თენგიზ ქირია

სტაციონარული პროცესების პარამეტრების ძალდებული შეფასებების შესახებ

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“ შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
ივლისი, 2017

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: პროფ. გოგი ფანცულაია
პროფ. ზურაბ ზერაკიძე

რეცენზენტები: --------------------------------

დაცვა შედგება ---------- წლის ”------” ----------------, --------- საათზე

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ----------------------

----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------

მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით თენგიზ ქირია მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: სტაციონარული პროცესების პარამეტრების მალდებული შეფასებების შესახებ" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: პროფესორი $\boxed{\text{გ. ფანცულაია}}$

ხელმძღვანელი: პროფესორი ზ. ზერაკიძე

რეცენზენტები: ---

რეცენზენტები: ---

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2017 წელი

ავტორი: თენგიზ ქირია

დასახელება: **სტაციონარული პროცესების პარამეტრების ძალდებული შეფასებების შესახებ**

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

რეზიუმე

ნაშრომში სტაციონარული პროცესების პარამეტრების ძალდებული შეფასებების შესახებ“ განხილულია ”ჰაარის ნულ სიმრავლეთა ზოგადი თეორიის ზოგიერთი ასპექტი და მათი ზოგიერთი გამოყენება. ასევე, დიდი ადგილი ეთმობა უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის გამოყენებას სხვადასხვა ამოცანების გადაწყვეტისას.

დისერტაციის გარკვეული ნაწილი ეთმობა ჰაარის ნულ სიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით სტაციონარული სტატისტიკური სტრუქტურების ძირითადი მახასიათებელი პარამეტრების ძალდებული შეფასებების კლასის სტრუქტურის შესწავლას. კერძოდ, განიხილება ამოცანა, რატომაა რომ ”თითქმის ყველა” უსასრულო შერჩევისათვის ხდება ნულ ჰიპოთეზის უარყოფა მაქსიმალური დასაჯერობის ნულ ჰიპოთეზის ტესტის საშუალებით.

ვაჩვენებთ, რომ განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევითი შეფასება არ არის განსაზღვრული „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის R^N სივრცეში. ამ შეფასების გამოყენებით ბუნებრივად აგებული სტატისტიკა არის ძალდებული და სუბიექტური სტატისტიკა. ჩვენ განვიხილავთ ამ შეფასების ერთ მოდიფიკაციას, რომელიც წარმოადგენს უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრის ძლიერად ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ სტატისტიკას.

შემოღებულია სუბიექტური და ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებათა ცნებები და ნაჩვენებია, რომ წრფივი ერთგანზ-ომილებიანი სტოქასტური მოდელის შემთხვევაში, როცა თეთრი ხმაურისათვის არსებობს პირველი რიგის მომენტი, უსასრულო შერჩევითი საშუალო წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის სუბიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას. განიხილება [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire G-powers of shift-measures on R, Ukrainian Mathematical Journal, v. 65, issue 4 (2013), 470–485] ნაშრომში აგებული სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას იმ შემთხვევაშიც, როცა თეთრი ხმაურისათვის არ არსებობს პირველი რიგის მომენტი. აქ არსებითად გამოიყენება ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტექნიკა. ჰაარის ემბივალენტობის ერთი საკმარისი პირობის გამოყენებით დამტკიცებულია, რომ ეს სტატისტიკა წარმოადგენს სასარგებლო სიგნალის ობიექტურ უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებას.

მოყვანილია ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებზე განსაზღვრული პრინციპულად ახალი სტატისტიკური სტრუქტურებისთვის უცნობი პარამეტრების ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების საკითხები ჰაარის ემბივალენტის ცნებების გამოყენებით. ეს უკანასკნელი შემოტანილია ბალკას, ბუკზოლიცისა და ელეკეშის მიერ 2012 წელს. პასუხი შეკითხვაზე -

„არსებობს თუ არა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ნებისმიერი სტატისისტიკური სტრუქტურებისთვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური შეფასება, იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს სუბიექტური შეფასება“ - დადებითია იმ შემთხვევაში, როცა არსებობს ერთი მაინც ისეთი პარამეტრი, რომლის წინარე სახე აღნიშნული სუბიექტური შეფასების მიმართ არის გავრცელება. ეს შედეგი არის განზოგადება ჩვენს მიერ ახლახან მიღებული შედეგის. ჩვენ ასევე განვიხილავთ ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებების მაგალითებს კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფში .

გარკვეული ადგილი დავუთმეთ მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხს. უფრო ზუსტად, ჩვენ მოგვყავს დამტკიცება იმ ფაქტის, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული არცერთი მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი არ არის ექვივალენტური მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის.

ასევე წარმოგიდგენთ ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლას უნიმორფულად განაწილებული მიმდევრობების საშუალებით, კოლმოგოროვის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გარკვეული მოდიფიცირების გამოყენებით მიღებულია ბახას და შოისენგერის (2002) შედეგის გაძლიერება (0,1) - ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების მაქსიმალურ ქვესიმრავლეზე, რომელიც მკაცრად მოიცავს ყველა $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ სახის მიმდევრობებს, სადაც α ირაციონალური რიცხვია. ამასთან ამ კლასის ℓ_1^{∞} ზომა 1–ის ტოლია, სადაც ℓ_1^{∞} არის (0,1) - ინტერვალზე განსაზღვრული წრფივი ლებეგის ℓ_1 ზომის უსასრულო ხარისხი.

სადისერტაციო ნაშრომში გადავწყვიტეთ შემდეგი ამოცანები :

1. უცნობი განაწილების ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ამოცანა წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა თეთრი ხმაურის შესაბამისი განაწილების ფუნქცია მკაცრად ზრდადი და უწყვეტია.
2. ჰაარის ემბივალენტის ცნების საშუალებით უცნობი განაწილების ფუნქციის ყველა უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებებათა კლასის შესწავლა;
3. უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების არსებობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა.
4. უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის საშუალებით მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახის პარამეტრიზაცია და მისთვის უცნობი განაწილების ფუნქციის შეფასების არაპარამეტრული ამოცანის უცნობი პარამეტრის შეფასების ამოცანაზე დაყვანა.

5. უცნობი განაწილების ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების აგება მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახისათვის .

6. უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრისათვის განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული ნულჰიპოთეზის ტესტირების შესწავლა ''თითქმის ყველა'' ტერმინებში და მისი გარკვეული მოდიფიკაციების შესწავლა.

7. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურების თვისებები.

8. სოლოვეის მოდელში სუსტად განცალებადი სტატისტიკური სტრუქტურა არ არის ძლიერად განცალებადი.

9. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურად-კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურისათვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი.

10. $\{0;1\}^N$ ჯგუფზე განსაზღვრულის ტატისტიკური სტრუქტურების შესახებ.

11. მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი.

R e s u m e

The present work "On Consistent Estimation ofParameters of the Stationary Processes" considers some aspects of a general theory of the “Haar Zero Sets” and some applications thereof. Besides, a considerable attention is paid to use of the uniformly distributed sequences technique in solving various tasks.

A certain part of the thesis is devoted to studying the structure of the class of assessment of the main characteristicparameters of the stationary statistical structures, with using the Haar Zero Setsmethods. Specifically, the task is discussed, why the zero hypothesis is rejected through the maximal credibility zero hypothesis test, for "almost all" infinite selections.

We demonstrate that an infinite random assessment of an unknown average square deviation defined by the repeated logarithm law is not determined for the "almost all" infinite selections in the R^N space. The statistics constructed naturally with using this estimation, is the consistent and subjective statistics. We will consider one modification of this estimation, which represents a strongly objective infinite selective consistent statistic of an unknown average square deviation.

The concepts of subjective and objective infinite selective consistent estimations are introduced and, indicated, that in the case of linear one-dimensional stochastic model, when the first line moment exists for the white noise, the infinite selective average is the subjective infinite selective consistent estimation of the useful signal.

The statistics developed in the work of [Zerakidze Zurab., Pantsulaia Gogi., Saatashvili Gimzer., On the separation problem for a family of Borel and Baire G-powers of shift-measures on R, Ukrainian Mathematical Journal, v. 65, issue 4 (2013), 470–485] is considered, which is the infinite selective consistent estimation of a useful signal in the linear one-dimensional stochastic model even in case where the first line moment does not exist for the white noise. Here the technique of the real number sequences uniformly distributed in an interval, is applied mainly.

With using one sufficient condition of the Haar ambivalence, it is proved that this statistic is the objective infinite selective consistent estimation of the useful signal.

The issues of objective and strongly objective consistent estimation of unknown parameters of the principally new statistical structures defined for the non-local compact polish groups equipped with invariant metric, are discussed with using the concept of the Haar ambivalence. The latter was introduced by Balca, Buksolize and Elekesh in 2012. Answer on the question: "Is there an objective assessment of an unknown parameter for any statistical structures defined by the non-linear compact polish groups equipped with an invariant metric, if there is a subjective estimation?" - is positive in a case, when there is at least one parameter, towards which the said subjective estimation may be spread. This is a generalization of the result recently obtained by us. We also consider the examples of objective and strongly objective consistent estimations in the compact polish group.

We gave some space to the issue of the relationship between Moore-Yamasaki-Kharazishvili (1980) type measures and infinite powers of Borel diffused probability measures determined on the axis of real numbers. More precisely, we provide a proof that no infinite power of the Borel probability measure with a strictly positive density function on the axis of the real numbers, is equivalent to the Moore-Yamasaki-Kharazishvili type measure.

We introduce also calculation of the Lebesgue integral through uniformly distributed sequences; By certain modification of Kolmogorov’s Strong Law of Large Numbers, the strengthened result of Baha and Shoisenger (2002) is received for maximal sub-sets of equally distributed sequences on (0, 1) interval, that covers

strongly all sequences of $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ type, where α is the irrational number. At the same time, ℓ_1^∞ measure of this class equals to 1, where ℓ_1^∞ is an infinite power of Lebesgue's ℓ_1 measure determined on $(0, 1)$ interval.

In the dissertation work we have resolved the following issues:

1. The task of constructing an infinite randomized consistent estimation of the function of unknown distribution in a one-dimensional stochastic model when the function of the distribution of white noise is strictly increasing and continuous.
2. Study of all infinite selective consistent estimations of the unknown distribution function by means of the concept of the Haar ambivalence.
3. Some of the sufficient conditions for the existence of objective infinite random selection consistent estimations of the unknown distribution function.
4. Parametrization of any family of the strongly increasing and continuous functions through the uniformly distributed sequences technique and, bringing the non-parametric task of estimation of the unknown distribution function to the task of estimation of an unknown parameter.
5. Construction of the infinite random selection consistent estimations of the unknown distribution function for any family of the strongly increasing and continuous functions.
6. Study of the zero hypothesis tests determined by the repeated logarithm law and, its certain modifications, in "almost all" terms.
7. Properties of the statistical structures determined for the non-local compact topological polish groups with the invariant metric.
8. On one weakly separated statistical structure in the Set Theory model(ZF) & (DC) (by construction of the counter-example, it is proved that a weakly separated statistical structure in the Solovey model, is not strongly separated).
9. On existence of the objective consistent estimation of an unknown parameter for the statistical structure of the non-local compact topological polish groups with the invariant metric.
10. On the statistical structures determined for the $\{0;\ 1\}^N$ group.
11. On relationship between Moore-Yamasaki-Kharazishvili (1980) type measures and infinite powers of Borel diffused probability measures determined on the axis of real numbers

შინაარსი

შესავალი	....	11
თავი I	ზოგადი მცნებები და განსაზღვრებები ………………………...	21
თავი II	წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში .... უცნობი პარამეტრის ეფექტურ შეფასებათა შესახებ	41
2.1	ექვიგანაწილებული მიმდევრობების ზოგიერთი ახალი .... თვისების შესახებ	41
2.2	განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული……… საშუალო კვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასების შესახებ	48
2.3	უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო …… შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ	57
2.4	წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში …….. სასარგებლოს სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია	64
2.5	უცნობი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის უსასრულო …….. შერჩევითი ძალდებული შეფასება	67
2.6	ინვარიანტული მეტრკით აღჭურვილ არალოკალურად …….. კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფზე განსაზღვრული ორთოგონალური სტატისტიკური სტრუქტურების შესახებ	80
2.7	კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფში უცნობი პარამეტრის …….. ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებების შესახებ	92
თავი III	ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა უნიმორფულად ………….. განაწილებული მიმდევრობების საშუალებით	95
	დამხმარე ცნებები/მეთოდები …………………………………….	98
	მე-3 თავის ძირითადი შედეგები და მათი მიმოხილვა............	103
თავი IV	მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომისა და ბორელის .. უსასრულო დიფუზიურ ალბათური ზომის შესახებ R-ზე	107
	ამოცანა 4.1-ის უარყოფითი გადაწყვეტა....................................	111
	ამოცანა 4.2-ის კერძო გადაწყვეტა	113
	4.3 - 4.4 ამოცანების ამოხსნა	118
დასკვნა	....	126
გამოყენებული ლიტერატურა	....	128

მადლიერება

მადლობას ვუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს გოგი ფანცულაიას
და ზურაბ ზერაკიძეს.
პატივს მივაგებ გოგი ფანცულაიას ხსოვნას.

შესავალი

ნაშრომი "სტაციონარული პროცესების პარამენტრების ძალდებული შეფასებების შეფასების შესახებ" ეხება სტაციონალურ პროცესებთან დაკავშირებული სტატისტიკური სტრუქტურების პარამეტრების შეფასების აქტუალურ საკითხებს და მათ ზოგიერთ გამოყენებას სტატისტიკურ გადაწყვეტილებათა მიღების თეორიაში.

საკვლევი პრობლემის აღწერა. კარგადაა ცნობილი, რომ ინფორმაცია "ალბათობით ერთი", მთელ რიგ შემთხვევებში, არის მეტად ღარიბი რაც შეიძლება ჩაითვალოს არათავსებადი სტატისტიკური გადაწყვეტილებების მიღების ერთ-ერთ ძირითად მიზეზად.

მათემატიკური სტატისტიკის თანამედროვე თეორიასა და ჰიპოთეზათა შემოწმების შედეგებს შორის არსებული განსხვავების ასახსნელად, წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში ჩვენ შემოვიტანთ სასარგებლო სიგნალის უსასრულო შერჩევითი სუბიექტური და ობიექტური შეფასებების კონცეფციებს [18]. ეს მიდგომა არსებითად იყენებს უსასრულო-განზომილებიანი პოლონური ვექტორული ტოპოლოგიური სივრცისათვის ქრისტენსენის მიერ [2] ნაშრომში შემუშავებულ ჰაარის ნულსიმრავლეთა თეორიის მეთოდებს.

ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების (რაც იგივეა, უსასრულო შერჩევათა) სივრცე წარმოადგენს უსასრულო-განზომილებიან პოლონურ ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეს აღჭურვილს ტიხონოვის მეტრიკით, რომელიც თამაშობს მეტად მნიშვნელოვან როლს სტატისტიკურ გადაწყვეტილებების მიღების თეორიაში, ვინაიდან უცნობი პარამეტრისათვის რაიმე ძალდებული შეფასების ცნების განხილვა სხვადასხვა სტოქასტურ მოდელში შეუძლებელია უსასრულო შერჩევის არსებობის გარეშე .

R^N სივრცის ჰაარის ნულ სიმრავლეთა თეორიის საშუალებით ჩვენ შევეცდებით ავხსნათ ნუნალისა [14] და კოენის [4] მოსაზრებები.

ვთქვათ $x_1, x_2, \cdots$ არის ნორმალურად პარამეტრებით $(\theta, 1)$ განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეზე დაკვირვების შედეგები, სადაც θ საშუალო უცნობია და საშუალო კვადრატული გადახრაა 1. ჩვენი ამოცანაა ამ უსასრულო შერჩევის გამოყენებით შევაფასოთ უცნობი საშუალო. μ_θ-თი ავღნიშნოთ წრფივი გაუსის ზომა $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2}}$ სიმკვრივით. მაშინ სამეული

$$(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta \in R} \tag{1}$$

იქნება ექსპერიმენტის აღმწერი სტატისიტკური სტრუქტურა, სადაც $\mathrm{B}(R^N)$ არის არის R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა, ხოლო μ_θ^N არის μ_θ ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი. დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის თანახმად ვღებულობთ:

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k \in N} : (x_k)_{k \in N} \in R^N \ \& \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \theta\}) = 1 \tag{2}$$

ნებისმიერი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის.

(2)-ის გამოყენებით შეგვიძლია ავაგოთ უცნობი θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება T შემდეგნაირად:

$$T((x_k)_{k \in N}) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \tag{3}$$

ცხადია, $H_0 : \theta = \theta_0$ ნულჰიპოთეზის შემოწმება გულისხმობს შემდეგ პროცედურას: თუ უსასრულო შერჩევა $(x_k)_{k \in N} \in T^{-1}(\theta_0)$, მაშინ მიიღება H_0. ჰიპოთეზა, წინააღმდეგ შემთხვევაში ხდება H_0 ჰიპოთეზის უარყოფა. კოენის მიერ [4] გამოითქვა შემდეგი მოსაზრება - „თუ ეძებთ ნულჰიპოთეზის შემოწმების ჯადოსნურ ალტერნატივას - ის არ არსებობს". მივაქციოთ ყურადღება, რომ S სიმრავლე ყველა იმ უსასრულო $(x_k)_{k \in N}$ შერჩევებისა, რომელთათვისაც არსებობს პირველი n წევრის საშუალო არითმეტიკულების ზღვარი, წარმოადგენს R^N სივრცის ბორელის აზრით ზომად ვექტორულ წრფივ ქვესივრცეს. ქრისტენსენის [2] ერთი შედეგის თანახმად პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ყოველი

ბორელის აზრით ზომადი საკუთრივი ვექტორული ქვესივრცე არის ჰაარის ნულ სიმრავლე. ამიტომ S სიმრავლე, როგორც R^N სივრცის ბორელის აზრით ზომადი საკუთრივი ვექტორული ქვესივრცე, ასევე იქნება ჰაარის ნულ სიმრავლე და დამტკიცდა, რომ T სტატიტიკა არაა განსაზღვრული „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის. უკანასკნელი ნიშნავს, რომ „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია. ეს მსჯელობა შეიძლება გამოვიყენოთ ნუნალის [14] შემდეგი ჰიპოთეზის ასახსნელად: ʻʻ თუ გადაწყვეტილებები ეყრდნობიან შეთანხმებას მაშინ მათ უწოდებენ ნებისმიერს ან უაზროს, მაშინ როცა წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ შეიძლება ვუწოდოთ სუბიექტური. II რიგის შეცდომების მინიმიზაციისთვის დიდი შერჩევები არის რეკომენდირებული.

ვთქვათ, $T_1 : R^N \rightarrow R$ არის ზემოთმოყვანილი მეთოდით აგებული θ უცნობი პარამეტრის უსასრულო ძალდებული შეფასებისახალი მაგალითი ე.ი.

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ T_1((x_k)_{k\in N}) = \theta\}) = 1 \tag{4}$$

ყოველი $\theta \in R$. ბუნებრივად ისმის შემდეგი შეკითხვა - რა დამატებით პირობა უნდა მოვთხოვოთ T_1 სტატისტიკას, რომ ზემოთხსენებული უთანხმოება ავიცილოთ თავიდან ?

ამ მიმართულებით, პირველ რიგში უნდა მივიღოთ მხედველობაში ის გარემოება, რომ თუ რაიმე $\theta_0 \in R$ პარამეტრისთვის $T_1^{-1}(\theta_0)$ არის ჰაარის ნულ სიმრავლე, ვინაიდან მაშინ „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის $H_0 : \theta = \theta_0$ ჰიპოთეზა იქნება უკუგდებული. მეორეს მხრივ, არ უნდა არსებობდეს $\theta_1 \in R$ რომლისთვისაც $T_1^{-1}(\theta_1)$ იქნება გავრცელება (რაც იგივეა, რაიმე ჰაარის ნულ სიმრავლის დამატება) ვინაიდან, მაშინ „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის ნულჰიპოთეზა $H_0 : \theta = \theta_2$ იქნება უკუგდებული ყოველი $\theta_2 \neq \theta_1$ პარამეტრისათვის. ამ მსჯელობას მივყავართ დამატებით პირობამდე, რომ T_1 სტატისტიკისთვის $T_1^{-1}(\theta)$ სიმრავლე არ უნდა იყოს არც ჰაარის ნულ სიმრავლე და არც გავრცელება ნებისმიერი $\theta \in R$-პარამეტრისთვის. ნაშრომი [1]-ის თანახმად, სიმრავლეს, რომელიც

არ არის არც ჰაარის ნულ სიმრავლე და არც გავრცელება, ეწოდება ჰაარის ემბივალენტი. ასეთი შეფასებები, რომელთათვისაც პარამეტრის წინარე სახეები წარმოადგენენ ჰაარის ემბივალენტებს, პირველად აგებული იყო წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში სასარგელო სიგნალის შესაფასებლად და მათ ეწოდებათ ობიქტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებები (იხ, [27], თეორემა 4.1, გვ. 482).

[27] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ $T_n : R^n \to R \ (n \in N)$ განსაზღვრული

$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = -F^{-1}(n^{-1}\#(\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty;0])) \tag{5}$$

პირობით ყოველი $(x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ მიმდევრობისათვის, ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში არის θ სასარგებლო სიგნალის ძალდებული შეფასება

$$\xi_k = \theta + \Delta_k \ (k \in N), \tag{6}$$

სადაც $\#(\cdot)$ არის მთველი ზომა, Δ_k არის R -ზე ეთნაირად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებიუწყვეტი და მკაცრად ზრდადი F განაწილების ფუნქციით (''თეთრი ხმაური'') და Δ_1 შემთხვევით სიდიდეს ლოდინი არ გააჩნია. წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში განვიხილოთ ორი მაგალითი.

მაგალითი 1.1 *([27], მაგალითი 4.1, გვ. 484)* $(\pi \times n - [\pi \times n])_{n \in N}$ *ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა, სადაც* $[\cdot]$ *არის ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილი, წარმოადგენს* $(0,1)$ *ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებულ მიმდევრობას(იხ, [10], მაგალით 2.1, გვ.17).* $\mu_{(\theta,1)}$ *-ექვიგანაწილებული* $(x_n)_{n \le M}$ *მიმდევრობა* R *ღერძზე (*M *არის საკმაოდ დიდი ნატურალური რიცხვია, დამოკიდებული* π *ირაციონალურ წარმოდგენაზეა) მოიცემა შემდეგი ფორმულით*

$$x_n = F_\theta^{-1}(\pi \times n - [\pi \times n]), \tag{7}$$

სადაც $\mu_{(\theta,1)}$ *აღნიშნავს* μ *ზომის* θ *-ძვრას და* F *წარმოადგენს* $\mu_{(0,1)}$ *ზომის განაწილების ფუნქციას* ყოველი $n \le M$ და $\theta \in R$, სადაც F_θ აღნიშნავს განაწილების ფუნქციას, რომელიც შეესაბამება $\mu_{(\theta,1)}$ *ალბათურ ზომას.*

ამ მოდელში, θ არის "სასარგებლო სიგნალი".

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

(i) n - ცდათა რიცხვი;

(ii) T_n - შეფასება განისაზღვრება ფორმულით (5);

(iii) $\overline{X}_n$ - შერჩევითი საშუალო.

როცა $F(x)$ არის გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქცია,მაშინ Microsoft Excel-ის დახმარებით ვღებულობთ ცხრილ 1-ს.

ცხრილი 1

სასარგებლო $\theta=1$ სიგნალისშეფასება, როცა $F(x)$ არის გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქცია

n	T_n	$\overline{X}_n$	n	T_n	$\overline{X}_n$
50	0.9944	1.1469	550	1.0403	1.0348
100	1.0364	1.0110	600	1.0364	1.0394
150	1.0224	1.0647	650	1.03319	1.0363
200	1.02364	1.0379	700	1.03032	1.0379
250	1.02781	1.0452	750	1.03357	1.03728
300	1.0364	1.0404	800	1.0387	1.03263
350	1.06443	1.10343	850	1.03391	1.03732
400	1.0364	1.04451	900	1.03167	1.02262
450	1.03136	1.02308	950	1.03417	1.03669
500	1.0364	1.04463	1000	1.03643	1.03113

ცხრილ 1-ში მოყვანილი გამოთვლის შედეგები გვიჩვენებენ, რომ ორივე სტატისტიკა T_n და $\overline{X}_n$ გვაძლევს θ „სასარგებლო სიგნალის“ კარგ შეფასებას, როცა „თეთრ ხმაურს“ გააჩნია სასრული პირველი რიგის აბსოლუტური მომენტი.

ვთქვათ, F არის კოშის განაწილების ფუნქცია, ე.ი.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt \; (x\in R). \tag{8}$$

ცხრილ 2-ში მოყვანილი რიცხვები მიღებულია Microsoft Excel-ის საშუალებით, როცა „თეთრ ხმაურს“ გააჩნია კოშის განაწილება [8].

ცხრილი 2.

სასარგებლო $\theta = 1$ სიგნალის შეფასება, როცა „თეთრი ხმაურს“ გააჩნია კოშის განაწილება

n	T_n	$\overline{X}_n$	n	T_n	$\overline{X}_n$
50	1.120879	2.5554	550	1.01208	33.5554
100	0.93092	1.3331	600	1.003092	45.3331
150	1.06489	71.8752	650	1.02483	71.8752
200	1.000	54.0957	700	1.0103	54.0957
250	1.0648	64.5924	750	1.0024	64.5924
300	1.0211	54.0326	800	1.0211	54.0326
350	1.0279	56.3984	850	1.0279	56.3984
400	1.0319	49.5831	900	1.0131	49.5831
450	1.00705	44.0084	950	1.0021	44.0084
500	1.03842	45.1432	1000	1.02842	47.2123

ერთი შეხედვით ცხრილ 2-ში მიღებულ შედეგი სასარგებლო სიგნალის შეფასებისას არ ეწინააღმდეგებაზემოთ ნახსენებ შედეგს, თუმცა მეორეს მხრივ ჩვენ ვიცით, რომ კოშის წესით განაწილებული შემთხვევით სიდიდეებისთვის არ გვაქვს პირველი რიგის მომენტი ანუ შერჩევითი საშუალოს გამოყენებით სასარგებლო $\theta = 1$ სიგნალის შეფასება შეუძლებელია.

[27] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ შეფასება $\overline{\lim}\widetilde{T}_n := \inf_n \sup_{m \geq n} \widetilde{T}_m$ და $\underline{\lim} T_n := \sup_n \inf_{m \geq n} T_m$ მოდელირებული (1.6)-ში, სასარგებლო θ სიგნალის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებაა (იხ, [27], თეორემა 4.2, გვ.

483). როცა ჩვენ ვიწყებთ უსასრულო შერჩევების R^N -ზე განსაზღვრული სტატისტიკების თვისებების შესწავლას ჰაარის ნულსიმრავლეთა თეორიის მეთოდების გამოყენებით, ჩვენ ვაწყდებით მოულოდნელ ფაქტს იმასთან დაკავშირებით, რომ ეს ორივე შეფასება არის ობიექტური (იხ, [20], თეორემა 3.1).

მნიშვნელოვანი ფაქტს წარმოადგენს *''ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების''* ცნების შემოტანა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფებისათვის.

აქ ჩვენ მოვიყვანთ ზოგიერთ განსაზღვრებას და ფაქტს სრული მეტრიკული წრფივი სივრცეების ჰაარის ნულსიმრავლეთა და ღერძზე უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების თეორიებიდან. აქვე მოვიყვანთ ობიექტური და ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასების მცნებებს სტატისტიკური სტრუქტურებისთვის. ნაშრომის მესამე ნაწილში განვიხილავთ უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური შეფასების აგების ზოგიერთ კონსტრუქციას, რომელიც განაზოგადებს [27]-ნაშრომში მიღებულ ზოგიერთ შედეგს. აქ ნაჩვენები იქნება უცნობი განაწილების $F(F \in \mathrm{F})$ ფუნქციის ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი ბორელის ალბათურ ზომათა $\{p_F^N : F \in \mathrm{F}\}$ ოჯახისთვის,სადაც F აღნიშნავს ყველა მკაცრად ზრდად და უწყვეტ განაწილების ფუნქციათა ოჯახს და p_F^N აღნიშნავს p_F -ს ბორელის ზომის უსასრულო ხარისხს. მეოთხე ნაწილში წარმოვადგენთ„სასარგებლო სიგნალის" ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების ეფექტურად აგებას ზოგიერთ წრფივი ერთგანზომილებიანი მოდელისთვის. უცნობი განაწილების სიმკვრივეთათვის ალბათობების უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება იგება ცალკე დადებით უწყვეტ სიმკვრივეთა კლასისთვის და შევისწავლით ობიექტური შეფასების არსებობის საკითხს. დიდი ნაწილი ეძღვნება ჰაარის ემბივალენტის ცნების [1] გამოყენებას ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფებში პრინციპულად ახალი ისეთი სტატისტიკური სტრუქტურების გამოსაკვლევად, რომლებსაც გააჩნიათ უცნობი პარამეტრის

ობიექტური და ძლიერად ობიექტური შეფასებები. კონკრეტულად, ჩვენ შევისწავლეთ სხვადსხვა სტატისტიკურ სტრუქტურებს შორის ურთიერ-თმიმართებას. ნაშრომში განვიხილავთ სუსტადგანცალებადი სტატისტიკური სტრუქტურის მაგალითს, რომლისთვისაც უცნობის პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი ვერ გადაწყდება $(ZF)\ \&\ (DC)$ თეორიაში. ეს შედეგები აუმჯობესებენ [19]-ნაშრომში მიღებულ შედეგებს. ამასთან ჩვენ განვაზოგადებთ პოლონური R^N -ჯგუფის შემთხვევაში შემოტანილ ობიექტური და სუბიექტური ძალდებული შეფასებების ცნებებს ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფებებისთვის და განვიხილავთ ყოველი სტატისტიკური სტრუქტურისთვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხს, როცა არსებობს სუბიექტური ძალდებული შეფასება. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ეს საკითხი დადებითად გადაწყვეტადია იმ შემთხვევისათვის, როცა არსებობს ერთ მაინც ისეთი პარამეტრი, რომლის წინარე სახე არსებული სუბიექტური შეფასებით არის გავრცელება. მოყვანილია $\{0;1\}^N$ პოლონური კომპაქტური ჯგუფისათვის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების აგების ზოგიერთ კონსტრუქცია.

საკვლევი პრობლემის პრაქტიკული მნიშვნელობა. ნაშრომში მოყვანილი საკვლევი პრობლემები ფუნდამენტური ხასიათისაა და მისი გამოყენების არეალი საკმარისად ფართოა. ერთის მხრივ, ნაშრომში წარმოდგენილი თეორიული სახის შედეგები შეიძლება იქნას გამოყენებული როგორც მათემატიკური სტატისტიკის აქტუალური საკითხების შემდგომი კვლევისას, ასევე მათემატიკის აღნიშნული დარგის თანამედროვე კურსის წაკითხვის პროცესში. მეორეს მხრივ, შესაძლებელია აღნიშნული შედეგების წარმატებით გამოყენება იმ ელემენტარული მიზეზის გამო, რომ დაკვირვებადი ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური, სამედიცინო თუ სხვა შემთხვევითი პროცესების უმრავლესობა წარმოადგენს სტაციონარულ სტოქასტურ პროცესს.

მოკლე დახასიათება თავებისა და ქვეთავების მიხედვით:

თავი I - ძირითადი კონცეფციები. განხილულია სიმრავლეთა თეორიის, ზომის თეორიის, ალბათობის თეორიის, მათემატიკური სტატისტიკის, მათემატიკური ანალიზისა და ფუნქციონალური ანალიზის ის ცნებები და დამხმარე დებულებები, რომლებიც სისტემატურად გამოიყენება შემდგომ კვლევებში.

თავი II - წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში უცნობი პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქციების შესახებ

ქვეთავი - 2.1. ექვიგანაწილებული მიმდევრობების ზოგიერთი ახალი თვისების შესახებ

ქვეთავი - 2.2. განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული საშუალო კვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასების შესახებ

ქვეთავი - 2.3. უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ;

ქვეთავი - 2.4 წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში სასარგებლოს სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია;

ქვეთავი 2.5 – უცნობი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება;

ქვეთავი 2.6 - კომპაქტურ პოლონურ $\{0,1\}^N$ ჯგუფში უცნობი პარამეტრის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებების შესახებ

თავი III - ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა უნიმორფულად განაწილებული მიმდევრობების საშუალებით .

კოლმოგოროვის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გარკვეული მოდიფიცირების გამოყენებით მიღებულია ბახას და შოისენგერის (2002) შედეგის გაძლიერება (0,1) - ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების მაქსიმალურ ქვესიმრავლეზე, რომელიც მკაცრად მოიცავს ყველა $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ სახის მიმდევრობებს, სადაც α ირაციონალური რიცხვია.

ამასთან ამ კლასის ℓ_1^∞ ზომა 1–ის ტოლია, სადაც ℓ_1^∞ არის (0,1) - ინტერვალზე განსაზღვრული წრფივი ლებეგის ℓ_1 ზომის უსასრულო ხარისხი.

თავი IV - მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომისა და ბორელის უსასრულო დიფუზიურ ალბათური ზომის შესახებ R -ზე

ამ თავში შესწავლილია მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი. უფრო ზუსტად, ჩვენ მოგვყავს დამტკიცება იმ ფაქტის, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული არცერთი მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი არ არის ექვივალენტური მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის.

თავი I. ზოგადი მცნებები და განსაზღვრებები

მოცემულ თავში ჩვენ განვიხილავთ სიმრავლეთა თეორიის, ზოგადი ტოპოლოგიისა და ზომის თეორიის ზოგიერთ ცნებებსა და დამხმარე დებულებებს. ჩვენ მათ სისტემატურად გამოვიყენებთ ჩვენს შემდგომ კვლევებში.

ZF -სიმბოლო აღნიშნავს ეგრეთ წოდებულ ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიას, რომელიც წარმოადგენს სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფორმალურ სისტემას. ცერმელო-ფრენკელის სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებებია სიმრავლეები და მათ შორის მიკუთვნების ბინარული მიმართება $\in$. ZF სისტემა შედგება რამოდენიმე აქსიომისაგან, რომლებიც ახდენენ სიმრავლეთა სხვადასხვა თვისებების ფორმალიზაციას ბინარული $\in$ მიმართების ტერმინებში.

ZFC სიმბოლო აღნიშნავს ცერმელო-ფრენკელის თეორიას ამორჩევის AC აქსიომით. სხვა სიტყვებით, ZFC თეორია არის

$$ZF \& AC,$$

სადაც AC აღნიშნავს ამორჩევის აქსიომას.

თუ x და X არის ორი სიმრავლე, მაშინ $x \in X$ აღნიშნავს, რომ x მიეკუთვნება X -ს. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვამბობთ, რომ x არის X -ის ელემენტი.

მიმართება $X \subseteq Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y -ის ქვესიმრავლე.

მიმართება $X \subset Y$ აღნიშნავს, რომ X არის Y -ის საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $R(x)$ არის მიმართება დამოკიდებული x -ზე (ან, სხვა სიტყვებით, $R(x)$ არის x ელემენტის თვისება), მაშინ სიმბოლო

$$\{x : R(x)\}$$

აღნიშნავს ყველა იმ x ელემენტთა ერთობლიობას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $R(x)$.

სიმბოლო $\emptyset$, როგორც წესი, აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს, ე.ი.,

$$\emptyset = \{x : x \neq x\}.$$

თუ X არის რაიმე სიმრავლე, მაშინ სიმბოლო $P(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს, ე.ი.,

$$P(X)=\{Y : Y\subseteq X\}.$$

$P(X)$ სიმრავლეს ასევე უწოდებენ X სიმრავლის ბულეანს.

ვთქვათ, X და Y არის ორი სიმრავლე. მაშინ :

$X\cup Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების გაერთიანებას;

$X\cap Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების თანაკვეთას;

$X\setminus Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სხვაობას;

$X\Delta Y$ აღნიშნავს X და Y სიმრავლეების სიმეტრიულ სხვაობას, ე.ი. $X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$.

