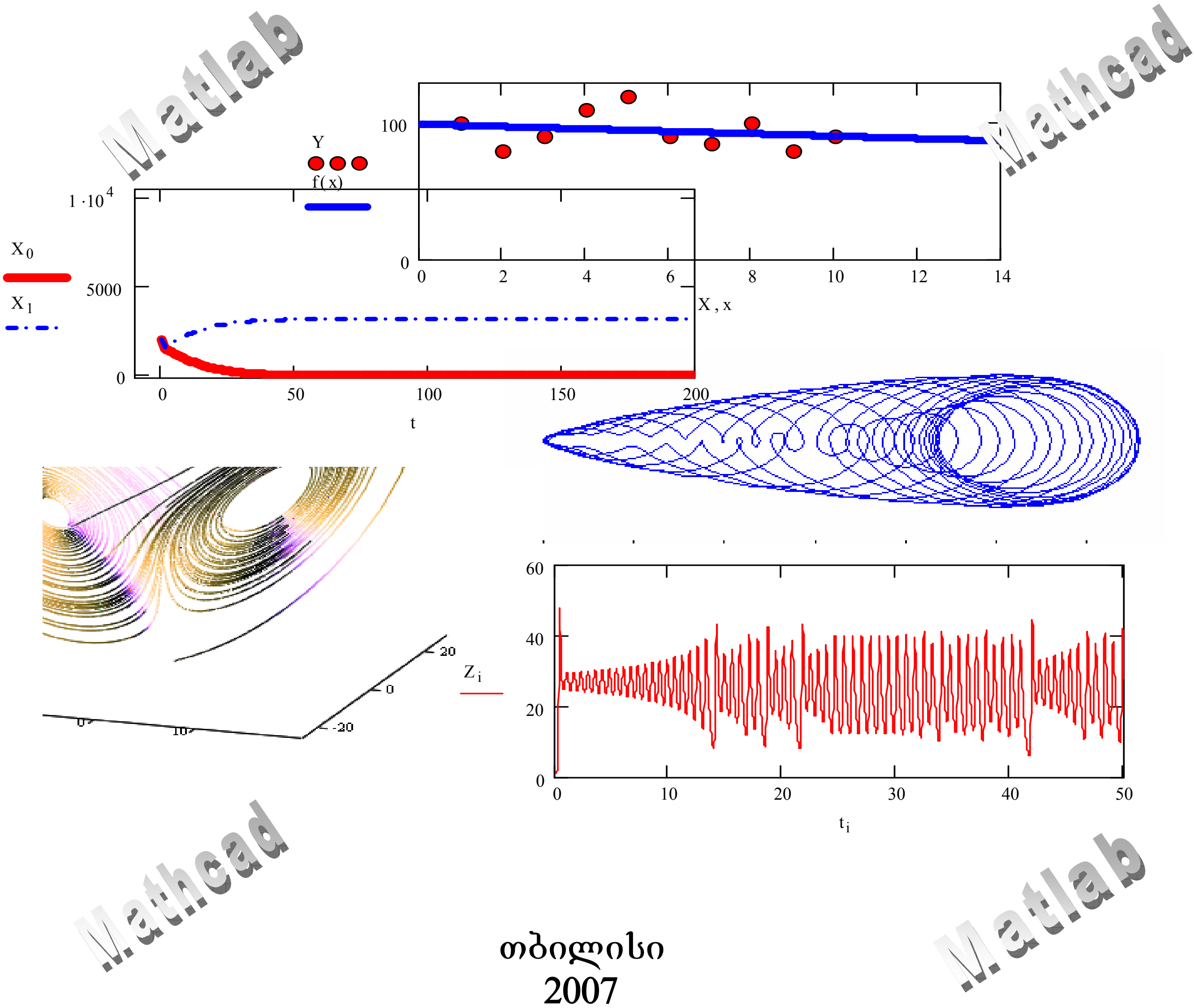
თ. ობგაძე, ლ. ობგაძე, ნ. მჭედლიშვილი,
ი. დავითაშვილი, ნ. თუშიშვილი

მათემატიკური მოდელირების კურსი

ეკონომიკსი **Mathcad**-ისა და **Matlab**-ის ბაზაზე
II ტომი



თბილისი
2007

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
საქართველოს ეროვნული აკადემია

თ. ობგაძე, ლ. ობგაძე, ნ. მჭედლიშვილი,
ი. დავითაშვილი, ნ. თუშიშვილი,

მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიკსი **Mathcad**-ისა და **Matlab**-ის ბაზაზე)

II ტომი

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2007

უაკ 517.958

სახელმძღვანელო მიძღვნილია მათემატიკური მოდელირების რთული და პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი პრობლემისადმი. ნაშრომის მეორე ტომში განხილულია მიკრო და მაკროეკონომიკის მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა და ტექნოლოგია: ალბათობათა თეორიის ელემენტები, ეკონომიკის ძირითადი მათემატიკური მოდელები, ფუნდამენტალური ეკონომიკის ძირითადი ცნებები და ლაბორატორიული სამუშაოები. ყოველი ლაბორატორიული სამუშაო ბოლოვდება კომპიუტერული პროგრამებით **Mathcad-**სა და **Matlab-**ზე. რაც საშუალებას იძლევა, დინამიურ რეჟიმში იქნას შესწავლილი, მათემატიკური მოდელირების ეს ორი ძირითადი ინფორმაციული ტექნოლოგია.

ნაშრომი საინტერესო იქნება ინჟინერ-მკვლევარებისათვის, რომლებიც კვლევის პროცესში იძულებულნი არიან ააგონ განსახილველი ეკონომიკური პროცესების მათემატიკური მოდელები. ასევე, ნაშრომი დიდ დახმარებას გაუწევს მაგისტრატურის იმ სტუდენტებს, რომლებიც სწავლობენ ეკონომიკური პროცესების დინამიკასა და მართვის ტექნოლოგიებს.

სრული პროფესორის ნ. ჯიბლაძის რედაქციით

რეცენზენტი: სრული პროფესორი ზ. ბაიაშვილი

C საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2007
ISBN 99940-57-16-2 (ყველა ტომი)
ISBN 978-99940-57-89-4 (II ტომი)

ეძღვნება ქართველი ფილოსოფოსის
მანანა ობგაძის
ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებულ კურსს – **"მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიკსი Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე) II ტომი,** ერთ-ერთი ავტორთაგანი წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდური მითითებების მიმართ მიდგომა წარმოადგენს ავტორთა სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. სახელმძღვანელო მოიცავს კურსის სამ ნაწილს, რომელიც შეესაბამება სამი სემესტრის მასალას ბაკალავრებისა და მაგისტრებისათვის.

ნაშრომში ფართოდ გამოიყენება **Mathcad 2001 PROFESSIONAL**-ისა და **Matlab-ის** გამოყენებითი პროგრამების პაკეტები. ყველა ლაბორატორიული სამუშაო დაყვანილია კონკრეტულ რიცხვით შედეგამდე. წარმოდგენილია შესაბამისი პროგრამები **Mathcad**-ისა და **Matlab-ის** ენაზე. ყოველი ლაბორატორიული სამუშაოს ბოლოს მოცემულია განსხვავებული ვარიანტები სტუდენტების ინდივიდუალური მუშაობისათვის. თითოეულმა სტუდენტმა უნდა შეასრულოს სამუშაოს თავისი ვარიანტი და ჩააბაროს ანგარიში თითოეულ სამუშაოზე შესაბამისი განმარტებებით. სახელმძღვანელოს ბოლოს, მოყვანილია ლიტერატურის სია ლაბორატორიულ სამუშაოებში წარმოდგენილი მასალის უფრო ღრმად შესასწავლად.

ავტორები მადლობას უხდიან სტუდენტებს, რომლებიც თავისი ინტერესით უბიძგებდნენ მათ წინამდებარე კურსზე მუშაობისაკენ. ავტორები გულწრფელად მადლიერნი არიან კოლეგებისა, კურსის ხელნაწერისადმი ინტერესისა და მისი გადმოცემის სტილის გაუმჯობესებისაკენ მიმართული რჩევებისათვის,

რამაც დიდად შეუწყო ხელი კურსის მეთოდური თვალსაზრისით სრულყოფას.

პროგრამები Matlab-ზე ეკუთვნის ასოცირებულ პროფესორს - ნინო მჭედლიშვილს და ასისტენტ-პროფესორს ირმა დავითაშვილს, ტექსტის ქართული თარგმანი და მეორე ნაწილის ლაბორატორიული სამუშაოები – ასისტენტ-პროფესორს ნატო თუშიშვილს, ხოლო კურსის მთლიანი იდეოლოგია სრულ პროფესორს თამაზ ობგაძეს და დოქტორ ლელა ობგაძეს რომლის სადოქტორო დისერტაციაც დაედო საფუძვლად, ამ მონოგრაფიული ტიპის სახელმძღვანელოს.

ავტორები მადლობას უხდიან აკადემიკოს არჩილ ფრანგიშვილს, ეროვნული აკადემიის პრეზიდენტს – ბ-ნ ვ. რამიშვილს, სრულ პროფესორ ნოდარ ჯიბლაძეს, დოქტორ პანტიკო თორდიას და ნონა თორდიას თანადგომისა და ხელშეწყობისათვის.

ნაწილი I. ალბათობათა თეორიის ელემენტები

შესავალი
1. ალბათობის განსაზღვრება

ეკონომიკურ პრაქტიკაში, როგორც წესი, საქმე გვაქვს შემთხვევით სიდიდეებთან და მოვლენებთან. ასეთ სიტუაციაში, გადაწყვეტილების მიღებისას გასათვალისწინებელია, თუ რამდენად მოსალოდნელია ესა თუ ის შემთხვევა. მაგალითად, მთიან რეგიონებში რკინიგზის გაყვანისას, აუცილებელია იმის ცოდნა, თუ, რამდენადაა მოსალოდნელი ზვავი, ღვარცოფი ან მეწყერი. მატარებლების განრიგის დარღვევისას – რამდენადაა მოსალოდნელი კატასტროფა, ინფლაციის შემთხვევაში – რამდენადაა მოსალოდნელი ფასების ზრდა საკვებ პროდუქტებსა და პირველადი მოხმარების საგნებზე და ა.შ.

სწორედ, შემთხვევითობასთან დაკავშირებული მოვლენების შესასწავლად შეიქმნა მათემატიკური მეცნიერება, რომელსაც ალბათობათა თეორიას უწოდებენ. ალბათობათა თეორიაზეა დამყარებული მეცნიერება – სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს ფუნდამენტს, ნებისმიერი ეკონომიკური პროცესის კვლევისას.

იმისათვის, რომ რიცხვობრივად შეაფასონ, რამდენადაა მოსალოდნელი A შემთხვევითი მოვლენა, განიხილავენ ამ მოვლენის P(A)-ალბათობის ცნებას.

განსაზღვრება: ისეთ მოვლენას, რომელიც შეიძლება მოხდეს, ან შეიძლება არც მოხდეს, **შემთხვევითი მოვლენა** ეწოდება.

მაგალითად: დღეს წვიმის მოსვლა; თოვლის მოსვლა, ფეხბურთის მატჩში გამარჯვება, ხუთიანის მიღება და ა.შ.

განსაზღვრება: მოცემული ექსპერიმენტისას, შესასწავლი მოვლენის თითოეულ შესაძლო რეალიზაციას **ხდომილება** ეწოდება.

მაგალითად: ა) მოვლენა – კამათელის აგდება:

ხდომილებებია: 1) იაქი(ერთი), 2) დუ(ორი), 3) სე(სამი),
4) ჩარი(ოთხი), 5)ბეში(ხუთი) და 6)შეში(ექვსი).

ბ) მოვლენა – მონეტის აგდება:

ხდომილებებია: 1) გერბი, 2) რიცხვიანი მხარე.

განსაზღვრება: A მოვლენის ყველა ურთიერთგამომრიცხავ ხდომილებათა E ერთობლიობას, **ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე** ეწოდება.

მაგალითად: კამათელის აგდებისას E={1;2;3;4;5;6}, მონეტის აგდებისას E={გერბი; რიცხვიანი მხარე}.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ A ქვესიმრავლეს $A \subseteq E$ **მოვლენა** ეწოდება.

განსაზღვრება: მოვლენას, რომელიც აუცილებლად მოხდება, **უეჭველი**(ჭეშმარიტი) მოვლენა ეწოდება. მისი ალბათობა $P(A)=1$.

განსაზღვრება: მოვლენას, რომელიც არასოდეს არ მოხდება **შეუძლებელი** (მცდარი) მოვლენა ეწოდება. მისი ალბათობა $P(A)=0$.

მაგალითად :

A – დღეს მოჰყვება ღამე – უეჭველი მოვლენაა(ჩვენი განედისათვის).

A – აღმართს მოჰყვება დაღმართი – უეჭველი მოვლენაა.

A – შიშველი თუ შეხვედი წყალში, მშრალად ამოსვლა – შეუძლებელი მოვლენაა.

ამ განსაზღვრებებიდან ჩანს, რომ საზოგადოდ

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (1)$$

ალბათობის განსაზღვრისას განიხილავენ **კლასიკურ** და **სტატისტიკურ** მიდგომებს.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრისას გამოიყენებენ ფორმულას:

$$p(A) = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

სადაც, *m* – A მოვლენისათვის ხელშემწყობ ხდომილებათა რაოდენობაა; *n* –A მოვლენისათვის ელემენტარული ხდომილებათა E სივრცის ელემენტების საერთო რაოდენობაა.

ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ ელემენტარული ხდომილებები თანაბრად მოსალოდნელი არიან და ისინი ადგენენ სრულ *E* სიმრავლეს, ე.ი. *A* მოვლენის ყველა შესაძლო ხდომილება ეკუთვნის *E* სიმრავლეს.

მაგალითები:

1) მონეტის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოვარდება გერბი.

ამოხსნა: $m=1$, $n=2$ ე.ი. $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$

2) კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაჯდება ბეში (5).

ამოხსნა: $m=1$, $n=6$ ე.ი. $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$

3) კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაჯდება ლუწი რიცხვი.

ამოხსნა: ლუწებია: 2,4,6 $\Rightarrow$ $m=3$, მაგრამ $n=6$ ე.ი. $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

4) ორი კამათელის აგდებისას იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება შვიდი.

ამოხსნა: 7=1+6 7=6+1

7=2+5 7=5+2

7=3+4 7=4+3

ე.ი. m=6, n=6×6=36

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

5) ორი კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება რვა, ხოლო სხვაობა ოთხი.

ამოხსნა: თავდაპირველად, ვნახოთ თუ როდის იქნება კამათელის რიცხვების ჯამი 8:

8=6+2 8=2+6

8=5+3 8=3+5

8=4+4

აქედან სხვაობა 4 იქნება ორ შემთხვევაში 6-2=4, ე.ი. m=2, n=36 $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

6) ორი კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება ხუთი, ხოლო ნამრავლი ოთხი.

ამოხსნა: ჯამი თუ ხუთია:

5=4+1 5=1+4

5=3+2 5=2+3,

მაშინ, ნამრავლი ოთხია ორ შემთხვევაში 1×4=4×1, ე.ი. m=2, n=36 $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

7) მონეტის ორჯერ აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც დაჯდება “გერბი”.

ამოხსნა: გერბი აღვნიშნოთ ერთი ასოთი – **გ**, მეორე მხარე აღვნიშნოთ ასოთი – **რ**, მაშინ შესაძლო რეალიზაციებია: გგ, გრ, რრ, რგ $\Rightarrow$ n=4. ერთხელ მაინც “გ” გვხვდება სამჯერ: გგ, გრ, რგ $\Rightarrow$ m=3. მაშასადამე, $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$. როგორც ვხედავთ, ალბათობის კლასიკური წესით გამოსათვლელად საჭიროა სხვადასხვა შემთხვევითი რეალიზაციების ყველა შესაძლო რაოდენობების დათვლა. მსგავსი ამოცანების ამოსახსნელად შემუშავებულია მათემატიკური თეორია, რომელსაც **კომბინატორიკას** უწოდებენ.

2. კომბინატორიკის ელემენტები

განვიხილოთ E სიმრავლე. მისი სხვადასხვა ელემენტებისაგან შევადგინოთ ჯგუფები.

განსაზღვრება: თუ n-ელემენტიანი სიმრავლიდან ვარჩევთ m $(m<n)$ ელემენტიან ჯგუფებს (ქვესიმრავლეებს) ისე, რომ სხვადასხვა ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **ჯუფთება** n-ელემენტიანი სიმრავლიდან m-ელემენტიან ქვესიმრავლეებად. ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი C_n^m და გამოითვლება ფორმულით:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{3}$$

0!=1 (ნულის ფაქტორიალი);
1!=1 (ერთის ფაქტორიალი);
2!=1·2 (ორის ფაქტორიალი);
3!=1·2·3 (სამის ფაქტორიალი);
4!=1·2·3·4 (ოთხის ფაქტორიალი);
. . .
n!= 1·2·3·. . . ·n.

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ოცი გამცილებლიდან ორი გამცილებელის ამორჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა

ამოხსნა:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2!} = 190.$$

2) ვიპოვოთ ოცი სტუდენტიდან ლიდერის არჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა

ამოხსნა:

$$C_{20}^1 = \frac{20!}{1!(20-1)!} = \frac{20!}{19!} = 20.$$

განსაზღვრება: თუ n-ელემენტიანი სიმრავლიდან ვირჩევთ m ელემენტიან $(m<n)$ ჯგუფებს (ქვესიმრავლეებს) ისე, რომ სხვადასხვა ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც ან მათი რიგით, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **წყობა** n-ელემენტიანი სიმრავლიდან m-ელემენტიან ქვესიმრავლეებად. წყობათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი A_n^m.

წყობათა რიცხვის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულა:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{4}$$

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ოცი სტუდენტიდან სტუდენტური კავშირის თავმჯდომარის და მისი მოადგილის არჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა.

ამოხსნა: ამჯერად მნიშვნელობა აქვს რიგსაც, ამიტომ გვექნება წყობა

$$A_{20}^{2}=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20!}{18!}=19\cdot 20=380\,.$$

2) ათ ბარათზე ჩაწერილია სხვადასხვა ციფრები: 0;1;2;3;…;9. იღებენ 4 ბარათს და ადგენენ ოთხნიშნა რიცხვს ამ ბარათებზე ჩაწერილი ციფრებიდან. ვიპოვოთ რამდენი სხვადასხვა ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შედგეს ასეთი წესით?

ამოხსნა: ციფრების რაოდენობაა 10, ამათგან დგება ოთხნიშნა რიცხვი. ყველა შესაძლო წყობათა (რიგსაც აქვს მნიშვნელობა) რაოდენობა იქნება $A_{10}{}^{4}$, მაგრამ ამ რიცხვებიდან უნდა ამოვარდეს ის ვარიანტები, სადაც პირველ ადგილზე აღმოჩნდა 0, ასეთი ვარიანტების რიცხვი იქნება $A_{9}{}^{3}$. ე.ი. საბოლოოდ გვექნება

$$A_{10}^{4}-A_{9}^{3}=\frac{10!}{(10-4)!}-\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{10!}{6!}-\frac{9!}{6!}=\frac{9!\cdot 10-9!}{6!}=\frac{9!\cdot(10-1)}{6!}=$$

$$=\frac{9!\cdot 9}{6!}=7\cdot 8\cdot 9\cdot 9=4536.$$

განსაზღვრება: ისეთ წყობას, როცა n-ელემენტიანი სიმრავლიდან ირჩევენ n-ელემენტიან ქვესიმრავლეებს, **გადანაცვლება** ეწოდება.

გადანაცვლებათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი $p_n=A_n{}^{n}$, (4)-დან მივიღებთ, რომ

$$p_n=n!\quad . \tag{5}$$

მაგალითი:

ლექციების ცხრილში მოცემულია დღეში 4 საგანი. ვიპოვოთ ორშაბათის ცხრილის შედგენის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა.

ამოხსნა: ცხადია, ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს გადანაცვლებათა რაოდენობის დათვლასთან.

p_4=4!=1·2·3·4=24.

განვიხილოთ ალბათობათა თეორიაში კომბინატორიკის გამოყენების მაგალითები.

მაგალითები:

1) ყუთში 15 დეტალია, რომელთა შორის 10 შეღებილია. ამწყობი შემთხვევით იღებს 3 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დეტალები იქნება შეღებილი.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რაოდენობაა $n = C_{15}{}^{3}$, ხელშემწყობ ხდომილებათა რიცხვი კი $m = C_{10}{}^{3}$. ე.ი.

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}{}^{3}}{C_{15}{}^{3}} = \frac{\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}}{\dfrac{15!}{3!\cdot 12!}} = \frac{10!\cdot 12!}{7!\cdot 15!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 12!}{7!\cdot 12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15} = \frac{24}{91}.$$

2) ყუთში 100 დეტალია, იქიდან 10 წუნდებულია. შემთხვევით იღებენ ოთხ დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა იმისა, რომ ამოღებული დეტალებიდან ა) არცერთი არაა წუნდებული, ბ) ყველა წუნდებულია.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რიცხვია:

$$n = C_{100}{}^{4} = \frac{100!}{4!\cdot 96!} = \frac{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{2\cdot 3\cdot 4};$$

ხელშემწყობ ხდომილებათა რიცხვია:

ა) $m = C_{90}^{4} = \dfrac{90!\cdot}{4!\cdot 86!} = \dfrac{87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{2\cdot 3\cdot 4};$

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{90}{}^{4}}{C_{100}{}^{4}} = \frac{87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100} = \frac{87\cdot 2\cdot 89}{49\cdot 5\cdot 97!} \approx 0.65.$$

ბ) $m = C_{10}^{4} = \dfrac{10!\cdot}{4!\cdot 6!} = \dfrac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4};$

$$p(A) = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100} \approx 0.00005.$$

3) ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა თავისი სატრფოს ნომრის ბოლო სამი ციფრი და ახსოვდა მხოლოდ ის, რომ ეს ციფრები იყო სხვადასხვა, ამიტომ მან შემთხვევით აკრიფა ბოლო სამი ციფრი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილი იყო საჭირო ციფრები.

ამოხსნა: საჭირო ნომერი არის ერთადერთი m=1, ციფრები არის სულ 10 ცალი, (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) უნდა აირჩეს 3 ციფრი ისე, რომ ამ ციფრთა რიგს არა აქვს მნიშვნელობა. ე.ი. გვაქვს წყობა:

$n = A_{10}^{3} = \dfrac{10!}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$, ამიტომ $p(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{A_{10}^{3}} = \dfrac{1}{720}.$

4) ჯგუფში 12 სტუდენტია, რომელთაგან 8 ფრიადოსანია. შემთხვევით ირჩევენ 9 სტუდენტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეულ სტუდენტებს შორის 5 ფრიადოსანია.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი იქნება ჯუფთება 12-დან 9-ად $n = C_{12}^{9}$, 8 ფრიადოსანი სტუდენტიდან 5 ფრიადოსნის არჩევათა რაოდენობაა C_8^5, დანარჩენი 4 უნდა აირჩეს არაფრიადოსნებიდან, ე.ი. 12-8=4-დან რაოდენობა იქნება C_4^4, მაგრამ აქ ხდება შეწყვილება 5 ფრიადოსანი და 4 არაფრიადოსანი, ამიტომ გვექნება ნამრავლი

$m = C_8^5 \cdot C_4^4$;

მაშასადამე, $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{14}{55}$.

3. ალბათობის სტატისტიკური განსაზღვრება

ხშირად, საჭირო ხდება, ამა თუ იმ პირობებში შესასწავლი მოვლენის, მოხდენის შესაძლებლობის დადგენა ექსპერიმენტების საფუძველზე.

ასეთ შემთხვევებში, n და m წინასწარ უცნობია. ისინი მიიღებიან არა თეორიულ-კომბინატორიკული მოსაზრებებიდან, **არამედ ექსპერიმენტის შედეგად**. ამიტომ, მიღებულ ალბათობას – **მოვლენის ფარდობით სიხშირეს(სტატისტიკურ ალბათობას)** უწოდებენ და გამოითვლიან ფორმულით:

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{6}$$

სადაც, $n-$ ერთიდაიგივე ექსპერიმენტის ჩატარებათა რაოდენობაა, ხოლო $m-$ $A-$მოვლენის ექსპერიმენტებში მოხდენათა რაოდენობა.

მაგალითები:

1) ტექნიკური კონტროლის განყოფილებამ ამორჩეული 100 ელმავლიდან აღმოაჩინა 5 წუნდებული. ვიპოვოთ წუნდებული ელმავლების ფარდობითი სიხშირე.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში n=100, m=5 ამიტომ

$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$.

2) 20 გასროლიდან, 18 მოხვდა მიზანს. ვიპოვოთ მიზანში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე.

ამოხსნა: $W(A) = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0.9$.

3) ვაგონების გამოცდისას დადგინდა, რომ ვარგისი ვაგონების ფარდობითი სიხშირეა 0.9. ვიპოვოთ ვარგისი ვაგონების რიცხვი, თუ შესასწავლი იყო 200 ვაგონი.

ამოხსნა: $W(A)=0.9$ n=200, m=?

$$W(A)=\frac{m}{n}\Rightarrow m=W(A)\cdot n=0.9\cdot 200=180 \text{ ვაგონი.}$$

4. ალბათობათა შეკრებისა და გამრავლების თეორემები

განსაზღვრება: ორი A და B **მოვლენის ჯამი** ეწოდება ისეთ მოვლენას, როდესაც ადგილი აქვს ან A-ს ან B-ს, ანუ ამ მოვლენათაგან ერთ-ერთს მაინც.

მაგალითი: A – ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 8-ის დაჯდომა; B – ორი კამათელის აგდებისას ნამრავლში 12-ის დაჯდომა; A+B – ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 8-ის ან ნამრავლში 12-ის დაჯდომა.

განსაზღვრება: ორი A და B **მოვლენის ნამრავლი** ეწოდება ისეთ მოვლენას, რომელის დროსაც ადგილი აქვს ორი A და B მოვლენის ერთდროულად მოხდენას.

მაგალითი: A – ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 11-ის დაჯდომა; B – ორი კამათელის აგდებისას ნამრავლში 30-ის დაჯდომა; A·B – ორი კამათელის აგდებისას ჯდება 5∧6 ან 6∧5.

განსაზღვრება: ორ A და B მოვლენას ეწოდება **არათავსებადი**, თუ შეუძლებელია მათი ერთდროული მოხდენა.

მაგალითი: A – ორი კამათელის აგდებისას ლუწი ჯამის დაჯდომა; B – ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 7-ის დაჯდომა; A და B არათავსებადი მოვლენებია.

განსაზღვრება: ორ A და B მოვლენას ეწოდება **დამოუკიდებელი** მოვლენები, თუ ერთის მოხდენა არ ახდენს გავლენას მეორე მოვლენაზე.

თეორემა არათავსებადი მოვლენების ჯამის ალბათობის შესახებ: ორი არათავსებადი A და B მოვლენის ჯამის ალბათობა ამ მოვლენათა ალბათობების ჯამის ტოლია:

$$p(A+B)=p(A)+p(B). \tag{7}$$

შენიშვნა: თეორემა ძალაშია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად არათავსებადი მოვლენების ჯამისთვისაც, ე.ი.

$$p(A_1+A_2+\dots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\dots+p(A_n); \tag{8}$$

ანუ

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i). \tag{9}$$

თეორემა ორი დამოუკიდებელი მოვლენის ნამრავლის ალბათობის შესახებ: ორი დამოუკიდებელი მოვლენის ნამრავლის ალბათობა ამ მოვლენათა ალბათობების ნამრავლის ტოლია:

$$p(A\cdot B)=p(A)\cdot p(B)\,. \tag{10}$$

შენიშვნა: თეორემა ძალაშია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი მოვლენებისათვის.

$$p(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot\cdots\cdot p(A_n)\,; \tag{11}$$

ანუ

$$p\left(\prod_{i=1}^{n}A_i\right)=\prod_{i=1}^{n}p(A_i)\,. \tag{12}$$

თეორემა ურთიერთდამოკიდებული მოვლენების ნამრავლის ალბათობის შესახებ: ორი ურთიერთდამოკიდებული მოვლენების ნამრავლის ალბათობა უდრის ერთ-ერთი მათგანის ალბათობის ნამრავლს მეორე მოვლენის **პირობით ალბათობაზე**, თუ პირველი მოვლენა უკვე მოხდა:

$$\begin{matrix} p(A\cdot B)=p(A)\cdot p_A(B) \\ p(A\cdot B)=p(B)\cdot p_B(A) \end{matrix}; \tag{13}$$

$p_A(B)$ – B მოვლენის მოხდენის ალბათობაა, თუ A უკვე მოხდა, ხოლო $p_B(A)$ – A მოვლენის მოხდენის ალბათობა, თუ B უკვე მოხდა.

თეორემა ორი თავსებადი მოვლენის ჯამის ალბათობაზე: ორი თავსებადი მოვლენის ჯამის ალბათობა უდრის ამ მოვლენების ალბათობათა ჯამს, შემცირებულს მათი ნამრავლის ალბათობით.

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)\,. \tag{14}$$

სამი მოვლენის ჯამისათვის გვექნება ფორმულა:

$$p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cdot B)-p(B\cdot C)-p(A\cdot C)\,. \tag{15}$$

მაგალითი:

მატარებლის ვაგონში 15 მგზავრია, მათგან 5 უბილეთოა. რევიზორი ამოწმებს 3 შემთხვევით მგზავრს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ რევიზორი აღმოაჩენს ერთ უბილეთოს მაინც.

ამოხსნა:

B – რევიზორი აღმოაჩენს 1 უბილეთოს;

C – რევიზორი აღმოაჩენს 2 უბილეთოს;

D – რევიზორი აღმოაჩენს 3 უბილეთოს;

A – რევიზორი აღმოაჩენს 1 უბილეთოს მაინც.

$A=B+C+D,\qquad p(A)=p(B)+p(C)+p(D)\,,$

$$p(B)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\quad p(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},$$

$$p(D)=\frac{C_5^3\cdot C_{10}^0}{C_{15}^3}=\frac{2}{91},$$

$$p(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.$$

განსაზღვრება: A მოვლენის **საპირისპირო მოვლენა** ეწოდება ისეთ – $\overline{A}$ მოვლენას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A მოვლენას არა აქვს ადგილი.

საპირისპირო მოვლენათა ჯამი წარმოადგენს უეჭველ მოვლენას, ამიტომ მისი ალბათობა ერთის ტოლია:

$$p(A+\overline{A})=1. \tag{16}$$

შეკრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$p(A)+p(\overline{A})=1, \tag{17}$$

ანუ

$$p(A)=1-p(\overline{A}). \tag{18}$$

გამოვიყენოთ ფორმულა (18) და ამოვხსნათ წინა ამოცანა მეორე გზით.

A – რევიზორი აღმოაჩენს 1 უბილეთოს მაინც.

$\overline{A}$ – რევიზორი ვერ აღმოაჩენს ვერცერთ უბილეთოს.

$p(A)=1-p(\overline{A})$,

$p(\overline{A})=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}$,

ე.ი. $p(A)=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$.

მაგალითები:

1) ტომარაში არის თეთრეულის 10 კომპლექტი, მათგან 4 არასტანდარტულია. გამცილებელი შემთხვევით ამოწმებს 3 კომპლექტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ის ნახავს ერთ არასტანდარტულ კომპლექტს მაინც.

ამოხსნა:

A – გამცილებელი ნახავს ერთ არასტანდარტულ კომპლექტს მაინც;

$\overline{A}$ – გამცილებელი ვერ ნახავს ვერცერთ არასტანდარტულ კომპლექტს

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{5}{6}.$$

2) A_1 და A_2 დამოუკიდებელი მოვლენების შესაბამისი ალბათობებია p_1 და p_2. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ მოვლენებიდან მოხდება მხოლოდ ერთი.

ამოხსნა:

B_1 – მოხდება მხოლოდ A_1;

B_2 – მოხდება მხოლოდ A_2.

$B_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2,$

$B_2 = A_2 \cdot \overline{A}_1.$

ალბათობა იმისა, რომ A_1-დან და A_2-დან მოხდება მხოლოდ ერთ-ერთი:

$$p(B_1 + B_2) = p(B_1) + p(B_2) = p(A_1 \cdot \overline{A}_2) + p(\overline{A}_1 \cdot A_2) =$$

$$= p(A_1) \cdot p(\overline{A}_2) + p(\overline{A}_1) \cdot p(A_2) = p_1 \cdot (1 - p_2) + p_2 \cdot (1 - p_1).$$

ხშირად 1-p-ს აღნიშნავენ q-თი, მაშინ

$$p(B_1 + B_2) = p_1 q_2 + q_1 p_2 .$$

3) ავარიის სიგნალიზაციისათვის ვაგონზე დაყენებულია ორი დამოუკიდებლად მომუშავე სიგნალიზატორი. ალბათობა იმისა, რომ ავარიისას პირველი სიგნალიზატორი ამუშავდება, უდრის 0.95, ხოლო მეორე სიგნალიზატორისათვის – 0.9. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ავარიისას ამუშავდება მხოლოდ ერთი სიგნალიზატორი.

ამოხსნა:

B_1– ამუშავდება პირველი სიგნალიზატორი A_1;

B_2 – ამუშავდება მეორე სიგნალიზატორი A_2.

$B_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2,$

$B_2 = A_2 \cdot \overline{A}_1,$

$$p(B_1 + B_2) = p(B_1) + p(B_2) = p(A_1 \cdot \overline{A}_2) + p(\overline{A}_1 \cdot A_2) =$$

$$= p(A_1) \cdot p(\overline{A}_2) + p(\overline{A}_1) \cdot p(A_2) = 0.95 \cdot (1 - 0.9) + 0.005 \cdot 0.9 = 0.095 + 0.045 = 0.14.$$

4) ორი მშვილდოსანი ისვრის მიზანში. იმის ალბათობა, რომ პირველი მოარტყავს მიზანში 0.7-ია, მეორისათვის – 0.8. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სროლისას მიზანში მოარტყავს მხოლოდ ერთი მშვილდოსანი.

პასუხი: $p(A) = 0.38$.

5) ტექნიკური კონტროლის განყოფილება ამოწმებს დეტალების სტანდარტულობას. იმის ალბათობა, რომ დეტალი სტანდარტულია, უდრის 0.9. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი შემოწმებული დეტალიდან მხოლოდ ერთია სტანდარტული.

ამოხსნა:

A_1 – პირველად ამოღებული დეტალი სტანდარტულია;

$\overline{A}_1$ – პირველად ამოღებული დეტალი არასტანდარტულია;

A_2 – მეორედ ამოღებული დეტალი სტანდარტულია;

$\overline{A}_2$– მეორედ ამოღებული დეტალი არასტანდარტულია;

A – მხოლოდ ერთი დეტალია სტანდარტული;

$A = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2,$

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(\overline{A}_2) + p(\overline{A}_1) \cdot p(A_2) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9 = 0.09 + 0.09 = 0.18.$$

6) საქონლის მიღებული პარტიიდან საქონელმცოდნე არჩევს უმაღლესი ხარისხის საქონელს. იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით აღებული ნაწარმი არის უმაღლესი ხარისხის, არის 0.8. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ აღებული 3 ნაწარმიდან მხოლოდ 2 არის უმაღლესი ხარისხის.

ამოხსნა:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3,$$

$$p(B) = p(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + p(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + p(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) = 3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.64 \cdot 0.6 = 0.384.$$

7) სტუდენტი ეძებს საჭირო ფორმულას სამ ცნობარში. იმის ალბათობა, რომ ფორმულა არის პირველ, მეორე, მესამე ცნობარში, შესაბამისად უდრის 0.6; 0.7; 0.8. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ფორმულა არის:

ა) მხოლოდ ერთ ცნობარში;

ბ) მხოლოდ ორ ცნობარში;

გ) სამივე ცნობარში.

პასუხი: ა) $p = 0.188$; ბ) $p = 0.452$; გ) $p = 0.336$.

8*) მიზანში მოხვედრის ალბათობა არის 0.8. რამდენი გასროლაა საჭირო, რომ ალბათობა იმისა, რომ არ იქნება არცერთი აცდენა, 0.4-ზე ნაკლები იყოს?

ამოხსნა:

A_1 – პირველი სროლისას მოხვედრა;

A_2 – მეორე სროლისას მოხვედრა;

… … … … …

A_n – n-ური სროლისას მოხვედრა.

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \cdots \cdot p(A_n) < 0.4,$$

$$0.8^n < 0.4 \Leftrightarrow n \cdot \lg 0.8 < \lg 0.4, \quad n > \frac{\lg 0.4}{\lg 0.8} = \log_{0.8}^{0.4}$$

პასუხი: $n \geq 5$

5. პირობითი ალბათობა

9) ბიბლიოთეკაში ალბათობის თეორიის 6 სახელმძღვანელოა, რომელთაგან 3 ყდითაა. ბიბლიოთეკარი მიმდევრობით იღებს 2 ნებისმიერ სახელმძღვანელოს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სახელმძღვანელო ყდიანია.

ამოხსნა:

A_1 – პირველი წიგნი ყდითაა,

A_2 – მეორე წიგნი ყდითაა.

$$p(A_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

ალბათობა იმისა, რომ მეორე წიგნიც ყდითაა იმის შემდეგ, რაც ერთი ყდიანი წიგნი უკვე დააკლდა თაროს, $p_{A_1}(A_2)=\frac{2}{5}$ (პირობითი ალბათობა).

მაშასადამე, $p(A_1 \cdot A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

10) სექტემბერში თბილისში მოღრუბლული დღეების რიცხვი არის 6. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 1 და 2 სექტემბერს იქნება ღრუბლიანი ამინდი.

ამოხსნა:

ალბათობა იმისა, რომ 1 სექტემბერს ამინდი ღრუბლიანია $p(A_1)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

პირობითი ალბათობა იმისა, რომ 2 სექტემბერსაც მოიღრუბლება

$p_{A_1}(A_2)=\frac{5}{29}$, ე.ი. $p(A_1 \cdot A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{29}=\frac{1}{29}$.

11) ჯგუფში 7 გოგონა და 3 ბიჭია. შემთხვევით იძახებენ 3 სტუდენტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყველა გამოძახებული გოგონა იქნება.

ამოხსნა:

A_1 – პირველად გამოიძახეს გოგონა;

A_2 – მეორედ გამოიძახეს გოგონა;

A_3 – მესამედ გამოიძახეს გოგონა.

$p(A_1)=\frac{7}{10}$,

$p_{A_1}(A_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$,

$p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{5}{8}$,

$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$.

12) სტუდენტმა იცის 25-დან 20 საკითხი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ბილეთის სამივე საკითხს სწორად უპასუხებს.

ამოხსნა:

A_1 – სტუდენტი უპასუხებს I საკითხს;

A_2 – უპასუხებს II საკითხს;

A_3 – უპასუხებს III საკითხს.

$p(A_1)=\frac{20}{25}$,

$p_{A_1}(A_2)=\frac{19}{24}$,

$$p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{18}{23},$$

$$p(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

13) 1891 წლის აღწერით ინგლისში გამოვლინდა, რომ: შავთვალება მამები და შვილები შეადგენენ $(A\cdot B)$ 5%-ს, შავთვალება მამები და ცისფერთვალება შვილები $(A\cdot\overline{B})$ – 7.9%, ცისფერთვალება მამები და შავთვალება ბიჭები $(\overline{A}\cdot B)$ – 8.9%, ცისფერთვალება მამები და ცისფერთვალება შვილები $(\overline{A}\cdot\overline{B})$ – 78.2%. ვიპოვოთ კავშირი მამისა და შვილის თვალთა ფერს შორის.

ამოხსნა:

$p(A\cdot B)=0.05$; $p(A\cdot\overline{B})=0.079$; $p(\overline{A}\cdot B)=0.089$; $p(\overline{A}\cdot\overline{B})=0.782$;

პირობითი ალბათობა იმისა, რომ შვილი შავთვალებაა, თუ მამაა შავთვალებაა

$$p_A(B)=\frac{p(A\cdot B)}{p(A)}=\frac{p(A\cdot B)}{p(A\cdot B)+p(A\cdot\overline{B})}=\frac{0.05}{0.05+0.079}=0.39\approx 0.4;$$

ალბათობა იმისა, რომ შვილი ცისფერთვალებაა, თუ მამა შავთვალებაა

$$p_A(\overline{B})=1-p_A(B)=100.4=0.6;$$

ალბათობა იმისა, რომ შვილი შავთვალაა, თუ მამა ცისფერთვალებაა

$$p_{\overline{A}}(B)=\frac{p(\overline{A}\cdot B)}{p(\overline{A})}=\frac{p(\overline{A}\cdot B)}{p(\overline{A}\cdot B)+p(\overline{A}\cdot\overline{B})}=0.102.$$

ალბათობა, რომ შვილი ცისფერთვალებაა მამასავით:

$$p_{\overline{A}}(\overline{B})=1-p_{\overline{A}}(B)=1-0.102=0.898.$$

6. რამოდენიმე მოვლენიდან, ერთის მაინც მოხდენის ალბათობის გამოთვლა

განვიხილოთ დამოუკიდებელი ხდომილებების სისტემა $A_1,A_2,\dots,A_n$. ვთქვათ, ცნობილია თითოეული მათგანის მოხდენის ალბათობა: $p(A_1)=p_1$, $p(A_2)=p_2,\dots,p(A_n)=p_n$.

რაც მოკლედ შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$p(A_i)=p_i,\quad i=\overline{1,n}\,. \tag{19}$$

შესაბამისად ამ ხდომილებათა არ მოხდენის ალბათობები იქნება:

$$p(\overline{A_i})=1-p_i=q_i\,. \tag{20}$$

განვიხილოთ ისეთი A მოვლენის ალბათობა, რომელსაც ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ხდება ხდომილებათა $A_1,A_2,\dots,A_n$ სისტემიდან ერთი მაინც. ცხადია, რომ A მოვლენის

ალბათობა შეიძლება გამოვთვალოთ ამ მოვლენის საწინააღმდეგო $\overline{A}$ _მოვლენის ალბათობის მეშვეობით, $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\cdots\cdot\overline{A}_n$ და

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-p(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\cdots\cdot\overline{A}_n), \tag{21}$$

ანუ

$$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot\cdots\cdot q_n. \tag{22}$$

თუ ყველა A_i ხდომილების ალბათობები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ (22) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$p(A)=1-q^n. \tag{23}$$

მაგალითები:

1) ელმავლის ელექტროქსელში მიმდევრობით არის ჩართული სამი ელემენტი, რომლებიც მუშაობენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. იმის ალბათობები, რომ დაზიანდება პირველი, მეორე ან მესამე ელემენტი და ქსელში დენი არ გვექნება, შესაბამისად უდრის:

$p_1=0.1$, $p_2=0.15$, $p_3=0.2$.

ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ქსელში დენი იქნება.

ამოხსნა: რადგან ელემენტები მიმდევრობით არიან ქსელში ჩართული, ერთიც რომ დაზიანდეს, დენი შეწყდება. საძებნი ალბათობა შესაბამისად გამოითვლება (22) ფორმულით:

$p(A)=1-q_1\cdot q_2\cdot q_3=1-0.9\cdot 0.85\cdot 0.8\approx 0.388$.

3) ალბათობა იმისა, რომ სნაიპერი ერთხელ მაინც მოირტყავს მიზანში სამჯერ გასროლისას უდრის 0.875. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სნაიპერი დააზიანებს სამიზნეს ერთი გასროლით.

ამოხსნა: მიზანში ერთხელ მაინც მოხვედრის ალბათობა სამი გასროლის შემთხვევაში გამოითვლება ფორმულით:

$p(A)=1-q^3$,

სადაც $q-$ არის ერთი გასროლის აცილების ალბათობა,

$0.875=1-q^3 \Leftrightarrow q^3=1-0.875 \Leftrightarrow q^3=0.125 \Leftrightarrow q=0.5$;

მაშასადამე, მორტყმის ალბათობა იქნება:

$p=1-q=1-0.5=0.5$.

4*) რაღაც ფიზიკურ სიდიდეს მრავალჯერ ზომავენ. ალბათობა იმისა, რომ გაზომვა იქნება მცდარი უდრის $p-$ს. ვიპოვოთ გაზომვათა ის n მინიმალური რაოდენობა, რომლის დროსაც ალბათობა იმისა, რომ ერთი გაზომვა მაინც იქნება მცდარი $p>\alpha$.

ამოხსნა:

$$P(A)=1-q^n>\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow q^n<1-\alpha \Leftrightarrow (1-p)^n<1-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg(1-p)^n<\lg(1-\alpha) \Leftrightarrow n\cdot\lg(1-p)<\lg(1-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-p)} \Rightarrow n_0=\left[\frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-p)}\right]+1,$$

რადგან

$1-p<1$.

7. სრული ალბათობის ფორმულა

თუ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ხდომილებათა დამოუკიდებელი სრული სისტემაა, მაშინ A მოვლენის ალბათობა, რომელიც ხდება იმ შემთხვევაში, თუ ადგილი აქვს მხოლოდ ერთს ამ ხდომილებათა (ჰიპოთეზათა) $\{B_i\}_{i=1}^n$ სისტემიდან, გამოითვლება სრული ალბათობის ფორმულით:

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\cdots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A). \tag{24}$$

მაგალითები:

1) ყუთში, რომელშიც იყო 2 ბურთულა, ჩადეს ერთი თეთრი ბურთულა. ამის შემდეგ შემთხვევით ამოიღეს ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი, თუ საწყისი ორი ბურთულისათვის ყველა ფერი დასაშვები და უცნობია.

ამოხსნა:

A – ამოღებული ბურთულა თეთრია.

შესაძლებელია შემდეგი ჰიპოთეზები უცნობი ბურთულების შესახებ:

B_1 – თეთრი არ იყო მათ შორის;

B_2 – ერთი თეთრი იყო;

B_3 – ორივე იყო თეთრი;

რადგან B_1, B_2, B_3 – ამოწურავენ ყველა შესაძლებლობას ე.ი. სრული სისტემაა, და მათი ალბათობებიც ტოლია $p(B_1)=p(B_2)=p(B_3)=\dfrac{1}{3}$.

შესაბამისად პირობოთი ალბათობები იქნება: $p_{B_1}(A)=\dfrac{1}{3}$, $p_{B_2}(A)=\dfrac{2}{3}$, $p_{B_3}(A)=1$. მაშინ A–მოვლენის ალბათობა (24)-ის მიხედვით იქნება:

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)=\frac{2}{3}.$$

1) ყუთში იყო n ბურთულა, ჩადეს ერთი თეთრი, შემდეგ ამოიღეს შემთხვევით ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა არის თეთრი, თუ საწყისი ბურთულების ფერის შესახებ ყველა ჰიპოთეზა თანაბარი ალბათობისაა.

ამოხსნა: A –ამოღებული ბურთულა თეთრია. შესაძლო ჰიპოთეზები იქნება:

B_1 – იყო 0 თეთრი,

B_2 – იყო 1 თეთრი,

B_3 – იყო 2 თეთრი,

B_4 – იყო 3 თეთრი,

… … …

B_{n+1} – იყო n თეთრი.

რადგან ისინი თანაბარალბათურნი არიან

$$p(B_1) = p(B_2) = \cdots = p(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1}.$$

შესაბამისი პირობითი ალბათობები იქნება:

$$p_{B_1}(A) = \frac{1}{n+1}; \qquad p_{B_2}(A) = \frac{2}{n+1}; \qquad p_{B_3}(A) = \frac{3}{n+1}; \quad \ldots p_{B_{(n+1)}}(A) = 1.$$

მაშასადამე,

$$p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \cdots + p(B_{n+1}) \cdot p_{B_{(n+1)}}(A) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{3}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \frac{3}{n+1} + \cdots + 1\right) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1+n+1}{2} \cdot (n+1) = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

8. ბაიესის ფორმულა

თუ $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ ხდომილებათა სრული, დამოუკიდებელი სისტემაა და A მოვლენა ხდება იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს მხოლოდ ერთს ამ სისტემიდან, ამასთან ცნობილია, რომ A მოვლენა უკვე მოხდა, მაშინ ჰიპოთეზების ალბათობები შეიძლება დაზუსტებულ იქნეს ბაიესის ფორმულებით:

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(A)} \qquad i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

სადაც

$$p(A) = p(B_1) \cdot p_{B1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \cdots + p(B_n) \cdot p_{B_{(n)}}(A). \tag{26}$$

მაგალითი:

ორი საამქრო უშვებს ერთნაირ დეტალებს, რომლებიც მიეწოდება საერთო კონვეიერს. პირველი საამქროს წარმადობა 2-ჯერ მეტია მეორესთან შედარებით. პირველი საამქრო საშუალოდ უშვებს 60% წუნდაუდებელ საქონელს, ხოლო მეორე – 84%-ს. კონვეირიდან შემთხვევით აღებული დეტალი აღმოჩნდა წუნდაუდებელი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი დამზადდა პირველ საამქროში.

