# ნიუტონის ბინომი და კომბინატორიკა

$$(n-1)^n = C_n^0 n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - C_n^3 n^{n-3} + \cdots + (-1)^k C_n^k n^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} n^1 + C_n^n n^0$$
$$n! = C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - C_n^3 (n-3)^n + \cdots + (-1)^k C_n^k (n-k)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n + C_n^n 0^n$$

2012 წ.

თემამ შეიძლება სარგებლობა მოუტანოს საშუალო სკოლების, მაღალი კლასების მოსწავლეებს, უმაღლესი სასწავლებლების სტუდენტებს და აგრეთვე მათემატიკით დაინტერესებულ მკითხველებს, როგორც დამხმარე ლიტერატურამ, ბინომების ალბათობათა თეორიის და კომბინატორიკის პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით

რეცენზენტები:

ემერიტუს პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის
მეცნიერებათა დოქტორი  თამაზ ვაშაყმაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი, თეიმურაზ ვეფხვაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი, არჩილ პაპუკაშვილი

## § 1. 1. ნიუტონის ბინომის ფორმულა

განვიხილოთ მეორე წევრებით განსხვავებული $n$ ბინომი.

$$(x+a),(x+b),(x+c),(x+d)\ldots,(x+l)$$

გადავამრავლოთ ეს ბინომები თანდათანობით და დავადგინოთ რა კანონზომიერება უდევს საფუძვლად ამ ნამრავლს.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

კანონზომიერება დადგინდა, პირველ წევრში გვაქვს $x$ უმაღლესი მაჩვენებლით, ხოლო მისი მომდევნო დანარჩენ წევრებში $x$-ის მაჩვენებელი თითო ერთეულით კლებულობს და ბოლო წევრში გვაქვს $x^0=1$.

მეორე წევრში $x$ -ის კოეფიციენტი წარმოადგენს ბინომების მეორე წევრების ჯამს, მესამე კოეფიციენტი წარმოადგენს მეორე წევრების ორ-ორად აღებული ნამრავლთა ჯამს, მეოთხე კოეფიციენტი არის სამ-სამად აღებული ნამრავლთა ჯამი და ა.შ. ბოლო წევრი წარმოადგენს ბინომების მეორე წევრების ნამრავლს. აქ $x$-ის კოეფიციენტებში შესაკრებები თითო ელემენტით მაინც განსხვავდებიან, ამიტომ შესაკრებთა რაოდენობა თითოეულ კოეფიციენტში გამოითვლება ჯუფთებებით, დაწყებული მეორე კოეფიციენტიდან გვექნება:

$$C_n^1,C_n^2,C_n^3,\ldots,C_n^n$$

ეხლა დაუშვათ, რომ $a=b=c=d=\cdots=\ell$, ამავე დროს გავითვალისწინოთ, რომ $1=C_n^0$, მაშინ მივიღებთ

$$(x+a)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2+\cdots+C_n^kx^{n-k}a^k+\cdots+C_n^na^n, \qquad (1.1)$$

სადაც $0\le k\le n$

ამ ფორმულის მარჯვენა ნაწილს ბინომის განაშწკრივი ეწოდება, ხოლო $C_n^0,C_n^1,C_n^2,C_n^3,\cdots,C_n^k,\cdots C_n^n$- ბინომიალური კოეფიციენტები.

ეს ფორმულა გამოიყვანა ინგლისელმა მეცნიერმა ისააკ ნიუტონმა (1642-1727), ჯერ კიდევ მაშინ როცა ის 19 წლის იყო. ამიტომ (1.1) ფორმულას ამ მეცნიერის საპატივცემულოდ ნიუტონის ბინომის ფორმულა ეწოდა.

შენიშვნა: ამ თემის ბოლო პარაგრაფში, (1.1) ფორმულა დამტკიცებული იქნება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

## 2. ბინომის განამწკრივის ძირითადი თვისებები

1. მოცემული ბინომის განამწკრივი n შეიცავს $(n+1)$ წევრს.
2. განამწკრივის პირველ წევრში $x$-ის მაჩვენებელი უდიდესია და ის უდრის ბინომის მაჩვენებელს, ხოლო შემდგომ წევრებში ეს მაჩვენებელი თითო ერთეულით მცირდება და ბოლო წევრში მაჩვენებელი უდრის 0-ს. ე.ი. $x^0=1$.
3. განამწკრივის პირველ წევრში $a$-ს მაჩვენებელი უდრის 0-ს, ხოლო შემდგომ წევრებში ეს მაჩვენებელი თითო ერთეულით მატულობს და ბოლო წევრში მაჩვენებელი უდიდესია და უდრის ბინომის მაჩვენებელს ე.ი. გვექნება $a^n$
4. განამწკრივის ყოველ წევრში $x$-ისა და $a$-ს ხარისხის მაჩვენებელთა ჯამი მუდმივია და უდრის ბინომის მაჩვენებელს.
5. განამწკრივის ზოგადი წევრია: $T_{k+1}=C_n^k x^{n-k} a^k$ სადაც $0 \le k \le n$.
6. თუ $a$ უარყოფითი რიცხვია, მაშინ მივიღებთ ნიშანცვლად განამწკრივს.

$$\begin{aligned}(x-a)^n &= C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 - C_n^3 x^{n-3} a^3 + \cdots \\ &+ (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \cdots + (-1)^n C_n^n a^n\end{aligned} \tag{1.2}$$

7. თუ დავუშვებთ, რომ (1.1) ფორმულაში $x=a=1$, მაშინ ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი $2^n$-ის ტოლია. $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.
8. თუ (1.2) ფორმულაში $x=a=1$, მაშინ მივიღებთ, რომ ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი 0-ის ტოლია $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$.
9. განამწკრივში ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული ბინომიალური კოეფიციენტები ტოლია $C_n^k = C_n^{n-k}$.
10. თუ ბინომის მაჩვენებელი ლუწი რიცხვია, მაშინ განამწკრივში გვექნება 1 შუაწევრი, ხოლო თუ ბინომის მაჩვენებელი კენტი რიცხვია, მაშინ განამწკრივში გვექნება 2 შუაწევრი.

## § 2. გადანაცვლება – ფაქტორიალი

კომბინატორიკის ერთ-ერთი სახეა გადანაცვლება. $n$ ელემენტიდან შემდგარი გადანაცვლებები აღინიშნება $P_n$-ით. $P$ წარმოადგენს ფრანგული სიტყვის permutation-ის პირველ ასოს, რაც ქართულად გადანაცვლებას ნიშნავს.

**განსაზღვრება 1.** $n$ ელემენტიდან შემდგარი კვლავ $n$ ელემენტიან ჯგუფებს, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ ელემენტების დალაგების რიგით, გადანაცვლება ეწოდება და მათი რაოდენობა აღინიშნება $P_n$-ით.

$P_n$ რიცხვი გვიჩვენებს, თუ რამდენი სხვადასხვა წესით შეიძლება $n$-ელემენტიანი ჯგუფების დალაგება, რომლებიც ერთმანეთისაგან მხოლოდ დალაგების რიგით განსხვავდებიან.

განვიხილოთ სამი ელემენტი $a,b$ და $c$ და გამოვთვალოთ $P_3$, ამისათვის ამ ელემენტებიდან შევადგინოთ კვლავ სამ ელემენტიანი ჯგუფები:

$$abc; \quad bac; \quad cab;$$
$$acb; \quad bca; \quad cba.$$

ამით სამელემენტიანი გადანაცვლებები ამოიწურა და მათი რაოდენობა სულ არის 6, მაშასადამე $P_3 = 6$.

ახლა განვიხილოთ 4 ელემენტი $a, b, c, d$, მათგან შევადგინოთ ისევ 4 ელემენტიანი ჯგუფები, ამისათვის მოვიქცეთ შემდეგნაირად:

წარმოვიდგინოთ, რომ მას პირველი ელემენტი ჩამოვაცილეთ. დაგვრჩება სამი $b, c$ და $d$. მათგან როგორც ვიცით წინა მაგალითიდან მიიღება 6 ჯგუფი ანუ 6 გადანაცვლება. ამის შემდეგ თითოეულ ამ გადანაცვლებას წინ $a$ მივუწეროთ. მივიღებთ იმ ოთხელემენტიან გადანაცვლებებს, რომელთა პირველი წევრია $a$. ამრიგად, იმ ოთხელემენტიან გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომელთა პირველი წევრია $a$, ზუსტად 6-ს უდრის, ცხადია, ამდენივე გადანაცვლების პირველი ელემენტი იქნება $b$, შემდეგ $c$ და ბოლოს $d$. ამრიგად $P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 6 = 24$.

ახლა თუ ავიღებთ 5 ელემენტს, მაშინ ანალოგიური მსჯელობით მივიღებთ $P_5 = 5 \cdot P_4 = 5 \cdot 24 = 120$. არსებობს შეთანხმება $P_0 = P_1 = 1$ (ცარიელი და ერთელემენტიანი სიმრავლეები მხოლოდ ერთი წესით შეიძლება დავალაგოთ - ისინი თავისთავად დალაგებულია).

**განსაზღვრება 2.** ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლს 1-დან $n$-მდე ამ უკანასკნელის ჩათვლით $n$ ფაქტორიალი ეწოდება და აღინიშნება $n!$ სიმბო-

ლოთი. ე.ი. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-2)(n-1)n$ არსებობს შეთანხმება, რომ $0! = 1$ და $1! = 1$.

კომბინატორიკის მეორე სახეა წყობა, რაც ფრანგული სიტყვისაგან arrangement (დალაგება) წარმოიშვა.

**განსაზღვრება 3.** $n$ ელემენტიანი სიმრავლის $m$ ელემენტიან $(0 \le m \le n)$ დალაგებულ ქვესიმრავლეებს $n$ ელემენტიდან $m$- ელემენტიანი წყობები ეწოდება და მათი რიცხვი $A_n^m$-ით აღინიშნება.

ცნობილია შემდეგი ფორმულა

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

თუ $k = n$, მაშინ მივიღებთ $A_n^n = P_n$ ე.ი. გადანაცვლება ყოფილა წყობის კერძო სახე, ამიტომ

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$$

მაშასადამე $P_n = n!$

ამის შემდეგ ზემოთ განხილული მაგალითების მიხედვით ვწერთ:

$$P_3 = 6 = 1\cdot 2\cdot 3 = 3!$$
$$P_4 = 24 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 4!$$
$$P_5 = 120 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$$

კომბინატორიკის მესამე სახეა ჯუფთება, რაც ფრანგული სიტყვისაგან combinaison (კომბინაცია) წარმოიშვა.

**განსაზღვრება 4.** $n$- ელემენტიანი სიმრავლის $m$ ელემენტიან ქვესიმრავლეებს $n$ ელემენტიდან $m$- ელემენტიანი ჯუფთებები ეწოდება და მათი რიცხვი $C_n^m$- ით აღინიშნება.

ცნობილია შემდეგი ფორმულა:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

კომბინატორიკის სამივე სახე: გადანაცვლება, წყობა და ჯუფთება შეიძლება გამოისახოს მხოლოდ ფაქტორიალებით

$$P_n = n!; \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{და} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## §3. 1. ფაქტორიალის განამწკრივი და მისი ძირითადი თვისება

განვიხილოთ $(n-1)^n$ ბინომი. ნიუტონის ბინომის ფორმულის თანახმად მის განამწკრივს ექნება შემდეგი სახე.

$$C_n^0 n^n - C_n^1 n^{n-1} + C_n^2 n^{n-2} - C_n^3 n^{n-3} + \cdots + (-1)^k C_n^k n^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} n^1 + C_n^n n^0 \quad (3.1)$$

ამ განამწკრივში ხარისხის ფუძესა და მის მაჩვენებელს ადგილები გადაუნაცვლოთ, დანარჩენი რიცხვები და სიმბოლოები უცვლელად დავტოვოთ, მაშინ მივიღებთ შემდეგ მრავალწევრს

$$\begin{aligned} &C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - C_n^3 (n-3)^n + \cdots \\ &+ (-1)^k C_n^k (n-k)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n + C_n^n 0^n \end{aligned} \quad (3.2)$$

მივიღეთ (3.1) განამწკრივის სიმეტრიული მრავალწევრი.