ვთქვათ, Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $P(\Omega)$ კი - Ω -ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ $A_k\in \mathrm{P}(\Omega)$ $(1\le k\le n)$. $(A_k)_{1\le k\le n}$ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\{x \mid x\in A_1\vee\cdots\vee x\in A_n\},$$

სადაც $\vee$ აღნიშნავს დიზიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.2. ვთქვათ, $A_k\in \mathrm{P}(\Omega)$ $(k\in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\bigcup_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და გა-ნისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcup_{k\in N} A_k=\{x \mid x\in A_1\vee x\in A_2\vee\cdots\}.$$

განსაზღვრება 1.3. ვთქვათ, $A_k\in \mathrm{P}(\Omega)$ $(1\le k\le n)$. სიმრავლეთა სასრული $(A_k)_{1\le k\le n}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განი-საზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k=\{x \mid x\in A_1\wedge\cdots\wedge x\in A_n\},$$

სადაც $\wedge$ აღნიშნავს კონიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 1.4. ვთქვათ, $A_k \in \mathrm{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\bigcap_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$\bigcap_{k\in N} A_k = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots\}.$$

მართებულია დე მორგანის ორადულობის შემდეგი ფორმულები:

1) $\Omega \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

2) $\Omega \setminus \bigcup_{k\in N} A_k = \bigcap_{A_k} (\Omega \setminus A_k);$

3) $\Omega \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k);$

4) $\Omega \setminus \bigcap_{k\in N} A_k = \bigcup_{k\in N} (\Omega \setminus A_k).$

განსაზღვრება 1.5. Ω -სიმრავლის ქვესიმრავლეთა A კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathrm{A}$;

2) თუ $A, B \in \mathrm{A}$, მაშინ $A \cup B \in \mathrm{A}$ და $A \cap B \in \mathrm{A}$;

3) თუ $A \in \mathrm{A}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \mathrm{A}$.

შენიშვნა 1.1. განსაზღვრება 1.5-ში, მე-2) პირობაში საკმარისია მოვითხოვოთ $A \cup B \in \mathrm{A}$ და $A \cap B \in \mathrm{A}$ პირობებიდან მხოლოდ ერთ-ერთის მართებულობა, ვინაიდან მართებულია შემდეგი სიმრავლურ-თეორიული ტოლობები:

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)),$$

$$A \cap B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)).$$

შენიშვნა 1.2. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω-ს და ჩაკეტილია სასრული რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "$\cap, \cup, \setminus$" მიმართ.

განსაზღვრება 1.6. Ω-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა F -კლასს ეწოდება σ-ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

1) $\Omega \in \mathrm{F}$;

2) თუ $A_k \in \mathrm{F}$ $(k \in N)$, მაშინ $\bigcup_{k\in N} A_k . \in \Phi$ და $\bigcap_{k\in N} A_k . \in \Phi$;

3) თუ $A \in \mathrm{F}$, მაშინ $\Omega \setminus A \in \mathrm{F}$.

შენიშვნა 1.3. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს Ω -ს და ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "$\cap, \cup, \setminus$" მიმართ.

განსაზღვრება 1.7. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრაზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:

1) ყოველი $A \in \mathrm{F}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$ (ალბათობის არაუარყოფითობის თვისება);

2) $P(\Omega) = 1$ (ალბათობის ნორმირების თვისება);

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ F -კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ $P(\cup_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} P(A_k)$ (ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისება).

ვთქვათ, Ω არის არაცარიელი სიმრავლე და F მის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასია. მართებულია შემდეგი დებულება.

ლემა 1.1 [28]. *არსებობს Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა $\sigma(F)$, რომელიც შეიცავს F კლასს და არის მინიმალური ჩართვის თვალსაზრისით იმ σ -ალგებრებს შორის, რომლებიც შეიცავენ F -ს.*

განსაზღვრება 1.8. ვთქვათ, მოცემულია Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ორი კლასი S_1 და S_2. ამასთან, $S_1 \subset S_2$. P_1 და P_2 იყოს შესაბამისად S_1 და S_2 კლასზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები. P_2 რიცხვით ფუნქციას ეწოდება P_1 რიცხვითი ფუნქციის გაგრძელება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(\forall X)(X \in S_1 \rightarrow P_2(X) = P_1(X)).$$

თეორემა 1.1 (კარათეოდორი)[28]. *ვთქვათ, P არის A ალგებრაზე განსაზღვრული ალბათობა. მაშინ არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას; ამასთან, $\overline{P}$ ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:*

$$(\forall B)(B\in\sigma(\mathrm{A})\to\overline{P}(B)=\inf\left\{\sum_{k\in N}P(A_k)\,|\,(\forall k)(k\in N\to A_k\in\sigma(\mathrm{A}))\,\&\,B\subseteq\cup_{k\in N}A_k\right\}.$$

მაგალითი 1.1. A-თი აღვნიშნოთ $[0,1]$ ინტერვალის ყველა ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლის ელემენტები წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს $[0,1]$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P([a_k,b_k[)=b_k-a_k$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(A)$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(A)$ კლასს ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $B([0,1[)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება $[0,1[$ ინტერვალზე განსაზღვრული ერთ-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა და აღინიშნება b_1 სიმბოლოთი.

სამეულს $([0,1[,\mathrm{B}([0,1[),b_1)$-ს ეწოდება $[0,1[$ სიმრავლესთან ასოცირებული ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე.

მაგალითი 1.2 ვთქვათ, $F:R\to[0,1]$ არის ყოველ წერტილში მარჯვნიდან უწყვეტი ისეთი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0\,\&\,\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $F(-\infty)=0$ და $F(+\infty)=1$.

ვთქვათ, $\Omega=R\cup(+\infty)$.

A -თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლებიც წარმოიდგინებიან მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულო ოჯახის გაერთიანებით, ე.ი.

$$\mathrm{A} = \left\{ A \,|\, A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \right\},$$

სადაც $-\infty \le a_i < b_i \le \infty \quad (1 \le i \le n)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვა-ლებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P((a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია იმავე სახის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებაზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომე-ლიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A}) \cap R$ კლასს ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathrm{B}(R)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ P_F რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(R) \to P_F(X) = \overline{P}(X)),$$

ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე განაწილების F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა.

მაგალითი 1.3. ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)$ $(1 \le i \le n)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეთა სასრულ ოჯახს.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) \,|\, \omega_1 \in \Omega_1, \cdots, \omega_n \in \Omega_n\}$$

$A \subseteq \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$B=\prod_{i=1}^{n} B_i,$$

სადაც $B_i \in \mathrm{F}_i \quad (1 \le i \le n)$.

A -ით აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ A წარმოადგენს $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთ აღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} B_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P_i(B_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბა-თობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თა-ნახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathrm{F}_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{1\le i\le n} F_i$ -ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i=1}^{n} P_i$ -ით.

$(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i, \prod_{i=1}^{n} F_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$ სამეულს ეწოდება $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.4. ($[0,1]^n$ -სა და R^n -ზე განსაზღვრული n -განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომები).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i=[0,1] \quad (1\le i\le n)$,

ბ) $\mathrm{F}_i=\mathrm{B}([0,1]) \quad (1\le i\le n)$,

გ) $P_i=b_1 \quad (1\le i\le n)$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}F_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბთან ასოცირებული n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i=1}^{n}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა.

b_n-ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X\in B(R^n)\rightarrow b_n(X)=\sum_{h\in Z^n}\prod_{i=1}^{n}P_i([0,1[^n\cap(X-h))),$$

ეწოდება n -განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა, განსაზღვრული R^n-ზე.

მაგალითი 1.5. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(1\le i\le n\,\&\,x\in R\rightarrow F_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}F_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან R^n სივრცესთან ასოცირებული n-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე.

$\prod_{1\le i\le n}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან ევკლიდეს R^n სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური n -განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_n-ით.

მაგალითი 1.6. ვთქვათ, $(\Omega_i,\mathrm{F}_i,P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა უსასრულო ოჯახია.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა

$$\prod_{i\in I}\Omega_i=\{(\omega_i)_{i\in I}:\omega_i,\ i\in I\}.$$

$A\subseteq\prod_{i\in I}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის არსებობს ინდექსთა სასრული $(i_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა და $(\mathrm{F}_{i_k})_{1\le k\le n}$ σ -ალგებრების ისეთი ელემენტები $(B_{i_k})_{1\le k\le n}$, რომ მართებულია წარმოდგენა

$$B = \{(\omega_i)_{i\in I} : (\omega_i \in \Omega_i,\ i \in I \setminus \cup_{k=1}^{n}\{i_k\}) \,\&\, (\omega_i \in B_i,\ i \in \cup_{k=1}^{n}\{i_k\})\}.$$

A -თი აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ A წარმოადგენს $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P(B) = \prod_{k=1}^{n} P_{i_k}(B_{i_k}),$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ასეთნაირად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას A კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathrm{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathrm{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathrm{F}_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}F_i$ -ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}P_i$ -ით.

სამეულს $(\prod_{i=I}\Omega_i, \prod_{i=I}F_i, \prod_{i=I}P_i)$ ეწოდება $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

მაგალითი 1.6 (უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა).

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathrm{F}_i, P_i)_{i\in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(i \in N)$,

ბ) $\mathrm{F}_i = \mathrm{B}([0,1])$ $(i \in N)$,

გ) $P_i = b_1$ $(i \in N)$.

მაშინ, $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}F_i, \prod_{i\in N}P_i))$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბთან ასოცირებული უსასრულო-განზო-

მილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i\in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება b_N -ით.

მაგალითი 1.7 (გაუსის ზომა - "თეთრი ხმაური"). ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{i\in N}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)\left(i\in N \;\&\; x\in R \to F_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}F_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცესთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე, სადაც $\Omega_i = R, \mathrm{F}_i = \mathrm{B}(R)$ $(i\in N)$. $\prod_{i\in N} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_N -ით, ხოლო $\prod_{i\in N} F_i$ σ -ალგებრას ეწოდება R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathrm{B}(R^N)$ სიმბოლოთი.

მაგალითი 1.8 (იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა [29]). ვთქვათ, ყოველი $i\in N$ ინდექსისათვის, p_i არის $[a_i,b_i]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და $\Delta=\prod_{i\in N}[a_i,b_i]$. $Z^{(N)}$ ჯგუფი განვსაზღვროთ პირობით

$$Z^{(N)} := \{(z_k)_{k\in N} : z_k \in Z \;\&\; (\exists n_{(z_k)_{k\in N}} \in N)(\forall k > n_{(z_k)_{k\in N}} \to z_k = 0)\},$$

სადაც Z აღნიშნავს მთელ რიცხვთა სიმრავლეს.

ν_Δ ზომას, განსაზღვრულს $\mathrm{B}(R^N)$ σ -ალგებრაზე შემდეგი პირობით

$$(\forall X)(X\in \mathrm{B}(R^N) \to \nu_\Delta(X) = \sum_{(z_k)_{k\in N}\in Z^{(N)}} \prod_{k\in N} p_k(X-((b_k-a_k)z_k)_{k\in N}),$$

ეწოდება იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომა.

თუ X არის სიმრავლე, მაშინ $card(X)$ აღნიშნავს X სიმრავლის სიმძლავრეს. ზოგჯერ $card(X)$-ს ეძახიან X სიმრავლის კარდინალურ რიცხვს.

ω არის პირველი უსასრულო კარდინალური(ორდინალური) რიცხვი. კერძოდ, ω არის

$$N = \{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

ყველა ნატურალურ რიცხვთა კარდინალური რიცხვი.

ω_1 არის პირველი არათვლადი კარდინალური (ორდინალური) რიცხვი. შევნიშნოთ, რომ ω_1 შეიძლება გავაიგივოთ ყველა თვლად ორდინალურ რიცხვთა სიმრავლესთან.

სხვადასხვა ორდინალური რიცხვები აღინიშნებიან შემდეგი ასოებით

$$\alpha,\beta,\gamma,\xi,\cdots.$$

ვთქვათ, α არის ორდინალური რიცხვი. ჩვენ ვიტყვით, რომ α არის ზღვრული ორდინალი, თუ

$$\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}.$$

ზღვარითი α ორდინალის კონფინალურობა არის უმცირესი ორდინალი ξ რომლისთვისაც არსებობს ორდინალთა ოჯახი

$$\{\alpha_\iota : \iota < \xi\},$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$\alpha_\iota < \alpha \ \ (\iota < \xi), \quad \alpha = \sup\{\alpha_\iota : \iota < \xi\}.$$

α ზღვარითი ორდინალის კონფინალობა აღინიშნება $cf(\alpha)$ სიმბოლოთი.

ცხადია, რომ ყოველი ზღვარითი ორდინალური α რიცხვისათვის სრულდება პირობა

$$cf(\alpha) \le \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება რეგულარული, თუ

$$cf(\alpha) = \alpha.$$

α ზღვარით ორდინალს ეწოდება სინგულარული, თუ

$$cf(\alpha) < \alpha.$$

მაგალითად, ω და ω_1 არიან რეგულარული ორდინალები და ω_ω არის სინგულარური ორდინალი.

თუ k არის რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვი, მაშინ k^+ აღნიშნავს უმცირესს კარდინალურ რიცხვს იმ კარდინალთა შორის, რომლებიც აღემატებიან k-ს. მაგალითად,

$$\omega^+ = \omega^1,\ \omega_2 = (\omega_1)^+, \cdots .$$

კონტინუუმ ჰიპოთეზა (შემოკლებულად, CH) არის გამონათქვამი $c = \omega_1$.

გიოდელმა აჩვენა რომ $(ZFC)\,\&\,(CH)$ თეორია არის თავსებადი კონსტრუქტიულ უნივერსუმში (იხილეთ [19]). მეორეს მხრივ, კოენმა [9] აჩვენა რომ თეორია

$$(ZFC)\,\&\,(\neg CH)$$

ასევე არის თავსებადი. შესაბამისად CH არის დამოუკიდებელი ZFC თეორიისაგან.

კონტინუუმ ჰიპოთეზის ძლიერ ფორმას წარმოადგენს განზოგადოებული კონტინუუმ ჰიპოთეზა GCH, რომელიც არის გამონათქვამი

$$(\forall k > \omega)(2^k = k^+).$$

გიოდელმა ასევე აჩვენა, რომ $(ZFC)\,\&\,(GCH)$ თეორია ასევე თავსებადია კონსტრუქციულ უნივერსუმში (იხ. [19]).

ვთქვათ, X და Y ორი სიმრავლეა. მათი დეკარტული $X \times Y$ ნამრავლის ნებისმიერ $G \subseteq X \times Y$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ბინარული მიმართება X და Y სიმრავლეებს შორის. თუ $X = Y$, მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას X ბაზისურ სიმრავლეზე.

დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) არის შემდეგი წინადადება:

თუ G წარმოადგენს ბინარულ მიმართებას არაცარიელ X ბაზისურ სიმრავლეზე და X სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის არსებობს ამავე სიმრავლის ისეთი y ელემენტი, რომ $(x, y) \in G$, მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ელემენტთა ისეთი თვლადი $x_1, x_2, \cdots$ მიმდევრობა, რომ $(x_n, x_{n+1}) \in G$ ყოველი ნატურალური $n \in N$ რიცხვისათვის.

ცხადია, რომ დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომა (DC) წარმოადგენს ამორჩევის აქსიომის სუსტ ფორმას, რომელიც სავსებით საკმარისია კლასიკური მათემატიკის ისეთი დარგებისათვის, როგორიცაა სასრულ-განზომილებიანი ევკლიდეს სივრცის გეომეტრია, ნამდვილი ღერძის მათემატიკური ანალიზი, ლებეგის ზომის თეორია და ა.შ.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი ცნება, რომელიც არის აუცილებელი დეტერმინირების აქსიომის (AD) ჩამოსაყალიბებლად.

ყოველი $A \subseteq W^{\omega}$ ქვესიმრავლე განსაზღვრავს G_A ტიპის თამაშს I და II მოთამაშეს შორის შემდეგნაირად:

I მოთამაშე წერს a_0 ნატურალურ რიცხვს. II მოთამაშე უყურებს a_0 ნატურალურ რიცხვს და წერს a_1 ნატურალურ რიცხვს. ამის შემდეგ, I მოთამაშე უყურებს a_0, a_1 ნატურალურ რიცხვებს და წერს a_3 ნატურალურ რიცხვს და ა.შ. უსასრულოდ. ზღვარში მიიღება ნატურალურ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობა $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$. თუ ეს მიმდევრობა ეკუთვნის A სიმრავლეს, მაშინ იგებს I მოთამაშე; წინააღმდეგ შემთხვევაში მოგებულია II მოთამაშე .

თამაშის ბევრი სახეობა (ჭადრაკი, შაში და ა.შ.) შეიძლება აღიწეროს ზემოთ მოყვანილი სქემით.

$w^{(w)}$ -თი აღვნიშნოთ ნატურალურ რიცხვთა სასრული მიმდევრობების სივრცე ცარიელი სიმრავლის ჩათვლით. ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩაითვალოს ნული სიგრძის მიმდევრობად.

ფუნქციას $s : w^{(\omega)} \to w$ ეწოდება სტრატეგია G_A ტიპის თამაშისას.

ვთქვათ, $s : w^{(\omega)} \to w$ არის სტრატეგია I მოთამაშისათვის და $t : w^{(\omega)} \to w$ არის სტრატეგია II მოთამაშისათვის.

$s : w^{(\omega)} \to w$ და $t : w^{(\omega)} \to w$ სტრატეგიების შესაბამისად, ჩვენ გვაქვს

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (s(\varnothing), t(s(\varnothing)), s(s(\varnothing), t(s(\varnothing))) \cdots)$$

$s : w^{(\omega)} \to w$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია I მოთამა-შისათვის, თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \in A$$

II მოთამაშის ნებისმიერი t სტრატეგიისათვის.

ანალოგიურად, $t : w^{(\omega)} \to w$ ფუნქციას ეწოდება მომგებიანი სტრატეგია II მოთამაშისათვის , თუ

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots) \notin A$$

I მოთამაშის ნებისმიერი s სტრატეგიისათვის.

G_A ტიპის უსასრულო თამაშს ეწოდება დეტერმინირებული, თუ მხოლოდ ერთისათვის ამ ორი მოთამაშისათვის არსებობს მომგებიანი სტრატეგია.

დეტერმინირების აქსიომა (AD). ყოველი $A \subseteq w^{\omega}$ ქვესიმრავლისათვის, G_A ტიპის უსასრულო თამაში დეტერმინირებულია. მიჩელსკისა და სვერჩკოვსკის კლასიკური შედეგი ყალიბდება შემდეგნაირად:

თეორემა 1.2. ([31]). $(ZF)\&(DC)\&(AD)$ *თეორიაში ნამდვილი* R *ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით.*

თქვათ, (E,T) არის ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე (იხილეთ [11]).

$X \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება არსად მკვრივი (E-ში) თუ $int(cl(X)) = \varnothing$.

$Y \subseteq E$ სიმრავლეს ეწოდება E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ Y წარმოდგენადია $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ სახით, სადაც Y_n $(n \in \omega)$ არის E -ს არსად მკვრივი ქვესიმრავლე.

$Z \subseteq E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება E-ს მეორე კატეგორიის ქვესიმრავლე, თუ ის არ არის E-ს პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლე.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კვაზი-კომპაქტური, თუ E-ს ყოველი ღია დაფარვა შეიცავს E-ს სასრულ ქვედაფარვას.

E ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ჰაუსდორფის თუ ნებისმიერი ორი $x, y \in E$ წერტილისათვის არსებობს ისეთი ღია G_x და G_y სიმრავლეები, რომ $x \in G_x$, $y \in G_y$ და $G_x \cap G_y = \varnothing$.

E სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ ის ერთდროულად არის ჰაუსდორფის სივრცე და კვაზი-კომპაქტური სივრცე.

თეორემა 1.3 (ტიხონოვი). *კვაზი-კომპაქტურ სივრცეთა ნებისმიერი ოჯახის ნამრავლი არის კვაზი-კომპაქტური* (იხილეთ [32]).

თეორემა 1.4 (ბანახი). *ვთქვათ,* E *არის ტოპოლოგიური სივრცე და* $(V_i)_{i\in I}$ *არის ღია პირველი კატეგორიის ქვესიმრავლეთა ოჯახი. მაშინ, გაერთიანება* $V = \bigcup_{i\in I} V_i$ *არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე* (იხ. [32]).

თეორემა 1.4-ის უშუალო შედეგს წარმოადგენს

თეორემა 1.5. *ყოველი ტოპოლოგიური სივრცე E წარმოიდგინება შემდეგი*

$$E = E_1 \cup E_2$$

გაერთიანების სახით, სადაც E_1 არის E-ს პირველი კატეგორიის ღია სიმრავლე და E_2 არის E-ს ბერის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე და $E_1 \cap E_2 = \varnothing$.

ვთქვათ, (E_1, S_1) და (E_2, S_2) არის ორი ზომადი სივრცე და f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. ჩვენ ვიტყვით, რომ f არის ზომადი ასახვა თუ

$$(\forall X)(X \in S_2 \to f^{-1}(X) \in S_1).$$

ჩვენ ვიტყვით, რომ ასახვა $f: E_1 \to E_2$ არის ზომადი იზომორფიზმი E_1-დან E_2-ში თუ f არის ზომადი ბიექცია და შებრუნებული ასახვა f^{-1} აგრეთვე არის ზომადი.

ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი ტოპოლოგიური სივრცე. ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ორი ზომადი სივრცე $(E_1, B(E_1))$ და $(E_2, B(E_2))$, სადაც $B(E_1)$ და $B(E_2)$ აღნიშნავენ შესაბამისად E_1 და E_2 სივრცეების ბორელის σ-ალგებრებს. ვთქვათ, f არის ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში. f ასახვას ეწოდება ბორელის აზრით ზომადი, თუ სრულდება პირობა

$$(\forall X)(X \in B(E_2) \to f^{-1}(X) \in B(E_1)).$$

ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება პოლონური, თუ ის ჰომეომორფულია სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის.

ცხადია, რომ ყოველი კომპაქტური არათვლადი მეტრიკული სივრცე არის პოლონური სივრცე. კერძოდ, კანტორის დისკონტინუუმი $\{0,1\}^{\omega}$ (სადაც $\{0,1\}$ აღჭურვილია დისკრეტული ტოპოლოგიით) არის პოლონური სივრცე. $\omega^{\omega} = N^{\omega}$ სივრცე, სადაც N აღჭურვილი დისკრეტული ტოპოლოგიით, არის ასევე მაგალითი პოლონური სივრცის. არ წარმოადგენს დიდ სიძნელეს იმ ფაქტის დამტკიცება, რომ N^{ω} ჰომეომორფულია R ღერძის ირაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლის.

თეორემა 1.6. *შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტურია:*

1) *ყოველი არაცარიელი პოლონური სივრცე არის N^{ω} სივრცის უწყვეტი ანასახი;*

2) *ყოველი არაცარიელი კომპაქტური მეტრიკული სივრცე არის კანტორის* $\{0,1\}^{\omega}$ *დისკონტინუუმის უწყვეტი ანასახი;*

3) *ყოველი სეპარაბელური სივრცე ტოპოლოგიურად შეიძლება ჩაიდგას ჰილბერტის* $[0,1]^{\omega}$ *კუბში.*

ვთქვათ, (E_1, S_1, m_1) და (E_2, S_2, m_2) არის ორი ზომიანი სივრცე. m_1 და m_2 ზომებს ეწოდებათ იზომორფული, თუ არსებობს ზომადი f ასახვა E_1 სივრციდან E_2 სივრცეში, რომ შესრულებულია ტოლობა

$$(\forall X)(X \in s_1 \to m_1(X) = m_2(f(X))).$$

თეორემა 1.7 ([33]) ვთქვათ, E_1 და E_2 არის ორი პოლონური სივრცე აღჭურვილი შესაბამისად m_1 და m_2 დიფუზიური ალბათური ბორელის ზომებით. მაშინ არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$$j:(E_1, B(E_1)) \to (E_2, B(E_2)),$$

ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $m_1(X) = m_2(j(X))$ ყოველი $X \in B(E_1)$ სიმრავლისათვის.

თეორემა 1.8 (ფუბინი, [34]) . *ვთქვათ,* (E_1, S_1, μ_1) *და* (E_2, S_2, μ_2) *არის ორი ზომადი სივრცე, აღჭურვილი შესაბამისად* μ_1 *და* μ_2 σ *-სასრულო ზომებით და ვთქვათ,*

$$(E, S, \mu) = (E_1, S_1, \mu_1) \times (E_2, S_2, \mu_2).$$

ვთქვათ, $f : E \to R$ *არის* μ*-ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ:*

1) μ_1*-თითქმის ყველა* $x \in E_1$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$y \to f(x, y)\,(y \in E_2)$$

არის μ_2*-ინტეგრებადი;*

2) μ_2*-თითქმის ყველა* $y \in E_2$ *წერტილისათვის ფუნქცია*

$$x \to f(x, y)\,(x \in E_1)$$

არის μ_1*-ინტეგრებადი;*

3) *ფუნქცია*

$$x \to \int\limits_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)$$

არის μ_1 *-ინტეგრებადი და ფუნქცია*

$$y \to \int\limits_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)$$

არის μ_2 *-ინტეგრებადი;*

4) *სრულდება შემდეგი ტოლობა*

$$\int\limits_{E_1}\left(\int\limits_{E_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x) = \int\limits_{E_2}\left(\int\limits_{E_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right)d\mu_2(y)$$

$$= \int\int\limits_{E_1\times E_2} f(x,y)d(\mu_1(x)\times\mu_2(y)).$$

შევნიშნოთ, რომ ფუბინის თეორემა შესაძლებელია ჩამოყალიბდეს σ-სასრულო ზომების სასრული ოჯახის ნამრავლისათვის.

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა. ფუნქციას, განსაზღვრულს შემდეგი პირობით

$$\nu : S \to \overline{R}$$

ეწოდება მუხტი S -ზე, თუ

ა) $\nu(\varnothing) = 0$;

ბ) $card\,(ran(\nu) \cap \{-\infty, +\infty\}) \le 1$;

გ) ν არის σ-ადიტიური.

თეორემა 1.9 (ხანი, [34]). *ვთქვათ,* ν *არის* E *სივრცის ქვესიმ-რავლეთა* S σ *-ალგებრაზე განსაზღვრული მუხტი. მაშინ არსებობს ორი ისეთი* $A \subseteq E$ *და* $B \subseteq E$ *სიმრავლე, რომ:*

1) $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = E$;

2) $A \in S$, $B \in S$;

3) *ყოველი* $X \in S$ *სიმრავლისათვის სრულდება* $\nu(A \cap X) \ge 0$ *და* $\nu(B \cap X) \le 0$ *პირობები.*

$\{A, B\}$ სიმრავლეებს ეწოდება E სივრცის ხანის წარმოდგენა ν მუხტის მიმართ.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\nu^{+}(X) = \nu(X \cap A)\,(X \in S),$$

$$\nu^{-}(X) = -\nu(X \cap B)\,(X \in S).$$

ადვილია იმის ჩვენება რომ ν^{+} და ν^{-} წარმოადგენენ ჩვეულებრივ ზომებს განსაზღვრულს S σ-ალგებრაზე. ამასთან,

$$\nu = \nu^{+} - \nu^{-}.$$

$|\nu|$ ფუნქცია, განსაზღვრულს პირობით

$$|\nu| = \nu^{+} + \nu^{-}$$

წარმოადგენს S σ-ალგებრაზე განსაზღვრულ ზომას და მას ეწოდება ν მუხტის ტოტალური ვარიაცია.

ვთქვათ, (E, S, μ) არის ზომიანი სივრცე და ν არის ზომა განსაზღვრული S σ-ალგებრაზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ ν არის აბსოლუტურად უწყვეტი m ზომის მიმართ, თუ

$$(\forall X \in S)(\mu(X) = 0 \rightarrow \nu(X) = 0).$$

თეორემა 1.10 (რადონ-ნიკოდიმი, [34]). *ვთქვათ, (E, S, μ) არის ზომიანი სივრცე, აღჭურვილი σ-სასრულო μ ზომით და ν არის σ-სასრულო ზომა, განსაზღვრული S σ-ალგებრაზე. თუ ν აბსოლუტურად უწყვეტია μ ზომის მიმართ, მაშინ არსებობს ისეთი μ-ზომადი ფუნქცია $f : E \rightarrow R$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობა*

$$\nu(X) = \int_X f d\mu..$$

f ფუნქციას ეწოდება ν ზომის რადონ-ნიკოდიმის წარმოებული μ ზომის მიმართ და აღინიშნება $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, E არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცე და μ არის E-ზე განსაზღვრული ბორელის ზომა. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის რადონის ზომა

თუ ყოველი $X \in B(E)$ სიმრავლისათვის სრულდება პირობა $\mu(X) = \sup\{\mu(K) : K$ კომპაქტურია E -ში & $K \subseteq X$ -ზე$\}$.

ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ E სივრცეს ეწოდება რადონის, თუ E-ზე განსაზღვრული ბორელის ყოველი σ-სასრული ზომა არის რადონის ზომა.

თეორემა 1.11 (ულამი, [35]). *ყოველი პოლონური ტოპოლოგიური სივრცე E არის რადონის სივრცე.*

ვთქვათ, E არის ბაზისური სივრცე და G არის მის ზომად გარდაქმნათა ჯგუფი. ვთქვათ, D არის E-ს ქვესიმრავლეთა კლასი. ჩვენ ვიტყვით, რომ D არის G -ინვარიანტული, თუ

$$(\forall X)(\forall g)(X \in D \ \& \ g \in G \rightarrow g(X) \in D).$$

ვთქვათ, S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა და μ არის ზომა განსაზღვრული S კლასზე. ჩვენ ვიტყვით, რომ μ არის G -კვაზიინვარი-ანტული თუ:

1) S არის G -ინვარიანტული კლასი;

2) μ -ნულ ზომად სიმრავლეთა კლასი $L(\mu)$ ასევე არის G -ინვარიანტული.

თუ მე-2) პირობის ნაცვლად შესრულებულია უფრო ძლიერი პირობა

3) $(\forall X)(\forall g)(X \in S \ \& \ g \in G \rightarrow \mu(g(X)) = \mu(X))$,

მაშინ μ ზომას ეწოდება G -ინვარიანტული.

(E, S, G, μ) ოთხეულს ეწოდება ინვარიანტული ზომიანი სივრცე, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1) E არის არაცარიელი სიმრავლე;

2) G არის E სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი;

3) S არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა G -ინვარიანტული σ-ალგებრა;

4) μ არის S-ზე განსაზღვრული G -ინვარიანტული ზომა.

ვთქვათ, $(G_i)_{i \in I}$ არის ჯგუფთა რაიმე ოჯახი. ვთქვათ, e_i არის $G_i \ (i \in I)$ -ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი. $(G_i)_{i \in I}$ ჯგუფთა ოჯახის პირდაპირი ჯამი აღინიშნება $\sum_{i \in I} G_i$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება პირობით:

$$\sum_{i\in I} G_i = \{(g_i)_{i\in I} : (\forall i)(i \in I \to g_i \in G_i \;\&\; card\,(\{i : g_i \neq e_i\}) < \omega)\}.$$

ფუბინის თეორემით ადვილად მიიღება შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 1.12. *ვთქვათ, I არის პარამეტრთა არაცარიელი სიმრავლე და $(E_i, S_i, G_i, \mu_i)_{i\in I}$ არის ინვარიანტულ (კვაზიინვარიანტულ) ალბათურ სივრცეთა ოჯახი. მაშინ პროდაქტ-ზომა $\prod_{i\in I}\mu_i$ არის $\sum_{i\in I} G_i$ - ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ალბათური ზომა.*

ვთქვათ, $(G,.)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი. ასეთი ჯგუფისათვის მართებულია ჰაარის კარგად ცნობილი შედეგი, რომელიც გვამცნობს, რომ ასეთ G ჯგუფზე არსებობს და მასთან ერთად-ერთი არატრივიალური ინვარიანტული ბორელის ზომა μ (იხ. [34]). კერძოდ, μ ზომა აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) μ არის ლოკალურად სასრული ზომა, ე.ი., ყოველი $x \in G$ წერტილისათვის არსებობს ამავე წერტილის ისეთი ღია მიდამო $V(x)$, რომ $\mu(V(x)) < +\infty$;

2) μ არის რადონის ზომა;

3) μ არის $B(G)$ -კლასზე განსაზღვრული მარცხნიდან ინვარიანტული ზომა, ე.ი.

$$(\forall X)(\forall g)(X \in B(G) \;\&\; g \in G \to \mu(g \cdot X) = \mu(X)).$$

μ ზომას ეწოდება G -ჯგუფზე განსაზღვრული (მარცხენა) ჰაარის ზომა.

თავი II. წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში უცნობი პარამეტრის ეფექტურ შეფასებათა შესახებ

2.1 ექვიგანაწილებული მიმდევრობების ზოგიერთი ახალი თვისების შესახებ

ვთქვათ, V არის სრული მეტრიკული წრფივი სივრცე, რომლის ქვეშ იგულისხმება ვექტორული სივრცე (ნამდვილ ან კომპლექსურ ველზე) სრული მეტრიკით, რომლისთვისაც შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები უწყვეტია.როდესაც ჩვენ ვახსენებთ ზომას V -ზე, ყოველთვის ვიგულისხმებთ V -სივრცის ბორელის სიმრავლეთა კლასზე განსაზღვრულ არაუარყოფითზომას რომელიც არ არის იგუვურად ნულის ტოლი. ჩანაწერი $S+v$ აღნიშნავს $S \subseteq V$ სიმრავლის $v \in V$ ვექტორის ძვრით მიღებულ სიმრავლეს.

განსაზღვრება 2.1 ([7], Definition 1, p. 221). μ ზომას ეწოდება ტესტური ზომა ბორელის $S \subset V$ სიმრავლისათვის თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

(i) არსებობ სკომპაქტი $U \subset V$, რომლისთვისაც სრულდება $0 < \mu(U) < 1$;

(ii) $\mu(S+v) = 0$ ყოველი $v \in V$ ელემენტისათვის.

განსაზღვრება 2.2 ([7], Definition 2, p. 222; [1], p. 1579). ბორელის $S \subset V$ სიმრავლესეწოდება shy-სიმრავლეთუ S -სიმრავლისათვის არსებობს ტესტური ზომა. ასევე, V-ს ქვესიმრავლეს ეწოდება shy-სიმრავლე, თუისარის ბორელის shy-სიმრავლის ქვესიმრავლე. shy-სიმრავლის დამატებას გავრცელება (prevalence) ეწოდება. სიმრავლეს, რომელიცარც shy დაარცგავრცელებაა, ჰაარის ემბივალენტი ეწოდება.

განსაზღვრება 2.3 ([7], **p. 226**). ვიტყვით, რომ V -ს „თითქმის ყველა" v ელემენტი აკმაყოფილებს რაიმე P(v) თვისებას, თუ სიმრავლე იმ v ელემენტებისა რომელთათვისაც P(v) წინადადება ჭეშმარიტია წარმოადგენს გავრცელებას.

ლემა 2.4 ([7], Fact 3 00 , p. 223). shy-სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება ისევ shy-სიმრავლეა.

ლემა 2.5 ([7], Fact 8, p. 224). თუ V არისუსასრულოგანზომილებიანი, მაშინმისინებისმიერიკომპაქტურიქვესიმრავლეარის shy-სიმრავლე.

ლემა 2.6 ([7], Lemma 2, p. 58) ვთქვათ, μ *არის ბორელის ალბათური ზომა განსაზღვრული სრულ მეტრიკულ* V *სივრცეზე. მაშინ არსებობს კომპაქტების თვლადი ოჯახი* $(F_k)_{k\in N}$ V *-დან ისეთი, რომ* $\mu(V\setminus\cup_{k\in N}F_k)=0$.

