მურმან კინწურაშვილი

ზოგადი უნარები

(მათემატიკური ნაწილი)

თეორია

თბილისი 2017

წინასიტყვაობა

წიგნი მოიცავს ზოგადი უნარების მხოლოდ თეორიულ ნაწილს, რომელიც შედგენილია ერთიანი ეროვნული გამოცდების პროგრამის შესაბამისად კერძოდ, 2017 წლის პროგრამის გათვალისწინებით. წიგნში ავტორი შეეცადა რაც შეიძლება ლაკონურად გადმოეცა ზოგადი უნარების -მათემატიკური ნაწილის თეორიული მასალა, წიგნმა შეიძლება დახმარება გაუწიოს საჯარო სკოლის დამამთავრებელ კლასში მყოფ მოსწავლეებს,(აბიტურიენტებს) როგორც დამხმარე ლიტერატურამ ზოგადი უნარების შესწავლისას, ვიმედოვნებ რომ ეს წიგნი გაგიწევთ უდიდეს დახმარებას ამ რთულ საქმეში.

ავტორი სიამოვნებით მიიღებს მკითხველთა ყველა საქმიან შენიშვნას, რომლებიც გათვალისწინებული იქნება სახელმძღვანელოს შემდგომ გამოცემაში.

ავტორი
მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
საქართველოს ბიზნესისა და ტექნოლოგიების
უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი მურმან კინწურაშვილი

თბილისი_ 2017

ზოგადი უნარები -(მათემატიკური ნაწილი)

თეორია

&1.არითმეტიკა და ალგებრა

■ ნატურალური რიცხვები

რიცხვის ცნება უძველეს დროში წარმოიშვა და განვითარების დიდი გზა გაიარა, რომლის დროსაც ხდებოდა რიცხვის ცნების გაფართოება და განზოგადება. მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა რიცხვის ცნება. რიცხვების შესწავლას ნატურალური რიცხვებით დავიწყებთ. ნატურალურ რიცხვებს დასაბამი აქვთ სიტყვებში რომლებიც საგნების დასათვლელად გამოიყენებოდა, საწყისი რიცხვითი სახელით ერთი. პირველი მნიშვნელოვანი ნაბიჯი რიცხვთა სისტემის განზოგადებაში იყო ციფრების გამოყენება რაოდენობის გამოსახატავად. ამან განვითარების საშუალება მისცა რიცხვების ჩაწერის სისტემას გაცილებით უფრო დიდი რიცხვების გამოსახვისათვის. მაგალითად, ბაბილონელებმა განავითარეს მძლავრი აღრიცხვის პოზიციური სისტემა, რომელიც მნიშვნელოვანწილად შედგებოდა 1-დან 10-მდე ციფრებისაგან. ძველ ეგვიპტელებს გააჩნდათ აღრიცხვის სისტემა, სხვადასხვა იეროგლიფებისაგან შემდგარი. ციფრების, როგორც აბსტრაქტული ცნებების პირველ სისტემატიკურ მოკვლევას მიაკუთვნებენ ძველ ბერძენ ფილოსოფოსებს, პითაგორასა და არქიმედეს. თუმცა დამოუკიდებელ შესწავლებს ჰქონდათ ადგილი დაახლოებით იმავე პერიოდში ინდოეთში, ჩინეთში, ამერიკაში. ,,ღმერთმა შეჰქმნა ნატურალური რიცხვები, ყველა დანარჩენი კაცის მოგონილია“. ამ სიტყვებით ლეოპოლდ კრონეკერმა (1823-1891) განსაზღვრა ის მტკიცე საძირკველი, რომელზედაც მათემატიკის შენობის აგება შეიძლებოდა. ნატურალური რიცხვის ცნება არის მათემატიკის უმარტივესი, პირველადი ცნება.

განსაზღვრება. თვლის შედეგად მიღებულ რიცხვებს ნატურალური რიცხვები ეწოდება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე **N** ასოთი აღინიშნება, ე.ი. N={1;2;3;...}. ისევე როგორც ყოველი არაცარიელი სასრული სიმრავლე ხასიათდება გარკვეული ნატურალური რიცხვით, ცარიელი სიმრავლეც ხასიათდება რიცხვით ,,0“. ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლისა და {0}-ის გაერთიანებას არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და $\boldsymbol{Z_0}$**-ით** აღინიშნება. $Z_0 = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$. ცხადია, რომ $N \subset Z_0$. როგორც ნატურალური, ასევე არაუარყოფით მთელ რიცხვტა სიმრავლე უსასრულოა. ორივე მათგანს გააჩნია უმცირესი

ელემენტი, ხოლო უდიდესი არ გააჩნია. N სიმრავლის უმცირესი ელემენტია 1, Z_0 სიმრავლისა კი_0. ზრდის მიხედვით დალაგებული ნატურალური რიცხვები ქმნიან ე.წ. ნატურალურ რიცხვთა რიგს.

რადგან ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ შეუძლებელია ყოველი მათგანისათვის შესაბამისი განსხვავებული სიმბოლოს შერჩევა. პრაქტიკულად უფრო მოსახერხებელია ნატურალურ რიცხვთა ჩაწერის ეგრეთ წოდებული **პოზიციური სისტემები**. ეს სისტემები გულისხმობენ სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით ჩაიწეროს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი, სიმბოლოთა ურთიერთმდებარეობის (პოზიციის) გათვალისწინებით. იმისდა მიხედვით , თუ რამდენ ძირითად სიმბოლოს ავირჩევთ, გვექნება რიცხვის ჩაწერის ,,ორობითი"; ,,რვაობითი" ,,ათობითი" და ა.შ.სისტემები. ყველაზე უფრო გავრცელებულია ათობითი სისტემა, სადაც გამოიყენება Z_0 სიმრავლის ათი ელემენტი: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, რომელთაც ციფრები ეწოდება. მაგალითად , რიცხვი 7256 შედგება ოთხი ციფრისაგან, რომლებიც თავისი მდებარეობის (პოზიციის) მიხედვით მიუთითებენ, რომ რიცხვი შედგება 6 ერთეულის, 5 ათეულის, 2 ასეულისა და 7 ათასეულისაგან, ე.ი.

7256= $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6$.

0,2,4,6,8 ციფრებს ლუწი ციფრები ეწოდება, ხოლო **ციფრებს 1,3,5,7,9**-კენტი. რიცხვი ლუწია თუ ის ლუწი ციფრით ბოლოვდება, ხოლო კენტია თუ ის კენტი ციფრით ბოლოვდება.

განსაზღვრება. nნატურალური რიცხვის გამყოფი ეწოდება ისეთ m ნატურალურ რიცხვს, რომელზედაც n იყოფა უნაშთოდ.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვის გამყოფთა სიმრავლე სასრულია. მაგალითად, 12-ის გამყოფთა სიმრავლეა {1,2,3,4,6,12} შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი უნაშთოდ იყოფა 1-ზე და თავის თავზე. ამრიგად , 1-ისგან განსხვავებულ ყოველ ნატურალურ რიცხვს ორი გამყოფი მაინც აქვს.

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვს ეწოდება **მარტივი**, თუ მას მხოლოდ ორი გამყოფი აქვს, ხოლო_**შედგენილი** თუ მისი გამყოფთა რიცხვი ორზე მეტია. მაგალითად 2,3,5,7,11,13,17,19...მარტივი რიცხვებია ხოლო 4,6,8,9,10,12,14,15_შედგენილი. შევნიშნოთ, რომ 2 არის ერთადერთი მარტივი ლუწი რიცხვი. 1 არც მარტივია და არც შედგენილი. ვიტყვით, რომ რიცხვი დაშლილია მარტივ მამრავლებად, თუ იგი წარმოდგენილია მარტივ რიცხვთა ნამრავლის სახით.

განსაზღვრება. n ნატურალური რიცხვის ჯერადი ეწოდება ისეთ m ნატურალურ რიცხვს, რომელიც n-ზე იყოფა უნაშთოდ.

■2. წილადები და მთელი რიცხვები

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვებს, მათ მოპირდაპირე რიცხვებს და ნულს მთელი რიცხვები ეწოდებათ.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება **Z** ლათინური ასოთი და მათემატიკურად შემდეგნაირად ჩაიწერება Z={0; ±1; ±2; ±3; ... }. მთელ რიცხვთა სიმრავლე

უსასრულოა.

განსაზღვრება. წილადს, რომლის მნიშვნელია 10^n , სადაც $n \in N$, ათწილადი ეწოდება. ათწილადს ჩვეულებრივ მნიშვნელის გარეშე გამოსახავენ. წერენ მხოლოდ მრიცხველს და მარჯვნიდან მძიმით გამოყოფენ იმდენ ციფრს, რამდენი ნულიცაა მნიშვნელში; ამასთან ზოგჯერ საჭირო ხდება წინ ნულების ჩაწერა. ათწილადში მძიმის მარჯვნივ მდგომ ციფრებს ათწილადი ნიშნები ეწოდება. წილადის ძირითადი თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ ათწილადის სიდიდე არ შეიცვლება , თუ მას მარჯვნივ მივუწერთ ერთ ან რამდენიმე ნულს.
მაგ. 12.7=12.70=12.700=...

თუ ათწილადში მძიმეს გადავიტანთ ერთი ათწილადი ნიშნით მარჯვნივ , ათწილადი გაიზრდება 10-ჯერ, ხოლო მძიმის ერთი ათწილადი ნიშნით მარცხნივ გადატანით 10-ჯერ შემცირედება.

მთელი უარყოფითი რიცხვები -ნატურალური რიცხვები აღებული ,,-„ ნიშნით. მაგ -1,-2,-3,-4,... მიღებულია, რომ მათ **უარყოფითი რიცხვები** ეწოდებათ მათ მოპირდაპირე რიცხვებს კი დადებითი. ნებისმიერი სახის რიცხვების პრაქტიკული შედარებისათვის ფართოდ გამოიყენება შემდეგი წესები:

წესი1. a და b რიცხვების შედარების მიზნით ვიპოვოთ a-b სხვაობა.

თუ $a - b > 0.$ მაშინ $a > b;$

თუ $a - b < 0.$ მაშინ $a < b;$

თუ $a - b = 0.$ მაშინ $a = b.$

წესი2. a და b ერთნიშნიანი რიცხვების შედარების მიზნით ვიპოვოთ $\frac{a}{b}$ შეფარდება.

