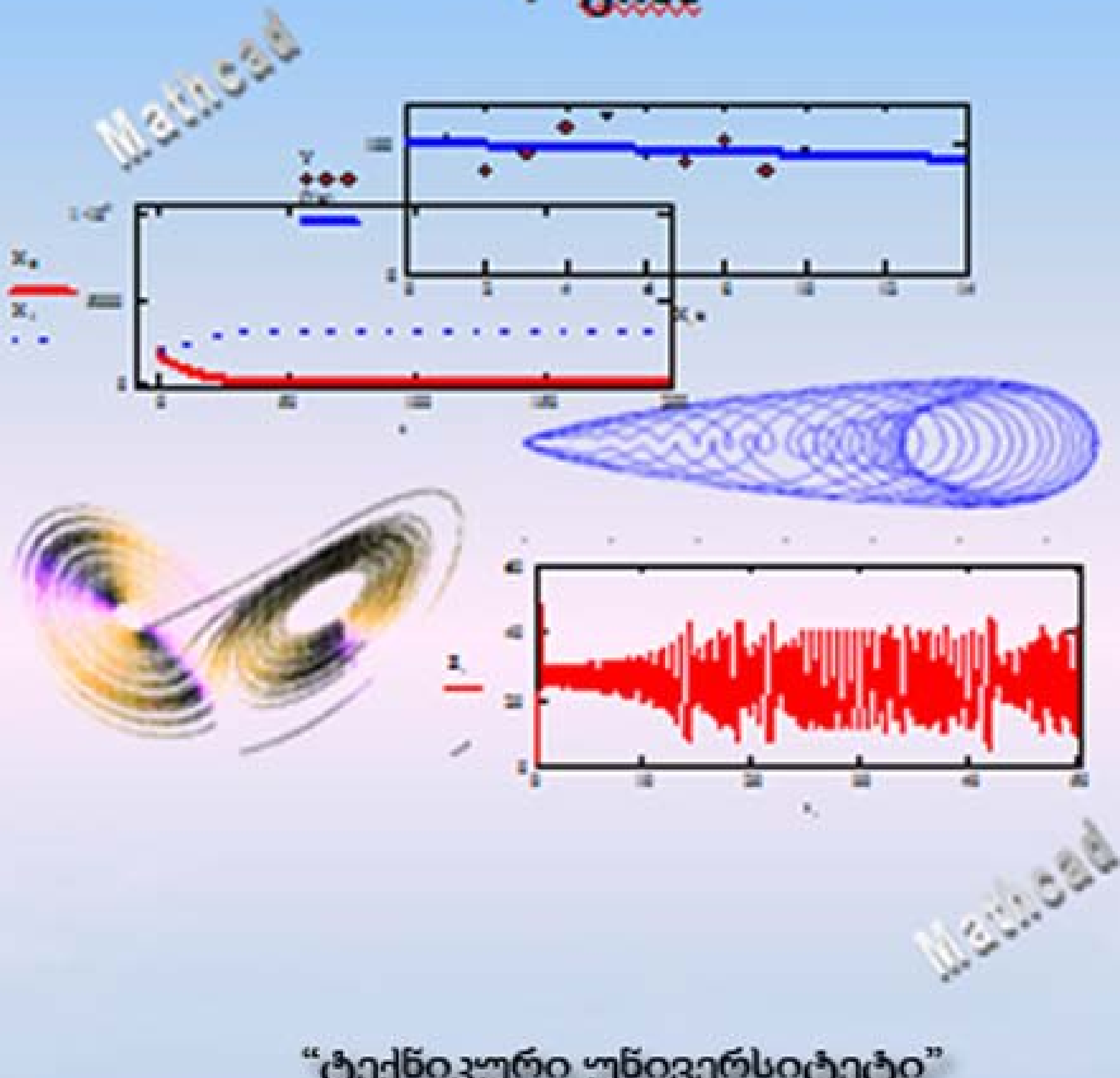
თ. ობგაძე, ნ. ბიჩენოვა

# მათემატიკური მოდელირების კურსი

## (სოციალურ-ეკონომიკური სისტემები)

## V ტომი




“ტექნიკური უნივერსიტეტი”

უაკ 517.958

თ.ობგაძე,ნ.ბიჩენოვი. მატემატიკური მოდელირების კურსი(სოციალურ-ეკონომიკური სისტემები), ტომი 5, სტუ, 2012, 200 გვ.

ნაშრომი ძირითადად ემყარება თ.ობგაძის მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევების შედეგებს და მთლიანად ეხმაურება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს. მოიცავს როგორც ეკონომიკსის ძირითად საკითხებს, ასევე პრაქტიკულ ეკონომეტრიკასა და ფინანსური მათემატიკის საწყისებს.

განხილულია სოციალურ-ეკონომიკური სისტემების შესაბამისი დინამიკური სისტემების აგების მეთოდები. აქტიური სისტემებისათვის აგებულია წილადური რიგის მათემატიკური მოდელები. მოცემულია თამაშთა თეორიის საწყისები.

განკუთვნილია ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტი სრული პროფესორი თ.კაიშაური

© საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2012
**ISBN 99940-57-16-2** (ყველა ტომი)
**ISBN 978-9941-20-074-8** (V ტომი)

ეძღვნება გამოჩენილი ქართველი ინჟინრის
ლევან შაფაქიძის ნათელ ხსოვნას.

## წინასიტყვაობა

სოციალურ-ეკონომიკური სისტემები მიეკუთვნება რთული, აქტიური სისტემების რიგს. მათთვის დამახასიათებელია გარემო პირობების მუდმივი ცვალებადობა, რაც იწვევს თვით ამ სისტემების განმსაზღვრელი პარამეტრების დინამიკური სურათის ცვლილებას.

აქტიურ სისტემებში ხშირად ისე იცვლება გარემო პირობები, რომ სისტემის მუშაობის მექანიზმი თვისებრივად განიცდის ცვლილებას. სისტემა იმდენად რთულია, რომ მისი დინამიკის თვისებრივი ცვლილება, იწვევს გარემო პირობების შეცვლას. ასე რომ, სოციალურ-ეკონომიკური სისტემა, უმეტესწილად არის ღია სისტემა, რის გამოც მუდმივად მიმდინარეობს ‘‘ენერგიის’’ გაცვლა ‘‘გარე სამყაროსთან’’(გარემო პირობებთან), რაც, თავის მხრივ, იწვევს სისტემის თვითორგანიზებას. ყოველივე ეს განაპირობებს სინერგეტიკის მეთოდების პოპულარობას აქტიური სისტემების შესწავლის პროცესში. მაგალითად, როცა ბაზარზე გვაქვს ‘‘დიდი რაოდენობის’’(კრიტიკული მასის) ერთი სახეობის პროდუქტი, ის მოქმედებს მოთხოვნაზე (მოთხოვნა კლებულობს) და მისი გასაყიდი ფასი ეცემა (ვინაიდან, იმ შემთხვევაში, თუ შევინახეთ ჭარბი პროდუქტი, დაგვჭირდება დამატებითი ხარჯების გაწევა საწყობისათვის ან ტრანსპორტირებისათვის, თუ წავიღებთ საკუთარ საწყობში). აქედან გამომდინარე, საქონლის რეალიზაციის მოცულობის გაზრდის მიზნით, ხშირად უმჯობესია მისი ფასის შემცირება გარკვეულ საზღვრამდე. ცხადია, ფასს იმაზე მეტად ვერ შევამცირებთ, ვიდრე მისი სარეალიზაციო პროდუქტად გადაქცევა დაგვიჯდა. უფრო მეტიც, გვინდა, რომ რეალიზაციის ფასმა ხარჯებიც დაფაროს და მოგებაც მოგვცეს.

P.S. თუმცა, არსებობს სიტუაციები, როდესაც საჭიროა სუსტი კონკურენტების მოცილება და სპეციალურად დემპინგურ (თვითღირებულებაზე ნაკლებ) ფასებში გაყიდვა საქონლის, რათა დავიპყროთ ბაზარი, ხოლო შემდეგ გავადიდოთ ფასები და მივიღოთ მეტი მოგება.

ასეთ შემთხვევაში, ჩვენი ფირმა, რომელიც საქონელს აქცევს სარეალიზაციო პროდუქტად, სოციალ-ეკონომიკურ სისტემას

წარმოადგენს, ხოლო ბაზარი მყიდველებსა და გამყიდველებთან ერთად არის გარემო, რომელშიც მუშაობა უხდება სისტემას. აქ ნათლად ჩანს ის ურთიერთქმედება სისტემასა და მის გარემოს შორის, რაზეც ადრე იყო საუბარი.

ამ მაგალითის განზოგადება ადვილია როგორც დიდი კომპანიისათვის, ისე სახელმწიფო მასშტაბით.

სახელმწიფო ყოველთვის დაინტერესებულია იმით, რომ ექსპორტი სჭარბობდეს იმპორტს და, მაშასადამე, სალდო იყოს დადებითი. თუ სალდო უარყოფითი იქნება, მაშინ სახელმწიფო იძულებულია დახარჯოს საერთაშორისო სავალუტო რეზერვები, რაც განაპირობებს ბალანსის დარღვევას ადგილობრივსა და უცხოურ ვალუტას შორის. ეს კი იწვევს ადგილობრივი ვალუტის გაუფასურებას (ინფლაციას).

იმისათვის, რომ სახელმწიფომ საკუთარი ქვეყნის მეწარმეები დაიცვას უცხო ქვეყნის უფრო იაფი საქონლის შემოდინებისაგან, რაც საბოლოოდ იწვევს ეროვნული საწარმოების გაკოტრებას და უმუშევრობის ზრდას, ხდება გარკვეული ქვეყნისათვის სტრატეგიული მნიშვნელობის პროდუქციის შემოტანაზე აქციზის (დამატებითი გადასახადის) დაწესება. აქციზის სიდიდე ისეთი უნდა იყოს, რომ უცხო ქვეყნის საწარმომ ვეღარ შეძლოს ეროვნული საწარმოების გაკოტრება (შემოტანილი საქონლის თვითღირებულება უფრო მეტი უნდა იყოს, ვიდრე ეროვნული პროდუქტისა); ასევე, იკრძალება საქონლის დემპინგურ ფასებში გაყიდვა.

ზოგჯერ, კორუმპირებული სახელმწიფო მოხელეები “წილში უჯდებიან” უცხო ქვეყნის მეწარმეებს, აქციზის გარეშე შემოატანინებენ საქონელს და აკოტრებენ ეროვნულ საწარმოებსა და ფერმერებს საკუთარი “ჯიბის გასქელების” ხარჯზე. ასე ხდებოდა კარგა ხანს საქართველოშიც, როცა თურქეთიდან შემოჰქონდათ ნიტრატებით გაჟღენთილი მავნე, მაგრამ იაფი კვების პროდუქტები, რითაც წამლავდნენ და აავადებდნენ საკუთარ მოსახლეობას, საკუთარი გამდიდრების მიზნით აკოტრებდნენ ფერმერებსა და სოფლის მთელ მოსახლეობას. იქამდეც კი მივიდნენ, რომ გააუქმეს სანიტარიული სამსახური, რომელსაც ევალებოდა სარეალიზაციო პროდუქციის ხარისხის შემოწმება (კორუფციის მოსპობის მიზეზით). მოსახლეობის ცხოვრების დონის მკვეთრი ვარდნა კი იწვევს სოციალურ დაძაბულობას და რევოლუციურ სიტუაციას ქმნის.

კორუფცია დემოკრატიის თანმდევი სენია, რადგან ის თავისუფლებას აძლევს ადამიანის ხარბსა და გაუმაძღარ ბუნებას. კორუფციის მთლიანი მოსპობა შეუძლებელია, თუმცა დასაშვებ საზღვრებში (5%-10%) მოქცევა მხოლოდ სტალინის ტიპის დიქტატორსა და კონსტიტუციურ მონარქს შეუძლია, ვინაიდან დიქტატურა ფიზიკური განადგურების შიშზეა დამყარებული, ხოლო კონსტიტუციური მონარქის ძალაუფლებას შეუძლია ყოველთვის შეცვალოს კორუმპირებული მთავრობა.

რაც შეეხება მრავალპარტიულ სისტემას მეფის გარეშე, ის ყოველთვის კორუფციის ბუდე იქნება და როგორც კი დაირღვევა ბალანსი საკანონმდებლო და აღმასრულებელ ხელისუფლებას შორის, კორუფციაც გალაღდება. თუ, კორუფციამ ქვეყანაში მიაღწია 29%, მაშინ სახელმწიფოებრიობა იწყებს მკვეთრ ნგრევას რევოლუციური გზით. თუ ერთმა პარტიამ მოიპოვა კონსტიტუციური უმრავლესობა პარლამენტში, მაშინ დიდია დიქტატურისა და კორუფციული მთავრობის ჩამოყალიბების ალბათობა.

ნაშრომი ძირითადად ემყარება ავტორების მიერ მრავალი წლის განმავლობაში ჩატარებული კვლევის შედეგებს და მთლიანად ეხმაურება დარგის თანამედროვე განვითარების დონეს. იგი მოიცავს როგორც ეკონომიკსის ძირითად საკითხებს, ისე პრაქტიკულ ეკონომეტრიკასა და ფინანსური მათემატიკის საწყისებს. განხილულია სოციალურ-ეკონომიკური სისტემების შესაბამისი დინამიკური სისტემების აგების მეთოდები. აქტიური სისტემებისათვის აგებულია წილადური რიგის მათემატიკური მოდელები, განხილულია თამაშთა თეორიისა და მასობრივი მომსახურების თეორიის მათემატიკური მოდელები, ქსელური მოდელების გამოთვლის ალგორითმები, არამკაფიო ლოგიკის მათემატიკური მოდელების აგების ტექნიკა სოციალურ-ეკონომიკური სისტემებისათვის. მაკროეკონომიკური მაჩვენებლების პროგნოზირებისათვის გამოყენებულია ვეივლეტ-ანალიზი.

ავტორები მადლობას უხდიან საინჟინრო აკადემიის პრეზიდენტს, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის რექტორს ბატონ არჩილ ფრანგიშვილს მუშაობის პროცესში ხელშეწყობისათვის. დიდი მადლიერებით აღნიშნავენ ნატო თუშიშვილის ღვაწლს რიგი საკითხების განხილვაში მონაწილეობისთვის და ვერა ქორთიევას მიერ ტექნიკური სამუშაოების ხარისხიანად შესრულებას.

## თავი I. ფუნდამენტური ეკონომიკის ძირითადი ცნებები

### 1.1. მიკროეკონომიკის ძირითადი ცნებები. განურჩევლობის მრუდები. მოხმარებისა და მოთხოვნის თეორია

პირადი მოთხოვნილებების დასაკმაყოფილებლად ინდივიდები სხვადასხვა დოვლათს მოიხმარენ.

პირადი მოხმარების მოდელირებისათვის იყენებენ **განურჩევლობის მრუდის** ცნებას.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, საოჯახო მეურნეობა მოიხმარს ორი სახის დოვლათს (დოვლათი 1 და დოვლათი 2). დავუშვათ დროის რაღაც პერიოდში პირველი დოვლათი მოიხმარეს $Y_1$ , ხოლო მეორე დოვლათი – $Y_2$ რაოდენობით. ორგანზომილებიან $(Y_1,Y_2)$ ვექტორს უწოდებენ **მოხმარების გეგმას**. საოჯახო მეურნეობა მოხმარების $A=(Y_1^A,Y_2^A)$ ვექტორს ადარებს, მოხმარების სხვა $B=(Y_1^B,Y_2^B)$ ვექტორს და აკეთებს ქვემოთ ჩამოთვლილიდან ერთ-ერთ დასკვნას:

ა) $A$ ვექტორს უპირატესობა აქვს $B$ ვექტორთან შედარებით;

ბ) $B$ ვექტორს უპირატესობა აქვს $A$ ვექტორთან შედარებით;

გ) $A$ და $B$ ვექტორებს თანაბარი უპირატესობა აქვს (მომხმარებლისთვის სულერთია რომელს აირჩევს, $A$ თუ $B$ ვექტორს).

**განსაზღვრება.** მოხმარების გეგმათა სიმრავლე, რომელიც განურჩევლობის მდგომარეობაშია განსახილველ გეგმასთან, სიბრტყეზე შეადგენს წერტილთა სიმრავლეს, და მას **განურჩევლობის მრუდი ეწოდება.**

თუ $U=U(Y_1,Y_2)$-ით აღვნიშნავთ ფუნქციას ან სხვანაირად, **სარგებლიანობის ინდექსს**, რომელიც შეიძლება მივიღოთ $(Y_1\ ,Y_2)$ ვექტორით მოცემული დოვლათის მოხმარებით, მაშინ განურჩევ-ლობის მრუდი იქნება $(Y_1\ ,Y_2)$ მნიშვნელობათა ერთობლიობა, რომელთაც მივყავართ სარგებლიანობის $U$ ინდექსის ერთსა და იმავე მნიშვნელობამდე (ე.ი. განურჩევლობის მრუდები სარგებლიანობის ფუნქციის დონის წირებია).

განურჩევლობის მრუდები განისაზღვრება სარგებლიანობის ფუნქციის მიხედვით.

განვიხილოთ სარგებლიანობის ფუნქციის რამდენიმე ტიპი, რომლებიც ეკონომიკაში ხშირად გამოიყენება:

1. ფუნქცია დოვლათთა სრული ურთიერთჩანაცვლებით (მაგ., ფხვნილი შაქრი და ნატეხი შაქარი)

$$U=\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2\,. \qquad (1.1)$$

2. სარგებლიანობის ნეოკლასიკური (კობ-დუგლასის) ფუნქცია:

$$U=\alpha_0 Y_1^{\alpha_1}\times Y_2^{\alpha_2}, \alpha_1+\alpha_2\le 1. \qquad (1.2)$$

3. სარგებლიანობის ფუნქცია სრულად ურთიერთშემვსები დოვლათებისათვის (მაგ., კარაქი და პური, სოსისი და მდოგვი)

$$U=\min\left(\frac{Y_1}{\alpha_1},\frac{Y_2}{\alpha_2}\right) \Leftrightarrow U=u, \text{ სადაც } \begin{cases} Y_1\ge\alpha_1 u \\ Y_2\ge \alpha_2 u\end{cases}; \qquad (1.3)$$

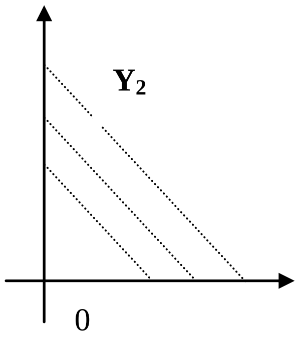
4. შერეული, შემვსებ-ჩამნაცვლებელი ტიპის ფუნქცია (მაგ., ჩაი და რძე):

$$U=u_1+u_2, \quad \text{სადაც } \begin{cases} Y_1\ge\alpha_1 u_1+\beta_1 u_2 \\ Y_2\ge \alpha_2 u_1+\beta_2 u_2\end{cases} \qquad (1.4)$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად სარგებლიანობის ფუნქციის ერთ-ერთი არგუმენტი უნდა გამოვსახოთ სხვა არგუმენტითა და სარგებლიანობის ფუნქციის $U$ მნიშვნელობით. მაგალითად, (1.1) ფუნქციისათვის გვექნება

$$Y_2=\frac{U-\alpha_1 Y_1}{\alpha_2}. \qquad (1.5)$$

$\alpha_1$ და $\alpha_2$ კოეფიციენტებს მივანიჭოთ მუდმივი მნიშვნელობები და შევარჩიოთ სარგებლიანობის ფუნქციის $U_0$ მნიშვნელობა, შემდგომ $Y_1$-სთვის სხვადასხვა მნიშვნელობების მინიჭებისას, (1.5)-დან მივიღებთ $Y_2$-ის შესაბამის მნიშვნელობებს. მიღებული $(Y_1,Y_2)$ წერტილების სიბრტყეზე ასახვით კი მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 1.1).




ნახ.1.1

მიიღება წრფეები და ამავდროულად, რაც მეტია $U_0$, შესაბამისი განურჩევლობის მრუდი მით უფრო შორს განთავსდება კოორდინატთა სათავიდან.

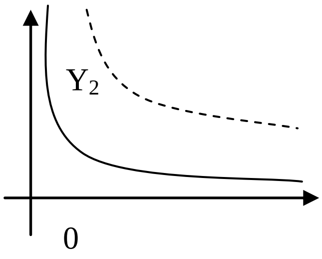
ფუნქციები სრული ურთიერთჩანაც-ვლებით თავს იჩენს მაშინ, როდესაც $Y_1$ და $Y_2$ ურთიერთშემცვლელებია; მაგალითად, თუ $Y_1$ არის ჩაი და $Y_2$ - ყავა.

სარგებლიანობის (1.2) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდის ასაგებად ვპოულობთ $Y_2$-ს:

$$Y_2=\left(\frac{U}{\alpha_0 Y_1^{\alpha_1}}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}}. \qquad (1.6)$$

$(Y_1,Y_2)$ სიბრტყეზე $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ და $U_0$-ის დაფიქსირებით, მივიღებთ განურჩევლობის მრუდს (ნახ. 1.2).

რაც უფრო მეტია $U_0$-ის მნიშვნელობა, განურჩევლობის მრუდი მით მეტად არის დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან.

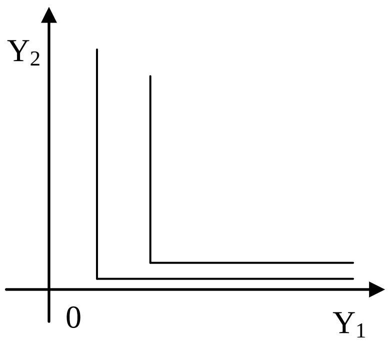



ნახ. 1.2

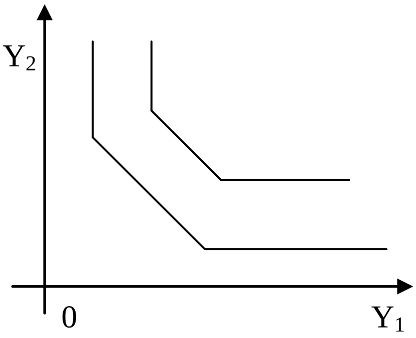
სარგებლიანობის (1.6) ფუნქციისათვის განურჩევლობის მრუდს აქვს 1.2 ნახ-ზე მოცემული სახე.

ფუნქციები სრული ურთიერთშემვ–სებებით თავს იჩენს მაშინ, როცა $Y_1$ და $Y_2$ ერთად გამოიყენება. მაგალითად, თუ $Y_1$ ჩაია და $Y_2$ შაქარი (ნახ.1.3).

შერეული ტიპის ფუნქციისათვის გვაქვს 1.4 ნახ-ზე მოცემული განურჩევლობის მრუდები.




ნახ.1.3




ნახ.1.4

---

## ზღვრული სარგებლიანობა და ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა

მოხმარების თეორიის ძირითადი ცნებებია **ზღვრული სარგებლიანობა** *და* **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა**. ვთქვათ, $U=U(Y_1,Y_2)$ - სარგებლიანობის ფუნქციაა.

**განსაზღვრება.** სარგებლიანობის ფუნქციის *i*-ური ცვლადის მიხედვით ცვლილების $\frac{\partial U}{\partial Y_1}$ სიჩქარეს, *i*-ური დოვლათის **ზღვრული სარგებლიანობა** ეწოდება.

**მაგალითად**, სარგებლიანობის $U=\alpha_1 Y_1+\alpha_2 Y_2$ ფუნქციისათვის $Y_1$ დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობაა $\frac{\partial U}{\partial Y_1}=\alpha_1$; ხოლო $Y_2$ დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება $\frac{\partial U}{\partial Y_2}=\alpha_2$ (**ზღვრული სარგებლიანობა - marginal utility).**

**კობ-დუგლასის ნეოკლასიკური ტიპის** სარგებლიანობის ფუნქციისათვის $U=\alpha_0\, Y_1^{\alpha_1}\, Y_2^{\alpha_2}$, სადაც $\alpha_1+\alpha_2\leq 1$, მივიღებთ, რომ დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობა იქნება:

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} = \alpha_0 Y_2^{\alpha_2} \alpha_1 Y_1^{\alpha_1 - 1} = \frac{\alpha_1 U}{Y_1}.$$

---

$Y_1$ დოვლათის $dY_1$ სიდიდით შემცირებისას სარგებლიანობის წინანდელი $U$ დონის შესანარჩუნებლად საჭიროა, მეორე დოვლათის მოხმარება გავზარდოთ $dY_2$ სიდიდით.

ამ ცვლილების ამსახველ ფარდობას უწოდებენ **ჩანაცვლების ზღვრულ ნორმას (marginal rate of substitution).**

**განსაზღვრება:** სამომხმარებლო დოვლათის **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა (MRS)** ეწოდება შემდეგი გამოსახულებით მოცემულ ფარდობას:

$$MRS = -\left.\frac{dY_2}{dY_1}\right|_{U=const} . \quad \textbf{(1.7)}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $A=(Y_1,Y_2)$ და $B(Y_1+dY_1;Y_2+dY_2)$ წერტილები განურჩევლობის ერთსა და იმავე მრუდზე ძევს (ე.ი. შეესაბამება სარგებლიანობის ფუნქციის ერთსა და იმავე დონეს), გვექნება:

$$U(Y_1,Y_2)=U(Y_1+dY_1;Y_2+dY_2). \quad (1.8)$$

ამრიგად, $dU=0$ , რაც ნიშნავს,

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} dY_1 + \frac{\partial U}{\partial Y_2} dY_2 = 0 \; . \quad (1.9)$$

აქედან გამომდინარე

$$MRS = -\left.\frac{dY_2}{dY_1}\right|_{U=const} = \left.\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial Y_2}}\right|_{U=const} . \quad (1.10)$$

P.S. **მაშასადამე, ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა გამოისახება დოვლათთა ზღვრული სარგებლიანობათა ფარდობით.**

---

**მოთხოვნის ფუნქცია**

თითოეული პიროვნებისათვის დამახასიათებელი მოთხოვნილება, სხვადასხვა სახის დოვლათზე, აისახება განურჩევლობის მრუდის მეშვეობით, ხოლო მომხმარებლის მოთხოვნის შეზღუდვა მოიცემა საბიუჯეტო შეზღუდვების პირობებით.

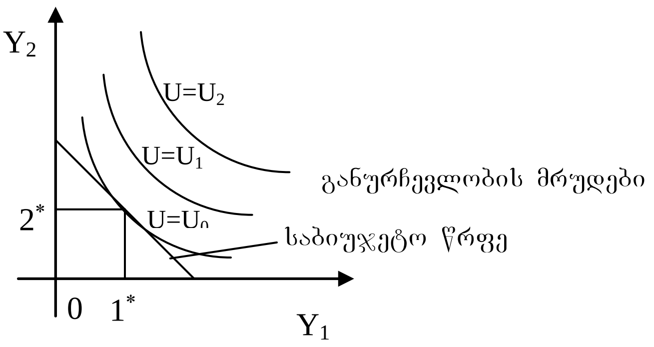
თუ პირველი და მეორე დოვლათის საბაზრო ფასებს აღვნიშნავთ $P_1$ და $P_2$-ით, ხოლო მომხმარებლის შემოსავალს (ბიუჯეტს) კი $B$-თი, მაშინ დოვლათის მოხმარების $(Y_1,Y_2)$ გეგმისათვის საბიუჯეტო შეზღუდვის უტოლობასა და ბიუჯეტის

წრფის განტოლებას მოცემული პიროვნებისათვის ექნება შემდეგი სახე:

$$P_1Y_1+P_2Y_2\le B. \qquad (1.11)$$

გამოსახულება (1.11) იძლევა **საბიუჯეტო შეზღუდვის განტოლებას**.

განვიხილოთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე (ნახ. 1.5).




ნახ. **1.5**

ჩავთვალოთ, რომ თითოეული პიროვნება ბიუჯეტის შეზღუდვის ფარგლებში ცდილობს თავისი შემოსავალი ისე გადაანაწილოს სხვადასხვა სამომხმარებლო დოვლათს შორის, რომ მიაღწიოს სარგებლის მაქსიმიზაციას:

$$\begin{aligned} &U \to \max, \\ &P_1Y_1 + P_2Y_2 \le B. \end{aligned} \qquad (1.12)$$

დოვლათის შესაბამისი მნიშვნელობების $\left(Y_1^*, Y_2^*\right)$ ერთობლიობას **მოხმარების ოპტიმალური გეგმა** ეწოდება. ის აღნიშნავს ბიუჯეტის წრფისა და განურჩევლობის მრუდის შეხების წერტილს.

