საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თამაზ ობგაძე

მათემატიკური მოდელირების კურსი
(მაგისტრანტებისათვის)

III ტომი

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ

თბილისი
2008

უაკ 517.958

სახელმძღვანელო მიძღვნილია მათემატიკური მოდელირების რთული და პრაქტიკულად მნიშვნელოვანი პრობლემისადმი. ნაშრომში განხილულია სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა, რომ მკითხველი გაერკვეს თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიაში. განხილულია მათემატიკური მოდელირების ტექნიკა ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების აგებისათვის; განხილულია ეკონომიკისა და მექანიკის ანალიზური და სასრულსხვაობიანი მოდელები; განხილულია სიგნალების ვეივლეტ-ანალიზის მეთოდები, რაც საშუალებას იძლევა შესწავლილ იქნას სიგნალების შეკუმშვის, გადაცემისა და სინთეზის ამოცანები თანამედროვე დონეზე; თითოეული საკითხის გაშუქებისას, მოყვანილია შესაბამისი მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა. ყველა თავის ბოლოს მოყვანილია პრაქტიკული სამუშაოს ვარიანტები მაგისტრანტებისათვის.

აკადემიკოს ა. ფრანგიშვილის რედაქციით

რეცენზენტი სრული პროფესორი თ. კაიშაური

© საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2008
ISBN 99940-57-16-2 (ყველა ტომი)
ISBN 978-9941-14-197-3 (III ტომი)

ეძღვნება ჩემი მათემატიკის მასწავლებლის, შესანიშნავი პედაგოგის, ლილი ხუციშვილის ნათელ ხსოვნას

წინასიტყვაობა

შემოთავაზებულ კურსს – **“მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტებისათვის) III ტომი,** ავტორი წლების მანძილზე კითხულობდა ვლადიმირის სახელმწიფო უნივერსიტეტში (რუსეთი), ვიტებსკის სახელმწიფო ტექნოლოგიურ უნივერსიტეტში (ბელორუსია), მოსკოვის სახელმწიფო სამთო უნივერსიტეტში (რუსეთი), მოსკოვის ბიზნესისა და პოლიტიკის ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის ჰუმანიტარული განათლების ინსტიტუტში (რუსეთი), მოსკოვის საბუღალტრო აღრიცხვის, ანალიზისა და აუდიტის ინსტიტუტის კრასნოდარის ფილიალში (რუსეთი), მოსკოვის სახელმწიფო ადმინისტრირების ინსტიტუტში (რუსეთი), ი. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალში და ამჟამად, კითხულობს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში.

მასალის გადმოცემისა და მეთოდური მითითებების მიმართ მიდგომა წარმოადგენს ავტორის სხვა სასწავლო-მეთოდური შრომების გაგრძელებას. სახელმძღვანელო მოიცავს კურსის ორ ნაწილს, რომელიც შეესაბამება ორი სემესტრის მასალას მაგისტრანტე-ბისათვის.

ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია განსხვავებული ვარიანტები მაგისტრანტების ინდივიდუალური მუშაობისათვის. თითოეულმა მაგისტრანტმა უნდა შეასრულოს სამუშაოს თავისი ვარიანტი და ჩააბაროს ანგარიში თითოეულ სამუშაოზე შესაბამისი განმარტებებით. ყოველი თავის ბოლოს, მოყვანილია ლიტერატურის სია დამოუკიდებელ სამუშაოებში წარმოდგენილი მასალის უფრო ღრმად შესასწავლად.

ავტორი მადლობას უხდის საქართველოს საინჟინრო აკადემიის პრეზიდენტს - აკადემიკოს არჩილ ფრანგიშვილს სახელმძღვანელოს რედაქტირებისათვის და მუშაობაში მუდმივი ხელშეწყობისათვის.

ნაწილი I. კლასიკური მათემატიკური მოდელირების მეთოდები

შესავალი

ადამიანი ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში აგროვებს გარკვეულ გამოცდილებას, რომელიც თავიდან **ცოდნის მოუწესრიგებელ მარაგს ქმნის.**
შემდეგ, ხდება შეგროვილი ინფორმაციის სისტემატიზაცია და კლასიფიკაცია. ამ ეტაპზე დაგროვილი ცოდნა წარმოადგენს – **მოძღვრებას,** კარლ ლინეის ტიპთა შესახებ მოძღვრების ანალოგიურად.

ამის შემდეგ, შეისწავლება მოძღვრებაში განხილულ ობიექტთა განვითარებისა და ურთიერთქმედების ძირითადი კანონზომიერებები, რომლებიც ძირითადად დაკავშირებულია ცოდნის სხვა უფრო ღრმად შესწავლილ სფეროებთან, ანალოგიისა და ინტუიციის გზით, ამიტომ ხშირად ატარებენ სუბიექტურ-შემოქმედებით ხასიათს. ცოდნის განვითარების ამ ეტაპს – **ხელოვნება** ეწოდება.

შემდეგ ეტაპზე, ხდება ძირითად ცნებათა და კანონზომიერებათა მწყობრ, აქსიომატურ სისტემად ჩამოყალიბება, რაც საშუალებას გვაძლევს ცოდნის მოცემული სფეროს ფარგლებში ვაწარმოოთ შესაბამის მოვლენათა პროგნოზირება. ამ ეტაპზე, ჩვენი ცოდნათა მარაგი იძენს **მეცნიერულ** დონეს.

თანამედროვე მათემატიკის მიღწევებმა(**მანდელბროტის ფრაქტალე-ბის თეორია**) საშუალება მოგვცა აგვეხსნა „მშვენიერების" არსიც.

აღმოჩნდა, რომ ჩვენ მოგვწონს ხელოვნების ესა თუ ის ნიმუში, ფორმისა და შინაარსის ჰარმონიის შერწყმით, „შემთხვევით-გამოუცნობთან"(**ოქროს კვეთის ფარგლებში**), რაც დამალულია უცხო დამკვირვებლის თვალთაგან.

ადამიანის მთელი ინტელექტუალური მოღვაწეობა, დაკავშირე-ბულია მის გარშემო არსებული სამყაროს მოდელირებასთან. ჩვენი განვითარებისა და ცოდნის მიხედვით, სამყაროს შესახებ ჩვენი წარმოდგენებიც (**სამყაროს მოდელები**) იცვლებიან.

განასხვავებენ მოდელირების სამ ძირითად მიმართულებას.

ა) ფიზიკური მოდელირება;
ბ) იმიტაციური მოდელირება;
გ) **მათემატიკური მოდელირება**.

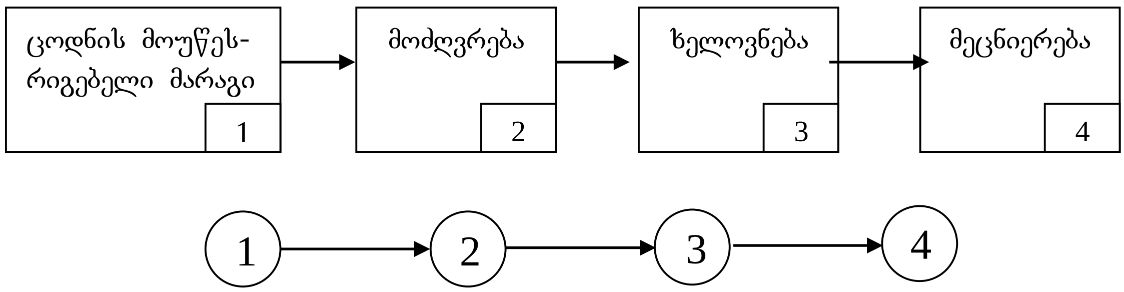
განსაზღვრება: მოცემული პროცესის სქემატურ აღწერას, რაც საშუალებას იძლევა ვიწინასწარმეტყველოთ ამ მოვლენის ძირითადი კანონზომიერებები და რიცხვითი მახასიათებლები მოდელირება ეწოდება.

ა) **ფიზიკური მოდელი** – არის ნატურალურ, ან მასშტაბებში შეცვლილი მოდელი, რომელიც საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ პროცესი ექსპერიმენტალურად;

ბ) **იმიტაციური მოდელი** – არის კომპიუტერული მოდელი, რომელიც გაითამაშებს მოცემულ პროცესს განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და ვიზუალურად გვიჩვენებს მოსალოდნელ რეალიზაციებს;

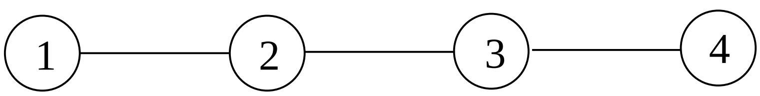
გ) **მათემატიკური მოდელი** – არის მათემატიკური მეთოდების ერთობლიობით პროცესის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის დამყარებული კავშირი, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიწინას-წარმეტყველოთ მოვლენის სურათი, განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადსახვა მნიშვნელობებისათვის მოცემული სიზუსტით.

უმარტივესი მათემატიკური მოდელის მაგალითია პროცესის ბლოკ-სქემა. განვიხილოთ ცოდნის ევოლუციის მოდელი გრაფის მეშვეობით.



ნახ. 1. ცოდნის ევოლუციის ბლოკ-სქემა და გრაფი.

ცხადია, რომ მოყვანილი გრაფი არის მეტად გამარტივებული, სქემატური, რადგან ყოველ ეტაპზე, ხდება შებრუნებული პროცესიც, ანუ, ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მოძღვრებად გადაქცევის პარალელურად, ხდება ცოდნის მოცულობის გაფართოვებაც და ა.შ. ასე რომ, ცოდნის ევოლუციის გრაფი არ უნდა იყოს ორიენტირებული.



ნახ. 2. ცოდნის ევოლუციის არაორიენტირებული გრაფი.

მათემატიკური მოდელები მოდელირების მეთოდების მიხედვით იყოფიან ორ ძირითად ჯგუფად: ა) უწყვეტი მათემატიკური მოდელები და ბ) დისკრეტული მათემატიკური მოდელები; თუმცა, არსებობენ **გ) შერეული ტიპის, რთული სისტემების - სინთეზური მათემატიკური მოდელებიც**.

ცოდნის მოუწესრიგებელი მარაგის მეცნიერებად ჩამოყალიბების პროცესს, თან ახლავს ძირითადი ცნებებისა და აქსიომების ჩამოყალიბება, რომელიც განსაზღვრავს მეცნიერების ამა თუ, იმ სფეროს. ამ ეტაპზე დიდ მნიშვნელობას იძენს აზროვნების მეთოდებისა და კანონების ზუსტი ცოდნა, რაც უზრუნველყოფს ამა თუ, იმ

წინადადების ორაზროვნების თავიდან აცილებას. აზროვნების კანონებს სწავლობს მეცნიერება, რომელსაც **მათემატიკური ლოგიკა ქვია.**

ჯერ კიდევ შუა საუკუნეებში, ადამიანები ცდილობდნენ ისეთი ალგორითმი მოეძებნათ, რომელიც ნებისმიერი ამოცანის ამოხსნის საშუალებას მოგვცემდა. ამაზე ფიქრობდნენ ისეთი ცნობილი ინტელექტუალებიც, როგორიც იყო ფრანგი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი **რენე დეკარტი,** გერმანელი ფილოსოფოსი და მათემატიკოსი **ლეიბნიცი,** ასევე, **დავით გილბერტი, პეანო, ჩიორჩი, ტიურინგი, ერბრანი** დ.ა.შ. მოგვიანებით **რენე დეკარტმა** შექმნა ანალიზური გეომეტრია, რამაც საშუალება მოგვცა გეომეტრიის ამოცანები დაგვეყვანა ალგებრის ამოცანებამდე. თუმცა, ეს ეხებოდა ამოცანათა მხოლოდ გარკვეულ ნაწილს.

რენე დეკარტის ამოცანის ამოხსნა, ნაწილობრივ, შეძლო ინგლისელმა **ჯორჯ ბულმა**, რომელმაც ააგო სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი. მოგვიანებით, მის თეორიას **ბულის ალგებრა** უწოდეს. განვიხილოთ, ბულის მათემატიკური მოდელი კონსტრუქციულად.

თავი I. სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი და თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები

1.1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგეხსენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ **გამონათქვამებს** უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად: p – “სოკრატე ადამიანია”;
q – “ადამიანი მოკვდავია”;
r – “სოკრატე მოკვდავია”.

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ უნარული და ბინარული ოპერაციები.

განსაზღვრება: უნარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე(გამონათქვამზე). **უნა** – ლათინურად ნიშნავს ერთს.

განსაზღვრება: ბინარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე(გამონათქვამზე). **ბი** – ლათინურად ნიშნავს ორს.

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის **დიზიუნქცია (“$\vee$” – ან)** ეწოდება ისეთ **$p \vee q$** გამონათქვამს(**p ან q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან **p ან q (ერთ-ერთი მაინც).**

არისტოტელეს მოდელში[1-3] (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი(**tru**) გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი(**false**) გამონათქვამისა კი, უდრის 0-ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის(ცხრილი 1):

ცხრილი 1

p	q	**$p \vee q$**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის **კონიუნქცია (“$\wedge$” – და)** ეწოდება ისეთ **$p \wedge q$** გამონათქვამს(**p და q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **p და q (ორივე ერთდროულად).**

კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი(ცხრილი 2):

ცხრილი 2

p	q	**p**$\wedge$**q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

განსაზღვრება: ორ **p** და **q** გამონათქვამს ექვივალენტური ($\equiv$) ეწოდებათ (ჩაწერენ p$\equiv$**q**), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვა-მების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის ("$\vee$" **და** "$\wedge$") თვისებები. ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად(ცხრილი 3).

ცხრილი 3

გამონათქვამების თვისებები	თვისების დასახელება	შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის	ემთხვევიან(+), თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები
p$\vee$**q**$\equiv$ **q**$\vee$**p**	**კომუტაციურობის თვისება**	a+b=b+a	+
p$\wedge$**q**$\equiv$ **q**$\wedge$**p**		axb=bxa	+
(p$\vee$**q)**$\vee$**r**$\equiv$ **p**$\vee$**(q**$\vee$**r)**	**ასოციურობის თვისება**	(a+b)+c=a+(b+c)	+
(p$\wedge$**q)**$\wedge$**r**$\equiv$ **p**$\wedge$**(q**$\wedge$**r)**		(axb)xc=ax(bxc)	+
(p$\vee$**q)**$\wedge$**r**$\equiv$**(p**$\wedge$**r)**$\vee$**(q**$\wedge$**r)**	**დისტრიბუციულობის თვისება**	(a+b)xc=axc+bxc	+
(p$\wedge$**q)**$\vee$**r**$\equiv$**(p**$\vee$**r)**$\wedge$**(q**$\vee$**r)**		(axb)+c$\neq$(a+c)x(b+c)	-
p$\vee$**p**$\equiv$**p**	**იდემპოტენტობის თვისება**	a+a$\neq$a	-
p$\wedge$**p**$\equiv$**p**		axa$\neq$a	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით. რაც იმის მომასწავებელია, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართება-ში(ალგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა ბულის ალგებრასთან შედარებით.

ეხლა, განვიხილოთ უარყოფის უნარული ოპერაცია, რომელიც განისაზღ-ვრება გამონათქვამებზე :

განსაზღვრება: p გამონათქვამის უარყოფა (“$\neg$”-არა) ეწოდება ისეთ $\neg$p გამონათქვამს(არა p), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა p ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე(ცხრილი 4) :

ცხრილი 4

p	$\neg$p
1	0
0	1

ამრიგად, გამონათქვამთა ალგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია ($\vee, \wedge, \neg$). ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, ალგებრულ სისტემებს **ბულის ალგებრებს** უწოდებენ.

ყველა **სხვა ოპერაცია** გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას:

“თუ p, მაშინ q”. ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად : $p \Rightarrow q$ (p – დან გამომდინარეობს q).

“$\Rightarrow$” - სიმბოლოს იმპლიკაცის უწოდებენ.

იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებებიც, საჭიროა გამოვყოთ ის **ძირითადი კანონები,** რომლებსაც ჩვენ აზროვნების კანონებს ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას(ცხრილი 5) :

ცხრილი 5

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$\mathbf{p \vee (\neg p) \equiv 1}$	**გამორიცხული მესამის კანონი**
$\mathbf{p \wedge (\neg p) \equiv 0}$	**წინააღმდეგობის კანონი**
$\mathbf{p \vee 1 \equiv 1;\ p \vee 0 \equiv p;\ p \wedge 1 \equiv p;\ p \wedge 0 \equiv 0}$	**შთანთქმის კანონები**
$\mathbf{(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)}$	**კონტრაპოზიციის კანონი**
$\mathbf{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)}$	**სილოგიზმის კანონი**
$\mathbf{\neg (p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)}$	**დე მორგანის კანონები**
$\mathbf{\neg (p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)}$	
$\mathbf{\neg (\neg p) \equiv p}$	**ორმაგი უარყოფის კანონი**
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	**ექვივალენტობის კანონი**

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა : სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

მაგალითად: ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ

კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალიზაცია. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები :

“დიდია ტენიანობა”– აღვნიშნოთ **P** ასოთი ;

“მაღალია ტემპერატურა”– აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად ”– აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C)$. (1)

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს **ბულის ფორმულებს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით **ბულის ფორმულები** ეწოდებათ.

მაგალითად: $P \wedge$ **;** და $\Rightarrow(\neg C)$ **-** არა არიან ბულის ფორმულები.

განსაზღვრება: ბულის ფორმულებს **ექვივალენტური** ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვაჩვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან:

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ **დე მორგანის პირველი კანონი დამტკიცება :** (2)

ცხრილი 6

p	**q**	$\neg$**p**	$\neg$q	**p** $\vee$ **q**	$\neg$**(p** $\vee$ **q)**	**(**$\neg$**p)** $\wedge$ **(**$\neg$**q)**
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს. ანუ, ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური.

განსაზღვრება: ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – **ტავტოლოგია** ეწოდება.

მაგალითად : 1) $G \equiv \mathbf{p} \vee (\neg \mathbf{p})$ – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა : $H \equiv ((\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q$. **მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით.** ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :

$$H \equiv (((\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \vee \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \wedge \mathbf{P}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow Q) \equiv \quad (3)$$

$$\equiv (\mathbf{0} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow Q) \equiv ((\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (\neg (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \vee \mathbf{Q} \equiv (\neg \mathbf{Q}) \vee (\neg \mathbf{P}) \vee \mathbf{Q} \equiv$$

$$\equiv \mathbf{1} \vee (\neg \mathbf{P}) \equiv \mathbf{1}.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა წინააღმდეგობრივია (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების(მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად : $G \equiv \mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{p})$ ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$H \equiv (\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge (\mathbf{P} \wedge (\neg Q))$ - წინააღმდეგობრივია. (4)

განსაზღვრება: ატომს ან ატომის უარყოფას **ლიტერა** ეწოდება.

მაგალითად : $\mathbf{Q}$; $\neg P$ - ლიტერებია. $\mathbf{P} \Rightarrow Q$ – არაა ლიტერა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$F \equiv \mathbf{F_1} \wedge \mathbf{F_2} \wedge \ . \ . \ . \ \wedge \mathbf{F_n}$; (5)

წარმოადგენილია **კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს **დიზიუნქტიურ ლიტერას.**

ანუ, კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციათა კონიუნქციას.

მაგალითად : $F \equiv (\mathbf{P} \vee (\neg Q)) \wedge (\neg P \vee \mathbf{Q})$. (6)

ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$F \equiv \mathbf{F_1} \vee \mathbf{F_2} \vee \ . \ . \ . \ \vee \mathbf{F_n}$ (7)

წარმოადგენილია **დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში**, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს **კონიუნქტიურ ლიტერას.**

ანუ, დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციათა დიზიუნქციას.

მაგალითად : $F \equiv (\mathbf{P} \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge \mathbf{Q})$. (8)

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები F_1 ; F_2 ; . . .F_n და ფორმულა G. ფორმულა G გამომდინარეობს F_1; F_2; . . .F_n ფორმულებიდან , მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge ; \ . \ . \ . \ \wedge F_n) \Rightarrow G$ ტავტოლოგიაა.

თეორემა : ვთქვათ მოცემულია ფორმულები F_1 ; F_2 ; . . .F_n და ფორმულა G. ფორმულა G გამომდინარეობს F_1; F_2; . . .F_n ფორმულებიდან , მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge ; \ . \ . \ . \ \wedge F_n) \wedge (\neg G)$ წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

P.S. 1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას **რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის შესახებ**, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით[4];

2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს **სამნიშნა ლოგიკაც.** აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია[3].

3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-ნიშნა ლოგიკაც**. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში[5].

4) არსებობს **არამკაფიო ლოგიკაც[6]**. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანებში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.

5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, **ინტუციონისტურ ლოგიკას,** რომლის ფუძემდებლებიც არიან ბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი[7]. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

1.2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურად.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

მაგალითად:

A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;
N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;
Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;
Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;
R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;
M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი **გეორგ კანტორი[8]**. სიმრავლის ცნებას ზუსტი განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორის მიერ შემდეგი ფორმით:

მინიშნება: სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად: A=B.

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების გაერთიანება("$\cup$" - გაერთიანება) ეწოდება ისეთ $A\cup B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან A, ან B სიმრავლეს(**ერთ-ერთს მაინც**).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A\cup B=\{e \mid e\in A\vee e\in B\}. \qquad (9)$$

ჩანაწერი $e\in A$ - წაიკითხება ასე"e ეკუთვნის(**როგორც ელემენტი**) A სიმრავლეს".

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების თანაკვეთა(“$\cap$” - თანაკვეთა)
ეწოდება ისეთ $A\cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A\cap B=\{e|\, e\in A\wedge e\in B\}. \tag{10}$$

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ეხლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს **ცარიელი სიმრავლე($\varnothing$)** ეწოდება.

P.S. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ყველა სხვა სიმრავლეს **უნივერსალური(E) სიმრავლე** ეწოდება.

P.S. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში. (აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას – მთელი, არ შეიძლება რომ იყოს თავის ნაწილი, თუმცა, შეიძლება მათ ელემენტებს შორის იყოს ურთიერთცალსახა თანადობა).

ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი, ანუ **ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე**, ჩაიწერება შემდეგნაირად: $A\subseteq B$. ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდეც მას. იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის **საკუთრივი ნაწილი** და ჩაწერენ $A\subset B$.

ეხლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა(ცხრილი 7).

ცხრილი 7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A\cup B=B\cup A$	კომუტაციურობა	$\mathbf{p}\vee\mathbf{q}\equiv\mathbf{q}\vee\mathbf{p}$
$A\cap B=B\cap A$		$\mathbf{p}\wedge\mathbf{q}\equiv\mathbf{q}\wedge\mathbf{p}$
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	ასოციურობა	$(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\vee\mathbf{r}\equiv\mathbf{p}\vee(\mathbf{q}\vee\mathbf{r})$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$		$(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\wedge\mathbf{r}\equiv\mathbf{p}\wedge(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})$
$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(\mathbf{p}\vee\mathbf{q})\wedge\mathbf{r}\equiv(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})\vee(\mathbf{q}\wedge\mathbf{r})$
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$		$(\mathbf{p}\wedge\mathbf{q})\vee\mathbf{r}\equiv(\mathbf{p}\vee\mathbf{r})\wedge(\mathbf{q}\vee\mathbf{r})$
$A\cup A=A$	იდემპოტენტობა	$\mathbf{p}\vee\mathbf{p}\equiv\mathbf{p}$
$A\cap A=A$		$\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}\equiv\mathbf{p}$
$A\cup E=E;\ A\cup\varnothing=A;$ $A\cap E=A;\ A\cap\varnothing=\varnothing$	შთანთქმის კანონები	$\mathbf{p}\vee\mathbf{1}\equiv\mathbf{1};\ \mathbf{p}\vee\mathbf{0}\equiv\mathbf{p};\ \mathbf{p}\wedge\mathbf{1}\equiv\mathbf{p};\ \mathbf{p}\wedge\mathbf{0}\equiv\mathbf{0}$

ეხლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას სიმრავლის დამატებას ეძახიან.

განსაზღვრება: მოცემული A სიმრავლის დამატება E უნივერსუმამდე ეწოდება ისეთ A^c სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის E-ს და არ ეკუთვნის A-ს.

ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c=\{e|\ e\in E\wedge e\notin A\}. \qquad (11)$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c; \qquad (12)$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c. \qquad (13)$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგ-ნაირად:

$$(A^c)^c=A. \qquad (14)$$

P.S. როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაო-ბისა, **ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან**.

განსაზღვრება: ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ **ჰომომორფული**, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.

ასე, რომ ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა **ჰომომორ-ფულია** სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

1.3. რელაციური სისტემები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ $AxA = A^2$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი (a;b) დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის A-ს, ხოლო მეორე B-ს.

სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A \times B = \{(a;b) | \mathrm{a} \in \mathrm{A} \wedge \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}. \qquad (15)$$

ეს განმარტება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ **მიმართებისა** და **ფუნქციის** ცნება.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ R ქვესიმრავლეს, **მიმართება** ეწოდება.

ე.ი. თუ R მიმართებაა, მაშინ $R \subset A \times B$. (16)

მაგალითი : თუ, A – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა(წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ A^2 – დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული A სიმრავლეზე.

განსაზღვრება: ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც a-ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება b-ს ერთადერთი მნიშვნელობა **ფუნქცია** ეწოდება.

ე.ი. ფუნქცია ისეთი გადასახვაა $f:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომლისთვისაც A სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, f ფუნქციას მოეთხოვება ცალსახობა.

P.S. არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: **სურექცია, ინექცია და ბიექცია.** სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ A და B სიმრავლეების ყველა ელემენტი; ინექციის დროს A სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია B სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა A და B სიმრავლეებს შორის. **ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად, ინექციაც და სურექციაც.**

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომ A და B რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია(ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნეირონები . . .), მაშინ f გადასახვას **ოპერატორს** უწოდებენ.

განსაზღვრება: ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

მაგალითი: $C^{\infty}(G)$- თავის ნებისმიერი რიგის წარმოებულთან ერთად უწყვეტი, ფუნქციებისაგან შემდგარი სიმრავლეა.
L_2 - კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციებისაგან შედგენილი ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, წარმოებულის ოპერატორი $\frac{d}{dx}:\mathrm{L}_2 \to L_2$; სადაც L_2 ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცეა; ასევე, ვიცით ინტეგრების ოპერატორი; კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი დ.ა.შ.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომ A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო B რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ f გადასახვას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

ეს ფუნქციონალი პრაქტიკაში გამოიყენება შემდეგი ფორმით:

$$K(f)=\int_0^1 f(x)dx. \tag{17}$$

მაგალითი: $\int_0^1 dx:\mathrm{L}_2 \to R$ ფუნქციონალი ნებისმიერ ფუნქციას L_2-ფუნქციონალური სივრციდან გადასახავს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში. ანუ, ნებისმიერ ფუნქციას შეუსაბამებს, მოცემული განსაზღვრული ინტეგრალის მნიშვნელობას ამ ფუნქციიდან.

განსაზღვრება: თუ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია R მიმართება, მაშინ $\langle A;R\rangle$ წყვილს **რელაციური სისტემა** ეწოდება.

მაგალითი: თუ, A გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო R მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle A;R\rangle$ იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ, B სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და S მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle B;S\rangle$ რელაციური სისტემაა.

განსაზღვრება: ორი $\langle A;R\rangle$ და $\langle B;S\rangle$ რელაციურ სისტემას ეწოდებათ **იზომორფული**, თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა $f:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომ ნებისმიერი ($\forall$) x,y$\in$A ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \tag{18}$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი $\langle A;R\rangle$-ში, მაშინ, აქვს ადგილი $\langle B;S\rangle$-შიც. მაშასადამე, **იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია(ერთნაირია).**

P.S. ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას. ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავუმატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყე-ნება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [9-17] (**RO-ფუნქციის მეთოდი**).

1.4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები(ხელოვნური ინტელექტი)

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის **ხელოვნური ინტელექტის** შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დავადგინოთ, რომ მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკე-თოთ გარკვეული დასკვნა. მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს, თუ არა მოცემული ფორმულა, სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დავუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა. ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია.

P – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

S – აქციების ფასი ეცემა;

U – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \tag{19}$$

$$S \Rightarrow U; \tag{20}$$

$$P; \tag{21}$$

$$U. \tag{22}$$

ვაჩვენოთ, რომ (22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა:

$((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$. ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) \equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P) \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv$$
$$\equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv$$
$$\equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U. \quad (23)$$

ასე, რომ თუ, $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ $P \wedge S \wedge U$ ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფრმულა $P \wedge S \wedge U$ ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია P,S და U გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია U გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა U, არის (19), (20) და (21) ფორმულების შედეგი.

P.S.ანალოგიურად ხდება სხვადსხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები[4].

1.5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ქონდათ ფიქსირებული სახე: "სოკრატე ადამიანია", "სოკრეტე მოკვდავია" დ.ა.შ.

პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ **გამონათ-ქვამ-ფუნქციებს**: "x რაციონალური რიცხვია", "y კეთილი ადამიანია". . .

განსაზღვრება: ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს **პრედიკატებს** უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა რვაჩოვმა შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად[9]. მოგვიანებით,
R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგაძის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე[10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R – ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

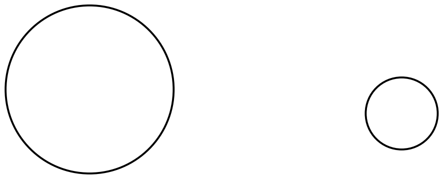
ეხლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით ბულის ალგებრების კატეგორიაში:

$$L_1 \to L_2 \to L_r \quad , \quad (24)$$

სადაც L_1 - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,
L_2 - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,
L_r- არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები.

ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია(ნახ.1.1.)



ნახ.1.1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული.

(24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ **საყრდენ სიმრავლეებს**, ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 \ge 0\}, \qquad (25)$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) | R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2 \ge 0\}, \qquad (26)$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 \ge 0\}, \qquad (27)$$

$$\Omega_4 = \{(x,y) | r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2 \ge 0\}. \qquad (28)$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4)\,. \qquad (29)$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით L_2-ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_2-ში მივიღებთ წირის პრედიკატულ განტოლებას :

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4)\,, \qquad (30)$$

სადაც $P_1 -$არის გამონათქვამი $x_1 \ge 0$,

$P_2 -$არის გამონათქვამი $x_2 \ge 0$,

$P_3 -$არის გამონათქვამი $x_3 \ge 0$,

$P_4 -$არის გამონათქვამი $x_4 \ge 0$,

$$x_1 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2;$$

$$x_2 = R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2;$$

$$x_3 = (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2; \qquad (31)$$

$$x_4 = r^2 - (x-c)^2 - (y-d)^2.$$

ეხლა, გადავიდეთ $L_r -$ში **რვაჩოვის** ჰომომორფიზმის მეშვეობით :

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \tag{32}$$

მივიღებთ R – ფუნქციას :

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \\ + \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \tag{33}$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, **როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები,** უფრო მიზანშეწონილია **ობგაძის ჰომომორფიზმი[10]** სტრუქტურებს შორის :

$$K_1 \to K_2 \to K_{ro}, \tag{34}$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} . \tag{35}$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი” $\Leftrightarrow$ “უდრის ნულს”;
“მცდარი”$\Leftrightarrow$ “არ უდრის ნულს”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნებიან :

$$\Omega_1 = \{(x,y) | (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \tag{36}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) | (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \tag{37}$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad ; \tag{38}$$

$$\text{ე.ი.} \quad P = P_1 \vee P_2 \quad ; \tag{39}$$

სადაც

P_1 – არის გამონათქვამი $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, (40)

P_2 – არის გამონათქვამი $(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0$; (41)

ე.ი.

$$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2].$$

როგორც ვხედავთ, ობგაძის[10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირების საშუალებას იძლევა უწყვეტი ფუნქციების საშუალებით.

ასევე, რიგ შემთხვევებში მნიშვნელოვნად გამარტივდა R – ფუნქციის ანალიზური სახეც[12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, **რვაჩოვ-ობგაძის RO – მეთოდს** ეძახიან.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით.
2. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup A^c) \cap B = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv ?$
5. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სურექცია და ბიექცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 2

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით.
2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cap B) \cup (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \wedge 1) \vee (p \wedge (\neg p)) \equiv ?$
5. გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით დოქში 4 ლიტრი ღვინო ?
6. რა განსხვავებაა მიმართებასა და ფუნქციას შორის ? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 3

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup A^c) \cap (B \cap B^c) \cap (A \cup B \cup C)^c = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$((p \vee (\neg p)) \wedge (q \wedge (\neg q)) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv ?$
5. რომელიღაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
6. რა განსხვავებაა ოპერატორსა და ფუნქციონალ შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 4

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B \cup C) \cap A^c \cap (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg r)) \equiv ?$
5. ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამაშდებოდა?
6. რა განსხვავებაა ფუნქციასა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 5

1. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები.
2. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup \varnothing) \cap (A \cap A) \cap (A \cup A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee 0) \wedge (p \wedge p) \wedge ((p \vee (\neg p)) \equiv ?$
5. 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
6. რა განსხვავებაა რელაციური სისტემების ჰომომორფიზმსა და იზომორფიზმს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეშვეობით.
2. განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B) \cup (A \cup A^c) \cup (B \cap B^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(\neg q) \wedge ((q \vee (q \vee 0)) \wedge ((p \vee (\neg p)) \equiv ?$
5. ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
6. რა კავშირია სურექციას, ინექციასა და ბიექციას შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 7

1. განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ევივალენციის მიმართებები.
2. ჩამოაყალიბეთ მიმართების, ფუნქციის, ოპერატორისა და ფუნქციონალის ცნებები და აჩვენეთ ფუნქციისა და ფუნქციონალის განმასხვავებელი ნიშნები.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cap E) \cup (B \cap \varnothing) \cup (A^c \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee p) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (p \vee 1) \wedge (p \vee 0) \equiv ?$
5. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
6. რა განსხვავებაა კონიუნქტიურ და დიზიუნქტიურ ლიტერებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 8

1. რელაციური სისტემების იზომორფიზმის ცნება. იზომორფულია თუ ჰომომორფული გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციონალის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B^c) \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$((p \wedge p \wedge ((q \vee (\neg q))) \vee ((q \wedge (\neg q)) \equiv ?$
5. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
6. რა განსხვავებაა ბულის ფორმულის დიზიუნქტიურ და კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970
2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Prinston, 1963
3.Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4.Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5.Яблонский С.В. Введение в дискретную математику,Наука,Москва,1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw-Hill, Inc., New York. 1995.
7.Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam,1956
8.Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951
9.Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
10.ОбгадзеТ.А.Элементы математического моделирования,Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос.,Тбилиси,1989
11.Обгадзе Т.А.,Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ,учеб.пос., Владимир,1999
12.Пескова М.В. Применение метода регулярных источников OG для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума "Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках" Воронеж, 20-27 января 2000
13.Аракелян С.М.,Папонов В.С.,Дроган Ю.Е.,Пигарина А.А.,Прокошев В.Г.,Обгадзе Т.А. Исследование гидродинамической устойчивости течения смеси топливо-газ в нагнетательных трубопроводах дизеля, Материалы международного Школа семинара "Нелинейные задачи гидродина-мической теории устойчивости и турбулентность " 12-20 февраля , Москва, 2000
14. Obgadze T.A.,Barinov V.V., Fedotova O.I.. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
15. Obgadze T.A.,Prokoshev V.G.,Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger , A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3rd LANE,Erlangen, August 28-31, 2001
16. Обгадзе Т.А. ,Прангишвили А.И.,Цвераидзе З.Н.,Матиашвили И.Г. Математическое моделирование лавинообразных потоков и расчет определяющих параметров на основе обратной вариационной постановки Купрадзе – Бреббия, Международный научный журнал. Проблемы прикладной механики, Тбилиси, № 4(21), 2005
17.Обгадзе Т.А.,Прангишвили А.И,Цвераидзе З.Н.,Матиашвили И.Г. Математическое моделирование грязевых селевых потоков, Международный научный журнал, Проблемы прикладной механики. Тбилиси, № 4(21), 2005

თავი II. რიცხვითი სიმრავლეები, როგორც გარემომცველი სამყაროს რაოდენობრივი მოდელები

შესავალი

ადამიანი, ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში, დადგა სიმრავლეთა რაოდენობრივი შედარების აუცილებლობის წინაშე. ამგვარად, წარმოიშვა **ნატურალური რიცხვის** ცნება.

