საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების
ფაკულტეტის „მოდელირებისა და მართვის
საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრი“

თამაზ ობგაძე

ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა რვაჩოვ-ობგაძის ღ მეთოდის ბაზაზე

მონოგრაფია

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების
ფაკულტეტის „მოდელირებისა და მართვის
საინჟინრო-სამეცნიერო ცენტრი“

თამაზ ობგაძე

ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა რვაჩოვ-ობგაძის RO–მეთოდის ბაზაზე

თბილისი

2017

უაკ 517.958

მონოგრაფიას საფუძვლად დაედო ავტორის მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევის შედეგები. იგი სავსებით შეესაბამება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს: მოიცავს რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდის გამოყენების სხვადასხვა ასპექტს.

განხილულია RO მეთოდის არსი, მისი თავისებურებანი და წარმოშობის წანამძღვრები. მონოგრაფიაში განხილულია გეომეტრიული კოდირების რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდი და მისი გამოყენება სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად.

განხილულია ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნის ალგორითმები და მოყვანილია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის პროგრამები Mathcad გარემოში. მოყვანილია სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდის შედარებითი ანალიზი.

ნაშრომი განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის. წიგნი დახმარებას გაუწევს რთული, არაწრფივი მოდელების რიცხვითი რეალიზაციით დაინტერესებულ მკითხველს.

რეცენზენტები: პროფ. თემურ ჩილაჩავა
პროფ. ზურაბ ციცქიშვილი

ISBN 978-9941-20-936-9

წინასიტყვაობა

მონოგრაფია „ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა რვაჩოვ-ობგაძის–RO მეთოდის ბაზაზე", ეძღვნება **რვაჩო-ვისა და ობგაძის** შრომებში განვითარებულ ალგორითმებს, რომლებიც საშუალებას იძლევა ეფექტურად იქნას შესწავლილი ჰიდროდინამიკის, ელასტიკურობის, ასტროფიზიკის და ფიზიკის სხვა ამოცანა. მონოგრაფია საინტერესო იქნება ინჟინრებისა და ტექნიკური დარგის მეცნიერ-მკვლევრებისათვის, რომლებიც დაინტე-რესებული არიან უწყვეტი მათემატიკური მოდელებით აღწერილი პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნით.

ნაშრომის **პირველ თავში** განხილულია ფუნქციონალური სივრცეების ძირითადი განსაზღვრებები, რაც აუცილებელია შემდგომი მასალის გასაგებად. **მეორე თავი**, ეძღვნება უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკას. **მესამე თავში** შესწავლილია გალიორკინის, გალიორკინ-პეტროვის მეთოდების ალგორითმი, რვაჩოვ-ობგაძის ფუნქციების აგების დიაგრამა და საზღვრის ანალიზური კოდირების RO მეთოდი, რაც საშუალებას იძლევა აგებული იქნეს RO მეთოდის ალგორითმი ჰიდროაეროდინამიკის სხვადასხვა ოპერატორული განტოლები-სათვის. განხილულია სხვადასხვა შინაარსის პრაქტიკული ამოცანები, რომლებიც ეფექტურად იხსნება ნაშრომში შემოთავა-ზებული RO მეთოდის შესაბამისი ალგორითმით. მოცემულია ამ მეთოდის ვარიაციებიც. მონოგრაფიის **მეოთხე თავში**, მოცემულია რიცხვითი ანალიზის სხვადასხვა ალგორითმი, რომელიც ემყარება RO მეთოდის გამოყენებას ჰიდროდინამიკის **სტაციონარული პროცესებისათვის**.

ავტორი მადლობას უხდის მეცნიერ-ხელმძღვანელებს: პროფე-სორ თეიმურაზ გიორგის ძე ვოინიჩ-სიანოჟენცკის და აკადემიკოს გიორგი ივანეს ძე პეტროვს, რომელთა შრომისმოყვარეობა, თავდა-დება და სამეცნიერო პატიოსნება მისთვის იყო სტიმულის მომცემი.

ასევე დიდი მადლიერება მინდა გამოვხატო აკადემიკოს არჩილ ფრანგიშვილის მიმართ, რომლის დიდი მხარდაჭერითაც დაიწერა ეს მონოგრაფია.

I თავი. ფუნქციონალური სიმრავლეები

შესავალი

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციას. ამ ფუნქციებს ახასიათებს გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში – ფუნქციონალურ სიმრავლეებში [1-7]. ასევე უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ისე განზოგადებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა რიცხვითი ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა.

1.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა L სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი (წრფივიანი), თუ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ფუნქციებთან ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ $a_1u_1(x)+a_2u_2(x)$ ფუნქციას).

მაგალითი : **1.** ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, L იქნება ლინეალი.

2. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)|\le 5$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ $u(x)=3$ და $a=2$, მივიღებთ $au(x)=6>5$.

P.S. თუ L არის ლინეალი, მაშინ n ფუნქციებთან $\{u_i(x)\}_{i=1}^{n}$ ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც $\sum_{i=1}^{n}a_1u_i(x)$, სადაც $a_i\in R$ ნამდვილი რიცხვებია, თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

განსაზღვრება: L ლინეალის ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(u;v)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$(u;v)=\int_G u(x)v(x)dx\,. \qquad (1.1)$$

ასე რომ, ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

მაგალითი : $u(x)=x;\quad v(x)=1;\quad G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u;v)=\int_G u(x)v(x)dx=\int_0^5 x\cdot 1dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=\frac{25}{2}\,.$$

(1.1) სკალარული ნამრავლის თვისებები გამომდინარეობს უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან:

$$(u;v)=(v;u)\,; \qquad (1.2)$$

$$(a_1u_1+a_2u_2;v)=a_1(u_1;v)+a_2(u_2;v); \qquad (1.3)$$

$$(u;u)\ge 0; \qquad (1.4)$$

$$(u;u)=0\Leftrightarrow u(x)\equiv 0\quad \forall x\in G. \qquad (1.5)$$

განსაზღვრება: L ლინეალის $u(x)$ ფუნქციის ნორმა $\|u(x)\|$ ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\|=\sqrt{(u;u)}=\sqrt{\int_G u^2(x)dx}\,. \qquad (1.6)$$

ახლა შემოვიღოთ ლინეალის ორ ფუნქციას შორის მანძილის ცნება, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში **მეტრიკა** ეწოდება:

განსაზღვრება: L ლინეალის ორ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს შორის **მანძილი (ანუ მეტრიკა)** ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u;v)=\|u-v\|=\sqrt{(u-v;u-v)}=\sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx}\,. \qquad (1.7)$$

მაგალითი: $u(x)=x;\quad v(x)=1;\quad G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$, მაშინ

$$\|u(x)\|=\sqrt{\int_0^5 x^2dx}=\sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5}=\sqrt{\frac{125}{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\,.$$

$$\rho(u;v)=\|u-v\|=\sqrt{(u-v;u-v)}=\sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx}=\sqrt{\int_0^5 (x-1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{64+1}{3}}=\sqrt{\frac{65}{3}}\,.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც აკმაყოფილებს მეტრიკა (მანძილი):

$$\rho(u;v)\ge 0\,; \tag{1.8}$$

$$\rho(u;v)=0 \Leftrightarrow u(x)=v(x)\,; \tag{1.9}$$

$$\rho(u;v)=\rho(v;u)\,; \tag{1.10}$$

$$\rho(u;z)\le \rho(u;v)+\rho(v;z)\,. \tag{1.11}$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას.

გარდა (1.7) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ განიხილავენ მეტრიკის სხვა სახეებსაც. მაგალითად, **ჩებიშევის მეტრიკას:**

$$\rho_c(u;v)=\max_{x\in\bar{G}}|\,u(x)-v(x)\,|\,. \tag{1.12}$$

P.S. მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (1.8)-(1.11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (1.12) მეტრიკა უფრო ინტუიციურად ზუსტია (1.7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკა არ გამოდგება. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (1.7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით $(u;v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}dx$, სადაც $\overline{v(x)}$ არის $v(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

1.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ – ფუნქციას **კვადრატით ინტეგრებადი** ეწოდება, თუ **ლებეგის ინტეგრალები**

$$\int_G u(x)dx; \qquad \int_G \mathrm{u}^2(x)dx; \tag{1.13}$$

ერთდროულად არსებობს (არის კრებადი).

კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა, ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ, $\int_G u^2(x)dx = 0$, მაშინ $u(x) = 0$ **თითქმის ყველგან (გარდა ისეთი წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს)**. ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ, ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები **თითქმის ყველგან ემთხვევა ერთმანეთს.**

განსაზღვრება: L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (1.6) ნორმით და (1.7) მეტრიკით, **ჰილბერტისწინა (უნიტარული)** S_2 **სივრცე** ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ **უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს** აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი, ხოლო, თუ **ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულიც უწყვეტია**, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს (სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C^{\infty}(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება S_2 ფუნქციონალურ სივრცეში.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n; u) = 0. \tag{1.14}$$

ანუ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0\,. \tag{1.15}$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდება ის ტოპოლოგიური ცნებები, რაც ჩვენ გვქონდა რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება: $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას **კოშის** (ფუნდამენტური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(u_m;u_n)=0$.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის **ზღვარით წერტილს,** თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნის.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვარითი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების (ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის **ზღვარითი წერტილი შეიძ-ლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.**

განსაზღვრება: S_2 უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების სიმრავლესთან, ამ **სივრცის ჩაკეტვა** ეწოდება.

ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2}=S_2\cup\partial S_2. \tag{1.16}$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა (უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, **ჰილბერტის** $L_2(G)$ **სივრცე** ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ **ბანახის სივრცე** ეწოდება.

P.S. ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე სრულია ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების (ფუნქციების)

სიმრავლეც მკვრივია $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც **სეპარაბელურია,** ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მივუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში. ჰილბერტის სივრცე ყოველთვის არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების (ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ **ჰილბერტის სივრცე $L_2(G)$, ამავე დროს, ბანახის სივრცეა; ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე (რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ, გვქონდეს სკალარული ნამრავლი).**

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^{k}$ ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული,** თუ ამ სისტემის ერთ ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას **წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა** ეწოდება.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin^2 xy;\ \ \mathrm{u}_2 = \cos^2 xy;\ \ \mathrm{u}_3 = 4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3 = 4u_1 + 4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის **გრამის დეტერმინანტი.**

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{k}$ **წრფივად დამოუკი-დებელია ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცეში**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან ანუ

$$D(u_1;u_2;...;u_k) = \begin{vmatrix} (u_1;u_1) & (\mathrm{u}_1;\mathrm{u}_2) & \ldots & (\mathrm{u}_1;\mathrm{u}_\mathrm{k}) \\ (\mathrm{u}_2;u_1) & (\mathrm{u}_2;u_2) & \ldots & (\mathrm{u}_2;\mathrm{u}_\mathrm{k}) \\ . & . & . & . \\ (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_1) & (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_2) & \ldots & (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_k) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.17)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin x;\ \ \mathrm{u}_2 = \cos x;\ \ \ \mathrm{u}_3 = 1$ წრფი-ვად დამოუკიდებელია $L_2[0;\pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1;u_1)=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{2};\quad (u_1;u_2)=\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=0;\quad (u_1;u_3)=2;\quad (u_2;u_2)=\pi.$$

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\pi}{2} & 0 & 2\\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0\\ 2 & 0 & \pi\end{vmatrix}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული** $L_2(G)$ **სივრცეში**, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო $\psi(x)=\sum_{i\in I}a_iu_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს** $L_2(G)$ **სივრცეში,** თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x)=\sum_{i\in I}a_iu_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში, როცა განსაზღვრის არეა $G=\{(x;y)\,|\,\mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}\wedge \mathrm{c}\le \mathrm{y}\le \mathrm{d}\}$, გვაქვს **შაუდერის მრავალწევრა ბაზისი**: $1;x;y;x^2;xy;y^2;\ ...$

ასევე, $L_2(0,2\pi)$ სივრცეში, არსებობს **ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი**:

$1;\sin x\cdot\cos y;\sin 2x\cdot\cos y;\sin x\cdot\cos 2y;\sin 2x\cdot\cos 2y;\ldots$

ცნობილია, რომ $L_2(R)$ სივრცეში შეიძლება აიგოს **ვეივლეტ ფუნქციებისაგან** შემდგარი ბაზისებიც და ა.შ.

P.S. მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ–ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს.

1.3. ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესა და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	R^n ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\bar{x}(x_1; x_2; ...; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x}; \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x)g(x)dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $\lvert\bar{x}\rvert = \sqrt{(\bar{x}; \bar{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\lVert f(x)\rVert = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x)dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის $\lvert\bar{x} - \bar{y}\rvert = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}; \bar{x} - \bar{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x); g(x)) = \lVert f(x) - g(x)\rVert = \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} = \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx}$
5.	თუ, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა R^n-ში, მაშინ ნებისმიერი $\bar{x}$ ელემენტი (ვექტორი) ამ სივრციდან წარმოიდგინება სახით:	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი (ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x)$

	$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i}$	

1.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე. ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ხშირად, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ე.წ. განზოგადებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას. ამ სივრცეების გამოყენება დამყარებულია იმ ფაქტზე, რომ ზოგჯერ, არაა საკმარისი მხოლოდ ფუნქციათა „სიახლოვე" და საჭიროა მათი წარმოებულების „სიახლოვეც".

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ (1.18)

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx \quad ; \tag{1.18}$$

ფორმულით და გავიმეორებთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ **სობოლევის $W_2^1(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეს.**

თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ (1.19)

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx+\int_G u''v''dx; \tag{1.19}$$

ფორმულით, მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ **სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.**

ანალოგიურად აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე, შესაბამისი სკალარული ნამრავლის შემოღებით:

$$(u;v)=\sum_{i=0}^{k}\int_G u^{(i)}v^{(i)}dx. \tag{1.20}$$

1.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ტოპოლოგიური თვისებით. ყველაზე უფრო “კარგი” ფუნქციებია მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი საზოგადოდ, n-განზომილებიანი ვექტორია ($P_n(x)$-მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლე). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C(R^n)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე (ნაწილი).

უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის (ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცის ნაწილი.

ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი, თავის მხრივ, – ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია, ხოლო ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე, ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k \geq 1$.

II თავი. უწყვეტ ტანთა მექანიკის მათემატიკური მოდელები

2.1. დრეკადობის (ელასტიკურობის) თეორიის მათემატიკური მოდელები. ლამეს მოდელი. ბელტრამი-მიჩელას მოდელი. რეინერის მოდელი. თერმოდრეკადობის ამოცანა

დრეკადი (ელასტიკური) მასალებისათვის, ფიზიკური ექსპერიმენ-ტების მეშვეობით ადგენენ დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის რეოლოგიურ კანონს.

წრფივად-დრეკადი მასალებისათვის, იზოტროპულ შემთხვევაში, გვაქვს რეოლოგიური თანადობა, რომელსაც **ჰუკის კანონს** უწოდებენ.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad . \qquad (2.1)$$

უფრო რთული მოდელებიდან, ხშირად, გამოიყენება **რეინერის დრეკადი მასალის** რეოლოგიური განტოლება

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \quad . \qquad (2.2)$$

სადაც φ_i დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვა-რიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

უწყვეტ ტანთა მექანიკაში, მათემატიკური მოდელების შესადგე-ნად მხოლოდ რეოლოგიური კანონი არაა საკმარისი.

საჭიროა: წონასწორობის (ან დინამიკის) განტოლება, კინემა-ტიკური თანადობანი და სასაზღვრო (ან სასაზღვრო და საწყისი) პირობები.

განვიხილოთ იზოტროპული მასალებისათვის ელასტიკური მუშაობის სხვადასხვა მათემატიკური მოდელი:

ა) **წრფივად-დრეკადი იზოტროპული მასალებისათვის სტატიკის (წონასწორობის) ამოცანა ისმის შემდეგნაირად:**

წონასწორობის განტოლება კოშის ფორმით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad , \qquad (2.3)$$

სადაც ρ- ელასტიკური მასალის სიმკვრივეა,

b – ერთეულ მოცულობაზე მოქმედი გარეშე ძალის ვექტორის კომპონენტებია;

კინემატიკური თანადობები მცირე დეფორმაციების (ε<<1) შემთხვევაში:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,; \tag{2.4}$$

ჰუკის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}\,. \tag{2.5}$$

(2.3),(2.4) და (2.5) განტოლებები უნდა დაკმაყოფილდეს ელასტიკური Ω მასალის ნებისმიერ წერტილში. ამასთან, აუცილებელია **სასაზღვრო პირობებიც** Ω- არის $\partial\Omega$- საზღვრის ნებისმიერი წერტილისათვის.

სასაზღვრო პირობების მიხედვით სტატიკაში განიხილება **სამი ტიპის ამოცანა:**

ა.1) საზღვრის თითოეულ წერტილში მოცემულია გადაადგილე-ბები:

$$u_{i\,\partial\Omega} = g(x_1, x_2, x_3)\,; \tag{2.6}$$

ასეთ შემთხვევაში, მიზანშეწონილია გარდავქმნათ (2.3),(2.4) და (2.5) ამოცანა ისე, რომ გვქონდეს ერთი განტოლება გადაადგილებე-ბის მიმართ შესაბამისი სასაზღვრო (2.6) პირობებით.

ამისათვის (2.4) ჩავსვათ (2.5)-ში და მიღებული შედეგი შევიტანოთ (2.3)-ში. მართლაც, თუ (2.4)-ს ჩავსვამთ (2.5)-ში მივიღებთ

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\lambda(u_{k,k} + u_{k,k})\delta_{ij} + 2\mu\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda u_{k,k}\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\;\;; \tag{5.7}$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ დინამიკის (2.3) განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\lambda u_{k,kj}\delta_{ij} + \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \rho b_i = 0\,, \tag{2.8}$$

ანუ თუ გავამარტივებთ, გვექნება განტოლება გადაადგილებე-ბისათვის:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho b_i = 0 \,. \tag{2.9}$$

ამ განტოლებას **ლამეს განტოლებას** უწოდებენ, ზოგჯერ კი **ნავიე-კოშის** მოდელს.

ამ განტოლებებისათვის განიხილება **დირიხლეს** (2.6) სასაზღვრო ამოცანა.

P.S. (2.6) – არაერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობები შეგვიძლია გავანულოთ (ვაქციოთ ერთგვაროვან სასაზღვრო ამოცანად) თუ, მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას:

$$u_i = v_i + g(x_1, x_2, x_3) \,. \tag{2.10}$$

მაშინ (2.9) განტოლება გადაიწერება v_i-ს მიმართ და სასაზღვრო (2.6) პირობები მიიღებენ ერთგვაროვან ფორმას

$$v_{i\,\partial\Omega} = 0 \,, \tag{2.11}$$

რაც აადვილებს ამოცანის ამოხსნას;

ა.2) მეორე ტიპის სასაზღვრო ამოცანა მიიღება იმ შემთხვევაში, როცა საზღვრის ყოველი წერტილისათვის მოცემულია ძაბვები:

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega} = \sigma_{0i} \,. \tag{2.12}$$

ამ შემთხვევაში, ჰუკის კანონის, წონასწორობის განტოლებისა და

სენ-ვენანის პირობებიდან (დასაშვები დეფორმაციებისათვის)

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{ik,jm} - \varepsilon_{jm,ik} = 0 \,, \tag{5.13}$$

მიიღება **ელასტიკურობის განტოლება ძაბვების მიმართ:**

$$\sigma_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,ij} + \rho(b_{i,j} + b_{j,i}) + \frac{\nu}{1-\nu}\delta_{ij}\rho b_{k,k} = 0 \,. \tag{5.14}$$

ამ განტოლებას **ბელტრამ-მიჩელას** განტოლებებს უწოდებენ.

ბელტრამ-მიჩელას განტოლებებით დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის შესასწავლად (2.14) განტოლებას ხსნიან (2.12) პირობებში, (2.3) წონასწორობის განტოლებების გათვალისწინებით.

ა.3) მესამე ტიპის ამოცანა არის შერეული ტიპის ამოცანა, როცა საზღვრის ერთ $\partial\Omega_1$- ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები, ხოლო მეორე $\partial\Omega_2$- ნაწილზე – ძაბვები, სადაც,

$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 . \tag{2.15}$$

ამასთან, მოითხოვება განისაზღვროს ძაბვები და დეფორმაციები Ω- არის ნებისმიერი წერტილისათვის.

ამ შემთხვევაში ამოცანას ხსნიან ზოგადი სახით:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 ; \tag{2.16}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ; \tag{2.17}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} ; \tag{2.18}$$

$$(u_i)_{\partial\Omega_1} = g(x_1, x_2, x_3) ; \tag{2.19}$$

$$(\sigma_{ij} n_j)_{\partial\Omega_2} = \sigma_{0i} . \tag{2.20}$$

ბ) ახლა განვიხილოთ დინამიკის ამოცანების მათემატიკური მოდელირება

ასეთ შემთხვევებში, ჩვენ ვიხილავთ **დინამიკის განტოლებას კოშის ფორმით:**

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i ; \tag{2.21}$$

კინემატიკურ თანადობებს:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) ; \tag{2.22}$$

რეოლოგიურ კანონს (ჰუკის კანონი);

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} . \tag{2.23}$$

P.S. სტატიკის ამოცანებისაგან განსხვავებით, დინამიკის შესწავლი-სას სასაზღვრო პირობებთან ერთად განიხილავენ საწყის პირო-ბებსაც.

ბ.1) თუ გვაქვს ამოცანა საზღვარზე მოცემული გადაადგილე-ბებით, ვიყენებთ ლამეს მათემატიკურ მოდელს:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \; ; \tag{2.24}$$

ამავე დროს, გვაქვს **სასაზღვრო პირობები:**

$$(u_i)_{\partial\Omega_1} = g_i(x_1, x_2, x_3, t) \; ; \tag{2.25}$$

და **საწყისი პირობები:**

$$(u_i)_{t=0} = f_i(x_1, x_2, x_3) \, . \tag{2.26}$$

ბ.2) რთული რეოლოგიის მასალებისათვის ხშირად იყენებენ **რე-ინერის ელასტიკური მასალის** მათემატიკურ მოდელს (კომპოზიტები, სელები, ზვავები, მრავალფაზიანი მასალები და ა. შ.), რომელსაც აქვს სახე:

დინამიკის განტოლება:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \; ; \tag{2.27}$$

კინემატიკური თანადობები:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.28}$$

რეინერის რეოლოგიური განტოლება:

$$\sigma_{ij} = \varphi_0 \delta_{ij} + \varphi_1 \varepsilon_{ij} + \varphi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj} \; ; \tag{2.29}$$

სადაც φ_i დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტების მატრიცის ინვა-რიანტებზე დამოკიდებული ფუნქციებია.

ამ ფუნქციების კონკრეტული სახე დგინდება ხანგრძლივი და მძიმე ექსპერიმენტების შედეგად.

სასაზღვრო და საწყისი პირობები აქ დაისმის ისეთივე სახით, როგორც წრფივად-დრეკადი მასალების შემთხვევაში (2.25), (2.26).

ბ.3) წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის მათე-მატიკური მოდელი.

წრფივად-დრეკადი მასალის თერმოდრეკადი მუშაობის შემთხვევაში ასევე მოქმედებს **დინამიკის განტოლება კოშის ფორმით:**

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \; ; \tag{2.30}$$

კინემატიკური თანადობები:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{2.31}$$

დამატებით, განიხილება შესაბამისი **რეოლოგიური კანონი:**

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\lambda)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} \; ; \tag{2.32}$$

სადაც

α - წრფივი გაფართოების ტემპერატურული კოეფიციენტია;

T_0 - ელასტიკური მასალის საწყისი ტემპერატურა;

λ და μ - ლამეს კოეფიციენტებია, რომლებიც ახასიათებენ მასალის თვისებებს დეფორმაციების თვალსაზრისით და

ენერგიის განტოლება:

$$kT_{,ii} = \rho \, c^{(v)} \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T \dot{\varepsilon}_{kk} \quad ; \tag{2.33}$$

სადაც

k – მასალის სითბოგამტარობის კოეფიციენტია;

$c^{(v)}$-კუთრი სითბოტევადობაა მუდმივი დეფორმაციის (მოცულობის) პირობებში.

ამ მათემატიკურ მოდელში უცნობებია: $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ **და** T. უცნობების საპოვნელად აგებულ განტოლებათა (2.30) – (2.33) სისტემას, უნდა მივუერთოთ შესაბამისი სასაზღვრო და საწყისი პირობები.

2.2. სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები. ნავიე-სტოქს-დიუგემის მოდელი. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო ფორმით. ნავიე-სტოქსისა და ეილერის მათემატიკური მოდელები

სითხეების (გაზების) დინამიკას შეისწავლის ჰიდროაერომექანიკა. ისევე, როგორც დრეკადი (ელასტიკური) მასალების შემთხვევაში, ჰიდროაერომექანიკაშიც, სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის (გაზის ანუ აირის) **რეოლოგიური კანონის** დასადგენად.

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს **ნიუტონის განზოგადებული რეოლოგიური კანონი:**

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} \quad ; \tag{2.35}$$

სადაც $D_{mn} = \dot{\varepsilon}_{mn}$ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენ-ტებია. თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ B_{ijmn} მუდმივი სიდიდეები-საგან შედგება, რომლებიც ახასიათებს მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს.

თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია λ^* და μ^* იქნება დამოუკიდებელი.

