საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თამაზ ობგაძე, არჩილ ფრანგიშვილი

ცოცხალი სისტემების ანალიზის მეთოდები

(ოპტიმიზაციის მეთოდები დაკლასიკური ვარიაციული აღრიცხვა)

IV ტომი

დამხმარე სახელმძღვანელო

თბილისი

2018

უაკ 517.958

დამხმარე სახელმძღვანელოში განხილულია ოპტიმიზაციის მეთოდები და ვარიაციული აღრიცხვა ამოცანებსა და სავარჯიშოებში. ყოველი თეორემა და ახალი მეთოდი ილუსტრირებულია შესაბამისი ამოცანების ამოხსნით Mathcad-ის ბაზაზე. განხილული თემების მიხედვით, მოყვანილია შესაბამისი პროგრამები და მიღებული შედეგები.ყოველი თავის ბოლოს, მოყვანილია შესაბამისი ამოცანები და სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

გადმოცემულია ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები.

ნაშრომიგანკუთვნილია სტუ-ს ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის მაგისტრატურისადა დოქტორანტურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტები: პროფესორიია მოსაშვილი,

აკადემიური დოქტორილაშა იაშვილი

ISBN978-9941-20-470-8(ყველა ნაწილი)
ISBN978-9941-20-991-8 (მეოთხე ნაწილი)

წინასიტყვაობა

მოცემული დამხმარე სახელმძღვანელო, შედგენილია მრავალი წლის პედაგოგიური მოღვაწეობის შედეგად, როგორც საქართველოს, ასევე, რუსეთისა და ბელორუსიის საუკეთესო უნივერსიტეტებში.

დამხმარე სახელმძღვანელოში განხილულია ოპტიმიზაციის მეთოდებიდავარიაციული აღრიცხვა ამოცანებსა და სავარჯიშოებში. ყოველი თეორემა და ახალი მეთოდი ილუსტრირებულია შესაბამისი ამოცანების ამოხსნით როგორც ანალიზურად, ასევე, Mathcad-პაკეტის ბაზაზე. განხილული თემების მიხედვით მოყვანილია შესაბამისი პროგრამები და მიღებული შედეგები. მოცემულია შესაბამისი ამოცანები და სავარჯიშოები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.ყოველი თავის ბოლოს, მოყვანილია გამოყენებული ლიტერატურის სია.

დამხმარე სახელმძღვანელოში, გადმოცემულია ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები.

დამხმარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია სტუ-ს საინჟინრო სპეციალობის სტუდენტების, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის, ასევე, აღნიშნული თემატიკით დაინტერესებული ყველა მკითხველისათვის.

ავტორები მადლობას უხდიან მთავარ სპეციალისტს ვერა ქორთიევას ტექსტის აკრეფისა და რედაქტირებისათვის.

თავი I. ფუნქციონალური სიმრავლეები

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში– ფუნქციონალურ სიმრავლეებში[1-7]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადებულ ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა. რაც შეეხება ოპტიმიზაციის ამოცანებს, ვარიაციულ აღრიცხვასა და ოპტიმალურ მართვას, ჩვენ ძირითადად, საქმე გვაქვსფუნქციონალების ექსტრემალური ტრაექტორიების პოვნასთან ანუ ისეთი ფუნქციების ძიებასთან, რომელთათვისაც მოცემული ფუნქციონალი იღებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას. აქედან გამომდინარე, მნიშვნელოვანია გავიხსენოთ ფუნქციონალური ანალიზის ზოგიერთი ძირითადი ცნება, რასაც ეძღვნება დამხმარე სახელმძღვანელოს პირველი თავი.

განსაზღვრება: ფუნქციებისგან შემდგარი M სიმრავლის J ასახვას $J: M \to \mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეში **ფუნქციონალი** ეწოდება.

ფუნქციონალის განსაზღვრის M არეში შემავალ ფუნქციებს **დასაშვებ ფუნქციებს** უწოდებენ.

მაგალითად: $M = C^1[a;b]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ინტეგრალი $J[f] = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$, რომელიც წარმოადგენს $y = f(x)$ ფუნქციით $[a;b]$ სეგმენტზე მოცემული წირის სიგრძეს **ფუნქციონალს** წარმოადგენს;

1.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება:G სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა L სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი(წრფივიანი), თუ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ $a_1u_1(x) + a_2u_2(x)$ ფუნქციას).

მაგალითები:

1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, L იქნება ლინეალი.

2. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\bar{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 5$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ $u(x) = 3$ და $a = 2$, მივიღებთ $au(x) = 6 > 5$.

P.S. *თუL არის ლინეალი, მაშინ ფუნქციებთან* $\{u_i(x)\}_{i=1}^{n}$ *ერთადის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც* $\sum_{i=1}^{n} a_1 u_i(x)$, *სადაც* $a_i \in R$ *ნამდვილი რიცხვებია. თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.*

განსაზღვრება: L ლინეალზე განსაზღვრულ $J[f]$ ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი, თუ ლინეალის ნებისმიერი ორი f და g ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$J[\alpha_1 f + \alpha_2 g] = \alpha_1 J[f] + \alpha_2 J[g]$, სადაც α_1 და α_2 ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

მაგალითად: $J[f] = \int_a^b f(x)dx$ წრფივი ფუნქციონალია, ხოლო ფუნქციონალი $J[f] = \int_a^b f^2(x)dx$ – არაა წრფივი.

განსაზღვრება: L ლინეალის ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(u;v)$ შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$(u;v) = \int_G u(x)v(x)dx. \qquad (1.1)$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

მაგალითი : $u(x) = x;\ v(x) = 1;\quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u;v) = \int_G u(x)v(x)dx = \int_0^5 x \cdot 1dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 = \frac{25}{2}.$$

(1.1) სკალარული ნამრავლის თვისებები უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან გამომდინარეობენ:

$$(u;v) = (v;u); \qquad (1.2)$$

$$(a_1 u_1 + a_2 u_2; v) = a_1(u_1; v) + a_2(u_2; v); \qquad (1.3)$$

$$(u;u) \ge 0; \qquad (1.4)$$

$$(u;u) = 0 \Leftrightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x \in G. \qquad (1.5)$$

განსაზღვრება: L ლინეალის $u(x)$ ფუნქციის ნორმა $\|u(x)\|$ ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u;u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)dx}\,. \tag{1.6}$$

ახლა შემოვიღოთ მანძილის ცნება ლინეალის ორ ფუნქციას შორის, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში **მეტრიკას** უწოდებენ:

განსაზღვრება:L ლინეალის ორ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციას შორის **მანძილი (ანუ მეტრიკა)** ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx}\,. \tag{1.7}$$

მაგალითი: $u(x) = x;\ v(x) = 1; \qquad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$, მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^5 (x-1)^2\,dx} = \sqrt{\frac{64+1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}\,.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც უნდა **აკმაყოფილებდეს მეტრიკა(მანძილი):**

$$\rho(u;v) \ge 0\,; \tag{1.8}$$

$$\rho(u;v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x)\,; \tag{1.9}$$

$$\rho(u;v) = \rho(v;u)\,; \tag{1.10}$$

$$\rho(u;z) \le \rho(u;v) + \rho(v;z)\,. \tag{1.11}$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას.

გარდა (1.7) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ, განიხილავენ **მეტრიკის სხვა სახეებსაც**. მათი განსაზღვრისათვის, ჯერ განვიხილოთ ორი ფუნქციის **სიახლოვის** ცნება:

ვიტყვით რომ, $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ $y = u(x)$ და $y = v(x)$ ფუნქციას აქვთ ნულ-რიგის სიახლოვე, თუ მათი სხვაობის მოდული $|u(x) - v(x)|$ არის საკმაოდ მცირე.

გეომეტრიულად, ეს იმას ნიშნავს რომ, მათი ორდინატები მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, როცა $x \in [a;b]$.

ვიტყვით რომ, $[a;b]$ **სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ $y = u(x)$ და $y = v(x)$ ფუნქციას აქვთ პირველი-რიგის სიახლოვე, თუ მათი სხვაობისა და პირველი რიგის წარმოებულთა სხვაობის მოდულები:$|u(x) - v(x)|$და $|u(x)' - v(x)'|$არიან საკმაოდ მცირე.**

გეომეტრიულად, ეს იმას ნიშნავს რომ, როგორც მათი ორდინატები, ასევე, მხების მიმართულებებიც შესაბამის წერტილებში, მცირედ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, როცა $x \in [a;b]$.

ვიტყვით რომ, $[a;b]$ **სეგმენტზე განსაზღვრულ ორ $y = u(x)$ და $y = v(x)$ ფუნქციას აქვთ k-რიგის სიახლოვე, თუ მათი სხვაობისა**

და k რიგამდე ჩათვლით წარმოებულთა სხვაობების მოდულები:$|u(x)-v(x)|$,$|u(x)'-v(x)'|$, . . ., $\left|u(x)^{(k)}-v(x)^{(k)}\right|$არიან საკმაოდ მცირე.

სიახლოვის ცნებიდან ადვილად გადავალთ შესაბამისი **მეტრიკის** ცნებაზე. ორ **ორ $y=u(x)$ და $y=v(x)$ ფუნქციას შორის$[a;b]$ სეგმენტზე მანძილი ანუ მეტრიკა ეწოდება რიცხვს:**

$$\rho_c(u;v)=\max_{x\in\bar{G}}|u(x)-v(x)|. \quad (1.12)$$

ამ რიცხვს**ჩებიშევის მეტრიკას** უწოდებენ. ზოგჯერ მას $C_0[a;b]$ -ს მეტრიკასაც ეძახიან.

განვიხილოთ **მაგალითი**: ვიპოვოთ მანძილი $y=x$ და $y=x^2$ ფუნქციებს შორის, ჩებიშევის მეტრიკით $[0;1]$ სეგმენტზე.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად ამ ორ ფუნქციას შორის მანძილი იქნება $\rho_C(u;v)=\max_{0\le x\le 1}|x-x^2|$. ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ მოდულის შიგნით მდგარ $y=x-x^2$ ფუნქციას, მივიღებთ რომ $y'=1-2x=0\Rightarrow x=0.5$ ე.ი. $\rho_C(u;v)=0.25$.

განსაზღვრება:$[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული, უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციების სიმრავლე, მასზე განსზღვრული ნორმით$\|f\|_{C_0}=\max_{x\in[a;b]}|f(x)|$ ადგენს $C_0[a;b]$ ფუნქციონალურ **ბანახის** სივრცეს. ხოლო, თუ ფუნქციის ნორმად მივიღებთ $\|f\|_{C^1}=\max_{x\in[a;b]}\{|f(x)|+|f'(x)|\}$ თანადობას, მაშინ მივიღებთ შესაბამის $C^1[a;b]$ ბანახის ფუნქციონალურ სივრცეს.

არსებობს **უფრო მეტი სიახლოვის ცნებაზე დამყარებული მეტრიკაც**: ორ **ორ $y=u(x)$ და $y=v(x)$ ფუნქციას შორის $[a;b]$ სეგმენტზე, k −რიგის მანძილი ანუ მეტრიკა ეწოდება $|u(x)-v(x)|$,$|u(x)'-v(x)'|$, . . ., $\left|u(x)^{(k)}-v(x)^{(k)}\right|$ რიცხვების მაქსიმუმებს შორის უდიდესს:**$\rho_{C^k}(u;v)=\max_{0\le i\le k}\max_{a\le x\le b}\left|u^{(i)}(x)-v^{(i)}(x)\right|$. ამ ტიპის მეტრიკას დიდი გამოყენება აქვს კლასიკურ ვარიაციულ აღრიცხვაში.

P.S. *მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (1.8)–(1.11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (1.12) მეტრიკა (1.7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, უფრო ინტუიციურად ზუსტია, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე სხვადასხვა ტიპის წყვეტილ ფუნქციებთან,*

რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკის გამოყენება არაპრაქტი-კულია. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (1.7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით $(u;v)=\int_G u(x)\overline{v(x)}dx$*,* *სადაც* $\overline{v(x)}$ *არის* $v(x)$ *ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.*

1.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება:G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ ფუნქციას **კვადრატით ინტეგრებადი** ეწოდება, თუ **ლებეგის ინტეგრალები**

$$\int_G u(x)dx; \qquad \int_G u^2(x)dx; \tag{1.13}$$

ერთდროულად არსებობენ(არიან კრებადი).კვადრატით ინტეგრე-ბადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. *თუ,* $\int_G u^2(x)dx=0$*, მაშინ* $u(x)=0$ ***თითქმის ყველგან(გარდა ისეთი წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს)****. ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტი-ლებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები* ***ემთხვევა ერთმანეთს თითქმის ყველგან.***

განსაზღვრება:L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (1.6) ნორ-მით და (1.7) მეტრიკით, **ჰილბერტისწინა(უნიტარული)** S_2 **სივრცე** ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ **უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს** აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი; ხოლო, თუ **ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულიც უწყვეტია**, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C^\infty(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის **კრებადობის ცნება** S_2 **ფუნქცი-ონალურ სივრცეში.**

განსაზღვრება*:* ვიტყვით, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n\to\infty}\rho(u_n;u)=0. \qquad (1.14)$$

ანუ თუ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_G [u_n(x)-u(x)]^2\,dx}=0. \qquad (1.15)$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რასაც ადგილი აქვს რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება:$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას **კოშის** (ფუნდა-მენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\rho(u_m;u_n)=0$.

განსაზღვრება*:* ვიტყვით, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის **ზღვარით წერტილს,** თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვარითი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S.*ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის* ***ზღვარითი წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.***

განსაზღვრება:S_2 უნიტარული(ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების სიმრავლესთან, ამ **სივრცის ჩაკეტვა** ეწოდება.ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2}=S_2\cup\partial S_2. \qquad (1.16)$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა(უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, **ჰილბერტის** $L_2(G)$ **სივრცე** ეწოდება.

განსაზღვრება*:* წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ, **ბანახის სივრცე** ეწოდება.

P.S.ა) *ჰილბერტის* $L_2(G)$ *სივრცე სრულია ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შე-იცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს. ისევე, როგორც რაცი-ონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების(ფუნქციების) სიმრავლეც მკვრივია* $L_2(G)$ *ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ,* ***ჰილბერტის სივრცეც სეპარაბელურია,*** *ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუა-ლებას იძლევა, მის ელემენტებს მივუახლოვდეთ მასში მოთავ-სებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევ-რობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში.* $L_2(G)$ ***ჰილბერტის სივრცე არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების(ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.***

ბ)უნდა აღინიშნოს, რომ **ჰილბერტის სივრცე** $L_2(G)$**, ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის სივრცე(რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდე-ბულო რომ გვქონდეს სკალარული ნამრავლი).**

განსაზღვრება*:* ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული,** თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკი-დებული, მაშინ მას **წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას** უწოდებენ.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1 = \sin^2 xy;\ \ u_2 = \cos^2 xy;\ \ u_3 = 4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3 = 4u_1 + 4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი, უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის **გრამის დეტერმინანტი.**

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^k$ **წრფივად დამოუკი-დებელია ჰილბერტის** $L_2(G)$ **სივრცეში**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნული-საგან ანუ

$$D(u_1;u_2;...;u_k)=\begin{vmatrix}(u_1;u_1) & (u_1;u_2) & ... & (u_1;u_k)\\ (u_2;u_1) & (u_2;u_2) & ... & (u_2;u_k)\\ . & . & . & .\\ (u_k;u_1) & (u_k;u_2) & ... & (u_k;u_k)\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (1.17)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1=\sin x;\ u_2=\cos x;\ u_3=1$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2[0;\pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1;u_1)=\int_0^\pi \sin^2 x dx=\frac{\pi}{2};\quad (u_1;u_2)=\int_0^\pi \sin x\cos x dx=0;\quad (u_1;u_3)=2;\quad (u_2;u_2)=\pi.$$

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\pi}{2} & 0 & 2\\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0\\ 2 & 0 & \pi\end{vmatrix}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული** $L_2(G)$ **სივრცეში**, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო $\psi(x)=\sum_{i\in I}a_iu_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს** $L_2(G)$ **სივრცეში,** თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x)=\sum_{i\in I}a_iu_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში,**შაუდერის მრავალწევრა ბაზისია**: $1;x;y;x^2;xy;y^2;...$ როცა $G=\{(x;y)|\,a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$.

ასევე, $L_2(0,2\pi)$ სივრცეში, არსებობს **ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი**:$1;\sin x\cdot\cos y;\sin 2x\cdot\cos y;\sin x\cdot\cos 2y;\sin 2x\cdot\cos 2y;...$
ცნობილია, რომ $L_2(\mathbb{R})$ სივრცეში შეიძლება აიგოს **ვეივლეტ ფუნქციებისაგან** შემდგარი ბაზისებიც.

P.S. *მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს. ამ პრობლემის გადაჭრის გზაზე მიღწეულია გარკვეული წარმატება რვაჩევ–ობგაძის RO ფუნქციის მეთოდში,*

სადაც ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობების დაკმაყოფილების ზოგადი ალგორითმია შემუშავებული, რამაც საშუალება მოგვცა ამოგვეხსნა ჰიდროდინამიკის სტაციონარული ამოცანები.

1.3. ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	$\mathbb{R}^n$ ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\overline{x}(x_1; x_2; ...; x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\overline{x}; \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x); g(x)) = \int_G f(x) g(x) dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $\lvert\overline{x}\rvert = \sqrt{(\overline{x}; \overline{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\lVert f(x) \rVert = \sqrt{(f(x); f(x))} = \sqrt{\int_G f^2(x) dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის $\lvert\overline{x} - \overline{y}\rvert = \sqrt{(\overline{x} - \overline{y}; \overline{x} - \overline{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x); g(x)) = \lVert f(x) - g(x) \rVert =$ $= \sqrt{(f(x) - g(x); f(x) - g(x))} =$ $= \sqrt{\int_G (f(x) - g(x))^2 dx}$
5.	თუ, $\{\overline{e_i}\}_{i=1}^{n}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა $\mathbb{R}^n$-ში, მაშინ ნებისმიერი $\overline{x}$ ელემენტი(ვექტორი) ამ სივრციდან წარმო-იდგინება სახით: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e_i}$	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი(ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i(x)$

1.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურისივრცე. ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx \quad ; \tag{1.18}$$

და გავიმეორებთ $L_2(G)$ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ **სობოლევისფუნქციონალურ სივრცეს** $W_2^1(G)$.

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx+\int_G u''v''dx \quad ; \tag{1.19}$$

მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ **სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.**

ასევე აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცეც, შესაბამისი სკალარული (1.20) ნამრავლის შემოღებით :

$$(u;v)=\sum_{i=0}^{k}\int_G u^{(i)}v^{(i)}dx. \tag{1.20}$$

P. S. *როგორც ვხადავთ, სობოლევის ფუნქციონალური სივრცეები იგება, შესაბამისი $C^k[a;b]$ ფუნქციონალური სივრცეების იდეოლოგიიდნ გამომდინარე.*

1.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ყველაზე უფრო "კარგი" ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი, საზოგადოდ,m-განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი. $P_n(x)\in C^\infty(R^m)$ მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C^k(R^m)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე(ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის(ლინეალის) ქვესიმრავლე.

ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცის ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი, თავის მხრივ, ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k \geq 1$.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 8$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x;\ v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა: $u(x) = x;\ v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 2

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 9$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^2;\ v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა: $u(x) = x^2;\ v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 3

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 6$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^3; v(x)=1; \quad G = \{x| \ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^3; v(x)=1; \quad G = \{x| \ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 4

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 66$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^4; v(x)=1; \quad G = \{x| \ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^4; v(x)=1; \quad G = \{x| \ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 5

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას

$|u(x)| \leq 88$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^5; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა: $u(x) = x^5; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 6

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 1$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^8; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა: $u(x) = x^8; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 7

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \leq 10$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^6; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა: $u(x) = x^{16}; v(x) = 1; \quad G = \{x | \ 0 \leq x \leq 5\}$?

6.რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 8

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 11$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x) = x^{13}; \; v(x) = 1; \quad G = \{x| \; 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^{13}; \; v(x) = 1; \quad G = \{x| \; 0 \le x \le 5\}$?

6.რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

ლიტერატურა

1.**Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике,пер. с англ., Мир, М.,1985,

2.**Заманский М**. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., М, 1974,

3.**Пизо Ш., Заманский М**. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., М., 1971,

4.**Шварц Л.** Анализ,. Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, М., 1972,

5.**Картан А**. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, М., 1971,

6.**Рудин У**. Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Ха-вина, Мир, М., 1966,

7.**ობგაძეთ.**მათემატიკურიმოდელირებისკურსი, რხევითიპროცე-სები, IVტომი, სტუ, თ., 2010,

8.**ობგაძე თ**. მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თ.,2016.

თავი II. ოპტიმიზაციის მეთოდები

ცივილიზაციის განვითარების მთელი ისტორიის განმავლობაში აქტუალობას არ კარგავს იმ ამოცანების განხილვა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ გარკვეულ სიდიდეთა უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები. დღეს ამ ამოცანების განხილვა განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს, რადგან დღის წესრიგში დგება: ბუნებრივი რესურსების, ადამიანური რესურსების, მატერიალური და ფინანსური რესურსების ეფექტურად გამოყენების ამოცანები. ყოველივე ამას, მივყავართ საუკეთესო გადაწყვეტილების, ან როგორც ამბობენ, **ოპტიმალური** გადაწყვეტილების მიღების აუცილებლობამდე. მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის ამოცანები დაისვა და ამოიხსნა ჯერ კიდევ მე-17-ე საუკუნეში. ამ ტიპის ამოცანების გადაწყვეტაზე მუშაობდნენ ისეთი ცნობილი მეცნიერები, როგორიც იყო **პიერ ფერმა, ისააკ ნიუტონი, ლაიბნიცი, დანიელ ბერნული, იაკობ ბერნული, ლაგრანჟი, ლეონარდ ეილერი, ანრი პუანკარე, ფონ ნეიმანი, კანტოროვიჩი, პონტრიაგინი, რეზო გამყრელიძე, მიშჩენკო, ბოლტიანსკი** და სხვა.

აქედან გამომდინარე, თანამედროვე ინჟინრისთვის,ოპტიმიზაციის მეთოდების შესწავლა მეტად მნიშვნელოვანია და აუცილებელი.

2.1. უპირობო ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

ვთქვათ მოცემულია $f(x)$ ფუნქცია $\mathbb{R}^n$სივრცის რაიმე G არეში ანუ მისი ყოველი წერტილი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

ვიტყვით რომ, მოცემული $f(x)$ ფუნქციაGსიმრავლის რაიმე x_0 წერტილში $(x_0 \in G)$აღწევს თავის **უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს)** მნიშვნელობას, თუ Gსიმრავლის ნებისმიერი სხვა x წერტილისათვის $(x \in G)$, ადგილი აქვს უტოლობას: $f(x) \leq f(x_0)$ **(ან შესაბამისად $\boldsymbol{f(x) \geq f(x_0)}$**)).

ვაიერშტრასის თეორემა: შემოსაზღვრულ, ჩაკეტილ სიმრავლეზე (კომპაქტზე) განსაზღვრული უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია,ამ

სიმრავლეზეაღწევს თავის **უდიდეს (ან შესაბამისად, უმცირეს) მნიშვნელობას.**

განსაზღვრება: ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$სივრცის რაიმე G არეში ანუ $G \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. მაშინ$x_0 \in G$ წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის **მკაცრი მაქსიმუმის** (შესაბამისად, **მკაცრი მინიმუმის**) წერტილი, თუ ადგილი აქვს უტოლობას $f(x) < f(x_0)$ (ან შესაბამისად, $f(x) > f(x_0)$) ნებისმიერი $x \in G \cap \Omega(x_0)$ წერტილისათვის, სადაც $\Omega(x_0)$ არის x_0 წერტილის რაიმე მიდამო.

თუ ამ განსაზღვრებაში მკაცრ უტოლობებს, შევცვლით არამკაცრი უტოლობებით $f(x) \le f(x_0)$ ან შესაბამისად $f(x) \ge f(x_0)$ მაშინ $x_0 \in G$ წერტილს უწოდებენ უბრალოდ **მაქსიმუმის** ან შესაბამისად **მინიმუმის** წერტილს.

განსაზღვრება: ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს **ექსტრემუმის წერტილებს** უწოდებენ.

ფერმას თეორემა (ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა): ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია ექსტრემუმის $x_0 \in G$ წერტილის რაიმე $\Omega(x_0)$ მიდამოში, მაშინ **თუ ამ წერტილში არსებობენ კერძო წარმოებულები $\frac{\partial f}{\partial x_i}_{|x=x_0} = 0$ ისინი ყველა ნულის ტოლია.**

P.S.1)*თუ ფუნქცია დიფერენცირებადია ექსტრემუმის წერტილში, მაშინ მისი დიფერენციალი $df = 0$ ნულის ტოლია. მართლაც, $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ და რადგან $\frac{\partial f}{\partial x_i}_{|x=x_0} = 0$ ცხადია, რომ $df = 0$.*

2) თუ გავაფართოებთ განსახილველი ფუნქციების კლასს და განვიხილავთ ($f(x) \subset L_2(G)$) ჰილბერტის სივრცის ფუნქციებს, სადაც ფუნქციას შეიძლება ქონდეს ნულ ზომის წყვეტის წერტილების სიმრავლე, მაშინ ფერმას თეორემა შეიძლება განზოგადდეს შემდეგნაირად: ***თუ $\boldsymbol{x_0}$ არის $\boldsymbol{f(x) \subset L_2(G)}$ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი, მაშინ ამ წერტილში ყველა კერძო წარმოებული $\frac{\partial f}{\partial x_i}_{|x=x_0}$ ან ნულის ტოლია ან არ არსებობს.***

განსაზღვრება: იმ წერტილებს სადაც ადგილი აქვს ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს(ფერმას თეორემა) **კრიტიკული წერტილები** ეწოდება; ხოლო იმ წერტილებს, სადაც $df = 0$**სტაციონარულ წერტილებს** უწოდებენ.

P.S. *ის რომ* $\boldsymbol{x_0}$ *წერტილი კრიტიკული წერტილია, ჯერ არ ნიშნავს იმას, რომ ის ექსტრემუმის წერტილია.*

2.1.1. სილვესტრის კრიტერიუმი კვადრატული ფორმებისათვის

ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე განსაზღვრულ სიმეტრიულ $(a_{ij} = a_{ji})$კვადრატულ ფორმას $A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ ეწოდება **დადებითად განსაზღვრული**, თუ $A(x) > 0 \forall x \neq 0$ და ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

ასევე, კვადრატულ ფორმას ეწოდება **უარყოფითად განსაზღვრული,** თუ $A(x) < 0, \forall x \neq 0$ და ნულის ტოლია მხოლოდ როცა $x_i = 0, \forall i = \overline{1, n}$.

დადებითად განსაზღვრულ და უარყოფითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს **განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმებს** უწოდებენ, რადგან, ისინი ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის და იღებენ ნულოვან მნიშვნე-ლობას,მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა ცვლადი ნულოვანია.

არსებობენ **განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმებიც**, რომლებიც იცვლიან ნიშანს ცვლადების სხვადასხვა მნიშვნელო-ბისათვის.

მაგალითად,$A(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ დადებითად განსაზღვრული კვად-რატული ფორმაა. $B(x) = -x_1^2 - 3x_2^2$ უარყოფითად განსაზღვრული ფორმაა, მაგრამ $C(x) = (x_1 + x_2)^2$ განუსაზღვრელი კვადრატული ფორმაა, რადგან ის ნულოვან მნიშვნელობას იღებს არა მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე ცვლადი ნულის ტოლია, არამედ სხვა შემთხვევებშიც, კერძოდ, როცა $x_1 = -x_2$.

იმისათვის რომ შევძლოთ დადგენა, მოცემული ფორმა დადებითადაა განსაზღვრული, უარყოფითადაა განსაზღვრული, თუ განუსაზღვრელია, უნდა გავიხსენოთ **სილვესტრის კრიტერიუმი**:

თეორემა:იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა: $A(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ იყოს **დადებითად განსაზღვრული აუცილე-ბელია და საკმარისი,** რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0,\ .\ .\ .$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.1}$$

ხოლო, იმისათვის რომ, სიმეტრიული კვადრატული ფორმა $A(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ იყოს **უარყოფითად განსაზღვრული აუცი-ლებელია და საკმარისი,** რომ ადგილი ქონდეს უტოლობებს:

$$a_{11} < 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0,\ .\ .\ .$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (-1)^n > 0. \tag{2.2}$$

2.1.2. მკაცრი ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები$\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის

თეორემა: ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 სტაციონარული წერტილის რაიმე $\Omega(x_0)$ მიდამოში და უწყვეტია თავის მეორე რიგის წარმოებულებამდე ჩათვლით, თუ ამ წერტილში მეორე რიგის კვადრატული დიფერენციალური ფორმა:

$$A(dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{2.3}$$

არის **დადებითად განსაზღვრული**, მაშინ x_0**მინიმუმის წერტილია**, ხოლო თუ **უარყოფითადაა განსაზღვრული** მაშინ x_0**მაქსიმუმის წერტილია**.

ცხადია, რომ $a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. ვთქვათ გვაქვს ორი ცვლადის ფუნქცია $y = f(x_1, x_2)$. თუ $x_0 = \left(x_{1,0}, x_{2,0}\right)$ სტაციონარული წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \end{cases}; \tag{2.4}$$

სილვესტრის კრიტერიუმიდან გამომდინარე, გვექნება რომ, თუ ამ წერტილში ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \tag{2.5}$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1x_1} > 0,\quad \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0 \tag{2.6}$$

მაშინ $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$**მინიმუმის წერტილია**, ხოლო თუ გვაქვს პირობები:

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad (2.7)$$

ანუ ჩვენ შემთხვევაში,

$$f''_{x_1x_1} < 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0, \qquad (2.8)$$

მაშინ $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$**მაქსიმუმის წერტილია**.

