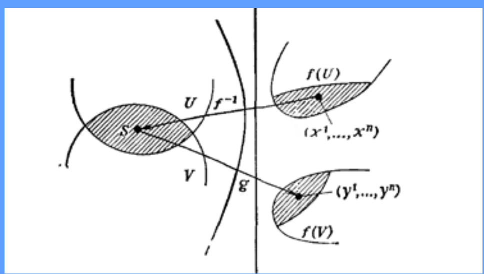
თ.ობგაძე, ა.ფრანგიშვილი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

დამხმარე სახელმძღვანელო

II ტომი

$$dA = d\left(A_{j_1\cdots j_p}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p}\right) = dA_{j_1\cdots j_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_p}$$



$$u_t + uu_x = u_{xx}$$

$$u_t + uu_x = u_{xxx}$$

$$e^{j_1 j_2\cdots j_s}_{i_1 i_2\cdots i_r} = e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_s}$$

$$R^j_{inm} = \Gamma^j_{im,n} - \Gamma^j_{in,m} + \Gamma^j_{kn}\Gamma^k_{im} - \Gamma^j_{km}\Gamma^k_{in}$$

$$AT(X_1,\ldots,X_s) = \frac{1}{s!}\sum_{j_1,\ldots,j_s} sgn(j_1,\ldots,j_s)\,T\left(X_{j_1},\ldots,X_{j_s}\right)$$

$$S^{ij}_{k;l} = S^{ij}_{k,l} + S^{mj}_k\Gamma^i_{ml} + S^{im}_k\Gamma^j_{ml} - S^{ij}_m\Gamma^m_{kl}$$

$$Z^j_{;kl} - Z^j_{;lk} = -R^j_{lkl}Z^l + T^n_{kl}Z^j_{;n}$$

$$R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right), \qquad \left(T = g^{ij}T_{ij}\right)$$

„ტექნიკური უნივერსიტეტი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თამაზ ობგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები
(დიფერენცირებად მრავალსახეობათა ლოკალური გეომეტრია)

დამხმარე სახელმძღვანელო

II ტომი

2015
თბილისი

უაკ 517.958

დამხმარე სახელმძღვანელოს საფუძვლად დაედო ავტორების მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევის შედეგები. იგი სავსებით შეესაბამება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს. მოიცავს ცოცხალი სისტემის ანალიზის ძირითად მათემატიკურ მეთოდებს. ცოცხალ სისტემაში შედის როგორც ფიზიკური, ისე სოციალურ-ეკონომიკური, ფინანსური და პოლიტიკური სისტემები.

ამ ტომში განხილულია ცოცხალი სისტემის შესაბამისი დიფერენციალური სტრუქტურების პრაქტიკული გამოყენების თავისებურებები; ცოცხალი სისტემის კვლევის ალგებრულ-გეომეტრიული მეთოდები; ტოპოლოგიური ჯგუფები; ლის ალგებრები, კარტანის დიფერენციალური ფორმები; ტენზორები, დიფერენცირებადი მრავალსახეობები და მათი კონკრეტული გამოყენების მეთოდები; რიმანის გეომეტრია და აინშტაინის განტოლებები.

ნაშრომი განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მაგისტრატურისა და დოქტორანტურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტები: პროფ. ზურაბ გასიტაშვილი,

პროფ. ზურაბ წვერაიძე

ISBN 978-9941-20-470-8 (ყველა ნაწილი)
ISBN 978-9941-20-580-4 (მეორე ნაწილი)

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებულ ნაშრომ **"ცოცხალი სისტემის ანალიზის მეთოდების" -** სხვადასხვა ნაწილს, პროფესორი თამაზ ობგაძე, წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში, მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში, მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდური მითითებებისადმი მიდგომა წარმოადგენს ავტორების სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. დამხმარე სახელმძღვანელოში ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტზე, ამჟამად მოქმედი პროგრამების საგანთა მთელი წყების რთული ნაწილები, გაღრმავებულადაა გადმოცემული.

ნაშრომში ფართოდ გამოიყენება არსებული გამოყენებითი პროგრამების პაკეტები. დამხმარე სახელმძღვანელოს ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია დამოუკიდებლად შესასრულებელი სავარჯიშოები და ლიტერატურის სია.

უნდა აღინიშნოს, რომ საქართველოში ჩატარებული განათლების რეფორმის შედეგად, ისე გამარტივდა მათემატიკის ზოგადი კურსის პროგრამა და იმდენად შემცირდა საათების რაოდენობა, რომ საჭირო გახდა მოცემულ სახელმძღვანელოში შეგვეტანა მათემატიკის რამოდენიმე საკითხი, რათა შეგვემზადებინა სტუდენტები უფრო რთული, სპეციალური საკითხების ასათვისებლად. დამხმარე სახელმძღვანელოს **პირველ ტომში** განვიხილეთ *ბულის ალგებრების კატეგორია, რაც საშუალებას იძლევა ავაგოთ და შევისწავლოთ სალაპარაკო ენის ფორმალიზებული მოდელები. განვიხილეთ რიცხვითი და ფუნქციონალური სიმრავლეები რათა შევძლოთ ცოცხალ სისტემებთან დაკავშირებული დინამიკური სისტემების ანალიზი; შევისწავლეთ დინამიკური სისტემისა და ქაოსის კვლევის კლასიკური მეთოდები.*

შესავალი

ცოცხალი სისტემა თვითორგანიზებადი და თვითწარმოქმნადი გარე სამყაროსთან ურთიერთქმედი სისტემაა, რომელსაც ახასიათებს ცოცხალი ორგანიზმის თვისებები.

არსებობს აზრი, რომ ადამიანებისაგან შემდგარ სისტემას, როგორიცაა სოციალური ან ეკონომიკური სისტემები, ახასიათებს ცოცხალი ორგანიზმის ანალოგიური მრავალი თვისება. ეს ცოცხალი ორგანიზმი არის ორგანიზმი, თავისი უჯრედებით, ნივთიერებათა ცვლით და ნერვული სისტემით. მასში თითოეულ საზოგადოებრივ ინსტიტუტს აქვს თავისი დანიშნულება ორგანიზმის სიცოცხლისუნარიანობის შენარჩუნებაში. მაგალითად, არმია მოქმედებს, როგორც ორგანიზმის იმუნური სისტემა, რათა დაიცვას ქვეყანა უცხოთა შემოჭრისაგან, ხოლო მთავრობა ასრულებს ტვინის ფუნქციას, რათა მიიღოს გადაწყვეტილება და მართოს პროცესები. ეს აზრი, პირველად გაჟღერდა ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, **არისტოტელეს** მიერ.

ასეთ სისტემაში, პროცესები დეცენტრალიზებულია, შეუძლებელია მისი პროგნოზი და მუდმივად იცვლება. რთული ადაპტირებული მოქმედება ხორციელდება ორგანიზმის სხვადასხვა ავტონომიური კომპონენტის ურთიერთქმედების ხარჯზე.

ყოველივე ამან მიგვიყვანა იქამდე, რომ ცოცხალი ორგანიზმის მსგავსი სისტემისათვის 1978 წელს ჩამოყალიბდა **ცოცხალი სისტემის ზოგადი თეორია**, რომლის ავტორიც არის **ჯეიმს მილერი**.

ზემოთქმულიდან, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ **ცოცხალი სისტემა წარმოადგენს ღია, თვითრეგულირებად და თვითწარმოქმნად სისტემას, რომელსაც მულტიფრაქტალური სტრუქტურა აქვს**.

ამ წიგნში განვიხილავთ ცოცხალი სისტემის კვლევის ალგებრულგეომეტრიულ მეთოდებს: ***ტოპოლოგიურ ჯგუფებს; ლის ალგებრებს, დიფერენციალურ ფორმებს, ტენზორებს, დიფერენცირებად მრავალსახეობებს და მათი გამოყენების კონკრეტულ მეთოდებს; რიმანის გეომეტრიას და აინშტაინის განტოლებებს.***

ამ აპარატს დიდი მნიშვნელობა აქვს ისეთი ცოცხალი სისტემების შესწავლისას, როგორიცაა დედამიწა და კოსმოსი; მიკროკოსმოსი და რელატივისტური თეორია; ეკონომიკა და სოციუმი, ფსიქიკური და ქვეცნობიერი.

I თავი. ძირითადი მათემატიკური ცნებები

შესავალი

დიდი ხანია, რაც ცოცხალი სისტემის ანალიზის მეთოდები გასცილდა „ჩვეულებრივ“, კლასიკურ ანალიზს და მოიცვა თანამედროვე ალგებრისა და გეომეტრიის მეთოდები. ჩვენ განვიხილავთ დიფერენციალური გეომეტრიის იმ მეთოდებს, რომლებიც დღეს უკვე სამუშაო აპარატს ქმნიან ცოცხალი სისტემის შესწავლისას. ფართო გამოყენება აქვს ტოპოლოგიური ჯგუფების ტექნიკას. განსაკუთრებით ლის ალგებრებსა და ჯგუფებს, ტენზორებს, დიფერენციალურ ფორმებს, დიფერენცირე-ბადი მრავალსახეობების თეორიას, რიმანის გეომეტრიას. სწორედ ამ საკითხებს ეძღვნება ეს წიგნიც. ამ თავში განვიხილავთ იმ ძირითად მათემატიკურ ცნებებს, რომლებიც შემდეგ, ცოცხალი სისტემის ახალი გეომეტრიული მეთოდების გადმოსაცემადაა აუცილებელი.

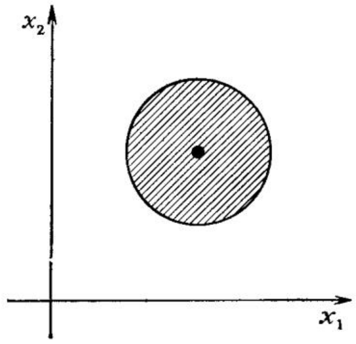
1.1. $\mathbb{R}^n$ სივრცე და მისი ტოპოლოგია

$\mathbb{R}^n$ სივრცე არის ჩვეულებრივი ვექტორული ალგებრის n–გან-ზომილებიანი სივრცე; ამ სივრცეში წერტილს, შეესაბამება n ნამდვილი რიცხვი $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. *ინტუიციურად* ვთვლით, რომ ეს ***უწყვეტი*** სივრცეა: ამ სივრცის ნებისმიერი წერტილისათვის არსებობენ მასთან, რაგინდ ახლომდებარე წერტილები, ასევე, ნებისმიერ ორ წერტილთან ერთად, ეს სივრცე შეიცავს ამ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთსაც. არსებობენ *დისკრეტული სივრცეებიც*. უწყვეტობის ცნება ზუსტ აზრს იძენს მისი **ტოპოლოგიის** შესწავლისას. მათემატიკაში «ტოპოლოგიის» ცნებას ორგვარი ინტერპრეტაცია აქვს. ჩვენ განვიხილავთ «ლოკალურ ტიპოლოგიას». მისგან განსხვავებით, არსებობს «გლობალური ტოპოლოგიაც» რომელიც, შეისწავლის მთლიანი სივრცის თვისებებს, მაგალითად, იმ თვისებებს, რომლებიც განასხვავებენ სფეროს ტორისაგან. გლობალურ ტოპოლოგიაზე ვისაუბრებთ მოგვიანებით, დიფერენციალური ფორმების განხილვისას. აქ კი განვიხილავთ *ლოკალური ტოპოლოგიის* ძირითად ცნებებს.

აქ ძირითადი ცნებაა $\mathbb{R}^n$ სივრცის **წერტილის მიდამოს** ცნება. ამ ცნების შემოსატანად გვჭირდება სივრცის ორ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ წერტილს შორის მანძილის ცნება:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}^n$ სივრცის x **წერტილის მიდამო** ეწოდება ამ სივრცის იმ $N_r(x)$ წერტილების სიმრავლეს, საიდანაც x წერტილამდე მანძილი ნაკლებია მოცემულ r რიცხვზე. **მაგალითად**, $\mathbb{R}^2$ სივრცის შემთხვევაში x წერტილის მიდამო წარმოადგენს r - რადიუსიანი წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილების სიმრავლეს, რომლის ცენტრიც x წერტილშია ნახ. 1.1



ნახ. 1.1. $\mathbb{R}^2$ სივრცის შემთხვევაში x წერტილის მიდამო წარმოადგენს r - რადიუსიანი წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილების სიმრავლეს, რომლის ცენტრიც x წერტილშია

ახლა, უკვე შეგვიძლია *სივრცის უწყვეტობის ცნების* უფრო ზუსტად ჩამოყალიბება. $\mathbb{R}^n$ სივრცის *წერტილების სიმრავლეს* ეწოდება *დისკრეტული,* თუ მის ყოველ წერტილს აქვს ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს ამ სიმრავლის სხვა წერტილებს. ცხადია, რომ თვითონ $\mathbb{R}^n$ სივრცე არაა დისკრეტული. ამბობენ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის რაიმე S წერტილების **სიმრავლე ღიაა,** თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერ x წერტილს აქვს ისეთი მიდამო, რომელიც *მთლიანად ეკუთვნის S სიმრავლეს.* ცხადია რომ დისკრეტული სიმრავლე არ არის ღია და მას აღარ გამოვიყენებთ. ღია სიმრავლის მარტივი მაგალითია $\mathbb{R}^1$ სივრცის ისეთი x წერტილე-ბის სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a < x < b$.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერ ორ წერტილს აქვს ისეთი მიდამოები, რომლებიც ერთმანეთს არ კვეთენ (თუმცა მათ ისეთი მიდამოებიც აქვთ, რომლებიც იკვეთებიან, მაგრამ, თუ საკმაოდ შევამცირებთ მათ რადიუსებს, შეგვიძლია მივაღწიოთ იმას, რომ ისინი აღარ გადაიკვეთონ). ამ თვისებას $\mathbb{R}^n$ სივრცის **განცალებადობას** (ანუ **ხაუსდორფობას**) უწოდებენ. არსებობს **არაგანცალებადი სივრცეც**, მაგრამ ჩვენი მიზნებისათვის იგი არ გამოდგება, ამიტომ მას არ განვიხილავთ.

ამრიგად, შემოვიღეთ $\rho(x, y)$ მანძილის ფუნქცია, რამაც საშუალება მოგვცა განგვემარტა წერტილის მიდამოს და, მაშასადამე, ღია სიმრავლის ცნება. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის ტოპოლოგია ***ინდუცირებულია*** $\rho(x, y)$ მანძილის ფუნქციით. რაც იმას ნიშნავს, რომ მანძილის ცნების საშუალებით განისაზღვრება ღია სიმრავლეები $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, რომლებიც აკმაყოფილებენ თვისებებს:

1) თუ S_1 და S_2 ღია სიმრავლეებია, მაშინ მათი თანაკვეთის $S_1 \cap S_2$ სიმრავლეც ღიაა;
2) ნებისმიერი რაოდენობის ღია სიმრავლის გაერთიანება ღიაა.

იმისათვის, რომ პირველი (1) თვისება ძალაში იყოს ნებისმიერი ღია სიმრავლისათვის, ჩავთვალოთ, რომ ცარიელი სიმრავლე ღიაა განსაზღვრების თანახმად.

როგორც ვხედავთ, მანძილის $\rho(x, y)$ ფუნქცია $\mathbb{R}^n$ სივრცეს გადააქცევს **ტოპოლოგიურ სივრცედ**. მანძილის ფუნქციას (*მეტრიკას*) შეიძლება ჰქონდეს სხვანაირი სახეც. ამიტომ ისმის კითხვა: «რამდენადაა დამოკიდებული ინდუცირებული ტოპოლოგია მანძილის ფუნქციის კონკრეტულ სახეზე ?». განვიხილოთ, მაგალითად, ახალი მანძილის ფუნქცია

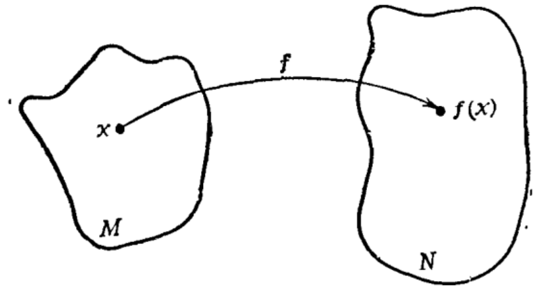
$$\rho'(x, y) = \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 0.5(x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \qquad (1.2)$$

ამ მეტრიკასაც მივყავართ მიდამოსა და ღია სიმრავლის ცნებებამდე; რაც, თავის მხრივ, გვაძლევს ტოპოლოგიურ სტრუქტურას. აქ მთავარია ის, რომ, თუ სიმრავლე ღიაა $\rho'(x, y)$ მეტრიკის პირობებში, მაშინ ის ღიაა $\rho(x, y)$ მეტრიკაშიც და, პირიქით. ასე

რომ, ტოპოლოგიური თვისებები უფრო «უხეშია» მეტრიკულთან შედარებით, ამიტომ მანძილის ფუნქციის კონკრეტულ სახეს არა აქვს პრინციპული მნიშვნელობა. $\rho(x,y)$ მეტრიკით ინდუცირებულ ტოპოლოგიას ბუნებრივ ტოპოლოგიას უწოდებენ. *აქ მთავარია ის, რომ წერტილებს შორის მანძილი რაგინდ მცირე შეიძლება იყოს და სხვადასხვა წერტილს შორის მანძილი არ შეიძლება იყოს ნულის ტოლი.* ზოგჯერ მიდამოს ცნებაც შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა ფორმით და x წერტილის მიდამო ვუწოდოთ მის შემცველ ნებისმიერ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ამ წერტილის მომცველ ღია სიმრავლეს.

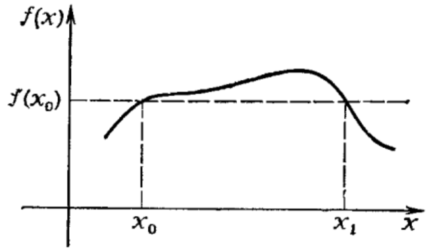
1.2. ასახვა

f ასახვა M სივრციდან N სივრცეში არის f წესი, რომელიც M სივრცის ყოველ x ელემენტს, შეუსაბამებს N სივრცის რომელიღაც ერთადერთ $f(x)$ ელემენტს. ამ შესაბამისობის ნათლად წარმოსადგენად განვიხილოთ ნახ.1.2



ნახ.1.2. ასხვის სქემა $f\colon M \mapsto N$, რომელიც აღნიშნავს შესაბამისობას $x \mapsto f(x)$

ასახვის უმარტივესი *მაგალითია* ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია $\mathbb{R}^{\mathbf{1}}$ სიმრავლეზე. ასეთი ფუნქცია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ნებისმიერ x წერტილს შეუსაბამებს ამავე სიმრავლის $f(x)$ წერტილს. განვიხილოთ ასეთი ფუნქციის გრაფიკული წარმოდგენა ნახ.1.3



ნახ.1.3. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არაურთიერთცალსახა ასახვა თავის თავზე

თუ გვაქვს ასახვა $f\colon M \mapsto N$, მაშინ M სიმრავლის ნებისმიერი $S \subset M$ ქვესიმრავლე აისახება N სიმრავლის რაღაც $T \subset N$ ქვესიმრავლეში, რომელსაც ***S* სიმრავლის სახე** ეწოდება f ასახვისას და აღინიშნება $f(S)$-ით. პირიქით, S სიმრავლეს, რომელიც შედგება T სიმრავლეში ასახული ელემენტებისაგან, T სიმრავლის **წინასახე** ეწოდება და აღინიშნება $f^{-1}(T)$-ით. თუ f ასახვას რამოდენიმე წერტილი გადაჰყავს ერთ წერტილში, მაშინ f^{-1} აღარ იქნება ასახვა, რადგან ის აღარ იქნება ცალსახა. ასე რომ, $f^{-1}(T)$ გამოსახულებას, საზოგადოდ, უნდა შევხედოთ როგორც ერთიან სიმბოლოს, რომელიც აღნიშნავს სიმრავლეს და არა f^{-1} ასახვას. იმ შემთხვევაში, როცა T სიმრავლის ყოველ წერტილს აქვს ერთადერთი წინასახე S სიმრავლეში, ამბობენ რომ f **ინექტური** ასახვაა ანუ არსებობს შებრუნებული ასახვა f^{-1}, რომელიც M სიმრავლის სახეთა სიმრავლეს ასახავს ისევ M სიმრავლეში. ასეთ ასახვებს, ზოგჯერ 1-1 ასახვას უწოდებენ.

1-1 ასახვის მაგალითია საქართველოს გეოგრაფიული რუკა. ამ შემთხვევაში დედამიწის ზედაპირის გარკვეული ნაწილის ყოველი წერტილი აისახება სიბრტყის გარკვეულ წერტილში.

თუ გვაქვს ორი f და g ასახვა, სადაც $f\colon M \longrightarrow N$ და $g\colon N \longrightarrow P$, მაშინ განისაზღვრება ***ასახვათა კომპოზიცია* $g \circ f$,** რომელიც M სიმრავლეს ასახავს P სიმრავლეში $\mathrm{g \circ f\colon M \to P}$. ხსვანაირად რომ ვთქვათ, $\mathrm{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$.

საზოგადოდ, ვსაუბრობთ M სიმრავლის ასახვაზე N **სიმრავლეში**. ხოლო, თუ N *სიმრავლის ყოველ წერტილს აქვს*

წინასახე M *სიმრავლეში, მაშინ ვამბობთ რომ გვაქვს* M სიმრავლის ასახვა N **სიმრავლეზე ანუ სურექცია.** ისეთ ასახვას, რომელიც ერთდროულად ინექციაცაა და სურექციაც, **ბიექცია** ეწოდება.

შემოტანილი ცნებები საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ *უწყვეტი ასახვა* ტოპოლოგიური ენით. ვიტყვით რომ გვაქვს **უწყვეტი ასახვა** $f: M \longrightarrow N$ მოცემულ x წერტილში, თუ N სიმრავლის $f(x)$ ელემენტის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე მოიცავს M სიმრავლის x ელემენტის შემცველი რომელიღაცა ღია სიმრავლის სახეს. იგულისხმება რომ M და N ტოპოლოგიური სივრცეებია (წინააღმდეგ შემთხვევაში უწყვეტობაზე ლაპარაკს აზრი არა აქვს). ვიტყვით რომ $\boldsymbol{f}$ **ასახვა უწყვეტია** $\boldsymbol{M}$ **სიმრავლეზე**, თუ ის უწყვეტია მის ყოველ წერტილში.

მართებულია **თეორემა**: ასახვა $f: M \longrightarrow N$ ***უწყვეტია*** მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ N სიმრავლის ყოველი ღია სიმრავლის წინასახე M სიმრავლეში ღია სიმრავლეა.

რადგან უკვე გავერკვიეთ უწყვეტ ასახვებში, შეგვიძლია განვიხილოთ *ფუნქციათა დიფერენცირებადობის* საკითხებიც.

ვიტყვით, რომ $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ სივრცის რაიმე ღია S სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქცია(ასახვა) არის C^k კლასის, თუ ის უწყვეტია თავის ყველა (k რიგის ჩათვლით) კერძო წარმოებულთან ერთად. კერძო შემთხვევებია: უწყეტ ფუნქციათა კლასი C^0; უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციები C^∞.

თუ ინექტიურ 1-1 ასახვას $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ სივრცის რაიმე ღია M სიმრავლე გადაჰყავს ამავე სივრცის სხვა N ღია სიმრავლეზე, მაშინ ეს ასახვა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ანუ } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ i = \overline{1, n}, \tag{1.3}$$

სადაც $x \in M \wedge y \in N$. თუ ყველა f_i ფუნქცია არის C^k კლასის, მაშინ ამ ასახვას C^k- ასახვა ეწოდება.

C^1-ასახვის ***იაკობის მატრიცა*** ეწოდება $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ კერძო წარმოებულებისაგან შემდგარ მატრიცას. ამ მატრიცის დეტერმინანტს **იაკობიანს** უწოდებენ. მას ზოგჯერ გამოსახავენ შემდეგნაირად:

$$\boldsymbol{J} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \tag{1.4}$$

არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე, თუ მოცემულ x **წერტილში იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ ამ წერტილის მიდამოში ასახვა ბიექციაა (ურთიერთცალსახა ასახვა) და შესაძლებელია** x **წერტილის მიდამოში (1.3) ფორმულების ამოხსნა ძველი ცვლადების მიმართ** $\boldsymbol{x_i = f^{-1}(y)}$.

თუ $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $g_*(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ფუნქციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ფორმულით

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g_*(f_1, f_2, \dots, f_n), \tag{1.5}$$

მაშინ ინტეგრალი g ფუნქციიდან M სიმრავლეზე ტოლია ინტეგ-რალისა g_*J ფუნქციიდან N სიმრავლეზე.

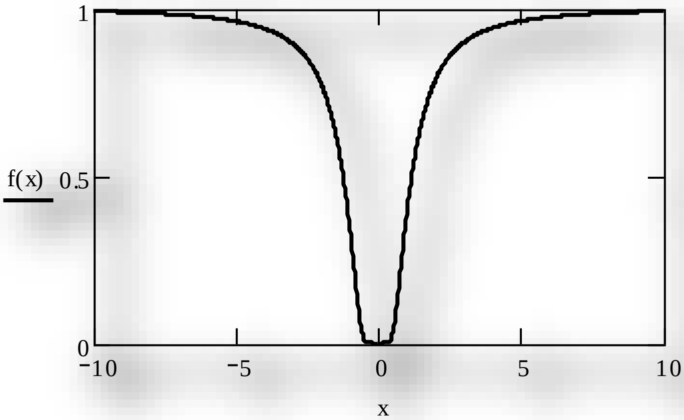
1.3. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორია

ერთი ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება ***ანალიზური*** $x = x_0$ წერტილში, თუ ამ წერტილის მიდამოში არსებობს მისი $f(x)$ ფუნქციისაკენ კრებადი წარმოდგენა ტეილორის მწკრივად:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} + \dots \tag{1.6}$$

ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქციას არა აქვს ყველა რიგის წარმოებული $x = x_0$ წერტილში, მაშინ ის არაა ანალიზური, თუმცა შეიძლება ფუნქცია იყოს C^∞ კლასის, მაგრამ არ იყოს ანალიზური.

მაგალითად, $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. ამ ფუნქციის მნიშვნელობა, ყველა რიგის წარმოებულის მნიშვნელობასთან ერთად $x=0$ წერტილში ნულის ტოლია, თუმცა ნულის ნებისმიერ მიდამოში ის განსხვავდება ნულისაგან ნახ. 1.4



ნახ. 1.4. არაანალიზური ყველგან დიფერენცირებადი C^∞ კლასის $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ ფუნქციის გრაფიკი

მიუხედავად იმისა, რომ ანალიზური C^ω ფუნქციების კლასი საკმაოდ ვიწროა, მათ მაინც დიდი გამოყენება აქვთ ფუნქციონალურ ანალიზში. ეს განპირობებულია იმით, რომ კვადრატით ინტეგრებად L_2 კლასის ყველა $f(x)$ ფუნქციას შეგვიძლია რაგინდ დიდი სიზუსტით (L_2 ნორმით) მივუახლოვდეთ შესაბამისი $g(x)$ ანალიზური ფუნქციით. ანუ ნულთან რაგინდ ახლოს იქნება ინტეგრალი

$$\int (f(x)-g(x))^2 dx \longrightarrow 0. \tag{1.7}$$

ამიტომ, სადაც ეს შესაძლებელია, დიდი სიზუსტით შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიახლოებული ანალიზური C^ω ფუნქციები.

განსაზღვრების თანახმად, **A ოპერატორი $\mathbb{R}^\mathrm{n}$ სივრცეში** განსაზღვრულ f ფუნქციას ასახავს სხვა $A(f)$ ფუნქციაში. მაგალითად, თუ $A(f)=gf$, სადაც g რაიმე ფიქსირებული ფუნქციაა,

მაშინ ეს ოპერატორი აღნიშნავს უბრალოდ გამრავლებას. ოპერატორების სხვა მაგალითებია ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერატორი $D(f) = \frac{\partial f}{\partial x}$ ან ინტეგრირების ოპერატორი მოცემული g გულით $(G(f))(x) = \int_0^x f(y)g(x,y)dy$ ან უფრო რთული ოპერატორი $E(f) = f^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$.

ოპერატორი შეიძლება განსაზღვრული იყოს ყველა f ფუნქციაზე ან შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ***განსაზღვრის არე***. მაგალითად, D ოპერატორი განსაზღვრულია მხოლოდ დიფერენცირებად ფუნქციებზე, ხოლო G არაა განსაზღვრული იმ ფუნქციებზე, რომლებისთვისაც შესაბამისი ინტეგრალი არ არსებობს.

ორი A და B ოპერატორის ***კომუტატორი*** აღინიშნება ასე: $[A, B]$ და განისაზღვრება, როგორც ახალი ოპერატორი, ფორმულით

$$[A, B](f) = (AB - BA)(f) = A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big). \tag{1.8}$$

თუ ორი ოპერატორის კომუტატორი ნულის ტოლია, მაშინ ამბობენ რომ ეს ოპერატორები **კომუტირებენ**. აქ სიფრთხილეა საჭირო ოპერატორების განსაზღვრის არესთან დაკავშირებით. კომუტატორის განსაზღვრის არე შეიძლება უფრო ვიწრო აღმოჩნდეს ვიდრე ცალკეული A და B ოპერატორების. დიფერენციალურ ოპერატორებთან პრაქტიკული მუშაობისას, ხშირად, ხელსაყრელია განსაზღვრის არედ ავიღოთ C^∞ კლასის ფუნქციები და არ შემოვიფარგლოთ განსაზღვრის არეებზე ფიქრით.

1.4. ჯგუფთა თეორია

G სიმრავლის ელემენტების ერთობლიობას, მათზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაციით (აღვნიშნავთ წერტილით) ეწოდება **ჯგუფი,** თუ მართებულია აქსიომები:

ა) *ასოციატიურობა*: ნებისმიერი x, y, z ელემენტებისათვის G სიმრავლიდან

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \tag{1.9}$$

ბ) *მარჯვენა ერთეულის არსებობა*: G შეიცავს ისეთ e ელემენტს, რომ ნებისმიერი სხვა $x \in G$ ელემენტისათვის

$$x \cdot e = x, \tag{1.10}$$

გ) *მარჯვენა შებრუნებულის არსებობა:* ნებისმიერი $x \in G$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $x^{-1} \in G$, რომ

$$x \cdot x^{-1} = e. \tag{1.11}$$

ჯგუფს ეწოდება ***აბელური (კომუტატიური),*** თუ ამას გარდა, ნებისმიერი $x, y \in G$ ელემენტისათვის მართებულია პირობა:

$$x \cdot y = y \cdot x. \tag{1.12}$$

სასრული ჯგუფის სტანდარტული მაგალითია n - ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების **გადანაცვლებათა ჯგუფი**; ორი გადანაცვლების ბინარული კომპოზიცია არის, ამ ორი გადანაცვლების მიმდევრობითი შესრულების შედეგი. ამ ჯგუფში არის $n!$ ელემენტი. *ერთეული ელემენტის როლს ასრულებს ისეთი გადანაცვლება, რომელიც ყველა ელემენტს ადგილზე ტოვებს.*

ჯგუფების განმარტებაში შემავალი აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ e ერთეულოვანი ელემენტი ერთადერთია და ამავე დროს მარცხენა ერთეულიცაა ანუ $e \cdot x = x$; უნდა აღინიშნოს, რომ $x^{-1} \in G$ შებრუნებულიც ერთადერთია და ამავე დროს ის მარცხენა შებრუნებულიცაა ანუ $x^{-1} \cdot x = e$. ზოგჯერ გამრავლების ნიშანს გამოტოვებენ ხოლმე და წერენ, უბრალოდ, xy.

ცოცხალი სისტემისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ***ლის ჯგუფებს***, რომელთაც დეტალურად განვიხილავთ მეორე თავში. ესაა ***უწყვეტი ჯგუფი***: ლის ჯგუფის ყოველი ღია სიმრავლისათვის დასაშვებია 1-1 ასახვა, რომელსაც ის გადაჰყავს n – განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ სივრცის რაიმე ღია სიმრავლეზე. ლის ჯგუფის მაგალითს წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სივრცის ტრანსლაციათა $(x \mapsto x + a)$ ჯგუფი, სადაც $a = const$. ამ a რიცხვის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება ტრანსლაციათა ლის ჯგუფის რომელიღაც ელემენტი. ასე რომ, ტრანსლაციათა ლის ჯგუფი ურთიერთცალსახად აისახება მთელ

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ სივრცეზე. ჯგუფის ოპერაციაა ჩვეულებრივი შეკრება, ორ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ელემენტს შეესაბამება მათი ჯამი

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \tag{1.13}$$

ეს მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ჯგუფის ოპერაცია ყოველთვის არ აღინიშნება ***მულტიპლიკაციური*** " $\cdot$ " სიმბოლოთი. აბელური ჯგუფისათვის, რომლის მაგალითიც უკვე განვიხილეთ უფრო ხელსაყრელია ***ადიტიური*** " $+$ " სიმბოლო.

G ჯგუფის **ქვეჯგუფი** ეწოდება მის ნებისმიერ S ქვესიმრავლეს, რომელიც არის ჯგუფი, მასში შემავალი ელემენტებისათვის G ჯგუფის ბინარული ოპერაციის მიმართ.

წინსართი ქვე ხშირად გვხვდება და მას ვიყენებთ, როცა ლაპარაკია საწყისი სიმრავლის რაიმე ქვესიმრავლის შესახებ, რომელსაც იგივე სტრუქტურა აქვს, რაც საწყის სიმრავლეს (ქვემრავალსახეობა, ლის ქვეჯგუფი, ლის ქვეალგებრა . . .)

ქვეჯგუფი არის ჯგუფი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის ყოველთვის შეიცავს ერთეულოვან ელემენტს.

მაგალითად: *გადანაცვლებათა ჯგუფისათვის ადვილი ასაგებია ქვეჯგუფები; განვიხილოთ* n*– ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტე-ბის* ***გადანაცვლებათა ჯგუფის*** *ისეთი ქვესიმრავლე, რომლის ელემენტებიც არის ისეთი გადანაცვლებები, რომლებიც უძრავად ტოვებენ პირველ ელემენტს. ცხადია, რომ ეს იქნება* n*– ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების* ***გადანაცვლებათა ჯგუფის*** *ქვეჯგუფი; მართლაც, ა) ასეთი ქვესიმრავლის ელემენტებისათვის ბინარული კომპოზიცია ასოციატიურია; ბ) იგივური გარდაქმნა უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს და, მაშასადამე, ის ერთეულოვანი ელემენტია ქვესიმრავლისათვისაც; გ) თუ მოცემული გადანაცვლება უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს, მაშინ მისი შებრუნებულიც უძრავად ტოვებს პირველ ელემენტს. ეს ქვეჯგუფი ემთხვევა* n-1 *- ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფს.*

ადვილი შესამოწმებელია, რომ n *- ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების* ***გადანაცვლებათა ჯგუფის*** *ისეთი ქვესიმრავლე,*

რომელიც შეიცავს მხოლოდ ლუწ გადანაცვლებებს, აგრეთვე ქვეჯგუფია, ხოლო მხოლოდ კენტი გადანაცვლებების შემცველი ქვესიმრავლე არაა ქვეჯგუფი.

ჩვენი წინადადება, რომ n ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფის რომელიღაც ქვეჯგუფი, ემთხვევა n-1-ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების გადანაცვლებათა ჯგუფს, იმას ნიშნავს, რომ ეს ორი ჯგუფი **იზომორფულია**.

ორ G_1 და G_2 ჯგუფს შესაბამისი ბინარული ოპერაციებით "$\cdot$" და "$*$" ეწოდება **იზომორფული**, თუ არსებობს ისეთი 1-1 ასახვა $f: G_1 \to G_2$, რომელიც ინარჩუნებს ჯგუფის ოპერაციას:

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y). \tag{1.14}$$

მაგალითი: ვთქვათ, G_1 არის დადებითი ნამდვილი რიცხვე-ბისაგან შედგენილი ჯგუფი გამრავლების (მულტიპლიკაციური) ოპერაციის მიმართ, ხოლო G_2 არის ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი ჯგუფი შეკრების (ადიტიური) ოპერაციის მიმართ. მაშინ, თუ $\forall x \in G_1$ და $f(x) = logx$, გვექნება ასახვა $f: G_1 \to G_2$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.14) პირობას:

$$\log(xy) = logx + logy. \tag{1.15}$$

ეს ორი ჯგუფი იზომორფულია და f არის იზომორფიზმი.

მეორე მნიშვნელოვანი ცნებაა ***ჯგუფთა ჰომომორფიზმი***. მისი განსაზღვრება ანალოგიურია იზომორფიზმის განსაზღვრებისა, ოღონდ, ამ შემთხვევაში არ მოითხოვება ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), მაგრამ (1.14) თანადობა აუცილებლად უნდა სრულდებოდეს. ჯგუფის თავის თავზე *ტრივიალური* ***ჰომომორფიზ-მი*** არის ისეთი ასახვა, როცა ჯგუფის *ყველა ელემენტი გადადის ერთეულოვან ელემენტში.* ნაკლებად ტრივიალურია – გადანაცვლებათა ჯგუფის ჰომომორფიზმი მულტიპლიკაციურ ჯგუფზე, რომელიც შედგება მხოლოდ ორი ელემენტისაგან $\{1; -1\}$. ამ ფომომორფიზმის დროს, ნებისმიერ ლუწ გადანაცვლებას შეესაბამება 1, ხოლო კენტი გადანაცვლება გადადის -1-ში.

1.5. წრფივი ალგებრა

$\boldsymbol{V}$ სიმრავლეს ეწოდება ვექტორული სივრცე (ნამდვილ რიცხვთა ველის ზემოთ), თუ ის ქმნის *აბელურ ჯგუფს*, მასში განსაზღვრული ადიტიური $"+"$ ოპერაციის მიმართ და, თუ განსაზღვრულია მისი ელემენტების $"\cdot"$ ნამრავლი ნამდვილ რიცხვებზე, რომლებიც აკმაყოფილებენ აქსიომებს:

$$V1)\ a\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=a\cdot\boldsymbol{x}+a\cdot\boldsymbol{y}, \tag{1.16}$$

$$V2)\ (a+b)\cdot\boldsymbol{x}=a\cdot\boldsymbol{x}+b\cdot\boldsymbol{x}, \tag{1.17}$$

$$V3)\ (ab)\cdot\boldsymbol{x}=a(b\cdot\boldsymbol{x}), \tag{1.18}$$

$$V4)\ 1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}. \tag{1.19}$$

ერთეულოვანი ელემენტი $\boldsymbol{V}$ აბელურ ჯგუფში აღინიშნება 0-ით. გარდა ჩვეულებრივი ვექტორების სიმრავლისა, ვექტორული სივრცის **მაგალითებია:**

1) კვადრატული $n\times n$ მატრიცების სიმრავლე, სადაც $"+"$ ოპერაცია ნიშნავს მატრიცების შესაბამისი კომპონენტების შეკრებას, ხოლო მატრიცის $"\cdot"$ გამრავლება ნამდვილ რიცხვზე ნიშნავს, მატრიცის თითოეული ელემენტის გადამრავლებას ამ რიცხვზე;
2) მოცემულ $[a;b]$ შუალედზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე შესაბამისი ოპერაციებით.

როგორც წესი, გამოტოვებენ ხოლმე წერტილს ნამდვილ რიცხვზე გადამრავლებისას და ფრჩხილებს, რომლებიც ფიგურირებენ ვექტორული სივრცის განსაზღვრების აქსიომებში.

$\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ ელემენტების ***წრფივი კომბინაცია*** ეწოდება გამოსახულებას

$$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}, \tag{1.20}$$

სადაც $a,b,c\in\mathbb{R}$.

$\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n})$ ელემენტებს ეწოდებათ ***წრფივად დამოუკიდებელი***, თუ არ არსებობს ისეთი არანულოვანი რიცხვთა ერთობლიობა $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, რომლისთვისაც მართებულია ტოლობა

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0. \tag{1.21}$$

წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას ეწოდება მაქსიმალური, თუ მასთან ნებისმიერი სხვა ვექტორის მიერთებას, მივყავართ ***წრფივად დამოკიდებულ*** სისტემამდე. განსაზღვრების თანახმად, ეს იმას ნიშნავს, რომ ***V ვექტორული სივრცის ნებისმიერი ელემენტი შეგვიძლია გამოვსახოთ მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემის ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით***.

ასე რომ, მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა ქმნის ***V ვექტორული სივრცის ბაზისს***.

მაგალითად, თუ განვიხილავთ ნამდვილი რიცხვებისაგან შედგენილი კვადრატული $n \times n$ მატრიცების სიმრავლეს, მაშინ მისი ***ერთ-ერთი ბაზისი*** შედგება n^2 სხვადასხვა მატრიცისაგან, რომელთაგან თითოეულში მხოლოდ ერთი ელემენტია არანულოვანი, დანარჩენი ნულებია.

საზოგადოდ, ბაზისის ელემენტების რაოდენობას $\boldsymbol{V}$ *ვექტორული სივრცის* ***განზომილება*** ეწოდება.

მოცემული სივრცის **ნებისმიერი ბაზისი** შედგება ერთი და იმავე რაოდენობის ელემენტებისაგან, თუ სივრცის განზომილება სასრულია.

ვთქვათ, $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \dots, n\}$ არის $\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის ბაზისი, მაშინ $\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ გვექნება წარმოდგენა

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{x}_i, \tag{1.22}$$

სადაც $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ რიცხვებს უწოდებენ ***y ვექტორის კომპონენტებს*** მოცემული $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, \dots, n\}$ ბაზისისათვის. ცხადია, რომ სხვა ბაზისში ვექტორის კომპონენტები, საერთოდ, სხვა რიცხვები იქნება.

$\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის ***ქვესივრცე*** ეწოდება მის ქვესიმრავლეს, რომელიც თვითონაა ვექტორული სივრცე.

ცხადია, რომ ქვესივრცე უნდა შეიცავდეს ნულოვან ვექტორს და თავისი ელემენტების ყველა შესაძლო წრფივ კომბინაციას. ამბობენ, რომ $(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \ldots, \boldsymbol{y_m})$ ვექტორთა სიმრავლე წარმოქმნის $\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის ქვესივრცეს, რომელიც შედგება ამ ვექტორების ყველა შესაძლო წრფივი კომბინაციისაგან. ამ სისტემის მაქსიმალური წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორების რაოდენობა ქმნის ქვესივრცის განზომილებას. თუ $m < n$, მაშინ წრფივი კომბინაციებით წარმოქმნილი სიმრავლე წარმოადგენს, ***საკუთრივ ქვესივრცეს***. ანუ მთლიანად შედის საწყის $\boldsymbol{V}$ ვექტორულ სივრცეში.

