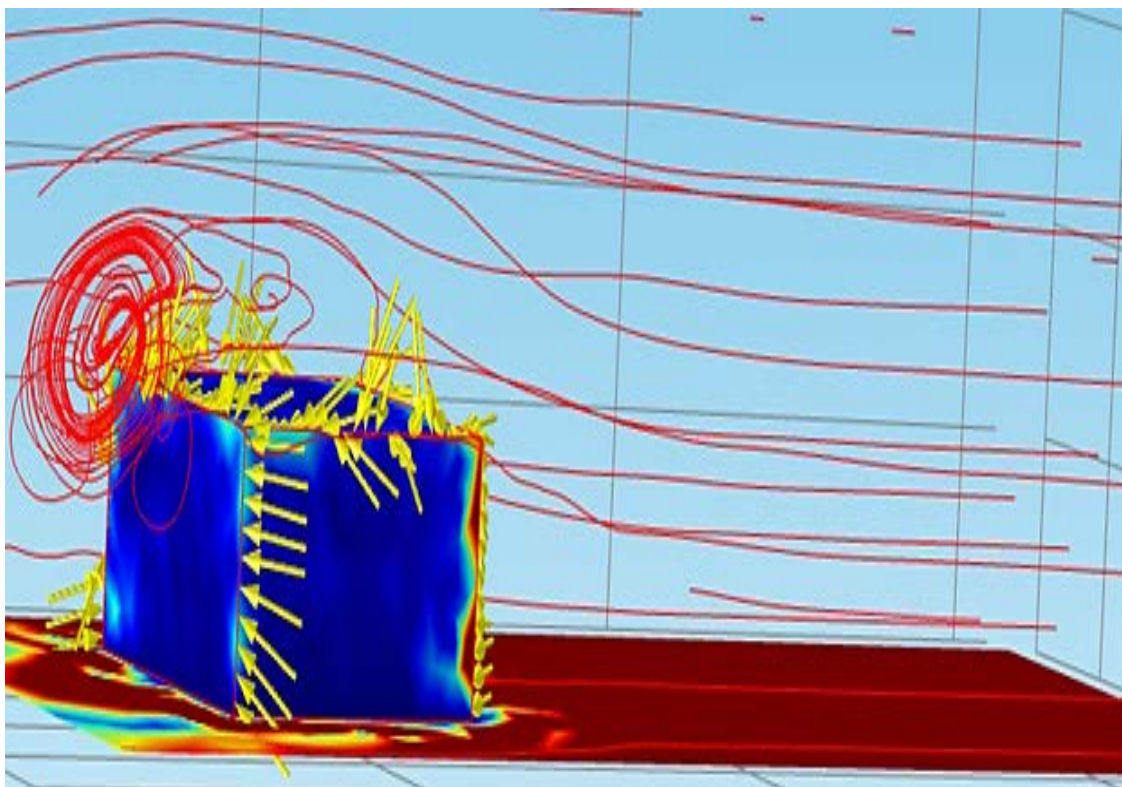


ნახ.1.25 სახლის გარშემო ხდება ტურბულენტური ზონების წარმოქმნა

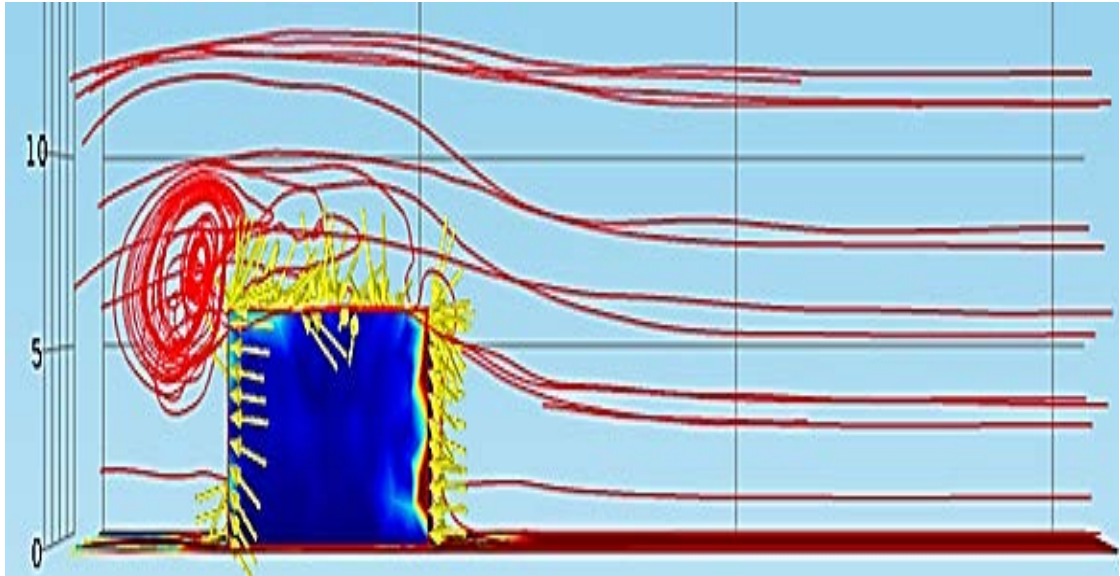
ისრებით აღნიშნულია ის ზედაპირი სადაც ხდება ზეწოლა შენობა ნეგებობაზე, რომელიც მოცემულია ნახ.1.25-ზე



ნახ.1.26 შენობაზე ზემოქმედება აღნიშნულია ისრებით



ნახ.1.27 შენობის უკან წარმოიქმნება ტურბულენტობა



ნახ.1.28 გვერდითა ხედიდან წარმოდგენილი ზეწოლა და ტურბულენტობა

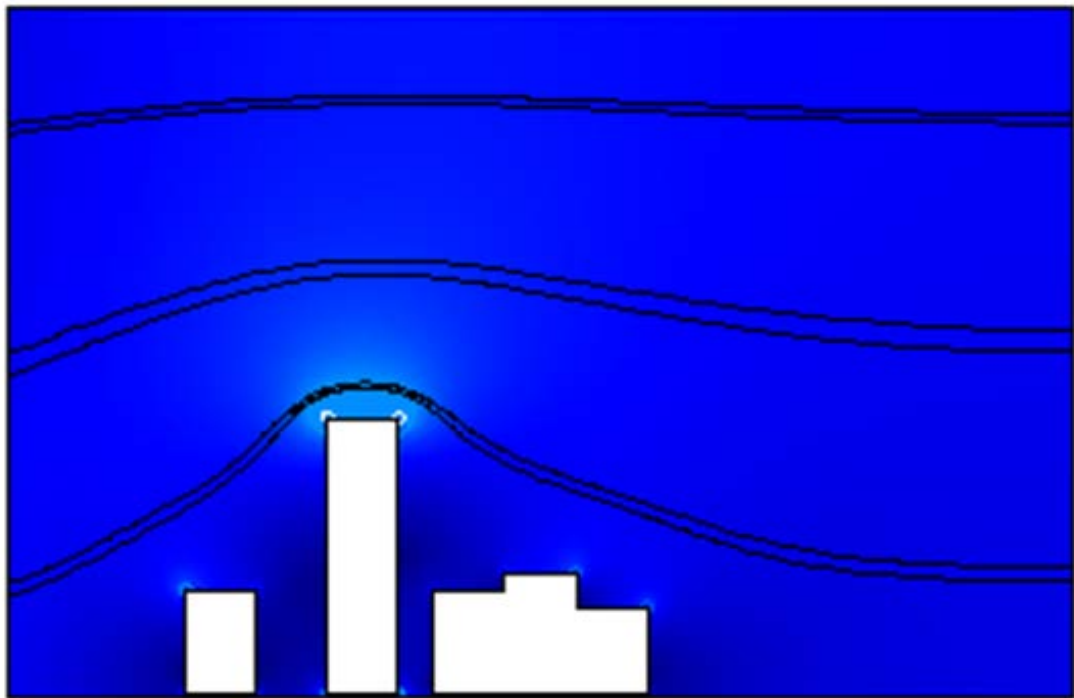
$$\rho = 2000 \text{ (კგ/მ}^3 \text{)}$$

$$u = 3 \text{ (მ/წ)}$$

$$\mu = 100 \text{ (ნწ/მ}^2 \text{)}$$

$$L = 11 \text{ (მ)}$$

$$Re = 660$$



ნახ.1.29 მოცმულია ქარის დინებები შენობა ნაგებობის გარშემო

სადაც ხაზები აღწერს ქარის დენის წირებს, ვხედავთ რომ 2მ/წ სიჩქარისთვის არ წარმორქნება დამაბულობას კომპლექსური შენობებისთვის.

პარმატრების აგებისას გამოვიყენეთ ნავია-სტოქსის განტოლება, გამოყენებული იქნა შემდეგი პარამეტრები:

Fluid Properties

Wall

Initial Values

Inlet

Outlet

განვიხილოთ ცალ-ცალკე თითოეული კომპონეტის მნიშვნელობა **Fluid Properties** (სიბლანტის პარამეტრი) განტოლება:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} + \rho(u \cdot \nabla)u &= \\ &= \nabla \cdot \left[-pI + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot u)I \right] + F \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

ხოლო ρ (წნევა კგ/მ² -ზე) და μ (სიბლანტის კოეფიციენტი)
 $\mu=100$ კპა
 $\rho=1$ კგ/მ²

Wall-კედლის ფუქცია რომელიც ცალკეულად მოიცავს **Inlet** და **Outlet** კომპონენტებს, უნდა აღინიშნოს რომ კედელი გლუვია არა გლუვია და ა.შ მისი ფორმულაც იცვლება მაგალითად ჩვენს შემთხვევაში კედელი უხეშია ამიტომაც და არეკლვა არ ხდება
 $u = 0$

Initial Values–საწყისი სიდიდეები სადაც მოცემულია **Fluid Properties** (სიბლანტის პარამეტრები)

Inlet-შემშვები, მოდელის აგებისას ვნიშვავთ პარამეტრებს საიდან ხდება ქარის დაბერვა რა სიჩქარით და რა წნევით ხდება შენობა ნაგებობაზე.

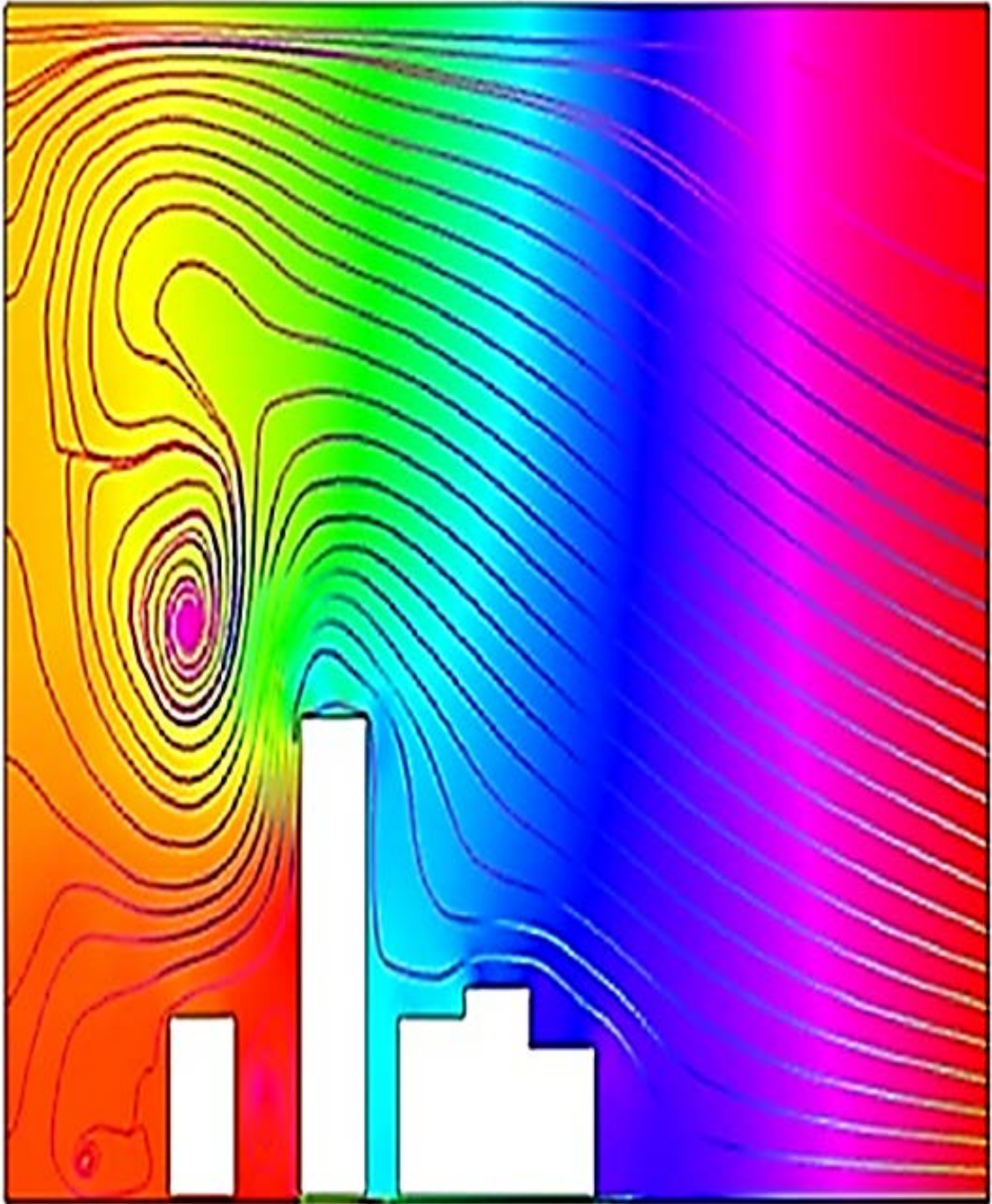
Wall ფუნქცია ანუ **კედლის** ფუნქცია, ითვალისწინებს იმ მხარეს სადაც ხდება შენობა ნაგებობაზე ძირითადი ზეწოლა.
 ხოლო განტოლება:

$$u = U_0 n \quad (1.63)$$

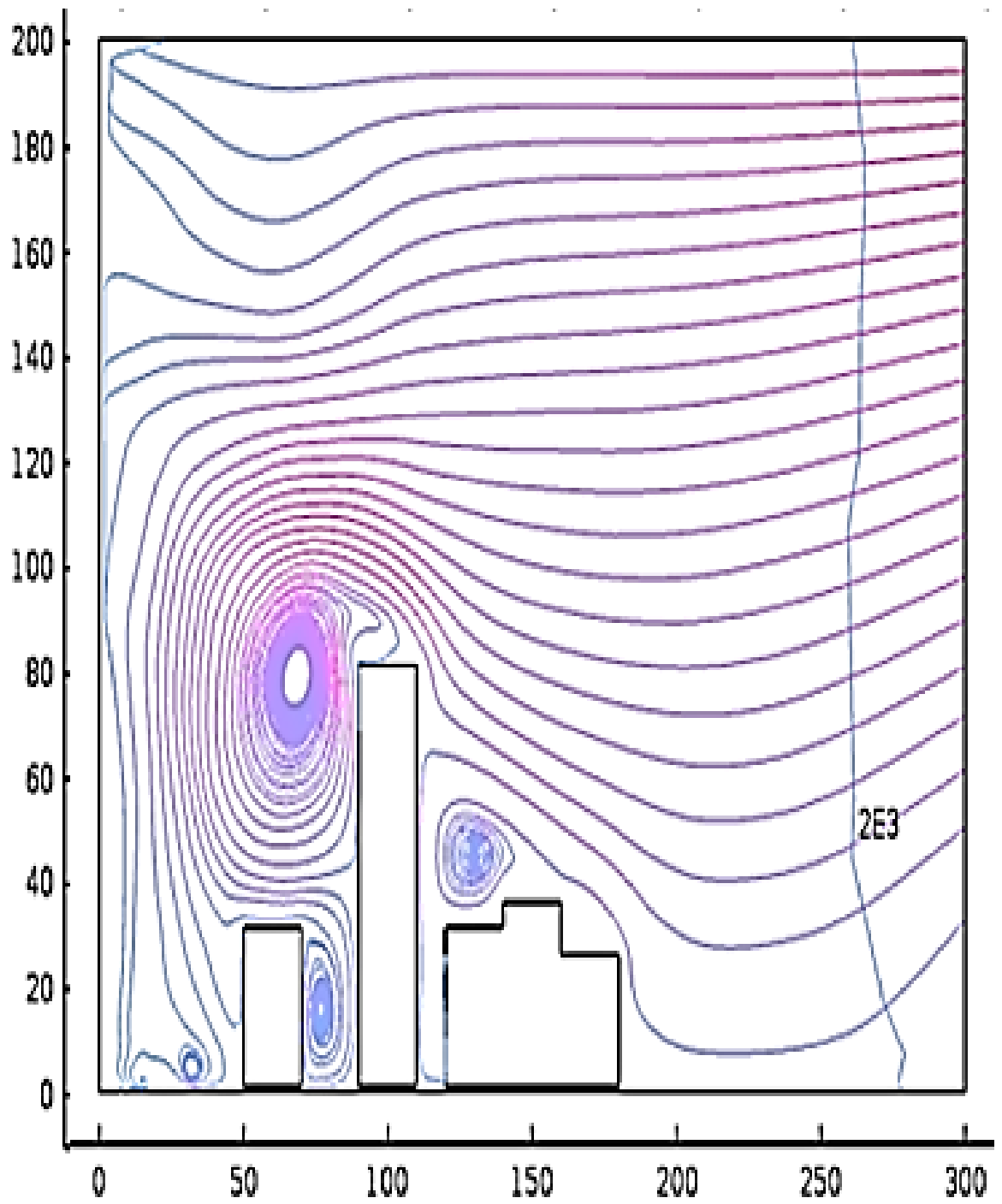
სადაც $U_0 = 3.6$ მ/წმ
 3.6 მ/წმ –ზე წარმოიქნება ტურბულენტობა.

Outlet -გამომავალი, საითკენაც გამოედინება ქარის ნაკადი ფორმულა წნევის და ზეწოლის გვექნება:

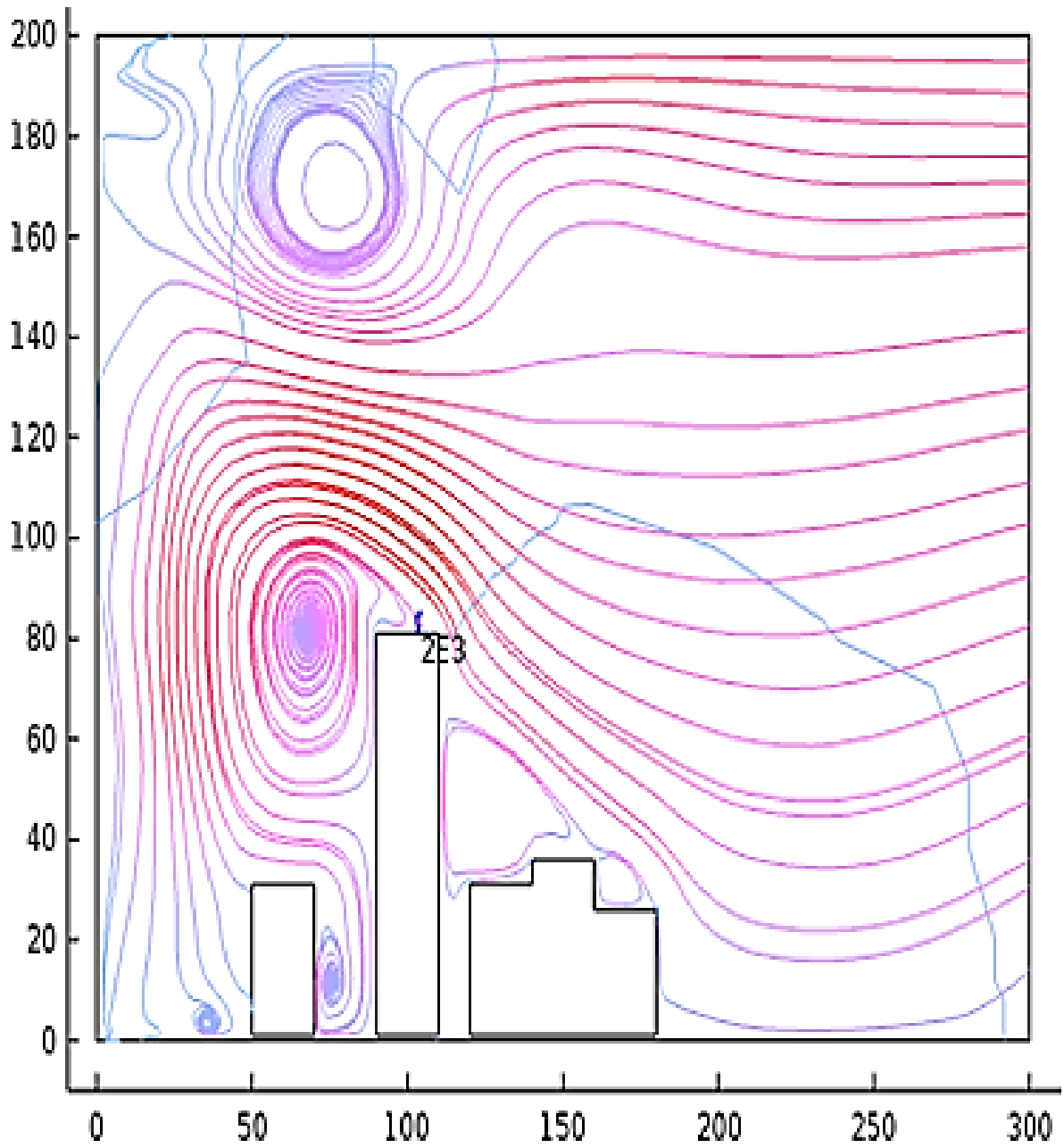
$$\rho \dots \left[\mu(\nabla u + (\nabla u)^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot u)I \right] n = 0 \quad (1.64)$$