P.S. *აღსანიშნავია,* ***რომ თუ*** $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} < 0$*, მაშინ ამ წერტილში* ***ექსტრემუმი არ გვაქვს,*** *ხოლო, თუ* $\begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_1x_2} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix} = 0$***,*** *მაშინ ეს წერტილი* ***საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას,*** *რადგან ამ შემთხვევაში, შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.*

2. იპოვეთ სამი ცვლადის ფუნქციის:

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ ექსტრემუმები.

ამოხსნა:ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სტაციონარული წერტილები. ამისათვის ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, შევადგინოთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2 = 0 \end{cases}, \qquad (2.9)$$

სისტემის ამონახსნია წერტილი $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$. ამ სტაციონარული წერტილის გამოსაკვლევად, შევადგინოთ შესაბამისი დიფერენციალური კვადრატული ფორმა (2.3).

$a_{11} = f''_{xx} = 2,\ a_{12} = f''_{xy} = -1,\ a_{13} = f''_{xz} = 0,$

$a_{21} = f''_{yx} = -1,\ a_{22} = f''_{yy} = 2,\ a_{23} = f''_{yz} = 0,$

$a_{31} = f''_{zx} = 0, a_{32} = f''_{zy} = 0,\ a_{33} = f''_{zz} = 2.$

შევამოწმოთ სილვესტრის კრიტერიუმის პირობები ამ სტაციონარული წერტილისათვის:

$$a_{11} = f''_{xx} = 2 > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0. \quad (2.10)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right)$ სტაციონარული წერტილი არის **მინიმუმის წერტილი** და $\boldsymbol{f_{min}} = f\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right) = -\frac{4}{3}$.

2.1.3. გრადიენტული სწრაფი დაშვების მეთოდი

როგორც ვხედავთ,თუ $\begin{vmatrix} \boldsymbol{f''_{x_1x_1}} & \boldsymbol{f''_{x_1x_2}} \\ \boldsymbol{f''_{x_1x_2}} & \boldsymbol{f''_{x_2x_2}} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$ მაშინ ეს წერტილი **საჭიროებს დამატებით გამოკვლევას,** რადგან ამ შემთხვევაში შეიძლება იყოს ექსტრემუმი და შეიძლება არც იყოს.

ასეთი შემთხვევებისათვის, აგრეთვე, ისეთი ამოცანების ამოხსნისას, როცა სტაციონარული წერტილის ანალიზურად პოვნა შეუძლებელია, იყენებენ სხვადასხვა მიახლოებით – რიცხვით მეთოდს, რომლებიც შედარებით ნაკლებადაა დასაბუთებული, თუმცა, იძლევა რეალურ შედეგს. ასეთი მიახლოებითი მეთოდების რიგს ეკუთვნიან **სწრაფი დაშვების გრადიენტული მეთოდებიც**.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ$\min\limits_{\boldsymbol{x}\in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$. განვიხილოთ რაიმე $\overline{\boldsymbol{x^{(0)}}} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}\right) \in \bar{G}$ წერტილი (საწყისი მიახლოება) და ამ წერტილში გამოვითვალოთ მოცემული ფუნქციის გრადიენტი:

$$grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(0)}}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(\overline{x^{(0)}}\right)}{\partial x_i} \overline{\boldsymbol{e_\iota}}, \quad (2.11)$$

სადაც $\overline{\boldsymbol{e_1}}, \overline{\boldsymbol{e_2}}, \ldots \overline{\boldsymbol{e_n}}$ – რაიმე ორთონომირებული ბაზისია $\mathbb{R}^n$ სივრ-ცეში.

თუ $grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(0)}}}\right) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot \left(grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(0)}}}\right), \overline{\boldsymbol{e_k}}\right), \quad k = \overline{1,n}\,; \quad (2.12)$$

სადაც $0 < h_1 < 1$, ხოლო $\overline{\boldsymbol{x^{(1)}}}$ - პირველი მიახლოებაა მინიმუმის წერტილთან.

თუ $grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(1)}}}\right) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(2)} = x_k^{(1)} - h_2 \cdot \left(grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(1)}}}\right), \overline{\boldsymbol{e_k}}\right), \quad k = \overline{1,n}\,;\ h_2 > 0, \quad (2.13)$$

და საზოგადოდ, თუ $grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(m-1)}}}\right) \neq 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$x_k^{(m)} = x_k^{(m-1)} - h_m \cdot \left(grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(m-1)}}}\right), \overline{\boldsymbol{e_k}}\right), \quad k = \overline{1,n}\,;\ h_m > 0. \quad (2.14)$$

სადაც h_m მუდმივებს$0 < h_m < 1$ ვირჩევთ$\left\{f\left(\overline{\boldsymbol{x^{(m)}}}\right)\right\}_{m=0}^{\infty}$ იტერა-ციული პროცესის კრებადობის პირობიდან, სადაც $\overline{\boldsymbol{x^{(m)}}}(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$მოცემული $f(\boldsymbol{x})$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილის m-ური მიახლოებაა. მაშინ

$$\lim_{m\to\infty} grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{m})}}\right) \to 0, \qquad (2.15)$$

რაც იმას ნიშნავს რომ, ზღვარით წერტილში $f(\boldsymbol{x})$ ფუნქცია აღწევს **მინიმალურ მნიშვნელობას**.

ამ ფორმულებში m აღნიშნავს იტერაციათა რიცხვს. იტერაცია ჩერდება მაშინ, როცა მიიღწევა წინასწარ არჩეული ცდომილების ზღვრული ε მნიშვნელობა ანუ როცა ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\max_{i=1,n}\left|x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}\right| < \varepsilon. \qquad (2.16)$$

განვიხილოთ მაგალითები:

1. იპოვეთ $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, სადაც $f(x) = x^2$.

ამოხსნა:ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება $x^{(0)} = 1$. მაშინ (2.11) მიიღებს სახეს:

$grad\, f\left(x^{(0)}\right) = 2x^{(0)}i = 2i \neq 0.$

აქედან გამომდინარე (2.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$x_k^{(1)} = x_k^{(0)} - h_1 \cdot 2x^{(0)} = 1 - 2h,\ k = 1,$

სადაც $0 < h_1 = h < 1$. რადგან $grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{1})}}\right) \neq 0$ თუ $h \neq \frac{1}{2}$, გვექნება რომ

$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1-2h) = (1-2h)^2.$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ რომ

$x^{(m)} = (1-2h)^m.$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \lim\limits_{m\to\infty}(1-2h)^m = 0$, თუ $h \neq \frac{1}{2}$, ხოლო თუ $h = \frac{1}{2}$ მაშინ $x^{(1)} = 0$ და მივიღებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია, რომელიც მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა $f(\boldsymbol{x})$ ფუნქციის მინიმუმი და $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in G} f(x) = 0$.

2.იპოვეთ $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, სადაც $f(x,y) = x^2 + y^2$.

ამოხსნა:ავირჩიოთ მინიმუმის წერტილის საწყისი მიახლოება: $x^{(0)} = (1{,}1)$ ანუ $x^{(0)} = 1$ და $y^{(0)} = 1$. მაშინ (2.11) მიიღებს სახეს:

$grad\, f\left(x^{(0)}\right) = 2x^{(0)}i + 2y^{(0)}j = 2i + 2j \neq 0,$

აქედან გამომდინარე (2.12) გადაიწერება შემდეგნაირად:

$x^{(1)} = x^{(0)} - 2x^{(0)}h = 1 - 2h,$

$y^{(1)} = y^{(0)} - 2y^{(0)}h = 1 - 2h,$სადაც $0 < h_1 = h_2 = h < 1$.რადგან $grad\, f\left(\overline{\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{1})}}\right) = 2(1-2h)i + 2(1-2h)j \neq 0$ თუ,$h \neq \frac{1}{2}$, გვექნება რომ

$x^{(2)} = x^{(1)} - 2h(1-2h) = (1-2h)^2,$

$y^{(2)} = y^{(1)} - 2h(1-2h) = (1-2h)^2.$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ რომ

$x^{(m)} = (1-2h)^m$,

$y^{(m)} = (1-2h)^m$.

მაშინ $\lim_{m\to\infty}(x^{(m)}, y^{(m)}) = \lim_{m\to\infty}((1-2h)^m, (1-2h)^m) = (0\,,0)$, თუ $h \neq \frac{1}{2}$, ხოლო თუ $h = \frac{1}{2}$ მაშინ $\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = (0{,}0)$ და მივიღებთ ნულოვანი ელემენტებისგან შემდგარ მიმდევრობას, რომლის ზღვარიც კვლავ ნულია და მაშასადამე სტაციონარულ წერტილს წარმოადგენს. ამ წერტილში მიიღწევა $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ფუნქციის მინიმუმი და $\min_{\boldsymbol{x}\in G} f(x,y) = 0$.

2.1.4. მონტე-კარლოს მეთოდი

მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმიზაციისათვის შემუშავებულია რიცხვითი მეთოდების დიდი სიმრავლე, რომელთა უმრავლესობაც დაკავშირებულია ფუნქციის გრადიენტის პოვნასთან. ამ მეთოდების გამოყენების ფარგლები შემოსაზღვრულია და სიზუსტეც, ხშირად, არაა დამაკმაყოფილებელი.

ამასთან, უფრო უნივერსალურია და ზუსტიც თუმრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის წერტილის საპოვნელად გამოვიყენებთ მონტე-კარლოს მეთოდს.

ამ მეთოდის არსი დაკავშირებულია ფუნქციის განსაზღვრის არის შემთხვევითი წესით დაყოფაზე სიმპლექსებად და სიმპლექსის თითოეულ საკვანძო წერტილში, ფუნქციის მნიშვნელობის გამოთვლასთან. ამის შემდეგ, ხდება ფუნქციათა გამოთვლილი მნიშვნელობების თანმიმდევრული შედარება და იმ წერტილის შერჩევა, სადაც ფუნქცია იღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

ამ მეთოდის სიზუსტე, დამოკიდებულია არჩეული საკვანძო წერტილების რაოდენობაზე და რაც მეტია შემთხვევით არჩეული წერტილების რაოდენობა, მით მეტია სიზუსტეც. თუმცა, დიდი რაოდენობის წერტილები ზრდიან გამოთვლების მოცულობას და მაშასადამე ადიდებენ გამოთვლების წარმოების დროს.

ვთქვათ, გვინდა ვიპოვოთ მრავალი ცვლადის ფუნქციის $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ მინიმუმი. ამ ამოცანის **მონტე-კარლოს მეთოდით** ამოხსნისათვის ვირჩევთ მინიმუმის წერტილის საძიებელ სიმპლექსს:

$$a_i \leq x_i \leq b_i,\; i = \overline{1,n}. \tag{2.17}$$

ა)საძიებელ სიმპლექსში შემთხვევით ვირჩევთ კვანძის წერტილებს ანუ ვირჩევთ $x_i^{(m)}$ ცვლადების მნიშვნელობებს:

$x_i^{(m)} = a_i + (b_i - a_i)random$,

სადაც $i = \overline{1,n}$, ხოლო m-არჩეულ წერტილთა რიცხვია.
$random$ - ოპერატორია, რომელიც გვაძლევს შემთხვევით რიცხვს $[0;1]$ შუალედიდან;

ბ)ვადარებთ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მნიშვნელობებს სიმპლექსის სხვადასხვა წერტილში. თუ ადგილი აქვს უტოლობას: $z^{(m)} \leq z^{(m+1)}$, მაშინ $z_{min} = z^{(m)}$, წინააღმდეგ შემთხვევაში - $z_{min} = z^{(m+1)}$;

გ)სიმპლექსის შემთხვევითი საკვანძო წერტილების შერჩევა ხორციელდება სასურველი ε სიზუსტის მიღწევამდე. პრაქტიკულად მიზანშეწონილია, რომ საკვანძო წერტილების m რაოდენობა აკმაყოფილებდეს პირობას: $m \geq \frac{(b-a)^n}{\varepsilon}$, სადაც $a = inf(a_i)$ და $b = sup(b_i)$.

P.S.მონტე-კარლოს მეთოდის გამოყენებისას უნდა გვახსოვდეს, რომ მინიმუმის ძებნისას,ჩვენ ვეძებთ არა ლოკალურ, არამედ გლობალურ მინიმუმს (უმცირეს მნიშვნელობას) არჩეულ შუალედში.

2.1.5. უპირობო ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

იპოვეთ$\min\limits_{x \in G} \boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{G} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, ამ ამოცანების ამოსახსნელად **Mathcad**-ის ბაზაზე, შევადგინოთ პროგრამა.

თუ მოცემულია რომ:

1. $f(x,y) = x^2 + 5y^2 + 2x + 10y + 25$;
2. $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-5)^2 + 10x^2 + 5$;
3. $f(x,y) = (x^2+1)^2 + y^2 + 5$;
4. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+2x^2+2y^2}$;
5. $f(x,y) = x^2 e^{-x^2} + y^2 + 9$.

ამოხსნა:

1.

ORIGIN:= 1

$f(x,y) := x^2 + 5 \cdot y^2 + 2 \cdot x + 10 \cdot y + 25$

$x := 0$ $y := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x := s_1 \; y := s_2$

$f(x,y) = 19$

2.

$ORIGIN := 1$

$f(x,y) := (x-1)^2 + (y-5)^2 + 10 \cdot x^2 + 5$

$y := 0 \; x := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} 0.091 \\ 5 \end{pmatrix}$

$y := s_2 \; x := s_1$

$f(x,y) = 5.909$

3.

$ORIGIN := 1$

$f(x,y) := \left(x^2 + 1\right)^2 + y^2 + 5$

$y := 0 \; x := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x := s_1 \; y := s_2$

$f(x,y) = 6$

4.

$ORIGIN := 1$

$$f(x,y) := \frac{x^2 + y^2}{1 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2}$$

$x := 0 \; y := 0$

Given

$s := \text{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y := s_2 \; x := s_1$

$f(x,y) = 0$

5.

$ORIGIN := 1$

$f(x,y) := x^2 \cdot e^{-x^2} + y^2 + 9$

$y := 0 \; x := 0$

Given

s := Minimize(f, x, y)

$s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x := s_1$ $y := s_2$

$f(x, y) = 9$

2.2. პირობითი ექსტრემუმი $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრული ფუნქციებისათვის,როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ განტოლებების ფორმა (ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდი)

ამოცანის დასმა:

ვთქვათ, მოცემულია მრავალი ცვლადის ფუნქცია $z = f(\boldsymbol{x})$, სადაც $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა $\min_{\boldsymbol{x} \in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, დამატებითი განტოლებების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = \overline{1, m}. \qquad (2.18)$$

ამოცანის ამოხსნა:

ამ ამოცანის ამოსახსნელად იყენებენ **ლაგრანჟის მამრავლთა** მეთოდს. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

აგებენ ახალ მიზნის ფუნქციას (ლაგრანჟის ფუნქციას) შემდეგნაირად:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(\boldsymbol{x}), \qquad (2.19)$$

სადაც λ_i-ლაგრანჟის ახალი უცნობი მამრავლებია. ამის შემდეგ, (2.19) ფუნქციას იკვლევენ უპირობო ექსტრემუმზე. ამისათვის, ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, კრიტიკული წერტილების საპოვნელად, ადგენენ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\ \ i = \overline{1, n} \\ \varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0,\ i = \overline{1, m} \end{cases}. \qquad (2.20)$$

ამ განტოლებათა სისტემიდან პოულობენ კრიტიკულ წერტილებს: λ_i და x_i^0. ამ წერტილების გამოსაკვლევად, იყენებენ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას, ისევე, როგორც უპირობო ექსტრემუმის ამოცანის შემთხვევაში.ამას გარდა დამატებით, კრიტიკულ წერტილებში უნდა განვიხილოთ შემოფარგვლის პირობებიც. შედეგად, გამოსაკვლევად მივიღებთ დიფერენციალურ კვადრატულ ფორმას:

$$d^2 z = \sum_{i,j=1}^{n-m} b_{ij} dx_i dx_j. \qquad (2.21)$$

მაგალითი:იპოვეთ $z = xy$ ფუნქციის მინიმუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა $y - x = 0$.

ამოხსნა: შევადგინოთ ამ ამოცანის შესაბამისი ლაგრანჟის ფუნქცია:

$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = xy + \lambda(y - x).$

ფერმას თეორემიდან მივიღებთ, რომ ადგილი აქვს სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0. \end{cases}$$

ამ სისტემის ამონახსნია (კრიტიკული წერტილი): $x = -\lambda = -y = 0$. კრიტიკული წერტილის გამოსაკვლევად, შევადგინოთ დიფერენციალური კვადრატული ფორმა:

$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}dy^2 = 2dxdy,$

მაგრამ $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x = 0 \Longrightarrow dy = dx$, ამიტომ კვადრატული დიფერენციალური ფორმა მიიღებს სახეს:

$d^2L = 2(dx)^2 > 0.$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $(\mathbf{0}; \mathbf{0})$ კრიტიკული წერტილი, $y - x = 0$ შემოფარგვლის პირობებში, არის $z = xy$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილი.

2.2.1. მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის ამოცანა, როცა შემოფარგვლის პირობებს აქვთ უტოლობების ფორმა

ამოცანის დასმა:

ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. გვაქვს ამ ფუნქციის მინიმიზაციის ამოცანა $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, დამატებითი უტოლობების ფორმის შემოფარგვლის პირობებით:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) < 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{2.22}$$

ამოცანის ამოხსნა:

ესამოცანა შეიძლება დავიყვანოთ მინიმიზაციის ამოცანაზე განტოლებების ტიპის შემოფარგვლის პირობებით.ამისათვის საკმარისია დამატებითი τ_i^2 ცვლადების შემოღება:

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) + \tau_i^2 = 0, \ i = \overline{1, m}. \tag{2.23}$$

ასეთ შემთხვევაში, მივიღებთ ამოცანას: ვიპოვოთ $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in G} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau^2})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi_i(\boldsymbol{x}) + \tau_i^2 = 0, \ i = \overline{1, m}$ შემოფარგვლის პირობებში, რომლის ამოხსნასაც ვაწარმოებთ **ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით**.

2.2.2. პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანების ამოხსნის მაგალითები **Mathcad-**ის ბაზაზე.

იპოვეთ $\min_{\boldsymbol{x}\in G} f(\boldsymbol{x})$, $G \subset \mathbb{R}^n$, თუ გვაქვს შემოფარგვლის პირობები $\varphi_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = \overline{1,m}$ სადაც:

1. $f(x,y) = xy$ და $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$;
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ და $\varphi(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$;
3. $f(x,y,z) = xyz$ და $\varphi_1(x,y,z) = x + y + z - 5 = 0$,
   $\varphi_2(x,y,z) = xy + yz + zx - 8 = 0$;
4. $f(x,y) = e^{-xy}$ და $x + y - 9 = 0$;
5. $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ და $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

ამოხსნა:

1.

ORIGIN:= 1

$f(x,y) := x\cdot y$

$x := 0$ $y := 0$

Given

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$s := \mathrm{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{pmatrix}$

$x := s_1$ $y := s_2$

$f(x,y) = 0.5$

2.

ORIGIN:= 1

$f(x,y) := x^2 + y^2$

$y := 0$ $x := 0$

Given

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0$

$s := \mathrm{Minimize}(f, x, y)$

$s = \begin{pmatrix} 1.385 \\ 0.922 \end{pmatrix}$

$y := s_2$ $x := s_1$

$f(x, y) = 2.769$

3.

$ORIGIN := 1$

$f(x, y, z) := x \cdot y \cdot z$

$y := 0$ $x := 0$ $z := 0$

Given

$x + y + z - 5 = 0$ $x \cdot y + y \cdot z + x \cdot z - 8 = 0$

$s := Minimize(f, x, y, z)$

$$s = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 1.998 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x := s_1$ $y := s_2$ $z := s_3$

$f(x, y, z) = 4$

4.

$ORIGIN := 1$

$f(x, y) := e^{-x \cdot y}$

$x := 0$ $y := 0$

Given

$x + y - 9 = 0$

$s := Minimize(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$y := s_2$ $x := s_1$

$f(x, y) = 0$

5.

$ORIGIN := 1$

$f(x, y) := 6 - 4 \cdot x - 3 \cdot y$

$y := 0$ $x := 0$

Given

$x^2 + y^2 - 1 = 0$

$s := Minimize(f, x, y)$

$$s = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

$x := s_1$ $y := s_2$

$f(x, y) = 1$

2.3. წრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

საინჟინრო პრაქტიკის ბევრ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანა, რომელისთვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$წარმოადგენს ამონახსნის ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებულ შეზღუდვის პირობე-ბს აქვს წრფივი განტოლებების ან უტოლობების სახე.

ასეთ ამოცანებს,**წრფივი დაპროგრამების ამოცანები** ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანები.

ამოცანა:მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან – თივა, სილოსი და კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

პროდუქტები	საკვები ნივთიერებები		
	ცილა (გ/კგ)	კალციუმი (გ/კგ)	ვიტამინები
თივა	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
სილოსი	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
კონცენტრატე ბი	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით შეადგენს არანაკლებ 2000გ და 210გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დოზირებულია და უნდა შეადგენდეს 87მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 რუბლია, სილოსისა – 200 რუბლი და კონცენ-ტრატისა – 600 რუბლი.

ამოხსნა:მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია ანუ შევადგი-ნოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, კვების რაციონის ოპტიმალური რაოდენობაა:

თივისა – $x1$კგ, სილოსისა – $X2$კგ და კონცენტრატისა – X3კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = 150 \cdot X1 + 200 \cdot X2 + 600 \cdot X3. \quad (2.24)$$

ამოცანის პირობებში საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზირება.

მოვახდინოთ შეზღუდვათა ფორმალიზება: დღე-ღამეში ცილის რაოდენობა 2000გ, კალციუმისა 210გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად არის 87მგ:

$$\begin{cases} 50 \cdot X1 + 70 \cdot X2 + 180 \cdot X3 \geq 2000 \\ 10 \cdot X1 + 6 \cdot X2 + 3 \cdot X3 \geq 210 \\ 2 \cdot X1 + 3 \cdot X2 + 1 \cdot X3 = 87 \\ X1 > 0, X2 > 0, X3 > 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქცია:

$$f(x1, x2, x3) := 150 \cdot x1 + 200 \cdot x2 + 600 \cdot x3,$$

ცვლადებისსაწყისიმიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

$$x3 := 1.$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში.

Given

$x1 \geq 1$

$x2 \geq 1$

$x3 \geq 1$

$50 \cdot x1 + 70 \cdot x2 + 180 \cdot x3 \geq 200($

$10 \cdot x1 + 6 \cdot x2 + 3 \cdot x3 \geq 21($

$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 1 \cdot x3 = 8?$

R:=Minimize(f,x1,x2,x3)

მიზნისფუნქციისმინიმუმისწერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მიზნისფუნქციისმინიმალურიმნიშვნელობაა:

$$f\left(R_0, R_1, R_2\right) = 6430.556$$

2.3.1. სატრანსპორტო გადაზიდვების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,...) ინახება *m* საწყობში და გამოიყენება *n*პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში, ...).

a_i არისპროდუქტის მარაგი*i*-ურ საწყობში$(a_i > 0)$; b_j –განაცხადები საქონელზე მოხმარების j-ურ პუნქტში; c_{ij} –*i*-ური საწყობიდან მოხმარების *j*-ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება,$c_{ij} > 0,\ i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებისა.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (2.26)$$

უნდა ავირჩიოთგადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადა-ზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

ამოხსნა: ვთქვათ, x_{ij} საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება i-ური პუნქტიდან მოხმარების j-ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min . \qquad (2.27)$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ (j = \overline{1,n}). \qquad (2.28)$$

რადგან გასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \ , (i = \overline{1,m}). \qquad (2.29)$$

ცხადია, რომ

$$X_{ij} \geq 0 . \qquad (2.30)$$

ამრიგად ვღებულობთ წრფივი დაპროგრამების (2.27)-(2.30) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი:

ამოცანა: რეგიონში არის ორი ცემენტის ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღე-ღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შევადგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

ქარხნები	ცემენტის წარმოება ტ/დღ	1ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება		
		კომბ.1	კომბ. 2	კომბ. 3

I ქარხანა	$a_1=40$	$c_{11}=10$	$c_{12}=15$	$c_{13}=25$
II ქარხანა	$a_2=60$	$c_{21}=20$	$c_{22}=30$	$c_{23}=30$
	ცემენტის მოხმარება ტ/დღ	$b_1=50$	$b_2=20$	$b_3=30$

ამოხსნა:ამოცანისამოსახსნელადვადგენთმათემატიკურმოდელს.

ვთქვათ, X_{ij} -ცემენტისრაოდენობაა$\left(i=\overline{1,2}\right)$ ორიქარხნიდანგადაზიდული$\left(j=\overline{1,3}\right)$სამბინათსამშენებლოკომბინატში. მაშინ, **მიზნის ფუნქციას**აქვსშემდეგისახე:

$$L(X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}C_{ij}\cdot X_{ij}\rightarrow \min$$

გვაქვს შემდეგი სახის **შეზღუდვები**:

$$\sum_{i=1}^{2}X_{ij}=b_j\ ,\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{3}X_{ij}=a_i\ ,\ \left(i=\overline{1,2}\right)$$

$$X_{ij}\geq 0\,.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად **შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:**

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

გადაზიდვისფასების მატრიცა

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის საწყისი მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამიბინათსამშენებლოკომბინატისმოთხოვნა

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვებისმიზნისფუნქცია:

$$L(X) := \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ცვლადებისსაწყისმიახლოვებები

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \mathrm{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის **მინიმუმის წერტილი**

$$R=\begin{pmatrix}20 & 20 & 0\\ 30 & 0 & 30\end{pmatrix}$$

გადაზიდვებისს**ოპტიმალური ფასი**

$$L(R)=2000$$

2.3.2. რესურსების ოპტიმალური განაწილების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \dots, R_m \quad (2.31)$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \dots, b_m \quad (2.32)$$

ამ რესურსების გამოყენებით შეიძლება ვაწარმოოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \dots, T_n \quad (2.33)$$

T_jსაქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა R_i რესურსის a_{ij}, $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ ერთეული. R_iრესურსის თითოეული ერთეული ღირს d_iლარი. T_jსაქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა C_j $(j=\overline{1,n})$ ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქავს T_j $(j=\overline{1,n})$ საქონლის K_j ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

ისმის კითხვა:რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს **მაქსიმალური მოგების** რეალიზება?

ამოხსნა:ამოცანის პირობები ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \le K_i \ , \ \ i = \overline{1,n} \ . \tag{2.34}$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არაუმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ ღებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (\mathrm{i} = \overline{1,m})\,. \tag{2.35}$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია. T_jსახის საქონლის ერთეული რაოდენობის s_j-თვითღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \ \ (j = \overline{1,n})\,. \tag{2.36}$$

T_jსაქონლის, ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა q_jმოგება ტოლია მის გასაყიდ c_j ფასსა და s_jთვითღირებულებას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j \ . \tag{2.37}$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i) \cdot x_j \to \max\,. \tag{2.38}$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

ამოცანა: სართავი ფაბრიკა ნართის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს – სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში

უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის ნართის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

ნედლეულის ტიპი	1ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები		ნედლეულის რაოდენობა (ტ)
	სახეობა 1	სახეობა 2	
შალი	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
კაპრონი	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
აკრილი	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
1 ტ ნართის რეალიზაციით მიღებული მოგება	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

შევადგინოთ ნართის წარმოების ოპტიმალური წლიური გეგმა, მოგების მაქსიმიზაციისათვის.

ამოხსნა:ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა მათემატიკის ენაზე. ვთქვათ, x_1 – პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და x_2 – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 600 \\ 0.1 \cdot X1 + 0.6 \cdot X2 \le 620 \\ 0.4 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 500 \end{cases}$$

მიზნის ფუნქციას (სუფთა მოგებას) ექნება შემდეგი სახე:

$$L(X1, X2) = 1100 \cdot X1 + 900 \cdot X2 \to \max$$

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

ამოცანის მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x1, x2) := 1100 \cdot x1 + 900 \cdot x2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები:

$x1 := 1$

$x2 := 1$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$x1 \geq 0$

$x2 \geq 0$

$0.5 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 \leq 600$

$0.1 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 \leq 620$

$0.4 \cdot x1 + 024 \cdot x2 \leq 500$

$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 1199.664 \\ 0.839 \end{pmatrix}$$

ამოცანისამონახსნია:

$$f(R_0, R_1) = 1320385.9$$

2.4. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots x_n), \qquad (2.39)$$

როცა შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია ტოლობების სახით:

$$S_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \; i = \overline{1,k} \quad ,(2.40)$$

ხოლო მეორე ნაწილი - უტოლობების სახით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0,\ j = \overline{1,m} \quad .(2.41)$$

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა:

ამოცანა: ვიპოვოთ არაწრფივი $f(x1, x2)$ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x1, x2) = 6x1 - (x1)^2 + x2$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 \le 24 \\ x1 + 2 \cdot x2 \le 15 \\ 3x1 + 2 \cdot x2 \le 24 \\ x2 \le 4 \\ x1 \ge 0, \\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

ამოხსნა:

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

მიზნის ფუნქციაა:

$$f(x1, x2) := 6 \cdot x1 + x2 - x1^2$$

ამოცანისცვლადებისსაწყისიმიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \ge 0$$

$$4 \ge x2 \ge 0$$

$$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \le 24$$

$$x1 + 2 \cdot x2 \le 15$$

$$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 24$$

$$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$$

მაქსიმუმის წერტილია:

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი:

$$f(R_0, R_1) = 13$$

2.4.1. არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნა Mathcad-ის ბაზაზე

განვიხილოთ არაწრფივი დაპროგრამების ზოგადი ამოცანის ამოხსნის კონკრეტული მაგალითი. მაშასადამე, გვაქვს არაწრფივი მიზნის ფუნქცია და შემოფარგვლის პირობები, რომელთაგან ზოგი ტოლობის ფორმისაა და ზოგიც – უტოლობისა.