მაშასადამე, როდესაც საბაზრო ფასები და პიროვნების შემოსავალი მოცემულია, პიროვნების მოხმარების ოპტიმალური გეგმა **ბიუჯეტში არსებული შეზღუდვებისას** განისაზღვრება **სარგებლის მაქსიმიზაციის პრინციპით**. მოხმარების ოპტიმალური გეგმა იცვლება ფასისა და შემოსავლის (პიროვნების ბიუჯეტის) მიხედვით.

$$\begin{cases} Y_1^* = \varphi_1\left(P_1, P_2, B\right) \\ Y_2^* = \varphi_2\left(P_1, P_2, B\right). \end{cases} \qquad (1.13)$$

ამ გამოსახულებას უწოდებენ **საოჯახო მეურნეობის მოთხოვნის ფუნქციებს.**

## სარგებლიანობის ფუნქციის თვისებები

სარგებლიანობის $U=U(Y_1,Y_2)$ ფუნქციის არსიდან გამომდინარე მას აქვს შემდეგი ზოგადი (ე.ი. ფუნქციის ტიპისგან დამოუკიდებელი) თვისებები:

1) თუ $Y_2$=const, მაშინ $Y_1$–ის ზრდასთან ერთად, სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება; ასევე, თუ $Y_1$=const და $Y_2$ იზრდება, მაშინ სარგებლიანობის ფუნქციაც იზრდება, სხვაგვარად გვექნება:

$$\frac{\partial U}{\partial Y_1} > 0 \wedge \frac{\partial U}{\partial Y_2} > 0. \tag{1.14}$$

ამრიგად **პროდუქტების ზღვრული სარგებლიანობა დადებითია**;

2) თითოეული პროდუქტის ზღვრული სარგებლიანობა კლებულობს, თუ მისი მოხმარების მოცულობა იზრდება

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1^2} < 0 \wedge \frac{\partial^2 U}{\partial Y_2^2} < 0. \tag{1.15}$$

**ამ თვისებას უწოდებენ ზღვრული სარგებლიანობის კლების კანონს.** ეს თვისება იმას ნიშნავს, რომ საქონლის თითოეულ სახეობაზე მოხმარება შეზღუდულია მოთხოვნით;

3) დოვლათის თითოეული სახეობის ზღვრული სარგებლიანობა იზრდება, თუ იზრდება დოვლათის სხვა სახეობის რაოდენობა. ამ შემთხვევაში საქონელი, რომლის რაოდენობა ფიქსირებულია, შედარებით დეფიციტურია. ამიტომ, მისი ყოველი დამატებითი ერთეული იძენს მეტ ღირებულებას და შეიძლება უფრო ეფექტურად იქნეს გამოყენებული. თვისება მართებულია დოვლათის მხოლოდ იმ $Y_1$ და $Y_2$ სახეობებისათვის, რომლებიც ერთმანეთს სრულად ვერ ჩაანაცვლებენ. იგი ანალიზურად შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial Y_1 \partial Y_2} > 0. \tag{1.16}$$

ზემოთ მოყვანილი თვისებები გვიჩვენებს, რომ (1.10)-ის გამოყენებით შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Y_1}}{\dfrac{\partial U}{\partial Y_2}} < 0. \tag{1.17}$$

ეს ნიშნავს, რომ $Y_1$-ის ზრდასთან ერთად, $Y_2$ მცირდება.

გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული

$$\frac{d^2Y_2}{dY_1^2}=\frac{d}{dY_1}\left(\frac{dY_2}{dY_1}\right)=-\frac{\frac{\partial^2U}{\partial Y_1^2}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y_2}-\frac{\partial^2U}{\partial Y_1\partial Y_2}\cdot\frac{\partial U}{\partial Y_1}}{\left(\frac{\partial U}{\partial Y_2}\right)^2}. \qquad (1.18)$$

სამივე თვისებიდან გამომდინარე ვღებულობთ, რომ

$$\frac{d^2Y_2}{dY_1^2}>0. \qquad (1.19)$$

ამრიგად $Y_2=f(Y_1)$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, ანუ აქვს განურჩევლობის მრუდის გრაფიკზე (ნახ1.5), გამოსახული ფორმა.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა მომხმარებლის არჩევანზე.

**ამოცანა.** ვთქვათ გვაქვს შემდეგი სახის სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U=Y_1\cdot Y_2, \qquad (1.20)$$

სადაც ცნობილია $Y_1$ და $Y_2$ პროდუქტების შესაბამისი $P_1$ და $P_2$ ფასები. გვაქვს საბიუჯეტო შეზღუდვა

$$P_1\cdot Y_1+P_2Y_2\le B. \qquad (1.21)$$

ამ პირობებში იპოვეთ ოპტიმალური გეგმა, ე.ი. $Y_1$ და $Y_2$ პროდუქტების ის რაოდენობა, რომლის დროსაც სარგებლიანობის U ფუნქცია მაქსიმალურია.

ამოხსნა. ცხადია, (1.21) პირობა ოპტიმალურ წერტილში იძენს ტოლობის ნიშანს, ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{cases}U=Y_1\cdot Y_2\to\max\\ P_1\cdot Y_1+P_2\cdot Y_2=B\end{cases}. \qquad (1.22)$$

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L=Y_1\cdot Y_2+\lambda\left(P_1\cdot Y_1+P_2\cdot Y_2-B\right). \qquad (1.23)$$

ექსტრემუმის აუცილებელ პირობებს შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{array}{lcl}\frac{\partial L}{\partial Y_1}=Y_2+\lambda P_1=0 & & Y_2=-\lambda P_1,\\ \frac{\partial L}{\partial Y_2}=Y_1+\lambda P_2=0 \quad . & \text{ე. ი.} & Y_1=-\lambda P_2,\\ \frac{\partial L}{\partial Y}=P_1Y_1+P_2Y_2-B=0 & & P_1Y_1+P_2Y_2=B,\end{array} \qquad (1.24)$$

საიდანაც ვღებულობთ:

$$\begin{cases} \dfrac{Y_2}{Y_1} = \dfrac{P_1}{P_2} \\ P_1 \cdot Y_1 + P_2 Y_2 = B \end{cases}. \qquad (1.25)$$

პირველი პირობა ნიშნავს, რომ ორივე პროდუქტზე დახარჯული ფულის რაოდენობა უნდა იყოს ერთნაირი ($P_1 \cdot Y_1 = P_2 \cdot Y_2$), მაშინ (1.25)-ის მეორე განტოლებიდან ვპოულობთ **მოთხოვნის ფუნქციებს:**

$$Y_1 = \frac{B}{2P_1}; \qquad (1.26)$$

$$Y_2 = \frac{B}{2P_2}. \qquad (1.27)$$

ამრიგად, თითოეულ პროდუქტზე გაწეული ხარჯი შეადგენს მომხმარებლის საერთო შემოსავლის ნახევარს (ეს დაკავშირებულია სარგებლიანობის ფუნქციის $Y_1$ და $Y_2$-ის მიმართ სიმეტრიულობასთან).

## მომხმარებლის არჩევანის ზოგადი მოდელი

ვთქვათ, გვაქვს სარგებლიანობის ფუნქცია $U=U(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$, სადაც $Y_i$ არის $i$-ური დოვლათის რაოდენობა, $P=(P_1,P_2,\ldots,P_n)$ - ფასების ვექტორი და $B$ - მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მივიღებთ მომხმარებლის არჩევანის ზოგად ამოცანას:

$$U(Y_1, Y_2, ..., Y_n) \to \max, \qquad (1.28)$$

$$P_1 Y_1 + P_2 Y_2 + \ldots + P_n Y_n \le B, \qquad (1.29)$$

$$Y_i > 0, \qquad i = \overline{1,n}. \qquad (1.30)$$

ლაგრანჟის ფუნქცია (1.28)-(1.30) ჩავწეროთ ამოცანისათვის:

$$L = U(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) + \lambda(P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n - B). \qquad (1.31)$$

ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$L_{,i} = U_{,i} + \lambda P_i = 0, \quad i = \overline{1,n}; \qquad (1.32)$$

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n = B, \qquad (1.33)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{U_{,i}}{U_{,j}} = \frac{P_i}{P_j}, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,n}. \qquad (1.34)$$

ასე რომ, ოპტიმუმის წერტილში ნებისმიერი ორი დოვლათის ზღვრული სარგებლიანობის ფარდობა უდრის მათი საბაზრო ფასების ფარდობას.

**P.S.** ცხადია, რომ ზოგადად მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახით წარმოდგენა შეუძლებელია, თუ არ შემოვიფარგლებით გარკვეული სახის სარგებლიანობის ფუნქციებით. სარგებლიანობის ფუნქციის ასაგებად გამოიყენება რეგრესიული ანალიზის მეთოდები, შესაბამისი თვისებების გათვალისწინებით.

**ამოცანა.** ამოხსენით მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა და იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, როცა დოვლათზე ფასებია: $P_1=10$; $P_2=2$, ბიუჯეტი B=60, ხოლო სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:

ა) $U = Y_1 \cdot Y_2 \to \max;$

ბ) $U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{2/3} \to \max;$

გ) $U = (Y_1 - 1)^{1/4} \cdot (Y_2 - 3)^{3/4} \to \max;$

დ) $U = 3(5 - Y_1)^2 + (7 - Y_2)^2 \to \min.$

გამოსახეთ განურჩევლობის მრუდები და ბიუჯეტის წრფე.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.1

**ამოცანა.** მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:

$U = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}$

საქონლის ფასებია: $P_1 = 0.75,$ $P_2 = 0.5$ და ბიუჯეტი $B = 25$.

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა, ანუ $Y_1$-ისა და $Y_2$-ის ის მნიშვნელობები, რომლის დროსაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია. (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია).

ამოხსნა.

შევადგინოთ საბიუჯეტო შეზღუდვა:

$P_1Y_1 + P_2Y_2 = B,$

$0.75Y_1 + 0.5Y_2 = 25.$

შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$L(Y_1, Y_2, \lambda) = 12Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2} + \lambda(25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2)$

და შესაბამისი შეზღუდვები:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial Y_2} = 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0$$

მივცეთ სისტემის სახე:

$$\begin{cases} 6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2} - 0.75\lambda = 0 \\ 12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2} - 0.5\lambda = 0 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}}{0.75} = \dfrac{12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2}}{0.5} \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(6Y_1^{-1/2} \cdot Y_2^{1/2}\right) \cdot 0.5 = \left(12Y_1^{1/2} \cdot \frac{1}{2} Y_2^{-1/2}\right) \cdot 0.75 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 6Y_2^{1/2} Y_2^{1/2} \cdot 0.5 = 6Y_1^{1/2} Y_1^{1/2} \cdot 0.75 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 3Y_2 = 4.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} Y_2 = 1.5Y_1 \\ 25 - 0.75Y_1 - 0.5Y_2 = 0 \end{cases};$$

$$25 - 0.75Y_1 - 0.5 \cdot 1.5Y_1 = 0$$
$$25 - 1.5Y_1 = 0$$
$$Y_1 = 16.67$$
$$Y_2 = 25$$

## პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქციის შეტანა:

$$U(Y1, Y2) := 12Y1^{\frac{1}{2}} \cdot Y2^{\frac{1}{2}};$$

საწყისი მონაცემების განსაზღვრა:

$$Y1 := 1$$

$$Y2 := 1$$

შეზღუდვათა სისტემა:

Given

$$Y1 \geq 0$$

$$Y2 \geq 0$$

$$0.75Y1 + 0.5Y2 = 2\text{:}$$

სარგებლიანობის ფუნქციის მაქსიმუმის შესაბამისი მნიშვნელობები:

$$R := \text{Maximize}(U, Y1, Y2)$$

$$R = \begin{pmatrix} 16.667 \\ 25 \end{pmatrix}$$

$$U(R_0, R_1) = 244.949$$

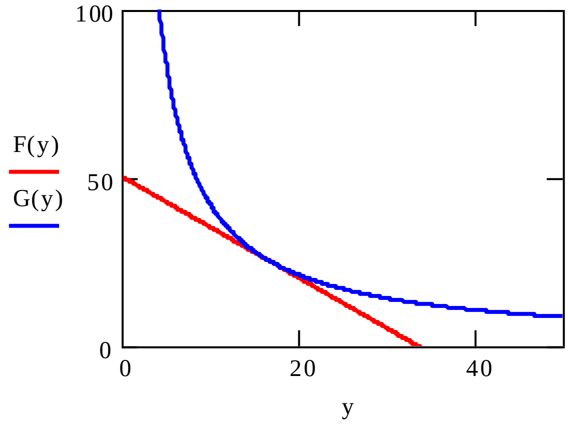
ავაგოთ საბიუჯეტო შეზღუდვის გრაფიკი და განურჩევლობის მრუდი ერთ კოორდინატთა სიბრტყეზე. ამისათვის, Y2 გამოვსახოთ Y1-ის საშუალებით, მივიღებთ ფუნქციას:

$$F(y) := \frac{25 - 0.75y}{0.5}$$

განურჩევლობის მრუდის ასაგებად, ჩავატაროთ ასეთივე გამოსახვა და მასში შევიტანოთ ჩვენ მიერ გამოთვლილი სარგებლიანობის ფუნქციის მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$G(y) := \left( \frac{244.949}{12 \cdot y^{\frac{1}{2}}} \right)^2 .$$

ავაგოთ გრაფიკი.




მიღებული შეხების წერტილი წარმოადგენს მომხმარებლის არჩევანის შესაბამის წერტილს.

**სავარჯიშო.**

მოცემულია სარგებლიანობის ფუნქცია:
$U = Y_1^{1/2} \cdot Y_2^{1/2}$ .

საქონლის ფასებია: $P_1 = 0.75$, $P_2 = 0.5$ და ბიუჯეტი $B = 29$.

ამ პირობებში, უნდა ვიპოვოთ ოპტიმალური გეგმა, ანუ $Y_1$-ისა და $Y_2$-ის ის მნიშვნელობები, როდესაც სარგებლიანობის ფუნქცია მაქსიმალურია (ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით, შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს. ააგეთ ამოცანის გრაფიკული ინტერპრეტაცია).

## 1.2. რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქცია და მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა

სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = (Y_1 - a_1)^{\alpha_1} : (Y_2 - a_2)^{\alpha_2} : \ldots : (Y_n - a_n)^{\alpha_n} \to \max \qquad (1.35)$$

სადაც $a_i$ არის i-ური დოვლათის აუცილებელი მინიმალური რაოდენობა, რომელიც შეისყიდება ნებისმიერ შემთხვევაში და არ წარმოადგენს არჩევანის საგანს. იმისათვის, რომ $a_i$, $i = \overline{1,n}$ დოვლათთა ერთობლიობა სრულად იქნეს შეძენილი აუცილებელია, B ბიუჯეტი იყოს ამ დოვლათთა ერთობლიობის შესაძენად საჭირო ფულის რაოდენობაზე მეტი. $\alpha_i > 0$ ხარისხის მაჩვენებლები ახასიათებს, მომხმარებლისათვის დოვლათთა ფარდობით ღირებულებას, ანუ ახასიათებს იმას, თუ მომხმარებლისათვის რამდენად მეტად სასურველია ესა, თუ ის სახის დოვლათი.

(1.35) მიზნის ფუნქციაზე საბიუჯეტო შეზღუდვების დამატებით

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n \le B$$

$$Y_i \ge a_i, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (1.36)$$

მივიღებთ რ. სტოუნის მოდელს.

რ. სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციისათვის მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამოსახსნელად, შევადგინოთ ლაგრანჟის ფუნქცია:

$$L = \prod_{i=1}^{n} (Y_i - a_i)^{\alpha_i} + \lambda (P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n - B) \qquad (1.37)$$

ექსტრემუმის აუცილებელი პირობებით მიიღება:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_i} = \frac{\alpha_i \cdot U(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)}{Y_i - a_i} + \lambda P_i = 0,\ i = \overline{1,n}, \qquad (1.38)$$

$$\text{ე.ი.}\quad Y_i = a_i - \frac{\alpha_i \cdot U}{\lambda P_i}. \tag{1.39}$$

ასევე, გვაქვს პირობა:

$$P_1 \cdot Y_1 + P_2 \cdot Y_2 + \ldots + P_n \cdot Y_n = B. \tag{1.40}$$

გავამრავლოთ (1.39)-ში ყოველი i-ური განტოლება $\lambda P_i$-ზე და შევაჯამოთ i-ს მიმართ, მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \lambda P_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i P_i - \sum_{i=1}^{n} a_i U. \tag{1.41}$$

(1.40)-ის გამოყენებით, (1.41)-დან ვღებულობთ:

$$\lambda \cdot B - \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot P_i = -U \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \cdot \tag{1.42}$$

სხვაგვარად,

$$-\frac{U}{\lambda} = \frac{B - \sum_{i=1}^{n} a_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \tag{1.43}$$

(1.39)-ში ჩავსვით (1.43, მივიღებთ მოთხოვნის ფუნქციას:

$$Y_i = a_i + \frac{\alpha_i \left( B - \sum_{i=1}^{n} P_i a_i \right)}{P_i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}. \tag{1.44}$$

ამ ფუნქციის ინტერპრეტირება იოლია. თავდაპირველად გამოიყენება ყოველი $a_i$ დოვლათის მინიმალურად აუცილებელი რაოდენობა, შემდეგ გამოითვლება ფულის დარჩენილი რაოდენობა, რომელიც პროპორციულად გადანაწილდება მოცემული სახის დოვლათის სასურველობის $\alpha_i$ მნიშვნელობის (წონადობის) მიხედვით. ფულის რაოდენობის $P_i$ ფასზე გაყოფით მინიმუმის გარდა მივიღებთ დამატებით შესაძენ i–ური დოვლათის რაოდენობას და მას დავუმატებთ $a_i$-ს.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.2

**ამოცანა.** სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში $a_1$=18 ცალ პურს $P_1$=0.5 ლარის ღირებულებით, $a_2$=4 კგ კარტოფილს - $P_2$=1.20 ლარის ღირებულებით, $a_3$= 3კგ ხორცს - $P_3$=8 ლარის ღირებულებით, $a_4$=2კგ თევზს $P_4$=10 ლარის ღირებულებით და $a_5$=10 ცალ კვერცხს - $P_5$=0.25 ლარის ღირებულებით, თუ $\alpha_1$=5; $\alpha_2$=4; $\alpha_3$=2; $\alpha_4$=3 და $\alpha_5$=1. მომხმარებლის

ბიუჯეტი თვეში 500 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

**ამოხსნა.** სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს სახე:
$U(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Y_5)=(Y_1-a_1)^{\alpha_1}(Y_2-a_2)^{\alpha_2}(Y_3-a_3)^{\alpha_3}(Y_4-a_4)^{\alpha_4}(Y_5-a_5)^{\alpha_5}$; ხოლო საბიუჯეტო შეზღუდვებს აქვთ სახე:
$P_1Y_1+ P_2Y_2+ P_3Y_3+ P_4Y_4+ P_5Y_5\le B$;
$Y_1\ge a_1\ \ Y_2\ge a_2\ \ Y_3\ge a_3\ \ Y_4\ge a_4\ \ Y_5\ge a_5$.

**ამოცანის ანალიზური ამოხსნის შედეგად** მივიღეთ, რომ მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე(1.10):

$$Y_i = a_i + \frac{\alpha_i\left(B-\sum_{i=1}^{5}P_i a_i\right)}{P_i\sum_{i=1}^{5}\alpha_i},\ \ i=\overline{1,5}.$$

მოთხოვნის ფუნქციის მნიშვნელობები გამოვთვალოთ ორნაირად: მომხმარებლის არჩევანის ამოცანის ამონახსნიდან და ანალიზური ამონახსნიდან.

## პროგრამა Mathcad-ზე

### მონაცემების შეყვანა და ამოცანის ორნაირი ამონახსნი

ამოცანის ამონახსნი, ანალიზური ამონახსნის ბაზაზე

$$ORIGIN := 1$$

$$B := 500$$

$$a := \begin{pmatrix}18\\4\\3\\2\\10\end{pmatrix}\quad \alpha := \begin{pmatrix}5\\4\\2\\3\\1\end{pmatrix}\quad P := \begin{pmatrix}0.5\\1.2\\8\\10\\0.25\end{pmatrix}\quad i := 1..5\quad Y1_i := a_i + \alpha_i\cdot\frac{\left(B-\sum_{i=1}^{5}P_i\cdot a_i\right)}{P_i\cdot\sum_{i=1}^{5}\alpha_i}$$

$$Y1 = \begin{pmatrix}311.133\\101.711\\10.328\\10.794\\127.253\end{pmatrix}$$

$$U(Y1) = 8.449 \times 10^{26}$$

ამოცანის ამონახსნი არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ბაზაზე

$$U(Y) := \prod_{i=1}^{5} \left(Y_i - a_i\right)^{\alpha_i}$$

$$Y := a$$

Given

$$Y \geq a$$

$$\sum_{i=1}^{5} P_i \cdot Y_i \leq B$$

$$R := \mathrm{Maximize}(U, Y)$$

*შედეგები:*

$$R = \begin{pmatrix} 311.56 \\ 101.589 \\ 10.327 \\ 10.792 \\ 127.099 \end{pmatrix}$$

$$U(R) = 8.449 \times 10^{26}$$

**სავარჯიშო.**

სარგებლიანობის ფუნქციას აქვს რ. სტოუნის სახე. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია იმ შემთხვევაში, როცა მომხმარებელი აუცილებლად მოიხმარს თვეში $a_1$=15 ცალ პურს $P_1$=0.5 ლარის ღირებულებით, $a_2$=5 კგ კარტოფილს - $P_2$=1.20 ლარის ღირებულებით, $a_3$= 3კგ ხორცს - $P_3$=10 ლარის ღირებულებით, $a_4$=2კგ თევზს - $P_4$=10 ლარის ღირებულებით და $a_5$=10 ცალ კვერცხს - $P_5$=0.25 ლარის ღირებულებით, თუ $\alpha_1$=5; $\alpha_2$=3; $\alpha_3$=2; $\alpha_4$=4 და $\alpha_5$=1. მომხმარებლის ბიუჯეტი თვეში 400 ლარია. ამოცანა ამოხსენით ანალიზურად და კომპიუტერის მეშვეობით. მიღებული შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

## 1.3. ფუნქციის ელასტიკურობა

განვიხილოთ y=f(x) ფუნქციონალური დამოკიდებულება. დამოუკიდებელი x ცვლადის ცვლილება იწვევს y ფუნქციის მნიშვნელობის ცვლილებას. ისმის კითხვა: როგორ გავზომოთ დამოკიდებული y ცვლადის მგრძნობიარობა x-ის ცვლილების მიმართ?! ამ ცვლილების ერთ-ერთი მაჩვენებელია ფუნქციის წარმოებულის ცნება $y'$, რაც ახასიათებს y-ის ცვლილების სისწრაფეს x-ის ცვლილებისას.

თუმცა, ეკონომიკაში წარმოებულის ცნების გამოყენება ხშირად მოუხერხებელია, ვინაიდან დამოკიდებულია საზომი ერთეულის არჩევაზე. მაგალითად, თუ განვიხილავთ შაქარზე მოთხოვნის y ფუნქციას x=p ფასზე დამოკიდებულებით, ვნახავთ, რომ p ფასის თითოეული შემთხვევაში, წარმოებულის რიცხვითი მნიშვნელობა $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ დამოკიდებულია იმაზე, რომ შაქარზე მოთხოვნა იზომება კილოგრამობით თუ ცენტნერობით. პირველ შემთხვევაში, წარმოებული იზომება კგ/ლარით, შესაბამისად, მისი მნიშვნელობა ფასის ერთსა და იმავე მნიშვნელობისას, მოთხოვნის სიდიდის ერთეულიდან გამომდინარე, სხვადასხვა იქნება. ამიტომ, ეკონომიკაში ფუნქციის ცვლილების მგრძნობიარობის გასაზომად შეისწავლიან x-ისა და y-ის არა აბსოლუტური, არამედ მათი ფარდობითი ან პროცენტული ცვლილებების კავშირს (მაშინ, როცა ფიზიკაში ამ სირთულეს თავს არიდებენ ერთეულთა საერთაშორისო SI სისტემის შემოტანით).

**განსაზღვრება.** y=f(x) **ფუნქციის ელასტიკურობა** ეწოდება x და y ცვლადების ფარდობითი ცვლილებების შეფარდების ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი $\Delta x \to 0$.

სხვაგვარად, თუ y=f(x) ფუნქციის ელასტიკურობას აღვნიშნავთ $E_x(y)$-ით, მაშინ

$$E_x(y) \overset{def}{\equiv} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \qquad (1.45)$$

**განსაზღვრება.** f(x) ფუნქციის **საშუალო მნიშვნელობა** x წერტილში, ეწოდება f(x)/x ფარდობას.

თუ, f(x) ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობას აღვნიშნავთ Af(x)-ით, გვექნება

$$Af \overset{def}{\equiv} \frac{f(x)}{x}. \qquad (1.46)$$

**განსაზღვრება.** ფუნქციის **ზღვრული მნიშვნელობა** ეწოდება ფუნქციის $f'(x)$ წარმოებულს (აღნიშვნა *Mf*).

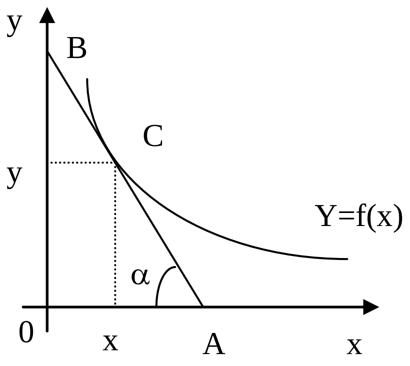
ამრიგად, ამ ორი განსაზღვრებით შესაძლებელია განვმარტოთ f(x) ფუნქციის ელასტიკურობა, როგორც ზღვრული მნიშვნელობის შეფარდება საშუალო მნიშვნელობასთან, ანუ

$$E_x f = \frac{Mf}{Af} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}. \tag{1.47}$$

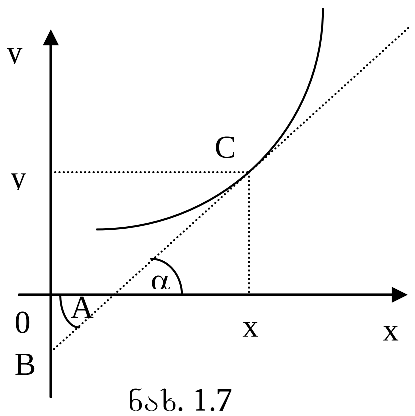
ზოგჯერ მოსახერხებელია **ელასტიკურობის წარმოდგენა ლოგარითმული წარმოებულის სახით**.

$$Ef = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}. \tag{1.48}$$

**გადავიდეთ ელასტიკურობის ცნების გეომეტრიულ ინტერპრე-ტაციაზე.**




ნახ. 1.6




ნახ. 1.7

განვიხილავთ ორ შემთხვევას: 1.6 ნახ-ზე $f(x)$ ფუნქცია კლებულობს, ხოლო 1.7 ნახ-ზე – იზრდება.

განსაზღვრების თანახმად, $y = f(x)$ ფუნქციის ელასტიკურობა $C(x;y)$ წერტილში გამოიახება შემდეგი ფორმულით: $E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$, $\frac{dy}{dx} = -tg\alpha$ (1.6 ნახ-ის შემთხვევაში) და $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$ (1.7 ნახ-ის შემთხვევაში) წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის მიხედვით: ამრიგად, ერთმანეთის პარალელურად განვიხილავთ შემდეგ ორ შემთხვევას: ა). 1.6 ნახ და ბ) 1.7 ნახ.

ცხადია,

ა) $E_x(y) = -tg\alpha \cdot \frac{x}{y}$;

ბ) $E_x(y) = tg\alpha \cdot \frac{x}{y}$.