ამოხსნა:

A – დეტალი წუნდაუდებელია. გვექნება ჰიპოთეზები:

B_1 – დეტალი I საამქროდანაა,

B_2 – დეტალი II საამქროდანაა

რადგან I საამქროს წარმადობა 2-ჯერ მეტია მეორეზე, გვექნება

$$p(B_1)=\frac{2}{3} \quad p(B_2)=\frac{1}{3},$$

$$p_{B_1}(A)=0.6 \quad (60\%),$$

$$p_{B_2}(A)=0.84 \quad (84\%),$$

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0.6+\frac{1}{3}\cdot 0.84=0.68 .$$

საძიებელი დაზუსტებული ალბათობა იქნება:

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0.6}{0.68}=\frac{10}{17}.$$

9. განმეორებითი ექსპერიმენტები. ბერნულის ფორმულა

ერთიდაიმავე ექსპერიმენტების n-ჯერ ჩატარებისას როდესაც საჭიროა დადგინდეს მოცემულ დამოუკიდებელ ექსპერიმენტებს შორის A მოვლენის გამეორების რიცხვი უნდა ვისარგებლოთ ბერნულის თეორემით.

ბერნულის თეორემა: ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელი ექსპერიმენტის ჩატარებისას, A მოვლენა, რომლის ალბათობაც თითოეულ ექსპერიმენტში არის p, მოხდება k-ჯერ უდრის

$$p_n(k)=C_n^k p^k\cdot q^{n-k}, \tag{27}$$

სადაც

$$q=1-p. \tag{28}$$

ალბათობა იმისა, რომ A მოვლენა მოხდება:

ა) k-ზე ნაკლებჯერ;

ბ) k-ზე მეტჯერ;

გ) k-ზე არანაკლებჯერ;

დ) k-ზე არაუმეტეს,

შესაბამისად გამოითვლება ფორმულებით:

$$p_n(0)+p_n(1)+\cdots+p_n(k-1); \tag{29}$$

$$p_n(k+1)+p_n(k+2)+\cdots+p_n(n); \tag{30}$$

$$p_n(k)+p_n(k+1)+\cdots+p_n(n); \tag{31}$$

$$p_n(0)+p_n(1)+\cdots+p_n(k). \tag{32}$$

მაგალითები:

1) გამცილებელი თვეში ასრულებს 10 რეისს. ალბათობა იმისა, რომ მის ვაგონს შეამოწმებს რევიზორი, ან არ შეამოწმებს, ერთნაირია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ თვეში შემოწმებათა რიცხვი იქნება:

ა) 3-ზე ნაკლები;

ბ) 3-ზე მეტი;

გ) 3-ზე არანაკლები;

დ) 3-ზე არაუმეტესი;

ე) იქნება 1.

ამოხსნა:

$$p_{10}(k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{10!}{k!\cdot(10-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

ა) $p_{10}(0) + p_{10}(1) + p_{10}(2);$

ბ) $p_{10}(4) + p_{10}(5) + p_{10}(6) + p_{10}(7) + p_{10}(8) + p_{10}(9) + p_{10}(10);$

გ) $\sum_{k=3}^{10} p_{10}(k);$

დ) $\sum_{k=0}^{3} p_{10}(k);$

ე) $p_{10}(1) = \frac{10!}{1!9!}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$

2) ორი ერთნაირი სიძლიერის მოთამაშე თამაშობს ჭადრაკს. რა უფრო ალბათურია: ის, რომ მოიგებს ერთ-ერთი 4-დან 2-ჯერ, თუ ის, რომ მოიგებს 6-დან 3-ჯერ? (ყაიმები არ ითვლება).

ამოხსნა:

რადგან მოჭადრაკეები თანაბარი სიძლიერის არიან $p = \frac{1}{2}$, ე.ი. $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ და მაშასადამე,

$$p_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

ალბათობა იმისა, რომ 4-დან 2-ს მოიგებს ერთ-ერთი, არის:

$$p_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 16} = \frac{6}{16};$$

ალბათობა იმისა, რომ 6-დან იქნება 3 მოგება:

$$p_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 64} = \frac{5}{16};$$

ე.ი. $p_6(3) < p_4(2)$. ანუ ოთხი პარტიიდან ორის მოგება უფრო ალბათურია, ვიდრე ექვსიდან სამის მოგება.

3) სამშობიარო პალატაში 5 ბავშვია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ბავშვებს შორის:

ა) ორი ბიჭია;

ბ) ორი მაინც არის ბიჭი,

თუ ბიჭის დაბადების ალბათობა $p = 0.51$.

ამოხსნა:

ა) $p_5(2) = C_5^2 \cdot p^5 \cdot q^{5-2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0.51^5 \cdot (1-0.51)^3 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0.51^5 \cdot 0.49^3 \cong 0.31;$

ბ) $p_5(2) + p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = \sum_{k=2}^{5} p_5(k) = \sum_{k=2}^{5} C_5^k \cdot 0.51^k \cdot 0.49^{5-k}$.

10. დამოუკიდებელ ექსპერიმენტებში მოვლენის მოხდენის უალბათესი რიცხვი

განსაზღვრება: თუ თითოეულ ექსპერიმენტში A მოვლენის მოხდენის ალბათობა ერთნაირია და უდრის p-ს, მაშინ ექსპერიმენტის n-ჯერ გამეორებისას, მოცემული A მოვლენის მოხდენის რაოდენობათა ყველაზე უფრო მოსალოდნელ k_0 რაოდენობას **უალბათეს რიცხვს** უწოდებენ.

უალბათესი რიცხვი k_0 აკმაყოფილებს ორმაგ უტოლობას:

$$np - q \le k_0 \le np + q, \tag{33}$$

ამასთან

ა) თუ $np - q$ წილადი რიცხვია, მაშინ გვაქვს ერთადერთი უალბათესი რიცხვი k_0;

ბ) თუ $np - q$ მთელი რიცხვია, მაშინ გვაქვს ორი უალბათესი რიცხვი, k_0 და $k_0 + 1$;

გ) თუ np მთელი რიცხვია, მაშინ უალბათესი რიცხვი $k_0 = np$.

მაგალითები:

1) ელმავლის 15 ელემენტის შემოწმებისას, ვიპოვოთ იმ ელემენტების უალბათესი რიცხვი, რომლებიც გამოცდას გაუძლებენ, თუ ალბათობა იმისა, რომ თითოეული მათგანი გამოცდას გაუძლებს, ერთნაირია და უდრის 0.9.

ამოხსნა:

$n = 15; \quad p = 0.9; \qquad q = 1 - p = 0.1;$

უალბათესი k_0 რიცხვი აკმაყოფილებს უტოლობას

$15 \cdot 0.9 - 0.1 \le k_0 \le 15 \cdot 0.9 + 0.9;$

ანუ $\quad 13.4 \le k_0 \le 14.4;$

რადგან, იგი უნდა იყოს მთელი რიცხვი მივიღეთ, რომ k_0=14.

2) საქონელმცოდნე ამოწმებს პროდუქციის 24 ნიმუშს. ალბათობა იმისა, რომ თითოეული ნიმუში არის გამოსადეგი, უდრის

0.6. ვიპოვოთ იმ ნიმუშთა უალბათეს რიცხვთა რაოდენობა, რომლებსაც საქონელმცოდნე მოიწონებს.

ამოხსნა:

$n = 24; \quad p = 0.6; \quad q = 1 - p = 0.4$;

ე.ი. $24 \cdot 0.6 - 0.4 \le k_0 \le 24 \cdot 0.6 + 0.6$ ანუ $14 \le k_0 \le 15$;

რადგან, $np - q = 14$ მთელი რიცხვია, უალბათესი რიცხვების რაოდენობა არის ორი, ანუ $k_0 = 14$, $k_0 + 1 = 15$.

3) ალბათობა იმისა, რომ მეგობარი გაგვიღიმებს არის 0.4. რამდენჯერ უნდა შევხვდეთ მეგობარს, რომ გაღიმებათა უალბათესი რიცხვი იყოს 25?

ამოხსნა:

$n = 25; \quad p = 0.4; \qquad q = 0.6$;

$np - q \le k_0 \le np + q$, ე.ი.

$0.4n - 0.6 \le 25, \qquad 25 \le 0.4n + 0.4,$

$n \le \frac{25.6}{0.4} = 64,$ და $n \ge \frac{24.6}{0.4} = 61.5.$

ასე, რომ $62 \le n \le 64$.

11. წარმომქმნელი ფუნქცია

აქამდე განვიხილავდით ექსპერიმენტებს, რომლის დროსაც A მოვლენის მოხდენის ალბათობა p ერთნაირი იყო ყოველი ექსპერიმენტის დროს.

ახლა განვიხილოთ ექსპერიმენტები, რომლებიც კვლავ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლები არიან, მაგრამ A მოვლენის ალბათობა პირველ ექსპერიმენტში არის p_1, მეორე ექსპერიმენტში არის $p_2, \ldots$, n-ურ ექსპერიმენტში p_n. $p_n(k)$ არის n ექსპერიმენტში A მოვლენის k-ჯერ მოხდენის ალბათობა.

$p_n(k)$ ალბათობათა **წარმომქმნელი ფუნქცია** ეწოდება

$$Y_n(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n z + q_n), \qquad (34)$$

ფუნქციას.

$p_n(k)$ რიცხვობრივად უდრის წარმომქმნელი ფუნქციის გამარტივების შედეგში z^k-ს კოეფიციენტს. მაგალითად, თუ $n = 2$, მაშინ

$$Y_2(z) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) = p_1 \cdot p_2 \cdot z^2 + (p_1 q_2 + p_2 q_1) \cdot z + q_1 q_2, \qquad (35)$$

$p_2(2) = p_1 p_2$ არის z^2-ის კოეფიციენტი, (2 ექსპერიმენტი, A მოხდება 2-ჯერ),

$p_2(1) = p_1 q_2 + p_2 q_1$ არის z-ის კოეფიციენტი (2 ექსპერიმენტი, A მოხდება ერთხელ),

$p_2(0)=q_1q_2$ არის z^0-ის კოეფიციენტი (2 ექსპერიმენტი, A არ მოხდება).

მაგალითები:

1) ელმავალს აქვს სამი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტი. t დროის განმავლობაში თითოეული ამ ელემენტის შეუკეთებლად მუშაობის ალბათობა შესაბამისად უდრის $p_1=0.7$; $p_2=0.8$; $p_3=0.9$; ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ t დროის განმავლობაში შეუკეთებლად იმუშავებს: ა) სამივე ელემენტი; ბ) ორი ელემენტი; გ) ერთი ელემენტი; დ) არცერთი ელემენტი.

ამოხსნა:

$p_1=0.7$; $p_2=0.8$; $p_3=0.9$; ე.ი. $q_1=0.3$; $q_2=0.2$; $q_3=0.1$;

შევადგინოთ წარმომქმნელი ფუნქცია:

$Y_3(z)=(p_1z+q_1)(p_2z+q_2)(p_3z+q_3)=0.504z^3+0.398z^2+0.092z+0.006.$

ა) ალბათობა იმისა, რომ სამივე ელემენტი იმუშავებს შეუკეთებლად უდრის კოეფიციენტს z^3-თან, ე.ი. $p_3(3)=0.504$;

ბ) ალბათობა იმისა, რომ ორი ელემენტი იმუშავებს შეუკეთებლად უდრის კოეფიციენტს z^2-თან. ე.ი. $p_3(2)=0.398$;

გ) ალბათობა იმისა, რომ ერთი ელემენტი იმუშავებს შეუკეთებლად უდრის კოეფიციენტს z^1-თან, ე.ი. $p_3(1)=0.092$;

დ) ალბათობა იმისა, რომ არცერთი ელემენტი არ იმუშავებს შეუკეთებლად არის თავისუფალი წევრი, ე.ი. $p_3(0)=0.006$.

12. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

განსაზღვრება: შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება **დისკრეტული,** თუ მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

მაგალითად: $X=\{2;\ 3;\ 7;\ 5;\ 1\}$.

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების კანონი** ეწოდება ცხრილს, რომელიც შეიცავს შესაძლო მნიშვნელობებს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიცავს ორ სტრიქონს. პირველ სტრიქონში მოცემულია მისი ყველა შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო მეორეში – შესაბამისი ალბათობები.

მაგალითად:

$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	…	$\boldsymbol{x_n}$	
$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	…	$\boldsymbol{p_n}$	(36)

p_1 არის ალბათობა იმისა, რომ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x_1 მნიშვნელობას;

p_2 ალბათობა იმისაა, რომ X სიდიდე მიიღებს x_2 მნიშვნელობას და ა.შ.

რადგან განაწილების კანონში მონაწილეობს X-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, ისინი ადგენენ ხდომილებათა სრულ სისტემას, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 . \qquad (37)$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძლება მოცემული იქნას როგორც ანალიზურად,

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i) . \qquad (38)$$

ასევე, გრაფიკულადაც, ამისათვის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აგებენ წერტილებს:

$$M_1(x_1; p_1),\quad M_2(x_2; p_2), \ldots, M_n(x_n; p_n). \qquad (39)$$

შემდეგ ამ წერტილებს აერთებენ მონაკვეთებით. მიღებულ ფიგურას **განაწილების მრავალკუთხედს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: განაწილების კანონს **ბინომიალური ეწოდება**, თუ, განიხილება n დამოუკიდებელ ექსპერიმენტებს შორის X მოვლენის მოხდენის k რაოდენობათა რიცხვის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე $p_n(k)$, რომლის შესაბამისი ალბათობების გამოთვლა წარმოებს ბერნულის ფორმულით. ე.ი. განაწილების კანონს აქვს სახე:

X	***0***	***1***	***2***	***3***	**...**	***n***
P	$p_n(0)$	$p_n(1)$	$p_n(2)$	$p_n(3)$	**...**	$p_n(n)$

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} . \qquad (40)$$

თუ, ექსპერიმენტების n-რიცხვი დიდია (n>200), ხოლო მოვლენის მოხდენის ალბათობა p-მეტად მცირეა (p<<1), მაშინ ალბათობების გამოსაანგარიშებლად იყენებენ მიახლოებით ფორმულას:

$$p_n(k) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},\quad \lambda = n \cdot p ; \qquad (41)$$

ამბობენ, რომ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია **პუასონის კანონით**.

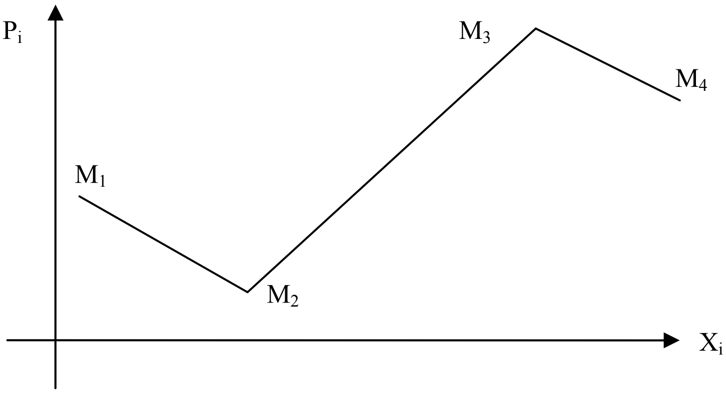
მაგალითები:

1) დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	***1***	***3***	***6***	***8***
P	***0.2***	***0.1***	***0.4***	***0.3***

ავაგოთ განაწილების მრავალკუთხედი;

ამოხსნა:
$M_1(1;0.2)$, $M_2(3;0.1)$, $M_3(6;0.4)$, $M_4(8;0.3)$,



2) დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

ა)

X	***2***	***4***	***5***	***6***
P	***0.2***	***0.1***	***0.4***	***0.3***

ბ)

X	***10***	***15***	***20***
P	***0.1***	***0.7***	***0.2***

ააგეთ განაწილების მრავალკუთხედი.

3) ვაგონი შეიცავს სამ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტს. თითოეული ელემენტის წყობიდან გამოსვლის ალბათობა უდრის 0,1. შევადგინოთ წყობიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

ამოხსნა: რადგან თითოეული ელემენტის წყობიდან გამოსვლის ალბათობები ერთმანეთის ტოლია, ჩვენ გვაქვს ბინომიალური განაწილება. წყობიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობებია: 0 1 2 3. დავთვალოთ შესაბამისი ალბათობები:

$$p_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = \frac{3!}{0!3!} \cdot 1 \cdot (1-0.1)^3 = 0.9^3 = 0.729;$$

$$p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.243;$$
$$p_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^1 = 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.027;$$
$$p_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^1 = 1 \cdot 0.1^3 \cdot 1 = 0.001.$$

ე.ი. განაწილების კანონს ექნება სახე:

X	***0***	***1***	***2***	***3***
P	***0.729***	***0.243***	***0.027***	***0.001***

შემოწმება:
$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1.$$

4) შევადგინოთ ბინომიალური განაწილების კანონი X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის – გერბის ამოვარდნის რაოდენობა მონეტის ორჯერ აგდებისას.

ამოხსნა: მონეტის ორჯერ აგდებისას გერბის ამოვარდნა შეიძლება მოხდეს: 0, 1 ან 2-ჯერ. რაც წარმოადგენს X-ის შესაძლო მნიშვნელობებს. შესაბამისი ალბათობები დაითვლება ბერნულის ფორმულით, სადაც $p = \frac{1}{2}$.

$$p_2(0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$
$$p_2(1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$p_2(2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

X	***0***	***1***	***2***
P	***1/4***	***1/2***	***1/4***

5) სახელმძღვანელო გამოცემულია ტირაჟით 100 000 ეგზემპლარი. ალბათობა იმისა, რომ სახელმძღვანელო ცუდადაა აკინძული არის 0,0001. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ტირაჟი შეიცავდეს ზუსტად 5 წუნდებულ სახელმძღვანელოს.

ამოხსნა: n=100 000 p=0.0001, k=5 რადგან n დიდი რიცხვია, ხოლო p მცირეა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პუასონის განაწილება:
$$p_n(k) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

ვიპოვოთ $\lambda = n \cdot p = 100000 \cdot 0.0001 = 10$

$$p_{100000}(5) \cong \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} \approx \frac{10^5 \cdot 0.000045}{120} = 0.0375.$$

6) ქარხანამ ბაზარზე გააგზავნა 500 ნაკეთობა. ტრანსპორტირებისას ნაკეთობის დაზიანების ალბათობა არის 0,002. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანდა ზუსტად 3 ნაკეთობა.

ამოხსნა:

n=500 დიდი რიცხვია, p=0.002 – მცირე. განსახილველი მოვლენები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, ამიტომ უნდა განვიხილოთ პუასონის განაწილება.

$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0.002 = 1$;

$$p_{500}(3) \cong \frac{\lambda^3 \cdot e^{-\lambda}}{3!} = \frac{e^{-1}}{6} = \frac{0.36788}{6} = 0.0613\,.$$

13. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების რიცხვითი მახასიათებლები

შემთხვევითი დისკრეტული სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის მახასიათებლად განიხილავენ მათემატიკურ ლოდინს.

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** ეწოდება სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლების ჯამს. აღინიშნება $M(X)$. ე.ი.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n\,. \tag{42}$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე იღებს თვლადი რაოდენობის მნიშვნელობებს, მაშინ

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\,. \tag{43}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. მუდმივი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი თვით ამ რიცხვის ტოლია:

$$M(C) = C\,. \tag{44}$$

2. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია:

$$M(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \cdots + M(x_n)\,. \tag{45}$$

3. ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი, ამ სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია:

$$M(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = M(x_1) \cdot M(x_2) \cdot \cdots \cdot M(x_n)\,. \tag{46}$$

4. ბინომიალური განაწილების მქონე შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ექსპერიმენტების n რაოდენობისა და ერთ ექსპერიმენტში მოვლენის მოხდენის p ალბათობის ნამრავლის ტოლია, ე.ი.

$$M(X) = n \cdot p \tag{47}$$

საშუალო მნიშვნელობის გარშემო, შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევის მახასიათებელ სიდიდედ განიხილავენ **დისპერსიასა და საშუალო კვადრატულ გადახრას**.

განსაზღვრება: დისპერსია ეწოდება შემთხვევითი სიდიდისა და მათემატიკური ლოდინის სხვაობის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს, ანუ

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 . \tag{48}$$

დისპერსიის (48) ფორმულა შეიძლება გავამარტივოთ, თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებს:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + (M(X))^2) =$$
$$= M(X^2) - 2 \cdot (M(X))^2 + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 ,$$

ე.ი. დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 . \tag{49}$$

დისპერსიის თვისებები:

1. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია:

$$D(C) = 0 . \tag{50}$$

2. მუდმივი მამრავლი გამოდის დისპერსიიდან კვადრატში აყვენილი:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X) . \tag{51}$$

3. დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია, ამ სიდიდეთა დისპერსიების ჯამის ტოლია.

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) . \tag{52}$$

4. ბინომიალური განაწილების დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q . \tag{53}$$

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \tag{54}$$

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მოცემულია მისი განაწილების კანონი:

ა)

X	***-4***	***6***	***10***
P	***0.2***	***0.3***	***0.5***

ბ)

X	***0.21***	***0.54***	***0.61***
P	***0.1***	***0.5***	***0.4***

ამოხსნა:

ა) $M(X) = -4\cdot 0.2 + 6\cdot 0.3 + 10\cdot 0.5 = 6$;

ბ) $M(X) = 0.21\cdot 0.1 + 0.54\cdot 0.5 + 0.61\cdot 0.4 = 0.535$.

2) ვიპოვოთ Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მოცემულია X და Y სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები:

ა) $Z = X + 2\cdot Y, \quad M(X) = 5, \quad M(Y) = 3$.

ბ) $Z = 3\cdot X + 4\cdot Y, \quad M(X) = 2, \quad M(Y) = 6$.

ამოხსნა:

ა) $M(Z) = M(X) + 2\cdot M(Y) = 5 + 2\cdot 3 = 11$.

ბ) $M(Z) = 3\cdot M(X) + 4\cdot M(Y) = 3\cdot 2 + 4\cdot 6 = 30$.

3) X-დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე იღებს სამ შესაძლო მნიშვნელობას: $x_1=4$ ალბათობით $p_1=0.5$; $x_2=6$ ალბათობით $p_2=0.3$; და x_3 ალბათობით p_3. ვიპოვოთ x_3 და p_3 თუ $M(X)=8$.

ამოხსნა:

შევადგინოთ განაწილების კანონი:

X	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{X_3}$
P	$\boldsymbol{p_1}$	$\boldsymbol{p_2}$	$\boldsymbol{p_3}$

ანუ,

X	***4***	***6***	$\boldsymbol{X_3}$
P	***0.5***	***0.3***	$\boldsymbol{P_3}$

რადგან $\sum_i p_i = 1 \Rightarrow 0.5 + 0.3 + p_3 = 1 \Rightarrow p_3 = 0.2$;

$$M(X) = \sum_i x_i p_i = 4\cdot 0.5 + 6\cdot 0.3 + x_3\cdot 0.2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.2\cdot x_3 = 8 - 2 - 1.8 \Rightarrow x_3 = \frac{4.2}{0.2} \Rightarrow x_3 = 21.$$

4) დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს:

$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,$

ასევე ცნობილია ამ სიდიდის და მისი კვადრატის მათემატიკური ლოდინები $M(X)=0.1$ და $M(X^2)=0.9$.

ვიპოვოთ x_1, x_2 და x_3 სიდიდეების შესაბამისი p_1, p_2 და p_3 ალბათობები.

ამოხსნა:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ (-1)\cdot p_1+0\cdot p_2+1\cdot p_3=0.1 \\ (-1)^2\cdot p_1+0^2\cdot p_2+1^2\cdot p_3=0.9 \end{cases};$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$p_1=0.4;\qquad p_2=2;\qquad p_3=0.5$

5) მოცემულია X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები:

$x_1=1,\quad x_2=3,\quad x_3=3,$

ასევე, ცნობილია ამ სიდიდის და მისი კვადრატის მათემატიკური ლოდინები: $M(X)=2.3$ და $M(X^2)=5.9$.

იპოვეთ X სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების შესაძლო ალბათობები p_1, p_2 და p_3.

ამოხსნა:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ 1\cdot p_1+2\cdot p_2+3\cdot p_3=2.3 \\ 1^2\cdot p_1+2^2\cdot p_2+3^2\cdot p_3=5.9 \end{cases};$$

ამ სისტემის ამონახსნებია

$p_1=0.2;\qquad p_2=3;\qquad p_3=0.5\,.$

6) იპოვეთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია. თუ განიხილება A მოვლენის მოხდენის რაოდენობები ორი დამოუკიდებელი ცდისას, თუ ორივე ცდაში მოვლენის ალბათობები ერთნაირია და ცნობილია, რომ $M(X)=0.9$.

ამოხსნა:

X	***0***	***1***	***2***
P	***$p_2(0)$***	***$p_2(1)$***	***$p_2(2)$***

ე.ი. გვაქვს ბერნულის განაწილების კანონი

$M(X)=n\cdot p=2\cdot p=0.9\Rightarrow p=0.45$

$D(X)=n\cdot p\cdot q=2\cdot 0.45\cdot(1-0.45)=0.9\cdot 0.55=0.495\,.$

7) ატარებენ ცდებს A მოვლენის მოხდენის ერთნაირი ალბათობებით. ვიპოვოთ A მოვლენის მოხდენის ალბათობა, თუ სამი ცდისას მოვლენის მოხდენათა რიცხვის შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია უდრის 0,63.

ამოხსნა: რადგან ცდები დამოუკიდებელია და თითოეულ ცდაში მოვლენის მოხდენის ალბათობა ერთნაირია, გვექნება ბინომიალური განაწილება: სამი ცდისას $n=3$, $D(X)=0.63$.

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot p \cdot (1 - p) = 0.63 \Rightarrow p - p^2 = 0.21 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p^2 - p + 0.21 = 0 \Rightarrow p_1 = 0.3; p_2 = 0.7.$$

განვიხილოთ ეკონომიკის ის ძირითადი ამოცანები, რომლის ამოხსნა შესაძლებელია თანამედროვე მათემატიკური მეთოდების საშუალებით.

ნაწილი II. ეკონომიკის ძირითადი მათემატიკური მოდელები და ლაბორატორიული სამუშაოები

თემა 1: რეგიონში საქონელზე საშუალო ფასის დადგენის სტატისტიკური მეთოდი

დიდი მოცულობის ინფორმაციის დამუშავებისას, ეკონომიკაში ფართოდ გამოიყენება მონაცემთა ანალიზის სტატისტიკური მეთოდები. განვიხილოთ სტატისტიკის ის ცნებები და რიცხვითი მაჩვენებლები, რომლებიც აუცილებელია მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად.

სტატისტიკის ცნებებსა და მაჩვენებლებს გამოიყენებენ, მოცემულ რეგიონში, დროის მოკლე მონაკვეთებში, ფასის მუდმივობის პირობებში, საქონლის საშუალო ფასის შესწავლისათვის, მაშინ როცა სავაჭრო წერტილების რაოდენობა N დიდი რიცხვია (N>1000) და მათ შორის მანძილები საკმარისია იმისათვის, რომ მოუხერხებელი გახდეს ყველა მათგანის შემოვლა.

ძირითადი ცნებები:

განსაზღვრება: რეგიონის სავაჭრო წერტილების საერთო რიცხვს ეწოდება **გენერალური ერთობლიობის მოცულობა.**

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გენერალური ერთობლიობის მოცულობა N=1000, მაშინ მიზანშეწონილია მოვახდინოთ ამორჩევა გენერალური ერთობლიობიდან. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყველა სავაჭრო წერტილებიდან (N=1000) ამოვირჩიოთ მხოლოდ ზოგიერთი მათგანი, მაგ. n=100, ისე, რომ ადვილი იყოს ამ წერტილების შემოვლა და შესაბამისი ფასების გაგება. ამორჩევა ისე უნდა განხორციელდეს, რომ მოცემული რეგიონის ყველა რაიონი პროპორციულად იყოს წარმოდგენილი.

განსაზღვრება: ამორჩეული სავაჭრო წერტილების საერთო რიცხვს ეწოდება **ამორჩევის მოცულობა.**

ჩვენს შემთხვევაში ამორჩევის მოცულობა n=100.

შემდგომ შევისწავლოთ ამორჩევის **საშუალო მახასიათებლები** და მიღებული შედეგები გადავიტანოთ ცნობილი ფორმულებით გენერალურ ერთობლიობაზე.

ვთქვათ ამორჩეული სავაჭრო წერტილების შემოვლის შემდეგ ჩვენ მივიღეთ რაიმე პროდუქტის (მაგ. პურის) ფასის შემდეგი მნიშვნელობები თეთრებში(**მონაცემთა სტატისტიკური მწკრივი**):

$$\underbrace{40;40;40;...;40;}_{10\text{ - ჯერ}}\quad \underbrace{50;50;...;50;}_{70\text{ - ჯერ}}\quad 45;45;45;\quad \underbrace{60;...;60;}_{17\text{ - ჯერ}} \qquad (1)$$

ფასების რიცხვთა ამ მასივის დასამუშავებლად შევადგინოთ-**ვარიაციული მწკრივი.**

განსაზღვრება: X მახასიათებლის მნიშვნელობათა რანჟირებულ ცხრილს, შესაბამისი F სიხშირეებით **ვარიაციული მწკრივი** ეწოდება.

(1) მონაცემებისათვის სტატისტიკურ მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

X	40	50	45	60
F	10	70	3	17

(2)

განსაზღვრება: ფასის მოცემული X_i, მნიშვნელობის განმეორებათა რიცხვს ეწოდება F_i **სიხშირე.**

(2) სტატისტიკური მწკრივიდან ცხადია, რომ F_1=10 გვიჩვენებს, რომ ფასის X_1=40-ის ტოლი მნიშვნელობები გვხვდება ამორჩევის 10 სავაჭრო წერტილში, F_2=70 კი, რომ X_2=50-ის ტოლი მნიშვნელობა – 70 სავაჭრო წერტილში და ა.შ.

(2) სტატისტიკური მწკრივის მონაცემთა დამუშავება იწყება **რანჟირებით.**

განსაზღვრება: სტატისტიკურ მწკრივს, სადაც მახასიათებლის მნიშვნელობები განთავსებულია ზრდადობის ან კლებადობის მიხედვით ეწოდება **რანჟირებული(ვარიაციული მწკრივი).** გადავწეროთ (2) სტატისტიკური მწკრივი **ვარიაციული მწკრივის სახით:**

X	40	45	50	60
F	10	3	70	17

(3)

გადავიდეთ (3) ვარიაციული მწკრივის **საშუალო მახასიათებლების** შესწავლაზე.

საშუალო მახასიათებლები. რანჟირებული ვარიაციული მწკრივის საშუალო მახასიათებლებს წარმოადგენენ: **მედიანა, მოდა** და **ამორჩევის საშუალო მნიშვნელობა.**

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის **მედიანა** ეწოდება მახასიათებლის (ფასის) იმ მნიშვნელობას, რომელიც დგას მწკრივის შუაში (MeX).

$$MeX=50(\text{თეთრი}) . \tag{4}$$

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის მოდა (MoX) ეწოდება მახასიათებლის ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც შეესაბამება ყველაზე მაღალი სიხშირე.

ჩვენს მაგალითში (3) უმაღლესი სიხშირე $F_{imax}=70$, აქვს თვისების მნიშვნელობას $X_i=50$, ამიტომ (3) ვარიაციული მწკრივის მოდა იქნება

$$MoX=50. \qquad (5)$$

განსაზღვრება: ამორჩევის საშუალო მნიშვნელობა ეწოდება ვარიაციული მწკრივის შეწონილ საშუალოს.

$$X_{საშ} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (6)$$

ჩვენს მაგალითში

$$X_{საშ} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{4} F_i}. \qquad (7)$$

P.S. Mathcad–ში შეჯამებისას პარამეტრი i იცვლება 0–დან, თუ დამატებით არ მივუთითებთ შესაბამისი ოპერატორით.

გაბნევის მახასიათებლები.

ფასის მნიშვნელობათა გაბნევის შესაფასებლად იყენებენ შემდეგ ცნებებს: **დისპერსია - (DX), საშუალო კვადრატული გადახრა - (σX)** და **ვარიაციის კოეფიციენტი - (vX)**.

განსაზღვრება: მახასიათებლის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობას დისპერსია ეწოდება.

$$DX = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - X_{საშ}\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \qquad (8)$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$DX = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(X_i - X_{საშ}\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{4} F_i}. \qquad (9)$$

დისპერსიის მნიშვნელობას X_i მახასიათებელთან შედარებით აქვს კვადრატული განზომილება, ამიტომ განიხილავენ გაბნევის სხვა მახასიათებელს, რომელსაც ეს ნაკლი აღარ გააჩნია.

განსაზღვრება: მახასიათებლის საშუალო მნიშვნელობიდან საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობა გამოითვლება,

$$\sigma X = \sqrt{DX} \ . \qquad (10)$$

P.S. საშუალო **კვადრატული გადახრა** σX წარმოადგენს X_i მახასიათებლის $X_{საშ}$ საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის (**აბსოლუტური ცდომილების**) სიდიდის მნიშვნელობას.

განვიხილოთ გაბნევის (**ფარდობითი ცდომილების**) კოეფიციენტი, რომელსაც **ვარიაციის კოეფიციენტი** (vx) ეწოდება და გამოითვლება ფორმულით:

$$\nu X = \frac{\sigma X}{X_{საშ}} \cdot 100\% \,. \tag{11}$$

ვარიაციის კოეფიციენტი იძლევა ფარდობით გაბნევას პროცენტებში.

გენერალური ერთობლიობის $XG_{საშ}$ საშუალო მნიშვნელობის გადაანგარიშებისათვის გამოიყენება შეფასებები:

$$X_{საშ} - \frac{\sigma X}{\sqrt{n}} \le XG_{საშ} \le X_{საშ} + \frac{\sigma X}{\sqrt{n}}, \text{ თუ } \frac{n}{N} \le 0.1 \;; \tag{12}$$

$$X_{საშ} - \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)} \le XG_{საშ} \le X_{საშ} + \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}, \text{ თუ } 0.1 < \frac{n}{N} \le 0.9 \,. \tag{13}$$

მახასიათებლის მნიშვნელობების სიხშირეთა განაწილების შესასწავლად გამოიყენება აგრეთვე **გრაფიკული მეთოდები.**

განსაზღვრება: სიხშირეთა განაწილების მახასიათებლის მნიშვნელობებზე დამოკიდებულების გრაფიკს **სიხშირეთა პოლიგონი** ეწოდება.

სიხშირეთა პოლიგონის გეომეტრიული თვისებების შესაფასებლად შემოაქვთ **ასიმეტრიის კოეფიციენტისა** და **ექსცესის ცნებები.**

განსაზღვრება: ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება მესამე მომენტს:

$$\mu X = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - X_{საშ}\right)^3 \cdot F_i}{\left(\sigma X\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i} \,. \tag{14}$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$\mu X = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(X_i - X_{საშ}\right)^3 \cdot F_i}{\left(\sigma X\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{4} F_i} \,. \tag{15}$$

P.S. თუ სიხშირეთა პოლიგონის გრაფიკი მედიანის მიმართ სიმეტრიულია, მაშინ μX=0. თუ μX>0, მაშინ სიმეტრია ირღვევა მედიანიდან მარჯვნივ, ხოლო თუ μX<0, მაშინ – მარცხნივ.

გაუსის ნორმალური განაწილების კანონთან შედარებით სიხშირეთა პოლიგონის ცვლილების სისწრაფის შესაფასებლად განიხილება მეოთხე მომენტი, რომელსაც **ექსცესი** ეწოდება.

$$EX = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X_{\text{საშ}}\right)^4 \cdot F_i}{(\sigma X)^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} F_i} - 3 \tag{16}$$

ჩვენი შემთხვევაში:

$$EX = \frac{\sum_{i=1}^{4}\left(X_i - X_{\text{საშ}}\right)^4 \cdot F_i}{(\sigma X)^4 \cdot \sum_{i=1}^{4} F_i} - 3 \tag{17}$$

ეს რიცხვი (16) ფორმულაში უზრუნველყოფს იმ ფაქტს, რომ გაუსის განაწილებისათვის ექსცესის მნიშვნელობა EX=0. თუ EX>0, მაშინ სიხშირეთა ექსპერიმენტული განაწილება გაუსის განაწილებასთან შედარებით უფრო სწრაფად იცვლება, ხოლო EX<0-ის შემთხვევაში – უფრო ნელა.

ლაბორატორიული სამუშაო № 1

ამოცანა: ამორჩევის (*n=100; N=1000*) საშუალო ფასის შესწავლისას მიღებულია ვარიაციული მწკრივი.

X	*45*	*49*	*50*	*55*	*60*	*65*	*70*
F	*10*	*30*	*40*	*5*	*2*	*3*	*10*

ვიპოვოთ: *MeX; MoX; Xsash; DX; σX; vX; µX; EX.*

ავაგოთ სიხშირეთა *f=S(x)* პოლიგონი. შევაფასოთ გენერალური ერთობლიობის საშუალო მნიშვნელობა.

ამოხსნა: რანჟირებული მწკრივის მონაცემებს გადავწერთ მატრიცული სახით:

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემები

$$N := 1000 \quad n := 100$$

$$X := \begin{pmatrix} 45 \\ 49 \\ 50 \\ 55 \\ 60 \\ 65 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad F := \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 40 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

საშუალო მახასიათებლები

მედიანა,

$$Mex := 50$$

მოდა

$$MoX := 50,$$

საშუალო შეწონილი მნიშვნელობა,

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{6} X_i \cdot F_i}{\sum_{i=0}^{6} F_i}$$

$$Xsr = 52.1$$

გაბნევის მახასიათებლები:

დისპერსია,

$$DX := \frac{\sum_{i=0}^{6} \left(X_i - Xsr\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=0}^{6} F_i}$$

$$DX = 48.39$$

საშუალო კვადრატული გადახრა,

$$S := \sqrt{DX}$$

$$S = 6.956$$

ვარიაციის კოეფიციენტი,

$$\nu := \frac{S}{Xsr} \cdot 100$$

$$\nu = 13.352$$

$$\frac{n}{N} = 0.1$$

$$Xsr - \frac{S}{\sqrt{n}} = 51.404$$
$$Xsr + \frac{S}{\sqrt{n}} = 52.796$$

გენერალური ერთობლიობის საშუალო მნიშვნელობა მოთავსებულია შუალედში (51.4, 52.8).

მონაცემთა გეომეტრიული მახასიათებლები:

ასიმეტრიის კოეფიციენტი,

$$\mu := \frac{\sum_{i=0}^{6} (X_i - Xsr)^3 \cdot F_i}{S^3 \cdot \sum_{i=0}^{6} F_i}$$

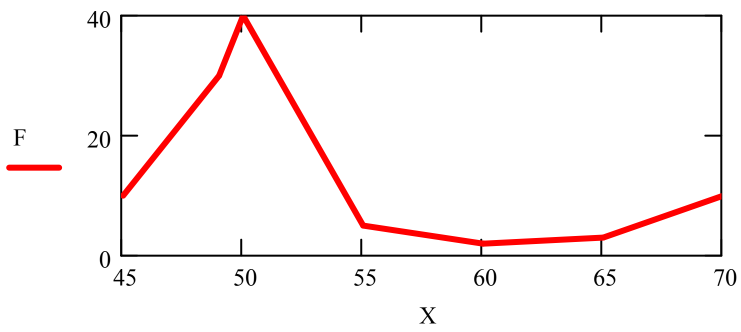
$$\mu = 1.784$$

ექსცესი,

$$E := \frac{\sum_{i=0}^{6} (X_i - Xsr)^4 \cdot F_i}{S^4 \cdot \sum_{i=0}^{6} F_i} - 3$$

$$E = 1.898$$

სიხშირეთა პოლიგონი



პროგრამა Matlab-ზე

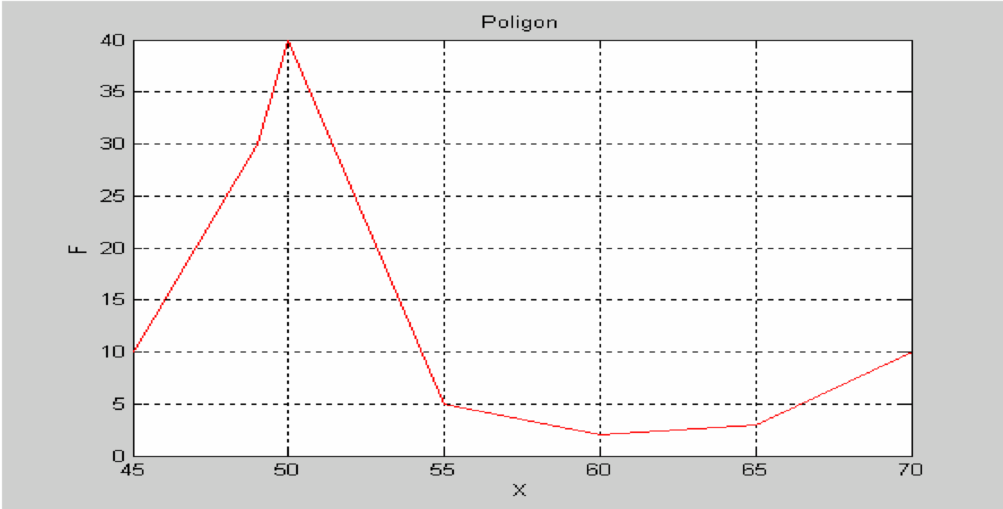
% მონაცემების შეტანა:
n=100; N=1000;
X=[45,49,50,55,60,65,70]
F=[10,30,40,5,2,3,10]
%საშუალო მახასიათებლების გამოთვლა

```
%მედიანა
MeX=50;
%საშუალო შეწონილი მნიშვნელობა
Xsash=sum(X.*F)/sum(F)
%გაბნევის მახასიათებლების გამოთვლა:
 % დისპერსია
DX=sum((X-Xsash).^2.*F)/sum(F)
% საშუალო კვადრატული გადახრა
S=sqrt(DX)
% ვარიაციის კოეფიციენტი
v=S/Xsash*100
% მონაცემთა გეომეტრიული მახასიათებლების გამოთვლა:
%ასიმეტრიის კოეფიციენტი
mu=sum((X-Xsash).^3.*F)/(S^3*sum(F))
%ექსცესი
E=sum((X-Xsash).^4.*F)/(S^4*sum(F))-3
% სიხშირეთა პოლიგონი
plot(X,F,'r'); grid on; title('Poligon'); xlabel('X'); ylabel('F')
grid on; title('Poligon'); xlabel('X'); ylabel('F')
```

შედეგები:

```
X =
   45    49    50    55    60    65    70
F =
   10    30    40     5     2     3    10
MeX =
   50
Xsash =
  52.1000
DX =
  48.3900
S =
   6.9563
v =
  13.3518
mu =
   1.7842
E =
   1.8975
>>
% გენერალური ერთობლიობის საშუალო მნიშვნელობის შეფასება
>> n/N
```

ans=
    0.1
>>Xsash1=Xsash-S/sqrt(n)
   Xsash1 =   51.4044
>>Xsash2=Xsash+S/sqrt(n)
   Xsash2 =   52.7956



სავარჯიშო

იპოვეთ: *MeX, MoX, Xsash, DX, σX, vX, nX, EX.*

შეაფასეთ გენერალური ერთობლიობის საშუალო მნიშვნელობა.

ააგეთ *f=S(X)* სიხშირეთა პოლიგონი. განმარტეთ მიღებული მონაცემები, თუ *N=1000* მოცულობის გენერალურ ერთობლიობაში საქონლის ფასების შესწავლისას მოხდა ამორჩევა *n=100* მოცულობით და მიღებულია ვარიაციული მწკრივი:

1.

X	*7*	*6*	*5*	*8*	*9*
F	*70*	*10*	*5*	*5*	*10*

2.

X	*25*	*30*	*28*	*20*	*10*
F	*5*	*30*	*5*	*50*	*10*

ყველა სტუდენტმა შეადგინოს თავისთვის ანალოგიური მონაცემები და ამოხსნას ამოცანა **Mathcad**-სა და **Matlab**-ში.

თემა 2: საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობისა და რისკის გამოთვლა

საინვესტიციო პროექტის რენტაბელობისა და რისკის ცნებების შესასწავლად განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

განსაზღვრება: მოსალოდნელი შემოსავლის მოცულობის ფარდობას საინვესტიციო კაპიტალის მოცულობასთან პროექტის **რენტაბელობის მაჩვენებელი** ეწოდება.

მაგალითად, თუ ჩვენი პროექტის რეალიზაციისათვის საჭიროა \$20000 მოცულობის ინვესტიციები და მოსალოდნელი წლიური შემოსავალია \$30000, მაშინ რენტაბელობის *ReX* მაჩვენებელი იქნება:

$$RX = \frac{30000}{20000} = 1.5 \tag{1}$$

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა ცხრილს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

p_i არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობა იქნება x_i.

დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის შესაფასებლად შემოდის **მათემატიკური ლოდინის** ***(MX)*** ცნება.

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** *(MX)* ეწოდება X_i მნიშვნელობათა შესაბამის p_i ალბათობებზე ნამრავლების ჯამს, ანუ

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{2}$$

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია *DX* ახასიათებს შემთხვევითი X სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევას მისი საშუალო მნიშვნელობიდან - მათემატიკური ლოდინიდან.

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 \cdot p_i \tag{3}$$

განსაზღვრება: კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება.

$$SX = \sqrt{DX} \tag{4}$$

P.S. ფინანსურ ანალიზში საშუალო კვადრატულ გადახრას რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა ეწოდება.

განსაზღვრება: რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა ეწოდება რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობისა და მოსალოდნელ საშუალო შემოსავალის სიდიდის ფარდობას გამოხატულს პროცენტებში.

$$vX = \frac{SX}{MX} \cdot 100\% \qquad (5)$$

ლაბორატორიული სამუშაო №2

ამოცანა: მოცემული პროექტის \$20000 მოცულობით ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგება შეადგენს 30%-ს. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა p=0,05. შეისწავლეთ რენტაბელობა და შეაფასეთ შემოთავაზებული პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები.

ამოხსნა: პროექტის \$20000 მოცულობით ინვესტირებისას წლის ბოლოს ჩვენ გვაქვს ორი შესაძლებლობა: ა) წარმატება, მაშინ მივიღებთ: $20000 + 20000 \cdot 0.3 = 20000 \cdot 1.3$; ბ) ჩავარდნა, მაშინ ვღებულობთ 0–ს (ე.ი. ჩადებული ფული იკარგება). სამუშაოს შესასრულებლად საჭიროა ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ცნება, როგორიცაა **შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და ვარიაციის კოეფიციენტი.**

მოსალოდნელი წლიური შემოსავლის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

X	*20000 · 1.3*	*0*
P	*0.95*	*0.05*

ამოვხსნათ მოცემული ამოცანა Mathcad–ისა და Matlab-ის პროგრამული პაკეტების საშუალებით.

პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$X := \begin{pmatrix} 20000 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 - 0.95 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი (მათემატიკური ლოდინი),

$$MX := \sum_{i=0}^{1} X_i \cdot P_i$$

$$MX = 24700$$

რენტაბელობის მაჩვენებელი
RX:=MX/20000
RX=1.235

დისპერსია,

$$DX := \sum_{i=0}^{1} \left(X_i - MX\right)^2 \cdot P_i$$

$$DX = 32110000$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა (საშუალო კვადრატული გადახრა),

$$S := \sqrt{DX}$$

$$S = 5666.569$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა (ვარიაციის კოეფიციენტი),

$$\nu := \frac{S}{MX} \cdot 10($$

$$\nu = 22.942$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% საწყისი მონაცემების შეტანა
X=[20000*1.3, 0]
P=[0.95, 1-0.95]
% მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი
MX=sum(X.*P)
% დისპერსია
DX=sum((X-MX).^2.*P)
% რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა
S=sqrt(DX)
% ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა
v=S/MX*100
```

შედეგები:

```
X =
     26000          0
P =
```

```
   0.9500    0.0500
MX =
       24700
DX =
    32110000
S =
  5.6666e+003
v =
   22.9416
```

სავარჯიშო

მოცემული პროექტის *I* მოცულობით ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგება უდრის *m*%. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა *p=PA*. შეისწავლეთ რენტაბელობა და შეაფასეთ წარმოდგენილი პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები, თუ:

1. I=$30000,   m=25%,   PA=0.01
2. I=$50000,   m=20%,   PA=0.02
3. I=$60000,   m=30%,   PA=0.03
4. I=$70000,   m=15%,   PA=0.011
5. I=$80000,   m=35%,   PA=0.1
6. I=$20000,   m=25%,   PA=0.07
7. I=$40000,   m=35%,   PA=0.03
8. I=$60000,   m=18%,   PA=0.001

თემა 3: ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია

განსაზღვრება: ორ საინვესტიციო პროექტს ეწოდება **ალტერ-ნატიული**, თუ ერთი მათგანის ინვესტირება გამორიცხავს მეორე პროექტის ინვესტირებას.

ორი პროექტის ალტერნატიულობის შემთხვევაში გამოითვ-ლიან ორივე პროექტისათვის რენტაბელობის მაჩვენებლებსა და რისკის კოეფიციენტებს.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები:

ა) თუ ორივე პროექტს რენტაბელობის ერთი და იგივე მაჩვე-ნებელი აქვს, მაშინ ირჩევენ იმ პროექტს, რომლის რისკის ფარ-დობითი მაჩვენებელიც ნაკლებია;

ბ) თუ ორივე პროექტის რისკის ფარდობითი კოეფიციენტის მაჩვენებელი ერთნაირია, ამოირჩევენ იმ პროექტს, რომელსაც რენტაბელობის მაღალი მაჩვენებელი აქვს;

გ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელობის მაჩვენებელი მეტია და რისკის კოეფიციენტი ნაკლები, ვიდრე მეორე პროექტისა, მა-შინ უპირატესობა ენიჭება პირველ პროექტს;

დ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელობის მაჩვენებელიც და რისკის კოეფიციენტი მეტია მეორე პროექტისაზე, მაშინ არჩევანს აკეთებს მენეჯერი ინვესტორისათვის დამატებითი მონაცემებიდან, კერძოდ, რისკის დასაშვებ სიდიდეებსა და რენტაბელობის ფარ-დობითი კოეფიციენტის ღირებულებაზე დაყრდნობით.

რამდენადაც ეს ამოცანა ემყარება მეორე ლაბორატორიულ სამუშაოში მოცემულ ცნებებს, შეგვიძლია პირდაპირ გადავიდეთ კონკრეტულ ამოცანაზე.

ლაბორატორიული სამუშაო №3

ამოცანა: ინვესტორს წარმოუდგინეს ორი ალტერნატიული საინვესტიციო A და B პროექტი. A პროექტი მოითხოვს $100 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 25%-იანი წლიური მოგებით და მისი ჩავარდნის ალბათობაა PA=0,011. B პროექტი მოითხოვს $250 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 30%-იანი წლიური მოგებით, ჩავარდნის ალბათობაა PB=0,012.

გავაკეთოთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის.

ამოხსნა: ორივე პროექტისათვის შევადგინოთ მოსალოდნელი შემოსავლებისა და შესაბამისი ალბათობების მატრიცები.

შევადგინოთ განაწილების ფუნქციები:

A	*100·1.25*	*0*		*B*	*250·1.3*	*0*		(1)
PA	*0.989*	*0.011*		*PB*	*0.988*	*0.012*		

თითოეული პროექტისათვის ვიანგარიშოთ რენტაბელობის მაჩვენებლები და რისკის კოეფიციენტები, რაც შემდგომში მოგვცემს პროექტების შედარების საშუალებას. განაწილების (1) ფუნქციიდან გამომდინარე შევადგინოთ პროგრამები **Mathcad**–ში და **Matlab**-ში.

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$A := \begin{pmatrix} 100\cdot 1.25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PA := \begin{pmatrix} 0.989 \\ 1-0.989 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 250\cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PB := \begin{pmatrix} 0.988 \\ 1-0.988 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი თითოეული პროექტისათვის

$$MA := \sum_{i=0}^{1} A_i \cdot PA_i \qquad MB := \sum_{i=0}^{1} B_i \cdot PB_i$$

$$MA = 123.625 \qquad MB = 321.1$$

რენტაბელობა

$$RA := \frac{MA}{100} \qquad RB := \frac{MB}{250}$$

დისპერსია

$$DA := \sum_{i=0}^{1} \left(A_i - MA\right)^2 \cdot PA_i \qquad DB := \sum_{i=0}^{1} \left(B_i - MB\right)^2 \cdot PB_i$$

$$DA = 169.984 \qquad DB = 1252.29$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა

$$SA := \sqrt{DA} \qquad SB := \sqrt{DB}$$

$$SA = 13.038 \qquad SB = 35.388$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა

$$\nu A := \frac{SA}{MA} \cdot 100 \qquad \nu B := \frac{SB}{MB} \cdot 100$$

$\nu A = 10.546$ $\nu B = 11.021$

$RA = 1.236$ $RB = 1.284$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% საწყისი მონაცემების შეტანა
A=[100*1.25,0]
PA=[1-0.011,0.011]
B=[250*1.3,0]
PB=[1-0.012, 0.012]

% მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი თითოეული პროექტისა-
თვის
MA=sum(A.*PA)
MB=sum(B.*PB)
RA=MA/100
RB=MB/250

% დისპერსია
DA=sum((A-MA).^2.*PA)
DB=sum((B-MB).^2.*PB)

% რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა
SA=sqrt(DA)
SB=sqrt(DB)

% ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა
vA=SA/MA*100
vB=SB/MB*100
```

შედეგები:

```
A =
  125    0
PA =
   0.9890   0.0110
B =
  325    0
PB =
   0.9880   0.0120
```

MA =
123.6250
MB =
321.1000
RA=
1.236
RB =
1.2844
DA =
169.9844
DB =
1.2523e+003
SA =
13.0378
SB =
35.3877
vA =
10.5463
vB =
11.0208

ამ მაგალითში რენტაბელობის მაჩვენებლები და ფარდობითი რისკები ორივე პროექტისათვის თითქმის ერთნაირია, ამიტომ პროექტის ამორჩევა ხდება დამატებითი მოსაზრებებიდან ინვესტორისათვის ფულის ღირებულებისა და პროექტების მახასიათებლებს შორის განსხვავებათა შესაბამისი მნიშვნელობების მიხედვით.

სავარჯიშო

ინვესტორს წარუდგინეს ორი *A* და *B* ალტერნატიული პროექტი. *A* პროექტი მოითხოვს *IA* მოცულობის ინვესტიციებს *ma%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PA*. *B* პროექტი მოითხოვს *IB* მოცულობის ინვესტიციებს *mb%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PB*. გააკეთეთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის, თუ:

1. IA= $ 80 000, ma= 30 %, PA= 0.02
IB= $ 70 000, mb= 40 %, PB= 0.04
2. IA= $ 100 000, ma= 15 %, PA= 0.011
IB= $ 200 000, mb= 15 %, PB= 0.02
3. IA= $ 90 000, ma= 20 %, PA= 0.05

IB= \$ 90 000, mb= 18 %, PB= 0.02

4. *IA= \$ 400 000, ma= 15 %, PA= 0.02*
   IB= \$ 500 000, mb= 20 %, PB= 0.05
5. *IA= \$ 1.5 млн., ma= 20 %, PA= 0.03*
   IB= \$ 2.1 млн., mb= 15 %, PB= 0.01
6. *IA= \$ 4.5 млн., ma= 15 %, PA= 0.02*
   IB= \$ 5 млн., mb= 18 %, PB= 0.03
7. *IA= \$ 30 млн., ma= 20 %, PA= 0.02*
   IB= \$ 35 млн., mb= 25 %, PB= 0.04
8. *IA= \$ 15 млн., ma= 18 %, PA= 0.01*
   IB= \$ 20 млн., mb= 17 %, PB= 0.01

თემა 4: დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა, რომლის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ განვლილი წლის დარგთაშორისი ბალანსის საფუძველზე მეურნეობის ცალკეული დარგების პრიორიტეტული განვითარების აუცილებლობის პირობებში, სწორად დაიგეგმოს მიმდინარე წლის ყველა დარგის პროდუქციის საერთო გამოშვება. ეს ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ცალკე აღებული რომელიმე რაიონის ან რეგიონის ფარგლებში, ასევე მთელი სახელმწიფოს მასშტაბით.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ვთქვათ, x_i – i-ური დარგის საერთო გამოშვებაა ფულად გამოსახულებაში, x_{ij} –i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება j-ური დარგის წარმოების უზრუნველსაყოფად, y_i – i-ური დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობაა არასაწარმოო დანიშნულებისათვის ფულად გამოსახულებაში.

მაშინ, ვღებულობთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \,, \tag{1}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \tag{2}$$

α_{ij} i-ური დარგის პროდუქციის მოცულობაა, რომელიც იხარჯება j-ური დარგის პროდუქციის ერთეულოვანი მოცულობის წარმოებაზე.

განსაზღვრება: α_{ij} მატრიცას ეწოდება ტექნოლოგიური მატრიცა.

(2) და (1)-დან ვღებულობთ ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i \quad . \tag{3}$$

დარგთაშორისი ბალანსის (3) განტოლება უნდა ამოიხსნას x_i-ის მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცული აღნიშვნები:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

მაშინ, ლეონტიევის (3) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ მატრიცული სახით:

$$X = A \cdot X + Y \tag{5}$$

(5) განტოლების ამოსახსნელად X-ის შემცველი შესაკრებები გადავიტანოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$$(E - A) \cdot X = Y \ . \tag{6}$$

(6)-დან ადვილად ვღებულობთ ლეონტიევის (5) მატრიცული განტოლების ამონახსნს:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y \ . \tag{7}$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 4

ამოცანა: გასული წლის განმავლობაში მეურნეობის სამმა დარგმა: სოფლის მეურნეობამ, მანქანათმშენებლობამ და ენერგეტიკამ საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილები:

№		*სოფლის მეურნეობა*	*მანქანათმშენებლობა*	*ენერგეტიკა*	*საბოლოო პროდუქტი*	*საერთო გამოშვება*
1	*სოფლის მეურნეობა*	$x_{11}=10$	$x_{12}=20$	$x_{13}=30$	$y_1=40$	$x_1=100$
2	*მანქანათმშენებლობა*	$x_{21}=30$	$x_{22}=20$	$x_{23}=10$	$y_2=30$	$x_2=90$
3	*ენერგეტიკა*	$x_{31}=20$	$x_{32}=30$	$x_{33}=20$	$y_3=50$	$x_3=120$

შევადგინოთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის (სოფლის მეურნეობა) საბოლოო პროდუქტი უნდა გაიზარდოს 10%-ით, მეორე დარგის (მანქანათმშენებლობა) – 20%-ით, ხოლო მესამე დარგისა (ენერგეტიკა) – 8%-ით.

ამოხსნა:

პროგრამა Mathcad-ზე

სამივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკომენდე-ბული მნიშვნელობები.

$$Y := \begin{pmatrix} 40 \cdot 1.1 \\ 30 \cdot 1.2 \\ 50 \cdot 1.08 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{20}{90} & \frac{30}{120} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{90} & \frac{10}{120} \\ \frac{20}{100} & \frac{30}{90} & \frac{20}{120} \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მოცემული სამი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა.

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 111.362 \\ 103.481 \\ 132.919 \end{pmatrix}$$

პროგრამა Matlab-ზე

```
% სამივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკო-
მენდებული მნიშვნელობები
Y=[40*1.1;30*1.2;50*1.08]
A=[10/100,20/90,30/120;30/100,20/90,10/120;20/100,30/90,20/120]
E=eye(3)
```

```
% მოცემული სამი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა.
X=(E-A)^(-1)*Y
```

შედეგები:

```
Y =
   44
   36
   54
A =
   0.1000    0.2222    0.2500
   0.3000    0.2222    0.0833
   0.2000    0.3333    0.1667

E =1     0     0
```

    0   1   0
    0   0   1

X =

  111.3617
  103.4809
  132.9191

სავარჯიშო:

წინა წელს მეურნეობის რვა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგ-ვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილები:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	საბოლოო პროდუქტი	საერთო გამოშ-ვება
1	10	20	30	40	20	10	30	40	100	300
2	20	10	40	30	10	20	40	30	150	350
3	40	20	10	20	30	10	30	40	200	400
4	20	20	10	40	40	30	10	30	100	300
5	10	40	20	20	30	30	40	10	200	400
6	10	30	20	40	20	40	30	10	150	350
7	40	30	10	20	40	30	20	10	100	300
8	10	10	20	20	30	30	40	40	50	250

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პი-რობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი გაიზრდება m_1%-ით, მეორე დარგისა m_2%-ით, მესამისა m_3%-ით, ..., მერვე დარგისა m_8%-ით, სადაც:

1. $m_1=10\%$; $m_2=20\%$; $m_3=5\%$; $m_4=8\%$; $m_5=20\%$; $m_6=5\%$; $m_7=0\%$; $m_8=9\%$;
2. $m_1=5\%$; $m_2=9\%$; $m_3=10\%$; $m_4=8\%$; $m_5=6\%$; $m_6=0\%$; $m_7=0\%$; $m_8=0\%$;
3. $m_1=10\%$; $m_2=5\%$; $m_3=-20\%$; $m_4=2\%$; $m_5=-10\%$; $m_6=5\%$; $m_7=2\%$; $m_8=9\%$;
4. $m_1=9\%$; $m_2=9\%$; $m_3=20\%$; $m_4=5\%$; $m_5=10\%$; $m_6=5\%$; $m_7=2\%$; $m_8=10\%$;
5. $m_1=8\%$; $m_2=-10\%$; $m_3=-25\%$; $m_4=2\%$; $m_5=-40$; $m_6=2\%$; $m_7=4\%$; $m_8=20\%$;
6. $m_1=5\%$; $m_2=10\%$; $m_3=10\%$; $m_4=5\%$; $m_5=8\%$; $m_6=20\%$; $m_7=5\%$; $m_8=10\%$;
7. $m_1=20\%$; $m_2=-10\%$; $m_3=50\%$; $m_4=10\%$; $m_5=50\%$; $m_6=10\%$; $m_7=2\%$; $m_8=20\%$;
8. $m_1=10\%$; $m_2=35\%$; $m_3=45\%$; $m_4=10\%$; $m_5=6\%$; $m_6=-10\%$; $m_7=8\%$; $m_8=15\%$.

თემა 5: ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ-ჰიქსის მოდელი

ეკონომიკისთვის დამახასიათებელია განვითარების ტალღური ბუნება, ამიტომ ეროვნული შემოსავალი ხან იზრდება, ხან მცირდება.

ეკონომიკის განვითარების ტალღური ბუნების შესასწავლად სამუელსონმა და ჰიქსმა შეადგინეს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ამ მოდელში *X(t)* ეროვნული შემოსავლის სიდიდის რხევები აიხსნება **აქსელერაციის პრინციპითა და მულტიპლიკატორის კონცეპციით.**

აქსელერაციის პრინციპი ამტკიცებს, რომ ინვესტიციის მასშტაბები დამოკიდებულია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის ზრდის ტემპზე. საინვესტიციო მოთხოვნა საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის პროპორციულია. პროპორციულობის ხარისხს ეწოდება აქსელერაციის ფაქტორი.

სამუელსონ-ჰიქსის მოდელში აქსელერაციის პრინციპზე დაფუძნებულ ინვესტიციის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I(t) = \beta\big(X(t-1) - X(t-2)\big), \tag{1}$$

სადაც β – აქსელერაციის კოეფიციენტია (ფაქტორი).

C(t) ხარჯის სიდიდე წრფივად დამოკიდებულია მოთხოვნაზე, სადაც განიხილება ერთეულოვანი ლაგი (შეყოვნება):

$$C(t) = \alpha \cdot X(t-1) + A \tag{2}$$

სადაც, α $\in (0,1)$ – განისაზღვრება რეგრესიული ანალიზის საფუძველზე (ქვემოთ იქნება განხილული).

A=(საარსებო მინიმუმი)×(მცხოვრებთა რიცხვი). (3)

თუ გავითვალისწინებთ მოთხოვნისა და მიწოდების წონასწორობის პირობას, მივიღებთ:

$$X(t) = C(t) + I(t) \tag{4}$$

თუ შევიტანთ (4)-ში *C(t)* და *I(t)* მნიშვნელობებს და შევასრულებთ შესაბამის გარდაქმნებს, მივიღებთ სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებას:

$$X(t) = (\alpha + \beta) \cdot X(t-1) - \beta \cdot X(t-2) + A \tag{5}$$

β აქსელერაციის კოეფიციენტის მიხედვით, (5)-დან შეიძლება მივიღოთ ეროვნული შემოსავლის რხევები როგორც მზარდი, ისე კლებადი ამპლიტუდით.

ლაბორატორიული სამუშაო № 5

ამოცანა: შევისწავლოთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებით, როცა $\alpha = 0.5$.

ქალაქ თბილისისათვის ვიპოვოთ *A* კოეფიციენტი და *β* კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შევისწავლოთ *X(t)*-ს დინამიკა.

ამოხსნა**:**

ამოცანის ამოსახსნელად ვირჩევთ საწყის პირობებს.

პროგრამა Mathcad-ზე

ეროვნული შემოსავლის საწყისი მნიშვნელობები

$$X_0 := 10^6 \qquad X_1 := 10^7$$

(მცხოვრებთა რიცხვი) × (საარსებო მინიმუმი)

$$A := 1.5 \cdot 10^8$$

$$\alpha := 0.5$$

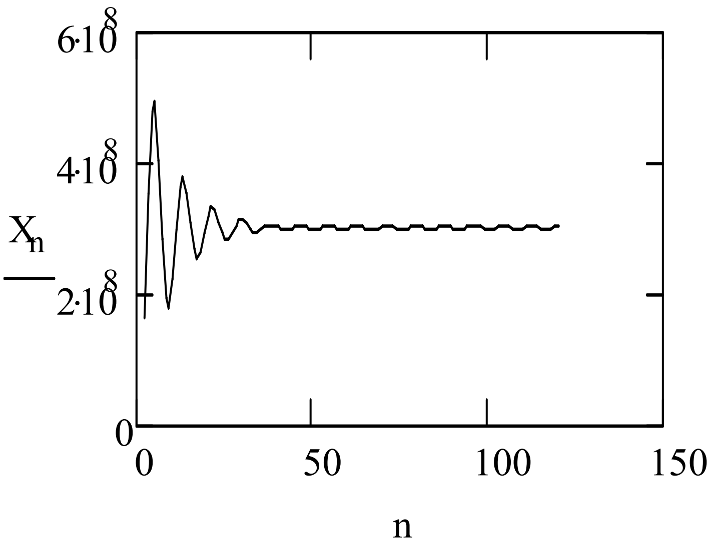
აქსელერაციის კოეფიციენტი,

$$\beta := 0.8$$

სამუელსონ-ჰიქსის რეკურენტული მოდელი

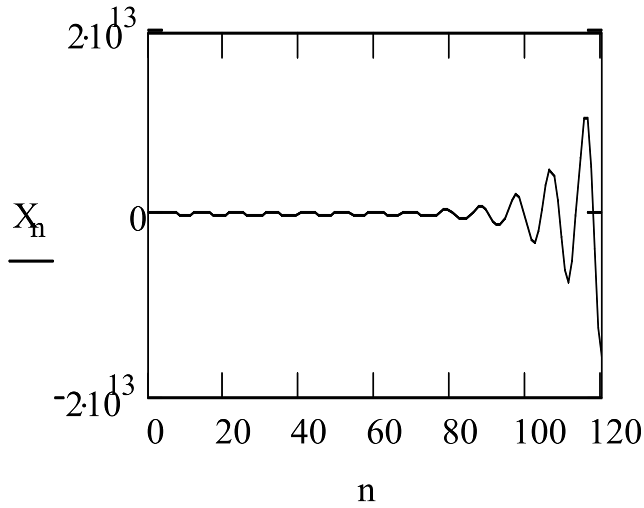
$$n := 2 .. 120$$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$

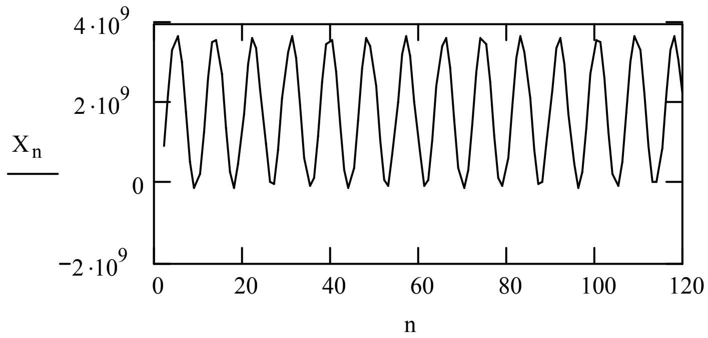


$$\beta := 1.2$$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$



$$\beta := 1.$$
$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$



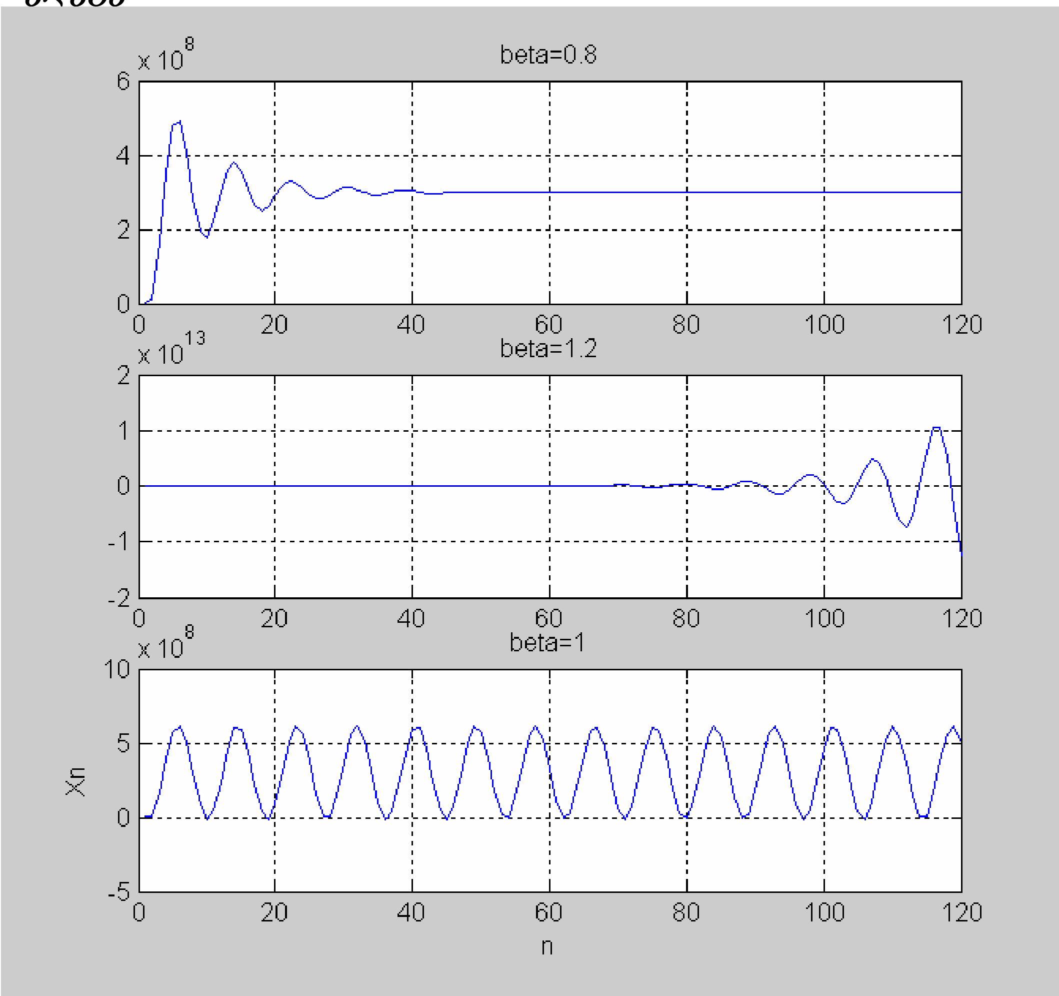
Matlab პროგრამის დასაწერად გამოვიყენოთ for…end ციკლის ოპერატორი.

პროგრამა **Matlab** -ზე

```
% ეროვნული შემოსავლის საწყისი მნიშვნელობები
X0=10^6;
X1=10^7;
% (მცხოვრებთა რიცხვი) × (საარსებო მინიმუმი)
A=1.5*10^8;
alfa=0.5;
% აქსელერაციის კოეფიციენტი
beta1=0.8;
beta2=1.2;
beta3=1;
%სამუელსონ-ჰიქსის რეკურენტული მოდელი
x(1)=X0;x(2)=X1;
```

```
x1(1)=X0;x1(2)=X1;
x2(1)=X0;x2(2)=X1;
for i=3:120
   x(i)=(alfa+beta1)*x(i-1)-beta1*x(i-2)+A;
   x1(i)=(alfa+beta2)*x1(i-1)-beta2*x1(i-2)+A;
   x2(i)=(alfa+beta3)*x2(i-1)-beta3*x2(i-2)+A;
end
n=1:120;
subplot(3,1,1);plot(n,x);grid on;title('beta=0.8');
subplot(3,1,2);plot(n,x1);grid on;title('beta=1.2')
subplot(3,1,3);plot(n,x2);grid on;title('beta=1')
xlabel('n')
ylabel('Xn')
```

შედეგები:



სავარჯიშო:

შეისწავლეთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლების მიხედვით, როცა α ცნობილია. ქალაქისათვის N-მცხოვრებით და l საარსებო მინიმუმით, β აქსელერაციის კოე-ფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეისწავლეთ X(t) დინამიკა, თუ:

1. $\alpha=0.3;\ N=3\cdot10^6;\ l=80;\quad \beta$-?
2. $\alpha=0.2;\ N=3\cdot10^6;\ l=80;\quad \beta$-?
3. $\alpha=0.1;\ N=3\cdot10^6;\ l=80;\quad \beta$-?
4. $\alpha=0.4;\ N=5\cdot10^6;\ l=100;\quad \beta$-?
5. $\alpha=0.5;\ N=5\cdot10^6;\ l=100;\quad \beta$-?
6. $\alpha=0.6;\ N=5\cdot10^6;\ l=100;\quad \beta$-?
7. $\alpha=0.1;\ N=3\cdot10^6;\ l=100;\quad \beta$-?
8. $\alpha=0.1;\ N=3\cdot10^6;\ l=100;\quad \beta$-?

თემა 6: ფერჰიულსტის მოდელი ბანკში ანაბრების დინამიკისათვის

ვთქვათ, X_n ფულადი ანაბრების მოცულობაა n წელიწადში. ანაბრების ფარდობითი ნაზრდის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ R-ით, მაშინ გვექნება:

$$R = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \ , \tag{1}$$

ანუ

$$X_{n+1} = X_n + R \cdot X_n , \tag{2}$$

სადაც, $R = R_0 = const$.

ანაბრების დინამიკის გამოსაკვლევად (2) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n+1} = (1 + R_0) \cdot X_n \tag{3}$$

ცხადია, რომ თუ ფულადი ანაბრების საწყისი მნიშვნელობა იყო X_0, მაშინ

$$\begin{aligned} &X_1 = (1 + R_0) \cdot X_0 \ , \\ &X_2 = (1 + R_0) X_1 = (1 + R_0)^2 \cdot X_0 \ , \\ &. \quad . \quad . \\ &X_n = (1 + R_0)^n \cdot X_0 \end{aligned} \tag{4}$$

(4) იტერაციული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად ფულადი შენატანების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, რადგან

$$\lim_{n \to \infty} x_n \to \infty \tag{5}$$

(4) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ამოცანა R-ს ზრდის დასაშვები პროცენტების შესახებ. მაგალითად, გავიგოთ როგორი უნდა იყოს R_0, რომ ანაბრების გაორმაგება მოხდეს 50 წელიწადში. გვაქვს

$$\frac{X_{50}}{X_0} = (1 + R_0)^{50} = 2 , \tag{6}$$

მაშინ

$$R_0 = \sqrt[50]{2} - 1 \tag{7}$$

ე.ი. პროცენტულ გამოსახულებაში ვღებულობთ ნაზრდის ნორმას

$$(\sqrt[50]{2} - 1) \cdot 100\% \tag{8}$$

დავუშვათ, რომ კლიენტების მოსაზიდად ბანკის დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა R ნაზრდის კოეფიციენტის გაზრდა. გაკოტრებისაგან თავის დასაცავად დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა აღარ დაუშვას ანაბრების შემდგომი ზრდა, თუ მისი სიდიდე მიაღწევს 1-ს – მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ კოეფი-

ციენტი უნდა გახდეს უარყოფითი, რომ შემცირდეს ანაბრები, ვიდრე ისინი არ გახდება 1-ზე ნაკლები.

ამ პროცესის უზრუნველსაყოფად გადაწყდა, რომ

$$R = r(1 - X_n) \tag{9}$$

მაშინ (1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = r(1 - X_n), \qquad \text{სადაც} \quad r > R_0 \tag{10}$$

(10)-დან გვექნება რეკურენტული თანაფარდობა

$$X_{n+1} = (1 + r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2 \tag{11}$$

ამ სისტემას ეწოდება ფერჰიულსტის მოდელი. გამოვიკვლიოთ მისი წონასწორობის წერტილები.

განსაზღვრება: რეკურენტული სისტემის წონასწორობის წერტილები ეწოდება X_n–ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც არ იცვლება n-ის ზრდასთან ერთად, ე.ი. X_n –ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$X_{n+1} = X_n \tag{12}$$

წარმოადგენენ ფერჰიულსტის მოდელის (11) წონასწორობის წერტილებს.

ცხადია, რომ ეს მნიშვნელობებია:

ა) $X_n=0$; ბ) $X_n=1$.

იმისათვის, რომ წონასწორობის წერტილი განხორციელდეს პრაქტიკულად, საჭიროა მისი მდგრადობა მცირე შეშფოთებების მიმართ.

გამოვიკვლიოთ ეს მდგომარეობები მდგრადობაზე:

ა) თავდაპირველად განვიხილოთ წონასწორობის მდგომარეობა $X_n=0$, ანუ მდგომარეობა, როცა ჩვენს ანგარიშზე ფული არ არის. დავუმატოთ “მცირე შეშფოთება” $-\delta_n<<1$, წონასწორობის წერტილს და გამოვიკვლიოთ მისი დინამიკა დროში, ანუ $X_n = 0 + \delta_n$, მაშინ (11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\delta_{n+1} = (1 + r)\delta_n - r\delta_n^2 \tag{13}$$

ვინაიდან $\delta_n<<1$, ცხადია, რომ $\delta_n^2 = 0(\delta_n)<<1$, ამიტომ (13) განტოლებაში ის შეიძლება უგულებელვყოთ. ამის შედეგად გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1 + r)\delta_n \tag{14}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| > 1, \tag{15}$$

ე.ი. შეშფოთებები დროში იზრდება, რაც ნიშნავს წონასწორობის წერტილის $X_n=0$ არამდგრადობას. ამოცანის არსის მიხედვით ეს გამოიხატება იმაში, რომ დროთა განმავლობაში ანაბრის გაიზ-

რდება თუ კი ანგარიშზე დაერიცხება ფულის რაღაც სულ მცირე რაოდენობა δ_n.

ბ) გამოვიკვლიოთ წონასწორობის მეორე წერტილის $X_n=1$ მდგრადობა. წონასწორობის წერტილს აქაც მივცეთ მცირე ნაზრდი δ_n<<1, ანუ განვიხილოთ $X_n = 1+\delta_n$ მნიშვნელობა და გამოვიკვლიოთ ამ მდგომარეობის დინამიკა n დროის განმავლობაში. (11) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$1+\delta_{n+1} = (1+r)(1+\delta_n) - r(1+\delta_n)^2 \qquad (16)$$

გარდაქმნების შედეგად გვაქვს:

$$1+\delta_{n+1} = 1+r+(1+r)\delta_n - r - 2r\delta_n - r\delta_n^2 \qquad (17)$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\delta_n^2 = 0(\delta_n) << 1$ და ამის გამო უგულებელვყოფთ მას, გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1-r)\delta_n \qquad (18)$$

$X_n=1$ წონასწორობის წერტილის მდგრადობისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| < 1, \qquad (19)$$

ანუ

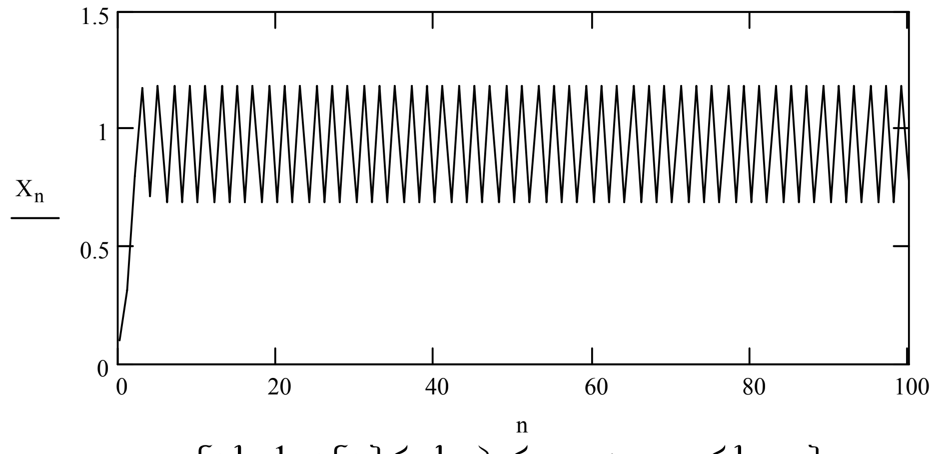
$$|1-r| < 1. \qquad (20)$$

თავის მხრივ ეს პირობა ნიშნავს, რომ

$$0 < r < 2. \qquad (21)$$

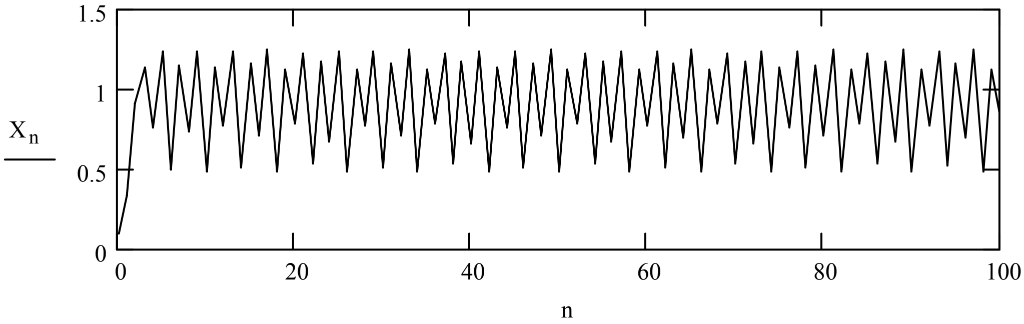
ამრიგად, თუ სრულდება (21) პირობა, მაშინ ფერჰიულსტის სისტემის წონასწორობის წერტილი $X_n=1$ მდგრადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში შევიჭრებით არამდგრადობის ზონაში, რომელიც სავსეა მოულოდნელობებით.

კერძოდ, როცა r=2.3 აღიძვრება X_n-ის **პერიოდული რხევები** (ნახ.1).



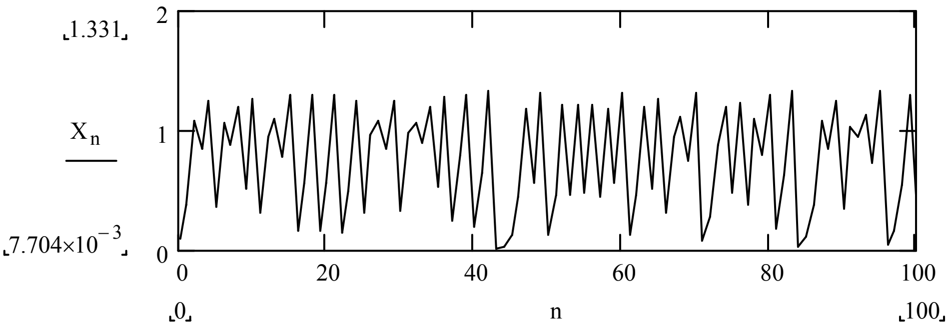
ნახ 1. ანაბრის პერიოდული რხევები

r=2.57 შემთხვევაში სურათი რთულდება და ჩნდება **ორმაგად პერიოდული რხევები** (ნახ 2.).



ნახ 2. ანაბრის ორმაგად პერიოდული რხევები

ნაზრდის r კოეფიციენტის შემდგომი ზრდისას ვღებულობთ პერიოდის გაოთხმაგებას და ა.შ. თუ $r \geq 3.0$ შეინიშნება **ქაოსური რხევები** (ნახ 3.).



ნახ 3. ანაბრის ქაოსური რხევები.

ამრიგად, ფერჰიულსტის ტიპის არაწრფივი რეკურენტული სისტემები მოიცავენ ბევრ საიდუმლოს და მათ ასახსნელად საჭიროა დამატებითი კვლევები ცალკეულ კონკრეტულ შემთხვევაში. მითუმეტეს, რომ ყოველთვის არ ხერხდება რეკურენტული სისტემით მოცემული იტერაციული პროცესის კრებადობის გლობალური შეფასება.

ლაბორატორიული სამუშაო № 6

ამოცანა: გამოიკვლიოთ ფერჰიულსტის მოდელი:

$$X_{n+1} = (1+r)\cdot X_n - r\cdot X_n^2 \qquad (22)$$

r ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის.

ამოხსნა: ლაბორატორიული სამუშაოს შესასრულებლად შემოვიფარგლოთ X_0 საწყისი პირობებით და r ნაზრდის კოეფიციენტის მნიშვნელობით.

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი ანაბარი პირად ანგარიშზე

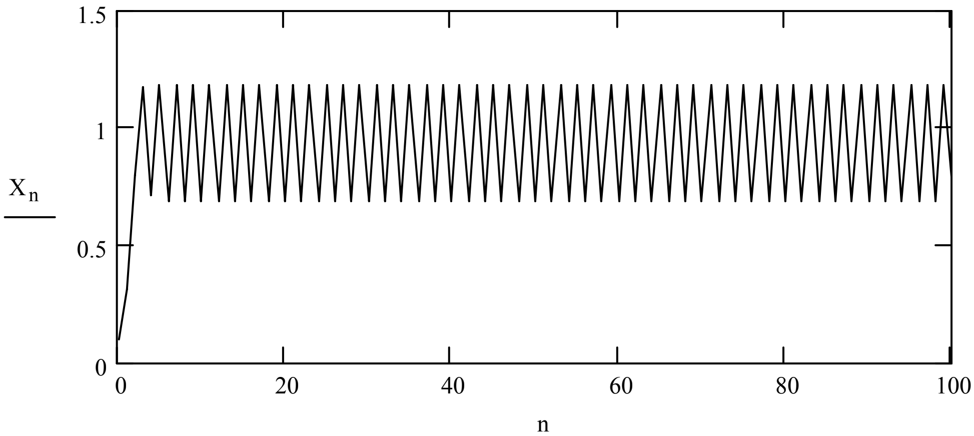
$$X_0 := 0.1$$

ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა ფერჰიულსტის მოდელით პროცენტული განაკვეთით r=2,3.

$$r := 2.3$$

$$n := 0 .. 100$$

$$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot \left(X_n\right)^2$$

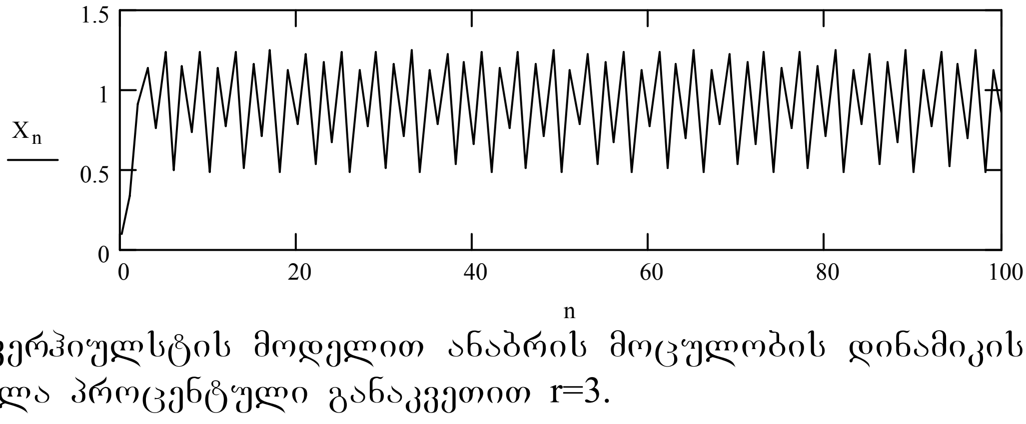


ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით r=2,57.

$$r := 2.57$$

$$n := 0 .. 100$$

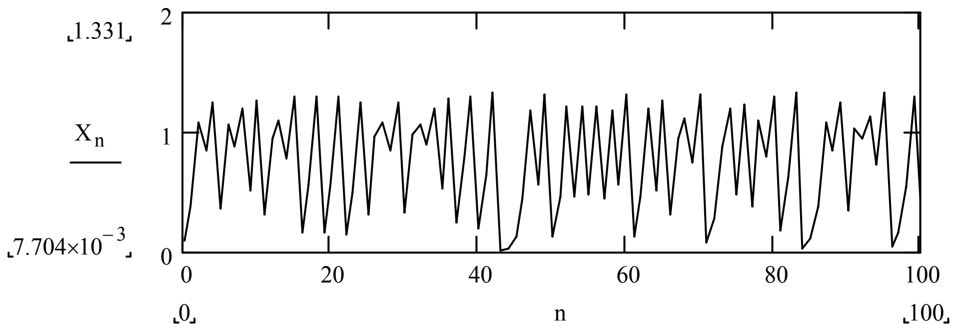
$$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot \left(X_n\right)^2$$



ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით r=3.

$$r := 3$$

$$X_{n+1} := (1 + r) \cdot X_n - r \cdot \left(X_n\right)^2$$

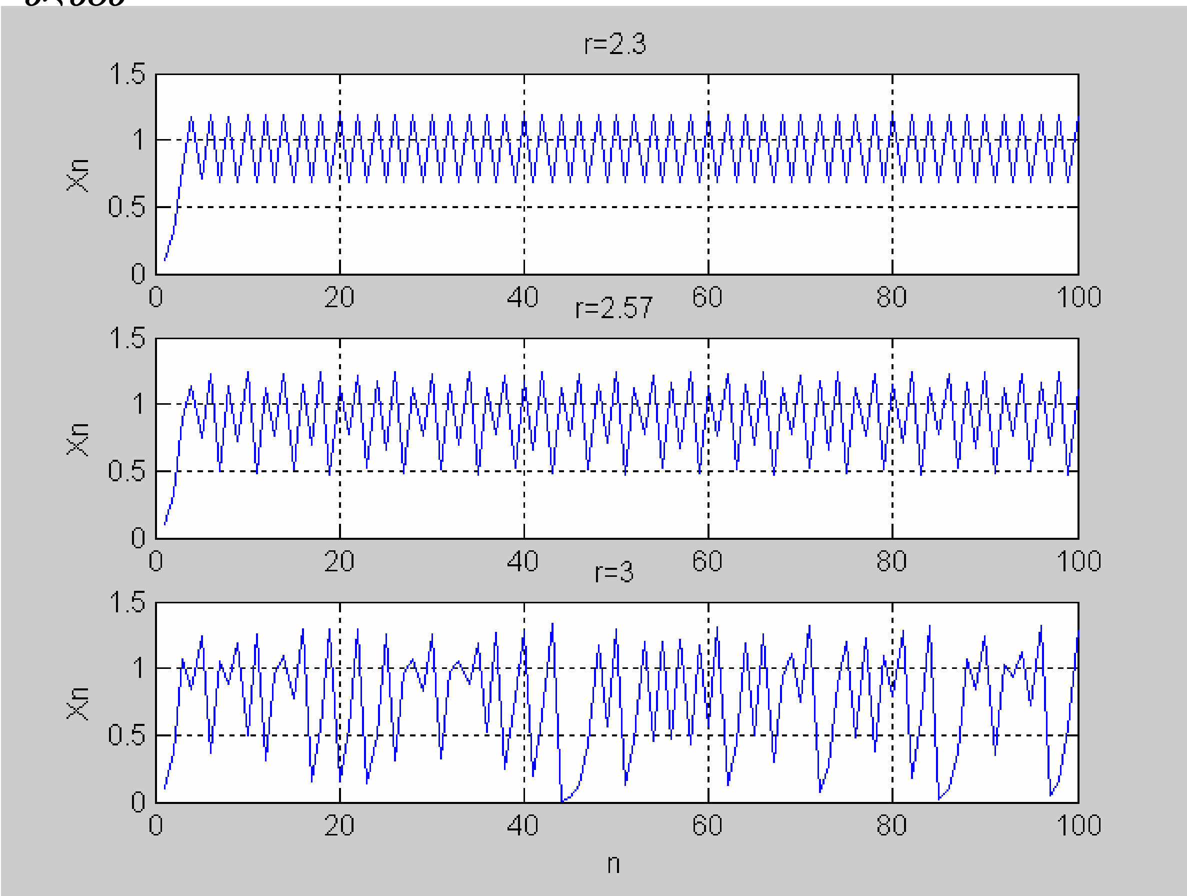


პროგრამის **Matlab-ზე** დასაწერად გამოვიყენოთ for…end ციკ-ლის ოპერატორი.

პროგრამა Matlab-ზე

```
% საწყისი ანაბარი პირად ანგარიშზე
x0=0.1;
%ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გა-
მოთვლა პროცენტული განაკვეთით r=2,3;2.57;3;
r1=2.3;
r2=2.57;
r3=3;
x1(1)=x0;
x2(1)=x0;
x3(1)=x0;
for i=2:100
   x1(i)=(1+r1)*x1(i-1)-r1*x1(i-1)^2;
      x2(i)=(1+r2)*x2(i-1)-r2*x2(i-1)^2;
         x3(i)=(1+r3)*x3(i-1)-r3*x3(i-1)^2;
end
% ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გა-
მოთვლა სხვადასხვა პროცენტული განაკვეთით და გრაფიკების
აგება
n=1:100;
subplot(3,1,1);plot(n,x1);grid on;title('r=2.3');ylabel('Xn')
subplot(3,1,2);plot(n,x2);grid on;title('r=2.57');ylabel('Xn')
subplot(3,1,3);plot(n,x3);grid on;title('r=3');
xlabel('n')
ylabel('Xn')
```

შედეგები:



სავარჯიშო:

გამოიკვლიეთ ფერჰიულსტის მოდელი

$$X_{n+1} = (1+r)\cdot X_n - r\cdot X_n^2$$

r ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის, **Mathcad**-ისა და **Matlab**-ის გრაფიკული საშუალებების საფუძველზე.

შეადგინეთ ანალოგიური რეკურენტული არაწრფივი სისტემა, იპოვეთ წონასწორობის წერტილები, გამოიკვლიეთ ისინი მდგრადობაზე

თემა 7: ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომოკა, ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა ტოლია მიწოდებისა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი *X(t),* რამდენიც სჭირდება ბაზარს *Y(t).*

$$X(t) = Y(t)\,. \tag{1}$$

X(t) არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა), *Y(t)* - მოთხოვნა.