განსაზღვრება: თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, **ნატურალური რიცხვები** ეწოდებათ.

ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება **N** ასოთი.

N={1;2;3;. . .}. (1)

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. იმისათვის, რომ შეადარონ უსასრულო სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობა, შემოაქვთ **სიმრავლის სიმძლავრის ცნება**.

განსაზღვრება: თუ, ორი უსასრულო სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა(ბიექცია), მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს **ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ**.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს **თვლადი** უსასრულობა ეწოდება.

P.S,ცხადია, რომ ყველა სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადანომრვაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით, აგრეთვე თვლადი იქნება.

ნატურალური რიცხვები არსებობს ორი სახის: **მარტივი და შედგენილი რიცხვები.**

განსაზღვრება: ერთისაგან განსხვავებულ რიცხვს **მარტივი** ეწოდება, თუ ის იყოფა მხოლოდ ერთზე და თავის თავზე. ხოლო, ერთზე მეტ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არაა მარტივი შედგენილი ეწოდება.

მაგალითი: მარტივი რიცხვებია P={2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 ;19 ; 23 ; 29;. . .}.

შედგენილი რიცხვებია N\P\{1}={4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15;. . .}.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, დღემდე, **ბევრი ამოუხსნელი ამოცანაა დაგროვილი** ; რომელთა ჩამოყალიბება ელემენტარულია, მაგრამ ამოხსნა ჯერ-ჯერობით ვერ ხერხდება. ეს პრობლემები, ძირითადად ეხება მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობაში. ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი ასეთი ამოცანა(**პრობლემა**):

1. ვიცით ლუწი რიცხვების ზოგადი ფორმულა: $n=2k$ **; ასევე, ვიცით კენტი რიცხვების ზოგადი ფორმულა:** $n=2k+1$. **ეს ფორმულები გვაძლევენ შესაბამისად, ყველა ლუწ და კენტ რიცხვებს, როცა** k

ცვლადი გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. საჭიროა, ვიპოვოთ ანალოგიური ფორმულა მარტივი რიცხვებისათვის.

2. ცნობილია ეილერის მრავალწევრი: $f(x)=x^2+x+41$, რომელიც იძლევა მარტივ რიცხვებს, თუ $x=0;1;2;\ldots;39$. უცნობია, არსებობენ, თუ არა ისეთი ნატურალური m>41 რიცხვები, რომ $f(x)=x^2+x+m$ მრავალწევრი იძლეოდეს მარტივ რიცხვებს, როცა $x=0;1;2;\ldots;\mathrm{m}-2$.

3. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა n^2+1 სახის მარტივი რიცხვების სიმრავლე.

4. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა ისეთი მარტივი რიცხვების სიმრავლე, რომელთა შორის სხვაობა 2-ის ტოლია(ჰოლდბახის პრობლემა).

5. უცნობია, შესაძლებელია, თუ არა ნებისმიერი ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის სხვაობის სახით.

ზემოთ მოყვანილი პრობლემები, ძირითადად, დაკავშირებული არიან მარტივი რიცხვების ზოგადი ფორმულის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან. ამ პრობლემის ამოხსნის გზაზე საგრძნობ წინსვლას იძლევა **ობგაძის თეორემა**.

ობგაძის თეორემა(1972წ): მარტივი რიცხვების სიმრავლის ზოგად ფორმულას, არ შეიძლება რომ ჰქონდეს $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის სახე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის სასრული სხვაობები:

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b;$$

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)=2a(x+1)+a+b-2ax-a-b=2a;$$

$$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)=0.$$

ცხადია, რომ უფრო მაღალი რიგის $k\geq 3$ სასრული სხვაობები კვადრატული ფუნქციიდან, აგრეთვე იქნებიან ნულის ტოლნი. (ადვილად შემოწმდება, რომ ანალოგიური თვისებები აქვთ საზოგადოდ n ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციებს(პოლინომებს), რომელთათვისაც შესაბამისად ყველა $k\geq n+1$ ხარისხის სასრული სხვაობები იქნებიან ნულის ტოლი).

ეხლა, განვიხილოთ მარტივი რიცხვების მიმდევრობა და მათი შესაბამისი სასრული სხვაობები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ, მესამე რიგიდან დაწყებული ყველა სასრული სხვაობა არ აღმოჩნდა ნულის ტოლი, მაშინ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება მოიცემოდეს კვადრატული ფუნქციით და ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.

განვიხილოთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და შესაბამისი სასრული სხვაობები:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29
1 2 2 4 2 4 2 4 6
1 0 2 -2 2 -2 2 2

-1 2 -4 4 -4 4 0

როგორც ვხედავთ მესამე რიგის სასრული სხვაობა(მეოთხე სტრიქონი) არაა მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარტივი რიცხვის ზოგად ფორმულას არ შეიძლება, რომ ჰქონდეს კვადრატული ფუნქციის სახე რ.დ.გ.

P.S. თეორემის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეს თეორემა ადვილად ზოგადდება ნებისმიერი n სასრული ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციისათვის. ზემოთმოყვანილი დანარჩენი პრობლემების ამოხსნა ავტორისათვის არაა ცნობილი და ამდენად, მაგისტრანტებს შეუძლიათ გამოსცადონ ძალები მათ ამოსახსნელად.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის შეიძლება ორი რიცხვის შეკრება. ასე, რომ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ისევ ნატურალური რიცხვი იქნება. ამ ფაქტს მათემატიკაში ჩამოაყალიბებენ ასე: "ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე **ჩაკეტილია** შეკრების ოპერაციის მიმართ". მაგრამ, ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, საზოგადოდ არაა ნატურალური რიცხვი.

მაგალითი: $5-7 \notin N$. რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეუძლებელია $x+7=5$ განტოლების ამოხსნა.

ამიტომ, საჭირო გახდა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოვება **მთელ რიცხვთა** სიმრავლემდე.

განსაზღვრება: ნატურალური რიცხვების, მათი მოპირდაპირე რიცხვების და ნულის გაერთიანებას **მთელ რიცხვთა** სიმრავლე ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Z ასოთი. ფორმალურად, ეს განსაზღვრება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$Z = N \cup N_{-} \cup \{0\}. \tag{2}$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}. \tag{3}$$

ამ სიმრავლეში განტოლება $x+7=5$, უკვე ამოხსნადია და

$$x = 5-7 \Leftrightarrow x = -2; \tag{4}$$

მაგრამ, წრფივი განტოლება, საზოგადოდ, არაა ამოხსნადი.

მაგალითი: $2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin Z$. (5)

ამიტომ, საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოვება **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლემდე.

განსაზღვრება: $\frac{a}{b}$ სახის რიცხვების სიმრავლეს, სადაც $a \in Z \wedge b \in N$ **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Q ასოთი.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \; \mathrm{a} \in \mathrm{Z} \wedge \mathrm{b} \in \mathrm{N} \right\}. \qquad (6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$Q \subset Z \subset N. \qquad (7)$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, უკვე, შეგვიძლია ამოვხსნათ წრფივი განტოლებები, თუმცა, არც ეს სიმრავლე აღმოჩნდა საკმარისი ალგებრული განტოლებების ამოსახსნელად. ასე შემოვიდა მათემატიკაში **ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე.** ხოლო მოგვიანებით, **ჰიპერკომპლექსური და კლიფორდის რიცხვების** ცნებები. ამ რიცხვითი სიმრავლეების აგება მოითხოვს ფაქიზი მათემატიკური ცნებების ცოდნას და ჩვენი ამოცანებისათვის იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ ჩვენ ჩავუღრმავდებით თანდათანობით.

2.1. ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი

ნუმეროლოგიის ელემენტები. ნატურალური რიცხვის ცნებას ფართოდ იყენებს მეცნიერების ყველა დარგი. ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, როდესაც მეცნიერება და რელიგია ერთად შეისწავლებოდა, როგორც საერთო სიბრძნის ნაწილები, მეცნიერები სწავლობდნენ ამა, თუ იმ მოვლენის რიცხვით მახასიათებლებს: ზომავდნენ სამეურნეო სავარგულების ფართს, მანძილებს, ჭურჭლის მოცულობას და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში, კი ისეთი მეცნიერებიც კი, როგორიც იყო **პითაგორა** სწავლობდნენ **რიცხვთა მაგიას**. მათ სჯეროდათ, რომ ადამიანის მთელი ცხოვრება და ხასიათი განპირობებულია არა მარტო ვარსკვლავთა და პლანეტების განლაგებით(**ასტროლოგია**), არამედ იმ რიცხვითი მახასიათებლებით, რაც დაკავშირებულია მოცემული ადამიანის დაბადების თარიღთან(**ნუმეროლოგია**)[1-2]. ნუმეროლოგიით იყო გატაცებული **ისააკ ნიუტონიც**.

მაგალითისათვის, თუ, ადამიანი დაიბადა 1976 წლის 19 ნოემბერს, მაშინ მისი პერსონალური რიცხვი იქნება დაბადების რიცხვის ციფრების ჯამი 1+9=10 ანუ 1+0=1. ხოლო დაბადების თარიღის პერსონალური რიცხვი რომ მივიღოთ, უნდა შევკრიბოთ მისი შესაბამისი თვის ნომრის ციფრებიც ნოემბერი=11 ე.ი. 1+1=2, გარდა ამ რიცხვებისა უნდა შევკრიბოთ დაბადების წლის ციფრებიც ე.ი. 1+9+7+6=23 ამ რიცხვის ციფრების ჯამია 2+3=5, საბოლოოდ, უნდა შევკრიბოთ დაბადების რიცხვის, თვის და წლის ციფრები ერთად 19.11.1976. მაშინ მივიღებთ
(1+9)+(1+1)+(1+9+7+6)=10+2+23=35 თუ, ამ რიცხვის ციფრებსაც შევკრიბავთ, მივიღებთ 3+5=8. რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ პიროვნებისათვის დამახასიათებელია რიცხვი 8-ის უპირატესი გავლენა. ეს ნიშნავს იმას, რომ განხილული პიროვნება უმეტესწილად, არის წარმატებული ყველა წამოწყებაში, ამასთან ერთად, მასზე მოქმედებს

დაბადების რიცხვის(19) ციფრების ჯამი 1, რაც მიგვანიშნებს მისი პატრონის ლიდერულ თვისებებზე.

საზოგადოდ, ადამიანი განიცდის როგორც თავისი რიცხვების, ასევე, ცხოვრების ადგილისა და მოცემული თარიღის გავლენასაც.

განიხილავენ პერსონალური წლის 9 მიმდევრობით საფეხურს, ათვლილს დაბადებიდან:

I წელი – შესაძლებლობათა წელია;
II წელი – წონასწორობის წელია;
III წელი – შემოქმედებითი აქტივობის წელია;
IV წელი – მშენებლობის წელია;
V წელი – კომუნიკაბელობის წელია;
VI წელი – დავალებათა შესრულების წელია;
VII წელი – განხორციელებების წელია;
VIII წელი – კარმის წელია;
IX წელი – ციკლის დასრულების წელია.

P.S. ყოველი 9 წლის შემდეგ, ციკლი იწყებს განმეორებას.

ასევე, განიხილავენ დაბადების თვეთა გავლენას:

იანვარი – გმირული;
თებერვალი – წონასწორობა;
მარტი – სიხარული;
აპრილი – პასუხისმგებლობა;
მაისი – ცხოვრების ენერგია;
ივნისი – შემსრულებლობა, მორჩილება და მზრუნველობა;
ივლისი – სინთეზურობა;
აგვისტო – ლიდერობა;
სექტემბერი – რწმენა;
ოქტომბერი – სიბრძნე;
ნოემბერი - შთაგონებული;
დეკემბერი – დასრულებულობა.

ყოველ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ხასიათი:

რიცხვი 1 - შეესაბამება ეგოცენტრულ ლიდერს;

რიცხვი 2 – მგრძნობიარე, კომუნიკაბელური, უყვარს კუთხეების მომრგვალება;

რიცხვი 3 – მხიარული, ცდილობს მიიღოს სიამოვნება ფიზიკური შრომიდან, უყვარს ხელებით მუშაობა;

რიცხვი 4 – იწვევს დაუდეგარ ხასიათს, რომელიც პერიოდულად, ცდილობს თავი დააღწიოს მონოტონურობას;

რიცხვი 5 – იწვევს ნათელ გონებას და კომუნიკაბელობისაკენ მიდრეკილებას. ამ რიცხვის ხალხს ახასიათებთ მაგნეტიზმი და ჰიპნოზის უნარი, რომელიც იზიდავს მათკენ ხალხს.

რიცხვი 6 – იძლევა თანაგრძნობის მწვავე გრძნობას. უყვარს წესრიგი, სამართლიანობისაკენ სწრაფვა. უყვარს კოლექტიური შრომა. არად დაგიდევს სხვის აზრს, თუ ისინი ეწინააღმდეგებიან მის საკუთარ ინტერესებს.

რიცხვი 7 – იწვევს განვითარებულ ინტუიციას. უყვარს მარტოობა. არის პუნქტუალური და აკურატული. ხშირად მოსდის შემაშფო-თებელი აზრები და ეძებს პრობლემებს იქაც, სადაც ისინი არ არიან.

რიცხვი 8 – იძლევა მომთმენ, დინჯ ხასიათს და აღწევს წარმატებებს ყველა საქმეში. წარმატებული ადამიანია. თქვენი გარშემომყოფნი გრძნობენ თქვენს განსაკუთრებულობას და რესპექტაბელობას, ცდილობენ მოგექცენ მოწიწებით.

რიცხვი 9 – იწვევს ცოდნისაკენ და ფილოსოფიური აზროვნე-ბისაკენ სწრაფვას. ადვილად პატიობთ სხვებს ცოდვებს. ვერ იტანთ ხეპრე ადამიანებს.

ასევე, მნიშვნელოვანია შესაბამისობა ასოებსა და რიცხვებს შორის(**ინფორმაციის კოდირების ერთ-ერთი პირველი ისტორიული მაგალითი**):

1	ა	კ	ტ	ძ
2	ბ	ლ	უ	წ
3	გ	მ	ფ	ჭ
4	დ	ნ	ქ	ხ
5	ე	ო	ღ	ჯ
6	ვ	პ	ყ	ჰ
7	ზ	ჟ	შ	
8	თ	რ	ჩ	
9	ი	ს	ც	

ამ შესაბამისობის გამოყენების მაგალითისათვის განვიხილოთ სახელები:

იესო ქრისტე=ი+ე+ს+ო+ქ+რ+ი+ს+ტ+ე=9+5+9+5+4+8+9+9+1+5=64, **ციფრთა ჯამი=6+4=10; საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში;**

ალაჰი=ა+ლ+ა+ჰ+ი=1+2+1+6+9=19, **ციფრთა ჯამი=1+9=10; ანუ საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში.**

იეღოვო=ი+ე+ღ+ო+ვ+ო=9+5+5+5+6+5=35, **ციფრთა ჯამი=3+5=8;**

ეშმაკი=ე+შ+მ+ა+კ+ი=5+7+3+1+1+9=26, **ციფრთა ჯამი=2+6=8;**

სატანა=ს+ა+ტ+ა+ნ+ა=9+1+1+1+4+1=17, **ციფრთა ჯამი=1+7=8; რაც შეესაბამება ამქვეყნიურ წარმატებებს სიამოვნებათა სფეროში, იმქვეყნიური სამუდამო ტანჯვის სანაცვლოდ.**

კრიშნა=კ+რ+ი+შ+ნ+ა=1+8+9+7+4+1=30, ანუ 3+0=3, **რაც შეესაბამება ღმერთის მსახურს მორჩილებით.**

ნათელა=ნ+ა+თ+ე+ლ+ა=4+1+8+5+2+1=21, **ციფრთა ჯამი=2+1=3;**

ილია=ი+ლ+ი+ა=9+2+9+1=21, **ციფრთა ჯამი=2+1=3;**

ნათელა=ილია=3=სწრაფვა ღმერთისაკენ მორჩილებით.

ბიზანტია=ბ+ი+ზ+ა+ნ+ტ+ი+ა=2+9+7+1+4+1+9+1=34, **ციფრთა ჯამი=3+4=7;**

რომი=8+5+3+9=25, **ციფრთა ჯამი=2+5=7;**

ბაბილონი=ბ+ა+ბ+ი+ლ+ო+ნ+ი=2+1+2+9+2+5+4+9=34, **ციფრთა ჯამი=3+4=7;**

ისრაელი=9+9+8+1+5+2+9=27+16=43; ციფრთა ჯამი=3+4=7;
ციფრი 7 შეესაბამება ღმერთთან მებრძოლ, დაუდეგარ ქვეყნებს, რომლებიც ადრე თუ, მალე ქრებიან რუკიდან.

ღმერთი=ღ+მ+ე+რ+თ+ი=5+3+5+8+8+9=38, **ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ 1+1=2;**

ოსანა=5+9+1+4+1=20 რაც იმას ნიშნავს, რომ 2 ღმერთის რიცხვია.

აფხაზეთი=ა+ფ+ხ+ა+ზ+ე+თ+ი=1+3+4+1+7+5+8+9=38, ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ აფხაზეთი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

ერაყი=5+8+1+6+9=29; ციფრთა ჯამი=2+9=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ ერაყი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

რუსეთი=რ+უ+ს+ე+თ+ი=8+2+9+5+8+9=41; ანუ 4+1=5; **ძლიერი ქვეყანაა, ახასიათებს კომუნიკაბელობა და მაგნეტიზმი, რომელიც იზიდავს სხვადასხვა ჯურის ხალხს თავისაკენ.**
ებრაელი=ე+ბ+რ+ა+ე+ლ+ი=5+2+8+1+5+2+9=32; ანუ 3+2=5;
ებრაელებისათვის მეტად ხელსაყრელი ქვეყანაა რუსეთი.

P.S. ცხადია, რომ დაინტერესებულმა მკითხველმა, ზემოთ მოყვანილი პითაგორისეული რიცხვთა მაგიის უფრო დეტალურად გასაცნობად, უნდა მიმართოს დამატებით ლიტერატურას[1-2].

2.1.1. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

ამ გამოყენებათა გამო, ძველად, ხელისუფალთა ფართო მხარდაჭერით სარგებლობდნენ **ბრძენნი(მეცნიერებისა და ფილოსოფიის მსახურნი)**. სწორედ, ამან მისცა ანტიკურ ხანაში ბიძგი მეცნიერებისა და მათ შორის, რიცხვთა თეორიის განვითარებას. მოგვიანებით, **დირიხლეს, გაუსისა და ეილერის** ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი მისცა რიცხვთა თეორიის განვითარებას. **გაუსის** მიერ შემუშავებულ იქნა **შედარებათა თეორია[3-7]** განუსაზღვრელი

განტოლებების ამოსახსნელად **N** - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. მოგვიანებით, ამ თეორიამ დიდი გამოყენება პოვა **კრიპტოგრაფიაში[8-9]**(**ინფორმაციის დაცვა და გაშიფრვა**); ასევე, **მონაცემთა ციფრული დამუშავების თეორიაში[10]**(**ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა**). ამიტომ, ჩვენ უფრო დეტალურად შევისწავლით გაუსის შედარებათა თეორიას.

განსაზღვრება: ორ a და b რიცხვს **ურთიერთმარტივი** ეწოდებათ თუ, მათი უდიდესი საერთო გამყოფი (a;b)=1.

მაგალითი: 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, რადგან (2;3)=1.
3 და 5 ; 7 და 9 ; 9 და 11 დ.ა.შ.

თეორემა *:* თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი a და b>0 მთელი რიცხვები, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი მთელი q და r რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს :

$$a = bq + r,\ \ 0 \le \mathrm{r} \le \mathrm{b} - 1. \tag{8}$$

r - რიცხვს უწოდებენ a-რიცხვის b-ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს.

მაგალითი: a=185 ; b=12; მაშინ 185=12·15+5, ანუ q=15 და r=5.

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად იყენებენ ევკლიდეს ალგორითმს, რომელიც ემყარება (8) წარმოდგენას. მართლაც, ვთქვათ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და b ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაშინ თეორემის თანახმად, ადგილი ექნება ტოლობებს :

$$\begin{aligned} &a = bq_0 + r_0; \quad 0 < \mathrm{r}_0 < b;\\ &b = r_0 q_1 + r_{1;} \quad 0 < \mathrm{r}_1 < r_0;\\ &r_0 = r_1 q_2 + r_2;\ \ 0 < \mathrm{r}_2 < r_1;\\ &.\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\\ &\mathrm{r}_{\text{n-2}} = r_{n-1} q_n + r_n;\ 0 < \mathrm{r}_\mathrm{n} < r_{n-1};\\ &r_{n-1} = r_n q_{n+1}. \end{aligned} \tag{9}$$

რიცხვები $r_0, r_1, r_2, \ldots$ ადგენენ მკაცრად კლებად არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობას ; მაგრამ ყოველი ასეთი მიმდევრობა სასრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი a და b>0 წყვილისათვის მიმდევრობითი გაყოფის პროცესი(**ევკლიდეს ალგორითმი**) სასრულია, ე.ი. სასრულია (9) ტოლობათა რიცხვი. პროცესი წყდება იმ საფეხურზე, რომელზედაც გაყოფა შესრულდება უნაშთოდ. ანუ როცა $r_{n+1} = 0$. ამგვარად, r_n არის უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი-უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, რომ

$$(a;b) = (b;r_0) = (r_0;r_1) = \ldots = (\mathrm{r}_{\text{n-1}};r_n) = r_n. \tag{10}$$

მაგალითი: ვიპოვოთ d=(664 ;480) ; a=664 ; b=480.
მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება :
664=480·1+184 ;
480=184·2+112 ;

$184=112\cdot 1+72$;

$112=72\cdot 1+40$;

$72=40\cdot 1+32$;

$40=32\cdot 1+\mathbf{8}$;

$32=8\cdot 4$.

ე.ი $d=(664\,;480)=\mathbf{8}$.

არითმეტიკის ძირითადი თეორემა: ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით(თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.

ანუ, თუ n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1\, p_2 \ldots \mathrm{p_n} \tag{11}$$

ამ ნამრავლში ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხებს, მივიღებთ (11) გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{p_n^{\alpha_n}}\,. \tag{12}$$

ამ (12) ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ n რიცხვის განსხვავებულ **გამყოფთა რაოდენობა** იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_{\mathrm{n}} + 1)\,. \tag{13}$$

P.S. ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს **ეილერის** $\varphi(n)$ **ფუნქციას**, რომელიც უდრის 1-დან n-მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთმარ-ტივი არიან n-ის მიმართ.

მაგალითი: $\varphi(1)=1;\ \varphi(2)=1;\ \varphi(3)=2;\ \varphi(4)=2;\ \varphi(5)=4;\ \varphi(6)=2.$

ვთქვათ, $n = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots \mathrm{p_n^{\alpha_n}}$ მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\ldots(1-\frac{1}{\mathrm{p_n}})\,. \tag{14}$$

თუ, p მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}. \tag{15}$$

კერძო შემთხვევაში,

$$\varphi(p) = p-1. \tag{16}$$

მაგალითი: $\varphi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) = 16;$

$\varphi(81) = 81-27 = 54;$

$\varphi(5) = 5-1 = 4.$

2.1.2. შედარებათა თეორიის ელემენტები

განვიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ m **ნატურალურ რიცხვზე** გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ m რიცხვს **მოდულს** უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს, m რიცხვზე გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა (0;1;2;3;... m-1)-ნაშთთა სრული სისტემიდან. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა m-1 კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან **ურთიერთსადარი რიცხვები m მოდუ-ლით.** თუ, განიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განიხილავენ აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას:

$-\frac{m-2}{2};\ -\frac{\mathrm{m}-4}{2};\ \ldots;-2;-1;0;1;2;\ \ldots;\frac{\mathrm{m}}{2};$ როცა m ლუწია;

$-\frac{m-1}{2};-\frac{\mathrm{m}-3}{2};\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots;\frac{\mathrm{m}-1}{2};$ როცა m კენტია.

განსაზღვრება: ორ მთელ a და b>0 რიცხვს ეწოდებათ **ურთიერთსა-დარი მოდულით m**, თუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერნაირ ნაშთებს იძლევიან.

შედარების დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)\,. \tag{17}$$

(17) იკითხება ასე: a სადარია b –სი მოდულით m.

ცხადია, რომ თუ a სადარია b –სი, ანუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა (a-b) უნაშთოდ იყოფა m – ზე.

მაგალითი: $25 \equiv 15(\mathrm{mod}10)$, რადგან 25 და 15 10-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან 5-ს. ასევე, ცხადია რომ 25-15=10 და იყოფა 10-ზე(შედარების მოდულზე).

შედარებათა თვისებები :

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრი-ბოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m);...\mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{mod}\, m))\,. \tag{18}$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m);...\mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{mod}\, m))\,. \tag{19}$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე, ანუ

$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n(\mathrm{mod}\, mn))$. (20)

4. თუ, შრდარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია, ანუ

$(a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_1) \wedge a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_2)) \Rightarrow (a \equiv b(\mathrm{mod}[m_1; m_2]))$. (21)

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია, ანუ

$(an \equiv bn(\mathrm{mod}\, m) \wedge (\mathrm{m;n}) = 1) \Rightarrow (\mathrm{a} \equiv \mathrm{b(modm)})$. (22)

ეილერის თეორემა: თუ m ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და (a ;m)=1, მაშინ

$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. (23)

კერძო შემთხვევაში, როცა $m = p$ მარტივი რიცხვია და $(a; p) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$, მიიღება **ფერმას მცირე თეორემა** :

$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. (24)

განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები.

1) $x^3 + x^2 - 3x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 5)$

ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0 ;1 ;2 ;3 ;4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება

$x \equiv 1(\mathrm{mod}\, 5)$.

2) $x^2 + x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0 ;1 ;2 ;3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3) $12x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 6)$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ $12 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 6)$. ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია :

$3x^2 - 2x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 6)$.

ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება

$x \equiv 3(\mathrm{mod}\, 6)$.

4) $x^5 + x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0;1;2;3;4;5;6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$x \equiv 2(\mathrm{mod}\, 7)$; $\mathrm{x} \equiv 4(\mathrm{mod7})$.

განსაზღვრება: ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადარი მოდულით m, თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადარია m-ის მოდულით. ანუ,

$$f(x) \equiv g(x) (\mathrm{mod}\, m). \tag{25}$$

P.S.

1. შედარებათა თეორიითა და მათი ინფორმატიკაში გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს სათანადო ლიტერატურას[3-10].

2. მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებთან მიმართებაში ქმნის ალგებრულ სისტემას, რომელსაც მათემატიკაში **კომუტაციურ, უნიტარულ რგოლს** უწოდებენ[11-12].

2.2. რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აგება

რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, არსებობს მოცემული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ამიტომ, მათემატიკოსები ალგებრულ სისტემას, რომელსაც ქმნის **რაციონალურ რიცხვთა** სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ **ველს[11-12]** უწოდებენ. ალგებრის(ალგებრულ ოპერაციებთან მიმართებაში) თვალსაზრისით არ არის სხვაობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის. ასე, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც ალგებრული სისტემის თვალსაზრისით ქმნის **ველს.** თუმცა, ამ ორ სიმრავლეს შორის აშკარა სხვაობაა, **ტოპოლოგიის**[11-12] თვალსაზრისით.

ტოპოლოგიის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ზღვარისა და უწყვეტი ფუნქციის ცნებები, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია მათემატიკური მოდელირებისათვის.

განსაზღვრება: მოცემულ Q სიმრავლეს, მისი ყოველი x ელემენტის შემცველ ღია $\mathcal{B}(x)$ სიმრავლეებთან(ტოპოლოგიის ბაზა) ერთად **ტოპოლოგიური სივრცე** ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიის ბაზას წარმოადგენს მისი ყველა ღია ინტერვალების $\mathcal{B}(x)$ სიმრავლე. ამასთან ერთად, რადგან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, მისი ტოპოლოგიის ბაზაც თვლადია.

განვიხილოთ რიცხვითი მიმდევრობის ცნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გადასახვას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, **რაციონალურ რიცხვთა** $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ **მიმდევრობა** ეწოდება.

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას ეწოდება **კოშის**(ფუნდამენტალური მიმდევრობა), თუ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |q_m - q_n| = 0 \cdot \qquad (26)$$

თეორემა: თუ, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა კრებადია **რაციონალური რიცხვისაკენ**, მაშინ ის კოშის მიმდევრობას წარმოადგენს.

მაგრამ, თუ $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ კოშის მიმდევრობაა, მისი ზღვარი, საზოგადოდ, შეიძლება არც არსებობდეს(თუ **ზღვარითი წერტილი** არაა რაციონალური რიცხვი).

განსაზღვრება: $x_0 \in Q$ წერტილს ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის **ზღვარითი წერტილი**, თუ ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე(ინტერვალი), შეიცავს რაციონალურ რიცხვს.

თეორემა: $x_0 \in Q$ წერტილი წარმოადგენს **ზღვარით წერტილს**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს Q რაციონალურ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ $\lim_{n\to\infty} q_n = x_0$.

თუ, შევადგენთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას ისეთნაირად, რომ ყოველი შემდეგი წევრი წარმოადგენდეს $\sqrt{2}$-ის უკეთეს მიახლოვებას, მაშინ მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა კოშის მიმდევრობას, რომელიც კრებადია არარაციონალური $\sqrt{2}$ რიცხვისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიცავს თავისი ზღვარითი წერტილების მთლიან სიმრავლეს. თუმცა, ის შეიცავს რაციონალურ რიცხვებს და თითოეული რაციონალური რიცხვი ზღვარითი წერტილია.

განსაზღვრება: Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების ∂Q სიმრავლესთან Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის $\bar{Q}$ **ჩაკეტვა** ეწოდება.

$$\bar{Q} = Q \cup \partial Q . \qquad (27)$$

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის $\bar{Q}$ ჩაკეტვას **ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე** ეწოდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგენს ზღვარით წერტილს და მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მისკენ კრებადი მიმდევრობა.

განსაზღვრება: სიმრავლეს **სრული** ეწოდება, თუ ნებისმიერი კოშის მიმდევრობა კრებადია ამ სიმრავლეში.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე არაა სრული, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე სრულია(რადგან ის შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს).

განსაზღვრება: A სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი B სიმრავლეში, თუ B სიმრავლის ნებისმიერი b_0 ელემენტისათვის, მოიძებნება A სიმრავლის ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება ამ b_0 ელემენტისაკენ.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა მკვრივი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში(დაასაბუთეთ რატომ?).

განსაზღვრება(ინტუიციური): სიმრავლეს **მეტრიკულ სივრცეს** უწოდებენ, თუ მასში განსაზღვრულია ორ ელემენტს შორის მანძილის ცნება.

მაგალითი: მანძილი ორ რაციონალურ რიცხვს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(q_1;q_2)=|q_2-q_1|. \qquad (28)$$

ფორმულა (28)-ის გათვალისწინებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მეტრიკული სივრცეა.

თუ, გავიხსენებთ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის მანძილის ცნებას, რომელიც (28) ფორმულის ანალოგიურია, მივიღებთ რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც მეტრიკული სივრცეა.

განსაზღვრება: მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ არსებობს არაუმეტეს ვიდრე თვლადი, მასში მკვრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითი: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სეპარაბელურია, რადგან მასში, არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი, რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

P.S. **სეპარაბელობის თვისება საშუალებას იძლევა მეტრიკული სივრცის ელემენტებს მივუახლოვდეთ თვლადი სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობით. ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ვარიაციულ(პირდაპირ) რიცხვით მეთოდებში.**

2.3. კომპლექსური რიცხვების სიმრავლე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა-ბიექცია; რაც საშუალებას იძლევა, წრფესთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანები ჩავწეროთ ნამდვილი რიცხვების მეშვეობით და ამოვხსნათ ალგებრული მეთოდების საშუალებით. მაგრამ, წრფეების გარდა

გეომეტრიაში არსებობენ სიბრტყეებიც(ორგანზომილებიანი სივრცე). ისმის კითხვა: ვიცით, რომ ერთგანზომილებიან სივრცეს-წრფეს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, არსებობენ თუ არა სიბრტყის შესაბამისი "ბრტყელი რიცხვები"?

ამ კითხვაზე პასუხი არის დადებითი: დიახ არსებობენ, თან ასეთი რიცხვითი სიმრავლეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანე-თისაგან.

როგორც ვიცით, სიბრტყის ყოველ P წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი(მისი კოორდინატები) P(x;y). ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ "ბრტყელი რიცხვები". ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები $A=(\alpha;\beta)$; $\mathrm{B}=(\gamma;\delta)$.

იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს ახალი რიცხვების შემოღებას, უნდა გვქონდეს შესაბამისი **ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები**. ამის შემდეგ, შეგვეძლება დავახასიათოთ შესაბამისი ალგებრული სისტემა. ამიტომ, შემოვიღოთ ოპერაციები "ბრტყელ რიცხვებზე".

$$A+B=(\alpha;\beta)+(\gamma;\delta)=(\alpha+\beta;\gamma+\delta)\ ; \tag{29}$$

$$A\cdot B=(\alpha;\beta)\cdot(\gamma;\delta)=(\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\delta;\alpha\cdot\delta+\beta\gamma)\ ; \tag{30}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{(\alpha;\beta)}{(\gamma;\delta)}=\left(\frac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2},\frac{\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right). \tag{31}$$

თუ, შემოვიღებთ ნულისა და ერთის შესაბამის ბრტყელ რიცხვებს

$$0=(0;0); \quad 1=(1;0). \tag{32}$$

მივიღებთ ალგებრულ სისტემას, რომლის ოპერაციებიც ძირითადად აკმაყოფილებენ იგივე თვისებებს, რასაც ოპერაციები ნამდვილ რიცხვებზე(წრფივ რიცხვებზე), თუმცა, არის განსხვავებებიც. კერძოდ, თუ "ბრტყელ რიცხვებს" ჩავწერთ **ალგებრული ფორმით** $A=\alpha+i\cdot\beta$. სადაც, $i=(0;1)$; $\alpha=(\alpha;0)$. მაშინ გვექნება

$$i^2=i\cdot i=-1. \tag{33}$$

ასეთი ტოლობა შეუძლებელია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში. ასე, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ახალი ტიპის ალგებრულ სისტემასთან რომელსაც **C - კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს[13]** უწოდებენ.

$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$.

P.S. არსებობენ კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებული სხვა ბრტყელი რიცხვებიც. კონკრეტულად, დუალური და ორმაგი რიცხვები, მაგრამ ამ რიცხვებისათვის გაყოფის ოპერაცია არაა ყოველთვის შესაძლებელი(აქ არაა ლაპარაკი ნულზე გაყოფაზე), ამიტომ პრაქტიკაში "ბრტყელი რიცხვებიდან", ჯერ-ჯერობით, ფართო გამოყენება აქვთ, ძირითადად, კომპლექსურ რიცხვებს.