ვთქვათ, R^N არის ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე ყველა ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობებისა, აღჭურვილი ρ მეტრიკით, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე

$$\rho((x_k)_{k\in N},(y_k)_{k\in N})=\sum_{k\in N}|x_k-y_k|/2^k(1+|x_k-y_k|)$$

ნებისმიერი $(x_k)_{k\in N},(y_k)_{k\in N}\in R^N$ ელემენტებისათვის.

ლემა 2.7 *([16], ლემა 15.1.3, p. 202) ვთქვათ,* J *არის* N *ქვესიმრავლე. შემოვიტანოთ აღნიშვნა*

$$A_J=\{(x_i)_{i\in N}: x_i\le 0 \ \ for\ i\in J\ \&\ x_i>0 \ \ for\ i\in N\setminus J\}. \tag{9}$$

მაშინ ქვესიმრავლეთა კლასი $\Phi=\{A_J: J\subseteq N\}$ ფლობს შემდეგ თვისებებს:

(i) ყველა ელემენტი Φ -დან არის ჰაარის ემზივალენტი.

(ii) $A_{J_1}\cap A_{J_2}=\varnothing$ ყოველი განსხვავებული $J_1,J_2\subseteq N$ -სთვის.

(iii) Φ დახლეჩა R^N -ზე არის ისეთ, რომ $card(\Phi)=2^{\aleph_0}$.

შენიშვნა 2.8. ლემა 2.8 დასამტკიცებლად ჩვენ ვიყენებთ ცნობილ ფაქტს, რომლის თანახმადაც ყოველი ბორელის ქვესიმრავლე R^N -სივრციდან, რომელიც შეიცავს ყოველი კომპაქტის რაიმე ძვრას, არ არის shy-სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.9 *([10])* $(x_k)_{k\in N}$ *ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას ეწოდება* (a,b) *ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული, თუ* (a,b) *-ს ყოველი* $[c,d]$ *ქვეინტერვალისთვის სრულდება ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\#(\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\cap[c,d])=(b-a)^{-1}(d-c), \tag{10}$$

სადაც # აღნიშნავს მთველ ზომას. ვთქვათ, X არის პოლონური სივრციდან კომპაქტი V და μ ბორელის ალბათური ზომა X -ზე. ვთქვათ, $\mathrm{R}(X)$ არის X -ზე ყველა უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუნქციების სივრცე.

განსაზღვრება 2.10. *ვიტყვით, რომ* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა ელემენტებით* X *- დან* μ *- უნიფორმულად განაწილებული* X *-ზე თუ ყოველი* $f \in \mathrm{R}(X)$ *-თვის მართებულია ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_X f d\mu. \tag{11}$$

ლემა 2.11 *([10], ლემა 2.1, გვ. 199) ვთქვათ,* $f \in \mathrm{R}(X)$ *. მაშინ,* μ^N *-თითქმის ყველა* $(x_k)_{k\in N} \in X^N$ *მიმდევრობისთვის შესრულდება ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_X f d\mu. \tag{12}$$

ლემა 2.12 *([10], გვ. 199-201) ვთქვათ,* S *არის* X *-სიმრავლის ყველა* μ *- უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების სიმრავლე. მაშინ მართებულია* $\mu^N(S)=1$ *ტოლობა.*

დასკვნა 2.13 *([27], დასკვნა 2.3, გვ. 473) ვთქვათ,* ℓ_1 *ლებეგის წრფივი ზომა განსაზღვრული* $(0,1)$ *ინტერვალზე. ვთქვათ,* D *არის* $(0,1)$ *სიმრავლის ყველა* ℓ_1 *-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების სიმრავლე. მაშინ მართებულია ტოლობა* $\ell_1^N(D)=1$ *.*

განსაზღვრება 2.14. *ვთქვათ* μ *არის ბორელის ალბათური ზომა* R *-ზე და* F *მისი განაწილების ფუქციაა. ვიტყვით, რომნამდვილ რიცხვთა* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა არის* μ *-უნიფორმული (ექვიგანაწილებული)* R *-ზე, თუ ყოველი* $[a,b](-\infty \le a < b \le +\infty)$ *ინტერვალისთვის მართებულია შემდეგი ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\#([a,b]\cap\{x_1,\cdots,x_n\}) = F(b)-F(a). \tag{13}$$

ლემა 2.15 *([27], ლემა 2.4, გვ. 473) ვთქვათ* $(x_k)_{k\in N}$ *არის* ℓ_1 *-უნიფორმული* $(0,1)$ *-ზე,* F *კი მისი მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუქნციაა* R *-*

ზე და p *კი* R *განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომაა. მაშინ* $(F^{-1}(x_k))_{k\in N}$ *არის* p *-ექვიგანაწილებული* R *-ზე.*

შედეგი 2.16 *([27], შედეგი 2.4, გვ. 473) ვთქვათ,* F *არის მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქცია* R *-ზე და* p_F *არის ბორელის ალბათური ზომა* R *-ზე განსაზღვრული* F *-ით. თუ* D_F *-ით აღვნიშნავთ* R *ღერძზე ყველა* p *-ექვიგანაწილებულ მიმდევრობათა სიმრავლეს, მაშინ მართებულია შემდეგი პირობები:*

(i) $D_F=\{(F^{-1}(x_k))_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in D\}$;

(ii) $p_F^N(D_F)=1$.

ლემა 2.17. *ვთქვათ,* F_1 *და* F_1 *არის ორი მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუქცია და* p_1 *და* p_2 *ბორელის ალბათური ზომებია* R *-ღერძზე განსაზღვრული* F_1 *-ით და* F_2 *-ით, შესაბამისად. მაშინ არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *ისეთი, რომ ის ერთდროულად იყოს* p_1 *-ექვიგანაწილებული და* p_2 *-ექვიგანაწილებული.*

დამტკიცება: დაუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ არის ასეთი მიმდევრობა. რამდენადაც F_1 და F_2 განსხვავდებიან არსებობს $x_0\in R$ ისეთი, რომ $F_1(x_0)\neq F_2(x_0)$. ეს უკანასკენელი კი შეუძლებელია, ვინაიდან $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ მიმდევრობის p_1 და p_2 ექვიგანაწილებულობიდან ვღებულობთ

$$F_1(x_0)=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\#((-\infty,x_0]\cap\{x_1,\cdots,x_n\})=F_2(x_0). \tag{14}$$

თეორემა 2.18. *ვთქვათ,* F_1 *და* F_2 *მკაცრად ზრდადი უწყვეტი განაწილების ფუნქციებია* R *-ზედა* p_1 *და* p_2 *ბორელის ალბათური ზომებია* R *-ზე განსაზღვრული შესაბამისად* F_1 *და* F_2 *-ით. მაშინ, ზომები* p_1^N *და* p_2^N *არიან ორთოგონალური.*

დამტკიცება.ვთქვათ D_{F_1} და D_{F_2} აღნიშნავს p_1 -ექვიგანაწილებულდა p_2 -ექვიგანაწილებულ მიმდევრობების სიმრავლეს R -ზე. ლემა 2.17-ის ძალით ვიცით, რომ $D_{F_1}\cap D_{F_2}=\varnothing$. შედეგი2.16-ის ძალით $p_1^N(D_{F_1})=1$ და $p_2^N(D_{F_2})=1$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 2.19 *ვთქვათ,* $\{\mu_i : i \in I\}$ *არის* (X, M) *ზომად სივრცეზე განსაზღვრული ალბათურ ზომათა ოჯახი. ვთქვათ,* $S(X)$ *კლასი განსაზღვრულია შემდეგნაირად*

$$S(X) = \cap_{i \in I} dom(\overline{\mu}_i), \tag{17}$$

სადაც $\overline{\mu}_i$ აღნიშნავს μ_i ზომის ჩვეულებრივ გასრულებას და $dom(\overline{\mu}_i)$ კი არის ყველა $\overline{\mu}_i$ -ზომადი ქვესიმრავლეების σ -ალგებრა, სადაც $i \in I$. ვიტყვით, რომ $\{\mu_i : i \in I\}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს X -ის ისეთი $\{C_i : i \in I\}$ დახლეჩა $S(X)$ σ -ალგებრის ელემენტებად, რომ $\overline{\mu}_i(C_i) = 1$ ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის.

განსაზღვრება 2.20. *ვთქვათ* $\{\mu_i : i \in I\}$ *არის ალბათურ ზომათა ოჯახი განსაზღვრული ზომად* (X, M) *სივრცეზე. ვთქვათ* $L(I)$ *არის მინიმალური* σ *-ალგებრა წარმოქმნილი ყველა ერთელემენტიანი სიმრავლეებით და* $S(X)$ *არის* X *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა* σ *-ალგებრაგანსაზღვრული (2.7)-ით. ვიტყვით, რომ ზომადი ასახვა* $(S(X), L(I))$ *-ზე* $T : X \to I$ *არის უცნობი* i $(i \in I)$ *პარამეტრის ძალდებული შეფასება* $\{\mu_i : i \in I\}$ *ოჯახისთვის თუ სრულდება შემდეგი*

$$(\forall i)(i \in I \to \mu_i(T^{-1}(\{i\}) = 1)) \tag{16}$$

ლემა 2.21 *([27], ლემა 2.5, გვ. 474) ვთქვათ,* $\{\mu_i : i \in I\}$ *არის ალბათურ ზომათა ოჯახი განსაზღვრული ზომად* (X, M) *-სივრცეზე. მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:*

(i) ალბათურ ზომათა ოჯახი $\{\mu_i : i \in I\}$ არის ძლიერად განცალებადი;

(ii) არსებობს უცნობი i $(i \in I)$ პარამეტრის ძალდებული შეფასება $\{\mu_i : i \in I\}$ ოჯახისთვის.

ვთქვათ, $X_1, X_2, \cdots$ არის უსასრულო შერჩევა, მიღებული უცნობი F განაწილების ფუნქციის მქონე დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაზე დაკვირვების შედეგად. ჩვენ მხოლოდ ვიცით, რომ F ეკუთვნის განაწილების ფუნქციათა ოჯახს $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$, სადაც Θ არ არის

ცარიელი სიმრავლე. ამ უსასრულო შერჩევის გამოყენებით გვინდა შევაფასოთ უცნობი განაწილების ფუნქცია F . μ_θ-თი ავღნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომაწარმოქმნილი F_θ -განაწილების ფუნქციით ყოველი $\theta \in \Theta$ ინდექსისათვის. μ_θ^N -ით ავღნიშნოთ μ_θ ზომის უსასრულო ხარისხი, ე.ი., $\mu_\theta^N = \mu_\theta \times \mu_\theta \times \cdots$.

სამეულს $(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ეწოდება ჩვენი უსასრულო ექსპერიმენტის აღმწერი სტატისტიკურ სტრუქტურა.

განსაზღვრება 2.22. *ბორელის აზრით ზომად $T_n : R^n \to R \; (n \in N)$*

ფუნქციას ეწოდება θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება (თითქმის ყველგან კრებადობის აზრით) $(\mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახისთვის თუ სრულდება შემდეგიპირობა

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k \in N} : (x_k)_{k \in N} \in R^N \;\&\; \lim_{n \to \infty} T_n(x_1, \cdots, x_n) = \theta\}) = 1 \qquad (17)$$

ყოველი $\theta \in \Theta$ ინდექსისათვის.

განსაზღვრება 2.23 *ბორელის აზრით ზომად $T_n : R^n \to R \; (n \in N)$*

ფუნქციას ეწოდება θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება (ალბათური კრებადობის აზრით)$(\mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახისთვის, თუ ყოველი$\varepsilon > 0$ დაყოველი $\theta \in \Theta$ ინდექსისათვის სრულდება პირობა

$$\lim_{n \to \infty} \mu_\theta^N(\{(x_k)_{k \in N} : (x_k)_{k \in N} \in R^N \;\&\; |T_n(x_1, \cdots, x_n) - \theta| > \varepsilon\}) = 0 \,. \qquad (18)$$

განსაზღვრება 2.24 *ბორელის აზრით ზომად $T_n : R^n \to R \; (n \in N)$*

ფუნქციასეწოდება θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება (განაწილებით კრებადობის აზრით) $(\mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახისთვის, თუ R -ზე განსაზღვრული ყოველი ნამდვილი უწყვეტი შემოსაზღვრული f ფუნქციისთვის და დაყოველი $\theta \in \Theta$

ინდექსისათვის სრულდება პირობა

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^N} f(T_n(x_1, \cdots, x_n)) d\mu_\theta^N((x_k)_{k \in N}) = f(\theta) \qquad (19)$$

შენიშვნა 2.25 *[23] (იხ., თეორემა 2, გვ. 272) -ის თანახმად,* $(\mu_\theta^N)_{\theta \in R}$ *ზომათა ოჯახისთვის გვაქვს:*

(ა) θ პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობა „თითქმის ყველგან კრებადობის“ აზრით იწვევს θ პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობას „ალბათური კრებადობის“ აზრით;

(ბ) θ პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობა „ალბათური კრებადობის“ აზრით იწვევს θ პარამეტრის ძალდებული შეფასების არსებობას „განაწილებით კრებადობის“ აზრით;

ვთქვათ ახლა $L(\Theta)$ არის Θ -ს ყველა ერთელემენტიანი ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი მინიმალური σ -ალგებრა.

განსაზღვრება 2.26. $(\mathrm{B}(R^N), L(\Theta))$ *-ზომად* $T : R^N \to \Theta$ *ფუქნციას ეწოდება* θ *პარამეტრის უსასრულო შერჩევით ძალდებულია შეფასება (შემფასებელი)* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის თუ ტოლობა*

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ T((x_k)_{k\in N}) = \theta\}) = 1$$

სამართლიანი ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის.

განსაზღვრება 2.27. *θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევით ძალდებულ* $T : R^N \to \Theta$ *შეფასებას* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის ეწოდება ობიექტური თუ* $T^{-1}(\theta)$ *არის ჰაარის ემზივალენტი ყოველი* $\theta \in \Theta$ *პარამეტრისათვის. წინააღმდეგ შემთხვევაში* T *შემფასებელს ეწოდება სუბიექტური.*

განსაზღვრება 2.28. *θ პარამეტრის ობიექტურ უსასრულო შერჩევითი ძალდებულ* $T : R^N \to \Theta$ *შეფასებას* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის ეწოდება ძლიერად ობიექტური თუ ყოველი* $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ *პარამეტრისათვის არსებობს ისეთი* R^N *სივრცის ისეთი იზომეტრული(ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) გარდაქმნა* $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ *რომ* $A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)$ *სიმრავლე წარმოადგენს shy-სიმრავლეს.*

განსაზღვრება 2.29 *[26]-ის თანახმად, ზომათა ოჯახს* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ეწოდება ძლიერად განცალებადი თუ არსებობს* R^N *სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეების* $(Z_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახი , ისეთი, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:*

(i) $\mu_\theta^N(Z_\theta) = 1$ ყოველი $\theta \in \Theta$;

(ii) $Z_{\theta_1} \cap Z_{\theta_2} = \varnothing$ ყოველი განსვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისთვის Θ -ოჯახიდან.

(iii) $\cup_{\theta\in\Theta} Z_\theta = R^N$.

შენიშვნა 2.30. *მივაქციოთ ყურადღება, რომ θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების არსებობიდან $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის გამომდინარეობს, რომ $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი ძლიერად განცალებადია. მართლაც, თუ განვიხილავთ $Z_\theta = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \&\ T((x_k)_{k\in N}) = \theta\}$ სიმრავლეს ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის, მაშინ განსაზღვრება 2.29 -ის ყველა პირობა დაკმაყოფილდება.*

2.2 განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული საშუალო კვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასების შესახებ

განსაზღვრება 2.2.1 ([7], Definition 1, p. 221). μ ზომას ეწოდება ტესტური ზომა ბორელის S⊂V სიმრავლისათვის თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:

(i) არსებობს კომპაქტი U⊂V, რომლისთვისაც სრულდება $0<\mu(U)<1$;

(ii) $\mu(S+v)=0$ ყოველი v∈V ელემენტისათვის.

განსაზღვრება 2.2.2 ([7], Definition 2, p. 222; [1], p. 1579). ბორელის S⊂V სიმრავლეს ეწოდება s**hy-სიმრავლე** თუ S-სიმრავლისათვის არსებობს ტესტური ზომა μ. ასევე, V-ს ქვესიმრავლეს ეწოდება s**hy-სიმრავლე**, თუ ის არის ბორელის **shy**-სიმრავლის ქვესიმრავლე. **shy**-სიმრავლის დამატებას გავრცელება (**prevalence**) ეწოდება. სიმრავლეს, რომელიც არც **shy** და არც გავრცელებაა, ჰარის **ემბივალენტი** ეწოდება.

განსაზღვრება 2.2.3 ([7], p. 226). ვიტყვით, რომ V-ს „თითქმის ყველა" v ელემენტი აკმაყოფილებს რაიმე P(v) თვისებას, თუ სიმრავლე იმ v ელემენტებისა რომელთათვისაც P(v) წინადადება ჭეშმარიტია წარმოადგენს გავრცელებას.

ლემა 2.2.4 ([7], Fact 3 00 , p. 223). s**hy**-სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება ისევ s**hy-სიმრავლეა**.

ლემა 2.2.5 ([5], Fact 8, p. 224). თუ V არისუსასრულო-განზომილებიანი, მაშინ მისი ნებისმიერი კომპაქტური ქვესიმრავლე არის s**hy**-სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.2.6 ([7], Definition 6, p. 225) P⊂V სასრულ-განზომილებიან ქვესივრცეს ეწოდება სინჯი T⊂V-თვის, თუ P-ზე განსაზღვრული ლებეგის ზომა არის ტესტური ზომა ბორელის სიმრავლისათვის, რომელიც შეიცავს T-ს დამატებას.

შენიშვნა 2.2.7 თუ T სიმრავლეს გააჩნია სასრულ-განზომილებიანი სინჯი, მაშინ ის გავრცელებაა.

ვთქვათ, R^N არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე აღჭურვილი ტიხონოვის მეტრიკით:

$$\rho((x_k)_{k\in N},(y_k)_{k\in N})=\sum_{k\in N}|x_k-y_k|/2^k(1+|x_k-y_k|)$$

ნებისმიერი $(x_k)_{k\in N},(y_k)_{k\in N}\in R^{\infty}$.

ლემა 2.2.8. ვთქვათ, J არის N ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ქვესიმრავლე. ვთქვათ

$$A_J=\{(x_i)_{i\in N}:x_i\leq 0 \text{ for } i\in J \ \&\ x_i>0 \text{ for } i\in N\setminus J\}.$$

მაშინ სიმრავლეთა ოჯახი $\Phi=\{A_J:J\subseteq N\}$ ფლობს შემდეგ თისებებს:

(i) Φ ოჯახის ნებისმიერი ელემენტი ჰარის ემბივალენტია;

(ii) $A_{J_1}\cap A_{J_2}=\varnothing$ ნებისმიერი განსხვავებული $J_1,J_2\subseteq N$-თვის;

(iii) Φ არის R^N-სივრცის ისეთი დახლეჩა, რომ $\mathrm{card}(\Phi)=2^{\aleph_0}$

შენიშვნა 2.2.9. ლემა 2.8დასამტკიცებლად ჩვენ ვიყენებთ ცნობილ ფაქტს, რომლის თანახმადაც ყოველი ბორელის ქვესიმრავლე R^N -სივრციდან რომელიც შეიცავს ყოველი კომპაქტის რაიმე ძვრას, არ არის s**hy**-სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.2.10 ვთქვათ, Θ არის არაცარიელი სიმრავლე და $\mathcal{S}(\Theta)$ არის მინიმალური σ-ალგებრა Θ–ზე წარმოქმნილი ერთ-ელემენტიანი სიმრავლეებით. $(B(R^N),S(\Theta))$ ზომადი $T:R^N\to\Theta$ ფუნციას ეწოდება პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის , თუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^N \ \ \&\ T((x_k)_{k\in N})=\vartheta\})=1 \tag{20}$$

ნებისმიერი $\theta\in\Theta$.

განსაზღვრება 2.2.11 ვთქვათ, Θ არის არაცარიელი სიმრავლე და $\mathcal{S}(\Theta)$ არის მინიმალური σ-ალგებრა Θ–ზე წარმოქმნილი ერთ-ელემენტიანი სიმრავლ-ეებით. ვთქვათ $T:R^N\to\Theta$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო

ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის. ვიტყვით, რომ $T : R^N \to \Theta$ არის θ პარამეტრის ობიექტური შეფასება ოჯახისთვის, თუ სიმრავლე

$$\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ T((x_k)_{k\in N}) = \vartheta\}$$

არის ჰარის ემზივალენტი ნებისმიერი θ∈Θ ელემენტისათვის. სხვა შემთხვევში ჩვენ ვიტყვით, რომ $T : R^N \to \Theta$ არის θ პარამეტრის სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

განსაზღვრება 2.2.12 ([18]**, Definition 5.2, p. 66)** ვთქვათ, Θ არის არაცარიელი სიმრავლე და $\mathcal{S}(\Theta)$ არის მინიმალური σ-ალგებრა Θ–ზე წარმოქმნილი ერთ-ელემენტიანი სიმრავლეებით. ვთქვათ $T : R^N \to \Theta$ არის θ პარამეტრის უსასრულო ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის. ვიტყვით, რომ $T : R^N \to \Theta$ არის უსასრულო შერჩევითი ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასება თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა: .

(i) $(\forall\theta)(\theta\in\Theta \to T^{-1}(\theta))$ - არის ჰარის ემზივალენტი;

(ii) $(\forall\theta_1,\theta_2)(\theta_1,\theta_2\in\Theta \to$ არსებობს ისეთი იზომეტრული გარდაქმნა $A_{\theta_1,\theta_2}R^N \to R^N$, რომ $A_{\theta_1,\theta_2}(T^{-1}(\vartheta_1))\Delta(T^{-1}(\vartheta_2)$ არის shy-სიმრავლე.

ლემა 2.2.9 *ვთქვათ,* $(Y_n)_{n\in N}$ *არის დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინით და* ϑ^2 *დისპერსიით. ვთქვათ,* $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ *. მაშინ*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = \vartheta \quad (\text{ალბათობით } 1)$$

- სადაც "log" - არის ნატურალური ლოგარითმი,
- $\limsup\limits_{n\to\infty}$ აღნიშნავს ზუსტ ზედა ზღვარს.

ლემა 2.2.10 ([36], Theorem 1, p. 385)ვთქვათ, P_θ არის ალბათური ზომა R-ზე, წარმოქმნილი ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინისა და θ (θ>0) საშუალო კვადრატული გადახრის მქონე შემთხვევითი სიდიდით . მაშინ, ყოველი θ>0 -სთვის

$$P_{\vartheta}^{N}(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_n}{\sqrt{2n \log \log n}} = \vartheta\}) = 1$$

მაგალითი **2.2.3** ([10**Error! Reference source not found.**], Example 4.1, p. 484) ცნობილია, რომ ნამდვილ რიცხვთა $(\pi\times n-[\pi\times n])_{n\in N}$ მიმდევრობა უნიმორფულად განაწილებულია (0,1)-ინტერვალზე. $(x_n)_{n\leq M}$ სიდიდეების მიმდევრობის მოდელირება (M საკმაოდ დიდია), სადაც $\mu_{(0,\theta)}$ ზომაა R -ზე და $\Phi_{(0,\theta)}$ განაწილების ფუნქცია პარამეტრებით *(0,θ),* დამოკიდებულია π ირაციონალური რიცხვის წარმოდგენის ხარისხზე.

ცხრილი 3

უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრის შეფასება

n	$T_n^{(1)}$	$T_n^{(2)}$	$T_n^{(3)}$
1000	1.013328456	1.013835501	1.007797727
2000	1.012875673	1.012875673	1.364024945
3000	1.010526003	1.010526003	1.575962677
4000	1.009283066	1.009283066	1.672095087
5000	1.007957229	1.007957229	1.771483076

$$x_n=\Phi_{(0,\theta)}^{-1}(\pi\times n-[\pi\times n]) \qquad (21)$$

ყველა $n< M$ და$\theta >0$.

ამ მოდელში ჩვენ ვაფასებთ უცნობ პარამეტრს θ (საშუალო კვადრატულ გადახრას მიღებული მოდელირებული $(x_n)_{n\leq M}$-თვის).

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

(i) n - ცდათა რიცხვი;

(ii) $T_n^{(1)}$ საშუალო კვადრატული გადახრა;

(iii) $T_n^{(2)}$ კვადრატული გადახრა შესწორებული დისპერსიიდან;

(iv) $T_n^{(3)}$ - განმეორებითი ლოგარითმიის კანონით განსაზღვრული სტატისტიკა, ე.ი.

$$T_n((x_k)_{k\in N}=\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sqrt{2nloglogn}};$$

თუ დავაკვირდებით ცხრილს, შევამჩნევთ, რომ $T_n^{(1)}, T_n^{(2)}, T_n^{(3)}$ უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრის „საკმაოდ კარგი“ შეფასებებია.

ლემა 2.2.11 სიმრავლე S განვსაზღვრული შემდეგნაირად

$$S = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \quad \text{სასრულია}\}.$$

მაშინ S არის ბორელის shy-სიმრავლე R^N-ში.

დამტკიცება: ცხადია, რომ S არის R^N-ისვექტორული ქვესივრცე. $\{x_k\}_{k\in N}$ და $\{y_k\}_{k\in N}$ არიან ელემენტები S -დან და $\alpha, \beta \in R$ სამართლიანია

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} (\alpha\, x_k + \beta\, y_k)\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha\, x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \beta\, y_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \le$$

$$|\alpha|\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} + |\beta|\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} < \infty.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ S არის R^N-ისვექტორული ქვესივრცე.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ S არის ბორელის სიმრავლე R^N-დან.

$i \in \mathrm{N}$ -თვის განვიხილოთ პროექციები $\Pr_i$ R^N -ში განსაზღვრული შემდეგი ფორმულით

$$Pr_i((x_k)_{k\in N}) = x_i$$

$$(x_k)_{k\in N} \in R^N.$$

ჩავსვათ $T_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Pr_i}{\sqrt{2n \log \log n}}$ ($n \in N$). ჩვენ ვღებულობთ

$$\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} < \infty \} =$$

$$\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} < \infty \} =$$

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} < s \} =$$

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} \{(x_i)_{k\in N} : (x_i)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \Pr_k((x_i)_{k\in N})\right|}{\sqrt{2n \log\log n}} < s \}$$

$\overline{\lim} T_n = \inf_n \sup_{m>n} T_n$ ბორელის აზრით ზომადი ფუქნციაა R^N -ში, რის გამოც ჩვენ ვასკვნით, რომ S არის R^N -სივრცის ბორელის აზრით ზომადი ქვესიმრავლე.

ვაჩვენოთ, რომ S არის ბორელის shy-სიმრავლე.

განვსაზღვროთ $v = (v_n)_{n\in N}$ ვექტორი შემდეგნაირად:

$v_n = 0$ როცა $1 \le n \le 10$, $v_{11} = 11\sqrt{22 \log \log 11}$ და $v_n = n\sqrt{2n \log \log n} - (n-1)\sqrt{2(n-1)\log \log(n-1)}$ როცა n>11. ვაჩვენოთ, რომ v განსაზღვრავს L წრფეს , რომლის ყოველ ძვრას S სიმრავლესთან ექნება თანაკვეთა არაუმეტეს ერთი წერტილისა. ამით ნაჩვენები იქნება რომ L არის S-ის დამატების სინჯი. მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ $(z_k)_{k\in N} \in R^N$ ელემენტისთვის იარსებებს ორი პარამეტრი $t_1, t_2 \in R$, რომ $(z_k)_{k\in N} + t_1 v \in S$ და $(z_k)_{k\in N} + t_2 v \in S$.

ვინაიდან, S არის ვექტორული სივრცე, ჩვენ ვასკვნით, რომ $(t_2 - t_1)v \in S$. იგივე არგუმენტით, ვინაიდან $t_2 - t_1 \neq 0$, ჩვენ ვასკვნით, რომ $v \in S$. მაგრამ ეს წინააღმდეგობაა, ვინაიდან

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} v_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(k\sqrt{2k\log\log k} - (k-1)\sqrt{2(k-1)\log\log(k-1}\right)\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} =$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left|n\sqrt{2n\log\log n}\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} = \limsup_{n\to\infty} n = +\infty .$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.2.5 თუ ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in R^N$-თვის თუ დავუშვებთ, რომ

$$T((x_k)_{k\in N}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \text{ თუ } \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \text{ არსებობს და}$$

სასრულია, მაშინ „თითქმის ყველა“ უსასრულო შერჩევისთვის T ფუნქცია განსაზღვრული არ იქნება.

დამტკიცება: $\boldsymbol{A}$-თიავღნიშნოთ სიმრავლე ყველა $(x_k)_{k\in N} \in R^N$ სადაც T ფუნქცია არაა განსაზღვრული. ცხადია, რომ $A = R^N \setminus S$, სადაც S არის განსაზღვრული **ლემა 2.2.10-ით.** ვინაიდან S არის ბორელის shy-სიმრავლე, ჩვენ ვასკვნით, რომ A არის გავრცელება. ამით **შედეგი 2.2.5** დამტკიცებულია.

თეორემა 2.2.6 ვთქვათ, μ_θ არის ალბათური ზომა R-ზე, წარმოქმნილი ნულის ტოლი მათემატიკური ლოდინისა და θ (θ>0) საშუალო კვადრატული გადახრის მქონე შემთხვევითი სიდიდით.

$$(x_k)_{k\in N} \in R^N \text{ -სთვის } T_1((x_k)_{k\in N}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}} \text{ თუ } \limsup_{n\to\infty} \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|}{\sqrt{2n\log\log n}}$$

არსებობს და სასრულია და $T_1((x_k)_{k\in N}) = 1$, წინააღმდეგ შემთხვევაში. მაშინ,

T_1 არის $\theta\in(0,\infty)$ პარამეტრისთვის სუბიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება .

დამტკიცება: **ლემა 2.2.9**-დან ჩვენ ვიცით, რომ

$$\mu_{\vartheta}^{N}(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_n}{\sqrt{2\vartheta^2 n \log\log n}} = 1\}) \ = 1$$

ყოველი $\vartheta > 0$ რიცხვისათვის. მაშინ ასევე შესრულდება

$$\mu_{\vartheta}^{N}(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ T_1(x_k)_{k\in N} = \vartheta\}) \ = 1$$

ტოლობა ყოველი $\vartheta > 0$ რიცხვისათვის.

შევნიშნოთ, რომ T_1 არის სუბიექტური, ვინაიდან სიმრავლე

$$\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& T_1(x_k)_{k\in N} = 1\}$$

არის $S \setminus S_1$ shy-სიმრავლის დამატება, სადაც S განსაზღვრულია **ლემა 2.2.11** -ით და

$$S_1 = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^N \ \& \ \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1\} .$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ქვემოთ მოვიყვანთ მაგალითს განმეორებითი ლოგარითმის კანონის საშუალო კვადრატული გადახრის ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასების აგების ერთ კონსტრუქციას.

მაგალითი 2.2.7 ვთქვათ, J არის N-ის ქვესიმრავლე. ავღნიშნოთ

$$A_J = \{(x_i)_{i\in N} : x_i \geq 0 \ i \in J \ \& \ x_i < 0 \ \ i \in N \setminus J\}$$

მაშინ A_J ბორელის ქვესიმრავლე R^N-დან არის ჰაარის ემბივალენტი.

$\mathcal{P}(N)$-თ ავღნიშნოთ ნატურალური რიცხვთა ბულეანის სიმძლავრე. ϕ –ით აღვნიშნოთ ურთიერთცალსახა ასახვა R^{+} დან $\mathcal{P}(N)$ ზე, სადაც $R^{+}=(0,+\infty)$

$$S_{\theta}=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^{N}\ \&\ \limsup_{n\to\infty}\frac{|\sum_{k=1}^{n}x_k|}{\sqrt{2n\log\log n}}=\theta\}$$

$\theta\in R^{+}$.

ვინაიდან $S=\cup_{\theta\in R^{+}}S_{\theta}$ და $S_{\theta_1}\cap S_{\theta_2}=\emptyset$ ორი განსხვავებული $\theta_1,\theta_2\in R^{+}$ ელემენტისათვის, ლემა 2.2.11-ის თანახმად ჩვენ ვასკვნით, რომ, რომ S_{θ}არის shy-სიმრავლე ყოველი$\theta\in R^{+}$ ელემენტისათვის.

ვთქვათ, $D_{\theta}=(A_{\phi(\theta)}\setminus S)\cup S_{\theta}$ყოველი$\theta\in R^{+}$ ელემენტისათვის. $(D_{\theta})_{\theta\in R}$ არის R^{N} სივრცის ბორელის სიმრავლეებად ისეთი დახლეჩა, რომ D_{θ} არის ჰაარის ემზივალენტი ყოველი $\theta\in R^{+}$ ელემენტისათვის და ელემენტთა ყოველი $\theta_1,\theta_2\in R^{+}$ წყვილისთვის არსებობს R^{∞} სივრცის ისეთი იზომეტრული (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ)$A_{(\theta_1,\theta_2)}$ გარდაქმნა, რომ $A_{(\theta_1,\theta_2)}(D_{\theta_1})\Delta D_{\theta_1}$ არის shy-სიმრავლე.

მართლაც, $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ გარდაქმნის როლში განვიხილოთ გარდაქმნა განსაზღვრული შემდეგნაირად: ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^{N}$ ელემენტისათვის $A_{(\theta_1,\theta_2)}((x_k)_{k\in N})=(y_k)_{k\in N}$, სადაც $y_k=x_k$ თუ $k\in\phi(\theta_1)\cap\phi(\theta_2)$ ან $k\in N\setminus(\phi(\theta_1)\cup\phi(\theta_2))$, სხვა შემთხვევში $y_k=-x_k$.

ვთქვათ, $T^{o}((x_k)_{k\in N})=\theta$ თუ $(x_k)_{k\in N}\in D_{\theta}$. ცხადია, რომ T^{o} არის θ პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_{\theta}^{N})_{\theta\in R^{+}}$ ოჯახისთვის.

2.3 უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების შესახებ

თეორემა 2.3.1. *ვთქვათ,* F *ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ განაწილების ფუნქციათა ოჯახია, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:*

(i) F-ის ყოველი ელემენტი მკაცრად ზრდადია და უწყვეტი;

(ii) არსებობს ნამდვილი რიცხვი x_*, ისეთი რომ სრულდება $F_1(x_*) \neq F_2(x_*)$ პირობა ყოველიგანსხვავებული $F_1, F_2 \in \mathrm{F}$ -ელემენტისათვის.

ავღნიშნოთ $\Theta = \{\theta = F(x_*) : F \in \mathrm{F}\}$ და $F_\theta = F$ $\theta = F(x_*)$ -პარამეტრისათვის. მაშინ მივიღებთ შემდეგ პარამეტრიზაციას$\mathrm{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$. μ_θ-თი ავღნიშნოთ ბორელის ალბათური ზომა R-ზე განსაზღვრული F_θ-ით ყოველი $\theta \in \Theta$-პარამეტრისათვის. მაშინ ფუქნცია $T_n : R^n \to R$, განსაზღვრული

$$T_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\#(\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty; x_*])}{n} \tag{22}$$

პირობით ყოველი $(x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ $(n \in N)$ წერტილისათვის, წარმოადგენს θ პარამეტრის ძალდებულ შეფასებას $(\mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახისთვის თითმის ყველგან კრებადობის აზრით.

დამტკიცება. ცხადია, რომ T_n არის ბორელის აზრით ზომადი ფუნქცია ყოველი $n \in N$ -თვის. ყოველი $\theta \in R$ პარამეტრისათვის, შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$A_\theta = \{(x_k)_{k \in N} : (x_k)_{k \in N}$ **არის** μ_θ**-უნიფორმულად განაწილებული** R **ღერძზე**$\}$. (23)

ლემა 2.16-ის თანახმად, ჩვენ გვქავს $\mu_\theta^N(A_\theta) = 1$ ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის. შესაბამისად ჩვენ ვღებულობთ

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k \in N} \in R^N : \lim_{n \to \infty} T_n(x_1, \cdots, x_n) = \theta\}) = \mu_\theta^N(\{(x_k)_{k \in N} \in R^N :$$

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \#(\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty; x_*]) = F_\theta(x_*)\}) \geq \mu_\theta^N(A_\theta) = 1.$$

(24)

თეორემა 2.3.1-ისა და შენიშვნა 2.25-ის გამოყენებით მიიღება შემდეგ დებულებათა მართებულობა.

