ივანიძე დიანა

სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის

წარდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2014

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ივანიძე დიანას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

ხელმძღვანელი: პროფესორი დავით ნატროშვილი

____

ხელმძღვანელი: პროფესორი შოთა ზაზაშვილი

____

რეცენზენტი: ____________________________

რეცენზენტი: ____________________________

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
2014

ავტორი: ივანიძე დიანა

დასახელება: "სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის"

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

რეზიუმე

დიანა ივანიძის სადისერტაციო ნაშრომი **„სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის“** ძირითადად ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, *თერმოდრეკადობის თეორიის* სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას ჰემიტროპული სხეულებისათვის. ჰემიტროპული მოდელი წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის უზოგადეს კოსერას ტიპის მოდელს. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც ამავე დროს გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დად-გენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის ძირითადი სამგამზომილებიანი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ჰემიტროპული სხეულების შემთხვევაში, რომელიც კოსერას მოდელებში უზოგადეს მოდელს წარმოადგენს. შესწავლილია შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით.

ერთადერთობის საკითხის გაანლიზებისას წარმოდგენილი დისერტაციის ყველაზე მნიშვნელოვან შედეგს წარმოადგენს გარე ამოცანების შემთხვევაში დადგენილი ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნის ერთადერთობას. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია ამონახსნების მოძებნა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში. ამ სივრცეში კი, ზოგადად, გრინის ფორმულები არ იწერება, რაც კლასიკურ თეორიაში ერთადერთობის თეორემების დამტკიცების დროს არსებითად გამოიყენება. ამიტომ აუცილებელი გახდა ახალი პირობების დადგენა უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფდა ამონახსნების ერთადერთობას. ეს ამოცანა წარმატებითაა გადაჭრილი დისერტაციაში და მოძებნილია საკმარისად ეფექტური სტრუქტურული შეზღუდვის პირობები.

ამონახსნების არსებობის შესწავლისათვის დისერტაციაში გამოყენებულია პოტენციალთა მეთოდი და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორია. ამ მიზნით აგებულია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა, გამოკვლეულია ამ მატრიცის ყოფაქცევა პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში და დადგენილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები.

დირიხლეს და ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები წარმოდგენილია მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციების სახით, რისი საშუალებითაც ამოცანები დაიყვანება ეკვივალენტურ სასაზღვრო ინტეგრალურ განტოლებებზე. გამოკვლევის ერთ-ერთი არსებითი ნაწილია შესაბამისი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობის შესწავლა, მათი ინდექსის დადგენა და ინტეგრალური ოპერატორების ნულ სივრცეების ბაზისის ცხადი სახით აგება.

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების, ასევე ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნები არსებობს, ერთადერთია და ისინი წარმოდგენადია მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათი წრფივი კომბინაციების სახით. ამასთან, პოტენციალთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება შესაბამისი ცალსახად ამოხსნადი სინგულარულ (ფსევდოდიფერენ-ციალურ) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემებიდან. ამ ინტეგრალური განტოლებების შესაბამისი ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები გაანალიზებულია დეტალურად, შესწავლილია მათი ფრედჰოლმურობის თვისებები და დადგენილია მათი შებრუნებადობა შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში.

ნეიმანის შიგა ამოცანის გამოკვლევის დროს დადგენილია, რომ ნეიმანის შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია შვიდი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი. ამიტომ იგი არაა უპირობოდ ამოხსნადი ნებისმიერი მონაცემისათვის. ნეიმანის შიგა არაერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით წარმოშობილ ინტეგრალურ ოპერატორს გააჩნია შვიდგანზომილებიანი ნულ-სივრცე. აღსანიშნავია, რომ შესაბამისი შეუღლებული ინტეგრალური ოპერატორის შვიდგანზომილებიანი ნულ-სივრცე ეფექტურად აიგო და ცხადი სახით დაიწერა ნეიმანის შიგა ამოცანის ამონახსნის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

ანალოგიური მიდგომით გამოკვლეულია თერმოდრეკადობის სტატიკის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები უბნობრივ ერთგვაროვანი ჰემიტ-როპული კომპოზიტური სხეულებისათვის, როდესაც საკონტაქტო ზედაპირზე მოცემულია ე.წ. ხისტი ტრანსმისიის პირობები, ხოლო კომპოზიტური სხეულის საზღვარზე მოცემულია რომელიმე ტიპის (დირიხლეს, ნეიმანის, ან რობენის) სასაზღვრო პირობა. კერძოდ, ნაშრომში პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით დეტალურადაა შესწავლილი სამი ტიპის საკონტაქტო ამოცანა:

(i) ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე.

(ii) დირიხლეს სასზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ურთიერთმოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არისათვის. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე, ხოლო დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპოზიტური სხეულის გარე საზღვარზე.

(iii) რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური სხეულისათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისგან და მისი მოსაზღვრე უსასრულო კომპონენტისგან. ხისტი ტრანსმისიის პირობები მოცემულია საკონტაქტო ზედაპირზე, ხოლო რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე;

ამ სამივე ტიპის ამოცანაში დამტკიცებულია, რომ შესაბამის არეებში ამონახსნები წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციებით, რომელთა სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი ინტეგრალური განტოლებების სისტემიდან.

SUMMARY

The present PhD thesis “Investigation of boundary value problems of generalized Cosserat’s type models” by Diana Ivanidze deals with the problems of Mathematical Physics, in particular three-dimensional boundary value and boundary-transmission problems of statics of thermo-elasticity theory for hemitropic solids. The hemitropic model is the most general Cosserat’s type model for elastic solids. Due to the rapidly increasing use of composite materials in modern industrial and technological processes, on the one hand, and in biology and medicine, on the other hand, the mathematical modelling related to complex composite structures and their mathematical analysis became very important from the theoretical and practical points of view in recent years. Beside the materials with complex microstructure, composite structures consisting of solid components possessing essentially different physical properties are widely used in modern practice. Therefore mathematical investigation of such complex models has a crucial importance for both fundamental research and practical applications. In particular, the most essential question is the investigation of well-posedness of corresponding mathematical problems, which includes the analysis of uniqueness, existence, smoothness and stability of solutions, as well as development of appropriate efficient numerical algorithms for calculation of basic thermo-mechanical characteristics.

The main objective of the dissertation is a detailed investigation of the three-dimensional Dirichlet, Neumann and Robin type boundary value problems for the differential equations of statics of thermo-elasticity theory of hemitropic solids. These problems are studied by using the potential method and the theory of integral equations.

One of the most essential results of the dissertation is investigation of the uniqueness questions in the exterior problems. The case is that solutions to the exterior boundary value problems should be sought in the space of vector functions which are only bounded at infinity. For such vector functions the standard Green formulas do not hold and one needs to introduce a special class of bounded vector functions. This problem is successfully solved in the dissertation by introducing an appropriate space of vector functions. The efficient asymptotic and structural sufficient conditions are established at infinity guaranteeing uniqueness of solutions to the exterior problems.

The existence of solutions is proved by the potential method and the theory of singular integral equations. To this end, by the Fourier transfom technique the matrix of fundamental solutions to the system of governing differential equations is efficiently constructed in terms of elementary functions and its properties in a vicinity of the pole and at infinity are studied. The mapping and jump properties of the corresponding single and double layer potentials and the boundary integral operators generated by them are investigated.

In the dissertation, it is shown that with the help of the single and double layer potentials the Dirichlet and Neumann boundary value problems can be reduced to equivalent boundary integral equations. Inverstigation of the Fredholm properties, analysis of the index problem and construction of the basis of the corresponding null-spaces of the operators and their adjoint ones is the most principal part of the dissertation.

It is proved that solutions to the interior and exterior Dirichlet boundary value problems, as well as the Neumann boundary value problem are uniquely and unconditionally solvable and their solutions are representable by the single and double

layer potentials. The unknown densities of the potentials are defined by the corresponding uniquely solvable singular integral (pseudodifferential) equations.

In the case of the interior Neumann type boundary value problem, it is shown that the corresponding homogeneous problem possesses seven linearly independent solutions and the non-homogeneous problem is not unconditionally solvable. With the help of the single layer potential the problem is reduced to the equivalent system of boundary integral equations and the seven-dimensional null space of the respective adjoint integral operator is constucted explicitely. On the basis of these results the necessary and suficient conditions for the Neumann problem to be solvable are written explicitely.

The boundary-transmission problems for piece wise homogeneous hemitropic composite solids are studied by the similar approach. In these problems the basic rigid contact conditions are given on the interface, while on the boundary of the composite body one of the basic boundary conditios (the Dirichlet, Neumann or Robin type boundary condition) is presribed. In particular, three type of boundary-transmission problems are studied in detail in the dissertation:

(i) The basic transmission problem for piece wise homogeneous three-dimensional space consisting of two adgasent domains with different material constants, when one of them is a bounded region and the second one is its complement to the whole space. The rigid transmission conditions are given on the interface.

(ii) The Dirichlet boundary-transmission problem for a bounded composite solid consisting of two adgasent bounded domains with different material constants. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Ditichlet condition is given on the exterior boundary of the composite body.

(iii) The Robin type boundary-transmission problem for an ubounded composite solid consisting of a bounded domain with interior cavity and its adgasent unbounded compliment. The rigid transmission conditions are given on the interface, while the Robin type condition is given on the interior boundary of the composite body.

For all these transmission problems it is shown that the solutions can be represented by the single layer potentials whose densities are defined by the respective uniquely solvable systems of integral equations.

ᲨᲘᲜᲐᲐᲠᲡᲘ

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორებს,
პროფესორ დავით ნატროშვილსა და
პროფესორ შოთა ზაზაშვილს
მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და
გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

შესავალი

თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასალებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამდენიმე დრეკადი მასალისგან დამზადებული ნარევები, მეტალურ-კერამიკული კომპოზიტები და მათი სხვადასხვა კომპოზიციები. ექსპერიმენტულმა გამოკვლევევბმა დაადასტურა, რომ ასეთ კომპოზიტებსა და კონსტრუქციებს აღმოაჩნდათ ისეთი მექანიკური თვისებები, რაც არ გვხვდებოდა დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში. ფრიად მნიშვნელოვანია, რომ ანალოგიური თვისებები მჟღავნდება სხვადასხვა ტიპის სხეულებში, როგორც მიკრო - ატომურ-მოლეკულურ დონეზე (კვარცი, ბიოლოგიური მოლეკულები - DNA, ძვლების მოლეკულური სისტემები), ასევე მაკრო დონეზე (სპირალური, შურუპის ანუ სჭვალის, ბოჭკოვანი და თხელი მემბრანული ტიპის ჩართვების შემცველი კომპოზიტები, პლასტიკატები, ნანომასალები და სხვა).

ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა და ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნა პრაქტიკული გამოყენების მიზნით.

თანამედროვე ტექნოლოგიურმა და ინდუსტრიულმა მიღწევებმა, აგრეთვე ბიოლოგიაში და მედიცინაში მიღწეულმა პროგრესმა, არსებითად მოითხოვა მიკროსტრუქტურის მქონე დრეკადი სხეულების მოდელების განხილვა. ამ მოდელებით აღიწერება რთული შინაგანი ბმის მქონე კომპოზიტური სხეულები, რომელთა მიკროსტრუქტურა ისეთია, რომ თითოეულ მატერიალურ ნაწილაკს გააჩნია მექანიკური თავისუფლების 6 ხარისხი (3 გადაადგილების კომპონენტი და მისგან დამოუკიდებელი 3 მიკრობრუნვის კომპონენტი). ასეთ სხეულებს მიკროპოლარულ სხეულებს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ დრეკადობის კლასიკური თეორია უშვებს მხოლოდ მექანიკური თავისუფლების 3 ხარისხს (გადაადგილების ვექტორის 3 კომპონენტი). როგორც ექსპერიმენტულმა გამოკ-

ვლევებმა დაადასტურა მიკროპოლარულ სხეულებს არსებითად განსხვავებული მექანიკური თვისებები აღმოაჩნდათ (იხ., მაგალითად, [1], [2], [5], [8], [9], [10], [18], [19], [27], [28] და იქ ციტირებული ლიტერატურა). მაგალითად, არაცენტრულად სიმეტრიულ მიკროპოლარულ სხეულებში (რომელთაც ჰემიტროპულ სხეულებს უწოდებენ) შესაძლებელია მარცხენა და მარჯვენა მოგეზულების დრეკადი ტალღების ერთდროულად გავრცელება. გარდა ამისა, ღერძული გაჭიმვა იწვევს გვერდით ეფექტსაც, რაც არ გვხვდება დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში. შესაბამისი თეორიული და ექსპერიმენტული მასალები დეტალურადაა გადმოცემული მრავალ შრომაში (იხ., მაგალითად, [1], [2], [4], [7], [15], [16], [22], [26], [29], [32], [39], [40], [41], [42], [43], [44], [47]).

ჰემიტროპული სხეულებისათვის დამუშავებულ მათემატიკურ მოდელში განიხილავენ ძალური ძაბვისა $\{\tau_{pq}\}$ და მომენტური ძაბვის $\{\mu_{pq}\}$ ასიმეტრულ ტენზორებს, რომლებიც კინემატიკურადაა დაკავშირებული დეფორმაციისა $\{u_{kj}\}$ და გრეხვის $\{\omega_{kj}\}$ ასიმეტრიულ ტემზორებთან (ჰუკის ტიპის განზოგადებული კანონი). ყველა ეს ტენზორი გამოისახება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი გადადგილების $u=(u_1,u_2,u_3)^\top$ და მიკრობრუნვის $\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^\top$ ვექტორების კომპონენტებით და მათი წარმოებულებით ([7], [25], [39], [40]).

თერმული ეფექტების გათვალისწინებით დინამიკის ძირითადი თანაფარდობები ჰემიტროპული სხეულებისათვის მათემატიკურად აღიწერება შემდეგი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით ([7]):

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\,\Delta u(x,t)+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,u(x,t)+(\varkappa+\nu)\Delta\,\omega(x,t)+\\
&\quad+(\delta+\varkappa-\nu)\ \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\omega(x,t)+2\alpha\,\mathbf{curl}\,\omega(x,t)-\\
&\quad-\eta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x,t)+\varrho\,F(x,t)=\varrho\,\partial_{tt}^2u(x,t)\,,\\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x,t)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,u(x,t)+2\alpha\,\mathbf{curl}\,u(x,t)+\\
&\quad+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x,t)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\omega(x,t)+4\nu\,\mathbf{curl}\,\omega(x,t)-\\
&\quad-4\alpha\,\omega(x,t)-\zeta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x,t)+\varrho\,G(x,t)=\mathcal{I}\,\partial_{tt}^2\omega(x,t)\,,\\
&\kappa'\Delta\,\vartheta(x,t)-\eta\partial_t\,\mathbf{div}\,u(x,t)-\zeta\,\partial_t\,\mathbf{div}\,\omega(x,t)-\kappa''\,\partial_t\vartheta(x,t)+Q(x,t)=0,
\end{aligned}
$$

სადაც ϑ ტემპერატურაა, $F=(F_1,F_2,F_3)^\top$ და $G=(G_1,G_2,G_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა და მოცულობითი მომენტი (ერთეულოვან მასაზე გათვლით), Q სხეულში მოთავსებული სითბოს წყაროა, ϱ - დრეკადი სხეულის სიმკვრივე, $\mathcal{I}$ მუდმივი ახასიათებს მიკრობრუნვის ინერციის მომენტს (ერთეულოვან მასაზე

გათვლით), α, β, γ, δ, λ, μ, ν, $\varkappa$ და ε მატერიალური მუდმივებია, $\eta > 0$ და $\zeta > 0$ მუდმივებია, რომლებიც აღწერენ მექანიკური და თერმული ველების ურთიერთკავშირს.

როდესაც განსახილველი მექანიკური და თერმული სიდიდეები დამოკიდებული არაა დროზე, მაშინ ზემოთ მოყვანილი განტოლებებიდან მიიღება სტატიკის განტოლებათა სისტემა, ხოლო თუ ამ სიდიდეების დროზე დამოკიდებულება ჰარმონიული კანონით აღიწერება (ე.ი. ისინი წარმოიდგინებიან $e^{-it\sigma}$ ფუნქციისა და სივრცული ცვლადის ფუნქციების ნამრავლის სახით), მაშინ დინამიკის განტოლებები გადაიქცევა ე.წ. მდგრადი რხევის განტოლებებად. აქ σ არის სიხშირის ნამდვილი პარამეტრი. შევნიშნოთ, რომ როცა $\sigma = 0$, რხევის განტოლებებიდან მიიღება სტატიკის განტოლებები. თუ $\sigma = \sigma_1 + i\,\sigma_2$ კომპლექსური პარამეტრია, მაშინ მოცემულ განტოლებებს ეწოდება ფსევდორხევის განტოლებები.

მიკროპოლარული მოდელების ისტორია და შესაბამისი ლიტერატურის მიმოხილვა მოცემულია მონოგრაფიაში [7]. სამეცნიერო ლიტერატურაში ჰემიტროპული სხეულების მოდელი აგებული იყო აეროს და კუვშინსკის მიერ [1], [2].

ჰემიტროპული სხეულების დრეკადობის თეორიის ამოცანები, როდესაც თერმული ველის ეფექტები არაა გათვალიწინებული, პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით შესწავლილი იყო ნაშრომებში: [34], [35], [37], ხოლო ჰემიტროპული სხეულების დრეკადობის თეორიის ფსევდო-რხევის სასაზღვრო ამოცანები თერმული ველის ეფექტების გათვალიწინებით, კვლავ პოტენციალთა მეთოდით, გამოკვლეული იყო შრომაში [36].

შევნიშნოთ, რომ ჰემიტროპული სხეულების დრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების გამოკვლევა დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან. კერძოდ, ფსევდო-რხევის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში ფაქტობრივად ექსპონენციალურად ქრება, მაშინ როდესაც შესაბამისი სტატიკის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში, ზოგადად, მხოლოდ შემოსაზღვრულია. ეს არსებითად ართულებს სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას, როგორც ამონახსნის ერთადერთობის, ისე ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით. საჭირო ხდება ამონახსნთა კლასის დაზუსტება და ისეთი ასიმპტოტური პირობების დადგენა უსასრულობაში, რომელიც უზრუნველყოფს სტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობას. ეს საკითხები სამეცნიერო ლიტერატურაში არ არის შესწავლილი.

წარმოდგენილი დისერტაცია ეძღვნება ზემოთ მოყვანილი განტოლებებით

აღწერილი თერმოჰემიტროპული თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანებისა და ტრანსმისიის ტიპის საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით.

დისერტაცია შედგება შესავლისგან, ორი თავისა და ცხრა პარაგრაფისაგან, ასევე ციტირებული ლიტერატურის სიისაგან, რომელიც მოიცავს 52 დასახელებას.

ახლა მოკლედ მიმოვიხილოთ თითოეულ თავში მიღებული შედეგები.

პირველი თავის 1.1 პარაგრაფში ამოწერილია დრეკადობის ჰემიტროპული წრფივი თეორიის ველის ძირითადი მახასიათებლები, კერძოდ, ძალური ძაბვისა $\{\tau_{pq}\}$ და მომენტური ძაბვის $\{\mu_{pq}\}$ ტენზორები, თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის, ფსევდო-რხევისა და სტატიკის წრფივ განტოლებათა სისტემები და შემოღებულია შესაბამისი მატრიცული კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური ოპერატორები. ასევე შემოღებულია მექანიკური თერმოძაბვისა და განზოგადებული თერმოძაბვის სასაზღვრო ოპერატორები. აღსანიშნავია, რომ სტატიკის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა წარმოშობს მეორე რიგის ძლიერად ელიფსურ, ფორმალურად არათვითშეუღლებულ დიფერენციალურ მატრიცულ $L(\partial)$ ოპერატორს:

$$L(\partial) = \begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial) & L^{(2)}(\partial) & L^{(5)}(\partial) \\ L^{(3)}(\partial) & L^{(4)}(\partial) & L^{(6)}(\partial) \\ [0]_{1\times 3} & [0]_{1\times 3} & \kappa^{'}\Delta \end{bmatrix}_{7\times 7},$$

სადაც

$$L^{(1)}(\partial) := (\mu+\alpha)\,\Delta\, I_3 + (\lambda+\mu-\alpha)\, Q(\partial),$$

$$L^{(2)}(\partial) = L^{(3)}(\partial) := (\varkappa+\nu)\,\Delta\, I_3 + (\delta+\varkappa-\nu)\, Q(\partial) + 2\,\alpha\, R(\partial),$$

$$L^{(4)}(\partial) := [(\gamma+\varepsilon)\,\Delta - 4\,\alpha)]\, I_3 + (\beta+\gamma-\varepsilon)\, Q(\partial) + 4\,\nu\, R(\partial),$$

$$L^{(5)}(\partial) := -\eta\,\nabla^{\top}, \quad L^{(6)}(\partial) := -\zeta\,\nabla^{\top},$$

$$R(\partial) := [-\varepsilon_{kjl}\partial_l]_{3\times 3}, \quad Q(\partial) := [\,\partial_k\partial_j\,]_{3\times 3}\,, \quad \nabla := [\partial_1, \partial_2, \partial_3],$$

აქ ε_{pqk} ლევი-ჩევიტას სიმბოლოა.

ამავე თავის 1.2 პარაგრაფში ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნის გამოყენებით აგებულია სტატიკის $L(\partial)$ ოპერატორის შესაბამისი ფუნდამენტური $\Gamma(x)$ მატრიცა და შესწავლილია მისი ყოფაქცევა უსასრულობისა და კოორდინატთა სათავის მიდამოში.

1.3 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები; ასევე ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო ამოცანები შესაბამისი ფორმალურად შეუღლებული $L^{*}(\partial)$ ოპერატორისათვის, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ ჩვენს მიერ ჩატარებულ გამოკვლევაში, კერძოდ, ინტეგრალური ოპერატორების ნულ-სივრცეების შესწავლაში.

1.4 პარაგრაფში გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დახმარებით სტატიკის განტოლებათა სისტემიდან წარმოქმნილი მატრიცული ოპერატორებისთვის და $[C^{2}(\overline{\Omega^{+}})]^{6}$ კლასის ნებისმიერი ვექტორ-ფუნქციებისათვის გლუვი $\Omega^{+} \subset \mathbb{R}^{3}$ არის შემთხვევაში გამოგვყავს სხვადასხვა ტიპის გრინის ფორმულები, რომლებიც სტანდარტული ზღვრული პროცედურების საშუალებით განზოგადდება ლიპშიცის არეებისათვის და უფრო ფართო კლასის ფუნქციებისთვის, კერძოდ, სობოლევ-სლობოდეცკის $[W_{2}^{1}(\Omega^{+})]^{7}$ სივრცეებისთვის.

1.5 პარაგრაფის 1.5.1 ქვეპარაგრაფში განხილულია სტატიკის განტოლების შესაბამისი შიგა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. მტკიცდება, რომ დირიხლეს, რობენის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი სობოლევ-სლობოდეცკის ფუნქციათა შესაბამის სივრცეებში, ხოლო ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი განისაზღვრება გარკვეული სტრუქტურის მქონე შესაკრები ვექტორის სიზუსტით, რომელიც ელემენტარული წრფივი ფუნქციების საშუალებით აგებულია ცხადი სახით.

1.5.2 ქვეპარაგრაფი ეძღვნება გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის გამოკვლევას. უსასრულო არის შემთხვევაში გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის შესწავლა ხდება უსასრულობის მიდამოში გარკვეული ასიმპტოტიკის მქონე ვექტორ-ფუნქციათა კლასში. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია გარე ამოცანების განხილვა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სპეციალურ კლასში, რადგან ზოგადად თერმოსტატიკის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი უსასრულობის მიდამოში არ ქრება; კერძოდ, გადაადგილების ვექტორი უნდა ვეძიოთ უსასრულობის მიდამოში შემოსაზღვრულ ფუნქციათა კლასში, ხოლო ტემპერატურის ფუნქცია კი - უსასრულობის მიდამოში ქრობად ფუნქციათა კლასში. აღნიშნულ ქვეპარაგრაფში შემოღებულია ასეთ ვექტორ-ფუნქციათა კლასი $Z(\Omega^{-})$, დამტკიცებულია რამდენიმე დამხმარე დებულება და შესწავლილია გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ

დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი ვექტორ-ფუნქციათა $[W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ სივრცეში.

ამავე ქვეპარაგრაფში შეუღლებული გარე ამოცანების ამონახსნებისთვის დადგენილია ასიმპტოტური ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში და შემოღებულია შესაბამისი $Z^*(\Omega^-)$ კლასი, ხოლო 1.5.3 ქვეპარაგრაფში დამტკიცებულია შესაბამისი ერთადერთობის დებულებები. ნაჩვენებია, რომ შეუღლებულ დირიხლეს შიგა და გარე, ასევე ნეიმანის გარე ერთგვაროვან ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი, ხოლო ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში ზოგადი ამონახსენია გარკვეული სტრუქტურის მქონე ვექტორი, რომლის პირველი ექვსი კომპონენტი შეესაბამება ჰემიტროპული თეორიის ხისტი გადაადგილების ვექტორს, ხოლო მეშვიდე კომპონენტი ნებისმიერი მუდმივია. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნადობის საკითხის შესწავლისას, კერძოდ, შესაბამისი შეუღლებული ოპერტორების ნულ-სივრცეების გასაანალიზებლად.

1.6 პარაგრაფში ჰემიტროპული დრეკადობის თეორიის სტატიკის $L(\partial)$ და $L^*(\partial)$ ოპერატორების ფუნდამენტური მატრიცის საშუალებით აგებულია ზედაპირული - მარტივი და ორმაგი ფენის, და მოცულობითი ანუ ნიუტონის პეტენციალები და გამოკვლეულია მათი თვისებები. დადგენილია ზედაპირული პეტენციალების წყვეტის ფორმულები და ნაჩვენებია, რომ ისინი ეკუთვნიან შესაბამისად $Z(\Omega^-)$ და $Z^*(\Omega^-)$ კლასებს. გამოყვანილია ასევე ზოგადი ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები შიგა და გარე უსასრულო არეების შემთხვევაში.

1.7 პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემები რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასებში. კერძოდ, 1.7.1 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს შიგა სასაზღვრო ამოცანა და ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^1(\overline{\Omega^+})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^7$ კლასში. მოცემულია დირიხლეს შიგა ამოცანის განოკვლევის ორი მეთოდი. პირველი დაფუძნებულია ამონახსნის ორმაგი ფენის $W(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე, ხოლო მეორე მიდგომა - ამონახსნის მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე.

ორივე შემთხვევაში დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. პირველ შემთხვევაში ეს სისტემა წარმოადგენს ნორმალურად ამოხსნად სინგულარულ ინტეგრალურ გან-

ტოლებათა სისტემას, ხოლო მეორე შემთხვევაში ინტეგრალური ოპერატორი არის მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო მნიშვნელობით წარმოშობილი -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი დადებითად განსაზღვრული მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცით. ნაჩვენებია ამ ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და მათი ნულ-სივრცის ტრივიალურობა, რაც ეკვივალენტურია აღნიშნული ინტეგრალური ოპერატორების შებრუნებადობისა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში. აქედან კი ტრივიალურად გამომდინარეობს დირიხლეს სასზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულებები.

ანალოგიური მიდგომით, 1.7.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია, რომ ის ამოხსნადია ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალით.

1.7.3 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია, რომ რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში იგი ცალსახად ამოხსნადია და მისი ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების $W(g) + aV(g)$ წრფივი კომბინაციით, სადაც a რაიმე დადებითი მუდმივია, ხოლო g სიმკვრივე განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

შიგა ამოცანის ანალოგიურად, აქაც დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალითაც.

ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^+})]^7 \cap [C^2(\Omega^+)]^7$ სივრცეში გამოკვლეულია 1.7.4 ქვეპარაგრაფში. მარტივი ფენის პოტენციალის საშუალებით ამ სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დაყვანილია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. ნაჩვენებია, რომ აღნიშნულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით წარმოშობილი მატრიცული სინგულარული ოპერატორი ფრედჰოლმურია ნულოვანი ინდექსით და ამ ოპერატორის გული შვიდგანზომილებიან სივრცეს ქმნის. აქედან გამომდინარე ამოწერილია ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

მეორე თავში შესწავლილია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები უბნობრივ ერთგვაროვანი ჰემიტროპული კომპოზიტური სხეულებისათვის. კერძოდ, განხილულია სამი შემთხვევა, როდესაც

(1) კომპოზიტურ სხეულს უკავია მთელი სივრცე, რომელიც შედგება სასრული D_1 არისა და მისი უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_1$ დამატებისგან, $\partial D_1 = \partial D_2$;

(2) კომპოზიტურ სხეულს უკავია სასრული არე, რომელიც შედგება ორი ურთიერთმოსაზღვრე Ω_1 და Ω_2 არისაგან (ამასთან Ω_1 არე მდებარეობს Ω_2 არის შიგნით და $S_1 = \partial\Omega_1$, ხოლო $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$, სადაც S_1 მდებარეობს S_2-ის შიგნით);

(3) კომპოზიტურ სხეულს უკავია უსასრულო არე, რომელიც შედგება ცარიელი D_0 სიღრუვის შემცველი სასრული D_1 და უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D}_0 \cup \overline{D}_1)$ არეებისგან; ამასთან $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$, სადაც S_0 მდებარეობს S_1-ის შიგნით, ხოლო $\partial D_2 = S_1$.

სამივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ განსხვავებული არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი ჰემიტროპული მასალით.

2.1 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სასრული კომპოზიტური არისათვის, განხილულია ამ ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ ძირითად საკონტაქტო და დირიხლეს, რობენისა და შერეული ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი. ნეიმანის ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის შემთხვევაში ნაჩვენებია, რომ ამონახსენთა საბაზისო სივრცე შვიდგანზომილებიანია.

2.2 პარაგაფში განხილულია ტრანსმისიის ამოცანების ამონახსნების არსებობის საკითხი. კერძოდ, 2.2.1 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ არისათვის და დამტკიცებულია, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, $(U^{(1)}, U^{(2)})$, სადაც $U^{(j)}$, $j = 1, 2$, წარმოიდგინება შესაბამისი ფუნდამენტური მატრიცით აგებული მარტივი ფენის პოტენციალებით: $U^{(1)} = V^{(1)}(h)$ და $U^{(2)} = V^{(2)}(g)$, ხოლო h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

2.2.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა სასრული კომპოზიტური არისათვის: $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$ ერთადერთია და თითოეული ვექტორი წარმოიდგინება შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალებით: $U^{(1)} = V^{(1)}_{S_1}(h)$ და $U^{(2)} = V^{(2)}_{S_1}(g) + V^{(2)}_{S_2}(\varphi)$. საძიებელი g, h და φ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

2.2.3 ქვეპარაგარფში კი გამოკვლეულია რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა D_0 სიღრუვის შემცველი უსასრულო $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ კომპოზიტური არისათვის, როდესაც $\overline{D}_1$ არის შიგა საზღვარზე მოცემულია რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობა. ამ შემთხვევაშიც პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ განსახილველი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალებით, რომელთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

1 ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

1.1 ზედაპირთა კლასები. ფუნქციათა სივრცეები. ველის განტოლებები

სამგანზომილებიანი ევკლიდეს სივრცე აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^3$ სიმბოლოთი. ვთქვათ, k არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, $k \geqslant 0$, ხოლო $\alpha \in (0;1]$ და $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ რაიმე ბმული არეა, რომლის საზღვარია $S = \partial\Omega$. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი $z \in S$ წერტილის შესაბამის $O\xi_1\xi_2\xi_3$ ლოკალურ სისტემაში ამ ზედაპირის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$\xi_3 = \varphi(\xi_1, \xi_2). \tag{1.1}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $O\xi_3$ ღერძი ემთხვევა $n(z)$ ნორმალს და $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < d$ ე.ი. φ ფუნქცია განსაზღვრულია d რადიუსიან Ω_0 წრეზე:

$$\Omega_0 := \Big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} < d\Big\}.$$

ვიტყვით, რომ $S \in C^k$, თუ ყოველი $z \in S$ წერტილისთვის $\varphi \in C^k(\Omega_0)$. ცხადია, Ω_0 არე მდებარეობს $z \in S$ წერტილზე გავლებულ მხებ სიბრტყეში.

ანალოგიური აზრი აქვს შემდეგ ჩანაწერს: $S \in C^{k,\alpha}$, ე.ი. ამ შემთხვევაში $\varphi \in C^{k,\alpha}(\Omega_0)$. $C^{1,\alpha}$ კლასის ზედაპირს უწოდებენ ლიაპუნოვის ზედაპირს, ხოლო $C^{0,1}$ კლასის ზედაპირებს კი - ლიფშიცის ზედაპირებს.

ჩვენს გამოკვლევაში დაგვჭირდება სხვადასხვა ტიპის ფუნქციური სივრცეები, რომელთა განმარტებები და ძირითადი თვისებები მოცემულია, მაგალითად, შემდეგ მონოგრაფიებში: [25], [14], [31], [17], [45], [46].

$C^k(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ Ω არეში k-ჯერ უწყვეტად წარმოებად ფუნქციათა სიმრავლე. $C^k(\overline{\Omega})$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $C^k(\Omega)$ კლასისი იმ ფუნქციათა საიმრავლე, რომელთა კერძო წარმოებულები k რიგამდე (ჩათვლით) უწყვეტად გაგრძელებადია Ω არის $\partial\Omega$ საზღვარზე. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ $C^k(\overline{\Omega})$ კლასის იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომელთა k რიგის წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას α მაჩვენებლით, ე.ი.

$$|\partial^{\mathrm{m}} u(x) - \partial^{\mathrm{m}} u(y)| \leqslant A|x-y|^\alpha, \tag{1.2}$$

სადაც $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ მულტი-ინდექსია, რომლის სიგრძეა

$$k : |\mathrm{m}| = m_1 + m_2 + m_3 = k.$$

ანალოგიურად განიმარტება $C^k(S)$ და $C^{k,\alpha}(S)$ ფუნქციათა კლასები. კერძოდ, $f \in C^{k,\alpha}(S)$ ნიშნავს, რომ f ფუნქციას $x \in S$ წერტილში S ზედაპირის მხები მიმართულებით გააჩნია k რიგამდე (ჩათვლით) უწყვეტი წარმოებულები, ხოლო k რიგის წარმოებულები აკმაყოფილებენ ჰელდერის (1.2) პირობას α მაჩვენებლით.

$C^{\infty}_{comp}(\Omega)$ სიმბოლო აღნიშნავს უსასრულოდ გლუვი რეგულარული ფუნქციების კლასს, რომელთაც გააჩნიათ კომპაქტური საყრდენი Ω არეში.

$W^1_2(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ იმ ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ კვადრატით ჯამებადი განზოგადებული პირველი რიგის წარმოებული Ω არეში (სობოლევის ფუნქციათა სივრცე).

$W^1_{2,loc}(\Omega)$ სიმბოლო აღნიშნავს იმ ფუნქციების სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნიან $W^1_2(\Omega_0)$ სივრცეს ნებისმიერი Ω_0 არისთვის, სადაც $\overline{\Omega}_0$ კომპაქტია და $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

$W^1_{2,comp}(\Omega)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ისეთი ზომადი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ კომპაქტური საყრდენი Ω არეში და თავის პირველი რიგის წარმოებულებთან ერთად კვადრატით ჯამებადია Ω არეში.

შევნიშნოთ, რომ $W^0_2(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ აღნიშნავს ლებეგის აზრით ზომად, კვადრატით ჯამებად ფუნქციათა სიმრავლეს. ანალოგიურად, $W^0_{2,loc}(\Omega) \equiv L_{2,loc}(\Omega)$ აღნიშნავს ლოკალურად კვადრატით ჯამებად, ზომად ფუნქციათა სიმრავლეს, ხოლო Ω არეში კომპაქტური საყრდენის მქონე კვადრატით ჯამებადი, ზომადი ფუნქციების სიმრავლე აღინიშნება შემდეგნაირად: $W^0_{2,comp}(\Omega) \equiv L_{2,comp}(\Omega)$.

$H^S(\Omega)$ სიმბოლოთი აღნიშნულია ბესელის პოტენციალთა სივრცე, $S \in \mathbb{R}$.

ვექტორ-ფუნქციას ვუწოდოთ რეგულარული Ω არეში თუ მისი ყველა კომპონენტი ეკუთვნის $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ კლასს.

ვთქვათ, $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ შემოსაზღვრული არეა, რომლის საზღვარია მარტივად ბმული შეკრული გლუვი ზედაპირი $\partial\Omega =: S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$; $\overline{\Omega^+} = \Omega^+ \cup S$ და $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^+}$.

ვიგულისხმოთ, რომ $\overline{\Omega} \in \{\overline{\Omega^+}, \overline{\Omega^-}\}$ არე შევსებულია დრეკადი ერთგვაროვანი ჰემიტროპული მასალით.

ქვემოთ ყველგან $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ და $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ აღნიშნავს გადაადგილებისა და მიკრობრუნვის ვექტორებს, ხოლო ϑ - ტამპერატურის ნაზრდს - ტემპერატურის განაწილების ფუნქციას. აქ და ქვემოთ სიმბოლო $(\cdot)^\top$ აღნიშნავს

ტრანსპონირების ოპერაციას. შევნიშნოთ, რომ ჰემიტროპულ დრეკადობის თეორიაში მიკრობრუნვის ვექტორი ω კინემატიკურად განსხვავდება მაკრობრუნვის ვექტორისგან, რომელიც გამოისახება ვექტორით $\dfrac{1}{2}\operatorname{curl} u$.

