

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

ვასილ სოხაძე

ფირფიტების გაანგარიშება პლასტიკური დეფორმაციების გათვალისწინებით

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მშენებლობა“. შიფრი 0406

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

თვე, 2015 წელი

საავტორო უფლება © 2015- წელი, ვასილ სოხაძე

სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ვასილ სოხაძის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „ფირფიტების გაანგარიშება პლასტიკური დეფორმაციების გათვალისწინებით“ და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი:	პროფესორი თამაზ ბაციკაძე
რეცენზენტი:	ასოც. პროფ. დავით ჯანყარაშვილი
რეცენზენტი:	პროფ. მურმან ყალაბეგაშვილი აგრარული უნივერსიტეტი
რეცენზენტი:	

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015

ავტორი: ვასილ სოხაძე
დასახელება: „ფირფიტების გაანგარიშება პლასტიკური
დეფორმაციების გათვალისწინებით“
ფაკულტეტი : სამშენებლო ფაკულტეტი
აკადემიური ხარისხი: დოქტორი
სხდომა ჩატარდა: თარიღი

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ
ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის
შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების
უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც
მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან
სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი
ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო
უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა
იმ მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ
მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია
სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს
პასუხისმგებლობას.

რეზიუმე

ნაშრომი ეძღვნება თხელკედლიანი სივცრული კონსტრუქციების გაანგარიშებას, რომელთა მთავარ შემადგენელ ელემენტს წარმოადგენს თხელი ფილები (ფირფიტები). მათი შესწავლის აქტუალობა განპირობებულია იმ მზარდი მოთხოვნებით, რომლებსაც მათ უყენებს თანამედროვე ტექნიკა და მშენებლობა. ისინი ფართოდ გამოიყენება სამრეწველო და სამოქალაქო მშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, მანქანათმშენებლობაში, ავიამშენებლობაში აეროდრომების მშენებლობაში და სხვ. აღნიშნული სისტემების ასეთი პოპულარობა განპირობებულია, ერთის მხრივ, მათი სიმტკიცის მაღალი მაჩვენებლებით, მეორეს მხრივ კი კონსტრუქციის წონის მკვეთრად შემცირების შესაძლებლობით, რასაც გადამწყვეტი მნიშვნელობა ენიჭება საფრენი აპარატების (თვითმფრინავები, რაკეტები და სხვა) პროექტების განხორციელებისას.

თანამედროვე მანქანა-დანადგარებისა და ნაგებობების გაანგარიშება სიმტკიცეზე ხშირად მოითხოვს ინჟინრისაგან ისეთი ფაქტორების და მოვლენების გათვალისწინებას, რაც მხოლოდ პლასტიკურობის თეორიის დახმარებით არის შესაძლებელი. ამასთანავე, დრეკადი მოდელების საფუძველზე შესრულებულმა გაანგარიშებამ შეიძლება გამოიწვიოს როგორც მასალის გადახარჯვა, ასევე კონსტრუქციის წონის გაუმართლებელი ზრდა, რაც განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია საფრენი აპარატებისადმი წაყენებული მოთხოვნების თვალსაზრისით.

დეფორმაციული თეორიის შესაძლებლობათა კრიტიკული ანალიზი გვარწმუნებს, რომ მისი გამოყენება დრეკად-პლასტიკური წონასწორობის შესასწავლად მიზანშეწონილია მხოლოდ გარკვეული შეზღუდვების პირობებში დეფორმაციისა და დატვირთვის მიმართ. კერძოდ, ზიდვის უნარის განსაზღვრის მიზნით გამართლებულია სენ-ვენან, ლევი, მიზესის თეორიით სარგებლობა, რადგან იგი განკუთვნილია იდეალურად პლასტიკურ-ხისტი ტანისათვის.

RESUME

The work is related to analysis of thin-walled spatial structures, whose main constituent element is presented by thin plates. The urgency of their study is stipulated due the increasing demands that are arisen by modern technology and construction. They are widely used in industrial and civil construction, shipbuilding, machine building, aircraft engineering, considered of aerodrome and so on. Such popularity of these systems is stipulated due, on one hand, their high strength characteristics, and on the other hand, due the possibility to reduce the weight of structure that is of crucial importance for implementation of aircraft engineering's (airplanes, missiles and so on) design.

The strength analysis of modern machinery and engineering facilities often requires from engineers consideration of such factors and phenomena that are available only by the theory of plasticity. At the same time, carried out analysis on the basis of elastic model would cause the excessive consumption of materials, as well as an unjustified increase in the weight of structure that is especially important for requirements to aircrafts.

The critical analysis of deformation theory assures us that its application for the study of elastic-plastic equilibrium is advisable only for condition of certain restrictions related to deformation and load. In particular, in order of determination of carrying capacity is justified the application of Saint-Venant, Levy, Mises theory, because it is stipulated for ideal plastic-rigid body.

შინაარსი

ზოგიერთი ცნობა ფილებისა და ფირფიტების თეორიის თანამედროვე მდგომარეობის შესახებ. ფილებისა და ფირფიტების თეორიის განვითარების ეტაპები -----	1
ნახვრეტებისა და ბზარების მქონე ფირფიტების და ფილების სიმტკიცის საკითხები -----	2
ტექნიკის დარგში ფირფიტებისა და ფილების თეორიის გამოყენების შესახებ -----	4
დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორიების დახასიათება -----	6
დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა -----	8
თავი 1 დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის დამოკიდებულებები --	13
1.1. დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის დამოკიდებულებანი დრეკადობის თეორიის მიხედვით. პრანდტლ-რეისის განტოლებები.--	13
1.2. მასალის განმტკიცება -----	21
1.3. ზოგადი დეფორმაციული თეორია. ჰენკის განტოლება. -----	27
1.4. პლასტიკური პოტენციალი და დენადობის თეორიის განტოლებები -- -----	31
1.5. დისიპაციის ენერჯის მაქსიმუმის პრინციპი. -----	35
1.6. ანიზოტროპული მასალის პლასტიკური დენადობის განტოლებები. -- -----	38
1.7. დამოკიდებულებანი ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის განმტკიცებადი ანიზოტროპული მასალებისათვის. -----	43
1.8 პლასტიკურობის თეორიის ზოგიერთი პრობლემის შესახებ. ---	46
თავი 2. კოჭების, ფილების და რგოლების დრეკად-პლასტიკური ღუნვის ელემენტარული ანალიზი. -----	61
2.1. პლასტიკური ღუნვის თეორია -----	61

2.2 ძაბვებისა და დეფორმაციების არაწრფივი დამოკიდებულებისას M მლუნავი მომენტის და ჩაღუნვების გამოსათვლელი გამოსახულებები ---
-----66

2.3. მხები ძაბვების განაწილება. იდეალური მასალის კოჭის ღუნვა-70

2.4. ფორმის გავლენა. ირიბი (ასიმეტრიული) პლასტიკური ღუნვა -75

2.5 პლასტიკური ღუნვა შემდგომი დრეკადი განტვირთვით (ნარჩენ ძაბვათა განაწილება, დრეკადი ზამბარილება, ბრტყელი დეფორმაცია) ---
-----79

თავი 3 ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვა. ზღვრული დატვირთვების განსაზღვრა. -----84

3.1 ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვა -----84

3.2. განმტკიცებადი კოჭებისა და ფირფიტების ღუნვა -----94

3.3. წრიული ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვა -----99

3.4. პლასტიკური ზონების განაწილება გრძივ კვეთებში -----107

3.5. წრიული ფირფიტების ხისტ-პლასტიკური ღუნვა -----127

3.6. განმტკიცებადი წრიული ფირფიტის ღუნვა -----141

3.7. ფირფიტის პლასტიკური ღუნვის ძირითადი განტოლებების ინტეგრება -----152

3.8. წრიული და რგოლური ფირფიტების ზღვრული დატვირთვების განსაზღვრა -----161

ლიტერატურა -----172

ნახაზები

ნახ. 1.1.1	-----	17
ნახ. 1.2.1	-----	23
ნახ. 1.3.1	ექსპერიმენტული (1) და თეორიული (2) მრუდები ლევი- ლოდეს კოეფიციენტის ცვლილებისათვის	-----29
ნახ. 1.4.1	-----	33
ნახ. 1.5.1.	პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდი	-----36
ნახ. 1.5.2.	დისიპაციის მაქსიმუმის პრინციპის ილუსტრაცია	-----37
ნახ.1.8.1	-----	50
ნახ.2.1.1	მართკუთხა კვეთის კოჭი, რომელიც განიცდის სუფთა ღუნვას	61
ნახ. 2.1.2.	ძაბვის განაწილება მართკუთხა კვეთის მქონე კოჭში	-----64
ნახ. 2.1.3	ძაბვა-დეფორმაციის მრუდი	-----65
ნახ. 2.2.1	-----	66
ნახ. 2.2.2	P ძალით დატვირთული კონსოლური კოჭი	-----68
ნახ. 2.3.1	კოჭის ელემენტის წონასწორობა განივი ჩაღუნვისას	-----70
ნახ. 2.3.2	რბილი ფოლადის ფირფიტაში ძალთა წყვილის მოდების შედგად წარმოქმნილი პლასტიკური დეფორმაციები	-----73
ნახ. 2.4.1	ასიმეტრიული განივი კვეთის მქონე კოჭის ღუნვა	-----76
ნახ. 2.5.1	იდეალური დრეკადპლასტიკური მასალის კოჭში ნარჩენი ძაბვების და დრეკადი ზამბარიერების ძაბვების განაწილება	-----81
ნახ. 3.1.1	-----	85
ნახ. 3.1.2	-----	89
ნახ. 3.3.1	-----	100
ნახ. 3.3.2	-----	104

6sb. 3.4.1	113
6sb. 3.4.2	114
6sb. 3.4.3	114
6sb. 3.4.4	116
6sb. 3.4.5	117
6sb.3.4.6	117
6sb. 3.4.7	118
6sb. 3.4.8	119
6sb. 3.4.9	119
6sb. 3.4.20	119
6sb. 3.4.11	125
6sb. 3.4.12	125
6sb. 3.4.13	126
6sb. 3.4.14	126
6sb.3.5.1	131
6sb. 3.5.2	131
6sb. 3.5.3	134
6sb. 3.5.4	134
6sb. 3.6.1	148
6sb. 3.6.2	148
6sb. 3.6.3	150
6sb. 3.6.4	151
6sb. 3.7.1	154
6sb. 3.7.2	156
6sb. 3.7.3	159
6sb. 3.8.1	162
6sb. 3.8.2	164
6sb. 3.8.3	166
6sb. 3.8.4	169
6sb. 3.8.5	169

ცხრილები

ცხრილი 1	-----	115
ცხრილი 2	-----	115
ცხრილი 3	-----	117
ცხრილი 4	-----	118
ცხრილი 5	-----	124
ცხრილი 6	-----	124

ზოგიერთი ცნობა ფილებისა და ფირფიტების თეორიის თანამედროვე მდგომარეობის შესახებ

ფილებისა და ფირფიტების თეორიის განვითარების ეტაპები

ფილების და ფირფიტების თეორია წარმოადგენს მყარი დეფორმადი ტანის მექანიკის ვრცელ განშტოებას, რომელსაც გააჩნია რთული სტრუქტურა და მისი გაანგარიშების საკითხი, როგორც მკაცრი საინჟინრო დისპიცლინის, დაიწყო მე-19 საუკუნის პირველი ნახევრიდან, ლ. ნავიეს, ო. კოშის და ს. პუასონის შრომების გამოქვეყნებით. ამჟამად ფილების და ფირფიტების თეორიას ეძღვნება რამოდენიმე ათასი ნაშრომი. გამოქვეყნებული ლიტერატურის მოკლე ანოტაციები მოცემულია ი. ალუშიაეს [29], [30], ო. ონიაშვილის [30], გ. ჯანელიძის [31], ი. ნემიშის [32], პ. ნაჰდის [34] და სხვა შრომებში. ცნობილია, რომ ფილების და ფირფიტების პრაქტიკაში გამოყენებამ, ბევრად გაუსწრო წინ გაანგარიშების თეორიას. ერთის მხრივ, ინჟინრები კონკრეტული პროექტების შესრულებისას ქმნიდნენ გამარტივებულ მოდელებს და ამის საფუძველზე გაანგარიშებები დაჰყავდათ რიცხვით ფორმებზე. მეორეს მხრივ, იქმნებოდა თხელი ფილების და ფირფიტების ზოგადი წრფივი თეორია.

ქართველ მეცნიერებს შორის ფილების თეორიაში დიდი ღვაწლი მიუძღვით ნ. მუსხელიშვილს [21], შ. მიქელაძეს [30], მ. მიქელაძეს [36], ა. კაკუშაძეს [37], ო. ონიაშვილს [30] და სხვებს.

XX საუკუნის 20-50-იან წლებში დაიწყო ფილებისა და ფირფიტების თეორიის შექმნის შემდეგი ეტაპი. იგი ვითარდება სხვადასხვა, ხშირად გადამკვეთი მიმართულებებით. განიხილება ისეთი კონსტრუქციული თავისებურებებიც, როგორცაა შრეების, წიბოების, დიაფრაგმების, კონტურის ელემენტების, ნახვრეტების არსებობა. განვითარდა ფილების თეორიის საკონტაქტო ამოცანა და ლოკალური ზემოქმედების გავლენის შეფასება. განიხილება მასალის უფრო რთული თვისებები: არაწრფივი დრეკადობა, ანიზოტროპულობა, პლასტიკურობა, სიბლანტე. მცირე დეფორმაციების განხილვიდან გადავიდნენ დიდ გადაადგილებებზე. ვითარდება გეომეტრიულად არაწრფივი თეორია და მის ბაზაზე კონსტრუქციის ყოფაქცევა – როგორც სტატიკური ისე დინამიკური ზემოქმედებისას. ფილებზე ძალოვან ზემოქმედებასთან ერთად შეისწავლება თბურიც – კონსტრუქციის თერმოდრეკადობა და ელექტრომაგნიტური დრეკადობა.

საკმაოდ გაფართოვდა მათემატიკური აპარატის გამოყენება როგორც უკვე არსებული პრობლემების რეალიზაციისათვის, ასევე ახალი პრობლემების უზრუნველსაყოფად. თეორიულს პარალელურად გამოიყენება კვლევის ექსპერიმენტალური გზა. რთული პრობლემების რიცხვით შედეგებამდე მიყვანა შესაძლებელი გახდა კომპიუტერების ფართოდ გამოყენებამ რიცხვითი მეთოდების და დისკრეტული საანგარიშო მოდელების განვითარების პირობებში.

ნახვრეტებისა და ბზარების მქონე ფირფიტების და ფილების სიმტკიცის საკითხები

პირველად ზოგადი თეორია, რომელიც ეყრდნობოდა კირჰხოფის ჰიპოთეზას, შემოთავაზებული იყო გ. არონის მიერ, მაგრამ ეს თეორია შეიცავდა უზუსტობებს, რომლებიც გაასწორა ა. ლავინმა. ფილების ზოგადი თეორიის ჩამოყალიბებაში გარკვეული როლი შეასრულა ი. ბუბნოვის [5], ზ. გალიორკინის [7,8,9], ს. ტიმოშენკოს [6] მონოგრაფიებმა.

ფირფიტებისა და ფილების თეორია, რომელიც არის მყარი დეფორმადი სხეულების მექანიკის ნაწილი, ერთის მხრივ, საზრდოობს

მისი სხვა დარგების იდეებითა და მეთოდებით, ხოლო მეორეს მხრივ, აყალიბებს საფუძველს მექანიკის ახალი დარგების განვითარებისათვის. ასე მოხდა, როდესაც შემოიტანეს კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის გამოყენების იდეა დრეკადობის თეორიაში, რომელიც გამოთქვა გ. კოლოსოვმა [43] და განავითარა ნ. მუსხელიშილიმა [21]. ეს იდეა ფართოდ გამოიყენება გარსებში ნახვრეტებთან ახლოს დაბვათა კონცენტრაციის ამოცანათა გადასაწყვეტად. კერძოდ, გ. სავინისა და მისი მოწაფეების მიერ [16]. ეს შედეგები მთელ რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვანია ბზარების თეორიისა, და ამგვარად, რღვევის მექანიკის განვითარებისათვის.

ნახვრეტების სიახლოვეში დაბვების კონცენტრაციის შესახებ ფუნდამენტური შრომა გამოაქვეყნა გ. სავინმა [57]. ამ მონოგრაფიაში წარმოდგენილ კვლევებს, გარდა თეორიული ინტერესისა, აქვთ პრაქტიკული მნიშვნელობა.

ამავე პრობლემას ეძღვნება გ. სავინისა და ვ. ტულჩიის [16] მონოგრაფია, რომელიც შეიცავს ნახვრეტის სიახლოვეში დაბვათა კონცენტრაციის თეორიულ და ექსპერიმენტალურ გამოკვლევებს ბრტყელი დეფორმაციისა და განზოგადოებული ბრტყელი დაბვათა მდგომარეობის პირობებში. შედეგები წარმოდგენილია გრაფიკებისა და ცხრილების სახით.

ნახვრეტების სიახლოვეში დაბვების კონცენტრაციას იკვლევენ ა. გუზი და მისი თანამშრომლები [45]. [46] მონოგრაფიაში განხილულია დაბვათა-დეფორმირებული მდგომარეობა მრავალშრიანი არეებისათვის. გამოკვლეულია ფილების დრეკად-პლასტიკური მდგომარეობა საბოლოო ჩაღუნვების გათვალისწინებით.

[47,48] მონოგრაფიაში სხვა საკითხებთან ერთად განიხილება დაბვის ინტენსივობის კოეფიციენტები, მათ შორის თერმული დაბვებისათვის ფირფიტებში, რომელთაც აქვთ წვეტიანი უბნები და სხვა დეფექტები, მრუდწირული ღუნვის, გაჭიმვისა და გრეხის პირობებში. გაანალიზებულია დაბვათა ინტენსივობის კოეფიციენტებზე მასალის ანიზოტროპულობის, გადამჭრელი ძალების და დაბვათა ტენზორის არასიმეტრიულობის გავლენა. წარმოდგენილია გაანგარიშების შედეგების საფუძველზე აგებული გრაფიკები.

ტექნიკის დარგში ფირფიტებისა და ფილების თეორიის გამოყენების შესახებ

მთელ რიგ შრომებში გაშუქებულია თვითმფრინავებისა და გემების თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშება. ამ შრომათა ნაწილი უკვე განხილულია ჩვენს მიერ. აღვნიშნოთ კიდევ რამოდენიმე.

თვითმფრინავების სამშენებლო მექანიკის შესახებ მთელი რიგი შრომები ეკუთვნის ი. ობრაზცოვს [49,50]. ი. ობრაზცოვი იყო რედკოლეგიის თავმჯდომარე მთელი რიგი გამოცემებისა, რომლებიც ეძღვნებოდა თვითმფრინავის სამშენებლო მექანიკის პრობლემებს.

აღვნიშნოთ კიდევ რამოდენიმე შრომა, რომლებიც აშუქებენ თვითმფრინავთმშენებლობასთან დაკავშირებულ საკითხებს. ეს არის კ. ბალუბახის სამი სტატია, სადაც წარმოდგენილია თვითმფრინავის კონსტრუქციის ფრაგმენტების გაანგარიშება. ს. კანისა და ი. პანოვკოს და ა. უმანსკის შრომებში არის ოთხი თავი, რომლებშიც წარმოდგენილია ფირფიტების ღუნვისა და მდგრადობის საკითხები, მათი დრეკადობის მიღმა მუშაობის ჩათვლით, აგრეთვე ცილინდრული გარსების თეორიის ელემენტები. მეორე ტომში განხილვა თვითმფრინავის ფრთის ზოგადი სიმტკიცე და სიხისტე. მესამე ტომში სხვა საკითხებთან ერთად წარმოდგენილია თვითმფრინავის ჰერმეტიკული კაბინის სიმტკიცის საკითხები და მისი ნაწილების დრეკადი რხევები. ნაშრომში თვითმფრინავის კონსტრუქციის ელემენტების გაანგარიშების გარდა, მოცემულია ფიუზელაჟის და ფრთის კონსტრუქციის მზიდუნარიანობის განსაზღვრა. ა. უმანსკიმ შექმნა ჩაკეტილი განიგვეთის მქონე თხელკედლიანი ღეროს გაანგარიშების თეორია, რომელიც აგრეთვე გამიზნულია თვითმფრინავის კონსტრუქციებისათვის.

ს. კანის ნაშრომიც ეხება თვითმფრინავთმშენებლობას, თუმცა განიხილავს თეორიის და გაანგარიშების ზოგად საკითხებს.

ა. ალექსანდროვის და ლ. კულშინის რედაქციით გამოქვეყნებულ ორ კრებულში განიხილება სამფენოვანი პანელების გაანგარიშება საავიაციო კონსტრუქციების ელემენტების დაპროექტების მიზნით. ამ კრებულების გამოცემა წინ უსწრებდა სპეციალურად სამფენოვანი პანელებისადმი მიძღვნილ ნაშრომს.

აღსანიშნავია აგრეთვე სამი კრებული: (ვ. კაბანოვის რედაქციით), (ი. ობრაზცოვისა და ა. ვოლშირის რედაქციით) და (ვ. ვასილიევის რედაქციით), სადაც წარმოდგენილია თვითმფრინავის კონსტრუქციების გაანგარიშება. გამოკვლეულია არაწრფივი დეფორმაცია და მდგრადობა. განხილულია საფრენი აპარატების საიმედოობის პრობლემები მათი გამოცდის, ნავიგაციისა და მანევრირების შემთხვევაში.

ფირფიტების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის განსაზღვრა და მდგრადობის შეფასება მათი გემის კონსტრუქციებში გამოყენების თვალსაზრისით განთავსებულია ფუნდამენტალურ ნაშრომში „გემის სამშენებლო მექანიკა“ [10]. ფირფიტების გაანგარიშებას ეძღვნება აგრეთვე ი. შიმანსკის ნაშრომი.

გემთმშენებლობაში გამოყენებული სამფენოვანი კონსტრუქციებისადმი წაყენებულ მოთხოვნებს ეხება ბ. პროხოროვისა და ვ. კობალევის ნაშრომი. მასში კერძოდ გამოკვლეულია დეფექტების გაჩენის მიზეზები და მოცემულია სამფენოვანი კონსტრუქციების ტექნიკურ-ეკონომიკური შეფასება. განსაკუთრებული სპეციფიკისაა გარსები, რომლებსაც იყენებენ მშენებლობაში. ამ კონსტრუქციების გამოყენების ძირითადი სფეროა შენობათა სახურავები. პირველი ნაშრომი, რომელშიც გარსები განიხილებოდა ამ ასპექტში, იყო ფ. დიშინგერის [51]. შემდეგი იყო ი. შტაერმანის ნაშრომი [52], უფრო მოგვიანებით გამოვიდა მისი ნაშრომი „შეაფრებული ფილები, დაპროექტება და მშენებლობა“.

დერეკადობის და პლასტიკურობის თეორიების დახასიათება

დრეკადი სხეულებისათვის დამახასიათებელი თვისებებია წრფივი დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის. დრეკადობის ზღვარზე ეს დამოკიდებულება ხშირად ირღვევა. იგი იცვლება მრუდწირული კანონით, მაგრამ აქ შესაძლებელია საქმე გვქონდეს ორ გარემოებასთან: ნელი განტვირთვისას სხეული ან დაუბრუნდება თავის პირვანდელ მდგომარეობას, ან ადგილი ექნება ნარჩენ, ანუ პლასტიკურ დეფორმაციას. საზოგადოდ, მყარი სხეულების დეფორმაცია შედგება ორი ნაწილისაგან – დრეკადი და პლასტიკური დეფორმაციები. შესაძლებელია ვითარდებოდეს დრეკადი დეფორმაციები და შემდეგ პლასტიკური (ფოლადი), ან ორივე დეფორმაციას ერთდროულად ჰქონდეს ადგილი (ბეტონი).

პლასტიკურობის თეორია სწავლობს პლასტიკური სხეულების დეფორმირებულ და ძაბვით მდგომარეობას. ის ადგენს პლასტიკური დეფორმაციების და ძაბვების წარმოშობის ზოგად კანონებს.

როგორც დრეკადობის თეორიაში, აქაც დგება ზოგადი განტოლებები, რომლებიც ერთიმეორესთან აკავშირებს დეფორმაციებს და ძაბვებს (დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია), ან დეფორმაციების სიჩქარეებს და ძაბვებს (პლასტიკური დენადობის თეორია). პლასტიკურობის თეორიაც იყოფა ორ ნაწილად: პლასტიკურობის მატემატიკური თეორია და პლასტიკურობის გამოყენებითი თეორია (სრულიად იმ სახით, როგორც იყოფა დრეკადობის თეორია).

სხეულების დეფორმირებულ და ძაბვით მდგომარეობას განსაზღვრავს არა მარტო დრეკადი და პლასტიკური თვისებები (ძირითადად ესენია მთავარი თვისებები), არამედ მნიშვნელობა აქვს დროის ფაქტორსაც. ჩვენ ამ ფაქტორს ვეხებით იმდენად, რამდენადაც მასთან დამოკიდებულებაში (მისი გავლენით) იცვლება სხეულის მექანიკური თვისებები. დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიის შესწავლისას, დროის ასეთ გავლენას მხედველობაში არ ვღებულობთ, რისი უგულებელყოფაც ბევრი სხვადასხვა ხასიათის ამოცანების განხილვისას შეუძლებელია.

ცნობილია სამშენებლო მექანიკის სტატიკური და დინამიკური ამოცანები. ასეთივე სახის ამოცანებს ვსწავლობთ დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიაშიც. დინამიკური ამოცანები იმით ხასიათდება, რომ სხეულის წერტილებს აქვთ აჩქარება, რის გამოც დატვირთვებს ემატება ინერციის ძალები. აჩქარება კი დროზეა დამოკიდებული და, მაშასადამე, დროის ფაქტორის უგულებელყოფა აქ არ შეიძლება, მაგრამ ასეთ შემთხვევებში სხეულის მექანიკური თვისებები არ იცვლება და ამიტომ აქ ლაპარაკია დროის სულ სხვა გავლენაზე, რომელთანაც საქმე გვაქვს დინამიკური ამოცანების შესწავლისას.

ამ საერთო შენიშვნის შემდეგ შეგვიძლია დავახასიათოთ სხეულის დრეკადი თუ პლასტიკური მდგომარეობა.

მყარი სხეულის დრეკადი მდგომარეობა ეწოდება ისეთ მდგომარეობას, როდესაც სხეულის ყოველი ტემპერატურისათვის, დროისაგან დამოუკიდებლად, არსებობს ურთიერთ-ცალსახა დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის. ეს დამოკიდებულება ჩვეულებრივ წრფივია და გამოისახება ჰუკის კანონით.

პლასტიკური მდგომარეობა ეწოდება მყარი სხეულის ისეთ მდგომარეობას, როდესაც მოცემული ტემპერატურისათვის კავშირი ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის დროის ყოველ მოცემულ მომენტში ხდება ცალსახა, თუ ცნობილია ყველა მისი წინათმყოფი ძაბვითი და დეფორმირებული მდგომარეობა და ტემპერატურის შესაბამისი მნიშვნელობანი, წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს კავშირი განუსაზღვრელია: [28] [55].

დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიის განვითარების მოკლე მიმოხილვა

დრეკადობის თეორიის, როგორც ცალკე მეცნიერული დისციპლინის ჩამოყალიბება იწყება მე-19 საუკუნის პირველი მეოთხედიდან. დრეკადობის თეორიაში პირველ შრომად ითვლება ფრანგი მეცნიერის ნავიეს მემუარი, სადაც მოცემული იყო დრეკადობის თეორიის წონასწორობის ზოგადი დიფერენციალური განტოლებანი. იმავე პერიოდს ეკუთვნის პუასონის, კოშის და ოსტროგრადსკის შრომები. 1822 წელს კოშიმ მიიღო დრეკადობის თეორიის ძირითადი დამოკიდებულების და ცნებების უმრავლესობა. აღსანიშნავია, რომ პირველად კოშიმ შემოიტანა მოცემულ წერტილში ძაბვის ცნება. პუასონმა თავისი მემუარი (პირველი მემუარი) წარუდგინა პარიზის აკადემიას 1828 წელს. ის იხილავდა დრეკადობის თეორიის მრავალ საკითხს, რომლებიც განხილული იყო კოშისა და მას ნავიეს მიერ და მას ჩამოყალიბებული ჰქონდა დრეკადობის ზოგადი თეორია.

1829-1832 წლებში ოსტროგრადსკიმ გამოაქვეყნა რამდენიმე შრომა დრეკადობის დინამიკურ თეორიაში. ამავე მიმართულებით მუშაობდა პუასონიც. ამნაირად ნავიემ, კოშიმ, პუასონმა და ოსტროგრადსკიმ საფუძველი ჩაუყარეს მატემატიკური დრეკადობის თეორიას.

1837 წელს გრინმა ენერჯიის შენახვის პრინციპის გამოყენების საფუძველზე საბოლოოდ დაადგინა, რომ დრეკადობის დამოუკიდებელი მუდმივების რიცხვი არის 21. გრინმა აქ შემოიტანა დრეკადი პოტენციალის ცნება, რომლის არსებობის დამტკიცება მოგვცა კელვინმა 1855 წელს.

ცნობილია, რომ ჰუკმა 1660წ. აღმოაჩინა კანონი, რომელიც მის სახელს ატარებს, ხოლო იუნგმა 1807 წელს შემოიღო დრეკადობის მოდულის ცნება. ერთი მხრივ ამ ფაქტების გამოყენებამ და მეორე მხრივ იმ გარემოებამ, რომ დრეკადობის თეორიის საფუძველები უკვე მოცემული იყო, საშუალება მისცა სტოკსს (1845 წ) განესაზღვრა იზოტროპული სხეულების წინააღობის ძირითადი სახეები. აქ მან შემოიტანა მოცულობითი კუმშვის და ძერის მოდულის ცნებები.

მე-19 საუკუნის მეორე და მესამე მეოთხედს ეკუთვნის ლამესა და კლაპეირონის შრომები, რომლებიც მუშაობდნენ პეტერბურგში. პირველად მათ მიერ იყო გამოყენებული მწკრივებად დაშლის მეთოდი დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად. ცნობილია აგრეთვე

ლამეს ამოცანა, რომელიც სქელკედლიანი ჭურჭლების გაანგარიშებას ეხება. ამ მიმართულებით რუს მეცნიერს გადოლინს ეკუთვნის უდიდესი მნიშვნელობის შრომები, რომლებიც მან გამოაქვეყნა 1852-1854 წლებში. გადოლინმა შექმნა საარტილერიო იარაღების სიმტკიცეზე გაანგარიშების თეორია. თუ ნაიეს, კოშის, პუასონის, ოსტროგრადსკის და სხვების შრომების საფუძველზე განვითარდა მათემატიკური დრეკადობის თეორია, ლამეს, კლაპეირონის, კირჰოფის, კლებშის, გადოლინისა და ბევრი სხვა მეცნიერის გამოკვლევებით ვითარდებოდა გამოყენებითი დრეკადობის თეორია.

საერთოდ, დრეკადობის თეორიის განვითარების საქმეში განსაკუთრებული ღვაწლი მიუძღვის სენ-ვენანს. მან მოგვცა გრეხისა და ღუნვის ამოცანების ზუსტი ამოხსნა (1855 წ.), ჩამოაყალიბა პრინციპი, რომელიც მის სახელს ატარებს. ტრესკას (1868 წ.) ექსპერიმენტული გამოკვლევების საფუძველზე სენ-ვენანმა პირველმა თეორიულად დაადგინა პლასტიკურობის პირობა. სენ-ვენანს ეკუთვნის დრეკადობის თეორიის სხვა ბევრი საკითხის შესწავლა. 1850 წელს კირჰოფმა დაამუშავა თხელი ფილების გაანგარიშების თეორია. მანვე 1859 წ. მოგვცა გრეხისა და ღუნვის განსაკუთრებული შემთხვევების ამოხსნა.

1872 წ. ბეტიმ დრეკადობის თეორიაში პირველად გამოიყენა ე.წ. ამოხსნის მეთოდი განსაკუთრებული წერტილებით. ნახევარსივრცეში ძაბვების განაწილების და შეყურსული ძალის მიერ „ადგილობრივი შეშფოთების“ თეორია მოგვცა ბუსინეკმა 1878-1879 წლებში. გერცმა (1882 წ.) გამოიკვლია ორი სხეულის ერთმანეთზე დაწოლის პრობლემა. თუ ზემოთ დასახელებული და ბევრი სხვა მეცნიერის ნაშრომები უმეტესწილად ეკუთვნოდა წმინდა დრეკადობის თეორიას, ამავე დროს პარალელურად ვითარდებოდა მასალათა გამძლეობა, რომლის საფუძველის ჩამყრელია დ.ი. ჟურავსკი. ჟურავსკის, ფ.ს. იასინსკის, ვ.ლ. კირპიჩევის, რანკინის და სხვების შრომების საფუძველზე ჩამოყალიბდა მასალათა გამძლეობა, როგორც ცალკე მეცნიერული დისციპლინა.

განსაკუთრებით უნდა განვიხილოთ დრეკადობის თეორიის ე.წ. ბრტყელი ამოცანები (ორგანზომილებიანი სისტემის შემთხვევა).

ბრტყელი ამოცანების შესწავლაში დიდი ღვაწლი მიუძღვის მორის ლევის. დრეკადობის თეორიაში ცნობილია განტოლება, რომელიც მის სახელს ატარებს.

შედარებით უფრო ზოგადი თეორია მოცემული იყო რიბიერის (1888 წ.) და ფაილონის (1903 წ.) მიერ. დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების ამოხსნა შესაძლებელია კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების გამოყენებით. ამ მიმართულებით ცნობილია კლებშის, ლიავის და ფაილონის (1903 წ.) შრომები. განსაკუთრებით აღსანიშნავია გ.ვ. კოლოსოვის შრომა (1909 წ.), რომელშიაც მოცემულია ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდი ანალიტიკური ფუნქციების თეორიის გამოყენებით.

განსაკუთრებით დიდი მნიშვნელობა აქვს ნ. ი. მუსხელიშვილის შრომებს, რომელმაც კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის გამოყენებით გააფართოვა დრეკადობის თეორიის გამოყენების სფერო.

მე-19 საუკუნის უკანასკნელი მეოთხედიდან საერთოდ დრეკადობის თეორიის ბევრ საკითხში წამყვანი როლი რუსეთის მეცნიერებმა დაიკავეს. ფუნდამენტალურ წარმატებას მიაღწიეს შემდეგმა მეცნიერებმა: ნ. ს. გოლოვინმა, ვ. ლ. კირპიჩევმა, გ. ვ. კოლოსოვმა, ი. გ. ბუბნოვმა, ბ. გ. გალიორკინმა, ა. ნ. კრილოვმა, ნ. ა. ბელელიუბსკიმ, ლ. ს. ლეიბენზონმა, ა. ნ. დინნიკმა, ც. ვ. პაპკოვიჩმა, ნ. მ. ბელიაევმა. და სხვა [28].

ბუბნოვმა დაამუშავა ჯაჭვური ძაბვებით თხელი ფილების გაანგარიშების თეორია, მან პირველმა დააყენა საკითხი, რიტცის ე.წ. ვარიაციული და ენერგეტიკული მეთოდებისაგან განსხვავებით სხვა, უფრო მოხერხებული მეთოდის გამოყენებისა დრეკადობის თეორიის ამოცანების ამოსახსნელად. ეს მეთოდი დაამუშავა გალიორკინმა, რომელიც (გალიორკინის ვარიაციული მეთოდი), მთელი მსოფლიოს ბევრი მეცნიერის კვლევის საგანი იყო და არის. გალიორკინს ეკუთვნის ფუნდამენტალური შრომები ფილების გაანგარიშების საკითხში. დრეკადობის თეორიის ამოცანების (მათ შორის ბრტყელი ამოცანების) ამოხსნის ზოგადი მეთოდების დამუშავება და სხვა. გემის სამშენებლო მექანიკის დარგში კლასიკური შრომების ავტორებია კრილოვი,

პაპკოვიჩი, ბუბნოვი. დრეკადობის თეორიის განვითარებასი დიდი ღვაწლი მიუძღვის ს. პ. ტიმოშენკოს.

XX საუკუნის 20 წლების შემდეგ დამუშავდა ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის ზოგადი მეთოდები კომპლექსური ცვლადის ფუნქციების გამოყენებით (მუსხელიშვილი და მისი სკოლა); ვარიაციული მეთოდები (გალიორკინი, ლეიბენზონი, ლ. კანტოროვიჩი, ტიმოშენკო, გ. ი. ჯანელიძე, ო.დ. ონიაშვილი, ა. მ. კაკუშაძე, და სხვა); თხელკედლიანი დეროების გაანგარიშების თეორია (ვ. ზ. ვლასოვი, ა. ა. უმანსკი, ა. რ. ალადუროვი, გ. ი. ჯანელიძე და სხვა), ანიზოტროპული სხეულების დრეკადობის თეორია (ს. გ. ლეხნიცკი, ნ. გ. ჩენცოვი და სხვა), სქელი და თხელი ფილების გაანგარიშების მეთოდები (გალიორკინი, პაპკოვიჩი, ა. ო. ლურიე, ლ. გ. მადნარაძე, ი. ა. შიმანსკი, ა. ს. კალმანოვიჩი, ს. ა. გერშგორიანი და სხვა); დრეკად ფუძეზე მდებარე ფილების გაანგარიშების თეორია (ნ. მ. გერსევანოვი, მ. ი. გორბუნოვ-პოსადოვი, გოჩკინი და სხვები).

საბჭოთა კავშირის საზღვარსგარეთელი მეცნიერებიდან, შეგვიძლია დავასახელოთ რიტცი, ტრეფცი, ჰენკი, ლიავი, ნეიმანი, ვებერი, ფეპლი და ბევრი სხვა.

მე-19 საუკუნის მეორე ნახევრიდან დრეკადობის თეორიის გვერდით ვითარდებოდა პლასტიკურობის თეორიაც. გაანგარიშების ზოგადი მეთოდები მოგვცეს მხოლოდ საბჭოთა კავშირის მეცნიერებმა. ს.ა. ხრისტიანოვიჩის, ს. ლ. სობოლევის, ა. ა. ილიუშინის, ვ. ვ. სოკოლოვსკის, ლ. მ. კაჩანოვის, ვ. ი. ნოვოტორცევის, ს. ს. გოლუშევეიჩის, ა. ა. გოზდევის და სხვების შრომების საფუძველზე შეიქმნა პლასტიკურობის თეორია ისეთივე სახით, როგორც დრეკადობის თეორია და ამოიხსნა მრავალი ამოცანა, რომელთა ამოხსნა მხოლოდ დრეკად მდგომარეობაში იყო ცნობილი. ილიუშინის მიერ დამუშავებული იქნა პლასტიკურობის ამოცანების ამოხსნის სქემები დრეკადობის თეორიის მეთოდების გამოყენებით. ამით მოხდა დრეკადობისა და პლასტიკურობის თეორიის დაახლოება. ასეთივე დაახლოება წარმოებს სამშენებლო მექანიკის სხვა დარგებისა დრეკადობის თეორიასთან. ამ მხრივ აღსანიშნავია ბ. ნ. უემონკინის და მ. გ. ფილონენკო-ბოროდიჩის გამოკვლევები (დრეკად ნახევარსივრცეში

თუ ნახევარსიბრტყეზე მდებარე ფილების და კოჭების გაანგარიშება), გვოზდევის და ა. ა. რუანიცინის შრომები (პლასტიკურობის თეორიის და სამშენებლო მექანიკის მეთოდების შერწყმა) და სხვა [26].

შედეგები და მათი განსჯა

თავი 1 დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის

დამოკიდებულებები

დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის დამოკიდებულებები აღწერს მყარი სხეულის დრეკად და პლასტიკურ დეფორმაციებს. შემდეგში დროისა და ტემპერატურის ზემოქმედებას მხედველობაში არ მივიღებთ, მაგრამ მხედველობაში მივიღებთ განმტკიცებას. გარდა ამისა დავუშვებთ, რომ მყარი მასალა იზოტროპულია და ბაუშინგერის ეფექტი შეიძლება უგულებელვყოთ [55].

უნდა აღინიშნოს, რომ კუთხური დეფორმაციის (γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx}) ტენზორის მდგენელების მნიშვნელობები ტოლია და არის შესაბამისი ფარდობითი კუთხური დეფორმაციების მნიშვნელობათა ნახევრები.

1.1. დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის დამოკიდებულებანი დრეკადობის თეორიის მიხედვით. პრანდტლ-რეისის განტოლებები. ლევი-მიზესისი განტოლებები.

დეფორმაციებსა და ძაბვებს შორის დამოკიდებულებანი დრეკადობის თეორიის მიხედვით.

იზოტროპული მყარი მასალისათვის თანაფარდობანი ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის დრეკადობის თეორიაში წარმოდგება შემდეგი სახით [23]:

$$\left\{ \begin{array}{l} E \cdot e_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ E \cdot e_y = \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \\ E \cdot e_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \\ 2G\gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ 2G\gamma_{zx} = \tau_{zx} \\ 2G\gamma_{xy} = \tau_{xy} \end{array} \right.$$

(1.1.1)

სადაც: E – იუნგის მოდულია;

ν - პუასონის კოეფიციენტი;

G – ძვრის მოდული.

მოცემულ სისტემაში მოსახერხებელია განვასხვავოთ ფორმისა და მოცულობის ცვლილებასთან დაკავშირებული დეფორმაციები, თუ σ_m - ჰიდროსტატიკური წნევაა, e_m - შესაბამისი მოცულობითი დეფორმაცია, მაშინ დრეკადობის მუდმივების გამოყენებით (1.1.1) სისტემა შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_x = \frac{1}{2G}(\sigma_x - \sigma_m) + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_m \\ e_y = \frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma_m) + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_m \\ e_z = \frac{1}{2G}(\sigma_z - \sigma_m) + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_m \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

სადაც $3\sigma_m = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ და $e_m = e_x + e_y + e_z = \frac{\sigma_m}{K}$ $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$;

$(\sigma_x - \sigma_m)$ და სხვა - შემცირებული ძაბვებია, ანუ ძაბვების დევიატორის კომპონენტები, რომლებსაც ავლნიშნავთ (σ'_x) -ით, მაშინ მივიღებთ ორმაგ ინდექსაციას და სრული თანაფარდობა ძაბვებს და დეფორმაციებს შორის შეიძლება ჩაიწეროს როგორც:

$$\left. \begin{array}{l} e_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{(1-2\nu)}{E}\delta_{ij}\sigma_m \\ \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii} \end{array} \right\} \quad (2.2.3)$$

კრონეკერის სიმბოლო (დელტა-სიმბოლო) $\delta_{ij} = 1$ როცა $i=j$ და $\delta_{ij} = 0$ როცა $i \neq j$.

პრანდტლ-რეისის განტოლებები.

პირველად იდეალური დრეკად-პლასტიკური მყარი სხეულების ბრტყელი დეფორმაციებისას ძაბვა-დეფორმაციის თანაფარდობები წარმოდგენილი იყო 1924წ. პრანდტლის მიერ, ხოლო 1930წ. რეისმა წარმოადგინა იგივე განტოლებები ზოგადი სახით. პრანდტლის

განტოლებები არის ლევი-მიზესის განტოლების განზოგადება, რომელიც მოცემულია ქვემოთ (1.1.10).

რეისს დაშვებული ჰქონდა, რომ პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდები (რომლებიც განტოლებაში აღნიშნ. P ზედა ინდექსით) დროის ნებისმიერ მომენტში პროპორციულია ერთდროულად მოქმედი დევიატორული და მხები ძაბვებისა:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_x^p}{\sigma'_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{\sigma'_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{\sigma'_z} = \frac{d\gamma_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (1.1.4)$$

ან

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sigma'_{ij} d\lambda$$

სადაც $d\lambda$ - პროპორციულობის დადებითი კონსტანტაა, რომელიც ზოგჯერ შეიცვლება დეფორმაციასთან ერთად.

განტოლებებიდან ჩანს, რომ დეფორმაციის მცირე ნაზრდი დამოკიდებულია დევიატორის კომპონენტების მიმდინარე მნიშვნელობებზე და არა მისი გამომწვევი ძაბვების ნაზრდზე. პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდისა და ძაბვების მთავარი ღერძები ერთმანეთს ემთხვევა. განტოლებები წარმოდგენას იძლევა პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდზე x ; y ; z ღერძების მიმართულებით და არ იძლევა უშუალო ინფორმაციებს მათ აბსოლუტურ სიდიდეზე.