აქამდე არაფერი გვითქვამს ვექტორების ***სკალარული ნამრავლის*** და ***ვექტორის სიგრძის შესახებ***. ეს ცნებები დამატებითი ცნებებია ვექტორული სივრცისათვის და არაა სავალდებულო ვექტორების ზოგადი თეორიისათვის. ამ ცნებათა შემოტანის ერთ-ერთი მეთოდია, ვექტორული სივრცისათვის ***ნორმის ცნების*** შემოტანა.

ნორმირებული ვექტორული $\boldsymbol{V}$ სივრცე არის ვექტორული სივრცე მასზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის ისეთი $n(\boldsymbol{x})$ ფუნქციით (მას ნორმას უწოდებენ), რომელიც აკმაყოფილებს აქსიომებს:

$$N1)\ n(\boldsymbol{x}) \geq 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V},\ (n(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}); \tag{1.23}$$

$$N2)\ n(a\boldsymbol{x}) = |a| n(\boldsymbol{x}),\ \forall a \in \mathbb{R}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}; \tag{1.24}$$

$$N3)\ n(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq n(\boldsymbol{x}) + n(\boldsymbol{y}),\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}. \tag{1.25}$$

არსებობს მრავალი სხვადასხვა სახის $n(\boldsymbol{x})$ ფუნქცია, რომლებიც აკმაყოფილებს ამ აქსიომებს.

მაგალითად, განვიხილოთ $\mathbb{R}^n$, როგორც ვექტორული სივრცე, სადაც ვექტორთა ჯამი განისაზღვრება ტოლობით

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{1.26}$$

ხოლო ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება

$a\boldsymbol{x}=(ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$ ტოლობით. (1.27)

ჩვენ შეგვიძლია, ნორმა შემოვიტანოთ, როგორც მანძილი ვექტორის ბოლოდან კოორდინატთა სათავემდე.

$$n(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}; \quad (1.28)$$

$$n(\boldsymbol{x})' = \sqrt{5{x_1}^2 + 2{x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\ ; \quad (1.29)$$

$$n(\boldsymbol{x})'' = max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\,). \quad (1.30)$$

პირველი ორი ნორმა (1.28) და (1.29), მესამე (1.30) ნორმისაგან განსხვავებით, აკმაყოფილებს ***პარალელოგრამის აქსიომას*** (დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის გვერდების კვადრატების ჯამს):

$$n(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 + n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2 = 2n(\boldsymbol{x})^2 + 2n(\boldsymbol{y})^2\ , \quad (1.31)$$

რაც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ***ორი ვექტორის ბილინეარული, სიმეტრიული სკალარული ნამრავლი***

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}n(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathbf{2}}. \quad (1.32)$$

ბილინეარობა ნიშნავს, რომ

$$(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = a(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}), \quad (1.33)$$

და

$$\boldsymbol{z}\cdot(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y}). \quad (1.34)$$

სიმეტრიულობა ნიშნავს, რომ

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}, \quad (1.35)$$

ამას გარდა, სკალარული ნამრავლი ***დადებითად განსაზღვრულია*** ანუ

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \text{ და } \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \quad (1.36)$$

ეს ცხადია, რადგან $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = n(\boldsymbol{x})^2$.

$\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცისათვის ზემოთ განსაზღვრულ $n(\boldsymbol{x})$ ნორმას ***ევკლიდური ნორმა*** ეწოდება.

$\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცეს მასზე განსაზღვრული ევკლიდური ნორმით **n-განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე** ეწოდება და მას აღვნიშნავთ E^n სიმბოლოთი.

უნდა განვასხვავოთ $\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცე და E^n **ევკლიდური სივრცე.** პირველი მათგანი, მხოლოდ $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ ვექტორთა ერთობლიობაა, ყოველგვარი მანძილისა და ვექტორის სიგრძის ცნების გარეშე. ამ განსხვავების მნიშვნელობას გავიგებთ მეორე თავში.

სკალარული ნორმის ბილინეარობისა და სიმეტრიულობის დასამტკიცებლად გვჭირდება მხოლოდ პარალელოგრამისა და $(N2)$ *აქსიომები.*

თუ დარღვეულია $(N1)$ და $(N3)$ აქსიომები, მაშინ გვაქვს ***ფსევდონორმა***. ამ შემთხვევაში, არაა სავალდებულო, რომ ვექტორთა სკალარული ნამრავლი იყოს დადებითი. ფსევდონორმის ცნებას ფართო გამოყენება აქვს ***ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში***, სადაც ფართო გამოყენება აქვს მინკოვსკის ფსევდოევკლიდური სივრცის ცნებას და მის გეომეტრიას, რაც მნიშვნელოვანწილად განაპირობებს ფარდობითობის სპეციალური თეორიის ფიზიკურ არსს.

ჩვენ განვიხილეთ ვექტორული სივრცეები ნამდვილ რიცხვთა ველის ზემოთ, თუმცა შეგვიძლია ანალოგიურად ავაგოთ ვექტორული სივრცეები კომპლექსურ რიცხვთა ველის ზემოთაც. ამისათვის დაგვჭირდება მხოლოდ ის, რომ მუდმივი a და b რიცხვები ავიღოთ $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლიდან. მაშინ ვექტორის კომპონენტები იქნება კომპლექსური რიცხვები. ასეთი ვექტორული სივრცეები ხშირად გამოიყენება ***კვანტურ მექანიკაში*** და ტალღური პროცესების მოდელირებისას.

1.6. კვადრატულ მატრიცათა ალგებრა

$\boldsymbol{V}$ ვექტორული სივრცის $\boldsymbol{T}$ ასახვას თავის თავზე $\boldsymbol{T}: \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$ ეწოდება **წრფივი გარდაქმნა**, თუ მართებულია *გარდაქმნის წრფივობის თვისება*

$$\boldsymbol{T}(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) + b\boldsymbol{T}(\boldsymbol{y}). \tag{1.37}$$

თუ გვაქვს V ვექტორული სივრცის $\{\boldsymbol{e_i}, i = 1, \dots, n\}$ ბაზისი, მაშინ

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e_i} \ ; \tag{1.38}$$

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{T_{ij}}\, \boldsymbol{e_i} \ , \tag{1.39}$$

სადაც ყოველი $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e_i})$ ვექტორი შევცვალეთ მისი წარმოდგენით მოცემულ ბაზისში $\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{T_{ij}}\, \boldsymbol{e_i}$. ამ წარმოდგენაში $\boldsymbol{T_{ij}}$ კოეფიციენტებს $\boldsymbol{T}$ წრფივი გარდაქმნის მატრიცის კომპონენტებს უწოდებენ და ისინი წარმოქმნიან ***T* *წრფივი გარდაქმნის კვადრატულ* $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ *მატრიცას მოცემულ*** $\{\boldsymbol{e_i}, i = 1, \dots, n\}$ ***ბაზისში.***

განვიხილოთ მნიშვნელოვანი ალგებრული იგივეობა, რომელსაც შემდგომ, ხშირად გამოვიყენებთ

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{j=1}^{m} B_{ij} C_j\right) = \sum_{j=1}^{m} C_j \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ij} A_i\right). \tag{1.40}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, შეჯამების რიგს არა აქვს მნიშვნელობა. ამიტომ, ეს გამოსახულება ხშირად ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i B_{ij} C_j \ \text{ ან უფრო მარტივად, } \sum_{i,j} A_i B_{ij} C_j \ ; \tag{1.41}$$

რაც ხაზს უსვამს იმ ფაქტს, რომ ესაა ჯამი, სადაც ინდექსები იღებენ ყველა შესაძლო მნიშვნელობას.

წრფივ გარდაქმნათა კომპოზიცია ანუ ორი $\boldsymbol{T}$ და $\boldsymbol{U}$ წრფივი გარდაქმნის მიმდევრობით ზემოქმედება $\boldsymbol{V}$ ვექტორულ სივრცეზე გვაძლევს ახალ UT გარდაქმნას :

$$\boldsymbol{UT}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{U}\left(\sum_{i,j} a_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{T_{ij}} \boldsymbol{e_j}\right) = \sum_{\boldsymbol{i,j,k}} a_i \boldsymbol{T_{ij}} \boldsymbol{U_{jk}} \boldsymbol{e_k} = \sum_{\boldsymbol{i,k}} a_i \left(\sum_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{T_{ij}} \boldsymbol{U_{jk}}\right) \boldsymbol{e_k}. \tag{1.42}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ UT გარდაქმნის კომპონენტები მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\sum_j T_{ij} U_{jk}. \tag{1.43}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ვექტორული სივრცის ორი წრფივი გარდაქმნის კომპოზიციის შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცა უდრის ამ გარდაქმნების შესაბამისი მატრიცების მატრიცულ ნამრავლს!

მატრიცათა ***ნამრავლი, საზოგადოდ, არ არის კომუტაციური*** ანუ $AB \neq BA$.

A მატრიცის ***ტრანსპონირებული*** $\boldsymbol{A^T}$ *მატრიცის კომპონენტები მოიცემა*

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \tag{1.44}$$

ფორმულით.

თუ A ***მატრიცა კომპლექსურია,*** *მაშინ მისი* A^* *შეუღლებული მატრიცა განისაზღვრება*

$$(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}\ , \tag{1.45}$$

ფორმულით, სადაც ხაზი ასოს თავზე აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებულს.

ერთეულოვან I მატრიცას მთავარ დიაგონალზე აქვს ერთიანები, სხვაგან კი - ნულები. ეს ფაქტი მისი კომპონენტებისათვის ჩაიწერება δ_{ij} ***კრონეკერის სიმბოლოს*** საშუალებით:

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}\ ; \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1\ if\ i = j \\ 0\ if\ i \neq j \end{cases}\ ; \tag{1.46}$$

იგივური გარდაქმნისას ნებისმიერი ვექტორი უძრავად რჩება ანუ მას შეესაბამება ერთეულოვანი მატრიცა δ_{ij} კომპონენტებით.

A მატრიცის შებრუნებულ A^{-1} მატრიცას განსაზღვრავენ ფორმულით

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I. \tag{1.47}$$

*ნულოვან მატრიცას არა აქვს შებრუნებული მატრიცა. თუ მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ ეს შებრუნებული ერთადერთია. თუ მატრიცას გააჩნია შებრუნებული, მაშინ ამბობენ, რომ ეს მატრიცა **არაგადაგვარებულია**, წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცა **გადაგვარებულია**.*

ყველა არაგადაგვარებული $n \times n$ მატრიცის სიმრავლე ქმნის ჯგუფს მატრიცების გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამ ჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტია ერთეულოვანი მატრიცა. ***ესაა ლის ჯგუფის მნიშვნელოვანი მაგალითი და აღინიშნება სპეციალური $\boldsymbol{GL(n,\mathbb{R})}$ სიმბოლოთი.***

მეორე რიგის ***მატრიცის დეტერმინანტი*** $detA$ *განისაზღვრება ტოლობით :*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad detA = ad - bc. \tag{1.48}$$

უფრო მაღალი რიგის მატრიცების დეტერმინანტები განისაზღვრება ინდუქციურად ლაპლასის თეორემაზე დაყრდნო-ბით. განვიხილოთ მესამე რიგის მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1.49}$$

მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა შეგვიძლია დავიყვანოთ მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტების გამოთვლამდე. ამისათვის გვჭირდება მატრიცის a_{ij} ელემენტის ***ალგებრული დამატების*** ცნება. ამ ელემენტის **ალგებრული დამატება** ეწოდება $a^{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ გამოსახულებას, სადაც M_{ij} არის იმ მატრიცის დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება მოცემული A მატრიცისაგან, თუ მასში ამოვშლით a_{ij} ელემენტის შესაბამის სტრიქონსა და სვეტს. ცხადია, რომ M_{ij} მატრიცის რიგი ერთით ნაკლებია საწყისი A მატრიცის რიგზე ანუ მესამე რიგის მატრიცის შემთხვევაში გვექნება მეორე რიგის M_{ij} მატრიცის დეტერმინანტები. მოცემული მატრიცის დეტერმინანტი უდრის, მისი რომელიმე სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების შესაბამის ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლების ჯამს ანუ

$$detA = a_{11}a^{11} + a_{12}a^{12} + a_{13}a^{13} \; ; \tag{1.50}$$

ამრიგად, მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა, დაიყვანება სამი მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის ჯამის გამოთვლამდე. ანალოგიურად ხდება მეოთხე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლის დაყვანა ოთხი მესამე რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლამდე და ა.შ. ნებისმიერი სასრული რიგის მატრიცის დეტერმინანტის გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ უფრო დაბალი რიგის მატრიცების დეტერმინანტების გამოთვლამდე. *მატრიცა არაგადაგვარებულია, თუ მისი დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან.*

A **მატრიცის კვალი** ეწოდება მისი მთავარი დიაგონალის კომპონენტების ჯამს

$$trA = \textstyle\sum_i a_{ii}. \tag{1.51}$$

A მატრიცის **მსგავსების გარდაქმნა არაგადაგვარებული $\boldsymbol{B}$ მატრიცით** ეწოდება $A \mapsto B^{-1}AB$ გარდაქმნას.

გავიხსენოთ რამდენიმე ***საჭირო ფორმულა***

$$(AB)^T = B^T A^T \; ; \tag{1.52}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \; ; \tag{1.53}$$

$$det(AB) = det(A)det(B) \; ; \tag{1.54}$$

$$tr(B^{-1}AB) = tr(A) \; ; \tag{1.55}$$

$$det(A^T) = det(A). \tag{1.56}$$

ამბობენ, რომ λ არის A მატრიცის საკუთრივი რიცხვი და $\bar{V}$ მისი შესაბამისი საკუთრივი ვექტორი, თუ

$$A(\bar{V}) = \lambda\bar{V}, \tag{1.57}$$

სადაც (1.57) ტოლობის მარცხენა ნაწილში A მატრიცა მოქმედებს $\bar{V}$ ვექტორზე, როგორც წრფივი გარდაქმნა. საკოორდინატო ფორმაში ეს ტოლობა გადაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$\sum_j \left(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right)V_j = 0. \tag{1.58}$$

ამ სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი, მაშინ და მხოლოდ მაში, როცა (1.58) სისტემის დეტერმინანტი უდრის ნულს ანუ

$$det(A - \lambda I) = 0. \tag{1.59}$$

ამ n-ური რიგის განტოლების ამონახსნები გვაძლევენ A მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს. მათი ჩასმით (1.58) სისტემაში, მივიღებთ შესაბამის საკუთრივ ვექტორებს.

მნიშვნელოვანია, რომ:

1) *მოცემული A მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები ემთხვევა მისი ტრანსპონირებული მატრიცის საკუთრივ მნიშვნელობებს ;*
2) $det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$; (1.60)
3) $tr(A) = \sum_i \lambda_i$. (1.61)

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.როგორ ვაქციოთ $\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცე ტოპოლოგიურ სივრცედ. არის თუ, არა მეტრიკით ინდუცირებული ტოპოლოგიური სივრცის სტრუქტურა დამოკიდებული მანძილის ცნების ანალიზურ სახეზე ?

2.ჩამოაყალიბეთ ასახვის განსაზღვრება და აღწერეთ სახეები. ასახვათა კომპოზიცია. ასახვის უწყვეტობის ცნება. იაკობის მატრიცა;

3.განმარტეთ ოპერატორების კომუტატორის ცნება. ოპერატორის განსაზღვრის არე;

4.ჩამოაყალიბეთ ჯგუფის ცნება. აბელური ჯგუფი. ლის ჯგუფი. გადანაცვლებათა ჯგუფი. ჯგუფთა იზომორფიზმი და ჰომომორფიზმი. ლის ჯგუფი $\boldsymbol{GL(n,\mathbb{R})}$;

5.განმარტეთ წრფივი ვექტორული სივრცე. ბაზისია ცნება. ნორმის ცნება და მისი სახეები $\mathbb{R}^n$ ვექტორულ სივრცეში. ფსევდონორმის

ცნება. ვექტორული სივრცის წრფივი გარდაქმნა. წრფივ გარდაქმნათა კომპოზიცია. კრონეკერის სიმბოლო. კვადრატული მატრიცის კვალი და დეტერმინანტი. მატრიცის მსგავსების გარდაქმნა. მატრიცის საკუთრივი მნიშვნელობები და საკუთრივი ვექტორი.

ლიტერატურა

1.Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1972

2.Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Пер. с англ., Мир, Москва, 1979

3.Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1989

4.ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. "განათლება", თბილისი, 1972

5.Киттель Ч.,Найт У.,Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1975

6.Ферми Э.Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1968

7.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

8.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

9.Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.Гравитация. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1976

10.Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ.,Мир, Москва, 2002

11.Хакен Г.Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующих-ся системах и устройствах. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1985

II. თავი. დიფერენცირებადი მრავალსახეობა და ტენზორი

ცოცხალი სისტემა უწყვეტი სისტემაა. უწყვეტია,როგორც ცოცხალი ორგანიზმის ორგანოთა ქსოვილები, როგორც ფიზიკური სივრცე, ოთხგანზომილებიანი დრო-სივრცე, კლასიკური და კვანტური მექანიკის ფაზური სივრცე, სისტემის თერმოდინამიკური წონასწორობის მდგომარეობათა სივრცე და უფრო ზოგადი, აბსტრაქტული სივრცე. ყველა ამ სივრცეს გააჩნია საერთო გეომეტრიული თვისებები, რომლებიც დაკავშირებული არიან სივრცის უწყვეტობასთან. ამ თვისებათა ყველაზე მნიშვნელოვანი ნაწილი იძლევა საფუძველს იმისა, რომ შევისწავლოთ დიფერენცირებადი მრავალსახეობის ცნება, რომელიც აზუსტებს ტერმინ "სივრცის" მათემატიკურ მნიშვნელობას.

2.1. მრავალსახეობის ცნება

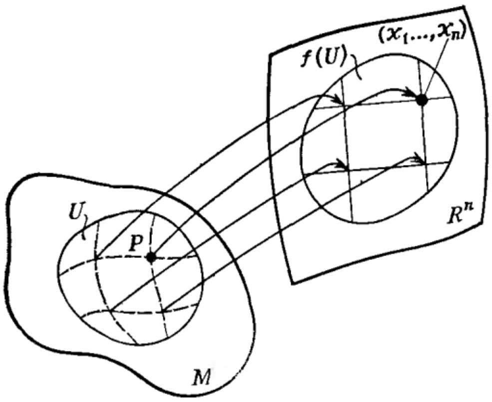
$\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცე შედგება $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ წერტილებისაგან, სადაც თითოეული x_i კოორდინატი მიიღებს ყველა შესაძლო მნიშვნელობას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლიდან.

წერტილებისაგან შედგენილ M სიმრავლეს ეწოდება ***მრავალსახეობა***, თუ მის ყოველ წერტილს გააჩნია ისეთი ღია მიდამო, რომლისთვისაც არსებობს 1-1 ასახვა $\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცის რომელიმე ღია სიმრავლეზე რომელიღაც n-ისათვის.

ასე რომ, M მრავალსახეობა ლოკალურად ემსგავსება $\mathbb{R}^n$-ს. ცხადია, რომ n იქნება **მრავალსახეობის განზომილება**. როგორც ვხედავთ, მრავალსახეობის განსაზღვრებაში მონაწილეობენ მხოლოდ ღია სიმრავლეები და არა მთლიანად M ან მთლიანად $\mathbb{R}^n$, ასე რომ, ჩვენ არ ვადებთ არავითარ შეზღუდვას M მრავალსახეობის გლობალურ ტოპოლოგიას. უნდა მივაქციოთ ყურადღება, რომ გადასახვისაგან მოითხოვება მხოლოდ ურთიერთცალსახობა და არ მოითხოვება სიგრძის, კუთხის ან სხვა გეომეტრიული თვისებების შენარჩუნება. გეომეტრიის ამ დონეზე მანძილის ცნება არც არის

განმარტებული და არსებობენ ისეთი ცოცხალი სისტემები, სადაც მანძილის ცნება არც არის საჭირო. გეომეტრიის ამ უმარტივეს დონეზე გვჭირდება მხოლოდ ის, რომ სივრცის *ლოკალური ტოპოლოგია იყოს ისეთივე, როგორიცაა* $\mathbb{R}^n$*-ში.* მრავალსახეობა არის სივრცე ასეთი ტოპოლოგიით.

განსაზღვრის თანახმად, 1-1 კოორდინატული ასახვისას, M მრავალსახეობის თითოეულ P წერტილს შეუსაბამებენ n რიცხვს $(\mathrm{x}_1(\mathrm{P}), \mathrm{x}_2(\mathrm{P}), \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}(\mathrm{P}))$ ნახ. 2.1. ამ $\mathrm{x}_\mathrm{i}(\mathrm{P})$ რიცხვებს უწოდებენ P წერტილის კოორდინატებს მოცემული გადასახვის მიმართ.



ნახ. 2.1. M მრავალსახეობის P წერტილის შემცველი U ღია სიმრავლის $\mathbb{R}^n$ სივრცის $f(U)$ ღია სიმრავლეზე ურთიერთცალსახა f ასახვა

n-განზომილებიანი მრავალსახეობის განსაზღვრების ერთ-ერთი კონცეფციის მიხედვით, მრავალსახეობა განისაზღვრება მისი ყოველი წერტილის ღია მიდამოში განსაზღვრული n დამოუკიდებელი კოორდინატით. სწორედ ეს კოორდინატები განსაზღვრავენ მის ასახვას $\mathbb{R}^n$ სივრცის $f(U)$ ღია სიმრავლეზე.

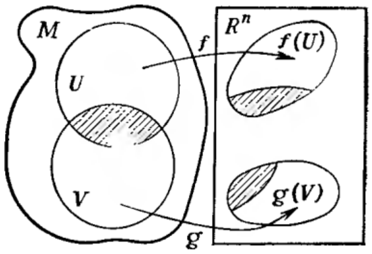
ამრიგად, ზემოთ მოყვანილი მსჯელობით შევქმენით ***ზოგადი წარმოდგენა*** იმის შესახებ, თუ რა არის ***მრავალსახეობა.*** ახლა უფრო დეტალურად განვიხილოთ კოორდინატული ასახვა, რათა უფრო ზუსტად განვსაზღვროთ მრავალსახეობის ცნება.

ვთქვათ, f არის ინექტიური ასახვა M მრავალსახეობის P წერტილის შემცველი U ღია სიმრავლისა, $\mathbb{R}^n$ სივრცის $f(U)$ ღია

სიმრავლეზე. ცხადია, რომ არაა სავალდებულო U ღია სიმრავლე, შეიცავდეს მთელ M მრავალსახეობას. ასე რომ, არსებობენ სხვა ღია სიმრავლეებიც საკუთარი კოორდინატული ასახვებით, ამავე დროს, M მრავალსახეობის ყოველი წერტილი უნდა შედიოდეს ერთ ასეთ ღია სიმრავლეში მაინც.

წყვილს „წერტილის ღია მიდამო შესაბამისი კოორდინატული ასახვა" ***რუკა*** ეწოდება.

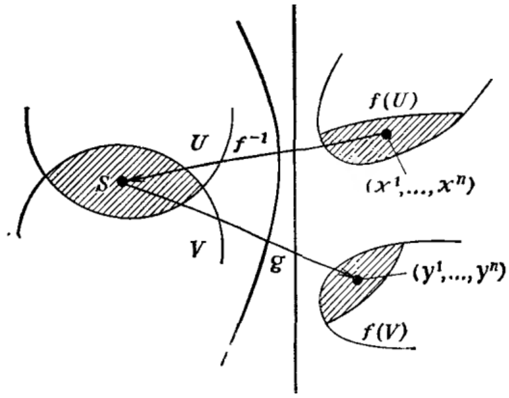
რადგან ნებისმიერი წერტილი შედის ერთ ღია მიდამოში მაინც, ცხადია, რომ ეს ღია სიმრავლეები უნდა კვეთდენ ერთმანეთს. სწორედ ეს გადაკვეთები იძლევა მრავალსახეობის ცნების დაზუსტების საშუალებას ნახ.2.2.



ნახ. 2.2. მრავალსახეობის წერტილების U და V ღია მიდამოები კვეთენ ერთმანეთს(დაშტრიხული არე)

ამ მიდამოების შესაბამისი f და g ასახვები $\mathbb{R}^n$-ში, გვაძლევენ თანაკვეთის ზონებში(თანაკვეთაც ღია სიმრავლეა) ორ სხვადასხვა ასახვას და, მაშასადამე, ორ სხვადასხვა საკოორდინატო ბადეს. ამ ორი საკოორდინატო სისტემის ურთიერთმიმართება ახასიათებს მრავალსახეობის სიგლუვეს.

ვიპოვოთ კავშირი ამ ორ საკოორდინატო სისტემას შორის. ამისათვის, განვიხილოთ თანაკვეთის რაიმე წერტილის სახე $\mathbb{R}^n$-ში f ასახვის მიმართ ანუ $f(U)$-ში. ვთქვათ, ესაა $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ წერტილი ნახ. 2.3. f ასახვას გააჩნია f^{-1} შებრუნებული, ამიტომ არსებობს ერთადერთი S წერტილი, რომელიც მოთავსებულია U და V ღია მიდამოების ისეთ თანაკვეთაში, რომელსაც აქვს მოცემული კოორდინატები f ასახვის მიმართ.



ნახ. 2.3. ასახვათა კომპოზიცია $g \circ f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

ახლა ვთქვათ, g ფუნქციას თანაკვეთის S წერტილი გადაჰყავს $\mathbb{R}^n$-ის სხვა $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ წერტილში. მაშინ გვაქვს ასახვათა კომპოზიცია $g \circ f^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, რაც იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს კოორდინატებს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულება

$$y^1 = y^1(x^1, x^2, \dots, x^n), \tag{2.1}$$

$$y^2 = y^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \tag{2.2}$$

. . . .

$$y^n = y^n(x^1, x^2, \dots, x^n). \tag{2.3}$$

თუ ყველა ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულები k რიგის ჩათვლით არსებობს და არის უწყვეტი, მაშინ ამბობენ რომ **f და g ფუნქციები $\mathbf{C^k}$-თანხმობაში არიან ერთმანეთთან,** ან უფრო ზუსტად, **(U, f) და (V, g) რუკები C^k-თანხმობაში არიან ერთმანეთთან**.

თუ შესაძლებელია რუკათა სრული ერთობლიობის(ატლასი), აგება ისე, რომ მრავალსახეობის თითოეული წერტილი შედიოდეს ერთ მათგანში მაინც და ნებისმიერი რუკა ყველა მის თანამკვეთ სხვა რუკასთან იყოს C^k-თანხმობაში, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **$\mathbf{C^k}$-მრავალსახეობა**. C^1 კლასის მრავალსახეობას ***დიფერენცირებად (გლუვ) მრავალსახეობას*** უწოდებენ. ცხადია, რომ **$\mathbf{C^k}$-მრავალსახეობა, საზოგადოდ, დიფერენცირებადი მრავალსახეობაა**.

მრავალსახეობის დიფერენცირებადობა საშუალებას გვაძლევს გავამდიდროთ ის სხვადასხვა სტრუქტურით: შეგვიძლია განვსაზ-

ღვროთ ***ტენზორი, დიფერენციალური ფორმები, ლის წარმოებული***. ჩვენ ჯერ არ შმოგვიტანია მეტრიკის ცნება - ამიტომ ჯერ არ გვაქვს წარმოდგენა მრავალსახეობის „ფორმაზე“ ან „სიმრუდეზე“. ვიცით მხოლოდ, რომ ის ლოკალურად დიფერენცირებადია და ესაა ჩვენთვის მნიშვნელოვანი. შემდგომ ჩავთვლით, რომ მრავალსახეობები დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით.

2.2. სფერო, როგორც მრავალსახეობა

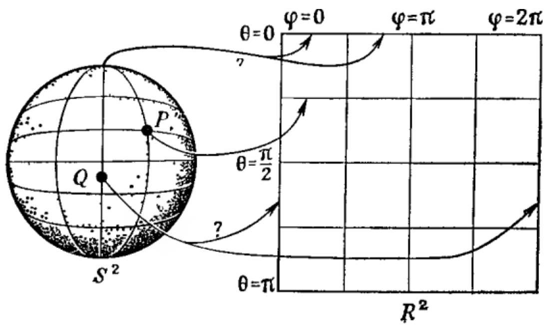
სფერო (ბირთვის ზედაპირი) არის მრავალსახეობის ერთ-ერთი უმარტივესი მაგალითი, რომელიც წარმოადგენს იმ ფაქტის ნათელ ილუსტრაციას, რომ საჭიროა ერთზე მეტი *რუკა*. განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სფერო S^2 ანუ $\mathbb{R}^3$ სივრცის წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = const. \quad (2.4)$$

ყოველ მის წერტილს, აქვს საკმაოდ მცირე მიდამო რომელიც შესაძლებელია 1-1 გადასახვით ავსახოთ $\mathbb{R}^2$-ში წრეზე ნახ.2.4.

ნახ. 2.4. S^2 სფეროს P წერტილის მიდამო ურთიერთცალსახად აისახება $\mathbb{R}^2$-ში

ცხადია, რომ ეს ასახვა არ ინახავს სიგრძესა და კუთხეს. **მაგალითისათვის**, განვიხილოთ სფერული კოორდინატები $\theta \equiv x^1$, $\varphi \equiv x^2$. *ერთი შეხედვით*, შეიძლება მოგვეჩვენოს, რომ მთელი სფერო აისახება $0 \leq x^1 \leq \pi,\ 0 \leq x^2 \leq 2\pi$ მართკუთხედზე ნახ. 2.5.



ნახ. 2.5. ჩვეულებრივი სფერული კოორდინატები გვაძლევენ გადასახვას S^2-დან $\mathbb{R}^2$-ში, მაგრამ ეს არ არის 1-1 ასახვა

უფრო დეტალური განხილვისას ვხვდებით, რომ ეს ასე არ არის. მართლაც, $\theta = 0$ პოლუსში „ასახვა ფუჭდება", რადგან ერთი წერტილი აისახება მონაკვეთის წერტილებში

$$x^1 = 0,\ \ 0 \le x^2 \le 2\pi, \tag{2.5}$$

ასე რომ, პოლუსში არ გვაქვს 1-1 ასახვა. მეორე მხრივ, წერტილები, რომელთათვისაც $\varphi = 0$ აისახება ორ სხვადასხვა ადგილას: $x^2 = 0$ და $x^2 = 2\pi$. ასე რომ, ისევ ირღვევა 1-1 ასახვის პირობები. ამ სირთულიდან გამოსავალი არის ასახვის შემოფარგვლა ღია სიმრავლით:

$$0 < x^1 < \pi,\ 0 < x^2 < 2\pi. \tag{2.6}$$

მაშინ ასახვიდან ითიშება, როგორც პოლუსები, ისე მათი შემაერთებელი $\varphi = 0$ ნახევარწრე. ამიტომ მთელი სფეროს 1-1 ასახვისათვის გვჭირდება ორი ასახვა მაინც. ***მეორე ასახვა*** შეიძლება იყოს სხვა სფერულ კოორდინატთა სისტემა, რომლისთვისაც $\varphi = 0$ მერიდიანი წარმოადგენს პირველი სისტემის ეკვატორს. ცხადია, რომ სფეროს ყოველი წერტილი ძევს ამ ორი რუკიდან ერთ-ერთში მაინც. თანაკვეთის ფუნქციები, რომლებიც აკავშირებს მეორე სისტემის კოორდინატებს პირველის კოორდინატებთან, ამ შემთხვევაში საკმაოდ რთულად გამოიყურება, მაგრამ ცხადია, რომ ისინი ანალიზური არიან; რაც იმას ნიშნავს, რომ ***სფერო ანალიზური მრავალსახეობაა***. სფერული ზედაპირის სიბრტყეზე, მეორე „უფრო კარგი ასხვაა" სტერეოგრაფიული პროექცია, თუმცა ამ შემთხვევაშიც ***მინიმუმ ორი რუკა*** გვჭირდება. არ არსებობს ისეთი

კოორდინატული გარდაქმნა, რომელიც გამოდგებოდა მთელი S^2-დან $\mathbb{R}^2$-ში 1-1 ასახვისათვის. ეს ფაქტი უკავშირდება სფეროს ზედაპირის *გლობალურ ტოპოლოგიას*.

2.3. მრავალსახეობის სხვა მაგალითები

მრავალსახეობის ცნების მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი ზოგადობა. მრავალსახეობა ზოგჯერ ისეთი სიმრავლეა, რომ, თუ არ გვექნებოდა მრავალსახეობის ცნება, მას არც კი ჩათვლიდნენ სივრცედ. განსაზღვრის თანახმად, ნებისმიერი სიმრავლე, რომელიც უშვებს უწყვეტ პარამეტრიზაციას წარმოადგენს მრავალსახეობას, რომლის განზომილებაც ემთხვევა დამოუკიდებელი პარამეტრების რაოდენობას. *მაგალითად*:

1) სამგანზომილებიან სივრცეში, მყარი სხეულის ყველა შესაძლო ბრუნვა წარმოადგენს მრავალსახეობას, რადგან უშვებს ***პარამეტრიზაციას ეილერის კუთხეების*** მეშვეობით;
2) ***ლორენცის ყველა გარდაქმნის სიმრავლეს***, რომლებიც გვაძლევენ მოძრავ ათვლის სისტემაზე გადასვლის ფორმულებს, აქვს სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის სტრუქტურა. პარამეტრებს წარმოადგენს მოძრაობის სიჩქარის სამი კომპონენტი;
3) N რაოდენობის ნაწილაკისათვის, მათი მდგომარეობისა ($3N$) და სიჩქარის კომპონენტების ($3N$) სიდიდეები, წარმოქმნიან წერტილებს $6N$-განზომილებიან მრავალსახეობაში, რომელსაც **ფაზური სივრცე** ეწოდება;
4) თუ y ცვლადის x არგუმენტზე დამოკიდებულების საპოვნელად, მოცემული გვაქვს ალგებრული ან დიფერენციალური განტოლება, მაშინ შესაძლებელია მრავალსახეობის სტრუქტურის შემოტანა $(\mathbf{y},\mathbf{x})$ **წყვილების სიმრავლეზე**, სადაც ყოველი კერძო ამონახსენი იქნება წირი ამ მრავალსახეობაზე. ეს მაგალითი ადვილად განზოგადდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებისათვისაც
5) მრავალსახეობის მაგალითია ***ვექტორული V სივრცე***, რომელიც ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება. მართლაც,

ნებისმიერი $\boldsymbol{y}$ ვექტორი n-განზომილებიან სივრცეში მოიცემა ბაზისის მიხედვით, როგორც $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e_i}$; რაც იმას ნიშნავს, რომ გვაქვს ასახვა $\mathbb{R}^2$-ში,

$$\boldsymbol{y} \longmapsto (a_1, a_2, \dots, a_n). \tag{2.7}$$

ასე რომ, მთელი ვექტორული სივრცე იფარება ერთი რუკით. უფრო მეტიც, $\boldsymbol{V}$ და $\mathbb{R}^n$ ერთმანეთის იზომორფული არიან. რაც იმას ნიშნავს, რომ, როცა გვჭირდება, ყოველი ვექტორული სივრცე, შეგვიძლია ჩავთვალოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცედ.

ახლა, უკვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ***ლის ჯგუფი***. G სიმრავლეს ეწოდება **ლის ჯგუფი**, თუ ის არის ჯგუფი და ამავე დროს C^∞ - მრავალსახეობა, ამასთან, ჯგუფის ოპერაცია უნდა ინდუცირებდეს G მრავალსახეობის C^∞- ასახვას თავის თავში.

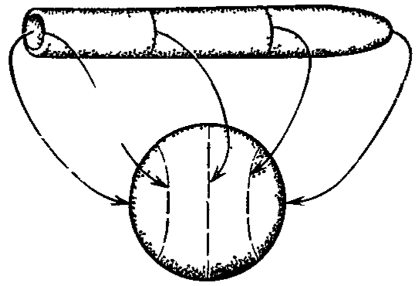
ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი $a \in G$ ელემენტი ინდუცირებს G მრავალსახეობის თავის თავში ასახვას, რომლის დროსაც ნებისმიერი $b \in G$ ელემენტისათვის $b \longmapsto ba$. მოითხოვება, რომ ეს ასახვა იყოს C^∞კლასის. კოორდინატთა ენაზე ეს იმას ნიშნავს, რომ ba წერტილის კოორდინატები უნდა იყოს b წერტილის კოორდინატის C^∞კლასის ფუნქციები. სინამდვილეში, ეს მოთხოვნა არის ჯგუფის სტრუქტურის მრავალსახეობის სტრუქტურასთან თანხმობის პირობა.

ადვილი მისახვედრია, რომ მყარი სხეულის მობრუნებების სიმრავლე ადგენს ჯგუფს, რომლის ჯგუფური სტრუქტურა თანხმობაშია სამგანზომილებიანი მრავალსახეობის სტრუქტურას-თან. ლის ამ ჯგუფს $SO(3)$ ჯგუფს უწოდებენ. ლის ჯგუფის მაგალითია თვით $\mathbb{R}^n$.

2.4. მრავალსახეობის გლობალური თვისებები

რადგან ყოველი მრავალსახეობა, ლოკალურად ისევეა მოწყობილი, როგორც $\mathbb{R}^n$, ნებისმიერი ორი ერთნაირგანზომილე-ბიანი და ერთნაირი სიგლუვის მრავალსახეობა დეფერენციალური გეომეტრიის ამ დონეზე ლოკალურად არ განირჩევა ერთმანეთი-საგან. სიტუაცია მკვეთრად იცვლება, როცა გადავდივართ

მრავალსახეობის გლობალურ სტრუქტურაზე, და ამის ნათელი მაგალითია S^2 და $\mathbb{R}^2$. ასე რომ, მათი გლობალური სტრუქტურის მიხედვით, მრავალსახეობები იყოფა სხვადასხვა კლასად. მაგალითად, სფეროს ზედაპირს და ცარცის ზედაპირს ერთნაირი გლობალური სტრუქტურა აქვთ. არც ერთი მათგანი არ შეიძლება ავსახოთ $\mathbb{R}^2$ – *ზე*, თუმცა ისინი შეგვიძლია 1-1 ასახვით ავსახოთ ერთმანეთზე ნახ. 2.6.



ნახ. 2.6. ცარცის გლუვი ზედაპირი შეგვიძლია ურთიერთცალსახად ავსახოთ S^2 სფეროზე და ეს ასახვა გლობალურია (***დიფეომორფიზმია***)

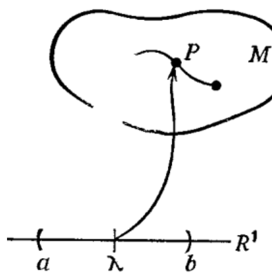
განსაზღვრება: C^∞მრავალსახეობის ურთიერთცალსახა C^∞ კლასის ***ასახვას*** ამავე კლასის სხვა მრავალსახეობაზე $M \to N$, სადაც N მრავალსახეობის წერტილების კოორდინატები გამოისახება M მრავალსახეობის შესაბამისი წერტილების კოორდინატებით ისე, რომ გამოსახვის ფუნქციები, მათ შებრუნებულ ფუნქციებთან ერთად, არიან C^∞ კლასის, ეწოდება M მრავალსახეობის **დიფეომორფიზმი** N მრავალსახეობაზე.

ასეთ M და N მრავალსახეობებს ***დიფეომორფული*** ეწოდება. მაგალითად, *ყავის ფინჯანი დიფეომორფულია ტორის* (ბუბლიკის ზედაპირი), რადგან *უწყვეტი დეფორმაციით* შეგვიძლია ერთი მათგანი გადავიყვანოთ მეორეში. ძირითადად გამოვიყენებთ ლოკალურ გეომეტრიას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ მრავალსახეობის დიფერენციალურ სტრუქტურაზე, თუმცა განფენისა და ფუნქციათა ინტეგრირების დროს გვექნება ისეთი საკითხებიც, როცა დაგვჭირდება მრავალსახეობის გლობალური თვისებებიც.

2.5. მრუდი

ჩვენთვის მეტად მნიშვნელოვანია მრავალსახეობაზე მოცემული მრუდის ცნება. საზოგადოდ, მიღებულია ***მრუდის*** განმარტება, როგორც მრავალსახეობის უწყვეტად ჩალაგებული წერტილების ერთობლიობისა. ჩვენთვის მიზანშეწონილია მისი ეკვივალენტური სხვა განმარტება.

განსაზღვრება: $\mathbb{R}^1$-ის ღია სიმრავლის დიფერენცირებად ასახვას M მრავალსახეობაში **მრუდი** ეწოდება ნახ. 2.7.

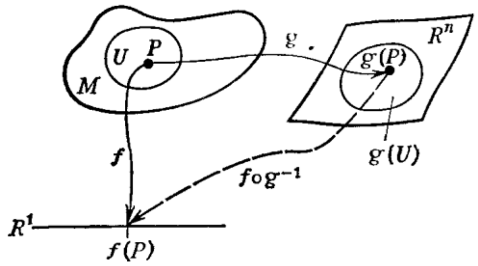


ნახ. 2.7. $\lambda \in \mathbb{R}^1 \to P \in M$ ამ გადასახვის სახეა მრუდი M მრავალსახეობაში

ასე რომ, ღია $(a;b) \in \mathbb{R}^1$ სიმრავლე აისახება M მრავალსახეობაში, ისე, რომ თითოეულ წერტილს $(a;b)$ ღია შუალედიდან შეესაბამება λ პარამეტრის რაღაც კონკრეტული მნიშვნელობა (ნამდვილი რიცხვი), რომლის შესაბამისი ***სახეც*** არის M მრავალსახეობის რაღაც წერტილი. ამ სახეების ერთობლიობაა სწორედ, ჩვენ მიერ განსაზღვრებული მრუდი. ამ განსაზღვრების თანახმად, წირის ყოველ წერტილს შეესაბამება λ პარამეტრის რაღაც კონკრეტული მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ მოვახდინეთ წირის ***პარამეტრიზაცია*** ამ პარამეტრით. ამიტომ *სხვადასხვანაირად პარამეტრიზებული წირები უნდა განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან, მაშინაც კი, როცა მათი წერტილების სიმრავლეები ემთხვევა ერთმანეთს* M-ში. როგორც ადრე აღვნიშნეთ ასახვას ეწოდება დიფერენცირებადი, თუ ასახვის სახე წერტილების კოორდინატების ფუნქციები $\{x^i(\lambda),\ i \in \mathbb{N}\}$ დიფერენცირებადია λ პარამეტრის მიმართ.