ნახ.1.30 მოცემულია წნევის ზემოქმედება შენობა ნაგებობებზე



ნახ1.31 როგორც ვხედავთ შენობის მაქსიმალური სიმაღლე 80 მეტრია



ნახ.1.32 ქარის დინებისა და წნევის ზემოქმედება შენობა-ნაგებობაზე

$$\rho = 1 \text{ (კგ/მ}^3 \text{)}$$

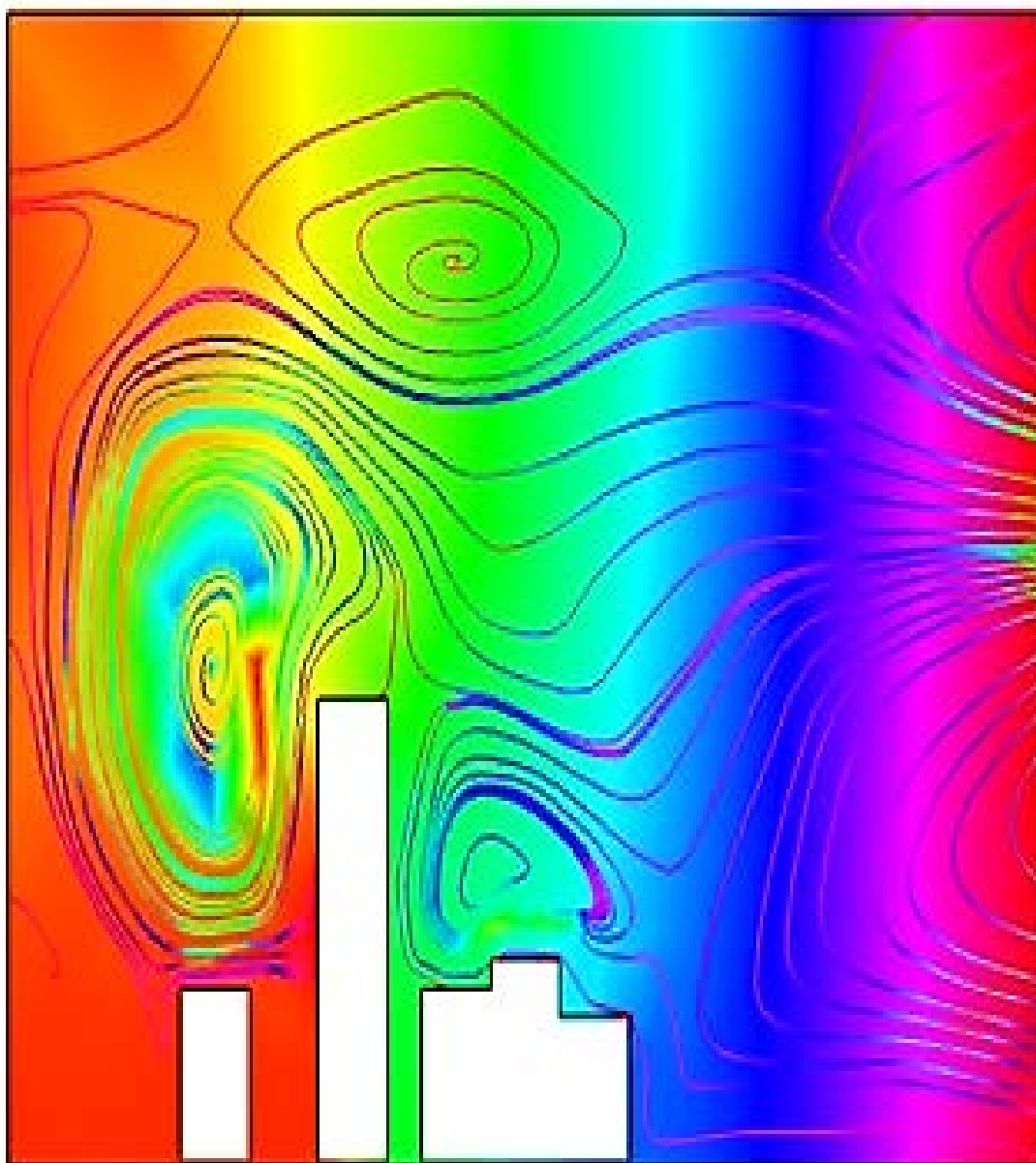
$$u = 3 \text{ (მ/წ)}$$

$$\mu = 1 \text{ (ნწ/მ}^2 \text{)}$$

$$L = 20 \text{ (მ)}$$

$$\nu = 1 \text{ (მ}^2 \text{/წ)}$$

$$Re = 60$$



ნახ.1.33 ქარის სიჩქარე 3მ/წ წნევა 108კპს

თავი II. რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ფიგურათა ანალიზური გამოსახვა და ფუნქციონალური სიმრავლეები

2.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგეხსენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად: p – “სოკრატე ადამიანია”;
 q – “ადამიანი მოკვდავია”;
 r – “სოკრატე მოკვდავია”.

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ უნარული და ბინარული ოპერაციები.

განსაზღვრება: უნარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე(გამონათქვამზე). უნა – ლათინურად ნიშნავს ერთს.

განსაზღვრება: ბინარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე(გამონათქვამზე). ბი – ლათინურად ნიშნავს ორს.

განსაზღვრება: ორი p და q გამონათქვამის დიზიუნქცია (“ \vee ” – ან) ეწოდება ისეთ $p \vee q$ გამონათქვამს(p ან q), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან p ან q (ერთ-ერთი მაინც).

არისტოტელეს მოდელში[1-3] (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი(**tru**) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი(**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0-ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის(ცხრილი 2.1):

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ცხრილი 2.1 დიზიუნქციის ოპერაციისათვის

განსაზღვრება: ორი p და q გამონათქვამის კონიუნქცია (“ \wedge ” – და) ეწოდება ისეთ $p \wedge q$ გამონათქვამს(p და q), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია p და q (ორივე ერთდროულად).

კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი(ცხრილი 2.2):

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

ცხრილი 2.2 კონიუნქციის ოპერაციისათვის

განსაზღვრება: ორ p და q გამონათქვამს ექვივალენტური (\equiv) ეწოდებათ (ჩაწერენ $p \equiv q$), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვა-მების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის (“ \vee ” და “ \wedge ”) თვისებები. ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად(ცხრილი 2.3).

გამონათქვამების თვისებები	თვისების დასახელება	შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის	ემთხვევიან(+), თუ არ ემთხვევიან(-) თვისებები
$p \vee q \equiv q \vee p$	კომუტაციურობის თვისება	$a+b=b+a$	+
$p \wedge q \equiv q \wedge p$		$axb=bx a$	+
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	ასოციურობის თვისება	$(a+b)+c=a+(b+c)$	+
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		$(axb)xc=ax(bxc)$	+
$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	$(a+b)xc=axc+bx c$	+
$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$		$(axb)+c \neq (a+c)x(b+c)$	-
$p \vee p \equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	$a+a \neq a$	-
$p \wedge p \equiv p$		$axa \neq a$	-

ცხრილი 2.3 ექვივალენტობის ცნება

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით. რაც იმის მომასწავებელია, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართება-ში(ალგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა ბულის ალგებრასთან შედარებით.

ეხლა, განვიხილოთ უარყოფის უნარული ოპერაცია, რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე :

განსაზღვრება: p გამონათქვამის უარყოფა (“ \neg ”-არა) ეწოდება ისეთ $\neg p$ გამონათქვამს(არა p), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა p ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე(ცხრილი 2.4) :

p	$\neg p$
1	0
0	1

ცხრილი 2.4 უნარული ოპერაცია

ამრიგად, გამონათქვამთა ალგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია (\vee, \wedge, \neg). ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, ალგებრულ სისტემებს **ბულის ალგებრებს** უწოდებენ.

ყველა **სხვა ოპერაცია** გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას:

“თუ p , მაშინ q ”. ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად : $p \Rightarrow q$ (p – დან გამომდინარეობს q).

“ \Rightarrow ” - სიმბოლოს იმპლიკაციის უწოდებენ.

იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებებიც, საჭიროა გამოვყოთ ის ძირითადი **კანონები**, რომლებსაც ჩვენ აზროვნების კანონებს ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას(ცხრილი 2.5) :

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$p \vee (\neg p) \equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი
$p \wedge (\neg p) \equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი
$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p; p \wedge 0 \equiv 0$	შთანთქმის კანონები
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$	კონტრაპოზიციის კანონი
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)$	სილოგიზმის კანონი
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$	დე მორგანის კანონები
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	ორმაგი უარყოფის კანონი
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	ექვივალენტობის კანონი

ცხრილი 2.5 ძირითადი კანონები

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა : სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

მაგალითად: ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალიზაცია. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები :

“დიდია ტენიანობა” – აღვნიშნოთ **P** ასოთი ;

“მაღალია ტემპერატურა” – აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად” – აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C). \quad (2.1)$$

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს **ბულის ფორმულებს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით **ბულის ფორმულები** ეწოდებათ.

მაგალითად: $P \wedge$; და $\Rightarrow (\neg C)$ - არა არიან ბულის ფორმულები.

განსაზღვრება: ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვაჩვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q) \text{ დე მორგანის პირველი კანონი} \quad (2.2)$$

დამტკიცება :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

ცხრილი 2.6 დე მორგანის პირველი კანონი

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. ანუ, ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური.

განსაზღვრება: ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – **ტავტოლოგია** ეწოდება.

მაგალითად :

1) $G \equiv \mathbf{p} \vee (\neg \mathbf{p})$ – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა :

$H \equiv ((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}$. მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით. ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :

$$\begin{aligned} H &\equiv (((\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}) \equiv (((\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}) \equiv (((\neg \mathbf{P} \wedge \mathbf{P}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow \mathbf{Q}) \equiv \\ &\equiv (0 \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow \mathbf{Q} \equiv ((\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{Q}) \equiv (\neg (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \vee \mathbf{Q} \equiv (\neg \mathbf{Q}) \vee (\neg \mathbf{P}) \vee \\ &\mathbf{Q} \equiv \\ &\equiv 1 \vee (\neg \mathbf{P}) \equiv 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა წინააღმდეგობრივია (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების(მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად :

$G \equiv \mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{p})$ ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$$H \equiv (\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{P} \wedge (\neg \mathbf{Q})) - \text{წინააღმდეგობრივია.} \tag{2.4}$$

განსაზღვრება: ატომს ან ატომის უარყოფას **ლიტერა** ეწოდება.

მაგალითად : \mathbf{Q} ; $\neg \mathbf{P}$ - ლიტერებია. $\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q}$ – არაა ლიტერა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv \mathbf{F}_1 \wedge \mathbf{F}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{F}_n \tag{2.5}$$

წარმოადგენილია **კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს **დიზიუნქტიურ ლიტერას**.

ანუ, კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციას კონიუნქციას.

მაგალითად :

$$F \equiv (\mathbf{P} \vee (\neg \mathbf{Q})) \wedge (\neg \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}). \tag{2.6}$$

ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n \quad (2.7)$$

წარმოადგენილია **დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს **კონიუნქტიურ ლიტერას**.

ანუ, დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციას და დიზიუნქციას.

$$\text{მაგალითად : } F \equiv (P \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge Q). \quad (2.8)$$

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1; F_2; \dots F_n$ და ფორმულა G . ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1; F_2; \dots F_n$ ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \Rightarrow G$ ტავტოლოგიაა.

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1; F_2; \dots F_n$ და ფორმულა G . ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1; F_2; \dots F_n$ ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n) \wedge (\neg G)$ წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

- P.S.** 1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას **რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის შესახებ**, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით[4];
- 2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს **სამნიშნა ლოგიკაც**. აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია[3].
- 3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-ნიშნა ლოგიკაც**. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში[5].
- 4) არსებობს **არამკაფიო ლოგიკაც**[6]. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანებში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.
- 5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, **ინტუციონისტურ ლოგიკას**, რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი[7]. ინტუციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

2.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურად.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

მაგალითად:

- A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;
- N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;
- Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;
- Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;
- R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
- M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი**[8]. სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გკანტორის მიერ შემდეგი ფორმით:

მინიშნება: სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად: $A=B$.

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების გაერთიანება(“ \cup ” - გაერთიანება) ეწოდება ისეთ $A \cup B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან A, ან B სიმრავლეს(ერთ-ერთს მაინც).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \vee e \in B\}. \quad (2.9)$$

ჩანაწერი $e \in A$ - წაიკითხება ასე“e ეკუთვნის(როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს”.

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლების თანაკვეთა (“ \cap ” - თანაკვეთა)

ეწოდება ისეთ $A \cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{e | e \in A \wedge e \in B\}. \quad (2.10)$$

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ეხლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს ცარიელი სიმრავლე (\emptyset) ეწოდება.

P.S. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ყველა სხვა სიმრავლეს უნივერსალური (E) სიმრავლე ეწოდება.

P.S. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში. (აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას – მთელი, არ შეიძლება რომ იყოს თავის ნაწილი, თუმცა, შეიძლება მათ ელემენტებს შორის იყოს ურთიერთცალსახა თანადობა).

ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე, ჩაიწერება შემდეგნაირად: $A \subseteq B$. ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდევ მას. იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხებულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ჩაწერენ $A \subset B$.

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E; A \cup \emptyset = A;$ $A \cap E = A; A \cap \emptyset = \emptyset$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1; p \vee 0 \equiv p; p \wedge 1 \equiv p;$ $p \wedge 0 \equiv 0$

ეხლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა (ცხრილი 2.7).

ცხრილი.2.7 გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციები

ეხლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას სიმრავლის დამატებას ეძახიან.

განსაზღვრება: მოცემული A სიმრავლის დამატება E უნივერსუმამდე ეწოდება ისეთ A^c სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის E -ს და არ ეკუთვნის A -ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c = \{e \mid e \in E \wedge e \notin A\}. \quad (2.11)$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; \quad (2.12)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \quad (2.13)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგ-ნაირად:

$$(A^c)^c = A. \quad (2.14)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

განსაზღვრება: ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული**, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე, რომ ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა **ჰომომორ-ფულია** სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

2.3. რელაციური სისტემები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ $A \times A = A^2$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი $(a;b)$ დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის A -ს, ხოლო მეორე B -ს.

სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A \times B = \{(a;b) \mid a \in A \wedge b \in B\}. \quad (2.15)$$

ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ **მიმართებისა და ფუნქციის** ცნება.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ R ქვესიმრავლეს, **მიმართება** ეწოდება.

ე.ი. თუ R მიმართებაა, მაშინ $R \subset A \times B$. (2.16)

მაგალითი : თუ, A – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა (წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ A^2 – დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული A სიმრავლეზე.

განსაზღვრება: ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც a -ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება b -ს ერთადერთი მნიშვნელობა **ფუნქცია** ეწოდება.

ე.ი. ფუნქცია ისეთი გადასახვაა $f : A \rightarrow B$, რომლისთვისაც A სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, f ფუნქციას მოეთხოვება ცალსახობა.

P.S. არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: **სურექცია, ინექცია და ბიექცია**. სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ A და B სიმრავლეების ყველა ელემენტი; ინექციის დროს A სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია B სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა A და B სიმრავლეებს შორის. ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად, ინექციაც და სურექციაც.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f : A \rightarrow B$, რომ A და B რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია (ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნეირონები . . .), მაშინ f გადასახვას **ოპერატორს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

მაგალითი: $C^\infty(G)$ - თავის ნებისმიერი რიგის წარმოებულთან ერთად უწყვეტი, ფუნქციებისაგან შემდგარი სიმრავლეა.

L_2 - კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისაგან შედგენილი ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, წარმოებულის ოპერატორი $\frac{d}{dx}: L_2 \rightarrow L_2$; სადაც L_2 ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა; ასევე, ვიცით ინტეგრების ოპერატორი; კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი და.შ.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f: A \rightarrow B$, რომ A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო B რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ f გადასახვას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

ეს ფუნქციონალი პრაქტიკაში გამოიყენება შემდეგი ფორმით:

$$K(f) = \int_0^1 f(x)dx. \quad (2.17)$$

მაგალითი: $\int_0^1 dx: L_2 \rightarrow R$ ფუნქციონალი ნებისმიერ ფუნქციას

L_2 -ფუნქციონალური სივრციდან გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში. ანუ, ნებისმიერ ფუნქციას შეუსაბამებს, მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობას ამ ფუნქციიდან.

განსაზღვრება: თუ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია R მიმართება, მაშინ $\langle A; R \rangle$ წყვილს **რელაციური სისტემა** ეწოდება.

მაგალითი: თუ, A გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო R მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle A; R \rangle$ იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ, B სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და S მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle B; S \rangle$ რელაციური სისტემაა.

განსაზღვრება: ორი $\langle A; R \rangle$ და $\langle B; S \rangle$ რელაციურ სისტემას ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა $f: A \rightarrow B$, რომ ნებისმიერი $(\forall) x, y \in A$ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \quad (2.18)$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი $\langle A; R \rangle$ -ში, მაშინ, აქვს ადგილი $\langle B; S \rangle$ -შიც. მაშასადამე, **იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია(ერთნაირია).**

P.S. ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას. ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავეუმატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას

მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყენება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [9-17] (RO-ფუნქციის მეთოდი).

2.4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები(ხელოვნური ინტელექტი). გამოყენებანი.

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის ხელოვნური ინტელექტის შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დავადგინოთ, რომ მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა. მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს, თუ არა მოცემული ფორმულა, სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დავუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა. ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია.

P – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

S – აქციების ფასი ეცემა;

U – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \tag{2.19}$$

$$S \Rightarrow U; \tag{2.20}$$

$$P; \tag{2.21}$$

$$U. \tag{2.22}$$

ვაჩვენოთ, რომ (22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა:

$((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$. ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$\begin{aligned} & ((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) \\ & \equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ & \equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\ & \equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U. \end{aligned} \tag{2.23}$$

ასე, რომ თუ, $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ $P \wedge S \wedge U$ ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფორმულა $P \wedge S \wedge U$ ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია P,S და U

გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია U გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა U , არის (2.19), (2.20) და (2.21) ფორმულების შედეგი.

P.S. ანალოგიურად ხდება სხვადასხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები[4].

2.5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგადის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდის გამოყენება რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის მოდელირებისათვის

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ქონდათ ფიქსირებული სახე: “სოკრატე ადამიანია”, “სოკრეტე მოკვდავია” და.შ. პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: “ x რაციონალური რიცხვია”, “ y კეთილი ადამიანია”. . .

განსაზღვრება: ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს პრედიკატებს უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა რვაჩოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად[9]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგადის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე[10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R – ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

ეხლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით ბულის ალგებრების კატეგორიაში:

$$L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow L_r, \quad (2.24)$$

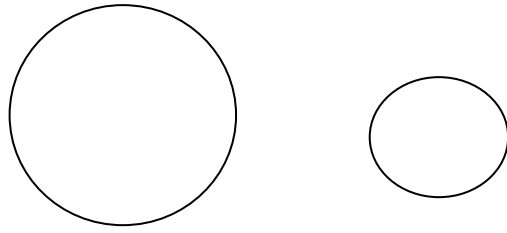
სადაც L_1 - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_2 - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_r - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია(ნახ.2.1.). სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ გვაქვს ორი სხვადასხვა დიამეტრის მილი, მაშინ შეგვიძლია სიბრტყეზე მათი კვეთი გამოვსახოთ ერთი ანალიზური ფორმულით.



ნახ.2.1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ **საყრდენ სიმრავლეებს**, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x, y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \quad (2.25)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \quad (2.26)$$

$$\Omega_3 = \{(x, y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \quad (2.27)$$

$$\Omega_4 = \{(x, y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \quad (2.28)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \quad (2.29)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით L_2 -ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_2 -ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \quad (2.30)$$

სადაც P_1 – არის გამონათქვამი $x_1 \geq 0$,

P_2 – არის გამონათქვამი $x_2 \geq 0$,

P_3 – არის გამონათქვამი $x_3 \geq 0$,

P_4 – არის გამონათქვამი $x_4 \geq 0$,

$$\begin{aligned} x_1 &= (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2; \\ x_2 &= R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2; \\ x_3 &= (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \\ x_4 &= r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

უხლა, გადავიდეთ L_r -ში **რვაჩოვის** ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \quad (2.32)$$

მივიღებთ R – ფუნქციას :

$$\begin{aligned} R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) &\equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \\ + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} & \end{aligned} \quad (2.33)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია ობგადის ჰომომორფიზმი[10] სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \rightarrow K_2 \rightarrow K_{ro}, \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} \quad (2.35)$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ქეჰმარიტი” \Leftrightarrow “უდრის ნულს”;

“მცდარი” \Leftrightarrow “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x, y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \quad (2.36)$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \mid (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \quad (2.37)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 ; \quad (2.38)$$

ე.ი. $P = P_1 \vee P_2 ; \quad (2.39)$

სადაც

$$P_1 - \text{არის გამონათქვამი } (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0, \quad (2.40)$$

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0 ; \quad (2.41)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2]. \quad (2.42)$$

როგორც ვხედავთ, ობგადის[10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად გამარტივდა R – ფუნქციის ანალიზური სახეც[12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, რეაჩოგ-ობგადის RO – მეთოდს ეძახიან.

2.6. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში - ფუნქციონალურ სიმრავლეებში [1-3]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადოებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა.

განსაზღვრება: G სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა L სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი (წრფივიანი), თუ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ $a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$ ფუნქციას).

მაგალითი : 1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \overline{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, L იქნება ლინეალი.

2. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ \overline{G} არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 5$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ $u(x) = 3$ და $a = 2$, მივიღებთ $au(x) = 6 > 5$.

