საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

დიანა ივანიძე

სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

თბილისი

2014 წელი

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: **დავით ნატროშვილი**
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი
შოთა ზაზაშვილი
ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, სრული პროფესორი

რეცენზენტები:

დაცვა შედგება ---------- წლის '' -------'' ----------------------, --------- საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ---------------------, აუდიტორია -------------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა – სტუ-ს ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი -----------------------------------

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა და გამოყენების სფერო. სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის იმ ნაწილს, რომელიც შეისწავლის თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზ-ღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას მიკროპოლარული სხეულები-სათვის, კერძოდ, ე.წ. ჰემიტროპული სხეულებისათვის. ასეთ მოდელებს უწოდებენ კოსერას მოდელებს ამ თეორიის დამფუძნებლების - ფრანგი მეცნიე-რების ძმები კოსერების პატივისცემის ნიშნად. ხშირად ამ თეორიას დრეკა-დობის მომენტურ თეორიასაც უწოდებენ. ჰემიტროპული მოდელი წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის უზოგადეს კოსერას ტიპის მოდელს. ნაშრომი განეკუთ-ვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც, ამვე დროს, გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგან თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუს-ტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული სტრუქტურის დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისგან შედგენილი კონსტრუქციები. ასეთი კომპოზიტური მასა-ლებისა და კონსტრუქციების კლასს მიეკუთვნება ჰემიტროპული დრეკადი მასალები, ორი ან რამდენიმე დრეკადი მასალისგან დამზადებული ნარევები, მეტალურ-კერამიკული კომპოზიტები და მათი სხვადასხვა კომპოზიციები. ექს-პერიმენტულმა გამოკვლევევბმა დაადასტურა, რომ ასეთ კომპოზიტებსა და კონსტრუქციებს აღმოაჩნდათ ისეთი მექანიკური თვისებები, რაც არ გვხვდებოდა დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში. ფრიად მნიშვნელოვანია, რომ ანალოგიური თვისებები მჟღავნდება სხვადასხვა ტიპის სხეულებში, როგორც მიკრო - ატომურ-მოლეკულურ დონეზე (კვარცი, ბიოლოგიური მოლეკულები - რიბო-ნუკლეინმჟავები DNA, ძვლების მოლეკულური სისტემები), ასევე მაკრო დონეზე (სპირალური, შურუპის ანუ სჭვალის, ბოჭკოვანი და თხელი მემბრანული ტიპის ჩართვების შემცველი კომპოზიტები, პლასტიკატები, ნანომასალები და სხვა). ამიტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების შედგენას, გამოკვლევას და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობა აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული

ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექტულობის (ამონახსნთა არსებობის, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრადობის) შესწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადექვატური გამოთვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინაპირობაა.

თანამედროვე ტექნოლოგიურმა და ინდუსტრიულმა მიღწევებმა, აგრეთვე ბიოლოგიაში და მედიცინაში მიღწეულმა პროგრესმა, არსებითად მოითხოვა მიკროსტრუქტურის მქონე დრეკადი სხეულების მოდელების განხილვა, რომელშიც გათვალისწინებული იქნება ასევე თერმული ველის ეფექტები. ამ მოდელებით აღიწერება რთული შინაგანი ბმის მქონე კომპოზიტური სხეულები, რომელთა მექანიკუი მიკროსტრუქტურა ისეთია, რომ თითოეულ მატერიალურ ნაწილაკს გააჩნია მექანიკური თავისუფლების 6 ხარისხი (3 გადაადგილების კომპონენტი და მისგან დამოუკიდებელი 3 მიკრობრუნვის კომპონენტი). ასეთ სხეულებს მიკროპოლარულ სხეულებს უწოდებენ. შევნიშნოთ, რომ დრეკადობის კლასიკური თეორია უშვებს მხოლოდ მექანიკური თავისუფლების 3 ხარისხს (გადაადგილების ვექტორის 3 კომპონენტი). როგორც ექსპერიმენტულმა გამოკვლევებმა დაადასტურა მიკროპოლარულ სხეულებს არსებითად განსხვავებული მექანიკური თვისებები აღმოაჩნდათ; მაგალითად, არაცენტრულად სიმეტრიულ მიკროპოლარულ სხეულებში (რომელთაც ჰემიტროპულ სხეულებს უწოდებენ) შესაძლებელია მარცხენა და მარჯვენა მოგეზულების დრეკადი ტალღების ერთდროულად გავრცელება. გარდა ამისა, ღერძული გაჭიმვა იწვევს გვერდით ეფექტსაც, რაც არ გვხვდება დრეკადობის კლასიკურ თეორიაში. შესაბამისი თეორიული და ექსპერიმენტული მასალები დეტალურადაა გადმოცემული მრავალ შრომაში; კერძოდ, დისერტაციაში წარმოდგენილი მოდელი შექმნილია რუსი მკვლევრების ე. აეროსა და ე. კუვშინსკის მიერ (Aero E.L., Kuvshinski E.V., Continuum theory of asymmetric elasticity. Microrotation effect, Solid State Physics, 1963; Aero E.L., Kuvshinski E.V., Continuum theory of asymmetric elasticity. Equilibrium of an isotropic body, Solid State Physics, 1964). გარდა ამისა, ამ თეორიის საფუძვლები დაწვრილებითაა აღწერილი ვ. ნოვაცკის და ჯ. დისლევიჩის მონოგრაფიებში: Nowacki W., Theory of Asymmetric Elasticity. Polish-Scientific Publishers, Warszawa and Pergamon Press, 1986, და Dyszlewicz

J.,Micropolar Theory of Elasticity, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

კოსერას კლასიკური თეორიის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ამოცანები გამოკვლეულია ვ. კუპრაძის, თ. გეგელიას, მ. ბაშალეიშვილისა და თ. ბურჭულაძის საერთაშორისო მაშტაბით აღიარებულ მონოგრაფიაში, Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V., Three Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity, North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 25, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

განზოგადებული თერმოდრეკადობის თეორიის სხვადასხვა ტიპის დინამიკისა და მდგრადი რხევის სასაზღვრო ამოცანები ჰემიტროპული სხეულებისათვის დაწვრილებითაა შესწავლილი დ. ნატროშვილის, შ. ზაზაშვილისა და ლ. გიორგაშვილის შრომაში: Natroshvili D., Giorgashvili L., Zazashvili S., Mathematical problems of thermoelasticity for hemitropic solids, Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 48 (2009), 97-174.

ზემოთ ციტირებულ შრომებში ფართოდაა მიმოხილული მიკროპოლარული თეორიის გამოყენების სფეროები და აღნიშნულია თერმული ველის ეფექტების გათვალისწინების აუცილებლობა, განსაკუთრებით იმ შემთხვევებში, როდესაც ფიზიკური პროცესი მიმდინარეობს მაღალი ტემპერატურის პირობებში. დისერტაციის თემატიკა ეხება სწორედ ამ ტიპის ამოცანების გამოკვლევას სტატიკური მოდელის შემთხვევაში.

სამუშაოს მიზანი, კვლევის ობიექტი და მეთოდები, ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე. ჰემიტროპული სხეულებისათვის დამუშავებულ მათემატიკურ მოდელში განიხილავენ ძალური ძაბვისა $\{\tau_{pq}\}$ და მომენტური ძაბვის $\{\mu_{pq}\}$ ასიმეტრულ ტენზორებს, რომლებიც კინემატიკურადაა დაკავშირებული დეფორმაციის $\{u_{kj}\}$ და გრეხვის $\{\omega_{kj}\}$ ასიმეტრიულ ტემზორებთან (ჰუკის ტიპის განზოგადებული კანონი). ყველა ეს ტენზორი გამოისახება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი გადადგილების $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$ და მიკრობრუნვის $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ ვექტორების კომპონენტებით, ϑ ტემპერატურის ფუნქციითა და მათი წარმოებულებით.

