ივანიძე მარეხ

თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2014

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ივანიძე მარეხის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი: ______________________________

ხელმძღვანელი: ______________________________

რეცენზენტი: ______________________________

რეცენზენტი: ______________________________

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2014

ავტორი: ივანიძე მარეხ

დასახელება: თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემოთ მოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

რეზიუმე

მარეხ ივანიძის სადისერტაციო ნაშრომი **„თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის“** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, *თერმოდრეკადობის თეორიის* სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი ანიზოტროპული კომპოზიტური მასალები და არსებითად ანიზოტროპული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური და თერმული ველების ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში. პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით შესწავლილია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა და გარე სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები,
ასევე გამოკვლეულია ძირითადი საკონტაქტო და საკონტაქტო-სასაზღვრო ამოცანები კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულებისათვის. აღნიშნული ამოცანები დაყვანილია შესაბამის სინგულარულ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებათა სისტემაზე, დეტალურადაა გამოკვლეული შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებები, გამოკვლეულია მათი ნულ-სივრცეები და დადგენილია მათი ფრედჰოლმურობისა და შებრუნებადობის საკითხები შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

ერთადერთობის საკითხის გაანლიზებისას წარმოდგენილი დისერტაციის ყველაზე მნიშვნელოვან შედეგს წარმოადგენს გარე ამოცანების შემთხვევაში დადგენილი ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნის

ერთადერთობას. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია ამონახსნების მოძებნა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში. ამ სივრცეში კი, ზოგადად, გრინის ფორმულები არ იწერება, რაც კლასიკურ თეორიაში ერთადერთობის თეორემების დამტკიცების დროს არსებითად გამოიყენება. ამიტომ აუცილებელი გახდა ახალი პირობების დადგენა უსასრულობის მიდამოში, რომელიც უზრუნველყოფდა ამონახსნების ერთადერთობას. ეს ამოცანა წარმატებითაა გადაჭრილი დისერტაციაში და მოძებნილია საკმარისად ეფექტური სტრუქტურული შეზღუდვის პირობები.

ამონახსნების არსებობის შესწავლისათვის დისერტაციაში გამოყენებულია პოტენციალთა მეთოდი და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია. ამ მიზნით აგებულია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ფუმდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა, გამოკვლეულია ამ მატრიცის ყოფაქცევა პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში და დაგენილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები.

დირიხლეს და ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები წარმოდგენილია მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციების სახით, რისი საშუალებითაც ამოცანები დაიყვანება ეკვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებებზე. გამოკვლევის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ნაწილია შესაბამისი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობის შესწავლა, მათი ინდექსის დადგენა და ინტეგრალური ოპერატორების ნულ სივრცეების ბაზისის ცხადი სახით აგება.

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების, ასევე ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნები არსებობს, ერთადერთია და ისინი წარმოდგენადია მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათი წრფივი კომბინაციების სახით. ამასთან, პოტენციალთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება შესაბამისი ცალსახად ამოხსნადი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემებიდან. ამ ინტეგრალური განტოლებების შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები გაანალიზებულია დეტალურად, შესწავლილია მათი ფრედჰოლმურობის თვისებები და დადგენილია მათი შებრუნებადობა შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

ნეიმანის შიგა ამოცანის გამოკვლევის დროს დადგენილია, რომ ნეიმანის შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია შვიდი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი და ისინი აგებულია ცხადი სახით. ნეიმანის შიგა არაერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით წარმოშობილ ინტეგრალურ ოპერატორს და მის შეუღლებულ ოპერატორს ასევე შვიდგანზომილებიანი ნულ სივრცე გააჩნია. ამიტომ შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემები არაა უპირობოდ ამოხსნადი ნებისმიერი მონაცემისათვის. ნაშრომში ეფექტურადაა აგებული შეუღლებული ოპერატორის შვიდგანზომილებიანი ნულ-სივრცის ბაზისი და ცხადი სახითაა დაწერილი ნეიმანის შიგა ამოცანის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

ანალოგიური მიდგომით გამოკვლეულია თერმოდრეკადობის სტატიკის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები უბნობრივ ერთგვაროვანი ანიზოტროპული კომპოზიტური სხეულებისათვის, როდესაც საკონტაქტო ზედაპირზე მოცემულია ე.წ. ხისტი ტრანსმისიის პირობები, ხოლო კომპოზიტური სხეულის საზღვარზე მოცემულია რომელიმე ტიპის (დირიხლეს, ნეიმანის, ან რობენის) სასაზღვრო პირობა. კერძოდ, ნაშრომში პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით დეტალურადაა შესწავლილი სამი ტიპის საკონტაქტო ამოცანა:

(i) ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე.

(ii) დირიხლეს სასზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ურთიერთმოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არისათვის. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე, ხოლო დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპოზიტური სხეულის გარე საზღვარზე.

(iii) რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური სხეულისათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისგან და მისი მოსაზღვრე უსასრულო კომპონენტისგან. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე, ხოლო რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე;

ამ სამივე ტიპის ამოცანაში დამტკიცებულია, რომ შესაბამის არეებში ამონახსნები წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციებით, რომელთა სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი ინტეგრალური განტოლებების სისტემიდან.

S U M M A R Y

The present PhD thesis “Investigation of basic boundary value problems of thermoelastostatics for anisotropic solids” by Marekh Ivanidze deals with the problems of Mathematical Physics, in particular three-dimensional boundary value and boundary-transmission problems of statics of thermo-elasticity theory for general anisotropic solids. In recent years, due to the rapidly increasing use of composite materials in modern industrial and technological processes, on the one hand, and in biology and medicine, on the other hand, the mathematical modelling related to complex composite structures and their mathematical analysis became very important from the theoretical and practical points of view. Mathematical investigation of such complex models has a crucial importance for both fundamental research and practical applications. In particular, the most essential question is the investigation of well-posedness of corresponding mathematical problems, which includes the analysis of uniqueness, existence, smoothness and stability of solutions, as well as development of appropriate efficient numerical algorithms for calculation of basic thermo-mechanical characteristics.

The main objective of the dissertation is a detailed investigation of the three-dimensional Dirichlet, Neumann and Robin type boundary value problems for the differential equations of statics of thermo-elasticity theory of anisotropic solids. These problems are studied by using the potential method and the theory of integral equations.

One of the most essential results of the dissertation is investigation of the uniqueness questions in the exterior problems. The case is that solutions to the exterior boundary value problems should be sought in the space of vector functions which are only bounded at infinity. For such vector functions the standard Green formulas do not hold and one needs to introduce a special class of bounded vector functions. This problem is successfully solved in the dissertation by introducing an appropriate space of vector functions. The efficient asymptotic and structural sufficient conditions are established at infinity guaranteeing uniqueness of solutions to the exterior problems.

The existence of solutions is proved by the potential method and the theory of singular integral equations. To this end, the matrix of fundamental solutions to the system of governing differential equations is efficiently constructed by the Fourier transform technique and its properties in a vicinity of the pole and at infinity are studied. The mapping and jump properties of the corresponding single and double layer potentials and the boundary integral operators generated by them are investigated.

In the dissertation, it is shown that with the help of the single and double layer potentials the Dirichlet and Neumann boundary value problems can be reduced to equivalent boundary integral equations. Investigation of the Fredholm properties, analysis of the index problem and construction of the basis of the corresponding null-spaces of the operators and their adjoint ones is the most principal part of the dissertation.

It is proved that solutions to the interior and exterior Dirichlet boundary value problem, as well as the Neumann boundary value problem are uniquely and unconditionally solvable and their solutions are representable by the single and double layer potentials. The unknopwn densities of the potentials are defined by the corresponding uniquely solvable singular integral (pseudodifferential) equations.

In the case of the interior Neumann type boundary value problem, it is shown that the non-homogeneous problem is not unconditionally solvable, since the corresponding homogeneous problem possesses seven linearly independent solutions which are found explicitely in terms of elementary functions. With the help of the single layer potential the problem is reduced to the equivalent system of boundary integral equations and the seven-dimensional null space of the respective adjoint integral operator is constucted explicitely. On the basis of these results the necessary and suficient conditions for the Neumann problem to be solvable are written explicitely.

The boundary-transmission problems for piece wise homogeneous anisotropic composite solids are studied by the similar approach. In these problems the basic rigid contact conditions are given on the interface, while on the boundary of the composite body one of the basic boundary conditios (the Dirichlet, Neumann or Robin type boundary condition) is presribed. In particular, three type boundary-transmission problems are studied in detail in the dissertation:

(i) The basic transmission problem for piece wise homogeneous three-dimensional space consisting of two adgasent anisotropic elstic components with different material constants, when one of them is a bounded region and the second one is its complement to the whole space. The rigid transmission conditions are given on the interface.

(ii) The Dirichlet boundary-transmission problem for a bounded composite anisotropic elstic solid consisting of two adgasent bounded domains with different material constants. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Ditichlet condition is given on the exterior boundary of the composite body.

(iii) The Robin type boundary-transmission problem for an ubounded composite anisotropic elstic solid consisting of a bounded domain with interior cavity and its adgasent unbounded compliment. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Robin type condition is given on the interior boundary of the composite body.

For all these transmission problems it is shown that the solutions can be represented by the single layer potentials whose densities are defined by the respective uniquely solvable systems of integral equations.

შინაარსი

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორებს,
პროფესორ დავით ნატროშვილსა და
პროფესორ შოთა ზაზაშვილს
მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და
გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

სადისერტაციო ნაშრომი ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სანგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი ანიზოტროპული კომპოზიტური მასალები და არსებითად ანიზოტროპული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი ამოცანები გვხვდება პრაქტიკულად ყველა საინჟინრო დარგში, როგორებიცაა მანქანათმშენებლობა, თვითმფრინავთმშენებლობა, გემთმშენებლობა, ზებგერითი და კოსმოსური აპარატების წარმოება, სამოქალაქო მშენებლობა და სხვა. თერმოდრეკადობის ამოცანებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება ისეთი ხელსაწყო-აპარატების და დანადგარების წარმოებისას, რომელთა ექსპლუატაცია მიმდინარეობს მაღალ ტემპერატულ რეჟიმში. გარდა საინჟინრო პრაქტიკისა, თერმოდერეკადობის ამოცანებმა არსებითი მნიშვნელობა შეიძინეს ბიო-სამედიცინო სფეროს ამოცანებში, კერძოდ, სხვადასხა ტიპის ბიო-სამედიცინო აპარატურის დამზადების საკითხებში. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური და თერმული ველების ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით, თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

კლასიკური თერმოდრეკადობის ამოცანებს დიდი ხნის ისტორია აქვს, მაგრამ მათი კვლევა და სხავადხავა ასპექტით შესწავლა დღემდე დიდ აქტუალობას ინარჩუნებს. ამ ამოცანების მდიდარი ისტორიული მიმოხილვა გადმოცემულია ცნობილი პოლონელი მეცნიერის ვიტოლდ ნოვაცკის მონოგრაფიებაში [32], [33], ასევე ქართველი მეცნიერების ვიქტორ კუპრაძის, თენგიზ გეგელიას, მიხეილ ბაშელეიშვილის და თენგიზ ბურჭულაძის საერთაშორისო მასშტაბით სამაგიდო წიგნად აღიარებულ მონოგრაფიაში [23]. ამ მონოგრაფიებში აგებულია და სხვადასხვა მეთოდით გამოკვლეულია თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის

და მდგრადი რხევის ამოცანები იზოტროპული სხეულების შემთხვევაში.

თერმოდრეკადობის თეორიის ამოცანების ფრიად დიდ მნიშვნელობაზე მიუთითებს ის ფაქტიც, რომ რამდენიმე წელია მიმდინარეობდა და წელს დასრულდა ერთ-ერთი უმნიშველოვანესი მრავალტომიანი ენციკლოპედიური გამოცემა: თერმული ძაბვების ენციკლოპედია, რომელიც დაბეჭდა შპრინგერის გამომცემლობამ [10]. ამ ენციკლოპედიურ გამოცემის მომზადებაში თავისი წვლილი შეიტანეს ქართველმა მეცნიერებმაც. კერძოდ, გამოცემის რედაქტორის - პოლონელი წარმოშობის გამოჩენილი ამერიკელი მეცნიერის რიჩარდ ჰეტნარსკის შეკვეთით სამი განაკვეთი დაწერა დავით ნატროშვილმა.

დეტალური ისტორიული განხილვის გარეშე ჩვენ აქ მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ თერმოდრეკადობის თეორიის ფსევდო-რხევის, მდგრადი რხევის და ზოგადი დინამიკის ამოცანები იზოტროპული სხეულებისათვის შესწავლილია მრავალ შრომაში (იხ. [5], [23], [32], [28], [30] და იქ ციტირებული ლიტერატურა). ამ შრომებში გამოყენებული გამოკვლევის მეთოდებია: პოტენციალთა თეორია ([15], [23], [8], [9]), ვარიაციული და ფუნქციონალური მეთოდები ([7], [32]), ფუნდამენტურ ამონახსნთა და ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდები ([23]).

რადგან დრეკად სხეულთა შინაგანი სტრუქტურა ძირითადად ანიზოტროპული ხასიათისაა, ამიტომ გამოყენების თვალსაზრისით მკვლევართა უფრო დიდი ინტერესი დაიმსახურა ანიზოტროპული სხეულების თერმოდრეკადობის ამოცანებმა. ანიზოტროპული სხეულებისთვის თერმოდრეკადობის თეორიის ფსევდორხევის და ზოგადი დინამიკის ამოცანები პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით განხილულია ნაშრომებში [18]-[22] (იხ. აგრეთვე იქ ციტირებული ლიტერატურა).

შევნიშნოთ, რომ ანიზოტროპული სხეულების თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების გამოკვლევა დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან. კერძოდ, ფსევდო-რხევის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში ფაქტობრივად ექსპონენციალურად ქრება, მაშინ როდესაც შესაბამისი სტატიკის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში, ზოგადად, მხოლოდ შემოსაზღვრულია. ეს არსებითად ართულებს სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას, როგორც ამონახსნის ერთადერთობის, ისე ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით. საჭირო ხდება ამონახსნთა კლასის დაზუსტება და ისეთი ასიმპტოტური პირობების დადგენა უსასრულობაში, რომელიც უზრუნველყოფს სტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობას. ეს საკითხები სამეცნიერო ლიტერატურაში არ არის შესწავლილი იზოტროპული სხეულების შემთხვევაშიც კი.

წარმოდგენილი დისერტაციის ძირითადი მიზანია ამ ხარვეზის აღმოფხვრა

და თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობის დეტალურად შესწავლა.

ანიზოტროპული სხეულების თერმოდრეკადობის თეორიაში ძაბვის ტენზორი $\{\sigma_{kj}\}$, დეფორმაციის ტენზორი $\{e_{kj}\}$ და ტემპერატურული ველი ერთმანეთთან დაკავშირებულია დიუამელ-ნეიმანის კანონით:

$$\sigma_{kj} = c_{kjpq}\, e_{pq} - \beta_{kj}\, u_4,$$

$$e_{kj} = 2^{-1}\Big(\partial_k u_j + \partial_j u_k\Big), \quad k, j = 1, 2, 3,$$

სადაც $c_{kjpq} = c_{pqkj} = c_{jkpq}$ დრეკადი მუდმივებია, $\beta_{pq} = \beta_{qp}$ არის თერმული და მექანიკური ველების დამაკავშირებელი მუდმივები, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ არის გადაადგილების ვექტორი, ხოლო $u_4 = \vartheta$ ტემპერატურის განაწილების ფუნქციაა.

თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის წრფივ განტოლებათა სისტემას ანიზოტროპული სხეულებისათვის შემდეგი სახე აქვს [21]-[22], [23], [32]:

$$c_{kjpq}\, \partial_j \partial_q u_p(x,t) - \beta_{kj}\, \partial_j u_4(x,t) = \rho\, \partial_t^2 u_k(x,t) - X_k(x,t), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4(x,t) - c_0\, \partial_t u_4(x,t) - T_0\, \beta_{pq}\, \partial_t \partial_p u_q(x,t) = -X_4(x,t),$$

სადაც $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია, $c_0 > 0$ არის სითბოტევადობა, $T_0 > 0$ - სხეულის ბუნებრივი მდგომარეობის ტემპერატურა, $X = (X_1, X_2, X_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა, X_4 არის სითბოს წყარო, $x = (x_1, x_2, x_3)$ აღნიშნავს სივრცულ ცვლადს და t არის დროითი ცვლადი; განმეორებითი ინდექსით იგულისხმება აჯამვა 1-დან 3-მდე, ხოლო ზედა ინდექსი $\top$ არის ტრანსპონირების სიმბოლო; $\partial_p := \dfrac{\partial}{\partial x_p}$, $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$.

თუ გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა დროზე დამოკიდებულია ჰარმონიულად, მაშინ მივიღებთ მდგრადი რხევის განტოლებებს, ხოლო როდესაც გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე, მაშინ მივიღებთ თერმოდრეკადობის სტატიკის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\, \partial_j \partial_q u_p(x) - \beta_{kj}\, \partial_j u_4(x) = -X_k(x), \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4(x) = -X_4(x).$$

წარმოდგენილი დისერტაცია ეძღვნება ზემოთ მოყვანილი განტოლებებით აღწერილი ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი ანიზოტროპული სხეულების თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანებისა და ტრანსმისიის ტიპის საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით.

დისერტაცია შედგება შესავლისგან, ორი თავისა და ცხრა პარაგრაფისაგან, ასევე ციტირებული ლიტერატურის სიისაგან, რომელიც მოიცავს 37 დასახელებას.

ახლა მოკლედ მიმოვიხილოთ თითოეულ თავში მიღებული შედეგები.

პირველი თავის 1.1 პარაგრაფში ამოწერილია თერმოდრეკადობის თეორიის შესაბამისი ველის განტოლებები ანიზოტროპული სხეულებისათვის და შემოღებულია მისი შესაბამისი მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორები. ამოწერილია ზოგადი დინამიკის, ფსევდო-რხევისა და სტატიკის შესაბამისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები, რომლებიც წარმოშობენ ფორმალურად არათვითშეუღლებულ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს. ასევე შემოღებულია კლასიკური ძაბვის, თერმოდრეკადობის ძაბვის და თერმოძაბვის განზოგადებული მატრიცული ოპერატორები. განმარტებულია ზედაპირთა კლასები და ფუნქციათა სივრცეები.

1.2 პარაგრაფში ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნის ტერმინებში აგებულია სტატიკის $A(\partial)$ ოპერატორის შესაბამისი ფუნდამენტური $\Gamma(x)$ მატრიცა და შესწავლილია მისი ყოფაქცევა უსასრულობისა და კოორდინატთა სათავის მიდამოში.

1.3 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები. ასევე ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო ამოცანები შესაბამისი ფორმალურად შეუღლებული $A^{*}(\partial)$ ოპერატორისათვის.

1.4 პარაგრაფში გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოყვანილია სხვადასხვა ტიპის გრინის ფორმულა სტატიკის განტოლებათა სისტემიდან წარმოქმნილი მატრიცული ოპერატორისათვის $[C^2(\overline{\Omega^+})]^3$ კლასის ვექტორ-ფუნქციებისათვის გლუვი $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ არის შემთხვევაში.

1.5 პარაგრაფის 1.5.1 ქვეპარაგრაფში განხილულია სტატიკის განტოლების შესაბამისი შიგა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. მტკიცდება, რომ დირიხლეს, რობენის და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასში, ხოლო ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება გარკვეული სტრუქტურის მქონე მუდმივი შესაკრები ვექტორის სიზუსტით, რომელიც აგებულია ცხადი სახით ელემენტარული წრფივი ფუნქციებით.

1.5.2 ქვეპარაგრაფი ეძღვნება გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების

ერთადერთობის გამოკვლევას. უსასრულო არის შემთხვევაში დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის შესწავლა ხდება უსასრულობის მიდამოში გარკვეული ასიმპტოტიკის მქონე ვექტორ-ფუნქციათა კლასში. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია გარე ამოცანების განხილვა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სპეციალურ კლასში, რადგან ზოგადად თერმოსტატიკის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი უსასრულობის მიდამოში არ ქრება; კერძოდ, გადაადგილების ვექტორი უნდა ვეძიოთ უსასრულობის მიდამოში შემოსაზღვრულ ფუნქციათა კლასში, ხოლო ტემპერატურის ფუნქცია კი - უსასრულობის მიდამოში ქრობად ფუნქციათა კლასში. აღნიშნულ ქვეპარაგრაფში შემოღებულია ასეთ ვექტორ-ფუნქციათა კლასი $Z(\Omega^-)$, დამტკიცებულია რამდენიმე დამხმარე დებულება და შესწავლილია გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი რეგულარული ამონახსენი ვექტორ-ფუნქიათა $Z(\Omega^-)$ კლასში.

ამავე ქვეპარაგრაფში შეუღლებული გარე ამოცანების ამონახსნებისთვის დადგენილია ასიმპტოტური ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში და შემოღებულია შესაბამისი $Z^*(\Omega^-)$ კლასი, ხოლო 1.5.3 ქვეპარაგრაფში დამტკიცებულია შესაბამისი ერთადერთობის დებულებები. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ შეუღლებულ დირიხლეს შიგა და გარე, ასევე ნეიმანის გარე ერთგვაროვან ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი, ხოლო ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში ზოგადი ამონახსენია გარკვეული სტრუქტურის მქონე ვექტორი, რომლის პირველი სამი კომპონენტი შეესაბამება ხისტი გადაადგილების ვექტორს, ხოლო მეოთხე კომპონენტი ნებისმიერი მუდმივია. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნადობის საკითხის შესწავლისას, კერძოდ, შესაბამისი შეუღლებული ოპერტორების ნულ-სივრცეების გასაანალიზებლად.

1.6 პარაგრაფში ანიზოტროპული დრეკადობის თეორიის სტატიკის $A(\partial)$ და $A^*(\partial)$ ოპერატორების ფუნდამენტური მატრიცის საშუალებით აგებულია ზედაპირული - მარტივი და ორმაგი ფენის პეტენცილები და გამოკვლეულია მათი თვისებები. ასევე, გამოყვანილია ზოგადი ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები, როგორც შიგა, ასევე გარე უსასრულო არეების შემთხვევაში.

1.7 პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამო-

ნახსნების არსებობის თეორემები რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასებში. კერძოდ, 1.7.1 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს შიგა სასაზღვრო ამოცანა და ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^1(\overline{\Omega^+})\big]^4 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^4$ კლასში. მოცემულია დირიხლეს შიგა ამოცანის განოკვლევის ორი მეთოდი. პირველი დაფუძნებულია ამონახსნის ორმაგი ფენის $W(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე, ხოლო მეორე მიდგომა - ამონახსნის მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე.

ორივე შემთხვევაში დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. პირველ შემთხვევაში ეს სისტემა წარმოადგენს ნორმალურად ამოხსნად სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, ხოლო მეორე შემთხვევაში ინტეგრალური ოპერატორი არის მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო მნიშვნელობით წარმოშობილი -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი დადებითად განსაზღვრული მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცით. ნაჩვენებია ამ ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და მათი ნულ-სივრცის ტრივიალურობა, რაც ეკვივალენტურია აღნიშნული ინტეგრალური ოპერატორების შებრუნებადობისა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში. აქედან კი ტრივიალურად გამომდინარეობს დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულებები.

ანალოგიური მიდგომით, 1.7.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია, რომ ის ამოხსნადია ვექტორ-ფუნქცაითა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^2(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალით.

1.7.3 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^2(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების $W(g) + aV(g)$ წრფივი კომბინაციით, სადაც g სიმკვრივე განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან. შიგა ამოცანის ანალოგიურად, აქაც დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალითაც.

ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^+})]^4 \cap [C^2(\Omega^+)]^4$ სივრცეში გამოკვლეულია 1.7.4 ქვეპარაგრაფში. მარტივი ფენის პოტენციალის საშუალებით ამ სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა

დაყვანილია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით წარმოშობილი ოპერატორი ფრედჰოლმურია ნულოვანი ინდექსით და ამ ოპერატორის გული შვიდგანზომილებიან სივრცეს ქმნის. ამასთან შეუღლებული ინტეგრალური ოპერატორის შვიდგანზომილებიანი სივრცის ბაზისი ცხადი სახითაა ამოწერილი. ეს საშუალებას გვაძლევს ცხადად ამოვწეროთ ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

მეორე თავში შესწავლილია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ანიზოტროპული სხეულებისათვის. კერძოდ, განხილულია სამი შემთხვევა, როდესაც

(1) კომპოზიტურ სხეულს უკავია მთელი სივრცე, რომელიც შედგება სასრული D_1 არისა და მისი უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_1$ დამატებისგან, $\partial D_1 = \partial D_2$;

(2) კომპოზიტურ სხეულს უკავია სასრული არე, რომელიც შედგება ორი ურთიერთმოსაზღვრე სასრული Ω_1 და Ω_2 არისაგან; ამასთან Ω_1 არე მდებარეობს Ω_2 არის შიგნით და $S_1 = \partial\Omega_1$, ხოლო $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$, სადაც S_1 მდებარეობს S_2-ის შიგნით;

(3) კომპოზიტურ სხეულს უკავია უსასრულო არე, რომელიც შედგება ცარიელი D_0 სიღრუვის შემცველი სასრული D_1 და უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D}_0 \cup \overline{D}_1)$ არეებისგან; ამასთან $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$, სადაც S_0 მდებარეობს S_1-ის შიგნით, ხოლო $\partial D_2 = S_1$.

სამივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ განსხვავებული არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი ანიზოტროპული მასალით.

2.1 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სასრული კომპოზიტური არისათვის და განხილულია ამ ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ ძირითად საკონტაქტო და დირიხლეს, რობენისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი, ხოლო ნეიმანის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება გარკვეული სტრუქტურის მქონე შესაკრები ვექტორის სიზუსტით.

ამავე პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა კომპოზიტური მთელი სივრცისათვის $\mathbb{R}^3 = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ და დამტკიცებულია შესაბამისი ერთადერთობის თეორემა.

2.2 პარაგაფში განხილულია ტრანსმისიის ამოცანების ამონახსნების არსე-

ბობის საკითხი. კერძოდ, 2.2.1 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ძირითადი საკონ-ტაქტო ამოცანა და დამტკიცებულია, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$, სადაც $U^{(j)}$, $j = 1, 2$, წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალე-ბით: $U^{(1)} = V^{(1)}(h)$ და $U^{(2)} = V^{(2)}(g)$, ხოლო h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

2.2.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამო-ცანა სასრული კომპოზიტური არისათვის: $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, სადაც $\partial\Omega_1 = S_1$, $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$. დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$ ერთადერთია და თითოეული ვექტორი წარმოიდგინება შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალებით: $U^{(1)} = V^{(1)}_{S_1}(h)$ და $U^{(2)} = V^{(2)}_{S_1}(g) + V^{(2)}_{S_2}(\varphi)$. საძიებელი g, h და φ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგ-რალურ განტოლებათა სისტემიდან.

2.2.3 ქვეპარაგარფში კი გამოკვლეულია რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის, როდესაც სასრული კომპონენტი თავის შიგნით შეიცავს სიცარიელეს, სადაც მოცემულია რობენის ტიპის სასაზ-ღვრო პირობა. ამ შემთხვევაშიც პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ განსახილველი სა-საზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალებით, რომელთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

1 ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

1.1 ველის განტოლებები, ზედაპირთა კლასები, ფუნქციათა სივრცეები

თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის წრფივ განტოლებათა სისტემა ანიზოტროპული სხეულებისათვის შემდეგნაირად ჩაიწერება [21]-[22], [23], [32]:

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x,t) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x,t) = \rho\,\partial_t^2 u_k(x,t) - X_k(x,t), \qquad k = 1,2,3, \tag{1.1}$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x,t) - c_0\,\partial_t u_4(x,t) - T_0\,\beta_{pq}\,\partial_t\partial_p u_q(x,t) = -X_4(x,t), \tag{1.2}$$

სადაც $c_{kjpq} = c_{pqkj} = c_{jkpq}$ დრეკადი მუდმივებია, $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია, $c_0 > 0$ არის სითბოტევადობა, $T_0 > 0$ - სხეულის ბუნებრივი მდგომარეობის ტემპერატურა, $\beta_{pq} = \beta_{qp}$ არის თერმული და მექანიკური ველების დამაკავშირებელი მუდმივები, $\rho = const > 0$ არის სხეულის სიმკვრივე, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ არის გადაადგილების ვექტორი, $u_4 = \vartheta$ არის ტემპერატურის განაწილების ფუნქცია, $X = (X_1, X_2, X_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა, X_4 არის სითბოს წყარო, $x = (x_1, x_2, x_3)$ აღნიშნავს სივრცულ ცვლადს და t არის დროითი ცვლადი; აქ და ქვემოთ ყველგან განმეორებითი ინდექსით იგულისხმება აჯამვა 1-დან 3-მდე, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი; ზედა ინდექსი $\top$ არის ტრანსპონირების სიმბოლო და $\partial_p := \dfrac{\partial}{\partial x_p}$, $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$.

შემდგომში, განტოლებათა (1.1)-(1.2) სისტემაში, ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ $X = 0$, $X_4 = 0$. გარდა ამისა, ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\rho = 1$.

(1.2) ფორმულაში $-T_0\,\beta_{pq}\,\partial_t\partial_p u_q(x,t)$ შესაკრები აღწერს თერმულ და მექანიკურ ველებს შორის კავშირს. ეს წევრი ქრება მაშინ, როდესაც საქმე გვაქვს სტაციონარულ პროცესთან. ამ შემთხვევაში, ან თუ ეს წევრი უგულვებელყოფილია, ჩვენ საქმე გვაქვს ე.წ. განცალებულ თერმოდრეკადობის თეორიასთან, რადგან (1.1)-(1.2) სისტემის მეორე განტოლებაში დარჩება მხოლოდ ტემპერატურის $u_4 = \vartheta$ ფუნქცია.