2.3.1. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები

განსაზღვრება: $z=a+ib$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება სიბრტყეზე ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე ; ხოლო ორი გვერდის სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე :

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|;\quad \left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1-z_2|. \tag{34}$$

განსაზღვრება: $z=a+ib$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება $\bar{z}=a-ib$ კომპლექსურ რიცხვს.

ცხადია, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$|\bar{z}|=|z|;\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2;\quad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2 . \tag{35}$$

განსაზღვრება: $z=a+ib$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება $\mathrm{Re}\, z=a$ რიცხვს, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება $\mathrm{Im}\, z=b$ რიცხვს.

კომპლექსური რიცხვი იგივე სიბრტყის წერტილია. სიბრტყის წერტილები კი, შეგვიძლია გამოვსახოთ, როგორც დეკარტის კოორდინატებში(შეესაბამება კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ჩაწერის ფორმა $z=x+iy$), ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

ამ შემთხვევაში წერტილი ხასიათდება $|z|$ მოდულით (მანძილით კოორდინატთა სათავემდე) და კუთხით აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან $\varphi=arctg\dfrac{y}{x}$, რომელიც აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $2\pi k$ სიზუსტით და რომელსაც კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი $\arg z$ ეწოდება.

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2+2\pi\,\mathrm{k}; \tag{36}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2+2\pi\,\mathrm{k}; \tag{37}$$

$$k=0;\pm1;\pm2;\dots \tag{38}$$

შედეგად, კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ **ტრიგონომეტრიული ფორმით:**

$$z=a+ib=|z|\left(\cos(\arg z)+\mathrm{i}\cdot\sin(\arg z)\right). \tag{39}$$

თუ, გავიხსენებთ **ეილერის ფორმულას**

$$e^{i\cdot\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi; \tag{40}$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის (39) ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გადავალთ მის მაჩვენებლიან ფორმაზე;

$$z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg z}. \tag{41}$$

მაგალითი: $z=1+i\cdot1$ კომპლექსური რიცხვი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\arg z = arctg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ აქედან გამომდინარე, ტრიგონომეტრიულ ფორმას ექნება სახე: $z=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$; ხოლო შესაბამის მაჩვენებლიან ფორმას(40) მივიღებთ სახით $z=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

2.3.2. ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$z_1z_2=|z_1||z_2|\left(\cos(\arg z_1+\arg z_2)+i\cdot\sin(\arg z_1+\arg z_2)\right). \tag{42}$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$z^n=|z|^n\left(\cos(n\cdot\arg z)+i\cdot\sin(n\cdot\arg z)\right); \tag{43}$$

ამ ფორმულიდან გვაქვს:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right). \tag{44}$$

სადაც

$k=0;1;2;\ldots;\mathrm{n}-1$.

აქედან ნათლად ჩანს, რომ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვს აქვს n მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ n ხარისხის მრავალწევრს აქვს n ფესვი.

განვიხილოთ ორწევრა განტოლებები:

1) $x^2=-1$ ამ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს. ეხლა ვნახოთ მისი ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x=\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\cdot\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$$

$k=0;1$ ანუ გვაქვს ორი ამონახსნი

$$x_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2};$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}.$$

2) $x^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$ ფესქვეშა გამოსახულება გადავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით და მერე ვისარგებლოთ (44) ფორმულით.

$$x=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right).$$

$k=0;1;2.$ მაშასადამე, გვაქვს სამი ამონახსნი:

$$x_1=\sqrt[3]{2};\quad x_2=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$
$$x_3=\sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

P.S. კომპლექსურ რიცხვებს ფართო გამოყენება აქვს ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვის ამოცანების შესწავლისას და სიგნალების ფილტრაციის საქმეში[13-14]. ასევე, დიდია მათი გამოყენების არეალი უწყვეტ ტანთა მექანიკის ბრტყელი ამოცანების შესწავლის საქმეში [15-16].

2.4. კვატერნიონები

განსაზღვრება: ოთხგანზომილებიანი $A=(a_1;a_2;a_3;a_4)$ რიცხვების ერთობლიობას კვატერნიონებს უწოდებენ, თუ ორი რიცხვის ჯამი განისაზღვრება $A+B=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3;a_4+b_4)$ ფორმულით, ხოლო არაკომუტაციური ნამრავლი კი განისაზღვრება შემდეგნაირად: სპეციალური ოთხგანზომილებიანი რიცხვები ადგენენ ბაზისს $L=(1;0;0;0);\ \mathrm{M}=(0;1;0;0);\ \mathrm{N}=(0;0;1;0);\ \mathrm{E}=(0;0;0;1)$; ისე, რომ

$L^2=M^2=N^2=-E^2=-E;\ \mathrm{LE}=\mathrm{EL}=L;\ \mathrm{ME}=\mathrm{EM}=M;\ \mathrm{NE}=\mathrm{EN}=N;\ \mathrm{LM}=\mathrm{N}=-ML;$

$MN=L=-NM;\ \mathrm{NL}=\mathrm{M}=-LN;$

და ადგილი აქვს წარმოდგენას $A=a_1L+a_2M+a_3N+a_4E$, ნამრავლი კი

$A\cdot B=(a_1b_4+a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)L+(a_2b_4+a_4b_2+a_3b_1-a_1b_3)M+$

$(a_3b_4+a_4b_3+a_1b_2-a_2b_1)N+(-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3+a_4b_4)E\neq BA$

არსებობს ოთხგანზომილებიანი რიცხვის შებრუნებული

$A^{-1}=\dfrac{-a_1L-a_2M-a_3N+a_4E}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}$ თუ, მნიშვნელი არაა ნულის ტოლი.

$a_1;a_2;a_3$ - კვატერნიონის ვექტორული ნაწილია, ხოლო a_4-სკალარული ნაწილი. კვატერნიონის კომპონენტები შეიძლება იყვნენ კომპლექსური რიცხვებიც.

თუ, A კვატერნიონს შევუთანადებთ მატრიცას :

$$A=\begin{pmatrix} a_4+ia_1 & -\mathrm{a}_3+ia_2\\ a_3+ia_2 & \mathrm{a}_4-ia_1\end{pmatrix}\ ; \qquad (45)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ $(A)+(B)=(A+B)$ და $(A)(B)=(AB)$ მატრიცთა ალგებრის თვალსაზრისით. რაც იმას ნიშნავს, რომ მატრიცთა ალგებრა კვატერნიონების (45) ალგებრის იზომორფულია[17].

2.5. ჰიპერკომპლექსური რიცხვები

კვატერნიონების მსგავსად იგება 2^n განზომილებიანი რიცხვების ალგებრაც.

$$A = \sum_{i=1}^{2^n} a_i C_i \; ; \qquad (46)$$

სადაც C_i საბაზისო ელემენტები აკმაყოფილებენ პირობებს:

1) არსებობს ერთადერთი ერთეულოვანი ელემენტი E ისეთი, რომ

$$\forall i, \quad EC_i = C_i E = C_i \; ; \qquad (47)$$

2) n ცალი ელემენტი C_i ელემენტებიდან ანტიკომუტაციურნი არიან $C_i C_j = -C_j C_i$ თუ, $i \neq j$; $C_i^2 = -E$.

3) $\frac{n(n-1)}{2}$ ცალი ელემენტისათვის $C_{\alpha\beta} = C_\alpha C_\beta = -C_{\beta\alpha}$

და ა.შ. მიიღება 2^n ცალი რიცხვი. ამ თვისებებით აღიწერება გარკვეული ალგებრული სტრუქტურა, რომელთაც **ჰიპერკომპლექსურ რიცხვებს** უწოდებენ.

ამ მეთოდით მიიღება:

კომპლექსური რიცხვები, როცა n=1;

კვატერნიონები, როცა n=2;

ბიკვატერნიონები, როცა n=3;

კლიფორდის რიცხვები, როცა n=4.

2.6. კლიფორდის რიცხვები

კლიფორდის რიცხვების წარმოდგენა ხდება ოთხი მატრიცული კომპონენტით:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

აქ, ადგილი აქვს ნორმირების თანადობებს $\gamma_i^2 = +1$. კლიფორდის რიცხვების მეშვეობით იგება სპეციალური **სპინორული ოპერატორები[17-18]**, რომელთაც ფართო გამოყენება აქვთ თეორიულ ფიზიკაში.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.რაში მდგომარეობს ევკლიდეს ალგორითმის არსი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში(რისი პოვნის საშუალებას იძლევა) ?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 120; 180?

3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3+3x^2+x\equiv 0(\bmod 2)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^5=1$;

6.სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

ვარიანტი 2

1.ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ $d(150;100)$?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 12; 18?

3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3+3x^2+x\equiv 0(\bmod 5)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^5=i$;

6.სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

ვარიანტი 3

1.რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 150; 18?

3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3+5x^2+7x+3\equiv 0(\bmod 2)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^6=64$;

6.როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 4

1.რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 125; 8?

3.რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3+5x^2+7x+3\equiv 0(\bmod 5)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^3 = 8$;

6.როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 5

1.ჩაწერეთ $z = 3 + 4i$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 56?

3.იპოვეთ $w = \dfrac{2+3i}{4i}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4 = -1$;

6.მოიყვანეთ სეპარაბელური სივრცის განსაზღვრება?

ვარიანტი 6

1.ჩაწერეთ $z = (3+4i)(2-3i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 250; 560?

3.იპოვეთ $w = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4 = -16$;

6.მოიყვანეთ კვატერნიონების განსაზღვრება?

ვარიანტი 7

1.ჩაწერეთ $z = (3+4i)^{107}$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 50; 60?

3.იპოვეთ $w = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{200}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4.ამოხსენით შედარება:

$5x^2 + 7x + 3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4 = -16i$;

6.მოიყვანეთ კლიფორდის რიცხვების განსაზღვრება?

ვარიანტი 8

1.ჩაწერეთ $z = (1+i)(1-i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?

2.რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 60?

3.იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4.ამოხსენით შედარება:

$x^3 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2)$;

5.ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4 = -i$;

6.მოიყვანეთ სრული მეტრიკული სივრცის განსაზღვრება?

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Дьюси С. Нумерология: числа и судбы, пер. с англ., Москва,1999

2.Ключников. Священная наука чисел,Москва, 2000

3.Лежен Дирихле П.Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., Санкт-Петербург, 1863

4.Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, пер. с англ., Москва,1965

5.Виноградов И.М. Основы теории чисел, Москва,1972

6.Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, Москва, 1970

7.კოღონია პ. რიცხვთა თეორია, თბილისი, 1961

8.Rivest R.L. Kryptographi/Hndbook of Theoretical computer Science Vol. A. Algorithms and Cmplexity/J. van Leuwn, ed. Amsterdam: Elsevier, Cambridge, Mass.:The MIT Press.,1990

9.Успенский В.А. Как теория чисел помогает в шифровальном деле,соросовский образовательный журнал,№6, 1996
10.Макклеллан Дж.Х.,Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., Москва, 1983
11.Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974
12.Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971
13.Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика,учеб. пос., Омск, 2002
14.Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques,Washington, USA,2002
15.Muskhelischvili N. Praktische lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – ZAMM, 13, 1933
16.Седов Л.И.Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Москва, 1966
17.Маделунг Э.Математический аппарат физики,пер. с англ., Москва, 1961
18.Картан Э. Теория спиноров, пер. с франц., Москва,1947

თავი III. ფუნქციონალური სიმრავლეები, როგორც სამყაროს რთული პროცესების აღწერის ენა

შესავალი

სამყაროს რთული პროცესების აღსაწერად, როგორც წესი, იყენებენ სხვადასხვა ტიპის ფუნქციებს. ამ ფუნქციებს ახასიათებთ გარკვეული ზოგადი თვისებები, რის გამოც, მათ აერთიანებენ გარკვეულ კლასებში - ფუნქციონალურ სიმრავლეებში[1-3]. ასევე, უწყვეტი პროცესების მოდელირებისას, ჩვენ ვეძებთ დიფერენციალურ (ოპერატორულ) განტოლებათა როგორც კლასიკურ, ასევე, განზოგადოებულ

ამონახსნებს. ამიტომ, ფუნქციონალური სივრცეების (სიმრავლეების) შესწავლა მათემატიკური მოდელირების ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა.

3.1. წრფივი ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციათა L სიმრავლეს ეწოდება ლინეალი(წრფივიანი), თუ $u_1(x)$ და $u_2(x)$ ფუნქციებთან ერთად, ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც (ანუ $a_1u_1(x)+a_2u_2(x)$ ფუნქციას).

მაგალითი : 1. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე. მაშინ უწყვეტი ფუნქციების თვისებებიდან გამომდინარე, L იქნება ლინეალი.

2. ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)|\le 5$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე არ იქნება ლინეალი, რადგან თუ $u(x)=3$ და $a=2$, მივიღებთ $au(x)=6>5$.

P.S. თუ L არის ლინეალი, მაშინ n ფუნქციებთან $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$ ერთად ის შეიცავს მათ წრფივ კომბინაციასაც $\sum_{i=1}^{n} a_1u_i(x)$. სადაც $a_i\in R$ ნამდვილი რიცხვებია. თუმცა, შეიძლება ლინეალი ავაგოთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთაც.

განსაზღვრება: L ლინეალის ორი $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(u;v)$ განისაზღვრება ტოლობით:

$$(u;v)=\int_G u(x)v(x)dx\,. \tag{1}$$

ასე, რომ ლინეალის ორი ფუნქციის სკალარული ნამრავლი არის რიცხვი.

მაგალითი : $u(x)=x;\quad v(x)=1;\quad G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$; მაშინ სკალარული ნამრავლი იქნება:

$$(u;v)=\int_G u(x)v(x)dx=\int_0^5 x\cdot 1dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5=\frac{25}{2}\,.$$

(1) სკალარული ნამრავლის თვისებები გამომდინარეობენ, უშუალოდ ინტეგრალის თვისებებიდან:

$$(u;v)=(v;u)\,; \tag{2}$$

$$(a_1u_1+a_2u_2;v)=a_1(u_1;v)+a_2(u_2;v); \tag{3}$$

$$(u;u)\ge 0; \tag{4}$$

$$(u;u)=0\Leftrightarrow u(x)\equiv 0\quad \forall \mathrm{x}\in \mathrm{G}. \tag{5}$$

განსაზღვრება: L ლინეალის $u(x)$ ფუნქციის ნორმა $\|u(x)\|$ ეწოდება

არაუარყოფით რიცხვს:

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u;u)} = \sqrt{\int_G u^2(x)dx}\,. \qquad (6)$$

ეხლა შემოვიღოთ ლინეალის ორ ფუნქციას შორის მანძილის ცნება, რომელსაც ფუნქციონალურ ანალიზში **მეტრიკას** უწოდებენ:

განსაზღვრება: L ლინეალის ორ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს შორის **მანძილი(ანუ მეტრიკა)** ეწოდება არაუარყოფით რიცხვს:

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx}\,. \qquad (7)$$

მაგალითი: $u(x) = x; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \le x \le 5\}$, მაშინ

$$\|u(x)\| = \sqrt{\int_0^5 x^2 dx} = \sqrt{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5} = \sqrt{\frac{125}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,.$$

$$\rho(u;v) = \|u-v\| = \sqrt{(u-v;u-v)} = \sqrt{\int_G (u-v)^2\,dx} = \sqrt{\int_0^5 (x-1)^2\,dx} = \sqrt{\frac{64+1}{3}} = \sqrt{\frac{65}{3}}\,.$$

მათემატიკაში გამოყოფენ იმ ძირითად თვისებებს, რომელსაც აკმაყოფილებს მეტრიკა(მანძილი):

$$\rho(u;v) \ge 0\,; \qquad (8)$$

$$\rho(u;v) = 0 \Leftrightarrow u(x) = v(x)\,; \qquad (9)$$

$$\rho(u;v) = \rho(v;u)\,; \qquad (10)$$

$$\rho(u;z) \le \rho(u;v) + \rho(v;z)\,. \qquad (11)$$

ეს ის თვისებებია, რომლებიც განსაზღვრავენ მეტრიკას.

გარდა (7) მეტრიკისა, რომელიც ინდუცირებულია ნორმით, ზოგჯერ განიხილავენ მეტრიკის სხვა სახეებსაც. მაგალითად, ჩებიშევის მეტრიკას

$$\rho_c(u;v) = \max_{x\in G} |\,u(x) - v(x)\,|\,. \qquad (12)$$

P.S. მეტრიკას, როგორც არ უნდა განისაზღვროს ის, მოეთხოვება მხოლოდ (8)-(11) თვისებების დაკმაყოფილება. მიუხედავად იმისა, რომ ჩებიშევის (12) მეტრიკა უფრო ინტუიციურად ზუსტია (7) მეტრიკასთან შედარებით უწყვეტი ფუნქციებისათვის, მას იშვიათად იყენებენ. ეს გამოწვეულია იმით, რომ პრაქტიკაში უფრო ხშირად გვაქვს საქმე წყვეტილ ფუნქციებთან, რომლებისთვისაც ჩებიშევის მეტრიკა არ გამოდგება. ამიტომ, ჩვენ შემდგომი აგებებისათვის გამოვიყენებთ (7) მეტრიკას, რომელიც სკალარული ნამრავლით განიმარტება. თუ, ლინეალს ვაგებთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლის ზემოთ, მაშინ სკალარული ნამრავლი განიმარტება ფორმულით $(u;v) = \int_G u(x)\overline{v(x)}dx$, სადაც $\overline{v(x)}$ არის $v(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია.

3.2. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე

განსაზღვრება: G არეზე განსაზღვრულ $u(x)$ ფუნქციას **კვადრატით ინტეგრებადი** ეწოდება, თუ **ლებეგის ინტეგრალები**

$$\int_G u(x)dx; \qquad \int_G u^2(x)dx; \tag{13}$$

ერთდროულად არსებობენ(არიან კრებადი).

კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების სიმრავლე, უფრო ფართოა ვიდრე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე.

P.S. თუ, $\int_G u^2(x)dx = 0$, მაშინ $u(x) = 0$ **თითქმის ყველგან(გარდა ისეთი წერტილების სიმრავლისა, რომლის ლებეგის ზომაც უდრის ნულს)**. ეს ეხება მეტრიკასაც. თუ, ორი ფუნქცია ერთმანეთისაგან განსხვავდება, არაუმეტეს, ვიდრე ნულ ზომის სიმრავლის წერტილებში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ფუნქციები **ემთხვევიან ერთმანეთს თითქმის ყველგან.**

განსაზღვრება: L ლინეალს, მასზე განსაზღვრული (6) ნორმით და (7) მეტრიკით, **ჰილბერტისწინა(უნიტარული)** S_2 **სივრცე** ეწოდება.

G არეზე განსაზღვრულ **უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლეს** აღნიშნავენ $C(G)$ სიმბოლოთი. ხოლო, თუ **ფუნქციების ნებისმიერი რიგის წარმოებულებიც უწყვეტია**, მაშინ შესაბამის ფუნქციათა კლასს(სიმრავლეს) აღნიშნავენ $C^{\infty}(G)$ სიმბოლოთი.

განვიხილოთ მიმდევრობის კრებადობის ცნება S_2 ფუნქციონალურ სივრცეში.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა (ფუნქციონალური) მიმდევრობა კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ თუ,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u_n; u) = 0. \tag{14}$$

ანუ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_G [u_n(x) - u(x)]^2 dx} = 0. \tag{15}$$

ფუნქციონალურ სივრცეებში ბუნებრივად ზოგადდებიან ის ტოპოლოგიური ცნებები, რაც ჩვენ გვქონდა რიცხვითი სიმრავლეებისათვის.

განსაზღვრება: $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა მიმდევრობას **კოშის** (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა ეწოდება, თუ $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(u_m; u_n) = 0$.

განსაზღვრება: ვიტყვით, რომ $u(x)$ წარმოადგენს S_2 უნიტარული სივრცის **ზღვარით წერტილს,** თუ $u(x)$ ფუნქციის ნებისმიერი მიდამოსათვის, მოიძებნება S_2 სივრცის ისეთი ელემენტები, რომლებიც ამ მიდამოს ეკუთვნიან.

თეორემა: $u(x)$ ფუნქცია არის S_2 უნიტარული სივრცის ზღვარითი წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ამ სივრცის ელემენტების(ფუნქციების) ისეთი მიმდევრობა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია $u(x)$ ფუნქციისაკენ.

P.S. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის შემთხვევაში, S_2 უნიტარული სივრცის **ზღვარით წერტილი შეიძლება არ ეკუთვნოდეს ამ სივრცეს.**

განსაზღვრება: S_2 უნიტარული(ჰილბერტისწინა) სივრცის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების სიმრავლესთან, ამ **სივრცის ჩაკეტვა** ეწოდება.

ეს განსაზღვრება სიმბოლურად ასე ჩაიწერება:

$$\overline{S_2} = S_2 \cup \partial S_2 . \tag{16}$$

განსაზღვრება: ჰილბერტისწინა(უნიტარული) სივრცის $\overline{S_2}$ ჩაკეტვას, **ჰილბერტის** $L_2(G)$ **სივრცე** ეწოდება.

განსაზღვრება: წრფივ, მეტრიკულ, ნორმირებულ სივრცეს, რომელიც სრულია ნორმით ინდუცირებული მეტრიკის მიმართ **ბანახის სივრცე** ეწოდება.

P.S. ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე სრულია, ანუ მასში ყველა კოშის (ფუნდამენტალური) მიმდევრობა კრებადია. სხვანაირად, ის შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს. ისევე, როგორც რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არის მკვრივი ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში; ყველა რაციონალურკოეფიციენტებიანი პოლინომების(ფუნქციების) სიმრავლეც მკვრივია $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცეში. ამიტომ, ჰილბერტის სივრცეც სეპარაბელურია, ისევე, როგორც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე. სივრცის სეპარაბელურობა საშუალებას იძლევა, მის ელემენტებს მივუახლოვდეთ მასში მოთავსებული მკვრივი ქვესიმრავლის ელემენტების კრებადი მიმდევრობით; რაც დიდ გამოყენებას პოულობს მიახლოვებით ანალიზში. ჰილბერტის სივრცე ყოველთვის არის ბანახის სივრცეც. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე წარმოადგენს კვადრატითინტეგრებადი ფუნქციების(ალაგ-ალაგ უწყვეტი) სიმრავლეს.

უნდა აღინიშნოს, რომ **ჰილბერტის სივრცე** $L_2(G)$, **ამავე დროს ბანახის სივრცეა. ხოლო ბანახის სივრცე ყოველთვის არაა ჰილბერტის**

სივრცე(რადგან ბანახის სივრცეში არაა სავალდებულო რომ გვქონდეს სკალარული ნამრავლი).

განსაზღვრება: ფუნქციათა სისტემას $\{u_n(x)\}_{n=1}^{k}$ ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული,** თუ ამ სისტემის ერთი ფუნქცია მაინც, შეიძლება გამოვსახოთ, როგორც დანარჩენი ფუნქციების წრფივი კომბინაცია. თუ, ფუნქციათა სისტემა არაა წრფივად დამოკიდებული, მაშინ მას **წრფივად დამოუკიდებელ სისტემას** უწოდებენ.

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1=\sin^2 xy;\ \ \mathrm{u}_2=\cos^2 xy;\ \ \mathrm{u}_3=4$ წრფივად დამოკიდებულია, რადგან $u_3=4u_1+4u_2$.

იმისათვის, რომ გამოვარკვიოთ ფუნქციათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობის საკითხი უნდა დავთვალოთ ამ სისტემის **გრამის დეტერმინანტი.**

თეორემა: ფუნქციათა სისტემა $\{u_n(x)\}_{n=1}^{k}$ **წრფივად დამოუკიდებელია ჰილბერტის** $L_2(G)$ **სივრცეში**, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ სისტემის გრამის დეტერმინანტი განსხვავებულია ნულისაგან, ანუ

$$D(u_1;u_2;...;u_k)=\begin{vmatrix}(u_1;u_1) & (\mathrm{u}_1;\mathrm{u}_2) & \dots & (\mathrm{u}_1;\mathrm{u}_\mathrm{k})\\ (\mathrm{u}_2;u_1) & (\mathrm{u}_2;u_2) & \dots & (\mathrm{u}_2;\mathrm{u}_\mathrm{k})\\ . & . & . & .\\ (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_1) & (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_2) & \dots & (\mathrm{u}_\mathrm{k};u_k)\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (17)$$

მაგალითი: ფუნქციათა სისტემა $u_1=\sin x;\ \ \mathrm{u}_2=\cos x;\ \ \ \mathrm{u}_3=1$ წრფივად დამოუკიდებელია $L_2[0;\pi]$ სივრცეში, რადგან

$$(u_1;u_1)=\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{\pi}{2};\quad (\mathrm{u}_1;u_2)=\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=0;\quad (\mathrm{u}_1;u_3)=2;\quad (\mathrm{u}_2;u_2)=\pi.$$

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\pi}{2} & 0 & 2\\ 0 & \frac{\pi}{2} & 0\\ 2 & 0 & \pi\end{vmatrix}=\frac{\pi^3}{4}-2\pi\neq 0.$$

განსაზღვრება: წრფივად დამოუკიდებელ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა სისტემას ეწოდება **სრული** $L_2(G)$ **სივრცეში**, თუ ამ სისტემის ყველა შესაძლო $\psi(x)=\sum_{i\in I}a_iu_i(x)$ წრფივი კომბინაციებით მიღებული $\psi(x)$ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $L_2(G)$ სივრცეში.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ფუნქციათა წრფივად დამოუკიდებელი სისტემა წარმოადგენს **შაუდერის ბაზისს** $L_2(G)$ **სივრცეში,** თუ სივრცის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ $\psi(x)=\sum_{i\in I} a_i u_i(x)$ სახით.

მაგალითი: $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეში, როცა $G=\{(x;y)|\, \mathrm{a}\le \mathrm{x}\le \mathrm{b}\wedge \mathrm{c}\le \mathrm{y}\le \mathrm{d}\}$ **შაუდერის მრავალწევრა ბაზისია**:
$1;\ \mathrm{x};\ \mathrm{y};\mathrm{x}^2;\mathrm{xy};\mathrm{y}^2;\ .\ .\ .$

ასევე, $L_2(0,2\pi)$ სივრცეში, არსებობს **ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა ბაზისი**:
$1;\sin\mathrm{x}\cdot\cos\mathrm{y};\sin2\mathrm{x}\cdot\cos\mathrm{y};\sin\mathrm{x}\cdot\cos2\mathrm{y};\sin2\mathrm{x}\cdot\cos2\mathrm{y};\ldots$

ცნობილია, რომ $L_2(R)$ სივრცეში შეიძლება აიგოს **ვეივლეტ ფუნქციებისაგან** შემდგარი ბაზისებიც, რომელსაც ჩვენ შესაბამის თავში განვიხილავთ და ა.შ.

P.S. მოცემული ამოცანისათვის, ბაზისის შერჩევა საკმაოდ რთული პრობლემაა, რადგან ჯერ-ჯერობით, შერჩევის ზოგადი პროცედურა არ არსებობს. სხვადასხვა ბაზისი კი განაპირობებს კრებადობის სხვადასხვა სიჩქარეს.

3.3. ანალოგია n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესა და ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცის გეომეტრიის გასაგებად, განვიხილოთ ანალოგიები n განზომილებიან ვექტორულ სივრცესთან.

№	R^n ვექტორული სივრცე	ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცე
1.	ელემენტები ვექტორებია $\bar{x}(x_1;x_2;...;x_n)$	ელემენტები $f(x)$ ფუნქციებია
2.	ვექტორების სკალარული ნამრავლი $(\bar{x};\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$	ფუნქციების სკალარული ნამრავლი $(f(x);g(x))=\int_G f(x)g(x)dx$
3.	ვექტორის სიგრძე $\lvert\bar{x}\rvert=\sqrt{(\bar{x};\bar{x})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$	ფუნქციის ნორმა $\lVert f(x)\rVert=\sqrt{(f(x);f(x))}=\sqrt{\int_G f^2(x)dx}$
4.	მანძილი ორ წერტილს შორის $\lvert\bar{x}-\bar{y}\rvert=\sqrt{(\bar{x}-\bar{y};\bar{x}-\bar{y})}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$	მეტრიკა $\rho(f(x);g(x))=\lVert f(x)-g(x)\rVert=\sqrt{(f(x)-g(x);f(x)-g(x))}=\sqrt{\int_G (f(x)-g(x))^2dx}$
5.	თუ, $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{n}$ წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა სისტემაა R^n-ში, მაშინ ნებისმიერი $\bar{x}$ ელემენტი(ვექტორი) ამ სივრციდან წარმოიდგინება სახით: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{e}_i$	თუ, $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ შაუდერის ბაზისია $L_2(G)$ სივრცეში, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $f(x)$ ელემენტი(ფუნქცია) შეიძლება წარმოვადგინოთ სახით: $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i u_i(x)$

3.4. სობოლევის $W_2^k(G)$ ფუნქციონალური სივრცე

ჩვენ განვიხილეთ ჰილბერტის $L_2(G)$ ფუნქციონალური სივრცე. პრაქტიკული, ოპერატორული განტოლებების ამოსახსნელად, ზოგჯერ, იყენებენ ისეთ ფუნქციონალურ სივრცეებს, რომლებიც უზრუნველყოფენ ეგრეთწოდებული განზოგადოებული და სუსტი ამონახსნის ცნებათა გამოყენებას.

ეს სივრცეები ისეთივე წესით იგება, როგორც ჩვენ ავაგეთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცე. განსხვავებაა მხოლოდ სკალარული ნამრავლის განსაზღვრის წესში.

თუ, სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx \quad ; \tag{18}$$

და გავიმეორებთ $L_2(G)$ ჰილბერტის სივრცის აგების ტექნიკას, მაშინ მივიღებთ **სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს** $W_2^1(G)$.

ანალოგიურად, თუ სკალარულ ნამრავლს განვსაზღვრავთ ფორმულით :

$$(u;v)=\int_G u\cdot v dx+\int_G u'v'dx+\int_G u''v''dx \quad ; \tag{19}$$

მაშინ, მივიღებთ $W_2^2(G)$ **სობოლევის ფუნქციონალურ სივრცეს.**

ანალოგიურად აიგება სობოლევის $W_2^k(G)$ **ფუნქციონალური სივრცე, შესაბამისი სკალარული ნამრავლის შემოღებით.**

$$(u;v)=\sum_{i=0}^{k}\int_G u^{(i)}v^{(i)}dx. \tag{20}$$

3.5. დამოკიდებულება ფუნქციონალურ სივრცეებს შორის

ჩვენ განვიხილეთ სხვადასხვა ფუნქციონალური სივრცეები, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან რიგი ტოპოლოგიური თვისებებით. ველაზე უფრო "კარგი" ფუნქციები არიან მრავალწევრები და მათი სიმრავლე ქმნის პოლინომიალური ფუნქციების სივრცეს $P_n(x)$, სადაც არგუმენტი საზოგადოდ m-განზომილებიანი ვექტორია (ე.ი. $P_n(x)$ მრავალცვლადიანი პოლინომების სიმრავლეა). ეს ფუნქციათა სიმრავლე არის უწყვეტ ფუნქციათა $C(R^m)$ ფუნქციონალური სივრცის ქვესიმრავლე(ნაწილი). უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე არის წრფივიანის(ლინეალის) ქვესიმრავლე. ფუნქციათა ლინეალი არის წრფივი მეტრიკული სივრცია ნაწილი. ფუნქციათა წრფივი მეტრიკული სივრცე არის უნიტარული (ჰილბერტისწინა) სივრცის ნაწილი. ის კი თავის მხრივ ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცის ნაწილია. ჰილბერტის ფუნქციონალური სივრცე კი ჩადგმულია სობოლევის $W_2^k(G)$ სივრცეში, თუ $k\geq 1$.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 8$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x| \ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x| \ 0 \le x \le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა უნიტარულ, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 2

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 9$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x^2; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x| \ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x); v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^2; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x| \ 0 \le x \le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა სობოლევის, ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 3

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 6$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x^3; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x| \ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^3; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 4

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 66$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x^4; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^4; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და ბანახის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 5

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 88$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x) = x^5; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^5; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x|\ 0 \le x \le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 6

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)| \le 1$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?

2. $u(x)=x^8$; $v(x)=1$; $G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x)=x^8$; $v(x)=1$; $G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა ჰილბერტის და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 7

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)|\le 10$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x)=x^6$; $v(x)=1$; $G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.
3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.
4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.
5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x)=x^{16}$; $v(x)=1$; $G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$?
6.რა განსხვავებაა ბანახისა და სობოლევის სივრცეებს შორის?

ვარიანტი 8

1.ვთქვათ, L არის ჩაკეტილ $\overline{G}$ არეზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე რომელთათვისაც ადგილი აქვს პირობას $|u(x)|\le 11$. მაშინ ასეთი ფუნქციების სიმრავლე იქნება ლინეალი, თუ არა და რატომ?
2. $u(x)=x^{13}$; $v(x)=1$; $G=\{x|\ 0\le x\le 5\}$; მაშინ გამოთვალეთ სკალარული ნამრავლი $W_2^0(G)$-ის აზრით.

3.გამოთვალეთ წინა ამოცანაში მოცემული ფუნქციების ნორმები $L_2(G)$ სივრცისათვის.

4.გამოთვალეთ, $\rho(u(x);v(x))$ წინა ამოცანის პირობებში.

5.წრფივად დამოუკიდებელია, თუ არა ფუნქციათა სისტემა:
$u(x) = x^{13}; \quad v(x) = 1; \quad G = \{x \mid 0 \le x \le 5\}$?

6.რა არის გრამის დეტერმინანტი და რა ინფორმაციას იძლევა მისი მნიშვნელობა?

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике,пер. с англ., Мир, Москва,1985

2.Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974

3.Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971

4.Шварц Л. Анализ,. Пер. с франц. по ред. С.Г. Крейна, т.1, т.2, Мир, Москва, 1972

5.Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. Пер. с франц. под ред. Б.А. Фукса, Мир, Москва, 1971

6.Рудин У. Основы математического анализа. Пер. с англ. под ред. В.П. Хавина, Мир, Москва, 1966

ნაწილი II. ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები

თავი IV. რეაქტორული სქემების ტექნიკა

შესავალი

განსაზღვრება: მათემატიკურ მოდელებს, რომლებიც აღიწერებიან ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებით და შესაბამისი ალგებრული პირობებით – **ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები** ეწოდებათ.

ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები საშუალებას გვაძლევენ მიახლოვებით შევისწავლოთ რთული პროცესები: ქიმიაში, ბიოლოგიაში, ეკოლოგიაში, პოლიტიკაში, ფსიქოლოგიაში, ეკონომიკაში, ფიზიკაში და ა.შ.

იმისათვის, რომ შევადგინოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, საჭიროა, ჯერ შევადგინოთ კონცეპტუალური (აღწერითი) მოდელი ე.ი. გამოვყოთ
ძირითადი – განმსაზღვრელი პარამეტრები და შევადგინოთ მოვლენის რეაქტორული სქემა.

განსაზღვრება: იმ სქემას, რომელიც მოცემული მოვლენის განმსაზღვრელ პარამეტრებს შორის ამყარებს ქიმიური რეაქციების მაგვარ კავშირებს, **რეაქტორული** სქემა ეწოდება.

ჩვენ განვიხილავთ რეაქტორული სქემების სხვადასხვა სახეებს.

განსაზღვრება: რეაქტორულ სქემას რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ წარმომქმნელ ელემენტს, **მონომოლეკულური** სქემა ეწოდება.