P.S. თუ L არის ლინეალი, მაშინ n ფუნქციებთან $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$ ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც $\sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$. სადაც $a_i \in R$ ნამდვილი რიცხვებია. თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

განსაზღვრება: L ლინეალის ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(u; v)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x)dx. \quad (2.43)$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

მაგალითი : $u(x) = x$; $v(x) = 1$; $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u; v) = \int_G u(x)v(x)dx = \int_0^5 x \cdot 1 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{25}{2}.$$

(2.43) სკალარული ნამრავლის თვისებები გამომდინარეობენ, უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან:

$$(u; v) = (v; u); \quad (2.44)$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2; v) = a_1 (u_1; v) + a_2 (u_2; v); \quad (2.45)$$

$$(u; u) \geq 0; \quad (2.46)$$

$$(u; u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in G. \quad (2.47)$$

განსაზღვრება: L ლინეალის $u(x)$ ფუნქციის ნორმა $\|u(x)\|$ ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u; u)} = \sqrt{\int_G u^2(x) dx}. \quad (2.48)$$

ეხლა შემოვიღოთ ლინეალის ორ ფუნქციას შორის მანძილის ცნება, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში **მეტრიკას** უწოდებენ:

განსაზღვრება: L ლინეალის ორ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს შორის მანძილი(ანუ მეტრიკა) ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u; v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v; u - v)} = \sqrt{\int_G (u - v)^2 dx}. \quad (2.49)$$

მაგალითი: $u(x) = x$; $v(x) = 1$; $G = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$, მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3} \Big|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\rho(u; v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v; u - v)} = \sqrt{\int_0^5 (x - 1)^2 dx} = \sqrt{\frac{64 + 1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც აკმაყოფილებს მეტრიკა(მანძილი):

$$\rho(u; v) \geq 0; \quad (2.50)$$

$$\rho(u; v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x); \quad (2.51)$$

$$\rho(u; v) = \rho(v; u); \quad (2.52)$$

$$\rho(u; z) \leq \rho(u; v) + \rho(v; z). \quad (2.53)$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას.

გარდა (2.49) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ განიხილავენ მეტრიკის სხვა სახეებსაც. მაგალითად, ჩებიშევის მეტრიკას

$$\rho_c(u; v) = \max_{x \in G} |u(x) - v(x)|. \quad (2.54)$$

P.S. მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (2.44)-(2.47) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (2.54) მეტრიკა უფრო ინტუიციურად ზუსტია (2.49) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, მას იშვიათად

იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებსთვისაც ჩებიშევის მეტრიკა არ გამოდგება. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (2.497) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით $(u;v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$, სადაც $\overline{v(x)}$ არის $v(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

2.7. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ ფუნქციას კვადრატით ინტეგრებადი ეწოდება, თუ ლებეგის ინტეგრალები

$$\int_G u(x)dx; \quad \int_G u^2(x)dx; \quad (2.55)$$

ერთდროულად არსებობენ(არიან კრებადი).

კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ, $\int_G u^2(x)dx = 0$, მაშინ $u(x) = 0$ თითქმის ყველგან(გარდა ისეთი

წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს). ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ, ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები ემთხვევიან ერთმანეთს თითქმის ყველგან.

განსაზღვრება: L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (2.48) ნორმით და (2.49) მეტრიკით, ჰილბერტისწინა(უნიტარული) S_2 სივრცე ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი. ხოლო, თუ ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულებიც უწყვეტია, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C^\infty(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება S_2 ფუნქციონალურ სივრცეში.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n; u) = 0. \quad (2.56)$$

ანუ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0. \quad (2.57)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რაც ჩვენ გვქონდა რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება: $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \rho(u_m; u_n) = 0$.

განსაზღვრება: ვიტყვი, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილს, თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის ზღვართი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.

განსაზღვრება: S_2 უნიტარული(ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვართი წერტილების სიმრავლესთან, ამ სივრცის ჩაკეტვა ეწოდება.

ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2. \quad (2.58)$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა(უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ ბანახის სივრცე ეწოდება.

P.S. ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე სრულია, ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვართი წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების(ფუნქციების) სიმრავლევ მკვრივია $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც სეპარაბელურია, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მიუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში. ჰილბერტის სივრცე ყოველთვის არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების(ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ ჰილბერტის სივრცე $L_2(G)$, ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე (რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ გვექონდეს სკალარული ნამრავლი).

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული**, თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას **წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას** უწოდებენ.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin^2 xy$; $u_2 = \cos^2 xy$; $u_3 = 4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3 = 4u_1 + 4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის **გრამის დეტერმინანტი**.

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ **წრფივად დამოუკიდებელია** ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ანუ

$$D(u_1; u_2; \dots; u_k) = \begin{vmatrix} (u_1; u_1) & (u_1; u_2) & \dots & (u_1; u_k) \\ (u_2; u_1) & (u_2; u_2) & \dots & (u_2; u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k; u_1) & (u_k; u_2) & \dots & (u_k; u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.59)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin x$; $u_2 = \cos x$; $u_3 = 1$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2[0; \pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1; u_1) = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}; \quad (u_1; u_2) = \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0; \quad (u_1; u_3) = 2; \quad (u_2; u_2) = \pi.$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 2 & 0 & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული** $L_2(G)$ სივრცეში, თუ ამ სისტემის ყველა

შესაძლოა $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქცია-ათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს** $L_2(G)$ სივრცეში, თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x) = \sum_{i \in I} a_i u_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში, როცა $G = \{(x; y) | a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ **შაუდერის მრავალწევრა ბაზისია:**
 $1; x; y; x^2; xy; y^2; \dots$

ასევე, $L_2(0, 2\pi)$ სივრცეში, არსებობს **ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი:**
 $1; \sin x \cdot \cos y; \sin 2x \cdot \cos y; \sin x \cdot \cos 2y; \sin 2x \cdot \cos 2y; \dots$

ცნობილია, რომ $L_2(R)$ სივრცეში შეიძლება აიგოს **ვეივლეტ ფუნქციებისაგან** შემდგარი ბაზისებიც. მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს.

2.8. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე. პრაქტიკული, ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u' v' dx ; \quad (2.60)$$

და გავიმეორებთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ **სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს** $W_2^1(G)$.

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u; v) = \int_G u \cdot v dx + \int_G u' v' dx + \int_G u'' v'' dx ; \quad (2.61)$$

მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.

ანალოგიურად აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე, შესაბამისი სკალარული ნამრავლის შემოღებით.

$$(u; v) = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)} v^{(i)} dx. \quad (2.62)$$

2.9. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ, სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ყველაზე უფრო “კარგი” ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი საზოგადოდ

m -განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი. $P_n(x)$ მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C(R^m)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე(ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის(ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცია ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი თავის მხრივ ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k \geq 1$. ეს თანადობები, მოკლედ შეგვიძლია გამოვსახოთ ფორმულებით: $P_n(x) \subset CR^n \subset L \subset S_2 \subset L_2 \subset W_2^k$.

თავი III. გამოთვლითი ჰიდროაეროდინამიკის ამოცანების ამოხსნა და
საინჟინრო ნაგებობებზე ქარისაგან წარმოებული დატვირთვების
განსაზღვრა

შესავალი

1910 წელს რიჩარდსონმა თავისი ნაშრომით [18], საფუძველი ჩაუყარა კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ამოხსნების პოვნის სასრულ სხვაობიან მეთოდებს. რიჩარდსონმა შეიმუშავა ლაპლასის განტოლების, ბიჰარმონიული განტოლების, ჰიპერბოლური და ელიფსური განტოლებების ამოხსნის იტერაციული მეთოდები. მან, პირველმა შეძლო აეგო ქვის დამბის ანგარიშის სასრულ სხვაობიანი სქემა [18] და გაეთვალა დამბა.

1918 წელს ლიბმანმა შეძლო აეგო, უფრო სწრაფად კრებადი იტერაციული სქემა. კრებადობის პირველი დამტკიცება და იტერაციული პროცესის ცდომილების შეფასება ლიბმანის იტერაციული სქემისათვის, გააკეთეს ფილიპსმა და ვინერმა 1923 წელს [19] ელიფსური ტიპის განტოლებების ამოსახსნელად.

ჰიდროაეროდინამიკის განტოლებათა სისტემისათვის, სასრულ-სხვაობიანი მეთოდით რიცხვითი ამონახსნი, პირველად იპოვა ტომმა 1933 წელს [20]. 1955 წელს საუსველმა და ალენმა შეიმუშავეს, საუსველის რელაქსაციის მეთოდით, წრიული ცილინდრის ბლანტი, უკუმში სითხით გარსდენის ამოცანის ამოსახსნელად შესაბამისი ალგორითმი. ეს იყო პიონერული ნაშრომი ამ მიმართულებით. აღმოჩნდა, რომ რეინოლდსის რიცხვის გაზრდით 100-ს ზემოთ, ადგილი აქვს ფიზიკურ არამდგრადობას, რაც კარგად შეესაბამება არსებულ ექსპერიმენტებს [21]. გათვლები, ჩატარებული იქნა რეინოლდსის რიცხვის ზრდადი მნიშვნელობებისათვის: 0, 1, 10, 100, 200, ..., 1000.

სასრულ სხვაობათა მეთოდის განვითარებაში, დიდი წვლილი შეიტანეს რიხტმაიერმა და მორტონმა [22], ვაზოვმა და ფორსაიტმა [23], სამარსკიმ [24], , ჰ.მელამემ, დ.გრდუზიანმა, თ.ვაშაყმაძემ და სხვ.

სასრულ სხვაობათა მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ დიფერენციალურ განტოლებებში, წარმოებულები იცვლებიან შესაბამისი სასრული სხვაობებით, რაც ემყარება ფუნქციების ტეილორის მწკრივად გაშლის ფორმულებს:

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta_1),$$

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(\zeta_2),$$

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(\zeta_3).$$

სადაც $\zeta_1 \in [x, x+h]$, $\zeta_2 \in [x-h, x]$, $\zeta_3 \in [x, x+h]$. ამ ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{12} [u'''(\zeta_1) + u'''(\zeta_2)],$$

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{2h} = u'(x) + \frac{h}{2} u''(\zeta_3),$$

$$\frac{u(x)-u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2} u''(\zeta_4), \text{ სადა } \zeta_4 \in [x-h, x].$$

ქარის დატვირთვების საპოვნელად, პირველად, ეიფელმა გამოიყენა აეროდინამიკურ მილში დაბერვის ექსპერიმენტი ეიფელის კოშკის დაპროექტებისას. მოუწესრიგებლად იყენებდნენ, აეროდინამიკურ მილში შენობების დაბერვის ექსპერიმენტებს 1930 წლიდან 1960 წლამდე, რასაც ნეგატიური მხარეებიც ქონდა. რადგან აეროდინამიკური ექსპერიმენტები, იმ დროისათვის წარმატებით გამოიყენებოდა საფრენი აპარატების ფრთის აეროდინამიკის შესასწავლად, ჩათვალა რომ აქ დაგროვილი გამოცდილება შეიძლებოდა პირდაპირ გადატანილიყო სამშენებლო აეროდინამიკაშიც, თუმცა, აღმოჩნდა დრადინისა და ხილის ექსპერიმენტების შედეგად, რომ მიღებული შედეგები არ შეესაბამებოდა ნატურულ ექსპერიმენტებს. ვინაიდან, თვითმფრინავები დიდი სიჩქარით მოძრაობენ ფარდობით, უძრავი ჰაერის მიმართ და მათზე მოქმედებენ შედარებით მუდმივი ძალები, ნაგებობები კი განლაგებულია დედამიწის ზედაპირზე და მათ ირგვლივ ადგილი აქვს ქარის რთულ, ტურბულენტურ დინებას, რომელზედაც გავლენას ახდენს დედამიწის ზედაპირი, სხვა ნაგებობები და ქარის არათანაბარი, რხევითი მოძრაობა, ასევე, სიმაღლის მიხედვით ქარის სიჩქარეებიც და წნევის განაწილებაც იცვლება. 1943 წელს ბეილისა და ვინსენტის [39-41] მიერ შემუშავებული იქნა სამშენებლო ნაგებობების გამოსაცდელი აეროდინამიკური მილის ახალი კონსტრუქცია, სადაც გათვალისწინებული იქნა დამბერავი ქარის დედამიწის ზედაპირიდან დაშორების მიხედვით სიჩქარეების ცვლილების კანონზომიერებები. შესაბამისი მსგავსების კრიტერიუმები შეადგინა ჯენკინსმა 1954 წელს.

1963 წელს ლონდონში, პირველად ჩატარდა ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების განსაზღვრის პრობლემებისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო კონფერენცია. შრომები მოიცავდნენ, როგორც ექსპერიმენტულ, ასევე, თეორიულ საკითხებს. განხილული იყო როგორც დეტერმინირებული მოდელები, ასევე, სტატისტიკური აეროდინამიკური მიდგომით აგებული მოდელები. ფრანკმა წარმოადგინა ჯენსენის მასშტაბირების კანონები, დევენპორტმა შეიმუშავა დატვირთვების სტატისტიკურად გათვლის წესი და ნიუბერრიმ შეიმუშავა ნატურული ექსპერიმენტებით სამშენებლო ნორმების დადგენის საწყისები. 1975 წელს მეოთხე საერთაშორისო კონფერენციაზე, ჩამოყალიბებულ იქნა სამშენებლო აეროდინამიკის ასოციაცია.

როგორც კონფერენციათა მასალები გვიჩვენებენ, პარალელურად ვითარდება როგორც ექსპერიმენტული მიდგომები, ასევე, თეორიული გათვლის მეთოდები: სასრულ-სხვაობათა და პირდაპირი, ვარიაციული მეთოდები სამშენებლო აეროდინამიკის ამოცანების ამოსახსნელად. ამიტომ, ჩვენ განვიხილავთ როგორც სტატისტიკურ(ლიუვილისა და

ბოლცმანის) მიდგომას, ასევე, ჰიდროაეროდინამიკურ ნავიე-სტოქსის მიდგომას.

3.1. ლიუვილის მათემატიკური მოდელი

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა შედგება მეტად მრავალრიცხოვანი ნაწილაკებისაგან, თითოეული ნაწილაკისათვის ლაგრანჟის განტოლების ჩაწერა, ან მოძრაობის განტოლების რომელიმე სხვა ფორმით ჩაწერა, არ გვაძლევს საიმედო შედეგს, რადგან კომპიუტერის ოპერატიულ მეხსიერებაც შემოფარგლულია, ამასთან შეუძლებელია საწყისი პირობების ზუსტი ცოდნაც.

ასეთ შემთხვევაში, მაგალითად, თუ საქმე გვაქვს გაზთან, სითხესთან, ან დეფორმირებად სხეულთან, რომლებიც უამრავი მოლეკულებისაგან შედგება, ჩვენ ვერ გამოვიყენებთ პირდაპირ, თეორიული მექანიკის ცნობილ მოდელებს, ამიტომ, უნდა ვეძიოთ სხვა მახასიათებლები და განმსაზღვრელი პარამეტრები, რომლებიც შესასწავლ გარემოს არა მოლეკულურ დონეზე, არამედ უფრო გლობალური – საშუალო მახასიათებლების დონეზე წარმოადგენენ [25-38]. ან, განვიხილოთ სისტემის ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლები.

სისტემის, ალბათური, სტატისტიკური მახასიათებლებით მოდელირებას ახდენენ სტატისტიკურ მექანიკასა და კვანტურ ფიზიკაში.

განვიხილოთ, ჰამილტონის განტოლებები

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.1)$$

n-მატერიალური წერტილისათვის, როდესაც n-იმდენად დიდია, რომ წერტილთა საწყისი განლაგებანი $q_i(0)$ და მათი საწყისი იმპულსები $p_i(0)$ - განისაზღვრებიან მხოლოდ გარკვეული ალბათობით, გარკვეულ საზღვრებში მაგალითად, 1სმ^3 გაზი ნორმალურ პირობებში შეიცავს დაახლოებით 10^{23} მოლეკულას, ამიტომ ცხადია, რომ შეუძლებელია მათი ზუსტი განლაგებისა და იმპულსების დადგენა.

თუ $f_N(\vec{p}, \vec{q}, \vec{t}) = C$ -არის (3.1) სისტემის პირველი ინტეგრალი ანუ თუ ის შეესაბამება, მოცემული სისტემის რეალურ მოძრაობას, მაშინ სისტემის მოძრაობისას ის რჩება მუდმივი, ე.ი.

$$\frac{df_N}{dt} = 0. \quad (3.2)$$

მაგრამ, თუ გავშლით (3.2) ტოლობას სრული წარმოებულის ფორმულით, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (3.3)$$

ამ განტოლებაში, თუ შევიტანთ (3.1) ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{df_N}{dt} + \sum_i \left(\frac{\partial f_N}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_N}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (3.4)$$

ამ განტოლებას **ლიუვილის** განტოლებას უწოდებენ. თუ გამოვიყენებთ პუასონის ფრჩხილების ცნებას, ლიუვილის (3.4) განტოლება გადაიწერება სახით:

$$\frac{df_N}{dt} + \{H \cdot f\} = 0. \quad (3.5)$$

თუ, გავითვალისწინებთ სისტემის სტატისტიკურ განხილვას და f_N -ფუნქციას განვიხილავთ, როგორც შესაძლო საწყისი მონაცემების განაწილების სიმკვრივეს, მაშინ (3.5) ლიუვილის მოდელი, სწორედ ის მოდელია, რომელიც საფუძვლად უდევს მთელ სტატისტიკურ მექანიკას.

(3.5)-მოდელი აღწერს, $(p, q) \rightarrow (p+dp, q+dq)$ ფაზურ სივრცეში, სისტემის ყოფნის

f_N -ალბათობის სიმკვრივის განაწილებას დროის მიხედვით, თუ, არ ხდება სხვა-დასხვა ნაწილაკების ურთიერთშეჯახება. ხოლო, თუ გვინდა გავითვალისწინოთ სისტემაში შემავალი მატერიალური წერტილების შეჯახებებიც, მაშინ უნდა მივმართოთ **ბოლცმანის** მათემატიკურ მოდელს.

3.2. ბოლცმანის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ გაზი, რომელიც შეიცავს N -ერთნაირ მოლეკულას, რომლებიც მოთავსებული არიან V მოცულობის ჭურჭელში. დაუშვათ, რომ მოლეკულები წარმოადგენენ იდეალურად დრეკად ბურთულებს. შეჯახებისას, მოლეკულების სრული ენერგია და იმპულსი ინახება (არ იცვლება). გაზის სიმკვრივე იმდენად მცირეა, რომ ორი მოლეკულის შეჯახებაზე, მეზობელი მოლეკულები არ მოქმედებენ. ამასთან, ჩვენ შემოვიფარგლებით თითქმის იდეალური გაზით.

ავღნიშნოთ $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ -იმ მოლეკულების რაოდენობა ($\leq N$) რომელთა სიჩქარეების კომპონენტებიც მოთავსებული არიან v_x და $v_x + dv_x$, v_y და $v_y + dv_y$, v_z და $v_z + dv_z$ -ს შორის. $f_N(\vec{v})$ - ფუნქციას უწოდებენ სიჩქარეების განაწილების ფუნქციას. განვიხილოთ ერთგვაროვანი და იზოტროპიული გაზი და უგულვებელ-ყოთ გარეშე მოქმედი ძალები. ასეთ შემთხვევაში, განაწილების ფუნქცია არაა დამოკიდებული სივრცით კოორდინატებზე და დამოკიდებულია, მხოლოდ სიჩქარის სიდიდეზე, ე.ი. $f_N(\vec{v}) = f_N(v^2)$. განაწილების ფუნქციის ნორმირების პირობას აქვს სახე:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(\vec{v}) d\vec{v} = N. \quad (3.6)$$

ცხადია, რომ უსასრულო სიჩქარეები არ არსებობს, ამიტომ f_N -ფუნქცია უნდა ქრებოდეს $\pm\infty$ -საკენ (\vec{v})-ს მისწრაფებისას. გაზი იმყოფება მოლეკულური ქაოსის მდგომარეობაში. განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევას, როცა ეჯახება ორი მოლეკულა. (ე.ი. სამი მოლეკულის ან მეტის ერთდროული დაჯახება არ განიხილება). ვთქვათ, დაჯახებამდე მოლეკულებს ჰქონდათ \vec{v} და \vec{v}_1 სიჩქარეები. დაჯახების შემდეგ, მათი სიჩქარეებია \vec{v}' და \vec{v}'_1 . ვგულისხმობთ, რომ მაშინ ერთ-ერთი უახლოვდება მეორეს $\vec{g} = \vec{v}_1 - \vec{v}$ ფარდობითი სიჩქარით და სცილდება მას $\vec{g}' = \vec{v}'_1 - \vec{v}'$ სიჩქარით. დაჯახების მიმართულება ავლნიშნოთ ერთეულოვანი \vec{n} -ვექტორით, მიმართულია \vec{g} და \vec{g}' -ს შორის კუთხის ბისექტრისის გასწვრივ. მაშინ,

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}); \quad |g| = |g'|; \quad (3.7)$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{g}). \quad (3.8)$$

თუ, გამოვთვლით (3.7) და (3.8) გარდაქმნის იაკობიანს მოცემული \vec{n} და \vec{g} ვექტორებისათვის, მივიღებთ რომ

$$d\vec{v}d\vec{v}_1 = d\vec{v}'d\vec{v}'_1. \quad (3.9)$$

ასე, რომ სიჩქარეების ფაზურ სივრცეში ელემენტარული მოცულობა დაჯახების მიმართ ინვარიანტულია.

