საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

მარეხ ივანიძე

თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი

2014 წელი

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: **დავით ნატროშვილი**

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი

შოთა ზაზაშვილი

ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი

რეცენზენტები:

დაცვა შედგება ---------- წლის '' -------'' ----------------------, --------- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ---------------------, აუდიტორია -------------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა – სტუ-ს ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი -----------------------------------

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა და გამოყენების სფერო. სადისერტაციო ნაშრომი ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სანგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი ანიზოტროპული კომპოზიტური მასალები და არსებითად ანიზოტროპული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი ამოცანები გვხვდება პრაქტიკულად ყველა საინჟინრო დარგში, როგორებიცაა მანქანათმშენებლობა, თვითმფრინავთმშენებლობა, გემთმშენებლობა, ზებგერითი და კოსმოსური აპარატების წარმოება, სამოქალაქო მშენებლობა და სხვა. თერმოდრეკადობის ამოცანებს განსაკუთრებული მნიშვნელობა ენიჭება ისეთი ხელსაწყო-აპარატების და დანადგარების წარმოებისას, რომელთა ექსპლუატაცია მიმდინარეობს მაღალ ტემპერატულ რეჟიმში. გარდა საინჟინრო პრაქტიკისა, თერმოდერეკადობის ამოცანებმა არსებითი მნიშვნელობა შეიძინეს ბიო-სამედიცინო სფეროს ამოცანებში, კერძოდ, სხვადასხა ტიპის ბიოსამედიცინო აპარატურის დამზადების საკითხებში. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური და თერმული ველების ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით, თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

კლასიკური თერმოდრეკადობის ამოცანებს დიდი ხნის ისტორია აქვს, მაგრამ მათი კვლევა და სხავადხავა ასპექტით შესწავლა დღემდე დიდ აქტუალობას ინარჩუნებს. ამ ამოცანების მდიდარი ისტორიული მიმოხილვა გადმოცემულია ცნობილი პოლონელი მეცნიერის ვიტოლდ ნოვაცკის მონოგრაფიაში (W. Nowacki, Thermoelasticity. Pergamon Press, Oxford, 1962), ასევე ქართველი მეცნიერების ვიქტორ კუპრაძის, თენგიზ გეგელიას, მიხეილ ბაშელეიშვილის და თენგიზ ბურჭულაძის საერთაშორისო მასშტაბით სამაგიდო წიგნად აღიარებულ მონოგრაფიაში (V.D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Basheleishvili and T.V. Burchuladze, Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1979). ამ მონოგრაფიებში აგებულია და სხვადასხვა მეთოდით გამოკვლეულია თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის და მდგრადი რხევის ამოცანები იზოტროპული სხეულების შემთხვევაში. ანალოგიური ამოცანები ზოგადი დინამიკის და მდგრადი რხევის განტოლებებისთვის ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში შესწავლილია ლოტარ იენტჩის და დავით ნატროშვილის მონოგრაფიულ ნაშრომში (L.Jentsch and D. Natroshvili, Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticity of anisotropic bodies. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, Part I, v.17, 1999, 7-126, Part II, v.18, 1999, 1-50). თერმოდრეკადობის თეორიის ამოცანების ფრიად დიდ მნიშვნელობაზე მიუთითებს ის ფაქტიც, რომ რამდენიმე წელია მიმდინარეობდა და წელს დასრულდა ერთ-ერთი უმნიშველოვანესი მრავალტომიანი ენციკლოპედიური გამოცემა, რომელიც დაბეჭდა შპრინგერის გამომცემლობამ (Encyclopedia of Thermal Stresses (R. B. Hetnarski, ed.), Volums 1-13, Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London, 2014). ამ ენციკლოპედიურ გამოცემის მომზადებაში თავისი წვლილი შეიტანეს ქართველმა მეცნიერებმაც. კერძოდ, გამოცემის რედაქტორის - პოლონელი წარმოშობის გამოჩენილი ამერიკელი მეცნიერის რიჩარდ ჰეტნარსკის შეკვეთით სამი განაკვეთი დაწერა დავით ნატროშვილმა.

სამუშაოს მიზანი, კვლევის ობიექტი და მეთოდები, ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე. როგორც აღვნიშნეთ, წარმოდგენილი დისერტაცია ეხება თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სანგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის, რომლებიც აქამდე არ ყოფილა გამოკვლეული სამეცნიერო ლიტერატურაში. ამ ამოცანების გამოკვლევის დროს წარმოიშობა გარკვეული სირთულეები, რომლებიც დაკავშირებულია ამონახსნთა ასიმპტოტურ ყოფაქცევასთან უსასრულობის მიდამოში. კერძოდ, კლასიკური ელასტოსტატიკის ამოცანებისგან განსხვავებით, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების შესწავლის დროს აუცილებელია ამონახსნები ვეძიოთ უსასრულობის მიდამოში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასში. ეს არსებითად ართულებს სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას, როგორც ამონახსნის ერთადერთობის, ისე ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით. საჭირო ხდება ამონახსნთა

კლასის დაზუსტება და ისეთი ასიმპტოტური პირობების დადგენა უსასრულობაში, რომელიც უზრუნველყოფს თერმოსტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობას. ეს საკითხები სამეცნიერო ლიტერატურაში არ არის შესწავლილი იზოტროპული სხეულების შემთხვევაშიც კი. წარმოდგენილი დისერტაციის ძირითადი მიზანია ამ ხარვეზის აღმოფხვრა და თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობის დეტალურად შესწავლა.

თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის წრფივ განტოლებათა სისტემას ანიზოტროპული სხეულებისათვის შემდეგი სახე აქვს:

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x,t) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x,t) = \rho\,\partial_t^2 u_k(x,t) - X_k(x,t), \qquad k=1,2,3, \tag{1}$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x,t) - c_0\,\partial_t u_4(x,t) - T_0\,\beta_{pq}\,\partial_t\partial_p u_q(x,t) = -X_4(x,t), \tag{2}$$

სადაც $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ არის გადაადგილების ვექტორი, $u_4=\vartheta$ ტემპერატურის განაწილების ფუნქციაა, $c_{kjpq}=c_{pqkj}=c_{jkpq}$ დრეკადი მუდმივებია, $\beta_{pq}=\beta_{qp}$ არის თერმული და მექანიკური ველების დამაკავშირებელი მუდმივები, $\lambda_{pq}=\lambda_{qp}$ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტებია, $c_0>0$ არის სითბოტევადობა, $T_0>0$ სხეულის ბუნებრივი მდგომარეობის საწყისი ტემპერატურაა, $X=(X_1,X_2,X_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა, X_4 არის სითბოს წყარო, $x=(x_1,x_2,x_3)$ აღნიშნავს სივრცულ ცვლადს და t არის დროითი ცვლადი; განმეორებითი ინდექსით იგულისხმება აჯამვა 1-დან 3-მდე, ხოლო ზედა ინდექსი $\top$ არის ტრანსპონირების სიმბოლო; $\partial_p := \dfrac{\partial}{\partial x_p}$, $\partial_t := \dfrac{\partial}{\partial t}$.