განასხვავებენ შექცევად და შეუქცევად სქემებს.

ა) განვიხილოთ **შეუქცევადი მონომოლეკულური** სქემა:

$$A \xrightarrow{k_1} B; \qquad (1)$$

A - სქემის წარმომქმნელი ელემენტია;

B - სქემის შედეგი;

k_1 - A-დან B-ს წარმოქმნის სიჩქარეა (რეაქციის სიჩქარე).

ამ რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად, შემოვიღოთ აღნიშვნები:

a - არის A წარმომქმნელი ელემენტის კონცენტრაცია, b - არის წარმოქმნილი B ელემენტის კონცენტრაცია.

რადგან (1) სქემიდან გამომდინარე, a - ელემენტის კონცენტრაცია მცირდება k_1 სიჩქარით (ე.ი. $\frac{da}{dt} < 0$), ხოლო b - ელემენტის კონცენტრაცია იზრდება იგივე სიჩქარით (ე.ი. $\frac{db}{dt} > 0$) მივიღებთ ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -k_1 a \\ \dfrac{db}{dt} = k_1 a \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} ; \qquad (2)$$

სადაც a_0 და b_0 - შესაბამისი კონცენტრაციების საწყისი მნიშვნელობებია.

(2) – წარმოადგენს შეუქცევადი მონომოლეკულური სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს.

ამ განტოლებების ამონახსნს აქვს სახე: $a(t) = a_0 e^{-k_1 t}$; $\mathrm{b(t)} = b_0 e^{k_1 t}$.

ბ) ეხლა განვიხილოთ **შექცევადი მონომოლეკულური** რეაქტორული სქემა:

$$A \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} B \qquad (3)$$

სადაც k_{-1} - არის სქემის წარმომქმნელი ელემენტის აღდგენის სიჩქარე (უკუ რეაქციის სიჩქარე).

შექცევადი მონომოლეკულური რეაქტორული სქემის შესაბამის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = k_{-1} b - k_1 a \\ \dfrac{db}{dt} = k_1 a - k_{-1} b \\ a(0) = a_0 \\ b(0) = b_0 \end{cases} ; \qquad (4)$$

(2) – მოდელის შესაბამისი პროცესია – რადიოაქტიური დაშლის რეაქცია, ხოლო (4) – მოდელს შეესაბამება მაგალითად A სითხის აორთქლება, ერთდროული კონდენსაციით B - ორთქლიდან.

ამ განტოლებების ამონახსნს აქვს სახე:

$$a(t) = e^{-(k_1 + k_{-1})t} \left(a_0 - \frac{k_{-1}(a_0 + b_0)}{k_1 + k_{-1}} + \frac{k_{-1}(a_0 + b_0)}{k_1 + k_{-1}} e^{(k_1 + k_{-1})t}\right);$$

$$b(t) = e^{-(k_1 + k_{-1})t} \left(b_0 - \frac{k_1(a_0 + b_0)}{k_1 + k_{-1}} + \frac{k_1(a_0 + b_0)}{k_1 + k_{-1}} e^{(k_1 + k_{-1})t}\right).$$

4.1. ბიმოლეკულარული და ტრიმოლეკულარული მათემატიკური მოდელები

განსაზღვრება*:* რეაქტორულ სქემას ორი წარმომქმნელი ელემენტით, **ბიმოლეკულური** ეწოდება.

განასხვავებენ შეუქცევად და შექცევად ბიმოლეკულურ სქემებს:

ა) განვიხილოთ **შეუქცევადი ბიმოლეკულური** რეაქტორული სქემა:

$$A + B \xrightarrow{k_1} C \qquad (5)$$

ორი ელემენტიდან A და B წარმოიქმნება ერთი C ელემენტი, k_1 სიჩქარით.

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = -k_1 ab \\ \dfrac{db}{dt} = -k_1 ab \\ \dfrac{dc}{dt} = k_1 ab \\ a(0) = a_0;\ \ b(0) = b_0;\ \ c(0) = c_0 \end{cases} ; \qquad (6)$$

აქაქ შესაძლებელია ზუსტი ამონახსნის პოვნა, თუმცა, ეს ყოველი მოდელისათვის როდია შესაძლებელი, ამიტომ გამოიყენება რიცხვითი მეთოდები, ან არსებული პროგრამული პაკეტები Mathcad, Matlab, Matematica, Mapl . . .

ჩვენ გამოვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (6) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: a:=X_0; b:=X_1; c:=X_2. საწყისი მიახლოვების მატრიცას ექნება სახე $ic := \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

მაშინ (6) კოშის ამოცანის ამოსახსნელად ცვლადბიჯიანი რუნგე-კუტას მეთოდით, გვექნება პროგრამა:

$$k1 := 0.$$

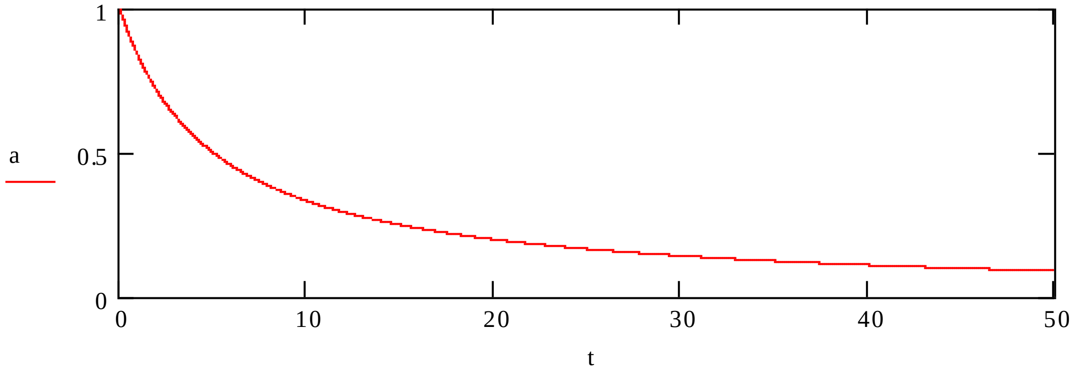
$$D(t, X) := \begin{pmatrix} -k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ -k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \end{pmatrix}$$

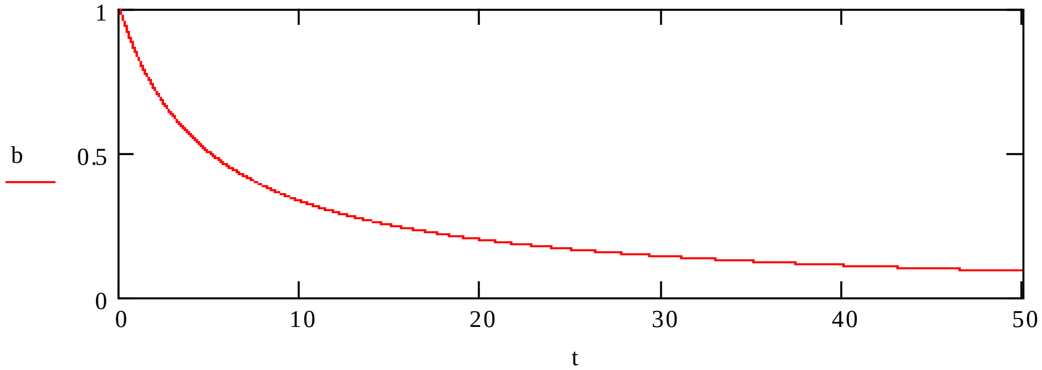
$$Npts := 300$$

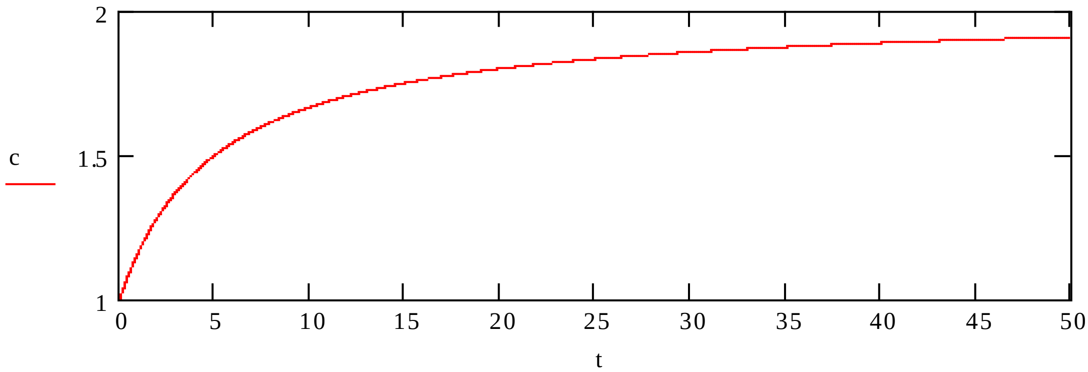
$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

$$t := L^{\langle 0 \rangle}$$
$$a := L^{\langle 1 \rangle}$$
$$b := L^{\langle 2 \rangle}$$
$$c := L^{\langle 3 \rangle}$$

გამოთვლების შედეგები







როგორც ამონახსნის გრაფიკებიდან ჩანს, წარმომქმნელი a და b – ელემენტები ექსპონენციალურად მცირდებიან, ხოლო წარმოქმნილი c – ელემენტის რაოდენობა ასევე, ექსპონენციალურად იზრდება.

ბ) ეხლა განვიხილოთ **შექცევადი ბიმოლეკულური** რეაქტორული სქემა:

$$A + B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C \qquad (7)$$

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = k_{-1}c - k_1 ab \\ \dfrac{db}{dt} = k_{-1}c - k_1 ab \\ \dfrac{dc}{dt} = k_1 ab - k_{-1}c \\ a(0) = a_0;\ b(0) = b_0;\ c(0) = c_0 \end{cases} . \qquad (8)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (8) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: $a:=X_0$; $b:=X_1$; $c:=X_2$. საწყისი მიახლოვების მატრიცას ექნება სახე $ic := \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

მაშინ (8) კოშის ამოცანის ამოსახსნელად ცვლადბიჯიანი რუნგე-კუტას მეთოდით, გვექნება პროგრამა:

$k1 := 0.$ $\qquad$ $k\_1 := 0.2$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} k\_1 \cdot X_2 - k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ k\_1 \cdot X_2 - k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ k1 \cdot X_0 \cdot X_1 - k\_1 \cdot X_2 \end{pmatrix}$$

$Npts := 300$

$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

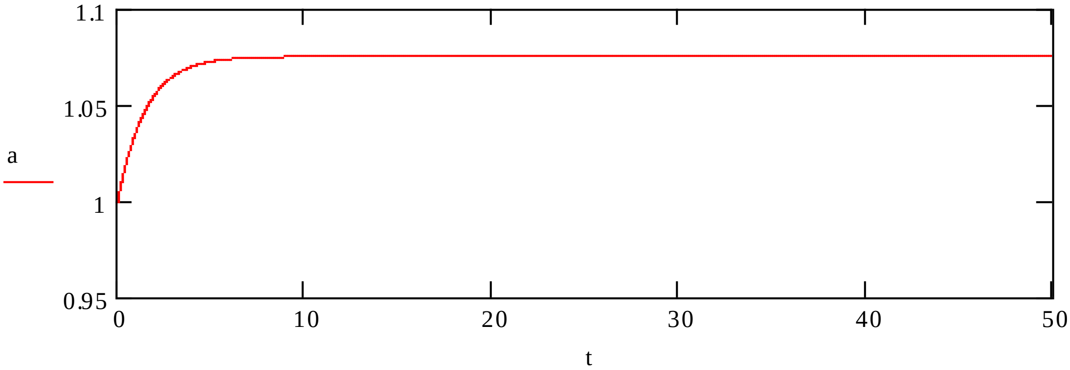
$t := L^{\langle 0 \rangle}$

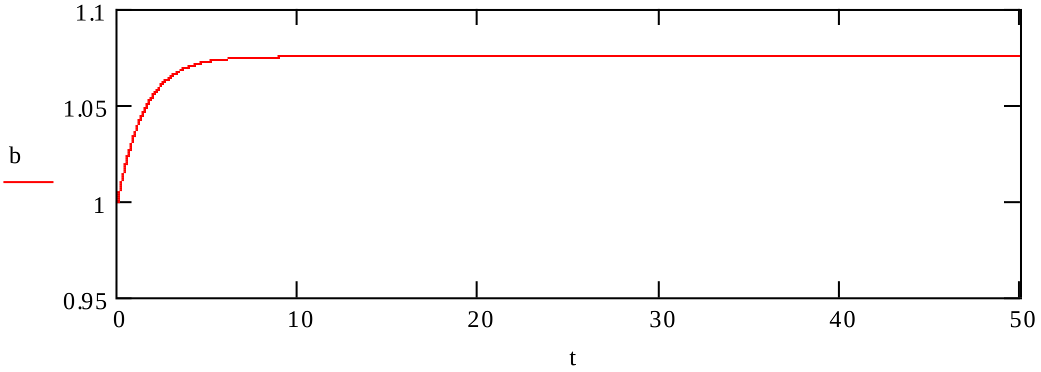
$a := L^{\langle 1 \rangle}$

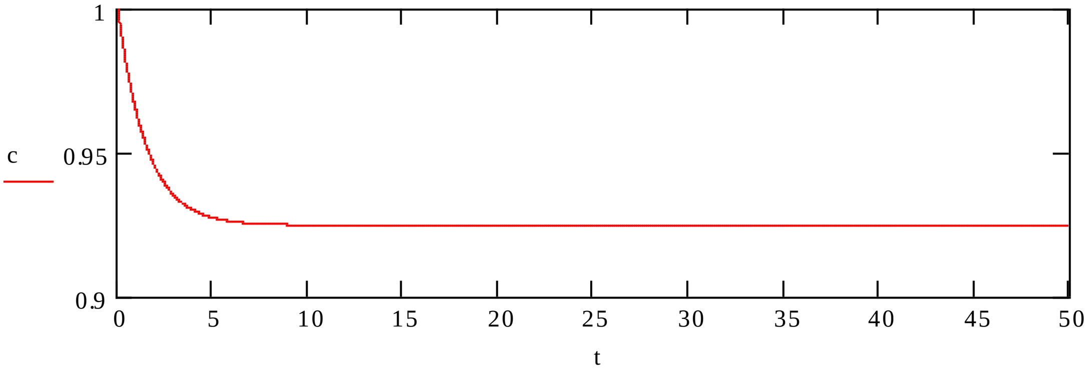
$b := L^{\langle 2 \rangle}$

$c := L^{\langle 3 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები







როგორც გრაფიკებიდან ჩანს, a და b ელემენტების რაოდენობა მატულობს და გადის მუდმივ დონეზე, ხოლო c ელემენტის რაოდენობა ჯერ კლებულობს და შემდეგ გადის მუდმივ დონეზე. რა თქმა უნდა, აქ მნიშვნელობა აქვს ამ ელემენტების საწყის რაოდენობებს, თუმცა, მოდელი დინამიკა ამასაც გვიჩვენებს.

განსაზღვრება: რეაქტორულ სქემას სამი წარმომქმნელი ელემენტით **ტრიმოლეკულური** ეწოდება.

განვიხილოთ **შექცევადი ტრიმოლეკულური** სქემა:

$$2A+B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C \qquad (9)$$

სადაც A ელემენტს აქვს სტეხეომეტრული კოეფიციენტი $(2A=A+A)$.

(9) სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt}=2k_{-1}c-k_1a^2b \\ \dfrac{db}{dt}=k_{-1}c-k_1a^2b \\ \dfrac{dc}{dt}=k_1a^2b-k_{-1}c \\ a(0)=a_0;\ b(0)=b_0;\ c(0)=c_0 \end{cases} . \qquad (10)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (10) ამოცანის შესაბამის

აღნიშვნებზე: $a:=X_0$; $b:=X_1$; $c:=X_2$. საწყისი მიახლოვების მატრიცას ექნება სახე $ic := \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$.

მაშინ (10) კოშის ამოცანის ამოსახსნელად ცვლადბიჯიანი რუნგე-კუტას მეთოდით, გვექნება პროგრამა:

$k1 := 0.2$

$k\_1 := 0.25$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} 2 \cdot k\_1 \cdot X_2 - k1 \cdot \left(X_0\right)^2 \cdot X_1 \\ k\_1 \cdot X_2 - k1 \cdot \left(X_0\right)^2 \cdot X_1 \\ k1 \cdot \left(X_0\right)^2 \cdot X_1 - k\_1 \cdot X_2 \end{bmatrix}$$

$Npts := 3000$

$$L := \mathrm{Rkadapt}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

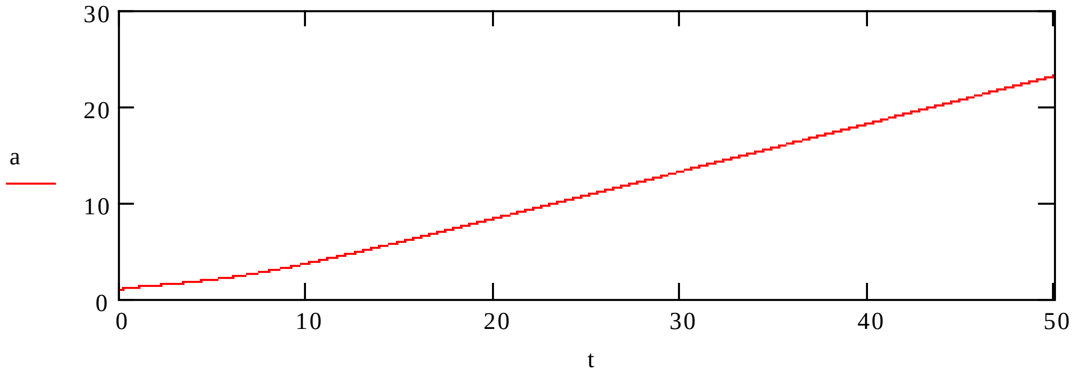
$t := L^{\langle 0 \rangle}$

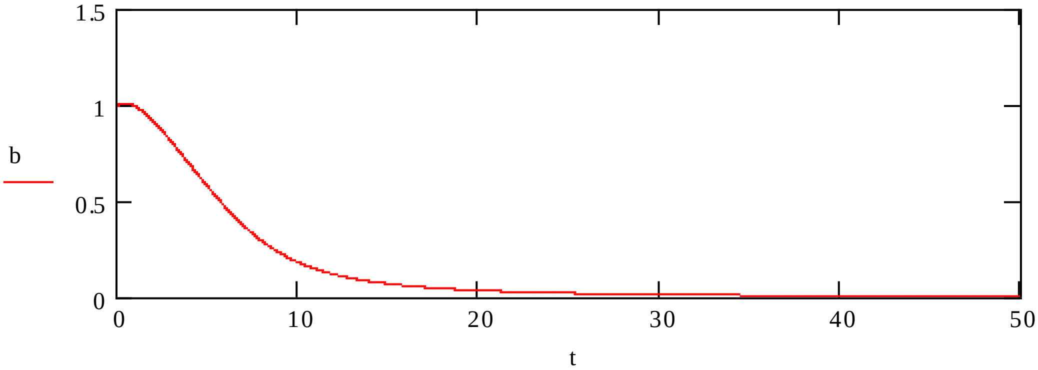
$a := L^{\langle 1 \rangle}$

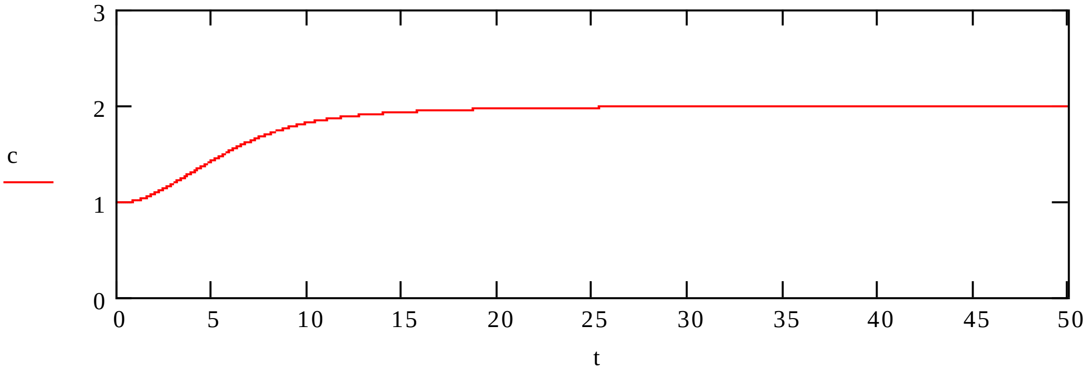
$b := L^{\langle 2 \rangle}$

$c := L^{\langle 3 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები







პრაქტიკული ამოცანები, როგორც წესი, უფრო რთულია ვიდრე ზემოთ განხილული სქემები. განვიხილოთ ზოგიერთი არსებული ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი, რომლებიც უკვე კლასიკას მიეკუთვნებიან.

4.2. მიხაელის-მენტენის რეაქციის მათემატიკური მოდელი

მიხაელის-მენტენის რეაქცია ერთ-ერთი ყველაზე მარტივი ფერმენტული რეაქციაა; სადაც *S* - სუბსტრატი შეუქცევადად გარდაიქმნება *P* - პროდუქტად, ერთი *E* - ფერმენტის მეშვეობით და ქმნის შეუქცევად *SE* - ფერმენტ-სუბსტრატულ კომპლექსს.

მიხაელის-მენტენის რეაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:

$$S+E \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \underset{\underset{C}{\|}}{SE} \xrightarrow{k_2} P+E \qquad (11)$$

თუ, გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ მეთოდს, (11) რეაქტორული სქემა შეიძლება მივიყვანოთ მათემატიკურ მოდელამდე:

$$
\begin{cases}
\dfrac{ds}{dt} = k_{-1}c - k_1 s\,e \\
\dfrac{de}{dt} = -k_1 s\,e + \left(k_{-1} + k_2\right)c \\
\dfrac{dc}{dt} = k_1 s\,e - \left(k_{-1} + k_2\right)c \\
\dfrac{dp}{dt} = k_2 c \\
s(0) = s_0;\ e(0) = e_0;\ c(0) = p(0) = 0
\end{cases} \quad ; \qquad (12)
$$

(12) მათემატიკურ მოდელს **მიხაელის-მენტენის მათემატიკურ მოდელს** უწოდებენ.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (12) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: $s:=X_0$; $e:=X_1$; $c:=X_2$; $p:=X_3$. მაშინ, შესაბამის პროგრამას ექნება სახე:

$k1 := 0.2$

$k\_1 := 0.25$

$k2 := 0.23$

$$
D(t, X) := \begin{bmatrix} k\_1 \cdot X_2 - k1 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ -k1 \cdot X_0 \cdot X_1 + (k\_1 + k2) \cdot X_2 \\ k1 \cdot X_0 \cdot X_1 - (k\_1 + k2) \cdot X_2 \\ k2 \cdot X_2 \end{bmatrix}
$$

$Npts := 300$

$$
L := \mathrm{Rkadapt}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]
$$

$t := L^{\langle 0 \rangle}$

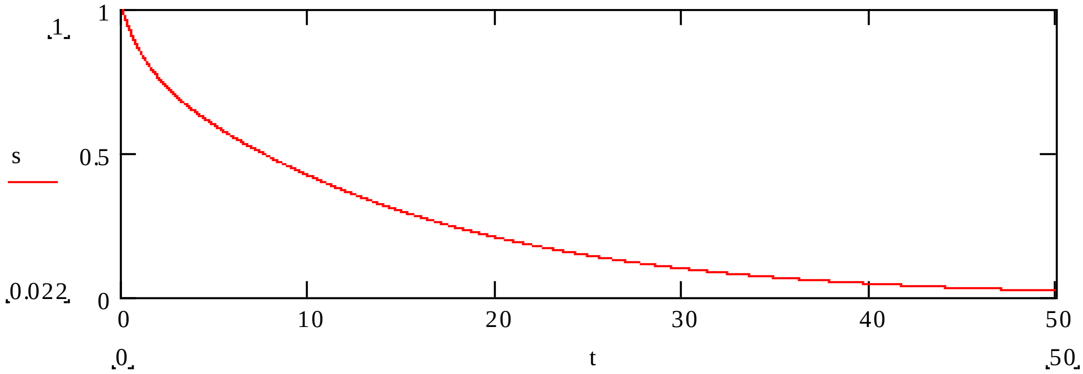
$s := L^{\langle 1 \rangle}$

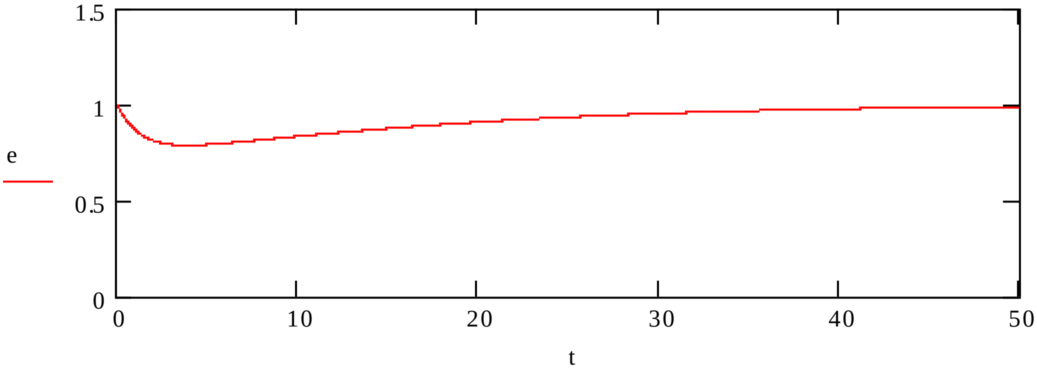
$e := L^{\langle 2 \rangle}$

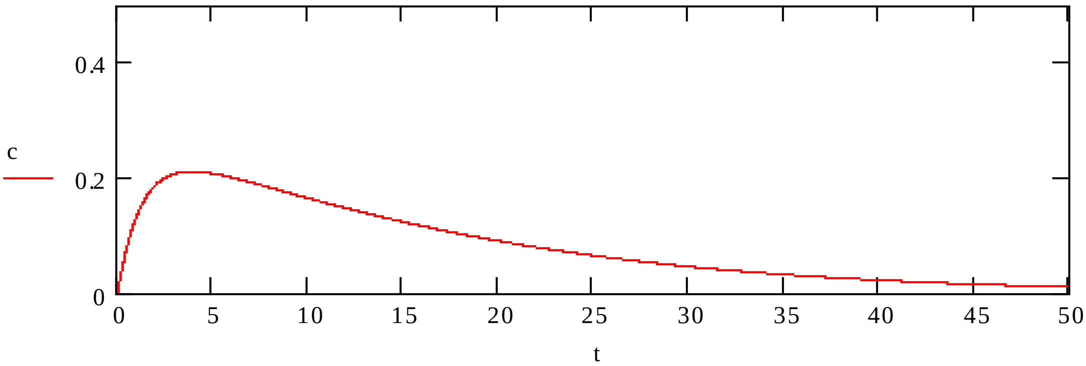
$c := L^{\langle 3 \rangle}$

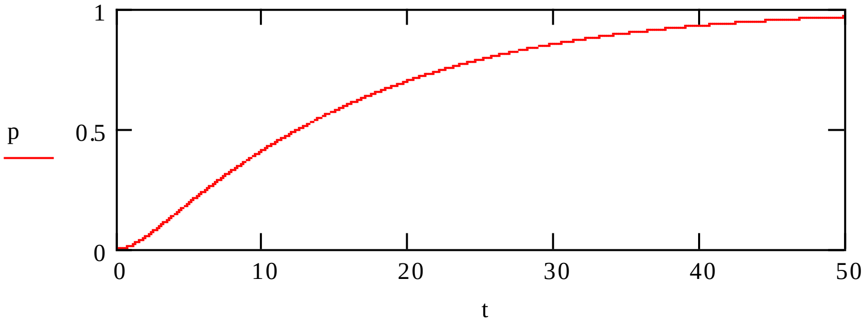
$p := L^{\langle 4 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები









ამ გრაფიკებიდან ნათლად ჩანს ფერმენტული რეაქციის დინამიკა.
P.S. შეისწავლეთ ფერმენტული რეაქციის დინამიკა, კომპიუტერზე პარამეტრების ცვლილების მიხედვით.

4.3. ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელი

სხვადასხვა პოპულაციათა ურთიერთქმედების შესწავლის შემდეგ, ვოლტერამ შეადგინა ეკოლოგიური პროცესების მათემატიკური მოდელი, რომელიც მათემატიკის თვალსაზრისით, დაემთხვა ლოტკას რეაქციის მეთემატიკურ მოდელს.

ეს მოდელი აღწერს ორ X და Y სუბიექტს შორის ბრძოლისა და კონკურენციის პროცესს არსებობისათვის ბრძოლაში. ცხადია, რომ ეს მოდელი შეიძლება გამოყენებულ იქნას ეკონომიკაშიც.

ლოტკა-ვოლტერას პროცესის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} A + X \xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y \xrightarrow{k_3} B \\ A = const,\ B = const \end{cases} ; \qquad (13)$$

სისტემა ღიაა ე.ი. ხდება ურთიერთქმედება გარემოსთან $(A \wedge B)$.

შესაბამის მათემატიკურ მოდელს, (13) სქემიდან გამომდინარე შევადგენთ ზემოთ შესწავლილი მეთოდით.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 ax - k_2 xy \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} ; \qquad (14)$$

(14) მოდელს ლოტკა-ვოლტერას მოდელი ეწოდება.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (14) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: x:=X_0; y:=X_1. მაშინ, შესაბამის პროგრამას ექნება სახე:

$k1 := 0.2$

$k2 := 0.25$

$k3 := 0.23$

$a := 0.02$

$$D(t, X) := \begin{pmatrix} k1 \cdot a \cdot X_0 - k2 \cdot X_0 \cdot X_1 \\ k2 \cdot X_0 \cdot X_1 - k3 \cdot X_1 \end{pmatrix}$$

$Npts := 3000$

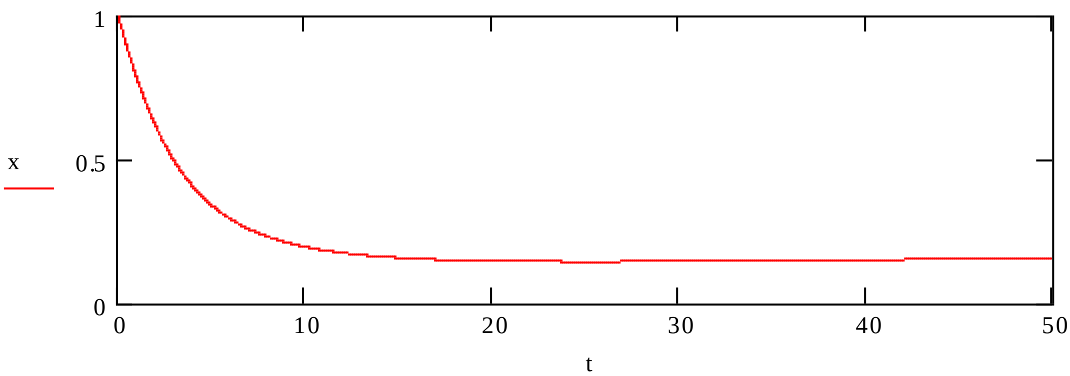
$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

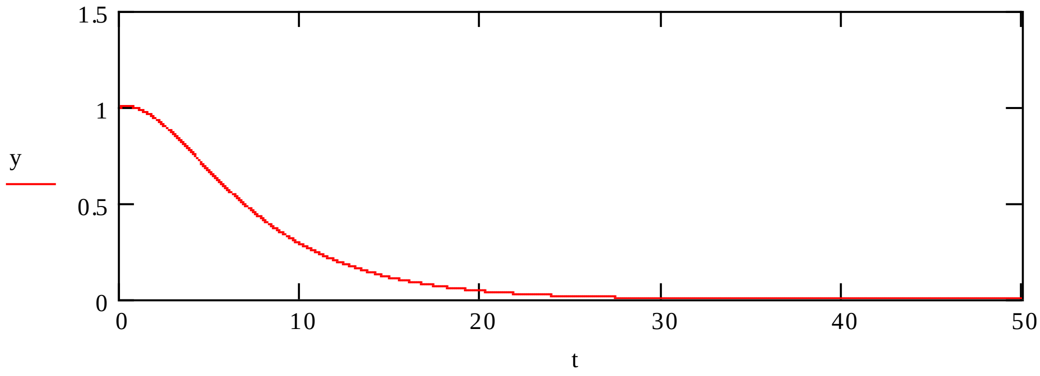
$t := L^{\langle 0 \rangle}$

$x := L^{\langle 1 \rangle}$

$y := L^{\langle 2 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები





ამ გრაფიკებიდან ნათლად ჩანს, რომ ასეთ შემთხვევაში, x სახეობის პოპულაცია ჯერ მცირდება, ხოლო შემდეგ, ანადგურებს რა y პოპულაციას, გადის მუდმივ ნიშნულზე.

P.S. შეისწავლეთ ლოტკა-ვოლტერას პოპულაციური დინამიკა, კომპიუტერზე პარამეტრების ცვლილების მიხედვით.

4.4. ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელი

ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქცია – არის რხევითი რეაქცია, რომელიც დეტალურად შეისწავლეს ფილდმა, კიორესმა და ნოიესმა. ჩვენ არ ჩაუღრმავდებით ამოცანის ქიმიურ არსს და პირდაპირ ჩავწერთ რეაქციის რეაქტორულ სქემას:

$$\begin{cases} A+Y \xrightarrow{k_1} X+P \\ X+Y \xrightarrow{k_2} 2P \\ A+X \xrightarrow{k_3} 2X+2Z \\ 2X \xrightarrow{k_4} P+A \\ Z \xrightarrow{k_5} fY \\ A=const,\ P=const,\ f=0{,}5 \end{cases} \qquad (15)$$

ეს სისტემა ღიაა რადგან A-ს უმატებენ იმდენს რამდენიც დააკლდება, რომ შეინარჩუნონ $A=const$, f-სტეხეომეტრული კოეფიციენტია.