ამ ნაშრომში ყველგან სიმბოლო $a \cdot b$ აღნიშნავს ორი a და b ვექტორის ნამდვილ სკალარულ ნამრავლს, ე.ი.

$$a \cdot b := \sum_{k=1}^{N} a_k b_k \qquad \forall a, b \in \mathbb{C}^N \qquad (\text{ან} \quad a, b \in \mathbb{R}^N).$$

ძალური ძაბვის $\{\tau_{pq}\}$ და მომენტური ძაბვის $\{\mu_{pq}\}$ ტენზორები დრეკადობის ჰემიტროპულ წრფივ თეორიაში გამოისახებიან შემდეგნაირად (კონსტიტუციური ტოლობები - ჰუკის განზოგადებული კანონი):

$$\tau_{pq} = \tau_{pq}(U) := (\mu+\alpha)\partial_p u_q + (\mu-\alpha)\partial_q u_p + \lambda\delta_{pq}\operatorname{div} u + \delta\,\delta_{pq}\operatorname{div}\omega +$$
$$+ (\varkappa+\nu)\partial_p\omega_q + (\varkappa-\nu)\partial_q\omega_p - 2\alpha\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}\omega_k - \delta_{pq}\,\eta\,\vartheta, \tag{1.3}$$

$$\mu_{pq} = \mu_{pq}(U) := \delta\,\delta_{pq}\operatorname{div} u + (\varkappa+\nu)\Big[\partial_p u_q - \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}\omega_k\Big] + \beta\,\delta_{pq}\operatorname{div}\omega +$$
$$+(\varkappa-\nu)\Big[\partial_q u_p - \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{qpk}\omega_k\Big] + (\gamma+\varepsilon)\partial_p\omega_q + (\gamma-\varepsilon)\partial_q\omega_p - \delta_{pq}\zeta\vartheta, \tag{1.4}$$

სადაც $U = (u, \omega, \vartheta)^\top$, δ_{pq} კრონეკერის სიმბოლოა, ε_{pqk} ლევი-ჩევიტას სიმბოლოა, α, β, γ, δ, λ, μ, ν, $\varkappa$ და ε მატერიალური მუდმივებია, $\eta > 0$ და $\zeta > 0$ მუდმივებია, რომლებიც აღწერენ მექანიკური და თერმული ველების ურთიერთკავშირს (იხ. [1], [7]), ხოლო $\partial = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, 3$.

თერმოდრეკადობის თეორიის დინამიკის წრფივ განტოლებებს ჰემიტროპული სხეულებისათვის თერმული ეფექტების გათვალისწინებით აქვთ შემდეგი სახე (იხ., მაგალითად, [7]):

$$\sum_{p=1}^{3} \partial_p\,\tau_{pq}(x,t) + \varrho\,F_q(x,t) = \varrho\,\partial_{tt}^2\,u_q(x,t), \quad q = 1, 2, 3,$$
$$\sum_{p=1}^{3} \partial_p\,\mu_{pq}(x,t) + \sum_{l,r=1}^{3} \varepsilon_{qlr}\tau_{lr}(x,t) + \varrho\,G_q(x,t) = \mathcal{I}\,\partial_{tt}^2\,\omega_q(x,t), \quad q = 1, 2, 3,$$
$$\kappa'\Delta\,\vartheta(x,t) - \eta\,\partial_t\operatorname{div} u(x,t) - \zeta\,\partial_t\operatorname{div}\omega(x,t) - \kappa''\,\partial_t\,\vartheta(x,t) + Q(x,t) = 0,$$

სადაც t დროითი ცვლადია, $\partial_t = \partial/\partial t$, $F = (F_1, F_2, F_3)^\top$ და $G = (G_1, G_2, G_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა და მოცულობითი მომენტი (ერთეულოვან მასაზე გათვლით), Q სითბოს წყაროს სიმკვრივა, ϱ - დრეკადი სხეულის სიმკვრივე, $\mathcal{I}$ მუდმივი ახასიათებს მიკრობრუნვის ინერციის მომენტს (ერთეულოვან მასაზე

გათვლით); $\kappa' = \dfrac{\lambda_0}{T_0}$ და $\kappa'' = \dfrac{C_0}{T_0}$, სადაც $\lambda_0 > 0$ სითბოგამტარებლობის კოეფიციენტია, $T_0 > 0$ საწყისი ტემპერატურაა, ხოლო $C_0 > 0$ სითბოტევადობის კოეფიციენტია.

(1.3)-(1.4) სისტემის საშუალებით დინამიკის განტოლებები შეიძლება შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\,\Delta u(x,t) + (\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad\,div}\,u(x,t) + (\varkappa+\nu)\Delta\,\omega(x,t) + \\
&\quad +(\delta+\varkappa-\nu)\ \mathbf{grad\,div}\,\omega(x,t) + 2\alpha\,\mathbf{curl}\,\omega(x,t) - \\
&\quad -\eta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x,t) + \varrho\,F(x,t) = \varrho\,\partial_{tt}^2 u(x,t)\,, \\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x,t) + (\delta+\varkappa-\nu)\,\mathbf{grad\,div}\,u(x,t) + 2\alpha\,\mathbf{curl}\,u(x,t) + \\
&\quad +(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x,t) + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad\,div}\,\omega(x,t) + 4\nu\,\mathbf{curl}\,\omega(x,t) - \\
&\quad -4\alpha\,\omega(x,t) - \zeta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x,t) + \varrho\,G(x,t) = \mathcal{I}\,\partial_{tt}^2\omega(x,t)\,, \\
&\kappa'\Delta\,\vartheta(x,t) - \eta\partial_t\,\mathrm{div}\,u(x,t) - \zeta\,\partial_t\,\mathrm{div}\,\omega(x,t) - \kappa''\,\partial_t\vartheta(x,t) + Q(x,t) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

სადაც Δ ლაპლასის ოპერატორია.

თუ ამ სისტემაში მონაწილე ყველა სიდიდე ჰარმონიულადაა დამოკიდებული დროზე, ე.ი. $u(x,t) = u(x)\,e^{-it\sigma}$, $\omega(x,t) = \omega(x)\,e^{-it\sigma}$, $\vartheta(x,t) = \vartheta(x)\,e^{-it\sigma}$, $F(x,t) = F(x)\,e^{-it\sigma}$, $G(x,t) = G(x)\,e^{-it\sigma}$, $Q(x,t) = Q(x)\,e^{-it\sigma}$, სადაც $\sigma \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ წარმოსახვითი ერთეულია, მაშინ მივიღებთ თერმოდრეკადობის ჰემიტროპული თეორიის მდგრადი რხევის განტოლებებს:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\Delta u(x) + (\lambda+\mu-\alpha)\,\mathbf{grad\,div}\,u(x) + \varrho\,\sigma^2 u(x) + \\
&\quad +(\varkappa+\nu)\Delta\omega(x) + (\delta+\varkappa-\nu)\,\mathbf{grad\,div}\,\omega(x) + 2\alpha\,\mathbf{curl}\,\omega(x) - \\
&\quad -\eta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x) = -\varrho\,F(x), \\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x) + (\delta+\varkappa-\nu)\,\mathbf{grad\,div}\,u(x) + 2\alpha\,\mathbf{curl}\,u(x) + \\
&\quad +(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x) + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathbf{grad\,div}\,\omega(x) + 4\nu\,\mathbf{curl}\,\omega(x) - \\
&\quad -\zeta\ \mathbf{grad}\,\vartheta(x) + (\mathcal{I}\,\sigma^2 - 4\alpha)\,\omega(x) = -\varrho\,G(x), \\
&(\,\kappa'\,\Delta + i\,\sigma\,\kappa''\,)\,\vartheta(x) + i\,\eta\,\sigma\ \mathrm{div}\,u(x) + i\,\zeta\,\sigma\ \mathrm{div}\,\omega(x) = -Q(x)\,;
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

აქ u, ω, F და G კომპლექსურმნიშვნელობიანი ვექტორ-ფუნქციებია, ϑ და Q კომპლექსურმნიშვნელობიანი სკალარული ფუნქციებია, ხოლო σ სიხშირის პარამეტრია.

თუ $\sigma = \sigma_1 + i\,\sigma_2$ კომპლექსური პარამეტრია, ამასთან $\sigma_2 \neq 0$, მაშინ (1.6) სისტემას ეწოდება ფსევდო-რხევის განტოლებათა სისტემა, ხოლო, როცა $\sigma = 0$,

ისინი წარმოადგენენ სტაციონარული წონასწორობის განტოლებებს.

შემოვიღოთ (1.6) სისტემის შესაბამისი მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი:

$$L(\partial,\sigma) := \begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial,\sigma) & L^{(2)}(\partial,\sigma) & L^{(5)}(\partial,\sigma) \\ L^{(3)}(\partial,\sigma) & L^{(4)}(\partial,\sigma) & L^{(6)}(\partial,\sigma) \\ L^{(7)}(\partial,\sigma) & L^{(8)}(\partial,\sigma) & L^{(9)}(\partial,\sigma) \end{bmatrix}_{7\times 7}, \tag{1.7}$$

სადაც

$$L^{(1)}(\partial,\sigma) := [(\mu+\alpha)\,\Delta + \varrho\,\sigma^2]\,I_3 + (\lambda+\mu-\alpha)\,Q(\partial),$$

$$L^{(2)}(\partial,\sigma) = L^{(3)}(\partial,\sigma) := (\varkappa+\nu)\,\Delta\,I_3 + (\delta+\varkappa-\nu)\,Q(\partial) + 2\,\alpha\,R(\partial),$$

$$L^{(4)}(\partial,\sigma) := [(\gamma+\varepsilon)\,\Delta + (\mathcal{I}\,\sigma^2 - 4\,\alpha)]\,I_3 + (\beta+\gamma-\varepsilon)\,Q(\partial) + 4\,\nu\,R(\partial),$$

$$L^{(5)}(\partial,\sigma) := -\eta\,\nabla^\top, \quad L^{(6)}(\partial,\sigma) := -\zeta\,\nabla^\top, \quad L^{(7)}(\partial,\sigma) := i\,\eta\,\sigma\,\nabla,$$

$$L^{(8)}(\partial,\sigma) := i\,\zeta\,\sigma\,\nabla, \quad L^{(9)}(\partial,\sigma) := \kappa'\,\Delta + i\,\sigma\,\kappa''.$$

აქ და ქვემოთ I_k აღნიშნავს $k\times k$ განზომილების ერთეულოვან მატრიცას და

$$R(\partial) := [-\varepsilon_{kjl}\partial_l]_{3\times 3}, \quad Q(\partial) := [\,\partial_k\partial_j\,]_{3\times 3}\,, \quad \nabla := [\partial_1,\partial_2,\partial_3]. \tag{1.8}$$

მარტივად დავინახავთ, რომ $v=(v_1,v_2,v_3)^\top$ ვექტორისთვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$R(\partial)v = \mathrm{curl}\,v, \qquad Q(\partial)\,v = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,v. \tag{1.9}$$

პირდაპირი შემოწმებით შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგი იგივეობები:

$$R(-\partial) = -R(\partial) = [R(\partial)]^\top, \quad Q(\partial)\,R(\partial) = R(\partial)\,Q(\partial) = 0, \tag{1.10}$$

$$Q(\partial) = [Q(\partial)]^\top, \quad [R(\partial)]^2 = Q(\partial) - \Delta I_3, \quad [Q(\partial)]^2 = Q(\partial)\,\Delta.$$

ზემოთ მოყვანილი აღნიშვნების ძალით (1.6) სისტემა გადაიწერება შემდეგი მატრიცული ფორმით:

$$L(\partial,\sigma)U(x) = \Phi(x), \tag{1.11}$$

$$U = (u,\omega,\vartheta)^\top, \qquad \Phi = (-\varrho\,F, -\varrho\,G, -Q)^\top. \tag{1.12}$$

შევნიშნოთ, რომ $L(\partial,\sigma)$ დიფერენციალური ოპერატორი არაა ფორმალურად თვითშეუღლებული. გარდა ამის, დიფერენციალური ოპერატორი

$$L(\partial) := L(\partial, 0) \tag{1.13}$$

შეესაბამება სტატიკის წონასწორობის შემთხვევას, ხოლო ფორმალურად თვით-შეუღლებული დიფერენციალური ოპერატორი

$$L_0(\partial) := \begin{bmatrix} L_0^{(1)}(\partial) & L_0^{(2)}(\partial) & [0]_{3\times 1} \\ L_0^{(3)}(\partial) & L_0^{(4)}(\partial) & [0]_{3\times 1} \\ [0]_{1\times 3} & [0]_{1\times 3} & \kappa'\,\Delta \end{bmatrix}_{7\times 7}, \tag{1.14}$$

სადაც

$$L_0^{(1)}(\partial) := (\mu+\alpha)\Delta\, I_3 + (\lambda+\mu-\alpha)\, Q(\partial),$$

$$L_0^{(2)}(\partial) = L_0^{(3)}(\partial) := (\varkappa+\nu)\Delta\, I_3 + (\delta+\varkappa-\nu)\, Q(\partial),$$

$$L_0^{(4)}(\partial) := (\gamma+\varepsilon)\Delta\, I_3 + (\beta+\gamma-\varepsilon)\, Q(\partial),$$

წარმოადგენს (1.7) და (1.13) ოპერატორების მთავარ ერთგვაროვან ნაწილს.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{aligned} \widetilde{L}(\partial,\sigma) &:= \begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial,\sigma) & L^{(2)}(\partial,\sigma) \\ L^{(3)}(\partial,\sigma) & L^{(4)}(\partial,\sigma) \end{bmatrix}_{6\times 6}, \\ \widetilde{L}_0(\partial) &:= \begin{bmatrix} L_0^{(1)}(\partial) & L_0^{(2)}(\partial) \\ L_0^{(3)}(\partial) & L_0^{(4)}(\partial) \end{bmatrix}_{6\times 6}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

ეს ოპერატორები შეესაბამებიან ჰემიტროპული სხეულის დრეკადობის თეორიის განტოლებებს, როცა თერმული ეფექტები უგულებელყოფილია (იხ. [34]). ცხადია, რომ $L_0(\partial)$, $\widetilde{L}(\partial,\sigma)$ და $\widetilde{L}_0(\partial)$ ფორმალურად თვითშეუღლებული ოპერატორებია.

ახლა ამოვწეროთ თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა ჰემიტროპული სხეულების შემთხვევაში:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\Delta u(x)+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,u(x)+\\
&\qquad+(\varkappa+\nu)\Delta\omega(x)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad\,div}\,\omega(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,\omega(x)-\\
&\qquad-\eta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x)=-\varrho\,F(x),\\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad\,div}\,u(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,u(x)+\\
&\qquad+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\omega(x)+4\nu\,\mathrm{curl}\,\omega(x)-\\
&\qquad-\zeta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x)-4\alpha)\,\omega(x)=-\varrho\,G(x),\\
&\kappa'\,\Delta\,\vartheta(x)=-Q(x)\,.
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

ამ სისტემის შესაბამის მატრიცულ დიფერენციალურ ოპერატორს ექნება შემდეგი სახე:

$$
L(\partial)=\begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial) & L^{(2)}(\partial) & L^{(5)}(\partial)\\ L^{(3)}(\partial) & L^{(4)}(\partial) & L^{(6)}(\partial)\\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \kappa'\Delta \end{bmatrix}_{7\times7}, \tag{1.17}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
&L^{(1)}(\partial):=(\mu+\alpha)\,\Delta\,I_3+(\lambda+\mu-\alpha)\,Q(\partial),\\
&L^{(2)}(\partial)=L^{(3)}(\partial):=(\varkappa+\nu)\,\Delta\,I_3+(\delta+\varkappa-\nu)\,Q(\partial)+2\,\alpha\,R(\partial),\\
&L^{(4)}(\partial):=[(\gamma+\varepsilon)\,\Delta-4\,\alpha)]\,I_3+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,Q(\partial)+4\,\nu\,R(\partial),\\
&L^{(5)}(\partial):=-\eta\,\nabla^\top,\quad L^{(6)}(\partial):=-\zeta\,\nabla^\top.
\end{aligned}
$$

როცა თერმული ეფექტები უგულებელყოფილია, სტატიკის განტოლებათა სისტემას ექნება შემდეგი სახე:

$$
\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\Delta u(x)+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div}\,u(x)+(\varkappa+\nu)\Delta\omega(x)+\\
&\qquad+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad\,div}\,\omega(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,\omega(x)=-\varrho\,F(x),\\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad\,div}\,u(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,u(x)+\\
&\qquad+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad\,div}\,\omega(x)+4\nu\,\mathrm{curl}\,\omega(x)-\\
&\qquad-4\alpha\,\omega(x)=-\varrho\,G(x),
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

ხოლო მისი შესაბამისი მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი გამოისახება შემდეგნაირად:

$$
\widetilde{L}(\partial)=\begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial) & L^{(2)}(\partial)\\ L^{(3)}(\partial) & L^{(4)}(\partial) \end{bmatrix}_{6\times6}. \tag{1.19}
$$

სადაც

$$
\begin{aligned}
&L^{(1)}(\partial) := (\mu+\alpha)\Delta I_3 + (\lambda+\mu-\alpha)Q(\partial),\\
&L^{(2)}(\partial) = L^{(3)}(\partial) := (\varkappa+\nu)\Delta I_3 + (\delta+\varkappa-\nu)Q(\partial) + 2\alpha R(\partial), \qquad (1.20)\\
&L^{(4)}(\partial) := [(\gamma+\varepsilon)\Delta - 4\alpha]I_3 + (\beta+\alpha-\varepsilon)Q(\partial) + 4\nu R(\partial).
\end{aligned}
$$

ჩვენი მიზანია სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა სტატიკის (1.16) განტოლებათა სისტემისათვის. ამ სისტემის განხილვისას, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ თუ F, G და Q ნამდვილი სიდიდეებია, მაშინ u, ω და ϑ, აგრეთვე, ნამდვილი სიდიდეები იქნება.

ძალური ძაბვის $\tau^{(n)} = \big(\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}, \tau_3^{(n)}\big)^\top$ ვექტორისა და მომენტური ძაბვის $\mu^{(n)} = \big(\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}\big)^\top$ ვექტორის კომპონენტები, რომლებიც მოქმედებენ $n = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ზედაპირის ელემენტზე, გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$
\tau_q^{(n)} = \sum_{p=1}^{3} \tau_{pq} n_p, \qquad \mu_q^{(n)} = \sum_{p=1}^{3} \mu_{pq} n_p, \qquad q = 1, 2, 3. \tag{1.21}
$$

ცნობილია, რომ $n = (n_1, n_2, n_3)$ ნორმალის მქონე ზედაპირის მიმართ სითბოს ნაკადის ვექტორის ნორმალური მდგენელი გამოითვლება ტემპერატურის ფუნქციის წარმოებულის საშუალებით:

$$
\kappa'\, n \cdot \nabla\vartheta = \kappa' \sum_{p=1}^{3} n_p\, \partial_p \vartheta = \kappa'\, \partial_n \vartheta, \tag{1.22}
$$

სადაც $\partial_n = \partial/\partial n$ აღნიშნავს ნორმალის მიმართულებით წარმოებულს.

ქვემოთ ყველგან ექვსგანზომილებიან $\big(\tau^{(n)}, \mu^{(n)}\big)^\top$ ვექტორს ვუწოდებთ მექანიკური თერმოძაბვის ვექტორს, ხოლო შვიდგანზომილებიან $\Big(\tau^{(n)}, \mu^{(n)}, \kappa'\, \partial_n \vartheta\Big)^\top$ ვექტორს - განზოგადებულ თერმოძაბვის ვექტორს.

შემოვიღოთ მექანიკური თერმოძაბვისა და განზოგადებული თერმოძაბვის სასაზღვრო ოპერატორები და მათი შეუღლებული ოპერატორები:

$$
\mathcal{T}(\partial, n) = \begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial, n) & T^{(2)}(\partial, n) & -\eta\, n^\top \\ T^{(3)}(\partial, n) & T^{(4)}(\partial, n) & -\zeta\, n^\top \end{bmatrix}_{6\times 7}, \tag{1.23}
$$

$$
\mathcal{P}(\partial, n) = \begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial, n) & T^{(2)}(\partial, n) & -\eta\, n^\top \\ T^{(3)}(\partial, n) & T^{(4)}(\partial, n) & -\zeta\, n^\top \\ [0]_{1\times 3} & [0]_{1\times 3} & \kappa'\, \partial_n \end{bmatrix}_{7\times 7}, \tag{1.24}
$$

სადაც

$$T^{(j)} = \big[T^{(j)}_{pq}\big]_{3\times 3}, \quad j=\overline{1,4}, \quad n^\top = (n_1,n_2,n_3)^\top,$$

$$T^{(1)}_{pq}(\partial,n) = (\mu+\alpha)\delta_{pq}\partial_n + (\mu-\alpha)n_q\partial_p + \lambda n_p\partial_q,$$

$$T^{(2)}_{pq}(\partial,n) = (\varkappa+\nu)\delta_{pq}\partial_n + (\varkappa-\nu)n_q\partial_p + \delta n_p\partial_q - 2\alpha\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}n_k,$$

$$T^{(3)}_{pq}(\partial,n) = (\varkappa+\nu)\delta_{pq}\partial_n + (\varkappa-\nu)n_q\partial_p + \delta n_p\partial_q,$$

$$T^{(4)}_{pq}(\partial,n) = (\gamma+\varepsilon)\delta_{pq}\partial_n + (\gamma-\varepsilon)n_q\partial_p + \beta n_p\partial_q - 2\nu\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}n_k.$$

მარტივი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი $U=(u,\omega,\vartheta)^\top$ ვექტორისთვის გვაქვს:

$$\mathcal{T}(\partial,n)\,U = \big(\tau^{(n)},\mu^{(n)}\big)^\top, \qquad \mathcal{P}(\partial,n)\,U = \big(\tau^{(n)},\mu^{(n)},\kappa'\,\partial_n\vartheta\big)^\top,$$

ე.ი. ექვსგანზომილებიანი $\mathcal{T}(\partial,n)\,U$ ვექტორი შეესაბამება მექანიკური თერმოძაბვის ვექტორს, ხოლო შვიდგანზომილებიანი $\mathcal{P}(\partial,n)\,U$ ვექტორი შეესაბამება განზოგადებულ თერმოძაბვის ვექტორს.

შემოვიღოთ სასაზღვრო ოპერატორები, რომლებიც მონაწილეობენ გრინის ფორმულებში და დაკავშირებულნი არიან შეუღლებულ დიფერენციალურ $L^*(\partial) := L^\top(-\partial)$ ოპერატორთან:

$$\mathcal{T}^*(\partial,n) = \begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \end{bmatrix}_{6\times7}, \tag{1.25}$$

$$\mathcal{P}^*(\partial,n) = \begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \kappa'\,\partial_n \end{bmatrix}_{7\times7}. \tag{1.26}$$

შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{T}(\partial,n)$ და $\mathcal{T}^*(\partial,n)$ ოპერატორების მთავარი ერთგვაროვანი ნაწილი ემთხვევა ერთმანეთს, ისევე, როგორც $\mathcal{P}(\partial,n)$ და $\mathcal{P}^*(\partial,n)$ ოპერატორების მთავარი ერთგვაროვანი ნაწილები.

გარდა ამისა, როცა თერმული ეფექტები უგულებელყოფილია, მაშინ ჰემიტროპული ძაბვის ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$T(\partial,n) = \begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) \end{bmatrix}_{6\times6}. \tag{1.27}$$

ცხადია, რომ (1.22) და (1.26) ტოლობების ძალით $U = (u, \omega, 0)^\top$ და $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top$ ვექტორებისთვის გვაქვს (იხ., [34]): $\mathcal{T}(\partial, n)U = T(\partial, n)\widetilde{U}$.

1.2 ფუნდამენტური ამონახსენი

აქ ჩვენ გამოვიყენებთ ფურიეს განზოგადებულ გარდაქმნას და ცხადი სახით ავაგებთ სტატიკის $L(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტურ $\Gamma(x)$ მატრიცას, რომელიც არის დისტრიბუციული დიფერენციალური მატრიცული

$$L(\partial_x)\Gamma(x-y) = I_7\,\delta(x-y)$$

განტოლების ამონახსენი, სადაც $\delta(x-y)$ დირაკის დისტრიბუციაა. ამ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ ფუნდამენტური მატრიცის ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = [L(-i\,\xi)]^{-1} = \begin{bmatrix} \widehat{\Gamma}^{(1)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(2)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(5)}(\xi) \\ \widehat{\Gamma}^{(3)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{4)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(6)}(\xi) \\ \widehat{\Gamma}^{(7)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(8)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(9)}(\xi) \end{bmatrix}_{7\times 7}, \tag{1.28}$$

სადაც

$$\begin{aligned} &\widehat{\Gamma}^{(j)}(\xi) = [\widehat{\Gamma}^{(j)}_{pq}(\xi)]_{3\times 3} = \widetilde{a}_j(\xi)\,I_3 + \widetilde{b}_j(\xi)\,Q(\xi) + \widetilde{c}_j(\xi)\,R(\xi)\,, \quad j = \overline{1,4}, \\ &\widehat{\Gamma}^{(l)}(\xi) = [\widehat{\Gamma}^{(l)}_{pq}(\xi)]_{3\times 1} = \widetilde{c}_l(\xi)\,\xi^\top\,, \quad l = 5, 6, \\ &\widehat{\Gamma}^{(m)}(\xi) = [0]_{3\times 1}\,, \quad m = 7, 8, \\ &\widehat{\Gamma}^{(9)}(\xi) = -\frac{1}{\kappa'\,r^2}, \quad r = |\xi|, \end{aligned} \tag{1.29}$$

ხოლო

$$\widetilde{a}_1(\xi) = \frac{1}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big\{-d_1(\gamma+\varepsilon)r^2 - 4[\alpha d_1 + \alpha\mu(\gamma+\varepsilon) + 4\nu(\alpha\varkappa-\mu\nu)] - $$
$$ - \frac{16\alpha^2\mu}{r^2}\Big\},$$

$$\widetilde{a}_2(\xi) = \widetilde{a}_3(\xi) = \frac{1}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\{d_1(\varkappa+\nu)r^2 + 4\alpha[\mu(\varkappa+\nu) - 2(\mu\nu-\alpha\varkappa)]\},$$

$$\widetilde{a}_4(\xi) = -\frac{\mu+\alpha}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}(d_1r^2+4\alpha\mu),$$

$$\widetilde{b}_1(\xi) = \frac{1}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big\{d_1(\gamma+\varepsilon) + 4[\alpha d_1 + \alpha\mu(\gamma+\varepsilon) - 4\nu(\mu\nu-\alpha\varkappa)]\frac{1}{r^2} + $$
$$ + \frac{16\alpha^2\mu}{r^4}\Big\} - \frac{1}{d_2r^2(r^2+\lambda_1^2)}\Big(\beta+2\gamma+\frac{4\alpha}{r^2}\Big),$$

$$\widetilde{b}_2(\xi) = \widetilde{b}_3(\xi) = -\frac{1}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big\{d_1(\varkappa+\nu) + 4\alpha[\mu(\varkappa+\nu) - 2(\mu\nu-\alpha\varkappa)]\frac{1}{r^2}\Big\} + $$
$$ + \frac{\delta+2\varkappa}{d_2r^2(r^2+\lambda_1^2)},$$

$$\widetilde{b}_4(\xi) = \frac{\mu+\alpha}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big(d_1+\frac{4\alpha\mu}{r^2}\Big) - \frac{\lambda+2\mu}{d_2r^2(r^2+\lambda_1^2)},$$

$$\widetilde{c}_1(\xi) = \frac{4\,i}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big[-\nu d_1 + (\gamma+\varepsilon)(\mu\nu-\alpha\varkappa) - \frac{4\alpha^2\varkappa}{r^2}\Big],$$

$$\widetilde{c}_2(\xi) = \widetilde{c}_3(\xi) = \frac{2\,i}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)}\Big[\alpha d_1 - 2(\varkappa+\nu)(\mu\nu-\alpha\varkappa) + \frac{4\alpha^2\mu}{r^2}\Big],$$

$$\widetilde{c}_4(\xi) = \frac{4\,i\,(\mu+\alpha)(\mu\nu-\alpha\varkappa)}{d_1^2(r^2-\lambda_2^2)(r^2-\lambda_3^2)},$$

$$\widetilde{c}_5(\xi) = \frac{i}{\kappa'\,d_2r^2(r^2+\lambda_1^2)}\Big[\zeta(\delta+2\varkappa) - \eta(\beta+2\gamma) - \frac{4\alpha\eta}{r^2}\Big],$$

$$\widetilde{c}_6(\xi) = \frac{i}{\kappa'\,d_2r^2(r^2+\lambda_1^2)}[\eta(\delta+2\varkappa) - \zeta(\lambda+2\mu)].$$

აქ

$$d_1 := (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon) - (\varkappa+\nu)^2,$$

$$d_2 := (\lambda+2\,\mu)\,(\beta+2\,\gamma) - (\delta+2\,\varkappa)^2,$$

$$d_3 := (\mu+\alpha)\,(\mathcal{I}\,\sigma^2-4\alpha) + (\gamma+\varepsilon)\,\varrho\sigma^2 + 4\alpha^2, \tag{1.30}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{4\alpha(\lambda+2\mu)}{d_2} > 0,$$

$$\lambda_{2,3}^2 = \frac{4}{d_1^2}\Big\{2(\mu\nu-\alpha\chi)^2 - \alpha\mu d_1 \pm i2(\mu\nu-\alpha\chi)\sqrt{\big(\mu+\alpha[\alpha(\mu\gamma-\chi^2)+\mu(\alpha\varepsilon-\nu^2)]\big)}\Big\}.$$

აქედან კი ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნით მივიღებთ $\Gamma(x)$ ფუნდამენტური მატრიცის შემდეგ გამოსახულებას (იხ. [11], [36]):

$$\Gamma(x)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big[\widehat{\Gamma}(\xi)\big]=\begin{bmatrix}[\Gamma^{(1)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(2)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(5)}_{pq}(x)]_{3\times1}\\ [\Gamma^{(3)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(4)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(6)}_{pq}(x)]_{3\times1}\\ [\Gamma^{(7)}_{pq}(x)]_{1\times3} & [\Gamma^{(8)}_{pq}(x)]_{1\times3} & \Gamma^{(9)}(x)\end{bmatrix}_{7\times7}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix}\Psi_1(x)I_3 & \Psi_2(x)I_3 & [0]_{3\times1}\\ \Psi_3(x)I_3 & \Psi_4(x)I_3 & [0]_{3\times1}\\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \Psi_5(x)\end{bmatrix}_{7\times7}- \tag{1.31}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix}Q(\partial)\Psi_6(x) & Q(\partial)\Psi_7(x) & [0]_{3\times1}\\ Q(\partial)\Psi_8(x) & Q(\partial)\Psi_9(x) & [0]_{3\times1}\\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & 0\end{bmatrix}_{7\times7}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix}R(\partial)\Psi_{10}(x) & R(\partial)\Psi_{11}(x) & \nabla^\top\Psi_{14}(x)\\ R(\partial)\Psi_{12}(x) & R(\partial)\Psi_{13}(x) & \nabla^\top\Psi_{15}(x)\\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & 0\end{bmatrix}_{7\times7},$$

სადაც $Q(\partial)$, $R(\partial)$ და ∇ ოპერატორები მოცემულია (1.8) ფორმულით, ხოლო

$$\Psi_1(x)=-\frac{\gamma+\varepsilon}{d_1|x|}-\frac{1}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big\{4[\alpha d_1+\alpha\mu(\gamma+\varepsilon)+4\nu(\alpha\varkappa-\mu\nu)]+$$

$$+d_1(\gamma+\varepsilon)\lambda_1^2+\frac{16\alpha^2\mu}{\lambda_j^2}\Big\}\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_2(x)=\Psi_3(x)=\frac{\varkappa+\nu}{d_1|x|}+\frac{1}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big\{4\alpha[\mu(\varkappa+\nu)+2(\alpha\varkappa-\mu\nu)]+$$

$$+d_1(\varkappa+\nu)\lambda_j^2\Big\}\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_4(x)=-\frac{\mu+\alpha}{d_1|x|}-\frac{\mu+\alpha}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j(d_1\lambda_j^2+4\alpha\mu)\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_5(x)=-\frac{1}{\kappa'|x|}, \tag{1.32}$$

$$\Psi_6(x) = -\frac{(\lambda+\mu)|x|}{2\mu(\lambda+2\mu)} + \frac{(\delta+2\varkappa)^2 d_2}{4\alpha(\lambda+2\mu)^2}\frac{e^{-\lambda_1|x|}-1}{|x|} + \frac{1}{\lambda_2^2-\lambda_3^2}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big\{\frac{\gamma+\varepsilon}{d_1}+$$

$$+\frac{4}{d_1^2\lambda_j^2}[\alpha d_1 + \alpha\mu(\gamma+\varepsilon) + 4\nu(\alpha\varkappa-\mu\nu)] + \frac{16\alpha^2\mu}{d_1^2\lambda_j^4}\Big\}\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_7(x) = \Psi_8(x) = -\frac{\delta+2\varkappa}{4\alpha(\lambda+2\mu)}\frac{e^{-\lambda_1|x|}-1}{|x|} - \frac{1}{\lambda_2^2-\lambda_3^2}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big\{\frac{\varkappa+\nu}{d_1}+$$

$$+\frac{4\alpha}{d_1^2\lambda_j^2}\big[\mu(\varkappa+\nu)+2(\alpha\varkappa-\mu\nu)\big]\Big\}\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_9(x) = \frac{1}{4\alpha}\frac{e^{-\lambda_1|x|}-1}{|x|} + \frac{1}{\lambda_2^2-\lambda_3^2}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\,\frac{\mu+\alpha}{d_1^2}\Big(d_1+\frac{4\alpha\mu}{\lambda_j^2}\Big)\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_{10}(x) = \frac{4}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big[\nu d_1 + (\gamma+\varepsilon)(\alpha\varkappa-\mu\nu) + \frac{4\alpha^2\chi}{\lambda_j^2}\Big]\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_{11}(x) = \Psi_{12}(x) = \frac{2}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\sum_{j=2}^{3}(-1)^j\Big[2(\varkappa+\nu)(\mu\nu-\alpha\varkappa) - \alpha d_1 -$$

$$-\frac{4\alpha^2\mu}{\lambda_j^2}\Big]\frac{e^{i\lambda_j|x|}-1}{|x|},$$

$$\Psi_{13}(x) = \frac{4(\mu+\alpha)(\alpha\varkappa-\mu\nu)}{d_1^2(\lambda_2^2-\lambda_3^2)}\,\frac{e^{i\lambda_2|x|}-e^{i\lambda_3|x|}}{|x|},$$

$$\Psi_{14}(x) = \frac{1}{\kappa'}\Big\{-\frac{\eta|x|}{2(\lambda+2\mu)} + \big[\zeta(\lambda+2\mu) - \eta(\delta+2\varkappa)\big]\frac{\delta+2\varkappa}{4\alpha(\lambda+2\mu)^2}\frac{e^{-\lambda_1|x|}-1}{|x|}\Big\},$$

$$\Psi_{15}(x) = \frac{\eta(\delta+2\varkappa)-\zeta(\lambda+2\mu)}{4\kappa'\alpha(\lambda+2\mu)}\,\frac{e^{-\lambda_1|x|}-1}{|x|};$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ უსასრულობის მიდამოში გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტური თანაფარდობა:

$$\Gamma(x-y) = \begin{bmatrix} [\mathcal{O}(|x|^{-1})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\chi_0\frac{x_j}{|x|} + \mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times1} \\ [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \mathcal{O}(|x|^{-1}) \end{bmatrix}_{7\times7}, \tag{1.33}$$

როცა $|x| \to \infty$, სადაც $\chi_0 = -\dfrac{\eta}{2(\lambda+2\mu)}$ და y ეკუთვნის რაიმე კომპაქტურ სიმრავლეს.

1.3 ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ჩამოყალიბება

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები მარტივად ბმული $\Omega^\pm$ არისათვის, რომლის საზღვარია გლუვი $S = \partial\Omega^+ = \partial\Omega^-$ ზედაპირი. ვიგულისხმოთ, რომ $S = \partial\Omega^\pm$ საზღვარი დაყოფილია ორ არათანამკვეთ S_D და S_N ზედაპირად ისე, რომ $S_D \cap S_N = \varnothing$ და $\overline{S}_D \cup \overline{S}_N = S$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\ell := \partial S_D = \partial S_N$.

<u>ამოცანა (D)$^\pm$</u> $\big($დირიხლეს (Dirichlet) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში

$$L(\partial)U(x) = \Phi^\pm(x), \qquad x \in \Omega^\pm, \tag{1.34}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{U(x)\big\}^\pm = f(x), \qquad x \in S. \tag{1.35}$$

<u>ამოცანა (N)$^\pm$</u> $\big($ნეიმანის (Neumann) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში (1.34) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\big\}^\pm = F(x), \qquad x \in S. \tag{1.36}$$

<u>ამოცანა (R)$^\pm$</u> $\big($რობენის (Robin) ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში (1.34) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\big\}^\pm + K\big\{U(x)\big\}^\pm = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.37}$$

სადაც $K = [K_{kj}]_{7\times 7}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა:

$$K = \begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{kj}]_{6\times 6} & [0]_{6\times 1} \\ [0]_{1\times 6} & \varkappa_2 \end{bmatrix}_{7\times 7}; \tag{1.38}$$

ცხადია, რომ $\varkappa_2 > 0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{6\times 6}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

<u>ამოცანა (M)$^\pm$</u> $\big($შერეული ამოცანა$\big)$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში (1.34) განტოლების ისეთი რეგულარული $U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\big\{U(x)\big\}^\pm = f^{(D)}(x), \qquad x \in S_D, \tag{1.39}$$

$$\big\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\big\}^\pm = F^{(N)}(x), \qquad x \in S_N. \tag{1.40}$$

ამოცანების კალსიკურ დასმაში იგულისხმება, რომ საძიებელი U ვექტორი ეკუთვნის რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^\pm})]^7 \cap [C^2(\Omega^\pm)]^7$ სივრცეს და სასაზღვრო მონაცემები უწყვეტია, კერძოდ, $\Phi^\pm \in [C^{0,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})]^7$, $f \in [C^1(S)]^7$, $F \in [C^0(S)]^7$, $f^{(D)} \in [C^1(S_D)]^7$, $F^{(N)} \in [C(S_N)]^7$.