თუ $\frac{a}{b} > 1$, მაშინ $\begin{cases} a > b & \text{დადებითი რიცხვებისათვის} \\ a < b & \text{უარყოფითი რიცხვებისათვის} \end{cases}$

თუ $\frac{a}{b} < 1$, მაშინ $\begin{cases} a < b & \text{დადებითი რიცხვებისათვის} \\ a > b & \text{უარყოფითი რიცხვებისათვის} \end{cases}$

თუ $\frac{a}{b} = 1$, მაშინ $a = b$.

ჩამოვაყალიბოთ ნამდვილ რიცხვთა ძირითადი თვისებები:

I. დალაგების თვისებები

1. ნებისმიერი ორი a და b ნამდვილი რიცხვისათვის სრულდება ერთი და მხოლოდ ერთი შემდეგი თანაფარდობებიდან: a= b, a> b, a< b.

2. თუ a< b, მოიძებნება ისეთი c რიცხვი, რომ a< c< b.

I I. შეკრების თვისებები

1. a+b=b+a (შეკრების კომუტაციურობა)
2. (a+b)+c=a+(b+c) (შეკრების ასოციაციურობა)
3. a+0=a
4. a+(-a)=0 (a და -a მოპირდაპირე რიცხვებია)
5. თუ a=b, მაშინ a+c=b+c, სადაც c ნებისმიერია.

I I I. გამრავლების თვისებები

1. ab=ba (გამრავლების კომუტაციურობა);
2. (ab)c=a(bc) (გამრავლების ასოციაციურობა);
3. A·1=a
4. A·0=0
5. თუ a=b, მაშინ ac=bc;
6. A·$\frac{1}{a}$=1, ($a \neq 0$), (aდა$\frac{1}{a}$ ურთიერთშებრუნებული რიცხვებია);
7. (a+b)c=ac+bc (შეკრების დისტრიბუციულობა გამრავლების მიმართ).

განსაზღვრება. $\frac{m}{n}$ სახის რიცხვებს, სადაც m$\in Z$, n$\in N$, რაციონალური რიცხვები ეწოდება.

დადებითი რაციონალური რიცხვები, უარყოფითი რაციონალური რიცხვები და 0 რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს ქმნის და აღინიშნება Q ლათინური ასოთი.

თუ ნატურალურ რიცხვთა მწკრივიდან 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10... ამოვშლით ნატურალური რიცხვების კვადრატებს, დაგვრჩება რიცხვები 2,3,5,6,7,8,10... აქ ჩამოთვლილი ყოველი რიცხვიდან კვადრატული ფესვი ირაციონალური რიცხვია. $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{6}$,$\sqrt{7}$,$\sqrt{8}$,$\sqrt{10}$,...

განსაზღვრებაუსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება.

ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს I ასოთი აღნიშნავენ.

ირაციონალური რიცხვის აღმოჩენას, პითაგორასა და პითაგორას სკოლის მათემატიკოსებს უკავშირებენ, ირაციონალურ რიცხვთა სრულყოფილი მათემატიკური თეორია მხოლოდ მე-19 საუკუნეში დიდი მათემატიკოსების: დედეკინდის, კანტორისა და ვაიერშტრასის მიერ შეიქმნა.

განვიხილოთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი რომლის კათეტი 1-ის ტოლია. არ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. მართლაც დავუშვათ საწინააღმდეგო, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია და ამასთანავე ეს რიცხვი დაყვანილია უკვეც $\frac{m}{n}$

წილადზე, მაშინ $(\frac{m}{n})^2 = 2$. აქედან $m^2 = 2n^2$ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ m^2 ლუწი რიცხვია. მაშასადამე ლუწი იქნება m რიცხვიც. ამიტომ $m = 2k$, სადაც k რაიმე მთელი რიცხვია. თუ m-ის ამ მნიშვნელობას შევიტანთ $m^2 = 2n^2$ ტოლობაში გვექნება $4k^2 = 2n^2$ ანუ n^2=$2k^2$ამ ტოლობის მიხედვით n^2 ლუწი რიცხვია, მაშასადამე n-იც ლუწია. ამგვარად m და n ლუწი რიცხვებია, რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცია. მიღებული წინააღმდეგობა იმის მაჩვენებელია, რომ $\frac{m}{n}$ რაციონალური რიცხვისათვის ტოლობა $(\frac{m}{n})^2 = 2$ შეუძლებელია. ამრიგად განხილული ჰიპოტენუზის სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. შეიძლება მოყვანილ იქნეს ბევრი სხვა მაგალითი და დადსტურდეს, რომ გარდა რაციონალური წერტილებისა რიცხვით ღერძზე არსებობს უამრავი წერტილი რომელნიც რაციონალურ რიცხვებს არ გამოსახავენ; სხვანაირად არსებობს მონაკვეთები რომელთა სიგრძე არავითარი რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება.
წესი.წრფეს რომელზედაც არჩეულია ათვლის სათავე, ერთეული მონაკვეთი და მიმართულება რიცხვითი წრფე ეწოდება.
საჭიროა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოება ირაციონალური რიცხვების შემოღებით. ირაციონალური რიცხვების სრული თეორია მათემატიკური ანალიზის ვრცელ კურსებში განიხილება. ჩვენ მხოლოდ მოკლედ მოვიყვანთ ზოგიერთ ცნობას ირაციონალური რიცხვების შესახებ. ირაციონალური რიცხვია მაგალითად შემდეგი არაპერიოდული ათწილადი: 2,3030030003...
ირაციონალური რიცხვების მაგალითებს წარმოადგენს $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, **π წრეწირის სიგრძის შეფარდება მისსავე დიამეტრთან.**
განვიხილოთ ირაციონალური რიცხვი $\sqrt{2}$. ვიპოვოთ ამ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით $\frac{1}{10}$-მდე. ვთქვათ ნაკლებობით. ეს ნიშნავს ვიპოვოთ ისეთი რაციონალური რიცხვი, რომელიც $\sqrt{2}$-ზე ნაკლებია და მისგან $\frac{1}{10}$-ზე ნაკლები რიცხვით განსხვავდება ამისათვის ჯერ უნდა მოიძებნოს ისეთი მთელი n რიცხვი, რომ $\frac{n}{10} < \sqrt{2} < \frac{n+1}{10}$

$$n < 10 \cdot \sqrt{2} < n + 1$$
$$n^2 < 200 < (n + 1)^2$$

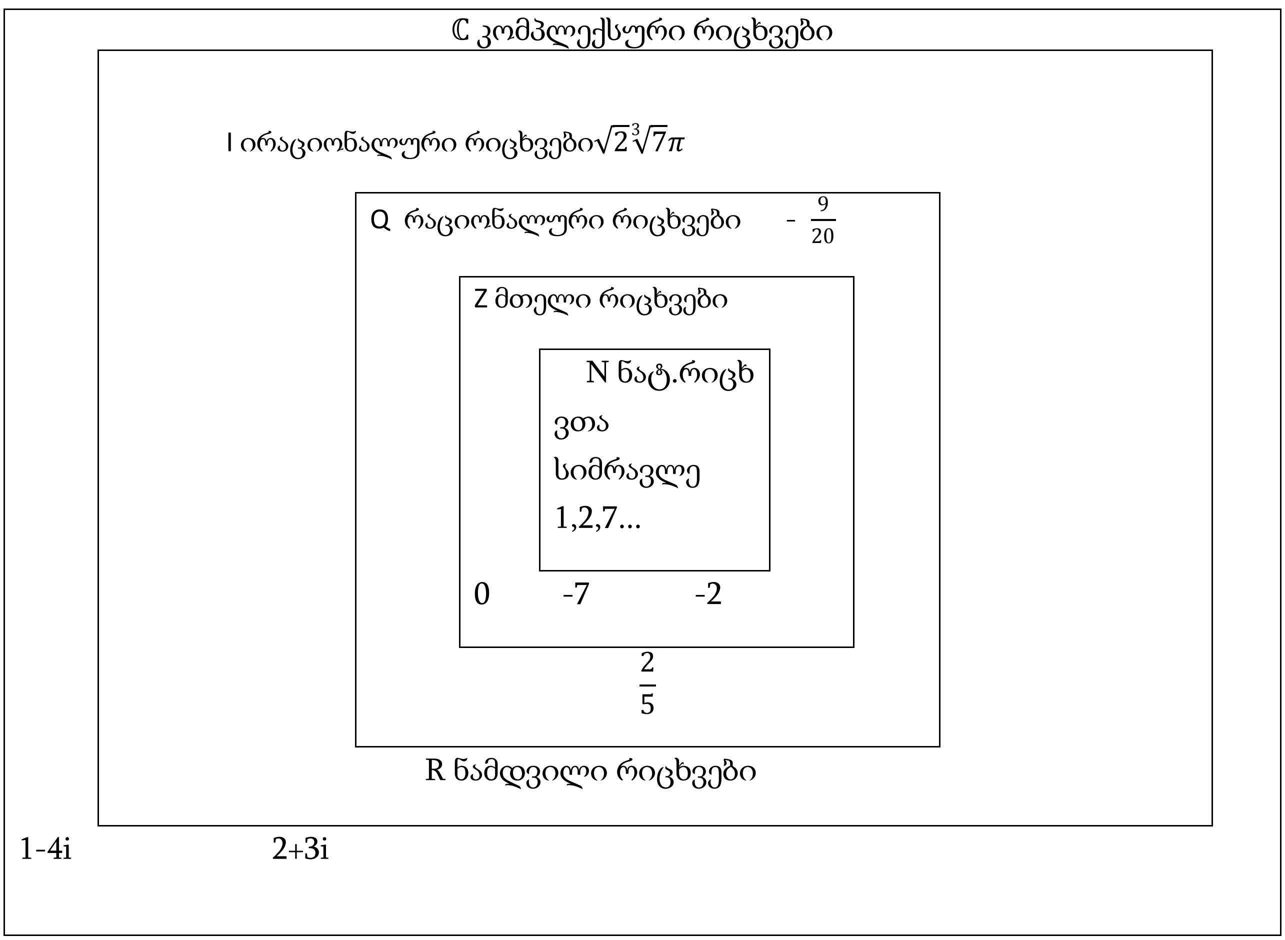
აქედან ჩანს, რომ n არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომლის კვადრატი 200-ზე ნაკლებია. ასეთია 196. მაშასადამე 14/10 ანუ 1,4 არის $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობის სიზუსტით 1/10-მდე. 1,5 იქნება $\sqrt{2}$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობა 1/10-მდე სიზუსტით მეტობით.
ამგვარად ჩვენ გვაქვს გარკვეული წესი იმ წილადის საპოვნელად რომელიც ნებისმიერი სიზუსტით მიუახლოვდება $\sqrt{2}$-ის ზუსტ მნიშვნელობას.