(1) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$\mathrm{X(t) = C(t) + I(t),} \tag{2}$$

სადაც, *C(t)* – მოთხოვნის ფუნქციაა, *I(t)* – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ჰიკსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t)\ , \tag{3}$$

სადაც β-აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ *t* დროში. სხვანაირად,

$$\mathrm{C(t)} = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right] d\tau, \tag{4}$$

წონასწორობის (2) განტოლებაში (4) და (3) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)]dt\ . \tag{5}$$

(5) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \tag{6}$$

ანუ, მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta}\dot{X}(t) + \frac{1}{\beta}F[X(t)] = 0 \tag{7}$$

ვთქვათ:

$$\beta = -\frac{1}{e}; \tag{8}$$

მაშინ მივიღებთ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0\,, \tag{9}$$

სადაც:

$e = const$, ხოლო $F_1[X(t)]$ მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A\cdot\cos(\omega\cdot t)\,. \qquad (10)$$

მაშინ (9)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e\cdot\dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A\cos(\omega\cdot t)\,. \qquad (11)$$

(11) განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ იგი ნორმალური, ე.ი. პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის უნდა შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}(t) \equiv X_1; \qquad X(t) \equiv X_0\,. \qquad (12)$$

მაშინ, (11) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = X_1 \\ \dot{X}_1(t) = A\cos(\omega\cdot t) + X_0 - X_0^3 - e\cdot X_1 \end{cases}. \qquad (13)$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 7

ამოცანა: განვიხილოთ დიუფინგის ეკონომიკური დინამიკის განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \qquad (14)$$

და $A = 0.25; \omega = 1{,}0; e = 0.2$ მონაცემებით, შემდეგ ამოხსენით ამოცანა Mathcad-ში და Matlab-ში.

ამოხსნა: დიუფინგის განტოლების ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

პროგრამა Mathcad-ზე

დემპფირების პროპორციულობის კოეფიციენტი,

c:=0.2

მოთხოვნის გარე შეშფოთების სეზონური სიხშირე,

ω := 1.0

მოთხოვნის გარე შეშფოთების ამპლიტუდა,

A:=0.25

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი პირობები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

დიუფინგის განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარის მატრიცა.

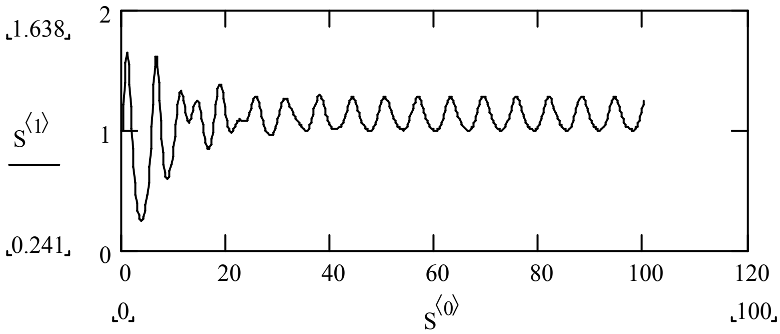
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A \cdot \cos(\omega \cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - c \cdot X_1 + 0.3 \end{bmatrix}$$

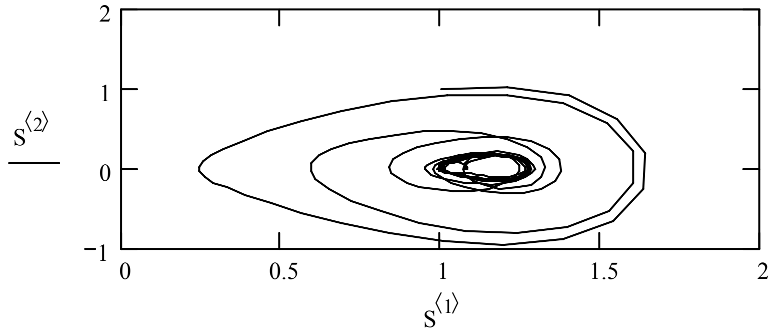
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ოპერატორი რუნგე-კუტას მეთოდით ცვლადი ბიჯით.

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე

$$i := 0..\, \mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$





პროგრამა **Matlab**-ზე

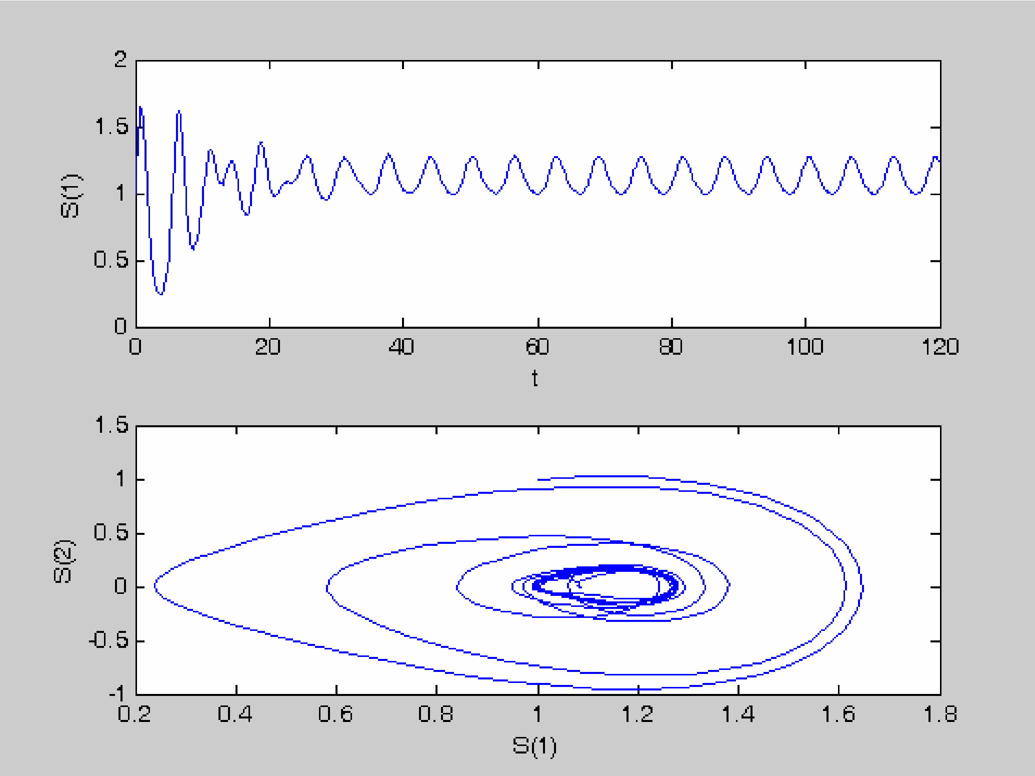
ფუნქცია ფაილი:

```
function dydt=obg(t,S)
A=0.25;w=1;e=0.2;
dydt=[S(2)
A*cos(w*t)+S(1)-S(1)^3-e*S(2)+0.3];
```

პროგრამა ფაილი:

```
t=[0 120];
y0=[1;1];
[t,S]=ode45(@obg,t,y0);
subplot(2,1,1);plot(t,S(:,1));xlabel('t');ylabel('S(1)')
subplot(2,1,2);plot(S(:,1),S(:,2));xlabel('S(1)');ylabel('S(2)')
```

შედეგები:



სავარჯიშო:

განიხილეთ დიუფინგის განტოლება ნორმალური სახით:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = X_1 \\ \ddot{X}_1 = A\cos(\omega t) + X_0 - X_0^3 - eX_1 \end{cases}$$

და ამოხსენით საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

A, ω ,e პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეეცადეთ ისე შეარჩიოთ პარამეტრების მნიშვნელობები, რომ მიიღოთ ეკონომიკის განვითარების სხვადასხვა რეჟიმები.

თემა 8: ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლება

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას.

$$X(t)=C(t)+I(t), \tag{1}$$

სადაც, $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ –ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით შეიძლება ჩავწეროთ **ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება**

$$I(t)=\beta(t)\cdot\dot{X}(t), \tag{2}$$

სადაც, $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, ამასთან ის დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე, ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე:

$$C(t)=\int_0^t F[X(t)]dt. \tag{3}$$

(2)-ის და (3)-ის (1)-ში შეტანით მივიღებთ

$$X(t)=\beta(t)\cdot\dot{X}(t)+\int_0^t F[X(t)]dt. \tag{4}$$

(4) განტოლების ორივე მხარის t-თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t)=\dot{\beta}(t)\cdot\dot{X}(t)+\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+F[X(t)]. \tag{5}$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+\left(\dot{\beta}(t)-1\right)\dot{X}(t)+F[X(t)]=0. \tag{6}$$

რადგან, $\beta(t)\neq 0$, შეიძლება (6) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t)+\frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)}\cdot\dot{X}(t)+\frac{1}{\beta(t)}\cdot F[x(t)]=0. \tag{7}$$

თუ (7)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ და $F[x(t)]$

$$\begin{aligned}&\beta(t)=t\\&F[x(t)]=t\left(\omega^2+\varepsilon\cos 2t\right)\cdot x(t)\end{aligned}\;; \tag{8}$$

მივიღებთ **ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლებას:**

$$\ddot{X}(t)+\left(\omega^2+\varepsilon\cos 2t\right)x(t)=0 \tag{9}$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ ის ნორმალური სახით, ანუ პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}_0(t)\equiv X_1;\quad X(t)\equiv X_0. \tag{10}$$

მაშინ (9) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{cases}\dot{X}_0(t)=X_1\\ \dot{X}_1(t)=-(\omega^2+\varepsilon\cos 2t)\cdot X_0\end{cases}. \tag{11}$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 8

ამოცანა: განვიხილოთ ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} X_0(0)=1 \\ X_1(0)=1 \end{cases} \qquad (12)$$

და მონაცემებით $\omega = 0.5; \varepsilon = 0.3$. შევისწავლოთ ეკონომიკური დინამიკა ω-სა და ε-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ავაგოთ $X_0(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შევისწავლოთ ფაზური პორტრეტი.

ამოხსნა:

პროგრამა Mathcad-ზე

წარმოების მოცულობის დემპფირების კოეფიციენტის შეშფოთების მცირე ამპლიტუდა.

$$\varepsilon := 0.8$$

შეშფოთების სიხშირე

$$\omega := 0.01$$

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი მიახლოებები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მატიეს განტოლების მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

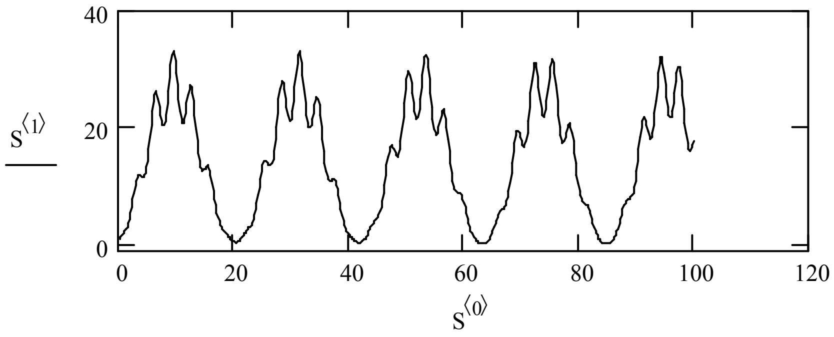
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_0 \cdot \left(\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)\right) + 1.1 \end{bmatrix}$$

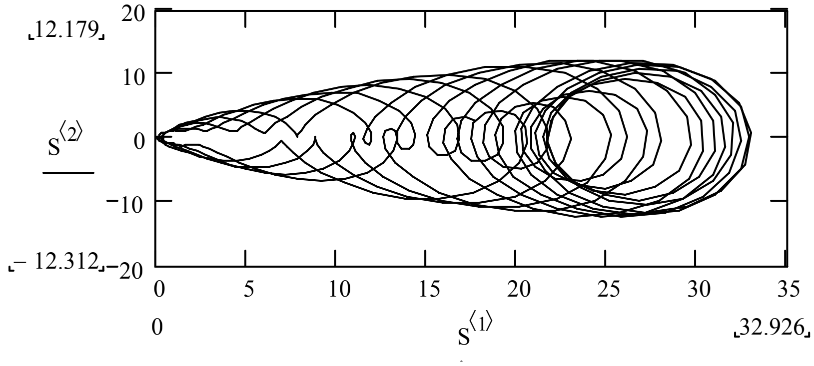
ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯის გამოყენებით

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზებზე

$$i := 0 .. \mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$





პროგრამა **Matlab-ზე**

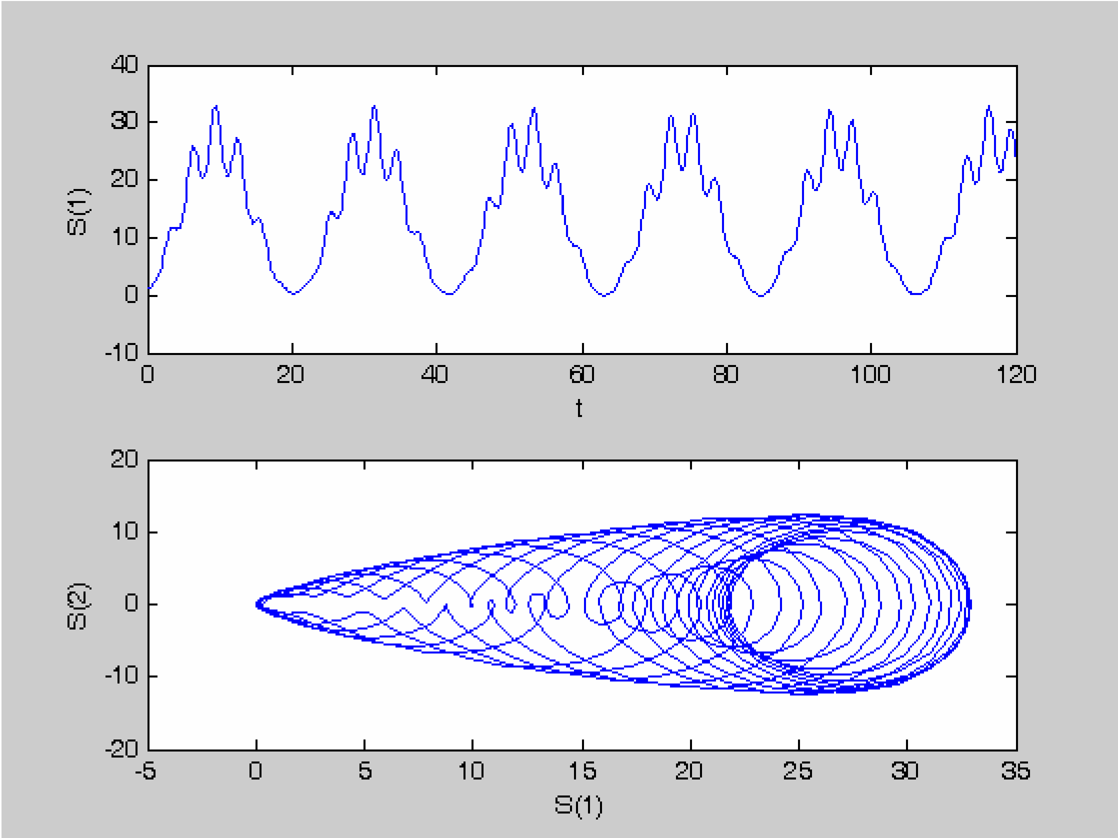
ფუნქცია ფაილი:

```
function dydt=f8(t,S)
w=0.01;e=0.8;
dydt=[S(2)
     -S(1)*(w^2+e*cos(2*t))+1.1];
```

პროგრამა ფაილი:

```
t=[0 120];
y0=[1;1];
[t,S]=ode45(@f8,t,y0);
subplot(2,1,1);plot(t,S(:,1));xlabel('t');ylabel('S(1)')
subplot(2,1,2);plot(S(:,1),S(:,2));xlabel('S(1)');ylabel('S(2)')
```

შედეგები:



სავარჯიშო:

შეისწავლეთ მატიეს მოდელი ε და ω განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

შეისწავლეთ საწყისი პირობების გავლენა.

თემა 9: კურასაოს ეკონომიკურ-პოლიტიკური ბრძოლის მეთოდი

ბიოლოგიაში არასასურველ ბიოლოგიურ სახეობასთან ბრძოლის სხვადასხვა მეთოდები არსებობს. ერთი მათგანი ცნობილია "ბრძოლის კურასაოს მეთოდი"-ს სახელწოდებით. მისი არსი შემდეგგომში მდგომარეობს: რაღაც არეალზე მცხოვრებ სახეობათა პოპულაციაში, რომლის განადგურებაც განიზრახეს, რეგულარულად შეჰყავთ სტერილური ინდივიდი. ეს სტერილური ინდივიდები არ მონაწილეობენ კვლავწარმოების პროცესში, მაგრამ სხვა დანარჩენებთან ერთად მონაწილეობენ შიდასახეობრივ ბრძოლაში, რითაც ამცირებენ პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის სიჩქარეს. იგივე ხდება ეკონომიკასა და პოლიტიკაშიც.

განვიხილოთ შესაბამისი მოდელი.

ვთქვათ, $N_1(t)$ – ნორმალური ინდივიდების რიცხვია, $M(t)$ – სიჩქარე, რომლითაც ამ პოპულაციაში შეჰყავთ სტერილური ინდივიდები, რომელთა რაოდენობა $N_2(t)$-ს ტოლია. ამოცანა მდგომარეობს $M(t)$-ს შეძლებისდაგვარად იმ მინიმალური სიჩქარის განსაზღვრაში, რომლის დროსაც N_1 პოპულაცია ქრება. განვიხილოთ კურასაოს მეთოდის შემდეგი დინამიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{N_1 dt} = a - m(gN_1 + hN_2) \\ \dfrac{dN_2}{N_2 dt} = \dfrac{M(t)}{N_2(t)} - m(gN_1 + hN_2) \end{cases} \tag{1}$$

სადაც, m – პოპულაციის მგრძნობიარობის კოეფიციენტია საკვების უკმარისობაზე, a–ჭარბი საკვების პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ბუნებრივი ზრდის კოეფიციენტი, g და h, კი დადებითი კონსტანტები (პოპულაციის გაუმაძღრობის კოეფიციენტი).

დავუშვათ, რომ სტერილური ინდივიდები შეჰყავთ პოპულაციის $N_2(t)$ მოცულობის პროპორციულად, ე.ი.

$$M(t) = K \cdot N_2(t) \tag{2}$$

ასევე თუ ავიღებთ შემდეგ გაუმაძღრობის კოეფიციენტებს

$$g=h=1 \tag{3}$$

(1) და (2)-დან მივიღებთ კურასაოს მოდელს:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1\left[a - m(N_1 + N_2)\right] \\ \dot{N}_2 = N_2(t)\left[k - m(N_1 + N_2)\right] \end{cases} \tag{4}$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ:

ა) თუ $a>k$, ნორმალური პოპულაცია არ კვდება მაშინაც კი, როცა $N_2(0)$ ძალიან დიდია. უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში სტერ-ილური ინდივიდები ადრე თუ გვიან კვდებიან,

ბ) თუ $a<k$, მაშინ ნორმალური პოპულაცია კვდება, ხოლო სტერილური ინდივიდების პოპულაცია იზრდება და მისი რაოდენობა აღწევს თავის მაქსიმალურ $N_2=k/m$ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ სტერილურ ინდივიდთა პოპულაციაც იწყებს კვდომას.

კურასაოს მეთოდის ერთ-ერთი სტრატეგიაა: (2) დამოკიდებულების ნაცვლად მისი მაქსიმალური სტაბილური, დროში უცვლელი ამონახსნის გამოყენება

$$M = M_0 = K \cdot N_{2\max} = K \cdot \frac{k}{m} = \frac{k^2}{m} \qquad (5)$$

ამ შემთხვევაში მიღებულია, რომ a და m პარამეტრები ცნობილია, ხოლო k კოეფიციენტისათვის სრულდება პირობა $k>a$, რის შედეგადაც ნორმალური პოპულაციის რაოდენობა $N_1(t) \to 0$.

მეცნიერებაში ანალოგიურ ამოცანას ვაწყდებით, მაგალითად, რომელიმე შემოქმედებითი კოლექტივის სამეცნიერო პოტენციალის ანალიზის დროს, რომლის შევსება ხდება არაკვალიფიცირებული კადრებით.

ეკონომიკური ანალოგიის სახით გამოდგება უვარგისი დანადგარების შეძენა.

ანალოგიური ამოცანა შეიძლება ავაგოთ რაიმე საწარმოო ჯგუფების კონკურენციის ანალიზის დროს, საქონლის ახალ სახეობათა წარმოების ათვისებისას, როდესაც, მაგალითად, ერთ-ერთი მოწინააღმდეგე “შეიტყუებს” თავის კონკურენტს კონსტრუ-ქციული დამუშავების ანალიზის ნაკლებად პერსპექტიულ გზაზე, რომელიც მიიყვანს მას არაკონკურენტუნარიანი პროდუქციის შექმნამდე.

ლაბორატორიული სამუშაო № 9

ამოცანა: შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მეთოდის მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1\left[a - m(N_1 + N_2)\right] \\ \dot{N}_2 = N_2\left[k - m(N_1 + N_2)\right] \end{cases},$$

საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} N_1(0) = 2000 \\ N_2(0) = 2000 \end{cases},$$

როდესაც

ა) $m=\sqrt{0.00001}$; *a=9.9; k=10 (a<k);*

ბ) *m=0.01; a=10; k=9.9 (a>k).*

ამოხსნა:

პროგრამა Mathcad-ზე

დასათრგუნი პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის ტემპი

$$a := 9.9$$

დასათრგუნი და შეტანილი პოპულაციების საწყისი მოცულობები

$$ic := \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

სტერილური პოპულაციის ზრდის ტემპი

$$k := 10$$

პოპულაციის გაუმაძღრობის მაჩვენებელი

$$m := \sqrt{0.00001}$$

კურასაოს მოდელის მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

$$D(t,X) := \begin{bmatrix} X_0 \cdot \left[a - m \cdot \left(X_0 + X_1\right)\right] \\ X_1 \cdot \left[k - m \cdot \left(X_0 + X_1\right)\right] \end{bmatrix}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯით

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 200, 300, D)$$

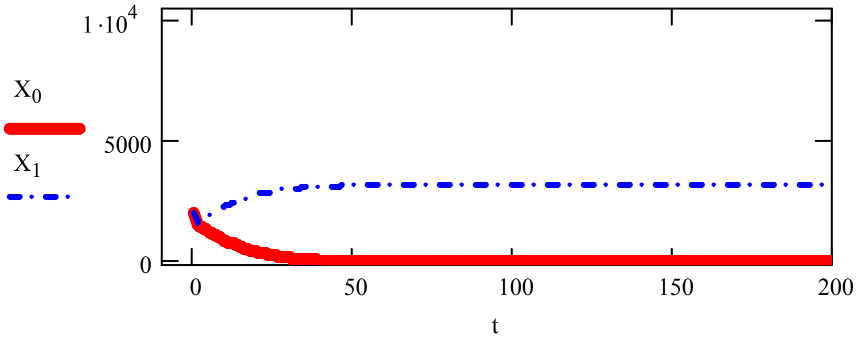
პოპულაციის დინამიკა დროსთან დამოკიდებულებაში

$$i := 0..\,\mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$

$$t := S^{\langle 0 \rangle}$$

$$X_0 := S^{\langle 1 \rangle}$$

$$X_1 := S^{\langle 2 \rangle}$$



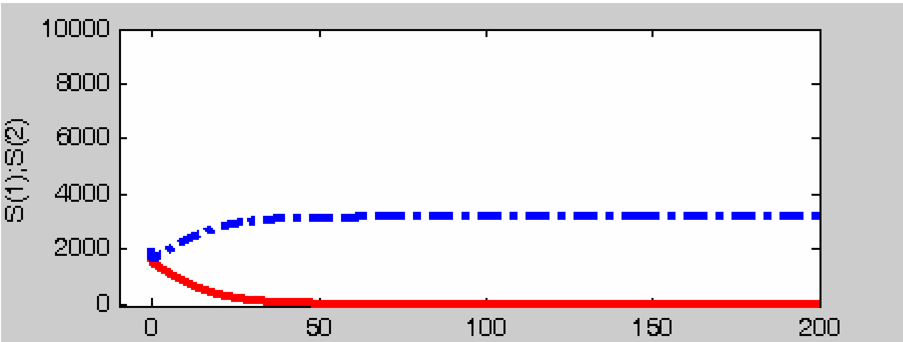
პროგრამა Matlab-ზე

ფუნქცია ფაილი:

```
function dydt=f9(t,S)
a=9.9;k=10;m=sqrt(0.00001);
dydt=[S(1)*(a-m*(S(1)+S(2)))
  S(2)*(k-m*(S(1)+S(2)))];
```

პროგრამა ფაილი:

```
t=[0 200];
y0=[2000;2000];
[t,S]=ode45(@f9,t,y0);
plot(t,S(:,1),'r',t,S(:,2),':b');xlabel('t');ylabel('S(1);S(2)')
```



სავარჯიშო

შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მათემატიკური მოდელი *m*, *a*, *k* პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. განიხილეთ საწყისი პირობების სხვადასხვა ვარიანტები. ააგეთ თქვენი შედეგების გრაფიკები და ახსენით მიღებული შედეგები.

თემა 10: წრფივი დაპროგრამება

პრაქტიკის ბევრ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანები, რომელთათვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ წარმოადგენს ამონახსნის $x_1, x_2, ..., x_n$ ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებულ შეზღუდვის პირობებს აქვს წრფივი განტოლებების ან უტოლობების სახე.

ასეთ ამოცანებს წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანა.

ლაბორატორიული სამუშაო № 10

ამოცანა: მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან – თივა, სილოსი, კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

პროდუქტები	*საკვები ნივთიერებები*		
	ცილა (გ/კგ)	*კალციუმი (გ/კგ)*	*ვიტამინები*
თივა	$\alpha_{11} = 50$	$\alpha_{21} = 10$	$\alpha_{31} = 2$
სილოსი	$\alpha_{12} = 70$	$\alpha_{22} = 6$	$\alpha_{32} = 3$
კონცენტრატები	$\alpha_{13} = 180$	$\alpha_{23} = 3$	$\alpha_{33} = 1$

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით შეადგენს არანაკლებ 2000გ და 210გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დოზირებულია და უნდა შეადგენდეს 87მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 რუბლია, სილოსისა – 200 რუბლი და კონცენტრატისა – 600 რუბლი.

ამოხსნა: მოვახდინოთ ამოცანის ფორმალიზაცია ანუ შევადგინოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, ოპტიმალური რაოდენობაა: თივისა – $X1$ კგ, სილოსისა – $X2$ კგ, კონცენტრატისა – $X3$ კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(X1, X2, X3)=150 \cdot X1+200 \cdot X2+600 \cdot X3. \qquad (1)$$

ამოცანის პირობებში საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზირება.

მოვახდინოთ შეზღუდვათა ფორმალიზება: დღე-ღამეში ცილის რაოდენობა ≥2000გ, კალციუმისა ≥210გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად =87მგ:

$$\begin{cases} 50 \cdot X1 + 70 \cdot X2 + 180 \cdot X3 \geq 2000 \\ 10 \cdot X1 + 6 \cdot X2 + 3 \cdot X3 \geq 210 \\ 2 \cdot X1 + 3 \cdot X2 + 1 \cdot X3 = 87 \\ X1 > 0, X2 > 0, X3 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

პროგრამა **Mathcad**-ზე

მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2, x3) := 150 \cdot x1 + 200 \cdot x2 + 600 \cdot x3,$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

$$x3 := 1.$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში.

Given

$$x1 \geq 1$$

$$x2 \geq 1$$

$$x3 \geq 1$$

$$50 \cdot x1 + 70 \cdot x2 + 180 \cdot x3 \geq 2000$$

$$10 \cdot x1 + 6 \cdot x2 + 3 \cdot x3 \geq 210$$

$$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 1 \cdot x3 = 87$$

R:=minimize(f,x1,x2,x3)

მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 5.833 \\ 24.778 \\ 1 \end{pmatrix}$$

მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$f\left(R_0, R_1, R_2\right) = 6430.556$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია,
f=[150;200;600]
% მონაცემები
A=[-50,-70,-180;-10,-6,-3]
b=[-2000;-210]
Aeq=[2,3,1]
beq=87
ib=[1;1;1]
% ამოცანის გადაწყვეტა
[R,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,ib)
```

შედეგები:

```
f =
   150
   200
   600
A =
   -50   -70  -180
   -10    -6    -3
b =
       -2000
        -210
Aeq =
     2     3     1
beq =
    87
ib =
     1
     1
     1
Optimization terminated successfully.
R =
    5.8333
   24.7778
    1.0000
fval =  6.4306e+003
```

სავარჯიშო:

ვთქვათ მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე მიდის შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ მეტალი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75,11 და 2 კგ პლასტმასა 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის *X1, X2* და *X3* რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გამოშვების მაქსიმალური მოცულობა ფულად გამოსახულებაში, თუ ნაკეთობის ფასები კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს?

თემა 11: საარსებო მინიმუმის დადგენა მოცემულ ქალაქში, მოცემულ რაიონში

წრფივი დაპროგრამების ამოცანებს განეკუთვნება: ამოცანა საარსებო მინიმუმზე, წარმოებაზე, აგრეთვე სატრანსპორტო ამოცანა გადაზიდვებზე, ამოცანა მინდვრის სავარგულების ოპტიმალურ განაწილებაზე და ა.შ.

ამოცანა: განვიხილოთ საარსებო მინიმუმის დადგენა. ვთქვათ, გვაქვს კვების *n* პროდუქტი (პური, ხოპცი, რძე, კარტოფილი, მარილი, შაქრის ფხვნილი, …), რომლებიც შეიცავენ სასიცოცხლოდ აუცილებელ ნივთიერებებს (ცხიმებს, ცილებს, ნახშირწყლებს და ვიტამინებს).

ცნობილია შემდეგი პარამეტრები:

a_{ij} – *j*-ური პროდუქტის ერთეულში *i*-ური ნივთიერების შემცველობა $(a_{ij} \geq 0)$;

b_i – *i*-ური ნივთირების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც უნდა მოიხმაროს ინდივიდმა დროის მოცემულ შუალედში (დღე-ღამეში, დღეში, თვეში, …);

c_j – *j*-ური პროდუქტის ერთეულის საბაზრო ფასი $(c_j>0)$.

კვების ყველა რაციონს $(X_1,X_2,...,X_n)$ შორის, რომლებიც აკმაყოფილებს ინდივიდის მინიმალურ მოთხოვნილებას სასარგებლო ნივთიერებებზე, უნდა ამოვირჩიოთ შედარებით იაფი. X_j წარმოადგენს ინდივიდის მიერ დროის მოცემულ შუალედში მოხმარებულ *j*-ური პროდუქტის რაოდენობას. გარდა ამისა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ დროის მოცემულ შუალედში ინდივიდმა უნდა მიიღოს კალორიების მოცემული *q* რაოდენობა;

t_1– *i*-ური პროდუქტის ერთეულში კალორიების შემცველობა.

ამოხსნა: ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა საარსებო მინიმუმის დადგენაზე.

მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება $(X1,X2,X3,...Xn)$)

$$L(X1, X2,..., Xn) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j \rightarrow \min . \qquad (1)$$

შევადგინოთ შეზღუდვები დროის მოცემულ შუალედში ცხიმების, ცილების, ნახშირწყლების და ვიტამინების აუცილებელ რაოდენობებზე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \geq b_i , \qquad (2)$$

სადაც, $i = \overline{1,m}$, m აუცილებელი ნივთიერებების რიცხვია.

გარდა (2) შეზღუდვისა გვაქვს განტოლების სახით მოცემული შეზღუდვა კალორიების აუცილებელ მოცულობაზე:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot X_i = q \,. \qquad (3)$$

(1)-(2)-(3) ამოცანა წარმოადგენს, როგორც წრფივი დაპროგრამების ამოცანას.

ვიპოვოთ *(X1,X2,...,Xn)* ოპტიმალური მნიშვნელობები, რომელთა დროს მიზნის ფუნქცია (1) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამასთან, ეს მნიშვნელობები უნდა აკმაყოფილებდეს (2), (3) შეზღუდვებს.

ლაბორატორიული სამუშაო № 11

ამოცანა: დავადგინოთ საარსებო მინიმუმი რაიონში, სადაც კვების ძირითად პროდუქტებს შეადგენს: პური, კარტოფილი, ხორცი. საბაზრო ფასი პურზე – 0.5 ლ, კარტოფილზე – 0.6 ლ, ხორცზე – 10 ლარი.

ამოხსნა:

მიზნის ფუნქცია იქნება:

$L(X1,X2,X3)=0.5\cdot X1+0.6\cdot X2+10\cdot X3\rightarrow min.$

b_i – ცხიმების, ცილების და ვიტამინების აუცილებელი რაოდენობის მნიშვნელობა, აგრეთვე ამ ნივთიერებების შემცველობა a_{ij} პროდუქტებში, კალორიების აუცილებელი q რაოდენობა, და მოცემულ პროდუქტებში t_i კალორიების შემცველობა განთავსებულია ინტერნეტში.

მაგალითისათვის (აქ რიცხვები აღებულია ნებისმიერად), თუ

$$b=\begin{pmatrix}100\\80\\90\end{pmatrix};\quad (a_{ij})=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.1\\0.3 & 0.4 & 0.2\\0.2 & 0.1 & 0.5\end{pmatrix};\ q=15000\,;\ t=\begin{pmatrix}20\\15\\30\end{pmatrix},$$

მაშინ მივიღებთ შეზღუდვებს:

$0.1\cdot X1+0.2\cdot X2+0.1\cdot X3\geq 100;$

$0.3\cdot X1+0.4\cdot X2+0.2\cdot X3\geq 80;$

$0.2\cdot X1+0.1\cdot X2+0.5\cdot X3\geq 90;$

$20\cdot X1+15\cdot X2+30\cdot X3=15000.$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

ამოცანის მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2, x3) := 0.5 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 + 10 \cdot x3$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$
$$x2 := 1$$
$$x3 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამონახსნის პოვნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$
$$x3 \geq 0$$
$$0.1 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 + 0.1 \cdot x3 \geq 100$$
$$0.3 \cdot x1 + 0.4 \cdot x2 + 0.2 \cdot x3 \geq 80$$
$$20 \cdot x1 + 15 \cdot x2 + 30 \cdot x3 = 15000$$
$$0.2 \cdot x1 + 0.1 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 \geq 90$$
$$R := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1, R_2) = 420$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია,
f=[150;200;600]
% მონაცემები
A=[-50,-70,-180;-10,-6,-3]
b=[-2000;-210]
Aeq=[2,3,1]
beq=87
ib=[1;1;1]
% ამოცანის გადაწყვეტა
[R,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,ib)
```

შედეგები:

```
f =
   150
   200
   600
A =
   -50   -70  -180
   -10    -6    -3
b =
       -2000
        -210
Aeq =
     2     3     1
beq =
    87
ib =
     1
     1
     1
Optimization terminated successfully.
R =
    5.8333
   24.7778
    1.0000
fval =  6.4306e+003
```

ქალაქ თბილისის ისნის რაიონში საარსებო მინიმუმის დადგენა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის საფუძველზე

საარსებო მინიმუმის გამოსათვლელად საჭიროა გამოვიკვლიოთ კვების ის პროდუქტები, რომლებზეც საკვლევ რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნაა.

ისნის რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნა შემდეგ პროდუქტებზეა:

- პური
- ცხვრის ხორცი
- ხაჭო
- კარტოფილი
- ლობიო
- საქონლის ხორცი
- ბრინჯი

ცნობილია, რომ სიცოცხლის შესანარჩუნებლად ადამიანმა უნდა მიიღოს: ცილები, ცხიმები და ნახშირწყლები, რომლებსაც შეიცავს მის მიერ მოხმარებული კვების პროდუქტები (მონაცემები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში):

		ნახშირწყლები	ცილები	ცხიმები
		ნახშირწყლები	*ცილები*	*ცხიმები*
1	*პური*	$a_{11}=5.0$	$a_{21}=7.9$	$a_{31}=0.8$
2	*ცხვრის ხორცი*	$a_{12}=16$	$a_{22}=2.0$	$a_{32}=0$
3	*ხაჭო*	$a_{13}=2.8$	$a_{23}=13.2$	$a_{33}=20.0$
4	*კარტოფილი*	$a_{14}=16$	$a_{24}=2.0$	$a_{34}=0$
5	*ლობიო*	$a_{15}=46$	$a_{25}=21$	$a_{35}=0$
6	*საქონლის ხორცი*	$a_{16}=0$	$a_{26}=18.9$	$a_{36}=12.4$
7	*ბრინჯი*	$a_{17}=1.0$	$a_{27}=71$	$a_{37}=0$
	დღე-ღამური ნორმა	$b_1 \le 500$	$b_2 \le 90$	$b_3 \le 100$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

$$L(X) := 0.40\cdot X_1 + 1.10\cdot X_2 + 2.5\cdot X_3 + 0.50\cdot X_4 + 2\cdot X_5 + 4\cdot X_6 + 1\cdot X_7$$

$X_1 := 1$

$X_2 := 1$

$X_3 := 1$

$X_4 := 1$

$X_5 := 1$

$X_6 := 1$

$X_7 := 1$

Given

$X_1 \ge 0.500$

$X_2 \ge 0.500$

$X_3 \ge 0.500$

$$X_4 \geq 0.500$$
$$X_5 \geq 0.500$$
$$X_6 \geq 0.500$$
$$X_7 \geq 0.500$$

$$3950X_1 + 500X_2 + 13200X_3 + 2000X_4 + 21000X_5 + 18900X_6 + 1000X_7 \geq 9($$

$$400X_1 + 83500X_2 + 20000X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 12400X_6 + 0 \cdot X_7 \geq 10($$

$$250000X_1 + 1300X_2 + 2800X_3 + 16000X_4 + 46000X_5 + 0 \cdot X_6 + 71000X_7 \geq 50($$

$$255 \cdot X_1 + 781 \cdot X_2 + 94 \cdot X_3 + 94 \cdot X_4 + 55 \cdot X_5 + 187 \cdot X_6 + 351 \cdot X_7 = 120($$

$$R := \text{Minimize}\ (L, X)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.873 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$L(R) = 6.161$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია
f=[0.4,1.1,2.5,0.5,2,4,1]
% მონაცემები
A=[-3950,-500,-13200,-2000,-21000,-18900,-1000;...
     -400,-83500,-20000,0,0,-12400,0;...
     -250000,-1300,-2800,-16000,-46000,0,-71000]
b=[-90;-100;-500]
Aeq=[255,781,94,94,55,187,351]
beq=1200
ib=[0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5]
% ამოცანის გადაწყვეტა
 [R,fval]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,ib)
```

შედეგები:

```
f =
   0.4000    1.1000    2.5000    0.5000    2.0000    4.0000    1.0000
A =
      -3950        -500      -13200       -2000      -21000      -18900       -1000
       -400      -83500      -20000           0           0      -12400           0
    -250000       -1300       -2800      -16000      -46000           0      -71000
b =
   -90
  -100
  -500
Aeq =
   255   781    94    94    55   187   351
beq =
        1200
ib =
   0.5000    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000    0.5000
R =
   0.7354
   0.7964
   0.5000
   0.5000
   0.5000
   0.5000
   0.5000

fval =
   6.1702
```

საარსებო მინიმუმი ქალაქ თბილისის ისნის რაიონისათვის შეადგენს 6.161 ლარს დღეში და 184.83 ლარს თვეში.

სავარჯიშო:

დაადგინეთ საარსებო მინიმუმი თქვენს რაიონში, სადაც კვების ძირითადი პროდუქტებია: პური, კარტოფილი, ხორცი,...

შენიშვნა: გამოიყენეთ საბაზრო ფასები მოცემულ პროდუქტებზე. აუცილებელი ყველა ინფორმაცია მოიპოვეთ ინტერნეტში და შეადგინეთ კვების ოპტიმალური რაციონი.

თემა 12: რესურსების ოპტიმალური განაწილება

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \ldots, R_m \tag{1}$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \ldots, b_m \tag{2}$$

ამ რესურსების გამოყენებით შეიძლება ვაწარმოოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \ldots, T_n \tag{3}$$

T_j საქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა R_i რესურსის a_{ij}, $(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ ერთეული. R_i რესურსის თითოეული ერთეული ღირს d_i ლარი. T_j საქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა C_j $(j=\overline{1,n})$ ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქავს T_j $(j=\overline{1,n})$ საქონლის K_j ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

ისმის კითხვა: რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს მაქსიმალური მოგების რეალიზება?

ამოხსნა: ამოცანის პირობები ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \le K_i, \quad i=\overline{1,n}\ . \tag{4}$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არაუმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ ღებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (\mathrm{i}=\overline{1,m}). \tag{5}$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია. T_j სახის საქონლის ერთეული რაოდენობის s_j-თვითღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \qquad (j=\overline{1,n}). \tag{6}$$

T_j საქონლის, ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა q_j მოგება ტოლია მის გასაყიდ c_j ფასსა და s_j თვითღირებულებას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j\ . \tag{7}$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i) \cdot x_j \to \max .$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 12

ამოცანა: სართავი ფაბრიკა ნართის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს – სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის ნართის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

ნედლეულის ტიპი	*1ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები*		*ნედლეულის რაოდენობა (ტ)*
	სახეობა 1	*სახეობა 2*	
შალი	$\alpha_{11} = 0.5$	$\alpha_{12} = 0.2$	$b_1 = 600$
კაპრონი	$a_{21} = 0.1$	$a_{22} = 0.6$	$b_2 = 620$
აკრილი	$a_{31} = 0.4$	$a_{32} = 0.2$	$b_3 = 500$
1 ტ ნართის რეალიზაციით მიღებული მოგება	$q_1 = 1100$	$q_2 = 900$	

შევადგინოთ მოგების მაქსიმიზაციისათვის ნართის წარმოების წლიური გეგმა.

ამოხსნა: ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა. ვთქვათ, x_1 – პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და x_2 – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 600 \\ 0.1 \cdot X1 + 0.6 \cdot X2 \le 620 \\ 0.4 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 500 \end{cases}$$

მიზნის ფუნქციას (სუფთა მოგებას) ექნება შემდეგი სახე:

$$L(X1, X2) = 1100 \cdot X1 + 900 \cdot X2 \to \max$$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

ამოცანის მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2) := 1100 \cdot x1 + 900 \cdot x2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \geq 0$$

$$x2 \geq 0$$

$$0.5 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 \leq 600$$

$$0.1 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 \leq 620$$

$$0.4 \cdot x1 + 024 \cdot x2 \leq 500$$

$$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 1199.664 \\ 0.839 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1) = 1320385.9$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია
f=[-1100;-900]
% მონაცემები
A=[0.5,0.2;0.1,0.6;0.4,024]
b=[600;620;500]
Aeq=[];
beq=[];
ib=[0;0]
% ამოცანის გადაწყვეტა
[R,fval1]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,ib);
fval=abs(fval1)
```

შედეგები:

```
f =
     -1100
      -900
```

```
A =
    0.5000    0.2000
    0.1000    0.6000
    0.4000   24.0000
b =
   600
   620
   500
ib =
     0
     0
Optimization terminated successfully.
R =
  1.0e+003 *
    1.1997
    0.0008
fval =
  1.3204e+006
```

სავარჯიშო:

სამი სახეობის *A, B* და *C* ნაკეთობის საწარმოებლად გამოიყენება *T1, T2, T3* ტიპის ნედლეული. ამასთან *T1* და *T3* ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

ნედლეულის ტიპი	*1კგ ნედლეულის ფასი (ლარი)*	*ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)*			*ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)*
		A	*B*	*C*	
T_1	$d_1=2$	$a_{11}=1$	$a_{12}=3$	$a_{13}=a$	$b_1=3000$
T_2	$d_2=1$	$a_{21}=4$	$a_{22}=1$	$a_{23}=3$	-
T_3	$d_3=b$	$a_{31}=6$	$a_{32}=5$	$a_{33}=2$	$b_3=3320$
ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)		$c_1=6b+12$	$c_2=5b+22$	$c_3=c$	

განსაზღვრეთ მოგების მაქსიმიზაციის მიზნით პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათე-მატიკური მოდელი.

განიხილეთ *(a,b,c)* პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

a	*b*	*c*
2	*1*	*17*
2	*2*	*19*
2	*3*	*21*

თემა 13: გადაზიდვების სატრანსპორტო ამოცანა

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,...) ინახება m საწყობში და გამოიყენება n პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში, ...). a_i არის პროდუქტის მარაგი i-ურ საწყობში $(a_i > 0)$; b_j – განაცხადები საქონელზე მოხმარების j-ურ პუნქტში; c_{ij} – i-ური საწყობიდან მოხმარების j-ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება, $c_{ij} > 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებისა.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1}$$

უნდა ავირჩიოთ გადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადაზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

ამოხსნა: ვთქვათ, x_{ij} საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება i-ური პუნქტიდან მოხმარების j-ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min . \tag{2}$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ , } (j = 1, n) . \tag{3}$$

რადგან გასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \text{ , } (i = \overline{1,m}) . \tag{4}$$

ცხადია, რომ

$$X_{ij} \geq 0 . \tag{5}$$

ამრიგად ვღებულობთ წრფივი დაპროგრამების (2)-(5) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

ლაბორატორიული სამუშაო № 13

ამოცანა: რეგიონში არის ორი ცემენტის ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღეღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შევდგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

ქარხნები	*ცემენტის წარმოება ტ/დღ*	*1 ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება*		
		კომბ.1	*კომბ. 2*	*კომბ. 3*
I ქარხანა	$a_1=40$	$c_{11}=10$	$c_{12}=15$	$c_{13}=25$
II ქარხანა	$a_2=60$	$c_{21}=20$	$c_{22}=30$	$c_{23}=30$
	ცემენტის მოხმარება ტ/დღ	$b_1=50$	$b_2=20$	$b_3=30$

ამოხსნა: ამოცანის ამოსახსნელად ვადგენთ მათემატიკურ მოდელს.

ვთქვათ, X_{ij} -ცემენტის რაოდენობაა $\left(i=\overline{1,2}\right)$ ორი ქარხნიდან გადაზიდული $\left(j=\overline{1,3}\right)$ სამ ბინათსამშენებლო კომბინატში. მაშინ, მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}C_{ij}\cdot X_{ij}\to\min$$

გვაქვს შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$\sum_{i=1}^{2}X_{ij}=b_j\ ,\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{3}X_{ij}=a_i\ ,\ \left(i=\overline{1,2}\right)$$

$$X_{ij}\geq 0\,.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად ვადგენთ პროგრამას

პროგრამა **Mathcad-ზე**

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

ORIGIN:= 1

გადაზიდვის ფასები

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამი ბინათსამშენებლო კომბინატის მოთხოვნილება

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების მიზნის ფუნქცია

$$L(X) := \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ცვლადების საწყისი მიახლოვებები

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \mathrm{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების ოპტიმიზებული ფასი

$$L(R) = 2000$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია
L=[10,15,25,20,30,30];
% მონაცემები
Aeq=[1,0,0,1,0,0;0,1,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1;...
      1,1,1,0,0,0;0,0,0,1,1,1];
beq=[50,20,30,40,60];
ib=[0,0,0,0,0,0];
% ამოცანის გადაწყვეტა
 [R,Lval]=linprog(L,[],[],Aeq,beq,ib)
```

შედეგები:

```
>>ოპტიმალური წერტილის კოორდინატები
R =
  20.0000
  20.0000
   0.0000
  30.0000
   0.0000
  30.0000
Lval =  2.0000e+003
```

სავარჯიშო:

შეადგინეთ გადაზიდვების ანალოგიური ამოცანა თქვენი რაიონისათვის და იპოვეთ გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა. (თითოეულ სტუდენტს უნდა ჰქონდეს სხვადასხვა მონაცემები და ამოცანის განსხვავებული შინაარსი).

თემა 14: არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, ...x_n), \tag{1}$$

შეზღუდვებისას, რომლებიც მოცემულია ტოლობების სახით:

$$S_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1,k}, \tag{2}$$

და უტოლობების სახით

$$\Psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 14

ამოცანა: ვიპოვოთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა:

$$f(x1, x2) = 6x1 - (x1)^2 + x2$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 \le 24 \\ x1 + 2 \cdot x2 \le 15 \\ 3x1 + 2 \cdot x2 \le 24 \\ x2 \le 4 \\ x1 \ge 0, \\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

ამოხსნა:

პროგრამა **Mathcad**-ზე

მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2) := 6 \cdot x1 + x2 - x1^2$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \ge 0$$

$$4 \ge x2 \ge 0$$

$$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \le 24$$

$$x1 + 2 \cdot x2 \le 15$$

$$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 24$$

$$R := \mathrm{Maximize}(f, x1, x2)$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1) = 13$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% მიზნის ფუნქცია
H=[2,0;0,0];
f=[-6;-1];
% მონაცემები
A=[2,3;1,2;3,2];
B=[24;15;24];
lb=[1,1];
ub=[10,4];
% ამოცანის გადაწყვეტა
[R,fval1]=quadprog(H,f,A,B,[],[],lb,ub);
R
fval=abs(fval1)
```

შედეგები:

```
ოპტიმალური წერტილის კოორდინატები
R =
    3
    4

fval =    13
```

სავარჯიშო

1. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2,$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ &10x_1 - x_2 \le 8 \quad ; \\ &-18x_1 + 4x_2 \le 12 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$.