სრული დეფორმაციის ნაზრდი არის ჯამი დრეკადი დეფორმაციის (რომელსაც ახლა $d\varepsilon$ -ს ნაცვლად ავლნიშნავთ $d\varepsilon^e$) და პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდებისა. ამგვარად (1.1.3) და (1.1.4) განტოლებებიდან მივიღებთ:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^e = \sigma'_{ij} d\lambda + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_m \quad (1.1.5)$$

რამდენადაც პლასტიკური დეფორმაცია არ იწვევს სხეულის მოცულობის ცვლილებას, გამოვიყენებთ რა მთავარ ნორმალურ დეფორმაციებს შეიძლება ჩავწეროთ პირობა:

$$(1.1.6) \quad d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0$$

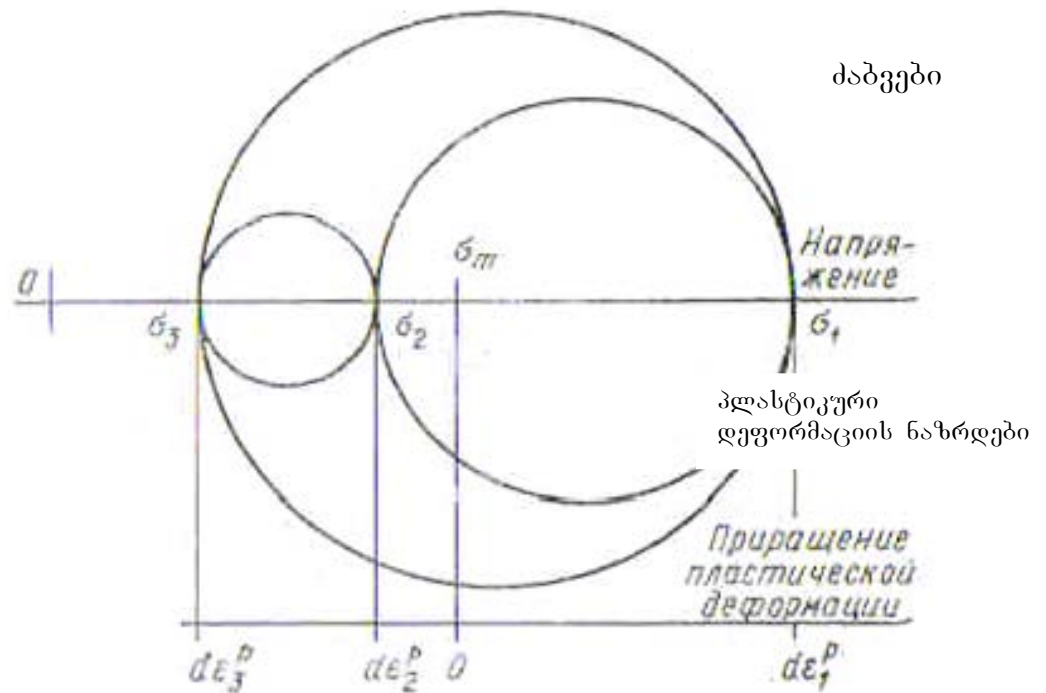
ახ

$$(1.1.4) \quad d\varepsilon_{ii}^p = 0$$

(1.1.4) განტოლებიდან მთავარი დაბეჭებისათვის მივიღებთ:

$$(2.1.7) \quad \frac{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p}{\sigma_3 - \sigma_1} = d\lambda$$

(2.1.7) ზემოთ აღნიშნულ განტოლება (1.1.7) ამტკიცებს, რომ მორის წრეები დაბეჭებისათვის და პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდებისათვის მსგავსია. (ნახ. 1.1.1)



ნახ. 1.1.1 მორის წრეები დაბეჭებისა და პლასტიკურ დეფორმაციათა ნაზრდებისათვის

(1.14) ფორმულას თუ ჩავწერთ ნორმალური ძაბვების აღნიშვნების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$d\varepsilon_x^p = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

ტიპის სამ განტოლებას.

ხოლო (1.15) განტოლება დაიშლება სამ განტოლებად:

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] + [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)]/E$$

$$d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right] + [d\sigma_y - \nu(d\sigma_x + d\sigma_z)]/E$$

$$d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] + [d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)]/E$$

და სამ შემდეგი სახის განტოლებად:

$$d\gamma_{yz} = \tau_{yz}d\lambda + d\tau_{yz}/2G$$

$$d\gamma_{xz} = \tau_{xz}d\lambda + d\tau_{xz}/2G$$

$$d\gamma_{xy} = \tau_{xy}d\lambda + d\tau_{xy}/2G$$

(1.18)

და ბოლოს, (1.15)-ის განტოლების გამოკვლევიდან შეიძლება აღინიშნოს, რომ დეფორმაციის სრული ნაზრდების გამოსახულებიდან შეიძლება გამოვეყოთ მოცულობითი დეფორმაციისა და დეფორმაციის დევიატორის ნაზრდები. მიზეხის პლასტიკურობის პირობის გათვალისწინებით პრანდტლ-რეისის განტოლებები შეიძლება ჩავიწეროთ შემდეგ სახით:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon'_{ij} &= \sigma'_{ij}d\lambda + d\sigma'_{ij}/2G \\ d\varepsilon_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E}d\sigma_{ii} \\ \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} &= 2k^2 \end{aligned} \right\}$$

(2.1.9)

სადაც k დენადობის ზღვარია სუფთა ძვრისას.

ხშირად ზემოთ – მოყვანილი განტოლებები დრეკად-პლასტიკური მყარი სხეულებისათვის პრაქტიკულად ძნელად გამოსაყენებელია და ამიტომ მცირეა მათი გამოყენების შემთხვევები. ამიტომ გამარტივების

მიზნით მნიშვნელოვანი სასრული პლასტიკური დეფორმაციების დროს დრეკადობა შეიძლება უზულებელყოფილი. მასალა ამ შემთხვევაში განიხილება როგორც იდეალურად ხისტ-პლასტიკური. ამ შემთხვევაში დენადობის ზღვარზე ნაკლები ძაბვებისათვის დეფორმირება არ ხდება, ხოლო სრული და პლასტიკური დეფორმაციების ნაზრდები ემთხვევა ერთმანეთს. ასეთი შემთხვევისათვის დამოკიდებულებები ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის წარმოადგინეს ლევიმ და მიხესმა.

ლევი-მიხესის განტოლებები

ვწერდით რა თანაფარდობებს ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის, ჩვენ მოვლენათა ისტორიულ განვითარებას არ მივყვებოდით. სწორედ ესაა გვეჩვენება ყველაზე უფრო ლოგიკურად, განვიხილოთ ლევი-მიხესის განტოლებები, როგორც პრანდტლ-რეისის განტოლების კერძო შემთხვევა. თუმცა პირველი ვინც ივარაუდა, რომ დეფორმაციათა ნაზრდების მთავარი დერძები ძაბვათა მთავარ დერძებს ემთხვევა, იყო სენ-ვენანის (1870წ.)

თანაფარდობა დეფორმაციების ნაზრდებსა და ძაბვათა დევიატორის კომპონენტებს შორის ზოგადი სახით პირველად განიხილეს ლევიმ (1871წ.) და მისგან დამოუკიდებლად მიხესმა (1913წ.) ახლა ეს განტოლებები ლევი-მიხესის სახელს ატარებენ, და ისინი შეიძლება ჩაიწეროს ასე:

$$\frac{d\varepsilon_x}{\sigma_x} = \frac{d\varepsilon_y}{\sigma_y} = \frac{d\varepsilon_z}{\sigma_z} = \frac{d\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = d\lambda$$

(1.1.10)

ზედა ინდექსი p (1.1.4)-დან შეიძლება გამოვტოვოთ, რადგანაც ახლა სრული და პლასტიკური დეფორმაციების ნაზრდები ერთი და იგივეა.

სრული ძაბვების აღნიშვნების გამოყენებით ჩაწერილი ლევი-მიხესის თანაფარდობა შეიცავს:

$$d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right]$$

$$d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

სამ განტოლებას და

$$d\gamma_x = \tau_{yz}d\lambda$$

$$d\gamma_y = \tau_{xz}d\lambda$$

$$d\gamma_z = \tau_{xy}d\lambda$$
(1.1.11)

სამ განტოლებას.

ვინაიდან ლევი-მიზესის განტოლებები დრეკად დეფორმაციებს არ ითვალისწინებს, დრეკად ნარჩენ ძაბვებზე ინფორმაციის მისაღებად მათი გამოყენება არ შეიძლება. ამ შემთხვევაში საჭიროა ვისარგებლოთ პრანდტლ-რისის უფრო რთული განტოლებებით.

1.2. მასალის განმტკიცება

თუკი მასალა ექვემდებარება ცივ დამუშავებას, მაშინ დამუშავების შემდეგ ის უფრო მტკიცე ხდება, ე.ი. დეფორმაციისას იზრდება მისი წინააღმდეგობა ფორმის შემდგომი ცვლილებისადმი, ამიტომ ვარაუდობენ რომ განმტკიცების ხარისხი დამოკიდებულია პლასტიკური დეფორმაციის დროს შესრულებულ მუშაობაზე და არა დეფორმაციის გზებზე. ამას ეწოდება პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობის ექვივალენტი. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, შემდგომი დეფორმირებისადმი წინააღმდეგობა დამოკიდებულია თავდაპირველად განმტკიცებულ მდგომარეობაში მყოფ სხეულზე შესრულებულ პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობაზე. წინააღმდეგობის ეს ცვლილება ფასდება პლასტიკურობის პირობით.

დადგენილია, რომ მიზესის პლასტიკურობის პირობა არის გაცილებით მარტივი თანაფარდობა, რომელიც კარგად აკმაყოფილებს ექსპერიმენტულ მონაცემებს წინასწარი დეფორმაციის ხარისხის

გაუთვალისწინებლად. ამ პირობით პლასტიკურობის წერტილთა საბოლოო გეომეტრიული ადგილი არ არის დამოკიდებული ჰიდროსტატიკურ წნევაზე. მთავარი ძაბვების ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) გამოყენებით ეს შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 6k^2$$

სადაც k არის დენადობის ძაბვა ძერისას, და ის დამოკიდებულია თავდაპირველ დეფორმაციაზე.

ჰილმა (1950წ.) ისარგებლა იზოტროპული განმტკიცების წესით, რომლის მიხედვით ივარაუდება, რომ პლასტიკური დეფორმაციის პროცესში პლასტიკურობის ზედაპირი ფართოვდება, მაგრამ თავდაპირველი ფორმა და მდებარეობა ჰიდროსტატიკური წნევით განსაზღვრული ხაზის მიმართ არ იცვლება. 1955წ. პრაგერმა შემოგვთავაზა განმტკიცების წესი: პლასტიკურობის ზედაპირი ინარჩუნებს თავის ზომებს, მაგრამ გადაადგილდება ძაბვათა სივრცეში დეფორმაციის ნაზრდის მიმართულებით. ეს მეორე წესი პირველისაგან განსხვავებით ითვალისწინებს ბაუშინგერის ეფექტს, მაგრამ ის გაცილებით რთულია მათემატიკური თვალსაზრისით. ამიტომ დასაშვებია პლასტიკურობის პირობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} \end{aligned}$$

(12.1)

სადაც $\bar{\sigma}$ არის ძაბვათა ინტენსივობა ან ექვივალენტური ძაბვა.

რიცხვითი კოეფიციენტი შერჩეულია ისე, რომ მარტივი გაჭიმვისათვის $\bar{\sigma} = Y$. Y დენადობის ზღვარია სუფთა გაჭიმვისას ძაბვის ინტენსივობა $\bar{\sigma}$ ზემოთ შემოთავაზებული წინადადებით არის პლასტიკური დეფორმაციის სრული მუშაობის ფუნქცია:

$$\bar{\sigma} = F(W_p)$$

(12.2)

ეს ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ იდეალური ლითონისათვის, როცა დეფორმაცია იზოტროპულია და ბაუშინგერის ეფექტი

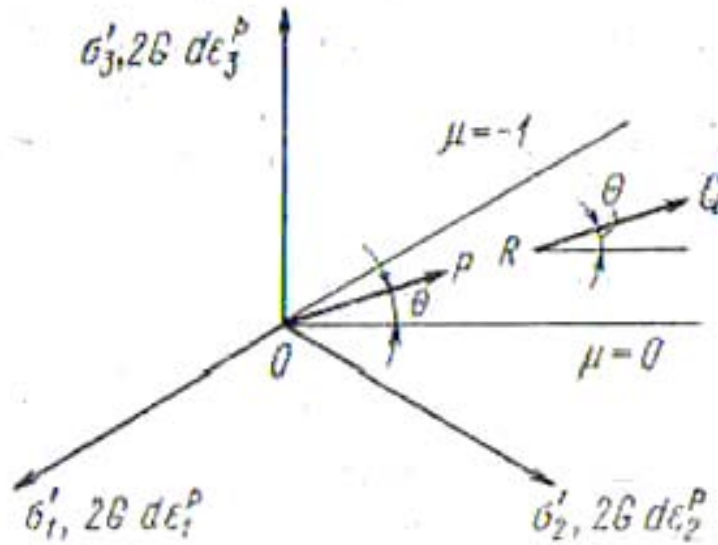
გამორიცხულია. ამის გარდა, პლასტიკურობის პირობით ივარაუდება, რომ ჰიდროსტატიკური წნევა არ იწვევს პლასტიკურ დეფორმაციებს, ამიტომ მოცულობის თანდათანობით ცვლილებას ადგილი არა აქვს. ეს მტკიცება ექსპერიმენტული მონაცემებით. ფორმის ცვლილებაზე დახარჯული მუშაობის ნაზრდი ერთეულ მოცულობაში ტოლია

$$dW_p = \sigma'_1 d\varepsilon_1^p + \sigma'_2 d\varepsilon_2^p + \sigma'_3 d\varepsilon_3^p \quad (1.2.3)$$

რადგანაც $d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$ ნარჩენი დეფორმაციის

ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ ვექტორით π სიბრტყეში. თუ ძაბვის განზომილებისათვის შემოვიტანთ $2G$ ფაქტორს, ნარჩენი დეფორმაციის ნაზრდის ვექტორი, შეიძლება გამოისახოს იგივე დიაგრამაზე, რომელზეც ძაბვის დევიატორის ვექტორია გამოსახული. ვინაიდან ივარაუდება, რომ პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდის მთავარი ღერძები ემთხვევა ძაბვების მთავარ ღერძებს, (ნახ. 1.2.1)-ზე ძაბვის \overline{OP} ვექტორი პარალელურია პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდის \overline{RQ} ვექტორის

$$\text{და } dW_p = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{RQ}}{2G}$$



ნახ. 12.1

$$\left. \begin{aligned} |OP| &= \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \\ |RQ| &= 2G \sqrt{d\varepsilon_1^{p2} + d\varepsilon_2^{p2} + d\varepsilon_3^{p2}} = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} 3d\varepsilon^{\bar{p}} \end{aligned} \right\}$$

(1.2.4)

ნარჩენი დეფორმაციის ნაზრდის მდგენელების ინვარიანტული ფუნქცია $d\varepsilon^{\bar{p}}$ ისევე, როგორც დაბჯათა დევიატორის კომპონენტი σ , შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$d\varepsilon^{\bar{p}} = \sqrt{\frac{2}{9} \left[(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)^2 + (d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)^2 \right]}$$

(1.2.5)

ასე რომ

$$dW_p = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p$$

(1.2.6)

ახლა განმტკიცების ჰიპოთეზა (1.2.2) შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\bar{\sigma} = F\left(\int \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^p\right)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\bar{\sigma}$ მხოლოდ $d\bar{\epsilon}^p$ -ის ფუნქციაა, სადაც ინტეგრალს დეფორმირების პროცესში ვიღებთ. ამიტომ

$$\bar{\sigma} = H \int d\bar{\epsilon}^p$$

(1.2.7)

ჩვეულებრივ ამ გამოსახულებით სარგებლობა მოსახერხებელია, ვიდრე (1.2.3)-ით. (1.2.3) და (1.2.7)-ის ამოხსნით შეიძლება მივიღოთ განსხვავებული შედეგები ანიზოტროპულობის და ბაუშინგერის ეფექტის გამო. თუ ჩვენ საქმე გვაქვს მასალასთან, რომელიც ძალიან ახლოა ხისტ-პლასტიკურთან, მაშინ (1.2.5) ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{9} \left[(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2 \right]}$$

(1.2.8)

რადგან პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდი ემთხვევა მთლიანი დეფორმაციის ნაზრდს. თუ მომდევნო დეფორმაციის ნაზრდის მთავარი ღერძები არ შემობრუნდება დეფორმაციის ქვეშ მყოფი ელემენტის მიმართ, მაშინ ნაზრდების ფარდობა იქნება მუდმივი:

$$\frac{d\epsilon_2}{d\epsilon_1} = x; \quad \frac{d\epsilon_3}{d\epsilon_1} = y$$

გვაქვს: $d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$, $x+y+1=0$ ან $y=-(1+x)$

ასე რომ $d\bar{\epsilon}^2 = \frac{2}{3} d\epsilon_1^2 [1 + x^2 + y^2]$ ან $d\bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_1 [1 + x + x^2]^{\frac{1}{2}}$

ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[1 + \mathbf{x} + \mathbf{x}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \varepsilon_1 \quad (1.2.9)$$

ამიტომ (1.2.7) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}) \quad (1.2.10)$$

სოლო უკუმშველობის განტოლება შემდეგნაირად:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

ვსარგებლობთ რა (1.2.7), (1.2.9), (1.2.2) და (1.2.5) ფორმულებით, სრული დამოკიდებულებები ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon'_{ij} &= \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \frac{d\varepsilon^{-p}}{\sigma} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G} \\ d\varepsilon_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E} d\sigma_{ii} \\ \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= 2k^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.11)$$

(1.2.11) გამოსახულება შეიცავს ისეთ განტოლებებს, როგორცაა

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \frac{d\varepsilon^{-p}}{\sigma} + \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] \\ d\gamma_{yz} &= \frac{3}{2} \tau_{yz} \frac{d\varepsilon^{-p}}{\sigma} + \frac{d\tau_{yz}}{2G} \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

უფრო ზოგადი ფორმით (1.2.11) გამოსახულება განიხილა ჰილმა (1950წ).

თუ საერთოდ უზუღვებელეყობო განმტკიცებას და დაუშვებო, რომ დენადობის ძაბვა მასალისათვის არის რაიმე მუდმივი სიდიდე Y მაშინ ნარჩენი დეფორმაციის ნაზრდების გამოსახულება (1.14)

ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \frac{d\varepsilon^{-p}}{Y} \quad (1.2.13)$$

(1.2.12)-დან გამომდინარე $\bar{\sigma} = Y$. (1.2.13) გამოსახულება პირველად შემოგვთავაზა ჰილმა. ეს უბრალოდ არის პრანდტლ-რეისის განტოლება, ჩაწერილი უფრო მოსახერხებელი ფორმით.

როცა შესაძლებელია დრეკადი დეფორმაციების უგულვებელყოფა, ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის დამოკიდებულებებს ლევი-მიზესის განტოლებით აღწერილი მასალისათვის ექნებათ სახე:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \frac{d\varepsilon^p}{\sigma}$$

(1.2.14)

ეს განტოლება შედგება შემდეგი სამი განტოლებისაგან:

$$d\varepsilon_x = \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

$$d\varepsilon_y = \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right] \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

$$d\varepsilon_z = \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right] \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

და შემდეგი სამი განტოლებისაგან:

$$d\gamma_{yz} = \frac{3}{2} \tau_{yz} \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

$$d\gamma_{xz} = \frac{3}{2} \tau_{xz} \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{3}{2} \tau_{xy} \frac{d\varepsilon}{\sigma}$$

(1.2.15)

1.3. ზოგადი დეფორმაციული თეორია. ჰენკის განტოლება.

აღმოჩნდა, რომ პლასტიკურობის თეორიის ყველა პრობლემას აქვს დიფერენციალური ხასიათი. ჰენკის განტოლებები (1924წ.) არის მცდელობა გაეაფართოვოთ დრეკადობის საერთო თეორია პლასტიკურობის თეორიამდე. მათში მტკიცდება, რომ

$$\varepsilon_{ij}^p = \varphi \cdot \sigma_{ij}' \quad (1.3.1)$$

ე.ი სრული პლასტიკური დეფორმაციის მდგენელები, რეიესის განტოლებისაგან განსხვავებით, პროპორციულია ძაბვების დევიატორის კომპონენტებისა, ჰენკის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_{ij} &= \left(\varphi + \frac{1}{2G} \right) \sigma'_{ij} \\ \varepsilon_{ii} &= \frac{(1-2\nu)}{E} \sigma_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

სადაც φ სკალარული სიდიდეა, დადებითი – დატვირთვისას და ნულის ტოლი განტვირთვისას. (1.3.2) ფორმულიდან გამოდის, რომ თუ მოცემულია ძაბვის სიდიდე რაიმე წერტილში, მაშინვე შესაძლებელია განისაზღვროს მთლიანი დეფორმაცია. ნათელია, რომ ეს ასეა მხოლოდ მაშინ, როცა ძაბვა-დეფორმაციის დამოკიდებულება რჩება მუდმივი. (განსაკუთრებული შემთხვევების დროს). ასეთ შემთხვევებში ჰენკის განტოლებები გამომდინარეობს რეიესის განტოლებების ინტეგრებიდან. აქ ძალიან სამართლიანია ჰილის შენიშვნა (1950წ), რომელმაც აღწერა, რომ „ძალიან იოლია აჩვენო, რომ ჰენკის განტოლება მოუხერხებელია იდეალური პლასტიკური ლითონების ქცევის აღწერისათვის. ვივარაუდოთ, რომ განსაზღვრული პლასტიკური დეფორმაციების შემდეგ ელემენტი ნაწილობრივ ან მთლიანად განიტვირთება, ხოლო შემდეგ ისევ დაიტვირთება სხვა დაძაბული მდგომარეობით პლასტიკურობის იმავე ზედაპირზე. თუ ძაბვის მახასიათებელი წერტილი ეკუთვნის პლასტიკურობის წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, შესაძლებელია მოხდეს მხოლოდ დრეკადი დეფორმაციები, ხოლო საერთო პლასტიკური დეფორმაცია არ იცვლება. (1.3.1) განტოლების თანახმად კი ნარჩენი დეფორმაციების შეფარდებები სრულიად განსხვავებულია, რადგანაც შეიცვალა დაძაბული მდგომარეობა ეს ნიშნავს, რომ თვითონ პლასტიკური დეფორმაცია

შეიცვალა განტვირთვისა და ხელახალი დატვირთვის დროს, რაც აბსურდია”.

პირველი ექსპერიმენტები ძაბვა-დეფორმაციის თანაფარდობების გამოსაკვლევად ჩაატარა ლოდემ (1926წ) მან შემოიტანა ორი პარამეტრი:

$$\mu = \frac{(\sigma_3 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

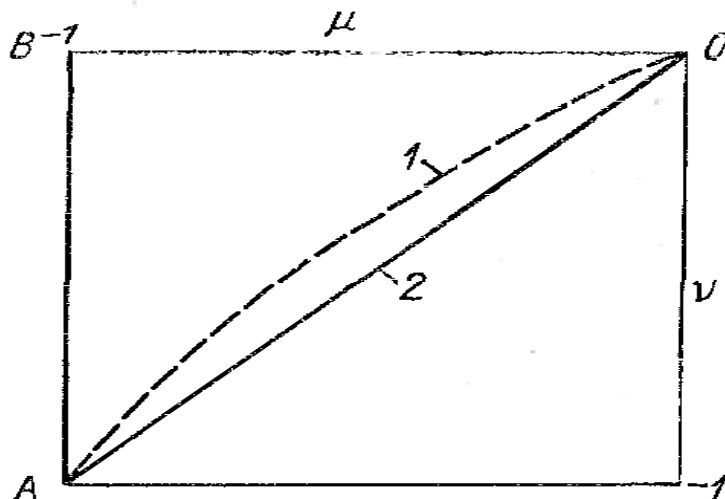
(1.3.3)

$$\nu = \frac{(d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p) - (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)}{d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p}$$

(1.3.4)

ადვილად შესამჩნევია, რომ თუ თეორიულად მიღებული განტოლება (1.1.7) სწორია, მაშინ μ უნდა იყოს ν -ს ტოლი (აქ არ უნდა ავუროთ ლოდეს პარამეტრი ν პუასონის კოეფიციენტში).

თუ $\mu = -1$, $\sigma_2 = \sigma_3$, მაშინ დაძაბული მდგომარეობა შეესაბამება ერთდერძა გაჭიმვას $(\sigma_1 - \sigma_2)$ ჰიდროსტატიკური წნევით $-\sigma_2$. თუ $\mu = 0$, $\sigma_3 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, მაშინ ის შეესაბამება სუფთა ძვრის მდგომარეობას $[(\sigma_1 - \sigma_2)/2, (\sigma_2 - \sigma_1)/2]$ ჰიდროსტატიკური წნევით $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$. სუფთა ძვრისა და ერთდერძა გაჭიმვის პირობით განსაზღვრული წერტილები, რომლებშიც $\mu = \nu$, გვაძლევენ წრფეს OA. (ნახ. 1.3.1).



ნახ. 1.3.1 ექსპერიმენტული (1) და თეორიული (2) მრუდები ლევი-ლოდეს კოეფიციენტის ცვლილებისათვის

გამოკვლევის მეთოდი მარტივდება, თუ ექსპერიმენტში ძაბვების თანაფარდობები დარჩება მუდმივი დეფორმაციის მთელი დროის მანძილზე. ეს ამცირებს დეფორმაციის დრეკად მდგენელს მინიმუმამდე და წინასწარ სუსტად დეფორმირებული მასალებისათვის ის შეიძლება უკუვაგდოთ. ასეთ შემთხვევაში v შეიძლება გამოვსახოთ სრული დეფორმაციებით

$$v = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (1.3.5)$$

ყველა ცდა ლოდეს პარამეტრების განსაზღვრისათვის შესრულდა ბრტყელი დეფორმირების პირობებში. ლოდე (1926წ) თავის ექსპერიმენტებში ზემოქმედებდა თხელკედლიან რკინის, სპილენძის და ნიკელის მიღებზე ერთდროულად გაჭიმვითა და შიგნიდან (წნევით). ყველა ცდის დროს თანაფარდობა დერძულ და მხებ ძაბვებს შორის რჩებოდა თითქმის მუდმივი. მიუხედავად მნიშვნელოვანი გაბნევის, (ანიზოტროპულობის გამო). შედეგებმა გვიჩვენა გადახრა ხაზიდან. სისტემატური გადახრები იყო აღნიშნული ტეილორის და ქვინის (1931წ) მიერ, რომლებიც ზემოქმედებდნენ ალუმინის, სპილენძის და რბილი ფოლადის თხელკედლიან მიღებზე ერთდროული გაჭიმვითა და გრეხვით. მათ დაადგინეს მიღების ანიზოტროპულობის დასაშვები ზღვარი. ამ ცდებში მაქსიმალური დატვირთვა რჩებოდა მუდმივი, ხოლო მგრესავი მომენტი იზრდებოდა. აქედან გამომდინარე, (ძაბვების თანაფარდობა არ იყო მუდმივი) (1.3.5) ფორმულის გამოყენება არ შეიძლებოდა.

პუხმა (1953წ) აჩვენა, რომ შეუძლებელია დარწმუნებული ვიყოთ თხელკედლიანი მიღების აბსოლუტურ იზოტროპულობაში. ამ სიძნელის გადასალახად პილმა ექსპერიმენტულად გამოიკვლია დამოკიდებულება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის დაგრადუირებული ზოლით, რომელიც იძლევა შესაძლებლობას

მიესდით მასალის ანიზოტროპულობის ცვლილებას. პრაქტიკაში ეს იდეა გამოიყენეს ჰანდიმ და გრინმა (1954წ). მათ მიიღეს ლევი-მიზესის განტოლების დამადასტურებელი შედეგები.

ჰოჰენემზერის (1931წ) და მორისონის, შეფჰერდის (1950წ) ექსპერიმენტებში გამოყენებული იყო თხელკედლიანი მილი, რომელზეც ზემოქმედებდნენ მგრესავი და გამჭიმავი ძალების სხვადასხვა კომბინაციებით. ამ ცდებმა აჩვენა, რომ დრეკადი და პლასტიკური დეფორმაციები იყო ერთი რიგის, ე.ი. დაადასტურეს პრანტდლ-რეისის განტოლებების სამართლიანობა, მაგრამ ეს პირობა არაა ყოველთვის სამართლიანი ლოდეს ცვლადების განსაზღვრისათვის [55].

1.4. პლასტიკური პოტენციალი და დენადობის თეორიის განტოლებები.

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ მიზესის პლასტიკურობის პირობას და ლევი-მიზესის განტოლებებს დენადობის თეორიისთვის, რამდენადაც ისინი მტკიცდება ექსპერიმენტული მონაცემებით. ახლა განვიხილავთ დენადობის ზღვარს და პლასტიკურ დენადობას უფრო ფართო სახით, ვისარგებლებთ რა პლასტიკური პოტენციალის ცნებით. შემოთავაზებულია ჰიპოთეზა, რომ პლასტიკური პოტენციალი $g(\sigma_{ij})$ ძაბვების სკალარული ფუნქციაა, რომლის კერძო წარმოებული σ_{ij} -ით შესაძლებლობას გვაძლევს მივიღოთ პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდების ტენზორის კომპონენტებისათვის განტოლებები [55].

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{\partial g / \partial \sigma_{ij}} = \dots = d\lambda'$$

(1.4.1)

სადაც $d\lambda'$ დადებითი მუდმივაა ($d\lambda'$ უარყოფითი რომ ყოფილიყო, ეს ნიშნავდა იმას, რომ უარყოფითი დეფორმაცია დაკავშირებულია დადებით ძაბვასთან, რაც შეუძლებელია). ეს განტოლებები გადაიქცევა ლევი-მიზესის განტოლებად, თუ გ-ს ადგილას ჩავსვამთ მიზესის პლასტიკურობის ფუნქციას f . ამგვარად

$$g(\sigma_{ij}) = f(\sigma_{ij}) = \sum (\sigma_1 - \sigma_2)^2$$

მაშინ

$$\frac{df}{d\sigma_1} = 2(\sigma_1 - \sigma_2) - 2(\sigma_3 - \sigma_1) = 4\sigma_1 - 2\sigma_2 - 2\sigma_3 = 6(\sigma_1 - \sigma_m)$$

სადაც

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sum \sigma_i$$

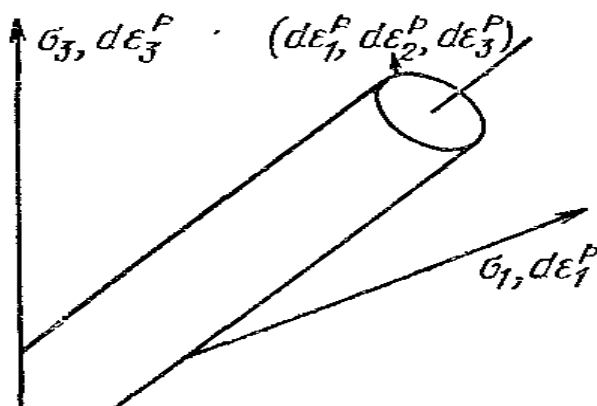
ამრიგად (1.4.1)-დან გვექნება:

$$d\varepsilon_1^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} d\lambda' = 6(\sigma_1 - \sigma_m) d\lambda' = 6\sigma_1' d\lambda'$$

აქედან

$$\frac{d\varepsilon_1^p}{\sigma_1'} = \dots = d\lambda \quad (1.4.2)$$

სადაც $d\lambda$ - პროპორციულობის სხვა დადებითი მუდმივაა.



ნახ. 14.1

ფუნქცია $g(\sigma_{ij})$, რომლითაც შეიძლება შევცვალოთ პლასტიკურობის პირობა და პლასტიკური პოტენციალი, აუცილებელია შეირჩეს ისე, რომ ის იყოს სიმეტრიული ძაბვის სამივე ინვარიანტორისთვის, ე.ი. ისე, რომ ის არ იყოს დამოკიდებული კოორდინატების სისტემის შერჩევაზე ან მთავარ ძაბვებზე. ფუნქცია ითვლება სიმეტრიულად, თუ მასში მთავარი ძაბვებიდან თითოეული შედის ერთნაირი „წონით“.

თუ σ_1 ღერძზე (ნახ. 14.1) პლასტიკური დეფორმაციის მთავარ ნაზრდს აღვნიშნავთ $d\epsilon^p_1$ -ით და განვიხილავთ σ_2 და σ_3 ღერძების მიმართებაში, $d\epsilon^p_2$ და $d\epsilon^p_3$ -ს, რომლებიც აგრეთვე არიან $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ძაბვების მოქმედებით გამოწვეული პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდების ვექტორის კომპონენტები, მაშინ მოსახერხებელია ეს ვექტორი მოვათავსოთ პლასტიკურობის ცილინდრზე მდებარე წერტილში. ახლა დეფორმაციის ნაზრდის ვექტორის მიმართულება ისეთივეა, როგორც $g(\sigma_{ij})$ ზედაპირის გარე ნორმალის $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ წერტილში. ეს აიხსნება იმით, რომ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ წერტილში ცილინდრის ზედაპირის ნორმალის მიმართოვანი კოსინუსების თანაფარდობები ჩვეულებრივი დეკარტული მეთოდებით განისაზღვრება.

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_3}$$

ესაა დენადობის თეორიის განტოლებების პლასტიკური პოტენციალის განხილვის შედეგების მიხედვით წარმოდგენის გეომეტრიული ხერხი.

ამრიგად,

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} \quad (14.3)$$

თუმცა უკუმშველობის ვარაუდიდან გამომდინარე, გ უნდა იყოს ისეთი, რომ

$$d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = \frac{\partial g}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial g}{\partial \sigma_3} = 0$$

მიზეხის პლასტიკურობის პირობა აკმაყოფილებს ამ მოთხოვნებს. ახლა იქნება ნაჩვენები, რომ ვარაუდს პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდების ვექტორის პერპენდიკულარობაზე პლასტიკურობის ზედაპირისადმი, მიყვავართ ძაბვებისა და დეფორმაციის ნაზრდების სხვა თანაფარდობასთან-ტრესკას პლასტიკურობის პირობასთან. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს მხოლოდ ექვსი სხვადასხვა მიმართულების ნორმალი, რომლებიც შეესაბამება პრიზმის გვერდითი წახნაგების ექვს ფართეულს.

მხოლოდ მაქსიმალური მხეები ძაბვა, რომელსაც აქვს უდიდესი აბსოლუტური სიდიდე, გამოიყენება მოცემული $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ განაწილებისათვის, მაგალითად $(\sigma_1 - \sigma_3)$; მაშინ $g(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3)$, ვიყენებთ რა (14.2)-ს, მივიღებთ:

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \sigma_3} = 1 : 0 : -1 \quad (14.4)$$

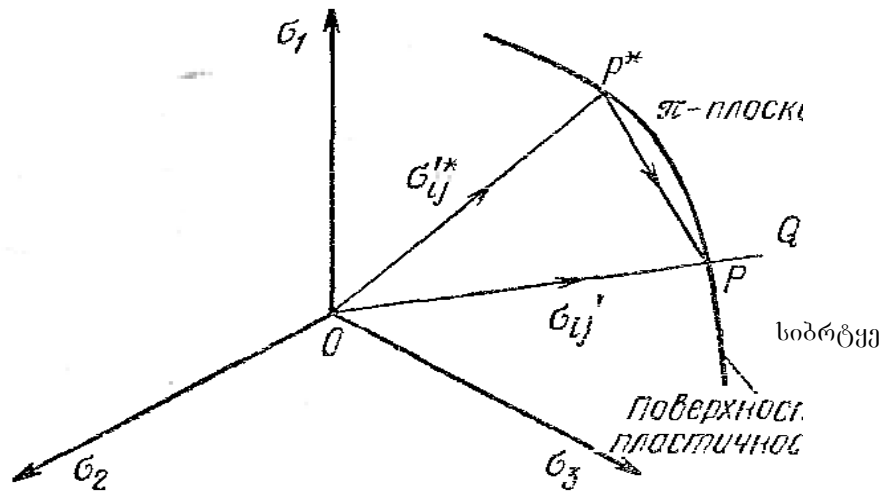
ეს ერთადერთი მდგომარეობაა, რომელიც შესაძლებელია პლასტიკური დეფორმირებისათვის მხოლოდ σ_1 და σ_3 -ის სიბრტყეში; პლასტიკური დეფორმაციების ნაზრდები სიდიდით ტოლია და ურთიერთსაპირისპიროდ არიან მიმართულნი. ტრესკას პლასტიკურობის პირობა და მისი შესაბამისი დენადობის განტოლებები განიხილება კოიტერის (1953წ), პრაგერის (1955წ) და ბლენდის (1956წ) შრომებში.

1.5. დისიპაციის ენერჯის მაქსიმუმის პრინციპი.

ხისტპლასტიკური მასალის ერთეულ მოცულობაში გაბნეული ენერგიის ნაზრდი, როდესაც მთავარი ძაბვები $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ანუ σ_i ერთმანეთის ტოლია,

$$\delta w = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 = \sigma_i d\varepsilon_i$$

სადაც $d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3$ - პლასტიკური დეფორმაციების მთავარი ნაზრდებია. სხვანაირად, $\delta w - \overline{OP}$ ძაბვის დევიატორის ვექტორის სკალარული ნამრავლია $(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ დეფორმაციის ნაზრდის ვექტორ \overline{PQ} -ზე. ეს უკანასკნელი \overline{PQ} ვექტორი ნაჩვენებია ნახ. 1.5.1-ზე და წარმოადგენს პლასტიკურობის ზედაპირის ნორმალს P წერტილში.



პლასტიკურობის
ზედაპირი

ნახ.2.1.5.1

ნახ. 1.5.1. პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდი (\overline{PQ} - დენადობის ზედაპირის ნორმალია P წერტილში).

ძაბვების სფერული ტენზორის კომპონენტები არ ასრულებენ მუშაობას და პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობის დისციპლის განხილვისას მხედველობაში მიიღება მხოლოდ ძაბვის დევიატორის კომპონენტები. ყველაფერი ეს შეიძლება განვიხილოთ π - სიბრტყეზე (იხ ნახ. 1.5.1) მაშინ $\delta w = \sigma'_i \cdot d\varepsilon_i$. ახლა განვიხილოთ

$$\delta w^* = \sigma_1^{*'} d\varepsilon_1 + \sigma_2^{*'} d\varepsilon_2 + \sigma_3^{*'} d\varepsilon_3 = \sigma_i^{*'} d\varepsilon_i$$

სადაც $\overline{OP}^* = (\sigma_1^{*'}, \sigma_2^{*'}, \sigma_3^{*'})$ და ასევე აკმაყოფილებს

პლასტიკურობის პირობას ანუ P^* წერტილი იმყოფება პლასტიკურობის ზედაპირზე. მაშინ

$$\delta w - \delta w^* = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{OP}^* \cdot \overrightarrow{PQ} = (\sigma_i' - \sigma_i^{*'}) d\varepsilon_i$$

(1.5.1)

უფრო ზოგად გამოსახულებაში d_v უსასრულოდ მცირე მოცულობისთვის, რომლის ფართეულებშიც მოქმედებენ დაბეჭები σ_{ij} და იწვევენ (1.5.1) გამოსახულების შესაბამის დეფორმაციის $d\varepsilon_{ij}$ ნაზრდებს და $d\varepsilon_{ij}^*$ დაბეჭებს, ჩვენ შეგვიძლია მუშაობათა ნაზრდების სხვაობა გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$(\sigma_{ij}' - \sigma_{ij}^{*'}) d\varepsilon_{ij} dV$$

(1.5.2)

დეფორმაციების ნაზრდები, შევცვალოთ დეფორმაციის სიჩქარეებით, ხოლო პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობა-სიმძლავრით. აღნიშვნებში შესაბამისი ცვლილებების შეტანის შემდეგ გვაქვს:

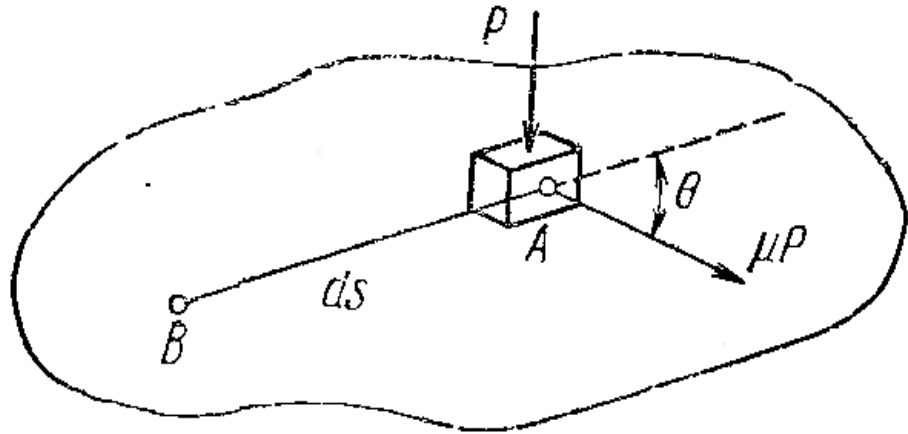
$$\dot{W} - \dot{W}^* = \int_v (\sigma_{ij}' - \sigma_{ij}^{*'}) \dot{\varepsilon}_{ij} dV$$

(1.5.3)

ფორმულაში წერტილებით აღნიშნულია დეფორმაციის სიჩქარე და სიმძლავრე. ჩაზნექილი (კორდინატთა სათავეში) პლასტიკურობის ზედაპირისთვის (1.5.3) შეიძლება ჩაიწეროს ამ სახით:

$$\int_v (\sigma_{ij}' - \sigma_{ij}^{*'}) \dot{\varepsilon}_{ij} dV \geq 0$$

(1.5.4)



ნახ. 1.5.2. დისიპაციის მაქსიმუმის პრინციპის ილუსტრაცია

(2.1.5.4)-ით იდეალური ხისტპლასტიკური სხეულის ფორმაცვლილება ან დეფორმირება ხდება ენერგიის მაქსიმალური ხარჯვით. სწორედ ეს არის მუშაობის მაქსიმალური დისიპაციის პრინციპი, მას აქვს ფართო გამოყენება არა მარტო პლასტიკური დეფორმირების დროს.

ამ პრინციპს აქვს საინტერესო კავშირი მექანიკურ ხახუნთან. ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე (ნახ.1.5.2) ხახუნის ძალა ტოლია μP , სადაც P - სხეულის სიმძიმის ძალაა. μ - ხახუნის კოეფიციენტი. თუ სხეული მოძრაობს A წერტილიდან B წერტილში ds გზით, მაშინ ხახუნის ძალის გადასაღახად დახარჯული მუშაობა

$$W = \vec{\mu P} \times \vec{ds} = \mu P ds \cos \theta$$

W - მაქსიმალურია, როდესაც $\theta=0$, ანუ ხახუნის ძალა მოქმედებს მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, სადაც P - ისეა მიმართული, რომ ზრდის შესრულებულ მუშაობას.

1.6. ანიზოტროპული მასალის პლასტიკური დენადობის განტოლებები.

ისევე როგორც იზოტროპული მასალისათვის, ითვლება, რომ $f(\sigma_{ij})$ არის პლასტიკური პოტენციალი. თუ ვიპოვით კერძო წარმოებულს $f(\sigma_{ij})$ ფუნქციის σ_{ij} -ით, მივიღებთ დეფორმაციის ნაზრდებს:

$$2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = G(\sigma_x - \sigma_z) + H(\sigma_x - \sigma_y) \text{ აქედან. გამომდინარე,}$$

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{G(\sigma_x - \sigma_z) + H(\sigma_x - \sigma_y)} = d\lambda$$

ანალოგიური გამოსახულებები მიიღება დეფორმაციის სხვა ნაზრდებისათვის:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda [H(\sigma_x - \sigma_y) + G(\sigma_x - \sigma_z)]; & d\gamma_{yz}^p &= d\lambda L\tau_{yz} \\ d\varepsilon_y^p &= d\lambda [F(\sigma_y - \sigma_z) + H(\sigma_y - \sigma_x)]; & d\gamma_{zx}^p &= d\lambda M\tau_{zx} \\ d\varepsilon_z^p &= d\lambda [G(\sigma_z - \sigma_x) + F(\sigma_z - \sigma_y)]; & d\gamma_{xy}^p &= d\lambda N\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

ეს გამოსახულებები აკმაყოფილებს პირობას:

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0$$

როცა დრეკადი დეფორმაციის ნაზრდები მცირეა პლასტიკური დეფორმაციის ნაზრდებთან შედარებით, ზედა ინდექსი - P (1.6.1) გამოსახულებებში შეიძლება უკუვაგდოთ, რაც ნიშნავს რომ ჩვენ გვაქვს საქმე ლევი-მიზესის იდეალურ ხისტპლასტიკურ სხეულთან. თუ (x,y) სიბრტყიდან ამოჭრილ ნიმუშს გავჭიმავთ x ღერძის მიმართულებით,

რომელიც განხილულია ანიზოტროპის ღერძად, მაშინ დეფორმაციების ნაზრდების თანაფარდობები ასე ჩაიწერება:

$$d\varepsilon_x^p : d\varepsilon_y^p : d\varepsilon_z^p = (G + H) : (-H) : (-G)$$

სისქითი დეფორმაციის ფარდობა განივ დეფორმაციასთან აღინიშნება r -ით, $r_x = d\varepsilon_y^p / d\varepsilon_z^p = H/G$ ინდექსი x აღნიშნავს, რომ ნიმუში ამოჭრილია x ღერძის გასწვრივ. y ღერძის გასწვრივ ამოჭრილი ნიმუშისათვის გვექნება:

$$d\varepsilon_x^p : d\varepsilon_y^p : d\varepsilon_z^p = (-H) : (F + H) : (-F)$$

და

$$r_y = d\varepsilon_x^p / d\varepsilon_z^p = H/F$$

აქამდე ჩვენ განვიხილავდით დატვირთვებს ანიზოტროპიის ღერძის მიმართულებით. იმისათვის რომ მივიღოთ ანიზოტროპიის საჭირო პარამეტრები ფურცლის სიბრტყეში, აუცილებელია ჩავატაროთ გამოცდა გაჭიმვაზე სულ ცოტა კიდევ ერთი მიმართულებით ამოჭრილ ნიმუშებზე.