ამოცანა: იპოვეთ $\min f(\boldsymbol{x})$, თუ $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2$ და შეზღუდვის პირობებს აქვთ სახე:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + 3x_2 < 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 x_3^2 - x_1 x_2 > 0 \end{cases}. \qquad (2.42)$$

ამოხსნა:

შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა Mathcad-ზე:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$f(x) := (x_1)^2 + 3\cdot(x_2)^2 + 2\cdot(x_3)^2 + (x_4)^2$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$x_1 + (x_2)^2 + 3\cdot x_2 < 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 5$$

$$x_1\cdot(x_3)^2 - x_1\cdot x_2 > 0$$

$$s := \mathrm{Minimize}(f, x)$$

$$s = \begin{pmatrix} 1.286 \\ -0.518 \\ 0 \\ 4.232 \end{pmatrix} \qquad x := s$$

$f(x) = 20.371$

როგორც ვხედავთ, Mathcad პროგრამის მათემატიკური უზრუნველ-ყოფა, საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ოპტიმიზაციის საკმაოდ რთული ამოცანებიც.

2.5. მრავალკრიტერიუმიანი ექსტრემალური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

პრაქტიკაში, ხშირად, გვხვდება ისეთი ექსტრემალური ამოცანებიც, როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს მრავალკრიტერიუმიანი მიზნის ფუნქციები ანუ გვაქვს რამოდენიმე კრიტერიუმი, რომელთაგანზოგი მოითხოვს მიზნის ფუნქციის მინიმიზაციას, ზოგიც – მაქსიმიზაციას. ასეთი ამოცანების ამოსახსნელად, შინაარსიდან გამომდინარე არსებობს რამდენიმე მიდგომა: 1)როცა შემოფარგვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს ერთნაირი აზრის(min ან max) რამდენიმე მიზნის ფუნქცია, ვიყენებთ საჯარიმო, წონითი ფუნქციების მეთოდს ანუ შესაბა-მისად, გვაქვს მინიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა ან მაქსიმიზაციის მრავალკრიტერიული ამოცანა; 2)როცა შემოფარ-გვლის პირობებთან ერთად, გვაქვს სხვადასხვა აზრის (min და max) რამდენიმე მიზნის ფუნქცია, ვიყენებთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციის აგების მეთოდს.

2.5.1. მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციისა და მინიმიზაციის ამოცანები

განვიხილოთ მრავალკრიტერიული მაქსიმიზაციის ამოცანა:

იპოვეთ: $\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $\max g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ თუ შეზღუდვების ერთი ნაწილი მოცემულია განტოლებებით:

$$S_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\,, i = \overline{1,k}\ , \tag{2.43}$$

ხოლო შეზღუდვების მეორე ნაწილი მოიცემა უტოლობებით:

$$\Psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0\,,\ j = \overline{1,m}\,. \tag{2.44}$$

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად გვაქვს **ორი ძირითადი მეთოდი:**

1) ასეთ შემთხვევაში, ვადგენთ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2.45}$$

ცხადია, რომ ჯამი მიაღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა თითოეული შესაკრები მიაღწევს მაქსიმუმს. მაშასადამე, ჩვენი მრავალკრიტერიული ამოცანა შეგვიძლია დავიყვანოთ ცნობილ ერთკრიტერიალურ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.46}$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1,k}\ , \tag{2.47}$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, j = \overline{1,m}\,. \tag{2.48}$$

2) არსებობს სხვა მიდგომაც, როცა გვაქვს რამოდენიმე ერთი აზრის (max ან min) მიზნის $\min f_i\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ფუნქცია, ადგენენ სპეციალური ტიპის მიზნის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_i \alpha_i \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.49}$$

სადაც $\sum_i \alpha_i = 1,\ \alpha_i > 0$. ეს კოეფიციენტები შეირჩევა ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე. ის კოეფიციენტი იქნება უფრო მეტი სიდიდის, რომლის შესაბამისი $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციის მინიმიზაციაც უფრო მნიშვნელოვანია.

ამ შემთხვევაში, ამოცანა დაისმის შემდეგნაირად:

$$\min I(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.50}$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1,k}\ , \tag{2.51}$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0,\ j = \overline{1,m}\,. \tag{2.52}$$

2.5.2. მრავალკრიტერიული, ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნა

განვიხილოთ მრავალკრიტერიული ურთიერთსაპირისპირო კრიტერიუმების მქონე ამოცანის ამოხსნის მეთოდი.

მოცემულია ამოცანა: იპოვეთ ისეთი $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ წერტილი, რომლისთვისაც, ჰილბერტის სივრცის წინასწარ მოცემული ორი $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ფუნქციიდან, ერთი აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ხოლო მეორე მინიმალურს $\min g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. ამასთანავე, ეს წერტილები უნდა აკმაყოფილებდნენ შემოფარგვლის (შეზღუდვების) პირობებს:

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1,k}\ , \tag{2.53}$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le 0, j = \overline{1,m}. \tag{2.54}$$

ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად, ვადგენთ სპეციალური ტიპის ფუნქციას:

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2.55}$$

ცხადია, რომ სხვაობა აღწევს მაქსიმუმს, როცა საკლებია მაქსიმალური და მაკლებია მინიმალური. მაშასადამე, ჩვენი ამოცანა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

$$\max I(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.56}$$

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\,, i = \overline{1,k}\ , \tag{2.57}$$

$$\Psi_j(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \le 0, j = \overline{1,m}. \tag{2.58}$$

2.6. დინამიკური დაპროგრამება

განვიხილოთ**უპირობო ოპტიმიზაციის** ამოცანა:

$$\min_{(t,x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{2.59}$$

დინამიკური დაპროგრამების მეთოდი საშუალებას იძლევა$n+1$ ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანა დავიყვანოთ n ცვლადის ფუნქციის ოპტიმიზაციის ამოცანამდე, თუ შესაძლებელია საწყისი ფუნქციის **განცალებადი** წარმოდგენა:

$$f(t, \boldsymbol{x}) = f_1\big(t, f_2(\boldsymbol{x})\big). \tag{2.60}$$

ასეთ შემთხვევაში (2.59) ამოცანა დაიყვანება (2.61) ამოცანაზე:

$$\min_{(t,x)} f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \min_t f_1\left(t, \min_x f_2(\boldsymbol{x})\right). \tag{2.61}$$

ისმის კითხვა: როდისაა შესაძლებელი (2.59) ამოცანის შეცვლა (2.61) ამოცანით ?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა **მიტტენის** თეორემა: **თუ არსებობს $\boldsymbol{f(t,x)}$ ფუნქციის ისეთი განცალებადი (2.60) წარმოდგენა, რომ $\boldsymbol{f_1}$ ფუნქცია არაა მონოტონურად კლებადი თავისი მეორე–ვექტორული $\boldsymbol{x}$ ცვლადის მიმართ, მაშინ**

$$\operatorname*{Opt}_{(t,x)} f(t, \boldsymbol{x}) = \operatorname*{Opt}_t \left(f_1 \left(t, \operatorname*{Opt}_x \big(f_2(\boldsymbol{x})\big) \right) \right). \tag{2.62}$$

$\operatorname*{Opt}_{(t,x)}$ – ოპტიმუმის ქვეშ იგულისხმება მაქსიმუმიც და მინიმუმიც ანუ (2.62) ფორმულა ძალაშია, როგორც მაქსიმიზაციის, ასევე, მინიმიზაციის ამოცანებისათვის.

იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს შეზღუდვები სივრცულ x ცვლადებზე ანუ პირობითი ექსტრემუმის ამოცანა, რომელიც გვეუბნება რომ $\boldsymbol{x} \in \Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, მაშინ (2.62) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$\operatorname*{Opt}_{(t,x)} f(t, \boldsymbol{x}) = \operatorname*{Opt}_t \left(f_1 \left(t, \operatorname*{Opt}_{x \in \Omega_n} \big(f_2(\boldsymbol{x})\big) \right) \right). \tag{2.62}$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. იპოვეთ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ ფუნქციის ექსტ-რემუმები ანალიზურად;
2. იპოვეთ $f(x,y) = x^2y^2(6 - x - y)$ ფუნქციის ექსტრემუმები ანა-ლიზურად;
3. იპოვეთ $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ფუნქციის მაქსიმუმები და მინიმუმები;
4. იპოვეთ $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ ფუნქციის მინიმუმი გრადიენტული დაშვების მეთოდით;
5. იპოვეთ $f(x,y,z) = xyz$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმები ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით, თუ შემოფარგვლის პირობებს აქვთ სახე: $\begin{cases} \varphi_1 = x + y - z - 3 = 0 \\ \varphi_2 = x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$.
6. იპოვეთ $g(x,y) = x^2 + y^2$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. ამოცანა ამოხსენით ანალი-ზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
7. იპოვეთ $g(x,y) = 6 - 4x - 3y$ ფუნქციის პირობითი ექსტრემუმი, თუ შემოფარგვლის პირობაა: $x^2 + y^2 = 1$. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და Mathcad პროგრამის გამოყენებით. გაანალიზეთ შედეგები;
8. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი მოცემული A(1;0) წერტილიდან$4x^2 + 9y^2 = 36$ ელიფსამდე;
9. იპოვეთ მანძილი $y = x^2$ პარაბოლასა და $x - y = 5$ წრფეს შორის;
10. იპოვეთ $x^2 + y^2 = R^2$ წრეში ჩახაზული უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდები;
11. იპოვეთ იმ ცილინდრის უდიდესი სრული ზედაპირის ფარ-თობი, რომელიც ჩახაზულია R რადიუსიან ბირთვში;
12. იპოვეთ წრფივი დაპროგრამების ამოცანების ამონახსნი Mathcad პროგრამის გამოყენებით:

ა)$x_1 + x_2 + x_3 \to max$, შემოფარგვლის პირობები:$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$;

ბ)$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$,შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4} \end{cases};$$

გ) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \to max$, შემოფარგვლის პირობები:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 30 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 40 \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 25 \end{cases};$$

13. ვთქვათ მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე მიდის შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ მეტალი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75,11 და 2 კგ პლასტმასა 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის *X1, X2*და *X3*რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გამოშვების მაქსიმალური მოცულობა ფულად გამოსახულებაში, თუ ნაკეთობის ფასები კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს;

14. სამი სახეობის A,BდაC ნაკეთობის საწარმოებლად გამოიყენება *T1, T2, T3*ტიპის ნედლეული. ამასთან *T1*და*T3*ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

15.

ნედლეულის ტიპი	1კგ ნედლეულის ფასი (ლარი)	ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)			ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)
		A	B	C	
T_1	$d_1=2$	$a_{11}=1$	$a_{12}=3$	$a_{13}=a$	$b_1=3000$
T_2	$d_2=1$	$a_{21}=4$	$a_{22}=1$	$a_{23}=3$	-
T_3	$d_3=b$	$a_{31}=6$	$a_{32}=5$	$a_{33}=2$	$b_3=3320$
ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)		$c_1=6b+12$	$c_2=5b+22$	$c_3=c$	

განსაზღვრეთმოგებისმაქსიმიზაციისმიზნითპროდუქციისწარმოებისოპტიმალურიგეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათემა-ტიკური მოდელი.

განიხილეთ *(a,b,c)*პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

a	b	c
2	1	17
2	2	19
2	3	21

16. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები:

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 7$$
$$10x_1 - x_2 \leq 8 \quad ;$$
$$-18x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0.$$

17. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2,$$

შემდგი შეზღუდვებით:

$$x_1 + x_2 = 180,$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0.$$

18. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2,$$

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases};$$

19. იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \end{cases};$$

20. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \ge 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \ge 0 \end{cases};$$

21. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$
$$x_1 + x_2 - 5 = 0;$$

22. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 1)\cdot(x_1 - 2)\cdot(x_1 - 3) + x_3$$
$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \ge 0 \quad ;$$
$$5 - x_3 \ge 0$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$$

23. იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \ge 0, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

24. იპოვეთ $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ფუნქციის ექსტრემუმები;

25. იპოვეთ $x_1^2 + x_2^2 \rightarrow exstr$, თუ $3x_1 + 4x_2 = 1$;

26. იპოვეთ $x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow exstr$, თუ $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$;

27. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \rightarrow min$, თუ $2x_1 - x_2 + x_3 \le 5$, $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით. შედეგები შეადარეთ;

28. $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 \rightarrow min$, თუ $x_1 - x_2 - x_3 + 1 \le 0$, $-x_1 - 3x_2 + 3 \le 0$. ამოხსენით ლაგრანჟის მამრავლთა მეთოდით და Mathcad პროგრამით. შედეგები შეადარეთ;

29. $x_1 - x_2^2 \to exstr,\ \begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0 \end{cases};$

30. $x_1^2 + (x_2 - 4)^2 \to min,\ \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ 4x_1^2 + x_2^2 \ge 4 \end{cases}.$

ლიტერატურა

1. **Anrew F.Sigel**. Practical Buisiness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000,

2. **А.А. Мицкевич**. Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, М., 1995,

3. **Т.Пу**. Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., М., 2002,

4. **В.В. Лебедев**. Математическое моделирование социально-экономических процессов, М., 1997,

5. **О.Н. Салманов**. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003,

6. **ნ.ჯიბლაძე, ა.თოფჩიშვილი**. სტატიკურიოპტიმიზაციისრიცხვითიმეთოდები, მართვისსისტემებისინსტიტუტი, თ., 2001,

7. **Gilbert A.Cherchill**. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996,

8. **В. Дьяконов**. Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001,

9. **Т.А. Обгадзе**. Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, М., 2002,

10.**Т.А.Обгадзе, В.Г. Прокошев**. Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999,

11**. Christopher Dougherty**. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992, 12.**В. Дьяконов**. Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001,

13.**Т.А. Обгадзе, З.Н.Цвераидзе**. Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Т., 2006,

14. **თამაზ ობგაძე**. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), I ტომი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თ., 2006,

15. **Ф. Мостеллер**. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., М., 1971,

16. **А.Я. Яглом, И.М. Яглом**. Вероятность и информация, М., 1973,

17. **Ю.В. Прохоров. Ю.А. Розанов**. Теория вероятностей, СМБ, М., 1973,

18. **В.Е. Гмурман**. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., М., 1975,

19. **Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров**. Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения, М., 1973,

20. **Т.А. Обгадзе**. Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации,№4(11), 2006,

21.**Н.Н.Моисеев,Ю.П.Иванилов**.Методы оптимизации, Наука, М., 1978,

22.**Ф.П.Васильев**. Численные методы решения экстремальных задач, Наука, М.,1988,

23.**Э.Полак**. Численные методы оптимизации. Евиный подход, Мир, М., 1974,

24.**М.Атане, П.Фалб**.Оптимальное управление,Машиностроение,М.,1968,

25.**Э.П.Сейдж, Ч.С.Уайт**. Оптимальное управление системами, Мир, М., 1982,

26.**Э.М.Галеев,В.М.Тихомиров**. Оптимизация, теория, примеры, задачи, УРСС, М., 2000, 27.**М.Мину**. Математическое программирование. Теория и алгоритмы, пер. с франц., наука, М.,1990,

28.**L.G.Mitten**.Composition Prinsiples for Synthesis of Optimal Multistage Processes, Operations Research 12,1964,

29. **L.G.Mitten, A.R.Warburton.** Implicit Enumeration Procedrures, Working Paper 251, Faculty of commerce and Business Administration, Univercity of British Columbia, Vancouver, Canada, 1973.

თავიIII.ვარიაციული აღრიცხვა

ვარიაციული აღრიცხვა შეისწავლის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. იმ ამოცანებს, რომელშიც მოითხოვება ფუნქციონალის გამოკვლევა, მაქსიმუმზე ან მინიმუმზე **ვარიაციული ამოცანები** ეწოდებათ.

ფიზიკისა და მექანიკის ამოცანათა უმრავლესობა დაიყვანება რომელიღაც, შესაბამისი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე. ასეთი ფორმულირების შემთხვევაში, ამ კანონებს შესაბამისად, ფიზიკის ან მექანიკის **ვარიაციულ პრინციპებს** უწოდებენ. ვარიაციულ პრინციპებს მიეკუთვნება: ***უმცირესი ქმედების პრინციპი, ენერგიის შენახვის კანონი, იმპულსის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონი, მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონი, ველის სხვადასხვა კლასიკური და რელატივისტური თეორიის ვარიაციული პრინციპი, ფერმას ოპტიკური პრინციპი, კასტილიანოს ვარიაციული პრინციპი დრეკადობის თეორიაში*** და ა.შ.

3.1. ვარიაციული აღრიცხვისკლასიკური ამოცანები

ვარიაციული აღრიცხვის განვითარება დაიწყო 1696 წლიდან და ჩამოყალიბდა დამოუკიდებელ მათემატიკურ დისციპლინად, საკუთარი კვლევის მეთოდებით, გენიალური **ლეონარდ ეილერის და იოჰან ბერნულის** მოღვაწეობის შედეგად.

იმისათვის, რომ ვიქონიოთ წარმოდგენა ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანებზე, განვიხილოთ რამდენიმე კლასიკური ამოცანა.

3.1.1. გედეზიური წირები სიბრტყეზე

დავიწყოთ უმარტივესი ამოცანით: **რას წარმოადგენს ბრტყელი, უმოკლესი სიგრძის მქონე წირი, რომელიც სიბრტყის რომელიმე ორ წერტილს აერთებს?**

ამ ამოცანის მათემატიკური ფორმულირებისათვის, ვაფიქსირებთ რაიმე, ორ $A(x_1;y_1)$ და $B(x_2;y_2)$ წერტილს XOY სიბრტყეზე. დავუშვათ, რომ $x_1 < x_2$ და განვიხილოთ ამ ორი წერტილის

შემაერთებელი გლუვი $y = f(x)$ წირი $x \in [x_1; x_2]$, რომლისთვისაც $y_1 = f(x_1)$ და $y_2 = f(x_2)$.

ასეთ შემთხვევაში, ამ ორი წერტილის შემაერთებელი წირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$I(f) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{3.1}$$

ამ ამოცანაში, საპოვნელია ისეთი $y = f(x)$ ფუნქცია, რომლის-თვისაც (3.1) ფუნქციონალი მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას.

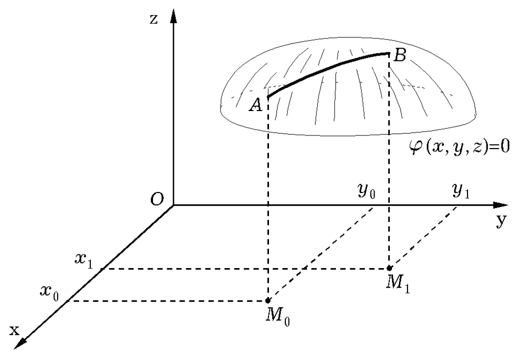
ცხადია, რომ ასეთი წირი ევკლიდურ სივრცეში, იქნება ამ ორი წერტილის შემაერთებელი **წრფის მონაკვეთი**.

3.1.2. გეოდეზიური წირები ნებისმიერ ზედაპირზე

ვთქვათ, გვაქვს ნებისმიერი ორი წერტილი რაიმე ზედაპირზე, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{3.2}$$

ვიპოვოთ ამ ზედაპირზე მდებარე და მოცემულ ორ წერ-ტილზე გამავალი, უმცირესი სიგრძის მქონე წირი ნახ. 3.1.



ნახ. 3.1. გეოდეზიური წირის პოვნის სქემა

ასეთ წირებს, მოცემული ზედაპირის **გეოდეზიური წირები** ეწოდება. მაგალითად, სიბრტყეზე გეოდეზიური წირია წრფე, სფეროს ზედაპირზე გეოდეზიური წირია,ცენტრზე გამავალი დიდი კვეთის რკალი, რომელიც ამ ორ წერტილზე გადის.

ამ ამოცანის ფორმალიზაციისათვის, დავუშვათ რომ (3.2) ფუნქცია არის გლუვი და საძიებელი წირი, შეგვიძლია ჩავწეროთ განტოლებებით: $y = y(x)$ და $z = z(x)$ როცა $x \in [a; b]$. მაშინ საძიებელი წირის სიგრძე იქნება:

$$L[y(x); z(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} dx. \quad (3.3)$$

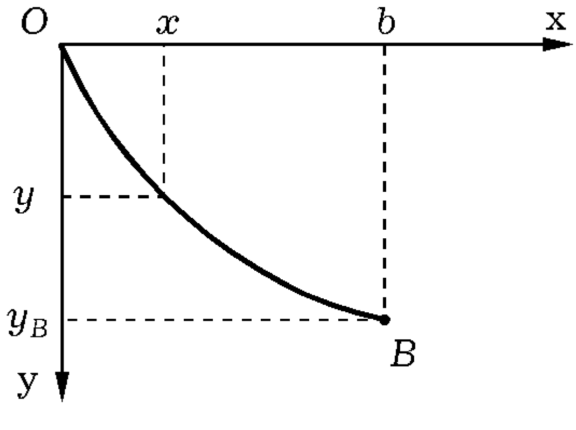
ამოცანა დაიყვანება $x \in [a; b]$ შუალედში, იმ ორი გლუვი $y = y(x)$ და $z = z(x)$ ფუნქციის პოვნაზე, რომლებიც აკმაყო-ფილებენ განტოლებებს:

$$F(x. y(x), z(x)) \equiv 0, \;\; y(x_0) = y_0, \; z(x_0) = z_0, \; y(x_1) = y_1, \; z(x_1) = z_1, \quad (3.4)$$

დაანიჭებენ (3.3) ფუნქციონალს მინიმალურ მნიშვნელობას.

3.1.3. ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ

მოცემულია ვერტიკალურ სიბრტყეში, ერთ ვერტიკალზე არა მდებარეორი O და B წერტილი. **მოცემულ სიბრტყეში, იპოვეთ ამ წერტილების შემაერთებელი ისეთი წირი OB, რომელზეც სიმძიმის გავლენით მოძრაობისას, მატერიალურ წერტილს დაჭირდება უმცი-რესი დრო O წერტილიდან B წერტილში მოსახვედრად** ნახ. 3.2.



ნახ. 3.2. ბრახისტოხრონის ამოცანის სქემა

იგივე ამოცანა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: **როგორ დავაპროექტოთ სახლის სახურავი, რომ წვიმის წვეთები სახურავიდან ჩამოცურდნენ უმცირეს დროში ?**

დავუშვათ, რომ მატერიალური წერტილის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია და უგულებელვყოთ ხახუნის ძალა. დროის იმ მომენტისათვის, როცა OXY სიბრტყეში მოძრავი სხეულის კოორდინატა OY ღერძზე იქნება y, სხეული დაკარგავს mgy სიდიდის პოტენციალურ ენერგიას (სადაც mმასაა, g−თავისუფალი ვარდნის აჩქარება). შესაბამისად, მიიღებს კინეტიკურ ენერგიას, რომლის სიდიდეც იქნება: $\frac{mv^2}{2}$ სადაც v−წერტილის სიჩქარეა. მაშინ, მექანიკური ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე, გვექნება განტოლება:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy, \tag{3.5}$$

მივიღებთ რომ:

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{3.6}$$

ჩავთვალოთ, რომ საძიებელი წირის განტოლებაა $y = y(x)$, სადაც $y(x)$ მოცემულ $[a; b]$ შუალედზე განსაზღვრული, გლუვი წირია, მაშინ მივიღებთ რომ

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{dt}, \tag{3.7}$$

სადაც ds−წირის რკალის სიგრძის დიფერენციალია, t− დრო. თუ გავითვალისწინებთ (3.6) ტოლობას, მაშინ გვექნება

$$\sqrt{2gy}dt = \sqrt{1+(y')^2}dx, \tag{3.8}$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ:

$$dt = \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{3.9}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ O წერტილიდან, სიმძიმის ძალის გავლენით B წერტილამდე დაშვებას დაჭირდება დრო:

$$t = \int_0^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{3.10}$$

საწყისი და საბოლოო წერტილების კოორდინატები გვაძლევს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(0) = 0,\ y(b) = y_B. \qquad (3.11)$$

მაშასადამე, უნდა ვიპოვოთ (3.11) სასაზღვრო პირობების დამაკმაყოფილებელი, ისეთი გლუვი $y(x)$ ფუნქცია, რომლის-თვისაც $t \to min$.

ეს ამოცანა ამოხსნეს იაკობ ბერნულმა, ლოპიტალმა და ისააკ ნიუტონმა.

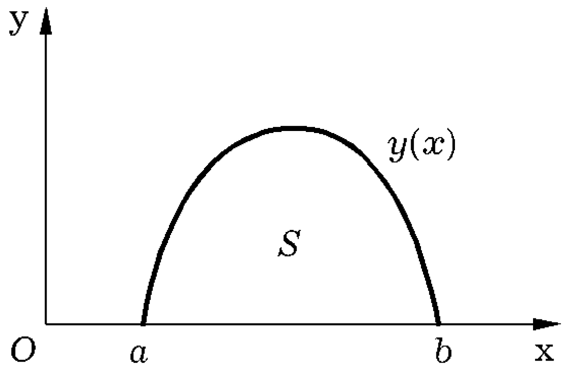
3.1.4. დიდონის იზოპერიმეტრული ამოცანა

ჩვენ წელთა აღრიცხვამდე IX საუკუნეში, ფინიკიელმა დედოფალმა დიდონმა, რომელიც გაურბოდა ქ.ტირის წარჩინებულებს თანმხლებ პირებთან ერთად, მიმართა აფრიკის ჩრდილოეთით მდებარე, ხმელთაშუა ზღვის ნაპირებს. აქ მან გადაწყვიტა საბოლოოდ დასახლება.

დიდონმა ადგილობრივ მმართველს მიმართა თხოვნით, მიეცათ მისთვის დასასახლებლად მიწის ნაკვეთი, რომელსაც შემოფარგლავდა მისი ხარის ტყავისაგან დამზადებული ქამარი. გულუბრყვილო მმართველი დათანხმდა. დიდონმა, ამის შემდეგ, ქამარი დაჭრა წვრილ ზოლებად და გადააბა ერთმანეთს. ამ ქამრით მან მიიზომა სანაპიროს საკმაოდ დიდი ტერიტორია და აქ დააარსა ქალაქი კართაგენი.

ამოცანა, რომელიც დასვა დიდონმა, შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: **ვიპოვოთ მოცემული L სიგრძის ისეთი წირი, რომელიც სიბრტყეზე შემოფარგლავს უდიდესი სიდიდის ფართობს**.

მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზება. ჩავთვალოთ რომ ზღვის ნაპირი სწორი ხაზია (წრფე). OXYმართკუთხა კოორდინატთა სისტემა მოვგეზოთ ისე, რომ OX ღერძი დაემთხვეს ზღვის ნაპირს. ჩავთვალოთ, რომ ზღვის სანაპიროს დიდონის ნაწილია $[a;b]$ მონაკვეთი, ხოლო მრუდწირული ნაწილი არის გლუვი $y = y(x)$ წირი ნახ. 3.3.



ნახ. 3.3. დიდონის ამოცანის სქემა

ცხადია, რომ

$$y(a) = y(b). \tag{3.12}$$

საზღვრის მრუდწირული ნაწილის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx, \tag{3.13}$$

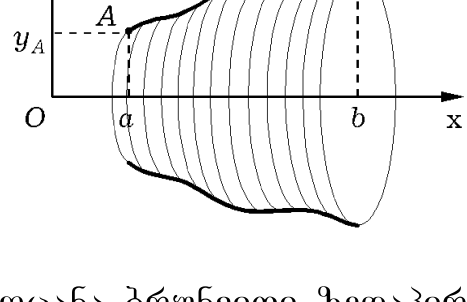
ხოლო მიწის შემოსაზღვრული ნაწილის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_a^b y(x)dx. \tag{3.14}$$

ამრიგად, გვაქვს ამოცანა: **იპოვეთ ისეთი გლუვი $y(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3.12) და (3.13) პირობებს (L ფიქსირებული რიცხვია) და (3.14) ინტეგრალს ანიჭებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას.**

ასეთი ტიპის ამოცანებს ორიგინალურად ხსნიდნენ ჯერ კიდევ **არისტოტელე და არქიმედი**.

3.1.5.ამოცანა ბრუნვის ზედაპირის მინიმუმის შესახებ



ნახ. 3.4. ამოცანა ბრუნვითი ზედაპირის შესახებ

ვთქვათ, გვინდა XOY სიბრტყეში, ერთმანეთთან ისეთი წირით შევაერთოთ ორი $A(a;y_A)$ და $B(b;Y_B)$ წერტილი, რომ მიღებული წირის OX ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი იყოს მინიმალური ნახ. 3.4.

დავუშვათ, რომ საძიებელი $y=y(x)$ ფუნქცია არის გლუვი $[a;b]$ მონაკვეთზე. მაშინ გვექნება **ამოცანა:**

იპოვეთ ისეთი გლუვი $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ მონაკვეთზე ფუნქცია, რომლისთვისაც

$$y(a)=y_A,\ y(b)=y_B, \tag{3.15}$$

და

$$S=2\pi\int_a^b yds=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx\rightarrow min. \tag{3.16}$$

ამ ამოცანის განზოგადებას წარმოადგენს **პლატოს პრობლემა,** რომელიც ასე ჩამოყალიბდება:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ჩაკეტილი ჟორდანის წირი. იპოვეთ, ამ წირზე გამავალი ისეთი ზედაპირი, რომლის მოცემული წირით შემოსაზღვრული ზედაპირის ფართობიც მინიმალურია.