პასუხი:

$x_{1\min} = \dfrac{123}{101}; \quad x_{2\min} = \dfrac{422}{101}; \qquad f_{\min} = \dfrac{324}{101}$.

$x_{2\max} = 2; \qquad x_{2\max} = 12; \qquad f_{\max} = 65$

2. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$,

შემდგი შეზღუდვებით:

$x_1 + x_2 = 180$,

$x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0$.

პასუხი:

$x_{1\min} = 91; \;\; x_{2\min} = 89; \;\; f_{\min} = 17278$.

3. იპოვეთ მაქსიმალური მნიშვნელობა

$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2$,

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases};$$

პასუხი:

$x_{1\max} = x_{2\max} = 1, \;\; f_{\max} = 3$.

4.იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \end{cases};$$

პასუხი:

$x_{1\max} = 0.99528; x_{2\max} = 0.96321; \quad f_{\max} = 2.99957$.

5.იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \geq 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \geq 0 \end{cases};$$

პასუხი:

$x_{1\min} = 0.9989; \quad x_{2\min} = 2.999763; \quad f_{\min} = 0$.

6. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$;

$x_1 + x_2 - 5 = 0$

პასუხი:
$x_{1\min} = 2.5; \quad x_{2\min} = 2.5; \quad f_{\min} = 4.5.$

7. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$f(x) = (x_1 - 1)\cdot(x_1 - 2)\cdot(x_1 - 3) + x_3$

$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \ge 0$;

$5 - x_3 \ge 0$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$

პასუხი:
$x_{1\min} = 2.01; \quad x_{2\min} = 0.001; \quad x_{3\min} = 2.011; \quad f_{\min} = 2.0$.

8. იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \ge 0, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$.

პასუხი:
$x_{1\max} = 4.021; \quad x_2 = 4.021; \quad f_{\max} = -32.337$.

თემა 15: გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი აქციის ფასების პროგნოზირებისათვის. წრფივი რეგრესია

ამოცანა: გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტალურ წერტილებს ოპტიმალურად მივუახლოვდეთ, მოცემული კლასის ფუნქციების მეშვეობით. ამასთან, თუ მოცემული ფუნქციების კლასი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციათა სიმრავლეს $y = a \cdot x + b$, მაშინ ამოცანას ეწოდება **წრფივი რეგრესიის ამოცანა,** ხოლო თუ მოცემული ფუნქცია მიეკუთვნება **არაწრფივ ფუნქციათა კლასს,** მაშინ გვაქვს **არაწრფივი რეგრესიის ამოცანა.**

განვიხილოთ წრფივი ფუნქციით ექსპერიმენტის შედეგებთან მიახლოების *ამოცანა*: $y = a \cdot x + b$

X	x_1	x_2	..	x_n
Y	y_1	y_2	..	y_n

ამოხსნა: სახელდობრ, იმ $y = a \cdot x + b$ ფუნქციის საპოვნელად, რომელიც სხვებზე უკეთესად ახდენს ექსპერიმენტული წერტილების აპროქსიმირებას, ყოველ (x_i, y_i) წერტილში უნდა შევადგინოთ სხვაობები (გადახრები).

$$r_i = (ax_i + b) - y_i, \tag{1}$$

სადაც, $ax_i + b$ ექსპერიმენტალურ y_i მნიშვნელობასთან თეორიული მიახლოებაა $x=x_i$ წერტილში. ამრიგად, r_i წარმოადგენს $x=x_i$ წერტილში ფუნქციის თეორიულსა და ესქპერიმენტულ მნიშვნელობებს შორის სხვაობის მნიშვნელობას.

უნდა შედგეს (1) გადახრების კვადრატთა ჯამი, რომელსაც ეწოდება $G_1^2(a,b)$ გაუსის ფუნქცია [10].

$$G_1^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \quad . \tag{2}$$

მოვახდინოთ გაუსის $G_1^2(a,b)$ ფუნქციის მინიმიზაცია. მინიმუმის წერტილი (a_{min}, b_{min}) ინდივიდუალობას სძენს სწორედ იმ

$$y = a_{\min} \cdot x + b_{\min} \tag{3}$$

წრფეს, რომელიც ყველაზე უკეთესად მიუახლოვდება ექსპერიმენტალურ (x_i, y_i) წერტილებს ერთობლიობაში.

რადგან გაუსის მეთოდში საუკეთესო მიახლოების კრიტერიუმს წარმოადგენს გადახრათა **კვადრატების ჯამის** მინიმიზაცია, ამიტომ ამ მეთოდს **უმცირეს კვადრატთა** მეთოდი ეწოდება.

ორუცნობიანი (2) ფუნქციისათვის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ წრფივ განტოლე-

ბათა სისტემა, რომელიც განსაზღვრავს მინიმუმის წერტილს $(a_{\min}, b_{\min})$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G_1^2}{\partial a} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial G_1^2}{\partial b} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b - y_i) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

(4) სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i y_i \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}; \qquad (5)$$

შემდეგ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2;$$

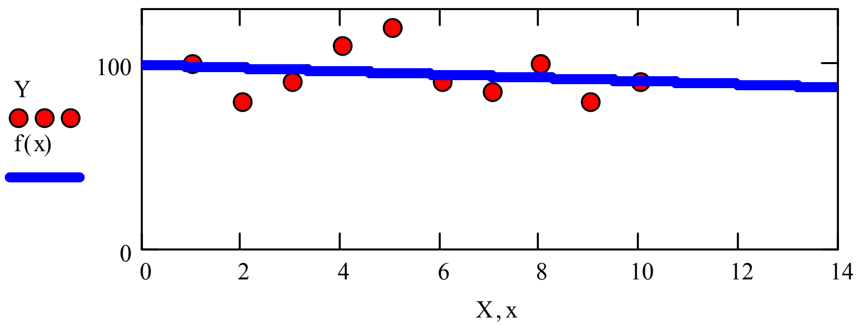
$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i y_i & \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i & n \end{vmatrix} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right);$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} X_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} X_i & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \right) \sum_{i=1}^{n} y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i y_i \right);$$

აქედან მივიღებთ:

$$\begin{cases} a_{\min} = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} \\ b_{\min} = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} \end{cases}$$

შემდეგ, ერთ სურათზე ვაგებთ ორ გრაფიკს: ექსპერიმენტალურ წერტილებს და თეორიულ ოპტიმალურ წრფეს.



ექსპერიმენტალური წერტილები და თეორიული წრფე.

ლაბორატორიული სამუშაო № 15

ამოცანა: აქციის *Y*-ფასის დინამიკა *X*-პირველი 10 თვის მანძილზე მოცემულია ცხრილში:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
Y	*100*	*80*	*90*	*110*	*20*	*90*	*85*	*100*	*80*	*90*	*?*	*?*

შევადგინოთ ფასის პროგნოზი ნოემბერსა და დეკემბერში.

ამოხსნა:

პროგრამა Mathcad-ზე

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

ORIGIN:= 1

ექსპერიმენტული მონაცემები

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \\ 110 \\ 120 \\ 90 \\ 85 \\ 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}$$

მონაცემთა წრფივი წარმოდგენის კოეფიციენტების მოძებნა

$b := \mathrm{intercept}(X, Y)$

$a := \mathrm{slope}(X, Y)$

$b = 99.333$

$a = -0.879$

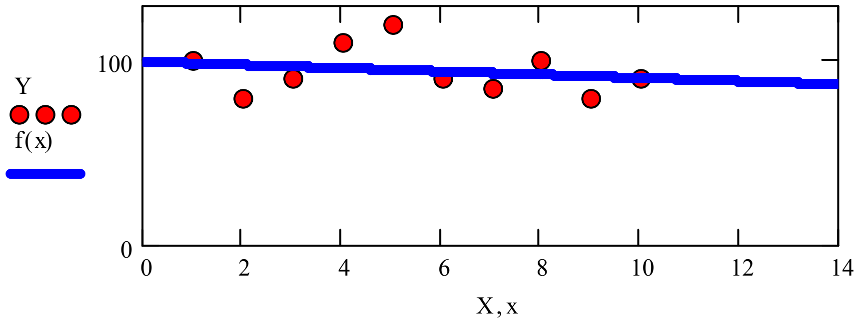
ამოცანის ექსპერიმენტული მონაცემების მიახლოვების თეორიული ფუნქცია

$f(z) := a \cdot z + b$

მონაცემთა მიღებული დამოკიდებულების პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$f(11) = 89.667$

$f(12) = 88.788$



ამოვხსნათ იგივე ამოცანა Matlab-ში. ამისათვის შევქმნათ lab15.m ფაილი და შევადგინოთ პროგრამა Matlab-ის ენაზე.

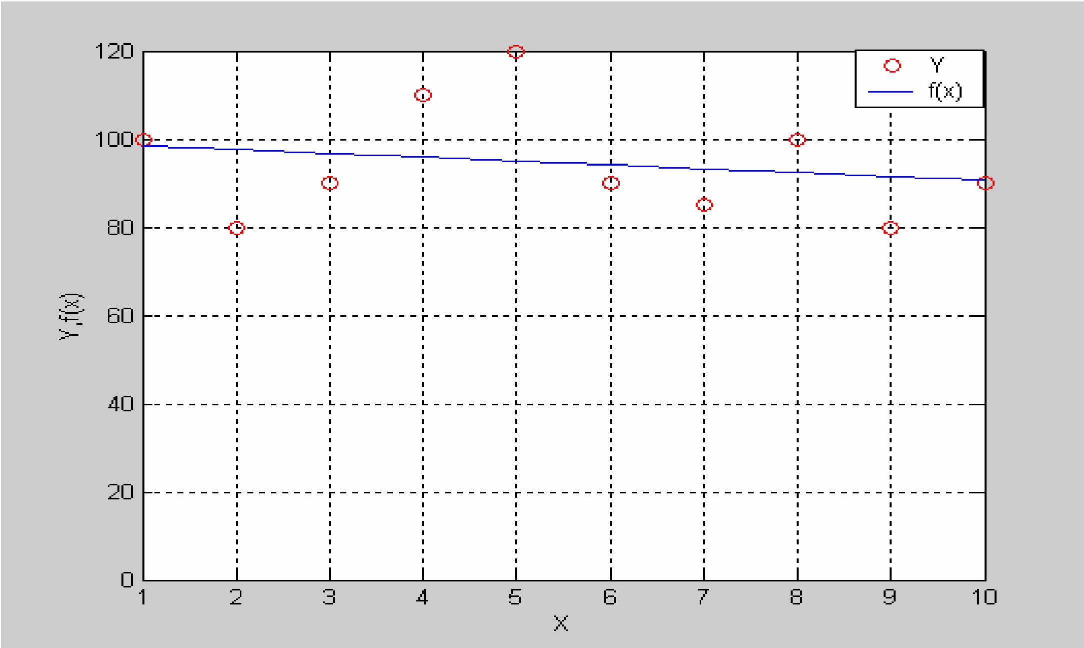
პროგრამა Matlab-ზე

```
X=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
Y=[100,80,90,110,120,90,85,100,80,90]
n=length(X)
xx=[ones(n,1) X']
a=regress(Y',xx)
z=[11,12]
f=a(2)*z+a(1)
f2=a(2)*X+a(1);
plot(X,Y,'or',X,f2)
```

შედეგები:

```
X =
    1     2     3     4     5     6     7     8     9    10
Y =
   100    80    90   110   120    90    85   100    80    90
n =
   10
xx =
    1     1
    1     2
    1     3
    1     4
    1     5
    1     6
    1     7
    1     8
    1     9
    1    10
a =
```

99.3333
-0.8788
z =
 11 12
f =
 89.6667 88.7879
>>



სავარჯიშო:

შეისწავლეთ თქვენთვის ცნობილი მსხვილი საწარმოების აქციების კურსი წინა თვეების განმავლობაში და შეადგინეთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის. თქვენი შედეგები გამოსახეთ გრაფიკულად.

თემა 16: განზოგადებული წრფივი რეგრესია საქონლის ფასის პროგნოზისათვის

წრფივი რეგრესიის მითოდი, ზოგჯერ, უხეშ მიახლოებას იძლევა აქციის კურსის, საქონლის ფასისა და ეროვნული ვალუტის კურსის პროგნოზირებისას. ასეთ შემთხვევებში, ხშირად იყენებენ **განზოგადებული წრფივი რეგრესიის** მეთოდს. ამ მეთოდის არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ექსპერიმენტული წერტილების მოცემულ ერთობლიობას უახლოვდებიან

$$F(x, k1, k2,...,kn)=k1\cdot F1(x)+k2\cdot F2(x)+...+kn\cdot Fn(x) \qquad (1)$$

ტიპის ფუნქციით, ანუ *F1(x), F2(x),..., Fn(n),* ფუნქციის წრფივი კომბინაციით, ამასთან თვით ეს ფუნქციები შეიძლება იყოს წრფივიც, რაც მკვეთრად აფართოებს ასეთი აპროქსიმაციის შესაძლებლობებს და განავრცობს მას არაწრფივ ფუნქციებზეც.

ლაბორატორიული სამუშაო № 16

ამოცანა: ცნობილია, რომ 5 თვის განმავლობაში *VX* საქონლის ფასი იცვლებოდა მოცემული ცხრილის მიხედვით:

VX	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
VY	*15*	*12*	*9.4*	*16.2*	*26*	*?*	*?*	*?*

შევადგინოთ მომდევნო სამი თვისათვის ფასის პროგნოზი.

ამოხსნა: ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის რეალიზებისათვის გამოიყენება *linfit(VX,VY,F)* ფუნქცია, რომელიც აბრუნებს ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტების ვექტორს, რომლის დროსაც *(VX,VY)* კოორდინატების მქონე საწყისი წერტილების "ღრუბლის" მიახლოების საშუალო კვადრატული გადახრა იქნება მინიმალური. *F* ვექტორი უნდა შეიცავდეს *F1(x),F2(x),...,Fn(x)* ფუნქციებს ჩაწერილს სიმბოლური სახით.

ამოცანის ექსპერიმენტული მონაცემები

პროგრამა **Mathcad-ზე**

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციათა მატრიცა

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ e^x \end{pmatrix}$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნის პროგრამა

$i := 0..4$

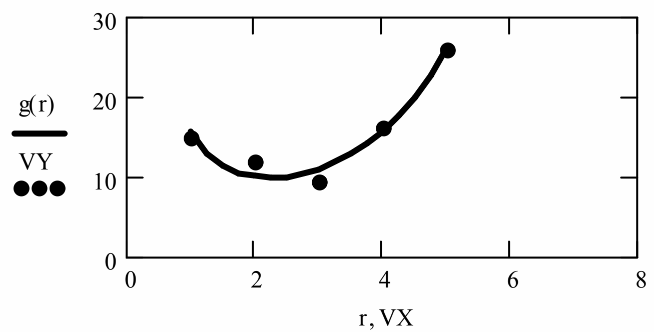
$K := \mathrm{linfit}(VX, VY, F)$

$$K = \begin{pmatrix} 14.899 \\ 0.509 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$g(t) := F(t) \cdot K$

$r := 1, 1.25..5$



ფუნქციონალური დამოკიდებულების პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$g(6) = 48.98$

$g(7) = 103.651$

$g(8) = 242.607$

პროგრამა Matlab-ზე

ფუნქცია ფაილი:

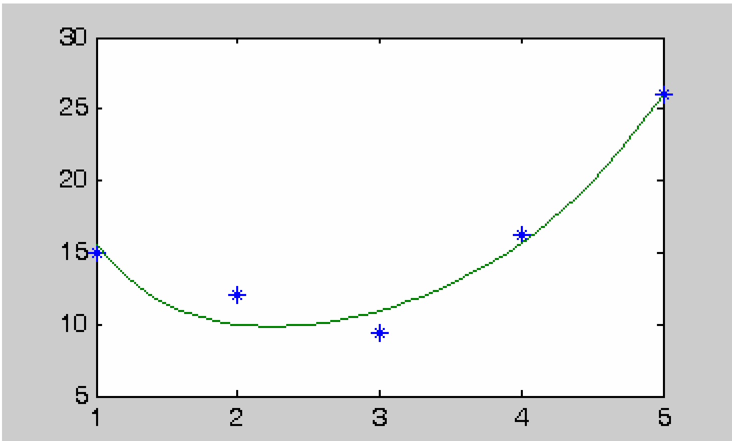
```
function yhat=oblinreg(v,X);
x=v(1);y=v(2);z=v(3);
F1=1./X;
F2=X.^2;
F3=exp(X);
yhat=x*F1+y*F2+z*F3;
```

პროგრამა ფაილი:

```
v0=[2,1,1];
X=[1,2,3,4,5];
```

```
Y=[15,12,9.4,16.2,26];
k=nlinfit(X,Y,@oblinreg,v0)
%
X1=1:0.1:5;
F1=1./X1;
F2=X1.^2;
F3=exp(X1);
ym=k(1)*F1+k(2)*F2+k(3)*F3;
plot(X,Y,'*',X1,ym)
%
X2=[6,7,8];
F1=1./X2;
F2=X2.^2;
F3=exp(X2);
yp=k(1)*F1+k(2)*F2+k(3)*F3
```

შედეგები:



yp =   48.9796 103.6485 242.5997

სავარჯიშო:

ააგეთ განზოგადებული წრფივი რეგრესიის მეთოდით ფასის დინამიკის კანონთან მიახლოება: ა) ნავთობისათვის; ბ) გაზისათვის და გ) ელექტროენერგიისათვის. გამოთვალეთ ფასთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები უახლოესი სამი თვისათვის.

თემა 17: არაწრფივი რეგრესია აქციის კურსის პროგნოზისათვის

როცა წრფივი რეგრესია და განზოგადებული წრფივი რეგრესია ჩვენი პროგნოზისათვის უხეშ შედეგებს იძლევა, უმჯობესია მივმართოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მეთოდებს.

ზოგადი სახის არაწრფივ რეგრესიაში იგულისხმება ნებისმიერი *F(x,k1,k2,...,kn)* ფუნქციის *K* პარამეტრების ვექტორის პოვნა, რომლის დროსაც, უზრუნველყოფილია საწყისი წერტილების “ღრუბლის” ოპტიმალური მიახლოება.

ლაბორატორიული სამუშაო № 17

ამოცანა: რუსეთის გაზპრომის აქციების კურსი ნახევარი წლის მანძილზე იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესით:

VX	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
VY	*1.9*	*1.6*	*1.34*	*1.22*	*1.35*	*1.05*	*?*	*?*	*?*

შევადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

ამოხსნა: ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის ჩასატარებლად გამოიყენება ფუნქცია

genfit (VX,VY,VS,F). (1)

იგი აბრუნებს *F* ფუნქციის *K*-პარამეტრების ვექტორს, რომელიც თავის მხრივ გვაძლევს საწყისი მონაცემების *F(x,k1,k2,...,kn)* ფუნქციით დაახლოების მინიმალურ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას.

F ვექტორი უნდა შეიცავდეს სიმბოლურ ელემენტებს, ამასთან ისინი უნდა შეიცავდნენ ანალიზურ გამოსახულებას საწყისი ფუნქციისა და მისი წარმოებულებისათვის ყოველი პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} F \\ \frac{d}{dk_1}F \\ ... \\ \frac{d}{dk_n}F \end{pmatrix} \tag{2}$$

VS ვექტორი უნდა შეიცავდეს საწყის მიახლოებებს *K* ვექტორისათვის, რაც აუცილებელია რეგრესიის არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იტერაციული მეთოდით ამოსახსნელად.

განვიხილოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მაგალითი შემდეგი ფუნქციის საშუალებით:

$$F(x,a,b)=a\cdot\exp(-b\cdot x)+a\cdot b \tag{3}$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები ყველა პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$\frac{d}{da}F(x,a,b)\to\exp(-bx)+b \tag{4}$$

$$\frac{d}{db}F(x,a,b)\to -a\cdot x\cdot\exp(-b\cdot x)+a \tag{5}$$

მატრიცული *F(x,k)* ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} k_1\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1\cdot k_2 \\ \exp(-k_2\cdot x)+k_2 \\ -k_1\cdot x\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

განვიხილოთ პროგნოზის კონკრეტული ამოცანა.

გაზპრომის აქციების კურსის ცვლილების კანონის აპროქსიმაციისათვის ვისარგებლოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიით. მიახლოების ფუნქციის საყრდენ კლასად ავირჩიოთ (3) ექსპონენციალურ ფუნქციათა სიმრავლე:

$$F(x,k1,k2)=k1\cdot\exp(-k2\cdot x)+k1\cdot k2 \tag{7}$$

მაშინ

$$\frac{d}{dk1}F(x,k1,k2)=\exp(-k2\cdot x)+k2 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dk2}F(x,k1,k2)=-k1\cdot x\cdot\exp(-k2\cdot x)+k1 \tag{9}$$

პროგრამა **Mathcad**-ზე

ORIGIN:= 1

საწყისი მონაცემები

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.607 \\ 1.34 \\ 1.22 \\ 1.35 \\ 1.05 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციისა და მისი k კოეფიციენტებით კერძო წარმოებულების მატრიცა

$$F(x,k) := \begin{pmatrix} k_1 \cdot e^{-k_2 \cdot x} + k_1 \cdot k_2 \\ e^{-k_2 \cdot x} + k_2 \\ -k_1 \cdot x \cdot e^{-k_2 \cdot x} + k_1 \end{pmatrix}$$

უცნობი k კოეფიციენტების საწყისი მიახლოებები

$$VS := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

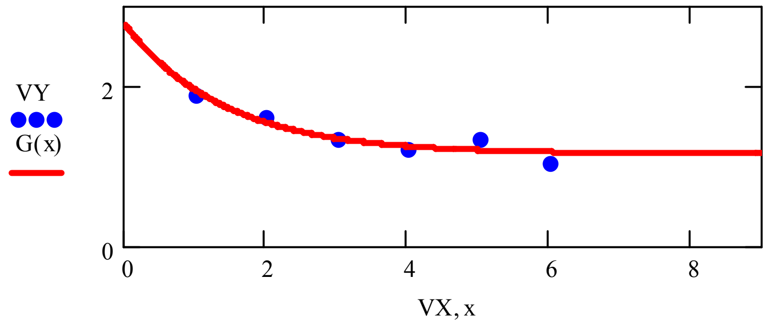
$$P := \text{genfit}(VX, VY, VS, F)$$

გაშლის საძიებელი კოეფიციენტების მნიშვნელობები

$$P = \begin{pmatrix} 1.62 \\ 0.712 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$G(x) := F(x,P)_1$$



ნაპოვნი პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$G(7) = 1.164$$

$$G(8) = 1.158$$

$$G(9) = 1.156$$

პროგრამა Matlab-ზე

ფუნქცია ფაილი:

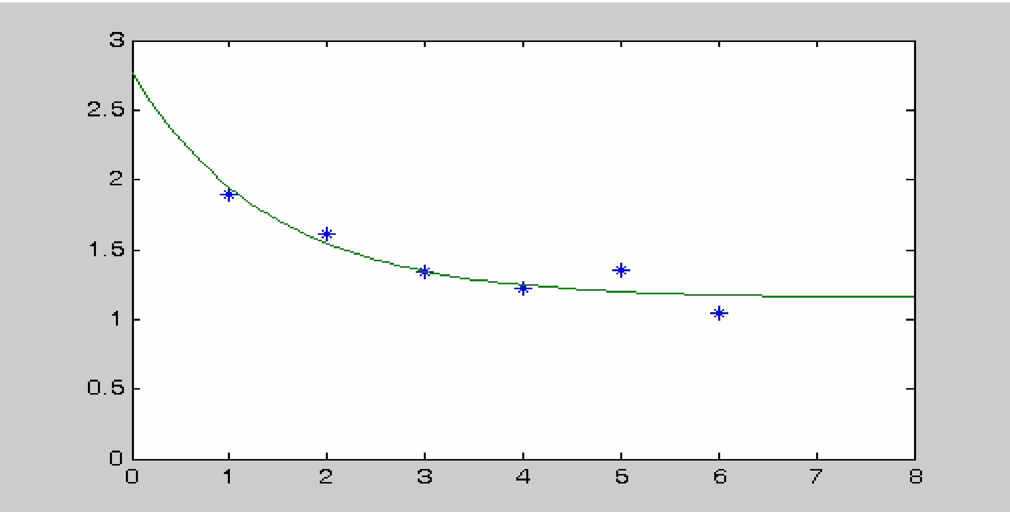
```
function yhat=nelinreg(v,X);
x=v(1);y=v(2);
yhat=x*exp(-y*X)+x*y;
```

პროგრამა ფაილი:

```
v0=[1,1];
X=[1,2,3,4,5,6];
Y=[1.9,1.607,1.34,1.22,1.35,1.05];
k=nlinfit(X,Y,@nelinreg,v0)
%
X1=0:0.1:8;
ym=k(1)*exp(-k(2)*X1)+k(1)*k(2);
plot(X,Y,'*',X1,ym)
% პროგნოზირების ფუნქცია:
X2=[7,8,9]; ym=k(1)*exp(-k(2)*X2)+k(1)*k(2)
```

შედეგები:

```
k =
   1.6197
   0.7118
ym =
   1.1640    1.1583    1.1555
```



სავარჯიშო:

1. РАО ЭС РФ-ის აქციების კურსი ნახევარი წლის განმავლობაში იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესით.

VX	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
VY	*2*	*1.9*	*1.7*	*1.8*	*1.3*	*1.25*	*?*	*?*	*?*

შეადგინეთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

2. შეისწავლეთ (ინტერნეტის დახმარებით) მსოფლიოს წამყვანი კორპორაციების აქციების კურსის დინამიკა და შეადგინეთ კურსის პროგნოზი უახლოესი სამი თვისათვის.

თემა 18: პოლინომიალური რეგრესია

არაწრფივი რეგრესიის ერთ-ერთი სახეა პოლინომიალური რეგრესია, რომლის დროსაც აპროქსიმაციის ფუნქციად ირჩევენ მრავალწევრთა სიმრავლეს.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

ლაბორატორიული სამუშაო №18

ამოცანა: მოცემულია სურგუთნავთობის აქციების კურსის დინამიკა:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Y	*0.8*	*3.5*	*8*	*15*	*19*	*26*	*?*	*?*	*?*

ავაგოთ პოლინომი, რომელიც მოვცემს საუკეთესო მიახლოვებას ამ მონაცემებთან და შევადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

ამოხსნა: Mathcad-ში არსებობს ფუნქცია პოლინომიალური რეგრესიის უზრუნველსაყოფად, რეგრესიის მრავალწევრის ნებისმიერი ხარისხის დროს:

$$VS:=regress\ (VX,\ VY,\ h) \tag{1}$$

რომელიც გვაძლევს შემდეგი ფუნქციით მოთხოვნილ VS ვექტორს

$$f(x):=interp\ (VS,\ VX,\ VY,\ x) \tag{2}$$

და შეიცავს ისეთი *n*-ური ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტებს, რომელიც საუკეთესოდ აახლოვებს *VX* და *VY* ვექტორებით მოცემული კოორდინატების მქონე წერტილების ღრუბელს (ერთობლიობას), ხოლო (2) ოპერატორი იძლევა *x* წერტილში სპლაინის მნიშვნელობას საწყისი *VX* და *VY*-ით და სპლაინის *VS* კოეფიციენტებით.

შევადგინოთ data მონაცემთა მატრიცა

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix} \tag{3}$$

ვთქვათ პოლინომის ხარისხი

$$k:=3 \tag{4}$$

ვადგენთ საწყისი მონაცემების VX და XY ვექტორებს:

$$VX:=data^{<0>} \quad VY:=data^{<1>} \qquad (5)$$

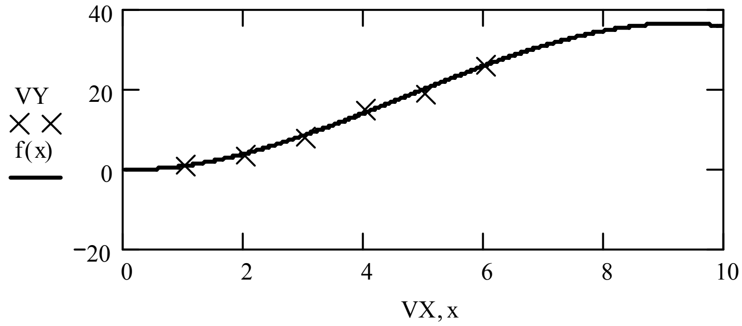
გამოვითვლით მესამე ხარისხის “საუკეთესო” მრავალწევრის კოეფიციენტებს (k=3):

$$VS:=regress\ (VX,\ VY,\ k) \qquad (6)$$

ვაგებთ საუკეთესო პოლინომიალურ მიახლოვებებს:

$$f(x):=interp(VS,\ VX,\ VY,\ x) \qquad (7)$$

ვაგებთ შედეგების გრაფიკულ ინტერპრეტაციას



პოლინომიალური რეგრესიის ინტერპრეტაცია.

უკვე შესაძლებელია გამოვთვალოთ პროგნოზირებული მნიშვნელობები:

f(7)=? f(8)=? f(9)=?

პროგრამა **Mathcad-ზე**

ამოცანის მონაცემები

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების პოლინომის ხარისხი

$$k := 3$$

მონაცემთა ვექტორების ფორმირება მატრიცის მონაცემებიდან

$$VX := data^{\langle 0 \rangle}$$

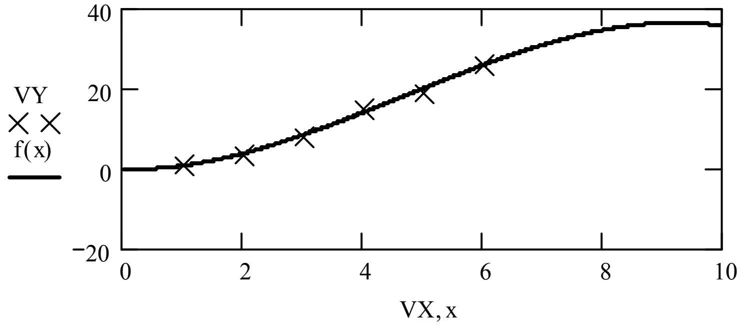
$$VY := data^{\langle 1 \rangle}$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

$$VS := regress\,(VX, VY, k)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.2 \\ -0.391 \\ 1.369 \\ -0.097 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := \mathrm{interp}(VS, VX, VY, x)$$



მონაცემთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f(7) = 30.8$$

$$f(8) = 34.514$$

$$f(9) = 36.3$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნა

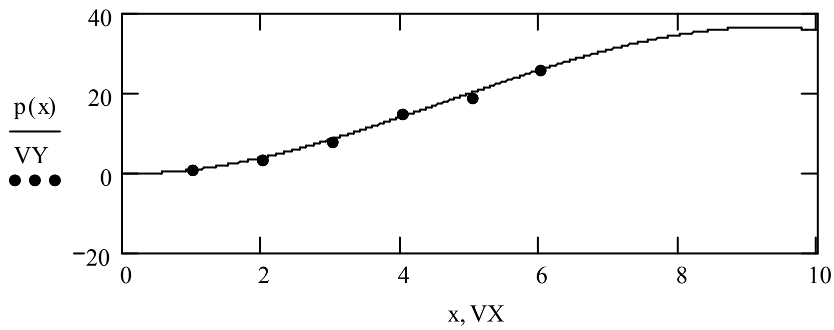
$$\mathrm{coeffs} := \mathrm{submatrix}(VS, 3, \mathrm{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$\mathrm{coeffs}^T = (-0.2 \;\; -0.391 \;\; 1.369 \;\; -0.097)$$

$$a := \mathrm{coeffs}$$

აპროქსიმაციის პოლინომი

$$p(x) := \sum_{i=0}^{3} a_{3-i} \cdot x^{3-i}$$



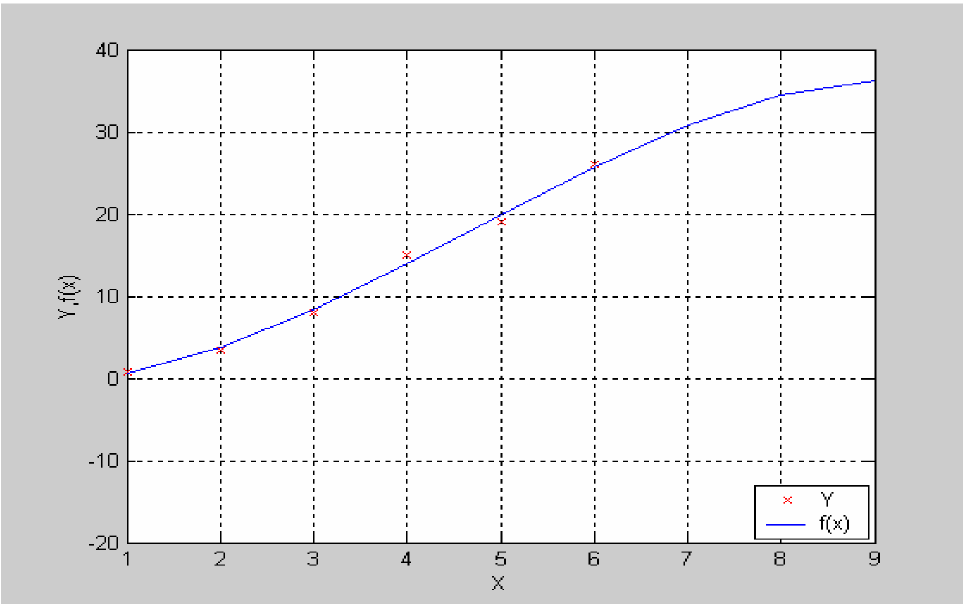
პროგრამა Matlab-ზე

```
X=[1,2,3,4,5,6]
Y=[0.8,3.5,8,15,19,26]
n=length(X);
p=polyfit(X,Y,3)
f=polyval(p,X)
```

```
z=[7,8,9];
fpr=polyval(p,z)
X1=[1,2,3,4,5,6,7,8,9];
f2=polyval(p,X1);
plot(X,Y,'xr',X1,f2); grid on;
xlabel('X'); ylabel('Y,f(x)');legend('Y','f(x)')
```

შედეგები:

```
X =
    1    2    3    4    5    6
Y =
    0.8000    3.5000    8.0000   15.0000   19.0000   26.0000
p =
   -0.0972    1.3690   -0.3909   -0.2000
f =
    0.6810    3.7167    8.3238   13.9190   19.9190   25.7405
fpr=
   30.8000   34.5143   36.3000
```



სავარჯიშო:

პოლინომიალური რეგრესიის მეთოდით შეისწავლეთ 2005 წლის პირველ ნახევარში ენერგომატარებლებზე ფასის დინამიკა ქალაქ თბილისში და შეადგინეთ პროგნოზი წლის მეორე ნახევრისათვის. შედეგები შეადარეთ რეალურს. ახსენით განსხვავებები.

თემა 19: კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის განსაზღვრა. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი

მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი წარმოადგენს ორცვლადიანი რეგრესიული ანალიზის განვითარებას, რომელიც იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც სისტემის აგრეგირებული მახასიათებელი დაკავშირებულია ერთზე მეტ დამოუკიდებელ განმსაზღვრელ ცვლადთან.

განვიხილოთ კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის განსაზღვრის მაგალითი. მოსახლეობის x შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე p ფასების არსებული მონაცემებიდან გამომდინარე ვიპოვოთ კავშირი

$$y=f(x,p), \tag{1}$$

სადაც, y კვების ხარჯების საერთო სიდიდეა, f – ფუნქციაა მოცემული კლასიდან. მაგალითისათვის ვისარგებლოთ პოლინომებით, ანუ პოლინომიალური რეგრესიით მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისთვის. მრავლობითი პოლინომიალური რეგრესიის კერძო სახეს წარმოადგენს მრავალგანზომილებიანი წრფივი რეგრესია, ანუ შემთხვევა, როცა მონაცემებს უახლოვდებით ფორმულით:

$$y=\alpha+\beta_1\cdot x+\beta_2\cdot p\,. \tag{2}$$

მრავლობითი პოლინომიალური რეგრესიის ამოცანის ამოსახსნელად, მოცემული უნდა იქნას რიცხვთა მასივი, რომელიც შეესაბამება Y ცვლადს. ვთქვათ

$$Y:=\begin{pmatrix}350\\360\\400\\380\\400\\450\end{pmatrix}; \tag{3}$$

შევქმნათ ორგანზომილებიანი MXP მონაცემთა მასივი, შესაბამისი (x, p) წერტილებისათვის.

$$\mathrm{MXP}:=\begin{pmatrix}400 & 2.5\\400 & 3\\400 & 3.5\\400 & 3.4\\400 & 3.35\\400 & 3.4\end{pmatrix} \tag{4}$$

ლაბორატორიული სამუშაო № 19

ამოცანა: მოცემულია *Y* ერთობლივი მოთხოვნა და შესაბამისი მონაცემთა *MXP* მატრიცა, მოსახლეობის *X* შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე *P* ფასების მიხედვით. ავაგოთ მიახლოების (2) მრავალწევრი, გავაკეთოთ პროგნოზი, შევაფასოთ აპროქსიმაციის ცდომილება.

ამოხსნა: გამოვიყენოთ *regress(MXP,Y,n)* ოპერატორი, სადაც *n* – მიახლოების პოლინომის ხარისხია. (2) ფორმულისათვის გვაქვს *n:=1*

$$VS:=regress(MXP, Y, n), \tag{5}$$

სადაც, *VS* – (2) პოლინომის საუკეთესო მიახლოების კოეფიციენტებია. ავაგოთ თვით მიახლოების პოლინომი (2), სადაც $X_0:=X$ და $X_1:=P$

$$f(x):=interp(VS, MXP, Y, X) \tag{6}$$

და ბოლოს, შევადგინოთ პროგნოზი $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$ სხვა მნიშვნელობებისთვისაც.

გრაფიკული ინტერპრეტაციისათვის მოხერხებულია, *Y* ერთობლივი მოთხოვნის აღნიშვნა *Z*-ით და მონაცემთა მატრიცული სახით შეყვანა.

$$n:=1 \qquad Z:=\begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{MXP}:=\begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

VS:=regress(MXP,Z,n) *f(x):=interp(VS,MXP,Z,x)*

პროგნოზი : $f\left(\begin{pmatrix} 450 \\ 3.40 \end{pmatrix}\right) = ?$ (პას.: 426) $f\left(\begin{pmatrix} 500 \\ 4.00 \end{pmatrix}\right) = ?$ (პას.: 488)

$X:=MXP^{<0>}$ $P=MXP^{<1>}$

i:=0..5

გამოთვლების აბსოლუტური ცდომილება: $\Delta C_i = f\begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix} - Z_i \quad \Delta C = ?$

გამოთვლების ფარდობითი ცდომილება: $\nu := \frac{\Delta C}{450} \cdot 100 \qquad \nu = ?$

$\max \nu \approx 10\%$

$i := 0..100 \qquad j := 0..100$

$X1_i := 400 + i \quad P1_j := 250 + 1.5 \cdot j \qquad M1_{i,j} := f\left(\begin{pmatrix} X1_i \\ P1_j \end{pmatrix}\right)$

პროგრამა Mathcad-ზე

კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის მონაცემები, კვების ხარჯები და შემოსავლების მონაცემები

$$Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \qquad MXP := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

$$X := MXP^{\langle 0 \rangle}$$

$$P := MXP^{\langle 1 \rangle}$$

კოეფიციენტების მოძებნა

$$n := 1$$

$$VS := \mathrm{regress}(MXP, Z, n)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.439 \\ 67.167 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$f(X) := \mathrm{interp}(VS, MXP, Z, X)$$

ერთობლივი მოთხოვნის მნიშვნელობათა პროგნოზირება

$$f\begin{pmatrix} 450 \\ 3.40 \end{pmatrix} = 425.946$$

$$f\begin{pmatrix} 500 \\ 4 \end{pmatrix} = 488.199$$

$$coeffs := \mathrm{submatrix}(VS, 3, \mathrm{length}(VS) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs^T = (0.439 \;\; 67.167 \;\; 0.001)$$

$$\alpha := (coeffs^T)^{<0>}$$

α=(0.439)

β:=(coeffs^T)$^{<1>}$
β=(67.167)

m:=(coeffs^T)$^{<2>}$
m=(0.001)

Z=m+α∗X+β∗ P - ერთობლივი მოთხოვნის ფუნქციაა

$$Z1(X,P) := 0.001 + 0.439 \cdot X + 67.167 \cdot P$$

$$i := 0..5$$

აბსოლუტური ცდომილება

$$\Delta c_i := \left| f\left(\begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix}\right) - Z_i \right|$$

$$\Delta c = \begin{pmatrix} 6.457 \\ 17.126 \\ 10.71 \\ 23.993 \\ 0.635 \\ 46.007 \end{pmatrix}$$

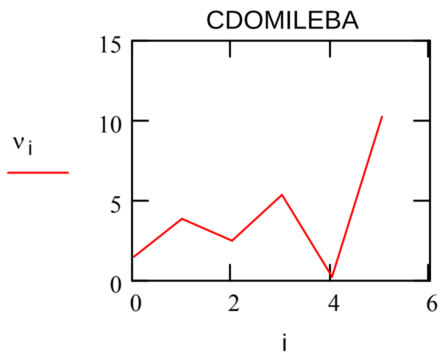
ფარდობითი ცდომილება

$$\nu := \frac{\Delta c}{450} \cdot 10($$

$$\nu = \begin{pmatrix} 1.435 \\ 3.806 \\ 2.38 \\ 5.332 \\ 0.141 \\ 10.224 \end{pmatrix}$$

$$\max(\nu) = 10.224$$

გამოთვლების ფარდობითი ცდომილების გრაფიკი



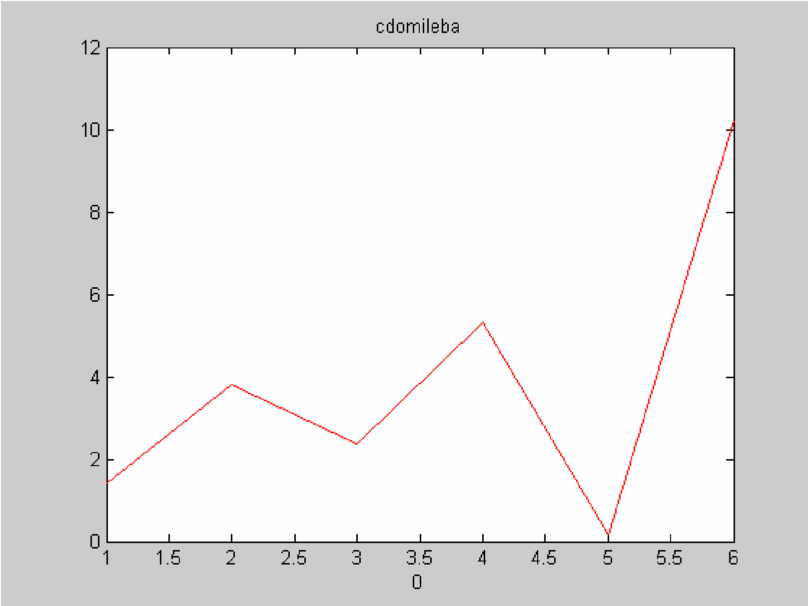
პროგრამა **Matlab-ზე**

```
Z=[350,360,400,380,400,450];
X1=[400,400,400,400,400,400];
X2=[2.50,3.00,3.50,3.40,3.35,3.40];
xx=[ones(6,1) X1' X2']
VS=xx\Z'
x=[450,500];
p=[3.40,4.00];
Z1=VS(1)+VS(2)*x+VS(3)*p
Z1=VS(1)+VS(2)*X1+VS(3)*X2;
deltac=abs(Z1-Z)
v=deltac/450*100
max(v)
plot(v,'r');title('cdomileba');xlabel(i)
```

შედეგები:

```
xx =
    1   400   2.50
    1   400   3.00
    1   400   3.50
    1   400   3.40
    1   400   3.35
    1   400   3.40

VS =
        0
   0.4391
   67.1668
Z1 =
  425.9463  488.1997
deltac =
   6.4570   17.1264   10.7098   23.9931    0.6347   46.0069
v =
   1.4349    3.8059    2.3799    5.3318    0.1411   10.2238
ans =
  10.2238
```



სავარჯიშო:

მოცემული Y ერთობლივი მოთხოვნით და შესაბამისი მონაცემთა MXP მატრიცით, მოსახლეობის X შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე P ფასების მიხედვით ააგეთ მიახლოების ოპტიმალური მრავალწევრი:

$Y = \alpha + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot P$,

შეადგინეთ პროგნოზი და ააგეთ გრაფიკული ინტერპრეტაცია.

თემა 20: კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია

1927 წელს განათლებით ეკონომისტმა პოლ დუგლასმა აღმოაჩინა, რომ თუ ერთმანეთს შევუთავსებთ *(Y)* გამოშვების რეალური მოცულობის, *(K)* კაპიტალური დანახარჯების და *(L)* შრომის დანახარჯების მაჩვენებლების ლოგარითმების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკებს, მაშინ დაშორებები გამოშვების მაჩვენებლების წერტილებიდან შრომის დანახარჯების მაჩვენებლებისა და კაპიტალის ხარჯების გრაფიკების წერტილებამდე შეადგენენ მუდმივ პროპორციას. შემდეგ, მან თხოვნით მიმართა მათემატიკოს ჩარლზ კობს, ეპოვა ასეთი თავისებურების მქონე მათემატიკური დამოკიდებულება. კობმა შესთავაზა შემდეგი ფუნქცია:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \qquad (1)$$

ხშირად განიხილავენ კობ-დუგლასის განზოგადებულ ფორმულას:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \qquad (2)$$

სადაც, A, α და β კოეფიციენტები განისაზღვრება არაწრფივი მრავლობითი რეგრესიის მეთოდით, როდესაც მოცემულია Y მონაცემთა ვექტორი, K და L .