თერმული ეფექტების გათვალისწინებით დინამიკის ძირითადი თანაფარდობები ჰემიტროპული სხეულებისათვის მათემატიკურად აღიწერება შემდეგი კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით:

$$\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\,\Delta u(x,t)+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(x,t)+(\varkappa+\nu)\Delta\,\omega(x,t)+\\
&\quad+(\delta+\varkappa-\nu)\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\omega(x,t)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,\omega(x,t)-\\
&\quad-\eta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x,t)+\varrho\,F(x,t)=\varrho\,\partial_{tt}^2u(x,t)\,,\\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x,t)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(x,t)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,u(x,t)+\\
&\quad+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x,t)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\omega(x,t)+4\nu\,\mathrm{curl}\,\omega(x,t)-\\
&\quad-4\alpha\,\omega(x,t)-\zeta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x,t)+\varrho\,G(x,t)=\mathcal{I}\,\partial_{tt}^2\omega(x,t)\,,\\
&\kappa'\Delta\,\vartheta(x,t)-\eta\partial_t\,\mathrm{div}\,u(x,t)-\zeta\,\partial_t\,\mathrm{div}\,\omega(x,t)-\kappa''\,\partial_t\vartheta(x,t)+Q(x,t)=0,
\end{aligned}$$

სადაც $F=(F_1,F_2,F_3)^\top$ და $G=(G_1,G_2,G_3)^\top$ არის მოცულობითი ძალა და მოცულობითი მომენტი (ერთეულოვან მასაზე გათვლით), Q სხეულში მოთავსებული სითბოს წყაროა, ϱ - დრეკადი სხეულის სიმკვრივე, $\mathcal{I}$ მუდმივი ახასიათებს მიკრობრუნვის ინერციის მომენტს (ერთეულოვან მასაზე გათვლით), α, β, γ, δ, λ, μ, ν, $\varkappa$ და ε მატერიალური მუდმივებია, $\eta>0$ და $\zeta>0$ მუდმივებია, რომლებიც აღწერენ მექანიკური და თერმული ველების ურთიერთკავშირს.

როდესაც განსახილველი მექანიკური და თერმული სიდიდეები დამოკიდებული არაა დროზე, მაშინ ზემოთ მოყვანილი განტოლებებიდან მიიღება სტატიკის განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{aligned}
&(\mu+\alpha)\Delta u(x)+(\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(x)+\\
&\qquad+(\varkappa+\nu)\Delta\omega(x)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\omega(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,\omega(x)-\\
&\qquad-\eta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x)=-\varrho\,F(x),\\
&(\varkappa+\nu)\Delta u(x)+(\delta+\varkappa-\nu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u(x)+2\alpha\,\mathrm{curl}\,u(x)+\\
&\qquad+(\gamma+\varepsilon)\Delta\omega(x)+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\omega(x)+4\nu\,\mathrm{curl}\,\omega(x)-\\
&\qquad-\zeta\ \mathrm{grad}\,\vartheta(x)-4\alpha)\,\omega(x)=-\varrho\,G(x),\\
&\kappa'\,\Delta\,\vartheta(x)=-Q(x)\,.
\end{aligned}\tag{1}$$

დისერტაციაში შესწავლილია ზემოთ მოყვანილი განტოლებებით აღწერილი თერმოჰემიტროპული თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანებისა და ტრანსმისიის ტიპის საკონტაქტო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით.

ჩვენი კვლევის მთავარი საგანია დირიხლეს, ნეიმანისა და რობენის ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევა დიფერენციალურ განტოლებათა (1) სისტემისათვის. ჩვენ შევისწავლით, როგორც გარე, ისე შიგა ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხებს პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით. აღსანიშნავია, რომ ეს ამოცანები დღემდე არ იყო შესწავლილი სამეცნიერო ლიტერატურაში.

შევნიშნოთ, რომ ჰემიტროპული სხეულების დრეკადობის თეორიის სტატიკის ამოცანების გამოკვლევა დაკავშირებულია გარკვეულ სირთულეებთან. კერძოდ, ფსევდო-რხევის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში ფაქტობრივად ექსპონენციალურად ქრება, მაშინ როდესაც შესაბამისი სტატიკის განტოლებების ამონახსნები უსასრულობის მიდამოში, ზოგადად, მხოლოდ შემოსაზღვრულია. ეს არსებითად ართულებს სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევას, როგორც ამონახსნის ერთადერთობის, ისე ამონახსნის არსებობის თვალსაზრისით. საჭირო ხდება ამონახსნთა კლასის დაზუსტება და ისეთი ასიმპტოტური პირობების დადგენა უსასრულობაში, რომელიც უზრუნველყოფს სტატიკის ამოცანების კორექტულად ამოხსნადობას. დღემდე არსებულ სამეცნიერო ლიტერატურაში ასეთი ასიმპტოტური პირობები არ იყო დადგენილი.

დისერტაციაში ეს პრობლემა წარმატებითაა გადაჭრილი და მოძებნილია უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა ქვეკლასი, რომელშიც სტატიკის ზემოთ ხსენებულ ამოცანებს გააჩნიათ ერთადერთი ამონახსენი.

ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ ზემოთ ხსენებული შიგა და გარე სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნები არსებობს და ისინი წარმოიდგინება მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებითა და მათი წრფივი კომბინაციით. ამასთან, პოტენციალთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებებიდან, რომელთა შესაბამისი

ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები გაანალიზებულია დეტალურად, შეს-წავლილია მათი ფრედჰოლმურობა და დადგენილია შებრუნებადობის პირობები, კერძოდ, ცხადი სახითაა დაწერილი ნეიმანის შიგა ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტაქნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის მრავალ სემინარზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო და ადგილობრივ კონ-ფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური კოლოკვიუმები და სემინარები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

ნაშრომის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაცია მოიცავს რეზიუმეს (ქართულ და ინგლისურ ენაზე), შესავალს, ორ თავს, ცხრა პარაგრაფს, დასკვნას და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხას (52 დასახელება). დისერ-ტაცია მოიცავს 138 ნაბეჭდ გვერდს.

დისერტაციის შინაარსი

თავი I. ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა

ნაშრომის პირველი თავი ეძღვნება ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობისა და არსებობის თეორემების დამტკიცებას. გამოკვლევა ჩატარებულია პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური განტოლებების თეორიის გამოყენებით. ამ მიზნით დეტალურადაა გაანალიზებული შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებისა და მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების თვისებები.