ჩვენ შევისწავლით, სხვადასხვა ტიპის ფუნქციონალების მაქსიმუმისა და მინიმუმის პოვნის მეთოდებს. მათ შორის, განიხილება შემდეგი ტიპის ფუნქციონალები, რომლებიც მოიცავს ყველა მოყვანილი კლასიკური ამოცანის ამოხსნის მეთოდს:

$$\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx, \tag{3.17}$$

$$\int_a^b F\left(x,y(x),y'(x),y''(x),\dots,y^{(n)}(x)\right)dx, \tag{3.18}$$

$$\int_a^b F(x,y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x),y_1'(x),y_2'(x),\dots,y_n'(x))dx, \tag{3.19}$$

$$\iint F\left(x,y,z(x,y),\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy. \tag{3.20}$$

3.2. ფუნქციონალის ვარიაცია

განვიხილოთ ფუნქციონალის **მაგალითი:**

$J[y]=\int_0^1[y(x)]^2dx$ და გამოვითვალოთ მისი ცვლილებაΔJ ანუ **ვარიაცია**, არგუმენტის ანუ $y(x)$ფუნქციის **მცირე $\boldsymbol{\delta y}$**ცვლილები-სას (**ფუნქციის ვარიაცია**):

$$\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]=\int_0^1(y+\delta y)^2dx-\int_0^1[y]^2\,dx, \tag{3.21}$$

ამ ფორმულის გამარტივება გვაძლევს ფორმულას:

$$\Delta J=\int_0^1(2y\delta y+(\delta y)^2)\,dx=2\int_0^1 y\delta ydx+\int_0^1(\delta y)^2dx. \tag{3.22}$$

(3.22) ფორმულა შედგება ორი ნაწილისაგან: პირველი **წრფივი ნაწილია**, $y(x)$ ფუნქციის δy ვარიაციის მიმართ და მას ფუნქციონალის δJ **ვარიაცია** ეწოდება, ხოლო მეორე შესაკრები, არაწრფივია δy ვარიაციის მიმართ და მაშასადამე უფრო მცირეა (როცა δy მცირეა) წრფივ ნაწილთან შედარებით ანუ **ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია** იქნება:

$$\delta J = 2\int_0^1 y\delta y dx. \tag{3.23}$$

ცხადია, რომ

$$\Delta J \approx \delta J. \tag{3.24}$$

საზოგადოდ, თუ $y(x)$ ფუნქციის მახლობელი ფუნქციებისათვის $J[y]$ **ფუნქციონალი** იღებს **ექსტრემალურ** მნიშვნელობას, მაშინ $\Delta J[y] < 0$ მაქსიმუმის შემთხვევაში და $\Delta J[y] > 0$ მინიმუმის შემთხვევაში. ფუნქციონალს, ფუნქციის მსგავსად შეიძლება ქონდეს **რამდენიმე მინიმუმი ან მაქსიმუმი**. ორივე შემთხვევაში ΔJ ფუნქციონალი არ იცვლის ნიშანს. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\delta J = 0. \tag{3.25}$$

მართლაც (3.24) თანადობიდან, გვაქვს რომ ΔJ და δJ ერთნაირი ნიშნის სიდიდეებია. თუმცა, (3.23) ტოლობიდან გვაქვს რომ, ფუნქციის δy ვარიაციას შეუძლია მიიღოს ნებისმიერი ნიშანი, მაშასადამე ფუნქციონალის δJ ვარიაციაც შეიცვლის ნიშანს, რაც ეწინააღმდეგება იმ ფაქტს, რომ ΔJ არ იცვლის ნიშანს.

მაშასადამე (3.25) პირობა, წარმოადგენს ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას.

(3.25) პირობას, **ფუნქციონალის სტაციონარულობის** პირობასაც უწოდებენ. მრავალ ამოცანაში მნიშვნელოვანია, არა მარტო ექსტრემუმების პოვნა, არამედ, ფუნქციონალის სტაციონარული მნიშვნელობებიც.

P.S. *თუ ფუნქციონალი შეესაბამება მექანიკური სისტემის პოტენციალურ ენერგიას, მაშინ მისი* ***სტაციონარული მნიშვნელობები*** *გვაძლევს სისტემის* ***სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობებს,*** *ხოლო, თუ გვაქვს პოტენციალური ენერგიის ფუნქციონალის* ***მინიმუმი,*** *მაშინ* ***წონასწორობის მდგომარეობა მდგრადია.***

ახლა, განვიხილოთ **უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალის ექსტრემუმის** ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b F(x, y)dx, \tag{3.26}$$

სადაც $y = y(x)$. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემუმის **აუცილებელი პირობა**, გამოვითვალოთ ΔJ:

$$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b F(x, y+\delta y)dx - \int_a^b F(x,y)dx. \qquad (3.27)$$

თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას პირველი ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულებისათვის, მივიღებთ რომ:

$$\Delta J = \int_a^b F'_y(x,y)\delta y dx + \int_a^b F''_{yy}(x,y)\frac{(\delta y)^2}{2!}dx + \ \dots \qquad (3.28)$$

მივიღეთ რომ, $J[y]$ ფუნქციონალის ვარიაცია ანუ ΔJ ნაზრდის **წრფივი ნაწილი** ტოლია:

$$\delta J = \int_a^b F'_y(x,y)\,\delta y dx = 0. \qquad (3.29)$$

აქედან გამომდინარე, რადგან δy ფუნქციის ნებისმიერი ნაზრდია, მივიღებთ რომ პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა (**ლაგრანჟის თეორემა**) გვაძლევს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$F'_y(x,y) = 0. \qquad (3.30)$$

P.S._როგორც ვხედავთ,_ ***ფუნქციის დიფერენციალსა*** _და_ ***ფუნქციონალის ვარიაციას*** _შორის სრული ანალოგიაა._

3.2.1. ანალოგია ფუნქციის დიფერენციალსა და ფუნქციონალის ვარიაციას შორის

ვარიაციული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ანუ ფუნქციონალების ექსტრემუმზე გამოკვლევის მეთოდები, მეტად წააგავს ფუნქციის მაქსიმუმზე და მინიმუმზე გამოკვლევის მეთოდებს. ამიტომ მიზანშეწონილია უფრო დეტალურად განვიხილოთ ეს ანალოგია.

1. $z = f(x)$**ფუნქცია** განიმარტება, როგორც ისეთი f ასახვა, რომელიც მოცემული X სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეუსაბამებს Z სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს.$f: X \to Z$	1. $J[y]$**ფუნქციონალი** განიმარტება, როგორც ისეთი J ასახვა, რომელიც მოცემული M ფუნქციონალური სიმრავლის ყოველ $y(x)$ ფუნქციას შეუსაბამებს რაიმე ნამდვილ რიცხვს: $J: M \to \mathbb{R}$.
2. მოცემული $f(x)$ ფუნქციის x**არგუმენტის ნაზრდი** $\boldsymbol{\Delta x}$ ეწოდება სხვაობას მის რომელიმე ორ მნიშვნელობას შორის: $\Delta x = x - x_1$. თუ x დამოუკიდე-ბელი ცვლადია, მაშინ მისი დიფერენციალი ემთხვევა არგუ-	2. მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალის $y(x)$ არგუმენტის ნაზრდი ანუ $\boldsymbol{\delta y}$ **ვარიაცია** ეწოდება M ფუნქციონალური სივრცის რომელიმე ორ ფუნქციას შორის სხვაობას:$\delta y = y - y_1$

მენტის ნაზრდს: $dx = \Delta x$	
3. $f(x)$**ფუნქციას ეწოდებაუწყვეტი**, თუ x არგუმენტის მცირე ცვლილებას, შეესაბამება $f(x)$ ფუნქციის მცირე ცვლილე-ბა.	3. $J[y]$**ფუნქციონალს ეწოდებაუწყვეტი**, თუ $y(x)$ ფუნქციის მცირე δyცვლილებას, შეესაბა-მება $J[y]$ ფუნქციონალის ΔJმცირე ცვლილება.
4. $\boldsymbol{f(x)}$ **ფუნქციას ეწოდება წრფივი**, თუ $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, სადაც α და β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. ერთი ცვლადის წრფივი ფუნქციის **მაგალითია:**$f(x) = kx$.	4. $J[y]$**ფუნქციონალს ეწოდება წრფივი,** თუ ადგილი აქვს ტოლობას: $J[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha J[y_1] + \beta J[y_2]$, სადაც α და β ნებისმიერი ნამდ-ვილი რიცხვებია. წრფივი ფუნქციონალის **მაგალი-თია:**$J[y] = \int_a^b (p(x)y + q(x)y')dx$.
5.თუ $f(x)$ ფუნქციის ნაზრდი: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $\Delta f = A(x)\Delta x + \beta(x, \Delta x)\Delta x$ სახით, სადაც $A(x)$ არაა დამოკიდე-ბული Δx-ზე და $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \beta(x, \Delta x) = 0$, მაშინ ფუნქციას უწოდებენ **დიფერენცირებადს**, და ფუნქციის **ნაზრდის წარმოდგენის წრფივ ნაწილს – ფუნქციის დიფერენციალს**: $\Delta f = A(x)\Delta x$, აქედან, თუ გავწოფთ Δx-ზე და გადავალთ ზღვარზე, როცა $\Delta x \to 0$, მივიღებთ, რომ $A(x) = f'(x)$ და მაშასადამე **ფუნქციის დიფერენციალია:** $\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$.	5. თუ $J[y]$ ფუნქციონალის ნაზ-რდი: $\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y]$ შე-საძლებელია, რომ წარმოვადგი-ნოთ შემდეგი სახით: $\Delta J =$ $L(y(x), \delta y)$+$\beta(y(x), \delta y))max\|\delta y\|$, **სადაც** $\boldsymbol{L(y(x), \delta y)}$ **წრფივი ფუნქ-ციონალია** $\boldsymbol{\delta y}$ **ვარიაციის მი-მართ,** ხოლო $\lim\limits_{max\|\delta y\| \to 0} \beta(y(x), \delta y)) = 0$, მაშინ, ფუნქციონალის ნაზრდის წრფივ ნაწილს δy არგუმენტის (ფუნქციის ვარიაციის მიმართ), **ფუნქციონალის ვარიაცია ეწოდება და აღინიშნება** $\boldsymbol{\delta J_1}[\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\delta y}]$**სიმბოლოთი.** მას **ფრეშეს ძლიერ დიფერენციალს** უწოდებენ.
6.მოცემული $\boldsymbol{f(x)}$ **ფუნქციის დიფერენციალი** შეგვიძლია განვმარტოთ **სხვანაირადაც,** მაგალითად ტოლობით: $df = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x)\|_{\alpha=0}$	6. $J[y]$**ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია** შეგვიძლია განვსაზღ-ვროთ **სხვანაირადაც:** $\delta J[y, \delta y] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[y + \alpha \delta y]\|_{\alpha=0}$ მასგატოს **სუსტი დიფერენცი-ალი** ეწოდება.

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">თეორემა: თუ $J[y]$ ფუნქციონალი დიფერენცირებადია y წერტილში, მაშინ მისთვის გატოს დიფერენციალიც არსებობს და ის ემთხვევა ფრეშეს დიფერენციალს.</td></tr>
<tr><td>7. თუ დიფერენცირებადი $f(x)$ ფუნქცია აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს განსაზღვრის არის რაიმე $x = x_0$ წერტილში, მაშინ ამ წერტილში ფუნქციის ფრეშეს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: $df = 0$.</td><td>7. თუ $J[y]$ ფუნქციონალს გააჩნია ვარიაცია და ფუნქციონალი, მისი განსაზღვრის არის რაიმე $y = y_0$ წერტილში აღწევს მაქსიმუმს ან მინიმუმს, მაშინ ამ წერტილში მისი გატოს დიფერენციალი აუცილებლად ნულის ტოლია: $\delta J[y,\delta y] = 0$.</td></tr>
</table>

ვაჩვენოთ, რომ **დიფერენცირებადი ფუნქციისათვის, დიფერენციალის ორივე 5. და 6. განსაზღვრება ეკვივალენტურია**. მართლაც,

$$df = \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}, \qquad (3.31)$$

სადაც

$$u = x + \alpha\Delta x, \text{მაშინ } \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{\alpha=0} = f'(x) \text{ და } \frac{\partial u}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = \Delta x, \qquad (3.32)$$

მაშინ, ცხადია რომ $df = f'(x)\Delta x$, რაც ემთხვევა დიფერენციალის ცნობილ ფორმულას: $df = f'(x)dx$.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი, ფუნქციონალის ნაზრდისა და **ვარიაციის** საპოვნელად:

მაგალითი 1:იპოვეთ $J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და δJ ვარიაცია.

ამოხსნა: ა)$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x)+\delta y]dx - \int_a^b y(x)dx$, ცხადია, რომ მაშინ $\Delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$, რაც წარმოადგენს ფუნქციონალის წრფივ ნაწილს, მაშასადამე, ამ შემთხვევაში **ფუნქციონალის ნაზრდი ემთხვევა ფრეშეს დიფერენციალს ანუფუნქციონალის** $\boldsymbol{\delta J}$ **ვარიაციას:**$\delta J = \int_a^b \delta y(x)dx$.

ბ) ამოვხსნათ ეს ამოცანა მეორე მეთოდით ანუ **ვიპოვოთ გატოს დიფერენციალი**:

$$\delta J[y,\delta y] = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b [y(x)+\alpha\delta y]dx\bigg|_{\alpha=0} = \int_a^b \delta y dx.$$

როგორც ვხედავთ, **ორივე მეთოდი ერთნაირ შედეგს იძლევა**.

მაგალითი 2: იპოვეთ $J[y(x)] = \int_a^b y^2(x)dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და δJ ვარიაცია.

ამოხსნა:ა) $\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b [y(x)+\delta y]^2 dx - \int_a^b y(x)dx$, ცხადია, რომ მაშინ $\Delta J = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx + \int_a^b (\delta y(x))^2 dx$. ამ ნაზრდის წრფივი ნაწილი $\delta y(x)$-ის მიმართ, წარმოადგენს **ფრეშეს დიფერენციალს,** რომელიც ამ შემთხვევაში, მოცემული **ფუნქციონალის ვარიაციასაც** წარმოადგენს ანუ $\delta J = 2\int_a^b y(x)\delta y(x)dx$.

ბ) ახლა, ვიპოვოთ ფუნქციონალის ვარიაცია ამ ფუნქციის **გატოს დიფერენციალის** მეშვეობით:
$\delta J[y,\delta y] = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y+\alpha\delta y]|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b [y(x)+\alpha\delta y]^2 dx\Big|_{\alpha=0}$, ცხადია რომ $\delta J[y,\delta y] = 2\int_a^b y(x)\,\delta y dx$, რაც ემთხვევა **ფრეშეს დიფერენციალსაც**. ეს ბუნებრივია, რადგან ორივე მაგალითში, განხილული ფუნქციონალი დიფერენცირებადია.

მაგალითი 3: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ ფუნქციონალის ΔJ ნაზრდი და პირველი δJ ვარიაცია.

ამოხსნა:

ა)$\Delta J = J[y+\delta y] - J[y] = \int_a^b [L(x, y+\delta y, y'+\delta y') - L(x, y, y')]dx$.

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია გავშალოთ ტეილორის ფორმულით:
$L(x, y+\delta y, y'+\delta y') - L(x, y, y') = \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' + R(x, y, y', \delta y, \delta y')$,
სადაც $R(x, y, y', \delta y, \delta y')$ ტეილორის ფორმულის ნაშთია. თუ, ამ გაშლას შევიტანთ ფუნქციონალის ნაზრდის ფორმულაში, მივიღებთ, რომ
$\Delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx + \int_a^b R(x, y, y', \delta y, \delta y')dx$. ცხადია, რომ ამ წარმოდგენის **წრფივი ნაწილი იქნება პირველი ვარიაცია ანუ ფრეშეს დიფერენციალი**: $\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx$.

ბ) ახლა, გამოვითვალოთ პირველი ვარიაცია,**გატოს დიფერენციალის** ფორმულიდან გამომდინარე:
$\delta J[y, \delta y, \delta y'] = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y']|_{\alpha=0}$. ცხადია რომ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}\, L(x, y(x)+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y')dx$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha} L(x, y(x)+\alpha\delta y, y'+\alpha\delta y') = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}$, სადაც $u = y(x)+\alpha\delta y$ და $v = y'+\alpha\delta y'$. მაშინ $\lim_{\alpha\to 0} u = y(x)$ და $\lim_{\alpha\to 0} v = y'$ ე.ი.

$\delta J = \lim_{\alpha\to 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right) dx.$

როგორც ვხედავთ, **ამ შემთხვევაშიც ორივე მიდგომა ერთნაირად ეფექტურია.**

ამ ზოგადი ფორმულიდან გამომდინარე, ამოვხსნათ შემდეგი

მაგალითი 4. იპოვეთ $J[y] = \int_{-1}^{1}(y'e^y + xy^2)dx$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

ამოხსნა: წინა ამოცანის ფორმულიდან გამომდინარე, რადგან ამ შემთხვევაში, $L(x, y(x), y'(x)) = y'e^y + xy^2$ გვექნება, რომ

$\delta J = \int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right) dx = \int_{-1}^{1}[(y'e^y + 2xy)\delta y + e^y\delta y']dx.$

მაგალითი 5. იპოვეთ $J[y] = \int_a^b L\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big)dx$ ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია.

ამოხსნა:პირველი ვარიაციის საპოვნელად, გამოვიყენოთ **გატოს დიფერენციალის** ფორმულა:

$\delta J = \frac{\partial}{\partial\alpha} J\big[y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y', \dots, y^{(n)} + \alpha\delta y^{(n)}\big]\big|_{\alpha=0}$. ცხადია, რომ მაშინ ამოცანა 3-ის ანალოგიურად გვექნება ფორმულა:

$\delta J = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right) dx.$

3.2.2. ფუნქციონალის მეორე ვარიაცია

ბანახის სივრცის რომელიმე ორ ფუნქციაზე დამოკიდებულ $J[x(t), y(t)]$ ფუნქციონალს ეწოდება **ორად წრფივი**, თუ ადგილი აქვს თანადობებს:

$J[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t), y(t)] = \alpha_1 J[x_1(t), y(t)] + \alpha_2 J[x_2(t), y(t)],$

$J[x(t), \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)] = \alpha_1 J[x(t), y_1(t)] + \alpha_2 J[x(t), y_2(t)].$

ორად წრფივ ფუნქციონალში, თუ დავუშვებთ რომ $y = x$, მაშინ მიღებულ $J[x, x]$ ფუნქციონალს **კვადრატული ფუნქციონალი** ეწოდება.

სასრულ განზომილებიან სივრცეში განსაზღვრულ, ორად წრფივ კვადრატულ ფუნქციონალს **ორად წრფივი ფორმა** ეწოდება.

$J[x, x]$ კვადრატულ ფუნქციონალს ეწოდება დადებითად განსაზღვრული, თუ $J[x, x] > 0$ ნებისმიერი არანულოვანი $x(t)$ ფუნქციისათვის.

მაგალითები:

1) $J[x(t), y(t)] = \int_a^b A(t)x(t)y(t)dt$ ფუნქციონალი, სადაც $A(t)$ ცნობილი უწყვეტი ფუნქციაა, წარმოადგენს ორად წრფივ ფუნქციას, ხოლო

2) $J[x(t), x(t)] = \int_a^b A(t)x^2(t)dt$–კვადრატული ფუნქციონალია $C_0[a, b]$ სივრცეში და თუ დამატებით $A(t) > 0$ ნებისმიერი $t \in [a; b]$ ცვლადისათვის, მაშინ ეს კვადრატული ფუნქციონალი იქნება დადებითად განსაზღვრული;

3) $J[x, x] = \int_a^b \left[A(t)x^2(t) + B(t)x(t)x'(t) + C(t)x'^2(t)\right]dt$ არის გლუვი ფუნქციების $C^1[a, b]$ სივრცეში განსაზღვრული კვადრატული ფუნქციონალი.

განსაზღვრება: ვთქვათ $J[y]$**ბანახის სივრცეში** განსაზღვრული ფუნქციონალია. ვიტყვით, რომ ფუნქციონალს აქვს **მეორე ვარიაცია,** თუ მისი ნაზრდი $\Delta J = J[y + \delta y] - J[y]$ტეილორის ფორმულით, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$\Delta J = \delta y \cdot \delta J[y] + \frac{(\delta y)^2}{2!} \cdot \delta^2 J[y] + \frac{(\delta y)^3}{3!} \cdot \delta^3 J[y] + \ \ldots$ ანუ

$$\Delta J = L_1[\delta y] + \frac{1}{2} L_2[\delta y] + \beta \|\delta y\|. \tag{3.33}$$

სადაც $\delta J = L_1[\delta y]$ პირველი ვარიაციაა, ხოლო $\delta^2 J = L_2[\delta y]$–მეორე ვარიაცია და $\lim\limits_{\|\delta y\| \to 0} \beta = 0.$

მაგალითი:

მოცემულია ფუნქციონალი $J[y] = \int_0^1 (xy^2 + (y')^3)dx$, რომელიც განსაზღვრულია $C^1[0; 1](y(x)$ ფუნქცია უწყვეტია, პირველი რიგის წარმოებულთან ერთად) სივრცეში. ვიპოვოთ მისი **ნაზრდი, პირველი ვარიაცია და მეორე ვარიაცია**.

ამოხსნა: განვიხილოთ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$\Delta J = J[y + \Delta y] - J[y] = \int_0^1 [x(y + \delta y)^2 + (y' + \delta y')^3 - xy^2 - (y')^3]dx,$

$\Delta J = 2\int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2)dx + \int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]dx + \int_0^1 (\delta y')^3 dx$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაციაა:

$\delta J = 2\int_0^1 (xy\delta y + 3(y')^2)dx,$

ხოლო **მეორე ვარიაცია** იქნება:

$\delta^2 J = 2\int_0^1 [x(\delta y)^2 + 3y'(\delta y')^2]dx.$

მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის საპოვნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ **გატოს მეორე დიფერენციალის** ცნებაც.

მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\Phi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y]$, მაშინ ფუნქციონალის **მეორე ვარიაცია** იქნება:

$$\delta^2 J = \frac{d^2\Phi(\alpha)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}. \tag{3.34}$$

3.3. ვარიაციული ამოცანები ფიქსირებული საზღვრებით

განვიხილოთ **ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:**

შეისწავლეთ ექსტრემუმზე შემდეგი ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx, \tag{3.35}$$

რომელიც განსაზღვრულია ისეთ $y(x) \in C^1[a; b]$ ფუნქციონალურ სიმრავლეში, რომლის ელემენტებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$y(a) = y_1, \qquad y(b) = y_2. \tag{3.36}$$

როგორც უკვე ვიცით: ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა ანუ ჩვენ შემთხვევაში გვექნება:

$\delta J = \delta J[y, \delta y, \delta y'] = \frac{\partial}{\partial\alpha} J[y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y']|_{\alpha=0} = 0.$ ცხადია რომ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} J[y + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y'] = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y') = \frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\alpha}$, სადაც $u = y(x) + \alpha\delta y$ და $v = y' + \alpha\delta y'$. მაშინ $\lim_{\alpha\to 0} u = y(x)$ და $\lim_{\alpha\to 0} v = y'$ ე.ი.

$$\delta J = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} L(x, y(x) + \alpha\delta y, y' + \alpha\delta y')dx = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx.$$

მივიღეთ, რომ ამ ფუნქციონალის ექსტრემუმის **არსებობის აუცილებელ პირობას** აქვს შემდეგი სახე:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx = 0. \tag{3.37}$$

ამ პირობიდან შესაძლებელია გადავიდეთ შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებაზე, თუმცა, ამ ამოცანის გადასაწყვეტად დაგვჭირდება ორი **დამხმარე თეორემა** ანუ **ლემა**:

1.**ლაგრანჟისლემა**:თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a; b]$ სეგმენტზე და ნებისმიერი $\eta(x) \in C^\infty[a; b]$ ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\eta(a) = \eta(b) = 0$ პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0, \tag{3.38}$$

მაშინ $f(x) \equiv 0$.

დამტკიცება:დავუშვათ, რომ რომელიღაც $x_0 \in [a;b]$ წერტილში $f(x_0) \neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ $f(x_0) > 0$, მაშინ ამ ფუნქციის უწყვეტობის გამო, მიძებნება მისი შემცველი ისეთი $[c;d] \subset [a;b]$, რომ ამ შუალედში $f(x) > 0$. ადვილი შესამოწმებელია რომ

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{3.39}$$

ფუნქცია წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით, ამიტომ

$$\eta(x) = \varphi(x-c)\varphi(d-x), \tag{3.40}$$

ფუნქცია, აგრეთვე წარმოებადია ნებისმიერ რიგამდე ჩათვლით და ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ $(c;d)$ ინტერვალში. მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_c^d f(x)\eta(x)dx > 0, \tag{3.41}$$

რადგან ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უწყვეტია და დადებითი. ასე, რომ იმის დაშვება რომ $f(x)$ ფუნქცია არ უდრის ნულს რომელიმე წერტილში, არღვევს ლემის დაშვების პირობებს. რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ადგილი აქვს ლემის პირობებს, მაშინ $f(x) \equiv 0$ რ.დ.გ.

P.S.*ლაგრანჟის დამტკიცებული ლემა ადვილად ზოგადდება მრავალი ცვლადის ფუნქციებზეც. მაგალითად, ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციის შემთხვევაში: თუ $f(x,y)$ უწყვეტია შემოსაზღვრულ $G \in \mathbb{R}^2$ სიმრავლეში და ნებისმიერი $\eta(x,y) \in C^\infty(G)$ ფუნქციისათვის, რომელიც უწყვეტია $\bar{G}$ ჩაკეტილ სიმრავლეზე და ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს, ამ არის $\partial\bar{G}$ საზღვარზე, ადგილი აქვს ტოლობას:*

$$\iint f(x,y)\,\eta(x,y)dxdy = 0, \tag{3.42}$$

მაშინ $f(x,y) = 0$ ამ $\bar{G}$ სიმრავლეზე.

ეს თეორემა ანალოგიურად მტკიცდება, მხოლოდ საცდელ ფუნქციად უნდა განვიხილოთ $\varphi(r^2 - x^2 - y^2)$ ფუნქცია, რომელიც ნულის ტოლია $r^2 = x^2 + y^2$ წრის გარეთ.

2.**დიუბუა-რაიმონისლემა:**ვთქვათ $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები უწყვეტია $[a;b]$ შუალედში და ნებისმიერი $\eta(x) \in C^\infty[a;b]$ ფუნქციისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს $\eta(a) = \eta(b) = 0$ პირობებს, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_a^b (f(x)\eta'(x) + g(x)\eta(x))dx = 0, \tag{3.43}$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $[a;b]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f'(x) - g(x) = 0. \tag{3.44}$$

ამ თეორემის დამტკიცება საკმაოდ შრომატევადია. მითუმეტეს, რომ ჩვენი ამოცანაა ვისწავლოთ ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანების ამოხსნა და არა რთული თეორემების დამტკიცება. ამიტომ გადავიდეთ აღნიშნული თეორემის გამოყენებაზე.

ჩვენ უკვე გვქონდა ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა (3.37):

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right) dx = 0. \tag{3.44}$$

ამ ტოლობისათვის გამოვიყენოთ **დიუბუა-რაიმონის** თეორემა.

ტოლობა (3.44) ძალაშია ნებისმიერი დასაშვები $\delta y = \eta(x)$ ვარიაციისათვის, სადაც $\delta y \in C^1[a;b]$ და $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$. ამ შემთხვევაში, $f(x) = \frac{\partial L}{\partial y'}$ და $g(x) = \frac{\partial L}{\partial y}$.მაშასადამე, **დიუბუა-რაიმონის** თეორემის ძალით გვექნება ტოლობა:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \tag{3.45}$$

ამ ტოლობას **ეილერის განტოლება** ეწოდება (ეს განტოლება პირველად გამოქვეყნდა 1744 წელს). ამ განტოლების გლუვ ამონახსნებს (3.35) **ფუნქციონალის ექსტრემალები** ეწოდებათ.

ამრიგად, **ფუნქციონალის ექსტრემუმის წერტილები** უნდა ვეძებოთ მის **ექსტრემალებს შორის.**

ფუნქციის სრული წარმოებულის ფორმულის გამოყენებით, განტოლება (3.45) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0, \tag{3.46}$$

მეორე რიგის დიფერენციალური (3.46) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, დამოკიდებულია ორ ნებისმიერ მუდმივზე, რომელთა შესარჩევად უნდა გამოვიყენოთ სასაზღვრო პირობები:

$$y(a) = y_1, \qquad y(b) = y_2. \tag{3.47}$$

თუმცა, ამ ამოცანას ყოველთვის როდი აქვს ამონახსნი.

P.S.*აქ ისეთივე სიტუაცია გვაქვს, როგორც ერთი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციის ექსტრემუმების პოვნისას, როცა ექსტრემუმის წერტილებს ვეძებთ მის სტაციონარულ წერტილებს შორის.*

3.3.1. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანების ამოხსნის მაგალითები

ამოცანა 1. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y]=\int_1^2((y')^2-2xy)dx, \tag{3.48}$$

თუ $y(1)=0$ და $y(2)=-1$.

ამოხსნა: ამშემთხვევაში, $L(x,y,y')=(y')^2-2xy$ამიტომეილერისგანტოლებასექნებასახე: $y''+x=0$. ამგანტოლების**ზოგადიამონახსნია**: $y=-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$. ამმუდმივებსვპოულობთშესაბამისისასაზღვროპირობებიდან:

$\begin{cases} C_1+C_2=\frac{1}{6} \\ 2C_1+C_2=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=\frac{1}{6} \\ C_2=0 \end{cases}$. აქედანგამომდინარე, მივიღებთრომ$y=\frac{x}{6}-\frac{x^3}{6}$.