იბადება კითხვა: (3.2) მრავალწევრი რაიმე კანონზომიერებას ხომ არ ემორჩილება? ამ მიზნით დავიწყოთ შემოწმება, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ მაშინ შესაბამისად მივიღებთ $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$

ანუ სხვანაირად $1!, 2!, 3!, 4!, 5!, \ldots$ ამიტომ შეიძლება ჯერჯერობით ვივარაუდოთ, რომ (3.2) მრავალწევრი წარმოადგენს $n!$ განამწკრივს

$$\begin{aligned} n! = &C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - C_n^3 (n-3)^n + \cdots \\ &+ (-1)^k C_n^k (n-k)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n + C_n^n 0^n \end{aligned} \quad (3.3)$$

განვიხილოთ მაგალითები, სიმარტივისათვის $n = 3$ მაშინ მივიღებთ

$$3! = C_3^0 3^3 - C_3^1 2^3 + C_3^2 1^3 - C_3^3 0^3 = 6$$

ახლა კი ხარისხის ფუძედ ამიღოთ 5, მაშინ მივიღებთ

$$C_3^0 5^3 - C_3^1 4^3 + C_3^2 3^3 - C_3^3 2^3 = 6 = 3!$$

ე.ი. ფაქტორიალის საბოლოო მნიშვნელობა არ შეიცვალა. ახლა კი ხარისხის ფუძედ ავიღოთ 100, მაშინ გვექნება

$$C_3^0 100^3 - C_3^1 99^3 + C_3^2 98^3 - C_3^3 97^3 = 6 = 3!$$

ფაქტორიალის მნიშვნელობა კვლავ არ შეცვლილა. ახლა ხარისხის ფუძედ დავაფიქსიროთ ნებისმიერი ნატურალური $m$ რიცხვი

$$C_3^0 m^3 - C_3^1 (m-1)^3 + C_3^2 (m-2)^3 - C_3^3 (m-3)^3 = 6 = 3!$$

ასეთივე თვისება ახასიათებს $4!$

$$C_4^0 m^4 - C_4^1 (m-1)^4 + C_4^2 (m-2)^4 - C_4^3 (m-3)^4 + C_4^4 (m-4)^4 = 24 = 4!$$

ასეთივე თვისება ახასიათებს $5!, 6!, \ldots, n!$

მაშასადამე $n!$ -თვის გვექნება

$$\begin{aligned} n! = & C_n^0 m^n - C_n^1 (m-1)^n + C_n^2 (m-2)^n - C_n^3 (m-3)^n + \cdots \\ & + (-1)^k C_n^k (m-k)^n + \cdots + (-1)^n C_n^n (m-n)^n \end{aligned} \tag{3.4}$$

სადაც $m \geq n$, $0 \leq k \leq n$. თუ ამ მრავალწევრში ბინომებს ავახარისხებთ და მსგავს წევრებს შევაერთებთ მაშინ მივიღებთ

$$-C_n^1 (-1)^n + C_n^2 (-2)^n - C_n^3 (-3)^n + \cdots + (-1)^k C_n^k (-k)^n + \cdots + (-1)^n C_n^n (-n)^n$$

ეს მრავალწევრი წარმოადგენს $n!$-ს, სადაც განამწკრივი ჩაწერილია შებრუნებული მიმდევრობით და წარმოადგენს (3.3) ფორმულას.

მაშასადამე მივიღეთ შემდეგი დასკვნა: მოცემული ფაქტორიალის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მის ფუძედ დავაფიქსირებთ ნებისმიერ ნატურალურ $m$ რიცხვს. ამ თვისებას ფაქტორიალის განამწკრივის ძირითადი თვისება ვუწოდოთ.

ქვემოთ დამტკიცებული იქნება ეს თვისება უფრო ზოგადი შემთხვევისათვის, როცა ფუძედ ავიღებთ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს (შეიძლება კომპლექსური რიცხვიც!)

ჩვენ ვივარაუდეთ, რომ (3.3) ფორმულა წარმოადგენდა $n!$-ის ფორმულას, ეხლა ეს ფორმულა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. მართლაც, როცა $n = 1, 2, 3, 4, 5$ მაშინ (3.3) ფორმულის სამართლიანობა უკვე დამტკიცებულია. ვთქვათ (3.3) ფორმულა სამართლიანია $n$ -თვის და დავამტკიცოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $(n+1)$-თვის.

მოცემულია: $n! = C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - C_n^3 (n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n$

დასამტკიცებელია:

$$\begin{aligned} (n+1)! = & C_{n+1}^0 (n+1)^{n+1} - C_{n+1}^1 n^{n+1} + C_{n+1}^2 (n-1)^{n+1} - C_{n+1}^3 (n-2)^{n+1} + \cdots \\ & + (-1)^k C_{n+1}^k (n+1-k)^{n+1} + \cdots + (-1)^n C_{n+1}^n 1^{n+1} \end{aligned}$$

$n!$-ის განამწკრივის ძირითადი თვისების თანახმად მოცემულ (3.3) ფორმულაში ხარისხის ფუძე დავიწყოთ $n+1$ ნატურალური რიცხვით, ამით $n!$-ის შედეგი არ შეიცვლება.

$$n! = C_n^0 (n+1)^n - C_n^1 n^n + C_n^2 (n-1)^n - C_n^3 (n-2)^n + \cdots + (-1)^k C_n^k (n+1-k)^n + \cdots + (-1)^n C_n^n 1^n$$

ეხლა მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ $(n+1)$-ზე, მაშინ მარცხენა მხარეში მივიღებთ $(n+1)!$-ს, ხოლო მარჯვენა ნაწილში გარდავქმნათ ზოგადი წევრი.

$A_n^k = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n+1-k)$ თუ ამ ტოლობაში მაჯვნიდან ბოლო მამრავლს ჩამოვაშორებთ, ხოლო მარცხნიდან პირველ თანამამრავლად

მივუწერთ $(n+1)$-ს, მაშინ ცხადია რომ თანამამრავლთა რაოდენობა არ შეიცვლება ე.ი. $k$ რიცხვი იგივე დარჩება. აქედან გამომდინარე ზოგადი წევრი მიიღებს შემდეგ სახეს: $(-1)^k C_{n+1}^k (n+1-k)^{n+1}$. ამ ზოგადი წევრის მიხედვით გარდავქმნათ $(n+1)!$-ის მარჯვენა ნაწილის ყველა შესაკრები, მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$(n+1)! = C_{n+1}^0 (n+1)^{n+1} - C_{n+1}^1 n^{n+1} + C_{n+1}^2 (n-1)^{n+1} - C_{n+1}^3 (n-2)^{n+1} + \cdots$$
$$+ (-1)^k C_{n+1}^k (n+1-k)^{n+1} + \cdots + (-1)^n C_{n+1}^n 1^{n+1}$$

მაშასადამე (3.3) ფორმულა უკვე დამტკიცებულია მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

(3.3) ფორმულა მივიღეთ $(n-1)^n$ ბინომის განამწკრივის ხარისხის ფუძისა და მისი მაჩვენებლის ადგილების გადანაცვლებით არსებობს თუ არა, რაიმე სხვა გზა ან მეთოდი (3.3) ფორმულის გამოყვანისა?

## 2. ფაქტორიალის განამწკრივის ფორმულის გამოყვანა

განვიხილოთ ნატურალური რიცხვების $n$-ური ხარისხების მიმდევრობები:

$$1^k, 2^k, 3^k, \ldots, (n-2)^k, (n-1)^k, n^k \quad \text{სადაც} \quad 1 \le k \le n.$$

ამ მიმდევრობებიდან უმარტივესი სახის მიმდევრობა, ცხადია რომ იქნება პირველი ხარისხის მიმდევრობა $1, 2, 3, \ldots (n-1), n$.

იმისათვის, რომ თუ რა კანონზომიერებებს ემორჩილება ამ სახის მიმდევრობები, ამ მიზნით განვიხილოთ მეზობელი წევრების სხვაობებისგან შედგენილი ახალი მიმდევრობები.

$(2-1), (3-2), (4-3), \ldots [n-(n-1)]$ მივიღეთ მუდმივი მიმდევრობა, $1, 1, 1 \cdots 1$. შეიძლება ეს მიმდევრობა შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$C_1^0 n - C_1^1 (n-1) = 1!$$

ახლა განვიხილოთ ნატურალური რიცხვების კვადრატების მიმდევრობა

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots (n-2)^2, (n-1)^2, n^2$$

ამ მიმდევრობიდან შევადგინოთ მეზობელი რიცხვების სხვაობების ახალი მიმდევრობა

$$3, 5, 7, 9, \ldots [(n-1)^2 - (n-2)^2], \quad [n^2 - (n-1)^2]$$

მიღებული მიმდევრობიდან კვლავ შევადგინოთ სხვაობების ახალი მიმდევრობა: $2, 2, 2, \ldots [n^2 - 2(n-1)^2 + (n-2)^2]$ ანუ სხვანაირად:

$$C_2^0 n^2 - C_2^1 (n-1)^2 + C_2^2 (n-2)^2 = 2!$$

ახლა კი განვიხილოთ ნატურალური რიცხვების კუბების მიმდევრობა:

$$1^3, 2^3, 3^3, 5^3 \ldots (n-3)^3, (n-2)^3, (n-1)^3, n^3$$

განხილული ხერხით შედგენილი ახალი მიმდევრობები იქნება:

$$7, 19, 37, 61, \ldots [(n-2)^3, (n-3)^3], \quad [(n-1)^3-(n-2)^3], \quad [n^3-(n-1)^3]$$

$$12, 18, 24, \ldots [(n-1)^3-2(n-2)^3+(n-3)^3], [n^3-2(n-1)^3+(n-2)^3]$$

$$6, 6, 6, \ldots [n^3-3(n-1)^3+3(n-2)^3-(n-3)^3]$$

ამრიგად მივიღეთ

$$C_3^0 n^3 - C_3^1 (n-1)^3 + C_3^2 (n-2)^3 - C_3^3 (n-3)^3 = 3!$$

განხილული შემთხვევებიდან ვღებულობთ შემდეგ კანონზომიერებებს: ნატურლური რიცხვების ხარისხების მიმდევრობებიდან ვღებულობთ სხვაობების იმდენ ახალ მიმდევრობას, რასაც უდრის თავიდან მოცემული ნატურალური რიცხვების მიმდევრობის ხარისხის მაჩვენებელი და ბოლო მიმდევრობა მუდმივია, რომლის თითოეული წევრი უდრის საწყისი მიმდევრობების ხარისხის მაჩვენებლის ფაქტორიალს.

მაშასადამე თუ განვიხილავთ $n$-ური ხარისხის მიმდევრობას და ამ მიმდევრობიდან შევადგენთ სხვაობების ახალ-ახალ მიმდევრობებს, მაშინ ბოლოს წინა მიმდევრობა იქნება არითმეტიკული პროგრესია, რომლისთვისაც $d = n!$, სადაც $n$ წარმოადგენს საწყისი მიმდევრობის ხარისხის მაჩვენებელს.

მაგალითად: თუ განვიხილავთ ნატურალური რიცხვების მე-4 ხარისხის მიმდევრობას, მაშინ წინასწარ ვიცით, შედგენილი ახალ-ახალი მიმდევრობებიდან, ბოლოს წინა მიმდევრობა იქნება არითმეტიკული პროგრესია, რომლისათვის $d = 4!$.