შედეგი 2.3.2. *(2.3.1) -ფორმულით განსაზღვრული T_n სტატისტიკაარის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის ალბათური კრებადობის აზრით.*

შედეგი 2.3.3. *(2.3.1) -ფორმულით განსაზღვრული T_n სტატისტიკა არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის განაწილებით კრებადობის აზრით.*

თეორემა 2.3.4. *ვთქვათ, $\mathrm{F}=\{F_\theta:\theta\in\Theta\}$ და $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისათვის სრულდება თეორემა 2.3.1-ის პირობები. ფიქსირებული $\theta_0\in\Theta$ პარამეტრისათვის განვსაზღვროთ შეფასება $T_{\theta_0}^{(1)}:R^N\to\Theta$ შემდეგი სახით:*

$$T_{\theta_0}^{(1)}((x_k)_{k\in N})=\overline{\lim}\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})\ \text{თუ}\ \overline{\lim}\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})\in\Theta\setminus\{\theta_0\}\ \text{და}\ T_{\theta_0}^{(1)}((x_k)_{k\in N})=\theta_0,$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში $\overline{\lim}\widetilde{T}_n=\inf_n\sup_{m\geq n}\widetilde{T}_m$, *სადაც*

$$\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})=n^{-1}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty;x_*])) \tag{25}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ მიმდევრობისათვის. მაშინ $T_{\theta_0}^{(1)}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

დამტკიცება. [23] -ის თანახმად, (იხ., გვ. 189), $\overline{\lim}\widetilde{T}_n$ არის ბორელის ზომადი ფუნქცია, ე.ი $\overline{\lim}\widetilde{T}_n$ არის $(\mathrm{B}(R^N),L(\Theta))$ -ზომადი. ლემა 2.16-ის თანახმად, $\mu_\theta^N(A_\theta)=1$ ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის, სადაც A_θ განსაზღვრულია (2.3.2)-ით. აქედან ვღებულობთ

$$\begin{aligned}&\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:T_{\theta_0}^{(1)}(x_k)_{k\in N}=\theta\})\geq\\&\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:\overline{\lim}\,\widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=\theta\})\geq\\&\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:\overline{\lim}\widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=\\&\underline{\lim}\ \widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=F_\theta(x_*)\})\geq\mu_\theta^N(A_\theta)=1\end{aligned} \tag{26}$$

ნებისმიერი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის. ეს ნიშნავს, რომ შეფასება $T^{(1)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $T^{(1)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $B(\theta):=(T^{(1)}{}_{\theta_0})^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta\in\Theta$-თვის.

ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}$ არის μ_θ-უნიფორმულად განაწილებულიმიმდევრობა R-ზე. მაშინ გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty;x_*])=\theta. \tag{27}$$

დავაკვირდეთ სიმრავლეს

$$C(\theta)=\{(y_k)_{k\in N}: y_k\le x_k \ if \ x_k\le x_* \ \& \ y_k>x_k \ if \ x_k>x_*\}. \tag{28}$$

დაუშვათ $J=\{k:x_k\le x_*\}$, ცხადია, რომ $C(\theta)-(x_k)_{k\in N}=A_J$, სადაც A_J განსაზღვრულია ლემა 2.7-ის ძალით. როგორც ვიცით ჰაარის ემბივალენტის ნებისმიერი ძვრა ისევ ჰაარის ემბივალენტია. ეს ნიშნავს, რომ $C(\theta)$ ჰაარის ემბივალენტია. სიმრავლე $B(\theta)$, რომელიც შეიცავს ჰაარის ემბივალენტ $C(\theta)$ სიმრავლეს, ასევე ვერ იქნება shy-სიმრავლე. რამდენადაც $\theta\in\Theta$ იყო ნებისმიერად აღებული, ვღებულობთ, რომ ყოველი B_θ არის ჰაარის ემბივალენტი. ბოლოს დადგენილი ფაქტის მართებულობიდან ვღებულობთ, რომ შეფასება $T^{(1)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

თეორემა 2.3.5 *ვთქვათ,* $\mathrm{F}=\{F_\theta:\theta\in\Theta\}$ *და* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახი განსაზღვრულია თეორემა 2.3.1. -ით. ვთქვათ,* $\theta_0\in\Theta$ *და მისთვის განსაზღვრულია შეფასება* $T^{(2)}{}_{\theta_0}:R^N\to\Theta$ *შემდეგი სახით:* $T^{(2)}{}_{\theta_0}((x_k)_{k\in N})=\underline{\lim}\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})$ *თუ* $\underline{\lim}\ \widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})\in\Theta\setminus\{\theta_0\}$ *და* $T^{(2)}{}_{\theta_0}((x_k)_{k\in N})=\theta_0$ *სხვა შემთხვევაში* $\underline{\lim}\,\widetilde{T}_n=\sup_n\inf_{m\ge n}\widetilde{T}_m$ *და*

$$\widetilde{T}_n((x_k)_{k\in N})=n^{-1}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty;x_*]) \tag{29}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$. მაშინ $T^{(2)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

დამტკიცება. [23] (იხ, გვ. 189)-ის თანახმად, $\underline{\lim}\widetilde{T}_n$ ბორელის აზრით ზომადი ფუნქციაა, რაც იმას ნიშნავს $\overline{\lim}\widetilde{T}_n$ არის $(\mathrm{B}(R^n),L(\Theta))$-ზომადი. ლემა

2.16-ის ძალით $\mu_\theta^N(A_\theta)=1$ ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის,სადაც A_θ განსაზღვრულია (2.3.2) ფორმულით. აქედან ვღებულობთ

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : T^{(2)}{}_{\theta_0}(x_k)_{k\in N}=\theta\})\geq$$
$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \underline{\lim}\,\widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=\theta\})\geq$$
$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \overline{\lim}\,\widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=$$
$$\underline{\lim}\,\widetilde{T}_n(x_k)_{k\in N}=F_\theta(x_*)\})\geq\mu_\theta^N(A_\theta)=1 \tag{30}$$

ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის.

ამრიგად ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $T^{(2)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებულია შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $T^{(2)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებულია შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

ვაჩვენოთ, რომ $B(\theta)=(T^{(2)}{}_{\theta_0})^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის.

ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}$ არის μ_θ -უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა. მაშინ ჩვენ მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty;x_*])=\theta. \tag{31}$$

განვიხილოთ სიმრავლე

$$C(\theta)=\{(y_k)_{k\in N}:(y_k)_{k\in N}\in R^N\ \&\ y_k\leq x_k\ if\ \ x_k\leq x_*\ \&\ y_k>x_k\ if\ \ x_k>x_*\}. \tag{32}$$

ავაგოთ $J=\{k: x_k\leq x_*\}$, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $C(\theta)-(x_k)_{k\in N}=A_J$, სადაც A_J განსაზღვრულია ლემა 2.7-ის ძალით. ვინაიდან ნებისმიერი ჰაარის ემბივალენტის ძვრით ჰაარის ემბივალენტი მიიღება, ჩვენ ვასკვნით, რომ $C(\theta)$ არის ჰაარის ემბივალენტი. სიმრავლე $B(\theta)$, რომელიც შეიცავს $C(\theta)$ ჰაარის ემბივალენტებს არ იქნება shy სიმრავლე. ვინაიდან $\theta\in\Theta$ ნებისმიერად იყო აღებული, ყოველი B_θ არის ჰაარის ემბივალენტი. აქედან ვღებულობთ, რომ $T^{(2)}{}_{\theta_0}$ არის θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

შენიშვნა 2.3.6. *შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თეორემები 3.4 და 3.5 აძლიერებს [20] ნაშრომში მიღებულ შედეგებს (იხ. თეორემა 3.1). მართლაც, განვიხილოთ წრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური სისტემა*

$$(\xi_k)_{k\in N} = (\theta_k)_{k\in N} + (\Delta_k)_{k\in N}, \tag{33}$$

სადაც $(\theta_k)_{k\in N} \in R^N$ არის სასარგებლო სიგნალების მიმდევრობა, $(\Delta_k)_{k\in N}$ არის ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა (ე.წ. „თეთრი ხმაური“) განსაზღვრული რაიმე (Ω, F, P) ალბათურ სირვცეზედა $(\xi_k)_{k\in N}$ არის გარდაქმნილი სიგნალების მიმდევრობა. ვთქვათ, μ არის ბორელის ალბათური ზომა R -ზე, განსაზღვრული Δ_1 შემთხვევითი სიდიდით. მაშინ μ ზომის N -ხარისხიაღნიშნება μ^N და ის ემთხვევა "თეთრი ხმაურით" განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომას R^N ზე, ე.ი.

$$(\forall X)(X \in \mathrm{B}(R^N) \to \mu^N(X) = P(\{\omega : \omega \in \Omega \ \& \ (\Delta_k(\omega))_{k\in N} \in X\})), \tag{34}$$

სადაც $\mathrm{B}(R^N)$ არის R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა.

[26] ნაშრომის თანახმად, ინფორმაციის გადაცემის თეორიაში ზოგადი დაშვება მდგომარეობს იმაში, რომ გარდაქმნილი სიგნალების $(\xi_k)_{k\in N}$ მიმდევრობებით წარმოქმნილი ბორელის ალბათური ზომა λ ემთხვევა ''თეთრი ხმაურით'' წარმოქმნილი ბორელის ალბათური ზომის θ_0 -ძვრას $(\mu^N)_{\theta_0}$ -ს გარკვეული $\theta_0 \in \Theta$ პარამეტრისათვის, ე.ი.

$$(\exists \theta_0)(\theta_0 \in \Theta \to (\forall X)(X \in \mathrm{B}(R^N) \to \lambda(X) = (\mu^N)_{\theta_0}(X))), \tag{35}$$

სადაც $(\mu^N)_{\theta_0}(X) = \mu^N(X - \theta_0)$ $X \in \mathrm{B}(R^N)$ -თვის.

[27]-ნაშრომში განხილული იყო (3.12) მოდელის კერძო შემთხვევა, რომლის დროსაც

$$(\theta_k)_{k\in N} \in \{(\theta, \theta, \cdots) : \theta \in R\}. \tag{36}$$

μ ზომის θ -ძვრის N -ხარისხი μ_θ^N განსაზღვრული იყო

$$\mu_\theta^N = \mu_\theta \times \mu_\theta \times \cdots \tag{37}$$

ტოლობით, სადაც μ_θ არის μ -ს θ -ძვრა (ე.ი., $\mu_\theta(X) = \mu(X - \theta)$ ყოველი $X \in \mathrm{B}(R)$).

F_θ -თი ავღნიშნოთ განაწილების ფუნქცია, განსაზღვრული μ_θ -თი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის. მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ $\mathsf{F} = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ ოჯახი აკმაყოფილებს თეორემა 2.3.1-ის ყველა პირობას. მართლაც, x_* ელემენტის როლში ჩენ შეგვიძლია ავიღოთ ნამდვილი რიცხვი 0. მაშინ, თეორემა 2.3.4 და 2.3.5, ასევე $T_{\theta_0}^{(1)}$ და $T_{\theta_0}^{(2)}$ არიან (33) ფორმულით მოცემული წრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური მოდელის θ სასარგებლო სიგნალის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებები. მივაქციოთ ყურადღება იმასაც, რომ ეს შეფასებები ზუსტად ემთხვევა იმ შეფასებებს, რომლებიც აგებული იყო [20] ნაშრომში (იხ. თეორემა 3.1).

თეორემა 2.3.7. *ვთქვათ,* F *არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნციების ოჯახი. ყოველი* $F \in \mathsf{F}$ *ელემენტისათვის,* p_F *-ით აღვნიშნოთ ბორელის ალბათური ზომა* F *განაწილების ფუნქციით. მაშინ* $\{p_F^N : F \in \mathsf{F})\}$ *ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი ძლიერ განცალებადია.*

დამტკიცება. D_F ავღნიშნოთ ყველა p_F -ექვიგანაწილებულ მიმდევრობათა სივრცე R -ზე ყოველი $F \in \mathsf{F}$-სთვის. ლემა 2.17-ის თანახმადვიცით, რომ $D_{F_1} \cap D_{F_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $F_1, F_2 \in \mathsf{F}$ -სთვის. ლემა 2.16 -დან გამომდინარე ჩვენ ვიცით, რომ $p_F^N(D_F) = 1$ ყოველი $F \in \mathsf{F}$. დავაფიქსიროთ $F_0 \in \mathsf{F}$ და განვსაზღვროთ ოჯახი $(C_F)_{F \in \mathsf{F}}$ R^N -დან შემდეგი სახით: $C_F = D_F$ ყოველი $F \in \mathsf{F} \setminus \{F_0\}$ -სთვის და $C_{F_0} = R^N \setminus \cup_{F \in \mathsf{F} \setminus \{F_0\}} D_F$. მივაქციოთ ყურადღება, რომ D_F არის ბორელის ქვესიმრავლეები R^N -ზე,ყოველი $F \in \mathsf{F}$ ელემენტისათვის. ვაჩვენოთ, რომ $C_F \in S(R^N)$ ყოველი $F \in \mathsf{F} \setminus \{F_0\}$ ელემენტისათვის, სადაც $S(R^N)$ განმარტებულია (2.1.7)-ფორმულით. ვინაიდან $\overline{p_F^N}(R^N \setminus \cup_{F \in \mathsf{F}} D_F) = 0$ ყოველი $F \in \mathsf{F}$ ელემენტისათვის, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $R^N \setminus \cup_{F \in \mathsf{F}} D_F \in \cap_{F \in \mathsf{F}} dom\,(\overline{p_F^N}) = S(R^N)$.

ვინაიდან $S(R^N)$ არის σ -ალგებრა, ჩვენ ვასკვნით, რომ $C_{F_0} \in S(R^N)$ რამდენადაც $\overline{p_F^N}(R^N \setminus \cup_{F \in \mathrm{F}} D_F) = 0$ ნებისმიერი $F \in \mathrm{F}$ ელემენტისთვის (რაც იგივეა, რომ $R^N \setminus \cup_{F \in \mathrm{F}} D_F \in S(R^N)$) და

$$C_{F_0} = R^N \setminus \cup_{F \in \mathrm{F} \setminus \{F_0\}} D_F = (R^N \setminus \cup_{F \in \mathrm{F}} D_F) \cup D_{F_0}. \qquad (38)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2.3.8. *ლემა 2.21 ძალით და თეორემა 2.3.7-ით ვღებულობთ, რომ არსებობს F ($F \in \mathrm{F}$) უცნობი განაწილების ფუნქციის ძალდებული შეფასება $\{p_F^N : F \in \mathrm{F}\}$ ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახისთვის, სადაც F განსაზღვრულია თეორემა 3.7-ით.შეფასება $T : R^N \to \mathrm{F}$ განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: $T((x_k)_{k \in N}) = F$ თუ $(x_k)_{k \in N} \in C_F$, სადაც $(C_F)_{F \in \mathrm{F}}$ ასევე განსაზღვრულია თეორემა 3.7-ით. აღსანიშნავია, რომ ეს არის მთავარი შედეგი მიღებული [27] ნაშრომში (იხ.ლემა 2.6, გვ. 476).*

შენიშვნა 2.3.9. შევნიშნოთ, რომ გლივენკო-კანტელის თეორემის გამოყენებით შესაძლებელია თეორემა 2.3.7-ის გაძლიერება განაწილებათა ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახისათვის. მართლაც, გლივენკო-კანტელის თეორემის თანახმად, ყოველი F განაწილების ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა

$$p_F^N \{(x_k)_{k \in N} : \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in R} | \frac{\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty, x)}{n} - F(x) | = 0\} = 1.$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას

$$D_F \{(x_k)_{k \in N} : \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in R} | \frac{\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty, x)}{n} - F(x) | = 0\} ,$$

მაშინ ცხადია რომ ორი განსხვავებული F_1 და F_2 განაწილების ფუნქციისათვის გვექნება

$$D_{F_1} \cap D_{F_1} = \varnothing .$$

მართლაც, თუ x_0 ისეთი წერტილია, რომ $F_1(x_0) \neq F_2(x_0)$ და $(x_k)_{k \in N} \in D_{F_1} \cap D_{F_1}$, მაშინ მივიღებთ

$$\lim_{n \to \infty} | \frac{\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty, x_0)}{n} - F_1(x_0) | \leq \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in R} | \frac{\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (-\infty, x\ )}{n} - F_1(x) | = 0$$

და

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x_0)}{n} - F_2(x_0) \right| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x\ )}{n} - F_2(x) \right| = 0 .$$

მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$| F_2(x_0) - F_1(x_0) | \le \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x_0)}{n} - F_2(x_0) \right| + \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x_0)}{n} - F_1(x_0) \right|$$
$$\le \sup_{x\in R} \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x\ )}{n} - F_2(x) \right| + \sup_{x\in R} \left| \frac{\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x\ )}{n} - F_1(x) \right|$$

ვინაიდან უტოლობის მარჯვნივ მდგარი გამოსახულების ზღვარი მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა n მიისწრაფის $+\infty$-კენ, ჩვენ ვასკვნით, რომ $| F_2(x_0) - F_1(x_0) | = 0$, რაც აშკარა წინააღმდეგობაა.

ამ განყოფილების ბოლოს ჩვენ ვახდენთ შემდეგი ამოუხსნელი ამოცანის ფორმულირებას.

ამოცანა 3.1. *ვთქვათ, F არის უწყვეტი და მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციათა ოჯახი და p_F აღნიშნავს $F \in \mathsf{F}$ განაწილების ფუნქციით განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომას. არსებობს თუ არა უცნობი განაწილების F ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა $\{p_F^N : F \in \mathsf{F})\}$ ოჯახისთვის?*

ამოცანა 3.2. ვთქვათ, F არის განაწილების ფუნქციათა ოჯახი და p_F აღნიშნავს $F \in \mathsf{F}$ განაწილების ფუნქციით განსაზღვრულ ბორელის ალბათურ ზომას. არსებობს თუ არა უცნობი განაწილების F ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა $\{p_F^N : F \in \mathsf{F})\}$ ოჯახისთვის?

2.4 წრფივი ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური მოდელში სასარგებლოს სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტური კონსტრუქცია

[18]-ნაშრომში მოყვანილია სასარგებლო სიგნალის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასების მაგალითები $T^{\text{å}}$ (გვ. 63), T° (გვ. 67)) წრფივ ერთ-განზომილებიან სტოქასტურ

მოდელში.შეფასება აგებულია ამორჩევის აქსიომისა და [17] ნაშრომში არალოკალურად კომპაქტური აბელის პოლონური R^N ჯგუფისათვის აგებული ერთი დახლეჩის გამოყენებით.

ამავე თავში იგივე მოდელში წარმოგიდგენთ სასარგებლო სიგნალის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ეფექტურ მეთოდს, რომელიც შემუშავებული იყო [19] ნაშრომში.

თეორემა 2.4.1. *ვთქვათ, მოცემულია 33-ე ფორმულით განსაზღვრული წრფივი ერთგანზომილებიანი სტოქასტური პროცესი, სადაც „თეთრი ხმაურ"-ს აქვს სასრული პირველი რიგის აბსოლუტური მომენტი და მისი პირევლი რიგის მომენტი ნულის ტოლია. ვთქვათ, ბორელის ალბათური ზომა λ განსაზღვრულია გარდაქმნილი $(\xi_k)_{k\in N}$ სიგნალების მიმდევრობით და გარკვეული $\theta_0 \in [0,1]$ პარამეტრისთვის ემთხვევა $(\mu_{\theta_0}^N)$ -ს. $T: R^N \to [0,1]$ სტატისტიკა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:*

$$T((x_k)_{k\in N}) = \{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\} \text{ თუ } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \neq 1,$$

$$T((x_k)_{k\in N}) = 1 \text{ თუ } \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1, \text{ და}$$

$$T((x_k)_{k\in N}) = \sum_{k\in N} \frac{\chi_{(0,+\infty)}(x_k)}{2^k}, \text{ წინააღმდეგ შემთხვევაში,}$$

სადაც $\chi_{(0,+\infty)}(\cdot)$ აღნიშნავს $(0,+\infty)$ სიმრავლეზე განსაზღვრულ სიმრავლის ინდიკატორ ფუნქციას. მაშინ T არის θ უცნობი პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ სტატისტიკური სტრუქტურისთვის, რომელიც არის (2.3.12) წრფივ ერთ-განზომილებიანი სტოქასტური პროცესის აღმწერი.

დამტკიცება. ნაბიჯი 1. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ T არის $(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ სტატისტიკური სტრუქტურის θ უცნობი პარამეტრის უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება და $T^{-1}(\theta)$ არისჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k}{2^k} \in \Theta$ პარამეტრისათვის, სადაც $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_k}{2^k}$ არის θ რიცხვის წამოდგენა ორობით სისტემაში.

აქედან ჩვენ გვაქვს

$$(\forall\,\theta)(\theta \in (0,1) \;\to T^{-1}(\theta) = (B_{H(\theta)} \setminus S) \cup \cup_{z\in Z} S_{\theta+z}), \tag{39}$$

სადაც $H(\theta) = \{k : k \in N \;\&\; \theta_k = 1\}$, $B_{H(\theta)} = \theta - A_{H(\theta)}$, $A_{H(\theta)}$ ლემა 2.7-ის თანახმად,

$$S = \{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \text{ არსებობს სასრული ზღვარი } \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}\} \tag{40}$$

და

$$S_{\theta+z} = \{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \theta + z\} \tag{41}$$

ყოველი $\theta \in \Theta$ და $z \in Z$. საყურადღებოა, რომ სიმრავლე S როგორც $\cup_{z\in Z} S_{\theta+z}$ არის ბორელის shy სიმრავლე (იხ. [18], ლემა 4.14, გვ. 60). ამრიგად, თუ მხედველობაში მივიღებთ ამ ფაქტს, მაშინ ლემა 2.4 და 2.7 -ის გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით რომ $T^{-1}(\theta)$ არის ბორელის აზრით ზომადი ჰაარის ემბივალენტი ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისთვის.

შევნიშნოთ, რომ

$$T^{-1}(1) = (B_{H(1)} \setminus S) \cup S_1 = (B_N \setminus S) \cup S_1 \tag{42}$$

და

$$T^{-1}(0) = (B_{H(0)} \setminus S) \cup \cup_{z\in Z\setminus\{1\}} S_{0+z} = (B_{\varnothing} \setminus S) \cup \cup_{z\in Z\setminus\{1\}} S_{0+z}, \tag{43}$$

ბორელის ზომადი სიმრავლეები ასევე არიან ჰაარის ემბივალენტები.

ახლა უკვე არაა ძნელი დასამტკიცებელი, რომ T არის $(\mathrm{B}(R^N), L(\Theta))$ - ზომადირადგან კლასი $\mathrm{B}(R^N)$ ჩაკეტილია თვლადი სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების მიმართ. ყოველი ელემენტი $L(\Theta)$ -დან ან თვლადია ან წარმოადგენს თვლადი სიმრავლის დამატებას $\Theta = [0,1]$ ინტერვალში. ვინაიდან $S_\theta \subseteq T^{-1}(\theta)$ ნებისმიერი $\theta \in \Theta$, ჩვენ ვღებულობთ რომ $\mu_\theta(T^{-1}(\theta)) = 1$. ეს ნიშნავს, რომ T არის θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებაა.

ნაბიჯი 2. ვაჩვენოთ, რომ ყოველი განსხვავებული $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ -სთვის არსებობს იზომეტრული გარდაქმნა (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ ისეთი, რომ

$$A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2) \tag{44}$$

არის Shy სიმრავლე.

ჩვენ განვსაზღვრავთ $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ გარდაქმნას შემდეგნაირად: $(x_k)_{k\in N} \in R^N$ -სთვის $A_{(\theta_1,\theta_2)}((x_k)_{k\in N}) = (y_k)_{k\in N}$, სადაც $y_k = -x_k$ თუ

$k \in H(\theta_1)\Delta H(\theta_2)(:= (H(\theta_1) \setminus H(\theta_2)) \cup (H(\theta_2) \setminus H(\theta_1))$

და $y_k = x_k$ წინააღმდეგ შემთხვევაში.

ცხადია, რომ $A_{(\theta_1,\theta_2)}$ არის R^N სივრცის იზომეტრული (ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) გარდაქმნა.

შევნიშნოთ, რომ

$$A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2) \subseteq \cup_{k\in N}\{0\}_k \times R^{N\setminus\{k\}} \cup S. \tag{45}$$

ორივე სიმრავლე $\cup_{k\in N}\{0\}_k \times R^{N\setminus\{k\}}$ და S არის shy, ლემა 2.4-ისა და განსაზღვრა 2.2-ის თანახმად, ჩვენ ვღებულობთ, რომ

$$A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2) \tag{46}$$

სიმრავლეასევე არის shy. ეს ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

2.5. უცნობი ალბათობის სიმკვრივის ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება

ვთქვათ $X_1, X_2, \cdots$ არის ნამდვილმნიშვნელობიან ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, რომელთაც გააჩნიათ განაწილების სიმკვრივე f . მას შემდეგ, რაც როზენბლატმა [21] ნაშრომში $X_1, X_2, \cdots, X_n$ შერჩევის საფუძველზე ე.წ. ბირთვთა გარკვეული კლასის გამოყენებით f -ფუნქციის შესაფასებლად შემოიტანა ბირთვული შეფასება f_n , შესწავლილი იყო ასეთ შეფასებათა

სხვადასხვა კრებადობის საკითხი. ამ მიმართულებით ძლიერი შედეგი უკავშირდება ნადარაიას [13] ნაშრომს, რომელშიც მოცემულ იქნა დამტკიცება იმისა, რომ თუ f თანაბრად უწყვეტია, მაშინ ბირთვების უფრო დიდი კლასისათვის ბირთვული f_n შეფასება თანაბრად იკრიბება f ფუნქციისაკენ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ალბათობით ერთი. [22] ნაშრომში მოყვანილია ასეთი ტიპის კრებადობისთვის აუცილებელი პირობა f -სთვის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ f_n თანაბრად იკრიბება g ფუნქცისკენ ალბათობით ერთი, მაშინ g უნდა იყოს თანაბრადუწყვეტი და განაწილება F , საიდანაც აღებულია შერჩევა, უნდა იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი და ტოლობა $F^{'}(x)=g(x)$ უნდა სრულდებოდეს ყველგან. თუ ამ პირობების გარდა დამატებით მოვითხოვთ, რომ f და მისი პირველი $r+1$ წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ შესაძლებელია ვაჩვენოთ თუ როგორ უნდა ავაგოთ f_n შეფასებები ისე რომ $f_n^{(s)}$ წინასწარ მოცემული სიჩქარით იყოს თანაბრადკრებადი $f^{(s)}$ -სკენ ალბათობით ერთი ყოველი $s=0,\cdots,r.$ $s=0,\cdots,r.$ ვთქვათ, $f_n(x)$ არის [21] ნაშრომში F განაწილებიდან მიღებული $X_1,X_2,\cdots,X_n$ შერჩევის საფუძველზე აგებული ბირთვული შეფასება, ე.ი

$$f_n(x)=(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}k\left(\frac{X_i-x}{a_n}\right)$$

სადაც $(a_n)_{n\in N}$ არის დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, რომელიც იკრიბება 0-სკენ და k არის ალბათური სიმკვრივის ფუნქცია. ამასთან,ვიგულისხმოთ, რომ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|k(x)dx$ სასრულია და $k^{(s)}$ არის უწყვეტი შემოსაზღვრული ფუქნცია $s=0,\cdots,r$. მაგალითად, სტანდარტული ნორმალური სიმკვრივის ფუნქცია ამ ყველა პირობას აკმაყოფილებს.

შემდგომ ჩვენ დაგვჭირდება მნიშვნელოვანი საკითხი.

ლემა 2.5.1 *([22], თეორემა 3.11,გვ. 1194) იმისათვის, რომ*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}|f_n(x)-g(x)|=0 \tag{47}$$

ალბათობით ერთი g ფუნქციისათვის *აუცილებელი და საკმარისია, რომ* g ფუნქცია იყოს თანაბრადუწყვეტი F ფუნქციის მიმართ.

ვთქვათ, $X_1, X_2, \cdots$ არის ნამდვილ მნიშვნელობიან დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა უცნობი ალბათური განაწილების f ფუნქციით. დაუშვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ f ეკუთვნის ალბათური სიმკვრივის განაწილების ფუნქციათა SC კლასს, რომლის ელემენტები არიან თანაბრად უწყვეტნი.

$\ell^{\infty}(R)$ -ით ავღნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული შემოსაზღვული ფუნქციების უსასრულოგანზომილებიანი არასეპარ-აბელური ბანახის სივრცე, რომლისთვისაც $\|\cdot\|_{\infty}$ ნორმა განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\| h \|_{\infty} = \sup_{x \in R} | h(x) | \tag{48}$$

ყველა $h \in \ell^{\infty}(R)$. ჩვენ ვამბობთ რომ $(\ell^{\infty}(R)) \lim_{n\to\infty} h_n = h_0$ თუ $\lim_{n\to\infty} \| h_n - h_0 \|_{\infty} = 0.$

თეორემა 2.5.2 *ავღნიშნოთ ϕ -ით სტანდართული ნორმალური განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია და $\Theta = \mathrm{SC}$. ვთქვათ, μ_θ არის ბორელის ალბათური ზომა განსაზღვრული $\theta \in \Theta$ განაწილების სიმკვრივის ფუნქციით. დავაფიქსიროთ $\theta_0 \in \Theta$. ყოველიუსასრულოო $(x_i)_{i \in N}$ შერჩევისათვის, $T_{\mathrm{SC}}((x_i)_{i \in N}) = (\ell^{\infty}(R)) \lim_{n\to\infty} f_n$ თუ ეს ზღვარი არსებობს და ეკუთვნის $\Theta \setminus \{\theta_0\}$ -სიმრავლეს, და $T_{\mathrm{SC}}((x_i)_{i \in N}) = \theta_0$, სხვა შემთხვევაში. მაშინ T_{SC} არის θ უცნობი პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta \in \Theta}$ ოჯახისთვის.*

დამტკიცება. ლემა 2.5.1-ის ძალით, ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის ვღებულობთ

$$\mu_\theta^N(\{(x_i)_{i \in N} \in R^N : T_{\mathrm{SC}}((x_i)_{i \in N}) = \theta\}) \geq$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_i)_{i \in N} \in R^N : (\ell^{\infty}(R)) \lim_{n\to\infty} f_n = \theta\}) =$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_i)_{i \in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty} \| f_n - \theta \|_{\infty} = 0\}) = 1. \tag{49}$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

2.5.2 თეორემასთან დაკავშირებით საინტერესოა შემდეგი

ამოცანა 2.5.1 *ვთქვათ, T_{SC} არის თეორემა 2.5.2-ში აგებული შეფასება. არის თუ არა T_{SC} უცნობი θ პარამეტრის ობიექტური უსსრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისათვის?*

ამოცანა 2.5.2 *ვთქვათ, $\{(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N):\theta\in\Theta\}$ არის თეორემა 2.5.2-ში აგებული სტატისტიკური სტრუქტურა. არსებობს თუ არა θ პარამეტრის ობიექტური (ძლიერად ობიექტური) უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება$(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის?*

ვთქვათ, $X_1, X_2, \cdots$ არის ნამდვილ მნიშვნელობიან დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა უცნობი უწყვეტი ალბათური განაწილების f ფუნქციით. დაუშვათ, რომ f ეკუთვნის განცალებად A კლასს, ე.ი. არსებობს ისეთი x_* წერტილი, რომ $g_1(x_*)\neq g_2(x_*)$ ყოველი $g_1, g_2\in \mathrm{A}$.დაუშვათ, რომ გვაქვს უსასრულო შერჩევა $(x_k)_{k\in N}$ და გვინდა შევაფასოთ უცნობი ალბათობის სიმკვრივის f ფუნქცია. ვთქვათ, $\Theta=\{\theta=g(x_*): g\in \mathrm{A}\}$.ჩვენ შეგვიძლია A კლასის პარამეტრიზაცია შემდეგნაირად: $\mathrm{A}=\{f_\theta:\theta\in\Theta\}$, სადაც f_θ არის ისეთი ერთადერთი ელემენტი A ოჯახიდან, რომლისთვისაც $f(x_*)=\theta$. ვთქვათ μ_θ არის ბორელის ალბათური ზომა განსაზღვრული f_θ ალბათური განაწილების სიმკვრივის $\theta\in\Theta$ ფუნქციით. ცხადია, რომ $\{(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta^N):\theta\in\Theta\}$ იქნება ჩვენი ექსპერიმენტის აღმწერი სტატისტიკური სტრუქტურა.

თეორემა 2.5.3 *ვთქვათ, $(h_m)_{m\in N}$ არის ნულისკენ კრებადი მკაცრად კლებადი დადებით რიცხვების მიმდევრობა. დავაფიქსიროთ$\theta_0\in\Theta$. ყოველი$(x_k)_{k\in N}\in R^N$ განვსაზღვროთ*

$$T((x_k)_{k\in N})=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap[x_*-h_m, x_*+h_m])}{2nh_m} \qquad (50)$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და ეკუთვნის $\Theta\setminus\{\theta\}$ -ს,დაწინააღმდეგ შემთხვევაში $T((x_k)_{k\in N})=\theta_0$. მაშინ T არის θ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.

დამტკიცება. ვთქვათ $\theta\in\Theta$, დაუშვათ

$A_\theta=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^N$ & $(x_k)_{k\in N}$ **არის** μ_θ **-უნიფორმული**$\}$

(2.5.6)

ლემა 2.16-ის ძალით $\mu_\theta^N(A_\theta)=1$ როცა $\theta\in\Theta$.

ყოველი $\theta\in\Theta$, ასევე გვაქვს

$$\mu_\theta^N(T^{-1}(\theta))=\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:T((x_k)_{k\in N})=\theta\})\geq$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\theta:T((x_k)_{k\in N})=\theta\})=$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\theta:\lim_{m\to\infty}\frac{F_\theta(x_*+h_m)-F_\theta(x_*-h_m)}{2h_m}=\theta\})=$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\theta:\lim_{m\to\infty}\frac{\int_{x_*-h_m}^{x_*+h_m}f_\theta(x)dx}{2h_m}=\theta\})=$$

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\theta:f_\theta(x^*)=\theta\})=\mu_\theta^N(A_\theta)=1 \tag{51}$$

თეორემა 2.5.3 -თან დაკავშირებით გარკვეულ ინტერესს წარმოადგენს შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 2.5.3 *ვთქვათ, T არის თეორემა 2.5.3-ში აგებული სტატისტიკა. არის თუ არა T სტატისტიკა θ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის?*

ამოცანა 2.5.4 *ვთქვათ,* $\{(R^N,\mathrm{B}(R^N),\mu_\theta^N):\theta\in\Theta\}$ *თეორემა 2.5.3-ში სტატისტიკური სტრუქტურა. არსებობს თუ არა θ პარამეტრის ობიექტური (ძლიერად ობიექტური) უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება* $(\mu_\theta^N)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის?*

მაგალითი 2.5.4 *ვთქვათ,* $X_1,X_2,\cdots$ *არის დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა* (a,σ) *პარამეტრებით, სადაც a არის საშუალოდა σ არის საშუალო კვადრატული გადახრა.*

დაუშვათ, რომ ჩვენ ვიცით საშუალო და გვინდა უსასრულო $(x_k)_{k\in N}$ *შერჩევის საშუალებით შევაფასოთ* σ *საშუალო კვადრატული გადახრა. ყოველი* $\sigma>0$, μ_σ *-ით აღვნიშნოთ გაუსის ალბათური ზომა* R *ღერძზე (აქ* $a\in R$ *დაფიქსირებულია). ვთქვათ*$(h_m)_{m\in N}$ *არის ნულისკენ კრებადი მკაცრად კლებადი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა.* თეორემა 5.4-ის ძალით ჩვენ ვიცით, რომ $\sigma>0$ რიცხვისათვის სრულდება შემდეგი პირობა

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N \; \& \; \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap[a-h_m,a+h_m])}{2nh_m}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\})=1 \tag{52}$$

დავაფიქსიროთ $\sigma_0>0$. ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ შერჩევისათვის,

$$T_1((x_k)_{k\in N})=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{2nh_m}{\sqrt{2\pi}\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap[a-h_m,a+h_m])}, \tag{53}$$

თუ ეს ზღვარი არსებობს და ეკუთვნის $(0,+\infty)\setminus\{\sigma_0\}$ -ს,და $T_1((x_k)_{k\in N})=\sigma_0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში. მაშინ ყოველი $\sigma>0$ -სთვის მივიღებთ

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^N \; \& \; T_1((x_k)_{k\in N})=\sigma\})=1 \tag{54}$$

რაც ნიშნავს, რომ T_1 არის $\sigma>0$ საშუალოკვადრატული გადახრის უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma>0}$ ოჯახისთვის.