თუ ანიზოტროპული მასალის ფურცელზე ვიხილავთ (x,y) ფურცლის სიბრტყის მართობული ძალების მოქმედებას, მაშინ τ_{yz} და τ_{zy} იქნება ნულის ტოლი. ვივარაუდოთ, რომ გასაჭიმი ნიმუში ამოჭრილია x ღერძის მიმართ რაიმე კუთხით; მაშინ წონასწორობის პირობებიდან

$$\sigma_x = \sigma \cdot \cos^2 \alpha \quad \sigma_y = \sigma \cdot \sin^2 \alpha \quad \tau_{xy} = \sigma \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

სადაც σ - არის დენადობის ძაბვა გაჭიმვისას. ჩავსვათ ეს (1.6.1) ფორმულებში. მივიღებთ:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= [(G + H)\cos^2 \alpha - H\sin^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\varepsilon_y^p &= [(F + H)\sin^2 \alpha - H\cos^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\varepsilon_z^p &= -[F\sin^2 \alpha + G\cos^2 \alpha] \sigma d\lambda \\ d\gamma_{xy}^p &= [N \sin \alpha \cdot \cos \alpha] \sigma \cdot d\lambda \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

განვიხილავთ რა მცირე დეფორმაციების გეომეტრიას, მივლივართ დასკვნამდე, რომ განივი დეფორმაციების ნაზრდი $d\varepsilon_{\alpha+\frac{\pi}{2}}^p$ განისაზღვრება გამოსახულებით:

$$d\varepsilon_{\alpha+\frac{\pi}{2}}^p = d\varepsilon_x^p \sin^2 \alpha + d\varepsilon_y^p \cos^2 \alpha - 2d\gamma_{xy}^p \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

ამიტომ

$$r_\alpha = \frac{d\varepsilon_{\alpha+(\pi/2)}^p}{d\varepsilon_z^p} = \frac{d\varepsilon_x^p \sin^2 \alpha + d\varepsilon_y^p \cos^2 \alpha - 2d\gamma_{xy}^p \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{d\varepsilon_z^p}$$

$$r_\alpha = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha}$$

(1.6.3)

ფურცლოვან ლითონში გლინვის მიმართულება როგორც წესი წარმოადგენს ანიზოტროპიის დერძს. ამიტომ x დერძს ირჩევენ ამ მიმართულებით. აქედან გამომდინარე, ზემოთ დაწერილი დენადობის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\left. \begin{aligned} r_x = r_0 &= \frac{H}{G} \\ r_y = r_{90} &= \frac{H}{F} \\ r_{45} &= \frac{2N - (F + G)}{2(F + G)} \end{aligned} \right\}$$

(1.6.4)

ახ

$$\frac{N}{G} = \left(r_{45} + \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{r_0}{r_{90}} \right)$$

სადაც r_0 ; r_{45} , r_{90} არიან r -ის მნიშვნელობები გაგლინვის მიმართულებით და 45° და 90° -იანი კუთხით მის მიმართ.

ამ გამოსახულებების გამოყენებისას ივარაუდებოდა, რომ ანიზოტროპიის პარამეტრების თანაფარდობა რჩებოდა უცვლელი გამოკვლევის მთელ პერიოდში. ანიზოტროპულობის პარამეტრები უცვლელი რჩება ალუმინისთვის, (დაამტკიცეს კლინგერმა და ზაქსმა 1948 წ.); ძლიერი ჭიმვისათვის გათვალისწინებული ფოლადებისათვის, ტიტანისათვის (ბრამლი, მელორი - 1966) მაგრამ ავერიმ და ბეკოფენმა 1965წ. დაადგინეს, რომ მაგნიუმის ზოგიერთი შენადნობისთვის r -ის სიდიდე არსებითადაა დამოკიდებული დეფორმაციის ხარისხზე. ანიზოტროპული მასალების დენადობის ზღვარი გამოიკვლიეს ლიმ და ბეკოფენმა (1966წ); ბაბელმა, იტმანმა და მაკივერმა (1966 წ), მეჰანმა (1961 წ). r - სიდიდეს ლითონის ფურცლებისათვის ჩვეულებრივ განსაზღვრავენ, როცა გრძივი დეფორმაცია $>5\%$, მაშინ არის საფუძველი ვივარაუდოთ, რომ დრეკადი დეფორმაციები მცირეა და ამის გამო მოცულობა რჩება უცვლელი. გრძივ და განივ დეფორმაციებს ზომავენ, ხოლო სისქით დეფორმაციებს (გაზომვის სირთულის გამო თხელი ფურცლისათვის) გამოთვლიან:

$$r = \frac{\ln\left(\frac{w_0}{w}\right)}{\ln\left(\frac{t_0}{t}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{w_0}{w}\right)}{\ln\left(\frac{w\lambda}{w_0\lambda_0}\right)} \quad (1.6.5)$$

სადაც w , t და λ არის სიგანის, სისქის და სიგრძის მიმდინარე მნიშვნელობები „0” - ინდექსი მიეკუთვნება საწყის პარამეტრებს. r -ის გაზომვა დაწვრილებით განიხილა ატკინსონმა (1967წ).

1.7. დამოკიდებულებანი ძაბვებსა და დეფორმაციებს

შორის განმტკიცებადი

ანიზოტროპული მასალებისათვის.

როცა მასალა განიცდის პლასტიკურ დეფორმაციას, ანიზოტროპიის მდგომარეობა იცვლება. მაგრამ ვივარაუდოთ, რომ ანიზოტროპული თვისებების ცვლილება გამოცდის დაწყების შემდეგ მცირეა. ასეთ შემთხვევაში მოსალოდნელია თეორიული და ექსპერიმენტული მონაცემების თანხვედრა დიდი საწყისი ანიზოტროპიის მქონე მასალებისათვის. ეს გვექონდა მხედველობაში, როცა ვვარაუდობდით, რომ გამოცდამდე იზოტროპული მასალა, იზოტროპული რჩება პლასტიკური დეფორმაციის დროსაც. ცნობილია, რომ ეს დაშვება არ არის მკაცრად არგუმენტირებული, მაგრამ, როგორც გამოცდილება გვიჩვენებს, მრავალ შემთხვევაში ასეთი მიახლოება დასაშვებია.

თუ ანიზოტროპული მდგომარეობა არ იცვლება, მაშინ დენადობის ძაბვები ლითონის განმტკიცებისას უნდა იზრდებოდეს მკაცრად პროპორციულად. აქედან გამომდის, რომ ანიზოტროპიის პარამეტრები უნდა შემცირდეს მკაცრი პროპორციით. მაშინ პარამეტრების თანაფარდობა დარჩება მუდმივი; ცდისას ზომავენ სწორედ თანაფარდობებს და არა აბსოლუტურ მნიშვნელობებს ცალკეული პარამეტრებისა. ზემოთ მივუთითეთ, რომ დეფორმაციების თანაფარდობა ზოგიერთი მასალისათვის შეიძლება დარჩეს უცვლელი, ხოლო ზოგიერთის – არა, ამიტომ საჭიროა გამოვიჩინოთ სიფრთხილე ანიზოტროპიის თეორიის გამოყენებისას.

ჰილმა 1950წ. შემოგვთავაზა ახალი ფორმულა ეკვივალენტური ძაბვის განსაზღვრისათვის:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2}{F + G + H} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.7.1)$$

აქედან ნათელია, რომ განიხილავენ ანიზოტროპიის პარამეტრების ფარდობებს და არა მათ აბსოლუტურ მნიშვნელობებს. თუ ანიზოტროპია შეიძლება უგულებელვყოთ, ხოლო დატვირთვა მიჰყვება მთავარ ღერძებს ეს გამოსახულება გადაიქცევა (1.2.1) გამოსახულებად.

ჯექსონის, სმიტის და ლანკფორდის კვალდაკვალ (1948წ), ჰილმა 1950წ. შემოგვთავაზა იზოტროპულობის თეორიის ანალოგიური თეორია, სადაც $\bar{\sigma}$ არის პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობის ფუნქცია. პლასტიკური დეფორმაციის მუშაობის ნაზრდი ერთეულ მოცულობაზე ხისტ-პლასტიკური სხეულისათვის შეადგენს:

$$dw = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

(1.7.2)

ისარგებლა რა $2f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$ გამოსახულებით და ეილერის თეორემით ერთგვაროვანი ფუნქციების შესახებ, სოკოლნიკოვმა (1941წ) შემოგვთავაზა შემდეგი ვარიანტი:

$$dw = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = 2f d\lambda = d\lambda$$

(1.7.3)

(1.7.3) გამოსახულებიდან ხისტ-პლასტიკური სხეულისათვის ჩვენ მივიღებთ შემდეგ განტოლებებს:

$$Gd\varepsilon_y - Hd\varepsilon_z = (FG + GH + HF)(\sigma_y - \sigma_z)d\lambda$$

$$Hd\varepsilon_z - Fd\varepsilon_x = (FG + GH + HF)(\sigma_z - \sigma_x)d\lambda$$

$$Fd\varepsilon_x - Gd\varepsilon_y = (FG + GH + HF)(\sigma_x - \sigma_y)d\lambda$$

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = d\lambda$$

ამ გამოსახულებების გათვალისწინებით, დეფორმაციის ნაზრდების ინტენსივობა შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს:

$$\overline{d\varepsilon} = \frac{d\lambda}{\sigma} \sqrt{\frac{3}{2}} [F + G + H]^{1/2} \left[F \left(\frac{Gd\varepsilon_y - Hd\varepsilon_z}{FG + GH + HF} \right)^2 + \dots + \frac{2d\gamma_{yz}^2}{L} + \dots \right]^{1/2}$$

(1.7.4)

ფურცლოვანი მასალისათვის ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის პირობებში z ღერძის მიმართ სიმეტრიით

$$r = \frac{H}{G} = \frac{H}{F}$$

და განტოლებები (1.7.1) და (1.7.3) მარტივდება:

$$\overline{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + r(\sigma_x - \sigma_y)^2}{2+r} \right]^{1/2}$$

(1.7.5)

$$\overline{d\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\frac{2+r}{(1+2r)^2} \left\{ (d\varepsilon_y - rd\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_x - rd\varepsilon_z)^2 + r(d\varepsilon_z - d\varepsilon_y)^2 \right\} \right]^{1/2}$$

(1.7.6)

ეს განტოლებები აუცილებელია ნორმალური ანიზოტროპიის გაველენის განსაზღვრისათვის ფურცლოვანი დაშტამპვის პირობებში.

1.8 პლასტიკურობის თეორიის ზოგიერთი პრობლემის შესახებ.

იმ მასალების გამოყენება კონსტრუქციებში, რომლებიც ხასიათდება ფიზიკო-მექანიკური თვისებების ცვლილების ფართო სპექტრით ტემპერატურული ზემოქმედების შედეგად, მასალათა

თვისებებზე დროის ფაქტორის გავლენით, სტუქტურული ცვლილებებით დატვირთვის ქვეშ, მოითხოვს პლასტიკურობის საკითხების კარდინალურ შესწავლას როგორც თეორიულ, ისე ექსპერიმენტალურ ასპექტებით.

ტრადიციული მასალების – ლითონების გამოყენებას, დღეს მასიურად დაემატა პლასტმასები და კომპოზიტური მასალები პლასტმასების მატრიცებზე.

კონსტრუქციული პლასტმასები და კომპოზიტები ფართოდ გამოიყენება სამოქალაქო, სატრანსპორტო და სამრეწველო მშენებლობაში, საავიაციო და გემთმშენებლობაში.

ამგვარად, ამ მასალათა ფიზიკო-მექანიკური თვისებების შესწავლა თანამედროვე მეცნიერების აქტუალური საკითხია. პლასტმასები თავისი ფიზიკო-მექანიკური თვისებებით განეკუთვნებიან ანიზოტროპულ მასალებს. დამზადების ტექნოლოგია საგრძნობელ გავლენას ახდენს მათ თვისებებზე და ანიზოტროპიაზე ფართო გაგებით.

მასალათა თვისებების აღწერა დღეს ხორციელდება რამდენიმე თეორიით. მაგ. მოლეკულური ძალების თეორიითა ან დისლოკაციური თეორიით, ან კიდევ კრისტალური გისოსების დეფექტების თეორიით და სხვ.

არსებობს მთელი რიგი ფაქტორებისა, რომელნიც არსებით გავლენას ახდენენ იმ განტოლებებზე, რომელთა საშუალებითაც აღწერენ მასალათა დაძაბულ-დეფორმირებულ მდგომარეობას.

ცალკეული ამოცანებისათვის ზოგიერთი ფაქტორი გადაამწყვეტია და მხედველობაში პირველ რიგში მათ ვღებულობთ. ასეთ ფაქტორებს განეკუთვნება ტემპერატურული ველები (სტაციონარული და ცვლადი), მასალათა სიბლანტე, დეფორმაციის ცვალებადობის სიჩქარე, ზემადალი წნევების გავლენა, არაერთგვაროვნება და სხვა. საინტერესოა, რომ ანიზოტროპია შეიძლება იყოს „თანდაყოლილი“, გამოწვეული დამზადების ტექნოლოგიის თავისებურებებით. ეს უკსნასკნელი შეიძლება იყოს მასალის ანიზოტროპია ან კონსტრუქციული ანიზოტროპია.

ანიზოტროპია შეიძლება წარმოიქმნას კონსტრუქციის დამზადების პროცესში (გლინვა, ტვიფრა, გაჭიმვა მაღალი ტემპერატურის პირობებში და სხვა.)

პრაქტიკული მიზნებისათვის გამოიყენება პლასტიკურობის სხვადასხვა თეორია; როგორი თეორია გამოიყენება კონკრეტულად, დამოკიდებულია მასალაზე და იმ მიზნებზე, რომელზეც დგას მკვლევარის წინაშე. შემოვიფარგლოთ არარელაგიური პლასტიკურობის თეორიებით, ანუ დროის ფაქტორი მხედველობაში არ მივიღოთ.

ამ ასპექტში განიხილება ორი ფუნდამენტური ამოცანა.

1. დეფორმაციების განსაზღვრა დეტერმინირებული გარე დატვირთვებისას (სტატიკის და დინამიკის ამოცანები).

ა) განიხილება ნარჩენი დეფორმაციები, როცა გარე დატვირთვები მოხსნილია მთლიანად ან ნაწილობრივ.

ბ) მექანიკურ თვისებათა ცვალებადობის შესწავლა პლასტიკური დეფორმაციების შედეგად; დეფორმაციების ველის დადგენა განმეორებითი დატვირთვისას (ჰისტერეზისი).

გ) მრღვევი ტვირთების განსაზღვრა გლობალური ან ლოკალური რღვევის შემთხვევაში.

ამოცანების გადაწყვეტისას აუცილებელია მასალის განტვიცების კანონების შესწავლა, ე.ი მიღებული უნდა იყოს მხედველობაში დატვირთვა-განტვირთვის წინა – ისტორია.

2. ფუნდამენტური ამოცანა პლასტიკურობის თეორიისა, რაც განსაზღვრული პირობითობით ანალოგიურია ჰიდროდინამიკის ამოცანებისა: აბსოლუტურად მყარი სხეულის მოძრაობის დეტერმინაცია და მისი ნაწილაკების გადაადგილების სიჩქარე-აჩქარებათა განსაზღვრა.

აქ შეიძლება მიღებულ იქნეს მხედველობაში დატვირთვა-განტვირთვის წინა-ისტორია, ან არ იქნეს მიღებული მხედველობაში).

პლასტიკურობის თეორიის ორი განშტოებიდან პირველი განიხილავს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებებს ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის (დეფორმაციული თეორია). ხოლო მეორე განიხილავს ფუნქციონალურ კავშირს ძაბვებსა და დეფორმაციების ნაზრდებს შორის, ე.ი. დიფერენციალურ დონეზე ნებისმიერი სიზუსტით, სადაც ეს პროცესი განიხილება დროის ფაქტორთან უშუალო კავშირში. როგორც კერძო შემთხვევა, წარმოგვიდგება

დამოკიდებულებანი დეფორმაციების სიჩქარეებსა და ძაბვებს შორის. აქ პლასტიკური დეფორმაცია განიხილება როგორც მასალის დენადობის პროცესი (დენადობის თეორია).

ინჟინერ-მკვლევართა შორის მეტად დიდი პოპულარობით სარგებლობს მცირე დრეკად-პლასტიკური დეფორმაციების თეორია.

ამ უკანასკნელს საფუძვლად უდევს მუშა ჰიპოთეზები:

1. მოცულობითი დეფორმაცია საშუალო ნორმალური ძაბვების პირდაპირპორციულია. პროპორციულობის კოეფიციენტი იგივეა, რაც მასალის მუშაობისას დრეკად ფარგლებში.

2. დეფორმაციის ტენზორის დევიატორსა და ძაბვების ტენზორის დევიატორს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება.

ძაბვათა ინტენსივობა არის დეფორმაციის ინტენსივობის ფუნქცია და არ არის დამოკიდებული დროზე.

პირველი ჰიპოთეზის თანახმად საშუალო ფარდობითი მოცულობითი დეფორმაცია

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = 0$$

(1.8.1)

ჰუკის მოცულობითი კანონიდან

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K}$$

(1.8.2)

სადაც $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ დრეკადობის მოცულობითი მოდულია;

პირობიდან $\varepsilon_0 = 0$ გამომდინარეობს, რომ $\nu = 0,5$. სწორედ მაშინ გვაქვს $K \rightarrow \infty$.

მეორე ჰიპოთეზიდან გამომდინარეობს

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_0}{\sigma_x - \sigma_0} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_0}{\sigma_y - \sigma_0} = \dots = \frac{\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \dots = \varphi \quad (1.8.3)$$

სადაც $\varphi = \frac{1}{2G}$ მუდმივაა, ϵ_0 და σ_0 - შესაბამისი საშუალოები. ეს ნიშნავს, რომ ძაბვათა და დეფორმაციათა წრეწირები მსაგავსია. მრავალ ამოცანას პლასტიკურობის თეორიაში არა აქვს ზუსტი ამონახსენი და ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ენიჭება მათ ამოხსნას მიახლოებითი მეთოდებით.

ამ მეთოდებიდან ყველაზე პოპულარულად უნდა ჩავთვალოთ ვარიაციული მეთოდები.

გავრცელებულია აგრეთვე ასეთი ამოცანების ამოხსნა “დრეკად ამოხსნათა” მეთოდით, რომლის რეალიზაცია ხორციელდება თანდათანობითი მიახლოებების გზით.

საინტერესოა ბერგერის მიერ შემოთავაზებული დრეკად-პლასტიკური დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის გაანგარიშებანი ცვლად პარამეტრთა მეთოდით. ჰუკის განზოგადებული კანონი ამ დროს ფორმალურად ჩაიწერება ტრადიციული სახით.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E^*} [\sigma_x - \nu^* (\sigma_y + \sigma_z) + \epsilon(T)]$$

.....

აქ E^* , ν^* დრეკადობის ცვლადი პარამეტრებია

$$E^* = \frac{\frac{\sigma_i}{\epsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}} \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}} \quad (1.8.4)$$

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)}$$

კერძო შემთხვევისთვის (უკუმშვადი სხეულისათვის) $\nu = \frac{1}{2}$ და

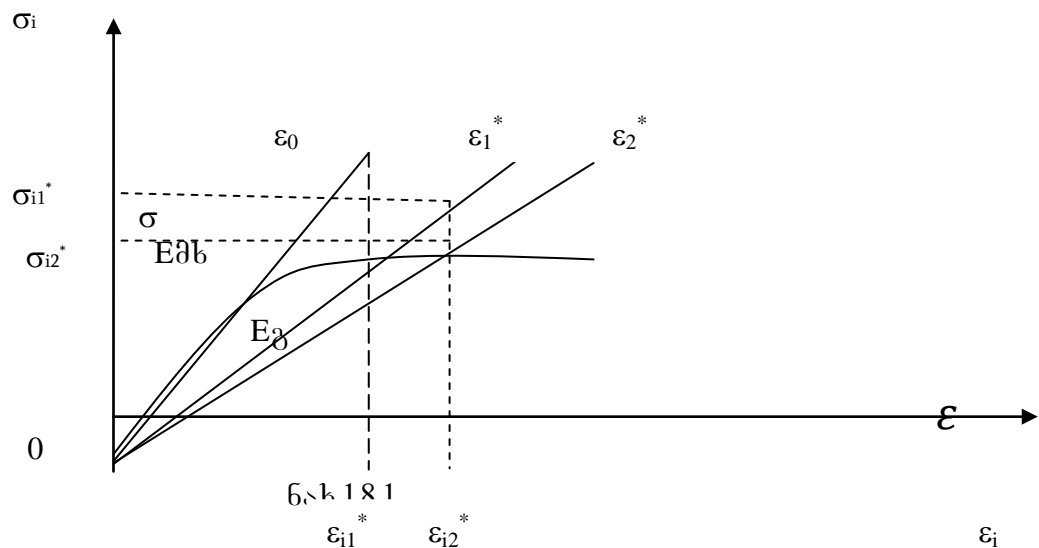
$$\nu^* = \frac{1}{2} \quad E^* = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}$$

ე.ი. დრეკადობის ცვლადი მოდული წარმოადგენს გამკვეთი (გამჭოლი) დრეკადობის მოდულს.

აქ σ_i და ϵ_i - არის დაბრუნება და დეფორმაცია ინტენსივობა. წერტილის სიახლოვეში. ჯერ წყდება (პირველ მიახლოებაში) დრეკადი ამოცანა დაბრუნება და დეფორმაცია ტენზორების დადგენით.

ამ გზით ამოცანის ამოხსნა კარგად აქვს წარმოდგენილი ილიუშინს.

მეორე მიახლოებაში შემოგაქვს კორექტურა $3G^*$ პარამეტრებისთვის, როგორც σ_{i1}^* და ϵ_{i1}^* შეფარდება, რომელიც აიღება დეფორმირების დიაგრამიდან (ნახ. 1.8.1).



$$3G_{i1}^* = \frac{\sigma_{i1}^*}{\epsilon_{i1}^*}$$

σ_{i1} და ϵ_{i1} პარამეტრების საშუალებით განისაზღვრება აგრეთვე E^* და ν^* პარამეტრები, რომელთა მნიშვნელობები, ცხადია, სხვადასხვა იქნება მყარი სხეულის ნებისმიერ წერტილში.

ამგვარად წარმოიქმნა დაბრუნება განსაზღვრის ამოცანა „კვაზი-არაერთგვაროვანი“ მყარი ტანისათვის. σ_i და ϵ_i კოორდინატთა სისტემაში დაბრუნება - დეფორმირებული მდგომარეობა წერტილში განისაზღვრება 2 წერტილში დიაგრამაზე, რომელიც განლაგებულია სხივ 0-1'-ზე, რომლის დახრის კუთხის ტანგენსი $3G_1^*$ - ის პროპორციულია.

მესამე მიახლოებაში $3G$ პარამეტრს ვღებულობთ ინტენსივობათა შეფარდებით σ_{i2} და ε_{i2} წერტილებში.

$$3G_{i2}^* = \frac{\sigma_{i2}^*}{\varepsilon_{i2}^*}$$

σ_{i2} და ε_{i2} სიდიდეთა საშუალებით განისაზღვრება E_2^* და μ_2^* $\sigma_{X3} \dots \tau_{ZX3}, \varepsilon_{X3} \dots \gamma_{ZX3}$ γ_{X3} სიდიდეები და ა.შ.

გაანგარიშება გრძელდება მანამდე, სანამ მიახლოება n -ურ და $n+1$ საფეხურზე არ დაუახლოვდება ერთმანეთს საჭირო სიზუსტით. როგორც წესი, ამოცანის ამოხსნა დამაკმაყოფილებელი სიზუსტით მიიღება მესამე- მეოთხე მიახლოების შემდეგ.

განვიხილოთ მეტად ეფექტური ვარიაციული მეთოდი, რომელიც ფართოდ გამოიყენება მსოფლიო პრაქტიკაში რთული ამოცანების ამოხსნის დროსაც.

კლაპეირონის თანახმად

$$A = \int_v (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \cdot \tau_{xy} + \gamma_{yz} \cdot \tau_{yz} + \gamma_{zx} \cdot \tau_{zx}) dv \quad (1.8.5)$$

სადაც A A - გარე ძალების მიერ შესრულებული მუშაობაა;

$\int_v \Pi \cdot dv$ - პოტენციური ენერგია

წონასწორობის ჭეშმარიტი ფორმა ხასიათდება მთლიანი ენერგიის ვარიაციული ექსტრემუმით $\delta \mathfrak{A} = 0$, სადაც

$$\mathfrak{A} = \int_v \Pi \cdot dv - A$$

(1.8.6)

Π შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირადაც:

$$\Pi = \frac{9}{2} K \cdot \varepsilon_0^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i$$

(1.8.7)

სადაც $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ მოცულობითი დრეკადობის მოდულია; თუ

გამოყენებულია დაძაბული მდგომარეობის შესაძლო ცვალებადობის პრინციპი, რაც მდგომარეობს შემდეგში: გარე ძალების ნაზრდების ჯამი მათი მოდების წერტილების გადაადგილებათა მიმართულებით უდრის დამატებითი მუშაობის ნაზრდს:

$$\int_V (U_x \delta x + U_y \delta y + U_z \delta z) dv + \int_S (U_x dx_v + U_y dy_v + U_z dz_v) dS = \delta R \quad (1.8.8)$$

სადაც V - მყარი ტანის მოცულობაა; S - ზედაპირი იგივე ტანისა, U_x, U_y, U_z გადაადგილებანი ტანის ნაწილზე; x_v, y_v, z_v - გარე ძალები ტანის დანარჩენ ზედაპირზე; $\delta x, \delta y, \delta z$ - გარე ძალების ვარიაცია, R - დამატებითი მუშაობა.

$\delta \bar{R} \delta \bar{R} = 0$ - ვარიაციაა დამატებითი მუშაობისა მთელი ტანისათვის

$$\bar{R} = \int_V R dv$$

შესაძლო ვარიაცია დამატებითი მუშაობისა დადებითია, რაც ნიშნავს, რომ ყველა შესაძლო დაძაბული მდგომარეობიდან მხოლოდ ის არის ჭეშმარიტი, როცა \bar{R} ღებულობს მინიმუმს:

კასტილიანოს ცნობილი თეორემა, რომელიც გამოიყენება დრეკადობის თეორიაში, შეიძლება გამოყენებული იქნას იმ შემთხვევისთვისაც, როცა დამოკიდებულება ძალებსა და დეფორმაციებს შორის არაწრფივია.

აღნიშნოთ P_i -თი შეყურსული ძალები, მოდებული მყარ ტანზე, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - სათანადო მიმართველი კოსინუსები; U_{xi}, U_{yi}, U_{zi} - P_i ძალის მოდების წერტილების გადაადგილებები ღერძების გასწვრივ.

ვარიაციული განტოლებიდან, როცა ერთ-ერთი P_i ძალა ღებულობს უმცირეს ნაზრდს δP_i , ვღებულობთ:

$$(U_{xi} \alpha_i + U_{yi} \beta_i + U_{zi} \gamma_i) \delta P_i = \delta \bar{R} \quad (1.8.9)$$

$$\delta_i = \frac{\overline{\delta R}}{\delta P_i}$$

აქ - δ_i გადაადგილებაა P_i ძალის მიმართულებით.

ეი დამატებითი მუშაობის კერძო წარმოებული P_i ძალით უდრის ამ ძალის შესაბამის გადაადგილებას δ_i .

ანიზოტროპული ფილების გაანგარიშება ძირითადად ეყრდნობა ილიუშინის დრეკად - პლასტიკური თეორიას.

სოკოლოვსკი, დაეურდნო რა ჰენკის მიერ მიღებულ თანაფარდობებს დრეკად-პლასტიკური დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობისთვის, იხილავს თავისუფლად დაყრდნობილ წრიულ ფილას და ღებულობს შედეგებს, ამავე დროს გრიგორიევი და სხვ. იხილავენ წრიულ ფილებს ხისტად დაყრდნობილი კონტურით.

დრეკად - პლასტიკური ამოხსნები სწორკუთხოვანი ფილების მცირე ჩაღუნვებისთვის, როცა ფილაზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა, მიღებული იქნა ლინის და ხუ-ს მიერ. მათ გამოიყენეს ანალოგია პლასტიკურ დეფორმაციებსა და დატვირთვის შემთხვევაში.

ენგმა და ლოპეცმა ჩაატარეს ექსპერიმენტები ფილის ანალოგიურ მოდელზე, რომელიც შესრულებული იყო ხისტი გადამკვეთი ღეროების სისტემით, და დაკავშირებული იყო ერთმანეთთან კვანძებში ზამბარებით.

ამოცანის ამოხსნისათვის დრეკად-პლასტიკურ სტადიაში საჭიროა:

1. ნორმალური და მხები ძაბვების ინტენსივობის ცოდნა

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} \qquad \tau_i = \sqrt{I_2(D_\sigma)}$$

(1.8.10)

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1\sigma_2}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

ექსტრემალურ პარამეტრებში.

2. ფუნქციონალური დამოკიდებულებანი ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} (2\varepsilon_y - \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{xy} \end{aligned} \tag{1.8.11}$$

3. პლასტიკურობის ენერგეტიკული კრიტერიუმი ხუბერ-მიზესის მიხედვით:

$$\sigma_i = \sigma_T$$

პრაქტიკაში ხშირია ისეთი ამოცანები, რომელთათვისაც არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას დრეკად-პლასტიკურობის თეორია. ამის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ პლასტიკურობის შედეგად ბევრი მასალა არსებითად ანიზოტროპული ხდება. გარდა ამისა დღეს ფართოდ დაინერგა და ინერგება ანიზოტროპული (თავისი ბუნებით) მასალები. ამგვარად, დღის წესრიგში დადგა ანიზოტროპული მასალებისგან დამზადებული კონსტრუქციების გაანგარიშება დრეკად-პლასტიკური დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობისათვის.

განვიხილოთ დენადობის პირობები ორთოტროპული მასალებისათვის. ეს პირობა დრეკადი სიმეტრიის შემთხვევისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left[a_{12} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + a_{23} (\sigma_y - \sigma_z)^2 + a_{13} (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} (a_{44} \tau_{xy}^2 + a_{55} \tau_{xz}^2 + a_{66} \tau_{yz}^2) = u \end{aligned} \tag{1.8.12}$$

სადაც μ არის დეფორმაციის ხვედრითი ენერგია;

$$a_{12} = -\frac{\mu_{12}}{E_1} = -\frac{\mu_{21}}{E_2}; \quad a_{23} = -\frac{\mu_{23}}{E_2} = -\frac{\mu_{32}}{E_3}; \quad a_{13} = -\frac{\mu_{13}}{E_1} = -\frac{\mu_{31}}{E_3}$$

$$a_{44} = (\mathbf{G}_{23})^{-1} \quad a_{55} = (\mathbf{G}_{13})^{-1} \quad a_{66} = (\mathbf{G}_{12})^{-1}$$

$$\mu_{12} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{E_3} \right) \quad \mu_{21} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_2}{E_1} - \frac{E_2}{E_3} \right)$$

$$\mu_{13} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_1}{E_3} - \frac{E_1}{E_2} \right) \quad \mu_{31} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_3}{E_1} - \frac{E_3}{E_2} \right) \quad (1.8.13)$$

$$\mu_{23} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_2}{E_3} - \frac{E_2}{E_1} \right) \quad \mu_{32} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E_3}{E_2} - \frac{E_3}{E_1} \right)$$

ცხადია რომ $\mu_{12} + \mu_{13} = 1$; $\mu_{21} + \mu_{23} = 1$; $\mu_{31} + \mu_{32} = 1$, ხვედრითი პოტენციური ენერგიის ნაზრდის განხილვას მივყავართ გამოსახულებამდე

$$\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \sigma_1^* S_1^* \tilde{\sigma}_i \tilde{\varepsilon}_i \quad (1.8.14)$$

ბრტყელი ამოცანისათვის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა პლასტიკური პოტენციალის არსებობისას წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით

$$d\varepsilon_x = d\tilde{\varphi} (C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\tau_{xy})$$

$$d\varepsilon_y = d\tilde{\varphi} (C_{12}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\tau_{xy})$$

$$d\gamma_{xy} = d\tilde{\varphi} (C_{13}\sigma_x + C_{23}\sigma_y + C_{33}\tau_{xy})$$

(1.8.15)

სადაც C_{ij} ($i,j=1,2,3$) ანიზოტროპიის მუდმივებია xy კოორდინატთა სისტემაში. $d\tilde{\varphi}$ - პროპორციულობის კოეფიციენტი.

პლასტიკურად ორთოტროპული მასალებისათვის $C_{13}=C_{23}=0$.
 ვღებულობთ აპრიორულად, რომ

$$d\tilde{\varphi} = \mu \frac{d\tilde{\varepsilon}_i}{\sigma_i} \quad (1.8.16)$$

სადაც σ_i ძაბვის ინტენსივობაა, $d\tilde{\varepsilon}_i$ - დეფორმაციის ნაზრდის ინტენსივობა ანიზოტროპული მასალებისათვის; μ - ანიზოტროპიის კოეფიციენტი.

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \mu \frac{d\tilde{\varepsilon}_i}{\sigma_i} (C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y) \\ d\varepsilon_y &= \mu \frac{d\tilde{\varepsilon}_i}{\sigma_i} (C_{12}\sigma_x + C_{22}\sigma_y) \\ d\gamma_{xy} &= \mu \frac{d\tilde{\varepsilon}_i}{\sigma_i} C_{33}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (1.8.17)$$

სადაც $\sigma_i = \sqrt{\mu(C_{11}\sigma_x^2 + 2C_{12}\sigma_x\sigma_y + C_{22}\sigma_y^2 + C_{33}\tau_{xy}^2)}$

და

$$d\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{g} \left(C_{22}\varepsilon_x^2 - 2C_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y + C_{11}\varepsilon_y^2 + \frac{1}{C_{33}}\gamma_{xy}^2 \right) \right]}$$

ანიზოტროპიის მუდმივები განისაზღვრება შემდეგი
 გამოსახულებით:

$$C_{11} = 1 + \frac{1}{R_x}; \quad C_{12} = -1; \quad C_{22} = 1 + \frac{1}{R_y} \quad (1.8.18)$$

$$C_{33} = \frac{2}{R_{xy}} \quad \mu = \frac{3}{2 \left(1 + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)} \quad g = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

R_x, R_y, R_{xy} - ანიზოტროპიის მახასიათებლებია, x, y დერძების და xOy სიბრტცისათვის:

$$R_x = \frac{H}{G} \quad R_y = \frac{H}{F}, \quad R_{xy} = \frac{H}{N}$$

(1.8.19)

H, G, F, N -ანიზოტროპიის ექსერიმენტული პარამეტრებია, რომელნიც შედიან დენადობის ფორმულებში:

$$(G + H)\sigma_x^2 - 2H\sigma_x\sigma_y + (H + F)\sigma_y^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 0 \quad (1.8.20)$$

ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის ადგილი აქვს შემდეგ ფუნქციონალურ კავშირებს:

$$\sigma_x = \frac{1}{\mu g} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_i}{\varepsilon_i} (C_{22}\varepsilon_x - C_{12}\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\mu g} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_i}{\varepsilon_i} (C_{11}\varepsilon_y - C_{12}\varepsilon_x) \quad (1.8.21)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\mu g C_{33}} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_i}{\varepsilon_i} \gamma_{xy}$$

თუ ამ ფორმულებს შევადარებთ დენადობის პირობებს (მილუიკოვსკის მიხედვით) შეგვიძლია დავწეროთ

$$H = \frac{\mu_{12}}{\sigma_{xp}^2}, \quad G = \frac{\mu_{13}}{\sigma_{xp}^2}; \quad F = \frac{\mu_{23} \cdot E_1}{E_2 \cdot \sigma_{xp}^2};$$

$$N = \frac{E_1}{2C_{11}\sigma_{xp}}, \quad R_x = \frac{\mu_{12}}{\mu_{13}}, \quad R_y = \frac{\mu_{21}}{\mu_{23}} \quad (1.8.22)$$

$$R_{xy} = \frac{2C_{11}\mu_{12}}{E_1}$$

ახლა უკვე შეგვიძლია დავწეროთ ანიზოტროპიის მუდმივების მნიშვნელობათა გამოსახულებანი

$$C_{11} = 1 + R_x^{-1}\mu_{12}^{-1}; \quad C_{12} = -1; \quad C_{22} = 1 + R_y^{-1}\mu_{21}^{-1};$$

$$C_{22} = 1 + R_y^{-1}\mu_{21}^{-1} \quad (1.8.23)$$

$$C_{33} = 2 \cdot R_{xy}^{-1} = -E_1 C_{11}^{-1} \mu_{12}^{-1}; \quad g = C_{11} \cdot C_{22} - C_{12}^2 = \frac{1 - \mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{12}\mu_{21}}$$

$$\mu = \frac{3 \cdot \mu_{12}\mu_{21}}{2(\mu_{12} + \mu_{21} \cdot \mu_{13})}$$

ინტენსივობათა გამოსახულებები ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$\sigma_{i0}^2 = \frac{3 \cdot \mu_{22}\mu_{21}}{2(\mu_{12} + \mu_{21} \cdot \mu_{13})} (\mu_{12}^{-1}\sigma_x^2 + 2\sigma_x\sigma_y + \mu_{21}^{-1}\sigma_y^2 + E_1 G_{11}^{-1} \mu_{12}^{-1} \tau_{xy}^2) \quad (1.8.24)$$

$$\varepsilon_{i0}^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_{12} + \mu_{21} \cdot \mu_{13}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\mu_{12}^{-1}\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x\varepsilon_y + \mu_{21}^{-1}\varepsilon_y^2) + \frac{2C_{11}(\mu_{12} + \mu_{21} \cdot \mu_{13})}{3E_1\mu_{21}} \gamma_{xy}^2$$

აქედან შეიძლება დავწეროთ:

$$\sigma_x = \frac{2}{9} \cdot \frac{(\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{13})}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} (\mu_{21}^{-1}\varepsilon_x + \varepsilon_y) \cdot \frac{\sigma_{i0}}{\varepsilon_{i0}}; \quad \frac{\sigma_{i0}}{\varepsilon_{i0}}$$

$$\sigma_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{(\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{13})}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})} (\mu_{21}^{-1}\varepsilon_y + \varepsilon_x) \cdot \frac{\sigma_{i0}}{\varepsilon_{i0}}$$

(1.8.25)

$$\tau_{xy} = \frac{2}{3} \cdot \frac{C_{11}(\mu_{12} + \mu_{21}\mu_{13})}{3E_1\mu_{21}} \cdot \frac{\sigma_{i0}}{\varepsilon_{i0}} \gamma_{xy} \cdot \gamma_{xy}$$

ნორმალურ ძაბვათა ინტენსივობა

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\mu(C_{11}\sigma_1^2 + 2C_{12}\sigma_1\sigma_2 + C_{22}\sigma_2^2)}$$

(1.8.26)

$$\varepsilon_i = \sqrt{(\mu \cdot g)^{-1} (C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2)}$$

მიღებული ფორმულები ფაქტიურად პასუხობს ყველა ამოცანას, დენადობის პირობების სათანადო კრიტერიუმთან შესაბამისობაში.

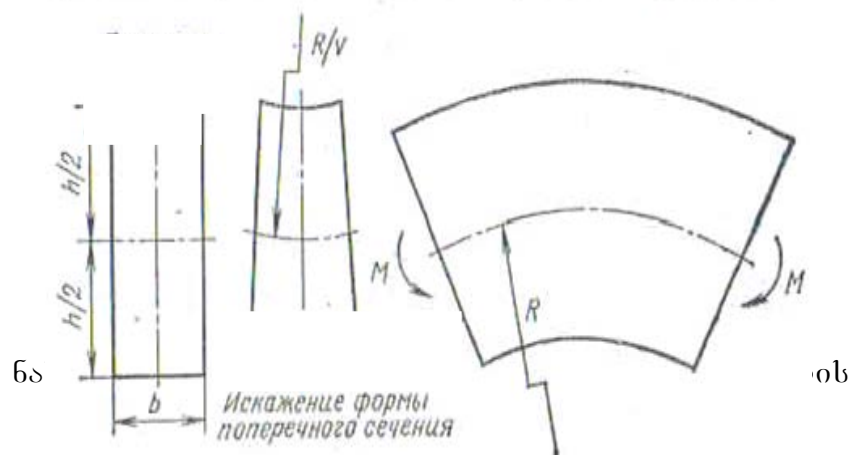
თავი 2. კოჭების, ფილების და რგოლების დრეკად

პლასტიკური ღუნვის ელემენტარული ანალიზი

2.1. პლასტიკური ღუნვის თეორია

კოჭის პლასტიკური ღუნვა ერთი შეხედვით მათემატიკურ ანალიზს ადვილად უნდა ექვემდებარებოდეს. სინამდვილეში ზუსტი ამოხსნა ჯერ კიდევ არაა ცნობილი და ყველა არსებული თეორია ისეთ დაშვებებზეა დაფუძნებული, რომლებიც შედეგებს სხვადასხვა სახით აზუსტებენ. ეს მიახლოებითი თეორიები ძალიან სასარგებლოა, თუკი მათ გაკეთებული დაშვებების ფარგლებში და ექსპერიმენტალურად შემოწმებულ კერძო შემთხვევებისათვის გამოვიყენებთ [55].

ის სირთულეები, რომლებიც პლასტიკური ღუნვის ანალიზის დროს გვხვდება, შეგვიძლია შევაფასოთ მართკუთხა განივი კვეთის ისეთი სწორი კოჭის განხილვით, რომელსაც განივი კვეთის სიმაღლე და სიგანე ერთი რივისა აქვთ. თუ ასეთი კოჭი განივად სუფთა ღუნვას (ნახ.2.1.1) ე.ი. ღუნვის მომენტი უცვლელია, მაშინ განივი ძალები არ გვაქვს და დენადობის ზღვარი ვერც ერთ წერტილში ვერ მიიღწევა და ღუნვამდე ბრტყელი განივი კვეთები, ღუნვის მერეც რჩებიან ბრტყელებად.



თუ R არის ღუნვის სიბრტყეში მოთავსებული ნეიტრალური ღერძის სიმრუდის რადიუსი, მაშინ სიმრუდე პერპენდიკულარულ სიბრტყეში იქნება v/R , სადაც v - პუასონის კოეფიციენტი. ღუნვის გაგრძელებისას თავდაპირველად პლასტიკურად დეფორმირდებიან ბოჭკოები, რომლებიც ყველაზე მეტად არიან დაშორებული კოჭის სიმეტრიის ღერძიდან, შემდეგ კი პლასტიკური დეფორმაციები თანდათან ვრცელდება მისი შუა ნაწილისაკენ, მაგრამ დეფორმირებას კვლავინდებურად უმეტეს - წილად მისი ცენტრალური დრეკადი ბირთვი განსაზღვრავს. თუმცა, ახლ პუასონის კოეფიციენტი (ν) განივი კვეთის მიხედვით იცვლება; დრეკადი დეფორმაციებისათვის ის დაახლოებით 0,3-ის ტოლი ხდება, ხოლო პლასტიკური დეფორმაციებისათვის 0,5-ის ტოლი. დრეკად და პლასტიკურ დეფორმაციებს შორის საზღვარზე დეფორმაციის აუცილებელი უწყვეტობის მისაღებად უნდა შევინარჩუნოთ ზოგიერთი განივი ძაბვა. ამ სირთულის დასაძლევად ზოგიერთი ავტორი ვარაუდობს, რომ გამოსაკვლევი მასალა უკუშემალია, ე.ი. $\nu=0,5$ დრეკადი და პლასტიკური დეფორმაციების დროს.

მათემატიკურად სწორი ანალიზი იოლდება, მაგრამ რეალურ მასალასთან მიმართებაში ეს ყველაფერი განივი დაბევების უგულებელყოფის ტოლფასია, (პლასტიკური ღუნვის დროს განივი კვეთის სიმრუდის შესახებ ლიტერატურის მიმოხილვა, მოცემულია ჰოროქსის და ჯონსონის 1967წ. სტატიაში).