განვიხილოთ ნაწილაკ-სამიზნის ზედაპირის კონცენტრული სფერო რომლის რადიუსიცაა a და ავაგოთ შეჯახების ცილინდრი, რომლის ფუძეც მდებარეობს სფეროს ზედაპირზე და ცენტრების ხაზზე. ცილინდრის მსახველი პარალელურია პირველი ნაწილაკის სიჩქარისა დაჯახებამდე. ვთქვათ, დახრილი ცილინდრის ფუძის ფართობია $a^2 \sin \Psi d\Psi d\Phi$, ხოლო მსახველის სიგრძეა $|v| \times g$. დროის ერთეულის განმავლობაში სამიზნეს დაეჯახებიან ყველა ნაწილაკები, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ შუალედში, ხოლო ცენტრები ვარდებიან ამ ცილინდრში. ასეთი ნაწილაკების რაოდენობაა $f_N(\vec{v})d\vec{v}$ გამრავლებული ცილინდრის მოცულობაზე:

$$f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot (g \sin \Psi) a^2 \cos \Psi d\Psi d\Phi = f_N(\vec{v})d\vec{v} \cdot g I(\theta, g) d\Omega; \quad (3.10)$$

სადაც

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\Phi; \quad (3.11)$$

θ -გაბნევის კუთხეა,

$\pi \cdot I(\theta, g)$ - გაბნევის კვეთია, რომელიც ჩვენს შემთხვევაში უდრის

$$\frac{\pi a^2}{4}$$

ასეთი გაბნევის ცენტრების რაოდენობა, ანუ იმ მოლეკულების რაოდენობა, რომელთა სიჩქარეებიც მოთავსებულია $(\vec{v}_1, \vec{v}_1 + d\vec{v}_1)$ შუალედში, უდრის $f_N(\vec{v})d\vec{v}$. ამიტომ, აღნიშნული ტიპის დაჯახებათა რაოდენობა დროის ერთეულში იქნება:

$$A = f_N(\vec{v})f_N(\vec{v}_1)d\vec{v}d\vec{v}_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (3.12)$$

არსებობენ, აგრეთვე მოცემული დაჯახებების შექცეული დაჯახებებიც, რომელთა რაოდენობა:

$$B = f_N(\vec{v}')f_N(\vec{v}'_1)d\vec{v}'d\vec{v}'_1 \cdot gI(\theta, g)d\Omega. \quad (3.13)$$

განაწილების ფუნქციის სრული ცვლილება $\frac{df_N}{dt}d\vec{v}$ იქნება B-A სხვაობის ინტეგრალი \vec{v}_1, \vec{v}'_1 და კუთხეების მიხედვით:

$$\frac{df_N}{dt} = \int (f'_N f'_{1N} - f_N f_{1N}) gI(\theta, g) d\vec{v}_1 d\Omega. \quad (3.14)$$

$$\text{სადაც } f_N = f_N(\vec{v}), f_{1N} = f_N(\vec{v}_1), f'_N = f_N(\vec{v}'), f'_{1N} = f_N(\vec{v}'_1). \quad (3.15)$$

(3.14) განტოლებას **ბოლცმანის** განტოლებას უწოდებენ.

სტატიკური მექანიკის ძირითადი ამოცანაა, გამოსახოს მაკროსკოპული სიდიდეები: T-ტემპერატურა, p-წნევა, ρ -სიმკვრივე და ა.შ. განაწილების ალბათობათა f_N სიმკვრივის მეშვეობით ფაზურ სივრცეში. უწყვეტ ტანთა მექანიკის მოდელების შესადგენად გამოიყენება ტენზორული აღრიცხვა და შენახვის კანონები.

3.3. ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ტენზორული ალგებრა არის ვექტორული აღრიცხვის განზოგადოება მრუდწირული კოორდინატების შემთხვევაში. ტენზორული აღნიშვნები საშუალებას გვაძლევს გავამარტივოთ უწყვეტ ტანთა მათემატიკური მოდელები.

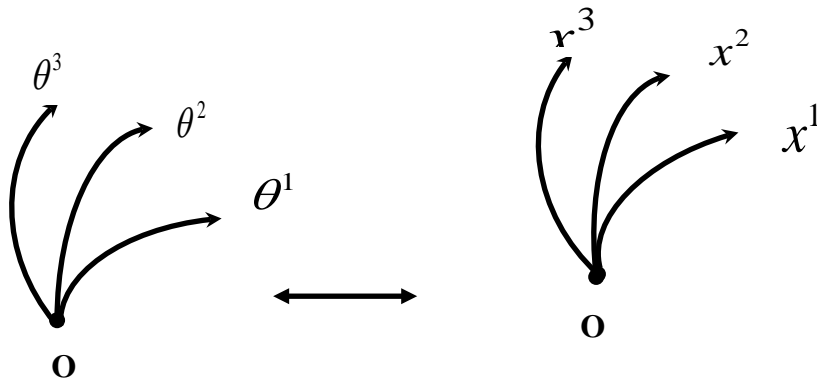
ტენზორულ ალგებრაში \vec{a} - ვექტორის კომპონენტების აღსაწერად გამოიყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს:

$$a_i \text{ და } a^i; \quad (3.16)$$

თუ ინდექსები ჩაწერილია ზემოთ – მაშინ მათ უწოდებენ \vec{a} - ვექტორის

a^i -კონტრავარიანტულ კომპონენტებს, ხოლო თუ, ინდექსები ჩაწერილია ქვემოთ, მაშინ მათ უწოდებენ \vec{a} -ვექტორის a_i -კოვარიანტულ კომპონენტებს.

ტენზორის, კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტების განსასაზღვრად, განვიხილოთ ერთი θ^i -მრუდწირული კოორდინატთა სისტემიდან მეორე x^i -კოორდინატთა სისტემაზე გადასვლის ფორმულები.



ნახ. 3.1. θ^i და x^i მრუდწირული კოორდინატთა სისტემებია

ვთქვათ, გარდაქმნის ფორმულებს აქვს სახე:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^1(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^2 &= x^2(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \\ x^3 &= x^3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \end{aligned} \right\}. \quad (3.17)$$

ეს სამი ფორმულა სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ერთ სტრიქონში:

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (3.18)$$

ჩავთვალოთ, რომ (3.18) გარდაქმნები არიან, ურთიერთცალსახა და ორმხრივ უწყვეტნი (ჰომეომორფიზმი), P -წერტილის მიდამოში. მაშინ, ცხადია რომ გარდაქმნის იაკობიანი ამ წერტილში განსხვავდება ნულისაგან, ანუ

$$J = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \right\|, \quad \det J \neq 0. \quad (3.19)$$

ამ შემთხვევაში, არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემის ძალით, (3.18) ფორმულები შეიძლება შევაბრუნოთ P -წერტილის მიდამოში, ანუ ამოვხსნათ θ^i -კოორდინატების მიმართ,

$$\theta^i = \theta^i(x^1, x^2, x^3) \quad (3.20)$$

(3.18) ფორმულების ბაზაზე, დავადგინოთ თუ როგორ გარდაიქმნებიან შესაბამისი კოორდინატების დიფერენციალები.

$P \in \mathbb{R}^3$ წერტილის მიდამოში, (3.18)-დან მივიღებთ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^1} d\theta^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^2} d\theta^2 + \frac{\partial x^i}{\partial \theta^3} d\theta^3. \quad (3.21)$$

სიმბოლური აღნიშვნების მეშვეობით (3.21) გადაიწერება მოკლედ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j. \quad (3.22)$$

ამ ფორმულაში გამოყენებულია აინშტაინის შეთანხმება შეჯამების შესახებ, ე.ი. როცა რომელიმე ჩანაწერის ერთ წევრში, ორჯერ მეორდება რომელიმე ინდექსი, მაშინ იგულისხმება რომ ამ j -ინდექსით ხდება შეჯამება $j = \overline{1,3}$.

განსაზღვრება: იმ j -ინდექსს, რომლითაც ხდება შეჯამება – **ყრუ ინდექსი** ეწოდება.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ყრუ ინდექსი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სხვა ინდექსით, რომელიც არ გვხვდება მოცემულ ჩანაწერში.

განსაზღვრება: იმ ინდექსს, რომელიც ერთწევრში არ მეორდება თავისუფალი ინდექსი ეწოდება.

(3.22)-ჩანაწერში i -არის თავისუფალი ინდექსი, j -ყრუ ინდექსია.

განსაზღვრება: ტენზორის კომპონენტების თავისუფალ ინდექსთა რიცხვს – ტენზორის **რანგი** ეწოდება.

მაგალითად: a_i და a^i - პირველი რანგის ტენზორის (რანგის) კომპონენტებია;

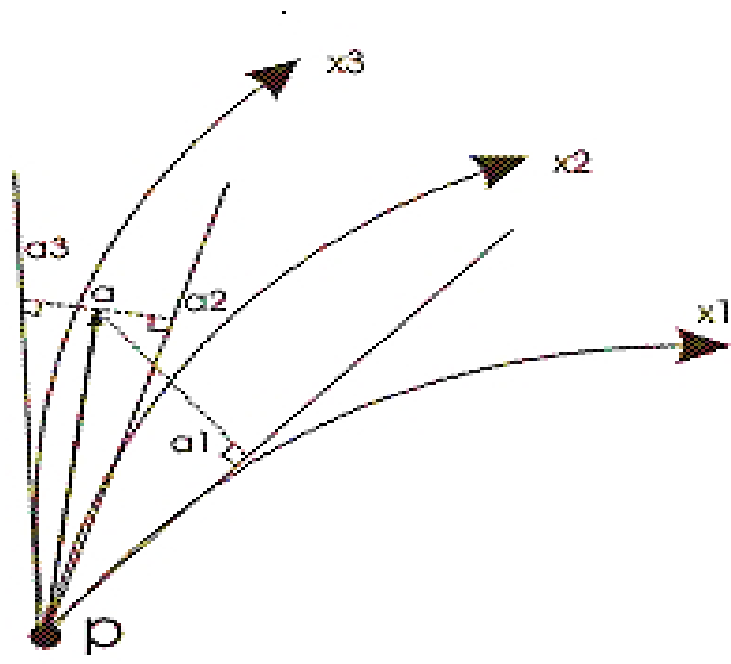
a_{ij}, a^{ij}, a_i^j -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებია

$\varphi(x_1, x_2, x_3)$ -სკალარული ფუნქცია, ანუ, ნულ-რანგის ტენზორია.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ a^i -სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა სისტემის შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან, ისევე, როგორც გარდაქმნის ფორმულების (3.22) დიფერენციალები, ანუ, თუ ძველ სისტემაში a^j და ახალ სისტემაში a'^i -კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$a'^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} a^j. \quad (3.23)$$

იმისათვის, რომ გავიგოთ კონტრავარიანტული კომპონენტების არსი, ავაგოთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემა (ნახ. 3.2) P-წერტილში, სადაც მოდებულია \vec{a} -ვექტორი.



ნახ. 3.2. \vec{a} -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

გავავლოთ მრუდწირული x^i -ღერძების მხებები P-წერტილში. მაშინ \vec{a} -ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ ამ ვექტორის ორთოგონალურ პროექციებს a^i , შესაბამისი მრუდწირული ღერძების მხების მიმართულებებზე, რომლებიც გავლებულები არიან P-წერტილში.

მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტებიც გარდაიქმნებიან (3.23) ფორმულების ანალოგიურად.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრულ σ^{ij} -სიდიდეებს ეწოდებათ მეორე რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა შეცვლისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^m} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^n} \sigma^{mn} \quad (3.24)$$

ამ ფორმულებში აინშტაინის შეთანხმების თანახმად, იგულისხმება ორმაგი შეჯამება m და n ყრუ ინდექსებით, ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

უფრო მაღალი რანგის ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ანალოგიურად.

ეხლა განვიხილოთ ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტები. ამისათვის, დაგვჭირდება φ -ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის ფორმულების შესწავლა. თუ, მოცემული გვაქვს $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ -სკალარული ფუნქცია, მაშინ მისი გრადიენტი სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \quad (3.25)$$

ცხადია რომ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \quad (3.26)$$

(3.26) – ფორმულაში იგულისხმება შეჯამება j -ყრუ ინდექსით (ეს არის რთული ფუნქციის წარმოებული), i -თავისუფალი ინდექსია.

განსაზღვრება: P -წერტილში განსაზღვრულ a_i - სიდიდეებს ეწოდებათ პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა მრუდწირული ღერძების გარდაქმნისას, ძველ კოორდინატთა სისტემაში a_j და ახალ კოორდინატთა სისტემაში a'_i დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან სკალარული ფუნქციის გრადიენტის გარდაქმნის (3.26) ფორმულების მსგავსად:

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} a_j \quad (3.27)$$

ამ ფორმულებში j -ყრუ ინდექსია (ხდება შეჯამება ამ ინდექსით), i -თავისუფალი ინდექსია.

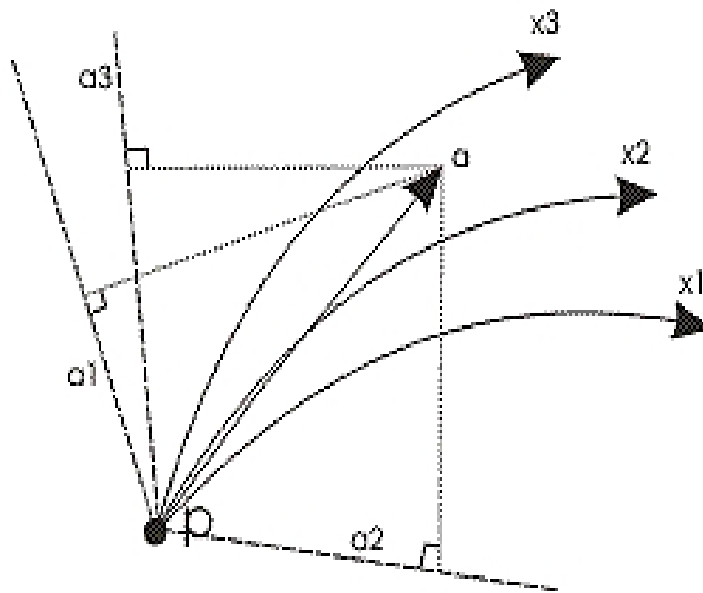
მეორე რანგის ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების განსაზღვრისთვის გამოიყენება (3.27) ფორმულების მსგავსი გარდაქმნები.

განსაზღვრება: P -წერტილში განსაზღვრული σ_{ij} სიდიდეებს ეწოდებათ მეორე რანგის კოვარიანტული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \sigma_{mn} \quad (3.28)$$

ამ ფორმულებში m და n ყრუ ინდექსებია (ორმაგი ჯამია), ხოლო i და j – თავისუფალი ინდექსებია.

პირველი რანგის ტენზორის (ვექტორის) კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული აზრის ასახსნელად, განვიხილოთ ნახ. 3.3 პირველი რანგის ტენზორი, ანუ, \vec{a} -ვექტორი მოდებულია P -წერტილში.



ნახ. 3.3. \vec{a} -ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

\vec{a} -ვექტორის a_i - კოვარიანტული კომპონენტა წარმოადგენს \vec{a} -ვექტორის ორთაგონალურ პროექციას x^2 და x^3 ღერძებზე მოჭიმული მინიმალური ზედაპირის P-წერტილში აღმართულ დადებით ნორმალურ (პერპენდიკულარ) მიმართულებაზე,

$$\hat{e}_1 = \frac{\hat{e}^2 \times \hat{e}^3}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}; \quad (3.29)$$

აქ $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$ - P-წერტილში განსაზღვრული კონტრავარიანტული ბაზისია Ox^1, x^2, x^3 მრუდწირული კოორდინატა სისტემისათვის, რომელთაც აქვს ღერძებისადმი მხეზი მიმართულება, $\hat{e}^1, \hat{e}^2, \hat{e}^3$ - შესაბამისი კოვარიანტული ბაზისია, სადაც

$$\hat{e}_2 = \frac{\hat{e}^3 \times \hat{e}^1}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}, \quad \hat{e}_3 = \frac{\hat{e}^1 \times \hat{e}^2}{[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]}. \quad (3.30)$$

ხოლო $[\hat{e}^1 \hat{e}^2 \hat{e}^3]$ - კონტრავარიანტული ბაზისის ვექტორების შერეული ნამრავლია.

მაშასადამე, საბოლოოდ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ \vec{a} -ვექტორის, a_i -კოვარიანტული კომპონენტები წარმოადგენენ \vec{a} -ვექტორის ორთაგონალურ პროექციებს, შესაბამისი \hat{e}_i - კოვარიანტული ბაზისის ვექტორის მიმართულებაზე.

P.S. თუ გამოვიყენებთ (3.28) გარდაქმნის ფორმულების ანალოგიურ ფორმულებს, შეგვიძლია შემოვიყვანოთ უფრო მაღალი რანგის ტენზორების კოვარიანტული კომპონენტების ცნებაც.

ზოგჯერ, განიხილავენ ტენზორის შერეულ კომპონენტებს, ე.ი. ისეთ კომპონენტებს, რომლებსაც ზოგიერთი ინდექსი აქვთ კოვარიანტული და ზოგიც კონტრავარიანტული.

განვიხილოთ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები.

განსაზღვრება: P-წერტილში განსაზღვრული $T_{.nq}^{m..}$ -სიდიდეებს ეწოდებათ მესამე რანგის ტენზორის შერეული კომპონენტები, თუ კოორდინატთა გარდაქმნისას, ისინი გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$T_{.sp}^{r..} = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial \theta^s} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial \theta^p} \cdot T_{.nq}^{m..} \quad (3.31)$$

შენიშვნა: ამ კომპონენტებში s და p –კოვარიანტული ინდექსებია, r- კონტრავარიანტული. მარჯვენა მხარეში, იგულისხმება შეჯამება სამი ინდექსით (სამმაგი ჯამი) m, n და q.

3.4. სიმბოლური აღნიშვნები

მათემატიკური მოდელების კომპაქტურად ჩასაწერად იყენებენ სიმბოლურ აღნიშვნებს (ხშირად განიხილავენ დეკარტულ ტენზორებს).

განვიხილოთ ველის თეორიის ოპერატორები (როგორც დეკარტული ტენზორები, სადაც არ ანსხვავებენ კონტრავარიანტულ და კოვარიანტულ კომპონენტებს):

სკალარული ველის გრადიენტი

$$\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right). \quad (3.32)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\varphi_{,i} \quad (3.33)$$

მაშასადამე,

$$\varphi_{,1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} ; \quad \varphi_{,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} ; \quad \varphi_{,3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} . \quad (3.34)$$

ანალოგიურად, \vec{v} -ვექტორული ველის დივერგენცია,

$$\text{div}\vec{v} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + \frac{\partial v^3}{\partial x^1} \right). \quad (3.35)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ჩაიწერება ასე:

$$v^{i..i} \quad (3.36)$$

აქ i-ყრუ ინდექსია (იგულისხმება შეჯამება i-ინდექსით).

ვექტორული \vec{v} -ველის როტორი, როგორც ვიციტ გამოითვლება დეტერმინანტით:

$$rot\vec{v} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \hat{e}^1 & \hat{e}^2 & \hat{e}^3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}. \quad (3.37)$$

ამ ოპერატორის ჩასაწერად სიმბოლური ფორმით, უნდა განვიხილოთ ლევი-ჩივიტას_ფსევდოტენზორი, რომლის კოვარიანტული ε_{ijk} - კომპონენტებიც განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \\ -1, \\ 0, \end{cases} \quad \text{შესაბამისად,} \quad (3.38)$$

თუ, (i,j,k) ლუწი ჩასმაა (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;
 თუ, (i,j,k) კენტი ჩასმაა (გადანაცვლება) (1,2,3)-დან;
 თუ, (i,j,k)-ში, რომელიმე ორი ან სამივე ინდექსი ერთმანეთის ტოლია.
 მაგალითად: $\varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = -1$, $\varepsilon_{122} = 0$ და ა.შ.

ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის ε_{ijk} -კომპონენტები, საშუალებას გვაძლევენ კომპაქტურად ჩავწეროთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. მაგალითად, თუ

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}; \quad (3.39)$$

მაშინ

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k. \quad (3.40)$$

ასევე, სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი,

$$\lambda = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3.41)$$

მაშასადამე, ლევი-ჩივიტას ტენზორის კოვარიანტული კომპონენტების მეშვეობით, მოკლედ ჩაიწერება ვექტორული ნამრავლი, შერეული ნამრავლი და ასევე დეტერმინანტიც.

რადაგან ვექტორული \vec{v} -ველის როტორი წარმოადგენს ნაბლა

$$\vec{V} \text{ -ოპერატორისა და } \vec{v} \text{ -ვექტორის, ვექტორულ ნამრავლს} \quad (3.42)$$

$$rot\vec{v} = \vec{v} \times \vec{v}$$

სიმბოლურად, ველის როტორის კომპონენტები ჩაიწერებიან ფორმულით:

$$(rot\vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}. \quad (3.43)$$

განვიხილოთ ეხლა, ლაპლასის Δ -ოპერატორი:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}. \quad (3.44)$$

სიმბოლურად, ჩაიწერება ფორმით $\Delta\varphi = \varphi_{,ii}$. (3.45)

აქ i -ურთ (მუნჯი) ინდექსია ე.ი. იგულისხმება შეჯამება.

სიმბოლურ აღნიშვნებში გაწარმოების ოპერატორი აღინიშნება მძიმეთი, ყველა ინდექსი რომელიც მძიმეს მოყვება, წარმოადგენს იმ ცვლადის ინდექსს, რომლითაც ხდება გაწარმოება. მაგალითად:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = T_{,ij} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} = \sigma_{ij,mn}. \quad (3.46)$$

3.5. ოპერატორები ტენზორებზე. მეტრიკული ტენზორები

განსაზღვრება: ორი ტენზორის გარე ნამრავლი ეწოდება ისეთ ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც წარმოადგენენ თანამამრავლი ტენზორების კომპონენტების ყველა შესაძლო ნამრავლს. **მაგალითად:**

$$a_i \cdot b_j = T_{ij} \quad v_i \cdot T_{jk} = T_{ijk}.$$

P.S. გარე ნამრავლის რანგი წარმოადგენს თანამამრავლთა რანგების ჯამს.

$$\text{rang}T_{ij} = \text{rang}a_i + \text{rang}b_j = 1 + 1 = 2$$

განსაზღვრება: ტენზორის ნახვევის ოპერაცია, ეწოდება ისეთ ოპერაციას, როცა ერთმანეთს უტოლდება რომელიმე ორი ინდექსი და ხდება შეჯამება ამ ინდექსით.

მაგალითად: ε_{ijk} -ტენზორის კომპონენტებზე ნახვევის ოპერაცია მოგვცემს: $\varepsilon_{iik} \vee \varepsilon_{iji} \vee \varepsilon_{ijj}$.