თერმოდრეკადობის თეორიაში ძაბვის ტენზორი $\{\sigma_{kj}\}$, დეფორმაციის ტენზორი $\{e_{kj}\}$ და ტემპერატურული ველი u_4 ერთმანეთთან დაკავშირებულია დიუამელ-ნეიმანის (Duhamel-Neumann) კანონით:

$$\sigma_{kj} = c_{kjpq}\, e_{pq} - \beta_{kj}\, u_4,$$

$$e_{kj} = 2^{-1}\Big(\partial_k u_j + \partial_j u_k\Big), \quad k,j = 1,2,3;$$

$n = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ზედაპირის ელემენტზე მოქმედი თერმოძაბვის ვექტორის k-ური კომპონენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$\sigma_{kj} n_j = c_{kjpq}\, e_{pq}\, n_j - \beta_{kj}\, n_j u_4 = c_{kjpq}\, n_j \partial_q u_p - \beta_{kj}\, n_j u_4, \quad k,j = 1,2,3. \tag{1.3}$$

თუ (1.1)-(1.2) განტოლებებზე მოვახდენთ ლაპლასის ფორმალურ გარდაქმნას, ერთგვაროვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში, ე.ი. როცა $u_p(x,0) = 0$, $p = \overline{1,4}$, და $\partial_t\, u_j(x,0) = 0$, $j = 1,2,3$, მივიღებთ ე.წ. ფსევდო-რხევის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\, \partial_j \partial_q u_p(x) = \tau^2\, u_k(x) + \beta_{kj}\, \partial_j u_4(x), \qquad k = 1,2,3, \tag{1.4}$$

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4(x) - \tau\, c_0\, u_4(x) - \tau\, T_0\, \beta_{pq}\, \partial_p u_q(x) = 0. \tag{1.5}$$

აქ $\tau = \sigma - i\omega$ არის კომპლექსური პარამეტრი, სადაც $\omega \in \mathbb{R}$ და $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ხოლო

$$u_p(x) = \int_0^\infty u_p(x,t)\, e^{-\tau t}\, dt.$$

თუ (1.1)-(1.2) სისტემის ყველა მონაცემი დროზე დამოკიდებულია ჰარმონიულად, ე.ი.

$$u_k(x,t) = u_k^{(1)}(x) \cos \omega t + u_k^{(2)}(x) \sin \omega t, \quad k = 1,2,3,4, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

მაშინ მივიღებთ ე.წ. მდგრადი რხევის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\, \partial_j \partial_q u_p(x) = -\omega^2 u_k(x) + \beta_{kj}\, \partial_j u_4(x), \qquad k = 1,2,3, \tag{1.6}$$

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4(x) + i\,\omega\, T_0\, \beta_{pq}\, \partial_p u_q(x) = 0. \tag{1.7}$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნა

$$u_k(x) = u_k^{(1)}(x) + i\, u_k^{(2)}(x), \quad k = 1,2,3,4.$$

ცხადია რომ (1.4)-(1.5) სისტემიდან შეგვიძლია ფორმალურად მივიღოთ (1.6)-(1.7) სისტემა, თუ (1.4)-(1.5) სისტემაში დავუშვებთ, რომ $\sigma = 0$, მაგრამ ეს მსგავსება ძალიან ფორმალურია.

ბოლოს დავუშვათ, რომ გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე; მაშინ (1.1)-(1.2) სისტემიდან მივიღებთ ე.წ. განცალებული თერმოდრეკადობის სტატიკის განტოლებებს

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x) = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{1.8}$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x) = 0. \tag{1.9}$$

ჩვენი კვლევის მთავარი მიზანია სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა (1.8)-(1.9) სისტემისათვის.

იმისათვის, რომ მოცემული განტოლებები ჩავწეროთ მატრიცული სახით, შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$U = (u_1,u_2,u_3,u_4)^\top = (u,u_4)^\top, \quad u = (u_1,u_2,u_3)^\top, \quad u_4 = \vartheta,$$

$$C(\partial) = \big[C_{kp}(\partial)\big]_{3\times3}, \qquad C_{kp}(\partial) = c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q, \tag{1.10}$$

$$\Lambda(\partial) = \lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q, \quad \partial \equiv \nabla = (\partial_1,\partial_2,\partial_3). \tag{1.11}$$

სიმარტივისათვის, $m\times n$ განზომილების A მატრიცისთვის ჩვენ გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნას $[A_{kp}]_{m\times n}$.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია (1.8)-(1.9) სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$A(\partial)U(x) = 0, \tag{1.12}$$

სადაც

$$A(\partial) := \big[A_{kj}(\partial)\big]_{4\times4} = \begin{bmatrix} C(\partial) & [-\beta_{kj}\,\partial_j]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \Lambda(\partial) \end{bmatrix}_{4\times4}. \tag{1.13}$$

ახლა შემოვიღოთ კლასიკური ძაბვის $T(\partial,n)$ ოპერატორი, თერმოდრეკადობის ძაბვის $P(\partial,n)$ ოპერატორი და თერმოძაბვის განზოგადებული მატრიცული $B(\partial,n)$ ოპერატორი

$$T(\partial,n) := \big[\,T_{kp}(\partial,n)\,\big]_{3\times3} = [\,c_{kjpq}\,n_j\partial_q\,]_{3\times3}, \tag{1.14}$$

$$P(\partial,n) := \big[\,P_{kp}(\partial,n)\,\big]_{3\times4} = \big[\,[T_{kp}(\partial,n)]_{3\times3},\,[-\beta_{kj}\,n_j]_{3\times1}\,\big]_{3\times4}, \tag{1.15}$$

$$B(\partial,n) := \big[\,B_{kp}(\partial,n)\,\big]_{4\times4} = \begin{bmatrix} T(\partial,n) & [-\beta_{kj}\,n_j]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \lambda(\partial,n) \end{bmatrix}_{4\times4}, \tag{1.16}$$

$$\lambda(\partial,n) = \lambda_{pq}\,n_q\,\partial_p. \tag{1.17}$$

ფიზიკური მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ

ა) $[\lambda_{pq}]_{3\times 3}$ მატრიცი არის დადებითად განსაზღვრული, ე.ი.

$$\Lambda(\xi) = \lambda_{pq}\,\xi_q\,\xi_p \geqslant \delta_0|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \quad |\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \quad \delta_0 = const > 0. \tag{1.18}$$

ბ) $c_{kjpq}\,\eta_{kj}\,\eta_{pq}$ კვადრატული ფორმა არის დადებითად განსაზღვრული ნამდვილი სიმეტრიული $\eta_{kj} = \eta_{jk}$ ცვლადების მიმართ

$$c_{kjpq}\,\eta_{kj}\,\eta_{pq} \geqslant \delta_0\,\eta_{kj}\,\eta_{kj}, \quad \delta_0 = const > 0. \tag{1.19}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $C(\xi) = \big[c_{kjpq}\,\xi_j\,\xi_q\big]_{3\times 3}$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, თუ $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ე.ი.

$$C_{kj}(\xi)\,\eta_p\,\eta_k \geqslant \delta_1\,|\xi|^2\,|\eta|^2, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3, \quad \delta_1 = const > 0. \tag{1.20}$$

დრეკადი c_{kjpq} მუდმივების და სითბოგამტარებლობის λ_{pq} კოეფიციენტების სიმეტრიულობიდან, აგრეთვე (1.18) და (1.20) უტოლობებიდან, მარტივად დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $\eta \in \mathbb{C}^3$ კომპლექსური ვექტორისთვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს:

$$C(\xi)\,\eta\cdot\eta = C_{kj}(\xi)\,\eta_p\,\overline{\eta}_k \geqslant \delta_1\,|\xi_{kj}|^2\,|\eta_{kj}|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{1.21}$$

$$\lambda_{pq}\,\eta_p\,\overline{\eta}_k \geqslant \delta_0\,|\eta|^2. \tag{1.22}$$

აქ და ქვემოთ $a\cdot b = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k\,\overline{b}_k$ აღნიშნავს ორი კომპლექსური $a = (a_1, ..., a_m)$ და $b = (b_1, ..., b_m)$ ვექტორის სკალარულ ნამრავლს. ჩვენ ასევე დაგვჭირდება რეალური (ნამდვილი) სკალარული ნამრავლი კომპლექსური ვექტორებისთვის

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k\,b_k, \quad a, b \in \mathbb{C}^m. \tag{1.23}$$

ვთქვათ, k არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, $k \geqslant 0$, ხოლო $\alpha \in (0;1]$ და $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ რაიმე ბმული არეა, რომლის საზღვარია $S = \partial\Omega$ და იგი მოიცემა შემდეგი განტოლებით: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი $z \in S$ წერტილის შესაბამის $0\xi_1\xi_2\xi_3$ ლოკალურ სისტემაში ამ ზედაპირის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2). \tag{1.24}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $0\xi_3$ ღერძი ემთხვევა $n(z)$ ნორმალს და $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < d$ ე.ი. φ ფუნქცია განსაზღვრულია d რადიუსიან $B(0,d)$ წრეზე:

$$B(0,d) := \Big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} < d\Big\}.$$

ვიტყვით, რომ $S \in C^k$, თუ $\varphi \in C^k(B(0,d))$ ყოველი $z \in S$ წერტილისთვის. ცხადია, $B(0,d)$ არე მდებარეობს $z \in S$ წერტილში გავლებულ მხებ სიბრტყეში.

ანალოგიური აზრი აქვს შემდეგ ჩანაწერს: $S \in C^{k,\alpha}$, ე.ი. ამ შემთხვევაში $\varphi \in C^{k,\alpha}(B(0,d))$. თუ $k=1$, მაშინ $C^{1,\alpha}$ კლასის ზედაპირს უწოდებენ ლიაპუნოვის ზედაპირს.

რადგან $\xi_3 = 0$ წარმოადგენს (1.24) ზედაპირის მხებ სიბრტყეს $(0;0)$ წერტილში, ამიტომ

$$\frac{\partial \varphi(0;0)}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi(0;0)}{\partial \xi_2} = 0.$$

შემოვიღოთ ფუნქციათა სივრცეები, რომლებიც გამოყენებული იქნება ჩვენს გამოკვლევაში (იხ. [13], [14], [23], [27]). $C^k(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ Ω არეში k-ჯერ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციების სიმრავლე. Ω^+ სიმბოლოთი ყოველთვის აღვნიშნავთ $\mathbb{R}^3$ სივრცის სასრული დიამეტრის მქონე არეს, ხოლო Ω^- სიმბოლოთი აღვნიშნავთ Ω^+ არის დამატებას: $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$. $C^k(\overline{\Omega})$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $C^k(\Omega)$ კლასის იმ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთა კერძო წარმოებულები k რიგამდე (ჩათვლით) უწყვეტად გაგრძელებადია Ω არის $\partial\Omega$ საზღვარზე. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $C^k(\overline{\Omega})$ კლასის იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა k რიგის წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას α მაჩვენებლით, ე.ი.

$$|\partial^{\mathrm{m}} u(x) - \partial^{\mathrm{m}} u(y)| \leqslant A|x-y|^\alpha, \qquad |\mathrm{m}| = k, \tag{1.25}$$

სადაც $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ მულტი-ინდექსია, ხოლო $|\mathrm{m}| = m_1+m_2+m_3 = k$ მულტი-ინდექსის სიგრძეა.

ანალოგიურად განიმარტება $C^k(S)$ და $C^{k,\alpha}(S)$ ფუნქციათა კლასები. კერძოდ, $f \in C^{k,\alpha}(S)$ ნიშნავს, რომ f ფუნქციას $x \in S$ წერტილში S ზედაპირის მხები მიმართულებით გააჩნია k რიგამდე (ჩათვლით) უწყვეტი წარმოებულები, ხოლო k რიგის წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰელდერის (1.25) პირობას α მაჩვენებლით.

$C^\infty_{comp}(\Omega^-)$ სიმბოლო აღნიშნავს უსასრულოდ გლუვი რეგულარული ფუნქციების კლასს, რომელთაც გააჩნიათ კომპაქტური საყრდენი Ω^- არეში.

$W^1_2(\Omega^\pm)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ კვადრატით ჯამებადი განზოგადებული პირველი რიგის წარმოებული $\Omega^\pm$ არეში (სობოლევის ფუნქციათა სივრცე).

$W^1_{2,loc}(\Omega^\pm)$ სიმბოლო აღნიშნავს იმ ფუნქციების სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან $W^1_2(\Omega_0)$ სივრცეს ნებისმიერი Ω_0 არისთვის, სადაც $\overline{\Omega}_0$ კომპაქტია და $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega^+$, ან $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega^-$.

$W^1_{2,comp}(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ისეთი ზომადი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ კომპაქტური საყრდენი Ω არეში და თავის პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად კვადრატით ჯამებადია Ω არეში.

შევნიშნოთ, რომ $W^0_2(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ აღნიშნავს ლებეგის აზრით ზომად, კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სიმრავლეს. ანალოგიურად, $W^0_{2,loc}(\Omega) \equiv L_{2,loc}(\Omega)$ აღნიშნავს ლოკალურად კვადრატით ჯამებად, ზომად ფუნქციათა სიმრავლეს, ხოლო $W^0_{2,comp}(\Omega)$
$\equiv L_{2,comp}(\Omega)$ აღნიშნავს Ω არეში კომპაქტური საყრდენის მქონე კვადრატით ჯამებადი, ზომადი ფუნქციების სიმრავლეს.

ცხადია (1.13) ფორმულით განსაზღვრული მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი $A(\partial)$ არ არის ფორმალურად თვითშეუღლებული. აღვნიშნოთ $A^*(\partial)$ სიმბოლოთი $A(\partial)$ ოპერატორის ფორმალურად შეუღლებული ოპერატორი

$$A^*(\partial) := \left[A^\top(-\partial)\right] = \begin{bmatrix} C(\partial) & [0]_{3\times 1} \\ \left[\beta_{kj}\,\partial_j\right]_{1\times 3} & \Lambda(\partial) \end{bmatrix}_{4\times 4}. \tag{1.26}$$

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ $n(x)$ აღნიშნავს S ზედაპირის მიმართ გარე ნორმალის ორტს $x \in S$ წერტილში. $[\cdot]^\pm$ სიმბოლო აღნიშნავს ცალმხრივ ზღვარს S ზედაპირზე შესაბამისად $\Omega^\pm$ არედან:

$$\{u(z)\}^\pm = \lim_{\Omega^\pm \ni x \to z \in S} u(x), \qquad z \in S.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ზღვარზე გადასვლა ხდება ნორმალის გასწვრივ.

1.2 ფუნდამენტური ამონახსენი

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცის ასაგებად ვიყენებთ ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნის ტექნიკას. ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნა ჯამებადი f ფუნქციისთვის გამოითვლება ფორმულით

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}[f] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{ix\cdot\xi}\, dx, \tag{1.27}$$

ხოლო შებრუნებული ფურიეს გარდაქმნა კი გამოითვლება ფორმულით (კვლავ ჯამებადი g ფუნქციისთვის)

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[g] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} g(\xi)\, e^{-ix\cdot\xi}\, d\xi. \tag{1.28}$$

როგორც ცნობილია ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება უწყვეტად გაგრძელდეს შვარცის ნელა ზრდადი განზოგადებული ფუნქციების $S^{'}(\mathbb{R}^3)$ სივრცეზე ([12], [36]).

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $A(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტური ამოხსნის მატრიცა შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\Gamma(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\big[A^{-1}(-i\xi)\big],$$

სადაც $\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}$ ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნაა,

$$A^{-1}(-i\xi) = \frac{1}{\det A(-i\xi)}\, A^{(c)}\,(-i\xi),$$

ხოლო $A^{(c)}(-i\xi)$ მატრიცა არის

$$A(-i\xi) = \begin{bmatrix} \big[C_{kjpq}(-i\xi_j)(-i\xi_q)\big]_{3\times 3} & \big[-\beta_{kj}(-i\xi_j)\big]_{3\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times 3} & \lambda_{pq}(-i\xi_j)(-i\xi_q) \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

მატრიცის მიკავშირებული მატრიცის (ანუ ალგებრული დამატებებით შედგენილი მატრიცის) ტრანსპონირებული. შევნიშნოთ, რომ $\det A(-i\xi)$ არის მერვე რიგის ერთგვაროვანი პოლინომი ξ_1, ξ_2, ξ_3, ცვლადების მიმართ, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან ნებისმიერი $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. კერძოდ,

$$det\, A(-i\xi) = det\, C(\xi)\cdot \Lambda(\xi) \geqslant \widetilde{\delta}_0 |\xi|^8, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{1.29}$$

სადაც $\widetilde{\delta}_0$ არის მატერიალურ პარამეტრებზე დამოკიდებული მუდმივი. ასევე ცხადია, რომ $A^{(c)}(-i\xi)$ მატრიცის ელემენტები ერთგვაროვანი პოლინომებია და

$$\begin{aligned} &A^{(c)}_{kj}(-i\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^6), \qquad k,j=\overline{1,3}, \\ &A^{(c)}_{j4}(-i\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^5), \qquad A^{(c)}_{4j}(-i\xi) = 0, \qquad j=\overline{1,3}, \\ &A^{(c)}_{44}(-i\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^6). \end{aligned}$$

გარდა ამისა შევნიშნოთ, რომ $A^{(c)}_{j4}(-i\xi)$, $j=\overline{1,3}$, კენტი ფუნქციებია. ამიტომ შემდეგი ფუნქციები

$$K_j(\xi) := \frac{A^{(c)}_{j4}(-i\xi)}{\det A(-i\xi)}, \qquad j=\overline{1,3},$$

წარმოადგენს -3 რიგის ერთგვაროვან რაციონალურ ფუნქციებს. ამასთან ისინი კენტი ფუნქციებია $K_j(-\xi) = -K_j(\xi)$, $j=\overline{1,3}$. ამიტომ $K_j(\xi)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ კალდერონის (წაკვეთის) პირობას, ანუ

$$\int\limits_{|\xi|=1} K_j(\xi)\, dS = 0, \qquad j=\overline{1,3}. \tag{1.30}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ K_j ფუნქციის ფურიეს განზოგადებული შებრუნებული გარდაქმნა, გაგებული კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით

$$\widetilde{K}_j(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}[K_j(\xi)],$$

არის ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია და აკმაყოფილებს კალდერონის პირობას (იხ. [26], Ch. 2, Proposition 2.16):

$$\int\limits_{|x|=1} \widetilde{K}_j(x)\, dS = 0, \qquad j = \overline{1,3}. \tag{1.31}$$

ცნობილია ასევე, რომ $-r < 0$ რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციების ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა, როცა $0 < r < 3$, წარმოადგენს $-3+r$ რიგის ერთგვაროვან ფუნქციებს (იხ. [26], Ch. 2, Proposition 2.13).

ამიტომ ფუნდამენტური ამონახსნის $\Gamma(x)$ მატრიცის ელემენტები ერთგვაროვანი ფუნქციებია $x-$ის მიმართ და გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა სათავისა და უსასრულობის მიდამოში

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x|^{-1})\big]_{3\times3} & \big[\mathcal{O}(1)\big]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big) \end{bmatrix}_{4\times4}. \tag{1.32}$$

($\mathcal{O}$ სიმბოლოსთან მდგომი ხარისხები მიუთითებენ შესაბამისი ელემენტების ერთგვაროვნების რიგს: $\Gamma_{kj}(x)$ არის -1 რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია, $k,j = \overline{1,3}$, ან $k=j=4$, ხოლო $\Gamma_{k4}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 3$ ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ფუნქციებია).

გარდა ამისა, ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_{|x|=1} \Gamma_{k4}(x)\, dS = 0, \qquad k = 1,2,3, \tag{1.33}$$

(იხ. (1.30), (1.31)).

შევნიშნოთ, რომ $\Gamma_{44}(x)$ ელემენტი, რომელიც წარმოადგენს $A_{44}(\partial) = \lambda_{pq}\,\partial_p\,\partial_q$ ოპერატორის ფუნდამენტურ ამონახსნს, იწერება ცხადი სახით (იხ. [?])

$$\Gamma_{44}(x) = -\frac{\alpha_0}{4\pi(\mathrm{d}x, x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\alpha_0}{4\pi[d_{kj}\,x_k\,x_j]^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha_0 = (\det \mathrm{d})^{\frac{1}{2}}. \tag{1.34}$$

$\mathrm{d} = [d_{kj}]_{3\times3}$ არის $[\lambda_{kj}]_{3\times3}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

1.3 ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ჩამოყალიბება.

ამ პარაგრაფში ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ ძირითას სასაზღვრო ამოცანებს, კერძოდ, დირიხლეს, ნეიმანის, რობენის და შერეული ტიპის ამოცანებს (1.12) განტოლებისთვის.

ვიტყვით, რომ U ვექტორი არის (1.12) განტოლების რეგულარული ამონახსენი, თუ $U \in C^2(\Omega^\pm) \cap C^1(\overline{\Omega^\pm})$.

<u>ამოცანა (D)$^\pm$</u> $\big($დირიხლეს (Dirichlet) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც S ზედაპირზე აკმაყოფილებს დირიხლეს სასაზღვრო პირობებს

$$\{u(x)\}^\pm = \widetilde{f}(x), \qquad \{\vartheta(x)\}^\pm = f_4(x), \quad x \in S, \tag{1.35}$$

ანუ

$$\{U(x)\}^\pm = f(x), \qquad x \in S. \tag{1.36}$$

<u>ამოცანა (N)$^\pm$</u> $\big($ნეიმანის (Neumann) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც S ზედაპირზე აკმაყოფილებს ნეიმანის სასაზღვრო პირობებს

$$\{P(\partial,n)\,U(x)\}^\pm = \widetilde{F}(x), \qquad \{\lambda(\partial,n)\,\vartheta(x)\}^\pm = F_4(x), \quad x \in S, \tag{1.37}$$

ანუ

$$\{B(\partial,n)\,U(x)\}^\pm = F(x), \quad x \in S. \tag{1.38}$$

$F(x) = (\widetilde{F}(x), F_4(x))^\top$.

<u>ამოცანა (R)$^\pm$</u> $\big($რობენის (Robin) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U=(u,\vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც S ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{B(\partial,n)U(x)\big\}^\pm + K\big\{U(x)\big\}^\pm = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.39}$$

სადაც $K=[K_{kj}]_{4\times 4}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა:

$$K = \begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times 3} & [0]_{3\times 1} \\ [0]_{1\times 3} & \kappa_2 \end{bmatrix}_{4\times 4}; \tag{1.40}$$

ცხადია, რომ $\kappa_2 > 0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times 3}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

<u>ამოცანა $(\mathrm{D.N})^{\pm}$</u>. ვიპოვოთ $\Omega^{\pm}$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta)^{\top}$ ამონახსენი, რომელიც S ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{u(x)\}^{\pm} = f(x), \qquad \{\lambda(\partial, n)\vartheta(x)\}^{\pm} = F_4(x), \quad x \in S. \tag{1.41}$$

<u>ამოცანა $(\mathrm{N.D})^{\pm}$</u>. ვიპოვოთ $\Omega^{\pm}$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta)^{\top}$ ამონახსენი, რომელიც S ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{P(\partial, n)\, U(x)\}^{\pm} = F(x), \qquad \{\vartheta(x)\}^{\pm} = f_4(x), \quad x \in S. \tag{1.42}$$

ვთქვათ, $S = \partial\Omega^{\pm}$ საზღვარი დაყოფილია ორ არათანამკვეთ S_D და S_N ზედაპირად ისე, რომ $S_D \cap S_N = \varnothing$ და $\overline{S}_D \cup \overline{S}_N = S$.

<u>ამოცანა $(\mathrm{M})^{\pm}$</u> (შერეული ამოცანა). ვიპოვოთ $\Omega^{\pm}$ არეში ერთგვაროვანი (1.12) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta)^{\top}$ ამონახსენი, რომელიც S_D ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{u(x)\}^{\pm} = \widetilde{f}(x), \qquad \{\vartheta(x)\}^{\pm} = f_4(x), \quad x \in S_D, \tag{1.43}$$

ანუ

$$\{U(x)\}^{\pm} = f(x), \quad x \in S_D, \tag{1.44}$$

ხოლო S_N ზედაპირზე შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{P(\partial, n)\, U(x)\}^{\pm} = \widetilde{F}(x), \qquad \{\lambda(\partial, n)\vartheta(x)\}^{\pm} = F_4(x), \quad x \in S_N. \tag{1.45}$$

ანუ

$$\{B(\partial, n)\, U(x)\}^{\pm} = F(x), \quad x \in S_N. \tag{1.46}$$

აქ $f = (f_1, f_2, f_3)^{\top}$, $F = (F_1, F_2, F_3)^{\top}$, f_4 და F_4 არის S ზედაპირზე მოცემული ვექტორ-ფუნქციები; ამასთან $f_j \in C^1(S)$, $F_j \in C(S)$, $j = \overline{1, 4}$.

1.4 გრინის ფორმულები.

ახლა გამოვიყვანოთ გრინის ფორმულები $A(\partial)$ ოპერატორისთვის. მართებული შემდეგი დებულებები.

ლემა 1 თუ $u_4 \in C^2(\overline{\Omega^+})$ და $\partial\Omega^+ \in C^1$, მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას

$$\int\limits_{\Omega^+} \Lambda(\partial)\, u_4\;u_4\, dx = -\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4\, dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{\lambda(\partial, n)u_4\}^+\{u_4\}^+ dS, \tag{1.47}$$

სადაც $\Lambda(\partial)$ განსაზღვრულია (1.11) ტოლობით, ხოლო

$$\partial_n = \lambda(\partial, n) := \lambda_{pq}\, n_p\, \partial_q \tag{1.48}$$

კონორმალური წარმოებულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, u_4 ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია $\overline{\Omega^+}$ არეში. გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+} \Lambda(\partial)\, u_4\;u_4\, dx = \int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q\partial_p u_4\, u_4\, dx = -\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4\, dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \lambda_{pq}\, n_p\partial_q u_4\, u_4\, dS$$
$$= -\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4\, dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{\partial_n u_4\}^+\{u_4\}^+ dS.$$

□

ლემა 2 თუ $u \in [C^2(\overline{\Omega^+})]^3$ და $\partial\Omega^+ \in C^1$, მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას

$$\int\limits_{\Omega^+} C(\partial)\, u \cdot u\, dx = -\int\limits_{\Omega^+} E(u, u)\, dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{T(\partial, n)\, u\}^+ \cdot \{u\}^+\, dS, \tag{1.49}$$

სადაც $C(\partial)$ განსაზღვრულია (1.10) ტოლობით,

$$E(u, u) = c_{kjpq}\,\partial_p u_q\,\partial_k u_j = c_{kjpq}\, e_{pq}(u)\, e_{kj}(u) \tag{1.50}$$

არის პოტენციალური ენერგიის სიმკვრივე დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში, ხოლო კლასიკური ძაბვის ოპერატორი $T(\partial, n)$ განსაზღვრულია (1.14) ტოლობით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $u \in [C^2(\overline{\Omega^+})]^3$ გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+} C(\partial)u\ u\,dx = \int\limits_{\partial\Omega^+} c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p\,u_k\,dS = -\int\limits_{\Omega^+} c_{kjpq}\,\partial_q u_p\,\partial_j u_k\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} c_{kjpq}\,n_j\partial_q u_p\,u_k\,dS$$

$$= -\int\limits_{\Omega^+} E(u,u)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{T(\partial,n)\,u\}^+\{u\}^+ dS.$$

□

ლემა 3 თუ $U, V \in [C^2(\overline{\Omega^+})]^4$ და $\partial\Omega^+ \in C^1$, მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას

$$\int\limits_{\Omega^+} A(\partial)\,U \cdot V\,dx = -\int\limits_{\Omega^+} E(U,V)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{B(\partial,n)\,U\}^+ \cdot \{V\}^+\,dS, \tag{1.51}$$

სადაც

$$E(U,V) = c_{kjpq}\,\partial_p u_q\,\partial_k v_j - \beta_{kj}\,u_4\,\partial_j v_k + \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p v_4, \tag{1.52}$$

ხოლო $A(\partial)$ და $B(\partial,n)$ მოცემულია შესაბამისად (1.13) და (1.16) ტოლობებით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)^\top$ და $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)^\top$, სადაც თითოეული კომპონენტი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია $\overline{\Omega^+}$ არეში. გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+} A(\partial)U\cdot V\,dx = \int\limits_{\Omega^+}\sum_{l=1}^{4}[A(\partial)U]_l\,v_l\,dx = \int\limits_{\Omega^+}\Big[\big(c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p - \beta_{kj}\partial_j u_4\big)v_k + \lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4\,v_4\Big]\,dx$$

$$= \int\limits_{\Omega^+}\Big[-c_{kjpq}\,\partial_q u_p\,\partial_j v_k + \beta_{kj}\,u_4\partial_j v_k - \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p v_4\Big]\,dx$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega^+}\Big[c_{kjpq}\,n_j\partial_q u_p\,v_k - \beta_{kj}n_j\,u_4\,v_k + \lambda_{pq}\,n_j\,\partial_q\,u_4\,v_4\Big]\,dS$$

$$= -\int\limits_{\Omega^+} E(U,V)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+}\Big\{\big(T_{kq}(\partial,n)u_p\big)\,v_k - \beta_{kj}\,n_j\,u_4\,v_k$$

$$+ \big(\lambda(\partial,n)\,u_4\big)\,v_4\Big\}^+ dS = -\int\limits_{\Omega^+} E(U,V)\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+}\big\{B(\partial,n)U\big\}^+\cdot\{V\}^+\,dS.$$

□

ლემა 4 თუ $U, V \in [C^2(\overline{\Omega^+})]^4$ და $\partial\Omega^+ \in C^1$, მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას

$$\int\limits_{\Omega^+} \big\{ A(\partial)U \cdot V - U \cdot A^*(\partial)V \big\}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[\big\{ B(\partial,n)U \big\}^+ \cdot \{V\}^+ - \{U\}^+ \cdot \big\{ Q(\partial,n)V \big\}^+ \Big]\, dS, \tag{1.53}$$

სადაც $A(\partial)$, $B(\partial,n)$ და $A^*(\partial)$ მოცემულია შესაბამისად (1.13), (1.16) და (1.26) ტოლობებით, ხოლო

$$Q(\partial,n) := \big[\, Q_{kp}(\partial,n)\,\big]_{4\times4} = \begin{bmatrix} T(\partial,n) & [\,0\,]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \lambda(\partial,n) \end{bmatrix}_{4\times4}. \tag{1.54}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)^\top$ და $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)^\top$ ნამდვილი ვექტორებია, სადაც თითოეული კომპონენტი ორჯერ უწყვეტად წარმოებადია $\overline{\Omega^+}$ არეში. გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გვაქვს

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega^+} \Big\{ A(\partial)U \cdot V - U \cdot A^*(\partial)V \Big\}\, dx &= \int\limits_{\Omega^+} \Big[\big(c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p - \beta_{kj}\,\partial_j u_4 \big) v_k + \lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4\, v_4 \Big]\, dx \\
&- \int\limits_{\Omega^+} \Big[u_k c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p + u_4\,\beta_{kj}\,\partial_k\partial_j v_4 + u_4\,\beta_{kj}\,\partial_j v_k \Big]\, dx \\
&= \int\limits_{\Omega^+} \Big[-c_{kjpq}\,\partial_q u_p\,\partial_j v_k + \beta_{kj}\,u_4\,\partial_j v_k - \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p v_4 \Big]\, dx \\
&+ \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[c_{kjpq} n_j \partial_q u_p\, v_k - \beta_{kj}\, n_j\, u_4\, v_k + \lambda_{pq}\, n_p\, \partial_q\, u_4\, v_4 \Big]\, dS \\
&- \int\limits_{\Omega^+} \Big[-c_{kjpq}\partial_j u_k\,\partial_q v_p - \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p v_4 + \beta_{kj}\, u_4 \partial_j v_k \Big]\, dx \\
&+ \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[u \cdot T\, v + u_4\,\lambda(\partial,n)\, v_4 \Big]\, dS.
\end{aligned}$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega^+} \big\{ A(\partial)U \cdot V - U \cdot A^*(\partial)V \big\}\, dx = \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[\big\{ B(\partial,n)U \big\}^+ \cdot \{V\}^+ - \{U\}^+ \cdot \big\{ Q(\partial,n)V \big\}^+ \Big]\, dS.$$

□

როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, თუ $U = (u_1,u_2,u_3,u_4)^\top$ ვექტორის პირველი სამი კომპონენტი არის გადაადგილების ვექტორის კომპონენტები და მეოთხე

მდგენელია ტემპერატურა, მაშინ $B(\partial, n)U$ ვექტორს გააჩნია შემდეგი თერმომექანიკური აზრი: $B(\partial, n)U$ ვექტორის პირველი სამი კომპონენტი აღნიშნავს შესაბამისი მექანიკური თერმული ძაბვის ვექტორის კომპონენტებს, ხოლო მეოთხე კომპონენტი აღნიშნავს n ნორმალის მქონე ზედაპირის ელემენტზე სითბური ნაკადის ნორმალურ მდგენელს მოპირდაპირე ნიშნით.