თუ გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა დროზე დამოკიდებულია ჰარმონიულად, მაშინ მივიღებთ მდგრადი რხევის განტოლებებს, ხოლო როდესაც გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე, მაშინ მივიღებთ თერმოდრეკადობის სტატიკის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x) = -X_k(x), \qquad k=1,2,3,$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x) = -X_4(x).$$

წარმოდგენილი დისერტაცია ეძღვნება ზემოთ მოყვანილი სტატიკის განტოლებებისათვის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანებისა და ტრანსმისიის ტიპის საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი ზოგადი კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულებისათვის.

კერძოდ, სადისერტაციო ნაშრომში გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღ-

ვრო-საკონტაქტო ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობის საკითხი. პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით აღნიშნული ამოცანები დაყვანილია შესაბამის სინგულარულ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებათა სისტემაზე, დეტალურადაა გამოკვლეული შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებები, გამოკვლეულია მათი ნულ-სივრცეები და დადგენილია მათი ფრედჰოლმურობისა და შებრუნებადობის საკითხები შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

ამონახსნების ერთადერთობასთან დაკავშირებული საკითხების გაანალიზებისას წარმოდგენილი დისერტაციის ყველაზე მნიშვნელოვან შედეგს წარმოადგენს გარე ამოცანების შემთხვევაში დადგენილი ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნის ერთადერთობას. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია ამონახსნების მოძებნა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში. ამ სივრცეში კი, ზოგადად, გრინის ფორმულები არ იწერება, რაც კლასიკურ თეორიაში ერთადერთობის თეორემების დამტკიცების დროს არსებითად გამოიყენება. ამიტომ აუცილებელი გახდა ახალი პირობების დადგენა უსასრულობის მიდამოში, რომელიც უზრუნველყოფდა ამონახსნების ერთადერთობას. ეს ამოცანა წარმატებითაა გადაჭრილი დისერტაციაში და მოძებნილია საკმარისად ეფექტური სტრუქტურული შეზღუდვის პირობები.

ამონახსნების არსებობის შესწავლისათვის დისერტაციაში გამოყენებულია პოტენციალთა მეთოდი და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია. ამ მიზნით აგებულია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა, გამოკვლეულია ამ მატრიცის ყოფაქცევა პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში და დადგენილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები.

ამ შედეგებზე დაყრდნობით აგებულია ზემოთ მითითებული თერმოსტატიკის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნადობის სრული თეორია და დამტკიცებულია ამონახსნების წარმოდგენადობა მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციების სახით. აღნიშნული პოტენციალების საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრებიან შესაბამისი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებებიდან, რომელთა შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორები დეტალურადაა შესწავლილი და დადგენილია მათი ფრედჰოლმურობისა და შებრუნებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტაქნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის მრავალ სემინარზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო და ადგილობრივ კონფე-რენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური კოლოკვიუმები და სემინარები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია მოიცავს რეზიუმეს (ქართულ და ინგლისურ ენაზე), შესავალს, ორ თავს, ცხრა პარაგრაფს, დასკვნას და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხას (37 დასახელება). დისერტაცია მოიცავს 111 ნაბეჭდ გვერდს.

დისერტაციის შინაარსი

თავი I. ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

ნაშრომის პირველი თავი ეძღვნება ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობისა და არსებობის თეორემების დამტკიცებას პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით. ამ მიზნით დეტალურადაა გაანალიზებული განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები.

პირველი თავის 1.1 პარაგრაფში ამოწერილია თერმოდრეკადობის თეორიის შესაბამისი ველის განტოლებები ანიზოტროპული სხეულებისათვის და შემოღებულია მისი შესაბამისი მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორები. შემოტანილია $\{\sigma_{kj}\}$ ძაბვის ტენზორი და დეფორმაციის $\{e_{kj}\}$ ტენზორი, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია დიუამელ-ნეიმანის კანონით:

$$\sigma_{kj} = c_{kjpq}\, e_{pq} - \beta_{kj}\, u_4,$$

$$e_{kj} = 2^{-1}\Big(\partial_k u_j + \partial_j u_k\Big), \quad k,j = 1,2,3,$$

სადაც $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ არის გადაადგილების ვექტორი, $u_4 = \vartheta$ ტემპერატურის განაწილების ფუნქციაა. ამ თანაფარდობებს მოძრაობის განტოლებების გათვალისწინებით მივყავართ ზოგადი დინამიკის (1)-(2) განტოლებებზე.

თუ (1)-(2) განტოლებებზე მოვახდენთ ლაპლასის ფორმალურ გარდაქმნას, ერთგვაროვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში, ე.ი. როცა $u_p(x,0) = 0$, $p = \overline{1,4}$, და $\partial_t\, u_j(x,0) = 0$, $j = 1,2,3$, მივიღებთ ე.წ. ფსევდო-რხევის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\, \partial_j \partial_q \widehat{u}_p(x) - \tau^2\, \widehat{u}_k(x) - \beta_{kj}\, \partial_j \widehat{u}_4(x) = 0, \qquad k = 1,2,3, \tag{3}$$

$$\lambda_{pq}\, \partial_p \partial_q \widehat{u}_4(x) - \tau\, c_0\, \widehat{u}_4(x) - \tau\, T_0\, \beta_{pq}\, \partial_p \widehat{u}_q(x) = 0. \tag{4}$$

აქ $\tau = \sigma - i\omega$ არის კომპლექსური პარამეტრი, სადაც $\omega \in \mathbb{R}$ და $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ხოლო $\widehat{u}_p(x)$ არის $u_p(x,t)$ ფუნქციის ლაპლასისი გარდაქმნა t ცვლადის მიმართ,

$$\widehat{u}_p(x) = \int_0^\infty u_p(x,t)\, e^{-\tau t}\, dt.$$

თუ დინამიკის (1)-(2) სისტემაში ყველა ფუნქცია დროზე დამოკიდებულია ჰარმონიულად, ე.ი.

$$u_k(x,t) = u_k^{(1)}(x)\cos\omega t + u_k^{(2)}(x)\sin\omega t, \quad k = 1,2,3,4, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

მაშინ მივიღებთ ე.წ. მდგრადი რხევის განტოლებებს:

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x) + \omega^2 u_k(x) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x) = 0, \qquad k = 1,2,3, \tag{5}$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x) + i\,\omega\,T_0\,\beta_{pq}\,\partial_p u_q(x) = 0. \tag{6}$$

სადაც შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნა

$$u_k(x) = u_k^{(1)}(x) + i\,u_k^{(2)}(x), \quad k = 1,2,3,4.$$

თუ დავუშვებთ, რომ გადაადგილების ვექტორი და ტემპერატურა არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე, მაშინ (1)-(2) სისტემიდან მივიღებთ თერმოდრეკადობის სტატიკის განტოლებებს

$$c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q u_p(x) - \beta_{kj}\,\partial_j u_4(x) = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{7}$$

$$\lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q u_4(x) = 0. \tag{8}$$

ჩვენი კვლევის მთავარი მიზანია სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა (7)-(8) სისტემისათვის.