ასევე ცხადია, თუ:

ა) $x=|Ox|;$

$y=|Oy|.$

ბ) $x=|Ax|+|OA|;$

$y=|Oy|$

მაშინ მივიღებთ:

ა) $E_x(y)=-tg\alpha\dfrac{|Ox|}{|Oy|};$ $\quad |Ox|=|yC|=|BC|\cos\alpha;$ $\quad |Oy|=|xC|=|AC|\sin\alpha;$

ბ) $E_x(y)=tg\alpha\dfrac{|Ax|+|OA|}{|Oy|};$

$|Ax|=|AC|\cos\alpha;\qquad |OA|=|AB|\cos\alpha;\qquad |Oy|=|AC|\sin\alpha.$

რაც საშუალებას იძლევა $y=f(x)$ ფუნქციის ელასტიკურობა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

ა) $E_x(y)=-tg\alpha\cdot\dfrac{|BC|\cos\alpha}{|AC|\sin\alpha}=-\dfrac{|BC|}{|AC|};$

ბ) $E_x(y)=tg\alpha\cdot\dfrac{|AC|\cos\alpha+|AB|\cos\alpha}{|AC|\sin\alpha}=\dfrac{|BC|}{|AC|}.$

ამგვარად, $y=f(x)$ ფუნქციის ელასტიკურობა ტოლია:

$$E_x(y)=-\frac{|BC|}{|AC|}.$$

როცა C წერტილში გამავალი AB მხების კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის A და B წერტილები განლაგებულია C წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს (1.6 ნახ-ისშემთხვევაში); ხოლო, თუ გადაკვეთის A და B წერტილები განლაგებულია C წერტილის ერთ მხარეს (1.7ნახ-ის შემთხვევაში), მაშინ

$$E_x(y)=\frac{|BC|}{|AC|}.$$

**განვიხილოთ ფუნქციის ელასტიკურობის ოპერატორის შემდეგი თვისებები:**

1) ელასტიკურობა წარმოადგენს სიდიდეს, რომლის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ რა ერთეულებით იზომება x და y სიდიდეები, ე.ი.

$$E_{dx}(by)=E_x(y). \tag{1.49}$$

**დამტკიცება.**

$E_{bx}(b\cdot y)=\dfrac{d(by)}{d(ax)}\cdot\dfrac{ax}{by}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{ax}{by}=E_x(y).$ რისი დამტკიცებაც გვინდოდა;

2) ურთიერთშებრუნებული ფუნქციების ელასტიკურობები, ასევე ურთიერთშებრუნებული სიდიდეებია

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}. \tag{1.50}$$

**დამტკიცება.**

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)};$$

3) ერთსა და იმავე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის ნამრავლის ელასტიკურობა ტოლია ელასტიკურობათა ჯამის:

$$E_x(U \cdot V) = E_x(U) + E_x(V). \tag{1.51}$$

**დამტკიცება.**

$$E_x(U \cdot V) = \frac{d(U \cdot V)}{dx} \cdot \frac{x}{U \cdot V} = \frac{U' \cdot V + V' \cdot U}{U \cdot V} \cdot x = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) + E_x(V).$$

4) ერთსა და იმავე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის შეფარდების ელასტიკურობა ტოლია ელასტიკურობათა სხვაობისა:

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = E_x(U) - E_x(V). \tag{1.52}$$

**დამტკიცება.**

$$E_x\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{d\left(\frac{U}{V}\right)}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{U}{V}} = \frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2} \cdot \frac{xV}{U} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} - \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V} = E_x(U) - E_x(V);$$

5) ერთსა და იმავე x არგუმენტზე დამოკიდებული ორი U(x) და V(x) ფუნქციის ჯამის ელასტიკურობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$E_x(U + V) = \frac{UE_x(U) + VE_x(V)}{U + V}. \tag{1.53}$$

**დამტკიცება.**

$$E_x(U+V) = \frac{\partial(U+V)}{\partial x} \cdot \frac{x}{U+V} = (U' + V') \cdot \frac{x}{U+V} = \frac{U \cdot \frac{dU}{dx} \cdot \frac{x}{U} + V \cdot \frac{dV}{dx} \cdot \frac{x}{V}}{U+V} =$$

$$= \frac{U \cdot E_x(U) + V \cdot E_x(V)}{U+V}.$$

6) $E_x(x) = 1.$

**დამტკიცება:**

$$E_x(x) = \frac{dx}{dx} \cdot \frac{x}{x} = 1.$$

*შედეგები.*

ა) $E_x\left(U^n(x)\right)=nE_x(U)$;

ბ) ხარისხოვანი $y=x^n$ ფუნქციის ელასტიკურობა

$E_x\left(x^n\right)=nE_x(x)=n$;

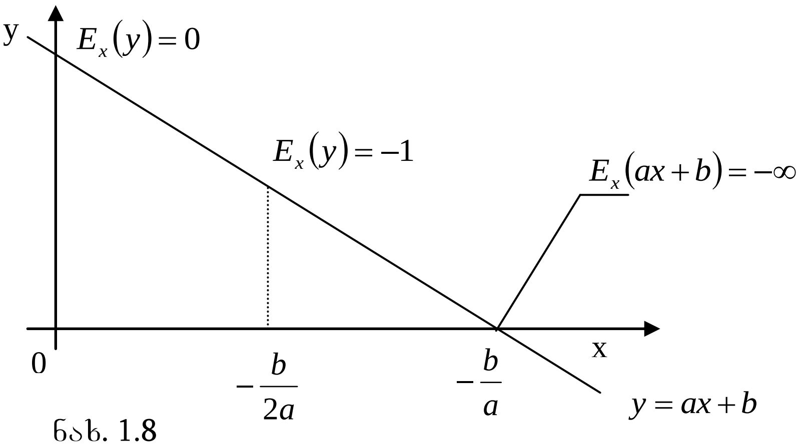
გ) მაჩვენებლიანი $y=a^x$ ფუნქციის ელასტიკურობა

$$E_x\left(a^x\right)=\frac{da^x}{dx}\cdot\frac{x}{a^x}=a^x\ln a\cdot\frac{x}{a^x}=x\ln a;$$

დ) წრფივი $y=ax+b$ ფუნქციის ელასტიკურობა

$$E_x(ax+b)=\frac{d(ax+b)}{dx}\cdot\frac{x}{ax+b}=\frac{ax}{ax+b}.$$

გრაფიკულად განვიხილოთ ელასტიკურობის სიდიდის ცვლილება წრფივი $Y=ax+b$ ფუნქციისათვის (ნახ. 1.8).




ნახ. 1.8

როგორც ვხედავთ, წრფივი ფუნქციის ელასტიკურობა დამოკიდებულია წერტილზე, რომელშიც მას განვიხილავთ, და მისი სიდიდე იცვლება $-\infty$-დან (აბსცისათა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში) ნულოვან მნიშვნელობამდე (ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილში).

## 1.3.1. ელასტიკურობის ცნების გამოყენება ეკონომიკაში

ვთქვათ, გვაქვს Y დოვლათზე **მოთხოვნის ფუნქცია** $Y=f(p,B)$, სადაც $p$ ქონების ფასია, ხოლო $B-$ მომხმარებლის ბიუჯეტი.

მაშინ, მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიხედვით

$$E_p(Y)=\frac{\partial Y}{\partial P}\cdot\frac{P}{Y} \tag{1.54}$$

გვიჩვენებს $Y$ დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას, როცა ამ ქონების ფასი 1%-ით იცვლება.

$E_p(Y)$ ახასიათებს მომხმარებლის მგრძნობიარობას პროდუქციაზე ფასის ცვლილების მიმართ. **თუ მოთხოვნის ფასობრივი ელასტიკურობა აბსოლუტური სიდიდით მეტია 1-ზე, მაშინ მოთხოვნას ეწოდება ელასტიკური, თუ ნაკლებია 1-ზე, მაშინ - არაელასტიკური. ხოლო, თუ $|E_p(Y)| = 1,$ მაშინ ამბობენ, რომ მოთხოვნას აქვს ერთეულოვანი ელასტიკურობა.**

$$E_B(Y) = \frac{\partial Y}{\partial B} \cdot \frac{B}{Y} \qquad (1.55)$$

სიდიდეს ეწოდება მოთხოვნის ელასტიკურობა შემოსავლების მიხედვით. ეს სიდიდე ახასიათებს $Y$ დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის პროცენტულ ცვლილებას მომხმარებლის $B$ შემოსავლის ერთი პროცენტით შეცვლისას.

მოთხოვნის დადებითი ელასტიკურობა შემოსავლის მიხედვით ახასიათებს დოვლათის ხარისხიან საქონელს, ხოლო უარყოფითი ელასტიკურობა – უხარისხო საქონელს (რომელსაც ყიდულობენ მხოლოდ დაბალი ფასისა და მომხმარებლის მცირე $B$ შემოსავლის გამო).

ასე რომ, მეურნეობის დარგში შემოსავლის მიხედვით, მოთხოვნის მაღალი დადებითი ელასტიკურობის კოეფიციენტი $E_B(Y)$ მიუთითებს იმაზე, რომ მისი წილი ეკონომიკურ ზრდაში მეტია, ვიდრე წილი ეკონომიკის სტრუქტურაში. ამიტომ, მას აქვს შანსი სამომავლო ზრდისა და განვითარებისათვის. პირიქით, თუ $E_B(Y) < 1,$ მაშინ $Y$ საქონელს მოელის ჩაწოლა და წარმოების შემცირების პერსპექტივა.

$Y_i$ **დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის შესწავლისას, როცა სხვა** $Y_j$ **- დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცვლელი ან შემავსებელი)** $p_j$ **ფასი იცვლება ერთი პროცენტით, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობის ცნება.**

$$E_{pj}(Y_i) = \frac{\frac{dY_i}{Y_i}}{\frac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i}. \qquad (1.56)$$

თუ $E_{pj}(Y_i) > 0 \Rightarrow$, i და j დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებლებია, ხოლო თუ $E_{pj} < 0 \Rightarrow$, დოვლათები ურთიერთშემავსებელია.

**დასკვნა:**

1) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიკურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფო მაღალია დოვლათის ჩანაცვლებისუნარიანობა;

2) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიკურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო მაღალია მოცემულ დოვლათზე ხარჯების ხვედრითი წონა მომხმარებლის შემოსავალში;
3) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიკურობა მით უფრო მაღალია, რაც უფრო დაბალია მოცემულ დოვლათზე მოთხოვნის სუბიექტური აუცილებლობა;
4) მოთხოვნის ფუნქციის ფასის მიხედვით ელასტიკურობა იზრდება რელაქსაციის დროის შუალედის ზრდასთან ერთად.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.3

**ამოცანა.** ორი პროდუქტისათვის, რომელთა ფასებია შესაბამისად $P_1$ და $P_2$, მოთხოვნა წარმოდგენილია სტოუნის ფუნქციით. უნდა ვიპოვოთ თითოეულ პროდუქტზე მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიხედვით.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა:

$$B := 12$$

$$a_1 := 2$$

$$a_2 := 3$$

$$\alpha_1 := 0.$$

$$\alpha_2 := 0.$$

ფასის მიხედვით მოთხოვნის სტოუნის ფუნქცია მოცემული ორი პროდუქტისათვის:

$$Y1(P1,P2) := a_1 + \frac{\alpha_1\left(B - P1\cdot a_1 - P2\cdot a_2\right)}{P1\cdot\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}$$

$$Y2(P1,P2) := a_2 + \frac{\alpha_2\left(B - P1\cdot a_1 - P2\cdot a_2\right)}{P2\cdot\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}$$

მათი ელასტიკურობის გამოთვლა:

$$E1(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP1}Y1(P1,P2)\right)\cdot\frac{P1}{Y1(P1,P2)}$$

$$E2(P1,P2) := \left(\frac{d}{dP2}Y2(P1,P2)\right)\cdot\frac{P2}{Y2(P1,P2)}$$

ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ელასტიკურობის გამოთვლა:

$$P1 := 15$$

$$P2 := 12$$

E1(P1,P2):=-0.651

E2(P1,P2):=-0.789

**სავარჯიშო.**

მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია:

$$Y := 1000 - 8 \cdot B \cdot P$$

იპოვეთ მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასისა და ბიუჯეტის მიხედვით, ააგეთ შესაბამისი გრაფიკები; იპოვეთ, ელასტიკურობის მნიშვნელობები ფასისა და ბიუჯეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

## 1.4. მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობა ფასის მიხედვით

$Y_i$ დოვლათზე მოთხოვნის სიდიდის ცვლილების შესასწავლად, როცა სხვა $Y_j$ დოვლათზე (მოხმარებაში მისი შემცვლელი ან შემავსებელი) $p_j$ ფასი ერთი პროცენტით იცვლება, შემოდის ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობის ცნება.

$$E_{p_j}(Y_i) = \frac{\frac{dY_i}{Y_i}}{\frac{dP_j}{P_j}} = \frac{dY_i}{dP_j} \cdot \frac{P_j}{Y_i}. \qquad (1.57)$$

თუ $E_{p_j}(Y_i) > 0 \Rightarrow$, $i$ და $j$ დოვლათი ურთიერთჩამნაცვლებლებია(ყავა და ჩაი). თუ $E_{p_j} < 0 \Rightarrow$, დოვლათი ურთიერთშემავსებელია (შაქარი და ჩაი).

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.4

**ამოცანა:** მოცემულია ორი პროდუქტი, შესაბამისი ფასებით და მომხმარებლის ბიუჯეტით. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობა.

ამოხსნა. შევადგინოთ შესაბამისი პროგრამა.

## პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა:

$$n := 2$$

$$a1 := 2$$

$$a2 := 3$$

$$\alpha 1 := 0.4$$

$$\alpha 2 := 0.6$$

$$B := 120$$

მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფორმულებით:

$$Y1(P1, P2) := a1 + \frac{\alpha 1 \cdot (B - P1 \cdot a1 - P2 \cdot a2)}{P1 \cdot (\alpha 1 + \alpha 2)}$$

$$Y2(P1, P2) := a2 + \frac{\alpha 2 \cdot (B - P1 \cdot a1 - P2 \cdot a2)}{P2 \cdot (\alpha 1 + \alpha 2)}$$

მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობის გამოთვლა ფასის მიხედვით:

$$EY1(P1, P2) := \left(\frac{d}{dP2} Y1(P1, P2)\right) \cdot \frac{P2}{Y1(P1, P2)}$$

$$EY2(P1, P2) := \left(\frac{d}{dP1} Y2(P1, P2)\right) \cdot \frac{P1}{Y2(P1, P2)}$$

ფასის მნიშვნელობების შეტანა:

$$P1 := 15 \qquad P2 := 12$$

ელასტიკურობის გამოთვლა:

EY1(P1,P2):=-0.279

EY2(P1,P2):=-0.263

ამრიგად, დოვლათები ურთიერთშემავსებელია.

**სავარჯიშო.**

**ამოცანა.** მოცემულია სამი პროდუქტი. შესაბამისი ფასები და მომხმარებლის ბიუჯეტი აირჩიეთ დამოუკიდებლად. მოთხოვნა მოცემულია სტოუნის ფუნქციის მეშვეობით. გამოვთვალოთ ფასის მიხედვით მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობა. ავხსნათ მიღებული შედეგების ეკონომიკური არსი.

## 1.5. ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით

Y დოვლათის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით ტოლია:

$E_p(pY) = E_p(p) + \mathrm{E_p}(\mathrm{Y}) = 1 + \mathrm{E_p}(\mathrm{Y}).$

ვინაიდან მოთხოვნის ფასის მიხედვით ელასტიკურობა მუდამ უარყოფითია, ამ ფორმულიდან გამოდის, რომ ელასტიკური მოთხოვნის დროს ამონაგები იზრდება Y-ის რაოდენობის ზრდასთან, ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ხოლო არაელასტიკურის დროს – კლებულობს.

მაგალითად, კარგი მოსავლის დროს ფერმერების შემოსავალი შემცირდება, რადგან სოფლის მეურნეობის პროდუქტებზე მოთხოვნის ელასტიკურობა საკმაოდ დაბალია. ანალოგიურად, თუ გავზრდით აქციზებს არყის წარმოებაზე, ბიუჯეტში შემოსავლებმა შეიძლება იკლოს, ვინაიდან სხვა ქვეყნებიდან იმპორტირებული იქნება იაფი არაყი. რასაც ადგილი ჰქონდა 1993 წელს სსრკ-ში (გორბაჩოვის კამპანია). ანალოგიური შეცდომები უფრო ადრე დაშვებული იყო ვაშინგტონში 80-იან წლებში, როცა 6%-ით გაზარდეს გადასახადი ბენზინზე, რაზეც მოთხოვნის ელასტიკურობა ამერიკელი ეკონომისტების შეფასებით შეადგენდა 0.2-ს, თუმცა, ამან გამოიწვია მოთხოვნის 33%-ით დაცემა, რაც შეესაბამება ელასტიკურობის 5.5-ის ტოლ მნიშვნელობას. ასე რომ, დიდი მნიშვნელობა აქვს მოთხოვნის ფუნქციის ანალიზური სახის სწორ დადგენას, რაც ჩვენს მიერ ხორციელდება უკვე განხილული მრავლობითი რეგრესიული ანალიზის მეშვეობით.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.5

***ამოცანა.*** მოცემულია საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია $\mathrm{Y(P)} := 28 - 0.25 \cdot \mathrm{P}$. ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით $EPY(P)$ კონკრეტული მნიშვნელობისათვის $\mathrm{P} := 12$ .

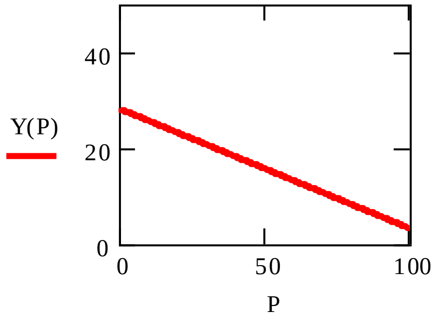
ამოხსნა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

საქონლის მოთხოვნის ფუნქციის ფასზე დამოკიდებულების მიხედვით,

$$\mathrm{Y(P)} := 28 - \frac{1}{4} \cdot \mathrm{P}$$

ავაგოთ მოთხოვნის ფასზე დამოკიდებულების გრაფიკი:



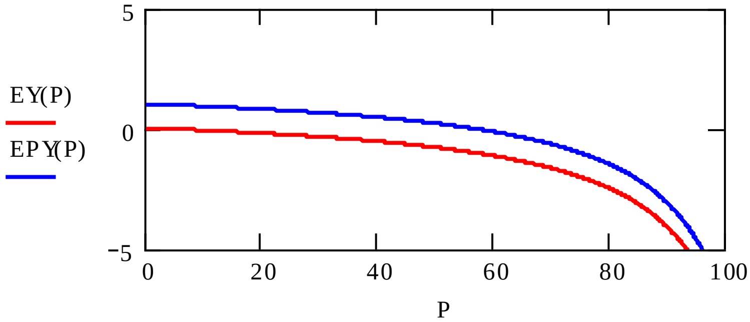

გამოვთვალოთ საქონლის მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიხედვით:

$$EY(P) := \left(\frac{d}{dP}Y(P)\right)\cdot\frac{P}{Y(P)}$$

და საქონლის გაყიდვიდან ამონაგების ელასტიკურობა მისი ფასის მიხედვით:

$$EPY(P) := 1 - |EY(P)|$$

ორივეს გრაფიკი ავაგოთ ერთ სიბრტყეზე:




ფასის კონკრეტული მნიშვნელობისათვის ვიპოვოთ ამონაგების ელასტიკურობა :

$$P := 1[illegible]$$
$$EPY(P) := 0.88$$

მივიღეთ, რომ Y-ის რაოდენობის ზრდასთან ან ფასის შემცირებასთან ერთად, ამონაგები მცირდება.

**სავარჯიშო.**

***ამოცანა.*** მოცემულია საქონლის მოთხოვნის ფუნქცია $Y(P):=29-0.2\cdot P$. ვიპოვოთ გაყიდვებიდან ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით $EPY(P)$ კონკრეტული მნიშვნელობისათვის $P := 1[illegible]$ .

## 1.6. წარმოების თეორია. საწარმოო ფუნქცია

უნდა აღინიშნოს, რომ წარმოების თეორიაში ყველაზე ძირითადია საწარმოო საქმიანობის საკითხები. მაგრამ ჩვენ თავიდანვე შემოვიტანოთ, ადრე, მოხმარების თეორიაში შემოტანილის ანალოგიურ ცნებები; რათა ადვილი იყოს ეკონომიქსის პრობლემატიკასთან დაკავშირებული საკითხების ჩამოყალიბება.

**სარგებლიანობის ფუნქციის** დონის წირებს წარმოადგენს **განურჩევლობის მრუდები.** წარმოების თეორიაში სარგებლიანობის ფუნქციას შეესაბამება **საწარმოო ფუნქციის ცნება**, ხოლო, საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს **იზოკვანტა** ეწოდება. მაშასადამე, იზოკვანტას ცნება წარმოების თეორიაში, ისეთივე როლს ასრულებს, როგორც განურჩევლობის მრუდის ცნება მოხმარების თეორიაში. აქ, არა მარტო ანალოგიასთან გვაქვს საქმე, არამედ ფუნქციის სახეებიც თანხვდენილია.

**განსაზღვრება.** $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ სახის ფუნქციას, სადაც $x_1,x_2,...x_n$ გამოყენებული რესურსების მოცულობებია, ხოლო Y გამოშვებული პროდუქციის მოცულობაა და მას **საწარმოო ფუნქცია** ეწოდება.

მოცემული პროდუქტის გამომშვები ცალკეული საწარმოსათვის (ფირმისათვის) საწარმოო ფუნქცია $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ გამოშვებული პროდუქციის მოცულობას აკავშირებს (ნატურალურ ან ღირებულებით გამოსახულებაში) სხვადასხვა სახის შრომით დანახარჯებთან და აგრეთვე დროის, ნედლეულის სხვადასხვა სახეობის, მაკომპლექტებელი ნაწილების, ენერგიის, ძირითადი კაპიტალის დანახარჯებთან. ასეთი ტიპის საწარმოო ფუნქცია კარგად ახასიათებს წარმოების მოქმედ ტექნოლოგიას.

საწარმოო ფუნქციის აგებისას, ცალკეული რეგიონის ან მთლიანად ქვეყნისათვის, პროდუქტის წლიური გამოშვების $Y$ მაჩვენებლად უფრო ხშირად იღებენ რეგიონის ან შესაბამისად ქვეყნის ერთობლივ პროდუქტს (შემოსავალს), აღრიცხულს უცვლელ ფასებში, რესურსებად განიხილავენ ძირითად კაპიტალს ($x_1=K$ – წლის განმავლობაში გამოყენებული მოცულობა) და ცოცხალ შრომას ($x_2=L$ – ერთი წლის განმავლობაში ცოცხალი მუშახელის ერთეულთა რაოდენობა). ამრიგად, **მაკროეკონომიკაში განიხილავენ ორფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას**

$$Y = f(K,L). \tag{1.58}$$

**P.S.** ზოგჯერ, გამოყენებული ბუნებრივი რესურსების მოცულობის დამატებით გათვალისწინების ხარჯზე, განიხილავენ მაკროეკონომიკის სამფაქტორიან საწარმოო ფუნქციას. რაც მეტია

ფაქტორთა რიცხვი, მით უფრო ზუსტია მოდელი, მაგრამ უფრო რთულიც.

### 1.6.1. საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები

ა) წარმოებაში გამოყენებული რესურსების ხარჯის გაზრდით პროდუქციის გამოშვება ვერ შემცირდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{1.59}$$

**განსაზღვრება.** $G$ სიმრავლეს ეწოდება $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ საწარმოო ფუნქციის **ეკონომიკური არეალი**, თუ $\forall\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ წერტილისათვის $G$ სიმრავლიდან ადგილი აქვს (1.59) თანადობას.

***მაგალითი.*** თუ რესურსად განიხილება მიწა, მაშინ სამუშაო ძალის უცვლელობისას, იჯარით აღებული მიწის ფართობის გაზრდამ შეიძლება კი არ გაზარდოს შემოსავალი, პირიქით, შეამციროს კიდეც. ის მაქსიმალური ფართობი, რომელამდეც დაქირავებული მიწის ფართობის გაზრდა მომგებიანია, წარმოადგენს მოცემულ მაგალითში რესურსის ეკონომიკური არეალის ზღვარს. ეკონომიკური არეალის გარეთ, რესურსის ეფექტურობა იწყებს დაცემას;

ბ) **განსაზღვრება:** $Y=f(x_1,x_2,...x_n)$ საწარმოო ფუნქციის ცვლილების სისწრაფეს, $x_i$ რესურსის ცვლილების მიხედვით, *i*-ური **რესურსის ზღვრული ეფექტურობა** ეწოდება. ცხადია, *i*-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა წარმოადგენს *i*-ური ცვლადის შემცველი საწარმოო ფუნქციის კერძო წარმოებულს $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

სხვა რესურსების რაოდენობის მუდმივობის პირობებში, ერთი რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის გამოყენების ეფექტურობა მცირდება. საწარმოო ფუნქციის ამ მეორე თვისებას ეწოდება **კლებადი ზღვრული ეფექტურობა**. ეს პირობა მოცემულია შემდეგი უტოლობით:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{1.60}$$

გ) ერთი *i*-ური რესურსის გაზრდით სხვა *j*-ური რესურსის ზღვრული ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0, \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,n} \qquad i \neq j. \tag{1.61}$$

დ) საწარმოო ფუნქცია წარმოადგენს $k>0$ ხარისხის ერთგვაროვან ფუნქციას. როცა $k>1$, წარმოების მასშტაბის t-ჯერ გაზრდით $(t>1)$ წარმოების მოცულობა $t^k$-ჯერ იზრდება, ე.ი. ადგილი აქვს წარმოების მასშტაბის ზრდით გამოწვეულ წარმოების ეფექტურობის ზრდას. როცა $k=1$, გვაქვს წარმოების მუდმივი ეფექტურობა წარმოების მზარდი მასშტაბების პირობებში (ან გვაქვს კუთრი გამოშვების დამოუკიდებლობა წარმოების მასშტაბისაგან - constant returns to scale).

ეს პირობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \ldots x_n)\,. \qquad (1.62)$$

## 1.6.2. რამდენიმე რესურსის ტიპური საწარმოო ფუნქციები

ა) როგორც მიკრო, ასევე მაკროეკონომიკურ დონეზე საწარმოო საქმიანობის მოდელირებისათვის ხშირად გამოიყენება **კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქცია:**

$$Y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1}\,. \qquad (1.63)$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ **მულტიპლიკაციურ**(ნამრავლის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას.

განიხილავენ შემთხვევას, როცა $x_1 = K$ გამოყენებული ძირითადი კაპიტალის მოცულობაა (ძირითადი ფონდები), ხოლო $x_2 = L$ ცოცხალ სამუშაო ძალაზე დანახარჯები, ე.ი.

$$Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{1-\alpha_1}\,. \qquad (1.64)$$

ბ) **წრფივ საწარმოო ფუნქციას** შემდეგი სახე აქვს:

$$Y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n\,. \qquad (1.65)$$

იგი ე.წ. **ადიტიური(**ჯამის ფორმის გამო) საწარმოო ფუნქციას წარმოადგენს. მულტიპლიკაციურიდან ადიტიურ საწარმოო ფუნქ-ციაზე გადასვლა ხდება გალოგარითმებით.

მართლაც, (1.63)-დან გალოგარითმებით მივიღებთ:

$$\ln Y = \ln\alpha_0 + \alpha_1 \ln x_1 + (1-\alpha_1)\ln x_2\,. \qquad (1.66)$$

ამრიგად გადავდივართ ადიტიურ ფორმაზე.

უფრო დაწვრილებით განვიხილოთ კობ-დუგლასის (1.64) ფუნქცია. ის შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{Y}{L} = \alpha_0 \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha_1}. \qquad (1.67)$$

**განსაზღვრება.** $\frac{Y}{L}$ და $\frac{K}{L}$ წილადებს შესაბამისად ეწოდება **შრომის მწარმოებლობა და შრომის კაპიტალაღჭურვილობა.**

**განსაზღვრება.** $\frac{Y}{K}$ წილადს **კაპიტალის მწარმოებლურობა** ან **კაპიტალუკუგება** ეწოდება.

**განსაზღვრება.** $\frac{K}{Y}$ წილადს ეწოდება **პროდუქციის გამოშვების კაპიტალტევადობა**, ხოლო $\frac{L}{Y}$-ს – **პროდუქციის გამოშვების შრომატევადობა.**

საწარმოო ფუნქციისათვის $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ პარამეტრებს პოულობენ გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდით, იყენებენ რესურსებისა და გამოშვებების მოცულობათა დროით მწკრივებს.

***P.S.*** უნდა გავითვალისწინოთ, რომ საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები $T_0$ დროის პერიოდში მოცემულია დროითი მწკრივების საფუძველზე. მიღებულმა საწარმოო ფუნქციამ შეიძლება სარწმუნო შედეგები მოგვცეს მომავლი დროის შუალედისათვის, რომელიც ხანგრძლივობით არ აღემატება $\frac{1}{3}T_0$-ს.