პირველი თავის 1.1 პარაგრაფში ამოწერილია დრეკადობის ჰემიტროპული წრფივი თეორიის ველის ძირითადი მახასიათებლები. კერძოდ, შემოტანილია ძალური ძაბვისა $\{\tau_{pq}\}$ და მომენტური ძაბვის $\{\mu_{pq}\}$ ტენზორები:

$$\tau_{pq} = \tau_{pq}(U) := (\mu+\alpha)\partial_p u_q + (\mu-\alpha)\partial_q u_p + \lambda\delta_{pq}\operatorname{div} u + \delta\,\delta_{pq}\operatorname{div}\omega + \\ + (\varkappa+\nu)\partial_p\omega_q + (\varkappa-\nu)\partial_q\omega_p - 2\alpha\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}\omega_k - \delta_{pq}\,\eta\,\vartheta, \tag{2}$$

$$\mu_{pq} = \mu_{pq}(U) := \delta\,\delta_{pq}\operatorname{div} u + (\varkappa+\nu)\Big[\partial_p u_q - \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}\omega_k\Big] + \beta\,\delta_{pq}\operatorname{div}\omega + \\ + (\varkappa-\nu)\Big[\partial_q u_p - \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{qpk}\omega_k\Big] + (\gamma+\varepsilon)\partial_p\omega_q + (\gamma-\varepsilon)\partial_q\omega_p - \delta_{pq}\zeta\vartheta, \tag{3}$$

სადაც $U = (u,\omega,\vartheta)^\top$, $u = (u_1,u_2,u_3)^\top$ არის გადადგილების ვექტორი, $\omega = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)^\top$ არის მიკრობრუნვის ვექტორი, ϑ არის ტემპერატურის განაწილების ფუნქცია, δ_{pq} კრონეკერის სიმბოლოა, ε_{pqk} ლევი-ჩევიტას სიმბოლოა, α, β, γ, δ, λ, μ, ν, $\varkappa$ და ε მატერიალური მუდმივებია, $\eta > 0$ და $\zeta > 0$ მუდმივებია, რომლებიც აღწერენ მექანიკური და თერმული ველების ურთიერთკავშირს, ხოლო $\partial = (\partial_1,\partial_2,\partial_3)$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,2,3$.

სტატიკის წრფივ განტოლებათა სისტემა (1) ჩაწერილია მატრიცული სახით:

$$L(\partial)U(x) = \Phi(x), \tag{4}$$

სადაც $U=(u,\omega,\vartheta)^\top$, $\Phi=(-\varrho\, F, -\varrho\, G, -Q)^\top$,

$$L(\partial)=\begin{bmatrix} L^{(1)}(\partial) & L^{(2)}(\partial) & L^{(5)}(\partial) \\ L^{(3)}(\partial) & L^{(4)}(\partial) & L^{(6)}(\partial) \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \kappa'\Delta \end{bmatrix}_{7\times7},$$

$$L^{(1)}(\partial):=(\mu+\alpha)\,\Delta\, I_3+(\lambda+\mu-\alpha)\,Q(\partial),$$

$$L^{(2)}(\partial)=L^{(3)}(\partial):=(\varkappa+\nu)\,\Delta\, I_3+(\delta+\varkappa-\nu)\,Q(\partial)+2\,\alpha\, R(\partial),$$

$$L^{(4)}(\partial):=[(\gamma+\varepsilon)\,\Delta-4\,\alpha)]\,I_3+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,Q(\partial)+4\,\nu\, R(\partial),$$

$$L^{(5)}(\partial):=-\eta\,\nabla^\top,\quad L^{(6)}(\partial):=-\zeta\,\nabla^\top,$$

$$R(\partial):=[-\varepsilon_{kjl}\partial_l]_{3\times3},\quad Q(\partial):=[\,\partial_k\partial_j\,]_{3\times3}\,,\quad \nabla:=[\partial_1,\partial_2,\partial_3].$$

ნაჩვენებია, რომ $L(\partial)$ არის ფორმალურად არათვითშეუღლებული ძლიერად ელიფსური დიფერენციალური ოპერატორი.

ასევე შემოღებულია მექანიკური თერმოძაბვისა და განზოგადებული თერმოძაბვის სასაზღვრო ოპერატორები:

$$\mathcal{T}(\partial,n)=\begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & -\eta\, n^\top \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & -\zeta\, n^\top \end{bmatrix}_{6\times7}, \tag{5}$$

$$\mathcal{P}(\partial,n)=\begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & -\eta\, n^\top \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & -\zeta\, n^\top \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \kappa'\,\partial_n \end{bmatrix}_{7\times7}, \tag{6}$$

$$\mathcal{T}^*(\partial,n)=\begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \end{bmatrix}_{6\times7}, \tag{7}$$

$$\mathcal{P}^*(\partial,n)=\begin{bmatrix} T^{(1)}(\partial,n) & T^{(2)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ T^{(3)}(\partial,n) & T^{(4)}(\partial,n) & [0]_{3\times1} \\ [0]_{1\times3} & [0]_{1\times3} & \kappa'\,\partial_n \end{bmatrix}_{7\times7}, \tag{8}$$

სადაც

$$T^{(j)}=\big[T^{(j)}_{pq}\big]_{3\times3},\quad j=\overline{1,4},\quad n^\top=(n_1,n_2,n_3)^\top,$$

$$T^{(1)}_{pq}(\partial,n)=(\mu+\alpha)\delta_{pq}\partial_n+(\mu-\alpha)n_q\partial_p+\lambda n_p\partial_q,$$

$$T^{(2)}_{pq}(\partial,n)=(\varkappa+\nu)\delta_{pq}\partial_n+(\varkappa-\nu)n_q\partial_p+\delta n_p\partial_q-2\alpha\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}n_k,$$

$$T^{(3)}_{pq}(\partial,n)=(\varkappa+\nu)\delta_{pq}\partial_n+(\varkappa-\nu)n_q\partial_p+\delta n_p\partial_q,$$

$$T^{(4)}_{pq}(\partial,n)=(\gamma+\varepsilon)\delta_{pq}\partial_n+(\gamma-\varepsilon)n_q\partial_p+\beta n_p\partial_q-2\nu\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{pqk}n_k.$$

ამავე თავის 1.2 პარაგრაფში ფურიეს განზოგადებული გარდაქმნის გამოყენებით აგებულია სტატიკის $L(\partial)$ ოპერატორის შესაბამისი ფუნდამენტური $\Gamma(x)$ მატრიცა და შესწავლილია მისი ყოფაქცევა უსასრულობისა და კოორდინატთა სათავის მიდამოში.

1.3 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ, დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და სპეციალური შერეული ტიპის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები.

ვთქვათ, $\Omega^+\subset\mathbb{R}^3$ შემოსაზღვრული არეა, რომლის საზღვარია მარტივად ბმული შეკრული გლუვი ზედაპირი $\partial\Omega=:S\in C^{2,\alpha}$, $0<\alpha\leqslant1$; $\overline{\Omega^+}=\Omega^+\cup S$ და $\Omega^-=\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega^+}$. ვიგულისხმოთ, რომ S საზღვარი დაყოფილია გლუვი საზღვრის მქონე ორ არათანამკვეთ S_D და S_N ზედაპირად ისე, რომ $S_D\cap S_N=\varnothing$ და $\overline{S}_D\cup\overline{S}_N=S$.

სასაზღვრო ამოცანები შემდეგნაირად ყალიბდება:

უნდა ვიპოვოთ $\Omega^\pm$ არეში

$$L(\partial)U(x)=\Phi^\pm(x),\qquad x\in\Omega^\pm,\tag{9}$$

დიფერენციალური განტოლების ისეთი რეგულარული $U=(\widetilde{U},\vartheta)^\top=(u,\omega,\vartheta)^\top$ ამონახსენი, რომელიც S საზღვარზე აკმაყოფილებს

$(D)^\pm$ დირიხლეს ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{U(x)\big\}^\pm=f(x),\qquad x\in S,\tag{10}$$

ან

$(N)^{\pm}$ ნეიმანის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U(x)\big\}^{\pm}=F(x), \qquad x\in S, \tag{11}$$

ან

$(R)^{\pm}$ რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობას:

$$\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U(x)\big\}^{\pm}+\,K\big\{U(x)\big\}^{\pm}=F(x), \qquad\qquad x\in S, \tag{12}$$

სადაც $K=[K_{kj}]_{7\times 7}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა:

$$K=\begin{bmatrix} [\widetilde{K}_{kj}]_{6\times 6} & [0]_{6\times 1} \\ [0]_{1\times 6} & \varkappa_2 \end{bmatrix}_{7\times 7}, \tag{13}$$