კოჭების დრეკადი განივი ღუნვის დროს ისევეა ნავარაუდები, როგორც წმინდა ღუნვის დროს, ბრტყელი კვეთების ჰიპოთეზის ჭეშმარიტება. ე.ი. ღუნვამდე ბრტყელი კვეთები ღუნვის მერეც ბრტყელებად რჩება იმ პირობით, რომ მხები დაბევები ნორმალურ დაბევებთან შედარებით მცირეა. ეს ასეა, თუ კოჭის სიგრძე მისი განივი კვეთის ზომებთან დიდია. ზუსტად ასევე ვარაუდობენ პლასტიკური ღუნვის დროსაც, ეს დამატებითი ვარაუდია განივი დაბევების უგულებელყოფის ზემოთ ნახსენები პირობისათვის.

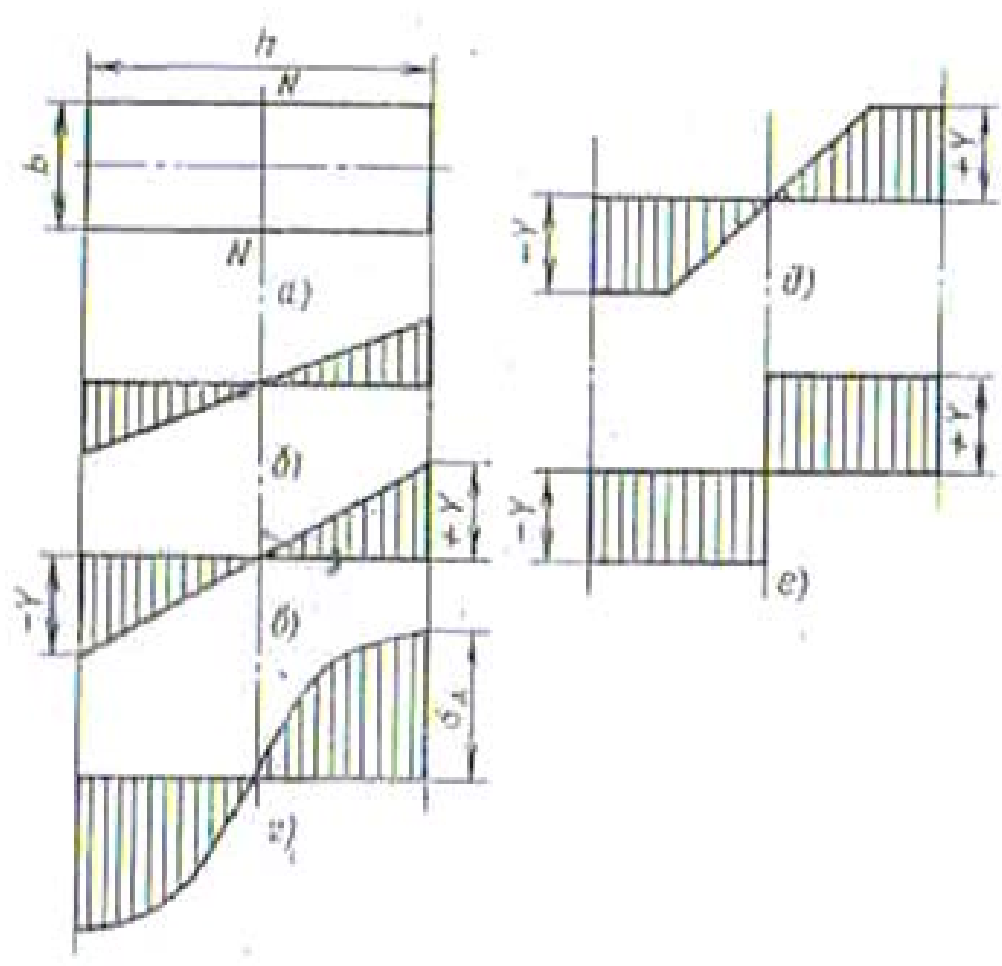
ღუნვის ელემენტარული თეორიის მიხედვით, დრეკადი დეფორმაციებისას დაბვათა განაწილება ისეთ კოჭში, რომელსაც მართკუთხა განივი კვეთა აქვს და M მომენტის ზემოქმედებით განიცდის სუფთა ღუნვას, არის წრფივი ნახ.2.1.1 მაქსიმალური დაბევები აღმოჩნდება ნეიტრალური ღერძიდან $\pm h/2$ მანძილზე და განისაზღვრება გამოსახულებით

$$\sigma_{\max} = \frac{M h}{I 2}$$

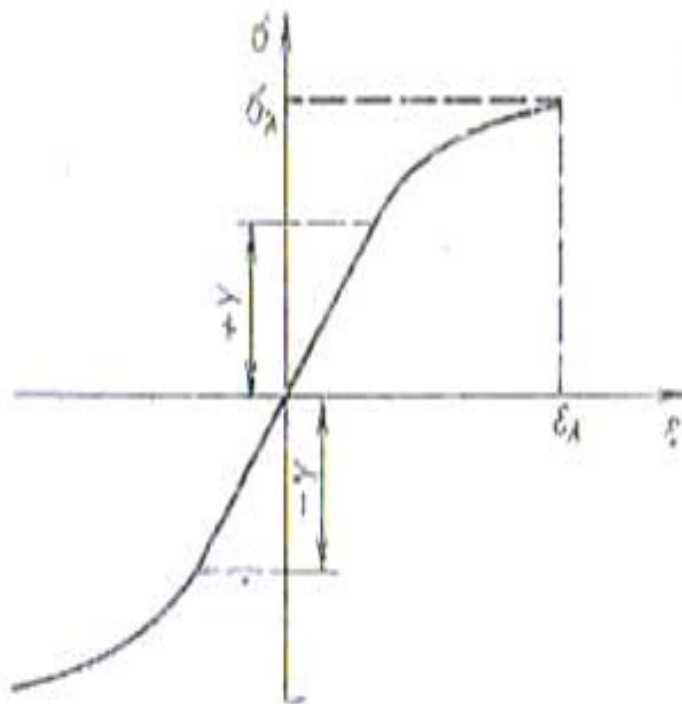
სადაც I არის კოჭის განივი კვეთის ფართობის ინერციის მომენტი (სიმკვრივის ცვალებადობა) ნეიტრალური NN – ის მიმართ. დაუშვათ, კოჭი ისეთი მასალისაგანაა, რომლის დაბვა-დეფორმაციის მრუდები, სუფთა კუმშვის და სუფთა გაჭიმვისას ერთნაირია, (ნახ. 21.3). M – ის (მღუნავი მომენტი) ზრდისას დაბვათა განაწილება წრფივი რჩება იქამდე სანამ მაქსიმალური დაბევები არ გაუტოლდება დენადობის ზღვარს. $\sigma_{\max}=Y$ (ნახ. 2.1.2.გ). M – ის (მღუნავი მომენტი) შემდგომი გაზრდისას დაბვათა განაწილება ღერძიდან დაშორებულ ბოჭკოებში

არაწრფივი ხედბა. ფარდობითი დეფორმაცია ნეიტრალური ღერძიდან y მანძილზე, მცირე დეფორმაციებისათვის y/R - ის ტოლია, სადაც R არის გაღუნული კოჭის ნეიტრალური ბოჭკოს (შუა ნაწილი) სიმრუდის რადიუსი. მოცემული M - ისათვის R მუდმივია (ამასთანავე ძალიან დიდია) კვეთისათვის, მაშასადამე დეფორმაცია y - ის პირდაპირპროპორციულია, იმ შემთხვევაში თუ კვეთები თავდაპირველადაც ბრტყელია და რჩება ბრტყელი.

თუ შუა ნაწილიდან ყველაზე უფრო, ანუ $y = \pm \frac{h}{2}$ მანძილით დაშორებული ბოჭკოების დეფორმაცია არის ϵ_A - მაშინ შესაბამისი ძაბვა σ_A შეიძლება იყოს მიღებული უშუალოდ ძაბვა-დეფორმაციის დიაგრამიდან. ამ შემთხვევაში განივ კვეთში ძაბვათა განაწილება გამოგვლის ძაბვა-დეფორმაციის დიაგრამის გადახატვისას, ძაბვის ღერძული ან ნულოვანი ხაზიდან (ნახ. 21.2 დ), თანაც ერთი ნაწილი დადებითია (გამჭიმავი ძაბვები), ხოლო მეორე უარყოფითია (მკუმშავი ძაბვები). σ/ϵ მრუდის დასაწყისი მდებარეობს ნეიტრალურ ღერძზე.



ნახ. 2.12. ძაბვის განაწილება მართკუთხა კვეთის მქონე კოჭში



ნახ. 2.13 ძაბვა-დეფორმაციის მრუდი

დადებითი და უარყოფითი ფართობების ტოლობა განაპირობებს განივ კვეთაში მოქმედ ნორმალურ ძაბვათა ტოლქმედის ნულთან ტოლობას, მანამ სანამ კვეთა სიმეტრიულია NN ღერძის მიმართ. შიდა მდუნავი მომენტი

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma b y dy$$

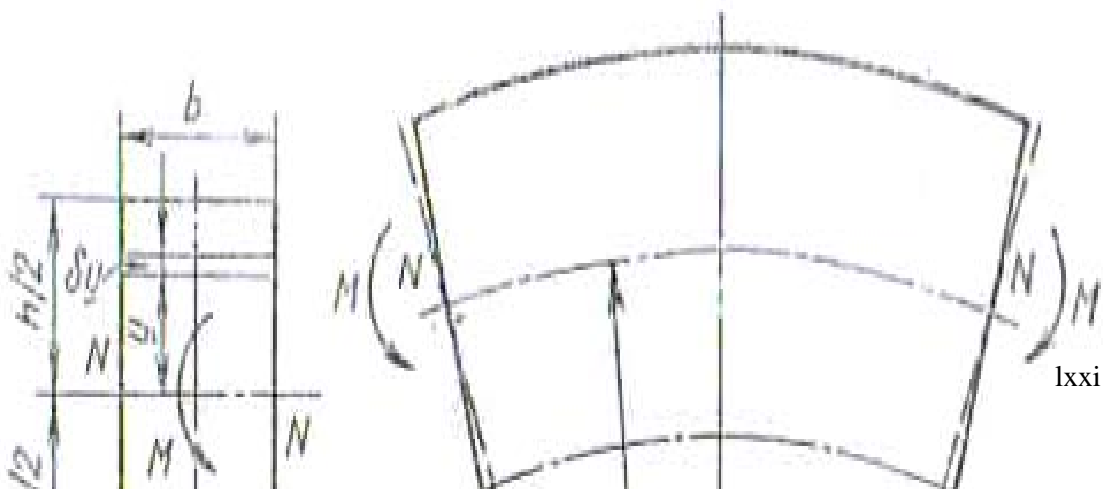
2.2 ძაბვებისა და დეფორმაციების არაწრფივი დამოკიდებულებისას M მდუნავი მომენტის და ჩაღუნვების გამოსათვლელი გამოსახულებები

დავუშვათ, ძაბვა დამოკიდებულია დეფორმაციაზე შემდეგნაირად:

$$\sigma = E \cdot e + F \cdot e^n$$

და ასევე, თუ მივიჩნევთ, რომ $e = \frac{y}{R}$, და გამოვიყენებთ

აღნიშვნებს (ნახ. 2.2.1) გვექნება:



ნახ. 2.2.1

$$M = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{Eby^2}{R} + \frac{Fby^{n+1}}{R^n} \right) dy = \frac{E}{R} I_1 + \frac{F}{R^n} I_n$$

სადაც

$$I_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} by^2 dy \quad \text{და} \quad I_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} by^{n+1} dy$$

I_1 - არის კვეთის ინერციის მომენტი, I_n - არის ინტეგრალი, რომელიც წარმოიშვება ძაბვებსა და დეფორმაციებს შორის არაწრფივი დამოკიდებულებების დროს.

I_n - ის გამოსახულებას ხშირად იყენებენ მასალათა გამძლეობაში. ძაბვა-დეფორმაციებს შორის $\sigma = E \cdot e + F \cdot e^n$ და დამოკიდებულებაში თუ ვივარაუდებთ $E=0$, მივიღებთ:

$$\frac{M}{I_n} = \frac{F}{R^n} = \frac{\sigma}{y^n} \tag{2.2.1}$$

ეს იმ განტოლების უფრო ზოგადი სახეა, რომელსაც ინჟინრები ჩვეულებრივ იყენებენ დრეკადი ღუნვის გამოთვლისას, ანუ როცა $n=1$. მუდმივი b -ს დროს I_n -ის მნიშვნელობა შემდეგია:

$$I_n = \frac{bh^{n+2}}{2^{n+1}(n+2)}$$

ღუნვის ელემენტარულ არაწრფივ თეორიაში საინტერესო მიდგომა იყო შემოთავაზებული სენ-ვენანის მიერ და გადმოცემული იყო ტიმოშენკოს წიგნში (1953წ.). ისეთი მასალისაგან დამზადებული სწორი კოჭებისათვის, რომელთაც გაჭიმვისა და კუმშვისას ძაბვა-დეფორმაციის განსხვავებული მრუდები აქვთ. როგორც ღუნვის ელემენტარულ თეორიაში, dy/dx მცირეა და რადგანაც R დიდია, ამიტომ $\frac{dy}{dx}$ შეგვიძლია ისევ უგულებელვყოთ სიმრუდის გამოთვლისას.

ამრიგად,

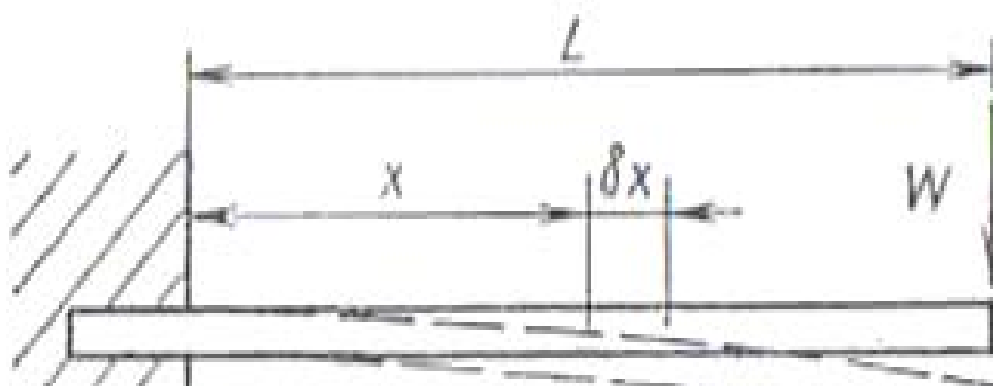
$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$

კოჭის ჩაღუნვის განსაზღვრისათვის განტოლება შეიძლება მივიღოთ, თუ $1/R$ გამოსახულების მნიშვნელობას ჩავსვამთ (2.2.1) განტოლებაში.

ამრიგად

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{M}{EI_n} \right)^{1/n}$$

L სიგრძის მქონე ერთი ბოლოთი ჩამაგრებული კონსოლური კოჭისათვის, რომელსაც თავისუფალ ბოლოზე აქვს მოდებული W დატვირთვა (ნახ. 2.2.2.)



ნახ. 2.2.2 P ძალით დატვირთული კონსოლური კოჭი

$$M = W(L - x)$$

და

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-C(L - x)^{1/n+1}}{(1 + 1/n)} + B$$

$dy/dx=0$ როცა $x=0$. ამიტომ ინტეგრების მუდმივა $B = CL^{1/(n+1)}(1/n+1)$

სადაც

$C = (W/FI_n)^{1/n}$. კიდევ ერთხელ ინტეგრებით მივიღებთ

$$y = \frac{c(L - x)^{1/n+2}}{(1/n + 1)(1/n + 2)} + B \cdot x + D$$

როცა $x=0, y=0, D = -CL^{1/n+2}/(1/n+1)(1/n+2)$ ამგვარად,

$$y = \frac{CL^{1/n+2}}{(1/n+1)(1/n+2)} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^{1/n+2} + \frac{x}{L} \left(\frac{1}{n} + 2\right) - 1 \right]$$

δ_w მაქსიმალური ჩაღუნვა P დატვირთვის მოქმედებით

$$\delta_w = \frac{CL^{1/n+2}}{(1/n+1)(1/n+2)} (1/n+1) = W^{1/n} \cdot f$$

დრეკადი ღუნვის შემთხვევაში $n=1$ $\delta_w = \frac{WL^3}{3FI}$

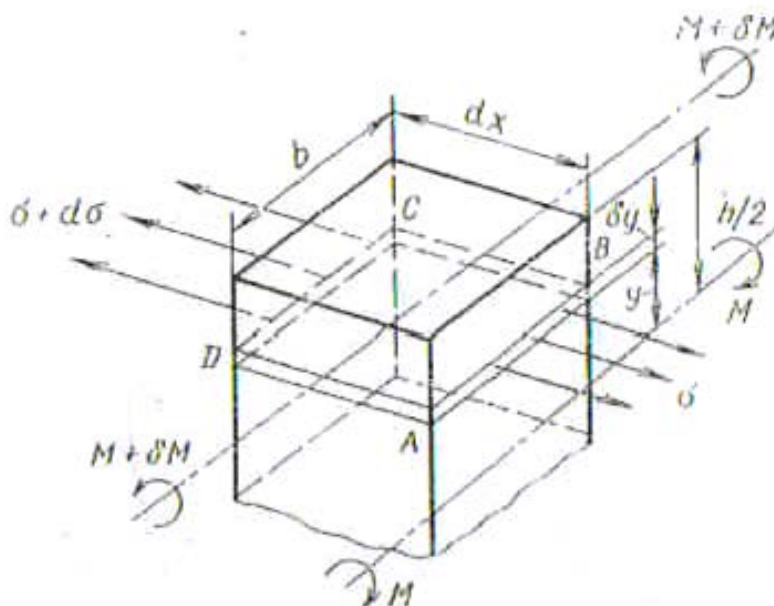
ეს მაგალითი მსგავსი ტიპის პრობლემისადმი მიდგომის ილუსტრაციაა.

y , $\frac{dy}{dx}$, I_n და δ მნიშვნელობები სხვადასხვა რთული შემთხვევებისათვის მოცემულია ფილიპსის წიგნში (1956წ).

თუ ცალი მხრით ჩამაგრებული კოჭის მეორე ბოლოზე მოდებულია W -სგან განსხვავებული W_1 დატვირთვა მაშინ $\delta W_1 = W_1^{\frac{1}{n}} \cdot f$. ჩაღუნვა ერთდროულად მოქმედი W და W_1 დატვირთვების დროს $\delta = (W + W_1)^{\frac{1}{n}} \cdot f$. აღვნიშნოთ, რომ $\delta = \delta_{W_1} + \delta_W$; ანუ $(W + W_1)^{\frac{1}{n}} \neq W^{\frac{1}{n}} + W_1^{\frac{1}{n}}$ მანამდე, სანამ $n \neq 1$. აქედან გამომდინარე, სუპერპოზიციის პრინციპი სამართლიანი იქნება მხოლოდ როცა $n=1$.

2.3. მხები ძაბვების განაწილება. იდეალური მასალის კოჭის ღუნვა

ძაბვის დეფორმაციაზე დამოკიდებულების გამოყენების ერთ-ერთი მარტივი მაგალითია, მართკუთხა კოჭში განივი ღუნვისას მხები ძაბვების განაწილების გამოვლენა. (ნახ. 2.3.1)-ის მიხედვით, სადაც ნაჩვენებია (ნახ. 2.2.2)-ზე მოყვანილი კოჭის δx ნაწილი, მხები ძაბვა ABCD სიბრტყეში მასალათა გამძლეობის ელემენტარული წესების მიხედვით ტოლია.



ნახ. 2.3.1 კოჭის ელემენტის წონასწორობა განივი ჩაღუნვისას

$$\tau \cdot b \delta x = \int_y^{\frac{h}{2}} b \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta x dy$$

(2.3.1)

(2.3.1) განტოლებიდან გამომდინარე $M = \frac{\sigma I_n}{y^n}$ ამიტომ

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{I_n d\sigma}{y^n dx},$$

მაგრამ $\frac{\partial M}{\partial x} = -W$; $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{-Wy^n}{I_n}$

მაშასადამე

$$\tau = \int_y^{\frac{h}{2}} \frac{-W}{I_n} y^n dy = \frac{-W \left[\left(\frac{h}{2} \right)^{n+1} - y^{n+1} \right]}{I_n (n+1)}$$

მოცემული მასალის კოჭის ნეიტრალურ ღერძზე მაქსიმალური მხები ძაბვის შეფარდება წრფივი დრეკადობის მქონე მასალის კოჭის ნეიტრალურ ღერძზე მაქსიმალურ მხებ ძაბვასთან ტოლია

$$\frac{2(n+2)}{3(n+1)}.$$

იდეალური დრეკად-პლასტიკური მასალის სწორკუთხა კოჭის შუიდან ყველაზე უფრო დაშორებულ ბოჭკოებში დენადობის ძაბვის წარმოშობისათვის აუცილებელი M_E მომენტი:

$$M_E = bh^2 Y / 6 \quad (2.3.2)$$

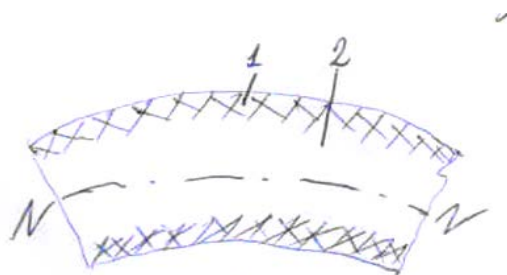
როცა მოდებული მომენტი $M > M_E$, კვეთში ძაბვების განაწილება ისეთია, როგორც ნახ. 2.1.2.ე-ზე კოჭის სიმრუდის რადიუსის

შემცირებისას პლასტიკურად დეფორმირებული შრის სისქე იზრდება და დრეკად და პლასტიკურ დეფორმაციებს შორის საზღვარი უახლოვდება ნეიტრალურ ღერძს. როცა ეს საზღვარი ნეიტრალური ღერძიდან y მანძილზეა, მღუნავი მომენტი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებიდან:

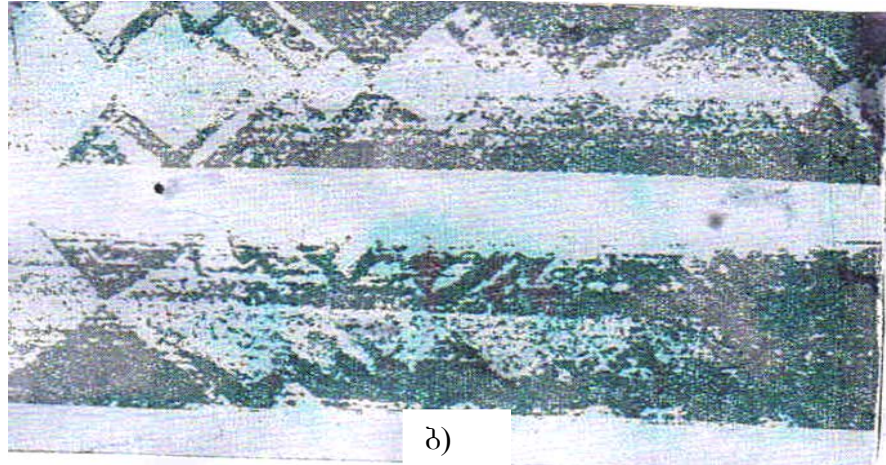
$$M = Yb(3h^2 - 4y^2)/12$$

(2.3.3)

მასალის დენადობა, რომლისაგაც დამზადებულია კოჭი თუ ამ კოჭის სიგანე და სისქე თანაზომადია – შემთხვევაა, რომელიც ახლოსაა ბრტყელ დეფორმაციასთან და რომელსაც ახლავს მუქი ხაზების გაჩენა ზედაპირთან 45° კუთხით. ეს ხაზები განსაზღვრავენ კოჭის პლასტიკურად დეფორმირებულ ნაწილს. მუქ ზოლებს შორის მოჩანს ზედაპირის ნათელი ნაწილი, რომელიც შეესაბამება დრეკად მდგომარეობას. ზოლების პიკები განსაზღვრავენ პლასტიკური და დრეკადი დეფორმაციების საზღვრის მდებარეობას. მღუნავი მომენტის გაზრდისას ეს საზღვარი უახლოვდება ნეიტრალურ ღერძს. დრეკადი არე ნეიტრალური ღერძის სიახლოვეს სწრაფად მცირდება (ნახ. 2.3.2 ა და ბ).



ა)



ნახ. 2.3.2 რბილი ფოლადის ფირფიტაში ძალთა წყვილის მოდების შედეგად წარმოქმნილი პლასტიკური დეფორმაციები 1. – სრიალის (ცოცვადობის) ხაზი ზედაპირისადმი $\pm 45^\circ$ კუთხით 2. – დრეკადი ბირთვი

M-ის სიდიდის მიუხედავად, ყოველთვის გვაქვს გარკვეული დრეკადი ბირთვი, რომლის გამოც შეიძლება წარმოიქმნას ძაბვათა ძალიან დიდი გრადიენტები. რაც უფრო მცირეა ეს დრეკადი ბირთვი, მით უფრო მცირე იქნება ცდომილება, თუ ვივარაუდებთ, რომ ღუნვის დასრულებისას კოჭს პლასტიკური დეფორმაციები მთელი კვეთის გასწვრივ აქვს, თუ არ ჩავთვლით კოჭის სიმრუდის რადიუსს, რომელიც გამოგვივა არსებულზე გაცილებით მცირე. ნახ. 2.1.2. ვ-ზე ნაჩვენებია ძაბვათა გადანაწილება დატვირთვის ამ ზღვრული შემთხვევისათვის.

რაც უფრო ახლოსაა დაძაბული მდგომარეობა ამ შემთხვევასთან, მით უფრო ნაკლები ხდება კოჭის სიმრუდის რადიუსი და მით უფრო ნაკლებად გამოდგება პირველადი დაშვებები საანალიზოდ. ამ უკიდურეს შემთხვევაში ნეიტრალურ ღერძზე ყოველთვის ჩნდება მოულოდნელი ნახტომი +Y-დან -Y-მდე ე.ი. ძაბვათა გახლეჩვა. მაგრამ M_p მთელს კვეთაში პლასტიკური დეფორმაციების მისაღებად აუცილებელი მომენტი, შეიძლება განვსაზღვროთ (2.3.3)-დან. თუ ჩავთვლით, რომ $y=0$.

$$M_p = \frac{bh^2Y}{4} \quad (2.3.2)$$

(2.3.2) განტოლება ასევე შეგვიძლია ამოვხსნათ, თუ მივიჩნევთ, რომ კოჭი იდეალური ხისტ-პლასტიკური მასალისაგან არის დამზადებული. რადგანაც ხისტ-პლასტიკურ მასალაში დრეკადი დეფორმაციები ნულის ტოლია, კოჭის რაიმე დეფორმაცია ან ჩაღუნვა მანამდე ვერ გაჩნდება, სანამ მომენტი არ გახდება იმდენად დიდი, რომ პლასტიკური დეფორმაციები მოელს კვეთაში გავრცელდეს. დრეკადი ბირთვის ნებისმიერ დროს არსებობა გულისხმობს სრულ სიხისტეს.

როდესაც მოელს კვეთაში გაჩნდება პლასტიკური დეფორმაციები, კოჭი გარე დატვირთვების მიმართ წინააღმდეგობის უნარს დაკარგავს, ანუ გააგრძელებს ღუნვას მომენტის ზრდის გარეშე. მღუნავი მომენტი M_p ერთნახევარჯერ მეტია M_E –ზე. ეს მოწმობს იმაზე, რომ ღუნვისას დრეკად ნაწილებს აქვს სიმტკიცის მნიშვნელოვანი მარაგი, მათი პლასტიკურ მდგომარეობაში გადაყვანის შესაძლებლობების წყალობით. ეს დასკვნა შეიძლება იქნეს გამოყენებული საანგარიშო სქემების არჩევისას, რადგანაც ის გაცილებით უფრო ნაკლებ სირთულეებს იწვევს დრეკადი ანალიზის დროს გამოყენებულ მეთოდებთან შედარებით. ეს მეთოდი გამოიყენება კოჭების, ფერმების და რგოლების დატვირთვის ზოგიერთი მარტივი და გავრცელებული შემთხვევის კვლევისათვის.

2.4. ფორმის გავლენა. ირიბი (ასიმეტრიული)

პლასტიკური ღუნვა

იდეალური დრეკადპლასტიკური მასალისაგან დამზადებული მართკუთხა კვეთის კოჭისათვის $\frac{M_p}{M_E} = 1,5$. მოელს კვეთაში პლასტიკური დეფორმაციების წარმოსაქმნელად საჭირო მღუნავი მომენტის ზემოთ მოყვანილ შეფარდებას იმავე კვეთაში დრეკადი დეფორმაციების დროს, დენადობის ზღვარს ახლადმიღწეული განაპირა ბოჭკოების

გამოკლებით, არსებულ მდუნავ მომენტთან, ფორმის კოეფიციენტი ეწოდება.

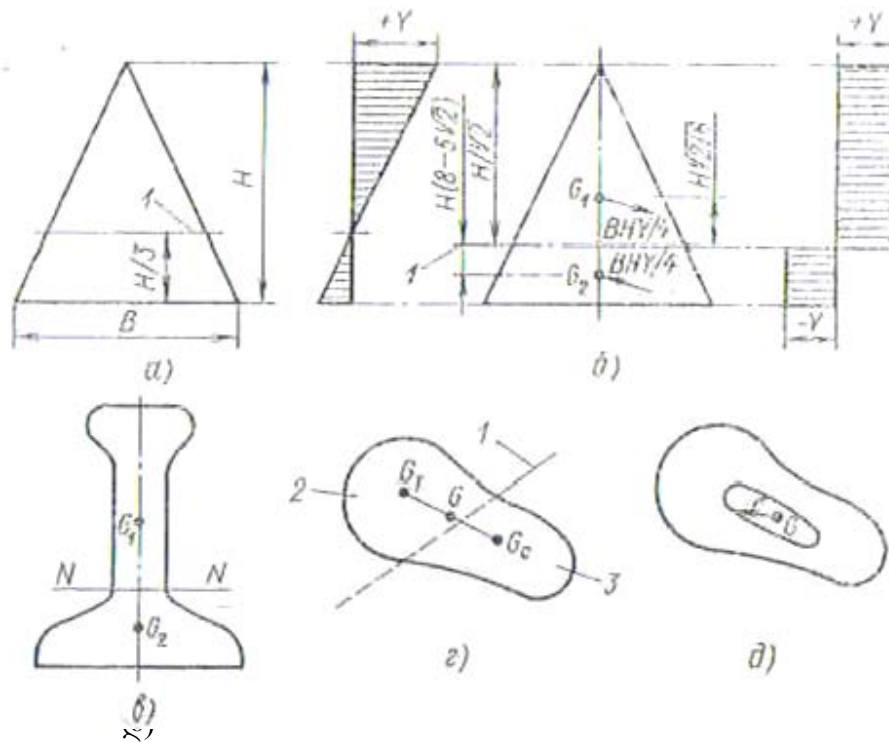
ადვილი საჩვენებელია, რომ a რადიუსის წრიული კვეთის კოჭისათვის

$$M_p = \frac{4}{3}a^3Y \quad \text{და} \quad M_E = \frac{\pi}{4}a^3Y$$

ამ შემთხვევაში ფორმის კოეფიციენტი $\frac{16}{3\pi} \approx 1,7$, ნათელია, რომ

წრიული კვეთის კოჭის უნარი გაუძლოს მთელი კვეთის პლასტიკურ დეფორმირების შესაბამის ზღვრულ დატვირთვას, დაახლოებით 41%-ით არის არასაკმარისად შეფასებული, თუკი დენადობის ზღვარი დგება მხოლოდ მოცემული კვეთის სიმძიმის ძალის ცენტრიდან ყველაზე მეტად დაცილებულ ბოჭკოებში.

არასიმეტრიული განივი კვეთის მქონე კოჭებისათვის პირველ რიგში ნეიტრალური სიბრტყის პოვნაა საჭირო. სუფთა წრფივი დრეკადი დუნვისას ნეიტრალური სიბრტყე კვეთის ცენტრზე გაივლის, მაგრამ განივ კვეთაში პლასტიკური დეფორმაციების წარმოქმნისას ის უკვე აღარ ემთხვევა დრეკადი დეფორმირებისათვის განსაზღვრულ სიბრტყეს. ნეიტრალური სიბრტყის მდებარეობა იცვლება კოჭში პლასტიკური შრის სიღრმის ზრდასთან ერთად. მაგრამ ნეიტრალური სიბრტყის მდებარეობა პლასტიკური დეფორმაციებით უკვე მთლიანად მოცული კოჭის კვეთაში ადვილი დასადგენია თუ ისევე, როგორც დრეკადი დუნვისას, ძალთა წონასწორობის პირობას განვიხილავთ. მხოლოდ მდუნავი მომენტით დატვირთული კოჭისათვის, ნეიტრალური სიბრტყის ცალ მხარეს არსებულ გამჭიმავ ძალათა ჯამი ტოლი უნდა იყოს მეორე მხარეს არსებული მკუმშავ ძალათა ჯამისა. რადგანაც დუნვის ნორმალური ძაბვა მუდმივია კვეთაში და ტოლია Y , წონასწორობის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ნეიტრალური სიბრტყე საჭიროა ისე იყოს განლაგებული, რომ მის ზევით და მის ქვემოთ მდებარე კვეთის ნაწილების ფართობები იყოს ტოლი.



ნახ. 2.4.1 ასიმეტრიული განივი კვეთის მქონე კოჭის ღუნვა

მაგალითისათვის განვიხილოთ კოჭი, რომლის კვეთა H სიმაღლისა და B ფუძის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედიანია. ამ შემთხვევაში ღუნვისას ნებისმიერი ნეიტრალური სიბრტყე ფუძის პარალელური იქნება (ნახ. 2.4.1 ა,ბ). სუფთა დრეკადი ღუნვისას ნეიტრალური ღერძი ფუძიდან $H/3$ მანძილით მალდაა. ადვილი საჩვენებელია, $M_E = \frac{YBH^2}{24}$, როცა სამკუთხედის წვეროში ღუნვის დაბვას დენადობის ზღვარი ახალი მიღწეული აქვს.

მოლიანად პლასტიკური ღუნვისას ნეიტრალური ღერძი წვეროდან $\frac{H}{\sqrt{2}}$ -ით ქვემოთაა. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ გამჭიმავ დაბვათა ტოლქმედი გაივლის ნეიტრალური ღერძის ზემოთ განლაგებული კვეთის სამკუთხე ნაწილის სიმძიმის ცენტრზე, ე.ი. G_1 წერტილზე.

ხოლო მკუმშავ ძაბვათა ტოლქმედი გაივლის ნეიტრალური ღერძის ქვემოთ მდებარე ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრზე, ანუ G_2 წერტილზე,

$$M_p = (2 - \sqrt{2}) \frac{YBH^2}{6}$$

ამ კვეთისათვის ფორმის კოეფიციენტი

$$4 \cdot (2 - \sqrt{2}) \approx 2,34$$

კოჭების კვეთებს ერთი სიმეტრიის ღერძით, როგორც ახლახან განხილულ შემთხვევაში, შესაძლოა ჰქონდეთ ისეთი კონტური, რომლის აღწერა მხოლოდ რიცხობრივად შეიძლება, მაგალითად ნახ.2.2.4.1 გ-ზე ნაჩვენები კვეთა. პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობისათვის მთელს კვეთაში პლასტიკური დეფორმაციების გამომწვევი მდუნავი მომენტი შეიძლება ვიპოვოთ მარტივი ექსპერიმენტის დახმარებით. ლითონის ან მუყაოს თხელი ფურცლისაგან ამოჭრიან განივ კვეთას და პლანიმეტრირებით მის ფართობს განსაზღვრავენ. პლასტიკური ღუნვისას ნეიტრალური NN სიბრტყის მდებარეობა შემდეგნაირად შეიძლება განესაზღვროთ: ფურცელს NN-ზე გაჭრიან, NN-ის ზემოთა და ქვემოთა ფართობები საჭიროა ტოლი იყოს და დანის წვერზე ყოველი ნაწილის ბალანსირებით პოულობენ მათი სიმძიმის ძალის

ცენტრებს ანუ G_1 და G_2 -ის. მაშინ $\frac{M_p}{Y}$ ტოლია კვეთის ფართობის G_1

და G_2 შორის მანძილზე ნამრავლის ნახევრის. განმტკიცებადი მასალისაგან დამზადებული კოჭებისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ გრაფიკული და გრაფიკული რიცხვითი მეთოდები.

ირიბი (ასიმეტრიული) ღუნვა ხდება მაშინ, როცა მოდებული მდუნავი მომენტის სიბრტყე განივი კვეთის სიმეტრიის ღერძის არც პარალელურია და არც პერპენდიკულარული. დაცერებულ პლასტიკურ ღუნვას განიხილავდნენ იოჰანსენი, ჰარისონი, ბარეტი და ბრაუნი.

ნახ. 2.2.4.1 დ-ზე მოცემულია კოჭის A ფართობის განივი კვეთის საერთო ხედი ნებისმიერად არჩეული ნეიტრალური ხაზით. თუ კვეთა პლასტიკური დეფორმაციებით მთლიანადაა მოცული, მაშინ ძალთა წონასწორობიდან გამომდინარე, მდუნავ ძაბვათა კვეთისადმი მართობულობის წყალობით, მისი ფართობის ნაწილი A_T , რომელზედაც

მოქმედებენ გამჭიმავი ძაბვები ნეიტრალური ღერძის ცალი მხრიდან, საჭიროა იყოს ტოლი დანარჩენი ნაწილის A_c ფართობისა, რომელზედაც მოქმედებენ მკუმშავი ძაბვები მეორე მხრიდან. საჭიროა დაცული იყოს პირობა:

$$YA_T - YA_c = 0$$

$$\text{მაშასადამე } A_T = A_c.$$

ყოველი მოცემული მიმართულებისათვის, ნეიტრალური ღერძის მდებარეობა შეიძლება მოცემული კვეთის ბისექტრისების ოჯახიდან მივიღოთ.

გამჭიმავ ძაბვათა $A_T Y$ ტოლქმედი გაივლის A_T ფართობის G_T ცენტრზე, მკუმშავ ძაბვათა $A_c Y$ ტოლქმედი კი A_c ფართობის G_c ცენტრზე. აქედან გამომდინარე, კვეთის სრული პლასტიკური მომენტი

$$M_p = rAY$$

სადაც M_p -ს მიმართულება $G_T G_c$ მონაკვეთის პერპენდიკულარულია.

მონაკვეთის სიგრძე $G_T G_c = 2r$, ხოლო მისი შუა წერტილი ცხადია, რომ არის კვეთის ცენტრი G .

G_T და G_c ფოკუსებს ცენტროიდალური ფოკუსები ეწოდება (ნახ. 2.4.1 დე). თუ ეს ფოკუსები ცნობილია, მაშინ M_p -ს პოვნა ნებისმიერი ღერძის მიმართ ადვილია თუ ჩავთვლით, რომ r - მონაკვეთი G -დან ფოკუსამდე – მომენტის მიმართულების პერპენდიკულარულია. შემდგომ, ცენტროიდალური ფოკუსების მრუდისადმი r რადიუსით მოცემული წერტილიდან გავლებული მხები განსაზღვრავს ნეიტრალური ღერძის მიმართულებას. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ცენტრიოდანულ ფოკუსებს შორის მდებარე მოცემული მონაკვეთი არის მდუნავი მომენტის მიმართულების პერპენდიკულარული. მომიჯნავე ცენტროიდალური ფოკუსის მონაკვეთი ასევეა პერპენდიკულარული მომიჯნავე მდუნავი მომენტის მიმართულების და ამგვარად, ზღვარზე გადასვლისას, ორი დიამეტრის ბოლოებში მდებარე წერტილების

შემათეებელი წირისადმი გავლებული მხებები შესაბამისი მღუნავი მომენტების მიმართულებების პარალელურები უნდა იყოს და შედეგად, წარმოშვან ნეიტრალური ხაზი.

2.5 პლასტიკური ღუნვა შემდგომი დრეკადი განტვირთვით (ნარჩენ ძაბვათა განაწილება, დრეკადი ზამბარილება, ბრტყელი დეფორმაცია)

არაგანმტკიცებადი მასალისაგან დამზადებული მართკუთხა კვეთის მქონე კოჭი (იხ. ნახ. 2.5.1) დატვირთულია ისე, რომ განივი კვეთა არის დრეკადპლასტიკური. (იხ. ნახ. 2.5.1. ე). ამისათვის აუცილებელი მღუნავი მომენტი ტოლია $\frac{bh^2Y}{4}$. კოჭის განტვირთვა

იგივე უარყოფითი $\frac{bh^2Y}{4}$ -ს სიდიდის მომენტის დამატების ტოლფასია.

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისას იდეალური დრეკადპლასტიკური მასალის კოჭში ნარჩენ ძაბვებს, როცა $M_E < M < M_p$ განსაზღვრავენ ისევე, როგორც ახლახანს განხილულ შემთხვევაში, როცა $M = M_p$. ნახ. 2.5.1 ბ-ზე ნაჩვენებია (A,BDOD'B'A'A) ძაბვების განაწილების ეპიურა, რომლებსაც M წარმოშობს ACOC'A'A კი არის დრეკადი ზამბარილების ძაბვების განაწილების ეპიურა M მომენტის განტვირთვის დროს.

თუ დრეკად-პლასტიკური ღუნვისას კოჭის ნეიტრალური ღერძის სიმრუდის რადიუსია R , მაშინ $\frac{y}{R} = \frac{Y}{E}$. თუ ჩავსვავთ y -ს (2.3.3) განტოლებაში, მივიღებთ

$$M = b \left[3h^2 Y - 4Y^3 R^2 / E^2 \right] / 12 \quad (2.5.1)$$

ზამბარილების შედეგად რადიუსის სიმრუდის ცვლილებაა R_E და

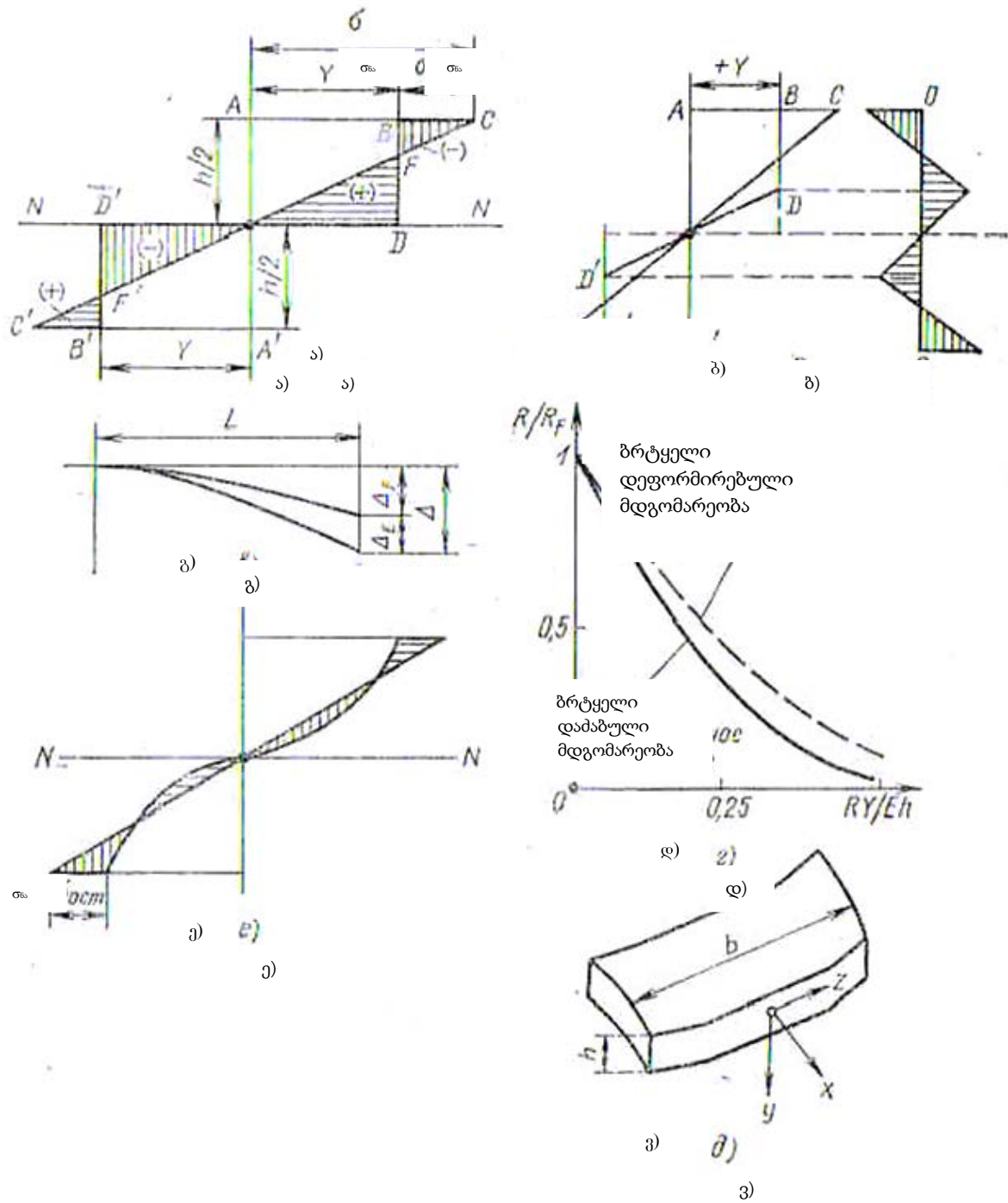
$$M = EI / R = Ebh^2 / 12R_E \quad (2.5.2)$$

ნახ. 2.5.1 გ.-ზე ნაჩვენებია კოჭი, რომელიც M -ის მოქმედების შედეგად მიიღებს Δ ჩაღუნვას. განტვირთვისას დრეკადი ზამბარირება არის Δ_E , მაშინ ნარჩენი ჩაღუნვა $\Delta_F = \Delta - \Delta_E$ რადგანაც $\Delta 2R \approx L^2$ მაშინ

$$\frac{1}{R_F} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_E} \quad \text{ან} \quad \frac{R}{R_F} = 1 - \frac{R}{R_E}$$

(2.5.3)

სადაც R_F ნარჩენი სიმრუდის რადიუსია.