შესაბამის **რეოლოგიურ კანონს** აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} \quad ; \tag{2.36}$$

სადაც λ^* და μ^*- სითხის სიბლანტის დინამიკური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} \quad ; \tag{2.37}$$

სადაც χ^*- სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტია. თუ, მივიღებთ **სტოქსის პირობას** და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \tag{2.38}$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p\,, \tag{2.39}$$

ანუ ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში, საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა – მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (2.36) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: **მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის (უწყვეტობის) განტოლება, ენერგიის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.**

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე:

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i\,; \tag{2.40}$$

სადაც v_i - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0\,. \tag{2.41}$$

ენერგიის შენახვის კანონს აქვს სახე:

$$\dot{U} = \frac{1}{\rho}\sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\rho}C_{i,i} + Z\,; \tag{2.42}$$

სადაც U – შინაგანი ენერგიაა, C_i სითბური ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც გადის სითბოგამტარობის ხარჯზე, დროის ერთეულში, ერთეულ ფართში, Z – ერთეულ დროში გამოსხივებული სითბოს მუდმივაა, გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება (ექსპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T)\,. \tag{2.43}$$

თუ, საჭიროა სითბური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (2.36),(2.40) – (2.43) განტოლე-ბათა სისტემას უნდა მივუერთოთ **ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.**

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_{,i} \tag{2.44}$$

სადაც k – სითბოგამტარობის კოეფიციენტია.

კალორიული განტოლება ჩაიწერება ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \tag{2.45}$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით ანუ სისტემა არის ჩაკეტი-ლი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს.

ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფი-კური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც **სითხის მიკვრის პირობებს** უწოდებენ:

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.46}$$

ა) **ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება.**

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითბური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \tag{2.47}$$

შევიტანთ ნიუტონის (2.36) რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k}) + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \tag{2.48}$$

შემდეგ, (2.48) განტოლებას თუ შევიტანთ მოძრაობის (2.40) გან-ტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj}\delta_{ij} + \mu^*(v_{i,jj} + v_{j.ji}) + \rho b_i . \tag{2.49}$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i ; \tag{2.50}$$

ამ (2.50) განტოლებას **ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება** ეწოდება ბლანტი სითხეებისათვის.

P.S. თუ სითხე უკუმშავია (როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0 . \tag{2.51}$$

ბ) **ნავიე – სტოქსის განტოლება უკუმშავი სითხეებისათვის**.

თუ განვიხილავთ უკუმშავ სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშვადობის (2.51) პირობის გათვალისწინებით (2.50) - დან მივიღებთ **ნავიე – სტოქსის** მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i ; \tag{2.52}$$

$$v_{i,i} = 0 ; \tag{2.53}$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0 ; \tag{2.54}$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0} . \tag{2.55}$$

მიღებული (2.52) – (2.55) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმშავი სითხის მოძრაობას Ω - არეში, $\partial\Omega$- საზღვრით.

გ) **ნავიე – სტოქსის განტოლება გაზებისათვის.**

თუ ნავიე – სტოქს – დიუგემის მოდელში, გავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას:

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \tag{2.56}$$

მაშინ, მივიღებთ **ნავიე – სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:**

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \rho b_i . \tag{2.57}$$

ამ განტოლებას უნდა მივუერთოთ მდგომარეობის (2.43) განტოლება, ენერგიის (2.42) განტოლება და უწყვეტობის (2.41) განტოლება (თუ არა გვაქვს სითბური ეფექტები).

დ) განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმშავი სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგანზომილებო სახით და დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, **დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).**

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=b_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\mu^*}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2{}_1}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial {x_2}^2}\right); \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=b_2-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{\mu^*}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2{}_1}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial {x_2}^2}\right); \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0; \tag{2.60}$$

$$(v_i)_{\partial\Omega}=0; \tag{2.61}$$

$$(v_i)_{t=0}=v_{i0}. \tag{2.62}$$

თუ (2.58) – (2.62) განტოლებებში გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i=l_0x_i^{'};\ \mathrm{v_i}=v_0v_i^{'};\ \mathrm{t}=\frac{\mathrm{l_0}}{\mathrm{v_0}}t^{'};\ \mathrm{p}=\rho \mathrm{v}_0^2p^{'};\ \mathrm{b_i}=gb_i^{'}. \tag{2.63}$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{{l_0}^2}\frac{\partial v_1^{'}}{\partial t^{'}}+\frac{v_0^2}{{l_0}^2}v_1^{'}\frac{\partial v_1^{'}}{\partial x_1^{'}}+\frac{v_0^2}{{l_0}^2}v_2^{'}\frac{\partial v_1^{'}}{\partial x_2^{'}}=gb_1^{'}-\frac{v_0^2}{{l_0}^2}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_1^{'}}+\frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2}\Delta v_1^{'}\ ; \tag{2.64}$$

$$\frac{v_0^2}{{l_0}^2}\frac{\partial v_2^{'}}{\partial t^{'}}+\frac{v_0^2}{{l_0}^2}v_1^{'}\frac{\partial v_2^{'}}{\partial x_1^{'}}+\frac{v_0^2}{{l_0}^2}v_2^{'}\frac{\partial v_2^{'}}{\partial x_2^{'}}=gb_2^{'}-\frac{v_0^2}{{l_0}^2}\frac{\partial p^{'}}{\partial x_2^{'}}+\frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2}\Delta v_2^{'}\ ; \tag{2.65}$$

$$\frac{v_0}{l_0}\left(\frac{\partial v_1^{'}}{\partial x_1^{'}}+\frac{\partial v_2^{'}}{\partial x_2^{'}}\right)=0; \tag{2.66}$$

$$(v_1')_{t=0} = v_{10}'; \qquad (v_2')_{t=0} = v_{20}'; \tag{2.67}$$

$$(v_1')_{\partial\Omega} = 0; \qquad (v_2')_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.68}$$

თუ, (2.64) – (2.68) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\mathrm{Re} = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad \mathrm{Fr} = \frac{\mathrm{v}_0}{\sqrt{\mathrm{gl}_0}}; \tag{2.69}$$

და აღარ დავწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგან-ზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v_1 \ ; \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta v_2 \ ; \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \tag{2.72}$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10}; \qquad (v_2)_{t=0} = v_{20}; \tag{2.73}$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0 \ . \tag{2.74}$$

მუდმივ კოეფიციენტს Re – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო

Fr – ფრუდის რიცხვია.

P.S. იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ეკვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები (Re და Fr), იქნება შესაბამისად ტოლი, ანუ, თუ

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2; \qquad Fr_1 = Fr_2. \tag{2.75}$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზე რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას. მოდელების მათემატიკურად გამოსაკვლევად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების

შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამის გადასვლის ფორმულებს (2.63).

ე) ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლ-დსის რიცხვის კრიტიკული მნიშვნელობა, ისე რომ, თუ $\mathrm{Re} \le \mathrm{Re}_{kr}$ გვაქვს ლამინარული (ფენოვანი) დინება, ხოლო, თუ $\mathrm{Re} \ge \mathrm{Re}_{kr}$ გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს **ტურბულენტური დინება** ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც $\mathrm{Re} \to \infty$, მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა ანუ დინება შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა (ასეთ **სითხეებს იდეალურს** უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ $\mathrm{Re} \to \infty$. მაშინ, (2.70) –(2.74) მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \tag{2.78}$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \tag{2.79}$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0 \quad . \tag{2.80}$$

მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (2.76) – (2.80) სახით **ეილერის მოდელი** ეწოდება.

2.3. უწყვეტ გარემოში სითბოს განაწილების მათემატიკური მოდელირება (დიფუზიის განტოლება)

განვიხილოთ, R^3 - ში რაიმე უწყვეტი Ω გარემო (სითხე, გაზი, ელასტიკური მასალა ...), $\partial\Omega$ საზღვრით.

ფიზიკის კურსიდან ვიცით, რომ დროის Δt მონაკვეთში, $\partial\Omega$ ზედაპირს გასჭოლავს ΔQ რაოდენობის სითბო, რომელიც გამოითვლება ზედაპირული ინტეგრალით:

$$\Delta Q = \oiint_{\partial\Omega} k \left| \frac{\partial T}{\partial n} \right| dS \Delta t\,; \tag{2.81}$$

სადაც

n – არის საზღვრის გარე ნორმალი (x,y,z) წერტილში;

k – შიგა სითბოგამტარობის კოეფიციენტია.

ვთქვათ, გვაქვს უწყვეტი გარემოს (მასალის) გაცივების პროცესი, მაშინ:

$$\frac{\partial T}{\partial n} \le 0\,; \tag{2.82}$$

და, მაშასადამე, (2.81) მიიღებს სახეს:

$$\Delta Q_1 = -\oiint_{\partial\Omega} k \frac{\partial T}{\partial n} dS \Delta t\,. \tag{2.83}$$

$\partial\Omega$- საზღვრის ზედაპირს გადაკვეთს ΔQ_1 - სითბოს რაოდენობა, რომელიც დაკარგა Ω მოცულობის უწყვეტმა გარემომ (მასალამ).

Ω მოცულობის m მასისა და c კუთრი სითბოტევადობის, ρ სიმკვრივის გარემო გასცემს ΔQ_2 სითბოს რაოდენობას, რომელიც გამოითვლება ჯერადი ინტეგრალით:

$$\Delta Q_2 = -\iiint_{\Omega} c\rho\left[T(x_1, x_2, x_3, t+\Delta t) - T(x_1, x_2.x_3, t)\right] d\omega\,; \tag{2.84}$$

უარყოფითი ნიშანი მიუთითებს იმაზე, რომ ხდება მასალის გაცივება. თუ უეყვეტი გარემოს შიგნით არიან სითბოს განაწილე-

ბული წყაროები $I(x_1,x_2,x_3)$ კუთრი სიმძლავრეებით, მაშინ Δt დროში წყაროების მიერ გამომუშავებული სითბოს ΔQ_3 რაოდენობა იქნება:

$$\Delta Q_3 = \iiint_{\Omega} I(x_1,x_2,x_3,t)d\omega\Delta t\,. \tag{2.85}$$

სითბური ბალანსის განტოლებას აქვს სახე:

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 \quad ; \tag{2.86}$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} &-\oiint_{\partial\Omega} k\frac{\partial T}{\partial n}dS\Delta t = -\iiint_{\Omega} c\rho\left[T(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)-T(x_1,x_2,x_3,t)\right]d\omega + \\ &+\iiint_{\Omega} I(x_1,x_2,x_3,t)d\omega\Delta t \end{aligned} \quad . \tag{2.87}$$

რადგან

$$\frac{\partial T}{\partial n} = gradT\cdot n_0; \quad \mathrm{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|n|}; \tag{2.88}$$

და $n_0 dS = d\vec{S}$, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\oiint_{\partial\Omega} k\frac{\partial T}{\partial n}dS = \oiint_{\partial\Omega} kgradT\cdot d\vec{S} \quad ; \tag{2.89}$$

მაგრამ, გაუსის ფორმულის თანახმად

$$\oiint_{\partial\Omega} kgradT\cdot d\vec{S} = \iiint_{\Omega} div(kgradT)d\omega \quad ; \tag{2.90}$$

თუ (2.88) – (2.90)-ს, შევიტანთ (2.87)-ში მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &-\iiint_{\Omega} div(kgradT)d\omega\Delta t = -\iiint_{\Omega} c\rho\left[T(x_1,x_2,x_3,t+\Delta t)-T(x_1,x_2,x_3,t)\right]d\omega + \\ &+\iiint_{\Omega} I(x_1,x_2,x_3 t)d\omega\Delta t \end{aligned} \quad ; \tag{2.91}$$

თუ, ყველა ინტეგრალქვეშა გამოსახულებას ერთი ინტეგრალის ქვეშ მოვაქცევთ, გავყოფთ Δt-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta t \to 0$, მივიღებთ:

$$div(k \cdot gradT) - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + I(x_1, x_2, x_3, t) = 0 . \qquad (2.92)$$

ამ განტოლებას **სითბოსგამტარობის (დიფუზიის) განტოლებას** უწოდებენ. ზოგად შემთხვევაში,

$$k = f_1(T, x_1, x_2, x_3, t); \quad \mathrm{c} = \mathrm{f}_2(T, x_1, x_2, x_3, t). \qquad (2.93)$$

ე.ი. (2.92), (2.93) განტოლებები იძლევა **არაწრფივ მოდელს**.

თუ დავუშვებთ, რომ

$$k = const \wedge \mathrm{c} = \mathrm{const}, \qquad (2.94)$$

მაშინ, მივიღებთ **წრფივ განტოლებას ერთგვაროვანი გარემოსათვის**:

$$\Delta T = \varsigma \frac{\partial T}{\partial t} - I(x_1, x_2, x_3, t) ; \qquad (2.95)$$

სადაც

$$\varsigma = \frac{c\rho}{k}; \;\; \Delta \mathrm{T} = \mathrm{T}_{,\mathrm{ii}} \qquad (2.96)$$

თუ უწყვეტ გარემოში არ არის განაწილებული სითბური $I(x_1, x_2, x_3)$ წყაროები, მაშინ (2.95) განტოლება მიიღებს კანონიკურ სახეს:

$$\Delta T = \varsigma \frac{\partial T}{\partial t} . \qquad (2.97)$$

III თავი. რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდი

კომპიუტერული ტექნიკის განვითარებამ დიდი სტიმული მისცა რთული, არაწრფივი განტოლებების ამოხსნის რიცხვითი მეთოდების განვითარებას. მაგალითად, **კონსტრუქციების დრეკად** რეჟიმში მუშაობის შესასწავლად ფართოდ გამოიყენება **სასრული ელემენტის მეთოდი**; გლობალური **ატმოსფერული პროცესების შესასწავლად და ამინდის პროგნოზისათვის უპირატესობას ანიჭებენ სპექტრლურ მეთოდებს**; რაც შეეხება **ფრთისა და თვითმფრინავის ფუზელაჟის გარშემო დინების გათვლას, აქ ფართოდ გამოიყენება სასრულ სხვაობათა მეთოდი.**

გარეგნულად, ეს მეთოდები ძლიერ განსხვავდება ერთმანეთისაგან, თუმცა მათ ერთმანეთთან აქვთ მჭიდრო ურთიერთკავშირი. ეს **ურთიერთკავშირი ხორციელდება გალიორკინის ან ცდომილების მინიმიზაციის მეთოდის ბაზაზე.** აქედან შეიძლება ავაგოთ სასრულ ელემენტთა მეთოდი, სპექტრლური მეთოდი და სასრულ სხვაობათა მეთოდიც. ამ მეთოდების განვითარების ერთ-ერთ მაგალითს, წარმოადგენს **რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდი** [8-20].

3.1. გალიორკინის კლასიკური მეთოდი

გალიორკინის კლასიკური მეთოდის შესასწავლად, განვიხილოთ რაიმე ორგანზომილებიანი (ორ ცვლადზე დამოკიდებული ფუნქციებით) წრფივი ამოცანა:

$$Lu = 0, \tag{3.1}$$

სადაც $u(x,y)$ ფუნქცია განსაზღვრულია რაღაც $G(x,y)$ არეზე, და მის ∂G საზღვარზე აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს (დირიხლეს ამოცანა):

$$S(u) = 0. \tag{3.2}$$

გალიორკინის კლასიკურ მოდელში [8] აკეთებენ დაშვებას, რომ საძიებელი u ფუნქცია საკმაოდ ზუსტად განისაზღვრება u_α მიახლოებით

$$u_\alpha = u_0(x,y) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j(x,y), \tag{3.3}$$

სადაც $\varphi_j(x,y)$ ცნობილი ანალიზური ფუნქციებია; u_0 ფუნქცია შემოყვანილია სასაზღვრო პირობების დასაკმაყოფილებლად, ხოლო α_j კოეფიციენტები უნდა ვიპოვოთ (3.1) განტოლებიდან.

ჩავსვათ (3.3) გამოსახულება (3.1) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ არანულოვან R ცდომილებას:

$$R(\alpha_1, \dots \alpha_N, x, y) = L(u_0) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j L(\varphi_j). \tag{3.4}$$

ფუნქციების შიგა (სკალარული) ნამრავლი განვსაზღვროთ $L_2(G)$ წესით:

$$(f,g) = \iint fg dxdy, \tag{3.5}$$

სადაც ინტეგრება ხორციელდება მთელ $G(x,y)$ არეზე.

გალიორკინის კლასიკურ მეთოდში უცნობი α_j კოეფიციენტები განისაზღვრება განტოლებათა (3.6) სისტემის ამოხსნით:

$$(R, \varphi_k) = 0, \tag{3.6}$$

სადაც R განტოლების ცდომილებაა, ხოლო $k = \overline{1,N}$.

რადგან ამ ეტაპზე, ჩვენ ვხსნით წრფივ დიფერენციალურ განტოლებას, შესაბამისი (3.6) განტოლებათა სისტემაც იქნება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \big(L(\varphi_j, \varphi_k\big) = -(L(u_0), \varphi_k). \tag{3.7}$$

თუ ამ სისტემის ამოხსნის შედეგად მიღებულ α_j კოეფიციენტებს შევიტანთ (3.3) გამოსახულებაში, მაშინ მივიღებთ u_α მიახლოებით ამონახსნს.

P.S. თუ (3.6) განტოლებათა სისტემას ვაგებთ არა φ_k ბაზისური ფუნქციებით, არამედ **სხვა რომელიმე $\boldsymbol{\psi_k}$ ორთოგონალური $\boldsymbol{L_2(G)}$ ჰილბერტის სივრცის** სრული ბაზისის მეშვეობით, მაშინ ასეთ მეთოდს **გალიორკინ-პეტროვის მეთოდი** [7] ჰქვია.

განვიხილოთ **გალიორკინის კლასიკური მეთოდის** გამოყენების მაგალითები.

3.1.1. კოშის ამოცანის ამოხსნა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის გალიორკინის კლასიკური მეთოდით

გალიორკინის კლასიკური მეთოდის ინტერპრეტაციის ადვილად გასაგებად, განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლება [20]:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \tag{3.8}$$

სასაზღვრო პირობით:

$$y(0) = 1. \tag{3.9}$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ $G[0;1]$ შუალედში.

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე: $y = e^x$, რაც ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ.

ავაგოთ ახლა, მიახლოებითი ამონახსნი გალიორკინის კლასიკური მეთოდით. ამისათვის ამოვირჩიოთ უმარტივესი ბაზისურ ფუნქციათა სისტემა:

$$\varphi_j(x) = x^j. \tag{3.10}$$

ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y_\alpha = 1 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x^j. \tag{3.11}$$

ცხადია, რომ ამ გამოსახულების პირველი წევრი არჩეულია სასაზღვრო (3.9) პირობის შესრულებისათვის. ადვილი მისახვედრია რომ, (3.11) წარმოდგენა შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y_\alpha = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j x^j, \tag{3.12}$$

თუ ჩავთვლით რომ $\alpha_0 = 1$.

(3.11) გამოსახულება ჩავსვათ (3.8) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ R ცდომილებას შემდეგი სახით:

$$R(x) = -1 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(j x^{j-1} - x^j\right). \tag{3.13}$$

გაშლის α_j კოეფიციენტების საპოვნელად, მოცემული ამოცანისა-თვის ვადგენთ შესაბამის (3.6) განტოლებათა სისტემას:

$$(R(x), x^{k-1}) = 0, \tag{3.14}$$

სადაც $k = \overline{1, N}$.

ამ განტოლებათა სისტემას ჩავწერთ მატრიცულად:

$$M \cdot A = D, \tag{3.15}$$

სადაც

$$D_k = (1, x^{k-1}) = \int_0^1 1 \cdot x^{k-1} dx = \frac{1}{k}; \tag{3.16}$$

$$M_{kj} = \left(jx^{j-1} - x^j, x^{k-1}\right) = \int_0^1 \left(jx^{j+k-2} - x^{j+k-1}\right) dx = \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}; \tag{3.17}$$

$$A_j = \left(\alpha_j\right). \tag{3.18}$$

ცხადია, რომ (3.15) მატრიცული განტოლების ამონახსნს ექნება სახე:

$$A = M^{-1} \cdot D. \tag{3.19}$$

ახლა შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ის გარემოში და დავთვალოთ (3.19) მიახლოებითი ამონახსნები გაშლის N=3 მნიშვნელობისათვის, რათა ვნახოთ (3.11) მიახლოებითი ამონახსნის აბსოლუტური ცდომილება $y = e^x$ ზუსტ ამონახსნთან შედარებით.

ORIGIN := 1

N:=3

$j := 1..N$

$$M_{k,j} := \frac{j}{j+k-1} - \frac{1}{j+k}$$

$$D_k := \frac{1}{k}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.667 & 0.75 \\ 0.167 & 0.417 & 0.55 \\ 0.083 & 0.3 & 0.433 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.333 \end{pmatrix}$$

$$A := M^{-1} \cdot D$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.014 \\ 0.423 \\ 0.282 \end{pmatrix}$$

ამრიგად, მივიღეთ, რომ გაშლის კოეფიციენტები იმ შემთხვევაში, როცა N=3, მოიცემა A მატრიცით. შევაფასოთ აბსოლუტური ცდომილება $G[0;1]$ შუალედში.

$$i := 1..5$$

$$x_i := i \cdot 0.2$$

$$f(x) := e^x$$

$$y(x) := 1 + \sum_{i=1}^{N} \left(A_i \cdot x^i\right)$$

გაუსის $L_2(G)$-ს ნორმით თუ შევაფასებთ ცდომილებას, გვექნება, რომ

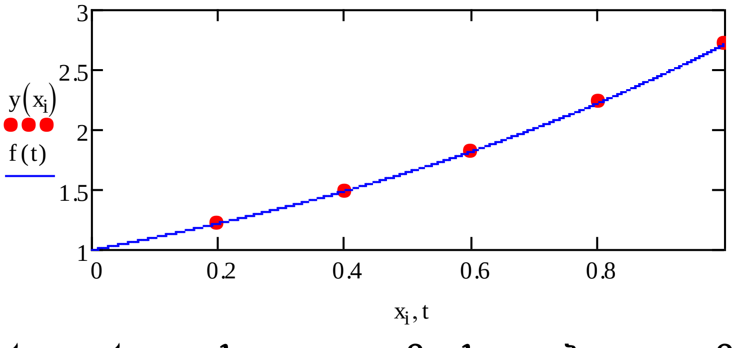
$$\delta G := \left[\int_0^1 (f(x) - y(x))^2 dx\right]^{0.5} \qquad \delta G = 5.556 \times 10^{-4}$$

ხოლო, თუ შევაფასებთ გაუსის დისკრეტული ნორმით, მივიღებთ აბსოლუტურ ცდომილებას:

$$\delta := \left[\sum_{i=1}^{N} \left(f\left(x_i\right) - y\left(x_i\right)\right)^2\right]^{0.5}$$

$$\delta = 1.067 \times 10^{-3}$$

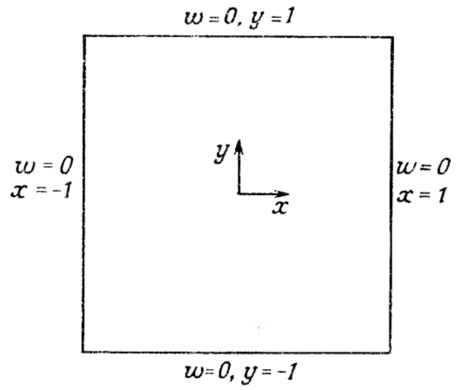
გამოვსახოთ გრაფიკულად ზუსტი ამონახსნი $f(x) = e^x$ (უწყვეტი წირი) და მიახლოებითი $y(x)$ ამონახსნი წერტილებით.



როგორც ვხედავთ, მიახლოებითი ამონახსნი (წერტილებით გამოსახული მნიშვნელობები) საკმაოდ დიდი სიზუსტით ემთხვევა ზუსტ (უწყვეტი წირი) ამონახსნს. რაც უფრო მეტ წევრებს ავიღებთ (3.11) გაშლაში, მით უფრო ზუსტი იქნება მიახლოებითი ამონახსნი.

3.1.2. ბლანტი სითხის ერთგანზომილებიანი დინება კვადრატული კვეთის უსასრულო მილში

განვიხილოთ ბლანტი სითხის დამყარებული (სტაციონარული) ერთგანზომილებიანი დინება კვადრატული კვეთის მილში, ნახ. 3.1.