თეორემა 2.5.5 *ვთქვათ,* $X_1, X_2,\cdots$ *არის დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა* (a,σ) *პარამეტრებით, სადაც a არის საშუალოდა* σ *არის საშუალო კვადრატული გადახრა. დაუშვათ, რომ ჩვენ ვიცით საშუალო* a *. ვთქვათ,*$(a_n)_{n\in N}$ *არის ნულისკენ კრებადი მკაცრად კლებადი დადებითი რიცხვების მიმდევრობა და* ϕ *არის სტანდარტული გაუსის სიმკვრივის ფუნქცია* R *-ზე.* μ_σ *-ით ავღნიშნოთ ბორელის ალბათური ზომა* (a,σ) *პარამეტრებითყოველი* $\sigma\in\Sigma=(0,\infty)$ *. დავაფიქსიროთ* $\sigma_0\in\Sigma$ *. განვსაზღვროთ შეფასება* $T_{\sigma_0}^{(1)}:R^N\to\Sigma$ *შემდეგნაირად:*

$$T_{\sigma_0}^{(1)}((x_k)_{k\in N})=\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}((x_k)_{k\in N}) \tag{55}$$

თუ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}((x_k)_{k\in N})\in\Sigma\setminus\{\sigma_0\}$, და

$$T_{\sigma_0}^{(1)}((x_k)_{k\in N})=\sigma_0, \tag{56}$$

სხვა შემთხვევაში, სადაც

$$\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}:=\inf_n\sup_{m\geq n}\widetilde{T}_m^{(1)} \tag{57}$$

და

$$\widetilde{T}_n^{(1)}((x_k)_{k\in N})=T_n^{(1)}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\phi(\frac{x_i-a}{a_n})} \tag{58}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ შერჩევისათვის. მაშინ $T_{\sigma_0}^{(1)}$ არის σ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma\in\Sigma}$ ოჯახისთვის.

დამტკიცება. [23](იხ, გვ. 189)-ის ძალით, ფუქნცია $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}$ არის ბორელის აზრით ზომადი ანუ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}$ არის $(\mathrm{B}(R^N),L(\Sigma))$-ზომადი.

ყოველი $\sigma\in\Sigma$, განვსაზღვროთ A_σ შემდეგნაირად

$$A_\sigma=\{(x_k)_{k\in N}\in R^N: lim_{n\to\infty}(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\phi(\frac{x_i-a}{a_n})=f_\sigma(a)\}. \tag{59}$$

ვინაიდა თანაბარი კრებადობიდან გამომდინარეობს წერტილოვანი კრებადობა, ამიტომ ლემა 2.5.1-ის ძალით ვღებულობთ, რომ $\mu_\sigma^N(A_\sigma)=1$. ყოველი $\sigma\in\Sigma$-სთვის ვღებულობთ

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N: T_{\theta_0}^{(1)}(x_k)_{k\in N}=\sigma\})\geq$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N: \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}(x_k)_{k\in N}=\sigma\})\geq$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N: \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}(x_k)_{k\in N}=\underline{\lim}\widetilde{T}_n^{(1)}(x_k)_{k\in N}=\sigma\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N: \lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_n^{(1)}((x_k)_{k\in N})=\sigma\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^n\phi(\frac{x_i-a}{a_n})}=\sigma\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:\lim_{n\to\infty}(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^n\phi(\frac{x_i-a}{a_n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N:\lim_{n\to\infty}(na_n)^{-1}\sum_{i=1}^n\phi(\frac{x_i-a}{a_n})=f_\sigma(a)\})=\mu_\sigma^N(A_\sigma)=1. \tag{60}$$

შემდეგი თეორემა იძლევა საშუალებას ერთ-ერთ მოდელში ავაგოთ σ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება.

თეორემა 2.5.6 *ვთქვათ, $X_1, X_2,\cdots$ არის დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა (a,σ) პარამეტრებით, სადაც a არის საშუალოდა σ არის საშუალო კვადრატული გადახრა. დაუშვათ, რომ ჩვენ ვიცით საშუალო a . დაუშვათ, რომ ცნობილია საშუალო a რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან. ვთქვათ, Φ არის გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქცია. ყოველი $\sigma\in\Sigma=(0,\infty)$ პარამეტრისთვის, μ_σ -ით ავღნიშნოთ (a,σ) პარამეტრებიანი ბორელის ალბათური გაუსის ზომა.. დავაფიქსიროთ$\sigma_0\in\Sigma$. განვსაზღვროთ შეფასება $T_{\sigma_0}^{(2)}:R^N\to\Sigma$ შემდეგნაირად: $T_{\sigma_0}^{(2)}((x_k)_{k\in N})=\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}((x_k)_{k\in N})$ თუ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}((x_k)_{k\in N})\in\Sigma\setminus\{\sigma_0\}$ და $T_{\sigma_0}^{(2)}((x_k)_{k\in N})=\sigma_0$, სხვა შემთხვევაში, სადაც $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}:=\inf_n\sup_{m\ge n}\widetilde{T}_m^{(2)}$ და*

$$\widetilde{T}_n^{(2)}((x_k)_{k\in N})=T_n^{(2)}(x_1,\cdots,x_n)=-\frac{a}{\Phi^{-1}(\frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n})} \tag{61}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in R^N$ შერჩევისათვის. მაშინ $T_{\sigma_0}^{(2)}$ არის σ პარამეტრის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma\in\Sigma}$ ოჯახისთვის.

დამტკიცება . [23](იხ, გვ. 189) -ის თანახმად, $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}$ ფუნქცია არის ბორელის ზომადი ფუქცია, რაც ნიშნავს, რომ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}$ არის $(\mathrm{B}(R^N),L(\Sigma))$ - ზომადი.

ყოველი $\sigma \in \Sigma$ პარამეტრისათვი A_σ სიმრავლე განვსაზღვროთ შემდეგნაირად: გვაქვს

$A_\sigma = \{(x_k)_{k\in N} \in R^N : (x_k)_{k\in N}$ არის μ_σ-ექვიგანაწილებული მიმდევრობა$\}$

(62)

ლემა 2.16 -ის ძალით $\mu_\sigma^N(A_\sigma)=1$ ყოველი $\sigma \in \Sigma$ პარამეტრისათვის, რაც ნიშნავს რომ

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}(x_k)_{k\in N} = \sigma\}) \geq$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}(x_k)_{k\in N} = \underline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}(x_k)_{k\in N} = \sigma\}) =$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_n^{(2)}((x_k)_{k\in N}) = \sigma\}) =$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty} - \frac{a}{\Phi^{-1}(\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0]))}{n})} = \sigma\}) =$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\Phi^{-1}(\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n}) = -\frac{a}{\sigma}\}) =$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n} = \Phi(-\frac{a}{\sigma})\}) =$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n} = \Phi_{(a,\sigma)}(0)\}) \geq$$

$$\mu_\sigma^N(A_\sigma) = 1. \qquad (63)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}$ არის σ პარამეტრის უსასრულო შერჩევით ძლადებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma>0}$ ოჯახისთვის.

ვაჩვენოთ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)}$ არის ობიექტური.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ სიმრავლე $(\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(2)})^{-1}(\sigma)$ არის ჰაარის ემზივალენტი ყოველი $\sigma > 0$ პარამეტრისათვის.

ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}$ არის μ_σ -ექვიგანაწილებულიმიმდევრობა. მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n}=\Phi_{(a,\sigma)}(0)\,, \tag{64}$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$T^{(2)}_{\sigma_0}((x_k)_{k\in N})=\overline{\lim}\widetilde{T}^{(2)}_n((x_k)_{k\in N})=\sigma. \tag{65}$$

ვთქვათ, $J_\sigma=\{i:x_i\le 0\}$. ცხადია, რომ

$$B_{J_\sigma}=\{(y_i)_{i\in N}:y_i\le x_i\ \ for\ \ i\in J\ \&\ y_i>x_i\ \ for\ \ i\in N\setminus J\} \tag{65}$$

სიმრავლე წარმოადგენს ჰაარის ემბივალენტს ყოველი $\sigma>0$ პარამეტრისათვის.

ყოველი $(y_i)_{i\in N}\in B_{J_\sigma}$ -სთვის ცხადია, რომ

$$T^{(2)}_{\sigma_0}((y_k)_{k\in N})=\overline{\lim}\widetilde{T}^{(2)}_n((y_k)_{k\in N})=\sigma, \tag{67}$$

რაც ნიშნავს $B_{J_\sigma}\subseteq(\overline{\lim}\widetilde{T}^{(2)}_n)^{-1}(\sigma)$.

ვინაიდან $\{(\overline{\lim}\widetilde{T}^{(2)}_n)^{-1}(\sigma):\sigma>0\}$ დახლეჩა არის R^N -დან დაყოველი მათგანი შეიცავს ჰაარის B_{J_σ} ემბივალეტს, ჩვენ ვასკვნით, რომ $(\overline{\lim}\widetilde{T}^{(2)}_n)^{-1}(\sigma)$ ასევე არის ჰაარის ემბივალენტიყოველი $\sigma>0$ პარამეტრისათვის.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.5.7 *ვთქვათ,* $X_1,X_2,\cdots$ *არის დამოუკიდებელ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა* (a,σ) *პარამეტრებით, სადაც* a *არის საშუალოდა* σ *არისსაშუალო კვადრატული გადახრა. ვიგულისხმოთ, რომ ორივე პარამეტრი უცნობია. ვთქვათ* Φ *არის გაუსის სტანდარტული განაწილების ფუნქცია. ყოველი* $\sigma\in\Sigma=(0,\infty)$ *და* $a\in R$ *პარამეტრებისათვის,* μ_σ *-ით ავღნიშნოთ* (a,σ) *პარამეტრებიანი ბორელის ალბათური გაუსის ზომა . დავაფიქსიროთ* $\sigma_0\in\Sigma$ *. განვსაზღვროთ შეფასება* $T^{(3)}_{\sigma_0}:R^N\to\Sigma$ *შემდეგნაირად:*

$$T_{\sigma_0}^{(3)}((x_k)_{k\in N}) = \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}((x_k)_{k\in N}) \tag{68}$$

თუ $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}((x_k)_{k\in N}) \in \Sigma \setminus \{\sigma_0\}$, *და*

$$T_{\sigma_0}^{(3)}((x_k)_{k\in N}) = \sigma_0, \tag{68}$$

დანარჩენ შემთხვევაში, სადაც $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)} := \inf_n \sup_{m\geq n}\widetilde{T}_m^{(3)}$ *და*

$$\widetilde{T}_n^{(3)}((x_k)_{k\in N}) = T_n^{(3)}(x_1,\cdots,x_n) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_k}{n\Phi^{-1}(\frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n})} \tag{70}$$

ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in R^N$ შერჩევისათვის. მაშინ $T_{\sigma_0}^{(3)}$ არის σ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებულიშეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma\in\Sigma}$ ოჯახისთვის .

დამტკიცება. [23](იხ, გვ. 189) -ის თანახმად, ფუქცია $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}$ არისბორელის აზრით ზომადი, რაც იმას ნიშნავს $\overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}$ არის $(\mathrm{B}(R^N), L(\Sigma))$ - ზომადი.

ყოველი $\sigma\in\Sigma$ პარამეტრისათვის, შემოვიტანოთ აღნიშვნები: $A_\sigma = \{(x_k)_{k\in N} \in R^N : (x_k)_{k\in N}$ არის μ_σ ექვიგანაწილებული მიმდევრობა$\}$ (71)

და

$$B_\sigma = \{(x_k)_{k\in N} \in R^N : \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = a\}. \tag{72}$$

ერთის მხრივ, ლემა2.16 -ის ძალით ჩვენ ვიცით, რომ $\mu_\sigma^N(A_\sigma) = 1$ ყოველი $\sigma\in\Sigma$ პარამეტრისათვის. მეორეს მხრივ, დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ძალით ჩვენ ვიცით, რომ $\mu_\sigma^N(B_\sigma) = 1$ ყოველი $\sigma\in\Sigma$ პარამეტრისათვის.ამგვარად ვღებულობთ, რომ

$$\mu_\sigma^N(A_\sigma \cap B_\sigma) = 1 \tag{73}$$

ყოველი $\sigma\in\Sigma$ პარამეტრისათვის.

თუ გავითვალისწინებთ (2.5.22) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}(x_k)_{k\in N}=\sigma\})\geq$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \overline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}(x_k)_{k\in N}=\underline{\lim}\widetilde{T}_n^{(3)}(x_k)_{k\in N}=\sigma\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \lim_{n\to\infty}\widetilde{T}_n^{(3)}((x_k)_{k\in N})=\sigma\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \lim_{n\to\infty}-\frac{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}}{\Phi^{-1}(\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0]))}{n})}=\sigma\})\geq$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\sigma\cap B_\sigma : \lim_{n\to\infty}\Phi^{-1}(\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n})=-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}}{\sigma}\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in A_\sigma\cap B_\sigma : \lim_{n\to\infty}\Phi^{-1}(\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n})=-\frac{a}{\sigma}\})=$$

$$\mu_\sigma^N(\{(x_k)_{k\in N}\in R^N : \lim_{n\to\infty}\frac{(\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,0])}{n}=\Phi_{(a,\sigma)}(0)\})=$$

$$\mu_\sigma^N(A_\sigma\cap B_\sigma)=1. \tag{74}$$

უკანასკნელი ტოლობა ნიშნავს, რომ $T_{\sigma_0}^{(3)}$ არის σ პარამეტრის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება $(\mu_\sigma^N)_{\sigma>0}$ ოჯახისთვის.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.5.8 *განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა* $(\pi\times n-[\pi\times n])_{n\in N}$ *, სადაც* $[\cdot]$ *ნამდვილი რიცხვის მთელი ნაწილია. [10, მაგალითი 2.1, გვ.17] ძალით,ეს მიმდევრობა არის უნიფორმულად განაწილებული* $(0,1)$ *-ინტერვალზე.ცხადია, რომ* $(x_n)_{n\leq M}$ *მიმდევრობა განსაზღვრული პირობით*

$$x_n=\Phi_{(3,5)}^{-1}(\pi\times n-[\pi\times n]) \tag{74}$$

სადაც $n\leq M$ *(M საკმაოდ დიდია", რომელიც π რიცხვის ირაციონალურ წარმოდგენაზეა დამოკიდებული),* ხოლო $\Phi_{(3,5)}$ არის გაუსის განაწილების ფუნქცია პარამეტრებით $(3,5)$, *არის $\mu_{(3,5)}$ - ექვიგანაწილებული მიმდევრობა.*

დაუშვით რომ ვიცით საშუალო $a=3$ დაგვინდა შევაფასოთ "უცნობი" სტანდარტული გადახრა σ .

ჩვენ ვადგენთ:

n- ცდათა რაოდენობა;

S_n - არის შერჩევითი დისპერიიდან კვადრატული ფესვი;

$S_n^{'}$ - კვადრატული ფესვი შესწორებული შერჩევითი დისპერსიიდან;

$T_n^{(2)}$ - შეფასება განისაზღვრება (2.5.9)-ით;

$T_n^{(3)}$ - შეფასება განისაზღვრება (2.5.17)-ით;

σ - არის უცნობი სტანდარტული გადახრა.

Microsoft Excel -ის გამოყენებით მიღებული მონაცემები მოცემულია ცხრილ 3-ში.

ცხრილი 4.

უცნობი სტანდარტული გადახრის $\sigma=5$ შეფასება

n	S_n	$S_n^{'}$	$T_n^{(2)}$	$T_n^{(3)}$
200	4.9924131	5.0049	5.2054	5.8954
400	4.992413	5.0049	5.14181	4.8356
600	5.105239	5.10948	5.2110	4.8554
800	5.106390	5.10984	5.19369	4.9258
1000	5.066642	5.06177	5.02814	4.9441
1200	5.072294	5.07440	5.23588	4.9359
1400	5.08111	5.08296	5.24944	4.96528
1600	5.07921	5.0808	5.2079	4.9564
1800	5.06085	5.06225	5.07913	4.9633
2000	5.06311	5.0647	5.2391	4.9812

ცხრილი 4-ის მონაცემებიდან ჩანს, რომ ორივე $T_n^{(2)}$ და $T_n^{(3)}$ შეფასება მუშაობს კორექტურალად. სამწუხაროდ, ჩვენ ვერ ვახდენთ 61-ე ფორმულით განსაზღვრული $T_n^{(1)}$ სტატისტიკით შეფასებას, ვინაიდან ეს ითხოვს უზუსტეს გამოთვლებს.

ამ თავის ბოლოს ჩვენ მოგვყავს შემდეგი ამოუხსნელი ამოცანის ფორმულირებას.

ამოცანა 5.5 *ვთქვათ, D არის უწყვეტ დადებით სიმკვრივეთაკლასი და p_f აღნიშნავდეს R -ღერძზე განსაზღვრულ ბორელის ალბათური ზომასგანაწილების f სიმკვრივის ფუნქციით ყოველი $f \in \mathrm{D}$ -სთვის. არსებობს თუ არა უცნობი სიმკვრივის f ფუნქციის ობიექტური (სუბიექტური) უსასრულო შერჩევით ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა $\{p_f^N : f \in \mathrm{D})\}$ ოჯახისათვის ?*

2.6. ინვარიანტული მეტრკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფზე განსაზღვრული ორთოგონალური სტატისტიკური სტრუქტურების შესახებ

ვთქვათ G არის პოლონური ჯგუფი, რომლის ქვეშ იგულისხმება სეპარაბელური ჯგუფი სრული ინვარიანტული ρ მეტრიკით (ე.ი., $\rho(fh_1g, fh_2g) = \rho(h_1, h_2)$ ყოველი $f, g, h_1, h_2 \in G$) რომელთათვისაც გარდაქმნა $G \times G$ -დან G -ში, რომელიც (x, y) -ს აგზავნის $x^{-1}y$ -ში, არის უწყვეტი. ვთქვათ, $\mathrm{B}(G)$ არის G ჯგუფის ბორელის ქვესიმრავლეთა σ -ალგებრა.

განსაზღვრა 2.6.1 *[12] ბორელის $X \subseteq G$ სიმრავლეს ეწოდება shy, თუ არსებობს G ჯგუფზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა μ , ისეთი რომ $\mu(fXg) = 0$ ყველა $f, g \in G$. μ ზომას ეწოდება X სიმრავლის ტესტური ზომა.ბორელისshy სიმრავლის ყოველ ქვესიმრავლეს ასევე ეწოდება shy სიმრავლე. shy სიმრავლის დამატებას გავრცელება ეწოდება.*

განსაზღვრება 2.6.2 *[1] ბორელის სიმრავლეს, რომელიც არც shy -ია და არც გავრცელება, ჰაარის ემბივალენტი ეწოდება.*

შენიშვნა 2.6.3 *საყურადღებოა, რომ თუ $X \subseteq G$ არის shy მაშინ X სიმრავლისთვის არსებობს ისეთი ტესტური μ ზომა რომლისთვისაც გარკვეული $K \subseteq G$ კომპაქტი არის კარიერი (ე.ი. $\mu(G \setminus K) = 0$). shy სიმრავლეების ერთბლიობა ქმნის σ -იდეალს, და G ლოკალურად კომპაქტური პოლონურ ჯგუფის ქვესიმრავლე shy სიმრავლეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ჰაარის ზომა ნულია.*

განსაზღვრება 2.6.4. *თუ G არისპოლონური ჯგუფი და $\{\mu_\theta : \theta \in \Theta\}$ არის ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი G -ზე, მაშინ $\{(G, \mathrm{B}, \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სამეულს, სადაც Θ არის არაცარიელი და $L(\Theta)$ არის Θ სიმრავლის ერთელემენტიანი სიმრავლეებით წარმოქმნილი მინიმალური σ -ალგებრა,ეწოდება სტატისტიკური სტრუქტურა. Θ -სიმრავლეს ეწოდება პარამეტრების ოჯახი.*

განსაზღვრება 2.6.5 (O) $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ *სტატისტიკური სტრუქ-ტურას ეწოდება ორთოგონალური, თუ μ_{θ_1} და μ_{θ_2} ზომები ორთოგონალურია ყოველი განსხვავებული θ_1 და θ_2 პარამეტრისთვის.*

განსაზღვრება 2.6.6 (WS) $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ *სტატისტიკურ სტრუქტურას ეწოდება სუსტად განცალებადი, თუ არსებობს ბორელის ქვესიმრავლეთა ოჯახი $\{X_\theta : \theta \in \Theta\}$ ისეთი, რომ $\mu_{\theta_1}(X_{\theta_2}) = \delta(\theta_1, \theta_2)$, სადაც δ აღნიშნავს კრონეკერის ფუქნციას განსაზღვრულს დეკარტულ $\Theta \times \Theta$ კვადრატზე.*

განსაზღვრება 2.6.7 (SS) $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ *სტატისტიკურ სტრუქტურას ეწოდება ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს G ჯგუფის $\{X_\theta : \theta \in \Theta\}$ ბორელის ქვესიმრავლეებად ისეთი დახლეჩა, რომ $\mu_\theta(X_\theta) = 1$ ნებისმიერი $\theta \in \Theta$ -სთვის.*

განსაზღვრება 2.6.8 (CE) $(\mathrm{B}(G), L(\Theta))$ *-ზომად $T : G \to \Theta$ ასახვას ეწოდება $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურისათვის უცნობი $\theta \in \Theta$*

პარამეტრის ძალდებული შეფასება, თუ პირობა $\mu_\theta(T^{-1}(\theta))=1$ სრულდება ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისთვის.

განსაზღვრება 2.6.9 (OCE) $(\mathrm{B}(G),L(\Theta))$ -ზომად $T:G\to\Theta$ *ასახვას ეწოდება* $\{(G,\mathrm{B}(G),\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$ *სტატისტიკური სტრუქტურისთვის უცნობი* $\theta\in\Theta$ *პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა:*

(i) $\mu_\theta(T^{-1}(\theta))=1$ ნებისმიერი $\theta\in\Theta$ *პარამეტრისთვის.*;

(ii) $T^{-1}(\theta)$ არის ჰაარის ემზივალენტი ნებისმიერი $\theta\in\Theta$ *პარამეტრისთვის.*

თუ (i) პირობასრულდება და არ სრულდება (ii) პირობა, მაშინ T ასახვას ეწოდება $\{(G,\mathrm{B}(G),\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$ *სტატისტიკური სტრუქტურისთვის უცნობი* $\theta\in\Theta$ *პარამეტრის სუბიექტური ძალდებული შეფასება*

განსაზღვრება 2.6.10 (SOCE) $\{(G,\mathrm{B}(G),\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$ *სტატისტიკური სტრუქტურისთვის უცნობი* $\theta\in\Theta$ *პარამეტრის ობიექტურ* $T:G\to\Theta$ *ძალდებულ შეფასებას ეწოდება ძლიერი თუ ნებისმიერი ორი* $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ *-სთვის არსებობს ისეთ იზომეტრული ბორელის ზომადი ბიექცია* $A_{(\theta_1,\theta_2)}:G\to G$ *რომ სიმრავლე* $A_{(\theta_1,\theta_2)}(T^{-1}(\theta_1))\Delta T^{-1}(\theta_2)$ *არის* shy.

შენიშვნა 2.6.11. *ვთქვათ* G *არის არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ ასეთი ჯგუფისთვის მიმართება განსაზღვრებები 2.6.5-2.6.10 -ში შემოღებულ შეფასებებს შორის შეიძლება გამოისახოს შემდეგი დიაგრამით.*

$$\mathrm{SOCE}\ \rightarrow\ \mathrm{OCE}\ \rightarrow\ \mathrm{CE}\leftrightarrow\mathrm{SS}\ \rightarrow\ \mathrm{WS}\ \rightarrow\ \mathrm{O} \tag{76}$$

განვიხილოთ მაგალითები იმის საჩვენებლად, რომ შებრუნებულ იმპლიკაციების მართებულობას ყოველთვის არა აქვს ადგილი.

მაგალითი 2.6.12 $\rceil(\mathrm{WS}\leftarrow\mathrm{O})$ *ვთქვათ,* $F\subset G$ *არის* $2^{\aleph_0}$ *სიმძლავრის ჩაკეტილი სიმრავლე. დაუშვათ* $\phi:[0,1]\to F$ *არის ბორელის იზომორფიზმი* $[0,1]$ *და* F *სიმრავლეებს შორის. ვთქვათ,* $\mu(X)=\lambda(\phi^{-1}(X\cap F))$ *ყოველი* $X\in\mathrm{B}(G)$, *სადაც* λ *არის ლებეგის წრფივი ზომა* $[0,1]$ *-ზე. ვთქვათ,* $\Theta=F$.

ვაფიქსირებთ $\theta_0 \in \Theta$ *და ვუშვებთ:* $\mu_\theta = \mu$ *თუ* $\theta = \theta_0$ *, და* $\mu_\theta = \delta_\theta |_{\mathrm{B}(G)}$ *სხვა შემთხვევაში, სადაც* δ_θ *არის დირაკის ზომა* G *ჯგუფზე კონცენტრირებული* θ *წერტილში და* $\delta_\theta |_{\mathrm{B}(G)}$ *იყოს დირაკის* δ_θ *ზომის შევიწროება* $\mathrm{B}(G)$ *- კლასზე.მაშინ სტატისტიკური სტრუქტურა* $\{(G,\mathrm{B},\mu_\theta):\theta \in \Theta\}$ *არის ორთოგონალური*(O)*, მაგრამ არ არის სუსტად განცალებადი (*WS *).*

მაგალითი 2.6.13 *(SM)* $\rceil(\mathrm{SS} \leftarrow \mathrm{WS})$ *[15, თეორემა 1,გვ.335]-ის თანახმად, (ZFC) აქსიომათა სისტემაში შემდეგი სამი წინადადება ექვივალენტურია:*

1) კონტინიუმ ჰიპოთეზა $(c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1)$;

2) ყოველი ალბათური $(E;S;\mu)$ სივრცისთვის $(E_i)_{i\in I}$ μ -ნულ ზომის სიმრავლეების გაერთიანება არის μ -ნულ ზომის, თუ $card(I) < c$;

3) ალბათურ ზომათა ნებისმიერი $2^{\aleph_0}$ *სიმძლავრის* სუსტად განცალებადი ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი.

უკანასკნელი ნიშნავს რომ ZFC აქსიომათა სისტემაში, კონტინიუმ ჰიპოთეზის $(c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1)$ მართებულობა იწვევს $\mathrm{SS} \leftarrow \mathrm{WS}$ წინადადების მართებულობასაც. ეს სკოროხოდის ცნობილი შედეგია (იხ, [26]). ზერაკიძის ცნობილი [15,თეორემა 2, გვ.339] შედეგის ძალით, თუ (F,ρ) არის რადონის მეტრიკული სივრცე და $(\mu_i)_{i\in I}$ არის ბორელის ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებადი ოჯახი $card(I) \le c$ პირობით, მაშინ $(ZFC)\,\&\,(MA)$ აქსიომათა სისტემაში $(\mu_i)_{i\in I}$ ოჯახი ძლიერად განცალებადია.

მოვიყვანოთ $\mathrm{SS} \leftarrow \mathrm{WS}$ წინადადების კონტრმაგალითი სოლოვეის მოდელში (SM) [25] , რომელიც წარმოადგენს აქსიომათა შემდეგ სისტემას:

$(ZF)\,\&\,(DC)\,\&$ **"** R **ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადი ლებეგის აზრით",**

სადაც (ZF) აღნიშნავს ცერმელო-ფრანკელის აქსიომათა სისტემას და (DC) აღნიშნავს დამოკიდებული ამორჩევის აქსიომას.

$\theta \in (0;1)$ -სთვის, ვთქვათ b_θ იყოს ბორელის წრფივი კლასიკური ზომა განსაზღვრული $\{\theta\}\times(0;1)$ -ზე. $\theta \in (1.2)$, b_θ იყოს ბორელის წრფივი კლასიკური სიმრავლეზე $(0;1)\times\{\theta-1\}$. b_θ ზომის საშუალებით

განვსაზღვროთ ბორელის ალბათური ზომა λ_θ $(0;1)\times(0;1)$ სიმრავლეზე შემდეგნაირად:

$$(\forall X)(\forall\theta_1)(\forall\theta_2)(X\in \mathrm{B}((0;1)\times(0;1))\ \&\ \theta_1\in(0;1)\ \&\ \theta_2\in(1;2)\rightarrow$$

$$\lambda_{\theta_1}(X)=b_{\theta_1}((\{\theta_1\}\times(0;1))\cap X)\ \&\ \lambda_{\theta_2}(X)=b_{\theta_2}(((0;1)\times\{\theta_1-1\})\cap X)). \quad (77)$$

თუ დაუშვებთ, რომ $\theta=(0;1)\cup(1;2)$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$((0;1)\ \times(0;1),\ \mathrm{B}((0;1)\ \times(0;1)),\ \lambda_\theta)_{\theta\in\Theta}. \quad (78)$$

სტატისტიკურ სტრუქტურას

ვთქვათ, $X_\theta=\{\theta\}\times(0;1)$ როცა $\theta\in(0;1)$, და $X_\theta=(0;1)\times\{\theta-1\}$ როცა $\theta\in(1.2)$, შევნიშნოთ, რომ ბორელის ქვესიმრავლეთა $\{X_\theta:\theta\in\Theta\}$ ოჯახისთვის გვაქვს $\lambda_{\theta_1}(X_{\theta_2})=\delta(\theta_1,\theta_2)$, სადაც δ არის კრონეკერის ფუქნცია განსაზღვრული Θ -ს დეკარტულ $\Theta\times\Theta$ კვადრატზე. სხვა სიტყვებით, $(\lambda_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის სუსტად განცალებადი. ახლა დავუშვათ, რომ ეს ოჯახი ძლიერად განცალებადია. მაშინ იარსებებს $(0;1)\times(0;1)$ დეკარტული კვადრატის დახლეჩა $\{Y_\theta:\theta\in\Theta\}$ ბორელის ქვესიმრავლეებად ისე, რომ $\lambda_\theta(Y_\theta)=1$ ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისათვის.ჩვენ თუ ჩავთვლით, რომ $A=\cup_{\theta\in(0;1)}Y_\theta$ და $B=\cup_{\theta\in(1;2)}Y_\theta$, მაშინ ფუბინის თეორემიდან ვადგენთ, რომ $\ell_2(A)=1$ და $\ell_2(B)=1$, სადაც ℓ_2 აღნიშნავს 2 -განზომილებიან ლებეგის ზომას განსაზღვრულს $(0;1)\times(0;1)$ დეკარტული კვადრატზე. ამით მიღებულია წინააღმდეგობა, რაც გამოწვეულია ჩვენი დაშვებით, რომ $(\lambda_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი არის ძლიერად განცალებადი. $(0;1)\times(0;1)$ და G სიმრავლეებს შორის ბორელის g იზომორფიზმის არსებობა იძლევა საშუალებას, რომ G ჯგუფზე განვსაზღვროთ ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახი შემდეგნაირად: $\mu_\theta(X)=\lambda_\theta(g^{-1}(X))$ როცა $X\in\mathrm{B}(G)$ და $\theta\in\Theta$. ცხადია, რომ $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის WS და არ არის SS (ექვივალენტური, CE). მიჩელსკის და Swierczkowski-ის დეტერმინირობის ცნობილი აქსიომის (AD) შედეგის (იხ, [11]) საშუალებით მტკიცდება, რომ R ღერძის ყოველი ქვესიმრავლე ზომადია ლებეგის აზრით. იგივე მაგალითი შეიძლება გამოვიყენოთ SS $\leftarrow$ WS წინადადების

კონტრმაგალითად აქსიომათა $(ZF)+(DC)+(AD)$ სისტემაში. რამდენადაც პასუხი კითხვაზე „გააჩნია თუ არა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ალბათურ ზომათა სუსტად განცალებად ოჯახს ძალდებული შეფასება?" არის **„დიახ"** აქსიომათა $(ZFC)\&(CH)$ თეორიაში და **„არა"** $(ZF)+(DC)+(AD)$ თეორიაში, ჩვენ ვასკვნით რომ ეს საკითხი ვერ გადაწყდება აქსიომათა $(ZF)+(DC)$ სისტემაში.

მაგალითი 2.6.14 $\rceil(\mathrm{OCE} \leftarrow \mathrm{CE})$ *ვთქვათ,* $\Theta = G$ *და* $\mu_\theta = \delta_\theta \,|\, \mathrm{B}(G)$ $\theta \in \Theta$ *პარამეტრისათვის, სადაც* δ_θ *აღნიშნავს* G *ჯგუფზე განსაზღვრულ დირაკის ზომას თავმოყრილს* θ *წერტილში და* $\delta_\theta \,|\, \mathrm{B}(G)$ *აღნიშნავს ამ ზომის შევიწროებას* $\mathrm{B}(G)$ *-კლასზე. ამგვარად ვღებულობთ* $(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *სტატიტიკურ სტრუქტურას. ვთქვათ,* $L(\Theta)$ *აღნიშნავს* Θ *სიმრავლის ერთელემენტიანი სიმრავლეებით წარმოქმნილ მინიმალურ* σ *-ალგებრას. ვთქვათ,* $T(g) = g$ $g \in G$ *-სთვის. ჩვენ ვღებულობთ* θ *უცნობი პარამეტრის ძალდებულ შეფასებას* $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის. მივაქციოთ ყურადღება, რომ არ არსებობს* θ *უნცობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება* $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის. მართლაც, ჩვენ თუ დაუშვებთ საწინააღმდეგოს და* T_1 *წარმოადგენს ობიექტურ ძალდებულ შეფასებას, მაშინ* $T_1^{-1}(\theta)$ *იქნება ჰაარის ემზივალენტი ყოველი* $\theta \in \Theta$ *პარამეტრისთვის. ვინაიდან* T_1 *არის უცნობი* θ *პარამეტრის ძალდებული შეფასება, ჩვენ ვღებულობთ რომ* $\mu_\theta(T_1^{-1}(\theta)) = 1$ *ყოველი* $\theta_0 \in \Theta$ *პარამეტრისთვის, რაც ნიშნავს რომ* $\theta \in T_1^{-1}(\theta)$ *ყოველი* $\theta \in \Theta$. *ვთქვათ დავაფიქსირეთ პარამეტრი* $\theta_0 \in \Theta$. *ვინაიდან* $T_1^{-1}(\theta_0)$ *არის ჰაარის ემზივალენტი, იარსებებს* $\theta_1 \in T_1^{-1}(\theta_0)$ *რომელიც განსხვავდება* θ_0 *-სგან.ჩვენ ვასკვნით, რომ* $T_1^{-1}(\theta_0)$ *და* $T_1^{-1}(\theta_1)$ *იკვეთებიან, ვინაიდან* $\theta_1 \in T_1^{-1}(\theta_0) \cap T_1^{-1}(\theta_1)$ *და მიღებულია წინააღმდეგობა.*

შენიშვნა 2.6.15 *შევნიშნოთ, რომთუ* (Θ, ρ) *არის მეტრიკული სივრცე, მაშინ განსაზღვრება 2.8-ის თანახმად,* $(\mathrm{B}(G), L(\Theta))$ *-ზომადობა უნდა შეიცვალოს* $(\mathrm{B}(G), \mathrm{B}(\Theta))$ *-ზომადობით. მაშინ იმლიკაცია* $\mathrm{SS} \rightarrow \mathrm{CE}$ *მცდარია. მართლაც, ვთქვათ* G *არის პოლონური ჯგუფიდა* $f : G \leftarrow \Theta (:= G)$ *არის*

არაზომადი (ბორელის აზრით). ყოველი $\theta \in \Theta$ -სთვის μ_θ -თი ავღნიშნოთ დირაკის $\delta_{f(\theta)}$ ზომის შევიწროება G ჯგუფის ბორელის ქვესიმრავლეების σ - ალგებრაზე. ცხადია, რომ სტატისტიკური სტრუქტურა $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ ძლიერად განცალებადია. დაუშვათ, რომ არ არსებობს ამ სტატისტიკური სტრუქტურის ძალდებული შეფასება. ვთქვათ, $T : G \to \Theta$ არის $(\mathrm{B}(G), \mathrm{B}(\Theta))$ -ზომადი ასახვა ისეთი, რომ $\mu_\theta(\{x : T(x) = \theta\}) = 1$ ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის. რამდენადაც ზომა μ_θ თავმოყრილია $f(\theta)$ წერტილში, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $f(\theta) \in \{x : T(x) = \theta\}$ ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისთვის, რაც ნიშნავს რომ $T(f(\theta)) = \theta$ ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრ-ისათვის. უკანასკნელი პირობის მარტებულობიდან გამომდინარეობს, რომ $T = f^{-1}$. რამდენადაც f არ არის $(\mathrm{B}(G), \mathrm{B}(\Theta))$ -ზომადი, ჩვენ ვასკვნით, რომ $f^{-1} = T$ ასევე არ არის $(\mathrm{B}(G), \mathrm{B}(\Theta))$ -ზომადი და ამით მიღებულია წინააღმდეგობა.