$\varkappa_2>0$ დადებითი მუდმივია და $\widetilde{K}=[\widetilde{K}_{kj}]_{6\times 6}$ დადებითად განსაზღვრული მატრიცაა,

ან

$(M)^{\pm}$ შერეული ტიპის სასაზღვრო პირობებს:

$$\big\{U(x)\big\}^{\pm}=f^{(D)}(x), \qquad\qquad x\in S_D, \tag{14}$$

$$\big\{\mathcal{P}(\partial,n)U(x)\big\}^{\pm}=F^{(N)}(x), \qquad x\in S_N. \tag{15}$$

ამოცანების კლასიკურ დასმაში იგულისხმება, რომ საძიებელი U ვექტორი ეკუთვნის რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^{\pm}})]^7\cap[C^2(\Omega^{\pm})]^7$ სივრცეს და სასაზღვრო მონაცემები უწყვეტია, კერძოდ, $\Phi^{\pm}\in[C^{0,\sigma}(\overline{\Omega^{\pm}})]^7$, $f\in[C^1(S)]^7$, $F\in[C^0(S)]^7$, $f^{(D)}\in[C^1(S_D)]^7$, $F^{(N)}\in[C(S_N)]^7$.

ასევე ჩამოყალიბებულია სასაზღვრო ამოცანები შესაბამისი ფორმალურად შეუღლებული $L^*(\partial)$ ოპერატორისათვის, რომლებიც არსებით როლს თამაშობენ ჩვენს მიერ ჩატარებულ გამოკვლევაში, კერძოდ, ინტეგრალური ოპერატორების ნულ-სივრცეების შესწავლაში.

1.4 პარაგრაფში გაუსის ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის დახმარებით სტატიკის განტოლებათა სისტემიდან წარმოქმნილი მატრიცული ოპერატორებისთვის და $[C^2(\overline{\Omega^{+}})]^6$ კლასის ნებისმიერი ვექტორ-ფუნქციებისათვის გლუვი

$\Omega^+ \subset \mathbb{R}^3$ არის შემთხვევაში გამოგვყავს სხვადასხვა ტიპის გრინის ფორმულები, რომლებიც სტანდარტული ზღვრული პროცედურების საშუალებით განზოგადდება ლიპშიცის არეებისათვის და უფრო ფართო კლასის ფუნქციებისთვის, კერძოდ, სობოლევ-სლობოდეცკის $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ სივრცეებისთვის.

1.5 პარაგრაფის 1.5.1 ქვეპარაგრაფში დამტკიცებულია სტატიკის განტოლების შესაბამისი შიგა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები.

თეორემა 1 . სტატიკის დირიხლეს $(D)^+$, რობენის $(R)^+$ და შერეულ $(M)^+$ შიგა სასაზღვრო ამოცანებს აქვთ არაუმეტეს ერთი ამონახსენი $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ სივრცეში, ხოლო ნეიმანის $(N)^+$ ამოცანის ამონახსნი განსაზღვრულია

$$U_0 = \vartheta_0(u_0, \omega_0, 1)^\top + (\widetilde{\Psi}, 0)^\top$$

ვექტორის სიზუსტით, სადაც $\widetilde{\Psi}$ ნებისმიერი განზოგადებული ხისტი გადაადგილების ვექტორია, ე.ი.

$$\widetilde{\Psi}(x) = \big([a \times x] + b, a\big)^\top, \tag{16}$$

სადაც $a = (a_1, a_2, a_3)^\top$ და $b = (b_1, b_2, b_3)^\top$ ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია, ϑ_0 ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივია, $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^\top$ და $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^\top$ ისეთი ვექტორებია, რომ $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ არის შემდეგი კონკრეტული ამოცანის კერძო ამონახსნი:

$$\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+, \tag{17}$$

$$\big\{T(\partial, n)\widetilde{V}_0(x)\big\}^+ = \big(\eta\, n(x), \zeta\, n(x)\big)^\top, \qquad x \in S.$$

1.5.2 ქვეპარაგრაფი ეძღვნება გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის გამოკვლევას. უსასრულო არის შემთხვევაში გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის შესწავლა ხდება უსასრულობის მიდამოში გარკვეული ასიმპტოტიკის მქონე ვექტორ-ფუნქციათა კლასში. საქმე ის არის, რომ აუცილებელია გარე ამოცანების განხილვა უსასრულობაში შემოსაზღვრულ ვექტორ-ფუნქციათა სპეციალურ კლასში, რადგან ზოგადად თერმოსტატიკის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსენი უსასრულობის მიდამოში არ ქრება; კერძოდ, გადაადგილების ვექტორი უნდა ვეძიოთ უსასრულობის

მიდამოში შემოსაზღვრულ ფუნქციათა კლასში, ხოლო ტემპერატურის ფუნქცია კი - უსასრულობის მიდამოში ქრობად ფუნქციათა კლასში. აღნიშნულ ქვეპარაგრაფში შემოღებულია ასეთ ვექტორ-ფუნქციათა კლასი $Z(\Omega^-)$, დამტკიცებულია რამდენიმე დამხმარე დებულება და შესწავლილია გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის გარე სასაზღვრო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი ვექტორ-ფუნქციათა $[W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ სივრცეში.

განსაზღვრება 2 . ვიტყვით, რომ $U = (u, \omega, \vartheta)^\top$ ვექტორ-ფუნქცია ეკუთვნის $Z(\Omega^-)$ კლასს, თუ მისი კომპონენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ ასიმტოტურ პირობებს:

$$\text{(i)}\ \ u(x) = \mathcal{O}(1),\ \omega(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}),\ \vartheta(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1}),\ \ \text{როცა } |x| \to \infty, \tag{18}$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{R\to\infty} \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\Sigma(0,R)} u(x)\, d\Sigma(0,R) = 0, \tag{19}$$

სადაც $\Sigma(0,R)$ არის R რადიუსიანი სფერო ცენტრით კოორდინატთა სათავეში.

თეორემა 3 . სტატიკის გარე დირიხლეს $(D)^-$, ნეიმანის $(N)^-$, რობენის $(R)^-$ და შერეულ $(M)^-$ სასაზღვრო ამოცანებს აქვთ არაუმეტეს ერთი $U = (u, \omega, \vartheta)^\top = (\widetilde{U}, \vartheta)^\top \in [W^1_{2,loc}(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ ამონახსენი.

ამავე ქვეპარაგრაფში შეუღლებული გარე ამოცანების ამონახსნებისთვის დადგენილია ასიმპტოტური ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში და შემოღებულია შესაბამისი $Z^*(\Omega^-)$ კლასი, ხოლო 1.5.3 ქვეპარაგრაფში დამტკიცებულია შესაბამისი ერთადერთობის დებულებები. ნაჩვენებია, რომ შეუღლებულ დირიხლეს შიგა და გარე, ასევე ნეიმანის გარე ერთგვაროვან ამოცანებს გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი, ხოლო ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი ამოცანის შემთხვევაში ზოგადი ამონახსენია გარკვეული სტრუქტურის მქონე ვექტორი, რომლის პირველი ექვსი კომპონენტი შეესაბამება ჰემიტროპული თეორიის ხისტი გადაადგილების ვექტორს, ხოლო მეშვიდე კომპონენტი ნებისმიერი მუდმივია. ეს შედეგები არსებითად გამოიყენება ძირითადი სასაზღვრო

ამოცანების შესაბამისი ინტეგრალური განტოლებების ამოხსნადობის საკით- ხის შესწავლისას, კერძოდ, შესაბამისი შეუღლებული ოპერტორების ნულ- სივრცეების გასაანალიზებლად.