განვიხილოთ ამ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა Mathcad პროგრამის ბაზაზე.

ამისათვის (3.48) ფორმულაში შემავალ ინტეგრანტში, საძიებელი y ფუნქცია წარმოვადგინოთ მრავალწევრის სახით ანუ ვეძებოთ შემდეგი სახით: $y=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$, მაშინ $J[y]$ ფუნქციონალი გადაიქცევა მრავალი ცვლადის $J(\alpha)$ ფუნქციად ანუ გვექნება შემდეგი სახის მიახლოების ფუნქცია:

$$J(\alpha)=\int_1^2\left(\left(\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i x^{i-1}\right)^2-2x\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i\right)dx$$

მაშინ, შესაბამის **Mathcad** პროგრამას ექნება სახე:

$n := 3$

$$J(\alpha) := \int_1^2 \left[\left[\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\alpha_i\cdot x^{i-1}\right)\right]^2 - 2\cdot x\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i\cdot x^i\right)\right]dx$$

$j := 0..3$

$\alpha_j := 1$

Given

$\sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i\cdot 1^i\right) = 0 \quad \sum_{i=0}^{n}\left(\alpha_i\cdot 2^i\right) = -1$

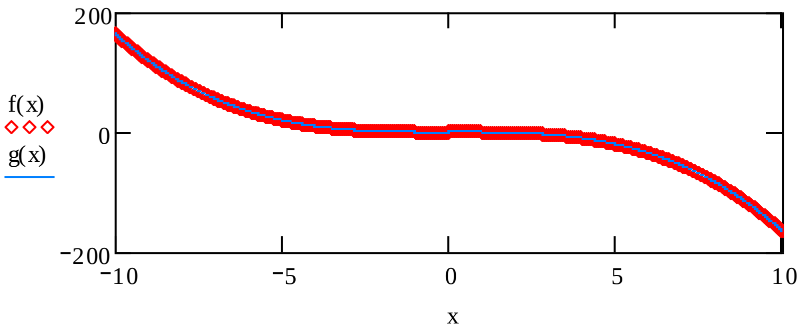
$S := \mathrm{Minimize}(J,\alpha)$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ -0.167 \end{pmatrix}$$

$\alpha := S$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0 \\ -0.167 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_i \cdot x^i\right) \quad g(x) := \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6}$$



როგორც ვხედავთ, **მიახლოებითი ამონახსნი კარგად უახლოვდება ზუსტ ამონახსნს.**

ანალოგიურად ამოიხსნება ვარიაციული აღრიცხვის ყველა უმარტივესი ამოცანა.

ამოცანა 2. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y')^2 - y^2\right) dx, \qquad (3.49)$$

თუ $y(0) = 0$ და $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = (y')^2 - y^2$ ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' + y = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება: $y = \sin x$.

ამოცანა 3. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^1 \left((y')^2 + 12xy\right) dx, \qquad (3.50)$$

თუ $y(0) = 0$ და $y(1) = 1$.

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L(x,y,y') = (y')^2 + 12xy$ ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' - 6x = 0$. ამ განტოლების **ზოგადი** ამონახსნია:$y = x^3 + C_1x + C_2$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში ექსტრემალი იქნება: $y = x^3$.

ამოცანა 3. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^3 (3x - y)y dx, \tag{3.51}$$

თუ $y(1) = 1$ და $y(3) = 4.5$.

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L(x,y,y') = (3x - y)y$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $3x - 2y = 0$. აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ $y = 1.5x$. რადგან ეს ამონახსნი არ აკმაყოფილებს $y(1) = 1$ სასაზღვრო პირობას, **ამ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.**

ამოცანა 4. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^{2\pi} ((y')^2 - y^2) dx, \tag{3.52}$$

თუ $y(0) = 1$ და $y(2\pi) = 1$.

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L(x,y,y') = (y')^2 - y^2$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' + y = 0$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. თუ გამოვიყენებთ სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ რომ: $y = \cos x + C \sin x$, სადაც C ნებისმიერი მუდმივია. **მაშასადამე, ამ ვარიაციულ ამოცანას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი.**

ამოცანა 5. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_1^2 ((y')^2 + 2yy' + y^2) dx, \tag{3.53}$$

თუ $y(1) = 1$ და $y(2) = 0$.

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L(x,y,y') = (y')^2 + 2yy' + y^2$, ამიტომ ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $y'' - y = 0$. მისი ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$. მუდმივი კოეფიციენტების საპოვნელად ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით, მაშინ გვექნება სისტემა: $\begin{cases} C_1 e + \frac{C_2}{e} = 1 \\ \frac{C_1}{e} + C_2 e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{e^3}{1-e^4}; \\ C_2 = \frac{e}{1-e^4} \end{cases}$ მაშასადამე გვექნება ამონახსნი: $y = -\frac{e^3}{1-e^4}e^x + \frac{e}{1-e^4}e^{-x}$.

P.S. *უმეტეს წილად, ეილერის განტოლება გვაძლევს ზუსტ პასუხს ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ. თუ, ფუნქციონალის შინაარსიდან გამომდინარეობს რომ, ამოცანას აქვს ამონახსნი და ეილერის განტოლებას აქვს ერთადერთი ისეთი ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს, მაშინ ეს ექსტრემალი იქნება ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანის ამონახსნი.*

ამოცანა 6. რომელ წირებზე შეიძლება ქონდეს ექსტრემუმები ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_0^2 (x(y')^3 - 3y(y')^2)dx, \tag{3.54}$$

თუ $y(0) = 4$ და $y(2) = 6$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, $L(x, y, y') = x(y')^3 - 3y(y')^2$, ამიტომ ეილერის $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ განტოლებას ექნება სახე: $y''(xy' - y) = 0$. ეს დიფერენციალური განტოლება გვაძლევს ორ განტოლებას: $y'' = 0$ და $xy' - y = 0$. პირველი მათგანის ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1x + C_2$, ხოლო მეორესი $-$ $y = Cx$. მეორე ამონახსნი არის პირველის ქვესიმრავლე, ამიტომ მოცემული ამოცანის ყველა ექსტრემალი მოიცემა მხოლოდ პირველი ზოგადი $y = C_1x + C_2$ ამონახსნით. მუდმივებს ვპოულობთ სასაზღვრო პირობებიდან.

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 4 \\ C_1 \cdot 2 + C_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 4 \\ C_1 = 1 \end{cases};$$

მაშასადამე, მოცემული ამოცანის ამონახსნი იქნება $y = x + 4$ ფუნქცია.

თუ $y(x)$ ფუნქცია ორჯერ დიფერენცირებადია და $L''_{y'y'} \neq 0$, მაშინ **ეილერის განტოლებისათვის კოშის ამოცანას აქვს ერთად-ერთი ამონახსნი,** ხოლო, **თუ $L''_{y'y'} = 0$ (ინტეგრანტი გადაგვარე-ბულია), მაშინ ეილერის განტოლება ან პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლებაა, ან $-$ ალგებრული განტოლება.**

დაისმის კითხვა: რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს $L(x, y, y')$ ფუნქცია, რომ $y(x)$ ამონახსნი იყოს ორჯერ დიფერენცი-რებადი ?

ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი **თეორემა:**

ვთქვათ $y(x)$ არის ეილერის განტოლების ამონახსნი. თუ, $L(x, y, y')$ ფუნქციას აქვს უწყვეტი კერძო წარმოებულები მეორე

რიგამდე ჩათვლით, მაშინ XOY სიბრტყის ყველა წერტილში,სადაც $L''_{y'y'} \neq 0$, ექსტრემალი $y(x)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცი-რებადია.

ეილერის განტოლება იშვიათად იხსნება კვადრატურებში, რადგან არსებობს ისეთი ინტეგრალები, რომლებიც არ გამო-ისახება ელემენტარული ფუნქციებით. ასეთ შემთხვევაში, იყენებენ მიახლოებით მეთოდებს.

3.3.2. ეილერის განტოლების კერძო შემთხვევები

თუ მოცემული გვაქვს ფუნქციონალი: $J[y] = \int_a^b L(\cdot)dx$ მაშინ, ინტეგრალქვეშა $L(\cdot)$ ფუნქციას **ინტეგრანტს** უწოდებენ.

განვიხილოთ ეილერის განტოლების სხვადასხვა ტიპები, **ინტეგრანტის** სახის მიხედვით.

1.ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული y' წარმოებულზე. ასეთ შემთხვევაში$J[y] = \int_a^b L(x,y)dx$, მაშინ$\frac{\partial L}{\partial y'} \equiv 0$. აქედან გამომდინარე, ეილერის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ ანუ **ალგებრული განტოლება**$y(x)$ ფუნქციის მიმართ. მიღებული **ექსტრემალები შეიძლება არც კი აკმაყოფილებდნენ სასაზღვრო პირობებს**.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y] = \int_a^b y^3 dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალე-ბი, თუ $y(a) = y_1$ და $y(b) = y_2$.

ამოხსნა:ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $3y^2 = 0$. ამ განტოლებას აქვს ერთადერთი $y \equiv 0$ ამონახსნი. აქედან გამომდინარე, თუ სასაზღვრო პირობებიდან, **ერთი მაინც y_1 და y_2 რიცხვებიდან, განსხვავებულია ნულისგან, მაშინ ვარიაციულ ამოცანას არა აქვს ამონახსნი.**

2. **ინტეგრანტი წრფივადაა დამოკიდებული y' წარმოებულზე.** ამ ტიპის ფუნქციონალებისათვის$J[y] = \int_a^b L(x,y,y')dx$ ინტეგრანტს აქვს სახე:

$$L(x,y,y') = P(x,y) + Q(x,y)y'. \tag{3.55}$$

მაშინ ცხადია, რომ $L''_{y'y'} \equiv 0$. ნათელია, რომ ეს შემთხვევა მოიცავს პირველ შემთხვევასაც. ასეთ ფუნქციონალებს,**გადაგვარე-ბულს** უწოდებენ.მაშინ ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$$Q'_x + Q'_y y' - P'_y - Q'_y y' = 0 \text{ ანუ } Q'_x - P'_y = 0. \tag{3.56}$$

ეს განტოლება, როგორც წინა შემთხვევაში, ალგებრულია. ამიტომ, მისმა **ამონახსნმა შეიძლება ვერ დააკმაყოფილოს**

სასაზღვრო პირობები და ასეთ შემთხვევაში, ვარიაციულ ამოცანას არ ექნება ამონახსნი.

P.S. *თუ* $Pdx + Qdy$ *წარმოადგენს სრულ დიფერენციალს, მაშინ ეილერის* $Q'_x - P'_y = 0$*განტოლება იგივობას წარმოადგენს და მაშასადამე, ნებისმიერი* $y(x) \in C^1[a;b]$ *ფუნქცია იქნება მისი ამონახსნი ანუ ექსტრემალი.*

3.**ინტეგრანტი დამოკიდებულია მხოლოდ** y' **წარმოებულზე.** ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალს აქვს სახე: $J[y] = \int_a^b L(y')dx$, მაშინ ცნობილი $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს: $y'' = 0$. მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით: $y = C_1x + C_2$.

მაგალითი:იპოვეთ $J[y] = \int_a^b (y' - (y')^3)dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ $y(a) = y_1$ და $y(b) = y_2$.

ამოხსნა:ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' = 0$. მის ზოგად ამონახსნს აქვს წრფივი ფუნქციის სახე ნებისმიერი ორი მუდმივით: $y = C_1x + C_2$. ამ მუდმივების განსაზღვრა წარმოებს სასაზღვრო პირობებიდან და გვექნება ექსტრემალი:

$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{b-a}(x - a) + y_1$.

განვიხილოთ **მეორე მაგალითი**:

იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}, \tag{3.57}$$

თუ $y(a) = A$ და $y(b) = B$.

ამოხსნა:ეს ფუნქციონალი განსაზღვრავს წირის სიგრძეს $(a;A)$ და $(b;B)$ წერტილებს შორის. გეომეტრიაულად ესაა ამოცანა ორ წერტილს შორის უმოკლესი მანძილის პოვნაზე. ეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' = 0$, ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1x + C_2$. სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ ექსტრემალს (წრფის მონაკვეთს) ამ წერტილებს შორის:

$y = \frac{B-A}{b-a}(x - a) + A$.

4.ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული y **ფუნქციაზე.** ამ შემთხვევაში ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(x, y')$, ხოლო $y''(x)L''_{y'y'} + y'(x)L''_{yy'} + L''_{xy'} - L'_y = 0$ ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$y''(x)L''_{y'y'} + L''_{xy'} = 0. \tag{3.58}$$

ეს შემთხვევა, თავის თავში მოიცავს წინა შემთხვევას.

მაგალითი: იპოვეთ $J[y]=\int_a^b((y')^2+2xy')dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები, თუ $y(a)=y_1$ და $y(b)=y_2$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(x,y')=(y')^2+2xy'$. შესაბამისად, ეილერის განტოლება მიიღებს სახეს: $y''+1=0$ ანუ

$y=-\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. ნებისმიერი C_1 და C_2 მუდმივები, ცალსახად განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან, ყველა შემთხვევაში.

5.**ინტეგრანტი არაა დამოკიდებული x არგუმენტზე**. ასეთ შემთხვევაში, ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(y,y')$, ხოლო ეილერის განტოლება, ამ შემთხვევაში, გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$y''(x)L''_{y'y'}+y'(x)L''_{yy'}-L'_y=0. \qquad (3.59)$$

თუ გავამრავლებთ ამ განტოლებას y' წარმოებულზე, მივიღებთ რომ (3.57) შეგვიძლია გადავწეროთ (3.59) ფორმით ანუ

$\frac{d}{dx}\left(y'L'_{y'}-L\right)=0,$

მაშინ მივიღებთ, რომ შეგვიძლია ვიპოვოთ პირველი ინტეგრალი:

$$y'L'_{y'}-L=C_1. \qquad (3.60)$$

მაგალითი: იპოვეთ $J[y]=\int_a^b((y')^2+yy')dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(y,y')=(y')^2+yy'$. შესაბამისად, ეილერის (3.57) განტოლება მიიღებს სახეს:

$2y''+y'-y'=0$ ანუ $y''=0$. მაშინ ზოგადი ამონახსნი დამოკიდებულია ორ მუდმივზე: $y=C_1x+C_2$.

მაგალითი:იოჰან ბერნულის ამოცანა ბრახისტოხრონას შესახებ.

იპოვეთ $J[y]=\int_0^b\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx\to min$, თუ $y(0)=0$ და $y(b)=y_B$.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L(y,y')=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$, მაშინ ეილერის

$y''(x)L''_{y'y'}+y'(x)L''_{yy'}-L'_y=0$ განტოლების პირველი ინტეგრალი $y'L'_{y'}-L=C_1$მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}-y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=C_1. \qquad (3.61)$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+(y')^2}}=C_1. \qquad (3.62)$$

თუ (3.62) ტოლობას ავიყვანთ კვადრატში და მამრავლს $2g$ შევიყვანთ მუდმივში, მივიღებთ რომ

$$y(1+(y')^2) = C, \tag{3.63}$$

სადაც $C = \frac{1}{2gC_1^2}$.

ამრიგად, მივიღეთ პირველი რიგის დიფერენციალური განტოლება არაცხადად მოცემული წარმოებულით. ამ განტოლების ამოხსნა ხელსაყრელიაპარამეტრის შემოყვანის გზით.

დავუშვათ, რომ $y' = \frac{dy}{dx} = \cot\beta$, მაშინ $1+(y')^2 = \frac{1}{(\sin\beta)^2}$ ანუ (3.63)-ის გათვალისწინებით გვექნება, რომ

$$y = \frac{C}{1+(y')^2} = C(\sin\beta)^2 = \frac{C}{2}(1-\cos 2\beta). \tag{3.64}$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C\sin\beta\cos\beta d\beta}{\cot\beta} = 2C(\sin\beta)^2 d\beta = C(1-\cos 2\beta)d\beta. \tag{3.65}$$

აქედან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$x = C\left(\beta - \frac{\sin 2\beta}{2}\right) + C_0. \tag{3.66}$$

გადავწეროთ ეს ფორმულა შემდეგი სახით:

$$x = \frac{C}{2}(2\beta - \sin 2\beta) + C_0, \tag{3.67}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$2\beta = t, \tag{3.68}$$

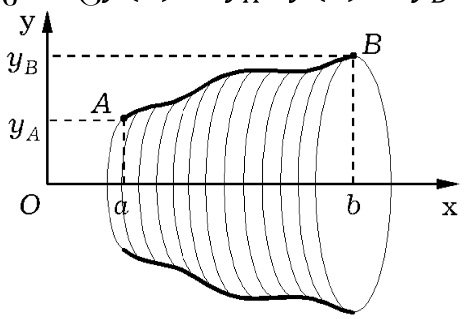
და გავითვალიწინებთ, რომ$y = 0 \Longrightarrow \beta = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow C_0 = 0,$ პირობას. მივიღებთ, რომ

$$x = \frac{C}{2}(t - \sin t), \tag{3.69}$$

$$y = \frac{C}{2}(1 - \cos t). \tag{3.70}$$

ამრიგად, XOY სიბრტყეში მივიღეთ **ციკლოიდის პარამეტრული განტოლება**, რომელსაც აღწერს $\frac{C}{2}$ რადიუსის მქონე წრეწირი XOY სიბრტყეში გორვისას, ისე რომ,ციკლოიდა გადის$y(b) = y_B$წერტილზე.

მაგალითი: ამოცანა მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირის პოვნის შესახებ. იპოვეთ $[a;b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული ისეთი გლუვი ფუნქცია, რომლისთვისაც$y(a) = y_A,\ y(b) = y_B$. (3.71)



ნახ. 3.4. მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი

და ამ ფუქციის გრაფიკის OX ღერძის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიღებული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი არის მინიმალური.

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx \to min. \tag{3.72}$$

ამოხსნა: როგორც ვხედავთ, ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი) $L(y, y') = y\sqrt{1 + (y')^2}$ სახისაა. მაშასადამე, მას აქვს პირველი ინტეგრალი: $y'L'_{y'} - L = C_1$, რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში მიიღებს სახეს:

$$\frac{y(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y\sqrt{1 + (y')^2} = C_1. \tag{3.73}$$

თუ გავამარტივებთ ამ ინტეგრალს, მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} = C. \tag{3.74}$$

ამ განტოლების ინტეგრებისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$y' = \sinh t \Rightarrow y = \mathrm{C}\cosh t. \tag{3.75}$$

ხოლო $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \sinh t dt}{\sinh t} = Cdt \Rightarrow x = Ct + C_0.$ (3.76)

მაშასადამე, საძიებელი მინიმალური ბრუნვითი ზედაპირი მიიღება იმ წირის ბრუნვით აბსცისთა ღერძის გარშემო, რომლის პარამეტრული განტოლებაა:

$$\begin{cases} x = Ct + C_0 \\ y = \mathrm{C}\cosh t \end{cases}. \tag{3.77}$$

თუ ამ პარამეტრული განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მაშინ მივიღებთ საძიებელი წირის – ექსტრემალის განტოლებას:

$$y = C \cosh\frac{x-C_0}{C}. \tag{3.78}$$

ასეთ წირებს **კატენოიდებს** უწოდებენ. უცნობი მუდმივები განისაზღვრებიან სასაზღვრო $y(a) = y_A$, $y(b) = y_B$ პირობებიდან. **სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე**, ამოცანას შეიძლება ქონდეს ერთი, ორი ან საერთოდ არ ქონდეს ამონახსნი.

3.3.3რამდენიმე,ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი

ახლა, განვიხილოთ ფუნქციონალი, რომელიც დამოკიდებულია x ცვლადის **ორ სხვადასხვა y_1 და y_2 ფუნქციაზე**:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx, \tag{3.79}$$

სადაც $L(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$ ხუთი ცვლადის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. y_1, y_2 ფუნქციათა განსაზღვრის არეა $C^1[a;b]$ ფუნქციონალური სიმრავლის, ისეთი ფუნქციების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს: $y_1(a) = y_{11}$, $y_1(b) = y_{12}$,

$y_2(a) = y_{21}$, $y_2(b) = y_{22}$.

რადგან y_1, y_2 ფუნქციები სეგმენტის ბოლოებზე იღებენ ფიქსირებულ მნიშვნელობებ, მივიღებთ რომ δy_1 და δy_2 დასაშვები ვარიაციები არიან$C^1[a;b]$ კლასის ფუნქციები და აკმაყოფილებენ ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს: $\delta y_1(a) = \delta y_1(b) = \delta y_2(a) = \delta y_2(b) = 0$.

ფუნქციათა ნებისმიერი δy_1 და δy_2 ვარიაციებისათვის განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = J[y_1 + \alpha_1 \delta y_1, y_2 + \alpha_2 \delta y_2]. \tag{3.80}$$

ცხადია, რომ თუ y_1, y_2 ფუნქციებისათვის $J[y_1, y_2]$ ფუნქციონალი აღწევს თავის ექსტრემუმს, მაშინ $\varphi(\alpha_1, \alpha_2)$ ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი $(0;0)$ წერტილში. ამ ფუნქციისათვის ფერმას თეორემიდან გამომდინარე, ადგილი აქვს ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = 0. \tag{3.81}$$

თუ გამოვიყენებთ **ლაიბნიცის ფორმულას განსაზღვრული ინტეგრალის პარამეტით გაწარმოების შესახებ**, მაშინ (3.81) პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b \left(L'_{y_1} \delta y_1 + L'_{y'_1} \delta y'_1\right) dx = 0, \tag{3.82}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}\right|_{\alpha_1=\alpha_2=0} = \int_a^b \left(L'_2 \delta y_2 + L'_{y'_2} \delta y'_2\right) dx = 0. \tag{3.83}$$

დიუბუა-რაიმონის თეორემიდან გამომდინარე (3.82),(3.83) ფორმულები შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი ფორმით:

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_1} - L'_{y_1} = 0, \tag{3.84}$$

$$\frac{d}{dx} L'_{y'_2} - L'_{y_2} = 0. \tag{3.85}$$

P.S. *ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (3.84),(3.85) პირობები, შეიძლება განზოგადდეს ერთი ცვლადის n რაოდენობის ფუნქციებზე დამოკიდებული ფუნქციონალისთვის.*

მართლაც, თუ მოცემული **გვაქვს n რაოდენობის ერთი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი**:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx, \tag{3.86}$$

სადაც $L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა და$J[y_1, \dots, y_n]$ აღწევს ექსტრემუმს $y_1, \dots, y_n \in C^1[a;b]$ ფუნქციათა სისტემაზე, მაშინ ფუნქციათა ეს სისტემა, აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას:

$$\frac{d}{dx}L'_{y'_i} - L'_{y_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{3.87}$$

ამ განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი J**ფუნქციონალის ექსტრემალს** წარმოადგენს. (3.87) განტოლებათა სისტემას **ეილერის განტოლებები** ეწოდებათ.

მაგალითი: იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b (2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2)dx, \tag{3.88}$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში,

$L(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') = 2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2$. შესაბამის **ეილერის განტოლებებს** ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}L'_{y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ \frac{d}{dx}L'_{y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \tag{3.89}$$

ანუ

$$\begin{cases} y_1''(x)L''_{y_1'y_1'} + y_1'(x)L''_{y_1y_1'} - L'_{y_1} = 0 \\ y_2''(x)L''_{y_2'y_2'} + y_2'(x)L''_{y_2y_2'} - L'_{y_2} = 0 \end{cases}; \tag{3.90}$$

ჩვენი ამოცანისათვის, ეს სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} 2y_1'' + 2y_2 - 4y_1 = 0 \\ \quad -2y_2'' + 2y_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_2^{IV} - 2y_2'' + y_2 = 0 \\ \qquad y_1 = y_2'' \end{cases}. \tag{3.91}$$

(3.91) სისტემის პირველი ტოლობა, ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებაა მუდმივი კოეფიციენტებით. ამიტომ მისი ამონახსნი იქნება:

$$y_2 = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}, \tag{3.92}$$

თუ ჩავსვამთ (3.92) ამონახსნს (3.91) სისტემის მეორე განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$y_1 = C_1e^x + C_2(2e^x + xe^x) + C_3e^{-x} + C_4(xe^{-x} - 2e^{-x}), \tag{3.93}$$

ანუ

$$y_1 = e^x(C_1 + 2C_2) + e^{-x}(C_3 - 2C_4) + x(C_2e^x + C_4e^{-x}). \tag{3.94}$$

3.3.4. უმარტივესი ტიპის ფუნქციონალი მაღალი რიგის წარმოებულებით

ვთქვათ $L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ ფუნქცია უწყვეტად დიფერენცირებადია $n + 2$–ჯერ. განვიხილოთ $y(x) \in C^1[a; b]$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციონალი:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx, \tag{3.95}$$

რომელიც აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$y(a) = y_{10}, y'(a) = y_{11}, \ \dots, y^{(n-1)}(a) = y_{1,n-1}; \tag{3.96}$$

$$y(b) = y_{20}, y'(b) = y_{21}, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_{2,n-1}. \quad (3.97)$$

ასეთ შემთხვევაში y ფუნქციისთვის დასაშვები ვარიაცია შეიძლება იყოს ნებისმიერი $\delta y \in C^1[a;b]$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ერტგვაროვან სასაზღვრო პირობებს:

$$\delta y(a) = 0, \delta y'(a) = 0, \ \dots, \delta y^{(n-1)}(a) = 0; \quad (3.98)$$

$$\delta y(b) = 0, \delta y'(b) = 0, \dots, \delta y^{(n-1)}(b) = 0. \quad (3.99)$$

ვთქვათ, $y(x)$ ფუნქცია ანიჭებს ექსტრემუმს $J[y]$ ფუნქციონალს.თუ ავირჩევთ ნებისმიერ დასაშვებ δy ვარიაციას და განვიხილავთ ფუნქციას:

$$\varphi(\alpha) = J[y + \alpha\delta y] = \int_a^b L\left(x, y + \delta y, y' + \delta y', y'' + \delta y'', \dots, y^{(n)} + \delta y^{(n)}\right)dx$$

მივიღებთ რომ $\varphi(\alpha)$ ფუნქციასაც აქვს ექსტრემუმი $\alpha = 0$ წერტილში, რადგან ის დიფერენცირებადია ამ წერტილში, გვექნება ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა: $\varphi'(0) = 0$ ანუ

$$\varphi'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} J[y + \alpha\delta y] = 0, \quad (3.100)$$

ცხადია, რომ

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left(L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y' + \ \dots + L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}\right) dx = 0. \quad (3.101)$$

დავუშვათ, რომ $y(x) \in C^{2n}[a;b]$. მაშინ თუ, გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს ((3.102) განტოლებაში ერთხელ, (3.103) განტოლებაში – ორჯერ და ა.შ.) და სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\int_a^b L'_{y'} \delta y' dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} L'_{y'}\right) \delta y dx, \quad (3.102)$$

$$\int_a^b L'_{y''} \delta y'' dx = \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} L'_{y''}\right) \delta y dx, \quad (3.103)$$

. . .

$$\int_a^b L'_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = (-1)^n \int_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}}\right) \delta y dx. \quad (3.104)$$

თუ ამ ტოლობებს შევიტანთ (3.101) განტოლებაში, მაშინ მივიღებთ:

$$\int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \ \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}}\right) \delta y dx = 0. \quad (3.105)$$

ეს განტოლება ძალაშია ნებისმიერი, უსასრულოდ დიფერენცირებადი δy ფუნქციისათვის, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობებს იღებს $[a;b]$ სეგმენტის ბოლოებზე. მაშინ, **ლაგრანჟის თეორემის თანახმად**, ექსტრემალების საპოვნელად, გვექნება **ეილერ-პუასონის** განტოლება:

$$L'_y - \frac{d}{dx} L'_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} L'_{y''} + \ \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y^{(n)}} = 0. \quad (3.106)$$

ამ განტოლების $2n$–ჯერ უწყვეტად დიფერენცირებად ამონახსნებს,$J[y]$ ფუნქციონალის **ექსტრემალები** ეწოდებათ.

P.S. *ამ შემთხვევაში, ფუნქციონალი აღწევს ექსტრემუმს ექსტრემალებზე.*

მაგალითი: იპოვეთ $J[y]=\int_a^b((y''')^2+y^2-2yx^3)dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები.

ამოხსნა: ჩავწეროთ $L\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=(y''')^2+y^2-2yx^3$ ფუნქციიდან გამომდინარე, მოცემული $J[y]$ ფუნქციონალისათვის **ეილერ-პუასონის** განტოლება:

$$-2y^{VI}+2y-2x^3=0. \tag{3.107}$$

ეს არის მუდმივკოეფიციენტებიანი, არაერთგვაროვანი, წრფივი დიფერენციალური განტოლება, სპეციალური სახის მარჯვენა ნაწილით. მის ამონახსნს აქვს სახე:

$$y(x)=x^3+C_1e^x+C_2e^{-x}+\left(C_3e^{\frac{x}{2}}+C_4e^{-\frac{x}{2}}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+$$
$$+\left(C_5e^{\frac{x}{2}}+C_6e^{-\frac{x}{2}}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x. \tag{3.108}$$

3.3.5. მრავალი ცვლადის ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალები

ა) განვიხილოთ ორი ცვლადის $z(x,y)$ ფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z]=\iint L\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right)dxdy, \tag{3.109}$$

ვთქვათ, $z(x,y)\in M\subset C^2(\bar{G})$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია, განსაზღვრული $G\subset\mathbb{R}^2$ არეზე. გამოვიკვლიოთ (3.109) ფუნქციონალი ექსტრემუმებზე, თუ ურჯერადი ინტეგრება ხდება $D\subset\overline{D}\subset G$ არეზე, ხოლო $L\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right)$ ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა თავისი არგუმენტების მიმართ. ამ ფუნქციონალის განსაზღვრის არედ განვიხილოთ M ფუნქციონალური სიმრავლის იმ ელემენტებისაგან შემდგარი ქვესიმრავლე, რომლების მოცემული D არის საზღვარზე იღებენ ცნობილ $\varphi(x,y)$ მნიშვნელობებს ანუ

$$z(x,y)|_{\partial D}=\varphi(x,y). \tag{3.110}$$

ამ შემთხვევაში, ფუნქციის დასაშვები ვარიაციები იქნებიან, ისეთი $\delta z(x,y)\in C^2(G)$ ფუნქციები, რომლებიც D არის ∂D საზღვარზე იღებენ ნულის ტოლ მნიშვნელობებს.