შენიშვნა 5 სტანდარტული მსჯელობით (1.53) ფორმულიდან მარტივად მივიღებთ ე.წ. გრინის მესამე ფორმულას, ანუ რეგულარული ვექტორ-ფუნქციების ზოგად ინტეგრალურ წარმოდგენას:

$$U(x) = \int\limits_{\Omega^+} \Gamma(x-y)\, A(\partial_y)\, U(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega^+} \big[Q(\partial_y, n(y))\, \Gamma^\top(x-y)\big]^\top \{U(y)\}^+\, dS_y$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega^+} \Gamma(x-y)\{B(\partial_y, n(y))\, U(y)\}^+\, dS_y, \qquad x \in \Omega^+. \tag{1.55}$$

(1.55) ფორმულის მისაღებად, (1.53) ფორმულაში V ვექტორის ადგილზე თანმიმდევრობით უნდა ჩავსვათ $A^*(\partial)$ ოპერატორის $\Gamma^*(y-x) = \Gamma^\top(x-y)$ ფუნდამენტური მატრიცის სვეტები. შედეგად მივიღებთ:

$$\int\limits_{\Omega^+} \Gamma(x-y)\, A(\partial_y)\, U(y)\, dy + \int\limits_{\partial\Omega^+} \big[Q(\partial_y, n(y))\, \Gamma^\top(x-y)\big]^\top \{U(y)\}^+\, dS_y$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega^+} \Gamma(x-y)\{B(\partial_y, n(y))\, U(y)\}^+\, dS_y = \begin{cases} U(x), & x \in \Omega^+, \\ 0, & x \in \Omega^+. \end{cases} \tag{1.56}$$

1.5 ერთადერთობის თეორემები.

1.5.1 სასაზღვრო ამოცანების ერთადერთობის თეორემები შიგა ამოცანებისთვის.

ახლა შევისწავლოთ ერთადერთობის თეორემები სასრული არის შემთხვევაში.

თეორემა 6 დირიხლეს $(D)^+$ შიგა სასაზღვრო ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(D)^+$ ამოცანას გააჩნია ორი $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ამონახსენი, ანუ სრულდება პირობები:

$$A(\partial)U^{(1)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+, \qquad \big\{U^{(1)}(x)\big\}^+ = \varphi(x), \quad x \in S,$$

$$A(\partial)U^{(2)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+, \qquad \big\{U^{(2)}(x)\big\}^+ = \varphi(x), \quad x \in S,$$

აქ $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)^\top$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^\top$.

განვიხილოთ სხვაობა $U = U^{(1)} - U^{(2)}$; მაშინ U დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$A(\partial)U(x) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

$$\big\{U(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს:

$$\begin{cases} \big[C(\partial)\,u(x)\big]_k = \beta_{kj}\,\partial_j\,u_4(x), \quad x \in \Omega^+, \quad k = 1,2,3, & (1.57) \\ \big\{u_k(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S, \quad k = 1,2,3; & (1.58) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{pq}\,\partial_p\,\partial_q\,u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, & (1.59) \\ \big\{u_4(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S. & (1.60) \end{cases}$$

თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(D)^+$ ერთგვაროვან (1.57) - (1.60) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $u_4 = 0$. ლემა 1-ის ძალით (იხ. (1.47) ფორმულა) გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4\,dx = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.61}$$

აქ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ (1.47) ფორმულაში ზედაპირული ინტეგრალი ნულის ტოლია (1.60) სასაზღვრო პირობის ძალით. რადგან (1.61) ტოლობაში ინტეგალქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,(x)\partial_p u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.62}$$

როგორც ვიცით, $\big[\lambda_{pq}\big]_{3\times 3}$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია (იხ. (1.18) ფორმულა), ე.ი.

$$\lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4 \geqslant \delta_0\,|\nabla u_4|^2. \tag{1.63}$$

ამიტომ (1.62) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\nabla u_4\,(x) = 0, \quad x \in \Omega^+;$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$u_4\,(x) = const, \quad x \in \Omega^+.$$

მაშინ (1.60) პირობის თანახმად

$$u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.64}$$

თუ (1.64) ტოლობას გავითვალისწინებთ (1.57)-(1.58) განტოლებებში, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ ერთგვაროვან ამოცანას:

$$\begin{cases} C(\partial)u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, & (1.65)\\ \big\{u(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S. & (1.66)\end{cases}$$

ახლა ლემა 2-ის გამოყენებით (იხ. (1.49) ფორმულა) გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} E(u,u)\,dx = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქციის არაუარყოფითობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E(u(x), u(x)) = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

აქედან კი, (1.19) და (1.50) ფორმულების საფუძველზე გვექნება

$$E(u,u) \geqslant \delta' \sum_{k,j=1}^{3} \frac{1}{4}\Big(\partial_k u_j + \partial_j u_k\Big)^2,$$

ანუ

$$\partial_k\, u_j(x) + \partial_j\, u_k(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad k,j = 1,2,3. \tag{1.67}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნია ხისტი გადაადგილების ვექტორი

$$u(x) = a \times x + b, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.68}$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ (1.68) ტოლობით მოცემული ვექტორი ნულის ტოლია სამ წერტილში, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ

$$a = b = 0.$$

რადგან u აკმაყოფილებს (1.66) პირობას, ამიტომ გვექნება

$$u(x) = 0,$$

ე.ი.

$$U = (u, u_4)^\top = 0 \qquad \Omega^+ - \text{ში}.$$

$\square$

თეორემა 7 შერეულ შიგა სასაზღვრო $(M)^+$ ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(M)^+$ ამოცანას გააჩნია ორი $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ამონახსენი, ანუ სრულდება პირობები:

$$A(\partial)\,U^{(1)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+,$$

$$\big\{U^{(1)}(x)\big\}^+ = \varphi(x), \quad x \in S_D,$$

$$\big\{B(\partial, n)\,U^{(1)}(x)\big\}^+ = \psi(x), \quad x \in S_N,$$

და

$$A(\partial)\,U^{(2)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+,$$

$$\big\{U^{(2)}(x)\big\}^+ = \varphi(x), \quad x \in S_D,$$

$$\big\{B(\partial, n)U^{(2)}(x)\big\}^+ = \psi(x), \quad x \in S_N.$$

აქ $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)^\top,\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^\top,\ \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^\top.$

განვიხილოთ სხვაობა $U = U^{(1)} - U^{(2)}$; მაშინ U დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$A(\partial)\,U(x) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

$$\big\{U(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_D,$$

$$\big\{B(\partial, n)U(x)\big\}^+ = \psi(x), \quad x \in S_N.$$

აქედან კი გამომდინარეობს:

$$\begin{cases} \big[C(\partial)\,u(x)\big]_k = \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x), \quad x \in \Omega^+, & (1.69) \\ \big\{u_k(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_D, \quad k = 1, 2, 3, & (1.70) \\ \big\{P(\partial, n)U(x)\big\}_k^+ = \big\{Tu(x)\big\}_k^+ - \beta_{kj}\,n_j\big\{u_4(x)\big\}^+ = 0,\ x \in S_N,\ k = 1, 2, 3; & (1.71) \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, & (1.72)\\[2mm]
\big\{u_4(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_D, & (1.73)\\[2mm]
\big\{\partial_n\, u_4(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_N. & (1.74)
\end{cases}
$$

თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ $(M)^+$ ერთგვაროვან (1.69) – (1.74) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $u_4 = 0$. ლემა 1-ის ძალით (იხ. (1.47) ფორმულა) გვექნება

$$
\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4\,dx = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.75}
$$

აქ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ (1.47) ფორმულაში ზედაპირული ინტეგრალი ნულის ტოლია (1.73)-(1.74) სასაზღვრო პირობების ძალით. რადგან (1.75) ტოლობაში ინტეგალქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$
\lambda_{pq}\,\partial_q u_4(x)\,\partial_p u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.76}
$$

$\big[\lambda_{pq}\big]_{3\times 3}$ მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობიდან კვლავ (იხ. (1.18) ფორმულა) ვღებულობთ

$$
\nabla u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+;
$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$
u_4(x) = const, \quad x \in \Omega^+.
$$

მაშინ (1.73) პირობის ძალით

$$
u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.77}
$$

თუ ამ ფაქტს გავითვალისწინებთ (1.69), (1.70) და (1.71) განტოლებებში, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ შერეულ ერთგვაროვან ამოცანას (იხ. (1.14), (1.15) ფორმულები):

$$
\begin{cases}
\big[C(\partial)u(x)\big]_k = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad k = 1,2,3, & (1.78)\\[2mm]
\big\{u_k(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_D, \quad k = 1,2,3, & (1.79)\\[2mm]
\big\{T(\partial,n)u(x)\big\}_k^+ = 0, \quad x \in S_N, \quad k = 1,2,3. & (1.80)
\end{cases}
$$

ახლა ლემა 2-ის გამოყენებით (იხ. (1.49) ფორმულა) გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} E(u,u)\,dx = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

აქაც გამოვიყენეთ, რომ ზედაპირული ინტეგრალი ნულის ტოლია (1.79)-(1.80) სასაზღვრო პირობების თანახმად. ინტეგრალქვეშა ფუნქციის არაუარყოფითობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E(u(x), u(x)) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

საიდანაც დავასკვნით, რომ u არის ხისტი გადაადგილების ვექტორი

$$u(x) = a \times x + b, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.81}$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ (1.81) ტოლობით მოცემული ვექტორი ნულის ტოლია სამ წერტილში, რომლებიც ერთ წრფეზე არ მდებარეობს, მაშინ

$$a = b = 0.$$

რადგან u ვექტორი აკმაყოფილებს (1.79) პირობას დადებითი ზომის S_D სიმრავლეზე, ამიტომ გვექნება

$$u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$U = (u, u_4)^\top = 0 \qquad \Omega^+ - \text{ში}.$$

$\square$

თეორემა 8 შიგა სასაზღვრო $(N.D)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება $U^{(0)} = (\chi(x), 0)^\top$ ვექტორის სიზუსტით, სადაც

$$\chi(x) = a \times x + b$$

ხისტი გადაადგილების ვექტორია, $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(N.D)^+$ ამოცანას გააჩნია ორი $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ამონახსენი, ანუ სრულდება პირობები:

$$A(\partial)U^{(1)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+,$$

$$\left\{P(\partial, n)U^{(1)}(x)\right\}_k^+ = \psi_k(x), \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\left\{u_4^{(1)}(x)\right\}^+ = \varphi_4(x), \quad x \in S,$$

და

$$
\begin{aligned}
&A(\partial)U^{(2)}(x)=\Phi(x), \quad x\in\Omega^+,\\
&\big\{P(\partial,n)U^{(2)}(x)\big\}_k^+=\psi_k(x), \quad k=1,2,3,\\
&\big\{u_4^{(2)}(x)\big\}^+=\varphi_4(x), \quad x\in S.
\end{aligned}
$$

აქ $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4)^\top$.

განვიხილოთ სხვაობა $U=U^{(1)}-U^{(2)}$; მაშინ U დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

$$
\begin{aligned}
&A(\partial)U(x)=0, \quad x\in\Omega^+,\\
&\big\{P(\partial,n)U(x)\big\}_k^+=0, \quad k=1,2,3,\\
&\big\{u_4(x)\big\}^+=0, \quad x\in S.
\end{aligned}
$$

აქედან კი გამომდინარეობს

$$
\begin{cases}
\big[C(\partial)u(x)\big]_k=\beta_{kj}\partial_j u_4(x), \quad x\in\Omega^+, & (1.82)\\
\big\{P(\partial,n)U(x)\big\}_k^+=0, \quad x\in S, \quad k=1,2,3; & (1.83)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x)=0, \quad x\in\Omega^+, & (1.84)\\
\big\{u_4(x)\big\}^+=0, \quad x\in S. & (1.85)
\end{cases}
$$

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $u_4=0$. ლემა 1-ის ძალით (იხ. (1.47) ფორმულა) გვექნება

$$
\int\limits_{\Omega^+}\lambda_{pq}\,\partial_q u_4\,\partial_p u_4 dx=0, \quad x\in\Omega^+. \tag{1.86}
$$

როგორც წინა შემთხვევებში, (1.86) ტოლობიდან (1.85) პირობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით, რომ

$$
u_4(x)=0, \quad x\in\Omega^+. \tag{1.87}
$$

თუ (1.87) ტოლობას გავითვალისწინებთ (1.82)-(1.83) განტოლებებში, $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ ერთგვაროვან ამოცანას:

$$
\begin{cases}
C(\partial)\,u(x)=0, \quad x\in\Omega^+, & (1.88)\\
\big\{T(\partial,n)\,u(x)\big\}^+=0, \quad x\in S. & (1.89)
\end{cases}
$$

ახლა ლემა 2-ის გამოყენებით (იხ. (1.49) ფორმულა) გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} E(u,u)\,dx = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

როგორც წინა შემთხვევაში, აქაც დავასკვნით, რომ

$$u(x) = \chi(x) = a \times x + b, \tag{1.90}$$

სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

რადგან ნებისმიერი მუდმივი a და b ვექტორებისთვის ხისტი გადაადგილებისთვის გამოთვლილი ძაბვის ვექტორი ნულის ტოლია, დავასკვნით, რომ (1.88)-(1.89) განტოლების ზოგადი ამონახსენი მოიცემა (1.90) ტოლობით.

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $(N.D)^+$ ამოცანის ნებისმიერი ორი ამონახსნის სხვაობა წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$U^{(1)}(x) - U^{(2)}(x) = (\chi(x), 0)^\top,$$

სადაც χ მოცემულია (1.90) ტოლობით. $\square$

თეორემა 9 შიგა სასაზღვრო $(D.N)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება $U^{(0)} = (0, \vartheta_0)^\top$ ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\vartheta_0 = const$ ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(D.N)^+$ ამოცანას გააჩნია ორი $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ამონახსენი, ანუ სრულდება პირობები:

$$A(\partial)U^{(1)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+,$$

$$\left\{U^{(1)}(x)\right\}_k^+ = \phi_k(x), \quad k = 1,2,3,$$

$$\left\{\partial_n u_4^{(1)}(x)\right\}^+ = \psi_4(x), \quad x \in S,$$

და

$$A(\partial)U^{(2)}(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^+,$$

$$\left\{U^{(2)}(x)\right\}_k^+ = \phi_k(x), \quad k = 1,2,3,$$

$$\left\{\partial_n u_4^{(2)}(x)\right\}^+ = \psi_4(x), \quad x \in S.$$

აქ $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)^\top$.

განვიხილოთ სხვაობა $U = U^{(1)} - U^{(2)}$; მაშინ U იქნება შემდეგი ამოცანის ამონახსენი:

$$A(\partial)U(x) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

$$\{U(x)\}_k^+ = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\{\partial_n u_4(x)\}^+ = 0, \quad x \in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს:

$$\begin{cases} [C(\partial)\, u(x)]_k = \beta_{kj}\, \partial_j\, u_4(x), \quad x \in \Omega^+, & (1.91) \\ \{u_k\,(x)\}^+ = 0, \quad x \in S, \quad k = 1, 2, 3; & (1.92) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, & (1.93) \\ \{\partial_n u_4(x)\}^+ = 0, \quad x \in S. & (1.94) \end{cases}$$

ვაჩვენოთ, რომ $u_4 = \vartheta_0 = const$, $x \in \Omega^+$, სადაც ϑ_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, წარმოადგენს ერთგვაროვანი (1.93) - (1.94) ამოცანის ზოგად ამონახსნს. მართლაც, ლემა 1-ის ძალით (იხ. (1.47) ფორმულა) გვექნება

$$\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\, \partial_q u_4\, \partial_p u_4\, dx = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.95}$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ $\nabla u_4(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, ანუ

$$u_4(x) = \vartheta_0 = const, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.96}$$

თუ (1.96) ტოლობას გავითვალისწინებთ (1.91) განტოლებებში, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ ერთგვაროვან ამოცანას:

$$\begin{cases} C(\partial)\, u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, & (1.97) \\ \{u(x)\}_k^+ = 0, \quad x \in S, \quad k = 1, 2, 3. & (1.98) \end{cases}$$

როგორც უკვე ვიცით (1.97)-(1.98) ამოცანის ამონახსნია

$$u(x) = 0, \quad x \in \Omega^+,$$

ე.ი. $(D.N)^+$ ამოცანის ნებისმიერი ორი ამონახსნის სხვაობა წარმოიდგინება შემდეგნაირად

$$U^{(1)} - U^{(2)} = (0, \vartheta_0)^\top,$$

სადაც $\vartheta_0 = const$ ნებისმიერი მუდმივია. □

ახლა შევისწავლოთ ნეიმანის შიგა ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

ვთქვათ, $(N)^+$ ამოცანას გააჩნია ორი $U^{(1)}$ და $U^{(2)}$ ამონახსენი, ანუ სრულდება პირობები:

$$A(\partial)\,U^{(1)}(x)=\Phi(x),\quad x\in\Omega^+,$$

$$\big\{P(\partial,n)\,U^{(1)}(x)\big\}_k^+=\psi_k(x),\quad k=1,2,3,$$

$$\big\{\partial_n\,u_4^{(1)}(x)\big\}^+=\psi_4(x),\quad x\in S,$$

და

$$A(\partial)\,U^{(2)}(x)=\Phi(x),\quad x\in\Omega^+,$$

$$\big\{P(\partial,n)\,U^{(2)}(x)\big\}_k^+=\psi_k(x),\quad k=1,2,3,$$

$$\big\{\partial_n\,u_4^{(2)}(x)\big\}^+=\psi_4(x),\quad x\in S.$$

აქ $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4)^\top$.

განვიხილოთ სხვაობა $U=U^{(1)}-U^{(2)}$; მაშინ U იქნება შემდეგი ამოცანის ამონახსენი:

$$A(\partial)\,U(x)=0,\quad x\in\Omega^+,$$

$$\big\{P(\partial,n)\,U(x)\big\}_k^+=0,\quad k=1,2,3,$$

$$\big\{\partial_n\,u_4(x)\big\}^+=0,\quad x\in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს:

$$\begin{cases}\big[C(\partial)\,u(x)\big]_k=\beta_{kj}\partial_j u_4(x),\qquad x\in\Omega^+, & (1.99)\\[2mm] \big\{P(\partial,n)\,U(x)\big\}_k^+=0,\quad x\in S,\quad k=1,2,3; & (1.100)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x)=0,\quad x\in\Omega^+, & (1.101)\\[2mm] \big\{\partial_n\,u_4(x)\big\}^+=0,\quad x\in S. & (1.102)\end{cases}$$

(1.101)-(1.102) ამოცანის ზოგადი ამონახსნია

$$u_4(x)=\vartheta_0=const. \tag{1.103}$$

(1.103) ტოლობის გათვალისწინებით (1.99)-(1.100) ამოცანა ასე გადაიწერება

$$\begin{cases} \big[C(\partial)\, u(x)\big]_k = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad k = 1,2,3, & (1.104) \\ \big\{T(\partial, n)\, u(x)\big\}_k^+ = \beta_{kj} n_j(x)\, \vartheta_0, \quad x \in S, \quad k = 1,2,3. & (1.105) \end{cases}$$

ამრიგად, $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ ვექტორისთვის მივიღეთ ძაბვის არაერთგვაროვანი ამოცანა (თუ $\vartheta_0 \neq 0$).

იმისათვის, რომ (1.104)-(1.105) ამოცანა იყოს ამოხსნადი აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის ნულთან ტოლობის პირობები [18], [23]:

$$\int\limits_S \beta_{pj}\, n_j \vartheta_0\, dS = 0, \tag{1.106}$$

$$\int\limits_S \big(\beta_{pj}\, n_j \vartheta_0 x_q - \beta_{qj}\, n_j \vartheta_0 x_p\big) dS = 0, \quad p, q = 1,2,3, \tag{1.107}$$

ცხადია

$$\int\limits_S n_j\, dS = \int\limits_{\Omega^+} \frac{\partial 1}{\partial x_j}\, dx = 0, \quad j = 1,2,3.$$

ვაჩვენოთ, რომ (1.107) ტოლობაც სრულდება. მართლაც,

$$\begin{aligned} \int\limits_S \big(\beta_{pj}\, n_j \vartheta_0 x_q - \beta_{qj}\, n_j \vartheta_0 x_p\big) dS &= \vartheta_0 \int\limits_{\Omega^+} \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\, \beta_{pj}\, x_q - \frac{\partial}{\partial x_j}\, \beta_{qj}\, x_p\Big) dx \\ &= \vartheta_0 \int\limits_{\Omega^+} \Big(\beta_{pj}\, \frac{\partial x_q}{\partial x_j} - \beta_{qj}\, \frac{\partial x_p}{\partial x_j}\Big) dx \\ &= \vartheta_0 \int\limits_{\Omega^+} \big(\beta_{pj}\, \delta_{jq} - \beta_{qj}\, \delta_{jp}\big) dx \\ &= \vartheta_0 \int\limits_{\Omega^+} \big(\beta_{pq} - \beta_{qp}\big) dx = 0, \end{aligned}$$

რადგან $\beta_{pq} = \beta_{qp}$.

ამიტომ, (1.104)-(1.105) ამოცანა ამოხსნადია და ამონახსნი განისაზღვრება ხისტი გადაადგილების ვექტორის სიზუსტით, ე.ი. თუ $u^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)})^\top$ არის (1.104)-(1.105) ამოცანის რაიმე კონკრეტული ამონახსენი, მაშინ ამავე ამოცანის ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$u(x) = u^{(0)}(x) + \chi(x), \tag{1.108}$$

სადაც $\chi(x) = a \times x + b$ ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორია.

დავუშვათ, რომ $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)})^\top$ არის შემდეგი ამოცანის ამონახენი:

$$\begin{cases} \big[C(\partial)\, v^{(0)}(x)\big]_k = 0, \quad x \in \Omega^+, \quad k = 1,2,3, & (1.109) \\ \big\{T(\partial, n)\, v^{(0)}(x)\big\}_k^+ = \beta_{kj}\, n_j(x), \quad x \in S, \quad k = 1,2,3. & (1.110) \end{cases}$$

მაშინ ცხადია $u^{(0)}(x) = \vartheta_0\, v^{(0)}(x)$ იქნება (1.104)-(1.105) ამოცანის ამონახსენი.

შევეცადოთ ავაგოთ $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)})^\top$ ვექტორი ცხადი სახით, ვეძებოთ $v^{(0)}$ ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$v_k^{(0)}(x) = \alpha_{kl}\, x_l, \quad k = 1,2,3, \tag{1.111}$$

სადაც $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ საძიებელი მუდმივი კოეფიციენტებია.

ცხადია, (1.111) ტოლობით მოცემული $v_k^{(0)}$ ვექტორი აკმაყოფილებს (1.109) განტოლებას, ხოლო (1.110) სასზღვრო პირობას, შემდეგი ტოლობის გათვალისწინებით

$$\begin{aligned} \big[T(\partial, n)\, v^{(0)}(x)\big]_k &= T_{kp}(\partial, n)\, v_p^{(0)}(x) = c_{kjpq}\, n_j\, \partial_q(\alpha_{pl}\, x_l) \\ &= c_{kjpq}\, n_j\, \alpha_{pl}\, \delta_{ql} = c_{kjpq}\, n_j\, \alpha_{pq}, \quad k = 1,2,3, \end{aligned}$$

მივყავართ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე:

$$c_{kjpq}\, n_j\, \alpha_{pq} = \beta_{kj}\, n_j, \quad k = 1,2,3.$$

გავუტოლოთ ერთმანეთს n_j კომპონენტებთან მდგომი კოეფიციენტები:

$$c_{kjpq}\, \alpha_{pq} = \beta_{kj}, \quad k, j = 1,2,3. \tag{1.112}$$

ვაჩვენოთ, რომ (1.112) განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. ამისათვის საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

დავუშვათ, რომ ერთგვაროვან სისტემას

$$c_{kjpq}\, \gamma_{pq} = 0, \quad k, j = 1,2,3, \tag{1.113}$$

გააჩნია არანულოვანი ამონახსენი $\gamma_{jk} = \gamma_{kj}$. გავამრავლოთ (1.113) ტოლობა γ_{kj}-ზე და ავჯამოთ:

$$0 = c_{kjpq}\, \gamma_{pq}\, \gamma_{jk}. \tag{1.114}$$

(1.19) უტოლობის გამოყენებით (1.114) ტოლობიდან დავასკვნით:

$$0 = c_{kjpq}\,\gamma_{pq}\,\gamma_{jk} \geqslant \delta_0\,\gamma_{kj}\,\gamma_{kj} = \delta_0 \sum_{k,j=1}^{3} \gamma_{kj}^2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\gamma_{kj} = 0, \quad k, j = 1, 2, 3.$ მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ (1.113) სისტემას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი, ანუ (1.112) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია, ე.ი. α_{kj} მუდმივები ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ ისე, რომ (1.111) ტოლობით მოცემულმა $v^{(0)}$ ვექტორმა დააკმაყოფილოს (1.110) სასაზღვრო პირობა. ამიტომ (1.108) ტოლობით მოცემული (1.104)-(1.105) ამოცანის ზოგადი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$u^{(0)}(x) = \vartheta_0\, v^{(0)}(x) + \chi(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{1.115}$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ შემდეგი

თეორემა 10 ნეიმანის შიგა სასაზღვრო $(N)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება შემდეგი შესაკრები ვექტორის სიზუსტით

$$U^{(0)}(x) = \big(\chi(x) + \vartheta_0\, v^{(0)}(x), \vartheta_0\big)^\top = \big(\chi(x), 0\big)^\top + \vartheta_0\big(v^{(0)}(x), 1\big)^\top, \tag{1.116}$$

სადაც ϑ_0 ნებისმიერი მუდმივია, $\chi(x) = a \times x + b$ ტიპის ხისტი გადაადგილების ვექტორია, $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, ხოლო $v^{(0)}$ მოცემულია (1.111) ტოლობით, სადაც $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ მუდმივები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.112) ალგებრულ განტოლებათა სისტემით.

შევნიშნოთ, რომ (1.116) ტოლობით მოცემული $U^{(0)}$ ვექტორი არის ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ზოგადი ამონახსენი.

1.5.2 $Z(\Omega^-)$ და $Z^*(\Omega^-)$ კლასები.

გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები

შემოვიღოთ ვექტორ-ფუნქციათა $Z(\Omega^-)$ და $Z^*(\Omega^-)$ კლასები, რომელთაც არსებითი მნიშვნელობა აქვთ გარე ამოცანების შესწავლაში.

განსაზღვრება 11 ვიტყვით, რომ Ω^- არეში განსაზღვრულ $U = (u_1, u_2, u_3, \vartheta)^\top$ ვექტორს, რომელიც უწყვეტია უსასრულობის მიდამოში, აქვს $Z(\Omega^-)$ თვისება, თუ

მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$u_k(x) = \mathcal{O}(1), \quad k = 1,2,3, \qquad \vartheta(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \text{ როცა } |x| \to \infty, \tag{1.117}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u_k(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{1.118}$$

სადაც $\Sigma(0,R)$ არის R რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

განსაზღვრება 12 ვიტყვით, რომ Ω^- არეში განსაზღვრულ $U^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \vartheta^*)^\top$ ვექტორს, რომელიც უწყვეტია უსასრულობის მიდამოში, აქვს $Z^*(\Omega^-)$ თვისება, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$u_k^*(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}), \quad k = 1,2,3, \qquad \vartheta^*(x) = \mathcal{O}(1) \text{ როცა } |x| \to \infty, \tag{1.119}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \vartheta^*(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \quad k = 1,2,3. \tag{1.120}$$

ახლა ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე დამხმარე დებულება, რომლებსაც არსებითად გამოვიყენებთ შემდგომში. მათი დამტკიცება მოცემულია ნაშრომში [29].