ლაბორატორიული სამუშაო №20

ამოცანა: მოცემულია წარმოების *(Y)* რეალური მოცულობის, *(K)* რეალური კაპიტალური ხარჯებისა და *(L)* რეალური შრომის ხარჯების ინდექსები ამერიკაში 1899 – 1922 წლებისათვის. იპოვეთ (2) დამოკიდებულება, თუ გვაქვს შემდეგი მონაცემები (საფუძვლად აღებულია 1899 წლის 100-ის ტოლი მოცულობა)

წელი	*Y*	*K*	*L*		*წელი*	*Y*	*K*	*L*
1899	*100*	*100*	*100*		*1911*	*153*	*216*	*145*
1900	*101*	*107*	*105*		*1912*	*177*	*226*	*152*
1901	*112*	*114*	*110*		*1913*	*184*	*236*	*154*
1902	*122*	*122*	*118*		*1914*	*169*	*244*	*149*
1903	*124*	*131*	*123*		*1915*	*189*	*266*	*154*
1904	*122*	*138*	*116*		*1916*	*225*	*298*	*182*
1905	*143*	*149*	*125*		*1917*	*227*	*335*	*196*
1906	*152*	*163*	*133*		*1918*	*223*	*336*	*200*
1907	*151*	*176*	*138*		*1919*	*218*	*387*	*193*
1908	*126*	*185*	*121*		*1920*	*231*	*407*	*193*
1909	*155*	*198*	*140*		*1921*	*179*	*417*	*147*
1910	*159*	*208*	*144*		*1922*	*240*	*431*	*161*

ამოხსნა: კობ-დუგლასის თანადობის პარამეტრების მოსაძებნად გავალოგარითმოთ (2) დამოკიდებულება:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L \ . \tag{3}$$

თუ შევიტანოთ აღნიშვნებს:

$$\ln Y \equiv y\,;\ \ \ln A \equiv m\,;\ \ \ln K \equiv X\,;\ \ln L \equiv P \tag{4}$$

მივიღებთ დამოკიდებულებას

$$y = m + \alpha \cdot x + \beta \cdot P \tag{5}$$

ანუ, პირველი ხარისხის პოლინომის სახით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც *m*, α და β უნდა განვსაზღვროთ მრავლობითი პოლინომიალური რეგრესიის მეთოდით და შემდეგ (4) ფორმულის გამოყენებით განვსაზღვროთ საძიებელი *A* პარამეტრიც, როგორც

$$A = e^m \tag{6}$$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

$$Y := \begin{pmatrix}100\\101\\112\\122\\124\\122\\143\\152\\151\\126\\155\\159\\153\\177\\184\\169\\189\\225\\227\\223\\218\\231\\179\\240\end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix}100\\107\\114\\122\\131\\138\\149\\163\\176\\185\\198\\208\\216\\226\\236\\244\\266\\298\\335\\366\\387\\407\\417\\431\end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix}100\\105\\110\\118\\123\\116\\125\\133\\138\\121\\140\\144\\145\\152\\154\\149\\154\\182\\196\\200\\193\\193\\147\\161\end{pmatrix}$$

$i := 0..\,23$

$Y1_i := \ln\left(Y_i\right)$

$K1_i := \ln(K_i)$

$L1_i := \ln(L_i)$

$MXP^{\langle 0 \rangle} := K1$

$MXP^{\langle 1 \rangle} := L1$

$n := 1$

$VS := \mathrm{regress}(MXP, Y1, n)$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.233 \\ 0.807 \\ -0.177 \end{pmatrix}$$

$f(X) := \mathrm{interp}(VS, MXP, Y1, X)$

$coeffs := \mathrm{submatrix}(VS, 3, \mathrm{length}(VS) - 1, 0, 0)$

კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის ლოგარითმული გაშლის კოეფიციენტები lnY=lnA+αlnK+βlnL;

$coeffs^T = (0.233 \;\; 0.807 \;\; -0.177)$

$\alpha := \left(coeffs^T\right)^{\langle 0 \rangle}$

α=0.233

$\beta := \left(coeffs^T\right)^{\langle 1 \rangle}$

β=0.807

$A := e^{\left(coeffs^T\right)^{\langle 2 \rangle}}$

A=0.838

საწარმოო ფუნქციის პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f\left(\begin{pmatrix} 420 \\ 330 \end{pmatrix}\right) = 364.107$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}\right) = 335.228$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
Y=[100,101,112,122,124,122,143,152,151,126,155,159,153,177,...
184,169,189,225,227,223,218,231,179,240];
K=[100,107,114,122,131,138,149,163,176,185,198,208,...
216,226,236,244,266,298,335,366,387,407,417,431];
L=[100,105,110,118,123,116,125,133,138,121,140,144,...
145,152,154,149,154,182,196,200,193,193,147,161];
Y1=log(Y);
K1=log(K);
L1=log(L);
```

```
n=length(Y);
xx=[ones(n,1) K1' L1'];
VS=regress(Y1',xx)
A=exp(VS(1))
alfa=VS(2)
beta=VS(3)
% მოვახდინოთ პროგნოზირება f(420,330)=f1 და f(400,300)=f2
f1=A*420^VS(2)*330^VS(3)
f2=A*400^VS(2)*300^VS(3)
```

შედეგები:

```
VS =
  -0.1773
   0.2331
   0.8073
A =
   0.8375
alfa =
   0.2331
beta =
   0.8073

f1 =
  369.3977
f2=
  338.1743
```

P.S. პროდუქციის გამოშვების ელასტიურობა კაპიტალისა და შრომის მიხედვით შესაბამისად α და β-ს ტოლია.

სავარჯიშო:

მოიძიეთ *(Y)* წარმოების რეალური მოცულობის, *(K)* რეალური კაპიტალური ხარჯების და *(L)* შრომის რეალური ხარჯების ინდექსების ცვლილებები დროის მიხედვით საქართველოსათვის. იპოვეთ, აუცილებელი მონაცემები და განსაზღვრეთ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები.

ნაწილი III. ფუნდამენტალური ეკონომიკის ძირითადი ცნებები

თემა 21: მიკროეკონომიკის ძირითადი ცნებები. განურჩევლობის მრუდები. მოხმარებისა და მოთხოვნის თეორია.

პირადი მოთხოვნილებების დასაკმაყოფილებლად ინდივიდები მოიხმარენ სხვადასხვა დოვლათს.

პირადი მოხმარების მოდელირებისათვის იყენებენ **განურჩევლობის მრუდის** ცნებას.

განვიხილოთ მაგალითი, ვთქვათ, საოჯახო მეურნეობა მოიხმარს ორი სახის დოვლათს (დოვლათი 1 და დოვლათი 2). დავუშვათ, რომ დროის რაღაც პერიოდის განმავლობაში პირველი დოვლათი მოიხმარეს Y_1 , ხოლო მეორე დოვლათი – Y_2 რაოდენობით. ორგანზომილებიან (Y_1,Y_2) ვექტორს უწოდებენ **მოხმარების გეგმას**. საოჯახო მეურნეობა მოხმარების $A=(Y_1^A,Y_2^A)$ ვექტორს ადარებს, მოხმარების სხვა $B=(Y_1^B,Y_2^B)$ ვექტორს და აკეთებს ქვემოთ ჩამოთვლილიდან ერთ-ერთ დასკვნას:

ა) A ვექტორს აქვს უპირატესობა B ვექტორთან;

ბ) B ვექტორს აქვს უპირატესობა A ვექტორთან;

გ) A და B ვექტორებს თანაბარი უპირატესობა აქვთ (მომხმარებლისთვის სულერთია რომელს აირჩევს, A თუ B ვექტორს).

განსაზღვრება: მოხმარების გეგმათა სიმრავლე, რომელიც განურჩევლობის მდგომარეობაშია განსახილველ გეგმასთან, სიბრტყეზე შეადგენს წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც **განურჩევლობის მრუდი ეწოდება.**

თუ $U=U(Y_1,Y_2)$-ით აღვნიშნავთ ფუნქციას, ან სხვანაირად, **სარგებლიანობის ინდექსს**, რომელიც შეიძლება მივიღოთ (Y_1 ,Y_2) ვექტორით მოცემული დოვლათის მოხმარებით, მაშინ განურჩევლობის მრუდი წარმოადგენს (Y_1 ,Y_2) მნიშვნელობათა ერთობლიობას, რომელთაც მივყავართ სარგებლიანობის U ინდექსის ერთსა და იმავე მნიშვნელობამდე (ე. ი. განურჩევლობის მრუდები წარმოადგენენ სარგებლიანობის ფუნქციის დონის წირებს).

განურჩევლობის მრუდები განისაზღვრებიან სარგებლიანობის ფუნქციის მიხედვით.

განვიხილოთ სარგებლიანობის ფუნქციის რამდენიმე ტიპი, რომლებიც ხშირად გამოიყენება ეკონომიკაში:

1. ფუნქცია დოვლათთა სრული ურთიერთჩანაცვლებით (მაგ. შაქრის ფხვნილი და შაქარი ნატეხებში;...)

$$U = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2; \qquad (1)$$

2. სარგებლიანობის ნეოკლასიკური (კობ-დუგლასის) ფუნქცია:

$$U = \alpha_0 Y_1^{\alpha_1} \times Y_2^{\alpha_2}, \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1; \qquad (2)$$

3. სარგებლიანობის ფუნქცია სრულად ურთიერთშემავსებელი დოვლათებისათვის (მაგ. კარაქი და პური, მოწუწნიკი (სოსისი) და მდოგვი)...:

$$U = \min(\frac{Y_1}{\alpha_1}, \frac{Y_2}{\alpha_2}) \Leftrightarrow U = u, \text{ სადაც } \begin{cases} Y_1 \geq \alpha_1 u \\ Y_2 \geq \alpha_2 u \end{cases}; \qquad (3)$$

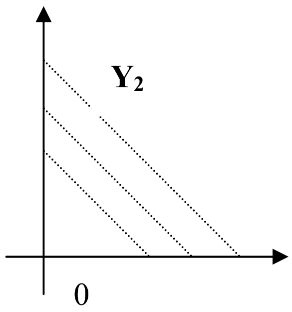
4. შერეული, შემავსებელ-ჩამნაცვლებელი ტიპის ფუნქცია (მაგ. ჩაი და რძე):

$$U = u_1 + u_2, \quad \text{სადაც } \begin{cases} Y_1 \geq \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 \\ Y_2 \geq \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 \end{cases}. \qquad (4)$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად სარგებლიანობის ფუნქციის ერთ-ერთი არგუმენტი უნდა გამოვსახოთ სხვა არგუმენტითა და სარგებლიანობის ფუნქციის *U* მნიშვნელობით. მაგალითად, (1) ფუნქციისათვის გვექნება:

$$Y_2 = \frac{U - \alpha_1 Y_1}{\alpha_2}. \qquad (5)$$

მივანიჭოთ α_1 და α_2 კოეფიციენტებს მუდმივი მნიშვნელობები და შევარჩიოთ სარგებლიანობის ფუნქციის U_0 მნიშვნელობა, შემდგომ მივანიჭებთ რა, სხვადასხვა მნიშვნელობებს Y_1-ს, (5)-დან მივიღებთ Y_2-ის შესაბამის მნიშვნელობებს. მიღებული (Y_1,Y_2) წერტილების სიბრტყეზე ასახვით კი, მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 1).



ნახ.1

მივიღებთ წრფეებს, ამასთან რაც უფრო მეტია U_0 მით უფრო შორს განთავსდება შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი კოორდინატთა სათავიდან.

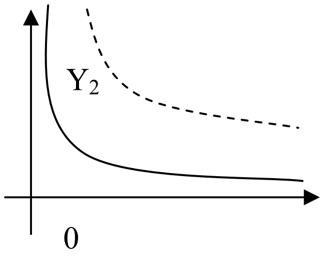
ფუნქციები სრული ურთიერთჩანაცვლებით თავს იჩენს მაშინ, როდესაც Y_1 და Y_2 ურთიერთშემცვლელებია. მაგალითად, თუ Y_1 ჩაია და Y_2 ყავა.

სარგებლიანობის (2) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდის ასაგებად ვპოულობთ Y_2-ს:

$$Y_2 = \left(\frac{U}{\alpha_0 Y_1^{\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}}; \qquad (6)$$

(Y_1,Y_2) სიბრტყეზე α_0, α_1, α_2 და U_0-ის დაფიქსირებით, მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 2).

რაც უფრო მეტია U_0-ის მნიშვნელობა, მით მეტად არის დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან განურჩევლობის მრუდი.

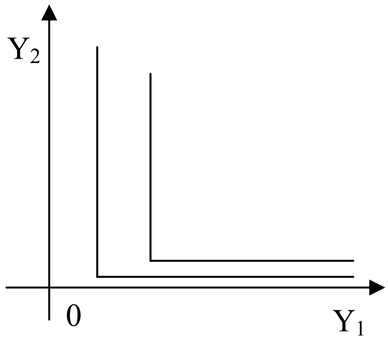


ნახ. 2

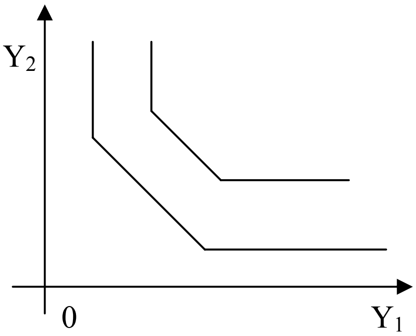
სარგებლიანობის (6) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდს აქვს (ნახ. 2)-ით მოცემული სახე.

ფუნქციები სრული ურთიერთშემავსებლებით თავს იჩენს მაშინ, როცა Y_1 და Y_2 ერთად გამოიყენება; მაგალითად, თუ Y_1 ჩაია და Y_2 შაქარი (ნახ.3).

შერეული ტიპის ფუნქციისათვის გვაქვს (ნახ.4)-ით მოცემული განურჩევლობის მრუდები.



ნახ.3



ნახ.4

ზღვრული სარგებლიანობა და ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა

მოხმარების თეორიის ძირითადი ცნებებია **ზღვრული სარგებლიანობა** *და* **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა**. ვთქვათ, $U=U(Y_1,Y_2)$ - სარგებლიანობის ფუნქციაა.

განსაზღვრება: სარგებლიანობის ფუნქციის i-ური ცვლადის მიხედვით ცვლილების $\frac{\partial U}{\partial Y_1}$ სიჩქარეს, i-ური დოვლათის **ზღვრული სარგებლიანობა** ეწოდება.

მაგალითად: სარგებლიანობის $U=\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2$ ფუნქციისათვის Y_1 დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობაა $\frac{\partial U}{\partial Y_1}=\alpha_1$; ხოლო Y_2 დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება $\frac{\partial U}{\partial Y_2}=\alpha_2$. (**ზღვრული სარგებლიანობა - marginal utility).**

კობ-დუგლასის ნეოკლასიკური ტიპის სარგებლიანობის ფუნქციისათვის $U = \alpha_0\, Y_1^{\alpha_1}\, Y_2^{\alpha_2}$, სადაც $\alpha_1+\alpha_2 \le 1$. მივიღებთ, რომ დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება:

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_0 Y_2^{\alpha_2} \alpha_1 Y_1^{\alpha_1 - 1} = \frac{\alpha_1 U}{Y_1}.$$

Y_1 დოვლათის dY_1 სიდიდით შემცირებისას სარგებლიანობის წინანდელი U დონის შესანარჩუნებლად საჭიროა, მეორე დოვლათის მოხმარება გავზარდოთ dY_2 სიდიდით.

ამ ცვლილების ამსახველ ფარდობას უწოდებენ **ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმას (marginal rate of substitution).**

განსაზღვრება: სამომხმარებლო დოვლათის **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა (MRS)** ეწოდება შემდეგი გამოსახულებით მოცემულ ფარდობას:

$$MRS = -\left.\frac{dY_2}{dY_1}\right|_{U=const} . \qquad \textbf{(7)}$$

თუ, გავითვალისწინებთ, რომ $A=(Y_1,Y_2)$ და $B(Y_1+dY_1;Y_2+dY_2)$ წერტილები, განურჩევლობის ერთსა და იმავე მრუდზე ძევს, (ე.ი. შეესაბამება სარგებლიანობის ფუნქციის ერთი და იგივე დონეს), გვექნება:

$$U(Y_1,Y_2)=U(Y_1+dY_1;Y_2+dY_2) \qquad (8)$$

ე.ი. $dU=0$, რაც ნიშნავს, რომ

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1}dY_1 + \frac{\partial U}{\partial Y_2}dY_2 = 0 \qquad (9)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$MRS = -\left.\frac{dY_2}{dY_1}\right|_{U=const} = \left.\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial Y_2}}\right|_{U=const} \qquad (10)$$

P.S. მაშასადამე, ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა გამოისახება დოვლათთა ზღვრული სარგებლიანობების ფარდობით.

მოთხოვნის ფუნქცია

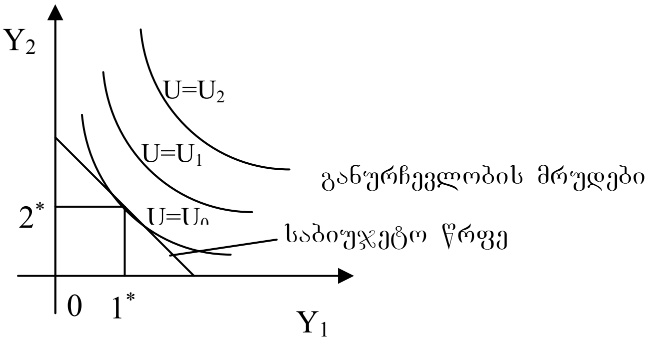
თითოეული პიროვნებისათვის დამახასიათებელი მოთხოვნილება, სხვადასხვა სახის დოვლათზე, აისახება განურჩევლობის მრუდის მეშვეობით, ხოლო მომხმარებლის მოთხოვნის შეზღუდვა მოიცემა საბიუჯეტო შეზღუდვების პირობებით.

თუ, პირველი და მეორე დოვლათის საბაზრო ფასებს აღვნიშნავთ P_1 და P_2-ით, ხოლო მომხმარებლის შემოსავალს (ბიუჯეტს) B-თი, მაშინ დოვლათის მოხმარების (Y_1,Y_2) გეგმისათვის საბიუჯეტო შეზღუდვის უტოლობასა და ბიუჯეტის წრფის განტოლებას მოცემული პიროვნებისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$P_1Y_1+P_2Y_2\leq B \qquad (11)$$

ტოლობა (11)-ში, იძლევა **საბიუჯეტო შეზღუდვის განტოლებას**.

განვიხილოთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე (ნახ. 5).



ნახ. **5**

ჩავთვალოთ, რომ თითოეული პიროვნება ბიუჯეტის შეზღუდვის ფარგლებში ცდილობს თავისი შემოსავალი ისე გადაანაწილოს სხვადასხვა სამომხმარებლო დოვლათს შორის, რომ მიაღწიოს სარგებლის მაქსიმიზაციას:

$$\begin{aligned} &U \to \max, \\ &P_1Y_1 + P_2Y_2 \leq B \end{aligned} . \qquad (12)$$

დოვლათის შესაბამისი მნიშვნელობების $\left(Y_1^*, Y_2^*\right)$ ერთობლიობას **მოხმარების ოპტიმალური გეგმა** ეწოდება. ის აღნიშნავს ბიუჯეტის წრფისა და განურჩევლობის მრუდის შეხების წერტილს.

მაშასადამე, როდესაც საბაზრო ფასები და პიროვნების შემოსავალი მოცემულია, პიროვნების მოხმარების ოპტიმალური გეგმა განისაზღვრება **სარგებლის მაქსიმიზაციის პრინციპით, ბიუჯეტში არსებული შეზღუდვებისას**. მოხმარების ოპტიმალური გეგმა იცვლება ფასისა და შემოსავლის (პიროვნების ბიუჯეტის) მიხედვით.

$$\begin{cases} Y_1^* = \varphi_1\left(P_1, P_2, B\right), \\ Y_2^* = \varphi_2\left(P_1, P_2, B\right), \end{cases} \qquad (13)$$

ამ ფუნქციებს უწოდებენ **საოჯახო მეურნეობის მოთხოვნის ფუნქციებს**.

სარგებლიანობის ფუნქციის თვისებები

სარგებლიანობის $U=U(Y_1,Y_2)$ ფუნქციის არსიდან გამომდინარე სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს შემდეგი ზოგადი (ე.ი. ფუნქციის ტიპისგან დამოუკიდებლად) თვისებები:

1) თუ Y_2=const., მაშინ Y_1–ის ზრდასთან ერთად სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება; ასევე, თუ Y_1=const და Y_2 იზრდება, მაშინ სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება, სხვაგვარად

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} > 0 \wedge \frac{\partial U}{\partial Y_2} > 0. \tag{14}$$

ე.ი. **პროდუქტების ზღვრული სარგებლიანობა დადებითია.**

2) თითოეული პროდუქტის ზღვრული სარგებლიანობა კლებულობს, თუ მისი მოხმარების მოცულობა იზრდება.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} < 0 \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial Y_2^2} < 0. \tag{15}$$

ამ თვისებას უწოდებენ ზღვრული სარგებლიანობის კლების კანონს. ეს თვისება იმას ნიშნავს, რომ საქონლის თითოეულ სახეობაზე მოხმარება შეზღუდულია მოთხოვნით.

3) დოვლათის თითოეული სახეობის ზღვრული სარგებლიანობა იზრდება, თუ იზრდება დოვლათის სხვა სახეობის რაოდენობა. ამ შემთხვევაში საქონელი, რომლის რაოდენობა ფიქსირებულია, შედარებით დეფიციტურია. ამიტომ მისი ყოველი დამატებითი ერთეული იძენს მეტ ღირებულებას და შეიძლება უფრო ეფექტურად იქნეს გამოყენებული. თვისება მართებულია, დოვლათის მხოლოდ იმ Y_1 *და* Y_2 სახეობებისათვის, რომლებიც ერთმანეთს სრულად ვერ ჩაანაცვლებენ. იგი ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1 \partial Y_2} > 0. \tag{16}$$

ზემოთმოყვანილი თვისებები გვიჩვენებს, რომ (10)-ის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ უტოლობა:

$$\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\frac{\partial U}{\partial Y_2}} < 0; \qquad (17)$$

რაც ნიშნავს, რომ Y_1-ის ზრდასთან Y_2 მცირდება.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$\frac{d^2Y_2}{dY_1^2} = \frac{d}{dY_1}\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right) = -\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y_1 \partial Y_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\left(\frac{\partial U}{\partial Y_2}\right)^2}, \qquad (18)$$

სამივე თვისებიდან გამომდინარე ვღებულობთ, რომ

$$\frac{d^2Y_2}{dY_1^2} > 0, \qquad (19)$$

ე.ი. $Y_2=f(Y_1)$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ანუ აქვს განურჩევლობის მრუდის გრაფიკზე (ნახ.5), გამოსახული ფორმა.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა მომხმარებლის არჩევანზე.

ამოცანა: ვთქვათ გვაქვს შემდეგი სახის სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U = Y_1 \cdot Y_2, \qquad (20)$$

ცნობილია Y_1 და Y_2 პროდუქტების შესაბამისი P_1 და P_2 ფასები. გვაქვს საბიუჯეტო შეზღუდვა

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 Y_2 \le B, \qquad (21)$$

ამ პირობებში იპოვეთ ოპტიმალური გეგმა, ე.ი. Y_1 და Y_2 პროდუქტების ის რაოდენობა, რომლის დროსაც სარგებლიანობის U ფუნქცია მაქსიმალურია.

ამოხსნა: ცხადია, რომ (21) პირობა ოპტიმალურ წერტილში იძენს ტოლობის ნიშანს, ამიტომ გვაქვს ამოცანა:

$$\begin{cases} U = Y_1 \cdot Y_2 \to \max \\ P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 = B \end{cases}; \qquad (22)$$

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = Y_1 \cdot Y_2 + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 - B); \qquad (23)$$

ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს შემდეგი სახე აქვს:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = Y_2 + \lambda P_1 = 0 \qquad\qquad Y_2 = -\lambda P_1,$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = Y_1 + \lambda P_2 = 0 \quad ; \quad \text{ე. ი.} \quad Y_1 = -\lambda P_2, \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = P_1 Y_1 + P_2 Y_2 - B = 0 \qquad\qquad P_1 Y_1 + P_2 Y_2 = B,$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\begin{cases} \dfrac{Y_2}{Y_1} = \dfrac{P_2}{P_2} \\ P_1 \cdot Y_1 + P_2 Y_2 = B \end{cases}. \tag{25}$$

პირველი პირობა ნიშნავს, რომ ორივე პროდუქტზე დახარჯული ფულის რაოდენობა უნდა იყოს ერთნაირი ($P_1 \cdot Y_1 = P_2 \cdot Y_2$). მაშინ (25)-ის მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ **მოთხოვნის ფუნქციებს:**

$$Y_1 = \frac{B}{2P_1}; \tag{26}$$

$$Y_2 = \frac{B}{2P_2}. \tag{27}$$

ამრიგად, თითოეულ პროდუქტზე გაწეული ხარჯი შეადგენს მომხმარებლის საერთო შემოსავლის ნახევარს (ეს დაკავშირებულია სარგებლიანობის ფუნქციის Y_1 და Y_2-ის მიმართ სიმეტრიულობასთან).

მომხმარებლის არჩევანის ზოგადი მოდელი

ვთქვათ, გვაქვს სარგებლიანობის ფუნქცია $U=U(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$, სადაც Y_i - i-ური დოვლათის რაოდენობაა, $P=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$-ფასების ვექტორი და B- მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მივიღებთ მომხმარებლის არჩევანის ზოგად ამოცანას:

$$U(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \to \max, \tag{28}$$

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \ldots + P_n Y_n \le B, \tag{29}$$

$$Y_i > 0, \qquad i = \overline{1,n}\,. \tag{30}$$

ჩავწეროთ ლაგრანჟის ფუნქცია (28)-(30) ამოცანისათვის:

$$L = U(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n - B). \tag{31}$$

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$L_{,i} = U_{,i} + \lambda P_i = 0, \quad i=\overline{1,n}; \tag{32}$$

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n = B, \tag{33}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{U_{,i}}{U_{,j}} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}. \tag{34}$$

ასე რომ, ოპტიმუმის წერტილში ნებისმიერი ორი დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობის ფარდობა, უდრის მათი საბაზრო ფასების ფარდობას.

P.S. ცხადია, რომ ზოგადად მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახით წარმოდგენა შეუძლებელია თუ, არ შემოვიფარგლებით გარკვეული სახის სარგებლიანობის ფუნქციებით. სარგებლიანობის ფუნქციის ასაგებად გამოიყენება რეგრესიული ანალიზის მეთოდები, შესაბამისი თვისებების გათვალისწინებით.

ამოცანა. ამოხსენით მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა და იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, როცა დოვლათზე ფასებია: $P_1=10$; $P_2=2$, ბიუჯეტი $B=60$, ხოლო სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

ა) $U = Y_1 \cdot Y_2 \to \max;$

ბ) $U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{2/3} \to \max;$

გ) $U = (Y_1 - 1)^{1/4} \cdot (Y_2 - 3)^{3/4} \to \max;$

დ) $U = 3(5 - Y_1)^2 + (7 - Y_2)^2 \to \min.$

გამოსახეთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე.

ლაბორატორიული სამუშაო № 21

ამოცანა: მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:

$U = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}$

საქონლის ფასებია: $P_1 = 0.75$ $P_2 = 0.5$ და ბიუჯეტი $B = 25$.

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა; ანუ Y_1-ისა და Y_2-ის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია. (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია).

ამოხსნა:

შევადგინოთ საბიუჯეტო შეზღუდვა:

$P_1Y_1 + P_2Y_2 = B$,

$0.75Y_1 + 0.5Y_2 = 25$.

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L(Y_1, Y_2, \lambda) = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2} + \lambda(25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2)$$

და შესაბამისი შეზღუდვები:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0$$

მივცეთ სისტემის სახე:

$$\begin{cases} 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0 \\ 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}}{0.75} = \dfrac{12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2}}{0.5}; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}\right) \cdot 0.5 = \left(12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2}\right) \cdot 0.75; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6Y_2^{1/2} Y_2^{1/2} \cdot 0.5 = 6Y_1^{1/2} Y_1^{1/2} \cdot 0.75; \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3Y_2 = 4.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$25 - 0.75Y_1 - 0.5 \cdot 1.5Y_1 = 0$$

$$25 - 1.5Y_1 = 0$$

$$Y_1 = 16.67$$

$$Y_2 = 25$$

პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქციის შეტანა:

$$U(Y1, Y2) := 12Y1^{\frac{1}{2}} \cdot Y2^{\frac{1}{2}}$$

საწყისი მონაცემების განსაზღვრა:

$$Y1 := 1$$

$$Y2 := 1$$

შეზღუდვათა სისტემა:

Given

$$Y1 \geq 0$$

$$Y2 \geq 0$$

$$0.75 \cdot Y1 + 0.5 \cdot Y2 = 25$$

სარგებლიანობის ფუნქციის მაქსიმუმის შესაბამისი მნიშვნელობები:

$$R := \text{Maximize}(U, Y1, Y2)$$

$$R = \begin{pmatrix} 16.667 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$U(R_0, R_1) = 244.949$$

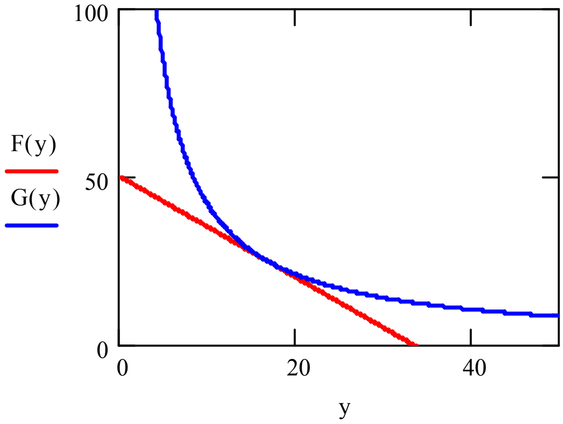
ავაგოთ საბიუჯეტო შეზღუდვის გრაფიკი და განურჩევლობის მრუდი ერთ საკოორდინატო სიბრტყეზე. ამისათვის Y2 გამოვსახოთ Y1-ის საშუალებით, მივიღებთ ფუნქციას:

$$F(y) := \frac{25 - 0.75 \cdot y}{0.5}$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად, მოვახდინოთ ასეთივე გამოსახვა და შევიტანოთ ჩვენს მიერ გამოთვლილი სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$G(y) := \left(\frac{244.949}{12 \cdot y^{\frac{1}{2}}} \right)^2$$

ავაგოთ გრაფიკი:



მიღებული შეხების წერტილი წარმოადგენს მომხმარებლის არჩევანის შესაბამის წერტილს.

პროგრამა **Matlab-ზე**

ფუნქცია ფაილი:

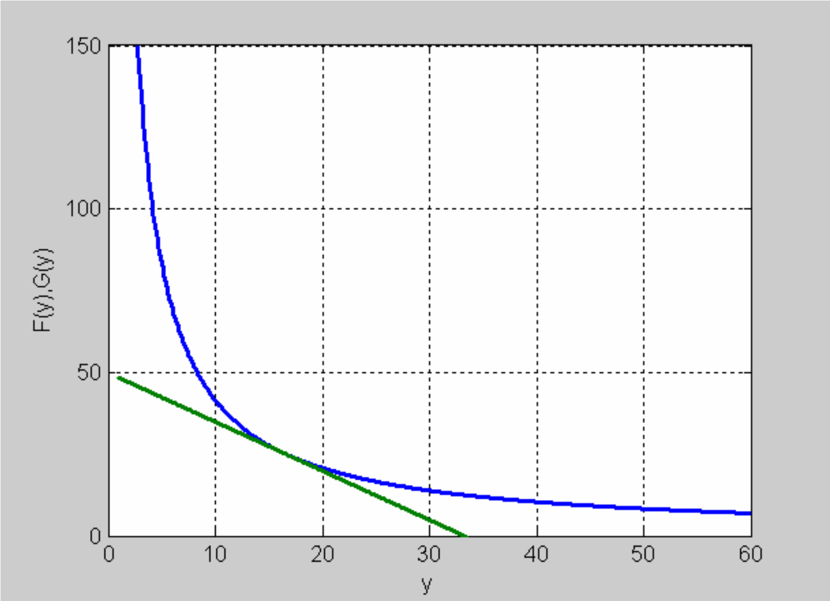
```
function f=myfun(x)
f=-12*x(1)^0.5*x(2)^0.5;
```

პროგრამა ფაილი:

```
x0=[0;0];
Aeq=[0.75,0.5];
beq=25;
[R,fval1]=fmincon(@myfun,x0,[],[],Aeq,beq);
R
fval=abs(fval1)
%
y=1:0.1:60;
G=(fval./(12*y.^0.5)).^2;
F=(25-0.75*y)/0.5;
plot(y,G,y,F)
xlabel('y')
ylabel('F(y),G(y)')
grid on
```

შედეგები:

```
R =
   16.6667
   25.0000
fval =
  244.9490
```



სავარჯიშო:

მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:

$U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}$

საქონლის ფასებია: $P_1 = 0.75$ $P_2 = 0.5$ და ბიუჯეტი $B = 29$.

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა; ანუ Y_1-ისა და Y_2-ის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია. (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია)

თემა 22: რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქცია და მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა

სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)=(Y_1-a_1)^{\alpha_1}:(Y_2-a_2)^{\alpha_2}:\dots:(Y_n-a_n)^{\alpha_n}\to\max \tag{1}$$

სადაც, a_i i-ური დოვლათის აუცილებელი მინიმალური რაოდენობაა, რომელიც შეისყიდება ნებისმიერ შემთხვევაში და არ წარმოადგენს არჩევანის საგანს. იმისათვის, რომ a_i, $i=\overline{1,n}$ დოვლათთა ერთობლიობა, სრულად იქნეს შეძენილი, აუცილებელია, რომ B ბიუჯეტი იყოს ამ დოვლათთა ერთობლიობის შესაძენად საჭირო ფულის რაოდენობაზე მეტი. $\alpha_i>0$ ხარისხის მაჩვენებლები ახასიათებენ, მომხმარებლისათვის დოვლათთა ფარდობით ღირებულებას, ანუ ახასიათებენ იმას, თუ რამდენად მეტად სასურველია ესა, თუ ის სახის დოვლათი მომხმარებლისათვის.

(1) მიზნის ფუნქციაზე საბიუჯეტო შეზღუდვების დამატებით

$$P_1\cdot Y_1+P_2\cdot Y_2+\dots+P_n\cdot Y_n\le B$$
$$Y_i\ge a_i,\qquad i=\overline{1,n} \tag{2}$$

მივიღებთ რ. სტოუნის მოდელს.

რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციისათვის, მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამოსახსნელად, შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L=\prod_{i=1}^{n}(Y_i-a_i)^{\alpha_i}+\lambda(P_1\cdot Y_1+P_2\cdot Y_2+\dots+P_n\cdot Y_n-B) \tag{3}$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები იძლევა:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_i}=\frac{\alpha_i\cdot U(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)}{Y_i-a_i}+\lambda P_i=0,\ \ i=\overline{1,n} \tag{4}$$

$$\text{ე.ი.}\quad Y_i=a_i-\frac{\alpha_i\cdot U}{\lambda P_i}, \tag{5}$$

ასევე, გვაქვს პირობა:

$$P_1\cdot Y_1+P_2\cdot Y_2+\dots+P_n\cdot Y_n=B \tag{6}$$

გავამრავლოთ (5)-ში ყოველი i-ური განტოლება λP_i-ზე და შევაჯამოთ i-ს მიმართ, მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i\cdot\lambda P_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda a_iP_i-\sum_{i=1}^{n}a_iU \tag{7}$$

(6)-ის გამოყენებით (7)-დან ვღებულობთ:

$$\lambda\cdot B-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot P_i=-U\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\cdot \tag{8}$$

სხვაგვარად:

$$-\frac{U}{\lambda}=\frac{B-\sum_{i=1}^{n}a_iP_i}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \qquad (9)$$

(5)-ში (9)-ის ჩასმით გვექნება მოთხოვნის ფუნქცია:

$$Y_i=a_i+\frac{\alpha_i\left(B-\sum_{i=1}^{n}P_ia_i\right)}{P_i\sum_{i=1}^{n}\alpha_i}, \quad \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{n}} \qquad (10)$$

ამ ფუნქციის ინტერპრეტირება იოლია. თავდაპირველად გამოიყენება ყოველი a_i დოვლათის მინიმალურად აუცილებელი რაოდენობა, შემდეგ გამოითვლება ფულის დარჩენილი რაოდენობა, რომელიც გადანაწილდება მოცემული სახის დოვლათის სასურველობის α_i მნიშვნელობის (წონადობის) მიხედვით პროპორციულად. ფულის რაოდენობის P_i ფასზე გაყოფით მივიღებთ მინიმუმის გარდა დამატებით შესაძენ i–ური დოვლათის რაოდენობას და დავუმატებთ მას a_i-ს.

ლაბორატორიული სამუშაო № 22

ამოცანა: სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში a_1=18 ცალ პურს P_1=0.5 ლარის ღირებულებით, a_2=4 კგ კარტოფილს P_2=1.20 ლარის ღირებულებით, a_3= 3კგ ხორცს P_3=8 ლარის ღირებულებით, a_4=2კგ თევზს P_4=10 ლარის ღირებულებით და a_5=10 ცალ კვერცხს P_5=0.25 ლარის ღირებულებით, თუ α_1=5; α_2=4; α_3=2; α_4=3; α_5=1. მომხმარებლის ბიუჯეტი თვეში 500 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერით. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

ამოხსნა: რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

$U(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5)=(Y_1-a_1)^{\alpha_1}(Y_2-a_2)^{\alpha_2}(Y_3-a_3)^{\alpha_3}(Y_4-a_4)^{\alpha_4}(Y_5-a_5)^{\alpha_5}$

საბიუჯეტო შეზღუდვებს აქვთ სახე:

$P_1Y_1+ P_2Y_2+ P_3Y_3+ P_4Y_4+ P_5Y_5\le B$

$Y_1\ge a_1\ \ Y_2\ge a_2\ \ Y_3\ge a_3\ \ Y_4\ge a_4\ \ Y_5\ge a_5$

ამოცანის ანალიზური ამოხსნის შედეგად მივიღეთ, რომ მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე(10):

$$Y_i = a_i + \frac{\alpha_i \left(B - \sum_{i=1}^{5} P_i a_i \right)}{P_i \sum_{i=1}^{5} \alpha_i}, \ \ \mathrm{i} = \overline{1,5}\,.$$

მოთხოვნის ფუნქციის მნიშვნელობები გამოვითვალოთ ორნაირად: მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამონახსნიდან და ანალიზური ამონახსნიდან.

პროგრამა Mathcad-ზე

მონაცემების შეყვანა და ამოცანის ორნაირი ამონახსნი

ამოცანის ამონახსნი, ანალიზური ამონახსნის ბაზაზე

ORIGIN:= 1

$B := 500$

$$a := \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \alpha := \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ 8 \\ 10 \\ 0.25 \end{pmatrix} \quad i := 1..5 \quad Y1_i := a_i + \alpha_i \cdot \frac{\left(B - \sum_{i=1}^{5} P_i \cdot a_i \right)}{P_i \cdot \sum_{i=1}^{5} \alpha_i}$$

$$Y1 = \begin{pmatrix} 311.133 \\ 101.711 \\ 10.328 \\ 10.794 \\ 127.253 \end{pmatrix}$$

$U(Y1) = 8.449 \times 10^{26}$

ამოცანის ამონახსნი არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ბაზაზე

$$U(Y) := \prod_{i=1}^{5} \left(Y_i - a_i \right)^{\alpha_i}$$

$Y := a$

Given

$Y \ge a$

$$\sum_{i=1}^{5} P_i \cdot Y_i \le B$$

$R := \mathrm{Maximize}(U, Y)$

შედეგები:

$$R = \begin{pmatrix} 311.56 \\ 101.589 \\ 10.327 \\ 10.792 \\ 127.099 \end{pmatrix}$$

$U(R) = 8.449 \times 10^{26}$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
% არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა მონტე-კარლოს
%მეთოდით
a=[18, 4, 3, 2, 10];
alfa=[5 4 2 3 1];
P=[0.5 1.2 8 10 0.25];
B=500;
b=[315,105,12,12,130];
y=[310,100,8,8,120];
%
Umax=prod((y-a).^alfa);
for j=1:10^7
   r=rand(1,5);
     y=a+(b-a).*r;
     y1=sum(P.*y);
     if y1<=B
   U=prod((y-a).^alfa);
   if U>=Umax
       Umax=U;
       ymax=y;
   end
end
end
Umax
ymax
```

შედეგები:

```
Umax =
  8.3663e+026
ymax =
```

311.6736 102.1869   10.7863   10.6214 116.0728

```
% არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნა ანალიზური
%მეთოდით

a=[18; 4; 3; 2; 10];
alfa=[5;4;2;3;1];
P=[0.5;1.2;8;10;0.25];
B=500;
Y1=a+alfa*(B-sum(P.*a))./(P*sum(alfa))
Umax=prod((Y1-a).^alfa)
```

შედეგები:

```
Y1 =

  311.1333
  101.7111
   10.3283
   10.7940
  127.2533

Umax =
  8.4488e+026
```

სავარჯიშო:

სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში a_1=15 ცალ პურს P_1=0.5 ლარის ღირებულებით, a_2=5 კგ კარტოფილს P_2=1.20 ლარის ღირებულებით, a_3= 3კგ ხორცს P_3=10 ლარის ღირებულებით, a_4=2კგ თევზს P_4=10 ლარის ღირებულებით და a_5=10 ცალ კვერცხს P_5=0.25 ლარის ღირებულებით, თუ α_1=5; α_2=3; α_3=2; α_4=4; α_5=1. მომხმარებლის ბიუჯეტი თვეში 400 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერით. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

თემა 23: ფუნქციის ელასტიურობა

განვიხილოთ y=f(x) ფუნქციონალური დამოკიდებულება. დამოუკიდებელი x ცვლადის ცვლილებას მივყავართ y ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილებამდე. ისმის კითხვა: როგორ გავზომოთ დამოკიდებული y ცვლადის მგრძნობიარობა x-ის ცვლილების მიმართ?! ამ ცვლილების ერთ-ერთ მაჩვენებელს წარმოადგენს ფუნქციის წარმოებულის ცნება y', რაც ახასიათებს y-ის ცვლილების სისწრაფეს x-ის ცვლილებისას.

თუმცა, ეკონომიკაში წარმოებულის ცნების გამოყენება ხშირად მოუხერხებელია, ვინაიდან ის დამოკიდებულია საზომი ერთეულის არჩევაზე. მაგალითად, თუ განვიხილავთ შაქარზე მოთხოვნის y ფუნქციას x=p ფასზე დამოკიდებულებით, ვნახავთ, რომ p ფასის თითოეული მნიშვნელობის დროს, წარმოებულის რიცხვითი მნიშვნელობა $y'=\frac{\partial y}{\partial x}$ დამოკიდებულია იმაზე, რომ შაქარზე მოთხოვნა იზომება კილოგრამებში თუ, ცენტნერებში. პირველ შემთხვევაში წარმოებული იზომება კგ/ლარი-ში, შესაბამისად, მისი მნიშვნელობა ფასის ერთიდაიმავე მნიშვნელობის დროს, მოთხოვნის სიდიდის ერთეულიდან გამომდინარე, იქნება სხვადასხვა. ამიტომ, ეკონომიკაში ფუნქციის ცვლილების მგრძნობიარობის გასაზომად შეისწავლიან x-ისა და y-ის არა აბსოლუტური, არამედ მათი ფარდობითი ან პროცენტული ცვლილებების კავშირს (მაშინ, როცა ფიზიკაში ამ სირთულეს თავს არიდებენ ერთეულთა საერთაშორისო SI სისტემის შემოტანით).

განსაზღვრება: y=f(x) **ფუნქციის ელასტიურობა** ეწოდება x და y ცვლადების ფარდობითი ცვლილებების შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი $\Delta x \to 0$.

სხვაგვარად, თუ y=f(x) ფუნქციის ელასტიურობას აღვნიშნავთ $E_x(y)$-ით, მაშინ

$$E_x(y) \overset{def}{\equiv} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} \tag{1}$$

განსაზღვრება: f(x) ფუნქციის **საშუალო მნიშვნელობა** x წერტილში ეწოდება ფარდობას f(x)/x.

თუ, f(x) ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ Af(x)-ით, გვექნება

$$Af \overset{def}{\equiv} \frac{f(x)}{x}, \tag{2}$$

განსაზღვრება: ფუნქციის **ზღვრული მნიშვნელობა** ეწოდება ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებულს (აღნიშვნა Mf).

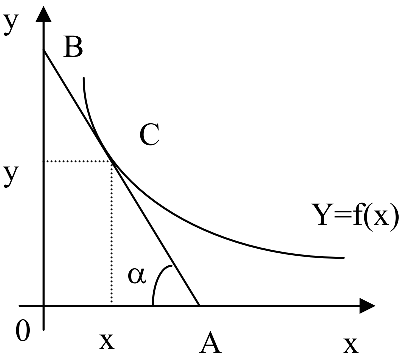
ამრიგად, ეს ორი განსაზღვრება საშუალებას გვაძლევს განვმარტოთ f(x) ფუნქციის ელასტიურობა, როგორც ზღვრული მნიშვნელობის შეფარდება საშუალო მნიშვნელობასთან, ანუ

$$E_x f = \frac{Mf}{Af} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}, \tag{3}$$

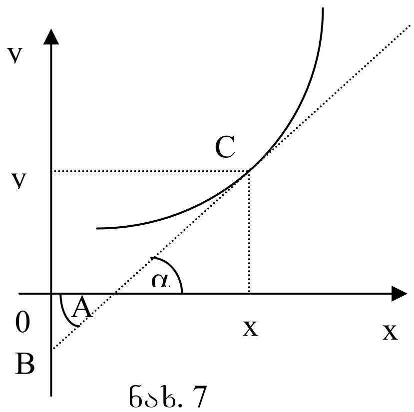
ზოგჯერ მოსახერხებელია **ელასტიურობის წარმოდგენა ლოგარითმული წარმოებულის სახით.**

$$Ef = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}, \tag{4}$$

გადავიდეთ ელასტიურობის ცნების გეომეტრიულ ინტერპრეტაციაზე.



ნახ. 6



ნახ. 7

ჩვენ განვიხილავთ ორ შემთხვევას ნახ. 6, სადაც $f(x)$ ფუნქცია კლებულობს და ნახ.7 – სადაც $f(x)$ ფუნქცია იზრდება.

განსაზღვრების თანახმად $y = f(x)$ ფუნქციის ელასტიურობა $C(x;y)$ წერტილში მოიცემა ფორმულით: $E_x(y) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -tg\alpha$ (ნახ. 6-ის შემთხვევაში) და $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$ (ნახ. 7-ის შემთხვევაში) წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის მიხედვით, ამრიგად, ერთმანეთის პარალელურად განვიხილავთ ორ შემთხვევას: ა) ნახ. 6 და ბ) ნახ. 7.

ცხადია, რომ

ა) $E_x(y) = -tg\alpha \cdot \frac{x}{y}$;

ბ) $E_x(y) = tg\alpha \cdot \frac{x}{y}$.