მართლაც

$$1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, \ldots$$
$$15, 65, 175, 369, 671, \ldots$$
$$50, 110, 194, 302, \ldots$$
$$60, 84, 108, \ldots$$
$$24, 24, \ldots$$

მაშასადამე ამ წესით შედგენილი ბოლოს წინა მიმდევრობა წარმოადგენს არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლისთვისაც $d = 24 = 4!$

ბოლოს განვიხილოთ ნატურალური რიცხვების $n$-ური ხარისხების მიმდევრობა

$$1^n, 2^n, 3^n, \ldots (n-3)^n, (n-2)^n, (n-1)^n, n^n$$

თუ ამ მიმდევრობისათვის შევადგენთ მეზობელი წევრების სხვაობათა $n$ ახალ მიმდევრობას, მაშინ აღმოჩენილ კანონზომიერებათა მიხედვით ვწერთ

$$C_n^0 n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \cdots$$
$$+(-1)^k C_n^k (n-k)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n = n\,!$$

ეს დაემთხვევა აღმოჩენილ (3.3) ფორმულას, რაც უკვე დამტკიცებული გვაქვს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

შედეგი 1. თუ $1^k, 2^k, 3^k, \ldots, m^k$ მიმდევრობაში სადაც $1 \le k \le n$ შევადგენთ მეზობელი წევრების სხვაობებისაგან ახალ-ახალ მიმდევრობებს, მაშინ ბოლოს წინა მიმდევრობა, არითმეტიკული პროგრესია იქნება

ამ არითმეტიკული პროგრესიის პირველი წევრი

$a_1 = \dfrac{(n+1)\,!}{2} = \dfrac{(n+1)\cdot n\,!}{2}$, ხოლო არითმეტიკული სხვაობა $d = n\,!$

თუ ჩავსვამთ $k = 1;\,2;\,3;\ldots n$ ნატურალურ რიცხვებს, მაშინ მივიღებთ შემდეგ არითმეტიკულ პროგრესიებს:

1. ----- $\dfrac{(1+1)\cdot 1\,!}{2};\quad \dfrac{(1+3)\cdot 1\,!}{2};\quad \dfrac{(1+5)\cdot 1\,!}{2};\quad \ldots\quad \dfrac{[1+(2m-1)]\cdot 1\,!}{2}$

   ანუ $1;\,2;\,3;\ldots m$

2. ----- $\dfrac{(2+1)\cdot 2\,!}{2};\quad \dfrac{(2+3)\cdot 2\,!}{2};\quad \dfrac{(2+5)\cdot 2\,!}{2};\quad \ldots\quad \dfrac{[2+(2m-1)]\cdot 2\,!}{2}$

   ანუ $3;\,5;\,7;\ldots(2m+1)$

3. ----- $\dfrac{(3+1)\cdot 3\,!}{2};\quad \dfrac{(3+3)\cdot 3\,!}{2};\quad \dfrac{(3+5)\cdot 3\,!}{2};\ldots\quad \dfrac{[3+(2m-1)]\cdot 3\,!}{2}$

   ანუ $12;\,18;\,24;\ldots(m+1)\cdot 6$

4. ----- $\dfrac{(4+1)\cdot 4\,!}{2};\quad \dfrac{(4+3)\cdot 4\,!}{2};\quad \dfrac{(4+5)\cdot 4\,!}{2};\ldots\quad \dfrac{[4+(2m-1)]\cdot 4\,!}{2}$

   ანუ $60;\,84;\,108;\ldots(2m+3)\cdot 12$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

n. ----- $\dfrac{(n+1)\cdot n\,!}{2};\quad \dfrac{(n+3)\cdot n\,!}{2};\quad \dfrac{(n+5)\cdot n\,!}{2};\ldots\quad \dfrac{[n+(2m-1)]\cdot n\,!}{2};\qquad$ (m)

მაშასადამე (3.3) ფორმულა წარმოადგენს (m) პროგრესიის არითმეტიკულ სხვაობას.

$$d = C_n^0 n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n = n\,! \qquad (3.3)'$$

## 3. ფაქტორიალის განამწკრივის ფორმულის შედეგი 2:

(3.3) ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$C_n^0 n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \cdots + (-1)^m C_n^m (n-m)^n + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^n = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n-(n-1)]$$

ამ ფორმულაში ხარისხის მაჩვენებელი, რიგ რიგობით შევცვალოთ $(n-1)$-დან 1-მდე, ხოლო ყველა სხვა რიცხვები და სიმბოლოები უცვლელად დავტოვოთ, მაშინ მივიღებთ

$$C_n^0 n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^k$$
$$= k\,(k-1)(k-2)(k-3)\ldots[k-(n-1)];$$

სადაც $1 \le k \le n-1$

ამ ფორმულაში ხარისხის მაჩვენებლად რიგ-რიგობით ავიღოთ $k = 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, მაშინ მარჯვენა ნაწილში შესაბამისად $(k-1)(k-2)(k-3)\ldots$ მამრავლები რიგ-რიგობით 0-ის ტოლი იქნება. აქედან გამომდინარე მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$\begin{cases} C_n^0 n - C_n^1(n-1) + C_n^2(n-2) - C_n^3(n-3) + \cdots + C_n^{n-1} 1 = 0 \\ C_n^0 n^2 - C_n^1(n-1)^2 + C_n^2(n-2)^2 - C_n^3(n-3)^2 + \cdots + C_n^{n-1} 1^2 = 0 \\ C_n^0 n^3 - C_n^1(n-1)^3 + C_n^2(n-2)^3 - C_n^3(n-3)^3 + \cdots + C_n^{n-1} 1^3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n^0 n^{n-1} - C_n^1(n-1)^{n-1} + C_n^2(n-2)^{n-1} - C_n^3(n-3)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^{n-1} = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

ანუ, მოკლედ: თუ $1 \le k \le n-1$, მაშინ გვექნება

$$C_n^0 n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 1^k = 0 \qquad (*)$$

## 4. ფაქტორიალის განამწკრივის ძირითადი თვისების დამტკიცება

ეხლა $n!$-ის განამწკრივში ხარისხის ფუძედ დავაფიქსიროთ ნებისმიერი ნამდვილი $x$ რიცხვი (შეიძლება კომპლექსური რიცხვიც) და დავამტკიცოთ განამწკრივის ძირითადი თვისება ამ ზოგადი შემთხვევისათვის.

$$C_n^0 x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(x-2)^n - C_n^3(x-3)^n + \cdots$$
$$+ (-1)^n C_n^n (x-n)^n = n! \qquad (3.4)$$

თუ ყველა ბინომს ავახარისხებთ და მსგავს წევრებს შევაერთებთ, მაშინ $x$-ის შემცველი ყველა წევრი გაბათილდება და დარჩება $n!$-ის მნიშვნელობა უცვლელად ე.ი. მივიღებთ (3.3) ფორმულას.

ბინომების ახარისხებით მიღებულ განამწკრივებს მივცეთ შემდეგი ფორმა

$$
\begin{aligned}
&C_n^0[x^n + \\
&-C_n^1[x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x + (-1)^n C_n^n 1^n] + \\
&+C_n^2[x^n - C_n^1 x^{n-1}\cdot 2 + C_n^2 x^{n-2}\cdot 2^2 - C_n^3 x^{n-3}\cdot 2^3 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x\cdot 2^{n-1} + (-1)^n C_n^n 2^n] - \\
&-C_n^3[x^n - C_n^1 x^{n-1}\cdot 3 + C_n^2 x^{n-2}\cdot 3^2 - C_n^3 x^{n-3}\cdot 3^3 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x\cdot 3^{n-1} + (-1)^n C_n^n 3^n] + \\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
&(-1)^{n-1} C_n^{n-1}[x^n - C_n^1 x^{n-1}\cdot(n-1) + C_n^2 x^{n-2}\cdot(n-1)^2 - C_n^3 x^{n-2}\cdot(n-1)^3 + \cdots \\
&+(-1)^{n-1} C_n^{n-1} x(n-1)^{n-1} + (-1)^n C_n^n (n-1)^n] + (-1)^n C_n^n[x^n - C_n^1 x^{n-1} n + C_n^2 x^{n-2} n^2 - \\
&-C_n^3 x^{n-3} n^3 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x n^{n-1} + (-1)^n C_n^n n^n]
\end{aligned}
$$

შეკრება შევასრულოთ სვეტების მიხედვით

$$
\begin{aligned}
&x^n(C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n) - C_n^1 x^{n-1}(-C_n^1 + C_n^2 2 - C_n^3 3 + \cdots \\
&+(-1)^{n-1} C_n{}^{n-1}(n-1) + (-1)^n C_n{}^n n) + C_n^2 x^{n-2}(-C_n^1 1^2 + C_n^2 2^2 - C_n^3 3^2 + \cdots \\
&+(-1) C_n^{n-1}(n-1)^2 + (-1) C_n^n n^2) - C_n^3 x^{n-3}(-C_n^1 1^3 + C_n^2 2^3 - C_n^3 3^3 + \cdots + (-1)^{n-1}(C_n^{n-1}(n-1)^3 + \\
&+(-1)^n C_n^n n^3) + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x(-C_n^1 + C_n^2 2^{n-1} - C_n^3 3^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}(n-1)^{n-1} + \\
&(-1)^n C_n^n n^{n-1} + (-1)^n C_n^n(-C_n^n 1^n + C_n^2 2^n - C_n^3 3^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}(n-1)^n + (-1)^n C_n^n n^n) = n!
\end{aligned}
$$

(3.5) ფორმულის პირველ ფრჩხილში გვაქვს ნიშანცვლადი ბინომიალური კოეფიციენტების ჯამი, რაც ნიუტონის ბინომის თვისების თანახმად 0-ის ტოლია, ხოლო (*)-იანი ფორმულების თანახმად, ყველა ფრჩხილში მოთავსებული მრავალწევრები 0-ის ტოლია, გარდა უკანასკნელი ფრჩხილებისა, მაშასადამე დარჩება:

$$-C_n{}^1 1^n + C_n{}^2 2^n - C_n^3 3^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}(n-1)^n + (-1)^n C_n^n n^n = n! \qquad (3.5)$$

მივიღეთ (3.3) ფორმულა, სადაც განამწკრივი ჩაწერილია შებრუნებული რიგით. ამით $n!$-ის განამწკრივის ძირითადი თვისება დამტკიცებულია.

## § 4. ფაქტორიალის განამწკრივის გამოყენება ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად

(3.3) ფორმულის განამწკრივისა და მისი შედეგების პრაქტიკული გამოყენების მიზნით განვიხილოთ შემდეგი ტიპიური ამოცანები.

**ამოცანა**

სამგზავრო მატარებლის ვაგონების რიცხვი იყოს $n$, ხოლო მგზავრების რიცხვი კი $k$, თითოეული მგზავრი, თავისი სურვილის მიხედვით, სამგზავროდ თვითონ ირჩევს ვაგონს. რა არის ალბათობა იმისა, რომ თითოეულ ვაგონში, თუნდაც ერთი მგზავრი მაინც იმყოფებოდეს.

(ე.ი. არცერთი ვაგონი არ იყოს ცარიელი)

**ამოხსნა**

ამ სახის ამოცანების ამოსახსნელად დადგენილია შემდეგი ფორმულა: ალბათობა

$$P = \frac{C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^k + C_n^2 (n-2)^k - C_n^3 (n-3)^k + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^k}{n^k} \qquad (4.1)$$

ამ ფორმულიდან მიღებული $P$-ს მნიშვნელობა იქნება ზემოთ მოცემული ამოცანის პასუხი.

განვიხილოთ შემდეგი სამი შემთხვევა:

**I შემთხვევა**: ვთქვათ $k = n$, ე.ი. სამგზავრო ვაგონების რაოდენობის რიცხვი უდრის მგზავრთა რიცხვს, მაშინ (3.3) ფორმულის

$$C_n^0 n^n - C_n^1 (n-1)^n + C_n^2 (n-2)^n - C_n^3 (n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^n = n!$$

თანახმად ალბათობა იქნება $P = \frac{n!}{n^n}$.

**მაგალითი 1**. ვთქვათ არის 1 ვაგონი და 1 მგზავრი, მაშინ (4.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

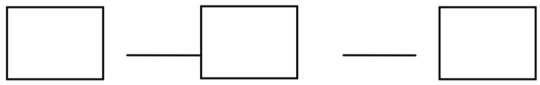
ალბათობა $P = \frac{1!}{1^1} = 1$

რას ნიშნავს რომ ალბათობა 1-ის ტოლია?

ეს იმას ნიშნავს, რომ ამოცანის მოთხოვნა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც იყოს 100%- ით უზრუნველყოფილია.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ არის 3 სამგზავრო ვაგონი და 3 მგზავრი, მაშინ შესაძლო ვარიანტები იქნება, თუ გაგონებია №1, №2, და №3 ხოლო მგზავრებია $a, b, c$.

$N1$ $\qquad$ $N2$ $\qquad$ $N3$



| | | |
|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $a$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $b$ | $a$ |

სულ მივიღეთ 6 ვარიანტი, სადაც თითოეულ ვარიანტის, თითოეულ ვაგონში, თითო მგზავრი მაინც არის. ე.ი. $P=\frac{3!}{3^3}=\frac{2}{9}$ . აქედან ჩანს რომ ალბათობა შემცირდა და შეადგენს $\approx 22\%$-ს.

**მაგალითი 3.** ვთქვათ არის 6 სამგზავრო ვაგონი და 6 მგზავრი, მაშასადამე ალბათობის ფორმულის თანახმად ვწერთ

$$P=\frac{6!}{6^6}=\frac{5}{324}\approx 0.015 \text{ ანუ } 1,5\ \%$$

მაშასადამე, რაც უფრო იზრდება სამგზავრო ვაგონების რიცხვი და მის შესაბამისად მგზავრთა რიცხვი, მით უფრო კლებულობს ალბათობა და უახლოვდება 0-ს, მაგრამ პასუხი 0 არავითარ შემთხვევაში არ იქნება, რადგანაც პირობის თანახმად დადგება მომენტი, როცა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი იქნება.