ნახ. 2.5.1 იდეალური დრეკადბლასტიკური მასალის კოჭში ნარჩენი ძაბვების და დრეკადი ზამბარიერების ძაბვების განაწილება

(2.5.1) და (2.5.2) ამოსხნით და შედეგების (2.5.3)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$\frac{R}{R_F} = 1 - 3\left(\frac{YR}{Eh}\right) + 4\left(\frac{YR}{Eh}\right)^3$$

(2.5.4)

$$\frac{R}{R_F} = \left(\frac{YR}{Eh} + 1\right) \cdot \left(2\frac{YR}{Eh} - 1\right)^2$$

(2.5.5)

როცა $\frac{R}{R_F} = 0$ ეს არის სრული ზამბარირება, ე.ი. ჩაღუნვა დრეკადია. თუ $\frac{R}{R_F} = 1$, მაშინ ზამბარირება არ ხდება. ნახ. 2.5.1.დ-ზე ნაჩვენებია $\frac{R}{R_F}$ -ის $\frac{YR}{Eh}$ -ზე დამოკიდებულების გრაფიკი.

უკანასკნელ ქვეთავებში ღუნვა განიხილებოდა ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის პირობებში. b და h ზომები დაახლოებით ტოლი იყო და ამიტომ ჩაღუნვის სიბრტყის მართობულ სიბრტყეში დიდი ძაბვები არ წარმოიშვებოდა. თუ b მრავალჯერ მეტია h -ზე, მაშინ განივი კვეთის სიმრუდის რადიუსი 0-ის ტოლია, თუ არ ჩავთვლით გვერდით წახნაგებთან მდებარე ორ მცირე არეს. კოჭის დიდი ნაწილი (ნახ.2.5.1 ე) ბრტყელია, ამიტომ e_z დეფორმაცია x ან z მიმართულებით 0-ის ტოლია. სუფთა დრეკადი დეფორმაციებისათვის

$$e_z = 0 = \sigma_z - \nu\sigma_x / E \quad (2.5.6)$$

σ_y ყველგან ითვლება 0-ის ტოლად, ν - პუასონის კოეფიციენტი,

$$e_x = (\sigma_x - \nu\sigma_z) / E = y / R$$

შესაბამისად

$$\sigma_x = Ey / R + \nu\sigma_z$$

(2.5.7)

თუ ჩავსვავთ σ_z -ს (2.5.3)-დან (2.5.7)-ში და გარდავექმნით, მივიღებთ:

$$\sigma_z = \frac{Ey}{(1-\nu^2)R} \quad \text{ამიტომ}$$

$$M_E = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x y dy = Eh^3 / 12R(1-\nu^2) = E'h^3 / 12R$$

(2.5.8)

(2.5.8)-დან ჩანს, რომ ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისას ჩვენ უნდა გამოვიყენოთ $E/(1-\nu^2)=E'$. ბრტყელი დაბებული მდგომარეობის დროს გამოსაყენებელი E -ს ნაცვლად. მაშინ გამოსახულება ღუნვისას ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობისათვის ექვივალენტურია (2.5.5)-ისა:

$$\frac{R}{R_F} = 1 - 3\left(\frac{YR}{Eh}\right)(1-\nu^2) + 4\left[\frac{YR}{Eh}(1-\nu^2)\right]^3$$

(2.5.9)

ეს გრაფიკულად მოცემულია (ნახ.2.5.1 დ)-ზე. შეიძლება შევნიშნოთ, რომ დენადობის დაბლა ღუნვისას ბრტყელი ბრტყელი დეფორმირებული მდგომარეობის დროს მიხედვით პირობის მიხედვით ტოლია $(2\sqrt{3})Y$, ტრესკას პირობის მიხედვით კი Y . ექსპერიმენტიდან ჩანს, რომ უკანასკნელი შედეგი შეესაბამება რბილი ფოლადის მარტივ ღუნვას.

რეალური მასალის კოჭში ნარჩენი დაბევები შეიძლება შეფასდეს ამგვარადვე, დაბლა-დეფორმაციის ჭეშმარიტი მრუდის გამოყენებით, თუმცა გამოთვლები, რომლებიც აუცილებელია ნარჩენი დაბევების ეპიურის ასაგებად, დამდებელია (ნახ.2.5.1 ე) ისინი გამართლებულია იმ შემთხვევაში, თუ ნარჩენი დაბევები ყველგან ნაკლებია, ვიდრე მასალის დენადობის ზღვარი, როდესაც ნიმუშს ხელმეორედ ვტვირთავთ მოპირდაპირე ნიშნის მომენტით. ამ შემთხვევაში დენადობის თავდაპირველი ზღვარი იქნება ნაკლები, რამდენადაც ამ არ შეიძლება ბაუშინგერის ეფექტის დავიწყება. პრინციპში არ არსებობს ასევე განსაკუთრებული სირთულეები იმ შემთხვევაშიც, თუ გვაქვს არამართკუთხა კვეთის მქონე კოჭის ღუნვა.

თავი 3 ფირფიტის დრეკად-პლასტიკური ღუნვა.

ზღვრული დატვირთვების განსაზღვრა.

3.1 ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვა

თხელი ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვის თეორია შევისწავლეთ დრეკადი ღუნვის შესაბამისი თეორიების განზოგადების გზით. სიგრძესა და სიგანესთან შედარებით მცირე სისქის ფირფიტები გვაძლევს საშუალებას ძაბვის ნორმალური და მხები კომპონენტები არ გავითვალისწინოთ სიბრტყეებში, რომლებიც პარალელურია შუა სიბრტყისა, განსხვავებით მართობული სიბრტყეების კომპონენტებისა. ცნობილი გეომეტრიული ჰიპოთეზის საფუძველზე ფირფიტის დეფორმირებული მდგომარეობის შესწავლა დაიყვანება მისი შუა სიბრტყის შესწავლაზე.

განვიხილოთ ნებისმიერი მოხაზულობის, კონტურით ნებისმიერად ჩამაგრებული ფირფიტა, რომელზედაც მოქმედებს განაწილებული დატვირთვა P . სანამ დატვირთვა მცირეა, ფირფიტა დრეკადია. დატვირთვის გაზრდის შედეგად ფირფიტის განაპირა შრეებში ალაგ-ალაგ ჩნდება პლასტიკურობა; საბოლოოდ, თუ დატვირთვა საკამოდ გაიზარდა, ფირფიტის ზოგიერთი ადგილი მთელ სისქეში ხდება პლასტიკური [22].

გამოვიყენოთ მართკუთხა კოორდინატთა xyz სისტემა. ღუნვამდე xy სიბრტყე შეთავსებულია ფირფიტის შუა სიბრტყის კვეთთან. z ღერძი მართობულია შუა სიბრტყისა და მიმართულია ქვევით. ფირფიტის სისქე აღნიშნულია $2h$ -ით და ითვლება, რომ ის არის მცირე ფირფიტის დანარჩენ ზომებთან შედარებით (ნახ. 3.1.1).

როგორც ცნობილია, ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა შესაძლებელია განისაზღვროს ინტეგრალური სიდიდეებით, რომლებიც მიეკუთვნება ფირფიტის მთელ სისქეს - მომენტებითა და გნივი ძალებით, რომელთაგან პირველნი განისაზღვრება სამი კომპონენტით M_x, M_y, M_{xy} . გამოსახული $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ძაბვების მეშვეობით ($\sigma_z=0, \tau_{zx}=0, \tau_{zy}=0$).

$$M_x = 2 \int_0^h \sigma_x z dz, \quad M_y = 2 \int_0^h \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = 2 \int_0^h \sigma_{xy} z dz \quad (3.1.1)$$

ხოლო მეორენი ორი Q_x, Q_y კომპონენტით, დაკავშირებული შემდეგნაირად τ_{xz}, τ_{yz} -თან:

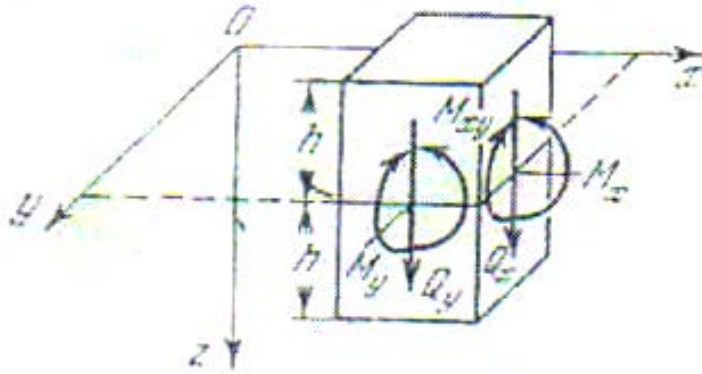
$$Q_x = 2 \int_0^h \tau_{xz} dz, \quad Q_y = 2 \int_0^h \tau_{yz} dz$$

ამ კომპონენტებისათვის მიღებულია ნიშნის წესი, რომელიც ცხადი გახდება, თუ განვიხილავთ ელემენტარულ პარალელებიპედს. რომელზედაც ნაჩვენებია M_x, M_y, M_{xy} დადებითი კომპონენტები და ასევე დადებითი Q_x, Q_y კომპონენტები (ნახ. 3.1.1). M_x და M_y მღუნავი მომენტების ზღვრული მნიშვნელობები იქნება

$$M_s = \sigma_s h^2$$

მგრესავი მომენტის ზღვრული მნიშვნელობა

$$K = kh^2, \text{ ე.ი. } M_s = \sqrt{3}K.$$



ნახ. 3.1.1

ფირფიტის წონასწორობა განისაზღვრება ორი დიფერენციალური განტოლებით, რომლებიც ამყარებენ კავშირს M_x, M_y, M_{xy} კომპონენტებსა და Q_x, Q_y კომპონენტებს შორის შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y$$

(3.1.2)

და ერთი დიფერენციალური განტოლებით, რომელიც აკავშირებს Q_x, Q_y კომპონენტებს და განაწილებულ p დატვირთვას შემდეგი სახით:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0$$

(3.1.3)

როგორც ცნობილია, დრეკადი მდგომარეობა აღიწერება ჩვეულებრივი თანაფარდობებით. ჩავთვალოთ, რომ ამ თანაფარდობებში $\sigma_z = 0$ და ამოვხსნათ ძაბვის კომპონენტებისათვის, მივიღებთ:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \tau_{zy} = 2G\gamma_{xy}$$

(3.1.4)

ინტენსივობების საპოვნელად გავითვალისწინოთ, რომ

$$\sigma_z = 0, \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0$$

ძაბვის ინტენსივობა მიიღებს სახეს:

$$\tau^2 = \frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2$$

დეფორმაციის ინტენსივობა ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{4\cos^2\mu}(\varepsilon_x^2 - \cos 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2) + \gamma_{xy}^2$$

სადაც $\sin\mu = \frac{1+\nu}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \quad \cos\mu = \frac{\sqrt{3}(1-\nu)}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}}, \quad \nu = \frac{\sin(\mu - \pi/6)}{\sin(\mu + \pi/6)}$

პლასტიკური მდგომარეობა განისაზღვრება ჰენკის ძირითადი დამოკიდებულებებით

$$\frac{\varepsilon_x}{\sigma_x} = \frac{\varepsilon_y}{\sigma_y} = \frac{\varepsilon_z}{\sigma_z} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{xz}}{\tau_{xz}} = \frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \psi$$

რომლებიც მარტივდება, თუ დავეუშვებთ, რომ მასალა უკუმშვადია. ამ თანაფარდობებში მივიღოთ, რომ $\tau=k$, $\sigma_z=0$, ასევე $\varepsilon=0$ და ამოვხსნათ ძაბვის კომპონენტებისათვის:

$$\sigma_x = \frac{k}{\gamma}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad \sigma_y = \frac{k}{\gamma}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x) \quad \tau_{xy} = \frac{k}{\gamma}\gamma_{xy} \quad (3.1.5)$$

ძაბვის ინტენსივობას τ აქვს ადრინდელი სახე, ხოლო დეფორმაციის ინტენსივობა γ , როცა $-\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ და γ_{yz}, γ_{zx} ტოლია 0-ის:

$$\gamma^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2$$

შევნიშნოთ, რომ როდესაც $\nu=1/2$, ე.ი. მასალა არც დრეკად და არც პლასტიკურ მდგომარეობაში არ იკუმშება, კუთხე $\mu = \pi/3$, ხოლო γ_0 დეფორმაციის ინტენსივობა ხდება γ , შესაბამისად $\gamma = \gamma_0$.

ცნობილი ჰიპოთეზის გამოყენებით წარმოვადგინოთ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ დეფორმაციის კომპონენტები, როგორც z კოორდინატის ნამრავლი ფირფიტის შუა სიბრტყის გაღუნვის პარამეტრებზე ξ_x, ξ_y, ξ_{xy} – რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ x და y -ზე, შემდეგი სახით:

$$\varepsilon_x = z\xi_x \quad \varepsilon_y = z\xi_y \quad \varepsilon_{xy} = z\xi_{xy}$$

ეხლა შემოვიტანოთ ξ და ξ_0 დადებითი მნიშვნელობები, რომლებიც შედგენილია გაღუნვის პარამეტრებისაგან ისეთვე მეთოდით, როგორც ინტენსივობები γ და γ_0 დეფორმაციის კომპონენტებისაგან. აქედან პირველს ექნება სახე:

$$\xi_0^2 = \frac{1}{4\cos^2 \mu} (\xi_x^2 + 2\cos 2\mu \xi_x \xi_y + \xi_y^2) + \xi_{xy}^2$$

მეორე დაიწერება შემდეგი სახით:

$$\xi^2 = \xi_x^2 + \xi_x \xi_y + \xi_y^2 + \xi_{xy}^2$$

ეს სიდიდეები ასევე დამოკიდებულია მხოლოდ x -სა და y -ზე საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ დეფორმაციის ინტენსივობები γ_0 და γ , როგორც ნამრავლები

$$\gamma_0 = |z|\xi_0 \quad \gamma = |z|\xi$$

ξ_x, ξ_y, ξ_{xy} პარამეტრები გამოიხატება ფირფიტის w ვერტიკალური გადანაცვლებით - ჩალუნვით შემდეგი დამოკიდებულებების საფუძველზე:

$$\xi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \xi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \xi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.1.6)$$

რომლებიც გვაძლევენ დიფერენციალურ განტოლებებს

$$\frac{\partial \xi_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \xi_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \xi_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \xi_y}{\partial x}$$

(3.1.7)

თუ (3.1.4)-ში დეფორმაციის კომპონენტებს შევცვლით ξ_x, ξ_y, ξ_{xy} პარამეტრებით, რომლებიც შეესაბამება დრეკად მდგომარეობას, მივიღებთ:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_x + \nu \xi_y), \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_y + \nu \xi_x), \quad \tau_{xy} = 2Gz \xi_{xy}$$

(3.1.8)

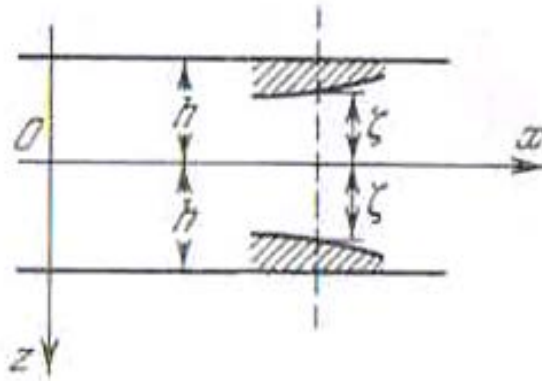
ხოლო (3.1.5) განტოლებებში, რომლებიც შეესაბამება პლასტიკურ მდგომარეობას, გვექნება α

$$\sigma_x = \alpha \frac{k}{\xi} (2\xi_x + \xi_y) \quad \sigma_y = \alpha \frac{k}{\xi} (2\xi_y + \xi_x) \quad \tau_{xy} = 2\alpha \frac{k}{\xi} \xi_{xy}$$

(3.1.9)

შევნიშნოთ, რომ ამ უკანასკნელი განტოლებების მხატვან ნაწილები შეიცავს ნიშნის მიმათითებელ კოეფიციენტს $\aleph = \text{sign} z$, მაგრამ არ არის დამოკიდებული z -ის სიდიდეზე.

ფირფიტების ღუნვის ანგარიშისას განასხვავებენ მდგომარეობის სამ სახეს: სუფთა-დრეკადი, დრეკად-პლასტიკური და სუფთა-პლასტიკური.



ნახ. 3.1.2

1. *სუფთა დრეკადი დაძაბული მდგომარეობა.* ამ შემთხვევაში ფირფიტა მთელ სისქეში რჩება დრეკადი და შესაბამისად ძაბვის ინტენსივობა

$$\tau < k \quad (0 \leq |z| \leq h)$$

მღუნავი მომენტების (3.1.1) კომპონენტები (3.1.8)–ის გათვალისწინებით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$M_x = D(\xi_x + \nu\xi_y), \quad M_y = D(\xi_y + \nu\xi_x), \quad M_{xy} = D(1-\nu)\xi_{xy},$$

(3.1.10)

ხოლო მუდმივი კოეფიციენტი

$$D = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}$$

წარმოადგენს ფირფიტის სიხისტეს ღუნვისადმი.

2. *დრეკად-პლასტიკური დაძაბული მდგომარეობა.* ამ შემთხვევაში ფირფიტის განაპირა შრეები უკვე პლასტიკურია, ხოლო შუა ფენა დრეკადი. შესაბამისად, თუ ζ აპლიკატა აბსოლუტური მნიშვნელობაა დრეკადი და პლასტიკური შრეების საზღვარზე, ძაბვის ინტენსივობა იქნება

$$\tau < k \quad (0 \leq |z| \leq \zeta), \quad \tau = k \quad (\zeta \leq z \leq h)$$

პლასტიკური მდგომარეობის დროს მიღებული დაშვება მასალის უკუმშვადობის შესახებ არ გვაძლევს (თუ $\nu \neq 1/2$) საშუალებას დავაკმაყოფილოთ უწყვეტობის პირობა ძაბვის ყველა კომპონენტისათვის საზღვრებში $|z|=\zeta$. ამიტომ σ_x , σ_y , τ_{xy} ძაბვის კომპონენტების უწყვეტობის მაგივრად უნდა მოვითხოვოთ მხოლოდ τ სიდიდის უწყვეტობა.

რადგანაც დრეკად შრეში ძაბვის ინტენსივობაა

$$\tau = 2G\gamma_0 = 2G|z|\xi_0,$$

ხოლო საზღვრებზე $|z|=\zeta$ შრეებს შორის ეს ინტენსივობა $\tau=k$, სიძნელეს არ წარმოადგენს დავადგინოთ, რომ

$$\xi_0 = \frac{k}{2G\zeta}$$

მომენტის კომპონენტები (3.1.1) შესაძლებელია ასევე წარმოვადგინოთ ფირფიტის შუა სიბრტყის გამრუდების პარამეტრებით. ამ მიზნით დავყოთ ინტეგრალი საზღვრებით $z=0$ -დან $z=h$ -მდე ორი ინტეგრალის ჯამად საზღვრებში $z=0$ -დან $z=\zeta$ -მდე და $z=\zeta$ -დან $z=h$ -მდე. პირველში შევიტანოთ (3.1.8) ხოლო მეორეში (3.1.9). ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{4G}{3(1-\nu)} \zeta^3 (\xi_x + \nu \xi_y) + \frac{k}{\zeta} (h^2 - \zeta^2) (2\xi_x + \xi_y) \\ M_y &= \frac{4G}{3(1-\nu)} \zeta^3 (\xi_y + \nu \xi_x) + \frac{k}{\zeta} (h^2 - \zeta^2) (2\xi_y + \xi_x) \\ M_{xy} &= \frac{4}{3} G \zeta^3 \xi_{xy} + \frac{k}{\zeta} (h^2 - \zeta^2) \xi_{xy} \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

შემდეგში სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ მასალა როგორც დრეკად, ისე პლასტიკურ მდგომარეობაში უკუმშვადია. ე.ი. $\nu=1/2$, კუთხე $\mu=\pi/3$, ხოლო ინტენსივობები

$$\gamma_0 = \gamma, \quad \xi_0 = \xi$$

ეს საგრძნობლად ამარტივებს წინა გამოსახულებებს. ამრიგად, მომენტის კომპონენტები შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$M_x = \frac{1}{2}D_w(2\xi_0 + \xi_y) \quad M_y = \frac{1}{2}D_w(2\xi_y + \xi_x) \quad M_{xy} = \frac{1}{2}D_w\xi_{xy}$$

ამასთანავე, ცვლადი კოეფიციენტი

$$D_w = 4G\zeta\left(h^2 - \frac{1}{3}\zeta^2\right)$$

შეესაბამება ფირფიტის სიხისტეს ღუნვისადმი.

ადრინდელის ანალოგიურად, გამრუდების პარამეტრები აღვნიშნოთ ξ -თი და ორი ახალი სიდიდით - φ და ω შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} \xi_x \\ \xi_y \end{matrix} \right\} = \xi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi \right), \quad \xi_{xy} = \xi \sin \omega \cdot \sin 2\varphi$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს წარმოვადგინოთ მომენტების კომპონენტები შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \end{matrix} \right\} = k \left(h^2 - \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \left(\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi \right)$$

$$M_{xy} = k \left(h^2 - \frac{1}{3}\zeta^2 \right) \sin \omega \cdot \sin 2\varphi \quad (3.1.12)$$

ხოლო გამრუდების პარამეტრები კი ასე:

$$\left. \begin{matrix} \xi_x \\ \xi_y \end{matrix} \right\} = \frac{k}{2G\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi \right), \quad \xi_{xy} = \frac{k}{2G\zeta} \sin \omega \cdot \sin 2\varphi$$

3. ფირფიტის სუფთა პლასტიკური მდგომარეობა. ამ დროს ფირფიტის მთელი სისქე ხდება პლასტიკური და შესაბამისად, ძაბვის ინტენსივობა

$$\tau = k \quad (0 < |z| \leq h)$$

ეს არის დრეკად-პლასტიკური მდგომარეობის ზღვრული მდგომარეობა, როდესაც დრეკადი შრე ქრება, ე.ი. $\zeta=0$; ჩაღუნვები w უსასრულოდ იზრდება, მაშინ როდესაც მომენტის კომპონენტები სასრული რჩება.

(3.1.12)-ის საფუძველზე, როცა $\zeta=0$, მომენტები გამოისახება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \end{matrix} \right\} = K(\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi)$$

$$M_{xy} = K \sin \omega \sin 2\varphi$$

ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვის ამოცანებში კონტურის პირობა არაფრით არ განსხვავდება ფირფიტის ჩვეულებრივი ღუნვისას კონტურის პირობისაგან და დამოკიდებულია კიდეების ჩამაგრებაზე.

სუფთა დრეკადი და დრეკად-პლასტიკური ზონების საზღვარზე, როცა $\zeta=h$ ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტყე უწყვეტია და აქვს უწყვეტად ცვლადი მხები სიბრტყე, რის გამოც უწყვეტია მომენტის ყველა კომპონენტი:

$$\frac{1}{3} [M_x^2 - M_x M_y + M_y^2] + M_{xy}^2 = \frac{4}{9} K^2$$

(3.1.13)

შევიტანოთ (3.1.2)-ში (3.1.13) გამოსახულება. მცირე გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{3h^2} \right) (\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{3h^2} \right) \sin \omega \sin 2\varphi \right] &= \frac{Q_x}{K} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{3h^2} \right) (\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{3h^2} \right) \sin \omega \sin 2\varphi \right] &= \frac{Q_y}{K} \end{aligned} \right\}$$

ხოლო თუ შევიტანოთ (3.1.7)-ში (3.1.12)-ის შესაბამის გამრუდების პარამეტრებს, გვექნება:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\zeta} \sin \omega \cos 2\varphi \right] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\zeta} \sin \omega \sin 2\varphi \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\zeta} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1.14)$$

(3.1.13), (3.1.14) და (3.1.3) ხუთი დიფერენციალური განტოლებიდან მიღებული სისტემა შეიცავს ხუთ საძიებელ სიდიდეს Q_x , Q_y , φ , ω , ζ , მაგრამ მათი გამოთვლა საკმაოდ რთულია.

ფირფიტის გამრუდებული შუა ზედაპირის დიფერენციალური განტოლება (3.1.6)-ში $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ – თვის წინას ანალოგიური გამოსახულებების შეტანით მიღებული

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{k}{2G\zeta} \sin \omega \sin 2\varphi$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ w ჩაღუნვა ფირფიტის შუა სიბრტყეში მას შემდეგ, რაც ζ, φ და ω სიდიდეები იქნება განსაზღვრული.

3.2. განმტკიცებადი კოჭებისა და ფირფიტების ღუნვა

ზემოთ განხილული დრეკად-პლასტიკური ღუნვის თეორია ფირფიტებისათვის, თავისუფლად შეიძლება განავრცოთ განმტკიცებადი მასალებისათვის, ამასთანავე მსჯელობის ძირითადი ეტაპები იგივე იქნება.

ამ თეორიის არსებითი განვითარება მდგომარეობს იმაში, რომ დრეკადი ზონის განუსაზღვრელი შემცირებით კოჭისა და ფირფიტისათვის ასევე განუსაზღვრელად იზრდება ჩაღუნვა და მღუნავი მომენტი.

კოჭების ღუნვის თეორია მარტივდება, თუ დავუშვებთ, რომ მასალა უკუმშვადია და გვაქვს განმტკიცების ხარისხოვანი პირობა

$$\tau = k\gamma^n$$

რომელიც შეიცავს ორ მუდმივას - k და n .

სიმარტივისათვის შემოვიფარგლოთ კოჭებით, რომელთა განიკვეთს აქვს ორი სიმეტრიის ღერძი, ადრინდელი აღნიშვნები გავითვალისწინოთ.

ძაბვის τ ინტენსივობას, როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ექნება სახე:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma|$$

ხოლო დეფორმაციის γ ინტენსივობა, როცა $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\varepsilon/2$,
 $\gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0$ და როდესაც უგულებელვყოფთ მცირე γ_{zx} კომპონენტს
 განისაზღვრება ფორმულით:

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} |\varepsilon|$$

განმტკიცების ხარისხოვანი პირობიდან მივიღებთ:

$$\sigma = K |\varepsilon|^{n-1} \varepsilon, \text{ ამასთანავე } K = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} k.$$

ზემოთ მოყვანილი ჰიპოთეზის საფუძველზე დეფორმაციის
 კომპონენტი ასე ჩაიწერება:

$$\varepsilon = -z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

ძაბვის კომპონენტი კი შესაბამისად იქნება

$$\sigma = -K \left| z \frac{d^2 w}{dx^2} \right|^{n-1} \cdot z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

მღუნავი მომენტი შეიძლება გამოისახოს w ჩაღუნვით, შემდეგი
 სახით

$$M = -K I_w \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.2.1)$$

აქ მოხერხებულია გამოვიყენოთ ე.წ. განზოგადებული ინერციის
 მომენტი, რომელიც ასე გამოისახება:

$$I_w = I \left| h \frac{d^2 w}{dx^2} \right|^{n-1} \quad I = 4h^3 \int_0^1 b t^{n+1} dt$$

კოჭის გაღუნული ღერძის დიფერენციალურ განტოლებას ლ. მ.
 კაჩანოვის მიხედვით აქვს სახე:

$$K I \left| h \frac{d^2 w}{dx^2} \right|^{n-1} \frac{d^2 w}{dx^2} = -M$$

$$(3.2.2)$$

როცა $n=1$, დიფერენციალური განტოლება მარტივდება და გადაიქცევა დრეკადი კოჭის გაღუნული ღერძის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებად.

განმტკიცებადი ფირფიტების ღუნვის თეორია ასევე შესაძლოა ავაგოთ ძალზე მარტივად, თუ დავუშვებთ მასალის უკუმშვადობას და განმტკიცების ხარისხივან პირობას:

$$\tau = k\gamma^n$$

თუ ჰენკის გამარტივებულ თანაფარდობებში

$$\frac{\varepsilon_x}{\sigma'_x} = \frac{\varepsilon_y}{\sigma'_y} = \frac{\varepsilon_z}{\sigma'_z} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \psi$$

მივიჩვეთ, რომ $\varepsilon_z = 0$ და $\sigma_z = 0$, და ამოვხსნით მათ ძაბვის კომპონენტების მიმართ, მივიღებთ:

$$\sigma_x = \frac{\tau}{\gamma}(2\varepsilon_x + \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{\tau}{\gamma}(2\varepsilon_y + \varepsilon_x), \quad \tau_{xy} = \frac{\tau}{\gamma}\gamma_{xy}$$

(3.2.3)

დეფორმაციის კომპონენტები შევცვალოთ უკვე ცნობილი გამოსახულებებით:

$$\varepsilon_x = z\xi_x, \quad \varepsilon_y = z\xi_y, \quad \gamma_{xy} = z\xi_{xy}, \quad \gamma = |z|\xi$$

მარტივი გარდაქმნებით მიიღება:

$$\sigma_x = k|z\xi|^{n-1}z(2\xi_x + \xi_y), \quad \sigma_y = k|z\xi|^{n-1}z(2\xi_y + \xi_x), \quad \tau_{xy} = k|z\xi|^{n-1}z\xi_{xy}$$

წინა გამოსახულებების გათვალისწინებით (3.1.1) გამოსახულება მიიღებს სახეს:

$$M_x = \frac{1}{2}D_w(2\xi_x + \xi_y), \quad M_y = \frac{1}{2}D_w(2\xi_y + \xi_x), \quad M_{xy} = \frac{1}{2}D_w\xi_{xy}$$

სადაც D_w ფირფიტის ღუნვისადმი სიხისტე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$D_w = D(h\xi)^{n-1}, \quad D = \frac{4kh^3}{n+2}$$

შემოვიტანოთ M დადებითი სიდიდე, შედგენილი მომენტის კომპონენტებიდან ისევე, როგორც ძაბვის კომპონენტებიდან შედგება τ ინტენსივობა.

$$M^2 = \frac{1}{3} [M_x^2 + M_x M_y + M_y^2] + M_{xy}^2$$

სადაც

$$\left. \begin{matrix} M_x \\ M_y \end{matrix} \right\} = M(\sqrt{3} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi) \quad (3.2.4)$$

ხოლო ფირფიტის შუა სიბრტყის გაღუნვის პარამეტრები კი ტოლია:

$$\left. \begin{matrix} \xi_x \\ \xi_y \end{matrix} \right\} = \xi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \omega \pm \sin \omega \cos 2\varphi \right), \quad \xi_{xy} = \xi \sin \omega \cdot \sin 2\varphi \quad (3.2.5)$$

შევიტანოთ (3.2.4) გამოსახულება წონასწორობის (3.1.2) დიფერენციალურ განტოლებებში და მცირე გარდაქმნებით განვსაზღვროთ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [M(\sqrt{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi)] + \frac{\partial}{\partial y} [M \sin \omega \sin 2\varphi] &= Q_x \\ \frac{\partial}{\partial y} [M(\sqrt{3} \cos \omega - \sin \omega \cos 2\varphi)] + \frac{\partial}{\partial x} [M \sin \omega \sin 2\varphi] &= Q_y \end{aligned}$$

(3.2.6)

ხოლო თუ (3.1.7) დიფერენციალურ განტოლებაში ჩავსვათ (3.2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\xi \sin \omega \sin 2\varphi] &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\zeta \left(\frac{1}{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi \right) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y} [\xi \sin \omega \sin 2\varphi] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\zeta \left(\frac{1}{3} \cos \omega + \sin \omega \cos 2\varphi \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

სუთი დიფერენციალური განტოლებიდან

(3.2.6), (3.2.7) და (3.1.3) შედგენილი სისტემა შეიცავს ექვს საძიებელ სიდიდეს: Q_x , Q_y , φ , ω , M და ξ , მაგრამ ბოლო ორი განმტკიცების ხარისხოვანი პირობიდან გამომდინარე, ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი დამოკიდებულებებით:

$$M = \frac{1}{2} D_w \xi \quad D_w = D(h\xi)^{n-1} \quad (3.2.8)$$

გალუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალურ განტოლება (3.1.6) და (3.2.5) დამოკიდებულებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\xi \sin \omega \sin 2\varphi \quad (3.2.9)$$

მოყვანილი ფირფიტის ღუნვის შესწავლა შესაძლებელია განხორციელდეს ერთი ცვლადითაც - ფირფიტის შუა სიბრტყის w ჩაღუნვით. წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებებში (3.1.2) და (3.1.3) მომენტის კომპონენტები გამოვსახოთ (3.1.6)-ით და

$M_x = \frac{1}{2} D_w (2\zeta_x + \zeta_y)$ ტიპის ტოლობების საშუალებით და შევნიშნოთ, რომ

$$\xi^2 = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2$$

მივიღებთ მეოთხე რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, რომელიც მოცემულია ა. ა. ილიუშინის მიერ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D_w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = p$$

(1.2.10)

ავლნიშნოთ, რომ როდესაც $n=1$, არაწრფივი დიფერენციალური განტოლება მნიშვნელოვნად მარტივდება და გადადის დრეკადი ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტყის ჩვეულებრივ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებაში.

3.3. წრიული ფირფიტების დრეკად-პლასტიკური ღუნვა

ფირფიტების ღუნვის თეორიაში ყველაზე უფრო მარტივად მიხნეულია დერძსიმეტრიულად დატვირთული წრიული ფირფიტების ღუნვის ამოცანა. ამ ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია დაიყვანოს ჩვეულებრივი არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებაზე.

წრიული ფირფიტის ღუნვისთვის დამახასიათებელი თავისებურებაა ფირფიტის მთელ ფართობზე სუფთა-პლასტიკური მდგომარეობის არსებობის შესაძლებლობა.

განვიხილოთ წრიული ფირფიტა a რადიუსით, ან რგოლური ფირფიტა a და b რადიუსებით. რომელზედაც დერძსიმეტრიულად მოდებულია p ნებისმიერი დატვირთვა. პლასტიკურობის გაჩენა და შემდგომ მისი განვითარება p დატვირთვის გაზრდის შედეგად აქ ისევე ხორცილედება, როგორც ნებისმიერი მოხაზულობის ფირფიტებში.

ავიღოთ ცილინდრული $r\theta z$ კოორდინატთა სისტემა, $z=0$ სიბრტყე ემთხვევა ფირფიტის შუა სიბრტყეს, z დერძი მიმართულია ქვევით, ფირფიტის სისქე აღნიშნულია $2h$ -ით, ის მცირეა a რადიუსთან შედარებით (ნახ.3.3.1).

ფირფიტის ღუნვისას წარმოშობილი ძაბვის სახვადასხვა კომპონენტების რიგი, კვლავინდებურად ერთნაირი არ არის: σ_r და τ_{rz} კომპონენტები შუა სიბრტყის პარალელური სიბრტყეებისათვის მცირეა σ_r და σ_θ კომპონენტებთან შედარებით შუა სიბრტყის მართობული სიბრტყეებისათვის. ამის გარდა დერძსიმეტრიულობის გამო

$$\tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0$$

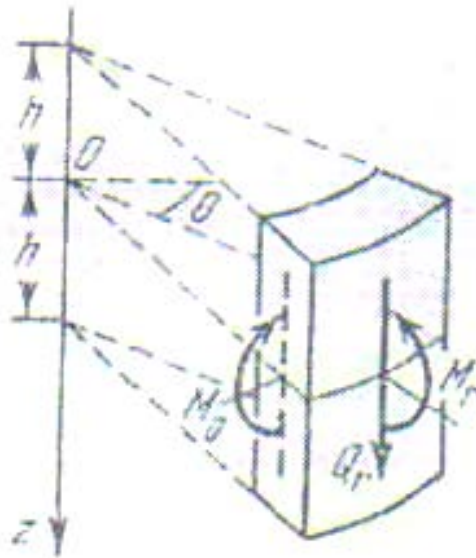
ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა შესაძლებელია განისაზღვროს მომენტის ორი M_r , M_θ კომპონენტით, რომლებიც გამოსახული იქნებიან σ_r , σ_θ -ს გზით შემდეგი სახით:

$$M_r = 2 \int_0^r \sigma_r z dz, \quad M_\theta = 2 \int_0^r \sigma_\theta z dz,$$

და განივი $Q=Q$ ძალის ერთი კომპონენტით, რომელიც დაკავშირებულია τ_{rz} -თან თან თან შემდეგი სახით:

$$Q = 2 \int_0^h \tau_{rz} dz$$

ამ კომპონენტებისათვის მიღებულია ნიშნის წესი, რომელიც ცხადი ხდება განსახილველი ელემენტარული მრუდხაზოვანი პარალელეპიპედისათვის, სადაც ნაჩვენებია დადებითი კომპონენტები M_r და M_θ და დადებითი კომპონენტი Q_r .



ნახ. 3.3.1

მდუნავი და მგრესავი მომენტების ზღვრული მნიშვნელობებია

$$M_s = \sigma_s h^2 \quad \text{და} \quad K = kh^2, \quad \text{ე.ი.} \quad M_s = \sqrt{3}K$$

სიმეტრიულად დატვირთული წრიული ან რგოლური ფირფიტის წონასწორობა აღიწერება წონასწორობის განტოლებით, შემდეგი სახით:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q$$

(3.3.1)

სადაც

$$Q = -\frac{1}{r} \int_0^r p r dr$$

(3.3.2)

ამასთანავე, რგოლური ფირფიტისათვის თავისუფალი შიდა მხრით, ინტეგრალის ქვედა ზღვარი 0 საჭიროა შეიცვალოს a -თი.

თუ p დატვირთვა თანაბრადაა განაწილებული მთელ ფართობზე, ან ცენტრში მოდებულია შეყურსული P ძალა, Q კომპონენტი მიიღებს სახეს:

$$Q = -\frac{1}{2} p r \quad \text{ან} \quad Q = -\frac{P}{2\pi r}$$

ხოლო იმ შემთხვევაში, თუ p დატვირთვა თანაბრადაა განაწილებული d რადიუსის წრეში, Q კომპონენტი იქნება:

$$Q = -\frac{1}{2} p r \quad \text{და} \quad Q = -\frac{1}{2} p \frac{d^2}{r}$$

შესაბამისად,

$$0 \leq r \leq d, \quad 0 \leq r \leq b \text{ -სთვის.}$$

დრეკადი მდგომარეობა ცილინდრული კოორდინატებისათვის მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_r)$$

ძაბვის ინტენსივობა τ და დეფორმაციის ინტენსივობა γ , გამომდინარეობს ცილინდრული კოორდინატებისათვის ჩაწერილი ზოგადი გამოსახულებებიდან, როდესაც

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0; \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_r + \epsilon_\theta), \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0$$

თუ უგულებელვყოფთ τ_z და γ_z მცირე კომპონენტებსაც, ძაბვის ინტენსივობა მიიღებს სახეს:

$$\tau^2 = \frac{1}{3} (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2)$$

ხოლო დეფორმაციის ინტენსივობა ჩაიწერება ასე:

$$\gamma_0^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \mu} (\varepsilon_r^2 - 2 \cos 2\mu \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2),$$

სადაც

$$\sin \mu = \frac{1 + \nu}{2\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, \quad \cos \mu = \frac{\sqrt{3}(1 - \nu)}{2\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, \quad \nu = \frac{\sin(\mu - \pi/6)}{\sin(\mu + \pi/6)}$$

პლასტიკური მდგომარეობა განისაზღვრება (3.2.3) ტიპის განტოლებებით და ცილინდრულ კოორდინატებში ჩაიწერება ასე:

$$\sigma_r = \frac{k}{\gamma} (2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\gamma} (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r) \quad (3.3.3)$$

ძაბვის τ ინტენსივობას აქვს იგივე სახე, ხოლო დეფორმაციის γ ინტენსივობა

$$-\varepsilon_z = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta \quad \gamma_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = 0$$

თუ უგულებელვყოფთ γ_{rz} მცირე კომპონენტს, მივიღებთ

$$\gamma^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2$$

როდესაც $\nu=1/2\mu$, ე.ი. როდესაც მასალა დრეკად მდგომარეობაშიც უკუმშვადია, კუთხე $\mu=\pi/3$, ინტენსივობა კი $\gamma_0=\gamma$.

ისევე, როგორც ზოგად შემთხვევაში, ნებისმიერი ფორმის

ფირფიტისათვის დეფორმაციის კომპონენტები ε_r და ε_θ გამოისახება

კოორდინატის ნამრავლის სახით ფირფიტის შუა სიბრტყის გაღუნვის ξ_r

და ξ_θ პარამეტრებზე, რომლებიც დამოკიდებულია მხოლოდ r -ზე,

სახელდობრ:

$$\varepsilon_r = z\xi_r, \quad \varepsilon_\theta = z\xi_\theta$$

ახლა შემოვიღოთ დადებითი სიდიდე

$$\xi_0^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \mu} (\xi_r^2 - 2 \cos 2\mu \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2)$$

და ანალოგიურად, დადებითი სიდიდე

$$\xi^2 = \xi_r^2 + \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2$$

რომლებიც ასევე დამოკიდებულია მხოლოდ r -ზე, და შევნიშნოთ, რომ γ_0 და γ დეფორმაციის ინტენსივობები გამოისახება როგორც ნამრავლი

$$\gamma_0 = |z|\xi_0, \quad \gamma = |z|\xi$$

ξ_r და ξ_θ პარამეტრები, განისაზღვრება w ჩაღუნვით, თუ გამოვიყენებთ დამოკიდებულებებს

$$\xi_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad \xi_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (3.3.4)$$

რომლებიც გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებებს

$$\frac{d\xi_\theta}{dr} + \frac{\xi_\theta - \xi_r}{r} = 0 \quad (3.3.5)$$

დეფორმაციის კომპონენტები შევცვალოთ ξ_r და ξ_θ პარამეტრებით

$\sigma_z = \frac{2G}{1-\nu}(\epsilon_r + \nu\epsilon_\theta)$ $\sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu}(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_r)$ განტოლებებში, რომლებიც შეესაბამება

დრეკად მდგომარეობას. მივიღებთ:

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_r + \nu\xi_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{2G}{1-\nu} z(\xi_\theta + \nu\xi_r) \quad (3.3.6)$$

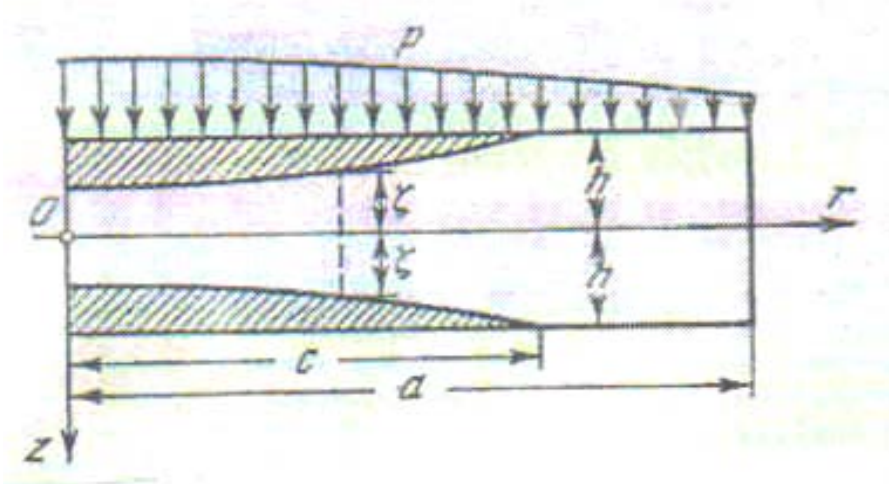
ხოლო პლასტიკური მდგომარეობის ამსახველ (3.3.3) განტოლებაში გვაქნება

$$\sigma_r = \chi \frac{k}{\xi} (\alpha + \nu\xi_\theta) \quad \sigma_\theta = \chi \frac{k}{\xi} (\alpha + \nu\xi_r) \quad (3.3.7)$$

შევნიშნოთ, ტოლობების მარჯვენა ნაწილებში გვაქვს კოეფიციენტები $\chi = \text{sign} z$, მაგრამ α თ მნიშვნელობები არ არის დამოკიდებული z სიდიდეზე.