$\sqrt{2}$-ის ზუსტ მნიშვნელობად მიღებულია უსასრულო ათწილადი 1,4142135...
ირაციონალური წერტილები რაციონალურ წერტილებთან ერთად მთლიანად ავსებს რიცხვთა ღერძს (R)

განსაზღვრება რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა და ის **R** ასოთი აღინიშნება.

ამრიგად $R=Q \cup I$. ამასთანავე Q და I სიმრავლეებს საერთო ელემენტი არა აქვს მაშასადამე, ყოველი ნამდვილი რიცხვი არის ან რაციონალური რიცხვი, ან ირაციონალური რიცხვი.

ზემოთ განხილულ სიმრავლეებს შორის ურთიერთკავშირი შეიძლება გამოისახოს შემდეგნაირად



z=a+bi გამოსახულებას ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ფორმა, სადაც a-ს უწოდებენ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო b წარმოსახვით ნაწილს და აღნიშნავენ სიმბოლოებით a=Rez, y=Imz,   i წარმოსახვითი ერთეულია. i^2=-1 შემოტანილია მათემატიკური შეთანხმება ამის საფუძველზე შევადგინოთ ცხრილი

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^{4k+1} = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{4k+2} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{4k+3} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{4k} = 1$

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება ℂ-ასოთი
z კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება $\sqrt{a^2+b^2}$რიცხვს და აღინიშნება $|z|$ სიმბოლოთი. $|z| \geq 0 |z| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც z=0.

■ 3 ნაწილი და პროცენტი

რიცხვის მეასედ ნაწილს მისი პროცენტი ეწოდება. რიცხვის ერთი პროცენტი 1% სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო k პროცენტი კი- k% სიმბოლოთი. პროცენტზე განიხილება შემდეგი სამი ტიპის ამოცანა:

1. რიცხვის რაიმე პროცენტის პოვნა. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რიცხვის k%, საჭიროა ეს რიცხვი გავამრავლოთ $\frac{k}{100}$-ზე.
2. რიცხვის პოვნა პროცენტის საშუალებით. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ რომელი რიცხვის k%-ს წარმოადგენს მოცემული რიცხვი საჭიროა იგი გავამრავლოთ $\frac{100}{k}$-ზე.
3. ორი რიცხვის პროცენტული ფარდობის პოვნა. იმისათვის, რომ დავადგინოთ ერთი რიცხვი მეორის რამდენ პროცენტს შეადგენს,საჭიროა მათი ფარდობა გავამრავლოთ 100-ზე.

a რიცხვის b ნაწილის პოვნისათვის საჭიროა , a გავამრავლოთ b-ზე.

■ შეფარდება და პროპორცია

ორი ფარდობის ტოლობას $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, სადაც a,b,c,d∈ R (b≠ $0, d \neq 0$) პროპორცია ეწოდება. a-ს და d-ს პროპორციის კიდურა წევრები, ხოლო b-სა და c-ს შუა წევრები ეწოდებათ.

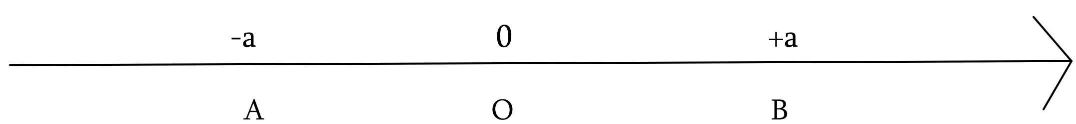
თუ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ პროპორციის ორივე მხარეს გავამრავლებთ bd-ზე, **მივიღებთ ad=bc**. ეს ტოლობა გამოსახავს **პროპორციის ძირითად თვისებას:** პროპორციის კიდურა წევრების ნამრავლი უდრის შუა წევრების ნამრავლს.

რაიმე რიცხვი რომ დავყოთ მოცემული რიცხვების პროპორციულ ნაწილებად, საჭიროა იგი გავყოთ მოცემული რიცხვების ჯამზე და განაყოფი გავამრავლოთ თითოეულზე ამ რიცხვზე.

მასშტაბი-რუკაზე გეგმაზე ან ნახაზზე მოცემული ხაზების სიგრძის შეფარდება ამ ხაზებით გამოხატულ ნამდვილ სიგრძესთან. მასშტაბი ბუნებაში გაზომილი მონაკვეთების ქაღალდზე გამოხაზვის დროს შემცირების ზომაა. ცნობილია რიცხვითი სახელდებული და ხაზვითი მასშტაბები. რიცხვითი მასშტაბი 1:M წილადია, რომლის M მნიშვნელი გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ უნდა შევამციროთ გაზომილი მანძილი ქაღალდზე გამოხაზვის დროს.

■ რიცხვითი ღერძი

განვიხილოთ წრფე და მასზე მდებარე ორი A და B განსხვავებული წერტილი. ამ წრფეზე შეიძლება ავირჩიოთ ორი მიმართულება A-დან B -სკენ ან B-დან A-სკენ. მათგან ერთ-ერთი მაგალითად A-დან B -სკენ მივიღოთ დადებით მიმართულებად. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და აღებული წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, ნულს შეესაბამება წრფის რომელიმე O წერტილი, რომელსაც სათავე ვუწოდოთ, რაიმე მონაკვეთის სიგძე მივიღოთ სიგრძის ერთეულად. ყოველ ნამდვილ $\mp a$ $(a > 0)$ რიცხვს შევუსაბამოთ წრფის წერტილი, რომელიც დაშორებულია სათავიდან a მანძილით დადებითი მიმართულებით + a რიცხვისათვის და უარყოფითი მიმართულებით - a რიცხვისათვის. ცხადია, რომ ეს შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა, რადგან სათავე შეესაბამება ნულს, ხოლო ყოველი წერტილი, რომელიც სათავიდან a მანძილითაა დაშორებული, შეესაბამება + a რიცხვს, თუ წერტილი სათავიდან დადებითი მიმართულებითაა და - a რიცხვს უარყოფითი მიმართულებით.



განხილულ წრფეს ვუწოდოთ რიცხვითი წრფე ანუ **საკოორდინატო ღერძი.** საკოორდინატო

ღერძის რაიმე წერტილის შესაბამის რიცხვს ამ წერტილის კოორდინატი ეწოდება.
განსაზღვრება. წრფეს, რომელზედაც არჩეულია ათვლის სათავე, ერთეული მონაკვეთი და მიმართულება რიცხვითი წრფე ეწოდება.
განვიხილოთ XOY დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. OX და OY ორი ურთიერთმართობული წრფეებია რომლებიც ერთ წერტილში იკვეთება (0 სათავე) OX ღერძს ვუწოდოთ აბსცისათა ღერძი, ხოლო OY ღერძს ორდინატთა ღერძი. XOY სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე M (2,7) წერტილი, ეს ნიშნავს რომ M წერტილის აბსცისაა 2 ხოლო ორდინატა 7, სხვანაირად რომ ავხსნათ ,ვთქვათ, კოორდინატთა სათავიდან მივდივართ დანიშნულების ადგილამდე 2 მეტრით აღმოსავლეთით და 7 მ ჩრდილოეთით. ზოგადად ამ წერტილს ასე გამოსახავენ M (x,y).

■ ალგებრული გამოსახულება

განსაზღვრება. რიცხვთა და იმ ნიშანთა ერთობლიობას, რომლებიც გვჩვენებენ, თუ რა მოქმედებები და რა მიმდევრობით უნდა იქნას შესრულებული ამ რიცხვებზე, რიცხვითი გამოსახულება ეწოდება.
განსაზღვრება. გამოსახულებას, რომელიც ცვლადს შეიცავს, ცვლადის შემცველი გამოსახულება ეწოდება.
განსაზღვრება. გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს რიცხვებს, ცვლადებს, მათ ხარისხებს და მათზე ოთხივე არითმეტიკულ მოქმედებას ალგებრული გამოსახულება ეწოდება.
ax^n სახის ალგებრულ გამოსახულებას, სადაც a კოეფიციენტი ნამდვილი რიცხვია და n არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ეწოდება ერთწევრი. ორი და მეტი ერთწევრის ჯამს **მრავალწევრი ეწოდება. (პოლინომი)**
მუდმივ წევრებს და წევრებს , რომლებიც ერთი და იმავე ცვლადებს შეიცავენ ერთი და იმავე ხარისხის მაჩვენებლით, **მსგავსი წევრები ეწოდებათ.** მსგავსი ერთწევრები შეგვიძლია შევაერთოთ მათი რიცხვითი კოეფიციენტების შეკრებითა და გამოკლებით. ამრიგად , რომ შევკრიბოთ ან გამოვაკლოთ ორი ალგებრული გამოსახულება ამისათვის უნდა გავხსნათ ფრჩხილები და შევაერთოთ მსგავსი წევრები. ჯამი უნდა დავწეროთ მარცხნიდან მარჯვნივ ხარისხის მაჩვენებლის კლების მიხედვით.

მამრავლებად დაშლა არის მოქმედება, რომლის შედეგად ალგებრული გამოსახულება წარმოიდგინება ალგებრული გამოსახულებების ნამრავლის სახით. ალგებრული გამოსახულება რომ დავშალოთ მამრავლებად პირველად უნდა შევამოწმოთ, ხომ არ შეიცავენ წევრები საერთო მამრავლს.თუ საერთო მამრავლები აქვთ, მაშინ საერთო მამრავლები , ფრჩხილებს გარეთ უნდა გავიტნოთ.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ამ გამოსახულებებს ორი რიცხვის ჯამისა და სხვაობის კვადრატის აგრეთვე კვადრატების სხვაობის ფორმულები ეწოდებათ.

აქვე მოვიყვანოთ შემოკლებული გამრავლების სხვა ფორმულებიც

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

■ განტოლება; განტოლების ამონახსნი (ფესვი)

განსაზღვრება. ტოლობას, რომელიც ცვლადს შეიცავს განტოლება ეწოდება.

იმის მიხედვით, თუ რამდენ ცვლადს შეიცავს განტოლება, იგი შეიძლება იყოს ერთცვლადიანი, ორცვლადიანი და ა.შ.