(15) რეაქტორული სქემის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკურ მოდელს უწოდებენ:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1ay - k_2xy + k_3ax - k_4x^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = -k_1ay - k_2xy + k_5fz \\ \dfrac{dz}{dt} = 2k_3ax - k_5z \\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0 \end{cases} . \qquad (16)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (16) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: $x := X_0$; $y := X_1$; $z := X_2$. მაშინ, შესაბამის პროგრამას ექნება სახე:

$k1 := 0.2$
$k2 := 0.2$
$k3 := 0.2$
$k4 := 0.22$
$k5 := 0.29$
$f := 0.5$
$a := 0.1$

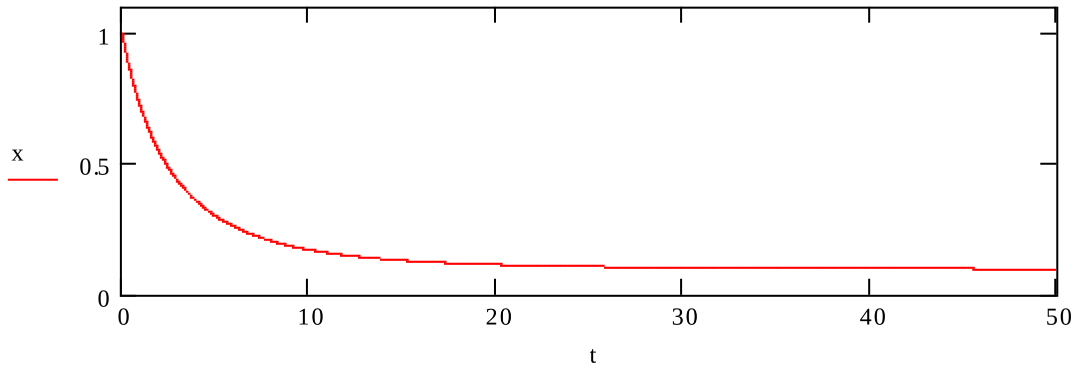
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} k1 \cdot a \cdot X_1 - k2 \cdot X_0 \cdot X_1 + k3 \cdot a \cdot X_0 - k4 \cdot \left(X_0\right)^2 \\ -k1 \cdot a \cdot X_1 - k2 \cdot X_0 \cdot X_1 + k5 \cdot f \cdot X_2 \\ 2 \cdot k3 \cdot a \cdot X_0 - k5 \cdot X_2 \end{bmatrix}$$

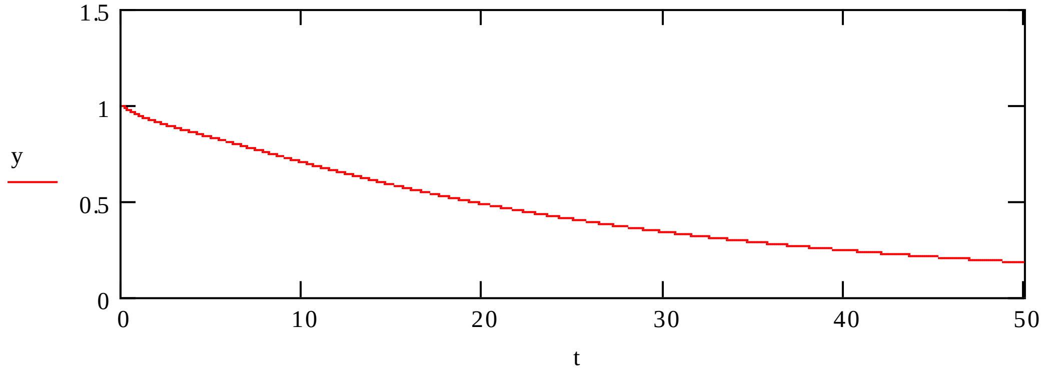
$Npts := 3000$

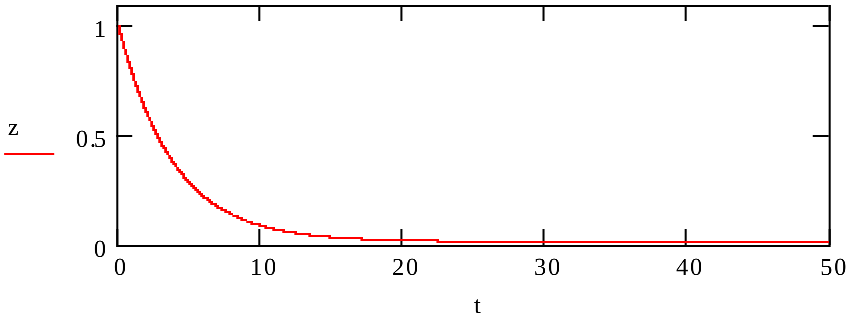
$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

$t := L^{\langle 0 \rangle}$
$x := L^{\langle 1 \rangle}$
$y := L^{\langle 2 \rangle}$
$z := L^{\langle 3 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები







P.S. შეისწავლეთ ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის რეაქციის დინამიკა, კომპიუტერზე პარამეტრების ცვლილების მიხედვით.

4.5. პრიგოჟინ-ლეფევრის მათემატიკური მოდელი

პრიგოჟინ-ლეფევრის მოდელი არის, ორი შუალედური პროდუქტის მქონე რეაქციის მათემატიკური მოდელი, რომელსაც აქვს პერიოდული ამონახსნები პარამეტრების განსაზღვრული მნიშვნელობებისათვის. ეს მოდელი აგებულ იქნა იმ მათემატიკური მეთოდების დემონსტრაციისათვის, რომლებიც შემუშავებული იქნა ქ. ბრიუსელში, ნობელის პრემიის ლაურეატის **პრიგოჟინის ხელმძღვანელობით,** ამიტომ, ამ მოდელს ზოგჯერ „ბრიუსელიატორს“ უწოდებენ.

პროგოჟინ-ლეფევრის რაქციის რეაქტორულ სქემას აქვს სახე:

$$\begin{cases} A \xrightarrow{k_1} X \\ B + X \xrightarrow{k_2} Y + D \\ 2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X \\ X \xrightarrow{k_4} E \\ A = const,\ B = const, D = const,\ E = const \end{cases} \qquad (17)$$

ეს სისტემაც ღიაა ე.ი. ემატება ან აკლდება A, B, D, E ნივთიერებები ისე, რომ მათი რაოდენობა შეინარჩუნება ერთ დონეზე.

პრიგოჟინ-ლეფევრის მათემატიკურ მოდელს ადვილად ავაგებთ (17) რეაქტორული სქემიდან გამომდინარე:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1 a + k_3 x^2 y - (k_2 b + k_4)x \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2 bx - k_3 x^2 y \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (18)$$

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ისევ ვიყენებთ უმარტივეს პაკეტს Mathcad 2001 professional-ს. ამისათვის, გადავიდეთ (18) ამოცანის შესაბამის აღნიშვნებზე: x:=X$_0$; y:=X$_1$. მაშინ, შესაბამის პროგრამას ექნება სახე:

k1:=0.25
k2:=0.42
k3:=0.32

$k4 := 0.$

$a := 1$

$b := 1$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} k1 \cdot a + k3 \cdot (X_0)^2 \cdot X_1 - (k2 \cdot b + k4) \cdot X_0 \\ k2 \cdot b \cdot X_0 - k3 \cdot (X_0)^2 \cdot X_1 \end{bmatrix}$$

$Npts := 300($

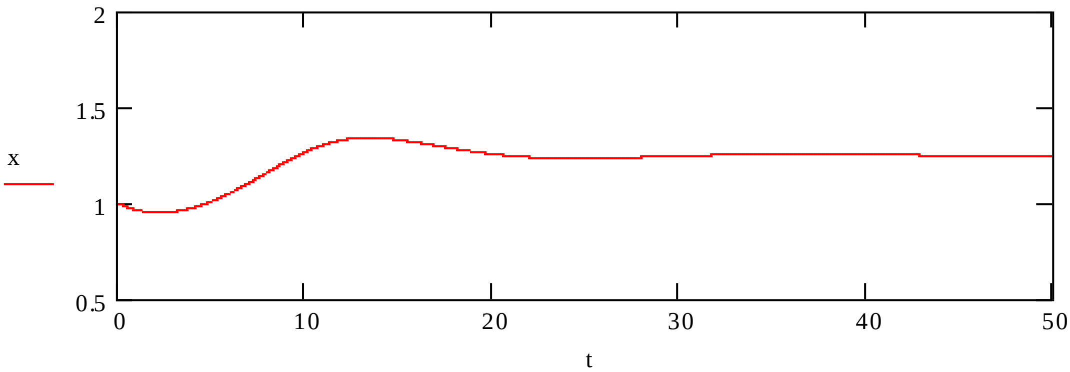
$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

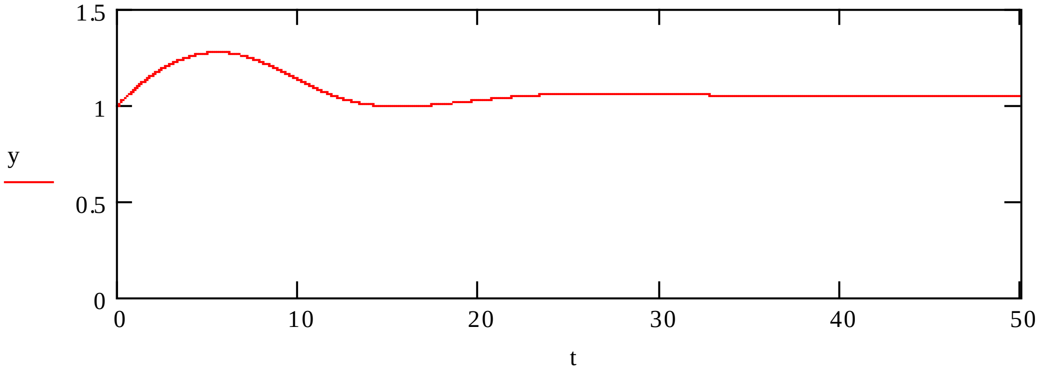
$t := L^{\langle 0 \rangle}$

$x := L^{\langle 1 \rangle}$

$y := L^{\langle 2 \rangle}$

გამოთვლების შედეგები





P.S. შეისწავლეთ პრიგოჟინ-ლეფევრის სისტემის დინამიკა, კომპიუტერზე პარამეტრების ცვლილების მიხედვით.

4.6. რეაქტორული სქემების ტექნიკის გამოყენება კოლმოგოროვის განტოლებების შესადგენად მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვებისათვის

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება სიტუაცია, როცა ერთი მდგომარეობიდან სისტემა შემთხვევით გადადის მეორე მდგომარეობაში. მაგალითად, აპარატურის ნებისმიერი ელემენტი შეიძლება გამოვიდეს წყობიდან დროის ნებისმიერ მომენტში, მისი შეკეთებაც შეიძლება მოხდეს დროის შემთხვევით მომენტში და ა.შ.

ასეთი პროცესების აღსაწერად გამოიყენებენ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის რეაქტორულ სქემას, დისკრეტული მდგომარეობათა სივრცით და უწყვეტი დროით.

ვთქვათ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ - სისტემის მდგომარეობათა დისკრეტული მიმდევრობაა, ე.ი. $\{S_k\}_{k=1}^{n}$ არის იმ მდგომარეობათა სიმრავლე რომელშიც შეიძლება იყოს ჩვენი სისტემა დროის სხვადსხვა მომენტში, სიტუაციის მიხედვით.

ამა თუ იმ S_i-მდგომარეობაში სისტემის ყოფნის ალბათობა აღვნიშნოთ $p_i(t)$-თი. $p_{ij}(t)$-არის სისტემის S_i-მდგომარეობიდან S_j-მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა.

განსაზღვრება: სისტემის S_i-მდგომარეობიდან S_j-მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობის სიმკვრივე λ_{ij}-ეწოდება, შესაბამისი გადასვლის ალბათობის ცვლილების სიჩქარეს, ე.ი.

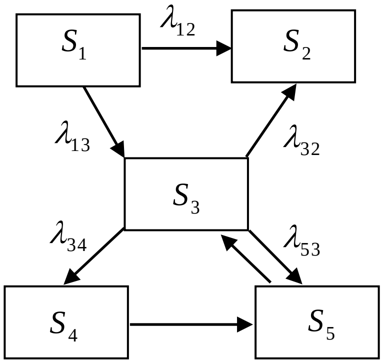
$$\lambda_{ij} = \frac{dp_{ij}(t)}{dt}. \tag{19}$$

ცხადია, რომ დროის მცირე Δt შუალედებისათვის

$$p_{ij}(t) \approx \lambda_{ij} \Delta t. \tag{20}$$

თუ, λ_{ij}-გადასვლის ალბათობათა სიმკვრივეები არ არიან დამოკიდებული t-დროზე, მაშინ **მარკოვის პროცესს ერთგვაროვანი** ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში **არაერთგვაროვანია**.

განვიხილოთ მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი (ნახ. 4.1). მაშინ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელების, რეაქტორული სქემიდან აგების წესის გამოყენება, მოგვცემს კოლმოგოროვის განტოლებათა სისტემას მარკოვის პროცესისათვის, რომელიც შეესაბამება (ნახ. 4.1).



ნახ. 4.1. მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფი

ნახაზზე მოცემულ გრაფს (ამჯერად ამ გრაფს ვუყურებთ როგორც რეაქტორულ სქემას), შეესაბამება მათემატიკური მოდელი:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 \\
\dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 + \lambda_{32}p_3 \\
\dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{53}p_5 - (\lambda_{32} + \lambda_{34} - \lambda_{35})p_3 \\
\dfrac{dp_4}{dt} = \lambda_{34}p_3 - \lambda_{45}p_4 \\
\dfrac{dp_5}{dt} = \lambda_{45}p_4 - \lambda_{53}p_5 + \lambda_{35}p_3
\end{cases}
. \qquad (21)
$$

თუ ვიცით, რომ საწყის $t = 0$ მომენტში სისტემა იმყოფებოდა S_1-მდგომარეობაში, მაშინ საწყის პირობებს ექნებათ სახე:

$$p_1(0) = 1; \qquad p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0. \qquad (22)$$

(21), (22) – წარმოადგენს მარკოვის უწყვეტი ჯაჭვის ნახ.4.1-ზე მოცემული მდგომარეობათა გრაფის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს.

ანალოგიურად, შეიძლება ავაგოთ ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელები რთული პროცესებისათვის, რომლებისთვისაც წინასწარ აიგება შესაბამისი მდგომარეობათა მიმართული გრაფი.

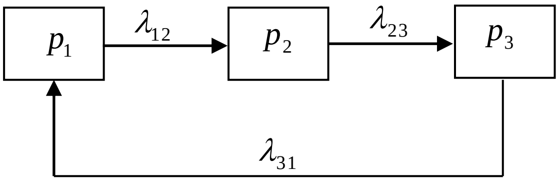
ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელის განსაზღვრება;
2.ბიმოლეკულური და ტრიმოლეკულური რეაქტორული სქემების შესაბამისი მათემატიკური მოდელების აგების წესი;
3. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$$A + 2B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C + D, \qquad A = const, \qquad D = const.$$

4.ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით:



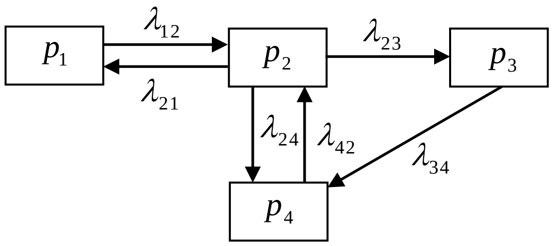
5.გამოიკვლიეთ მიხაელის-მენტენის მათემატიკური მოდელის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. Mathcad 2001-ის დახმარებით, იპოვეთ მოდელის შესაბამისი ამონახსნების დინამიკა პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შეისწავლეთ დინამიკური სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე.

ვარიანტი 2

1.ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელის განსაზღვრება. მონომოლეკულური რეაქტორული სქემები;
2.ბიმოლეკულური და ტრიმოლეკულური რეაქტორული სქემების შედგენა და ანალიზი;
3. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$$2A + 3B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \xrightarrow{k_2} A + 2B .$$

4.ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით:



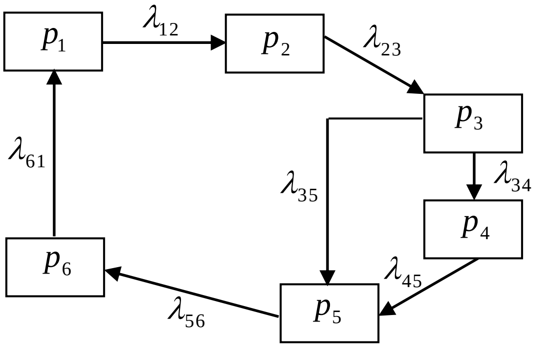
5.გამოიკვლიეთ ლოტკა-ვოლტერას მათემატიკური მოდელის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. Mathcad 2001-ის დახმარებით, იპოვეთ მოდელის შესაბამისი ამონახსნების დინამიკა პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შეისწავლეთ დინამიკური სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე.

ვარიანტი 3

1.ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელის განსაზღვრება. მონომოლეკულური რეაქტორული სქემების მათემატიკური მოდელები;
2.ბიმოლეკულური და ტრიმოლეკულური რეაქტორული სქემების და ანალიზი;
3. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} X + Y \xrightarrow{k_1} 3X \\ A + 2X \xrightarrow{k_2} Y + B \qquad A = const, \qquad B = const \\ 3Y + B \xrightarrow{k_3} X + 2A \end{cases}$$

4. ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით:



5.გამოიკვლიეთ ბელოუსოვ-ჟაბოტინსკის მათემატიკური მოდელის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. Mathcad 2001-ის დახმარებით, იპოვეთ მოდელის შესაბამისი ამონახსნების დინამიკა პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შეისწავლეთ დინამიკური სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე.

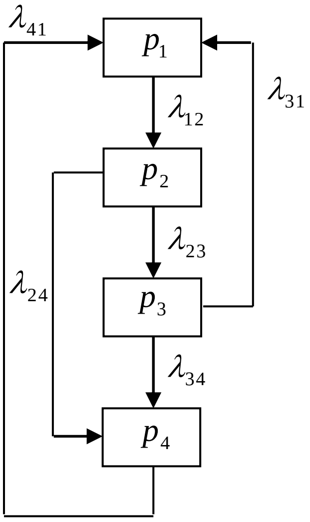
ვარიანტი 4

1.ჩამოთვალეთ და განმარტეთ მათემატიკური მოდელების სახეები;
2.ბიმოლეკულური და ტრიმოლეკულური რეაქტორული სქემების აგება;
3. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$$A + 2B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} C \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftarrows}} D + B, \qquad C \xrightarrow{k_3} E + A$$

$E = const$; $D = const$.

4.ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით:

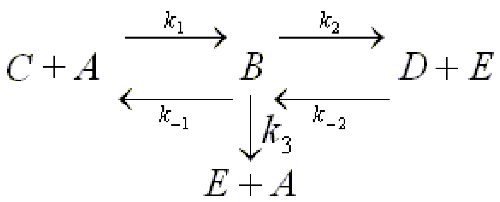


5.გამოიკვლიეთ პრიგოჟინ-ლეფევრის მათემატიკური მოდელის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. Mathcad 2001-ის დახმარებით, იპოვეთ მოდელის შესაბამისი ამონახსნების დინამიკა პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შეისწავლეთ დინამიკური სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე.

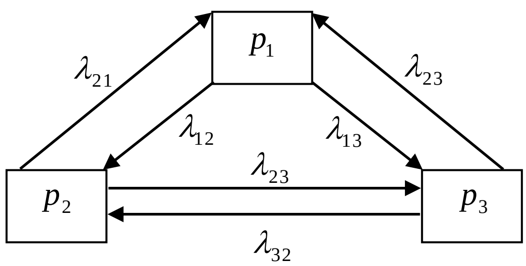
ვარიანტი 5

1.განმარტეთ მოდელირების სახეები;
2.ბიმოლეკულური და ტრიმოლეკულური რეაქტორული სქემების აგება;
3. ააგეთ მოცემული რეაქტორული სქემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელი:

$E = const$



4.ააგეთ მარკოვის შემთხვევითი პროცესის მათემატიკური მოდელი, მდგომარეობათა ორიენტირებული გრაფის მიხედვით:



5.გამოიკვლიეთ პრიგოჟინ-ლეფევრის მათემატიკური მოდელის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. Mathcad 2001-ის დახმარებით, იპოვეთ მოდელის შესაბამისი ამონახსნების დინამიკა პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის და შეისწავლეთ დინამიკური სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Холодник М., Клич А., Кубичек М., Марек М., Методы анализа нелинейных динамических моделей, М., Мир, 1991.
2. Обгадзе Т.А. Элементы математического моделирования, учеб. пос., ГПИ, Тбилиси, 1989.
3. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устроиствах, М., Мир, 1985.
4. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесних системах. Иерархии неустойчивостей. –М., Мир, 1979.
5. Паулинг Л. Природа химической связи. –М., -Л.: Госхимиздат, 1947.
6. Пригожин И., Дефей Р. Химическая термодинамика. Новосибирск, 1966
7. Пригожин И. Молекулярная теория растворов. –М.: Металлургия, 1990.
8. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур, М., Мир, 2002ю
9. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии, М., 2002.

თავი V. მატერიალური წერტილის ცნება და მასთან დაკავშირებული მათემატიკური მოდელები

შესავალი

განსაზღვრება: სხეულს, რომლის ზომებიც შეიძლება უგულებელვყოთ მოცემული ამოცანის პირობებში, **მატერიალური წერტილი** ეწოდება[1-12].

მაგალითი: პლანეტების ურთიერთის მიმართ მოძრაობის შესასწავლად, ისინი შეიძლება ჩავთვალოთ მატერიალურ წერტილებად, რომელთაც გააჩნიათ შესაბამისი პლანეტის ტოლი მასები-m_i, მაგრამ, თუ გვაინტერესებს პლანეტის ბრუნვითი მოძრაობის მოდელირება საკუთარი ღერძის გარშემო, მას უკვე ვერ ჩავთვლით მატერიალურ წერტილად და იძულებული ვართ, სხვა გზები ვეძიოთ შესაბამისი პროცესების მათემატიკური მოდელების შესადგენად.

თანამედროვე ტექნიკის მიღწევები მთლიანად (თვითმფრინავები, რაკეტები, მანქანა-მექანიზმები, მშენებლობების პროექტირება და ა.შ.) ემყარება კლასიკურ-ნიუტონურ მექანიკას.

კლასიკური მექანიკის საფუძველს შეადგენენ ნიუტონის კანონები, რომლებიც ემყარებიან ექსპერიმენტებს და საღ-მეტაფიზიკურ აზროვნებას.

განვიხილოთ ნიუტონის კანონები:

ა) **ნიუტონის პირველი კანონი:**

თუ სხეულზე არ მოქმედებენ სხვა სხეულები, ან მათი მოქმედება კომპენსირებულია, მაშინ სხეული ან უძრავია ან მოძრაობს თანაბრად და წრფივად;

ანუ თუ $\vec{F}$ (ძალების ჯამი)=0, მაშინ $\vec{a}$ (აჩქარება)=0.

P.S.ეს კანონი ძალაშია, მხოლოდ მაშინ როცა დაკვირვებას ვაწარმოებთ ისეთი ათვლის სისტემების მიმართ, რომლებიც მოძრაობენ აჩქარების გარეშე. ასეთ ათვლის სისტემებს, ინერციულ ათვლის სისტემებს უწოდებენ.

ბ) **ნიუტონის მეორე კანონი**:

აჩქარება, რომლითაც მოძრაობს სხეული პირდაპირპროპორციულია მოძრაობის გამომწვევი ძალისა და უკუპროპორციულია სხეულის მასისა:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \qquad (1)$$

ამ კანონიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \qquad (2)$$

P.S. ნიუტონის მეორე კანონიც ძალაშია მხოლოდ ინერციული სისტემებისთვის.

გ) **ნიუტონის მესამე კანონი:**

ორი სხეულის ურთიერთქმედებისას, $\vec{F}_{12}$-ძალა რომლითაც პირველი სხეული მოქმედებს მეორეზე, სიდიდით ტოლია და მიმართულია $\vec{F}_{21}$-ძალის საპირისპიროდ, რომლითაც მეორე სხეული მოქმედებს პირველზე. ანუ:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3}$$

P.S.: ეს კანონი ძალაშია, თუ ურთიერთქმედება ხორციელდება მყისიერად, მაგრამ რეალურად, სხეულთა შეჯახებისას დეფორმაცია გადაეცემა სასრული სიჩქარით.

კლასიკური დინამიკის ძირითადი კანონია ნიუტონის მეორე კანონი:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F} \ . \tag{4}$$

სადაც $\vec{P} = M \cdot \vec{v}$-იმპულსია, $\vec{F}$-ძალა. ეს კანონი ძალაშია ინერციული სისტემებისათვის.

თუ სხეულის მასა M=const მუდმივია, მაშინ (4) მოძრაობის განტოლება მიიღებს სახეს:

$$M \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = M\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \ . \tag{5}$$

დ) **მსოფლიო მიზიდულობის კანონი**:

პლანეტების ურთიერთქმედების შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს კანონს, რომლის თანახმადაც: ბუნებაში ნებისმიერი M_1-მასის სხეული მიიზიდავს ნებისმიერ სხვა M_2-მასის სხეულს ძალით, რომელიც პირდაპირპროპორციულია ამ მასების ნამრავლისა და უკუპროპორციულია ამ მასების ცენტრებს შორის მანძილის (r^2) კვადრატისა:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^2} \cdot \vec{r}_{12} = -\frac{\gamma \cdot M_1 \cdot M_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} \ . \tag{6}$$

სადაც $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ნმ^2/კმ^2-უნივერსალური გრავიტაციული მუდმივაა, $\vec{r}_{12}$-ერთეული სიგრძის ვექტორია, რომელიც მიმართულია M_1-დან M_2-საკენ. $\vec{r}_{12} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

5.1. ხელოვნური თანამგზავრის მოძრაობა დედამიწის გარშემო

ვთქვათ თანამგზავრის მოძრაობის მიმართულება ემთხვევა დედამიწის ბრუნვის მიმართულებას. თანამგზავრის ორბიტის r-რადიუსის, რა მნიშვნელობისათვის მოეჩვენება დედამიწაზე მყოფ დამკვირვებელს, თანამგზავრი უძრავად?

ამოხსნა: წრიული ორბიტისათვის მიზიდულობის ძალა უნდა უდრიდეს ცენტრისკენულ ძალას სიდიდით და მიმართულებით უნდა იყოს მისი საპირისპირო, ე.ი.

$$\frac{\gamma M_d M_t}{r^2} = M_t \omega_t^{\ 2} \cdot r\,; \tag{7}$$

სადაც M_d-დედამიწის მასაა, M_t-თანამგზავრის მასა, ω_t-თანამგზავრის კუთხური სიჩქარე. ამ განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$r^3 = \frac{\gamma M_d}{\omega_t^{\ 2}} = \frac{\gamma M_d \cdot T_t^{\ 2}}{(2\pi)^2}\ ; \tag{8}$$

სადაც T_t-თანამგზავრის ბრუნვის პერიოდია, $M_d = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ დნ

იმისათვის, რომ დედამიწაზე მყოფმა დამკვირვებელმა ვერ შენიშნოს თანამგზავრის ბრუნვა, საჭიროა რომ თანამგზავრის კუთხური სიჩქარე ω_t იყოს ტოლი დედამიწის ბრუნვის ω_d-კუთხური სიჩქარისა, ანუ

$$\omega_t = \omega_d\,; \tag{9}$$

მაგრამ

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{8{,}64 \cdot 10^4}\ \text{წმ}^{-1} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{წმ}^{-1}; \tag{10}$$

მაშინ,

$$r^3 = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-8}) \cdot (5{,}98 \cdot 10^{27})}{(7{,}3 \cdot 10^{-5})^2}\ \text{სმ}^3 \approx 75 \cdot 10^{27}\ \text{სმ}^{3}\,. \tag{11}$$

ანუ,

$$r \approx 4{,}2 \cdot 10^9\ \text{სმ}^3\,. \tag{12}$$

რადგან დედამიწის რადიუსი Rდ$\approx 6{,}38 \cdot 10^8$ სმ. (12) მანძილი წარმოადგენს მთვარემდე მანძილის ≅ 1/10-ს.

5.2. პლანეტების მოძრაობა მზის გარშემო

პლანეტები ურთიერთქმედებენ მსოფლიო მიზიდულობის კანონით (6). შესაბამისი მათემატიკური მოდელის შესადგენად ვისარგებლოთ დინამიკის განტოლებებით (5), სადაც მოძრაობის გამომწვევი $\vec{F}$-ძალები წარმოადგენენ მსოფლიო მიზიდულობის (6) გრავიტაციულ ძალებს:

$$M_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{M_j}{r_{ij}^{\ 3}} \vec{r}_{ij}\ . \tag{13}$$

სადაც შტრიხი ჯამის სიმბოლოში გამორიცხავს იმ შემთხვევას, როცა i=j; $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, სადაც $\vec{r}_{ij}$-არის i-წერტილიდან j-საკენ მიმართული ვექტორი. (13)-მოდელის გასამარტივებლად შტრიხიანი ჯამი გავყოთ ორ ნაწილად:

$$M_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma M_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{M_j}{\left|r_{ij}\right|^3} \vec{r}_{ij} - \gamma M_i \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{M_j}{\left|r_{ij}\right|^3} \vec{r}_{ij} \,. \tag{14}$$

საწყის პირობებს აქვთ სახე:

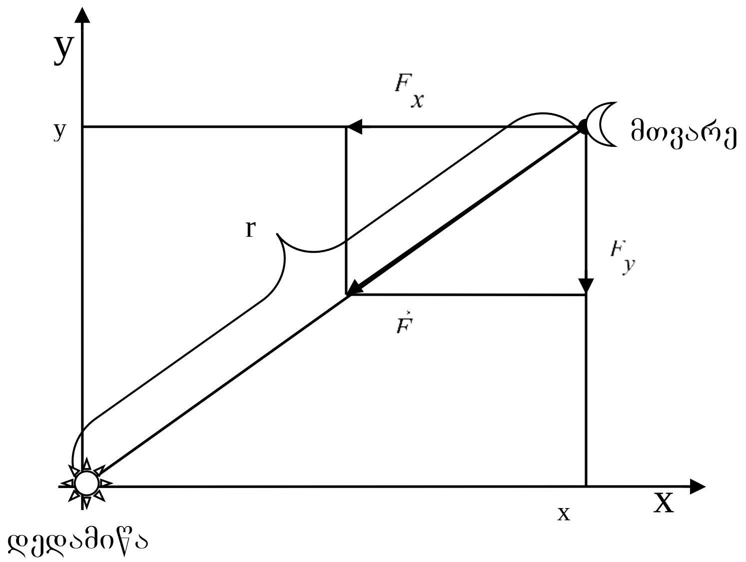
$$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_{i0} \;; \tag{15}$$

$$\dot{\vec{r}}_i(0) = \vec{v}_{i0} \,. \tag{16}$$

ამ მოდელის რეალიზაცია საჭიროა კომპიუტერზე. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა: **ორი სხეულის პრობლემა კლასიკურ მექანიკაში.**

ამოცანა. შეადგინეთ ორი სხეული პრობლემის მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, ერთი სხეულია – დედამიწა, მეორე სხეულია მთვარე. შეადგინეთ, ამ პლანეტების მოძრაობის მათემატიკური მოდელი.

ამოხსნა:



ნახ. 5.1. დედამიწის მოქმედება მთვარეზე

განვიხილოთ მთვარის მოძრაობა დედამიწის მიმართ ე.ი. ჩავთვალოთ, რომ დედამიწა უძრავია და მთვარე მოძრაობს დედამიწის მიზიდულობის ძალის გავლენით:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vec{F}_x}{\left|\vec{F}\right|} = -\frac{x}{\left|\vec{r}\right|} \Rightarrow F_x = -\left|\vec{F}\right| \cdot \frac{x}{\left|\vec{r}\right|} \\ \frac{\vec{F}_y}{\left|\vec{F}\right|} = -\frac{y}{\left|\vec{r}\right|} \Rightarrow F_y = -\left|\vec{F}\right| \cdot \frac{y}{\left|\vec{r}\right|} \end{aligned}\right\} . \tag{17}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|F| = \gamma \frac{M_d \cdot M_{mt}}{\left|\vec{r}\right|^2}$ მივიღებთ, რომ

$$\begin{cases} M_{mt}\cdot\dfrac{dv_x}{dt}=-\gamma\dfrac{M_d\cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^3}\cdot x \\ M_{mt}\cdot\dfrac{dv_y}{dt}=-\gamma\dfrac{M_d\cdot M_{mt}}{|\vec{r}|^3}\cdot y \\ |\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \quad \text{საწყისი პირობები} \quad \begin{matrix} x(0)=0,5 \\ y(0)=0 \\ v_x(0)=0 \\ v_y(0)=1,63 \end{matrix} \qquad (18)$$

P.S. ამ მოდელის რეალიზაციისათვის გამოიყენეთ Mathcad 2001 პროგრამული პაკეტი და ააგეთ, დედამიწის გარშემო მთვარის მოძრაობის ტრაექტორია. ააგეთ მთვარის კოორდინატების ცვლილების გრაფიკები დროის მიხედვით.

შეისწავლეთ მოძრაობა ფაზურ სიბრტყეზე.

5.3. ლანჟევენის მათემატიკური მოდელი. ნაწილაკის მოძრაობა სითხეში

ლანჟევენის მათემატიკური მოდელი. შეადგინეთ ნაწილაკის სითხეში მოძრაობის მათემატიკური მოდელი, თუ, სითხეში მოძრაობისას ნაწილაკზე მოქმედებს სიჩქარის პროპორციული წინააღმდეგობის ძალა. ამას გარდა, ადგილი აქვს შემთხვევით სითბურ შეშფოთებებს m$\vec{X}$(t).

ამოხსნა: ლანჟევენის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}_{st}+\vec{F}_{fl}\,. \qquad (19)$$

სადაც $\vec{F}_{st}$-სტოქსის წინააღმდეგობის ძალაა;

$\vec{F}_{fl}$-შემთხვევითი ფლუქტუაციებისგან გამოწვეული ძალაა;

$\vec{F}_{st}=-\gamma m\vec{v}$; $\vec{F}_{fl}=m\cdot\vec{X}(t)$;

ასე, რომ **ლანჟევენის მათემატიკურ მოდელს** აქვს სახე:

$m\dot{v}=-\gamma\, m\, v+mX(t)$;

თუ მოვახდენთ შეკვეცას, მივიღებთ:

$$\dot{v}=-\gamma\cdot v+X(t)\,. \qquad (20)$$

სადაც γ-ერთეული მასისათვის გადაანგარიშებული ხახუნის კოეფიციენტია,

X(t)-ფლუქტუაციური ძალის მდგენელია და მაშასადამე, მისი საშუალო მნიშვნელობა ნულის ტოლია, ანუ $\langle X(t)\rangle=\dfrac{1}{T}\int_0^T X(t)dt=0$.

ლანჟევენის (20) განტოლების ზუსტ ამონახსნს აქვს სახე:

$$v(t) - v(0)e^{-\gamma \cdot t} = e^{-\gamma \cdot t} \cdot \int_0^t e^{\gamma \cdot x} \cdot X(x)dx \quad . \tag{21}$$

5.4. ზვავის ტიპის ნაკადების(ზტნ) დინამიკის მათემატიკური მოდელები

ზვავის ტიპის ნაკადებს განეკუთვნებიან თოვლის ზვავები, ქვათაცვენა, სელური ნაკადები(ღვარცოფები) და მეწყერები. ზვავის ტიპის ნაკადებისათვის დამახასიათებელია არასტაციონალურობა, სწრაფწარმოქმნა და ხშირად, მოულოდნელობა. რაც იწვევს დიდ მატერიალურ ზარალს და ზოგჯერ მსხვერპლსაც. აქედან გამომდინარე, ზვავის ტიპის ნაკადების შესწავლა, დიდი ხანია წარმოებს მსოფლიოს ყველა მთიანი რეგიონების ქვეყნებში როგორიცაა: საქართველო, იაპონია, საფრანგეთი, შვეიცარია, ესპანეთი, კანადა და ა.შ.

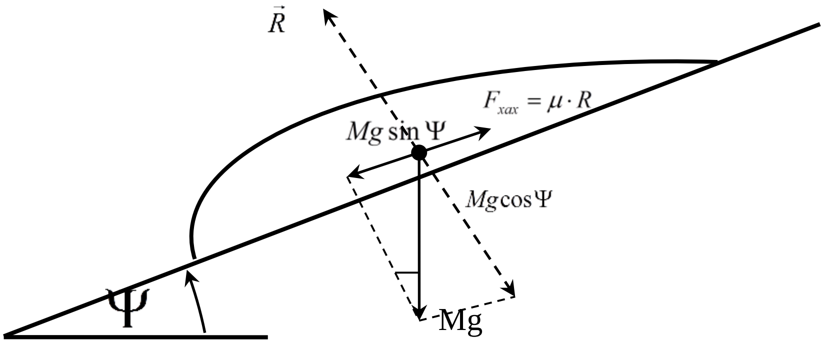
საქართველოში, ზვავის ტიპის ნაკადების **მათემატიკური მოდელირების** საქმეში, პიონერული სამუშაოები ეკუთვნით: **თეიმურაზ ვოინიჩ-სიანოჟენცკის[12], თამაზ ობგაძეს[12]** და **ილია მუზაევს[13]**. ხოლო ექსპერიმენტული და ინჟინრული კვლევების სფეროში: **ილია ხერხეულიძეს[14], მერაბ გაგოშიძეს[15], გივი ბერუჩაშვილს[16], ოთარ ნათიშვილს[17], ვახტანგ თევზაძეს[17] და გივი გავარდაშვილს[18].** აღსანიშნავია, ჩვენი თანამემამულის **დავით ღონღაძის** შრომაც**[19]** თოვლის ზვავების წარმოქმნის მექანიზმების შესახებ.