აღწერილ განტოლებათა სისტემები წარმოშობენ ფორმალურად არათვითშეუღლებულ მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორებს. სტატიკის შემთხვევაში განტოლებათა სისტემის შესაბამის მატრიცულ ოპერატორს აქვს სახე:

$$A(\partial) := \big[A_{kj}(\partial)\big]_{4\times4} = \begin{bmatrix} C(\partial) & [-\beta_{kj}\,\partial_j]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \Lambda(\partial) \end{bmatrix}_{4\times4}, \tag{9}$$

სადაც

$$C(\partial) := \big[C_{kp}(\partial)\big]_{3\times3} = \big[c_{kjpq}\,\partial_j\partial_q\big]_{3\times3}, \quad \Lambda(\partial) = \lambda_{pq}\,\partial_p\partial_q. \tag{10}$$

ასევე შემოღებულია კლასიკური ძაბვის $T(\partial,n)$ ოპერატორი, თერმოდრეკადობის ძაბვის $P(\partial,n)$ ოპერატორი და თერმოძაბვის განზოგადებული მატრიცული

$B(\partial, n)$ ოპერატორი

$$T(\partial, n) := \big[\, T_{kp}\,(\partial, n)\,\big]_{3\times 3} = [\, c_{kjpq}\, n_j \partial_q\,]_{3\times 3}, \tag{11}$$

$$P(\partial, n) := \big[\, P_{kp}\,(\partial, n)\,\big]_{3\times 4} = \big[\, [T_{kp}(\partial, n)]_{3\times 3},\, [-\beta_{kj}\, n_j]_{3\times 1}\,\big]_{3\times 4}, \tag{12}$$

$$B(\partial, n) := \big[\, B_{kp}\,(\partial, n)\,\big]_{4\times 4} = \begin{bmatrix} T(\partial, n) & [-\beta_{kj}\, n_j]_{3\times 1} \\ [0]_{1\times 3} & \lambda(\partial, n) \end{bmatrix}_{4\times 4}, \tag{13}$$

$$\lambda(\partial, n) = \lambda_{pq}\, n_q\, \partial_p. \tag{14}$$

აქ $n = (n_1, n_2, n_3)$ არის ზედაპირის ელემენტის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორი.

n ნორმალის მქონე ზედაპირის ელემენტზე მოქმედი მექანიკური ძაბვის ვექტორის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი ტოლობებით

$$\sigma_{kj} n_j = c_{kjpq}\, n_j\, \partial_q u_p - \beta_{kj} n_j\, u_4 = [P(\partial, n)U]_k = [B(\partial, n)U]_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{15}$$

ხოლო ზედაპირის ამავე ელემენტზე სითბოს ნაკადი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\lambda(\partial, n)\vartheta = \lambda_{pq}\, n_q\, \partial_p \vartheta = [B(\partial, n)U]_4. \tag{16}$$

ამავე თავის 1.2 პარაგრაფში ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნის ტერმინებში აგებულია სტატიკის $A(\partial)$ ოპერატორის შესაბამისი ფუნდამენტური $\Gamma(x)$ მატრიცა და შესწავლილია მისი ყოფაქცევა უსასრულობისა და კოორდინატთა სათავის მიდამოში.

1.3 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები.

ვთქვათ, $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ შემოსაზღვრული არეა, რომლის საზღვარია მარტივად ბმული შეკრული გლუვი ზედაპირი $\partial\Omega =: S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$; $\overline{\Omega^+} = \Omega^+ \cup S$ და $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$.

დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად ყალიბდება:

ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში

$$A(\partial)U(x) = 0 \tag{17}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^\top \in C^2(\Omega^\pm) \cap C^1(\overline{\Omega^\pm})$ ამონახსენი, რომელიც S საზღვარზე აკმაყოფილებს

$(D)^\pm$ დირიხლეს სასაზღვრო პირობებს:

$$\{u(x)\}^\pm = \widetilde{f}(x), \qquad \{\vartheta(x)\}^\pm = f_4(x), \quad x \in S, \tag{18}$$

ანუ

$$\{U(x)\}^\pm = f(x), \qquad x \in S; \tag{19}$$

ან $(N)^\pm$ ნეიმანის სასაზღვრო პირობებს

$$\{P(\partial, n)\, U(x)\}^\pm = \widetilde{F}(x), \qquad \{\lambda(\partial, n)\, \vartheta(x)\}^\pm = F_4(x), \quad x \in S, \tag{20}$$

ანუ

$$\{B(\partial, n)\, U(x)\}^\pm = F(x), \quad x \in S; \tag{21}$$

ან $(R)^\pm$ რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\big\{B(\partial, n)U(x)\big\}^\pm + K\big\{U(x)\big\}^\pm = F(x), \qquad x \in S, \tag{22}$$

სადაც $K = [K_{kj}]_{4\times4}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა:

$$K = \begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times3} & [0]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \kappa_2 \end{bmatrix}_{4\times4}, \tag{23}$$

$\kappa_2 > 0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{3\times3}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა;

ან შერეული სპეციალური ტიპის სასაზღვრო პირობებს, კერძოდ,

$(D.N)^\pm$ პირობებს:

$$\{u(x)\}^\pm = \widetilde{f}(x), \qquad \{\lambda(\partial, n)\vartheta(x)\}^\pm = F_4(x), \quad x \in S; \tag{24}$$

ან $(N.D)^\pm$ პირობებს:

$$\{P(\partial, n)\, U(x)\}^\pm = \widetilde{F}(x), \qquad \{\vartheta(x)\}^\pm = f_4(x), \quad x \in S. \tag{25}$$

ამ ამოცანების ჩამოყალიბებაში $f = (\widetilde{f}, f_4)^\top$, $F = (\widetilde{F}, F_4)^\top$, სადაც $\widetilde{f} = (f_1, f_2, f_3)^\top$ და $\widetilde{F} = (F_1, F_2, F_3)^\top$, საზღვარზე მოცემული ცნობილი ფუნქციებია. სიმბოლოები $\{\cdot\}^\pm$ აღნიშნავს ცალმხრივ ზღვრებს S ზედაპირზე შესაბამისად $\Omega^\pm$ არიდან.

ამავე პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო ამოცანები შესაბამისი ფორმალურად შეუღლებული $A^*(\partial) = A^\top(-\partial)$ ოპერატორისათვის, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ ჩვენი საკვლევი ამოცანების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენაში.

1.4 პარაგრაფში გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოყვანილია სხვადასხვა ტიპის გრინის ფორმულა სტატიკის განტოლებათა სისტემიდან წარმოქმნილი მატრიცული ოპერატორისათვის რეგულარული ვექტორ-ფუნქციებისათვის გლუვი $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ არის შემთხვევაში.

1.5 პარაგრაფის 1.5.1 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია სტატიკის განტოლების შესაბამისი შიგა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხები. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემები.

თეორემა 1 დირიხლეს $(D)^+$ შიგა სასაზღვრო ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

თეორემა 2 შერეულ შიგა სასაზღვრო $(M)^+$ ამოცანას არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

თეორემა 3 შიგა სასაზღვრო $(D.N)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება $U^{(0)} = (0, \vartheta_0)^\top$ ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\vartheta_0 = const$ ნებისმიერი მუდმივია.

თეორემა 4 შიგა სასაზღვრო $(N.D)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება $U^{(0)} = (\chi(x), 0)^\top$ ვექტორის სიზუსტით, სადაც

$$\chi(x) = a \times x + b$$

ხისტი გადაადგილების ვექტორია, $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია.