ნახ. 3.1. კვადრატული კვეთის მილის სქემა

ამ მილში სითხის სტაციონარული დინების მოდელირებისათვის გამოვიყენოთ ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა. დინება ხდება OZ ღერძის მიმართულებით. თუ მილს ჩავთვლით უსასრულოდ გრძლად (რომ არ გვქონდეს მილში შესვლა-გამოსვლის თავისებურე-ბები), მაშინ OZ ღერძის ყველა მართობულ კვეთში დინება ერთნაირია და ემორჩილება განტოლებას:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{3.20}$$

ასეთი დინებისას, $\frac{\partial p}{\partial z}$ მუდმივი სიდიდეა. თუ მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას უგანზომილებო სახეზე, მასშტაბის შესაბამისი შერჩე-ვით, მივიღებთ **პუასონის განტოლებას**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0. \tag{3.21}$$

სასაზღვრო პირობებით

$$w = 0\ if\ x = \pm 1,\ y = \pm 1. \tag{3.22}$$

თუ ბაზისურ ფუნქციებად ავირჩევთ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს, მაშინ ადვილად დავაკმაყოფილებთ სასაზღვრო პირობებს. ამიტომ ავირჩიოთ მიახლოებითი ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$w_\alpha = \sum_{i=1,3,5,...}^{N} \sum_{j=1,3,5,...}^{N} \alpha_{ij} \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y. \tag{3.23}$$

თუ ჩავსვამთ (3.23) გამოსახულებას (3.21) განტოლებაში, მივი-ღებთ ცდომილების ფუნქციას:

$$R = -\left(\sum_{i=1,3,5,...}^{N} \sum_{j=1,3,5,...}^{N} \alpha_{ij} \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y\right) \cdot \left(\left(i\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(j\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1\right). \tag{3.24}$$

გალიორკინის კლასიკური მეთოდი საშუალებას გვაძლევს, შევადგინოთ განტოლებები გაშლის α_{ij} კოეფიციენტების საპოვნელად:

$$\left(R, \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y\right) = 0,\ i = 1,3,5,\dots\ \ j = 1,3,5,\dots \tag{3.25}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა გვაძლევს ფორმულებს:

$$\alpha_{ij} = \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}-1}}{ij(i^2+j^2)}. \tag{3.26}$$

აქ სისტემის ამოხსნა გაგვიადვილა ბაზისის ორთოგონალურობამ.

თუ (3.26) მნიშვნელობებს შევიტანთ (3.23) გაშლაში, მივიღებთ მიახლოებით ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$w_\alpha = \sum_{i=1,3,5,...}^{N} \sum_{j=1,3,5,...}^{N} \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \frac{(-1)^{\frac{i+j}{2}-1}}{ij(i^2+j^2)} \cos i\frac{\pi}{2}x \cos j\frac{\pi}{2}y. \tag{3.27}$$

სითხის ხარჯი გამოითვლება ფორმულით:

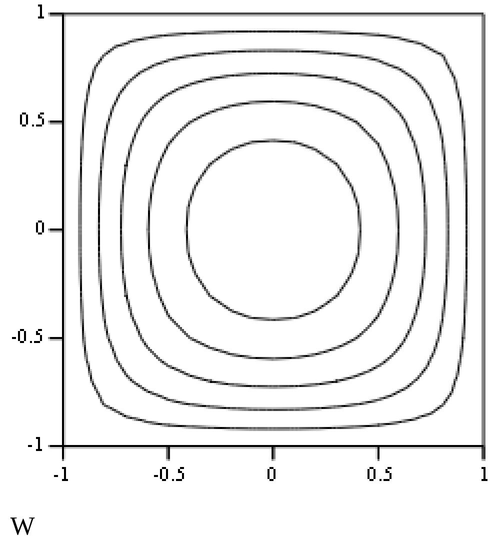
$$\dot{Q} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} w_\alpha dxdy. \tag{3.28}$$

თუ (3.28) ფორმულაში შევიტანთ სიჩქარის (3.27) წარმოდგენას, მივიღებთ ხარჯის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$\dot{Q} = 2 \cdot \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^3 \cdot \sum_{i=1,3,5,...}^{N} \sum_{j=1,3,5,...}^{N} \frac{1}{i^2 j^2 (i^2+j^2)}, \tag{3.29}$$

რომელიც ზუსტ ამონახსნთან შედარებით, გვაძლევს აბსოლუტურ ცდომილებას 0.001 უკვე, როცა N=6.

ნახ. 3.2-ზე მოცემულია (3.27) ფორმულის ბაზაზე გათვლილი სიჩქარის დონის წირები მილის განივ კვეთში:



ნახ. 3.2. სიჩქარის დონის წირები კვადრატული კვეთის მილში

შესაბამის პროგრამას **Mathcad**-ზე აქვს სახე:

ORIGIN:= 1

N := 6

$$W(x,y) := \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \left[\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \cdot \frac{(-1)^{\frac{2\cdot k+2\cdot m-2}{2}-1}}{(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot m-1)\cdot\left[(2\cdot k-1)^2+(2\cdot m-1)^2\right]} \cdot \cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot x\right] \cdot \cos\left[(2\cdot m-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y\right] \right]$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, შეგვეძლო აგვერჩია სხვა ბაზისი და გვეძებნა ამონახსნი არა (3.23) სახით, არამედ, მაგალითად, **ფინლეისონის** [9-10] წარმოდგენით:

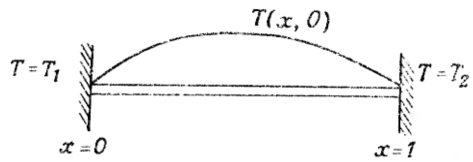
$$w_\alpha = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (1-x^2)^i (1-y^2)^i. \tag{3.30}$$

მართალია, ეს წარმოდგენა გაშლის წევრების უფრო მცირე N რაოდენობისათვის გვაძლევს სასურველ სიზუსტეს, (3.23) წარმოდგენასთან შედარებით, მაგრამ გაშლის α_i კოეფიციენტების საპოვნელად, ორთოგონალური ბაზისისაგან განსხვავებით უფრო მეტი ანგარიშია საჭირო.

3.1.3. არასტაციონარული სითბოგამტარობის ამოცანის ამოხსნა გალიორკინის კლასიკური მეთოდით

გალიორკინის მეთოდი, საშუალებას გვაძლევს, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის ამოცანა, დავიყვანოთ ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების ამოხსნაზე. ასეთი მიდგომა ხელსაყრელია, რადგან ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა ამოხსნის ალგორითმები უკეთესადაა დამუშავებული, ვიდრე კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისა.

განვიხილოთ სითბოგამტარობის ერთგანზომილებიანი ამოცანა. შესაბამისი სქემა მოცემულია ნახ. 3.3-ზე:



ნახ. 3.3. ბოლოებით ჩამაგრებული ძელის ტემპერატურის განაწილების ეპიურა

ძელის ბოლოებზე მოცემულია, რომ შესაბამისად, შენარჩუნებულია T_1 და T_2 ტემპერატურები, ხოლო საწყის $t = 0$ მომენტში, ძელზე ტემპერატურა განაწილებულია კანონით:

$$T(x, 0) = T_1 + (\sin \pi x + x) \cdot (T_2 - T_1). \tag{3.31}$$

ტემპერატურის შემდგომი ცვლილება დროში, მოიცემა სითბოგამტარობის განტოლებით:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \tag{3.32}$$

გადავიდეთ უგანზომილებო ცვლადებზე. უგანზომილებო ტემპერატურა იყოს

$$\vartheta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}. \tag{3.33}$$

უგანზომილებო დროის გამოსახვაში შევიტანოთ α სითბოგამტარობის კოეფიციენტი. მაშინ მივიღებთ სითბოგამტარობის უგანზომილებო განტოლებას:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}=0, \tag{3.34}$$

საწყისი პირობით:

$$\vartheta(x,0)=\sin\pi x+x \tag{3.35}$$

და სასაზღვრო პირობებით:

$$\vartheta(0,t)=0 \text{ და } \quad \vartheta(1,t)=1. \tag{3.36}$$

(3.34), (3.35), (3.36) ამოცანის ამოსახსნელად ავირჩიოთ მიახლოებითი ამონახსნის ფორმა შემდეგნაირად:

$$\vartheta_\alpha(x,t)=\vartheta_0(x)+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)\cdot\varphi_i(x), \tag{3.37}$$

სადაც $\vartheta_0(x)=\sin\pi x+x$, $\varphi_i(x)=x^i-x^{i+1}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\vartheta_0(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს საწყის (3.35) და სასაზღვრო (3.36) პირობებს, ხოლო $\varphi_i(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს.

თუ (3.37) წარმოდგენას შევიტანთ (3.34) განტოლებაში, მივიღებთ ცდომილებას:

$$R=-\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\alpha_i}{dt}\cdot\varphi_i-\frac{\alpha_i\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right). \tag{3.38}$$

გალიორკინის პროცედურის გამოყენება ანუ განტოლებათა შისტემა:

$$(R,\varphi_i)=0, \tag{3.39}$$

გვაძლევს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას:

$$M\cdot\dot{A}+B\cdot A+C=0, \tag{2.40}$$

სადაც $\dot{A}$ მატრიცის კომპონენტებია $\frac{d\alpha_i}{dt}$, ხოლო M მატრიცა მოიცემა ფორმულებით:

$$M_{ij}=\left(\varphi_i,\varphi_j\right). \tag{3.41}$$

შესაბამისად,

$$B_{ij}=-\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2},\varphi_j\right);\quad C_i=-\left(\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial x^2},\varphi_i\right). \tag{3.42}$$

მატრიცული დიფერენციალური განტოლება (3.40) გადავწეროთ ფორმით:

$$\dot{A} = -M^{-1}B \cdot A - M^{-1}C. \tag{3.43}$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე:

$ORIGIN := 1$

$N := 11$

$i := 1..N$

$j := 1..N$

$$M_{i,j} := \int_0^1 \left(x^i - x^{i+1}\right)\cdot\left(x^j - x^{j+1}\right) dx$$

M =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.033	0.017	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001
2	0.017	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
3	0.01	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
4	0.006	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
5	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0
6	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0
7	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0
8	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0
9	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0	0
10	0.001	0.001	0.001	0	0	0	0	0	0
11	0.001	0.001	0	0	0	0	0	0	...

$$B_{i,j} := -\int_0^1 \left(x^i - x^{i+1}\right)\cdot\left[j\cdot(j-1)\cdot x^{j-2} - (j+1)\cdot(j)\cdot x^{j-1}\right] dx$$

B =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.333	0.167	0.1	0.067	0.048	0.036	0.028	0.022	0.018
2	0.167	0.133	0.1	0.076	0.06	0.048	0.039	0.032	0.027
3	0.1	0.1	0.086	0.071	0.06	0.05	0.042	0.036	0.031
4	0.067	0.076	0.071	0.063	0.056	0.048	0.042	0.037	0.033
5	0.048	0.06	0.06	0.056	0.051	0.045	0.041	0.037	0.033
6	0.036	0.048	0.05	0.048	0.045	0.042	0.038	0.035	0.032
7	0.028	0.039	0.042	0.042	0.041	0.038	0.036	0.033	0.031
8	0.022	0.032	0.036	0.037	0.037	0.035	0.033	0.031	0.029
9	0.018	0.027	0.031	0.033	0.033	0.032	0.031	0.029	0.028
10	0.015	0.023	0.027	0.029	0.03	0.029	0.029	0.028	0.026
11	0.013	0.02	0.024	0.026	0.027	0.027	0.026	0.026	...

$$C_i := -\int_0^1 \left(-\pi^2 \cdot \sin(\pi \cdot x)\right) \cdot \left(x^i - x^{i+1}\right) dx$$

C =

	1
1	1.273
2	0.637
3	0.362
4	0.224
5	0.148
6	0.103
7	0.074
8	0.055
9	0.042
10	0.033
11	0.026

$S := -M^{-1} \cdot B$ $\qquad$ $T := -M^{-1} \cdot C$

T =

	1
1	-30.825
2	-32.193
3	25.045
4	9.442
5	6.945
6	-12.764
7	2.578
8	0.656
9	-0.102
10	-0.234
11	0.026

S =

	1	2	3	4
1	-179.936	135.088	-32.907	-51.908
2	5099.425	-3000.982	2098.83	2818.665
3	-69695.451	28909.185	-40787.925	-54384.914
4	536151.184	-139461.759	396692.894	528925.985
5	-2533470.844	305205.684	-2228269.114	-2971027.911
6	7698560.042	48171.672	7746734.104	10328980.395
7	-15323404.383	-1867631.301	-17191035.883	-22921382.074
8	19848900.32	4523382.941	24372283.055	32496377.711
9	-16104893.836	-5242838.438	-21347732.051	-28463643.18
10	7428438.607	3089526.816	10517965.381	14023954.035
11	-1485685.213	-742714.119	-2228399.318	...

$p := 1..N$

$ic_p := 0.1$

$D(t, A) := S \cdot A + T$

$Q := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 200, D)$

Q =

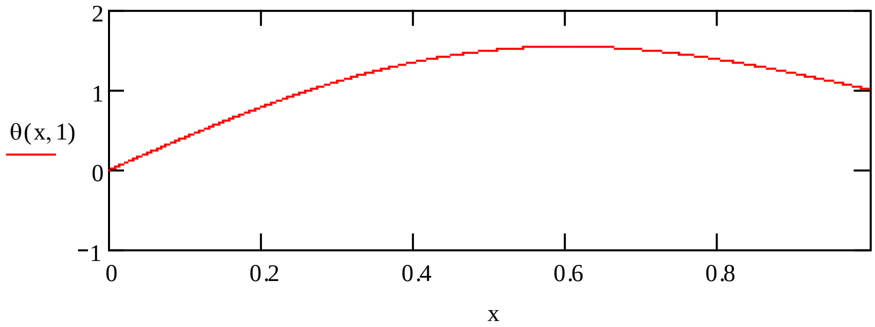
	1	2	3	4	5	6
1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
2	0.5	-3.117	-3.117	2.011	2.011	-0.522
3	1	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
4	1.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
5	2	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
6	2.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
7	3	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
8	3.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
9	4	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
10	4.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
11	5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
12	5.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
13	6	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
14	6.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
15	7	-3.141	-3.141	2.026	2.026	-0.524
16	7.5	-3.141	-3.141	2.026	2.026	...

$i := 0..\mathrm{last}\left(Q^{\langle 1 \rangle}\right)$

$t := Q^{\langle 1 \rangle}$

$k := 1..N \qquad A_k := Q^{\langle k+1 \rangle}$

$$\theta(x, t) := \sin(\pi \cdot x) + x + \sum_{k=1}^{N} \left[\left(A_k\right)_t \cdot \left(x^k - x^{k+1}\right) \right]$$



როგორც მიღებული გრაფიკი გვიჩვენებს, გალიორკინის მეთოდი საკმაოდ კარგ შედეგს გვაძლევს, უკვე როცა $N = 5 \div 11$. **დროის შემდეგი მომენტებისათვის გრაფიკი თანდათანობით წრფეს უახლოვ-დება და შესაბამისად, სიზუსტეც, კლებულობს გათვლის ცდომილე-ბათა დაგროვების გამო**, რაც მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული საბაზისო ფუნქციების არჩევაზე. მრუდი წირებისათვის, მრავალ-წევრა საბაზისო ფუნქციები, საზღვარზე საგრძნობ ცდომილებას იძლევა. ასეთ შემთხვევაში, უმჯობესია, საბაზისო სისტემად ავირჩიოთ **ჩებიშევის ორთოგონალური სისტემა** [11-12].

3.1.4. ბიურგერსის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა გალიორკინის მეთოდით

ბიურგერსის განტოლებას ახასიათებს ისეთივე არაწრფივობა, როგორც **ნავიე-სტოქსის** განტოლებებს, ამიტომ, როცა უნდათ შეამოწმონ ნავიე-სტოქსის განტოლებების ამოსახსნელი, ახალი, ამა თუ იმ, მეთოდის მუშაობის სიზუსტე, **ბიურგერსის განტოლებას იყენებენ როგორც ტესტურ ამოცანას [13].** მით უმეტეს რომ, ბიურგერსის განტოლების ზუსტი ამონახსნებიც არსებობს ზოგი-ერთი საწყისი და სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში.

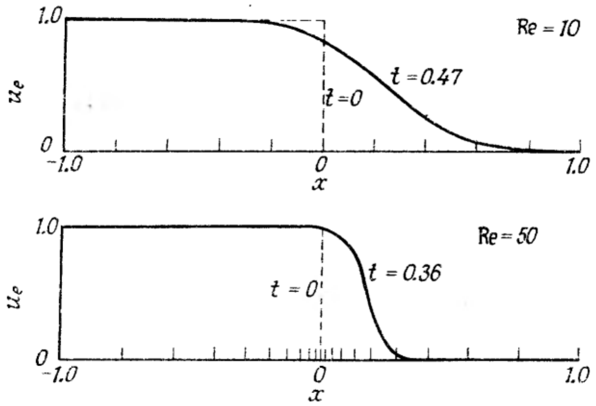
ბიურგერსის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3.44}$$

ეს განტოლება კარგად აღწერს ბალანსს, კონვექტურ $u\frac{\partial u}{\partial x}$ წევრ-სა და დისიპატურ $\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ წევრს შორის.

განვიხილოთ **გალიორკინის კლასიკური მეთოდის გამოყენება ბიურგერსის არაწრფივი განტოლების ამოსახსნელად**.

ბიურგერსის განტოლების ზუსტი ამონახსნი კომპაქტურად ჩაიწერება **დარტყმითი ტალღის გავრცელების** ამოცანისათვის. ამ ამოცანის დამახასიათებელი ეტაპები მოცემულია ნახ. 3.4. ამ ნახაზზე მოცემულია დარტყმითი ტალღის გავრცელების რეჟიმები Re რეინოლდსის რიცხვის ორი სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. დარტყმითი ტალღა თავიდან წარმოადგენს $x = 0$ წყვეტის სიბრტყეს. შემდეგ ეს ტალღა ვრცელდება მარჯვნივ, თუმცა მისი წყვეტის ზედაპირი თანდათანობით გლუვდება დისიპატური წევრების მოქმედე-ბის შედეგად (ხდება ენერგიის გაფანტვა სიბლანტის დასაძლევად).



ნახ. 3.4. ბიურგერსის განტოლების ზუსტი ამონახსნი

შევეცადოთ ამოვხსნათ ბიურგერსის განტოლება, როცა სივრცუ-ლი ცვლადი $x \in [-1;1]$ შუალედს და $t \geq 0$. ვთქვათ, საწყისი და სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგნაირად:

$$u_0(x) = u(x,0) = \begin{cases} 1, & if\ x \in [-1,0] \\ 0, & if\ x \in (\,0,1\,] \end{cases} \tag{3.45}$$

$$u(-1,t) = 1, \quad u(1,t) = 0. \tag{3.46}$$

ბიურგერსის (3.44) განტოლების ზუსტი ამონახსნის საპოვნელად იყენებენ **ხოპფი-კოულის გარდაქმნას** [14]:

$$u(x,t) = \alpha \cdot \frac{\partial(\ln v(x,t))}{\partial x}, \tag{3.47}$$

სადაც $v(x,t)$ ახალი ცვლადია, ხოლო α მუდმივი კოეფიციენტია, რომელიც ირჩევა ამონახსნის პოვნის პროცესში. თუ (3.47) ფორმულის

მიხედვით დავიანგარიშებთ ბიურგერსის განტოლებაში შემავალი ცვლადების ახალ გამოსახულებებს, მივიღებთ:

$$u_t = \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\ln v)\right), \tag{3.48}$$

$$u_x = \alpha \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln v), \tag{3.49}$$

$$u_{xx} = \alpha \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3}(\ln v). \tag{3.50}$$

თუ წარმოებულების გამოთვლილ მნიშვნელობებს (3.48)-(3.50) შევიტანთ ბიურგერსის (3.44) განტოლებაში და ვაინტეგრებთ x ცვლადის მიხედვით, მივიღებთ, რომ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln v) + \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}(\ln v)\right)^2 = \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln v) + c(t), \tag{3.51}$$

სადაც $c(t)$ ინტეგრების შედეგად მიღებული ნებისმიერი ფუნქციაა. თუ ამ განტოლებაში გამოვთვლით წარმოებულებს, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{v_t}{v} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{{v_x}^2}{v^2} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{v_{xx}}{v} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{Re}\right) \cdot \frac{v_x^2}{v^2} + c(t). \tag{3.52}$$

თუ ამ განტოლებაში ავირჩევთ α მუდმივის მნიშვნელობას ისე, რომ

$$\alpha = -\frac{2}{Re}, \tag{3.53}$$

მაშინ განტოლება (3.52) მიიღებს სითბოგამტარობის წრფივი განტოლების სახეს:

$$v_t - c(t) \cdot v = \frac{1}{Re} \cdot v_{xx}, \tag{3.54}$$

თუ მოვახდენთ ცვლადთა შესაბამის გარდაქმნას, მაშინ (3.54) განტოლება გარდაიქმნება სტანდარტულ სითბოგამტარობის განტოლებად:

$$v_t = \frac{1}{Re} \cdot v_{xx}, \tag{3.55}$$

რომელიც ადვილად იხსნება.

უმარტივეს შემთხვევაში, გვაქვს **ტეილორის ამონახსნი სოლიტონური ტალღის** ფორმით:

$$u(x,t) = \alpha \cdot \delta \cdot \left(1 - \tanh\frac{\alpha \cdot x - \delta \cdot \alpha^2 \cdot t}{2}\right). \qquad (3.56)$$

ამ ამონახსნის შესაბამისი გრაფიკები მოყვანილია ნახ. 3.4.

ამ ამოცანის გალიორკინის მეთოდით, მიახლოებით ამოსახსნელად ჩვეულებრივი მრავალწევრების ნაცვლად, გამოვიყენებთ **ჩებიშევის პოლინომებს** [11-12], რადგან ისინი მოცემული სასაზღვრო პირობებისათვის, უკეთესი მიახლოების საშუალებას იძლევა, ვიდრე მრავალწევრები. საზოგადოდ, მრუდი წირების ინტერპოლაციისას, ჩებიშევის მრავალწევრების ბაზისი შუალედის ბოლოებზე უფრო კარგ მიახლოებას იძლევა, ვიდრე სტანდარტული პოლინომებისაგან შემდგარი ბაზისი.

ჩებიშევის პოლინომები (-1;1) შუალედში ორთოგონალურია $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ფუნქციის წონით. შესაბამისად, ჩვენ ყველაზე მეტად გვაინტერესებს ამ შუალედის ბოლოებზე ამონახსნის სიზუსტე. ჩებიშევის პირველი სამი მრავალწევრი მოიცემა ფორმულებით:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2 \cdot x^2 - 1. \qquad (3.57)$$

ჩებიშევის უფრო მაღალი რიგის პოლინომები მოიცემა რეკურენტული ფორმულით:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \qquad (3.57)$$

ჩებიშევის მრავალწევრები განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანია გალიორკინის მეთოდის გამოყენებისას.

ჩებიშევის მრავალწევრების რეკურენტული (სხვაობიანი) განტოლება ადვილად იხსნება და გვაქვს ფორმულა [19]:

$$\boldsymbol{T_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n\right)}. \qquad (3.59)$$

ბიურგერსის განტოლების მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i(t) \cdot T_i(x). \qquad (3.60)$$

ამონახსნის ასეთი მიახლოებითი (3.60) წარმოდგენის ჩასმით **ბიურგერსის** (3.44) განტოლებაში, მივიღებთ ცდომილებას ფორმით:

$$R = \sum_{i=0}^{N} \dot{\alpha}_i T_i + \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \sum_{j=0}^{N} \alpha_j T_i \frac{dT_j}{dx} - \frac{1}{Re} \cdot \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \frac{d^2 T_i}{dx^2}. \quad (3.61)$$

უცნობი $\alpha_i(t)$ კოეფიციენტების საპოვნელ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ვაგებთ **გალიორკინის მეთოდის საშუალებით,** ანუ:

$$(R, T_i) = 0, \ \ i = \overline{0, N-2}, \quad (3.62)$$

პირობებიდან.

ამონახსნის (3.60) წარმოდგენაში ორი კოეფიციენტის მნიშვნელობა განისაზღვრება დანარჩენების საშუალებით სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე, ხოლო (3.62) პირობები კი გვაძლევს მატრიცულ განტოლებას:

$$M \cdot \dot{A} + (B + C) \cdot A = 0, \quad (3.63)$$

სადაც შესაბამისად, გვაქვს აღნიშვნები:

$$M_{ij} = \left(T_i, T_j\right), \quad (3.64)$$

$$B_{ij} = \sum_j \alpha_j \left(T_j \frac{dT_j}{dx}, T_i\right), \quad (3.65)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{Re} \cdot \left(\frac{dT_i}{dx}, \frac{dT_j}{dx}\right). \quad (3.66)$$

არაწრფივობა იჩენს თავს B_{ij} კოეფიციენტების გამოთვლისას. იმისათვის რომ თავი დავაღწიოთ მეორე რიგის წარმოებულებს C_{ij} კოეფიციენტების გამოთვლისას, გამოიყენება გრინის თეორემა. საძიებელი α_j კოეფიციენტების საწყისი მნიშვნელობების გამოსათვლელად, ვიყენებთ გალიორკინის მეთოდს და ვხსნით განტოლებათა სისტემას:

$$(u_\alpha - u_0, T_i) = 0, \ \ i = \overline{0, N-2}. \quad (3.67)$$

განტოლება (3.63) გადავწეროთ სახით:

$$\dot{A} = -M^{-1}(B + C) \cdot A. \quad (3.68)$$

A ცვლადების მატრიცის საწყის $A0$ მნიშვნელობებს ვპოულობთ (3.67) განტოლებებიდან გამომდინარე [13], რაც გვაძლევს წრფივ განტოლებათა სისტემას:

$$M \cdot A0 = D \Rightarrow A0 = M^{-1} \cdot D, \quad (3.69)$$

სადაც

$$D_i = (u_0, T_i) = \int_{-1}^{0} T_i dx. \tag{3.70}$$

მაშინ (3.68) განტოლებათა სისტემა იხსნება **რუნგე-კუტას** მეთოდით.

3.2. რვაჩოვ-ობგაძის ფუნქციების აგების დიაგრამა და საზღვრის ანალიზური კოდირების RO–მეთოდი

პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ **გამონათქვამ ფუნქციებს**: „x რაციონალური რიცხვია”, „y კეთილი ადამიანია”. . .