ერთცვლადიანი განტოლების ამონახსენი (ფესვი) ეწოდება ცვლადის იმ მნიშვნელობას, რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს; თუ განტოლება შეიცავს ერთზე მეტ ცვლადს, მაშინ მისი ამონახსნი ეწოდება შესაბამისად, ცვლადების მნიშვნელობათა დალაგებულ წყვილს, რომელიც განტოლებას ჭეშმარიტ ტოლობად აქცევს.

განტოლების ამოხსნა ნიშნავს, მისი ამონახსნთა სიმრავლის პოვნას.

განტოლების ამოხსნის პროცესში მიზანშეწონილია შევცვალოთ იგი ტოლფასი, უფრო მარტივი განტოლებით, რისთვისაც სარგებლობენ **განტოლებათა შემდეგი თვისებებით:**

1. თუ განტოლების ორივე მხარეს დავუმატებთ ერთსა და იმავე რიცხვს, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.

2. თუ განტოლების ერთი მხარიდან მეორეში გადავიტანთ რომელიმე შესაკრებს მოპირდაპირე ნიშნიტ, მივირებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.
3.თუ განტოლების ორივე მხარეს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე რიცხვზე, მივიღებთ მოცემული განტოლების ტოლფას განტოლებას.
მაგალითად განვიხილოთ $ax + b = 0$ წრფივი განტოლება, რომელსაც პირველი რიგის განტოლება ეწოდება და მას აქვს ერთადერთი ამოხსნა $x = -\frac{b}{a}$. A$\neq$ 0.
თუ a=0 , მაშინ წრფივ განტოლებას ექნება სახე 0x+b=0 და იგი ნულოვანი განტოლებაა. როცა b$\neq$ 0 განტოლებას ამონახსნი არა აქვს , ხოლო როცა b=0 განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე უსასრულოა და ემთხვევა R.

■ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ სახის განტოლებას, სადაც $x_1, x_2, \ldots x_n$ ცვლადებია, ხოლო $a_1, a_2, \ldots\ a_n$, b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, n ცვლადიანი წრფივი განტოლება ეწოდება.$a_1, a_2, \ldots\ a_n$ რიცხვებს ცვლადების კოეფიციენტები ეწოდება, ხოლო b-ს თავისუფალი წევრი. n ცვლადიან m წრფივ განტოლებათა სისტემას აქვს სახე

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots. + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

შესაძლებელია და უფრო მოსახერხებელია, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემაში ცვლადთა და განტოლებათა რაოდენობა ერთმანეთის ტოლი იყოს. ე.ი. m=n.

განტოლებათა სისტემები შეიძლება ამოიხსნას ე.წ. ჩასმისა და შეკრების ხერხით.
ჩასმის ხერხი გულისხმობს ცვლადების თანდათანობით გამორიცხვის მეთოდს.
შეკრების ხერხი კი სისტემის ისეთნაირ გარდაქმნას რომელიც გამორიცხავს თანდათანობით ცვლადებს.

■ რიცხვის ნატურალური ხარისხი და მისი თვისებები

წესი. a რიცხის ხარისხი 1-ზე მეტი ნატურალური n მაჩვენებლით ეწოდება ნამრავლს n მამრავლისა, რომელთაგან თითოეული a-ს ტოლია. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-ჯერ}$ n≥ 2

a რიცხის ხარისხი 1-ის ტოლი მაჩვენებლით თვით a რიცხვს ეწოდება. $a^1 = a$,
$a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$ და ა.შ.

უარყოფითი რიცხვის ახარისხებისას შეიძლება მივიღოთ, როგორც დადებითი, ისე უარყოფითი რიცხვი. მაგ $(-2)^2 = 4\ \ (-3)^1 = -3 \ldots$

უარყოფითი რიცხვი ლუწ ხარისხში დადებითია ხოლო კენტ ხარისხში უარყოფითია.

თვისებები:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}\ \ m, n \epsilon N$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}, m, n \in N\ a \neq 0\ m > n,$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$

ნებისმიერი რიცხვი გარდა ნულისა 0 ხარისხში 1-ის ტოლია. $a^0 = 1.$

4. $(ab)^n = a^n b^n (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $(ab)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}.$

■ მიმდევრობა; ფუნქცია; ფუნქციის გრაფიკი.

განსაზღვრება. ფუნქცია არის წესი, რომელიც A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს B სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთ ელემენტს.

A სიმრავლეს ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე. ფუნქციას ჩვეულებრივ აღნიშნავენ ლათინური ანბანის ასოებით, მაგ f-ით თუ x არის f ფუნქციის განსაზღვრის არის ელემენტი, მაშინ B სიმრავლის ის ელემენტი, რომელსაც f შეუსაბამებს x ელემენტს აღინიშნება f(x) სიმბოლოთი და მას ეწოდება ფუნქციის მნიშვნელობა x ელემენტზე.სიმრავლეს ყველა იმ ელემენტისა,რომელსაც ღებულობს y= f(x) ფუნქცია, როცა x მიიღებს ყველაშესაძლო მნიშვნელობებს განსაზღვრის არიდან, ეწოდება f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

f ფუნქცია განსაზღვრის A არით არის ყველა დალაგებული (x, f(x)) წყვილების სიმრავლე, სადაც x ეკუთვნის A-ს.

ერთი ცვლადის f ფუნქციის გრაფიკი არის სიმრავლე ყველა იმ (x,y) წერტილებისა xy სიბრტყეზე, რომელშიც x ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს და y= f(x).

ვთქვათ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წინასწარ y=f(x) ფუნქცია, **ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს გრაფიკული ხერხი ეწოდება.**

განსაზღვრება. ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას უსასრულო რიცხვითი მიმდევრობა ეწოდება. აღინიშნება $a_1, a_2, \ldots\ a_n, \ldots$ ან (a_n) სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n = c$ მუდმივი მიმდევრობა ეწოდება.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც ზრდად ფუნქციას წარმოადგენს ზრდად მიმდევრობას უწოდებენ.

რიცხვით მიმდევრობას, რომელიც კლებად ფუნქციას წარმოადგენს კლებად მიმდევრობას უწოდებენ. ზრდად და კლებად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ეწოდება.

რიცხვით მიმდევრობას , რომელიც შემოსაზღვრულ ფუნქციას წარმოადგენს, **შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.** ცხადია (x_n) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ მოიძებნება ისეთი m და M რიცხვები, რომ n-ისათვის სრულდება უტოლობა $m \le x_n \le M$.

- საშუალო არითმეტიკული

არითმეტიკული საშუალო არის მოცემული მონაცემების ჯამი გაყოფილი მათ რაოდენობაზე. მაგალითად ვთქვათ მონაცემებია $x_1, x_2, \ldots x_n$ მაშინ მათი საშუალო გამოითვლება შემდეგი ფორმულით $V = \frac{\mathrm{x_1+x_2+\cdots+x_n}}{\mathrm{n}}$.

&2 გეომეტრია

- გეომეტრიული ფიგურები სიბრტყეზე.

ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს სიბრტყეზე წარმოადგენსწერტილი და წრფე. წერტილები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით : A,B,C,D… ხოლო წრფეები მცირე ლათინური ასოებით: a,b,c,d…

წერტილისა და წრფის ცნება გეომეტრიის პირველადი ცნებებია.

განსაზღვრება. მონაკვეთი ეწოდება წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრფის ორ მოცემულ წერტილს შორის მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილებს მონაკვეთის ბოლოები ეწოდება. მონაკვეთი აღინიშნება მისი ბოლოების მითითებით.

განსაზღვრება. სხივი ანუ ნახევარწრფე ეწოდება წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრფის მოცემული წერტილის ერთმხარეს მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილს სხივის საწყისი წერტილი ანუ სათავე ეწოდება. ერთ წრფეზე მდებარე საერთო სათავის მქონე სხვადასხვა სხივებს დამატებითი სხივები ეწოდება.

განსაზღვრება. $A_1A_2 \dots . A_n$ ტეხილი ეწოდება ფიგურას,რომელიც $A_{1,}A_{2,} \dots . A_n$ წერტილებისა და მათი შემაერთებელი მონაკვეთებისგან შედგება. $A_{1,}A_{2,} \dots . A_n$ წერტილებს ტეხილის წვეროები ეწოდება ხოლო მათ შემაერთებელ მონაკვეთებს კი ტეხილის მდგენები ეწოდება.

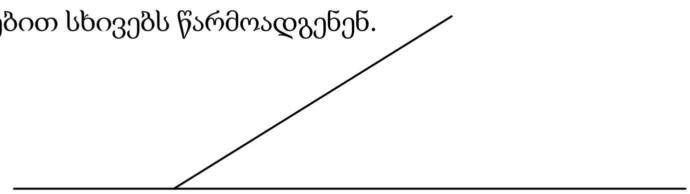
განსაზღვრება. საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივით შედგენილ ფიგურას კუთხე ეწოდება. ამ სხივებს კუთხის გვერდები , ხოლო მათ საერთო სათავეს კუთხის წვერო ეწოდება. კუთხე აღინიშნება ∠ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. კუთხეს , რომლის გვერდები წარმოადგენენ დამატებით სხივებს გაშლილი კუთხე ეწოდება და იგი 180°-ის ტოლია.

განსაზღვრება. 90°-ის ტოლ კუთხეს მართი კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება. 90°-ზე ნაკლებ კუთხეს მახვილი კუთხე ეწოდება, 90°-ზე მეტ და 180°-ზე ნაკლებ კუთხეს ბლაგვი კუთხე ეწოდება.

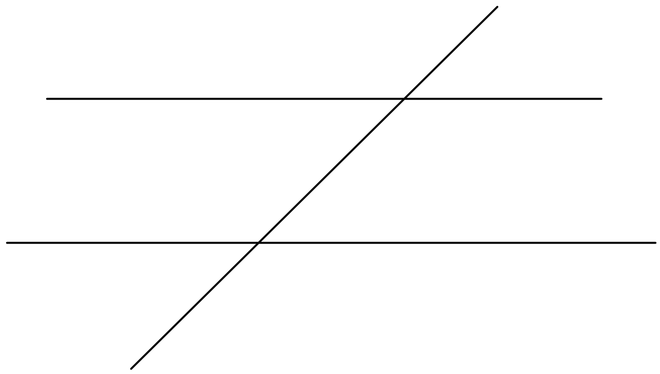
განსაზღვრება. ორ კუთხეს მოსაზღვრე ეწოდება , თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ,ხოლო დანარჩენი დამატებით სხივებს წარმოადგენენ.



მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.

განსაზღვრება. ორ კუთხეს ვერტიკალური ეწოდება, თუ ერთი კუთხის გვერდები წარმოადგენენ მეორე კუთხის გვერდების დამატებით სხივებს. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

განსაზღვრება. შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ტოლია, შიგაცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.



თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

განსაზღვრება. მარტივი შეკრული ტეხილის გაერთიანებას მის შიგა არესთან მრავალკუთხედი ეწოდება.

ამ ტეხილს ეწოდება მრავალკუთხედის საზღვარი. ხოლო შიდა არეს -მრავალკუთხედის შიდა არე. ტეხილის მდგენებს ეწოდება მრავალკუთხედის გვერდები, ხოლო ტეხილის წვეროებს მრავალკუთხედის წვეროები.მონაკვეთს რომელიც აერთებს მრავალკუთხედის ორ მოსაზღვრე წვეროს დიაგონალი ეწოდება.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედის ყველა გვერდების ჯამს მრავალკუთხედის პერიმეტრი ეწოდება.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედს წესიერი ეწოდება თუ მისი ყველა გვერდი ტოლია და ყველა კუთხე ტოლია.

სამკუთხედის უტოლობა-ნებისმიერი სამი წერტილისათვის ორ მათგანს შორის მანძილი ამ წერტილებიდან მესამე წერტილამდე მანძილების ჯამს არ რემატება.

$AB<AC+BC$

სამკუთხედის კუთხეების სიდიდეთა ჯამი 180°-ის ტოლია.

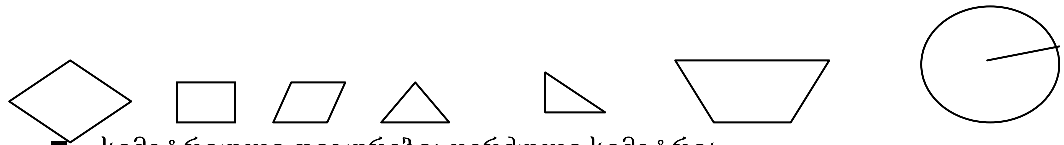
სამკუთხედს რომლის ორი გვერდი ტოლია, ტოლფერდა სამკუთხედი ეწოდება. ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს ფუძე.

სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი ტოლია ტოლგვერდა სამკუთხედი ეწოდება.

სამკუთხედს, რომელსაც აქვს მართი კუთხე მართკუთხა სამკუთხედი ეწოდება.

ტოლფერდა სამკუტხედის ფუძისადმი გავლებული მედიანა წარმოადგენს ამ სამკუთხედის ბისექტრისას და სიმაღლეს.
ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.
თუ სამკუთხედში ორი კუთხე ტოლია, მაშინ იგი ტოლფერდაა.
მართკუთხა სამკუთხედში 30°-იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.
სამკუთხედში ყოველი ორი გვერდიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი კუთხე ძევს.
სამკუთხედში ყოველი ორი კუთხიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი გვერდი ძევს.
თეორემა (პითაგორა) მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის კვადრატი კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია.
თუ ჰიპოტენუზას ავღნიშნავთ c ასოთი ხოლო კათეტებს a და b -თი მაშინ $c^2 = a^2 + b^2$.
სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელად გვაქვს შემდეგი ფორმულები
S=$\frac{1}{2}a \cdot h$, სადაც a გვერდია, ხოლო h მასზე დაშვებული მართობი
S=$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;მხოლოდ მაშინ როდესაც გვაქვს ტოლგვერდა სამკუთხედი a სამკუთხდის გვერდია
S=$\frac{1}{2}a \cdot b \cdot sin\gamma$; a და b სამკუთხედის გვერდებია ხოლო γ მათ შორის მდებარე კუთხე.
S=$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, სადაც p=$\frac{a+b+c}{2}$; ე.წ. ჰერონის ფორმულა, აქ a,b,c გვერდებია ხოლო p პერიმეტრის ნახვარი.
რომბის ფართობის გამოსათვლელად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:
S=$a \cdot h$; a გვერდია, h მასზე დაშვებული მართობი
S=$\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$; d_1, d_2 რომბის დიაგონალებია.
პარალელოგრამის ფართობის გამოსათვლელად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:
S= $a \cdot h$; a გვერდია, h მასზე დაშვებული მართობი
$S = a \cdot b \cdot sin\alpha$, ; a და b პარალელოგრამის არამოპირდაპირე გვერდებია, α -კი მათ შორის მდებარე კუთხე.
ტრაპეციის ფართობის გამოსათვლელად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:
$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; a და b პარალელოგრამის ფუძეებია, h კი- მათზე დაშვებული მართობი.
q=$\frac{a+b}{2}$; ტრაპეციის შუახაზი.
S=$\frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot sin\varphi$; d_1, d_2 -ტრაპეციის დიაგონალებია φ მათ შორის მდებარე კუთხე.
მართკუთხედის ფართობი
$S = a \cdot b$; ; a და b გვერდებია
კვადრატის ფართობი:
$S = a^2$; a -კვადრატის გვერდია.
წრეწირი ეწოდება ფიგურას შედგენილს სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან. ამ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება.

წრეწირის ნებისმიერი წერტილის ცენტრთან შემაერთებელ მონაკვეთს რადიუსი ეწოდება.
წრეწირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ ,მონაკვეთს ქორდა ეწოდება.
ცენტრზე გამავალ ქორდას დიამეტრი ეწოდება.
წრეწირის ნებისმიერ ორ წერტილზე გამავალი წრფის მიმართ თითოეულ ნახევარსიბრტყეში მოთავსებულ წრეწირის ნაწილს რკალი ეწოდება.
წრეწირის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა $l = 2\pi r$; $\pi \approx 3.14$
წრეწირის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულა $S = \pi r^2$. $\pi \approx 3.14$
სამკუთხედის შუახაზი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც მისი ორი გვერდის შუაწერტილებს აერთებს, სამკუთხედის შუახაზი მესამე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს უდრის.
ოთკუთხდს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია , პარალელოგრამი ეწოდება.
თუ ოთკუთხედის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთკუთხედი პარალელოგრამია.
თუ ოთკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს ოთკუთხედი პარალელოგრამია.
პარალელოგრამში ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.
პარალელოგრამის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია.
პარალელოგრამი ,რომლის ყველა გვერდი ტოლია, რომბი ეწოდება.
რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. რომბის დიაგონალები მისი კუთხეების ბისექტრისებია.(ბისექტრისა კუთხეს შუაზე ყოფს, მედიანა გვერდს)
პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია მართკუთხედი ეწოდება.
მართკუთხედში დიაგონალები ტოლია.
მართკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია კვადრატი ეწოდება.
ოთკუთხედს, რომლის ორი გვერდი პარალელურია, ხოლო ორი დარჩენილი გვერდი არ არის პარალელური ტრაპეცია ეწოდება.
ტრაპეციის პარალელურ გვერდებს მისი ფუძეები ეწოდება, ხოლო არაპარალელურ გვერდებს -ფერდები.
ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ტრაპეციის შუახაზი ეწოდება.
თუ ტრაპეციის ფერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ტრაპეციას ტოლფერდა ტრაპეცია ეწოდება.
ტრაპეციას, რომლის ერთ-ერთი უთხე მართია მართკუთხა ტრაპცია ეწოდება.
ტოლფერდა ტრაპეიის დიაგონალები ტოლია. დიაგონალების მიერ ფუძესთან შედგენილი კუთხეები ტოლია.
თუ ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ შუამონაკვეთი სიმაღლის ტოლია. გეომეტრიულად ბრტყელი ფიგურები ასე დაიხაზება:



■ სიმეტრიული ფიგურები; ღერძული სიმეტრია.

სიტყვა ,,სიმეტრია“ ბერძნული წარმოშობისაა და ნიშნავს გარკვეული წესრიგის, კანონზომიერების არსებობას საგნების ან მისი ნაწილების განლაგებაში.

არსებობს სხვადასხვა სახის სიმეტრია ჩვენ შევეხებით ღერძულ სიმეტრიას. დავაკვირდეთ ჩვენს გარშემო მცენარეებს,ცხოველებს,პეპლებს,თოვლის ფიფქებს, ფოთლებს,ყვავილებს,საგნის ანარეკლს სარკეში თუ წყლის ზედაპირზე და სიმეტრიის უამრავ მაგალითებს აღმოვაჩენთ. ადამიანი სიმეტრიას უხსოვარი დროიდან იყენებდა საყოფაცხოვრებო საგნებში, არქიტექტურაში, ორნამენტებში.

სიმეტრიული ფიგურა შეგიძლია შემდეგი მარტივი ხერხით მიიღო :აიღე ფურცელი, გაავლე მასზე წრფე და ფურცელი ამ წრფეზე გადაკეცე.

განსაზღვრება. წრფეს, რომლის მიმართ მოცემული ფიგურა სიმეტრიულია, სიმეტრიის ღერძი ეწოდება.

წრე და წრეწირი, მართკუთხედი, კვადრატი სიმეტრიულ ფიგურებს წარმოადგენენ.

წრის სიმეტრიის რერძია ცენტრზე გამავალი ნებისმიერი წრფე. მართკუთხედს სიმეტრიის ორი ღერძი აქვს, კვადრატს -ოთხი.

განსაზღვრება. A და B წერტილებს a წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება, თუ a წრფე AB მონაკვეთის მართობულია და მის შუა წერტილზე გადის.

განსაზღვრება. ღერძულად სიმეტრიული ფიგურები ტოლია.

■ პარალელური და მართობული წრფეები; პარალელურ წრფეთა თვისებები.

განსაზღვრება. ორ წრფეს ეწოდება მართობული თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთებიან.

წრფეთა მართობულობას ასე ავღნიშნავთ ,, $a \perp b$ “ ნიშნავს , რომ a მართობულია b წრფის.

განსაზღვრება. ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი არ იკვეთებიან.

წრფეთა პარალელურობას ასე აღვნიშნავთ : $a \parallel b$ ნიშნავს , რომ a პარალელურია b წრფის.

წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური არაუმეტეს ერთი წრფის გავლება.