ფირფიტების ღუნვის შესწავლისას ადრეც აღვნიშნეთ, საჭიროა განვასხვაოთ დაძაბული მდგომარეობის სამი სახე:

სუფთა-დრეკადი, დრეკად-პლასტიკური და სუფთა-პლასტიკური, რომელთა განსაზღვრა ადრე განხილულის ანალოგიურია.



ნახ. 3.3.2

1. ფირფიტის სუფთა-დრეკადი დაძაბული მდგომარეობა.

(3.3.1) მომენტის კომპონენტები (3.3.6)-ის საფუძველზე გამოისახება შუა სიბრტყის გამრუდების პარამეტრებით შემდეგი სახით:

$$M_r = D(\xi_r + \nu \xi_\theta); \quad M_\theta = D(\xi_\theta + \nu \xi_r) \quad (3.3.8)$$

სოლო D კოეფიციენტი, როგორც ადრე ავლინებთ, ფირფიტის სიხისტეა ღუნვისადმი

$$D = \frac{4Gh^3}{3(1 - \nu)}$$

2. დრეკად-პლასტიკური დაძაბული მდგომარეობა.

მომენტის კომპონენტები (3.3.1) შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შუა სიბრტყის გამრუდების გაღუნვის პარამეტრებით, თუ დავშლით ინტეგრალს საზღვრებით $z=0$ -დან $z=h$ -მდე ორ ინტეგრალად საზღვრებით $z=0$ -დან $z=\zeta$ -მდე და $z=\zeta$ -დან $z=h$ -მდე. შემდეგ შევიტანოთ (3.3.6) პირველში და (3.3.7) მეორეში. ადვილად დასადგენია, რომ

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{4G\zeta^3}{3(1-\nu)}(\xi_z + \nu\xi_\theta) + \frac{k}{\xi}(h^2 - \zeta^2)(2\xi_z + \xi_\theta) \\ M_\theta &= \frac{4G\zeta^3}{3(1-\nu)}(\xi_\theta + \nu\xi_r) + \frac{k}{\xi}(h^2 - \zeta^2)(2\xi_\theta + \xi_r) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.9)$$

რადგან ფირფიტის დრეკად შრეში ძაბვის ინტენსივობა

$$\tau = 2G\gamma_0 = 2G|z|\xi_0$$

ხოლო საზღვრებზე $|z|=\zeta$ შრეებს შორის ეს ინტენსივობა $\tau=k$, ამიტომ

$$\xi_0 = \frac{k}{2G\zeta}$$

ადრე განხილულის მსგავსად, დეფორმაციის კომპონენტები

გამოისახება ξ -ით და ω სიდიდით, ან ξ_0 -ით და ახალი სიდიდე ψ -ით:

$$\left. \begin{aligned} \xi_r \\ \xi_\theta \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}}\xi \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{3}\right) = \xi_0 \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sin \mu}$$

მხედველობაში მივიღოთ, რომ ψ და ω ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:

$$\frac{\cos\left(\omega + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos(\psi + \mu)}{\cos(\psi - \mu)}$$

წინა ფორმულა საშუალებას გვაძლევს გამოვსახოთ მომენტის კომპონენტები შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} M_r \\ M_\theta \end{aligned} \right\} = 2k \left[(h^2 - \zeta^2) \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3}\zeta^2 \cos\left(\psi \pm \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

(3.3.10)

ხოლო გამრუდების პარამეტრები შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{aligned} \xi_r \\ \xi_\theta \end{aligned} \right\} = \frac{k}{2G\zeta} \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sin \mu} \quad (3.3.11)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\nu=1/2$, კუთხე $\mu=\pi/3$, ხოლო ψ და ω ემთხვევა ერთმანეთს. ასე რომ $\psi=\omega$; ამას მოსდევს ადრინდელი

გამოსახულებების მნიშვნელოვნად გამარტივება. ასე მაგალითად, მომენტის კომპონენტები იქნება:

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = 2k \left(h^2 - \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right)$$

გამრუდების პარამეტრები კი იქნება

$$\left. \begin{matrix} \xi_r \\ \xi_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{k}{\sqrt{3G\zeta}} \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{3} \right)$$

3. სუფთა-პლასტიკური დაძაბული მდგომარეობა.

(3.3.10)-დან გამომდინარე მომენტის კომპონენტები, როცა $\zeta=0$ წარმოდგება შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = 2K \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.3.12)$$

სასაზღვრო პირობები დამოკიდებულია ჩამაგრების სახეზე.

უწყვეტი ფირფიტის ცენტრში მომენტი $M_r=M_\theta \geq 0$, ხოლო კონტურზე $r=a$ თავისუფლად დაყრდნობილი ან ჩამაგრებული კიდისათვის, შესაბამისად

$$w=M_r=0; \quad w = \frac{dw}{dr} = 0 \quad ($$

3.3.13)

სუფთა დრეკადი და დრეკად-პლასტიკური ზონების საზღვარზე, როცა $\zeta=h$, გაღუნული შუა სიბრტყე უწყვეტია და აქვს უწყვეტად ცვლადი მხები სიბრტყე. ამასთანავე უწყვეტია მომენტის ყველა კომპონენტი. რიცხვითი მაგალითის განხილვის საფუძველზე ვაჩვენოთ, თუ როგორია პლასტიკური ზონების განაწილება გრძივ კვეთებში.

3.4. პლასტიკური ზონების განაწილება გრძივ კვეთებში

განტოლებათა სისტემას უგანზომილებო χ ცვლადით და ტოლობით $\zeta = h \cdot \chi$ აქვს სახე:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left[(1 - \chi^2) \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{3} \chi^2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] - \left[(1 - \chi^2) \sin \omega + \frac{2}{3} \chi^2 \sin \psi \right] = \frac{Q}{2K} r$$

(3.3.4.1)

იგივე განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\chi} \cos(\psi - \mu) \right] + \frac{2}{\chi} \sin \mu \sin \psi = 0$$

(3.4.2)

ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალური განტოლება მიიღება (3.3.4) და (3.3.11) დამოკიდებულებებიდან

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\cos(\psi + \mu)}{\cos(\psi - \mu)} \frac{dw}{dr} \tag{3.4.3}$$

ან

$$\frac{dw}{dr} = -r \frac{k}{2Gh\chi} \frac{\cos(\psi - \mu)}{\sin \mu} \tag{3.4.4}$$

მიღებული განტოლებები საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ წრიული და რგოლური ფირფიტებისათვის, სხვადასხვა დატვირთვებისა და სასაზღვრო პირობების დროს დრეკად-პლასტიკური ღუნვის ამოცანები.

განვიხილოთ კონტურით თავისუფლად დაყრდნობილი წრიული ფირფიტა, რომელზედაც მოქმედებს მთელ ფართობზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვა. განვსაზღვროთ ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა და გაღუნული შუა ზედაპირის ფორმა p -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის.

რადგან ამ დროს განივი ძალის კომპონენტია

$$Q = -\frac{1}{2} pr$$

ამიტომ, თუ შემოვიტანთ ახალ, დამოუკიდებელ ცვლადს

$$\rho^2 = \frac{P}{4K} r^2$$

(3.4.1) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho \cdot \frac{d}{d\rho} \left[(1 - \chi^2) \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2}{3} \chi^2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] - \left[(1 - \chi^2) \sin \omega + \frac{2}{3} \chi^2 \sin \psi \right] = -\rho^2$$

(3.4.5)

ხოლო (3.4.2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\chi} \cos(\psi - \mu) \right] + \frac{2}{\chi} \sin \mu \sin \psi = 0 \quad (3.4.6)$$

მარცხენა მხარეები შეიძლება გავშალოთ, მიღებული განტოლებები კი ამოვსხნათ $d\omega/d\rho$ და $d\chi/d\rho$ წარმოებულების მიმართ, თუმცა განტოლებების ასეთი ფორმა საკმაოდ მოცულობითი იქნება.

პირველად პლასტიკური მდგომარეობა წარმოიშვება ფირფიტის განაპირა სასაზღვრო სიბრტყეებში $z = \pm h$ ფირფიტის ცენტრში ($r=0$), როცა

$$P_0 = \frac{32K}{\sqrt{3}(\nu + 3)a^2}$$

P დატვირთვის გაზრდის შედეგად დრეკად-პლასტიკური ზონა გარკვეულია. ის ავსებს რაიმე c რადიუსის წრეს. წრიული რგოლი, რომელიც ამ წრეში არ შედის, რჩება სუფთა დრეკად მდგომარეობაში.

ჯერ განვიხილოთ ფირფიტის დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობა სუფთა დრეკად რგოლურ ზონაში $c \leq r \leq a$. მომენტები გამოითვლება ფორმულით:

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = K \left(C_1 m C_2 \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{pr^2}{16} [2(1+\nu) \pm (1-\nu)]$$

ხოლო გაღუნული შუა სიბრტყის ფორმა განისაზღვრება ჩაღუნვით

$$w = \frac{pr^4}{64D} - \frac{K}{D} \left(\frac{C_1 r^2}{2(1+\nu)} + \frac{C_2 \cdot a^2}{(1-\nu)} \ln \frac{r}{a} + C_3 \right)$$

სადაც D არის ფირფიტის სიხისტე ღუნვისადმი

$$D = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)}$$

თავისუფალი C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრება $M_r=w=0$ პირობით, კონტურზე $r=a$. მივიღებთ:

$$C_1 = C + \frac{pa^2}{16K}(\nu + 3); \quad C_2 = C$$

და ასევე ჩაღუნვის გამოსახულებას:

$$w = \frac{p}{64D}(r^4 - a^4) - \frac{K}{D} \left[\frac{C_1}{2(1+\nu)}(r^2 - a^2) + \frac{C_2}{1-\nu} a^2 \ln \frac{r}{a} \right]$$

პირობა

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = \frac{4}{3} K^2$$

წრეწირზე $r=c$, რომელიც ყოფს წრეს სუფთა დრეკად და დრეკად-პლასტიკურ ზონად, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$\gamma^2 = \frac{p}{4K} c^2,$$

გვაძლევს საშუალებას დავამყაროთ კავშირი C -სა და რადიუს c -ს შორის განტოლებით:

$$\left[C_1 - \frac{1}{2} \gamma^2 (1+\nu) \right]^2 + 3 \left[C_2 \frac{a^2}{c^2} + \frac{1}{4} \gamma^2 (1-\nu) \right]^2 = \frac{4}{3}$$

მაშასადამე, C მუდმივას განსაზღვრისათვის გვაქვს კვადრატული განტოლება.

ახლა განვიხილოთ ფირფიტის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობა წრიულ დრეკად-პლასტიკურ ზონაში $0 \leq r \leq c$ მომენტის კომპონენტები განისაზღვრება (3.4.5) და (3.4.6) დიფერენციალური განტოლებების ისეთი ამონახნით ვიპოვნით, რომელიც პოლომორფულია $\rho=0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში და დამოკიდებულია $\chi=\chi_0$ პარამეტრზე ფირფიტის ცენტრში

(3.4.3) და (3.4.4) დიფერენციალური განტოლებებიდან ცხადია, რომ აღნიშნული პოლომორფული ამონახნისათვის

$\omega=0$, როცა $\rho=0$,

ამიტომაც $M_r=M_\theta$ პირობა ფირფიტის ცენტრში ავტომატურად კმაყოფილდება. ასევე გავითვალისწინოთ $\chi \leq 1$ შეზღუდვა, რომელიც ყოველთვის უნდა გვქონდეს მხედველობაში.

პირობებს წრეწირზე $r=c$ რომლებიც უკვე გამოვიყენეთ ნაწილობრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $r=c$ წრეწირი ყოფს ფირფიტას სუფთა-დრეკად და დრეკად-პლასტიკურ ზონებად, მივყავართ ტოლობებამდე

$$\chi = 1, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{3}}{4K}(M_\theta + M_r), \quad \sin\psi = \frac{3}{4K}(M_\theta - M_r)$$

რომლებიც თავის მხრივ M_r და M_θ გამოსახულებებზე დაყრდნობით გვიჩვენებს, რომ

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[C_1 - \frac{1}{2} \gamma^2 (1 + \nu) \right], \quad \sin\psi = \frac{3}{2} \left[C_2 \frac{a^2}{c^2} + \frac{1}{4} \gamma^2 (1 - \nu) \right]$$

ეს ტოლობები გვაძლევს საშუალებას მივიღოთ c და წნევა

$$p = 4K \frac{\gamma^2}{c^2}$$

აგებული ამონახსნი განსაზღვრავს ω -სა და χ -ს როგორც ρ -ს ფუნქციებს, და ტოლობა

$$\rho = \gamma \frac{r}{c}$$

საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ ω და χ , როგორც ρ -ს ფუნქციები. ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტყის ფორმა განისაზღვრება დიფერენციალური განტოლების (3.4.4) ინტეგრებით შემდეგი, ჩაღუნვის უწყვეტობის ამსახველი, პირობით:

$$w = \frac{p}{64D} (c^4 - a^4) - \frac{K}{D} \left[\frac{C_1}{2(1+\nu)} (c^2 - a^2) + \frac{C_2}{1-\nu} a^2 \ln \frac{c}{a} \right]$$

ამავე დროს გამოითვლება ჩაღუნვაც ფირფიტის ცენტრში – ე.წ. ჩაღუნვის ისარი w_0 .

p დატვირთვის შემდგომი ზრდით სუფთა-დრეკადი ზონა მცირდება და გადაგვარდება წრეწირად, $r=a$, შემდეგ კი საერთოდ ქრება, ასე რომ, ფირფიტა მთლიანად გადადის დრეკად-პლასტიკურ მდგომარეობაში. პირობა $M_r = 0$, $r = a$ კონტურზე გავაძღვევს, რომ

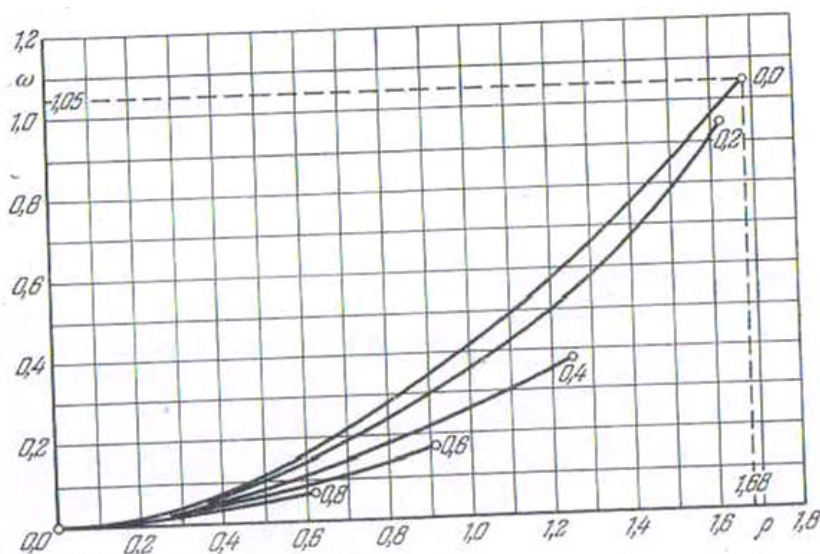
$$3(1 - \chi^2) \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) + 2\chi^2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

ამ გამოსახულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$p = 4K \frac{\alpha^2}{a_2}$$

(3.4.4.) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით იმ პირობით, რომ კონტურის $r=a$ წრეწირზე $w=0$, განვსაზღვრავთ გაღუნული შუა სიბრტყის ფორმას.

მნიშვნელოვანია აღვნიშნოთ, რომ χ_0 პარამეტრის $\chi_0=0$ მნიშვნელობისათვის საძიებელი ფუნქცია χ ნულის ტოლი ხდება ყველგან, ასე რომ, $\chi=0$.



ნახ. 3.4.1

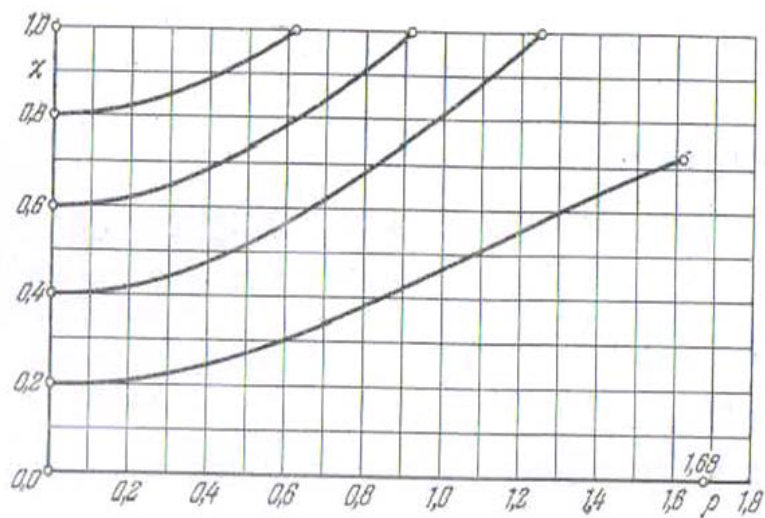
შესაბამისად, როგორც კი ცენტრში დადგება სუფთა-პლასტიკური მდგომარეობა, მთელი ფირფიტა გადადის სუფთა-

პლასტიკურ მდგომარეობაში. ამაშია მნიშვნელოვანი გასხვავება წრიული ფირფიტის ღუნვასა და კოჭის ღუნვას შორის. ერთ რომელიმე წერტილში თუ გაჩნდა სუფთა-პლასტიკური მდგომარეობა, ეს სულაც არ ნიშნავს, რომ მთელ კოჭში ჩნდება სუფთა-პლასტიკური მდგომარეობა.

დატვირთვას, რომლის დროსაც მყარდება სუფთა პლასტიკური მდგომარეობა, ვუწოდებთ ზღვრულ დატვირთვას.

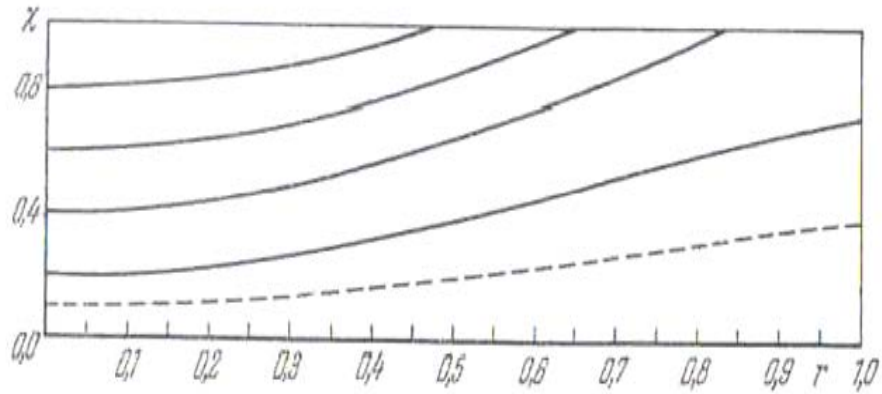
ამოვხსნათ განხილული ამოცანა უგანზომილებო ცვლადებში, როცა $\nu = \frac{1}{4}$, a დამახასიათებელი სიგრძით, K/a დატვირთვით, $\frac{Ka^2}{Gh^3}$ - დამახასიათებელი ჩაღუნვით. (3.4.5) და (3.4.6), დიფერენციალური განტოლებები ამოვხსნათ სასრულ სხვაობათა მეთოდით χ_0 -ისთვის $0 \leq \chi_0 \leq 1$, ინტერვალით 0,1.

ნახაზებზე (3.4.1) და (3.4.2)-ზე ნაჩვენებია ω და χ ფუნქციებს ინტეგრალური მრუდები, რომლებიც გადის $\rho=0$, $\omega=0$, და $\rho=0$, $\chi=\chi_0$ -ზე.



ნახ. 3.4.2

$\chi_0=1,0$ დან $\chi_0=0,4$ -მდე აგებული მრუდებისათვის ფირფიტაში გვაქვს სუფთა დრეკადი რგოლური ზონა. ეს მრუდები წყდება, როცა $\chi_0 = 1$



ნახ. 3.4.3

მრუდი, აგებული $\chi_0=0,2$ -თვის შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც მთელი ფირფიტა დრეკად-პლასტიკურ მდგომარეობაშია. ის წყდება, როცა

$$\omega = \frac{\pi}{3} \approx 1,05$$

საბოლოოდ $\chi=0$ წრფე $\chi_0=0$ -თვის შეესაბამება შემთხვევას, როდესაც მთელი ფირფიტა გადადის სუფთა პლასტიკურ მდგომარეობაში.

C მუდმივის უგანზომილებო c რადიუსისა და უგანზომილებო p დატვირთვის გამოთვლის შედეგები χ_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის იქნება:

ცხრილი 1

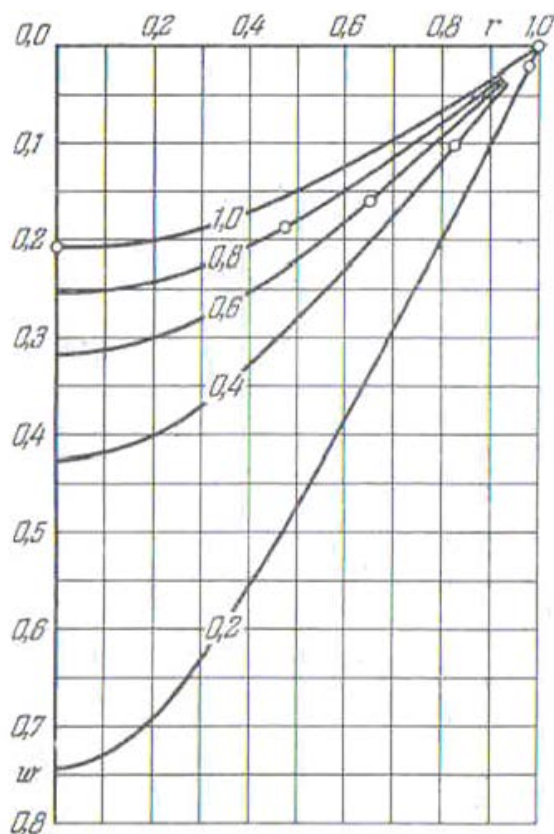
χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
C	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,03	0,07	-	-	-	-
c	0,00	0,35	0,47	0,51	0,65	0,73	0,83	-	-	-	-
p	2,84	3,13	3,46	3,68	3,96	4,25	4,56	4,90	5,26	5,55	5,64

w_0 უგანზომილებო ჩაღუნვის ისრის გამოთვლა χ_0 იგივე მნიშვნელობისათვის იქნება:

ცხრილი 2

χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
w_0	0,21	0,23	0,26	0,28	0,32	0,36	0,43	0,53	0,74	1,40	-

ფირფიტის სისქეში პლასტიკური მდგომარეობის განაწილება ნაჩვენებია 3.4.3 ნახაზზე მრუდების დახმარებით, რომლებიც შემოსაზღვრავენ პლასტიკურ შრეებს ფირფიტის გრძივ კვეთებში.

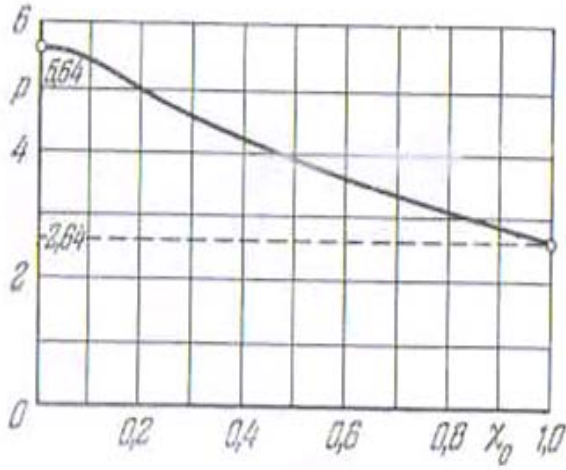


ნახ. 3.4.4

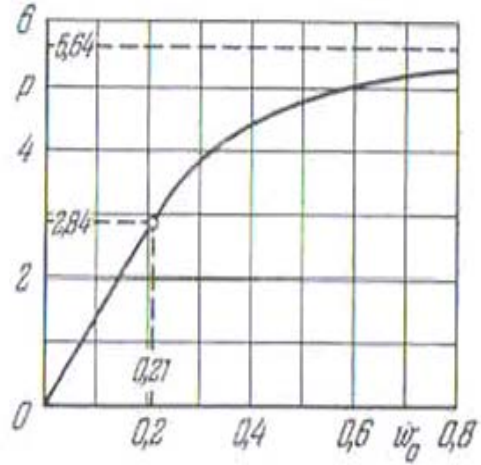
უგანზომილებლო w ჩაღუნვების გრაფიკები, χ_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის 0,0-დან 1,0-მდე 0,2-ის ტოლი ინტერვალებით ნაჩვენებია ნახ. 3.4.4-ზე. წერტილები, რომლებიც შეესაბამება $r=c$ -ს ამ გრაფიკებზე აღნიშნულია პატარა წრეებით. დამოკიდებულება უგანზომილებლო p დატვირთვისა და χ_0 პარამეტრს შორის გამოსახულია ნახ. 3.4.5-ზე, ხოლო დამოკიდებულება უგანზომილებლო p დატვირთვისა და უგანზომილებლო w_0 ჩაღუნვის ისარის შორის ნაჩვენებია ნახ. 3.4.6-ზე.

ანალოგიურადაა შესრულებული ამოცანის ამოხსნა $\nu=1/2$ -სათვის, რომელიც ასევე გულისხმობს (3.4.5) და (3.4.6) დიფერენციალური

განტოლებების რიცხვით ინტეგრებას სასრულ სხვაობათა მეთოდით χ_0 -ისათვის 1,0-დან 0,0-მდე, 0,1-ის ტოლი თანაბარი ინტერვალებით.



ნახაზი 3.4.5



ნახაზი 3.4.6

C მუდმივის, უგანზომილებო c რადიუსისა და უგანზომილებო p დატვირთვის გამოთვლის შედეგები χ_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის იქნება:

ცხრილი 3

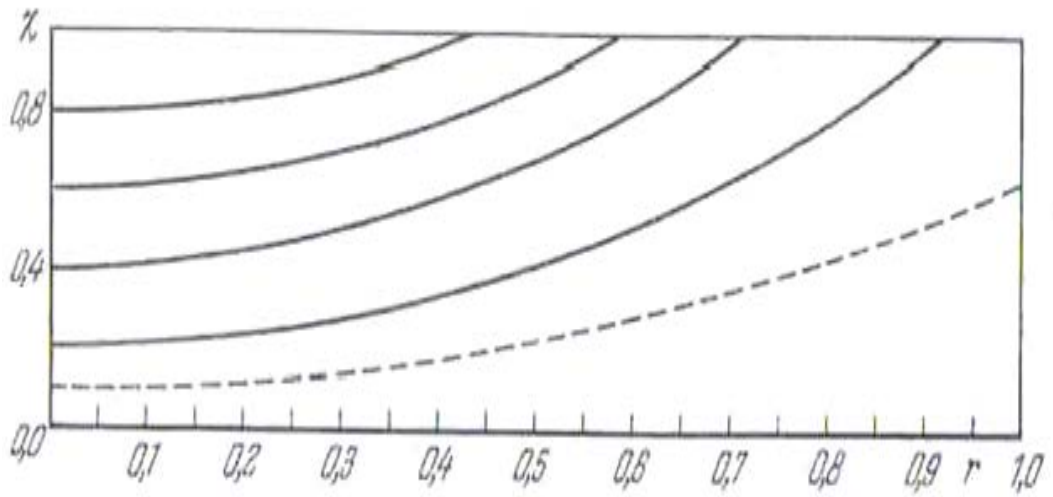
χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
C	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,08	0,19	-	-
c	0,00	0,33	0,43	0,52	0,59	0,65	0,71	0,79	0,92	-	-
p	2,64	2,90	3,16	3,41	3,67	3,94	4,23	4,58	5,01	5,46	5,64

w_0 უგანზომილებო ჩაღუნვის ისრის გამოთვლა χ_0 იგივე მნიშვნელობისათვის იქნება:

ცხრილი 4

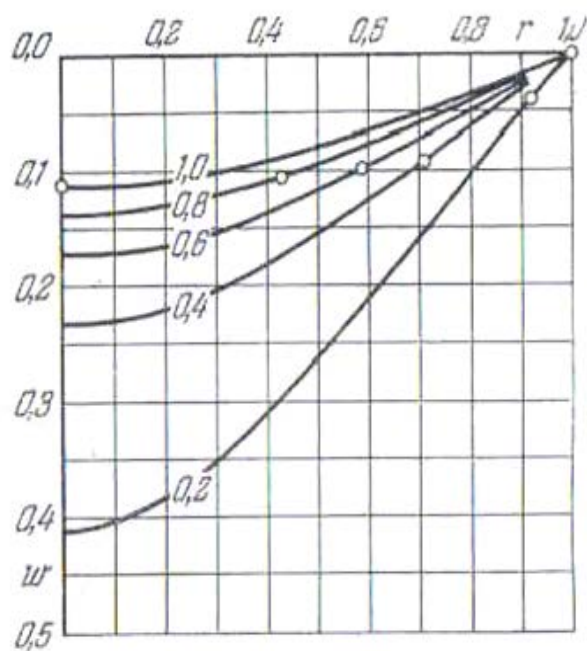
χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
w_0	0,11	0,13	0,14	0,15	0,17	0,20	0,23	0,29	0,41	0,78	-

ფირფიტის სისქეში პლასტიკური მდგომარეობის გავრცელების ხასიათი ნაჩვენებია ნახ. 3.4.7-ზე მრუდების საშუალებით, რომლებიც ფირფიტის გრძივ კვეთში შემოსაზღვრავენ პლასტიკურ შრეს.



ნახაზი 3.4.7

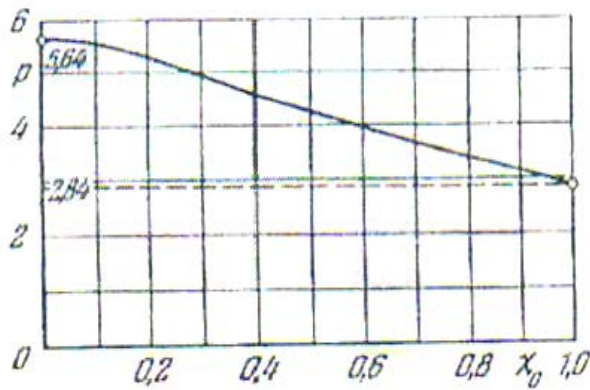
w ჩაღუნვის გრაფიკები χ_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის 0-დან 1,0-მდე თაბნაბარი 0,2 ინტერვალებით ნაჩვენებია ნახ. 3.4.8-ზე. წერტილები, რომლებიც შეესაბამება $r=c$ -ს ამ გრაფიკებზე აღნიშნულია პატარა წრეებით.



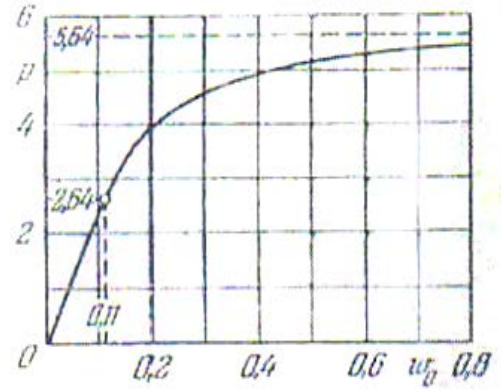
ნახაზი

3.4.8

დამოკიდებულება უგანზომილებო p დატვირთვისა და χ_0 პარამეტრებს შორის გრაფიკულად ნაჩვენებია ნახ. 3.4.9-ზე, ხოლო დამოკიდებულება უგანზომილებო p დატვირთვისა და უგანზომილებო w_0 ჩაღუნვის ისარს შორის გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახ. 3.4.10-ზე.



ნახაზი 3.4.9



ნახაზი 3.4.10

განვსაზღვროთ მხები $\tau_{rz} = \tau$ ძაბვების განაწილება ფირფიტის $0 \leq z \leq h$ სისქეში დრეკად-პლასტიკური ზონებისათვის. ძაბვის კომპონენტების გამოსახულება დრეკად შრეში

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = 2k \frac{z}{\zeta} \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

და პლასტიკურ შრეში

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = 2k \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

რომლებიც გამომდინარეობს (3.3.6) და (3.3.7)-დან, შევიტანოთ წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებაში

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{\partial \tau}{\partial z}$$

დრეკადი შრის გამოსახულების შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{3}{3h^2 - \zeta^2} \left[Q + k \left(1 - \frac{h^2}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta^2}{dr} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] \frac{z}{\zeta}$$

ანალოგიურად პლასტიკური შრის გამოსახულების შეტანით მივიღებთ:

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{3}{3h^2 - \zeta^2} \left[Q + \frac{2}{3} k \frac{d\zeta^2}{dr} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

ამ განტოლებების ინტეგრებით სასაზღვრო პირობების $\tau=0$, როცა $z=h$ და უწყვეტობის პირობის $\tau=0$, $z=\zeta$ გათვალისწინებით მივიღებთ დრეკად შრეში

$$\tau = \frac{3\zeta}{2(3h^2 - \zeta^2)} \left[Q + k \left(1 - \frac{h^2}{\zeta^2} \right) \frac{d\zeta^2}{dr} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] \left(1 - \frac{z^2}{\zeta^2} \right) + \tau_0$$

ხოლო პლასტიკურში

$$\tau = \frac{3}{3h^2 - \zeta^2} \left[Q + \frac{2}{3} k \frac{d\zeta^2}{dr} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] (h - z)$$

მაშინ, როცა ამ შრეებს შორის საზღვარზე

$$\tau_0 = \frac{3(h - \zeta)}{3h^2 - \zeta^2} \left[Q + \frac{2}{3} k \frac{d\zeta^2}{dr} \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

ზღვრული დატვირთვის დროს, როდესაც $\zeta=0$, მხები ძაბვა გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\tau = Q \frac{1}{h^2} (h - z)$$

ამ τ მსები ძაბვის მნიშვნელობა $z=0$ შუა სიბრტყეში ტოლია

$$\tau = Q \frac{1}{h}$$

τ მსები ძაბვების განაწილება ფირფიტის სისქეში სუფთა-დრეკადი ზონებისათვის შესაძლებელია განისაზღვროს ჩვეულებრივი გზით.

განესაზღვროთ წრიული და რგოლური ფირფიტის დრეკად-პლასტიკური ღუნვა განსხვავებული დატვირთვებისა და სასაზღვრო პირობებისათვის.

განვიხილოთ კონტურით ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის დრეკად-პლასტიკური ღუნვა, როდესაც მასზე მოქმედებს მთელ ფართობზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვა. ეს მნიშვნელოვანი ამოცანაა, როდესაც $\nu=1/2$, ე.ი. როცა მასალა დრეკად მდგომარეობაშიც უკუმშვადია. იგი განხილული იყო ი. ვ. შირკოს მიერ.

თავისუფლად დაყრდნობილი ფირფიტისაგან განსხვავებით პლასტიკური მდგომარეობა თავდაპირველად მყარდება $z=\pm h$ სასაზღვრო სიბრტყეებში ფირფიტის კონტურის $r=a$ წრეწირზე როდესაც

$$p_0 = \frac{16}{\sqrt{3(1-\nu+\nu^2)}} \frac{K}{a^2}$$

p დატვირთვის გაზრდისას დრეკად-პლასტიკური ზონა ავსებს წრიულ რგოლს, მაშინ როდესაც, c რადიუსის წრე რჩება სუფთა-დრეკად მდგომარეობაში.

ამრიგად, ფირფიტაში ჩნდება შემდეგი ზონები: წრიული სუფთა-დრეკადი ზონა $0 \leq r < c$ და რგოლური დრეკად-პლასტიკური ზონა $c \leq r \leq a$.

შემდეგ პლასტიკური მდგომარეობა წარმოიშვება სასაზღვრო სიბრტყეებში $z=\pm h$, ფირფიტის $r=0$ ცენტრში, ხოლო p დატვირთვის გაზრდისას დრეკად-პლასტიკური ზონები ავსებს წრეს და წრიულ რგოლს მაშინ, როდესაც შუალედური წრიული რგოლი c_1 და c_2 რადიუსებით იმყოფება სუფთა-დრეკად მდგომარეობაში.

ამიტომ ფირფიტაში ჩნდება ასეთი ზონები: წრიული და რგოლური დრეკად-პლასტიკური ზონა $0 \leq r \leq c_1$ და $c_2 \leq r \leq a$, ასევე რგოლური დრეკადი ზონა $c_1 < r < c_2$.

ფირფიტის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობის განხილვა სუფთა-დრეკად და დრეკად-პლასტიკურ ზონებში წინანდებურად ცალ-ცალკე ხდება. მომენტის კომპონენტები და ფირფიტის შუა სიბრტის ფორმა სუფთა-დრეკად ზონაში განისაზღვრება უკვე ცნობილი ფორმულებით და დრეკად-პლასტიკურ ზონაში (3.4.5) და (3.4.6) დიფერენციალური განტოლებების ინტეგრებით.

პირობები წრეწირზე $r=c$ ან წრეწირებზე $r=c_1$ და $r=c_2$, რომლებიც ყოფს დრეკად და დრეკად-პლასტიკურ ზონებს, რჩება იგივე, მაშინ როცა პირობა

$$\frac{dw}{dr} = 0$$

წრეწირზე კონტურულ $r=a$ გვიჩვენებს, რომ

$$\omega = \frac{5}{6} \pi$$

დატვირთვის შემდგომი გაზრდით წრიული და რგოლური დრეკად-პლასტიკური ზონები $0 \leq r \leq c_1$ და $c_2 \leq r \leq a$ შეერწყმება ერთმანეთს და მთელი ფირფიტა გადადის დრეკად-პლასტიკურ მდგომარეობაში. მომენტის კომპონენტები და ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტის ფორმა განისაზღვრება იგივე გზებით, როგორც განხილული იყო თავისუფლად დაყრდნობილი ფირფიტისათვის, მხოლოდ სხვა პირობებით:

$$\omega = \frac{5}{6} \pi \quad w = 0$$

კონკტურულ წრეწირზე $r=a$.

აქ, ისევე როგორც თავისუფლად დაყრდნობილი ფირფიტისათვის, ცენტრში სუფთა-პლასტიკური მდგომარეობის გაჩენასთან ერთად მთელი ფირფიტა გადადის სუფთა-პლასტიკურ მდგომარეობაში. თანაბრად განაწილებულ დატვირთვას, რომელიც შეესაბამება ასეთ

სუფთა-პლასტიკურ მდგომარეობას, კვლავინდებურად დავარქვათ ზღვრული.

ქვემოთ მოყვანილია ამოცანის ამოხსნა $\nu=1/4$ -თვის, ისევე უგანზომილებო ცვლადებში, დამახასიათებელი დატვირთვით K/a^2 და დამახასიათებელი K^2/Gh^3 ჩაღუნვით. ის მდგომარეობს (3.4.5) და (3.4.6) დიფერენციალური განტოლებების რიცხვით ინტეგრებაში სასრული სხვაობების მეთოდით χ_0 -თვის 1,0-დან 0,0-მდე თანაბარი 0,2 ინტერვალებით.

C_1 და C_2 მუდმივების მნიშვნელობების, c_1 და c_2 უგანზომილებო რადიუსების, უგანზომილებო p დატვირთვის გამოთვლების შედეგები χ_0 პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის ასეთია:

ცხრილი 5

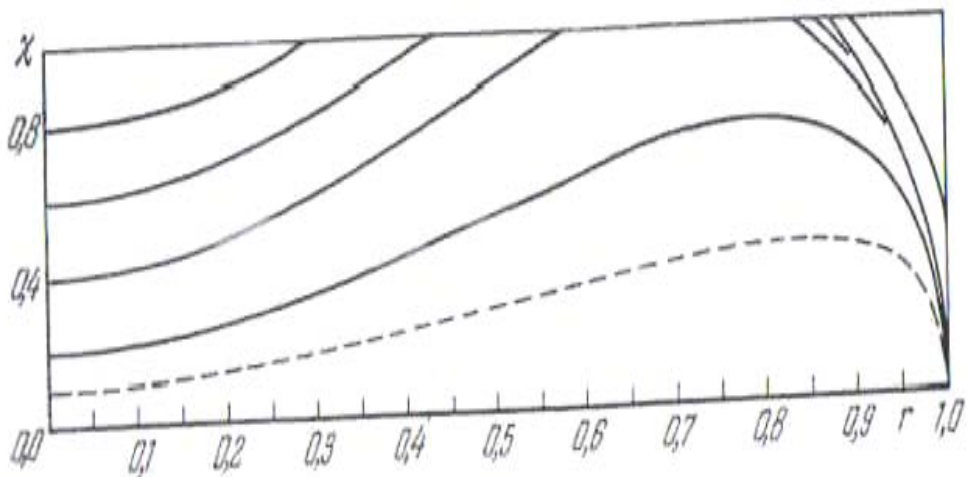
χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
C_1	1,16	1,27	1,38	1,50	1,63	1,76	1,92	2,11	-	-	-
C_2	0,00	0,01	0,11	0,42	1,10	1,47	5,17	10,7	-	-	-
c_1	0,00	0,22	0,30	0,37	0,44	0,50	0,58	0,71	-	-	-
c_2	0,90	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85	0,83	0,75	-	-	-
p	7,28	7,82	8,24	8,53	8,82	9,11	9,45	10,1	10,3	10,7	10,9

ანალოგიური მეთოდით w_0 უგანზომილებო ჩაღუნვის ისრის გამოთვლის მნიშვნელობები χ_0 პარამეტრის იგივე მნიშვნელობებისათვის ასეთია:

ცხრილი 6

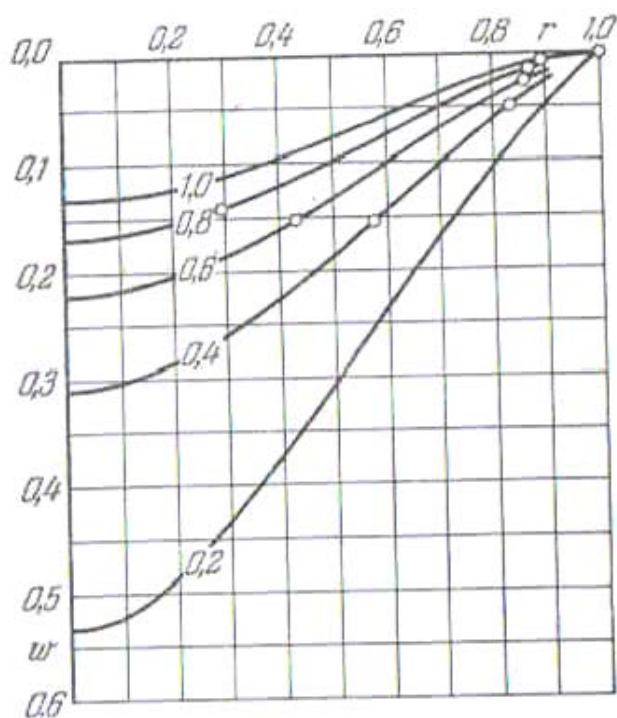
χ_0	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
w_0	0,13	0,15	0,17	0,19	0,22	0,26	0,31	0,37	0,55	1,00	-

ფირფიტის სისქეში პლასტიკური მდგომარეობის გავრცელების ხასიათი (პლასტიკური შრის გავრცელება) ნაჩვენებია ნახ. 3.4.11-ზე.



ნახ. 3.4.11

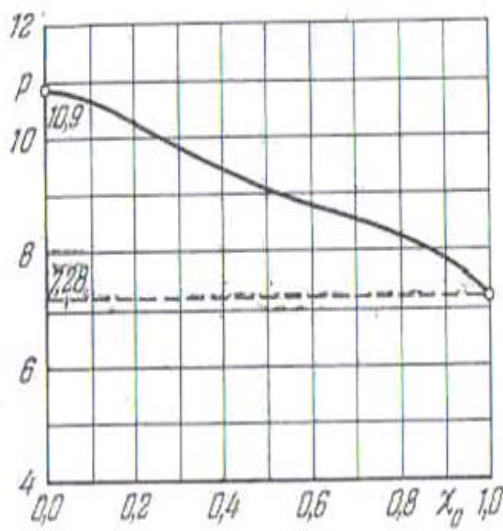
უგანზომილებო w ჩაღუნვის გრაფიკები χ პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის 0,2-დან 1,0-მდე 0,2 თანაბარი ინტერვალებით, ნაჩვენებია ნახ.3.4.12-ზე. $r=c_1$ და $r=c_2$ -ის შესაბამისი წერტილები გრაფიკებზე აღნიშნულია პატარა წრეებით.