**II. შემთხვევა:** ვთქვათ $k<n$, ე.ი მგზავრების რიცხვი ნაკლებია სამგზავრო ვაგონების რიცხვზე, მაშინ ერთი ან რამდენიმე ვაგონი ცარიელი იქნება, რადგანაც თუ თითოეულ ვაგონში, თითო მგზავრი მოთავსდება, მაშინ მგზავრები არ ეყოფა ვაგონებს, რასაც ადასტურებს (*)-იანი ფორმულები:

$$\text{თუ } 1\le k\le n-1 \text{ მაშინ } C_n^0 n^k - C_n^1 (n-1)^k + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}\cdot 1^k = 0 \qquad (*)$$

ხოლო $n^k = n^n \neq 0$

პასუხი: ალბათობა $P=\frac{0}{n^n}=0.$

რას ნიშნავს, რომ ალბათობა 0-ის ტოლია?

ეს იმას ნიშნავს, რომ ამოცანის მოთხოვნა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც იყოს, არცერთ ვარიანტში არ სრულდება.

მაგალითად: თუ არის 8 მგზავრი და 9 ვაგონი, მაშინ ცხადია, რომ ნებისმიერ ვარიანტში 1 ან რამდენიმე ვაგონი ცარიელი იქნება, რადგანაც “მგზავრები არ ეყოფა ვაგონებს”.

**III შემთხვევა:** ვთქვათ $k > n$, ე.ი. მგზავრების რიცხვი მეტია სამგზავრო ვაგონების რიცხვზე.

დავიწყოთ უმარტივესი შემთხვევით: ვთქვათ არის $n$ ვაგონი და $n+1$ მგზავრი, მაშინ (4.1) ფორმულის მრიცხველი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$P_{n+1} = C_n^0 n^{n+1} - C_n^1 (n-1)^{n+1} + C_n^2 (n-2)^{n+1} - C_n^3 (n-3)^{n+1} + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^{n+1}$$

თუ რა კანონზომიერებას მიიღებს მიღებილი განამწკრივის მნიშვნელობები, ამ მიზნით ჩავსვათ $n = 2,3,4,\cdots$ მაშინ შესაბამისად ამ მრავალწევრიდან მივიღებთ: $6, 36, 240,\cdots$. ეს რიცხვები გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$6 = 3 \cdot 2 = (1+2) \cdot 2\,!$$
$$36 = 6 \cdot 6 = (1+2+3) \cdot 3\,!$$
$$240 = 10 \cdot 24 = (1+2+3+4) \cdot 4\,!$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

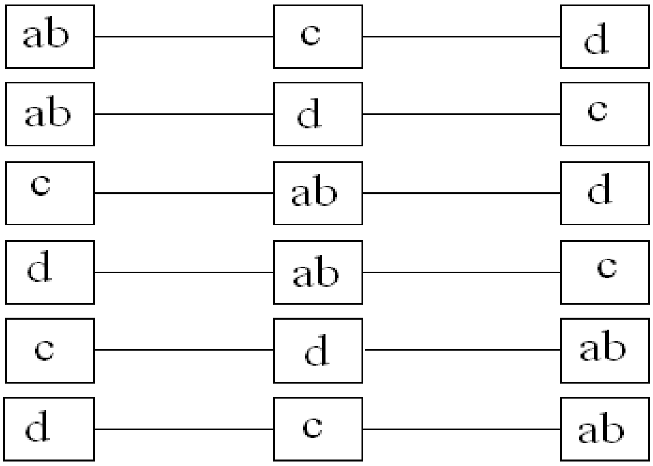
ამ მაგალითების შედეგად აშკარად გამოიკვეთა კანონზომიერება, ამიტომ ნებისმიერი $n$-ისათვის გვექნება $P_1 = (1+2+3+\cdots+n) \cdot n\,!$ თუ გავითვალისწინებთ $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას $P_1 = \dfrac{n(n+1)\,!}{2}$.

**მაგალითი 1.** ვთქვათ არის 1 ვაგონი და 2 მგზავრი, მაშინ $P_1$ ფორმულის თანახმად გვექნება $P_1 = \dfrac{1 \cdot 2\,!}{1^2 \cdot 2\,!} = 1$.

ე.ი. ამოცანის მოთხოვნა 100%-ით უზრუნველყოფილია.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ არის 3 ვაგონი და 4 მგზავრი ე.ი. $n = 3$ და $k = 4$, ეს შემთხვევა ჯერ ამოვხსნათ პრაქტიკულად:

№1, №2, №3 იყოს ვაგონების ნომრები, ხოლო $a, b, c, d$ მგზავრები, ამოცანის პირობის თანახმად თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც უნდა იყოს, რადგანაც აქ ოთხი მგზავრია, ამიტომ თითო ვაგონში თითო მგზავრის განაწილების შემდეგ ერთ-ერთ ვაგონში უეჭველად იქნება 2 მგზავრი, ე.ი. მგზავრთა წყვილი. 4 მგზავრისაგან გვექნება მგზავრთა შემდეგი წყვილები: $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$, მართლაც ეს წყვილებია: $ab, ac, ad, bc, bd, cd$ .




ცხადია, რომ მგზავრთა $ab$ წყვილმა წარმოშვა 6 ვარიანტი და რადგანაც მგზავრების 6 წყვილი გვაქვს, ამიტომ სულ გვექნება $6\cdot 6=36$ ვარიანტი. მაშასადამე ეს ვარიანტები ისეთ შემთხვევას ეკუთვნის, როცა თითოეულ ვაგონში, თითო მგზავრი მაინც იქნება, ამიტომ ალბათობა იქნება $P=\frac{36}{3^4}=\frac{4}{9}$

ანუ $\approx 44\%$

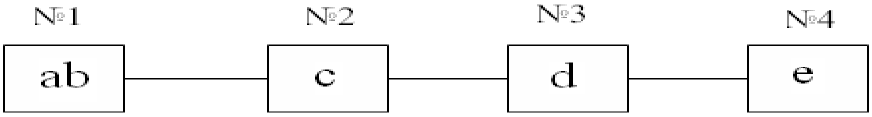
ახლა ეს მაგალითი ამოვხსნათ ფორმულით

$$P=\frac{P_1}{n^{n+1}}=\frac{n(n+1)\,!}{2\cdot n^{n+1}}=\frac{(n+1)\,!}{2\cdot n^n}$$

რიცხობრივად გვექნება $P=\frac{4\,!}{2\cdot 3^3}=\frac{4}{9}$

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $\frac{4}{9}$–ს, ანუ $\approx 44\%$

**მაგალითი 3.** ვთქვათ არის 4 სამგზავრო გაგონი და 5 მგზავრი. მგზავრებია: $a, b, c, d$ და $e$, როცა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრს მოვათავსებთ, მაშინ რომელიმე ერთ-ერთ ვაგონში უეჭველად ორი მგზავრი იქნება, მგზავრთა ასეთი წყვილები გამოითვლება ფორმულით $C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$, მართლაც $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, ed, ce, de$




თუ მოვახდენთ $c, d, e$ მგზავრების ყველა შესაძლო გადანაცვლებას, მაშინ მივიღებთ $P_3=3\,!=6$ ე.ი. როცა $a\,b$ წყვილი პირველ ვაგონშია, წარმოიშვა 6

ვარიანტი, მაგრამ ასეთი 4 ვაგონი გვაქვს, ამიტომ $a\,b$ წყვილი სულ წარმოშობს $4\cdot 6=24$ ვარიანტს, მაგრამ სულ გვაქვს მგზავრების 10 წყვილი, ამიტომ საბოლოოდ გვექნება $10\cdot 24=240$ ვარიანტი. ეს ვარიანტები ისეთია, როცა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც არის და ამიტომ ალბათობა იქნება

$$P=\frac{240}{4^5}=\frac{15}{64} \quad \text{ანუ} \quad \approx 23\%$$

ახლა ფორმულის მიხედვით ალბათობა იქნება

$$P=\frac{P_1}{n^{n+1}}=\frac{n(n+1)\,!}{2\cdot n^{n+1}}=\frac{(n+1)\,!}{2\cdot n^n}$$

$$P=\frac{5\,!}{2\cdot 4^4}=\frac{120}{512}=\frac{15}{64}$$

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $P=\frac{15}{64}$–ს, ანუ $\approx 23\%$

ახლა პრაქტიკული ხერხი გამოვიყენოთ ზოგადი შემთხვევისათვის.

ვთქვათ არის $n$ ვაგონი $n+1$ მგზავრი, როცა ყოველ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც მოთავსდება, მაშინ ერთ-ერთ ვაგონში უეჭველად ორი მგზავრი იქნება, ე.ი. მგზავრთა წყვილი. მათი რაოდენობა გამოითვლება ფორმულით $C_{n+1}^2=\frac{(n+1)n}{2}$

ვთქვათ მგზავრთა ერთ-ერთი წყვილია $(a,b)$ სულ არის $n$ ვაგონი და ეს წყვილი ჯერ მოვათავსოთ პირველ ვაგონში, მაშინ დანარჩენ $(n-1)$ ვაგონში იქნება $(n-1)$ მგზავრი, თუ მოვახდენთ ამ მგზავრთა ყველა შესაძლო გადანაცვლებას, მაშინ მივიღებთ $(n-1)\,!$ ვარიანტს, მაგრამ თუ $(a,b)$ წყვილს გადავაადგილებთ დანარჩენ ვაგონებში, მაშინ მივიღებთ $n(n-1)\,!=n\,!$ ეს შედეგი მოგვცა მხოლოდ $(a,b)$ წყვილმა, როგორც უკვე ვიანგარიშეთ ასეთი წყვილების რაოდენობა $(n-1)$ მგზავრისათვის არის $\frac{(n+1)n}{2}$ ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{(n+1)n}{2}\cdot n\,!=\frac{n(n+1)\,!}{2}$$

ეს შედეგი არის პრაქტიკული ხერხით მიღებული, რაც დაემთხვა თეორიულად დადგენილ $P_1=\frac{n(n+1)\,!}{2}$ ფორმულას.

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $P=\frac{(n+1)\,!}{2\cdot n^n}$

ანალოგიური მიდგომით მივიღებთ $P_2=\frac{n(3n+1)(n+2)\,!}{24}$ ფორმულას.

$$P_3=\frac{n^2(n+1)(n+3)!}{48}$$

ამ ფორმულისათვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითები:

**მაგალითი 1.** ვთქვათ არის 1 ვაგონი და 3 მგზავრი მაშინ ალბათობა იქნება

$$P=\frac{1\cdot 4\cdot 3!}{1^3\cdot 24}=1$$

ალბათობა შეადგენს 1-ს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამოცანის მოთხოვნა 100% –ით უზრუნველყოფილია.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ არის 3 სამგზავრო ვაგონი და 5 მგზავრი. მაშინ $P_2$ ფორმულის თანახმად ვწერთ

$$P_2=\frac{3\cdot 10\cdot 5!}{3^5\cdot 24}=\frac{50}{81} \quad \text{ანუ} \approx 62\,\%$$

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $P=\frac{50}{81}$-ს.

თუ არის $n$ ვაგონი $n+3$ მგზავრი, მაშინ ამ შემთხვევისათვის გვაქვს ფორმულა $P_3=\frac{n^2(n+1)(n+3)!}{2\cdot 4!}$

**მაგალითი 1.** ვთქვათ 1 არის ვაგონი და 4 მგზავრი, მაშინ ალბათობა იქნება $P=\frac{2\cdot 4!}{1^4\cdot 2\cdot 4!}=1$ ე.ი. მოთხოვნა, რომ თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი იყოს 100%-ით უზრუნველყოფილია.

**მაგალითი 2.** ვთქვათ არის 3 ვაგონი და 6 მგზავრი, მაშინ

$$P_3=\frac{9\cdot 4\cdot 6!}{3^6\cdot 2\cdot 4!}=\frac{20}{27} \quad \text{ანუ} \approx 74\,\%$$

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $P=\frac{20}{27}$-ს.

**მაგალითი 3.** ვთქვათ არის 6 ვაგონი და 9 მგზავრი, მაშინ ალბათობა გამოითვლება ფორმულით $P=\frac{36\cdot 7\cdot 9!}{6^9\cdot 48}=\frac{245}{1296}=0{,}1890\approx 0.19$ ანუ $\approx 19\,\%$

პასუხი: ალბათობა შეადგენს $P=0{,}19$-ს.