P.S. ნახვევის ოპერაციის შედეგად, ტენზორის რანგი მცირდება ორით.

მაგალითად: მეორე რანგის ტენზორის ნახვევი – სკალარული ფუნქციაა, σ_{ij} -ს ნახვევია σ_{ii} -სკალარი.

განსაზღვრება: ორი ტენზორის შიგა ნამრავლი, ეწოდება ისეთ ნამრავლს, რომელზედაც მოქმედებს ისეთი ნახვევის ოპერაცია, რომ უტოლდებიან რომელიმე ორი ინდექსი სხვადასხვა თანამამრავლებიდან.

მაგალითად: თუ გვაქვს ორი ვექტორი (პირველი რანგის ტენზორები) \vec{a} და \vec{b} , მაშინ მათი გარე ნამრავლია $a_i b_j$, ხოლო შიგა ნამრავლი იქნება: $a_i b_i$ -ე.ი. სკალარული ნამრავლი.

მაღალი რანგის ტენზორებს გააჩნიათ რამოდენიმე შიგა ნამრავლი.

მაგალითად: ძაბვის- σ_{ij} ტენზორისა და დეფორმაციის ε_{mn} ტენზორებისათვის, გვაქვს შიგა ნამრავლები:

$$\sigma_{ij}\epsilon_{in} ; \sigma_{ij}\epsilon_{mi} ; \sigma_{ij}\epsilon_{jn} ; \sigma_{ij}\epsilon_{mj} . \quad (3.47)$$

მეტრიკული ტენზორის შემოსატანად, განვიხილოთ IR^3 -ში მახლობელი წერტილები $P(x)$ და $Q(x+dx)$. ამ ორ წერტილს შორის მანძილის დიფერენციალის კვადრატის, დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში არის:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (3.48)$$

სიმბოლოურ აღნიშვნებში გვაქვს ჩანაწერი:

$$ds^2 = dx^i dx^i . \quad (3.49)$$

თუ, გადავალთ მრუდწირული კოორდინატთა სისტემაში

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \quad \text{და} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p . \quad (3.50)$$

მაშინ (4.49) მიიღებს სახეს:

$$ds^2 = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} d\theta^q \cdot \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^p = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} d\theta^q d\theta^p . \quad (3.51)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$g_{qp} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^q} \frac{\partial x^i}{\partial \theta^p} . \quad (3.52)$$

g_{qp} -წარმოადგენენ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტებს, რომელსაც **მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ**.

ორ მახლობელ წერტილს შორის მანძილის (3.51) კვადრატის, (3.52)-მეტრიკული ტენზორის მეშვეობით მოიცემა მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში:

$$ds^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j . \quad (3.53)$$

განსაზღვრება: მრავალსახეობას, სადაც მეტრიკა (მანძილი) განისაზღვრება დადებითად-განსაზღვრული (3.53) კვადრატული დიფერენციალური ფორმით-რიმანის მრავალსახეობა ეწოდება.

რიმანის მრავალსახეობაში არ არსებობს ერთიანი დეკარტის კოორდინატთა სისტემა მთელი სივრცისათვის და ეს არის სივრცის შინაგანი თვისება. ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილი, რიმანის მრავალსახეობაში შეიძლება იყოს რაღაც მრუდი (და არა წრფის მონაკვეთი), რომელსაც გეოდეზიურ წირს უწოდებენ. ეს ცნება შემოიღო გაუსმა, რომელიც სწავლობდა სფეროს ზედაპირზე მანძილების გამოთვლის ამოცანას (დედამიწისთვის).

ზოგად შემთხვევაში მეტრიკული ტენზორის g_{ij} კომპონენტები დამოკიდებული არიან სივრცით კოორდინატებზე. თუ, მეტრიკული ტენზორი არ არის დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე, მაშინ ასეთ სივრცეს ერთგვაროვან რიმანის მრავალსახეობას უწოდებენ.

იმის მიუხედავად, რომ რიმანის სივრცეში, საზოგადოდ, შეუძლებელია ერთიანი დეკარტული კოორდინატთა სისტემის შემოტანა, ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის შეგვიძლია შემოვიღოთ ლოკალური(ადგილობრივი) დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, რომელიც მოგვცემს საშუალებას შევისწავლოთ ამ წერტილის მახლობელი არეების გეომეტრია. ასეთ არეებს – **რუქებს უწოდებენ, ხოლო რუქების ერთობლიობას უწოდებენ რიმანის სივრცის ატლასს.**

მეტრიკული ტენზორის g^{kj} -კონტრავარიანტული კომპონენტები განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$g_{ij} g^{kj} = g_{ji} g^{jk} = \delta_i^k . \quad (3.54)$$

სადაც δ_i^k -კრონეკერის ტენზორის შერეული კომპონენტებია. (3.54) ტოლობიდან ჩანს, რომ მეტრიკული ტენზორის კონტრავარიანტული კომპონენტების g^{kj} -მატრიცა, წარმოადგენს მისი g_{ij} -კოვარიანტული კომპონენტების მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას.

მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები საშუალებას გვაძლევენ შემოვიღოთ ინდექსთა **ჟონგლირების ოპერაცია**, ანუ მათი აწევ-დაწევის ოპერაცია.

მაგალითად:

$$g^{ij} T_{kj} = T_k^i ; \quad (3.55)$$

$$g_{ij} T_{mn}^i = T_{jmn} . \quad (3.56)$$

განსაზღვრება: ისეთ ტენზორებს, რომელთათვისაც განიხილება კოორდინატთა სისტემის მხოლოდ ერთოგონალური გარდაქმნები, **დეკარტული ტენზორები ეწოდებათ.**

დეკარტული ტენზორებისათვის, მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევიან კრონეკერის ტენზორის კომპონენტებს:

$$g_{ij} = \delta_{ij} ; \quad (3.57)$$

სადაც

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

შესაბამისად,

თუ, $i=j$;

თუ, $i \neq j$.

ანუ δ_{ij} -კომპონენტები ადგენენ ერთეულოვან მატრიცას.

შენიშვნა: დეკარტული ტენზორებისათვის კონტრავარიანტული და კოვარიანტული კომპონენტები ერთმანეთს ემთხვევიან.

3.6 მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტები.

ჰამილტონ-კელის თეორემა

განვიხილოთ, მეორე რანგის T ტენზორის შიგა ნამრავლი, პირველი რანგის n ტენზორზე:

$$\vec{v} = T \cdot \vec{n}; \quad (3.58)$$

ეს ტოლობა კომპონენტებში მიიღებს სახეს:

$$v_i = T_{ij} \cdot n_j; \quad (3.59)$$

მეორე რანგის T ტენზორს შეიძლება შევხედოთ, როგორც წრფივ ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს \vec{n} ვექტორულ ველზე და გვაძლევს ახალ \vec{v} ვექტორულ ველს.

ისმის კითხვა: არსებობენ, თუ არა ისეთი \vec{n} ვექტორები, რომლებიც წრფივი T ოპერატორის მოქმედების შემდეგ, არ იცვლიან მოქმედების წრფეს, ანუ

λ -**ინვარიანტულნი არიან** T ოპერატორის მიმართ?

პასუხი: თუ \vec{n} ვექტორი ინვარიანტულია T ოპერატორის მიმართ, მაშინ $\vec{v} \updownarrow \vec{n}$ ანუ

$$v_i = \lambda \cdot n_j; \quad (3.60)$$

სადაც λ -ნულისგან განსხვავებული რიცხვია, მაშინ

$$T_{ij} n_j = \lambda \cdot n_j. \quad (3.61)$$

ასეთ, ინვარიანტულ მიმართულებებს, მეორე რანგის T ტენზორის მთავარ მიმართულებებს უწოდებენ, ხოლო შესაბამის λ -რიცხვებს, მთავარი მიმართულების შესაბამის **საკუთრივ რიცხვებს (მნიშვნელობებს) ეძახიან.**

ცხადია, რომ

$$n_i = \delta_{ij} \cdot n_j; \quad (3.62)$$

ამიტომ, თუ შევიტანთ (3.61)-ში, გადავიტანთ მარცხენა მხარეში და ფრჩხილებს გარეთ გავიტანთ n_j -ს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას n_j -ის მიმართ:

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0. \quad (3.63)$$

ეს არის წრფივი ერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა. იმისათვის, რომ მას ჰქონდეს არანულოვანი n_j ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს განტოლებას:

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0. \quad (3.64)$$

ამ განტოლებას საუკუნოვან(მახასიათებელ) განტოლებას უწოდებენ, რადგან ის შემოვიდა განხილვაში ცის მექანიკის ამოცანებიდან (პლანეტათა ორბიტების საუკუნოვანი ცვლილებების შესწავლიდან). გაშლილად (3.64) განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$\lambda^3 - I_T \cdot \lambda^2 + II_T \cdot \lambda - III_T = 0. \quad (3.65)$$

ამ განტოლებას, მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ, ხოლო სკალარული კოეფიციენტები I_T , II_T და III_T წარმოადგენენ T_{ij} -მეორე რანგის ტენზორის ინვარიანტებს.

$$I_T = T_{jj} = tr T_{ij} \quad (\text{მატრიცის კვალი}) \quad (3.66)$$

$$II_T = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) \quad (\text{მეორე ინვარიანტი}) \quad (3.67)$$

$$III_T = |T_{ij}| = \det T_{ij} \quad (\text{მესამე ინვარიანტი}) \quad (3.68)$$

(3.65) განტოლების $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - ფესვებს, T_{ij} -ტენზორის მთავარი (საკუთრივი) მნიშვნელობები ეწოდებათ.

სიმეტრიულ ტენზორებს (ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს ზემოთ), ყოველთვის აქვს ნამდვილი საკუთრივი მნიშვნელობები. თუ, ისინი, ყველა განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ, მათი შესაბამისი მთავარი მიმართულებები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

მთავარ ღერძებში, მეორე რანგის ტენზორს აქვს სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

თუ, $\lambda_1 = \lambda_2$, მაშინ ტენზორის დიაგონალური სახე არაა დამოკიდებული მათი შესაბამისი მიმართულებების არჩევაზე და დამოკიდებულია მხოლოდ λ_3 -ის შესაბამის მიმართულებაზე. თუ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ მაშინ ყველა მიმართულება მთავარი მიმართულებაა.

$Ox_1x_2x_3$ -დან, მთავარ $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ ღერძებზე, გადასვლის მატრიცას აქვს სახე:

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

სადაც $n_i^{(j)}$ არის j-იური მთავარი მიმართულების მიმართული კოსინუსები.

იმისათვის, რომ T_{ij} -მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტები გადავიყვანოთ მთავარ მიმართულებებში T^* , საჭიროა გამოვიყენოთ გარდაქმნა:

$$T^* = A \cdot T \cdot A^T. \quad (3.70)$$

სადაც

$$A = \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \\ n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \\ n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

გადასვლის მატრიცაა, ხოლო A^T -მისი ტრანსპონირებული მატრიცა. პირველ სტრიქონში (3.71) გვაქვს პირველი λ_1 საკუთრივი რიცხვის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, მეორეში λ_2 -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები, ხოლო მესამეში, λ_3 -ის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორის კომპონენტები.

ჰამილტონ-კელის თეორემა: მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა აკმაყოფილებს თავის საუკუნოვან (მახასიათებელ) განტოლებას.

დამტკიცება: მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცა გადავიყვანოთ მთავარ ღერძებში, მაშინ მას ექნება სახე:

$$T^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

განვიხილოთ მისი კვადრატი, მაშინ მივიღებთ $T^{*2} = T^* \cdot T^*$ და მაშასადამე,

$$(T^*)^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

ასევე ვპოულობთ, რომ $(T^*)^3 = (T^*)^2 \cdot T^*$ და

$$(T^*)^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

თუ, შევადარებთ (3.69), (3.72), (3.73), (3.74) დავინახავთ, რომ ტენზორს და მის ხარისხებს ერთნაირი საკუთრივი (მთავარი) მიმართულებები აქვთ. ყველა საკუთრივი მნიშვნელობები აკმაყოფილებენ (3.65) მახასიათებელ განტოლებას, ამიტომ თვით T ტენზორიც აკმაყოფილებს მახასიათებელ განტოლებას

$$T_{ij}^3 - I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E = 0. \quad (3.75)$$

სადაც E-ერთეულოვანი მატრიცაა.

ამ თანადობას ჰამილტონ-კელის თანადობა ეწოდება.

შედეგი: (3.75)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$(T_{ij})^3 = I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E; \quad (3.76)$$

თუ, გავამრავლებთ (3.76) ტოლობას T_{ij} -ზე, მივიღებთ

$$\begin{aligned} (T_{ij})^4 &= I_T \cdot T_{ij}^3 - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = I_T \cdot (I_T \cdot T_{ij}^2 - II_T \cdot T_{ij} + III_T \cdot E) - II_T \cdot T_{ij}^2 + III_T \cdot T_{ij} = \\ &= (I_T^2 - II_T)T_{ij}^2 + (III_T - I_T \cdot II_T)T_{ij} + I_T \cdot III_T \cdot E \end{aligned} \quad (3.77)$$

კიდევ ერთხელ თუ გავამრავლებთ (3.77) ტოლობას T_{ij} -ზე მივიღებთ

$$(T_{ij})^5 -$$

გამოსახულებას, თუ გამოვიყენებთ წინა ფორმულებს მივიღებთ საბოლოოდ, რომ მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ნებისმიერ ხარისხს აქვს სახე:

$$(T_{ij})^n = \varphi_0(I_T, II_T, III_T) \cdot E + \varphi_1(I_T, II_T, III_T) \cdot T_{ij} + \varphi_2(I_T, II_T, III_T)(T_{ij})^2 \quad (3.78)$$

სიმბოლური აღნიშვნებით ინტეგრალური ფორმულები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

სტოქსის თეორემა:

$$\oint_c F_i dx_i = \iiint_s n_i \varepsilon_{ijk} F_{k,j} ds \quad (3.79)$$

გაუსის თეორემა:

$$\int_{\Omega} v_{i,i} d\omega = \int_{\partial\Omega} v_i \cdot n_i ds \quad (3.80)$$

3.7. ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორები

უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები ემყარებიან ისეთ ძირითად ცნებებს, როგორცაა ძაბვა და დეფორმაცია.

ძაბვის σ -ტენზორი – მეორე რანგის ტენზორია, ანუ მას გააჩნია კომპონენტებისაგან შემდგარი მატრიცა:

$$\sigma = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

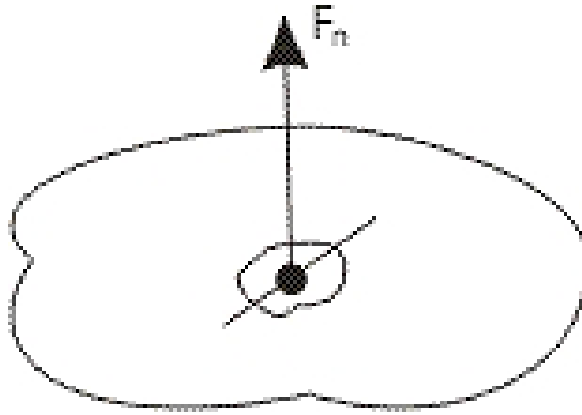
ამ მატრიცაში, დიაგონალურ $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ -კომპონენტებს ნორმალური ძაბვები ეწოდებათ, რადგან ისინი იწვევენ **გაჭიმვა-შეკუმშვის** დეფორმაციას.

ძაბვის ტენზორის დანარჩენ კომპონენტებს, **მხებ ძაბვებს** უწოდებენ და ისინი იწვევენ **სხეულის ფორმის ცვლილებას**.

ძაბვის ტენზორის ცნება – განაზოგადოებს, მექანიკური ძაბვის ცნებას სივრცითი სხეულისათვის. ამიტომ, ჯერ განვიხილოთ მექანიკური ძაბვის ცნება:

განსაზღვრება: მექანიკური ძაბვა σ -არის სიდიდე, რომელიც იზომება ზედაპირის \vec{n} ნორმალის მიმართულებით S-ფართის ერთეულზე მოქმედი F_n -ძალის სიდიდით.

$$\sigma = \frac{F_n}{S}. \quad (3.82)$$

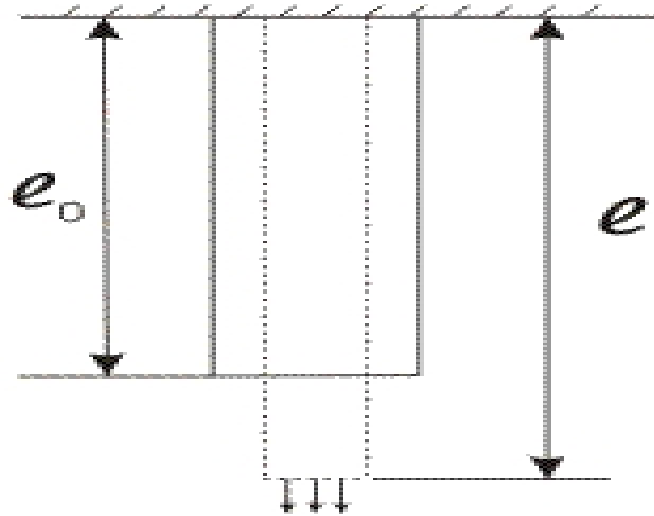


ნახ. 3.4. მექანიკური ძაბვა

სრულიად ანალოგიურად, დეფორმაციის (ε) -ტენზორის ცნება წარმოადგენს, ძელის ფარდობითი ε -წაგრძელების ცნების სივრცულ განზოგადობას.

განსაზღვრება: ძელის ფარდობით ε -წაგრძელებას დეფორმაცია ეწოდება. დეფორმაცია ძელის გაჭიმვისას გამოითვლება ფორმულით:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}. \quad (3.86)$$



დეფორმაციის ტენზორს IR^3 -ში შეესაბამება კომპონენტების მატრიცა

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

აქ, ისევე როგორც ძაბვის ტენზორის შემთხვევაში, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ - ნორმალური დეფორმაციაა, ანუ გაჭიმვა-შეკუმშვის დეფორმაცია, ხოლო დანარჩენი კომპონენტები შეესაბამებიან ფორმის ცვლილებას, მათ მხები დეფორმაციები, ზოგჯერ ძვრის დეფორმაციები ეწოდებათ.

როგორც ცნობილია, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში ($\varepsilon \ll 1$) დრეკადი სხეულები ემორჩილებიან ჰუკის კანონს:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon ; \quad (3.85)$$

სადაც E-იუნგის მოდულია. იუნგის მოდული იმ ძაბვის ტოლია, რომელიც იწვევს ერთეულოვან დეფორმაციას, ანუ სიგრძის გაორმაგებას ($\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 2l_0$)

ჰუკის კანონს ზოგჯერ ჩაწერენ ასე:

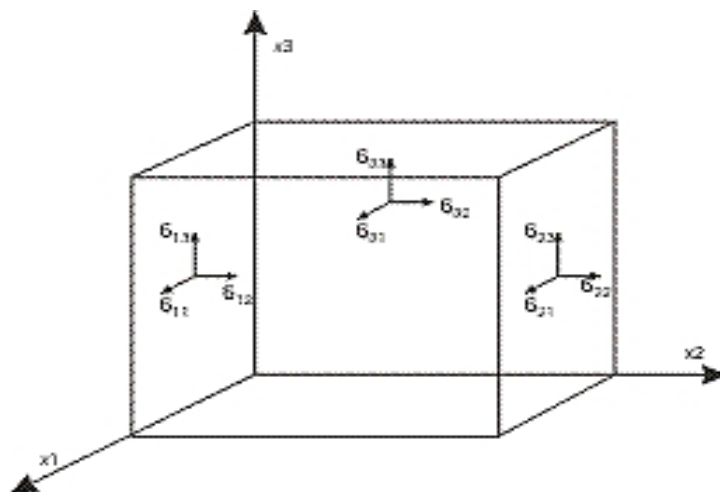
$$\frac{F_n}{S} = E \cdot \frac{l - l_0}{S} ; \quad (3.86)$$

თუ, ჩვენ გვინდა განვაზოგადოთ ჰუკის კანონი სივრცული შემთხვევისათვის, უნდა ჩავწეროთ წრფივი დამოკიდებულება ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn} . \quad (3.87)$$

(3.85)-ტოლობიდან განსხვავებით ,სადაც საკმარისი იყო მასალის თვისებებიდან გამომდინარე, გვეპოვა ერთი E-მუდმივი (ექსპერიმენტებით), სივრცულ (3.87) შემთხვევაში გვაქვს 81 მუდმივი (თუ მასალა ერთგვაროვანია, თუ არადა, საზოგადოდ, 81-ფუნქცია კოორდინატებზე და დროზე დამოკიდებული), რომელთა რაოდენობაც იზოტროპული მასალებისათვის (როცა მასალის თვისება არაა დამოკიდებული მიმართულებაზე) დადის 2 მუდმივამდე, ასე რომ გვაქვს λ და μ ეგრეთწოდებული **ლამეს მუდმივები**. ამ მუდმივებს აქვთ სხვადასხვა მნიშვნელობა, სხვადასხვა მასალისათვის და მაშასადამე, დამოკიდებულია მასალის გვარობაზე.

ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორების კომპონენტების ფიზიკური აზრის ასახსნელად, განვიხილოთ დრეკადი მასალიდან ამოჭრილი კუბი ნახ. 3.5.



ნახ. 3.5. ძაბვის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრის ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ σ_{ij} -არის ძაბვის კომპონენტი, რომელიც მოქმედებს i -ური ღერძების ნორმალურ ფართზე, j -ური ღერძის მიმართულებით. ასეთივეა დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მექანიკური აზრიც.

ზოგჯერ, ცდილობენ გამოყონ საშუალო ნორმალური ძაბვები და მხები ძაბვები. ამ მიზნით, ძაბვის ტენზორს წარმოადგენენ **სფერული და დევიატორული** ნაწილების ჯამის სახით.