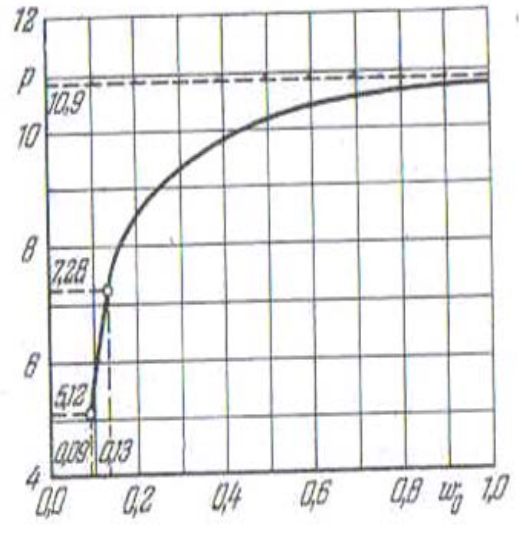
ნახაზი 3.4.12

დამოკიდებულება უგანზომილებო p დატვირთვისა და χ პარამეტრს შორის გრაფიკულად გამოსახულია ნახ. 3.4.13-ზე, ხოლო

დამოკიდებულება უგანზომილებო p დატვირთვისა და w_0 ჩაღუნვის ისარს შორის გრაფიკულად წარმოდგენილია ნახ. 3.4.14-ზე.



ნახ. 3.4.13



ნახ. 3.4.14

თეორიის შემდგომი განვითარება ეკუთვნის ი. ოჰაშის და ს. მურაკამის, რომლებმაც განიხილეს მთელი რიგი საინტერესო ამოცანა წრიული და რგოლური ფირფიტების ღუნვაზე განსხვავებული დატვირთვებისა და სასაზღვრო პირობებისათვის.

ასე, მაგალითად მათ შეისწავლეს წრიული ფირფიტა, რომელიც ჩამაგრებული იყო კონტურით, მასზე მოქმედებდა p დატვირთვა, რომელიც თანაბრად იყო განაწილებული d რადიუსის წრეზე.

ასევე ყურადღება მივაქციოთ ი. ოჰაშის და ს. მურაკამის ნაშრომს, რომელიც ეძღვნება ცალმხრივად დრეკად-პლასტიკური წრიული ფირფიტის ღუნვას რადიალური გაჭიმვით. ამოცანა მიეკუთვნება წრიული ფირფიტების დიდი დრეკად-პლასტიკური ჩაღუნვების შესწავლას.

ყველა ეს შრომა დატვირთულია საკმაოდ მოცულობითი გამოთვლებით და შეიცავს მრავალ საინტერესო რიცხობრივ და ხარისხობრივ დასკვნას.

3.5. წრიული ფირფიტების ხისტ-პლასტიკური ღუნვა

განვიხილოთ წრიული ფირფიტის სუფთა-პლასტიკური ღუნვა. ხისტ-პლასტიკური ტანის ჰიპოთეზის თანახმად, ძერის მოდული G უსასრულოდ დიდია. ამ დროს დრეკადი ზონები მთლიანად ქრება და გადადის ფირფიტის შუა სიბრტყეში, რომელზედაც σ_r და σ_θ კომპონენტები განიცდიან სასრულ ნახტომს. ე.ი. სუფთა პლასტიკური ღუნვა მიმდინარეობს თავისუფლად და არ არის დამოკიდებული დატვირთვაზე [22].

წონასწორობის დიფერენციალურ (3.1.2) განტოლებას აქვს სახე:

$$r \frac{dM_r}{dr} + M_r - M_\theta = - \int_0^r p r dr$$

(3.5.1)

ძაბვის კომპონენტებსა და დეფორმაციის სინქარებს შორის დამოკიდებულებების გათვალისწინებით:

$$\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_\theta} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}$$

სადაც $\dot{\epsilon}_r$ და $\dot{\epsilon}_\theta$ წარმოადგენენ პლასტიკური დეფორმაციის სინქარის ტენზორის კომპონენტებს. თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ

$$\epsilon_r = z \zeta_r; \quad \epsilon_\theta = z \zeta_\theta, \quad \text{მაშინ}$$

$$\frac{\dot{\zeta}_r}{\dot{\zeta}_\theta} = \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{2\sigma_\theta - \sigma_r}$$

(3.1.2)-ის საფუძველზე შეგვიძლია მივიღოთ, რომ

$$\frac{\dot{\zeta}_r}{\dot{\zeta}_\theta} = \frac{2M_r - M_\theta}{2M_\theta - M_r}$$

რადგან ζ_r და ζ_θ არ არის დამოკიდებული z -ზე.

თუ ჩაღუნვის სიხქარისათვის შევინარჩუნებთ w -ს და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\zeta_r = -\frac{d^2 w}{dr^2} \quad \zeta_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

გვექნება:

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} = \left(\frac{2M_r - M_\theta}{2M_\theta - M_r} \right) \frac{dw}{dr}$$

(3.5.2)

ეს საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ მრუდის ჩაზნექილობის მიმართულება, რომელიც გამოსახავს w -ს, როგორც r -ის ფუნქციას, ასევე ვიპოვოთ გადაღუნვის წერტილი, რომელიც შეესაბამება $2M_r = M_\theta$ -ს.

შევიტანოთ (3.3.12) გამოსახულებები (3.5.1) წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებაში. მცირე გარდაქმებით მივიღებთ:

$$r \frac{d\omega}{dr} = \frac{q - \sin \omega}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}, \quad q = -\frac{Q}{2K} r$$

(3.5.3)

თუ იგივე (3.3.12) გამოსახულებას შევიტანთ გადაღუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)} \frac{dw}{dr}$$

(3.5.4)

განვიხილოთ a რადიუსის მქონე წრიული ფირფიტა, რომელიც თავისუფლად არის დაყრდნობილი და მოქმედებს მთელ ფართობზე განაწილებული p დატვირთვა. ვიპოვოთ ზღვრული დატვირთვა p , რომლის დროს მთელი ფირფიტა იმყოფება სუფთა პლასტიკურ

მდგომარეობაში და M_r და M_θ მომენტების კომპონენტები. შემოვიღოთ ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი

$$\rho^2 = \frac{P}{4K} r^2$$

(3.5.3) დიფერენციალური განტოლება მიიღებს ისეთივე სახეს, როგორცაა მბრუნავი დისკის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლება:

$$\rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{\rho^2 - \sin \omega}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)}$$

(3.5.5)

(3.5.4) განტოლება კი მოგვცემს:

$$\rho \frac{d^2\omega}{d\rho^2} = -\frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)} \frac{d\omega}{d\rho}$$

(3.5.6)

$\rho=0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში პოლიმორფული (3.5.5) და (3.5.6) განტოლებების ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\omega = \frac{1}{2}\rho^2, \quad \omega - \omega_0 = \frac{1}{2}D\rho^2, \quad \frac{d\omega}{d\rho} = D\rho$$

თუ შევადარებთ (3.5.5) და (3.5.6) წრიული ფირფიტის წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებებს და მბრუნავი დისკის დაძაბული მდგომარეობის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებს, ისინი სრულიად ემთხვევა, თუ ჩავსვამთ, რომ $d\omega/d\rho=v$. ასეთივე დამთხვევას აქვს ადგილი სასაზღვრო პირობებშიც. აქედან გამომდინარე, ორივე ამოცანა ერთნაირად იხსნება.

პირობა $M_r=M_\theta$ ცენტრში ($r=0$) ავტომატურად კმაყოფილდება, რადგანაც ამ ამონახსნისათვის $\omega=0$. რაც შეეხება პირობას $M_r=0$ კონტურზე $r=a$ -ის გვაძლევს:

$$\omega = \frac{\pi}{3} \quad \alpha^2 = \frac{P}{4K} a^2$$

და საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ α და ზღვრული დატვირთვა

$$p = 4K \frac{\alpha^2}{a^2}$$

$w=w_0$ პირობა $r=0$ ცენტრში, $w=0$ პირობა წრეწირის $r=a$ კონტურზე უნდა იქნას გათვალისწინებული w ჩაღუნვის სიჩქარის განსაზღვრისას. აღნიშნული გამოთვლა განსაზღვრავს α და w -ს როგორც p -ს ფუნქციებს და ტოლობის საფუძველზე

$$p = \alpha \frac{r}{a}$$

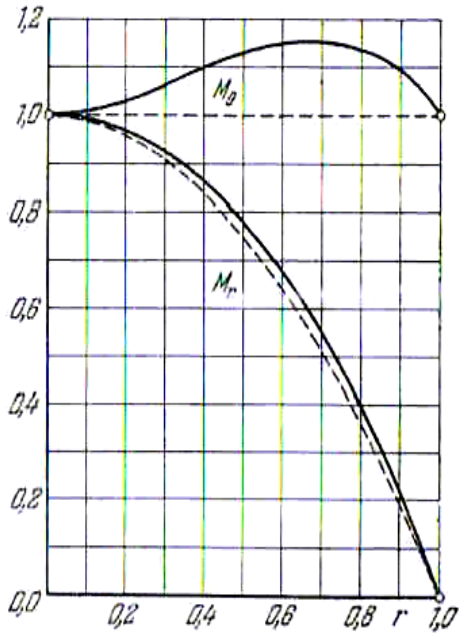
გვაძლევს საშუალებას ვიპოვოთ α და w როგორც r -ის ფუნქციები. შევნიშნოთ, რომ მრუდის გადაღუნვის წერტილი, რომელიც გამოსახავს w -ს, როგორც r -ის ფუნქციას, შეესაბამება $2M_r=M_\theta$ ან $\omega=\pi/6$; ის ასევე არის M_θ -ს მაქსიმუმის წერტილი.

ქვემოთ მოყვანილია განსახილველი ამოცანის ამოხსნა უგანზომილებო ცვლადებში დამახასიათებელი a სიგრძით, დამახასიათებელი M_r მომენტით და დამახასიათებელი w_0 ჩაღუნვის სიჩქარით. ის მდგომარეობს (3.5.5) და (3.5.6) დიფერენციალური განტოლებების რიცხვით ინტეგრებაში სასრული სხვაობების მეთოდით.

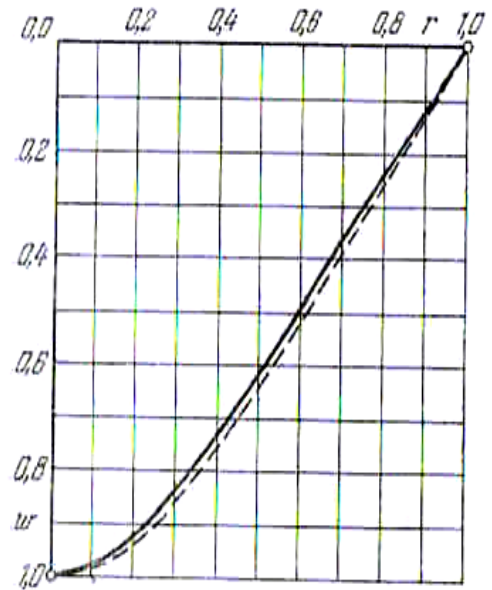
გამოთვლების შედეგებით დგინდება, რომ ზღვრული დატვირთვა მიახლოებით ტოლია

$$p = 11,34 \frac{K}{a^2}$$

უგანზომილებო M_r და M_θ მომენტების და w_0 ჩაღუნვის სიჩქარის გრაფიკები (დამოკიდებულებაში უგანზომილებო r -თან) მოცემულია ნახ. 3.5.1-ზე და 3.5.2-ზე უწყვეტი ხაზებით. ბოლო ხაზის გადაღუნვის წერტილს შეესაბამება $r=0,677a$.



ნახაზი 3.5.1



ნახაზი 3.5.2

განხილული ამოცანის ამოხსნა შესაძლებელია ჩაკეტილი სახით, თუ გამოვიყენებთ დენადობის პირობას, რომელიც გვიჩვენებს, რომ მაქსიმალური მხები ძაბვა მუდმივია. ამ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ძაბვის σ_θ კომპონენტს აქვს სახე:

$$\sigma_\theta = X\sigma_s \quad X = \alpha \ln z$$

ამ დროს M_θ მომენტის კომპონენტი იქნება

$$M_\theta = M_s$$

ხოლო პლასტიკური დენადობის ასოცირებული კანონი გვაძლევს

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 0$$

სრიალის ზედაპირები იქნება ის სიბრტყეები, რომლებიც დახრილნი არიან შუა სიბრტყესთან $\pi/4$ კუთხით. ასეთი ორთოგონალური სიბრტყეების ყველა წყვილის გადაკვეთის წრფეებად გვევლინება ფირფიტის შუა სიბრტყის რადიუსები.

თუ შევიტანთ $M_\theta = M_s$ მომენტის კომპონენტებს წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებაში და ვაინტეგრებთ მას, მივიღებთ

$$M_r = M_s - \frac{1}{6}pr^2 + \frac{C}{r}$$

$M_r = M_\theta$ პირობა $r=0$ ცენტრში გვიჩვენებს, რომ თავისუფალი მუდმივა $C=0$, ხოლო პირობა $M_r=0$ წრეწირის კონტურზე $r=a$ ადგენს ზღვრულ დატვირთვას.

$$p = 6 \frac{M_s}{a^2} = 6\sqrt{3} \frac{K}{a^2}$$

და მომენტის კომპონენტის შესაბამის გამოსახულებას:

$$M_r = M_s \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

ჩავსვათ მომენტის კომპონენტები M_r და M_θ გაღუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალურ განტოლებაში და ვავაინტეგრიროთ ეს განტოლება, მივიღებთ:

$$w = D \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} + E$$

და თუკი, თუ გამოვიყენებთ პლასტიკური დენადობის ასოცირებულ კანონს, ვიპოვით

$$w = Dr + E$$

თუ განვსაზღვრავთ თავისუფალ D და E მუდმივებს $w=w_0$, პირობიდან ცენტრში $r=0$ და $w=0$ პირობიდან წრეწირის კონტურზე $r=a$ გვექნება:

$$w = w_0 (\sqrt{2} + 1) \left[\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{r^2 + a^2}} - 1 \right]$$

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right)$$

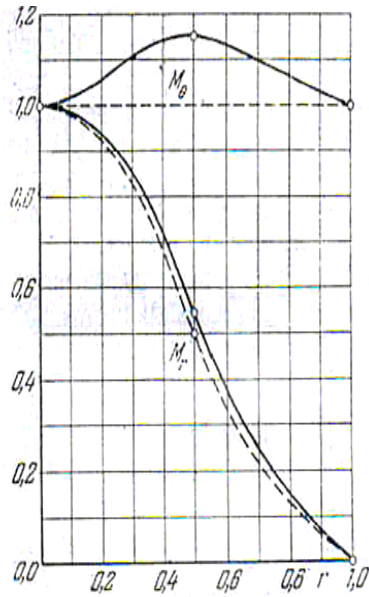
ყურადღება მივაქციოთ, რომ ამ შედეგების დაახლოება შესაბამის შედეგებთან, რომლებიც მიღებულია ძაბვის ინტენსივობის მუდმივობის პირობით, მოითხოვს მოყვანილ გამოსახულებაში M_s მდუნავი ზღვრული მომენტი შევცვალოთ შემდეგნაირად:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) M_s \approx 1,08 M_s$$

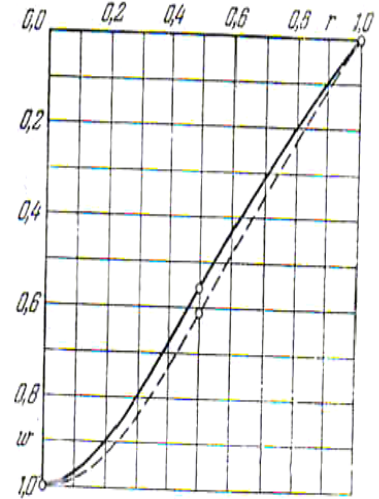
შეგნიშნოთ, რომ იმ მრუდის გადაღუნვის წერტილი, რომელიც გამოსახავს w -ს როგორც r -ის ფუნქციას ეთანადება $2M_r = M_\theta$ -ს, ასე

$$\text{რომ } r = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

უგანზომილებო M_r და M_θ მომენტების კომპონენტების გრაფიკები დამოკიდებულებაში უგანზომილებო r -თან ნაჩვენებია წყვეტილი ხაზებით ნახ. 3.5.1-ზე, ხოლო უგანზომილებო w ჩაღუნვის სიქარის გრაფიკი წყვეტილი ხაზით ნახ. 3.5.2-ზე. უკანასკნელი წირის გადაღუნვის წერტილი შეესაბამება $r=0,707a$ -ს. მთლიანი და წყვეტილი ხაზების შედარება გვიჩვენებს მიღებული შედეგების გარკვეულ განსხვავებას.



ნახ. 3.5.3



ნახ. 3.5.4

შემდგომში განვიხილოთ წრიული ფირფიტა, რომელიც კონტურით თავისუფლად დაყრდნობილი და ცენტრში მოქმედებს შეყურსული p ძალა.

ადვილი შესამჩნევია, რომ სუფთა პლასტიკური მდგომარეობა წარმოიშვება შეყურსული ძალის მოქმედებისას

$$P = 2\pi M_s = 2\pi\sqrt{3}K$$

რომელსაც შეესაბამება მომენტის შემდეგი კომპონენტები:

$$M_r = 0 \quad M_\theta = M_s$$

მომენტის ეს კომპონენტები ჩავსვით გაღუნული ზედაპირის დიფერენციალურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$w = D\sqrt{r} + E$$

ნებისმიერი D და E მუდმივები განვსაზღვროთ $w=w_0$ პირობიდან $r=0$ ცენტრში და პირობით $w=0$ წრეწირის $r=a$ კონტურზე, გვექნება

$$W = W_0 \left(1 - \sqrt{\frac{r}{a}} \right)$$

ახლა განვიხილოთ a რადიუსის მქონე წრიული ფირფიტა, რომელიც თავისუფლად დაყრდნობილი კონტურზე და მასზე მოქმედებს d რადიუსის წრის ფართობზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვა. განვსაზღვროთ p დატვირთვა, რომლის დროსაც მთელი ფირფიტა იმყოფება სუფთა-პლასტიკურ მდგომარეობაში, ასევე განვსაზღვროთ შესაბამისი M_r და M_θ მომენტების კომპონენტები.

ფირფიტის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობები $0 \leq r \leq d$ -თვის განისაზღვრება (3.5.5) და (3.5.6) დიფერენციალური განტოლებებით, ხოლო ფირფიტის დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობები $d \leq r \leq a$ -თვის დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{d\rho}{d\omega^2} = \frac{\sin(\omega + \pi/6)}{\delta^2 - \sin \omega} \rho, \quad \delta^2 = \frac{p}{4K} d^2$$

(3.5.7)

და დიფერენციალური განტოლებით

$$\frac{d^2 w}{d\omega^2} = \left[\operatorname{ctg} \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{2 \cos \omega}{\delta^2 - \sin \omega} \right] \frac{dw}{d\omega}$$

(3.5.8)

(3.5.7)-ის განტოლების ამოხსნა შეიცავს ნებისმიერ მუდმივას c -ს და ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$r^2 = C \frac{\exp[\sqrt{3}(\Omega - \omega)]}{\delta^2 - \sin \omega}$$

(3.5.9)

ამ განტოლებაში შემავალ Ω ფუნქციას აქვს სხვადასხვა სახე δ პარამეტრის მიხედვით; $\delta=1$ -ისათვის ფუნქცია:

$$\Omega = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)$$

ხოლო თუ $\delta \neq 1$ იგივე ფუნქცია წარმოდგება შემდეგი ფორმით:

$$\Omega = -\frac{2\delta^2}{\sqrt{\delta^4 - 1}} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)\right] \quad (\delta > 1)$$

$$\Omega = +\frac{2\delta^2}{\sqrt{1 - \delta^4}} \operatorname{Arth}\left[\sqrt{\frac{\delta^2 + 1}{1 - \delta^2}} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)\right] \quad (\delta < 1)$$

(3.5.8) განტოლების ამოხსნა შეიცავს ორ ნებისმიერ მუდმივას D და E , ასე რომ

$$w = D \left[\frac{1 - \delta^4 + \sqrt{3}\delta^2 \cos \omega}{\delta^2 - \sin \omega} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \Omega \right] + E \quad (3.5.10)$$

წრიულ $0 \leq r < d$ ან $0 \leq \rho < \delta$ ზონებში დაძაბული და დეფორმირებული მდგომარეობების განსაზღვრა დაიყვანება (3.5.5) და (3.5.6) დიფერენციალური განტოლებების $\rho=0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში პოლომორფული ამონახსნების აგებაზე, რომელზედაც უკვე გამახვილებული იყო ყურადღება ადრე. ეს ამ შემთხვევაშიც აბსოლუტურად გამართლებულია.

რგოლურ ზონაში $d < r \leq a$ დაძაბული მდგომარეობა წარმოდგენილია (3.5.9) და (3.5.10)-ის ინტეგრალებით, თნებისმიერი მუდმივების მიღების შემდეგ პირობებიდან $\omega = \pi/3$, $w=0$ წრეწირის $r=a$ კონტურზე. ამიტომ

$$r^2 = a^2 \frac{\delta^2 - \sqrt{3}/2}{\delta^2 - \sin \omega} \exp\left[\sqrt{3}(\Omega - \omega)\right]_{\pi/3}^{\omega}$$

ასევე

$$w = D \left[\frac{1 - \delta^4 + \sqrt{3}\delta^2 \cos \omega}{\delta^2 - \sin \omega} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \Omega \right]_{\pi/3}^{\omega}$$

w-ს უწყვეტობის პირობიდან $r=d$ წრეწირზე, მყისვე ჩნდება გარკვეული ტოლობა, რომელიც

$$p = 4K \frac{\delta^2}{d^2}$$

სიდიდესთან ერთად ადგენს დამოკიდებულებას ზღვრულ p დატვირთვისა და d/a შეფარდებას შორის. w -ს და dw/dr -ის უწყვეტობის პირობები $r=d$ წრეწირზე გათვალისწინებული უნდა იყოს w ჩაღუნვის სიჩქარის განსაზღვრისას. აგებული ამონახსენი განსაზღვრავს ω -ს და w -ს როგორც ρ -ს ფუნქციებს, ტოლობის

$$\rho = \delta \frac{r}{d}$$

საფუძველზე კი ისევ საშუალება გვქვია განვსაზღვროთ ω და w როგორც r -ის ფუნქცია. აღვნიშნოთ, რომ იმ მრუდის გადაღუნვის წერტილს, რომელიც გამოხატავს w -ს როგორც r -ის ფუნქციას, შეესაბამება $2M_r = M_\theta$ ან $\omega = \pi/6$. ქვემოთ მოცემულია განხილული ამოცანის ამოხსნა უგანზომილებო ცვლადებში, დამახასიათებელი a სიგრძით, დამახასიათებელი M_s მომენტით და დამახასიათებელი w_0 ჩაღუნვის სიჩქარით. $d=a/2$ -თვის გამოთვლის შედეგებით დგინდება, რომ ზღვრული დატვირთვა მიახლოებით ტოლია

$$p = 5,63 \frac{K}{d^2} \quad p = 22,5 \frac{K}{a^2}$$

M_r და M_θ მომენტების უგანზომილებო კომპონენტების უგანზომილებო r -ზე დამოკიდებულების გრაფიკები იგივე $d=a/2$ -თვის გამოსახულია უწყვეტი ხაზებით ნახ. 3.5.3-ზე, ხოლო ჩაღუნვის უგანზომილებო w სიჩქარის გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 3.5.4-ზე უწყვეტი ხაზით. უგანასკნელი ხაზის გადაღუნვის წერტილი შეესაბამება $r=0,5$ -ს. წრიული ფირფიტის ისეთი ღუნვის ფორმულები, რომელიც განპირობებულია მოქმედი P შეყურსული ძალით, შესაძლებელია მივიღოთ წრიული ფირფიტის ღუნვის d რადიუსზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვის ფორმულებისაგან, თუ ჩავთვლით, რომ $\pi p d^2 = P$ და დავუშვებთ, რომ P ძალის ფიქსირებული მნიშვნელობის დროს d რადიუსი ნულის ტოლი ხდება.

ეს ამოცანა ადვილად ამოიხსნება ჩაკეტილი სახითაც, თუ დავკერძობით დენადობის პირობას

$$M_\theta = M_s$$

$M_\theta = M_s$ შევიტანოთ (3.5.1) წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებაში. ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$M_r = M_s - \frac{1}{6}pr^2 + \frac{C_1}{r},$$

$$M_r = M_s - \frac{1}{2}pd^2 + \frac{C_2}{r}$$

შესაბამისად $0 \leq r \leq d$ და $d \leq r \leq a$ -სთვის.

$M_r = M_\theta$ პირობა ცენტრში $r=0$ და $M_r=0$ პირობა წრეწირის კონტურზე $r=a$ გვაძლევს საშუალებას განვსაზღვროთ ნებისმიერი C_1 და C_2 მუდმივები, ხოლო M_r -ის უწყვეტობის პირობა წრეწირზე $r=d$ განსაზღვრავს ზღვრულ დატვირთვას

$$p = \frac{6M_s a}{(3a - 2d)d^2}$$

და მომენტის შესაბამის კომპონენტებს:

$$M_r = M_s - \frac{1}{6}pr^2 \quad M_r = \left(M_s - \frac{1}{2}pd^2 \right) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \quad (3.5.2)$$

შევიტანოთ მომენტის კომპონენტები გაღუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალურ განტოლებაში და გავაინტეგრროთ, მივიღებთ:

$$w = D_1 \frac{a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}} + E_1 \quad w = D_2 \int_d^r \left(r - \frac{ad}{3a-d} \right)^n \frac{dr}{r^2} + E_2$$

შესაბამისად $0 \leq r \leq d$ და $d \leq r \leq a$ -სთვის, ამასთან

$$n = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{d}{3a-d} \right)$$

თუ განვსაზღვრავთ ნებისმიერი E_1 და E_2 მუდმივებს $w=w_0$ პირობიდან $r=0$ ცენტრში და $w=0$ პირობიდან $r=a$ კონტურზე, გვექნება:

$$w = D_1 \left(\frac{a^2}{\sqrt{r^2 + a^2}} - 1 \right) + w_0 \quad w = D_2 \int_a^r \left(r - \frac{ad}{3a-d} \right)^n \frac{dr}{r^2}$$

დარჩენილი ნებისმიერი მუდმივები D_1 და D_2 შესაძლებელია განვსაზღვროთ w -სი და dw/dr -ის უწყვეტობის პირობებიდან $r=d$ წრეწირზე. ასე მაგალითად, როდესაც $d=3a/4$, $n=1$, ადგილი აქვს ფარდობებს:

$$\frac{w}{w_0} = 3,72 \left[\frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} - 1 \right] + 1 \quad \frac{w}{w_0} = 1,45 \left[\ln \frac{a}{r} - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} - 1 \right) \right]$$

შეგნიშნოთ, რომ იმ მრუდის გადაღუნვის წერტილს, რომელიც წარმოადგენს w -ს, როგორც r -ის ფუნქციას, შეესაბამება $2 M_r = M_\theta$, ასე რომ

$$r^2 = d^2 \frac{3a - 2d}{2a} \quad (2d \geq a)$$

აბ

$$r = \frac{4ad}{3a + 2d} \quad (2d \leq a)$$

უგანზომილებო M_r და M_θ მომენტის კომპონენტების გრაფიკები, რომლებიც დამოკიდებულია უგანზომილებო r -ზე $d=a/2$ -თვის ნახ. 3.5.3-ზე გამოსახულია წყვეტილი ხაზებით, w უგანზომილებო ჩაღუნვის სიჩქარის გრაფიკი კი ნაჩვენებია წყვეტილი ხაზით ნახ. 3.5.4-ზე. უკანასკნელი ხაზის გადაღუნვის წერტილი შეესაბამება $r=0,5a$. მთლიანი და წყვეტილი ხაზების შედარება გვიჩვენებს შედეგების გარკვეულ განსხვავებას.

წინანდებურად, თუ გამოვიყენებთ პლასტიკური დენადობის ასოცირებულ წესს, მივიღებთ

$$w = w_0 \left(1 - \frac{r}{a} \right)$$

ამ გამოთვლების შედარება წინა გამოთვლებთან ადგენს ჩაღუნვის w სინქარეში მნიშვნელოვან განსხვავებას.

ანალოგიურად შეიძლება გამოვიკვლიოთ წრიული ან რგოლური ფირფიტის დრეკად-პლასტიკური ღუნვა დატვირთვის და სასაზღვრო პირობების განსხვავებული მნიშვნელობებისათვის.

მოკლედ შევჩერდეთ კონტურით ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის პლასტიკურ ღუნვაზე, რომელიც შესწავლილია ი.ვ. შირკოს მიერ. გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ სუფთა-პლასტიკური ღუნვა მყარდება თანაბრად განაწილებული დატვირთვისას

$$p = 22,9 \frac{K}{a^2}$$

სოლო შეყურსული ძალით დატვირთვისას

$$P = 4\pi K$$

როგორც მოსალოდნელი იყო, ეს მნიშვნელობები მეტია, ვიდრე კონტურით თავისუფლად დაყრდნობილი წრიული ფირფიტის პლასტიკური ღუნვისას [22].

3.6. განმტკიცებადი წრიული ფირფიტის ღუნვა

წინა ამოცანა, განაწილებული p დატვირთვის ზემოქმედებისას წრიული ფირფიტის ღუნვა, ასევე შესაძლებელია განვიხილოთ მასალის უკუმშვადობის და ხარისხოვანი განმტკიცების პირობით

$$\tau = k\gamma^n$$

პლასტიკური მდგომარეობა აღიწერება განტოლებებით, რომლებიც შედგენილია მასალის უკუმშვადობის დაშვებით და ცილინდრულ კოორდინატებში მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\sigma_r = \frac{\tau}{\gamma}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = \frac{\tau}{\gamma}(2\varepsilon_\theta + \varepsilon_r)$$

ამ განტოლებებში შევცვალოთ დეფორმაციის კომპონენტები მათი გამოსახულებებით

$$\varepsilon_r = z\xi_r, \quad \varepsilon_\theta = z\xi_\theta, \quad \gamma = |z|\xi$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ:

$$\sigma_r = k|z\xi|^{n-1} z(2\xi_r + \xi_\theta) \quad \sigma_\theta = k|z\xi|^{n-1} z(2\xi_\theta + \xi_r)$$

მომენტის (3.3.1) კომპონენტები წინა გამოსახულებების საფუძველზე აღვიღია წარმოვადგინოთ გაღუნვის პარამეტრებით:

$$M_r = \frac{1}{2}D_w(2\xi_r + \xi_\theta) \quad M_\theta = \frac{1}{2}D_w(2\xi_\theta + \xi_r)$$

თანაც ფირფიტის D_w სისისტეს აქვს ადრინდელი მნიშვნელობა

$$D_w = D(h\xi)^{n-1} \quad D = \frac{4kh^3}{n+2}$$

შემოვიტანოთ M დადებითი სიდიდე, რომელიც შედგენილია მომენტის კომპონენტებისაგან ისევე როგორც τ ინტენსივობა ძაბვის კომპონენტებისაგან:

$$M^2 = \frac{1}{3}[M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2]$$

და ξ დადებითი სიდიდე, რომელიც შექმნილია გაღუნვის პარამეტრებისაგან ისევე, როგორც γ ინტენსივობა დეფორმაციის კომპონენტებისაგან:

$$\xi^2 = \xi_r^2 + \xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2$$

მომენტის კომპონენტები გამოვსახოთ M -ით და ახალი ω სიდიდით შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = 2M \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

(3.6.1)

ხოლო გამრუდების პარამეტრები შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} \xi_r \\ \xi_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right)$$

(3.6.2)

გავითვალისწინოთ, რომ განმტკიცების ხარისხოვანი პირობიდან გამომდინარე M -სა და ξ -ს შორის არის ხარისხობრივი დამოკიდებულება

$$M = \frac{1}{2} D_w \xi$$

M და ξ ნაცვლად მომავალი მსჯელობისათვის მოხერხებულია შემოვიტანოთ უგანზომილებო სიდიდეები t და g , განსაზღვრული შემდეგი სახით:

$$M = \frac{1}{4} p_0 \frac{a^2}{\alpha_2} t \quad \xi = \frac{1}{h} \left[\frac{p_0 h a^2}{2D \alpha_2} \right]^{\frac{1}{n}} g$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ განმტკიცების ხარისხოვანი პირობის საფუძველზე

$$t = g^n$$

α თავისუფალი პარამეტრი შემოტანილია სიმარტივისათვის და საშუალებას გვაძლევს ზოგადობის შეუზღუდავად t ფუნქციას დავადოთ დამატებითი პირობა $t=1$ $r=0$ -ისას. შემდგომში α დაკავშირებული იქნება p_0 დატვირთვისთან ფირფიტის ცენტრში.

მომენტის კომპონენტები შესაძლებელია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\left. \begin{matrix} M_r \\ M_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4} p_0 \frac{a^2}{\alpha^2} t \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{6}\right) \quad ($$

3.6.3)

ხოლო ფირფიტის შუა სიბრტყის გამრუდების პარამეტრები გამოისახება შემდეგნაირად:

$$\left. \begin{matrix} \xi_r \\ \xi_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left[\frac{p_0 h}{2D} \frac{a^2}{\alpha_2} \right]^{\frac{1}{n}} g \cos\left(\omega \pm \frac{\pi}{3}\right)$$

(3.6.4)

შემდგომში გამოვიკვლიოთ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა, რომელიც ასახავს გაღუნული წრიული ფირფიტის დაძაბულ და დეფორმირებულ მდგომარეობებს და ასევე ამოვხსნათ სხვადასხვა ამოცანები ფირფიტის წონასწორობაზე.

შევიტანოთ (3.3.5) წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებაში (3.3.1) გამოსახულება. მივიღებთ:

$$r \frac{d}{dr} \left[t \cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right] - t \sin \omega = 2 \frac{Q}{p_0} \frac{a^2}{\alpha^2} r$$

(3.6.5)

ხოლო თუ შევიტანოთ (3.3.5) დიფერენციალურ განტოლებაში (3.6.4) გამოსახულებებს, მივიღებთ:

$$r \frac{d}{dr} \left[g \sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right) \right] + \sqrt{3} g \sin \omega = 0$$

(3.6.6)

ადვილი სანახავია, რომ (3.6.5) განტოლება, როცა $n=0$ მაშასადამე, როცა $t=1$ გადადის (3.5.2) განტოლებაში იდეალური პლასტიკურობისათვის.

ფირფიტის გაღუნული შუა სიბრტყის დიფერენციალური განტოლება გამომდინარეობს (3.3.4) და (3.6.4) გამოსახულებებიდან შემდეგი სახით:

$$r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = - \frac{\sin\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)} \frac{dw}{dr}$$

(3.6.7)

ახ

$$\frac{dw}{dr} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{r}{a^2} g \sin\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)$$

(3.6.8)

მიღებული დიფერენციალური განტოლებები საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ამოცანები წრიული ფირფიტის ღუნვაზე სხვადასხვა დატვირთვებსა და სასაზღვრო პირობებისათვის. ამ ამოცანების ამოხსნის მეთოდი გასაგები ხდება კონკრეტულ მაგალითზე.

განვიხილოთ კონტურით თავისუფლად დაყრდნობილი წრიული ფირფიტა, რომელზედაც მოქმედებს მთელ ფართობზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვა. ვიპოვოთ ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა და გაღუნული შუა ზედაპირის ფორმა p -ს სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. რადგან $p=p_0$ -ის დროს განივი ძალის კომპონენტი $Q=-pr/2$, ამიტომ (3.6.5) დიფერენციალური განტოლება, თუ შემოვიტანთ ახალ დამოუკიდებელ ცვლადს

$$\rho = \alpha \frac{r}{a}$$

შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[t \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] - t \sin \omega = -\rho^2$$

(3.6.9)

ხოლო (3.6.6) დიფერენციალური განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left[g \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \sqrt{3g} \sin \omega = 0$$

(3.6.10)

გაღუნული წრიული ფირფიტის (3.6.9) და (3.6.10) წონასწორობის დიფერენციალური განტოლებების შედარება მბრუნავი დისკის დაძაბული მდგომარეობის ამსახველ შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებთან, გვიჩვენებს მათ სრულ თანხვედრას. ამიტომ ორივე ამოცანა ერთნაირად ამოიხსნება.

გაღუნული ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობის განსაზღვრა დაიყვანება (3.6.9) და (3.6.10) დიფერენციალური განტოლებების $\rho=0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში ჰოლომორფული ამონახსნის აგებაზე.

$M_r=M_\theta$ პირობა ცენტრში $r=0$ ავტომატურად კმაყოფილდება, რადგან ამ ჰოლომორფული ამონახსნისათვის $\omega=0$, ხოლო პირობა $M_r=0$ კონტურის $r=a$ ან $\rho=a$ წრეწირზე გვიჩვენებს, რომ

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

და საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ α პარამეტრის მნიშვნელობა აგებული ამონახსნი განსაზღვრავს ω და t -ს როგორც ρ -ს ფუნქციებს, ხოლო

$$\rho = \alpha \cdot \frac{r}{a}$$

ტოლობის შედეგად სასუალებას გვაძლევს, მივიღოთ ω და t როგორც r -ის ფუნქცია. ფირფიტის გაღუნული შუა ზედაპირის ფორმა განისაზღვრება (3.6.8) დიფერენციალური განტოლების ინტეგრებით სასაზღვრო პირობით $w=0$, წრეწირის $r=a$ კონტურზე. ზემოთ მოყვანილი დამოკიდებულება

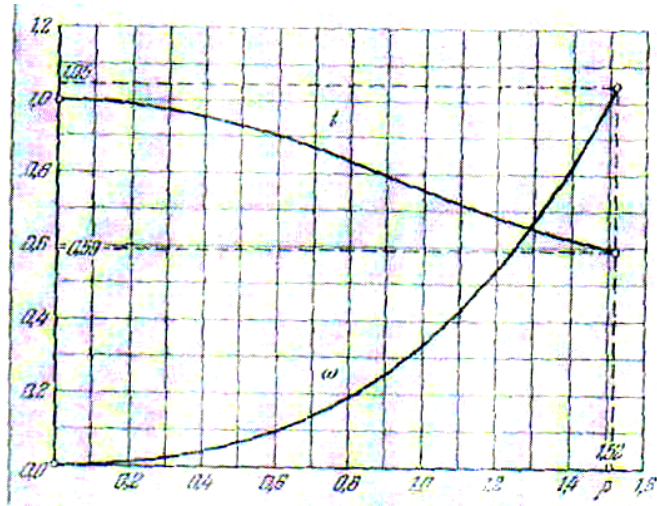
$$\xi_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \xi \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right)$$

საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ ξ_r -ის ნიშანი, და შესაბამისად ფირფიტის შუა სიბრტყის გრძივი კვეთის ჩაღუნვის მიმართულება. ასევე ადვილია ვიპოვოთ გადაღუნვის წერტილი, რომელიც შეესაბამება $\xi_r=0$ -ს ან $\omega=\pi/6$ -ს.

შევნიშნოთ, რომ ამ ამონახსნში არ შედის დატვირთვა, ამიტომ ის მართებულია p -ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ადვილია მივიღოთ დამოკიდებულება განზომილებიან ჩაღუნვის w_0 ისარსა და p დატვირთვას შორის. ამისათვის საკმარისია ჩაღუნვის უგანზომილებო w_0 ისარი გავამრავლოთ დამახასიათებელ ჩაღუნვაზე

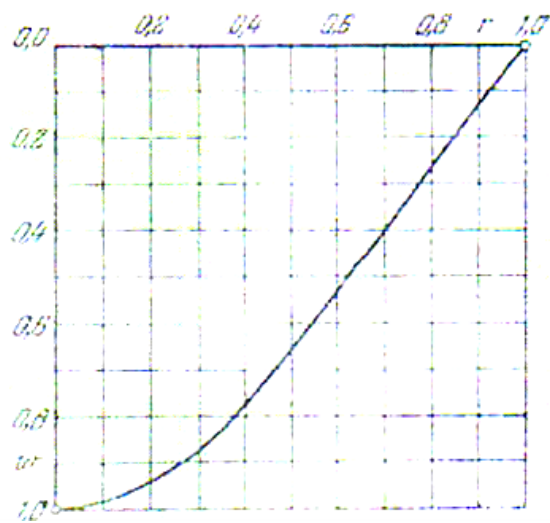
$$\frac{a^2}{h} \left[\frac{ph}{2D} \frac{a^2}{\alpha^2} \right]^{\frac{1}{n}}$$



ნახ. 3.6.1

ქვემოთ მოტანილია განხილული ამოცანის ამოხსნის შედეგები $n=1/3$ -თვის უგანზომილებო ცვლადებში დამახასიათებელი a სიგრძით და დამახასიათებელი w_0 ჩაღუნვით. ნახ. 3.6.1-ზე ნაჩვენებია ინტეგრალური მრუდები, რომლებიც აგებულია (3.6.9) და (3.6.10) დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ინტეგრებით. ისინი განსაზღვრავენ საძიებელ w და t ფუნქციებს. α პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც გამოყენებული იყო წინა გამოსახულებაში, ტოლია

$$\alpha=1,517$$



ნახ. 3.6.2

ინტეგრალური მრუდი, გამოსახული ნახ.3.6.2-ზე განისაზღვრა (3.6.8) დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ინტეგრების გზით. ის განსაზღვრავს უგანზომილებო w ჩაღუნვას, რომელიც დამოკიდებულია უგანზომილებო r -ზე და თავისუფლად დაყრდნობილი წრიული ფირფიტის გაღუნული შუა ზედაპირის ფორმას. უგანზომილებო ჩაღუნვის ისრის მნიშვნელობა ტოლია

$$w_0=0,084$$

ამრიგად, დამოკიდებულება განზომილებიან w_0 ჩაღუნვის ისარსა და p დატვირთვას შორის მიახლოებით იქნება

$$\frac{W_0}{a} = 15 \cdot 10^{-5} \left(\frac{p}{k} \right)^3 \left(\frac{a}{h} \right)^7$$

განვიხილოთ ეხლა კონტურით ჩამაგრებული წრიული ფირფიტა, რომელიც განიცდის მთელ ფართობზე თანაბრად განაწილებული p დატვირთვის მოქმედებას.

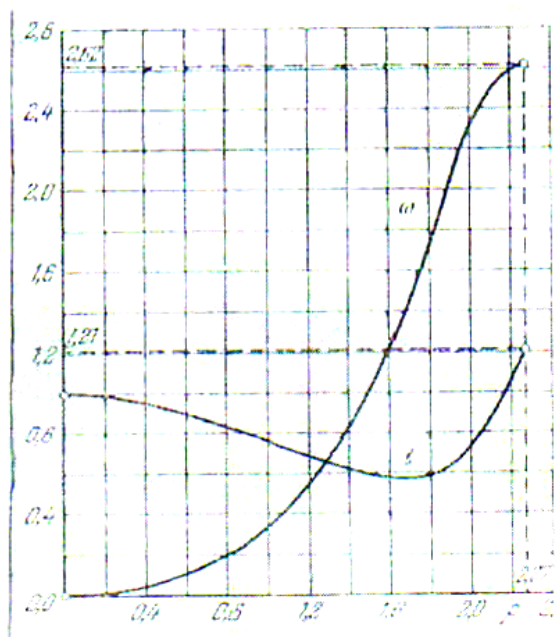
$M_r=M_\theta$ პირობა ცენტრში $r=0$ ავტომატურად კმაყოფილდება, ხოლო $d\omega/dr=0$, პირობა $r=a$ ან $\rho=\alpha$ წრეწირის კონტურზე გვიჩვენებს, რომ

$$\omega = \frac{5}{6} \pi$$

და საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ α პარამეტრის მნიშვნელობა. დანარჩენი მსჯელობა, რომელიც ზემოთ გამოვიყენეთ, სავსებით სამართილიანია აქაც.