თეორემა 4 . შეუღლებულ დირიხლეს ერთგვაროვან შიგა $(D^*)^+$ და გარე $(D^*)^-$ ამოცანებს, აგრეთვე ნეიმანის ერთგვაროვან გარე $(N^*)^-$ ამოცანას, შესაბამისად, ვექტორ-ფუნქციათა $[W_2^1(\Omega^+)]^7$ და $[W_{2,loc}^1(\Omega^-)]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასებში გააჩნიათ მხოლოდ ტრივიალური ამონახსენი.

თეორემა 5 . შეუღლებული ნეიმანის ერთგვაროვანი შიგა $(N^*)^+$ ამოცანის ზოგადი ამონახსენია

$$V^{(0)}(x) = ([a \times x] + b, a, c)^\top,$$

სადაც a და b ნებისმიერი სამგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორებია, c კი - ნებისმიერი ნამდვილი სკალარული მუდმივია.

1.6 პარაგრაფში ჰემიტროპული დრეკადობის თეორიის სტატიკის $L(\partial)$ და $L^*(\partial)$ ოპერატორების ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ და $\Gamma^*(x-y) = \Gamma^\top(y-x)$ მატ- რიცების საშუალებით აგებულია ზედაპირული - მარტივი და ორმაგი ფენის პეტენციალები:

$$V(g)(x) := \int_S \Gamma(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{20}$$

$$W(g)(x) := \int_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{21}$$

$$V^*(g)(x) := \int_S \Gamma^*(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{22}$$

$$W^*(g)(x) := \int_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_y, n(y)\big)\big[\Gamma^*(x-y)\big]^\top\big]^\top g(y)\, dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S, \tag{23}$$

ამავე პარაგრაფში დადგენილია ზედაპირული პეტენციალების წყვეტის ფორ- მულები და ნაჩვენებია, რომ ისინი ეკუთვნიან შესაბამისად $Z(\Omega^-)$ და $Z^*(\Omega^-)$ კლასებს. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები.

თეორემა 6 . მარტივი $V(g)$ და ორმაგი $W(g)$ ფენის პოტენციალები წარმოადგენენ ერთგვაროვანი

$$L(\partial)\,U(x)=0, \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus S,$$

განტოლების ამონახსნებს და ეკუთვნიან $Z(\Omega^-)$ კლასს.

თეორემა 7 . ვთქვათ, $S\in C^{k+1,\kappa}$, სადაც $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$ და $k\geqslant 0$ მთელი რიცხვია. მაშინ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს აქვთ ასახვის შემდეგი თვისებები:

$$\begin{aligned} V\ &:\ [C^{k,\sigma}(S)]^7\to[C^{k+1,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})]^7, \qquad m\geqslant 1,\\ W\ &:\ [C^{k,\sigma}(S)]^7\to[C^{k,\sigma}(\overline{\Omega^\pm})]^7, \qquad m\geqslant 2, \end{aligned} \tag{24}$$

და ისინი უწყვეტი ოპერატორები არიან.

თეორემა 8 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$, $g\in[C^{0,\sigma}(S)]^7$, $h\in[C^{1,\sigma}(S)]^7$, სადაც $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ ნებისმიერი $x\in S$ წერტილისთვის ადგილი აქვს შემდეგ ზღვრულ ტოლობებს:

$$\{V(g)(x)\}^\pm=V(g)(x)=\mathcal{H}g(x), \tag{25}$$

$$\{\mathcal{P}(\partial_x,n(x))V(g)(x)\}^\pm=[\mp 2^{-1}I_7+\mathcal{K}\,]\,g(x), \tag{26}$$

$$\{W(g)(x)\}^\pm=[\pm 2^{-1}I_7+\mathcal{N}\,]\,g(x), \tag{27}$$

$$\{\mathcal{P}(\partial_x,n(x))W(h)(x)\}^+=\{\mathcal{P}(\partial_x,n(x))W(h)(x)\}^-=\mathcal{L}h(x), \quad S\in C^{2,\kappa}, \tag{28}$$

სადაც $\mathcal{H}$ არის სუსტი სინგულარობის ინტეგრალური ოპერატორი, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{N}$ არიან სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორები, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი და ისინი განსაზღვრულნი არიან

შემდეგნაირად:

$$\mathcal{H}g(x) := \int_S \Gamma(x-y)g(y)dS_y, \tag{29}$$

$$\mathcal{K}g(x) := \int_S \big[\mathcal{P}\big(\partial_x, n(x)\big)\Gamma(x-y)\big]g(y)dS_y, \tag{30}$$

$$\mathcal{N}g(x) := \int_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)dS_y, \tag{31}$$

$$\mathcal{L}h(x) := \lim_{\Omega^\pm \ni z \to x \in S} \mathcal{P}\big(\partial_z, n(x)\big) \int_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\Gamma^\top(z-y)\big]^\top h(y)dS_y. \tag{32}$$

გამოყვანილია ასევე ზოგადი ამონახსნის ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულები შიგა და გარე უსასრულო არეების შემთხვევაში.

1.7 პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის თეორემები რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა კლასებში. კერძოდ, 1.7.1 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს შიგა სასაზღვრო ამოცანა და ნაჩვენებია, რომ ეს ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^1(\overline{\Omega^+})\big]^7 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^7$ კლასში. მოცემულია დირიხლეს შიგა ამოცანის განოკვლევის ორი მეთოდი. პირველი დაფუძნებულია ამონახსნის ორმაგი ფენის $W(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე, ხოლო მეორე მიდგომა - ამონახსნის მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალით წარმოდგენაზე.

ორივე შემთხვევაში დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემაზე. პირველ შემთხვევაში ეს სისტემა წარმოადგენს ნორმალურად ამოხსნად სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას, ხოლო მეორე შემთხვევაში ინტეგრალური ოპერატორი არის მარტივი ფენის პოტენციალის სასაზღვრო მნიშვნელობით წარმოშობილი -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი უარყოფითად განსაზღვრული მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლური მატრიცით. ნაჩვენებია ამ ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და მათი ნულ-სივრცის ტრივიალურობა, რაც ეკვივალენტურია აღნიშნული ინტეგრალური ოპერატორების შებრუნებადობისა შესაბამის ფუნქციონალურ სივრცეებში. აქედან კი გამომდინარეობს დირიხლეს სასზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის დებულებები.

თეორემა 9 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა $(D)^+$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\big]^7 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^7$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ორმაგი ფენის პოტენციალით:

$$U(x) = W(g)(x) := \int\limits_S \big[\mathcal{P}^*\big(\partial_y, n(y)\big)\,\Gamma^\top(x-y)\big]^\top g(y)\,dS_y, \qquad x \in \Omega^+, \tag{33}$$

სადაც სიმკვრივე $g \in \big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან:

$$[\,2^{-1} + \mathcal{N}\,]\,g(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{34}$$

თეორემა 10 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \big[C^{1,\sigma}(S)\big]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს შიგა $(D)^+$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^+})\big]^7 \cap \big[C^2(\Omega^+)\big]^7$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით:

$$U(x) = V(g)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\,g(y)\,dS_y, \qquad x \in \Omega^+, \tag{35}$$

სადაც სიმკვრივე $g \in \big[C^{0,\sigma}(S)\big]^7$ ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან:

$$\mathcal{H}\,g(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{36}$$

ანალოგიური მიდგომით, 1.7.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია ამონახსნის არსებობის დებულება.