წრფის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მისი პერპენდიკულარული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

განვიხილოთ ორი პარალელური წრფე , რომელიც იკვეთება მესამე წრფით. იქმნება კუთხეები, რომელსაც შესაბამისი, შიგაცალმხრივმდებარე კუთხეები და შიგაჯვარდენი კუთხეები ეწოდებათ, იქმნება აგრეთვე გარე ჯვარედინად მდებარე კუთხეები და გარე ცალმხრივ მდებარე კუთხეები.

შესაბამისი კუთხეები ტოლია.

შიგა ჯვარედინად მდებარე კუტხეები ტოლია. გარე შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებიც ტოლია.

შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია.

გარე ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამიც 180°-ის ტოლია.

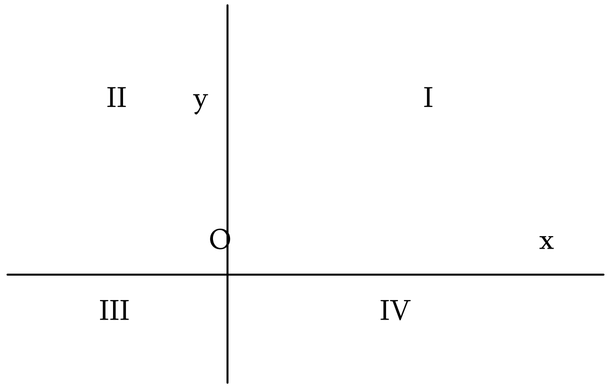
ერთიდაიმავე წრფის პარალელური ორი წრფე პარალელურია.

თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180°-ს, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ წრფის პარალელური წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

- მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე.

განვიხილოთ ახლა სიბრტყეზე ერთიდაიმავე მასშტაბის მქონე ორი ურთიერთმართობული OX და OY საკოორდინატო ღერძი. OX ღერძს ვუწოდოთ აბსცისათა ღერძი, ხოლო OY ღერძს -ორდინატთა ღერძი. საკოორდინატო ღერძები სიბრტყეს ყოფენ ოთხ ნაწილად, რომელთაც მეოთხედები ეწოდება და ინომრებიან ისე, როგორც ეს ნახაზზეა მოცემული.



საკოორდინატო ღერძთა ასეთ სისტემას მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ეწოდება, ხოლო ღერძების გადაკვეთის O წერტილს კოორდინატთა სათავე.
სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი M წერტილიდან OX და OY ღერძებისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი ავღნიშნოთ x -ით, ხოლო OY ღერძისადმი გავლებული მართობის ფუძის კოორდინატი y-ით. ამრიგად სიბრტყის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული (x,y) წყვილი, x,-ეწოდება M წერტილის აბსცისა, ხოლო y-ს ორდინატი. X და y-ს ეწოდება M წერტილისკოორდინატები.
ნამდვილ რიცხვთა ყველა წყვილების სიმრავლეს რიცხვითი სიბრტყე ეწოდება და R^2-ით აღინიშნება.
მანძილი ორ წერტილს შორის სიბრტყეზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. A$(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$.

■ გეომეტრიული სხეულები

მართ პარალელეპიპედს, რომლის ფუძე მართკუთხედია მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება.
მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ყველა წიბო ტოლია კუბი ეწოდება.
მრავალწახნაგას, რომლის ერთ-ერთი წახნაგი ნებისმიერი მრავალკუთხედია, ხოლო დანარჩენი წახნაგები -საერთო წვეროს მქონე სამკუტხედებია, პირამიდა ეწოდება.
განვიხილოთ ყველა პარალელური წრფე , რომლებიც კვეთენ ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთში მდებარე წრეს.
სხეულს შექმნილს ამ წრფეებზე მდებარე ყველა იმ მონაკვეთით, რომლებიც მოთავსებული არიან ამ პარალელურ სიბრტყეებს შორის ცილინდრი ეწოდება.

ბირთვი ეწოდება სივრცის ყველა იმ წერტილისაგან შედგენილ სხეულს, რომლის დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება, მოცემულ წერტილს ბირთვის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მოცემულ მანძილს -ბირთვის რადიუსი.
ბირთვის საზღვარს ეწოდება ბირთვული ზედაპირი ანუ სფერო.
ზემოთ ჩამოთვლილი სხეულების მოცულობები:

$V_{მართ.პარალელეპიპედი}=a \cdot b \cdot c$

$V_{კუბი} = a^3$

$V_{პირამიდა} = \frac{1}{3} S_{ფუძისა} \cdot H$

$V_{ცილინდრი} = \pi r^2 \cdot H$

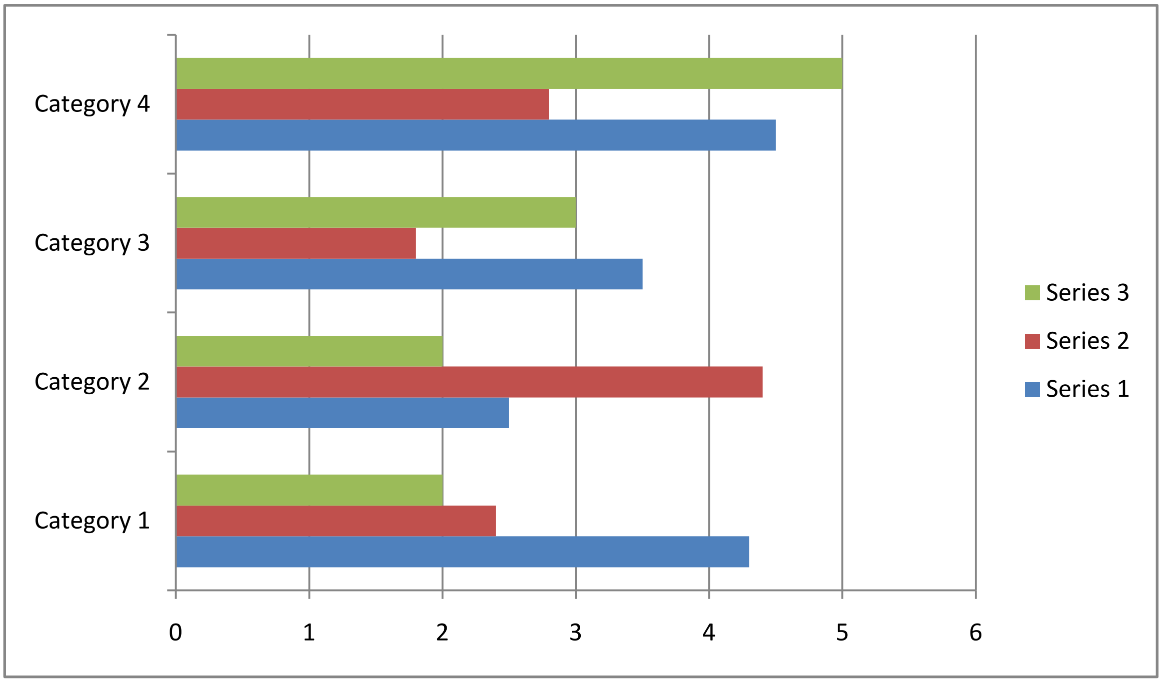
$V_{ბირთვი} = \frac{4}{3} \pi r^3$

&3. მონაცემთა ანალიზი

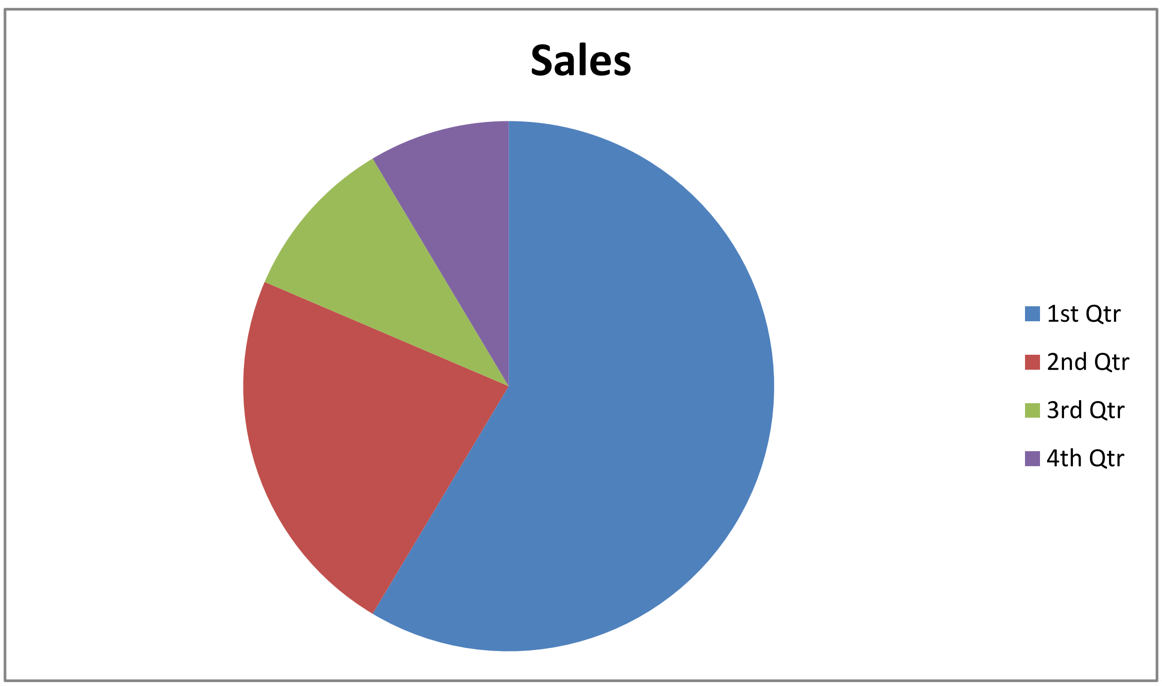
■ მონაცემთა წარმოდგენის ხერხები.