განსაზღვრება: ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს **პრედიკატებს** უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა **რვაჩოვმა** შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც **R – ფუნქციის მეთოდს** უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად [15]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგაძის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [16], რამაც საშუალება მოგვცა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბებულიყო R – ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადებულიყო მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

ახლა გადავიდეთ, თვით R – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით **ბულის ალგებრების კატეგორიაში,** სადაც **მორფიზმები** ინდუცირებულია **ბუნებრივი ჰომომორფიზმებით**:

$$L_1 \to Lp \to L_R , \tag{3.71}$$

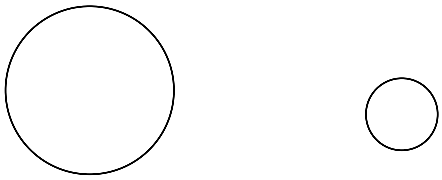
სადაც L_1 არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_p არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_R არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა,

ხოლო, ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

განვიხილოთ ეს ალგორითმი კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია (ნახ. 3.5):



ნახ. 3.5. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(3.69) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ **საყრდენ სიმრავლეებს**, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \geq 0\}, \qquad (3.72)$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \geq 0\}, \qquad (3.73)$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \geq 0\}, \qquad (3.74)$$

$$\Omega_4 = \{(x,y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \geq 0\}. \qquad (3.75)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4). \qquad (3.76)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას „მეტია ან ტოლი ნულზე", რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა, რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით სიმრავლეთა ბულის ალგებრიდან პრედიკატთა ბულის L_p ალგებ-რაში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_p-ში მივიღებთ წრის პრედიკატულ განტოლებას:

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4), \qquad (3.77)$$

სადაც P_1 – არის გამონათქვამი $x_1 \geq 0$,

P_2 – არის გამონათქვამი $x_2 \geq 0$,

P_3 – არის გამონათქვამი $x_3 \geq 0$,

P_4 – არის გამონათქვამი $x_4 \geq 0$,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$
$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \qquad (3.78)$$
$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ახლა, გადავიდეთ L_R-ში **რვაჩოვის** ჰომომორფიზმის მეშვეობით:

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \qquad (3.79)$$

მივიღებთ R – ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \\ + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \qquad (3.80)$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (3.78) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, **როცა ზუსტადაა ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები,** უფრო მიზანშეწონილია **ობგაძის ჰომომორფიზმი** [16] სტრუქტურებს შორის:

$$K_1 \to K_p \to K_R, \qquad (3.81)$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases}. \qquad (3.82)$$

აქ გვაქვს შესაბამისობა: „ჭეშმარიტი” $\Leftrightarrow$ „უდრის ნულს”;

„მცდარი” $\Leftrightarrow$ „არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში საყრდენი სიმრავლეები იქნება:

$$\Omega_1 = \{(x,y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \qquad (3.83)$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \mid (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \qquad (3.84)$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2; \qquad (3.85)$$

ე.ი. $P = P_1 \vee P_2$; (3.86)

სადაც

P_1 – არის გამონათქვამი $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, (3.87)

$$P_2 - \text{არის გამონათქვამი } (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0; \qquad (3.88)$$

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, ობგაძის [16] ჰომომორფიზმები, საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად მარტივდება R–ფუნქციის ანალიზური სახეც [17-18]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს, **რვაჩოვ-ობგაძის RO – მეთოდს** ეძახიან.

3.2.1. კოშის ამოცანის ამოხსნა პირველი რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის რვაჩოვ-ობგაძის RO –მეთოდით

რვაჩოვ-ობგაძის RO –მეთოდის ინტერპრეტაციის ადვილად გასაგებად, განვიხილოთ მარტივი დიფერენციალური განტოლება [20]:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \qquad (3.89)$$

სასაზღვრო პირობით

$$y(0) = 1. \qquad (3.90)$$

ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ $G[0;1]$ შუალედში.

ცხადია, რომ ამ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე: $y = e^x$, რაც ადვილად შეგვიძლია შევამოწმოთ.

ავაგოთ, ახლა, მიახლოებითი ამონახსნი **რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდით**. ამისათვის ამოვირჩიოთ უმარტივესი ბაზისურ ფუნქციათა სისტემა:

$$\varphi_j(x) = x^j. \qquad (3.91)$$

ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$y_\alpha = 1 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x^j. \qquad (3.92)$$

ცხადია, რომ ამ გამოსახულების პირველი წევრი არჩეულია სასაზღვრო (3.90) პირობის შესრულებისათვის. ადვილი მისახვედრია, რომ (3.92) წარმოდგენა შეგვიძლია გადავწეროთ (3.93) სახით შემდეგნაირად:

$$y_\alpha = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j x^j, \tag{3.93}$$

თუ ჩავთვლით რომ $\alpha_0 = 1$.

(3.93) გამოსახულება ჩავსვათ (3.89) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ R ცდომილებას შემდეგი სახით:

$$R(x,\alpha) = -1 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \left(j x^{j-1} - x^j\right). \tag{3.94}$$

კოლოკაციის მეთოდით ამოხსნისას, ცდილობენ რომ α_j კოეფიციენტების საპოვნელად გამოიყენონ განტოლებათა სისტემა:

$$R(x_k,\alpha) = 0,\ x_k \in G[0;1],\ \ k = \overline{1,N}. \tag{3.95}$$

ცხადია, რომ რაც მეტ წერტილს ავიღებთ, კოლოკაციის მეთოდით, მით უფრო ზუსტი იქნება მიღებული კოეფიციენტების მნიშვნელობები, თუმცა წერტილების რაოდენობის გაზრდა, იწვევს განტოლებათა სისტემის რიგის ზრდას, რაც ხშირად გვაძლევს ცუდად განპირობებულ მატრიცას (წრფივი ოპერატორების შემთხვევაში), ეს კი, თავის მხრივ, ართულებს ამოცანის ამოხსნის საჭირო სიზუსტის მიღწევას. ამიტომ შემუშავებული იქნა ალტერნატიული **რვაჩოვ-ობგაძის** მეთოდი.

რაც შეეხება **რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდს**, აქ გაშლის α_j კოეფიციენტების საპოვნელად იყენებენ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს $R(x,\alpha)$ ფუნქ-ციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\alpha) = \int_0^1 (R(x,\alpha) - 0)^2\, dx \to min. \tag{3.96}$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდით მიღებული ამონახსნები, ზუსტ ამონახსნს.

$ORIGIN := 1$

$N := 3$

$R(x,\alpha) := -1 + \sum_{j=1}^{N} \left[\alpha_j \cdot \left(j \cdot x^{j-1} - x^j\right)\right]$ $\qquad I(\alpha) := \int_0^1 (R(x,\alpha))^2\, dx$

$i := 1..N$

$\alpha_i := 0$

Given

$S := \mathrm{Minimize}(I, \alpha)$

$$S = \begin{pmatrix} 1.013 \\ 0.425 \\ 0.28 \end{pmatrix}$$

$\alpha := S$

$y(x) := e^{x}$ $\qquad$ $f(x) := 1 + \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha_i \cdot x^{i}\right)$

$x := 0.1, 0.2 .. 1$

$e^{x} =$	$f(x) =$
1.105	1.106
1.221	1.222
1.35	1.35
1.492	1.491
1.649	1.648
1.822	1.821
2.014	2.014
2.226	2.226
2.46	2.46
2.718	2.718

აბსოლუტური ცდომილება:

$\left\lvert e^{x} - f(x) \right\rvert =$
$6.694 \cdot 10^{-4}$
$4.658 \cdot 10^{-4}$
$9.576 \cdot 10^{-5}$
$6.225 \cdot 10^{-4}$
$8.571 \cdot 10^{-4}$
$6.915 \cdot 10^{-4}$
$1.828 \cdot 10^{-4}$
$4.293 \cdot 10^{-4}$
$7.036 \cdot 10^{-4}$
$2.431 \cdot 10^{-5}$

ფარდობითი ცდომილება: $\frac{\left|e^x - f(x)\right|}{e^x} =$

6.057·10-4
3.813·10-4
7.094·10-5
4.173·10-4
5.199·10-4
3.795·10-4
9.079·10-5
1.929·10-4
2.861·10-4
8.942·10-6

ამ ბოლო ორი სვეტის შედარება ნათლად გვიჩვენებს, რომ **რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდ**ი ამ შემთხვევაში იძლევა საკმაოდ დიდ სიზუსტეს.

3.2.2. რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდის გამოყენება კვადრატული კვეთის უსასრულო მილში ბლანტი სითხის ერთგანზომილებიანი დინების შესასწავლად

ამ ამოცანის გალიორკინის მეთოდით შესწავლისას, ამოცანა და-იყვანება **პუასონის განტოლებაზე**:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 = 0. \tag{3.97}$$

სასაზღვრო პირობებით

$$w = 0 \; if \; x = \pm 1, \; y = \pm 1. \tag{3.98}$$

რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდით ამ ამოცანის ამოსახსნელად, შევადგინოთ შესაბამისი $RO-$ფუნქცია:

$$RO = (1 - x^2) \cdot (1 - y^2). \tag{3.99}$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.98) სასაზღვრო პრობებს. მაშასადამე, (3.97) განტოლების ამონახსნი შეგვიძლია ვეძებოთ შემდეგი სახით:

$$w = RO \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij} \cdot \varphi_{ij}(x, y), \tag{3.100}$$

სადაც $\varphi_{ij}(x, y)$ ბაზისური ფუნქციებია, ხოლო α_{ij} კოეფიციენტებს ვპოულობთ ცდომილების $L_2(G)$ ნორმით მინიმიზაციის პირობიდან.

ავირჩიოთ საბაზისო ფუნქციები ისე, რომ არის შიგნით ყველა წევრი არ ხდებოდეს ნულის ტოლი, მაგალითად, შემდეგნაირად:

$$\varphi_{ij}(x,y) = (1-x^2)^{i-1} \cdot (1-y^2)^{i-1}. \tag{3.101}$$

მაშინ, გვექნება ამონახსნის ფინლეისონის [9] წარმოდგენა:

$$w = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i (1-x^2)^i \cdot (1-y^2)^i \tag{3.102}$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ:

$$w_{xx} = \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot (1-x^2)^{i-2} \cdot (1-y^2)^i \cdot (-2x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (1-x^2)^{i-1} \cdot (1-y^2)^i \cdot (-2). \tag{3.103}$$

რაც შეეხება w_{yy}-ს, მასაც ანალოგიური სახე აქვს საძებნი (3.102) ფუნქციის სიმეტრიულობის გამო. მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ $R(x,y,\alpha)$ცდომილების გამოსახულება. ამისათვის (3.102) უნდა შევიტანოთ პუასონის (3.97) განტოლებაში და მოვახდინოთ გარდაქმნები:

$$R(x,y,\alpha) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 1 =$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot (1-x^2)^{i-2} \cdot (1-y^2)^i \cdot (-2x) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (1-x^2)^{i-1} \cdot (1-y^2)^i \cdot (-2) +$$

$$+\sum_{i=2}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot (1-y^2)^{i-2} \cdot (1-x^2)^i \cdot (-2y) +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot i \cdot (1-y^2)^{i-1} \cdot (1-x^2)^i \cdot (-2) + 1. \tag{3.104}$$

აქ გაშლის α_j კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს $R(x,y,\alpha)$ ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\alpha) = \int_0^1 (R(x,\alpha) - 0)^2\, dx \to min. \qquad (3.105)$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგაძის RO მეთოდით მიღებული B ამონახსნი $w(x,y)$, გალიორ-კინის მეთოდით მიღებულ A ამონახსნს $G(x,y)$.

$N := 3$

$$wxx(x,y,\alpha) := \left[\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i \cdot i \cdot \left(1-x^2\right)^{i-1} \cdot (-2) \cdot \left(1-y^2\right)^{i}\right] + \sum_{i=2}^{N}\left[\alpha_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot \left(1-x^2\right)^{i-2} \cdot (-2 \cdot x) \cdot \left(1-y^2\right)^{i}\right]\right]$$

$$wyy(x,y,\alpha) := \left[\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i \cdot i \cdot \left(1-y^2\right)^{i-1} \cdot (-2) \cdot \left(1-x^2\right)^{i}\right] + \sum_{i=2}^{N}\left[\alpha_i \cdot i \cdot (i-1) \cdot \left(1-y^2\right)^{i-2} \cdot (-2 \cdot y) \cdot \left(1-x^2\right)^{i}\right]\right]$$

$R(x,y,\alpha) := wxx(x,y,\alpha) + wyy(x,y,\alpha) + 1$

Given

$$I(\alpha) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} R(x,y,\alpha)^2\, dx\, dy$$

$i := 0..N$

$\alpha_i := 0$

$\alpha := S$

$I(\alpha) = 0.272$

$S := \text{Minimize}(I,\alpha)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.402 \\ -0.021 \\ -0.027 \end{pmatrix}$$

$$w(x,y) := \sum_{i=0}^{N} \left[\alpha_i \cdot \left(1 - x^2\right)^i \cdot \left(1 - y^2\right)^i\right]$$

$$G(x,y) := \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \left[\left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \cdot \frac{(-1)^{\frac{2\cdot k+2\cdot m-2}{2}-1}}{(2\cdot k-1)\cdot(2\cdot m-1)\cdot\left[(2\cdot k-1)^2+(2\cdot m-1)^2\right]} \cdot \cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot x\right]\cdot\cos\left[(2\cdot m-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot y\right]\right]$$

$i := 0..4$ $\qquad$ $j := 0..4$

$x_i := -1 + 0.5 i$

$y_j := -1 + 0.5 j$

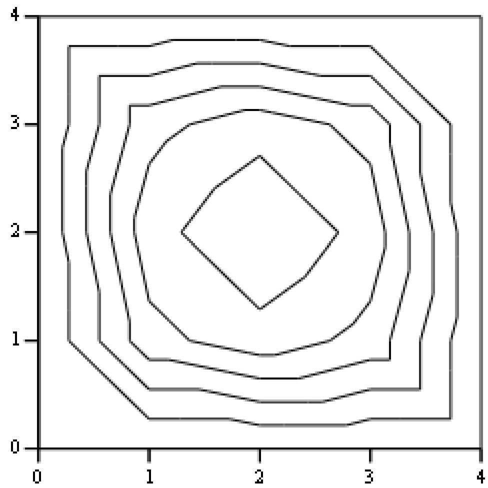
$A_{i,j} := G\left(x_i, y_j\right)$ $\qquad$ $B_{i,j} := w\left(x_i, y_j\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.182 & 0.231 & 0.182 & 0 \\ 0 & 0.231 & 0.297 & 0.231 & 0 \\ 0 & 0.182 & 0.231 & 0.182 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

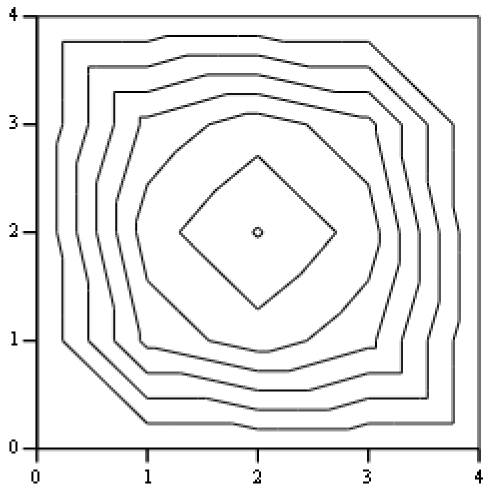
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.215 & 0.278 & 0.215 & 0 \\ 0 & 0.278 & 0.354 & 0.278 & 0 \\ 0 & 0.215 & 0.278 & 0.215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0.047 & 0.032 & 0 \\ 0 & 0.047 & 0.057 & 0.047 & 0 \\ 0 & 0.032 & 0.047 & 0.032 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\max(B - A) = 0.057$



A



B

3.2.3. რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდის გამოყენება არასტაციონარული სითბოგამტარობის ამოცანის ამოსახსნელად

გალიორკინის მეთოდის განხილვისას, ჩვენ უკვე განვიხილეთ სითბოგამტარობის უგანზომილებო განტოლება:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = 0, \tag{3.106}$$

საწყისი პირობით:

$$\vartheta(x,0) = \sin\pi x + x \tag{3.107}$$

და სასაზღვრო პირობებით:

$$\vartheta(0,t) = 0 \text{ და } \vartheta(1,t) = 1. \tag{3.108}$$

(3.106), (3.107), (3.108) ამოცანის ამოსახსნელად ავირჩიოთ მიახლოებითი ამონახსნის ფორმა შემდეგნაირად:

$$\vartheta_\alpha(x,t) = \vartheta_0(x) + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)\cdot\varphi_i(x), \tag{3.109}$$

სადაც $\vartheta_0(x) = \sin\pi x + x$, $\varphi_i(x) = x^i - x^{i+1}$. ადვილი შესამჩნევია, რომ $\vartheta_0(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო (3.108) პირობებს. ხოლო $\varphi_i(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირო-ბებს ანუ ამონახსნს ვეძებთ ფორმით:

$$\vartheta(x,t) = \sin\pi x + x + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(t)\cdot\left(x^i - x^{i+1}\right). \tag{3.110}$$

$\alpha_i(t)$ კოეფიციენტების საპოვნელად, წარმოვადგინოთ ისინი ხარისხოვანი მწკრივის სახით დროის მიმართ:

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}t^j. \tag{3.111}$$

თუ (3.111) წარმოდგენას ჩავსვამთ (3.110) განტოლებაში, გვექნება ამონახსნის წარმოდგენა:

$$\vartheta(x,t) = \sin\pi x + x + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}t^j\cdot\left(x^i - x^{i+1}\right), \tag{3.112}$$

ცხადია, რომ (3.112) წარმოდგენა ითვალისწინებს (3.107) საწყის პირობებს. მაშასადამე, ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა ვიპოვოთ β_{ij} კოეფიციენტების მნიშვნელობები (3.112) წარმოდგენაში.

რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდის შემდგომი ეტაპია $R(x,t,\beta)$ ცდომილების პოვნა, რისთვისაც (3.112) წარმოდგენა უნდა ჩავსვათ (3.106) წარმოდგენაში და მიღებული შედეგი ჩავწეროთ ერთგვაროვანი სახით.

$$R(x,t,\beta) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}\cdot j\cdot t^{j-1}\cdot\left(x^{i}-x^{i+1}\right)-\pi^{2}\cdot\sin\pi x-$$

$$-\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}t^{j}\cdot\left(i\cdot(i-1)x^{i-2}-(i+1)\cdot i\cdot x^{i-1}\right). \qquad (3.113)$$

აქ გაშლის β_{ij} კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს $R(x,t,\beta)$ ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\beta) = \int_0^1\int_0^\infty (R(x,t,\beta)-0)^2\,dtdx \to min. \qquad (3.114)$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგაძის RO–მეთოდით მიღებული ამონახსნი $\vartheta(x,t)$, გალიორკინის მეთოდით მიღებულ ამონახსნს.

$N := 3$

$$R(x,t,\beta) := \sum_{i=1}^{N}\left[\left[\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot j\cdot t^{j-1}\cdot\left(x^{i}-x^{i+1}\right)\right]\right]\right]-\pi^{2}\cdot\sin(\pi\cdot x)-\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot t^{j}\cdot\left[i\cdot(i-1)\cdot x^{i-2}-i\cdot(i+1)\cdot x^{i-1}\right]\right]$$

$$I(\beta) := \int_0^1\int_0^1 (R(x,t,\beta))^2\,dt\,dx$$

$i := 1..N$

$j := 1..N$

$\beta_{i,j} := 0$

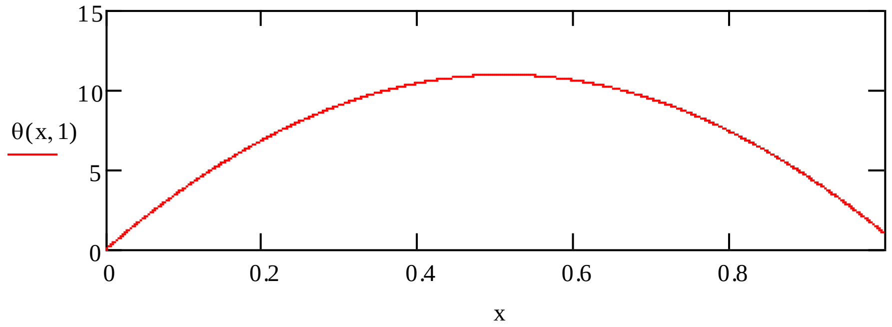
Given

$S := \text{Minimize}(I,\beta)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 37.785 & -0.268 & 0.159 \\ 0 & 1.546 & -2.704 & 1.436 \\ 0 & -1.617 & 2.934 & -1.603 \end{pmatrix}$$

$\beta := S$

$$\theta(x,t) := \sin(\pi \cdot x) + x + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\beta_{i,j} \cdot t^{j} \cdot \left(x^{i} - x^{i+1}\right)\right]$$



შედეგების შედარება გალიორკინის მეთოდითა და რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდებით ამოხსნისას, გვარწმუნებს რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდის უპირატესობაში; რადგან ამონახსნი მიიღება უფრო სწრაფად და ზუსტად.

3.2.4. ბიურგერსის განტოლების მიახლოებითი ამოხსნა რვაჩოვ-ობგაძის მეთოდით

ბიურგერსის განტოლებას ახასიათებს ისეთივე არაწრფივობა, როგორც ნავიე-სტოქსის განტოლებებს, ამიტომ როცა უნდათ შეამოწ-მონ ნავიე-სტოქსის განტოლებების ამოსახსნელი, ახალი, ამა თუ იმ, მეთოდის მუშაობის სიზუსტე, **ბიურგერსის განტოლებას იყენებენ როგორც ტესტურ ამოცანას [13].** მით უმეტეს, რომ ზოგიერთი საწყისი და სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, ბიურგერსის განტოლების ზუსტი $u(x,t)$ ამონახსნიც არსებობს. ბიურგერსის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (3.115)$$

შევეცადოთ ამოვხსნათ ბიურგერსის განტოლება, როცა სივრცული ცვლადი $x \in [-1;1]$ შუალედს და $t \geq 0$. ვთქვათ, საწყისი და სასაზღვრო პირობები მოიცემა შემდეგნაირად:

$$u_0(x) = u(x,0) = \begin{cases} 1, & if\ x = 0 \\ 0, & if\ x = 1 \end{cases}, \qquad (3.116)$$

$$u(-1,t) = 1, \quad u(1,t) = 0. \qquad (3.117)$$

ამ ამოცანის **რვაჩოვ-ობგაძის** მეთოდით, მიახლოებით ამოსახსნელად გამოვიყენებთ პოლინომებს:

$$T_i(x) = x^i. \tag{3.118}$$

ბიურგერსის განტოლების მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$u_\alpha(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(t) \cdot x^i. \tag{3.119}$$

გარდა ამისა, წარმოვადგინოთ $\alpha_i(t)$ კოეფიციენტები დროის ხარისხოვანი მწკრივის სახით:

$$\alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j, \tag{3.120}$$

მაშინ გვექნება, რომ

$$u(x;t) = 1 - x + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j\, x^i. \tag{3.121}$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ (3.121) წარმოდგენა ითვალისწინებს საწყის პირობებს. ამ წარმოდგენაში საპოვნელია β_{ij} გაშლის კოეფიციენტები. მათ საპოვნელად, ჩავსვათ (3.121) გამოსახულება ბიურგერსის (3.115) განტოლებაში და შევადგინოთ ცდომილების $R(x,t,\beta)$ ფუნქცია. მივიღებთ, რომ

$$u_x = -1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j \cdot i \cdot x^{i-1}; \tag{3.122}$$

$$u_{xx} = \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j\, i(i-1) x^{i-2}; \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned} R(x,t,\beta) = {} & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} j \cdot \beta_{ij} \cdot t^{j-1} \cdot x^i + \\ & + \left(1 - x + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j\, x^i \right) \cdot \\ & \cdot \left(-1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j \cdot i \cdot x^{i-1} \right) - \\ & - \frac{1}{Re} \cdot \left(\sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{N} \beta_{ij} t^j\, i(i-1) x^{i-2} \right). \end{aligned} \tag{3.124}$$

აქ გაშლის β_{ij} კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს $R(x,t,\beta)$ ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან:

$$I(\beta) = \int_0^1 \int_0^\infty (R(x,t,\beta) - 0)^2\, dt dx \to min. \tag{3.114}$$

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე და შევადაროთ რვაჩოვ-ობგაძის RO–მეთოდით მიღებული ამონახსნი $u(x,t)$, გალიორკინის მეთოდით მიღებულ ამონახსნს.