აქ ჩნდება შეკითხვა იმის თაობაზე არსებობს თუ არა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯუფზე განსაზღვრული $\{(G, \mathrm{B}, \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურა, რომელსაც გააჩნია θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება . იმისათვის, რომ პასუხი გაეცეს ამ შეკითხვას ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 2.6.16 *([24], თეორემა, გვ.206) ვთქვათ, G არის არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subseteq G$ და უწყვეტი ფუნქცია $\phi : F \to 2^N$ ისეთი, რომ ყოველი $x \in 2^N$ და ყოველი $K \subseteq G$ კომპაქტისათვის არსებობს $g \in G$, ისეთი რომ $gK \subseteq \phi^{-1}(x)$.*

ლემა 2.6.17 *([5], წინადადება 12, გვ.87). ვთქვათ, G არის არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი, აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ G -ჯგუფის ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლე (და შესაბამისად ყოველი K_σ ქვესიმრავლე) არის shy.*

შენიშვნა 2.6.18 *[19, თეორემა 4.1-ის დამტკიცება, ნაბიჯი [2]-ში იყო აგებული R^N სივრცის $\Phi=\{A_\theta:\theta\in[0,1]\}$ დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად ისე, რომ ნებისმიერი $\theta_1,\theta_2\in[0,1]$ -სთვის არსებობს R^N სივრცის ისეთი იზომეტრიული (ძვრის მიმართ ინვარიანტული ტიხონოვის მეტრიკის მიმართ) ბორელის ზომადი ბიექცია $A_{(\theta_1,\theta_2)}$, რომ სიმეტრიული სხვაობა $A_{(\theta_1,\theta_2)}(A_{\theta_1})\Delta A_{\theta_2}$ წარმოადგენს shy სიმრავლეს. ამ კონტექსტში და ლემა 2.6.16-თან მიმართებაში წარმოიშვება შეკითხვა შესაძლებელია თუ არა ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტურ პოლონური ჯგუფის მსგავსი დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად. შევნიშნოთ, რომ ამ მიმართულებით ჩვენ არ მოგვეპოვება რაიმე ინფორმაცია.*

თეორემა 2.6.19 *ვთქვათ, G არის არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი, აღჭურვილი ინვარიანტული მეტრიკით. მაშინ, არსებობს სტატისტიკური სტრუქტურა $\{(G,\mathrm{B},\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$, რომელსაც გააჩნია θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება ისეთი რომ:*

(i) $\Theta\subseteq G$ და $card(\Theta)=2^{\aleph_0}$;

(ii) μ_θ არის დირაკის ზომის შეზღუდვა θ წერტილში $\mathrm{B}(G)$ ბორელის σ -ალგებრზე ყოველი $\theta\in\Theta$ -სთვის.

დამტკიცება: ლემა 2.6.16-ის ძალით, არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F\subseteq G$ და $\phi:F\to 2^N$ უწყვეტი ფუნქცია ისეთი, რომ ყოველი $x\in 2^N$ დანებისმიერი $K\subseteq G$ კომპაქტისთვის მოიძებნება $g\in G$ რომ $gK\subseteq\phi^{-1}(x)$. ყოველი $x\in 2^N\setminus\{(0,0,\cdots)\}$ ელემენტისათვის განვსაზღვროთ:

$$\Theta=\{\theta:\theta_x=\theta\;\; X_x=\phi^{-1}(x). \tag{79}$$

ასევე, ვთქვათ $X_{(0,0,\cdots)}=\phi^{-1}((0,0,\cdots))\cup(G\setminus F)$. ამგვარად ვღებულობთ G ჯგუფის $\{X_x:x\in 2^N\}$ დახლეჩას ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეებად, რომლებიც არიან ჰაარის ემბივალნტები. ვთქვათ, $\{\theta_x:x\in 2^N\}$ არის ნებისმიერი სელექტორი. ვთქვათ, $\Theta=\{\theta:\theta_x=\theta$ რომელიმე $x\in 2^N$ ელემენტისათვის $\}$ და μ_θ იყოს θ წერტილში თავმოყრილი დირაკის ზომის

შევიწროება $\mathcal{B}(G)$ ბორელის σ -ალგებრზე ყოველი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისათვის. ამით G ჯგუფზე აგებულია სტატისტიკური სტრუქტურა $\{(G, \mathcal{B}, \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$. შევნიშნოთ, რომ $T(g) = \theta$ ნებისმიერი $g \in X_\theta$ ელემენტისათვის.

ახლა ცხადია, რომ T არის θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება $\{(G, \mathcal{B}, \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურისთვის, რითიც ნაჩვენებია (i)-(ii)პირობების მართებულობა.

თეორემა 2.6.20 *ვთქვათ, G არის ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი და μ არის ბორელის ალბათური ზომა K_0 კარიერით(ე.ი., $\mu(G \setminus K_0) = 0$). მაშინ არსებობს სტატისტიკური სტრუქტურა $\{(G, \mathcal{B}, \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ განსაზღვრული G ჯგუფზე, რომელსაც გააჩნია θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება ისეთ რომ:*

(i) $\Theta \subseteq G$ და $card(\Theta) = 2^{\aleph_0}$;

(ii) μ_θ არის μ ზომის θ -ძვრა (ე.ი. $\mu_\theta(X) = \mu(\theta^{-1}X)$ როცა $X \in \mathcal{B}(G)$ და $\theta \in \Theta$).

დამტკიცება. ლემა 2.6.16-ის ძალით, არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subseteq G$ და უწყვეტი ფუნქცია $\phi : F \to 2^N$ ისეთი, რომ ყოველი $x \in 2^N$ დაყოველი კომპაქტისთვის $K \subseteq G$ არსებობს $g \in G$ რომ $gK \subseteq \phi^{-1}(x)$. $x \in 2^N \setminus \{(0,0,\cdots)\}$ -სთვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $X_x = \varphi^{-1}(x)$. ჩვენ შემოგვაქვს ასევე აღნიშვნა: $X_{(0,0,\cdots)} = \phi^{-1}((0,0,\cdots)) \cup (G \setminus F)$. ცხადია, რომ $\{X_x : x \in 2^N\}$ არის G ჯგუფის დახლეჩა ბორელის ზომად ქვესიმრავლეებად, რომლებიც არიან ჰაარის ემბივალენტები ვინაიდან ყოველი $x \in 2^N$ დანებისმიერი კომპაქტისთვის $K \subseteq G$ არსებობს $g \in G$ ისეთი, რომ $gK \subseteq X_x$. თუ K -ს როლში განვიხილავთ K_0 სიმრავლეს, მაშინ ყოველი $x \in 2^N$ ელემენტისათვის მოიძებნება $g(K_0, x) \in G$ რომ $g(K_0, x)K_0 \subseteq X_x$. ვთქვათ, $\Theta = \{\theta : \theta = g(K_0, x) \,\&\, x \in 2^N\}$. ყოველი $\theta \in \Theta$ და $X \in \mathcal{B}(G)$ ელემენტებისატვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა: $\mu_\theta(X) = \mu(\theta^{-1}X)$. $g \in X_x$ ელემენტისთვის დაუშვათ,

რომ $T(g)=g(K_0,x)$. ვაჩვენოთ, რომ $T:G\to\Theta$ არის θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება.მართლაც, ერთის მხრივ, ყოველი $\theta\in\Theta$-სთვის.

$$\mu_\theta(T^{-1}(\theta))=\mu_{g(K_0,x)}(T^{-1}(g(K_0,x)))=\mu_{g(K_0,x)}(X_x)=\mu(g(K_0,x)^{-1}X_x)\geq$$

$$\mu(g(K_0,x)^{-1}g(K_0,x)K_0)=\mu(K_0)=1, \tag{80}$$

რაც ნიშნავს, რომ $T:G\to\Theta$ არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება. მეორეს მხრივ, ნებისმიერი $\theta=g(K_0,x)\in\Theta$ პარამეტრისთვის სიმრავლე $T^{-1}(\theta)=T^{-1}(g(K_0,x))=X_x$ არის ბორელის ზომადი სიმრავლე და ჰაარის ემზივალენტი, რაც ნიშნავს $T:G\to\Theta$ არის θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება. ცხადია, ეს ნიშნავს, რომ $\{(G,\mathrm{B},\mu_\theta):\theta\in\Theta\}$ სტატისტიკურ სტრუქტურისთვისპირობა (i)-(ii) სრულდება.

შემდეგი თეორემა გვიჩვენებს თუ რამდენადაა შესაძლებელი ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილ არალოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ჯგუფზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურისათვის ძალდებული შეფასების არსებობისას შესაბამისი ძლიერად ობიექტური შეფასების აგება.

თეორემა 2.6.21 *დავუშვათ, G არის ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი. ვთქვათ, $card(\Theta)=2^{\aleph_0}$ და $T:G\to\Theta$ არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის, ისეთი, რომ არსებობს $\theta_0\in\Theta$ რომლისთვისაც$T^{-1}(\theta_0)$ სიმრავლე არის გავრცელება. მაშინ არსებობს θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება ალბათურ ზომათა $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის.*

დამტკიცება. $\theta\in\Theta$ ელემენტისთვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა $S_\theta=T^{-1}(\theta)$. რამდენადაც S_{θ_0} არის გავრცელება, ვღებულობთ რომ

$$\cup_{\theta\in\Theta\setminus\{\theta_0\}}S_\theta=R^N\setminus S_{\theta_0} \tag{81}$$

სიმრავლე არის shy სიმრავლე.

ლემა 2.6-ით ჩვენ ვიცით, რომ μ_{θ_0} ზომა არის თავმოყრილი თვლადი რაოდენობა $\{F_k^{(\theta_0)} : k \in N\}$ კომპაქტების გაერთანებაზე. ლემა 2.6.7-ის ძალით ჩვენ ვიცით, რომ $\cup_{k\in N} F_k^{(\theta_0)}$ არის shy სიმრავლე.

ავღნიშნოთ $\widetilde{S}_\theta = S_\theta$ როცა $\theta \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$, და $\widetilde{S}_{\theta_0} = \cup_{k\in N} F_k^{(\theta_0}$. ცხადია, რომ $S = \cup_{\theta\in\Theta} \widetilde{S}_\theta$ არის shy სიმრავლე.

ლემა 2.6.16-დან გამომდინარე არსებობს ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subseteq G$ და უწყვეტი ფუნქცია $\phi : F \to 2^N$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $x \in 2^N$ -სთვის და კომპაქტისთვის $F \subseteq G$ არსებობს $g \in G$ რომ $gK \subseteq \phi^{-1}(x)$. ვთქვათ, $f : 2^N \to \Theta$ არის ნებისმიერი ბიექცია. $\theta \in \Theta$ -სთვის შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$B_\theta = (\phi^{-1}(f^{-1}(\theta)) \setminus S) \cup S_\theta. \tag{82}$$

შევნიშნოთ, რომ $(B_\theta)_{\theta\in\Theta}$ არის G ჯგუფის დახლეჩა ჰაარის ემბივალენტებად. ამის გათვალისწინებით ჩვენ ვასკვნით, რომ $T_1(g) = \theta$, როცა $g \in B_\theta (\theta \in \Theta)$. იმის გამო, რომ

$$\mu_\theta(T_1^{-1}(\theta)) = \mu_\theta(B_\theta) \geq \mu_\theta(S_\theta) = 1$$

ნებისმიერი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისთვის, ჩვენ ვასკვნით, რომ T_1 არის θ პარამეტრის ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვის. იმის გამო, რომ $T_1^{-1}(\theta)) = B_\theta$ არის ბორელის აზრით ზომადი დაჰაარის ემბივალენტი $\theta \in \Theta$ პარამეტრისთვის, თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.6.22. *ვთქვათ,* F *არის* R *ღერძზე განსაზღვრული ისეთი განაწილების ფუქნცია, რომ ინტეგრალი* $\int_R x dF(x)$ *არსებობს და არის ნულის ტოლი. დაუშვათ, რომ* p *არის* R *ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური* F *განაწილების ფუნქციით.* $\theta \in \Theta(:= R)$ *-სთვის ვთქვათ,* p_θ *არის* p *-ის ზომის* θ *-ძვრა (ე.ი.,* $p_\theta(X) = p(X - \theta)$ *ყოველი* $X \in \mathrm{B}(R)$ *) ყოველი* $\theta \in \Theta(:= R)$ *პარამეტრისთვის. ვთქვათ,* $G = R^N$ *და* $\mu_\theta = p_\theta^N$ *ყოველი* $\theta \in \Theta$ *პარამეტრისთვის, სადაც* p_θ^N *აღნიშნავს* p_θ *ზომის უსასრულო ხარისხს.*

ვთქვათ, $T((x_k)_{k\in N}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}$, *თუ* $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}$ *არსებობს, არის სასრული და განსხვავდება ნულისგან, და* $T((x_k)_{k\in N}) = 0$*, სხვა შემთხვევაში. შევნიშნოთ, რომ* $T: R^N \to \Theta$ *არის* θ *პარამეტრის ძალდებული შეფასება* $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ *ოჯახისთვის ისეთი რომ* $T^{-1}(0)$ *არის გავრცელება. მართლაც, დიდ რიცხვათა გაძლიერებული კანონის თანახმად სრულდება შემდეგი პირობა*

$$\mu_\theta(\{(x_k)_{k\in N} : \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n} = \theta\} = 1 \qquad (83)$$

ყოველი $\theta\in\Theta$ პარამეტრისთვის.

[18](ლემა 4.14, p. 60)-ის თანახმად, სიმრავლე S განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$S = \left\{(x_k)_{k\in N} \; : \; \frac{\lim_{n\to\propto}\sum_{k=1}^{n}(x_k)}{n} \quad \text{არსებობს დასასრულია}\right\} \qquad (84)$$

არის ბორელის shy სიმრავლე, რაც ნიშნავს, რომ $R^N \setminus S$ არის*გავრცელება.* იმის გამო, რომ $R^N \setminus S \subseteq T^{-1}(0)$, ჩვენ ვღებულობთ, რომ $T^{-1}(0)$ არის *გავრცელება.* რადგან $\{(R^N, \mathrm{B}(R^N), \mu_\theta) : \theta\in\Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურ-ისთვის სრულდება თეორემა 2.6.21 -ის ყველა პირობა, ჩვენ ვასკვნით, რომ არსებობს θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება $(\mu_\theta)_{\theta\in\Theta}$ ოჯახისთვისთვის.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2.4.1-ში, არალოკალურად კომპაქტურ აბელის პოლონურ R^N ჯგუფზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურისთვის აიგო უცნობი პარამეტრის ძლიერად ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება. ამასთან დაკავშირებით ჩვენ ვახდენთ შემდეგი ამოუხსნელი ამოცანის ფორმულირებას.

ამოცანა 2.6.1 *ვთქვათ,* G *არის ინვარიანტული მეტრიკით აღჭურვილი არალოკალურად კომპაქტური პოლონური ჯგუფი. არსებობს თუ არა ისეთი სტატისტიკური სტრუქტურა* $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta\in\Theta\}$, *რომლისთვისაც*

$card(\Theta) = 2^{\aleph_0}$ *და არსებობს θ პარამეტრის ძლიერად ობიექტური ძალდ-ებული შეფასება?*

2.7 კომპაქტურ პოლონურ $\{0,1\}^N$ ჯგუფში უცნობი პარამეტრის ობიექტური და ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასებების შესახებ

ვთქვათ $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ არის უსასრულო შერჩევა, რომელიც მიღებული მონეტის უსასრულოდ აგდებით. მაშინ ამ ექსპერიმენტის აღმწერ სტატისტიკურ სტრუქტურას აქვს შემდეგი სახე:

$$\{(\{0,1\}^N, B(\{0,1\}^N), \mu_\theta^N) : \theta \in (0,1)\} \tag{85}$$

სადაც $\mu_\theta(\{1\}) = \theta$ და $\mu_\theta(\{0\}) = 1-\theta$. დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ძალით ჩვენ გვაქვს:

$$\mu_\theta^N(\{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in \{0,1\}^N \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \theta\}) = 1 \tag{86}$$

ნებისმიერი $\theta \in (0,1)$ პარამეტრისთვის.

შევნიშნოთ, რომყოველი $k \in N$ ნატურალური რიცხვისთვის, $G_k = \{0,1\}$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც კომპაქტური ჯგუფიშეკრების ოპერაციით $(\operatorname{mod} 2)$. ამიტომ ყველა შერჩევის სივრცე $G := \{0,1\}^N$ შეიძლება წამოვიდგინოთ როგორც კომპაქტური ჯგუფების უსასრულო ნამრავლი $\{G_k : k \in N\}$, ე.ი. $G = \prod_{k\in N} G_k$. ამასთან, G ჯგუფი აღჭურვილია ინვარიანტული ρ მეტრიკით, რომელიც განისაზღვრება

$$\rho((x_k)_{k\in N}, (y_k)_{k\in N}) = \sum_{k\in N} \frac{|x_k - y_k (\operatorname{mod} 2)|}{2^{k+1}(1+|x_k - y_k(\operatorname{mod} 2)|)}$$

ფორმულით ნებისმიერი $(x_k)_{k\in N}, (y_k)_{k\in N} \in G$ ელემენტებისათვის. ცხადია, რომ λ_k ზომა, განსაზღვრული G_k ჯგუფზე $\lambda_k(\{0\}) = \lambda_k(\{1\}) = 1/2$ პირობით, არის ჰაარის ალბათური ზომა G_k ჯგუფზე ყოველი $k \in N$ რიცხვისთვის და $\lambda = \prod_{k\in N} \lambda_k$ არის ჰაარის ალბათური ზომა G ჯგუფზე, რომლისთვისაც მართებულია $\lambda = \mu_{0,5}^N$ ტოლობა.

(2.7.2)-ის ძალითჩვენ ვღებულობთ, რომ სიმრავლე

$$A(0,5) = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in \{0,1\}^N \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 0,5\} \tag{87}$$

არის გავრცელება. ვინაიდან $A(\theta) \subset G \setminus A(0,5)$ ყოველი $\theta \in (0;1) \setminus \{1/2\}$ პარამეტრისათვის, ჩვენ ვღებულობთ, რომ ყოველი

$$A(\theta) = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in \{0,1\}^N \ \& \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = \theta\}, \qquad (88)$$

როცა $\theta \in (0;1) \setminus \{1/2\}$, არის ისინი shy (რაც იგივეა - ჰაარის ზომის მიმართ ნული ზომის სიმრავლე). [7]-ის ტერმინებში, ეს ფაქტი ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 2.7.1. *"თითქმის ყველა " $(x_k)_{k\in N} \in \{0,1\}^N$ მიმდევრობისთვის, მათი ჩეზაროს საშუალოების $(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n})_{n\in N}$ მიმდევრობა კრებადია $0,5$ -კენ, როცა n მიისწრაფვის ∞ -სკენ.*

დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონით გვაქვს შემდეგი.

თეორემა 2.7.2 *ვთქვათ, $\theta_0 \in (0,1)$. ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in G$ მიმდევრობისთვის ავაგოთ სტატისტიკა შემდეგნაირად: $T((x_k)_{k\in N}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$, თუ ეს ზღვარი არსებობს და განსხვავდება θ_0 -სგან, და $T((x_k)_{k\in N}) = \theta_0$, დანარჩენ შემთხვევაში . მაშინ T არის θ უცნობი პარამეტრის უსასრულო ძალდებული შეფასება $\{(G, B(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურისათვის .*

შენიშვნა 2.7.3 *განსაზღვრა 6.9-ის ძალით, შეფასება T არის სუბიექტური , რადგან $T^{-1}(1/2)$ არის გავრცელება. განსხვავებით თეორემა 6.21-სგან, ნებისმიერი $\{(G, B(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta\}$ სტატისტიკური სტრუქტურისთვის არ არსებობს უცნობი θ პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება, როცა $card(\Theta) > \aleph_0$, სადაც $\aleph_0$ აღნიშნავს ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს. მართლაც, დაუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, T_1 არის ასეთი შეფასება. მაშინ ჩვენ მივიღებთ G კომპაქტური ჯგუფის $\{T_1^{-1}(\theta) : \theta \in \Theta\}$ დახლეჩას ჰაარის ემზივალენტებად.იმის გამო, რომ ჰაარის ემზივალენტებს აქვს დადებითი λ ზომა, ჩვენ ვღებულობთ რომ ჰაარის ალბათური λ ზომისთვის სუსლინის პირობა არ სრულდება, მაშინ როცა G ჯგუფის*

ნებისმიერი ბორელის აზრით ზომადი თანაუკვეთი λ *დადებითზომიანი სიმრავლეების ოჯახის სიმძლავრე არაუმეტეს თვლადია.*

შენიშვნა 2.7.4 *ვთქვათ, გვაქვს ასახვა* $F: G \to [0,1]$ *განსაზღვრული პირობით :* $F((x_k)_{k \in N}) = \sum_{k \in N} \frac{x_k}{2^k}$ *, როცა* $(x_k)_{k \in N} \in G$ *. ეს არის ისეთ ბორელის იზომორფიზმი* G *და* $[0,1]$ *სიმრავლეებს შორის, რომ ტოლობა* $\lambda(X) = \ell_1(F(X))$ *მართებულია ყოველი* $X \in \mathrm{B}(G)$ *ელემენტისთვის. ბოლო თანაფარდობის გამო, ყოველი ნატურალური* m *რიცხვისთვის არსებობს* G *ჯგუფის ისეთი* $\{X_k : 1 \le k \le m\}$ *დახლეჩა ჰაარის ემზივალენტებად, რომ ყოველი* $1 \le i \le j \le m$ *-სთვის არსებობს ისეთი ბორელის აზრით ზომადი ბიექცია* $f_{(i,j)} : G \to G$ *, რომ სიმეტრიული სხვაობა* $f_{(i,j)}(X_i) \Delta X_j$ *არის shy, რაც იგივეა რომ ამ სიმეტრიული სხვაობის* λ *-ზომა ნულის ტოლია.*

თეორემა 2.6.21-ში მოყვანილი სქემით შეიძლება დადგინდეს შემდეგი თეორემების მართებულობა.

თეორემა 2.7.5. *ვთქვათ,* Θ_1 *არის* Θ *-ს ისეთი ქვესიმრავლე, რომ* $card(\Theta) \ge 2$ *. მაშინ* $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta_1\}$ *სტატისტიკურ სტრუქტურას გააჩნია უცნობი* θ *პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $card(\Theta_1) \le \aleph_0$ *და* $1/2 \notin \Theta_1$ *.*

თეორემა 2.7.6 *ვთქვათ,* Θ_1 *არის* Θ *-ს ისეთი ქვესიმრავლე, რომ* $card(\Theta) \ge 2$ *. მაშინ* $\{(G, \mathrm{B}(G), \mu_\theta) : \theta \in \Theta_2\}$ *სტატისტიკურ სტრუქტურას გააჩნია უცნობი* θ *პარამეტრის ძლიერად ობიექტური ძალდებული შეფასება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $card(\Theta_2) < \aleph_0$ *და* $1/2 \notin \Theta_2$ *.*

თავი III. ლებეგის ინტეგრალის გამოთვლა უნიმორფულად განაწილებული მიმდევრობების საშუალებით

კოლმოგოროვის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გარკვეული მოდიფიცირების გამოყენებით მიღებულია ბახას და შოისენგერის (2002) შედეგის გაძლიერება $(0,1)$ - ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების მაქსიმალურ ქვესიმრავლეზე, რომელიც მკაცრად მოიცავს ყველა $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ სახის მიმდევრობებს, სადაც α ირაციონალური რიცხვია. ამასთან ამ კლასის ℓ_1^∞ ზომა 1–ის ტოლია, სადაც ℓ_1^∞ არის $(0,1)$ - ინტერვალზე განსაზღვრული წრფივი ლებეგის ℓ_1 ზომის უსასრულო ხარისხი.

$[0,1]$ -ინტერვალზე უნიმოფრულად განაწილებული მიმდევრობების თვისების გამოყენებით, 1916 წელს გერმან ვეილის მიერ პირველად იქნა შემუშავებული საინტერესო მიდგომა რიმანის ერთჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად $[0,1]$-ინტერვალზე, რომელიც ყალიბდება შემდეგნაირად:

თეორემა 3.1 *([10] , შედეგი 1.1, p. 3) ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა* $(x_n)_{n\in N}\in[0,1]^\infty$ *არის უნიფორმულად განაწილებული* $[0,1]$ *-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ* $[0,1]$ *-ზე რიმანის აზრით ინტეგრებადი ყოველი ნამდვილ–მნიშვნელობიანი* f *ფუნქციისთვის*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} f(x_n)}{N}=\int_0^1 f(x)dx. \qquad (89)$$

ამ თეორემის ძირითადი შედეგები წარმატებულად იქნა გამოყენებული დიოფანტური მიახლოებების შესწავლისას და მონტე-კარლოს ინტეგრების დროს (იხ. მაგალითები [10],[37]). ბოლო ათწლეულების მანძილზე აქტიურად გამოიყენება უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების მეთოდი რიმანის არასაკუთრივი ინტეგრალის გამოსათვლელად. (იხ, მაგალითები, [38], [39]).

შევნიშნოთ, რომ თუ $[0,1]$-ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების S სიმრავლეს განვიხილავთ როგორც $[0,1]^{\infty}$ -სიმრავლის ქვესიმრავლეს, მაშინ მას გააჩნია სრული ℓ_1^{∞} -ზომა, სადაც ℓ_1^{∞} არის $[0,1]$-ინტერვალზე განსაზღვრული ლებეგის წრფივი ℓ_1 ზომის უსასრულო ხარისხი. ამრიგად, S სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება გამოვიყენოთ რიმანის ერთჯერადი ინტეგრალის გამოსათვლელად $[0,1]$-ინტერვალზე განსაზღვრული რიმანის აზრით ინტეგრებადი ნამდვილ–მნიშვნელობიანი f ფუნქციიდან. შესაბამისად, $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციისთვის იბადება შემდეგი შეკითხვა:

შეკითხვა 1 . *როგორ დავახასიათოთ S -სიმრავლის მაქსიმალური ქვესიმრავლე S_f , რომლის ყოველი ელემენტი გამოყენებადია $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ინტეგრებადი f ფუნქციისთვის ლებეგის ინტეგრალის (1) ფორმულით გამოსათვლელად და მართებულია თუ არა ტოლობა $\ell_1^{\infty}(S_f)=1$?*

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ ორ ამოცანას:

ამოცანა 3.1 - შეკითხვა 1 -ის გამოკვლევა კოლმოგოროვის გაძლიერებული დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებით.

ამოცანა 3.2. როგორ არის შესაძლებელი ბახას და შოისენგერის შემდეგი გაძლიერება.

თეორემა 3.2 *([39], თეორემა 1, გვ. 271) ვთქვათ, α არის ირაციონლური რიცხვი, $\mathbf{Q}$ არის ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და $F \subseteq [0,1] \cap \mathbf{Q}$ სასრულია. ვთქვათ, $f:[0,1] \to R$ არის ინტეგრებადი, თითქმის ყველგან უწყვეტი და ლოკალურად შემოსაზღვრული $[0,1] \setminus F$ სიმრავლეზე. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი $\beta \in F$ -სთვის არსებობს ისეთი U მიდამო რომ f ან შემოსაზღვრულია ან მონოტონურია $[0,\beta) \cap U$ -ზე და $(\beta,1] \cap U$ -ზე. მაშინ შემდეგი პირობები ექვივალენტურია:*

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(\{k\alpha\})}{n} = 0$;

2. $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\{k\alpha\})$ არსებობს;

3. $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\{k\alpha\}) = \int_{(0,1)} f(x)dx$,

სადაც $\{\cdot\}$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის წილად ნაწილს.

გაძლირება? უფრო ზუსტად, ჩვენ ვაპირებთ გავაძლიეროთ თეორემის შედეგი მაქსიმალური $D_f \subset S$ და $E_f \subseteq (0,1)^{\infty}$ სიმრავლეებისათვის, ისე რომ ისინი მკაცრად მოიცავდნენ $(\{\alpha n\})_{n\in N}$ მიმდევრობების S^* სიმრავლეს, სადაც α არის ირაციონალური რიცხვი და გამოვითვალოთ $D_f \subset S$ და E_f სიმრავლეების ℓ_1^{∞} ზომები.

დამხმარე ცნებები/მეთოდები

განსაზღვრება 3.1. *ნამდვილ რიცხვთა* $s_1, s_2, s_3, \cdots$ *მიმდევრობას* $[0,1]$ -*დან ეწოდება უნიფორმულად განაწილებული* $[0,1]$ -*ზე , თუ* $[0,1]$ -*ის ყოველი* $[c,d]$ -*ქვესიმრავლესთვის სამართლიანია ტოლობა*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\#(\{s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n\}\cap[c,d])}{n} = d - c, \tag{90}$$

სადაც $\#$ აღნიშნავს მთვლელ ზომას.

მაგალითი 3.1. *([10], სავარჯიშო 1.12, გვ. 16) ყოველი ირაციონალური* α *რიცხვისთვის შემდეგი მიმდევრობა*

$$0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}\cdots \tag{91}$$

არის უნიფორმულად განაწილებული $(0,1)$ -ზე, სადაც $\{\cdot\}$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის წილად ნაწილს.

ლემა 3.1 *([10] თეორემა 2.2, გვ.183) ვთქვათ,* S *არის ყველა* $[0,1]$ *ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული მიმდევრობების სივრცე. მაშინ* $\ell_1^{\infty}(S) = 1$.

ლემა **3.2** *(კოლმოგოროვ-ხინჩინი ([40], თეორემა 1, გვ.371) ვთქვათ,* (X, S, μ) *არის ალბათური სივრცე და ვთქვათ,* $(\xi_n)_{n \in N}$ *არის დამოუ-კიდებელი შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი მიმდევრობა, რომ* $\int_X \xi_n(x) d\mu(x) = 0$. *თუ* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \xi_n^2(x) d\mu(x) < \infty$, *მაშინ მწკრივი* $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *კრებადია ალბათობით* 1.

ლემა **3.3** *(ტეპლიცის ლემა) ([40], ლემა 1, გვ. 377) ვთქვათ,* $(a_n)_{n \in N}$ *არის არაუარყო–ფითი რიცხვების მიმდევრობა,* $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, b_n > 0$ *ყოველი* $n \geq 1$ *რიცხვისთვის და* $b_n \uparrow \infty$, *როცა* $n \to \infty$. *ვთქვათ,* $(x_n)_{n \in N}$ *არის ნამდვილი რიცხვების ისეთი მიმდევრობა, რომ* $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. *მაშინ*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = x. \tag{92}$$

კერძოდ , თუ $a_n = 1$ ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისთვის, მაშინ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = x. \tag{93}$$

ლემა **3.4** *(კრონეკერის ლემა) ([40], ლემა 2, გვ.378) ვთქვათ,* $(b_n)_{n \in N}$ *არის არის დადებით რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ* $b_n \uparrow \infty$, *როცა* $n \to \infty$, *და ვთქვათ,* $(x_n)_{n \in N}$ *არის ნამდვილ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ მწკრივი* $\sum_{k \in N} x_k$ *კრებადია. მაშინ*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0. \tag{94}$$

კერძოდ, თუ $b_n = 0$, $x_n = \frac{y_n}{n}$ და მწკრივი $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}$ კრებადია, მაშინ

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k}{n} = 0. \tag{95}$$

ქვემოთ მოგვყავს კოლმოგოროვის დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის გარკვეული მოდიფიცირების მტკიცებულება (იხ. [40],თეორემა 3, p.379).

ლემა **3.5** . *ვთქვათ,* (X, F, μ) *არის ალბათური სივრცე და და ვთქვათ,* $L(X)$ *არის* X *-ზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ზომადი ნამდვილი ფუნქციების კლასი. ვთქვათ,* μ^{∞} *არის* μ *ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი. მაშინ ყოველი* $f \in L(X)$ *ელემენტისთვის სრულდება ტოლობა* $\mu^{\infty}(A_f) = 1$*, სადაც* A_f *განსაზღვრულია შემდეგნაირად*

$$A_f = \{(x_k)_{k \in N} : (x_k)_{k \in N} \in X^{\infty} \ \& \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_X f(x) dx\}. \quad (96)$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f არის არაუარყოფითი. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\xi_k((x_i)_{i \in N}) = f(x_k)$ ყოველი $k \in N$ რიცხვისა და $(x_i)_{i \in N} \in X^{\infty}$ მიმდევრობისთვის. ასევე შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\eta_k((x_i)_{i \in N})$$
$$= \frac{1}{k}[\xi_k((x_i)_{i \in N}) \chi_{\{\omega : \xi_k(\omega) < k\}}((x_i)_{i \in N}) - \int_{X^{\infty}} \xi_k((z_i)_{i \in N}) \chi_{\{\omega : \xi_k(\omega) < k\}}((z_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((z_i)_{i \in N})] \quad (97)$$

ყოველი $(x_i)_{i \in N} \in X^{\infty}$ მიმდევრობისთვის.

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ $(\eta_k)_{k \in N}$ არის შემთხვევით სიდიდეების ისეთი მიმდევრობა, რომ $\int_{X^{\infty}} \eta_k d\mu^{\infty} = 0$.

გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{X^{\infty}} \eta_n^2((x_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((x_i)_{i \in N})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{X^{\infty}} \xi_n^2((x_i)_{i \in N}) \chi_{\{(y_i)_{i \in N} : \xi_n((y_i)_{i \in N}) < n\}}((x_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((x_i)_{i \in N})$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\int_{X^{\infty}} \xi_n((x_i)_{i \in N}) \chi_{\{(y_i)_{i \in N} : \xi_n((y_i)_{i \in N}) < n\}}((x_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((x_i)_{i \in N}))^2$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{X^{\infty}} f(x_n)^2 \chi_{\{(y_i)_{i \in N} : f(y_n) < n\}}((x_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((x_i)_{i \in N})$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\int_{X^{\infty}} f(x_n) \chi_{\{(y_i)_{i \in N} : f(y_n) < n\}}((x_i)_{i \in N}) d\mu^{\infty}((x_i)_{i \in N}))^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_X f^2(x) \chi_{\{\omega : f(\omega) < n\}}(x) d\mu(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\int_X f(x) \chi_{\{\omega : f(\omega) < n\}}(x) d\mu(x))^2$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_X f^2(x) \chi_{\{\omega: f(\omega)<n\}}(x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_X f^2(x) \chi_{\{\omega: k-1 \leq f(\omega)<k\}}(x) d\mu(x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f^2(x) \chi_{\{\omega: k-1 \leq f(\omega)<k\}}(x) d\mu((x)) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_X f^2(x) \chi_{\{\omega: k-1 \leq f(\omega)<k\}}(x) d\mu(x)$$

$$\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f(x) \chi_{\{\omega: k-1 \leq f(\omega)<k\}}(x) d\mu((x)) = 2 \int_X f(x) d\mu(x). \qquad (98)$$

რამდენადაც

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \eta_n^2((x_i)_{i\in N}) d\mu((x_i)_{i\in N}) < +\infty, \qquad (99)$$

ლემა 2-ის ძალით ვღებულობთ

$$\mu\{(x_i)_{i\in N} : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [f(x_k) \chi_{\{(y_i)_{i\in N} : f(y_k)<k\}}((x_i)_{i\in N})$$

$$- \int_{X^\infty} \xi_k((z_i)_{i\in N}) \chi_{\{(y_i)_{i\in N} : f(y_k)<k\}}((z_i)_{i\in N}) d\mu^\infty((z_i)_{i\in N})] \} = 1. \qquad (100)$$

კრებადია. ახლა ლემა 3.4-თ ვღებულობთ

$$\mu^\infty\{(x_i)_{i\in N} : \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) \chi_{\{(y_i)_{i\in N} : f(y_k)<k\}}((x_i)_{i\in N})$$

$$- \int_{X^\infty} \xi_k((z_i)_{i\in N}) \chi_{\{(y_i)_{i\in N} : f(y_k)<k\}}((z_i)_{i\in N}) d\mu^\infty((z_i)_{i\in N})] = 0 \} = 1. \qquad (101)$$

მივაქციოთ ყურადღება

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^\infty(\{(x_i)_{i\in N} : \xi_1((x_i)_{i\in N}) \geq n\})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k\geq n} \mu^\infty\{(x_i)_{i\in N} : k \leq \xi_1((x_i)_{i\in N}) < k+1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \mu^\infty\{(x_i)_{i\in N} : k \leq \xi_1((x_i)_{i\in N}) < k+1\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{X^\infty} k \chi_{\{(y_j)_{j\in N} : k \leq \xi_1((y_i)_{i\in N}) < k+1\}}((z_i)_{i\in N}) d\mu^\infty((z_i)_{i\in N})$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{X^\infty} \xi_1((z_i)_{i\in N}) \chi_{\{(y_j)_{j\in N} : k \leq \xi_1((y_j)_{j\in N}) < k+1\}}((z_i)_{i\in N}) d\mu^\infty((z_i)_{i\in N})$$

$$= \int_{X^\infty} \xi_1((z_i)_{i\in N}) d\mu^\infty((z_i)_{i\in N}) < +\infty. \qquad (102)$$

რამდენადაც $(\xi_k)_{k\in N}$ არის ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები X^{∞}-ზე, გვაქვს

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{\infty}(\{(x_i)_{i\in N}:\xi_k((x_i)_{i\in N})\geq n\})\leq\int_{X^{\infty}}\xi_1((x_i)_{i\in N})d\mu^{\infty}((x_i)_{i\in N})<+\infty, \quad (103)$$

ბორელ-კანტელის კარგად ცნობილი თეორემის ძალით

$$\mu^{\infty}(\{(x_i)_{i\in N}:\xi_n((x_i)_{i\in N})\geq n\}\ i.o.)=0. \quad (104)$$

ბოლო გამოსახულება ნიშნავს, რომ

$$\mu^{\infty}(\{(x_i)_{i\in N}:(\exists N((x_i)_{i\in N}))(\forall n\geq N((x_i)_{i\in N})\rightarrow\xi_n((x_i)_{i\in N})<n\})=1. \quad (105)$$

ამრიგად მივიღეთ შემდეგი $\mu^{\infty}(A_f^*)=1$ ტოლობის მართებულობა, სადაც

$$A_f^*=\{(x_i)_{i\in N}:\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[f(x_k)\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((x_i)_{i\in N})$$
$$-\int_{X^{\infty}}\xi_k((z_i)_{i\in N})\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((z_i)_{i\in N})d\mu^{\infty}((z_i)_{i\in N})]=0$$
$$\&\,(\exists N((x_i)_{i\in N}))(\forall n>N((x_i)_{i\in N})\rightarrow\xi_n((x_i)_{i\in N})<n)\}. \quad (106)$$

ახლა უკვე ცხადია, რომ ყოველი $(x_i)_{i\in N}\in A_f^*$ მიმდევრობისთვის შესრულდება პირობა

$$0=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[f(x_k)\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((x_i)_{i\in N})$$
$$-\int_{X^{\infty}}\xi_k((z_i)_{i\in N})\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((z_i)_{i\in N})d\mu^{\infty}((z_i)_{i\in N})]$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=N((x_i)_{i\in N})}^{N}[f(x_k)\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((x_i)_{i\in N})$$
$$-\int_{X^{\infty}}\xi_k((z_i)_{i\in N})\chi_{\{(y_i)_{i\in N}:f(y_k)<k\}}((z_i)_{i\in N})d\mu^{\infty}((z_i)_{i\in N})]$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=N((x_i)_{i\in N})}^{N}[f(x_k)-\int_X f(x)\chi_{\{y:f(y)<k\}}(x)d\mu(x)]$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[f(x_k)-\int_X f(x)\chi_{\{y:f(y)<k\}}(x)d\mu(x)]. \quad (107)$$

რამდენადაც

$$\lim_{k\to\infty}\int_X f(x)\chi_{\{y:f(y)<k\}}(x)d\mu(x)=\int_X f(x)d\mu(x), \quad (108)$$

ლემა 3-ის ძალით მივიღებთ

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\int_X f(x)\chi_{\{y:f(y)<k\}}(x)d\mu(x)=\int_X f(x)d\mu(x) \quad (109)$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)=\int_X f(x)d\mu(x) \quad (110)$$

ტოლობის მართებულობა ყოველი $(x_i)_{i\in N}\in A_f^*$ მიმდევრობისათვის.

ჩართვა $A_f^*\subseteq A_f$ ამტკიცებს ლემა 3.5-ს.

მე-3 თავის ძირითადი შედეგები და მათი მიმოხილვა

ლემა 3.1 და ლემა 3.5-ის გამოყენებით ვღებულობთ

თეორემა 3.3 *ვთქვათ, f არის* $(0,1)$ *ინტერვალზე განსაზღვრული ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ნამდვილი ფუნქცია. მაშინ გვაქვს:*

$$\ell_1^\infty(\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in[0,1]^\infty \ \&\ (x_k)_{k\in N} \text{ არის უნიფრომული } (0,1)\text{-ზე}\}$$

$$\&\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)=\int_0^1 f(x)dx\})=1. \quad (111)$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ რომ

$\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in[0,1]^\infty$

$\&\ (x_k)_{k\in N}$ არის უნიფორმული

$$(0,1)\text{-ზე}\ \&\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)=\int_0^1 f(x)dx\}=S\cap A_f, \quad (112)$$

სადაც S განსაზღვრულია ლემა 1-ით და A_f განსაზღვრულია ლემა 3.5-ით, როცა $(X,F,\mu)=((0,1),\mathbf{B}(0,1),\ell_1)$.

შემდეგი დებულება შეიცავს პასუხს პირველ შეკითხვაზე.

თეორემა 3.4. $S_f=A_f\cap S$ *სიმრავლე არის* S *–ის მაქსიმალური ქვესიმრავლე, რომლის ყოველი ელემენტი შესაძლებელია გამოყენებულ*

იქნას ლებეგის ინტეგრალის გამოსათვლელად ფორმულა 89-ით. ამასთან $\ell_1^\infty(S_f)=1$.

შენიშვნა **3.1.** *ვთქვათ,* $f:(0,1)\to R$ *არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ გვაქვს* $A_f \subseteq B_f$, *სადაც*

$$B_f=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in(0,1)^\infty \ \& \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k) \text{ არსებობს } \}.$$

შენიშვნა 3.2. *ვთქვათ,* $f:(0,1)\to R$ *არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ გვაქვს* $B_f\subseteq C_f$, *სადაც*

$$C_f=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in(0,1)^\infty \ \& \lim_{N\to\infty}\frac{f(x_N)}{N}=0\}. \tag{113}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}\in B_f$. მაშინ მივიღებთ

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{f(x_N)}{N}&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\Big(\sum_{k=1}^{N}f(x_k)-\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)-\lim_{N-1\to\infty}\frac{N-1}{N}\Big(\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)\Big)\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)-\lim_{N-1\to\infty}\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1}f(x_k)=0.\end{aligned} \tag{114}$$

შენიშვნა 3. *შევნიშნოთ, რომ ყოველი* $f:(0,1)\to R$ *ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციისთვის მართებულია შემდეგი* $S\cap A_f\subseteq S\cap C_f$ *ჩართვა. შებრუნებული ჩართვა ყოველთვის არაა სამართიანი. მართლაც, ვთქვათ,* $(x_k)_{k\in N}$ *არის (0 ,1) ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობა. მაშინ ფუნქცია* $f:(0,1)\to \mathbf{R}$, *განსაზღვრული შემდეგნაირად* $f(x)=\chi_{(0,1)\setminus\{x_k:k\in N\}}(x)$ *ყოველი* $x\in(0,1)$ *ელემენტისთვის(აქ* $\chi_{(0,1)\setminus\{x_k:k\in N\}}(x)$ *აღნიშნავს* $(0,1)\setminus\{x_k:k\in N\}$ *სიმრავლის ინდიკატორ ფუქნციას) არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი,* $(x_k)_{k\in N}\in C_f\cap S$ *მაგრამ* $(x_k)_{k\in N}\notin A_f\cap S$ *ვინაიდან*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)=0\neq 1=\int_{(0,1)}f(x)dx. \tag{115}$$

თეორემა 3.5. *ვთქვათ,* $f:(0,1)\to R$ *არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია. ვთქვათ,* D_f *არის* $(0,1)$ *ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული ყველა იმ მიმდევრობების სიმრავლე, რომელთათვისაც შემდევი სამი პირობა*

1. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{n}=0$;
2. $\lim_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)$ არსებობს;
3. $\lim_{N\to\infty}\dfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_k)=\int_{(0,1)}f(x)dx$;

ექვივალენტურია. მაშინ D_f სიმრავლეს გააჩნია სრული ℓ_1^{∞}-ზომა და

$$D_f=(A_f\cap S)\cup(S\setminus C_f),$$

სადაც S განსაზღვრულია ლემა 1-ით, A_f განსაზღვრულია ლემა 3.5-ით როცა $(X,F,\mu)=((0,1),\mathbf{B}(0,1),\ell_1)$ და C_f განსაზღვრულია შენიშვნა 3.2-ით.

დამტკიცება. ლემა 3.1-ის ძალით ჩვენ ვცით, რომ $\ell_1^{\infty}(S)=1$. $(X,F,\mu)=((0,1),\mathbf{B}((0,1)),\ell_1)$ ტოლობის შემთხვევაში ლემა 3.5-ის ძალით ჩვენ ვიცით, რომ $\ell_1^{\infty}(A_f)=1$. შენიშვნა 3.1 და შენიშვნა 3.2 -ის გათვალისწინებით გვაქვს $A_f\subseteq B_f\subseteq C_f$. $S_f=A_f\cap B_f\cap C_f\cap S=A_f\cap S$ ტოლობის მართებულობიდან ვღებულობთ

$$\ell_1^{\infty}(S_f)=\ell_1^{\infty}(A_f\cap S)=1. \tag{116}$$

$S_f\subseteq D_f$ ჩართვის მართებულობა ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

დასკვნა 3.1. *ვთქვათ,* $\mathbf{Q}$ *არის* $[0,1]$*-ინტერვალის ყველა ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე და* $F\subseteq[0,1]\cap\mathbf{Q}$ *სასრულია. ვთქვათ,* $f:[0,1]\to R$ *არის ლებეგის აზრით ინტეგრებადი,* ℓ_1 *-თითქმის ყველგან უწყვეტი და ლოკალურად შემოსაზღვრული* $[0,1]\setminus F$ *სიმრავლეზე. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი* $\beta\in F$ *-სთვის არსებობს* β *-ს ისეთი მიდამო* U_β*, რომ* f *არ არის შემოსაზღვრული და არის მონოტონური* $[0,\beta)\cap U_\beta$ *და* $(\beta,1]\cap U_\beta$ *-ზე . ვთქვათ,* S,A_f *და* C_f *განსაზღვრულია ლემა 1-ით, ლემა 5–ით (როცა* $(X,F,\mu)=((0,1),\mathbf{B}(0,1),\ell_1)$ *) და შენიშვნა 2–ით, შესაბამისად. ვთქვათ,*

$$D_f = (A_f \cap S) \cup (S \setminus C_f).$$

მაშინ ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in D_f$ მიმდევრობისთვის შემდეგი პირობები ექვივალენტურია:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{n} = 0$;
2. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k)$ არსებობს;
3. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) = \int_{(0,1)} f(x)dx$.

დასკვნა 3.2. მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ D_f არის S -ის მაქსიმალური ქვესიმრავლე რომელთათვისაც 1 - 3 პირობები ექვივალე-ნტურია ანუ ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in D_f$ -სთვის 1-3 პირობები ერთდროულად არის ჭეშმარიტი ან მცდარი. ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in S \setminus D_f$ -სთვის მიმდევრობისთვის 1 - 3 პირობები არ არის ერთდროულად ჭეშმარიტი ან მცდარი. ეს უკანასკნელი აშლიერებს ბახას და შოიზენგერის შედეგებს [39] იმის გამო რომ $(\{n\alpha\})_{n\in N}$ სახის მიმდევრობების S^* კლასი არის D_f –ს ქვესიმრავლე ყოველი ირაციონალური α რიცხვისთვის, და D_f -ს ყოველი ელემენტი შეუძლებელია წარმოდგინდეს იმავე ფორმით. მაგალითად,

$$(\{(n+1/2(1-\chi_{\{k:k\geq 2\}}(n)))\pi^{\chi_{\{k:k\geq 2\}}(n)}\})_{n\in N} \in D_f \setminus S^*, \tag{117}$$

სადაც $\{\cdot\}$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის წილად ნაწილს და $\chi_{\{k:k\geq 2\}}$ აღნიშნავს $\{k : k \geq 2\}$ სიმრავლის ინდიკატორ ფუქნციასა.

ანალოგიურად, შემდეგი სიმრავლე

$$E_f = A_f \cup (((0,1)^{\infty} \setminus A_f) \cap ((0,1)^{\infty} \setminus B_f) \cap ((0,1)^{\infty} \setminus C_f)) = A_f \cup ((0,1)^{\infty} \setminus C_f), \tag{2.31}$$

წარმოადგენს $(0,1)^{\infty}$ -ის მაქსიმალურ ქვესიმრავლეს, რომელთათვისაც 1 - 3 პირობები ექვივალენტურია, რაც იმას ნიშნავს რომ ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in E_f$ მიმდევრობისათვის 1-3 წინადადებები ერთდროულად იქნება ჭეშმარიტი ან

მცდარი, და ყოველი $(x_k)_{k\in N} \in (0,1)^{\infty} \setminus E_f$ მიმდევრობისთვის 1-3 წინადადებები ერთდროულად ვერ იქნება ჭეშმარიტი ან მცდარი.

აღსანიშნავია, რომ ორივე სიმრავლეს D_f და E_f გააჩნია სრული ℓ_1^{∞} ზომა.

თავი IV. მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომისა და ბორელის უსასრულო დიფუზიურ ალბათური ზომის შესახებ R-ზე

ამ თავში შესწავლილია მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი. უფრო ზუსტად, ჩვენ მოგვყავს დამტკიცება იმ ფაქტის, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული არცერთი მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომის უსასრულო ხარისხი არ არის ექვივალენტური მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის. იამასაკის კონსტრუქციის გარკვეული მოდიფიკაცია გამოიყენება ისეთი მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის ასაგებად, რომელიც ექვივალენტურია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ნამრავლის. ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე ექვი–განაწილებულ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების თვისებების გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად დადებითი სიმკვრივის მქონე ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხების ნებისმიერი ოჯახი ძლიერად განცალებადია და შესაბამისად გააჩნია უცნობი განაწილების უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასება. ეს აძლიერებს ძირითად შედეგს, მიღებულს ნაშრომში [Ukrainian Math. J. -2013.- **6**5 (4).- P. 470–485]. გლივენკო - კანტელის თეორემის გამოყენებით მიღებულია ამ შედეგის გაძლიერება ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხების ნებისმიერი ოჯახისათვის.

ვთქვათ μ და ν არის (X,M) ზომად სივრცეზე განსაზღვრული არატრივიალური σ-სასრული ზომები.

μ და ν ზომებს ეწოდება ორთოგონალური თუ არსებობს ისეთი ზომადი $E \in M$ სიმრავლე, რომ $\mu(E) = 0$ და $\nu(X \setminus E) = 0$. μ და ν ზომებს ეწოდებათ ექვივალენტური მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ სრულდება შემდეგი:

$$(\forall E)(E \in M \to (\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \nu(E) = 0))$$

ცნობილია, რომ შემდეგი ფაქტები სამართლიანია n -განზომილებიანი ევკლიდური ვექტორული R^n $(n \in N)$ სივრცისთვის :

ფაქტი 4.1 ვთქვათ, μ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციით და λ_n არის ლებეგის ზომა განსაზღვრული n -განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ R^n სივრცეზე. მაშინ μ^n და λ_n ზომები არიან ექვივალენტური.

ფაქტი 4.2 ვთქვათ, $(\mu_k)_{1 \le k \le n}$ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციებით და λ_n არის ლებეგის ზომა n -განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ R^n სივრცეზე. მაშინ ზომები $\prod_{k=1}^{n} \mu_k$ და λ_n არიან ექვივალენტური.

ფაქტი 4.3 ვთქვათ, μ_1 და μ_2 არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომები მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუქნციებით. მაშინ ზომები μ_1^n და μ_2^n არიან ექვივალენტური.

ფაქტი 4.4 ვთქვათ, $(\mu_k)_{1 \le k \le n}$ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომები მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუქნციებით. მაშინ ზომები μ_k^n და μ_l^n არის ექვივალენტური ნატურალურ რიცხვთა ყოველი $(k,l)(1 \le k \le l \le n)$ წყვილისთვის.

ზემოთ მოყვანილი ფაქტების დამტკიცებისთვის გამოიყენება შემდეგი მარტივი ლემა, რომელიც კარგადაა ცნობილი ლიტერატურაში.

ლემა 4.1 ვთქვათ, μ_k და ν_k არის ზომად (X_k, M_k) სივრცეზე განსაზღვრული ექვივალენტური არატრივიალური σ -სასრული ბორელის ალბათური ზომები ყოველი k ($1 \le k \le n$) ნატურალური რიცხვისთვის. მაშინ ზომები $\prod_{k=1}^{n} \mu_k$ და $\prod_{k=1}^{n} \nu_k$ ექვივალენტურია.

იმისათვის, რომ მივიღოთ ფაქტების 4.1-4.2 უსასრულო განზომილებიანი ვერსიები, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ უსასრულო განზომილებიანი ტოპოლოგიური ვექტორულ სივრცეებზე რომელი ზომები შეიძლება ჩაითვალოს $R^n\,(n \in N)$ -სივრცეზე განსაზღვრული ლებეგის ზომის ანალოგად. ამ მიმართლებით მნიშვნელოვანია ი. გირსანოვის, ბ. მიტიაგინის [41] და სუდაკოვის [42] შედეგები უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში არატრივიალური ძვრის მიმართ ინვარიანტული σ-სასრული ბორელის ალბათური ზომების არარსებობის შესახებ. მათ დაამტკიცეს, რომ σ-სასრულობის თვისება და ინვარიანტობის თვისება ყოველი ძვრის მიმართ არათავსებადია. გამომდინარე აქედან შეიძლება შევასუსტოთ ყოველი ძვრის მიმართ ინვარიანტობის თვისება ლებეგის ზომის ანალოგებისთვის R^{∞} სივრცეში და შემოვიფარგლოთ ისეთი არატრივიალური σ -სასრული ბორელის ზომებით, რომლებიც ინვარიანტული არიან ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. უნდა აღინიშნოს, რომ მურის [43], იამასაკის [44] და ხარაზიშვილის [45] მიერ მოცემულ იქნა ისეთი ზომების აგების კონსტრუქციები ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების R^{∞} სივრცეზე, რომლებიც არიან ინვარიანტული ყველა ფინიტური მიმდევრობების $R^{(N)}$ ჯგუფის მიმართ. ასეთ ზომებს ეწოდებათ მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ზომები R^{∞} -ზე. ხარაზიშვილის [45] ნაშრომში მიღებული შედეგის გამოყენებით, [46] ნაშრომში ნაჩვენებია, რომ ყოველ უსასრულო განზომილებიან პოლონურ წრფივ სივრცეში არსებობს σ-სასრული არატრივიალური ბორელის ზომა რომელიც ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი წრფივი ქვესივრცის მიმართ. ეს შედეგი ანზოგადებს გილი, ფანცულაია და ზახარის [47] მიერ მიღებულ შედეგს იმის შესახებ, რომ შაუდერის ბაზისის მქონე ბანახის სივრცეში ყოველთვის არსებობენ ზემოთაღნიშნული თვისებების მქონე ზომები. მოცემულ ნაშრომში ჩვენი ძირითადი ყურადღება მიმართული იქნება R^{∞} სივრცეში 4.1-4.2 ფაქტების უსასრულო განზომილებიანი ვერსიების შესწავლაზე მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომების ტერმინებში. ამ

მიზნით ჩვენი ყურადღება მიმართული იქნება შემდეგი ამოცანების შესწავლაზე.

ამოცანა 4.1 ვთქვათ, μ *არის ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომა და* λ *არის მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომა* R^N *-ზე. არიან თუ არა* μ^N *და* λ *ზომები ექვივალენტური?*

ამოცანა 4.2 *ვთქვათ,* $(\mu_k)_{k\in N}$ *არის ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული ბორელის ალბათურ დიფუზიურ ზომათა ოჯახი და* λ *არის მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომა* R^N *-ზე. არიან თუ არა* $\prod_{k\in N}\mu_k$ *და* λ *ზომები ექვივალენტური?*

ამოცანა 4.3 *ვთქვათ,* μ_1 *და* μ_2 *არიან ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომები. არიან თუ არა* μ_1^N *და* μ_2^N *ზომები ექვივალენტური?*

ამოცანა 4.4 *ვთქვათ,* $(\mu_i)_{i\in I}$ *არის ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული ბორელის ალბათური დიფუზიური ზომების ოჯახი მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციებით. ვთქვათ,*
$S(R^N) := \cap_{i\in I} dom(\overline{\mu_i^N}),$

სადაც $\overline{\mu_i^N}$ *წარმოადგენს* $\mu_i^N\,(i\in I)$ *ზომის გასრულებას. არსებობს თუ არა* R^N *-სივრცის* $(D_i)_{i\in I}$ *დახლეჩა* $S(R^N)$ σ*-ალგებრის ელემენტებით, ისეთი რომ სრულდებოდეს პირობა* $\overline{\mu_i^N}(D_i)=1$ *ყოველი* $i\in I$ *ინდექსისათვის?*

4.3-4.4 ამოცანები არ არიან ახალი და ისინი იყო ბევრი ავტორის განხილვის საგანი. ამ მიმართლებით განსაკუთრებით უნდა აღვნიშნოთ ს. კაკუტანის [48](იხ.თეორემა 4.3) შედეგი იმის შესახებ, რომ თუ გვაქვს $(\Omega_i, L_i)(i=1,2,\cdots)$ ზომად სივრცეზე განსაზღვრულ ექვივალენტურ ალბათური μ_i და ν_i ზომები, და თუ μ და ν აღნიშნავენ შესაბამისად $\prod_{i\in N}\mu_i$ და $\prod_{i\in N}\nu_i$ -პროდაქტ ზომებს, მაშინ μ და ν ან ექვივალენტურია ან ორთოგონალური. ანალოგიურ შემთხვევას აქვს ადგილი გაუსის შემთვევითი პროცესებისათვის. კერძოდ, ს. კამერონი და ვ.ე მარტინის [49]

მიერ იქნა ნაჩვენები რომ თუ განვიხილავთ ერთეულოვან ინტერვალზე განსაზღვრული ვინერის პროცესებით ინდუცირებულ ზომებს, მაშინ თუ შესაბამისი პროცესების დისპერსიები განსხვავებულია, მაშინ ზომები ორთოგონალურია. ასეთივე ტიპის შედეგი იქნა მიღებული სხვა ავტორების მიერ (იხ. მაგალითად, [50], [51] და სხვა). ა. მ. ვერშიკის მიერ [52] ნაშრომსი დამტკიცდა, რომ უსასრულო განზომბილებიან სეპარაბელურ ჰილბეტრის სივრცეზე განსაზღვრული ყოველი გაუსის ზომის დასაშვებ ძვრათა ჯგუფი (კვაზიინვარიანტობის თვალსაზრისით) არის წრფივი ქვესივრცე. ორი ზომის ექვივალენტობის და სინგულარობის პრობლემის შესასწავლად სხვადასხვა ავტორების მიერ შემუშავებულია ერთმანეთისაგან განსხვავებული მიდგომა. მათ შორის განსაკუთრებული აღნიშვნის ღირსია დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონი, ხელინგერის ინტეგრალის თვისება [53], ნული-ერთის კანონი [54] და ა.შ. ამ სტატიაში ანალოგიური ამოცანის შესასწავლად ჩვენ ვიყენებთ ახალ მიდგომას 4.3 – 4.4 პრობლემის გადასაჭრელად, რომელიც არსებითად იყენებს უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების თვისებას [55].

ნაშრომის 2-3 ქვეთავებში მოცემულია 4.1 -4.2 ამოცანების ამოხსნა, რომელიც იყენებს იამასაკის მიერ [56]-ნაშრომში განვითარებულ მიდგომას. ხოლო მე-4 ქვეთავში ჩვენ მოგვყავს 4.3-4.4 ამოცანების ამოხსნა.

ამოცანა 4.1-ის უარყოფითი გადაწყვეტა

ამოცანა 4.1 -ის უარყოფითი გადაწყვეტა მოცემულია შემდეგ წინადადებაში:

ფაქტი 4.1 ([56], წინადადება 2.1, გვ. 696) *ვთქვათ,* $f(x)$ *ზომადი ფუნქციაა* R^1 *-ზე, რომელიც აკმაყოფილებს* $f(x)>0$ *და* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ *პირობებს. ვთქვათ,* μ *არის სტაციონარული პროდაქტ ზომა განსაზღვრული* f *- ით (ე.ი.* $d\mu=\prod_{i=1}^{\infty} f(x_i)dx_i$ *) და* $R^{(N)}$ *არის ყველა ფინიტური მიმდევრობების წრფივი ვეტორული სივრცე. მაშინ* μ *არის* $R^{(N)}$ *-კვაზიინვარიანტული,* μ *ზომას არ*

გააჩნია არცერთი მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ექვივალენტური ზომა.

დამტკიცება. [57]-ის თანახმად, სტაციონარული პროდაქტ ზომა μ არის $R^{(N)}$ -ერგოდული. ვთქვათ, $\sum$ არის ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა გადანაცვლებათა ჯგუფი. $\sum$ შეიძლება განხილულ იქნას როგორც R^N სივრცის გარდაქმნათა ჯგუფი და μ არის $\sum$ -ინვარიანტული. ვთქვათ, $\sum_0$ არის $\sum$ -ს ქვეჯგუფი, რომლის წარმომქნელებია ის გადანაცვლებები, რომლებიც წარმოადგენენ N –ის მხოლოდ ორი ელემენტის ურთიერთგადანაცვლებას(N –ის სხვა ელემენტები რჩებიან უცვლელი). მაშინ $\sum_0$ შედგება ისეთი $\sigma \in \sum$ გადანაცვლებებისაგან, რომელიც აკმაყოფილებს $\sigma(i)=i$ პირობას გარდა შესაძლოა სასრული რაოდენობა ელემენტებისა. [57]-ის თანახმად, ზომა μ არის $\sum_0$-ერგოდული.

ახლა, დაუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, μ -ს გააჩნია *მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ექვივალენტური ზომა* ν . ეს ნიშნავს, რომ ν არის $R^{(N)}$-ინვარიანტული და σ-სასრული. რამდენადაც $\mu \approx \nu$, სადაც μ არის $\sum_0$-ინვარიანტული და $\sum_0$- ერგოდული, და ν არის $\sum_0$-ინვარიანტული, მაშინ მოიძებნება ისეთი $c>0$ მუდმივა, რომ $\mu = c\nu$. მაშინ ν -ს $R^{(N)}$ -ინვარიანტობა გამოიწვევს, რომ μ - ალბათური ზომაც არის $R^{(N)}$ -ინვარიანტული, რაც წინააღმდეგობაა.

ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ν არის $\sum_0$-ინვარიანტული, ყოველი $\sigma \in \sum_0$, $\tau_\sigma \nu = \nu$, სადაც

$$\tau_\sigma \nu(B) = \nu\left(\sigma^{-1}(B)\right) \tag{119}$$

ყოველის $B \in \mathrm{B}(R^N)$. რამდენადაც $\tau_\sigma \mu = \mu$, ჩვენ გვაქვს $\tau_\sigma \nu \approx \nu$. მეორეს მხრივ, ν არის $R^{(N)}$ -ერგოდული, ვინაიდან თავად μ ზომა არის $R^{(N)}$ -ერგოდული. ამიტომ $\tau_\sigma \nu$ არის $R^{(N)}$ -ინვარიანტული, საიდანაც ჩვენ ვღებულობთ $\tau_\sigma \nu = c_\sigma \nu$ რაიმე $c_\sigma > 0$ მუდმივისათვის. კერძოდ, ყოველი σ წარმომქნელისთვის ჩვენ გვაქვს, $\sigma^2 = I$. შესაბამისად $c_\sigma^2 = I$, საიდანაც $c_\sigma = 1$.

ეს ნიშნავს, რომ ν არის ინვარიანტული ნებისმიერი ასეთი გადანაცვლების მიმართ. რამდენადაც $\sum_0$ წარმოიქმნება ყველა ასეთი გადანაცვლებით, ჩვენ ამით დავამტკიცეთ ν -ს $\sum_0$-ინვარიანტობა.

ფაქტი 4.1-ის დამტკიცების დასასრულებლად რჩება მხოლოდ იმის დამტკიცება, რომ $\tau_\sigma \nu$ არის $R^{(N)}$ -ინვარიანტული. რამდენადაც ν არის $R^{(N)}$ ინვარიანტული, ჩვენ ვღებულობთ $\tau_x \nu = \nu$ ყოველი $x \in R^{(N)}$. შევნიშნოთ, რომ

$$(\forall x)\left(x \in R^{(N)} \to \tau_\sigma \tau_x \nu = \tau_\sigma \nu\right) \tag{120}$$

მითუმეტეს ჩვენ შეგვიძლია მარტივად ვაჩვენოთ, რომ $\tau_\sigma \tau_x \nu = \tau_{\sigma x} \tau_\sigma \nu$. (4.2)-დან გამომდინარეობს, რომ τ_σ არის $\sigma(R^{(N)})$ -ინვარიანტული. რამდენადაც σ არის ასახვა $R^{(N)}$ -დან $R^{(N)}$ -ზე, კერძოდ, $\sigma(R^{(N)}) = R^{(N)}$ ჩვენ ვასკვნით, რომ $\tau_\sigma \nu$ არის $R^{(N)}$-ინვარიანტული.

ამოცანა 4.2-ის კერძო გადაწყვეტა

შენიშვნა 4.1. თუ ჩვენ ამოცანა 1.2-ის ფორმულირებისას დაუშვებთ, რომ $\mu_k = \mu_n$ ყოველი $k, n \in N$, მაშინ, ფაქტი 2.1 არ იძლევა პასუხს ამოცანა 4.1 -ზე.

მაგალითი 4.1.([58], ნაწილი 1, გვ. 354). ვთქვათ, R^N არის ყველა ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობების ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცე, აღჭურვილი ტიხონოვის ტოპოლოგიით. ავღნიშნოთ $B(R^N)$ -ით R^N – სივრცის ბორელის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა .

ვთქვათ, $(a_i)_{i\in N}$ და $(b_i)_{i\in N}$ არის ნამდვილ რიცხვთა ისეთი ორი მიმდევრობა, რომ

$$(\forall i)(i \in N \to a_i < b_i).$$

ავღნიშნოთ

$$A_n = R_0 \times \cdots \times R_n \times (\prod_{i>n} \Delta_i),$$

ყოველი $n \in N$ რიცხვისთვის, სადაც

$$(\forall i)(i \in N \to R_i = R \,\&\, \Delta_i = [a_i; b_i[).$$

ასევე აღვნიშნოთ

$$\Delta = \prod_{i \in N} \Delta_i .$$

ყოველი ნატურალური $i \in N$ რიცხვისთვის განვიხილოთ ლებეგის ისეთი μ_i ზომა განსაზღვრულია R_i სივრცეზე, რომ $\mu_i(\Delta_i) = 1$. ავღნიშნოთ λ_i –ით Δ_i ინტრევალზე განსაზღვრული ლებეგის ნორმირებული ზომა.

ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისთვის, აღვნიშნოთ ν_n-ით შემდეგი ზომა

$$\nu_n = \prod_{1 \le i \le n} \mu_i \times \prod_{i > n} \lambda_i ,$$

და $\overline{\nu}_n$ –ით აღვნიშნოთ R^N სივრცეზე შემდეგნაირად განსაზღვრული ბორელის ზომა

$$(\forall X)(X \in B(R^N) \to \overline{\nu}_n(X) = \nu_n(X \cap A_n)).$$

მივაქციოთ ყურადღება (იხ. [58], ლემა 1.1, გვ. 354) ნებისმიერი ბორელის $X \subseteq R^N$ სიმრავლისთვის არსებობს ზღვარი

$$\nu_\Delta(X) = \lim_{n \to \infty} \overline{\nu}_n(X).$$

ამის გარდა, ფუქნციონალი ν_Δ არის $B(R^N)$ ბორელის σ -ალგებრაზე განსაზღვრული არატრივიალური σ-სასრული ზომა.

$h \in R^N$ ელემენტს ეწოდება ν_Δ ზომის დასაშვები ძვრა ინვარიანტულობის თვალსაზრისით, თუ

$$(\forall X)(X \in B(R^N) \to \nu_\Delta(X+h) = \nu_\Delta(X)).$$

განვსაზღვროთ

$$G_\Delta = \{h : h \in R^N \ \&\ h \text{ არის } \nu_\Delta \text{ ზომის დასაშვები ძვრა }\}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ G_Δ არის R^N -სივრცის ვექტორული ქვესივრცე.

ლემა 4.1 *([13],თეორემა 1.4, p.356) შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

$$1)\ g = (g_1, g_2, \cdots) \in G_\Delta ,$$

$$2)\ (\exists n_g)(n_g \in N \to \text{ მიმდევრობა } \sum_{i \ge n_g} \ln(1 - \frac{|g_i|}{b_i - a_i}) \text{ კრებადია}).$$

ვთქვათ, $R^{(N)}$ არის ყველა ფინიტური მიმდევრობების სივრცე, ე.ი.,

$$R^{(N)} = \{(g_i)_{i\in N} \mid (g_i)_{i\in N} \in R^N \ \& \ card\,\{i \mid g_i \neq 0\} < \aleph_0\}.$$

ცხადია, რომ ერთის მხრივ ნებისმიერი კომპაქტისთვის უსასრულო განზომილებიანი $\Delta = \prod_{k\in N}[a_k, b_k]$ პარალელეპიპედისათვის მართებულია ჩართვა

$$R^{(N)} \subset G_\Delta .$$

მეორეს მხრივ, $G_\Delta \setminus R^{(N)} \neq \emptyset$ რამდენადაც ელემენტი $(g_i)_{i\in N}$ განსაზღვრული შემდეგნაირად

$$(\forall i)(i \in N \to g_i = (1 - exp\{-\frac{b_i - a_i}{2^i}\} \times (b_i - a_i)))$$

არის $G_\Delta \setminus R^{(N)}$ სხვაობის ელემენტი.

მარტივად მტკიცდება, რომ G_Δ ვექტრული სივრცე ყველგან მკვრივია R^N -ში ტიხონოვის ტოპოლოგიისთან თვალსაზრისით, რამდენადაც $R^{(N)} \subset G_\Delta$.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ნამდვილ რიცხვთა R– ძე განსაზღვრულ მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციების მქონე ბორელის ალბათურ ზომათა უსასრულო ოჯახის ნამრავლი ზომისა და R^N -სივრცეზე განსაზღვრულ მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომის ისეთ მაგალითებს, რომლებიც ერთმანეთის ექვივალენტურია.