რაც უფრო იზრდება ვაგონების რიცხვი და მის შესაბამისად მგზავრების რიცხვი მით უფრო მცირდება ალბათობა, მაგრამ პასუხი 0-ის ტოლი არასოდეს არ იქნება, რადგანაც პირობის თანახმად, მგზავრების რიცხვი მეტია ვაგონების

რიცხვზე და ამიტომ აუცილებლად დადგება მომენტი, როცა თითოეულ ვაგონში თითო მგზავრი მაინც იქნება.

ამ ფორმულებისა და მისი ანალოგიური სხვა ფორმულების ურთიერთ შედარებით და მათ შორის არსებული კანონზომიერებათა გათვალისწინებით ვადგენთ შემდეგ ზოგად ფორმულას:

$$P_m = C_n^0 n^{n+m} - C_n^1 (n-1)^{n+m} + C_n^2 (n-2)^{n+m} - C_n^3 (n-3)^{n+m} + \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} [n-(n-1)]^{n+m} = \frac{(x_1 n^m + x_2 n^{m-1} + x_3 n^{m-2} + \cdots + x_m n)(n+m)!}{(m+1)!} \qquad (4.2)$$

(ამ ფორმულის სამართლინობა შეიძლება დამტკიცებული იქნეს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით)

თუ ამ ფორმულაში $n$ მივცემთ მნიშვნელობებს $n = 1,2,3,\ldots$ მაშინ მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას და დაფიქსირებული $m$-თვის მას ამოვხსნით კრამერის ფორმულებით ან ცვლადების თანდათანობით გამორიცხვის გზით.

თუ $m = 1,2,3,\ldots$ მაშინ შესაბამისად მივიღებთ $P_1, P_2, P_3 \ldots$ ფორმულებს. ვაჩვენოთ რომ (4.2) ფორმულიდან როგორ მიიღება კერძო ფორმულები. მაგალითად:

ა) ვთქვათ $n = 1, m = 1$, მაშინ გვექნება $x_1 \cdot \frac{2!}{2!} = 1$ აქედან $x_1 = 1$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობა ზოგად ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ $P_1 = n.\frac{(n+1)!}{2!} = \frac{n(n+1)!}{2}$ მივიღეთ $P_1$ ფორმულა.

ბ) ვთქვათ $n = 1,2$ და $m = 2$ მაშინ (4.2) ფორმულიდან მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ (4x_1 + 2x_2) \cdot \frac{4!}{3!} = 14 \end{cases}$$

აქედან $x_1 = \frac{3}{4}$ და $x_2 = \frac{1}{4}$, ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (4.2) ფორმულაში, მაშინ გვექნება

$$P_2 = \left(\frac{3}{4}n^2 + \frac{1}{4}n\right)\frac{(n+2)!}{3!} = \frac{n(3n+1)}{4}\frac{(n+2)!}{6} = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$$

მივიღეთ $P_2$ ფორმულა

გ) ვთქვათ $n = 1,2,3$ და $m = 3$ მაშინ (4.2) ფორმულიდან მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (8x_1 + 4x_2 + 2x_3)\cdot \dfrac{5\,!}{4\,!} = 30 \\ (27x_1 + 9x_2 + 3x_3)\cdot \dfrac{6\,!}{4\,!} = 540 \end{cases}$$ ანუ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ (4x_1 + 2x_2 + x_3) = 3 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად ვღებულობთ $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 0$. ეს მნიშვნელობები ჩავსვათ (4.2) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right)\frac{(n+3)\,!}{4\,!} = \frac{n^2(n+1)\,(n+3)\,!}{48}$$

მივიღეთ $P_3$ ფორმულა

ანალოგიურად მიიღება $P_4, P_5, P_6 \ldots$ ფორმულები. მაშასადამე III შემთხვევა მთლიანად ამოწურულია.

## § 5. ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის რეკურენტული ფორმულა

ნატურალური რიცხვები წარმოვადგინოთ ბინომების სახით, სადაც პირველი წევრი იქნება 1:

$(1+0),(1+1),(1+2),(1+3),\dots$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $1^k+2^k+3^k+\dots+n^k=S_k(n)$, სადაც $k$ ნატურალური რიცხვია. ახლა განვიხილოთ შემდეგი იგივეობა:

$$\begin{aligned}&1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\dots+[1+(n-1)]^{k+1}+(1+n)^{k+1}=\\&=(1+0)^{k+1}+(1+1)^{k+1}+(1+2)^{k+1}+(1+3)^{k+1}+\dots+n^{k+1}+(1+n)^{k+1}\end{aligned} \tag{5.1}$$

გავშალოთ ბინომები განამწკრივებად:

$$\begin{aligned}&(1+0)^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1 0+C_{k+1}^2 0+C_{k+1}^3 0+\dots+C_{k+1}^k 0+0^{k+1}\\&(1+1)^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1 1^1+C_{k+1}^2 1^2+C_{k+1}^3 1^3+\dots+C_{k+1}^k 1^k+1^{k+1}\\&(1+2)^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1 2^1+C_{k+1}^2 2^2+C_{k+1}^3 2^3+\dots+C_{k+1}^k 2^k+2^{k+1}\\&(1+3)^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1 3^1+C_{k+1}^2 3^2+C_{k+1}^3 3^3+\dots+C_{k+1}^k 3^k+3^{k+1}\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&[(1+(n-1)]^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1(n-1)+C_{k+1}^2(n-1)^2+C_{k+1}^3(n-1)^3+\dots+C_{k+1}^k(n-1)^k+(n-1)^{k+1}\\&(1+n)^{k+1}=1^{k+1}+C_{k+1}^1 n+C_{k+1}^2 n^2+C_{k+1}^3 n^3+\dots+C_{k+1}^k n^k+n^{k+1}\end{aligned}$$

ეს განამწკრივები შევკრიბოთ სვეტების მიხედვით, მაშინ მივიღებთ

$$(1+n)^{k+1}=(1+n)+C_{k+1}^1 S_1+C_{k+1}^2 S_2+C_{k+1}^3 S_3+\dots+C_{k+1}^k S_k$$

მაშასადამე საბოლოოდ მივიღეთ შემდეგი ფორმულა

$$C_{k+1}^1 S_1+C_{k+1}^2 S_2+C_{k+1}^3 S_3+\dots+C_{k+1}^k S_k=(n+1)[(n+1)^k-1] \tag{5.2}$$

ეს ფორმულა წარმოადგენს ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის რეკურენტულ ფორმულას. ამ ფორმულიდან შეიძლება დავადგინოთ $S_1,S_2,\dots,S_k$ ფორმულები.

ვთქვათ $k=1$, მაშინ გვექნება

$C_2^1 S_1=(n+1)[(n+1)^1-1]$ აქედან $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ანუ $1+2+3+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ვთქვათ $k=2$, მაშინ გვექნება

$C_3^1 S_1+C_3^2 S_2=(n+1)[(n+1)^2-1]$ აქედან $S_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ანუ

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**მაგალითი:** დავადგინოთ 1-დან $n$-მდე ნატირალური რიცხვების, 2-2 აღებული ნამრავლთა ჯამი. ეს ჯამი აღვნიშნოთ $S_n(2)$.

გამოყვანილი ამ ორი ფორმულის თანახმად გვექნება

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+2S_n(2)$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2S_n(2)$$

$$\text{მაშასადამე} \quad 2S_n(2) = \frac{(3n+2)A_{n+1}^3}{24}.$$

განვიხილოთ კერძო მაგალითი:

გამოვთვალოთ 1-დან 9-მდე ციფრების, 2-2 აღებულ ნამრავლთა ჯამი

$$S_9(2) = \frac{(3\cdot 9+2)\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{24} = 870$$

პასუხი: $S_9(2) = 870$.

დავუბრუნდეთ (5.2) ფორმულას.

ვთქვათ $k=3$, მაშინ გვექნება

$$2n(n+1)+n(n+1)(2n+1)+4S_3 = (n+1)[(n+1)^3-1]$$

მივიღებთ $S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ანუ $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

**მაგალითი:** დაამტკიცეთ, რომ

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3} = 1+2+3+\cdots+n$$

ანალოგიური მიდგომით (5.2) ფორმულის გამოყენებით თანდათანობით შეიძლება დავადგინოთ $S_4, S_5, S_6, \ldots, S_k$ ნატურალურფუძიანი, ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულები.

მაგალითად, დავადგინოთ ნატურალური რიცხვების მე-5 ხარისხების ჯამის ფორმულა, თუ ცნობილია:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};\quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\quad S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2;\quad S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

ამისათვის საჭიროა ჩავსვათ $k=5$ მაშინ (5.2) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$C_6^1\frac{n(n+1)}{2}+C_6^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+C_6^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+C_6^4\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+C_6^5S_5 =$$
$$=(n+1)[(n+1)^5-1]$$

$$n(n+1)\left[3+\frac{5(2n+1)}{2}+5(n^2+n)+\frac{(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2}\right]+6S_5=n(n+1)(n^4+5n^3+10n^2+10n+5)$$

$$n(n+1)\left(3+\frac{10n+5}{2}+5n^2+5n+\frac{6n^3+9n^2+n-1}{2}\right)+6S_5=n(n+1)(n^4+5n^3+10n^2+10n+5)$$

$$n(n+1)\frac{6+10n+5+10n^2+10n+6n^3-9n^2+n-1}{2}+6S_5=n(n+1)(n^4+5n^3+10n^2+10n+5)$$

$$n(n+1)\frac{6n^3+19n^2+21n+10}{2}+6S_5=n(n+1)(n^4+5n^3+10n^2+10n+5)$$

$$6S_5=n(n+1)\left[n^4+5n^3+10n^2+10n+5-\frac{6n^3+19n^2+21n+10}{2}\right]$$

$$6S_5=n(n+1)\frac{2n^4+10n^3+20n^2-20n+10-6n^3-19n^2-21n-10}{2}$$

$$6S_5=n(n+1)\frac{2n^4+4n^3+n^2-n}{2}$$

$$6S_5=n^2(n+1)\frac{2n^3+4n^2+n-1}{2}$$

$$6S_5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{2}$$

$$S_5=\frac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

მაშასადამე $$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

## § 6. ეილერ-მაკლორენის ფორმულა და მისი შედეგები

ეილერ-მაკლორანის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(a+nh)\right]$$
$$-\frac{B_2h^2}{2!}\left[f'(a+nh)-f'(a)\right]-\frac{B_4h^4}{4!}\left[f'''(a+nh)-f'''(a)\right]-\cdots \qquad (6.1)$$
$$-\cdots-\frac{B_{2r}h^{2r}}{(2r)!}\left[f^{(2r-1)}(a+nh)-f^{(2r-1)}(a)\right]+R_{2r}$$

ეს ფორმულა გამოიყენება ზოგიერთი მათემატიკური პრობლემის გადასაჭრელად. მათ შორის ერთ-ერთია ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის ფორმულები.

**შედეგი 1:** თუ (6.1) ფორმულაში ჩავსვამთ $a=0, h=1$ და $f(x)=x^k$, მაშინ საათანადო გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ შემდეგ ფორმულას

$$\int_0^n x^k dx = 1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k+\left(\frac{1}{2}n^k+\frac{1}{2}n^k\right)-\frac{1}{2}n^k-\frac{B_2}{2!}[kn^{k-1}-0]-$$
$$-\frac{B_4}{4!}[k(k-1)(k-2)n^{k-3}-0]-\cdots-\frac{B_{2r}}{(2r)!}k(k-1)(k-2)\cdots(k-2r+1)n^{k-(2r-1)}-\cdots-B_kn$$

$$\frac{n^{k+1}}{k+1}=1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k+n^k-\frac{1}{2}n^k-\frac{B_2}{2!}kn^{k-1}-\frac{B_4}{4!}k(k-1)(k-2)n^{k-3}-\cdots-B_kn$$

$$\frac{n^{k+1}}{k+1}=1^k+2^k+\cdots+n^k-\frac{1}{2}n^k-\frac{B_2}{2!}A_k^1n^{k-1}-\frac{B_4}{4!}A_k^2n^{k-3}-\cdots-B_kn$$

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\left(B_2\frac{A_k^1}{2!}n^{k-1}+B_4\frac{A_k^3}{4!}n^{k-3}+B_6\frac{A_k^5}{6!}n^{k-5}+\cdots\right.$$
$$\left.+B_{2r}\frac{A_k^{2r-1}}{(2r)!}n^{k-(2r-1)}+\cdots+B_kn\right) \qquad (6.2)$$

(ზოგადი წევრი ეხება მხოლოდ ფრჩხილებში მოთავსებულ მრავალწევრს), სადაც $1\le r\le\frac{k}{2}$; $r$ ნატურალური რიცხვია; თუ $k$ კენტია, მაშინ (6.2) ფორმულაში $B_kn$ ამოვარდება და მის ნაცვლად გვექნება $B_{k-1}\frac{k}{2!}n^2$.