თეორემა 11 . ვთქვათ, $S \in C^{1,\kappa}$ და $F \in \big[C^{0,\sigma}(S)\big]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ ნეიმანის გარე $(N)^-$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\big[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\big]^7 \cap \big[C^2(\Omega^-)\big]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით:

$$U(x) = V(g)(x) := \int\limits_S \Gamma(x-y)\,g(y)\,dS_y, \qquad x \in \Omega^-, \tag{37}$$

სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან:

$$[\,2^{-1}\,I_7 + \mathcal{K}\,]\,g(x) = F(x), \qquad x \in S. \tag{38}$$

1.7.3 ქვეპარაგრაფში გამოკვლეულია დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი და დამტკიცებულია შემდეგი დებულებები.

თეორემა 12 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს გარე $(D)^-$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^-)\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება ზედაპირული პოტენციალების კომბინაციით:

$$U_0(x) = W(g)(x) + aV(g)(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{39}$$

სადაც a ნებისმიერად ფიქსირებული დადებითი მუდმივია, ხოლო სიმკვრივე $g \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი შემდეგი სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან:

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{N}(g)(x) + a\,\mathcal{H}(g)(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{40}$$

შიგა ამოცანის ანალოგიურად, აქაც დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს გარე სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის $V(g)$ პოტენციალითაც.

თეორემა 13 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$ და $f \in \left[C^{1,\sigma}(S)\right]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს გარე $(D)^-$ ამოცანა ცალსახად ამოხსნადია რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $\left[C^{1,\sigma}(\overline{\Omega^-})\right]^7 \cap \left[C^2(\Omega^-)\right]^7 \cap Z(\Omega^-)$ კლასში და ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით:

$$U(x) = V(g)(x), \qquad x \in \Omega^-, \tag{41}$$

სადაც სიმკვრივე $g \in \left[C^{0,\sigma}(S)\right]^7$ ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი -1 რიგის ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან:

$$\mathcal{H}\,g(x) = f(x), \qquad x \in S. \tag{42}$$

ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის არსებობის საკითხი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^1(\overline{\Omega^+})]^7 \cap [C^2(\Omega^+)]^7$ სივრცეში გამოკვლეულია 1.7.4 ქვეპარაგრაფში. ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ $U = V(g)$ მარტივი ფენის პოტენციალის საშუალებით და სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნა დაგვყავს სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა შემდეგ სისტემაზე

$$-2^{-1}g(x) + \mathcal{K}\, g(x) = F(x), \qquad x \in S, \tag{43}$$

ნაჩვენებია, რომ აღნიშნულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემით წარმოშობილი მატრიცული სინგულარული ინტეგრალური ოპერატორი $[-2^{-1}I_7 + \mathcal{K}]$ ფრედჰოლმურია ნულოვანი ინდექსით და ამ ოპერატორის ნულ-სივრცე შვიდგანზომილებიანია, რომლის ბაზისია

$$\{g^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7} = \{\mathcal{H}^{-1}\Phi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}, \quad x \in S,$$

სადაც

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(1)}(x) = (0, -x_3, x_2, 1, 0, 0, 0)^\top, \quad \Phi^{(2)}(x) = (x_3, 0, -x_1, 0, 1, 0, 0)^\top,\\
&\Phi^{(3)}(x) = (-x_2, x_1, 0, 0, 0, 1, 0)^\top, \quad \Phi^{(4)}(x) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top,\\
&\Phi^{(5)}(x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \qquad \Phi^{(6)}(x) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)^\top,\\
&\qquad\qquad \Phi^{(7)}(x) = (u_0, \omega_0, 1)^\top;
\end{aligned} \tag{44}$$

აქ $u_0 = (u_{01}, u_{02}, u_{03})^\top$ და $\omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^\top$ ისეთი ვექტორებია, რომ $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ არის შემდეგი ამოცანის კერძო ამონახსნი:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}(\partial)\widetilde{V}_0(x) = 0, \qquad x \in \Omega^+,\\
&\big\{T(\partial, n)\widetilde{V}_0(x)\big\}^+ = \big(\eta\, n(x), \zeta\, n(x)\big)^\top, \qquad x \in S.
\end{aligned} \tag{45}$$

სამწუხაროდ კლასიკური თერმოდრეკადობისგან განსხვავებით, თერმო-ჰემიტროპული დრეკადობის თეორიაში კერძო $\widetilde{V}_0 = (u_0, \omega_0)^\top$ ამონახსნის ცხადი გამოსახულების პოვნა ნებისმიერი Ω^+ არისათვის პრობლემურია. თუმცა, $\widetilde{V}_0$ შეიძლება ცხადი სახით ავაგოთ ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში.

შესაბამისი შეუღლებული სინგულარული ინტეგრალური $[-2^{-1}I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისი აგებულია ცხადი სახით ელემენტარულ ფუნქციებში და, აქედან გამომდინარე, ცხადი სახითაა დაწერილი ნეიმანის შიგა სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

თეორემა 14 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$ და $F\in C^{0,\sigma}(S)$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. მაშინ, არაერთგვაროვანი ინტეგრალური

$$-2^{-1}g(x)+\mathcal{K}\,g(x)=F(x), \qquad\qquad x\in S, \tag{46}$$

განტოლების ამოხსნადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$\Big(F,\Psi^{(k)}\Big)_{[L_2(S)]^7}\equiv\int_S F(x)\cdot\Psi^{(k)}(x)\,dS=0, \qquad k=\overline{1,7}, \tag{47}$$

სადაც ვექტორ-ფუნქციათა $\{\Psi^{(k)}(x)\}_{k=1}^{7}$, $x\in S$, სისტემა წარმოადგენს $[-2^{-1}I_7+\widetilde{\mathcal{K}}]$ ოპერატორის ნულ-სივრცის ბაზისს და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
&\Psi^{(1)}(x)=(0,-x_3,x_2,1,0,0,0)^\top, \qquad \Psi^{(2)}(x)=(x_3,0,-x_1,0,1,0,0)^\top,\\
&\Psi^{(3)}(x)=(-x_2,x_1,0,0,0,1,0)^\top, \qquad \Psi^{(4)}(x)=(1,0,0,0,0,0,0)^\top,\\
&\Psi^{(5)}(x)=(0,1,0,0,0,0,0)^\top, \qquad \Psi^{(6)}(x)=(0,0,1,0,0,0,0)^\top,\\
&\Psi^{(7)}(x)=(0,0,0,0,0,0,1)^\top.
\end{aligned} \tag{48}$$

თეორემა 15 . ვთქვათ, $S\in C^{1,\kappa}$ და $F\in C^{0,\sigma}(S)$, $0<\sigma<\kappa\leqslant 1$. ნეიმანის ტიპის შიგა არაერთგვაროვანი $(N)^+$ სასაზღვრო ამოცანა ამოხსნადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა F ფუნქცია აკმაყოფილებს ორთოგონალობის (47) პირობებს. გარდა ამისა, ამ ამოცანის U ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალით

$$U(x)=V(g)(x), \qquad x\in\Omega^-, \tag{49}$$

რომლის სიმკვრივე g განისაზღვრება (46) სინგულარული ინტეგრალური განტოლებიდან. ამასთან, g განისაზღვრება $g^{(k)}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სიზუსტით, ხოლო ნეიმანის შიგა ამოცანის U ამონახსენი განისაზღვრება $\Phi^{(k)}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სიზუსტით.