შევნიშნოთ, რომ დირიხლესა და ნეიმანის ამოცანებისგან განსხვავებით, შერეული ამოცანის ამონახსნი, მოცემული C^∞ სიგლუვის მონაცემებისთვისაც კი, ზოგადად, ℓ წირის მიდამოში არ არის ჰელდერის $[C^\alpha(\overline{\Omega}^+)]^7$ კლასში, სადაც ჰელდერის მაჩვენებელია $\alpha > \dfrac{1}{2}$. გარდა ამისა, ისინი უსასრულოდ დიფერენცირებადნი არიან ℓ წირის ნებისმიერი მიდამოს გარეთ. ამიტომ შერეულ სასზღვრო ამოცანას იკვლევენ სობოლევის $[W_p^1(\Omega^+)]^7$ კლასში. ასეთი განზოგადებული ფორმულირების შემთხვევაში ვუშვებთ, რომ სასაზღვრო ამოცანების მონაცემები ეკუთვნიან ბუნებრივ ფუნქციათა კლასებს, კერძოდ,

$$
\begin{aligned}
&\Phi^+ \in [L_2(\Omega^+)]^7, && \Phi^- \in [L_{2,comp}(\Omega^-)]^7,\\
&f = (\widetilde{f}, f_7)^\top \in [H_2^{\frac{1}{2}}(S)]^7, && \widetilde{f} = (f_1, f_2, ..., f_6)^\top,\\
&F = (\widetilde{F}, F_7)^\top \in [H_2^{-\frac{1}{2}}(S)]^7, && \widetilde{F} = (F_1, F_2, ..., F_6)^\top,\\
&f^{(D)} = (\widetilde{f}^{(D)}, f_7^{(D)})^\top \in [H_2^{\frac{1}{2}}(S_D)]^7, && \widetilde{f}^{(D)} = (f_1^{(D)}, f_2^{(D)}, ..., f_6^{(D)})^\top,\\
&F^{(N)} = (\widetilde{F}^{(N)}, F_7^{(N)})^\top \in [H_2^{-\frac{1}{2}}(S_N)]^7, && \widetilde{F}^{(N)} = (F_1^{(N)}, F_2^{(N)}, ..., F_6^{(N)})^\top.
\end{aligned}
\tag{1.41}
$$

ამ შემთხვევაში დიფერენციალური (1.34) განტოლება გვესმის განზოგადებული წარმოებულის (დისტრიბუციის) აზრით ან სუსტი ამონახსნის აზრით, დირიხლეს ტიპის (1.35) და (1.39) პირობები გვესმის კვალის აზრით, ხოლო ნეიმანის ტიპის (1.36) და (1.40) პირობები გვესმის განზოგადებული კვალის აზრით.

სტატიკის ამოცანების შემთხვევაში, როცა $\sigma = 0$, ზოგადობის შეუზღუდავად, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები ნამდვილმნიშვნელობიანია. უფრო მეტიც, დიფერენციალური განტოლება და შესაბამისი სასაზღვრო პირობები ტემპერატურის ფუნქციისათვის განცალდებიან.

ჩვენს გამოკვლევაში ასევე დაგვჭირდება სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა შეუღლებული დიფერენციალური $L^*(\partial) := L^\top(-\partial)$ ოპერატორისთვის.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ დირიხლეს და ნეიმანის ამოცანები შეუღლებული განტოლებისათვის.

ამოცანა $(\mathrm{D}^*)^\pm$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში

$$L^*(\partial)U^*(x)=\Phi^\pm(x), \qquad x\in\Omega^\pm, \tag{1.42}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი $U^*=(\widetilde{U}^*,\vartheta^*)^\top=(u^*,\omega^*,\vartheta^*)^\top$ რეგულარული ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{U^*(x)\big\}^\pm=f(x), \qquad x\in S. \tag{1.43}$$

ამოცანა $(\mathrm{N}^*)^\pm$. ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში (1.42) განტოლების ისეთი რეგულარული $U^*=(\widetilde{U}^*,\vartheta^*)^\top=(u^*,\omega^*,\vartheta^*)^\top$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}^*(\partial,n)U^*(x)\big\}^\pm=F(x), \qquad x\in S. \tag{1.44}$$

1.4 გრინის ფორმულები

ვთქვათ,

$$\widetilde{U}=(u,\omega)^\top\in[C^2(\overline{\Omega^+})]^6, \ \ \widetilde{U}'=(u',\omega')^\top\in[C^2(\overline{\Omega^+})]^6.$$

მაშინ ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას [34]:

$$\int\limits_{\Omega^+}\Big[\widetilde{U}'\cdot\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}+E(\widetilde{U}',\widetilde{U})\Big]\,dx=\int\limits_{\partial\Omega^+}\{\widetilde{U}'\}^+\cdot\{T(\partial,n)\widetilde{U}\}^+\,dS, \tag{1.45}$$

სადაც $\widetilde{L}(\partial)$ და $T(\partial,n)$ ოპერატორები მოცემულია (1.19) და (1.27) ფორმულებით, $\partial\Omega^+$ არის უბან-უბან გლუვი ზედაპირი, n არის $\partial\Omega^+$ საზღვრის გარე ნორმალი, სიმბოლო $\{\,\cdot\,\}^\pm$ აღნიშნავს ცალმხრივ ზღვრებს $\partial\Omega^\pm$ საზღვარზე $\Omega^\pm$ არედან, ხოლო $E(\cdot\,,\,\cdot)$ არის ე.წ. ენერგიის ორადწრფივი ფორმა:

$$\begin{aligned}E(\widetilde{U}',\widetilde{U})=E(\widetilde{U},\widetilde{U}')=\sum_{p,q=1}^{3}\big\{&\,(\mu+\alpha)\,u'_{pq}\,u_{pq}+(\mu-\alpha)\,u'_{pq}\,u_{qp}+\\&+(\varkappa+\nu)(u'_{pq}\omega_{pq}+\omega'_{pq}u_{pq})+(\varkappa-\nu)(u'_{pq}\omega_{qp}+\omega'_{pq}u_{qp})+\\&+(\gamma+\varepsilon)\,\omega'_{pq}\,\omega_{pq}+(\gamma-\varepsilon)\omega'_{pq}\omega_{qp}+\delta\,(u'_{pp}\omega_{qq}+\omega'_{qq}u_{pp})+\\&+\lambda\,u'_{pp}\,u_{qq}+\beta\,\omega'_{pp}\,\omega_{qq}\big\},\end{aligned} \tag{1.46}$$

სადაც

$$u_{pq} = \partial_p u_q - \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{pqk}\, \omega_k, \qquad \omega_{pq} = \partial_p \omega_q, \qquad p,q = 1,2,3. \tag{1.47}$$

$E(\widetilde{U}, \widetilde{U})$ კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სრულდებოდეს შემდეგი უტოლობები (იხ. [2], [7], [12]):

$$\mu > 0,\ \ \alpha > 0,\ \ \gamma > 0,\ \ \varepsilon > 0,\ \lambda + 2\mu > 0,\ \ \mu\gamma - \varkappa^2 > 0,\ \ \alpha\varepsilon - \nu^2 > 0,$$
$$(\lambda+\mu)(\beta+\gamma) - (\delta+\varkappa)^2 > 0,\ \ (3\lambda+2\mu)(3\beta+2\gamma) - (3\delta+2\varkappa)^2 > 0,$$
$$(\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon) - (\varkappa+\nu)^2 > 0,\ \ (\lambda+2\mu)(\beta+2\gamma) - (\delta+2\varkappa)^2 > 0,$$
$$\mu\,[\,(\lambda+\mu)\,(\beta+\gamma) - (\delta+\varkappa)^2\,] + (\lambda+\mu)(\mu\gamma - \varkappa^2) > 0,$$
$$\mu\,[\,(3\lambda+2\mu)\,(3\beta+2\gamma) - (3\delta+2\varkappa)^2\,] + (3\lambda+2\mu)\,(\mu\gamma - \varkappa^2) > 0.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ სრულდება პირობა $3\lambda + 2\mu > 0$ (რომელიც ბუნებრივია დრეკადობის კლასიკური თეორიისთვის), მაშინ ზემოთ ამოწერილი უტოლობები ეკვივალენტურია შემდეგი უტოლობების:

$$\begin{gathered}\mu > 0,\ \ \alpha > 0,\ \ \gamma > 0,\ \ \varepsilon > 0,\ \ 3\lambda + 2\mu > 0,\ \ \mu\gamma - \varkappa^2 > 0,\\ \alpha\varepsilon - \nu^2 > 0,\ \ (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon) - (\varkappa+\nu)^2 > 0,\\ (3\lambda+2\mu)(3\beta+2\gamma) - (3\delta+2\varkappa)^2 > 0.\end{gathered} \tag{1.48}$$

შემდგომში, ყველგან სიმარტივისათვის ვიგულისხმებთ, რომ $3\lambda+2\mu > 0$. ამიტომ (1.48) პირობები უზრუნველყოფენ (1.46) ფორმულით მოცემული ენერგიის $E(\widetilde{U}, \widetilde{U})$ კვადრატული ფორმის დდებითად განსაზღვრულობას. (1.48) უტოლობებიდან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობები:

$$\begin{aligned}&\gamma > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad \lambda+\mu > 0, \quad \beta+\gamma > 0,\\ &d_1 := (\mu+\alpha)(\gamma+\varepsilon) - (\varkappa+\nu)^2 > 0,\\ &d_2 := (\lambda+2\mu)(\beta+2\gamma) - (\delta+2\varkappa)^2 > 0.\end{aligned} \tag{1.49}$$

(1.46) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$
\begin{aligned}
E(\widetilde{U},\widetilde{U}') = {} & \frac{3\lambda+2\mu}{3}\Big(\operatorname{div} u+\frac{3\delta+2\varkappa}{3\lambda+2\mu}\operatorname{div}\omega\Big)\Big(\operatorname{div} u' + \frac{3\delta+2\varkappa}{3\lambda+2\mu}\operatorname{div}\omega'\Big)+ \\
& + \frac{1}{3}\Big(3\beta+2\gamma-\frac{(3\delta+2\varkappa)^2}{3\lambda+2\mu}\Big)(\operatorname{div}\omega)(\operatorname{div}\omega')+\Big(\varepsilon-\frac{\nu^2}{\alpha}\Big)\operatorname{curl}\omega\cdot\operatorname{curl}\omega'+ \\
& + \frac{\mu}{2}\sum_{k,j=1,\,k\neq j}^{3}\Big[\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\Big)\Big]\times \\
& \qquad \times\Big[\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega'_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega'_j}{\partial x_k}\Big)\Big]+ \\
& + \frac{\mu}{3}\sum_{k,j=1}^{3}\Big[\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}\Big)\Big]\times \\
& \qquad \times\Big[\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}-\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega'_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega'_j}{\partial x_j}\Big)\Big]+ \\
& + \Big(\gamma-\frac{\varkappa^2}{\mu}\Big)\sum_{k,j=1,\,k\neq j}^{3}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\Big)\Big(\frac{\partial\omega'_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega'_j}{\partial x_k}\Big)+ \\
& \qquad + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial\omega'_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega'_j}{\partial x_j}\Big)\Big]+ \\
& + \alpha\Big(\operatorname{curl} u+\frac{\nu}{\alpha}\operatorname{curl}\omega-2\,\omega\Big)\cdot\Big(\operatorname{curl} u'+\frac{\nu}{\alpha}\operatorname{curl}\omega'-2\,\omega'\Big).
\end{aligned}
$$

კერძოდ,

$$
\begin{aligned}
E(\widetilde{U},\widetilde{U}) = {} & \frac{3\lambda+2\mu}{3}\Big|\operatorname{div} u+\frac{3\delta+2\varkappa}{3\lambda+2\mu}\operatorname{div}\omega\Big|^2+ \\
& + \frac{1}{3}\Big(3\beta+2\gamma-\frac{(3\delta+2\varkappa)^2}{3\lambda+2\mu}\Big)|\operatorname{div}\omega|^2+ \\
& + \frac{\mu}{2}\sum_{k,j=1,\,k\neq j}^{3}\Big|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\Big)\Big|^2+ \\
& + \frac{\mu}{3}\sum_{k,j=1}^{3}\Big|\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+\frac{\varkappa}{\mu}\Big(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}\Big)\Big|^2+ \\
& + \Big(\gamma-\frac{\varkappa^2}{\mu}\Big)\sum_{k,j=1,\,k\neq j}^{3}\Big[\frac{1}{2}\Big|\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\Big|^2+\frac{1}{3}\Big|\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j}\Big|^2\Big]+ \\
& + \Big(\varepsilon-\frac{\nu^2}{\alpha}\Big)|\operatorname{curl}\omega|^2+\alpha\Big|\operatorname{curl} u+\frac{\nu}{\alpha}\operatorname{curl}\omega-2\omega\Big|^2.
\end{aligned}
$$

აქედან კი აშკარად ჩანს, რომ ნებისმიერი $\widetilde{U}=(u,\omega)^\top$ ვექტორისათვის

$$
E(\widetilde{U},\widetilde{U})\geqslant 0. \tag{1.50}
$$

ზემოთ მითითებული $E(\widetilde{U},\widetilde{U})$ ფორმის დადებითად განსაზღვრულობიდან u_{pq}

და ω_{pq} ცვლადების მიმართ გამომდინარეობს, რომ

$$E(\widetilde{U},\widetilde{U}) \geqslant C_0 \sum_{p,q=1}^{3} \big[u_{pq}^2+\omega_{pq}^2\big] \geqslant C_1 \Big\{ \sum_{p,q=1}^{3} \big[(\partial_p u_q)^2+(\partial_p \omega_q)^2\big]+$$
$$+\sum_{p=1}^{3} \big(u_p^q+\omega_p^2\big)\Big\} - C_2 \sum_{p=1}^{3} \big(u_p^q+\omega_p^2\big),$$

სადაც C_0, C_1 და C_2 მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ მატერიალურ პარამეტრებზე. აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ შემდეგი ე.წ. ენერგეტიკული ორადწრფივი ფორმა

$$\mathcal{B}(U,U') := \int\limits_{\Omega^+} \Big[E(\widetilde{U},\widetilde{U}') - \eta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,u' - \zeta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,\omega' + \kappa'\,\nabla\vartheta\cdot\nabla\vartheta'\Big]\,d\,x,$$

შემოსაზღვრული და კოერციტიულია, ანუ ნებისმიერი $U, U' \in [H^1(\Omega^+)]^7$ ვექტორებისთვის ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$|\mathcal{B}(U,U')| \leqslant C\,\|U\|_{[H^1(\Omega^+)]^7}\,\|U'\|_{[H^1(\Omega^+)]^7}, \tag{1.51}$$

$$|\mathcal{B}(U,U)| \geqslant C_1\,\|U\|^2_{[H^1(\Omega^+)]^7} - C_2\,\|U'\|^2_{[H^0(\Omega^+)]^7}, \tag{1.52}$$

სადაც C_0, C_1 და C_2 მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ მატერიალურ პარამეტრებზე.

დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე ლემა.

ლემა 1 . ვთქვათ, $\widetilde{U} = (u,\omega)^\top \in [C^1(\Omega^+)]^6$ ნამდვილმნიშვნელობიანი ვექტორია და რაიმე Ω^+ არეში $E(\widetilde{U},\widetilde{U}) = 0$. მაშინ

$$u(x) = [a\times x] + b, \qquad \omega(x) = a, \quad x\in\Omega^+, \tag{1.53}$$

სადაც a და b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია.

გარდა ამისა,

(i) (1.53) ფორმულით განსაზღვრული ნებისმიერი $\widetilde{U} = (u,\omega)^\top$ ვექტორისათვის და ნებისმიერი ერთეულოვანი $n = (n_1,n_2,n_3)$ ვექტორისათვის განზოგადებული ჰემიტროპული ძაბვის ვექტორი იგივურად ნულის ტოლია:

$$T(\partial,n)\widetilde{U}(x) = 0, \qquad x\in\Omega^+.$$

(ii) ნებისმიერი $U := (\widetilde{U},0)^\top = (u,\omega,0)^\top$ ვექტორისათვის, სადაც u და ω მოცემულია (1.53) ფორმულით, და ნებისმიერი ერთეულოვანი $n = (n_1,n_2,n_3)$ ვექტორისათვის განზოგადებული ჰემიტროპული თერმოძაბვის $\mathcal{P}(\partial,n)U$ ვექტორი იგივურად ნულის ტოლია: $\mathcal{P}(\partial,n)U(x) = 0$, $x\in\Omega^+$.

დამტკიცება. ლემის პირველი ნაწილის მართებულობა ნაჩვენებია შრომაში [34]. მეორე ნაწილი კი მარტივად გამომდინარეობს (1.23), (1.24), (1.27) ფორმულებიდან.

მართლაც, თუ $\widetilde{U}$ მოცემულია (1.53) ფორმულით, უშუალო გამოთვლებით დავრწმუნდებით, რომ (იხ. (1.3) და (1.4) ტოლობები, სადაც უნდა ავიღოთ $\vartheta = 0$)

$$\tau_{pq}(\widetilde{U}) = 0, \qquad \mu_{pq}(\widetilde{U}) = 0. \tag{1.54}$$

მაშინ (1.21) ტოლობების ძალით მივიღებთ:

$$T(\partial, n)\widetilde{U} = \Big(\tau^{(n)}(\widetilde{U}),\, \mu^{(n)}(\widetilde{U})\Big) = 0. \tag{1.55}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ახლა გამოვიყვანოთ გრინის ფორმულები $L(\partial)$ ოპერატორისთვის.

ვთქვათ,

$$U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top = (u, \omega, \vartheta)^\top, U' = (\widetilde{U}', \vartheta')^\top = (u', \omega', \vartheta')^\top \in [C^2(\overline{\Omega^+})]^7.$$

(1.45) ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი თანაფარდობის მართებულობა:

$$\int\limits_{\Omega^+} U'\cdot L(\partial)U\,dx = \int\limits_{\Omega^+} \Big\{ \widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} + \begin{bmatrix} -\eta\,\nabla^\top\vartheta \\ -\zeta\,\nabla^\top\vartheta \end{bmatrix} \Big\} \cdot U'\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} \Big\{ \Big(\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} - \begin{bmatrix} \eta\,\nabla^\top\vartheta \\ \zeta\,\nabla^\top\vartheta \end{bmatrix} \Big) \cdot \widetilde{U'} + \kappa'\,\vartheta'\,\Delta\vartheta \Big\}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega^+} [\,E(\widetilde{U}',\widetilde{U})\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{\widetilde{U}\}^+ \cdot \{T(\partial,n)\widetilde{U}\}^+\,dS +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^+} \big(\eta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,u' + \zeta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,\omega'\big)\,dx - \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[\{\eta\,\vartheta\}^+\,\{n\cdot u'\}^+ + \{\zeta\,\vartheta\}^+\{n\cdot\omega'\}^+\Big]dS -$$

$$- \int\limits_{\Omega^+} \kappa'\nabla\vartheta'\cdot\nabla\vartheta\,dx + \int\limits_{\partial\Omega^+} \{\kappa'\,\vartheta'\}^+\Big\{\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\Big\}^+ dS =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega^+} \Big[\{\widetilde{U}'\}^+\{\mathcal{T}(\partial,n)\widetilde{U}\}^+ + \{\vartheta'\}^+\,\Big\{\kappa'\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\Big\}^+\Big]\,dS +$$

$$+ \int\limits_{\Omega^+} \big[-E(\widetilde{U}',\widetilde{U}) + \eta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,u' + \zeta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,\omega' - \kappa'\,\nabla\vartheta'\cdot\nabla\vartheta\big]\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^+} \big[-E(\widetilde{U}',\widetilde{U}) + \eta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,u' + \zeta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,\omega' - \kappa'\,\nabla\vartheta'\cdot\nabla\vartheta\big]\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega^+} \{U'\}^+\{\mathcal{P}(\partial,n)U\}^+\,dS.$$

ამრიგად, მივიღეთ გრინის პირველი ფორმულა შემდეგი სახით:

$$\int\limits_{\Omega^+} U'\cdot L(\partial)U\,dx = \int\limits_{\partial\Omega^+} \{U'\}^+\cdot\{\mathcal{P}(\partial,n)U\}^+\,dS - \int\limits_{\Omega^+} [\,E(\widetilde{U}',\widetilde{U}) - \tag{1.56}$$

$$-\eta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,u' - \zeta\,\vartheta\,\mathrm{div}\,\omega' + \kappa'\ \mathrm{grad}\,\vartheta'\cdot\mathrm{grad}\,\vartheta\,]\,dx\,.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია გამოვიყვანოთ გრინის მეორე (სხვაობიანი) ფორმულა:

$$\int\limits_{\Omega^+} [U'\cdot L(\partial)U - L^*(\partial)U'\cdot U]\,dx =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega^+} [\,\{U'\}^+\cdot\{\mathcal{P}(\partial,n)U\}^+ - \{\mathcal{P}^*(\partial,n)U'\}^+\cdot\{U\}^+\,]\,dS\,, \tag{1.57}$$

სადაც დიფერენციალური ოპერატორი $L(\partial)$ მოცემულია (1.17) ფორმულით, $L^*(\partial) = L^\top(-\partial)$ არის $L(\partial)$ ოპერატორის ფორმალურად შეუღლებული ოპერატორი, $\mathcal{P}(\partial,n)$

და $\mathcal{P}^*(\partial, n)$ სასაზღვრო ოპერატორები კი განსაზღვრულია (1.24) და (1.26) ფორმულებით.

სტანდარტული ზღვრული პროცესით გრინის (1.45) ფორმულა შეიძლება განზოგადდეს ლიფშიცის არეებისთვის (იხ., მაგალითად, [38], [31]) და ისეთი ვექტორ-ფუნქციებისთვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჩართვებს: $U \in [W_2^1(\Omega^+)]^7$, $U' \in [W_2^1(\Omega^+)]^7$ და $L(\partial)U \in [L_p(\Omega^+)]^7$ (იხ., [30], [6], [31]):

$$\big\langle \{U'\}^+ , \{\mathcal{P}(\partial, n)U\}^+ \big\rangle_{\partial\Omega^+} = \int\limits_{\Omega^+} U' \cdot L(\partial)U \, dx + \int\limits_{\Omega^+} [\, E(\widetilde{U}', \widetilde{U}) -$$

$$- \eta\, \vartheta \,\mathrm{div}\, u' - \zeta\, \vartheta \,\mathrm{div}\, \omega' + \kappa' \,\mathrm{grad}\, \vartheta' \cdot \mathrm{grad}\, \vartheta \,]\, dx \,, \tag{1.58}$$

სადაც $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega^+}$ სიმბოლო აღნიშნავს დუალობას $[H_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^+)]^7$ და $[H_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^+)]^7$ სივრცეებს შორის, რომელიც ანზოგადებს ჩვეულებრივ ნამდვილ L_2-სკალარულ ნამრავლს. რეგულარული ვექტორ-ფუნქციებისათვის, კერძოდ, თუ $f, g \in [L_2(S)]^7$, გვაქვს:

$$\langle\, f \,,\, g \,\rangle_S = \sum_{k=1}^{7} \int\limits_S f_k \, g_k \, dS = \big(f, g\big)_{[L_2(S)]^7}.$$

განზოგადებული კვალის ფუნქციონალი $\{\mathcal{P}(\partial, n)U\}^+ \in [H_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^+)]^7$ კორექტულადაა განსაზღვრული (1.58) ტოლობით.

როდესაც სასაზღვრო ამოცანა ისმება $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ კლასში, მაშინ ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობაში მონაწილე ვექტორის ქვეშ გაიგება სწორედ (1.58) ტოლობითგანმარტებული განზოგადებული ძაბვის ფუნქციონალი $\{\mathcal{P}(\partial, n)U\}^+ \in [H_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega^+)]^7$.

ქვემოთ ჩვენ ასევე დაგვჭირდება გრინის შემდეგი იგივეობები:

$$\int\limits_{\Omega^+} \big[\, \widetilde{U}' \cdot \widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} - \widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}' \cdot \widetilde{U} \big]\, dx =$$

$$= \int\limits_S \Big[\{U'\}^+ \cdot \{T(\partial, n)\widetilde{U}\}^+ - \{T(\partial, n)\widetilde{U}'\}^+ \cdot \{\widetilde{U}\}^+ \Big]\, dS, \tag{1.59}$$

$$\int\limits_{\Omega^+} \widetilde{U}' \cdot \widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} \, dx = \int\limits_S \{\widetilde{U}'\}^+ \cdot \{T(\partial, n)\widetilde{U}\}^+ \, dS - \int\limits_{\Omega^+} E(\widetilde{U}', \widetilde{U}) \, dx \,, \tag{1.60}$$

$$\int\limits_{\Omega^+} \kappa' \triangle \vartheta \ \vartheta' \, dx = \int\limits_S \kappa' \Big\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big\}^+ \ \{\vartheta'\}^+ \, dS - \int\limits_{\Omega^+} \kappa' \nabla \vartheta \ \nabla \vartheta' \, dx \,, \tag{1.61}$$

$$\int\limits_{\Omega^+} [\, \kappa' \triangle \vartheta \ \vartheta' - \kappa' \vartheta \ \triangle \vartheta' \,] \ dx = \int\limits_S \bigg[\kappa' \Big\{ \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big\}^+ \ \{\vartheta'\}^+ - \{\vartheta\}^+ \kappa' \ \Big\{ \frac{\partial \vartheta'}{\partial n} \Big\}^+ \bigg] \ dS. \tag{1.62}$$

ყველა ეს ფორმულა შეიძლება განზოგადდეს ასევე $W_2^1(\Omega^+)$ კლასის ვექტორებისთვის და ლიფშიცის არეებისთვის თუ მოვითხოვთ, რომ მარცხენა მხარეში მდგომ მოცულობით ინტეგრალში მონაწილე ფუნქციები (მაგ. $\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}$, $\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}'$, $\triangle\vartheta$, $\triangle\vartheta'$) იყვნენ $L_2(\Omega^+)$ სივრცის ელემენტები. ცხადია, ამ შემთხვევაში ზედაპირული ინტეგრალები უნდა შეიცვალოს შესაბამისი დუალობით.

1.5 სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები

1.5.1 შიგა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები

ამ ქვეპარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ერთადერთობის თეორემებს ზემოთ ჩამოყალიბებული სასაზღვრო ამოცანებისთვის სასრული (შემოსაზღვრული) არის შემთხვევაში განზოგადებულ ფუნქციათა $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ კლასის ამონახსნებისთვის, საიდანაც, როგორც კერძო შემთხვევა, გამომდინარეობს ერთადერთობის თეორემები რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^\pm})]^7\cap[C^2(\Omega^\pm)]^7$ კლასის ამონახსნებისთვის.

მართებულია შემდეგი ერთადერთობის თეორემა.

თეორემა 2 . სტატიკის დირიხლეს $(D)^+$, რობენის $(R)^+$ და შერეულ $(M)^+$ შიგა სასაზღვრო ამოცანებს აქვთ არაუმეტეს ერთი ამონახსენი ფუნქციათა $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ სივრცეში, ხოლო ნეიმანის $(N)^+$ ამოცანის ამონახსნი $U=(u,\omega,\vartheta)^\top$ განსაზღვრულია

$$U_0=\vartheta_0(u_0,\omega_0,1)^\top+(\widetilde{\Psi},0)^\top$$

ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\widetilde{\Psi}$ ნებისმიერი განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორია, ე.ი.

$$\widetilde{\Psi}(x)=\big([a\times x]+b,a\big)^\top, \tag{1.63}$$

სადაც $a=(a_1,a_2,a_3)^\top$ და $b=(b_1,b_2,b_3)^\top$ ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია, ϑ_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, ხოლო

$u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^\top$ და $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^\top$ ისეთი ვექტორებია, რომ ვექტორ-ფუნქცია $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ არის შემდეგი ამოცანის კერძო ამონახსნი:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.64}$$

$$\big\{T(\partial, n)\widetilde{V}_0(x)\big\}^+ = \big(\eta\, n(x),\, \zeta\, n(x)\big)^\top, \qquad x \in S;$$

აქ η და ζ მატერიალური მუდმივებია, რომლებიც მონაწილეობენ (1.3) და (1.4) განტოლებებში, ხოლო $\widetilde{L}(\partial)$ და $T(\partial, n)$ ოპერატორები განსაზღვრულნი არიან (1.19) და (1.27) ტოლობებით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $U^{(j)} = \big(u^{(j)}, \omega^{(j)}, \vartheta^{(j)}\big)^\top \in [W_2^1(\Omega^+)]^7$, $j = 1, 2$, არის სტატიკის შიგა სასაზღვრო ამოცანების ორი ამონახსენი. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $U := U^{(1)} - U^{(2)}$. ცხადია, რომ $U = (u, \omega, \vartheta)^\top \in [W_2^1(\Omega^+)]^7$ არის სტატიკის შიგა ერთგვაროვანი სასზღვრო ამოცანების ამონახსნი. (1.6) სისტემის ბოლო ტოლობისა და (1.24) ფორმულის საშუალებით ვნახავთ, რომ $\vartheta \in [W_2^1(\Omega^+)]^7$ ჰარმონიული ფუნქციაა Ω^+ არეში და აკმაყოფილებს ერთგვაროვან დირიხლეს, ნეიმანის, რობენის ან შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობას. ამიტომ $(D)^+$, $(R)^+$ და $(M)^+$ სასაზღვრო ამოცანების შემთხვევაში მარტივად დავადგენთ, რომ Ω^+ არეში $\vartheta = 0$, რადგან ზედაპირის ის ნაწილი, რომელზეც მოცემულია დირიხლეს პირობები, ცარიელი არაა, ხოლო ნეიმანის $(N)^+$ სასაზღვრო ამო-ცანისთვის გვაქვს, რომ Ω^+ არეში $\vartheta = \vartheta_0$, სადაც ϑ_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

ამრიგად, ერთგვაროვან შიგა სასაზღვრო $(D)^+$, $(R)^+$ და $(M)^+$ ამოცანების ნებისმიერ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე: $U = (\widetilde{U}, 0)^\top$, სადაც $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top$ ვექტორი არის $\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} = 0$ განტოლების ამონახსენი Ω^+ არეში, სადაც $\widetilde{L}(\partial)$ განსაზღვრულია (1.19) ფორმულით. გარდა ამისა, რადგან $U = (u, \omega, 0)^\top$ ტიპის ვექტორისათვის $\mathcal{T}(\partial, n)\, U = T(\partial, n)\, \widetilde{U}$, გრინის (1.45) ფორმულიდან, როცა $\widetilde{U}' = \widetilde{U}$, მივიღებთ: $E(\widetilde{U}, \widetilde{U}) = 0$; ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ზედაპირული ინტეგრალი (1.45) ფორმულის მარჯვენა მხარეში ნულის ტოლი ხდება ერთგვა-როვანი სასაზღვრო პირობების ძალით. ლემა 1-ის თანახმად ადვილად დავად-გენთ, რომ Ω^+ არეში $u(x) = [a \times x] + b$ და $\omega(x) = a$, სადაც a და b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია. რადგან მთელ საზღვარზე ან საზღვრის რაღაც ნაწილზე სრულდება დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები, ამიტომ u და ω იგივურად ნულია Ω^+ არეში, ე.ი. $a = b = 0$. ეს ამტკიცებს თეორემის პირველ ნაწილს.

ახლა განვიხილოთ ერთგვაროვანი $(N)^+$ სასაზღვრო ამოცანა. როგორც დავადგინეთ, ამოცანის ყოველ ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე: $U = (u, \omega, \vartheta_0)^\top = (\widetilde{U}, \vartheta_0)^\top$, სადაც ϑ_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია და $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top$. (1.23), (1.24) და (1.27) ფორმულებიდან, $L(\partial)U(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებიდან და $\big\{\mathcal{P}(\partial, n)\, U(x)\big\}^+ = 0$, $x \in S$, ნეიმანის ერთგვაროვანი პირობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობები:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.65}$$

$$\big\{T(\partial, n)\widetilde{U}(x)\big\}^+ = \widetilde{F}_0(x), \qquad x \in S,$$

სადაც

$$\widetilde{F}_0(x) = \vartheta_0\big(\eta\, n(x),\, \zeta\, n(x)\big)^\top, \qquad x \in S. \tag{1.66}$$

აქ $n(x)$ არის გარე ნორმალის ერთეულოვანი ორტი $x \in S$ წერტილში, η და ζ მატერიალური მუდმივებია, ხოლო ϑ_0 მუდმივი ტემპერატურაა. ამრიგად, $\widetilde{U}$ არის ნეიმანის არაერთგვაროვანი (1.65) ამოცანის ამონახსნი ჰემიტროპულ დრეკადობის თეორიაში, როცა თერმული ეფექტები უგულვებელყოფილია. [34] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ (1.65)-(1.66) ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა შემდეგი ტოლობა:

$$\int\limits_S \widetilde{F}_0(x) \cdot \widetilde{\Psi}(x)\, dS = 0, \tag{1.67}$$

სადაც $\widetilde{\Psi}$ მოცემულია (1.63) ტოლობით და წარმოადგენს განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორს.

შევნიშნოთ, რომ მართებულია შემდეგი თანაფარდობები:

$$[a \times x] \cdot n = [x \times n] \cdot a, \qquad \int\limits_S n_k(x)\, dS = 0, \tag{1.68}$$

$$\int\limits_S \big[x_j\, n_k(x) - x_k\, n_j(x)\big]\, dS = 0, \qquad k, j = 1, 2, 3.$$

მართლაც, თუ ვისარგებლებთ გაუსის შემდეგი ფორმულით:

$$\int\limits_{\Omega^+} \mathrm{div}\, u\, dx = \int\limits_S \sum_{k=1}^3 n_k\, u_k\, dS, \tag{1.69}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$0 = \int\limits_{\Omega^+} \partial_k 1\, dx = \int\limits_S 1 \cdot n_k(x)\, dS = \int\limits_S n_k(x)\, dS, \qquad k = 1, 2, 3,$$

$$0 = \int\limits_{\Omega^+} \big[\partial_k\, x_j - \partial_j\, x_k\big]\, dx = \int\limits_S \big[x_j\, n_k(x) - x_k\, n_j\big]\, dS, \qquad k = 1, 2, 3.$$

აქედან კი მარტივად ვაჩვენებთ, რომ აუცილებელი (1.67) პირობა შესრულებულია, რადგან

$$\int\limits_S \vartheta_0 \left(\eta\, n(x),\, \zeta\, n(x)\right)^\top \cdot \left([a\times x]+b,\, a\right)^\top dS =$$

$$= \vartheta_0 \int\limits_S \Big\{\eta\left(n\cdot[a\times x]+n\cdot b\right)+\zeta\, n\cdot a\Big\} dS =$$

$$= \vartheta_0\, \eta \int\limits_S [x\times n]\cdot a dS = \vartheta_0\, \eta \sum_{k=1}^{3} a_k \int\limits_S [x\times n]_k dS = 0.$$

მაშასადამე, (1.65) სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია ნებისმიერი ϑ_0 მუდმივისათვის და ამონახსნი განისაზღვრება განზოგადებული ხისტი გადაადგილების $\widetilde{\Psi}$ ვექტორის სიზუსტით. ახლა შევარჩიოთ (1.64) ამოცანის ის კერძო ამონახსნი, რომელიც ემთხვევა (1.65) ამოცანის ამონახსნს, როცა $\vartheta_0 = 1$ და იგი აღვნიშნოთ $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ სიმბოლოთი, სადაც $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^\top$ და $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^\top$. მაშინ, ცხადია, რომ $\vartheta_0 \widetilde{V}_0$ არის (1.65) ამოცანის კერძო ამონახსნი, ხოლო ზოგადი ამონახსნია $\vartheta_0 \widetilde{V}_0 + \widetilde{\Psi}$.

ამრიგად, ნეიმანის $(N)^+$ სასაზღვრო ამოცანის ნებისმიერი ამონახსნი წარმოიდგინება შემდეგი სახით: $U = (u, \omega, \vartheta_0)^\top = (\widetilde{U}, \vartheta_0)^\top$, სადაც $\widetilde{U} = \vartheta_0 \widetilde{V}_0 + \widetilde{\Psi}$.

თავის მხრივ, ეს ტოლობა გადადის შემდეგ გამოსახულებაში:

$$U = \vartheta_0 (u_0, \omega_0, 1)^\top + (\widetilde{\Psi}, 0)^\top.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

შენიშვნა 3 . სამწუხაროდ კლასიკური თერმოდრეკადობისგან განსხვავებით, თერმო-ჰემიტროპული დრეკადობის თეორიაში კერძო $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ ამონახსნის ცხადი გამოსახულების პოვნა ნებისმიერი Ω^+ არისათვის პრობლემურია. თუმცა, $\widetilde{V}_0$ შეიძლება ცხადი სახით ავაგოთ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში. მაგალითად, თუ მატერიალური მუდმივები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\frac{\eta}{2\mu + 3\lambda} = \frac{\zeta}{2\varkappa + 3\delta}, \tag{1.70}$$

მაშინ $\widetilde{V}_0 = \dfrac{\eta}{2\mu + 3\lambda}\,(x, 0)^\top = \dfrac{\eta}{2\mu + 3\lambda}\,(x_1, x_2, x_3, 0, 0, 0)^\top$. მართლაც, მარტივად შეიძლება შემოწმდეს, რომ, ამ შემთხვევაში, ნებისმიერი Ω^+ არისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x)=0, \qquad\qquad x\in\Omega^+,$$

$$\{T(\partial,n)\widetilde{V}_0(x)\}^+=\frac{\eta}{2\mu+3\lambda}\big((2\mu+3\lambda)\,n,\,(2\varkappa+3\delta)\,n\big)^\top=$$

$$=\big(\eta\,n(x),\,\zeta\,n(x)\big)^\top, \qquad x\in\partial\Omega^+.$$

შენიშვნა 4 . ზოგიერთი კონკრეტული გეომეტრიული ფორმის მქონე არისათვის შესაძლებელია ცხადი სახით ავაგოთ (1.64) ამოცანის კერძო $\widetilde{V}_0$ ამონახსენი, როცა (1.70) შეზღუდვა არ გვექნება. მაგალითად, დავუშვათ, Ω^+ არე არის $B(0,R)$ ბირთვი ცენტრით სათავეში და რადიუსით R. ვეძებოთ (1.64) ამოცანის კერძო $\widetilde{V}_0=(u_0,\omega_0)^\top$ ამონახსნი შემდეგი ფორმით:

$$u_0(x)=A_1x^\top-A_2(\delta+2\varkappa)\frac{dg_0(r)}{dr}\widetilde{n}(x), \tag{1.71}$$

$$\omega_0(x)=A_2(\lambda+2\mu)\frac{dg_0(r)}{dr}\widetilde{n}(x),$$

სადაც A_1 და A_2 უცნობი სკალარული მუდმივებია, $x=(x_1,x_2,x_3)$, $r=|x|$ და

$$\widetilde{n}(x)=\frac{x^\top}{r}, \qquad\qquad g_0(r)=\frac{J_{\frac{1}{2}}(i\lambda_1 r)}{\sqrt{r}};$$

აქ $\lambda_1^2=\dfrac{4\alpha(\lambda+2\mu)}{d_2}$, $J_{\frac{1}{2}}(i\lambda_1 r)$ ბესელის პირველი გვარის ფუნქციაა და d_2 განსაზღვრულია (1.49) ფორმულით. შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{n}(x)$ ემთხვევა გარე ნორმალის ვექტორის ორტს $x\in\partial B(0,R):=\sum(0,R)$ წერტილში, ე.ი. $\widetilde{n}(x)=n^\top(x)=\dfrac{x^\top}{R}$, როცა $x\in\sum(0,R)$.