**მაგალითი 1.** დავადგინოთ ნატურალური რიცხვების კვადრატების ჯამის ფორმულა ამისათვის (6.2) ფორმულაში ჩავსვათ $k=2$, მაშინ მივიღებთ

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**მაგალითი 2.** დავადგინოთ ნატურალური რიცხვების მე-5 ხარისხების ჯამის ფორმულა ამისათვის (6.2) ფორმულაში ჩავსვათ $k=5$, მაშინ მივიღებთ

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{1}{6}\frac{5}{2!}n^4-\frac{1}{30}\frac{5}{2}n^2=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

საბოლოოდ მივიღეთ $1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=\dfrac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$

მაშასადამე $k$-ს დაფიქსირებით შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის ნებისმიერი ფორმულა.

**შედეგი 2:** (6.2) ფორმულის მეშვეობით შეიძლება დავადგინოთ ბერნულის რიცხვების გამოსათვლელი რეკურენტული ფორმულა ამისათვის (6.2) იგივეობაში ჩავსვათ $n=1$, მაშინ მივიღებთ

$$1=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}+B_2\frac{A_k^1}{2!}+B_4\frac{A_k^3}{4!}+B_6\frac{A_k^5}{6!}+\cdots+B_{2r}\frac{A_k^{2r-1}}{(2r)!}+\cdots+B_k$$

აქედან

$$B_k=\frac{k-1}{2(k+1)}-\left(B_2\frac{A_k^1}{2!}+B_4\frac{A_k^3}{4!}+B_6\frac{A_k^5}{6!}+\cdots+B_{2r}\frac{A_k^{2r-1}}{(2r)!}+\cdots+B_{k-2}\frac{A_k^{k-3}}{(k-2)!}\right) \qquad (6.3)$$

სადაც $1\le r\le\dfrac{k-2}{2}$ ან $\dfrac{k-1}{2}$; (კენტი $k$-ათვის)

ამ ფორმულიდან ჩანს, რომ თუ ჩავსვამთ $k=1,3,5,\ldots$ მაშინ მივიღებთ $B_1=B_3=B_5=\cdots=0$.

**დასკვნა I.** (6.3) ფორმულის მიხედვით კენტინდექსიანი ბერნულის რიცხვები არ არსებობს ანუ უდრის 0-ს.

თუ $k=2$, მაშინ მივიღებთ $B_2=\dfrac{1}{6}$

თუ $k=4$, მაშინ მივიღებთ $B_4=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{30}$

თუ $k=6$, მაშინ მივიღებთ $B_6=\dfrac{5}{14}-\dfrac{1}{6}\cdot 3=\dfrac{1}{30}\cdot\dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\dfrac{15-21+7}{42}=\dfrac{1}{42}$ და ა.შ.

**დასკვნა II.** თუ ბერნულის რიცხვი ლუწინდექსიანია, მაშინ (6.3) ფორმულის თანახმად თანდათანობით მივიღებთ

$$B_2=\frac{1}{6};\ B_4=-\frac{1}{30};\ B_6=\frac{1}{42};B_8=-\frac{1}{30};B_{10}=\frac{5}{66};\ B_{12}=-\frac{691}{2730};B_{14}=\frac{7}{6};\ B_{16}=-\frac{3617}{510}\ \cdots$$

**შედეგი 3:** ეილერ-მაკლორენის (6.1) ფორმულის მეშვეობით შეიძლება დავადგინოთ საყოველთაოდ ცნობილი ნეპერის $\ell$ რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა, ამის გამო ზოგჯერ $\ell$ რიცხვს ეილერის რიცხვსაც უწოდებენ.

განვიხილოთ ბინომების შემდეგი მიმდევრობა:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \cdots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \ \ldots$$

ეს მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრული, ნებისმიერი წევრი 3-ზე ნაკლებია, ამიტომ ცნობილი თეორემის თანახმად ამ მიმდევრობას აქვს ზღვარი და ის წარმოადგენს ნეპერის რიცხვს.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \ell$, ეს რიცხვი უსასრულო არაპერიოდული ათწილადით გამოისახება, ამიტომ ეს რიცხვი ირაციონალური რიცხვია. პრაქტიკული მაგალითებისა და ამოცანების ამოხსნისას მიღებულია $\ell \approx 2{,}71$ ან კიდევ:

$$\ell = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს $\ell$-ს მიახლოებითი მნიშვნელობები ვიპოვოთ. მაგალითად ამ ფორმულის მარჯვენა მხარეში პირველი ხუთი წევრის ჯამია

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} \approx 2{,}708.$$

რამდენად "ახლოა'" მხოლოდ ხუთი შესაკრების მიხედვით მიღებული ეს მიახლოებითი მნიშვნელობა $\ell$-ს მნიშვნელობასთან? ამის გარკვევა იოლია, თუ მოვიყვანთ $\ell$-ს მიახლოებით მნიშვნელობას $10^{-7}$ სიზუსტით

$$\ell = 2{,}7182818.$$

# §7 ინტეგრირების მეთოდი

## 1. შესავალი

განვიხილოთ $1, 2, 3, \ldots n$ ნატურალ რიხცვთა მიმდევრობა, ეს რიცხვები წარმოვადგინოთ $k$-ური ხარისხის ბინომების ჯამის სახით:

$$(n-0)^k + (n-1)^k + (n-2)^k + \cdots + [n-(n-1)]^k$$

თუ ყველა ბინომს ავახარისხებთ და განვიხილავთ მათი პირველ შესაკრებთა ჯამს, ცხადია რომ ამ შესაკრებთა რაოდენობა იქნება $n$

$$\overbrace{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k}^{n-\text{ჯერ}} = n \cdot n^k = n^{k+1}$$

მაშასადამე ნატურალური რიცხვების, $k$ –ური ხარისხების ჯამი 1-დან $n$- მდე, უდრის $(k+1)$ ხარისხის $n$ ფუძიან მრავალწევრს, სადაც $k$ ნატურალური რიცხვია.

ამ თვისების გამოყენებით ვწერთ შემდეგ ფორმულას

$$1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = x_1 n^{k+1} + x_2 n^k + x_3 n^{k-1} + \cdots + x_k n^2 + x_{k+1} n \qquad (7.1)$$

(7.1) ფორმულა წარმოადგენს იგივეობას, ამიტომ ის სამართლიანი იქნება $n$–ის ნებისმიერი ნატურალური რიცხვითი მნიშვნელობისათვის, ამიტომ ჩავსვათ $n = 1, 2, 3, \ldots k, k+1$, მაშინ $x$–ის მიმართ მივიღებთ შემდეგ წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} = C_1 \\ 2^{k+1} x_1 + 2^k x_2 + 2^{k-1} x_3 + \cdots + 2^2 x_k + 2x_{k+1} = C_2 \\ 3^{k+1} x_1 + 3^k x_2 + 3^{k-1} x_3 + \cdots + 3^2 x_k + 3x_{k+1} = C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m^{k+1} x_1 + m^k x_2 + m^{k-1} x_3 + \cdots + m^2 x_k + m x_{k+1} = C_m \end{cases}$$

სადაც $C_1 = 1^k, C_2 = C_1 + 2^k, C_3 = C_2 + 3^k, \ldots, C_m = C_{m-1} + m^k$ აქ $1 \le m \le k+1$

ამ სისტემის $\Delta$ დეტერმინანტი იქნება

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2^{k+1} & 2^k & 2^{k-1} & \cdots & 2^2 & 2 \\ 3^{k+1} & 3^k & 3^{k-1} & \cdots & 3^2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^{k+1} & k^k & k^{k-1} & \cdots & k^2 & k \\ (k+1)^{k+1} & (k+1)^k & (k+1)^{k-1} & \cdots & (k+1)^2 & (k+1) \end{vmatrix}$$

ამ დეტერმინანტში: სტრიქონები წარმოადგენენ გეომეტრიული პროგრესიების მიმდევრობებს, ხოლო სვეტები კი ნატურალური რიცხვების ხარისხების მიმდევრობებს. დავამტკიცოთ, რომ $\Delta=\phi$

მართლაც, ამისათვის განვიხილოთ W ვანდერმონდის დეტერმინანტი, ამ დეტერმინანტში ასოები შევცვალოთ მისი შესაბამისი ნატურალური რიცხვებით. ამის შემდეგ მიღებული დეტერმინანტის სტრიქონები ვაქციოთ სვეტებად, ხოლო სვეტები სტრიქონებად, მაშინ მივიღებთ:

$$W=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_{k+1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_k^2 & a_{k+1}^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_k^3 & a_{k+1}^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & a_3^{k-1} & \cdots & a_k^{k-1} & a_{k+1}^{k-1} \\ a_1^k & a_2^k & a_3^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & k^2 & (k+1)^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & \cdots & k^3 & (k+1)^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1^{k-1} & 2^{k-1} & 3^{k-1} & \cdots & k^{k-1} & (k+1)^{k-1} \\ 1^k & 2^k & 3^k & \cdots & k^k & (k+1)^k \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^k & 2^{k-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^k & 3^{k-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^k & k^{k-1} & \cdots & k^3 & k^2 & k & 1 \\ (k+1)^k & (k+1)^{k-1} & \cdots & (k+1)^3 & (k+1)^2 & (k+1) & 1 \end{vmatrix}$$

მიღებული შედეგი წარმოადგენს ვანდერმონდის ერთ-ერთ კერძო შემთხვევას. ახლა დავუბრუნდეთ (7.2) განტოლენბათა სისტემის $\Delta$ დეტერმინანტს. დეტერმინანტების ერთ-ერთი თვისების თანახმად, უფლება გვაქვს სტრიქონებიდან საერთო მამრავლი გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ, მაშინ გვექნება:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^k & 2^{k-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^k & 3^{k-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^k & k^{k-1} & \cdots & k^3 & k^2 & k & 1 \\ (k+1)^k & (k+1)^{k-1} & \cdots & (k+1)^3 & (k+1)^2 & k+1 & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{-----} \\ k \\ k+1 \end{array}=$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^k & 2^{k-1} & \cdots & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^k & 3^{k-1} & \cdots & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^k & k^{k-1} & \cdots & k^3 & k^2 & k & 1 \\ (k+1)^k & (k+1)^{k-1} & \cdots & (k+1)^3 & (k+1)^2 & k+1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (k+1)\,!$$

ეს დეტერმინანტი დაემთხვა ვანდერმონდის დეტერმინანტს, მაგრამ დამტკიცებულია, რომ ვანდერმონდის $W$ დეტერმინანტი განსხვავებულია 0-საგან, ამიტომ $\Delta \neq 0$.

კრამერის წესის თანახმად (7.2) წრფივ განტოლებათა სისტემას გააჩნია ამონახსნი და მასთნ მხოლოდ ერთი.

ცვლადები განისაზღვრებიან კრამერის ფორმულებით (ან ცვლადების თანდათანობით გამორიცხვის ხერხით). (7.1) ფორმულისა და (7.2). წრფივ განტოლებათა სისტემაში $n$ და $k$ ნატურალური რიცხვებია. მიღებული (7.1) ფორმულა და (7.2) წრფივ განტოლებათა სისტემა ერთად წარმოადგენს ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის ზოგად ფორმულას. მათგან შეიძლება მივიღოთ ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის ყველა ფორმულა. ეს არის საკითხის გადაწყვეტის ალგებრული გზა.

განვიხილოთ მაგალითები:

**მაგალითი 1.** ვთქვათ $k=1$ მაშინ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad \text{აქედან} \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}$$

$x_1$-ის და $x_2$-ის მნიშვნელობები შევიტანოთ (7.1) ფორმულაში, მივიღებთ: $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$

**მაგალითი 2:** ვთქვათ $k=2$, მაშინ მივიღებთ სისტემას

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ 27x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\5&4&2\\14&9&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&2\\27&9&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{3};\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\8&5&2\\27&14&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&2\\27&9&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{2};\, x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&5\\27&9&14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\8&4&2\\27&9&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{6}$$

ცვლადების ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (7.1) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ და ა.შ.

(6.2) და (7.1) ფომულები ერთი და იგივეა, ამიტომ ამ ორი ფორმულის, n ცვლადის შესაბამისი კოეფიციენტები ტოლია. (6.2) ფორმულაში $n-$ის კოეფიციენტი ბერნულის რიცხვია, მაგრამ (7.1) ფორმულაში $n-$ის კოეფიციენტი წარმოადგენს $x_{k+1}$, რაც განისაზღვრება კრამერის ფორმულებით.