$N := 3$ $\quad Re := 100$

$ORIGIN := 1$

$$ux(x,t,\beta) := -1 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\beta_{i,j} \cdot t^{j} \cdot i \cdot x^{i-1}\right)$$

$$uxx(x,t,\beta) := \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\beta_{i,j} \cdot t^{j} \cdot (i-1) \cdot i \cdot x^{i-2}\right]\right]$$

$$R0(x,t,\beta) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\beta_{i,j} \cdot t^{j-1} \cdot x^{i} \cdot j\right) + \left[1 - x + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\beta_{i,j} \cdot t^{j} \cdot x^{i}\right)\right] \cdot ux(x,t,\beta)$$

$$R(x,t,\beta) := R0(x,t,\beta) - \frac{1}{Re} \cdot uxx(x,t,\beta)$$

$$I(\beta) := \int_0^1 \int_0^1 R(x,t,\beta)^2 \, dx\, dt$$

$i := 1..N$

$j := 1..N$

$\beta_{i,j} := 0$

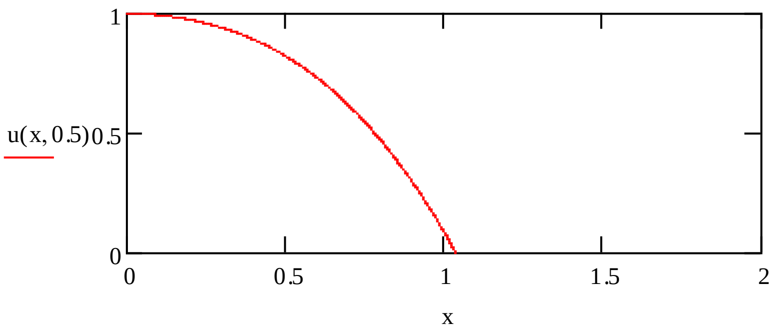
Given

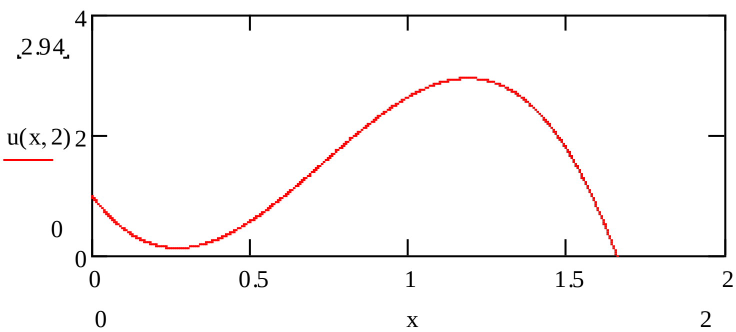
$S := \mathrm{Minimize}(I, \beta)$

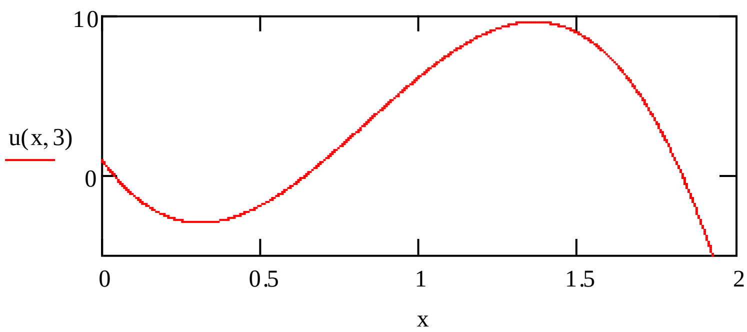
$$S = \begin{pmatrix} 2.499 & -0.677 & -1.039 \\ -1.892 & 1.416 & 1.752 \\ -0.82 & 0.05 & -0.726 \end{pmatrix}$$

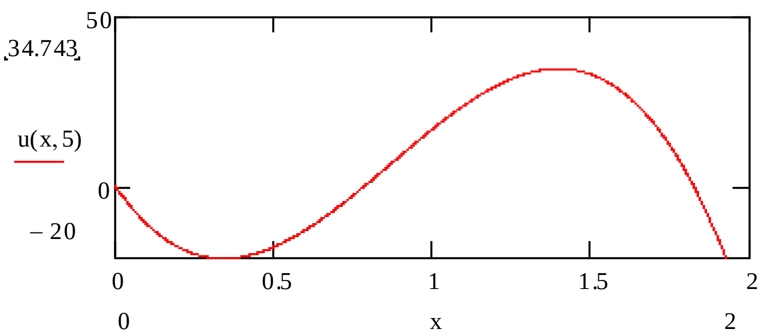
$\beta := S$

$$u(x,t) := 1 - x + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\beta_{i,j} \cdot t^{j} \cdot x^{i}\right)$$


1
u(x, 0.5) 0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
x


4
2.94
u(x, 2) 2
0
0
0
0.5
1
1.5
2
0
x
2


10
u(x, 3)
0
0
0.5
1
1.5
2
x


50
34.743
u(x, 5)
0
– 20
0
0.5
1
1.5
2
0
x
2

IV თავი.ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნა RO–მეთოდით

ჰიდროდიმანიკის ამოცანები ხასიათდება არსებითი არაწრფივობით, რაც ართულებს მათ ანალიზურ შესწავლას. მონოგრაფიაში განვითარებული RO–მეთოდი კი საშუალებას იძლევა, არაწრფივი ამოცანები შევისწავლოთ რიცხვითი ანალიზის საფუძველზე.

4.1. სწორხაზოვან კედლებიან არხში მოთავსებული, წრიული ცილინდრის, ბლანტი უკუმშავი სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა RO–მეთოდით

განვიხილოთ წრიული ცილინდრის სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ბლანტი უკუმშავი სითხით. მაშინ, ამოცანის ფიზიკური ხასიათიდან გამომდინარე, გვექნება ორგანზომილებიანი ნავიე-სტოქსის (4.1)-(4.2) განტოლებათა სისტემა უკუმშვადობის (4.3) პირობით:

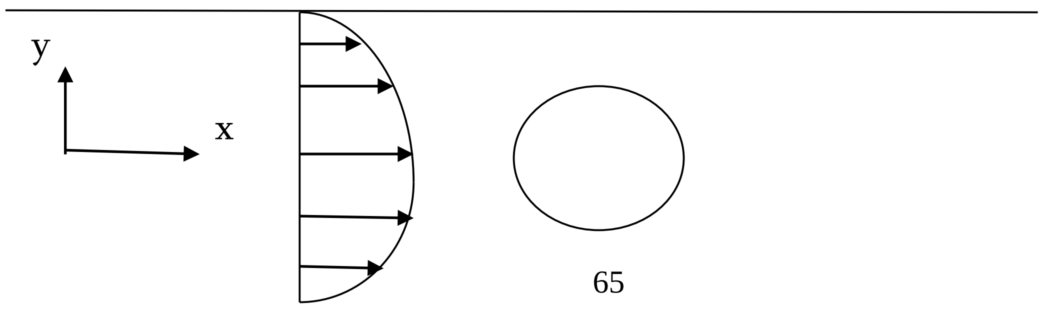
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{4.3}$$

სადაც $u(x,y)$, $v(x,y)$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, p – წნევა,

Re – რეინოლდსის უგანზომილებო რიცხვი.



ნახ. 4.1. სწორხაზოვან კედლებიან არხში მოთავსებული წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა

დიფერენციალურ განტოლებათა (4.1)-(4.3) სისტემას უნდა მივუერთოთ სასაზღვრო – მიკვრის პირობები:

$$u(x, \pm 1) = v(x, \pm 1) = 0, \;\; u_{x^2+y^2=0.25} = 0. \tag{4.4}$$

ეს პირობები უზრუნველყოფს სითხის მიკვრას სწორხაზოვანი არხის $y = \pm 1$ კედლებზე და $x^2 + y^2 = 0.25$ საზღვრის მქონე ცილინდრის კედლებზე.

ამას გარდა, საჭიროა კინემატიკური პირობები:

$$u(-2, y) = 1 - y^2, \;\; v(-2, y) = 0. \tag{4.5}$$

ამ ამოცანისათვის **RO** –ფუნქციას აქვს სახე:

$$RO(x, y) = (1 - y^2)(x^2 + y^2 - 0.25). \tag{3.6}$$

ცხადია, რომ $RO(x, y)$ ფუნქცია საშუალებას იძლევა დავაკმაყოფილოთ (4.4) სასაზღვრო პირობები, თუ ამოცანის ამონახსნს მოვძებნით სახით:

$$u(x, y, \alpha) = RO(x, y) \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij} (x + 2)^i y^j, \tag{4.7}$$

$$v(x, y, \beta) = RO(x, y) \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij} (x + 2)^i y^j, \tag{4.8}$$

$$p(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \gamma_{ij} x^i y^j. \tag{4.9}$$

ცხადია, რომ (4.8) ფორმა ავტომატურად აკმაყოფილებს (4.5) კინემატიკურ პირობების მეორე $v(-2, y) = 0$ განტოლებას. მაშასადამე, α, β, γ კოეფიციენტები უნდა ვიპოვოთ $u(-2, y) = 1 - y^2$ კინემატიკური პირობიდან და (4.1)-(4.3) განტოლებათა სისტემიდან.

შევადგინოთ ცდომილების $I(\alpha, \beta, \gamma)$ ფუნქცია. ამისათვის ჯერ გამოვითვალოთ საჭირო კერძო წარმოებულები:

$$ux(x,y,\alpha) = (1-y^2)(2x)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\alpha_{ij}(x+2)^{i-1}y^j, \quad (4.10)$$

$$uxx(x,y,\alpha) = (1-y^2)(2)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(4x)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\alpha_{ij}(x+2)^{i-1}y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N} i(i-1)\alpha_{ij}(x+2)^{i-2}y^j, \quad (4.11)$$

$$uy(x,y,\alpha) = \left(-2y\cdot(x^2+y^2-0.25)+2y(1-y^2)\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\alpha_{ij}(x+2)^i y^{j-1}, \quad (4.12)$$

$$uyy(x,y,\alpha) = (-2x^2-12y^2+2.5)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+2\left(-2y\cdot(x^2+y^2-0.25)+2y(1-y^2)\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\alpha_{ij}(x+2)^i y^{j-1} +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N} j(j-1)\alpha_{ij}(x+2)^i y^{j-2}, \quad (4.13)$$

$$vx(x,y,\beta) = (1-y^2)(2x)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\beta_{ij}(x+2)^{i-1}y^j, \quad (4.14)$$

$$vxx(x,y,\beta) = (1-y^2)(2)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(4x)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\beta_{ij}(x+2)^{i-1}y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N} i(i-1)\beta_{ij}(x+2)^{i-2}y^j, \quad (4.15)$$

$$vy(x,y,\beta) = \left(-2y\cdot(x^2+y^2-0.25)+2y(1-y^2)\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+2)^i y^{j-1}, \quad (4.16)$$

$$vyy(x,y,\beta) = (-2x^2-12y^2+2.5)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+2)^i y^j +$$

$$+2\left(-2y\cdot(x^2+y^2-0.25)+2y(1-y^2)\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+2)^i y^{j-1} +$$

$$+(1-y^2)(x^2+y^2-0.25)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N} j(j-1)\beta_{ij}(x+2)^i y^{j-2}, \quad (4.17)$$

$$px(x,y,\gamma) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\gamma_{ij}x^{i-1}y^j, \quad (4.18)$$

$$py(x,y,\gamma) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\gamma_{ij}x^i y^{j-1}. \quad (4.19)$$

მაშინ თითოეული განტოლებიდან გვექნება შესაბამისი ცდომილება:

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)ux(x,y,\alpha)+v(x,y,\beta)uy(x,y,\alpha)+px(x,y,\gamma)-$$

$$-\frac{1}{Re}(uxx(x,y,\alpha+uyy(x,y,\alpha)), \quad (4.20)$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)vx(x,y,\beta)+v(x,y,\beta)vy(x,y,\beta)+py(x,y,\gamma)-$$

$$-\frac{1}{Re}(vxx(x,y,\beta)+vyy(x,y,\beta)), \quad (4.21)$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) = ux(x,y,\alpha)+vy(x,y,\beta). \quad (4.22)$$

გვრჩება დასაკმაყოფილებელი ერთი კინემატიკური პირობა:

$$u(-2,y) = 1-y^2. \quad (4.23)$$

რაც კიდევ ერთ ცდომილების ფუნქციას მოგვცემს:

$$R4(y,\alpha) = u(-2,y,\alpha) - 1 + y^2. \qquad (4.24)$$

მაშინ ცდომილების შეწონილ $I(\alpha,\beta,\gamma)$ ფუნქციას ექნება სახე:

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \tau 1 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}[R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 2 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}[R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 3 \cdot \int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2}[R3(x,y,\alpha,\beta)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 4 \cdot \int_{-1}^{1}[R4(y,\alpha)]^2 dy \to min, \qquad (4.25)$$

სადაც $\tau 1, \tau 2, \tau 3, \tau 4$ წონის კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია შესაბამისად: 0.1; 0.1; 0.1; 0.7. მათი ჯამი, რა თქმა უნდა, ერთის ტოლია.

გაშლის α,β,γ კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**–ზე:

$N := 2 \qquad Re := 10($

$$u(x,y,\alpha) := \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + \sum_{j=0}^{N}\left(\alpha_{0,j}\cdot y^j\right)\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j\right)$$

$$ux(x,y,\alpha) := 2\cdot x\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := 2\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + 4\cdot x\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot i\cdot(x+2)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha) + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot(i-1)\cdot(x+2)^{i-2}\cdot y^j\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := \left(-2\cdot y\cdot x^2 - 4\cdot y^3 + 2.5y\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := uy(x,y,\alpha) + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-1}\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := \left(-2\cdot x^2 - 12\cdot y^2 + 2.5\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + \left(-2\cdot y\cdot x^2 - 4\cdot y^3 + 2.5y\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-1}\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[j\cdot(j-1)\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-2}\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := 2\cdot x\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+2)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := 2\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + 4\cdot x\cdot\left(1-y^2\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+2)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot(i-1)\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+2)^{i-2}\cdot y^j\right]$$

$$vy(x,y,\beta) := \left(-2\cdot y\cdot x^2 - 4\cdot y^3 + 2.5y\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-1}\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := \left(-2\cdot x^2 - 12\cdot y^2 + 2.5\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(-2\cdot y\cdot x^2 - 4\cdot y^3 + 2.5y\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-1}\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(1 - y^2\right)\cdot\left(x^2 + y^2 - 0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[j\cdot(j-1)\cdot(x+2)^i\cdot y^{j-2}\right]$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(i\cdot\gamma_{i,j}\cdot x^{i-1}\cdot y^j\right)$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(j\cdot\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^{j-1}\right)$$

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)\cdot uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(uxx(x,y,\alpha) + uyy(x,y,\alpha)\right)$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)\cdot vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(vxx(x,y,\alpha) + vyy(x,y,\alpha)\right)$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) := ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta)$$

$$R4(x,y,\alpha) := u(-2,y,\alpha) - 1 + y^2$$

$\tau1 := 0.1$ $\qquad\tau2 := 0.1$ $\qquad\tau3 := 0.1$ $\qquad\tau4 := 0.7$

$$I1(\alpha,\beta,\gamma) := \tau1\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy + \tau2\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy$$

$$I2(\alpha,\beta,\gamma) := \tau3\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} R3(x,y,\alpha,\beta)^2\,dx\,dy + \tau4\cdot\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} R4(x,y,\alpha)^2\,dx\,dy$$

$$I(\alpha,\beta,\gamma) := I1(\alpha,\beta,\gamma) + I2(\alpha,\beta,\gamma)$$

$i := 0..N$

$j := 0..N$

$\alpha_{i,j} := 0$ $\qquad\beta_{i,j} := 0$ $\qquad\gamma_{i,j} := 0$

Given

$S := \mathrm{Minimize}(I,\alpha,\beta,\gamma)$

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.255 & -0.001 & -0.048 \\ 0.071 & 0 & 0.009 \\ -0.028 & 0.039 & -0.005 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.005 & 0.058 & -0.002 \\ -0.009 & -0.009 & -0.011 \\ 0.021 & -0.001 & -0.017 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0 & 0.039 & -0.011 \\ 0.005 & 0.082 & -0.016 \\ -0.046 & 0.04 & 0.016 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

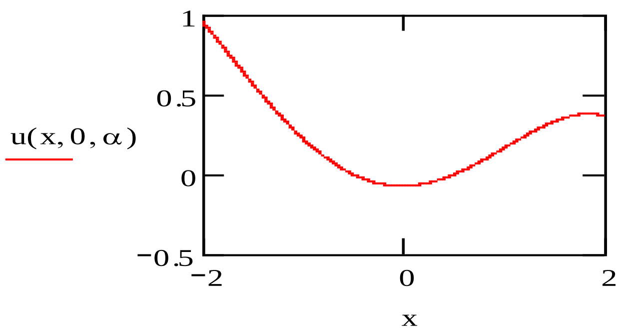
$\alpha := S_0 \qquad \beta := S_1 \qquad \gamma := S_2$

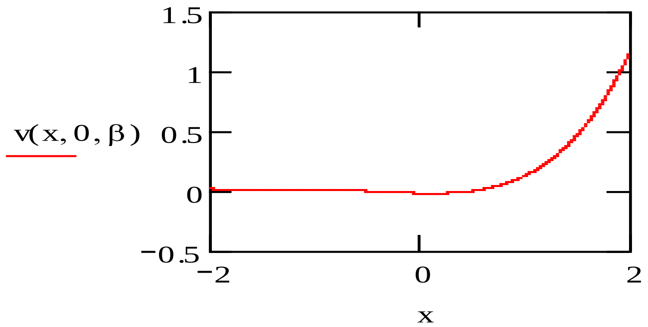
$I(\alpha,\beta,\gamma) = 0.13$

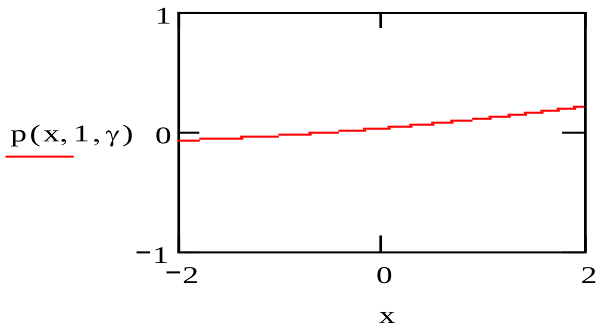
$$u(x,y,\alpha) := \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right] + \sum_{j=0}^{N}\left(\alpha_{0,j}\cdot y^j\right)\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(1-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2-0.25\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+2)^i\cdot y^j\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j\right)$$







4.2. წრიული ცილინდრის, ბლანტი უკუმშავი სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა RO -მეთოდით

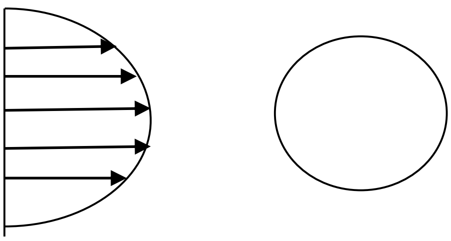
განვიხილოთ წრიული ცილინდრის ბლანტი, უკუმშავი სითხით სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ნახ. 4.2. ამ შემთხვევაში, გვექ-ნება ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემა (4.26)-(4.28), უკუმშვა-დობის (4.3) პირობასთან ერთად:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.26}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{4.28}$$

სადაც $u(x,y), v(x,y)$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, p - წნევა, Re – რეინოლდსის უგანზომილებო რიცხვი.



ნახ. 4.2. წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა

სასაზღვრო პირობებს აქვს სახე:

$$u_{x^2+y^2=1}=v_{x^2+y^2=1}=0. \tag{4.29}$$

კინემატიკურ პირობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$u(-3,y,\alpha)=1-y^2, \tag{4.30}$$

$$v(-3,y,\beta)=0. \tag{4.31}$$

$$p(-3,0,\gamma)>p(3,0,\gamma). \tag{4.32}$$

სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება ხდება შესაბამისი $RO-$ფუნქციით:

$$RO(x,y)=x^2+y^2-1. \tag{4.33}$$

ამოცანა სიმეტრიულია აბსცისთა ღერძის მიმართ. აქედან გამომდინარე, ვირჩევთ ამონახსნის შემდეგი სახის წარმოდგენას:

$$u(x,y,\alpha)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+3)^i y^{2j}, \tag{4.34}$$

$$v(x,y,\beta)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+3)^i y^{2j}, \tag{4.35}$$

$$p(x,y,\gamma)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\gamma_{ij}x^i y^{2j}. \tag{4.36}$$

ჩავსვათ (4.34)-(4.36) წერმოდგენები (4.26)-(4.28) განტოლებათა სისტემაში და შევადგინოთ ცდომილების ფუნქცია $I(\alpha,\beta,\gamma)$. ამისათვის ჯერ გამოვითვალოთ საჭირო წარმოებულები:

$$ux(x,y,\alpha):=2\cdot x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right] \tag{4.37}$$

$$uxx(x,y,\alpha):=2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right],$$

$$uxx(x,y,\alpha):=uxx(x,y,\alpha)+2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right],$$

$$uxx(x,y,\alpha):=uxx(x,y,\alpha)+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-2}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\cdot(i-1)\right], \tag{4.38}$$

$$uy(x,y,\alpha):=2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right], \tag{4.39}$$

$$uyy(x,y,\alpha) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right] + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right],$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right],$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + \left(x^{2}+y^{2}-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-2}\cdot 2\cdot j\cdot(2\cdot j-1)\right], \tag{4.40}$$

$$vx(x,y,\beta) := 2\cdot x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + \left(x^{2}+y^{2}-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right], \tag{4.41}$$

$$vxx(x,y,\beta) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + 2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right],$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + 2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right],$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + \left(x^{2}+y^{2}-1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-2}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\cdot(i-1)\right]\right], \tag{4.42}$$

$$vy(x,y,\beta) := 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + \left(x^{2}+y^{2}-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]\right], \tag{4.43}$$

$$vyy(x,y,\beta) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right],$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]\right],$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(x^{2}+y^{2}-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-2}\cdot 2\cdot j\cdot(2\cdot j-1)\right]\right], \tag{4.44}$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right), \tag{4.45}$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\gamma_{i,j} \cdot x^{i} \cdot y^{2\cdot j-1} \cdot 2 \cdot j\right). \tag{4.46}$$

მაშინ,

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) -$$

$$-\frac{1}{Re}(uxx(x,y,\alpha + uyy(x,y,\alpha)), \tag{4.47}$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) -$$

$$-\frac{1}{Re}(vxx(x,y,\beta) + vyy(x,y,\beta)), \tag{4.48}$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) = ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta). \tag{4.49}$$

(4.30) და (4.31) კინემატიკური პირობები ავტომატურადაა დაკმაყოფილებული (4.34),(4.35) წარმოდგენებში:

გვრჩება მხოლოდ ერთი კინემატიკური პირობა (4.32):

$$p(-3,0,\gamma) > p(3,0,\gamma). \tag{4.50}$$

მაშინ ცდომილების შეწონილ $I(\alpha,\beta,\gamma)$ ფუნქციას ექნება სახე:

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \tau 1 \cdot \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} [R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 2 \cdot \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} [R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 3 \cdot \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} [R3(x,y,\alpha,\beta)]^2 dxdy \to min, \tag{4.51}$$

სადაც $\tau 1, \tau 2, \tau 3$ წონის კოეფიციენტებია. ჩვენს შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია: 0.3; 0.3; 0.4. მათი ჯამი, რა თქმა უნდა, ერთის ტოლია.