განსაზღვრება: ძაბვის ტენზორის სფერული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც მოიცემა მატრიცით:

$$\sigma_{cp.} \cdot E = \begin{pmatrix} \sigma_{cp.} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp.} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (3.88)$$

სადაც $\sigma_{cp.} = -p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$ - საშუალო ნორმალური ძაბვაა.

განსაზღვრება: ძაბვის ტენზორის დევიატორული ნაწილი ეწოდება ტენზორს, რომელიც ავსებს სფერულ ტენზორს, ძაბვის სრულ ტენზორამდე, ანუ

$$(S_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{cp.} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{cp.} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{cp.} \end{pmatrix}; \quad (3.89)$$

ასე, რომ ძაბვის ტენზორი სიმბოლურ აღნიშვნებში შეიძლება ჩაწეროს ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + S_{ij}. \quad (3.90)$$

ადვილად დასამტკიცებელია, რომ ძაბვის ტენზორის დევიატორის პირველი ინვარიანტი ნულის ტოლია (მართლაც (3.89)-ის მთავარ დიაგონალზე მდგარი წევრების ჯამი ნულის ტოლია).

ანალოგიურად, დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ **სფერული და დევიატორული** ნაწილების ჯამის სახით.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \cdot \delta_{ij} + e_{ij}. \quad (3.91)$$

სადაც e_{ij} -დეფორმაციის ტენზორის დევიატორის კომპონენტებია.

თუ, გამოვიყენებთ (3.91) ფორმულას ჰუკის კანონისთვის იზოტროპული მასალი შემთხვევაში, მაშინ (3.87) გადაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (3.92)$$

მცირე დეფორმაციის შემთხვევაში, ე.ი. როცა გადაადგილების გრადიენტები გაცილებით მცირეა ერთზე, დეფორმაციის ტენზორისა და გადაადგილების გრადიენტის კომპონენტები დაკავშირებული არიან თანადობით:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (3.93)$$

სადაც u_i -გადაადგილების ვექტორის კომპონენტი.

ხოლო თუ, დეფორმაციები არაა მცირე, ანუ გვაქვს სასრული დეფორმაციები, მაშინ (3.93)-ის მაგივრად გვაქვს ფიზიკურად არაწრფივი დეფორმაციები. (ეილერის დეფორმაციის ტენზორი)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} \cdot u_{k,j}). \quad (3.94)$$

თუ, დრეკადობის თეორიას ავაგებთ ჰუკის (3.92) კანონზე და დეფორმაციის (3.93) ტენზორზე მივიღებთ წრფივ მათემატიკურ მოდელს, ხოლო თუ გამოვიყენებთ ეილერის არაწრფივი დეფორმაციის ტენზორს, მივიღებთ არაწრფივი დრეკადობის მათემატიკურ მოდელს, მიუხედავად ჰუკის კანონის წრფივი ხასიათისა. სინამდვილეში, მასალათა უმრავლესობას აქვს თავისი დეფორმაციის წესი (დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის), რომელსაც რეოლოგიას უწოდებენ ზოგჯერ. მასალათა რეოლოგიის დასადგენად საჭიროა ექსპერიმენტების ჩატარება და შედეგების სტატისტიკური დამუშავება.

3.8. ჰუკის განზოგადოებული კანონი და მუდმივათა მატრიცები, დრეკადი სხეულის თვისებების სიმეტრიის ხარისხის მიხედვით

წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის ჰუკის განზოგადოებული კანონი გვაძლევს კავშირს ძაბვის ტენზორის σ_{ij} კომპონენტებსა და დეფორმაციის ტენზორის ε_{ij} კომპონენტებს შორის:

$$\sigma_{ij} = A_{ijmn} \varepsilon_{mn}. \quad (3.95)$$

ერთგვაროვანი მასალებისათვის A_{ijmn} მუდმივებისაგან შემდგარი მატრიცეს კომპონენტები არ არიან დამოკიდებული სივრცით ცვლადებზე. მათი რაოდენობაა 81. თუ, გავითვალისწინებთ ძაბვის ტენზორისა და დეფორმაციის ტენზორის სიმეტრიულობას:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{და} \quad \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}; \quad (3.96)$$

მივიღებთ, რომ

$$A_{ijmn} = A_{jimn} \quad \text{და} \quad A_{ijmn} = A_{jinm} \quad (3.97)$$

ე.ი. დამოკიდებულ მუდმივათა რიცხვი 81-დან მცირდება 36-მდე. თუ არსებობს დეფორმაციის W ენერგიის ფუნქცია, ანუ

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad (3.98)$$

სადაც

$$W = \frac{1}{2} A_{ijmn} \varepsilon_{ji} \varepsilon_{mn}; \quad (3.99)$$

მაშინ, კოეფიციენტების A_{ijmn} -მატრიცას მოეთხოვება სიმეტრიის უფრო მაღალი ხარისხი, ე.ი.

$$A_{ijmn} = A_{jinm}. \quad (3.100)$$

ამ ტოლობის (3.100) გათვალისწინებით, დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა A_{ijmn} -მატრიცაში მცირდება და ხდება 13.

განსაზღვრება: დრეკად მასალას, რომლის ელასტიურობის თვისებებიც სიმეტრიულია რომელიმე სამი ურთიერთმართობული სიბრტყეების მიმართ **ორთოტროპიული** მასალა (სხეული) ეწოდება.

ორთოტროპიული მასალისათვის დამოუკიდებელ მუდმივათა რიცხვი არის 12. ხოლო თუ, ორთოტროპიული მასალისათვის არსებობს დეფორმაციის ენერჯის (3.99) ფუნქცია, მაშინ მუდმივთა რიცხვია 9.

ცხადია, რომ რაც მეტია არანულოვან დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა A_{ijmn} მატრიცაში, მით უფრო რთული იქნება შესაბამისი მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელი.

მუდმივათა დიდი რაოდენობა დამახასიათებელია კომპოზიტური მასალებისათვის. ამიტომ, კომპოზიტთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები უფრო რთულია, ვიდრე იზოტროპიული მასალების მექანიკა.

იზოტროპიული, დრეკადი მასალებისათვის A_{ijmn} მატრიცა შეიცავს მხოლოდ ორ მუდმივ ელემენტს, რომელთაც λ და μ ლამეს **მუდმივებს უწოდებენ**.

ჰუკის კანონს იზოტროპიული მასალისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (3.101)$$

ამ ფორმულის გადასაწერად იუნგისა E და პუასონის ν მუდმივების მეშვეობით, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი ძელის გაჭიმვის ამოცანა Ox_1 -ღერძის გასწვრივ, მაშინ იუნგის E -მოდული და პუასონის ν -კოეფიციენტი წარმოადგენენ პროპორციულობის კოეფიციენტებს, E -სიგრძივი დეფორმაციისას და ν -განივი დეფორმაციისას:

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \quad \wedge \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11}. \quad (3.102)$$

ამ ტოლობებისა და (3.101)-ის გათვალისწინებით, ზოგადი იზოტროპიული მასალისათვის მივიღებთ ჰუკის კანონს შემდეგი სახით:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{\nu + 1} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \cdot \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right). \quad (3.103)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ ადრე, ჰუკის კანონი ახასიათებს წრფივად-დრეკადი იზოტროპიული მასალის ელასტიურ თვისებებს, ამიტომ მას ზოგჯერ ელასტიური (დრეკადი) მასალის რეოლოგიურ განტოლებასაც უწოდებენ მცირე დეფორმაციების ($\varepsilon \ll 1$) შემთხვევაში. ელასტიური (დრეკადი) მასალის მუშაობის მათემატიკური მოდელის შესაქმნელად რეოლოგიური განტოლება, ის ძირითადი განტოლებაა, რომელიც აღწერს შესასწავლი მასალის ელასტიურ თვისებებს და რომელიც დგინდება, ექსპერიმენტული მასალების სტატისტიკური გადამუშავების შედეგად.

უმეტესწილად, მცირე დეფორმაციების შემთხვევაში, რეოლოგიურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{ij}) ; \quad (3.104)$$

სადაც f -ფუნქციის კონკრეტული სახე დგინდება ფიზიკური ექსპერიმენტების შედეგად.

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა განიხილება რთული რეოლოგიის მქონე მასალები, გამოიყენება ზოგადი სახის რეოლოგიური კანონი:

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ddot{\sigma}_{ij}, \dots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ddot{\varepsilon}_{ij}, \dots, x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (3.105)$$

F -ფუნქციის კონკრეტული სახე დამოკიდებულია შესასწავლი მასალის ელასტიურ და ბლანტ-პლასტიკურ თვისებებზე.

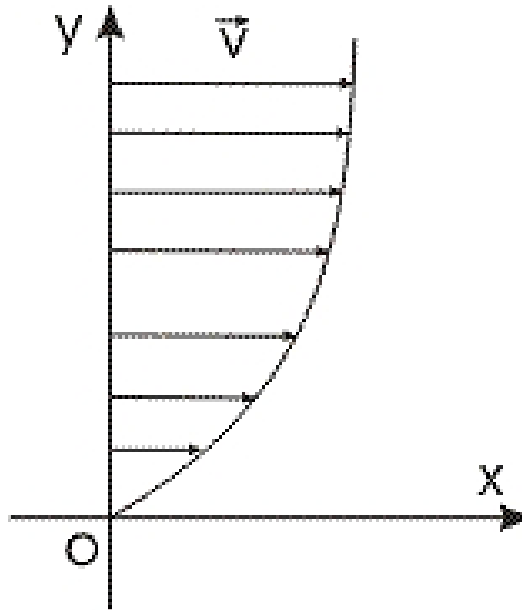
ამ ფუნქციის კონკრეტული სახის დასადგენად იყენებენ ფიზიკურ ექსპერიმენტებს და მიღებული შედეგების სტატისტიკური დამუშავებით ადგენენ უმარტივესი პროცესების შემთხვევისათვის (3.105) ტიპის თანადობას და შემდეგ ხდება ამ თანადობათა განზოგადოება და მიღებული რთული მოდელით ტესტური ამოცანების შესწავლა მოდელის ადეკვატურობის დასადგენად.

3.9. ნიუტონის განზოგადებული კანონი სითხეებისათვის

წყლისა და სხვა ბლანტი სითხეებისათვის, ნიუტონმა ცდებით დაადგინა კანონი:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} ; \quad (3.106)$$

სადაც τ -ძვრის მხები ძაბვაა სითხის ფენებს შორის, რომელსაც ადგილი აქვს სითხის სიბლანტის გამო; μ -სიბლანტის კოეფიციენტი, v -სითხის სიჩქარე ნახ. 3.6.



ნახ. 3.6. ბლანტი სითხის მოძრაობის სიჩქარის ეპიურა

როგორც (3.106) ფორმულიდან ჩანს, მხებ ძაბვებსა და სიჩქარის გრადიენტს შორის დამოკიდებულება არის წრფივი. (3.106) არის ჰუკის კანონის ანალოგი:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (3.107)$$

თუმცა, ჰუკის კანონი იძლევა რეოლოგიურ თანადობას წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, ხოლო (3.106) აღწერს უკუმშვადი ნიუტონური ბლანტი სითხის რეოლოგიას.

ნიუტონის განზოგადოებულ კანონს ბლანტი სითხეებისათვის აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn}; \quad (3.108)$$

სადაც $D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია,

B_{ijmn} -სითხის თვისებებზე დამოკიდებული მუდმივათა მატრიცა 81 კომპონენტით. დამოუკიდებელ მუდმივათა რაოდენობა, დამოკიდებულია, ისევე როგორც დრეკადი მასალის შემთხვევაში, სითხის შინაგანი, ფიზიკური თვისებების სიმეტრიის ხარისხზე.

იზოტროპული, ბლანტი უკუმშვადი სითხისათვის B_{ijmn} -მატრიცაში გვაქვს მხოლოდ ორი λ^* და μ^* დამოუკიდებელი მუდმივა (სიბლანტის კოეფიციენტი) და (4.108) ნიუტონის რეოლოგიური კანონი, ამ შემთხვევაში, ჩაიწერება ფორმით:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^* \cdot D_{ij}; \quad (3.109)$$

სადაც p -ჰიდროსტატიკური წნევაა,

D_{ij} -დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია, რომლებიც მიიღებიან შესაბამისი დეფორმაციის ტენზორის გაწარმოებით დროით, მაშასადამე

$$D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (3.110)$$

სადაც v_i -სითხის ნაკადის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია

3.10. ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით. ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები.

სითხეთა დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაერომექანიკა. ისევე, როგორც დრეკადი(ელასტიური) მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაერომექანიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის(გაზის ანუ აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადოებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} ; \quad (3.111)$$

სადაც

$D_{mn} = \dot{\varepsilon}_{mn}$ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია.

თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ B_{ijmn} - მუდმივი სიდიდეებისაგან შედგება, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს.

თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია λ^* და μ^* დამოუკიდებელი.

შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk} \delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} ; \quad (3.112)$$

სადაც

λ^* და μ^* - სითხის სიბლანტის დინამიური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} ; \quad (3.113)$$

სადაც χ^* - სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტია.

თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \quad (3.114)$$

მაშინ, მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p, \quad (3.115)$$

ანუ, ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში, საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა – მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (3.111) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის(უწყვეტობის) განტოლება, ენერჯიის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება. მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho v_i ; \quad (3.116)$$

სადაც v_i - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება ფორმით:

$$\rho + \rho v_{i,i} = 0. \quad (3.117)$$

ენერჯიის შენახვის კანონს აქვს ფორმა:

$$U = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} C_{i,i} + Z ; \quad (3.118)$$

სადაც

U – შინაგანი ენერჯიაა, C_i - სითბური ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც გადის სითბოგამტარობის ხარჯზე, დროის ერთეულში, ერთეულ ფართობში, Z – ერთეულ დროში გამოსხივებული სითბოს მუდმივაა, გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება(ექსპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T) . \quad (3.119)$$

თუ, საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (3.112), (3.116) – (3.118) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_{,i} \quad (3.120)$$

სადაც k – სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

კალორიული განტოლება ჩაიწერება ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \quad (3.121)$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით, ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.122)$$

ა) ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება.

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითხური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ, კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (3.123)$$

შევიტანთ ნიუტონის (3.112) რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k}) + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \quad (3.124)$$

$$= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,j} + v_{j,i}).$$

შემდეგ, (3.124) განტოლებას თუ შევიტანთ მოძრაობის (3.116) განტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \rho b_i. \quad (3.125)$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (3.126)$$

ამ (3.126) განტოლებას ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება ეწოდება ბლანტი სითხეებისათვის.

P.S. თუ სითხე უკუმშავია(როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (3.127)$$

ბ) ნავიე – სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის.

თუ, განვიხილავთ უკუმში სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშვადობის (3.127) პირობის გათვალისწინებით (3.126) – დან მივიღებთ ნავიე – სტოქსის მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (3.128)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (3.129)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (3.130)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (3.131)$$

მიღებული (3.128) – (3.131) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმში სითხის მოძრაობას Ω - არეში, $\partial\Omega$ - საზღვრით.

გ) ნავიე – სტოქსის განტოლება გაზებისათვის.

თუ ნავიე – სტოქს – დიუგემის მოდელში, გავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \quad (3.132)$$

მაშინ, მივიღებთ ნავიე – სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3} \mu^* v_{j,ji} + \rho b_i. \quad (3.133)$$

დ) განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმში სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგანზომილებო სახით და დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = b_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right); \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = b_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right); \quad (3.135)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (3.136)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (3.137)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (3.138)$$

თუ, (3.134) – (3.138) განტოლებებში გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i = l_0 x'_i; \quad v_i = v_0 v'_i; \quad t = \frac{l_0}{v_0} t'; \quad p = \rho v_0^2 p'; \quad b_i = g b'_i. \quad (3.139)$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = g b'_1 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_1} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_1; \quad (3.140)$$

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_2}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = g b'_2 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_2; \quad (3.141)$$

$$\frac{v_0}{l_0} \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = 0; \quad (3.142)$$

$$(v'_1)_{t=0} = v'_{10}; \quad (v'_2)_{t=0} = v'_{20}; \quad (3.143)$$

$$(v'_1)_{\partial\Omega} = 0; \quad (v'_2)_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.144)$$

თუ, (3.140) – (3.144) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad \text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}; \quad (3.145)$$

და აღარ დავწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგანზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_1; \quad (3.146)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \Delta v_2 ; \quad (3.147)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 ; \quad (3.148)$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10} ; \quad (v_2)_{t=0} = v_{20} ; \quad (3.149)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0 . \quad (3.150)$$

მუდმივ კოეფიციენტს Re – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო Fr – ფრუდის რიცხვია.

იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ექვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები

(Re და Fr), იქნებიან შესაბამისად ტოლები, ანუ, თუ

$$Re_1 = Re_2 ; \quad Fr_1 = Fr_2 . \quad (3.151)$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზედ რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას.

მოდელების მათემატიკურად გამოსაკვლევად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამისი გადასვლის ფორმულებს (3.139)

ე) ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის.

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლდსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, ისე რომ, თუ $Re \leq Re_{kr}$ გვაქვს ლამინარული(ფენოვანი) დინება, ხოლო, თუ $Re \geq Re_{kr}$ გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს **ტურბულენტური დინება** ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც $Re \rightarrow \infty$, მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა, ანუ დინება შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა(ასეთ სითხეებს **იდეალურს** უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ $Re \rightarrow \infty$. მაშინ, (5.70) –(5.74) მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad (3.153)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (3.154)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \quad (3.155)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.156)$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (3.152) – (3.156) სახით ეილერის მოდელი ეწოდება.

3.11 ვარიაციული მეთოდების გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის

მრავალსართულიანი საცხოვრებელი სახლებისა და კომპლექსების პროექტირებისას, აუცილებელია, მოსალოდნელი ქარის დატვირთვების წინასწარი გათვალისწინება. თუმცა, ეს საკითხი არაა ბოლომდე გათავისებული, რამაც გამოიწვია თბილისის ვაკე-საბურთალოს რაიონში, ნუცუბიძის პლატოზე დაპროექტებული ბინების არაკომფორტული ხასიათი. ქარის დატვირთვების სწორ ანგარიშზეცაა დამოკიდებული, არამარტო საცხოვრებელი სახლების კომფორტულობა, არამედ, მათი მშენებლობის ფასიც. სამშენებლო კონსტრუქციების გეომეტრიული კონფიგურაცია, საკმაოდ მრავალფეროვანია და რთული; არის როგორც მართკუთხა პარალელეპიპედის, ასევე, სხვა ფორმის მაღლივი შენობები, ვანტური ხიდები და მაღლივი ანძები.

ტრადიციულად, ცივილიზებულ ქვეყნებში, ამოცანები ქარის დატვირთვების განსაზღვრის შესახებ, იხსნება სამშენებლო ნორმებისა და წესების ბაზაზე [42-44], ან შესაბამისი შენობების მაკეტის აეროდინამიკურ მილში დაბერვით და დატვირთვების გადათვლით ნატურული ნაგებობისათვის. თუმცა, არსებული ნორმებით გათვლილი დატვირთვები, ხშირად, მეტად უხეშია სიზუსტის თვალსაზრისით. ასევე, აეროდინამიკურ მილში დაბერვა საკმაოდ ძვირია და გადათვლის შესაძლებლობაც არაა სათანადო სიზუსტის.

ქარის დატვირთვების შესაბამისი ამოცანების ზუსტი ანალიზური ამოხსნა ჯერ-ჯერობით არაა ცნობილი, ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ენიჭება პროცესის კომპიუტერულ მოდელირებასა და გათვლებს. სწორედ ამ ამოცანას ისახავს ჩვენი ნაშრომი.

3.12 მათემატიკური მოდელირება და ქარის დატვირთვის საანგარიშო ფორმულები

ნაგებობებზე ქარის დატვირთვის საპოვნელად, გამოვიყენოთ საქართველოს “ქარის ვარდის” ცნობილი რუკები. სადაც, მეტეოროლოგიური დაკვირვების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების შედეგად, შედგენილია, საქართველოს მოცემულ რაიონებში, ქარის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობები და მიმართულებები; რაც საშუალებას გვაძლევს, ამოცანის დასმისას, შენობასთან შემხვედრი ნაკადი აღვწეროთ ფუნქციონალურად კინემატიკური პირობების საშუალებით.

ქარს განვიხილავთ, როგორც ბლანტ, უკუმშ სითხეს. ამიტომ მის აღსაწერად გამოვიყენებთ დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით

$$\rho V_i = \sigma_{ji,j} + \rho b_i; \quad (3.157)$$

უწყვეტობის განტოლებას

$$\rho + (\rho V_i)_{,i} = 0; \quad (3.158)$$

და რეოლოგიურ თანადობას

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}; \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}). \quad (3.159)$$

ცხადია, რომ (3.157),(3.158),(3.159) ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემას, უნდა მივუერთოთ კედლებთან მიკვრის პირობები (3.160)

$$V_i /_{\partial\Omega} = 0; \quad (3.160)$$

და საწყისი პირობები (3.161)

$$V_i /_{t=0} = 0, \quad (3.162)$$

პირობა (3.162) სრულდება, თუ, $x \neq x_0$. ხოლო იმ შემთხვევაში, როცა $x = x_0$ გვექნება კინემატიკური პირობები ქარისათვის, რომელსაც ვიღებთ ქარის ვარდის ცნობილი მონაცემების ბაზაზე (3.163), (3.164):

$$V_1(x_0, y, t) = V_{10}(y, t); \quad (3.163)$$

$$V_2(x_0, y, t) = V_{20}(y, t). \quad (3.164)$$

ამრიგად, გვაქვს (3.157)-(3.164) ამოცანის დასმა ქარის პარამეტრების გასათვლელად. აქ შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები და პაკეტები [45-47].

ქარის დატვირთვის საპოვნელად ვისარგებლოთ ფორმულით

$$F_i = \oint \sigma_{ij} n_j, \quad (3.165)$$

სადაც F_i - ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალაა, ინტეგრება ხდება მთელი ნაგებობის Ω ზედაპირის გასწვრივ, n_i - ნაგებობის გარე ნორმალა.