მარტივი შესამოწმებელია შემდეგი ტოლობები:

$$\triangle[f(r)\widetilde{n}(x)]=\Big[\frac{d}{dr}\big(\frac{df(r)}{dr}\big)+\frac{2f(r)}{dr}\Big]\widetilde{n}(x), \qquad\qquad \mathrm{curl}[f(r)\,\widetilde{n}(x)]=0.$$

$$\mathrm{grad\,div}[f(r)\,\widetilde{n}(x)]=\Big[\frac{d}{dr}\big(\frac{df(r)}{dr}\big)+\frac{2f(r)}{dr}\Big]\widetilde{n}(x),$$

$$\frac{d^2g_0(r)}{dr^2}=-\frac{2}{r}\frac{dg_0(r)}{dr^2}+\lambda_1^2g_0(r),$$

სადაც $f(\cdot)$ ნებისმიერი C^2 კლასის ფუნქციაა. ამ თანაფარდობების გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $\widetilde{V}_0=(u_0,\omega_0)^\top$ ვექტორი, სადაც u_0 და ω_0 მოცემულია (1.71) ფორმულებით, არის შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x)=0, \qquad\qquad x\in B(0,R),$$

ნებისმიერი A_1 და A_2 მუდმივებისათვის. შესაძლებელია, ეს უცნობი მუდმივები ისე შევარჩიოთ, რომ (1.64) ამოცანის სასაზღვრო პირობა იყოს შესრულებული. (1.25) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$T(\partial,n)\widetilde{V}_0=\Big(T^{(1)}(\partial,n)u_0+T^{(2)}(\partial,n)\omega_0,\,T^{(3)}(\partial,n)u_0+T^{(4)}(\partial,n)\omega_0\Big)^\top.$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.25) ტოლობასა და შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\operatorname{div}[f(r)\,\widetilde{n}(x)]=\frac{df(r)}{dr}+\frac{2f(r)}{dr},\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r},$$

მაშინ შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ძალური ძაბვისა და მომენტური ძაბვის ვექ-ტორები $\sum(0,R)$ სფეროზე გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
&\Big\{T^{(1)}(\partial,n)u_0+T^{(2)}(\partial,n)\omega_0\Big\}^+=\Big[(3\lambda+2\mu)A_1+4(\mu\delta-\lambda\varkappa)\frac{1}{R}\frac{dg_0(R)}{dR}A_2\Big]n(x),\\
&\Big\{T^{(3)}(\partial,n)u_0+T^{(4)}(\partial,n)\omega_0\Big\}^+=\Big\{(3\delta+2\varkappa)A_1+\Big[[\varkappa(\delta+2\varkappa)-\\
&\qquad\qquad -\gamma(\lambda+2\mu)]\frac{4}{R}\frac{dg_0(R)}{dR}+4\alpha(\lambda+2\mu)g_0(R)\Big]A_2\Big\}n(x).
\end{aligned}$$

მაშინ (1.64) ამოცანის სასაზღვრო პირობა გადაიწერება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის სახით A_1 და A_2 პარამეტრების მიმართ:

$$\begin{aligned}
&(3\lambda+2\mu)A_1+4(\mu\delta-\lambda\varkappa)\frac{1}{R}\frac{dg_0(R)}{dR}A_2=\eta,\\
&(3\delta+2\varkappa)A_1+\Big\{[\varkappa(\delta+2\varkappa)-\gamma(\lambda+2\mu)]\frac{4}{R}\frac{dg_0(R)}{dR}+\\
&\qquad+4\alpha(\lambda+2\mu)g_0(R)\Big\}A_2=\zeta.
\end{aligned}\tag{1.72}$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
A_1&=\frac{4\eta}{RD}\Big\{\big[\varkappa(\delta+2\varkappa)-\gamma(\lambda+2\mu)\big]\frac{dg_0(R)}{dR}+\alpha(\lambda+2\mu)Rg_0(R)\Big\}-\\
&\quad-\frac{4\zeta(\mu\delta-\lambda\varkappa)}{RD}\frac{dg_0(R)}{dR},\\
A_2&=\frac{\zeta(3\lambda+2\mu)-\eta(3\delta+2\varkappa)}{D},
\end{aligned}\tag{1.73}$$

სადაც

$$\begin{aligned}
D=&\big\{(3\lambda+2\mu)\big[\varkappa(\delta+2\varkappa)-\gamma(\lambda+2\mu)\big]+(3\delta+2\varkappa)(\lambda\varkappa-\mu\delta)\big\}\frac{4}{R}\frac{dg_0(R)}{dR}\\
&+4\alpha(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)g_0(R),
\end{aligned}\tag{1.74}$$

სისტემის დეტერმინანტია. სტანდარტული მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ იგი განსხვავდება ნულისაგან. წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ $D=0$, მაშინ ერთგვაროვან (1.72) სისტემას ექნება არატრივიალური ამონახსენი A_1' და A_2'. u_0' და ω_0' ვექტორებს კი მივიღებთ, თუ (1.71) ფორმულაში A_1 და A_2 მუდმივებს შევცვლით A_1' და A_2' მუდმივებით. ცხადია, რომ $\widetilde{V}_0'=(u_0',\omega_0')^\top$ ვექტორი არის ნეიმანის შემდეგი ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x)=0, \qquad x\in B(0,R), \tag{1.75}$$
$$\big\{T(\partial,n)\widetilde{V}_0'(x)\big\}^+=0, \qquad x\in\Sigma(0,R).$$

ერთის მხრივ, გრინის (1.45) ფორმულიდან და ლემა 1-დან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{V}_0'$ ვექტორი, როგორც (1.75) ამოცანის ამონახსნი, ხისტი გადაადგილების ვექტორია, ე.ი. $\widetilde{V}_0'=\big([a'\times x]+b',\,a'\big)^\top$, სადაც a' და b' ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. მეორე მხრივ, (1.71) ტოლობების თანახმად, სადაც A_1 და A_2 მუდმივები შეცვლილია A_1' და A_2' მუდმივებით, ცხადია, რომ $\widetilde{V}_0'=(u_0',\omega_0')^\top$ ვექტორი არ ეკუთვნის ხისტი გადაადგილების წრფივ გარსს, თუ $|A_1'|+|A_2'|\neq 0$. ეს წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ $D\neq 0$ და, მაშასადამე, (1.72) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია, ამიტომ, $\widetilde{V}_0=(u_0,\omega_0)^\top$ ვექტორი, სადაც u_0 და ω_0 მოცემულია (1.71) ტოლობით, ხოლო A_1 და A_2 მუდმივები (1.73) ტოლობებით, არის (1.64) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი ნებისმიერი მატერიალური მუდმივებისთვის.

შენიშვნა 5 . შემოვიღოთ ვექტორთა $\{\widetilde{\Phi}^{(j)}(x)\}_{j=1}^6$ და $\{\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^7$ სისტემები, სადაც

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}^{(1)}(x)=(0,-x_3,x_2,1,0,0)^\top, && \widetilde{\Phi}^{(2)}(x)=(x_3,0,-x_1,0,1,0)^\top,\\
&\widetilde{\Phi}^{(3)}(x)=(-x_2,x_1,0,0,0,1)^\top, && \widetilde{\Phi}^{(4)}(x)=(1,0,0,0,0,0)^\top,\\
&\widetilde{\Phi}^{(5)}(x)=(0,1,0,0,0,0,0)^\top, && \widetilde{\Phi}^{(6)}(x)=(0,0,1,0,0,0)^\top,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(1)}(x)=(0,-x_3,x_2,1,0,0,0)^\top, && \Phi^{(2)}(x)=(x_3,0,-x_1,0,1,0,0)^\top,\\
&\Phi^{(3)}(x)=(-x_2,x_1,0,0,0,1,0)^\top, && \Phi^{(4)}(x)=(1,0,0,0,0,0,0)^\top,\\
&\Phi^{(5)}(x)=(0,1,0,0,0,0,0)^\top, && \Phi^{(6)}(x)=(0,0,1,0,0,0,0)^\top,\\
&\Phi^{(7)}(x)=(u_0,\omega_0,1)^\top;
\end{aligned} \tag{1.77}$$

აქ u_0 და ω_0 არის (1.64) ამოცანის ერთი კერძო ამონახსნი. მარტივი საჩვენებელია, რომ ვექტორთა ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია Ω^+ არეში. მაშინ, ცხადია, რომ ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.78}$$

$$\left\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S,$$

ზოგადი ამონახსნია შემდეგი ვექტორი:

$$U(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k\, \Phi^{(k)}(x), \tag{1.79}$$

სადაც C_k ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $\Phi^{(k)}(x)$, $k = \overline{1,7}$, მოცემულია (1.77) ტოლობებით.

1.5.2 $Z(\Omega^-)$ კლასები. გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის თეორემები

უსასრულო არეების განხილვისას აღმოჩნდა, რომ სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნები უნდა ვეძებოთ ფუნქციათა სპეციალურ კლასში.

განსაზღვრება 6 . ვიტყვით, რომ $U = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ ასიმტოტურ პირობებს:

$$\text{(i)}\ \ u(x) = \mathcal{O}(1),\ \omega(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}),\ \vartheta(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}),\ \ \text{როცა}\ |x| \to \infty, \tag{1.80}$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \tag{1.81}$$

სადაც $\Sigma(0,R)$ არის R რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

განსაზღვრება 7 . ვიტყვით, რომ $U^* = (u^*, \omega^*, \vartheta^*)^\top$ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის $Z^*(\Omega^-)$ კლასს, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შენდეგ პირობებს:

$$\text{(i)}\ u^*(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}),\ \omega^*(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}),\ \vartheta^*(x) = \mathcal{O}(1),\ \text{როცა}\ |x| \to \infty, \tag{1.82}$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \vartheta^*(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \tag{1.83}$$

სადაც $\Sigma(0,R)$ არის R რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები ტემპერატურის ϑ ფუნქციისათვის განცალდებიან დამოუკიდებელ ძირითად სასაზღვრო ამოცანებად პუასონის განტოლებისთვის

$$\kappa' \triangle \vartheta(x) = \Phi_7(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.84}$$

და ამონახსენი ϑ აკმაყოფილებს ან დირიხლეს სასაზღვრო პირობას

$$\{\vartheta(x)\}^- = f_7(x), \qquad x \in S, \tag{1.85}$$

ან ნეიმანის სასაზღვრო პირობას

$$\kappa' \{\partial_n \vartheta(x)\}^- = F_7(x), \qquad x \in S, \tag{1.86}$$

ან შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობას

$$\{\vartheta(x)\}^- = f_7^{(D)}(x), \qquad x \in S_D, \tag{1.87}$$

$$\kappa' \{\partial_n \vartheta(x)\}^- = F_7^{(N)}(x), \qquad x \in S_N.$$

თუ მოვითხოვთ, რომ უსასრულობის მიდამოში $\vartheta = o(1)$, როცა $|x| \to \infty$, ანუ $\lim\limits_{x\to\infty} \vartheta(x) = 0$, მაშინ ამ ამოცანებს ექნებათ ერთადერთი ამონახსენი და ϑ ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება.

რადგან Φ_7 ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი, პუასონის (1.84) განტოლების ამონახსნის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენიდან ([14])

$$\vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi\,\kappa'} \int\limits_{\Omega^-} \frac{1}{|x-y|} \Phi_7(y)\,dy - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega^-} \Big\{\frac{\partial \vartheta(y)}{\partial n(y)}\Big\}^- dS_y +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial\Omega^-} \frac{\partial}{\partial n(y)} \frac{1}{|x-y|} \big\{\vartheta(y)\big\}^- dS_y,$$

გამომდინარეობს, რომ ϑ ფუნქციისათვის გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა უსასრულობის მიდამოში (იხ., მაგალითად, [17]):

$$\partial^{\mathrm{m}} \vartheta(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{-1-|\mathrm{m}|}\big), \qquad |x| \to \infty, \tag{1.88}$$

სადაც $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ ნებისმიერი მულტი-ინდექსია. უფრო ზუსტად,

$$\vartheta(x) = \frac{\theta_0}{|x|} + \mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big), \tag{1.89}$$

$$\operatorname{grad} \vartheta(x) = \frac{\theta_0}{|x|^3} x + \mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big), \qquad \vartheta_0 = const, \tag{1.90}$$

სადაც

$$\theta_0 = \lim_{|x|\to\infty} |x|\, \vartheta(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \big\{\partial_n \vartheta(x)\big\}^{-} dS - \frac{1}{4\pi\kappa'}\int_{\Omega^*} \Phi_7(x)dx,$$

$$\Omega^* = \Omega^- \cap \mathrm{supp}\Phi_7.$$

ამრიგად, ϑ ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება.

თუ დავუშვებთ, რომ ϑ უკვე ცნობილია, მაშინ ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი გარე სასაზღვრო $(D)^-$, $(N)^-$ და $(M)^-$ ამოცანები დაიყვანება შემდეგ სასაზღვრო ამოცანებზე $\widetilde{L}(\partial)$ ოპერატორისთვის.

ამოცანა (D)$^-$. ვიპოვოთ Ω^- არეში

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}(x) = \widetilde{\Phi}(x) + \widetilde{\Psi}(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.91}$$

განტოლების ისეთი $\widetilde{U} = (u,\omega)^\top \in \big[W^1_{2,loc}(\Omega^-)\big]^6$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\widetilde{U}(x)\big\}^- = \widetilde{f}(x), \qquad x \in S. \tag{1.92}$$

ამოცანა (N)$^-$. ვიპოვოთ Ω^- არეში (1.91) განტოლების ისეთი $\widetilde{U} = (u,\omega)^\top \in \big[W^1_{2,loc}(\Omega^-)\big]^6$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{T(\partial,n)\widetilde{U}(x)\big\}^- = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x), \qquad x \in S. \tag{1.93}$$

ამოცანა (M)$^-$. ვიპოვოთ Ω^- არეში (1.91) განტოლების ისეთი $\widetilde{U} = (u,\omega)^\top \in \big[W^1_{2,loc}(\Omega^-)\big]^6$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობებს:

$$\big\{\widetilde{U}(x)\big\}^- = \widetilde{f}^{(D)}(x), \qquad x \in S_D, \tag{1.94}$$

$$\big\{T(\partial,n)\widetilde{U}(x)\big\}^- = \widetilde{F}^{(N)}(x) + \widetilde{G}(x), \qquad x \in S_N. \tag{1.95}$$

აქ $\widetilde{L}(\partial)$ განსაზღვრულია (1.19) ტოლობით, $T(\partial,n)$ მოცემულია (1.27) ტოლობით, $\widetilde{\Phi} = (\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_6)^\top$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{f}^{(D)}$, $\widetilde{F}^{(N)}$ მოცემულია (1.41) თანაფარდობებით და

$$\widetilde{\Psi}(x) = \Big(\eta \text{ grad } \vartheta(x), \zeta \text{ grad } \vartheta(x)\Big)^\top, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.96}$$

$$\widetilde{G}(x) = \Big(\eta\, n\, \vartheta(x), \zeta\, n\, \vartheta(x)\Big)^\top, \qquad x \in S. \tag{1.97}$$

როგორც ვხედავთ, (1.91) განტოლების მარჯვენა მხარეში მდგომ ვექტორ-ფუნქციას არა აქვს კომპაქტური საყრდენი და ის ქრება უსასრულობაში (1.90)

პირობის ძალით, როგორც $\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)$, ვინაიდან $\widetilde{\Phi}$ ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი. ამიტომ, (1.91) განტოლების ამონახსენი, ზოგადად, უსასრულობაში არ ქრება.

უსასრულობაში ამონახსნების ასიმპტოტიკის დასადგენად (1.91) განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}(x) = -\frac{\theta_0}{|x|^3}\begin{bmatrix} \eta\, x \\ \\ \zeta\, x \end{bmatrix}_{6\times 1} + \widetilde{\Psi}^{(1)}(x) + \widetilde{\Phi}(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.98}$$

სადაც

$$\widetilde{\Psi}^{(1)}(x) = \Big(\eta\,\psi(x), \zeta\,\psi(x)\Big)^\top, \qquad \psi(x) = \mathrm{grad}\,\vartheta(x) + \frac{\theta_0}{|x|^3}\,x. \tag{1.99}$$

(1.90) ტოლობის ძალით, ცხადია, რომ $\psi(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big)$ და, მაშასადამე, $\widetilde{\Psi}^{(1)}(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big)$, როცა $|x| \to \infty$.

ახლა დავამტკიცოთ რამდენიმე ტექნიკური ლემა. ქვემოთ ყველგან, ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სათავე მდებარეობს Ω^+ არეში.

ლემა 8 . ვექტორი

$$\widetilde{U}^{(0)}(x) = \big(u^{(0)}(x), \omega^{(0)}(x)\big)^\top := \theta_0\Big(\alpha_1\frac{x}{|x|}, \alpha_2\frac{x}{|x|^3}\Big)^\top, \tag{1.100}$$

სადაც

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{2(\lambda+2\mu)}, \qquad \alpha_2 = \frac{\zeta(\lambda+2\mu) - \eta(\delta+2\varkappa)}{2\alpha(\lambda+2\mu)}, \tag{1.101}$$

არის შემდეგი დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}(x) = -\frac{\theta_0}{|x|^3}\begin{bmatrix} \eta\, x \\ \\ \zeta\, x \end{bmatrix}_{6\times 1}, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \tag{1.102}$$

ამასთან სრულდება შემდეგი პირობები:

$$u^{(0)}(x) = \mathcal{O}(1), \qquad \omega^{(0)}(x) = \mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big), \qquad \text{როცა}\,|x| \to \infty.$$

დამტკიცება. ლემა მტკიცდება უშუალო შემოწმებით. □

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\begin{aligned}\widetilde{U}^{(1)}(x) = \Big(u^{(1)}(x),\, \omega^{(1)}(x)\Big)^\top := \\ = \int\limits_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}(x-y)\big[\widetilde{\Psi}^{(1)}(x) + \widetilde{\Phi}(x)\big]\,dy, \qquad x \in \Omega^-,\end{aligned} \tag{1.103}$$

სადაც $\widetilde{\Psi}^{(1)}$ მოცემულია (1.99) ტოლობით, $\widetilde{\Phi}$ კომპაქტურ საყრდენიანი გლუვი ექვსგანზომილებიანი ვექტორ-ფუნქციაა, ხოლო $\widetilde{\Gamma}$ არის $\widetilde{L}(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა ([12]):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}(x) =&\mathcal{F}_{\xi-x}\big[\widetilde{L}(-i\widetilde{\xi})\big]^{-1} = \begin{bmatrix} [\Gamma^{(1)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(2)}_{pq}(x)]_{3\times3} \\ [\Gamma^{(3)}_{pq}(x)]_{3\times3} & [\Gamma^{(4)}_{pq}(x)]_{3\times3} \end{bmatrix}_{6\times6} = \\
=&\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} \Psi_1(x)I_3 & \Psi_2(x)I_3 \\ \Psi_3(x)I_3 & \Psi_4(x)I_3 \end{bmatrix}_{6\times6} - \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} Q(\partial)\Psi_6(x) & Q(\partial)\Psi_7(x) \\ Q(\partial)\Psi_8(x) & Q(\partial)\Psi_9(x) \end{bmatrix}_{6\times6} + \\
+&\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} R(\partial)\Psi_{10}(x) & R(\partial)\Psi_{11}(x) \\ R(\partial)\Psi_{12}(x) & R(\partial)\Psi_{13}(x) \end{bmatrix}_{6\times6};
\end{aligned}
\tag{1.104}
$$

აქ $Q(\partial)$ და $R(\partial)$ განსაზღვრულია (1.8) ფორმულით, ხოლო Ψ_i, $i=\overline{1,13}$, განსაზღვრულია (1.32) ფორმულებით.

შენიშვნა 9 . (1.104) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ საკმარისად დიდი $|x|$-თვის, ე.ი. როცა $|x|\to\infty$, ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$
\Gamma^{(1)}_{pq}(x)=\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big), \qquad \Gamma^{(j)}_{pq}(x)=\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big), \qquad j=\overline{2,4}, \quad p,q=1,2,3, \tag{1.105}
$$

ხოლო

$$
\widetilde{\Gamma}(x)=\big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{6\times6}, \qquad \text{როცა} \quad |x|\to0. \tag{1.106}
$$

ლემა 10 . (1.103) გამოსახულებით განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის $\big[C^2(\overline{\Omega^-})\big]^6$ სივრცეს და არის შემდეგი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსენი:

$$
\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}^{(1)}(x)=\widetilde{\Psi}^{(1)}(x)+\widetilde{\Phi}(x), \qquad\qquad x\in\Omega^-, \tag{1.107}
$$

სადაც $\widetilde{\Psi}^{(1)}$ განსაზღვრულია (1.99) ტოლობით, ხოლო $\widetilde{\Phi}\in C^1_{comp}(\overline{\Omega^-})$. ამასთან, უსასრულობის მიდამოში მართებულია შემდეგი ასიმპტოტური ფორმულა:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}^{(1)}(x)=\Big(u^{(1)}(x),\,\omega^{(1)}(x)\Big)^\top = \\
=\begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\ln|x|\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\ln|x|\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x|\to\infty.
\end{aligned}
\tag{1.108}
$$

დამტკიცება. რადგან $\widetilde{\Phi}$ ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი, ამიტომ არსებობს ისეთი $R>0$, რომ $\operatorname{supp}\widetilde{\Phi}\subset B(0,R)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა: $B(0,R)\setminus\overline{\Omega^+}=\Omega_1$.

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატთა სათავე მდებარეობს Ω^+ არეში.

ჯერ შევაფასოთ შემდეგი ინტეგრალი:

$$\int\limits_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}(x-y)\,\widetilde{\Phi}(y)\,dy = \int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\Gamma}(x-y)\,\widetilde{\Phi}(y)\,dy.$$

ვთქვათ, $|x| >> 1$; მაშინ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $|x| > 2R$, საიდანაც გამომდინარეობს $|x-y| \geqslant \dfrac{|x|}{2}$ ნებისმიერი $y \in \Omega_1$, ე.ი. $\dfrac{1}{|x-y|} \leqslant \dfrac{2}{|x|}$. თუ ვისარგებლებთ ამ უტოლობით და $\widetilde{\Gamma}$ ფუნდამენტური ამონახსნის ყოფაქცევით (იხ. შენიშვნა 9), მივიღებთ:

$$\Big|\int\limits_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\,dy\Big| = \Big|\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\,dy\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_1} \Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\Big|\,dy \leqslant \int\limits_{\Omega_1} \frac{c}{|x-y|}\big|\,\widetilde{\Phi}(y)\big|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c}{|x|}\int\limits_{\Omega_1} \big|\widetilde{\Phi}(y)\big|\,dy \leqslant \frac{M}{|x|}, \qquad k=1,2,3,$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\,dy\Big| = \Big|\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\,dy\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_1} \Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Phi}_j(y)\Big|\,dy \leqslant \int\limits_{\Omega_1} \frac{c}{|x-y|^2}\big|\,\widetilde{\Phi}(y)\big|\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c}{|x|^2}\int\limits_{\Omega_1} \big|\widetilde{\Phi}(y)\big|\,dy \leqslant \frac{M}{|x|^2}, \qquad k=4,5,6,$$

სადაც $M = 2c\displaystyle\int\limits_{\Omega_1} \big|\widetilde{\Phi}(y)\big|\,dy.$

ამრიგად,

$$\int\limits_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}(x-y)\widetilde{\Phi}(y)\,dy = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}_{6\times6}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty.$$

(1.103) გამოსახულების მეორე შესაკრების შესაფასებლად ვისარგებლოთ შემდეგი წარმოდგენით:

$$\int_{\Omega^-} \widetilde{\Gamma}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}(y)\,dy = \sum_{\ell=1}^{4} \int_{\Omega_\ell} \widetilde{\Gamma}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}(y)\,dy, \tag{1.109}$$

სადაც

$$\Omega^- = \bigcup_{\ell=1}^{4} \Omega_\ell^-, \qquad \Omega_1 = B\Big(0, \frac{|x|}{2}\Big) \setminus \Omega^+, \qquad \Omega_2 = B\Big(x, \frac{|x|}{2}\Big) \cap \Omega^-,$$

$$\Omega_3 = \Big\{B\Big(0, \frac{3|x|}{2}\Big) \cap \Omega^-\Big\} \setminus \Big\{B\Big(0, \frac{|x|}{2}\Big) \cup B\Big(x, \frac{|x|}{2}\Big)\Big\}, \qquad \Omega_4 = \Omega^- \setminus B\Big(0, \frac{3|x|}{2}\Big).$$

რადგან

$$\widetilde{\Psi}^{(1)}(y) = \mathcal{O}\big(|y|^{-3}\big), \qquad \text{როცა} \quad |y| \to \infty,$$

ამიტომ არსებობს $c_0 > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$\big|\widetilde{\Psi}^{(1)}(y)\big| \leqslant \frac{c_0}{|y|^3}, \qquad y \in \Omega^-.$$

შევაფასოთ (1.109) ტოლობის მარჯვენა მხარის თითოეული შესაკრები.

1) ვთქვათ, $y \in \Omega_1$. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობებს: $|x-y| \geqslant \frac{|x|}{2}$, $\frac{1}{|x-y|} \leqslant \frac{2}{|x|}$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $|y| = \rho$ და გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებზე:

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1\, \rho \cos\varphi \sin\theta,\\
&y_2 = x_2\, \rho \sin\varphi \sin\theta,\\
&y_3 = x_3\, \rho \cos\theta,\\
&dy = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.
\end{aligned}$$

მაშინ მივიღებთ შემდეგ შეფასებას:

$$\Big|\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\, \widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\, dy\Big| \leqslant \int\limits_{\Omega_1} \Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\, \widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big| dy \leqslant \int\limits_{\Omega_1} \frac{c_1}{|x-y|}\frac{c_0}{|y|^3}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c_1\, c_0}{|x|} \int\limits_{B\left(0, \frac{|x|}{2}\right)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{dy}{|y|^3} \leqslant \frac{2c_1\, c_0}{|x|} \int\limits_{\Sigma_1} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{|x|}{2}} \frac{d\rho\, d\Sigma_1}{\rho} = \tag{1.110}$$

$$= \frac{8\pi c_1\, c_0}{|x|}\big(\ln|x| - \ln 2\varepsilon\big), \qquad k = 1, 2, 3.$$

აქ Σ_1 არის ერთეულოვანი სფერული ზედაპირი, ხოლო სასრული რიცხვი $\varepsilon > 0$ ისეთია, რომ $\overline{B(0,\varepsilon)} \subset \Omega^+$.

რადგან $\varepsilon > 0$ ფიქსირებულია, ამიტომ (1.110) გამოსახულებიდან საკმარისად დიდი $|x|$-თვის მივიღებთ, რომ

$$\Big|\int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\, \widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\, dy\Big| \leqslant \frac{c}{|x|} \ln|x|, \qquad k = 1, 2, 3,$$

სადაც c დადებითი მუდმივია.

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\Big|\int\limits_{\Omega_1}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_1}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega_1}\frac{c_2}{|x-y|^2}\,\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant\frac{8c_2\,c_0}{|x|^2}\big(\ln|x|-\ln 2\varepsilon\big)\leqslant\frac{c}{|x|^2}\ln|x|,\qquad k=4,5,6.$$

2) ვთქვათ, $y\in\Omega_2$. მაშინ მართებულია შემდეგი უტოლობები: $|y|\geqslant\dfrac{|x|}{2}$, $\dfrac{1}{|y|}\leqslant\dfrac{2}{|x|}$. კვლავ შემოვიღოთ აღნიშვნა: $|x-y|=\rho$; მაშინ მივიღებთ შემდეგ შეფასებებს:

$$\Big|\int\limits_{\Omega_2}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_2}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega_2}\frac{c_3}{|x-y|}\,\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant\frac{2c_3\,c_0}{|x|^3}\int\limits_{\Omega_2}\rho\,\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2c_3\,c_0}{|x|^3}\int\limits_0^{\frac{|x|}{2}}\rho\,d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\frac{8\pi c_3\,c_0}{|x|^3}\int_0^{\frac{|x|}{2}}\rho\,d\rho=\frac{c}{|x|},\qquad k=1,2,3;$$

$$\Big|\int\limits_{\Omega_2}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{|x-y|\leqslant\frac{|x|}{2}}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Sigma_1}\int\limits_0^{A}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big|\,dy+\int\limits_A^{\frac{|x|}{2}}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}_j^{(1)}(y)\Big|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_3}{|x|^3}\int\limits_0^{A}\frac{1}{\rho}\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\rho+\int\limits_A^{\frac{|x|}{2}}\frac{c_0}{\rho^2}\,\frac{1}{|x|^3}\,\rho^2\,d\Sigma_1\,d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c_3}{|x|^3}\,\frac{A^2}{2}+\frac{c_0}{|x|^3}\,\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{A_1}{|x|^3}+\frac{A^2}{|x|^2},\qquad k=4,5,6.$$

ამ შეფასებების მიღების დროს გათვალისწინებულია, რომ თი $|x-y|>A$, მაშინ $|\Gamma_{kj}(x-y)|<\dfrac{c_0}{|x-y|^2}$, როცა $k=4,5,6$ (იხ. შენიშვნა 9).

3) ვთქვათ, $y\in\Omega_3$. მაშინ მართებულია შემდეგი უტოლობები: $|x-y|\geqslant\dfrac{|x|}{2}$, $\dfrac{1}{|x-y|}\leqslant\dfrac{2}{|x|}$, $|y|\geqslant\dfrac{|x|}{2}$, $\dfrac{1}{|y|}\leqslant\dfrac{2}{|x|}$, და ვღებულობთ შემდეგ შეფასებებს:

$$
\Big|\int\limits_{\Omega_3}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_3}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\Big|\,dy\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{\Omega_3}\frac{c_4}{|x-y|}\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant\frac{4c_4\,c_0}{|x|^4}\int\limits_{B\left(0,\frac{3|x|}{2}\right)\setminus B\left(0,\frac{|x|}{2}\right)}dy=
$$

$$
=\frac{16\pi c_4\,c_0}{|x|^4}\int\limits_{|x|/2}^{3|x|/2}\rho^2\,d\rho=\frac{c}{|x|},\qquad k=1,2,3;
$$

$$
\Big|\int\limits_{\Omega_3}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_3}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\Big|\,dy\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{\Omega_3}\frac{c_5}{|x-y|^2}\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant\frac{4c_5\,c_0}{|x|^5}\int\limits_{B\left(0,\frac{3|x|}{2}\right)\setminus B\left(0,\frac{|x|}{2}\right)}dy=
$$

$$
=\frac{16\pi\,c_5\,c_0}{|x|^5}\int\limits_{|x|/2}^{3|x|/2}\rho^2\,d\rho=\frac{c}{|x|^2},\qquad k=4,5,6.
$$

4) ვთქვათ, $y\in\Omega_4$. მაშინ მართებულია შემდეგი უტოლობები: $|y|\geqslant\dfrac{3|x|}{2}$, $|x|\leqslant\dfrac{2|y|}{3}$, $|x-y|\geqslant|y|-|x|$, $|x-y|\geqslant\dfrac{|y|}{3}$, $\dfrac{1}{|x-y|}\leqslant\dfrac{3}{|y|}$ და მივიღებთ შემდეგ შეფასებებს:

$$
\Big|\int\limits_{\Omega_4}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_4}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\Big|\,dy\leqslant\int\limits_{\Omega_4}\frac{c_6}{|x-y|}\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant
$$

$$
\leqslant 3c_6\,c_0\int\limits_{\Omega_4}\frac{1}{|y|^4}\,dy=3c_6\,c_0\int\limits_{3|x|/2}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta=
$$

$$
=12c_6\,c_0\pi\int\limits_{3|x|/2}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^2}\leqslant\frac{c}{|x|},\qquad k=1,2,3;
$$

$$
\Big|\int\limits_{\Omega_4}\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\,dy\Big|\leqslant\int\limits_{\Omega_4}\Big|\widetilde{\Gamma}_{kj}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}_j(y)\Big|\,dy\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{\Omega_4}\frac{c_7}{|x-y|^2}\frac{c_0}{|y|^3}\,dy\leqslant 12c_7\,c_0\,\pi\int\limits_{3|x|/2}^{+\infty}\frac{d\rho}{\rho^3}\leqslant\frac{c}{|x|^2},\qquad k=4,5,6.
$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$
\int\limits_{\Omega^-}\widetilde{\Gamma}(x-y)\,\widetilde{\Psi}^{(1)}(y)\,dy=\begin{bmatrix}\big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\ln|x|\big)\big]_{3\times1}\\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\ln|x|\big)\big]_{3\times1}\end{bmatrix}_{6\times6},\qquad \text{როცა}\quad |x|\to\infty.
$$

მაშასადამე, მივიღეთ (1.108) თანაფარდობა. ვინაიდან $\widetilde{\Psi}^{(1)} + \widetilde{\Phi} \in \big[C^1(\overline{\Omega^-})\big]^6$ და უსასრულობის მიდამოში აქვს $\mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big)$ ასიმპტოტიკა, (1.103) წარმოადგენს ნიუტონის ტიპის მოცულობით პოტენციალს, ამიტომ სტანდარტული მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ (1.107) ტოლობის მართებულობა. $\square$

ლემა 11 . ერთგვაროვანი

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.111}$$

დიფერენციალური განტოლების ყოველ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია უსასრულობაში, აქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა:

$$\widetilde{V}(x) = C + \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty,$$

სადაც $C = (C_1, C_2, C_3, 0, 0, 0)^\top$ და C_j, $j = 1, 2, 3$, ნებისმიერი მუდმივებია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\widetilde{V}$ არის (1.111) განტოლების უსასრულობაში შემოსაზღვრული ამონახსენი. $\widetilde{L}(\partial)$ ოპერატორის ელიფსურობიდან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი ჩართვა: $\widetilde{V} \in \big[C^\infty(\Omega^-)\big]^6$.

R რიცხვი შევარჩიოთ ისე, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(0,R)$ და $\widetilde{V}$ ვექტორ-ფუნქცია გავაგრძელოთ $B(0,R)$ ბირთვში ისე, რომ იგი დარჩეს C^∞-სიგლუვის. გაგრძელებული ვექტორ-ფუნქცია აღვნიშნოთ $\widetilde{W}$ სიმბოლოთი. ცხადია, $\widetilde{W} \in \big[C^\infty(\mathbb{R}^3)\big]^6$ და

$$\widetilde{W}(x) = \widetilde{V}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}, \tag{1.112}$$

ამასთან, (1.111) ტოლობის თანახმად

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{W}(x) = \widetilde{H}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.113}$$

სადაც $\widetilde{H} \in \big[C^\infty(\mathbb{R}^3)\big]^6$ და $\operatorname{supp}\widetilde{H} \subset B(0,R)$.

მოვახდინოთ (1.113) ტოლობის განზოგადებული ფურიეს გარდაქმნა. მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\widetilde{L}(-i\xi)\,\widehat{\widetilde{W}}(x) = \widehat{\widetilde{H}}(x), \qquad \xi \in \mathbb{R}^3, \tag{1.114}$$

რომელიც გვესმის შვარცის განზოგადებულ ფუნქციათა $S'(\mathbb{R}^3)$ სივრცის აზრით. $\widetilde{L}(-i\xi)$ მატრიცის დეტერმინანტისთვის გვაქვს

$$\det \widetilde{L}(-i\xi) = d_1^2\, d_2^2\, |\xi|^6 \left(|\xi|^2 + \lambda_1^2\right) \left(|\xi|^2 + \lambda_2^2\right) \left(|\xi|^2 + \lambda_3^2\right),$$

სადაც d_1 და d_2 დადებითი მუდმივებია, რომლებიც განსაზღვრულია (1.49) ფორმულით, $\lambda_1^2 > 0$, ხოლო λ_2^2 და λ_3^2 ურთიერთშეუღლებული კომპლექსური მუდმივებია და განსაზღვრულნი არიან (1.30) ფორმულით. აქედან გამომდინარე, $\det \widetilde{L}(-i\xi) = 0$, მხოლოდ მაშინ, როცა $\xi = 0$. შევნიშნოთ, რომ $\det \widetilde{L}^{-1}(-i\xi)$ არის ფუნდამენტური $\widetilde{\Gamma}(x)$ მატრიცის ფურიეს გარდაქმნა (იხ., (1.104) ტოლობა):

$$\widetilde{L}^{-1}(-i\xi) = \widehat{\widetilde{\Gamma}}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{\Gamma}^{(1)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(2)}(\xi) \\ \widehat{\Gamma}^{(3)}(\xi) & \widehat{\Gamma}^{(4)}(\xi) \end{bmatrix}_{6\times 6}, \tag{1.115}$$

სადაც $\widehat{\Gamma}^{(k)}(\xi)$, $k = \overline{1,4}$, განსაზღვრულია (1.29) ტოლობით. ამ მატრიცას აქვს შემდეგი ტიპის სუსტი სინგულარობა სათავის მიდამოში:

$$\widehat{\widetilde{\Gamma}}(\xi) = \widetilde{L}^{-1}(-i\xi) = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|\xi|^{-2}\big)\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big)\big]_{3\times 3} \\ \big[\mathcal{O}\big(|\xi|^{-1}\big)\big]_{3\times 3} & \big[\mathcal{O}(1)\big]_{3\times 3} \end{bmatrix}. \tag{1.116}$$

ამიტომ, $\widehat{\widetilde{\Gamma}}(\xi)$ მატრიცის ელემენტები ლოკალურად ჯამებადი ფუნქციებია. (1.114) ფორმულიდან (1.116) ასიმპტოტური წარმოდგენის გამოყენებით დავასკვნით, რომ

$$\widehat{\widetilde{W}}(\xi) = \widehat{\widetilde{\Gamma}}(\xi)\, \widehat{\widetilde{H}}(\xi) + \sum_{|\mathrm{m}|\leqslant N} C_{\mathrm{m}}\, \delta^{(\mathrm{m})}(\xi), \tag{1.117}$$

სადაც $\delta(\cdot)$ არის დირაკის ფუნქცია, $\mathrm{m} = (m_1, m_2, m_3)$ მულტი-ინდექსია, C_{m} ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია, $\delta^{(\mathrm{m})} = \partial^{\mathrm{m}}\delta$ და N რაიმე არაუარყოფითი მთელი რიცხვია.

აქ ვიყენებთ იმ ფაქტს, რომ თუ განზოგადებული ფუნქციის საყრდენია იზოლირებული წერტილი (ჩვენს შემთხვევაში ესაა $\xi = 0$ სათავე), მაშინ იგი წარმოიდგინება დირაკის ფუნქციის და მისი წარმოებულების წრფივი კომბინაციით (იხ., მაგ. [13]).