ლემა 13 ვთქვათ, $U = (u_1, u_2, ..., u_N)^\top$ არის შემდეგი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების შემოსაზღვრული ამონახსენი

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^- \subset \mathbb{R}^3,$$

სადაც $L(\partial) = [L_{kj}(\partial)]_{N\times N}$ არის ძლიერად ელიფსური მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ელიფსური ოპერატორი

$$L_{kj}(\partial) = \sum_{p,q=1}^{3} a_{pq}^{kj}\, \partial_p\, \partial_q, \qquad k,j = \overline{1,N}. \tag{1.121}$$

მაშინ

$$U(x) = C + O(|x|^{-1}), \quad |x| \to +\infty,$$

სადაც $C = (C_1, C_2, ..., C_N)^\top$ არის მუდმივი ვექტორი. ♦

ლემა 14 ვთქვათ, $L(\partial) = [L_{kj}(\partial)]_{N\times N}$ არის (1.121) ტოლობით განსაზღვრული ძლიერად ელიფსური მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ელიფსური ოპერატორი და $P = (P_1, P_2, ..., P_N)^\top \in [C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})]^N$ არის -2 რიგის ერთგვაროვანი კენტი ფუნქცია; მაშინ

$$L(\partial)U(x) = P(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

განტოლებას აქვს ერთადერთი ნულოვანი რიგის ერთგვაროვანი ამონახსენი $U^{(0)} \in [C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})]^N$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\int\limits_{|x|=1} U^{(0)}(x)\, dS = 0.$$

♦

ლემა 15 ვთქვათ, $L(\partial)$ იგივეა, რაც ლემა 13-ში და Γ_L არის $L(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენი,

$$\Gamma_L(x) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}([L(-i\xi)]^{-1}), \quad \Gamma_L \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}), \quad L(\partial)\Gamma_L(x) = \delta(x) I_N.$$

გარდა ამისა, ვთქვათ, $Q = (Q_1, Q_2, ..., Q_N)^\top \in [C^{\infty}(\overline{\Omega}^-)]^N$ და ნებისმიერი $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ მულტი-ინდექსისთვის

$$\partial^{\mathrm{m}} Q_j(x) = O(|x|^{-3-|\mathrm{m}|}), \quad |x| \to \infty, \quad j = \overline{1, N}.$$

მაშინ მოცულობითი პოტენციალი

$$V(x) = \int\limits_{\Omega^-} \Gamma_L(x-y)\, Q(y)\, dy,$$

წარმოადგენს

$$L(\partial)\, U(x) = Q(x), \qquad x \in \Omega^-,$$

განტოლების კერძო ამონასხნს და სრულდება პირობები

$$V \in [C^{\infty}(\Omega)^-]^N \cap [C^2(\overline{\Omega^-})]^N,$$

$$\partial^{\mathrm{m}} V(x) = O(|x|^{-1-|\alpha|} \ln |x|), \text{როცა} |x| \to \infty.$$

♦

ლემა 16 ვთქვათ, $L(\partial)$, Ω^-, P და Q იგივეა, რაც ლემა 13-15-ში და $\Phi \in [C^{0,\alpha}_{comp}(\Omega^-)]^N$. გარდა ამისა, ვთქვათ, $U \in [C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^N \cap [C^{2,\alpha}(\Omega^-)]^N$ არის შემდეგი

$$L(\partial)\, U(x) = P(x) + Q(x) + \Phi(x), \quad x \in \Omega^-,$$

განტოლების ამონახსენი, რომელიც შემოსაზღვრულია უსასრულობის მიდამოში. მაშინ

$$U(x) = C + U^{(0)}(x) + U^{(1)}(x),$$

სადაც $C = (C_1, C_2, ..., C_N)^\top$ არის მუდმივი ვექტორი,

$$U^{(1)} \in [C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^N \cap [C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus supp\, \Phi)]^N,$$

$$\partial^\alpha U^{(1)}(x) = O(|x|^{-1-|\alpha|} \ln |x|), \quad |x| \to \infty;$$

ხოლო $U^{(0)}$ განსაზღვრულია შემდეგი ტოლობით

$$U^{(0)}(x) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\big(V.P.[L(-i\xi)]^{-1}\, \widehat{P}(\xi)\big);$$

აქ $\widehat{P}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi}(P)$. ♦

ახლა დავამტკიცოთ ერთადერთობის თეორემები გარე სასაზღვრო ამოცანებისთვის.

განვიხილოთ $U = (u, \vartheta)^\top$ ფუნქციისთვის დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანა

$$A(\partial)\, U(x) = \Phi(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.122}$$

$$\big\{U(x)\big\}^- = \varphi(x), \quad x \in S, \tag{1.123}$$

სადაც $U \in [C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^{2,\alpha}(\Omega^-)]^4$ და $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)^\top \in [C^{0,\alpha}_{comp}(\Omega^-)]^4$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)^\top \in [C^{1,\alpha}(S)]^4$. მაშასადამე, ვგულისხმობთ, რომ Φ ვექტორ-ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი.

ჩვენი მიზანია დავადგინოთ უსასრულობაში ქრობის პირობები, რომელიც განაპირობებს (1.122)-(1.123) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას.

(1.122)-(1.123) ამოცანიდან ტემპერატურის ϑ ფუნქციისთვის Ω^- არეში ცალკე გამოიყოფა დირიხლეს შემდეგი ამოცანა

$$A_{44}(\partial)\, \vartheta(x) = \lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q \vartheta(x) = \Phi_4(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.124}$$

$$\big\{\vartheta(x)\big\}^- = \varphi_4(x), \quad x \in S. \tag{1.125}$$

თუ მოვითხოვთ, რომ ϑ ფუნქციას უსასრულობაში აქვს შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა

$$\vartheta(x) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \to S, \tag{1.126}$$

მაშინ (1.124)-(1.125) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია ნებისმიერი Φ_4 და φ_4 ფუნქციებისათვის. ამონახსნის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენა ასე იწერება [18]

$$\vartheta(x) = \int\limits_S \Gamma^{(0)}_{44}(x-y)\, [\partial_{n(y)} \vartheta(y)]^- dS_y - \int\limits_S \partial_{n(y)}\, \Gamma^{(0)}_{44}(x-y)\, [\vartheta(y)]^- dS_y$$
$$+ \int\limits_{\Omega_0} \Gamma^{(0)}_{44}(x-y)\, \Phi_4(y)\, dy, \quad x \in \Omega^-, \tag{1.127}$$

სადაც $\Omega_0 = supp\Phi_4 \subset \Omega^-$ არის კომპაქტი, ხოლო $\Gamma_{44}(x)$ არის $A_{44}(\partial) = \lambda_{pq}\,\partial_p\,\partial_q$ ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსენი, რომელიც მოცემულია (1.34) ფორმულით. ცხადია, რომ უსასრულობის მიდამოში ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს ([3]):

$$\vartheta(x) = \frac{\theta_0}{(\mathrm{d}x, x)^{\frac{1}{2}}} + O(|x|^{-2}), \tag{1.128}$$

$$\partial_j \vartheta(x) = -\frac{\theta_0\, d_{jm}\, x_m}{(\mathrm{d}x, x)^{\frac{3}{2}}} + \mathcal{O}(|x|^{-3}), \quad |x| \to \infty, \tag{1.129}$$

სადაც $\mathrm{d} = [d_{kj}]_{3\times 3}$ არის $[\lambda_{kj}]_{3\times 3}$ მატრიცის შებრუნებული მატრიცა,

$$\theta_0 = -\frac{\alpha_0}{4\pi}\Big[\int\limits_S [\partial_{n(y)}\,\vartheta(y)]^- dS_y - \int\limits_{\Omega_0} \Phi(y)\,dy\Big], \tag{1.130}$$

$$\alpha_0 = (\det \mathrm{d})^{\frac{1}{2}}.$$

რადგანაც Φ_4 ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი, ამიტომ $supp\Phi_4$-ის გარეთ ტემპერატურის ϑ ფუქნცია ანალიზურია.

ამრიგად, თუ დავუშვებთ, რომ ტემპერატურის ფუნქცია ცნობილია, (1.122)-(1.123) ამოცანიდან u ვექტორ-ფუნქციისთვის მივიღებთ დირიხლეს შემდეგ ამოცანას:

$$C(\partial)u(x) = \widetilde{\Psi}(x) + \widetilde{\Phi}(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.131}$$

$$\big\{u(x)\big\}^- = \widetilde{\varphi}(x), \quad x \in S, \tag{1.132}$$

სადაც
$\widetilde{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^\top \in [C^{0,\alpha}(\Omega^-)]^3$, $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^\top \in [C^{1,\alpha}(S)]^3$,
$\widetilde{\Psi} = (\beta_{1j}\,\partial_j\vartheta, \beta_{2j}\,\partial_j\vartheta, \beta_{3j}\,\partial_j\vartheta)^\top \in [C^{0,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^3$.

შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{\Psi}$ ფუნქციას არ აქვს კომპაქტური საყრდენი და (1.129) ფორმულიდან მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\widetilde{\Psi}(x) = \theta_0\,\widetilde{P}(x) + \widetilde{Q}(x), \quad x \in \Omega^-,$$

სადაც $\widetilde{Q} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega^-}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus supp\,\Phi_4)$ და

$$\widetilde{Q}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-3}), \quad |x| \to \infty,$$

ხოლო $\widetilde{P}$ არის -2 რიგის ერთგვაროვანი ვექტორ-ფუნქცია

$$\widetilde{P}(x) = -\frac{1}{(\mathrm{d}x, x)^{\frac{3}{2}}}(\beta_{1j}\,d_{jl}\,x_l, \beta_{2j}\,d_{jl}\,x_l, \beta_{3j}\,d_{jl}\,x_l)^\top. \tag{1.133}$$

ამიტომ უსასრულობის მიდამოში, უფრო ზუსტად $supp\Phi$-ის გარეთ u ვექტორი არის C^∞ კლასის გლუვი ფუნქცია, მაგრამ არ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ u ქრება უსასრულობაში.

ახლა ჩვენ დავადგენთ u ფუნქციის ასიმპტოტურ ყოფაქცევას უსასრულობაში.

ვთქვათ, გვაქვს განტოლება

$$C(\partial)\, u(x) = \theta_0\, P(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \tag{1.134}$$

სადაც θ_0 განსაზღვრულია (1.130) ტოლობით. თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.133) ტოლობას და გამოვიყენებთ ლემა 14-ს, მაშინ დავასკვნით, რომ (1.134) განტოლებას გააჩნია ნულოვანი რიგის ერთადერთი ამონახსენი $\omega^{(0)} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\int\limits_{|x|=1} \omega^{(0)}(x) dS = 0. \tag{1.135}$$

ეს ამონახსნია

$$\omega^{(0)}(x) = \theta_0\, u^{(0)}(x), \tag{1.136}$$

სადაც

$$u^{(0)}(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big(V.P.[C(-i\xi)]^{-1}\mathcal{F}\widetilde{P}(\xi)\big). \tag{1.137}$$

(1.131) განტოლება შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$C(\partial)u(x) = \theta_0 \widetilde{P}(x) + \widetilde{Q}(x) + \widetilde{\Phi}(x), \quad x \in \Omega^-. \tag{1.138}$$

13-16 ლემებიდან დავასკვნით, რომ (1.138) განტოლების ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია უსასრულობაში, აქვს სახე

$$u(x) = C + \theta_0\, u^{(0)}(x) + u^{(*)}(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.139}$$

სადაც $C = (C_1, C_2, C_3)^\top$ არის ნებისმიერი მუდმივი, $u^{(0)}$ მოცემულია (1.137) ტოლობით და აკმაყოფილებს (1.135)პირობას,

$$u^{(*)} \in [C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^3 \cap [C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{supp}\,\Phi)]^3 \tag{1.140}$$

და უსასრულობაში აქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა

$$\partial^{\mathrm{m}} u^{(*)} = \mathcal{O}(|x|^{-1-|\mathrm{m}|}\ln|x|), \quad |x| \to \infty; \tag{1.141}$$

აქ $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ნებისმიერი მულტიინდექსია. თუ u ვექტორისთვის უსასრულობაში შემოსაზღვრულობასთან ერთად მოვითხოვთ (1.118) პირობას, მაშინ (1.139) ტოლობაში შემავალი C მუდმივი ქრება და მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

ლემა 17 . ვთქვათ, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})$ არის (1.138) განტოლების ამონახსნი, რომელიც შემოსაზღვრულია უსასრულბაში და აკმაყოფილებს (1.118) პირობას, მაშინ

$$u(x) = \theta_0\, u^{(0)}(x) + u^{(*)}(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.142}$$

სადაც $u^{(0)}$ განსაზღვრულია (1.137) ტოლობით, ხოლო $u^{(*)}$ აკმაყოფილებს (1.140), (1.141) პირობებს.

ახლა დავუბრუნდეთ დირიხლეს (1.122)-(1.123) ამოცანას და დავამტკიცოთ ერთადერთობის შემდეგი დებულება

თეორემა 18 დირიხლეს (1.122)-(1.123) გარე სასაზღვრო ამოცანას $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ კლასში გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

დამტკიცება. დამტკიცება ჩავატაროთ წინააღმდეგობის დაშვების გზით. ვთქვათ, მოცემულ ამოცანას გააჩნია ორი განსხვავებული $U^{(1)} = (u^{(1)}, \vartheta^{(1)})^\top$ და $U^{(2)} = (u^{(2)}, \vartheta^{(2)})^\top$ ამონახსნი. განვიხილოთ სხვაობა

$$V = (u', \vartheta') = U^{(1)} - U^{(2)}.$$

ტემპერატურის ϑ' ფუნქციისთვის გვაქვს დირიხლეს (1.124)-(1.125) ტიპის ერთგვაროვანი ამოცანა; ამასთან ϑ' აკმაყოფილებს უსასრულობაში ქრობის (1.117) თანაფარდობაში მითითებულ პირობას. ამიტომ Ω^- არეში ϑ' იგივურად ნულის ტოლია.

მაშასადამე, u' ვექტორი არის ამონახსნი დირიხლეს შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანისა

$$C(\partial)u'(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{1.143}$$

$$\{u'\}^- = 0, \quad x \in S, \tag{1.144}$$

და u' აკმაყოფილებს (1.117)-(1.118) თანაფარდობებს.

თუ ვისარგებლებთ ლემა 17-ით, მაშინ u' შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$u'(x) = \theta_0'\, u^{(0)}(x) + v^{(*)}(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.145}$$

სადაც $u^{(0)}$ განისაზღვრება (1.137) ტოლობით, ხოლო

$$\partial^{\mathrm{m}} v^{(*)}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-|\mathrm{m}|}\ln|x|), \quad |x| \to \infty; \tag{1.146}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\vartheta_0'(x) = \lim_{|x|\to\infty} (\mathrm{d}x, x)^{\frac{1}{2}}\, \vartheta'(x) = 0. \tag{1.147}$$

რადგან $\vartheta'(x) = 0$, როცა $x \in \Omega^-$, ამიტომ

$$u'(x) = v^{(*)}(x), \quad x \in \Omega^-, \tag{1.148}$$

რის შედეგადაც გვაქვს

$$\partial^{\mathrm{m}} u'(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1-|\mathrm{m}|}\ln|x|), \quad |x| \to \infty; \tag{1.149}$$

რადგან სრულდება ქრობის (1.149) პირობა, ჩვენ შეგვიძლია ვისარგებლოთ გრინის ფორმულით Ω^- არეში

$$\int\limits_{\Omega^-} \big[C(\partial)u' \cdot u'\, dx + E(u', u')\big]\, dx = \int\limits_{S} \{T(\partial, n)u'\}^- \cdot \{u'\}^-\, dS, \tag{1.150}$$

სადაც $T(\partial, n)$ მოცემულია (1.14) ფორმულით და

$$E(u', u') = c_{kjpq}\, \partial_q u_p'\, \partial_j u_k'. \tag{1.151}$$

მაშინ (1.144) და (1.150)-(1.151) თანაფარდობებიდან მივიღებთ

$$E(u', u') = 0 \quad \Omega^- - \text{ში},$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$u' = a \times x + b,$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

ახლა თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.149) პირობას, დავასკვნით, რომ

$$u' = 0, \quad x \in \Omega^-, \tag{1.152}$$

მაშასადამე, $U^{(1)}(x) = U^{(2)}(x)$, $x \in \Omega^-$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას. □

ანალოგიურად მტკიცდება ერთადერთობის თეორემა ნეიმანის, რობენისა და შერეული ამოცანებისთვის.

თეორემა 19 ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანებს $[C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^{2,\alpha}(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში გააჩნიათ არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

1.5.3 შეუღლებული ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები

ქვემოთ ჩვენ დაგვჭირდება ერთადერთობის თეორემები ე.წ. შეუღლებული ამოცანებისთვისაც. მართებულია შემდეგი დებულებები.

თეორემა 20 დირიხლეს ტიპის შეუღლებულ ერთგვაროვან ამოცანას

$$A^*(\partial)U^*(x) = 0 \quad x \in \Omega^{\pm}, \tag{1.153}$$

$$\{U^*(x)\}^{\pm} = 0 \quad x \in S, \tag{1.154}$$

სადაც $A^*(\partial)$ განსაზღვრულია (1.26) ტოლობით, გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი $\left[C^2(\Omega^{\pm})\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{\Omega^{\pm}})\right]^4 \cap Z^*(\Omega^-)$ რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ თეორემის ჭეშმარიტება Ω^+ არისთვის. (1.153)-(1.154) ამოცანიდან გამომდინარეობს, რომ $U^* = (u^*, \vartheta^*)^\top \in \left[C^2(\Omega^+)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{\Omega^+})\right]^4$ ვექტორის პირველი სამი კომპონენტისგან შედგენილი $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^\top$ ვექტორი ამონახსნია შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანის

$$\left[C(\partial)\, u^*(x)\right]_k = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.155}$$

$$\left\{u_k^*(x)\right\}^+ = 0, \quad x \in S, \quad k = 1, 2, 3; \tag{1.156}$$

ხოლო u_4^*-თვის მიიღება შემდეგი ამოცანა

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q u_4^*(x) = \beta_{kj}\, \partial_j\, u_k^*(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{1.157}$$

$$\left\{u_4^*(x)\right\}^+ = 0, \quad x \in S. \tag{1.158}$$

რადგან (1.155)-(1.156) ამოცანა ემთხვევა დრეკადობის კლასიკური თეორიის დირიხლეს ამოცანას, (1.49) ფორმულის ძალით, დავასკვნით, რომ $u_k^*(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, $k = 1, 2, 3$. მაშინ (1.157)-(1.158) ამოცანა დაემთხვევა დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანას $\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q$ ოპერატორისთვის და (1.48) ფორმულიდან დავასკვნით, რომ $u_4^*(x) = 0$, $x \in \Omega^+$.

ახლა განვიხილოთ Ω^- არის შემთხვევა. აქაც (1.153)-(1.154) გაიხლიჩება ორ ამოცანად, სადაც პირველი ამოცანა არის (1.155)-(1.156) ტიპის, ხოლო მეორე (1.157)-(1.158) ტიპის. რადგან $U^* \in \left[C^2(\Omega^-)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{\Omega^-})\right]^4 \cap Z^*(\Omega^-)$, ამიტომ (1.119) პირობისა და Ω^- არისთვის გრინის ფორმულის გამოყენებით კვლავ

მივიღებთ $u^*(x) = 0$, $x \in \Omega^-$. აქედან გამომდინარე u_4^*-თვის მიიღება შემდეგი ამოცანა

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4^*(x) = 0, \text{ როცა } x \in \Omega^-, \tag{1.159}$$

$$\big\{u_4^*(x)\big\}^- = 0, \text{ როცა } x \in S, \tag{1.160}$$

სადაც u_4^* აკმაყოფილებს (1.119)-(1.120) პირობებს. რადგან u_4^* არის (1.159) ერთგვაროვანი განტოლების უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსენი, ამიტომ

$$u_4^*(x) = C + \mathcal{O}(|x|^{-1}), \qquad x \to \infty.$$

(1.120) პირობიდან კი დავასკვნით, რომ $C = 0$. საიდანაც გამომდინარეობს

$$u_4^*(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1})$$

და უსასრულო არისთვის გრინის ფორმულის გამოყენებით მარტივად დავასკვნით, რომ

$$u_4^*(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

$\square$

თეორემა 21 ნეიმანის ტიპის შეუღლებული შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის

$$A^*(\partial)U^*(x) = 0 \quad x \in \Omega^+, \tag{1.161}$$

$$\{Q(\partial,n)\,U^*(x)\}^+ = 0 \quad x \in S, \tag{1.162}$$

ამონახსენი $\big[C^2(\Omega^\pm)\big]^4 \cap \big[C^1(\overline{\Omega^\pm})\big]^4$ რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში არის $(a \times x + b, c)^\top$ ვექტორი, სადაც a და b ნებისმიერი მუდმივი სამგანზომილებიანი ვექტორებია, ხოლო c ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ თეორემის სამართლიანობა. (1.161)-(1.162) ამოცანიდან გამომდინარეობს, რომ რეგულარული $U^* = (u^*, \vartheta^*)^\top \in \big[C^2(\Omega^+)\big]^4 \cap \big[C^1(\overline{\Omega^+})\big]^4$ ვექტორის პირველი სამი კომპონენტისგან შედგენილი $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ ვექტორი ამონახსნია შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანის

$$\big[C(\partial)u^*(x)\big]_k = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.163}$$

$$\big\{T(\partial,n)u^*(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S. \tag{1.164}$$

ამ ამოცანის ზოგადი ამონახსნია ხისტი გადაადგილების ვექტორი

$$u^* = a \times x + b = \sum_{k=1}^{6} C_k \widetilde{\Psi}^{(k)}, \tag{1.165}$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, $C_j = b_j,\ j = 1, 2, 3,\ C_j = a_j,\ j = 4, 5, 6,$ ხოლო

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Psi}^{(1)} = \big(1, 0, 0\big)^\top, \qquad \widetilde{\Psi}^{(2)} = \big(0, 1, 0\big)^\top, \qquad \widetilde{\Psi}^{(3)} = \big(0, 0, 1\big)^\top, \\ &\widetilde{\Psi}^{(4)} = \big(0, -x_3, x_2\big)^\top, \ \ \widetilde{\Psi}^{(5)} = \big(x_3, 0, -x_1\big)^\top, \ \ \widetilde{\Psi}^{(6)} = \big(-x_2, x_1, 0\big)^\top. \end{aligned} \tag{1.166}$$

მარტივად ვაჩვენებთ, რომ (1.165) ტოლობით განსაზღვრული u^* ვექტორისთვის $\beta_{kj}\,\partial_j\, u_k^*(x) = 0$. ამიტომ ϑ^*-თვის მივიღებთ შემდეგ ერთგვაროვან ამოცანას:

$$\Lambda(\partial)\,\vartheta^*(x) = 0, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.167}$$

$$\lambda(\partial, n)\,\vartheta^*(x) = 0, \quad x \in S. \tag{1.168}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\vartheta^* = const. \tag{1.169}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

1.6 პოტენციალები და მათი თვისებები

შემოვიღოთ ზედაპირული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები:

$$V(h)(x) = V_S(h)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\,h(y)\,dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.170}$$

$$W(h)(x) = W_S(h)(x) := \int\limits_S \big[Q\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top h(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.171}$$

სადაც $\Gamma(x-y) = \big[\Gamma_{kj}(x-y)\big]_{4\times 4}$ არის $A(\partial_x)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა, ხოლო $Q(\partial, n)$ განსაზღვრულია (1.54) ტოლობით. (1.170) ფორმულით მოცემულ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება მარტივი ფენის პოტენციალი, ხოლო (1.171) ფორმულით განსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება ორმაგი ფენის პოტენციალი, h ვექტორს ეწოდება პოტენციალის სიმკვრივე.

თეორემა 22 მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები წარმოადგენს ერთგვაროვანი

$$A(\partial)U(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S \tag{1.172}$$

განტოლების ამონახსნებს და ეკუთვნიან $Z(\Omega^-)$ კლასს.

დამტკიცება. ჯერ ვაჩვენოთ, რომ მარტივი ფენის პოტენციალი წარმოადგენს (1.172) განტოლების ამონახსნს:

$$\begin{aligned}\big[A(\partial_x)V(h)(x)\big]_k &= A_{kj}(\partial_x)\big[V(h)(x)\big]_j \\ &= A_{kj}(\partial_x)\Big[\int\limits_S \Gamma_{jp}(x-y)\,h_p(y)\,dS_y\Big] \\ &= \int\limits_S A_{kj}(\partial_x)\,\Gamma_{jp}(x-y)\,h_p(y)\,dS_y = 0, \qquad k=\overline{1,4}.\end{aligned}$$

ვინაიდან

$$A_{kj}(\partial_x)\,\Gamma_{jp}(x-y) = \big[A(\partial_x)\,\Gamma(x-y)\big]_{kp} = 0, \qquad k,p=\overline{1,4}, \qquad x\neq y, \tag{1.173}$$

ამიტომ, როცა $x\notin S$,

$$\big[A(\partial_x)\,V(h)(x)\big]_k = 0, \quad k=\overline{1,4}.$$

ანალოგიურად ორმაგი ფენის პოტენციალისთვის მივიღებთ:

$$\begin{aligned}\big[A(\partial_x)\,W(h)(x)\big]_k &= A_{kj}(\partial_x)\,[W(h)(x)]_j \\ &= A_{kj}(\partial_x)\,\Big[\int\limits_S \big[Q\big(\partial_y,n(y)\big)\,\Gamma^\top(x-y)\big]^\top h(y)dS_y\Big]_j \\ &= A_{kj}(\partial_x)\int\limits_S \big[Q(\partial_y,n(y))\Gamma^\top(x-y)\big]_{pj} h_p(y)\,dS_y \\ &= A_{kj}(\partial_x)\int\limits_S Q_{pm}\big(\partial_y,n(y)\big)\Gamma_{jm}(x-y)\,h_p(y)\,dS_y \\ &= \int\limits_S Q_{pm}\big(\partial_y,n(y)\big)\,A_{kj}(\partial_x)\,\Gamma_{jm}(x-y)\,h_p(y)\,dS_y = 0, \qquad k=\overline{1,4}.\end{aligned}$$

აქედან კი, (1.173) პირობის ძალით კვლავ დავასკვნით

$$\big[A(\partial_x)W(h)(x)\big]_k = 0, \quad k=\overline{1,4}, \quad x\notin S.$$

ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

თეორემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ $\Gamma(x-y)$ ფუნდა-

მენტური ამოხსნის ასიმპტოტური წარმოდგენით უსასრულობაში:

$$\Gamma(x-y) = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x-y|^{-1})\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}(1)\big]_{3\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times 3} & \mathcal{O}(|x-y|^{-1}) \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$= \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x|^{-1})\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}(1)\big]_{3\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times 3} & \mathcal{O}(|x|^{-1}) \end{bmatrix}_{4\times 4} + \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x|^{-2})\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}(|x|^{-1})\big]_{3\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times 3} & \mathcal{O}(|x|^{-2}) \end{bmatrix}_{4\times 4}. \tag{1.174}$$

სადაც y ეკუთვნის რაიმე კომპაქტურ სიმრავლეს, ხოლო $|x|$ საკმარისად დიდია.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ორმაგი ფენის პოტენციალი ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს. თუ მოვახდენთ ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ მატრიცის ტრანსპონირებას და გავითვალისწინებთ $Q(\partial,n)$ ოპერატორის სახეს, მაშინ მარტივად მივიღებთ:

$$Q(\partial_y,n(y))\Gamma^\top(x-y) = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x|^{-2})\big]_{3\times 3} & \big[0\big]_{3\times 1} \\ \big[\mathcal{O}(|x|^{-1})\big]_{1\times 3} & \mathcal{O}(|x|^{-2}) \end{bmatrix}_{4\times 4},$$

ხოლო ამ უკანასკნელის ტრანსპონირება გვაძლევს:

$$\big[Q(\partial_y,n(y))\Gamma^\top(x-y)\big]^\top = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}(|x|^{-2})\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}(|x|^{-1})\big]_{3\times 1} \\ \big[0\big]_{1\times 3} & \mathcal{O}(|x|^{-2}) \end{bmatrix}_{4\times 4},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ საკმარისად დიდი $|x|$-თვის

$$\big[W(h)(x)\big]_k = \begin{cases} \mathcal{O}(|x|^{-1}), & k=\overline{1,3}, \\ \mathcal{O}(|x|^{-2}), & k=4, \end{cases} \qquad \text{როცა } |x|\to\infty.$$

აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ $W(h)\in Z(\Omega^-)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მარტივი ფენის პოტენციალი ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს. ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ ამონახსნის (1.174) ასიმპტოტური ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(x) + \mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big). \tag{1.175}$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.175) ტოლობას, მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
V_k(x) &= \sum_{p=1}^{4} \int\limits_S \Gamma_{kp}(x-y)\, h_p(y)\, dS_y = \sum_{p=1}^{4} \int\limits_S \Big[\Gamma_{kp}(x) + \mathcal{O}(|x|^{-1})\Big]\, h_p(y)\, dS_y \\
&= \sum_{p=1}^{4} \Gamma_{kp}(x) \int\limits_S h_p(y)\, dS_y + \mathcal{O}(|x|^{-1}) \\
&= \sum_{p=1}^{3} \Gamma_{kp}(x) \int\limits_S h_p(y)\, dS_y + \Gamma_{k4}(x) \int\limits_S h_4(y)\, dS_y + \mathcal{O}(|x|^{-1}) \\
&= \Gamma_{k4}(x) \int\limits_S h_4(y)\, dS + \mathcal{O}(|x|^{-1}), \qquad k = \overline{1,3}, \\
V_4(x) &= \mathcal{O}(|x|^{-1}).
\end{aligned}
$$

თუ ვისარგებლებთ ამ თანაფარდობებით და (1.33) პირობით, მაშინ $k = 1,2,3-$თვის მივიღებთ (იხ. (1.118))

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} V_k(x)\, d\Sigma(0,R) = \\
&\quad = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \Big\{\Gamma_{k4}(x) \int\limits_S h_4(y)\, dS + \mathcal{O}(|R|^{-1})\Big\} d\Sigma(0,R) \\
&\quad = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \Big\{ \int\limits_{\Sigma(0,R)} \Gamma_{k4}(x)\, d\Sigma(0,R) \int\limits_S h_4(y)\, dS + \int\limits_{\Sigma(0,R)} \mathcal{O}(|R|^{-1})\, d\Sigma(0,R) \Big\} \\
&\quad = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \mathcal{O}(|R|^{-1}) d\Sigma(0,R) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma(0,1)} \mathcal{O}(|R|^{-1})\, d\Sigma(0,1) = 0,
\end{aligned}
$$

რაც ამტკიცებს, რომ $V(h) \in Z(\Omega^-)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ახლა გამოვიყვანოთ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა Ω^- არისათვის $A(\partial)U(x) = 0$ განტოლების $U \in Z(\Omega^-)$ ამონახსნისათვის.

დავწეროთ ზოგადი წარმოდგენის ფორმულა $\Omega^-_R := \Omega^- \cap B(0,R)$ არეში, სადაც R საკმარისად დიდი დადებითი მუდმივი რიცხვია, ისეთი, რომ $B(0,R) := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ და $\overline{\Omega^+} \subset B(0,R)$,

$$
U(x) = -W_S(\{U\}^-_S) + V_S(\{BU\}^-_S) + \Phi_R(x), \qquad x \in \Omega^-_R, \tag{1.176}
$$

$$
0 = -W_S(\{U\}^-_S) + V_S(\{BU\}^-_S) + \Phi_R(x), \qquad x \in \Omega^+ \cup \big[\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}\,\big], \tag{1.177}
$$

სადაც V_S და W_S შესაბამისად მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებია (იხ.