**განსაზღვრება.** წერტილთა სიმრავლეს, რომელიც წარმოადგენს $Y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ საწარმოო ფუნქციის დონის წირებს (ჰიპერზედაპირს), **იზოკვანტა** ეწოდება.

**P.S.** როგორც ვხედავთ, იზოკვანტის ცნება საწარმოო ფუნქციისათვის, განურჩევლობის მრუდის ცნების ანალოგიურია სარგებლიანობის ფუნქციისათვის.

**განსაზღვრება.** $Y = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ **საწარმოო ფუნქციის** $E_{x_1}(Y)$ **ელასტიკურობას** $i-$**ური რესურსის მიხედვით** ეწოდება $i-$ური რესურსის $M_i$ ზღვრული მწარმოებლობის შეფარდება მის $A_i$ საშუალო მწარმოებლობასთან $i-$ური რესურსის მიხედვით.

$$E_{x_i}(Y) = \frac{M_i Y}{A_i Y} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f(x_1, x_1, \dots, x_n)}. \tag{1.68}$$

**განსაზღვრება.** ყველა რესურსის მიხედვით ელასტიკურობათა ჯამს, ეწოდება **წარმოების ელასტიკურობა**:

$$E_x(Y) = \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}(Y). \tag{1.69}$$

**ამოცანა.** შეამოწმეთ, სრულდება თუ არა საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები, მულტიპლიკაციური და ადიტიური საწარმოო ფუნქციისათვის.

**განსაზღვრება.** $i-$ური რესურსის j-ურით **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმა** ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i}, \quad i, j = \overline{1, n} \tag{1.70}$$

გამოშვების Y მოცულობის მუდმივობის პირობებში.

**ამოცანა.** ორფაქტორიანი საწარმოო $Y = f(x_1, x_1)$ ფუნქციისათვის ჩამოაყალიბეთ თეორია ანალოგიური იმ თეორიისა, რომელიც ჩამოვაყალიბეთ ორდოვლათიანი სარგებლიანობის ფუნქციისათვის. ამ შემთხვევაში შეისწავლეთ იზოკვანტების სახე. დაამტკიცეთ, რომ ამ დროს **ჩანაცვლების ზღვრული ნორმაა**:

$$R_{12} = \frac{Ex_1Y}{Ex_2Y} \cdot \frac{x_2}{x_1}. \tag{1.71}$$

## 1.7. ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი მოდელი

ჩვენ ძირითადად განვიხილეთ სტატიკური ეკონომიკის ამოცანები. ახლა შევისწავლოთ დინამიკური ამოცანები, ანუ ამოცანები, სადაც ეკონომიკის განმსაზღვრელი პარამეტრები – ფასები, მოთხოვნა, მიწოდება და ა.შ. იცვლება დროის მიხედვით და ურთიერთქმედებს ერთმანეთთან.

პირველ რიგში შევისწავლოთ ბაზრის უმარტივესი მოდელი, რომელსაც უწოდებენ ობობას ქსელისებრს (cobweb model).

ჩავთვალოთ, რომ ერთი საქონლის ბაზარზე $D(t)$ მოთხოვნის ფუნქცია და $Y(t)$ მიწოდების ფუნქცია, $P(t)$ ფასის წრფივი ფუნქციებია ან $P(t-1)$ ფასისა, დროის წინა მომენტისათვის.

მოთხოვნის ფუნქცია:

$$D(t) = A_2 + A_1 \cdot P(t), \tag{1.72}$$

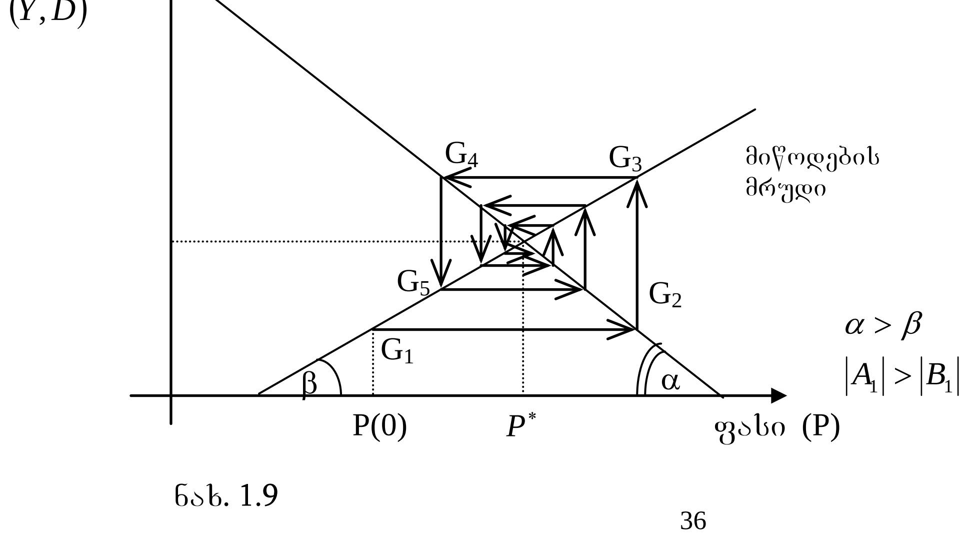
სადაც $A_1$ და $A_2$ მუდმივი პარამეტრებია;

მიწოდების ფუნქცია:

$$Y(t) = B_2 + B_1 \cdot P(t-1), \tag{1.73}$$

სადაც $B_1$ და $B_2$ მუდმივი პარამეტრებია.

მოთხოვნისა და მოწოდების მრუდები გამოვსახოთ სიბრტყეზე, რომლის აბსცისათა ღერძზე განთავსებულია ფასები, ხოლო ორდინატთა ღერძზე - გარიგებათა რიცხვი.




ნახ. 1.9

ობობას ქსელისებრი მოდელის არსი შემდეგია:

ა) მიწოდება რეაგირებს ფასის ცვლილებაზე გარკვეული ლაგით (დაგვიანებით); სხვა სიტყვებით, დღევანდელი $Y(t)$ მიწოდება განისაზღვრება გუშინდელი $P(t-1)$ ფასით, ხოლო დღევანდელი $D(t)$ მოთხოვნა განისაზღვრება დღევანდელი ფასით.

ბ) ყოველი პერიოდის $P(t)$ ფასი დგინდება იმ დონეზე, რომ გათანაბრდეს მოთხოვნა და მიწოდება, ე.ი. იმ დონეზე, რომლის დროსაც $D(t)=Y(t)$.

ეს პროცესი თანდათან უახლოვდება წონასწორულ $P^*$ ფასს, თუ $\left|\frac{B_1}{A_1}\right|<1$. სხვაგვარად, პროცესი განშლადია.

განვიხილოთ 1.9 ნახ. პროცესი იწყება $G_1$ წერტილიდან, როდესაც პროდუქტის ფასი ტოლია $P(0)$. ვინაიდან $G_1$ წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ქვემოთ, ფასი გაიზრდება $G_2$ წერტილამდე, შემდეგ ფასი გაიყინება და პროდუქტის მოწოდების მოცულობა $G_3$ წერტილამდე იზრდება. რადგან $G_3$ წერტილი მდებარეობს მოთხოვნის მრუდის ზემოთ, ჩვენ გვაქვს იმაზე მეტი საქონელი, ვიდრე მოთხოვნაა მასზე; ამიტომ $G_3$ წერტილიდან $G_4$ წერტილამდე ფასები დაეცემა. $G_4$ წერტილში ფასი იყინება და ბაზარზე მოწოდებული საქონლის მოცულობა $G_5$ წერტილამდე მცირდება. ამის შემდეგ, მოთხოვნა კვლავ აღემატება მიწოდებას, ფასები იზრდება და ა.შ.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.7

**ამოცანა.** საწარმოო ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$Y = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

ორფაქტორული საწარმოო ფუნქციის შემთხვევაში,

$Y = f(y_1, y_2)$.

დავამტკიცოთ, რომ ამ დროს:

$$R_{1,2} = \frac{E_{y1}(f)}{E_{y2}(f)} \cdot \frac{y_2}{y_1}.$$

**დამტკიცება**. განვსაზღვროთ ელასტიკურობა $y_1, y_2$-სთვის:

$$E_{y1}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{y_1}{f}; \qquad E_{y2}(f) = \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{y_2}{f};$$

$$R_{1,2} = -\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial f(y_1, y_2)}{\partial y_2}} = -\frac{E_{y1}(f(y_1, y_2)) \cdot \dfrac{f(y_1, y_2)}{y_1}}{E_{y2}(f(y_1, y_2)) \cdot \dfrac{f(y_1, y_2)}{y_2}} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{f}{y_1} \cdot \frac{y_2}{f} = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{y_2}{y_1}.$$

შევამოწმოთ მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის სრულდება თუ არა საწარმოო ფუნქციის ძირითადი თვისებები.

1. მოცემული პროდუქტის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, ეფექტურობა იზრდება, ე.ი.

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} > 0.$$

ეს დავამტკიცოთ მულტიპლიკაციური საწარმოო ფუნქციისათვის

$$f = \alpha_0 \cdot y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1; \quad \alpha_\mathrm{i} \geq 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot y_1^{\alpha_1 - 1} \cdot y_2^{1-\alpha_1} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 1};$$

$$\alpha_0, \alpha_1 > 0$$

$$y_1, y_2 > 0$$

ანუ:

$$\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 1} > 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

2. მოცემული რესურსის მოხმარების ზრდასთან ერთად, ამ რესურსის ეფექტურობა მცირდება:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^{\ 2}} < 0.$$

ეს თვისება ვაჩვენოთ კობ-დუგლასის ფუნქციისათვის:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^{\ 2}} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(\frac{1}{y_2}\right) < 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

3. რომელიმე რესურსის რაოდენობის ზრდასთან ერთად, სხვა რესურსის ეფექტურობა იზრდება.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot (\alpha_1 - 1) \cdot \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\alpha_1 - 2} \cdot \left(-\frac{y_1}{y_2^{\ 2}}\right) \geq 0 \text{ რ.დ.გ.}$$

ვაჩვენოთ, რომ საწარმოო ფუნქცია ერთგვაროვანია

$$f(Ky_1, Ky_2) = \alpha_0 \cdot (Ky_1)^{\alpha_1} \cdot (Ky_2)^{1-\alpha_1} = \alpha_0 K^{\alpha_1} K^{1-\alpha_1} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{1-\alpha_1} = Kf(y_1, y_2)$$

რ.დ.გ.

**სავარჯიშო.**

მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის მეთოდის გამოყენებით და რომელიმე წარმოების მონაცემთა ბაზის მიხედვით, ააგეთ ამ წარმოების საწარმოო კობ-დუგლასის ფუნქცია და შეისწავლეთ საწარმოო ფუნქციის ელასტიკურობა კაპიტალდაბანდებათა მიმართ.

## 1.8. ვალრასის თანამიმდევრული მიახლოების პროცესი ეროუ-გურვიცის მოდელში

მაკროეკონომიკური ანალიზის ერთ-ერთმა ფუძემდებელმა ლ. ვალრასმა შეიმუშავა ბაზრის ზოგადი ეკონომიკური წონასწორობის თეორია. ამ თეორიის დემონსტრირებისათვის ეროუ-გურვიცის მათემატიკური მოდელი განვიხილოთ საფონდო ბირჟების ან კვების პროდუქტების ბაზრის ფუნქციონირების აღწერისათვის, სადაც „სამართლიანი“ აუქციონისტი ადარებს ბაზრის მონაწილეთა მოთხოვნასა და მიწოდებას, და ფასების აწევით ან დაწევით ყიდვა-გაყიდვას არეგულირებს, ობობას ქსელისებრი მოდელის ანალოგიურად.

ბაზრის ფუნქციონირების პროცესში მონაწილე სამეურნეო სუბიექტებად ავირჩიოთ ორი საწარმო, რომელთაგან თითოეული ფლობს ორივესთვის ხელმისაწვდომ ერთადერთ რესურსს (მაგ., ცოცხალ შრომას), აწარმოებს საბოლოო მოთხოვნისა და ერთი მოხმარების თითო სახეობის პროდუქციას, რომელიც ამ მოთხოვნის საგანს წარმოადგენს. შევთანხმდეთ აგრეთვე, რომ გაცვლა ხორციელდება ერთადერთი შუამავლის – აუქციონისტის მეშვეობით. ამ შემთხვევაში ეკონომიკური ციკლი ასე გამოიყურება:


ნახ. 1.13

ასეთი ეკონომიკისათვის რესურსების ოპტიმალური განაწილების პრობლემა ჩამოყალიბდება შემდეგი სახით:

ა) პროდუქციის მოთხოვნისა და მიწოდების პირობები:

$$Y_i^s = F_i\left(L_i^d\right) \geq Y_i^d, \tag{1.74}$$

სადაც $Y_i^S$ *არის* $i$-ური საწარმოს მიერ პროდუქტის მიწოდების მოცულობა, $Y^d{}_i$ – $i$-ურ პროდუქტზე მომხმარებლის მოთხოვნის მოცულობა, $L^d{}_i$ - რესურსზე i–ური საწარმოს მოთხოვნის მოცულობა, $F_i$ – $i$–ური საწარმოს საწარმოო ფუნქცია;

ბ) რესურსის მიწოდებისა და მოთხოვნის პირობები:

$$\sum_{i=1}^{2} L_i^d \leq L^s; \tag{1.75}$$

გ) მომხმარებლის მიერ მაქსიმიზებული სარგებლიანობის ფუნქცია:

$$U\left(Y_1^d, Y_1^d\right) \to \max; \tag{1.76}$$

სადაც $U$ მომხმარებლის სარგებლიანობის ფუნქციაა.

*შენიშვნა.* მათემატიკურ ეკონომიკაში მოთხოვნის ცვლადები აღინიშნებიან $d$ ასოთი (ინგლ. Demand –მოთხოვნა), ხოლო მიწოდების ცვლადები - $s$ ასოთი (ინგლ. Supply –მიწოდება).

ცხადია, ეროუ-გურვიცის ეს ამოცანა, როდესაც მოცემულია $F_i$ საწარმოო ფუნქცია და სარგებლიანობის ფუნქცია სტაციონარული ეკონომიკის პირობებში, შეიძლება ამოიხსნას მონტე-კარლოს მეთოდით. მართლაც, ეროუ-გურვიცის სტაციონარული მოდელისათვის სპეციალურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$I^* = U\left(Y_1^d, Y_2^d\right) - \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{2} L_i^d - L^s + \tau_1^2\right)^2 - \lambda_2\left(Y_1^d - F_1\left(L_1^d\right) + \tau_2^2\right)^2 - \lambda_3\left(Y_2^d - F_2\left(L_2^d\right) + \tau_3^2\right)^2 . \quad (1.77)$$

ჩვენს შემთხვევაში, $\lambda_i \cong \varepsilon^{-1}$ ($\varepsilon -$ შეზღუდვათა დაკმაყოფილების სიზუსტე); თუმცა, უნდა გავითვალისწინოთ შემდეგი პირობაც:

დ) $i$-ური საწარმოს მოგების მაქსიმიზაცია:

$$\pi_i = P_i \cdot F_i\left(L_i^d\right) - W \cdot L_i^d \quad ; \quad (1.78)$$

სადაც $P_i$ არის i-ური საწარმოს პროდუქციის ფასი,

W – L რესურსის ფასი.

მაშინ, სტაციონარული ეკონომიკისათვის სპეციალური ფუნქცია მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I = I^* + \sum_{i=1}^{2} \pi_i \, . \quad (1.79)$$

თუმცა, ვალრასის საბაზრო პროცესი დინამიკურ პროცესს აღწერს, ანუ მოგება და ფასები დროის ფუნქციებია, ისევე როგორც მოთხოვნა და მიწოდება; მოგების გამოსახულებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\pi_i(t) = P_i(t) \cdot F_i\left(L_i^d(t)\right) - W(t) \cdot L_i^d(t). \quad (1.80)$$

ამ ამოცანის მონტე-კარლოს მეთოდით ამოსახსნელად დროის ყოველ მომენტში გვექნებოდა სხვადასხვა (1.79) ფუნქციები და მთელი დინამიკის განსაზღვრისათვის მოგვიწევდა მრავალცვლადიანი ფუნქციის მინიმიზება, ამასთან დროის საკმაოდ გრძელ მონაკვეთში შესწავლისას, ცვლადების რიცხვი ისე სწრაფად იცვლება, რომ ამოხსნა მოითხოვს სამანქანო დროის რამდენიმე საათს.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება ვალრასის მიმდევრობითი მიახლოების შემდეგი მეთოდები:

ა) აუქციონისტი $i$ -ურ საწარმოსთვის აწესებს მისი პროდუქციის $P_i(t)$ ფასსა და მისი რესურსის W(t) ფასს, აგრეთვე მომხმარებელს აცნობებს $P_i(t)$ ფასსა და მოთხოვნის ფასს, რომელიც ზღვრული სარგებლიანობის ტოლია;

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^d}(t-1); \qquad (1.81)$$

ბ) $i$-ური საწარმო, მისთვის მიცემული ფასებიდან გამომდინარე, ირჩევს წარმოების ხარჯებისა და შედეგების ისეთ თანწყობას, რომელიც მისი $\pi_i(t)$ მოგების მაქსიმიზებას ახდენს და ამ თანწყობას განსახილველად წარუდგენს აუქციონერებს;

გ) მომხმარებელი $i$ -ურ პროდუქტზე მოთხოვნას შემდეგნაირად აცხადებს: თუ $i$-ურ პროდუქტზე მოთხოვნა არ არის ან მოხმარების ზღვრული სარგებლიანობა ზღვრულ ხარჯებზე ნაკლებია, მაშინ მომხმარებელი მოთხოვნის სიდიდეს უცვლელად ტოვებს; წინააღმდეგ შემთხვევაში, ის მოთხოვნას კორექტირებას უკეთებს ზღვრული სარგებლიანობისა და ზღვრული ხარჯების სხვაობის პროპორციულად და შედეგად აწესებს $Y_i^d(t)$–ის შესაბამის სიდიდეს;

დ) აუქციონისტი ხელმძღვანელობს მოთხოვნისა და მიწოდების კანონით და ცვლის ფასებს (თანამიმდევრული მოსინჯვის პროცესი). თუ პროდუქტზე მოთხოვნა აღემატება მიწოდებას, ის ასწევს ფასს და პირიქით. თუმცა იმ შემთხვევაში, როცა ჭარბი მოთხოვნა უარყოფითია და მისი შესაბამისი ფასები ნულის ტოლია, ფასების არსებულ დონეზე ქვემოთ დაწევა შეუძლებელია.

ეკონომიკური ზრდის თეორიაში, საგარეო ვაჭრობისა და ფინანსების ანალიზისას ხშირად გამოიყენება ზოგადი წონასწორობის მოდელის ერთ-ერთი ნაირსახეობა – ორსექტორიანი მოდელი. იგი წინა მოდელისაგან იმით განსხვავდება, რომ:

ა) მასში შეყვანილია წარმოების ფაქტორების ორი სახე (კაპიტალი და შრომა);

ბ) ყოველი საწარმო განიხილება, როგორც ცალკეული დარგი;

გ) მათი საწარმოო ფუნქციები აკმაყოფილებს წარმოების მასშტაბის ერთეულზე მუდმივ უკუგების დროს მიწოდებას (წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციები).

## 1.9. წონასწორული ეკონომიკის მაკროეკონომიკური ანალიზი

“დიდი დეპრესიის” დასაწყისია მოვლენა, რომელსაც შემდგომში “შავი ორშაბათი” უწოდეს - როცა ერთი დღის განმავლობაში ამერიკაში მოხდა ფასიანი ქაღალდების კურსის კატასტროფული ვარდნა. ამ მომენტიდან, ეკონომიკური აზროვნების ავანსცენაზე ნეოკლასიკური თეორიის ნაცვლად გამოვიდა ***კეინსის მაკროეკონომიკური კონცეფცია***, რომლის მიხედვით – ***ეროვნულ მეურნეობაში წარმოება, განაწილება და ხარჯები განისაზღვრება***

*ერთი აგრეგირებული ფაქტორით – ეროვნული შემოსავლით.* თავის მხრივ ეროვნული შემოსავალი განისაზღვრება ***ეფექტური მოთხოვნით.*** მაკროეკონომიკურ თეორიას, ხშირად **შემოსავლების თეორიას** უწოდებენ.

აღსანიშნავია, რომ „დიდი დეპრესია“ აღინიშნებოდა „კეინსიანელობის“ ჩასახვით მაკროეკონომიკურ თეორიაში, ხოლო ეკონომიკის ანალიზის დარგში მან დასაწყისი დაუდო მათემატიკური მაკროეკონომიკის დაბადებას.

განვიხილოთ **ეროვნული შემოსავლის** განსაზღვრის მექანიზმი **ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის** საფუძველზე.

**ეფექტური მოთხოვნის პრინციპის მიხედვით, დროის საკმაოდ მოკლე შუალედებისათვის, რომელზეც საწარმოო შესაძლებლობათა დონე მოცემულად ითვლება, ეროვნული შემოსავალი (გამოშვების დონე) განისაზღვრება მოთხოვნის მიერ მართვადი ფაქტორებით**.

შევადგინოთ შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ერთობლივი ეფექტური მოთხოვნა $D$ განისაზღვრება, როგორც $C$ მოხმარებისა და $I$ ინვესტიციის ჯამი:

$$D = C + I. \tag{1.82}$$

სამომხმარებლო მოთხოვნა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$C = \alpha Y + A \quad (0<\alpha<1) \tag{1.83}$$

სადაც $C$ მოთხოვნაა; Y – ეროვნული შემოსავლის წრფივი ფუნქცია, α და $A$ - კონსტანტები,

$A$=(საარსებო მინიმუმი)×(მცხოვრებთა რიცხვი).

***P.S.*** *C=Consumption* (მოხმარება), *I=Investment* (კაპიტალდაბანდება), D=demand (მოთხოვნა).

α-კოეფიციენტს ეწოდება **მოხმარებისადმი მიდრეკილება**,

ხოლო $A$–ს – **საბაზო მოხმარება**.

ინვესტიციების განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ინვესტიციის დამოუკიდებელი ხასიათის ჰიპოთეზით, რომლის თანახმად ინვესტიციის დონე საწარმოს შემოსავლების დონის მიხედვით განისაზღვრება გარკვეულწილად დამოუკიდებელი გრძელვადიანი მოლოდინით.

**წონასწორული *Y** ეროვნული შემოსავალი**, რომელიც პასუ-ხობს მოთხოვნისა და მიწოდების ტოლობის პირობას,

$$D=Y^* \tag{1.84}$$

განისაზღვრება, როგორც შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$C + I = Y, \tag{1.85}$$

რომელიც მიიღება (1.82) და (1.84)-დან. შემდეგ, (1.83)-ის და (1.85)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ

$$\alpha Y^* + A + I = Y^*. \tag{1.86}$$

ხოლო (1.86)-დან ადვილად მივიღებთ

$$A + I = (1-\alpha)Y^*. \qquad (1.87)$$

რაც, თავის მხრივ, შესაძლებელს ხდის Y* წონასწორული ეროვნული შემოსავლის პოვნას

$$Y^* = (1-\alpha)^{-1}(A+I). \qquad (1.88)$$

**განსაზღვრება.** გამოსახულებას $(1-\alpha)^{-1}$, რომელიც გვიჩვენებს ინვესტიციების მოცემული ზრდის პირობებში რამდენად იზრდება ეროვნული შემოსავალი, **ინვესტიციის მულტიპლიკატორი** ეწოდება.

წონასწორობის წერტილი Y* ასახავს მიმდინარე სამეურნეო აქტიურობის ისეთ დონეს, რომელიც გარკვეულწილად აკმაყოფილებს საოჯახო მეურნეობებისა და საწარმოების მოთხოვნილებებს, მაგრამ არ ემთხვევა სასურველ დონეს, რომლის დროსაც მიიღწევა სრული დასაქმება. ამიტომ, სახელმწიფო პოლიტიკის მიზანია ინვესტიციების მოზიდვით მიაღწიოს ეროვნული შემოსავლის ისეთ $Y_f > Y^*$ დონეს, რომლის დროსაც უზრუნველყოფილია სრული დასაქმება.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.9

**ამოცანა.** ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული მნიშვნელობებისათვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი.

მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$\alpha = 0.35;$

საბაზო მოხმარება

$A = 1.2 \cdot 10^8;$

ინვესტიცია

$I = 50000.$

ამოხსნა. ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$Y(I) = (1-\alpha)^{-1} \cdot (A+I).$

მასში კონკრეტული მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ:

$Y(I) := 1.847 \times 10^8.$

## პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა:
მოხმარებისადმი მიდრეკილება

$$\alpha := 0.35$$

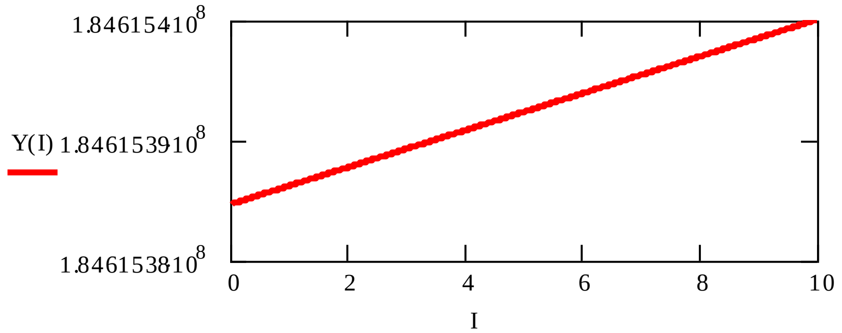
საბაზო მოხმარება

$$A := 1.2 \cdot 10^{8}$$

ეროვნული შემოსავალი:

$$Y(I) := (1 - \alpha)^{-1} \cdot (A + I)$$

გრაფიკზე ვხედავთ, თუ როგორ იცვლება ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციების სიდიდის ცვლილებისას:




გამოვთვალოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი ინვესტიციის კონკრეტული მნიშვნელობის დროს:

$$I := 50000$$

$Y(I) := 1.847 \times 10^{8}$

ნახაზიდან ჩანს, რომ ინვესტიციების სიდიდის ზრდა იწვევს ეროვნული შემოსავლის ზრდას, ანუ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი იზრდება ინვესტიციების მოზიდვის შედეგად.

**სავარჯიშო.**

**ამოცანა.** ინვესტიციების მულტიპლიკატორის, ინვესტიციების სიდიდისა და საბაზო მოხმარების კონკრეტული მნიშვნელობებისა–თვის ვიპოვოთ წონასწორული ეროვნული შემოსავალი. საჭირო მონაცემები მოიძიეთ პრაქტიკიდან გამომდინარე.

## 1.10. ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი

წინა წონასწორულ მაკროეკონომიკურ მოდელში იგულისხმებოდა, რომ საწარმოო სიმძლავრეების მოცულობა მუდმივი სიდიდეა. ეს დაშვება რეალურთან ახლოა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ განვიხილავთ ნაციონალური მეურნეობის ეკონომიკური საქმიანობის დროის მოკლე შუალედებს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საწარმოო სიმძლავრეები ინვესტიციების წყალობით იზრდება. გავითვალისწინოთ აგრეთვე კაპიტალის დაგროვების შესაძლებლობები, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია ავაგოთ ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი.

განვიხილოთ წრფივი, ერთგვაროვანი საწარმოო ფუნქცია უცვლელი მასშტაბით

$$Y = F(K, L), \tag{1.89}$$

სადაც $K$ კაპიტალია; $L$ – ცოცხალი შრომა, $Y$ – ეროვნული შემოსავალი. ცვლადად შეგვიძლია ჩავთვალოთ კაპიტალაღჭურვილობა (ფონდაღჭურვილობა):

$$x = \frac{K}{L}. \tag{1.90}$$

თუ, გავალოგარითმებთ (1.90)-ს, მივიღებთ:

$$\ln x = \ln K - \ln L. \tag{1.91}$$

ვიპოვოთ (1.91) განტოლების ორივე ნაწილის წარმოებულები დროით:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}; \tag{1.92}$$

$y = \frac{Y}{L}$ –ით აღვნიშნოთ შრომის მწარმოებლობა. (1.89) საწარმოო ფუნქციის წრფივი ერთგვაროვნებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right). \tag{1.93}$$

სხვანაირად,

$$y = F(x, 1). \tag{1.94}$$

(1.90)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$y = f(x). \tag{1.95}$$

ახლა გავაკეთოთ შემდეგი დაშვებები:

ა) დროის თითოეული მონაკვეთისათვის ეროვნული შემოსავლის გამოუყენებელი ნაწილის წილი, ანუ დაგროვების ნორმა

$$s = \frac{Y - C}{Y} = const, \tag{1.96}$$

ხოლო, დროის ყოველი მონაკვეთისათვის დაგროვებული კაპიტალის ზრდა, დროის მოცემულ მონაკვეთში გამოცხადებული ახალი საინვესტიციო მოთხოვნის ტოლია, ე.ი. $I = \dot{K}$;

ბ) შრომის მიწოდების ზრდა $n$–ის ტოლი მუდმივი სიდიდეა, რაც ფორმულის სახით ასე ჩაიწერება:

$$\frac{\dot{L}}{L} = n. \tag{1.97}$$

ამრიგად, $n$ ცოცხალი შრომის ზრდის ტემპია.