თავი II. თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები ჰემიტროპული სხეულებისათვის

მეორე თავში შესწავლილია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ტრანსმისიის ამოცანები უბნობრივ ერთგვაროვანი ჰემიტროპული კომპოზიტური სხეულებისათვის. კერძოდ, განხილულია სამი შემთხვევა, როდესაც

(1) კომპოზიტურ სხეულს უკავია მთელი სივრცე, რომელიც შედგება სასრული D_1 არისა და მისი უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_1$ დამატებისგან, $\partial D_1 = \partial D_2$;

(2) კომპოზიტურ სხეულს უკავია სასრული არე, რომელიც შედგება ორი ურთიერთმოსაზღვრე Ω_1 და Ω_2 არისაგან (ამასთან Ω_1 არე მდებარეობს Ω_2 არის შიგნით და $S_1 = \partial\Omega_1$, ხოლო $\partial\Omega_2 = S_1 \cup S_2$, სადაც S_1 მდებარეობს S_2-ის შიგნით);

(3) კომპოზიტურ სხეულს უკავია უსასრულო არე, რომელიც შედგება ცარიელი D_0 სიღრუვის შემცველი სასრული D_1 და უსასრულო $D_2 = \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D}_0 \cup \overline{D}_1)$ არეებისგან; ამასთან $\partial D_1 = S_0 \cup S_1$, სადაც S_0 მდებარეობს S_1-ის შიგნით, ხოლო $\partial D_2 = S_1$.

სამივე შემთხვევაში იგულისხმება, რომ განსხვავებული არეები შევსებულია განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე ერთგვაროვანი ჰემიტროპული მასალით.

2.1 პარაგრაფში ჩამოყალიბებულია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არისათვის და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სასრული კომპოზიტური არისათვის, განხილულია ამ ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობის საკითხი. დამტკიცებულია, რომ ძირითად საკონტაქტო ამოცანას, ასევე დირიხლეს და რობენის ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებს არ გააჩნიათ ერთზე მეტი ამონახსენი. ნეიმანის ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის შემთხვევაში ნაჩვენებია, რომ ამონახსენთა საბაზისო სივრცე შვიდგანზომილებიანია.

თეორემა 16 . ძირითად საკონტაქტო $(TP-B)$ ამოცანას რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა $[C^2(D_1)]^7 \cap [C^1(\overline{D_1})]^7 \times [C^2(D_2)]^7 \cap [C^1(\overline{D_2})]^7 \cap Z(D_2)$ კლასში არ

გააჩნია ერთზე მეტი ამონახსენი.

თეორემა 17 . დირიხლეს შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-D)$ და რობენის შიგა ერთგვაროვან სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-R)$ ამოცანებს გააჩნით მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნები.

თეორემა 18 . ნეიმანის შიგა ერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP-N)$ ამოცანის ზოგადი ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულებით

$$U^{(1)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\left(\widetilde{U}_0^{(1)}(x), 1\right)^\top, \qquad x \in \Omega_1,$$

$$U^{(2)}(x) = (\chi, 0)^\top + C\left(\widetilde{U}_0^{(2)}(x), 1\right)^\top, \qquad x \in \Omega_2,$$

სადაც χ ხისტი გადაადგილების ვექტორია, C ნებისმიერი მუდმივია, ხოლო $\widetilde{U}_0^{(1)}$ და $\widetilde{U}_0^{(2)}$ არის შემდეგი კონკრეტული არაერთგვაროვანი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის რაიმე ფიქსირებული კერძო ამონახსნი:

$$\widetilde{L}_j(\partial)\widetilde{U}^{(j)}(x) = 0, \quad x \in \Omega_j, \qquad j = 1, 2, \tag{50}$$

$$\{\widetilde{U}^{(1)}(x)\}^+ - \{\widetilde{U}^{(2)}(x)\}^- = 0, \qquad x \in S_1, \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &\{T_1(\partial, n)\widetilde{U}^{(1)}(x)\}^+ - \{T_2(\partial, n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\}^- = \\ &\qquad = C\left((\eta^{(1)} - \eta^{(2)})\, n^\top, (\zeta^{(1)} - \zeta^{(2)})\, n^\top\right)^\top, \qquad x \in S_1, \end{aligned} \tag{52}$$

$$\{T_2(\partial, n)\widetilde{U}^{(2)}(x)\}^+ = C\left(\eta^{(2)}\, n^\top, \zeta^{(2)}\, n^\top\right)^\top, \qquad x \in S_2. \tag{53}$$

2.2 პარაგაფში განხილულია ტრანსმისიის ამოცანების ამონახსნების არსებობის საკითხი. კერძოდ, 2.2.1 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ არისათვის და დამტკიცებულია, რომ მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი, $(U^{(1)}, U^{(2)})$, სადაც $U^{(j)}$, $j = 1, 2$, წარმოიდგინება შესაბამისი ფუნდამენტური მატრიცით აგებული მარტივი ფენის პოტენციალებით: $U^{(1)} = V^{(1)}(h)$ და $U^{(2)} = V^{(2)}(g)$, ხოლო h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

თეორემა 19 . ვთქვათ, $S \in C^{2,\kappa}$, $f \in [C^{1,\sigma}(S)]^7$, $F \in [C^{0,\sigma}(S)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ ძირითად საკონტაქტო $(TP-B)$ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი

რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალების სახით:

$$U^{(1)}(x) := V_S^{(1)}(h)(x) = \int_S \Gamma_1(x-y)\, h(y)\, dS_y, \quad x \in D_1, \tag{54}$$

$$U^{(2)}(x) := V_S^{(2)}(g)(x) = \int_S \Gamma_2(x-y)\, g(y)\, dS_y, \quad x \in D_2, \tag{55}$$

სადაც h და g სიმკვრივეები განისაზღვრება ინტეგრალურ განტოლებათა ცალსახად ამოხსნადი შემდეგი სისტემიდან:

$$\mathcal{H}_s^{(1)}\, h(x) - \mathcal{H}_s^{(2)}\, g(x) = f(x), \qquad x \in S, \tag{56}$$

$$\big[-2^{-1}h(x) + \mathcal{K}_s^{(1)}\, h(x)\big] - \big[2^{-1}g(x) + \mathcal{K}_s^{(2)}\, g(x)\big] = F(x), \qquad x \in S. \tag{57}$$

2.2.2 ქვეპარაგრაფში შესწავლილია დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა სასრული კომპოზიტური არისათვის: $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. დამტკიცებულია, რომ დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი $(U^{(1)}, U^{(2)})$ ერთად-ერთია და თითოეული ვექტორი წარმოიდგინება შესაბამისი მარტივი ფენის პოტენციალებით: $U^{(1)} = V_{S_1}^{(1)}(h)$ და $U^{(2)} = V_{S_1}^{(2)}(g) + V_{S_2}^{(2)}(\varphi)$. საძიებელი g, h და φ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

თეორემა 20 . ვთქვათ, $S_j \in C^{2,\kappa}$, $j = 1,2$, $f^{(1)} \in [C^{1,\sigma}(S_1)]^7$, $f^{(2)} \in [C^{1,\sigma}(S_2)]^7$, $F^{(1)} \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP{-}D)$ ამოცანას სასრული კომპოზიტური არის შემთხვევაში გააჩნია ერთად-ერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალების სახით:

$$U^{(1)}(x) := V_{S_1}^{(1)}(h)(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{58}$$

$$U^{(2)}(x) := V_{S_1}^{(2)}(g)(x) + V_{S_2}^{(2)}(\varphi)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{59}$$

სადაც h, g და φ სიმკვრივეები ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრა-ლურ განტოლებათა სისტემიდან:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1} h(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1} g(x) - r_{S_1} V^{(2)}_{S_2} \varphi(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{60}$$

$$[-2^{-1}h(x) + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1} h(x)] - [2^{-1}g(x) + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1} g(x)]$$

$$-r_{S_1} \mathcal{P}_2(\partial, n) V^{(2)}_{S_2} \varphi(x) = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{61}$$

$$r_{S_2} V^{(2)}_{S_1} g(x) + \mathcal{H}^{(2)}_{S_2} \varphi(x) = f^{(2)}(x), \qquad x \in S_2. \tag{62}$$

2.2.3 ქვეპარაგარფში გამოკვლეულია რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა D_0 სიღრუვის შემცველი უსასრულო $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ კომპოზიტური არისათვის, როდესაც $\overline{D}_1$ არის შიგა საზღვარზე მოცემულია რობენის ტიპის სასაზღვრო პირობა. ამ შემთხვევაშიც პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ განსახილველი სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანის ამონახსენი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალებით, რომელთა საძიებელი სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნად შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან.