რადგან $\widetilde{H}$ ვექტორ-ფუნქციას აქვს კომპაქტური საყრდენი, ამიტომ მისი ფურიეს გარდაქმნა $\widehat{\widetilde{H}}$ ანალიზურია და შექცეული ფურიეს გარდაქმნით (1.117) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\widetilde{W}(x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\big[\widehat{\widetilde{\Gamma}}(\xi)\, \widehat{\widetilde{H}}(\xi)\big] + \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha\, x^\alpha = \tag{1.118}$$

$$= \int_{\Omega^{(1)}} \widetilde{\Gamma}(x-y)\, \widetilde{H}(y)\, dy + \sum_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha\, x^\alpha, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

სადაც $\Omega^{(1)} = \mathrm{supp}\widetilde{H}$. აქ გამოვიყენეთ ნახვევის ფურიეს გრადაქმნის თვისება:

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f}(\xi)\cdot \widehat{g}(\xi),$$

სადაც $f * g$ აღნიშნავს f და g ფუნქციების ნახვევს:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

რადგან $\widetilde{H}$ ფუნქციის საყრდენი კომპაქტია, ამიტომ ჩვენს შემთხვევაში ნახვევი განმარტებულია კორექტულად და ფუნდამენტური $\widetilde{\Gamma}(x)$ მატრიცის უსასრულობაში ასიმტოტური ყოფაქცევის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{(1)}} \widetilde{\Gamma}(x-y)\, \widetilde{H}(y)\, dy = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{3\times 1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)\big]_{3\times 1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty. \tag{1.119}$$

ამიტომ $\widetilde{W}(x)$ ფუნქციის უსასრულობაში შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს, რომ (1.118) ფორმულაში $C_{\mathrm{m}} = 0$ ყოველი m-თვის, $|\mathrm{m}| \geqslant 1$. ამიტომ (1.118) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\widetilde{W}(x) = \int_{\Omega^{(1)}} \widetilde{\Gamma}(x-y)\, \widetilde{H}(y)\, dy + C, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.120}$$

სადაც $C = (C_1, C_2, ..., C_6)^\top$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორია.

მხედველობაში მივიღოთ, რომ $\widetilde{W}(x)$ არის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი $B(0,R)$ ბირთვის გარე არეში:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{W}(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}. \tag{1.121}$$

რადგან (1.120) განტოლების პირველი შესაკრები არის ერთგვაროვანი (1.121) განტოლების ამონახსნი, ამიტომ C მუდმივიც დააკმაყოფილებს იმავე ერთგვაროვან განტოლებას (იხ. (1.20) ფორმულები). აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, რადგან (1.20) ფორმულებში შემავალი α პარამეტრი განსხვავებულია ნულისაგან. □

ლემა 12 . (1.98) განტოლების ნებისმიერ $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top$ ამონახსნს, რომელიც შემოსაზღვრულია უსასრულობაში და აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \tag{1.122}$$

უსასრულობაში გააჩნია შემდეგი ასიმპტოტიკა:

$$\widetilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \big[\theta_0\, \alpha_1\, x\, |x|^{-1} + \mathcal{O}\big(|x|^{-1} \ln |x|\big)\big]_{3\times 1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2} \ln |x|\big)\big]_{3\times 1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty, \tag{1.123}$$

სადაც α_1 მოცემულია (1.101) ტოლობით.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\widetilde{U}$ წარმოადგენს (1.98) განტოლების უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ამონახსნს და აკმაყოფილებს (1.122) პირობას. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\widetilde{U}^*(x) := \widetilde{U}(x) - \widetilde{U}^{(0)}(x) - \widetilde{U}^{(1)}(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.124}$$

სადაც $\widetilde{U}^{(0)}$ და $\widetilde{U}^{(1)}$ მოცემულია (1.100) და (1.103) ტოლობებით. ცხადია, რომ $\widetilde{U}^*$ შემოსაზღვრულია უსასრულობაში და არის ერთგვაროვანი დიფერენციალური

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}^*(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-,$$

განტოლების ამონახსენი. ამიტომ ლემა 11-ის ძალით გვაქვს:

$$\widetilde{U}^*(x) = C + \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty, \tag{1.125}$$

სადაც $C = (C_1, C_2, C_3, 0, 0, 0)^\top$ და C_j, $j = 1, 2, 3$, ნებისმიერი მუდმივებია. ამიტომ ლემა 10-ის გამოყენებით $\widetilde{U}(x) = \widetilde{U}^*(x) + \widetilde{U}^{(0)}(x) + \widetilde{U}^{(1)}(x)$ ვექტორისთვის მივიღებთ:

$$\widetilde{U}(x) = C + \begin{bmatrix} \big[\theta_0\, \alpha_1\, x\, |x|^{-1} + \mathcal{O}\big(|x|^{-1} \ln |x|\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2} \ln |x|\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty.$$

რადგან

$$\int_{\Sigma(0,R)} x\, d\Sigma(0, R) = 0,$$

(1.122) პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. □

ზემოთ მიღებული შედეგების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ერთადერთობის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13 . სტატიკის გარე დირიხლეს $(D)^-$, ნეიმანის $(N)^-$, რობენის $(R)^-$ და შერეულ $(M)^-$ სასაზღვრო ამოცანებს აქვთ არაუმეტეს ერთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top \in [W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ ამონახსენი.

დამტკიცება. სასაზღვრო ამოცანების წრფივობის გათვალისწინებით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი $[W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში. ვთქვათ, $U = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top$ არის ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი $[W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასიდან. რადგან

ერთგვაროვანი სასაზღვრო ამოცანები ტემპერატურის ფუნქციისათვის განცალებულნი არიან და ϑ უსასრულობაში მიისწრაფვის ნულისკენ, მივიღებთ, რომ $\vartheta(x) = 0,\ x \in \Omega^-$. ამიტომ ერთგვაროვანი

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{U}(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.126}$$

განტოლების ამონახსენი $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top$ ვექტორი, შემოსაზღვრულია უსასრულობაში და აკმაყოფილებს (1.122) პირობას. მაშინ ლემა 10-ის თანახმად

$$\widetilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-1}\big)\big]_{3\times1} \\ \big[\mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)\big]_{3\times1} \end{bmatrix}, \qquad \text{როცა} \quad |x| \to \infty. \tag{1.127}$$

იმ ვექტორ-ფუნქციისათვის, რომლის ასიმპტოტიკა უსასრულობაში გამოისახება (1.127) ფორმულით, ადგილი აქვს გრინის იგივეობას:

$$\int_{\Omega^-} \big[\widetilde{U} \cdot \widetilde{L}(\partial)\widetilde{U} + E(\widetilde{U}, \widetilde{U})\big] dx = -\int_S \{\widetilde{U}\}^- \cdot \{T(\partial, n)\widetilde{U}\}^- dS, \tag{1.128}$$

სადაც $E(\widetilde{U}, \widetilde{U})$ კვადრატული ფორმა მოცემულია (1.46) ტოლობით. რადგან $\widetilde{U}$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს (იხ. (1.92)-(1.95) ტოლობები), ამიტომ (1.128) ტოლობაში ზედაპირული ინტეგრალი ქრება და მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^-} E(\widetilde{U}, \widetilde{U}) dx = 0, \qquad \text{ანუ} \qquad E(\widetilde{U}, \widetilde{U}) = 0;$$

აქედან კი ლემა 1-ის ძალით გვაქვს

$$u(x) = [a \times x] + b, \qquad \omega(x) = a, \qquad x \in \Omega^-,$$

სადაც a და b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. ხოლო (1.127) ტოლობის გათვალისწინებით დავასკვნით, რომ $a = b = 0$, ე.ი. Ω^- არეში $\widetilde{U} = (u, \omega)^\top = 0$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

1.5.3 ერთადერთობის თეორემები შეუღლებული ამოცანებისთვის

იმავე მიდგომით, რაც გამოყენებული იყო წინა ქვეპარაგრაფში, მტკიცდება ერთადერთობის შემდეგი დებულებები შეუღლებული სასაზღვრო ამოცანების შემთხვევაში.

თეორემა 14 . შეუღლებულ დირიხლეს ერთგვაროვან შიგა $(D^*)^+$ და გარე $(D^*)^-$ ამოცანებს, აგრეთვე ნეიმანის ერთგვაროვან გარე $(N^*)^-$ ამოცანას, შესაბამისად, ვექტორ-ფუნქციათა $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ და $[W_{2,loc}^1(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასებში გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

თეორემა 15 . შეუღლებული ნეიმანის ერთგვაროვანი შიგა $(N^*)^+$ ამოცანის ზოგადი ამონახსენია

$$V^{(0)}(x) = ([a \times x] + b, a, c)^\top,$$

სადაც a და b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია, c კი - ნებისმიერი ნამდვილი სკალარული მუდმივია.

1.6 პოტენციალები და მათი თვისებები

ვთქვათ, $S \in C^{k,\kappa}$, სადაც $k \geqslant 1$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. შემოვიღოთ ზედაპირული - მარტივი და ორმაგი ფენის, და მოცულობითი - ნიუტონის პოტენციალები, რომლებიც დაკავშირებულია $L(\partial)$ ოპერატორთან და შეუღლებული ზედაპირული და მოცულობითი პოტენციალები, რომლებიც დაკავშირებულია შეუღლებულ $L^*(\partial)$ ოპერატორთან:

$$V(g)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.129}$$

$$W(g)(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.130}$$

$$N_{\Omega^\pm}(h)(x) := \int\limits_{\Omega^\pm} \Gamma(x-y)\, h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.131}$$

$$V^*(g)(x) := \int\limits_S \Gamma^*(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.132}$$

$$W^*(g)(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big)\big[\Gamma^*(x-y)\big]^\top\big]^\top g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{1.133}$$

$$N^*_{\Omega^\pm}(h)(x) := \int\limits_{\Omega^\pm} \Gamma^*(x-y)\, h(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.134}$$

სადაც $\Gamma(x-y) = [\Gamma_{kj}(x-y)]_{7\times 7}$ არის $L(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა, ე.ი შემდეგი განტოლების ამონახსენია: $L(\partial_x)\Gamma(x-y) = I_7\delta(x-y)$, $\delta(x-y)$ დირაკის ფუნქციაა, $\Gamma^*(x-y) := \Gamma^\top(y-x)$ არის შეუღლებული $L^*(\partial)$ ოპერატორის ფუნდამენტური მატრიცა, $\mathcal{P}\big(\partial, n\big)$ და $\mathcal{P}^*\big(\partial, n\big)$ სასაზღვრო ოპერატორები განსაზღვრულია (1.24) და (1.26) ტოლობებით, $g = (g_1, g_2, ..., g_7)^\top$ ვექტორ-ფუნქცია S საზღვარზე მოცემული სიმკვრივეა, $h = (h_1, h_2, ..., h_7)^\top$ ვექტორ-ფუნქცია კი

$\Omega^{\pm}$ არეში მოცემული სიმკვრივეა და ვთვლით, რომ Ω^- არის შემთხვევაში მისი საყრდენი კომპაქტია.

მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების შესახებ მართებულია შემდეგი დებულებები.

ლემა 16 . მარტივი $V(g)$ და ორმაგი $W(g)$ ფენის პოტენციალები წარმოადგენენ ერთგვაროვანი

$$L(\partial)\,U(x)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus S,$$

განტოლების ამონახსნებს და ეკუთვნიან $Z(\Omega^-)$ კლასს.

დამტკიცება. თეორემის პირველი ნაწილის დამტკიცება შესაძლებელია უშუალო გამოთვლებით. მართლაც, თუ მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალზე ვამოქმედებთ $L(\partial)$ ოპერატორს, მივიღებთ:

$$\big[L(\partial)\,V(g)(x)\big]_k = L_{kj}(\partial)\,\big[V(g)(x)\big]_j = L_{kj}(\partial)\Big[\int\limits_S \Gamma_{jp}(x-y)\,g_p(y)\,dS_y\Big] =$$

$$= \int\limits_S L_{kj}(\partial)\Gamma_{jp}(x-y)\,g_p(y)\,dS_y, \qquad k=\overline{1,7}.$$

ვინაიდან

$$\big[L(\partial_x)\,\Gamma(x-y)\big]_{kp}=0, \qquad k=\overline{1,7}, \quad x\neq y,$$

ამიტომ, როცა $x\notin S$,

$$\big[L(\partial)\,V(x)\big]_k=0, \qquad k=\overline{1,7}.$$

ანალოგიურად, ორმაგი ფენის $W(g)$ პოტენციალის შემთხვეაში გვექნება:

$$\begin{aligned}
\big[L(\partial)\,W(g)(x)\big]_k &= L_{kj}(\partial)\,\big[W(g)(x)\big]_j = \\
&= L_{kj}(\partial)\Big[\int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y,n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)\,dS_y\Big]_j \\
&= L_{kj}(\partial)\int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y,n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]_{pj}\,g_p(y)\,dS_y \\
&= L_{kj}(\partial_x)\int\limits_S \mathcal{P}^*_{pm}\big(\partial_y,n(y)\big)\Gamma_{jm}(x-y)\,g_p(y)\,dS_y \\
&= \int\limits_S \mathcal{P}^*_{pm}\big(\partial_y,n(y)\big)L_{kj}(\partial_x)\Gamma_{jm}(x-y)\,g_p(y)\,dS_y = 0, \qquad k=\overline{1,7}, \quad x\notin S.
\end{aligned}$$

ამით ლემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ლემის მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად ვისარგებლოთ $\Gamma(x-y)$ ფუნდამენტური ამონახსნის შემდეგი ასიმპტოტური წარმოდგენით უსასრულობაში:

$$\Gamma(x-y)=\begin{bmatrix} [\mathcal{O}(|x|^{-1})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\chi_0\dfrac{x_j}{|x|}+\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times1} \\ [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \mathcal{O}(|x|^{-1}) \end{bmatrix}_{7\times7}, \tag{1.135}$$

როცა $|x|\to\infty$, სადაც $\chi_0=-\dfrac{\eta}{2(\lambda+2\mu)}$ და y ეკუთვნის რაიმე კომპაქტურ სიმრავლეს.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ორმაგი ფენის პოტენციალი ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს. თუ მოვახდენთ ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ მატრიცის ტრანსპონირებას და გავითვალისწინებთ $\mathcal{P}^*(\partial,n)$ ოპერატორის სახეს, მაშინ მარტივად მივიღებთ:

$$\Big[\mathcal{P}^*(\partial,n)\Gamma^\top(x-y)\Big]^\top=\begin{bmatrix} [\mathcal{O}(|x|^{-2})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-3})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-1})]_{3\times1} \\ [\mathcal{O}(|x|^{-3})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-3})]_{3\times3} & [\mathcal{O}(|x|^{-3})]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \mathcal{O}(|x|^{-2}) \end{bmatrix}_{7\times7}.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\big[W(g)(x)\big]_k=\begin{cases} \mathcal{O}(|x|^{-1}), & k=1,2,3, \\ \mathcal{O}(|x|^{-3}), & k=4,5,6, \\ \mathcal{O}(|x|^{-2}), & k=7, \end{cases}$$

როცა $|x|\to\infty$. აქედან კი მარტივად დავსკვნით, რომ $W(g)\in Z(\Omega^-)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ მარტივი ფენის პოტენციალიც ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს. ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ ამონახსნის (1.135) ასიმპტოტური ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned}\big[V(g)(x)\big]_k &= \int_S \Gamma_{kj}(x-y)\,g_j(y)\,dS_y= \\ &=\begin{cases} \mathcal{O}(|x|^{-1})+\chi_0\,\dfrac{x_k}{|x|}\displaystyle\int_S g_7(y)\,dS_y, & k=1,2,3, \\ \mathcal{O}(|x|^{-2}), & k=4,5,6, \\ \mathcal{O}(|x|^{-1}), & k=7, \end{cases}\end{aligned}$$

როცა $|x|\to\infty$. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას: $V(g)=:(u,\omega,\vartheta)^\top$, მაშინ

$$u(x)=\chi_1\,\frac{x}{|x|}+\mathcal{O}(|x|^{-1})=\mathcal{O}(1),\quad \omega(x)=\mathcal{O}(|x|^{-2}),\quad \vartheta(x)=\mathcal{O}(|x|^{-1}), \tag{1.136}$$

სადაც χ_1 მუდმივია:

$$\chi_1 = \chi_0 \int_S g_7(y)\, dS = const\,.$$

ამრიგად, (1.80) პირობა შესრულებულია. ახლა ვაჩვენოთ (1.81) პირობის მართებულობა. (1.136) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u(x)\, d\Sigma(0,R) = \lim_{R\to\infty} \frac{\chi_1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} \frac{x}{R}\, d\Sigma(0,R) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{\chi_1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} n(x)\, d\Sigma(0,R), \tag{1.137}$$

სადაც $n(x) = \dfrac{x}{R}$, $x \in \Sigma(0,R)$, წარმოადგენს $\Sigma(0,R)$ სფეროს მიმართ გარე ნორმალს x წერტილში. გაუსის ფორმულის თანახმად კი

$$\int\limits_{\partial\Omega} n_k(x)\, dS = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial 1}{\partial x_k}\, dx = 0, \qquad k = 1,2,3,$$

სადაც Ω არის $\partial\Omega$ საზღვრით შემოფარგლული სასრული არე, ხოლო $n = (n_1, n_2, n_3)$ არის $\partial\Omega$ საზღვარზე განსაზღვრული გარე ნორმალების ველი. ამრიგად,

$$\int\limits_{\Sigma(0,R)} n(x)\, d\Sigma(0,R) = 0.$$

აქედან კი (1.137) ტოლობის გათვალისწინებით ცხადია, რომ $V(g) \in Z(\Omega^-)$. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

გრინის (1.57) ფორმულის გამოყენებით, სტანდარტული მსჯელობით, შეგვიძლია დავწეროთ ერთგვაროვანი $L(\partial)U(x) = 0$, $x \in \Omega^+$, განტოლების რეგულარული $U \in [C^2(\Omega^+)]^7 \cap [C^1(\overline{\Omega^+})]^7$ ამონახსენის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა:

$$W_S\big(\{U(x)\}^+\big) - V_S\big(\{\mathcal{P}U(x)\}^+\big) = \begin{cases} U(x), & \text{როცა} \quad x \in \Omega^+, \\ 0, & \text{როცა} \quad x \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.138}$$

ახლა გამოვიყვანოთ, ერთგვაროვანი $L(\partial)U(x) = 0$, $x \in \Omega^-$, განტოლების რეგულარული $Z(\Omega^-)$ კლასის ამონახსნის ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა. ამ მიზნით, დავწეროთ ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა $\Omega_R^- := \Omega^- \cap B(0,R)$ არეში, სადაც R საკმარისად დიდი დადებითი მუდმივია, ისთი, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(0,R) := \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| < R\}$,

$$U(x) = -W_S(\{U\}_S^-) + V_S(\{\mathcal{P}U\}_S^-) + \Phi_R(x), \qquad x \in \Omega_R^-, \tag{1.139}$$

$$0 = -W_S(\{U\}_S^-) + V_S(\{\mathcal{P}U\}_S^-) + \Phi_R(x), \qquad x \in \Omega^+ \cup \big[\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}\,\big]; \tag{1.140}$$

აქ V_S და W_S მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებია, ხოლო

$$\Phi_{_R}(x) := W_{\Sigma_R}\big(\{U\}^+_{\Sigma_R}\big)(x) - V_{\Sigma_R}\big(\{\mathcal{P}U\}^+_{\Sigma_R}\big)(x), \tag{1.141}$$

სდაც V_{Σ_R} და W_{Σ_R} კვლავ ზედაპირული პოტენციალებია $\Sigma_R = \partial\, B(0,R)$ ზედაპირზე.

(1.141) ტოლობიდან ცხადია, რომ

$$L(\partial)\Phi_{_R}(x) = 0, \qquad x \notin \Sigma_R. \tag{1.142}$$

გარდა ამისა, (1.139) და (1.140) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\Phi_R(x) = U(x) + W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{\mathcal{P}U\}^-_S\big), \qquad x \in \Omega^-_R,$$

$$\Phi_R(x) = W_S\big(\{U\}^-_S\big) - V_S\big(\{\mathcal{P}U\}^-_S\big), \qquad x \in \Omega^+ \cup \big[\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}\,\big].$$

ამ უკანასკნელი ტოლობებიდან კი საკმარისად დიდი R_1 და R_2 რიცხვებისთვის ($R_1 < R_2$) მივიღებთ:

$$\Phi_{R_1}(x) = \Phi_{R_2}(x), \qquad |x| < R_1 < R_2. \tag{1.143}$$

ამიტომ, ნებისმიერი ფიქსირებული $x \in \mathbb{R}^3$ წერტილისთვის არსებობს შემდეგი ზღვარი:

$$\Phi(x) := \lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) = \begin{cases} U(x) + W_S\big(\{U\}^-_S\big)(x) - V_S\big(\{\mathcal{P}U\}^-_S\big)(x), & x \in \Omega^-, \\ W_S\big(\{U\}^-_S\big)(x) - V_S\big(\{\mathcal{P}U\}^-_S\big)(x), & x \in \Omega^+. \end{cases} \tag{1.144}$$

აქედან კი დავასკვნით, რომ

$$L(\partial)\Phi(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-.$$

მეორეს მხრივ, (1.143) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ ნებისმიერი $x \in \mathbb{R}^3$ წერტილისთვის, $R_1 > |x|$ და $\overline{\Omega^+} \subset B(0,R_1)$ არისათვის

$$\Phi(x) = \lim_{R\to\infty} \Phi_R(x) = \Phi_{R_1}(x). \tag{1.145}$$

(1.141) და (1.142) ფორმულებიდან დავასკვნით:

$$L(\partial)\Phi(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.146}$$

ამასთანავე, (1.144) პირობიდან ცხადია

$$\Phi \in Z(\mathbb{R}^3), \tag{1.147}$$

ე.ი. Φ_k, $k=\overline{1,3}$, შემოსაზღვრული ფუნქციებია $\mathbb{R}^3$ არეში, $\Phi_k=\mathcal{O}(|x|^{-2})$, $k=\overline{4,6}$, ხოლო $\Phi_7(x)=\mathcal{O}(|x|^{-1})$, როცა $|x|\to\infty$, და

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\Sigma_R}\Phi_k(x)\,d\Sigma_R=0, \qquad k=1,2,3, \tag{1.148}$$

რადგან ლემა 16-ის თანახმად $U\in Z(\Omega^-)$ და $W_S,V_S\in Z(\Omega^-)$.

(1.146)-(1.148) ტოლობებიდან დავასკვნით:

$$\Phi(x)=0, \quad \forall x\in\mathbb{R}^3.$$

მართლაც, (1.146)-(1.147) ტოლობებიდან ფურიეს გარდაქმნით ვღებულობთ:

$$L(-i\xi)\,\widehat{\Phi}(\xi)=0, \quad \xi\in\mathbb{R}^3,$$

სადაც $\widehat{\Phi}(\xi)$ არის განზოგადებული ვექტორ-ფუნქცია, რომელიც ეკუთვნის შვარცის ნელა ზრდადი დისტრიბუციების სივრცეს. ვინაიდან, $\det L(-i\xi)\neq 0$, როცა $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ (იხ. [36]), ამიტომ

$$\widehat{\Phi}(\xi)=\sum_{|\mathrm{m}|\leqslant M}C_{\mathrm{m}}\delta^{(\mathrm{m})}(\xi),$$

სადაც $\mathrm{m}=(m_1,m_2,m_3)$ მულტი-ინდექსია, $|\mathrm{m}|=m_1+m_2+m_3$, M არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო $\delta^{(\mathrm{m})}$ დირაკის δ ფუნქციის m რიგის წარმოებულია. აქედან კი ცხადია, რომ $\Phi(x)$ მრავალწევრია x-ის მიმართ,

$$\Phi(x)=\sum_{|\mathrm{m}|\leqslant M}C_{\mathrm{m}}\,x^{\mathrm{m}}, \qquad x\in\mathbb{R}^3,$$

სადაც C_{m} მუდმივი ვექტორებია.

ამასთანავე, ვინაიდან $\Phi\in Z(\mathbb{R}^3)$, ამიტომ (1.148) ტოლობის თანახმად, საბოლოოდ დავასკვნით:

$$\Phi(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^3.$$

თუ (1.139) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $R\to\infty$, და გავითვალისწინებთ (1.145) ტოლობას, მივიღებთ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულას Ω^- არეში $L(\partial)U=0$ განტოლების $Z(\Omega^-)$ კლასის ამონახსნებისათვის:

$$-W\big(\{U\}^-\big)+V\big(\{\mathcal{P}U\}^-\big)=\begin{cases}U(x), & \text{როცა} \quad x\in\Omega^-,\\ 0, & \text{როცა} \quad x\in\Omega^+.\end{cases} \tag{1.149}$$

სადაც V და W მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებია.

ზედაპირული პოტენციალების ასახვის თვისებები აღწერილია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 17 . ვთქვათ, $S \in C^{k+1,\kappa}$, სადაც $k \geqslant 0$ მთელი რიცხვია და $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს აქვთ ასახვის შემდეგი თვისებები:

$$\begin{aligned} V \ &: \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k+1,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})]^7, \qquad m \geqslant 1, \\ W \ &: \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})]^7, \qquad m \geqslant 2, \end{aligned} \tag{1.150}$$

და ისინი უწყვეტი ოპერატორები არიან.

დამტკიცება. ასახვის (1.150) თვისება მტკიცდება იმავე მსჯელობით, რაც გამოყენებული შრომებში: [23], [24], [25], [33], [34]. □

ახლა ამოვწეროთ ზედაპირული პოტენციალების წყვეტის ფორმულები.

თეორემა 18 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$, $g \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$, $h \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ ნებისმიერი $x \in S$ წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს:

$$\{V(g)(x)\}^{\pm} = V(g)(x) = \mathcal{H}g(x), \tag{1.151}$$

$$\{\mathcal{P}(\partial_x, n(x))V(g)(x)\}^{\pm} = [\mp 2^{-1} I_7 + \mathcal{K}\,]\, g(x), \tag{1.152}$$

$$\{W(g)(x)\}^{\pm} = [\pm 2^{-1} I_7 + \mathcal{N}\,]\, g(x), \tag{1.153}$$

$$\{\mathcal{P}(\partial_x, n(x))W(h)(x)\}^{+} = \{\mathcal{P}(\partial_x, n(x))W(h)(x)\}^{-} = \mathcal{L}h(x), \quad S \in C^{2,\kappa}, \tag{1.154}$$

სადაც $\mathcal{H}$ არის სუსტი სინგულარობის ინტეგრალური ოპერატორი, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{N}$ არიან სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი და ისინი განსაზღვრულნი არიან შემდეგნაირად:

$$\mathcal{H}g(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)g(y)dS_y, \tag{1.155}$$

$$\mathcal{K}g(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)\big]g(y)dS_y, \tag{1.156}$$

$$\mathcal{N}g(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^{\top}(x-y)\big]^{\top} g(y)dS_y, \tag{1.157}$$

$$\mathcal{L}h(x) := \lim_{\Omega^{\pm}\ni z\to x\in S} \mathcal{P}\big(\partial_z, n(x)\big) \int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^{\top}(z-y)\big]^{\top} h(y)dS_y. \tag{1.158}$$

დამტკიცება. წყვეტის (1.151)-(1.153) ფორმულები მტკიცდება სტანდარტული მიდგომით, რაც მოცემულია შემდეგ შრომებში: [25], [23], [24], [36].

აქ ჩვენ მოვიყვანთ (1.154) ტოლობის, ე.წ. ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის დამტკიცების საკმაოდ მარტივ მეთოდს.

ვთქვათ, $U(x) := W(h)(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus S$. ვინაიდან $S \in C^{2,\kappa}$ და $h \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$, ამიტომ თეორემა 17-ის თანახმად $U = W(h) \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})]^7 \cap [C^\infty(\Omega^\pm)]^7$. გარდა ამისა, ლემა 16-ის ძალით U არის ერთგვაროვანი $L(\partial)U(x) = 0$, $x \in \Omega^\pm$, განტოლების ამონახსენი და $U \in Z(\Omega^-)$.

თუ $U = W(h)$ ფუნქციისთვის დავწერთ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის (1.138) და (1.149) ფორმულებს და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$U(x) = W\big([U]_S\big)(x) - V\big([\mathcal{P}U]_S\big)(x), \qquad x \in \Omega^\pm, \tag{1.159}$$

სადაც

$$[U(x)]_S := \{U(x)\}^+ - \{U(x)\}^-, \quad [\mathcal{P}U(x)]_S := \{\mathcal{P}U(x)\}^+ - \{\mathcal{P}U(x)\}^-, \quad x \in S.$$

წყვეტის (1.153) ფორმულიდან ცხადია, რომ

$$[U(x)]_S := \{U(x)\}^+ - \{U(x)\}^- = \{W(h)(x)\}^+ - \{W(h)(x)\}^- = h(x), \quad x \in S,$$

ხოლო (1.159) ფორმულიდან $U = W(h)$ ფუნქციისთვის მივიღებთ:

$$W(h)(x) = W(h)(x) - V\big(h\big)(x), \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-, \tag{1.160}$$

სადაც

$$\begin{aligned} h(x) : &= \big[\mathcal{P}(\partial_x, n(x))W(h)(x)\big]_S = \\ &= \{\mathcal{P}W(h)(x)\}^+ - \{\mathcal{P}W(h)(x)\}^-, \quad x \in S. \end{aligned} \tag{1.161}$$

(1.160) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$V\big(h\big)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+ \cup \Omega^-,$$

ხოლო წყვტის (1.152) ტოლობის თანახმად

$$h(x) = \big\{\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)V(h)(x)\big\}^- - \big\{\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)V(h)(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S.$$

თუ ამ უკანასკნელ პირობას გავითვალისწინებთ (1.161) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\{\mathcal{P}W(h)(x)\}^+ = \{\mathcal{P}W(h)(x)\}^-, \qquad x \in S.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ახლა დავწეროთ ზედაპირული პოტენციალებით წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური (1.155)-(1.158) ოპერატორების ასახვის თვისებები.

თეორემა 19 . ვთქვათ, $S \in C^{m,\kappa}$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, სადაც m და k მთელი რიცხვებია. მაშინ შემდეგი ოპერატორები უწყვეტია:

$$\mathcal{H} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k+1,\sigma}(S)]^7,$$

$$\mathcal{K} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(S)]^7,$$

$$\mathcal{N} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(S)]^7,$$

$$\mathcal{L} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k-1,\sigma}(S)]^7,$$

გარდა ამისა, ოპერატორები

$$\pm 2^{-1} I_7 + \mathcal{K} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(S)]^7,$$

$$\pm 2^{-1} I_7 + \mathcal{N} \ : \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(S)]^7,$$

არიან ფრედჰოლმური სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები ნულოვანი ინდექსით და მათი მთავარი სიმბოლური მატრიცები არაგადაგვარებულია, ხოლო $-\mathcal{H}$ და $\mathcal{L}$ ოპერატორები, შესაბამისად, -1 და 1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით და მათი მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცები დადებითად განსაზღვრულია.

დამტკიცება. თეორემის დამტკიცება მოცემულია შრომაში [36]. □

თეორემა 20 . ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს შესაბამის ფუნქციათა სივრცეებში:

$$\mathcal{N}\,\mathcal{H} = \mathcal{H}\,\mathcal{K}, \qquad \qquad \mathcal{L}\,\mathcal{N} = \mathcal{K}\,\mathcal{L},$$

$$\mathcal{H}\,\mathcal{L} = -4^{-1} I_7 + \mathcal{N}^2, \qquad \qquad \mathcal{L}\,\mathcal{H} = -4^{-1} I_7 + \mathcal{K}^2.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ერთგვაროვანი განტოლება:

$$L(\partial)\, U(x) = 0, \qquad \qquad x \in \Omega^+.$$

ამ განტოლების ამონახსენი ზედაპირული პოტენციალების საშუალებით შემდეგნაირად წარმოიდგინება:

$$U(x) = W\big(\{U\}^+\big)\,(x) - V\big(\mathcal{P}\{U\}^+\big)\,(x), \qquad \qquad x \in \Omega^+. \tag{1.162}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე უკანასკნელ ტოლობაში, მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წყვეტის (1.151) და (1.153) ფორმულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\{U(x)\}^+ = \big[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]\,\{U(x)\}^+ - \mathcal{H}\{\mathcal{P}U(x)\}^+, \qquad x \in S.$$

აქედან კი ცხადია, რომ

$$\big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]\{U(x)\}^+ = \mathcal{H}\{\mathcal{P}U(x)\}^+, \qquad x \in S. \tag{1.163}$$

ახლა (1.162) ტოლობაზე მოვახდინოთ $\mathcal{P}(\partial, n)$ ოპერატორი, კვლავ გადავიდეთ ზღვარზე. წყვეტის (1.152) და (1.154) ფორმულების გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\{\mathcal{P}U(x)\}^+ = \mathcal{L}\{U(x)\}^+ - \big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]\,\{\mathcal{P}U(x)\}^+, \qquad x \in S,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\big[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]\,\{\mathcal{P}U(x)\}^+ = \mathcal{L}\{U(x)\}^+, \qquad x \in S. \tag{1.164}$$

ვთქვათ, $U = V(g)$. მაშინ მარტივი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.151) და (1.152) ტოლობების გათვალისწინებით ცხადია, რომ

$$\{U\}^+ = \mathcal{H}g, \qquad \{\mathcal{P}U\}^+ = \big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]g. \tag{1.165}$$

თუ ამ ზღვრულ მონაცემებს შევიტანთ (1.163) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$-\frac{1}{2}\mathcal{H}g + \mathcal{N}\mathcal{H}g = -\frac{1}{2}\mathcal{H}g + \mathcal{H}\mathcal{K}g, \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{N}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{K}.$$

ახლა, თუ (1.165) ზღვრულ მონაცემებს შევიტანთ (1.164) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\mathcal{L}\mathcal{H}g = \big[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]\,\big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]g, \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{L}\mathcal{H} = -\frac{1}{4}I_7 + \mathcal{K}^2.$$

ახლა ვთქვათ, $U = W(g)$. მაშინ ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.153) და (1.154) ტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\{U\}^+ = \big[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]g, \qquad \{\mathcal{P}U\}^+ = \mathcal{L}g. \tag{1.166}$$

თუ ამ მონაცემებს ჩავსვავთ (1.163) გამოსახულებაში, მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]\,\big[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]g = \mathcal{H}\mathcal{L}g, \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}I_7 + \mathcal{N}^2.$$

ახლა (1.166) ზღვრული მონაცემები ჩავსვათ (1.164) ტოლობაში:

$$\big[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\big]\,\mathcal{L}g = \mathcal{L}\,\big[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}\big]g, \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{K}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{N}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

შენიშვნა 21 . ვთქვათ, $F \in \left[C^{0,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})\right]^7$, $\sigma > 0$, და მას აქვს კომპაქტური საყრდენი Ω^- არის შემთხვევაში. მაშინ (1.131) ტოლობით განსაზღვრული ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალი $N_{\Omega^{\pm}}(F) \in \left[C^{1,\sigma}(\mathbb{R}^3)\right]^7 \cap \left[C^{2,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})\right]^7 \cap Z(\mathbb{R}^3)$ და არის შემდეგი არაერთგავროვანი განტოლების კერძო ამონახსენი (იხ. [36]):

$$L(\partial)N_{\Omega^{\pm}}(F)(x) = F(x), \qquad x \in \Omega^{\pm}. \tag{1.167}$$

შევნიშნოთ, რომ, როცა $1 < p < \infty$ და $F \in \left[L_p(\Omega^+)\right]^7$ ან $F \in \left[L_{p,\,comp}(\Omega^-)\right]^7$, მაშინ ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალი $N_{\Omega^{\pm}}(F)$ ეკუთვნის სობოლევის სივრცეს $[W_p^2(\Omega^+)]^7$ ან $[W_{p,\,loc}^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\mathbb{R}^3)$; ამასთანავე (1.167) ტოლობა კვლავ მართებულია $\Omega^{\pm}$ არეში თითქმის ყველგან.

ახლა აღვწეროთ შეუღლებული ზედაპირული V^* და W^* პოტენციალების თვისებები, რომლებიც მტკიცდება მარტივი ფენის V და ორმაგი ფენის W პოტენციალების თვისებების ანალოგიურად.

თეორემა 22 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$, $0 < \kappa \leqslant 1$; ამასთანავე, $U^* \in [C^1(\overline{\Omega^+})]^7 \cap [C^2(\Omega^+)]^7$ და $U^* \in [C^1(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z^*(\Omega^-)$ არიან შეუღლებული ერთგვაროვანი დიფერენციალური $L^*(\partial)U^*(x) = 0$, $x \in \Omega^{\pm}$, განტოლების რეგულარული ამონახსნები. მაშინ მართებულია შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები:

$$W^*\big(\{U^*\}^+\big)(x) - V^*\big(\{\mathcal{P}^*U^*\}^+\big)(x) = \begin{cases} U^*(x), & x \in \Omega^+, \\ 0, & x \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.168}$$

$$-W^*\big(\{U^*\}^-\big)(x) + V^*\big(\{\mathcal{P}^*U^*\}^-\big)(x) = \begin{cases} U^*(x), & x \in \Omega^-, \\ 0, & x \in \Omega^+. \end{cases} \tag{1.169}$$

დამტკიცება. ეს ფორმულები მტკიცდება სტანდარტული მსჯელობებითა და გრინის (1.57) იგივეობის გამოყენებით. □

ლემა 23 ვთქვათ, $S \in C^{k+1,\kappa}$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, სადაც $k \geqslant 0$ მთელი დადებითი რიცხვია. მაშინ შეუღლებული მარტივი ფენის $V^*(g)$ და ორმაგი ფენის $W^*(g)$ პოტენციალები არიან ერთგვაროვანი დიფერენციალური

$$L^*(\partial)U^*(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S,$$

განტოლების ამონახსნები და ეკუთვნიან $Z^*(\Omega^-)$ კლასს. ამასთანავე, მათ აქვთ ასახვის შემდეგი თვისებები:

$$\begin{aligned} V^* \ &: \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k+1,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})]^7, \\ W^* \ &: \ [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})]^7, \end{aligned} \tag{1.170}$$

და არიან უწყვეტი ოპერატორები.

დამტკიცება. ლემა მტკიცდება ისევე, როგორც ანალოგიური ლემები შემდეგ შრომებში: [34], [35], [36]. □

შეუღლებული ზედაპირული პოტენციალების თვისებები აღწერილია შემდეგ თეორემაში. მტკიცდება ზემოთ მოყვანილი თეორემების მსგავსად.