როგორც ვიცით, ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა მისი პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა:

$$\delta J[z] = 0. \tag{3.111}$$

ჩვენ ჩემთხვევაში, გვექნება რომ:

$$\delta J[z] = \frac{\partial}{\partial \alpha} J[z + \alpha \delta z]\Big|_{\alpha=0} = 0. \tag{3.112}$$

ეს ფუნქციონალი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\delta J[z] = \iint \left(L'_z \delta z + L'_p \delta p + L'_q \delta q\right) dxdy = 0, \tag{3.113}$$

სადაც

$$p = z'_x \text{ და } q = z'_y. \tag{3.114}$$

ცხადია, რომ თუ გამოვიყენებთ **ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელ ფორმულას**, მივიღებთ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L'_p \delta z\right) = \frac{\partial L'_p}{\partial x} \delta z + L'_p \delta p, \tag{3.115}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(L'_q \delta z\right) = \frac{\partial L'_q}{\partial y} \delta z + L'_q \delta q. \tag{3.116}$$

ამ ფორმულებიდან გამოვსახოთ და გარდავქმნათ (3.113) ფორმულის ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ბოლო ორი წევრი შემდეგნაირად:

$$\iint \left(L'_p \delta p + L'_q \delta q\right) dxdy = \iint \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(L'_p \delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(L'_q \delta z\right)\right) dxdy -$$

$$- \iint \left(\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y}\right) \delta z dxdy. \tag{3.117}$$

თუ გამოვიყენებთ გრინის ფორმულას:

$$\oint (Pdx + Qdy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.118}$$

სადაც მარცხენა წირითი ინტეგრალი ვრცელდება ∂D საზღვარზე, ხოლო მარჯვენა ორჯერადი ინტეგრალი კი $-$ D არეზე; მაშინ

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(L'_p \delta z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(L'_q \delta z\right)\right) dxdy = \oint \delta z\left(L'_p dy - L'_q dx\right) = 0, \tag{3.119}$$

რადგან $\delta z|_{\partial D} \equiv 0$. ცხადია, რომ აქ $Q = L'_p \delta z$ და $P = -L'_q \delta z$. მივიღეთ, რომ

$$\iint \left(L'_p \delta p + L'_q \delta q\right) dxdy = - \iint \left(\frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y}\right) \delta z dxdy. \tag{3.120}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი (3.113) პირობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\iint \left(L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y}\right) \delta z dxdy = 0. \tag{3.121}$$

რადგან (3.121) ფუნქციონალის ინტეგრალქვეშა გამოსახულება (ინტეგრანტი) $\left(L'_z - \frac{\partial L'_p}{\partial x} + \frac{\partial L'_q}{\partial y}\right)$ უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო δz

ვარიაცია ნებისმიერი, უწყვეტი და საზღვარზე ნულოვანი ფუნქციაა, ლაგრანჟის ლემის საფუძველზე მივიღებთ, რომ **ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა ჩაიწერება განტოლების სახით**:

$$\frac{\partial L'_p}{\partial x}+\frac{\partial L'_q}{\partial y}-L'_z=0. \qquad (3.122)$$

(3.122) განტოლებას,**ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება** ეწოდება. ამ განტოლების ნებისმიერი გლუვი ამონახსნი **ექსტრემალს** წარმოადგენს.

მაგალითი: ჩავწეროთეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება დირიხლეს ფუნქციონალისთვის:

$$J[z]=\frac{1}{2}\iint\left((z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2\right)dxdy. \qquad (3.123)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში$L\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right)=p^2+q^2$. მაშინ მივიღებთ, რომ$L'_p=2p=2z'_x$, ხოლო $L'_q=2q=2z'_y$, ასევე, $L'_z=0$ ე.ი. ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება ამ შემთხვევისთვის, მიიღებს **ლაპლასის განტოლების** სახეს:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \qquad (3.124)$$

ლაპლასის განტოლებას მოკლედ ასეც წერენ: $\Delta z=0$.

მაშასადამე, **დირიხლეს ფუნქციონალისათვის ნებისმიერი ჰარმონიული ფუნქცია ექსტრემალი იქნება**.

მაგალითი: ჩავწეროთ**ეილერ-ოსტროგრადსკის** განტოლება პუასონის ფუნქციონალისთვის:

$$J[z]=\frac{1}{2}\iint\left((z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2+2zf(x,y)\right)dxdy. \qquad (3.125)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right)=p^2+q^2+2zf(x,y)$. მაშინ $L'_p=2p=2z'_x$, $L'_q=2q=2z'_y$, $L'_z=f(x,y)$. მაშინ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება **პუასონის განტოლების სახე**:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x,y). \qquad (3.126)$$

პუასონის განტოლებას, ზოგჯერ მოკლედაც წერენ შემდეგნაირად: $\Delta z=f$.

მაშასადამე, **პუასონის ფუნქციონალისათვის**, **ექსტრემალები** აკმაყოფილებენ პუასონის განტოლებას.

მაგალითი: განვიხილოთ **პლატოს ვარიაციული ამოცანა**: ვიპოვოთ ის ზედაპირი, რომელიც გავლებულია მოცემულ C შეკრულ ჟორდანის წირზე და აქვს მინიმალური ფართობი. ამ ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება შემდეგი ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნის ამოცანაზე:

$$J[z]=\iint\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy. \qquad (3.127)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $L\left(x,y,z,z_x',z_y'\right)=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$, შესაბამისად, $L_p'=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $L_q'=\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ და $L_z'=0$. მაშასადამე, ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0. \qquad (3.128)$$

ანუ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)=0. \qquad (3.139)$$

ასე, რომ **საშუალო სიმრუდე ყველა წერტილში ნულის ტოლი** უნდა იყოს. ამ პირობას აკმაყოფილებს **მოცემულ C კონტურზე გადაჭიმული საპნის ბუშტი.**

ბ) თუ მოცემული გვაქვს მრავალი ცვლადისფუნქციაზე დამოკიდებული ფუნქციონალი:

$$J[z]=\iiint \dots \int L(x_1,x_2,\dots,x_n,z,p_1,p_1,\dots,p_n)\,dx_1dx_2\ \dots dx_n\to extr. \qquad (3.130)$$

სადაც $z=z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ და $p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$, მაშინ, მისი ექსტრემალებისათვის ანალოგიურად ჩაიწერება **ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება**:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}L_{p_i}'-L_z'=0. \qquad (3.140)$$

მაგალითი: განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[u]=\iiint\left((u_x')^2+\left(u_y'\right)^2+(u_z')^2\right)dxdydz\to extr. \qquad (3.141)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში:

$L(x,y,z,u,p_1,p_1,p_3)=(u_x')^2+\left(u_y'\right)^2+(u_z')^2=p_1^2+p_2^2+p_3^3$, სადაც $p_1=u_x'$, $p_2=u_y'$და $p_3=u_z'$.მაშინ$L_{p_1}'=2p_1=2u_x'$, $L_{p_2}'=2p_2=2u_y'$, $L_{p_3}'=2p_3=2u_z'$, $L_z'=0$. მაშინ მივიღებთ, რომ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\frac{\partial}{\partial x}L_{p_1}'+\frac{\partial}{\partial y}L_{p_2}'+\frac{\partial}{\partial z}L_z'=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ შემთხვევაში, გვექნება ლაპლასის სამგანზომილებიანი განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (3.142)$$

აქაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ მოკლე ჩანაწერი: $\Delta u=0$.

მაშასადამე, (3.141) ფუნქციონალის **ექსტრემალი** შეიძლება იყოს ნებისმიერი **ჰარმონიული** ფუნქცია.

გ) თუ ინტეგრანტი დამოკიდებულია მრავალი ცვლადის ფუნქციის მაღალი რიგის კერძო წარმოებულებზე, მაშინ ექსტრემალებისათვის გვექნება **ეილერ-პუასონის ფორმულის ანალოგიური ფორმულა**. კერძოდ, **განვიხილოთ ორი ცვლადის**

$z(x,y)$ ფუნქცია თავისი კერძო წარმოებულებით მეორე რიგამდე ჩათვლით ანუ განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z]=\iint L\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy\to exstr. \qquad (3.143)$$

მაშინ ექსტრემალებისათვის მიიღება განტოლება:

$$\frac{\partial}{\partial x}L'_p+\frac{\partial}{\partial y}L'_q+\frac{\partial^2}{\partial x^2}L'_r+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}L'_s+\frac{\partial^2}{\partial y^2}L'_t-L'_z=0. \qquad (3.144)$$

სადაც $p=z_x,\ q=z_y,\ r=z_{xx},\ s=z_{xy},\ t=z_{yy}$.

მაგალითი.განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[z]=\iint\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)dxdy\to exstr. \qquad (3.145)$$

ამოხსნა:ამ შემთხვევაში, $L=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$ ანუ

$L=r^2+t^2+2s^2$. მაშინ $L'_p=0,\ L'_q=0,\ L'_r=2r=2z_{xx}$,

$L'_s=4s=4z_{xy},\quad L'_t=2t=2z_{yy},\quad L'_z=0$. მაშასადამე, მივიღებთ ექსტრემალების განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0. \qquad (3.146)$$

ექსტრემალებისათვის მივიღეთ **ბიჰარმონიული** განტოლება. ამ განტოლებას, ზგჯერ, მოკლედაც ჩაწერენ ხოლმე:

$\Delta\Delta z=0$.

3.3.6. ეილერის განტოლებების კანონიკური სახე

განვიხილოთ $J[y_1,\dots,y_n]=\int_a^b L(x,y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)dx$ ფუნქციონალი, სადაც L ინტეგრანტი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ჩვენ შეგვიძლია ეს ფუნქციონალი გადავწეროთ ვექტორების გამოყენებით შემდეგნაირად:

$$J[\boldsymbol{y}]=\int_a^b L(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')dx, \qquad (3.147)$$

სადაც $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$. როგორც უკვე ვიცით, (3.147) სახის **ფუნქციონალის ექსტრემალებისათვის** ადგილი აქვს **ეილერის განტოლებებს**:

$$\frac{d}{dx}L'_{y'_i}-L'_{y_i}=0,\ \ i=\overline{1,n}. \qquad (3.148)$$

ეს არის მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისაგან შემდგარი სისტემა. ეს სისტემა შეგვიძლია დავიყვანოთ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე, თუ შემოვიღებთ სათანადო აღნიშვნებს:

$$y'_i=z_{i,}\ \ i=\overline{1,n}. \qquad (3.149)$$

მაშინ $L'_{y'_i}=L'_{z_i}$ და ეილერის (3.148) განტოლებები გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases}\frac{dy_i}{dx} = z_i, & i = \overline{1,n} \\ \frac{d}{dx}L'_{z_i} - L'_{y_i} = 0, & i = \overline{1,n}\end{cases}. \qquad (3.150)$$

მიღებული განტოლებათა სისტემა არაა **ნორმალური სისტემა**, ამიტომ მისი რიცხვითი რეალიზაცია არაა ხელსაყრელი, თუმცა, შეგვიძლია ისე გრდავქმნათ ანალიზურად, რომ მრავალი ამოცანის ამოხსნა იქნება შესაძლებელი. მართლაც, შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$L'_{y'_i} = L'_{z_i} \equiv p_i,\ \ i = \overline{1,n}. \qquad (3.151)$$

ინტეგრანტის, მეორე რიგის კერძო წარმოებულებისაგან შემდგარი მატრიცის (ჰესის მატრიცა) დეტერმინანტი თუ განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ არაცხადი ფუნქციის შესახებ თეორემიდან გამომდინარე, $L'_{y'_i} = p_i,\ i = \overline{1,n}$ განტოლებებიდან შეგვიძლია ძველი y'_i **ცვლადები გამოვსახოთ ახალი ცვლადებით** ანუ

$$y'_i = h_i(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}),\ i = \overline{1,n}. \qquad (3.152)$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$H(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = -L\big(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p})\big) + \sum_{i=1}^{n} h_i(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p})p_i. \qquad (3.153)$$

ამ ფუნქციას, მოცემული (3.147) ფუნქციონალის **ჰამილტონისფუნქციას** უწოდებენ, ხოლო $x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}$ცვლადებს, მოცემული ფუნქციონალის–**კანონიკურ ცვლადებს.**

ჰამილტონის ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^{n} p_i dy'_i + \sum_{i=1}^{n} y'_i dp_i \ \text{ ანუ}$$

$$dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^{n} L'_{y_i} dy_i - \sum_{i=1}^{n} L'_{y'_i} dy'_i + \sum_{i=1}^{n} p_i dy'_i + \sum_{i=1}^{n} y'_i dp_i, \ (3.154)$$

რადგან აღნიშვნის თანახმად $L'_{y'_i} = p_i,\ i = \overline{1,n},$ ფორმულა (3.154)-ის მარჯვენა მხარის მესამე და მეოთხე წევრი, ერთმანეთს აბათილებს, შესაბამისად, მივიღებთ რომ

$$dH = -L'_x dx - \sum_{i=1}^{n} L'_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{n} y'_i dp_i. \qquad (3.155)$$

თუ ჰამილტონის ფუნქციას წარმოვადგენთ სტანდართული ფორმით, მივიღებთ რომ

$$dH = H_x dx + \sum_{i=1}^{n} H_{y_i} dy_i + \sum_{i=1}^{n} H_{p_i} dp_i. \qquad (3.156)$$

თუ შევადარებთ (3.155) და (3.156) ფორმულებს, მივიღებთ რომ

$$H_x = -L'_x,\ H_{y_i} = -L'_{y_i},\quad H_{p_i} = y'_i. \qquad (3.157)$$

მაშასადამე, $L'_{y_i} = -H_{y_i},\ y'_i = H_{p_i},\ L'_{z_i} = p_i,$ ტოლობების გათვალისწინებით, **ეილერის (3.150) განტოლებები გადაიწერება კანონიკურ ცვლადებში**:

$$\begin{cases}\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, & i = \overline{1,n}, \\ \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, & i = \overline{1,n},\end{cases} . \qquad (3.158)$$

როგორც ვიცით, ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი ეწოდება ისეთ ფუნქციას, რომელიც ამ სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირის გასწვრივ მუდმივ მნიშვნელობას ინარჩუნებს.

იმისათვის, რომ მოცემული გლუვი ფუნქცია იყოს ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლების პირველი ინტეგრალი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული მოცემული დიფერენციალური განტოლებიდან გამომდინარე, იყოს ნულოვანი.

ზოგიერთი კერძო შემთხვევისათვის, შესაძლებელია ვიპოვოთ (3.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი და მაშასადამე (3.150) სისტემისაც.

მაგალითი: ვთქვათ ინტეგრანტს აქვს სახე: $L(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')$ანუ ცხადი სახით არ შეიცავს x ცვლადს.მაშინ შესაბამისი ჰამილტონის ფუნქციაც არ შიცავს x ცვლადს, ცხადი სახით ანუ $\frac{\partial H}{\partial x}\equiv 0$. ე.ი. გვექნება, რომ

$$\frac{dH}{dx}=\sum_{i=1}^{n} H'_{y_i}\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{n} H'_{p_i}\frac{dp_i}{dx}, \qquad (3.159)$$

შევიტანოთ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში H'_{y_i} და H'_{p_i} (3.158) განტოლებიდან, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dH}{dx}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{dp_i}{dx}\frac{dy_i}{dx}+\sum_{i=1}^{n}\frac{dy_i}{dx}\frac{dp_i}{dx}=0. \qquad (3.160)$$

ამრიგად, თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე, მაშინ ნებისმიერი ექსტრემალის გასწვრივ, ჰამილტონის ფუნქცია მუდმივია. რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ ინტეგრანტი არაა ცხადად დამოკიდებული x ცვლადზე, მაშინ ჰამილტონის ფუნქცია ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალია.

P.S. *კანონიკურ ცვლადებში ჩაწერილი ეილერის (3.158) განტოლებიდან გამომდინარეობს იგივობა:* $\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x}$.

მაგალითი. ახლა დავსვათ ასეთი საკითხი: ვიპოვოთ რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული $F(y,p)$ ფუნქცია, რომ ის იყოს (3.158) სისტემის პირველი ინტეგრალი ?

ამოხსნა: ვიპოვოთ ამ ფუნქციის სრული წარმოებული:

$$\frac{dF}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(F'_{y_i}\frac{dy_i}{dx}+F'_{p_i}\frac{dp_i}{dx}\right), \qquad (3.161)$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.158) განტოლებებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{dF}{dx}=\sum_{i=1}^{n}\left(F'_{y_i}\frac{dy_i}{dx}+F'_{p_i}\frac{dp_i}{dx}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(F'_{y_i}H'_{p_i}-F'_{p_i}H'_{y_i}\right). \qquad (3.162)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეს მდგარ გამოსახულებას,**პუასონის** $[\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}]$ **ფრჩხილებს** უწოდებენ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dF}{dx}=[F,H]. \qquad (3.163)$$

მაშასადამე, მოცემული $F(y,p)$ ფუნქცია არის ეილერის განტოლების პირველი ინტეგრალი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა F და H ფუნქციების პუასონის ფრჩხილი $[F,H]=0$ ნულის ტოლია.

მაგალითი. მოცემული ფუნქციონალისათვის:

$$J[y_1,y_2]=\int_0^{\pi}(2y_1y_2-2y_1^2+(y_1')^2-(y_2')^2)dx,$$

შეადგინეთ ეილერის კანონიკური განტოლებები.

ამოხსნა: ჩვენ შემთხვევაში

$L(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')=2y_1y_2-2y_1^2+(y_1')^2-(y_2')^2$, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს: $L'_{y_1'}=p_1$, $L'_{y_2'}=p_2$. მაშინ მივიღებთ, რომ $2y_1'=p_1$, $-2y_2'=p_2$. ამ შემთხვევაში, დეტერმინანტი: $\begin{vmatrix} L''_{y_1'y_1'} & L''_{y_1'y_2'} \\ L''_{y_2'y_1'} & L''_{y_2'y_2'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$

თუ მიღებულ განტოლებებს ამოვხსნით y_1' და y_2' წარმოებულების მიმართ, მივიღებთ რომ $y_1'=\frac{p_1}{2}$ და $y_2'=-\frac{p_2}{2}$. მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის შესაბამისი **ჰამილტონიანი**:

$$H=\left(-L+y_1'L'_{y_1'}+y_2'L'_{y_2'}\right)\Big|_{y_1'=\frac{p_1}{2},\ y_2'=-\frac{p_2}{2}}=2y_1^2-2y_1y_2+\frac{p_1^2}{4}-\frac{p_2^2}{4}.$$

შესაბამისად, **ეილერის კანონიკურ განტოლებებს** ექნებათ სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=\dfrac{p_1}{2}, & \dfrac{dy_2}{dx}=-\dfrac{p_2}{2} \\ \dfrac{dp_1}{dx}=-4y_1+2y_2, & \dfrac{dp_2}{dx}=2y_1 \end{cases}.$$

3.3.7. ფუნქციონალებისა და მათი შესაბამისი ექსტრემალების განტოლებათა ცხრილი

ფუნქციონალის სახე		ექსტრემალების დიფერენციალური განტოლებები
1	$J[y]=\int_a^b L(x,y,y')dx$	$\frac{d}{dx}L'_{y'}-L'_y=0$ ეილერის განტოლება
1.2	$J[y]=\int_a^b L(x,y)dx$	$L'_y=0$

1.3	$J[y]=\int_a^b (P(x,y)+Q(x,y)y')dx$	$Q'_x-P'_y=0$
1.4	$J[y]=\int_a^b L(y')dx$	$\frac{d}{dx}L'_{y'}=0$
1.5	$J[y]=\int_a^b L(x,y')dx$	$\frac{d}{dx}L'_{y'}=0$
1.6	$J[y]=\int_a^b L(y,y')dx$	$y'L'_{y'}-L=C_1$
2	$J[y_1,y_2]=\int_a^b L(x,y_1,y_2,y'_1,y'_2)dx$	$\begin{cases}\frac{d}{dx}L'_{y'_1}-L'_{y_1}=0\\ \frac{d}{dx}L'_{y'_2}-L'_{y_2}=0\end{cases}$
3	$J[y_1,\dots,y_n]=\int_a^b L(x,y_1,\dots,y_n,y'_1,\dots,y'_n)dx$	$\frac{d}{dx}L'_{y'_i}-L'_{y_i}=0, \quad i=\overline{1,n}$
4	$J[y]=\int_a^b L\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)dx$	$L'_y-\frac{d}{dx}L'_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}L'_{y''}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}L'_{y^{(n)}}=0$ ეილერ-პუასონის განტოლება
5	$J[y_1,y_2]=\int_a^b L\left(x,y,z,z'_x,z'_y\right)dxdy$	$\frac{\partial L'_p}{\partial x}+\frac{\partial L'_q}{\partial y}-L'_z=0, p=z'_x,\ q=z'_y.$ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება
5.1	$J[u]=\iiint\left((u'_x)^2+\left(u'_y\right)^2+(u'_z)^2\right)dxdydz$	$\Delta u=0$ლაპლასის განტოლება
5.2	$J[z]=\frac{1}{2}\iint\left((z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2+2zf(x,y)\right)dxdy$	$\Delta z=f(x,y)$პუასონის განტოლება
5.3	$J[z]=\iint\left(\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2\right)dxdy$	$\Delta\Delta z=0$ბიჰარმონიული განტოლება
6	$J[\boldsymbol{y}]=\int_a^b L(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')dx$	$\begin{cases}\frac{dy_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \frac{dp_i}{dx}=-\frac{\partial H}{\partial y_i}\end{cases} i=\overline{1,n} p_i=L'_{y_i}.$ ეილერის კანონიკური განტოლებები

3.4. ვარიაციული ამოცანები მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ ვარიაციული ამოცანები **ფიქსირებული საზღვრებით**, სადაც დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრული იყო ფიქსირებულ $[a;b]$ მონაკვეთზე და გრაფიკის ბოლო $A(a,y_A)$ და $B(b,y_B)$ წერტილები იყო ფიქსირებული.

პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას, ზოგჯერ, საჭიროა ფუნქციონალის ექსტრემუმის პოვნა ისეთ პირობებში, როცა დასაშვები ფუნქციები განსაზღვრულია სხვადასხვა შუალედში და შუალედის ბოლოებზე მათი მნიშვნელობა წინასწარ არაა

ცნობილი. ასეთ ამოცანებს, **მოძრავ საზღვრებიან ვარიაციულ ამოცანებს უწოდებენ**.

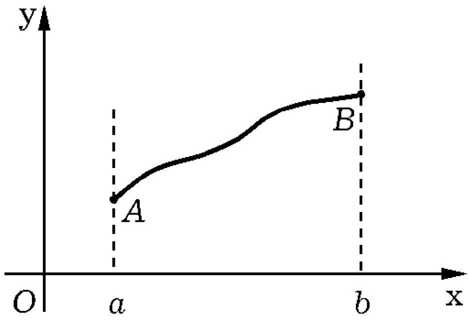
3.4.1. ვარიაციული ამოცანა, ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ, ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით

განვიხილოთ ვარიაციული ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y')dx, \quad (3.164)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის შესახებ, სადაც ფუნქციონალის განსაზღვრის არეა $C^1[a;b]$ კლასის ფუნქციების სიმრავლე (ფუნქციონალური სივრცე). განსხვავება ადრე განხილულ ამოცანებთან შედარებით ისაა, რომ ამჯერად, დასაშვები ფუნქციებისათვის არ გვაქვს მოცემული სასაზღვრო პირობები.

გეომეტრიული თვალსაზღისით, ამოცანა მდგომარეობს ისეთი ფუნქციის პოვნაში, რომელიც (3.164) ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემალურ მნიშვნელობას და რომლის გრაფიკის ბოლოებიც, კვეთს $x = a$ და $x = b$ ვერტიკალურ წრფეებს. ასეთ ამოცანას ჩვენ ვუწოდებთ ვარიაციულ ამოცანას **ექსტრემალის ფუნქციის გრაფიკის ორ პარალელურ, ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი ბოლოებით**ნახ. 3.5.



ნახ. 3.5. ვარიაციული ამოცანა წირის მოძრავი ბოლოებით

ჩავთვალოთ, რომ ფუნქციონალის ინტეგრანტი, ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა. ამ შემთხვევაში, დასაშვები ფუნქცია, შეიძლება იყოს $C^1[a;b]$ ფუნქციონალური სივრცის ნებისმიერი ელემენტი. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციონალის პირველი ვარიაცია:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y'\right)dx. \quad (3.165)$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობიდან გამომდინარე, როგორც ვიცით, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y \delta y + L'_{y'} \delta y'\right)dx = 0. \quad (3.166)$$

მაშინ **დიუბუა-რაიმონის** ლემიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ **ექსტრემალები** აკმაყოფილებენ **ეილერის განტოლებას**:

$$\frac{d}{dx}L'_{y'} - L'_y = 0. \qquad (3.167)$$

განტოლება (3.166) საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ დამატებითი პირობები, რომელთაც აუცილებლად, უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქციონალის ექსტრემალი.

თუ $J[y]$ ფუნქციონალი არაა გადაგვარებული ანუ $L''_{y'y'} \neq 0$, მაშინ მისი y ექსტრემალი არის ორჯერ, უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქცია. მაშინ, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი (3.166) განტოლებისათვის და მივიღებთ, რომ:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'}\right)\delta y dx + L'_{y'}\delta y\Big|_a^b \qquad (3.168)$$

ანუ გვექნება ფორმულა:

$$\delta J[y, \delta y] = \int_a^b \left(L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'}\right)\delta y dx + L'_{y'}\Big|_{x=b}\delta y(b) - L'_{y'}\Big|_{x=a}\delta y(a). \qquad (3.169)$$

თუ $y(x)$ ექსტრემალია, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას და მაშასადამე, (3.169) ფორმულაში ინტეგრალი ნულის ტოლია. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$L'_{y'}\Big|_{x=b}\delta y(b) - L'_{y'}\Big|_{x=a}\delta y(a) = 0. \qquad (3.170)$$

მოცემულ ამოცანაში, რადგან $\delta y(a)$ და $\delta y(b)$ სიდიდეებს შეუძლიათ ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღება, ცხადია რომ (3.170) განტოლება გვაძლევს დამატებით აუცილებელ პირობებს იმისათვის, რომ $y(x)$ ფუნქცია იყოს მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალი. ამ პირობებს აქვთ სახე:

$$L'_{y'}\Big|_{x=b} = 0, \quad L'_{y'}\Big|_{x=a} = 0. \qquad (3.171)$$

ამ პირობებს, **ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს** უწოდებენ.

ა)ამრიგად, ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად, ჯერ უნდა ამოვხსნათ ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ექსტრემალები, ხოლო შემდეგ, მათგან უნდა ამოვირჩიოთ ის ექსტრემალები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს.

ბ)მოცემული (3.164) ტიპის ფუნქციონალისთვის შეგვიძლია დავსვათ შერეული ტიპის ამოცანაც ანუ მაგალითად, მოცემულია საძიებელი ფუნქციის გრაფიკის მარცხენა ბოლოს კოორდინატები $A(a; y_A)$ ხოლო მარჯვენა ბოლო თავისუფლად მოძრაობს $x = b$ ვერტიკალურ წრფეზე. მაშინ გვაქვს ერთი პირობა, რომელიც ავიწროებს დასაშვებ ფუნქციათა სიმრავლეს. დასაშვები ვარიაცია უნდა აკმაყოფილებდეს $\delta y(a) = 0$ პირობას, რადგან ყველა დასაშვები ფუნქცია უნდა აკმაყოფილებდეს ერთი და იგივე პირობას: $y(a) = y_A$.

მაშასადამე, ამ შემთხვევაში (3.170) პირობიდან მივიღებთ, რომ:

$$y(a) = y_A,\ L'_{y'}\Big|_{x=b} = 0. \tag{3.172}$$

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}}((y')^2 - y^2 + 4y\cos x)dx \rightarrow exstr, \quad y(0) = 0. \tag{3.173}$$

ამოხსნა: მოცემული ფუნქციონალისთვისეილერის განტოლებას აქვს სახე: $y'' + y = 2\cos x$. ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნია: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x$.

რადგან $y(0) = 0$, მივიღებთ რომ $C_1 = 0$. მეორე მუდმივის საპოვნელად, უნდა გამოვიყენოთ $L'_{y'}\Big|_{x=b} = 0$ პირობა, რომელსაც მოცემული ამოცანის პირობებში, აქვს სახე:$2y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$ ანუ $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ მაშინ $C_2 = -1 - \frac{\pi}{4}$. მივიღეთ, რომ ბუნებრივ სასაზღვრო პირობებს აკმაყოფილებს ექსტრემალი: $y = \left(x - 1 - \frac{\pi}{4}\right)\sin x$.

3.4.2. ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა ნებისმიერ ორ წირზე მოძრავი საზღვრებით

ჩვენ უკვე განვიხილეთ **ვარიაციული ამოცანა, ნებისმიერ ორ ვერტიკალურ წრფეზე მოძრავი საზღვრებით.**ახლა, განვაზოგადოთ ეს ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა გრაფიკის ბოლოები გადაადგილდებიან არა მხოლოდ ვერტიკალურ წრფეებზე, **არამედ ნებისმიერ ორ გლუვ წირზე.**

დავსვათ ამოცანა. ვიპოვოთ

$$J[y] = \int_a^b L(x, y, y')dx, \tag{3.174}$$

ფუნქციონალის ექსტრემუმები, თუ L ფუნქციონალი ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო a და b, $y(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ბოლოების უცნობი აბსცისებია, ხოლო ორდინატები კი, შესაბამისად $y(a)$ და $y(b)$. ამასთან ერთად, ცნობილია რომ $y(x)$ ფუნქციის ბოლოები განლაგებულია შესაბამისად, $y = \varphi(x)$ და $y = \psi(x)$ წირებზე ანუ $y(a) = \varphi(a)$ და $y(b) = \psi(b)$.