თეორემა 5 ნეიმანის შიგა სასაზღვრო $(N)^+$ ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება შემდეგი შესაკრები ვექტორის სიზუსტით

$$U^{(0)}(x) = \big(\chi(x) + \vartheta_0 \, v^{(0)}(x), \vartheta_0\big)^\top = \big(\chi(x), 0\big)^\top + \vartheta_0 \big(v^{(0)}(x), 1\big)^\top, \tag{26}$$

სადაც ϑ_0 ნებისმიერი მუდმივია, $\chi(x) = a \times x + b$ ტიპის ხისტი გადაადგილების ვექტორია, $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, ხოლო $v^{(0)}$ მოცემულია $v_k^{(0)}(x) = \alpha_{kl} \, x_l, \quad k = 1, 2, 3,$ ტოლობით, სადაც $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ მუდმივები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი

$$c_{kjpq} \, \alpha_{pq} = \beta_{kj}, \qquad k, j = 1, 2, 3,$$

ალგებრულ განტოლებათა სისტემიდან. აქ c_{kjpq} და β_{kj} თერმოდრეკადი სხეულის მახასიათებელი მატერიალური მუდმივებია.

აქვე ნაჩვენებია, რომ (26) თანაფარდობით მოცემული ვექტორი ეკუთვნის წრფივ სივრცეს, რომელიც მოჭიმულია შემდეგ ვექტორებზე

$$\Psi^{(1)} = \big(1,0,0,0\big)^\top, \quad \Psi^{(2)} = \big(0,1,0,0\big)^\top, \quad \Psi^{(3)} = \big(0,0,1,0\big)^\top,$$
$$\Psi^{(4)} = \big(0,-x_3,x_2,0\big)^\top, \quad \Psi^{(5)} = \big(x_3,0,-x_1,0\big)^\top, \quad \Psi^{(6)} = \big(-x_2,x_1,0,0\big)^\top, \tag{27}$$
$$\Psi^{(7)} = \big(v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}, 1\big)^\top.$$

1.5.2 ქვეპარაგრაფი ეძღვნება გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის გამოკვლევას. უსასრულო არის შემთხვევაში დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის შესწავლა ხდება უსასრულობის მიდამოში გარკვეული ასიმპტოტიკის მქონე ვექტორ-ფუნქციათა კლასში. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია გარე ამოცანების განხილვა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სპეციალურ კლასში, რადგან ზოგადად თერმოსტატიკის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი უსასრულობის მიდამოში არ ქრება; კერძოდ, გადაადგილების ვექტორი უნდა ვეძიოთ უსასრულობის მიდამოში შემოსაზღვრულ ფუნქციათა კლასში, ხოლო ტემპერატურის ფუნქცია კი - უსასრულობის მიდამოში ქრობად ფუნქციათა კლასში. აღნიშნულ ქვეპარაგრაფში შემოღებულია ასეთ ვექტორ-ფუნქციათა კლასი $Z(\Omega^-)$.

განსაზღვრება 6 ვიტყვით, რომ Ω^- არეში განსაზღვრულ $U = (u_1, u_2, u_3, \vartheta)^\top$ ვექტორს, რომელიც უწყვეტია უსასრულობის მიდამოში, აქვს $Z(\Omega^-)$ თვისება, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$u_k(x) = \mathcal{O}(1), \quad k = 1,2,3, \qquad \vartheta(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \text{ როცა } |x| \to \infty, \tag{28}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u_k(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{29}$$

სადაც $\Sigma(0,R)$ არის R რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

დამტკიცებულია რამდენიმე დამხმარე დებულება და შესწავლილია გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი რეგულარული ამონახსენი ვექტორ-ფუნქიათა $Z(\Omega^-)$ კლასში.

ამავე ქვეპარაგრაფში შეუღლებული გარე ამოცანების ამონახსნებისთვის დადგენილია ასიმპტოტური ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში და შემოღებულია შესაბამისი $Z^*(\Omega^-)$ კლასი.

განსაზღვრება 7 ვიტყვით, რომ Ω^- არეში განსაზღვრულ $U^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, \vartheta^*)^\top$ ვექტორს, რომელიც უწყვეტია უსასრულობის მიდამოში, აქვს $Z^*(\Omega^-)$ თვისება, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$u_k^*(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}), \quad k = 1,2,3, \qquad \vartheta^*(x) = \mathcal{O}(1) \text{ როცა } |x| \to \infty, \tag{30}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \vartheta^*(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \quad k = 1,2,3. \tag{31}$$

1.5.3 ქვეპარაგრაფში დამტკიცებულია ერთადერთობის დებულებები შეუღლებული ამოცანებისთვის, კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ დირიხლეს შიგა და გარე, ასევე ნეიმანის გარე ერთგვაროვან ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი, ხოლო ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში ზოგადი ამონახსენია გარკვეული სტრუქტურის მქონე ვექტორი, რომლის პირველი სამი კომპონენტი შეესაბამება ხისტი გადაადგილების ვექტორს, ხოლო მეოთხე კომპონენტი ნებისმიერი მუდმივია. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნადობის საკითხის შესწავლისას, კერძოდ, შესაბამისი შეუღლებული ოპერტორების ნულ-სივრცეების გასაანალიზებლად.

1.6 პარაგრაფში ანიზოტროპული დრეკადობის თეორიის სტატიკის $A(\partial)$ და $A^*(\partial)$ ოპერატორების ფუნდამენტური მატრიცის საშუალებით აგებულია ზედაპირული - მარტივი და ორმაგი ფენის პეტენცილები

$$V(h)(x) = V_S(h)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\, h(y)\, dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{32}$$

$$W(h)(x) = W_S(h)(x) := \int\limits_S \big[Q\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top h(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{33}$$

$$V^*(h^*)(x) = V_S^*(h^*)(x) := \int\limits_S \Gamma^*(x-y)\, h^*(y)\, dS_y, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{34}$$

$$W^*(h^*)(x) = W_S^*(h^*)(x) := \int\limits_S \big[B\big(\partial_y, n(y)\big)\,[\Gamma^*(x-y)]^\top\big]^\top h^*(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{35}$$

სადაც

$$Q(\partial,n) := \big[\, Q_{kp}(\partial,n)\,\big]_{4\times4} = \begin{bmatrix} T(\partial,n) & [\,0\,]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & \lambda(\partial,n) \end{bmatrix}_{4\times4}. \tag{36}$$

ამავე პარაგრაფში დადგენილია ზედაპირული პეტენციალების წყვეტის ფორმულები და ნაჩვენებია, რომ ისინი ეკუთვნიან შესაბამისად $Z(\Omega^-)$ და $Z^*(\Omega^-)$ კლასებს.