ცხადია, რომ თუ

ა) $x = |Ox|;$

$y = |Oy|.$

ბ) $x = |Ax| + |OA|;$

$y = |Oy|.$

მაშინ მივიღებთ:

ა) $E_x(y) = -tg\alpha \dfrac{|Ox|}{|Oy|};$ $\quad |Ox| = |yC| = |BC|\cos\alpha;$ $\quad |Oy| = |xC| = |AC|\sin\alpha;$

ბ) $E_x(y) = tg\alpha \dfrac{|Ax| + |OA|}{|Oy|};$

$|Ax| = |AC|\cos\alpha; \qquad |OA| = |AB|\cos\alpha; \qquad |Oy| = |AC|\sin\alpha.$

რაც საშუალებას იძლევა $y = f(x)$ ფუნქციის ელასტიურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

ა) $E_x(y) = -tg\alpha \cdot \dfrac{|BC|\cos\alpha}{|AC|\sin\alpha} = -\dfrac{|BC|}{|AC|};$

ბ) $E_x(y) = tg\alpha \cdot \dfrac{|AC|\cos\alpha + |AB|\cos\alpha}{|AC|\sin\alpha} = \dfrac{|BC|}{|AC|}.$

ამგვარად, $y = f(x)$ ფუნქციის ელასტიურობა ტოლია:

$E_x(y) = -\dfrac{|BC|}{|AC|},$

როცა C წერტილში გამავალი AB მხების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის A და B წერტილები განლაგებულია C წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს (ნახ. 6-ის შემთხვევაში); ხოლო თუ გადაკვეთის A და B წერტილები განლაგებულია C წერტილის ერთ მხარეს (ნახ. 7-ის შემთხვევაში), მაშინ

$E_x(y) = \dfrac{|BC|}{|AC|}.$

განვიხილოთ ფუნქციის ელასტიურობის ოპერატორის თვისებები:

1) ელასტიურობა წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ერთეულებში იზომება x და y სიდიდეები. ე.ი.

$$E_{dx}(by) = E_x(y), \tag{5}$$

დამტკიცება:

$E_{dx}(b \cdot y) = \dfrac{d(by)}{d(ax)} \cdot \dfrac{ax}{by} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{ax}{by} = E_x(y).$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

2) ურთიერთშებრუნებული ფუნქციების ელასტიურობები ასევე ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{6}$$

დამტკიცება:

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

3) ერთიდაიგივე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის ნამრავლის ელასტიურობა ტოლია ელასტიურობათა ჯამისა:

$$E_x(U \cdot V) = E_x(U) + E_x(V). \tag{7}$$

დამტკიცება:

$$E_x(U \cdot V) = \frac{d(U \cdot V)}{dx} \cdot \frac{x}{U \cdot V} = \frac{U' \cdot V + V' \cdot U}{U \cdot V} \cdot x = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) + E_x(V)$$

4) ერთიდაიგივე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის შეფარდების ელასტიურობა ტოლია ელასტიურობათა სხვაობისა:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = E_x(U) - E_x(V) \tag{8}$$

დამტკიცება:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{U}{V}} = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2} \cdot \frac{xV}{U} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} - \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) - E_x(V)$$

5) ერთიდაიგივე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის ჯამის ელასტიურობა გამოითვლება ფორმულით:

$$E_x(U+V) = \frac{UE_x(U) + VE_x(V)}{U+V}. \tag{9}$$

დამტკიცება:

$$E_x(U+V) = \frac{\partial(U+V)}{\partial x} \cdot \frac{x}{U+V} = (U' + V') \cdot \frac{x}{U+V} = \frac{U \cdot \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + V \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V}}{U+V} =$$

$$= \frac{U \cdot E_x(U) + V \cdot E_x(V)}{U+V}.$$

6) $E_x(x) = 1$

დამტკიცება:

$$E_x(x) = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{x}{x} = 1,$$

შედეგები:

ა) $E_x\left(U^n(x)\right)=nE_x(U)$;

ბ) ხარისხოვანი $y=x^n$ ფუნქციის ელასტიურობა $E_x\left(x^n\right)=nE_x(x)=n$;

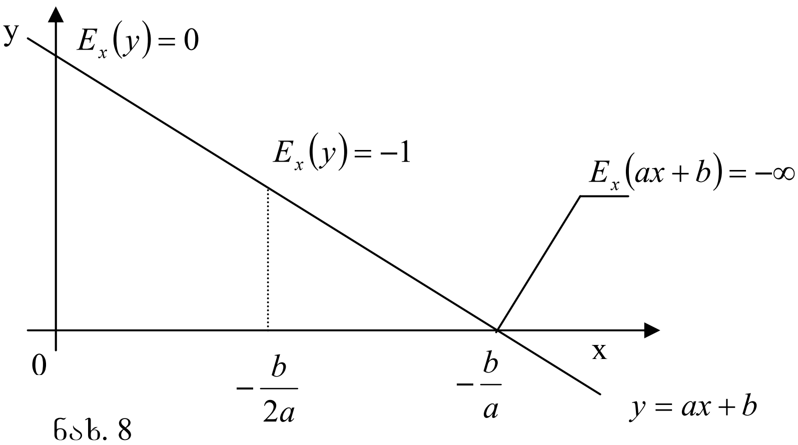
გ) მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქციის ელასტიურობა

$$E_x\left(a^x\right)=\frac{da^x}{dx}\cdot\frac{x}{a^x}=a^x\ln a\cdot\frac{x}{a^x}=x\ln a;$$

დ) წრფივი $y=ax+b$ ფუნქციის ელასტიურობა

$$E_x(ax+b)=\frac{d(ax+b)}{dx}\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}.$$

გრაფიკულად განვიხილოთ ელასტიურობის სიდიდის ცვლილება წრფივი $Y=ax+b$ ფუნქციისათვის (ნახ. 8).



ნახ. 8

როგორც ვხედავთ, წრფივი ფუნქციის ელასტიურობა დამოკიდებულია წერტილზე, რომელშიც მას განვიხილავთ, და მისი სიდიდე იცვლება $-\infty$-დან (აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში) ნულოვან მნიშვნელობამდე (ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში).

ელასტიურობის ცნების გამოყენება ეკონომიკაში

ვთქვათ, გვაქვს Y დოვლათზე **მოთხოვნის ფუნქცია** $Y=f(p,B)$, სადაც p – ქონების ფასია, ხოლო B – მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით

$$E_p(Y)=\frac{\partial Y}{\partial P}\cdot\frac{P}{Y} \tag{10}$$

გვიჩვენებს Y დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას, როცა ამ ქონების ფასი 1%-ით იცვლება.

$E_p(Y)$ ახასიათებს მომხმარებლის მგრძნობიარობას პროდუქციაზე ფასის ცვლილების მიმართ. **თუ მოთხოვნის ფასობრივი**

ელასტიურობა აბსოლუტური სიდიდით მეტია 1-ზე, მაშინ მოთხოვნას უწოდებენ ელასტიურს, თუ ნაკლებია 1-ზე, მაშინ მოთხოვნას უწოდებენ არაელასტიურს. ხოლო თუ $\left|E_p(Y)\right| = 1,$ მაშინ ამბობენ, რომ მოთხოვნას აქვს ერთეულოვანი ელასტიურობა.

სიდიდეს
$$E_B(Y) = \frac{\partial Y}{\partial B} \cdot \frac{B}{Y} \tag{11}$$
უწოდებენ მოთხოვნის ელასტიურობას შემოსავლების მიხედვით. ეს სიდიდე ახასიათებს Y დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას მომხმარებლის B შემოსავლის ერთი პროცენტით შეცვლისას.

მოთხოვნის დადებითი ელასტიურობა შემოსავლის მიხედვით ახასიათებს დოვლათის ხარისხიან საქონელს, ხოლო უარყოფითი ელასტიურობა – უხარისხო საქონელს (რომელსაც ყიდულობენ მხოლოდ დაბალი ფასისა და მომხმარებლის მცირე B შემოსავლის გამო).

ასე, რომ მეურნეობის დარგში შემოსავლის მიხედვით, მოთხოვნის მაღალი დადებითი ელასტიურობის კოეფიციენტი $E_B(Y)$ მიუთითებს იმაზე, რომ მისი წილი ეკონომიკურ ზრდაში მეტია, ვიდრე წილი ეკონომიკის სტრუქტურაში. ამიტომ, მას აქვს შანსი სამომავლო ზრდისა და განვითარებისათვის. პირიქით, თუ $E_B(Y) < 1,$ მაშინ Y- საქონელს მოელის ჩაწოლა და წარმოების შემცირების პერსპექტივა.

Y_i**-დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის შესწავლისას, როცა სხვა** Y_j **- დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცვლელი ან შემავსებელი)** p_j **ფასი იცვლება ერთი პროცენტით, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის ცნება.**
$$E_{pj}(Y_i) = \frac{\dfrac{dY_i}{Y_i}}{\dfrac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i} \tag{12}$$

თუ $E_{pj}(Y_i) > 0 \Rightarrow$ i და j დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებლებია. თუ $E_{pj} < 0 \Rightarrow$ დოვლათები ურთიერთშემავსებელია.

დასკვნები:

1) მოთხოვნის ფუნქციის, ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფო მაღალია დოვლათის ჩანაცვლებისუნარიანობა;

2) მოთხოვნის ფუნქციის, ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მაღალია მოცემულ დოვლათზე ხარჯების ხვედრითი წონა მომხმარებლის შემოსავალში;

3) მოთხოვნის ფუნქციის, ფასის მიხედვით ელასტიურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო დაბალია მოცემულ დოვლათზე მოთხოვნის სუბიექტური აუცილებლობა;
4) მოთხოვნის ფუნქციის, ფასის მიხედვით ელასტიურობა იზრდება რელაქსაციის დროის შუალედის ზრდასთან ერთად.

ლაბორატორიული სამუშაო №23.1

ამოცანა: ორი პროდუქტისათვის, რომელთა ფასებია შესაბამისად P_1 და P_2, მოთხოვნა წარმოდგენილია სტოუნის ფუნქციით. უნდა ვიპოვოთ თითოეულ პროდუქტზე მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა:

$$B := 120$$

$$a_1 := 2$$

$$a_2 := 3$$

$$\alpha_1 := 0.4$$

$$\alpha_2 := 0.6$$

ფასის მიხედვით მოთხოვნის სტოუნის ფუნქცია მოცემული ორი პროდუქტისათვის:

$$Y1(P1,P2) := a_1 + \frac{\alpha_1\left(B - P1\cdot a_1 - P2\cdot a_2\right)}{P1\cdot\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}$$

$$Y2(P1,P2) := a_2 + \frac{\alpha_2\left(B - P1\cdot a_1 - P2\cdot a_2\right)}{P2\cdot\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}$$

მათი ელასტიურობის გამოთვლა:

$$E1(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP1}Y1(P1,P2)\right)\cdot\frac{P1}{Y1(P1,P2)}$$

$$E2(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP2}Y2(P1,P2)\right)\cdot\frac{P2}{Y2(P1,P2)}$$

ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ელასტიურობის გამოთვლა:

$P1 := 15$

$P2 := 12$

E1(P1,P2):=-0.651
E2(P1,P2):=-0.789

პროგრამა Matlab-ზე

```
a1=2;
a2=3;
alfa1=0.4;
alfa2=0.6;
B=120;
syms P1 P2
Y1=a1+(alfa1*(B-P1*a1-P2*a2)/(P1*(alfa1+alfa2)));
Y2=a2+(alfa2*(B-P1*a1-P2*a2)/(P2*(alfa1+alfa2)));
EY1=P1/(Y1)*diff(Y1,P1);
EY2=P2/(Y2)*diff(Y2,P2);
P1=15;
P2=12;
EY1=eval(EY1)
EY2=eval(EY2)
```

შედეგები:

```
EY1 =
  -0.6512
EY2 =
  -0.7895
```

ლაბორატორიული სამუშაო №23.2

ამოცანა: მოცემული გვაქვს მოთხოვნის ფუნქცია:

Y:=100-2·B·P

იპოვეთ მოთხოვნის ელასტიურობა ფასისა და ბიუჯეტის მიხედვით, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები; იპოვეთ, ელასტიურობის მნიშვნელობები ფასისა და ბიუჯეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ამოხსნა:

მოცემული გვაქვს მოთხოვნის ფუნქცია:

$$Y = 100 - 2B \cdot P$$

დავუშვათ, რომ მომხმარებლის ბიუჯეტია:

$$B=1000$$

ხოლო საქონლის ფასი:

$$P=50$$

ვიპოვოთ მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით:

$Y=100-2000P$

$$E_P(Y)=\frac{\partial Y}{\partial P}\cdot\frac{P}{Y}=-2000\cdot\frac{50}{100-2000P}=-2000\cdot\frac{50}{100-100000}=\frac{1000}{999}\approx 1$$

რადგან მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით აბსოლუტური მნიშვნელობით 1-ის ტოლია, გვაქვს ერთეულოვანი ელასტიურობა.

ვიპოვოთ მოთხოვნის ელასტიურობა ბიუჯეტის მიხედვით:

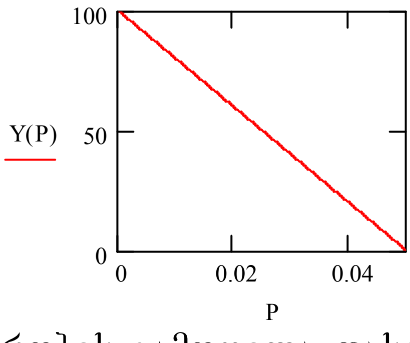
$Y=100-2\cdot 50B=100-100B$

$$E_B(Y)=\frac{\partial Y}{\partial B}\cdot\frac{B}{Y}=-100\cdot\frac{1000}{100(1-B)}=\frac{1000}{999}\approx 1$$

მოთხოვნის ელასტიურობის დადებითი მნიშვნელობა შემოსავლის მიხედვით ახასიათებს ხარისხიან საქონელს.

პროგრამა Mathcad-ზე

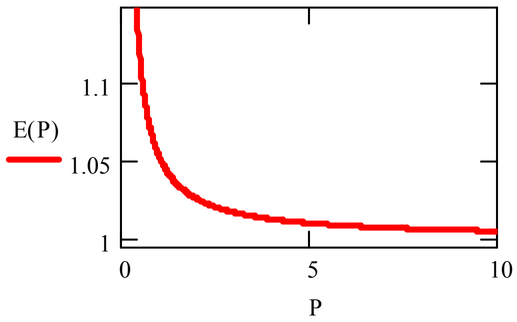
$Y(P) := 100 - 2000\cdot P$



მოთხოვნის ელასტიურობის გამოთვლა ფასის მიხედვით:

$$E(P) := \left[\frac{d}{dP}(100-2000\cdot P)\right]\cdot\frac{P}{100-2000\cdot P}$$

ავაგოთ მოთხოვნის ფასის მიხედვით ელასტიურობის ფასზე დამოკიდებულების გრაფიკი, საიდანაც ჩანს, თუ როგორ იცვლება ელასტიურობის მნიშვნელობა ფასის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის:

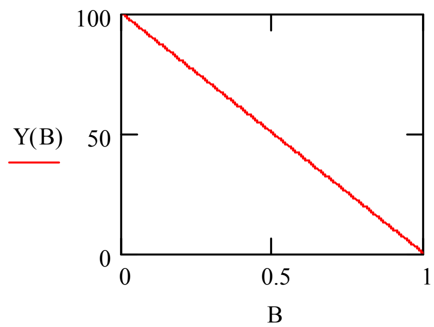


P := 50

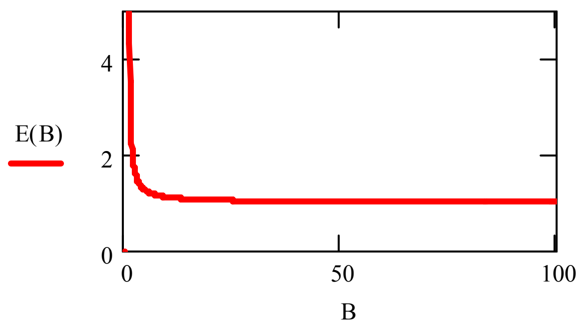
E(P) := 1.001

ავაგოთ მოთხოვნისა და მოთხოვნის, ბიუჯეტის მიმართ ელასტიურობის, ბიუჯეტზე დამოკიდებულების გრაფიკები,

$Y(B) := 100 - 100 \cdot B$



$$E(B) := \left[\frac{d}{dB}(100 - 100 \cdot B)\right] \cdot \frac{B}{100 - 100 \cdot B}$$



B:=1000
E(B):=1.001

პროგრამა **Matlab-ზე**

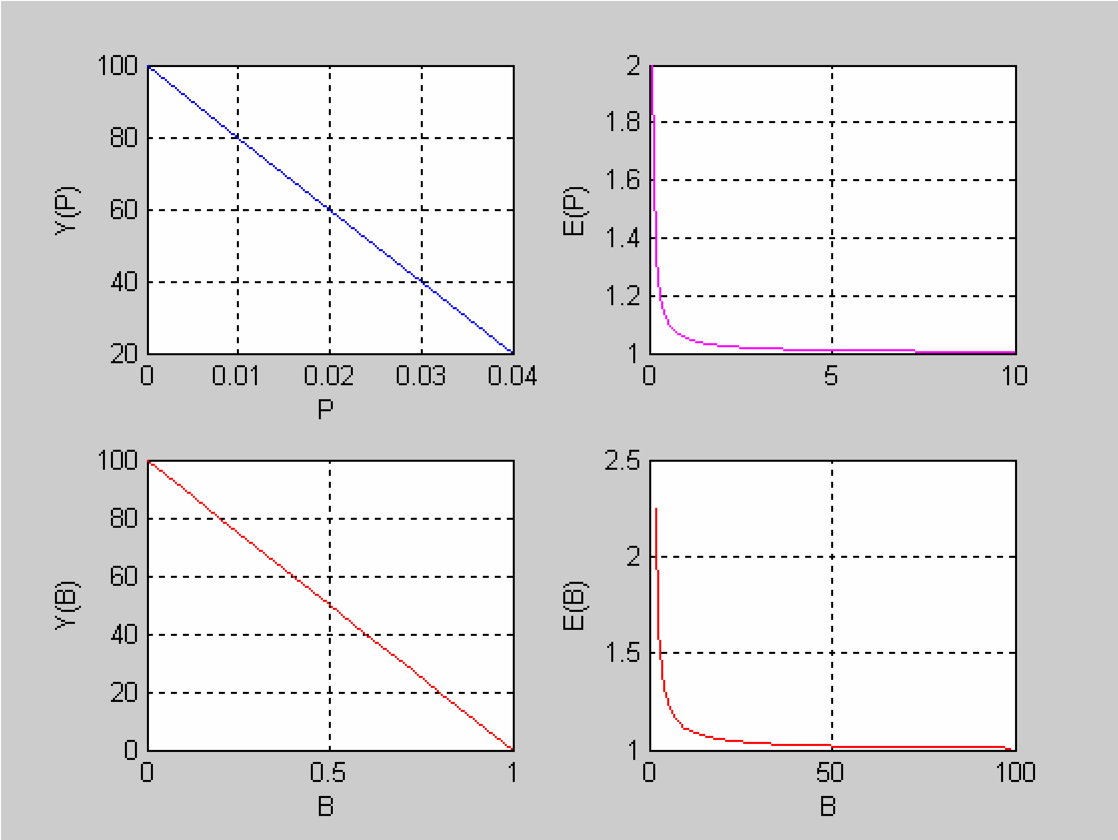
```
P=0:0.01:0.04;Y=100-2000*P;
subplot(2,2,1);plot(P,Y,'b');grid on;xlabel('P');ylabel('Y(P)')
%
syms P
```

```
Y=100-2000*P;
EP=P/(Y)*diff(Y,P)
%
P=50
EP=eval(EP)
%
syms B
Y=100-100*B;
EB=B/(Y)*diff(Y,B)
%
B=1000
EB=eval(EB)

% ავაგოთ გრაფიკი:
P=0.1:0.1:10;
EP =-2000*P./(100-2000*P);
subplot(2,2,2);plot(P,EP,'m');grid on;ylabel('E(P)')
B=0:0.1:1;
YB =100-100*B;
subplot(2,2,3);plot(B,YB,'r');grid on;xlabel('B');ylabel('Y(B)')
B=1:0.8:100;
EB=-100*B./(100-100*B);
subplot(2,2,4);plot(B,EB,'r');grid on;xlabel('B');ylabel('E(B)')
```

შედეგები:

```
EP =-2000*P/(100-2000*P)
P =    50
EP =    1.0010
EB =   -100*B/(100-100*B)
B =        1000
EB =    1.0010
```



სავარჯიშო:

მოცემული გვაქვს მოთხოვნის ფუნქცია:

$$Y{:=}1000-8\cdot B\cdot P$$

იპოვეთ მოთხოვნის ელასტიურობა ფასისა და ბიუჯეტის მიხედვით, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები; იპოვეთ, ელასტიურობის მნიშვნელობები ფასისა და ბიუჯეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

თემა 24: მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა ფასის მიხედვით

Y_i-დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის ცვლილების შესასწავლად, როცა სხვა Y_j - დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცვლელი ან შემავსებელი) p_j ფასი იცვლება ერთი პროცენტით, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის ცნება.

$$E_{p_j}(Y_i) = \frac{\frac{dY_i}{Y_i}}{\frac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i} \qquad (1)$$

თუ, $E_{p_j}(Y_i) > 0 \Rightarrow$ i და j დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებლებია(ყავა და ჩაი). თუ $E_{p_j} < 0 \Rightarrow$ დოვლათები ურთიერთშემავსებელია(შაქარი და ჩაი).

ლაბორატორიული სამუშაო №24

ამოცანა: მოცემული გვაქვს ორი პროდუქტი, შესაბამისი ფასები და მომხმარებლის ბიუჯეტი. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა.
ამოხსნა: შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა.

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა:

$n := 2$

$a1 := 2$

$a2 := 3$

$\alpha1 := 0.4$

$\alpha2 := 0.6$

$B := 120$

მოთხოვნა მოცემულია რ. სტოუნის ფორმულებით:

$$Y1(P1, P2) := a1 + \frac{\alpha1 \cdot (B - P1 \cdot a1 - P2 \cdot a2)}{P1 \cdot (\alpha1 + \alpha2)}$$

$$Y2(P1, P2) := a2 + \frac{\alpha2 \cdot (B - P1 \cdot a1 - P2 \cdot a2)}{P2 \cdot (\alpha1 + \alpha2)}$$

მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობის გამოთვლა ფასის მიხედვით:

$$EY1(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP2}Y1(P1,P2)\right)\cdot\frac{P2}{Y1(P1,P2)}$$

$$EY2(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP1}Y2(P1,P2)\right)\cdot\frac{P1}{Y2(P1,P2)}$$

ფასის მნიშვნელობების შეტანა:

$P1 := 15 \qquad P2 := 12$

ელასტიურობის გამოთვლა:

EY1(P1,P2):=-0.279
EY2(P1,P2):=-0.263

ე.ი. დოვლთები ურთიერთშემავსებლებია.

პროგრამა Matlab-ზე

```
n=2;
a1=2;
a2=3;
alfa1=0.4;
alfa2=0.6;
B=120;
syms P1 P2
Y1=a1+(alfa1*(B-P1*a1-P2*a2)/(P1*(alfa1+alfa2)));
Y2=a2+(alfa2*(B-P1*a1-P2*a2)/(P2*(alfa1+alfa2)));
EY1=P2/(Y1)*diff(Y1,P2)
EY2=P1/(Y2)*diff(Y2,P1)
%
P1=15
P2=12
EY1=eval(EY1)
EY2=eval(EY2)
```

შედეგები:

```
EY1 =   -0.2791
EY2 =   -0.2632
```

სავარჯიშო:

ამოცანა: მოცემული გვაქვს სამი პროდუქტი, შესაბამისი ფასები და მომხმარებლის ბიუჯეტი აირჩიეთ დამოუკიდებლად. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიურობა. ავხსნათ მიღებული შედეგების ეკონომიკური არსი.

თემა 25: ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით

Y დოვლათის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით ტოლია:

$E_p(pY)=E_p(p)+\mathrm{E_p}(\mathrm{Y})=1+\mathrm{E_p}(\mathrm{Y})$ ვინაიდან მოთხოვნის, ფასის მიხედვით ელასტიურობა მუდამ უარყოფითია, ამ ფორმულიდან გამოდის, რომ ელასტიური მოთხოვნის დროს ამონაგები იზრდება Y-ის რაოდენობის ზრდასთან, ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ხოლო არაელასტიურის დროს – კლებულობს.

მაგალითად, კარგი მოსავლის დროს ფერმერების შემოსავლები შემცირდება, რადგან სოფლის მეურნეობის პროდუქტებზე მოთხოვნის ელასტიურობა საკმაოდ დაბალია. ანალოგიურად, თუ გავზრდით აქციზებს არყის წარმოებაზე, ბიუჯეტში შემოსავლებმა შეიძლება იკლოს, ვინაიდან სხვა ქვეყნებიდან იმპორტირებული იქნება იაფი არაყი. რასაც ადგილი ჰქონდა 1993 წელს სსრკ-ში (გორბაჩოვის კამპანია). ანალოგიური შეცდომები უფრო ადრე დაშვებული იყო ვაშინგტონში 80-იან წლებში, როცა 6%-ით გაზარდეს გადასახადი ბენზინზე, რაზეც მოთხოვნის ელასტიურობა ამერიკელი ეკონომისტების შეფასებით შეადგენდა 0.2-ს, თუმცა, ამან მოახდინა მოთხოვნის 33%-ით დაცემა, რაც შეესაბამება ელასტიურობის 5.5-ს ტოლ მნიშვნელობას. ასე, რომ დიდი მნიშვნელობა აქვს მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახის სწორ დადგენას, რაც ხორციელდება ჩვენს მიერ უკვე განხილული მრავლობითი რეგრესიული ანალიზის მეშვეობით.

ლაბორატორიული სამუშაო №25

ამოცანა: მოცემული გვაქვს საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია $\mathrm{Y(P):=28-0.25\cdot P}$. ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით $EPY(P)$, ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის $\mathrm{P := 12}$.

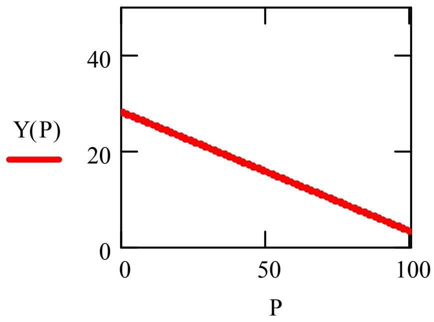
ამოხსნა:

პროგრამა **Mathcad**-ზე

საქონლის მოთხოვნის ფუნქციის ფასზე დამოკიდებულების მიხედვით:

$$\mathrm{Y(P) := 28 - \frac{1}{4}\cdot P}$$

ავაგოთ მოთხოვნის ფასზე დამოკიდებულების გრაფიკი:



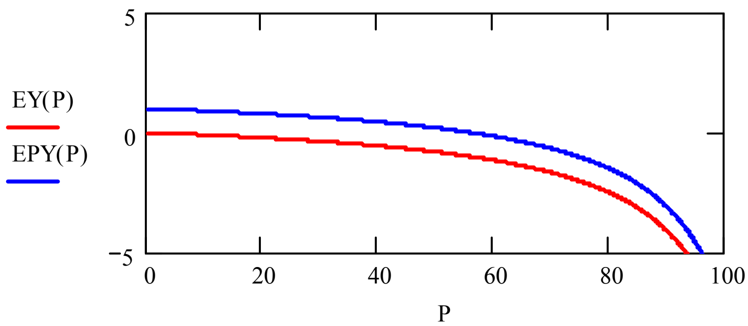
გამოვთვალოთ საქონლის მოთხოვნის ელასტიურობა ფასის მიხედვით:

$$EY(P) := \left(\frac{d}{dP}Y(P)\right)\cdot\frac{P}{Y(P)}$$

და საქონლის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიურობა მისი ფასის მიხედვით:

$$EPY(P) := 1 - |EY(P)|$$

ორივე მათგანის გრაფიკები ავაგოთ ერთ სიბრტყეზე:



ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ამონაგების ელასტიურობა :

$$P := 12$$
$$EPY(P):=0.88$$

მივიღეთ, რომ Y-ის რაოდენობის ზრდასთან, ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ამონაგები მცირდება.

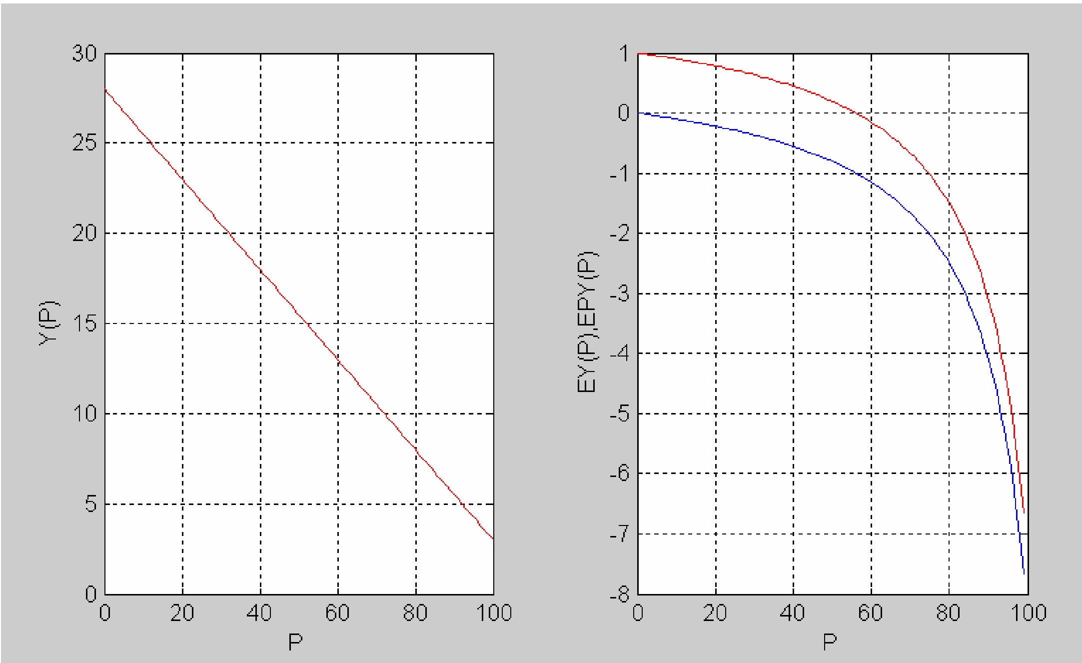
პროგრამა **Matlab-ზე**

```
P=0:100;
y=28-0.25*P;
subplot(1,2,1);plot(P,y,'r');grid on;xlabel('P') ;ylabel('Y(P)')
%
syms P
Y=28-0.25*P;
EP=P/(Y)*diff(Y,P)
EPY=1-abs(EP)
```

```
%
P=12
EPY=eval(EPY)
%
P=00.1:100;
EP =-1/4*P./(28-1/4*P);
EPY =1-1/4*abs(P./(28-1/4*P));
subplot(1,2,2);plot(P,EP,P,EPY,'r')
grid on
xlabel('P')
ylabel('EY(P),EPY(P)')
```

შედეგები:

```
EP =-1/4*P/(28-1/4*P)
EPY =1-1/4*abs(P/(28-1/4*P))
P =    12
EPY =    0.8800
```



საკარჯიშო:

ამოცანა: მოცემული გვაქვს საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია Y(P):=29-0.2·P. ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიურობა ფასის მიხედვით $EPY(P)$ ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის P := 12 .

თემა 26: წარმოების თეორია. საწარმოო ფუნქცია

წარმოების თეორიაში საწარმოო საქმიანობის საკითხები ყველაზე ძირითადია, მაგრამ ჩვენ თავიდან შემოვიტანთ, ადრე, მოხმარების თეორიაში შემოტანილის ანალოგიურ ცნებებს; რათა ადვილი იყოს ეკონომიქსის პრობლემატიკასთან დაკავშირებული საკითხების ფორმალიზაცია.

სარგებლიანობის ფუნქციის დონის წირებს წარმოადგენენ **განურჩევლობის მრუდები.** წარმოების თეორიაში სარგებლიანობის ფუნქციას შეესაბამება **საწარმოო ფუნქციის ცნება**, ხოლო, საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს–**იზოკვანტას** უწოდებენ. მაშასადამე, იზოკვანტას ცნება წარმოების თეორიაში, ისეთივე როლს თამაშობს, როგორც განურჩევლობის მრუდის ცნება მოხმარების თეორიაში. აქ, არა მარტო ანალოგიასთან გვაქვს საქმე, არამედ ფუნქციის სახეებიც თანხვდება.

განსაზღვრება: $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ სახის ფუნქციას, სადაც, $x_1,x_2,...x_n$ გამოყენებული რესურსების მოცულობებია, ხოლო Y გამოშვებული პროდუქციის მოცულობა, **საწარმოო ფუნქცია** ეწოდება.

მოცემული პროდუქტის გამომშვები ცალკეული საწარმოსათვის (ფირმისათვის) საწარმოო ფუნქცია $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას აკავშირებს (ნატურალურ ან ღირებულებით გამოსახულებაში) სხვადასხვა სახის შრომით დანახარჯებთან; ასევე დროის, ნედლეულის სხვადასხვა სახეობის, მაკომპლექტებელი ნაწილების, ენერგიის, ძირითადი კაპიტალის დანახარჯებთან. ასეთი ტიპის საწარმოო ფუნქცია კარგად ახასიათებს წარმოების მოქმედ ტექნოლოგიას.

საწარმოო ფუნქციის აგებისას, ცალკეული რეგიონის ან მთლიანად ქვეყნისათვის, პროდუქტის წლიური გამოშვების Y მაჩვენებლად უფრო ხშირად იღებენ რეგიონის ან შესაბამისად ქვეყნის ერთობლივ პროდუქტს (შემოსავალს), აღრიცხულს უცვლელ ფასებში, რესურსებად განიხილავენ ძირითად კაპიტალს ($x_1=K$ – წლის განმავლობაში გამოყენებული მოცულობა) და ცოცხალ შრომას ($x_2=L$ – ერთი წლის განმავლობაში ცოცხალი მუშახელის ერთეულთა რაოდენობა). ამრიგად, **მაკროეკონომიკაში განიხილავენ ორფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას.**

$$Y=f(K,L) \qquad (1)$$

P.S. ზოგჯერ, გამოყენებული ბუნებრივი რესურსების მოცულობის დამატებით გათვალისწინების ხარჯზე, განიხილავენ მაკროეკონომიკის სამფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას. რაც მეტია

ფაქტორთა რიცხვი, მით უფრო ზუსტია მოდელი, მაგრამ უფრო რთულიც.

საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები

ა) წარმოებაში გამოყენებული რესურსების ხარჯის გაზრდით პროდუქციის გამოშვება ვერ შემცირდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{2}$$

განსაზღვრება: G სიმრავლეს ეწოდება $Y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ საწარმოო ფუნქციის **ეკონომიკური არეალი**, თუ $\forall\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$ წერტილისათვის G სიმრავლიდან ადგილი აქვს (2) თანადობას.

მაგალითი: თუ რესურსად განიხილება მიწა, მაშინ სამუშაო ძალის უცვლელობისას, იჯარით აღებული მიწის ფართობის გაზრდამ შეიძლება კი არ გაზარდოს შემოსავალი, პირიქით, შეამციროს კიდეც. ის მაქსიმალური ფართობი, რომელამდეც დაქირავებული მიწის ფართობის გაზრდა მომგებიანია, წარმოადგენს მოცემულ მაგალითში რესურსის ეკონომიკური არეალის ზღვარს. ეკონომიკური არეალის გარეთ, რესურსის ეფექტურობა იწყებს დაცემას;

ბ) **განსაზღვრება:** $Y=f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ საწარმოო ფუნქციის ცვლილების სისწრაფეს, x_i რესურსის ცვლილების მიხედვით, i-ური **რესურსის ზღვრული ეფექტურობა** ეწოდება. ცხადია, რომ i-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა წარმოადგენს i-ური ცვლადის შემცველი საწარმოო ფუნქციის კერძო წარმოებულს: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

სხვა რესურსების რაოდენობის მუდმივობის პირობებში, ერთი რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის გამოყენების ეფექტურობა მცირდება. საწარმოო ფუნქციის ამ მეორე თვისებას უწოდებენ **კლებადი ზღვრული ეფექტურობის თვისებას**. ეს პირობა მოცემულია უტოლობით:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^{\,2}} < 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{3}$$

გ) ერთი i-ური რესურსის გაზრდით სხვა j-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,n} \qquad i \neq j \tag{4}$$

დ) საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს $k > 0$ ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. როცა $k > 1$, წარმოების მასშტაბის t-ჯერ გაზრდით $(t > 1)$ წარმოების მოცულობა იზრდება t^k-ჯერ, ე.ი.

ადგილი აქვს წარმოების მასშტაბის ზრდით გამოწვეულ წარმოების ეფექტურობის ზრდას. როცა $k=1$, გვაქვს წარმოების მუდმივი ეფექტურობა წარმოების მზარდი მასშტაბების პირობებში (ან გვაქვს ხვედრითი გამოშვების დამოუკიდებლობა წარმოების მასშტაბისაგან - constant returns to scale).

ეს პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n) . \tag{5}$$

რამდენიმე რესურსის მქონე, ტიპიური საწარმოო ფუნქციები

ა) როგორც მიკრო, ასევე მაკროეკონომიკურ დონეზე საწარმოო საქმიანობის მოდელირებისათვის სხვებზე ხშირად გამოიყენება **კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია:**

$$Y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} . \tag{6}$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ **მულტიპლიკაციურ**(ნამრავლის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას.

განიხილავენ შემთხვევას, როცა $x_1 = K$ გამოყენებული ძირითადი კაპიტალის მოცულობაა (ძირითადი ფონდები), ხოლო $x_2 = L$ ცოცხალ სამუშაო ძალაზე დანახარჯები. ე.ი.

$$Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1} . \tag{7}$$

ბ) **წრფივ საწარმოო ფუნქციას** შემდეგი სახე აქვს:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n . \tag{8}$$

იგი ე.წ. **ადიტიური**(ჯამის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას წარმოადგენს. გადასვლა მულტიპლიკაციურიდან ადიტიურ საწარმოო ფუნქციაზე ხდება გალოგარითმებით.

მართლაც, (6)-დან გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln Y = \ln\alpha_0 + \alpha_1 \ln x_1 + (1-\alpha_1)\ln x_2 . \tag{9}$$

ანუ გადავდივართ ადიტიურ ფორმაზე.

უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ კობ-დუგლასის (7) ფუნქცია. ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha_1} . \tag{10}$$

განსაზღვრება: წილადებს $\frac{Y}{L}$ და $\frac{K}{L}$ შესაბამისად **შრომის მწარმოებლურობა და შრომის კაპიტალაღჭურვილობა** ეწოდება.

განსაზღვრება: $\frac{Y}{K}$ წილადს **კაპიტალის მწარმოებლურობა** ან **კაპიტალუკუგება.** ეწოდება

განსაზღვრება: $\frac{K}{Y}$ წილადს **პროდუქციის გამოშვების კაპიტალტევადობა** ეწოდება, ხოლო $\frac{L}{Y}$-ს – **პროდუქციის გამოშვების შრომატევადობა.**

საწარმოო ფუნქციისათვის $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ პარამეტრებს პოულობენ გაუსის უმცირესი კვადრატთა მეთოდით, გამოიყენებენ რესურსებისა და გამოშვებების მოცულობათა დროით მწკრივებს.

P.S.: უნდა გავითვალისწინოთ, რომ, თუ საწარმოო ფუნქციის პარამეტრებს განვსაზღვრავთ T_0 დროის პერიოდში მოცემული დროითი მწკრივების საფუძველზე, მაშინ მიღებულმა საწარმოო ფუნქციამ შეიძლება მოგვცეს სარწმუნო შედეგები მომავლი დროის შუალედისათვის, რომელიც ხანგრძლივობით არ აღემატება $\frac{1}{3}T_0$-ს.

განსაზღვრება: წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს $Y = f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს (ჰიპერზედაპირს) **იზოკვანტა** ეწოდება.

P.S. როგორც ვხედავთ, იზოკვანტის ცნება საწარმოო ფუნქციისათვის, ანალოგიურია, განურჩევლობის მრუდის ცნებისა სარგებლიანობის ფუნქციისათვის.

განსაზღვრება: $Y = f(x_1, x_1, \ldots, x_n)$ **საწარმოო ფუნქციის** $E_{x_1}(Y)$ **ელასტიურობას** $i-$**ური რესურსის მიხედვით** უწოდებენ $i-$ური რესურსის M_i ზღვრული მწარმოებლურობის შეფარდებას მის A_i საშუალო მწარმოებლურობასთან $i-$ური რესურსის მიხედვით.

$$E_{x_i}(Y) = \frac{M_i Y}{A_i Y} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x_1, x_1, \ldots, x_n)}. \tag{11}$$

განსაზღვრება: ყველა რესურსის მიხედვით ელასტიურობათა ჯამს ეწოდება **წარმოების ელასტიურობა**:

$$E_x(Y) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(Y). \tag{12}$$

ამოცანა: შეამოწმეთ სრულდება, თუ არა საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები მულტიპლიკაციური და ადიტიური საწარმოო ფუნქციისათვის.

განსაზღვრება: $i-$ური რესურსის j-ურით **ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმას** უწოდებენ გამოსახულებას:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}, \quad i, j = \overline{1, n}; \tag{13}$$

გამოშვების Y მოცულობის მუდმივობის პირობებში.

ამოცანა: ორფაქტორიანი საწარმოო $Y = f(x_1, x_1)$ ფუნქციისათვის ჩამოაყალიბეთ თეორია ანალოგიური იმ თეორიისა, რომელიც

ჩამოვაყალიბეთ ორ დოვლათიანი სარგებლიანობის ფუნქციისათვის. შეისწავლეთ ამ შემთხვევაში იზოკვანტების სახე. დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში **ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმაა:**

$$R_{12} = \frac{Ex_1Y}{Ex_2Y} \cdot \frac{x_2}{x_1} \tag{14}$$

დინამიკური მოდელები ეკონომიკაში
ბაზრის მუშაობის ობობასქსელისებური მოდელი

აქამდე, ძირითადად განვიხილავდით სტატიკური ეკონომიკის ამოცანებს. ეხლა შევუდგეთ დინამიური ამოცანების შესწავლას, ანუ იმ ამოცანებისა, სადაც ეკონომიკის განმსაზღვრელი პარამეტრები – ფასები, მოთხოვნა, მიწოდება და ა.შ. იცვლება დროში და ურთიერთქმედებს ერთმანეთთან.

დავიწყოთ ბაზრის უმარტივესი მოდელით, რომელსაც უწოდებენ ობობასქსელისებურს (cobweb model).

ჩავთვალოთ, რომ ერთი საქონლის ბაზარზე, $D(t)$ მოთხოვნის ფუნქცია და $Y(t)$ მიწოდების ფუნქცია, $P(t)$ ფასის წრფივი ფუნქციებია ან $P(t-1)$ ფასისა, დროის წინა მომენტისათვის.

მოთხოვნის ფუნქცია:

$$D(t) = A_2 + A_1 \cdot P(t), \tag{15}$$

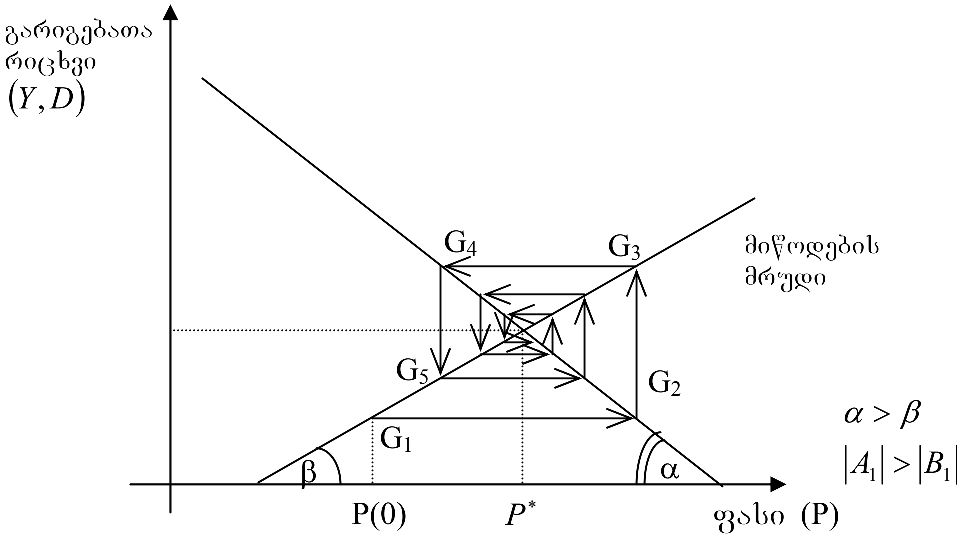
სადაც, A_1 და A_2 მუდმივი პარამეტრებია.

მიწოდების ფუნქცია:

$$Y(t) = B_2 + B_1 \cdot P(t-1), \tag{16}$$

სადაც B_1 და B_2 მუდმივი პარამეტრებია.

გამოვსახოთ მოთხოვნისა და მოწოდების მრუდები სიბრტყეზე, რომლის აბსცისათა ღერძზე განთავსებულია ფასები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე გარიგებათა რიცხვი.



ნახ. 9

ობო-

ბასქსელისებური მოდელის არსი მდგომარეობს შემდეგში:

ა) მიწოდება რეაგირებს ფასის ცვლილებაზე გარკვეული ლაგით (დაგვიანებით), სხვა სიტყვებით, დღევანდელი $Y(t)$ მიწოდება განისაზღვრება გუშინდელი $P(t-1)$ ფასით, ხოლო დღევანდელი $D(t)$ მოთხოვნა განისაზღვრება დღევანდელი ფასით.

ბ) ყოველი პერიოდის $P(t)$ ფასები დგინდება იმ დონეზე, რომ გათანაბრდეს მოთხოვნა და მიწოდება, ე.ი. იმ დონეზე, რომლის დროსაც $D(t)=Y(t)$.

ეს პროცესი თანდათან უახლოვდება წონასწორულ P^* ფასს, თუ $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|<1$. სხვაგვარად პროცესი განშლადია.

განვიხილოთ ნახ. 9 პროცესი იწყება G_1 წერტილიდან, როდესაც პროდუქტის ფასი ტოლია $P(0)$. ვინაიდან G_1 წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ქვემოთ, ფასი გაიზრდება G_2 წერტილამდე, შემდეგ ფასი გაიყინება და იზრდება პროდუქტის მოწოდების მოცულობა G_3 წერტილამდე. რადგან G_3 წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ზემოთ, ჩვენ გვაქვს იმაზე მეტი საქონელი, ვიდრე მოთხოვნაა მასზე, ამიტომ G_3 წერტილიდან G_4 წერტილამდე ფასები დაეცემა. G_4 წერტილში ფასი იყინება და მცირდება ბაზარზე მოწოდებული საქონლის მოცულობა G_5 წერტილამდე. ამის შემდეგ მოთხოვნა კვლავ აღემატება მიწოდებას და ფასები იზრდება და ა.შ.

ლაბორატორიული სამუშაო № 26

ამოცანა: საწარმოო ფუნქციას აქვს სახე:

$Y = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

ორფაქტორული საწარმოო ფუნქციის შემთხვევაში:

$Y = f(y_1, y_2)$.

დავამტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში:

$$R_{1,2} = \frac{E_{y1}(f)}{E_{y2}(f)} \cdot \frac{y_2}{y_1}$$

დამტკიცება: განვსაზღვროთ ელასტიურობა y_1, y_2-სთვის:

$$E_{y1}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{y_1}{f}; \qquad E_{y2}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{y_2}{f};$$

$$R_{1,2} = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2}} = -\frac{E_{y1}(f(y_1, y_2)) \cdot \dfrac{f(y_1, y_2)}{y_1}}{E_{y2}(f(y_1, y_2)) \cdot \dfrac{f(y_1, y_2)}{y_2}} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{f}{y_1} \cdot \frac{y_2}{f} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{y_2}{y_1}.$$

შევამოწმოთ სრულდება თუ არა საწარმოო ფუნქციის ძირითადი თვისებები, მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის.

1. მოცემული პროდუქტის რაოდენობის ზრდასთან ერთად ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} > 0$$

დავამტკიცოთ ეს მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის

$$f = \alpha_0 \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad \alpha_i \geq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot y_1^{\alpha_1 - 1} \cdot y_2^{1-\alpha_1} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 1};$$

$$\alpha_0, \alpha_1 > 0$$

$$y_1, y_2 > 0$$

ანუ:

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 1} > 0$$ რ.დ.გ.

2. მოცემული რესურსის მოხმარების ზრდასთან ერთად ამ რესურსის ეფექტურობა მცირდება:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^{\,2}} < 0$$

ვაჩვენოთ ეს თვისება კობ-დუგლასის ფუნქციისათვის:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^{\,2}} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(\frac{1}{y_2}\right) < 0$$ რ.დ.გ.

3. რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად სხვა რესურსის ეფექტურობა იზრდება.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(-\frac{y_1}{y_2^{\,2}}\right) \geq 0$$ რ.დ.გ.

ვაჩვენოთ, რომ საწარმოო ფუნქცია ერთგვაროვანია

$$f(Ky_1, Ky_2) = \alpha_0 \cdot (Ky_1)^{\alpha_1} \cdot (Ky_2)^{1-\alpha_1} = \alpha_0 K^{\alpha_1} K^{1-\alpha_1} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\,1-\alpha_1} = Kf(y_1, y_2)$$

რ.დ.გ.

სავარჯიშო:

მრავლობითი პოლინომიალური რეგრესიის მეთოდის გამოყენებით და რომელიმე წარმოების მონაცემთა ბაზის მიხედვით, ააგეთ, ამ წარმოების საწარმოო კობ-დუგლასის ფუნქცია და შეისწავლეთ საწარმოო ფუნქციის ელასტიურობა კაპიტალდაბანდებათა მიმართ.

თემა 27: ვალრასის თანმიმდევრული მიახლოების პროცესი ეროუ-გურვიცის მოდელში

მაკროეკონომიკური ანალიზის ერთ-ერთმა ფუძემდებელმა ლ. ვალრასმა შეიმუშავა ბაზრის ზოგადი ეკონომიკური წონასწორობის თეორია. ამ თეორიის დემონსტრირებისათვის განვიხილოთ ეროუ-გურვიცის მათემატიკური მოდელი საფონდო ბირჟების ან კვების პროდუქტების ბაზრის ფუნქციონირების აღწერისათვის, სადაც „სამართლიანი“ აუქციონისტი ადარებს ბაზრის მონაწილეთა მოთხოვნასა და მიწოდებას, და ფასების აწევით ან დაწევით არეგულირებს ყიდვა-გაყიდვას, ობობას ქსელისებური მოდელის ანალოგიურად.