განვიხილოთ, ზვავის ტიპის ნაკადების მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა ევოლუციურად, ანუ, მარტივიდან რთულისაკენ წასვლით, სხვადასხვა მოვლენების თანდათანობითი გათვალის-წინებით.

5.4.1. ზტნ დინამიკის უმარტივესი მოდელი

განვიხილოთ ზტნ დინამიკის უმარტივესი მოდელი. ამ შემთხვევაში, ვთვლით რომ ზტნ-ის მასასა და ფერდობის გრუნტს შორის ხახუნის μ კოეფიციენტი მუდმივია, ასევე, მუდმივია მოძრავი ნაკადის M მასა და ფერდობის დახრის ψ კუთხე(ნახ. 5.4.1.). თუ, კოორდინატთა ღერძებს ავირჩევთ ისე, როგორც აღნიშნულია ნახ.5.4.1-ზე, მაშინ სელური მასის სიმძიმის ცენტრის დინამიკის განტოლებას ექნება სახე :

$$M \cdot W_0 = Mg \sin \Psi - \mu \cdot mg \cos \Psi \ ; \tag{22}$$



ნახ. 5.4.1. სელური ნაკადის დინამიკა

აქედან მივიღებთ, რომ

$$W_0 = g(\sin\Psi - \mu\cdot\cos\Psi)\,. \tag{23}$$

სადაც W_0-სელური მასის O-სიმძიმის ცენტრის აჩქარებაა, g-თავისუფალი ვარდნის აჩქარებაა, Ψ-ფერდობის ჰორიზონტისადმი დახრის კუთხეა, μ-ხახუნის კოეფიციენტია სელურ მასასა და ფერდობის უძრავ ნაწილს შორის.

ფორმულა (23)-დან გამომდინარეობს, რომ:

ა) თუ $\mu = tg\Psi$, მაშინ W=0 და მაშასადამე გვაქვს მოძრაობა მუდმივი სიჩქარით, რადგან $W = \dot v = 0 \Rightarrow v = const = v_0$, ამასთან მოძრაობა იქნება წრფის გასწვრივ, მართლაც რადგან

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot r = v_0; \tag{24}$$

მივიღებთ

$$r = v_0 t + r_0\ . \tag{25}$$

ბ) თუ $\mu \neq tg\Psi$, მაშინ მოძრაობა არის თანაბრად აჩქარებული და W-აჩქარება გამოითვლება (23) ფორმულით, გამოვთვალოთ სიჩქარე $v(t)$, ფორმულიდან

$$W = \dot v = g(\sin\Psi - \mu\cdot\cos\Psi)\,. \tag{26}$$

ცხადია რომ

$$v(t) = g(\sin\Psi - \mu\cdot\cos\Psi)\cdot t + v_0\,. \tag{27}$$

სადაც $v_0 = v(0)$ საწყისი სიჩქარეა.

რადგან $v = \dfrac{dr}{dt}$, ცხადია, რომ მოძრაობის კანონს ექნება სახე:

$$r(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin\Psi - \mu\cdot\cos\Psi) + v_0 t + r_0\,. \tag{28}$$

სადაც r_0-სიმძიმის ცენტრის საწყისი მდებარეობაა.

5.4.2. ზტნ დინამიკის დაზუსტებული მოდელი

ვთქვათ, ზტნ-ის სიჩქარე იმდენად დიდია, რომ გასათვალისწინებელია ჰაერის აეროდინამიკური წინააღმდეგობაც
(ე.ი. დავუშვათ $v \geq 80$ კმ/სთ), მაშინ ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა იქნება სიჩქარის კვადრატის პროპორციული და მიმართული იქნება მოძრაობის საწინააღმდეგოდ, ნიუტონის მეორე კანონს ექნება სახე:

$$M \cdot W = Mg\sin\Psi - \mu \cdot Mg\cos\Psi - kMgv^2 . \tag{29}$$

სიჩქარისათვის მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\Psi - \mu \cdot \cos\Psi - k \cdot v^2); \tag{30}$$

$$v(0) = v_0 \text{- საწყისი პირობით .} \tag{31}$$

დავალება სტუდენტებს: ა) ამოვხსნათ (30)-(31) კოშის ამოცანა **Mathcad-2001 PRO-ს გამოყენებით, μ-ხახუნის კოეფიციენტისა და k-პროპორციულობის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობე-ბისათვის,** $\mu \div 0{,}01 - 0{,}05$; $k \div 0{,}01 - 0{,}9$.
ბ) **მოძრაობის კანონის დასადგენად გვაქვს კოშის ამოცანა:**

$$\frac{d^2v}{dt^2} = g(\sin\Psi - \mu \cdot \cos\Psi - k \cdot v^2); \tag{32}$$

$$v(0) = v_0; \tag{33}$$

$$r(0) = r_0 . \tag{34}$$

ჩავწეროთ (32) ამოცანა ნორმალური სახით, (33)-(34) პირობებში და ამოვხსნათ კოშის ამოცანა Mathcad-2001 PRO-ს ფარგლებში.

5.4.3. ზტნ მოძრაობა სტოქასტიკური ხახუნის კოეფიციენტის პირობებში

წინა მოდელები იყვნენ მეტისმეტად გამარტივებულები, ეხლა თანდათანობით შევიტანოთ დაზუსტებები. ამ ეტაპზე ჩავთვალოთ რომ μ -ხახუნის კოეფიციენტი დამოკიდებულია ფერდობის r-კოორდინატზე სტოქასტიკურად

$$\mu = \sin^2 f(r); \tag{35}$$

სადაც $f(r)$-ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა, r-ის მიხედვით, $r \in [0;l)$, $\mu \in [0;1]$, $k = 10^{-4}$ სთ^2/კმ^2; l დახრილი ფერდობის სიგრძეა.

მაშინ, გვაქვს მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{r} = g(\sin\Psi - \sin^2 f(r) \cdot \cos\Psi - k \cdot \dot{r}^2); \tag{36}$$

$$\dot{r}(0) = 0 \quad ; \tag{37}$$

$$r(0) = 0 \quad . \tag{38}$$

გადავწეროთ (36)-(38) კოშის ამოცანა ნორმალური ფორმით:

$$\dot{r} = v \quad ; \tag{39}$$

$$\dot{v} = g(\sin\Psi - \sin^2 f(r) - k \cdot v^2); \tag{40}$$

$$v(0) = 0 \; ; \tag{41}$$

$r(0) = 0$. (42)

დავალება სტუდენტებს: ამოვხსნათ (39)-(42) ამოცანა Mathcad 2001 PRO-ს მეშვეობით. ავაგოთ $r(t)$ **და** $v(t)$ **გრაფიკები, აგრეთვე** $v(r)$ **-გრაფიკი, როცა** $r \in [0;l]$**.**

5.4.4. ზტნ დინამიკა მასის წარტაცვის ან დაკარგვის გათვალისწინებით

განვიხილოთ ზტნ-ის დინამიკა მასის წარტაცვის ან დაკარგვის გათვალისწინებით. ცხადია, რომ თუ ნაკადის $\frac{mv^2}{2}$ კინეტიკური ენერგია მეტია გარკვეულ Ekr კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, მაშინ ხდება ფერდობიდან მასის წარტაცვა; თუ, $\frac{mv^2}{2}$ ნაკლებია Ekr კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, ხდება ზტნ-ის მასის მყარი ფრაქციების დალექვა ფერდობზე. თუ, კინეტიკური ენერგიის მნიშვნელობა კრიტიკულის ტოლია, მაშინ ზტნ მოძრაობს როგორც ერთიანი მუდმივი მასა. ყოველივე ზემოთ თქმული ფორმულით ჩაიწერება ასე:

$$\frac{dm}{dt} = \delta \cdot \left(\frac{mv^2}{2} - Ekr\right); \qquad (43)$$

სადაც δ- ფერდობის მასის წარტაცვა-დალექვის გაძლიერების კოეფიციენტია.

თუ, გავიხსენებთ დინამიკის განტოლებას ცვლადი მასის პირობებში

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg\sin\psi - \mu\cos\psi - k_0 mgv - k_1 mgv^2 \quad ; \qquad (44)$$

მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} = mg\sin\psi - \mu\cos\psi - k_0 mgv - k_1 mgv^2 \quad ; \qquad (45)$$

თუ, (45) განტოლებაში შევიტანთ (43) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მნიშვნელობას და გავამარტივებთ, მივიღებთ ზტნ-ის დინამიკის განტოლებას

$$\frac{dv}{dt} = \delta \cdot \left(\frac{Ekr}{m} - \frac{v^2}{2}\right) + g \cdot (\sin\psi - \mu\cos\psi - k_0 v - k_1 v^2) \quad ; \qquad (46)$$

სადაც ხახუნის კოეფიციენტი ფერდობის კოორდინატის სტოქასტიკური ფუნქციაა, სადაც $f(r)$-ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა,

$$\mu = \sin^2 f(r) . \qquad (47)$$

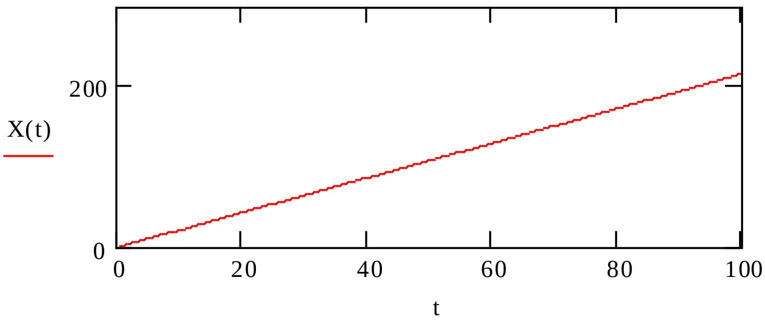
მიღებულ მოდელს **ობგაძის მოდელს უწოდებენ**. განვიხილოთ, ამ მოდელის რიცხვითი რეალიზაციები Mathcad 2001-ის ბაზაზე:

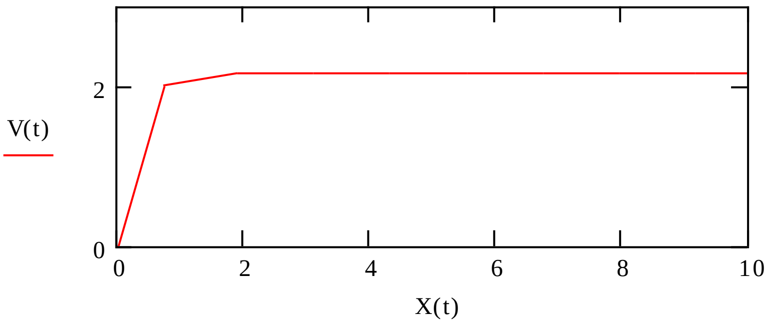
ა) განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ზტნ იწყებს მოძრაობას საწყისი წერტილიდან:

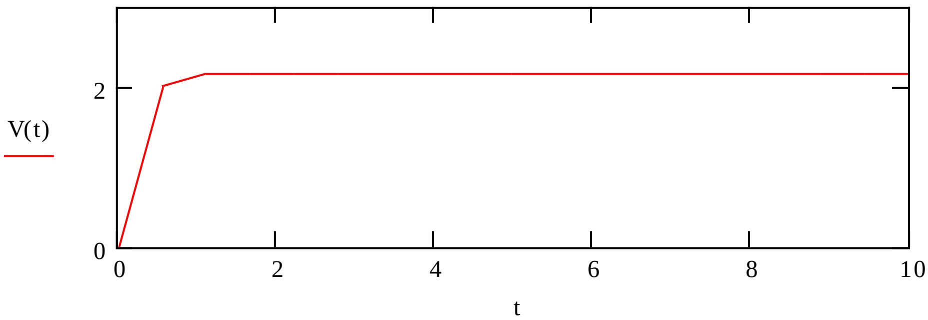
m := 2

Ekr:= 2 · m

$$k := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.02 \end{pmatrix}$$
$$\delta := 1.2$$
$$g := 9.8$$
$$ic := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\psi := \frac{\pi}{4}$$
$$\mu := rnd(1)$$
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ \delta \cdot \left[\frac{Ekr}{m} - \frac{(X_1)^2}{2} \right] + g \cdot \left[(\sin(\psi)) - \mu \cdot \cos(\psi) - k_0 \cdot X_1 - k_1 \cdot (X_1)^2 \right] \end{bmatrix}$$
$$S := Rkadapt(ic, 0, 500, 900, D)$$
$$i := 0..last\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$
$$t := S^{\langle 0 \rangle}$$
$$X(t) := S^{\langle 1 \rangle}$$
$$V(t) := S^{\langle 2 \rangle}$$







როგორც ნახაზებიდან ჩანს, ზტნ სწრაფად იმატებს სიჩქარეს და შემდეგ, გადის სიჩქარის მუდმივ მნიშვნელობაზე.

ბ) ეხლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა ზტნ უკვე მოძრაობს დიდი სიჩქარით და შემდეგ, მცირდება დახრილობის კუთხე

$m := 2$

$Ekr := 2 \cdot m$ $\qquad k := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.02 \end{pmatrix}$ $\qquad \delta := 1.2$ $\qquad g := 9.8$ $\qquad ic := \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\qquad \psi := \frac{\pi}{4}$

$\mu := rnd(1)$

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ \delta \cdot \left[\frac{Ekr}{m} - \frac{(X_1)^2}{2} \right] + g \cdot \left[(\sin(\psi)) - \mu \cdot \cos(\psi) - k_0 \cdot X_1 - k_1 \cdot (X_1)^2 \right] \end{bmatrix}$$

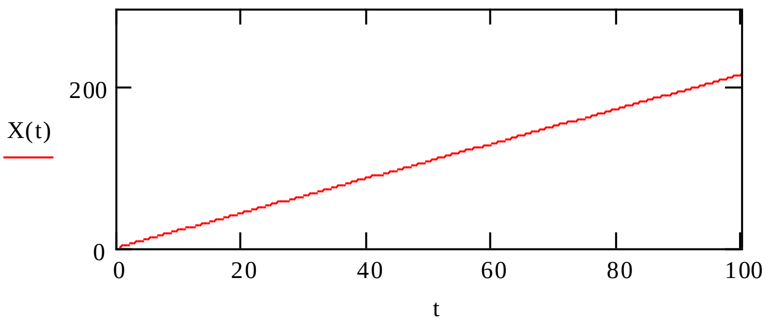
$S := Rkadapt(ic, 0, 500, 900, D)$

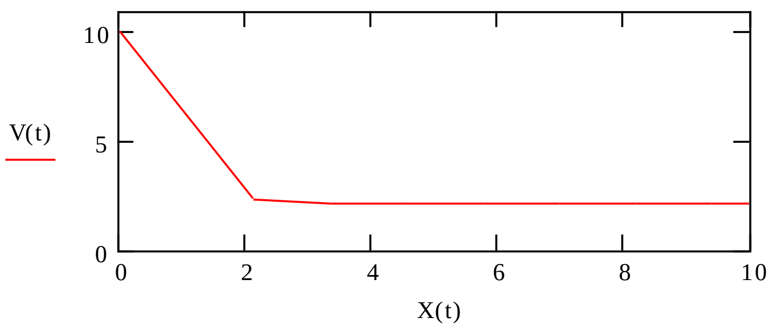
$i := 0 .. last\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$

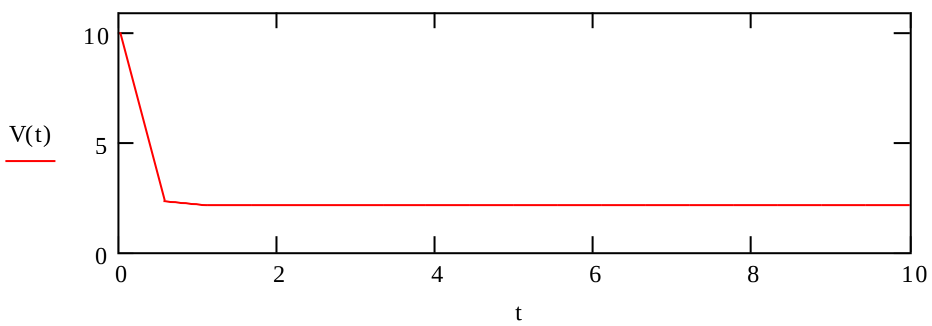
$t := S^{\langle 0 \rangle}$

$X(t) := S^{\langle 1 \rangle}$

$V(t) := S^{\langle 2 \rangle}$







როგორც ამ ნახაზებიდან ჩანს, ზტნ იკლებს სიჩქარეს და ბოლოს გადის სიჩქარის მუდმივ მნიშვნელობაზე.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.ჩამოაყალიბეთ ნიუტონის პირველი კანონი და განმარტეთ მისი მოქმედების პირობები და საზღვრები.

2.შეადგინეთ რაკეტის ვერტიკალურად ზემოთ მოძრაობის მათემატიკური მოდელი, როცა სხეულზე მოქმედებს სიმძიმის Mg –ძალა, რეაქტიული წევის F ძალა და სიჩქარის კვადრატის პროპორციული წინაღობის ძალა. მიღებული მათემატიკური მოდელი გამოიკვლიეთ ანალიზურად და რიცხვითი ამოხსნის მეთოდებით. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. განიხილეთ შემთხვევები: ა) მასა მუდმივია; ბ) რაკეტის მასა მცირდება საწვავის წვის შედეგად.

3.შეადგინეთ სამი სხეულის მოძრაობის მათემატიკური მოდელი(მზე, მთვარე, დედამიწა), როცა მათ შორის მოქმედებს მსოფლიო მიზიდულობის კანონი. კომპიუტერის გამოყენებით დაადგინეთ ამ სხეულების ურთიერთის მიმართ მოძრაობის ტრაექტორიები და სიჩქარეთა ცვლილებები.

4.კომპიუტერის დახმარებით ამოხსენით ლანჟევენის განტოლება და შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

5.შეადგინეთ ზტნ-ის დინამიკის მათემატიკური მოდელი და შეისწავლეთ მისი მოძრაობა, როცა კალაპოტის დახრილობის კუთხე იცვლება კალაპოტის გასწვრივ მოცემული კანონით $\psi = \varphi(r)$.

P.S. ეს ვარიანტი მოითხოვს შემოქმედებით მიდგომას და ყველა მაგისტრმა უნდა თვითონ აირჩიოს როგორც მოდელი, ასევე, მახასიათებელი პარამეტრების სახეებიც. სამუშაო სრულდება დამოუკიდებლად და ხდება მისი საჯარო დაცვა აუდიტორიაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. **Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, т.I, механика, Москва 1973**
2. **Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклиевски курс физики, т.I, механика, пер. с англ. Москва 1975**
3. **Дяконов В. Mathcad 2001. Учебный курс, численные и символьные вычисления, Санкт-Петербург, 2001**
4. **Синч Дж.л. Классическая механика. пер. с англ. Москва 1963**
5. **Арнольд В.И. Математические методы классической механики, Москва 1974**
6. **Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики,т.1,т.2,уч. пос., Москва, 1984**
7. **Олховский И.И. Курс Теоретическая механики для физиков, изд МГУ, 1974**
8. **Олховский И.И. Павленко Ю.Г., Кузменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. изд МГУ, 1977**
9. **Козел С.М., Рашба Э.И. Славатинский С.А. Сборник задач по физике, задачи МФТИ, Москва 1978**
10. **Коткин Г.Л. Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике, Москва, 1977**
11. **Кронин Г.Л. Гринберг Д, Телегди В. Сборник задач по физике с решениями, пер. с англ., Москва 1975**
12. **Войнич-Сяноженцкий Т.Г., Обгадзе Т.А.Гидродинамическая теория селевых потоков, лавин и обвалов-оползней и расчёт их характеристик//Труды Тбилисского Государственного университета, 252, Математика,механика,Астрономия,1984**
13. **Музаев И.В.,Созанов В.Г. Математическое моделирование движения оползня-потока, спровоцированного землетрясением. Международная конференция "Математические модели и численные методы механики сплошных сред": Тезисы докладов. Новосибирск, 1996**
14. **Херхеулидзе И.И. Эмпирические зависимости для расчёта элементов прорыва завальных плотин. Труды ЗакНИГМИ,1972**
15. **Гагошидзе М.С. Селевые явления и борьба с ними. Тбилиси, 1970**
16. **Беручашвили Г.М. Некоторые вопросы динамики селевого потока. Материалы IV Всесоюзной конференции по селевым потокам. Алма-Ата, 1959**
17. **Натишвили О.Г.,Тевзадзе В.И. Гидравлические закономерности связанных селей,Тбилиси, 1996**
18. **Гавардашвили Г.В. Исследование уравнительного уклона занесения в верхнем бьефе противоселевых перегораживающих сооружений на горных реках. Сообщения АН ГССР,т.123,№1,Тбилиси, 1986**
19. **Гонгадзе Д.Н. Некоторые вопросы динамики снежных лавин//Вопросы изучения снега и использования его в народном хозяйстве. Москва, 1955**

თავი VI. ჩვეულებრივი და სასრულსხვაობიანი მათემატიკური მოდელები ეკონომიკაში

შესავალი

სასრულსხვაობიანი განტოლებები დიდ როლს თამაშობენ ეკონომიკურ თეორიაში. ბევრი ეკონომიკური კანონი მტკიცდება სწორედ ასეთი განტოლებების მეშვეობით.

ვთქვათ t დრო თამაშობს დამოუკიდებელი ცვლადის როლს, ხოლო საძებნი(დამოკიდებული) ცვლადი განისაზღვრება დროის სხვადასხვა t, t-1, t-2 . . . მომენტებისათვის. აღვნიშნოთ საძიებელი ცვლადის მნიშვნელობა დროის t მომენტისათვის როგორც y_t. მაშინ დროის წინა მომენტში მისი მნიშვნელობა აღინიშნება როგორც y_{t-1}; დროის კიდევ ერთი ერთეულით ადრე, მისი მნიშვნელობა იქნება y_{t-2} და ა.შ.

განსაზღვრება: განტოლებას

$$a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \ldots + \mathrm{a_n} y_{t-n} = f(t), \qquad (1)$$

სადაც $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ - მუდმივი რიცხვებია, **წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი არაერთგვაროვანი სასრულსხვაობიანი განტოლება** ეწოდება. ხოლო (1) განტოლების კერძო შემთხვევას, როცა $f(t) = 0$ - **მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ერთგვაროვანი სასრულსხვაობიანი განტოლება ეწოდება.**

სასრულსხვაობიანი განტოლების ამოხსნა ნიშნავს ისეთი y_t ფუნქციის პოვნას, რომელიც (1) განტოლებას იგივეობად აქცევს.

განსაზღვრება: ისეთ ამონახსნს, რომელიც არ შეიცავს განუსაზღვრელ-ნებისმიერ უცნობს **კერძო ამონახსნი** ეწოდება; ხოლო ისეთ ამონახსნს, რომელიც შეიცავს განუსაზღვრელ-ნებისმიერ უცნობს – **ზოგადი ამონახსნი** ქვია.

ადგილი აქვს შემდეგ თეორემებს:

თეორემა 1: თუ, (1) განტოლების შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას(როცა $f(t) = 0$) აქვს $y_1(t)$ და $y_2(t)$ –ორი სხვადასხვა ამონახსნი, მაშინ მათი წრფივი კომბინაცია

$$y(t)=C_1\, y_1(t)+C_2\, y_2(t), \qquad (2)$$

სადაც C_1 და C_2 - ნებისმიერი მუდმივებია, აგრეთვე იქნება ამ განტოლების ამონახსნი.

თეორემა 2: არაერთგვაროვანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი სასრულსხვაობიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი უდრის, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის ჯამს.

P.S. როგორც ვხედავთ, ეს თეორემები მსგავსია, შესაბამისი თეორემებისა დიფერენციალური განტოლებებისათვის.

განვიხილოთ სასრულსხვაობიანი წრფივი მუდმივკოეფიცი-ენტებიანი პირველი და მეორე რიგის განტოლებების ამოხსნის მაგალითები.

6.1. პირველი რიგის წრფივი, მუდმივკოეფიციენტებიანი სასრულსხვაობიანი განტოლების ამოხსნა

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი, წრფივი, მუდმივკოეფიციენ-ტებიანი, სასრულსხვაობიანი განტოლება

$$y_t - a\,y_{t-1} = f(t)\,. \tag{3}$$

შესაბამის ერთგვაროვან განტოლებას აქვს სახე

$$y_t - a\,y_{t-1} = 0\,. \tag{4}$$

შევამოწმოთ, აკმაყოფილებს თუ, არა (4) განტოლებას ფუნქცია

$$y_t = a^t\,. \tag{5}$$

ცხადია, რომ

$$y_{t-1} = a^{t-1}\,. \tag{6}$$

თუ, ჩავსვამთ (5) და (6) თანადობებს (4) განტოლებაში, მივიღებთ რომ (5) ფუნქცია აკმაყოფილებს (4) განტოლებას. რადგან (4) განტოლება ერთგვაროვანია მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება

$$y_t = C\,a^t\,. \tag{7}$$

თუ, $\overline{y_t}$ - არის (3) არაერთგვაროვანი განტოლების რომელიმე კერძო ამონახსნი, მაშინ თეორემა 2 – ის თანახმად

$$y_t = C\,a^t + \overline{y_t}\,, \tag{8}$$

იქნება (3) არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

მაგალითი. სასრულსხვაობიანი განტოლების მეშვეობით იპოვეთ საბანკო ანაბარის ფორმულა, როცა გვაქვს წლიური ნაზრდი p% .

ამოხსნა : თუ რაღაც თანხა y_0 განთავსებულია ბანკში წლიური ნაზრდით p%, მაშინ t დროისათვის მისი მოცულობა იქნება

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-1}\frac{p}{100} = (1+\frac{p}{100})y_{t-1}\,. \tag{9}$$

ამრიგად, გვაქვს პირველი რიგის სასრულსხვაობიანი განტოლება, რომლის ამონახსნიც ($a = 1+\frac{p}{100}$), (7)-დან გამომდინარე იქნება

$$y_t = C(1+\frac{p}{100})^t\,. \tag{10}$$

თუ აღვნიშნავთ საწყის ანაბარს y_0=A, მაშინ (10)-დან მივიღებთ რომ C=A. რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$y_t = A(1+\frac{p}{100})^t\,. \tag{11}$$

ამრიგად, მივიღეთ **ანაბრის მოცულობის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა, როცა გაანგარიშება ხდება რთული პროცენტით.**

6.2. მეორე რიგის წრფივი, მუდმივკოეფიციენტებიანი სასრულსხვაობიანი განტოლების ამოხსნა

განვიხილოთ მეორე რიგის წრფივი, მუდმივკოეფიციენტებიანი სასრულსხვაობიანი განტოლება

$$y_t + py_{t-1} + qy_{t-2} = f(t) \qquad (12)$$

და შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$y_t + py_{t-1} + qy_{t-2} = 0. \qquad (13)$$

თუ, $k \neq 0$ არის

$$k^2 + pk + q = 0, \qquad (14)$$

(14) მახასიათებელი განტოლების ფესვი, მაშინ

$y_t = k^t$

არის (13) ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნი(შეამოწმეთ!). თუ მახასიათებელი განტოლების დისკრიმინანტი დადებითია, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას აქვს ორი ფესვი: k_1 ; k_2. რაც იმას ნიშნავს თეორემა 1-ის თანახმად, რომ (13) ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$$y_y = C_1k_1^{\ t} + C_2k_2^{\ t}. \qquad (15)$$

შესაბამისი არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნის მისაღებად (15) ამონახსნს უნდა დავუმატოთ (12) არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნი.

მაგალითი: იპოვეთ წრფივი, მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენ-ტებიანი სასრულსხვაობიანი განტოლების ამონახსნი

$y_t - 5y_{t-1} + 8y_{t-2} = 7.$

სადაც $y_0 = 5, \quad y_1 = 9$.

ამოხსნა: შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე :

$k^2 - 5k + 6 = 0$.

მისი ფესვებია $k_1 = 2; \quad k_2 = 3$. მაშასადამე, ერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს სახე

$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t$.

ვიპოვოთ ეხლა არაერთგვაროვანი(საწყისი) განტოლების კერძო ამონახსნი. დავუშვათ $\overline{y_t}$ =c ; მაშინ საწყისი განტოლებიდან გვექნება

$c - 5c + 6c = 7$

აქედან მივიღებთ, რომ c=3.5 . ასე რომ საბოლოოდ მივიღებთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს

$y_t = C_1 2^t + C_2 3^t + 3.5$

C_1, C_2 - მუდმივების საპოვნელად ვისარგებლოთ $y_0 = 5, \quad y_1 = 9$ საწყისი პირობებით. მაშინ საბოლოოდ მივიღებთ არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგად ამონახსნს

$y_t = -2^t + 2.5 \cdot 3^t + 3.5$.

6.3. ამოცანა კრედიტირების შესახებ

ამოცანა: ვთქვათ, კრედიტის ამღები უხდის კრედიტორს p% აღებული y_0 მოცულობიდან ყოველ წელს. რამდენი უნდა გადაიხადოს მან ყოველ ერთეულზე აღებულ სესხიდან, თუ პროცენტები იზრდებიან უწყვეტად?

ამოხსნა: რადგან პროცენტები იზრდებიან უწყვეტად, ვალის ზრდის სიჩქარე $y^{'}(t)$ პროპორციულია ვალის $y(t)$ მნიშვნელობისა დროის იგივე მომენტში. შესაბამისად, დინამიკის განტოლებას აქვს სახე

$$y^{'}(t) = \frac{p}{100} \cdot y(t)\,. \tag{16}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100)\,. \tag{17}$$

6.4. დედამიწის მცხოვრებთა რაოდენობის ზრდა და რესურსების ამოწურვა

ამოცანა: ერთი ადამიანის საკვებით უზრუნველსაყოფად აუცილებელია 0.1 ჰა სავარგული. დედამიწაზე სულ არის 4000 მლნ. ჰა სავარგული. ამიტომ მოსახლეობის მოსალოდნელი რაოდენობა, თუ არ იქნება ახალი წყაროები, შემოფარგლულია მოსახლეობის რაოდენობით 40 000 მლნ. ადამიანი.

როდის მიიღწევა მოსახლეობის გაჯერების ეს მაჩვენებელი, თუ მოსახლეობა იზრდება ყოველ წელიწადს 1.8% სიჩქარით?

ამოხსნა: მოსახლეობის ზრდა შეგვიძლია გამოვსახოთ ფორმულით:

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100)\,. \tag{18}$$

როცა $t = 0$, მივიღოთ 1999წ., როცა დედამიწის მცხოვრებთა რიცხვი იყო $6 \cdot 10^9$ ადამიანი. მაშინ

$$y(t) = 6 \cdot 10^9 e^{0.018t}\,. \tag{19}$$

ვეძებთ ისეთ t-ს, რომ

$$y(t) = 40 \cdot 10^9\,. \tag{20}$$

მაშინ

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 e^{0.018t}\,. \tag{21}$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$t \approx 105$ წელი.

ასე, რომ დაახლოვებით 2104 წელს დედამიწის მოსახლეობა მიაღწევს გაჯერების მდგომარეობას, თუ შენარჩუნდება ზრდის ტემპი. ეს არის **მალთუსის თეორია.** რომლის თანახმადაც თუ, მოსახლეობა არ ისწავლის შობადობის მართვას, მაშინ მას ელოდება უმუშევრობა, შიმშილი და მოსახლეობის ფართო ფენების გაღატაკება. თუმცა მალთუსის თეორია პრაქტიკაში, დროის დიდი მონაკვეთებისათვის არ დასტურდება, რადგან

ჩვენ სინამდვილეში საქმე გვაქვს ღია სისტემასთან, რომელსაც თვითორგანიზება ახასიათებს.

6.5. ინფლაცია და 70-ის სიდიდის წესი

ეკონომიკურ თეორიაში, ინფლაციის ტემპის შესწავლისას განიხილება 70-ის სიდიდის წესი. რომელიც საშუალებას იძლევა მარტივად გამოვითვალოთ იმ t წლების რაოდენობა, რომელთა გავლისას მოხდება ფასების გაორმაგება, თუ ინფლაციის წლიური მაჩვენებელი მუდმივია და უდრის p%. მაშინ, როგორც ცნობილია

$$t = \frac{70}{p}. \tag{22}$$

მაგალითად, თუ წლიური ინფლაციის დონე არის 5%, მაშინ ფასები გაორმაგდება 14(70/5) წელში.

მაგალითი: გამოიყვანეთ 70-ის სიდიდის წესი და დაასაბუთეთ?

ამოხსნა: თუ ინფლაციის კოეფიციენტი არის p%, მაშინ მალთუსის მოდელიდან გამომდინარე

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100).$$

ფასის გაორმაგების შემთხვევაში გვაქვს

$$2y_0 = y_0 \exp(pt/100).$$

თუ, განვსაზღვრავთ შესაბამის t დროს, მივიღებთ

$$t = \frac{100 \cdot \ln 2}{p}.$$

რადგან $\ln 2 \approx 0.7$, გვექნება რომ

$$t \approx \frac{70}{p}.$$

რ.დ.გ.

6.6. ზრდა სოციალ-ეკონომიკური სისტემაში გაჯერების გათვალისწინებით

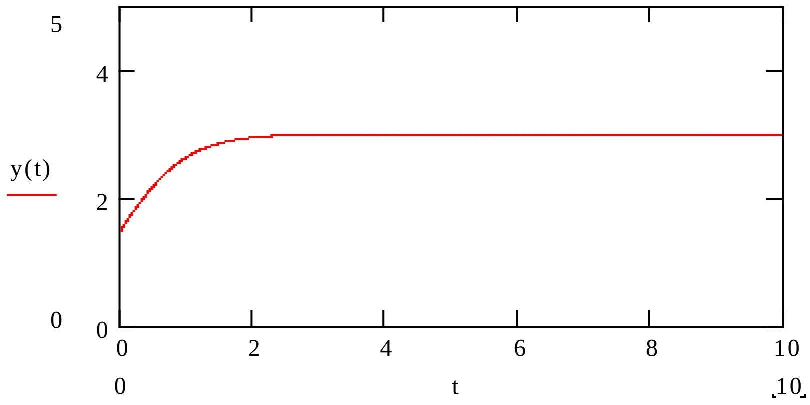
განვიხილოთ მოსახლეობის რაოდენობის ზრდის ამოცანა გაჯერების გათვალისწინებით. ფერხიულსტის მიხედვით, მოსახლეობის y(t) რაოდენობა აკმაყოფილებს დიფერენციალურ განტოლებას:

$$y'(t) = a\,(1-\frac{y(t)}{b})\,y(t). \tag{23}$$

თუ განვაცალებთ ცვლადებს და ვაინტეგრებთ, მივიღებთ რომ

$$y(t) = \frac{b\,C\,e^{at}}{1+Ce^{at}}. \tag{24}$$

ამ ფუნქციის გრაფიკს (24) ლოგისტიკურ მრუდს უწოდებენ. მისი გრაფიკი გამოსახულია ნახ. 6.1.



ნახ.6.1. ლოგისტიკური მრუდი

ამ ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ t დროის მცირე მნიშვნელობებისათვის ხდება რაოდენობის ბუნებრივი ზრდა, თუმცა დროის დიდი მნიშვნელობებისათვის ზრდის ტემპი მცირდება და მოსახლეობის რაოდენობა გადის ასიმპტოტურ ნიშნულზე.