გაშლის α,β,γ კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე:

$Re := 10($ $N := 3$

$$u(x,y,\alpha) := \left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^{2\cdot j}\right)$$

$$ux(x,y,\alpha) := 2\cdot x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha)+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-2}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\cdot(i-1)\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha)+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^{i-2}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\cdot(i-1)\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]+2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha)+2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha)+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j-2}\cdot 2\cdot j\cdot(2\cdot j-1)\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := 2\cdot x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]\right]+\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + 2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + 2\cdot x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right]\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + \left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i-2}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\cdot(i-1)\right]\right]$$

$$vy(x,y,\beta) := 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + \left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := 2\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right] + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j}\right]\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + 2\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right]\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(x^2+y^2-1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^{i}\cdot y^{2\cdot j-2}\cdot 2\cdot j\cdot(2\cdot j-1)\right]\right]$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^{i-1}\cdot y^{2\cdot j}\cdot i\right)$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^{i}\cdot y^{2\cdot j-1}\cdot 2\cdot j\right)$$

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)\cdot uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(uxx(x,y,\alpha) + uyy(x,y,\alpha)\right)$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)\cdot vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(vxx(x,y,\alpha) + vyy(x,y,\alpha)\right)$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) := ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta)$$

$$R4(y,\alpha) := u(-3,y,\alpha) - \left(1-y^2\right)$$

$\tau1 := 0.2$ $\tau2 := 0.2$ $\tau3 := 0.6$

$$I1(\alpha,\beta,\gamma) := \tau 1\cdot\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dxdy + \tau 2\cdot\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dxdy$$

$$I2(\alpha,\beta) := \tau 3\cdot\left(\int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} R3(x,y,\alpha,\beta)^2\,dxdy + \int_{-3}^{3} R4(y,\alpha)^2\,dy\right)$$

$$I(\alpha,\beta,\gamma) := I1(\alpha,\beta,\gamma) + I2(\alpha,\beta)$$

$i := 0..N$ $\quad j := 0..N$

$\alpha_{i,j} := 0$ $\quad \beta_{i,j} := 0$ $\quad \gamma_{i,j} := 0$

Given

$$p(-3,0,\gamma) > p(3,0,\gamma)$$

$$p(-3,1,\gamma) > p(3,1,\gamma)$$

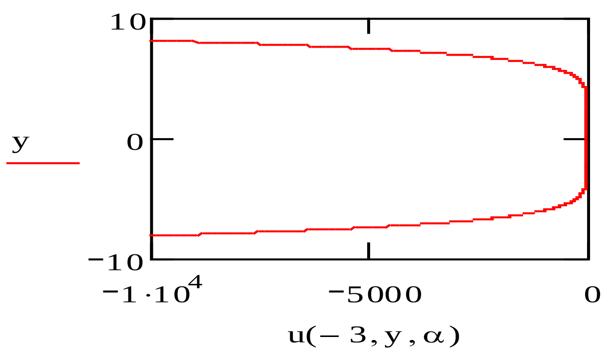
$$S := \mathrm{Minimize}(I,\alpha,\beta,\gamma)$$

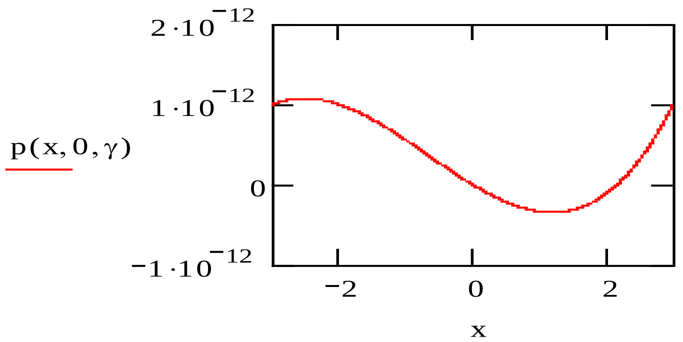
$\alpha := S_0$ $\quad \beta := S_1$ $\quad \gamma := S_2$

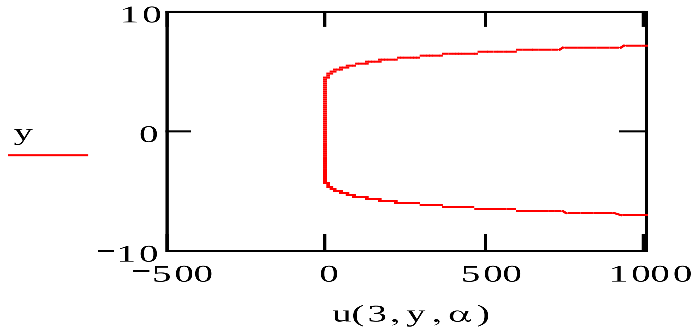
$$u(x,y,\alpha) := \left(x^2 + y^2 - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(x^2 + y^2 - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot\left[(x+3)^i\cdot y^{2\cdot j}\right]\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^{2\cdot j}\right)$$

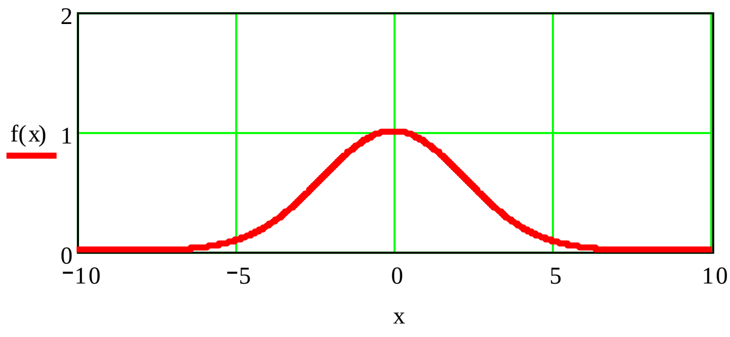






4.3. წყალქვეშა ბორცვის სტაციონარული გარსდენა ბლანტი, უკუმშავი სითხით

განვიხილოთ, წყალქვეშა ბორცვის გარსდენის ამოცანა ბლანტი, უკუმშავი სითხით. ბორცვის მოდელირებისათვის განვიხილოთ $f(x) = e^{-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკი ნახ. 4.3.



ნახ. 4.3. წყალქვეშა ბორცვის გარსდენის სქემა

ბლანტი, უკუმშავი სითხის სტაციონარული ნაკადი აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებათა სისტემითა და უკუმშვადობის პირო-ბით:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.52}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4.54}$$

სადაც $u(x,y), v(x,y)$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, p –წნევა, Re – რეინოლდსის რიცხვი.

სასაზღვრო პირობები:

$$u_{f(x)=e^{-0.1x^2}}=v_{f(x)=e^{-0.1x^2}}=0. \tag{4.55}$$

კინემატიკური პირობები:

$$u(-10,y,\alpha)=1,\ \mathrm{v}(\text{-}10,\mathrm{y},\beta)=0, \tag{4.56}$$

$$p(-10,1,\gamma)>p(10,1,\gamma). \tag{4.57}$$

RO ფუნქციას აქვს სახე:

$$RO(x,y)=y-e^{-0.1x^2}. \tag{4.58}$$

ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$u(x,y,\alpha)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j, \tag{4.59}$$

$$v(x,y,\beta)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+10)^i y^j, \tag{4.60}$$

$$p(x,y,\gamma)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\gamma_{ij}x^i y^j. \tag{4.61}$$

ამ წარმოდგენაში ავტომატურადაა გათვალისწინებული (4.55) სასაზღვრო პირობები. დასაკმაყოფილებელია (4.52)-(4.54) განტოლებე-ბი და (4.56)-(4.57) კინემატიკური პირობები.

ჩავსვათ (4.59)-(4.61) წარმოდგენა (4.52)-(4.54) განტოლებებში და შევადგინოთ შესაბამისი ცდომილების ფუნქციები. ასევე, შევადგინოთ

ცდომილებები (4.56)-(4.57) კინემატიკური პირობებიდან გამომდინარე. ამისათვის ჯერ უნდა გამოვითვალოთ საჭირო წარმოებულები:

$ux(x,y,\alpha) = 0.2xe^{-0.1x^2} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$

$ux(x,y,\alpha) = ux(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1} y^j.$

$uxx(x,y,\alpha) = \left(0.2e^{-0.1x^2} - 0.04x^2 e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$

$uxx(x,y,\alpha) = uxx(x,y,\alpha) + 0.4xe^{-0.1x^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1} y^j,$

$$uxx(x,y,\alpha) = uxx(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=0}^{N} i(i-1)\alpha_{ij}(x+10)^{i-2} y^j$$

$uy(x,y,\alpha) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$

$uy(x,y,\alpha) = uy(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$

$uyy(x,y,\alpha) = 2 \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} j\alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$

$uyy(x,y,\alpha) = uyy(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=2}^{N} \alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-2}.$

$vx(x,y,\beta) = 0.2xe^{-0.1x^2} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$

$vx(x,y,\beta) = vx(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\beta_{ij}(x+10)^{i-1} y^j.$

$vxx(x,y,\beta) = \left(0.2e^{-0.1x^2} - 0.04x^2 e^{-0.1x^2}\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$

$vxx(x,y,\beta) = vxx(x,y,\beta) + 0.4xe^{-0.1x^2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\beta_{ij}(x+10)^{i-1} y^j,$

$$vxx(x,y,\beta) = vxx(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right)\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N} i(i-1)\beta_{ij}(x+10)^{i-2}y^j$$

$vy(x,y,\beta) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+10)^i y^j,$

$vy(x,y,\beta) = vy(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$

$vyy(x,y,\beta) = 2\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$

$$vyy(x,y,\beta) = vyy(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1x^2}\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N} j(j-1)\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-2}$$

$px(x,y,\gamma) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} i\gamma_{ij}x^{i-1}y^j.$

$py(x,y,\gamma) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N} j\gamma_{ij}x^i y^{j-1}.$

მაშინ თითოეული განტოლებიდან გვექნება შესაბამისი ცდომილება:

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) -$$

$$-\frac{1}{Re}\left(uxx(x,y,\alpha + uyy(x,y,\alpha)\right), \quad (4.62)$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) = u(x,y,\alpha)vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) -$$

$$-\frac{1}{Re}\left(vxx(x,y,\beta) + vyy(x,y,\beta)\right), \quad (4.63)$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) = ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta). \quad (4.64)$$

(4.55) კინემატიკური $u(-10,y,\alpha) = 1$, $v(\text{-10,y,}\beta) = 0$ პირობების დასაკმაყოფილებლად გვექნება ცდომილების ფუნქციები:

$R4(y,\alpha) = u(-10,y,\alpha) - 1$ და $R5(y,\beta) = v(\text{-10,y,}\beta)$.

მაშინ ცდომილების შეწონილ $I(\alpha,\beta,\gamma)$ ფუნქციას ექნება სახე: $I(\alpha,\beta,\gamma) = \tau 1 \cdot \int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$

$$+\tau 2\cdot\int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2dxdy+$$

$$+\tau 3\cdot\int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R3(x,y,\alpha,\beta)]^2dxdy+\tau 4\cdot\int_0^{10}R4(y,\alpha)^2dy+$$

$$+\tau 5\cdot\int_0^{10}R5(y,\beta)^2dy\rightarrow min. \qquad (4.65)$$

სადაც $\tau 1,\tau 2,\tau 3,\tau 4,\tau 5$ წონის კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია 0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2. მათი ჯამი, რა თქმა უნდა ერთის ტოლია.

გაშლის α,β,γ კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან, შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე:

$N := 3 \qquad Re := 100$

$$u(x,y,\alpha) := \left(y-e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(y-e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j\right)$$

$$ux(x,y,\alpha) := 0.2x\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$ux(x,y,\alpha) := ux(x,y,\alpha)+\left(y-e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\cdot i\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := \left(0.2e^{-0.1\cdot x^2}-0.04x^2\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha) + 0.4x\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\cdot i\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-2}\cdot y^j\cdot i\cdot(i-2)\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right] + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\cdot j\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := 2\cdot\left[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\cdot j\right]\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-2}\cdot j\cdot(j-2)\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := 0.2x\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := vx(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\cdot i\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := \left(0.2e^{-0.1\cdot x^2} - 0.04x^2\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + 0.4x\cdot e^{-0.1\cdot x^2}\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\cdot i\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-2}\cdot j\cdot(j-2)\right]$$

$$vy(x,y,\beta) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right] + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\cdot j\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := 2\cdot\left[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\cdot j\right]\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^{j-2}\cdot j\cdot(j-2)\right]$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^{i-1}\cdot y^j\cdot i\right)$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^{j-1}\cdot j\right)$$

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)\cdot uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot(uxx(x,y,\alpha) + uyy(x,y,\alpha))$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)\cdot vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot(vxx(x,y,\beta) + vyy(x,y,\beta))$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) := ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta)$$

$$R4(y,\alpha) := u(-10,y,\alpha) - 1$$

$$R5(y,\beta) := v(-10,y,\beta)$$

$\tau1 := 0.2 \quad \tau2 := 0.2 \quad \tau3 := 0.2 \quad \tau4 := 0.2 \quad \tau5 := 0.2$

$$I1(\alpha,\beta,\gamma) := \tau1\cdot\int_0^{10}\int_{-10}^{10} R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy + \tau2\cdot\int_0^{10}\int_{-10}^{10} R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy$$

$$I2(\alpha,\beta) := \tau3\cdot\int_0^{10}\int_{-10}^{10} R3(x,y,\alpha,\beta)^2\,dx\,dy + \tau4\cdot\int_0^{10} R4(y,\alpha)^2\,dy + \tau5\cdot\int_0^{10} R5(y,\alpha)^2\,dy$$

$$I(\alpha,\beta,\gamma) := I1(\alpha,\beta,\gamma) + I2(\alpha,\beta)$$

$i := 0..N \qquad j := 0..N$

$\alpha_{i,j} := 1 \qquad \beta_{i,j} := 0 \qquad \gamma_{i,j} := 0.1$

Given

$$p(-10,1,\gamma) > p(10,1,\gamma)$$

$$S := Minimize(I,\alpha,\beta,\gamma)$$

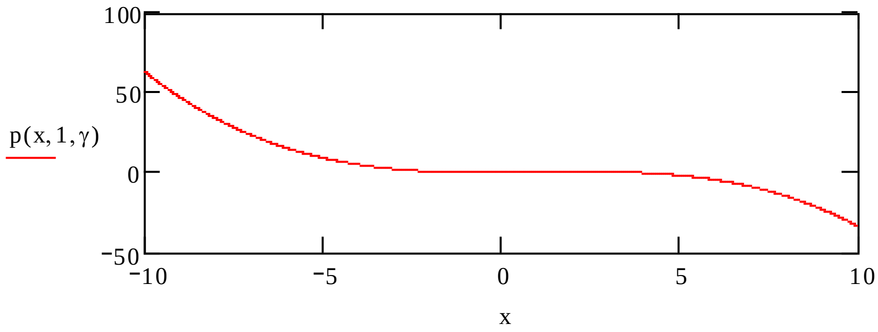
$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 & 0.498 \\ 0.25 & 0.5 & 0.249 & 0.468 \\ 0.25 & 0.495 & 0.237 & -0.056 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -7.99\times 10^{-7} & -9.292\times 10^{-6} & -1.028\times 10^{-4} & -1.105\times 10^{-3} \\ -6.826\times 10^{-6} & -9.444\times 10^{-5} & -1.148\times 10^{-3} & -0.013 \\ -1.738\times 10^{-5} & -6.821\times 10^{-4} & -0.011 & -0.14 \\ 1.21\times 10^{-3} & 2.44\times 10^{-3} & -0.05 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 0.025 & 0.049 & 0.025 & 0.049 \\ 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 5\times 10^{-3} & -0.03 & 5\times 10^{-3} & -0.03 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

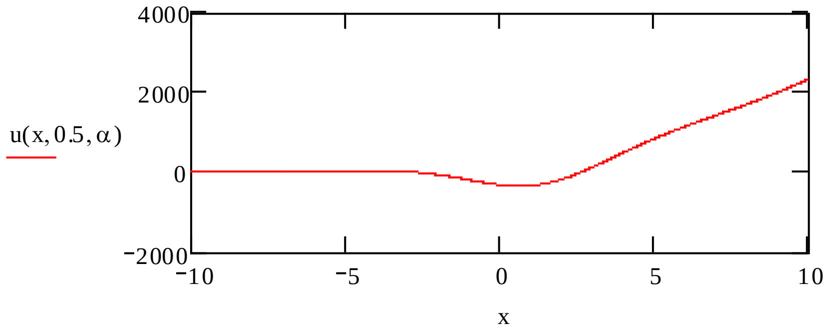
$\alpha := S_0 \quad \beta := S_1 \quad \gamma := S_2$

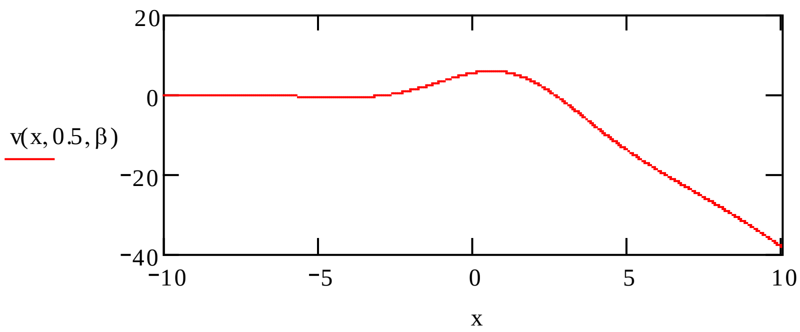
$$u(x,y,\alpha) := \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

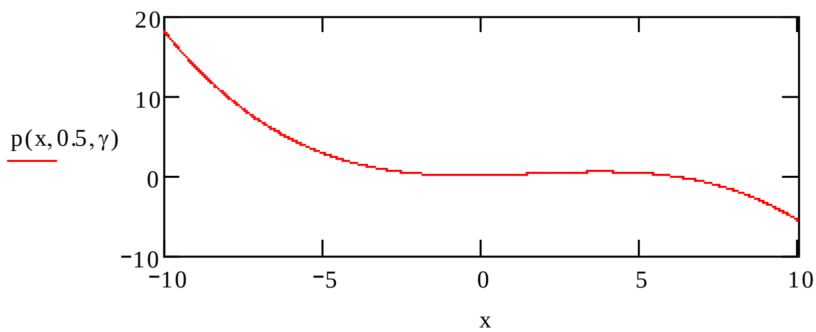
$$v(x,y,\beta) := \left(y - e^{-0.1\cdot x^2}\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

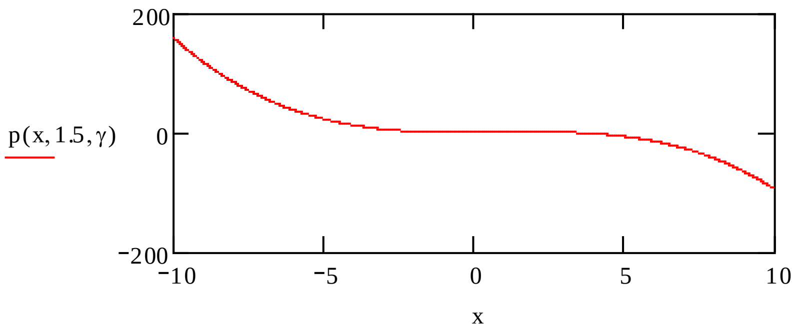
$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j\right)$$











4.4. ელიფსური ფორმის განივკვეთის საყრდენი ბურჯის სტაციონარული გარსდენა ბლანტი, უკუმშავი სითხით

განვიხილოთ ელიფსური ფორმის განივკვეთის საყრდენი ბურჯის ორგანზომილებიანი სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ბლანტი, უკუმშავი სითხით ნახ. 4.4.

ნახ. 4.4. ელიფსის გარსდენის სქემა

ბლანტი, უკუმშავი სითხის სტაციონარული ნაკადი აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებებითა და უკუმშვადობის პირობით:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.66}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4.68}$$

სადაც $u(x,y), v(x,y)$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, p-წნევა, Re – რეინოლდსის რიცხვი.

სასაზღვრო პირობები:

$$u_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1}=v_{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1}=0. \tag{4.69}$$

კინემატიკური პირობები:

$$u(-10,y,\alpha)=100-y^2,\ \text{v(-10, y,} \beta)=0, \tag{4.70}$$

$$p(-10,1,\gamma)>p(10,1,\gamma). \tag{4.71}$$

RO ფუნქციაა:

$$RO(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1. \tag{4.72}$$

ამონახსნს ვეძებთ სახით:

$$u(x,y,\alpha)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j, \tag{4.73}$$

$$v(x,y,\beta)=RO(x,y)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+10)^i y^j, \tag{4.74}$$

$$p(x,y,\gamma)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\gamma_{ij}x^i y^j. \qquad (4.75)$$

ამონახსნის ამ წარმოდგენაში ავტომატურადაა გათვალისწინებული (4.69) სასაზღვრო პირობები. დასაკმაყოფილებელია (4.66)–(4.68) განტოლებები და (4.70)-(4.71) კინემატიკური პირობები.

ჩავსვათ (4.73)-(4.75) წარმოდგენა (4.66)-(4.68) განტოლებებში და შევადგინოთ შესაბამისი ცდომილების ფუნქციები. ასევე, შევადგი-ნოთ ცდომილებები კინემატიკური პირობებიდან გამომდინარე. ამისა-თვის ჯერ უნდა გამოვითვალოთ საჭირო კერძო წარმოებულები:

$$ux(x,y,\alpha)=0.125x\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$ux(x,y,\alpha)=ux(x,y,\alpha)+\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1}y^j.$$

$$uxx(x,y,\alpha)=0.125\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$uxx(x,y,\alpha)=uxx(x,y,\alpha)+0.25x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}i\alpha_{ij}(x+10)^{i-1}y^j,$$

$$uxx(x,y,\alpha)=uxx(x,y,\alpha)+\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1\right)\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}i(i-1)\alpha_{ij}(x+10)^{i-2}y^j.$$

$$uy(x,y,\alpha)=\frac{2}{9}y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$uy(x,y,\alpha)=uy(x,y,\alpha)+\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}j\cdot\alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$$

$$uyy(x,y,\alpha)=\frac{2}{9}\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\alpha_{ij}(x+10)^i y^j+\frac{4}{9}y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}j\alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$$

$$uyy(x,y,\alpha)=uyy(x,y,\alpha)+\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1\right)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}j(j-1)\alpha_{ij}(x+10)^i y^{j-2}.$$

$$vx(x,y,\beta)=0.125x\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\beta_{ij}(x+10)^i y^j,$$

$$vx(x,y,\beta)=vx(x,y,\beta)+\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-1\right)\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}i\beta_{ij}(x+10)^{i-1}y^j.$$

$vxx(x, y, \beta) = 0.125 \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$

$vxx(x, y, \beta) = vxx(x, y, \beta) + 0.25x \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\beta_{ij}(x+10)^{i-1} y^j,$

$vxx(x, y, \beta) = vxx(x, y, \beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=0}^{N} i(i-1)\beta_{ij}(x+10)^{i-2} y^j.$

$vy(x, y, \beta) = \frac{2}{9} y \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij}(x+10)^i y^j,$

$vy(x, y, \beta) = vy(x, y, \beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1}.$

$vyy(x, y, \beta) = \frac{2}{9} \cdot \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \beta_{ij}(x+10)^i y^j + \frac{4}{9} y \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} j\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-1},$

$$vyy(x, y, \beta) = vyy(x, y, \beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right) \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=2}^{N} j(j-1)\beta_{ij}(x+10)^i y^{j-2}$$

$px(x, y, \gamma) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{N} i\gamma_{ij} x^{i-1} y^j.$

$py(x, y, \gamma) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{N} j\gamma_{ij} x^i y^{j-1}.$

მაშინ,

$$R1(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = u(x, y, \alpha)ux(x, y, \alpha) + v(x, y, \beta)uy(x, y, \alpha) + px(x, y, \gamma) - \\ - \frac{1}{Re}(uxx(x, y, \alpha + uyy(x, y, \alpha)), \qquad (4.76)$$

$$R2(x, y, \alpha, \beta, \gamma) = u(x, y, \alpha)vx(x, y, \beta) + v(x, y, \beta)vy(x, y, \beta) + py(x, y, \gamma) - \\ - \frac{1}{Re}(vxx(x, y, \beta) + vyy(x, y, \beta)), \qquad (4.77)$$

$$R3(x, y, \alpha, \beta) = ux(x, y, \alpha) + vy(x, y, \beta). \qquad (4.78)$$

კინემატიკური $u(-10, y, \alpha) = 100 - y^2$, $v(-10, y, \beta) = 0$ პირობების დასაკმაყოფილებლად გვექნება ცდომილების ფუნქციები:

$R4(y,\alpha) = u(-10,y,\alpha) - 100 + y^2$ და $R5(y,\beta) = v(-10,y,\beta)$.

მაშინ ცდომილების შეწონილ $I(\alpha,\beta,\gamma)$ ფუნქციას ექნება სახე:

$$I(\alpha,\beta,\gamma) = \tau 1 \cdot \int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 2 \cdot \int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)]^2 dxdy +$$

$$+\tau 3 \cdot \int_0^{10}\int_{-10}^{10}[R3(x,y,\alpha,\beta)]^2 dxdy + \tau 4 \cdot \int_0^{10} R4(y,\alpha)^2 dy +$$

$$+\tau 5 \cdot \int_0^{10} R5(y,\beta)^2 dy \to min. \qquad (4.65)$$

სადაც $\tau 1, \tau 2, \tau 3, \tau 4, \tau 5$ წონის კოეფიციენტებია. ჩვენ შემთხვევაში, მათი მნიშვნელობებია შესაბამისად: 0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2. მათი ჯამი, რა თქმა, უნდა ერთის ტოლია.

გაშლის α,β,γ კოეფიციენტების საპოვნელად ვიყენებთ $L_2(G)$ ნორმით ინდუცირებულ მეტრიკას, რათა ეს კოეფიციენტები განისაზღვროს შესაბამის ცდომილების ფუნქციასა და 0-ს შორის მანძილის მინიმიზაციის პირობიდან.