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისებები

თეორემა 8 თუ $S\in C^{k+1,\alpha}$, $k\geqslant 1$ ნატურალური რიცხვია და $0<\beta<\alpha\leqslant 1$. მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს შემდეგი ასახვის თვისებები გააჩნია

$$V \;:\; [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k+1,\beta}(\overline{\Omega^\pm})]^4, \qquad W \;:\; [C^{k,\beta}(S)]^4 \to [C^{k,\beta}(\overline{\Omega^\pm})]^4.$$

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების შესაბამისი ზღვრული მნიშვნელობების თვისებები აღწერილია შემდეგი დებულებით

თეორემა 9 თუ $S\in C^{2,\alpha}$, $0<\beta<\alpha\leqslant 1$, $h\in[C^{0,\beta}(S)]^4$ და $g\in[C^{1,\beta}(S)]^4$. მაშინ ნებისმიერი $x\in S$ წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს:

$$\{V(h)\,(x)\}^\pm = \mathcal{H}\,(h)(x), \tag{37}$$

$$\{B(\partial_x,n(x))\,V(h)\,(x)\}^\pm = [\mp 2^{-1}I_4+\mathcal{K}\,]\,h(x), \tag{38}$$

$$\{W(h)\,(x)\}^\pm = [\pm 2^{-1}I_4+\mathcal{N}\,]\,h(x), \tag{39}$$

$$\{B(\partial_x,n(x))\,W(g)(x)\}^+ = \{B(\partial_x,n(x))\,W(g)(x)\}^- =: \mathcal{L}\,g(x), \tag{40}$$

სადაც $B(\partial,n)$ განსაზღვრულია (13) ტოლობით, $\mathcal{H}$ სუსტი სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორია, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{N}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპარატორებია, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი,

$$\mathcal{H}h(x)=\mathcal{H}_S\,h(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\,h(y)\,dS_y, \tag{41}$$

$$\mathcal{K}h(x)=\mathcal{K}_S\,h(x) := \int\limits_S [B(\partial_x,n(x))\,\Gamma(x-y)]\,h(y)\,dS_y, \tag{42}$$

$$\mathcal{N}h(x)=\mathcal{N}_S\,h(x) := \int\limits_S [Q(\partial_y,n(y))\,\Gamma^\top(x-y)]^\top\,h(y)\,dS_y, \tag{43}$$

$$\mathcal{L}g(x)=\mathcal{L}_S\,g(x) := \lim_{\Omega^\pm\ni z\to x\in S} B(\partial_z,n(x)\int\limits_S [Q(\partial_y,n(y))\,\Gamma^\top(z-y)]^\top\,g(y)\,dS_y. \tag{44}$$

(40) ტოლობას ეწოდება ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემა.

ანალოგიური თეორემები ასახვის თვისებებისა და წყვეტის ფორმულების შესახებ მტკიცდება შეუღლებული $V^*(h^*)$ და $W^*(h^*)$ ზედაპირული პოტენციალების შემთხვევაშიც. კერძოდ, ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემას შეუღლებული ორმაგი ფენის პოტენციალისთვის შემდეგი სახე აქვს

$$\{Q(\partial_x, n(x))W^*(g^*)(x)\}^+ = \{Q(\partial_x, n(x))W^*(g^*)(x)\}^- =: \mathcal{L}^* g^*(x). \tag{45}$$

აქვე გამოყვანილია თერმოსტატიკის სისტემის U ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები როგორც შიგა, ასევე გარე უსასრულო არეების შემთხვევაში:

$$W\big(\{U\}^+\big) - V\big(\{BU\}^+\big) = \begin{cases} U(x), & \text{როცა} \quad x \in \Omega^+, \\ 0, & \text{როცა} \quad x \in \Omega^-. \end{cases} \tag{46}$$

$$-W\big(\{U\}^-\big) + V\big(\{BU\}^-\big) = \begin{cases} U(x), & \text{როცა} \quad x \in \Omega^-, \\ 0, & \text{როცა} \quad x \in \Omega^+. \end{cases} \tag{47}$$

1.7 პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემები რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასებში. კერძოდ, 1.7.1 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს შიგა სასაზღვრო ამოცანა და ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^1(\overline{\Omega^+})\big]^4 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^4$ კლასში. მოცემულია დირიხლეს შიგა ამოცანის განოკვლევის ორი მეთოდი. პირველი დაფუძნებულია ამონახსნის წარმოდგენაზე ორმაგი ფენის $W(\varphi)$ პოტენციალის საშუალებით, ხოლო მეორე მიდგომა - ამონახსნის წარმოდგენაზე მარტივი ფენის $V(\varphi)$ პოტენციალით, სადაც $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\big)^\top$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ორივე შემთხვევაში დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე.

პირველი მიდგომით ამოცანა დაიყვანება ნორმალურად ამოხსნად სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემაზე:

$$[\,2^{-1} I_4 + \mathcal{N}\,]\,\varphi(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{48}$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში ინტეგრალური ოპერატორი არის მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო მნიშვნელობით წარმოშობილი -1 რიგის ფსევდოდი-

ფერენციალური ოპერატორი უარყოფითად განსაზღვრული მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცით:

$$\mathcal{H}\,\varphi(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{49}$$

ორივე შემთხვევაში ნაჩვენებია შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და მათი ნულ-სივრცეების ტრივიალურობა, რაც ეკვივალენტურია აღნიშნული ინტეგრალური ოპერატორების შებრუნებადობისა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში. აქედან კი გამომდინარეობს დირიხლეს სასზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულებები.

თეორემა 10 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $U \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^4$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ორმაგი ფენის პოტენციალით $U = W(\varphi)$, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (48) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან.

თეორემა 11 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $f \in \left[C^{1,\beta}(S)\right]^4$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $U \in \left[C^{1,\beta}(\overline{\Omega^+})\right]^4 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^4$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით $U = V(\varphi)$, სადაც სიმკვრივე $\varphi \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ ცალსახად განისაზღვრება (49) ინტეგრალური განტოლებიდან.

ანალოგიური მიდგომით, 1.7.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია, რომ ის ამოხსნადია ვექტორ-ფუნქცაითა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^2(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით $U = V(\varphi)$, სადაც $\varphi \in \left[C^{0,\beta}(S)\right]^4$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან:

$$[\,2^{-1}I_4 + \mathcal{K}\,]\,\varphi(x) = F(x), \qquad x \in S. \tag{50}$$

1.7.3 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^4 \cap [C^2(\Omega^-)]^4 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციით $U = W(\varphi) + aV(\varphi)$, სადაც φ სიმკვრივე განისაზღვრება

ცალსახად ამოხსნადი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან

$$[\,2^{-1}\,I_4 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}\,]\,\varphi(x) = f(x), \quad x \in S. \tag{51}$$

შიგა ამოცანის ანალოგიურად, აქაც დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(\varphi)$ პოტენციალითაც, სადაც φ სიმკვრივე განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი იმავე (49) განტოლებათა სისტემიდან.

ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი გამოკვლეულია 1.7.4 ქვეპარაგრაფში. ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ მარტივი ფენის პოტენციალით

$$U(x) = V(\varphi)(x), \tag{52}$$

სადაც $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\big)^\top$ საძიებელი სიმკვრივეა, რომელიც უნდა განისაზღვროს შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან:

$$-2^{-1}\,\varphi(x) + \mathcal{K}\,\varphi(x) = F(x), \qquad x \in S. \tag{53}$$

დისერტაციაში დეტალურადაა გამოკვლეული (53) განტოლების მარცხენა მხარით წარმოშობილი ინტეგრალური ოპერატორი $-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}$ და მისი შესაბამისი შეუღლებული ოპერატორი $-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}^*$. ნაჩვენებია, რომ $-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}$ სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ფრედგოლმურია ნულოვანი ინდექსით და მისი გული (ნულ-სივრცე) შვიდგანზომილებიანია. ამასთან $-2^{-1}\,I_4 + \mathcal{K}^*$ შეუღლებული ინტეგრალური ოპერატორის შვიდგანზომილებიანი სივრცის ბაზისი $\{\Phi^{(k)}\}_{k=1}^{7}$ ცხადი სახითაა აგებული:

$$\Phi^{(1)} = \big(1, 0, 0, 0\big)^\top, \quad \Phi^{(2)} = \big(0, 1, 0, 0\big)^\top, \quad \Phi^{(3)} = \big(0, 0, 1, 0\big)^\top,$$

$$\Phi^{(4)} = \big(0, -x_3, x_2, 0\big)^\top, \quad \Phi^{(5)} = \big(x_3, 0, -x_1, 0\big)^\top, \quad \Phi^{(6)} = \big(-x_2, x_1, 0, 0\big)^\top,$$

$$\Phi^{(7)} = \big(0, 0, 0, 1\big)^\top.$$

ეს საშუალებას გვაძლევს ცხადად ამოვწეროთ არაერთგვაროვანი სინგულარული ინტეგრალური (53) განტოლების, ანუ რაც იგივეა, ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 12 ვთქვათ, $S \in C^{2,\alpha}$ და $F \in C^{0,\beta}(S)$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$; მაშინ ნეიმანის შიგა არაერთგვაროვანი სასზღვრო ამოცანის ამოსხნადობისათვის აუცილებელია და

საკმარისი შემდეგი პირობების შესრულება:

$$\Big(F, \Phi^{(k)}\Big)_{L_2(S)} \equiv \int\limits_S F(x) \cdot \Phi^{(k)}(x)\, dS = 0, \qquad k = \overline{1,7}, \tag{54}$$

თუ შესრულებულია (54) პირობები, მაშინ ნეიმანის შიგა არაერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (52) პოტენციალით, რომლის φ სიმკვრივე განისაზღვრება (53) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან. ამასთან, თუ $\varphi^{(0)}$ არის არაერთგვაროვანი (53) ინტეგრალური განტოლების რაიმე კერძო ამონახსენი, მაშინ ამავე განტოლების ზოგადი ამონახსენია

$$\varphi(x) = \varphi^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{7} C_k\, \mathcal{H}^{-1}\, \Psi_S^{(k)}(x), \quad x \in S, \quad k = \overline{1,7}, \tag{55}$$

სადაც C_k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\mathcal{H}^{-1}$ არის $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებული, ხოლო $\Psi_S^{(k)}$ ვექტორები წარმოადგენს (27) ტოლობებით განსაზღვრული ვექტორების შეზღუდვას S ზედაპირზე.

გარდა ამისა, თუ $U^{(0)}$ არის ნეიმანის შიგა არაერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსენი, მაშინ ამავე ამოცანის ზოგადი ამონახსენი შემდეგნაირად წარმოიდგინება

$$U(x) = U^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{7} C_k\, \Psi^{(k)}(x), \quad x \in \Omega^+, \tag{56}$$

სადაც C_k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, $\Psi^{(k)}$ განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორებია და მოცემულია (27) ტოლობებით.

თავი II. თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ანიზოტროპული სხეულებისათვის

მეორე თავში შესწავლილია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ანიზოტროპული სხეულებისათვის. კერძოდ, განხილულია სამი შემთხვევა, როდესაც

(i) კომპოზიტურ სხეულს უკავია მთელი სივრცე, რომელიც შედგება სასრული D_1 არისა და მისი უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_1$ დამატებისგან, $\partial D_1 = \partial D_2$;

(ii) კომპოზიტურ სხეულს უკავია სასრული არე, რომელიც შედგება ორი ურთიერთმოსაზღვრე Ω_1 და Ω_2 არისაგან, ამასთან Ω_1 არე მდებარეობს Ω_2 არის შიგნით და $\partial\Omega_1 = S_1$, ხოლო $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$, სადაც S_1 მდებარეობს S_2-ის შიგნით;

(iii) კომპოზიტურ სხეულს უკავია უსასრულო არე, რომელიც შედგება ცარიელი D_0 სიღრუვის შემცველი სასრული D_1 და უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D}_0 \cup \overline{D}_1)$ არეებისგან; ამასთან $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$, სადაც S_0 მდებარეობს S_1-ის შიგნით, ხოლო $\partial D_2 = S_1$.

სამივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ განსხვავებული არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი ანიზოტროპული მასალით. ამასთან საკონტაქტო ზედაპირზე კმაყოფილდება ხისტი ტრანსმისიის პირობები, ხოლო კომპოზიტური სხეულის საზღვარზე მოცემულია ან დირიხლეს, ან ნეიმანის, ან რობენის, ან სპეციალური შერეული სასაზღვრო პირობები.

2.1 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სასრული კომპოზიტური არისათვის და განხილულია ამ ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი და დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები.

თეორემა 13 . ძირითად ერთგვაროვან საკონტაქტო $(TP-B)$ ამოცანას რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big([C^2(D_1)]^4 \cap [C^1(\overline{D_1})]^4\big) \times \big([C^2(D_2)]^4 \cap [C^1(\overline{D_2})]^4 \cap Z(D_2)\big)$ კლასში გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი;

თეორემა 14 . დირიხლეს შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-D)$, რობენის შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-R)$ და სპეციალურ შერეულ შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-M)$ ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნები.

თეორემა 15 ნეიმანის ტიპის ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-N)$ ამოცანის ზოგადი ამონახსენია

$$U^{(1)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\,(u_0^{(1)}, 1)^\top, \qquad x \in \Omega_1,$$

$$U^{(2)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\,(u_0^{(2)}, 1)^\top, \qquad x \in \Omega_2,$$

სადაც χ ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორია, C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $u_0^{(1)}$ და $u_0^{(2)}$ არის

$$C^{(m)}(\partial)\,u^{(m)}(x) = 0 \qquad x \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, \tag{57}$$

$$\{u^{(1)}(x)\}_k^+ - \{u^{(2)}(x)\}_k^- = 0, \qquad x \in S_1, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{58}$$

$$\begin{aligned} \big\{T^{(1)}(\partial, n)\,u^{(1)}(x)\big\}_k^+ &- \big\{T^{(2)}(\partial, n)\,u^{(2)}(x)\big\}_k^- \\ &= (\beta_{kj}^{(1)} - \beta_{kj}^{(2)})\,n_j(x), \quad x \in S_1, \;\; k = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{59}$$

$$\big\{T^{(2)}(\partial, n)\,u^{(2)}(x)\big\}_k^+ = \beta_{kj}^{(2)}\,n_j(x), \quad x \in S_2, \quad k = 1, 2, 3. \tag{60}$$

არაერთგვაროვანი ამოცანის რაიმე ფიქსირებული კერძო ამონახსენი.