2.6. მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია

განსაზღვრება: $f: M \to \mathbb{R}^1$ ასახვას ეწოდება ***ფუნქცია M მრავალსახეობაზე***, თუ f არის წესი, რომელიც M მრავალსახე-ობის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს ერთადერთ ნამდვილ რიცხვს(ფუნქციის მნიშვნელობას). თუ M მრავალსახეობის რაღაც ღია სიმრავლე გლუვი 1-1 კოორდინატული ასახვით აისახება $\mathbb{R}^n$-ში, მაშინ M მრავალსახეობის ფუნქცია გადაიქცევა ფუნქციად $\mathbb{R}^n$-ში ნახ. 2.8.



ნახ. 2.8. თუ, f არის ფუნქცია $\mathbb{R}^1$-ზე $f: M \to \mathbb{R}^1$, ხოლო g არის კოორდინატული ასახვა $g: U \to g(U)$, (სადაც $g(U) \in \mathbb{R}^n$), რომელიც ცხადია შექცევადია, მაშინ ასახვათა კომპოზიცია $f \circ g^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ არის ფუნქცია $\mathbb{R}^n$-ზე ანუ გვაქვს უბრალოდ $f(P)$-ს გამოსახვა P წერტილის კოორდინატებით.

თუ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს დიფერენცირებადი ფუნქცია M მრავალსახეობაზე. რადგან P წერტილი მოიცემა თავისი კოორდინატებით, ჩვენი ფუნქცია შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად: $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. თუ ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია არგუმენტების მიმართ, მაშინ მას დიფერენცირებად ფუნქციას უწოდებენ. თვითონ კოორდინატები, რა თქმა უნდა, უწყვეტია და უსასრულოდ დიფერენცირებადი ფუნქციებია. ამის შემდეგ აღარ ვილაპარაკებთ კოორდინატულ ასახვებზე, თუმცა გვექნება კოორდინატები, რომლებიც იძლევიან ამ ასახვებს. კოორდინატულ ასახვებს ვიყენებდით, რათა ზუსტად გადმოგვეცა ძირითად ცნებათა განსაზღვრებები. ამის შემდეგ ამ ცნებათა გამოყენება დაგვაინტერესებს მხოლოდ ცოცხალი სისტემისათვის, რისთვისაც დაგვჭირდება მრავალსახეობაზე რამდენიმე დიფერენციალური სტრუქტურის შემოღება.

დავუშვებთ, რომ განხილულ მრავალსახეობებში ყველგან შეგვიძლია შემოვიღოთ კოორდინატები $\{x^i,\ i \in \mathbb{N}\}$ და ნებისმიერი გლუვი $y^i = y^i(x^j)$ ფუნქციებისათვის, რომლებიც ლოკალურად შექცევადია (იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან), შეგვიძლია გადავიდეთ ახალ კოორდინატთა სისტემაზე.

2.7. ვექტორი და ვექტორული ველი

განვიხილოთ M მრავალსახეობის P წერტილზე გამავალი წირი, რომელიც მოიცემა შემდეგი განტოლებით:

$$x^i = x^i(\lambda),\ \ i \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

ავიღოთ ამ მრავალსახეობაზე დიფერენცირებადი $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ფუნქცია, რომელსაც ზოგჯერ მოკლედ ასე ჩავწერთ $f(x^i)$. წირის ყოველ წერტილში გამოითვლება ამ ფუნქციის მნიშვნელობა. ასე რომ, წირის გასწვრივ წარმოიქმნება დიფერენცირებადი $g(\lambda)$ ფუნქცია, რომელიც იძლევა f ფუნქციის მნიშვნელობას λ პარამეტრის შესაბამის წერტილში:

$$g(\lambda) = f\big(x^1(\lambda), x^2(\lambda), \dots, x^n(\lambda)\big) = f\left(x^i(\lambda)\right). \tag{2.9}$$

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული

$$\frac{dg}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.10}$$

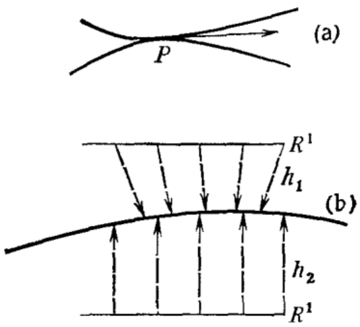
ეს ფორმულა მართებულია ნებისმიერი g ფუნქციისათვის, ასე რომ, შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{dx^i}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.11}$$

ჩვეულებრივი ვექტორული აღრიცხვის თვალსაზრისით, ევკლიდურ სივრცეში $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$ სიდიდეები იმ ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც $x^i(\lambda)$ წირის მხებს წარმოადგენს; ეს ადვილად შეიძლება გავიგოთ იქიდან, რომ $\{dx^i\}$ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებაა

წირის გასწვრივ და მისი გაყოფა $d\lambda$ სიდიდეზე ცვლის მხოლოდ ვექტორის სიგრძეს და არა მიმართულებას. განსაზღვრების თანახმად, $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$ სიდიდეები წარმოადგენს წირის მხები ვექტორის კომპონენტებს.

ცხადია, რომ ყოველი ვექტორი წარმოადგენს მხებ ვექტორს P წერტილზე გამავალი უსასრულოდ ბევრი წირისათვის და ამას აქვს ორი მიზეზი: ჯერ ერთი, არსებობს P წერტილზე გამავალი უსასრულოდ ბევრი წირი, რომლებიც ერთმანეთს ეხება და აქვთ საერთო მხები ვექტორი; მეორეც, მოცემული წირი შეიძლება იქნეს პარამეტრიზებული ისე, რომ P წერტილში არსებული მხები ვექტორი არ შეიცვალოს. ეს ფაქტი გამოსახულია ნახ. 2.9



ნახ. 2.9. a) საერთო მხების მქონე ორი მრუდი; b) ორი გეომეტრიულად თანმხვედრი მრუდი სხვადასხვა პარამეტრიზაციით

თუ სხვადასხვა პარამეტრიზაციის შესაბამის ასახვებს აღვნიშნავთ h_1-ითა და h_2-ით, მაშინ λ_1 და λ_2 ორი სხვადასხვა პარამეტრიზაციისათვის, ასახვათა კომპოზიცია ${h_2}^{-1} \circ h_1$ იძლევა კავშირს $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$. თუ P წერტილში $\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = 1$, მაშინ ამ წერტილში, სხვადასხვა პარამეტრიზაციის შედეგად მიღებული ორი წირის მხები ვექტორები ერთმანეთს ემთხვევა.

რადგან მრავალსახეობაში არაა სავალდებულო ორ წერტილს შორის მანძილის ცნების შემოღება, საჭიროა ვექტორი განვსაზღვროთ M მრავალსახეობის წერტილების ***ინფინიტეზიმა-ლური მიდამოების*** საშუალებით. ვთქვათ, a და b ორი ნებისმიერი

რიცხვია, $x^i = x^i(\mu)$ კი - P წერტილზე გამავალი წირი. მაშინ ამ წერტილში გვექნება

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu}\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad (2.12)$$

და

$$a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (2.13)$$

ასე რომ, რიცხვები $\left\{a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\right\}$ იმ ახალი ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც ეხება P წერტილზე გამავალ *რომელიღაც* წირს. შესაბამისად, უნდა არსებობდეს რომელიღაც φ წირი, ისეთი, რომ P წერტილში

$$\frac{d}{d\varphi} = \sum_i \left(a\frac{dx^i}{d\lambda} + b\frac{dx^i}{d\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (2.14)$$

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარე, ადვილად დავასკვნით, რომ P წერტილში

$$a\frac{d}{d\lambda} + b\frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\varphi}. \qquad (2.15)$$

შესაბამისად, წირის გასწვრივ დიფერენცირების ოპერატორები მოცემულ P წერტილში ადგენენ *ვექტორულ სივრცეს*. ნებისმიერ კოორდინატთა სისტემაში არსებობენ სპეციალური წირები, საკოორდინატო ხაზები. გასაგებია, რომ ამ წირების გასწვრივ დიფერენცირების ოპერატორებია $\frac{\partial}{\partial x^i}$ და (2.11) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ ნებისმიერი $\frac{d}{d\lambda}$ ოპერატორი შეიძლება წარმოვადგინოთ $\frac{\partial}{\partial x^i}$ კერძო წარმოებულების წრფივი კომბინაციის სახით. ამიტომ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ სისტემა წარმოადგენს *ვექტორული სივრცის ბაზისს*. (2.11) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\frac{d}{d\lambda}$ ვექტორს ამ ბაზისში აქვს კოორდინატები $\left\{\frac{dx^i}{d\lambda}\right\}$. ამრიგად, მივიღეთ, რომ P წერტილში ყველა მხები ვექტორის სივრცესა და ამ წერტილში გამავალი წირების გასწვრივ დიფერენცირებათა სივრცეს შორის არსებობს

ურთიერთცალსახა თანადობა. ამიტომ მათემატიკოსები ამბობენ, რომ $\frac{d}{d\lambda}$ არის $x^i(\lambda)$ წირის მხები ვექტორი. ახლა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ამ პირობებში შეიძლება მხოლოდ ისეთი ვექტორების შეკრება, რომლებიც მოდებული არიან ერთ წერტილში. მხები ვექტორები არა M მრავალსახეობაშია, არამედ მისი P წერტილის მხებ სივრცეში, რომელიც აღინიშნება T_P-თი. ადვილი მისახვედრია, რომ სფეროს შემთხვევაში, მის P წერტილში გავლებული მხები სიბრტყე ემთხვევა მხებ სივრცეს. უფრო რთული მრავალსახეობებისათვის ასეთი წარმოდგენა რთულია. ტერმინ ***ვექტორულ ველს***, გამოვიყენებთ იმ წესის აღსანიშნავად, რომელიც M მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს ვექტორს.

2.8. ბაზისური ვექტორები და ბაზისური ვექტორული ველები

M მრავალსახეობის ნებისმიერი P წერტილისათვის, ამ წერტილში *აგებული T_P მხები სივრცე იმავე n განზომილებისაა, რომლისაც საწყისი M მრავალსახეობა.* რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, ქმნის ბაზისს T_P მხებ სივრცეში.

თუ აგებული T_P მხები სივრცეებისათვის ავირჩევთ რაღაც ბაზისს M მრავალსახეობის თითოეული P წერტილისათვის, მაშინ მივიღებთ ***ბაზისურ ვექტორულ ველებს***. თუ P წერტილის U მიდამოში მოცემულია $\{x^i\}$ კოორდინატთა სისტემა, მაშინ U სიმრავლის ყოველ წერტილში განსაზღვრულია ***საკოორდინატო ბაზისი*** $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, მაგრამ სულაც არაა სავალდებულო საკოორდინატო ბაზისში მუშაობა, ვექტორები შეიძლება განვიხილოთ ნებისმიერ $\{\overline{e_i}\}$ ბაზისში. აქ i ინდექსი იხმარება ბაზისური ვექტორების ნუმერაციისათვის და ის არ ნიშნავს რაღაცის კომპონენტს. P წერტილში ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\bar{V} = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j V'^j \overline{e_j}. \qquad (2.16)$$

$\{V^i\}$ რიცხვები $\bar{V}$ ვექტორის კომპონენტებია $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ბაზისის მიმართ, ხოლო $\{V'^j\}$ რიცხვები იმავე ვექტორის კომპონენტებია $\{\bar{e}_i\}$ ბაზისში. ეს კომპონენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია გარკვეული, ვექტორებისათვის დამახასიათებელი ფორმულებით, რის შესახებაც შემდეგ გვექნება საუბარი.

$\bar{V}$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ და $\{\bar{e}_i\}$ ვექტორული ველებია, ხოლო $\bar{V}$ ვექტორული ველის კომპონენტები: $\{V^i\}$ და $\{V'^j\}$ M მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციებია.

ჩვენ არაცხადად დავუშვით, რომ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია ნებისმიერი P წერტილის U მიდამოში, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი იძლევიან 1-1 ასახვას P წერტილის რაღაც U მიდამოში, $\mathbb{R}^n$-ში შესაბამის V ღია სიმრავლეში.

განვიხილოთ რაიმე „კარგი“ $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$ კოორდინატთა სისტემა U-ზე. მაშინ $\{(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$ სიმრავლიდან ასახვა U-ში შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n),\ i = 1, \dots, n. \tag{2.17}$$

ეს ფუნქცია ურთიერთცალსახაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ გარდაქმნის იაკობიანი განსხვავებულია ნულისაგან, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი სტრიქონებისაგან (სვეტებისაგან) შემდგარი ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია. მაგრამ ეს ფუნქციები სწორედ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ვექტორების კომპონენტებია $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$ კოორდინატთა სისტემაში, რადგან

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial y^n}, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y^n}, \tag{2.19}$$

... ... ,

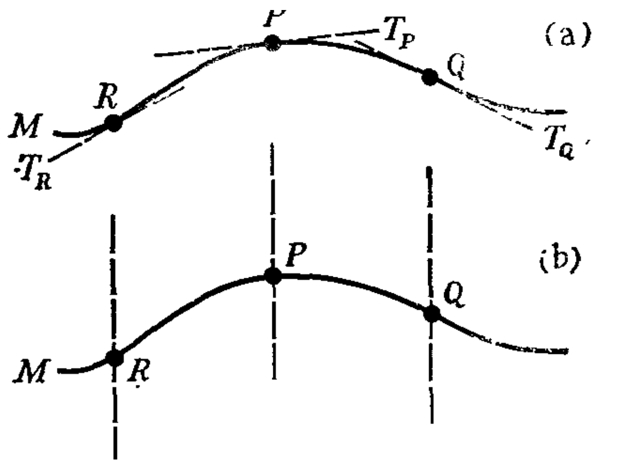
$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial y^1}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial y^2} + \ \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial y^n}. \tag{2.20}$$

ამრიგად, U მიდამოში $\{x^i\}$ კოორდინატთა სისტემა „კარგია“, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ ვექტორები ქმნიან U-ს ***ყველა წერტილის შესაბამისი მხები სივრცის ბაზისს.***

2.9. განფენილი სივრცე

თუ მოცემულ M მრავალსახეობას გავაერთიანებთ მისი ყველა მხები T_P სივრცის ერთობლიობასთან, ძალიან საინტერესო მრავალსახეობას მივიღებთ.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი M მრავალსახეობა(მრუდი) და მისი მხები სივრცეები (ამ მრუდის მხებები, მის ყოველ წერტილში) ნახ. 2.10.



ნახ. 2.10. a) ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა და მისი ზოგიერთი მხები სივრცე; b) იგივე, მაგრამ მხები სივრცეები დახაზულია ერთმანეთის პარალელური წრფეებით, რათა თავიდან ავიცილოთ მათი შემთხვევითი, უმნიშვნელო თანაკვეთა

a) ერთგანზომილებიანი მრავალსახეობა და მისი ზოგიერთი მხები სივრცე ნახაზზე გამოსახულია მრუდით და მისი ზოგიერთი მხები წრფით. იგულისხმება, რომ მხებები ვრცელდება უსასრულოდ, რათა ვექტორის სიგრძეს ნებისმიერ წერტილში შეეძლოს ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება. ყველაფერი ეს რომ დაგვეტანა ნახაზე, მაშინ ის მეტად გაურკვეველი იქნებოდა, ამიტომ უმჯობესია ყველაფერი გამოვსახოთ ისე, როგორც ეს გამოსახულია b)

შემთხვევისთვის ნახ.2.10, სადაც მხები სივრცეები გამოსახულია ერთმანეთის პარალელური წრფეებით და მრუდს კვეთენ მხოლოდ იმ წერტილში რომელთანაც შესაბამისობაში არიან. სამწუხაროდ, ეს ნახაზი ვერ გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ მხები სივრცეები ეხებიან მოცემულ მრუდს, თუმცა ესაა ფასი, რასაც ვიხდით ნახაზის ნათლად წარმოსადგენად. ვერტიკალური T_P წრფის ყოველი წერტილი წარმოადგენს მოცემული სიგრძის ვექტორს, რომელიც M მრავალსახეობას ეხება P წერტილში. ნახ. 2.10, b) გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ ***გამოსახული ორგანზომილებიანი მრავალსახეობის ყოველი წერტილი წარმოადგენს M მრავალსახეობის მხოლოდ ერთი რომელიმე მხები სივრცის წერტილს, მაგალითად, R წერტილი ეკუთვნის მხოლოდ T_R მხებ სივრცეს.*** ორგანზომილებიანი ფიგურის ყოველ წერტილს შეესაბამება ერთადერთი ვექტორი, M მრავალსახეობის მხოლოდ ერთი წერტილისათვის.

ყოველივე ზემოთ თქმულს მივყავართ ახალი TM მრავალსახე-ობის განსაზღვრებამდე, რომელიც შედგება მოცემული მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გავლებული მხები ვექტორებისაგან, *ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში* ეს *ორგანზომი-ლებიანი* მრავალსახეობაა. ამ სივრცეს ეწოდება ***განფენილი სივრცე*** (სხვანაირად ***განფენა***); მისი ფენებია T_P მხები სივრცეები M მრავალსახეობის ყოველი P წერტილისათვის. ტერმინი „ფენა“ შეესაბამება ნახ. 2.10 b) ნახაზზე ვერტიკალურ წრფეებს.

იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ TM მრავალსახეობის ორგანზომილებიანობაში, ავაგოთ მისი რაიმე ინტერვალის კოორდინატთა სისტემა. ვთქვათ, ერთგანზომილებიანი M მრავალსახეობის კოორდინატია x; ავაგოთ იმ მხები სივრცეების კოორდინატები, რომლებიც შეესაბამებიან M მრავალსახეობის იმ წერტილებს, რომლებიც მოთავსებული არიან $x \in (a; b)$ ინტერვალში. ჩავთვალოთ, რომ x „კარგი“ კოორდინატია. მაშინ M მრავალსახეობის ყოველი P წერტილისათვის, შესაბამისი მხები $\bar{V}$ ვექტორი შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

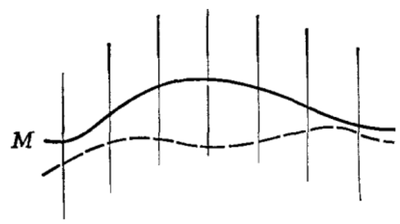
$$\bar{V} = y\frac{\partial}{\partial x}. \qquad (2.21)$$

ასე რომ, y არის T_P მხები სივრცისთვის „კარგი“ კოორდინატი. რადგან თითოეული ფენა შეესაბამება x-ის ფიქსირებულ მნიშვნელობას, (x, y) კოორდინატები ცალსახად განსაზღვრავენ მხებ y ვექტორს და იმ x წერტილს, რომელსაც ეს ვექტორი შეესაბამება. რადგან განფენილი სივრცის ყოველი წერტილი უნდა იყოს განხილული სახის რაიმე ღია სივრცეში, ამით დავამტკიცეთ, რომ TM ორგანზომილებიანი მრავალსახეობაა.

ცხადია, რომ ეს კონსტრუქცია ადვილად გადაიტანება მრავალგანზომილებიანი მრავალსახეობის მხები განფენილი სივრცისათვისაც.

ზემოთ განხილული ტიპის კოორდინატებს, სადაც T_P-ს კოორდინატები განისაზღვრება M მრავალსახეობის P წერტილის მიდამოში ვექტორის წარმოდგენით $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\right\}$ ბაზისის მიმართ, TM-ის ***ბუნებრივი კოორდინატები*** ეწოდება.

განვიხილოთ წყვეტილი მრუდი ნახ. 2.11. ეს წირი M მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გვაძლევს რაღაც ვექტორს, ამიტომ ეს მრუდი ქმნის რაღაც ვექტორულ ველს M-ზე. ასეთ მრუდს ***განფენილი TM სივრცის კვეთა*** ეწოდება.



ნახ.2.11. ერთგანზომილებიანი M მრავალსახეობის (უწყვეტი წირი) ზემოთ განფენილი TM სივრცის კვეთა (წყვეტილი წირი)

ცხადია, რომ ასეთი წირის სიგრძეზე ლაპარაკს აზრი არა აქვს. მაშასადამე, გვაქვს ისეთი მრავალსხეობის მაგალითი, რომლისთვისაც მეტრიკის შემოტანა არაა აუცილებელი.

ზოგად შემთხვევაში, **განფენილი სივრცე** შედგება ***ბაზისაგან*** (ჩვენი მაგალითის შემთხვევაში ეს იყო M წირი) და ***ბაზის ყოველი წერტილისათვის განსაზღვრული ფენისაგან***.

თუ ბაზა n-განზომილებიანია, ხოლო ყოველი ფენა m-განზომილებიანი, მაშინ განფენილი სივრცის განზომილებაა $m+n$.

*ეს **განსაკუთრებული ტიპის მრავალსახეობებია**, რომლებიც **იშლება ფენებად**, ისე, რომ ერთი **ფენის წერტილები ერთმანეთთანაა დაკავშირებული**, ხოლო სხვადასხვა ფენის წერტილები - არა. ამ სიტუაციას მივყავართ **π პროექციის** ცნებამდე; ეს პროექცია ფენის ყოველ წერტილს ასახავს ბაზის იმ წერტილში, რომელზედაც მიბმულია ეს ფენა.*

***π პროექციის ცნება* ყველა მრავალსახეობაზე არ განისაზღვრება.**

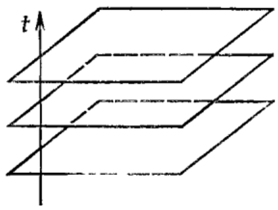
2.10. განფენილ სივრცის მაგალითები

1) ზემოთ განხილულ განფენილ TM სივრცეს, რომელიც შედგება მრავალსახეობისა და მისი მხები სივრცეებისაგან, **მხებ განფენას** (ზოგჯერ **მხებ კონას**) უწოდებენ. ეს არის აბსტრაქტული მრავასახეობის მნიშვნელოვანი მაგალითი, რომელიც ხშირად გამოიყენება ცოცხალი სისტემებისათვის. n განზომილებიანი M მრავალსახეობის შესაბამისი TM მხები განფენის განზომილებაა $2n$;

2) მოგვიანებით, განვიხილავთ ***ტენზორებს***. ყოველი ტიპის ტენზორს შეესაბამება *განფენა გლუვი მრავალსახეობის* ზემოთ;

3) არაა სავალდებულო, რომ ფენა მიბმული იყოს ბაზის გლუვ სტრუქტურასთან. განვიხილოთ ელემენტარული ნაწილაკების შიგა თავისუფლების ხარისხი, როგორიცაა ***იზოსპინი***. განფენა, რომლის ფენებიც იზოსპინური სივრცეებია, ხოლო ბაზა ფიზიკური დრო-სივრცე, შესაძლებლობას იძლევა აღვწეროთ, როგორც ნაწილაკის მდებარეობა (x,y,z,t) დრო-სივრცეში, ისე მისი შიგა მდგომარეობა (იზოსპინი);

4) ნიუტონისეული ფიზიკის თვალსაზრისით, დრო-სივრცეს აქვს განფენილი სივრცის სტრუქტურა. ნიუტონისა და გალილეისთვის დრო აბსოლუტურია ანუ ის ერთნაირად მიედინება ყველგან. ამიტომ, შეგვიძლია ავაგოთ განფენა, სადაც ბაზა იქნება $\mathbb{R}^1$-დრო, ხოლო ფენა - $\mathbb{R}^3$ სივრცე ნახ. 2.12.



ნახ. 2. 12. ნიუტონის (გალილეის) დრო-სივრცის განფენის ბუნებრივი სტრუქტურა. სხვადასხვა ფენა შეესაბამება სხვადსხვა ფიქსირებულ მსოფლიო დროს(მომენტს)

სხვადსხვა ფენის წერტილებს (დროის სხვადასხვა მომენტს) შორის არ არსებობს არავითარი კავშირი, რადგან ***სივრცე ნიუტონისეულ ფიზიკაში არა არის აბსოლუტური***. ერთმანეთის მიმართ სხვადსხვა სიჩქარით მოძრავ ორ დამკვირვებელს სრულიად განსხვავებული წარმოდგენა ექნებათ იმაზე, თუ სივრცის რომელი წერტილებია უძრავი. ამიტომ, ბუნებრივი განფენა ბაზით $\mathbb{R}^3$ არ არსებობს, არსებობს განფენა მხოლოდ $\mathbb{R}^1$ ბაზით. აინშტაინის ფარდობითობის თეორიის ერთ-ერთი ეფექტი ისიც არის, რომ მან დაანგრია ნიუტონისეული განფენის სტრუქტურა და შეცვალა ის მეტრიკული სტრუქტურით, რომელსაც ჩვენ შემდეგ შევისწავლით.

2.11. განფენილი სივრცის სიღრმისეული ანალიზი

განფენილი სივრცის თეორიას გააჩნია ორი ერთმანეთთან დაკავშირებული ასპექტი, რომელთა განხილვაც აუცილებელია, რათა სათანადოდ გავერკვეთ განფენის ცნების მნიშვნელობაში. ეს ასპექტებია: მათი ***გლობალური თვისებები*** და მათ ასაგებად ***ჯგუფების გამოყენება***.

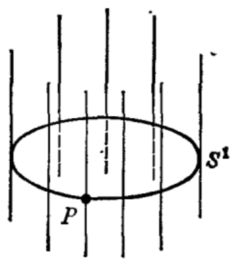
რათა უკეთესად გავერკვეთ **განფენილი სივრცის გლობალურ თვისებებში**, შემოვიტანოთ ჯერ უფრო მარტივი, სივრცეების ***პირდაპირი ნამრავლის,*** ცნება. ნებისმიერ ორ M და N სივრცეს შეგვიძლია შევუსაბამოთ მათი პირდაპირი (დეკარტეს) ნამრავლი $M \times N$, რომელიც შედგება ყველა შესაძლო (a, b) ისეთი დალაგებული წყვილისაგან, რომ $a \in M$ და $b \in N$. მაგალითად, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. თუ M და N მრავალსახეობებია, მაშინ $M \times N$ აგრეთვე მრავალსახეობა იქნება: M მრავალსახეობის U ღია სიმრავლის $\{x^i, i = 1, \dots m\}$ და N მრავალსახეობის V ღია სიმრავლის $\{y^i, i = 1, \dots n\}$ კოორდინატები, იძლევიან $M \times N$ პირდაპირი ნამრავლის $U \times V$ ღია სიმრავლის $m + n$ კოორდინატს.

ზემოთ მოყვანილი განფენილი სივრცეების კონსტრუქციიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ისინი, ***ლოკალურად მაინც,*** წარმოიდგინებიან $U \times F$ პირდაპირი ნამრავლის სახით, სადაც U არის B ბაზის ღია სიმრავლე, ხოლო F - ტიპური ფენა (ყველა ფენა ემთხვევა F-ს). სინამდვილეში, ეს თვისება ***განფენილი სივრცის განსაზღვრის მხოლოდ ნაწილია*** და მას ***განფენის ლოკალურ ტრივიალობას*** უწოდებენ (განფენა დაიყვანება პირდაპირ ნამრავლამდე, თუ შემოვიფარგლებით B ბაზის საკმარისად მცირე ღია სიმრავლით).

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი S^2 სფეროს მხები განფენა TS^2. ეს განფენა რომ იყოს ***გლობალურად ტრივიალური,*** მაშინ უნდა არსებობდეს C^∞ ასახვა ანუ დიფეომორფიზმი: $TS^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^2$, რადგან სფეროს ზედაპირისათვის $\mathbb{R}^2$ წარმოადგენს ტიპურ ფენას (მხებ სიბრტყეს). განვიხილოთ $(P, \bar{V})$ ტიპის წერტილების სიმრავლე $S^2 \times \mathbb{R}^2$ პირდაპირი ნამრავლიდან,

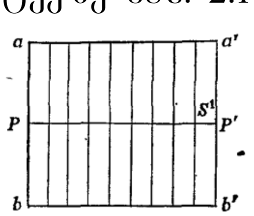
სადაც $P \in S^2$ და $\bar{V}$ რომელიღაც ფიქსირებული ვექტორია $\mathbb{R}^2$ მხები სიბრტყიდან. მაშინ ამ სიმრავლის წინასახე მოგვცემდა არანულოვან კვეთას TS^2 ანუ C^∞-ვექტორულ ველს S^2-ზე, რომელიც არასოდეს არ ხდება ნული. მაგრამ S^2-ზე ასეთი ვექტორული ველი არ არსებობს უძრავი წერტილის შესახებ ცნობილი თეორემის თანახმად, რომელიც ამბობს, რომ ნებისმიერი 1-1 ასახვა(დიფეომორფიზმი) სფეროსი თავის თავზე $S^2 \to S^2$ აუცილებლად იძლევა ერთ უძრავ წერტილს მაინც. ამიტომ TS^2 არ არის მთლიანად(გლობალურად) ტრივიალური. ეს არის იმის მაგალითი, რომ განფენა არ არის გლობალურად ტრივიალური ბაზის S^2 ტოპოლოგიის გამო.

2) ***მეორე მაგალითი*** გვიჩვენებს, რომ არატრივიალური განფენა შეიძლება აიგოს ისეთ ბაზაზეც, რომელიც უშვებს ტრივიალურ განფენასაც. განვიხილოთ TS^1 მხები ***განფენა წრეწირისათვის***. S^2 სფეროსაგან განსხვავებით, S^1 წრეწირი უშვებს უწყვეტ, ვექტორულ ველს, რომელიც არსად არ ხდება ნული და $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}^1$ ნახ. 2.13.



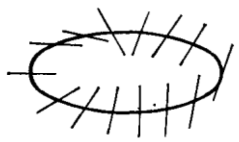
ნახ. 2.13. TS^1 განფენა წრეწირისათვის

ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ გავჭერით წრეწირი P წერტილში და გავშალეთ განფენა სიბრტყეზე ნახ. 2.14.



ნახ. 2.14. წრეწირის TS^1 განფენა გაჭრილია ერთი ფენის გასწვრივ და გაშლილი სიბრტყეზე. ფენები უსასრულოდ გრძელდება ზემოთ და ქვემოთ

იმისათვის, რომ ნახ 2.14-დან დავუბრუნდეთ ნახ. 2.13, უნდა უბრალოდ გავაიგივოთ შესაბამისი წერტილები: a და a' ; P და P' ; b და b' და ა.შ., თუმცა შეგვიძლია განფენა „დავაწებოთ“ სხვანაირად და მივიღოთ მიობიუსის ლენტი: ამჯერად, ვაიგივებთ წერტილებს a და b' ; P და P' ; b და a' და ა.შ. ასეთი დაწებება ჩვენს ლენტს დაგრეხს და ახლა ის უკვე გამოიყურება სხვანაირად ნახ. 2.15.



ნახ. 2.15. მიობიუსის ლენტის შესაბამისი ახალი განფენა, რომელიც განსხვავდება TS^1 განფენისაგან, თუმცა მათ აქვთ ერთნაირი ბაზა და ფენა

მიობიუსის ლენტი არ წარმოიდგინება გლობალურად, პირდაპირი ნამრავლით, რაც იმას ნიშნავს, რომ ის არატრივიალური განფენაა. არატრივიალური განფენის კონსტრუქციები გამოიყენება თანამედროვე ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკაში „ინსტანტონების“ განსასაზღვრავად.

მიობიუსის ლენტის მაგალითი გვასწავლის, რომ განფენის ცალსახად განსაზღვრისათვის, არაა საკმარისი ბაზა და ფენა. საჭიროა განფენის უფრო ზუსტი განმარტება და აქ გვეხმარება ჯგუფის ცნება.

ზემოთ მოყვანილი S^1-ის ორი განფენის განსხვავება მდგომარეობს, ეგრეთწოდებული, ***განფენის სტრუქტურული ჯგუფის*** ცნებაში. იმისათვის, რომ კომპაქტურად განვსაზღვროთ ***განფენილი სივრცე***, დაგვჭირდება ***ჰომეომორფიზმის*** ცნება; ეს არის ერთი სივრცის ორმხრივ უწყვეტი 1-1 ასახვა მეორე სივრცეზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ***ჰომეომორფიზმი*** არის ***დიფეომორფიზმი*** დიფერენცირებადობის მოთხოვნის გარეშე.

ამრიგად, გვაქვს განფენილი სივრცის შემდეგი

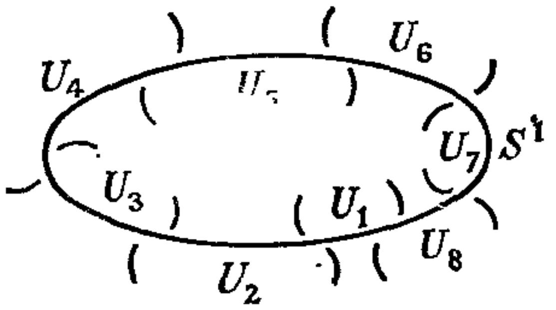
განსაზღვრება: E სივრცეს ეწოდება **განფენილი**, თუ მისთვის არსებობს: B მრავალსახეობა, რომელსაც ბაზას ვუწოდებთ,

პროექცია $\pi: E \to B$, ტიპური F ფენა, F ფენის თავის თავზე ჰომეომორფიზმების G სტრუქტურული ჯგუფი და B მრავალსა-ხეობის გადამფარავი ღია $\{U_j\}$ სიმრავლეების ერთობლიობა, რომლებიც უნდა აკმაყოფილებდნენ *მოთხოვნებს:*

ა) *ლოკალური განფენა ტრივიალურია* ანუ თითოეული U_i სიმრავლის ზემოთ $\pi^{-1}(U_i)$ განფენა უშვებს ჰომეომორფიზმს $U_i \times F$ პირდაპირ ნამრავლზე. ამ ჰომეომორფიზმის კერძო შემთხვევაა თითოეული ფენის $\pi^{-1}(x)$ ჰომეომორფიზმი, სადაც x არის B ბაზის ელემენტი F ფენზე, რომელსაც აღვნიშნავთ $h_i(x)$ სიმბოლოთი, სადაც გამოყოფილია არა მარტო ის x ელემენტი რომელზედაც «კიდია » ფენა, არამედ ის i ინდექსიც, რომელიც გამოყოფს იმ ღია U_i სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს x ელემენტს;

ბ) თუ x წერტილი ეკუთვნის U_j და U_k ღია სიმრავლეების თანაკვეთას, მაშინ წარმოიქმნება F ფენის x წერტილის ორი h_j და h_k ჰომეომორფიზმი და რადგან ჰომეომორფიზმები შექცევადია, ასახვა $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x)$ არის F ფენის თავის თავზე ჰომეომორფიზმი. მოითხოვება, რომ ის ეკუთვნოდეს G სტრუქტურულ ჯგუფს.

ბოლო მოთხოვნა უკავშირდება განფენილი სივრცის გლობალურ სტრუქტურას. ამის შესამჩნევად, განვიხილოთ TS^1 განფენა(რომლის უშუალო განზოგადებაა ნებისმიერი M მრავალ-სახეობის TM განფენა). TS^1 განფენის ბაზაა $B = S^1$, ტიპური ფენაა $F = \mathbb{R}^1$ და პროექციაა $\pi: (x, \bar{v}) \mapsto x$, სადაც $x \in S^1$ და $\bar{v}$ ვექტორია $\bar{v} \in T_x$. გადამფარავი ღია სიმრავლეების ერთობლიობად შეიძლება მივიღოთ ნებისმიერი ატლასი S^1 სივრცეზე. ღია სიმრავლეთა ტიპური ერთობლიობა მოცემულია ნახ. 2.16.



ნახ.2.16. ღია სიმრავლეთა ტიპური ერთობლიობა S^1 სივრცეზე

ყოველ U_j ღია სიმრავლეს აქვს S^1 სივრცის თავისი კოორდინატთა სისტემა ანუ პარამეტრიზაცია, რომელსაც აღვნიშნავთ λ_i სიმბოლოთი. ვექტორი $\frac{d}{d\lambda_i}$ არის T_x სივრცის ბაზისი U_j სიმრავლის x წერტილისათვის, ასე რომ, T_x სივრცის ყოველი $\bar{v}$ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\alpha_{(j)}\frac{d}{d\lambda_i}$ სახით. ვთქვათ, $T_x \to \mathbb{R}$ ფენის ჰომეომორფიზმს, რომელიც ფიგურირებს TS^1 სივრცის განსაზღვრებაში აქვს $h_{(j)}: \bar{v} \mapsto \alpha_{(j)}$ სახე. თუ x ეკუთვნის ორ სხვადასხვა U_j და U_k ღია სიმრავლეს, მაშინ არსებობს ორი სხვადასხვა ჰომეომორფიზმი $T_x \to \mathbb{R}$ და λ_j პარამეტრიზაცია არანაირად არ არის დამკიდებული λ_k პარამეტრიზაციაზე, ამიტომ $\alpha_{(j)}$ და $\alpha_{(k)}$ კოორდინატებიც, ნებისმიერი, სხვადასხვა არანულოვანი რიცხვია. $h_j(x) \circ h_k^{-1}(x): F \to F$ ჰომეომორფიზმი მოქმედებს შემდეგნაირად: $\alpha_k \mapsto \alpha_j$ და, მაშასადამე, ნიშნავს $r_{jk} = \frac{\alpha_{(j)}}{\alpha_{(k)}}$ რიცხვზე გამრავლებას. რადგან r_{jk} შეიძლება იყოს ნებისმიერი არანულოვანი რიცხვი, ***სტრუქტურული ჯგუფის*** როლს აქ ასრულებს $\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$ ანუ ჯგუფი გამრავლების ოპერაციის მიმართ(***ლის ჯგუფი***). უნდა აღინიშნოს, რომ ზოგადი n-განზომილებიანი M მრავალსახეობის შემთხვევაში, განფენის სტრუქტურული TM ჯგუფი არის $n \times n$ ზომის არაგადაგვარებული მატრიცების სიმრავლე, ამ ჯგუფს აღნიშნავენ $GL(n, \mathbb{R})$ სიმბოლოთი.

ასე რომ, TS^1 განვსაზღვრეთ. მაგრამ როგორ გამოიყურება ის ? შესაძლებელია λ_j კოორდინატები ისე ავირჩიოთ, რომ ნებისმიერი ორი λ_j და λ_k მათგანისათვის ორივე იზრდებოდეს ერთი

მიმართულებით, U_j და U_k ღია სიმრავლეების საერთო ნაწილისათვის (თანაკვეთისათვის). ასეთ შემთხვევაში ამბობენ რომ S^1 ორიენტირებადია. კოორდინატთა მიდამოების ასეთი არჩევისას თანაკვეთის ყველა r_{jk} რიცხვი იქნება დადებითი და სტრუქტურული ჯგუფი დაიყვანება დადებითი ნამდვილი რიცხვებისაგან შემდგარ ჯგუფზე, შეკრების ოპერაციის მიმართ. უფრო მეტიც, შესაძლებელია მივაღწიოთ $\frac{d\lambda_j}{d\lambda_k} = 1$ ტოლობას ყოველი თანაკვეთილი მიდამოსთვის, მაშინ ჯგუფი დაიყვანება ერთადერთ 1 ელემენტამდე. ეს არის ტრივიალური სტრუქტურული ჯგუფი და შესაბამისი განფენაც არის ტრივიალური.

იმისათვის, რომ აღვწეროთ მიობიუსის ლენტის შესაბამისი განფენა, უნდა გამოვიყენოთ სხვა $h_i(x)$ გადასახვა. თანაც, უნდა ვიყოთ ყურადღებით, რომ ეს განფენა არ აურიოთ მხებ განფენაში. უმარტივესია, გამოვიყენოთ $\{U_j, j = 1,2, \dots ,8\}$ მიდამოთა ერთობლიობა, რომელიც გამოსახულია ნახ. 2.16 და დავუშვათ, რომ $r_{12} = 1, r_{23} = 1, \dots , r_{78} = 1$, მაგრამ ახლა მიობიუსის ლენტის დაგრეხა გვაიძულებს, რომ დავუშვათ $r_{81} = -1$. ამჯერად, სტრუქტურული ჯგუფი შედგება ორი ელემენტისაგან $\{1, -1\}$, სადაც ჯგუფის ოპერაციაა გამრავლება.

მხებ TS^1 განფენას აქვს თავისი საკუთარი სტრუქტურული ჯგუფი $\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$, რომელიც თითქმის ტიპური ფენაა. ***რეპერების განფენა*** *ნებისმიერ მრავალსახეობაზე არის ისეთი განფენა, რომელსაც იგივე სტრუქტურული ჯგუფი აქვს, რაც მხებ სივრცეს, ხოლო მისი ფენა არის მხები სივრცის ყველა შესაძლო ბაზისის სიმრავლე.* თუ რეპერების განფენა S^1 სივრცეზე, ჰომეომორფულია მისი სტრუქტურული ჯგუფისა, მაშინ ეს მართებული იქნება რეპერების ყოველი განფენისათვის. ასეთ განფენილ სივრცეს ***მთავარი განფენილი სივრცე*** ეწოდება.

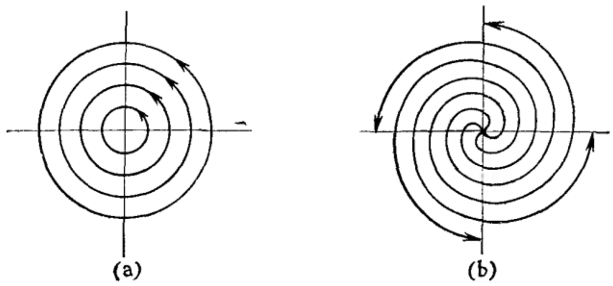
2.12. ვექტორული ველი და ინტეგრალური წირები

ვექტორული ველი არის წესი, რომელიც M მრავალსახეობის ყოველ წერტილს შეუსაბამებს ვექტორს. მრავალსახეობის ყოველ წერტილში გვაქვს შესაბამისი მხები სივრცე, ასე რომ, ვექტორული ველი ყოველი მხები სივრციდან „ირჩევს" თითო ვექტორს. შემდეგ, ნებისმიერი წირის ყოველ წერტილში, განსაზღვრულია მხები ვექტორი და ისმის ბუნებრივი კითხვა: *ხომ არ შეიძლება შებრუნებითაც, მოცემული ვექტორული ველისათვის ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც იწყება მოცემულ P წერტილში და მის ყოველ წერტილში გავლებული მხები ვექტორი ეკუთვნის მოცემულ ვექტორულ ველს* ? უწყვეტი C^1 კლასის ვექტორული ველისათვის პასუხი დადებითია და ასეთ წირებს ***ინტეგრალურ წირებს*** უწოდებენ.

დამტკიცება: ვთქვათ, $V^i(P)$ მოცემული ვექტორული ველის კომპონენტებია. ნებისმიერ $\{x^i\}$ კოორდინატთა სისტემაში გვექნება, რომ $V^i(P) = v^i(x^j)$. ის, რომ ეს ველი ეხება λ პარამეტრიზებულ წირს, გამოისახება განტოლებით

$$\frac{dx^i}{d\lambda} = v^i(x^j). \tag{2.22}$$

ამრიგად, მივიღეთ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა $x^i(\lambda)$ ცვლადების მიმართ; რომელსაც ზემოთ მოთხოვნილი დაშვების პირობებში, აქვს ერთადერთი ამონახსნი საწყისი P წერტილის რაღაც მიდამოში. ნახ.2.17-ზე მოცემულია ვექტორული ველის ინტეგრალური წირების ორი მაგალითი.