მიღებული დაშვებებიდან გამომდინარე, გამოვიყვანოთ ზრდის მაკროეკონომიკის ძირითად განტოლებას. (1.97)-ის გათვალისწინებით (1.92)-დან მივიღებთ:

$$\dot{x} = x\frac{\dot{K}}{K} - nx. \tag{1.98}$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.90)-ს და მხედველობაში მივიღებთ $I = \dot{K}$ დაშვებას, გვექნება:

$$x\frac{\dot{K}}{K} = x\frac{I}{K} = \frac{K}{L}\cdot\frac{I}{K} = \frac{1}{L}\cdot\frac{I}{1} = \frac{Y}{L}\cdot\frac{I}{Y} = \frac{Y}{L}\cdot\frac{Y-C}{Y} = y\cdot s = s\cdot f(x), \tag{1.99}$$

საიდანაც (1.98)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\dot{x} = s\cdot f(x) - nx. \tag{1.100}$$

(1.100) წარმოადგენს **ეკონომიკური ზრდის დინამიკურ განტოლებას.**

(1.100) განტოლების წონასწორობის $x^*$ წერტილი გვაძლევს შრომის წონასწორულ კაპიტალაღჭურვილობას:

$$s\cdot f(x^*) = n\cdot x^*. \tag{1.101}$$

ამრიგად, (1.101) განტოლებიდან ვღებულობთ დასაქმების ზრდის ტემპის მნიშვნელობას:

$$n = \frac{s\cdot f(x^*)}{x^*}, \tag{1.102}$$

რომლის დროსაც მიიღწევა ეკონომიკური წონასწორობა.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.10

**ამოცანა.** მოცემულია საწარმოო ფუნქცია

$$f(X) := \frac{1}{3}\cdot X + 2$$

ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური განტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა s=0.4 და დასაქმების ზრდის ტემპი n=0.3.

ამოხსნა. განვიხილოთ, ფუნქციის მნიშვნელობა და საწყისი მონაცემები

$$f(X) := \frac{1}{3}\cdot X + 2$$

$s := 0.4$

$n := 0.3$

ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$s \cdot f(X) = n \cdot X$

$\frac{1}{3} \cdot X + 2 = \frac{n \cdot X}{s}$

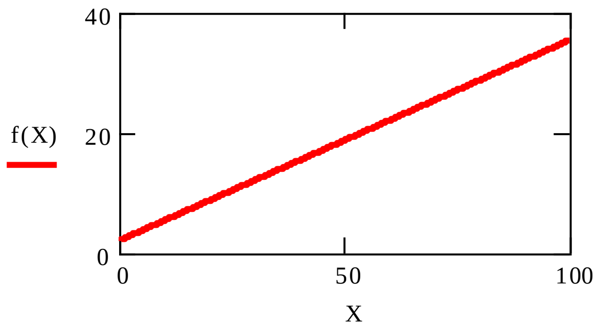
$X := \frac{2}{\frac{n}{s} - \frac{1}{3}}$

მივიღებთ შედეგს

$X = 4.8$

## პროგრამა **Mathcad-ზე**

$f(X) := \frac{1}{3} \cdot X + 2$




$n := 0.3$

$s := 0.4$

$X := 1$

Given

$s \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot X + 2 \right) = n \cdot X$

$\text{Find}(X) = 4.8$

მივიღეთ, რომ წონასწორული კაპიტალაღჭურვილობა უდრის 4.8-ს.

**სავარჯიშო.**

მოცემულია საწარმოო ფუნქცია
f(X):=8·X+29.
ამოხსენით შესაბამისი ეკონომიკური ზრდის დინამიკური განტოლება და იპოვეთ: კაპიტალაღჭურვილობის წონასწორული მნიშვნელობა თუ, დაგროვების ნორმა s=0.2 და დასაქმების ზრდის ტემპი n=0.5.

## 1.11. ფონ ნეიმანის წონასწორული ეკონომიკური ზრდის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი

ჩვენ შევისწავლეთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის სტაციონარული მოდელი. ახლა განვიხილოთ დინამიკური მოდელი:

$$X(t) = AX(t) + Y(t), \tag{1.103}$$

სადაც, $Y(t)$ საბოლოო მოთხოვნის(არაწარმოებითი დანიშნულების) ვექტორია, $X(t)$ - ეკონომიკის სექტორების გამოშვების ვექტორი, ხოლო A – ტექნოლოგიური მატრიცა.

საბოლოო მოთხოვნის ვექტორი შედგება ორი კომპონენტისაგან: $C(t)$ მოხმარების ვექტორისა და $I(t)$ ინვესტიციის ვექტორისაგან, ე.ი.

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{1.104}$$

თუ დროის $t$ მომენტში შემოსავალს აღვნიშნავთ $F(t)$-თი, მაშინ დოვლათის (ეკონომიკის სექტორების) ცალკეულ სახეობათა მოხმარების ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$C_i(t) = h_i \cdot F(t). \tag{1.105}$$

$F(t)$ შემოსავალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ფუნქციის სახით

$$F(t) = P_1X_1(t) + P_2X_2(t) + \ldots + P_nX_n(t), \tag{1.106}$$

სადაც $P_i$ არის $i$-ური დოვლათისათვის დამატებული ღირებულების წილი.

შესაბამისი ვექტორების შემოტანით, მივიღებთ:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}; \qquad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix};$$

(1.105) და (1.106)-დან ვღებულობთ:

$$C(t) = h \cdot pX(t). \tag{1.107}$$

თუ $i$-ური დარგიდან მიღებული $i$-ური სახის კაპიტალის სიდიდეს, რომელიც აუცილებელია $j$ დოვლათის წარმოებისათვის,

აღვნიშნავთ $b_{ij}$-ით, მაშინ კაპიტალის კოეფიციენტების $B$ მატრიცა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

შემდეგ გამოვიყენოთ სამუელსონ-ჰიკსის კონცეფცია. თუ დავუშვებთ, რომ პროდუქციის გამოშვებასა და ამისთვის აუცილებელ კაპიტალს შორის არსებობს პროპორციული დამოკიდებულება, მაშინ მივიღებთ, რომ $t$ დროის მანძილზე $i$-ურ დოვლათზე ($i$–ური დარგის საქონელი) საინვესტიციო მოთხოვნაა

$$I_i(t)=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Delta X_j(t),\ \text{სადაც}\ \ \Delta X_j(t)=X_j(t+1)-X_j(t). \qquad (1.108)$$

(1.108) გამოსახულება შეიძლება გადაიწეროს მატრიცული სახით:

$$I(t)=B(X(t+1)-X(t)). \qquad (1.109)$$

(1.103) და (1.104) განტოლებებიდან გვექნება:

$$X(t)=AX(t)+C(t)+I(t). \qquad (1.110)$$

შემდეგ (1.105), (1.107) და (1.110)-დან მივიღებთ:

$$X(t)=A\cdot X(t)+h\cdot PX(t)+B\cdot(X(t+1)-X(t)) \qquad (1.111)$$

ანუ

$$X(t)=(A+h\cdot P)X(t)+B\cdot(X(t+1)-X(t)). \qquad (1.112)$$

სწორედ ეს არის **დინამიკური დარგთაშორისი მოდელის ძირითადი განტოლება.** ამ მატრიცული განტოლების ამოხსნით მივიღებთ, რომ

$$X(t+1):=B^{-1}\cdot[X(t)-A\cdot X(t)-h\cdot(P\cdot X(t))+B\cdot X(t)]. \qquad (1.113)$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.11

**ამოცანა.** ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის თუ, მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B:=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix},\qquad A:=\begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix},\qquad X:=\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \qquad P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

სადაც $P_i$ დამატებული ღირებულების წილია i-ური დოვლათისთვის, $X(t)$ – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორი, წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

ჩვენი მნიშვნელობების ჩასმით, დინამიკურ დარგთაშორის მოდელში მივიღებთ:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix}$$

## პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემები

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 30 & 20 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.4 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.9 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.13 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix}$$

საერთო გამოშვების ახალი გეგმის გამოსათვლელი ფორმულა:

$$X1 := B^{-1} \cdot [X - A \cdot X - h \cdot (P \cdot X) + B \cdot X]$$

*შედეგები.*

$$X1 = \begin{pmatrix} 51.345 \\ 78.562 \\ 60.14 \end{pmatrix}$$

**სავარჯიშო.**

ვიპოვოთ მთლიანი გამოშვების ახალი გეგმა დინამიკური დარგთაშორისი მოდელისათვის, თუ მოცემულია მატრიცები დროის წინა საანგარიშო პერიოდისათვის:

$$B := \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 30 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad h := \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.14 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad X := \begin{pmatrix} 80 \\ 83 \\ 65 \end{pmatrix}$$

სადაც $P_i$ დამატებული ღირებულების წილია i-ური დოვლათისთვის, $X(t)$ – ეკონომიკის სექტორის გამოშვებული დოვლათის ვექტორი, წინა საანგარიშო პერიოდისათვის.

## 1.12. ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში

წარმოების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია პროდუქციის რეალიზაციიდან ამონაგებსა და წარმოების დანახარჯებს შორის სხვაობისა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

x – წარმოების მოცულობა;

y – რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა;

α– რეალიზებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის ფასი;

β–წარმოებული პროდუქციის ერთეული მოცულობის თვითღირებულება;

მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x. \qquad (1.114)$$

რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია წარმოებული პროდუქციის ბაზრით უზრუნველყოფის მოცუ-ლობისა, გაჯერების მოცულობისა და წარმოების რესურსებით უზ-რუნველყოფის მოცულობათა სხვაობის.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$r$ - ბაზრის მოთხოვნის კოეფიციენტი წარმოების x მოცულობაზე;

$\gamma$ - ბაზრის გაჯერების კოეფიციენტი;

$\delta$ - წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

z - წარმოებისათვის საჭირო რესურსების მოცულობა,

მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z. \qquad (1.115)$$

წარმოების რესურსების მოცულობის ცვლილების სიჩქარე ტოლია, რესურსებით უზრუნველყოფის მოცულობასა და დახარჯული რესურსების მოცულობათა შორის სხვაობისა.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$b$ – რესურსების ხარჯვის სიჩქარის კოეფიციენტი;

$l$ – წარმოების რესურსებით უზრუნველყოფის კოეფიციენტი;

მაშინ მივიღებთ განტოლებას:

$$\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y. \qquad (1.116)$$

ამრიგად, მივიღეთ საწარმოს ფუნქციონირების მათემატიკური მოდელი:

$$\dot{x} = \alpha \cdot y - \beta \cdot x;$$

$$\dot{y} = r \cdot x - \gamma \cdot y - \delta \cdot x \cdot z; \qquad (1.117)$$

$$\dot{z} = -b \cdot z + l \cdot x \cdot y.$$

ადვილად შევნიშნავთ, რომ (1.117) განტოლებები ემთხვევა ლორენცის მათემატიკურ მოდელს, როცა

$\alpha=\beta=10$; $r=28$; $\gamma=\delta=l=1$; $b=\frac{8}{3}$.

ამ შემთხვევაში, ფაზურ სიბრტყეზე მივიღებთ ლორენცის ატრაქტორს, რომელიც ფრაქტალურ სიმრავლეს წარმოადგენს. ლორენცის ატრაქტორი შეესაბამება დეტერმინირებულ სისტემაში ქაოსის წარმოქმნის მოვლენას. ამ შემთხვევაში, წარმოებისა და ამონაგების მოცულობები აღარაა მართვადი და სისტემა მიდის ნგრევისაკენ. ამიტომ ცდილობენ, სისტემის ქაოსური მუშაობის რეჟიმებს თავი აარიდონ, პარამეტრების შესაბამისად შერჩევის საშუალებით.

## ლაბორატორიული სამუშაო 1.12

**ამოცანა.** ამოხსენით ლორენცის განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{d}{dt}x(t) = 10 \cdot y(t) - 10 \cdot x(t)$$
,

$$\frac{d}{dt}y(t) = -y(t) - x(t) \cdot z(t) + 28 \cdot x(t)$$
,

$$\frac{d}{dt}z(t) = x(t) \cdot y(t) - \frac{8}{3} \cdot z(t)$$
,

ერთეულოვანი საწყისი პირობების შემთხვევაში და გამოიკვლიეთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორი ფაზურ სიბრტყეზე.

ამოხსნა.
ლორენცის განტოლებათა სისტემას ადვილად ამოვხსნით Mathcad-ის მეშვეობით.

### პროგრამა Mathcad-ზე

ლორენცის განტოლებათა სისტემას Mathcad-ზე შეესაბამება მატრიცული ოპერატორი:

$$D(t, Q) := \begin{pmatrix} 10 \cdot Q_1 - 10 \cdot Q_0 \\ -Q_1 - Q_0 \cdot Q_2 + 28 \cdot Q_0 \\ Q_0 \cdot Q_1 - \frac{8}{3} \cdot Q_2 \end{pmatrix}$$

$$Npts := 300($$

$$L := Rkadapt\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, 0, 50, Npts, D\right]$$

$$t := L^{\langle 0 \rangle}$$

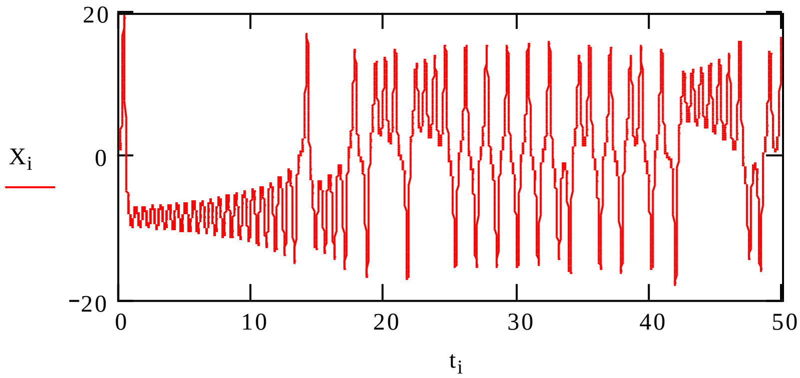
$$X := L^{\langle 1 \rangle}$$

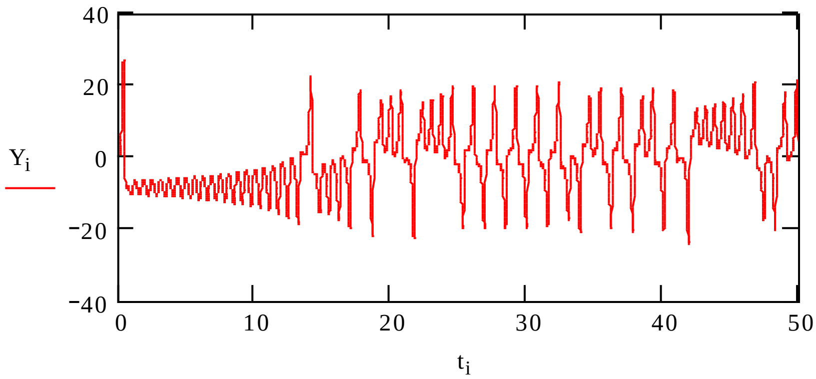
$$Y := L^{\langle 2 \rangle}$$

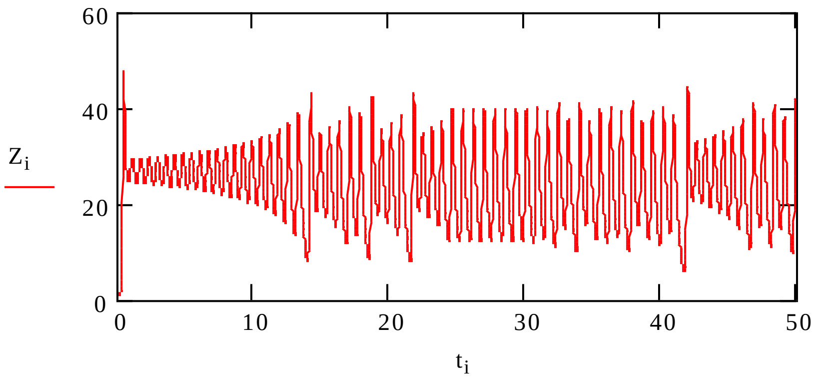
$$Z := L^{\langle 3 \rangle}$$

ამონახსნები მოიცემა გრაფიკების მეშვეობით:

$$i := 0..Npts$$




ავაგოთ დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე:

$\varepsilon := 0.001$

$R^{\langle 0 \rangle} := X$

$R^{\langle 1 \rangle} := X + \varepsilon$

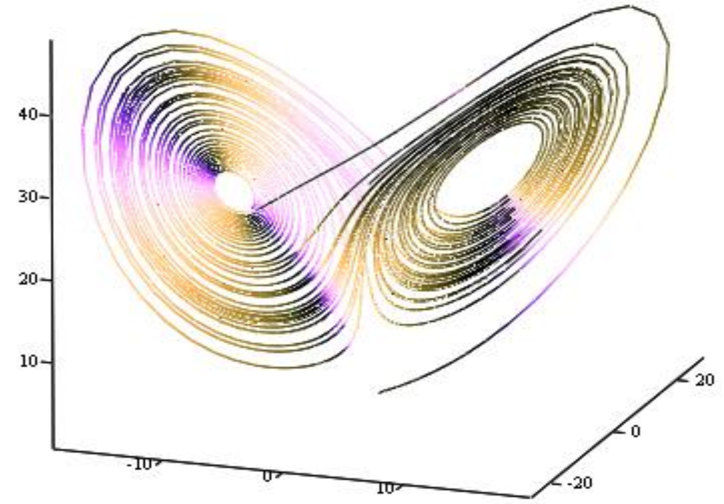
$S^{\langle 0 \rangle} := Y$

$S^{\langle 1 \rangle} := Y + \varepsilon$

$T^{\langle 0 \rangle} := Z$

$T^{\langle 1 \rangle} := Z + \varepsilon$

მივიღებთ ლორენცის უცნაური ატრაქტორის სურათს, რომელიც შეესაბამება დეტერმინირებული სისტემის ქაოსურ რეჟიმში გადასვლას, მაგრამ რომელიც იცვლის “პეპელას ფრთების” მოხაზულობას r-პარამეტრის ცვლილებისას, რაც შეესაბამება ბაზრის მოთხოვნის ცვლილებას წარმოებული პროდუქტის მოცულობაზე.



# თავი II. ეკონომეტრიკის ელემენტები. სოციალურ-ეკონომიკური სისტემების კორელაციური და რეგრესიული ანალიზი

## 2.1. მონაცემთა კორელაციური ანალიზი. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების კორელაცია. რეგრესიული ანალიზი

სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების შესწავლისას, ხშირად გვაქვს ამოცანა: გავარკვიოთ სხვადასხვა განმსაზღვრელ მახასიათებელ სიდიდეებს შორის როგორი ანალიზური კავშირია. ამ ამოცანის ამოსახსნელად ატარებენ მონაცემების კორელაციურ ანალიზს.

განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ექსპერიმენტის შედეგად გვაქვს ორი განმსაზღვრელი პარამეტრის x და y მნიშვნელობათა მონაცემები. მაგალითად, უმუშევრობა და ინფლაციის ხარისხი; მოთხოვნა და მიწოდება; ფასი და მოთხოვნა.

ასე რომ, მონაცემები წარმოადგენს $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ წყვილების სიმრავლეს, სადაც n ექსპერიმენტულ მონაცემთა რაოდენობაა. x და y სიდიდეთა მონაცემების სტატისტიკური დამუშავების გარდა, ისმის კითხვა: დამოუკიდებელია ეს სიდიდეები თუ არა ? თუ არ არის დამოუკიდებელი, მაშინ როგორია მათ შორის კავშირი (წრფივი თუ არაწრფივი) ?

ამ კითხვებზე პასუხის გასაცემად აგებენ x და y სიდიდეთა შორის შესაძლო დამოკიდებულების გრაფიკულ სურათს, საიდანაც ვიზუალურად ჩანს - მათ შორის არის თუ არა ფუნქციონალური დამოკიდებულება. თუ მონაცემების შესაბამისი წერტილები ჯგუფდებიან რომელიმე წრფის მახლობლობაში, მაშინ ამბობენ, რომ ეს სიდიდეები კორელირებენ და მათ შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. თუ რამდენადაა ეს მონაცემები ერთმანეთთან დაკავშირებული, მოიცემა კორელაციის $K_{xy}$ კოეფიციენტის სიდიდის მიხედვით. კორელაციის კოეფიციენტი ყოველთვის აკმაყოფილებს ორმაგ უტოლობას:

$$-1 \leq K_{xy} \leq 1 \quad . \qquad (2.1)$$

თუ x და y სიდიდეთა შორის წრფივი დამოკიდებულებაა, მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი უნდა იღებდეს 1 ან -1 მნიშვნელობას. რაც უფრო ახლოა ამ მნიშვნელობებთან კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა, მათ შორის დამოკიდებულება მით უფრო ახლოა წრფივთან. თუ, კორელაციის კოეფიციენტის მნიშვნელობა ახლოსაა ნულთან, მაშინ მათ შორის არაა წრფივი

დამოკიდებულება, ანუ, დამოკიდებულება ან არაწრფივია, ან საერთოდ არ კორელირებენ ეს სიდიდეები.

კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად გამოიყენება შემდეგი ფორმულები:

$$x_{\text{საშ.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad ; \qquad (2.2)$$

$$y_{\text{საშ.}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \quad ; \qquad (2.3)$$

$$s_x^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i\right) - x_{\text{საშ}}^2 \quad ; \qquad (2.4)$$

$$s_y^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y^2{}_i\right) - y_{\text{საშ}}^2 \quad ; \qquad (2.5)$$

$$s_{xy} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - x_{\text{საშ.}} y_{\text{საშ.}} \quad ; \qquad (2.6)$$

$$K_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \quad . \qquad (2.7)$$

კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს, დეტერმინაციის კოეფიციენტი ეწოდება.

$$D_{xy} = K_{xy}^2 \quad . \qquad (2.8)$$

თუ დეტერმინაციის კოეფიციენტი მეტია 0.5-ზე, მაშინ ამბობენ, რომ x და y სიდიდეთა შორის არის დადებითი დამოკიდებულება; ხოლო, თუ ნაკლებია 0.5-ზე, მაშინ მათ შორის სუსტი კავშირია. ეს კი შეესაბამება იმას, რომ, თუ კორელაციის კოეფიციენტი მეტია 0.71-ზე მაშინ გვაქვს დადებითი კავშირი; ხოლო, თუ კორელაციის კოეფიციენტი ნაკლებია 0.71-ზე, მაშინ - სუსტი კავშირი.

განვიხილოთ ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების დინამიკა წლების მიხედვით (ცხრილი 2.1) და შევისწავლოთ ამ მონაცემების კორელაცია.

ცხრილი 2.1. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების დინამიკა 2003-2009წ.

| მლნ.ლარი | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ეროვნული შემოსავალი x | 8631,3 | 10004,9 | 11791,7 | 14102,5 | 17060,5 | 18818,0 | 17682,8 |
| მოხმარება y | 5442,1 | 6044,1 | 7159,0 | 8478,9 | 10625,8 | 11796,9 | 10752,7 |

გამოვიყენოთ (2.2)-(2.7) ფორმულები, მივიღებთ რომ კორელაციის კოეფიციენტი $K_{xy} = 0.998$ , დეტერმინაციის კოეფიციენტი $D_{xy} = 0.996$

რაც იმას ნიშნავს, რომ x და y სიდიდეთა შორის არის დადებითი დამოკიდებულება 99.6%, ეს იძლევა შესაბამისი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას.

ვთქვათ, დამოკიდებულება x და y სიდიდეთა შორის არის წრფივი, ანუ, აქვს სახე:

$$y=ax+b, \tag{2.9}$$

სადაც უცნობი a და b კოეფიციენტების საპოვნელად იყენებენ გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდს. ამოცანის ამოსახსნელად გამოიყენება მონაცემთა წყვილები: სადაც $i=\overline{1,n}.$ გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი მოითხოვს, რომ ექსპერიმენტული $(x_i, y_i)$ წერტილების (2.9) წრფიდან გადახრის კვადრატების ჯამი უნდა იყოს მინიმალური. ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$I(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2; \tag{2.10}$$

ფუნქციამ უნდა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა. *I(a,b)* არის ორი ცვლადის ფუნქცია, რომლის მინიმუმის არსებობის აუცილებელ პირობებს (ფერმას თეორემა) აქვთ სახე:

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a}=0; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial I(a,b)}{\partial a}=0. \tag{2.12}$$

(2.10) ფუნქციის ჩასმით (2.11) და (2.12) განტოლებებში, ადვილად მივიღებთ, რომ

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i; \tag{2.13}$$

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i+\ bn=\sum_{i=1}^{n}y_i. \tag{2.14}$$

(2.13) და (2.14) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსნი:

$$a=\frac{s_{xy}}{s_x^2};\quad b=y_{\text{საშ.}}-ax_{\text{საშ.}}. \tag{2.15}$$

ამ კოეფიციენტების ჩასმა (2.9) ფორმულაში გვაძლევს წრფივი რეგრესიის ფორმულას, რომლის მეშვეობით ვიპოვით ყოველი x-ის შესაბამის y-ს. ასე რომ, უმცირეს კვადრატთა მეთოდი საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ პროგნოზის ამოცანებიც.

თუ რეგრესიის წრფე ნაპოვნია, შეგვიძლია შევაფასოთ იგი რამდენად კარგ მიახლოებას გვაძლევს ექსპერიმენტულ მონაცემებთან შედარებით. ამისათვის, გამოითვლიან შესაბამის საშუალო კვადრატულ ცდომილებას:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (ax_i + b)]^2}. \qquad (2.16)$$

ცხადია, რაც უფრო მცირეა $\delta$ ცდომილება, მით უფრო კარგია მიახლოება.

**განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 2.1 მოხმარების ეროვნული შემოსავლის მიხედვით კორელაციისა და წრფივი რეგრესიის ამოცანის გადასაწყვეტად Mathcad-ის ბაზაზე.**

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.1

$$X := \begin{pmatrix} 8631.3 \\ 10004.9 \\ 11791.7 \\ 14102.5 \\ 17060.5 \\ 18818.0 \\ 17682.8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 5442.1 \\ 6044.1 \\ 7159.0 \\ 8478.9 \\ 10625.8 \\ 11796.9 \\ 10752.7 \end{pmatrix}$$

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{6} X_i}{7} \qquad Ysr := \frac{\sum_{i=0}^{6} Y_i}{7}$$

$$sx2 := \left[\frac{1}{7}\cdot\sum_{i=0}^{6}\left(X_i\right)^2\right] - Xsr^2$$

$sx2 = 13687493.951$

$$sy2 := \left[\frac{1}{7}\cdot\sum_{i=0}^{6}\left(Y_i\right)^2\right] - Ysr^2$$

$sy2 = 5364691.664$

$$Sxy := \left[\frac{1}{7}\cdot\sum_{i=0}^{6}\left(X_i\cdot Y_i\right)\right] - Xsr\cdot Ysr$$

$$Kxy := \frac{Sxy}{\sqrt{sx2}\cdot\sqrt{sy2}}$$

$Kxy = 0.998$ კორელაციის კოეფიციენტი,

$$Dxy := Kxy^2$$

$Dxy = 0.996$ დეტერმინაციის კოეფიციენტი,

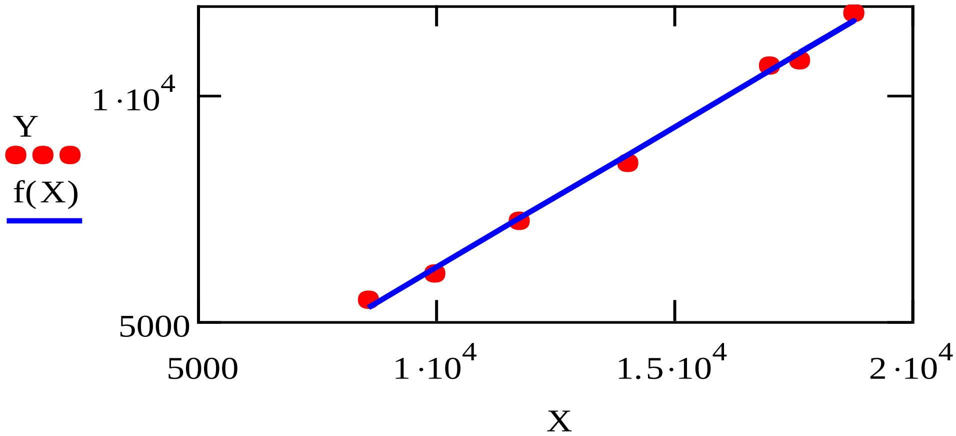
### წრფივი რეგრესია

$$a := \frac{Sxy}{sx2} \qquad b := Ysr - a\cdot Xsr \qquad a = 0.625 \qquad b = -141.215$$

$$f(x) := a\cdot x + b$$

$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{6} \left(Y_i - a \cdot X_i - b\right)^2}{7}}$$ საშუალო კვადრატული ცდომილება

$\delta = 146.224$




როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა მოხმარებისა და ეროვნული შემოსავლის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად.