ცხრილი არის მონაცემთა ჩაწერის მოხერხებული ფორმა.
სკალა (ლათ.-კიბე) -საზომი ხელსაწყოსი, ხელსაწყოს ასათვლელი მოწყობილობის ნაწილი, რომელიც წარმოადგენს გასაზომი სიდიდის , შესაბამისი ნიშნულების და ზოგიერთ მათგანთან დასმული ათვლის რიცხვების ან სიმბოლოების ერთობლიობას.სკალის პარამეტრები განისაზღვრება საჭირო ათვლის სიზუსტით. სკალის დანაყოფი შეიძლება განლაგდეს წრიულად, რკალურად ან წრფივად, თვით სკალა კი შეიძლება იყოს თანაბარზომიერი, ლოგარითმული და ა.შ. სკალის უმარტივესი მაგალითია სახაზავი, სახაზავი დაყოფილია ტოლ ნაწილებად.
ხაზოვანი დიაგრამები – წარმოადგენს რაოდენობრივ მწკრივებს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ასახული ხაზის მეშვეობით. გამოიყენება დროის მწკრივების (დროის დინამიკის), ასევე პერიოდების და პუნქტების ასახვისთვის.
სვეტოვანი დიაგრამები – ხაზოვანი დიაგრამების მსგავსია, მაგრამ განსხვავდება მათგან ძირითადად გრაფიკული ფორმით. შედგება სვეტებისგან (ვერტიკალური ან ჰორიზონტალური, ე.წ. კოლონური),ხოლო მნიშვნელის ოდენობა განისაზღვრება სვეტის ან

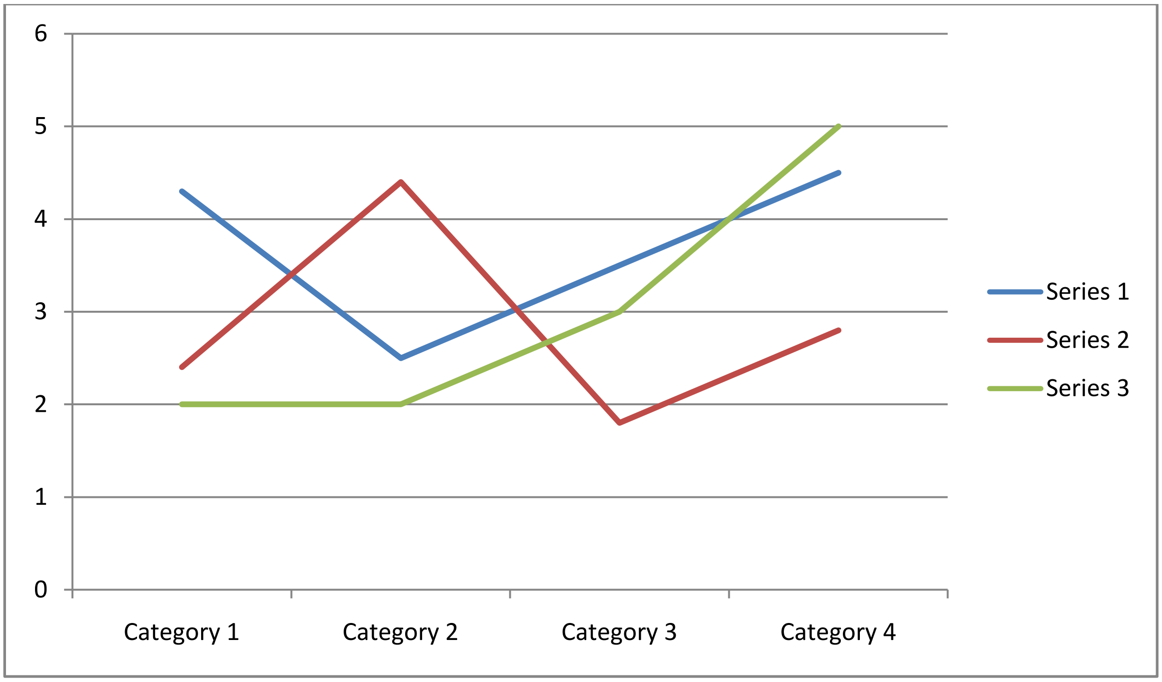
მისი ნაწილის სიმაღლით; სვეტების სიგანე თანაბარია რადგან ამას მნიშვნელობა არ აქვს.
წრიული დიაგრამა-სხვადასხვა ზომის სექტორებად დაყოფილ წრეს წარმოადგენს.

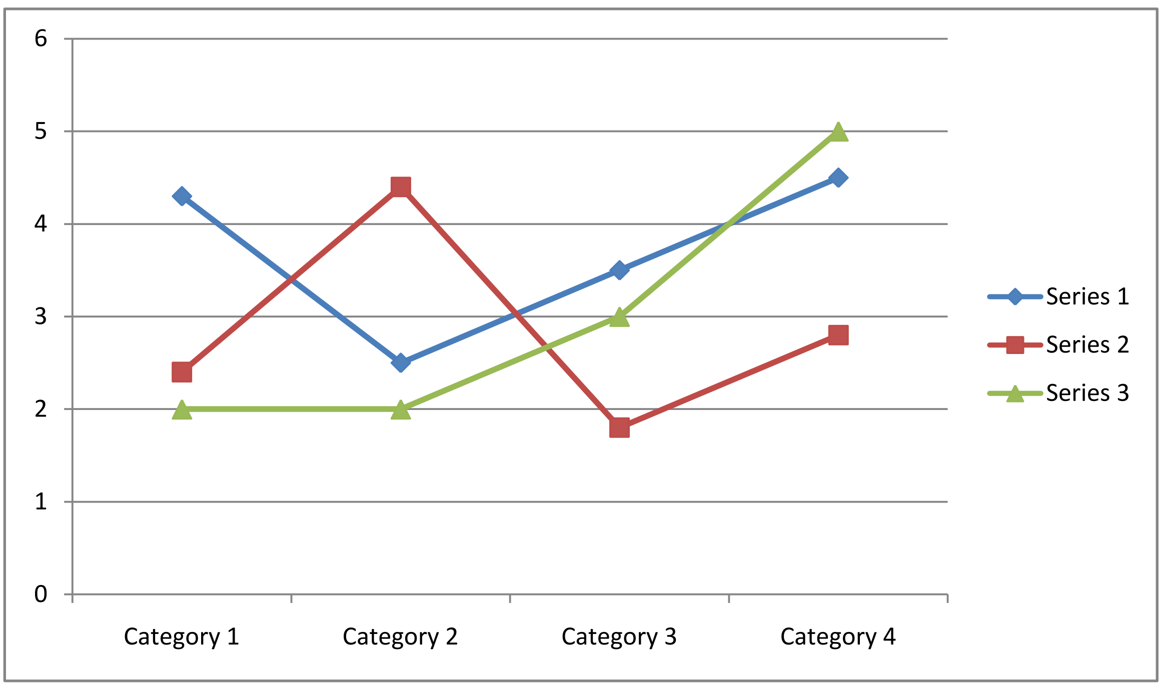


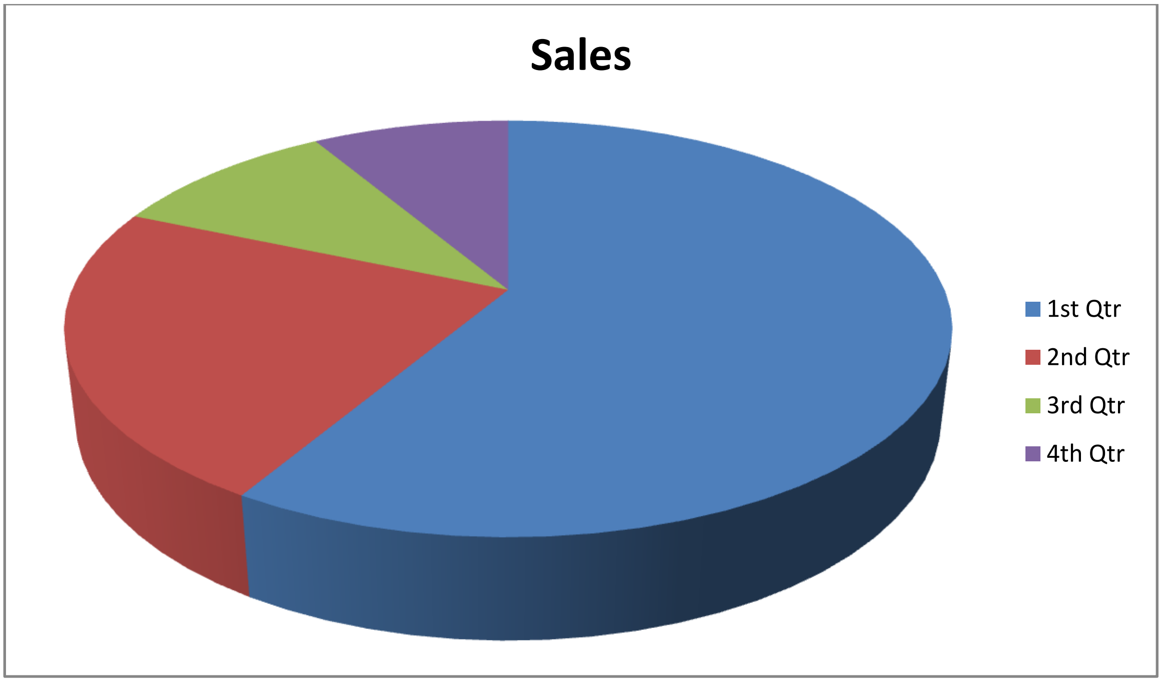
1



2


6
5
4
3
2
1
0
Category 1
Category 2
Category 3
Category 4
Series 1
Series 2
Series 3
3


6
5
4
3
2
1
0
Category 1
Category 2
Category 3
Category 4
Series 1
Series 2
Series 3
4



5

საილუსტრაციოთ ზემოთ მოვიყვანეთ შესაბამისი დიაგრამები.

ვთქვათ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მოცემულია წინასწარ $y=f(x)$ ფუნქცია, ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს გრაფიკული ხერხი ეწოდება. (3-4 ნახაზი)

&4 ალბათობის თეორია

მათემატიკის ნაწილს, რომელსაც ალბათობის თეორია ჰქვია, ფრანგი მათემატიკოსების - ბლეზ პასკალისა (1623-1662) და პიერ ფერმას (1601-1665) მიწერ-მოწერამ დაუდო სათავე. თუმცა , ისიც უნდა ითქვას, რომ მანამდე მრავალ სწავლულს უცდია ამ საკითხის შესწავლა. მე-19 საუკუნიდან აღსანიშნავია ამ დარგში კარლ ფრიდირიხ გაუსის, შებიშევის, ხინჩინის, ანდრეი კოლმოგოროვის, ფრეშეს და სხვათა წვლილი.

ალბათობის შესწავლას რაიმე ექსპერიმენტის ანუ ცდის დაკვირვებით დავიწყებთ მაგ.(კამათლის გაგორება, მონეტის აგდება, წიგნის ალალბედზე გადაშლა და ა.შ.)