ნახ. 2.17. ორი ვექტორული ველის ინტეგრალური წირების მაგალითი $\mathbb{R}^2$ შემთხვევისთვის

უნდა აღინიშნოს, რომ სხვადასხვა ინტეგრალური წირი შეიძლება გადაიკვეთოს მხოლოდ ისეთ წერტილებში, სადაც $V^i = 0$ ყველა i-სთვის(ამონახსენის ერთადერთობიდან გამომდინარე). ინტეგრალური წირები ავსებენ მთელ M მრავალსახეობას, რადგან მისი თითოეული P წერტილისათვის გვაქვს ხვადასხვა ინტეგრალური წირი. ჩვენი მაგალითების შემთხვევაში

ა) $V = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$; (2.23)

ბ) $V = \left(x + \frac{y}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y} - \left(y - \frac{x}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x}$; (2.24)

გვაქვს შესაბამისი ინტეგრალური წირები ნახ.2.17.

მაგალითად, თუ გვაქვს სამგანზომილებიანი M მრავალსახეობა, მაშინ მასზე განსაზღვრული ნებისმიერი ვექტო-რული ველი იძლევა ორგანზომილებიან ინტეგრალურ წირთა ერთობლიობას, რომელიც მთლიანად ფარავს M მრავალსახეობას, იმ წერტილების გამოკლებით, სადაც $V^i = 0$. ასეთ ინტეგრალურ წირთა სიმრავლეს ***კონგრუენციას*** უწოდებენ.

2.13. $\frac{d}{d\lambda}$ ოპერატორის ექსპონენტა

შემოვიტანოთ ცნება, რომელიც შემდგომი გამოთვლებისათვის გამოგვადგება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ანალიზური მრავალსახე-ობა (C^ω კლასის). ამასთან, $\bar{Y} = \frac{d}{d\lambda}$ ვექტორული ველის ყოველი ინტეგრალური წირის წერტილების $x^i(\lambda)$ კოორდინატები ანალიზური ფუნქციებია λ პარამეტრის მიმართ, მაშინ წერტილების კოორდინატები, რომლებიც შეესაბამება პარამეტრის λ_0 და $\lambda_0 + \varepsilon$ მნიშვნელობებს, დაკავშირებული არიან ტეილორის მწკრივის ფორმულით:

$$x^i(\lambda_0 + \varepsilon) = x^i(\lambda_0) + \varepsilon\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\left(\frac{d^2x^i}{d\lambda^2}\right) + \ \dots =$$

$$=\left(1+\varepsilon\frac{d}{d\lambda}+\frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{d^2}{d\lambda^2}+\ \dots\right){x^i}_{\lambda_0}=exp\left[\varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right]{x^i}_{\lambda_0}, \qquad (2.25)$$

სადაც ექსპონენტა არის დიფერენციალური ოპერატორი, თუ მას გამოვიყენებთ $x^i(\lambda)$ ფუნქციების მიმართ და შემდეგ ჩავსვამთ $\lambda=\lambda_0$ მნიშვნელობას, მივიღებთ ტეილორის ფორმულას.

ამ ოპერატორს ეწოდება $\boldsymbol{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}}$ **- ოპერატორის ექსპონენტა.** $\varepsilon\frac{d}{d\lambda}$ არის უსასრულოდ მცირე გადაადგილება ინტეგრალურ წირზე, ხოლო მისი ექსპონენტა იძლევა უკვე სასრულ გადაადგილებას. ჩვენ თანაბრად გამოვიყენებთ აღნიშვნებს

$$exp\left[\varepsilon\frac{d}{d\lambda}\right]=e^{\varepsilon\frac{d}{d\lambda}}=e^{\varepsilon\bar{Y}}. \qquad (2.26)$$

2.14. ლის ფრჩხილები და არაკოორდინატული ბაზისი

თუ მოცემულია რომელიმე x^i კოორდინატთა სისტემა, მაშინ ხშირად მიზანშეწონილია ბაზისურ ვექტორულ ველად ავირჩიოთ $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$, თუმცა ბაზისად შეიძლება ავირჩიოთ ნებისმიერი წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა ველი: ადვილი მისახვედრია, რომ ყველა მათგანი არ წარმოიშობა რაღაც კოორდინატთა სისტემისაგან. საქმე ისაა, რომ $\frac{\partial}{\partial x^i}$ და $\frac{\partial}{\partial x^j}$ ოპერატორები კომუტირებენ ნებისმიერი i და j-სთვის, მაგრამ საზოგადოდ, სხვადასხვა ვექტორული ველი არ კომუტირებს ერთმანეთთან. თუ $V=\frac{d}{d\lambda}$ და $W=\frac{d}{d\mu}$, მაშინ

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu}-\frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda}=\sum_{i,j}V^i\frac{\partial}{\partial x^i}W^j\frac{\partial}{\partial x^j}-W^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i\frac{\partial}{\partial x^i}=$$

$$=\sum_{i,j}V^iW^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)+\sum_{i,j}V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}-\sum_{i,j}W^j\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=$$

$$=\sum_{i,j}\left(V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i}-W^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}, \qquad (2.27)$$

ასე რომ,

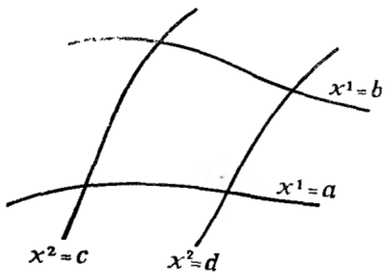
$$\left[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\right] = \frac{d}{d\lambda}\frac{d}{d\mu} - \frac{d}{d\mu}\frac{d}{d\lambda}, \tag{2.28}$$

არის ვექტორული ველი, რომელიც, საზოგადოდ, არაა ნულოვანი. თუ $\frac{d}{d\lambda}$ და $\frac{d}{d\mu}$ რომელიღაც ბაზისის ელემენტებია, მაშინ მათი წარმოდგენა, როგორც რომელიღაცა კოორდინატების წარმოებულებისა, შეუძლებელია.

ასე რომ, ესა არის ***არაკოორდინატული ბაზისი***.

მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ, რომ კოორდინატულ და არაკოორდინატულ ბაზისებს შორის განსხვავება თავს იჩენს მხოლოდ მაშინ, თუ განვიხილავთ მრავალსახეობის რაღაც არეს და არა ერთ რომელიმე წერტილს. ის განისაზღვრება ვექტორების კომპონენტების წარმოებულებით და არა მხოლოდ მნიშვნელობებით მოცემულ წერტილში. ასე რომ, კოორდინატულ და არაკოორდინატულ ბაზისებს შორის განსხვავება თავს იჩენს მხოლოდ მაშინ, როცა საქმე გვაქვს მრავალსახეობის არეებთან და არა აქვს მნიშვნელობა იმ ამოცანებისათვის, როცა ვიხილავთ მხებ T_P სივრცეს, რომელიმე ერთ P წერტილში.

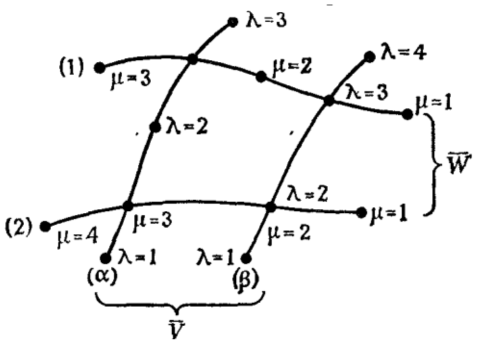
$\left[\frac{d}{d\lambda}, \frac{d}{d\mu}\right]$ ***კომუტატორს*** ეწოდება ***ლის ფრჩხილები*** $\bar{V}$ და $\bar{W}$ ველებისათვის. მოვიყვანოთ მისი გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნახ.2.18.



ნახ.2.18. ტიპური საკოორდინატო ბადე ორგანზომილებიან მრავალსახეობაზე

უნდა შევნიშნოთ, რომ x^1 მუდმივია x^2 წირის გასწვრივ, ესენი ინტეგრალური წირებია, ამიტომ $\frac{\partial}{\partial x^1}$ და $\frac{\partial}{\partial x^2}$ ველები კომუტირებენ. თითოეული მათგანი წარმოადგენს დიფერენცირებას იმ

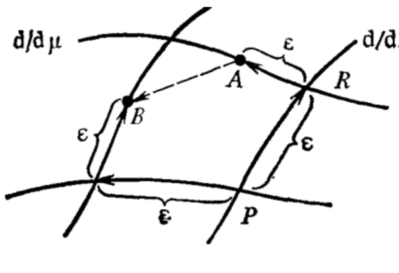
კოორდინატის მიმართულებით, სადაც მეორე კოორდინატა მუდმივია. ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი ორი ვექტორული ველი $\bar{V} = \frac{d}{d\lambda}$ და $\bar{W} = \frac{d}{d\mu}$, რომელთა ინტეგრალური წირები მოცემულია ნახ.2.19



ნახ.2.19. ორი ვექტორული ველის ტიპიური ინტეგრალური წირები ორგანზომილებიან მრავალსახეობაზე

W ველის ინტეგრალური წირი არაა მაინცდამაინც ის წირი სადაც λ მუდმივია და პირიქითაც. ამიტომ $\frac{d}{d\lambda}$ და $\frac{d}{d\mu}$ არ კომუტირებენ. $\bar{V}$ და $\bar{W}$ ველები გამოიყურებიან როგორც საკოორდინატო წირები, მაგრამ მათი პარამეტრიზაცია არაა ისეთი, როგორც საკოორდინატო სისტემაში. ის რომ ისინი გამოიყურებიან, როგორც საკოორდინატო წირები არის ორგანზომილებიანობის სპეციფიკა. სამგანზომილებიან შემთხვევა-ში, შესაძლებელია, რომ წირი (1) კვეთდეს (α) და (β) წირებს, ხოლო წირი (2) კვეთდეს მხოლოდ (α) წირს.

$[\bar{V}, \bar{W}]$ ვექტორს შეიძლება მივცეთ გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნახ.2.20.



ნახ. 2.20. ლის $[\bar{V}, \bar{W}]$ ფრჩხილების გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ლის ფრჩხილები გვიჩვენებს პარალელოგრამის ჩაკეტილობის ზომას, როცა პარალელოგრამის გვერდები შეესაბამებიან ტოლ ნაზრდებს $\bar{V}$ და $\bar{W}$ ვექტორული ველების ინტეგრალური წირების გასწვრივ.

დაამტკიცეთ, რომ C^2 კლასის $\bar{X}$, $\bar{Y}$ და $\bar{Z}$ ვექტორული ველებისათვის მართებულია იაკობის იგივეობა:

$$\left[[\bar{X},\bar{Y}],\bar{Z}\right]+\left[[\bar{Y},\bar{Z}],\bar{X}\right]+\left[[\bar{Z},\bar{X}],Y\right]=0. \tag{2.29}$$

M მრავალსახეობის U არეში ვექტორული ველების ***ლის ალგებრა*** არის ვექტორული ველების ნებისმიერი A ერთობლიობა, რომელიც არის ვექტორული სივრცე შეკრების მიმართ (ანუ ვექტორული ველების წრფივი კომბინაციაც მას ეკუთვნის) და ჩაკეტილი კომუტირების ოპერაციის მიმართ (A ერთობლიობის ნებისმიერი ორი ველის ლის ფრჩხილი ეკუთვნის ამ სიმრავლეს). ცხადია, რომ C^∞ კლასის ვექტორული ველების სიმრავლე U არეზე არის ლის ალგებრა.

2.15. როდისაა ბაზისი კოორდინატული

ვთქვათ, M მრავალსახეობაზე მოცემულია ორი $\bar{A}=\frac{d}{d\lambda}$ და $\bar{B}=\frac{d}{d\mu}$ ვექტორულ ველები; ამასთან, დავუშვათ რომ ეს ვექტორული ველები წრფივად დამოუკიდებელი არიან $U\subset M$ ღია სიმრავლის ყოველ წერტილში, ისე, რომ ისინი ქმნიან ვექტორული ველების ბაზისს U სიმრავლეში. ისმის კითხვა: რა შემთხვევაში შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ეს ბაზისი არის საკოორდინატო, ანუ, λ და μ როდის არიან კოორდინატები U სიმრავლეში ? ცხადია, რომ მაშინ ჩვენი ვექტორული ველები უნდა კომუტირებდნენ, ანუ, $[\bar{A},\bar{B}]=0$.

ეს წინადადება ზოგადდება n-განზომილებიან შემთხვევაზეც. თუ, n ცალი ვექტორული ველები $\{\overline{Y_{(j)}},\ \ j=1,\dots,n\}$ არიან წრფივად დამოუკიდებელი n-განზომილებიან $U\subset M$ მრავალსახეობაზე და კომუტირებენ ერთმანეთთან, მაშინ ისინი არიან საკოორდინატო

ბაზისური ვეტორები $\{\alpha_j\}$ საკოორდინატო სისტემაში, რომელთაც ნებისმიერ $\{x^j\}$ კოორდინატებში ექნებათ სახე:

$$x^i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = exp\left[\sum_j \alpha_j \overline{Y_{(J)}}\right] x^i{}_P, \tag{2.30}$$

სადაც P ცენტრი შეიძლება იყოს U სიმრავლის ნებისმიერი წერტილი.

2.16. ფორმა – 1

დავუბრუნდეთ მრავალსახეობის P წერტილში გავლებული მხები ვექტორების T_P სივრცის შესწავლას. ტენზორების პირველ მაგალითად განვიხილოთ ***ფორმა-1***, როგორც ვექტორებზე განსაზღვრული წრფივი ნამდვილი მნიშვნელობების მქონე ფუნქცია. ეს იმას ნიშნავს, რომ ფორმა-1 $\widetilde{\omega}$ მრავალსახეობის P წერტილში მოდებულ $\bar{V}$ ვექტორს შეუსაბამებს ნამდვილ $\widetilde{\omega}(\bar{V})$ რიცხვს. ასოს ზემოთ ტალღა აღნიშნავს იმ ფაქტს, რომ საქმე გვაქვს ფორმა-1, რომელიც არის ვექტორის ფუნქცია. ვექტორებს კი ავღნიშნავთ ზემოთ ხაზით. ამ ფუნქციის წრფივობა იმას ნიშნავს, რომ

$$\widetilde{\omega}(a\bar{V} + b\bar{W}) = a\widetilde{\omega}(\bar{V}) + b\widetilde{\omega}(\bar{W}), \tag{2.31}$$

სადაც a და b ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ბუნებრივად განისაზღვრება ორი ფორმა-1-ის ჯამი და ნამრავლი ნამდვილ რიცხვზე.

$$(\widetilde{\omega} + \tilde{\sigma})(\bar{V}) = \widetilde{\omega}(\bar{V}) + \tilde{\sigma}(\bar{V}), \tag{2.32}$$

$$(a\widetilde{\omega})(\bar{V}) = a\widetilde{\omega}(\bar{V}). \tag{2.33}$$

ამრიგად, მოცემულ წერტილში განსაზღვრული ფორმა-1-ების ერთობლიობა ქმნის ვექტორულ სივრცეს. ამ სივრცეს უწოდებენ T_P სივრცის ***დუალურს (შეუღლებულს)*** და აღნიშნავენ T_P^* სიმბოლოთი. ტერმინი *ორადული* იხმარება, რადგან შესაძლებელია ვექტორებიც განვიხილოთ, როგორც წრფივი ნამდვილმნიშვნელო-ბიანი ფუნქციები განსაზღვრული ფორმა-1-ების სიმრავლეზე. ამიტომ ხმარობენ ჩანაწერს

$$\widetilde{\omega}(\bar{V}) \equiv \bar{V}(\widetilde{\omega}) \equiv \langle \widetilde{\omega}, \bar{V} \rangle. \tag{2.34}$$

ძველ წიგნებში ხმარობდნენ ვექტორებისთვის ტერმინს-***კონტრავარიანტული პირველი რანგის ტენზორი***, ხოლო, ფორმა-1-ს უწოდებდნენ ***პირველი რანგის კოვარიანტულ ტენზორს***.

2.17. ფორმა-1-ის მაგალითები

ფორმა-1-ებიდან ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება ფორმა-1 ფუნქციის გრადიენტი, რომელსაც ცალკე განვიხილავთ. ახლა განვიხილოთ უფრო მარტივი მაგალითები:

1) მატრიცულ ალგებრაში თუ, ვექტორად ჩავთვლით სვეტ-ვექტორს, მაშინ სტრიქონ-ვექტორი იქნება ფორმა-1. მართლაც, მათი ნამრავლი მოგვცემს ნამდვილ რიცხვს. მაგალითად, ორგანზომილებიან შემთხვევაში სტრიქონ-ვექტორი $(2,5)$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ფუნქციად, რომელიც ნებისმიერ სვეტ-მატრიცას შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს:
$$(2,5): \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (2,5) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 5y. \tag{2.35}$$
ადვილი შესამოწმებელია ამ ფუნქციის წრფივობაც.

2) კვანტურ მექანიკაში გამოიყენება ჰილბერტის სივრცე, სადაც სტრიქონ-ვექტორისა და სვეტ-ვექტორის როლს ასრულებენ კეტ-ვექტორები $|\psi\rangle$ და ბრა-ვექტორები $\langle\varphi|$ (ფორმა-1), აღნიშვნები და ტერმინოლოგია ეკუთვნის დირაკს. ამ ვექტორების ნახვევი $\langle\varphi|\psi\rangle$ არის კომპლექსური რიცხვი. აქ კომპლექსურ რიცხვებზეა განზოგადებული ტენზორის ცნება, რაც მარტივად ხდება(საჭიროა მხოლოდ ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია შევცვალოთ კომპლექსურით).

2.18. დირაკის დელტა – ფუნქცია

კვანტურ მექანიკაში, ხშირად გვაქვს საქმე ***ფუნქციონალურ სივრცეებთან*** (ფუნქციებისაგან შემდგარ სიმრავლეებთან). განვიხილოთ, $C[-1;1] \subset \mathbb{R}^1$ ინტერვალზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლე C^{∞}-კლასიდან. ეს სიმრავლე წარმოადგენს ***ადიტიურ ჯგუფს*** (შეკრების ოპერაციის მიმართ) და ვექტორულ სივრცეს, ნამდვილ რიცხვთა ველს ზემოთ. ამ სივრცის ***ორადულ სივრცეს*** (ფორმა-1), ***განზოგადებულ ფუნქციებს*** უწოდებენ. განზოგადებული ფუქციების ერთ-ერთი კერძო მაგალითია ***დირაკის $\boldsymbol{\delta(x)}$ დელტა-ფუნქცია***, რომელიც განისაზღვრება, როგორც ფორმა-1, რომლის რიცხვითი მნიშვნელობაც C^{∞}-კლასიდან აღებულ ნებისმიერ $f(x)$ ფუნქციაზე არის $f(0)$, ანუ,

$$\langle \delta(x), f(x) \rangle = f(0). \tag{2.36}$$

ნებისმიერი $g(x)$ ფუნქციისათვის $C[-1;1] \subset \mathbb{R}^1$ სიმრავლიდან, შეგვიძლია ავაგოთ შესაბამისი ფორმა-1 $\tilde{g}(x)$, რომლის მნიშვნელობაც $f(x)$ ფუნქციაზე, იქნება

$$\langle \tilde{g}(x), f(x) \rangle = \int_{-1}^{1} g(x) f(x) dx. \tag{2.37}$$

ეს, მართლაც წრფივი ასახვაა, რომელიც $f(x)$ ფუნქციას შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს. ეს ინტეგრალი ყოველთვის არსებობს, რადგან g და f ფუნქციები არიან უწყვეტნი $C[-1;1]$ სიმრავლიდან. რადგან $\delta(x)$ არის ფორმა-1, შეგვიძლია მასზე ვილაპარაკოთ როგორც ისეთ ფუნქციაზე, რომლისთვისაც მისი $f(x)$ ფუნქციაზე ნამრავლიდან ინტეგრალი იძლევა ამ ფუნქციის მნიშვნელობას ნულოვან წერტილში, ანუ,

$$\langle \tilde{\delta}(x), f(x) \rangle = \int_{-1}^{1} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{2.38}$$

ჩვეულებრივი, მათემატიკური აზრით, რა თქმა უნდა **$\boldsymbol{\delta(x)}$ არის ფუნქციონალი და არა ფუნქცია**, რადგან ის ასახავს ფუნქციონალურ სივრცეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში.

იმისათვის, რომ მათემატიკურად დაესაბუთებინათ დირაკის $\delta(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის სისწორე, შეიქმნა ***განზოგადებულ ფუნქციათა თეორია*** და მისი ავტორები არიან ***ლორან***

შვარცი(ბურბაკების ერთ-ერთი წევრი) *და საბჭოთა მათემატიკური სკოლის ცნობილი წარმომადგენელი,* ***აკადემიკოსი სობოლევი***.

2.19. გრადიენტის ცნება და ფორმა – 1

ფორმა-1-ის ველი – ვექტორული ველის ანალოგიურად, არის წესი, რომელიც ყოველ წერტილში იძლევა შესაბამის ფორმა-1-ს.

(2.32) და (2.33) ფორმულებით მოცემული განსაზღვრებები გადაიტანება ველებზე: ამ შემთხვევაში, a არის M მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქცია, რომელიც არაა აუცილებლად მუდმივი რიცხვი. ფორმა-1-ის ველის დიფერენცირებადობა შეიძლება განისაზღვროს ვექტორული ველებისა და ფუნქციების დიფერენცირებადობის საშუალებით. ანუ, C^∞-მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფორმა-1 $\tilde{\omega}$ შესაბამის $\bar{V}$ ვექტორულ ველთან ერთად განსაზღვრავს $\tilde{\omega}(\bar{V})$ ფუნქციას. თუ ეს ფუნქცია ეკუთვნის C^∞ კლასს, ნებისმიერი C^∞ კლასის $\bar{V}$ ვექტორული ველისათვის, მაშინ $\tilde{\omega}$ არის C^∞ კლასის ფორმა-1. როგორც ვექტორული ველების შემთხვევაში, აქაც წარმოიქმნება განფენილი სივრცე T^*M, რომელსაც ***კომხებ განფენას*** უწოდებენ; ამ განფენის ბაზაა M, ხოლო P წერტილის ზემოთა ფენაა T_P^*. შესაბამისი კვეთები T^*M-ში არიან ფორმა-1-ის ველები.

ყველაზე უფრო საინტერესო და სასარგებლო ფორმა-1 არის f ფუნქციის გრადიენტი, რომელსაც ჩვენ აღვნიშნავთ $\tilde{d}f$ სიმბოლოთი. მიუხედავად იმისა, რომ მათემატიკური ანალიზის ელემენტარულ სახელმძღვანელოებში მას ვექტორს უწოდებენ, ის არის ფორმა-1. ასე, რომ $\tilde{d}f$ გრადიენტი განისაზღვრება ფორმულით

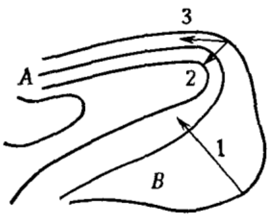
$$\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)=\frac{df}{d\lambda}, \qquad (2.39)$$

სადაც $\frac{d}{d\lambda}$ ნებისმიერი მხები ვექტორია. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, f ფუნქციის გრადიენტი მრავალსახეობის რომელიმე P წერტილში, არის T_P^* ფენის ისეთი ელემენტი, რომლის მნიშვნელობაც $\bar{V}$ ვექტორზე უდრის f ფუნქციის წარმოებულს $\bar{V}$ ვექტორის მიმართულებით(ანუ იმ წირის გასწვრივ რომლის მხებიცაა $\bar{V}$

ვექტორი). უნდა შევამოწმოთ, რომ ეს არის წრფივი ფუნქცია T_P^*-ზე. მართლაც,

$$\tilde{d}f\left(a\frac{d}{d\lambda}+b\frac{d}{d\mu}\right)=\left(a\frac{d}{d\lambda}+b\frac{d}{d\mu}\right)f=a\frac{df}{d\lambda}+b\frac{df}{d\mu}=a\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\lambda}\right)+b\tilde{d}f\left(\frac{d}{d\mu}\right). \tag{2.40}$$

გრადიენტის ცნება საშუალებას გვაძლევს თვალსაჩინო გავხადოთ ფორმა-1-ისა და ვექტორის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნახ. 2.21.



ნახ. 2.21. მთაგორიანი ადგილის ტოპოგრაფიული რუკა

ამ რუკაზე დონის წირები აღწერენ, ზღვის დონიდან თანაბარი სიმაღლის წერტილებს, ხოლო ისრები გვიჩვენებენ მთაზე ასვლის შესაძლო მიმართულებებს. ფორმა-1 ამ შემთხვევაში, აღიწერება მრავალსახეობაზე ერთით ნაკლები განზომილების პარალელური სიბრტყეების ოჯახით ნახ. 2.22, ხოლო $\bar{V}$ ვექტორის მიერ გადაკვეთილი სიბრტყეების რაოდენობა მოიცემა $\langle\tilde{\omega}, \bar{V}\rangle$ ნახვევის მნიშვნელობით.

ნახ.2.22. მხები ფორმა-1-ის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ამ ნახაზებიდან ჩანს, თუ, რა სხვაობაა ვექტორებსა და ფორმა-1 შორის. ჩვენ შეჩვეული ვართ რომ გრადიენტს, რომელიც ნახაზზე გამოსახულია ისრებით, და ერთეულ სიგრძეზე გადაკვეთს ყველაზე მეტ დონის წირს უწოდოთ ვექტორი, თუმცა, შეიძლება მრავალსახეობაზე არც გვქონდეს მეტრიკა. თუ, გვაქვს მეტრიკა, მაშინ გრადიენტი შეგვიძლია ჩავთვალოთ ვექტორად.

2.20. ბაზისური ფორმა – 1 და მისი კომპონენტები

P - წერტილში განსაზღვრული ფორმა -1 –ებისაგან შედგენილ ვექტორულ T_P^* სივრცეში, ნებისმიერი n - ცალი წრფივად დამოუკიდებელი ფორმა -1 –ებისაგან შედგენილი სისტემა ქმნის ბაზისს. მაგრამ, თუ, P - წერტილში განსაზღვრული ვექტორების T_P სივრცეში, უკვე არჩეულია $\{\overline{e_\iota},\ i=\overline{1,n}\}$ ბაზისი, მაშინ T_P^* სივრცეში არსებობს პრივილეგირებული $\{\widetilde{\omega^\iota}, i=\overline{1,n}\}$ ბაზისი, რომელსაც ***ორადულ (ანუ, დუალურ)*** ბაზისს უწოდებენ. განვსაზღვროთ ეს ბაზისი. თუ, $\vec{V}$ არის P - წერტილში განსაზღვრული ნებისმიერი ვექტორი, მაშინ $\widetilde{\omega^\iota}$ არის მისი i - ური კომპონენტი:

$$\widetilde{\omega^\iota}(\vec{V}) = V^i. \tag{2.41}$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს ფუნქცია წრფივია T_P სივრცეში. კერძო შემთხვევაში, როცა $\vec{V}=\vec{e_J}$ გვექნება ერთადერთი არანულოვანი $j-$ ური კომპონენტი და

$$\widetilde{\omega^\iota}(\vec{e_J}) = \delta_j^i. \tag{2.42}$$

ნებისმიერი $\widetilde{\omega^\iota}$ – ს საპოვნელად საჭიროა ყველა $\{\vec{e_J}\}$ ვექტორის ცოდნა. ნებისმიერი $\overrightarrow{e_k}$ ვექტორის შეცვლა, იწვევს ყველა $\widetilde{\omega^\iota}$ ბაზისური ფორმა – 1-ის შეცვლას. ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ ***შესაბამისობა ბაზისსა და მის ორადულ ბაზისს*** შორის.

ვაჩვენოთ, რომ $\{\widetilde{\omega^\iota}, i=\overline{1,n}\}$ ფორმები - 1 არიან წრფივად დამოუკიდებელნი. ამისათვის, განვიხილოთ ნებისმიერი $\tilde{q}$ ფორმა -1 –ის მოქმედება რაიმე $\vec{V}$ ვექტორზე:

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \tilde{q}\left(\sum_j V^j\vec{e_J}\right) = \sum_j V^j\tilde{q}(\vec{e_J}) = \sum_j \widetilde{\omega^J}(\vec{V})\tilde{q}(\vec{e_J}). \tag{2.43}$$

ამ ფორმულაში

$$q_j = \tilde{q}(\vec{e_J}), \tag{2.44}$$

სიდიდეები *წარმოადგენენ $\tilde{q}$ ფორმა -1 –ის კომპონენტებს $\{\vec{e_J}\}$ ბაზისის დუალურ ბაზისში.* გადავწეროთ (2.44) თანადობა ფორმით

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \sum_j q_j \widetilde{\omega^j}(\vec{V}). \tag{2.45}$$

$\vec{V}$ ვექტორის ნებისმიერობიდან, გამომდინარეობს, რომ

$$\tilde{q} = \sum_j q_j\, \widetilde{\omega^j}. \tag{2.46}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\{\widetilde{\omega^j}\}$ ***დუალური სისტემა*** ქმნის ბაზისს, რადგან მათი რაოდენობაა n და ნებისმიერი ფორმა – 1, $\tilde{q}$ წარმოიდგინება ამ სისტემის ელემენტების წრფივი კომბინაციის ფორმით. ყველაზე მთავარი კი ის არის, რომ უკვე გვაქვს ფორმულები, რომლებიც გამოსახავენ $\tilde{q}(\vec{V})$ სიდიდეებს $\tilde{q}$-ს და $\vec{V}$-ს კომპონენტების საშუალებით :

$$\tilde{q}(\vec{V}) = \sum_j q_j V^j. \tag{2.47}$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ეს არის $\tilde{q}$-ს და $\vec{V}$-ს ***ნახვევი.***

ცხადია, რომ ეს მსჯელობა პირდაპირ გადაიტანება ფორმა-1-ის ველზეც.

2.21. ინდექსური აღნიშვნები

ჩვენ ინდექსებისათვის ვიყენებთ შემდეგ შეთანხმებას: ვექტორების კომპონენტები აღინიშნება ზედა ინდექსებით, მაგალითად V^i, ხოლო ფორმა-1-ის კომპონენტებისათვის ვიყენებთ ქვედა ინდექსებს, მაგალითად ω_j. საბაზისო ვექტორების ნომრებისათვის ვიყენებთ ქვედა ინდექსებს $(\vec{e}_j)$, ხოლო საბაზისო ფორმა-1-ებისათვის – ზედა ინდექსებს $(\widetilde{\omega}^j)$. ამრიგად, საკოორდინატო ბაზისისათვის ფორმა-1-ები $\tilde{d}x^i$ გადაინომრებიან ზედა ინდექსებით, ხოლო $\frac{\partial}{\partial x^j}$ ვექტორები ითვლებიან, როგორც ქვედა ინდექსის მქონენი, რადგან ზედა ინდექსი აქვთ მნიშვნელში. ინდექსების ასეთნაირი განლაგება ძალზე მოსახერხებელია. მართლაც, განვიხილოთ ***ნახვევი***

$$\widetilde{\omega}(\vec{V}) = \sum_j V^j \omega_j, \tag{2.48}$$

რომელიც წარმოადგენს ორი სიდიდის ნამრავლთა ჯამს, რომელთაგან ერთს აქვს ზედა ინდექსი მეორეს კი– ქვედა ინდექსაცია. მივიღებთ ***აინშტაინის შეთანხმებას შეჯამების შესახებ:*** თუ, რომელიმე ფორმულაში ერთიდაიგივე ინდექსი გვხვდება ორჯერ, ერთხელ როგორც ქვედა და ერთხელ როგორც ზედა, მაშინ ვიგულისხმებთ, რომ ამ ინდექსით ხდება შეჯამება. მაგალითად, ფორმულებში

$$\widetilde{\omega} = \omega_j \tilde{d}x^j, \quad \vec{V} = V^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \widetilde{\omega}(\vec{V}) = V^j \omega_j, \tag{2.49}$$

იგულისხმება შეჯამება $j-$ ინდექსით. აინშტაინის შეთანხმების გამოყენება გვიმარტივებს კომპონენტებზე გამოთვლების ჩატარებას. *ეხლა გადავიდეთ ვექტორული ალგებრიდან ტენზორულზე.*

2.22. ტენზორი და ტენზორული ველი

ტენზორის ცნება, წარმოადგენს იმ სიდიდეების ბუნებრივ განზოგადებას, რომლებიც ჩვენ უკვე განვიხილეთ. მათი ალგებრა აგებულია მარტივად და აქვს დიდი პრაქტიკული გამოყენება. მთავარი სირთულე აქ არის ვიზუალიზაციის შეუძლებლობა, მათი დახატვა შეუძლებელია. ზემოთ განვიხილეთ ვექტორებისა და ფორმა-1-ის ცნება და მათი გეომეტრიული წარმოდგენები. აქ შესაძლებელია პირდაპირი განზოგადებები, თუმცა, ნახატები იმდენად გადატვირთული გამოდის მაღალი რანგის შემთხვევაში, რომ გეომეტრიული ვიზუალიზაცია აზრს კარგავს. ასე, რომ უმჯობესია ტენზორებს ვუყუროთ, როგორც წრფივ ოპერატორებს, რომლებიც განსაზღვრულია ვექტორებსა და ფორმა-1-ის სიმრავლეებზე.

განვიხილოთ M მრავალსახეობის რაიმე P წერტილი. ამ წერტილში განსაზღვრული $\binom{N}{N'}$ ტენზორი, განისაზღვრება როგორც პოლიწრფივი ფუნქციონალი(წრფივი ყველა არგუმენტის მიმართ), რომლის არგუმენტებს წარმოადგენენ N რაოდენობის ფორმა-1 და N' რაოდენობის ვექტორი, ხოლო მნიშვნელობები ნამდვილი

რიცხვებია. მაგალითად, თუ F არის $\binom{2}{2}$ ტიპის ტენზორი, მაშინ მისი მნიშვნელობა $\widetilde{\omega}$ და $\widetilde{\sigma}$ ფორმა-1-ზე და ორ $\vec{V}$ და $\vec{W}$ ვექტორზე, ჩაიწერება სახით $F(\widetilde{\omega},\widetilde{\sigma};\vec{V},\vec{W})$. წრფივობის თვისება აქ იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი ორი α და β ნამდვილი რიცხვისათვის ადგილი აქვს ტოლობა:

$$F(\alpha\widetilde{\omega}+\beta\tilde{\lambda},\widetilde{\sigma};\vec{V},\vec{W})=\alpha F(\widetilde{\omega},\widetilde{\sigma};\vec{V},\vec{W})+\beta F(\tilde{\lambda},\widetilde{\sigma};\vec{V},\vec{W}), \tag{2.50}$$

ანალოგიური თვისებები უნდა ჰქონდეს ტენზორს სხვა არგუმენტების მიმართაც.

როგორც ვექტორული და ფორმა-1-ების სივრცეების შემთხვევაში, ისე ***ტენზორული ველების*** შემთხვევაშიც, $\binom{N}{N'}$ ტენზორი არის წესი, რომელიც მრავალსახეობის ნებისმიერ წერტილს შეუსაბამებს $\binom{N}{N'}$ ტენზორს. ტენზორული ველისთვისაც ადგილი აქვს წრფივობის თვისებას. ამ შემთხვევაში, α და β მნიშვნელობები, სხვადასხვა წერტილისათვის შეიძლება იყოს სხვადასხვა, ანუ, ისინი მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციებია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ვექტორები წარმოადგენენ $\binom{1}{0}$ ტიპის ტენზორებს, ანუ ისინი ფორმა-1-ების სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერატორებია.

ანალოგიურად, ფორმა-1 არის $\binom{0}{1}$ ტიპის ტენზორი. ხოლო, სკალარული ფუნქციები-$\binom{0}{0}$ ტიპის ტენზორი.

2.23. ტენზორის მაგალითები

განვიხილოთ ტენზორის მაგალითები.

1) თუ, სვეტ-ვექტორებს ჩავთვლით ვექტორებად, ხოლო ვექტორ-სტრიქონებს ფორმა-1-ებად, მაშინ მატრიცები იქცევიან $\binom{1}{1}$ ტენზორად, რადგანაც მატრიცის ნამრავლი ვექტორზე

არის ვექტორი, ხოლო თუ, მატრიცას მარცხნიდან გავამრავლებთ ვექტორზე და მარჯვნიდან ფორმა-1-ზე, მივიღებთ რიცხვს;

2) განვიხილოთ $C[-1;1]$ ფუნქციონალური სივრცე. წრფივ დიფერენციალურ ოპერატორს (მაგალითად, $x^2\frac{d}{dx}$) ამ სივრცის ფუნქცია(ვექტორი) გადაჰყავს სხვა ფუნქციაში(ვექტორში). რადგან ეს ასახვა წრფივი ოპერატორია, ის წარმოადგენს $\binom{1}{1}$ ტენზორს მოცემულ ფუნქციონალურ სივრცეში;

3) მესამე მაგალითია ძაბვის ტენზორი. თუ, დეფორმირებული სხეულის მოცულობაში ავირჩევთ რომელიღაც ფართეულს, მაშინ ძაბვის ტენზორი განსაზღვრავს ძაბვის ვექტორს(ძალას რომელიც მოქმედებს ერთეულ ფართეულზე მისი ერთი მხრიდან მეორე მხარეზე), რომელიც მოქმედებს ამ ფართეულზე. რადგან ფართეული არის ზედაპირი, ზედაპირი კი მოიცემა ფორმა-1-ებით, ძაბვის ტენზორი წარმოადგენს წრფივ ოპერატორს, რომელიც განსაზღვრულია ფორმა-1-ების სიმრავლეზე და მნიშვნელობათა სიმრავლეა ვექტორები. ასე, რომ ძაბვა არის $\binom{2}{0}$ ტიპის ტენზორი.

2.24. ტენზორის კომპონენტები და ტენზორული ნამრავლი

$\binom{2}{0}$ ტიპის უმარტივესი ტენზორის ასაგებად, ვიღებთ ორ $\vec{V}$ და $\vec{W}$ ვექტორს და განვსაზღვრავთ ახალ $\vec{V}\otimes\vec{W}$ ტენზორს, როგორც ისეთ წრფივ ოპერატორს, რომელიც ნებისმიერ ორ $\tilde{p}$ და $\tilde{q}$ ფორმა-1-ზე მოქმედებისას გვაძლევს $\vec{V}(\tilde{p})\vec{W}(\tilde{q})$ ნამრავლს.

$\otimes$-ოპერაციას ტენზორულ(გარე) ნამრავლს უწოდებენ. ორი $\binom{M}{N}$ და $\binom{M'}{N'}$ ტენზორის ტენზორული ნამრავლი იქნება $\binom{M+M'}{N+N'}$ ტიპის ტენზორი.

ტენზორის კომპონენტები ეწოდებათ მის მნიშვნელობებს ბაზისურ ვექტორებსა და ფორმა-1-ებზე. მაგალითად, თუ, გვაქვს $\binom{3}{2}$ ტიპის S ტენზორი, მაშინ მისი კომპონენტები $\{\vec{e}_i\}$ ბაზისის მიმართ იქნება

$$S^{ijk}_{lm} \equiv S\left(\widetilde{\omega}^i, \widetilde{\omega}^j, \widetilde{\omega}^k; \vec{e}_l, \vec{e}_m\right). \tag{2.51}$$

2.25. ნახვევის ოპერაცია

$\binom{1}{1}$ ტიპის $\vec{V}\otimes\widetilde{\omega}$ ტენზორის კომპონენტებია $V^i\omega_j$. თუ, შევაჯამებთ დიაგონალურ ($i=j$) კომპონენტებს, მივიღებთ $V^j\omega_j$ რიცხვს, რომელიც არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე, ეს არის $\widetilde{\omega}$-ს მნიშვნელობა $\vec{V}$-ზე, რომელიც წარმოადგენს სკალარულ $\binom{0}{0}$ ტენზორს. ამ ოპერაციას ნახვევის ოპერაცია ეწოდება.

ანალოგიურად, თუ, გვაქვს $\binom{1}{2}$ ტიპის ტენზორის გარე ნამრავლი $\binom{2}{0}$ ტიპის ტენზორზე, მაშინ მივიღებთ $\binom{3}{2}$ ტიპის ტენზორს, რომლის კომპონენტებიც შეგვიძლია ჩავწეროთ $S^i_{jk}P^{lm}$. თუ, ამ ტენზორში ***მოვახდენთ მაგალითისათვის ერთი ზედა l ინდექსის გატოლებას j ქვედა ინდექსთან, რაც აინშტაინის შეთანხმების საფუძველზე, ნიშნავს ამ ინდექსით შეჯამებას***, მივიღებთ ***ნახვევის ოპერაციას***, რომელიც $\binom{3}{2}$ ტიპის ტენზორიდან მოგვცემს $\binom{2}{1}$ ტიპის ტენზორს $S^i_{jk}P^{jm}$ კომპონენტებით.

უნდა აღინიშნოს, რომ ნახვევის ოპერაცია არაა დამოკიდებული ბაზისია არჩევაზე.

2.26. ბაზისის ცვლილება

განვიხილოთ M მრავალსახეობის რაიმე P წერტილში განსაზღვრული ვექტორები და ტენზორები. ვთქვათ, ჩვენ გვაქვს $\{\vec{e}_i\}$ ბაზისი $(i=\overline{1,n})$ და გვინდა გადავიდეთ სხვა $\{\vec{\epsilon}_i\}$ ბაზისზე $(i=\overline{1,n})$. მაშინ T_P გვექნება წრფივი გარდაქმნა Λ, რომელიც გვაძლევს საშუალებას გადავიდეთ ძველი ბაზისიდან ახალზე:

$$\vec{\epsilon}_i=\Lambda_\mathrm{i}^\mathrm{j}\vec{e}_j. \tag{2.52}$$

ცხადია, რომ $\Lambda_\mathrm{i}^\mathrm{j}$ მატრიცა არაგადაგვარებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში $\vec{\epsilon}_i$ ვექტორები არ იქნებოდნენ წრფივად დამოუკი-დებელი. ამ მატრიცას ***გარდაქმნის მატრიცა*** ეწოდება და მას აქვს შებრუნებულიც.