თეორემა 24 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$, $g \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$, $h \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ ნებისმიერი $x \in S$ წერტილისთვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\{V^*(g)(x)\}^{\pm} = V^*(g)(x) = \mathcal{H}^* g(x), \tag{1.171}$$

$$\{\mathcal{P}^*(\partial_x, n(x)) V^*(g)(x)\}^{\pm} = [\mp 2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^*] g(x), \tag{1.172}$$

$$\{W^*(g)(x)\}^{\pm} = [\pm 2^{-1} I_7 + \mathcal{N}^*] g(x), \tag{1.173}$$

$$\{\mathcal{P}^*(\partial_x, n(x)) W^*(h)(x)\}^{+} = \{\mathcal{P}^*(\partial_x, n(x)) W^*(h)(x)\}^{-} = \mathcal{L}^* h(x), \quad S \in C^{2,\kappa}, \tag{1.174}$$

სადაც $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{K}^*$, $\mathcal{N}^*$ და $\mathcal{L}^*$ ოპერატორები არიან, შესაბამისად, -1, 0, 0 და 1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორები და განსაზღვრულნი არიან შემდეგნაირად:

$$\mathcal{H}^* g(x) := \int\limits_S \Gamma^*(x-y) g(y) dS_y, \tag{1.175}$$

$$\mathcal{K}^* g(x) := \int\limits_S \Big[\mathcal{P}^*\big(\partial_x, n(x)\big) \Gamma^*(x-y)\Big] g(y) dS_y, \tag{1.176}$$

$$\mathcal{N}^* g(x) := \int\limits_S \Big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big) \big[\Gamma^*(x-y)\big]^{\top}\Big]^{\top} g(y) dS_y, \tag{1.177}$$

$$\mathcal{L}^* h(x) := \lim_{\Omega^{\pm} \ni z \to x \in S} \mathcal{P}^*\big(\partial_z, n(x)\big) \int_S \Big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big) \big[\Gamma^*(z-y)\big]^{\top}\Big]^{\top} h(y) dS_y. \tag{1.178}$$

გარდა ამისა, სრულდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}^* \mathcal{H}^* = \mathcal{H}^* \mathcal{K}^*, && \mathcal{L}^* \mathcal{N}^* = \mathcal{K}^* \mathcal{L}^*, \\ &\mathcal{H}^* \mathcal{L}^* = -4^{-1} I_7 + [\mathcal{N}^*]^2, && \mathcal{L}^* \mathcal{H}^* = -4^{-1} I_7 + [\mathcal{K}^*]^2. \end{aligned} \tag{1.179}$$

ეს თეორემა მტკიცდება ზემოთ მოყვანილი თეორემების მსგავსად.

1.7 სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

ამ პარაგრაფში ჩვენ დავამტკიცებთ ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემებს რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასებში [20], [21].

1.7.1 დირიხლეს შიგა ამოცანის გამოკვლევა

ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. განვიხილოთ დირიხლეს ტიპის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანა.

ვიპოვოთ Ω^+ არეში ერთგვაროვანი

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.180}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})]^7 \cap [C^2(\Omega^+)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{U(x)\big\}^+ = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.181}$$

სადაც $f = (f_1, \cdots, f_7)^\top \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

ამ ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ ორმაგი ფენის პოტენციალით, რომელიც განსაზღვრულია (1.130) ტოლობით:

$$U(x) = W(g)(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\,\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)\,dS_y, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.182}$$

სადაც $g \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.182) ავტომატურად აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (1.180) განტოლებას, ხოლო სასაზღვრო (1.181) პირობიდან ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.153) ფორმულის თანახმად ვღებულობთ შემდეგ მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$[\,2^{-1} + \mathcal{N}\,]\, g(x) = f(x), \quad x \in S, \tag{1.183}$$

სადაც $\mathcal{N}$ არის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია (1.157) ტოლობით.

თეორემა 19-ის თანახმად $[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}]$ ოპერატორი არის ელიფსური სინგულარული ფრედჰოლმური ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით. ამიტომ

არაერთგვაროვანი (1.183) განტოლების ამოხსნადობისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\ker[2^{-1}I_7+\mathcal{N}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცე ტრივიალურია, ე.ი. უნდა დავამტკიცოთ, რომ (1.183) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან ინტეგრალურ განტოლებას

$$[\,2^{-1}\,I_7(x)+\mathcal{N}\,]\,g(x)=0, \qquad x\in S, \tag{1.184}$$

გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ვთქვათ, $g_0\in\big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$ ვექტორი არის (1.184) განტოლების ამონახსენი და განვიხილოთ შემდეგი ვექტორ-ფუნქცია:

$$U_0(x):=W(g_0)(x), \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus S. \tag{1.185}$$

თეორემა 17 და ლემა 16-ის თანახმად, ცხადია, რომ $U_0\in\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\big]^7\cap Z(\Omega^-)$. გარდა ამისა, (1.184) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0(x)\big\}^+=0, \qquad x\in S.$$

მაშასადამე, ჩვენს მიერ აგებული U_0 ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. ერთადერთობის თეორემა 2-ის თანახმად

$$U_0(x)=W(g_0)(x)=0, \qquad x\in\Omega^+.$$

აქედან კი ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის ძალით (იხ. ტოლობა (1.154)) დავასკვნით:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U_0(x)\big\}^+=\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U_0(x)\big\}^-=0, \qquad x\in S.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $U_0\in\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\big]^7\cap Z(\Omega^-)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს ნეიმანის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს და თეორემა 13-ის თანახმად ის ტრივიალურია:

$$U_0(x)=W(g_0)(x)=0, \qquad x\in\Omega^-.$$

თუ ვისარგებლებთ ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.153) ფორმულით, საბოლოოდ მივიღებთ

$$g_0=\big\{W(g_0)\big\}^+-\big\{W(g_0)\big\}^-=0 \qquad S\text{-ზე},$$

რაც ამტკიცებს, რომ $\ker[2^{-1}I_7+\mathcal{N}]$ ტრივიალურია. მაშასადამე, არაერთგვაროვანი (1.183) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია მარჯვენა მხარეში მდგომი ნებისმიერი $f\in[C^{1,\sigma}(S)]^7$ ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ არსებობის დებულება.

თეორემა 25 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა (1.180)-(1.181) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^7$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ორმაგი ფენის (1.182) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.183) ინტეგრალური განტოლებიდან.

სხვადასხვა შერეული ამოცანის განხილვის დროს არსებითად გამოიყენება ის ფაქტი, რომ დირიხლეს ამოცანის ამონახსენი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასევე მარტივი ფენის პოტენციალით. მართლაც, ვეძებოთ დირიხლეს შიგა (1.180)-(1.181) ამოცანის ამონახსნი მარტივი ფენის პოტენციალით

$$U(x) = V(g)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\, g(y)\, dS_y, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.186}$$

სადაც $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.186) კვლავ ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.180) განტოლებას, ხოლო (1.181) სასაზღვრო პირობიდან მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გათვალისწინებით (იხ. (1.151) ტოლობა) მივიღებთ პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\mathcal{H}\, g(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.187}$$

სადაც $\mathcal{H}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.155) ტოლობით.

ვაჩვენოთ, რომ ინტეგრალური ოპერატორი

$$\mathcal{H} \;:\; [C^{k,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k+1,\sigma}(S)]^7, \qquad k \geq 0, \qquad S \in C^{k,\sigma}, \tag{1.188}$$

შებრუნებადია და მისი შებრუნებული ოპერატორი

$$[\mathcal{H}]^{-1} \;:\; [C^{k+1,\sigma}(S)]^7 \to [C^{k,\sigma}(S)]^7 \tag{1.189}$$

ფსევდო-დიფერენციალური 1 რიგის ოპერატორია; უფრო ზუსტად, კი სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორია (იხ., [36]).

რადგან $\mathcal{H}$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ იგი ფრედჰოლმურია და მისი ინდექსი ნულის ტოლია. აქედან გამომდინარე, თუ $\ker \mathcal{H}$ ტრივიალურია, მაშინ (1.188) ოპერატორი იქნება შებრუნებადი.

განვიხილოთ (1.187) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება

$$\mathcal{H}\, g(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.190}$$

ვთქვათ, $g_0 \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ ამ განტოლების ამონახსნია და ავაგოთ შემდეგი ვექტორ-ფუნქცია:

$$U_0(x) := V(g_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S.$$

თეორემა 17 და ლემა 16-ის თანახმად, ცხადია, რომ $U_0 \in \left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$. ამასთანავე, (1.190) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left\{U_0(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S.$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული U_0 ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 2-ის თანახმად

$$U_0(x) = V(g_0)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისების თანახმად (იხ. (1.151) ტოლობა) გვაქვს

$$\left\{U_0(x)\right\}^+ = \left\{U_0(x)\right\}^- = 0, \qquad x \in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $U_0 \in \left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$ ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს და თეორემა 13-ის თანახმად

$$U_0(x) = V(g_0)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალზე $\mathcal{P}$ ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის (1.152) ტოლობით, მივიღებთ:

$$g_0 = \left\{\mathcal{P}(\partial, n)V(g_0)\right\}^- - \left\{\mathcal{P}(\partial, n)V(g_0)\right\}^+ = 0 \qquad S\text{-ზე},$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\ker \mathcal{H}$ ტრივიალურია და, მაშასადამე, ინტეგრალური ოპერატორი (1.188) შებრუნებადია.

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი (1.187) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია მარჯვენა მხარეში მდგომი ნებისმიერი $f \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$ ვექტორ-ფუნქციისათვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი ალტერნატიული დებულება.

თეორემა 26 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა (1.180)-(1.181) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^+)\right]^7$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.186) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ ცალსახად განისაზღვრება (1.187) ინტეგრალური განტოლებიდან.

1.7.2 ნეიმანის გარე ამოცანის გამოკვლევა

ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$, $0 < \kappa \leqslant 1$. განვიხილოთ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა.

ვიპოვოთ Ω^- არეში

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.191}$$

განტოლების ისეთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$, $0<\sigma<\kappa \leqslant 1$, ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\big\}^- = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.192}$$

სადაც $F = (F_1, F_2, ..., F_7)^\top \in \big[C^{0,\sigma}(S)\big]^7$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალის სახით:

$$U(x) = V(g)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\, g(y)\, dS_y, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.193}$$

სადაც $g \in \big[C^{0,\sigma}(S)\big]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა.

წინა შემთხვევების მსგავსად, ვექტორ-ფუნქცია (1.193) ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.191) განტოლებას, ხოლო (1.192) სასაზღვრო პირობიდან მარტივი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.152) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ მეორე გვარის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$[\, 2^{-1}\, I_7 + \mathcal{K}\,]\, g(x) = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.194}$$

სადაც სინგულარული ინტეგრალური $\mathcal{K}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.156) ტოლობით.

თეორემა 19-ის თანახმად $[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორი არის ნორმალური ტიპის ფრედჰოლმური ელიფსური სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით. ამიტომ თუ ვაჩვენეთ, რომ $\ker[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ტრივიალურია, მაშინ არაერთგვაროვანი (1.194) განტოლება ამოხსნადი იქნება ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის. ამ მიზნით, განვიხილოთ მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება,

$$[\, 2^{-1}\, I_7(x) + \mathcal{K}\,]\, g(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{1.195}$$

და ვაჩვენოთ, რომ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

ვთქვათ, $g_0 \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ ვექტორი არის ერთგვაროვანი (1.195) განტოლების ამონახსენი და ავაგოთ მარტივი ფენის პოტენციალი:

$$U_0(x) := V(g_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S.$$

ლემა 16 და თეორემა 17-ის თანახმად $U_0 \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. (1.195) განტოლებიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left\{\mathcal{P}(\partial, n)U_0(x)\right\}^- = 0, \qquad x \in S.$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული $Z(\Omega^-)$ კლასის რეგულარული U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს ნეიმანის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს და, მაშასადამე, ერთადერთობის თეორემა 13-ის თანახმად

$$U_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გამო (იხ. (1.151) ტოლობა), მივიღებთ:

$$\left\{U_0(x)\right\}^- = \left\{U_0(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S.$$

აქედან კი ცხადია, რომ U_0 ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი, ამიტომ თეორემა 2-ის ძალით

$$U_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

მარტივი ფენის პოტენციალზე $\mathcal{P}$ ოპერაციის შედეგად მიღებული ვექტორ-ფუნქციის წყვეტის (1.152) ფორმულის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$g_0 = \left\{\mathcal{P}(\partial, n)V(g_0)\right\}^- - \left\{\mathcal{P}(\partial, n)V(g_0\right\}^+ = 0, \qquad x \in S,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\ker[\,2^{-1}I_7 + \mathcal{K}\,]$ ტრივიალურია. მაშასადამე, (1.194) განტოლება ამოხსნადია მარჯვენა მხარეში მდგომი ნებისმიერი $F \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$ ვექტორ-ფუნქციისთვის.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 27 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$ და $F \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ ნეიმანის გარე (1.191)-(1.192) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^-)\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.193) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.194) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ დამტკიცებული ძირითადი სასზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის თეორემები სტანდარტული მიდგომით შეიძლება განზოგადდეს სობოლევ-სლობოდეცკის და ბესელის პოტენციალთა სივრცეებში რეგულარული და ლიფშიცის არეებისათვის (იხ. [23], [24], [36], [31], [3]).

1.7.3 დირიხლეს გარე ამოცანის გამოკვლევა

ახლა გამოვიკვლიოთ დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი. ვიპოვოთ Ω^- არეში

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.196}$$

განტოლების ისეთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, ამონახსენი, რომელიც საზღვარზე აკმაყოფილებს დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{U(x)\big\}^- = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.197}$$

სადაც $f = (f_1, \cdots, f_7)^\top \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$ მოცემული ვექტორ-ფუნქციაა.

ჩვენ აქ მოვიყვანთ დირიხლეს ზემოთ დასმული ამოცანის გამოკვლევის ორ მეთოდს: პირველი მიდგომა დააფუძნებულია ამონახსნის მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენადობაზე, ხოლო მეორე მიდგომა დაფუძნებულია ამონახსნის მარტივი ფენის პოტენციალით წარმოდგენადობაზე.

ჯერ გავაანალიზოთ პირველი მიდგომა. დირიხლეს გარე (1.196)-(1.197) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციით:

$$U_0(x) = W(g)(x) + aV(g)(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{1.198}$$

სადაც $g \in \big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა, ხოლო a დადებითი მუდმივაა.

ცხადია, რომ (1.198) ტოლობით განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქცია ავტომატურად აკმაყოფილებს ერთგვაროვან (1.196) განტოლებას და ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს, ხოლო (1.197) სასაზღვრო პირობიდან მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისებისა და ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის თვისების

თანახმად (იხ. (1.151) და (1.153) ტოლობები) მივიღებთ შემდეგ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{N}(g)(x) + a\,\mathcal{H}(g)(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{1.199}$$

სადაც $\mathcal{N}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორები განსაზღვრულნი არიან (1.157) და (1.155) ტოლობებით. თეორემა 19-ის თანახმად $\big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}\big]$ ოპერატორი წარმოადგენს ნორმალური ტიპის სინგულარულ ინტეგრალურ ოპერატორს ნულოვანი ინდექსით, რადგან $\mathcal{H}$ ოპერატორი წარმოშობს კომპაქტურ ოპერატორს. ამიტომ, ზემოთ განხილული შემთხვევების მსგავსად, (1.199) განტოლების უპირობო ამოხსნადობის დასადგენად საჭიროა, ვაჩვენოთ, რომ $\ker\big[-2^{-1}I_7 + \mathcal{N} + a\,\mathcal{H}\big]$ ტრივიალურია.

განვიხილოთ (1.199) განტოლების შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{N}(g)(x) + a\mathcal{H}(g)(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.200}$$

ვთქვათ, $g_0 \in \big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$ არის ამ ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი და ავაგოთ შემდეგი ვექტორ-ფუნქცია:

$$U_0(x) := W(g_0)(x) + a\,V(g_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S. \tag{1.201}$$

ლემა 16 და თეორემა 17-ის თანახმად $U_0 \in \big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\big]^7 \cap [C^2(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$. (1.200) განტოლებიდან და მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის ფორმულებიდან (იხ. (1.151)-(1.154) ტოლობა) გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S. \tag{1.202}$$

ამრიგად, ჩვენს მიერ აგებული $Z(\Omega^-)$ კლასის რეგულარული U_0 ვექტორ-ფუნქცია წარმოადგენს დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნს და, ამიტომ, ერთადერთობის თეორემა 13-ის თანახმად

$$U_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

თუ (1.201) ტოლობაში ვისარგებლებთ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წყვეტის თვისებებით, მივიღებთ:

$$\big\{U_0(x)\big\}^+ - \big\{U_0(x)\big\}^- = g_0(x), \qquad x \in S, \tag{1.203}$$

$$\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U_0(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}(\partial,n)U_0(x)\big\}^- = -a\,g_0(x), \qquad x \in S. \tag{1.204}$$

თუ ამ ტოლობებში გავითვალისწინებთ (1.202) პირობას, გვექნება:

$$\left\{\mathcal{P}(\partial,n)U_0(x)\right\}^+ + a\left\{U_0(x)\right\}^+ = 0, \qquad x\in S.$$

აქედან კი ცხადია, რომ U_0 ვექტორ-ფუნქცია არის რობენის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი, ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 2-ის თანახმად

$$U_0(x) = 0, \qquad x\in\Omega^+.$$

ამ უკანასკნელი პირობისა და (1.202) ტოლობის ძალით კი (1.203) ფორმულიდან დავასკვნით, რომ $g_0 = 0$. ეს კი ამტკიცებს, რომ $\ker\left[-2^{-1}I_7 + \mathcal{N} + a\mathcal{H}\right]$ ტრივიალურია, რაც იმას ნიშნავს, რომ არაერთგვაროვანი (1.199) განტოლება ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 28 . ვთქვათ, $S\in C^{2,\kappa}$ და $f\in\left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს გარე (1.196)-(1.197) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7\cap\left[C^2(\Omega^-)\right]^7\cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ზედაპირული პოტენციალების (1.198) კომბინაციით, სადაც სიმკვრივე $g\in\left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (1.199) ინტეგრალური განტოლებიდან.

ახალა განვიხილოთ დირიხლეს ამოცანის გამოკვლევის ალტერნატიული მიდგომა. ამ შემთხვევაში ამოცანის ამონახსენს ვეძებთ მარტივი ფენის პოტენციალის სახით:

$$U(x) = V(g)(x), \qquad x\in\Omega^-, \tag{1.205}$$

სადაც $g\in\left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ვექტორ-ფუნქცია (1.205) კვლავ ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.196) განტოლებას და ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს, ხოლო (1.197) სასაზღვრო პირობიდან მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისების თანახმად (იხ. (1.151) ტოლობა) მივიღებთ პირველი გვარის ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\mathcal{H}\,g(x) = f(x), \qquad x\in S, \tag{1.206}$$

სადაც $\mathcal{H}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.155) ტოლობით.

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, ეს ინტეგრალური განტოლება ცალსახად ამოხსნადია (1.188) ოპერატორის შებრუნებადობის გამო. ამიტომ შეგვიძლია პირდაპირ ჩამოვაყალიბოთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 29 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს გარე (1.196)-(1.197) ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^-)\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.205) პოტენციალით, სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ ცალსახად განისაზღვრება (1.206) ინტეგრალური განტოლებიდან.

შენიშვნა 30 . ზემოთ დამტკიცებული თეორემებიდან გამომდინარეობს, რომ დირიხლეს შიგა და გარე სასზღვრო ამოცანების ამონახსნები $\{U(x)\}^{\pm} = f(x)$, $x \in S$, სასაზღვრო მონაცემებისთვის წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით:

$$U_0(x) := V\big(\mathcal{H}^{-1}f\big)(x), \qquad x \in \Omega^{\pm},$$

სადაც $\mathcal{H}^{-1}$ ოპერატორი არის $\mathcal{H}$ ოპერატორის შებრუნებული ოპერატორი.

ამ ტიპის წარმოდგენადობას არსებითი მნიშვნელობა აქვს შერეული ამოცანების გამოკვლევის დროს.

1.7.4 ნეიმანის შიგა ამოცანის გამოკვლევა

ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$, $0 < \kappa \leqslant 1$. განვიხილოთ ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანა.

ვიპოვოთ Ω^+ არეში ერთგვაროვანი დიფერენციალური

$$L(\partial)U(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.207}$$

განტოლების ისეთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top \in [C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})]^7 \cap [C^2(\Omega^+)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial, n)U(x)\big\}^+ = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.208}$$

სადაც $F = (F_1, F_2, ..., F_7)^\top \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ მოცემული ფუნქციაა.

ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალის სახით

$$U(x) = V(g)(x), \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.209}$$

სადაც $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ საძიებელი სიმკვრივეა.

ცხადია, რომ ვექტორ-ფუნქცია (1.209) ავტომატურად აკმაყოფილებს (1.207) დიფერენციალურ განტოლებას, ხოლო (1.208) სასაზღვრო პირობიდან, მარტივი

ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.152) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{K}\, g(x) = F(x), \qquad x \in S, \tag{1.210}$$

სადაც სინგულარული ინტეგრალური $\mathcal{K}$ ოპერატორი განსაზღვრულია (1.156) ტოლობით. თეორემა 19-ის თანახმად $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორი არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი, ე.ი. მისი სიმბოლური მატრიცა არაგადაგვარებულია და არაერთგვაროვანი (1.210) ინტეგრალური განტოლებისთვის მართებულია ფრედჰოლმის ტიპის თეორემები.

ინტეგრალური (1.210) განტოლების ამოხსნადობის საკითხის გასარკვევად საჭიროა გამოვიკვლიოთ $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის და მისი შეუღლებული ოპერატორის ნულ-სივრცეები.

თავდაპირველად შევისწავლოთ $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცე. ამ მიზნით განვიხილოთ მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლება:

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{K}\, g(x) = 0, \qquad x \in S. \tag{1.211}$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ერთგვაროვან განტოლებას გააჩნია მხოლოდ შვიდი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსენი, ე.ი. $\dim \ker[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}] = 7$.

მართლაც, ვთქვათ, $g_0 \in \ker[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ და განვიხილოთ მარტივი ფენის $V(g_0)$ პოტენციალი. ცხადია, რომ $V(g_0)$ არის ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი (1.207)-(1.208) ამოცანის ამონახსენი, როცა $F(x) = 0$. მაშინ შენიშვნა 5-ის თანახმად (იხ. ქვეპარაგრაფი 2.5.1) მართებულია შემდეგი წარმოდგენა:

$$V(g_0)(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k\, \Phi^{(k)}(x), \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.212}$$

სადაც C_k, $k = \overline{1,7}$, ნებისმიერი მუდმივებია, ხოლო $\Phi^{(k)}$, $k = \overline{1,7}$, ვექტორები განსაზღვრულია (1.77) ტოლობებით. თეორემა 18-ის ძალით (1.212) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\{V(g_0)(x)\}^+ = \mathcal{H}(g_0)(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k\, \Phi^{(k)}(x), \qquad x \in S,$$

სადაც ინტეგრალური ოპერატორი $\mathcal{H}$ განსაზღვრულია (1.155) ტოლობით.

რადგან $\mathcal{H}$ ოპერატორი შებრუნებადია, ამიტომ ამ უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$g_0(x) = \sum_{k=1}^{7} C_k\, \mathcal{H}^{-1}\Phi^{(k)}(x), \qquad x \in S. \tag{1.213}$$

ვინაიდან $\{\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია Ω^+ არეში, ამიტომ ეს სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი იქნება ასევე S საზღვარზეც. მართლაც, თუ არსებობს b_k, $k=\overline{1,7}$, მუდმივები ისეთი, რომ $\sum\limits_{k=1}^{7}|b_k|\neq 0$ და

$$\sum_{k=1}^{7} b_k\,\Phi^{(k)}(x)=0, \qquad\qquad x\in S,$$

მაშინ ვექტორ-ფუნქცია

$$U(x):=\sum_{k=1}^{7} b_k\,\Phi^{(k)}(x), \qquad x\in\Omega^+,$$

იქნება დირიხლეს ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი. ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 2-ის თანახმად

$$U(x)=\sum_{k=1}^{7} b_k\,\Phi^{(k)}(x)=0, \qquad x\in\Omega^+.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება $\{\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას Ω^+ არეში. ამრიგად, $\{\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია S საზღვარზეც.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ვექტორთა სისტემაც

$$\{\mathcal{H}^{(-1)}\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}, \qquad\qquad x\in S, \tag{1.214}$$

წრფივად დამოუკიდებელია. მართლაც, ვთქვათ, არსებობს d_k, $k=\overline{1,7}$, ნამდვილი მუდმივი რიცხვები, ისეთი, რომ $\sum\limits_{k=1}^{7}|d_k|\neq 0$ და

$$\sum_{k=1}^{7} d_k\,\mathcal{H}^{-1}\Phi^{(k)}(x)=0, \qquad\qquad x\in S.$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაზე ვამოქმედებთ $\mathcal{H}$ ოპერატორს, მაშინ ამ ოპერატორის წრფივობის გამო მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^{7} d_k\,\Phi^{(k)}(x)=0, \qquad\qquad x\in S,$$

რაც ეწინააღმდეგება $\{\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობას S საზღვარზე.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$g^{(k)}(x):=\mathcal{H}^{-1}\Phi^{(k)}(x), \qquad k=\overline{1,7}, \qquad x\in S. \tag{1.215}$$

ცხადია, რომ ვექტორთა $\{g^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია. ეს კი ამტკიცებს, რომ ერთგვაროვან (1.211) განტოლებას გააჩნია არანაკლებ შვიდი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი, ე.ი.

$$\dim \ker[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}] \geqslant 7.$$

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან, კერძოდ, (1.213) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\{g^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$ სისტემა არის $\ker[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისი, რადგან ერთგვაროვანი (1.211) განტოლების ნებისმიერი ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$g_0 = \sum_{k=1}^{7} C_k\, g^{(k)}(x), \qquad x \in S, \tag{1.216}$$

სადაც C_k, $k = \overline{1,7}$, ნამდვილი მუდმივებია.

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი დებულება.

თეორემა 31 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1$. მაშინ, სინგულარული ინტეგრალური $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცე შვიდგანზომილებიანია და მისი ბაზისია წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა $\{g^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7} = \{\mathcal{H}^{-1}\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$, $x \in S$, სისტემა, სადაც $\Phi^{(k)}$, $k = \overline{1,7}$, ვექტორები მოცემულია (1.77) ტოლობით. ამასთანავე, თუ არაერთგვაროვანი (1.210) ინტეგრალური განტოლება ამოხსნადია და $g^{(*)}$ მისი რაიმე კერძო ამონახსნია, მაშინ ვექტორი

$$g = g^{(*)} + \sum_{k=1}^{7} C_k\, g^{(k)},$$

სადაც C_k, $k = \overline{1,7}$, ნებისმიერი მუდმივებია, კვლავ იქნება ამავე არაერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი.

არაერთგვაროვანი ინტეგრალური (1.210) განტოლების ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის დასადგენად, განვიხილოთ $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ოპერატორის შეუღლებული $[-2^{-1}\, I_7 + \widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორი, სადაც $\widetilde{\mathcal{K}}$ არის $\mathcal{K}$ ოპერატორის შეუღლებული ოპერატორი $[L_2(S)]^7$ სივრცის აზრით, ე.ი. ნებისმიერი $g, \varphi \in [L_2(S)]^7$ ვექტორებისათვის $(\mathcal{K}g, \varphi)_{[L_2(S)]^7} = (g, \widetilde{\mathcal{K}}\varphi)_{[L_2(S)]^7}$.

დავადგინოთ $\widetilde{\mathcal{K}}$ ოპერატორის სახე:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}g,\varphi)_{[L_2(S)]^7} &= \int_S \Big(\int_S \mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)g(y)dS_y\Big)\cdot\varphi(x)dS_x = \\
&= \int_S \Big(\int_S \mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)g(y)\cdot\varphi(x)dS_x\Big)dS_y = \\
&= \int_S \Big(\int_S g(y)\cdot\big[\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)\big]^\top\varphi(x)dS_x\Big)dS_y = \\
&= \int_S g(y)\cdot\Big(\int_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)\big]^\top\varphi(x)dS_x\Big)dS_y = \\
&= \int_S g(x)\cdot\Big(\int_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma(y-x)\big]^\top\varphi(y)dS_y\Big)dS_x.
\end{aligned}
$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ $\Gamma(y-x)=[\Gamma^*(x-y)]^\top$, მაშინ მივიღებთ:

$$
\widetilde{\mathcal{K}}\,\varphi(x)=\int_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big)\big(\Gamma^*(x-y)\big)^\top\big]^\top\varphi(y)dS_y, \qquad x\in S.
$$

მიღებული თანაფარდობიდან ცხადია, რომ $\widetilde{\mathcal{K}}$ ოპერატორი ემთხვევა $\mathcal{N}^*$ ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია (1.177) ტოლობით, ე.ი. $\mathcal{N}^*=\widetilde{\mathcal{K}}$. შევისწავლოთ $[-2^{-1}\,I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის გული. ამისათვის დავამტკიცოთ შემდეგი დამხმარე დებულებები.

ლემა 32 . ვთქვათ, $S\in C^{2,\kappa}$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ ინტეგრალური ოპერატორი

$$
\mathcal{H}^*\ :\ [C^{0,\sigma}(S)]^7\to[C^{1,\sigma}(S)]^7
$$

შებრუნებადია და მისი შებრუნებული ოპერატორი

$$
[\mathcal{H}^*]^{-1}\ :\ [C^{1,\sigma}(S)]^7\to[C^{0,\sigma}(S)]^7
$$

არის 1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი, ანუ სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი.

თეორემა 33 . ვთქვათ, $S\in C^{2,\kappa}$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ შემდეგი ოპერატორების

$$
2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*\ :\ [C^{0,\sigma}(S)]^7\to[C^{0,\sigma}(S)]^7,
$$

$$
2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*\ :\ [C^{0,\sigma}(S)]^7\to[C^{0,\sigma}(S)]^7,
$$

ნულ-სივრცეები ტრივიალურია, ხოლო შემდეგი ოპერატორების

$$
-\,2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*\ :\ [C^{0,\sigma}(S)]^7\to[C^{0,\sigma}(S)]^7,
$$

$$
-\,2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*\ :\ [C^{0,\sigma}(S)]^7\to[C^{0,\sigma}(S)]^7.
$$

ნულ-სივრცეები შვიდგანზომილებიანია: $[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს წარმოადგენს ვექტორთა შემდეგი სისტემა:

$$\Psi^{(1)}(x)=(0,-x_3,x_2,1,0,0,0)^\top,\quad \Psi^{(2)}(x)=(x_3,0,-x_1,0,1,0,0)^\top,$$
$$\Psi^{(3)}(x)=(-x_2,x_1,0,0,0,1,0)^\top,\quad \Psi^{(4)}(x)=(1,0,0,0,0,0,0)^\top,\tag{1.217}$$
$$\Psi^{(5)}(x)=(0,1,0,0,0,0,0)^\top,\quad \Psi^{(6)}(x)=(0,0,1,0,0,0,0)^\top,$$
$$\Psi^{(7)}(x)=(0,0,0,0,0,0,1)^\top,$$

ხოლო $[-2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს წარმოადგენს ვექტორთა $\big\{g^{(k)}(x),\ x\in S\big\}_{k=1}^{k=7}$ სისტემა, სადაც

$$g^{(k)}=[\mathcal{H}^*]^{(-1)}\Psi^{(k)},\qquad k=\overline{1,7}.\tag{1.218}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $g\in[C^{0,\sigma}(S)]^7$ ვექტორი არის შემდეგი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამონახსენი:

$$\frac{1}{2}g(x)+\mathcal{K}^*g(x)=0,\qquad x\in S.$$

მაშინ ვექტორ-ფუნქცია

$$U^*(x):=V^*(g)(x),\qquad x\in\Omega^\pm,$$

არის შეუღლებული ნეიმანის ტიპის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი; ამასთანავე $U^*=V^*(g)\in\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})\big]^7\cap\big[C^2(\Omega^\pm)\big]^7\cap Z^*(\Omega^-)$, ამიტომ თეორემა 15-ის ძალით

$$U^*(x)=V^*(g)(x)=0,\qquad x\in\Omega^-.$$

მარტივი ფენის უწყვეტობის (1.171) თვისების თანახმად U^* ვექტორ-ფუნქცია არის შეუღლებული დირიხლეს ტიპის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი; ამიტომ თეორემა 14-ის ძალით დავასკვნით, რომ

$$U^*(x)=V^*(g)(x)=0,\qquad x\in\Omega^+.$$

თუ გავითვალისწინებთ მარტივი ფენის პოტენციალზე $\mathcal{P}^*$ ოპერაციის შედეგად მიღებული წყვეტის (1.172) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ

$$\Big\{\mathcal{P}^*\big(\partial_x,n(x)\big)V^*(g)(x)\Big\}^- - \Big\{\mathcal{P}^*\big(\partial_x,n(x)\big)V^*(g)(x)\Big\}^+=g(x)=0,\qquad x\in S.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $[2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*]$ ოპერატორის გული ტრივიალურია.

ახლა ვთქვათ, $g \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$ ვექტორი არის შემდეგი ერთგვაროვანი ინტეგრალური განტოლების ამონახსენი:

$$\frac{1}{2}g(x) + \mathcal{N}^* g(x) = 0, \qquad x \in S.$$

ჩართვის თეორემების თანახმად $g \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$ (იხ. [25], თავი IV). ავაგოთ U^* ვექტორ-ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$U^*(x) := W^*(g)(x), \qquad x \in \Omega^\pm.$$

ცხადია, რომ ასე აგებული U^* ვექტორ-ფუნქცია არის შეუღლებული დირიხლეს ტიპის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი. ამიტომ თეორემა 14-ის ძალით

$$U^*(x) = W^*(g)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+.$$

რადგან $U^* = W^*(g) \in \big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})\big]^7 \cap \big[C^2(\Omega^\pm)\big]^7 \cap Z^*(\Omega^-)$, ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის თანახმად (იხ. (1.174) ფორმულა), ცხადია, რომ $U^*(x) = W^*(g)(x)$ ვექტორ-ფუნქცია არის შეუღლებული ნეიმანის ტიპის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი; ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 14-ის ძალით

$$U^*(x) = W^*(g)(x) = 0, \qquad x \in \Omega^-.$$

ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.173) ფორმულის თანახმად დავასკვნით

$$\Big\{W^*(g)(x)\Big\}^+ - \Big\{W^*(g)(x)\Big\}^- = g(x) = 0, \qquad x \in S.$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ $[2^{-1}I_7 + \mathcal{N}^*]$ ოპერატორის გული ტრივიალურია.

ახლა გადავიდეთ თეორემის მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. თუ $\Psi^{(k)}(x)$, $k = \overline{1,7}$, ვექტორებისათვის ვისარგებლებთ ზოგადი ინტეგრალური წარმოდგენის (1.168) ფორმულით შიგა არეში და გავითვალიწინებთ, რომ

$$\Big\{\mathcal{P}^*\big(\partial_x, n(x)\big)\,\Psi^{(k)}(x)\Big\}^+ = 0, \quad x \in S,$$

მაშინ მარტივად მივიღებთ:

$$\Psi^{(k)}(x) = W^*\big(h^{(k)}\big)(x), \qquad x \in \Omega^+, \tag{1.219}$$

სადაც

$$h^{(k)}(x) = \Big\{\Psi^{(k)}(x)\Big\}^+ = \Psi^{(k)}(x), \qquad k = \overline{1,7}, \qquad x \in S. \tag{1.220}$$

(1.219) იგივეობაში გადავიდეთ ზღვარზე და გავითვალისწინოთ ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.173) თვისება და (1.220) ტოლობა. მარტივად დავასკვნით, რომ $h^{(k)}$ ვექტორ-ფუნქციისთვის სრულდება შემდეგი თანაფარდობა

$$-\frac{1}{2}h^{(k)}(x)+\mathcal{N}^*h^{(k)}(x)=0, \qquad x\in S,$$

საიდანაც ცხადია, რომ $h^{(k)}=\Psi^{(k)}\in\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]$.

რადგან ვექტორთა $\left\{\Psi^{(k)}(x)\right\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, ამიტომ $\dim\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]\geqslant 7$.

ვთქვათ, $g\in[C^{0,\sigma}(S)]^7$ ვექტორი არის შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ნებისმიერი ამონახსენი:

$$-\frac{1}{2}h(x)+\mathcal{N}^*h(x)=0, \qquad x\in S. \tag{1.221}$$

ჩართვის თეორემების თანახმად, კვლავ, დავასკვნით, რომ $g\in[C^{1,\sigma}(S)]^7$. ავაგოთ U^* ვექტორ-ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$U^*(x):=W^*(h)(x), \qquad x\in\Omega^{\pm}.$$

რადგან $U^*=W^*(h)\in\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})\right]^7\cap\left[C^2(\Omega^{\pm})\right]^7\cap Z^*(\Omega^-)$, ამიტომ (1.221) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $U^*=W^*(h)$ ვექტორ-ფუნქცია არის შეუღლებული დირიხლეს ტიპის გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი და თეორემა 14-ის ძალით

$$U^*(x)=W^*(h)(x)=0, \qquad x\in\Omega^-.$$

გარდა ამისა, ლიაპუნოვ-ტაუბერის თეორემის თანახმად (იხ. (1.174) ტოლობა) $U^*=W^*(h)$ ვექტორ-ფუნქცია არის შეუღლებული ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი და ამიტომ თეორემა 15-ის თანახმად

$$U^*(x)=W^*(h)(x)=\big([a\times x]+b,\,a,\,c\big)^\top, \qquad x\in\Omega^+,$$

სადაც $a=(a_1,a_2,a_3)$ და $b=(b_1,b_2,b_3)$ ნებისმიერი მუდმივი ვექტორებია, ხოლო c ნებისმიერი მუდმივია.