დავშალოთ ძაბვის ტენზორი სფერულ და დევიატორულ ნაწილებად

$$\sigma_{ij} = \sigma_s \delta_{ij} + \tau_{ij}. \quad (3.166)$$

მაშინ ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალა, წარმოდგება ორ მდგენელად, ესენია: წნევის ძალა და ხახუნის ძალა

$$F_i = \oint \sigma_s n_i ds + \oint n_j \tau_{ij} ds, \quad (3.167)$$

სადაც, ინტეგრება ვრცელდება შესასწავლი ნაგებობის ზედაპირის გასწვრივ.

თუ, ფორმულებში (3.167) დავუბრუნდებით განზომილებიან განმსაზღვრელ პარამეტრებს, მივიღებთ

$$F_i = \frac{\rho V^2}{2} S_0 \left(\oint \frac{2\sigma_s n_i}{\rho_0 V_0^2} ds + \oint \frac{2\tau_{ij} n_j}{\rho_0 V_0^2} ds \right), \quad (3.168)$$

სადაც S_0 - გარსდენადი ნაგებობის მიდელური კვეთის ფართობია. მაღლივი შენობების გარსდენისას ხახუნის ძალისაგან გამოწვეული სინაღობის ძალის მდგენელი გაცილებით მცირეა წნევის წინაღობის ძალასთან შედარებით, ამიტომ ინჟინრულ გამოთვლებში (3.168) ფორმულის მეორე შესაკრებს უგულებელყოფენ ხოლმე და წინაღობის ძალას ჩაწერენ ფორმულით

$$F_i = \frac{\rho V^2}{2} \cdot S_0 \cdot C_p, \quad (3.169)$$

სადაც C_p - წნევის აეროდინამიკური კოეფიციენტი, რომლისთვისაც საინჟინრო პრაქტიკაში შემუშავებულია ნორმები და მოცემულია ცხრილები მის გამოსათვლელად სხვადასხვა ტიპის ნაგებობებისათვის. ჩვენ კი შეგვიძლია მისი დაზუსტებული მნიშვნელობების გამოთვლა (3.168) ფორმულების ბაზაზე.

ამრიგად, მივიღეთ მათემატიკური მოდელი, ქარის დატვირთვების თეორიული გაანგარიშებისათვის, რაც საშუალებას მოგვცემს დავაზუსტოთ მაღლივი შენობებისა და ანძების დატვირთვების საანგარიშო ნახევრადემპირიული ფორმულები.

ამოცანა (3.157)-(3.164), სიჩქარე - წნევის ცვლადებში შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + p_{,i} = f_j - \dot{V}_j \quad \Omega, \quad (3.170)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (3.171)$$

$$V_{j|t=0} = V_j^o \quad \Omega, \quad (3.172)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega. \quad (3.173)$$

სადაც Re - რეინოლდსის რიცხვია.

ასევე, უნდა მივუერთოთ დამბერი ქარის კინემატიკური პირობები (3.163),(3.164).

3.13 ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის რიცხვითი ალგორითმი

თუ, (3.170) დინამიკის განტოლებებში სიჩქარეების დროით წარმოებულებს შევცვლით სასრული სხვაობებით, მივიღებთ

$$-\frac{1}{\text{Re}}V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + P_{,j} = f_j - \frac{V_j^{\tau+\delta\tau} - V_j^\tau}{\delta\tau}. \quad (3.174)$$

განვიხილოთ სოლენოიდალური ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ სასაზღვრო – მიკვრის პირობებს რვაჩოვ – ოზგაძის RO – ფუნქციების მეშვეობით. მაშინ კუპრაძე – ბრეზიას მეთოდის მიხედვით [45-46], გავამრავლოთ (3.174) განტოლების ორივე მხარე $\forall W_j \in L_2(\Omega)$ სკალარულად $L_2(\Omega)$ აზრით და გამოვიყენოთ გრინის ფორმულა. მაშინ მივიღებთ ლიონს – ტემამის სუსტ ფორმულირებას [47]

$$\frac{1}{\text{Re}}((V^{\tau+\delta\tau}, W)) + b(V^{\tau+\delta\tau}, V^{\tau+\delta\tau}, W) = (f - \frac{V^{\tau+\delta\tau} - V^\tau}{\delta\tau}, W), \quad (3.175)$$

სადაც

$$V_j \in D_{NS}(\Omega), \quad (f - \frac{V^{\tau+\delta\tau} - V^\tau}{\delta\tau}, W) = \int_{\Omega} (f_j - \frac{V_j^{\tau+\delta\tau} - V_j^\tau}{\delta\tau}) W_j dx, \quad (3.176)$$

$$b(V^{\tau+\delta\tau}, V^{\tau+\delta\tau}, W) = \int_{\Omega} V_i^{\tau+\delta\tau} V_{j,i}^{\tau+\delta\tau} W_j dx, \quad (3.177)$$

$$((V^{\tau+\delta\tau}, W)) = \int_{\Omega} V_{i,j}^{\tau+\delta\tau} W_{i,j} dx. \quad (3.178)$$

თუ, (3.178) ფორმულებისათვის კვლავ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას, მივიღებთ კუპრაძე – ბრეზიას შებრუნებულ ვარიაციულ ფორმულირებას [48-49]

$$((V^{\tau+\delta\tau}, W)) = \int_{\Omega} V_i^{\tau+\delta\tau} W_{i,j} dx \quad (3.179)$$

ვიპოვოთ $V_j \in D_{NS}(\Omega)$ -რომელიც დააკმაყოფილებს (3.175)

განტოლებებს (3.176)-(3.179) პირობებში $\forall W_j \in L_2(\Omega)$ ფუნქციებისათვის. ასეთ ფუნქციებად, ჩვენ ვირჩევთ ლაპლასის ოპერატორის ფუნდამენტალურ ამონახსნებს და (3.175) განტოლებათა ამონახსნებს ვეძებთ სახით

$$V_i = \varepsilon_{ijk} \phi_{k,j} \quad (3.180)$$

$$W_i = W_i^* \quad (3.181)$$

სადაც ε_{ijk} ლევი-ჩივიტას ფსევდოტენზორის კომპონენტებია.

$$\phi_k = RO \alpha_{ki} \Psi_i \quad (3.182)$$

$$W_{i,j}^* = \Delta_i \quad (3.183)$$

სადაც Ψ_i - სრულ ფუნქციათა სისტემა $L_2(\Omega)$ აზრით, ხოლო RO - რვაჩოვ-ობგაძის [9-11] ფუნქციებია, რომლებიც ნულის ტოლ მნიშვნელობებს იღებენ საზღვრის წერტილებში $\partial\Omega$, Δ_i დირაკის ფუნქციაა.

მოყვანილი ალგორითმის მეშვეობით ქარის განმსაზღვრელი პარამეტრების პოვნის ამოცანა დაიყვანება კვადრატულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე α_{ki} გაშლის კოეფიციენტების მიმართ.

3.14. სასრული-სხვაობის მეთოდის გამოყენება ქარის ნაკადის დინების მოდელირებისათვის

ნაგებობებზე ქარის დატვირთვების საპოვნელად, გამოვიყენოთ საქართველოს “ქარის ვარდის” ცნობილი რუკები. სადაც, მეტეოროლოგიური დაკვირვების შედეგების სტატისტიკური დამუშავების შედეგად, შედგენილია, საქართველოს მოცემულ რაიონებში, ქარის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობები და მიმართულებები; რაც საშუალებას გვაძლევს, ამოცანის დასმისას, შენობასთან შემხვედრი ნაკადი აღწეროთ ფუნქციონალურად კინემატიკური პირობების საშუალებით.

ქარს განვიხილავთ, როგორც ბლანტ, უკუმშ სითხეს. ამიტომ მის აღსაწერად გამოვიყენებთ დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით

$$\text{უწყვეტობის განტოლებას } \rho V_i = \sigma_{ji,j} + \rho b_i$$

$$\text{და რეოლოგიურ თანადობას } \rho + (\rho V_i)_{,i} = 0$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

ხოლო იმ შემთხვევაში,

როცა გვექნება კინემატიკური პირობები ქარისათვის, რომელსაც ვიღებთ ქარის ვარდის ცნობილი

მონაცემების ბაზაზე

$$V_2(x_0, y, t) = V_{20}(y, t) \quad x = x_0$$

$$V_1(x_0, y, t) = V_{10}(y, t) \quad x \neq x_0$$

ამრიგად, გვაქვს ამოცანის დასმა ქარის პარამეტრების გასათვლელად.

აქ შეიძლება გამოვიყენოთ სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები და პაკეტები

ქარის დატვირთვების საპოვნელად ვისარგებლოთ ფორმულით

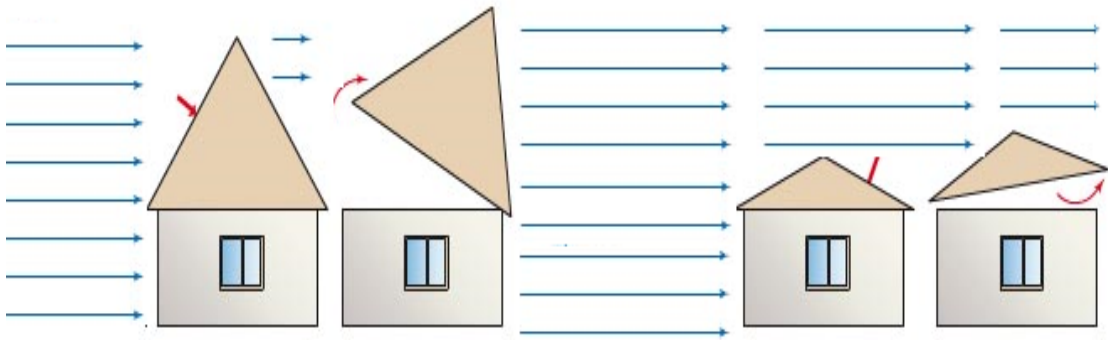
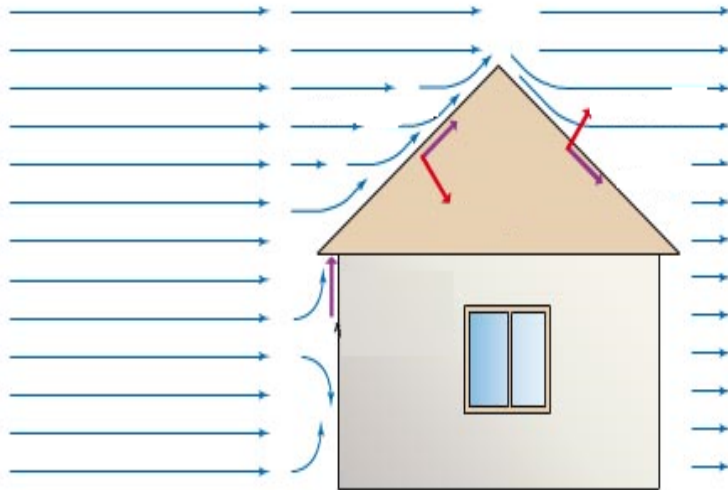
$$F_i = \oint \sigma_{ij} n_j \quad \sigma_{ij} = \sigma_s \delta_{ij} + \tau_{ij}$$

ნაგებობაზე მოქმედი სრული ძალა, წარმოდგება ორ მდგენელად, ესენია: წნევის ძალა და ხახუნის ძალა

$$F_i = \oint \sigma_s n_i ds + \oint n_j \tau_{ij} ds,$$

3.15. რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის საინჟინრო ნაგებობებზე და ნაგებობათა კომპლექსებზე ქარის დატვირთვების გათვლის შედეგები

ამოცანის შესწავლისას, განვსაზღვროთ ქარის დატვირთები საინჟინრო ნაგებობებისთვის, მნიშვნელოვან ფაქტორს წარმოადგენს ქარის გარსმდენი ნაკადი რომელიც წარმოდგენილია ქარის ნაკადის ნახაზზე, ქარის ნაკადის აღწერისას ვიყენებთ ბლანტი სითხის „ნავიე-სტოქსის“ მოდელს. ამ შემთხვევაში ტურბულენტური ნაკადი რომელიც ითვალსწინებს სხვადასხვა ემპირიულ ცვლილებებს და გამოვიყენოთ ფენომენალური განტოლებების საფუძველზე გარკვეული მოსაზრებები იქნა მიღებული. ჩვენ გამოვიყენეთ „ნავია სტოქსის“ განტოლებას ტურბულენტური ნაკადის შესწავლისას, ამ მოდელით შევისწავლით ეპიური ქარის სიჩქარის გარსმდენ ნაკადს და ქარის ნაკადის ზემოქმედება შენობაზე ნაჩვენებია ნახ3.7-ზე



ნახ3.7 ნახაზე ნაჩვენებია ქარის ნაკადი შენობაზე

შემთხვევითი პოლემპირიულ თეორით, შესაბამება СНИП-ს ნორმებს, მიღებულია რომ შენობაზე ქარის დატვირთვა დამოკიდებულია შენობის z სიმაღლის მიხედვით, სადაც ქარის დატვირთვა განისაზღვრება $W_p = W \times k(z) \times c$ სადაც W არის ქარის ნაკადი, k -კოეფიციენტი ქარის ზეწოლისას, ხოლო z -ი არის სიმაღლე რომელიც მოცემულია ცხრილ3.8-ში, ხოლო c -აეროდინამიკური კოეფიციენტი, ქარის ძალის ზეწოლისას დამოკიდებულია იმაზე თუ რომელ მხარეს უბერავს ქარი, c -კოეფიციენტი ქარის მხარეს მოცემულა ნახ3.1-ზე $k(z)$ კოეფიციენტი ადგილების მიხედვით

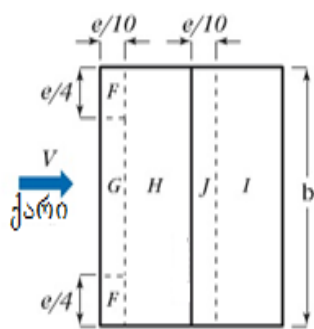
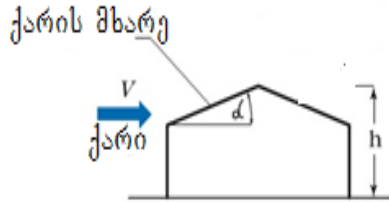
სიმაღლე z მ	A	B	C
არა უმეტეს 5	0,75	0,5	0,4
10	1,0	0,65	0,4
20	1,25	0,85	0,55

A- გახსნილი ადგილები ზღვების, ტბების და წყალსაცავების, უდაბნოები

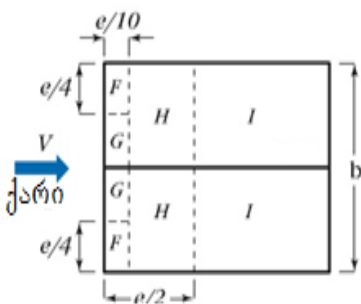
B- ქალაქები, ტყეების და სხვა რეგულარული დაბრკოლებები არ

აღმატებება სიმაღლე 10 მ-ს;
 C- ქალაქები,ტაუერები რომელიც 25-მ-ზე მაღლაა

ცხრილი 3.1 აეროდინამიკური კოეფიციენტების სიდიდეები მოცემულია



C აირჩევა b და 2h უმცირესის მიხედვით



კოეფიციენტი C, ორ ფრთიანი სახურავისთვის

ქარი რომელიც ეცემა სახურავის დახრილ ნაწილს

კუთხე δ	F	G	H	I	J
15°	-0,9	-0,8	-0,3	-0,4	-1,0
	0,2	0,2	0,2		
30°	-0,5	-0,5	-0,2	-0,4	-0,5
	0,7	0,7	0,4		
45°	0,7	0,7	0,6	-0,2	-0,3
60°	0,7	0,7	0,7	-0,2	-0,3
75°	0,8	0,8	0,8	-0,2	-0,3

ქარი ფრონტალური დაცემისას

კუთხე δ	F	G	H	I
0°	-1,8	-1,3	-0,7	-0,5
15°	-1,3	-1,3	-0,6	-0,5
30°	-1,1	-1,4	-0,8	-0,5
45°	-1,1	-1,4	-0,9	-0,5
60°	-1,1	-1,2	-0,8	-0,5
75°	-1,1	-1,2	-0,8	-0,5

შევადგინეთ ქარის ნაკადის მათემატიკური მოდელი და ქარის ნაკადი განვიხილოთ როგორც მკვრივი ბლანტი სითხე, შესაბამისად დგება დინამიკური ნაწიე-სტოქსის განტოლებათა ქარის ნაკადისთვის, რადგან ბერამდე დინების რეჟიმის შემთხვევაში, შეიძლება უგულებლყოთ ჰაერის კუმშვა, ქარის ნაკადი შეგვიძლია განვიხილოთ Ω -არეში როგორც უკუმში ბლანტი სითხე, რომლის $\partial\Omega$ საზღვარი აკმაყოფილებს ლიპშიცის პირობებს, მაშინ ქარის მოდელი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სახით:

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + p_i = f_j - V_j \quad \Omega, \quad (3.184)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (3.185)$$

$$V_{j|t=0} = V_j^o \quad \Omega, \quad (3.186)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega. \quad (3.187)$$

სადაც Re- არის რეინოლდსის რიცხვი

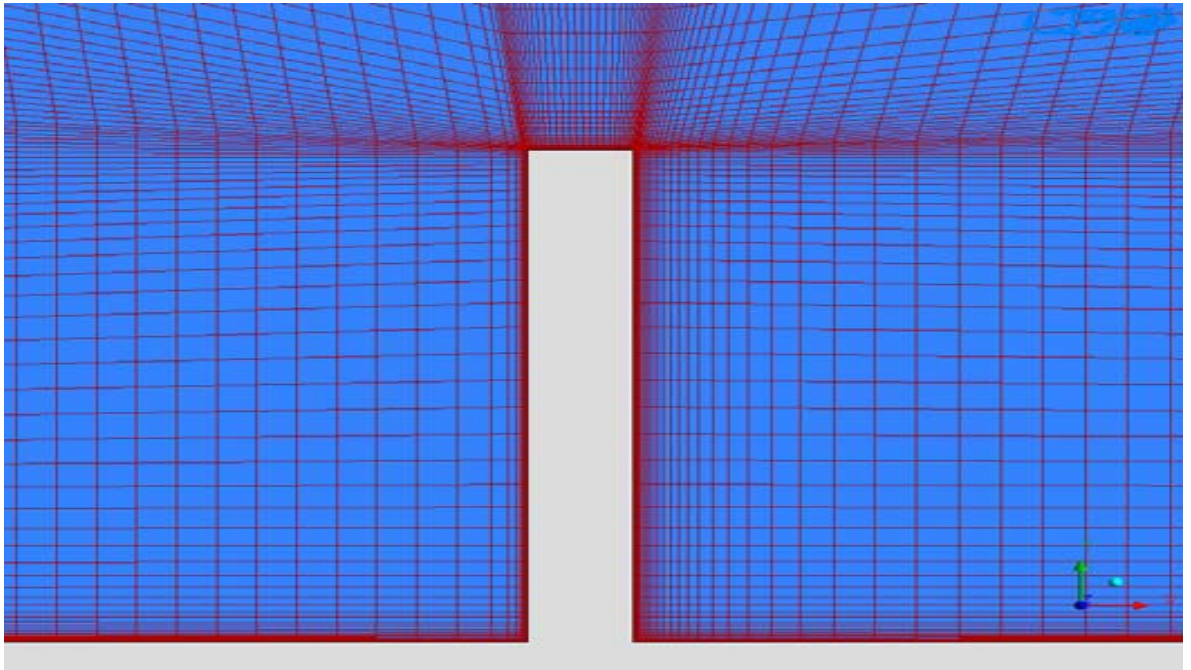
დასაწყისთვის განვიხილოთ ქარის ნაკადით მართკუთხა წინააღმდეგობის გარსდების ამოცანას, სადაც ქარის საწყისი ტურბულენტური ნაკადი მოიცემა ნახევრადემპირიული მონაცემების საფუძველზე

$$-\frac{1}{\text{Re}} V_{j,ii} + V_i V_{j,i} + P_{,j} = 0, \quad (3.188)$$

$$V_{j,j} = 0 \quad \Omega, \quad (3.189)$$

$$V_{j|\partial\Omega} = 0 \quad \partial\Omega, \quad (3.189)$$

გარდა ამისა, გათვალისწინება გარსმდენი ნაკადის კინემატიკური პირობებიც რომელიც მოცემულია ნახ 3.9