ფორმა-1-ების ძველი ბაზისი, როგორც ვიცით აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\widetilde{\omega}^i(\vec{e}_j)=\delta_j^i. \tag{2.53}$$

თუ, გავამრავლებთ (2.53) ტოლობას Λ_m^j მატრიცაზე და გამოვიყენებთ (2.52) თანაფარდობას, მაშინ გარდაქმნის წრფივობის თვისებიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\widetilde{\omega}^i(\vec{e}_m)=\delta_j^i\Lambda_m^j=\Lambda_m^i. \tag{2.54}$$

საიდანაც ადვილად გამოიყვანება ფორმა-1-ების გარდაქმნის კანონი

$$\widetilde{\omega}^i=\Lambda_m^i\widetilde{\omega}^m, \tag{2.55}$$

რომელიც განსხვავდება საბაზისო ვექტორების გარდაქმნის (2.52) კანონისაგან. ზოგჯერ ტენზორების ზედა ინდექსებს ***კონტრავარიანტულს*** უწოდებენ, ხოლო ქვედა ინდექსებს – ***კოვარიანტულს***. ასე რომ, ფორმა-1-ებს კოვარიანტულ ვექტორებსაც უწოდებენ.

ზოგჯერ ტენზორების განსაზღვრისათვის იყენებენ მათი გარდაქმნის ფორმულებს.

2.27. ტენზორული ოპერაციები კომპონენტებზე

ვთქვათ, T ტენზორს რომელიღაც ბაზისში აქვს კომპონენტები $\{T_{j\,\cdots}^{i\,\cdots}\}$, თუ, ამ კომპონენტებს ***გავამრავლებთ რაიმე a*** ნამდვილ რიცხვზე, მივიღებთ $\{aT_{j\,\cdots}^{i\,\cdots}\}$, რაც წარმოადგენს aT ტენზორის კომპონენტებს. აქედან ცხადია, რომ მუდმივი რიცხვის ტენზორზე ნამრავლი არ არის დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე. ასე, რომ აქ გვაქვს ასახვა: $T \longmapsto aT$.

ანალოგიურად, ***ტენზორული ნამრავლის ოპერაცია*** არის ასახვა: $A, B \longmapsto A \otimes B$, რომელსაც კომპონენტებში ჩავწერთ შემდეგნაირად:

$$\{A_{j\,\cdots}^{i\,\cdots}\},\ \{B_{m\,\cdots}^{k\,\cdots}\} \longmapsto \{A_{j\,\cdots}^{i\,\cdots}B_{m\,\cdots}^{k\,\cdots}\}. \tag{2.56}$$

ამრიგად, გვაქვს შემდეგი ტენზორული ოპერაციები:

1) ერთნაირი ტიპის ტენზორების შესაბამისი კომპონენტების შეკრება(გამოკლება);
2) ნებისმიერი ტიპის ტენზორის ყველა კომპონენტის გამრავლება მოცემულ მუდმივ რიცხვზე(იძლევა იგივე ტიპის ტენზორს);
3) ორი ტენზორის კომპონენტების ნამრავლი იძლევა ახალ ტენზორს, რომლის ტიპიც თანამამრავლთა ტიპების ჯამის ტოლია;
4) ტენზორის ნახვევი რაიმე ორი ინდექსით, რომელთაგან ერთი ზედა ინდექსია, ხოლო მეორე – ქვედა, იძლევა ტენზორს რომლის რანგიც ორით ნაკლებია საწყის ტენზორზე.

განტოლებები, რომლებშიც ტენზორები ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან მხოლოდ ამ ოპერაციებით, წარმოადგენენ ***ტენზორულ განტოლებებს***, რომლებიც დამოკიდებული არ არიან ბაზისის არჩევაზე.

2.28. ფუნქცია და სკალარი

სკალარები წარმოადგენენ $\binom{0}{0}$ ტიპის ტენზორებს, ანუ, არიან მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუნქციები, რომლებიც ინვარიანტული არიან ბაზისის არჩევის მიმართ. მაგალითად, ნახვევი $V^i\omega_i$ სკალარია, რადგან მისი მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

2.29. მეტრიკული ტენზორი ვექტორულ სივრცეში

ვექტორულ სივრცეში ხშირად განიხილება ვექტორთა ***სკალარული ნამრავლის*** ცნება. ეს არის *წესი, რომელიც ორ ვექტორს შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს, ისე რომ, ეს ნამრავლი წრფივადაა დამოკიდებული თითოეულ ვექტორზე*. ასე, რომ სკალარული ნამრავლი არის $\binom{0}{2}$ ტიპის ტენზორი. ამ ტენზორს მეტრიკულ ტენზორს უწოდებენ და აღნიშნავენ g სიმბოლოთი. ასე, რომ, ჩვენ განსაზღვრის თანახმად ვამბობთ, რომ

$$g(\vec{V},\vec{U}) = g(\vec{U},\vec{V}) \equiv \vec{U}\cdot\vec{V}. \tag{2.57}$$

პირველი ტოლობა მიუთითებს, რომ სკალარული ნამრავლი არაა დამოკიდებული თანამამრავლთა მიმდევრობაზე, ანუ, სკალარული ნამრავლი არის **სიმეტრიული ტენზორი**. მისი კომპონენტები $\{\vec{e}_i\}$ ბაზისში არიან

$$g_{ij} = g(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j. \tag{2.58}$$

ეს კომპონენტები ქმნიან კვადრატულ $n\times n$ მატრიცას. უნდა მოვითხოვოთ, რომ ეს მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული და მაშასადამე, ჰქონდეს შებრულებულიც. თუ ეს არის ერთეულოვანი მატრიცა ანუ

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \tag{2.59}$$

მაშინ ***მეტრიკულ g ტენზორს ევკლიდურს*** უწოდებენ, ხოლო შესაბამის ***ვექტორულ სივრცეს – ევკლიდურ სივრცეს***.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მეტრიკულ ტენზორს არა აქვს ასე მარტივი სახე, ყოველთვის შეგვიძლია ავირჩიოთ ისეთი ახალი ბაზისი $\{\vec{e}_{j'}\}$, რომ ახალ კომპონენტებს ჰქონდეთ რაც შეიძლება მარტივი სახე

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^{k}\Lambda_{j'}^{l}g_{kl}. \tag{2.60}$$

განვიხილოთ ეს თანადობა, როგორც მატრიცული განტოლების კომპონენტები; მაშინ, შეგვიძლია ის გადავწეროთ ფორმით

$$g_{i'j'} = \Lambda_{i'}^{k}g_{kl}\Lambda_{j'}^{l}. \tag{2.61}$$

ჩავწეროთ ეს ტოლობა მატრიცული განტოლების სახით

$$g' = \Lambda^{T}g\Lambda, \tag{2.62}$$

სადაც Λ^{T} - არის $\Lambda = \Lambda_{i'}^{k}$ მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა.

ვაჩვენოთ, რომ თუ კარგად ავირჩევთ Λ მატრიცას, მაშინ g′ მეტრიკული ტენზორი შეიძლება მაქსიმალურად მარტივი სახით ჩავწეროთ.

მართლაც, წარმოვადგინოთ Λ მატრიცა O - ორთოგონალური($O^{T} = O^{-1}$) და D – დიგონალური ($D^{T} = D$) მატრიცების ნამრავლის სახით

$$\Lambda = OD. \tag{2.63}$$

როგორც მატრიცების თვისებებიდან ვიცით

$$\Lambda^{T} = (OD)^{T} = D^{T}O^{T} = DO^{-1} \tag{2.64}$$

და

$$g' = DO^{-1}gOD. \tag{2.65}$$

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი სიმეტრიული მატრიცა და მაშასადამე, g მატრიცაც, მსგავსების შესაბამისი ორთოგონალური მატრიცით გარდაქმნით, შეგვიძლია მივიყვანოთ g_d დიაგონალურ

მატრიცულ სახეზე. ვთქვათ, O - სწორედ ასეთი ორთოგონალური მატრიცაა:

$$g_d = O^{-1}gO, \tag{2.66}$$

მაშინ, (2.65) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$g' = Dg_dD. \tag{2.67}$$

თუ, $g_d = diag(g_1, g_2, \dots, g_n)$ და $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$, მაშინ

$$g' = diag(g_1d_1^2, g_2d_2^2, \dots, g_nd_n^2). \tag{2.68}$$

დავუშვათ ახლა, რომ $d_i = |g_i|^{-\frac{1}{2}}$, მაშინ (2.68) დიაგონალური მატრიცის თითოეული წევრი უდრის +1, ან -1-ს.

g_d მატრიცის დიაგონალური $\{g_i, i=\overline{1,n}\}$ ელემენტები წარმოადგენენ **g მატრიცის საკუთრივ რიცხვებს** და განისაზღვრებიან მიმდევრობის სიზუსტით. უფრო მეტიც, რადგან მატრიცა არაგადაგვარებულია, არც ერთი მათგანი არაა ნულოვანი.

ასე, რომ მეტრიკული ტენზორის შემცველი ნებისმიერი ვექტორული სივრცე მიიყვანება ისეთ ბაზისზე, რომ ამ ორთონორმირებული ბაზისის მიმართ, მეტრიკულ ტენზორს აქვს ***კანონიკური სახე*** $\boldsymbol{diag(-1,-1,\dots-1,1,1,\dots1)}$*. ამ მატრიცის დიაგონალური ელემენტების ჯამს* ***სიგნატურას*** *უწოდებენ.*

თუ მეტრიკა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ მის კანონიკურ წარმოდგენაში გვაქვს მხოლოდ +1-იანები და ასეთი ***სივრცე ევკლიდურია.*** თუ, ***ყველა დიაგონალური ელემენტი არაა +1, მაშინ მეტრიკას ინდეფინიტურს*** უწოდებენ. ***ინდეფინიტური*** მეტრიკის მაგალითია ***მინკოვსკის მეტრიკა (-1,1,1, . . .,1).*** ასეთი მეტრიკა აქვს ფარდობითობის სპეციალურ თეორიას ($n = 4$).

ევკლიდურ სივრცეში კანონიკურ ბაზისებს დეკარტულს უწოდებენ. ასეთ ბაზისში მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები ემთხვევა კრონეკერის სიმბოლოს კომპონენტებს. ანუ, მოიცემა ერთეულოვანი მატრიცით. დეკარტული ბაზისიდან მეორე დეკარტულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა ორთოგონალურია. ორი

ორთოგონალური მატრიცის ნამრავლი ისევ ორთოგონალურია და მაშასადამე, ორთოგონალური მატრიცების სიმრავლე ჯგუფია, რომელსაც $\mathbf{O(n)}$ **ორთოგონალურ ჯგუფს** უწოდებენ.

ანალოგიურად, ***ვექტორულ სივრცეში მინკოვსკის მეტრიკით*** აღსანიშნავია კანონიკური ბაზისი, რომელსაც ***ფსევდოევკლიდური (ლორენცის)*** ბაზისი ეწოდება. სადაც მეტრიკის კომპონენტებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$g_d = diag(-1,1,\dots,1). \tag{2.69}$$

ერთი ფსევდოევკლიდური ბაზისიდან მეორეზე გადასვლის მატრიცა Λ_L აკმაყოფილებს თანადობას

$$g_d = \Lambda_L^T g_d \Lambda_L. \tag{2.70}$$

ასეთ გარდაქმნას ***ლორენცის გარდაქმნას*** უწოდებენ. ეს გარდაქმნებიც ადგენენ ჯგუფს, რომელსაც ლორენცის $L(n)$ ჯგუფს უწოდებენ და ზოგჯერ ასეც აღნიშნავენ: $O(n-1,1)$.

მეტრიკული ტენზორის ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი თვისება ისაა, რომ მათი საშუალებით მყარდება ურთიერთცალსახა კავშირი(ბიექცია) ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის.

ჩვენ დავუშვით, რომ g_{ij} მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული, ეს განაპირობებს მისი შებრუნებული g^{ij} მატრიცის არსებობას, ანუ,

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \tag{2.71}$$

შესაბამისობა ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის მოიცემა ტოლობებით:

$$V_i = g_{ij} V^j \quad \text{და} \quad V^j = g^{jk} V_k. \tag{2.72}$$

შესაბამისად g^{ij} არის $\binom{2}{0}$ ტიპის ტენზორი. მეტრიკული ტენზორი საშუალებას იძლევა ***ინდექსები ავწიოთ ან დავწიოთ.***

მაგალითად, $\binom{2}{0}$ ტიპის A^{jk} ტენზორი, შეიძლება გარდავქმნათ $\binom{1}{1}$ ტიპის A_j^i ტენზორად ფორმულით:

$$A_j^i = g_{jk}A^{ik}. \tag{2.73}$$

ასევე, შეგვიძლია $\binom{1}{1}$ ტიპის A_j^i ტენზორი გარდავქმნათ $\binom{0}{2}$ ტიპის A_{ij} ტენზორად ფორმულით:

$$A_{ij} = g_{im}A_j^m = g_{im}g_{jk}A^{mk}. \tag{2.74}$$

აქედან კი შეგვიძლია დავუბრუნდეთ საწყის ტენზორს ფორმულით:

$$A^{ij} = g^{ik}g^{jm}A_{km}. \tag{2.75}$$

ამ ოპერაციას ***ინდექსების აწევ-დაწევის ოპერაციას*** უწოდებენ.

მეტრიკულ ვექტორულ სივრცეში არა აქვს მნიშვნელობა ტენზორი იქნება $\binom{M}{N}$ ტიპის, თუ, $\binom{M-1}{N+1}$ ტიპის. აქ ყველაფერს განსაზღვრავს **ტენზორის რანგი** ანუ $M+N$.

ევკლიდურ სივრცეში $g_{ij} = \delta_{ij},\ g^{ij} = \delta^{ij},\ V^i = V_j$. ამიტომ ვექტორებსა და ფორმა-1-ებს შორის ევკლიდურ სივრცეში, ორთონორმირებული ბაზისის შემთხვევაში, არაა განსხვავება. თუმცა, ევკლიდურ სივრცეში არაორთონორმირებული ბაზისით ან ***ინდეფინიტური მეტრიკის*** შემთხვევაში ნებისმიერი ბაზისით, ფორმა-1-ი განსხვავდება ვექტორისაგან.

2.30. მეტრიკული ტენზორის ველი მრავალსახეობაზე

მეტრიკული g ტენზორული ველი M რავალსახეობაზე არის სიმეტრიული $\binom{0}{2}$ ტიპის ტენზორული ველი, რომელიც შებრუნებადია ნებისმიერ წერტილში. მრავალსახეობის ნებისმიერ P წერტილში ის იძლევა მეტრიკას მხებ T_P სივრცეში, რომლისთვისაც

სრულდება ყველა თვისება, რომლებზედაც წინა პარაგრაფში გვქონდა საუბარი, და კიდევ ბევრი სხვა.

$\binom{0}{2}$ ტიპის ტენზორული ველის გამოყოფა მრავალსახეობის მეტრიკისათვის ძალიან ამდიდრებს მრავალსახეობას და გარდაქმნის მას მეტად ხისტ სტრუქტურად. უკვე შესაძლებელი ხდება განვსაზღვროთ მასზე მანძილი და სიმრუდე. ეს მნიშვნელოვანია ***ფარდობითობის ზოგადი თეორიისათვის***, თუმცა, შეიძლება აგვაცილოს დიფერენცირებადი მრავალსახეობების გეომეტრიის ისეთ მნიშვნელოვან ცნებებს, როგორიცაა ***ლის წარმოებული და კარტანის დიფერენციალური ფორმები***. ამიტომ, შევეცდებით მეტრიკული ტენზორი გამოვიყენოთ მხოლოდ იქ, სადაც ის აუცილებელია.

მეტრიკული ტენზორი დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით. ასე, რომ მას ვთვლით უწყვეტად. მისი კანონიკური ჩანაწერი უნდა იყოს ერთნაირი, რადგან ის განისაზღვრება მთელრიცხვება პარამეტრებით. ამიტომ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ მეტრიკული ტენზორული ველის სიგნატურაზე. თუ ვიგულისხმებთ, რომ გარდაქმნის მატრიცა შეგვიძლია დამოუკიდებლად ამოვირჩიოთ ყველა წერტილში, მაშინ მივიღებთ გლობალურ კანონიკურ სახეს.

მეტრიკის მნიშვნელოვანი თვისებაა ის, რომ მისი დახმარებით შეგვიძლია მრავასახეობაზე შემოვიღოთ მანძილის ცნება. თუ, $\vec{V}=\frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ არის მოცემული მრუდის მხები ვექტორი, მაშინ წირის გასწვრივ $d\lambda$ გადაადგილებას შეესაბამება მანძილის კვადრატი

$$dl^2=d\vec{x}\cdot d\vec{x}=\vec{V}d\lambda\cdot\vec{V}d\lambda=\vec{V}\cdot\vec{V}(d\lambda)^2=g(\vec{V},\vec{V})d\lambda^2. \qquad (2.76)$$

თუ, მეტრიკა დადებითად განსაზღვრულია, მაშინ $g(\vec{V},\vec{V})>0$ ნებისმიერი $\vec{V}\neq 0$ მნიშვნელობისათვის. ამ შემთხვევაში $dl^2>0$ და მრუდის სიგრძის ელემენტისათვის გვექნება გამოსახულება

$$dl=\left(g(\vec{V},\vec{V})\right)^{1/2}d\lambda. \qquad (2.77)$$

მაგრამ ***ინდეფინიტური მეტრიკის*** შემთხვევაში, მრუდის სიგრძის ელემენტს უკვე აღარ ექნება განსაზღვრული ნიშანი. წირს შეიძლება ქონდეთ როგორც დადებითი dl^2 (სივრცის-მსგავსი წირები), ასევე, უარყოფითი (დროის-მსგავსი წირები). ასეთ შემთხვევაში, ნამდვილი რიცხვი

$$dl = \left(\left|g\left(\vec{V},\vec{V}\right)\right|\right)^{1/2} d\lambda, \tag{2.78}$$

შეგვიძლია ჩავთვალოთ საკუთრივ სიგრძედ სივრცის-მსგავსი წირებისათვის და საკუთრივ დროდ დროის-მსგავსი წირებისათვის. ეს სიდიდე ნულის ტოლია ნულოვანი წირებისათვის.

ინდეფინიტურ მეტრიკასთან მუშაობისას ერთმანეთისაგან უნდა განვასხვავოთ ნულოვანი სიგრძის ვექტორი და ნულოვანი ვექტორი.

2.31. ფარდობითობის სპეციალური თეორია

ფიზიკისათვის ერთ-ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან მრავალსახეობას წარმოადგენს ვექტორული სივრცე $\mathbb{R}^4$, რომელსაც აქვს მეტრიკა სიგნატურით +2, ესაა ***მინკოვსკის სივრცე***. ფარდობითობის სპეციალური თეორიის სივრცე დრო.

როგორც ვიცით, არსებობს პრივილეგირებული კოორდინატთა სისტემები – ლორენცის ათვლის სისტემები, რომელთათვისაც თუ ორი მოვლენა დაშორებულია საკოორდინატო ინტერვალით $(\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$, მაშინ

$$\Delta s^2 = -c(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \tag{2.79}$$

სიდიდე არაა დამოკიდებული ლორენცის კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე(აქ c სინათლის სიჩქარეა). შევცვალოთ მასშტაბები კოორდინატთა სისტემისათვის ფორმულებით:

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z\,, \tag{2.80}$$

მაშინ (2.79) გადაიწერება ფორმით

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 = \eta_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha \Delta x^\beta. \tag{2.81}$$

სადაც $\eta_{\alpha\beta}$ დიაგონალური მატრიცაა:

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1). \quad (2.82)$$

Δs^2 არის $(\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ ვექტორის ***ფსევდონორმა***. მას შეესაბამება სკალარული ნამრავლი

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \eta_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta. \quad (2.83)$$

ასე, რომ ფაქტიურად $\eta_{\alpha\beta}$ არის კანონიკური სახით ჩაწერილი მეტრიკული ტენზორი, ხოლო ლორენცის სისტემა არის შესაბამისი ორთონორმირებული ბაზისური სისტემა.

თეორიული მასალის გამეორება

1. განსაზღვრეთ მრავალსახეობა;
2. დაახასიათეთ $SO(3)$ მრავალსახეობა;
3. განსაზღვრეთ მხები T_P სივრცე სფეროსათვის;
4. განფენილი სივრცის განსაზღვრება;
5. მხები განფენილი სივრცეების მაგალითები. რუკა და ატლასი;
6. ლის ფრჩხილები და არასაკოორდინატო ბაზისი;
7. ტენზორული ველის ცნება. ვექტორები და ფორმა-1;
8. მეტრიკული ტენზორი. ფსევდონორმა. სიგნატურა. ინდექსის აწევ-დაწევის ოპერაცია. ევკლიდური და მინკოვსკის სივრცე-ები. ლორენცის გარდაქმნა.

ლიტერატურა

1.Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1972

2.Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. Пер. с англ., Мир, Москва, 1979

3.Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1989

4.ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972

5.Киттель Ч.,Найт У.,Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1975

6.Ферми Э.Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1968

7.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

8.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

9.Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.Гравитация. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1976

10.Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ.,Мир, Москва, 2002

11.Хакен Г.Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующих-ся системах и устройствах. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1985

თავი III. ლის ალგებრები და ლის ჯგუფები

ჯგუფთა თეორიის გამოყენება დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად, ჩამოყალიბდა როგორც ახალი მეცნიერული მიმართულება **სოფუს ლის** შრომებში და თავდაპირველად, **უწყვეტი ჯგუფების თეორიის** სახელით იყო ცნობილი. პირველი ძირითადი ამოცანები, დიფერენციალური განტოლებების კვადრა-ტურებში ამოხსნადობასთან დაკავშირებით, თვით ს. ლის შრომებ-ში იქნა გადაწყვეტილი. მოგვიანებით, **ლ.ოვსიანიკოვისა** და **ნ.იბრაგიმოვის** შრომებში ლის თეორიის დახმარებით, მიღწეულ იქნა რიგი წარმატებებისა მექანიკისა და მათემატიკური ფიზიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ზუსტი ამონახსნების კლასების პოვნის საქმეში.

3.1. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

განვიხილოთ გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფები ნამდვილი პარამეტრით. ყოველი ასეთი ჯგუფი განისაზღვრება **მისი პარამეტრის მიმართ ტეილორის მწკრივად გაშლის** პირველი წევრით, ანუ, მისი ***მხები ვექტორული ველის სივრცით***, რომელსაც ზოგჯერ, ჯგუფის ***ინფინიტეზიმალურ ოპერატორსაც*** უწოდებენ. ჯგუფის მაგივრად, მისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია.

განვიხილოთ T გარდაქმნა:

$$z' = f(z), \tag{3.1}$$

რომელსაც $\mathbb{R}^n$ ევკლიდური სივრცის $z = (z^1, \dots, z^n)$ წერტილი გადაყავს ახალ $z' = (z'^1, \dots, z'^n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილში ერთი და იმავე კოორდინატთა სისტემის მიმართ. ჩავთვალოთ, რომ (3.1) გარდაქმნა შექცევადია და მის შებრუნებულ გარდაქმნას, რომელსაც z' წერტილი გადაყავს კვლავ z წერტილში, აღვნიშნავთ T^{-1} სიმბოლოთი. T და T^{-1} გადაქმნების მიმდევრობით შესრულებას, ნებისმიერი თანმიმდევრობით, მივყავართ იგივურ I გარდაქმნამდე, რომელსაც ნებისმიერი წერტილი თავის თავში გადაყავს.

განვიხილოთ ახლა $\{\mathrm{T_a}\}$ **ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ერთობლიობა:**

$$z' = f(z, a), \tag{3.2}$$

სადაც $a \in \mathbb{R}$ პარამეტრი უწყვეტად იცვლება რაღაც $\Delta \subset \mathbb{R}$ შუალედში. ამ პარამეტრის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება კონკრეტული გარდაქმნა ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ოჯახიდან. ჩავთვალოთ, რომ როცა $a = 0$ მისი შესაბამისი გარდაქმნა არის იგივური გარდაქმნა $T_0 = I$ და ნებისმიერი არანულოვანი $a \neq 0$ მნიშვნელობისათვის, შესაბამისი $T_a \neq I$ ნებისმიერი $a \in \Delta \subset \mathbb{R}$. ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერ T_a გარდაქმნასთან ერთად, გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ოჯახი შეიცავს მის შებრუნებულ $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ გარდაქმნასაც, სადაც a^{-1} აღნიშნავს პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, რომელიც $\{\mathrm{T_a}\}$-ში შეესაბამება შებრუნებულ T_a^{-1} გარდაქმნას.

მაგალითად, თუ გვაქვს გაჭიმვის $z' = az$ გარდაქმნა, მაშინ $a = 1$ მნიშვნელობას შეესაბამება იგივური გარდაქმნა. თუ, გადავანაცვლებთ პარამეტრს, მივიღებთ გარდაქმნას

$$z' = z + az, \tag{3.3}$$

სადაც $T_0 = I$. ვიპოვოთ (3.3) გარდაქმნის შებრუნებული გარდაქმნა, ამისათვის, შევუცვალოთ z' და z კოორდინატებს ადგილი და ამოვხსნათ მიღებული ტოლობა z'-ის მიმართ, მივიღებთ $z' = \frac{z}{1+a}$ ანუ, $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$. ეხლა შევეცადოთ, ვიპოვოთ a -ს ის a^{-1} მნიშვნელობა, როცა (3.3) გარდაიქმნება $T_a^{-1} = \frac{z}{1+a}$ ფორმულად. ანუ,

$$\frac{z}{1+a} = z + a^{-1}z. \tag{3.4}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$a^{-1} = -\frac{a}{1+a}. \tag{3.5}$$

ასე, რომ ნებისმიერი $a \in (-1, +\infty)$ მნიშვნელობისათვის არსებობს შესაბამისი შებრუნებული $T_{a^{-1}}$ გარდაქმნა.

ახლა განვიხილოთ, პარამეტრის რაიმე ორი სხვადასხვა a და b მნიშვნელობა მოცემული ინტერვალიდან და მიმდევრობით შევასრულოთ მათი შესაბამისი (3.3) გარდაქმნები. პირველი გარდაქმნის შემდეგ z წერტილი გადავა $z' = z + az$ წერტილში, რომელსაც მეორე გარდაქმნა გადაიყვანს z'' წერტილში

$$z'' = z' + bz' = z + az + b(z + az) = z + (a + b + ab)z. \qquad (3.6)$$

ასე, რომ (3.3) გარდაქმნის ორჯერ მიმდევრობით შესრულებას, მივყავართ ისევ იგივე ტიპის გარდაქმნამდე, პარამეტრის ახალი $c = a + b + ab$ მნიშვნელობისათვის. სიმბოლურად ამ თვისებას წერენ ფორმით $T_b T_a = T_{a+b+ab}$ და იტყვიან, რომ (3.3) გარდაქმნები ქმნიან *ერთპარამეტრიან ჯგუფს*.

საზოგადოდ (3.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, ვიტყვით რომ ის ქმნის **ერთპარამეტრიან ჯგუფს**, თუ ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების გარდა, ადგილი აქვს თანადობას

$$T_b T_a = T_{\varphi(a,b)}. \qquad (3.7)$$

სადაც $\varphi(a,b)$ ფუნქციები დიფერენცირებადია საჭირო რიგამდე ჩათვლით. ამ ჩანაწერის აზრი იგივეა, რაც წინა მაგალითში. რაც იმას ნიშნავს, რომ T_a და T_b გარდაქმნების მიმდევრობით შესრულების შედეგად მივიღებთ ახალ იგივე სახის გარდაქმნას ახალი $c = \varphi(a,b)$ პარამეტრით.

ვთქვათ, (3.2) გარდაქმნის შემთხვევაში, ადგილი აქვს გარდაქმნათა ჯგუფის (3.7) თვისებას და $T_0 = I$ საწყის პირობას. მაშინ

$$T_0 T_a = T_a, \quad T_b T_0 = T_b. \qquad (3.8)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\varphi(a,0) = a, \quad \varphi(0,b) = b. \qquad (3.9)$$

მაგალითად, (3.3) გარდაქმნისათვის $\varphi(a,b) = a + b + ab$ და (3.9) ფორმულები ადვილი შესამოწმებელია.

ერთპარამეტრიანი ჯგუფის უმარტივეს მაგალითს წარმოადგენს ***წრფის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი***. სადაც გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$x' = x + a. \tag{3.10}$$

x წერტილის ორი მიმდევრობითი გადატანის შედეგი იქნება

$$x'' = x + a + b. \tag{3.11}$$

ამ შემთხვევაში, $\varphi(a.b) = a + b$ და $a^{-1} = -a$.

ამრიგად, **ერთპარამეტრიანი ჯგუფის თვისებები** შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

1) $T_0 = I$ ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა;
2) $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$ შებრუნებული ელემენტის არსებობა;
3) $T_c(T_bT_a) = (T_cT_b)T_a$ ჯგუფის ოპერაციის ასოციაციურობა. (3.12)

ჯგუფთა აბსტრაქტულ თეორიაში, ჯგუფის განსაზღვრისათვის ეს სამი თვისებაა ძირითადი. ჩვენ კი პარამეტრის მიმართ უწყვეტობის თვისებაც გვჭირდება. ამიტომ გადავდივართ ლის თეორიის ელემენტების განხილვაზე.

3.2. ლის განტოლება

ვთქვათ $z' = f(z, a)$ გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს და ერთპარამეტრიანი ჯგუფის (3.7) თვისებას აქვს მარტივი სახე

$$T_bT_a = T_{a+b},\ \text{ანუ},\ \varphi(a, b) = a + b. \tag{3.13}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, დავუშვათ რომ

$$f(f(z, a), b) = f(z, a + b), \tag{3.14}$$

ასეთ შემთხვევაში, ცხადია რომ $a^{-1} = -a$. ასეთნაირად ***შესაძლებელია აღვწეროთ ყველა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი და გამრავლების ნებისმიერ წესს, შეგვიძლია მივცეთ (3.14) სახე ახალი პარამეტრიზაციის*** *(ჯგუფის პარამეტრის არაგადაგვარებული*

გარდაქმნით) საშუალებით. ამ ჯგუფს ჩვენ აღვნიშნავთ G სიმბოლოთი.

გავშალოთ $f(z,a)$ ფუნქცია ტეილორის მწკრივად, a პარამეტრის მიმართ, $a=0$ წერტილის მიდამოში. პირობის თანახმად $T_0=I$ და მაშასადამე, $f(z,0)=z$. ამიტომ, თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\xi(z)=\frac{\partial f(z,a)}{\partial a}\mathrm{I}_{a=0}, \tag{3.15}$$

მაშინ ჩვენი (3.2) გარდაქმნა მიიღებს სახეს

$$z'=z+\xi(z)a+o(a). \tag{3.16}$$

ლის თეორემა ამტკიცებს, რომ გაშლის ამ ორი წევრით შეგვიძლია ცალსახად განვსაზღვროთ $f(z,a)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3.14) პირობას. ასევე, ამბობენ რომ G ჯგუფი ცალსახად განისაზღვრება მხები ვექტორული ξ ველით, რადგან (3.15) წარმოადგენს z წერტილში გავლებულ მხებ ვექტორს იმ წირის მიმართ, რომელიც აიწერება z′ წერტილებით (3.2) გარდაქმნისას.

თეორემა: თუ, $f(z,a)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს $f(f(z,a),b)=f(z,a+b)$ ტოლობას და აქვს $z'=z+\xi(z)a+o(a)$ წარმოდგენა, მაშინ ის აკმაყოფილებს **ლის განტოლებას საწყისი პირობით**:

$$\frac{df}{da}=\xi(f),\quad f\mathrm{I}_{a=0}=z. \tag{3.17}$$

პირიქითაც, ნებისმიერი გლუვი $\xi(z)$ ვექტორული ველისათვის (3.17) კოშის ამონახსნიაკმაყოფილებს $f(f(z,a),b)=f(z,a+b)$ პირობას.

დამტკიცება: ვთქვათ ადგილი აქვს $f(f(z,a),b)=f(z,a+b)$ პირობას. a პარამეტრს მივცეთ Δa ნაზრდი, მაშინ გვექნება $f(z,a+\Delta a)=f(f(z,a),\Delta a)$. ამ ტოლობაში მწკრივად გაშლის შემდეგ, თუ გამოვყოფთ წრფივ ნაწილს Δa-ს მიმართ, მივიღებთ

$$f(z,a+\Delta a)=f(z,a)+\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a+o(\Delta a),$$

$$f(f(z,a),\Delta a)=f(Z,a)+\frac{\partial f}{\partial \Delta a}\mathrm{I}_{a=0}\Delta a+o(\Delta a).$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას $\frac{\partial f(f(z,a),\Delta a)}{\partial \Delta a}\mathrm{I}_{\Delta a=0} = \xi\big(f(z,a)\big)$ და გავით-ვალისწინებთ (3.15) ტოლობას, მივიღებთ ***ლის განტოლებას***

$\frac{\partial f(z,a)}{\partial a} = \xi\big(f(z,a)\big)$.

დავამტკიცოთ ეხლა თეორემის მეორე ნაწილი. ვთქვათ $f(z,a)$ არის (3.17) ამოცანის ამონახსნი. დავაფიქსიროთ პარამეტრის მნიშვნელობა $a = 0$ მნიშვნელობის მახლობლობაში და განვიხილოთ ორი ფუნქცია

$u(b) = f(z',b) = f(f(z,a),b)$ და $v(b) = f(z,a+b)$. მათთვის ლის განტოლებიდან გამომდინარე,

$\frac{du}{db} = \frac{df(z',b)}{db} = \xi(u), \quad u\mathrm{I}_{b=0} = f(z,a),$

$\frac{dv}{db} = \frac{df(z,a+b)}{db} = \xi(v), \quad \mathrm{vI}_{b=0} = f(z,a).$

ასე, რომ $u(b)$ და $v(b)$ აკმაყოფილებენ ერთი და იმავე დიფერენციალურ განტოლებას ერთნაირი საწყისი პირობით, რადგან ასეთ კოშის ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი გვექნება რომ $u(b) = v(b)$. რაც იმას ნიშნავს რომ $f(f(z,a),b) = f(z,a+b)$. რ.დ.გ.

განვიხილოთ მაგალითები:

1.) **გადატანათა ჯგუფს** $x' = x + a$ აქვს მხები ვექტორი $\xi(\boldsymbol{x}) = 1$. ადგილი აქვს ლის განტოლებას, რომელსაც ამ შემთხვევაში აქვს სახე $\frac{dx'}{da} = 1$;
2.) ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე განვიხილოთ ვექტორული ველი $\xi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ და ამოვხსნათ შესაბამისი ლის განტოლე-ბა, რომელსაც აქვს სახე: $\frac{dx'}{da} = x'$, $x'\mathrm{I}_{a=0} = x$. ეს ამოცანა ადვილად იხსნება და გვაძლევს **გაჭიმვების ჯგუფს** $x^{'} = x\mathrm{e}^{a}$;

3.3. ინვარიანტები. ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი

$F(z)$ ფუნქციას ეწოდება $z' = f(z,a) = z + \xi(z)a + o(a)$ გარდაქმნათა ჯგუფის **ინვარიანტი**, თუ, ყველა დასაშვები z, a მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F\big(f(z,a)\big) = F(z). \tag{3.18}$$

თეორემა: $F(z)$ ფუნქცია ინვარიანტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\xi^i(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z'} = 0. \tag{3.19}$$

ინვარიანტობის ეს კრიტერიუმი წარმოადგენს პირველი რიგის კერძოწარმოებულიან, წრფივ, ერთგვაროვან განტოლებას. ამიტომ, გარდაქმნათა ნებისმიერ ერთპარამეტრიან ჯგუფს $\mathbb{R}^n$ სივრცეში გააჩნია $n-1$ წრფივად დამოუკიდებელი ინვარიანტი, ისე, რომ ნებისმიერი სხვა ინვარიანტი ამ ბაზისური ინვარიანტების ფუნქციაა. ასეთ ბაზისურ ინვარიანტებად, შეგვიძლია ავირჩიოთ (3.19) განტოლების მახასიათებელი განტოლების

$$\frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \ldots = \frac{dz^n}{\xi^n(z)}, \tag{3.20}$$

პირველი ინტეგრალების მარცხენა მხარეები

$$J_i(z) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}\,. \tag{3.21}$$

განვიხილოთ მაგალითები:

გაჭიმვის ჯგუფისათვის $\mathbb{R}^3$ სივრცეში

$$x' = xe^a,\ y' = ye^{2a},\ z' = ze^{-2a}$$

გვაქვს $\xi = (x, 2y, -2z)$ მხები ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (3.19) განტოლებას აქვს სახე

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + 2y\frac{\partial F}{\partial y} - 2z\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \tag{3.22}$$

შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას კი – ასეთი:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{-2z},$$

რომლის პირველი ინტეგრალებია

$$\frac{y}{x^2} = C_1, \ \ x^2 z = C_2.$$

ინვარიანტებს აქვთ სახე: $J_1 = \frac{y}{x^2}$, $J_2 = x^2 z$.

ზოგად ინვარიანტს კი ექნება სახე: $F = F\left(\frac{y}{x^2}\ , x^2 z\right)$.

თუ, შემოვიტანთ დიფერენციალურ ოპერატორს

$$X = \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}\ , \tag{3.23}$$

მაშინ ინვარიანტობის კრიტერიუმი შეგვიძლია გადავწეროთ სახით

$$\boldsymbol{XF = 0}. \tag{3.24}$$

ამ $\boldsymbol{X}$ **ოპერატორს** ***გარდაქმნათა G ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი*** ეწოდება.

შემდგომში, გარდაქმნატა ჯგუფის მხები $\vec{\xi}$ ვექტორის ნაცვლად, ძირითადად, გამოვიყენებთ **ინფინიტეზიმალურ** ოპერა-ტორს.

თუ, მოცემულია ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი, მაშინ ჯგუფის გარდაქმნის კანონის საპოვნელად, უნდა ამოვხსნათ ***ლის შესაბამისი განტოლება***.

განვიხილოთ მაგალითები:

1.) ვიპოვოთ ჯგუფი, რომლის ოპერატორსაც აქვს სახე (**ბრუნვის ჯგუფი**): $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$. თუ, შევადარებთ (3.23) ტოლობას, ადვილად ვიპოვით, რომ საქმე გვაქვს $\xi = (y; -x)$ მხებ ვექტორთან. ამიტომ ლის განტოლებას ექნება სახე:
$\frac{dx'}{da} = y'$, $\frac{dy'}{da} = -x'$, საიდანაც საწყისი პირობების გათვა-ლისწინებით, მივიღებთ რომ გარდაქმნის ჯგუფი მოიცემა ფორმულებით

$x' = x\,cosa + y\,sina,$

$y' = y\,cosa - x\,sina.$

ინვარიანტი იქნება $J = x^2 + y^2$.

2.) განვიხილოთ ***x*** **ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი**:

$x' = x + a,$

$y' = y.$

მაშინ, ამ ჯგუფის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე: $X = \frac{\partial}{\partial x}$; ხოლო ინვარიანტი - $J = y$.

3.) განვიხილოთ ***y*** **ღერძის გასწვრივ გადატანათა ჯგუფი:**

$y' = y + a,$

$x' = x.$

მაშინ, ამ ჯგუფის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე: $X = \frac{\partial}{\partial y}$; ხოლო ინვარიანტი - $J = x$.

4.) განვიხილოთ $\boldsymbol{kx + ly = 0}$ **წრფის პარალელურად გადატანათა ჯგუფი:** $x' = x + la,\ y' = y - ka$. შესაბამის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე: $X = l\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$, ხოლო ინვარიანტი - $J = kx + ly$.

5.) **ლორენცის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის:**

$x' = x\,cha + y\,sha,$

$y' = y\,cha + x\,sha.$

შესაბამის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე:

$X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, ხოლო ინვარიანტი - $J = x^2 - y^2$.

6.) **გალილეის გარდაქმნათა ჯგუფისათვის**:

$x' = x + ay,$

$y' = y,$

ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს სახე:

$X = y\frac{\partial}{\partial x}$, ხოლო ინვარიანტი - $J = y$.

7.) **ერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის** გვაქვს გარდაქმნები: $x' = xe^{a}$, $y' = ye^{a}$. შესაბამის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე: $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, ხოლო ინვარიანტი - $J = \frac{x}{y}$.

8.) **არაერთგვაროვანი გაჭიმვების ჯგუფისათვის**:
$x' = xe^{a}$,
$y' = ye^{ka}$.
შესაბამის **ინფინიტეზიმალურ** ოპერატორს აქვს სახე:
$X = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}$.
ხოლო ინვარიანტი - $J = \frac{x^k}{y}$.

3.4. გარდაქმნების ერთპარამეტრიანი ჯგუფის ექსპონენციალური წარმოდგენა

ზოგჯერ, ხესაყრელია გარდაქმნის $z' = f(z, a)$ ჯგუფისა და აგრეთვე, $F(z') = F\Big(F\big(f(z,a)\big)\Big)$ ინვარიანტის წარმოდგენა ჯგუფის a პარამეტრის ხარისხოვანი მწკრივის სახით. როგორც უკვე ვიცით, ადგილი აქვს გაშლას

$$z' = f(z, a) = z + \xi(z)a + o(a), \tag{3.25}$$

$$F(z') = F(z) + a\xi^i(z)\frac{\partial F(z)}{\partial z^i} + o(a). \tag{3.26}$$

ვიპოვოთ ეხლა (3.26) გაშლის შემდგომი წევრები a პარამეტრის მიმართ. ჩანაწერის შემოკლების მიზნით შემოვიღოთ აღნიშვნები $F(z) \equiv F$; $F(z') \equiv F'$; $X \equiv \xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$; $X' \equiv \xi'^i(z')\frac{\partial}{\partial z'^i}$.

მაშინ (3.26) ჩაიწერება სახით:

$$F' = F + aXF + o, \tag{3.26'}$$

ხოლო ტოლობა $\frac{dF\left(f(z,a)\right)}{da} = \xi'^i(z')\frac{\partial F(z')}{\partial z'^i}$, გადაიწერება ასეთი ფორმით:

$$\frac{dF'}{da} = X'F'. \qquad (3.27)$$

თუ, გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ (3.27) განტოლების მარჯვენა ნაწილი კვლავ წარმოადგენს z' ცვლადის ფუნქციას, კვლავ შეგვეძლება გამოვიყენოთ ეს ფორმულა და მივიღოთ შემდეგი ფორმულები

$$\frac{d^2F'}{da^2} = \frac{d}{da}(X'F') = X'(X'F') = X'^2F', \qquad (3.28)$$

$$\frac{d^3F'}{da^3} = X'^3F', \ . \ . \ . \qquad (3.29)$$

თუ, ამ ფორმულებს შევიტანთ ტეილორის გაშლაში:

$$F' = [F']_{a=0} + a\left[\frac{dF'}{da}\right]_{a=0} + \frac{a^2}{2!}\left[\frac{d^2F'}{da^2}\right]_{a=0} + \ ..., \qquad (3.30)$$

მივიღებთ შემდეგ წარმოდგენას

$$F' = F + aXF + \frac{a^2}{2!}X^2F + \ ..., \qquad (3.31)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$F(z') = \left(1 + aX + \frac{(aX)^2}{2!} + \ ...\right)F(z) \equiv e^{aX}F(z). \qquad (3.32)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $F = z$, ფორმულა (3.32)-ს აქვს სახე

$$z' = e^{aX}(z). \qquad (3.33)$$

ამ წარმოდგენას ერთპარამეტრიანი გარდაქმნების ჯგუფის ექსპონენციალურ წარმოდგენას უწოდებენ.