P.S. ლოგისტიკური მრუდი კარგად ასახავს არამარტო მოსახლეობის რაოდენობის ზრდას, არამედ გამოშვებული პროდუქციის რაოდენობის ზრდასაც კონკურენციის პირობებში, როცა ადგილი აქვს ბაზრის გაჯერებას.

6.7. ახალი ტიპის საქონლით აღჭურვილობის მათემატიკური მოდელი

ვიპოვოთ ახალი ტიპის საქონლით აღჭურვილობის დროის მიხედვით ცვლილების კანონი. აუცილებელ საქონელზე მოთხოვნა დროის მიხედვით იზრდება: თავიდან ნელა, შემდეგ სწრაფად და ბოლოს კვლავ ნელდება, მოთხოვნის გაჯერების გამო. ეს იმას ნიშნავს, რომ მოთხოვნის ზრდის სისწრაფე პირდაპირპროპორციულია ამ საქონლით აღჭურვილობისა და მოთხოვნის გაჯერებისა. თუ, მოთხოვნის გაჯერების რაოდენობას აღვნიშნავთ b ასოთი, მაშინ საქონლით y(t) აღჭურვილობისათვის გვექნება მათემატიკური მოდელი:

$$y'(t) = ky(t)(b - y(t))\,. \qquad (25)$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ ეს მოდელი ფერხიულსტის მოდელისნაირსახეობაა. ამიტომ საქონლით აღჭურვილობის რაოდენობაც იცვლება ლოგისტიკური კანონით.

6.8 ეკონომიკური დინამიკის ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა (მოთხოვნა უდრის წინადადებას). მაშინ, წონასწორობის განტოლებას აქვს სახე:

$$X(t) = C(t) + I(t), \tag{26}$$

სადაც

C(t) – მოხმარების ფუნქციაა, I(t) – ინვესტიციის ფუნქცია. სამუელსონ – ჰიქსის, აქსელერაციის პრინციპის საფუძველზე, ინვესტიციის ფუნქციისათვის შეიძლება ჩავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta(t)\overset{\circ}{X}(t), \tag{27}$$

სადაც

β(t) – აქსელერაციის კოეფიციენტია.

მოხმარება არის წარმოების მოცულობის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთლიან წარსულზე განვლილ t –დრო-ში, ე.ი.

$$C(t) = \int_0^t F[X(\tau),\tau]d\tau, \tag{28}$$

მაშინ, (26) თანადობის გათვალისწინებით ვიღებთ ეკონომიკური დინამიკის ინტეგროდიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$X(t) = \int_0^t F[X(\tau),\tau]d\tau + \beta(t)\overset{\circ}{X}(t). \tag{29}$$

იმისათვის, რომ (29)–ის მარჯვენა ნაწილში მოვიცილოთ ინტეგ-რალი, დიფერენცირებას ვუკეთებთ t – დროის პარამეტრით, მაშინ, ვიღებთ ეკონომიკური დინამიკის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს შემდეგი სახით:

$$\beta(t)\overset{\circ\circ}{X}(t) + [\overset{\circ}{\beta}(t) - 1]\overset{\circ}{X}(t) + F[X(t),t] = 0. \tag{30}$$

თუ β(t) = 0 , მაშინ I(t) = 0 , რაც გვაძლევს:

$$X(t) = C(t), \tag{31}$$

ეს კი, შეესაბამება მარტივი კვლავწარმოების შემთხვევას რაც არაა საინტერესო.

ამიტომ, ვუშვებთ რომ β(t) ≠ 0 და (30) – დან ვიღებთ ეკონომიკური დინამიკის ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს შემდეგი სახით:

$$\overset{\circ\circ}{X}(t) + \frac{\overset{\circ}{\beta}(t) - 1}{\beta(t)}\overset{\circ}{X}(t) + \frac{F[X(t),t]}{\beta(t)} = 0. \tag{32}$$

(32) – ე განტოლებას ვუერთებთ საწყის მონაცემებს და ვიღებთ ეკონომიკური დინამიკის განზოგადებულ, ჩვეულებრივ მათემატიკურ მოდელს (კოშის ამოცანას);

$$X(0) = X_0, \quad \dot{X}(0) = P_0, \tag{33}$$

საინვესტიციო პოლიტიკას განსაზღვრავს β(t) – აქსელერაციის ფუნქცია, რომელიც მართვის პარამეტრს წარმოადგენს. მართვის მიზანია, წარმოების სტაბილური განვითარება, დამანგრეველი რეზონანსულ რხევათა სისტემის გარეშე.

შემოთავაზებული მათემატიკური მოდელის შესასწავლად, განვიხილოთ მისი რამოდენიმე კერძო შემთხვევა, სხვადასხვა მოხმარების ფუნქციის და სამუელსონ – ჰიქსის აქსელერაციის ფუნქციების შემთხვევებში:

ა) იმ შემთხვევაში, როდესაც:

$\beta(t) = t \,,\ t > 0 \,,$ (34)

$F\left[X(t),t\right] = t[\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)]X(t) - 0.9t \,,$ (35)

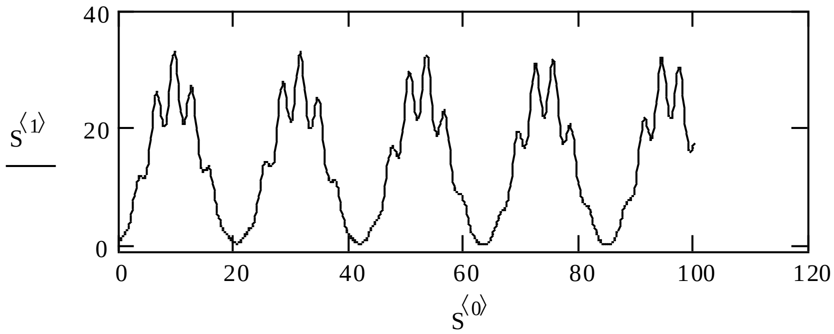
(32) – ე განტოლებიდან ვიღებთ **მატიეს განტოლებას**:

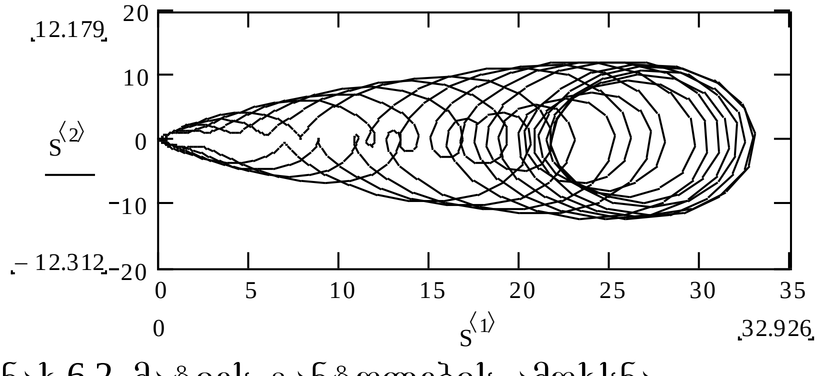
$\overset{\circ\circ}{X}(t) + [\omega^2 + \varepsilon \cos(2t)]X(t) = 0.9 \,,$ (36)

ვამატებთ საწყის პირობებს:

$X(0) = 1 \,,\ \dot{X}(0) = 1.$ (37)

როდესაც ω = 0.5 და ε = 0.2 , MATHCAD 2001 Professional – ზე დაყრდნობით, ვიღებთ X(t) წარმოების მოცულობისათვის ამონახსნს და შესაბამის სურათს ($X(t)$, $\dot{X}(t)$) ფაზურ სიბრტყეზე, სადაც $S^{\langle 1 \rangle}$ =X(t) и $S^{\langle 2 \rangle}$ = $\dot{X}$ (t), (ნახ.6.2)





ნახ.6.2. მატიეს განტოლების ამოხსნა.

ბ) განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც:

$\beta(t) = \dfrac{pe^{pt} - 1}{p}$ β(t) = $\dfrac{pe^{pt} - 1}{p}$, p = const, (38)

$$F[X(t),t] = \beta(t)[X^3(t) - X(t) - A\cos(\omega t)] \quad , \tag{39}$$

სადაც

$$\omega = \text{const}, \quad A = \text{const}, \tag{40}$$

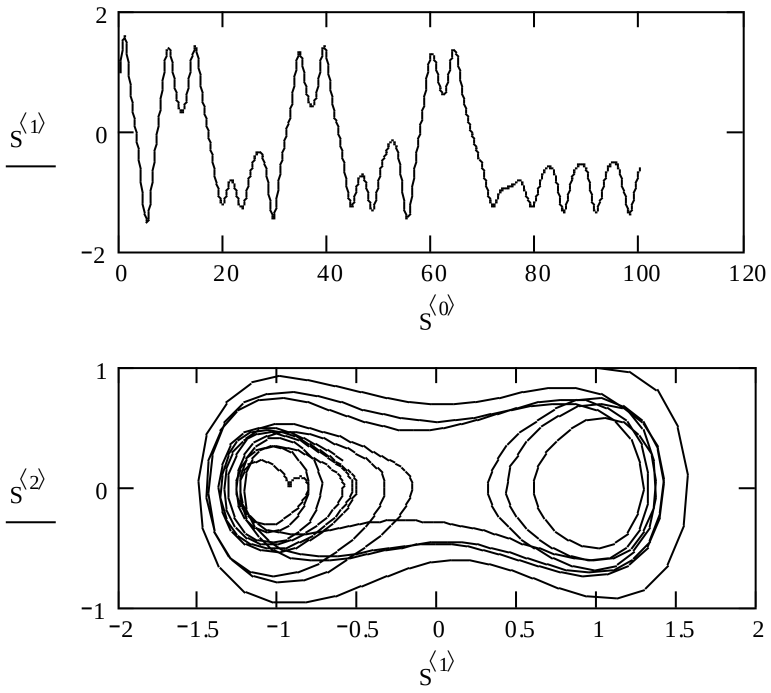
ვიღებთ **დიუფინგის განტოლებას**:

$$\ddot{X}(t) + p\,\dot{X}(t) + [X(t)]^3 - X(t) - A\cdot\cos(\omega\cdot t) = 0, \tag{41}$$

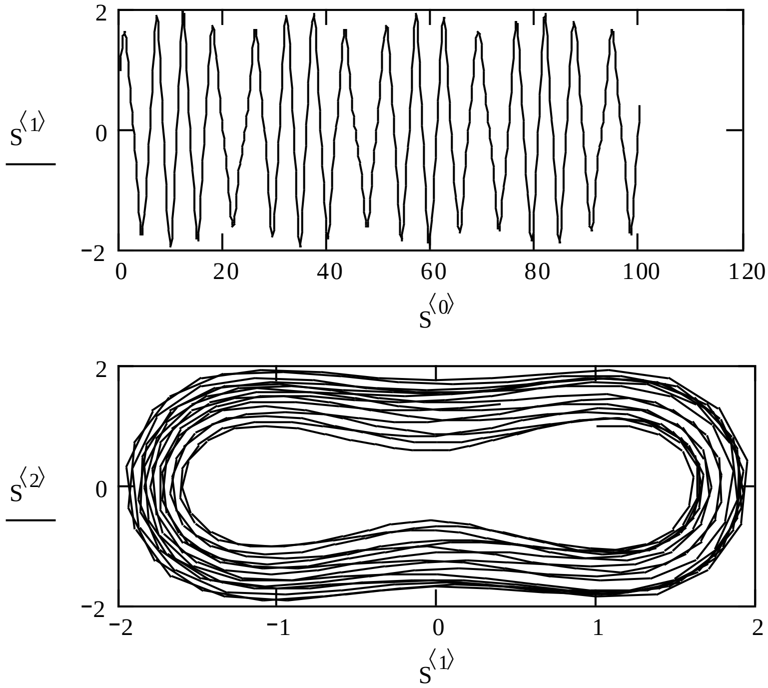
რომელიც p – მმართავი პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობე-ბისათვის იძლევა სხვადასხვა დინამიურ მდგომარეობებს(ნახ.6.3, ნახ.6.4, ნახ.6.5).

საწყისი პირობების გათვალისწინებით:

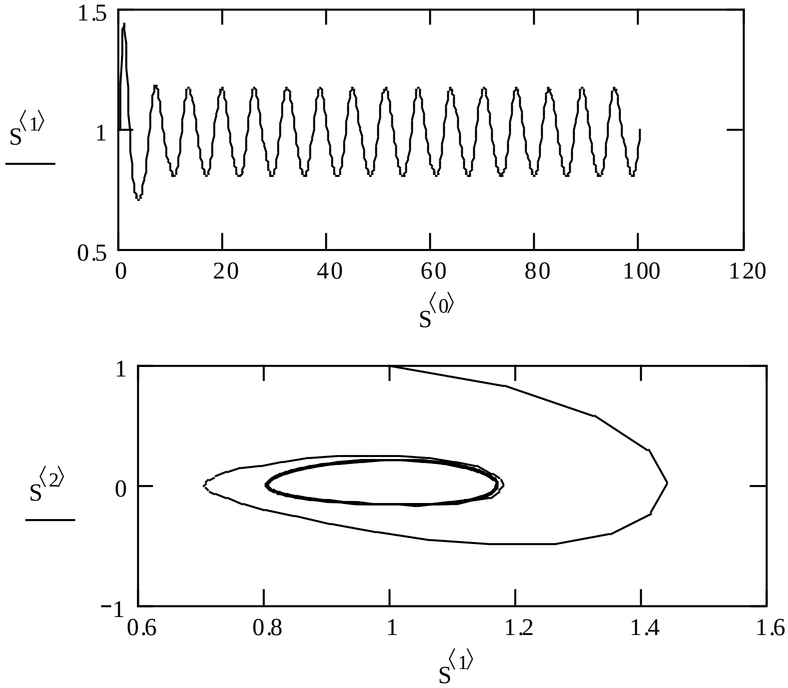
$$X(0) = 1\ ,\ \dot{X}(0) = 1 \tag{42}$$



ნახ.6.3. ეროვნული შემოსავლის დინამიკა, როცა $A = 0.25; \omega = 1{,}0; p = 0.2$.



ნახ.6.4. ეროვნული შემოსავლის დინამიკა, როცა $A = 0.25; \omega = 1{,}0; p = 0.01$.



ნახ.6.5. ეროვნული შემოსავლის დინამიკა, როცა $A = 0.25; \omega = 1{,}0; p = 1$.

გ) თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$\beta(t) = \text{const}, \tag{43}$$

$$\dot{X}(t) \approx \frac{X(t-h) - X(t-2h)}{h}, \quad h = 1, \tag{44}$$

$$F[X(t), t] = \alpha \dot{X}(t-h), \qquad \alpha X(-h) = A, \tag{45}$$

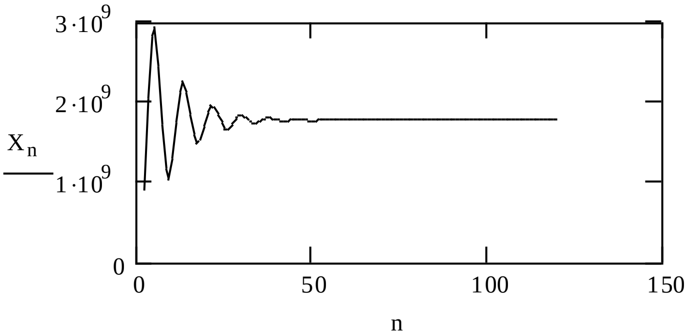
სადაც

A = (საარსებო მინიმუმი) x (მოსახლეობის რაოდენობა) , (46)
მაშინ (32) – განტოლებიდან ვიღებთ სამუელსონ – ჰიქსის სასრულ-სხვაობიან მოდელს:

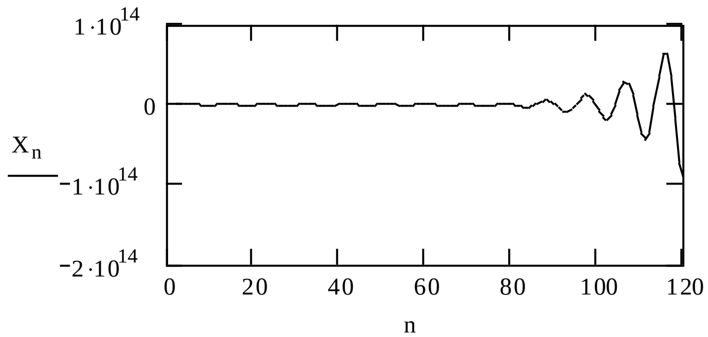
$$X(t) = (\alpha + \beta)X(t-1) - \beta X(t-2) + A, \quad (47)$$

რომელიც აქსელერაციის სხვადასხვა მნიშვნელობებისას, იძლევა ეკონომიკური დინამიკის სხვადასხვა რეჟიმებს. (ნახ.6.6)

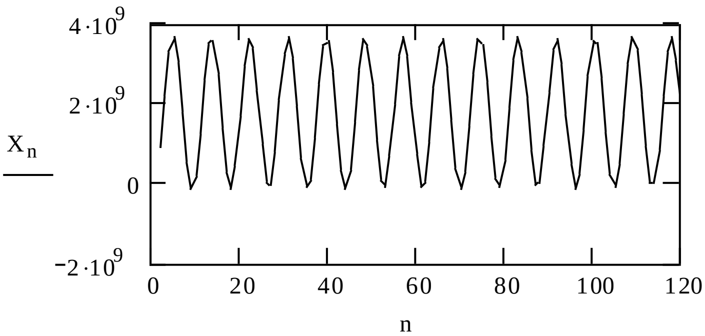
β(t)=0.8



β(t)=1.2



β(t)=1



ნახ.6.6. ეროვნული შემოსავლის დინამიკა β(t) – ს სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ე.ი. ჩვენ მივიღეთ ეკონომიკური დინამიკის ფრანგიშვილი-ობგაძის განზოგადებული ჩვეულებრივი მათემატიკური მოდელი(32), რომელსაც კერძო შემთხვევებში შეუძლია მოგვცეს სამუელსონ – ჰიქსის მოდელი, მატიეს განტოლება, დიუფინგის განტოლება და ა.შ. და რაც ყველაზე მთავარია, მოხმარების შესაბამისი ფუნქციის და აქსელერაციის ფუნქციის პოვნა, იძლევა საშუალებას, გამოვიმუშავოთ ოპტიმალური საინვესტიციო პოლიტიკა.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. ამოხსენით სამუელსონ-ჰიკსის ერთგვაროვანი სასრულსხვაობიანი განტოლება
$y(t)-2.2y(t-1)+1.25y(t-2)=0$
2. ამოხსენით სამუელსონ-ჰიკსის სასრულსხვაობიანი განტოლება $y(t)-5y(t-1)+6y(t-2)=0.1$
3. დაამტკიცეთ 70-ის სიდიდის წესი ინფლაციისათვის.
4. წლიური ინფლაციის დონე არის 7%. რამდენ წელიწადში მოხდება ფასების გაორმაგება?
5. შეადგინეთ კონკურენციისა და ბაზრის შესაძლო გაჯერების პირობებში გამოშვებული პროდუქციის ზრდის მათემატიკური მოდელი.

ვარიანტი 2

1. ამოხსენით სამუელსონ-ჰიკსის ერთგვაროვანი სასრულსხვაობიანი განტოლება
$y(t)-2y(t-1)+5y(t-2)=0$
2. ამოხსენით სამუელსონ-ჰიკსის სასრულსხვაობიანი განტოლება $y(t)-6y(t-1)+5y(t-2)=0.1$
3. დაამტკიცეთ 70-ის სიდიდის წესი ინფლაციისათვის.
4. წლიური ინფლაციის დონე არის 10%. რამდენ წელიწადში მოხდება ფასების გაორმაგება?
5. შეადგინეთ კონკურენციისა და ბაზრის შესაძლო გაჯერების პირობებში გამოშვებული პროდუქციის ზრდის მათემატიკური მოდელი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Anrew F.Sigel. Practical Buisiness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000
2. Мицкевич А.А. Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, Москва, 1995
3. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., Москва, 2002
4. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов, Москва, 1997
5. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003
6. Bruner Robert F., Eaker Mark R., Freeman R.Edward, Spekman Robert E., Teisberg Elizabeth O. The portable MBA, New York, Singapore, Toronto, 1998
7. Cherchill Gilbert A. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996
8. Дьяконов В. Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001
9. Обгадзе Т.А. Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, Москва, 2002
10. Обгадзе Т.А., Цвераидзе З.Н.Математическое моделирование в экономике, лабораторные работы, ТГУ, Тбилиси, 2006
11. Christopher Dougherty. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992

თავი VII. ვეივლეტები და მათემატიკური მოდელირება

შესავალი

ვეივლეტები(wavelets) - თანამედროვე გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთი, ყველაზე წარმატებული მიღწევაა. მათი საშუალებით შესაძლებელი გახდა რთული ფუნქციებისა და სიგნალების უფრო დეტალური და ზუსტი წარმოდგენა, ვიდრე მათემატიკის კლასიკური მეთოდებით, როგორიცაა ტეილორის მწკრივები, ფურიეს მწკრივები, ფურიეს გარდაქმნები და ა.შ.

ახალი მეთოდი ემყარება პრინციპიალურად ახალი ტიპის ბაზისისა და ფუნქციათა კლასის განხილვას, რომლებიც საშუალებას იძლევიან რთულ ფუნქციებს გავუკეთოთ დეკომპოზიცია და სიგნალების რეკონსტრუქცია. შემუშავებულია შესაბამისი პროგრამული და ინსტრუმენტალური აპარატიც Mathcad-ისა და Matlab-ის ბაზაზე.

ვეივლეტები - ეს არის გარკვეული ზოგადი დასახელება განსაკუთრებული ტიპის ფუნქციებისა, რომელთაც აქვთ მოკლე, ტალღათა პაკეტის სახე, ნულოვანი ინტეგრალური მნიშვნელობით და გარკვეული, ზოგჯერ რთული ფორმით, რომელსაც ახასიათებს **ლოკალური ძვრა და მასშტაბირება.**

ვეივლეტები იგებიან სპეციალური ბაზისური ფუნქციების მეშვეობით - რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს. ვეივლეტების ერთობლიობას შეუძლია ფუნქციისა და სიგნალების მიახლოვება ზუსტად ან გარკვეული სიზუსტით. ვეივლეტები საშუალებას იძლევიან გამოსახულებები დავამუშაოთ, გავუკეთოთ დეკომპოზიცია, რესტავრაცია და იდენტიფიკაცია; საშუალებას გვაძლევენ გავფილტროთ ხმაურისაგან, შევკუმშოთ ფაილები რომლებიც შეიცავენ რიცხვით მონაცემებსა და გამოსახულებებს.

ვეივლეტების ცნება შემოღებული იქნა **გროსმანისა და მორლეს** მიერ 80-იანი წლებში[1]. ამჟამად, ვეივლეტები ფართოდ გამოიყენება სახეთა ამოცნობის ამოცანებში; სხვადასხვა ტიპის სიგნალების დამუშავებისა და სინთეზის ამოცანებში; ტურბულენტური ველების თვისებების შესწავლისათვის და ა.შ.

ვეივლეტ – გარდაქმნა მდგომარეობს იმაში, რომ სიგნალს დაშლიან სოლიტონოსებური ფუნქციებისაგან შემდგარი, მასშტაბური და წანაცვლებული ბაზისის მიმართ. ბაზისის თითოეული ფუნქცია ახასიათებს როგორც გარკვეულ სივრცით(დროით) სიხშირეს, ასევე მის ლოკალიზაციას ფიზიკურ სივრცეში(დროში).

სიგნალების ანალიზის ტრადიციული ფურიეს გარდაქმნისაგან განსხვავებით, ვეივლეტ – გარდაქმნა გვაძლევს ერთგანზომილებიანი სიგნალის ორგანზომიებიან სიხშირე - კოორდინატა წარმოდგენას. ამის შედეგად, საშუალება გვეძლევა შევისწავლოთ სიგნალი ერთდროულად ფიზიკურ და სპექტრალურ სივრცეში.

ცნობილია მოკლე, მაღალსიხშირიანი ან ლოკალიზებული მაღალსიხშირიანი სიგნალების დამუშავების სირთულე. ასეთი

მონაცემების ადეკვატური გაშიფრვისათვის საჭიროა ისეთი ბაზისი, რომლის ელემენტებიც წარმოადგენენ მაღალ სიხშირეებს და ასევე, კარგად ლოკალიზებული არიან სივრცეში(დროში). ვეივლეტები საშუალებას გვაძლევენ დავამუშაოთ ასეთი სიგნალებიც მოძრავი სიხშირე-დროის ფანჯრით. ამის გამო, ზოგჯერ ვეივლეტებს მათემატიკურ მიკროსკოპსაც უწოდებენ. სიგნალების წარმოდგენისას, მნიშვნელოვანია ვიპოვოთ ისეთი წარმოდგენა, რომელიც გარკვეული აზრით იქნება ოპტიმალური. სასურველია სიგნალის ისეთი წარმოდგენა, რომელიც შეინარჩუნებს სიგნალის ყველა თვისებას. ასეთი წარმოდგენა შეიძლება x სიგნალის **დეკომპოზიციით, ელემენტარული x_i სიგნალებით :**

$$x = \sum_i x_i \,, \tag{1}$$

სადაც x_i – ელემენტარული ფუნქციებია. უფრო მეტიც, სასურველია რომ ამ ფუნქციებს ქონდეთ გარკვეული ფიზიკური ინტერპრეტაცია. სიგნალის დეკომპოზიცია უნდა შესრულდეს სწრაფი ალგორითმით, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მას მხოლოდ თეორიული ღირებულება ექნებოდა. დეკომპოზიციისას უნდა ამოიხსნას აპროქსიმაციის ამოცანა, ანუ, დეკომპოზიციის შედეგი რაც შეიძლება ახლოს უნდა იყოს საწყის სიგნალთან, ეს უნდა განხორციელდეს რაც შეიძლება ნაკლები რაოდენობის ელემენტარული ბლოკების გამოყენებით. სხვადასხვა “ოპტიკური დაშვებით”, ანალიზის კონცეფცია საშუალებას მოგვცემს შევასრულოთ ეს მოთხოვნები ბუნებრივად, საწყისი უხეში აპროქსიმაციის თანდათანობითი დაზუსტებით, დეტალების მიმდევრობითი დამატებით. ასეთი ამოცანის კლასიკურ გადაწყვეტას გვაძლევს ფურიეს გარდაქმნა, როგორც უწყვეტი, ასევე წყვეტილი დროით. შემუშავებულია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მრავალი ალგორითმი. მიუხედავად იმისა, რომ ეს სხვადასხვა ალგორითმებით იხსნება, ყველა მათგანისათვის დამახასიათებელია ერთიდაიგივე მათემატიკური აპარატის გამოყენება.

თუ, მოცემულია ერთსიხშირიანი სიგნალი $e^{i\omega t}$, მაშინ ფურიეს გარდაქმნაზე დამყარებული მეთოდები საშუალებას მოგვცემენ ვიპოვოთ ω სიხშირეზე სიგნალის პიკი. მაგრამ, თუ სიგნალი შეიცავს ორ სინუსოიდას მაინც, განსაზღვრულს სხვადასხვა დროით ინტერვალზე, მაშინ წარმოიშობა პრობლემა. მიიღება ორი პიკი დროის ლოკალიზაციის გარეშე. აქედან გამომდინარეობს სიგნალის
სიხშირე – დრო ცვლადებში წარმოდგენის აუცილებლობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემდა მიგვეღო ლოკალური ინფორმაცია სიგნალის შესახებ, როგორც სიხშირით, ასევე, დროით არეში. ცხადია, რომ საჭიროა უფრო ლოკალიზებული ბაზისური ფუნქციები, ვიდრე სინუსოიდაა. ამიტომ განიხილავენ ეგრეთწოდებულ ფანჯრებს

$$\omega(t)\sin t \,, \tag{2}$$

სადაც $\omega(t)$ ფანჯრის ფუნქციაა, რომელიც იძლევა დროის ლოკალიზაციას. ასეთ გარდაქმნას **ფანჯრულ ფურიეს გარდაქმნას** უწოდებენ. მიღებული ელემენტარული ბლოკები ყოფენ

სიხშირე - დრო სიბრტყეს გარკვეულ ნაწილებად. ასეთ სიტუაციაში, **ჰეიზენბერგის პრინციპიდან** გამომდინარე, შეუძლებელია მივაღწიოთ ერთნაირად კარგ, დროით და სიხშირით ლოკალიზაციას. სიხშირისა და დროის დაშვებები შემოიფარგლება **ჰეიზენბერგის უტოლობით:**

$$\Delta t \cdot \Delta f \le \frac{1}{4\pi}. \tag{3}$$

ვეივლეტ – ანალიზი შედარებით ახალი ხილია, ამიტომ მისი გადმოცემისას გამოიყენება ფურიე - ანალიზის პარალელური განხილვა.

7.1. ვეივლეტ - გარდაქმნების ძირითადი ცნებები და მათემატიკური აპარატი

ვთქვათ, $L_2(0;2\pi)$ - არის კვადრატით ინტეგრებად, $(0;2\pi)$-შუალედში განსაზღვრულ ფუნქციათა ფუნქციონალური სივრცე, ანუ

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{4}$$

ეს არის **ალაგ-ალაგ უწყვეტი ფუნქციის** განსაზღვრება. ის შეიძლება პერიოდულ ფუნქციამდე შევავსოთ ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში,

$$f(x)=f(x-2\pi), \quad \forall x. \tag{5}$$

ნებისმიერი 2π პერიოდიანი კვადრატით ინტეგრებადი $f(x) \in L_2(0;2\pi)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ **ფურიეს მწკრივით**

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \tag{6}$$

სადაც C_n- მუდმივი რიცხვებია და

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) e^{inx} dx, \tag{7}$$

ამავე დროს, (6) მწკრივი თანაბრად კრებადია, ასე რომ

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=M}^{N} C_n e^{inx} \right|^2 dx = 0. \tag{8}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ

$$W_n(x) = e^{inx}, \quad \mathrm{n} = \ldots,-1,0,1,\ldots \tag{9}$$

ფუნქციები ადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს $L_2(0;2\pi)$ სივრცეში. ბაზისური ფუნქციები მიიღებიან **ერთადერთი** $W(x) = e^{ix}$ **ფუნქციის მასშტაბური ცვლილებებით** ისე, რომ

$$W_n(x) = W(nx). \tag{10}$$

ამ მოქმედებას **ინტეგრალურ გაფართოვებას** უწოდებენ.

P.S. ასე, რომ $L_2(0;2\pi)$-ს **ნებისმიერი კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქცია, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ბაზისური** $W(x) = e^{ix}$ **ფუნქციის** $W_n(x) = W(nx)$ **ინტეგრალური გაფართოვებების სუპერპოზიციით.**

რადგან (9) ბაზისი ორთონორმირებულია, ადგილი აქვს **პარსევალის ტოლობას:**

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{0}^{2\pi}\left|f(x)\right|^{2}dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|C_{n}\right|^{2}. \qquad (11)$$

ეხლა განვიხილოთ $f(x)$ **ფუნქციის წარმოდგენა ვეივლეტების მეშვეობით.** განვიხილოთ კვადრატით ინტეგრებადი ფუნქციების $L_2(R)$ ფუნქციონალური სივრცე, სადაც:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|^{2}dx\angle\infty. \qquad (12)$$

$L_2(R)$ და $L_2(0;2\pi)$ ფუნქციონალური სივრცეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. კერძოდ, $L_2(R)$ სივრცის ნებისმიერი ფუნქციის საშუალო ლოკალური მნიშვნელობა მიისწრაფის ნულისაკენ. ამიტომ, სინუსოიდალური ტალღა არ ეკუთვნის $L_2(R)$-ს და მაშასადამე, არ შეიძლება რომ $W_n(x)$ იყოს ამ ფუნქციონალური სივრცის ბაზისი. ვიპოვოთ მარტივი ფუნქციები $L_2(R)$-ს ბაზისის კონსტრუირებისათვის. ბაზისის წარმომქმნელი ფუნქცია უნდა მიისწრაფოდეს ნულისაკენ ორივე მიმართულებით. ვეივლეტი – ნიშნავს პატარა ტალღას.

როგორც $L_2(0;2\pi)$ სივრცის შემთხვევაში, $L_2(R)$-შიც შევეცადოთ ავაგოთ ბაზისი ერთი $\psi(x)$ წარმომქმნელი ფუნქციის საშუალებით(ის შეიძლება იყოს რამოდენიმე სიხშირიანი, ან ერთსიხშირიანი ვეივლეტი). თუ ვეივლეტი სწრაფად მიისწრაფის ნულისაკენ, როგორ დავფაროთ ამ ფუნქციებით მთელი რიცხვითი ღერძი ? ყველაზე მარტივად, ეს შეიძლება გავაკეთოთ **k სიდიდით წანაცვლების ოპერაციის** საშუალებით, ანუ გვექნება $\psi(x-k)$. ამ ოპერაციას **ინტეგრალურ ძვრას** უწოდებენ. განვიხილოთ სინუსოიდალური სიხშირის ანალოგი, სიმარტივისათვის, ის წარმოვადგინოთ ორის ხარისხით.

$$\psi(2^{j}\cdot x-k), \qquad (13)$$

სადაც j ;k – მთელი რიცხვებია.

რადგან

$$\left\|f(x)\right\|=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^{2}dx}. \qquad (14)$$

ამიტომ

$$\left\|\psi(2^{j}\cdot x-k)\right\|=2^{-\frac{j}{2}}\left\|\psi(x)\right\|. \qquad (15)$$

მაშინ ორთონორმირებულ ვეივლეტ - ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk}=2^{\frac{j}{2}}\cdot\psi(2^{j}\cdot x-k). \qquad (16)$$

საზოგადოდ, ვეივლეტს ეწოდება **ორთოგონალური,** თუ შესაბამისი ვეივლეტ-ბაზისი ψ_{jk} აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\langle\psi_{jk};\psi_{lm}\rangle=\delta_{jl}\delta_{km}. \qquad (17)$$

მაშინ $\forall f(x) \in L_2(R)$ ადგილი აქვს ვეივლეტ-წარმოდგენას:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \psi_{jk}(x). \quad (18)$$

ამ ჯერადი მწკრივის თანაბარი კრებადობა ჩაიწერება ზღვარით

$$\lim_{M1,N1,M2,N2 \to \infty} \left\| f - \sum_{M2}^{N2} \sum_{M1}^{N1} C_{jk} \psi_{jk} \right\| = 0. \quad (19)$$

ყველაზე მარტივ ორთოგონალურ ვეივლეტს წარმოადგენს **ხაარის ვეივლეტი** $\psi^H(x)$:

$$\psi^H(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1, \text{ if } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 0, \text{ if } x < 0 \vee x > 1 \end{cases} \quad ; \quad (20)$$

7.2. ინტეგრალური ვეივლეტ – გარდაქმნა

ეხლა განვიხილოთ ვეივლეტები ზოგად შემთხვევაში, როცა მასშტაბური ცვლილება არ არის აუცილებლად ორის ხარისხი. ასევე, განვიხილოთ ნებისმიერი წანაცვლება. მაშინ, ერთი წარმომქმნელი $\psi(x)$ - ვეივლეტ ფუნქციისაგან ინტეგრალური a გაფართოვებით და b წანაცვლებით შესაძლებელია კონსტრუირება გავუკეთოთ ნებისმიერ ფუნქციას $L_2(R)$ ფუნქციონალური სივრციდან.

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in R, \psi \in L_2(R). \quad (21)$$

ამ ფორმულის საფუძველზე შეგვიძლია ავაგოთ ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნა :

$$[W_\psi f](a,b) = |a|^{-\frac{1}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_{a,b}(x) dx, \quad (22)$$

სადაც ψ ფუნქციას ვეივლეტის დედაფუნქციას(წარმომქმნელს) უწოდებენ.