ბაზრის ფუნქციონირების პროცესში მონაწილე სამეურნეო სუბიექტებად ავირჩიოთ ორი საწარმო, რომელთაგან თითოეული ფლობს ორივესთვის ხელმისაწვდომ ერთადერთ რესურსს (მაგ. ცოცხალ შრომას), აწარმოებს საბოლოო მოთხოვნისა და ერთი მოხმარების თითო სახეობის პროდუქციას, რომელიც ამ მოთხოვნის საგანს წარმოადგენს. შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ გაცვლა ხორციელდება ერთადერთი შუამავლის – აუქციონისტის მეშვეობით. ამ შემთხვევაში ეკონომიკური ციკლი ასე გამოიყურება:

ნახ. 13

ასეთი ეკონომიკისათვის რესურსების ოპტიმალური განაწილების პრობლემა ფორმულირდება შემდეგი სახით:

ა) პროდუქციის მოთხოვნისა და მიწოდების პირობები:

$$Y_i^s = F_i\left(L_i^d\right) \ge Y_i^d\ ; \tag{1}$$

სადაც, Y_i^S *არის* i-ური საწარმოს მიერ პროდუქტის მიწოდების მოცულობა, $Y^d{}_i$ – i-ურ პროდუქტზე მომხმარებლის მოთხოვნის მოცულობა, $L^d{}_i$ - რესურსზე i–ური საწარმოს მოთხოვნის მოცულობა, F_i – i–ური საწარმოს საწარმოო ფუნქცია.

ბ) რესურსის მიწოდებისა და მოთხოვნის პირობები:

$$\sum_{i=1}^{2} L_i^d \le L^s\ ; \tag{2}$$

გ) მომხმარებლის მიერ მაქსიმიზირებული სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U\left(Y_1^d, Y_1^d\right) \to \max; \qquad (3)$$

სადაც, U მომხმარებლის სარგებლიანობის ფუნქციაა.

შენიშვნა: მათემატიკურ ეკონომიკაში მოთხოვნის ცვლადები აღინიშნებიან d ასოთი (ინგლ. Demand –მოთხოვნა), ხოლო მიწოდების ცვლადები s ასოთი (ინგლ. Supply –მიწოდება).

ცხადია, რომ ეროუ-გურვიცის ეს ამოცანა, როდესაც მოცემულია F_i საწარმოო ფუნქცია და სარგებლიანობის ფუნქცია სტაციონარული ეკონომიკის პირობებში, შეიძლება ამოიხსნას მონტე-კარლოს მეთოდით. მართლაც, ეროუ-გურვიცის სტაციონარული მოდელისათვის სპეციალურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$I^* = U\left(Y_1^d, Y_2^d\right) - \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{2} L_i^d - L^s + \tau_1^2\right)^2 - \lambda_2\left(Y_1^d - F_1\left(L_1^d\right) + \tau_2^2\right)^2 - \lambda_3\left(Y_2^d - F_2\left(L_2^d\right) + \tau_3^2\right)^2. \quad (4)$$

ჩვენს შემთხვევაში $\lambda_i \cong \varepsilon^{-1}$ ($\varepsilon -$ შეზღუდვათა დაკმაყოფილების სიზუსტეა); თუმცა უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი პირობაც:

დ) i-ური საწარმოს მოგების მაქსიმიზაცია:

$$\pi_i = P_i \cdot F_i\left(L_i^d\right) - W \cdot L_i^d; \qquad (5)$$

სადაც, P_i არის i-ური საწარმოს პროდუქციის ფასი,

W – L რესურსის ფასია.

მაშინ, სტაციონარული ეკონომიკისათვის სპეციალური ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I = I^* + \sum_{i=1}^{2} \pi_i. \qquad (6)$$

თუმცა, ვალრასის საბაზრო პროცესი დინამიკურ პროცესს აღწერს, ანუ მოგება და ფასები დროის ფუნქციებია, ისევე, როგორც მოთხოვნა და მიწოდება; მოგების გამოსახულებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\pi_i(t) = P_i(t) \cdot F_i\left(L_i^d(t)\right) - W(t) \cdot L_i^d(t). \qquad (7)$$

ამ ამოცანის მონტე-კარლოს მეთოდით ამოსახსნელად დროის ყოველ მომენტში გვექნებოდა სხვადასხვა (6) ფუნქციები და მთელი დინამიკის განსაზღვრისათვის მოგვიწევდა მრავალცვლადიანი ფუნქციის მინიმიზირება, ამასთან დროის საკმაოდ გრძელ მონაკვეთში შესწავლისას ცვლადების რიცხვი ისე სწრაფად იცვლება, რომ ამოხსნა მოითხოვს სამანქანო დროის რამდენიმე საათს.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება ვალრასის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი.

ა) აუქციონისტი i -ურ საწარმოსთვის აწესებს მისი პროდუქციის $P_i(t)$ ფასსა და მისი რესურსის W(t) ფასს, აგრეთვე მომხმარებელს

აცნობებს $P_i(t)$ ფასსა და მოთხოვნის ფასს, რომელიც ზღვრული სარგებლიანობის ტოლია.

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^d}(t-1), \qquad (8)$$

ბ) i-ური საწარმო მისთვის მიცემული ფასებიდან გამომდინარე, ირჩევს წარმოების ხარჯებისა და შედეგების ისეთ თანწყობას, რომელიც მისი $\pi_i(t)$ მოგების მაქსიმიზირებას ახდენს და ამ თანწყობას განსახილველად წარუდგენს აუქციონერებს.

გ) მომხმარებელი i -ურ პროდუქტზე მოთხოვნას შემდეგნაირად აცხადებს: თუ i-ურ პროდუქტზე მოთხოვნა არ არის, ან მოხმარების ზღვრული სარგებლიანობა ზღვრულ ხარჯებზე ნაკლებია, მაშინ მომხმარებელი მოთხოვნის სიდიდეს უცვლელად ტოვებს, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ის მოთხოვნას კორექტირებას უკეთებს, ზღვრული სარგებლიანობისა და ზღვრული ხარჯების სხვაობის პროპორციულად და შედეგად აწესებს $Y_i^d(t)$–ის შესაბამის სიდიდეს.

დ) აუქციონისტი ხელმძღვანელობს მოთხოვნისა და მიწოდების კანონით და ცვლის ფასებს (თანმიმდევრული მოსინჯვის პროცესი). თუ პროდუქტზე მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას, ის ასწევს ფასს და პირიქით. თუმცა იმ შემთხვევაში, როცა ჭარბი მოთხოვნა უარყოფითია და მისი შესაბამისი ფასები ნულის ტოლია, ფასების არსებულ დონეზე ქვემოთ დაწევა შეუძლებელია.

ეკონომიკური ზრდის თეორიაში, საგარეო ვაჭრობისა და ფინანსების ანალიზში ხშირად გამოიყენებენ ზოგადი წონასწორობის მოდელის ერთ-ერთ ნაირსახეობას – ორსექტორიან მოდელს. იგი წინა მოდელისაგან იმით განსხვავდება, რომ:

ა) მასში შეყვანილია წარმოების ფაქტორების ორი სახე (კაპიტალი და შრომა);

ბ) ყოველი საწარმო განიხილება, როგორც ცალკეული დარგი;

გ) მათი საწარმოო ფუნქციები აკმაყოფილებენ წარმოების მასშტაბის ერთეულზე მუდმივ უკუგების დროს მიწოდებას (წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციები).

წონასწორული ეკონომიკის მაკროეკონომიკური ანალიზი

“დიდი დეპრესიის” დასაწყისია მოვლენა, რომელსაც შემდგომში “შავი ორშაბათი” უწოდეს, როცა ერთი დღის განმავლობაში ამერიკაში მოხდა ფასიანი ქაღალდების კურსის კატას-

ტროფული ვარდნა. ამ მომენტიდან ეკონომიკური აზროვნების ავანსცენაზე ნეოკლასიკური თეორიის ნაცვლად გამოვიდა **კეინსის მაკროეკონომიკური კონცეფცია**, რომლის მიხედვითაც – ***ეროვნულ მეურნეობაში წარმოება, განაწილება და ხარჯები განისაზღვრება ერთი აგრეგირებული ფაქტორით – ეროვნული შემოსავლით***. ეროვნული შემოსავალი განისაზღვრება ***ეფექტური მოთხოვნით.*** მაკროეკონომიკურ თეორიას ხშირად **შემოსავლების თეორიას** უწოდებენ.

აღსანიშნავია, რომ „დიდი დეპრესია" აღინიშნებოდა „კეინსიანელობის" ჩასახვით მაკროეკონომიკურ თეორიაში, ხოლო ეკონომიკის ანალიზის დარგში მან დასაწყისი დაუდო მათემატიკური მაკროეკონომიკის დაბადებას.

განვიხილოთ **ეროვნული შემოსავლის** განსაზღვრის მექანიზმი **ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის** საფუძველზე.

ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის მიხედვით, დროის საკმაოდ მოკლე შუალედებისათვის, რომელზეც საწარმოო შესაძლებლობათა დონე მოცემულად ითვლება, ეროვნული შემოსავალი (გამოშვების დონე) განისაზღვრება მოთხოვნის მიერ მართვადი ფაქტორებით.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ერთობლივი ეფექტური მოთხოვნა D განისაზღვრება, როგორც C მოხმარებისა და I ინვესტიციის ჯამი:

$$D = C + I \tag{9}$$

სამომხმარებლო მოთხოვნა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$C = \alpha Y + A, \quad (0<\alpha<1) \tag{10}$$

სადაც, C მოთხოვნაა, Y – ეროვნული შემოსავლის წრფივი ფუნქცია, α და A კონსტანტები,

A=(საარსებო მინიმუმი)×(მცხოვრებთა რიცხვი).

P.S. *C=Consumption* (მოხმარება), *I=Investment* (კაპიტალდაბანდება), D=demand (მოთხოვნა).

α-კოეფიციენტს ეწოდება **მოხმარებისადმი მიდრეკილება**;

A – ს – **საბაზო მოხმარება**.

ინვესტიციების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ინვესტიციის დამოუკიდებელი ხასიათის ჰიპოთეზით, რომლის თანახმად ინვესტიციის დონე განისაზღვრება საწარმოს შემოსავლების დონისგან გარკვეულწილად დამოუკიდებელი გრძელვადიანი მოლოდინით.

წონასწორული *Y ეროვნული შემოსავალი**, რომელიც პასუხობს მოთხოვნისა და მიწოდების ტოლობის პირობას,

$$D=Y^* \tag{11}$$

განისაზღვრება, როგორც განტოლების ამონახსნი:

$$C + I = Y \quad (12)$$

რომელიც მიიღება (9) და (11)-დან. შემდეგ, (10)-ის და (12)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\alpha Y^* + A + I = Y^* \quad (13)$$

(13)-დან ადვილად მივიღებთ

$$A + I = (1 - \alpha)Y^* \quad (14)$$

რაც თავის მხრივ შესაძლებელს ხდის Y* წონასწორული ეროვნული შემოსავლის პოვნას,

$$Y^* = (1 - \alpha)^{-1}(A + I) \quad (15)$$

განსაზღვრება: გამოსახულებას $(1-\alpha)^{-1}$ – რომელიც გვიჩვენებს ინვესტიციების მოცემული ზრდის პირობებში რამდენად იზრდება ეროვნული შემოსავალი, **ინვესტიციის მულტიპლიკატორი** ეწოდება.

წონასწორობის წერტილი Y* ასახავს მიმდინარე სამეურნეო აქტიურობის ისეთ დონეს, რომელიც გარკვეულწილად აკმაყოფილებს საოჯახო მეურნეობებისა და საწარმოების მოთხოვნილებებს, მაგრამ არ ემთხვევა სასურველ დონეს – რომლის დროსაც მიიღწევა სრული დასაქმება. ამიტომ, სახელმწიფო პოლიტიკის მიზანია ინვესტიციების მოზიდვით მიაღწიოს ეროვნული შემოსავლის ისეთ $Y_f > Y^*$ დონეს, რომლის დროსაც უზრუნველყოფილია სრული დასაქმება.

ლაბორატორიული სამუშაო №27

ამოცანა: ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი.

მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$\alpha = 0.35$

საბაზო მოხმარება

$A = 1.2 \cdot 10^8$

ინვესტიცია

$I = 50000$

ამოხსნა: ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$Y(I) = (1-\alpha)^{-1} \cdot (A + I)$

მასში კონკრეტული მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:

Y(I):=$1.847 \text{x} 10^8$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა:
მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$$\alpha := 0.35$$

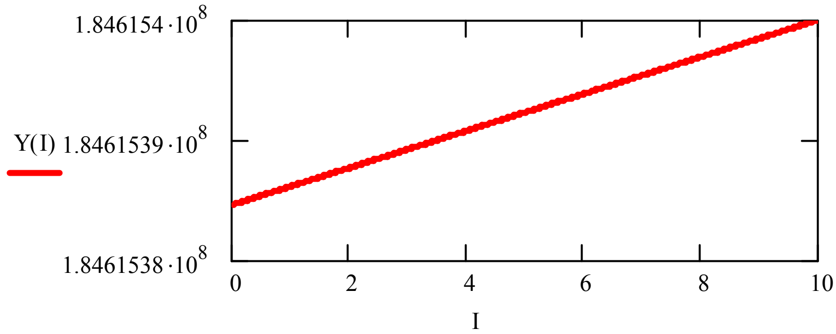
საბაზო მოხმარება

$$A := 1.2 \cdot 10^{8}$$

ეროვნული შემოსავალი:

$$Y(I) := (1-\alpha)^{-1} \cdot (A + I)$$

გრაფიკზე ვხედავთ, თუ როგორ იცვლება ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციების სიდიდის ცვლილების დროს:



გამოვთვალოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციის კონკრეტული მნიშვნელობის დროს:

$$I := 50000$$

$Y(I) := 1.847 \times 10^{8}$

ნახაზიდან ჩანს, რომ ინვესტიციების სიდიდის ზრდა იწვევს ეროვნული შემოსავლის ზრდას, ანუ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი იზრდება ინვესტიციების მოზიდვის შედეგად.

პროგრამა **Matlab-ზე**

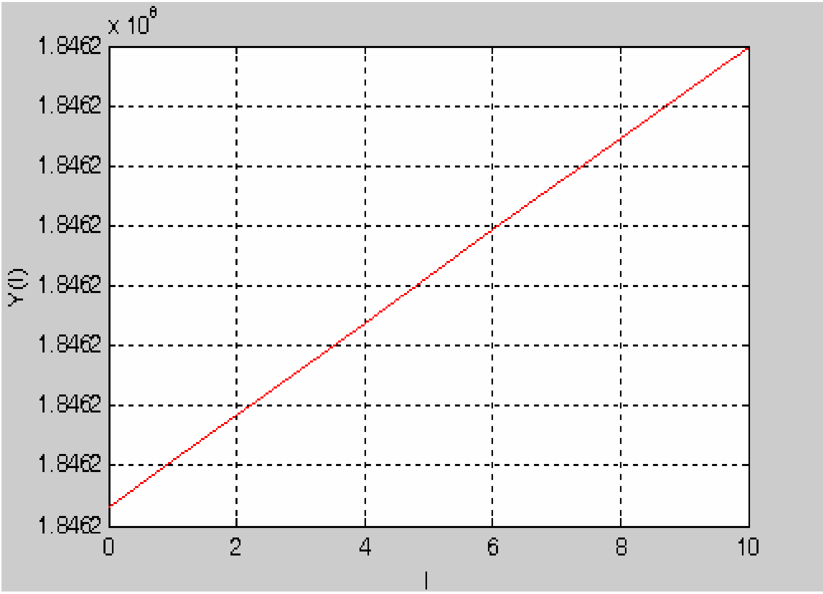
```
alfa=0.35
A=1.2*10^8
I=0:10;
Y=(1-alfa)^(-1)*(A+I);
plot(I,Y,'r')
grid on;
xlabel('I')
```

ylabel('Y(I)')

I=50000

Y=(1-alfa)^(-1)*(A+I)

შედეგები:



I = 50000

Y = 1.8469e+008

სავარჯიშო:

ამოცანა: ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი. საჭირო მონაცემები მოიძიეთ პრაქტიკიდან გამომდინარე.

თემა 28: ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი

წინა წონასწორულ მაკროეკონომიკურ მოდელში ჩვენ ვთვლიდით, რომ საწარმოო სიმძლავრეების მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. ეს დაშვება, რეალურთან ახლოა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ ნაციონალური მეურნეობის ეკონომიკური საქმიანობის დროის მოკლე შუალედებს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საწარმოო სიმძლავრეები ინვესტიციების წყალობით იზრდება. გავითვალისწინოთ აგრეთვე კაპიტალის დაგროვების შესაძლებლობები, რაც შესაძლებლობას იძლევა ავაგოთ ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი.

განვიხილოთ წრფივი, ერთგვაროვანი საწარმოო ფუნქცია უცვლელი მასშტაბით.

$$Y = F(K, L); \tag{1}$$

სადაც K კაპიტალია, L – ცოცხალი შრომა, Y – ეროვნული შემოსავალი. ცვლადად შეგვიძლია განვიხილოთ კაპიტალაღჭურვილობა (ფონდაღჭურვილობა):

$$x = \frac{K}{L}; \tag{2}$$

თუ, გავალოგარითმებთ (2)-ს, მივიღებთ:

$$\ln x = \ln K - \ln L. \tag{3}$$

ვიპოვოთ (3) განტოლების ორივე ნაწილის წარმოებულები დროით:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}; \tag{4}$$

აღვნიშნოთ $y = \dfrac{Y}{L}$ – შრომის მწარმოებლურობა. (1) საწარმოო ფუნქციის წრფივი ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right); \tag{5}$$

სხვანაირად,

$$y = F(x, 1) \tag{6}$$

(2)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$y = f(x). \tag{7}$$

ეხლა გავაკეთოთ შემდეგი დაშვებები:

ა) დროის თითოეული მონაკვეთისათვის ეროვნული შემოსავლის გამოუყენებელი ნაწილის წილი, ანუ დაგროვების ნორმა

$$s=\frac{Y-C}{Y}=const\,, \tag{8}$$

ხოლო, დროის ყოველი მონაკვეთისათვის დაგროვებული კაპიტალის ზრდა, დროის მოცემულ მონაკვეთში გამოცხადებული ახალი საინვესტიციო მოთხოვნის ტოლია, ე.ი. $I=\dot{K}$.

ბ) შრომის მიწოდების ზრდა n–ის ტოლი მუდმივი სიდიდეა, რაც ფორმულის სახით ასე ჩაიწერება

$$\frac{\dot{L}}{L}=n\,; \tag{9}$$

ე.ი. n - ცოცხალი შრომის ზრდის ტემპია.

მიღებული დაშვებებიდან გამომდინარე, გამოვიყვანთ ზრდის მაკროეკონომიკის ძირითად განტოლებას. (9)-ის გათვალისწინებით (4)-დან მივიღებთ:

$$\dot{x}=x\frac{\dot{K}}{K}-nx \tag{10}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2)-ს და მხედველობაში მივიღებთ $I=\dot{K}$ დაშვებას, გვექნება:

$$x\frac{\dot{K}}{K}=x\frac{I}{K}=\frac{K}{L}\cdot\frac{I}{K}=\frac{1}{L}\cdot\frac{I}{1}=\frac{Y}{L}\cdot\frac{I}{Y}=\frac{Y}{L}\cdot\frac{Y-C}{Y}=y\cdot s=s\cdot f(x). \tag{11}$$

საიდანაც (10)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\dot{x}=s\cdot f(x)-nx \tag{12}$$

(12) წარმოადგენს **ეკონომიკური ზრდის დინამიკურ განტოლებას.**

(12) განტოლების წონასწორობის x^* წერტილი გვაძლევს შრომის წონასწორულ კაპიტალაღჭურვილობას:

$$s\cdot f(x^*)=n\cdot x^* \tag{13}$$

(13) განტოლებიდან ვღებულობთ დასაქმების ზრდის ტემპის მნიშვნელობას:

$$n=\frac{s\cdot f(x^*)}{x^*}, \tag{14}$$

რომლის დროსაც მიიღწევა ეკონომიკური წონასწორობა.

ლაბორატორიული სამუშაო №28

ამოცანა: მოცემულია საწარმოო ფუნქცია

$$f(X):=\frac{1}{3}\cdot X+2$$

ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური განტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა s=0.4 და დასაქმების ზრდის ტემპი n=0.3.

ამოხსნა:

განვიხილოთ, ფუნქციის მნიშვნელობა და საწყისი მონაცემები

$f(X) := \frac{1}{3}\cdot X + 2$

$s := 0.4$

$n := 0.3$

ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$s\cdot f(X) = n\cdot X$

$\frac{1}{3}\cdot X + 2 = \frac{n\cdot X}{s}$

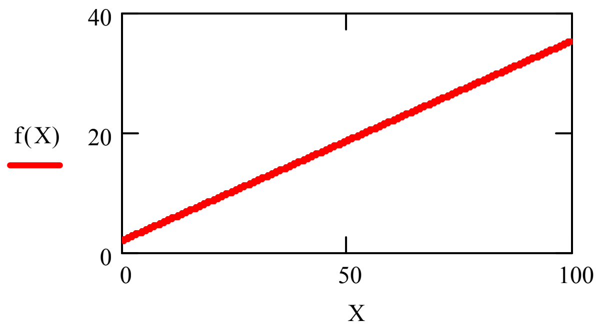
$X := \frac{2}{\frac{n}{s} - \frac{1}{3}}$

მივიღებთ შედეგს:

$X = 4.8$

პროგრამა Mathcad-ზე

$f(X) := \frac{1}{3}\cdot X + 2$



$n := 0.3$

$s := 0.4$

$X := 1$

Given

$s\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot X + 2\right) = n\cdot X$

$\text{Find}(X) = 4.8$

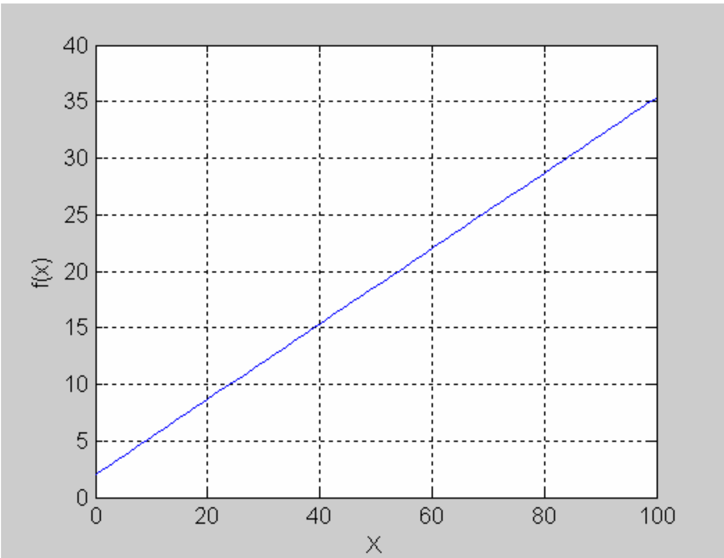
პროგრამა Matlab-ზე

n=0.3

```
s=0.4
x=solve('0.4*(x/3+2)=0.3*x')
X=0:100;
fx=1/3*X+2;
plot(X,fx);xlabel('X');ylabel('f(x)')
grid on;
```

შედეგები:

```
>>
n =
   0.3000
s =
   0.4000
x =
4.799
>>
```



მივიღეთ, რომ წონასწორული კაპიტალაღჭურვილობა უდრის 4.8-ს.

სავარჯიშო:

მოცემულია საწარმოო ფუნქცია
$f(X):=8\cdot X+29$.
ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური გან-ტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული

მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა s=0.2 და დასაქმების ზრდის ტემპი n=0.5

თემა 29: ფონ ნეიმანის წონასწორული ეკონომიკური ზრდის, დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი

ჩვენ უკვე შევისწავლეთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის სტაციონარული მოდელი. ეხლა განვიხილოთ დინამიკური მოდელი:

$$X(t) = AX(t) + Y(t), \tag{1}$$

სადაც, $Y(t)$ საბოლოო მოთხოვნის(არაწარმოებითი დანიშნულების) ვექტორია, $X(t)$ - ეკონომიკის სექტორების გამოშვების ვექტორი, ხოლო A –ტექნოლოგიური მატრიცაა.

საბოლოო მოთხოვნის ვექტორი შედგება ორი კომპონენტისაგან $C(t)$ მოხმარების ვექტორისა და $I(t)$ ინვესტიციის ვექტორისაგან, ე.ი.

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{2}$$

თუ, დროის t მომენტში შემოსავალს აღვნიშნავთ $F(t)$-თი, მაშინ დოვლათის (ეკონომიკის სექტორების) ცალკეული სახეობების მოხმარების ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$C_i(t) = h_i \cdot F(t) \tag{3}$$

$F(t)$ შემოსავალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფუნქციის სახით

$$F(t) = P_1X_1(t) + P_2X_2(t) + \ldots + P_nX_n(t) \tag{4}$$

სადაც, P_i არის i-ური დოვლათისათვის დამატებული ღირებულების წილი.

შესაბამისი ვექტორების შემოტანით მივიღებთ:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix};$$

(3) და (4)-დან ვღებულობთ:

$$C(t) = h \cdot pX(t). \tag{5}$$

თუ, i-ური დარგიდან მიღებული i-ური სახის კაპიტალის სიდიდეს, რომელიც აუცილებელია j დოვლათის წარმოებისათვის, აღვნიშნავთ b_{ij}-ით, მაშინ კაპიტალის კოეფიციენტების B მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

შემდეგ, გამოვიყენოთ სამუელსონ-ჰიკსის კონცეფცია. თუ დავუშვებთ, რომ პროდუქციის გამოშვებასა და ამისთვის აუცილებელ კაპიტალს შორის არსებობს პროპორციული დამოკიდებულება, მაშინ მივიღებთ, რომ t დროის მანძილზე i-ურ დოვლათზე (i–ური დარგის საქონელი) საინვესტიციო მოთხოვნა

$$I_i(t)=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta X_j(t),\ \text{სადაც}\ \ \Delta X_j(t)=X_j(t+1)-X_j(t) \tag{6}$$

(6) გამოსახულება შეიძლება გადაიწეროს მატრიცული სახით:

$$I(t)=B(X(t+1)-X(t)) \tag{7}$$

(1) და (2) განტოლებებიდან გვექნება:

$$X(t)=AX(t)+C(t)+I(t) \tag{8}$$

შემდეგ (5), (7) და (8)-დან მივიღებთ:

$$X(t)=A\cdot X(t)+h\cdot PX(t)+B\cdot(X(t+1)-X(t)) \tag{9}$$

ანუ

$$X(t)=(A+h\cdot P)X(t)+B\cdot(X(t+1)-X(t)) \tag{10}$$

სწორედ ეს არის **დინამიკური დარგთაშორისი მოდელის ძირითადი განტოლება.** ამ მატრიცული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ

$$X(t+1) := B^{-1}\cdot[X(t) - A\cdot X(t) - h\cdot(P\cdot X(t)) + B\cdot X(t)]. \tag{11}$$

ლაბორატორიული სამუშაო №29

ამოცანა: ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის თუ, მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix},\qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix},\qquad X := \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix},\qquad P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

სადაც, P_i დამატებული ღირებულების წილია i-ური დოვლათისთვის, $X(t)$ – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორია წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

ჩვენი მნიშვნელობების ჩასმით დინამიკურ დარგთაშორის მოდელში, მივიღებთ:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix}$$

პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემები

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

საერთო გამოშვების, ახალი გეგმის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

შედეგები:

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix}$$

პროგრამა **Matlab-ზე**

```
B=[10,20,30;30,20,10;20,30,20]
A=[0.1,0.4,0.15;0.3,0.4,0.05;0.2,0.6,0.1]
X=[50;80;60];
E=eye(3)
h=[0.8;0.9;0.5]
P=[0.05;0.13;0.1]
X1=B^(-1)*(X-A*X-h*(P'*X)+B*X)
```

```
B =
   10    20    30
   30    20    10
   20    30    20
A =
   0.1000    0.4000    0.1500
   0.3000    0.4000    0.0500
   0.2000    0.6000    0.1000
E =

    1     0     0
    0     1     0
    0     0     1
h =
   0.8000
   0.9000
   0.5000
P =
   0.0500
   0.1300
   0.1000
```

შედეგები:

```
X1 =
  51.3454
  78.5615
  60.139
>>
```

სავარჯიშო:

ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის თუ, მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.14 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 80 \\ 83 \\ 65 \end{pmatrix}$$

სადაც, P_i დამატებული ღირებულების წილია i-ური დოვლათისთვის, $X(t)$ – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორია წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

თემა 30: ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში

წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

x – წარმოების მოცულობა;

y – რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა;

α– რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასი;

β–წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულება;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x . \qquad (1)$$

რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცუ-ლობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზ-რუნველყოფის მოცულობათა სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

r - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების x მოცულო-ბაზე;

γ - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი;

δ - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

z - წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z . \qquad (2)$$

წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტო-ლია, რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

b – რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტი;

l – წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

მაშინ, მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{z} = -b \cdot z + 1 \cdot x \cdot y . \qquad (3)$$

ამრიგად, მივიღეთ საწარმოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha \cdot y - \beta \cdot x ; \\ \dot{y} &= r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z ; \qquad (4) \\ \dot{z} &= -b \cdot z + 1 \cdot x \cdot y . \end{aligned}$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ (4) განტოლებები ემთხვევიან ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, როცა

$\alpha=\beta=10;\ r=28;\ \gamma=\delta=l=1;\ b=\frac{8}{3}.$

ამ შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ატრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისაკენ. ამიტომ, ცდილობენ თავი აარიდონ სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს, პარამეტრების შესაბამისი დინამიკის საშუ-ალებით.

ლაბორატორიული სამუშაო №30

ამოცანა: ამოხსენით ლორენცის განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10\cdot y(t) - 10\cdot x(t),$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t)\cdot z(t) + 28\cdot x(t),$$

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t)\cdot y(t) - \frac{8}{3}\cdot z(t),$$

ერთეულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში და გამოიკვლიეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორი ფაზურ სიბრტყეზე.

ამოხსნა:

ლორენცის განტოლებათა სისტემას ადვილად ამოვხსნით Mathcad-ის მეშვეობით.

პროგრამა Mathcad-ზე

ლორენცის განტოლებათა სისტემას, Mathcad-ზე შეესაბამება მატრიცული ოპერატორი:

$$D(t,Q) := \begin{pmatrix} 10\cdot Q_1 - 10\cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0\cdot Q_2 + 28\cdot Q_0 \\ Q_0\cdot Q_1 - \frac{8}{3}\cdot Q_2 \end{pmatrix}$$

$Npts := 3000$

$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$

$t := L^{\langle 0\rangle}$

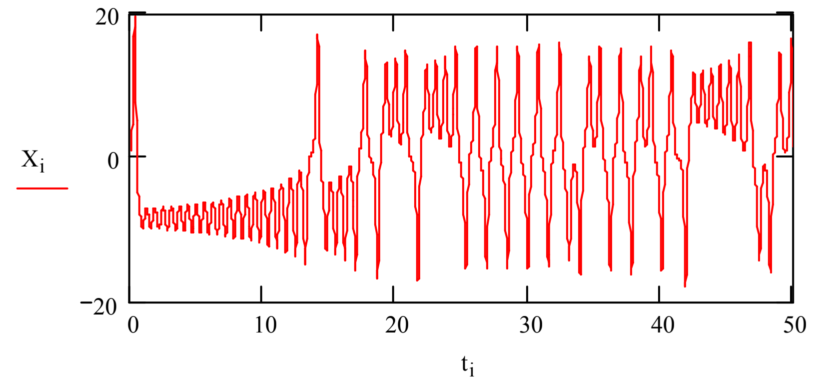
$X := L^{\langle 1\rangle}$

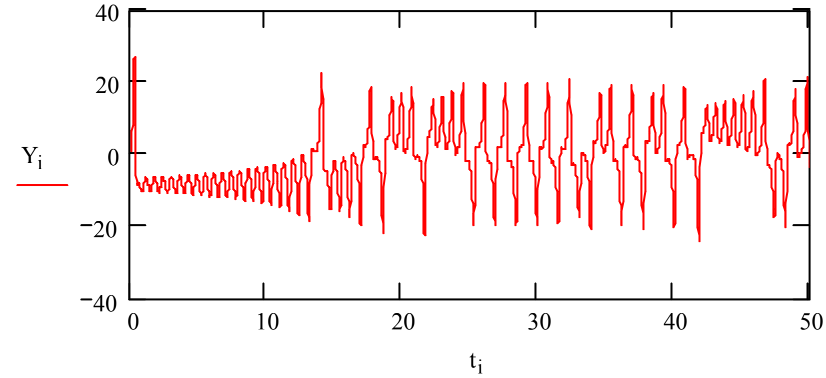
$Y := L^{\langle 2\rangle}$

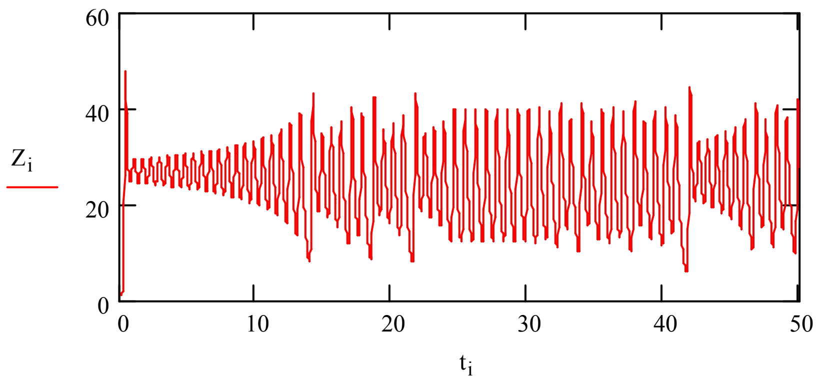
$Z := L^{\langle 3\rangle}$

ამონახსნები მოიცემიან გრაფიკების მეშვეობით:

$i := 0..\ Npts$







ავაგოთ დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე:

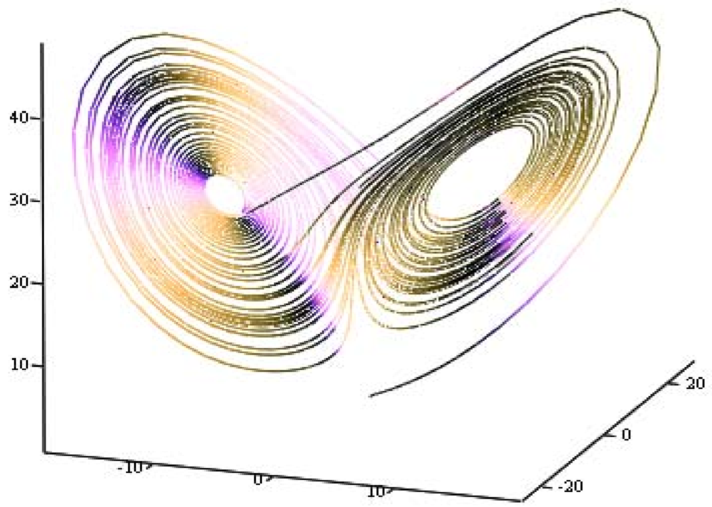
$\varepsilon := 0.001$

$R^{\langle 0\rangle} := X$

$R^{\langle 1\rangle} := X + \varepsilon$

$S^{\langle 0 \rangle} := Y$
$S^{\langle 1 \rangle} := Y + \varepsilon$
$T^{\langle 0 \rangle} := Z$
$T^{\langle 1 \rangle} := Z + \varepsilon$

მივიღებთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათს, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის “პეპელას ფრთების” მოხაზულობას r-პარამეტრის ცვლილებისას. რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.

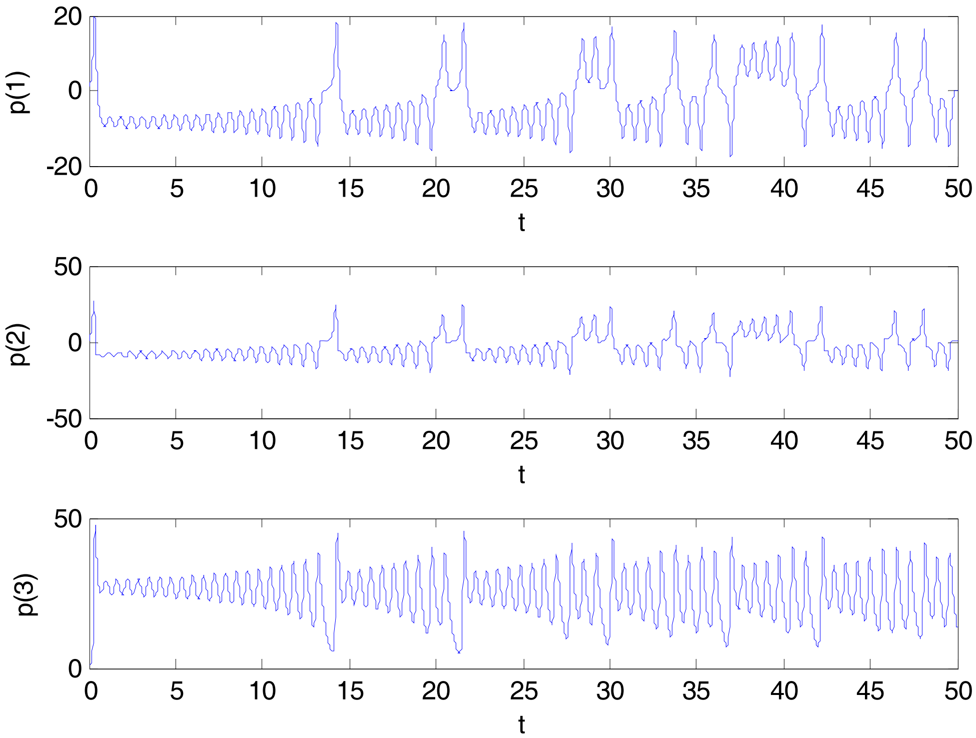


(R , S , T)

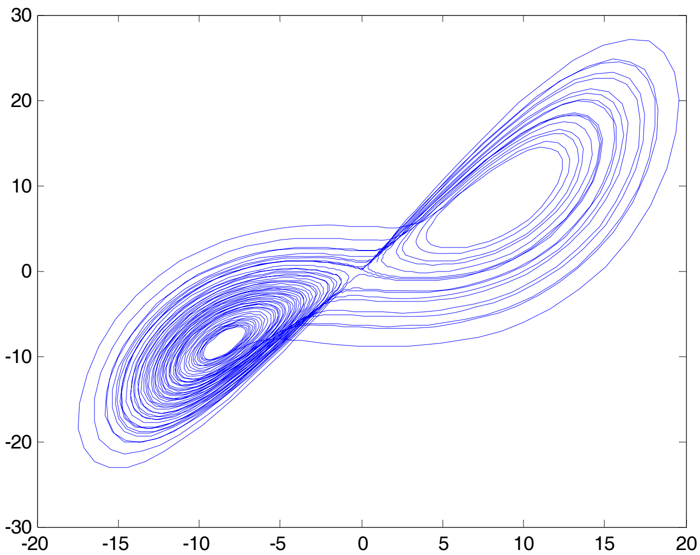
პროგრამა Matlab-ზე

```
function dxdt=lorenci(t,p)
dxdt=[10*(p(2)-p(1))
   28*p(1)-p(2)-p(1)*p(3)
   p(1)*p(2)-8/3*p(3)];
end
t=[0 50];
```

```
y0=[1;1;1];
[t,p]=ode45(@lorenci,t,y0);
subplot(3,1,1);plot(t,p(:,1));xlabel('t');ylabel('p(1)')
subplot(3,1,2);plot(t,p(:,2));xlabel('t');ylabel('p(2)')
subplot(3,1,3);plot(t,p(:,3));xlabel('t');ylabel('p(3)')
```




```
t=[0 50];
y0=[1;1;1];
[t,p]=ode45(@lorenci,t,y0);plot(p(:,1),p(:,2))
```



```
x=[0.1,0.1,0.1];
xdot=[0,0,0];
sigma=10;
r=28;
b=8/3;
h=0.01;
p13=plot3(x(3),x(1),x(2),'-',...
   'EraseMode','none','color','b');
grid
axis([-20 20 -20 20 0 80])
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
hold on
while 1
   xdot(1)=sigma*(x(2)-x(1));
   xdot(2)=r*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);
   xdot(3)=x(1)*x(2)-b*x(3);
   xp=x;
   x=x+h*xdot;
   set(p13,'XData',[xp(1) x(1)],...
      'YData',[xp(3) x(2)],...
      'ZData',[xp(3) x(3)])
   drawnow
end
```

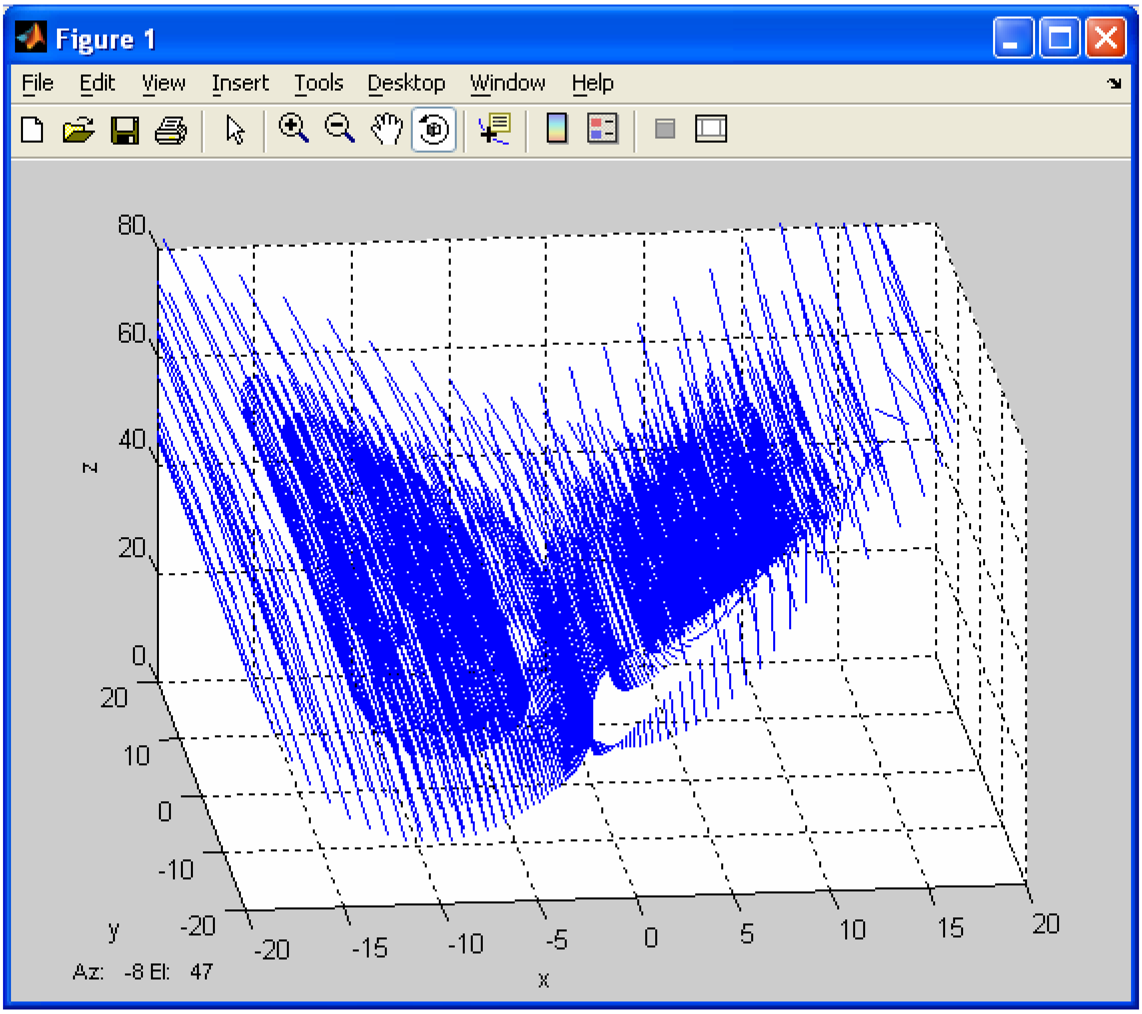
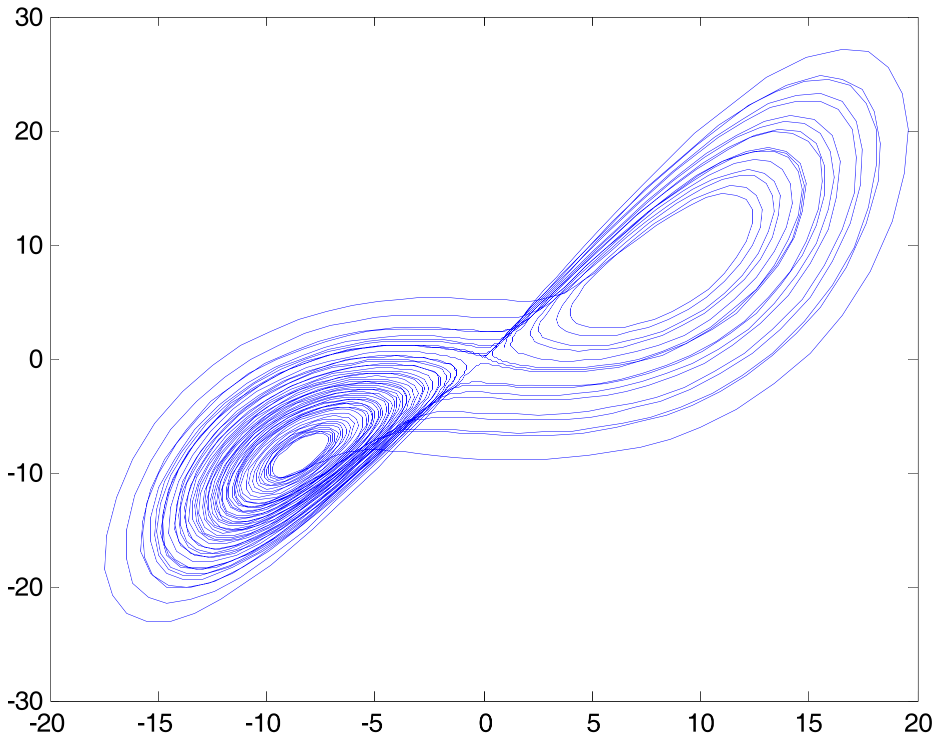


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
80
60
40
20
0
z
20
10
0
-10
-20
y
-20 -15 -10 -5 0 5 10 15 20
x
Az: -8 El: 47


30
20
10
0
-10
-20
-30
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Anrew F.Sigel. Practical Buisiness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000

2. А.А. Мицкевич. Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, Москва, 1995

3. Т.Пу. Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., Москва, 2002

4. В.В. Лебедев. Математическое моделирование социально-экономических процессов, Москва, 1997

5. О.Н. Салманов. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003

6. ნ.ჯიბლაძე, ა.თოფჩიშვილი. სტატიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები, მართვის სისტემების ინსტიტუტი, თბილისი, 2001

7. Gilbert A.Cherchill. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996

8. В. Дьяконов. Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001

9. Т.А. Обгадзе. Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, Москва, 2002

10.Т.А.Обгадзе, В.Г. Прокошев. Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999

11. Christopher Dougherty. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992

12.В. Дьяконов. Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001

13.Т.А. Обгадзе, З.Н.Цвераидзе. Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Тбилиси, 2006

14. თამაზ ობგაძე. მათემატიკური მოდელირების კურსი(უწყვეტი მათემატიკური მოდელები), I ტომი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი, 2006

15. Ф. Мостеллер. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., Москва, 1971

16. А.Я. Яглом, И.М. Яглом. Вероятность и информация, Москва, 1973

17. Ю.В. Прохоров. Ю.А. Розанов. Теория вероятностей, СМБ, Москва, 1973

18. В.Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., Москва, 1975

19. Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения, Москва, 1973

20. Т.А. Обгадзе. Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации,№4(11), 2006

სარჩევი

	80