**სავარჯიშო**

გამოიკვლიეთ მოხმარების საშუალო მოცულობის ცვლილება, თუ ეროვნული შემოსავლის საშუალო მნიშვნელობა 1.2-ჯერ იზრდება.

## 2.2. ექსპორტ-იმპორტის ცნება. ექსპორტ - იმპორტს შორის არსებული უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაცია, დეტერმინაციის კოეფიციენტი

**ექსპორტი** არის ქვეყანაში წარმოებული პროდუქციის რეალიზაცია მის საზღვრებს გარეთ. ცხადია, ექსპორტი საშუალებას იძლევა ქვეყანაში შემოვიდეს კონვერტირებადი ვალუტა, დასაქმდეს საკუთარი მუშა ხელი, დამატებითი სტიმული მიეცეს წარმოების სიმძლავრეების გადიდებას და ა.შ.

**იმპორტი** არის საზღვარგარეთ წარმოებული პროდუქციის შემოტანა შიდა ბაზარზე რეალიზაციისათვის. იგი დადებით როლს

ასრულებს, თუ ხელს უწყობს ქვეყნის შიგნით არსებული დეფიციტის შევსებას. მაგრამ ადგილი აქვს უარყოფით მოვლენას, თუ ხელს უშლის შიდა წარმოებითი სიმძლავრეების გაზრდას და ხალხის დასაქმებას. განსაკუთრებით მავნეა საქართველოსთვის იაფი-უხარისხო კვების პროდუქტების შემოტანა, რადგან საქართველო აგრარული ქვეყანაა, მით უმეტეს, თუ ისინი გენური ინჟინერიითაა მოყვანილი და ბოლომდე არაა გამოკვლეული მათი მოქმედება ადამიანის ჯანმრთელობაზე.

სხვაობას ექსპორტისა და იმპორტის მოცულობებს შორის **სალდო** ეწოდება.

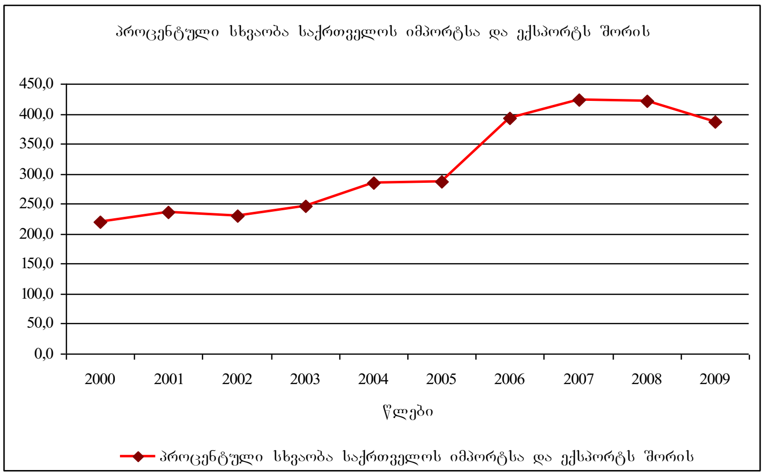
თუ სალდო უარყოფითია რაც ნიშნავს, რომ უფრო მეტი პროდუქცია შემოგვაქვს, ვიდრე გაგვაქვს, მაშინ ქვეყნის სავალუტო რეზერვები მცირდება და ქვეყანა ფინანსურად სუსტდება. ხოლო თუ, სალდო დადებითია, მაშინ ჩვენი ქვეყანა ადგას განვითარების გზას და თანდათან ძლიერდება ფინანსურად.

განვიხილოთ საქართველოს ექსპორტ-იმპორტის მოცულობათა დინამიკა (ცხრილი 2.2.)

ცხრილი 2.2. საქართველოს ექსპორტ-იმპორტისა და მათ შორის პროცენტული სხვაობის მნიშვნელობები

| წლები | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| საქართველოს ექსპორტი ათასი აშშ დოლარი | 322 748,7 | 317 636,1 | 345 933,5 | 461 405,6 | 646 903,0 | 865 454,2 | 935 992,1 | 1 232 371,0 | 1 495 456,6 | 1 130 555,4 |
| საქართველოს იმპორტი ათასი აშშ დოლარი | 709 376,2 | 753 227,8 | 795 539,1 | 1 141 164,7 | 1 845 544,9 | 2 489 935,4 | 3 676 968,9 | 5 214 883,4 | 6 304 557,3 | 4 369 496,5 |
| პროცენტული სხვაობა საქართველოს იმპორტსა და ექსპორტს შორის | -219,8 | -237,1 | -230,0 | -247,3 | -285,3 | -287,7 | -392,8 | -423,2 | -421,6 | -386,5 |

როგორც ცხრილიდან ჩანს, ექსპორტ-იმპორტის უარყოფითი სალდო აშკარად იზრდება 2007 წლამდე; ეს ნიშნავს, რომ საქართველოს ეკონომიკა სულს ღაფავს. არ ვითარდება წარმოებითი სიმძლავრეები, ვერ მოვიპოვეთ ბაზარი საქონლის რეალიზაციისათვის და საქართველო იქცა იაფი - დაბალი ხარისხის უცხოური პროდუქციის ბაზრად.



ნახ.2.1. პროცენტული სხვაობა საქართველოს ექსპორტსა და იმპორტს შორის

ყოველივე ამის შედეგი, იწვევს უმუშევრობის ზრდასა და მოსახლეობის გაღატაკებას. რაც საბოლოოდ იწვევს სოციალური დაძაბულობის ზრდას და ხელისუფლების რეიტინგის დაცემას.

**უმუშევრობა** - ეკონომიკურად აქტიური მოსახლეობის დროებით დაუსაქმებლობა. შრომის საერთაშორისო ორგანიზაციის განმარტებით, უმუშევრად ითვლება ადამიანი, რომელსაც შეუძლია მუშაობა, მაგრამ სამუშაოს არქონის გამო, აქტიურად ეძებს მას.

საქართველოში გვაქვს ციკლური უმუშევრობა, რომელიც დაკავშირებულია საქონელსა და მომსახურებაზე არასაკმარისი ერთობლივი მოთხოვნით.

**ვ.ოუკენის კანონის მიხედვით**, უმუშევრობის ნაზრდის ყოველი ერთი პროცენტი მისი ბუნებრივი დონის ზემოთ, იწვევს მშპ-ს მოცულობის 2.5 პროცენტით ჩამორჩენას.

2.3. ცხრილში მოცემულია დასაქმებულთა და უმუშევართა რაოდენობის დინამიკა წლების მიხედვით.

ცხრილი 2.3. დასაქმებისა და უმუშევრობის დინამიკა საქართველოში

| | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| დასაქმებული | 1728,5 | 1694,4 | 111 | 1877,7 | 1839,2 | 1814,9 | 1783,3 | 1744,6 | 1747,3 | 1704,3 | 1601,9 | 1656,1 |
| უმუშევარი | 244,2 | 244,9 | 212 | 235,6 | 265 | 235,9 | 257,6 | 279,3 | 274,5 | 261 | 315,8 | 335,6 |

2.2 და 3.3 ცხრილები საშუალებას იძლევა გამოვიკვლიოთ კორელაცია ექსპორტ-იმპორტის უარყოფით პროცენტულ სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის.

უმუშევრობის კოეფიციენტი გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \frac{r_{\text{უმუშ.}}}{r_{\text{უმუშ.}} + r_{\text{დასაქ.}}}, \qquad (2.9)$$

სადაც $r_{\text{უმუშ.}}$ უმუშევართა რაოდენობაა;

$r_{\text{დასაქ.}}$ - დასაქმებულთა რაოდენობა.

მაშინ მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი $Kxy = 0.782$ და დეტერმინაციის კოეფიციენტი $Dxy = 0.612$.

ეს ნიშნავს, რომ x და y სიდიდეთა შორის არის წრფივი დამოკიდებულება 61.2%-ის სიზუსტით. თუმცა, ეს დამოკიდებულება საკმაოდ მცირეა.

**ეს იძლევა შესაბამისი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას. განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 2.2. ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებული უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაციისა და წრფივი რეგრესიის ამოცანის გადასაწყვეტად Mathcad - ის ბაზაზე.**

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.2.

$$X := \begin{pmatrix} 219.8 \\ 237.1 \\ 230.0 \\ 247.3 \\ 285.3 \\ 287.7 \\ 392.8 \\ 423.2 \\ 421.6 \\ 386.5 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} \frac{212}{212 + 1837.7} \\ \frac{235.6}{235.6 + 1877.7} \\ \frac{265}{265 + 1839.2} \\ \frac{235.9}{235.9 + 1814.9} \\ \frac{257.6}{257.6 + 1783.3} \\ \frac{279.3}{279.3 + 1744.6} \\ \frac{274.5}{274.5 + 1747.3} \\ \frac{261}{261 + 1704.3} \\ \frac{315.8}{315.8 + 1601.9} \\ \frac{335.6}{335.6 + 1656.} \end{pmatrix} \quad n := 1C$$

Y =

| | 0 |
|---|---|
| 0 | 0.10342977 |
| 1 | 0.11148441 |
| 2 | 0.12593860 |
| 3 | 0.11502828 |
| 4 | 0.12621883 |
| 5 | 0.13800089 |
| 6 | 0.13577011 |
| 7 | 0.13280415 |
| 8 | 0.16467644 |
| 9 | 0.16850773 |

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \qquad Ysr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

$$sx2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\right)^2\right] - Xsr^2 \qquad sy2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_i\right)^2\right] - Ysr^2$$

$$Sxy := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\cdot Y_i\right)\right] - Xsr\cdot Ysı \qquad Kxy := \frac{Sxy}{\sqrt{sx2}\cdot\sqrt{sy2}} \qquad Dxy := Kxy^2$$

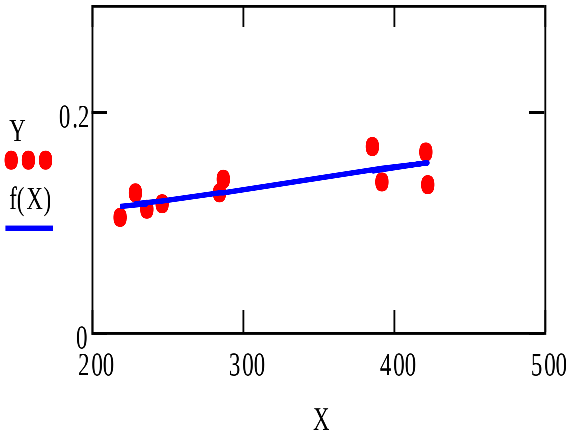
$Kxy = 0.78230317$ $\quad Dxy = 0.61199826$

### წრფივი რეგრესია

$$a := \frac{Sxy}{sx2} \qquad b := Ysr - a\cdot Xsı \qquad a = 0.00019863$$

$b = 0.06998927$

$$f(x) := a\cdot x + b$$




$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(Y_i - a \cdot X_i - b\right)^2}{n}}$$

ცდომილება

$\delta = 0.01253006$

როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებულ უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად.

**სავარჯიშო.**

გამოიკვლიეთ უმუშევრობის კოეფიციენტის საშუალო სიდიდის ცვლილება, თუ ექსპორტ-იმპორტის უარყოფითი სალდოს საშუალო მნიშვნელობა 1.2 ჯერ იზრდება.

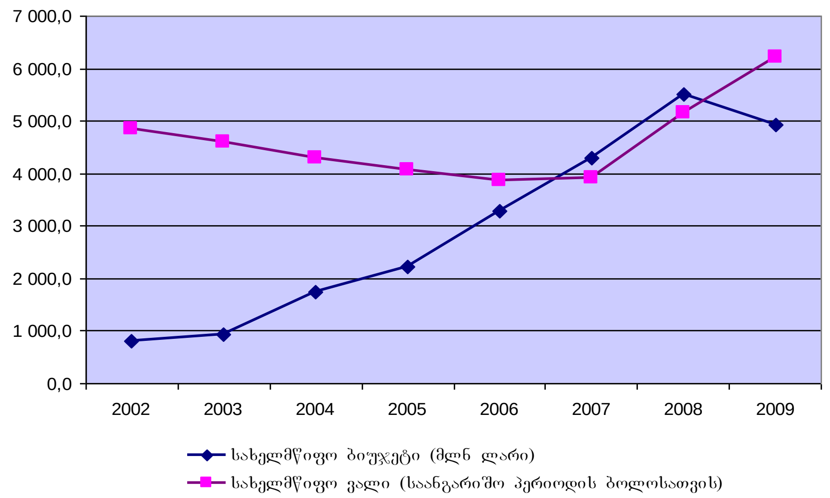
### 2.3. კორელაცია საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის

ცხოვრების დონისა და საზოგადოების განვითარების ტემპების დასახასიათებლად, განვიხილოთ სახელმწიფო ვალისა და სახელმწიფო ბიუჯეტის დამოკიდებულება.

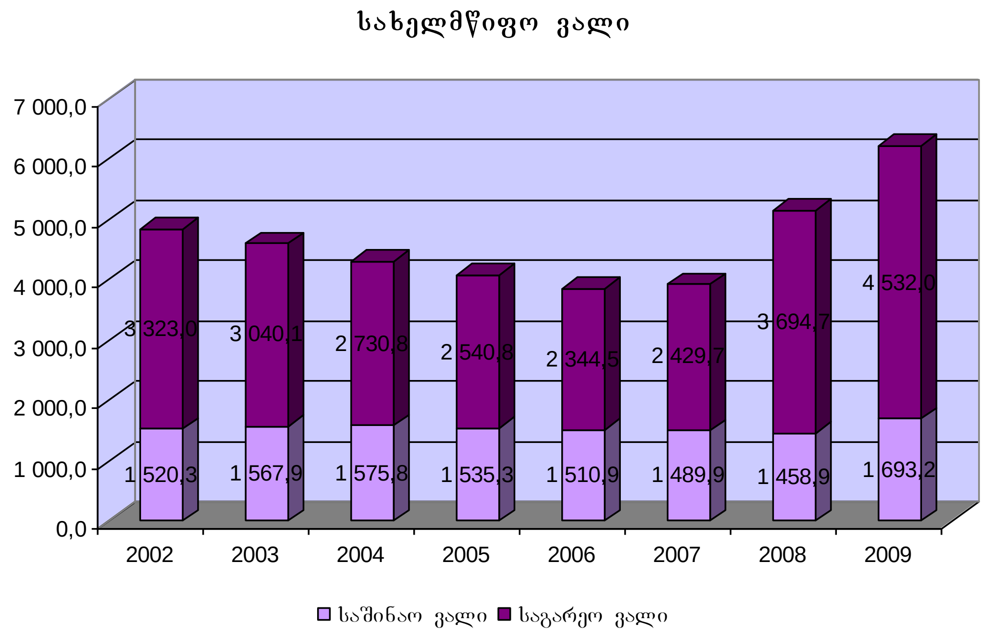
ცხრილი 2.4. სახელმწიფო ბიუჯეტის სტრუქტურა

| | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| სახელმწიფო ბიუჯეტი(მლნ ლარი) | 802,7 | 933,3 | 1 732,9 | 2 213,0 | 3 293,3 | 4 293,6 | 5 517,7 | 4 917,0 |
| სახელმწიფო ვალი | 4 843,3 | 4 608,0 | 4 306,6 | 4 076,1 | 3 855,4 | 3 919,6 | 5 153,6 | 6 225,2 |
| საშინაო ვალი | 1 520,3 | 1 567,9 | 1 575,8 | 1 535,3 | 1 510,9 | 1 489,9 | 1 458,9 | 1 693,2 |
| საგარეო ვალი | 3 323,0 | 3 040,1 | 2 730,8 | 2 540,8 | 2 344,5 | 2 429,7 | 3 694,7 | 4 532,0 |

ავაგოთ შესაბამისი ნახაზი 2.2, რომელზეც შეიმჩნევა შუალედები, როცა სახელმწიფო ვალი აჭარბებდა ბიუჯეტს და ბიუჯეტის შევსება ხდებოდა ვალების ხარჯზე. შემდგომ შეინიშნება დადებითი ტენდენცია, როცა ბიუჯეტი იზრდებოდა ვალებზე უფრო სწრაფად და 2006 წლიდან 2008 წლამდე გადააჭარბა კიდეც ვალებს. თუმცა, აგვისტოს ომმა ეს წარმატება წაშალა და 2009 წელს ვალმა კვლავ გადააჭარბა ბიუჯეტის შემოსავლებს.



ნახ.2.2. სახელმწიფო ბიუჯეტისა და ვალების დინამიკა




ნახ.2.3.საშინაო და საგარეო ვალების დინამიკა საქართველოში 2002-2009წწ.

ზემოთ მოყვანილი მონაცემები საშუალებას იძლევა ჩავატაროთ ბიუჯეტისა და ვალების კორელაციური ანალიზი, რომლის მეშვეობით შესაძლებელია გადავიდეთ შესაბამის რეგრესიულ ანალიზზე, გამოვიკვლიოთ ბიუჯეტისა და ვალების დინამიკის შემდგომი მომავალი.

მაშინ მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი Kxy=0.36, დეტერმინაციის კოეფიციენტი Dxy=0.132; ეს კი ნიშნავს, რომ x და y სიდიდეთა შორის არ არის წრფივი დამოკიდებულება. **ამიტომ, ან გვაქვს არაწრფივი დამოკიდებულება, ან საერთოდ არაა კორელაცია ამ სიდიდეებს შორის.**

**განვიხილოთ შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 2.3, საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის არსებული კორელაციის დასადგენად Mathcad - ის ბაზაზე.**

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.3.

$$X := \begin{pmatrix} 4843.3 \\ 4608.0 \\ 4306.6 \\ 4076.1 \\ 3855.4 \\ 3919.6 \\ 5153.6 \\ 6225.2 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 802.7 \\ 933.3 \\ 1732.9 \\ 2213.0 \\ 3293.3 \\ 4293.6 \\ 5517.7 \\ 4917.0 \end{pmatrix} \qquad n := 8$$

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \qquad Ysr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

$$sx2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\right)^2\right] - Xsr^2 \qquad sy2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_i\right)^2\right] - Ysr^2$$

$$Sxy := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\cdot Y_i\right)\right] - Xsr\cdot Ysr$$

$$Kxy := \frac{Sxy}{\sqrt{sx2}\cdot\sqrt{sy2}}$$

$$Kxy = 0.36301850$$

$$Dxy := Kxy^2$$

$$Dxy = 0.13178243$$

როგორც ვხედავთ, კორელაციის კოეფიციენტია 0.36, ხოლო დეტერმინაციის კოეფიციენტი 0.132, ეს ნიშნავს, რომ საქართველოს ბიუჯეტსა და გარე ვალებს შორის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მაშასადამე, კავშირი ან არაწრფივია, ან საერთოდ არ კორელირებენ ეს ცვლადები ერთმანეთთან.

## 2.4. კორელაცია სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და ინფლაციის მაჩვენებელს შორის

სამომხმარებლო კალათის გაანგარიშების წესს განვიხილავთ მესამე თავში. ახლა კი მოვიყვანოთ მონაცემებს საქართველოსათვის, საარსებო მინიმუმის დინამიკას წლების მიხედვით

ცხრილი 2.5. საშუალო მომხმარებლის საარსებო მინიმუმის დინამიკა (ლარი თვეში)

| წლები | საშუალო მომხმარებლის საარსებო მინიმუმი (ლარი თვეში) |
|---|---|
| 2004 | 85.2 |
| 2005 | 87.1 |
| 2006 | 106.5 |
| 2007 | 102.7 |
| 2008 | 115.8 |
| 2009 | 111.7 |

თუ განვიხილავთ ინფლაციის კოეფიციენტის დინამიკის შესაბამის ცხრილს 2.6, მაშინ, ადვილად შეიძლება ჩავატაროთ შესაბამისი კორელაციური ანალიზი.

ცხრილი 2.6. ინფლაციის კოეფიციენტის დინამიკა წლების მიხედვით

| | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| საშუალო წლიური წინა წლის საშუალო წლიურთან | 108.2 | 109.2 | 109.2 | 110.0 | 101.7 | 107.1 |
| დეკემბერი წინა წლის დეკემბერთან | 106.2 | 108.8 | 111.0 | 105.5 | 103.0 | 111.2 |
| წლიური ინფლაციის დონე | 6.2 | 8.8 | 11.0 | 5.5 | 3.0 | 11.2 |

მივიღებთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი $Kxy = -0.576$ და დეტერმინაციის კოეფიციენტი $Dxy = 0.332$. ეს კი ნიშნავს, რომ x და y სიდიდეთა შორის დამოკიდებულება სულ რაღაც 33.2%-ია. ამრიგად, დამოკიდებულება მეტად სუსტია, რადგან 33.2% < 50%.

**ეს კი არ იძლევა შესაბამისი წრფივი რეგრესიული ანალიზის ჩატარების შესაძლებლობას.**

**განვიხილოთ, შესაბამისი ლაბორატორიული სამუშაო 2.4, სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და ინფლაციის მაჩვენებელს შორის არსებული კორელაციის ამოცანის გადასაწყვეტად Mathcad - ის ბაზაზე.**

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.4

$$X := \begin{pmatrix} 85.2 \\ 87.1 \\ 106.5 \\ 102.7 \\ 115.8 \\ 111.7 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 108.2 \\ 109.2 \\ 109.2 \\ 110.0 \\ 101.7 \\ 107.1 \end{pmatrix}$$

$$Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{5} X_i}{6} \qquad Ysr := \frac{\sum_{i=0}^{5} Y_i}{6}$$

$$sx2 := \left[\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=0}^{5}\left(X_i\right)^2\right] - Xsr^2 \qquad sy2 := \left[\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=0}^{5}\left(Y_i\right)^2\right] - Ysr^2$$

$$Sxy := \left[\frac{1}{6}\cdot\sum_{i=0}^{5}\left(X_i\cdot Y_i\right)\right] - Xsr\cdot Ysr$$

$$Kxy := \frac{Sxy}{\sqrt{sx2}\cdot\sqrt{sy2}}$$

$$Kxy = -0.576$$

$$Dxy := Kxy^2$$

$$Dxy = 0.332$$

როგორც ვხედავთ, კორელაციის კოეფიციენტია 0.58, ხოლო დეტერმინაციის კოეფიციენტი - 0.332, რაც ნიშნავს, რომ საქართველოს ბიუჯეტსა და გარე ვალებს შორის არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მაშასადამე, კავშირი ან არაწრფივია, ან ეს ცვლადები საერთოდ არ კორელირებენ ერთმანეთთან.

## 2.5. კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნას, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი

განვიხილოთ შესაძლო კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნას, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. იმისათვის, რომ დავადგინოთ, როგორაა დამოკიდებული ერთიანი

მოთხოვნა y საშუალო x ხელფასსა და საშუალო p ფასებზე, უნდა შევადგინოთ არსებული მონაცემების შესაბამისი ცხრილი 2.7.

ცხრილი 2.7

| № | y | x | p |
|---|---|---|---|
| 1 | 350 | 400 | 2.5 |
| 2 | 360 | 400 | 3 |
| 3 | 400 | 400 | 3.5 |
| 4 | 380 | 400 | 3.4 |
| 5 | 400 | 400 | 3.35 |
| 6 | 450 | 400 | 3.4 |

მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი წარმოადგენს ორცვლადიანი რეგრესიული ანალიზის განვითარებას, რომელიც იმ შემთხვევაში გამოიყენება, როდესაც სისტემის აგრეგირებული მახასიათებელი დაკავშირებულია ერთზე მეტ დამოუკიდებელ განმსაზღვრელ ცვლადთან.

განვიხილოთ კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის განსაზღვრის მაგალითი. მოსახლეობის x შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე p ფასების არსებული მონაცემებიდან გამომდინარე ვიპოვოთ კავშირი

$$y = f(x, p). \tag{2.10}$$

სადაც y კვების ხარჯების საერთო სიდიდეა; $f$ – ფუნქცია მოცემული კლასიდან. მაგალითისათვის ვისარგებლოთ პოლინომებით, ანუ პოლინომური რეგრესიით მრავალგანზომილებიანი შემთხვევისა

თვის. მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის კერძო სახეს წარმოადგენს მრავალგანზომილებიანი წრფივი რეგრესია, ანუ შემთხვევა, როცა მონაცემებს უახლოვდებით ფორმულით

$$y = \alpha + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot p\,. \tag{2.11}$$

მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის ამოცანის ამოსახსნელად, მოცემული უნდა იყოს რიცხვთა მასივი, რომელიც შეესაბამება $Y$ ცვლადს. ვთქვათ

$$Y := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{MXP} := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

შევქმნათ ორგანზომილებიანი MXP მონაცემთა მასივი, შესაბამისი (x, p) წერტილებისათვის.

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.5

***ამოცანა.*** *მოცემულია Y ერთობლივი მოთხოვნა და შესაბამისი მონაცემთა MXP მატრიცა, მოსახლეობის X შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე P ფასების მიხედვით. ავაგოთ მოსახლეობის ერთობლივი მოთხოვნის მიახლოების მრავალწევრი, გავაკეთოთ პროგნოზი, შევაფასოთ აპროქსიმაციის ცდომილება.*

ამოხსნა. გამოვიყენოთ *regress(MXP,Y,n)* ოპერატორი, სადაც *n* მიახლოების პოლინომის ხარისხია. *n:=1,*

*VS:=regress(MXP, Y, n),*

სადაც *VS* პოლინომის საუკეთესო მიახლოების კოეფიციენტებია. ავაგოთ მიახლოების პოლინომი, სადაც $X_0$:=X *და* $X_1$:=P

*f(x):=interp(VS, MXP, Y, X).*

და ბოლოს, შევადგინოთ პროგნოზი $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$ სხვა მნიშვნელობებისთვისაც.

გრაფიკული ინტერპრეტაციისათვის მოხერხებულია Y ერთობლივი მოთხოვნის აღნიშვნა Z-ით და მონაცემთა მატრიცული სახით შეყვანა.

$$n := 1 \qquad Z := \begin{pmatrix} 350 \\ 360 \\ 400 \\ 380 \\ 400 \\ 450 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{MXP} := \begin{pmatrix} 400 & 2.5 \\ 400 & 3 \\ 400 & 3.5 \\ 400 & 3.4 \\ 400 & 3.35 \\ 400 & 3.4 \end{pmatrix}$$

*VS:=regress(MXP,Z,n)*    *f(x):=interp(VS,MXP,Z,x).*

პროგნოზი: $f\left(\begin{pmatrix}450\\3.40\end{pmatrix}\right)=?$ (პასუხი: 426)    $f\left(\begin{pmatrix}500\\4.00\end{pmatrix}\right)=?$ (პასუხი: 488)

$X:=MXP^{<0>}$        $P=MXP^{<1>}$

i:=0..5.