(1.170) და (1.171)), ხოლო

$$\Phi_R(x) := W_{\Sigma_R}\big(\{U\}^+_{\Sigma_R}\big)(x) - V_{\Sigma_R}\big(\{BU\}^+_{\Sigma_R}\big)(x) \tag{1.178}$$

ცხადია (1.178) ტოლობიდან გვაქვს

$$A(\partial)\,\Phi_R(x) = 0, \qquad x \notin \Sigma_R. \tag{1.179}$$

(1.176) და (1.177) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi_R(x) = U(x) + W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{BU\}^-_S\big), \qquad x \in \Omega^-_R, \tag{1.180}$$

$$\Phi_R(x) = W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{BU\}^-_S\big), \qquad x \in \Omega^+ \cup \big[\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}\,\big]. \tag{1.181}$$

გარდა ამისა, $R_1 < R_2$,

$$\Phi_{R_1}(x) = \Phi_{R_2}(x), \ \text{ როცა } \ |x| < R_1 < R_2. \tag{1.182}$$

ამიტომ ნებისმიერი ფიქსირებული $x \in \mathbb{R}^3$ არსებობს ზღვარი

$$\Phi(x) := \lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) = \begin{cases} U(x) + W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{BU\}^-_S\big), & x \in \Omega^-, \\ W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{BU\}^-_S\big), & x \in \Omega^+. \end{cases}$$

აქედან კი დავასკვნით

$$A(\partial)\,\Phi(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-. \tag{1.183}$$

მეორეს მხრივ, (1.182) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული $x \in \mathbb{R}^3$-თვის და $R_1 > |x|$-თვის

$$\Phi(x) = \lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) = \Phi_{R_1}(x)$$

მაშინ (1.178) და (1.179) ტოლობებიდან ცხადია, რომ

$$A(\partial)\,\Phi(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.184}$$

ამასთან ერთად (1.180) პირობა გვაძლევს

$$\Phi \in Z(\mathbb{R}^3), \tag{1.185}$$

რადგან $U \in Z(\Omega^-)$ და $W_S, V_S \in Z(\Omega^-)$ (იხ. 22).

ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\Phi(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

მართლაც, (1.184) ტოლობიდან ფურიეს გარდაქმნით ვღებულობთ

$$A(-i\xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)=0,\qquad \xi\in\mathbb{R}^3,$$

რადგან $\det A(-i\xi)\neq 0$, როცა $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი არაუარყოფითი M რიცხვი, რომ

$$\widehat{\Phi}(\xi)=\sum_{|\mathrm{m}|\leqslant M}C_{\mathrm{m}}\,\delta^{(\mathrm{m})}(\xi),$$

სადაც $\mathrm{m}=(m_1,m_2,m_3)$ მულტი-ინდექსია, $C_{\mathrm{m}}=(C_{m,1},C_{m,2},C_{m,3},C_{m,4})^\top$ მუდმივი ოთხგანზომილებიანი ვექტორებია, ხოლო $\delta^{(\mathrm{m})}$ დირაკის δ ფუნქციის m რიგის წარმოებულებია. აქედან კი ცხადია, რომ $\Phi(x)$ მრავალწევრია x-ის მიმართ

$$\Phi(x)=\sum_{|\mathrm{m}|\leqslant M}C_{\mathrm{m}}\,x^{\mathrm{m}},\qquad x\in\mathbb{R}^3.$$

(1.117) და (1.118) პირობების ძალით დავასკვნით

$$\Phi(x)=0,\qquad x\in\mathbb{R}^3.$$

თუ (1.176) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$, მივიღებთ ზოგად ინტეგრალურ წარმოდგენას $A(\partial)\,U(x)=0$ განტოლების $Z(\Omega^-)$ კლასის ამონახსნებისთვის,

$$-W\big(\{U\}^-\big)+V\big(\{BU\}^-\big)=\begin{cases}U(x) & \text{როცა}\quad x\in\Omega^-,\\[2mm] 0 & \text{როცა}\quad x\in\Omega^+.\end{cases}\tag{1.186}$$

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისებები (ანალოგიური თეორემები სხვადასხვა ოპერატორების შემთხვევებში დამტკიცებულია შემდეგ ნაშრომებში [23], [18], [31], [4], [1], [2], [6]).

თეორემა 23 თუ $S\in C^{k+1,\alpha}$, $k\geqslant 1$ ნატურალური რიცხვია და $0<\beta<\alpha\leqslant 1$. მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს შემდეგი ასახვის თვისებები გააჩნია

$$V\ :\ [C^{k,\beta}(S)]^4\to[C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega^\pm})]^4,\qquad W\ :\ [C^{k,\beta}(S)]^4\to[C^{k,\beta}(\overline{\Omega^\pm})]^4.$$

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობების თვისებები აღწერილია შემდეგი დებულებით

თეორემა 24 თუ $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, $h \in [C^{0,\beta}(S)]^4$ და $g \in [C^{1,\beta}(S)]^4$. მაშინ ნებისმიერი $x \in S$ წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს:

$$\{V(h)\,(x)\}^{\pm} = \mathcal{H}\,(h)(x), \tag{1.187}$$

$$\{B(\partial_x, n(x))\,V(h)\,(x)\}^{\pm} = [\mp 2^{-1} I_4 + \mathcal{K}\,]\,h(x), \tag{1.188}$$

$$\{W(h)\,(x)\}^{\pm} = [\pm 2^{-1} I_4 + \mathcal{N}\,]\,h(x), \tag{1.189}$$

$$\{B(\partial_x, n(x))\,W(g)(x)\}^{+} = \{B(\partial_x, n(x))\,W(g)(x)\}^{-} =: \mathcal{L}\,g(x), \tag{1.190}$$

სადაც $B(\partial, n)$ განსაზღვრულია (1.16) ტოლობით, $\mathcal{H}$ სუსტი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{N}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპარატორებია, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი ([18], [19], [23]),

$$\mathcal{H}h(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\,h(y)\,dS_y, \tag{1.191}$$

$$\mathcal{K}h(x) := \int\limits_S [B(\partial_x, n(x))\,\Gamma(x-y)]\,h(y)\,dS_y, \tag{1.192}$$

$$\mathcal{N}h(x) := \int\limits_S [Q(\partial_y, n(y))\,\Gamma^{\top}(x-y)]^{\top}\,h(y)\,dS_y, \tag{1.193}$$

$$\mathcal{L}g(x) := \lim_{\Omega^{\pm} \ni z \to x \in S} B(\partial_z, n(x)) \int\limits_S [Q(\partial_y, n(y))\,\Gamma^{\top}(z-y)]^{\top}\,g(y)\,dS_y. \tag{1.194}$$

(1.190) ტოლობას ეწოდება ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემა.

დამტკიცება. მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისთვის წყვეტის (1.187)-(1.188) ფორმულები დამტკიცებულია ნაშრომში [18]. რაც შეეხება ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემას, ანუ (1.190) ტოლობას, ჩვენ აქ მოვიყვანთ ჩვენი აზრით უმარტივეს დამტკიცებას. ვთქვათ, $U := W(g)$, სადაც $g \in [C^{1,\alpha}(S)]^4$. მაშინ $U \in [C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^{\pm}})]^4 \cap Z(\Omega^-)$ აკმაყოფილებს (1.12) განტოლებას და მისთვის შეგვიძლია დავწეროთ შემდეგი ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენა

$$U(x) = W([U]_S)(x) - V([BU]_S)(x), \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-, \tag{1.195}$$

სადაც

$$[U]_S = \{U\}^+_S - \{U\}^-_S, \qquad [BU]_S = \{BU\}^+_S - \{BU\}^-_S.$$

გავითვალისწინოთ, რომ (1.189) ტოლობის ძალით U ფუნქციისთვის S ზედაპირზე გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$[U]_S = [W(g)]_S = \{W(g)\}^+ - \{W(g)\}^- = g;$$

მაშინ (1.195) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$W(g)(x) = W(g)(x) - V\big([BW(g)]_S\big)(x), \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-, \tag{1.196}$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $V([BW(g)]_S)(x) = 0$, როცა $x \in \Omega^+ \cup \Omega^-$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Phi := [BW(g)]_S$. მაშინ გვექნება $V(\Phi)(x) = 0$, $x \in \Omega^+ \cup \Omega^-$ და (1.188) ტოლობის ძალით მარტივად დავასკვნით $0 = \{BV(\Phi)\}^- - \{BV(\Phi)\}^+ = \Phi = [BW(g)]_S = \{BW(g)\}^+ - \{BW(g)\}^-$, ანუ $\{BW(g)(x)\}^+ = \{BW(g)(x)\}^-$, $x \in S$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებით წარმოშობილ სასაზღვრო ინტეგრალურ ოპერატორებს გააჩნიათ ასახვის შემდეგი თვისებები (იხ. [18], [23], [11]).

თეორემა 25 ვთქვათ, $S \in C^{k+1,\alpha}$, $k \geqslant 1$ და $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ ოპერატორები

$$\mathcal{H} \;:\; [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k+1,\beta}(S)]^4, \tag{1.197}$$

$$\mathcal{K} \;:\; [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4,$$

$$\mathcal{N} \;:\; [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4,$$

$$\mathcal{L} \;:\; [C^{k+1,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4, \tag{1.198}$$

უწყვეტია.

(1.197) ოპერატორი წარმოადგენს ნულოვანი ინდექსის მქონე -1 რიგის ელიფსურ ფსევდო-დიფერენციალურ ოპერატორს ([37]), რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცა უარყოფითად არის განსაზღვრული, (1.198) ოპერატორი არის პირველი რიგის ნულოვან ინდექსიანი ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია;

სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები $\pm\frac{1}{2}I_4 + \mathcal{K}$ და $\pm\frac{1}{2}I_4 + \mathcal{N}$ წარმოადგენენ ნულოვან ინდექსიან ფრედჰოლმურ ოპერატორებს.

ახლა შემოვიღოთ ზედაპირული შეუღლებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალები:

$$V^*(h^*)(x) = V^*_S(h^*)(x) := \int\limits_S \Gamma^*(x-y)\, h^*(y)\, dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.199}$$

$$W^*(h^*)(x) = W^*_S(h^*)(x) := \int\limits_S \left[B\big(\partial_y, n(y)\big)\, [\Gamma^*(x-y)]^\top\right]^\top h^*(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.200}$$

სადაც $B(\partial, n)$ განსაზღვრულია (1.16) ტოლობით.

ჩამოვაყალიბოთ ამ პოტენციალების თვისებები თეორემების სახით. მათი დამტკიცება მიიღება იმავე მსჯელობით, რაც ზემოთ იყო დამტკიცებული ანალოგიური თეორემების დამტკიცებაში.

თეორემა 26 მარტივი და ორმაგი ფენის შეუღლებული პოტენციალები წარმოადგენს ერთგვაროვანი

$$A^*(\partial)\, U^*(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.201}$$

განტოლების ამონახსნებს და ეკუთვნიან $Z^*(\Omega^-)$ კლასს.

თეორემა 27 თუ $S \in C^{k+1,\alpha}$, $k \geqslant 1$ ნატურალური რიცხვია და $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის შეუღლებულ პოტენციალებს ასახვის შემდეგი თვისებები გააჩნია

$$V^* \ : \ [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega^{\pm}})]^4, \qquad W^* \ : \ [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(\overline{\Omega^{\pm}})]^4.$$

თეორემა 28 თუ $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, $h \in [C^{0,\beta}(S)]^4$ და $g \in [C^{1,\beta}(S)]^4$, მაშინ ნებისმიერი $x \in S$ წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს:

$$\{V^*(h^*)(x)\}^{\pm} = \mathcal{H}^*(h^*)(x),$$

$$\{Q(\partial_x, n(x)) V^*(h^*)(x)\}^{\pm} = [\mp 2^{-1} I_4 + \mathcal{N}^*\,] h^*(x), \tag{1.202}$$

$$\{W^*(h^*)(x)\}^{\pm} = [\pm 2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*\,] h^*(x), \tag{1.203}$$

$$\{Q(\partial_x, n(x)) W^*(g^*)(x)\}^{+} = \{Q(\partial_x, n(x)) W^*(g^*)(x)\}^{-} =: \mathcal{L}^* g^*(x),$$

სადაც

$$\mathcal{H}^* h^*(x) := \int\limits_S \Gamma^*(x-y)\, h^*(y)\, dS_y,$$

$$\mathcal{K}^* h^*(x) := \int\limits_S [B(\partial_y, n(y)) [\Gamma^*(x-y)]^{\top}]^{\top}\, h^*(y)\, dS_y, \tag{1.204}$$

$$\mathcal{N}^* h^*(x) := \int\limits_S [Q(\partial_x, n(x))\, \Gamma^*(x-y)]\, h^*(y)\, dS_y,$$

$$\mathcal{L}^* g^*(x) := \lim_{\Omega^{\pm} \ni z \to x \in S} Q(\partial_z, n(x)) \int\limits_S \left[B(\partial_y, n(y)) [\Gamma^*(x-y)]^{\top}\right]^{\top} g^*(y) dS_y.$$

მარტივი და ორმაგი ფენის შეუღლებული პოტენციალებით წარმოშობილ სასაზღვრო ინტეგრალურ ოპერატორებს გააჩნიათ ასახვის შემდეგი თვისებები (იხ. [18], [23]).

თეორემა 29 ვთქვათ, $S \in C^{k+1,\alpha}$, $k \geqslant 1$ და $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ ოპერატორები

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^* &: [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k+1,\beta}(S)]^4, \qquad (1.205)\\ \mathcal{K}^* &: [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4,\\ \mathcal{N}^* &: [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4,\\ \mathcal{L}^* &: [C^{k+1,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(S)]^4, \qquad (1.206) \end{aligned}$$

უწყვეტია.

1.7 სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემებს.

1.7.1 დირიხლეს შიგა ამოცანის გამოკვლევა

ვთქვათ, მოცემულია Ω^+ არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega^+ := S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, ზედაპირით. აღვნიშნოთ $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$, $\overline{\Omega^+} = \Omega^+ \cup S$. განვიხილოთ დირიხლეს ტიპის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანა ([16], [17]).

ვიპოვოთ Ω^+ არეში

$$A(\partial)\,U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \qquad (1.207)$$

განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u, \vartheta)^\top \in [C^2(\Omega^+)]^4 \cap [C^1(\overline{\Omega^+})]^4$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\{U(x)\}^+ = f(x), \qquad x \in S, \qquad (1.208)$$

სადაც $f = (f_1, \cdots, f_4)^\top \in [C^{1,\beta}(S)]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

ამ ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ ორმაგი ფენის პოტენციალით, რომელიც განსაზღვრულია (1.171) ტოლობით:

$$U(x) = W(\varphi)(x), \qquad x \in \Omega^+, \qquad (1.209)$$

სადაც $\varphi \in [C^{1,\beta}(S)]^4$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.209) ავტომატურად აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (1.207) განტოლებას, ხოლო სასაზღვრო (1.208) პირობიდან ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულის გამოყენებით (იხ. თეორემა 24) ვღებულობთ შემდეგ მეორე გვარის ვექტორულ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$[\,2^{-1}I_4+\mathcal{N}\,]\,\varphi(x)=f(x),\qquad x\in S, \tag{1.210}$$

სადაც $\mathcal{N}$ არის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია (1.193) ტოლობით. თეორემა 25-ის თანახმად, $[2^{-1}I_4+\mathcal{N}]$ ოპერატორი არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით [18]; ამიტომ თუ ვაჩვენეთ, რომ $\ker[2^{-1}I_4+\mathcal{N}]$ ტრივიალურია, მაშინ სინგულარული ინტეგრალური განტოლებების თეორიის თანახმად (იხ. [23], თავი IV), არაერთგვაროვანი (1.210) განტოლება ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, რასაც ავტომატურად მივყავართ დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულებამდე.

განვიხილოთ (1.210) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება და ვთქვათ, რომ $\varphi_0\in\big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$ არის მისი ამონახსენი, ე.ი.

$$[\,2^{-1}\,I_4+\mathcal{N}\,]\,\varphi_0(x)=0,\qquad x\in S. \tag{1.211}$$

ამ ამონახსნის საშუალებით ავაგოთ ორმაგი ფენის პოტენციალი

$$U_0(x):=W(\varphi_0)(x),\qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus S. \tag{1.212}$$

ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულის თანახმად, (1.211) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0(x)\big\}^+=0,\qquad x\in S.$$

მაშასადამე, ჩვენს მიერ აგებული U_0 ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი დათეორემა 23-ის ძალით $U_0\in\big[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\big]^4$. ერთადერთობის თეორემა 6-ის თანახმად

$$U_0(x)=W(\varphi_0)(x)=0,\qquad x\in\Omega^+. \tag{1.213}$$

აქედან კი ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის ძალით (იხ. ტოლობა (1.190)), მივიღებთ:

$$\big[B(\partial,n)U_0(x)\big]^+=\big[B(\partial,n)U_0(x)\big]^-=0,\qquad x\in S.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს ნეიმანის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს. რადგან $U_0 = W(\varphi_0)$ ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს (იხ. თეორემა 22), ამიტომ ნეიმანის გარე ამოცანის ერთადერთობის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 19) დავასკვნით, რომ

$$U_0(x) = W(\varphi_0)(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \tag{1.214}$$

თუ ვისარგებლებთ ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულებით, (1.213) და (1.214) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$0 = \big\{U_0(x)\big\}^+ - \big\{U_0(x)\big\}^- = \varphi_0 \qquad x \in S,$$

ე.ი. (1.211) ერთგვაროვან განტოლებას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი. ამიტომ $\ker\,[2^{-1}I_4 + \mathcal{N}]$ ტრივიალურია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ (1.210) არაერთგვაროვანი განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. მაშასადამე, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება.

თეორემა 30 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა (1.207)–(1.208) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $U \in \big[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\big]^4 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^4$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ორმაგი ფენის (1.209) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.210) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან.

სხვადასხვა შერეული ამოცანის განხილვის დროს არსებითად გამოიყენება ის ფაქტი, რომ დირიხლეს ამოცანის ამონახსენი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასევე მარტივი ფენის პოტენციალით. მართლაც, ვეძებოთ დირიხლეს შიგა (1.207)–(1.208) ამოცანის ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალით

$$U(x) = V(\varphi)(x), \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.215}$$

სადაც $\varphi \in \big[C^{0,\beta}(S)\big]^4$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.215) ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.207) განტოლებას, ხოლო (1.208) სასაზღვრო პირობიდან, მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისების გამოყენებით, ვღებულობთ შემდეგ პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\mathcal{H}\,\varphi(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.216}$$

სადაც $\mathcal{H}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.191) ტოლობით.

თეორემა 25-ის თანახმად $-\mathcal{H}$ ოპერატორი არის -1 რიგის ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი დადებითად განსაზღვრული მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცით და მისი ინდექსი ნულის ტოლია. ამიტომ, თუ $\ker \mathcal{H}$ ტრივიალურია, მაშინ, ფსევდოდიფერენციალური განტოლებების ზოგადი თეორიის თანახმად ([14], [1], [24], [25]) ოპერატორი (1.197) შებრუნებადი იქნება და არაერთგვაროვანი (1.216) განტოლება ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

განვიხილოთ (1.216) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება

$$\mathcal{H}\,\varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.217}$$

ვთქვათ, $\varphi_0 \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ ამ განტოლების ამონახსნია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქცია

$$U_0(x) := V(\varphi_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S.$$

(1.217) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left\{U_0(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S. \tag{1.218}$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული $U_0 \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^4$ რეგულარული ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი; ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 6-ის თანახმად

$$U_0(x) = V(\varphi_0)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისებით (იხ. ტოლობა (1.187)), მივიღებთ:

$$\left[U_0(x)\right]^+ = \left[U_0(x)\right]^- = 0, \qquad x \in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $U_0 \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^-})\right]^4 \cap Z(\Omega^-)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს და თეორემა 18-ის თანახმად

$$U_0(x) = V(\varphi_0)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალზე B ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის (1.188) ტოლობით, მივიღებთ:

$$\varphi_0 = \left[B(\partial,n)V(\varphi_0)\right]^- - \left[B(\partial,n)V(\varphi_0)\right]^+ = 0 \qquad S\text{-ზე},$$

ე.ი. $\varphi_0 = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ker $\mathcal{H}$ ტრივიალურია და ოპერატორი (1.197) შებრუნებადია ([34], [35]). მაშასადამე, არაერთგვაროვანი (1.217) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი ალტერნატიული დებულება.

თეორემა 31 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა (1.207)-(1.208) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $U \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^4$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.215) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ ცალსახად განისაზღვრება (1.216) ინტეგრალური განტოლებიდან.

1.7.2 ნეიმანის გარე ამოცანის გამოკვლევა

განვიხილოთ ნეიმანის გარე ამოცანა.

ვიპოვოთ Ω^- არეში

$$A(\partial)\, U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.219}$$

განტოლების ისეთი რეგულარული $U \in [C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^2(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{B(\partial, n)\, U(x)\right\}^- = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.220}$$

სადაც $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)^\top \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$; ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $S \in C^{1,\alpha}$ და $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$.

(1.219)-(1.220) ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$U(x) = V(\varphi)(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.221}$$

სადაც $\varphi \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.221) ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.219) განტოლებას და ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს, ხოლო (1.220) სასაზღვრო პირობიდან ვღებულობთ მეორე გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$[\, 2^{-1}\, I_4 + \mathcal{K}\,]\, \varphi(x) = F(x), \quad x \in S, \tag{1.222}$$

სადაც სინგულარული ინტეგრალური $\mathcal{K}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.192) ტოლობით.

თეორემა 25-ის თანახმად $2^{-1}I_4+\mathcal{K}$ ოპერატორი არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით. ამიტომ თუ $\ker[2^{-1}I_4+\mathcal{K}]$ ტრივიალურია, მაშინ არაერთგვაროვანი (1.222) განტოლება ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

განვიხილოთ (1.222) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება,

$$[\,2^{-1}\,I_4(x)+\mathcal{K}\,]\,\varphi(x)=0, \qquad x\in S, \tag{1.223}$$

და ვაჩვენოთ, რომ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი. ვთქვათ, $\varphi_0\in\big[C^{0,\beta}(S)\big]^4$ არის ერთგვაროვანი (1.223) განტოლების ამონახსენი. ამ φ_0 ვექტორის საშუალებით ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალი

$$U_0(x):=V(\varphi_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus S. \tag{1.224}$$

(1.223) განტოლებიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{B(\partial,n)\,U_0(x)\big\}^-=0, \qquad x\in S.$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს ნეიმანის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს. რადგან $U_0\in[C^1(\overline{\Omega^-})]^4\cap[C^2(\Omega^-)]^4\cap Z(\Omega^-)$, ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 19-ის თანახმად

$$U_0(x)=0, \qquad x\in\Omega^-.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გამო (იხ. (1.187) ტოლობა) გვაქვს:

$$\big\{U_0(x)\big\}^-=\big\{U_0(x)\big\}^+=0, \qquad x\in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს და ერთადერთობის თეორემა 6-ის თანახმად

$$U_0(x)=0, \qquad x\in\Omega^+.$$

მარტივი ფენის პოტენციალზე B ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის (1.188) ფორმულის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\varphi_0=\big\{B(\partial,n)\,V(\varphi_0)\big\}^- - \big\{B(\partial,n)\,V(\varphi_0)\big\}^+=0, \qquad x\in S,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\ker[\,2^{-1}I_4+\mathcal{K}\,]$ ტრივიალურია. მაშასადამე, (1.222) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 32 ვთქვათ, $S \in C^{1,\alpha}$ და $F \in \big[C^{0,\beta}(S)\big]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$; მაშინ ნეიმანის გარე (1.219)-(1.220) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია $\big[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^-})\big]^4 \cap \big[C^2(\Omega^-)\big]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.221) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \big[C^{0,\beta}(S)\big]^4$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.222) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან.

1.7.3 დირიხლეს გარე ამოცანის გამოკვლევა

განვიხილოთ დირიხლეს გარე ამოცანა.

ვიპოვოთ Ω^- არეში

$$A(\partial)\,U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.225}$$

განტოლების ისეთი რეგულარული $U \in [C^2(\Omega^-)]^4 \cap [C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap Z(\Omega^-)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\big\{U(x)\big\}^- = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.226}$$

სადაც $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^\top \in \big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$, $S \in C^{2,\alpha}$ და $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$.

დირიხლეს (1.225)-(1.226) გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ ორმაგი და მარტივი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციის სახით

$$U(x) = W(\varphi)(x) + a\,V(\varphi)(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.227}$$

სადაც $\varphi \in \big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$ საძიებელი სიმკვრივეა, ხოლო a დადებითი მუდმივია, $a = const > 0$. მაშინ (1.227) ფუნქცია ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.225) განტოლებას და ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს (იხ. თეორემა 22), ხოლო (1.226) სასაზღვრო პირობიდან ვღებულობთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებას

$$[\,2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}\,]\,\varphi(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{1.228}$$

სადაც $\mathcal{H}$ და $\mathcal{N}$ ოპერატორები განსაზღვრულია (1.191) და (1.193) ტოლობებით. რადგან თეორემა 25-ის თანახმად $2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N}$ წარმოადგენს ნორმალური ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ ოპერატორს ნულოვანი ინდექსით, ასეთივე იქნება $2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}$, რადგან $\mathcal{H}$ არის სუსტ სინგულარობიანი ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც წარმოშობს კომპაქტურ ოპერატორს. ამიტომ, თუ ვაჩვენეთ, რომ $\ker\,[2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}]$ ტრივიალურია, მაშინ არაერთგვაროვანი (1.228) განტოლება ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

განვიხილოთ (1.228) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება,

$$[\,2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}\,]\,\varphi(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{1.229}$$

და ვაჩვენოთ, რომ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი. ვთქვათ, $\varphi_0 \in \big[C^{1,\beta}(S)\big]^4$ არის ერთგვაროვანი (1.229) განტოლების ამონახსენი და მისი საშუალებით ავაგოთ ვექტორ-ფუნქცია

$$U_0(x) \equiv (u_0(x), \vartheta_0(x)) := W(\varphi_0)(x) + a\,V(\varphi_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S. \tag{1.230}$$

(1.229) განტოლებიდან და მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წყვეტის ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S.$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს, რომელიც ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს. ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 18-ის თანახმად

$$U_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-. \tag{1.231}$$

თუ ვისარგებლებთ ზედაპირული პოტენციალების წყვეტის ფორმულებით (იხ. (1.187) - (1.190) ფორმულები), მივიღებთ:

$$\big\{U_0(x)\big\}^+ - \big\{U_0(x)\big\}^- = \varphi_0, \qquad x \in S, \tag{1.232}$$

$$\big\{B(\partial, n)\,U_0(x)\big\}^+ - \big\{B(\partial, n)\,U_0(x)\big\}^- = -a\,\varphi_0(x), \qquad x \in S. \tag{1.233}$$

(1.231) ტოლობის გამოყენებით, (1.232) და (1.233) თანაფარდობებიდან მარტივად დავასკვნით

$$\big\{B(\partial, n)\,U_0(x)\big\}^+ + a\,\big\{U_0(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S. \tag{1.234}$$

(1.234) წარმოადგენს რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას. (1.234) ტოლობიდან $B(\partial, n)$ ოპერატორის სტრუქტურის გათვალისწინებით U_0 ვექტორის მეოთხე კომპონენტისთვის - ტემპერატურის ϑ_0 ფუნქციისთვის მივიღებთ, რომ

$$\big\{\lambda(\partial, n)\,\vartheta_0(x)\big\}^+ + a\,\big\{\vartheta_0(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S. \tag{1.235}$$

მეორე მხრივ კი $A(\partial)U_0(x) = 0,\ x \notin S,$ გვაქვს

$$\Lambda(\partial)\,\vartheta_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.236}$$

სადაც $\Lambda(\partial)$ დიფერენციალური ოპერატორი მოცემულია (1.11) ტოლობით.

ახლა, თუ ვისარგებლებთ გრინის (1.47) ფორმულით, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$-\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q\vartheta_0\,\partial_p\vartheta_0\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{\lambda(\partial,n)\,\vartheta_0\}^+\{\vartheta_0\}^+\,dS = 0. \tag{1.237}$$

აქედან კი (1.235) ტოლობის ძალით გამომდიანრეობს

$$-\int\limits_{\Omega^+} \lambda_{pq}\,\partial_q\vartheta_0\,\partial_p\vartheta_0\,dx - a\int\limits_{\partial\Omega^+} [\{\vartheta_0\}^+]^2\,dS = 0. \tag{1.238}$$

რადგან $a > 0$ და $[\lambda_{pq}]_{3\times3}$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია (იხ. (1.18)), ამიტომ (1.238)-დან დავასკვნით

$$\lambda_{pq}\,\partial_q\vartheta_0(x)\,\partial_p\vartheta_0(x) = 0, \quad x\in\Omega^+, \tag{1.239}$$

$$\{\vartheta_0(x)\}^+ = 0, \qquad x\in S. \tag{1.240}$$

(1.239) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ

$$\vartheta_0(x) = const, \qquad x\in\Omega^+, \tag{1.241}$$

ხოლო (1.240)-დან საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\vartheta_0(x) = 0, \qquad x\in\Omega^+. \tag{1.242}$$

$A(\partial)$ და $B(\partial,n)$ ოპერატორების სტრუქტურისა და (1.234) პირობის გათვალისწინებით u_0 ვექტორისთვის მივიღებთ შემდეგ ამოცანას

$$C(\partial)\,u_0(x) = 0, \qquad x\in\Omega^+, \tag{1.243}$$

$$\big\{T(\partial,n)\,u_0(x)\big\}^+ + a\,\big\{u_0(x)\big\}^+ = 0, \qquad x\in S, \tag{1.244}$$

სადაც $T(\partial,n)$ განსაზღვრულია (1.14) ტოლობით.

ახლა, თუ ვისარგებლებთ გრინის (1.49) იგივეობით, მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას

$$\int\limits_{\Omega^+} E(u_0,u_0)\,dx + a\int\limits_{\partial\Omega^+} |\{u\}^+|^2\,dS = 0. \tag{1.245}$$

საიდანაც $E(u_0,u_0)$ კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობიდან (იხ. (1.50) ფორმულა) და $a > 0$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E(u_0(x),u_0(x)) = 0, \quad x\in\Omega^+, \tag{1.246}$$

$$\{u_0(x)\}^+ = 0, \quad x \in S. \tag{1.247}$$

რადგან (1.246) განტოლების ამონახსენია ხისტი გადაადგილების ვექტორი (იხ. (1.68) ფორმულა)

$$u_0(x) = a \times x + b, \quad x \in \Omega^+, \tag{1.248}$$

და სრულდება (1.247) პირობა, ამიტომ

$$u_0(x) = 0, \quad x \in \Omega^+.$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ

$$U_0(x) = 0, \quad x \in \Omega^+. \tag{1.249}$$

ახლა, თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.230), (1.231) და (1.249) ტოლობებს, მაშინ (1.232) თანაფარდობიდან მარტივად დავასკვნით

$$\varphi_0(x) = 0, \quad x \in S. \tag{1.250}$$

ამრიგად, $\ker[2^{-1} I_4 + \mathcal{N} + a\mathcal{H}]$ ტრივიალურია და ამიტომ (1.228) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის, საიდანაც გამომდინარეობს არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 33 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$; მაშინ დირიხლეს გარე (1.225)-(1.226) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია $\left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^-})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^-)\right]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება (1.227) წრფივი კომბინაციის სახით, სადაც საძიებელი სიმკვრივე $\varphi \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.228) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან.