2.2 პარაგრაფში განხილულია ტრანსმისიის ამოცანების ამონახსნების არსებობის საკითხი. კერძოდ, 2.2.1 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა (i) პუნქტში აღწერილი ორკომპონენტიანი უსასრულო კომპოზიტური სივრცისათვის და დამტკიცებულია, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$, რომლებიც წარმოდგენადია შესაბამისი ფუნდამენტური მატრიცებით აგებული მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)} = V^{(1)}(h), \qquad U^{(2)} = V^{(2)}(g),$$

სადაც h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან,

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\,h(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\,g(x) = f(x), \qquad x \in S_1, \tag{61}$$

$$[-2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)}]\,h(x) - [2^{-1}I_4 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}]\,g(x) = F(x), \qquad x \in S_1; \tag{62}$$

აქ $\mathcal{H}_{S_1}^{(j)}$ და $\mathcal{K}_{S_1}^{(j)}$, $j = 1, 2$, ინტეგრალური ოპერატორები განსაზღვრულია შესაბამისად (41) და (42) ტოლობებით.

2.2.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა (ii) პუნქტში აღწერილი ორკომპონენტიანი სასრული კომპოზიტური არისათვის: $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, სადაც $\partial\Omega_1 = S_1$, $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$, და კომპოზიტის გარე S_2 საზღვარზე მოცემულია დირიხლეს სასაზღვრო პირობა. დამტკიცებულია, რომ ამ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$ ერთადერთია და თითოეული მათგანი წარმოიდგინება შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)} = V^{(1)}_{S_1}(h), \qquad U^{(2)} = V^{(2)}_{S_1}(g) + V^{(2)}_{S_2}(\varphi).$$

საძიებელი g, h და φ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1} h(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1} g(x) - r_{_{S_1}} V^{(2)}_{S_2} \varphi(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{63}$$

$$[-2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1}]\, h(x) - [2^{-1} I_4 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}]\, g(x) - r_{_{S_1}} B^{(2)}(\partial, n)\, V^{(2)}_{S_2} \varphi(x)$$
$$= F^{(1)}(x), \quad x \in S_1, \tag{64}$$

$$r_{_{S_2}} V^{(2)}_{S_1} g(x) + \mathcal{H}^{(2)}_{S_2} \varphi(x) = f^{(2)}(x), \quad x \in S_2, \tag{65}$$

სადაც $r_{_S}$ არის S-ზე შეზღუდვის ოპერატორი. აქაც $\mathcal{H}^{(j)}_{S_k}$ და $\mathcal{K}^{(j)}_{S_k}$, $j, k = 1, 2$, ინტეგრალური ოპერატორები განსაზღვრულია შესაბამისად (41) და (42) ტოლობებით.

2.2.3 ქვეპარაგრაფში კი გამოკვლეულია რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა (iii) პუნქტში აღწერილი ორკომპონენტიანი უსასრულო კომპოზიტური არისათვის, როდესაც სასრული კომპონენტი თავის შიგნით შეიცავს სიცარიელეს, რომლის საზღვარზე მოცემულია რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობა. ამ შემთხვევაშიც პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ განსახილველი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალებით, რომელთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი **თერმოდრეკადობის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ზოგადი ანიზოტროპული სხეულებისათვის. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს, გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისაგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევასა და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობისა, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შეწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადეკვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში. პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით შესწავლილია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს, ნეიმანი, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა და გარე სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები. ასევე გამოკვლეულია ძირითადი საკონტაქტო და საკონტაქტო-სასაზღვრო ამოცანები კომპოზიტური ანიზოტროპული სხეულებისათვის. აღნიშნული ამოცანები დაყვანილია შესაბამის სინგულარულ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებათა სისტემაზე, დეტალურადაა გამოკვლეული შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების ასახვის თვისებები, გამოკვლეულია მათი ნულ-სივრცეები და დადგენილია მათი ფრედჰოლმურობისა და შებრუნება-

დობის საკითხები შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შემთხვევაში დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას;
- ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ფურიეს მეთოდით აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა და გამოკვლეულია მისი ყოფაქცევა პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში. შესწავლილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ასახვის თვისებები და დადგენილია მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და შესაბამისი ნულ-სივრცეების ბაზისები;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით და დამტკიცებულია მათი უპირობო და ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით. დამტკიცებულია, რომ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა უპირობოდ და ცალსახადაა ამოხსნადი, ხოლო ნეიმანის შიგა სასზღვრო ამოცანისათვის ცხადი ეფექტური სახითაა ამოწერილი ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისაგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე; ამასთან, ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის

დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ურთიერთმოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არისათვის. დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპოზიტური სხეულის გარე საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;

- გამოკვლეულია ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისაგან და მისი მოსაზღვრე უსასრულო კომპონენტისაგან. რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში.

კონფერენციებში მონაწილეობა

1. ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 22-24, 2009.

Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 22-24, 2009.

დ.ივანიძე, მ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის გარე სასაზღვრო ამცანების ამონახსნების ერთადერთობის შესახებ.

D.Ivanidze, M.Ivanidze, Uniqueness of Solutions to Exterior Boundary Value Problems of Thermoelastostatics.

2. ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 21-23, 2010.

Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 21-23, 2010.

დ.ივანიძე, მ. ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ჰემიტროპული სხეულებისთვის.

D.Ivanidze, M.Ivanidze, Boundary Vvalue Pproblems of Thermostatics for Hemitropic Elastic Solids.

მ.ივანიძე, დ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის გარე სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისთვის.

M.Ivanidze, D.Ivanidze, Uniqueness Theorems in the Thermoelasticity Theory of Anisotropic Bodies.

3. ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 20-23, 2011.

Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 20-23, 2011.

დ.ივანიძე, მ.ივანიძე, ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის ზოგირთი სასა-ზღვრო ამოცანის გამოკვლევა შეუღლებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის.

D.Ivanidze, M.Ivanidze, Some Boundary Value Problems for the Adjoint System of Differential Equations of the Thermoelasticity Theory of Hemitropic Solids.

მ.ივანიძე, დ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის პოტენციალთა თვისებები სტატიკის განტოლებების შემთხვევაში.

M.Ivanidze, D.Ivanidze, Properties of Layer Potentials of the Static Equations of Thermoelasticity Theory.

4. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მეორე კონფერენცია, ბათუმი, სექტემბერი 15-19, 2011.

The Second International Conference of the Georgian Mathematical Union, Georgia, Batumi, September 15-19, 2011.

დ.ივანიძე, მ.ივანიძე, ნეიმანის შიგა ამოცანის გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიაში ჰემიტროპული სხეულებისათვის.

D.Ivanidze, M.Ivanidze, The Interior Neumann type Boundary Value Problem of the Thermoelasticity Theory of Hemitropic Solids, Book of Abstracts II International Conference (2011), 142.

მ.ივანიძე, დ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა.

M.Ivanidze, D.Ivanidze, Investigation of Boundary Value Problems of the Theory of Thermoelasticity, Book of Abstracts II International Conference (2011), 142.

5. ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 23-25, 2012.

Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 23-25, 2012.

დ.ივანიძე, მ.ივანიძე, ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა შეუღლებულ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის.

D.Ivanidze, M.Ivanidze, Boundary Value Problems for the Adjoint System of Differential Equations of the Thermoelasticity Theory of Hemitropic Solids.