ასეთი ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად იყენებენ თეორემას:

თუ $y(x)$ არის (3.174) ფუნქციონალის ექსტრემალი, რომელიც $y = \varphi(x)$წირის$(a, \varphi(a))$ წერტილს აერთებს $y = \psi(x)$ წირის $(b, \psi(b))$ წერტილთან, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის განტოლებას:

$$L'_y - \frac{d}{dx}L'_{y'} = 0, \tag{3.175}$$

და **ტრანსვერსალობის პირობებს**:

$$\begin{cases} L + (\varphi' - y')L'_{y'}\Big|_{x=a} = 0 \\ L + (\psi' - y')L'_{y'}\Big|_{x=b} = 0 \end{cases}. \qquad (3.176)$$

ამრიგად, მოძრავ საზღვრებიანი ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა:

1) ამოვხსნათ ფუნქციონალის შესაბამისი ეილერის განტოლება და ვიპოვოთ ორ ნებისმიერ ცვლადზე დამოკიდებული $y = f(x, C_1, C_2)$ექსტრემალების სიმრავლე;
2) ტრანსვერსალობის პირობებიდან გამომდინარე და ტოლობების:

$$\begin{cases} f(a, C_1, C_2) = \varphi(a) \\ f(b, C_1, C_2) = \psi(a) \end{cases}, \qquad (3.177)$$

გათვალისწინებით, ვიპოვოთ შესაბამისი a, b, C_1, C_2 ცვლადები.

მაგალითი.იპოვეთ მანძილი$y = x^2$ პარაბოლასა და $y = x - 5$ წრფეს შორის.

ამოხსნა:თუ განვიხილავთ მანძილს, ორ გადაკვეთის წერტილს შორის საძებნ $y(x)$ წირზე, რომელიც კვეთს მოცემულ პარაბოლასა და წრფეს, შესაბამისად, წერტილებში (a, a^2) და $(b, b-5)$, მივიღებთ, რომ საძებნი წირი მინიმუმს უნდა ანიჭებდეს ფუნქციონალს:

$$J[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში $\varphi(x) = x^2$ და $\psi(x) = x - 5$.

ამ შემთხვევაში, ეილერის განტოლება იქნება: $y'' = 0$ ანუ ზოგად ამონახსნს აქვს სახე: $y = C_1 x + C_2$. მაშინ, $\left(L + (\varphi' - y')L'_{y'}\right)\Big|_{x=a} = 0$ $\left(L + (\psi' - y')L'_{y'}\right)\Big|_{x=b} = 0$ ტრანსვერსალობის პირობებს აქვთ სახე:

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=a} = 0$$

$$\left[\sqrt{1 + y'^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right]_{x=a} = 0$$

სადაც $y' = C_1$. ხოლო (3.177) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$\begin{cases} C_1 a + C_2 = a^2 \\ C_1 b + C_2 = b - 5 \end{cases}$. მაშინ გვაქვს ოთხი განტოლება ოთხი უცნობით: (a, b, C_1, C_2). ამ სისტემის ამონახსნი იქნება: $C_1 = -1,\ C_2 = \frac{3}{4},\ a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{23}{8}$. მაშინ, ექსტრემალის განტოლება იქნება: $y = -x + \frac{3}{4}$. მაშინ, **მანძილი ამ წირებს შორის იქნება**:

$l = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2}\, dx = \sqrt{2} x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} = \frac{19\sqrt{2}}{8}$.

3.5. ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები

ჩვენს მიერ განხილულ ამოცანებში, ვეძებდით სხვადასხვა სახის ფუნქციონალის ექსტრემუმებს, გარკვეული ტიპის სასაზღვრო პირობების შემთხვევაში, თუმცა, მრავალი პრაქტიკული ამოცანა დაიყვანება ისეთი ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანაზე, როცა დასაკმაყოფილებელია გარკვეული ტიპის დამატებითი პირობები. მაგალითად, **დიდონის ამოცანის** განხილვისას, საქმე გვქონდა ისეთი ფუნქციონალის მაქსიმიზაციის ამოცანასთან, რომელსაც უნდა ქონოდა მოცემული სიგრძის პერიმეტრი. ასეთ ამოცანებს,**იზოპერიმეტრულ** ამოცანებს უწოდებენ.

განვიხილოთ, სხვადასხვა ტიპის ვარიაციული ამოცანა **შემოფარგვლის** (**ბმის**) პირობების მიხედვით. ასეთ ამოცანებს, **ფუნქციონალის პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ეწოდება, ხოლო ფუნქციონალს – მიზნის ფუნქციონალი.**

3.5.1. ლაგრანჟის ამოცანა

ვთქვათ, გვაქვს **ამოცანა**: ვიპოვოთ (3.178) ფუნქციონალის ექსტრემუმები, რომლებიც აკმაყოფილებენ (3.179) სასაზღვრო და (3.180) ბმის პირობებს, სადაც f და g_j ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია.

$$J[\boldsymbol{y}] = \int_a^b f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')dx, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \tag{3.178}$$

$$\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{y}_2. \tag{3.179}$$

$$g_j(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') = 0,\ j = \overline{1,k},\ (k < n),\ x \in [a, b]. \tag{3.180}$$

(3.178),(3.179),(3.180) ამოცანას **ლაგრანჟის ამოცანას** უწოდებენ.

თუg_j ბმის ფუნქციები არა არიან დამოკიდებული $\boldsymbol{y}'$ ფუნქციაზე, მაშინ **ასეთ ბმებს მექანიკაში ჰოლონომურ ბმებს** უწოდებენ, ხოლო ვარიაციულ აღრიცხვაში – **ფაზურ შემოფარგვლის პირობებს**.

ჩამოვაყალიბოთ ლაგრანჟის (3.178),(3.179),(3.180) ამოცანის ექსტ-რემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა. ვთქვათ, g_j ფუნქციების $\boldsymbol{y}'$ცვლადების მიმართ იაკობის მატრიცის რანგი მაქსიმალურია და უდრის k-ს. მაშინ შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\left|\frac{\partial(g_1,g_2,\dots,g_k)}{\partial(y_1',y_2',\dots,y_n^i)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1'}\frac{\partial g_1}{\partial y_2'} & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_k'} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1'}\frac{\partial g_2}{\partial y_2'} & \cdots \frac{\partial g_2}{\partial y_k'} \\ \cdots & \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1'}\frac{\partial g_k}{\partial y_2'} & \cdots \frac{\partial g_k}{\partial y_k'} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.181}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ შესაძლებელია $\boldsymbol{y}'$ცვლადები ამოვხსნათ g_jდიფერენციალური (ან ალგებრული) განტოლებები-დან.

თეორემა: თუ $\boldsymbol{y}^*(x) = (y_1^*(x),\dots,y_n^*) \in C^1[a,b,\mathbb{R}^n]$არის(3.178),(3.179),(3.180) ამოცანის ამონახსნი და ადგილი აქვს (3.181) პირობას, მაშინ $\boldsymbol{y}^*(x)$ წარმოადგენს **სპეციალური სახის**

$$J^*[\boldsymbol{y}] = \int_a^b f^* dx, \tag{3.182}$$

ფუნქციონალის ექსტრემალს, სადაც

$$f^* = f + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j, \tag{3.183}$$

f^* ფუნქციას, მოცემული ამოცანის **ლაგრანჟიანი** ეწოდება, ხოლო λ_j კოეფიციენტებს – **ლაგრანჟის მამრავლები**.

ამ თეორემიდან გამომდინარე, $n+k$ ცვლადების საპოვნელად გვაქვს ამდენივე განტოლება. ესაა ეილერის n განტოლება:

$$\frac{d}{dx}(f^*)'_{y_j'} - (f^*)'_{y_j} = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{3.184}$$

და k ბმის პირობები:

$$g_j(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}') = 0,\ \ j = \overline{1,k},\ (k < n),\ x \in [a,b]. \tag{3.185}$$

მაგალითი.იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ორ $A(1;-1;0)$ და $B(2;1;-1)$ წერტილს შორის $15x - 7y + z - 22 = 0$ ზედაპირზე.

ამოხსნა: როგორც ცნობილია, ორ $A(x_1,y_1,z_1)$ და $B(x_2,y_2,z_2)$ წერტილს შორის მანძილი $\varphi(x,y,z) = 0$ ზედაპირზე, გამოითვლება ფორმულით:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}dx. \tag{3.186}$$

ჩვენი ამოცანის პირობებში: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,$
$\varphi(x,y,z) = 15x - 7y + z - 22$. შევადგინოთ **ლაგრანჟიანი**:
$f^* = \sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22).$
მაშინ გვექნება სპეციალური სახის ფუნქციონალი:

$$J^*[y,z] = \int_1^2 \left[\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)\right]dx, \tag{3.187}$$

ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებებს აქვს სახე:

$$\lambda(x)\cdot(-7)-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0, \qquad (3.188)$$

$$\lambda(x)\cdot 1-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0. \qquad (3.189)$$

(3.188),(3.189) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ **ბმის განტოლება**: $15x-7y+z-22=0$
და სასაზღვრო პირობები:

$$y(1)=-1, y(2)=1, z(1)=0, z(2)=-1. \qquad (3.190)$$

გავამრავლოთ (3.189) განტოლება 7-ზე და დავუმატოთ (3.188) განტოლებას. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{d}{dx}\frac{y'+7z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=0 \text{ ანუ } \frac{y'+7z'}{\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}}=C_1. \qquad (3.191)$$

ბმის განტოლების გაწარმოებით, მივიღებთ:
$z'=7y'-15$. თუ ამ მნიშვნელობას, შევიტანთ (3.191) პირველ ინტეგრალში, მივიღებთ:
$y(x)=C_1x+C_2$. სასაზღვრო (3.190) პირობებიდან მივირებთ, რომ $C_1=2$ და $C_2=-3$. მაშასადამე, $y(x)=2x-3$. მაშინ $z(x)=1-x$ და $\lambda(x)=0$. მაშასადამე, საძიებელი მანძილი იქნება:
$l=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2+(z')^2}dx=\sqrt{6}$.

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის

$$J[y_1,y_2]=\int_0^1[(y_1'(x))^2+2y_1(x)y_2(x)+(y_2'(x))^2], \qquad (3.192)$$

ექსტრემალი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს: $y_1(0)=1$, $y_2(0)=1$, $y_1(1)=e$, $y_2(0)=\frac{1}{e}$, $y_1-y_2-e^x+e^{-x}=0$.

ამოხსნა: რადგან $f=(y_1'(x))^2+2y_1(x)y_2(x)+(y_2'(x))^2$ და $g=y_1-y_2-e^x+e^{-x}$, ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:
$f^*=f+\lambda g=(y_1'(x))^2+2y_1(x)y_2(x)+(y_2'(x))^2+\lambda(x)(y_1-y_2-e^x+e^{-x})$.
ახლა შევადგინოთ შესაბამისი **ეილერ-ლაგრანჟის** განტოლებები:
$(f^*)'_{y_1}-\frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'}=2y_2+\lambda(x)-2y_1''=0$,
$(f^*)'_{y_2}-\frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'}=2y_1-\lambda(x)-2y_2''=0$.
ვიპოვოთ ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნი და $\lambda(x)$.

სისტემას მივუერთოთ ბმის განტოლებაც:
$y_1-y_2-e^x+e^{-x}=0$. მაშინ ეილერის განტოლებების შეკრება მოგვცემს, რომ $y_1+y_2-(y_1''+y_2'')=0$. მაშინ $y_1+y_2=C_1e^x+C_2e^{-x}$, ასევემ ბმის პირობიდან გვაქვს, რომ $y_1-y_2=e^x-e^{-x}$.

მაშასადამე, **ექსტრემალებს ექნებათ შემდეგი სახე**:
$y_1(x)=\frac{C_1+1}{2}e^x+\frac{C_2-1}{2}e^{-x}$, $y_2(x)=\frac{C_1-1}{2}e^x+\frac{C_2+1}{2}e^{-x}$.
ხოლო $\lambda(x)=2y_1(x)-2y_2''(x)$.

მაგალითი. იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$J[y_1,y_2] = \int_0^1 \left[\left(y_1(x)\right)^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$

თუ $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\quad y_1(1) = e + e^{-1},\quad y_2(1) = 2e - e^{-1}$და გვაქვს დიფერენციალური ბმის განტოლება: $y_1' - y_2 = 0$.

ამოხსნა: ა) შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია. რადგან $f = \left(y_1(x)\right)^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2$, $g = y_1' - y_2$, გვექნება ლაგრანჟის ფუნქცია: $f^* = f + \lambda g$, რომელიც ჩვენი ამოცანის პირობებში იქნება:

$f^* = \left(y_1(x)\right)^2 + 2(y_1')^2 + (y_2')^2 + \lambda(x)(y_1' - y_2)$.

ბ) ჩავწეროთ **ეილერისა და ბმის განტოლებები**:

$(f^*)'_{y_1} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_1'} = 2y_1(x) - 4y_1'' - \lambda'(x) = 0,$

$(f^*)'_{y_2} - \frac{d}{dx}(f^*)'_{y_2'} = -\lambda(x) - 2y_2'' = 0,$

$y_1' - y_2 = 0.$

გ) ვიპოვოთ მიღებული სისტემის ზოგადი ამონახსნი. დავიწყოთ მესამე განტოლებიდან, $y_1' = y_2$, მაშინ $y_2'' = y_1'''$, $\lambda = -2y_2'' = -2y_1'''$, ე.ი. $\lambda' = -2y_1^{(4)}$და მივიღებთ განტოლებას:

$y_1^{(4)} - 2y_1'' + y_1 = 0$. მახასიათებელ განტოლებას აქვს ჯერადი ფესვები, ე.ი. ზოგად ამონახსნს ექნება სახე:

$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + (C_3 + C_4 x)e^{-x}$. მაშინ, რადგან $y_2 = y_1'$,

$y_2 = (C_1 + C_2 x + C_2)e^x + (C_4 - C_3 + C_4 x)e^{-x}$.

ც) სასაზღვრო პირობებიდან ვპოულობთ, რომ

დ) $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 1$და $C_4 = 0$.

ამრიგად, მივიღეთ ექსტრემალები:

$y_1(x) = xe^x + e^{-x}$ და $y_2(x) = (x+1)e^x - e^{-x}$.

შესაბამისად, $\lambda(x) = -2(x+3)e^x + 2e^{-x}$.

3.5.2. მაიერის ამოცანა

განვიხილოთ მიზნის ფუნქციონალის ექსტრემუმის ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როცა ბმის განტოლებებს აქვთ ინტეგრალური განტოლებების სახე.

მასშასადამე, გვაქვს მიზნის ფუნქციონალი:

$$J[\boldsymbol{y}] = \int_a^b f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')dx, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n). \tag{3.193}$$

სასაზღვრო პირობები:

$$\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}(b) = \boldsymbol{y}_2. \tag{3.194}$$

ბმის ინტეგრალური პირობები:

$$L_i = \int_a^b h_i(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')\,dx,\ i = \overline{1, s}. \tag{3.195}$$

აქ იგულისხმება რომ, f, h_i ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციებია და (3.194) სასაზღვრო პირობები არ ეწინააღმდეგება ბმის პირობებს. (3.195) სახის ბმებს **ინტეგრალურ (იზოპერიმეტრულ)** ბმებს უწოდებენ.

P.S. *იზოპერიმეტრული ამოცანები წარმოიშვა კლასიკური გეომეტრიული ამოცანის განზოგადების შედეგად, როცა ეძებდნენ მოცემული პერიმეტრის მქონე ბრტყელ ფიგურებს შორის, უდიდესი ფართობის მქონე ფიგურას.*

იზოპერიმეტრული ამოცანები, შეგვიძლია დავიყვანოთ ლაგრანჟის ამოცანაზე, თუ შემოვიღებთ ახალ ფუნქციებს:

$$\psi_i(x) = \int_a^x h_i(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}')dx\,,\ i = \overline{1, s}. \tag{3.196}$$

მაშინ (3.195) **ინტეგრალური ბმის პირობების ნაცვლად**, გვექნება **დიფერენციალური განტოლებების ფორმით ჩაწერილი ბმები**:

$$\psi_i'(x) = h_i(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}'),\ i = \overline{1, s}. \tag{3.197}$$

ამასთან ერთად, გვექნება დამატებითი სასაზღვრო პირობები:

$$\psi_i(a) = 0,\ \psi_i(b) = L_i,\ \ i = \overline{1, s}. \tag{3.198}$$

მაშასადამე, იზოპერიმეტრული ამოცანის ამოსახსნელად,

1. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი სპეციალური სახის ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$f^*(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}', \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}') = f(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \left(h_j(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}') - \psi_j'(x)\right),\ j = \overline{1, s}. \tag{3.199}$$

2. უნდა შევადგინოთ შესაბამისი ეილერის განტოლებები:

$$\frac{d}{dx}(f^*)'_{y_j'} - (f^*)'_{y_j} = 0,\ j = \overline{1, n}, \tag{3.200}$$

$$\frac{d}{dx}(f^*)'_{\psi_j'} - (f^*)'_{\psi_j} = 0,\ j = \overline{1, s}. \tag{3.201}$$

   რადგან (3.199)-დან გამომდინარე,

   $(f^*)'_{\psi_j} = 0$ და $(f^*)'_{\psi_j'} = -\lambda_j(x)$,

   ცხადია, რომ (3.201)-ის მეორე განტოლება მიიღებს სახეს:

$$\frac{d}{dx}\lambda_j(x) = 0,\ \ j = \overline{1, s}. \tag{3.202}$$

   რაც იმას ნიშნავს, რომ $\lambda_j(x)$ მუდმივი რიცხვებია. ე.ი. საკმარისია განვიხილოთ ეილერის (3.200) განტოლება.

3. ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნის მუდმივები უნდა განვსაზღვროთ, (3.198) და (3.194) სასაზღვრო პირობებიდან.

თეორემა:თუ $y(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.194),(3.195) პირობებს და ექსტრემუმს ანიჭებს (3.193) ფუნქციონალს, მაშინ ის აკმაყოფილებს ეილერის (3.200) განტოლებებს ლაგრანჟის F^* ფუნქციისათვის, სადაც $F^* = f + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \left(h_j(x, y, y')\right)$, $j = \overline{1, s}$.

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალი, თუ
$J(y) = \int_0^1 (y')^2 dx$, $y(0) = 1$, $y(1) = 6$ და გვაქვს ინტეგრალური ბმის პირობა: $\int_0^1 y(x)dx = 3$.

ამოხსნა:ჩვენი ამოცანის პირობებში: $f = (y')^2$, $h_j = y(x)$, $s = 1$. შესაბამისად, $F^* = (y')^2 + \lambda y(x)$.

1. შევადგინოთ ეილერის განტოლებები: $(F^*)'_y = \lambda$, $(F^*)'_{y'} = 2y'$ და $\frac{d}{dx}(F^*)'_{y'} = 2y''$. მაშინ, $(F^*)'_y - \frac{d}{dx}(F^*)'_{y'} = \lambda - 2y'' = 0$.
ე.ი. $y(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2$.

2. მაშინ, ინტეგრალური ბმის პირობიდან, მივიღებთ, რომ $\int_0^1 y(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4}x^2 + C_1 x + C_2\right)dx = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3\right)$.

3.განვსაზღვროთC_1, C_2, λ მუდმივები, სასაზღვრო და ბმის პირობებიდან:
$y(0) = C_2 = 1, y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 + C_2 = 6, \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 3$.

ამ სისტემის ამონახსნია: $C_1 = 2$, $C_2 = 1$ და $\lambda = 12$.

მაშასადამე, **საძიებელი ექსტრემალი** იქნება:

$y(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

მაგალითი.განვიხილოთ დიდონის ამოცანა, რომელიც იზოპერიმეტრულ ამოცანას წარმოადგენს.
$J[y] = \int_{-a}^{a} y dx \to max$, $y(-a) = y(a) = 0$,
$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + (y')^2} dx$, $L > 2a$.
ამოხსნა: შევადგინოთ სპეციალური სახის ფუნქციონალი:
$J^*[y] = \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}\right)dx$ და ჩავწეროთ შესაბამისი ეილერ-ლაგრანჟის განტოლება:$\lambda \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right) - 1 = 0$. ცხადია, რომ გვაქვს პირველი ინტეგრალი: $\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - x = C_1$ ანუ $\frac{\lambda^2 (y')^2}{1+(y')^2} = (x + C_1)^2$. ამ განტოლებიდან ამოვხსნათ y':

$y' = \pm\frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}}$. ამ განტოლებას განცალებადი ცვლადებით, აქვს ამონახსნი: $y = \pm\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}+C_2$, აქედან გამომდინარე, გვექნება რომ $(x+C_1)^2+(y-C_2)^2=\lambda^2$. სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ $C_1=0$ და $\lambda^2=C_2^2+a^2$. მაშასადამე, წირის განტოლებას ექნება სახე: $x^2+(y-C_2)^2=C_2^2+a^2$. წრეწირის წირის სიგრძე უშუალოდ შეგვიძლია გამოვითვალოთ და მივიღებთ ფორმულას: $2\sqrt{C_2^2+a^2}arcsin\frac{a}{\sqrt{C_2^2+a^2}}=L$, რომელიც $t=\frac{L}{2\sqrt{C_2^2+a^2}}$ აღნიშვნით $t\in(0,\frac{\pi}{2}]$ მიიყვანება ტრანსცენდენტულ განტოლებამდე: $L\sin t=2at$. ამ ამოცანის ამონახსნი $(0,\frac{\pi}{2}]$ შუალედში, მოგვცემს C_2 მუდმივის პოვნის საშუალებას როცა $L\le\pi a$.

თუ ლაგრანჟის ამოცანაში ინტეგრალურ (3.193) მიზნის ფუნქციას, შევცვლით **ტერმინალური** მიზნის ფუნქციით:

$$T[\boldsymbol{y}]=T(\boldsymbol{y}(a),\boldsymbol{y}(b)), \tag{3.203}$$

სადაც $T(y_1,y_2)$ ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ მივიღებთ **მაიერის ამოცანას**.

3.5.3. ბოლცას ამოცანა

განვიხილოთ $J[\boldsymbol{y}]$ ლაგრანჟის ფუნქციონალისაგან განსხვავებული ფუნქციონალი:

$$B[\boldsymbol{y}]=J[\boldsymbol{y}]+T[\boldsymbol{y}], \tag{3.204}$$

შესაბამისი სასაზღვრო და შემოფარგვლის პირობებით:

$$\boldsymbol{y}(a)=\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}(b)=\boldsymbol{y}_2. \tag{3.205}$$

$$g_j(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')=0,\ j=\overline{1,k},\ (k<n),\ x\in[a,b]. \tag{3.206}$$

შესაბამისი (3.204) ფუნქციონალი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B[\boldsymbol{y}]=\int_a^b f(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')dx+T(\boldsymbol{y}(a),\boldsymbol{y}(b)). \tag{3.207}$$

ამოცანას (3.205),(3.206),(3.207) **ბოლცას ამოცანა** ეწოდება, ხოლო (3.207) ფუნქციონალს – **ბოლცას ფუნქციონალი**.

ბოლცას ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობას აქვს სახე:

$$\delta B[y] = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right]dx + \frac{\partial T}{\partial y(a)}\delta a + \frac{\partial T}{\partial y(b)}\delta b = 0. \qquad (3.208)$$

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მეორე წევრი გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით:

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y dx. \qquad (3.209)$$

მაშინ მივიღებთ ფორმულას:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]\delta y dx + \delta a\left[\frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}\right] + \delta b\left[\frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}\right] = 0. \qquad (3.210)$$

რადგან $y(x)$ ექსტრემალია, (3.210) ფორმულის პირველი შესაკრები ნულის ტოლია. მაშასადამე, ადგილი აქვს განტოლებას:

$$\delta a\left[\frac{\partial T}{\partial y(a)} - \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}\right] + \delta b\left[\frac{\partial T}{\partial y(b)} + \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}\right] = 0. \qquad (3.211)$$

(3.211) განტოლება განვიხილოთ ნებისმიერი $\delta a \neq 0$ და $\delta b = 0$ ვარიაციებისათვის. მაშინ გვექნება $\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}$.

ანალოგიურად, თუ $\delta a = 0$ და $\delta b \neq 0$, მაშინ $\frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}$.

მაშასადამე, გვაქვს **თეორემა:**ფუნქცია, რომელიც ბოლცას ფუნქციონალს ანიჭებს ექსტრემუმს, აუცილებლად უნდა აკმაყოფილებდეს **ეილერის განტოლებებს და ტრანსვერსალობის პირობებს**:

$$\frac{\partial T}{\partial y(a)} = \frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}, \quad \frac{\partial T}{\partial y(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}. \qquad (3.212)$$

ამოცანა. ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხენა საზღვრით:

$$B[y] = \int_0^1 (y')^2 dx + 5y^2(1) \to exstr, \quad y(0) = 1.$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $f = (y')^2$, მაშასადამე ეილერის განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $y(x) = C_1 x + C_2$. $y(0) = 1$სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ $C_2 = 1$. მარჯვენა საზღვარი მოძრაობს $x = 1$ წრფეზე, მაშინ ტრანსვერსალობის პირობას ექნება სახე:

$$\left(f'_{y'} + \frac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{x=1} = (2y' + 10y)|_{x=1} = 2y'(1) + 10y(1) = 0. \qquad (3.213)$$

ვიპოვოთ C_1 განტოლებიდან: $2C_1 + 10C_1 + 10 = 0$ ანუ $C_1 = \frac{5}{6}$. მაშასადამე, მივიღებთ **ექსტრემალს**: $y(x) = \frac{5}{6}x + 1$.

ამოცანა.ამოხსენით ბოლცას ამოცანა ფიქსირებული მარცხე-ნა საზღვრით:

$B[y_1,y_2]=\int_0^1(y_1'y_2'+y_1y_2)dx+y_1(1)+y_2(1)\to extr,$

$y_1(0)=y_2(0)=0.$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $f=y_1'y_2'+y_1y_2$, $f_{y_1}'=y_2$, $f_{y_1'}'=y_2'$, $f_{y_2}'=y_1$, $f_{y_2'}'=y_1'$. $\frac{d}{dx}f_{y_1'}'=y_2''$, $\frac{d}{dx}f_{y_2'}'=y_1''$. ეილერის განტოლებებს ექნებათ სახე: $f_{y_1}'-\frac{d}{dx}f_{y_1'}'=y_2-y_2''=0$, $f_{y_2}'-\frac{d}{dx}f_{y_2'}'=y_1-y_1''=0$. ამ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$y_1=C_1e^x+C_2e^{-x},\quad y_2=C_3e^x+C_4e^{-x}.$

ტერმინალურ წევრს აქვს სახე: $T=y_1+y_2$. შესაბამისად, ტრანსვერსალობის პირობებს აქვს სახე:

$\left(f_{y_1'}'+\frac{\partial T}{\partial y_1}\right)\Big|_{x=1}=y_2'(1)+1=0,\quad \left(f_{y_2'}'+\frac{\partial T}{\partial y_2}\right)\Big|_{x=1}=y_1'(1)+1=0.$ სასაზ-ღვრო პირობებიდან გამომდინარე, მივიღებთ, რომ$C_1+C_2=0$ და $C_3+C_4=0$. ე.ი. $C_1=-C_2$ და $C_3=-C_4$. თუ გავითვა-ლისწინებთ ტრანსვერსალობის პირობებს: $y_2'(1)+1=0$ და $y_1'(1)+1=0$, მივიღებთ რომ $C_1=-\frac{e}{e^2+1}$, $C_2=\frac{e}{e^2+1}$, $C_3=-\frac{e}{e^2+1}$, $C_4=\frac{e}{e^2+1}$. შესაბამისად, **მივიღეთ ექსტრემალები**:

$y_1(x)=y_2(x)=-\frac{e}{e^2+1}e^x+\frac{e}{e^2+1}e^{-x}.$

ამოცანა. იპოვეთ ფუნქციონალის ექსტრემალები:

$B[y]=\int_a^2 x^2(y')^2dx-2y(1)+y^2(2)\to exstr.$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, ლაგრანჟის ფუნქცია ემთხვევა ფუნქ-ციონალის ინტეგრანტს: $L=f=x^2(y')^2$. ამ ფუნქციონალისათვის ეილერის განტოლებას ექნება სახე:

$f_y'-\frac{d}{dx}f_{y'}'=0$ ანუ $\frac{d}{dx}f_{y'}'=\frac{d}{dx}(2x^2y')=0$. აქედან გამომდინარე, $2x^2y'=C$, მივიღებთ რომ $y'=-\frac{C_1}{x^2}$, მაშინ $y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2$. ამ მუდმივების საპოვნელად, გამოვიყენებთ ტრანსვერსალობის პირო-ბებს:

$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{y}(a)}=\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}$ ანუ $-2=2x^2y'|_{x=1}$

$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{y}(b)} = -\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}$ ანუ $-2y|_{x=2} = 2x^2y'|_{x=2}$

აქედან მივიღებთ, რომ ზოგადი ამონახსნის მუდმივებია $C_1 = 1$ და $C_2 = \frac{1}{2}$. ე.ი. მოცემული **ფუნქციონალის ექსტრემალს** აქვს სახე:
$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$.