შენიშვნა 34 ცხადია, რომ თეორემა 31-ის ანალოგიური თეორემა მართებულია დირიხლეს გარე ამოცანის შემთხვევაშიც. $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებადობიდან, რაც ნაჩვენებია 1.7.1 ქვეპარაგრაფში, მარტივად დავასკვნით შემდეგი დებულების მართებულობას.

თეორემა 35 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს გარე (1.225)-(1.226) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $U \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^4$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.215) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ ცალსახად განისაზღვრება (1.216) ინტეგრალური განტოლებიდან.

1.7.4 ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევა

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ნეიამნის შიგა ამოცანა კლასიკური დასმით შემდეგნაირად ყალიბდება:

ვიპოვოთ Ω^+ არეში

$$A(\partial)\,U(x)=0, \qquad x\in\Omega^+, \tag{1.251}$$

განტოლების ისეთი $U\in\big[C^2(\Omega^+)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega^+})\big]^4$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\big\{B(\partial,n)\,U(x)\big\}^+=F(x), \qquad x\in S, \tag{1.252}$$

სადაც $F=\big(F_1,F_2,F_3,F_4\big)^\top\in[C^{0,\beta}(S)]^4$ მოცემული ფუნქციაა. თუ $F=0$, მაშინ გვექნება ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანა.

შენიშვნა 36 შემოვიღოთ განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორთა წრფივი სივრცე, რომელიც მოჭიმულია შემდეგ ვექტორებზე

$$\Psi^{(1)}=\big(1,0,0,0\big)^\top,\quad \Psi^{(2)}=\big(0,1,0,0\big)^\top,\quad \Psi^{(3)}=\big(0,0,1,0\big)^\top,$$

$$\Psi^{(4)}=\big(0,-x_3,x_2,0\big)^\top,\quad \Psi^{(5)}=\big(x_3,0,-x_1,0\big)^\top,\quad \Psi^{(6)}=\big(-x_2,x_1,0,0\big)^\top,$$

$$\Psi^{(7)}=\big(v_1^{(0)},v_2^{(0)},v_3^{(0)},1\big)^\top, \tag{1.253}$$

სადაც $v_k^{(0)}$, $k=1,2,3$, მოცემულია (1.111) ტოლობებით, რომელშიც $\alpha_{kl}=\alpha_{lk}$ მუდმივები განსაზღვრულია ცალსახად ამოხსნადი (1.112) ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან (იხ. თეორემა 10).

ცხადია, $\Psi^{(k)}$, $k=\overline{1,7}$, ვექტორები წარმოადგენს ნეიმანის ტიპის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს. თეორემა 10-ის თანახმად ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი სასზღვრო ამოცანის ნებისმიერი ამონახსენი წარმოიდგინება (1.253) ვექტორების წრფივი კომბინაციით. ♦

ნეიმანის შიგა ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულების დასამტკიცებლად ჩვენ კვლავ გამოვიყენებთ პოტენციალთა მეთოდსა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას.

ნეიმანის (1.251)-(1.252) ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალით

$$U(x)=V(\varphi)(x)=\int\limits_S\Gamma(x-y)\,\varphi(y)\,dS_y, \qquad x\in\Omega^+, \tag{1.254}$$

სადაც $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\big)^\top$ საძიებელი სიმკვრივეა.

მარტივი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულებისა (იხ. თეორემა 24) და (1.252) სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით, φ სიმკვრივის მიმართ მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$-2^{-1}\,\varphi(x) + \mathcal{K}\,\varphi(x) = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.255}$$

სადაც $\mathcal{K}$ არის (1.192) ტოლობით განსაზღვრული სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი.

შევნიშნოთ, რომ $[-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}]$ ოპერატორი ნორმალური ტიპის ნულოვან ინდექსიანი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია.

იმისათვის, რომ გამოვიკვლიოთ (1.255) განტოლების ამოხსნადობა, აუცილებელია შევისწავლოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$-2^{-1}\,\varphi(x) + \mathcal{K}\,\varphi(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{1.256}$$

და მისი შეუღლებული ერთგვაროვანი განტოლება

$$-2^{-1}\,\psi(x) + \mathcal{K}^*\psi(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{1.257}$$

სადაც $\mathcal{K}^*$ არის $\mathcal{K}$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი $L_2(S)$ სკალარული ნამრავლის მიმართ, ე.ი.

$$\big(\mathcal{K}\,\varphi, \psi\big)_{L_2(S)} = \big(\varphi, \mathcal{K}^*\psi\big)_{L_2(S)}, \qquad \forall\,\varphi, \psi \in [L_2(S)]^4. \tag{1.258}$$

(1.258)-დან მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^*\,\psi(x) &:= \int\limits_S \Big[B(\partial_y, n(y))\,[\Gamma^*(x-y)]^\top\Big]^\top \psi(y)\,dS_y \\ &= \int\limits_S \Big[B(\partial_y, n(y))\,\Gamma(y-x)\Big]^\top \psi(y)\,dS_y. \end{aligned} \tag{1.259}$$

ამრიგად, $\mathcal{K}$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი არის (1.204) ტოლობით განსაზღვრული ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც წარმოშობილია შეუღლებული ორმაგი ფენის პოტენციალით.

ჯერ შევისწავლოთ (1.256) ერთგვაროვანი განტოლება.

თეორემა 37 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $0 < \alpha \leqslant 1$; მაშინ $[-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის გული შვიდგანზომილებიანია და მისი ბაზისია $\big\{\mathcal{H}^{-1}\,\Psi_S^{(k)}\big\}_{k=1}^7$, სადაც $\Psi_S^{(k)}$, $k = \overline{1,7}$, არის (1.253) ტოლობებით განსაზღვრული $\Psi^{(k)}$ ვექტორის შეზღუდვა S-ზე:

$$\Psi_S^{(k)}(x) := \Psi^{(k)}(x), \qquad x \in S, \tag{1.260}$$

ხოლო $\mathcal{H}^{-1}$ არის $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\varphi_0 \in \ker[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}]$, $(-2^{-1}I_4 + \mathcal{K})\varphi_0 = 0$, $x \in S$. ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალი $V(\varphi_0)$. მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებებიდან და (1.256) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $U_0 = V(\varphi_0)$ არის ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. მაშინ შენიშვნა 36-ის თანახმად, გვექნება

$$U_0(x) = V(\varphi_0)(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \, \Psi^{(k)}(x), \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.261}$$

სადაც C_k შესაბამისი ნამდვილი მუდმივებია.

ცხადია, რომ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობისა და (1.260) ტოლობის თანახმად

$$\big\{U_0(x)\big\}^+ = \big\{V(\varphi_0)(x)\big\}^+ \equiv \mathcal{H}(\varphi_0)(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \, \Psi_S^{(k)}(x), \qquad x \in S, \tag{1.262}$$

სადაც $\mathcal{H}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.191) ტოლობით. $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებადობის გამო, მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \left(\mathcal{H}^{-1} \, \Psi_S^{(k)}\right)(x), \qquad x \in S. \tag{1.263}$$

რადგან $\big\{\Psi^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}$ წრფივად დამოუკიდებელია Ω^+ არეში, ამიტომ ვექტორთა იგივე სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია S-ზეც. მართლაც, თუ არსებობს ისეთი მუდმივები $b_1, b_2, \cdots, b_7$, რომ $\sum_{k=1}^{7} |b_k| \neq 0$ და

$$\sum_{k=1}^{7} b_k \, \Psi_S^{(k)}(x) = 0, \qquad x \in S,$$

მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ ვექტორი

$$U(x) = \sum_{k=1}^{7} b_k \, \Psi^{(k)}(x), \qquad x \in \Omega^+,$$

არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი; ამიტომ დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის (იხ. თეორემა 6) თანახმად $U(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, რაც ეწინააღმდეგება $\big\{\Psi^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას Ω^+ არეში.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ვექტორთა სისტემა

$$\big\{\mathcal{H}^{-1} \, \Psi_S^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}, \qquad x \in S, \tag{1.264}$$

ასევე წრფივად დამოუკიდებელია.

მართლაც, ვთქვათ, არსებობს $d_1, d_2, ..., d_7$, ნამდვილი რიცხვები, ისეთი, რომ $\sum\limits_{k=1}^{7} |d_k| \neq 0$ და

$$\sum_{k=1}^{7} d_k \, \mathcal{H}^{-1} \, \Psi_S^{(k)}(x) = 0, \qquad x \in S.$$

ვამოქმედოთ ამ ტოლობაზე $\mathcal{H}$ ოპერატორი. მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{7} d_k \, \Psi_S^{(k)}(x) = 0, \qquad x \in S,$$

რაც ეწინააღმდეგება $\Psi_S^{(k)}$ ვექტორების წრფივად დამოუკიდებლობას. ამრიგად, ვექტორთა (1.264) სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi^{(k)}(x) := \mathcal{H}^{-1} \, \Psi_S^{(k)}(x), \qquad x \in S, \quad k = \overline{1,7}. \tag{1.265}$$

ცხადია, $\varphi^{(k)}$, $k = \overline{1,7}$, წარმოადგენს (1.256) ერთგავროვანი განტოლების ამონახსნებს. რადგან ვექტორთა $\{\varphi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ (1.256) ერთგავროვან განტოლებას გააჩნია არანაკლებ შვიდი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი, ე.ი. $\dim\ker[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}] \geqslant 7$.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან, კერძოდ (1.263) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^{7}$ არის $\ker[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}]$ სივრცის ბაზისი; რაც ამტკიცებს, რომ $\dim\ker[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}] = 7$. ამასთან, $\ker[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}]$ სივრცის ყოველი ელემენტი წარმოიგინება შემდეგი სახით:

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \, \varphi^{(k)}(x), \quad x \in S, \tag{1.266}$$

სადაც $\varphi^{(k)}$ განსაზღვრულია (1.265) ტოლობით. $\square$

ახლა შევისწავლოთ (1.257) შეუღლებული ერთგვაროვანი განტოლება.

თეორემა 38 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, მაშინ სინგულარული ინტეგრალური $[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*]$ ოპერატორის გული შვიდგანზომილებიანია და მისი ბაზისია

$$\Phi^{(k)} := \Psi^{(k)}, \ \ k = \overline{1,6}, \qquad \Phi^{(7)} := \big(0, 0, 0, 1\big)^\top, \tag{1.267}$$

სადაც $\Psi^{(k)}$, $k = \overline{1,6}$, განსაზღვრულია (1.253) ტოლობებით.

დამტკიცება. ტოლობა $\dim\ker\big[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*\big] = 7$ გამომდინარეობს თეორემა 37-დან, რადგან $[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის ინდექსი ნულის ტოლია. ავაგოთ $[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*]$ სივრცის ბაზისი ცხადი სახით.

ვთქვათ, $\psi_0 \in \left[C^{1,\alpha}(S)\right]^4$ არის ერთგვაროვანი (1.257) ინტეგრალური განტოლების რაიმე ამონახსენი, ე.ი.

$$-2^{-1}\,\psi_0(x) + \mathcal{K}^*\,\psi_0(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.268}$$

მაშინ შეუღლებული ორმაგი ფენის პოტენციალის თვისებების თანახმად ვექტორ-ფუნქცია (იხ. თეორემა 26)

$$U_0^*(x) = (u^*, \vartheta^*)^\top := W^*(\psi_0)(x), \qquad x \in \Omega^\pm, \tag{1.269}$$

არის შემდეგი შეუღლებული ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი

$$A^*(\partial)\,U_0^*(x) = 0, \qquad x \in \Omega^\pm, \tag{1.270}$$

რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\left\{U_0^*\right\}^- = \left\{W^*(\psi_0)\right\}^- = -2^{-1}\,\psi_0 + \mathcal{K}^*\psi_0 = 0 \qquad S - \text{ზე}. \tag{1.271}$$

ამრიგად, U_0^* არის დირიხლეს შეუღლებული გარე ამოცანის რეგულარული ამონახსენი, ამასთან,

$$U_0^* = W^*(\psi_0) \in \left[C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^\pm})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^\pm)\right]^4 \cap Z^*(\Omega^-)\,.$$

რადგან დირიხლეს შეუღლებულ ერთგვაროვან ამოცანას მითითებულ კლასში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი (იხ. თეორემა 20), ამიტომ

$$U_0^*(x) = W^*(\psi_0)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-. \tag{1.272}$$

ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის თანახმად (იხ. თეორემა 24), გვექნება

$$\left\{Q(\partial,n)\,W^*(\psi_0)\right\}^- = \left\{Q(\partial,n)\,W^*(\psi_0)\right\}^+ = 0,$$

ე.ი. U_0^* არის ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნი:

$$\begin{aligned} &A^*(\partial)\,U_0^*(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+,\\ &\left\{Q(\partial,n)\,U_0^*(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S. \end{aligned} \tag{1.273}$$

აქედან კი, $A^*(\partial)$ ოპერატორის სტრუქტურის გამო (იხ. (1.26)), გამომდინარეობს

$$\begin{aligned} &C(\partial)\,u^*(x) = 0, \qquad\qquad x \in \Omega^+,\\ &\left\{T(\partial,n)\,u^*(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S. \end{aligned} \tag{1.274}$$

ამ ამოცანის ზოგადი ამონახსნია ხისტი გადაადგილების ვექტორი (იხ. თეორემა 8-ის დამტკიცება)

$$u^* = a \times x + b = \sum_{k=1}^{6} C_k \, \widetilde{\Psi}^{(k)}, \tag{1.275}$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, $C_j = b_j, \ j = 1, 2, 3, \ C_j = a_j, \ j = 4, 5, 6,$ ხოლო

$$\begin{aligned} &\widetilde{\Psi}^{(1)} = \big(1, 0, 0\big)^\top, \qquad \widetilde{\Psi}^{(2)} = \big(0, 1, 0\big)^\top, \qquad \widetilde{\Psi}^{(3)} = \big(0, 0, 1\big)^\top, \\ &\widetilde{\Psi}^{(4)} = \big(0, -x_3, x_2\big)^\top, \ \ \widetilde{\Psi}^{(5)} = \big(x_3, 0, -x_1\big)^\top, \ \ \widetilde{\Psi}^{(6)} = \big(-x_2, x_1, 0\big)^\top. \end{aligned} \tag{1.276}$$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით, კვლავ $A^*(\partial)$ ოპერატორის სტრუქ-ტურიდან გამომდინარე და იმის ძალით, რომ (1.275) ტოლობით მოცემული u^* ვექტორისთვის $\beta_{kj} \, \partial_j u_k^* = 0$, ტემპერატურის ϑ^* ფუნქციისთვის გვექნება შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანა:

$$\begin{aligned} &\Lambda(\partial) \, \vartheta^*(x) = 0, \qquad\quad x \in \Omega^+, \\ &\big\{\lambda(\partial, n) \, \vartheta^*(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S. \end{aligned} \tag{1.277}$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$\vartheta^* = const.$$

ამიტომ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა $\big\{\Phi^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}$ სისტემა, სადაც $\Phi^{(k)} := \Psi^{(k)}, \ k = \overline{1, 6}, \ \Phi^{(7)} := \big(0, 0, 0, 1\big)^\top$, წარმოადგენს (1.273) ამოცანის ამონახსნთა ბაზისს Ω^+ არეში (იხ. (1.253)). ამიტომ $U_0^* = W^*(\psi_0)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოიდგინება შემდეგი წრფივი კომბინაციის სახით

$$U_0^*(x) = W^*(\psi_0)(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \, \Phi^{(k)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+. \tag{1.278}$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\big\{\Phi_S^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}$ სისტემა, სადაც $\Phi_S^{(k)}(x) := \Phi^{(k)}(x), \ x \in S$, წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

შეუღლებული ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულის გათვალის-წინებით, გვექნება

$$\big\{W^*(\psi_0)(x)\big\}^+ - \big\{W^*(\psi_0)(x)\big\}^- = \psi_0(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k \, \Phi_S^{(k)}(x), \quad x \in S. \tag{1.279}$$

ე.ი. (1.268) განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება (1.267) სისტე-მის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით. □

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს.

თეორემა 39 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $F \in [C^{0,\beta}(S)]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, მაშინ არაერთგვაროვანი (1.255) განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\Big(F, \Phi_S^{(k)}\Big)_{L_2(S)} \equiv \int\limits_S F(x) \cdot \Phi_S^{(k)}(x)\, dS = 0, \qquad k = \overline{1,7}, \tag{1.280}$$

სადაც $\big\{\Phi^{(k)}(x)\big\}_{k=1}^{7}$ წარმოადგენს $\ker\big[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*\big]$ სივრცის ბაზისს, რომელიც განსაზღვრულია (1.267) ტოლობებით.

თუ $\varphi^{(0)}$ არის (1.255) განტოლების რაიმე კერძო ამონახსენი, მაშინ ამავე განტოლების ზოგადი ამონახსენი φ წარმოიდგინება ტოლობით

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{7} C_k\, \mathcal{H}^{-1}\, \Psi_S^{(k)}(x), \quad x \in S, \quad k = \overline{1,7}, \tag{1.281}$$

სადაც C_k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\mathcal{H}^{-1}$ არის $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებული, $\Psi_S^{(k)}$ განსაზღვრულია (1.253) ტოლობებით.

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს ზოგადი თეორიიდან, რადგან $-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}$ არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, ამიტომ (1.256) განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მარჯვენა მხარე ორთოგონალური იყოს შეუღლებული ერთგვაროვანი განტოლების, ანუ $\big[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^*\big]\psi = 0$ განტოლების ყველა წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნთან (იხ. [23], თავი IV). □

თეორემა 40 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $F \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$; მაშინ ნეიმანის შიგა (1.251)-(1.252) არაერთგვაროვანი სასზღვრო ამოცანის ამოხსნადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი (1.281) პირობის შესრულება. ამასთან ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.254) პოტენციალით, რომლის სიმკვრივე განისაზღვრება (1.255) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან. თუ $U^{(0)}$ არის (1.251)-(1.252) ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსენი, მაშინ ამავე ამოცანის ზოგადი ამონახსენი შემდეგნაირად წარმოიდგინება

$$U(x) = U^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{7} C_k\, \Psi^{(k)}(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{1.282}$$

სადაც C_k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\Psi^{(k)}$ განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორებია და მოცემულია (1.253) ტოლობებით.

2 თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ანიზოტროპული სხეულებისათვის

2.1 ტრანსმისიის ამოცანების ჩამოყალიბება და ერთადერთობის თეორემები.

ვთქვათ, S_1 და S_2 ორი მარტივად ბმული შეკრული არათანამკვეთი $C^{2,\alpha}$ სიგლუვის მქონე ზედაპირია; ამასთან S_1 მდებარეობს S_2-ის შიგნით. S_1-ით შემოსაზღვრული არე აღვნიშნოთ Ω_1-ით, ხოლო S_1 და S_2 ზედაპირებით შემოსაზღვრული არე კი Ω_2-ით. ცხადია გვაქვს: $\overline{\Omega_1} = \Omega_1 \cup S_1$, $\overline{\Omega_2} = \Omega_2 \cup S_1 \cup S_2$. ქვემოთ ყველგან $n = (n_1, n_2, n_3)$ სიმბოლოთი აღნიშნული იქნება ჩაკეტილი შეკრული S_k ზედაპირის მიმართ გარე ერთეულოვანი ნორმალი.

ვიგულისხმოთ, რომ Ω_1 და Ω_2 არეები შევსებულია განსხვავებული ერთგვაროვანი ანიზოტროპული მასალებით. Ω_m არის შემავსებელი მასალის შესაბამისი მატერიალური მუდმივებისა და შესაბამისი დიფერენციალური და სასაზღვრო ოპერატორების აღმნიშვნელ სიმბოლოებს მივუწეროთ m ზედა ინდექსად.

ჩამოვაყალიბოთ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები.

ამოცანა (TP – D): დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ Ω_m, $m = 1, 2$, არეებში ერთგვაროვანი

$$A^{(m)}(\partial)U^{(m)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_m, \qquad m = 1, 2, \tag{2.1}$$

განტოლებების $U^{(1)} \in \left[C^2(\Omega_1)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{\Omega_1})\right]^4$ და $U^{(2)} \in \left[C^2(\Omega_2)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{\Omega_2})\right]^4$ რეგულარული ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ ძირითად საკონტაქტო პირობებს:

$$\left\{U^{(1)}(x)\right\}^+ - \left\{U^{(2)}(x)\right\}^- = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.2}$$

$$\left\{B^{(1)}(\partial, n)\, U^{(1)}(x)\right\}^+ - \left\{B^{(2)}(\partial, n)\, U^{(2)}(x)\right\}^- = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.3}$$

ხოლო S_2 საზღვარზე კი - დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{U^{(2)}(x)\right\}^+ = f^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.4}$$

სადაც $A^{(m)}(\partial)$, $m=1,2$, მოცემულია (1.13) ტოლობით, $B^{(m)}(\partial,n)$, $m=1,2$, მოცემულია (1.16) ტოლობით, ხოლო $f^{(1)}$, $F^{(1)}$, $f^{(2)}$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციებია და

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}=\big(f_1^{(1)},f_2^{(1)},f_3^{(1)},f_4^{(1)}\big)^\top\in\big[C^1(S_1)\big]^4,\\
&F^{(1)}=\big(F_1^{(1)},F_2^{(1)},F_3^{(1)},F_4^{(1)}\big)^\top\in\big[C(S_1)\big]^4,\\
&f^{(2)}=\big(f_1^{(2)},f_2^{(2)},f_3^{(2)},f_4^{(2)}\big)^\top\in\big[C^1(S_2)\big]^4.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{N})$: ნეიმანის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ Ω_m, $m=1,2$, არეებში ერთგვაროვანი (2.1) განტოლებების $U^{(1)}\in\big[C^2(\Omega_1)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_1})\big]^4$ და $U^{(2)}\in\big[C^2(\Omega_2)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_2})\big]^4$ რეგულარული ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებენ (2.2)-(2.3) საკონტაქტო პირობებს, ხოლო S_2 საზღვარზე კი - ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$
\big\{B^{(2)}(\partial,n)\,U^{(2)}(x)\big\}^+=F^{(2)}(x),\qquad x\in S_2,
\tag{2.6}
$$

სადაც

$$
F^{(2)}=\big(F_1^{(2)},F_2^{(2)},F_3^{(2)},F_4^{(2)}\big)^\top\in\big[C(S_2)\big]^4
\tag{2.7}
$$

მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{R})$: რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ Ω_m, $m=1,2$, არეებში ერთგვაროვანი (2.1) განტოლებების $U^{(1)}\in\big[C^2(\Omega_1)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_1})\big]^4$ და $U^{(2)}\in\big[C^2(\Omega_2)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_2})\big]^4$ რეგულარული ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებს (2.2)-(2.3) საკონტაქტო პირობებს, ხოლო S_2 საზღვარზე კი - რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$
\big\{B^{(2)}(\partial,n)\,U^{(2)}(x)\big\}^+ + K\,\big\{U^{(2)}(x)\big\}^+=F^{(2)}(x),\qquad x\in S_2,
\tag{2.8}
$$

სადაც $F^{(2)}$ არის მოცემული ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (2.7) ჩართვას, ხოლო $K=\big[K_{kj}\big]_{4\times4}$ დადებითად განსაზღვრული მუდმივი მატრიცაა

$$
K=\begin{bmatrix}[\widetilde{K}_{kj}]_{3\times3} & [0]_{3\times1}\\ [0]_{1\times3} & \kappa_2\end{bmatrix}_{4\times4};
\tag{2.9}
$$

აქ $\kappa_2>0$ მუდმივია და $\widetilde{K}=[\widetilde{K}_{kj}]_{3\times3}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

ამოცანა $(TP-M)$. ვიპოვოთ Ω_m, $m=1,2$, არეებში ერთგვაროვანი (2.1) განტოლებების $U^{(1)}\in\big[C^2(\Omega_1)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_1})\big]^4$ და $U^{(2)}\in\big[C^2(\Omega_2)\big]^4\cap\big[C^1(\overline{\Omega_2})\big]^4$

რეგულარული ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებს (2.2)-(2.3) საკონტაქტო პირობებს, ხოლო S_2 საზღვარზე კი - შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\left\{u^{(2)}(x)\right\}^{+} = \widetilde{f}^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.10}$$

$$\left\{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} + \kappa_2 \left\{\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} = F_4^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.11}$$

სადაც $\widetilde{f}^{(2)} \in \left[C^1(S_2)\right]^3$ და $F_4^{(2)} \in C(S_2)$ მოცემული ფუნქციებია.

ახლა განვიხილოთ უსასრულო კომპონენტის შემცველი კომპოზიტური არე. ვთქვათ, მთელი სივრცე რაიმე ბმული გლუვი S_1 ზედაპირით გაყოფილია ორ D_1 და D_2 არედ: $D_1 = \Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ სასრული დიამეტრის არეა, ხოლო $D_2 = \Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_1}$ უსასრულო არეა. ეს არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი მასალებით.

ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა მთელი სივრცისათვის.

ამოცანა $(TP-B)$. ვიპოვოთ D_m, $m = 1,2$, არეებში ერთგვაროვანი (2.1) განტოლებების $U^{(1)} \in \left[C^2(D_1)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{D_1})\right]^4$ და $U^{(2)} \in \left[C^2(D_2)\right]^4 \cap \left[C^1(\overline{D_2})\right]^4 \cap Z(D_2)$ რეგულარული ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\left\{U^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{U^{(2)}(x)\right\}^{-} = f(x), \quad x \in S_1, \tag{2.12}$$

$$\left\{B^{(1)}(\partial, n)\, U^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{B^{(2)}(\partial, n)\, U^{(2)}(x)\right\}^{-} = F(x), \quad x \in S_1, \tag{2.13}$$

სადაც $f = (f_1, \cdots, f_4)^\top \in [C^1(S_1)]^4$, $F = (F_1, \cdots, F_4)^\top \in [C(S_1)]^4$ მოცემული ფუნქციებია.

თუ D_1 არე შეიცავს სიცარიელეს, რომელსაც უკავია რაიმე $D_0 \subset D_1$ არე, მაშინ ამ D_0 არის საზღვარზე უნდა დასახელდეს დირიხლეს, ნეიმანის, ან რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთი.

მარტივი შესამჩნევია, რომ ზემოთ ჩამოყალიბებულ ყველა ამოცანაში ტემპერატურის $\vartheta^{(m)}$, $m = 1,2$, ფუნქციებისთვის მიიღება დამოუკიდებელი საკონტაქტო ამოცანები. კერძოდ, ტემპერატურის ფუნქციისთვის მივიღებთ ტრანსმისიის შემდეგ ამოცანებს.

ამოცანა $(TP-D_\vartheta)$. ვიპოვოთ

$$\lambda_{pq}^{(m)}\, \partial_p\, \partial_q\, \vartheta^{(m)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_m, \qquad m = 1,2, \tag{2.14}$$

განტოლებების ისეთი რეგულარული $\vartheta^{(m)}$, $m = 1,2$, ამონახსნები, რომლებიც

აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო და დირიხლეს სასაზღვრო პირობებს:

$$\left\{\vartheta^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{-} = f_4^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.15}$$

$$\left\{\lambda^{(1)}(\partial,n)\,\vartheta^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{\lambda^{(2)}(\partial,n)\,\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{-} = F_4^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.16}$$

$$\left\{\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} = f_4^{(2)}(x), \qquad x \in S_2. \tag{2.17}$$

ამოცანა $(TP-N_\vartheta)$. ვიპოვოთ, (2.14) განტოლებების ისეთი რეგულარული $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს (2.15)-(2.16) საკონტაქტო პირობებს და ნეიმანის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\lambda^{(2)}(\partial,n)\,\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} = F_4^{(2)}(x), \qquad x \in S_2. \tag{2.18}$$

ამოცანა $(TP-R_\vartheta)$. ვიპოვოთ, (2.14) განტოლებების ისეთი რეგულარული $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს (2.15)-(2.16) საკონტაქტო პირობებს და რობენის სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\lambda^{(2)}(\partial,n)\,\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} + \kappa_2\left\{\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{+} = F_4^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.19}$$

სადაც $\kappa_2 > 0$ მუდმივია.

ამოცანა $(TP-B_\vartheta)$. ვიპოვოთ, (2.14) განტოლებების ისეთი რეგულარული $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\left\{\vartheta^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{-} = f_4^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.20}$$

$$\left\{\lambda^{(1)}(\partial,n)\,\vartheta^{(1)}(x)\right\}^{+} - \left\{\lambda^{(2)}(\partial,n)\,\vartheta^{(2)}(x)\right\}^{-} = F_4^{(1)}(x), \qquad x \in S_1. \tag{2.21}$$

ზემოთ ჩამოყალიბებული შერეული $(TP-M)$ ამოცანიდან $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ფუნქციებისთვის გამოიყოფა კვლავ რობენის ტიპის $(TP-R_\vartheta)$ ამოცანა.

ტემპერატურის ველისთვის ზემოთ ჩამოყალიბებულ ამოცანებში სასაზღვრო-საკონტაქტო მონაცემები აკმაყოფილებს იმავე მოთხოვნებს, რაც მითითებული იყო (2.5) და (2.7) პირობებში.

მართებულია ერთადერთობის შემდეგი თეორემები.