ქვემოთ მოყვანილია განხილული ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის შედეგები ასევე $n=1/3$ -თვის. ინტეგრალური მრუდები ნახ.3.6.3-ზე აგებულია ისევ და ისევ (3.6.9) და (3.6.10) დიფერენციალური განტოლებების რიცხვითი ინტეგრების დახმარებით. ისინი გვაძლევს საძიებელ ω და t ფუნქციებს. α პარამეტრის მნიშვნელობა, რომელიც შედის წინა გამოსახულებებში, ტოლია

$$\alpha=2,274$$



ნახ. 3.6.3

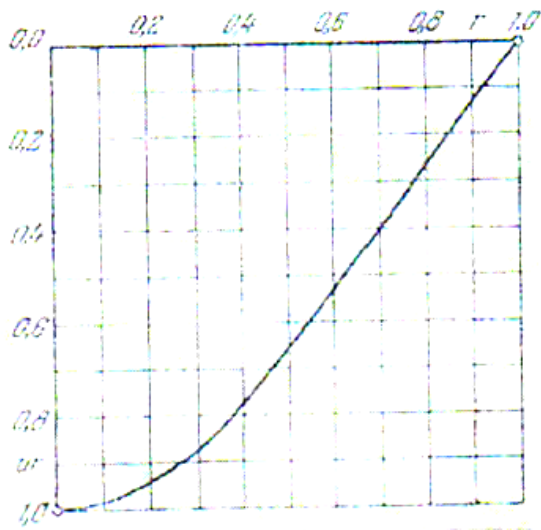
ინტეგრალური მრუდი ნახ. 3.6.4-ზე მიღებულია (3.6.8) დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ინეგრებით. ის გვაძლევს უგანზომილებო w ჩაღუნვას და ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის გაღუნული ზედაპირის ფორმას. უგანზომილებო ჩაღუნვის ისრის მნიშვნელობა ტოლია:

$$w_0=0,124$$

ამრიგად, დამოკიდებულება განზომილებიან w_0 ჩაღუნვის ისარსა და p დატვირთვას შორის მიახლოებით იქნება

$$\frac{w_0}{a} = 2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{p}{k} \right)^3 \left(\frac{a}{h} \right)^7$$

გამოთვლების შედეგების შედარება გვიჩვენებს, რომ თავისუფლად დაყრდნობილი წრიული ფირფიტის ჩაღუნვის ისრის ფარდობა ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის ჩაღუნვის ისართან დაახლოებით 6,68-ის ტოლია.



ნახ. 3.6.4

შევნიშნოთ, რომ უკუმშვადი მასალის წრიული ფირფიტების დრეკადი ღუნვისას აღნიშნული დამოკიდებულება დაახლოებით 3,67-ია.

თავისუფლად დაყრდნობილი ან კონტურით ჩამაგრებული წრიული ფირფიტის განხილვა სხვა დატვირთვების შემოქმედებისას სიძნელეს ასევე არ წარმოადგენს. ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობის და გაღუნული შუა ზედაპირის ფორმის განსაზღვრა აბსოლუტურად ანალოგიურად ხდება. განსაკუთრებით მარტივი შედეგები შეიძლება მივიღოთ, როდესაც ფირფიტა იღუნება ცენტრში მოდებული შეყურსული ძალით.

3.7. ფირფიტის პლასტიკური ღუნვის ძირითადი განტოლებების ინტეგრება

როგორც ცნობილია, ფირფიტის წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\mathbf{M}_r^2 - \mathbf{M}_r \mathbf{M}_\theta + \mathbf{M}_\theta^2 = \mathbf{M}_s^2 \quad (3.7.1)$$

სადაც $\mathbf{M}_s = \sigma_s \frac{h^2}{4}$.

როგორც აქედან ჩანს, \mathbf{M}_s ხასიათდება დენადობის ზღვრით. ინტეგრების გასაადვილებლად შემოვიტანოთ ნადის ფუნქცია ψ , რომლის საშუალებითაც მდუნავი მომენტები შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\mathbf{M}_r = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{M}_\theta \cos \psi, \quad \mathbf{M}_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{M}_s \cos \left(\psi - \frac{\pi}{3} \right) \quad (3.7.2)$$

ნადი აღნიშნულ ფუნქციას იყენებს ძაბვათა თეორიაში. როგორც ცნობილია, ითვლება რომ პლასტიკურ ზონაში ძაბვების გამოთვლის ამოცანა სტატიკურად რკვევადია. სინამდვილეში ეს სტატიკურად რკვევადობა პირობითია, რადგან ძაბვები გამოიანგარიშება არა მხოლოდ სტატიკის ერთი განტოლებიდან, არამედ პლასტიკურობის პირობიდანაც. ნადის ფუნქციას ჩვენ გამოვიყენებთ ფირფიტების ღუნვის ძირითადი განტოლებების ინტეგრებისათვის.

ამგვარი ხერხის გამოყენებით წონასწორობის დიფერენციალური განტოლება იგივეურად კმაყოფილდება. ახლა მდუნავი მომენტების ინტენსივობის გამოსახულებები (3.7.2) შევიტანოთ (3.7.1)-ში. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \psi d\psi}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{Q \cdot M}{M_s} \sin \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right)} \quad (3.7.3)$$

ამ განტოლების ინტეგრება შესაძლებელია ჩაკეტილი ფორმით, თუ $Q=0$, ანუ სუფთა ღუნვის შემთხვევაში, და იმ შემთხვევაშიც, როცა

$$Q = \frac{a}{r} \quad (3.7.4)$$

სადაც a მუდმივი სიდიდეა. უკანასკნელ შემთხვევას (3.7.4) ადგილი ექნება მაშინ, როცა წრიული ფილა დატვირთულია შეეუბრისული ძალით ფირფიტის ცენტრში ან კონტურის შესაბამისად კონცენტრული წრის შიგნით თანაბრად განაწილებული დატვირთვით. სხვა სახის დატვირთვების შემთხვევაში წონასწორობის დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება უნდა შესრულდეს რიცხვითი მეთოდებით. ჩვენს ნაშრომში ამ მიზნით გამოყენებულია ენერგეტიკული მეთოდი. ზედა შეფასების კრიტერიუმიდან გამომდინარე დავუბრუნდეთ ამ ამოცანას. ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა $Q=0$ (3.7.3)-დან მივიღებთ:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \psi d\psi}{\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (3.7.5)$$

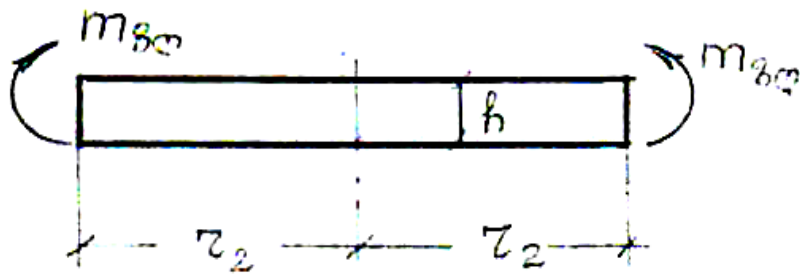
ამ განტოლების ინტეგრალი გამოთვლილია ჩვენს მიერ და იგი ტოლია

$$\frac{C}{r^2} = e^{\sqrt{3}\psi} \cdot \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3.7.6)$$

აქ C ინტეგრების მუდმივაა. გადავუიღეთ ამ (3.7.5) განტოლების (3.7.6) ამონახსნის გამოყენებაზე ზღვრული დატვირთვის გამოსათვლელად კონკრეტული ამოცანებისათვის.

მაგალითი 1

r_2 რადიუსის მქონე წრიული ფირფიტა დატვირთულია კონტურზე თანაბრად განაწილებული $m_{\text{ფლ}}$ მომენტით (ნახ.3.7.1)



ნახ. 3.7.1

ცხადია, რომ ამგვარი დატვირთვის მოქმედების დროს საქმე გვაქვს სუფთა ღუნვასთან, ანუ განივი ძალა $Q=0$.

სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

$$\text{როცა } r=0, \quad M_r=M_0 \quad (3.7.7)$$

$$\text{როცა } r=r_2, \quad M_r=m_0$$

პირველი სასაზღვრო პირობის გამოყენებით (3.7.2)-სა და (3.7.6)-ის საშუალებით მივიღებთ

$$\psi = \frac{\pi}{6}; \quad C = 0$$

(3.7.8)

და შესაბამისად r -ის ყველა მნიშვნელობისათვის $\psi = \frac{\pi}{6}$, ამის

გათვალისწინებით მეორე სასაზღვრო პირობიდან დავადგენთ, რომ

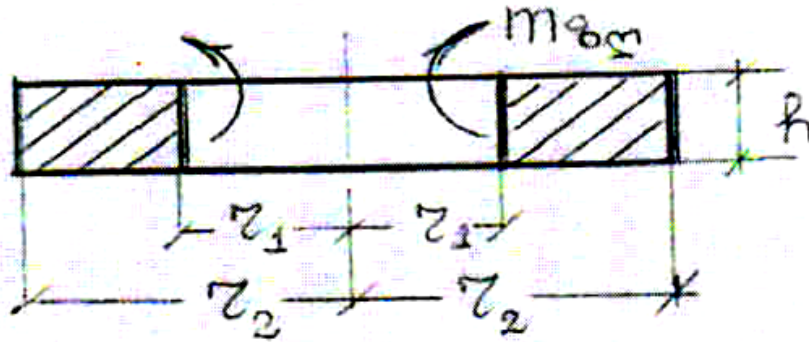
$$m_0 = M_s \quad (3.7.9)$$

მაგალითი 2

რგოლური ფილა შიდა რადიუსით r_1 და გარე რადიუსით r_2 შიდა კონტურზე დატვირთულია თანაბრად განაწილებული m_0 მომენტი (ნახ. 3.7.2) ისევე, როგორც წინა მაგალითში, აქაც $Q=0$ ხოლო სასაზღვრო პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე როცა $r_1=r$, $M_r=M_s$ $r_2=r$, $M_r=-M_s$ მეორე სასაზღვრო პირობიდან (3.7.2)-ისა და (3.7.6)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\psi_2 = \frac{3}{2}\pi \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}} \cdot r_2^2 \quad (3.7.10)$$

აქ გათვალისწინებულია აგრეთვე ისიც, რომ გარეთა კონტურზე, სადაც $r=r_2$, მღუნავი მომენტის ინტენსივობა M_s უარყოფითია.



ნახ. 3.7.2

პირველი სასაზღვრო პირობიდან, კვლავ (2) და (6) გამოსახულებების გამოყენებით დავადგენთ, რომ

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}\left(\psi_1 - \frac{3}{2}\pi\right)} \cdot \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3.7.11)$$

ხოლო

$$m_{ზღ} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \cos \psi_1 \quad (3.7.12)$$

ამ გამოსახულებაში ψ_1 არის ψ ფუნქციის მნიშვნელობა ფირფიტის შიგა კონტურზე. (3.7.3)-დან M_2/M_1 კონკრეტული შეფარდებისათვის შესაძლებელია ψ_1 -ის გამოთვლა, რის შემდეგაც (3.7.4)-ის საშუალებით დავადგენთ მომენტის ინტენსივობის ზღვრულ სიდიდეს.

3.7.12 გამოსახულებაზე დაკვირვების შემდეგ მივაღწეოთ დასკვნამდე, რომ მომენტის ინტენსივობის მაქსიმუმს ადგილი იქნება, როცა $\psi_1=2\pi$ და ტოლი იქნება

$$m_{ზღ.max} = \frac{2}{\sqrt{3}} M_s \quad (3.7.13)$$

შევიტანოთ $\psi_1=2\pi$ მნიშვნელობა (3.7.3)-ში მივიღებთ

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}{\sqrt{3}} = (2,963)^2 \quad (3.7.14)$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი: როდესაც რგოლურ ფილაში გარე რადიუსის შეფარდება შიდა რადიუსთან $r_2/r_1 > 2,963$ დატვირთვის ინტენსივობის არანაირ სიდიდეს არ შეუძლია მიიყვანოს რგოლური ფირფიტა მზიდუნარიანობის ამოწურვამდე, რადგან მისი ნაწილი ყოველთვის დრეკად სტადიაში დარჩება.

ახლა განვიხილოთ (3.7.3)-ის ინტეგრების საკითხი იმ შემთხვევისათვის, როცა $Q=a/r$. მივიღებთ:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \psi d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (3.7.15)$$

სადაც

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{M_s} \quad (3.7.16)$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრალი წარმოდგება შემდეგი გამოსახულების სახით:

$$\ln \frac{C}{r^2} = \sqrt{3}\psi + \ln \left[b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \right] - \sqrt{3}b \int \frac{d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (3.7.17)$$

აქ C ინტეგრების მუდმივაა. (3.7.17)-ის უკანასკნელი ინტეგრალის აღება დამოკიდებულია b სიდიდის ერთთან შედარების შედეგზე. როცა $b > 1$, მივიღებთ:

$$\int \frac{d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{btg} \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) - 1}{\sqrt{b^2 - 1}} \quad (3.7.18)$$

როცა $b < 1$, მივიღებთ:

$$\int \frac{d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \ln \frac{\operatorname{btg} \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 - \sqrt{1 - b^2}}{\operatorname{btg} \frac{1}{2}\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) - 1 + \sqrt{1 - b^2}}$$

(3.7.19)

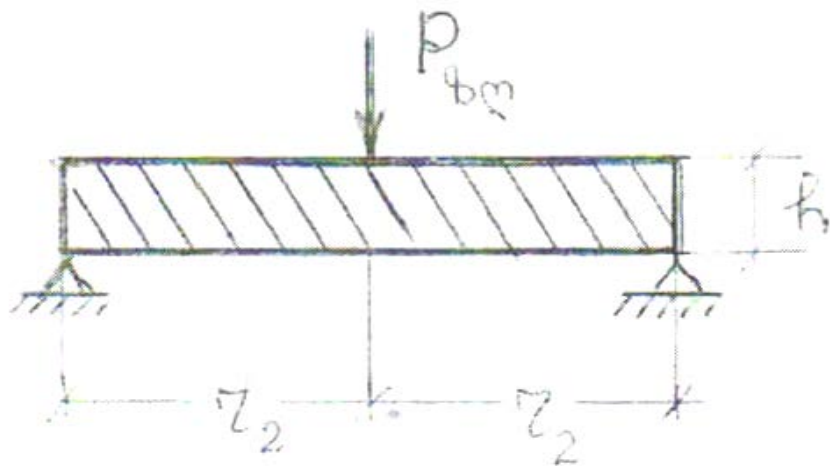
სასაზღვრო შემთხვევაში, როცა $b=1$ მივიღებთ:

$$\int \frac{d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi + 3) \quad (3.7.20)$$

ამ მაგალითისათვის მიღებული ინტეგრალები (3.7.18), (3.7.19) და (3.7.20) გამოგვადგება წრიული და რგოლური ფირფიტების სხვადასხვა შემთხვევაში ზღვრული დატვირთვების დასადგენად.

მაგალითი 3

წრიული ფილა დაყრდობილია კონტურზე და დატვირთულია ცენტრში მოქმედი შეყურსული $P_{ზღ}$ ძალით (ნახ. 3.7.3)



ნახ. 3.7.3

დატვირთვის განსახილველ შემთხვევაში

$$Q = \frac{P_{ზღ}}{2\pi r} \quad (3.7.21)$$

და მაშასადამე, იმის გათვალისწინებით, რომ

$$Q = \frac{a}{r} \quad \text{და} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{M_s} \quad (3.7.22)$$

მივიღებთ:

$$a = \frac{P_{\text{ბღ}}}{2\pi} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{P_{\text{ბღ}}}{2\pi M_s} \quad (3.7.23)$$

სასაზღვრო პირობებს მოცემული ამოცანებისათვის ექნებათ სახე:

$$\text{როცა } r=0 \quad M_r=M_s$$

$$\text{როცა } r=r_2 \quad M_r=0$$

ამ პირობებიდან ვადგენთ ψ -ს მნიშვნელობას ფილის ცენტრში და კონტურზე

$$\text{როცა } r=0 \quad \psi_1 = \frac{\pi}{6} \quad (3.7.24)$$

$$\text{როცა } r=r_2 \quad \psi_2 = \frac{\pi}{6} \quad (3.7.25)$$

გაგაინტეგრირებთ (3.7.15) განტოლებას ზედა მეორე სასაზღვრო პირობის გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\ln \frac{r}{r_2} = \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{\sin \psi d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (3.7.26)$$

ამავე სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალში

$$\int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{\sin \psi d\psi}{b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)} \quad (3.7.27)$$

რადგან ინტეგრირების საზღვრები სასრულია, მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არგუმენტის რაღაც მნიშვნელობისათვის უსასრულო ხდება. ზემოთ მოყვანილი (3.7.15) და (3.7.25) გამოსახულებებიდან შეიძლება დავასკვნათ:

$$b - \sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$$

(3.7.28)

რადგან განსახილველ ინტეგრალში $\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ $\sin\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right)$ გამოსახულების მაქსიმალური მნიშვნელობა არის $\frac{\sqrt{3}}{2}$ დავადგენთ, რომ

$$b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3.7.29)

იმისათვის, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უსასრულო გახდეს, აუცილებელია b -ს სიდიდე ტოლი იყოს $\frac{\sqrt{3}}{2}$ -ის

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.7.30}$$

ამ შემთხვევაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია იქცევა უსასრულოებად, როცა $\psi = \pi/2$. თუ დავაკავშირებთ ერთმანეთთან (3.7.23) და (3.7.30)-ს მივიღებთ დატვირთვის ზღვრულ მნიშვნელობას

$$P_{\text{ზღ}} = 2\pi M_s \tag{3.7.31}$$

3.8. წრიული და რგოლური ფირფიტების ზღვრული დატვირთვების განსაზღვრა

განხილული იქნება როგორც წრიული და რგოლური, აგრეთვე საწყისი სიმრუდის მქონე ფირფიტების პლასტიკური ღუნვის დეფორმაციები. დასაწყისისათვის გამოვიყენოთ დერძსიმეტრიული დატვირთვის მაგალითი. ნახ.3.8.1-ზე ნაჩვენებია მრგვალი ფილა, რომლის სისქეა $2h$, დატვირთვა $P=P(r)$, ხოლო r -რადიუს ვექტორია. r, θ, z ცილინდრული სისტემის z დერძი მიმართულია ქვევით. მასალა ხისტ-პლასტიკურია. დრეკადი ფილების ღუნვის კლასიკური თეორიის თანახმად ძირითად დებულებებს გეომეტრიული ხასიათი აქვთ, ამიტომ ისინი სამართლიანია პლასტიკური ღუნვის შემთხვევაშიც, ანუ კირხჰოფის ქვემოთმოყვანილი ორი დაშვება ძალაში რჩება.

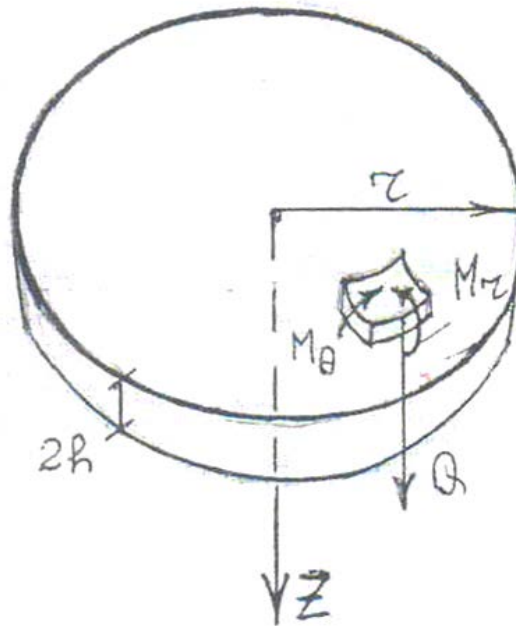
1. შუა ზედაპირი დეფორმაციას არ განიცდის;

2. შუა სიბრტყის მართობები დეფორმაციის შემდეგ შუალედური სიბრტყის პერპენდიკულარები ხდებიან.

ძაბვის მდგენელები σ_z და τ_{rz} სიმცირის გამო გაანგარიშებაში შეიძლება არ იყოს გათვალისწინებული. ზემოთ - თქმულის გათვალისწინებით, საქმე გვაქვს ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობასთან. კვეთებში, სადაც $r=\text{const}$, $\theta=\text{const}$ იმოქმედებენ მხოლოდ მღუნავი მომენტები M_r და M_θ

$$M_r = \int_{-h}^h \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int_{-h}^h \sigma_\theta z dz; \quad Q = \int_{-h}^h \tau_{rz} dz;$$

(3.8.1)



ნახ. 3.8.1

წონასწორობის დიფერენციალურ განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q \quad (3.8.2)$$

მხები ძაბვები წრეზე $r=\text{const}$ აწონასწორებენ გარე დატვირთვას, ამოტომ:

$$Q = -\frac{1}{r} \int_{r_1}^r p r dr \quad (3.8.3)$$

r_1 არის რგოლის შიდა რადიუსი. რგოლური ფილის შემთხვევაში $W=W(r)$ არის ფილის ჩაღუნვის სიხქარე. სიხქარის კომპონენტებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\xi_r = z \cdot M_r \quad \xi_\theta = z \cdot M_\theta \quad (3.8.4)$$

ფირფიტის შუა სიბრტყის დენადობის სიხქარის პარამეტრებია:

$$M_r = -\frac{d^2 W}{dr^2} \quad M_\theta = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (3.8.5)$$

ფირფიტის ღუნვის განტოლებები (მიზესის დენადობის პირობებიდან) მიიღებს სახეს:

$$\xi_r = -\frac{\lambda'}{3}(2\sigma_r - \sigma_\theta); \quad \xi_\theta = \frac{\lambda'}{3}(2\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (3.8.6)$$

ნულისაგან განსხვავებული σ_r და σ_θ ძაბვების კომპონენტები აკმაყოფილებენ დენადობის შემდეგ პირობას:

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2 \quad (3.8.7)$$

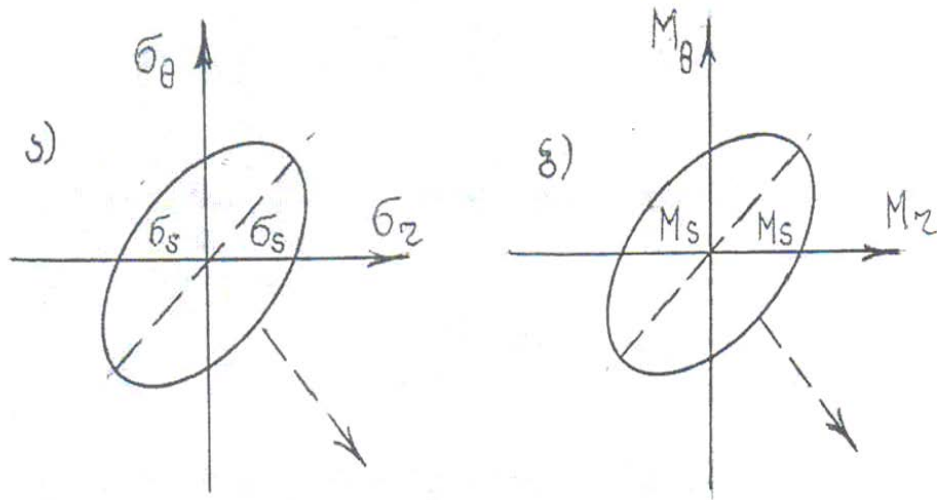
(3.8.6) განტოლებები იწერება შემდეგი სახით:

$$\xi_r = -\frac{\lambda'}{3} \frac{df}{d\sigma_r}; \quad \xi_\theta = \frac{\lambda'}{3} \frac{df}{d\sigma_\theta} \quad (3.8.8)$$

აქ f -ით აღნიშნულია დენადობის პირობის გამოსახულების მარცხენა მხარე. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, დეფორმაციის სიჩქარის ვექტორი დენადობის მრუდის ნორმალია (ნახ. 3.8.2 წყვეტილი ხაზი). შეფარდება $\frac{\xi_r}{\xi_\theta}$ ავლნოშნოთ η -თი. მაშინ (3.8.6)-დან მივიღებთ, რომ ნორმალის გასწვრივ σ_θ , σ_r -ის პროპორციულია, მაგრამ ამ შემთხვევაში იმავე დენადობის პირობიდან გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობებიც:

$$\sigma_r = \pm f_1(\eta)\sigma_s \quad \text{და} \quad \sigma_\theta = \pm f_2(\eta)\sigma_s \quad (3.8.9)$$

აქ f_1 და f_2 η -ს გარკვეული ფუნქციებია.



ნახ. 3.8.2

მაშასადამე, ძაბვები σ_r და σ_θ ნორმალის გასწვრივ მუდმივი არიან ყველა დადებითი z -სათვის და იცვლიან ნიშანს უარყოფითი z -სათვის. ამასთან, ისინი განიცდიან წყვეტას შუა სიბრტყეზე (კოჭის ღუნვის ანალოგია) და დენადობის ელიფსზე გამოისახებიან საპირისპირო წერტილებით. მაშასადამე

$$M_r = \sigma_r h^2 ; M_\theta = \sigma_\theta h^2 \quad (3.8.10)$$

შესაბამისად გვექნება:

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_s^2 \quad (3.8.11)$$

სადაც $M_s = \sigma_s h^2$ არის მღუნავი მომენტის მაქსიმალური მნიშვნელობა. ეს განტოლება წარმოადგენს გარსების პლასტიკური ღუნვის შესაბამისი განტოლების კერძო შემთხვევას. თუ (3.8.6)-ში ძაბვებს შესაბამისი მომენტებით შევცვლით, ხოლო დეფორმაციების სიჩქარეებს სიმრუდის η_r და η_θ მდგენელებით, მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:

$$\eta_r = \lambda^* \frac{\partial F}{\partial M_r}; \quad \eta_\theta = \lambda^* \frac{\partial F}{\partial M_\theta} \quad (3.8.12)$$

აქ F -ით აღნიშნულია (3.8.11)-ის მარცხენა ნაწილი, ხოლო λ^* სკალარული ნამრავლია. მაშასადამე, სიმრუდის სიჩქარის ვექტორი M_r , M_θ სიბრტყეში ზღვრული სიმრუდის ნორმალია. აქედან გამომდინარეობს, რომ დენადობის ასოცირებული კანონი სამართლიანია ისეთი განზოგადოებული სიდიდეებისათვისაც, როგორებიცაა M_r , M_θ და გამრუდების სიჩქარეები η_r , η_θ .

ახლა (3.8.11)-ის გამოყენებით გამოვირიცხოთ M_θ და მისი მნიშვნელობა შევიტანოთ წონასწორობის (3.8.2) დიფერენციალურ განტოლებაში. მივიღებთ არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას M_r -ის მიმართ.

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} M_r \pm \sqrt{M_s^2 - \frac{3}{4} M_r^2} \right) = Q \quad (3.8.13)$$

ამ განტოლების ამონახსნი შესაბამისი სასაზღვრო პირობებისათვის განსაზღვრავს ზღვრულ დატვირთვას. (3.8.4) და (3.8.6) განტოლებების გარდაქმნით მივიღებთ ფირფიტის ღუნვის სიჩქარის დიფერენციალურ განტოლებას:

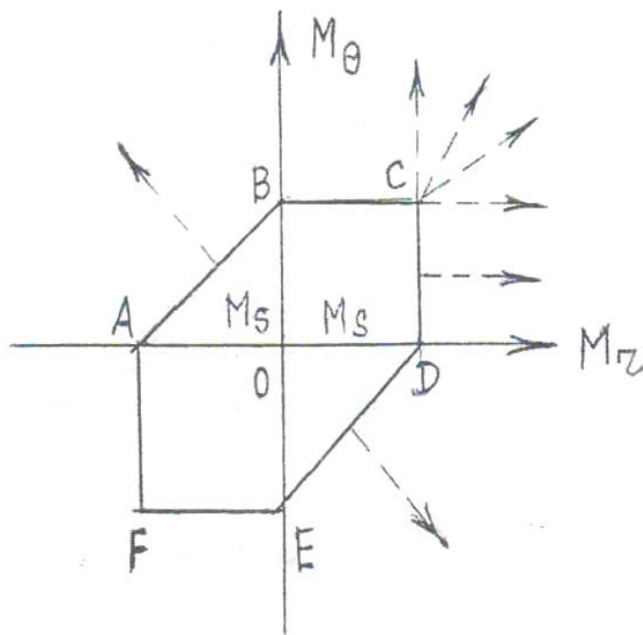
$$\eta(2M_\theta - M_r) \frac{d^2 W}{dr^2} = (2M_r - M_\theta) \frac{dW}{dr} \quad (3.8.14)$$

ამ განტოლების ინტეგრებით (ცნობილი M_r და M_θ მომენტების და სასაზღვრო პირობის გამოყენებით) (3.8.14) მიიღებს სახეს:

$$M_r - 2M_\theta = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} M_s$$

(3.8.15)

(3.8.13) განტოლების ამოხსნა სერიოზულ სიძნელეებთან არის დაკავშირებული. ამოხსნის გამარტივების საშუალებას იძლევა ტრესკას პლასტიკურობის პირობა, რომლის თანახმადაც ელიფსი იცვლება ექვსკუთხედით. ასეთ შემთხვევაში ფირფიტა წრიულ ზონებად იყოფა და თითოეულ ზონაში დენადობის პირობა წრფივი კანონით გამოიხატება და ინტეგრება გართულებების გარეშე ხდება. ამავე დროს სიზუსტე დიდად არ ირღვევა. ამ ცდომილების შემცირებაც შესაძლებელია, თუ ჩაწერილი ექვსკუთხედების ნაცვლად ავიღებთ შემოწერილი და ჩაწერილი ექვსკუთხედების შუალედურ ექვსკუთხედს. ამისათვის საკმარისია σ_s -ის ნაცვლად ავიღოთ $\sigma'_s \approx 1,08\sigma_s$ (ნახ. 3.8.3).



ნახ. 3.8.3

ჩალუნვის სიჩქარე უწყვეტი უნდა იყოს. დეფორმაციათა სიჩქარეები კი ξ_r და ξ_θ ზოგად შემთხვევაში შეიძლება წყვეტას განიცდიდნენ. წრეწირს, სადაც ξ_θ წყვეტას განიცდის, ეწოდება სახსრული წრეწირი. ამ წრეწირზე $M_r = \pm M_s$. მართლაც - ξ_θ განიცდის წყვეტას, ξ_r კი

შემოუსაზღვრელია. დენადობის ასოცირებული კანონის თანახმად ასეთი მდგომარეობა შესაძლებელია ექვსკუთხედის ვერტიკალური გვერდებისათვის, რომელთა გასწვრივ $M_r = \pm M_s$.

ხისტ-პლასტიკური სხეულის სქემის თანახმად უნდა დავუშვათ, რომ ფირფიტის ნაწილი (რადაც რეგიონალური ზონა) შეიძლება არადეფორმირებული დარჩეს და ხისტად გადაადგილდეს ვერტიკალური მიმართულებით. ასეთ შემთხვევაში ზემოთ მოყვანილი სასაზღვრო პირობები ძალაში რჩება. ჩამაგრების შემთხვევაში კი გვექნება $\frac{dw}{dr} = 0$ და

$$M_r = \pm M_s.$$

მაგალითი 1

ფირფიტა თავისუფლად არის დაყრდნობილი. p ინტენსივობის ტვირთი განაწილებულია r რადიუსის შიგნით (ნახ.3.8.4). დრეკადი ღუნვის შემთხვევაში მაქსიმალური ნორმალური ძაბვა აღიძვრება ფირფიტის ცენტრში, სადაც $r=0$ და პირველად აქვე აღიძვრება პლასტიკური დეფორმაცია. აქ $M_r=M_\theta=M_s$, ხოლო ცენტრთან ახლოს გვექნება (ნახ.3.8.3)-ის შესაბამისი ერთ-ერთი პლასტიკური ვარიანტი - C, BC, CD. CD- ვარიანტი ეწინააღმდეგება წონასწორობის განტოლებას. (რადგან CD- ზე $M_r=M_s$ და $\frac{dM_r}{dr} = 0$) მეორე მხრივ $M_\theta < M_s$, $p > 0$ და (3.8.2) დიფერენციალური განტოლებიდან მივიღებთ $r > c$, $p = 0$.

$$M_r = \begin{cases} \frac{c_1}{r} - \frac{1}{6} Pr^2 - M_s & \text{როცა } r \leq c \\ \frac{c_2}{r} - \frac{1}{6} Pc^2 - M_s & \text{როცა } r \geq c \end{cases} \quad (3.8.16)$$

სადაც C_1 და C_2 ნებისმიერი მუდმივებია. ფირფიტის ცენტრში M_r -ის შემოსაზღვრულობის გამო $C_1=0$, ხოლო M_r -ის უწყვეტობის პირობიდან

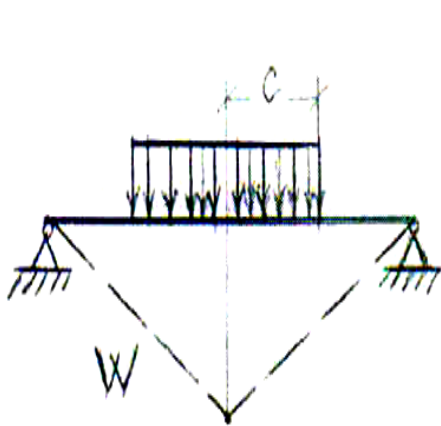
$r=c$ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიპოვოთ $C_2 = \frac{1}{3}pc^2$. r -ის ზრდასთან ერთად M_r მღუნავი მომენტი მცირდება, ანუ მისი აღმნიშვნელი წერტილი მესამე ნახაზზე მოძრაობს C -დან B -სკენ. საყრდენზე $M_r=0$, და რეალიზდება B ვარიანტი. ფილის დანარჩენ ნაწილში მიმდინარეობს BC ვარიანტი. ზღვრული დატვირთვის მნიშვნელობის მოსაძებნად განვიხილოთ პირობა $r=b$ და $M_r=0$. მაშინ

$$P^* = \frac{6b}{c^2(3b-2c)} M_s \quad (3.8.17)$$

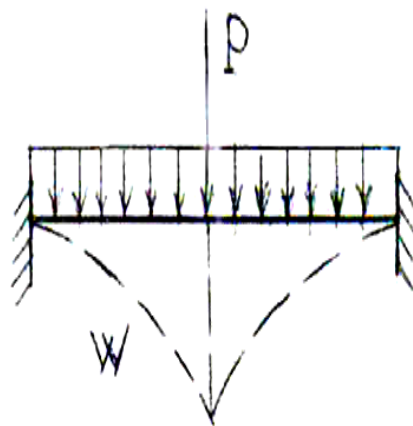
ფირფიტის დენადობის სურათი ზღვრულ მდგომარეობაში აიხსნება შემდეგნაირად: დენადობის ასოცირებული კანონის თანახმად BC უბნისათვის გვექნება $\eta=0$ ანუ $\frac{d^2w}{dr^2} = 0$. აქედან გამომდინარე, სასაზღვრო პირობისათვის $W=0$, როცა $r=b$, ადვილად მოვძებნით

$$W = W_0 \left(1 - \frac{r}{b}\right) \quad (3.8.18)$$

სადაც W_0 არის ჩაღუნვის სიჩქარის მნიშვნელობა ფირფიტის ცენტრში, რომელიც არ არის ჯერ დადგენილი. ამრიგად, დენადობის პროცესში ფირფიტა კონუსის ფორმას იღებს.



ნახ. 3.8.4



ნახ. 3.8.5

როცა დატვირთვა მთლიან ფირფიტაზეა განაწილებული, მაშინ ცხადია, რომ $c=b$ და ზღვრული დატვირთვის გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$P^* = \frac{6M_s}{b^2} \quad (3.8.19)$$

ამავე შემთხვევისათვის მიზესის პლასტიკურობის განხილვის შედეგად მიღებული დიფერენციალური განტოლების რიცხვითი ინტეგრებით მიღებული ზღვრული დატვირთვის მნიშვნელობა იქნება

$$P^* = 6,5 \frac{M_s}{b^2} \quad (3.8.20)$$

მაგალითი 2

წრიული ფირფიტა ხისტადაა ჩამაგრებული მთელი კონტურით და მასზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა (ნახ. 3.8.6) ისევე როგორც წინა შემთხვევაში, ცენტრის ირგვლივ რეალიზდება BC ვარიანტი. r -ის ზრდის პარალელურად M_r მცირდება და ხდება ნულის ტოლი როცა $r=p$. შემდეგ ხორცილდება ვარიანტი BA, რომელიც ვრცელდება ფირფიტაზე კონტურამდე $r=b$, სადაც $M_r=-M_s$, ანუ დგება ვარიანტი A, როცა $r \leq p$. (3.8.16)-ის თანახმად გვექნება:

$$M_r = M_s - \frac{1}{6} pr^2 \quad (3.8.21)$$

როცა $r=p$, $M_r=0$ და $p^2 = \frac{6M_s}{p}$

იმ შემთხვევაში, როცა $r > \rho$, $M_\theta - M_r = M_s$ და წონასწორობის დიფერენციალური განტოლებიდან მივიღებთ:

$$M_r = M_s \ln \frac{r}{\rho} - \frac{1}{4} P (r^2 - \rho^2) \quad (3.8.22)$$

სადაც გამოყენებულია პირობა $M_r = \rho$. ვთქვათ, კონტურზე $r = b$, $M_r = -M_s$ ანუ ჩამაგრების გასწვრივ წარმოიშვა სახსარი. ამ მდგომარეობაში მივიღებთ განტოლებამდე

$$5 + 2 \ln \frac{b}{\rho} = 3 \frac{b^2}{\rho^2} \quad (3.8.23)$$

აქედან გამოვთვლით ρ -ს და ზღვრულ დატვირთვას. მივიღებთ $\rho \approx 0,73b$ ამგვარად

$$P^* = 11,3 \frac{M_s}{b^2} \quad (3.8.24)$$

ამის შემდეგ დაგუბრუნდეთ ჩაღუნვის სიჩქარის განსაზღვრის საკითხს. ცენტრალურ ზონაში $r \leq \rho$. ისევე, როგორც პირველ მაგალითში, გვქვია:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = 0; \quad W = W_0 + C_1 r; \quad (3.8.25)$$

სადაც W_0 და C_1 ნებისმიერი მუდმივებია. AB ვარიანტის შემთხვევაში, დენადობის ასოცირებული კანონის თანახმად:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (3.8.26)$$

კონტურზე $r = b$, $w = 0$ და მივიღებთ:

$$w = C_2 \ln \frac{r}{b} \quad (3.8.27)$$

აქაც C_2 ნებისმიერი მუდმივია. ცხადი ხდება, რომ პირობა $\frac{dw}{dr} = 0$
 კონტურზე არ სრულდება. ამიტომ კონტურის გასწვრივ მართლაც
 წარმოიქმნება პლასტიკური სახსარი. C_1 და C_2 მუდმივები
 განისაზღვრება w -ს $\frac{dw}{dr}$ -ის უწყვეტობის პირობიდან, როცა $r = \rho$.
 ჩაღუნვის სიჩქარე ფირფიტის ცენტრში w_0 გამოუთვლელი რჩება.
 ჩაღუნვის ფორმა ნაჩვენებია 3.8.5 ნახაზზე.

ლიტერატურა

1. Cauchy A. Exercices de mathematique. 1927. Paris.
2. Poisson S. D. Memoire sur les surfaces elastiques. 1814. Paris, Mem.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ. ОНТИ, Москва, 1935.
4. Navie L.M.H. Memoire sur la flexion des plans elastiques. Extrait des recherches sur la flexion des plans elastiques. Soc. philomath, juin et juillet. 1823. P. 92.
5. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. М. Гостехтеориздат, 1953. 423 с.
6. Тимошенко С. П., Войновский Кригерс. - Пластинки и оболочки. Гостехиздат, Москва, 1966.
7. Галеркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Л.-М. Госстройиздат, 1933. 371 с.
8. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. Т. II Москва, Изд. АН СССР 1953.
9. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. Т. III Москва, Изд. АН СССР 1953
10. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Л. Судпромгиз, 1941 Ч. 2
11. Васильев В. В. О теории тонких пластин (обзор). Изв. Акад. наук. МТТ. №3. 1992.
12. Кипиани Г. О. Теоретическое решение и расчет сборных дорожных покрытий на основе исследования слоистых пластин с разрезами. Труды ГТУ, 2001. №6(439). С. 71-74.
13. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. ОГИЗ. М.- Л., 1947.
14. Прагер В. Проектирование пластинок наименьшего веса. М. «Механика». 1956.
15. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. М. Стройиздат, 1986. 326 с.

16. Савин Г. Я. Тульчий В. И. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. Киев. Наук. Думка. 1971. 268с.
17. Шапиро Г. С. Упруго-пластический изгиб круглой пластинки и существование решения жестко-пластической задачи. Изв. АН СССР. ОТН. 1961. №2. С. 142-146.
18. Ширко И. В. О форме равнопрочной пластинки. Инж. Журнал Т. 6, Вып. 2. 1965.
19. რ. ცხვედაძე, თ. ბაციკაძე, დ. ტაბატაძე, “დრეკად ფუძეზე მდებარე ფილის ანგარიში ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებაში”. თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების პრობლემებისადმი მიძღვნილი საერთაშორისო სიმპოზიუმის შრომები. თბილისი. 4-5 ივლისი, 2000წ. გვ. 91-95
20. Nash W. A. Bibliography on shells and shell-like structures. Part 1. David Taylor Model Basin Report, 803. 1954 Part II Dep. of Eng. Mech. Univ. of Florida. 1957.
21. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. Наука, 1966.
22. Соколовский В. В. Теория пластичности. М. Высшая школа. 1969. с. 608.
23. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948 с. 595.
24. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат. 1956 с. 560.
25. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности. Математический сборник. Т. 1. Вып. 4. 1948 г. с. 14-105.
26. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учётом пластических свойств материалов. М. 1954 г. с. 485.
27. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести М. Машиностроение 1968. с. 530.
28. ა. მ . კაკუშაძე. დრეკადობის და პლასტიკურობის თეორია. ტ. 1-2, გამომცემლობა „ცოდნა“, თბილისი. 1959წ. 680 გვ.

29. Алумяэ Я. А. Теория упругих оболочек и пластинок // Механика в СССР за 50 лет. М. Наука, 1972 с. 227-236.
30. Ониашвили О. Д. Расчет оболочек и других тонкостенных пространственных конструкций. Строительная механика в СССР. 1917-1967. М. Стройиздат, 1969.
31. Джанелидзе Г. И. Обзор работ по теории изгиба тонких плит, опубликованных в СССР / У ПММ. 1948. Т. 12, Вып. 1 с. 109-128.
32. Немиш Ю. Я. Чернопиский Д. И. Упругое равновесие гофрированных тел. Киев. Наук. Думка. 1983. 188 с.
33. Naghdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math. 1957. 14. p. 369-380.
34. Михайлов Б. К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами. Изд. ЛГУ, 1980.
35. Микеладзе М. Ш. Некоторые задачи строительной механики. М. - Л. 1948.
36. მ. მიქელაძე. ფილგების ღუნვის თეორია. თბილისი, „განათლება“. 1976.
37. Какушадзе А. М. Установление граничных условий при расчёте плит произвольного очертания. Тбилиси, 1959.
38. Гордезиани Д. Г. Методы декомпозиции в задачах теории упругости. «Статика и динамика тонкостенных конструкций». Тбилиси, 1990.
39. Калабегашвили М. Г. О расчете кольцевых плит с круговыми шарнирами (на груз. языке). Сообщ. АН ГССР, 72, №2, 1974.
40. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Бурчуладзе Т. В., Башалеишвили М. О. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва, Наука, 1976.
41. Gudushauri I; Kipiani G; Danelia D. Algorithm of solving for the concrete problem of calculating the rectangular plate with the hole of the same form. Problems of Applied Mechanics, Tbilisi, 2000. №1.
42. Вашакмадзе Т. С. Теория упругих пластин. Успехи механики т. II 1988.
43. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. Москва, ОНТИ. 1935.

44. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. СПб. 1912-1914. Ч. 1, 1912. 330ч. 2. 1914 с. 331-640.
45. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. Киев. Вища школа. 1988. С. 167.
46. Безухов Н. И., Лужин О. В. Приложение теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. М. 1979.
47. Болотин В. В. Статические методы в строительной механике. 2-е изд. перераб. и доп. М. Стройиздат. 1965. 279 с.
48. Argyris J. H., Kelsey S. Energy theorems and structural analysis. London: Butterworths, 1969, 83 p.
49. Образцов И. Ф. Изгиби кручение многозамкнутых кессонных конструкций. М. Оборонгиз. 1957. 68 с. Труды МАИ, вып. 86.
50. Образцов И. Ф. К расчету тонкостенных стержней на устойчивость при изгибе. М. Оборонгиз. 1953. 87 с. Труды МАИ, вып. 86.
51. Дишингер Ф. Оболочки: Тонкостенные железобетонные купола и своды. Пер. с нем. под ред. П. Я. Каменцева, С. З. Гинзбурга, И. Г. Иванова-Дятлова. М. - Л. Госстройиздат, 1932. 270 с.
52. Штаерман Я. Я. Расчет купола как арки на упругом основании. Проект и стандарт. 1933. №9. с. 21-25.
53. მ. მიქელაძე. პლასტიკურობის თეორია. თბილისი, “მეცნიერება”, 1990წ.
54. მ. მიქელაძე. იდეალურად დრეკად-პლასტიკური და პლასტიკურ-ხისტი სისტემების სტატიკა. თბილისი, “მეცნიერება”, 1980წ, 183 გვ.
55. Джонсон У., Меллор П. Теория пластичности для инженеров. 1979, Москва, Машиностроение, 567 с.
56. თ. ბაციკაძე, ვ. სოხაძე, პლასტიკური თეორიის ზოგიერთი პრობლემის შესახებ. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი “მშენებლობა”, №2(29), 2013 წ. გვ. 6-12.