მოცემული ცდის პირობებში ყოველ A ,,მოვლენას“ ცდის შედეგს ხდომილობებს უწოდებენ. ვთქვათ ვატარებთ ექსპერიმენტს (ცდას) -ვაგორებთ კამათელს და ვაკვირდებით ,,რა მოვა“? ყოველი შედეგის წინასწარ ამოცნობა შეუძლებელია-ანუ გვაქვს შემთხვევითი ექსპერიმენტი და შემთხვევითი ხდომილობები ,,2-ის მოსვლა“; ,,3-ის მოსვლა“ და ა.შ.

განსაზღვრება. რაიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ცდათა მოცემულ

სერიაში არის იმ ხდომილობის განხორციელებათა ოდენობის შეფარდება ცდათა საერთო ოდენობასთან.

განსაზღვრება. ცდათა მრავალჯერ გამეორებისას შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა ამ ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ტოლია (მიახლოებით)|

განსაზღვრება. აუცილებელი ხდომილობა არის ხდომილობა , რომელიც მოცემული ცდის ჩატარებისას ყოველთვის ხორციელდება-თუ ცდათა რიცხვია n , აუცილებელი ხდომილობის მოხდენათა რიცხვი n-ია, ფარდობითი სიხშირე =1, ალბათობა=1.

განსაზღვრება. ხდომილობას, რომელსაც მოცემული ექსპერიმენტის არც ერთი შედეგი არ შეესაბამება , შეუძლებელი ხდომილობა ეწოდება. მისი ალბათობა ნულია.

თეორემა. თუ A ნებისმიერი ხდომილობაა და P(A) -მისი ალბათობა, მაშინ $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$

ალბათობის ფორმულა $\mathrm{P(A)}=\frac{m}{n}$ სადაც m= ხელშემწყობ შედეგების ოდენობა n= შესაძლებელი (ყველა) შედეგის ოდენობა.

თუ A შეუძლებელი ხდომილობაა, მაშინ m=0 და P(A)=0, თუ A აუცილებელი ხდომილობაა, მაშინ m= n და $\mathrm{P(A)} = 1$

$\bar{\mathrm{A}}$- A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობაა ანუ ,,არა A“

$$\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \mathrm{P(A)}$$

თუ C შეუძლებელი ხდომილობაა P(C)=0

თუ ხდომილობათა სივრცე n ტოლშესაძლებელი ელემენტარული ხდომილობისაგან შედგება, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილობის ალბათობა $\frac{1}{n}$-ია.

თუ A და B ხდომილობებიდან ერთის მაინც განხორციელება არის ხდომილობა, რომელსაც A და B ხდომილობების ჯამი ეწოდება (გაერთიანება)

C ხდომილობა არის ხდომილობა, რომელიც ხორციელდება მხოლოდ თუ A და B -ს ერთდროულად განხორციელებისას. C-ს ეწოდება A და B ხდომილობათა ნამრავლი (თანაკვეთა).

$P(AB) = \mathrm{P(A)\,P(B)}$ ტოლფასია იმისა, რომ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

თუ A და B -ს საერთო ელემენტარული ხდომილობა არა აქვს მაშინ AB შეუძლებელი ხდომილობაა.

ალბათობის თეორიის მეთოდებით რაიმე G ცდასთან დაკავშირებული რეალური ამოცანის შესწავლისას, უპირველეს ყოვლისა გამოყოფენ ცდის შედეგთა სრულად აღმწერ Ω სიმრავლეს, ე.ი.-გამოყოფენ შემთხვევითი ექსპერიმენტის ყველა შესაძლო შედეგთა Ω სიმრავლეს . ამ სიმრავლის ყოველ ω ელემენტს ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება, ხოლოთვით Ω სიმრავლეს -ელემენტარულ ხდომილობათა სივრცე. P(A) არ წარმოადგენს ფარდობით სიხშირეთა ზღვარს ჩვეულებრივი გაგებით. ელემენტარულ ხდომილობათა დისკრეტული სივრცე ეწოდება ნებისმიერი სასრულ ან თვლად სიმრავლეს.

რაიმე ორ ხდომილობას **თავსებადი ეწოდება** თუ ამ ხდომილობების ერთდროულად მოხდენა შესაძლებელია.

რაიმე ორ ხდომილობას **არათავსებადი ეწოდება,** თუ მათი საერთო ელემენტი-

ელემენტარული ხდომილობა არა აქვს. მაგ A={5,6} და B={4,5} A∪B={4,5,6}
P(A+B)<P(A)+P(B) P(A)=2/6 P(B)=2/6 P(A+B)=3/6 , თავსებადი ხდომილობებია A და B.
თუ A და B არათავსებადი ხდომილობებია P(A+B)= P(A)+ P(B)-P(AB).

A ხდომილობის პირობითი ალბათობის ფორმულა იმ პირობით, რომ B უკვე მოხდა გამოითვლება ფორმულით P(A/B)=$\frac{P(AB)}{P(B)}$

ვთქვათ გვაქვს n დამოუკიდებელი განმეორებითი ცდისგან შედგენილი ექსპერიმენტი. ვეძებთ იმის ალბათობას, რომ ამ განმეორებითი ცდების სერიაში რაიმე A ხდომილობა n-ჯერ განხორციელდა . A-ს განხორციელებათა რიცხვი S_n-ით აღვნიშნოთ. ცნობილია, რომ P(A)= p, 1-p=q ანუ $\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}) = q$ $\mathrm{P}(S_n = k)$ ალბათობა ასე გამოითვლება

$\mathrm{P}(S_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ამ ფორმულას ეწოდება **იაკობ ბერნულის ფორმულა.**

& 5. ზომა, ზომის ერთეულები

■ სიგრძე. სიგრძის ერთეულები

სიგრძის საზომი ერთეულებია: მმ,სმ, დმ, მ, კმ.

1 სმ=10 მმ

1 დმ=10სმ=100მმ

1მ=100სმ=1000მმ

1 კმ= 1000მ=10000დმ=100000სმ=1000000მმ

1მ=10დმ=100სმ=1000მმ

1მმ=$\frac{1}{10}$სმ=$\frac{1}{100}$დმ=$\frac{1}{1000}$მ=$\frac{1}{10^6}$კმ

1 სმ=0,1დმ=0,01მ=0,0001კმ

1 დმ=0,1მ=0,0001კმ

■ ფართობი, ფართობის ერთეულები

1 $სმ^2$=100 $მმ^2$

1 $მ^2 = 10000 სმ^2$

1 $მ^2 = 100 დმ^2$

1 ჰა=100არი=10000$მ^2$

1 არი=100$მ^2$=0,01ჰა

1 $კმ^2 = 10^6 მ^2$

■ მოცულობა. მოცულობის ერთეულები

1 $სმ^3$=1000 $მმ^3$	1$კმ^3 = 1000000000 მ^3$
1 $მ^3 = 1000000 სმ^3$	1$დმ^3 = 1000 სმ^3$
1 $მ^3 = 1000 დმ^3$	1ჰლ=100ლ
1 ლ=1 $დმ^3$	
1$დმ^3$=10^{-3} $მ^3$	
1ლ=10^3 $სმ^3$	

■ მასა.მასის ერთეულები.

1 გრ=1000მგ	1ტ=1000კგ=1000000გრ
1კგ=1000გ	1ც=100კგ
1 ც=100კგ	1კგ=1000გ
1ტ=10ც	1კგ=0,01ც
	1კგ=0,001ტ

■ სიჩქარე.სიჩქარის ერთეულები.

1 კმ/სთ=$\frac{100}{6}$მ/წთ=$\frac{100}{360}$მ/წმ=$\frac{10}{36}$ $მ/წმ = \frac{5}{18}$მ/წმ.

■ დრო.დროის ერთეულები

1 სთ=60 წთ=3600წმ

1 წთ=60წმ.

1 წთ=$\frac{1}{60}$სთ

1 წმ=$\frac{1}{3600}$სთ

1 წმ=$\frac{1}{60}$წთ

1 დღე-ღამე=24 სთ

1 კვირა=7 დღე

1 თვე ≈30 დღე

1 წელიწადი≈365(დღე-ღამე)

1 საუკუნე=100 წელიწადი

ლათინური ანბანი	ბერძნული ანბანი
A, a-ა	A, α-ალფა
B, b-ბე	B, β-ბეტა
C, c-ცე	Γ, γ-გამა
D, d-დე	Δ, δ-დელტა
E, e-ე	E, ε-ეფსილონ
F, f-ეფ	Z, ζ-ძეტა
G, g-ჟე	H, η-ეტა
H, h-ჰაშ	Θ, θ-თეტა
I, i-ი	I, ι-იოტა
J, j-ჟი	K, κ-კაპა
K, k-კა	Λ, λ-ლამბდა
L, l-ელ	M, μ-მიუ
M, m-ემ	N, ν-ნიუ
N, n-ენ	Ξ, ξ-ქსი
O, o-ო	O, o-ომიკრონ
P, p-პე	Π, π-პი
Q, q-ქუ	P, ρ-რო
R, r-ერ	Σ, σ-სიგმა
S, s-ეს	T, τ-ტაუ
T, t-ტე	Υ, υ-იფსილონ
U, u-უ	Φ, φ-ფი
V, v-ვე	X, χ-ხი
W, w-დუბლ-ვე	Ψ, ψ-ფსი
X, x-იქს	Ω, ω-ომეგა
Y, y-იგრეკ	
Z, z-ზეტ	

სარჩევი

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. სერგო თოფურია მათემატიკაI , მათემატიკა II. თბილისი 1991

2. ალბათობის თეორია. ე.ნადარაია, რ.აბსავა, მ.ფაცაცია . თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა თბილისი 2005.

3. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, გ.ფანცულაია,ზ.ქვათაძე, გ.გიორგაძე. გამომცემლობა საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი თბილისი 2007

4. . მ.კინწურაშვილი ,,ნიუტონის ბინომი და კომბინატორიკა“ თბილისი 2012 გამომცემლობა ემ-პი-ჯი.

5. ალბათობის თეორია (ლექციათა კურსი). თ.შერვაშიძე. თსუ გამომცემლობა, თბილისი 1980.

6. დ.ნატროშვილი ,გ.ბერიკელაშვილი, შა.ზაზაშვილი -მათემატიკის საფუძვლები ლექციათა კურსი.თბილისი 2014

7. КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ/Москва 2015

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I и II: Уч. пособие для студентов вузов. - М.: Высшая школа, 1980.