შევადგინოთ პროგრამა **Mathcad**-ზე:

Re := 100 N := 3

$$u(x,y,\alpha) := \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(\gamma_{i,j}\cdot x^i\cdot y^j\right)$$

$$ux(x,y,\alpha) := 0.125x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$ux(x,y,\alpha) := ux(x,y,\alpha) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := 0.125\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha) + 0.25x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := uxx(x,y,\alpha) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot(i-1)\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i-2}\cdot y^j\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := \frac{2}{9}\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$uy(x,y,\alpha) := uy(x,y,\alpha) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := \frac{2}{9}\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right] + \frac{4}{9}\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := uyy(x,y,\alpha) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[j\cdot(j-1)\cdot\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-2}\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := 0.125x\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$vx(x,y,\beta) := vx(x,y,\beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := 0.125\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + 0.25x\cdot\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i-1}\cdot y^j\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := vxx(x,y,\beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[i\cdot(i-1)\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i-2}\cdot y^{j}\right]$$

$$vy(x,y,\beta) := \frac{2}{9}\cdot y\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j}\right]$$

$$vy(x,y,\beta) := vy(x,y,\beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[j\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-1}\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := \frac{2}{9}\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j}\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := vyy(x,y,\beta) + \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{N}\left[j\cdot(j-1)\cdot\beta_{i,j}\cdot(x+10)^{i}\cdot y^{j-2}\right]$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left(i\cdot\gamma_{i,j}\cdot x^{i-1}\cdot y^{j}\right)$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(j\cdot\gamma_{i,j}\cdot x^{i}\cdot y^{j-1}\right)$$

$$R01(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)\cdot uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma)$$

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := R01(x,y,\alpha,\beta,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(uxx(x,y,\alpha) + uyy(x,y,\alpha)\right)$$

$$R02(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)\cdot vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma)$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := R02(x,y,\alpha,\beta,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot\left(vxx(x,y,\beta) + vyy(x,y,\beta)\right)$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) := ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta)$$

$$R4(y,\alpha) := u(-10,y,\alpha) - 100 + y^2$$

$$R5(y,\beta) := v(-10,y,\beta)$$

$\tau1 := 0.2$ $\quad\tau2 := 0.2$ $\quad\tau3 := 0.2$ $\quad\tau4 := 0.2$ $\quad\tau5 := 0.2$

$$I0(\alpha,\beta,\gamma) := \tau1\cdot\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy + \tau2\cdot\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\,dx\,dy$$

$$I1(\alpha,\beta) := \tau 3\cdot\int_{-10}^{10}\int_{-10}^{10} R3(x,y,\alpha,\beta)^2\,dx\,dy + \tau 4\cdot\int_{-10}^{10} R4(y,\alpha)^2\,dy + \tau 5\cdot\int_{-10}^{10} R5(y,\alpha)^2\,dy$$

$$I(\alpha,\beta,\gamma) := I0(\alpha,\beta,\gamma) + I1(\alpha,\beta)$$

$i := 0..N$

$j := 0..N$

$\alpha_{i,j} := 0.2$ $\beta_{i,j} := 0.1$ $\gamma_{i,j} := 0.2$

Given

$$p(-10,3,\gamma) > p(10,3,\gamma)$$

$$p(-10,-3,\gamma) > p(10,-3,\gamma)$$

$$S := \mathrm{Minimize}(I,\alpha,\beta,\gamma)$$

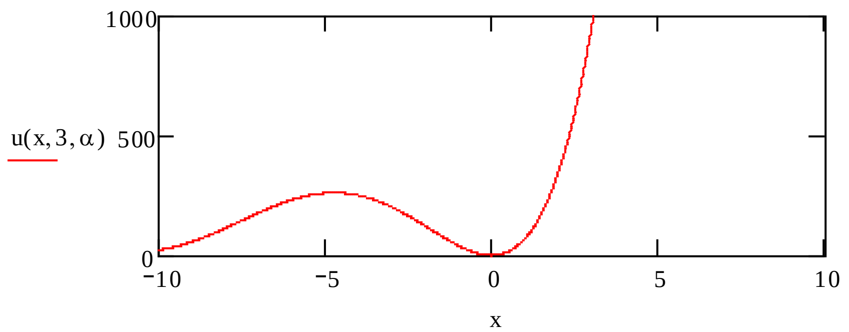
$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.094 \\ 0.05 & 0.099 & 0.045 & -0.01 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.05 \\ 0.025 & 0.05 & 0.025 & 0.047 \\ 0.025 & 0.049 & 0.024 & -0.006 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.049 & 0.099 \\ 0.05 & 0.1 & 0.05 & 0.1 \\ 0.04 & 0.089 & -0.038 & -0.022 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

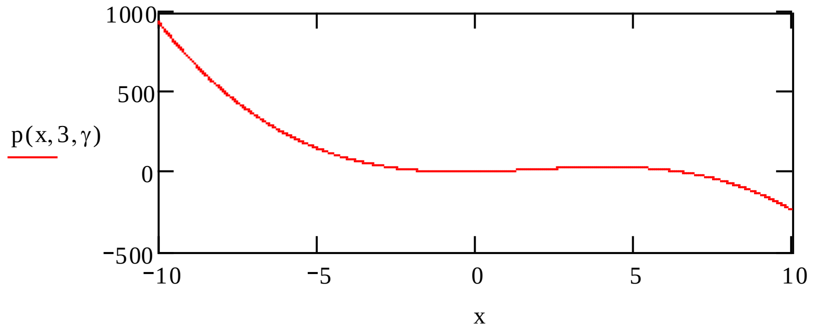
$\alpha := S_0$ $\beta := S_1$ $\gamma := S_2$

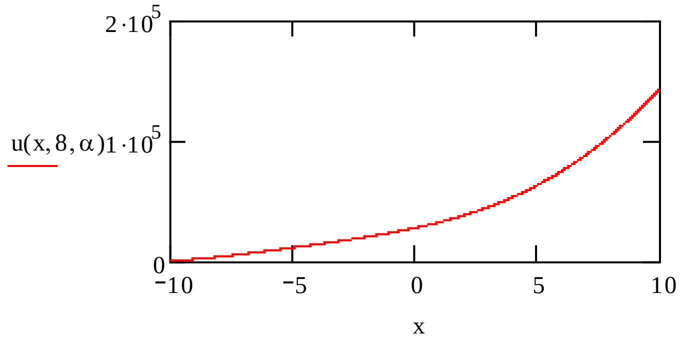
$$u(x,y,\alpha) := \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\alpha_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\cdot\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\left[\beta_{i,j}\cdot(x+10)^i\cdot y^j\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \left(\gamma_{i,j} \cdot x^{i} \cdot y^{j}\right)$$







როგორც ვხედავთ, ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანების ამოხსნის პროცესში, რვაჩოვ-ობგაძის RO–მეთოდი ეფექტურად მუშაობს.

4.5. კოშის ამოცანის ამოხსნა რეგულარულ წყაროთა მეთოდით

განვიხილოთ, ორწერტილოვანი სასაზღვრო ამოცანა ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის:

$$\frac{dy}{dx} = y(x), \tag{4.66}$$

$$y(0) = 1. \tag{4.67}$$

ადვილი საპოვნელია, რომ მაშინ $y = e^x$.

ამოვხსნათ ეს ამოცანა რეგულარულ წყაროთა მეთოდით. ამისათვის, გამოვიყენებთ ერთგანზომილებიან რეგულარული წყაროს ტიპის ფუნქციებს, რაც იმას ნიშნავს, რომ ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი ფორმით:

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-0)^2 + \alpha_2(x-e)^2. \tag{4.68}$$

ცდომილების ფუნქციას ექნება სახე:

$$R(x,\alpha) = e^x - \alpha_0 + \alpha_1(x-0)^2 + \alpha_2(x-e)^2. \tag{4.69}$$

მაშინ, ცდომილებას $L_2[0;1]$ აზრით ექნება შემდეგი სახე:

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^1 \big(R(x,\alpha)\big)^2 dx. \tag{4.70}$$

შევადგინოთ პროგრამა *Mathcad*-ზე და ამოვხსნათ ინტერპოლაციის ამოცანა:

$$f(x,\alpha) := \alpha_0 + \alpha_1 \cdot x^2 + \alpha_2 \cdot (x-e)^2$$

$I(\alpha) := \int_0^1 \left(e^x - f(x,\alpha)\right)^2 dx$

$i := 0..2$

$\alpha_i := 1$

Given

$S := \mathrm{Minimize}(I, \alpha)$

$$\alpha \coloneqq S$$

$j := 0..10$

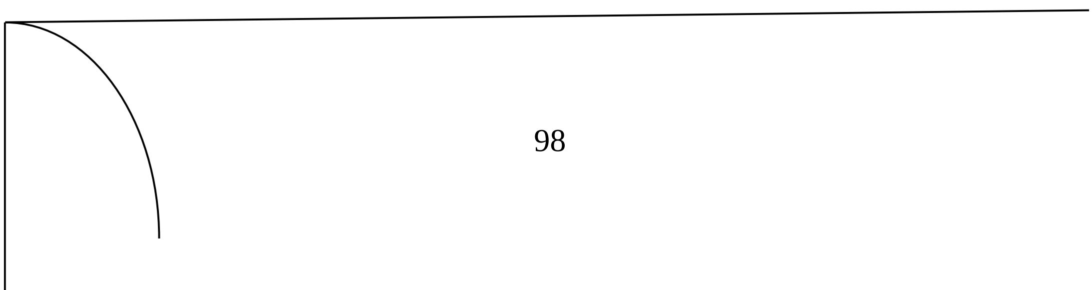
$x_j := 0.1 \cdot j$

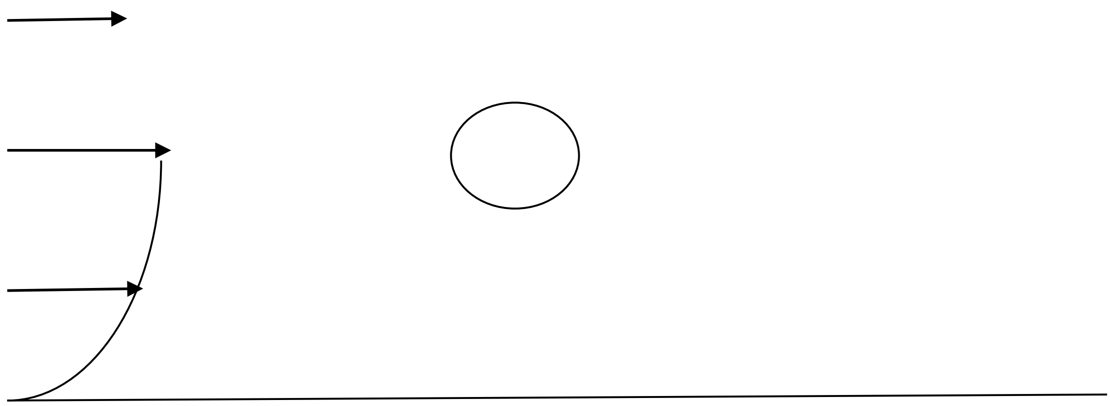
$f(x_j, \alpha) =$	$\left\lvert e^{x_j} - f(x_j, \alpha) \right\rvert$
1.013	0.013
1.106	$1.325 \cdot 10^{-3}$
1.217	$4.619 \cdot 10^{-3}$
1.344	$6.003 \cdot 10^{-3}$
1.488	$4.114 \cdot 10^{-3}$
1.648	$3.714 \cdot 10^{-4}$
1.826	$3.654 \cdot 10^{-3}$
2.02	$6.226 \cdot 10^{-3}$
2.231	$5.428 \cdot 10^{-3}$
2.459	$8.602 \cdot 10^{-4}$
2.703	0.015

როგორც ვხედავთ, აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება 1%-ს.

4.6. სწორხაზოვანი კედლების მქონე არხში წრიული ცილინდრის სტაციონარული გარსდენის ამოცანის ამოხსნა რეგულარულ წყაროთა მეთოდით

განვიხილოთ, წრიული ცილინდრის სტაციონარული გარსდენის ამოცანა ბლანტი, უკუმშავი სითხით, სწორხაზოვანი კედლების მქონე არხში ნახ. 4.5.





ნახ. 4.5. წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა

ბლანტი, უკუმშავი სითხის სტაციონარული ნაკადი აღიწერება ნავიე-სტოქსის განტოლებებითა და უკუმშვადობის პირობით:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{4.71}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{4.73}$$

სადაც $u(x,y), v(x,y)$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია, p – წნევა, Re – რეინოლდსის რიცხვი.

სასაზღვრო პირობები:

$$u_{x^2+y^2=1}=v_{x^2+y^2=1}=0,\quad y=\pm 3. \tag{4.74}$$

კინემატიკური პირობები:

$$u(-5,y,\alpha)=1-\frac{1}{9}y^2,\quad v(-5,y,\beta)=0. \tag{4.75}$$

$$\int_{-3}^{3} u(-5,y,\alpha)\,dy=\int_{-3}^{-1} u(0,y,\alpha)\,dy+\int_{1}^{3} u(0,y,\alpha)\,dy=\int_{-3}^{3} u(5,y,\alpha)\,dy$$

ეს პირობა უზრუნველყოფს არხის სხვადასხვა კვეთში $x=-5$;

$x=0$; $x=5$ გამავალი სითხის ხარჯის მუდმივობას.

ამ შემთხვევაში, $G=[-5;5]\times[-3;3]$ არეზე ნორმირებულ RO ფუნქციას აქვს სახე:

$$RO(x,y) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216}. \tag{4.76}$$

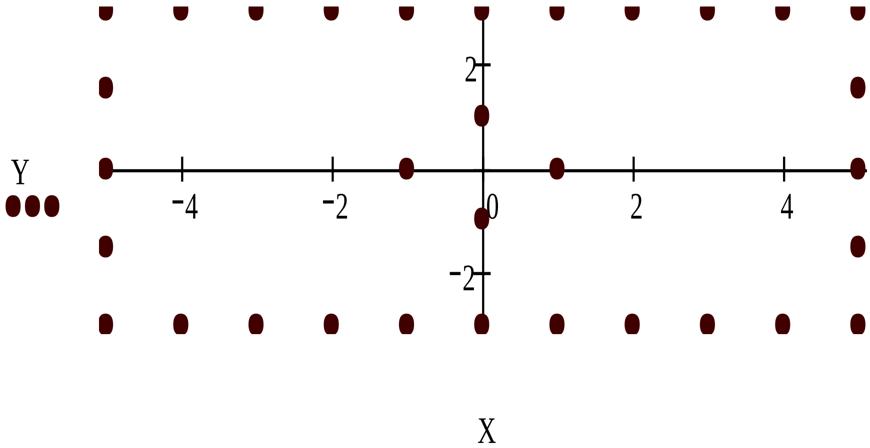
ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ (4.77)-(4.79) სახით, სადაც (4.74) სასაზღვრო პირობები ავტომატურადაა გათვალისწინებული:

$$u(x,y,\alpha) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216} \cdot \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \cdot ((x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2), \tag{4.77}$$

$$v(x,y,\beta) = \frac{(x^2+y^2-1)(9-y^2)}{216} \cdot \sum_{i=1}^{N} \beta_i \cdot ((x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2), \tag{4.78}$$

$$p = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \cdot ((x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2). \tag{4.79}$$

გაშლის α_i, β_i და γ_i კოეფიციენტების საპოვნელად (4.77)-(4.79) ფორმულებს შევიტანთ (4.71)-(4.73) განტოლებათა სისტემაში და ასევე შევეცდებით დავაკმაყოფილოთ (4.75) კინემატიკური პირობები. ვიყენებთ რეგულარული წყაროს ტიპის ფუნქციებს, რომელთა ლოკალიზაციაა ოპერატორული განტოლების განსაზღვრის G არის საზღ-ვრის (ξ_j, η_j) წერტილები ნახ. 4.6.;



ნახ. 4.6. რეგულარული წყაროს ტიპის ფუნქციების ლოკალიზაციის წერტილები (ξ_j, η_j)

გამოვითვალოთ განმსაზღვრელი პარამეტრების საჭირო კერძო წარმოებულები:

u_x; u_y; u_{xx}; u_{yy}; v_x; v_y; v_{xx}; v_{yy}; p_x; p_y.

შემდეგ, უნდა შევადგინოთ ცდომილების ფუნქცია და გადავიყვანოთ ის $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის მეტრიკის ენაზე და შევადგინოთ შესაბამისი **Mathcad** - პროგრამა ცდომილების მინიმიზაციისათვის.

$ORIGIN := 1$

$Re := 500 \qquad N := 32$

$$\xi := \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \eta := \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 0 \\ 1.5 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1.5 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$u(x,y,\alpha) := \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right]$$

$$v(x,y,\beta) := \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\left[\gamma_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right]$$

$$ux(x,y,\alpha) := \frac{2\cdot x\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[2\cdot(x-\xi_i)\right]\right]$$

$$uxx(x,y,\alpha) := \frac{2\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{4\cdot x\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[2\cdot(x-\xi_i)\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot 2\cdot\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$uy(x,y,\alpha) := \frac{20\cdot y-2\cdot x^2\cdot y-4\cdot y^3}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[2\cdot(y-\eta_i)\right]\right]$$

$$uyy(x,y,\alpha) := \frac{20-12\cdot y^2-2\cdot y^2}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{2\cdot(20\cdot y-2\cdot x^2\cdot y-4\cdot y^3)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[2\cdot(y-\eta_i)\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\left(2\cdot\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\right)$$

$$vx(x,y,\beta) := \frac{2\cdot x\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[2\cdot(x-\xi_i)\right]\right]$$

$$vxx(x,y,\beta) := \frac{2\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{4\cdot x\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[2\cdot(x-\xi_i)\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot 2\cdot\sum_{i=1}^{N}\beta_i$$

$$vy(x,y,\beta) := \frac{20\cdot y-2\cdot x^2\cdot y-4\cdot y^3}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[2\cdot(y-\eta_i)\right]\right]$$

$$vyy(x,y,\beta) := \frac{20-12\cdot y^2-2\cdot y^2}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2\right]\right] + \frac{2\cdot(20\cdot y-2\cdot x^2\cdot y-4\cdot y^3)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[2\cdot(y-\eta_i)\right]\right] + \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\left(2\cdot\sum_{i=1}^{N}\beta_i\right)$$

$$px(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\left[\gamma_i\cdot\left[2\cdot(x-\xi_i)\right]\right]$$

$$py(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\left[\gamma_i\cdot\left[2\cdot(y-\eta_i)\right]\right]$$

$$R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot ux(x,y,\alpha) + v(x,y,\beta)\cdot uy(x,y,\alpha) + px(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot(uxx(x,y,\alpha) + uyy(x,y,\alpha))$$

$$R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma) := u(x,y,\alpha)\cdot vx(x,y,\beta) + v(x,y,\beta)\cdot vy(x,y,\beta) + py(x,y,\gamma) - \frac{1}{Re}\cdot(vxx(x,y,\beta) + vyy(x,y,\beta))$$

$$R3(x,y,\alpha,\beta) := ux(x,y,\alpha) + vy(x,y,\beta)$$

$$R4(y,\alpha) := u(-5,y,\alpha) - \left(1 - \frac{1}{9}\cdot y^2\right)$$

$$R5(y,\beta) := v(-5,y,\beta)$$

$$I1(\alpha,\beta,\gamma) := \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{5}\left(R1(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2 + R2(x,y,\alpha,\beta,\gamma)^2\right)dxdy$$

$$I2(\alpha,\beta) := \int_{-3}^{3}\int_{-5}^{5} R3(x,y,\alpha,\beta)^2\,dxdy$$

$$I3(\alpha,\beta) := \int_{-3}^{3}\left[(R4(y,\alpha))^2 + (R5(y,\beta))^2\right]dy$$

$$I(\alpha,\beta,\gamma) := I1(\alpha,\beta,\gamma) + I2(\alpha,\beta) + I3(\alpha,\beta)$$

$i := 1..N$

$\alpha_i := 0.1$ $\quad\beta_i := 0.1$ $\quad\gamma_i := 0.1$

Given

$$u(x,y,\alpha) := \frac{(x^2+y^2-1)\cdot(9-y^2)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\alpha_i\cdot\left[(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2\right]\right] \qquad u(-5,0,\alpha) \geq 0.9$$

$$\int_{-3}^{3} u(-5,y,\alpha)\,dy = \int_{-3}^{-1} u(0,y,\alpha)\,dy + \int_{1}^{3} u(0,y,\alpha)\,dy = \int_{-3}^{3} u(5,y,\alpha)\,dy$$

$S := \text{Minimize}(I,\alpha,\beta,\gamma)$

$\alpha := S_1$ $\quad\beta := S_2$ $\quad\gamma := S_3$

$$v(x,y,\beta) := \frac{\left(x^2+y^2-1\right)\cdot\left(9-y^2\right)}{216}\cdot\sum_{i=1}^{N}\left[\beta_i\cdot\left[\left(x-\xi_i\right)^2+\left(y-\eta_i\right)^2\right]\right]$$

$$p(x,y,\gamma) := \sum_{i=1}^{N}\left[\gamma_i\cdot\left[\left(x-\xi_i\right)^2+\left(y-\eta_i\right)^2\right]\right]$$

	α	β	γ
1	0.015	-0.021	0.011
2	0.315	-0.053	-0.005
3	0.005	0.004	0.011
4	-0.019	-0.021	-0.005
5	0.015	0.005	0.011
6	-0.028	-0.022	-0.006
7	-0.002	0.009	0.011
8	-0.079	-0.01	-0.008
9	-0.01	0.01	0.01
10	-0.096	-0.01	-0.011
11	-0.01	0.008	0.01
12	-0.078	-0.018	-0.013
13	-0.002	0.006	0.009
14	-0.027	-0.023	-0.015
15	0.015	0.004	0.008
16	0.313	-0.025	-0.016
17	0.005	0.005	0.008
18	-0.019	-0.034	-0.016
19	0.015	0	0.008
20	-0.029	-0.012	-0.015
21	-0.002	0.012	0.009
22	-0.081	0.014	-0.013
23	-0.011	0.016	0.01
24	-0.098	0.014	-0.01
25	-0.011	0.014	0.01
26	-0.081	0.004	-0.008
27	-0.003	0.012	0.011
28	-0.03	0.026	-0.006
29	-0.02	0.027	0.01
30	-0.121	0.079	-0.011
31	-0.02	0.032	0.01
32	-0.126	0.068	-0.01

$$U(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y,\alpha) \\ v(x,y,\beta) \end{pmatrix}$$

$xlow := -5$ $\qquad$ $xhigh := 5$

$xn := 10$

$ylow := -3$ $\qquad$ $yhigh := 3$

$yn := 6$

$i := 1..xn$

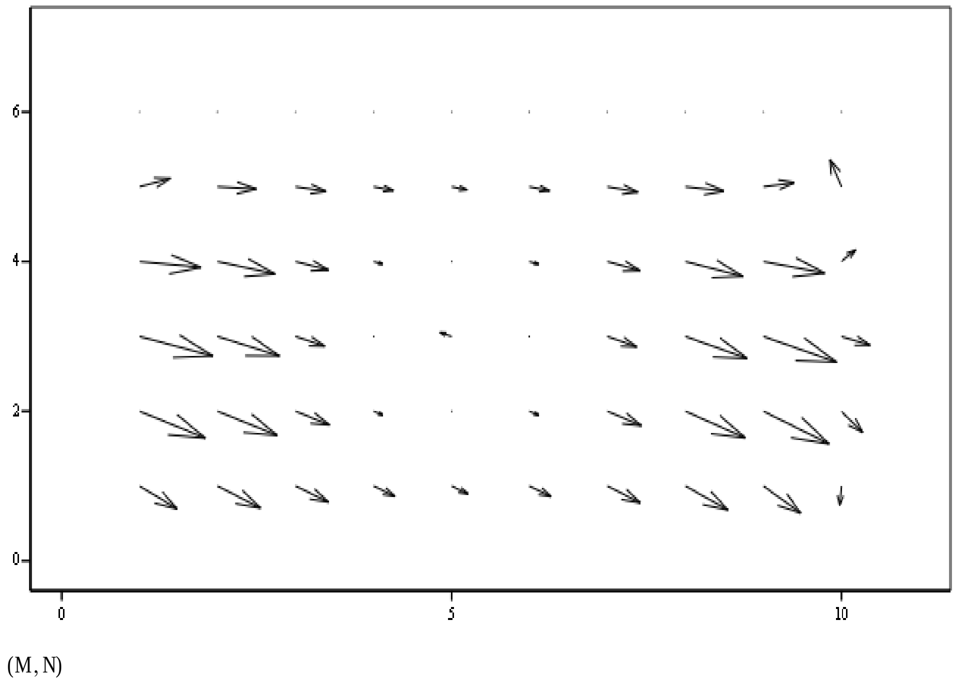
$$xind_i := xlow + i \cdot \frac{xhigh - xlow}{xn}$$

$j := 1..yn$

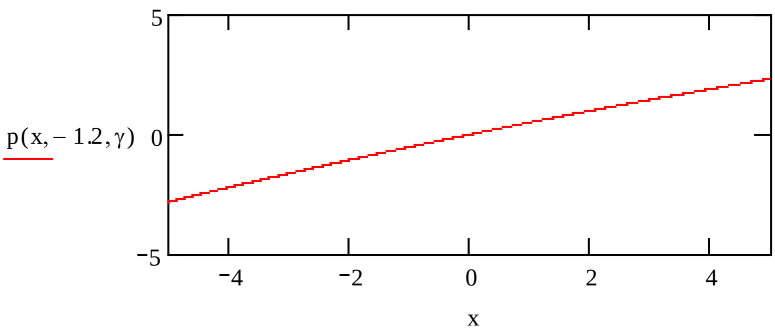
$$yind_j := ylow + j \cdot \frac{yhigh - ylow}{yn}$$

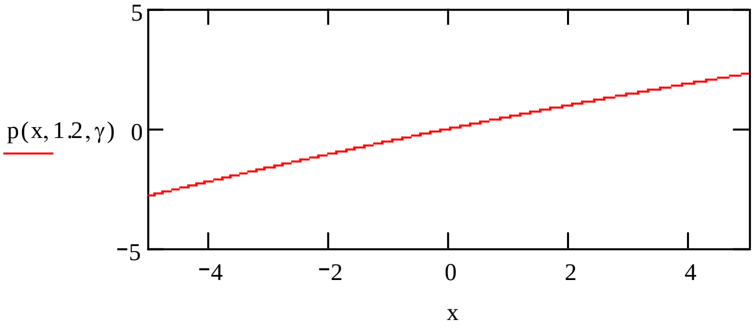
$F_{i,j} := U(xind_i, yind_j)$

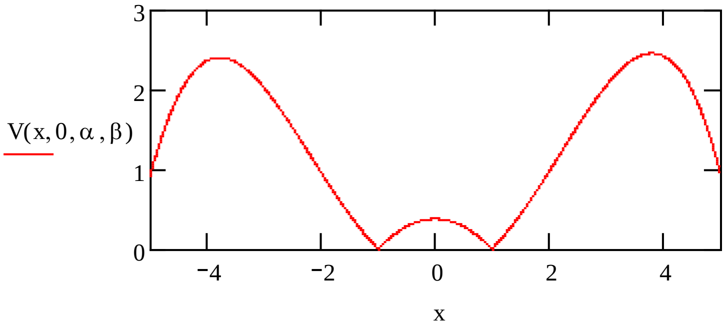
$M_{i,j} := (F_{i,j})_1$ $N_{i,j} := (F_{i,j})_2$