ამრიგად მივიღეთ

$$B_k=\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta} \tag{7.3}$$

სადაც $k$ ლუწი ნატურალური რიცხვია.

(7.3) ფორმულიდან მიიღება ბერნულის ყველა რიცხვი. ზემოთ განხილული მაგალითი 2-დან ჩანს, რომ $B_2=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{1}{6}$.

## 2. ინტეგრირების მეთოდი

განვიხილოთ $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ მწკრივი და გავაინტეგრალოთ ეს ჯამი $n$ ცვლადით, მაშინ მივიღებთ ამავე რიცხვების კუბების ჯამს, ე.ი.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=3\cdot\int(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)dn$$

ზოგადად: ნატურალურფუძიანი, $k$- ური ხარისხოვანი მწკრივის ინტეგრირებით, მიიღება $k+1$, ხარისხის, ხარისხოვანი მწკრივი. მართლაც

$$\int(1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k)dn=\sum_{x=1}^{n}\int x^k dx=\sum_{x=1}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{1}{k+1}(1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+n^{k+1})$$

ანუ $\int S_k dn=\frac{1}{k+1}S_{k+1}$ აქედან

$$S_{k+1}=(k+1)\int S_k dn$$

ამ იდეამ წარმოშვა კითხვა: კვადრატების ჯამის ფორმულის ინტეგრირებით მიიღება თუ არა კუბების ჯამის ფორმულა?

ამ იდეას პასუხობს შემდეგი თეორემა:

თუ $f(n)=S_k(n)+\frac{B_{k+1}}{k+1}$ ფუნქციას გავაინტეგრალებთ $n$ ცვლადით, მაშინ მივიღებთ ნატურალურფუძიანი $k+1$ ხარისხოვანი მწკრივის ფორმულას.

$$S_{k+1}(n)=\int[(k+1)S_k(n)+B_{k+1}]dn \tag{7.4}$$

სადაც $B_{k+1}$ შესაბამისი ბერნულის რიცხვია, ხოლო $S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$ წარმოადგენს ხარისხოვანი მწკრივის ფორმულას.

**დამტკიცება:** ნატურალური რიცხვების $k$- ური ხარისხების ჯამის თვისების თანახმად დამტკიცებული გვაქვს ფორმულა

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=S_k(n)=x_1n^{k+1}+x_2n^k+x_3n^{k-1}+\cdots+x_kn^2+x_{k+1}n \tag{1}$$

სადაც $x_1,x_2,x_3,\ldots x_{k+1}$ განისაზღვრებიან (7.2) განტოლებათა სისტემიდან კრამერის ფორმულების გამოყენებით.

(1) ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური რიცხვისათვის, მაშინ ცხადია, რომ სამართლიანი იქნება შემდეგი ფორმულაც

$$1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+n^{k+1}=S_{k+1}(n)=a_1n^{k+2}+a_2n^{k+1}+a_3n^k+\cdots+a_kn^3+a_{k+1}n^2+a_{k+2}n \quad (1')$$

სადაც $a_1,a_2,a_3+\cdots+a_{k+2}$ კოეფიციენტები განისაზღვრებიან (7.2) სისტემის ანალოგიურად, კრამერის ფორმულების გამოყენებით.

დავაფიქსიროთ ბინომის ინტეგრირებისათვის შემდეგი გარდაქმნა

$$\int(n-c)^k dn=\int(n-c)^k d(n-c)=\frac{(n-c)^{k+1}}{k+1},$$

სადაც $n$ წარმოადგენს ცვლადს, რომელიც ღებულობს მხოლოდ ნატურალურ რიცხვით მნიშვნელობებს, ხოლო $c$ წარმოადგენს დაფიქსირებულ ნატურალურ რიცხვს $1\le c\le n-1$ შუალედიდან.

თეორემაში აღნიშნულ $f(n)$ ფუნქციის პირობების მიხედვით გავაინტეგრალოთ (1) ფორმულა, მივიღებთ:

$$\frac{1}{k+1}(1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+n^{k+1})=\int\left(S_k(n)+\frac{B_{k+1}}{k+1}\right)dn \quad \text{ანუ}$$

$$1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots+n^{k+1}=\int[(k+1)S_k(n)+B_{k+1}]dn$$

აქ მარცხენა და მარჯვენა ნაწილი განსაზღვრულია ნებისმიერი მუდმივი რიცხვის სიზუსტით, კერძოდ შეიძლება ეს მუდმივი რიცხვი 0-ის ტოლად ჩავთვალოთ $C=0$

$$S_{k+1}(n)=\int[(k+1)(x_1n^{k+1}+x_2n^k+x_3n^{k-1}+\cdots+x_kn^2+x_{k+1}n)+B_{k+1}]dn$$

$$S_{k+1}(n)=(k+1)\left(\frac{x_1}{k+2}n^{k+2}+\frac{x_2}{k+1}n^{k+1}+\frac{x_3}{k}n^k+\cdots+\frac{x_k}{3}n^3+\frac{x_{k+1}}{2}n^2\right)+B_{k+1}n$$

ანუ

$$S_{k+1}(n)=\frac{(k+1)}{(k+2)}x_1n^{k+2}+x_2n^{k+1}+\frac{(k+1)}{k}x_3n^k+\cdots+\frac{(k+1)}{3}x_kn^3+\frac{(k+1)}{2}x_{k+1}n^2+B_{k+1}n$$

მივიღეთ იმავე ხარისხის და შესაკრებთა იმავე ოდენობის მრავალწევრი, რაც (1') ფორმულაშია, ამ ორი ფორმულის მარცხენა ნაწილები ტოლია, ამიტომ გავუტოლოთ ერთმანეთს მარჯვენა ნაწილები, მაგრამ ორი მრავალწევრი ტოლი იქნება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ტოლი ხარისხების შესაბამისი კოეფიციენტები ტოლია, ამიტომ ვწერთ

$$a_1=\frac{(k+1)}{(k+2)}\cdot x_1$$

$$a_2=x_2$$

$$a_3=\frac{(k+1)}{k}\cdot x_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_k=\frac{(k+1)}{3}\cdot x_k$$

$$a_{k+1}=\frac{(k+1)}{2}\cdot x_{k+1}$$

$$a_{k+2}=B_{k+1}$$

ამ ფორმულებით განსაზღვრული $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{k+2}$ კოეფიციენტები დაემთხვევა კრამერის ფორმულებით განსაზღვრულ ამავე კოეფიციენტების მნიშვნელობებს, ამონახსენის ერთადერთობის კრამერის წესის თანახმად.

მაშასადამე (1) ფორმულის ინტეგრირებით მივიღეთ (1') ფორმულა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

## 3. ინტეგრირების მეთოდის მაგალითები

**მაგალითი 1:** მოცემულია $S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$, გამოვიყვანოთ $S_2(n)$ ფორმულა. (7.4) ფორმულის თანახმად ვწერთ

$$S_2(n)=\int(2S_1(n)+B_2)dn=\int\left(n^2+n+\frac{1}{6}\right)dn=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

მაშასადამე $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**მაგალითი 2:** მოცემულია $S_2(n)=\frac{n(n+1)n(2n+1)}{6}$ გამოვიყვანოთ $S_3(n)$ ფორმულა კვლავ (7.4) ფორმულის თანახმად მივიღებთ $S_3(n)=\int(3S_2(n)+B_3)dn$, მაგრამ $B_3$=0, ამიტომ გვექნება

$$S_3(n)=\int\frac{(n^2+n)d(n^2+n)}{2}=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

ამრიგად $1^3+2^3+3^3+...+n^3=S_3(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

**მაგალითი 3:** მოცემულია $S_3(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, გამოვიყვანოთ $S_4(n)$ ფორმულა ისევე (7.4) ფორმულის თანახმად, მივიღებთ

$$S_4(n)=\int(4S_3(n)+B_4)dn=\int\left(n^4+2n^3+n^2-\frac{1}{30}\right)dn=$$

$$=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

ე.ი. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

**მაგალითი 4:** ანალოგიური გარდაქმნით მივიღებთ

მართლაც,

$$S_4(n)=\frac{3(n^2+n)^2(2n+1)-(n^2+n)(2n+1)}{30},\quad \text{მაშინ}$$

$$S_5(n)=\frac{5(\int 3(n^2+n)^2d(n^2+n)-\int(n^2+n)d(n^2+n))}{30}$$

$$S_5(n)=\frac{(n^2+n)^3-\frac{1}{2}(n^2+n)^2}{6}$$

$$S_5(n)=\frac{2(n^2+n)^3-(n^2+n)^2}{12}=\frac{(n^2+n)^2(2n^2+2n-1)}{12}=$$

$$=\frac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$1^5+2^5+3^5+\cdots+n^5=S_5(n)=\frac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

და ა.შ. შეგვიძლია გამოვიყვანოთ დანარჩენი ფორმულები: $S_6(n), S_7(n), S_8(n),\cdots,S_k(n)$.

თეორემის შედეგი: თუ $k$ ლუწი ნატურალური რიცხვია, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ფორმულა

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} S'_{k+1}(n) \tag{7.5}$$

დამტკიცება: რადგან $k$ ლუწი ნატურალური რიცხვია, ამიტომ $k+1$ კენტი ნატურალური რიცხვი იქნება როგორც უკვე დადგენილი გვაქვს $B_{k+1} = 0$, მაშინ (7.4) ფორმულა მიიღებს სახეს $S_{k+1}(n) = \int (k+1) S_k(n) dn$, გავაწარმოოთ ეს ფორმულა

$S'_{k+1}(n) = (k+1) S_k$ აქედან $S_k(n) = \dfrac{1}{k+1} S'_{k+1}(n)$

**მაგალითი:** მოცემულია $S_5(n) = \dfrac{[n(n+1)]^2 (2n^2 + 2n - 1)}{12}$, მაშინ (7.5) ფორმულის თანახმად $S_4(n) = \dfrac{1}{5} S'_5(n)$

$$S_4(n) = \frac{1}{5} \frac{\left[2(n^2+n)^3 - (n^2+n)^2\right]'}{12} = \frac{6(n^2+n)^2(2n+1) - 2(n^2+n)(2n+1)}{60} \quad \text{აქედან}$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

შევნიშნოთ, რომ $S_4(n)$ ფორმულის გამოყვანა სხვა ხერხებით გვაძლევს მრავალწევრს, რომლის დაშლა მამრავლებად გარკვეულ პრობლემას ქმნის და ეს პრობლემა მოხსნა (7.5) ფორმულის გამოყენებამ, როცა $k$ ლუწი ნატურალური რიცხვია, მაშინ ანალოგიურად მიიღება ყველა სხვა $S_6(n), S_8(n), S_{10}(n), \cdots, S_k(n)$ ფორმულები.

## 4. ნატურალურფუძიანი $k$-ური ხარისხოვანი მწკრივის ფორმულა

ინტეგრირების მეთოდი იძლევა საფუძველს იმისათვის, რომ დავადგინოთ ნატურალურფუძიანი, $k$-ური ხარისხოვანი მწკრივის ფორმულა. ამ მიზნით გადმოვწეროთ $S_1(n)$-დან $S_6(n)$-მდე ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულები და შევადაროთ ისინი ერთმანეთს, მათ შორის კანონზომიერებათა დადგენის მიზნით

$$S_1(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

$$S_2(n)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+B_2n$$

$$S_3(n)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+B_2\frac{3}{2}n^2$$

$$S_4(n)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+B_2\frac{3\cdot4}{2\cdot3}n^3+B_4n$$

$$S_5(n)=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+B_2\frac{3\cdot4\cdot5}{2\cdot3\cdot4}n^3+B_4\frac{5n^2}{2}$$

$$S_6(n)=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+B_2\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{2\cdot3\cdot4\cdot5}n^5+B_4\frac{5\cdot6}{2\cdot3}n^3+B_6n$$

..........................................................

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+B_2\frac{A_k^{k-2}}{(k-1)!}n^{k-1}+B_4\frac{A_k^{k-4}}{(k-3)!}n^{k-3}+ \\ +B_6\frac{A_k^{k-6}}{(k-5)!}n^{k-5}+\cdots+B_kn \tag{7.6}$$

დავამტკიცოთ (7.6) ფორმულა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. თუ $k=1$, მაშინ მივიღებთ $S_1(n)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ მივიღეთ ჭეშმარიტი ტოლობა.

დავუშვათ (7.6) ფორმულა სამართლიანია $S_k(n)$-ათვის და დავამტკიცოთ, რომ ის სამართლიანი იქნება $S_{k+1}(n)$-სათვის.