განვიხილოთ მაგალითები:

1.) ვთქვათ გვაქვს G გადატანათა ჯგუფი ნამდვილ რიცხვთა ღერძის გასწვრივ, მაშინ $X = \frac{d}{dx}$ და (3.32) ფორმულა გვაძლევს $F(x + a)$ ფუნქციის გაშლას ტეილორის მწკრივად x წერტილში

$$F(x+a)=F(x)+aF'(x)+\frac{a^2}{2!}F''(x)+\frac{a^3}{3!}F'''(x)+\ \dots. \qquad (3.34)$$

2.) ვთქვათ G არის წრფივი გაჭიმვის გარდაქმნების ჯგუფი, რომლის ინფინიტეზიმალური ოპერატორია $X=x\frac{d}{dx}$, მაშინ

$$X^2=x\frac{d}{dx}\cdot x\frac{d}{dx}=x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d^2}{dx^2}, \qquad (3.35)$$

$$X^3=x\frac{d}{dx}\cdot\left(x\frac{d}{dx}+x^2\frac{d}{dx}\right)=x\frac{d}{dx}+3x^2\frac{d^2}{dx^2}+x^3\frac{d^3}{dx^3},\ .\ .\ . \qquad (3.36)$$

შესაბამის (3.32) გაშლას აქვს ასეთი სახე:

$$F(xe^a)=F(x)+axF'(x)+\frac{a^2}{2!}\big(xF'(x)+x^2F''(x)\big)+$$
$$\frac{a^3}{3!}\big(xF'(x)+3x^2F''(x)+x^3F'''(x)\big)+\ \dots \qquad (3.37)$$

შემდგომ დაგვჭირდება **თეორემა:**

გარდაქმნათა ნებისმიერი ერთპარამეტრიანი ლოკალური ჯგუფი $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, შესაბამისი არაგადაგვარებული $\bar{\mathbf{z}}^i=\bar{\mathbf{z}}^i(\mathbf{z})$ გარდაქმნით მიიყვანება გადატანათა ჯგუფამდე $\bar{\mathbf{z}}^n$ ღერძის მიმართ.

დამტკიცება: ვთქვათ, მოცემულ G ჯგუფის შესაბამისი ოპერატორია $X=\xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}$. (3.38)

მაშინ, რადგან $\xi^i(z)\frac{\partial}{\partial z^i}=\xi^i(z)\frac{\partial \bar{z}^j}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}$, ცხადია ცვლადთა გარდაქმნა $\bar{z}^i=\bar{z}^i(z)$, (3.38) ოპერატორს მიიყვანს სახემდე

$$\bar{X}=X(\bar{z}^i)\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}. \qquad (3.39)$$

ავირჩიოთ მოცემული ჯგუფის ნებისმიერი $n-1$ რაოდენობის ფუნქციონალურად დამოუკიდებელი ინვარიანტი:

$$J_1,J_2,\dots,J_{n-1}, \qquad (3.40)$$

ახალ საკოორდინატო $\bar{z}^i$ ცვლადებად, ხოლო $\bar{z}^n$ ცვლადი განვსაზღვროთ განტოლებიდან

$$X(\bar{z}^n)=1. \qquad (3.41)$$

ეს ახალი ცვლადები

$$\bar{z}^i = J_i(z),\ i = \overline{1, n-1}\,, \bar{z}^n = \bar{z}^n(z)\,, \tag{3.42}$$

ფუნქციონალურად დამოუკიდებელნი არიან და გვაძლევენ შესაბამის გარდაქმნას. მართლაც, ამ ცვლადებში ჩვენი ჯგუფის (3.38) ოპერატორი მიიღებს სახეს $\bar{X} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$ რაც, როგორც უკვე ვიცით, შეესაბამება გადატანათა ჯგუფს $\bar{z}^n$ ღერძის გასწვრივ. რ.დ.გ.

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ G არის გაჭიმვის ჯგუფისათვის $\mathbb{R}^3$ სივრცეში

$$x' = xe^a,\ y' = ye^{2a},\ z' = ze^{-2a}$$

გვაქვს $\xi = (x, 2y, -2z)$ მხები ვექტორი, ამიტომ მის შესაბამის (3.19) განტოლებას აქვს სახე:

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + 2y\frac{\partial F}{\partial y} - 2z\frac{\partial F}{\partial z} = 0. \tag{3.43}$$

მის ოპერატორს აქვს სახე

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.44}$$

შესაბამის $\bar{z}^i = \bar{z}^i(z)$ გარდაქმნას აქვს სახე: $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, სადაც ახალ ცვლადებად ვირჩევთ ინვარიანტებს: $u = \frac{y}{x^2}$, $\quad v = x^2 z$. ხოლო მესამე ცვლადის საპოვნელად უნდა ვისარგებლოთ (3.41) განტოლებით, რომელსაც ამ შემთხვევაში (3.44) ოპერატორის გათვალისწინებით, აქვს სახე

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + 2y\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial w}{\partial z} = 1. \tag{3.45}$$

ცხადია, რომ კერძო ამონახსნის საპოვნელად, ხესაყრელია w ჩავთვალოთ მხოლოდ x ცვლადის ფუნქციად. მაშინ (3.45)

განტოლებიდან გვექნება, რომ $x\frac{\partial w}{\partial x}=1$. რაც იმას ნიშნავს, რომ $w=lnx$. ასე, რომ ცვლადთა გარდაქმნა

$$u=\frac{y}{x^2},\quad v=x^2z,\quad w=lnx. \tag{3.46}$$

გვაძლევს ახალ ცვლადებში, გადატანათა ჯგუფს

$$u'=u,\ v'=v,\ w'=w+a. \tag{3.47}$$

3.5. ინვარიანტული განტოლებები

განვიხილოთ $n-s$ განზომილებიანი $M\subset\mathbb{R}^n$ ზედაპირი, განსაზღვრული განტოლებათა სისტემით

$$F_1(z)=0,\dots,F_s(z)=0,\ s\le n. \tag{3.48}$$

ჩავთვალოთ, რომ ზედაპირის ასეთი მოცემა არის რეგულარული, ანუ, $\left\|\frac{\partial F_k}{\partial z^i}\right\|_M$ $(k=1,\dots,s;\ i=1,\dots,n)$ მატრიცის რანგი არის s.

***M* ზედაპირს ეწოდება ინვარიანტული *G* გარდაქმნის**

$$z'=f(z,a)\equiv z+a\xi(z)+o(z), \tag{3.49}$$

ჯგუფის მიმართ, თუ, ამ გარდაქმნის შედეგად ზედაპირის ყოველი წერტილი ისევ ამ ზედაპირის წერტილში გადადის.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ, z არის (3.48) სისტემის ამონახსნი, მაშინ z' აგრეთვე ამონახსნია, ანუ,

$$F_k(z')=0,\ k=1,\dots,s. \tag{3.50}$$

ამის გამო ამბობენ რომ (3.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია G ჯგუფის მიმართ, ანუ, ეს სისტემა უშვებს G ჯგუფს. ვთქვათ $X=\xi^i\frac{\partial}{\partial z^i}$ გარდაქმნის G ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორია. მაშინ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ

თეორემა 3.1: (3.48) განტოლებათა სისტემა ინვარიანტულია გარდაქმნის $\boldsymbol{G}$ ჯგუფის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$[\boldsymbol{XF_k}]_{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{0},\ k = 1, \dots, s. \tag{3.51}$$

გარდაქმნის ჯგუფის ბაზისური ინვარიანტების საშუალებით შესაძლებელია ყველა ინვარიანტული ზედაპირი აღვწეროთ. მართლაც, ადგილი აქვს **თეორემას**:

***G* ჯგუფის ინვარიანტული ზედაპირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სახით**

$$\boldsymbol{\Phi_k(J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)) = 0,\ k = \overline{1, s},} \tag{3.52}$$

სადაც $J_1(z), \dots, J_{n-1}(z)$ წარმოადგენენ ჯგუფის ინვარიანტების ბაზისს, **თუ, შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორი არ ხდება ნული ზედაპირის წერტილებისათვის**.

3.6. დიფერენციალური განტოლებების დასაშვები ჯგუფი

დასაშვები ჯგუფი ახასიათებს დიფერენციალური განტოლების სიმეტრიის თვისებებს. ის გამოიყენება დიფერენციალური განტოლების სრულად ინტეგრირებისათვის, ან მისი ამონახსნების გარკვეული კლასების პოვნისათვის და თვისობრივი გამოკვლევისათვის.

3.6.1. სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ჯგუფი

განვიხილოთ სითბოგამტარობის განტოლება

$$u_t - u_{xx} = 0. \tag{3.53}$$

ცხადია, რომ ამ განტოლების სახე არ იცვლება დროისა და სივრცის ცვლადთა გადატანის გარდაქმნისას:

$$t' = t + a\,; \qquad x' = x + a. \tag{3.54}$$

ასევე, განტოლების წრფივობისა და ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, არ იცვლება განტოლების სახე უფრო ზოგადი გარდაქმნისას

$$u' = u + a\varphi(t,x), \quad \text{ან}, \; u' = ue^{a}, \tag{3.55}$$

სადაც $\varphi(t,x)$ ნებისმიერი ცნობილი ამონახსნია (3.53) განტოლებისათვის.

ყოველ ასეთ გარდაქმნას, რომელიც არ ცვლის საწყისი დიფერენციალური განტოლების სახეს, დიფერენციალური განტოლების ***დასაშვებ გარდაქმნას*** უწოდებენ.

მაშასადამე, ჩვენს მიერ მოყვანილი ***ოთხი ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა ჯგუფი დასაშვებია*** სითბოგამტარობის განტოლები-სათვის.

უფრო ნაკლებად ცხადია, რომ ***სითბოგამტარობის განტოლებას აქვს, ასევე, ერთპარამეტრიან გარდაქმნათა შემდეგი ჯგუფი***:

$$t' = t, \; x' = x + 2at, \; u' = ue^{-(ax+a^2t)}. \tag{3.54}$$

ვაჩვენოთ სითბოგამტარობის განტოლების ინვარინტულობა (3.54) გარდაქმნების მიმართ. ამისათვის, გამოვიყენოთ წარმოებუ-ლის გარდაქმნის ფორმულები ცვლადთა შესაბამისი გარდაქმნის დროს:

$$u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}, \tag{3.55}$$

$$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)}, \tag{3.56}$$

$$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}. \tag{3.57}$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$u'_{t'} - u'_{x'x'} = (u_t - u_{xx})e^{-(ax+a^2t)}, \tag{3.58}$$

რაც იმას გვიჩვენებს, რომ (3.54) გარდაქმნის შედეგად, განტოლება (3.53) გადადის იგივე სახის

$$u'_{t'} - u'_{x'x'} = 0, \tag{3.59}$$

განტოლებაში. ამ ფაქტის გამოყენებითი მნიშვნელობა იმაში მდგომარეობს, რომ თუ გვაქვს სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ამონახსნი

$$u = \varphi(t, x), \tag{3.60}$$

მაშინ

$$u = e^{-(ax+a^2 t)}\varphi(t, x + 2at) \tag{3.61}$$

ფუნქციაც აგრეთვე იქნება მისი სხვა ამონახსნი, რომელიც განსაზღვრავს ამონახსნთა ერთპარამეტრიან ჯგუფს. როგორც ვხედავთ, ჩვენ გვაქვს გარდაქმნათა ხუთი სხვადასხვა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი. თითოეული მათგანი შეიცავს ამონახსნების უსასრულო რაოდენობას.

ისმის კითხვა: *მიღებული ხუთი გარდაქმნა, რომლებიც გვაძლევენ დასაშვებ ჯგუფებს, ყველა შესაძლო გარდაქმნაა, თუ არსებობს სხვა გარდაქმნებიც ? თუ არსებობს, როგორ ვიპოვოთ ისინი და როგორ დავამტკიცოთ, რომ ეს უკვე ყველა დასაშვები ჯგუფია ?*

კონსტრუქციული მიდგომა ამ საკითხის გადასაწყვეტად მდგომარეობს თეორემა 3.1-ის გამოყენებაში და დიფერენციალურ განტოლებათა ალგებრულ ინტერპრეტაციაში. სადაც დიფერენციალურ განტოლებებს უყურებენ როგორც ზედაპირებს გაფართოებულ სივრცეში.

სანამ ამ ზოგად ინტერპრეტაციას განვიხილავდეთ, ჯერ განვიხილოთ (3.54) გარდაქმნის მაგალითზე მიდგომის არსი.

(3.54) - (3.57) გარდაქმნები ადგენენ ერთპარამეტრიან ჯგუფს $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$ ცვლადების მიმართ $\mathbb{R}^6$ სივრცეში. სითბოგამტარობის განტოლებას ამ შემთხვევაში, აქვს სახე

$F_1(z) = 0, \dots, F_s(z) = 0,\ s \le n,$ სადაც $s = 1$ და განსაზღვრავს ხუთგანზომილებიან ზედაპირს $M \subset \mathbb{R}^6$ რომელიც განტოლებათა წრფივობის გამო, წარმოადგენს ***ხუთგანზომილებიან ჰიპერსიბრტყეს***. ამ (3.54) გარდაქმნების მიმართ სითბოგამტარობის

განტოლების ინვარიანტულობა განაპირობებს ჰიპერსიბრტყის ინვარიანტობას (3.54) - (3.57) გარდაქმნების მიმართ. რადგან ეს გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, ადგილი აქვს ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალურ (3.51) კრიტერიუმს. ამოვწეროთ ეს კრიტერიუმი ამ შემთხვევაში. ამისათვის გავიხსენოთ, რომ (3.54) გარდაქმნისათვის შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს სახე:

$$X = 2t\frac{\partial}{\partial x} - xu\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.62}$$

ხოლო გაფართოვებული (3.54) - (3.57) გარდაქმნების მიმართ შესაბამისი ოპერატორი ჩაიწერება ფორმით:

$$X_2 = X - (xu_t + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_t} - (xu_x + u)\frac{\partial}{\partial u_x} - (xu_{xx} + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \tag{3.63}$$

ამ ფორმულაში ინდექსი 2 იმას ნიშნავს, რომ (3.63) ოპერატორი მიიღება (3.62) ოპერატორისაგან მისი გაფართოვებით მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით. X_2 ოპერატორი მოქმედებს

$z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$ ცვლადების ფუნქციებზე ისე, რომ ამ ცვლადებს განიხილავს, როგორც დამოუკიდებელ ცვლადებს, ამიტომ გვექნება, რომ

$$X_2(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_t}(u_t - u_{xx}) - (xu_{xx} + 2u_x)\frac{\partial}{\partial u_{xx}}(u_t - u_{xx}) = -(xu_t + 2u_x) + (xu_{xx} + 2u_x) = -x(u_t - u_{xx}). \tag{3.64}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ინვარიანტობის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_2(u_t - u_{xx}) = 0. \tag{3.65}$$

თუ, ამ კრიტერიუმს გავყვებით უკან (3.65)-დან (3.62) ოპერატორისაკენ, ***მივიღებთ ყველა დასაშვებ ჯგუფს***.

3.6.2. წერტილოვანი გარდაქმნები და გაფართოების ფორმულები

შემდგომ z ვექტორის კომპონენტებისათვის გამოვიყენებთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$x = \{x^i\},\ u = \{u^\propto\},\ u_1 = \{u_i^\propto\},\ u_2 = \{u_{ij}^\propto\},\ .\ .\ . \qquad (3.66)$$

სადაც $i = \overline{1,n}$ ხოლო $\propto = \overline{1,m}$. ეს ცვლადები ალგებრულად დამოუკიდებელნი არიან ერთმანეთისაგან, თუმცა, დაკავშირებულნი არიან დიფერენციალური ტოლობებით

$$u_i^\propto = D_i(u^\propto),\ u_{ij}^\propto = D_j(u_i^\propto) = D_j D_i(u^\propto),\ .\ .\ . \qquad (3.67)$$

სადაც

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\propto \frac{\partial}{\partial u^\propto} + u_{ij}^\propto \frac{\partial}{\partial u_j^\propto} + \ \ldots \qquad (3.68)$$

x^i დამოუკიდებელი ცვლადებია; $u^\propto$ დიფერენციალური ცვლადებია; ხოლო, $u_i^\propto$, $u_{ij}^\propto$, . . . დიფერენციალური ცვლადების პირველი რიგის, მეორე რიგის და ა.შ. წარმოებულებია.

დიფერენციალურ $f = f(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ფუნქციაში შემავალი ცვლადების უმაღლესი რიგის წარმოებულის p რიგს, ამ ფუნქციის რიგი ეწოდება.

ყველა დიფერენციალური ფუნქციების სიმრავლეს ავღნიშნავთ $\mathcal{A}$ სიმბოლოთი. ვთქვათ, $F \in \mathcal{A}$ არის p რიგის დიფერენციალური ფუნქცია. მაშინ განტოლება

$$F(x, u, u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0, \qquad (3.69)$$

გამოსახავს ზედაპირს შესაბამის ფაზურ სივრცეში. ამ განტოლებას განვიხილავთ მის ყველა დიფერენციალურ შედეგთან ერთად

$$D_i F = 0,\ D_i D_j F = 0,\ .\ .\ . \qquad (3.70)$$

და ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს დიფერენციალური მრავალსახეობა M.

ანალოგიურად განიმარტება დიფერენციალური მრავალსახეობა, რომელიც აღიწერება არა ერთი განტოლებით, არამედ, განტოლებათა სისტემით. დასაშვები ჯგუფის საპოვნელად, ჩვენ ვივიწყებთ ამონახსნის ცნებას და მანიპულაციებს ვახდენთ შესაბამის მრავალსახეობაზე. ამიტომ ამ სისტემას შეგვიძლია შევხედოთ, როგორც უბრალოდ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას შესაბამის ფაზურ სივრცეში, სადაც ის შეესაბამება რაღაც ზედაპირს და მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ *ინვარიანტობის კრიტერიუმი.*

ვთქვათ $z = (x, u)$ და ჩავწეროთ გარდაქმნის ფორმულები

$$x'^i = f^i(x, u, a), \quad f^i(x, u, 0) = x', \tag{3.71}$$

$$u'^\alpha = \varphi^\alpha(x, u, a), \quad \varphi^\alpha(x, u, 0) = u^\alpha. \tag{3.72}$$

ამ ფორმულებს, ***წერტილოვან გარდაქმნებს*** უწოდებენ.

ვთქვათ, ამ გარდაქმნებისათვის ადგილი აქვს ჯგუფის (3.14) ფორმულებს, მაშინ (3.71) და (3.72) გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი G ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს სახე:

$$X = \xi^i(x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha(x, u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{3.73}$$

სადაც

$$\xi^i = \frac{\partial f^i}{\partial a}|a = 0, \qquad \eta^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial a}|a = 0. \tag{3.74}$$

წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებს აქვთ სახე

$$D_i = D_i(f^j)D'_j. \tag{3.75}$$

სადც შტრიხიანი ცვლადებისათვის ადგილი აქვს გარდაქმნის (3.67) ფორმულებს

$$u'^\alpha_i = D'_i(u'^\alpha), \dots \tag{3.76}$$

ეხლა გავწარმოოთ (3.72) ტოლობა და გამოვიყენოთ (3.75),(3.76) ტოლობები:

$$D_i(\varphi^\alpha) = D_i\big(f^j\big)D_j'(u'^\alpha) = u_j'^\alpha D_i\big(f^j\big). \tag{3.77}$$

ასე, რომ (3.71),(3.72) წერტილოვანი გარდაქმნებისათვის წარმოებულები გარდაიქმნებიან ფორმულებით:

$$u_j'^\alpha D_i\big(f^j\big) = D_i(\varphi^\alpha), \tag{3.78}$$

ან, უფრო დეტალურად,

$$\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial f^j}{\partial u^\beta}\right) u_j'^\alpha = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} + u_i^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial u^\beta}. \tag{3.79}$$

აქედან ვპოულობთ $u_j'^\alpha$ ცვლადებს (x, u, u_1) არგუმენტებისა და a პარამეტრის საკმაოდ მცირე მნიშვნელობებისათვის. მეორე რიგის წარმოებულების გარდაქმნის ფორმულებს მივიღებთ (3.78) ფორმულების გაწარმოებით.

შემდეგისათვის, ჩვენ დაგვჭირდება არა გარდაქმნების, არამედ, ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება.

ჩავწეროთ ამ ოპერატორის გაფართოება პირველი რიგის წარმოებულებამდე

$$X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}, \tag{3.80}$$

სადაც $\zeta_i^\alpha = \frac{\partial u_i'^\alpha}{\partial a}|a = 0$ დამატებითი კოორდინატებია, რომელიც უნდა ვიპოვოთ. თუ, გავაწარმოებთ (3.78) ფორმულებს პარამეტრის მიმართ, $a = 0$ პირობებში, მივიღებთ:

$$D_i(\eta^\alpha) = \zeta_j^\alpha D_i\big(x^j\big) + u_j^\alpha D_i\big(\xi^j\big) = \zeta_j^\alpha \delta_i^j + u_j^\alpha D_i\big(\xi^i\big). \tag{3.81}$$

აქედან, მივიღებთ ***ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოების ფორმულას პირველ წარმოებულებამდე*** სახით:

$$\zeta_i^\alpha = D_i(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_i\big(\xi^j\big). \tag{3.82}$$

როგორც ამ ფორმულებიდან ჩანს, ინფინიტეზიმალური ოპერატორის (3.80) გაფართოების საპოვნელად, საჭიროა მხოლოდ

საწყისი $X=\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ ოპერატორის ξ^i და η^α კოორდინატების ცოდნა.

ანალოგიურად, ***თუ გვინდა ინფინიტეზიმალური ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულებამდე***

$$X_2=X_1+\zeta_{ij}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}, \tag{3.83}$$

სადაც $\zeta_{ij}^\alpha=\frac{\partial u_{ij}'^\alpha}{\partial a}|a=0$, მაშინ უნდა გავიმეოროთ წინა პროცედურა უკვე (3.83) ფორმულისათვის და მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{ij}^\alpha=D_j(\zeta_i^\alpha)-u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k). \tag{3.84}$$

განვიხილოთ მაგალითი:

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ $X=2t\frac{\partial}{\partial x}-xu\frac{\partial}{\partial u}$ ოპერატორის გაფართოება მეორე წარმოებულებამდე, ზემოთ მოყვანილი ფორმულების საშუალებით.

შემოვიღოთ აღნიშვნები $t=x^1,\ x=x^2$. მაშინ ამ ოპერატორისათვის გვექნება $X\xi^1=0,\ \xi^2=2t,\ \eta=-xu$. ამიტომ (3.82) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_1=D_t(-xu)-u_xD_t(2t)=-xu_t-2u_x,$$

$$\zeta_2=D_x(-xu)-u_xD_x(2t)=-u-xu_x,$$

ხოლო (3.84) ფორმულებიდან მივიღებთ, რომ

$$\zeta_{22}=D_x(-u-xu_x)-u_{xx}D_x(2t)=-2u_x-xu_{xx}.$$

შესაბამისად მივიღებთ გაფართოებულ ოპერატორს მეორე რიგის წარმოებულებამდე, სახით

$$X_2=X+\zeta_1\frac{\partial}{\partial u_t}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial u_x}+\zeta_{22}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

3.6.3. განმსაზღვრელი განტოლებები

დავუბრუნდეთ M დიფერენცირებად მრავალსახეობას, რომელიც წარმოიქმნება $F_{\mathrm{i}}(x,u,u_1,u_2,\dots,u_{p_i})=0,\ i=\overline{1,s}$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან. რადგან ამ განტოლებათა სისტემაში გვხვდება წარმოებულები p რიგამდე ჩათვლით, საჭიროა რომ $x'^i=f^i(x,u,a),\ \ f^i(x,u,0)=x',$

$u'^\alpha=\varphi^\alpha(x,u,a),\qquad \varphi^\alpha(x,u,0)=u^\alpha$ ***გარდაქმნები გავაფართოოთ*** $u_j'^\alpha D_i(f^j)=D_i(\varphi^\alpha)$ ფორმულების p-ჯერ დიფერენცირების საშუალებით და $D_i=D_i(f^j)D_j'$ ფორმულის გამოყენებით. თუ, ***საწყისი გარდაქმნები*** წარმოადგენენ ერთპარამეტრიან G ჯგუფს, მაშინ გაფართოების შედეგად მიღებულ ჯგუფს აღვნიშნავთ G_p სიმბო-ლოთი. ეს ჯგუფი მოქმედებს $(x,u,u_1,u_2,\dots,u_p)$ ცვლადების სივრცეში. ამ p-ჯერ გაფართოებული ჯგუფის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_p=X+\zeta_i^\alpha\frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}+\ \dots+\zeta_{i_1\dots i_p}^\alpha\frac{\partial}{\partial u_{i_1\dots i_p}^\alpha}. \tag{3.85}$$

ეს ოპერატორი მიღებულია $X=\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ ოპერატორის p-ჯერ გაფართოებით. მაღალი რიგის გაფართოების ფორმულა მსგავსია $\zeta_{ij}^\alpha=D_j(\zeta_i^\alpha)-u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$ ფორმულისა, რომელიც ჩვენ გვქონდა მეორე რიგის წარმოებულებამდე გაფართოების შემთხვევაში. საზოგადოდ, გვექნება

$$\zeta_{i_1\dots i_k}^\alpha=D_{i_k}\left(\zeta_{i_1\dots i_{k-1}}^\alpha\right)-u_{j_{i_1}\dots i_{k-1}}^\alpha D_{i_k}\left(\xi^j\right). \tag{3.86}$$

ვიტყვით რომ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის

$$F_{\mathrm{i}}(x,u,u_1,u_2,\dots,u_{p_i})=0,\ \ i=\overline{1,s}, \tag{3.87}$$

დასაშვებია გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფი

$$x'^i=f^i(x,u,a),\ \ f^i(x,u,0)=x',\ u'^\alpha=\varphi^\alpha(x,u,a),\quad \varphi^\alpha(x,u,0)=u^\alpha \tag{3.88}$$

თუ, ამ გარდაქმნებით წარმოქმნილი M მრავალსახეობა ინვარიანტულია გაფართოებული G_p ჯგუფის მიმართ. ადგილი აქვს ***ინვარიანტულობის კრიტერიუმს***, რომელიც გვიადვილებს გარდაქმნათა დასაშვები ჯგუფის გამოთვლას.

თეორემა(კრიტერიუმი). დიფერენციალურ განტოლებათა (3.87) სისტემა უშვებს G ჯგუფს, X ინფინიტეზიმალური ოპერატორით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ადგილი აქვთ განტოლებებს

$$X_pF_k = 0,\ k = \overline{1,s}, \tag{3.89}$$

მრავალსახეობის ყველა წერტილისათვის.

ეს თეორემა, ლის თეორემასთან ერთად საშუალებას გვაძლევს მოცემული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის დასაშვები, გარდაქმნათა ერთპარამეტრიანი ჯგუფის პოვნის ამოცანა, დავიყვანოთ (3.89) განტოლებათა სისტემის ამოხსნამდე, რის გამოც ამ განტოლებებს ***განმსაზღვრელ განტოლებებს*** უწოდებენ.

3.7. ლის ალგებრა

კამილ ჟორდანის ნორვეგიელმა მოწაფემ სოფუს ლიმ შეძლო განეზოგადებინა ***გალუას*** ალგებრულ განტოლებათა ***თეორია***, დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემისათვის. მანვე შეისწავლა იმ გარდაქმნათა უწყვეტი ჯგუფები, რომლების მიმართაც ინვარიანტულია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა.

სოფუს ლიმ შეძლო ლის ალგებრის ბაზისის პოვნის ალგორითმის ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ დიფერენცი-ალურ განტოლებათა სისტემის დასაშვები ჯგუფი და მაშასადამე, ყველა ის გარდაქმნა, რომლის მიმართაც ინვარიანტულია მოცემული დიფერენციალური განტოლება. ლის თეორია ლოკალურია, ანუ მასში შეისწავლება გარდაქმნები, რომლებიც ახლოსაა იგივურ გარდაქმნასთან. დასაშვები ჯგუფის პოვნის პროცესი ვითარდება დიფერენცირებადი M მრავალსახეობის TM მხებ სივრცეში და მხოლოდ ბოლო ეტაპზე ხდება დაშვება თვით მრავალსახეობაში, რომელსაც ქმნიან დიფერენციალურ განტოლე-

ბათა სისტემაში შემავალი ყველა ცვლადისა და მათი წარმოებულების ერთობლიობა, რომელიც გაფართოებულია მასში შემავალი უმაღლესი წარმოებულის რიგამდე ჩათვლით.

გამოთვლების შედეგად მიღებული ***ინფინიტეზიმალური ოპერატორები ქმნიან ლის ალგებრას***. ანუ სიმრავლეს, რომელშიც გვაქვს წრფივი ვექტორული სივრცის სტრუქტურას ერთი დამატებითი ოპერაციით, რომელსაც ***კომუტირებას*** უწოდებენ.

A და B ოპერატორების კომუტირებას უწოდებენ ანტისიმეტრიულ $[A,B]=-[B,A]$ ***ორადწრფივ ოპერაციას***, რომლისთვისაც ადგილი აქვს **იაკობის** ტოლობას

$$\big[A,[B,C]\big]+\big[B,[C,A]\big]+\big[C,[A,B]\big]=0, \tag{3.90}$$

კერძოდ, A და B ოპერატორების **კომუტატორად** შეგვიძლია განვიხილოთ მათი კომბინაცია:

$$[A,B]=AB-BA, \tag{3.91}$$

სადაც, ოპერატორების ნამრავლი ნიშნავს მათ მიმდევრობით შესრულებას.

დავამტკიცოთ, რომ მაშინ ადგილი აქვს (3.90) იაკობის ტოლობას. მართლაც,

$$\big[A,[B,C]\big]+\big[B,[C,A]\big]+\big[C,[A,B]\big]=[A,BC-CB]+[B,CA-AC]+$$
$$[C,AB-BA]=[A,BC]-[A,CB]+[B,CA]-[B,AC]+[C,AB]-[C,BA]=$$
$$ABC-BCA-ACB+CBA+BCA-CAB-BCA+ACB+CAB-ABC-$$
$$CBA+BAC=0.$$ რ.დ.გ.

3.7.1. გაფართოების კოორდინატული გადმოცემა

ვთქვათ, გვაქვს საწყისი q როგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა m დამოუკიდებელი ცვლადით და k უცნობი ფუნქციით. ჩვენი ცვლადების M მრავალსახეობა განისაზღვრება $(x_1,x_2,\ldots,x_m;u_1,u_2,\ldots,u_k)$ კოორდინატების სივრცით. სადაც x_i, $i=\overline{1,m}$ დამოუკიდებელი ცვლადებია, ხოლო u_j, $j=\overline{1,k}$ საძებნი

ფუნქციებია რომლებისთვისაც ადგილი აქვთ განტოლებათა სისტემას $L^q(x,u)=0$. ვეძებთ ისეთი გარდაქმნების ჯგუფს, რომლის მიმართაც ეს სისტემა ინვარიანტულია, ანუ, სახეს არ იცვლის.

საძებნი გარდაქმნები ცვლადთა $(x_1,x_2,\dots,x_m;u_1,u_2,\dots,u_k)$ სივრცეში წარმოიქმნებიან შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორებით

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{k}\eta_j(x,u)\frac{\partial}{\partial u_j}, \tag{3.92}$$

სადაც $\xi_i(x,u)$ და $\eta_j(x,u)$ (ჯერ-ჯერობით) უცნობი ფუნქციებია.

3.7.2. პირველი გაფართოება

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$p_i^j=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \tag{3.93}$$

ლის თეორიაში **პირველი გაფართოების სივრცე** ეწოდება

$$\left(x_1,x_2,\dots,x_m;u_1,u_2,\dots,u_j;p_i^j\right),\ \ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k}, \tag{3.94}$$

ცვლადების სივრცეს.

ამ გაფართოების ცვლადების სივრცეში (3.92) ინფინიტეზიმალური ოპერატორის შესაბამის გარდაქმნების ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს შემდეგი სახე:

$$X_1=X+\sum_{i,j}\zeta_i^j(x,u,p)\frac{\partial}{\partial p_i^j}, \tag{3.95}$$

სადაც დამატებითი ζ_i^j კოორდინატები განისაზღვრებიან გამოსახულებებიდან

$$\zeta_i^j=D_i(\eta_j)-\sum_{s,j}p_s^jD_i(\xi_s), \tag{3.96}$$

ხოლო x_i ცვლადით სრული წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულაა:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_t p_i^t \frac{\partial}{\partial u^t}. \tag{3.97}$$

3.7.3. მეორე გაფართოება

თუ, $L^q(x,u) = 0$ განტოლებაში შემავალი ფუნქციების წარმოებულის უმაღლესი q რიგი მეტია ერთზე, მაშინ ცვლადების სივრცე $(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k)$, შესაბამისად, უნდა გავაფართოოთ q-ჯერ, რათა შევავსოთ ის საძებნი ფუნქციების წარმოებულებით q რიგამდე ჩათვლით.

ლის თეორიაში, მეორე გაფართოების სივრცედ ითვლება ცვლადების სივრცე $\left(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l\right)$, სადაც

$$r_{si}^l = \frac{\partial^2 u^l}{\partial x_s \partial x_i}, \; s, i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, k}. \tag{3.98}$$

მეორე გაფართოების $\left(x_1, x_2, \dots, x_m; u_1, u_2, \dots, u_k; p_i^j, r_{si}^l\right)$ ცვლადების სივრცეში, შესაბამის ინფინიტეზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X_2 = X_1 + \sum_{i,s} \sigma_{is}^l(x, u, p, r) \frac{\partial}{\partial r_{is}^l}, \tag{3.99}$$

ხოლო დამატებითი σ_{is}^l კოორდინატები განისაზღვრებიან განტოლებებით

$$\sigma_{is}^l = \widetilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l \widetilde{D}_i(\xi_s), \tag{3.100}$$

სადაც

$$\widetilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_q p_i^q \frac{\partial}{\partial u^q} + \sum_{i,s,l} r_{is}^l \frac{\partial}{\partial p_s^l}, \tag{3.101}$$

სრული დიფერენცირების ოპერატორია. ცხადია, რომ

$$\widetilde{D}_i(\xi_s) \equiv D_i(\xi_s). \tag{3.102}$$

ამიტომ, ფორმულა (3.100) საბოლოოდ მიიღებს სახეს:

$$\sigma_{is}^l = \widetilde{D}_i(\zeta_s^l) - \sum_{i,s} r_{si}^l D_i(\xi_s). \tag{3.103}$$

3.8. ლის მეთოდის გამოყენების მაგალითები

განვიხილოთ უმარტივესი მეორე რიგის განტოლება

$$u'' = 0. \qquad (3.104)$$

ამ შემთხვევაში გვაქვს (x, u) ცვლადთა სივრცე. შესაბამისი **ინფინიტეზიმალური ოპერატორია**

$$X = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (3.105)$$

პირველი გაფართოება: შემოგვაქვს აღნიშვნა პირველი რიგის წარმოებულისათვის

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (3.106)$$

პირველი გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x, u, p). \qquad (3.107)$$

x ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}. \qquad (3.108)$$

პირველი გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_1 = X + \zeta(x,u,p)\frac{\partial}{\partial p}, \qquad (3.109)$$

სადაც დამატებითი ζ კოორდინატის საპოვნელად გვაქვს ფორმულა

$$\zeta = D(\eta) - pD(\xi) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p\frac{\partial \eta}{\partial u} - p\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + p\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - p^2\frac{\partial \xi}{\partial u}.$$

(3.110)

რადგან $\xi(x,u)$ და $\eta(x,u)$ ცვლადები არ არის დამოკიდებული p ცვლადზე, (3.110) განტოლება p ცვლადის მიმართ მხოლოდ კვადრატულ ფუნქციას წარმოადგენს.

მეორე გაფართოება: შემოგვაქვს დამატებითი აღნიშვნა მეორე რიგის წარმოებულისათვის

$$r=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{3.111}$$

მეორე გაფართოების ცვლადთა სივრცეა

$$(x,u,p,r). \tag{3.112}$$

x ცვლადის მიმართ სრული წარმოებულის ფორმულას, მეორე გაფართოების შემდეგ აქვს სახე

$$\widetilde{D}=D+r\frac{\partial}{\partial p}. \tag{3.113}$$

მეორე გაფართოების შედეგად მიღებული ინფინიტეზიმალური ოპერატორია

$$X_2=X_1+\sigma\frac{\partial}{\partial r}, \tag{3.114}$$

სადაც დამატებითი σ კოორდინატის საპოვნელად გვაქვს ფორმუ-ლა

$$\sigma=\widetilde{D}(\zeta)-rD(\xi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial u}+r\frac{\partial}{\partial p}\right)\left[\frac{\partial \eta}{\partial x}+p\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)-p^2\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]-$$
$$-r\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}+p\frac{\partial \xi}{\partial u}\right). \tag{3.115}$$

ეხლა უნდა ვიმოქმედოთ X_2 ოპერატორით (3.104) განტოლების მარცხენა მხარეზე

$$X_2 r=0=\sigma_{r=0}. \tag{3.116}$$

რადგან X_1 ოპერატორი არ შეიცავს წარმოებულს r ცვლადით, (3.116) ტოლობიდან გამომდინარე გვექნება

$$X_1+\sigma\frac{\partial r}{\partial r}=\sigma_{r=0}=0. \tag{3.117}$$

ანუ (3.115) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ

$$\left[\widetilde{D}(\zeta)-rD(\xi)\right]_{r=0}=0 \tag{3.118}$$

ანუ

$$\widetilde{D}(\zeta) = 0. \tag{3.119}$$

$$\left[\widetilde{D}(\zeta)\right]_{r=0} = \left[D + r\frac{\partial}{\partial p}\right]_{r=0} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.120}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}\right)\left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + p\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - p^2\frac{\partial \xi}{\partial u}\right] = 0, \tag{3.121}$$

ანუ გამარტივებით მივიღებთ განტოლებას

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} + p\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right) + p^2\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u}\right) - p^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} - p^3\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0. \tag{3.122}$$

ამ განტოლებაში ξ და η ცვლადები დამოკიდებულია მხოლოდ (x,u) ცვლადებზე, ამიტომ (3.122) განტოლების მარცხენა მხარე წარმოადგენს იგივურად ნულის ტოლ კუბურ მრავალწევრს p ცვლადის მიმართ. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია.

p^3 ხარისხის კოეფიციენტი: $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} = 0$; (3.123)

p^2 ხარისხის კოეფიციენტი: $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} = 0$; (3.124)

p^1 ხარისხის კოეფიციენტი: $2\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0$; (3.125)

p^0 ხარისხის კოეფიციენტი: $\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$ (3.126)

(3.123) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\xi = A(x)u + B(x). \tag{3.127}$$

(3.126) განტოლებიდან მივირებთ, რომ

$$\eta = C(u)x + D(u). \tag{3.128}$$

(3.124) განტოლებიდან გვექნება

$$C''(u)x + D''(u) = 2A'(x). \tag{3.129}$$

(3.125) განტოლებიდან მივიღებთ

$$A'(x)u + B''(x) = 2C'(u). \tag{3.130}$$

გავაწარმოოთ (3.129) u ცვლადით, მაშინ მივიღებთ განტოლე-ბას

$$C'''(u)x + D'''(u) = 0. \tag{3.131}$$

გავაწარმოოთ (3.130) x ცვლადით, მაშინ მივიღებთ

$$A'''(x)u + B'''(x) = 0. \tag{3.132}$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$C'''(u) = 0, \quad D'''(u) = 0, \ A'''(x) = 0, \ B'''(x) = 0. \tag{3.133}$$

შესაბამისად, გვექნება რომ

$$C(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2, \tag{3.134}$$

$$D(u) = d_0 + d_1 u + d_2 u^2, \tag{3.135}$$

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \tag{3.136}$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2. \tag{3.137}$$

თუ, გავითვალისწინებთ (3.127)-(3.137) განტოლებებს, მივიღებთ, რომ

$$A(x) = a_0 + a_1 x, \tag{3.138}$$

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \tag{3.139}$$

$$C(u) = c_0 + b_2 u, \tag{3.140}$$

$$D(u) = d_0 + d_1 u + a_1 u^2, \tag{3.141}$$

სადაც კოეფიციენტები ნებისმიერი მუდმივებია. შესაბამის ინფინიტე-ზიმალურ ოპერატორს აქვს ასეთი სახე:

$$X = \xi(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.142}$$

$$\xi = (a_0 + a_1 x)u + b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \tag{3.143}$$

$$\eta = (c_0 + b_2 u)x + d_0 + d_1 u + a_1 u^2. \tag{3.144}$$

თუ (3.142)-(3.144) ფორმულებში დავუშვებთ, რომ ერთი კოეფიციენტი უდრის 1, ხოლო დანარჩენები 0, მივიღებთ **ლის ალგებრის ბაზისურ ოპერატორებს, რომელთაც უშვებს განტოლება (3.104)**. მართლაც, გვექნება

$$L_1 = xu\frac{\partial}{\partial x} + u^2\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.145}$$

$$L_2 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + ux\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.146}$$

$$L_3 = u\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.147}$$

$$L_4 = x\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.148}$$

$$L_5 = x\frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.149}$$

$$L_6 = u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.150}$$

$$L_7 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.151}$$

$$L_8 = \frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.152}$$

ოპერატორების სიმრავლე, რომლისთვისაც (3.145)-(3.152) ბაზისია, წარმოადგენს წრფივ ვექტორულ სივრცეს. კომუტირების ოპერაციის მიმართ ეს სივრცე ჩაკეტილია ანუ წარმოადგენს ***ლის ალგებრას***.

ინფინიტეზიმალურ ოპერატორებს საზოგადოდ, აქვთ ასეთი სახე:

$$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}. \tag{3.153}$$

თუ, გვაქვს გარდაქმნის კანონიკური ფორმულებით მოცემული ჯგუფი

$$x' = f(x, u, \alpha), \tag{3.154}$$

$$u' = \varphi(x, u, \beta). \tag{3.155}$$

მაშინ

$$A = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}, \qquad B = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0}. \tag{3.156}$$

3.8.1. ბიურგერსის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ ***ბიურგერსის განტოლება***

$$u_t + uu_x = u_{xx}. \tag{3.157}$$

თუ, მოვახდენთ ცვლადთა გარდაქმნას ***ხოპფი-კოულის*** ფორმულით

$$u = -2\delta \frac{\partial(lnv)}{\partial x}, \tag{3.158}$$

მაშინ, ბიურგერსის განტოლება გარდაიქმნება სითბოგამტარობის განტოლებად

$$v_t = \delta v_{xx}. \tag{3.159}$$

ბიურგერსის განტოლების შესაბამისი ლის ალგებრის ბაზისია

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.160}$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.161}$$

$$L_3 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.162}$$

$$L_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.163}$$

$$L_5 = tx\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.164}$$

ბიურგერსის განტოლების ლის ალგებრა ხუთგანზომილებიანი მრავალსახეობაა კომუტირების ოპერაციით. ხოლო სითბოგამტარობის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა ექვსგანზომილებიანი მრავალსახეობაა. რაც იმას ნიშნავს, რომ ლის ეს ორი ალგებრა არ არის იზომორფული.