ნახ.3.9 მართკუთხედის გარსდების გათვლის სქემა

$$\begin{array}{l}
 X := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -0.8 \\ -0.6 \\ -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad
 Y := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad
 \xi := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 1.6 \\ 1.8 \\ 2 \\ 2.2 \\ 2.4 \\ 2.6 \\ 2.8 \\ 3 \\ 3.2 \end{pmatrix} \\
 \\
 \text{Re} := 3000 \\
 n := 2 \\
 m := 18 \\
 k := 15
 \end{array}$$

$$u(x, y, a) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$v(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$p(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$

$$\text{IGR}(a, b) := \sum_{i=0}^m (u(X_i, Y_i, a)^2 + v(X_i, Y_i, b)^2)$$

$$\text{IKIN1}(a, b) := \sum_{i=0}^k [(u(-5, \xi_i, a) - 1)^2 + v(-5, \xi_i, b)^2]$$

$$Dux(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Duy(x, y, a) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(j+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Dvx(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvy(x, y, b) := - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \left[(j+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^j \right]$$

$$Duxx(x, y, a) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[i \cdot (i+1) \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Duyy(x, y, a) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[(j+1) \cdot j \cdot a_{i,j} \cdot (x+5)^i \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dvxx(x, y, b) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left[i \cdot (i+1) \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i-1} \cdot (4-y)^{j+1} \right]$$

$$Dvyy(x, y, b) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left[(j+1) \cdot j \cdot b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j-1} \right]$$

$$Dpx(x, y, c) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \left(i \cdot c_{i,j} \cdot x^{i-1} \cdot y^j \right)$$

$$Dpy(x, y, c) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n \left(j \cdot c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^{j-1} \right)$$

$$UDIN0(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dux(x, y, a) + v(x, y, b) \cdot Duy(x, y, a) + Dpx(x, y, c)$$

$$UDIN(a, b, c, x, y) := \left[UDIN0(a, b, c, x, y) - \frac{1}{Re} \cdot (Duxx(x, y, a) + Duyy(x, y, a)) \right]^2$$

$$VDIN0(a, b, c, x, y) := u(x, y, a) \cdot Dvx(x, y, b) + v(x, y, b) \cdot Dvy(x, y, b) + Dpy(x, y, c)$$

$$VDIN(a, b, c, x, y) := \left[VDIN0(a, b, c, x, y) - \frac{1}{Re} \cdot (Dvxx(x, y, b) + Dvyy(x, y, b)) \right]^2$$

$$CONTN(a, b, x, y) := (Dux(x, y, a) + Dvy(x, y, b))^2$$

$$DINAMIC01(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DINAMIC1(a, b, c) := DINAMIC01(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} UDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DINAMIC02(a, b, c) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$DINAMIC2(a, b, c) := DINAMIC02(a, b, c) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} VDIN(a, b, c, x, y) dy dx$$

$$CONT0(a, b) := \int_{-5}^{-1} \int_0^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_1^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx$$

$$CONT(a, b) := CONT0(a, b) + \int_1^{10} \int_0^{\xi_k} CONTN(a, b, x, y) dy dx$$

$$f1(a, b, c) := 8 \cdot IGR(a, b) + IKIN1(a, b) + DINAMIC1(a, b, c) + DINAMIC2(a, b, c)$$

$$f(a, b, c) := f1(a, b, c) + CONT(a, b)$$

$$i := 0.. n$$

$$j := 0.. n$$

$$a_{i,j} := -0.1 + rnd(0.1)$$

$$b_{i,j} := -0.01 + rnd(0.02)$$

$$c_{i,j} := -0.1 + rnd(0.1)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -0.039 & -0.093 & -0.035 \\ -0.09 & -0.077 & -0.008 \\ -0.034 & -0.051 & -0.05 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0.004 & 0.002 \\ -0.01 & -0.008 & 0.007 \\ 0.005 & -0.002 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -0.004 & -0.082 & -0.087 \\ -0.005 & -0.097 & -0.094 \\ -0.087 & -0.014 & -0.028 \end{pmatrix}$$

Given $u(8, 3, \mathbf{a}) > 0$

$$u(-2, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(-1, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(1, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(3, 3, \mathbf{a}) > 0$$

$$u(-4, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(-3, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(2, 3, \mathbf{a}) > 0 \quad u(4, 3, \mathbf{a}) > 0$$

$S :=$ Minimize (f, a, b, c)

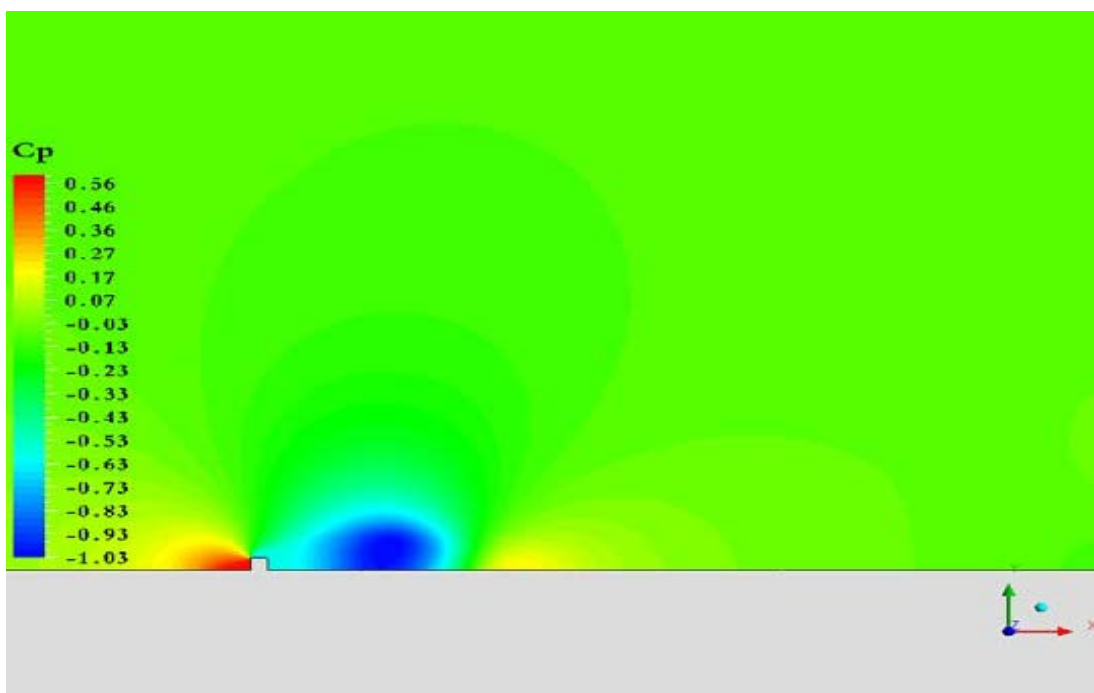
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.009 & -0.04 & -0.008 \\ -0.02 & -0.015 & -0.004 \\ -0.004 & 0.007 & 0.001 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.001 & 0.001 \\ -0.002 & -0.004 & 0.002 \\ 0.002 & -0.001 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.001 & -0.041 & -0.022 \\ -0.002 & -0.024 & -0.047 \\ -0.022 & -0.007 & -0.007 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} := -(\mathbf{S})_0 \quad \mathbf{b} := \mathbf{S}_1 \quad \mathbf{c} := -\mathbf{S}_2$$

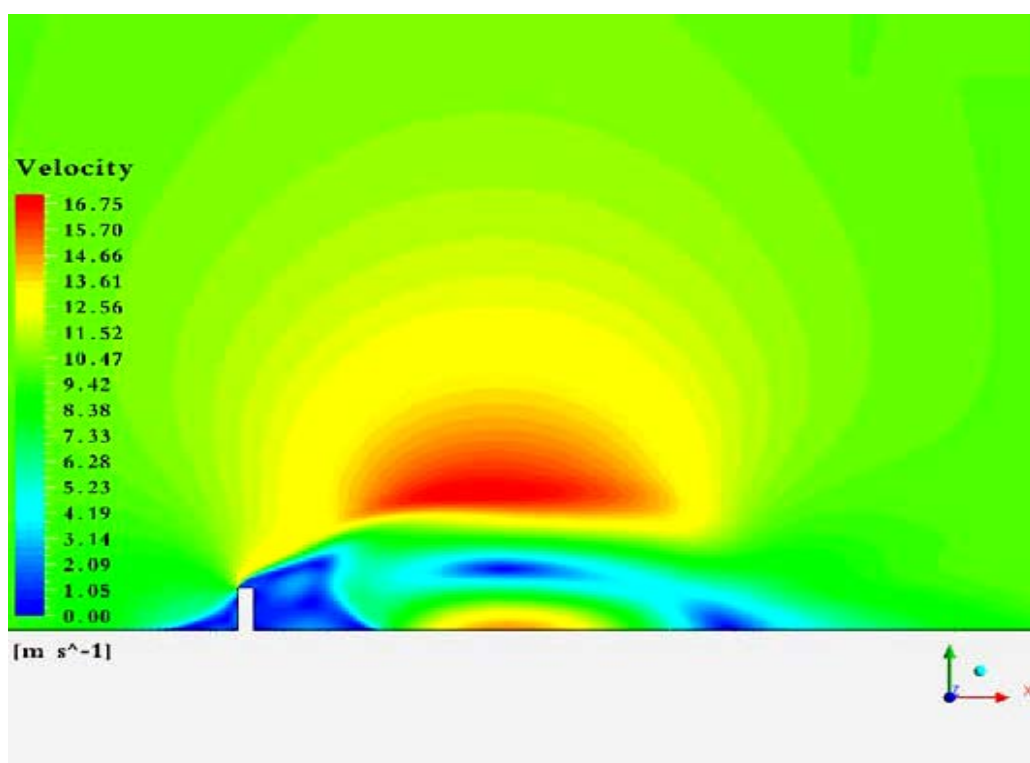
$$u(x, y, \mathbf{a}) := 1 + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [a_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$v(x, y, \mathbf{b}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [b_{i,j} \cdot (x+5)^{i+1} \cdot (4-y)^{j+1}]$$

$$p(x, y, \mathbf{c}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (c_{i,j} \cdot x^i \cdot y^j)$$



წნევის კოეფიციენტი

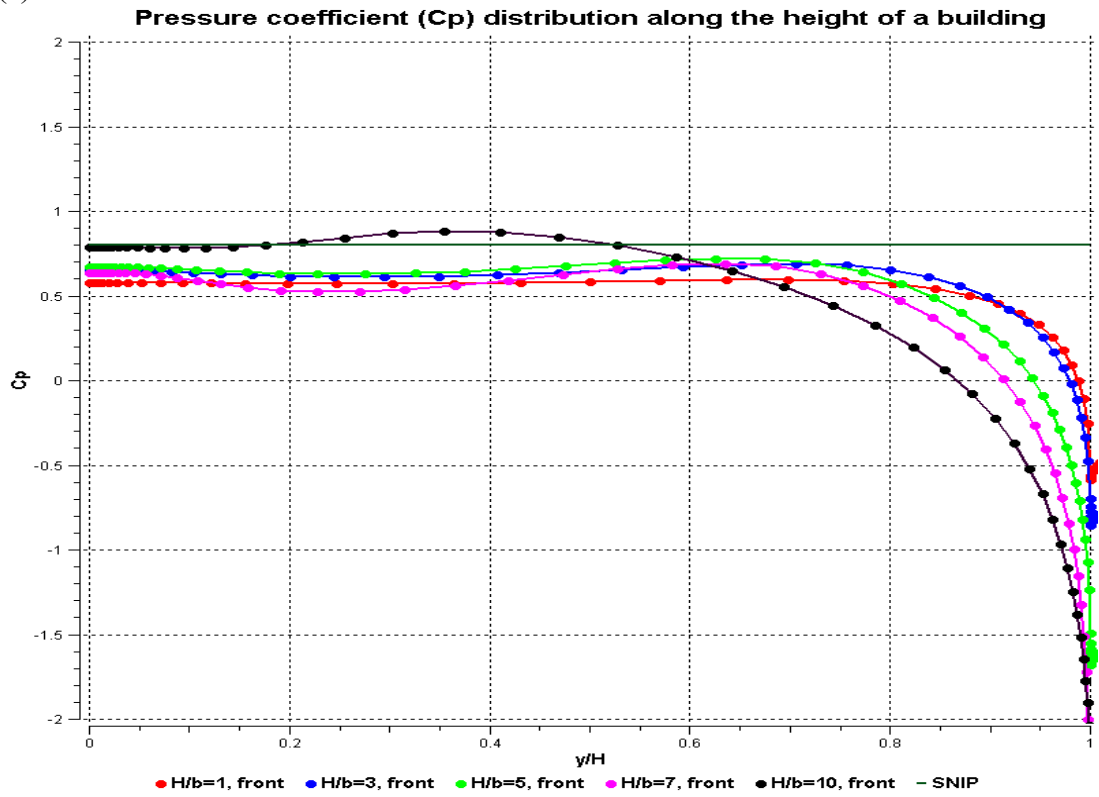


სიჩქარეთა ველი

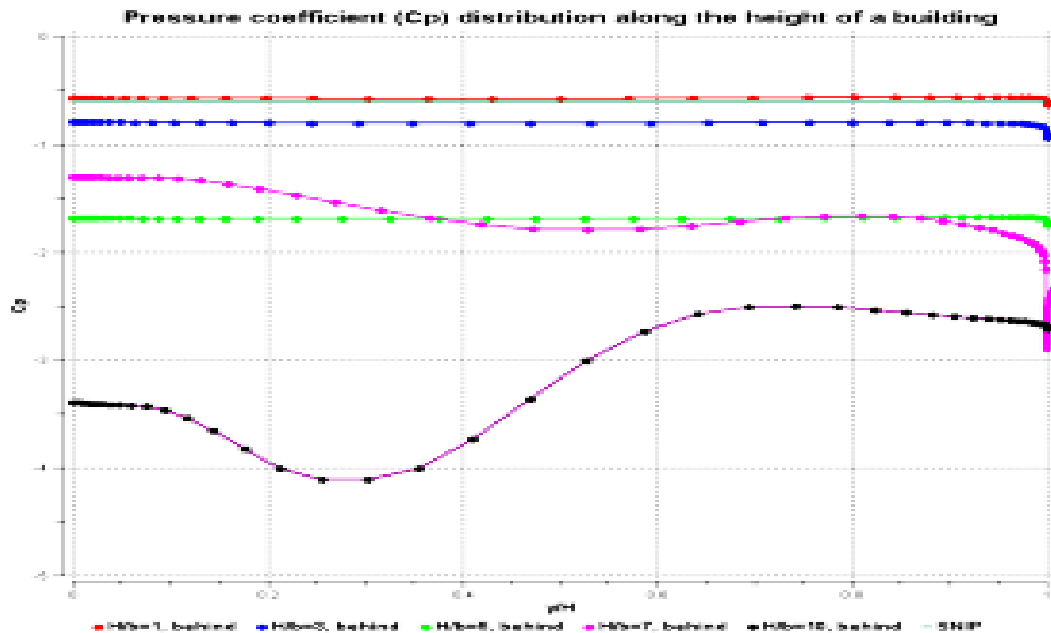
რთული ფორმის ნაგებობების გათვლა ხდება ანალოგიურად, იცვლება მხოლოდ X და Y მასივები.

აეროდინამიკური კოეფიციენტების მნიშვნელობები შენობებისათვის, რომლებიც მიღებულია თეორიულ საფუძველზე მოცემულია ნახ.3.11 (ა) და ნახ.3.11(ბ)

(ა)



(ბ)



ნახ.3.10 (ა) და (ბ) ეროდინამიკური კოეფიციენტების მნიშვნელობები შენობებისათვის

ნახ.3.11 მოცემულია წნევა C_p კოეფიციენტის მნიშვნელობების განაწილების გრაფიკები შენობის სიმაღლის მიხედვით ქარის ბერვის მხრიდან (შენობის წინა ფასადი, მარცხნიდან) და საწინააღმდეგო მხრიდან (შენობის უკანა კედლის მხრიდან, მარჯვნიდან). ფერადი წირები წერტილებით შეესაბამება შენობის სხვადასხვა ფარდობით სიმაღლეს, მუქი-მწვანე ჰორიზონტული წრფეები СНИП 2.0.07-85 გათვლილ მნიშვნელობებს.

თეორიული გათვლების შედეგები შედარება საერთაშორისო ნორმატიული გათვლის სტანდარტებთან გვაძლევს კარგ თანხვედრას, ერთულოვანი ნაგებობებისათვის, თუმცა, შენობათა მასივების გარსდენის ამოცანების შესწავლისას, ნორმატიული დოკუმენტებისაგან, თეორიული გათვლის შედეგები საკმაოდ განსხვავებულია, რადგან ნორმატიული დოკუმენტებს არ შეუძლიათ გაითვალისწინონ გარსდენის რეალური სურათი. ჩვენი შედეგები, კი უფრო რიალურად ასახავს წარმოქმნილ დატვირთვებს, რაც კარგად ჩანს ნატურალ ექსპერიმენტებთან შედარებისას.

დასკვნები:

1. აგებული იქნა ქარის ორგანოზომილებიანი და სამგანზომილებიანი მათემატიკური მოდელები;
2. შემუშავებული იქნა რვაჩოვ-ობგადის RO - გეომეტრიული კოდირების მეთოდის გამოყენების ალგორითმი, რთული გეომეტრიული კონფიგურაციის ნაგებობათა საზღვრის მოდელირებისათვის;
3. ქარის ნაკადის ნაგებობებზე მიკვრის პირობების გასათვალისწინებლად RO - ფუნქციებზე დაყრდნობით, აგებული იქნა ფუნქციათა კონის განტოლებები, რომლებიც ავტომატურად აკმაყოფილებენ სასაზღვრო პირობებს;
4. ქარის ნაკადის დინამიკური მოდელისათვის, აგებულ იქნა ლიონს-ტემამის სუსტი ფორმულირება და კუპრამე-ბრებზიას შებრუნებული ვარიაციული ფორმულირების ამოცანები;
5. შემუშავებული იქნა შესაბამისი ამოხსნის ალგორითმი და პროგრამა MathCAD გარემოში;
6. გათვლილი იქნა მართკუთხედის ფორმის ნაგებობის გარსდენა სასრულ-სხვაობათა მეთოდით და ვარიაციული მეთოდით. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი აეროდინამიკური პარამეტრები და წინაღობის კოეფიციენტები რეინოლდსის რიცხვის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;
7. გათვლილი იქნა მაღლივი მართკუთხა პარალელებიპედის ფორმის ნაგებობის გარსდენის ამოცანა. განსაზღვრული იქნა შესაბამისი აეროდინამიკური კოეფიციენტები ქარის სიჩქარის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;
8. გათვლილი იქნა მაღლივი საკვამურის გარსდენის ამოცანა და განსაზღვრული იქნა გარსდენის შესაბამისი განმსაზღვრელი პარამეტრები;
9. შესწავლილი იქნა ნაგებობათა კომპლექსების გარსდენის ამოცანები;
10. დაზუსტებული იქნა ქარის დატვირთვებზე ნაგებობათა გათვლის ნახევრადემპირიული ფორმულები;
11. გათვლებმა აჩვენა, რომ ნორმატიული, ნახევრადემპირიული ფორმულები ნაგებობათა კომპლექსების შემთხვევაში ცუდად ითვალისწინებენ ბაფტინგის პრობლემას და საჭიროებენ შემდგომ დაზუსტებას.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Prinston, 1963
3. Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука, Москва, 1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, [McGraw-Hill](#), Inc., New York. 1995.
7. Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam, 1956
8. Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951
9. Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
10. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос., Тбилиси, 1989
11. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ, учеб.пос., Владимир, 1999
12. Пескова М.В. Применение метода регулярных источников ОГ для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000
13. Аракелян С.М., Папонов В.С., Дроган Ю.Е., Пигарина А.А., Прокошев В.Г., Обгадзе Т.А. Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля, Материалы международного Школа семинара “Нелинейные задачи гидродинамической теории устойчивости и турбулентность “ 12-20 февраля , Москва, 2000
14. Obgadze T.A., Barinov V.V., Fedotova O.I. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A., Prokoshev V.G., Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger , A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3rd LANE, Erlangen, August 28-31, 2001
16. Обгадзе Т.А. , Прангишвили А.И., Цвераидзе З.Н., Матиашвили И.Г. Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия, Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики, Тбилиси, № 4(21), 2005

- 17.Обгадзе Т.А.,Прангишвили А.И,Цвераидзе З.Н.,Матиашвили И.Г. Математическое моделирование грязевых селевых потоков, Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики. Тбилиси, № 4(21), 2005
- 18.Richardson. L.F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry DAM. – Trans. Roy. Soc. London, ser.A., v. 210,1910, p. 307-357
- 19.Philips H.,Wiener N. Nets and the Dirichlet program.-J. Math. And Phys., v. 2, p.105-124
- 20.Thom A. The flow past circular cylinders at low speeds. – Proc.Roy.Soc.,London, ser.A,v.141,1933, p.651-666
- 21.Роуч П. Вычислительная гидродинамика, пер. С англ., Мир, Москва,1980, 616с.
- 22.Рихтмайер Р.,Мортон К. Разностные методы решения краевых задач, пер. С англ., Мир, Москва, 1972
- 23.Вазов В.,Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, пер. С англ.,Мир,Москва, 1963
- 24.Самарский А.А.Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области,ЖВМ и МФ,т.2,№5, с. 787-811
- 25.Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред, пер. с англ.,Мир, Москва, 1974.
26. Зоммерфельд А. Механика деформируемых сред, пер. с англ, ИЛ, Москва,1954.
27. Жермен С. Механика сплошных сред, пер. с франц., Мир, Москва,1965.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика,Наука, Москва, 1986.
29. Eirich F.R. Rheology, Theory and Applications, v.1., Academic Press, New York, 1956.
30. Гасанов А.Б. Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия, Баку-ЭЛМ, 2004.
31. Roahe P.J. Computational fluid dynamics, Albuquerque, New Mexico, 1976.
32. Sebeci T., Bradshaw P. Physical and computational aspects of convective heat transfer,New York, 1984.
33. Коул Дж.,Кук Л. Трансзвуковая фэродинамика, пер. с англ., Мир,Москва,1989.
34. Хемш М., Нилсен Дж. Аэродинамика ракет,том 1,том 2, пер. с англ., Мир,Москва, 1989.
35. Краснов Н.Ф.,Кошевой В.Н.,Данилов А.Н. и др. Аэродинамика в вопросах и задачах: учеб. пос.,Москва, 1985.
36. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости,Москва,1976.
37. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости,Москва,1979.
38. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость, Москва, 1980.
39. Горлин С.М. Экспериментальная аэродинамика. Учеб. пособие для вузов. — М.: "Высшая школа", 1970. 423 с,

40. Горохов Е.В., Кузнецов С.Г. Ветровые нагрузки на низких зданиях в застройке с высотным зданием /Современное промышленное и гражданское строительство, том 2. — № 1. — 2006С. 28&38.
41. Dyrbye С., Hansen S.O. Wind loads on structures. New York: John Wiley & Sons. 1999, 229 p.
42. СНиП 2.01.07-85*. Нагрузки и воздействия, Москва, 1986
43. Савицкий Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения, Стройиздат, Москва,, 1972
44. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения, пер. с англ., Стройиздат, Москва, 1978
45. Kupradze V. D. Potential Methods in the Theory of elasticity. Daniel Davey & Co., New York , 1965
46. Brebbia C.A. The boundary element method for engineers. Pentech Press , London , Holstead press, New York , 1978
47. Temam R. Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis . St. in Math. And its Applic., v.2, 1979