ორმაგი ფენის პოტენციალის წყვეტის (1.173) თვისების თანახმად, უკანასკნელი ორი ტოლობიდან მივიღებთ:

$$h(x)=\big\{W^*(h)(x)\big\}^+-\big\{W^*(h)(x)\big\}^-=\big([a\times x]+b,\,a,\,c\big)^\top, \qquad x\in S.$$

აქედან კი გამომდიანრეობს, რომ h ვექტორი ეკუთვნის ვექტორთა $\left\{\Psi^{(k)}(x)\right\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემის წრფივ გარსს, რადგან

$$\big([a\times x]+b,\,a,\,c\big)^\top=\sum_{k=1}^{3}\big[a_k\Psi^{(k)}(x)+b_k\Psi^{(k+3)}(x)\big]+c\,\Psi^{(7)}(x). \tag{1.222}$$

მაშასადამე, $\dim\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]\leqslant 7$. ეს კი იმას ამტკიცებს, რომ ვექტორთა $\Big\{\Psi^{(k)}(x),\ x\in S\Big\}_{k=1}^{7}$, სისტემა წარმოადგენს $[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ვექტორ-ფუნქციათა $\Big\{[\mathcal{H}^*]^{-1}\Psi^{(k)}(x)\Big\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემა წარმოადგენს $[-2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს. მართლაც, (1.179) ტოლობებისა და ლემა 32-ის თანახმად

$$[\mathcal{H}^*]^{-1}\,\mathcal{N}^*=\mathcal{K}^*\,[\mathcal{H}^*]^{-1}.$$

რადგან $\Psi^{(k)}\in\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{N}^*]$, ამიტომ მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$\Big[-\frac{1}{2}I_7+\mathcal{K}^*\Big]\,[\mathcal{H}^*]^{-1}\,\Psi^{(k)}=[\mathcal{H}^*]^{-1}\,\Big[-\frac{1}{2}I_7+\mathcal{N}^*\Big]\,\Psi^{(k)}=0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\dim\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*]\geqslant 7$. მეორე მხრივ, ერთადერთობის თეორემა 15-ის გამოყენებით დავასკვნით, რომ $\ker[-2^{-1}I_7+\mathcal{K}^*]$ არაუმეტეს შვიდგანზომილებიანია. ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

ამ დებულებებიდან, კერძოდ, გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 34 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$, $0<\kappa\leqslant 1$. მაშინ, სინგულარული ინტეგრალური $[-2^{-1}I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის გული შვიდგანზომილებიანია და მისი ბაზისია წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორ-ფუნქციათა $\{\Psi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემა, სადაც $\Psi^{(k)}$, $k=\overline{1,7}$, ვექტორები მოცემულია (1.217) ტოლობებით.

ახლა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ არსებობის დებულებები, რომლებიც უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 31 და თეორემა 34-დან.

თეორემა 35 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$ და $F\in C^{0,\sigma}(S)$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ, არაერთგვაროვანი (1.210) განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\Big(F,\Psi^{(k)}\Big)_{[L_2(S)]^7}\equiv\int_S F(x)\cdot\Psi^{(k)}(x)\,dS=0,\qquad k=\overline{1,7},\tag{1.223}$$

სადაც ვექტორ-ფუნქციათა $\{\Psi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემა წარმოადგენს $[-2^{-1}I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს და განსაზღვრულია (1.217) ტოლობით.

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს ზოგადი თეორიიდან, რადგან $[-2^{-1}I_7+\mathcal{K}]$ არის ნორმალური ტიპის სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით და ვექტორ-ფუნქციათა $\{\Psi^{(k)}(x),\ \ x\in S\}_{k=1}^{7}$,

სისტემა, რომელიც განსაზღვრულია (1.217) ტოლობებით, წარმოადგენს შეუღლებული $[-2^{-1}I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს. ამიტომ, არაერთგვაროვანი (1.210) განტოლება მარჯვენა მხარეში მდგომი ნებისმიერი F ფუნქციისათვის ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორთოგონალობის (1.223) პირობა შესრულებულია. □

ამ თეორემიდან უშუალოდ გამომდიანარეობს არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 36 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$ და $F\in C^{0,\sigma}(S)$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. ნეიმანის ტიპის შიგა არაერთგვაროვანი (1.207)-(1.208) სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა F ფუნქცია აკმაყოფილებს ორთოგონალობის (1.223) პირობას. გარდა ამისა, ამ ამოცანის U ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (1.209) პოტენციალით, რომლის სიმკვრივე g განისაზღვრება სინგულარული ინტეგრალური (1.210) განტოლებიდან. ამასთანავე, თუ $U^{(*)}$ არის ნეიმანის შიგა ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსნი, მაშინ ამავე ამოცანის ზოგადი ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$U(x)=U^{(*)}(x)+\sum_{k=1}^{7}C_k\,\Phi^{(k)}(x),\qquad x\in\Omega^+,$$

სადაც C_k ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია, ხოლო $\Phi^{(k)}$, $k=\overline{1,7}$, განზოგადებული ხისტი გადადგილების ვექტორია და განსაზღვრულია (1.77) ტოლობებით.

დამტკიცება. დამტკიცება უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემა 31, თეორემა 34 და თეორემა 35-დან. □

2 თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ჰემიტროპული სხეულებისათვის

2.1 ძირითადი საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ჩამოყალიბება. ერთადერთობის თეორემები

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $D_1 = \Omega^+$ და $D_2 = \Omega^- = \mathbb{R}^3\ \overline{\Omega^+}$; $\overline{D_1} \cup \overline{D_2} = \mathbb{R}^3$. ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $D_1 = \Omega^+$ არის საზღვარია მარტივად ბმული გლუვი $S \in C^{1,\kappa}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, ზედაპირი. ცხადია, $\partial D_1 = \partial D_2 = S$. $\Omega^\pm$ ანუ D_j, $j = 1,2$, არეების შემავსებელი მასალის შესაბამისი მატერიალური მუდმივებისა და შესაბამისი დიფერენციალური და სასაზღვრო ოპერატორების აღმნიშვნელ სიმბოლოებს მივუწეროთ j ქვედა ინდექსად. ძირითადი დიფერენციალური განტოლებები D_j არეში კვლავ ჩაიწერება (1.16) ფორმით, სადაც მატერიალური მუდმივები α, β, γ, δ, λ, μ, ν, χ, ε, η, ζ, κ' შეიცვლება α_j, β_j, γ_j, δ_j, λ_j, μ_j, ν_j, χ_j, ε_j, η_j, ζ_j, κ'_j, $j = 1,2$, მატერიალური მუდმივებით.

გადაადგილებისა და მიკრო-ბრუნვის ვექტორები, ასევე ტემპერატურის ფუნქცია, D_j არეში აღვნიშნოთ, შესაბამისად, შემდეგი სიმბოლოებით: $u^{(j)}$, $\omega^{(j)}$, $\vartheta^{(j)}$, $j = 1,2$; ამასთან, $U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top = (u^{(j)}, \omega^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top$, სადაც $\widetilde{U}^{(j)} = (u^{(j)}, \omega^{(j)})^\top$.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა მთელი სივრცისათვის.

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{B})$. ვიპოვოთ D_j არეებში

$$L_j(\partial) U^{(j)}(x) = 0, \qquad x \in D_j, \quad j = 1,2, \tag{2.1}$$

განტოლებების ისეთი რეგულარული $U^{(1)} = (u^{(1)}, \omega^{(1)}, \vartheta^{(1)})^\top \in [C^2(D_1)]^7 \cap [C^1(\overline{D_1})]^7$ და $U^{(2)} = (u^{(2)}, \omega^{(2)}, \vartheta^{(2)})^\top \in [C^2(D_2)]^7 \cap [C^1(\overline{D_2})]^7 \cap Z(D_2)$ ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\big\{U^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U^{(2)}(x)\big\}^- = f(x), \quad x \in S, \tag{2.2}$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial, n) U^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U^{(2)}(x)\big\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{2.3}$$

სადაც

$$f = (f_1, \cdots, f_7)^\top \in [C^{1,\sigma}(S)]^7, \quad F = (F_1, \cdots, F_7)^\top \in [C^{0,\sigma}(S)]^7, \quad 0 < \sigma < \kappa \leqslant 1,$$

მოცემული ფუნქციებია.

შევისწავლოთ ძირითადი საკონტაქტო (2.1)-(2.3) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. ამისათვის განვიხილოთ ამ ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამოცანა ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობებით. მარტივად დავინახავთ, რომ ეს ამოცანა ტემპერატურის $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ფუნქციისათვის განცალდება დამოუკიდებელ ძირითად საკონტაქტო ამოცანად ლაპლასის განტოლებისათვის:

$$\kappa_j' \triangle \vartheta^{(j)}(x)=0, \qquad x\in D_j, \quad j=1,2, \tag{2.4}$$

რომლის, ამონახსენიც საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\{\vartheta^{(1)}(x)\}^+ - \{\vartheta^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x\in S, \tag{2.5}$$

$$\kappa_1' \{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\}^+ - \kappa_2' \{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x\in S. \tag{2.6}$$

ვინაიდან $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ფუნქციები ერთგვაროვანი (2.4) განტოლების ამონახსნებია და სრულდება ქრობის (1.80) პირობები, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ გრინის შემდეგი ფორმულები:

$$0=\int\limits_S \{\vartheta^{(1)}(x)\}^+ \{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\}^+ \, dS - \int\limits_{D_1} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(1)}(x)\right)^2 dx \,,$$

$$0=-\int\limits_S \{\vartheta^{(2)}(x)\}^- \{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\}^- dS - \int\limits_{D_2} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(2)}(x)\right)^2 dx.$$

შევკრიბოთ ეს ორი ტოლობა და მოვახდინოთ მარტივი გარდაქმნები:

$$\begin{aligned}
0=&\int_S \left[\{\vartheta^{(1)}(x)\}^+ \{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\}^+ \; - \{\vartheta^{(2)}(x)\}^- \{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\}^-\right] dS - \\
&-\int_{D_1} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(1)}(x)\right)^2 dx \; - \int_{D_2} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(2)}(x)\right)^2 dx = \\
&=\int_S \Big\{ \left[\{\vartheta^{(1)}(x)\}^+ - \{\vartheta^{(2)}(x)\}^-\right] \{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\}^+ \\
&+\{\vartheta^{(2)}(x)\}^- \left[\{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\}^+ \; - \{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\}^-\right] \Big\} dS - \\
&-\int_{D_1} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(1)}(x)\right)^2 dx \; - \int_{D_2} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(2)}(x)\right)^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

თუ ამ უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინებთ (2.5)-(2.6) საკონტაქტო პირობებს, მაშინ დავასკვნით, რომ

$$\int\limits_{D_1} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(1)}(x)\right)^2 dx \; + \int\limits_{D_2} \left(\operatorname{grad} \vartheta^{(2)}(x)\right)^2 dx = 0. \tag{2.8}$$

რადგან (2.8) ტოლობაში ორივე ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითია, ამიტომ,

$$\operatorname{grad} \vartheta^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in D_1, \qquad \text{და} \qquad \operatorname{grad} \vartheta^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in D_2.$$

ხოლო ქრობის (1.80) პირობის ძალით კი მივიღებთ:

$$\vartheta^{(2)}(x) = 0, \qquad\qquad x \in D_2.$$

ამ უკანასკნელი ტოლობიდან (2.5) საკონტაქტო პირობის თანახმად მარტივად დავასკვნით, რომ

$$\vartheta^{(1)}(x) = 0, \qquad\qquad x \in D_1.$$

რადგან D_j არეში $\vartheta^{(j)} = 0$, ამიტომ, $\widetilde{U}^{(j)} = (u^{(j)}, \omega^{(j)})^\top$ აკმაყოფილებს შემდეგ ერთგვაროვან განტოლებას

$$\widetilde{L}_j(\partial)\,\widetilde{U}^{(j)}(x) = 0, \quad x \in D_j, \quad j = 1, 2,$$

სადაც $\widetilde{L}(\partial)$ ოპერატორი მოცემულია (1.19) ტოლობით. ამასთან, $\widetilde{U}^{(2)}$ შემოსაზღვრულია უსასრულობაში და აკმაყოფილებს (1.81) პირობას. ამიტომ მას აქვს შემდეგი ასიმპტოტიკა (იხ. ლემა 4.3, [36]):

$$\widetilde{U}^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} [O(|x|^{-1})]_{3\times 1} \\ [O(|x|^{-2})]_{3\times 1} \end{bmatrix}, \quad \text{როცა} \quad |x| \to \infty. \tag{2.9}$$

შედეგად მივიღებთ, რომ $\widetilde{U}^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციისთვის ადგილი აქვს გრინის შემდეგ იგივეობას:

$$\int\limits_{D_2} \widetilde{U}^{(2)} \cdot \widetilde{L}_2(\partial)\widetilde{U}^{(2)}\, dx = -\int\limits_{S} \{\widetilde{U}^{(2)}\}^- \{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^- \, dS - \int\limits_{D_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)})\, dx\,. \tag{2.10}$$

$\widetilde{U}^{(1)}$ ამონახსნისთვის კი გრინის იგივეობა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\int\limits_{D_1} \widetilde{U}^{(1)} \cdot \widetilde{L}_1(\partial)\widetilde{U}^{(1)}\, dx = \int\limits_{S} \{\widetilde{U}^{(1)}\}^+ \{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+ \, dS - \int\limits_{D_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)})\, dx\,. \tag{2.11}$$

რადგან $\widetilde{U}^{(1)}$ და $\widetilde{U}^{(2)}$ ერთგვაროვანი განტოლებების ამონახსნებია, ამიტომ (2.10) და (2.11) ტოლობები შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$0 = -\int\limits_{S} \{\widetilde{U}^{(2)}\}^- \{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^- dS - \int\limits_{D_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)})\, dx\,,$$

$$0 = \int\limits_{S} \{\widetilde{U}^{(1)}\}^+ \{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+ \, dS - \int\limits_{D_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)})\, dx.$$

თუ შევკრებთ ამ ორ ტოლობას, მივიღებთ:

$$0=\int\limits_S \Big[\{\widetilde{U}^{(1)}\}^+\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+ -\{\widetilde{U}^{(2)}\}^-\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^-\Big]\,dS-$$

$$-\int\limits_{D_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)},\widetilde{U}^{(1)})\,dx -\int\limits_{D_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)},\widetilde{U}^{(2)})\,dx =$$

$$=\int\limits_S \Big\{\Big[\{\widetilde{U}^{(1)}\}^+-\{\widetilde{U}^{(2)}\}^-\Big]\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+ + \tag{2.12}$$

$$+\{\widetilde{U}^{(2)}\}^-\Big[\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+ -\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^-\Big]\Big\}dS-$$

$$-\int\limits_{D_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)},\widetilde{U}^{(1)})\,dx -\int\limits_{D_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)},\widetilde{U}^{(2)})\,dx.$$

ვინაიდან $\widetilde{U}^{(1)}$ და $\widetilde{U}^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან საკონტაქტო პირობებს, ამიტომ, (2.12) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\int\limits_{D_1} E^{(1)}\big(\widetilde{U}^{(1)},\widetilde{U}^{(1)}\big)\,dx +\int\limits_{D_2} E^{(2)}\big(\widetilde{U}^{(2)},\widetilde{U}^{(2)}\big)\,dx=0. \tag{2.13}$$

ეს უკანასკნელი ტოლობა კი ენერგეტიკული $E^{(j)}\big(\widetilde{U}^{(j)},\widetilde{U}^{(j)}\big)$, $j=1,2$, კვადრატული ფორმის დადებითად განსაზღვრულობის თვისების ძალით სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$E^{(1)}\big(\widetilde{U}^{(1)},\widetilde{U}^{(1)}\big)=0 \qquad D_1 \text{ არეში},$$

$$E^{(2)}\big(\widetilde{U}^{(2)},\widetilde{U}^{(2)}\big)=0 \qquad D_2 \text{ არეში}.$$

აქედან კი ვღებულობთ, რომ

$$u^{(j)}(x)=[a^{(j)}\times x]+b^{(j)},\quad \omega^{(j)}(x)=a^{(j)},\quad x\in D_j,\quad j=1,2,$$

სადაც $a^{(j)}$ და $b^{(j)}$, $j=1,2$, ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. ასიმპტოტური (2.9) ტოლობის გათვალისწინებით მარტივად დავასკვნით, რომ $a^{(j)}=b^{(j)}=0$, $j=1,2$, ე.ი. $\widetilde{U}^{(2)}(x)=0$, $x\in D_2$. აქედან კი ცხადია, რომ $U^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია იგივურად ნულის ტოლია D_2 არეში:

$$U^{(2)}(x)=0,\qquad x\in D_2.$$

თუ ამ ტოლობას გათვალისწინებით ერთგვაროვან (2.2) საკონტაქტო პირობაში $\big($როცა $f(x)=0\big)$, მივიღებთ, რომ

$$\{U^{(1)}(x)\}^+=0,\quad x\in S,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $u^{(1)}$ და $\omega^{(1)}$ იგივურად ნულია D_1 არეში, ე.ი. $U^{(1)}(x) = 0, \quad x \in D_1$. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (2.1)-(2.3) ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი. მაშასადამე, მივიღეთ შემდეგი ერთადერთობის დებულება.

თეორემა 37 . ძირითად საკონტაქტო (2.1)-(2.3) ამოცანას რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^2(D_1)]^7 \cap [C^1(\overline{D_1})]^7 \times [C^2(D_2)]^7 \cap [C^1(\overline{D_2})]^7 \cap Z(D_2)$ კლასში არ გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

ახლა განვიხილოთ უფრო რთული სტრუქტურის კომპოზიტური უბნობრივ ერთგვაროვანი სხეული.

ვთქვათ, $S_1 \in C^{2,\kappa}$ და $S_2 \in C^{2,\kappa}$ არის ორი მარტივად ბმული შეკრული გლუვი ზედაპირი; ამასთან, S_1 ზედაპირი მდებარეობს S_2 ზედაპირის შიგნით. S_1 ზედაპირით შემოსაზღვრული არე აღვნიშნოთ Ω_1 სიმბოლოთი, ხოლო S_1 და S_2 ზედაპირებით შემოსაზღვრული არე კი - Ω_2 სიმბოლოთი. ცხადია, გვაქვს: $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup S_1$, $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup S_1 \cup S_2$. აგრეთვე, შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\Omega_3 := \mathbb{R}^3 \setminus \big(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\big)$. ქვემოთ ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ ნორმალის დადებით მიმართულებად არჩეულია S_1 და S_2 ზედაპირების მიმართ გარე ნორმალის მიმართულება.

ვიგულისხმოთ, რომ Ω_1 და Ω_2 არეები შევსებულია განსხვავებული ერთგვაროვანი ჰემიტროპული მასალით. Ω_j, $j = 1, 2$, მასალის შესაბამისი მატერიალური მუდმივები აღვნიშნოთ α_j, β_j, γ_j, δ_j, λ_j, μ_j, ν_j, χ_j, ε_j, η_j, ζ_j, ${\kappa'}_j$, $j = 1, 2$, სიმბოლოებით, ხოლო შესაბამისი დიფერენციალური და სასაზღვრო ოპერატორები კი შემდეგი სიმბოლოებით: $L_j(\partial)$, $\widetilde{L}_j(\partial)$, $\mathcal{P}_j(\partial, n)$, $\mathcal{P}_j^*(\partial, n)$, $T_j(\partial, n)$. ეს ოპერატორები კვლავ მოიცემა (1.17)-(1.27) ფორმულებით.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები აღნიშნული სტრუქტურის კომპოზიტური სხეულისათვის.

ამოცანა (TP − D): დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ Ω_j, $j = 1, 2$, არეებში

$$L_j(\partial) U^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1, 2, \tag{2.14}$$

დიფერენციალური განტოლებების ისეთი რეგულარული

$$U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top = (u^{(j)}, \omega^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top \in [C^2(\Omega_j)]^7 \cap [C^1(\overline{\Omega_j})]^7, \quad j = 1, 2,$$

ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\big\{U^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U^{(2)}(x)\big\}^- = f^{(1)}(x), \quad x \in S_1, \tag{2.15}$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial, n) U^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U^{(2)}(x)\big\}^- = F^{(1)}(x), \quad x \in S_1, \tag{2.16}$$

ხოლო S_2 საზღვარზე კმაყოფილდება დირიხლეს ტიპის შემდეგი სასაზღვრო პირობა:

$$\{U^{(2)}(x)\}^+ = f^{(2)}(x), \quad x \in S_2, \tag{2.17}$$

სადაც

$$f^{(j)} = (\widetilde{f}^{(j)}, f_7^{(j)})^\top = (f_1^{(j)}, \cdots, f_7^{(j)})^\top \in [C^{1,\sigma}(S_j)]^7, \;\; j = 1, 2,$$

$$F^{(1)} = (\widetilde{F}^{(1)}, F_7^{(1)})^\top = (F_1^{(1)}, \cdots, F_7^{(1)})^\top \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7, \; 0 < \sigma < \kappa \leqslant 1,$$

მოცემული ფუნქციებია.

<u>ამოცანა (TP − N): ნეიმანის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა</u>. ვიპოვოთ Ω_j, $j = 1, 2$, არეებში (2.14) განტოლებების ისეთი რეგულარული $U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top = (u^{(j)}, \omega^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top \in [C^2(\Omega_j)]^7 \cap [C^1(\overline{\Omega_j})]^7$, $j = 1, 2$, ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებს (2.15)-(2.16) საკონტაქტო პირობებს, ხოლო S_2 საზღვარზე აკმაყოფილებს ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U^{(2)}(x)\}^+ = F^{(2)}(x), \quad x \in S_2, \tag{2.18}$$

სადაც

$$F^{(2)} = (\widetilde{F}^{(2)}, F_7^{(2)})^\top = (F_1^{(2)}, \cdots, F_7^{(2)})^\top \in [C^{0,\sigma}(S_2)]^7, \quad 0 < \sigma < \kappa \leqslant 1,$$

მოცემული ფუნქციაა.

<u>ამოცანა (TP − R): რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა</u>. ვიპოვოთ Ω_j, $j = 1, 2$, არეებში (2.14) განტოლებების ისეთი რეგულარული $U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top = (u^{(j)}, \omega^{(j)}, \vartheta^{(j)})^\top \in [C^2(\Omega_j)]^7 \cap [C^1(\overline{\Omega_j})]^7$, $j = 1, 2$, ამონახსნები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (2.15)-(2.16) საკონტაქტო პირობებს, ხოლო S_2 საზღვარზე $U^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია აკმაყოფილებს რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U^{(2)}(x)\}^+ + K\{U^{(2)}(x)\}^+ = F^{(2)}(x), \quad x \in S_2, \tag{2.19}$$

სადაც $F^{(2)}$ მოცემული ფუნქციაა, ხოლო $K = [K_{kj}]_{7\times7}$ დადებითად განსაზღვრული მუდმივი მატრიცაა:

$$K = \begin{bmatrix} \big[\widetilde{K}_{kj}\big]_{6\times6} & [0]_{6\times1} \\ [0]_{1\times6} & \varkappa_2 \end{bmatrix}_{7\times7}; \tag{2.20}$$

აქ $\varkappa_2 > 0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{6\times6}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

ჩამოყალიბებული ამოცანების სტრუქტურიდან ადვილი დასანახია, რომ ეს ამოცანები ტემპერატურის $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ფუნქციებისათვის განცალდება დამოუკიდებელ საკონტაქტო ამოცანებად ლაპლასის განტოლებისათვის. კერძოდ, ტემპერატურის ფუნქციისთვის მივიღებთ შემდეგ სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს.

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{D}_\vartheta)$. ვიპოვოთ ისეთი რეგულარული $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ფუნქციები, რომელებიც არიან

$$\kappa'_{(j)}\triangle\vartheta^{(j)}(x)=0, \quad x\in\Omega_j, \qquad j=1,2, \tag{2.21}$$

განტოლებების ამონახსნები და აკმაყოფილებენ შემდეგ საკონტაქტო და დირიხლეს სასაზღვრო პირობებს:

$$\big\{\vartheta^{(1)}(x)\big\}^+-\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^-=f_7^{(1)}(x), \quad x\in S_1, \tag{2.22}$$

$$\kappa'_1\big\{\partial_n\vartheta^{(1)}(x)\big\}^+-\kappa'_2\big\{\partial_n\vartheta^{(2)}(x)\big\}^-=F_7^{(1)}(x), \quad x\in S_1, \tag{2.23}$$

$$\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+=f_7^{(2)}(x), \quad x\in S_2, \tag{2.24}$$

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{N}_\vartheta)$. ვიპოვოთ (2.21) განტოლების ისეთი $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ამონახსნები, რომელებიც აკმაყოფილებენ (2.22)-(2.23) საკონტაქტო პირობებს და ნეიმანის შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\kappa'_2\big\{\partial_n\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+=F_7^{(2)}(x), \quad x\in S_2. \tag{2.25}$$

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{R}_\vartheta)$. ვიპოვოთ (2.21) განტოლებების ისეთი $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ამონახსნები, რომელებიც აკმაყოფილებენ (2.22)-(2.23) საკონტაქტო პირობებს და რობენის შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$\kappa'_2\big\{\partial_n\vartheta^{(2)}(x)\big\}^++\varkappa_2\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+=F_7^{(2)}(x), \quad x\in S_2. \tag{2.26}$$

ჯერ შევისწავლოთ ტემპერატურული ველისთვის განცალებული ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი.

ლემა 38 . დირიხლეს (2.21)-(2.24) და რობენის (2.21)-(2.23), (2.26) ერთგვაროვან ($f_7^{(j)}=0$, $F_7^{(j)}=0$, $j=1,2$) ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ დირიხლეს ერთგვაროვანი ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{D}_\vartheta)$ და დავუშვათ, რომ $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$, ამ ამოცანის ამონახსნებია. რადგან $\vartheta^{(j)}$, $j=1,2$,

ფუნქცია ერთგვაროვანი (2.21) განტოლების ამონახსნია, ამიტომ მართებულია გრინის შემდეგი ფორმულები:

$$\int\limits_{\Omega_1} \kappa_1' \,|\mathrm{grad}\,\vartheta^{(1)}(x)|^2\,dx = \int\limits_{S_1} \kappa_1' \,\big\{\vartheta^{(1)}(x)\big\}^+ \big\{\partial_n \vartheta^{(1)}(x)\big\}^+ \,dS, \tag{2.27}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \kappa_2' \,|\mathrm{grad}\,\vartheta^{(2)}(x)|^2\,dx = \int\limits_{S_2} \kappa_2' \,\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+ \big\{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\big\}^+ \,dS -$$

$$- \int\limits_{S_1} \kappa_2' \,\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^- \big\{\partial_n \vartheta^{(2)}(x)\big\}^- \,dS. \tag{2.28}$$

თუ შევკრებთ ამ ორ ტოლობას და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან საკონ-ტაქტო და სასაზღვრო (2.22)-(2.24) პირობებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\int\limits_{\Omega_1} |\mathrm{grad}\,\vartheta^{(1)}(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega_2} |\mathrm{grad}\,\vartheta^{(2)}(x)|^2\,dx = 0. \tag{2.29}$$

რადგან უკანასკნელ ტოლობაში ორივე ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყო-ფითია, ამიტომ

$$\mathrm{grad}\,\vartheta^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \qquad \mathrm{grad}\,\vartheta^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_2.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\vartheta^{(j)} = const =: C_j$, $j = 1, 2$. ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობების თანახმად $C_1 = C_2 =: C$, ე.ი. $\vartheta^{(j)}(x) = C$, $x \in \Omega_j$ $j = 1, 2$. დირიხლეს ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $C = 0$; ამიტომ,

$$\vartheta^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \quad \text{და} \quad \vartheta^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_2.$$

რობენის ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაშიც, კვლავ, მივიღებთ გრინის (2.27)-(2.28) იგივეობებს. თუ ამ ორ ტოლობას შევკრებთ და გავითვალისწი-ნებთ ერთგვაროვან საკონტაქტო (2.22)-(2.23) და სასაზღვრო (2.26) პირობებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\int\limits_{\Omega_1} |\mathrm{grad}\,\vartheta^{(1)}(x)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega_2} |\mathrm{grad}\,\vartheta^{(2)}(x)|^2\,dx + \frac{\varkappa_2}{\kappa_2'} \int\limits_{S_2} |\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+|^2\,dS = 0.$$

რადგან უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეში ყველა შესაკრები არაუარ-ყოფითია, ამიტომ

$$\mathrm{grad}\,\vartheta^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \qquad \mathrm{grad}\,\vartheta^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_2, \tag{2.30}$$

$$\big\{\vartheta^{(2)}(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S_2. \tag{2.31}$$

(2.30) ტოლობიდან ცხადია, რომ $\vartheta^{(j)} = const =: C_j$, $j = 1, 2$. თავის მხრივ, ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობის ძალით $C_1 = C_2 =: C$. (2.31) ტოლობიდან კი გამომდინარეობს, რომ $C = 0$ და, მაშასადამე,

$$\vartheta^{(1)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_1, \qquad \vartheta^{(2)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_2.$$

ამით ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 39 . ნეიმანის ტიპის (2.21)-(2.23), (2.25) ერთგვაროვანი ამოცანის (როცა $f_7^{(1)} = 0$, $F_7^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$) ზოგადი ამონახსნია

$$\vartheta^{(1)} = const =: C, \quad x \in \Omega_1, \qquad \vartheta^{(2)}(x) = const =: C, \quad x \in \Omega_2,$$

სადაც C ნებისმიერი მუდმივია.

დამტკიცება. ლემა 38-ის დამტკიცებაში გამოყენებული მსჯელობებით, კვლავ, მივიღებთ (2.29) ტოლობას, საიდანაც დავასკვნით, რომ

$$\operatorname{grad} \vartheta^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1, 2,$$

ანუ $\vartheta^{(j)} = const =: C_j$, $j = 1, 2$. ერთგვაროვანი საკონტაქტო პირობიდან კი ცხადია, რომ $C_1 = C_2 =: C$, ე.ი.

$$\vartheta^{(j)}(x) = C, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1, 2. \tag{2.32}$$

მარტივი საჩვენებელია, რომ ნებისმიერი C მუდმივისთვის (2.32) წარმოადგენს ერთგვაროვანი ამოცანა $(\mathrm{TP} - \mathrm{N}_\vartheta)$-ის ამონახსნს. □

ახლა დავამტკიცოთ ძირითადი შიგა სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები.

თეორემა 40 . დირიხლეს შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.14)-(2.17) ამოცანას ($f^{(j)} = 0$, $F^{(j)} = 0$, $j = 1, 2$) გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

დამტკიცება. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ამ ამოცანაში ტემპერატურის $\vartheta^{(j)}$, $j = 1, 2$, ფუნქციისთვის ცალკე გამოიყოფა შესაბამისი ერთგვაროვანი (2.21)-(2.24) სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა, რომელსაც ლემა 38-ის ძალით გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი. ამიტომ, ერთგვაროვანი (2.14)-(2.17) ამოცანის ნებისმიერ ამონახსნს ექნება შემდეგი სტრუქტურა: $U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, 0)^\top$, $j = 1, 2$.

თავის მხრივ, ერთგვაროვანი (2.14)-(2.17) ამოცანიდან დავასკვნით, რომ $\widetilde{U}^{(j)} = (u^{(j)}, \omega^{(j)})^\top$, $j = 1,2$, ვექტორ-ფუნქცია არის შემდეგი ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი:

$$\widetilde{L}_j(\partial)\widetilde{U}^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1,2, \tag{2.33}$$

$$\big\{\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \quad x \in S_1, \tag{2.34}$$

$$\big\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \quad x \in S_1, \tag{2.35}$$

$$\big\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_2. \tag{2.36}$$

ეს ამოცანა შეესაბამება ჰემიტროპული სხეულების მოდელს, როდესაც თერმული ეფექტები არაა გათვალისწინებული.

ვისარგებლოთ გრინის (1.60) იგივეობით $\widetilde{U}^{(j)}$, $j = 1,2$, ფუნქციებისათვის:

$$\int\limits_{\Omega_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)})\,dx = \int\limits_{S_1} \{\widetilde{U}^{(1)}\}^+ \{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}\}^+\,dS, \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)})\,dx &= \int\limits_{S_2} \{\widetilde{U}^{(2)}\}^+ \{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^+\,dS - \\ &- \int\limits_{S_1} \{\widetilde{U}^{(2)}\}^- \{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}\}^-\,dS.\end{aligned} \tag{2.38}$$

აქ $E^{(j)}$ და T_j, $j = 1,2$, განსაზღვრულია (1.46) და (1.27) ფორმულებით. თუ ამ ორ ტოლობას შევკრებთ და გავითვალისწინებთ ერთგვაროვან საკონტაქტო (2.34)-(2.35) და სასაზღვრო (2.36) პირობებს, მივიღებთ:

$$\int\limits_{\Omega_1} E^{(1)}\big(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)}\big)\,dx + \int\limits_{\Omega_2} E^{(2)}\big(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)}\big)\,dx = 0. \tag{2.39}$$

რადგან $E^{(j)}\big(\widetilde{U}^{(j)}, \widetilde{U}^{(j)}\big)$, $j = 1,2$, ენერგეტიკული ფორმა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ (2.39) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$E^{(1)}\big(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)}\big) = 0 \qquad \text{და} \qquad E^{(2)}\big(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)}\big) = 0.$$

აქედან კი დავასკვნით ([34]):

$$u^{(j)}(x) = [a^{(j)} \times x] + b^{(j)}, \quad \omega^{(j)}(x) = a^{(j)}, \quad x \in \Omega_j, \quad j = 1,2, \tag{2.40}$$

სადაც $a^{(j)} = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, a_3^{(j)})^\top$ და $b^{(j)} = (b_1^{(j)}, b_2^{(j)}, b_3^{(j)})^\top$, $j = 1,2$, ნებისმიერი სამგანზომილებიანი მუდმივი ვექტორებია. დირიხლეს ერთგვაროვანი (2.36) სასაზღვრო პირობის გათვალისწინებით ცხადია, რომ $a^{(2)} = b^{(2)} = 0$, ე.ი.

$$u^{(2)}(x) = 0, \quad \omega^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_2.$$

ერთგვაროვანი (2.34) საკონტაქტო პირობიდან, ასევე, მარტივად დავასკვნით, რომ $a^{(1)} = a^{(2)}$ და $b^{(1)} = b^{(2)}$, საიდანაც გამომდინარეობს,

$$u^{(1)}(x) = 0, \quad \omega^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღეთ:

$$U^{(1)}(x) = 0,\ x \in \Omega_1 \qquad \text{და} \qquad U^{(2)}(x) = 0,\ x \in \Omega_2.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

თეორემა 41 . რობენის შიგა ერთგვაროვან (2.14)-(2.16), (2.19) საკონტაქტო ამოცანას ($f^{(1)} = 0,\ F^{(j)} = 0,\ j = 1,2$) გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

დამტკიცება. ლემა 38-ის ძალით ამ ამოცანაშიც მარტივად დავასკვნით, რომ ამონახსნს ექნება შემდეგი სტრუქტურა: $U^{(j)} = (\widetilde{U}^{(j)}, 0)^\top$, $j = 1,2$, სადაც $\widetilde{U}^{(j)} = (u^{(j)}, \omega^{(j)})^\top$, $j = 1,2$, არის შემდეგი ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი:

$$\widetilde{L}_j(\partial)\widetilde{U}^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1,2, \tag{2.41}$$

$$\big\{\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \quad x \in S_1, \tag{2.42}$$

$$\big\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \quad x \in S_1, \tag{2.43}$$

$$\big\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^+ + \widetilde{K}\big\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^+ = 0, \quad x \in S_2, \tag{2.44}$$

სადაც $\widetilde{K} = [\widetilde{K}_{kj}]_{6\times 6}$ არის (2.20) ტოლობაში მონაწილე დადებითად განსაზღვრული მატრიცა.

თუ ვისარგებლებთ გრინის (2.37)-(2.38) ტოლობებით და გავითვალისწინებთ (2.42)-(2.43) სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებს, მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\int\limits_{\Omega_1} E^{(1)}(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)})\, dx + \int\limits_{\Omega_2} E^{(2)}(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)})\, dx + \widetilde{K} \int\limits_{S_2} |\{\widetilde{U}^{(2)}\}^+|^2\, dS = 0.$$

რადგან $E^{(j)}$, $j = 1,2$, არაუარყოფითია და $\widetilde{K}$ მატრიცა დადებითად განსაზღვრულია, ამიტომ გვექნება:

$$E^{(1)}\big(\widetilde{U}^{(1)}, \widetilde{U}^{(1)}\big) = 0 \qquad \Omega_1 - \text{ში}, \qquad E^{(2)}\big(\widetilde{U}^{(2)}, \widetilde{U}^{(2)}\big) = 0, \qquad \Omega_2 - \text{ში}, \tag{2.45}$$

$$\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\}^+ = 0, \qquad x \in S_2. \tag{2.46}$$

(2.45) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\widetilde{U}^{(1)}$ და $\widetilde{U}^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციები წარმოადგენს (2.40) ტიპის ხისტი გადაადგილების ვექტორებს. ამიტომ (2.46) პირობიდან, ცხადია, რომ $\widetilde{U}^{(2)}(x)=0,\ x\in\Omega_2$, ხოლო (2.42) საკონტაქტო პირობიდან მარტივად დავასკვნით, რომ $\widetilde{U}^{(1)}(x)=0,\ x\in\Omega_1$.

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ახლა გამოვიკვლიოთ ნეიმანის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის საკითხი. ლემა 39-ის ძალით, ცხადია, რომ ამ ამოცანის ამონახსნს აქვს შემდეგი სტრუქტურა: $U^{(j)}=(\widetilde{U}^{(j)},C)^\top$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\widetilde{U}^{(j)}=(u^{(j)},\omega^{(j)})^\top$, $j=1,2$, არის შემდეგი კონკრეტული არაერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნი:

$$\widetilde{L}_j(\partial)\widetilde{U}^{(j)}(x)=0,\qquad x\in\Omega_j,\qquad j=1,2,\tag{2.47}$$

$$\big\{\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+-\big\{\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^-=0,\qquad x\in S_1,\tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}&\big\{T_1(\partial,n)\widetilde{U}^{(1)}(x)\big\}^+-\big\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^-=\\&\qquad=C\Big((\eta^{(1)}-\eta^{(2)})\,n^\top,\,(\zeta^{(1)}-\zeta^{(2)})\,n^\top\Big)^\top,\qquad x\in S_1,\end{aligned}\tag{2.49}$$

$$\big\{T_2(\partial,n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\big\}^+=C\left(\eta^{(2)}\,n^\top,\,\zeta^{(2)}\,n^\top\right)^\top,\qquad x\in S_2.\tag{2.50}$$

(2.47)-(2.50) ამოცანის ამოხსნადობისთვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ შესრულდეს შემდეგი პირობა ([34]):

$$\int\limits_{S_1}\widetilde{F}^{(1)}(x)\,\chi(x)\,dS+\int\limits_{S_2}\widetilde{F}^{(2)}(x)\,\chi(x)\,dS=0,\tag{2.51}$$

სადაც χ ნებისმიერი ხისტი გადაადგილების ვექტორია, ხოლო

$$\widetilde{F}^{(1)}(x)=C\Big((\eta_1-\eta_2)\,n^\top,\,(\zeta_1-\zeta_2)\,n^\top\Big)^\top,\qquad \widetilde{F}^{(2)}(x)=C\left(\eta_2\,n^\top,\,\zeta_2\,n^\top\right)^\top.$$

მარტივი შესამოწმებელია (გაუსის ფორმულების გამოყენებით), რომ (2.51) პირობა სრულდება $\widetilde{F}^{(1)}$ და $\widetilde{F}^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციებისა და ნებისმიერი χ ხისტი გადაადგილების ვექტორებისათვის. ამიტომ, (2.47)-(2.50) ამოცანა ამოხსნადია. თუ ამ ამოცანის რაიმე კერძო ამონახსნია $\widetilde{U}_0^{(1)}$ და $\widetilde{U}_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციები, მაშინ მისი ზოგადი ამონახსენი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\widetilde{U}^{(1)}(x)=\widetilde{U}_0^{(1)}(x)+\chi(x),\qquad x\in\Omega_1,$$

$$\widetilde{U}^{(2)}(x)=\widetilde{U}_0^{(2)}(x)+\chi(x),\qquad x\in\Omega_2.$$

ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი დებულება.