3.6. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები

ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის **აუცილებელი პირობაა**, რომ მისი **პირველი ვარიაცია უნდა იყოს ნულის ტოლი**. ეს ფაქტი არის მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობის განზოგადება. მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობა, ემყარება მეორე რიგის დიფერენციალის ყოფაქცევას კრიტიკული წერტილში. ანალოგიური სიტუაციაა ვარიაციულ აღრიცხვაშიც. განიხილება ფუნქციონალის მეორე ვარიაციის ცნება, რომელიც აზოგადებს მეორე რიგის დიფერენციალის ცნებას. ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები ემყარება მეორე ვარიაციის ყოფაქცევას საკვლევი ექსტრემალის გასწვრივ. ვარიაციულ აღრიცხვაში განასხვავებენ ***ძლიერი ექსტრემუმის*** ცნებას, რომლის დროსაც განიხილავენ უწყვეტ $C[a;b]$ ფუნქციათა სიმრავლეს და ***სუსტი ექსტრემუმის*** ცნებას, რომელიც ემყარება უწყვეტად დიფერენცირებადი $C^1[a;b]$ ფუნქციების სიმრავლეს.

3.6.1. სუსტი ექსტრემუმები

ისეთ $f: E^2 \to \mathbb{R}$ გადასახვას, რომელიც E წრფივი სივრცის ნებისმიერ (x,y) წყვილს შეუსაბამებს $f(x,y)$ რიცხვს, **ორადწრფივი ფორმა** ეწოდება, თუ ის წრფივია ორივე არგუმენტის მიმართ ანუ

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \qquad (3.214)$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2). \qquad (3.215)$$

ვარიაციულ აღრიცხვაში ორადწრფივ ფორმებს, **ორადწრფივი ფუნქციონალები** ეწოდება. თუ, ორადწრფივ $J[y,z]$ ფუნქციონალში არგუმენტებს გავუტოლებთ, მივიღებთ $G[y] = J[y,y]$ ფუნქციონალს, რომელსაც **კვადრატული ფუნქციონალი** ეწოდება.

კვადრატულ $G[y]$ ფუნქციონალს ეწოდება **დადებითად განსაზღვრული**, თუ $G[y] > 0$ ნებისმიერი $y \neq 0$ ფუნქციისათვის და ეწოდება **არაუარყოფითად განსაზღვრული**, თუ $G[y] \geq 0$ ნებისმიერი $y \neq 0$ ფუნქციისათვის.

მაგალითი. $C[a,b]$ წრფივ ფუნქციონალურ სივრცეში, ნებისმიერი უწყვეტი $A(x)$ ფუნქციისათვის, ფუნქციონალი: $J[y,z] = \int_a^b A(x)y(x)z(x)dx$ ორადწრფივია, ხოლო თუ $y = z$, მაშინ მივიღებთ კვადრატულ $G[y] = J[y,y] = \int_a^b A(x)(y(x))^2dx$ ფუნქციონალს. $G[y]$ კვადრატული ფუნქციონალი არის დადებითად განსაზღვრული, თუ $A(x) > 0$ ნებისმიერი $x \in [a;b]$ რიცხვისათვის.

ვიტყვით რომ, ნორმირებულ წრფივ სივრცეზე განსაზღვრული $J[y]$ ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია y წერტილში,თუ ფუნქციონალის ნაზრდი:

$$\Delta J = J[y + \delta y] - J[y], \tag{3.216}$$

შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta J = \delta J[y,\delta y] + \delta^2 J[y,\delta y] + o(\|\delta y\|^2), \tag{3.217}$$

სადაც $\delta^2 J[y,\delta y]$ არის კვადრატული ფუნქციონალი δy ვარიაციის მიმართ, ამ ფუნქციონალს y წერტილში განსაზღვრული $J[y]$ ფუნქციონალის **მეორე ვარიაცია** ეწოდება. $o(\|\delta y\|^2)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეა $\|\delta y\|^2$ სიდიდესთან შედარებით.

თეორემა: თუ $J[y]$ ფუნქციონალი ორჯერ დიფერენცირებადია y წერტილში და აქვს **მინიმუმი, მაშინ $\boldsymbol{\delta^2 J[y,\delta y] \geq 0}$**, ხოლო აქვს **მაქსიმუმი თუ $\boldsymbol{\delta^2 J[y,\delta y] \leq 0}$** ნებისმიერი δy ვარიაციისათვის.

P.S. *მეორე ვარიაციისარაუარყოფითად განსაზღვრულობა არის ფუნქციონალის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი, მაგრამ არა საკმარისი პირობა.*

ვიტყვით, რომ ნორმირებულ წრფივ სივრცეში განსაზღვრული $G[y]$ კვადრატული ფორმა არის **ძლიერად დადებითი**, თუ არსებობს ისეთი $K > 0$ რიცხვი, რომ ნებისმიერი y ფუნქციისათვის ადგილი აქვს $G[y] \geq K\|y\|^2$ უტოლობას.

P.S. *სასრულ განზომილებიან შემთხვევაში, კვადრატული ფუნქციონალი წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას, ხოლო კვადრატული ფუნქციონალის ძლიერად დადებითობა, განაპირობებს დადებითად განსაზღვრულობას, თუმცა, უსასრულო განზომილებიან შემთხვევაში ეს ასე არაა.*

თეორემა: თუ, წრფივ ნორმირებულ სივრცეში განსაზღვრული, y^* წერტილში ორჯერ დიფერენცირებადი $J[y]$ ფუნქციონალისათვის,**პირველი ვარიაცია** $\boldsymbol{\delta J = 0}$, ხოლო **მეორე ვარიაცია** $\boldsymbol{\delta^2 J[y, \delta y]}$ **ძლიერად დადებითია**, მაშინ y^* წერტილში $J[y]$ ფუნქციონალს აქვს **მინიმუმი**.

3.6.2. ლეჟანდრისა და იაკობის თეორემები

თეორემა: ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანისათვის, თუ $J[y]$**ფუნქციონალი აღწევს მინიმუმს**$y(x)$ ფუნქციაზე, მაშინ ადგილი აქვს **ლეჟანდრის პირობას**:

$$f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0. \qquad (3.218)$$

ეს პირობა გამომდინარეობს ფუნქციონალის ნაზრდის (3.216) წარმოდგენიდან. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ ტეილორის ფორმულას ფუნქციონალის ნაზრდისათვის, მაშინ მივიღებთ რომ

$$\Delta J = \int_a^b \left(f'_y \delta y + f'_{y'} \delta y'\right) dx + \frac{1}{2}\int_a^b \left(f''_{yy}(\delta y)^2 + 2f''_{yy'}\delta y \delta y' + f''_{y'y'}(\delta y')^2\right) dx + o(\|\delta y\|^2).$$

ეს წარმოდგენა გვიჩვენებს, რომ მეორე ვარიაცია იქნება:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \frac{1}{2}\int_a^b \left(f''_{yy}(\delta y)^2 + 2f''_{yy'}\delta y \delta y' + f''_{y'y'}(\delta y')^2\right) dx. \qquad (3.219)$$

თუ გამოვიყენებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდს და **სასაზღვრო პირობებს** ფუნქციის δy ვარიაციისათვის, მივიღებთ რომ

$$2\int_a^b f''_{yy'} \delta y \delta y' dx = \int_a^b f''_{yy'} d((\delta y)^2) = f''_{yy'}(\delta y)^2\Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'}\right)(\delta y)^2 dx =$$

$$= -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} f''_{yy'}\right)(\delta y)^2 dx.$$

მაშასადამე,

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2) dx, \qquad (3.220)$$

სადაც

$$Q = \frac{1}{2}\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{yy}\right), \quad P = \frac{1}{2} f''_{y'y'}.$$

(3.220) ფორმულაში, რადგან $|\delta y| \leq \int_a^x |\delta y'| dt \leq \max\limits_{[a;b]} |\delta y'|(b-a)$, ცხადია, რომ ინტეგრანტის მეორე წევრი არის **მთავარი გავლენის მომხდენი, საერთო მნიშვნელობაზე** ანუ $f''_{y'y'}$ ფუნქციის ნიშანი განაპირობებს მეორე ვარიაციის ნიშანს.

(3.220) ფუნქციონალისათვის შევადგინოთ ეილერის განტოლება, მაშინ მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{d}{dx}(Ph') - Qh = 0, \quad h(a) = h(b) = 0. \tag{3.221}$$

ამ განტოლებას აქვს ტრივიალური ამონახსნი: $h(x) \equiv 0$. თუმცა შესაძლებელია სხვა ამონახსნების არსებობაც.

თუ $\tilde{x} \in (a; b]$ არის ისეთი წერტილი, რომ $h(\tilde{x}) = 0$ და $h(x) \neq 0$ არცერთი წერტილისათვის$(a; \tilde{x})$ შუალედიდან, მაშინ $\tilde{x}$ წერტილს $\boldsymbol{a}$ **წერტილისშეუღლებული წერტილი** ეწოდება.

განვიხილოთ ვარიაციული აღრიცხვის უმარტივესი ამოცანა:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')dx \to extr, \quad y(a) = y_a, \; y(b) = y_b. \tag{3.222}$$

სადაც f ორჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ხოლო $y \in C^1[a; b]$. პირველი ვარიაციის ნულთან ტოლობა, გვაძლევს ექსტრემალების სიმრავლეს შემდგომი გამოკვლევისათვის, რომელიც ემყარება მეორე ვარიაციის გამოთვლას:

$$\delta^2 J[y, \delta y] = \int_a^b (Q(\delta y)^2 + P(\delta y')^2)dx. \tag{3.223}$$

$\delta^2 J[y, \delta y]$ კვადრატულ ფუნქციონალს წარმოადგენს. აქ

$P = P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$,

$$Q = Q(x) = \frac{1}{2}\left(f''_{yy}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} f''_{y'y}(x, y(x), y'(x))\right). \tag{3.224}$$

(3.223) ფუნქციონალისათვის **ეილერის განტოლებას** აქვს სახე:

$$\frac{d}{dx}(P\delta y') - Q\delta y = 0. \tag{3.225}$$

ამ განტოლებას $\boldsymbol{J[y]}$ **ფუნქციონალის იაკობის განტოლება** ეწოდება. პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას შემოაქვთ აღნიშვნა $\delta y = h$ და შესაბამისად $\delta y' = h'$. მაშინ გვაქვს იაკობის განტოლება:

$$\frac{d}{dx}(Ph') - Qh = 0, \; h(a) = h(b) = 0. \tag{3.226}$$

$\boldsymbol{\tilde{x} \in [a, b]}$ **წერტილს ეწოდება** $\boldsymbol{a}$ **წერტილის შეუღლებული** $\boldsymbol{J[y]}$ **ფუნქციონალის აზრით, თუ ის შეუღლებულია** $\boldsymbol{\delta^2 J[y, \delta y]}$ **კვადრატული ფუნქციონალის აზრით**.

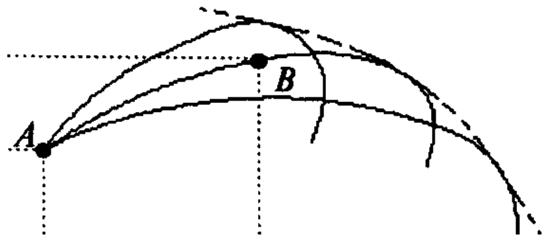
იაკობის განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ $J[y]$ ფუნქციონალის f ინტეგრანტის გამოყენებითაც:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx}\left(f''_{y'y'} h'\right) = 0. \tag{3.227}$$

იაკობის პირობები: იაკობის განტოლება ძალაშია ისეთი ექსტრემალებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ ეილერის განტოლებას $J[y]$ ფუნქციონალისათვის, სასაზღვრო პირობებს და

აქვთ არატრივიალური $h(x) \neq 0$ ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს $h(a) = 0 \wedge (h(x) \neq 0, x \in (a,b])$ პირობებს.

იაკობის განტოლების პირობები განსაზღვრავს $y^*(x)$ ექსტრემალის ჩართვას *ექსტრემალების ცენტრალურ ველში.* **ექსტრემალების ცენტრალური ველი ეწოდება** ისეთი ექსტრემალების სიმრავლეს რომლებიც იკვეთებიან მხოლოდ ცენტრში და სხვა წერტილებში არ იკვეთებიან ნახ. 3.6.



ნახ. 3.6. ექსტრემალების ცენტრალური ველი

ექსტრემალების ცენტრალური ველი აღიწერება განტოლებით $y = y(x, C)$. ამ ექსტრემალთა ოჯახის ექსტრემალის რაიმე წერტილში გავლებული მხების$p(x,y)$ საკუთხო კოეფიციენტს, **ველის დახრილობა** ეწოდება შესაბამის წერტილში.

E ფუნქციას ეწოდება **ვაიერშტრასის ფუნქცია**, თუ ის მოიცემა ტოლობით:

$$E(x,y,y',p) = f(x,y,y') - f(x,y,p) - (y'-p)f_p'(x,y,p). \qquad (3.228)$$

თეორემა (სუსტი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):

$y^* \in C^1[a;b]$ ფუნქცია წარმოადგენს (3.222) ფუნქციონალის **სუსტი ექსტრემუმის წერტილს**, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

1) $y(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, **პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;**
2) **იაკობის პირობებს;**
3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს **ლეჟანდრის გაძლიერებულ პირობას**:$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x))\Big|_{y=y^*} > 0, x \in (a;b)$;

   ან

   ვაიერშტრასის პირობას: $E(x,y,y',p) \geq 0$ იმ (x,y) წერტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც y' ახლოსაა p დახრილობასთან;

P.S. თუ ამ თეორემში ადგილი აქვს $E(x,y,y',p) \leq 0$ პირობას **ვაიერშტრასის ფუნქციისათვის**, ან $f''_{y'y'} < 0$**ლეჟანდრის**

გაძლიერებულ პირობას, მაშინ გვაქვს სუსტი **მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები**.

თეორემა(ძლიერი მინიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები):

$y^* \in C[a;b]$ ფუნქცია წარმოადგენს (3.222) ფუნქციონალის **ძლიერი ექსტრემუმის წერტილს**, თუ ადგილი აქვს პირობებს:

1) $y(x)$ ფუნქცია წარმოადგენს $J[y]$ ფუნქციონალის ექსტრემალს ანუ ამ ფუნქციისათვის, **პირველი ვარიაცია ნულის ტოლია;**
2) **იაკობის პირობებს;**
3) ამ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს **ლეჟანდრის პირობას**:$P(x) = \frac{1}{2} f''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, x \in (a;b)$, ნებისმიერი ექსტრემალისათვის;
   ან
   ვაიერშტრასის პირობას: $E(x, y, y', p) \geq 0$ იმ (x, y) წერტილებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ექსტრემალის სიახლოვეში და რომელთათვისაც y' ანებისმიერია;

P.S. თუ ამ თეორემში ადგილი აქვს $E(x, y, y', p) \leq 0$ პირობას **ვაიერშტრასის ფუნქციისათვის**, ან $f''_{y'y'} < 0$**ლეჟანდრის პირობას,** მაშინ გვაქვს ძლიერი **მაქსიმუმის არსებობის საკმარისი პირობები**.

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის **ექსტრემუმი**, თუ

$$J[y] = \int_1^2 (y' + 2(y')^3)dx,\ y(1) = 2,\ y(2) = 6. \tag{3.229}$$

ამოხსნა: ა) ვიპოვოთ ამ ფუნქციონალის y^* ექსტრემალები. ამისათვის ჩავწეროთ შესაბამისი ეილერის განტოლება. რადგან ინტეგრანტი $f = y' + 2(y')^3$ არაა დამოკიდებული x, y ცვლადებზე, მისი ეილერის განტოლება იქნება: $y'' = 0$ ანუ $y = C_1 x + C_2$.

ბ) სასაზღვრო პირობებიდან მივიღებთ, რომ

$y(1) = C_1 + C_2 = 2,$

$y(2) = 2C_1 + C_2 = 6.$

მაშასადამე, $C_1 = 4$ და $C_2 = -2$. შესაბამისად, მივიღეთ ექსტრემალი $y^*(x) = 4x - 2$.

შევამოწმოთ **ძლირი ექსტრემუმის არსებობის** საკმარისი პირობები.

გ) იაკობის პირობები:

შევადგინოთ იაკობის (3.227) განტოლება:

$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx} f''_{y'y}\right) h(x) - \frac{d}{dx}\left(f''_{y'y'} h'\right) = 0.$

ჩვენი ფუნქციონალისათვის: $y' = 4$, $f''_{yy} = 0$, $f''_{y'y} = 0$, $f''_{y'y'}\Big|_{y=y^*} = 12y'|_{y=y^*} = 48$. მაშინ, იაკობის განტოლებას ექნება სახე: $\frac{d}{dx}(48h') = 0$ ანუ $h''(x) = 0 \Longrightarrow h(x) = Ax + B$. იმ პირობიდან, რომ $h(a) = h(1) = 0$ გამომდინარეობს $A + B = 0$ ანუ $A = -B$. მაშინ გვექნება, რომ $h(x) = Ax + B \Longrightarrow h(x) = A(x - 1)$. არატრივიალური იქნება ეს ამონახსნი თუ $A \neq 0$. მაში ტრივიალური იქნება მხოლოდ როცა $x = 1$, ხოლო თუ $x \in (1; 2]$ ის არაა ნული. მაშასადამე, **იაკობის პირობები სრულდება**.

დ) რადგან ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ლეჟანდრის პირობა. ცხადია, რომ

$f''_{y'y'} = 12y'$. ეს ფუნქცია კი ნიშანცვლადია, ამიტომ შესასწავლი ფუნქციონალის **ძლირი მაქსიმუმის ან ძლიერი მინიმუმის საკითხი ღიაა.**

შევისწავლოთ ახლა სუსტი ექსტრემუმის არსებობის საკითხი:

ა) იაკობის პირობები სრულდება;

ბ) გაძლიერებული ლეჟანდრის პირობა გვაძლევს, რომ

$$f''_{y'y'}\Big|_{y=y^*} = 12y'|_{y^*(x)=4x-2} = 12 \cdot 4 = 48 > 0.$$

რაც იმის მანიშნებელია, რომ$y^*(x) = 4x - 2$ ექსტრემალზე ჩვენი ფუნქციონალი აღწევს სუსტ მინიმუმს:

$$\min J[y^*] = \int_1^2 (4 + 2 \cdot 4^3)dx = 132.$$

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის **ექსტრემუმი**, თუ

$J[y] = \int_0^1 (y^2 + (y')^2)dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$ (3.230)

ამოხსნა: ამ ფუნქციონალის ინტეგრანტი $f = y^2 + (y')^2$ არაა დამოკიდებული x ცვლადზე. მისთვის ეილერის განტოლების ამონახსნს აქვს სახე: $y^*(x) = \frac{e}{e^2-1}e^x + \frac{e}{1-e^2}e^{-x}$.

შევამოწმოთ **ძლიერი ექსტრემუმის** პირობები:

ა) შევადგინოთ იაკობის განტოლება:

$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{y'y}\right)h(x) - \frac{d}{dx}\left(f''_{y'y'}h'\right) = 0.$

ამისათვის გამოვთვალოთ შესაბამისი წარმოებულები: $f''_{yy} = 2$, $f''_{y'y} = 0$,$f''_{y'y'} = 2$. მაშინ იაკობის განტოლება მიიღებს სახეს;

$2h - 2h'' = 0$ ანუ $h'' - h = 0$. მასასადამე, $h(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$. საწყისი პირობიდან $h(0) = 0$ ე.ი.$C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = -C_1$ ანუ

$h(x) = C_1e^x - C_1e^{-x} = C_1(e^x - e^{-x})$. ცხადია, რომ თუ $C_1 \neq 0$ მაშინ $h(x) \neq 0, x \in (0; 1]$, რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები სრულდება.

ბ)ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა y'-ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ ლეჟანდრის პირობა:$f''_{y'y'} = 2 > 0$ ნებისმიერი y' ფუნქციისათვის, მასასადამე $y^*(x) = \frac{e}{e^2-1}e^x + \frac{e}{1-e^2}e^{-x}$ **ექსტრემალი მოცემული ფუნქციონალის ძლიერი მინიმუმის და მაშასადამე სუსტი მინიმუმის წერტილიცაა.**

მაგალითი. იპოვეთ ფუნქციონალის **ექსტრემუმი**, თუ

$$J[y] = \int_{-1}^{0}(12xy - (y')^2)dx,\ y(-1) = 1,\ y(0) = 0. \quad (3.231)$$

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში, გვაქვს ინტეგრანტი: $f = 12xy - (y')^2$.

ადვილი საპოვნელია შესაბამისი ეილერის განტოლების ამონახსნი: $y^*(x) = -x^3$. შევამოწმოთ **ძლიერი ექსტრემუმის** არსებობის პირობები:

ა) შევადგინოთ შესაბამისი **იაკობის განტოლება**:

$$\left(f''_{yy} - \frac{d}{dx}f''_{y'y}\right)h(x) - \frac{d}{dx}\left(f''_{y'y'}h'\right) = 0$$

ჩვენი ინტეგრანტისათვის: $f''_{yy} = 0$, $f''_{y'y} = 0$, $f''_{y'y'} = -2$. მაშასადამე, $\frac{d}{dx}(2h') = 0 \Rightarrow h' = C_1 \Rightarrow h(x) = C_1x + C_2$. სასაზღვრო პირობიდან $h(-1) = -C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_1$. ე.ი. $h(x) = C_1(x+1)$. ცხადია, რომ თუ $C_1 \neq 0$ მაშინ $h(x) \neq 0$, $x \in (-1;0]$. რაც იმას ნიშნავს, რომ იაკობის პირობები შესრულებულია.

ბ) ინტეგრანტი სამჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციაა y'-ის მიმართ, ამიტომ შეგვიძლია შევამოწმოთ **ლეჟანდრის პირობა**: $f''_{y'y'} = -2 < 0$ ნებისმიერი y' ფუნქციისათვის, მასასადამე

$y^*(x) = -x^3$ **ექსტრემალი ძლირი მაქსიმუმის წერტილია მოცემული ფუნქციონალისათვის** და $\max J[y^*] = \int_{-1}^{0}(-12x^4 - 9x^4)dx = -\frac{21}{5}$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1.იპოვეთ მანძილი $y_1(x) = x^2$ და $y_2(x) = x^3$ ფუნქციებს შორის:
ა) $C[0;1]$ ნორმით, ბ) $C^1[0;1]$ ნორმით.

2.იპოვეთ $C^1[a;b]$ ბანახის სივრცეში განსაზღვრული ფუნქციონალების პირველი ვარიაცია:

ა) $J[y] = \int_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}dx$; ბ) $J[y] = \int_{-1}^{1}(y'e^y + xy^2)dx$;

გ) $J[y] = \int_0^\pi y'\sin y\,dx$; დ) $J[y] = \int_0^1(xy + (y')^2)dx + y^2(0)$.

3.იპოვეთ **ფრეშეს და გატოს დიფერენციალი** შემდეგი ფუნქციონალებისათვის:

ა) $J[y]=\int_a^b (x+y)dx$;   ბ) $J[y]=\int_a^b (y^2-(y')^2)dx$;

გ) $J[y]=y^2(0)+\int_0^1 (2xy+3(y')^2)dx$;

დ) $J[y]=\int_a^b L(x,y_1,y_2,\dots,y_n,y_1',y_2',\dots,y_n')dx$.

3.იპოვეთ მოცემული ვარიაციული ამოცანის ექსტრემალები:

ა) $J[y]=\int_0^1 ((y')^2+12xy)dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=1$;

ბ) $J[y]=\int_\pi^{2\pi} (4(y')^2-7yy'-y^2)dx,\quad y(\pi)=0,\ y(2\pi)=0$;

გ) $J[y]=\int_0^1 (y')^2e^{\cos y'}dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=-4$;

დ) $J[y]=\int_0^1 ((y')^2-x^6y'-2xy)dx,\quad y(0)=0,\ y(1)=-\frac{1}{6}$;

4.სიბრტყეზე მდებარე ორი (x_1,y_1) და (x_2,y_2) წერტილის შემაერთებელ წირებს შორის, ვიპოვოთ ისეთი წირი, რომელიც აბსცისთა ღერძის გარშემო ბრუნვისას, შემოწერს უმცირესი ფართობის ზედაპირს.

5.აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი $y''=\varphi(x,y,y')$ სახის დიფერენციალური განტოლებისათვის, რომლის მარჯვენა მხარეც ორჯერ უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა, შესაძლებელია ისეთი $L(x,y,y')$ ფუნქციის პოვნა, რომ მოცემული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნები, იქნებიან $J[y]=\int_a^b L(x,y,y')dx$ ფუნქციონალის ექსტრემალები.

6.იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ექსტრემალები:

ა) $J[y_1,y_2]=\int_1^3 (x(y_1')^2(y_2')^2+xy_1y_2)dx,\ y_1(1)=1,\ y_1(3)=\ln 3+1,$
$y_2(1)=0,\ y_2(3)=0.$

ბ)$J[y_1,y_2]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2y_1-4y_2^2+(y_2')^2-(y_1')^2)dx,\ y_1(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,$
$y_2(0)=0,\ y_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

გ) $J[y_1,y_2]=\int_0^1 ((y_1')^2+(y_2')^2+2y_1)dx,\quad y_1(0)=1,\ y_1(1)=1.5,$
$y_2(0)=1,\ y_2(1)=1.$

დ)$J[y_1,y_2]=\int_0^3 \sqrt{1+(y_1')^2+(y_2')^2}\,dx,\ y_1(0)=1,\ y_1(3)=7,$
$y_2(0)=-2,\ y_2(3)=1.$

7.იპოვეთ მოცემული ფუნქციონალების ყველა ექსტრემალი:

ა) $J[y]=\int_0^1 (120xy-y'')dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0, y'(1)=6$;

ბ) $J[y]=\int_0^b ((y')^2+(y'')^2)dx,\ y(0)=0,\ y(b)=0,\ y'(0)=0, y'(b)=0$;

გ) $J[y]=\int_0^1 ((y''')^2-(y'')^2)dx,\ y(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'(0)=1,$
$y'(1)=ch1,\ y(1)=y''(1)=sh1$;

დ)$J[y]=\int_0^1 (y''')^2dx,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=4,$
$y''(1)=12$;

8.მოცემული ფუნქციონალებისათვის შეადგინეთ ეილერ-ოსტროგრადსკის განტოლება:

ა) $J[z]=\iint\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$, სადაც ინტეგრება ხორციელდება ბრტყელ $D\subset\mathbb{R}^2$ არეზე;

ბ) $J[u]=\iiint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+2uf(x,y,z)\right]dxdydz$, სადაც ინტეგრება ხორციელდება სამგანზომილებიან $D\subset\mathbb{R}^3$ არეზე.

9.ვთქვათ მოცემული $F(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})$ და $H(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ პირობებს: $F'_x\neq 0$ და $H'_x\neq 0$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $H(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{p})$ რომელიმე ვარიაციული ამოცანის ჰამილტონიანია, მაშინ ეილერის განტოლებათა სისტემის ნებისმიერი ინტეგრალური წირისათვის ადგილი აქვს განტოლებას:

$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+[F,H]$.

9.იპოვეთ მოძრავ საზღვრებიანი ფუნქციონალების ექსტრემალები:

ა) $\int_0^b(y')^2dx\to extr,\ y(0)=0,\ y(b)+b+1=0$;

ბ) იპოვეთ უმოკლესი მანძილი $y=x^2$ და $y=x-5$ ფუნქციის გრაფიკებს შორის სიბრტყეზე;

გ)$J[y]=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx\to exstr$, მარცხენა საზღვარი a მოძრაობს $y=\varphi(x)=x^2$ პარაბოლაზე, ხოლო მარჯვენაb საზღვარი – $y=\psi(x)=x$ წრფეზე;

10.ამოხსენით პირობითი ექსტრემუმის ამოცანები ფუნქციონალებისათვის:

ა) $J[y,z]=\int_0^1y'z'dx,\ y(0)=y(1)=z(0)=0,\ z(1)=1,\ \int_0^1xydx=0$, $\int_0^1xzdx=0$;

ბ)$J[y,z]=\int_0^1((y')^2+(z')^2)dx,\ y(0)=y(1)=z(0)=z(1)=0$, $\int_0^1yzdx=-2$;

გ) $J[y]=\int_0^\pi y\sin x dx\to exstr,\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi,\ \int_0^\pi(y')^2dx=\frac{3\pi}{2}$.

11.გამოიკვლიეთ ექსტრემუმზე ფუნქციონალები:

ა) $J[y]=\int_0^a((y')^2+2yy'-16y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(a)=0,\ a>0$;

ბ) $J[y]=\int_1^2y'(1+x^2y')dx, y(1)=3,\ y(2)=5$;

გ) $J[y]=\int_0^1((y')^2+y^2+2ye^{2x})dx,\ y(0)=\frac{1}{3},\ y(1)=\frac{1}{3}e^2$;

დ) $J[y]=\int_0^1(x^2+\varepsilon(y')^2+y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$. გამოიკვლიეთ ε პარამეტრის მიხედვით.

ლიტერატურა

1.**Васильков Ю.В.,Василькова Н.Н**.Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании,уч. пос., финансы и статистика, М.,1999,

2.**Охорзин В.А.**Прикладная математика в системе Mathcad,уч. пос., изд. „Лан“, СПБ, 2008,

4.**Пантелеев А.Б.,Летова Т.А**.Методы оптимизации в примерах и задачах,уч. пос.,М, 2005,

5.**Краснов М.Л.,Макаренко Г.И.,Киселев А.И**. Вариационное исчисление,Наука,М.,1973,

6.**Эльсголц Э**. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, учубник МГУ им. М.В.Ломоносова, М., 1958,

7.**Ванько В.И., Ермошина О.В.,Кувыркин Г.Н**.Вариационное исчисление и оптимальное управление,учебник для втузов, изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана,М, 2006,

8.**Пантелеев А.В.**Вариационное исчисление в примерах и задачах, уч. пос., МАИ,М.,2000.

შინაარსი