## პროგრამა Mathcad-ზე

კვების პროდუქტებზე ერთობლივი მოთხოვნის, კვების ხარჯებისა და თვიური შემოსავლების მონაცემები:

$$Z := \begin{pmatrix}350\\360\\400\\380\\400\\450\end{pmatrix} \qquad MXP := \begin{pmatrix}400 & 2.5\\400 & 3\\400 & 3.5\\400 & 3.4\\400 & 3.35\\400 & 3.4\end{pmatrix}$$

$$X := MXP^{\langle 0\rangle}$$
$$P := MXP^{\langle 1\rangle}$$

კოეფიციენტების მოძებნა

$$n := 1$$
$$VS := regress(MXP, Z, n)$$
$$VS = \begin{pmatrix}3\\3\\1\\0.439\\67.167\\0.001\end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$$f(x) := interp(VS, MXP, Z, x)$$

ერთობლივი მოთხოვნის მნიშვნელობათა პროგნოზირება

$$f\begin{pmatrix}450\\3.40\end{pmatrix} = 425.946$$

$$f\begin{pmatrix}500\\4\end{pmatrix} = 488.199$$

$$coeffs := submatrix(VS, 3, length(VS) - 1, 0, 0)$$
$$coeffs^T = (0.439\ \ 67.167\ \ 0.001)$$
$$\alpha := (coeffs^T)^{<0>}$$

$\alpha$=(0.439)

$\beta$:=(coeffs$^T$)$^{<1>}$
$\beta$=(67.167)

m:=(coeffs$^T$)$^{<2>}$
m=(0.001)

Z=m+$\alpha$*X+$\beta$* P არის ერთობლივი მოთხოვნის ფუნქცია

$$Z1(X,P) := 0.001 + 0.439\cdot X + 67.167\cdot P$$

$$i := 0 .. 5$$

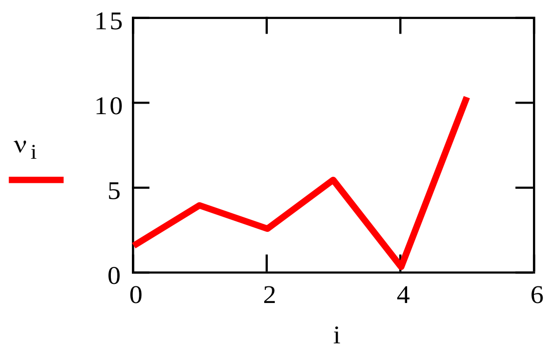
$$\Delta c_i := \left| f\left(\begin{pmatrix} X_i \\ P_i \end{pmatrix}\right) - Z_i \right|$$

$$\Delta c := \begin{pmatrix} 6.457 \\ 17.126 \\ 10.71 \\ 23.993 \\ 0.635 \\ 46.007 \end{pmatrix}$$

$$\nu := \frac{\Delta c}{450}\cdot 100$$

$$\nu = \begin{pmatrix} 1.435 \\ 3.806 \\ 2.38 \\ 5.332 \\ 0.141 \\ 10.224 \end{pmatrix}$$

$$\max(\nu) = 10.224$$



**სავარჯიშო.**

მოცემული Y ერთობლივი მოთხოვნით და შესაბამის მონაცემთა MXP მატრიცით, მოსახლეობის X შემოსავლებისა და კვების პროდუქტებზე P ფასების მიხედვით, ააგეთ მიახლოების ოპტიმალური მრავალწევრი: $Y = \alpha + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot P$.

შეადგინეთ პროგნოზი და ააგეთ გრაფიკული ინტერპრეტაცია.

## 2.6. კობ-დუგლასის წარმოებითი ფუნქცია Mathcad-ის ბაზაზე.

1927 წელს, განათლებით ეკონომისტმა პოლ დუგლასმა აღმოაჩინა, რომ, თუ ერთმანეთს შეუთავსებთ Y გამოშვების რეალური მოცულობის, K კაპიტალური დანახარჯებისა და L შრომის დანახარჯების მაჩვენებლების ლოგარითმების დროზე დამოკიდებულების გრაფიკებს, მაშინ, გამოშვების მაჩვენებლების წერტილებიდან შრომის დანახარჯების მაჩვენებლებისა და კაპიტალის ხარჯების გრაფიკების წარტილებამდე დაშორებები შეადგენს მუდმივ პროპორციას. შემდეგ, მან თხოვნით მიმართა მათემატიკოს ჩარლზ კობს, ეპოვა ასეთი თავისებურების მქონე მათემატიკური დამოკიდებულება. კობმა შესთავაზა შემდეგი ფუნქცია:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha}. \tag{2.13}$$

ხშირად, განიხილავენ კობ-დუგლასის განზოგადებულ ფორმულას:

$$Y = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}, \tag{2.14}$$

სადაც $A, \alpha$ და $\beta$ კოეფიციენტები განისაზღვრება არაწრფივი მრავლობითი რეგრესიის მეთოდით, როდესაც მოცემულია Y მონაცემთა K და L ვექტორი .

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.6

**ამოცანა**. მოცემულია წარმოების Y რეალური მოცულობის, K რეალური კაპიტალური ხარჯებისა და L რეალური შრომის ხარჯების ინდექსები ამერიკაში 1899 - 1922 წლებისათვის (ცხრილი 2.8). იპოვეთ კობი-დუგლასის დამოკიდებულება, თუ გვაქვს 2.8 ცხრილში აღნიშნული მონაცემები (საფუძვლად აღებულია 1899 წლის 100-ის ტოლი მოცულობა).

ცხრილი 2.8.

| წელი | *Y* | *K* | *L* | | წელი | *Y* | *K* | *L* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1899* | *100* | *100* | *100* | | *1911* | *153* | *216* | *145* |
| *1900* | *101* | *107* | *105* | | *1912* | *177* | *226* | *152* |
| *1901* | *112* | *114* | *110* | | *1913* | *184* | *236* | *154* |
| *1902* | *122* | *122* | *118* | | *1914* | *169* | *244* | *149* |
| *1903* | *124* | *131* | *123* | | *1915* | *189* | *266* | *154* |
| *1904* | *122* | *138* | *116* | | *1916* | *225* | *298* | *182* |
| *1905* | *143* | *149* | *125* | | *1917* | *227* | *335* | *196* |
| *1906* | *152* | *163* | *133* | | *1918* | *223* | *336* | *200* |
| *1907* | *151* | *176* | *138* | | *1919* | *218* | *387* | *193* |
| *1908* | *126* | *185* | *121* | | *1920* | *231* | *407* | *193* |
| *1909* | *155* | *198* | *140* | | *1921* | *179* | *417* | *147* |
| *1910* | *159* | *208* | *144* | | *1922* | *240* | *431* | *161* |

ამოხსნა. კობ-დუგლასის თანადობის პარამეტრების მოსაძებნად გავალოგარითმოთ ეს დამოკიდებულება:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L \ . \tag{2.15}$$

თუ შევიტანთ შემდეგ აღნიშვნებს:

$$\ln Y \equiv y; \ \ \ln A \equiv m; \ \ \ln K \equiv X \ ; \ \ln L \equiv P, \tag{2.16}$$

მივიღებთ დამოკიდებულებას:

$$y = m + \alpha \cdot x + \beta \cdot P. \tag{2.17}$$

ანუ, პირველი ხარისხის პოლინომის სახით მოცემულ დამოკიდებულებას, სადაც *m*, $\alpha$ და $\beta$ უნდა განვსაზღვროთ მრავლობითი პოლინომური რეგრესიის მეთოდით, შემდეგ კი განვსაზღვროთ *A* პარამეტრიც

$$A = e^{m}. \tag{2.18}$$

# პროგრამა Mathcad-ზე

$$Y := \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \\ 112 \\ 122 \\ 124 \\ 122 \\ 143 \\ 152 \\ 151 \\ 126 \\ 155 \\ 159 \\ 153 \\ 177 \\ 184 \\ 169 \\ 189 \\ 225 \\ 227 \\ 223 \\ 218 \\ 231 \\ 179 \\ 240 \end{pmatrix} \quad K := \begin{pmatrix} 100 \\ 107 \\ 114 \\ 122 \\ 131 \\ 138 \\ 149 \\ 163 \\ 176 \\ 185 \\ 198 \\ 208 \\ 216 \\ 226 \\ 236 \\ 244 \\ 266 \\ 298 \\ 335 \\ 366 \\ 387 \\ 407 \\ 417 \\ 431 \end{pmatrix} \quad L := \begin{pmatrix} 100 \\ 105 \\ 110 \\ 118 \\ 123 \\ 116 \\ 125 \\ 133 \\ 138 \\ 121 \\ 140 \\ 144 \\ 145 \\ 152 \\ 154 \\ 149 \\ 154 \\ 182 \\ 196 \\ 200 \\ 193 \\ 193 \\ 147 \\ 161 \end{pmatrix}$$

$i := 0..23$

$Y1_i := \ln(Y_i)$

$K1_i := \ln(K_i)$

$L1_i := \ln(L_i)$

$MXP^{\langle 0 \rangle} := K1$

$MXP^{\langle 1 \rangle} := L1$

$n := 1$

$VS := \text{regress}(MXP, Y1, n)$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0.233 \\ 0.807 \\ -0.177 \end{pmatrix}$$

$f(X) := \text{interp}(VS, MXP, Y1, X)$

$$coeffs := submatrix(VS, 3, length(VS) - 1, 0, 0)$$

კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის ლოგარითმული გაშლის კოეფიციენტები $\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L$;

$$coeffs^{T} = (0.233\ \ 0.807\ \ -0.177)$$

$$\alpha := \left(coeffs^{T}\right)^{\langle 0 \rangle}$$

$\alpha = 0.233$

$$\beta := \left(coeffs^{T}\right)^{\langle 1 \rangle}$$

$\beta = 0.807$

$$A := e^{\left(coeffs^{T}\right)^{\langle 2 \rangle}}$$

$A = 0.838$

საწარმოო ფუნქციის პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f\left(\begin{pmatrix} 420 \\ 330 \end{pmatrix}\right) = 364.107$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}\right) = 335.228$$

**სავარჯიშო.**

მოიძიეთ Y წარმოების რეალური მოცულობის, K რეალური კაპიტალური დანახარჯებისა და L შრომის რეალური ხარჯების ინდექსის ცვლილებები, დროის მიხედვით საქართველოსათვის. იპოვეთ, აუცილებელი მონაცემები და განსაზღვრეთ კობ-დუგლასის საწარმოო ფუნქციის პარამეტრები.

## 2.7. კორელაცია ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის საქართველოს მაგალითზე. ფილიპსის მრუდი

განვიხილოთ შესაძლო კავშირი წლიურ ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის. ამისათვის ვისარგებლოთ არსებული ოფიციალური მონაცემებით (ცხრილი 2.9 და ცხრილი 2.10.)

ცხრილი 2.9

| | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|
| საშუალო წლიური წინა წლის საშუალო წლიურთან | 108.2 | 109.2 | 109.2 | 110.0 | 101.7 |
| დეკემბერი წინა წლის დეკემბერთან | 106.2 | 108.8 | 111.0 | 105.5 | 103.0 |
| წლიური ინფლაციის დონე | 6.2 | 8.8 | 11.0 | 5.5 | 3.0 |

ცხრილი 2.10.

| | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|
| დასაქმებული | 1744,6 | 1747,3 | 1704,3 | 1601,9 | 1656,1 |
| უმუშევარი | 279,3 | 274,5 | 261 | 315,8 | 335,6 |
| უმუშევრობის კოეფიციენტი | 0.138 | 0.136 | 0.133 | 0.165 | 0.169 |

***წლიურ ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის რომ შევისწავლოთ შესაძლო კავშირი, შევადგინოთ პროგრამა Mathcad-ზე და გამოვთვალოთ შესაბამისი კორელაციის კოეფიციენტი.***

## *ლაბორატორიული სამუშაო 2.7*

$$X := \begin{pmatrix} 6.2 \\ 8.8 \\ 11.0 \\ 5.5 \\ 3.0 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0.138 \\ 0.136 \\ 0.133 \\ 0.165 \\ 0.169 \end{pmatrix} \qquad n := 5 \qquad Xsr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_i}{n} \qquad Ysr := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} Y_i}{n}$$

$$sx2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\right)^2\right] - Xsr^2 \qquad sy2 := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_i\right)^2\right] - Ysr^2$$

$$sy2 = 0$$

$$sx2 = 7.616$$

$$Sxy := \left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_i\cdot Y_i\right)\right] - Xsr\cdot Ysr \qquad Kxy := \frac{Sxy}{\sqrt{sx2}\cdot\sqrt{sy2}} \qquad Dxy := Kxy^2$$

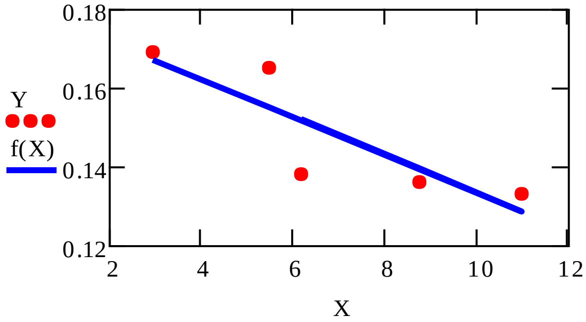
$$Kxy = -0.857 \qquad Dxy = 0.734$$

წრფივი რეგრესია

$$a := \frac{Sxy}{sx2} \qquad b := Ysr - a\cdot Xsr$$

$$a = -0.005 \qquad b = 0.181$$

$$f(x) := a\cdot x + b$$




$$\delta := \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_i - a\cdot X_i - b\right)^2}{n}}$$

$$\delta = 0.008$$

**როგორც ვხედავთ, წრფივი რეგრესია საკმაოდ კარგ მიახლოებას იძლევა უმუშევრობისა და ინფლაციის კოეფიციენტის ურთიერთდამოკიდებულების შესასწავლად. რეგრესიის წრფიდან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ინფლაციის გაზრდით, უმუშევრობა კლებულობს, რაც სწორედ ფილიპსის მრუდის იდეას შეესაბამება.**

## 2.8. განზოგადებული წრფივი რეგრესია საქონლის ფასის პროგნოზირებისათვის

ზოგჯერ წრფივი რეგრესიის მეთოდი უხეშ მიახლოებას იძლევა აქციის კურსის, საქონლის ფასისა და ეროვნული ვალუტის კურსის პროგნოზირებისას. ასეთ შემთხვევებში, ხშირად იყენებენ **განზოგადებული წრფივი რეგრესიის** მეთოდს. ამ მეთოდის არსი ისაა, რომ ექსპერიმენტული წერტილების მოცემულ ერთობლიობას უახლოვდება

$$F(x, k1, k2,...,kn)=k1\cdot F1(x)+k2\cdot F2(x)+...+kn\cdot Fn(x) \qquad (2.19)$$

ტიპის ფუნქციით, ანუ $F1(x)$, $F2(x)$ $Fn(n)$, ფუნქციის წრფივი კომბინაციით, ამასთან თვით ეს ფუნქციები შეიძლება იყოს წრფივიც, რაც მკვეთრად აფართოებს ასეთი აპროქსიმაციის შესაძლებლობებს და მას არაწრფივ ფუნქციებზეც განავრცობს.

## ლაბორატორიული სამუშაო 2.8

***ამოცანა.*** ცნობილია, რომ 5 თვის განმავლობაში *VX* საქონლის ფასი იცვლებოდა შემდეგი ცხრილის მიხედვით:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***VX*** | ***1*** | ***2*** | ***3*** | ***4*** | ***5*** | ***6*** | ***7*** | ***8*** |
| ***VY*** | ***15*** | ***12*** | ***9.4*** | ***16.2*** | ***26*** | ***?*** | ***?*** | ***?*** |

შევადგინოთ მომდევნო სამი თვისათვის ფასის პროგნოზი.

ამოხსნა. ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის რეალიზებისათვის გამოიყენება *linfit(VX,VY,F)* ფუნქცია. იგი აბრუნებს ზოგადი სახის წრფივი რეგრესიის კოეფიციენტების ვექტორს, რომლის დროსაც *(VX,VY)* კოორდინატების საწყისი წერტილების "ღრუბლის" მიახლოების საშუალო კვადრატული გადახრა იქნება მინიმალური. *F* ვექტორი უნდა შეიცავდეს *F1(x),F2(x),...,Fn(x)* ფუნქციებს, ჩაწერილს სიმბოლური სახით.
ამოცანის ექსპერიმენტული მონაცემები

## პროგრამა Mathcad-ზე

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 9.4 \\ 16.2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციათა მატრიცა

$$F(x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \\ x^2 \\ e^x \end{pmatrix}$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნის პროგრამა

$$i := 0..4$$

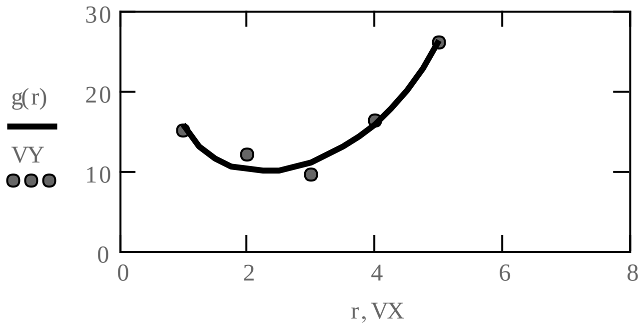
$$K := \mathrm{linfit}(VX, VY, F)$$

$$K = \begin{pmatrix} 14.899 \\ 0.509 \\ 0.07 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$g(t) := F(t) \cdot K$

$r := 1, 1.25 .. 5$




ფუნქციონალური დამოკიდებულების პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$g(6) = 48.98$

$g(7) = 103.651$

$g(8) = 242.607$

**სავარჯიშო.**

განზოგადებული წრფივი რეგრესიის მეთოდით ააგეთ ფასის დინამიკის კანონთან მიახლოება: ა) ნავთობისათვის; ბ) გაზისათვის და გ) ელექტროენერგიისათვის. გამოთვალეთ ფასთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები უახლოესი სამი თვისათვის.

## 2.9. არაწრფივი რეგრესია აქციის კურსის პროგნოზისათვის

როცა წრფივი რეგრესია და განზოგადებული წრფივი რეგრესია ჩვენი პროგნოზისათვის უხეშ შედეგებს იძლევა, უმჯობესია მივმართოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მეთოდებს.

ზოგადი სახის არაწრფივ რეგრესიაში იგულისხმება ნებისმიერი *F(x,k1,k2,...,kn)* ფუნქციის *K* პარამეტრების ვექტორის პოვნა, რომლის დროსაც უზრუნველყოფილია საწყისი წერტილების “ღრუბლის” ოპტიმალური მიახლოება.

### ლაბორატორიული სამუშაო 2.9

***ამოცანა.*** რუსეთის გაზპრომის აქციების კურსი ნახევარი წლის მანძილზე იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესის მიხედვით:

| VX | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VY | 1.9 | 1.6 | 1.34 | 1.22 | 1.35 | 1.05 | ? | ? | ? |

შევადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

ამოხსნა. ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის ჩასატარებლად გამოიყენება ფუნქცია

$$genfit\,(VX,VY,VS,F). \tag{2.20}$$

იგი აბრუნებს *F* ფუნქციის *K*-პარამეტრების ვექტორს, რომელიც თავის მხრივ გვაძლევს საწყისი მონაცემების *F(x,k1,k2,...,kn)* ფუნქციით დაახლოების მინიმალურ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას.

*F* ვექტორი უნდა შეიცავდეს სიმბოლურ ელემენტებს, რომლებიც, თავის მხრივ უნდა შეიცავდეს ანალიზურ გამოსახულებას საწყისი ფუნქციისა და მისი წარმოებულებისათვის ყოველი პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} F \\ \frac{d}{dk_1}F \\ \ldots \\ \frac{d}{dk_n}F \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

*VS* ვექტორი უნდა შეიცავდეს საწყის მიახლოებებს *K* ვექტორისათვის, რაც აუცილებელია რეგრესიის არაწრფივ განტოლებათა სისტემის იტერაციული მეთოდით ამოსახსნელად.

განვიხილოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიის მაგალითი შემდეგი ფუნქციის საშუალებით:

$$F(x,a,b)=a\cdot\exp(-b\cdot x)+a\cdot b. \tag{2.22}$$

გამოვთვალოთ წარმოებულები ყველა პარამეტრის მიხედვით, ანუ

$$\frac{d}{da}F(x,a,b)\to\exp(-bx)+b, \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{db}F(x,a,b)\to -a\cdot x\cdot\exp(-b\cdot x)+a. \tag{2.24}$$

მატრიცული *F(x,k)* ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$F(x,k)=\begin{pmatrix} k_1\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1\cdot k_2 \\ \exp(-k_2\cdot x)+k_2 \\ -k_1\cdot x\cdot\exp(-k_2\cdot x)+k_1 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

განვიხილოთ პროგნოზის კონკრეტული ამოცანა.

გაზპრომის აქციების კურსის ცვლილების კანონის აპროქსიმაციისათვის ვისარგებლოთ ზოგადი სახის არაწრფივი რეგრესიით. მიახლოების ფუნქციის საყრდენ კლასად ავირჩიოთ (2.22) ექსპონენციალურ ფუნქციათა სიმრავლე:

$$F(x,k1,k2) = k1\cdot\exp(-k2\cdot x) + k1\cdot k2, \tag{2.26}$$

მაშინ

$$\frac{d}{dk1}F(x,k1,k2) = \exp(-k2\cdot x) + k2, \tag{2.27}$$

$$\frac{d}{dk2}F(x,k1,k2) = -k1\cdot x\cdot\exp(-k2\cdot x) + k1. \tag{2.28}$$

## პროგრამა Mathcad-ზე

ORIGIN:= 1

საწყისი მონაცემები

$$VX := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad VY := \begin{pmatrix} 1.9 \\ 1.607 \\ 1.34 \\ 1.22 \\ 1.35 \\ 1.05 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციისა და მისი k კოეფიციენტებით კერძო წარმოებულების მატრიცა

$$F(x,k) := \begin{pmatrix} k_1\cdot e^{-k_2\cdot x} + k_1\cdot k_2 \\ e^{-k_2\cdot x} + k_2 \\ -k_1\cdot x\cdot e^{-k_2\cdot x} + k_1 \end{pmatrix}$$

უცნობი k კოეფიციენტების საწყისი მიახლოებები

$$VS := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

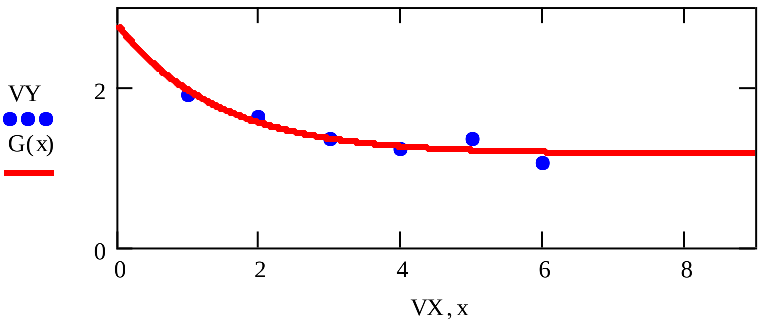
P := genfit (VX, VY, VS, F)

გაშლის საძიებელი კოეფიციენტების მნიშვნელობები

$$P = \begin{pmatrix} 1.62 \\ 0.712 \end{pmatrix}$$

მიახლოების ფუნქციის აგება

$G(x) := F(x,P)_1$




ნაპოვნი პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$G(7) = 1.164$

$G(8) = 1.158$

$G(9) = 1.156$

**სავარჯიშო.**

1. РАО ЭС РФ-ის აქციების კურსი ნახევარი წლის განმავლობაში იცვლებოდა ცხრილით მოცემული წესის მიხედვით:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *VX* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| *VY* | *2* | *1.9* | *1.7* | *1.8* | *1.3* | *1.25* | *?* | *?* | *?* |

შეადგინეთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

2. შეისწავლეთ (ინტერნეტის საშუალებით) მსოფლიოს წამყვანი კორპორაციების აქციების კურსის დინამიკა და შეადგინეთ კურსის პროგნოზი უახლოესი სამი თვისათვის.

## 2.10. პოლინომური რეგრესია

არაწრფივი რეგრესიის ერთ-ერთი სახეა პოლინომური რეგრესია, რომლის დროსაც აპროქსიმაციის ფუნქციად ირჩევენ მრავალწევრთა სიმრავლეს.

განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

# ლაბორატორიული სამუშაო 2.10

***ამოცანა.*** მოცემულია სურგუთნავთობის აქციების კურსის დინამიკა:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *X* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* |
| *Y* | *0.8* | *3.5* | *8* | *15* | *19* | *26* | *?* | *?* | *?* |

ავაგოთ პოლინომი, რომელიც საუკეთესო მიახლოებას მოგვცემს ამ მონაცემებთან; შევადგინოთ აქციების კურსის პროგნოზი მომდევნო სამი თვისათვის.

ამოხსნა. Mathcad-ში არსებობს ფუნქცია პოლინომური რეგრესიის უზრუნველსაყოფად, რეგრესიის მრავალწევრის ნებისმიერი ხარისხის დროს:

$$VS:=regress\ (VX,\ VY,\ h), \tag{2.29}$$

რომელიც გვაძლევს შემდეგი ფუნქციით მოთხოვნილ VS ვექტორს:

$$f(x):=interp\ (VS,\ VX,\ VY,\ x) \tag{2.30}$$

და შეიცავს ისეთი *n*-ური ხარისხის მრავალწევრის კოეფიციენტებს, რომლებიც საუკეთესოდ აახლოვებს *VX* და *VY* ვექტორებით მოცემულ კოორდინატთა წერტილების ღრუბელს (ერთობლიობას), ხოლო (2.30) ოპერატორი იძლევა *x* წერტილში სპლაინის მნიშვნელობას საწყისი *VX* და *VY*-ით, და სპლაინის *VS* კოეფიციენტებით.

შევადგინოთ data მონაცემთა მატრიცა

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}\ . \tag{2.31}$$

ვთქვათ, პოლინომის ხარისხი

$$k:=3. \tag{2.32}$$

შევადგინოთ საწყისი მონაცემების VX და XY ვექტორები:

$$VX:=data^{<0>}\quad VY:=data^{<1>}. \tag{2.33}$$

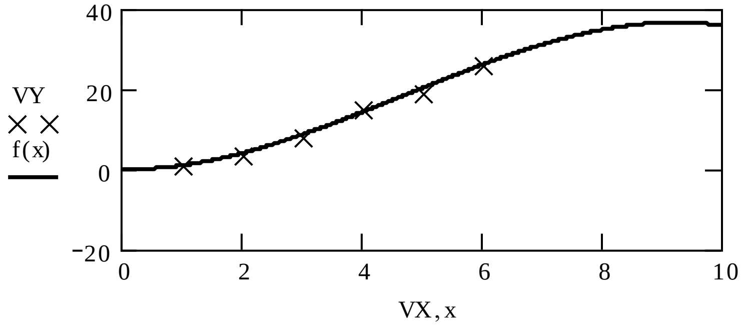
გამოვითვლით მესამე ხარისხის "საუკეთესო" მრავალწევრის კოეფიციენტებს (k=3):

$$VS:=regress\ (VX,\ VY,\ k). \tag{2.34}$$

ავაგოთ საუკეთესო პოლინომური მიახლოებები:

$$f(x):=interp(VS, VX, VY, x) \qquad (2.35)$$

და შედეგების გრაფიკული ინტერპრეტაცია:




პოლინომური რეგრესიის ინტერპრეტაცია

უკვე შესაძლებელია გამოვთვალოთ პროგნოზირებული მნიშვნელობები:

f(7)=? f(8)=? f(9)=?