3.8.2. კორტევეგა-დე-ფრიზის განტოლების ბაზისური ლის ალგებრა

განვიხილოთ კორტევეგა-დე-ფრიზის განტოლება

$$u_t + uu_x = u_{xxx}. \tag{3.165}$$

ამ განტოლებისათვის არ არსებობს ხოპფი-კოულის გარდაქმნის ანალოგიური გარდაქმნა, რომელიც მას გადაიყვანდა წრფივ სითბოგამტარობის განტოლებაში.

კორტევეგა-დე ფრიზის განტოლებით დასაშვები ლის ალგებრის ბაზისი ოთხგანზომილებიანია და შედგება შემდეგი ოპერატორებისაგან

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.166}$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.167}$$

$$L_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{3.168}$$

$$L_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}. \tag{3.169}$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.აჩვენეთ რომ გარდაქმნა, რომელიც მოიცემა ფორმულით $x' = x + a + a^2$, ქმნის ჯგუფს. იპოვეთ შესაბამისი $\varphi(a,b)$ და a^{-1} ;

2.გამოიკვლიეთ (x, y) სიბრტყეზე, ადგენენ თუ არა ჯგუფს $x' = x + a,\ y' = y + a^2$ გარდაქმნები;

3.ამოხსენით ლის განტოლებები $\frac{dx'}{da} = y',\ \frac{dy'}{da} = -x'$ ბრუნვის გარდაქმნისთვის და იპოვეთ გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

4.იპოვეთ ლორენცის გარდაქმნების ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

5.იპოვეთ გალილეის გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

6.იპოვეთ ერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

7.იპოვეთ $kx + ly = 0$ წრფის პარალელურ გადატანათა გარდაქმნის ჯგუფის ინფინიტეზიმალური ოპერატორი და ინვარიანტი;

8.იპოვეთ არაერთგვაროვანი გაჭიმვების გარდაქმნის ჯგუფის ინვარიანტი და ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

9.აჩვენეთ რომ $t' = t,\ x' = x + 2at,\ u' = ue^{-(ax+a^2t)}$,

$u'_{t'} = (u_t + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}$,

$u'_{x'} = (u_x - au)e^{-(ax+a^2t)}$,

$u'_{x'x'} = (u_{xx} + a^2u - 2au_x)e^{-(ax+a^2t)}$ გარდაქმნები ადგენენ ჯგუფს, ექვსგანზომილებიან $z = (t, x, u, u_t, u_x, u_{xx})$ ცვლადთა სივრცეში და იპოვეთ შესაბამისი ინფინიტეზიმალური ოპერატორი;

10.შეამოწმეთ, რომ თუ, $u = \varphi(t, x)$ ფუნქცია არის სითბოგამტარობის განტოლების რაიმე ცნობილი ამონახსნი, მაშინ

$u = e^{-(ax+a^2t)}\varphi(t, x + 2at)$ ფუნქციაც აკმაყოფილებს სითბოგამტარობის $u_t - u_{xx} = 0$ განტოლებას.

11.იპოვეთ, $X_1 = X + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha}$ ოპერატორის გაფართოება მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით $X_2 = X_1 + \zeta_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{ij}^\alpha}$ სახით და აჩვენეთ, რომ $\zeta_{ij}^\alpha = D_j(\zeta_i^\alpha) - u_{ik}^\alpha D_j(\xi^k)$.

12.გამოითვალეთ $u'' + u = 0$ განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

13.გამოითვალეთ $u_t + uu_x = u_{xx}$ ბიურგერსის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

14. გამოითვალეთ $u_t + uu_x = u_{xxx}$ კორტევეგა-დე-ფრიზის განტოლების დასაშვები ლის ალგებრა.

ლიტერატურა

1.Lie S.Vorleaungen uber continuierliche Gruppen, Leipzig : Teubner,1893

2.Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений,Новосибирск,1962

3.Дородницын В.А.,Еленин Г.Г. Симметрия в решенияах уравнений математической физики, Москва,1988

4.Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике,Москва,1983

5.Чеботарёв Н.Г.Теория групп Ли, Москва,1940

6.Олвер П.Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, пер. с англ.,Мир, Москва,1989

თავი IV. დიფერენცირებადი მრავალსახეობის ლოკალური გეომეტრიის ელემენტები

დიფერენციალური გეომეტრიის ცოდნის გარეშე, შეუძლებელია ისეთი ***რთული ცოცხალი სისტემის შესწავლა***, როგორიცაა სამყარო, თავისი გეომეტრიული ფორმების მრავალფეროვნებითა და სწრაფად ცვალებადი, დინამიკური სტრუქტურით.

დიფერენციალური გეომეტრიის ძირითადი ინსტრუმენტია ***დიფერენცირებადი მრავალსახეობა***. მრავალსახეობა შეიძლება განისაზღვროს, როგორც ***ლოკალურად ევკლიდური*** სივრცე.

გავიხსენოთ, რომ n განზომილებიანი ევკლიდური $\mathbb{R}^n$ სივრცე არის ყველა შესაძლო $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ წერტილების სიმრავლე, სადაც თითოეული $x^i \in \mathbb{R}$ კოორდინატი ნამდვილი რიცხვია. ამ სიმრავლეში ჩვეულებისამებრ, განსაზღვრულია წერტილის ჩაკეტილი და ღია მიდამოს ცნება. M მრავალსახეობა ლოკალურად ემთხვევა ევკლიდურ სივრცეს იმ აზრით, რომ მრავალსახეობა გადაფარულია ღია $\mathcal{U}_\alpha$ სიმრავლეებით (ანუ, $M = \cup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$) და თითოეულ ღია $\mathcal{U}_\alpha$ სიმრავლესთან დაკავშირებულია შესაბამისი ურთიერთცალსახა φ_α ასახვა, რომელიც $\mathcal{U}_\alpha$ მიდამოს ყოველ $p \in \mathcal{U}_\alpha$ წერტილს გადაიყვანს $\mathbb{R}^n$ სივრცის შესაბამისი ღია სიმრავლის $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ წერტილში. ვთქვათ, მრავალსახეობის ორი $\mathcal{U}_\alpha$ და $\mathcal{V}_\alpha$ მიდამოები იკვეთებიან ისე, რომ $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha \neq \emptyset$ ხოლო, φ_α ; ψ_α ის შესაბამისი ასახვებია, რომლებიც ამ მიდამოს წერტილებს ასახავს $\mathbb{R}^n$ სივრცის შესაბამისი ღია სიმრავლეებზე, მაშინ $\varphi_\alpha \circ {\psi_\alpha}^{-1}$ ასახვა $\psi_\alpha(p)$ წერტილს($p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_\alpha$), რომლის კოორდინატებიცაა $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ გადაიყვანს $\varphi_\alpha(p)$ წერტილში, რომლის კოორდინატებიცაა რაღაც $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$. განსაზღვრის თანახმად M იქნება დიფერენცირებადი მრავალსახეობა, თუ x^i კოორდინატები გამოისახებიან როგორც $\bar{x}^i$ კოორდინატების გლუვი ფუნქციები(ანუ ეს ფუნქციები უწყვეტია თავის ყველა რიგის კერძო წარმოებულებთან ერთად).

ორი მრავალსახეობის პირდაპირი $\boldsymbol{M \times N}$ ნამრავლი არის დიფერენცირებადი მრავალსახეობის სტრუქტურის მქონე, ისეთი დალაგებული (p, q) წყვილების სიმრავლე, სადაც $p \in M$ და $q \in N$

ანუ, თუ $\mathcal{U}_\alpha$ და $\mathcal{V}_\beta$ არიან შესაბამისად, M და N მრავალსახე-ობების მიდამოები, ხოლო φ_α და ψ_β ამ მიდამოებთან დაკავშირებული ასახვები კოორდინატებით:

$\varphi_\alpha(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ და $\psi_\beta = (y^1, y^2, \dots, y^m)$, მაშინ ასახვა

$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (x^1, x^2, \dots, x^n, y^1, y^2, \dots, y^m)$ განსაზღვრავს $(m+n)$ განზომილებიან მრავალსახეობას.

განვიხილოთ $f: M \mapsto \mathbb{R}^1$ ასახვის შესაბამისი f ფუნქცია. დავუშვათ, რომ ასახვათა კომპოზიცია $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ რომელიც $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ წერტილს შეუსაბამებს $\mathbb{R}^1$ სიმრავლის წერტილს არის $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ კოორდინატების გლუვი ფუნქცია. M მრავალსახეობაზე განვსაზღვროთ ***გლუვი მრუდი λ*** შემდეგი ასახვით

$$\lambda: I(a < t < b) \in \mathbb{R}^1 \to \lambda(t) = p \in M, \tag{4.1}$$

სადაც $(\varphi_\alpha \circ \lambda)(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)]$ და $x^i(t)$ გლუვი ფუნქციებია.

M მრავალსახეობაზე განსაზღვრული ფუქციის საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ $f \circ \lambda$ ფუნქცია λ მრუდზე, ხოლო $\varphi_\alpha \circ \lambda$ ასახვა საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ ფუნქციები

$$f\big(\lambda(t)\big) = f\big(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\big), \tag{4.2}$$

სადაც $\big(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\big)$ არის $p = \lambda(t)$ წერტილის კოორდინა-ტები φ_α ასახვისას.

4.1. მხები ვექტორი(კონტრავარიანტული ვექტორი)

ჩვენ მიერ ზემოთ განხილულ $\lambda(t)$ მრუდზე განსაზღვრული $f\big(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)\big)$ ფუნქციისათვის განვიხილოთ წარმოებული

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)}\Bigg|_{t=t_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[f\big(\lambda(t_0 + \varepsilon)\big) - f\big(\lambda(t_0)\big)\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial t}\bigg|_{t_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{\lambda(t_0)} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{t_0}, \tag{4.3}$$

სადაც, ბოლო ტოლობაში იგულისხმება აინშტაინის შეთანხმება შეჯამებადობის შესახებ.

ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ M მრავალსახეობის p წერტილზე გამავალ სხვადასხვა λ მრუდებს, შეგვიძლია ავაგოთ p წერტილში წრფივი ვექტორული სივრცე, რომელიც შედგება კერძო წამოებულების ყველა შესაძლო წრფივი კომბინაციებისაგან

$$\boldsymbol{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{4.4}$$

სადაც X^j არის n ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი ერთობლიობა. ეს მხები ვექტორები წარმოიქმნებიან იმ λ მრუდების განხილვისას, რომლებიც მოიცემიან ფუნქციებით

$$x^i(t) = x^i(p) + X^i t,\ i = \overline{1,n}, \tag{4.5}$$

სადაც $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$.

მხები ვექტორები p წერტილში, ქმნიან წრფივ ვექტორულ სივრცეს $\mathbb{R}^1$ სიმრავლის ზემოთ, რომელიც მოჭიმულია კოორდი-ნატულ წარმოებულებზე, ანუ, $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ ვექტორები ქმნიან ამ ვექტო-რული სივრცის ბაზისს.

მართლაც, ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$(\alpha \boldsymbol{X} + \beta \boldsymbol{Y}) f = \alpha(\boldsymbol{X} f) + \beta(\boldsymbol{Y} f), \tag{4.6}$$

ნებისმიერი $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ ვექტორისა, α, β რიცხვებისა და ნებისმიერი f ფუნქციისათვის. ამასთან ერთად, $\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$ **ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია.**

ადვილი მისახვედრია, რომ ნებისმიერ f გლუვ ფუნქციაზე $\boldsymbol{X} = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ოპერატორის მოქმედება გვაძლევს ამ ფუნქციის მოცემული ვექტორის მიმართულებით წარმოებულს

$$\boldsymbol{X} f = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j} \tag{4.7}$$

ამ ფორმულაში ბოლო ინდექსის წინ მძიმე, აღნიშნავს წარმოებულს შესაბამისი კოორდინატის მიხედვით. ეს წარმოებული აკმაყოფილებს ***ლაიბნიცის წესსაც***

$$\boldsymbol{X}(fg)|_{\lambda(t)} = (f\boldsymbol{X}g + g\boldsymbol{X}f)|_{\lambda(t)}. \tag{4.8}$$

n განზომილებიანი M მრავალსახეობის p წერტილში არსებული ***მხები ვექტორების სივრცე*** (სხვანაირად, ***კონტრავარიანტული ვექტორების*** სივრცე) წარმოადგენს n განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. ეს სივრცე შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც p წერტილში არსებული ყველა შესაძლო მიმართულებების სიმრავლე. მას ***p* წერტილის მხებ სივრცეს** უწოდებენ. მისთვის მიღებულია აღნიშვნა $T_p(M)$ ან უბრალოდ, T_p, როგორც ადრე გვქონდა.

ლოკალური კოორდინატული ბაზისის გარდა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი სხვა n წრფივად დამოუკიდებელი $\boldsymbol{e_\alpha}$, $\alpha = \overline{1,n}$ ვექტორების სისტემა. მაშასადამე, უნდა არსებობდეს წრფივი გარდაქმნების შესაბამისი ფორმულებიც

$$\boldsymbol{e_\alpha} = \Phi_\alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} \ . \tag{4.9}$$

ამ გარდაქმნის დეტერმინანტი არ შეიძლება რომ იყოს გადაგვარებული. მაშასადამე, უნდა არსებობდეს მისი შებრუნებული მატრიცაც, რაც საშუალებას მოგვცემს (4.9) ფორმულებიდან ამოვხსნათ $\frac{\partial}{\partial x^k}$ ცვლადები

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \Phi_k^j \boldsymbol{e_j}. \tag{4.10}$$

გადასვლის Φ მატრიცა აკმაყოფილებს ფორმულებს

$$\Phi_a^k \Phi_j^a = \delta_j^k,\ \ \Phi_a^k \Phi_k^b = \delta_a^b. \tag{4.11}$$

თუ, მოცემულია რაიმე e_j ბაზისი, მაშინ p წერტილში ნებისმიერი $\boldsymbol{X}$ მხები ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ამ ბაზისში ფორმულით

$$\boldsymbol{X} = X^j \boldsymbol{e_j}. \tag{4.12}$$

სადაც X^j სიდიდეებს ეწოდებათ $\boldsymbol{X}$ **ვექტორის კომპონენტები** $(\boldsymbol{e}_j)$ ბაზისში.

4.2. ფორმა-1 (კოვექტორი ანუ კოვარიანტული ვექტორი)

მრავალსახეობის $\boldsymbol{p}$ ***წერტილში ფორმა-1, ანუ*** $\boldsymbol{\omega}$ ***(პირველი რიგის დიფერენციალური ფორმა) არის მხები*** $\boldsymbol{T_p}$ ***სივრცის წრფივი ასახვა ნამდვილ რიცხვთა*** $\mathbb{R}^{\mathbf{1}}$ ***სიმრავლეზე***

$$\boldsymbol{\omega}: T_p \to \mathbb{R}^1. \tag{4.13}$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, მრავალსახეობის p წერტილში ნებისმიერ $\boldsymbol{X}$ მხებ ვექტორს ფორმა-1 შეუსაბამებს ცალსახად განსაზღვრულ ნამდვილ $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})$ რიცხვს, რომელიც აგრეთვე, შეიძლება ჩაიწეროს ფორმით

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle. \tag{4.14}$$

ასახვის წრფივობა გამოისახება თანაფარდობით

$$\langle \omega, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y} \rangle = \alpha\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle + \beta\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} \rangle, \tag{4.15}$$

სადაც $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ ნებისმიერი მხები ვექტორებია, ხოლო α, β - ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვები.

ფორმა-1-ს ნამდვილ რიცხვზე გამრავლება(4.16) და ***ფორმა-1-ების ჯამი***(4.17) განისაზღვრება ტოლობებით

$$(\alpha\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{X}) = \alpha\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle. \tag{4.16}$$

$$(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle + \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{X} \rangle. \tag{4.17}$$

თუ, ეს წესები შესრულებულია, მაშინ ფორმა-1-ები ქმნიან ***ვექტორულ სივრცეს, რომელსაც აღნიშნავებ ზოგჯერ*** $\boldsymbol{T_p^*}$ ***სიმბოლოთი.*** ეს ვექტორული სივრცე p წერტილში განსაზღვრული ***მხები სივრცის დუალური სივრცეა(შეუღლებული სივრცე).*** ამიტომ ***ფორმა-1-ებს კოვექტორებს, ან კოვარიანტულ ვექტორებს*** უწოდებენ.

ავიღოთ T_p^* (ფორმა-1-ების) ვექტორული სივრცის $\left(\boldsymbol{e^i}\right)$ ელემენტი და ვიმოქმედოთ p წერტილში რაიმე $\boldsymbol{X}$ მხებ ვექტორზე, რომლისთვისაც გვაქვს $\boldsymbol{X} = X^i\boldsymbol{e_i}$ წარმოდგენა. მაშინ ცხადია, რომ

$$\boldsymbol{e^i}(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{e^i}, X^j\boldsymbol{e_j}\rangle = X^i \;\; i = \overline{1,n}. \tag{4.18}$$

ამ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$\boldsymbol{e^i}\left(\boldsymbol{e_j}\right) = \langle \boldsymbol{e^i}, \boldsymbol{e_j}\rangle = \delta^i_j. \tag{4.19}$$

ნებისმიერი ფორმა-1 $\boldsymbol{\omega}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც $\left(\boldsymbol{e^i}\right)$ საბაზისო ფორმა-1-ების წრფივი კომბინაცია.

მართლაც,

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}\rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, X^j\boldsymbol{e_j}\rangle = X^j\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e_j}\rangle. \tag{4.20}$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშნას

$$\omega_i = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e_i}\rangle = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{e_i}), \tag{4.21}$$

იმ რიცხვებისათვის, რომლებსაც შეუსაბამებს ფორმა-1 $\boldsymbol{\omega}$, p წერტილის T_p მხები სივრცის საბაზისო $(\boldsymbol{e_i})$ ვექტორებს, შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}\rangle = \omega_i X^i = \omega_i\langle \boldsymbol{e^i}, X^j\boldsymbol{e_j}\rangle = \langle \omega_i\boldsymbol{e^i}, \boldsymbol{X}\rangle. \tag{4.22}$$

რადგან ეს განტოლება ჭეშმარიტია ნებისმიერი $\boldsymbol{X} \in T_p$ მხები ვექტორისათვის, ცხადია რომ (4.22) განტოლებიდან გამომდინარეობს ფორმულა

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i\boldsymbol{e^i}. \qquad \text{რ.დ.გ.} \tag{4.23}$$

$(\boldsymbol{e_i})$ და $\left(\boldsymbol{e^i}\right)$ ($\boldsymbol{T_p}$ და $\boldsymbol{T_p^*}$ სივრცეების შესაბამისი) ერთმანეთის დუალური ბაზისებია.

$(\boldsymbol{e_i})$ და $\left(\boldsymbol{e^i}\right)$ დუალური ბაზისებისათვის ავირჩიოთ სხვა ბაზისები, რომლებიც საწყის ბაზისებთან დაკავშირებული არიან არაგადაგვარებული გარდაქმნებით

$$e_{i'} = \Phi^{j}_{i'} e_j; \quad e^{j'} = \Phi^{j'}_{j} e^j \ , \tag{4.24}$$

მაშინ ახალი ბაზისებისაგან დუალურობის მოთხოვნა გვაძლევს ტოლობებს

$$\delta^{j'}_{i'} = \langle e^{j'}, e_{i'} \rangle = \Phi^{j'}_{j} \Phi^{k}_{i'} \langle e^j, e_k \rangle = \Phi^{j'}_{j} \Phi^{k}_{i'} \delta^{j}_{k} = \Phi^{j'}_{j} \Phi^{j}_{i'}. \tag{4.25}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს მატრიცები ურთიერთშებრუნებული უნდა იყოს. თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს რომ, ერთი (x^i) ლოკალურ კოორდინატთა სისტემის სხვა $(x^{i'})$ ლოკალურ კოორდინატთა სისტემით შეცვლისას, შესაბამისი გარდაქმნის მატრიცები მოიცემა ფორმულებით

$$\Phi^{j'}_{j} = \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\right)_p, \qquad \Phi^{i}_{i'} = \left(\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}}\right)_p. \tag{4.26}$$

მრავასახეობაზე განსაზღვრული f ფუნქცია განსაზღვრავს ფორმა-1-ს df, რომელიც ნებისმიერ $\boldsymbol{X} \in T_p$ ვექტორს შეუსაბამებს რიცხვს, შემდეგი წესით

$$df(\boldsymbol{X}) = \langle df, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X} f. \tag{4.27}$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში

$$\boldsymbol{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4.28}$$

ამიტომ, განსაზღვრის თანახმად გვაქვს

$$\langle df, \boldsymbol{X} \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i}. \tag{4.29}$$

კერძო შემთხვევაში

$$\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta^{j}_{i}. \tag{4.30}$$

ასე, რომ ფორმა-1 (dx^j), ადგენს ლოკალურ კოორდინატთა ბაზისს კოვარიანტული ვექტორების სივრცეში, რომელიც დუალურია მხებ ვექტორთა სივრცის $\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ საკოორდინატო

ბაზისისა. (∂_i) და $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ ბაზისებს მხები და დუალური სივრცის ***კანონიკურ ბაზისებს*** უწოდებენ.

თუ, მოცემულია რომ

$$df = \alpha_i dx^i, \tag{4.31}$$

მაშინ

$$X^i f_{,i} = \langle df, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \alpha_j dx^j, X^i \partial_i \rangle = \alpha_j X^i \langle dx^j, \partial_i \rangle = \alpha_j X^i \delta_i^j = \alpha_i X^i \tag{4.32}$$

თანადობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_i = f_{,i}; \quad df = f_{,i} dx^i. \tag{4.33}$$

ბოლო ფორმულა ემთხვევა ფუნქციის დიფერენციალის ცნობილ ფორმულას.

4.3. ტენზორები და ტენზორული ნამრავლი

განვიხილოთ, M მრავალსახეობის p წერტილში, r ცალი დუალური T_p^* სივრცისა და s ცალი T_p მხები სივრცის პირდაპირი Π_r^s ნამრავლი

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times \ldots \times T_p^*}_{r} \times \underbrace{T_p \times T_p \times \ldots \times T_p}_{s}. \tag{4.34}$$

ანუ, ჩვენ გვაქვს r ფორმა-1-ებისა და s მხები ვექტორების დალაგებული ერთობლიობის სივრცე

$$(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s). \tag{4.35}$$

განვიხილოთ Π_r^s სივრცის ***პოლიწრფივი T ასახვა*** ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}^1$ სივრცეზე:

$$\boldsymbol{T}: \Pi_r^s \to \mathbb{R}^1. \tag{4.36}$$

ეს ასახვა r ფორმა-1-სა და s მხებ ვექტორს ცალსახად შეუსაბამებს ნამდვილ რიცხვს

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) = \text{ნამდვილი რიცხვი.} \tag{4.37}$$

ამ **ფუნქციის პოლიწრფივობა მდგომარეობს მის წრფივობაში თითოეული ცვლადის** მიმართ.

ასეთნაირად განსაზღვრულ, **პოლიწრფივ ასახვას $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ ტენზორი** ეწოდება. ამ ტიპის ტენზორების წრფივი კომბინაცია განისაზღვრება ფორმულით:

$$(\alpha \boldsymbol{T} + \beta \boldsymbol{S})(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) = \alpha \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) +$$
$$+\beta \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s), \tag{4.38}$$

სადაც $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, $\boldsymbol{\omega}^i \in T_p^*$ და $\boldsymbol{X}_j \in T_p$, $(i = \overline{1,r})$; $(j = \overline{1,s})$.

(4.38) თვისებიდან გამომდინარე, ცხადია რომ (r,s) ტენზორები ქმნიან $n^{(r+s)}$ განზომილებიან წრფივ ვექტორულ სივრცეს. ასეთი ტიპის ტენზორების სივრცეს, ***ტენზორული ნამრავლების სივრცე*** ეწოდება და მისთვის მიღებულია აღნიშვნები

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p^* \otimes \ \ldots \otimes T_p^*}_{r} \otimes \underbrace{T_p \otimes T_p \otimes \ \ldots \otimes T_p}_{s}. \tag{4.39}$$

(r,s) ტიპის ტენზორების ნამრავლების სივრცის ბაზისს შეადგენს n^{r+s} სპეციალური ასახვების ერთობლიობა, რომლებიც მოიცემიან ფორმულით

$$\boldsymbol{e}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}(\boldsymbol{\omega}^1, \ldots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_s) =$$
$$\boldsymbol{e}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}\left(\omega_{k_1}^1 e^{k_1}, \ldots, \omega_{k_r}^r e^{k_r}, X_1^{j_1} e_{j_1}, \ldots, X_s^{j_s} e_{j_s}\right) = \omega_{i_1}^1 \ \ldots . \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \ldots X_s^{j_s}. \tag{4.40}$$

ეს გარდაქმნები, ცხადია რომ, არის წრფივი ნებისმიერი არგუმენ-ტის მიმართ და წარმოადგენენ (r,s) ტიპის ტენზორებს. სხვანაირად ეს ასახვები შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი ტოლობებით

$$\boldsymbol{e}_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}\left(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_1}, \ldots, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}_r}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}_s}\right) = \delta_{i_1}^{k_1} \ \ldots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \ \ldots \delta_{l_s}^{s}. \tag{4.41}$$

პოლიწრფივობიდან გამომდინარე, ნებისმიერი (r,s) ტიპის ტენზორი შეიძლება წარმოვადგინოთ (4.41) ტიპის ასახვათა წრფივი კომბინაციის საშუალებით. მართლაც,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\dots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\dots,\boldsymbol{X}_s)=\boldsymbol{T}\big(\omega^1_{i_1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_1}},\dots,\omega^r_{i_r}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i_r}},X_1^{j_1}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_1}},\dots,X_s^{j_s}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_s}}\big)=$$
$$=\omega^1_{i_1}\,\dots\,\omega^r_{i_r}X_1^{j_1}\,\dots\,X_s^{j_s}\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k_1}},\dots,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k_r}},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_1}},\dots,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_s}}\big). \tag{4.42}$$

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k_1}},\dots,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k_r}},\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_1}},\dots,\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j_s}}\big)=T^{i_1i_2\,\dots i_r}_{j_1j_2\,\dots j_s}, \tag{4.43}$$

მაშინ, მივიღებთ წარმოდგენას

$$\boldsymbol{T}=T^{i_1i_2\,\dots i_r}_{j_1j_2\,\dots j_s}\boldsymbol{e}^{j_1j_2\,\dots j_s}_{i_1i_2\,\dots i_r}. \tag{4.44}$$

ცხადია, რომ (4.41) ასახვები წრფივად დამოუკიდებელია და მაშასადამე, წარმოადგენენ $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ ტიპის ტენზორების ბაზისს. ბაზისური $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j_1j_2\,\dots j_s}}_{\boldsymbol{i_1i_2\,\dots i_r}}$ ელემენტების რაოდენობა უდრის $\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{s}}$ სივრცის $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{r+s}}$ განზომილებას.

(4.44) წარმოდგენაში $T^{i_1i_2\,\dots i_r}_{j_1j_2\,\dots j_s}$ სიდიდეებს $\boldsymbol{T}$ **ტენზორის კომპონენტებს** უწოდებენ.

ზოგად შემთხვევაში, (r,s) ტიპის ტენზორების ბაზისი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დუალური ბაზისების ტენზორული ნამრავლის სახით

$$\boldsymbol{e}^{j_1j_2\,\dots j_s}_{i_1i_2\,\dots i_r}=e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_r}\otimes e^{j_1}\otimes\dots\otimes e^{j_s}. \tag{4.45}$$

განვიხილოთ ეხლა ტენზორების ***ნახვევის ოპერაცია***.

$T^{i_1i_2\,\dots i_r}_{j_1j_2\,\dots j_s}$ კომპონენტებიანი (r,s) ტიპის ტენზორის **ნახვევის ოპერაცია $\mathbf{i_p}$ კონტრავარიანტული და $\mathbf{j_q}$ კოვარიანტული** ინდექსებით, არის $(r-1,s-1)$ ტიპის ტენზორი. ერთნაირი ინდექსებით ხდება აჯამვა, შესაბამისად ტენზორის რიგი მცირდება ორი ერთეულით. ნახვევის ოპერაცია არაა დამოკიდებული ბაზისის არჩევაზე.

$(\boldsymbol{0},\boldsymbol{2})$ **ტიპის ტენზორს ეწოდება სიმეტრიული**, თუ

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}), \tag{4.46}$$

ხოლო - ანტისიმეტრიული, თუ

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}), \tag{4.47}$$

ნებისმიერი $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ ვექტორებისათვის მხები T_p სივრციდან. (4.46) და (4.47) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ კომპონენტები უნდა შესაბამისად აკმაყოფილებდნენ პირობებს

$$T_{ij} = T_{ji}, \qquad T_{ij} = -T_{ji}. \tag{4.48}$$

ეს ცნებები ბუნებრივად ზოგადდება ნებისმიერი (r,s) ტიპის ტენზორისათვის.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.განსაზღვრებიდან გამომდინარე, დაამტკიცეთ ტოლობა

$$(\alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y})f = \alpha(\boldsymbol{X}f) + \beta(\boldsymbol{Y}f).$$

2.დაამტკიცეთ, რომ $\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^j}}\right)_{\boldsymbol{p}}$ ვექტორები ქმნიან წრფივად დამოუკიდებლ სისტემას.

3.დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\boldsymbol{X} = X^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ ოპერატორისათვის ადგილი აქვს ლაიბნიცის წესს $\boldsymbol{X}(fg)|_{\lambda(t)} = (f\boldsymbol{X}g + g\boldsymbol{X}f)|_{\lambda(t)}$.

4.თუ, $\boldsymbol{e_\alpha} = \Phi_\alpha^k\frac{\partial}{\partial x^k}$ და $\frac{\partial}{\partial x^k} = \Phi_k^j\boldsymbol{e_j}$ მაშინ დაამტკიცეთ, რომ

$$\Phi_a^k\Phi_j^a = \delta_j^k,\ \ \Phi_a^k\Phi_k^b = \delta_a^b.$$

5.დაამტკიცეთ ფორმულა $df = f_{,i}dx^i$.

6.აჩვენეთ, რომ (r,s) ტიპის ტენზორების ნამრავლების სივრცის ბაზისს შეადგენს n^{r+s} სპეციალური ასახვების ერთობლიობა, რომლებიც მოიცემიან ფორმულით

$$\boldsymbol{e}_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}(\boldsymbol{\omega}^1, \dots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_s) = \boldsymbol{e}_{i_1 \cdots i_r}^{j_1 \cdots j_s}\left(\omega_{k_1}^1 e^{k_1}, \dots, \omega_{k_r}^r e^{k_r}, X_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, X_s^{j_s} e_{j_s}\right) =$$
$$= \omega_{i_1}^1 \ \dots . \omega_{i_r}^r X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}.$$

ლიტერატურა

1. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972

2.Киттель Ч.,Найт У.,Рудерман М. Берклиевский курс физики, том 1, механика, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1975

3.Ферми Э.Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1968

4.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

5.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

6.Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.Гравитация. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1976

7.Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ.,Мир, Москва, 2002

8.Чандрасекар С.Математическая теория чёрных дыр,часть 1, пер. с англ., Мир, Москва,1986

თავი V. კარტანის დიფერენციალური ფორმები

განსაკუთრებულ განხილვას იმსახურებენ მთლიანად ანტისიმეტრიული ანუ $(0,s)$ ტიპის კოვარიანტული ტენზორები, რომლებიც მთლიანად ანტისიმეტრიული არიან არგუმენტების ყოველი წყვილისათვის

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X_1},\dots,\boldsymbol{X_i},\dots,\boldsymbol{X_j},\dots,\boldsymbol{X_s}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X_1},\dots,\boldsymbol{X_j},\dots,\boldsymbol{X_i},\dots,\boldsymbol{X_s}), \qquad (5.1)$$

ნებისმიერი i და j ინდექსებისა $\forall \boldsymbol{X}$ ვექტორისათვის.

სავსებით ანტისიმეტრიული ტენზორი შეგვიძლია მივიღოთ ნებისმიერი $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{s})$ ტიპის კოვარიანტული ტენზორისაგან, თუ, მასზე ვიმოქმედებთ ანტისიმეტრიზაციის $\boldsymbol{A}$ ოპერატორით, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$A\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X_1},\dots,\boldsymbol{X_s}) = \frac{1}{s!}\sum_{j_1,\dots,j_s} sgn(j_1,\dots,j_s)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X_{j_1}},\dots,\boldsymbol{X_{j_s}}), \qquad (5.2)$$

სადაც შეჯამება ხდება ყველა $s!$ გადანაცვლებათა მიხედვით s მთელი რიცხვიდან $(1,\dots,s)$, ხოლო $sgn(j_1,\dots,j_s) = \pm 1$ იმის მიხედვით ლუწია, თუ კენტი $(j_1,\dots,j_s)$ ჩასმა. (5.2) ტოლობა უნდა სრულდებოდეს $(\boldsymbol{X_{j_1}},\dots,\boldsymbol{X_{j_s}})$ **ვექტორების ნებისმიერი ერთობლიობისათვის.**

ცხადია, რომ თუ $\boldsymbol{T}$ სავსებით ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ $A\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$. თუ $s > n$ (n ვექტორული სივრცის განზომილებაა), მაშინ $A\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$.

სავსებით ანტისიმეტრიულ $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{s})$ ტიპის ტენზორებს, $\boldsymbol{s}$-ფორმას უწოდებენ.

რადგან ნებისმიერი ორი არგუმენტის თანხვედრისას s ფორმის მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ამიტომ ამ ფორმების ვექტორული სივრცის განზომილებაა $n!\,s!\,(n-s)!$. ამ სივრცისატვის არსებობს სპეციალური $\Lambda^s T_p^*$ აღნიშვნა.

ვთქვათ, $T_{j_1\dots j_s}$ არის $(0,s)$ ტიპის ტენზორის კომპონენტები

$$\boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s}, \qquad (5.3)$$

ბაზისში. მაშინ, თუ $T_{j_1 \dots j_s}$ ტენზორი სავსებით ანტისიმეტრიულია, შეგვიძლია მისი მნიშვნელოვანი $n!\,s!\,(n-s)!$ კომპონენტი მივიღოთ თუ ინდექსებს დავალაგებთ მონოტონურად კლებადი მიმდევრობით.

$\Lambda^s T_p^*$ სივრცის ბაზისი შეგვიძლია მივიღოთ ანტისიმეტრიზა-ციის A ოპერატორის მოქმედებით საბაზისო ვექტორებზე

$$A\left(\boldsymbol{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}^{j_s}\right). \tag{5.4}$$

ასეთნაირად მიღებული საბაზისო ელემენტები შეგვიძლია ჩავწეროთ $\boldsymbol{e}^j$ ფორმების ***გარე ნამრავლის*** სახით:

$$\boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{j_s}. \quad (j_1 > j_2 > \dots > j_s). \tag{5.5}$$

საზოგადოდ, s-ფორმას აქვს წარმოდგენა

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{j_1 \dots j_s} \boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}^{j_s}, \tag{5.6}$$

სადაც აჯამვა ხდება ინდექსების ყველა მონოტონურად კლება-დი კომბინაციებისათვის. ინდექსების წყვილის გადანაცვლება ეკვივალენტურია შესაბამისი ელემენტების გადანაცვლებისა გარე ნამრავლებში. ამიტომ გარე ნამრავლში ელემენტების გადაადგი-ლება უნდა იწვევდეს ნიშნის ცვლას

$$\boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^k = -\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^j. \tag{5.7}$$

s-ფორმის წარმოდგენას საკოორდინატო ბაზისში აქვს სახე

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}. \tag{5.8}$$

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს p-ფორმა Ω^1 და q-ფორმა Ω^2. მაშინ მათი გარე ნამრავლი შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 = A(\Omega^1 \otimes \Omega^2). \tag{5.9}$$

p-ფორმისა და q-ფორმის გარე ნამრავლი არის $(p+q)$-ფორმა. ამიტომ ის უნდა იყოს იგივურად ნულის ტოლი როცა $p+q>n$.

გარე ნამრავლი, აკმყოფილებს ასოციაციურობისა და დისტრი-ბუციულობის კანონებს, თუმცა, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური.

5.1. გარე დიფერენცირება

გარე დიფერენცირების d ოპერაცია p-ფორმას აქცევს $(p+1)$-ფორმად შემდეგი პირობების შესრულების შემთხვევაში:

ა) ნულ-ფორმაზე, ანუ, f ფუნქციაზე მოქმედებისას d ოპერატორით მივიღებთ df ფორმა-1-ს, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით $df(\boldsymbol{X}) = \langle df, \boldsymbol{X}\rangle = \boldsymbol{X}f$, ნებისმიერი $\boldsymbol{X} \in T_0^1$. კერძოდ, ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში
$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

ბ) თუ, $\boldsymbol{A}_1$ და $\boldsymbol{A}_2$ ორი p-ფორმაა, მაშინ

$$d(\alpha \boldsymbol{A}_1 + \beta \boldsymbol{A}_2) = \alpha d\boldsymbol{A}_1 + \beta d\boldsymbol{A}_2, \quad \forall(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1). \tag{5.10}$$

გ) თუ, $\boldsymbol{A}$ არის p-ფორმა და $\boldsymbol{B}$ არის q-ფორმა, მაშინ

$$d(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) = d\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} + (-1)^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{A} \wedge d\boldsymbol{B}. \tag{5.11}$$

დ)ადგილი აქვს პუანკარეს ლემას

$$d(d\boldsymbol{A}) = 0. \tag{5.12}$$

ნებისმიერი $\boldsymbol{A}$, p-ფორმისათვის.

უნდა დავრწმუნდეთ, რომ d ოპერატორი კარგადაა განსაზღვრული ანუ უნდა შევამოწმოთ ზემოთ მოყვანილი პირობების შესრულება.

განვიხილოთ ნებისმიერი $\boldsymbol{A}$, p-ფორმისათვის გარე წარმოებული

$$d\boldsymbol{A} = d\left(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right) = dA_{j_1 \dots j_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} =$$

$$= \frac{\partial A_{j_1 \dots j_p}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}. \tag{5.13}$$

dA ფორმა არაა დამოკიდებული ლოკალური საკოორდინატო ბაზისის არჩევაზე, მართლაც რადგან

$$A_{j_1' \dots j_p'} = A_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j_p'}}, \tag{5.14}$$

მივიღებთ, რომ

$$d\left(A_{j_1' \dots j_p'} dx^{j_1'} \wedge \dots \wedge dx^{j_p'}\right) = d\left(A_{j_1 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}\right). \text{ რ.დ.გ.} \tag{5.15}$$

შევამოწმოთ (გ) პირობა

$$d(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}) = d\left(A_{j_1\dots j_p}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\wedge B_{k_1\dots k_q}dx^{k_1}\wedge\dots\wedge dx^{k_q}\right) =$$
$$\frac{\partial A_{j_1\dots j_p}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\wedge B_{k_1\dots k_q}dx^{k_1}\wedge\dots\wedge dx^{k_q} +$$
$$A_{j_1\dots j_p}\frac{\partial B_{k_1\dots k_q}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\wedge dx^{k_1}\wedge\dots\wedge dx^{k_q} = d\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B} +$$
$$(-1)^p A_{j_1\dots j_p}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\wedge\left(\frac{\partial B_{k_1\dots k_q}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{k_1}\wedge\dots\wedge dx^{k_q}\right) = d\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B} +$$
$$+(-1)^p\boldsymbol{A}\wedge d\boldsymbol{B}. \tag{5.16}$$

და ბოლოს, შევამოწმოთ **პუანკარეს ლემის** შესრულება. (დ) პირობა

$$d(d\boldsymbol{A}) = d\left(\frac{\partial A_{j_1\dots j_p}}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\right) = \frac{\partial^2 A_{j_1\dots j_p}}{\partial x^i\partial x^k}dx^i\wedge dx^k\wedge$$
$$dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}\equiv 0. \tag{5.17}$$

როგორც ვხედავთ, გარე დიფერენცირების d ოპერატორი განსაზღვრულია კორექტულად.

5.2. ლის ფრჩხილები და ლის წარმოებული

ნებისმიერი ორი $\boldsymbol{X}$ და ვექტორული ველის ლის ფრჩხილები $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ განისაზღვრება ტოლობით

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f = (\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})f = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}f)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}f). \tag{5.18}$$

ორი მხები ვექტორის ლის ფრჩხილი ისევ მხები ვექტორი იქნება, რადგან

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](\alpha f+\beta g) = \alpha[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f+\beta[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g. \tag{5.19}$$

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](fg) = g[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f+f[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g\,. \tag{5.20}$$

(5.19) გვიჩვენებს, რომ ლის ფრჩხილი წრფივი ოპერატორია, ხოლო (5.20) ტოლობიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ლის ფრჩხილი რაღაც დიფერენცირების ოპერაციაა.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ლის ფრჩხილები აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას

$$\big[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\boldsymbol{Z}\big] + \big[[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]\boldsymbol{X}\big] + \big[[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Y}\big] = 0. \tag{5.21}$$

მხები ვექტორების ლის ფრჩხილი ისევ მხები ვექტორია და მისი კომპონენტები ლოკალურ საკოორდინატო სისტემაში შეგვიძლია მივიღოთ, თუ ლის ფრჩხილებით ვიმოქმედებთ x^j ფუნქციებზე

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]^j = (\boldsymbol{XY} - \boldsymbol{YX})x^j = \boldsymbol{X}Y^j - \boldsymbol{Y}X^j = X^k Y^j_{,k} - Y^k X^j_{,k}. \tag{5.22}$$

ცხადია რომ ლის ფრჩხილი $\big[\partial_k, \partial_j\big] \equiv 0$.

ლის ფრჩხილს $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ როგორც დიფერენცირების ოპერატორს, ეწოდება $\boldsymbol{Y}$ ვექტორის ლის წარმოებული $\boldsymbol{X}$ ვექტორის მიმართულებით.