ვთქვათ $(c_n)_{n\in N}$ არის დადებითი რიცხვების ისეთი მიმდევრობაა $0 < c_n < l$. ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული უწყვეტი $f_n(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$0 < f_n(x) < 1, \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1,$$

$$f_n(x) = c_k \ \ for \ \ x \in [0,1].$$

ასეთი $f_n(x)$ ფუქნცია არსებობს n ნატურალური რიცხვისთვის.

ყოველი n ნატურალური რიცხვისთვის μ_n–ით აღვნიშნოთ განაწილების f_n სიმკვრივის მქონე ბორელის ალბათური ზომა

ფაქტი 4.1 თუ $\prod_{n\in N} c_n > 0$, მაშინ $\prod_{n\in N}\mu_n$ და $\nu_{[0,1]^N}$ არიან ექვივალენტური ზომები.

დამტკიცება. *ფუბინის თეორემის დახმარებით მარტივად მტკიცდება, რომ ზომა* $\prod_{n\in N}\mu_n$ არის $R^{(N)}$ -კვაზინვარიანტული. [14]-ის თანახმად, ყოველი პროდაქტ ზომა R^N ზე არის $R^{(N)}$ -ერგოდული. შესაბამისად, $\prod_{n\in N}\mu_n$ და $\nu_{[0,1]^N}$ არიან $R^{(N)}$ - ეგროდული.

ყოველი $x=(x_n)\in R^N$, განვსაზღვროთ ფუნქცია $f(x)$ შემდეგნაირად:

$$f(x)=\prod_{n\in N} f_n(x) \tag{121}$$

რამდენადაც $0 < f(x_n) < 1$ და კერძო ნამრავლები 4.3-ში მონოტონურად კლებადია, ამიტომ (4.3) ნამრავლი არსებობს და სასრულია. თუ $x\in A_n$, მაშინ $x_k \in [0,1]$ ყოველი $k>n$ რიცხვისთვის. ამიტომ ჩვენ გვაქვს

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)\prod_{k>n} c_k > 0.$$

ამრიგად, $f(x)$ არის დადებითი A_n -ზე. აქედან გამომდინარე, $f(x)$ დადებითია $\cup_{n\in N} A_n$ -ზე. მეორეს მხრივ, ვინაიდან $\nu_{[0,1]^N}(R^N \setminus \cup_{n\in N} A_n)=0$, ჩვენ ვხედავთ, რომ $f(x)$ არის დადებით $\nu_{[0,1]^N}$ -თითქმის ყველა x -სთვის.

ახლა კი განვსაზღვროთ ზომა ν' R^N -ზე შემდეგნაირად

$$\nu'(X)=\int_X f(x)d\nu_{[0,1]^N}(x)$$

ყოველი $X\in \mathbf{B}(R^N)$ სიმრავლისთვის.

ვაჩვენოთ, რომ $\prod_{n\in N}\mu_n=\nu'$. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი $A\in \mathbf{B}(R^n)$ სიმრავლისათვის მართებულია ტოლობა

$$\nu'(A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}})=\prod_{n\in N}\mu_n(A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}}).$$

მართლაც,

$$\nu'(A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}})=\int_{A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}}} f(x)d\nu_{[0,1]^N}(x)=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A_m\cap(A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}})} f(x)d\nu_{[0,1]^N}(x)=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A\times\prod_{k=n+1}^{m}R\times\prod_{k>m}[0,1]} f(x)d\nu_{[0,1]^N}(x)=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A\times\prod_{k=n+1}^{m}R\times\prod_{k>m}[0,1]} f(x)d(\prod_{k=1}^{m}\mu_k\times\prod_{k>m}\lambda_k)=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A\times\prod_{k=n+1}^{m}R}(\int_{\prod_{k>m}[0,1]} f(x)d\prod_{k>m}\lambda_k)d\prod_{k=1}^{m}\mu_k=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\prod_{k>m}[0,1]}\prod_{k>m}f_k(x_k)d\prod_{k>m}\lambda_k\times$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A\times\prod_{k=n+1}^{m}R}\prod_{k=1}^{m}f_k(x_k)d\prod_{k=1}^{m}\mu_k=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{\prod_{k>m}[0,1]}\prod_{k>m}f_k(x_k)d\prod_{k>m}\lambda_k\times$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{A}\prod_{k=1}^{n}f_k(x_k)d\prod_{k=1}^{n}\mu_k\times\int_{\prod_{k=n+1}^{m}R}\prod_{k=n+1}^{m}f_k(x_k)d\prod_{k=n+1}^{m}\mu_k=$$

$$\lim_{m\to+\infty}\prod_{k>m}c_k\times\prod_{k=1}^{n}\mu_k(A)=\prod_{k=1}^{n}\mu_k(A)=\prod_{k\in N}\mu_k(A\times R^{N\setminus\{1,\cdots,n\}}).$$

ამით კი დასრულდა ფაქტი 4.1-ის დამტკიცება.

შენიშვნა 4.2 *ვთქვათ,* $\prod_{k\in N}\mu_k$ *აღნიშნავს ფაქტი 4.1 -ში აგებულ პროდაქტ ზომას. მაშინ 4.1 ლემის ძალით* $\nu_{[0,1]^N}$ *ზომის ყველა დასაშვები ძვრების ჯგუფს (ინვარიანტობის თვალსაზრისით) აქვს შემდეგი სახე*

$l_1=\{(x_k)_{k\in N}:(x_k)_{k\in N}\in R^N \;\&\; \sum_{k\in N}|x_k|<+\infty\}$.

ფაქტი 4.1 –ის ძალით ზომები $\prod_{k\in N}\mu_k$ *და* $\nu_{[0,1]^N}$ *ექვივალენტურია რის გამოც ვღებულობთ, რომ* $\prod_{k\in N}\mu_k$ *ზომის ყველა დასაშვებ ძვრათა ჯგუფი (კვაზიინვარიანტობის თვალსაზრისით) ტოლია* l_1 *-ის .*

ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in l_1$, განვიხილოთ $\nu_k(X)=\mu_k(X-x_k)$ ყოველი $X\in B(R)$. ცხადია, რომ μ_k და ν_k არის ექვივალენტური ნებისმიერი $k\in N$ რიცხვისთვის. ყოველი $k\in N$ და $x\in R$ რიცხვებისთვის დაუშვათ

$\rho_k(x)=\dfrac{d\nu_k(x)}{d\mu_k(x)}$. განვიხილოთ პროდაქტს-ზომები $\mu=\prod_{k\in N}\mu_k$ და $\nu=\prod_{k\in N}\nu_k$.

ჩვენი კვლევის თანახმად, ზომები μ და ν ექვივალენტურია. მეორეს მხრივ, კაკუტანის ცნობილი შედეგის (იხ., [48]), თანახმად, ვინაიდან μ და ν ექვივალენტურია, ამიტომ უსასრულო ნამრავლი $\prod_{k\in N}\alpha_k$ განშლადია ნულისკენ, სადაც $\alpha_k=\int_R\sqrt{\rho_k(x_k)}d\mu_k(x_k)$. ამ შემთხვევაში $r_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\rho_k(x)$ მიისწრაფვის (საშუალო კრებადობის აზრით) $r(x)=\prod_{k=1}^{\infty}\rho_k(x)$ ფუნქციისკენ, რომელიც არის ν ზომის სიმკვრივე μ-ზომის მიმართ, ე.ი

$$r(x)=\frac{d\nu(x)}{d\mu(x)}.$$

შენიშვნა 4.3 *4.1 ფაქტის დამტკიცებისას გამოყენებული მიდგომა პირველად შემოთავაზებული იყო [56]-ნაშრომში (იხ. წინადადება 4.1,გვ. 702).*

შემდეგი ამოცანა მიეკუთვნება დღემდე ამოუხსნელ ამოცანათა ნუსხას.

ამოცანა 4.1 არსებობს თუ არა ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრულ გაუსის წრფივ ალბათურ ზომათა ისეთი $(\mu_k)_{k\in N}$ ოჯახი და მური-იამასაკი-ხარაზიშვილის ტიპის ზომა λ ისეთი, რომ $\prod_{k\in N}\mu_k$ და λ ექვივალენტურია?

4.3 - 4.4 ამოცანების ამოხსნა

ჩვენ წარმოვადგენთ 4.3 და 4.4 -ამოცანების ამოსახსნელად სრულიად ახალ მიდგომას, რომელიც არსებითად განსხვავდება [48] ნაშრომში განხილული მიდგომისაგან. ჩვენი მიდგომა არსებითად ეყრდნობა უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების თვისებებს.

განსაზღვრება 4.1 *[10] ნამდვილ რიცხვთა $(x_k)_{k\in N}$ მიმდევრობას ეწოდება (a,b)-ინტერვალზე უნიფორმულად განაწილებული, თუ (a,b)-ინტერვალის ყოველი $[c,d]$-ქვეინტერვალისთვის მართებულია პირობა*

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\#(\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\cap[c,d])=(b-a)^{-1}(d-c),$$

სადაც # აღნიშნავს სიმრავლის მთვლელ ზომას.

ვთქვათ, X არის კომპაქტური პოლონური სივრცე და μ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა. ვთქვათ, $\mathrm{R}(X)$ აღნიშნავს ეზე განსაზღვრულ ყველა უწყვეტ შემოსაზღვრულ ზომად ფუნქციათა კლასს.

განსაზღვრება 4.2 X სივრცის ელემენტთა *მიმდევრობა* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობას ეწოდება* μ *-ექვიგანაწილებული ან* μ *-უნიფორმულად განაწილებული* X *-ზე თუ ყოველი* $f \in \mathrm{R}(X)$ *-სთვის მართებულია პირობა*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_X f d\mu.$$

ლემა 4.4 *([10], გვ. 199-201) ვთქვათ,* S *არის* X *სივრცეზე* μ *-ექვიგანაწილებული მიმდევრობების სივრცე. მაშინ ჩვენ გვაქვს* $\mu^N(S)=1$.

შედეგი 4.5 *([27], შედეგი 2.3, გვ. 473) ვთქვათ,* ℓ_1 *არის ლებეგის ზომა* $(0,1)$ *-ზე. ვთქვათ,* D *არის* $(0,1)$ *-ზე ყველა* ℓ_1*-ექვიგანაწილებული მიმდევრობების სივრცე. მაშინ მართებულია ტოლობა* $\ell_1^N(D)=1$.

განსაზღვრება 4.6 *ვთქვათ* μ *არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული განაწილების* F *ფუნქციის მქონე ბორელის ალბათური ზომა . ნამდვილ რიცხვთა* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობას ეწოდება* μ *-ექვიგანაწილებული ან* μ *-უნიფორმულად განაწილებული* R *-ღერძზე, თუ ნებისმიერი* $[a,b](-\infty \le a < b \le +\infty)$ *ინტერვალისთვის სრულდება პირობა*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\#([a,b]\cap\{x_1,\cdots,x_n\}) = F(b)-F(a).$$

ლემა 4.7 *([28], ლემა 2.4,გვ. 473) ვთქვათ, მიმდევრობა* $(x_k)_{k\in N}$ *არის* ℓ_1*-ექვიგანაწილებული* $(0,1)$ *-ზე,* F *არის მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქცია* R *-ზე და* p *არის* F *ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა* R *-ზე. მაშინ* $(F^{-1}(x_k))_{k\in N}$ *არის* p *-უნიფორმულად განაწილებული* R *-ღერძზე .*

შედეგი 4.8 *([27], შედეგი 2.4,გვ. 473) ვთქვათ,* F *არის მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქცია* R *-ღერძზე და* p *არის* F *ფუნქციით განსაზღვრული*

ბორელის ალბათური ზომა R *-ზე. მაშინ* R *-ღერძზე* p *-უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების* D_F *სიმრავლისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:*

(i) $D_F = \{(F^{-1}(x_k))_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in D\}$,

(ii) $p^N(D_F) = 1$,

სადაც D განსაზღვრულია შედეგი 4.5–ით.

ლემა 4.9 *ვთქვათ,* F_1 *და* F_2 *არიან ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციები, და* p_1 *და* p_2 *არიან ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე შესაბამისად* F_1 *და* F_2 *-ით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომები. მაშინ არ არსებობს ნამდვილ რიცხვთა* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *მიმდევრობა, რომელიც ერთდროულად იქნება* p_1 *-ექვიგანაწილებული და* p_2 *-ექვიგანაწილებული.*

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ არის ასეთი მიმდევრობა. რამდენადაც F_1 და F_2 განსხვავებულია, არსებობს ისეთი $x_0 \in \mathrm{R}$ წერტილი, რომ $F_1(x_0) \neq F_2(x_0)$. ეს პირობა ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ არის ერთდროულად არის p_1 -ექვიგანაწილებული და p_2 -ექვიგანაწილბული, ვინაიდან მაშინ

$$F_1(x_0) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\#((-\infty, x_0] \cap \{x_1, \cdots, x_n\}) = F_2(x_0).$$

შემდეგი თეორემა იძლევა ამოცანა 4.3–ის გადაწყვეტას.

თეორემა 4.10 *ვთქვათ,* F_1 *და* F_2 *არიან ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე განსაზღვრული განსხვავებული მკაცრად ზრდადი განაწილების ფუნქციები, და* p_1 *და* p_2 *არიან ნამდვილ რიცხვთა* R *-ღერძზე შესაბამისად* F_1 *და* F_2 *-ით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომები. მაშინ* p_1^N *და* p_2^N *ზომები არის ორთოგონალური.*

დამტკიცება. ვთქვათ, D_{F_1} და D_{F_2} აღნიშნავენ p_1 -ექვიგანაწილებული და p_2 -ექვიგანაწილებული მიმდევრობების სიმრავლეებს. ლემა 4.9–ის ძალით,

$D_{F_1} \cap D_{F_2} = \varnothing$. შედეგი 4.8–ის ძალით, $p_1^N(D_{F_1}) = 1$ და $p_2^N(D_{F_2}) = 1$. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 4.11 *ვთქვათ, $\{\mu_i : i \in I\}$ არის ალბათურ ზომათა ოჯახი ზომად (X, M) სივრცეზე. ვთქვათ, $S(X)$ განსაზღვრულია პირობით*

$$S(X) = \cap_{i \in I} \, dom\,(\overline{\mu}_i),$$

სადაც $\overline{\mu}_i$ აღნიშნავს μ_i ზომის გასრულებას. ჩვენ ვიტყვით, რომ ოჯახი $\{\mu_i : i \in I\}$ არის ძლიერად განცალებადი, თუ არსებობს X -ის ისეთი $\{C_i : i \in I\}$ დახლეჩა $S(X)$ σ-ალგებრის ელემენტებად, რომ $\overline{\mu}_i(C_i) = 1$ ყოველი $i \in I$ ინდექსისათვის.

განსაზღვრა 4.12 *ვთქვათ, $\{\mu_i : i \in I\}$ არის ზომად (X, M) სივრცეზე განსაზღვრულ ალბათურ ზომათა ოჯახი. ვთქვათ, $S(I)$ –ით აღვნიშნოთ მინიმალური σ-ალგებრა, წარმოქმნილი I სიმრავლის ერთ ელემენტიანი სიმრავლეებით და $S(X)$ იყოს განსაზღვრული*

$$S(X) = \cap_{i \in I} \, dom(\overline{\mu}_i)$$

პირობით, სადაც $\overline{\mu}_i$ აღნიშნავს μ_i ზომის გასრულებას. ვიტყვით, რომ $(S(X), S(I))$ -ზომადი $T : X \to I$ ასახვა არის ა უცნობი $i\,(i \in I)$ პარამეტრის ძალდებული შეფასება $\{\mu_i : i \in I\}$ ოჯახისთვის თუ სრულდება პირობა

$$(\forall i)(i \in I \to \mu_i(T^{-1}(\{i\}) = 1)).$$

ლემა 4.13 *([27], ლემა 2.5, გვ. 474) ვთქვათ, $\{\mu_i : i \in I\}$ არის ზომად (X, M) სივრცეზე განსაზღვრული ალბათურ ზომათა ოჯახი. შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

(i) ალბათურ ზომათა $\{\mu_i : i \in I\}$ ოჯახი ძლიერად განცალებადია;

(ii) ალბათურ ზომათა $\{\mu_i : i \in I\}$ ოჯახისთვის არსებობს უცნობი $i\,(i \in I)$ პარამეტრის ძალდებული შეფასება.

შემდეგი თეორემა იძლევა ამოცანა 4.4-ის ამოხსნას..

თერემა 4.14 *ვთქვათ,* F *არის ნამდვილ რიცხვთა R -ღერძზე განსაზღვრული მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ოჯახი და p_F აღნიშნავს F -ით წარმოქმნილ ბორელის ალბათურ ზომას R -*

ზე ყოველი $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის. მაშინ ბორელის ალბათური ზომათა ოჯახი* $\{p_F^N : F \in \mathrm{F}\}$ *ძლიერად განცალებადია.*

დამტკიცება. *ყოველი* $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის,* D_F -ით ავღნიშნოთ ყველა p_F -ექვიგანაწილებული მიმდევრობების კლასი. ლემა 4.9-ის ძალით $D_{F_1} \cap D_{F_2} = \varnothing$ ყოველი გასხვავებული $F_1, F_2 \in \mathrm{F}$ -ელემენტებისთვის. შედეგი 4.8 -ის ძალით $p_F^N(D_F) = 1$ *ყოველი* $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის.* დავაფიქსიროთ $F_0 \in \mathrm{F}$ და განვსაზღვროთ $(C_F)_{F \in \mathrm{F}}$ ოჯახი შემდეგნაირად: $C_F = D_F$ ყოველი $F \in \mathrm{F} \setminus \{F_0\}$ ელემენტისთვის და $C_{F_0} = R^N \setminus \cup_{F \in \mathrm{F} \setminus \{F_0\}} D_F$. რამდენადაც D_F არის R^N სივრცის ბორელის ქვესიმრავლე *ყოველი* $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის,* ჩვენ ვასკვნით, რომ $C_F \in S(R^N)$ ყოველი $F \in \mathrm{F} \setminus \{F_0\}$ *-ელემენტისათვის.* რამდენადაც $\overline{p_F^N}(R^N \setminus \cup_{s \in F} D_s) = 0$ *ყოველი* $F \in \mathrm{F}$ *ელემენტისათვის,* ჩვენ ვასკვნით რომ $R^N \setminus \cup_{s \in F} D_s \in \cap_{s \in F} dom(\overline{p_s^N}) = S(R^N)$. ვინაიდან, $S(R^N)$ არის σ -ალგებრა, მტკიცდება, რომ $C_{F_0} \in S(R^N)$ $\overline{p_F^N}(R^N \setminus \cup_{s \in F} D_s) = 0$ ნებისმიერი $F \in \mathrm{F}$ (ექვივალენტურია, $R^N \setminus \cup_{s \in F} D_s \in S(R^N)$), და

$$C_{F_0} = R^N \setminus \cup_{s \in F \setminus \{F_0\}} D_s = (R^N \setminus \cup_{s \in F} D_s) \cup D_{F_0}.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

4.13 ლემის და თეორემა 4.14 -ის ძალით ჩვენ ვღებულობთ შემდეგ შედეგს.

შედეგი 4.15 ვთქვათ, F *არის მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილებული ფუნქციების ოჯახი* R *-ზე. მაშინ არსებობს* F $(F \in \mathrm{F})$ *უცნობი განაწილების ფუნქციის ძალდებული შეფასება ბორელის ალბათურ ზომათა* $\{p_F^N : F \in \mathrm{F}\}$ *ოჯახისთვის .*

შენიშვნა 4.16 *თეორემა 4.14 და შედეგი 4.15 შეიძლება მიღებულ იქნას ნებისმიერი მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუქციათა ოჯახისთვის* R *-ზე. შევნიშნოთ, რომ შედეგი 4.15 წარმოადგენს [27](იხ.ლემა 2.6, გვ. 476) ნაშრომში მიღებული ერთი შედეგის განზოგადებას.*

შენიშვნა 4.17 თეორემა 4.14 –ის მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ ყოველი ალბათური ზომა წარმოქმნილია მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციებით, არსებითია. *მართლაც, ვთქვათ μ არის წრფივი გაუსის ზომა R -ზე , რომლის განაწილების ფუქციას აქვს სახე* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ (x\in R)$. *ვთქვათ,* δ_x *არის ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ბორელის* σ *-ალგებრაზე განსაზღვრული დირაკის ზომა, რომელიც კონცენტრირებულია* $x\,(x\in R)$ *-წერტილში. ვთქვათ,* D *არის* R^N *-სივრცის ქვესიმრავლე განსაზღვრული შემდეგნაირად*

$$D=\{(x_k)_{k\in N}:\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k}{n}=0\}.$$

ცხადია, რომ D არის R^N -ის ბორელის ქვესიმრავლე.

ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N}\in D$. განვიხილოთ $\mu_{(x_k)_{k\in N}}=\prod_{k\in N}\delta_{x_k}$ [1] . განვიხილოთ, ბორელის ალბათურ ზომათა ოჯახი $\{\mu^N\}\cup\{\mu_{(x_k)_{k\in N}}:(x_k)_{k\in N}\in D\}$. ცხადია, რომ ეს არის ორთოგანალურ ოჯახი პროდაქტ ზომებისა, რომელთათვისაც თეორემა 4.4 არ სრულდება. მართლაც, დაუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ $\{C\}\cup\{C_{(x_k)_{k\in N}}:(x_k)_{k\in N}\in D\}$ იყოს R^N -ის ისეთი დახლეჩა σ -ალგებრის ელემენტებად, რომ $S_0(R^N)=\cap_{(x_k)_{k\in N}\in D}dom(\overline{\mu}_{(x_k)_{k\in N}})\cap dom(\overline{\mu^N})$ და $\overline{\mu}_{(x_k)_{k\in N}}(C_{(x_k)_{k\in N}})=1$ ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in D$ და $\overline{\mu^N}(C)=1$. ვინაიდან $(x_k)_{k\in N}\in C_{(x_k)_{k\in N}}$ ყოველი $(x_k)_{k\in N}\in D$ -სთვის ჩვენ მივიღებთ $D\cap C=\varnothing$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{\mu^N}(C)\le\overline{\mu^N}(R^N\setminus D)=0$ იმიტომ, რომ დიდ რიცხვთა გაძლიერებული კანონის ძალით ჩვენს გვაქვს $\overline{\mu^N}(D)=1$, რაც წინააღმდეგობაა.

შენიშვნა 4.18 გლივენკო - კანტელის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ ამოცანა 4.4–ის ამოხსნა უფრო ზოგადი ფორმულირებით. უფრო

[1] გავითვალისწინოთ, რომ $\prod_{k\in N}\delta_{x_k}=\delta_{(x_k)_{k\in N}}$.

ზუსტად, *თუ F არის ნებისმიერი განაწილების ფუქციათა ოჯახი R -ზე და p_F -ით აღვნიშნავთ ბორელის ალბათურ ზომას R -ზე განსაზღვრულს F -ით ყოველი $F \in F$ ელემენტისათვის, მაშინ ალბათურ ზომათა ოჯახი $\{p_F^{\infty} : F \in F)\}$ ძლიერად განცალებადია. მართლაც, ყოველი $F \in F$ ელემენტისთვის გვაქვს*

$$D_F = \{(x_k)_{k\in N} : (x_k)_{k\in N} \in R^{\infty} \ \&$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R} \left| \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x])}{n} - F(x) \right| = 0\}.$$

გლივენკო - კანტელის თეორემის ძალით გვაქვს

$$P_F^{\infty}(D_F) = 1.$$

ახლა კი ვაჩვენოთ, რომ $D_{F_1} \cap D_{F_2} = \varnothing$ ყოველი განსხვავებული $F_1, F_2 \in F$ -სთვის. მართლაც, დაუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ, $(x_k)_{k\in N} \in D_{F_1} \cap D_{F_2}$. დავუშვათ, $x_0 \in R$ არის ისეთ წერტილი, რომ $F_1(x_0) \neq F_2(x_0)$. ყოველი $n \in N$ რიცხვისთვის ვღებულობთ

$$|F_2(x_0) - F_1(x_0)| =$$

$$\left|\left(F_2(x_0) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x_0])}{n}\right) - \left(F_1(x_0) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x_0])}{n}\right)\right| \le$$

$$\left|F_2(x_0) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x_0])}{n}\right| + \left|F_1(x_0) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x_0])}{n}\right| \le$$

$$\sup_{x\in R}\left|F_2(x) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x])}{n}\right| + \sup_{x\in R}\left|F_1(x) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x])}{n}\right|.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ

$$|F_2(x_0) - F_1(x_0)| \le$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in R}\left|F_2(x) - \frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\} \cap (-\infty, x])}{n}\right|$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in R}|F_1(x)-\frac{\#(\{x_1,\cdots,x_n\}\cap(-\infty,x])}{n}|=0,$$

ამით კი მივდივართ წინააღმდეგობამდე. შენიშვნა 4.18 იქნება სრულად დამტკიცებული თუ გამოვიყენებთ თეორემა 4.14-ში გამოყენებულ ონსტრუქციას.

დასკვნა

1. უცნობი განაწილების ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასების აგების ამოცანა წრფივ ერთგანზომილებიან სტოქასტურ მოდელში, როცა თეთრი ხმაურის შესაბამისი განაწილების ფუნქცია მკაცრად ზრდადი და უწყვეტია.

2. ჰაარის ემბივალენტის ცნების საშუალებით უცნობი განაწილების ფუნქციის ყველა უსასრულო შერჩევით ძალდებულ შეფასებებათა კლასის შესწავლა;

3. უცნობი განაწილების ფუნქციის ობიექტური უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების არსებობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა.

4. უნიფორმულად განაწილებული მიმდევრობების ტექნიკის საშუალებით მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახის პარამეტრიზაცია და მისთვის უცნობი განაწილების ფუნქციის შეფასების არაპარამეტრული ამოცანის უცნობი პარამეტრის შეფასების ამოცანაზე დაყვანა.

5. უცნობი განაწილების ფუნქციის უსასრულო შერჩევითი ძალდებული შეფასებების აგება მკაცრად ზრდადი და უწყვეტი განაწილების ფუნქციების ნებისმიერი ოჯახისათვის .

6. უცნობი საშუალო კვადრატული გადახრისათვის განმეორებითი ლოგარითმის კანონით განსაზღვრული ნულჰიპოთეზის ტესტირების შესწავლა ''თითქმის ყველა'' ტერმინებში და მისი გარკვეული მოდიფიკაციების შესწავლა.

7. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური სტრუქტურების თვისებები.

8. სოლოვეის მოდელში სუსტად განცალებადი სტატისტიკური სტრუქტურა არ არის ძლიერად განცალებადი.

9. ინვარიანტული მეტრიკის მქონე პოლონურ არალოკალურად-კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული სტატისტიკური

სტრუქტურისათვის უცნობი პარამეტრის ობიექტური ძალდებული შეფასების არსებობის საკითხი.

10. $\{0;\,1\}^N$ ჯგუფზე განსაზღვრულის ტატისტიკური სტრუქტურების შესახებ.

11. მური–იამასაკი-ხარაზიშვილის (1980) ტიპის ზომებისა და ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განსაზღვრული ბორელის დიფუზიური ალბათური ზომების უსასრულო ხარისხებს შორის ურთიერთმიმართების საკითხი.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] Balka R., Buczolich Z., Elekes M.(2012). Topological Hausdorff dimension and level sets of generic continuous functions on fractals. *Chaos Solitons Fractals.***45(12)** 1579 – 1589. 3000710

[2] Christensen J.R.(1973) Measure theoretic zero sets in infinite dimensional spaces and applications to differentiability of Lipschitz mappings. *Publ. Dep. Math.***10(2)** 29–39. 0361770

[3] Christensen J.R.(1974) *Topology and Borel Structure.*North-Holland Publishing Company, Amsterdam. 0348724

[4] Cohen J.(1994) The Earth Is Round ($p < .05$). *American Psychologist.***49 (12)** 997â€“1003.

[5] Dougherty R. (1994) Examples of non-shy sets. *Fund. Math.***144** 73–88. 1271479

[6] Lavoie H.L., Mulaik S.A., Steiger J.H.(1997) *What If There Were No Significance Tests?,* Lawrence Erlbaum Associates.

[7] Hunt B.R., Sauer T., Yorke J.A.(1992) Prevalence:A Translation-Invariant "Almost Every" On Infinite-Dimensional Spaces, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*. **27(2)** 217–238. 1161274

[8] Kaisan High accuracy calculation, Cauchy distribution (percentile) http://keisan.casio.com/has10/SpecExec.cgi

[9] Kharazishvili A.B. (1984) *Topologicheskie aspekty teorii mery.*(Russian).[Topological aspects of measure theory] Naukova Dumka, Kiev. 0784614

[10] Kuipers L., Niederreiter H. (1974) *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney. 0419394

[11] Mycielski J., Swierczkowski S. (1964) On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. *Fund.* **54**, 67–71. 0161788

[12] Mycielski J. (1992) Some unsolved problems on the prevalence of ergodicity, instability, and algebraic independence. *Ulam Quart.***1(3)**, 30 ff., approx. 8 pp.(electronic only). 1208681

[13] Nadaraya E.(1965) On non-parametric estimates of density functions and regression curves. *Theor. Prob. Appl.*. **10** 186–190.

[14] Nunnally J.(1960) The place of statistics in psychology. *Educational and Psychological Measurement.* **20(4)** 641-650.

[15] Pantsulaia G.R.(2003) On separation properties for families of probability measures. *Georgian Math.J.* **10(2)** 335–342. 2009981

[16] Pantsulaia G.R.(2007) *Invariant and quasiinvariant measures in infinite-dimensional topological vector spaces.* Nova Science Publishers Inc., New York. 2527890

[17] Pantsulaia G.(2009) On a certain partition of the non-locally compact abelian Polish group R^N, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.***149** 75–86. 2597356

[18] Pantsulaia G., Kintsurashvili M.(2014) Why is Null Hypothesis rejected for ”almost every" infinite sample by some Hypothesis Testing of maximal reliability?. *Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications,***11(1)** 45–70. http://www.scientificadvances.co.in

[19] Pantsulaia G., Kintsurashvili M.(2014) An effective construction of the strong objective infinite sample well-founded estimate. *Proc. A. Razmadze Math. Ins.* **166** , 113-119.

[20] Pantsulaia G.,Kintsurashvili M. (2014) An objective infinite sample well-founded estimates of a useful signal in the linear one-dimensional stochastic model *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math.* **28** (Accapted)

[21] Rosenblatt M.(1956) Remarks on some nonparametric estimates of a density function. textitAnn. Math. Statist.**27** 832–837. 0079873

[22] Schuster E.F. (1969) Estimation of a probability density function and its derivatives. *Ann. Math. Statist.***40** 1187–1195. 0247723

[23] Shiryaev, Albert N (2012). *Problems in probability.*, Translated by Andrew Lyasoff. Problem Books in Mathematics. Springer, New York 2961901

[24] Solecki S.(1996) On Haar null sets, *Fund. Math.* **149(3)** 205–210. 1383206

[25] Solovay R.M.(1970) A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.*Ann.Math.* **92** 1–56. 0265151

[26] (1980) Ibramkhallilov I.Sh., Skorokhod A.V. *On well–off estimates of parameters of stochastic processes*(in Russian). Naukova Dumka, Kiev.

[27] Zerakidze Z., Pantsulaia G., Saatashvili G.(2013) On the separation problem for a family of Borel and Baire G -powers of shift-measures on R , *Ukrainian Math. J.65(4)* 470–485. 3125005

[28] Borovkov, A. A. Kurs teorii veroyatnosteĭ. (Russian) [A course in probability theory] Izdat. “Nauka", Moscow, 1972. 287 pp. MR0350784 (50 #3276).

[29] G.Pantsulaia , On generators of shy sets on Polish topological vector spaces, New York J. Math.,14 (2008) , 235 – 261.

[30] Jech I., Lectures in set theory, Berlin, Springer (1973).

[31] Mycielski J., Swierczkowski S., On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, Fund., 54,(1964), 67-71.

[32] Engelking R., Outline of general topology, PWN, WARSAW. NORTHHOLLAND, AMSTERDAM (1974).

[33] Cichon J., Kharazishvili A., Weglorz B., Subsets of the real line, Wydawnictwo Universytetu Lodszkiero, Lodz (1995).

[34] P.R. Halmos, Measure theory, Princeton, Van Nostrand (1950).

[35] Kharazishvili A.B., Topological aspects of measure theory, Naukova Dumka, Kiev (1984) (in Russian).

[36] SHIRYAEV A.N.,Probability (in Russian), Izd."Nauka", Moscow, 1980.

[37] G. Hardy, J. Littlewood, Some problems of diophantine approximation. Acta Math. 37 (1914), no.1, 193–239.

[38] I. M. Sobol, Computation of improper integrals by means of equidistributed sequences (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR. 210 (1973), 278–281.

[39] C. Baxa, J. Schoi engeier, Calculation of improper integrals using - sequences. Dedicated to Edmund Hlawka on the occasion of his th birthday. Monatsh. Math. 135 (2002), no.4, 265–277.

[40] Shiryaev A.N., Probability (in Russian), Izd.Nauka, Moscow, 1980.

[41] Girsanov I.V., Mityasin B.S. Quasi-invariant measures and linear topological spaces (in Russian)// Nauchn. Dokl. Vys. Skol.-1959.-2.-P. 5-10.

[42] Sudakov V.N.Linear sets with quasi-invariant measure(in Russian)// Dokl. Akad. Nauk SSSR.-1959.- 127.-P. 524-525.

[43] Moore C.C. Invariant measures on product spaces // Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability.-1965-1966.- Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 2.- P. 447–459

[44] Yamasaki Y. Translationally invariant measure on the infinite-dimensional vector space // Publ. Res. Inst. Math. Sci.-1980. - 16(3).-P. 693–720.

[45] Kharazishvili A.B. On invariant measures in the Hilbert space (in Russian) // Bull. Acad. Sci.Georgian SSR.-1984.- 114(1).-P. 41–48.

[46] Gill T., Kirtadze A., Pantsulaia G., Plichko A. Existence and uniqueness of translation invariant measures in separable Banach spaces // Funct. Approx. Comment. Math.-2014.- 50(2).-P. 401–419.

[47] Gill T.L., Pantsulaia G.R., and Zachary W.W. Constructive Analysis In Infinitely Many Variables // Communications in Mathematical Analysis.-2012.-13 (1).-P. 107-141.

[48] Kakutani S. On equivalence of infinite product measures // Ann. Math.-1948.- 4 (9).- P. 214-224.

[49] Cameron R.H., Martin W.T. On Transformations of Wiener integrals under translations // Ann.of Math.-1944.- 45.- P. 386-396.

[50] Feldman J. Equivalence and orthogonality of Gaussian processes // Pacific J. Math. - 1958.-8.- P. 699–708.

[51] Grenander Ulf. Stochastic processes and statistical inference // Ark. Mat.-1950.- 1.-P. 195–277.

[52] Veršik A. M., Duality in the theory of measure in linear spaces (in Russian) //Dokl. Akad. Nauk SSSR.-1966.- 170.-P. 497–500.

[53] Hill D. G. B. -finite invariant measures on infinite product spaces // Trans. Amer. Math. Soc.-1971.- 153.- P. 347–370.

[54] LePage R.D., Mandrekar V. Equivalence-singularity dichotomies from zero-one laws // Proc. Amer. Math. Soc.-1972.- 31.-P. 251–254.

[55] Kuipers L., Niederreiter H. Uniform distribution of sequences.-New York etc.: John Wiley & Sons, 1974.

[56] Yamasaki Y. Translationally invariant measure on the infinite-dimensional vector space // Publ. Res. Inst. Math. Sci.-1980. - 16(3).-P. 693–720.

[57] Shimomura, Hiroaki. An aspect of quasi-invariant measures on // Publ. Res. Inst. Math. Sci.-1975/76.- 11(3).- P. 749–773.

[58] Pantsulaia G. Duality of measure and category in infinite-dimensional separable Hilbert space // Int. J. Math. Math. Sci.-2002.-30(6).-P. 353-363. 1904675