თეორემა 21 . ვთქვათ, $S_j \in C^{2,\kappa}$, $j = 0, 1$, $f^{(1)} \in [C^{1,\sigma}(S_1)]^7$, $F^{(1)} \in [C^{0,\sigma}(S_1)]^7$, $F^{(0)} \in [C^{0,\sigma}(S_0)]^7$, $0 < \sigma < \kappa \leqslant 1$. მაშინ რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო $(TP - R)$ ამოცანას უსასრულო კომპოზიტური არის შემთხვევაში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რეგულარულ ვექტორ-ფუნქციათა სივრცეში და ამონახსნი წარმოიდგინება მარტივი ფენის პოტენციალების სახით:

$$U^{(1)}(x) := V^{(1)}_{S_0}(h)(x) + V^{(1)}_{S_1}(g)(x), \qquad x \in D_1, \tag{63}$$

$$U^{(2)}(x) := V^{(2)}_{S_1}(\varphi)(x), \qquad x \in D_2, \tag{64}$$

სადაც h, g და φ სიმკვრივეები ცალსახად განისაზღვრება შემდეგი არაერთგვაროვანი ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემიდან:

$$\mathcal{H}^{(1)}_{S_1}\, g(x) - \mathcal{H}^{(2)}_{S_1}\, \varphi(x) + r_{_{S_1}}\, V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = f^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{65}$$

$$[-2^{-1}g(x) + \mathcal{K}^{(1)}_{S_1}\, g(x)] - [2^{-1}\varphi(x) + \mathcal{K}^{(2)}_{S_1}\, \varphi(x)] +$$

$$+\, r_{_{S_1}}\, \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_0}\, h(x) = F^{(1)}(x), \qquad x \in S_1, \tag{66}$$

$$r_{_{S_0}}\, \mathcal{P}_1(\partial, n) V^{(1)}_{S_1}\, g(x) - K r_{_{S_0}} V^{(1)}_{S_1}\, g(x) + [2^{-1}h(x) + \mathcal{K}^{(1)}_{S_0}\, h(x)] -$$

$$-\, K \mathcal{H}^{(1)}_{S_0}\, h(x) + = F^{(0)}(x), \qquad x \in S_0. \tag{67}$$

დასკვნა

სადისერტაციო ნაშრომი **სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა კოსერას ტიპის განზოგადებული მოდელებისათვის** ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის, კერძოდ, თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონ-ტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების გამოკვლევას. ნაშრომი განე-კუთვნება ფუნდამენტური მიმართულების სფეროს, რომელსაც, ამავე დროს, გააჩნია პრაქტიკული მნიშვნელობაც, რადგანაც თანამედროვე ტექნოლოგიურ და ინდუსტრიულ პროცესებში ფართოდ გამოიყენება რთული შინაგანი სტრუქ-ტურის მქონე დრეკადი კომპოზიტური მასალები და არსებითად განსხვავებული ფიზიკური თვისებების მქონე მასალებისაგან შედგენილი კონსტრუქციები. ამი-ტომ ასეთი მასალების მათემატიკური მოდელების აგებას, მათ გამოკვლევასა და გაანალიზებას შესაბამისი მექანიკური, თერმული, ელექტრული, მაგნიტური და სხვა ფიზიკური თვისებების დადგენის მიზნით თეორიულ მნიშვნელობასთან ერთად დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობაც აქვს. კერძოდ, დიდი თეორიული ინტერესის საგანს წარმოადგენს შესაბამისი მათემატიკური ამოცანების კორექ-ტულობის (ამონახსნთა არსებობისა, სიგლუვის, ერთადერთობისა და მდგრა-დობის) შეწავლა, რაც პრაქტიკული გამოყენების მიზნით ადეკვატური გამოთ-ვლითი ალგორითმების შექმნის აუცილებელი წინა პირობაა.

სადისერტაციო ნაშრომის მთავარი მიზანია დირიხლეს, ნეიმანის, რობენისა და შერეული ტიპის ძირითადი სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცა-ნების გამოკვლევა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ჰემიტროპული სხეულების შემთხვევაში, რომე-ლიც კოსერას მოდელებში უზოგადეს მოდელს წარმოადგენს. შესწავლილია შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების ერთადერთობისა და არსებობის საკითხები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით.

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული ძირითადი შედეგები შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს:

● ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, საკონტაქტო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების შემთხვევაში

დადგენილია ცხადი სახის სტრუქტურული და ასიმპტოტური შეზღუდვების საკმარისი პირობები უსასრულობის მიდამოში, რომლებიც უზრუნველყოფენ საძიებელი ამონახსნების ერთადერთობას;

- ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის ფურიეს მეთოდით აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მატრიცა და მისი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გამოკვლეულია პოლუსისა და უსასრულობის მიდამოში. შესწავლილია შესაბამისი განზოგადებული მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ასახვის თვისებები, დადგენილია მათ მიერ წარმოშობილი სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორების ფრედჰოლმურობა და აგებულია შესაბამისი ნულ-სივრცეების ბაზისები;
- გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით და დამტკიცებულია მათი უპირობო და ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ნეიმანის შიგა და გარე სასაზღვრო ამოცანები პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის გამოყენებით. დამტკიცებულია, რომ ნეიმანის გარე სასაზღვრო ამოცანა უპირობოდ და ცალსახადაა ამოხსნადი, ხოლო ნეიმანის შიგა სასზღვრო ამოცანისათვის ამოწერილია ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობები;
- გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერიალური მუდმივების მქონე არისაგან შედგენილი მთელი სამგანზომილებიანი სივრცისათვის, როდესაც ერთ-ერთი არე სასრულია, ხოლო მეორე წარმოადგენს მის დამატებას მთელ სივრცემდე; ამასთან, ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო მონაცემების შემთხვევაში;
- გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დირიხლეს სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა ორი განსხვავებული მატერია-

ლური მუდმივების მქონე ურთიერთ მოსაზღვრე სასრული კომპოზიტური არი-სათვის. დირიხლეს სასაზღვრო პირობა დასახელებულია სასრული კომპო-ზიტური სხეულის გარე საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამტკიცებულია ამ ამოცანის ცალ-სახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში;

- გამოკვლეულია ჰემიტროპული თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის რობენის სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანა უსასრულო კომპოზიტური არი-სათვის, რომელიც შედგება შიგა სიღრუვის მქონე სასრული არისაგან და მისი მოსაზღვრე უსასრულო კომპონენტისაგან. რობენის სასაზღვრო პირობა დასახელებულია უსასრულო კომპოზიტური სხეულის შიგა საზღვარზე, ხოლო ხისტი ტრანსმისიის პირობები დასახელებულია საკონტაქტო ზედაპირზე. დამ-ტკიცებულია ამ ამოცანის ცალსახად ამოხსნადობა ნებისმიერი საკონტაქტო და სასაზღვრო მონაცემების შემთხვევაში.