მართლაც თუ $S_k$ სამართლიანია, მაშინ (7.4) ფორმულის თანახმად ის სამართლიანი არის $S_{k+1}(n)$-ათვის.

მაშასადამე მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით დამტკიცებულ (7.6) ფორმულას მივცეთ შემდეგი სახე, თან გავითვალისწინოთ რომ $A_k^{k-2}=\frac{k!}{2!},\ A_k^{k-4}=\frac{k!}{4!}\cdots$.

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k=S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+ \\ +\left(B_2\frac{A_k^1}{2!}n^{k-1}+B_4\frac{A_k^3}{4!}n^{k-3}+B_6\frac{A_k^5}{6!}n^{k-5}+\cdots+B_{2r}\frac{A_k^{2r-1}}{(2r)!}n^{k-(2r-1)}+\cdots+B_k\cdot n\right) \tag{7.7}$$

სადაც $1\le r\le\frac{k}{2}$

მიღებული (7.7) იგივეობის მეშვეობით გამოყვანილია შემდეგი ფორმულები:

1) კენტმაჩვენებლიანი მწკრივებისათვის

$$S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_3(n)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$S_5(n)=\frac{[n(n+1)]^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

$$S_7(n)=\frac{[n(n+1)]^2[3(n^2+n)-4(n^2+n)+2]}{24}$$
$$S_9(n)=\frac{[n(n+1)]^2[2(n^2+n)^3-5(n^2+n)^2+6(n^2+n)-3]}{20}$$
$$S_{11}(n)=\frac{[n(n+1)]^2[2(n^2+n)^4-8(n^2+n)^3+17(n^2+n)^2-20(n^2+n)+10]}{24}$$

2) ლუწმაჩვენებლიანი მწკრივებისათვის

$$S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$S_4(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)[3n^2+3n-1]}{30}$$
$$S_6(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)[3(n^2+n)^2-3(n^2+n)+1]}{42}$$
$$S_8(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)[5(n^2+n)^3-10(n^2+n)^2+9(n^2+n)-3]}{90}$$
$$S_{10}(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)[3(n^2+n)^4-10(n^2+n)^3+17(n^2+n)^2-15(n^2+n)+5]}{66}$$

რა დასკვნის გაკეთება შეიძლება ამ გამოყვანილი ფორმულებიდან ?

1) კენტმაჩვენებლიანი ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულები, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$S_k(n)=A_1(n^2+n)^{\frac{k+1}{2}}+A_2(n^2+n)^{\frac{k-1}{2}}+A_3(n^2+n)^{\frac{k-3}{2}}+\cdots+A_{\frac{k-1}{2}}(n^2+n)^2 \qquad (7.8)$$

სადაც $A_1, A_2, A_3, \cdots A_{\frac{k-1}{2}}$ კოეფიციენტებია

ე.ი. კენტმაჩვენებლიანი ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულები წარმოადგენენ $(n^2+n)$ ბინომების ხარისხების ჯამს, რომლის ბოლო წევრია $(n^2+n)^2$ და ის არის საერთო მამრავლი ყველა ფორმულისათვის. (გარდა $k=1$).

2) კენტმაჩვენებლიანი ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულების გაწარმოებით ვღებულობთ ლუწმაჩვენებლიან ხარისხოვანი მწკრივების ფორმულებს, ამიტომ მათი საერთო მამრავლი იქნება $\left[(n^2+n)^2\right]'=2n(n+1)(2n+1)$.

ამრიგად ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის ფორმულების საკითხი მთლიანად ამოწურულია.

## 5. ნიუტონის ბინომის ფორმულის დამტკიცება

ინტეგრირების მეთოდი იძლევა საშუალებას იმისა, რომ გამოვიყვანოთ და დავამტკიცოთ ნიუტონის ბინომის ფორმულა.

წინასწარ გავითვალისწინოთ, რომ $1 = C_n^0 = C_n^n$, ხოლო const შევარჩიოთ ისე, რომ $c = a^n$, სადაც $a$ წარმოადგენს ბინომის მე-2 შესაკრებს, ხოლო $n$ არის ბინომის ხარისხის მაჩვენებელი.

განვიხილოთ $(x+a)^1 = C_1^0 x + C_1^1 a$, სადაც $x$ ცვლადია და $a$ დაფიქსირებული მუდმივი რიცხვი.

გავაინტეგრალოთ ეს ტოლობა $(x+a)^2 = 2\int (C_1^0 x + C_1^1 a)dx + c$ აქ $c$ შევარჩიოთ ისე, რომ $c = a^2$, მაშინ მივიღებთ

$$(x+a)^2 = C_2^0 x^2 + C_2^1 xa + C_2^2 a^2$$

მიღებული ფორმულა კვლავ გავაინტეგრალოთ, გვექნება

$$(x+a)^3 = 3\int (C_2^0 x^2 + C_2^1 xa + C_2^2 a^2)dx + c$$

აქ $c$ შევარჩიოთ ისე, რომ $c = a^3$, მაშინ გვექნება

$$(x+a)^3 = C_3^0 x^3 + C_3^1 x^2 a + C_3^2 xa^2 + C_3^3 a^3$$

ანალოგიური გარდაქმნებით მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$\begin{aligned}
&(x+a)^4 = C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 a + C_4^2 x^2 a^2 + C_4^3 xa^3 + C_4^4 a^4 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + \cdots + C_n^k x^{n-k} a^k + \cdots + C_n^n a^n
\end{aligned} \tag{7.9}$$

დავამტკიცოთ (7.9) ფორმულის მართებულობა მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

ვთქვათ $n=1$, მაშინ $(x+a)^1 = C_1^0 x^1 + C_1^1 a$ მივიღეთ ჭეშმარიტი ტოლობა. დაუშვათ (7.9) ფორმულა მართებულია $n$-ათვის და დავამტკიცოთ რომ ის სამართლიანი იქნება $(n+1)$-ათვის.

მაშასადამე უნდა დამტკიცდეს

$$(x+a)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + \cdots + C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k + \cdots + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$

**დამტკიცება:** გავაინტეგრალოთ (7.9) ფორმულა, რისთვისაც საკმარისია გავაინტეგრალოთ ამ ფორმულის ზოგადი წევრი და მერე $k$-ს ნაცვლად რიგ-რიგობით ჩავსვათ მნიშვნელობები 0-დან $n$-მდე:

$(n+1)\int (C_n^k x^{n-k} a^k)dx = C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k$, სადაც $0 \le k \le n$,

მაშინ მივიღებთ

$$(x+a)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + \cdots + C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k + \cdots + C_{n+1}^n x a^n + C$$

$C$ შევარჩიოთ ისე, რომ $C = a^{n+1}$

ამრიგად საბოლოოდ მივიღებთ:

$$(x+a)^{n+1} = C_{n+1}^0 x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n a + C_{n+1}^2 x^{n-1} a^2 + \cdots + C_{n+1}^k x^{n-k+1} a^k + \cdots + C_{n+1}^n x a^n + C_{n+1}^{n+1} a^{n+1}$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

## §8. დასკვნა

## 1. თემაში არსებული სიახლეები:

1. ბინომის განამწკრივიდან ფაქტორიალის განამწკრივის ფორმულის მიღება და ამ ფორმულის დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.
2. ფაქტორიალის განამწკრივის ფორმულის გამოყვანა ხარისხოვანი მიმდევრობების გამოყენებით.
3. ფაქტორიალის განამწკრივის შედეგი
   $C_n^0 n^k - C_n^1(n-1)n^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}1^k = 0$ თუ $1 \le k \le n-1$.
4. ფაქტორიალის განამწკრივის ძირითადი თვისების დამტკიცება ზოგადი შემთხვევისათვის.
5. ფაქტორიალის განამწკრივისა და მისი შედეგების გამოყენება ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად.
6. ნატურალური რიცხვების ხარისხების ჯამის რეკურენტული ფორმულის გამოყვანა.
7. ეილერ-მაკლორენის ფორმულის შედეგის გამოყვანა.
8. ნატურალურფუძიანი ხარისხების ფორმულების დადგენა ალგებრული გზით.
9. ნატურალურფუძიანი ხარისხების მწკრივების შესახებ, თეორემის დამტკიცება, ინტეგრირების მეთოდით
10. ნატურალური რიცხვების ჯამის საწყისი ფორმულიდან ინტეგრირების მეთოდით ყველა ხარისხოვანი მწკრივის ფორმულის გამოყვანა.
11. ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყვანა ინტეგრირების მიხედვით და მისი დამტკიცება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით
12. ნატურალური რიცხვების $k$-ური ხარისხების ჯამის ფორმულის დამტკიცება, მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

## 2. ახალი ფორმულები:

1. $n! = C_n^0 m^n - C_n^1 (m-1)^n + C_n^2 (m-2)^n - C_n^3 (m-3)^n + \cdots$

$$+(-1)^k C_n^k (m-k)^n + \cdots + (-1)^n C_n^n (m-n)^n \qquad (3.4)$$

სადაც $m \ge n$, $0 \le k \le n$ ამ ფორმულაში თუ ჩავსვამთ $m = n$ მაშინ (3.4) ფორმულა დაემთხვევა (3.3) ფორმულას.

2. $C_{k+1}^1 S_1 + C_{k+1}^2 S_2 + C_{k+1}^3 S_3 + \cdots + C_{k+1}^k S_k = (n+1)[(n+1)^k - 1] \qquad (5.2)$

თუ $k = 1$, მაშინ მივიღებთ $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ ანუ $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

თუ k=2, მაშინ მივიღებთ $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ანუ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

თუ $k = 3$, მაშინ მივიღებთ $S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ანუ

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ და ა.შ.

3. $$S_{k+1}(n) = \int [(k+1)S_k(n) + B_{k+1}]dn \qquad (7.4)$$

სადაც $S_k(n)$ წარმოადგენს $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$ ხარისხოვანი მწკრივის ჯამის ფორმულას, ხოლო $B_{k+1}$ წარმოადგენს შესაბამის ბერნულის რიცხვს. (7.4) ფორმულის გამოყენებით $S_1(n)$ ფორმულის ინტეგრირებით მივიღებთ $S_2(n)$ ფორმულას, $S_2(n)$ ფორმულის ინტეგრებით მივიღებთ $S_3(n)$-ის ფორმულას, $S_3(n)$ ფორმულის ინტეგრებით მივიღებთ $S_4(n)$-ის ფორმულას და ა.შ.

4. $1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{[n(n+1)]^2 (2n^2 + 2n - 1)}{12}$

5. $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k = S_k(n) = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k +$

$$+\left(B_2\frac{A_k^1}{2!}n^{k-1}+B_4\frac{A_k^3}{4!}n^{k-3}+B_6\frac{A_k^5}{6!}n^{k-5}+\cdots+B_{2r}\frac{A_k^{2r-1}}{(2r)!}n^{k-(2r-1)}+\cdots+B_k\cdot n\right) \tag{7.7}$$

სადაც $1\le r\le\frac{k}{2}$ აქ ზოგადი წევრი წარმოადგენს ფრჩხილებში მოთავსებული მრავალწევრის ზოგად წევრს.

(7.7) ფორმულა დამტკიცებული გვაქვს მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით.

## გამოყენებული ლიტერატურა


1. ა. კუროში. უმაღლესი ალგებრის კურსი, 1961.
2. ა. კისელევი. ალგებრა, 1952.
3. ე. გურსა. მათემატიკური ანალიზის კურსი, 1938.
4. А. М. Яглом, И.М. Яглом. Задача по комбинаторике и теории вероятностей,1954.
5. ა. ბენდუქიძე. მათემატიკა, სერიოზული და სახალისო, 1988.
6. И.С. Березин, И.П. Жидков. Формула Эилера.
7. ა. ბუაძე, თ. ზანდუკელი. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი, 1983.
8. С.Н. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры,1965.
9. ვ. პარკაძე. გამოჩენილი ფიზიკოსები (ისააკ ნიუტონი), 1967.

შინაარსი

წინასიტყვაობა

1. ნიუტონის ბინომის ფორმულა
2. გადანაცვლება- ფაქტორიალი
3. ფაქტორიალის განამწკრივი და მისი ძირითადი თვისება
4. ფაქტორიალის განამწკრივის გამოყენება ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად
5. ნატურალური რიცხვების ჯამის რეკურენტული ფორმულა
6. ეილერ-მაკლორენის ფორმულა და მისი შედეგები
7. ინტეგრირების მეთოდი
8. დასკვნა: თემაში არსებული სიახლეები და ახალი ფორმულები

გამოყენებული ლიტერატურა