თეორემა 42 . ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.14)-(2.16), (2.18) ამოცანის ($f^{(j)} = 0,\ F^{(j)} = 0,\ j = 1, 2$) ზოგადი ამონახსენია

$$U^{(1)}(x) = (\chi,\, 0)^\top + C\,\big(\widetilde{U}_0^{(1)}(x), 1\big)^\top, \qquad x \in \Omega_1,$$

$$U^{(2)}(x) = (\chi,\, 0)^\top + C\,\big(\widetilde{U}_0^{(2)}(x), 1\big)^\top, \qquad x \in \Omega_2,$$

სადაც χ ხისტი გადაადგილების ვექტორია, C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\widetilde{U}_0^{(1)}$ და $\widetilde{U}_0^{(2)}$ არის (2.47)-(2.50) სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის რაიმე ფიქსირებული კერძო ამონახსსენი.

2.2 ტრანსმისიის ამოცანების გამოკვლევა

2.2.1 ტრანსმისიის ძირითადი ამოცანის გამოკვლევა

ჯერ განვიხილოთ ძირითადი საკონტაქტო $(\mathrm{TP}-\mathrm{B})$ ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი.

ამ ამოცანის ამონახსენი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალებით (იხ. (1.129) ფორმულა):

$$U^{(1)}(x) := V_S^{(1)}(h)(x) = \int\limits_S \Gamma_1(x-y)\, h(y)\, dS_y, \quad x \in D_1, \tag{2.52}$$

$$U^{(2)}(x) := V_S^{(2)}(g)(x) = \int\limits_S \Gamma_2(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in D_2, \tag{2.53}$$

სადაც $h, g \in [C^{0,\beta}(S)]^7$ საძიებელი სიმკვრივეებია. $V_S^{(1)}$ და $V_S^{(2)}$ ფუნქციები ავტომატურად აკმაყოფილებს (2.1) განტოლებას, ხოლო (2.2)-(2.3) საკონტაქტო პირობებიდან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\mathcal{H}_S^{(1)}\, h(x) - \mathcal{H}_S^{(2)}\, g(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{2.54}$$

$$\big[-2^{-1} h(x) + \mathcal{K}_S^{(1)}\, h(x)\big] - \big[2^{-1} g(x) + \mathcal{K}_S^{(2)}\, g(x)\big] = F(x), \qquad x \in S, \tag{2.55}$$

სადაც $\mathcal{H}_S^{(1)}$, $\mathcal{H}_S^{(2)}$, $\mathcal{K}_S^{(1)}$ და $\mathcal{K}_S^{(2)}$ ინტეგრალური ოპერატორებია, რომლებიც განსაზღვრულია (1.155)-(1.156) ტოლობებით.

შევნიშნოთ, რომ არაერთგვაროვანი (2.54)-(2.55) სისტემის მარცხენა მხარით წარმოშობილ მატრიცულ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbb{K} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_S^{(1)} & -\mathcal{H}_S^{(2)} \\ -2^{-1}I_7 + \mathcal{K}_S^{(1)} & -\big(2^{-1}I_7 + \mathcal{K}_S^{(2)}\big) \end{bmatrix}_{14\times 14}. \tag{2.56}$$

$\mathbb{K}$ ოპერატორი არის ფრედჰოლმური ძლიერად ელიფსური ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, რომელსაც აქვს ასახვის შემდეგი თვისება:

$$\mathbb{K} : [C^{k,\sigma}(S)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S)]^7 \longrightarrow [C^{k+1,\sigma}(S)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S)]^7, \quad S \in C^{k+2,\kappa}.$$

ეს თვისებები მტკიცდება ზუსტად იმავე მსჯელობებით, რაც გამოყენებულია [36] შრომაში ანალოგიური საკითხების შესწავლის დროს ფსევდორხევის განტოლებებისთვის.

ამ ინტეგრალური ოპერატორის შებრუნებადობის შესასწავლად უნდა გამოვიკვლიოთ მისი გული.

ამ მიზნით განვიხილოთ (2.54)-(2.55) ინტეგრალური განტოლებების შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა:

$$\mathcal{H}_S^{(1)} h(x) - \mathcal{H}_S^{(2)} g(x) = 0, \qquad x \in S, \tag{2.57}$$

$$\big[-2^{-1}h(x) + \mathcal{K}_S^{(1)} h(x)\big] - \big[2^{-1}g(x) + \mathcal{K}_S^{(2)} g(x)\big] = 0, \qquad x \in S,$$

და ვაჩვენოთ, რომ მას მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი გააჩნია.

ვთქვათ, $h_0, g_0 \in [C^{0,\beta}(S)]^7$ ამ სისტემის რაიმე კერძო ამონახსნია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$U_0^{(1)}(x) := V_S^{(1)}(h_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \; S, \tag{2.58}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_S^{(2)}(g_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \; S. \tag{2.59}$$

ცხადია, $U_0^{(1)}$ და $U_0^{(2)}$ რეგულარული ვექტორ-ფუნქციებია D_1 და D_2 არეებში და ეკუთვნიან $Z(D_2)$ კლასს. (2.57) სისტემიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S,$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial,n)U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}_2(\partial,n)U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S.$$

ამრიგად, (2.58)-(2.59) ტოლობებით მოცემული $U_0^{(1)}$ და $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქციები ძირითადი ერთგვაროვანი საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნია. ამიტომ,

ერთადერთობის თეორემის თანახმად,

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in D_1, \qquad\qquad U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in D_2.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის გამო, გვექნება (იხ. თეორემა 18):

$$\mathcal{H}_S^{(1)}\, h_0(x) = 0, \qquad\quad \mathcal{H}_S^{(2)}\, g_0(x) = 0, \qquad x \in S.$$

$\mathcal{H}_S^{(1)}$ ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით კი მივიღებთ (იხ. ქვეპარაგრაფი 1.7.1):

$$h_0(x) = 0, \qquad g_0(x) = 0, \qquad x \in S.$$

მაშასადამე, (2.57) განტოლებათა სისტემის ამონახსნი ტრივიალურია.

რადგან $\mathbb{K}$ ოპერატორი ფრედჰოლმურია, მისი ინდექსი ნულის ტოლია და შესაბამისი ნულ-სივრცე ტრივიალურია, ამიტომ იგი შებრუნებადი ოპერატორია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ არაერთგვაროვანი (2.54)-(2.55) სისტემა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, მივიღეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 43 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$, $f \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$, $F \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ ძირითად საკონტაქტო (2.1)-(2.3) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.52)-(2.53) პოტენციალების სახით, სადაც h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ინტეგრალურ განტოლებათა ცალსახად ამოხსნადი (2.54)-(2.55) სისტემიდან.

შენიშვნა 44 . ვთქვათ, $S \in C^{k+2,\kappa}$, $f \in [C^{k+1,\sigma}(S)]^7$, $F \in [C^{k,\sigma}(S)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$, $k \geqslant 0$. მაშინ (2.1)-(2.3) ამოცანის $U^{(j)}$, $j = 1, 2$, ამონახსენი აკმაყოფილებს შემდეგ ჩართვებს:

$$U^{(1)} \in [C^{k+1,\sigma}(\overline{\Omega}_1)]^7, \qquad U^{(2)} \in [C^{k+1,\sigma}(\overline{\Omega}_2)]^7.$$

2.2.2 დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის გამოკვლევა სასრული კომპოზიტური არის შემთხვევაში

ახლა განვიხილოთ დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნების არსებობის საკითხი.

დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.14)-(2.17) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h)(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{2.60}$$

$$U^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g)(x) + V_{S_2}^{(2)}(\varphi)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{2.61}$$

სადაც $V_{S_1}^{(1)}$ და $V_{S_1}^{(2)}$ მოცემულია (2.52)-(2.53) ტოლობებით სადაც S შეცვლილია S_1-ით, ხოლო

$$V_{S_2}^{(2)}(\varphi)(x) = \int\limits_{S_2} \Gamma_2(x-y)\,\varphi(y)\,dS_y;$$

აქ $h, g \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$ და $\varphi \in [C^{0,\sigma}(S_2)]^7$ საძიებელი სიმკვრივეებია. $V_{S_1}^{(1)}$, $V_{S_1}^{(2)}$ და $V_{S_2}^{(2)}$ ფუნქციები ავტომატურად აკმაყოფილებენ (2.14) განტოლებებს, ხოლო (2.15)-(2.17) საკონტაქტო-სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\,h(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\,g(x) - r_{S_1}\,V_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}&[-2^{-1}h(x) + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)}\,h(x)] - [2^{-1}g(x) + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}\,g(x)]\\ &\qquad\qquad - r_{S_1}\,\mathcal{P}_2(\partial,n)V_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x) = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1,\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$r_{S_2}\,V_{S_1}^{(2)}\,g(x) + \mathcal{H}_{S_2}^{(2)}\,\varphi(x) = f^{(2)}(x), \qquad x \in S_2, \tag{2.64}$$

სადაც $\mathcal{H}_{S_1}^{(1)}$, $\mathcal{H}_{S_1}^{(2)}$, $\mathcal{H}_{S_2}^{(2)}$, $\mathcal{K}_{S_1}^{(1)}$ და $\mathcal{K}_{S_1}^{(2)}$ ინტეგრალური ოპერატორებია (იხ. (1.155)-(1.156) ტოლობები), ხოლო r_{S_j}, $j = 1,2$, არის S_j, $j = 1,2$, საზღვარზე შეზღუდვის ოპერატორია. (2.62)-(2.64) სისტემის მარცხენა მხარის შესაბამისი მატრიცული ოპერატორია

$$\mathbb{H} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{S_1}^{(1)} & -\mathcal{H}_{S_1}^{(2)} & -r_{S_1}\,V_{S_2}^{(2)} \\ -2^{-1}I_7 + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)} & -\left(2^{-1}I_7 + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)}\right) & -r_{S_1}\,\mathcal{P}_2(\partial,n)V_{S_2}^{(2)} \\ 0 & r_{S_2}\,V_{S_1}^{(2)} & \mathcal{H}_{S_2}^{(2)} \end{bmatrix}_{21\times 21}.$$

მას აქვს ასახვის შემდეგი თვისება:

$$\mathbb{H}\,:[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_2)]^7\longrightarrow$$

$$[C^{k+1,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k+1,\sigma}(S_2)]^7,\qquad S_j\in C^{k+2,\kappa},\quad j=1,2.$$

$\mathbb{H}$ ოპერატორის მთავარი ნაწილია

$$\widetilde{\mathbb{H}}:=\begin{bmatrix}\mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & 0\\ -2^{-1}I_7+\mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big(2^{-1}I_7+\mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big) & 0\\ 0 & 0 & \mathcal{H}^{(2)}_{S_2}\end{bmatrix}_{21\times 21},$$

რომელსაც ასახვის იგივე თვისება გააჩნია, რაც $\mathbb{H}$ ოპერატორს:

$$\widetilde{\mathbb{H}}\,:\,[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_2)]^7\longrightarrow$$

$$[C^{k+1,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k+1,\sigma}(S_2)]^7.$$

$\widetilde{\mathbb{H}}$ ოპერატორი შებრუნებადია, რადგან მისი პირველი დიაგონალური ბლოკი - 14×14 განზომილების მატრიცული ოპერატორი - ემთხვევა შებრუნებად $\mathbb{K}$ ოპერატორს (იხ. (2.56) ტოლობა), ხოლო $\mathcal{H}^{(2)}_{S_2}$ შებრუნებადი ოპერატორია. მარტივი საჩვენებელია, რომ $\mathbb{H}$ ოპერატორი არის $\widetilde{\mathbb{H}}$ ოპერატორის კომპაქტური შეშფოთება, ანუ

$$\mathbb{H}-\widetilde{\mathbb{H}}\,:\,[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_2)]^7\longrightarrow$$

$$[C^{k+1,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k,\sigma}(S_1)]^7\times[C^{k+1,\sigma}(S_2)]^7$$

კომპაქტური ოპერატორია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{H}$ არის ნულოვან-ინდექსიანი ფრედჰოლმური ოპერატორი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{H}$ ოპერატორის ნულ-სივრცე ტრივიალურია, ე.ი. (2.62)-(2.64) სისტემის შესაბამის შემდეგ ერთგვაროვან სისტემას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}h(x)-\mathcal{H}^{(2)}_{S_1}g(x)-r_{S_1}V^{(2)}_{S_2}\varphi(x)=0, && x\in S_1,\\
&[-2^{-1}h(x)+\mathcal{K}^{(1)}_{S_1}h(x)]-[2^{-1}g(x)+\mathcal{K}^{(2)}_{S_1}g(x)] && \\
&\qquad\qquad -r_{S_1}\mathcal{P}_2(\partial,n)V^{(2)}_{S_2}\varphi(x)=0, && x\in S_1,\\
&r_{S_2}V^{(2)}_{S_1}g(x)+\mathcal{H}^{(2)}_{S_2}\varphi(x)=0, && x\in S_2.
\end{aligned}\tag{2.65}$$

ვთქვათ, $h_0, g_0 \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$ და $\varphi_0 \in [C^{0,\sigma}(S_2)]^7$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსნებია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S_1, \tag{2.66}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g_0)(x) + V_{S_2}^{(2)}(\varphi_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (S_1 \cup S_2). \tag{2.67}$$

ერთგვაროვან განტოლებათა (2.65) სისტემიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial,n)U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}_2(\partial,n)U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S_2.$$

მაშასადამე, (2.66)-(2.67) ვექტორ-ფუნქციები დირიხლეს ერთგვაროვანი საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნია; ამიტომ ერთადერთობის თეორემა 40-ის თანახმად,

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1, \qquad\qquad U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_2. \tag{2.68}$$

თუ ვისარგებლებთ მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისებით, მივიღებთ:

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}_{S_1}^+ = \mathcal{H}_{S_1}^{(1)}\, h_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.69}$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_1}^- = \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_1}^+ = \mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\, g_0(x) \,+\, r_{S_1} V_{S_2}^{(2)}\, \varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.70}$$

$$\big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_2}^+ = \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}_{S_2}^- = r_{S_2} V_{S_1}^{(2)}\, g_0(x) + \mathcal{H}_{S_2}^{(2)}\, \varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_2. \tag{2.71}$$

$\mathcal{H}^{(1)}$ ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით (2.69) ტოლობიდან დავასკვნით:

$$h_0(x) = 0, \qquad x \in S.$$

(2.70) ტოლობიდან, ცხადია, რომ $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი Ω_1 არეში; ამიტომ ერთადერთობის თეორემის თანახმად

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega_1. \tag{2.72}$$

ანალოგიურად, (2.71) ტოლობიდან, ცხადია, რომ $U_0^{(2)}$ ვექტორ-ფუნქცია არის დირიხლეს გარე ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსენი $\Omega_3 := \mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2\right)$ არეში, რომელიც ეკუთვნის $Z(\Omega_3)$ კლასს. ამიტომ ერთადერთობის თეორემის ძალით

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad\qquad x \in \Omega_3. \tag{2.73}$$

(2.68), (2.72) და (2.73) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$U_0^{(2)}(x) = 0, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

ვისარგებლოთ მარტივი ფენის პოტენციალზე $\mathcal{P}_j$, $j = 1, 2$, ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის ფორმულებით:

$$g_0(x) = \left\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\right\}^- - \left\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S_1,$$

$$\varphi_0(x) = \left\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\right\}^- - \left\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\right\}^+ = 0, \qquad x \in S_2.$$

მაშასადამე, $\mathbb{H}$ ოპერატორის ნულ-სივრცე ტრივიალურია. საიდანაც დავასკვნით, რომ (2.62)-(2.64) არაერთგვაროვანი განტოლებათა სისტემა ამოხსნადია ნებისმიერი მარჯვენა მხარისათვის.

ამრიგად, დავამტკიცეთ არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 45 . ვთქვათ, $S_j \in C^{2,\kappa}$, $j = 1, 2$, $f^{(1)} \in [C^{1,\sigma}(S_1)]^7$, $f^{(2)} \in [C^{1,\sigma}(S_2)]^7$, $F^{(1)} \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.14)-(2.17) ამოცანას სასრული კომპოზიტური არის შემთხვევასი გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.60)-(2.61) პოტენციალების სახით, სადაც h, g და φ სიმკვრივეები ცალსახად განისაზღვრება (2.62)-(2.64) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

2.2.3 რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის გამოკვლევა უსასრულო კომპოზიტური არის შემთხვევაში

განვიხილოთ $C^{2,\kappa}$ კლასის ორი მარტივად ბმული S_0 და S_1 ზედაპირი და, ვთქვათ, S_0 მოთავსებულია S_1 ზედაპირის შიგნით. მაშინ მთელი $\mathbb{R}^3$ სივრცე დაიყო სამ რეათანამკვეთ D_0, D_1 და D_2 არედ: D_0 არის საზღვარია S_0 ზედაპირი, D_1 არის საზღვარია $S_0 \cup S_1$ ზედაპირი და უსასრულო D_2 არის საზღვარია S_1 ზედაპირი; $\overline{D_0} \cup \overline{D_1} \cup \overline{D_2} = \mathbb{R}^3$. ვიგულისხმოთ, რომ D_1 და D_2 არეები შევსებულია

განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი ჰემიტროპული მასალით, ხოლო D_0 არე კი სიცარიელეა. ასეთი უსასრულო კომპოზიტური არისათვის განვიხილოთ რობენის ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა.

ამოცანა $(\mathrm{TP}-\mathrm{R})$: რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა. ვიპოვოთ D_j, $j=1,2$ არეებში

$$L_j(\partial)U^{(j)}(x)=0, \qquad x\in D_j, \quad j=1,2, \tag{2.74}$$

განტოლებების ისეთი რეგულარული $U^{(1)}=(u^{(1)},\omega^{(1)},\vartheta^{(1)})^\top\in[C^2(D_1)]^7\cap[C^1(\overline{D_1})]^7$ და $U^{(2)}=(u^{(2)},\omega^{(2)},\vartheta^{(2)})^\top\in[C^2(D_2)]^7\cap[C^1(\overline{D_2})]^7\cap Z(D_2)$ ამონახსნები, რომლებიც S_1 ზედაპირზე აკმაყოფილებენ შემდეგ საკონტაქტო პირობებს:

$$\big\{U^{(1)}(x)\big\}^+-\big\{U^{(2)}(x)\big\}^-=f^{(1)}(x), \qquad x\in S_1, \tag{2.75}$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial,n)U^{(1)}(x)\big\}^+-\big\{\mathcal{P}_2(\partial,n)U^{(2)}(x)\big\}^-=F^{(1)}(x), \quad x\in S_1, \tag{2.76}$$

ხოლო S_0 საზღვარზე აკმაყოფილებს რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial,n)U^{(1)}(x)\big\}^- - K\big\{U^{(1)}(x)\big\}^-=F^{(0)}(x), \quad x\in S_0, \tag{2.77}$$

სადაც

$$f^{(1)}=(f_1^{(1)},\cdots,f_7^{(1)})^\top\in[C^{1,\sigma}(S_1)]^7, \;\; F^{(1)}=(F_1^{(1)},\cdots,F_7^{(1)})^\top\in[C^{0,\sigma}(S_1)]^7,$$

$$F^{(0)}=(F_1^{(0)},\cdots,F_7^{(0)})^\top\in[C^{0,\sigma}(S_0)]^7, \quad 0<\sigma<\kappa\leqslant 1,$$

მოცემული ფუნქციებია, $K=[K_{kj}]_{7\times7}$ დადებითად განსაზღვრული მუდმივი მატრიცაა

$$K=\begin{bmatrix} \Big[\widetilde{K}_{kj}\Big]_{6\times6} & [0]_{6\times1} \\ [0]_{1\times6} & \varkappa_2 \end{bmatrix}_{7\times7};$$

აქ $\varkappa_2>0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K}=[\widetilde{K}_{kj}]_{6\times6}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა.

ამ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ მარტივი ფენის პოტენციალებით:

$$U^{(1)}(x):=V_{S_0}^{(1)}(h)(x)+V_{S_1}^{(1)}(g)(x), \qquad x\in D_1, \tag{2.78}$$

$$U^{(2)}(x):=V_{S_1}^{(2)}(\varphi)(x), \qquad x\in D_2, \tag{2.79}$$

სადაც $V_{S_0}^{(1)}$, $V_{S_1}^{(1)}$ და $V_{S_1}^{(2)}$ მარტივი ფენის პოტენციალებია:

$$V_S(\psi)(x)=\int\limits_S\Gamma(x-y)\,\psi(y)\,dS_y, \quad S\in\{S_0,S_1\}.$$

აქ $g, \varphi \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$ და $h \in [C^{0,\sigma}(S_0)]^7$ საძიებელი სიმკვრივეებია. $V^{(1)}_{S_0}$, $V^{(1)}_{S_1}$ და $V^{(2)}_{S_1}$ რეგულარული ფუნქციებია და ავტომატურად აკმაყოფილებენ (2.74) განტოლებებს, ხოლო (2.75)-(2.77) სასაზღვრო-საკონტაქტო პირობებიდან მივიღებთ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1} g(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1} \varphi(x) + r_{S_1} V^{(1)}_{S_0} h(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.80}$$

$$[-2^{-1} g(x) + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} g(x)] - [2^{-1}\varphi(x) + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1} \varphi(x)] +$$
$$+ r_{S_1} \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_0} h(x) = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{2.81}$$

$$r_{S_0} \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_1} g(x) - K r_{S_0} V^{(1)}_{S_1} g(x) + [2^{-1} h(x) + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0} h(x)] -$$
$$- K \mathcal{H}^{(1)}_{S_0} h(x) + = F^{(0)}(x), \qquad x \in S_0, \tag{2.82}$$

სადაც $\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}$, $\mathcal{H}^{(2)}_{S_1}$, $\mathcal{H}^{(1)}_{S_0}$, $\mathcal{K}^{(1)}_{S_1}$ და $\mathcal{K}^{(2)}_{S_1}$ ინტეგრალური ოპერატორება, რომლებიც განსაზღვრულია (1.155)-(1.156) ტოლობებით, ხოლო r_{S_j} არის S_j ზედაპირზე შეზღუდვის ოპერატორი. ინტეგრალურ განტოლებათა ამ სისტემის მარცხენა მხარით წარმოშობილ მატრიცულ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbb{M} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & r_{S_1} V^{(1)}_{S_0} \\ -2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big[2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big] & r_{S_1} \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_0} \\ r_{S_0}\big[\mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_1} - K V^{(2)}_{S_1}\big] & 0 & 2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0} - K \mathcal{H}^{(1)}_{S_0} \end{bmatrix}_{21\times 21}.$$

ამ ოპერატორს აქვს ასახვის შემდეგი თვისება:

$$\mathbb{M} : [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_0)]^7 \longrightarrow$$
$$[C^{k+1,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_0)]^7, \quad S_j \in C^{k+2,\kappa}, \quad j = 1, 2. \tag{2.83}$$

$\mathbb{M}$ ოპერატორის მთავარ ნაწილს აქვს შემდეგი სახე:

$$\widetilde{\mathbb{M}} := \begin{bmatrix} \mathcal{H}^{(1)}_{S_1} & -\mathcal{H}^{(2)}_{S_1} & 0 \\ -2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} & -\big(2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\big) & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} I_7 + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0} \end{bmatrix}_{21\times 21},$$

რადან $r_{S_1} V^{(1)}_{S_0}$, $r_{S_1} \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_0}$, $r_{S_0}\big[\mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_1} - K V^{(2)}_{S_1}\big]$ და $K \mathcal{H}^{(1)}_{S_0}$ წარმოშობს კომპაქტურ ოპერატორებს (2.83) თანაფარდობაში მონაწილე სივრცეებში. $\widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორს ასახვის იგივე თვისება გააჩნია, რაც $\mathbb{M}$ ოპერატორს:

$$\widetilde{\mathbb{M}} : [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_0)]^7 \longrightarrow$$

$$[C^{k+1,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_1)]^7 \times [C^{k,\sigma}(S_0)]^7.$$

$\widetilde{\mathbb{M}}$ ოპერატორი შებრუნებადია, რადგან მისი პირველი დიაგონალური ბლოკი - 14×14 განზომილების მატრიცული ოპერატორი - ემთხვევა შებრუნებად $\mathbb{K}$ ოპერატორს (იხ. (2.56) ტოლობა), ხოლო $[2^{-1}I_7 + \mathcal{K}_{S_0}^{(1)}]$ შებრუნებადი ოპერატორია (იხ. ქვეპარაგრაფი 1.7.2). ამიტომ $\mathbb{M}$ არის ფრედჰოლმური ოპერატორი ნულოვანი ინდექსით, რადგან $\mathbb{M} - \widetilde{\mathbb{M}}$ კომპაქტური ოპერატორია. შევისწავლოთ $\mathbb{M}$ ოპერატორის გული. ვაჩვენოთ, რომ მისი ნულ-სივრცე ტრივიალურია. ამ მიზნით განვიხილოთ (2.80)-(2.82) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა:

$$\mathcal{H}_{S_1}^{(1)} g(x) - \mathcal{H}_{S_1}^{(2)} \varphi(x) + r_{S_1} V_{S_0}^{(1)} h(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.84}$$

$$[-2^{-1} g(x) + \mathcal{K}_{S_1}^{(1)} g(x)] - [2^{-1}\varphi(x) + \mathcal{K}_{S_1}^{(2)} \varphi(x)] +$$
$$+ r_{S_1} \mathcal{P}_1(\partial, n) V_{S_0}^{(1)} h(x) = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.85}$$

$$r_{S_0} \mathcal{P}_1(\partial, n) V_{S_1}^{(1)} g(x) - r_{S_0} K\, V_{S_1}^{(1)} g(x) + [2^{-1} h(x) + \mathcal{K}_{S_0}^{(1)} h(x)] -$$
$$- K\, \mathcal{H}_{S_0}^{(1)} h(x) = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.86}$$

ვთქვათ, სამეული $g_0, \varphi_0 \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$ და $h_0 \in [C^{0,\sigma}(S_0)]^7$ ამ სისტემის რაიმე ამონახსენია. ავაგოთ ვექტორ-ფუნქციები:

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) + V_{S_1}^{(1)}(g_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (S_0 \cup S_1), \tag{2.87}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S_1. \tag{2.88}$$

ერთგვაროვან განტოლებათა (2.84)-(2.86) სისტემიდან და მარტივი ფენის პოტენციალის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.89}$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial, n) U_0^{(1)}(x)\big\}^+ - \big\{\mathcal{P}_2(\partial, n) U_0^{(2)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{2.90}$$

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial, n) U_0^{(1)}(x)\big\}^- - K \big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^- = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.91}$$

ამ სისტემიდან ცხადია, რომ (2.87)-(2.88) ვექტორ-ფუნქციები რობენის ერთგვაროვანი სასზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნია; მარტივად შეგვიძლია

ვაჩვენოთ, რომ ამ ერთგვაროვან ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი. ეს მტკიცდება ისევე, როგორც თეორემა 41. ამიტომ

$$U_0^{(1)}(x) := V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) + V_{S_1}^{(1)}(g_0)(x) = 0, \qquad x \in D_1, \tag{2.92}$$

$$U_0^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(\varphi_0)(x) = 0, \qquad x \in D_2. \tag{2.93}$$

(2.93) ტოლობიდან ცხადია, რომ $\mathcal{H}_{S_1}^{(2)}\varphi_0(x) = 0$, $x \in S_1$. ამიტომ $\mathcal{H}_{S_1}^{(2)}$ ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით

$$\varphi_0(x) = 0, \qquad x \in S_1; \tag{2.94}$$

თავის მხრივ, (2.92) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^- = \big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S_1.$$

რადგან $U_0^{(1)}$ ფუნქცია ეკუთვნის $Z(D_2)$ კლასს, ამიტომ დირიხლეს გარე ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თანახმად

$$U_0^{(1)}(x) = 0, \qquad x \in D_2. \tag{2.95}$$

მარტივი ფენის პოტენციალზე $\mathcal{P}_1$ ოპერაციის შედეგად მიღებული ფუნქციის წყვეტის თვისების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\big\{\mathcal{P}_1(\partial, n)U_0^{(1)}(x)\big\}^- - \big\{\mathcal{P}_1(\partial, n)U_0^{(1)}(x)\big\}^+ = g_0(x) = 0, \qquad x \in S_1. \tag{2.96}$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ

$$U_0^{(1)}(x) = V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) = 0, \qquad x \in D_1.$$

მარტივი ფენის პოტენციალის უწყვეტობის თვისების თანახმად

$$\big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^- = \big\{U_0^{(1)}(x)\big\}^+ = 0, \qquad x \in S_0.$$

ამიტომ, კვლავ დირიხლეს ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის ძალით,

$$U_0^{(1)}(x) = V_{S_0}^{(1)}(h_0)(x) = 0, \qquad x \in D_0.$$

აქედან კი მარტივად დავასკვნით, რომ

$$h_0(x) = 0, \qquad x \in S_0. \tag{2.97}$$

(2.94), (2.96) და (2.97) ტოლობებიდან ცხადია, რომ $\mathbb{M}$ ოპერატორის გული ტრივიალურია და, მაშასადამე, (2.83) ოპერატორი შებრუნებადია. აქედან კი გამომდინარეობს არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 46 . ვთქვათ, $S_j \in C^{2,\kappa}$, $j=0,1$, $f^{(1)} \in [C^{1,\sigma}(S_1)]^7$, $F^{(1)} \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$, $F^{(0)} \in [C^{0,\sigma}(S_0)]^7$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო (2.74)-(2.77) ამოცანას უსასრულო კომპოზიტური არის შემთხვევაში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის (2.78)-(2.79) პოტენციალების სახით, სადაც h, g და φ სიმკვრივეები ცალსახად განისაზღვრება არაერთგვაროვანი (2.80)-(2.82) ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი **სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას. ნაშრომი განეკუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც, ამავე დროს, გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქტურის მქონე დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისაგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევასა და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობისა, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შეწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადეკვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინა პირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ჰემიტროპული სხეულების შემთხვევაში, რომელიც კოსერას მოდელებში უზოგადეს მოდელს წარმოადგენს. შესწავლილია შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

- ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შემთხვევაში დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას;
- ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ

განტოლებათა სისტემისათვის ფურიეს მეთოდით აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა და მისი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გამოკვლეულია პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში. შესწავლილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ასახვის თვისებები, დადგენილია მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და აგებულია შესაბამისი ნულ-სივრცეების ბაზისები;

• გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით და დამტკიცებულია მათი უპირობო და ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;

• გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით. დამტკიცებულია, რომ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა უპირობოდ და ცალსახადაა ამოხსნადი, ხოლო ნეიმანის შიგა სასზღვრო ამოცანისათვის ამოწერილია ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები;

• გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისაგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე; ამასთან, ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო მონაცემების შემთხვევაში;

• გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ურთიერთ მოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არისათვის. დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპოზიტური სხეულის გარე საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;

• გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისაგან და მისი მოსაზღ-

ვრე უსასრულო კომპონენტისაგან. რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

References

[1] Aero E.L., Kuvshinski E.V., Continuum theory of asymmetric elasticity. Micro-rotation effect, Solid State Physics, 5, No. 9 (1963), 2591-2598 (in Russian), (English translation: Soviet Physics Solid State, 5 (1964), 1892-1899).

[2] Aero E.L., Kuvshinski E.V., Continuum theory of asymmetric elasticity. Equilibrium of an isotropic body, Solid State Physics, 6, No. 9 (1964), 2689-2699 (in Russian), (English translation: Soviet Physics Solid State, 6 (1965), 2141-2148).

[3] Buchukuri T., Chkadua O., Duduchava R., Natroshvili D., Interface crack problems for metallic-piezoelectric composite structures, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 55 (2012), 1-150.

[4] Cheng Z. Q., He L.H., Micropolar elastic fields due to a spherical inclusion. International journal of Engineering Science 33 (3), (1995), 389-397.

[5] Cosserat E., Cosserat F., Th orie des corps d formables. Herman, Paris, 1909.

[6] Dautray R., Lions J.L., Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 4, Integral Equations and Numerical Methods, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990.

[7] Dyszlewicz J., Micropolar Theory of Elasticity, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 15, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[8] Eringen A.C., Theory of thermomicrostrech elastic solids, Int. J. Eng. Sci., 28 (1990), 1291-1301.

[9] Eringen A.C., Balance law of mictromorphic continua revised, Int. J. Eng. Sci., 30 (1992), 805-810.

[10] Eringen A.C., Microcontinuum Field Theories.Foundations and Solids. Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] Gachechiladze A., Gachechiladze R., Natroshvili D., Unilateral contact problems with friction for hemitropic elastic solids, Georgian Mathematical Journal, 16, No. 4 (2009), 629-650.

[12] Gachechiladze R., Gwinner I., Natroshvili D., A boundary variational inequality approach to unilateral contact with hemitropic materials, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 39 (2006), 69-103.

[13] Gelfand, I.M. and Shilov, G.E., Generalized Functions and Operations on them, (in Russian), 2-nd Ed., Fismatgiz, Moscow, 1959.

[14] Gunter, N.M.: Potential Theory and its Application to Basic Problems of Mathematical Physics. Gestekhizdat, Moscow 1953.

[15] Haijun Z., Zhong-can O., Bending and twisting elasticity: A revised Marko-Sigga model on DNA chirality, Physical Review E 58(4), 1998, 4816.

[16] Harris P.J.F., Carbon Nanotubes and Related Structures. Cambridge University Press, 2002.

[17] Hsiao G.C., Wendland W.L., Boundary Integral Equations, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[18] Iesan D., On miromorphic elasticity, Int. J. Eng. Sci., 40 (2002), 549-567.

[19] Iesan D., Pompey A., On the equlibrium theory of microstrech elastic bodies, Int. J. Eng. Sci., 33 (1995), 399-410.

[20] Ivanidze D., Boundary value problems of statics of the thermoelasticity theory of hemitropic solids, Georg. Inter. J. Sci. Tech., 4, no. 3-4. (2012), 307-326.

[21] Ivanidze D., Ivanidze M., Boundary value problems for the adjoint system of differential equations of the thermoelasticity theory of hemitropic solids, Bulletin of TICMI, Vol.16, No.1 (2012), 1-14.

[22] Jashman W.E., Gauthier R.D., Dynamics measurements of micropolar elastic constants. In: Kroner, E.,Anthony,K.H.(Eds.), Continuum Models of Discrete Systems, v.3. Univ.of Waterloo Press, Ontario, Canada, 1982.

[23] Jentsch L., Natroshvili D., Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticity of anisotropic bodies. Part I. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 17 (1999), 7-127.

[24] Jentsch L., Natroshvili D., Three-dimensional mathematical problems of thermoelasticity of anisotropic bodies, Part II. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 18 (1999), 1-50.

[25] Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V., Three Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity (in Russian), Nauka, Moscow, 1976 (English translation: North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics 25, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979).

[26] Lakes R.S., Is Bone Elastically Noncentrosymmetric? 34th ACEMB. 1981, Houston Texas, September 21-23.

[27] Lakes R.S., Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials. International Journal of Mechanical Sciences 43 (2001), 1579-1589.

[28] Lakes R.S., Benedict R.L., Noncentrosymmetry in micropolar elasticity. International Journal of engineering Science 29 (1982), 1161.

[29] Lakhtakia A., Microscopic model for elastostatic and elastodynamic excitation of chiral sculptured thin films. Journal of composite Materials 36 (11), 2002, 1277.

[30] Lions J.-L., Magenes E., Probl mes aux limites non homog nes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[31] McLean W., Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[32] Mura T., Some new problems in the micromechanics. Materials Science and Engineering A (Structural Materials: Properties, Microstructure and Processing) A285 (1-2), 2000, 224-228.

[33] Natroshvili D., Djagmaidze A., Svanadze M., Problems of the Linear Theory of Elastic Mixtures, Tbilisi University, Tbilisi, 1986.

[34] Natroshvili D., Giorgashvili L., Stratis I.G., Mathematical problems of the theory of elasticity of chiral materials, Applied Mathematics, Informatics, and Mechanics, 8, No. 1 (2003), 47-103.

[35] Natroshvili D., Giorgashvili L., Zazashvili S., Steady state oscillation problems of the theory of elasticity of chiral materials, Journal of Integral Equations and Applications, 17, No. 1, Spring (2005), 19-69.

[36] Natroshvili D., Giorgashvili L., Zazashvili S., Mathematical problems of thermoelasticity for hemitropic solids, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 48(2009), 97-174.

[37] Natroshvili D., Stratis I.G., Mathematical problems of the theory of elasticity of chiral materials for Lipschitz domains, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 29, Issue 4 (2006), 445-478.

[38] Necas J., Methodes Directes en Theorie des oquations olliptiques, Masson oditeur, Paris, 1967.

[39] Nowacki J.P., Green s function for a hemitropic micropolar continuum. Bulletin De L Academie Polonaise Des Sciences XXV (8) (1977), 235.

[40] Nowacki W., Theory of Asymmetric Elasticity. Polish-Scientific Publishers, Warszawa and Pergamon Press, 1986.

[41] Robbie K., Brett M.J., Lakhtakia A., Chiral sculpted thin films. Nature 384 (1996), 616.

[42] Ro R., Elastic activity of the chiral medium. Journal of Applied Physics 85 (5), 1999, 2508.

[43] Sharma P., Dasgupta A., Scale-dependent average elastic fields of spherical and cylindrical inhomogeneities in micropolar medium and overall properties. Physical Review B 66 (2002), 2241X.

[44] Sharma P., Size-dependent elastic fields of embedded inclusions in isotropic chiral solids, International Journal of Solids and Structures, 41, 2004, 6317-6333.

[45] Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holand, Amsterdam, 1978.

[46] Triebel H., Theory of Function Spaces, Birkhзuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

[47] Yang J.F.C., Lakes R.S., Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone bending. Journal of Biomechanics 15 (2), 1982, 91-98.