მ.ივანიძე, დ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის პოტენციალების თვისებები.

M.vanidze, D.Ivanidze, Properties of Layer Potentials of Thermoelastostatics.

6. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მესამე კონფერენცია, ბათუმი, სექტემბერი 2-9, 2012.

III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Georgia, Batumi, September 2-9, 2012.

მ.ივანიძე, ანიზოტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა.

M.Ivanidze, Uniqueness theorems for the basic interface problems of thermoelastostatics for anisotropic composite bodies, Book of Abstracts III International Conference (2012), 195.

7. ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის

გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 22-24, 2013.
Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 22-24, 2013.
მ.ივანიძე, ნეიმანის ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანის გამოკვლევა ანიზოტროპული სხეულებისათვის.
M.Ivanidze, Investigation of the interior Neumann type boundary value problems of thermoelastostatics for anisotropic bodies.

8. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მეოთხე კონფერენცია, ბათუმი, სექტემბერი 9-15, 2013.
IV International Conference of the Georgian Mathematical Union, Georgia, Batumi, September 9-15, 2013.
მ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ანიზოტროპული კომპოზიტური სხეულებისათვის.
M.Ivanidze, Transmission problems of thermoelastostatics for anisotropic composite structures, Book of Abstracts IV International Conference (2013), 197.

9. ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომები, თბილისი, აპრილი 22-24, 2014.
Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Tbilisi, April 22-24, 2014.
მ.ივანიძე, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ანიზოტროპული სხეულებისათვის.
M.Ivanidze, Dirichlet boundary - transmission problem of thermoelastostatics for anisotropic composite structures.

პუბლიკაციები

1. D.Ivanidze, M.Ivanidze, Uniqueness of solutions to exterior boundary value problems of thermoelastostatics, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 23 (2009), 36-41.

2. D.Ivanidze, M.Ivanidze, Boundary value problems of thermostatics for hemitropic elastic solids, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 24 (2010), 57-60.

3. M.Ivanidze, D.Ivanidze, Uniqueness theorems in the thermoelasticity theory of

anisotropic bodies, Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 24 (2010), 61-65.

4. D.Ivanidze, M.Ivanidze, Boundary value problems for the adjoint system of differential equations of the thermoelasticity theory of hemitropic solids, Bulletin of TICMI, Vol.16, No.1 (2012), 1-14.

5. M.Ivanidze, D.Ivanidze, Properties of layer potentials of thermoelastostatics, Bulletin of TICMI, Vol.16, No.1 (2012), 43-53.

6. M.Ivanidze, Existence results for the interior Dirichlet and exterior Neumann type boundary value problems of thermoelastostatics , Georg. Inter. J. Sci. Tech., 4 (2012), no. 3-4, 327-345.

7. M.Ivanidze, D. Natroshvili, Investigation of the interior Neumann type boundary value problem of thermoelastostatics for anisotropic bodies, AMIM, vol 18, No.1 (2013), 23-46.

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორებს, პროფესორ დავით ნატროშვილსა და პროფესორ შოთა ზაზაშვილს მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

summary

The present PhD thesis Investigation of basic boundary value problems of thermoelastostatics for anisotropic solids by Marekh Ivanidze deals with the problems of Mathematical Physics, in particular three-dimensional boundary value and boundary-transmission problems of statics of thermo-elasticity theory for general anisotropic solids. In recent years, due to the rapidly increasing use of composite materials in modern industrial and technological processes, on the one hand, and in biology and medicine, on the other hand, the mathematical modelling related to complex composite structures and their mathematical analysis became very important from the theoretical and practical points of view. Mathematical investigation of such complex models has a crucial importance for both fundamental research and practical applications. In particular, the most essential question is the investigation of well-posedness of corresponding mathematical problems, which includes the analysis of uniqueness, existence, smoothness and stability of solutions, as well as development of appropriate efficient numerical algorithms for calculation of basic thermo-mechanical characteristics.

The main objective of the dissertation is a detailed investigation of the three-dimensional Dirichlet, Neumann and Robin type boundary value problems for the differential equations of statics of thermo-elasticity theory of anisotropic solids. These problems are studied by using the potential method and the theory of integral equations.

One of the most essential results of the dissertation is investigation of the uniqueness questions in the exterior problems. The case is that solutions to the exterior boundary value problems should be sought in the space of vector functions which are only bounded at infinity. For such vector functions the standard Green formulas do not hold and one needs to introduce a special class of bounded vector functions. This problem is successfully solved in the dissertation by introducing an appropriate space of vector functions. The efficient asymptotic and structural sufficient conditions are established at infinity guaranteeing uniqueness of solutions to the exterior problems.

The existence of solutions is proved by the potential method and the theory of singular integral equations. To this end, the matrix of fundamental solutions to the

system of governing differential equations is efficiently constructed by the Fourier transform technique and its properties in a vicinity of the pole and at infinity are studied. The mapping and jump properties of the corresponding single and double layer potentials and the boundary integral operators generated by them are investigated.

In the dissertation, it is shown that with the help of the single and double layer potentials the Dirichlet and Neumann boundary value problems can be reduced to equivalent boundary integral equations. Investigation of the Fredholm properties, analysis of the index problem and construction of the basis of the corresponding null-spaces of the operators and their adjoint ones is the most principal part of the dissertation.

It is proved that solutions to the interior and exterior Dirichlet boundary value problem, as well as the Neumann boundary value problem are uniquely and unconditionally solvable and their solutions are representable by the single and double layer potentials. The unknopwn densities of the potentials are defined by the corresponding uniquely solvable singular integral (pseudodifferential) equations.

In the case of the interior Neumann type boundary value problem, it is shown that the non-homogeneous problem is not unconditionally solvable, since the corresponding homogeneous problem possesses seven linearly independent solutions which are found explicitely in terms of elementary functions. With the help of the single layer potential the problem is reduced to the equivalent system of boundary integral equations and the seven-dimensional null space of the respective adjoint integral operator is constucted explicitely. On the basis of these results the necessary and suficient conditions for the Neumann problem to be solvable are written explicitely.

The boundary-transmission problems for piece wise homogeneous anisotropic composite solids are studied by the similar approach. In these problems the basic rigid contact conditions are given on the interface, while on the boundary of the composite body one of the basic boundary conditios (the Dirichlet, Neumann or Robin type boundary condition) is presribed. In particular, three type boundary-transmission problems are studied in detail in the dissertation:

(i) The basic transmission problem for piece wise homogeneous three-dimensional space consisting of two adgasent anisotropic elstic components with different material constants, when one of them is a bounded region and the second one is its complement to the whole space. The rigid transmission conditions are given on the interface.

(ii) The Dirichlet boundary-transmission problem for a bounded composite anisotropic elstic solid consisting of two adgasent bounded domains with different material constants. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Ditichlet condition is given on the exterior boundary of the composite body.

(iii) The Robin type boundary-transmission problem for an ubounded composite anisotropic elstic solid consisting of a bounded domain with interior cavity and its adgasent unbounded compliment. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Robin type condition is given on the interior boundary of the composite body.

For all these transmission problems it is shown that the solutions can be represented by the single layer potentials whose densities are defined by the respective uniquely solvable systems of integral equations.