ამ (22) ფორმულაში, $\psi_{a,b}(x)$ ფუნქცია იგივე როლს თამაშობს, რასაც $e^{i\omega t}$ ფუნქცია ფურიეს გარდაქმნისას.

თუ გავაგრძელებთ ანალოგიების ძებნას ფურიეს გარდაქმნასთან, მაშინ (23) ფორმულაში, f(x) ფუნქციის ვეივლეტებით წარმოდგენის კოეფიციენტები C_{jk},

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{jk} \cdot 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k), \quad (23)$$

შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$C_{jk} = \langle f; \psi_{jk} \rangle, \quad (24)$$

ტოლობებიდან გამომდინარე, ინტეგრალური ვეივლეტ-გარდაქმნების საფუძველზე, შემდეგნაირად:

$$C_{jk} = [W_{\psi} f]\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right). \quad (25)$$

7.3. ვეივლეტისა და ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები

ვეივლეტ – გარდაქმნის აზრი იმაში მდგომარეობს, რომ ის გვაძლევს საშუალებას სიგნალი წარმოვადგინოთ სოლიტონისმაგვარი ფუნქციებისაგან შემდგარი ბაზისის მიმართ.

განვიხილოთ ის ძირითადი თვისებები, რომლებიც უნდა ქონდეთ სოლიტონისმაგვარ (წარმომქმნელ) $\psi(x)$ დედაფუნქციებს(ვეივლეტებს), იმისათვის რომ ისინი განხილული იქნან როგორც ვეივლეტები.

ლოკალიზაცია

ვეივლეტ-გარდაქმნა ფურიეს გარდაქმნისაგან განსხვავებით იყენებს ისეთ ბაზისურ (წარმომქმნელ) დედაფუნქციას, რომელიც ლოკალიზებულია სივრცის(დროის) შემოსაზღვრულ არეში. ვეივლეტი უნდა იყოს ლოკალიზებული როგორც ფიზიკურ, ასევე, სპექტრალურ სივრცეში, როგორც წესი $\Delta x \cdot \Delta k = 2\pi$.

ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობა

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0. \quad (26)$$

გამოყენებითი ამოცანების განხილვისას, ზოგჯერ მოითხოვება უფრო მკაცრი პირობაც

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x)dx = 0. \quad (27)$$

ასეთ ვეივლეტს m რიგის ვეივლეტს უწოდებენ. ასეთი პირობა საჭირო ხდება მაშინ, როცა საჭიროა ვეივლეტის წარმოებულების განხილვა m რიგის ჩათვლით.

შემოსაზღვრულობა

რომელიც მოიცემა პირობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx \angle \infty. \quad (28)$$

კარგი ლოკალიზაცია და შემოსაზღვრულობა ზოგჯერ მოიცემა პირობებით

$$|\psi(x)| < \frac{1}{1+|x|^n}, \quad (29)$$

ან შესაბამისი ფურიე – გარდაქმნისათვის,

$$\left|\hat{\psi}(\omega)\right| < \frac{1}{1+\left|k-\omega_0\right|^n}, \tag{30}$$

სადაც ω_0 ვეივლეტის დომინანტური სიხშირეა.

ეხლა განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის თვისებები :

შემოვიღოთ აღნიშვნები :

$$\left[W_\psi f\right](a,b) = w(f) = w(a,b). \tag{31}$$

ვეივლეტ - გარდაქმნის ოპერატორის წრფივობის თვისება

$$w\left[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)\right] = \alpha w(f_1) + \beta w(f_2) = \alpha w_1(a,b) + \beta w_2(a,b). \tag{32}$$

ინვარიანტულობა წანაცვლების ოპერაციის მიმართ

$$w\left[f(x-b_0)\right] = w(a, b-b_0). \tag{33}$$

ინვარიანტულობა მასშტაბის ცვლილების მიმართ

$$w\left[f\left(\frac{x}{a_0}\right)\right] = \frac{1}{a_0} w\left(\frac{a}{a_0}, \frac{b}{a_0}\right). \tag{34}$$

ენერგიის შენახვის თვისება

ვეივლეტ – გარდაქმნისათვის, ადგილი აქვს პარსევალის ტოლობის ანალოგს

$$\int f_1(x) \cdot \mathrm{f}_2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w_1(a,b) w_2(a,b) da db}{a^2},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\int f^2(x) dx = C_\psi^{-1} \iint \frac{w^2(a,b) da db}{a^2}. \tag{35}$$

7.4. ვეივლეტ ფუნქციების კერძო შემთხვევები

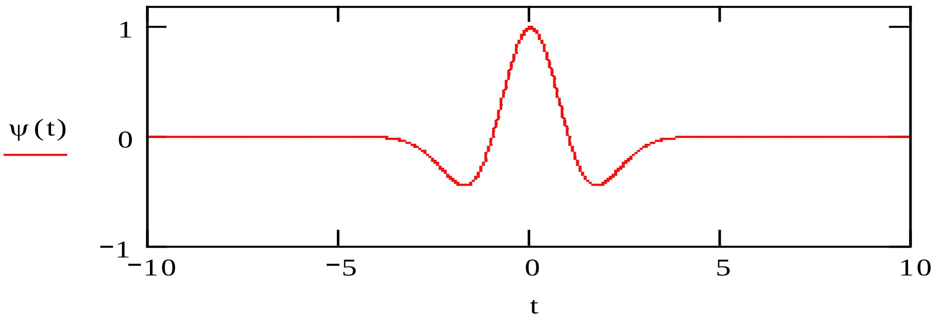
განვიხილოთ ვეივლეტ – ფუნქციების კონკრეტული სახეები.

მექსიკური ქუდი(მაარის ვეივლეტი)

ასე ეძახიან ფუნქციას, რომელიც მიიღება გაუსის ფუნქციის ორჯერ გაწარმოებით

$$\psi(t) = (1-t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{36}$$

მექსიკური ქუდის გრაფიკი მოცემულია ნახ.7.1



ნახ. 7.1. მაარის ვეივლეტი - მექსიკური ქუდი

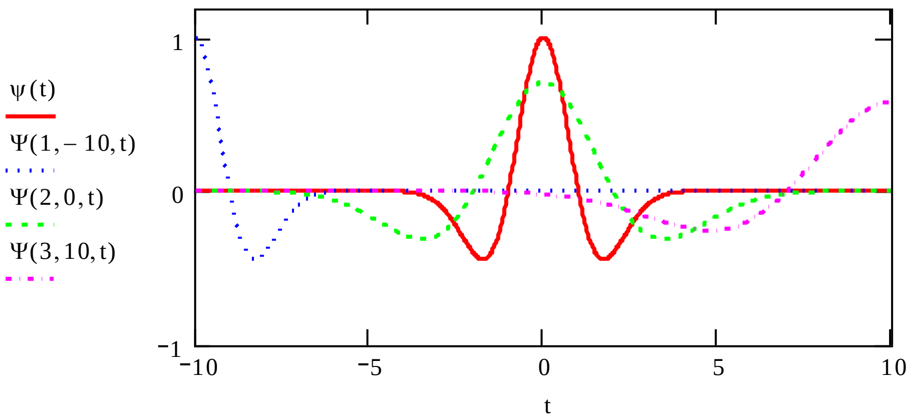
შესაბამის ვეივლეტ – ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j \cdot x - k)\,. \qquad (37)$$

მასშტაბირებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია მაარის ვეივლეტისათვის მოცემულია ნახ.7.2.

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} - e^{\frac{-t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right) - t^2 \cdot \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

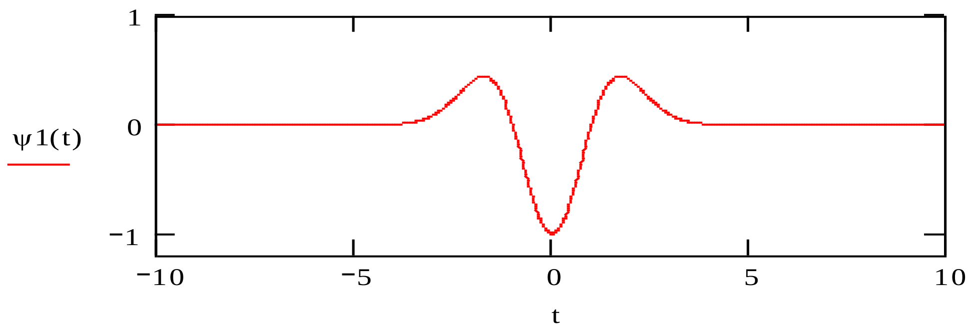


ნახ.7.2. მასშტაბირებისა და წანაცვლების გრაფიკული ილუსტრაცია

ზოგჯერ იყენებენ **გადაბრუნებულ მექსიკურ ქუდს,** რომელიც მოიცემა ფორმულით:

$$\psi 1(t) = (1 + t^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,. \qquad (38)$$

გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი მოცემულია ნახ.7.3



ნახ. 7.3. მაარის ვეივლეტი - გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი

შესაბამის ვეივლეტ – ბაზისს ექნება სახე:

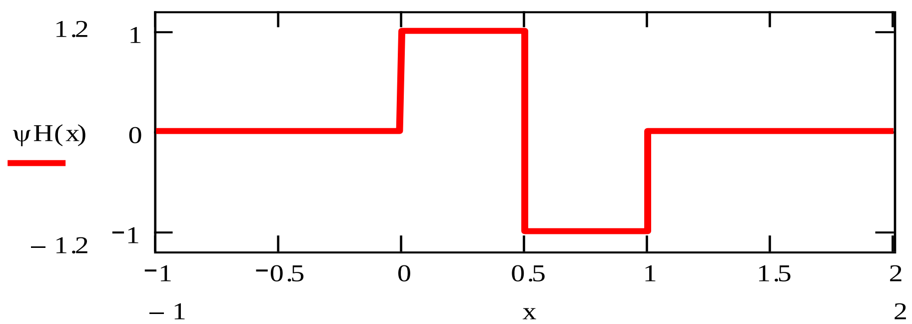
$$\psi 1_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi 1(2^{j} \cdot x - k). \qquad (39)$$

დავალება მაგისტრებისათვის: წინა პარაგრაფის მასალაზე დაყრდნობით, დაამტკიცეთ, რომ მექსიკური ქუდი და გადაბრუნებული მექსიკური ქუდი აკმაყოფილებენ ვეივლეტების ყველა, აუცილებელ თვისებას.

ხაარის ვეივლეტი

სიგნალების დეკომპოზიციისა და რეკონსტრუქციისათვის, ხშირად იყენებენ ხაარის ვეივლეტებს, რომელთა წარმომქმნელ(დედა) ფუნქციას აქვს სახე (ნახ.8.4):

$$\psi^{H}(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } (0 \le x < \frac{1}{2}) \\ -1 \text{ if } (\frac{1}{2} \le x < 1) \\ 0 \text{ if } ((x < 0) \vee (x > 1)) \end{cases}; \qquad (40)$$



ნახ. 7.4. ხაარის ვეივლეტი

შესაბამის ვეივლეტ – ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^{H}{}_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^{H}(2^{j} \cdot x - k). \qquad (41)$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ნებისმიერი ორი $\psi^{H}_{jk} \wedge \psi^{\mathrm{H}}_{\mathrm{mn}}$ ფუნქცია ვეივლეტ-ბაზისიდან, რომლებიც წარმოიქმნებიან ხაარის დედაფუნქციიდან, $\frac{1}{2^{j}}, \frac{1}{2^{\mathrm{m}}}$ - ინტეგრალური გაფართოვებისა და $\frac{k}{2^{j}}, \frac{\mathrm{n}}{2^{\mathrm{m}}}$ -

წანაცვლების შემდეგ, არიან ორთონორმალურნი ერთმანეთის მიმართ, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას**(დაამტკიცეთ!):**

$$\langle \psi^{H}{}_{jk} ; \psi^{H}{}_{mn} \rangle = \delta_{jm} \delta_{kn} . \qquad (42)$$

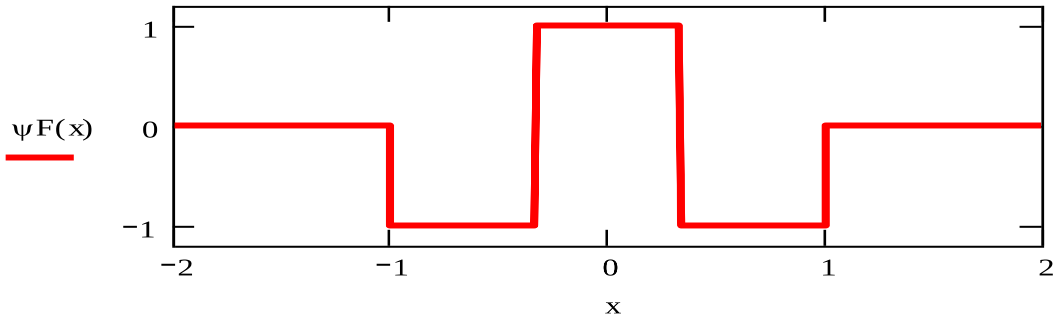
P.S. ხაარის ბაზისის უარყოფითი მხარეებია ის, რომ ეს ვეივლეტი არ არის სიმეტრიული და გლუვი, თუმცა ზოგიერთი ამოცანის განხილვისათვის, სიგნალების დამუშავებისას, ეს არ არის მნიშვნელოვანი. ამდენად, ხაარის ვეივლეტებსაც ხშირად იყენებენ პრაქტიკაში.

უფრო ხშირად იყენებენ ხაარის ვეივლეტის მსგავს, მაგრამ სიმეტრიულ წარმომქმნელ ვეივლეტს(დედაფუნქციას), რომელსაც **ფრანგულ ქუდს** უწოდებენ:

ფრანგულ ქუდი

ამ ვეივლეტს ჩაწერენ შემდეგნაირად

$$\psi^{F} = \begin{cases} 1 \ \text{ if } \ |x| \le \dfrac{1}{3} \\ -1 \ \text{ if } \ \dfrac{1}{3} < |x| \le 1 ; \\ 0 \ \text{ if } \ |x| > 1 \end{cases} \qquad (43)$$



ნახ. 7.5. ვეივლეტი - ფრანგული ქუდი

შესაბამის ვეივლეტ – ბაზისს ექნება სახე:

$$\psi^{F}{}_{jk} = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi^{F} (2^{j} \cdot x - k) \qquad (44)$$

უფრო რთული, ორგანზომილებიანი სიგნალებისათვის გარდა წანაცვლებისა და მასშტაბირებისა, საჭიროა გავითვალისწინოთ მობრუნებაც.

ვეივლეტ – გარდაქმნები ფართოდ გამოიყენება სიგნალების ფილტრაციისა და შეკუმშვისათვის[1-5].

მაღალი რიგის ვეივლეტებისათვის, **წარმომქმნელი-დედა** ვეივლეტის ასაგებად, როგორც წესი, გამოიყენება შესაბამისი ფილტრაციის კოეფიციენტების გამოთვლის იტერაციული, ფუნქციონალური განტოლებები, რომელთათვისაც აუცილებელია **შემქმნელი-მამა**

ვეივლეტების აგება. ასეთნაირად აიგება, მაგალითად, **დობეშის მეოთხე რიგის ვეივლეტი.** რომლის აგებასაც ჩვენ არ დავიწყებთ, რადგან წინამდებარე სახელმძღვანელო ისახავს მიზნად ძირითადი იდეების გაცნობას და ტექნიკური დეტალების გასაცნობად, საჭიროა შესაბამისი სპეციალური ლიტერატურის[1-6] შესწავლა.

7.5. ვეივლეტ – ანალიზი Mathcad – ის ბაზაზე

ვთქვათ, მოცემულია სიგნალი $s(t)$, რომლის ენერგიაც შემოსაზღვრულია, ანუ

$$\int_R s^2(t)dt < \infty . \tag{45}$$

ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა, ფურიეს გარდაქმნის ანალოგიურად, მოიცემა შესაბამისი ვეივლეტ-კოეფიციენტების მეშვეობით ფორმულით:

$$C(a,b) = \langle s(t), \psi(a,b,t)\rangle = \int_R s(t)\cdot\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt . \tag{46}$$

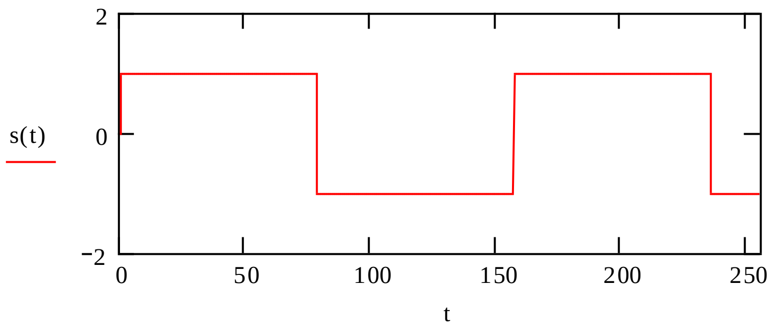
ასე, რომ ვეივლეტ-კოეფიციენტები მოიცემა სიგნალისა და მოცემული სახის ვეივლეტ-ფუნქციის სკალარული ნამრავლით.

განვიხილოთ ვეივლეტ-გარდაქმნის მაგალითები:

1) მოცემულ სიგნალს აქვს სიმეტრიული მართკუთხა იმპულსების სახე-**მეანდრა.** ისინი მოიცემიან ანალიზური ფორმულით

$$s(t) = sign(\sin(0.04\cdot t)) . \tag{47}$$

გრაფიკულად, მეანდრას ტიპის სიგნალი მოცემულია ნახ.7.6.



ნახ.7.6. მეანდრას გრაფიკული სახე

ავაგოთ, ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მაარის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის საშუალებით Matcad 2001 –ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} - e^{\frac{-t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right) - t^2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

$N := 256$

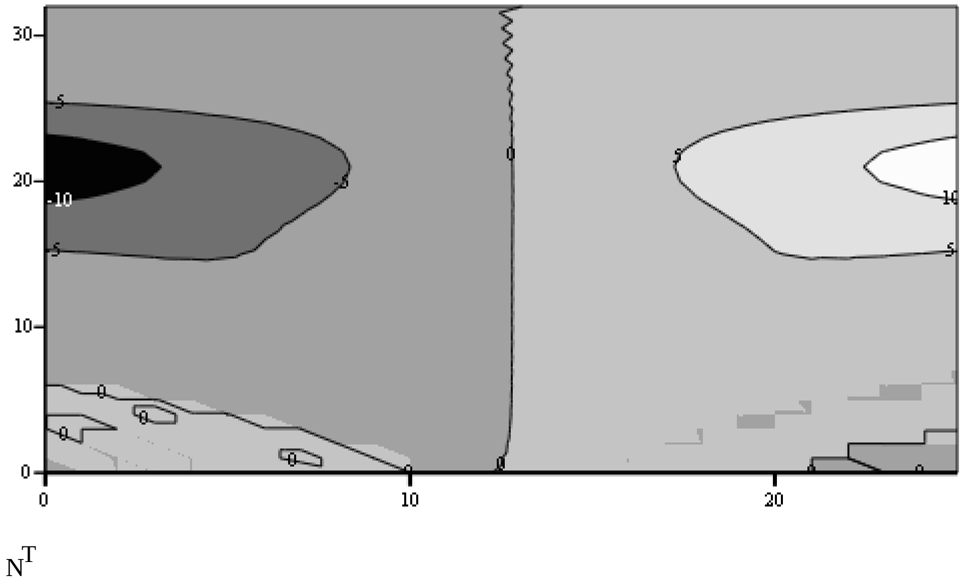
$$C(a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a,b,t)\cdot s(t)\,dt$$

$j := 0..32$

$b := 0, 1 .. \frac{N}{10}$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3\cdot 10^4}$$

$$N_{j,b} := C\left(a_j, 2\cdot b - \frac{N}{10}\right)$$

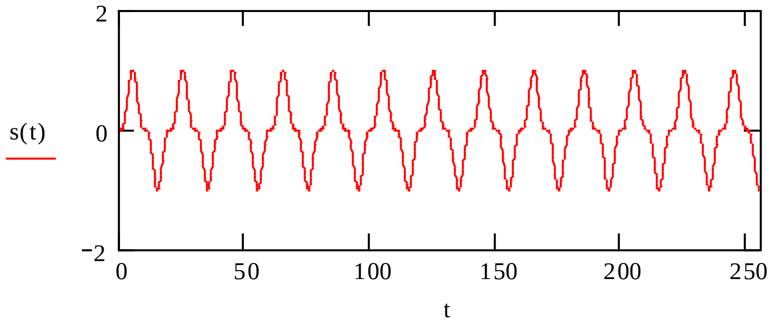


ნახ.7.7. მეანდრას ტიპის სიგნალის სპექტროგრამა

2) მოცემულ სიგნალს აქვს სინუსის კუბის სახე, ანუ

$s(t) = \sin(0.1\cdot \pi t)^3$. (48)

გრაფიკულად, ამ ტიპის სიგნალი მოცემულია ნახ.8.8.



ნახ.7.8. სინუსკუბის გრაფიკული სახე

ავაგოთ, ამ სიგნალის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა, მაარის წარმომქმნელი ვეივლეტ-ფუნქციის საშუალებით Matcad 2001 –ის ბაზაზე:

$$\psi(t) := \frac{d^2}{dt^2} -e^{\frac{-t^2}{2}} \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right) - t^2\cdot\exp\left(\frac{-1}{2}\cdot t^2\right)$$

$$\Psi(a,b,t) := \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad s(t) := \sin(0.1\cdot\pi\cdot t)^3$$

$N := 256$

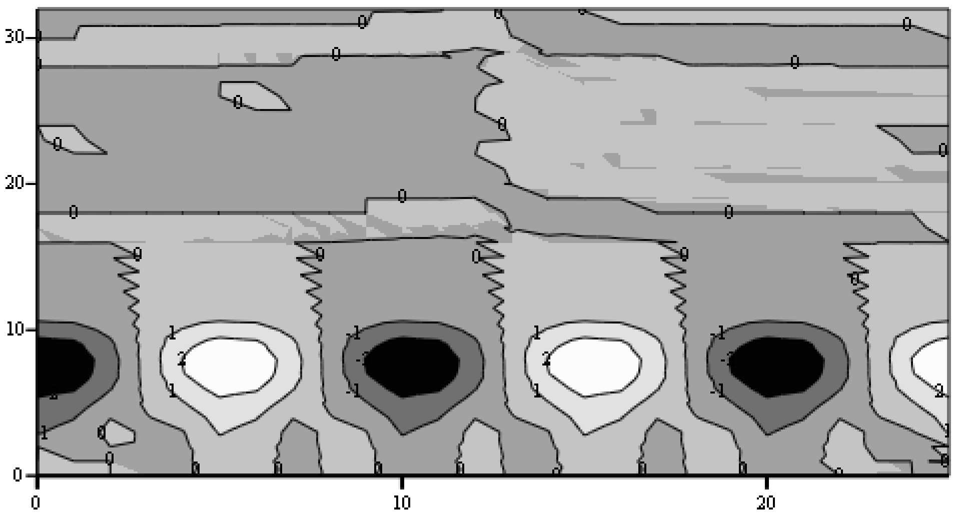
$$C(a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a,b,t)\cdot s(t)\,dt$$

$j := 0..32$

$b := 0,1..\frac{N}{10}$

$$a_j := \frac{(j+12)^4}{3\cdot 10^4}$$

$$N_{j,b} := C\left(a_j, 2\cdot b - \frac{N}{10}\right)$$



N^T

ნახ.7.9. სინუსკუბის სპექტროგრამა

იმ შემთხვევებში, როცა გვაქვს პერიოდული სიგნალი უმჯობესია გამოვიყენოთ ფურიე-გარდაქმნები. თუმცა, როცა სიგნალი ხასიათდება სივრცული ან დროითი ლოკალიზაციით, მაშინ ვეივლეტ-გარდაქმნა ყველაზე უფრო ნაყოფიერია. ეს უპირატესობები განსაკუთრებულად ჩანს ბგერითი სიგნალებისა და გამოსახულებათა სიგნალების შემთხვევებში.

7.6. ვეივლეტ – გარდაქმნები და სიგნალების გაფილტრვა

Mathcad – ის ბაზაზე

სიგნალები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც მისი უხეში მიახლოვებისა და დამაზუსტებელი(უფრო დეტალური) წარმოდგენათა ჯამი. ამ პროცესის რეალიზაციისათვის გამოიყენებიან ორთოგონალური ვეივლეტები, რომელთა ასაგებადაც, ხშირად, გამოიყენება მულტიმასშტაბური(multiresolution) ანალიზი. ეს ანალიზი ემყარება შემდეგ ძირითად ფაქტებს:

- სიგნალების V სივრცე შეიძლება დაიყოს ისეთ იერარქიულ V_j ქვესივრცეებად, რომლებიხ ერთმანეთთან არ იკვეთებიან და რომელთა გაერთიანებაც ზღვარში იძლევა $L_2(R)$ სივრცეს;
- ნებისმიერი $s(t) \in V_j$ ფუნნქციისათვის, მისი შეკუმშული ვერსია ეკუთვნის V_{j-1} ქვესივრცეს;
- არსებობს ისეთი $\varphi(x) \in V_0$ ფუნქცია, რომლისთვისაც მისი წანაცვლებები $\varphi_{0,k}(x) = \varphi(x-k)$ ადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში.

რადგან $\varphi_{0,k}(t)$ ფუნქციები ადგენენ ორთონორმირებულ ბაზისს V_0 სივრცეში, ფუნქციები

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \cdot \varphi(2^{-j} \cdot t - k) \qquad (49)$$

ადგენენ ჯრთონორმირებულ ბაზისს $L_2(R)$ სივრცეში. ამ ფუნქციებს **შემქმნელ-მამა ვეივლეტებს** უწოდებენ. ისინი წარმოადგენენ მამაშტაბირებელ ფუნქციებს, რადგან ისინი ქმნიან თავისნაირ ფუნქციებს სხვადასხვა მასშტაბში. ისე, რომ s(t) სიგნალი შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც მისი V_j სუბქვესივრცეებში თანმიმდევრული მიახლოვებების ზღვარი

$$s(t) = \lim_{j\to\infty} s_j(t) . \qquad (50)$$

როგორც წესი, სიგნალის დეკომპოზიციის წესიდან გამომდინარე, j-ს დიდი მნიშვნელობებისათვის მიიღება **უხეში მიახლოვებები**, ხოლო მცირე მნიშვნელობებისათვის- უფრო ზუსტი მიახლოვებები.

სიგნალის აპროქსიმაციას შეესაბამება იტერაციული ფორმულა:

$$s_j(t) = \sum_k C(j,k) \cdot \varphi_{j,k}(t) , \qquad (51)$$

$$\varphi_{0,0}(t) = 2 \cdot \sum_k h_k \varphi(2 \cdot t - k) . \qquad (52)$$

ზოგად შემთხვევაში, სიგნალის რეკონსტრუქცია დაშვების j_n დონეზე ხორციელდება შემდეგი წარმოდგენის მეშვეობით

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j_n,k} \cdot \varphi_{j_n,k}(t) + \sum_{j=j_n}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \cdot \psi_k(t) , \qquad (53)$$

სადაც $a_{j_n,k}$- აპროქსიმაციის კოეფიციენტებია,

ხოლო $d_{j,k}$ - დამაზუსტებელი კოეფიციენტები.

$\varphi_{j_n,k}(t)$- შემქმნელი-მამა ვეივლეტია.

$\psi_k(t)$- წარმომქმნელი-დედა ვეივლეტი.

სიგნალის მთლიანი აღდგენა შესაძლებელია თუ,

$$\forall k \in Z, \exists \{\mathrm{h_k}\} \Bigg| \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sum_k h_k \varphi(t-k)\,. \tag{54}$$

ამ განტოლებას დამაზუსტებელი(refinement) ეწოდება.

მაგალითი: ხაარის ვეივლეტისათვის $h_1 = h_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$s(t) = C_{0,0} \cdot \varphi(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2^{j-1}} d_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t)\,, \tag{55}$$

სადაც

$C_{0,0}$ არის სიგნალის დაბალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტი;

$d_{j,k}$- სიგნალის მაღალსიხშირიანი ნაწილის კოეფიციენტების მატრიცაა ;

$\varphi(t)$-მამა-ვეივლეტი;

$\psi_{j,k}(t)$-დედა-ვეივლეტია.

ვთქვათ, გვაქვს სიგნალი

$y = \{1;0;-3;2;1;0;1;2\}$, რომელიც განსაზღვრულია $L_2[0,1]$ სივრცეში.

თუ, გამოვიყენებთ ხაარის ვეივლეტს და დეკომპოზიციის (55) ფორმულას, მაშინ მივიღებთ მატრიცას:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{0,0} \\ d_{0,0} \\ d_{1,0} \\ d_{1,1} \\ d_{2,0} \\ d_{2,1} \\ d_{2,2} \\ d_{2,3} \end{pmatrix}. \tag{56}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის დიდ მატრიცაში :

- პირველი სვეტი წარმოადგენს მასშტაბირების $\varphi(t)$ ფუნქციას ;
- მეორე სვეტი- ხაარის ვეივლეტია ;
- მესამე და მეოთხე სვეტები-სიგნალის პირველი დონის წარმოდგენის რიცხვითი მნიშვნელობებია ;
- მეხუთე-მერვე სვეტები შეესაბამებიან სიგნალის მეორე დონის წარმოდგენას.

ასე, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის უცნობი მატრიცის საპოვნელად, საჭიროა (56) მატრიცული განტოლების ამოხსნა. როცა შემომავალი სიგნალის რიცხვითი მნიშვნელობების რაოდენობა საკმაოდ

დიდია, ვეივლეტ-კოეფიციენტების საპოვნელად იყენებენ ფილტრაციის მეთოდებს.

განვიხილოთ შემომავალი სიგნალის დეკოპოზიციის(ფილტრაციის) ალგორითმი:

$$(Ha)_k = \sum_n h(n-2k) \cdot a_n \ , \tag{57}$$

$$(Ga)_k = \sum_n g(n-2k) \cdot a_n \ , \tag{58}$$

სადაც

Ha – სიგნალის დაბალსიხშირიანი - ფილტრაციის ოპერატორია;

Ga - სიგნალის მაღალსიხშირიანი – ფილტრაციის ოპერატორია;

h - ვეივლეტ-ფილტრის დაბალსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორია;

g - ვეივლეტ-ფილტრის მაღალლსიხშირიანი კოეფიციენტების ვექტორია.

ცნობილია, რომ ხაარის ვეივლეტ-ფილტრის შემთხვევაში

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad g_1 = -g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ . \tag{59}$$

ამ ფაქტების გათვალისწინებით მოვახდინოთ შემომავალი y სიგნალის დეკომპოზიცია.

$y = c^{(3)}$	1 0 -3 2 1 0 1 2
$d^{(2)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$c^{(2)}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$
$d^{(1)}$	1 -1
$c^{(1)}$	0 2
$d^{(0)}$	$-\sqrt{2}$
$c^{(0)}$	$\sqrt{2}$

დეკომპოზიციის პირველ დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის (57) თანადობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$(Ha)_1 = \sum_{n=1}^{8} h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-3+2)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+0)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2)\right) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$$

ანალოგიურად, (58) თანადობის საფუძველზე შეგვიძლია ვიპოვოთ სიგნალის შესაბამისი მაღალსიხშირიანი მდგენელიც.

შემდეგ, **დეკომპოზიციის მეორე დონეზე, სიგნალის დაბალსიხშირიანი მდგენელისათვის მივიღებთ:**

$$(Ha)_2 = \sum_{n=1}^{4} h(n-2)a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \{0;2\}.$$

შესაბამისად, დეკომპოზიციის მესამე დონეზე მივიღებთ რომ

$$(Ha)_3=\sum_{n=1}^{2}h(n-2)a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0+2)\right)=\sqrt{2}\,.$$

ამრიგად, შემომავალი სიგნალი $y=\{1;0;-3;2;1;0;1;2\}$, გარდაიქმნება ახალ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};1;-1;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ვექტორად, რომლის კომპონენტების რაოდენობაც ემთხვევა შემომავალი სიგნალის ელემენტების რაოდენობას, თუმცა, ენერგიის ძირითადი ნაწილი მოქცეულია კომპონენტების შედარებით, მცირე რაოდენობის ელემენტებში. ასე, რომ თუ, მაგალითად შემთხვევითი შეშფოთებების ზღვრულ მნიშვნელობად ავიღებთ 0.9, მივიღებთ რეზულტატის ახალ ვექტორს:

$\left(0;-\frac{3}{\sqrt{2}};0;0;1;-1;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$. რაც იმას ნიშნავს, რომ კოეფიციენტების ნაწილი ატარებს უმნიშვნელო ინფორმაციას და მათი მნიშვნელობები შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნულოვანად.

ამის შემდეგ, შესაბამისი შემომავალი სიგნალის აღსადგენად უნდა ვისარგებლოთ ოპერატორებით:

$$(Ha^*)_n=\sum_k h(n-2k)a_n\ , \qquad (60)$$

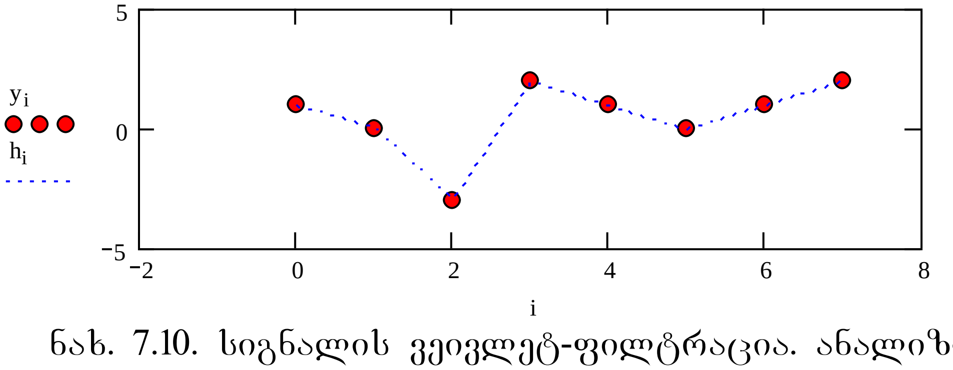
$$(Ga^*)_n=\sum_k g(n-2k)a_n\ . \qquad (61)$$

P.S.ეს ალგორითმი ამარტივებს სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმს.

განვიხილოთ ამ სიგნალის ვეივლეტ-გარდაქმნა და უკუგარდაქმნა Mathcad-ის ბაზაზე ნახ.7.10

$$y := \begin{pmatrix}1\\0\\-3\\2\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \qquad W := \mathrm{wave}(y) \qquad h := \mathrm{iwave}(W)$$

$i := 0..7$



ნახ. 7.10. სიგნალის ვეივლეტ-ფილტრაცია. ანალიზ-სინთეზი.

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტული და ვეივლეტ-ფილტრით სინთეზირებული სიგნალები ერთმანეთს ემთხვევიან.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1.ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა მაარის ვეივლეტებისათვის.
2.ააგეთ სინუსკუბის პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა.
3.ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა ფრანგული ქუდისათვის.
4.ააგეთ პირდაპირი ვეივლეტ-გარდაქმნა და სპექტროგრამა მეანდრასთვის.
5.შეადგინეთ $y=\{1;2;6;4;7;8;0;23;4;6;0.6;0.02;0.06;0.56\}$ სიგნალის ფილტრაციის ალგორითმი ხაარის ვეივლეტის ბაზაზე. მოახდინეთ სიგნალის ანალიზი და სინთეზი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992
2.Shumaker L., Webb G., editor.Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press. 1993
3.Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998
4.Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П.Петухова. Москва, 2001
5.Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков, Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997
6.Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты, Москва, 2002