თეორემა 41 დირიხლეს $(TP-D)$ ერთგვაროვან (2.1)-(2.4) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

დამტკიცება. ერთგვაროვანი (2.14) განტოლების გათვალისწინებით გრინის (1.47) ფორმულა Ω_m, $m=1,2$, არეში $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ფუნქციებისათვის შემდეგნაირად

გადაიწერება

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda^{(1)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\ \partial_p \vartheta^{(1)}\, dx = \int\limits_{S_1} \{\lambda^{(1)}(\partial, n)\, \vartheta^{(1)}\}^{+} \{\vartheta^{(1)}\}^{+}\, dS,$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \lambda^{(2)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\ \partial_p \vartheta^{(2)}\, dx = \int\limits_{S_2} \left\{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\right\}^{+}\ \left\{\vartheta^{(2)}\right\}^{+} dS$$
$$- \int\limits_{S_1} \{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\}^{-} \{\vartheta^{(2)}\}^{-} dS.$$

აქ მეორე ტოლობაში მარჯვენა მხარეში S_1-ზე ინტეგრალის წინ მინუსი გაჩნდა იმის გამო, რომ S_1 ზედაპირზე ნორმალის მიმართულებად არჩეულია გარე ნორმალის მიმართულება S_1-ის მიმართ. თუ შევკრებთ ტოლობების ორივე მხარეს, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda^{(1)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\ \partial_p \vartheta^{(1)}\, dx + \int\limits_{\Omega_2} \lambda^{(2)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\ \partial_p \vartheta^{(2)}\, dx = \int\limits_{S_2} \left\{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\right\}^{+}\ \left\{\vartheta^{(2)}\right\}^{+} dS$$
$$+ \int\limits_{S_1} \Big\{ \{\lambda^{(1)}(\partial, n)\, \vartheta^{(1)}\}^{+} \{\vartheta^{(1)}\}^{+} - \{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\}^{-} \{\vartheta^{(2)}\}^{-} \Big\} dS.$$

(2.15)-(2.17) პირობების შესაბამისი ერთგვაროვანი საკონტაქტო და სასაზღვრო პირობების ძალით

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda^{(1)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\ \partial_p \vartheta^{(1)}\, dx + \int\limits_{\Omega_2} \lambda^{(2)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\ \partial_p \vartheta^{(2)}\, dx = 0.$$

რადგან ამ ტოლობაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებები არაუარყოფითია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda^{(1)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\ \partial_p \vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \tag{2.22}$$

$$\lambda^{(2)}_{pq}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\ \partial_p \vartheta^{(2)} = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}. \tag{2.23}$$

$[\lambda^{(m)}_{pq}]_{3\times 3}$, $m = 1, 2$, მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობის ძალით (იხ. (1.18)), წინა ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\nabla \vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \nabla \vartheta^{(2)} = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}.$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ

$$\vartheta^{(1)} = const = C_1 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \vartheta^{(2)} = const = C_2 \qquad \Omega_2 - \text{ში}.$$

ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობიდან მარტივად ჩანს, რომ $C_1 = C_2 = C$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობიდან კი მივიღებთ

$$\vartheta^{(2)} = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}, \tag{2.24}$$

ამიტომ

$$\vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}. \tag{2.25}$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (2.24) და (2.25) ტოლობებს (1.1) ტოლობაში, მივიღებთ, რომ $u^{(m)}$ აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან განტოლებას

$$C^{(m)}(\partial)\, u^{(m)} = 0 \qquad \Omega_m - \text{ში}, \quad m = 1, 2.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ

$$\big[B^{(m)}(\partial, n)\, U^{(m)}\big]_k = \big[T^{(m)}(\partial, n)\, u^{(m)}\big]_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

ამიტომ გრინის (1.49) იგივეობის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)})\, dx = \int\limits_{S_1} \{T^{(1)}(\partial, n)\, u^{(1)}\}^+ \cdot \{u^{(1)}\}^+ \, dS, \tag{2.26}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)})\, dx = \int\limits_{S_2} \{T^{(2)}(\partial, n)\, u^{(2)}\}^+ \cdot \{u^{(2)}\}^+ \, dS$$

$$- \int\limits_{S_1} \{T^{(2)}(\partial, n)\, u^{(2)}\}^- \cdot \{u^{(2)}\}^- \, dS. \tag{2.27}$$

ამ ტოლობების შეკრებითა და ერთგვაროვანი სასაზღვრო და საკონტაქტო (2.2)-(2.3) პირობების გათვალისწინებით ($f^{(1)} = 0, F^{(1)} = 0$), გვექნება

$$\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)})\, dx + \int\limits_{\Omega_2} \widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)})\, dx = 0. \tag{2.28}$$

რადგან $\widetilde{E}^{(m)}(u^{(m)}, u^{(m)})$, $m = 1, 2$, კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია (იხ. (1.18) და (1.19)), (2.28) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$E^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)}) = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad E^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}) = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}. \tag{2.29}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნებია ხისტი გადაადგილების ვექტორები (იხ. [23]):

$$u^{(1)} = a^{(1)} \times x + b^{(1)}, \qquad x \in \Omega_1, \tag{2.30}$$

$$u^{(2)} = a^{(2)} \times x + b^{(2)}, \qquad x \in \Omega_2, \tag{2.31}$$

სადაც $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $b^{(1)}$ და $b^{(2)}$ ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. დირიხლეს ერთგვაროვანი (2.4) სასაზღვრო პირობიდან $(f^{(2)}=0)$ ვღებულობთ

$$u^{(2)}(x)=0, \qquad x\in\Omega_2.$$

ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობიდან კი დავასკვნით, რომ

$$u^{(1)}(x)=0, \qquad x\in\Omega_1.$$

ამრიგად,

$$U^{(1)}(x)=(u^{(1)}(x),\vartheta^{(1)}(x))^\top=0, \qquad x\in\Omega_1,$$

$$U^{(2)}(x)=(u^{(2)}(x),\vartheta^{(2)}(x))^\top=0, \qquad x\in\Omega_2.$$

□

ეხლა შევისწავლოთ რობენის ერთგვაროვანი ამოცანა.

თეორემა 42 რობენის $(TP-R)$ ერთგვაროვან (2.1), (2.2), (2.3), (2.8) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

დამტკიცება. ერთგვაროვანი (2.14) განტოლების გათვალისწინებით გრინის (1.47) ფორმულა Ω_m, $m=1,2$, არეში $\vartheta^{(m)}$, $m=1,2$, ფუნქციებისთვის შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\int\limits_{\Omega_1}\lambda_{pq}^{(1)}\,\partial_q\vartheta^{(1)}\;\partial_p\vartheta^{(1)}\,dx+\int\limits_{\Omega_2}\lambda_{pq}^{(2)}\,\partial_q\vartheta^{(2)}\;\partial_p\vartheta^{(2)}\,dx=-\kappa_2\int\limits_{S_2}|\{\vartheta^{(2)}\}^+|^2\,dS.$$

რადგან ამ ტოლობის მარჯვენა მხარე არადადებითია, ხოლო მარცხენა - არაუარყოფითი, ამიტომ $[\lambda_{pq}^{(m)}]_{3\times3}$ $m=1,2$, მატრიცების დადებითად განსაზღვრულობის გამო

$$\nabla\vartheta^{(m)}(x)=0, \qquad x\in\Omega_m, \qquad m=1,2, \tag{2.32}$$

$$\{\vartheta^{(2)}\}^+=0 \qquad S_2-\text{ზე}. \tag{2.33}$$

(2.32) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\vartheta^{(1)}=C_1=const \qquad \Omega_1-\text{ში}, \qquad \vartheta^{(2)}=C_2=const \qquad \Omega_2-\text{ში}.$$

ხოლო (2.33)-დან დავასკვნით

$$\vartheta^{(2)}=0 \qquad \Omega_2-\text{ში}. \tag{2.34}$$

ერთგვაროვანი (2.15) საკონტაქტო პირობიდან მარტივად ჩანს, რომ $C_1 = C_2 = 0$, ე.ი.

$$\vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}. \tag{2.35}$$

შევნიშნოთ, რომ ისევე როგორც დირიხლეს ამოცანაში, (1.1) განტოლებები მიიღებს სახეს

$$C^{(m)}(\partial)\, u^{(m)} = 0 \qquad \Omega_m - \text{ში}, \quad m = 1, 2,$$

ხოლო (2.8) სასაზღვრო პირობა გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\big\{T^{(2)}(\partial, n)\, u^{(2)}\big\}^+ + \widetilde{K}\,\{u^{(2)}\}^+ = 0 \qquad S_2 - \text{ზე}.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ (2.34) და (2.35) ტოლობებს და ვისარგებლებთ გრინის (1.49) იგივეობებით, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)})\, dx + \int\limits_{\Omega_2} \widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)})\, dx = -\int\limits_{S_2} \widetilde{K}\,\{u^{(2)}\}^+ \cdot \{u^{(2)}\}^+\, dS.$$

რადგან $\widetilde{E}^{(m)}(u^{(m)}, u^{(m)})$, $m = 1, 2$, არაუარყოფითია და $\widetilde{K}$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ

$$\widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)}) = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \tag{2.36}$$

$$\widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}) = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}, \tag{2.37}$$

$$\widetilde{K}[u^{(2)}]^+ \cdot [u^{(2)}]^+ = 0 \qquad S_2 - \text{ზე}, \qquad \text{ანუ} \qquad [u^{(2)}]^+ = 0 \qquad S_2 - \text{ზე}. \tag{2.38}$$

(2.36) და (2.37) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $u^{(1)}$ და $u^{(2)}$ წარმოადგენს (2.30)-(2.31) სახის ხისტი გადაადგილების ვექტორებს. ამიტომ (2.38) პირობის ძალით დავასკვნით

$$u^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_2.$$

ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობიდან კი მარტივად მივიღებთ

$$u^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1.$$

$\square$

ანალოგიურად დამტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თეორემა 43 შერეულ $(TP - M)$ ერთგვაროვან საკონტაქტო (2.1), (2.2), (2.3), (2.10)-(2.11) ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ნეიმანის ამოცანის შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი ერთადერთობის თეორემები.

თეორემა 44 ერთგვაროვანი (2.14), (2.15), (2.16), (2.18) ამოცანის ზოგადი ამონახსენია $\vartheta^{(1)}(x) = C$, $x \in \Omega_1$ და $\vartheta^{(2)}(x) = C$, $x \in \Omega_2$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. ერთგვაროვანი (2.14) განტოლების გათვალისწინებით გრინის (1.47) ფორმულა Ω_m, $m = 1, 2$, არეში $\vartheta^{(m)}$, $m = 1, 2$, ფუნქციებისთვის შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda_{pq}^{(1)}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\; \partial_p \vartheta^{(1)}\, dx = \int\limits_{S_1} \{\lambda^{(1)}(\partial, n)\, \vartheta^{(1)}\}^+ \{\vartheta^{(1)}\}^+\, dS,$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \lambda_{pq}^{(2)}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\; \partial_p \vartheta^{(2)}\, dx = \int\limits_{S_2} \big\{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\big\}^+ \big\{\vartheta^{(2)}\big\}^+\, dS$$
$$- \int\limits_{S_1} \{\lambda^{(2)}(\partial, n)\, \vartheta^{(2)}\}^- \{\vartheta^{(2)}\}^- dS.$$

თუ შევკრებთ ამ ტოლობებს და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებს, მივიღებთ

$$\int\limits_{\Omega_1} \lambda_{pq}^{(1)}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\; \partial_p \vartheta^{(1)}\, dx + \int\limits_{\Omega_2} \lambda_{pq}^{(2)}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\; \partial_p \vartheta^{(2)}\, dx = 0$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_{pq}^{(1)}\, \partial_q \vartheta^{(1)}\; \partial_p \vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \lambda_{pq}^{(2)}\, \partial_q \vartheta^{(2)}\; \partial_p \vartheta^{(2)} = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}. \tag{2.39}$$

აქედან კი $[\lambda_{pq}^{(m)}]_{3\times 3}$, $m = 1, 2$, მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობის ძალით

$$\nabla \vartheta^{(1)} = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \nabla \vartheta^{(2)} = 0 \qquad \Omega_2 - \text{ში}.$$

ამიტომ

$$\vartheta^{(1)} = const = C_1 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \vartheta^{(2)} = const = C_2 \qquad \Omega_2 - \text{ში}.$$

ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობიდან მარტივად ჩანს, რომ $C_1 = C_2 =: C$, ე.ი.

$$\vartheta^{(1)} = C \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad \vartheta^{(2)} = C \qquad \Omega_2 - \text{ში}. \tag{2.40}$$

□

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნეიმანის ტიპის ერთგვაროვანი საკონ-ტაქტო ამოცანის ამონახსნის სტრუქტურაა $U^{(m)} = (u^{(m)}, C)^\top$, სადაც $u^{(m)}$, $m = 1,2$, შემდეგი ამოცანის ამონახსნია:

$$C^{(m)}(\partial)\, u^{(m)}(x) = 0 \qquad x \in \Omega_m, \quad m = 1,2, \tag{2.41}$$

$$\{u^{(1)}(x)\}_k^+ - \{u^{(2)}(x)\}_k^- = 0, \qquad x \in S_1, \qquad k = 1,2,3, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\big\{T^{(1)}(\partial,n)\, u^{(1)}(x)\big\}_k^+ &- \big\{T^{(2)}(\partial,n)\, u^{(2)}(x)\big\}_k^- \\ &= (\beta_{kj}^{(1)} - \beta_{kj}^{(2)})\, n_j(x)\, C, \ \ x \in S_1, \ \ k = 1,2,3,\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\big\{T^{(2)}(\partial,n)\, u^{(2)}(x)\big\}_k^+ = \beta_{kj}^{(2)}\, n_j(x)\, C, \qquad x \in S_2, \quad k = 1,2,3. \tag{2.44}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $C = 1$.

(2.41)-(2.44) ამოცანის ამოხსნადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს შემდეგი პირობები (იხ. [18], [19], [23])

$$\int\limits_{S_1} \widetilde{F}^{(1)}(x)\, \chi(x)\, dS + \int\limits_{S_2} \widetilde{F}^{(2)}(x)\, \chi(x)\, dS = 0, \tag{2.45}$$

სადაც χ ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორია, ხოლო $\widetilde{F}^{(l)} = (\widetilde{F}_1^{(l)}, \widetilde{F}_2^{(l)}, \widetilde{F}_3^{(l)})^\top$, $l = 1,2$, სადაც

$$\widetilde{F}_k^{(1)}(x) = (\beta_{kj}^{(1)} - \beta_{kj}^{(2)})\, n_j(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.46}$$

$$\widetilde{F}_k^{(2)}(x) = \beta_{kj}^{(2)}\, n_j(x), \qquad x \in S_2. \tag{2.47}$$

გაუსის ფორმულის გამოყენებით მარტივი შესამოწმებელია, რომ (2.46) და (2.47) ტოლობებით მოცემული $\widetilde{F}^{(1)} = \big(\widetilde{F}_1^{(1)}, \widetilde{F}_2^{(1)}, \widetilde{F}_3^{(1)}\big)^\top$ და $\widetilde{F}^{(2)} = \big(\widetilde{F}_1^{(2)}, \widetilde{F}_2^{(2)}, \widetilde{F}_3^{(2)}\big)^\top$ ვექტორებისთვის (2.45) პირობა სრულდება ნებისმიერი χ ხისტი გადაადგილების ვექტორისთვის (იხ. [?]). ამიტომ (2.41)-(2.44) ამოცანა ამოხსნადია. აღვნიშნოთ ამ ამოცანის რაიმე კონკრეტული ამონახსენი $u_0^{(1)}$ და $u_0^{(2)}$ სიმბოლოებით. მაშინ ზოგადი ამონახსენი იქნება

$$u^{(1)} = u_0^{(1)}(x) + \chi^{(1)}(x), \quad \chi^{(1)}(x) = a^{(1)} \times x + b^{(1)}, \qquad x \in \Omega_1, \tag{2.48}$$

$$u^{(2)} = u_0^{(2)}(x) + \chi^{(2)}(x), \quad \chi^{(2)}(x) = a^{(2)} \times x + b^{(2)}, \qquad x \in \Omega_2, \tag{2.49}$$

სადაც $a^{(m)}$ და $b^{(m)}$, $m = 1,2$, ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტო-რებია. შევნიშნოთ, რომ (2.42) პირობის ძალით $a^{(1)} = a^{(2)}$ და $b^{(1)} = b^{(2)}$.

ამრიგად, ვაჩვენეთ შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 45 ნეიმანის ტიპის ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-N)$ ამოცანის ზოგადი ამონახსენია

$$U^{(1)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\,(u_0^{(1)}, 1)^\top, \qquad x \in \Omega_1,$$

$$U^{(2)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\,(u_0^{(2)}, 1)^\top, \qquad x \in \Omega_2,$$

სადაც χ ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორია, C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $u_0^{(1)}$ და $u_0^{(2)}$ არის (2.41)-(2.44) არაერთგვაროვანი ამოცანის რაიმე ფიქსირებული კერძო ამონახსენი.

ახლა შევისწავლოთ უსასრულო არისათვის დასმული ძირითადი საკონტაქტო $(TP-B)$ ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი.

ერთგვაროვანი (2.1) განტოლების გათვალისწინებით გრინის (1.47) ფორმულა D_m, $m = 1, 2,$ არეში $\vartheta^{(m)}$, $m = 1, 2,$ ფუნქციებისათვის შემდეგნაირად გადაიწერება

$$\int\limits_{D_1} \lambda_{pq}^{(1)}\,\partial_q\vartheta^{(1)}\;\partial_p\vartheta^{(1)}\,dx = \int\limits_{S_1} \{\lambda^{(1)}(\partial, n)\,\vartheta^{(1)}\}^+\{\vartheta^{(1)}\}^+ dS.$$

რადგან ϑ უსასრულობაში აკმაყოფილებს ქრობის (1.128)-(1.129) პირობებს, ამიტომ მარტივად მტკიცდება, რომ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას:

$$\int\limits_{D_2} \lambda_{pq}^{(2)}\,\partial_q\vartheta^{(2)}\;\partial_p\vartheta^{(2)}\,dx = -\int\limits_{S_1} \{\lambda^{(2)}(\partial, n)\,\vartheta^{(2)}\}^-\{\vartheta^{(2)}\}^- dS.$$

თუ შევკრებთ უკანასკნელ ორ ტოლობას, მივიღებთ

$$\int\limits_{D_1} \lambda_{pq}^{(1)}\,\partial_q\vartheta^{(1)}\;\partial_p\vartheta^{(1)}\,dx + \int\limits_{D_2} \lambda_{pq}^{(2)}\,\partial_q\vartheta^{(2)}\;\partial_p\vartheta^{(2)}\,dx$$
$$= \int\limits_{S_1} \Big\{ \{\lambda^{(1)}(\partial, n)\vartheta^{(1)}\}^+\{\vartheta^{(1)}\}^+ - \{\lambda^{(2)}(\partial, n)\vartheta^{(2)}\}^-\{\vartheta^{(2)}\}^- \Big\}\, dS.$$

აქედან (2.20)-(2.21) ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობების ძალით გვექნება

$$\int\limits_{D_1} \lambda_{pq}^{(1)}\,\partial_q\vartheta^{(1)}\;\partial_p\vartheta^{(1)}\,dx + \int\limits_{D_2} \lambda_{pq}^{(2)}\,\partial_q\vartheta^{(2)}\;\partial_p\vartheta^{(2)}\,dx = 0.$$

რადგან ამ ტოლობაში ინტეგრალქვეშა გამოსახულებები არაუარყოფითია, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lambda_{pq}^{(1)}\,\partial_q\vartheta^{(1)}\;\partial_p\vartheta^{(1)} = 0 \qquad D_1 - \text{ში}, \tag{2.50}$$

$$\lambda_{pq}^{(2)}\,\partial_q\vartheta^{(2)}\;\partial_p\vartheta^{(2)} = 0 \qquad D_2 - \text{ში}. \tag{2.51}$$

$[\lambda_{pq}^{(m)}]_{3\times3}$, $m=1,2$, მატრიცის დადებითად განსაზღვრულობის ძალით (იხ. (1.18) უტოლობა), წინა ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\nabla\vartheta^{(1)}=0 \qquad D_1-\text{ში}, \qquad \nabla\vartheta^{(2)}=0 \qquad D_2-\text{ში},$$

ანუ

$$\vartheta^{(1)}=const \qquad D_1-\text{ში}, \qquad \vartheta^{(2)}=const \qquad D_2-\text{ში}.$$

(1.117) პირობიდან კი მივიღებთ

$$\vartheta^{(2)}=0 \qquad D_2-\text{ში}, \tag{2.52}$$

ხოლო (2.20) საკონტაქტო პირობის ძალით გვექნება

$$\vartheta^{(1)}=0 \qquad D_1-\text{ში}. \tag{2.53}$$

ამიტომ $u^{(m)}$ ვექტორებისათვის კვლავ მივიღებთ განტოლებებს

$$C^{(m)}(\partial)\,u^{(m)}(x)=0 \qquad x\in D_m, \quad m=1,2; \tag{2.54}$$

ამასთან $u^{(1)}$ და $u^{(2)}$ ვექტორები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან საკონტაქტო პირობებს:

$$\{u^{(1)}(x)\}_k^+-\{u^{(2)}(x)\}_k^-=0, \quad k=1,2,3, \quad x\in S_1, \tag{2.55}$$

$$\big\{T^{(1)}(\partial,n)\,u^{(1)}(x)\big\}_k^+-\big\{T^{(2)}(\partial,n)\,u^{(2)}(x)\big\}_k^-=0, \quad k=1,2,3, \quad x\in S_1. \tag{2.56}$$

რადგან ნებისმიერი $\mathrm{m}=(m_1,m_2,m_3)$ მულტიინდექსისთვის ლემა 2-ის ძალით $\partial^{\mathrm{m}}u^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციის ასიმპტოტიკა იქნება $\mathcal{O}(|x|^{-1-|\mathrm{m}|}\ln|x|)$, ამიტომ მისთვის მართებულია გრინის ფორმულები უსასრულო არეში.

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ (2.52) და (2.53) ტოლობებს და ვისარგებლებთ გრინის (1.150) იგივეობით, მივიღებთ

$$\int\limits_{D_1}\widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)},u^{(1)})\,dx=\int\limits_{S_1}\{T^{(1)}(\partial,n)\,u^{(1)}\}^+\cdot\{u^{(1)}\}^+\,dS, \tag{2.57}$$

$$\int\limits_{D_2}\widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)},u^{(2)})\,dx=-\int\limits_{S_1}\{T^{(2)}(\partial,n)\,u^{(2)}\}^-\cdot\{u^{(2)}\}^-\,dS. \tag{2.58}$$

ამ ტოლობების შეკრებით და ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\int\limits_{D_1}\widetilde{E}^{(1)}(u^{(1)},u^{(1)})\,dx+\int\limits_{D_2}\widetilde{E}^{(2)}(u^{(2)},u^{(2)})\,dx=0. \tag{2.59}$$

რადგან $\widetilde{E}^{(m)}(u^{(m)}, u^{(m)})$, $m = 1, 2$, კვადრატული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია (იხ. (1.18) და (1.19) უტოლობები), ამიტომ (2.59) პირობიდან გამომდინარეობს

$$E^{(1)}(u^{(1)}, u^{(1)}) = 0 \qquad D_1 - \text{ში}, \qquad E^{(2)}(u^{(2)}, u^{(2)}) = 0 \qquad D_2 - \text{ში}. \tag{2.60}$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ განტოლებათა სისტემების ზოგადი ამონახსნებია ხისტი გადაადგილების ვექტორები:

$$u^{(1)} = a^{(1)} \times x + b^{(1)}, \qquad x \in D_1, \qquad u^{(2)} = a^{(2)} \times x + b^{(2)}, \qquad x \in D_2, \tag{2.61}$$

სადაც $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $b^{(1)}$ და $b^{(2)}$ ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია.

შევნიშნოთ, რომ (2.55) ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობის ძალით $a^{(1)} = a^{(2)}$ და $b^{(1)} = b^{(2)}$.

რადგან $u^{(2)}$ აკმაყოფილებს (1.117)-(1.118) პირობებს, ამიტომ გვექნება

$$u^{(2)} = 0, \qquad x \in D_2.$$

ე.ი.

$$U^{(2)} = (u^{(2)}, \vartheta^{(2)})^\top = 0, \qquad x \in D_2.$$

აქედან კი (2.20) ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობის ძალით მარტივად დავასკვნით

$$u^{(1)} = 0, \qquad x \in D_1.$$

ე.ი.

$$U^{(1)} = (u^{(1)}, \vartheta^{(1)})^\top = 0, \qquad x \in D_1.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ამრიგად, მივიღეთ ერთადერთობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 46 ძირითად საკონტაქტო $(TP - B)$ ამოცანას რეგულარულ ვექტორფუნქციათა $[C^2(D_1) \cap C^1(\overline{D_1})]^4 \times [C^2(D_2) \cap C^1(\overline{D_2})]^4 \cap Z(D_2)$ კლასში გააჩნია არაუმეტეს ერთი ამონახსნისა.

2.2 ტრანსმისიის ამოცანების გამოკვლევა

ამ ქვეთავში ჩვენ შევისწავლით ზემოთ ჩამოყალიბებული საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნების არსებობის საკითხს პოტენციალთა თეორიისა და ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდის გამოყენებით.

ტრანსმისიის ძირითადი $(TP-B)$ ამოცანის $U^{(m)}$, $m=1,2$, ამონახსნები ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h)(x) = \int\limits_{S_1} \Gamma^{(1)}(x-y)\, h(y)\, dS_y, \quad x \in D_1, \tag{2.62}$$

$$U^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g)(x) = \int\limits_{S_1} \Gamma^{(2)}(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in D_2, \tag{2.63}$$

სადაც $\Gamma^{(m)}$, $m=1,2$, არის $A^{(m)}(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა (იხ. (1.32)), ხოლო $h,g \in [C^{0,\beta}(S)]^4$ საძიებელი სიმკვრივეებია.

$V_{S_1}^{(1)}$ და $V_{S_1}^{(2)}$ ფუნქციები ავტომატურად აკმაყოფილებს (2.1) ერთგვაროვან განტოლებას, ხოლო (2.12) და (2.13) საკონტაქტო პირობებიდან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\, h(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\, g(x) = f(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.64}$$

$$[-2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)}]\, h(x) - [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}]\, g(x) = F(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.65}$$

სადაც $\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}$, $\mathcal{H}_{S_1}^{(2)}$, $\mathcal{K}_{S_1}^{(1)}$ და $\mathcal{K}_{S_1}^{(2)}$ ინტეგრალური ოპერატორებია, რომლებიც განმარტებულია, შესაბამისად, (1.191)-(1.192) ტოლობებით, $S_1 \in C^{2,\alpha}$, ხოლო საკონტაქტო მონაცემები აკმაყოფილებენ შემდეგ ჩართვებს

$$f = (f_1, \cdots, f_4)^\top \in [C^{1,\beta}(S_1)]^4, \quad F = (F_1, \cdots, F_4)^\top \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4, \quad 0 < \beta < \alpha \leqslant 1.$$

შევნიშნოთ, რომ (2.64)-(2.65) სისტემის მარცხენა მხარით წარმოშობილ მატრიცულ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbb{K} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{S_1}^{(1)} & -\mathcal{H}_{S_1}^{(2)} \\ -2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)} & -\big(2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}\big) \end{bmatrix}_{8\times 8}. \tag{2.66}$$

$\mathbb{K}$ ოპერატორი არის ფრედჰოლმური ძლიერად ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, რომელსაც აქვს ასახვის შემდეგი თვისება

$$\mathbb{K} : [C^{k,\beta}(S)]^4 \times [C^{k,\beta}(S)]^4 \longrightarrow [C^{k+1,\beta}(S)]^4 \times [C^{k,\beta}(S)]^4, \quad S \in C^{k+1,\alpha}. \tag{2.67}$$

ეს თვისებები მტკიცდება ზუსტად ისევე, როგორც ანალოგიური დებულებები შემდეგ შრომებში [18], [19], [23].

(2.67) ოპერატორის შებრუნებადობისა და (2.64)-(2.65) სისტემის ამოხსნადობის შესწავლისათვის გამოვიკვლიოთ $\mathbb{K}$ ოპერატორის გული. ამისათვის განვიხილოთ (2.64)-(2.65) განტოლებათა სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)} h_0(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)} g_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.68}$$

$$[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)}] h_0(x) - [2^{-1} I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}] g_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.69}$$

და ვაჩვენოთ, რომ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი. ვთქვათ, $h_0, g_0 \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსენია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h_0)(x), \tag{2.70}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g_0)(x). \tag{2.71}$$

ცხადია $V_{S_1}^{(1)}, V_{S_1}^{(2)} \in [C^{1,\beta}(\overline{D_m})]^4 \cap Z(D_2)$. (2.68)-(2.69) სისტემიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\{U_0^{(1)}(x)\}^+ - \{U_0^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\{B^{(1)}(\partial, n) U_0^{(1)}(x)\}^+ - \{B^{(1)}(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x \in S_1.$$

ამრიგად, (2.70)-(2.71) ტოლობებით მოცემული $U_0^{(1)}$ და $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციები ძირითადი ერთგვაროვანი საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნებია. ამიტომ, ერთადერთობის თეორემის თანახმად (იხ. თეორემა 46)

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in D_1, \qquad U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in D_2.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის ძალით კი გვექნება:

$$\{U_0^{(1)}(x)\}^+ = \{U_0^{(1)}(x)\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.72}$$

$$\{U_0^{(2)}(x)\}^+ = \{U_0^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x \in S_1. \tag{2.73}$$

(2.72) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $U_0^{(1)}(x)$ დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენია D_2 არეში განხილული $A^{(2)}(\partial)$ ოპერატორისთვის. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად (იხ. თეორემა 18)

$$U_0^{(1)}(x) = 0 \qquad x \in D_2. \tag{2.74}$$

ანალოგიურად (2.73) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $U_0^{(2)}(x)$ დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენია და კვლავ დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის

ერთადერთობის თეორემიდან დავასკვნით (იხ. თეორემა 6)

$$U_0^{(2)}(x) = 0 \qquad x \in D_1. \tag{2.75}$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალზე $B^{(m)}(\partial, n)$, $m = 1, 2$, ოპერაციის შედეგად მიღებული ვექტორ-ფუნქციის წყვეტის ფორმულებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} h_0 &= \{B^{(1)}(\partial, n)\, V_{S_1}^{(1)}(h_0)\}^- - \{B^{(1)}(\partial, n)\, V_{S_1}^{(1)}(h_0)\}^+ \\ &= \{B^{(1)}(\partial, n)\, U_0^{(1)}(x)\}^- - \{B^{(1)}(\partial, n)\, U_0^{(1)}(x)\}^+ = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0 &= \{B^{(2)}(\partial, n)\, V_{S_1}^{(2)}(h_0)\}^- - \{B^{(2)}(\partial, n)\, V_{S_1}^{(2)}(h_0)\}^+ \\ &= \{B^{(2)}(\partial, n)\, U_0^{(2)}(x)\}^- - \{B^{(2)}(\partial, n)\, U_0^{(2)}(x)\}^+ = 0. \end{aligned}$$

მაშასადამე, (2.68)-(2.69) განტოლებათა სისტემას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

რადგან ფრედჰოლმური $\mathbb{K}$ ოპერატორის ინდექსი ნულის ტოლია და გული ტრივიალურია, ამიტომ იგი შებრუნებადი ოპერატორია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი (2.64)-(2.65) სისტემა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, მივიღეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 47 ვთქვათ, $S_1 \in C^{2,\alpha}$, $f \in [C^{1,\beta}(S_1)]^4$, $F \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ ძირითად $(TP-B)$ საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.62)-(2.63) პოტენციალების სახით, სადაც h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ინტეგრალურ განტოლებათა ცალსახად ამოხსნადი (2.64)-(2.65) სისტემიდან.