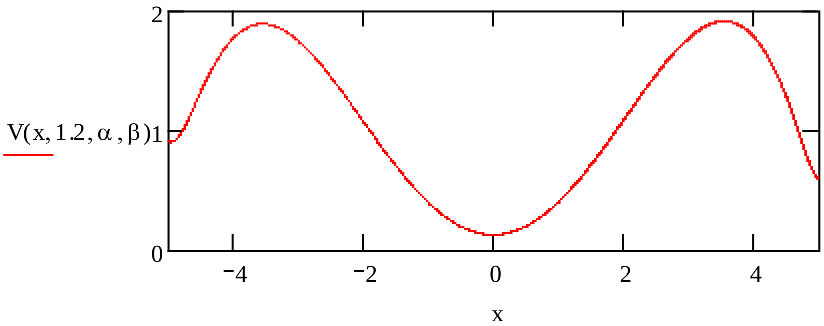


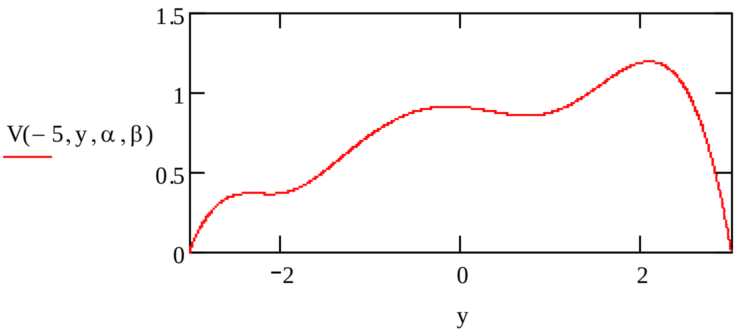
$V(x,y,\alpha,\beta) := \sqrt{u(x,y,\alpha)^2 + v(x,y,\beta)^2}$

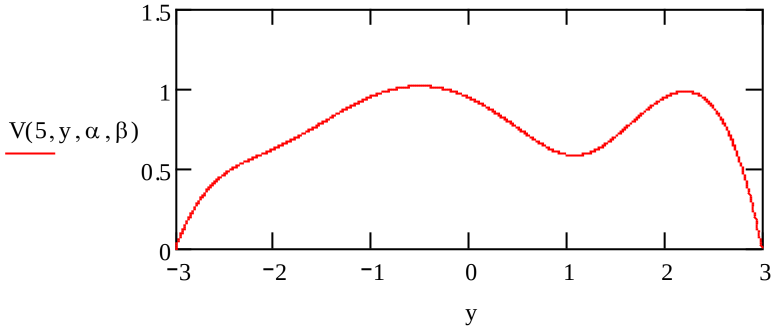


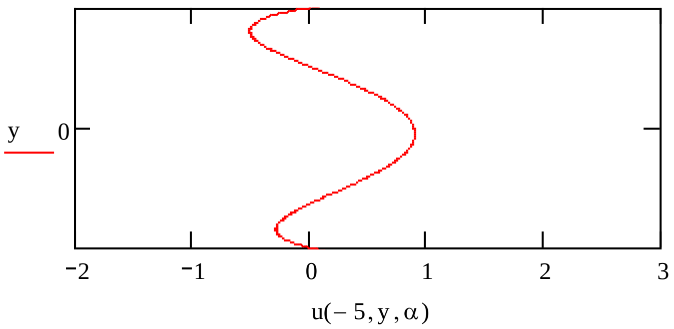

p(x, 1.2, γ)
5
0
−5
−4
−2
0
2
4
x

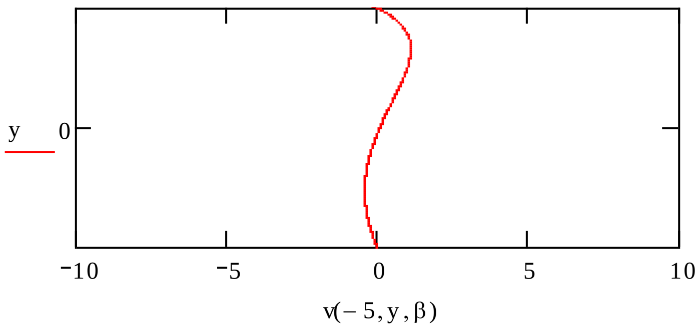

V(x, 0, α , β)
3
2
1
0
−4
−2
0
2
4
x

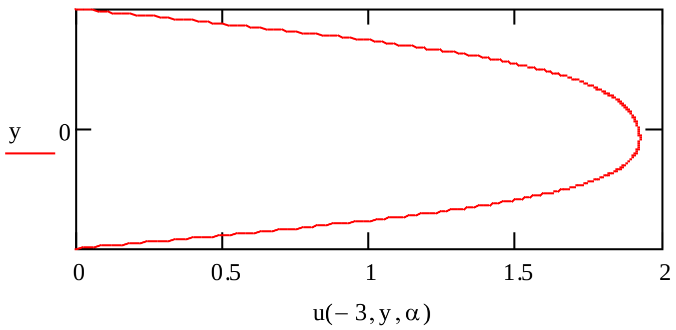

V(x, 1.2, α , β)
2
1
0
−4
−2
0
2
4
x

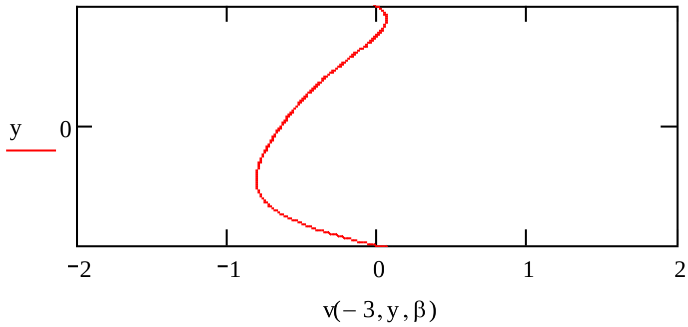

V(− 5, y , α , β)
1.5
1
0.5
0
−2
0
2
y

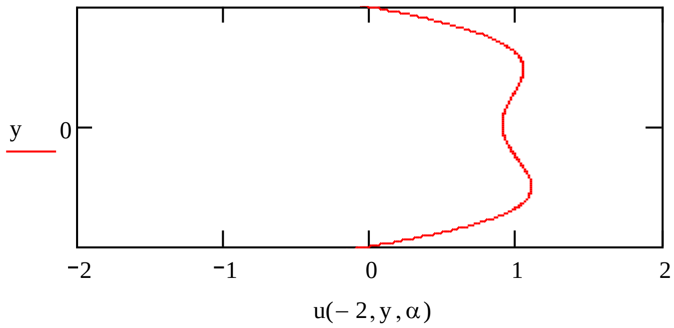

1.5
1
0.5
0
V(5, y, α, β)
−3
−2
−1
0
1
2
3
y

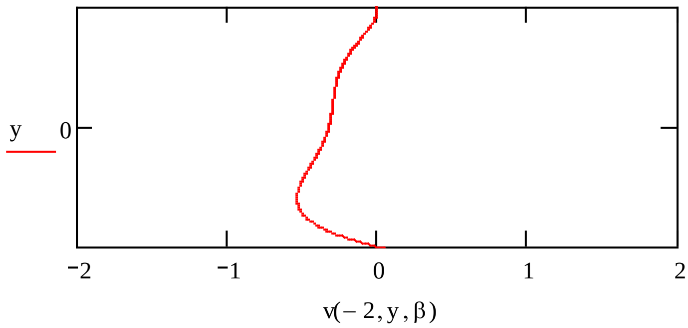

y
0
−2
−1
0
1
2
3
u(− 5, y, α)

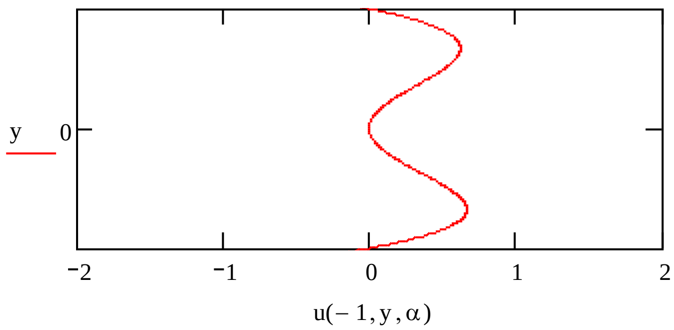

y
0
−10
−5
0
5
10
v(− 5, y, β)

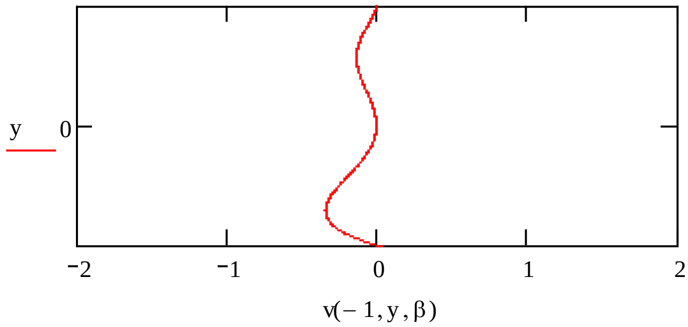

y
0
0
0.5
1
1.5
2
u(− 3, y, α)

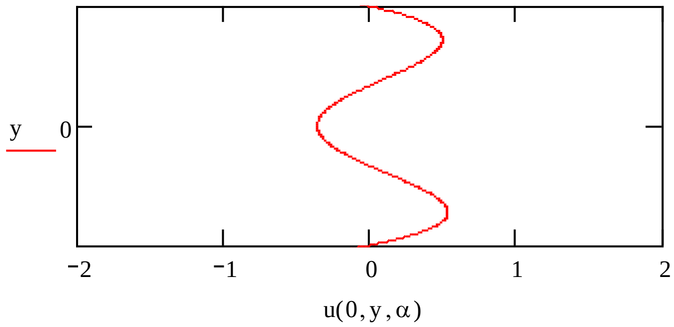

y
0
−2
−1
0
1
2
v(− 3, y, β)

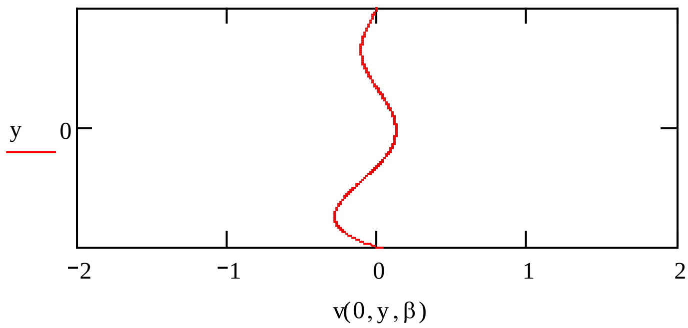

y
0
−2
−1
0
1
2
u(− 2, y, α)

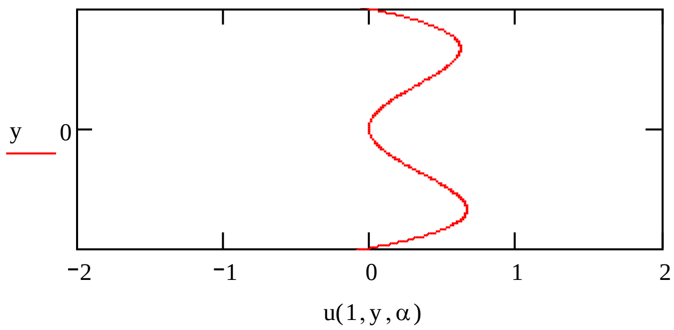

y
0
−2
−1
0
1
2
v(− 2, y, β)

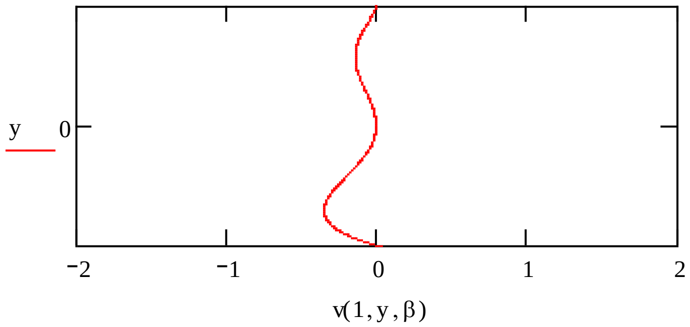

y
0
−2
−1
0
1
2
u(− 1, y, α)

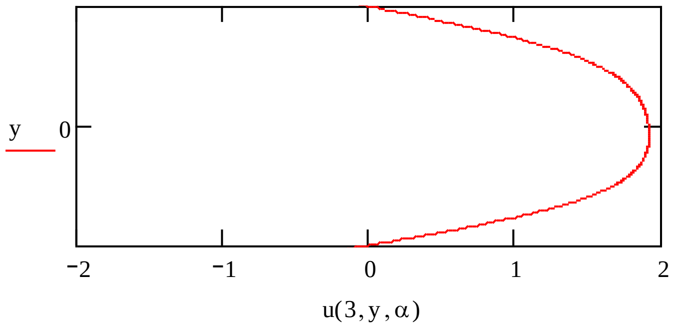

y
0
−2
−1
0
1
2
v(− 1, y, β)

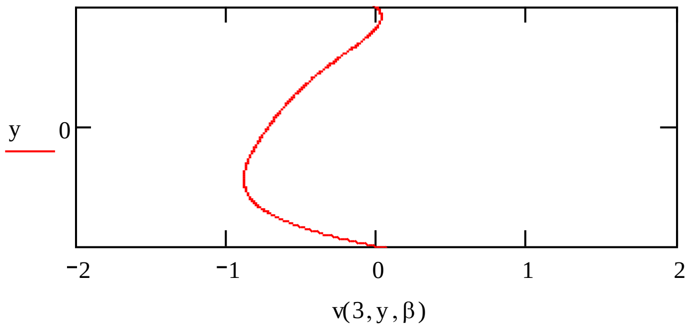

y
0
−2
−1
0
1
2
u(0, y, α)

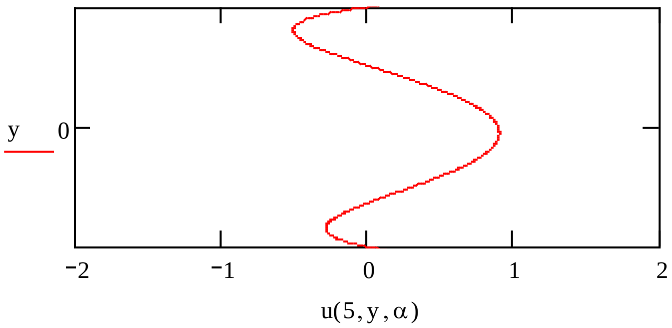

y
0
−2
−1
0
1
2
v(0, y, β)

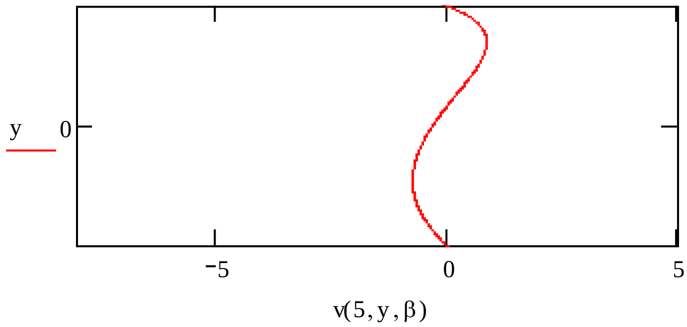

y
0
−2
−1
0
1
2
u(1, y, α)


y
0
−2
−1
0
1
2
v(1, y, β)


y
0
−2
−1
0
1
2
u(3, y, α)


y
0
−2
−1
0
1
2
v(3, y, β)


y
0
−2
−1
0
1
2
u(5, y, α)



როგორც გათვლის შედეგები გვიჩვენებს, $\boldsymbol{RO}$–მეთოდი კარგად ასახავს დინების ფიზიკურ სურათს, თუმცა რჩება არაერთი სიძნელე, რომელიც დაკავშირებულია მრავალი ცვლადის ცდომილების ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან, როცა ცვლადთა რაოდენობა საკმაოდ დიდია.

ცვლადთა რაოდენობა იზრდება იმის მიხედვით, თუ რამდენად დიდია $\boldsymbol{G}$ არის დიამეტრი, თუ გადავსახავთ ამ არეს მცირე ზომის $\boldsymbol{G'}$ არეზე, მაშინ რეგულარულ წყაროთა შორის მანძილები იქნება გათვლების ცდომილების ზღვარზე. ამიტომ, ცალკე პრობლემაა ოპტიმალური $\boldsymbol{G'}$ არის პოვნა.

ლიტერატურა

1.**Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике, пер. с англ., Мир, Москва,1985,

2.**Заманский М.** Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М., 1974,

3.**Пизо Ш., Заманский М.** Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971,

4.**Шварц Л.** Анализ,. Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, М., 1972,

5.**Картан А.** Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, М., 1971,

6.**Рудин У.** Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, М., 1966,

7.**Марчук Г.И.,Агошков В.И**. Введение в проекционно-сеточные методы, Наука, М., 1981,

8.**Галёркин Б.Г**. Вестник инженеров, №19, Санкт-Петербург, 1915,

9.**Finlayson B.A.,Scriven L.E.** Appl.Mech. Rev.,v.19, 1966,

10.**Finlayson B.A.** The method of weighted residuals and variacional principles.New York: Academic Press, 1972,

11.**Чебышев П.Л.** Полное собрание сочинений, том 2, математический анализ, Москва-Ленинград, 1947,

12. **Обгадзе Т.А.,Прокошев В.Г**. Вычислительная физика, ВлГУ, Владимир, 1999,

13.**Fletcher C.A.** Burger's equation: a model for all reasons. In: Numerical solution of partial differential equations. Ed. J.Noye. North-Holland, 1982,

14.**Додд Р.,Эйлбек Дж.,Гиббон Дж.,Моррис Х**. Солитоны и нелинейные волновые уравнения, пер. с англ., Мир, М., 1988,

15.**Рвачёв В.Л.** Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982,

16. **Обгадзе Т.А.** Применение методов R – функций и Ψ – преобразования для решения операторных уравнений, Сообщения АН ГССР, т.136, №1, 1989,

17. **Обгадзе Т.А**. Об одном методе решения задач теории обтекания тел вязкой жидкостью, Сборник науч. трудов ГПИ им. В.И. Ленина, сер. МСС, №6(262), Т., 1983,

18. **Обгадзе Т.А**. Элементы математического моделирования, Учебное пос., министерство высшего и среднего образования ГССР, ГПИ,1989,

19. **Мироновский Л.А.** Моделирование разностных уравнений, учебное пос., Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, 2004,

20. **Флетчер К.** Численные методы на основе метода Галёркина, пер. с англ., Мир, М., 1988,

21. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), ტომი 1, სტუ, თ., 2006,

22. **ობგაძე თ., ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (ეკონომიქსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე, ტომი 2, სტუ, თ., 2007,

23. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (მაგისტრანტებისათვის), ტომი 3, სტუ, თ., 2008,

24. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (რხევითი პროცესები), ტომი 4, სტუ, თ., 2010,

25. **ობგაძე თ., ბიჩენოვი ნ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (სოციალურ-ეკონომიკური პროცესები), ტომი 5, სტუ, თ., 2012,

26. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირების კურსი, (დინამკური პროცესები და ქაოსი), ტომი 6, სტუ, თ., 2013,

27. **ობგაძე თ.** მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თ., 2016,

28. **ობგაძე თ., თუშიშვილი ნ., მუხაშავრია ს., გურგენიძე ლ., ვარძიაშვილი ნ.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები, დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 1, სტუ, თ., 2014,

29. **ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები (დიფერენცირებად მრავალსახეობათა ლოკალური გეომეტრია), დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 2, სტუ, თ., 2015,

30. **ობგაძე თ., ფრანგიშვილი ა., ტრუსკინოვსკი ა.** ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები (ფრაქტალები), დამხმარე სახელმძღვანელო, ტომი 3, სტუ, თ., 2016,

31. **Van Dyke M.** An album of fluid motion, Stanford, California,1982,

32. **Пейре Р.,Тейлор Томас Д**. Вычислительные методы в задачах механики жидкости, пер. с англ.,Ленинград, 1986,

33. **Kupradze V.D.** Method of potential in theory of elasticity. – M., Physmathgiz, 1963,

34. **Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C**. Boundary Element methods. Theory and Applications in Engeneering. Springer-Verlag, 1984,

35. **Brebbia C.A.** The bondary element method for engineers. Pentech Press , London , Holstead press, New York , 1978,

36. **Temam R.** Navier-Stokes equation, theory and numerical analysis, North Holland, 1975,

37. **Франк А.М.** Дискретные модели несжимаемой жидкости, М.,2001,

38. **Шарма Дж.Н.,Сингх К**. Уравнения в частных производных для инженеров, пер. с англ., М.,2002.

შინაარსი

ᲝᲑᲒᲐᲫᲔ ᲗᲐᲛᲐᲖ ᲐᲑᲔᲡᲐᲚᲝᲛᲘᲡ ᲫᲔ დაიბადა 1955 წლის 5 აპრილს თბილისში. განათლება: თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტი (1974); მიზნობრივი წესით გაიგზავნა სასწავლებლად მოსკოვის მ.ვ. მ.ვ.ლომონოსოვის სახ. სახელმწიფო უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტზე, აერომექანიკისა და გაზის დინამიკის კათედრა, კვალიფიკაცია მექანიკოსი, ინჟინერ-მათემატიკოსი (1979). კარიერა: საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის გამოთვლითი ცენტრის სტაჟიორ-ლაბორანტი, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის ასისტენტი საათობრივი ანაზღაურებით (1980-1987); საქართველოს მეცნიერებათა აკადემიის კ.ზავრიევის სახ. სამშენებლო მექანიკისა და სეისმომედეგობის ინსტიტუტის სივრცული კონსტრუქციების განყოფილების ინჟინერი, საქართველოს საგეგმო კომიტეტის გამოთვლითი ცენტრის უმცროსი, უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის ასისტენტი საათობრივი ანაზღაურებით (1983-1985); ინსტიტუტ “ვოდგეოს” თბილისის წყალთა მეურნეობის განყოფილების უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის, უმაღლესი მათემატიკის კათედრის უფროსი მასწავლებელი (1987-1988), საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის დოცენტი, პროფესორ-მასწავლებელთა კვალიფიკაციის ამაღლების ფაკულტეტის დეკანის მოადგილე სამეცნიერო ნაწილში (1988-1990); **საქართველოს რესპუბლიკის პირველი მოწვევის უზენაესი საბჭოს წევრი: საარჩევნო ბლოკი “მრგვალი მაგიდა – თავისუფალი საქართველო”, საგარეო ურთიერთობათა კომისიის მდივანი; ხელი აქვს მოწერილი საქართველოს დამოუკიდებლობის აღდგენის აქტზე (1991 წლის 9 აპრილი).** ახალგორის კერძო უნივერსიტეტის დამფუძნებელი (1992-1997); საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის პროფესორ-მასწავლებელთა დახელოვნების ცენტრის დირექტორის მოადგილე (1991-1995). **საქართველოს რესპუბლიკის პარლამენტის წევრი (1992-95): კომპენსაციის სიით, მერაბ კოსტავას საზოგადოება, განათლებისა და მეცნიერების კომისია.** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის თვითმფრინავმშენებლობის, ავტომატიკისა და ტელემექანიკის კათედრების პროფესორი (1995-1996); საქართველოს საგადასახადო სამსახურის მსხვილგადამხდელთა ინსპექციის გადამხდელთა მომსახურების განყოფილების მთავარი ინსპექტორი (1996-1997). ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამოყენებითი მათემატიკისა და თეორიული ფიზიკის კათედრის პროფესორი, ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიური უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის მიწვეული პროფესორი, ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტის თეორიული და გამოყენებითი მექანიკის კათედრის გამგე (1997-2000); მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის წარმომადგენლობის დირექტორი, მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტის პრორექტორი სამეცნიერო ნაწილში, მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტის მათემატიკური და ინფორმაციული უზრუნველყოფის კათედრის გამგე, მოსკოვის ჰუმანიტარული უნივერსიტეტის უმაღლესი მათემატიკის კათედრის პროფესორი (2000-2003); საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მართვისა და ავტომატიზაციის კათედრის სრული პროფესორი, ს/ს “თბილავიამშენის” საკონსტრუქტორო ბიუროს თვითმფრინავის ფრთის აეროდინამიკური გათვლების განყოფილების ხელმძღვანელი, სასწავლო ცენტრის დირექტორი (2003-2007); საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის, ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის საინჟინრო კიბერნეტიკის დეპარტამენტის ხელმძღვანელი (2007-2013). საქართველოს ეროვნული აკადემიისა (1986) და საინჟინრო აკადემიების (2011) აკადემიკოსი. არჩეულია რუსეთის ბიოფიზიკოსთა საზოგადოების წევრად (2002); დაიცვა **საკანდიდატო დისერტაცია** თემაზე: “დატვირთვების განსაზღვრა, სელურ ნაკადში მოთავსებულ საინჟინრო ნაგებობებზე” (მოსკოვი-1985); **სადოქტორო დისერტაცია** თემაზე: “ზვავური ტიპის ნაკადების მათემატიკური მოდელირება და განმსაზღვრელი პარამეტრების იდენტიფიკაცია” (თბილისი-1995); 15 სახელმძღვანელოს და 5 მონოგრაფიის, 138 სამეცნიერო ნაშრომის ავტორი. აღზრდილი ყავს 11 მეცნიერებათა დოქტორი და 15 მაგისტრი.