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] = -[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}] = -\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}. \tag{5.23}$$

საზოგადოდ, ტენზორული $\boldsymbol{T}$ ველის ლის წარმოებული $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}$ **არის იმავე ტიპის ტენზორი და ის აკმაყოფილებს პირობებს:**

1. სკალარული f ველის ლის წარმოებული უდრის
   $$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f = df(\boldsymbol{X}), \tag{5.24}$$
2. ვექტორული $\boldsymbol{Y}$ ველის ლის წარმოებული უდრის
   $$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}], \tag{5.25}$$
3. ტენზორულ ველებზე ლის წარმოებულის მოქმედება არის წრფივი ოპერატორი, რომლის მოქმედების შედეგიც განისაზღვრება ლეიბნიცის წესით
   $$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}) = \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T} + \boldsymbol{S} \otimes \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}. \tag{5.26}$$

ამრიგად, $\boldsymbol{\omega}$ ფორმა-1-ზე ლის ოპერატორის მოქმედების შედეგი განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\langle \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{Y}\rangle = \langle \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y}\rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}\rangle. \tag{5.27}$$

ეს ფორმულა კომპონენტებში შეგვიძლია ჩავწეროთ (5.22) ფორმულის ანალოგიურად

$$(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_j = \omega_{j,k}X^k + \omega_k X^k_{,j}. \tag{5.28}$$

ფორმა-1-ის გარე წარმოებულსა და ლის წარმოებულს შორის კავშირი მოიცემა ფორმულით

$$d\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{X}\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}\rangle - \langle \boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\rangle\big). \tag{5.29}$$

5.3. კოვარიანტული წარმოებული

ეხლა ჩვენ განვიხილავთ ახალი ტიპის დიფერენცირების ოპერაციას, რომელიც განსხვავდება გარე დიფერენცირებისა და ლის დიფერენცირებისაგან იმით, რომ ამ ოპერაციის განსაზღვრა ითხოვს მრავალსახეობის განსაკუთრებულ სტრუქტურას. ეს დამატებითი სტრუქტურა არის ***მრავალსახეობის აფინური ბმა*** $\boldsymbol{\nabla}$, რომელიც მოცემული M მრავალსახეობის ნებისმიერი $\boldsymbol{X}$ ვექტორული ველისათვის, გვაძლევს $\boldsymbol{\nabla_X}$ ოპერატორს. ეს ოპერატორი ნებისმიერ $\boldsymbol{Y}$ ვექტორულ ველს გადასახავს $\boldsymbol{\nabla_X Y}$ ვექტორულ ველში. აფინური ბმა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს:

1. $\boldsymbol{\nabla_X Y}$ ვექტორული ველი წრფივია $\boldsymbol{X}$ არგუმენტის მიმართ, ანუ,
$$\boldsymbol{\nabla}_{fX+gY}\boldsymbol{Z} = f\boldsymbol{\nabla_X Z} + g\boldsymbol{\nabla_Y Z}, \quad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in T_0^1). \tag{5.30}$$
2. $\boldsymbol{\nabla_X Y}$ ვექტორული ველი წრფივია $\boldsymbol{Y}$ არგუმენტის მიმართ, ანუ,
$$\boldsymbol{\nabla_X}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{\nabla_X Y} + \boldsymbol{\nabla_X Z}, \quad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z} \in T_0^1). \tag{5.31}$$
3. $$\boldsymbol{\nabla_X} f = \boldsymbol{X} f. \tag{5.32}$$
4. $$\boldsymbol{\nabla_X}(f\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{\nabla_X} f)\boldsymbol{Y} + f\boldsymbol{\nabla_X Y}. \tag{5.33}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (5.32) პირობიდან გამომდინარე, ლოკალურ საკოორდინატო ∂_k ბაზისში ∇_{∂_k} ოპერატორით რაიმე ფუნქციაზე ზემოქმედების შედეგი ემთხვევა ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულს x^k ცვლადით.

$\boldsymbol{\nabla_X}$ ოპერატორით $\boldsymbol{Y} \in T_0^1$ ვექტორულ ველზე მოქმედებით, როცა ეს ოპერატორი აკმაყოფილებს (1)-(4) თვისებებს, მივიღებთ $\boldsymbol{Y}$ ვექტორული ველის **კოვარიანტულ წარმოებულს $\boldsymbol{\nabla Y}$, როგორც $(\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$ ტიპის ტენზორულ ველს, რომელიც კონტრავარიანტულ ვექტორულ $\boldsymbol{X}$ ველს ასახავს $\boldsymbol{\nabla_X Y}$ ველში** ანუ

$$\boldsymbol{\nabla Y}(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{\nabla Y}, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{\nabla_X Y}. \tag{5.34}$$

ამ აღნიშვნებში (5.33) გადაიწერება ფორმით

$$\nabla(f\boldsymbol{Y}) = df \otimes \boldsymbol{Y} + f\nabla\boldsymbol{Y}. \tag{5.35}$$

ზოგჯერ სასარგებლოა $\boldsymbol{\nabla_X Y}$ ჩავწეროთ არჩეულ ლოკალურ $(\boldsymbol{e_i})$ და მის დუალურ $(\boldsymbol{e^j})$ ბაზისში, რათა ვაჩვენოთ აფინური ბმის არსი. ვისარგებლოთ (1)-(4) თვისებებით. მაშინ

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} = \boldsymbol{\nabla_X}(Y^j\boldsymbol{e_j}) = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e_j} + Y^j\boldsymbol{\nabla_X e_j}. \tag{5.36}$$

რადგან $\boldsymbol{\nabla_X e_j}$ ფიქსირებული $\boldsymbol{e_j}$-ს შემთხვევაში, არის (1,0) ტიპის ტენზორი, უნდა არსებობდეს წარმოდგენა

$$\boldsymbol{\nabla_X e_j} = \boldsymbol{\omega_j^i}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e_i}\,, \tag{5.37}$$

სადაც $\boldsymbol{\omega_j^i}$ ფორმა-1-ებია, ამიტომ

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} = \boldsymbol{\nabla_X}\left(Y^j \boldsymbol{e_j}\right) = \left(\boldsymbol{X}Y^j\right)\boldsymbol{e_j} + Y^j \boldsymbol{\omega_j^i}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e_i}. \tag{5.38}$$

მეორე მხრივ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} = \left(\boldsymbol{X}Y^j \boldsymbol{e_j}\right) + Y^j \nabla_{x^k e_k} \boldsymbol{e_j} = \left(\boldsymbol{X}Y^j\right)\boldsymbol{e_j} + Y^j X^k \nabla_{e_k} \boldsymbol{e_j}\,. \tag{5.39}$$

თუ გამოვიყენებთ (5.37) ტოლობას გვექნება

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} = \left(\boldsymbol{X}Y^j\right)\boldsymbol{e_j} + Y^j X^k \boldsymbol{\omega_j^i}(\boldsymbol{e_k})\boldsymbol{e_i}\,. \tag{5.40}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\boldsymbol{\omega_j^i}(\boldsymbol{e_k}) \equiv \omega_{jk}^i\,. \tag{5.41}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ აფინური ∇ ბმის სტრუქტურის მოცემა ნიშნავს n^2 რაოდენობის, $\boldsymbol{\omega_j^i}$ ფორმა-1-ის მოცემას, ან რაც იგივეა n^3 რაოდენობის სკალარული ω_{jk}^i ველის მოცემას.

გადავწეროთ (5.38) ტოლობა ფორმით

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} = \left(\boldsymbol{X}Y^j + \boldsymbol{\omega_i^j}(\boldsymbol{X})Y^i\right)\boldsymbol{e_j}. \tag{5.42}$$

ამ ტოლობიდან ნათლად ჩანან კომპონენტები:

$$(\boldsymbol{\nabla_X Y})^j = \boldsymbol{X}Y^j + \boldsymbol{\omega_i^j}(\boldsymbol{X})Y^i. \tag{5.43}$$

ლოკალურ საკოორდინატო $\left(\partial_k, dX^i\right)$ ბაზისში ეს ტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\left(\nabla_{\partial_k}\boldsymbol{Y}\right)^j = \partial_k Y^j + Y^i \omega_{ik}^j = Y_{,k}^j + Y^i \omega_{ik}^j. \tag{5.44}$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში იყენებენ აღნიშვნებს

$$\Gamma_{ik}^j = \omega_{ik}^j. \tag{5.45}$$

კოვარიანტული წარმოებულის აღსანიშნავად, იყენებენ წერტილ-მძიმეს (;), ხოლო წარმოებულისათვის, უბრალოდ მძიმეს(,). ამ აღნიშვნებით გვექნება სტანდარტული ფორმულა:

$$Y_{;k}^j = Y_{,k}^j + Y^i \Gamma_{ik}^j. \tag{5.46}$$

ვექტორული ველების კოვარიანტული წარმოებულის ცნება, ზოგად შემთხვევაში, შეიძლება განზოგადებული იქნას ტენზორული ველებისათვისაც. ამისათვის, უნდა მოვითხოვოთ ∇

ოპერატორისათვის ლაიბნიცის წესის შესრულება ტენზორული ნამრავლზე მოქმედებისას, ანუ,

$$\nabla(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}) = \nabla\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}\otimes\nabla\boldsymbol{T}. \qquad (5.47)$$

თუ, $\boldsymbol{\Omega}$ არის ფორმა-1, მაშინ ნებისმიერი $\boldsymbol{Y}$ ვექტორული ველისათვის გვექნება ტოლობა

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\big(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{Y})\big) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j(\boldsymbol{Y})^j + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}), \qquad (5.48)$$

თუ, წარმოვადგენთ $(\boldsymbol{e_i})$ და $\left(\boldsymbol{e^j}\right)$ ლოკალურ ბაზისებში, მაშინ მივიღებთ

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\big(\Omega_{\mathrm{j}}\mathrm{Y}^{\mathrm{j}}\big) = (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j Y^j + \Omega_j(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j. \qquad (5.49)$$

აფინური ბმის მესამე მოთხოვნის გათვალისწინებით მივიღებთ,

$$(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\Omega)_j = \boldsymbol{X}\Omega_j - \Omega_i\omega_j^i(\boldsymbol{X}). \qquad (5.50)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega} = \left[\boldsymbol{X}\Omega_j - \Omega_i\omega_j^i(\boldsymbol{X})\right]\boldsymbol{e^j}. \qquad (5.51)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{e^j}$, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e^j} = -\omega_j^i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e^j}. \qquad (5.52)$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში (5.50) გადაიწერება ფორ-მით

$$\Omega_{j;k} = \Omega_{j,k} - \Omega_i\Gamma_{jk}^i. \qquad (5.53)$$

თუ (5.50) და (5.53) ფორმულებს გამოვიყენებთ ფორმა-1 df-ის მიმართ, მივიღებთ, რომ

$$f_{;jk} = f_{,jk} - f_{,i}\Gamma_{jk}^i \qquad (5.54)$$

ხოლო ნებისმიერი ტენზორული ველებისათვის გვექნება კოვარიანტული წარმოებული

$$S_{k;l}^{ij} = S_{k,l}^{ij} + S_k^{mj}\Gamma_{mi}^i + S_k^{im}\Gamma_{ml}^j - S_m^{ij}\Gamma_{kl}^m. \qquad (5.55)$$

5.4. პარალელური გადატანა და გეოდეზიური წირები

ვთქვათ $\boldsymbol{Y}$ არის კონტრავარიანტული ვექტორული ველი. განვიხილოთ მისი ცვლილება M მრავალსახეობის λ მრუდის გასწვრივ. ვექტორული ველის ცვლილება λ მრუდის გასწვრივ $\delta\boldsymbol{Y}$, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\boldsymbol{Y}$ ვექტორული ველის გადატანა λ მრუდის გასწვრივ, რასაც იწვევს $t \to t + \delta t$ პარამეტრის ცვლილება λ მრუდზე. ვექტორული ველის $\delta\boldsymbol{Y}$ ცვლილება ლოკალურ კოორდინატთა (x^k) სისტემაში იქნება

$$(\delta\boldsymbol{Y})^j = Y^j_{,k}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t. \tag{5.56}$$

ევკლიდურ გეომეტრიაში დეკარტულ კოორდინატთა სისტემაში, $\boldsymbol{Y}$ ვექტორი პარალელურად გადაიტანება λ მრუდის გასწვრივ თუ, $\delta\boldsymbol{Y} = 0$. ზოგად შემთხვევაში, როცა გვაქვს დიფერენცირებადი მრავალსახეობა, არსებობს ანალოგიური განსაზღვრება. $\boldsymbol{Y}$ ვექტორი პარალელურად გადაიტანება λ მრუდის გასწვრივ, თუ,

$$(D\boldsymbol{Y})^j = \left(\nabla_{\partial_k}\boldsymbol{Y}\right)\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = Y^j_{;k}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = 0, \tag{5.57}$$

ანუ,

$$\left(Y^j_{,k} + Y^i\Gamma^j_{ik}\right)\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t = 0. \tag{5.58}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, გადაიტანება λ მრუდის გასწვრივ პარალელური გადატანისას, $\boldsymbol{Y}$ ვექტორის ცვლილება იქნება

$$(D\boldsymbol{Y})^j = -Y^i\Gamma^j_{ik}\frac{dx^k(\lambda(t))}{dt}\delta t. \tag{5.59}$$

M მრავალსახეობის λ მრუდს ეწოდება გეოდეზიური წირი, თუ, მისი მხები ვექტორი პარალელური გადატანისას, რჩება თავისი თავის პროპორციული.

გეოდეზიური წირის განტოლებას აქვს სახე:

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \varphi(t)\frac{dx^j}{dt}. \tag{5.60}$$

სადაც $\varphi(t)$ რაღაც ფუნქციაა. ადვილი მისახვედრია, რომ თუ t პარამეტრის ნაცვლად λ მრუდის გასწვრივ შემოვიღებთ ახალ s პარამეტრს

$$s = \int_0^t dt'' exp\left\{\int_0^{t''} dt'\varphi(t')\right\}, \tag{5.61}$$

მაშინ (5.60) მიიღებს უფრო მარტივ სახეს

$$\frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{5.62}$$

s პარამეტრს, რომლისთვისაც გეოდეზიური წირის განტოლებას აქვს (5.62) სახე აფინური ეწოდება. უნდა აღინიშნოს, რომ აფინური პარამეტრი განსაზღვრულია ცალსახად, ათვლის სისტემის გადატანისა და მასშტაბური ფაქტორის სიზუსტით.

5.5. კარტანის ფორმები

თუ მრავალსახეობაში გვაქვს აფინური ბმა, მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგი ორი ასახვა

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\nabla_X Y} - \boldsymbol{\nabla_Y X} - [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}], \tag{5.63}$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\nabla_X}\boldsymbol{\nabla}_Y - \boldsymbol{\nabla}_Y\boldsymbol{\nabla_X} - \boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}, \tag{5.64}$$

სადაც $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ ორი კონტრავარიანტული ვექტორული ველია. ამ ორი ასახვიდან, პირველს ქვია **გრეხა**, ხოლო მეორეს – **სიმრუდე**. ***ორივე ასახვა ანტისიმეტრიულია თავისი არგუმენტების*** მიმართ.

ა) განვიხილოთ **გრეხის გადასახვა**. ადვილი მისახვედრია, რომ $\boldsymbol{T}$ ასახვა წრფივია თავისი არგუმენტების მიმართ.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}), \tag{5.65}$$

ასევე,

$$\boldsymbol{T}(f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = f\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}). \tag{5.66}$$

(5.65) და (5.66) ტოლობები გვარწმუნებენ, რომ ასახვა

$$\boldsymbol{T}: T_0^1 \times T_0^1 \to T_0^1, \tag{5.67}$$

არის პოლიწრფივი. შესაბამისად, ***T* არის $(\mathbf{1},\mathbf{2})$ ტიპის ტენზორული ველი.**

თუ, გამოვიყენებთ T_p^* და T_p სივრცეების დუალურ ბაზისებს, მაშინ ნებისმიერი ორი $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ ორი ვექტორული ველისათვის გვექნება

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^j = d\boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{\Omega}^j. \tag{5.68}$$

ამ თანადობას, **კარტანის სტრუქტურის პირველ განტოლებას,** ხოლო $\boldsymbol{\Omega}^j$ სიდიდეებს – **კარტანის ფორმებს** უწოდებენ. მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა, ***როცა გრეხა ნულოვანია***, ამ შემთხვევაში

$$d\boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{\omega}_i^j \wedge \boldsymbol{e}^i = \mathbf{0}. \tag{5.69}$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში $d\boldsymbol{e}^j = \mathbf{0}$, რადგან $\boldsymbol{e}^j = dx^j$. ამიტომ **გრეხისთვის გვექნება განტოლება**

$$T^j = 2\Gamma_{ik}^j dx^k \wedge dx^i = \left(\Gamma_{ik}^j - \Gamma_{ki}^j\right) dx^k \wedge dx^i. \tag{5.70}$$

ბ) ეხლა განვიხილოთ **სიმრუდის ასახვა**. სიმრუდის განსაზღვრის თანახმად,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\nabla}_Y\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\nabla}_Y\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{\nabla}_{[X,Y]}\boldsymbol{Z}. \tag{5.71}$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე წრფივია თითოეული არგუმენტის მიმართ, ამასთანავე,

$$\boldsymbol{R}(f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},f\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = f\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}, \tag{5.72}$$

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})f\boldsymbol{Z} = f\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}. \tag{5.73}$$

ნებისმიერი f ფუნქციისათვის. შესაბამისად,

$$\boldsymbol{R}: T_0^1 \times T_0^1 \times T_0^1 \to T_0^1, \tag{5.74}$$

გადასახვა არის პოლიწრფივი თავისი არგუმენტების მიმართ, ხოლო $\boldsymbol{R}$ არის (1,3) ტიპის ტენზორი. ამ ტენზორს ***რიმანის ტენზორს*** უწოდებენ.

ნებისმიერი $\boldsymbol{\omega}$ ფორმა-1-ისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = R_{ikm}^j\left[e_j \otimes e^i \otimes (e^k \wedge e^m)\right](\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}). \tag{5.75}$$

რიმანის ტენზორისათვის გვაქვს წარმოდგენა

$$\frac{1}{2}R^j_{ikm}e^k \wedge e^m = d\omega^j_i + \omega^j_k \wedge \omega^k_i. \quad (5.75)$$

თუ, შემოვიღებთ ფორმა-2-ს

$$\boldsymbol{\Omega}^j_i = d\boldsymbol{\omega}^j_i + \boldsymbol{\omega}^j_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_i, \quad (5.76)$$

მივიღებთ **კარტანის სტრუქტურის მეორე განტოლებას**

$$\frac{1}{2}R^j_{ikm}\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^m = \boldsymbol{\Omega}^j_i. \quad (5.77)$$

თუ, გამოვიყენებთ ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისს, გვექნება

$$\boldsymbol{\omega}^j_i = \Gamma^j_{im}dx^m. \quad (5.78)$$

კარტანის სტრუქტურის მეორე განტოლება რიმანის ტენზორის ჩვეულებრივი განსაზღვრის ეკვივალენტურია.

$$R^j_{inm} = \Gamma^j_{im,n} - \Gamma^j_{in,m} + \Gamma^j_{kn}\Gamma^k_{im} - \Gamma^j_{km}\Gamma^k_{in}. \quad (5.79)$$

5.6. რიმანისა და რიჩის ტენზორები

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \left(Z^j_{;ki} - Z^j_{;ik} + T^n_{ik}Z^j_{;n}\right)X^iY^k\boldsymbol{e_j}. \quad (5.80)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$Z^j_{;ki} - Z^j_{;ik} = -R^j_{lki}Z^l + T^n_{ki}Z^j_{;n}. \quad (5.81)$$

ამ ტოლობას ***რიჩის იგივეობას*** უწოდებენ და ნულოვანი გრეხის პირობებში მას გამოიყენებენ ***რიმანის ტენზორის*** განსაზღვრისათვის.

განვიხილოთ განტოლება

$$f_{;ki} - f_{;ik} = T^n_{ki}f_{,n}. \quad (5.82)$$

აქამდე ვსწავლობდით $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ ოპერატორის ზემოქმედებას კონტრავარიანტულ ვექტორებსა და სკალარულ ველებზე. ახლა განვიხილავთ ამ ოპერატორის ზემოქმედებას, ნებისმიერ ტენზორულ ველზე.

თუ, გამოვიყენებთ ლეიბნიცის წესს ტენზორული ნამრავლების კოვარიანტული წარმოებულისათვის, მივიღებთ

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Q}. \quad (5.83)$$

ეხლა **ვიმოქმედოთ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ ოპერატორით $\boldsymbol{\Omega}$ ფორმა-1-ზე**. თუ $\boldsymbol{Z}$ ნებისმიერი კონტრავარიანტული ვექტორული ველია, მაშინ (5.83) თანადობიდან გვექნება

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\big(\Omega_j Z^j\big) = [\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j Z^j + \Omega_j\big[[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}]\big]^j. \tag{5.84}$$

მაგრამ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ ასახვა სკალარზე მოქმედებისას გვაძლევს ნულს, ამიტომ

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j Z^j = -\Omega_j R^j_{ilk} Z^i X^l Y^k = -\Omega_i R^i_{jkl} Z^j X^k Y^l. \tag{5.85}$$

მაშინ

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j = -R^i_{jkl}\Omega_i X^k Y^l. \tag{5.86}$$

განვიხილოთ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ **ასახვის მოქმედება $(\boldsymbol{2},\boldsymbol{0})$ ტიპის ტენზორზე** $\boldsymbol{S}$, მაშინ მივიღებთ

$$S^{ij}_{;kl} - S^{ij}_{;lk} = -R^i_{mkl}S^{mj} - R^j_{mkl}S^{im} + T^n_{kl}S^{ij}_{;n}. \tag{5.87}$$

ახლა განვიხილოთ $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ **ასახვის მოქმედება $(\boldsymbol{0},\boldsymbol{2})$ ტიპის ტენზორზე** $\boldsymbol{S}$, მივიღებთ

$$S_{ij;kl} - S_{ij;lk} = R^m_{jkl}S_{im} + R^m_{ikl}S_{mj} + T^n_{kl}S_{ij;n}. \tag{5.88}$$

თუ, განვიხილავთ რიმანის $\boldsymbol{R^j_{inm}} = \boldsymbol{\Gamma^j_{im,n}} - \boldsymbol{\Gamma^j_{in,m}} + \boldsymbol{\Gamma^j_{kn}\Gamma^k_{im}} - \boldsymbol{\Gamma^j_{km}\Gamma^k_{in}}$ ტენზორზე ნახვევის ოპერაციას, როცა უტოლდება კონტრავარიანტული ინდექსი და მეორე (ან მესამე) კოვარიანტული ინდექსი, **მაშინ მივიღებთ რიჩის ტენზორს (**ან შესაბამისად, მინუს რიჩის ტენზორს):

$$R^j_{ijm} = -R^j_{imj} = R_{im}. \tag{5.89}$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში **რიჩის ტენზორის კომპონენტებია**

$$R_{im} = \Gamma^j_{im,j} - \Gamma^j_{ij,m} + \Gamma^j_{kj}\Gamma^k_{im} - \Gamma^j_{km}\Gamma^k_{ij}. \tag{5.90}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ გრეხა ნულის ტოლია, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\boldsymbol{\nabla_X Y} - \boldsymbol{\nabla_Y X} = [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]. \tag{5.91}$$

რის გამოც **სიმრუდის ტენზორი აკმაყოფილებს ორ მნიშვნელოვან იგივეობას:**

$$R^j_{ikm} + R^j_{kmi} + R^j_{mik} = 0. \tag{5.92}$$

ამ იგივეობას **ციკლურ იგივეობას** უწოდებენ. ხოლო მეორე

$$R^j_{ipq;\,r} + R^j_{iqr;\,p} + R^j_{irp;q} = 0 \tag{5.93}$$

ტოლობას – ბიანკის იგივეობას.

5.7. მეტრიკა და მეტრიკული ბმა

მეტრიკული $\boldsymbol{g}$ ტენზორი ეწოდება $(\mathbf{0},\mathbf{2})$ ***ტიპის არაგადაგვარებულ სიმეტრიულ ტენზორს***. რაც იმას ნიშნავს, რომ

1) $\boldsymbol{g}: T_0^1 \times T_0^1 \to \mathbb{R}^1$;

2) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$, $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in T_0^1$;

3) $(\forall \boldsymbol{Y} \in T_0^1)\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{X} = \mathbf{0}$.

ლოკალურ ბაზისში, მეტრიკულ ტენზორს აქვს სახე

$$g = g_{ij}\boldsymbol{e^i}\otimes\boldsymbol{e^j}, \quad g_{ij} = g_{ji}. \tag{5.94}$$

ხოლო, თუ ლოკალური ბაზისი კოორდინატულია, მაშინ

$$g = g_{ij}dx^i\otimes dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}. \tag{5.95}$$

რადგან მეტრიკული ტენზორი არაგადაგვარებულია, g_{ij} მატრიცისათვის არსებობს შებრუნებული g^{ij} მატრიცა $\left(g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i\right)$ და მეტრიკული ტენზორის შებრუნებული ტენზორი დუალურ ბაზისში იქნება

$$g^{-1} = g^{ij}\boldsymbol{e_i}\otimes\boldsymbol{e_j}. \tag{5.96}$$

მეტრიკული ტენზორი გამოიყენება M მრავალსახეობაზე განსაზღვრული λ წირის L სიგრძის გამოსათვლელად $\lambda(a)$ წერტილიდან $\lambda(b)$ წერტილამდე

$$L = \int_a^b \left|g_{ij}\frac{dx^i(\lambda(t))}{dt}\frac{dx^j(\lambda(t))}{dt}\right|^{\frac{1}{2}} dt. \tag{5.97}$$

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარე წერენ, რომ

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j. \tag{5.98}$$

მეტრიკულ ტენზორთან დაკავშირებულია მნიშვნელოვანი სიდიდე - **სიგნატურა**. სიგნატურა არის, მრავალსახეობის რომელიმე წერტილში დიაგონალურ სახემდე მიყვანილი მეტრიკული ტენზორის, დადებითი დიაგონალური ელემენტების რაოდენობისა და უარყოფითი ელემენტების რაოდენობებს შორის სხვაობა. მტკიცდება, რომ მრავალსახეობის ნებისმიერი სხვა წერტილისათვის სიგნატურა იგივე სიდიდეა. **მეტრიკას ეწოდება ევკლიდური** თუ მისი სიგნატურა რიცხობრივად უდრის მრავალსახეობის განზომილებას. მეტრიკას ეწოდება ლორენცული ან მინკოვსკის მეტრიკა, თუ, მისი სიგნატურაა $\pm(n-2)$ სადაც n მრავალსახეობის განზომილებაა.

თუ მრავალსახეობში გვაქვს მეტრიკული ტენზორი, მაშინ შესაძლებელია მასში შემოვიღოთ სიმეტრიული ბმა გრეხის გარეშე. რომელიც ცალსახად განისაზღვრება პირობით:

$$\nabla g = 0. \tag{5.99}$$

ლოკალურ კოორდინატთა ბაზისში ადვილად მივიღებთ, რომ

$$g_{ij,k} = g_{lj}\Gamma^l_{ik} + g_{il}\Gamma^l_{jk}, \tag{5.100}$$

სადაც Γ სიმბოლოები სიმეტრიულია კოვარიანტული ინდექსების მიმართ, რადგან პირობის თანახმად გრეხა ნულის ტოლია. თუ, ამ განტოლებებს ამოვხსნით ბმის კოეფიციენტების მიმართ, გვექნება

$$g_{il}\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right), \tag{5.101}$$

ან

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{ij}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right). \tag{5.102}$$

ამრიგად, ***მეტრიკული ტენზორის მოცემა ცალსახად განსაზღვრავს მრავალსახეობის ბმას***. ეს ბმა არის ***რიმანის გეომეტრიის*** საფუძველი.

Γ-სიმბოლოებს, რომლებიც მეტრიკული ტენზორით განისაზღვრება **კრისტოფელის სიმბოლოებს** უწოდებენ, ხოლო თვით ბმას - **მეტრიკულ ბმას** ან **კრისტოფელის ბმას** უწოდებენ.

განვიხილოთ (5.99) პირობის **ორი შედეგი**: *ჯერ ერთი,* ორი $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ კონტრავარიანტული ვექტორული ველის სკალარული ნამრავლი, რომელიც მოიცემა ფორმულით

$$g(X,Y) = (X \cdot Y) = g_{ij}X^iY^j, \tag{5.103}$$

ინვარიანტულია $\boldsymbol{X}$ და $\boldsymbol{Y}$ ვექტორების მრავალსახეობის λ წირის გასწვრივ პარალელური გადატანის მიმართ. *მეორე მხრივ,* გედეზიური წირის განტოლება შეიძლება მიღებული იქნას, როგორც ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანისათვის. მართლაც,

$$I = \int_a^b L ds, \quad L = g_{ij}\frac{dx^i(\lambda(s))}{ds}\frac{dx^j(\lambda(s))}{ds}, \tag{5.104}$$

სადაც λ წირი პარამეტრიზებულია, რკალის s სიგრძის პარამეტრით λ წირის გასწვრივ. მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლებას აქვს ასეთი სახე:

$$\left(u^j_{,k} + \Gamma^j_{ik} u^i\right) u^k = u^j_{;\,k} u^k = 0. \tag{5.105}$$

თუ, ***პარამეტრი გეოდეზიური წირის გასწვრივ არაა აფინური***, მაშინ გეოდეზიური წირის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$u^j_{;\,k} u^k = \varphi u^j, \tag{5.106}$$

სადაც φ რაღაც სკალარული ფუნქციაა.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.აჩვენეთ, რომ ლის ფრჩხილები აკმაყოფილებს იაკობის იგივეობას

$\big[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\boldsymbol{Z}\big] + \big[[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]\boldsymbol{X}\big] + \big[[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]\boldsymbol{Y}\big] = 0.$

2.აჩვენეთ, რომ თუ $\boldsymbol{T}$ სავსებით ანტისიმეტრიული ტენზორია, მაშინ $A\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$. თუ, $s > n$ (n ვექტორული სივრცის განზომილებაა), მაშინ $A\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$.

3.აჩვენეთ, რომ გარე ნამრავლი, აკმყოფილებს ასოციატიურობისა და დისტრიბუციულობის კანონებს, თუმცა, საზოგადოდ, არაა კომუტაციური.

4.დაამტკიცეთ, რომ dA ფორმა არაა დამოკიდებული ლოკალური საკოორდინატო ბაზისის არჩევაზე.

5.ჩაწერეთ $\boldsymbol{\omega}$ ფორმა-1-ზე ლის ოპერატორის მოქმედების შედეგის ფორმულა და გადაწერეთ ლოკალურ კოორდინატებში. რა სახე აქვს კომპონენტებს.

6.განსაზღვრეთ მრავალსახეობის აფინური ბმის არსი და ჩამოაყალიბეთ კონტრავარიანტული ვექტორის კოვარიანტული წარმოებულის გამოთვლის წესი.

ლიტერატურა

1. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972

2.H.Cartan. Calcul differentiel formes differentielles,Hermann Paris,1967

3.Ферми Э.Квантовая механика. Конспект лекций. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1968

4.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

5.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

6.Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.Гравитация. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1976

7.Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ.,Мир, Москва, 2002

8.Чандрасекар С.Математическая теория чёрных дыр,часть 1, пер. с англ., Мир, Москва,1986

თავი VI. აინშტაინის განტოლებები

ეინშტეინის განტოლებები აღწერენ სივრცე-დროის თანამედროვე წარმოდგენებს. ეს განტოლებები ემყარებიან რიმანის სივრცის ცნებასა და დიფერენცირებადი მრავალსახეობების თანამედროვე თეორიას.

6.1. რიმანისა და რიჩის ტენზორები რიმანის ბმის პირობებში

რიმანის ბმის პირობებში აგებულ რიმანისა და რიჩის ტენზორებს აქვთ სიმეტრიის დამატებითი თვისებები. თუ, (5.88) განტოლებაში S_{ij}-ს ნაცვლად შევიტანთ მეტრიკული ტენზორის g_{ij} კომპონენტებს მივიღებთ

$$g_{im}R^m_{jkl} + g_{mj}R^m_{ikl} = 0, \tag{6.1}$$

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0. \tag{6.2}$$

ასე, რომ რიმანის მთლიანად კოვარიანტული ტენზორი ანტისიმეტრიულია პირველი ორი ინდექსის მიმართ. სხვა სიმეტრია შეგვიძლია მივიღოთ (5.92) ციკლური იგივეობიდან. ამრიგად გვექნება

$$R_{jkmn} = R_{mnjk}. \tag{6.3}$$

ასე, რომ ***რიმანის ტენზორი არ იცვლება ინდექსების პირველი და მეორე წყვილის გადანაცვლებისას.*** სიმეტრიის თვისება ამცირებს რიმანის ტენზორის დამოუკიდებელი კომპონენტების რაოდენობას $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ - მდე. მაგალითად, ოთხგანზომილებიანი მრავალსახეობის შემთხვევაში, რიმანის ტენზორს აქვს 20 დამოუკიდებელი კომპონენტი.

რიჩის ტენზორის სიმეტრია კი, არის რიმანის ტენზორის სიმეტრიის შედეგი

$$R_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = g^{ik}R_{ljki} = R_{ji}. \tag{6.4}$$

ლოკალურ საკოორდინატო ბაზისში რიჩის ტენზორი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$R_{lm} = \Gamma^j_{lm,j} - \frac{\partial^2 ln|g|^{1/2}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial ln|g|^{1/2}}{\partial x^k}\Gamma^k_{lm} - \Gamma^j_{km}\Gamma^k_{ij}. \quad (6.5)$$

6.2. აინშტაინის ტენზორი

აინშტაინის G_{ij} ტენზორი განისაზღვრება **რიჩის ტენზორისა** და **მეტრიკული ტენზორის** საშუალებით

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \quad (6.6)$$

სადაც

$$R = R^j_j = g^{ij} R_{ij}, \quad (6.7)$$

არის რიჩის ტენზორზე ნახვევის ოპერაციის შედეგი(სკალარული სიმრუდე).

ეინშტეინის ტენზორის მნიშვნელოვანი თვისებაა მისი კონსერვატიულობა, ანუ, მისი კოვარიანტული დივერგენციის ნულთან ტოლობა (რაც გამომდინარეობს ბიანკის იგივეობიდან)

$$G^i_{j;i} = 0. \quad (6.8)$$

6.3. ვეილის ტენზორი

ჩვენ ვნახეთ, რომ რიმანის R_{ijkl} ტენზორი ანტისიმეტრიულია ინდექსების ორივე წყვილის მიმართ და ასევე, არ იცვლება (ij) და (kl) ინდექსთა წყვილების ერთდროულად გადაადგილებისას. ამიტომ ერთადერთი არატრივიალური ნახვევის ოპერაცია შეგვიძლია შევასრულოთ მხოლოდ მაშინ, თუ ავწევთ რომელიმე ინდექსს, ხოლო შემდეგ ჩავატარებთ ნახვევის ოპერაციას ნებისმიერ სხვა ინდექსთან. ამ შემთხვევაში, ნიშნის სიზუსტით რიჩის ტენზორი მიიღება. ამიტომ ხელსაყრელია რიმანის ტენზორი წარმოვადგინოთ ორი შესაკრების ჯამის სახით, სადაც ერთი შესაკრების კვალი ნულოვანია, ხოლო მეორე არის რიჩის ტენზორი. ასეთი წარმოდგენა მიიღწევა **ვეილის ტენზორის** საშუალებით

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - (n-2)^{-1}\left(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}\right) + (n-1)^{-1}(n-2)^{-1}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{i;}g_{jk}\right)R. \quad (6.9)$$

ცხადია, რომ ამ ტენზორს სიმეტრიის იგივე თვისებები აქვს, რაც რიმანის ტენზორს, მაგრამ

$$g^{jl}C_{ijkl} = 0, \quad (6.10)$$

$$g^{jl}R_{ijkl} = R_{ik}. \quad (6.11)$$

სხვა განსხვავება იმაში მდგომარეობს, რომ რიმანის ტენზორის განსაზღვრისათვის საკმარისია მრავალსახეობაში ბმა იყოს განსაზღვრული. მაშინ, როცა ვეილის ტენზორისათვის აუცილებელია მეტრიკული ტენზორიც.

მნიშვნელოვანი განსხვავებაა აგრეთვე ის ფაქტი, რომ ***ვეილის ტენზორი ინვარიანტულია $g \to \Omega^2 g$ გარდაქმნის*** მიმართ ანუ მას ახასიათებს **კონფორმული ინვარიანტობა**, რაც ფართოდ გამოიყენება ფარდობითობის ზოგად თეორიასა და დიფერენციალურ გეომეტრიაში.

6.4. ოთხგანზომილებიანი მრავალსახეობა. დრო-სივრცე და აინშტაინის განტოლება

აქამდე ჩვენ არ ვაქცევდით ყურადღებას, არც მრავალსახეობის განზომილებას და არც მეტრიკული ტენზორის სახეს. თუმცა, ფარდობითობის ზოგადი თეორიის დრო-სივრცე ოთხგანზომილებიანი მრავალსახეობაა, რომლის მეტრიკასაც ლორენცის სტრუქტურა აქვს. შევთანხმდეთ რომ მეტრიკული ტენზორის სიგნატურაა -2, კერძოდ, მინკოვსკის მეტრიკას აქვს ასეთი სახე:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (6.12)$$

სადაც c - სინათლის სიჩქარეა.

ლორენცის სტრუქტურის მეტრიკა არაა დადებითად განსაზღვრული, რაც იმას ნიშნავს, რომ $g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})$ შეიძლება იყოს უარყოფითი, დადებითი ან ნულოვანი. თუ $\boldsymbol{g(X,X)} > 0$, **მაშინ**

$\boldsymbol{X}$ **ვექტორს დროისმაგვარი** ეწოდება, **იზოტროპული, თუ $\boldsymbol{g(X,X)=0}$** და სივრცისმაგვარი, თუ $g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})<0$.

ისეთი **ნაწილაკები, რომელთა უძრაობის მასაც არაა ნულოვანი, მოძრაობენ მხოლოდ დროისმაგვარ ტრაექტორიებზე** (ანუ, *სივრცეში აღწერენ ისეთ ტრაექტორიებს, რომლის მხები ვექტორებიც დროისმაგვარია*). მაშინ, როდესაც ისეთი ნაწილაკები, რომელთა **უძრაობის მასაც ნულის ტოლია (ფოტონი, გრავიტონი, ნეიტრინო) მოძრაობენ იზოტროპიულ ტრაექტორიებზე.**

დრო-სივრცის გეომეტრია აღიწერება **ეინშტეინის განტოლებებით**

$$G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \tag{6.13}$$

სადაც T_{ij} – ნივთიერებისა და ველის ენერგია-იმპულსის ტენზორია (გრავიტაციული ველის გარდა), G გრავიტაციული მუდმივაა. აინშტაინის განტოლება სხვანაირადაც შეიძლება ჩავწეროთ

$$R_{ij}=-\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}T\right), \qquad \left(T=g^{ij}T_{ij}\right). \tag{6.14}$$

ვაკუუმში(ანუ, სივრცეში სადაც $T_{ij}=0$), აინშტაინის განტოლებებს აქვს სახე

$$G_{ij}=0, \tag{6.15}$$

ან, რაც ეკვივალენტურია

$$R_{ij}=0. \tag{6.16}$$

ამ შემთხვევაში, ***რიმანის ტენზორი ემთხვევა ვეილის*** ტენზორს.

აინშტაინის განტოლებები განიხილება, როგორც განტოლებათა სისტემა მეტრიკული ტენზორის საპოვნელად(ანუ, მეტრიკული g_{ij} ტენზორის ათი კომპონენტის საპოვნელად). როგორც ვიცით აინშტაინის ტენზორის უმნიშვნელოვანესი თვისებაა მისი კონსერვატიულობა ანუ მისი კოვარიანტული დივერგენციის ნულთან ტოლობა

$$G^i_{j;i} = 0. \qquad (6.17)$$

როგორც ამ განტოლებიდან ჩანს, აინშტაინის განტოლებების ამონახსნი შეიცავს ოთხ ნებისმიერ ფუნქციას. ამ ფუნქციების არჩევის თავისუფლება არის ***კალიბრული თავისუფლება***, რომელიც განპირობებულია ***თეორიის კოვარიანტულობით.***

ვაკუუმში, ბიანკის იგივეობათა რაოდენობა მცირდება 20-დან 16-მდე. რადგან ოთხი მათგანი ავტომატურად კმაყოფილდება (6.15),(6.16) განტოლებებით.

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.განტოლებაში $S_{ij;kl} - S_{ij;lk} = R^m_{jkl} S_{im} + R^m_{ikl} S_{mj} + T^n_{kl} S_{ij;n}$ შეიტანეთ S_{ij}-ს ნაცვლად მეტრიკული ტენზორის g_{ij} კომპონენტები და დაამტკიცეთ, რომ $g_{im} R^m_{jkl} + g_{mj} R^m_{ikl} = 0$ და $R_{ijkl} + R_{jikl} = 0$;

2.აჩვენეთ, რომ რიმანის ტენზორი არ იცვლება ინდექსების პირველი და მეორე წყვილის გადანაცვლებისას და სიმეტრიის თვისება ამცირებს რიმანის ტენზორის დამოუკიდებელი კომპონენ-ტების რაოდენობას $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ – მდე;

3.დაამტკიცეთ, რომ რიჩის ტენზორის სიმეტრია კი, არის რიმანის ტენზორის სიმეტრიის შედეგი $R_{ij} = g^{kl} R_{ikjl} = g^{ik} R_{ljki} = R_{ji}$;

4.ბიანკის იგივეობიდან გამომდინარე, აჩვენეთ რომ ეინშტეინის ტენზორის კოვარიანტული დივერგენცია აკმაყოფილებს განტოლებას $G^i_{j;i} = 0$;

5.აჩვენეთ, რომ ვეილის ტენზორს ახასიათებს კონფორმული ინვარიანტულობა.

ლიტერატურა

1.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистская квантовая механика, том 1, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

2.Бёркен Дж.Д.,Дрелл С.Д. Релятивистская квантовая теория. Релятивистские квантовые поля, том 2, Пер. с англ.,Наука, Москва, 1978

3.Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.Гравитация. Пер. с англ.,Мир, Москва, 1976

4.Пригожин И.,Кондепуди Д. Современная термодинамика от тепловых двигателей до диссипативных структур. Пер. с англ.,Мир, Москва, 2002

5.Чандрасекар С.Математическая теория чёрных дыр,часть 1, пер. с англ., Мир, Москва,1986

6. ჩახტაური ა. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსი. განათლება, თბილისი, 1972

5. Эйнштейн А.О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение),пер. с англ.,Москва, 1922

6. Крамер Д.,Штефани Х.,Мак-Каллум М., Харльт Э.Точные решения уравнений Эйнштейна,пер. с англ., Москва,1982

7. Эйнштейн А. Теория относительности, - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»,2000

8. Вергелес С.Н.Лекции по теории гравитации,учеб. пособие, МФТИ, Москва,2001

9. Синг Дж.Л.Общая теория относительности, пер. с англ.,Москва, 1963

10. Эддингтон А.С.Теория относительности,пер. с англ., Москва, 1934

11. Пуанкаре Анри.Новая механика. Эволюция законов, пер. с фран.,Москва,1913

შინაარსი