შენიშვნა 48 ვთქვათ, $S_1 \in C^{k+2,\alpha}$, $f \in [C^{k+1,\beta}(S_1)]^4$, $F \in [C^{k,\beta}(S_1)]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, $k \geqslant 0$. მაშინ $(TP-B)$ ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის $U^{(m)}$, $m = 1, 2$, ამონახსენი აკმაყოფილებს შემდეგ ჩართვებს:

$$U^{(1)} \in [C^{k+1,\beta}(\overline{D}_1)]^4, \qquad U^{(2)} \in [C^{k+1,\beta}(\overline{D}_2)]^4 \cap Z(D_2).$$

2.2.2 დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის გამოკვლევა სასრული უბნობრივ ერთგვაროვანი არისთვის

ახლა განვიხილოთ დირიხლეს ტიპის $(TP-D)$ საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი. დირიხლეს (2.1)-(2.4) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი ფორმით:

$$U^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h)(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{2.76}$$

$$U^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g)(x) + V_{S_2}^{(2)}(\varphi)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{2.77}$$

სადაც მარტივი ფენის პოტენციალები $V_{S_1}^{(1)}$ და $V_{S_1}^{(2)}$ მოცემულია (2.62)-(2.63) ტოლობებით, ხოლო

$$V_{S_2}^{(2)}(\varphi)(x) = \int\limits_{S_2} \Gamma^{(2)}(x-y)\,\varphi(y)\,dS_y,$$

$h, g \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$ და $\varphi \in [C^{0,\beta}(S_2)]^4$ საძიებელი სიმკვრივეებია. $V_{S_1}^{(1)}$, $V_{S_1}^{(2)}$ და $V_{S_2}^{(2)}$ ფუნქციები ავტომატურად აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას, ხოლო (2.2)-(2.4) სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებიდან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\,h(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\,g(x) - r_{_{S_1}}\,V_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.78}$$

$$\begin{aligned}[-2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)}]\,h(x) - [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}]\,g(x) - r_{_{S_1}}\,B^{(2)}(\partial,n)\,V_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x)&\\ = F^{(1)}(x), \quad x \in S_1,&\end{aligned} \tag{2.79}$$

$$r_{_{S_2}}\,V_{S_1}^{(2)}\,g(x) + \mathcal{H}_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x) = f^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.80}$$

სადაც $r_{_S}$ არის S-ზე შეზღუდვის ოპერატორი, ხოლო $\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}$, $\mathcal{H}_{S_1}^{(2)}$, $\mathcal{H}_{S_2}^{(2)}$, $\mathcal{K}_{S_1}^{(1)}$ და $\mathcal{K}_{S_1}^{(2)}$ ინტეგრალური ოპერატორები განსაზღვრულია (1.191)-(1.192) ტოლობებით.

შემოვიღოთ ოპერატორი

$$\mathbb{H} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{S_1}^{(1)} & -\mathcal{H}_{S_1}^{(2)} & -r_{_{S_1}}\,V_{S_2}^{(2)} \\ -2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)} & -\big(2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}\big) & -r_{_{S_1}}\,B^{(2)}(\partial,n)V_{S_2}^{(2)} \\ 0 & r_{_{S_2}}\,V_{S_1}^{(2)} & \mathcal{H}_{S_2}^{(2)} \end{bmatrix}_{12\times 12}. \tag{2.81}$$

$\mathbb{H}$ ოპერატორს აქვს ასახვის შემდეგი თვისება:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\,:\,[C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_2)]^4 \,\longrightarrow&\\ [C^{k+1,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k+1,\beta}(S_2)]^4, \quad S \in C^{k+1,\alpha}.&\end{aligned} \tag{2.82}$$

$\mathbb{H}$ ოპერატორის მთავარ ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$\widetilde{\mathbb{H}} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & 0 \\ -2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big(2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}^{(2)}_{S_2} \end{bmatrix}_{12\times 12},$$

რომელსაც აქვს ასახვის იგივე თვისება, რაც $\mathbb{H}$ ოპერატორს,

$$\widetilde{\mathbb{H}} : [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_2)]^4 \longrightarrow$$
$$[C^{k+1,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k+1,\beta}(S_2)]^4.$$

$\widetilde{\mathbb{H}}$ ოპერატორი შებრუნებადია, რადგან პირველი დიაგონალური ბლოკი - 8×8 განზომილების მატრიცული ოპერატორი ემთხვევა წინა ქვეპარაგრაფში განხილულ შებრუნებად $\mathbb{K}$ ოპერატორს, ხოლო $\mathcal{H}^{(2)}_{S_2}$ შებრუნებადი ოპერატორია (იხ. თეორემა 25). შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{H}$ ოპერატორი არის $\widetilde{\mathbb{H}}$ ოპერატორის კომპაქტური შეშფოთება, ანუ

$$\mathbb{H} - \widetilde{\mathbb{H}} : [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_2)]^4 \longrightarrow$$
$$[C^{k+1,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k+1,\beta}(S_2)]^4$$

კომპაქტური ოპერატორია. ამიტომ $\mathbb{H}$ არის ნულოვან-ინდექსიანი ძლიერად ელიფსური ფრედჰოლმური ოპერატორი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{H}$ ოპერატორის ნულ-სივრცე ტრივიალურია, ე.ი. (2.78)-(2.80) სისტემის შესაბამის შემდეგ ერთგვაროვან სისტემას

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1} h(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1} g(x) - r_{_{S_1}} V^{(2)}_{S_2}\,\varphi(x) = 0, \qquad x\in S_1,$$

$$[-2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1}]\, h(x) - [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}]\, g(x) - r_{_{S_1}} B^{(2)}(\partial,n)\, V^{(2)}_{S_2}\,\varphi(x) = 0, \quad x\in S_1,$$

$$r_{_{S_2}} V^{(2)}_{S_1}\, g(x) + \mathcal{H}^{(2)}_{S_2}\,\varphi(x) = 0, \qquad x\in S_2, \tag{2.83}$$

გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ვთქვათ, $h_0, g_0 \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$ და $\varphi_0 \in [C^{0,\beta}(S_2)]^4$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსნია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$U^{(1)}_0(x) := V^{(1)}_{S_1}(h_0)(x), \qquad x\in \mathbb{R}^3 \setminus\ S_1, \tag{2.84}$$

$$U^{(2)}_0(x) := V^{(2)}_{S_1}(g_0)(x) + V^{(2)}_{S_2}(\varphi_0)(x), \qquad x\in \mathbb{R}^3 \setminus\ (S_1\cup S_2). \tag{2.85}$$

მარტივი ფენის პოტენციალების თვისებებიდან და ერთგვაროვან განტოლებათა (2.83) სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\big\{B^{(1)}(\partial,n)U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{B^{(2)}(\partial,n)U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S_2.$$

მაშასადამე, (2.84)-(2.85) ვექტორ-ფუნქციები დირიხლეს ერთგვაროვანი $(TP-D)$ საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნია. ამიტომ, ერთადერთობის თეორემის თანახმად (იხ. თეორემა 41)

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1, \qquad\qquad U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_2. \tag{2.86}$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისებით, მივიღებთ:

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}_{S_1}^+ = \mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\, h_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.87}$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_1}^- = \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_1}^+ = \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\, g_0(x) \,+\, r_{_{S_1}}\, V_{S_2}^{(2)}\, \varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.88}$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_2}^+ = \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_2}^- = r_{_{S_2}}\, V_{S_1}^{(2)}\, g_0(x) + \mathcal{H}_{S_2}^{(2)}\, \varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_2. \tag{2.89}$$

$\mathcal{H}^{(1)}$ ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით (იხ. თეორემა 25), (2.87) ტოლობიდან გვექნება:

$$h_0 = 0 \qquad S_1 - \text{ზე}.$$

(2.88) ტოლობიდან ცხადია, რომ $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი Ω_1 არეში; ამიტომ, ერთადერთობის თეორემის თანახმად (იხ. თეორემა 6)

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1. \tag{2.90}$$

ანალოგიურად, (2.89) ტოლობიდან ცხადია, რომ $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი $\Omega_3 := \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega}_1) \cup \overline{\Omega}_2$ არეში. რადგან $U_0^{(2)}$ ეკუთვნის $Z(\Omega_3)$ კლასს, ამიტომ კვლავ ერთადერთობის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 18)

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_3. \tag{2.91}$$

ამრიგად, (2.86), (2.90) და (2.91) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალზე $B^{(m)}(\partial,n)$, $m=1,2$, ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის ფორმულებით, მივიღებთ:

$$g_0(x)=\left\{B^{(2)}(\partial,n)\,U_0^{(2)}(x)\right\}^- - \left\{B^{(2)}(\partial,n)\,U_0^{(2)}(x)\right\}^+ = 0, \qquad x\in S_1,$$

$$\varphi_0(x)=\left\{B^{(2)}(\partial,n)\,U_0^{(2)}(x)\right\}^- - \left\{B^{(2)}(\partial,n)\,U_0^{(2)}(x)\right\}^+ = 0, \qquad x\in S_2.$$

მაშასადამე, $\mathbb{H}$ ოპერატორის გული ტრივიალურია, $ker\,\mathbb{H}=\{0\}$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ (2.82) ოპერატორი შებრუნებადია და (2.78)-(2.80) არაერთგვაროვან განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 49 ვთქვათ, $S_1,S_2\in C^{2,\alpha}$, $f^{(1)}\in[C^{1,\beta}(S_1)]^4$, $F^{(1)}\in[C^{0,\beta}(S_1)]^4$, $f^{(2)}\in[C^{1,\beta}(S_2)]^4$, $0<\beta<\alpha\leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს $(TP-D)$ საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.76)-(2.77) პოტენციალების სახით, სადაც h, g და φ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა (2.78)-(2.80) სისტემიდან.

2.2.3 რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის გამოკვლევა უსასრულო უბნობრივ ერთგვაროვანი არისთვის

ვთქვათ, $S_0\in C^{1,\alpha}$ და $S_1\in C^{1,\alpha}$, $0<\alpha\leqslant 1$, მარტივად ბმული გლუვი არათანამკვეთი ზედაპირებია, ამასთან S_0 ზედაპირი მოთავსებულია S_1 ზედაპირის შიგნით. მაშინ მთელი სივრცე ამ ზედაპირებით დაიყოფა სამ არაურთიერთგადამკვეთ არედ: S_0 ზედაპირით შემოსაზღვრულ D_0 არედ, S_0 და S_1 ზედაპირებით შემოსაზღვრლ D_1 არედ და უსასრულო D_2 არედ, რომლის საზღვარია S_1. ამრიგად, $\mathbb{R}^3=\overline{D_0}\cup\overline{D_1}\cup\overline{D_2}$. ვიგულისხმოთ, რომ D_1 და D_2 არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი მასალებით, ხოლო D_0 არე წარმოადგენს სიცარიელეს.

ახლა განვიხილოთ რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა.

ამოცანა (TP − R): რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ D_m, $m=1,2$, არეებში

$$A^{(m)}(\partial)\,U^{(m)}(x)=0, \qquad x\in D_m, \quad m=1,2, \tag{2.92}$$

განტოლებების ისეთი რეგულარული $U^{(1)} = (u^{(1)}, \vartheta^{(1)})^\top \in [C^2(D_1)]^4 \cap [C^1(\overline{D_1})]^4$ და $U^{(2)} = (u^{(2)}, \vartheta^{(2)})^\top \in [C^2(D_2)]^4 \cap [C^1(\overline{D_2})]^4 \cap Z(D_2)$ ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებენ შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\big\{U^{(1)}(x)\big\}^+_{S_1} - \big\{U^{(2)}(x)\big\}^-_{S_1} = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.93}$$

$$\big\{B^{(1)}(\partial, n)U^{(1)}(x)\big\}^+_{S_1} - \big\{B^{(2)}(\partial, n)U^{(2)}(x)\big\}^-_{S_1} = F^{(1)}(x), \quad x \in S_1, \tag{2.94}$$

ხოლო S_0 საზღვარზე აკმაყოფილებს რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{B^{(1)}(\partial, n)U^{(1)}(x)\big\}^-_{S_0} + K\big\{U^{(1)}(x)\big\}^-_{S_0} = F^{(0)}(x), \quad x \in S_0, \tag{2.95}$$

სადაც

$$f^{(1)} = (f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, f_4^{(1)})^\top \in [C^{1,\beta}(S_1)]^4,$$

$$F^{(1)} = (F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, F_3^{(1)}, F_4^{(1)})^\top \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4,$$

$$F^{(0)} = (F_1^{(0)}, F_2^{(0)}, F_3^{(0)}, F_4^{(0)})^\top \in [C^{0,\beta}(S_0)]^4, \quad 0 < \beta < \alpha \leqslant 1,$$

მოცემული ფუნქციებია, ხოლო $K = \big[K_{kj}\big]_{4\times 4}$ დადებითად განსაზღვრული მუდმივი მატრიცაა

$$K = \begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times 3} & [0]_{3\times 1} \\ [0]_{1\times 3} & \kappa_2 \end{bmatrix}_{4\times 4}; \tag{2.96}$$

აქ $\kappa_2 > 0$ მუდმივია და $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times 3}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

იმავე მსჯელობებით, რაც გამოყენებული იყო ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის დამტკიცების დროს, აქაც ანალოგიური მსჯელობებით ვაჩვენებთ, რომ ზემოთ ჩამოყალიბებულ რობენის ამოცანას ერთადერთი ამონახსენი გააჩნია.

ახლა გამოვიკვლიოთ ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი. ამ მიზნით, ვეძებოთ ამონახსენი მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)}(x) := V^{(1)}_{S_1}(g)(x) + V^{(1)}_{S_0}(h)(x), \qquad x \in D_1, \tag{2.97}$$

$$U^{(2)}(x) := V^{(2)}_{S_1}(\varphi)(x), \qquad x \in D_2, \tag{2.98}$$

სადაც $V^{(1)}_{S_1}$, $V^{(1)}_{S_0}$ და $V^{(2)}_{S_1}$ მარტივი ფენის პოტენციალებია:

$$V^{(1)}_{S_1}(g)(x) = \int\limits_{S_1} \Gamma^{(1)}(x-y)\, g(y)\, dS_y, \qquad x \in D_1, \tag{2.99}$$

$$V^{(1)}_{S_0}(h)(x) = \int\limits_{S_0} \Gamma^{(1)}(x-y)\, h(y)\, dS_y, \qquad x \in D_1, \tag{2.100}$$

$$V^{(2)}_{S_1}(\varphi)(x) = \int\limits_{S_1} \Gamma^{(2)}(x-y)\, \varphi(y)\, dS_y, \qquad x \in D_2, \tag{2.101}$$

ხოლო $g, \varphi \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$ და $h \in [C^{0,\beta}(S_0)]^4$ საძიებელი სიმკვრივეებია. $V^{(1)}_{S_0}$, $V^{(1)}_{S_1}$ და $V^{(2)}_{S_1}$ რეგულარული ფუნქციებია, რომლებიც ავტომატურად აკმაყოფილებენ (2.92) განტოლებებს და ეკუთვნიან $Z(D_2)$ კლასს. (2.93)-(2.95) სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებიდან კი მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}\, g(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1}\, \varphi(x) + r_{_{S_1}}\, V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}&[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1}]\, g(x) - [2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}]\, \varphi(x) + \\ &\qquad + r_{_{S_1}}\, B^{(1)}(\partial, n) V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1,\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}&r_{_{S_0}}\, [B^{(1)}(\partial, n) V^{(1)}_{S_1}\, g(x) + K\, V^{(1)}_{S_1}\, g(x)] + [2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0}]\, h(x) + \\ &\qquad + K \mathcal{H}^{(1)}_{S_0}\, h(x) = F^{(0)}(x), \qquad x \in S_0,\end{aligned} \tag{2.104}$$

სადაც $\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}$, $\mathcal{H}^{(2)}_{S_1}$, $\mathcal{K}^{(1)}_{S_1}$, $\mathcal{K}^{(2)}_{S_1}$ ინტეგრალური ოპერატორები განსაზღვრულია (1.191)-(1.192) ტოლობებით, ხოლო

$$\mathcal{K}^{(1)}_{S_0} = \int\limits_{S_0} [B^{(1)}(\partial, n) \Gamma^{(1)}(x-y)]\, h(y)\, dS_y, \tag{2.105}$$

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_0} = \int\limits_{S_0} \Gamma^{(1)}(x-y)\, h(y)\, dS_y. \tag{2.106}$$

$r_{_S}$ კვლავ არის S ზედაპირზე შეზღუდვის ოპერატორი.

ინტეგრალურ განტოლებათა ამ სისტემის მარცხენა მხარით წარმოშობილ მატრიცულ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbb{M} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & r_{_{S_1}}\, V^{(1)}_{S_0} \\ -2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big[2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big] & r_{_{S_1}}\, B^{(1)}(\partial, n) V^{(1)}_{S_0} \\ r_{_{S_0}}\big[B^{(1)}(\partial, n) V^{(1)}_{S_1} + K\, V^{(1)}_{S_1}\big] & 0 & 2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0} + K\, \mathcal{H}^{(1)}_{S_0} \end{bmatrix}_{12\times 12}.$$

$\mathbb{M}$ ოპერატორს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისება:

$$\mathbb{M} : [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_0)]^4 \longrightarrow$$
$$[C^{k+1,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_0)]^4, \quad S \in C^{k+1,\alpha}. \tag{2.107}$$

მარტივი დასანახია, რომ $\mathbb{M}$ ოპერატორის მთავარი ნაწილია $\widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\widetilde{\mathbb{M}} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & 0 \\ -2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big(2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big) & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0} \end{bmatrix}_{12\times 12}.$$

რადან $r_{_{S_1}} V^{(1)}_{S_0}$, $r_{_{S_1}} B^{(1)}(\partial, n)V^{(1)}_{S_0}$, $r_{_{S_0}}\big[B^{(1)}(\partial, n)V^{(1)}_{S_1} + K\, V^{(1)}_{S_1}\big]$ და $K\,\mathcal{H}^{(1)}_{S_0}$ წარმოშობს კომპაქტურ ოპერატორებს (2.107) თანაფარდობაში მონაწილე სივრცეებში, ამიტომ $\mathbb{M} - \widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორი კომპაქტურია იმავე სივრცეებში. ცხადია, $\widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორს გააჩნია ასახვის იგივე თვისება, რაც $\mathbb{M}$ ოპერატორს:

$$\widetilde{\mathbb{M}} : [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_2)]^4 \longrightarrow$$
$$[C^{k+1,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_1)]^4 \times [C^{k,\beta}(S_0)]^4.$$

$\widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორი შებრუნებადია, რადგან მისი პირველი დიაგონალური ბლოკი - 8×8 განზომილების მატრიცული ოპერატორი ემთხვევა შებრუნებად $\mathbb{K}$ ოპერატორს (იხ. (2.66) ტოლობა), ხოლო $2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0}$ შებრუნებადი ოპერატორია (იხ. თეორემა 32-ის დამტკიცება). ამიტომ $\mathbb{M}$ არის ფრედჰოლმური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, რადგან $\mathbb{M} - \widetilde{\mathbb{M}}$ კომპაქტური ოპერატორია. შევისწავლოთ $\mathbb{M}$ ოპერატორის გული. ვაჩვენოთ, რომ მისი ნულ-სივრცე ტრივიალურია. ამ მიზნით განვიხილოთ (2.102)-(2.104) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}\, g(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1}\, \varphi(x) + r_{_{S_1}} V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.108}$$

$$[-2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1}]\, g(x) - [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}]\, \varphi(x) +$$
$$+ r_{_{S_1}} B^{(1)}(\partial, n)V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.109}$$

$$r_{_{S_0}}[B^{(1)}(\partial, n)V^{(1)}_{S_1}\, g(x) + K\, V^{(1)}_{S_1}\, g(x)] + [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0}]\, h(x) +$$
$$+ K\,\mathcal{H}^{(1)}_{S_0}\, h(x) = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.110}$$

ვთქვათ, სამეული $g_0, \varphi_0 \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$ და $h_0 \in [C^{0,\beta}(S_0)]^4$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსენია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(g_0)(x) + V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (S_0 \cup S_1), \tag{2.111}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S_1. \tag{2.112}$$

ერთგვაროვან განტოლებათა (2.108)-(2.110) სისტემიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.113}$$

$$\big\{B^{(1)}(\partial, n)\, U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{B^{(1)}(\partial, n)\, U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.114}$$

$$\big\{B^{(1)}(\partial, n)\, U_0^{(1)}(x)\big\}^- + K\,\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.115}$$

ცხადია, რომ (2.111)-(2.112) ვექტორ-ფუნქციები რობენის ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნია. ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 42-ის თანახმად (2.113)-(2.115) ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი, ე.ი.

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(g_0)(x) + V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) = 0, \qquad x \in D_1, \tag{2.116}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x) = 0, \qquad x \in D_2. \tag{2.117}$$

(2.117) ტოლობიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორ-ფუნქცია $U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x)$ წარმოადგენს დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_2}$ სასრულ არეში. ამიტომ დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით (იხ. თეორემა 6)

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_2},$$

საიდანაც მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_1. \tag{2.118}$$

მეორეს მხრივ, (2.116) ტოლობიდან მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^-_{S_1} = \big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+_{S_1} = 0, \quad x \in S_1.$$

რადგან $U_0^{(1)}$ ფუნქცია ეკუთვნის $Z(D_2)$ კლასს, ამიტომ დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თანახმად (იხ. თეორემა 18)

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in D_2. \tag{2.119}$$

მარტივი ფენის პოტენციალზე $B^{(m)}(\partial, n)$, $m = 1, 2$, ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის თვისების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left\{B^{(1)}(\partial, n) U_0^{(1)}(x)\right\}_{S_1}^{-} - \left\{B^{(1)}(\partial, n) U_0^{(1)}(x)\right\}_{S_1}^{+} = g_0(x) = 0, \qquad x \in S_1. \tag{2.120}$$

მაშინ

$$U_0^{(1)}(x) = V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) = 0, \qquad x \in D_1,$$

და კვლავ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისების თანახმად

$$\left\{U_0^{(1)}(x)\right\}_{S_0}^{-} = \left\{U_0^{(1)}(x)\right\}_{S_0}^{+} = 0, \quad x \in S_0.$$

მაშასადამე, $U_0^{(1)}(x)$ წარმოადგენს დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს D_0 არეში და ერთადერთობის თეორემის ძალით

$$U_0^{(1)}(x) = V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) = 0, \qquad x \in D_0.$$

აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ

$$h_0(x) = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.121}$$

(2.118), (2.120) და (2.121) ტოლობებიდან ცხადია, რომ $\mathbb{M}$ ოპერატორის გული ტრივიალურია და მაშასადამე (2.107) ოპერატორი შებრუნებადია. აქედან კი გამომდინარეობს არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 50 ვთქვათ, $S_m \in C^{1,\alpha}$, $m = 0, 1$, $f^{(1)} \in [C^{1,\beta}(S_1)]^4$, $F^{(1)} \in [C^{0,\beta}(S_1)]^4$, $F^{(0)} \in [C^{0,\beta}(S_0)]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.92)-(2.95) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.97)-(2.98) პოტენციალების სახით, სადაც h, g და φ სიმკვრივეები ცალსახად განისაზღვრება არაერთგვაროვანი (2.102)-(2.104) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი **თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს, გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისაგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევასა და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობისა, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადეკვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში. პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით შესწავლილია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა და გარე სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები. ასევე გამოკვლეულია ძირითადი საკონტაქტო და საკონტაქტო-სასაზღვრო ამოცანები კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულებისათვის. აღნიშნული ამოცანები დაყვანილია შესაბამის სინგულარულ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებათა სისტემაზე, დეტალურადაა გამოკვლეული შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებები, გამოკვლეულია მათი ნულ-სივრცეები და დადგენილია მათი ფრედჰოლმურობისა და შებრუნება-

დობის საკითხები შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შემთხვევაში დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას;
- ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ფურიეს მეთოდით აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა და გამოკვლეულია მისი ყოფაქცევა პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში. შესწავლილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ასახვის თვისებები და დადგენილია მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და შესაბამისი ნულ-სივრცეების ბაზისები;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით და დამტკიცებულია მათი უპირობო და ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით. დამტკიცებულია, რომ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა უპირობოდ და ცალსახადაა ამოხსნადი, ხოლო ნეიმანის შიგა სასზღვრო ამოცანისათვის ცხადი ეფექტური სახითაა ამოწერილი ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისაგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე; ამასთან, ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის

დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ურთიერთმოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არისათვის. დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპოზიტური სხეულის გარე საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;

- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისაგან და მისი მოსაზღვრე უსასრულო კომპონენტისაგან. რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში.

References

[1] Agranovich, M.S., Elliptic singular integro-differential operators , (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, 20, No. 5(131), 3-10 (1965).

[2] Agranovich, M.S., Spectral properties of diffraction problems , (Russian). In: N. N. Voitovich, B. Z. Katsenelenbaum and A. N. Sivov, Generalized method of eigenoscillation in the diffraction theory, (in Russian), Nauka, Moscow, 1977, 289-412.

[3] Buchukuri, T.V. and Gegelia, T.G., On the uniqueness of solutions of the basic problems of elasticity for infinite domains, (in Russian), Differentsial nie Uravneniya, 25, No. 9, 1556-1565 (1988).

[4] Buchukuri, T. Chkadua, O. Duduchava, R. Natroshvili, D., Interface crack problems for metallic-piezoelectric composite structures, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 55 (2012), 1-150.

[5] Burchuladze, T.V. and Gegelia, T.G., Development of the Potential Method in the Theory of Elasticity, (in Russian), Metsniereba, Tbilisi, 1985.

[6] Costabel, M. and Stephan, E., A direct boundary integral equation method for transmission problems , J. Math. Anal. Appl., 106, 376-413 (1985).

[7] Dafermos, C.M., On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity , Arch. Rational Mech. Anal., 29, No. 4, 241-271 (1968).

[8] Duduchava, R., Natroshvili, D. and Shargorodsky, E., Basic boundary value problems of thermoelasticity for anisotropic bodies with cuts , I, Georgian Mathematical Journal 2, No. 2, 123-140 (1995).

[9] Duduchava, R., Natroshvili, D. and Shargorodsky, E., Basic boundary value problems of thermoelasticity for anisotropic bodies with cuts , II, Georgian Mathematical Journal 2, No. 3, 259-276 (1995).

[10] Encyclopedia of Thermal Stresses (R. B. Hetnarski, ed.), Volums 1-13, Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London, 2014

[11] Eskin, G.I., Boundary Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations, Translations of Math. Monographs AMS, Vol. 52, Providence, Rode Island, 1981.

[12] Gelfand, I.M. and Shilov, G.E., Generalized Functions and Operations on them, (in Russian), 2-nd Ed., Fismatgiz, Moscow, 1959.

[13] Gunter, N.M.: Potential Theory and its Application to Basic Problems of Mathematical Physics. Gestekhizdat, Moscow 1953.

[14] Hsiao, G.C. and Wendland, W.L., Boundary Integral Equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[15] Ignaczak, J. and Nowacki, W., Singular integral equations of thermoelasticity , Internat. J. Engrg. Sci., 5, No. 1, 53-68 (1966).

[16] Ivanidze, M., Existence Results for the Interior Dirichlet and Exterior Neumann Type Boundary Value Problems of Thermoelastostatics, Georg. Inter. J. Sci. Tech., 4, no. 3-4, (2012), 327-345.

[17] Ivanidze, M. Ivanidze, D., Boundary value problems for the adjoint system of differential equations of the thermoelasticity theory of hemitropic solids, Bulletin of TICMI, Vol.16, No.1 (2012), 1-14.

[18] Jentsch, L. and Natroshvili, D., Thermoelastic oscillations of anisotropic bodies , Preprint 96-1, Technische Universitȁt Chemnitz-Zwickau, Fakultȁt f r Mathematik, 1-45(1996)

[19] Jentsch, L. and Natroshvili, D., Non-classical interface problems for piecewise homogeneous anisotropic elastic bodies , Math. Meth. in Appl. Sci., 18, 27-49 (1995).

[20] Jentsch, L. and Natroshvili, D., Non-classical mixed interface problems for anisotropic bodies , Math. Nachr., 179, 161-186 (1996).

[21] Jentsch, L. and Natroshvili, D., Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticity of anisotropic bodies. Part I, Mem. on Diff. Eq. and Math. Physics, v.17, 1999, 7-126.

[22] Jentsch, L. and Natroshvili, D., Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticity of anisotropic bodies. Part II, Mem. on Diff. Eq. and Math. Physics, v.18, 1999, 1-50.

[23] Kupradze, V.D., Gegelia, T.G., Basheleishvili, M.O. and Burchuladze, T.V., Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, (in Russian), Nauka, Moscow, 1976 (English translation: North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics,V. 25, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979).

[24] Maz ya, V.G., Boundary integral equations, in R.V.Gamkrelidze (Ed.): Encyclopedia of Mathematical Sciences, 27, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1991, 127-222.

[25] Mikhlin, S.G. and Proessdorf, S., Singular Integral Operators, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[26] Mizohata, S., Theory of Partial Differential Equations, (in Russian), Mir, Moscow, 1976.

[27] McLean, W., Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[28] Natroshvili, D., Boundary integral equation method in the steady state oscillation problems for anisotropic bodies , Math. Methods Appl. Sci., 20, 2, 95-119 (1997).

[29] Natroshvili, D., Investigation of Boundary Value and Initial Boundary Value Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity for Homogeneous Anisotropic Bodies by Potentials Methods, (in Russian), Doct. Thesis, A.Razmadze Tbilisi Math. Inst. Acad. of Sci. of Georgia, Tbilisi, 1-325, 1984.

[30] Natroshvili, D., Dynamic problems of thermoelasticity of anisotropic bodies , Differentsial nye Uravnenia, 20, No. 1, 87-98 (1984).

[31] Natroshvili, D., Mathematical Problems of Thermo-Electro-Magneto-Elasticity, Lecture Notes of TICMI, 12, Tbilisi University Press, Tbilisi, 2011.

[32] Nowacki, W., Dynamic Problems of Thermoelasticity. PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, Poland, Nordhoff International Publishing, Leyden, The Nederlands, 1975.

[33] Nowacki, W., Thermoelasticity. Pergamon Press, Oxford, 1962.

[34] Shargorodsky, E., Boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators on manifolds , (in Russian) Proc. Razmadze Math. Inst. (Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze), 105, 108-132 (1993).

[35] Shargorodsky, E., An L_p-analogue of the Vishik-Eskin theory, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Vol. 2, 41-148 (1994).

[36] Sneddon, I., Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1951.

[37] Treves, F., Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, Vol. 1, Pseudodifferential Operators, Plenum Press, New York-London, 1982.