## პროგრამა Mathcad-ზე

ამოცანის მონაცემები

$$data := \begin{pmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 3.5 \\ 3 & 8 \\ 4 & 15 \\ 5 & 19 \\ 6 & 26 \end{pmatrix}$$

მიახლოების პოლინომის ხარისხი

$$k := 3$$

მონაცემთა ვექტორების ფორმირება მატრიცის მონაცემებიდან

$$VX := data^{\langle 0 \rangle}$$

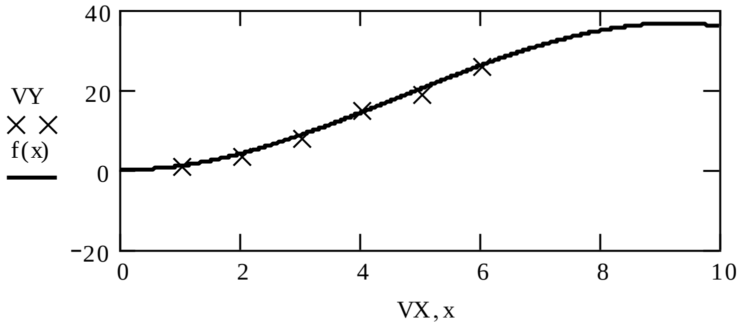
$$VY := data^{\langle 1 \rangle}$$

ამოცანის ამოხსნის ოპერატორი

$$VS := regress(VX, VY, k)$$

$$VS = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ -0.2 \\ -0.391 \\ 1.369 \\ -0.097 \end{pmatrix}$$

$$f(x) := interp(VS, VX, VY, x)$$




მონაცემთა პროგნოზირებული მნიშვნელობები

$$f(7) = 30.8$$

$$f(8) = 34.514$$

$$f(9) = 36.3$$

გაშლის კოეფიციენტების პოვნა

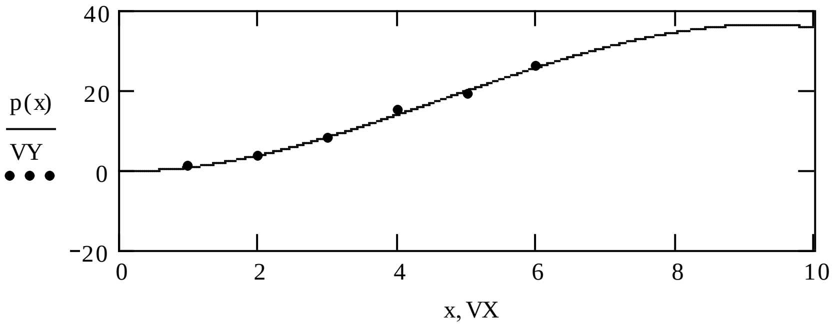
$$coeffs := submatrix(VS, 3, length(VS) - 1, 0, 0)$$

$$coeffs^T = (-0.2\ \ -0.391\ \ 1.369\ \ -0.097)$$

$$a := coeffs$$

აპროქსიმაციის პოლინომი

$$p(x) := \sum_{i=0}^{3} a_{3-i} \cdot x^{3-i}$$




**სავარჯიშო.**

პოლინომური რეგრესიის მეთოდით შეისწავლეთ 2011 წლის პირველ ნახევარში ენერგომატარებლებზე ფასის დინამიკა ქალაქ თბილისში და შეადგინეთ პროგნოზი წლის მეორე ნახევრისათვის. შედეგები შეადარეთ რეალურს, ახსენით განსხვავებები.

# თავი III. სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანები ეკონომიკაში

## 3.1. წრფივი დაპროგრამება

ბევრ პრაქტიკულ დარგში წამოიჭრება ამონახსნის ოპტიმიზაციის თავისებური ამოცანები, რომელთათვისაც დამახასიათებელია შემდეგი თვისებები:

ა) ეფექტურობის მაჩვენებელი $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ წარმოადგენს ამონახსნის $x_1, x_2, ..., x_n$ ელემენტების წრფივ ფუნქციას;

ბ) შესაძლო ამონახსნებზე გავრცელებული შეზღუდვის პირობებს აქვს წრფივი განტოლების ან უტოლობის სახე.

ასეთ ამოცანებს, წრფივი დაპროგრამების ამოცანები ეწოდება. განვიხილოთ წრფივი დაპროგრამების კონკრეტული ამოცანა.

### ლაბორატორიული სამუშაო 3.1

***ამოცანა.*** მეცხოველეობის ფერმაში ძროხების კვების რაციონი შეიძლება შედგეს სამი პროდუქტისაგან – თივა, სილოსი, კონცენტრატები, რომლებიც შეიცავენ ცილებს, კალციუმსა და ვიტამინებს. რიცხვითი მონაცემები მოცემულია ცხრილში:

| *პროდუქტები* | *საკვები ნივთიერებები* | | |
|---|---|---|---|
| | *ცილა (გ/კგ)* | *კალციუმი (გ/კგ)* | *ვიტამინები* |
| *თივა* | $\alpha_{11} = 50$ | $\alpha_{21} = 10$ | $\alpha_{31} = 2$ |
| *სილოსი* | $\alpha_{12} = 70$ | $\alpha_{22} = 6$ | $\alpha_{32} = 3$ |
| *კონცენტრატები* | $\alpha_{13} = 180$ | $\alpha_{23} = 3$ | $\alpha_{33} = 1$ |

ცილისა და კალციუმის მოხმარების დღე-ღამური ნორმები ერთ სულ ძროხაზე გადაანგარიშებით, შეადგენს არანაკლებ 2000 გ და 210 გ შესაბამისად. ვიტამინების მოხმარება მკაცრად დოზირებულია და უნდა შეადგენდეს 87 მგ-ს დღე-ღამეში.

შევადგინოთ ყველაზე იაფი რაციონი, თუ ერთი კგ თივის ღირებულება 150 ლარია, სილოსის – 200 ლარი და კონცენტრატისა – 600 ლარი.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა, ანუ შევადგინოთ შესატყვისი მათემატიკური მოდელი.

ვთქვათ, ოპტიმალური რაოდენობაა: თივის – *X1* კგ, სილოსის – *X2* კგ, კონცენტრატის – *X3* კგ. მაშინ მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება დღე-ღამეში) იქნება:

$$L(X1, X2, X3)=150\cdot X1+200\cdot X2+600\cdot X3. \tag{3.1}$$

ამოცანის პირობებში საჭიროა ამ ფუნქციის მინიმიზაცია.

ჩამოვაყალობოთ შეზღუდვათა რაოდენობა: დღე-ღამეში ცილის ≥2000გ, კალციუმის ≥210გ, ხოლო ვიტამინები ზუსტად =87მგ.

$$\begin{cases} 50\cdot X1+70\cdot X2+180\cdot X3\geq 2000 \\ 10\cdot X1+6\cdot X2+3\cdot X3\geq 210 \\ 2\cdot X1+3\cdot X2+1\cdot X3=87 \\ X1>0, X2>0, X3>0 \end{cases} \tag{3.2}$$

## პროგრამა Mathcad-ზე

მიზნის ფუნქცია

$$f(x1,x2,x3):=150\cdot x1+200\cdot x2+600\cdot x3,$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1:=1$$
$$x2:=1$$
$$x3:=1.$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი Mathcad-ში.

Given

$$x1\geq 1$$
$$x2\geq 1$$
$$x3\geq 1$$
$$50\cdot x1+70\cdot x2+180\cdot x3\geq 2000$$
$$10\cdot x1+6\cdot x2+3\cdot x3\geq 210$$
$$2\cdot x1+3\cdot x2+1\cdot x3=87$$

R:=minimize(f,x1,x2,x3)

მიზნის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი

$$R=\begin{pmatrix}5.833\\24.778\\1\end{pmatrix}$$

მიზნის ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$f(R_0,R_1,R_2)=6430.556$$

**სავარჯიშო.**

ვთქვათ, მცირე საწარმოს საამქრომ უნდა დაამზადოს სამი ტიპის 100 ნაკეთობა. თითოეული ნაკეთობა უნდა დამზადდეს არანაკლებ 20 ცალისა. ნაკეთობაზე იხარჯება შესაბამისად 4, 3.4 და 2 კგ ლითონი, როცა მისი საერთო მარაგი 340 კგ-ა, აგრეთვე 4.75,11 და 2 კგ პლასტმასა 700 კგ საერთო მოცულობით. თითოეული ტიპის *X1, X2* და *X3* რამდენი ნაკეთობა უნდა დამზადდეს, რომ მივიღოთ გამოშვების მაქსიმალური მოცულობა ფულადი გამოსახულებით, თუ ნაკეთობის ფასი კალკულაციის მიხედვით შეადგენს 4, 3 და 2 ლარს?

## 3.2. საარსებო მინიმუმის დადგენა მოცემულ ქალაქში, მოცემულ რაიონში

წრფივი დაპროგრამების ამოცანებს განეკუთვნება: ამოცანა საარსებო მინიმუმზე, წარმოებაზე, აგრეთვე სატრანსპორტო ამოცანა გადაზიდვებზე, მინდვრის სავარგულების ოპტიმალურ განაწილებაზე და ა.შ.

***ამოცანა.*** განვიხილოთ საარსებო მინიმუმის დადგენა. ვთქვათ, გვაქვს კვების $n$ პროდუქტი (პური, ხორცი, რძე, კარტოფილი, მარილი, შაქრის ფხვნილი და ა.შ.), რომლებიც შეიცავს სასიცოცხლოდ აუცილებელ ნივთიერებებს (ცხიმებს, ცილებს, ნახშირწყლებს და ვიტამინებს).

ცნობილია შემდეგი პარამეტრები:

$a_{ij}$ არის $j$-ური პროდუქტის ერთეულში $i$-ური ნივთიერების შემცველობა $(a_{ij} \geq 0)$;

$b_i$ – $i$-ური ნივთიერების მინიმალური რაოდენობა, რომელიც უნდა მოიხმაროს ინდივიდმა დროის მოცემულ შუალედში (დღე-ღამეში, დღეში, თვეში და ა.შ.);

$c_j$ არის $j$-ური პროდუქტის ერთეულის საბაზრო ფასი ($c_j$>0).

კვების ყველა რაციონს $(X_1,X_2,...,X_n)$ შორის, რომლებიც აკმაყოფილებს ინდივიდის მინიმალურ მოთხოვნილებას სასარგებლო ნივთიერებებზე, უნდა ამოვირჩიოთ შედარებით იაფი. $X_j$ წარმოადგენს ინდივიდის მიერ დროის მოცემულ შუალედში მოხმარებულ $j$-ური პროდუქტის რაოდენობას. გარდა ამისა უნდა გავითვალისწინოთ, რომ დროის მოცემულ შუალედში ინდივიდმა უნდა მიიღოს კალორიების მოცემული $q$ რაოდენობა;

$t_1$– $i$-ური პროდუქტის ერთეულში კალორიების შემცველობა.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა საარსებო მინიმუმის დადგენაზე.

მიზნის ფუნქცია (რაციონის ღირებულება ($X1,X2,X3,...Xn$))

$$L(X1, X2,..., Xn) = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j \to \min . \qquad (3.3)$$

შევადგინოთ შეზღუდვები დროის მოცემულ შუალედში ცხიმების, ცილების, ნახშირწყლების და ვიტამინების აუცილებელ რაოდენობებზე:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j \geq b_i , \qquad (3.4)$$

სადაც $i = \overline{1,m}$ და $m$ აუცილებელი ნივთიერებების რიცხვია.

გარდა (3.4) შეზღუდვისა გვაქვს განტოლების სახით მოცემული შეზღუდვა კალორიების აუცილებელ მოცულობაზე:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot X_i = q . \qquad (3.5)$$

(3.3), (3.4) და (3.5) ამოცანა, წრფივი დაპროგრამების ამოცანებია. ვიპოვოთ *(X1,X2,...,Xn)* ოპტიმალური მნიშვნელობები, როდესაც მიზნის ფუნქცია (3.3) მიიღებს მინიმალურ მნიშვნელობას. ამასთან, ეს მნიშვნელობები უნდა აკმაყოფილებდეს (3.4) და (3.5) შეზღუდვებს.

## ლაბორატორიული სამუშაო 3.2

***ამოცანა.*** დავადგინოთ საარსებო მინიმუმი რაიონში, სადაც კვების ძირითად პროდუქტებს შეადგენს: პური, კარტოფილი, ხორცი. საბაზრო ფასი პურზე – 0.5 ლ, კარტოფილზე – 0.6 ლ, ხორცზე – 10 ლარი.

ამოხსნა.

მიზნის ფუნქცია იქნება:

$L(X1,X2,X3)=0.5 \cdot X1+0.6 \cdot X2+10 \cdot X3 \to min.$

$b_i$ – ცხიმების, ცილებისა და ვიტამინების აუცილებელი რაოდენობის მნიშვნელობა, აგრეთვე ამ ნივთიერებების შემცველობა $a_{ij}$ პროდუქტებში, კალორიების აუცილებელი $q$ რაოდენობა. მოცემულ პროდუქტებში $t_i$ კალორიების შემცველობა განთავსებულია ინტერნეტში.

მაგალითისათვის (აქ აღებულია ნებისმიერი რიცხვები), თუ

$$b = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{pmatrix}; \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.5 \end{pmatrix}; \; q = 15000 ; \; t = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix},$$

მაშინ მივიღებთ შემდეგ შეზღუდვებს:

$0.1 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 + 0.1 \cdot X3 \geq 100$;
$0.3 \cdot X1 + 0.4 \cdot X2 + 0.2 \cdot X3 \geq 80$;
$0.2 \cdot X1 + 0.1 \cdot X2 + 0.5 \cdot X3 \geq 90$;
$20 \cdot X1 + 15 \cdot X2 + 30 \cdot X3 = 15000$.

## პროგრამა Mathcad-ზე

ამოცანის მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2, x3) := 0.5 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 + 10 \cdot x3 \quad *$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$
$$x2 := 1$$
$$x3 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამონახსნის პოვნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \geq 0$$
$$x2 \geq 0$$
$$x3 \geq 0$$
$$0.1 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 + 0.1 \cdot x3 \geq 100$$
$$0.3 \cdot x1 + 0.4 \cdot x2 + 0.2 \cdot x3 \geq 80$$
$$20 \cdot x1 + 15 \cdot x2 + 30 \cdot x3 = 15000$$
$$0.2 \cdot x1 + 0.1 \cdot x2 + 0.5 \cdot x3 \geq 90$$
$$R := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f(R_0, R_1, R_2) = 420$$

## ქალაქ თბილისის ისნის რაიონში საარსებო მინიმუმის დადგენა წრფივი დაპროგრამების ამოცანის საფუძველზე

საარსებო მინიმუმის გამოსათვლელად საჭიროა გამოვიკვლიოთ კვების ის პროდუქტები, რომლებზეც საკვლევ რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნაა.

ისნის რაიონში ყველაზე დიდი მოთხოვნა შემდეგ პროდუქტებზეა:

- პური
- ცხვრის ხორცი
- ხაჭო
- კარტოფილი
- ლობიო
- საქონლის ხორცი
- ბრინჯი.

ცნობილია, რომ სიცოცხლის შესანარჩუნებლად ადამიანმა უნდა მიიღოს: ცილები, ცხიმები და ნახშირწყლები, რომლებსაც შეიცავს მის მიერ მოხმარებული კვების პროდუქტები (მონაცემები მოყვანილია შემდეგ ცხრილში)

| | *ნახშირწყლები* | *ცილები* | *ცხიმები* |
|---|---|---|---|
| ***პური*** | $a_{11}$**=5.0** | $a_{21}$**=7.9** | $a_{31}$**=0.8** |
| ***ცხვრის ხორცი*** | $a_{12}$**=16** | $a_{22}$**=2.0** | $a_{32}$**=0** |
| *ხაჭო* | $a_{13}$**=2.8** | $a_{23}$**=13.2** | $a_{33}$**=20.0** |
| *კარტოფილი* | $a_{14}$**=16** | $a_{24}$**=2.0** | $a_{34}$**=0** |
| *ლობიო* | $a_{15}$**=46** | $a_{25}$**=21** | $a_{35}$**=0** |
| *საქონლის ხორცი* | $a_{16}$**=0** | $a_{26}$**=18.9** | $a_{36}$**=12.4** |
| *ბრინჯი* | $a_{17}=1.0$ | $a_{27}=71$ | $a_{37}=0$ |
| *დღე-ღამური ნორმა* | $b_1 \le 500$ | $b_2 \le 90$ | $b_3 \le 100$ |

## პროგრამა **Mathcad-ზე**

$$L(X) := 0.40\,X_1 + 1.10\,X_2 + 2.5\,X_3 + 0.50\,X_4 + 2\cdot X_5 + 4\cdot X_6 + 1\cdot X_7$$

$$X_1 := 1$$
$$X_2 := 1$$
$$X_3 := 1$$
$$X_4 := 1$$
$$X_5 := 1$$
$$X_6 := 1$$
$$X_7 := 1$$

Given

$$X_1 \geq 0.500$$
$$X_2 \geq 0.500$$
$$X_3 \geq 0.500$$
$$X_4 \geq 0.500$$
$$X_5 \geq 0.500$$
$$X_6 \geq 0.500$$
$$X_7 \geq 0.500$$

$$3950 X_1 + 500 \cdot X_2 + 13200 X_3 + 2000 X_4 + 21000 X_5 + 18900 X_6 + 1000 X_7 \geq 90$$

$$400 \cdot X_1 + 83500 X_2 + 20000 X_3 + 0 \cdot X_4 + 0 \cdot X_5 + 12400 X_6 + 0 \cdot X_7 \geq 100$$

$$250000 X_1 + 1300 X_2 + 2800 X_3 + 16000 X_4 + 46000 X_5 + 0 \cdot X_6 + 71000 X_7 \geq 500$$

$$255 \cdot X_1 + 781 \cdot X_2 + 94 \cdot X_3 + 94 \cdot X_4 + 55 \cdot X_5 + 187 \cdot X_6 + 351 \cdot X_7 = 1200$$

$$R := \mathrm{Minimize}(L, X)$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.873 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$L(R) = 6.161$$

საარსებო მინიმუმი ქალაქ თბილისის ისნის რაიონისათვის შეადგენს 6.161 ლარს დღეში და 184.83 ლარს თვეში.

**სავარჯიშო.**

დაადგინეთ საარსებო მინიმუმი თქვენს რაიონში, სადაც კვების ძირითადი პროდუქტებია: პური, კარტოფილი, ხორცი და ა. შ.

***შენიშვნა.*** გამოიყენეთ საბაზრო ფასები მოცემულ პროდუქტებზე. აუცილებელი ყველა ინფორმაცია მოიპოვეთ ინტერნეტში და შეადგინეთ კვების ოპტიმალური რაციონი.

## 3.3. რესურსების ოპტიმალური განაწილება

ვთქვათ, მოცემულია გარკვეული რესურსები (ნედლეული, სამუშაო ძალა, დანადგარები):

$$R_1, R_2, \ldots, R_m, \tag{3.6}$$

შესაბამისი რაოდენობებით

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, \tag{3.7}$$

ამ რესურსების გამოყენებით შეიძლება ვაწარმოოთ საქონელი:

$$T_1, T_2, \ldots, T_n\,. \tag{3.8}$$

$T_j$ საქონლის ერთი ერთეულის საწარმოებლად საჭიროა $R_i$ რესურსის $a_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ ერთეული. $R_i$ რესურსის თითოეული ერთეული ღირს $d_i$ ლარი; $T_j$ საქონლის თითოეული ერთეულის რეალიზაცია შესაძლოა $C_j$ $(j=\overline{1,n})$ ლარად.

საქონლის თითოეული სახეობის წარმოებული ერთეულების რაოდენობა შემოფარგლულია მოთხოვნით. ცნობილია, რომ ბაზარი ვერ შთანთქავს $T_j$ $(j=\overline{1,n})$ საქონლის $K_j$ ერთეულზე მეტ რაოდენობას.

***ისმის კითხვა***: რომელი საქონელი და რა რაოდენობით უნდა იქნეს წარმოებული იმისათვის, რომ მოხდეს მაქსიმალური მოგების რეალიზება?

ამოხსნა. ამოცანის პირობები ჩავწეროთ წრფივი დაპროგრამების მათემატიკური მოდელის სახით.

მოთხოვნის პირობები აწესებს შეზღუდვებს:

$$X_i \le K_i\ ,\ \ i=\overline{1,n}\ . \tag{3.9}$$

გარდა ამისა, რესურსები მოიხმარება არა უმეტეს იმ რაოდენობისა, ვიდრე გვაქვს საწყობში; ამიტომ ღებულობენ შეზღუდვებს:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (\mathrm{i}=\overline{1,m})\,. \tag{3.10}$$

შევადგინოთ მოგების მიზნის ფუნქცია. $T_j$ სახის საქონლის ერთეული რაოდენობის $s_j$ თვითღირებულება უდრის

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \qquad (j = \overline{1,n}). \tag{3.11}$$

$T_j$ საქონლის ერთი ერთეულის რეალიზებით მიღებული სუფთა $q_j$ მოგება ტოლია მის გასაყიდ $c_j$ ფასსა და $s_j$ თვითღირებულებას შორის სხვაობისა:

$$q_j = c_j - s_j \ . \tag{3.12}$$

ყველა საქონლის რეალიზაციით მიღებული საერთო სუფთა მოგება იქნება:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j = \sum_{j=1}^{n} (c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i) \cdot x_j \to \max .$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 3.3

***ამოცანა.*** სართავი ფაბრიკა ნართის ორი სახეობის საწარმოებლად იყენებს სამი ტიპის ნედლეულს – სუფთა შალს, კაპრონს და აკრილს.

ცხრილში ნაჩვენებია ნედლეულის ხარჯვის ნორმები, მისი საერთო რაოდენობა, რომელიც ფაბრიკამ წლის განმავლობაში უნდა გამოიყენოს და თითოეული სახის ნართის ერთი ტონის რეალიზაციით მიღებული მოგება.

| *ნედლეულის ტიპი* | *1ტ ნართზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები* | | *ნედლეულის რაოდენობა (ტ)* |
|---|---|---|---|
| | *სახეობა 1* | *სახეობა 2* | |
| *შალი* | $\alpha_{11} = 0.5$ | $\alpha_{12} = 0.2$ | $b_1 = 600$ |
| *კაპრონი* | $a_{21} = 0.1$ | $a_{22} = 0.6$ | $b_2 = 620$ |
| *აკრილი* | $a_{31} = 0.4$ | $a_{32} = 0.2$ | $b_3 = 500$ |
| *1 ტ ნართის რეალიზაციით მიღებული მოგება* | $q_1 = 1100$ | $q_2 = 900$ | |

შევადგინოთ მოგების მაქსიმიზაციისათვის ნართის წარმოების წლიური გეგმა.

ამოხსნა. ჩამოვაყალიბოთ ამოცანა მათემატიკურ ენაზე. ვთქვათ, $x_1$ პირველი სახის ნართის რაოდენობაა და $x_2$ – მეორე სახის ნართის რაოდენობა.

მაშინ შეზღუდვებს ექნება შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} 0.5 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 600 \\ 0.1 \cdot X1 + 0.6 \cdot X2 \le 620 \\ 0.4 \cdot X1 + 0.2 \cdot X2 \le 500 \end{cases}$$

ხოლო მიზნის ფუნქციას (სუფთა მოგებას) - შემდეგი სახე: $L(X1, X2) = 1100 \cdot X1 + 900 \cdot X2 \rightarrow \max$.

## პროგრამა Mathcad-ზე

ამოცანის მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2) := 1100 \cdot x1 + 900 \cdot x2$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

ამოცანის ამოხსნისა და შეზღუდვების პროგრამული ბლოკი

Given

$$x1 \ge 0$$

$$x2 \ge 0$$

$$0.5 \cdot x1 + 0.2 \cdot x2 \le 600$$

$$0.1 \cdot x1 + 0.6 \cdot x2 \le 620$$

$$0.4 \cdot x1 + 024 \cdot x2 \le 500$$

$$R := \text{Maximize}(f, x1, x2)$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f\left(R_0, R_1\right) = 1690000$$

**სავარჯიშო.**

სამი სახეობის *A*, *B* და *C* ნაკეთობის საწარმოებლად გამოიყენება *T1, T2, T3* ტიპის ნედლეული. ამასთან, *T1* და *T3* ნედლეულის შესყიდვები შეზღუდულია მომწოდებლების შესაძლებლობებით. ცხრილში მოცემულია ნედლეულის ხარჯვის, ნედლეულსა და ნაკეთობაზე ფასების ნორმები და ნედლეულის შესყიდვის შეზღუდვები.

| *ნედლე-ულის ტიპი* | *1კგ ნედლეულის ფასი (ლარი)* | *ერთ ნაკეთობაზე ნედლეულის ხარჯვის ნორმები (კგ)* | | | *ნედლეულის შეძენის შეზღუდვები (კგ)* |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *A* | *B* | *C* | |
| $T_1$ | $d_1=2$ | $a_{11}=1$ | $a_{12}=3$ | $a_{13}=a$ | $b_1=3000$ |
| $T_2$ | $d_2=1$ | $a_{21}=4$ | $a_{22}=1$ | $a_{23}=3$ | - |
| $T_3$ | $d_3=b$ | $a_{31}=6$ | $a_{32}=5$ | $a_{33}=2$ | $b_3=3320$ |
| *ერთი ნაკეთობის ფასი (ლარი)* | | $c_1=6b+12$ | $c_2=5b+22$ | $c_3=c$ | |

განსაზღვრეთ მოგების მაქსიმიზაციის მიზნით პროდუქციის წარმოების ოპტიმალური გეგმა. შეადგინეთ ზოგადი სახის მათემატიკური მოდელი.

განიხილეთ *(a,b,c)* პარამეტრების მოცემის სხვადასხვა შემთხვევები:

| *a* | *b* | *c* |
|---|---|---|
| 2 | 1 | 17 |
| 2 | 2 | 19 |
| 2 | 3 | 21 |

## 3.4. გადაზიდვების სატრანსპორტო ამოცანა

ვთქვათ, რაღაც პროდუქტი (ქვანახშირი, აგური, ბენზინი,…) ინახება *m* საწყობში და გამოიყენება *n* პუნქტში (ქარხნებში, მშენებლობაზე, მაღაზიებში, ბენზინგასამართ სადგურებში და ა.შ.). $a_i$ არის პროდუქტის მარაგი *i*-ურ საწყობში $(a_i > 0)$; $b_j$ – განაცხადები საქონელზე მოხმარების j-ურ პუნქტში; $c_{ij}$ – *i*-ური საწყობიდან მოხმარების *j*-ურ პუნქტში ერთეულოვანი რაოდენობის პროდუქტის გადაზიდვის ღირებულება, $c_{ij} > 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

ამასთან ითვლება, რომ ამოცანა დაბალანსებულია, ე.ი. ჯამური მარაგები ტოლია ჯამური მოთხოვნილებისა

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,. \qquad (3.13)$$

უნდა ავირჩიოთ გადაზიდვების ისეთი სტრატეგია, რომ სრულად დავაკმაყოფილოთ მოთხოვნილებები, ამასთან გადაზიდვების ჯამური ხარჯები იყოს მინიმალური.

*ამოხსნა.* ვთქვათ, $x_{ij}$ საქონლის რაოდენობაა, რომელიც გადაიზიდება i-ური პუნქტიდან მოხმარების j-ურ პუნქტში, მაშინ მიზნის ფუნქციას (გადაზიდვების ჯამური ხარჯები) აქვს შემდეგი სახე:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \,. \qquad (3.14)$$

გარდა ამისა, უნდა დავაკმაყოფილოთ ყველა განაცხადი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,, \ (j = 1, n) \,. \qquad (3.15)$$

რადგან დასახარჯია საწყობების მთელი მარაგი, გვექნება:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \,, (i = \overline{1, m}) \,. \qquad (3.16)$$

ცხადია,

$$X_{ij} \ge 0 \,. \qquad (3.17)$$

ამრიგად, ვღებულობთ წრფივი დაპროგრამების (3.14)-(3.17) ამოცანას, რომლის ამოხსნაც უკვე ვიცით.

## ლაბორატორიული სამუშაო 3.4

***ამოცანა.*** რეგიონში არის ცემენტის ორი ქარხანა და მათი პროდუქციის მომხმარებელი სამი ბინათმშენებლობის კომბინატი. ცხრილში მოცემულია ცემენტის წარმოების დღეღამური მოცულობები, კომბინატების დღე-ღამური მოთხოვნილებები და თითოეული ქარხნიდან თითოეულ კომბინატამდე ერთი ტონა ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება.

შევადგინოთ ცემენტის გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა სატრანსპორტო ხარჯების მინიმიზაციის მიზნით.

| *ქარხნები* | *ცემენტის წარმოება ტ/დღ* | *1 ტ ცემენტის გადაზიდვის ღირებულება* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | *კომბ.1* | *კომბ. 2* | *კომბ. 3* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *I ქარხანა* | $a_1$=40 | $c_{11}$=10 | $c_{12}$=15 | $c_{13}$=25 |
| *II ქარხანა* | $a_2$=60 | $c_{21}$=20 | $c_{22}$=30 | $c_{23}$=30 |
| | *ცემენტის მოხმარება ტ/დღ* | $b_1$=50 | $b_2$=20 | $b_3$=30 |

ამოხსნა. ამოცანის ამოსახსნელად ვადგენთ მათემატიკურ მოდელს.

ვთქვათ, $X_{ij}$ ცემენტის რაოდენობაა $\left(i=\overline{1,2}\right)$ ორი ქარხნიდან გადაზიდული $\left(j=\overline{1,3}\right)$ სამ ბინათსამშენებლო კომბინატში. მაშინ, მიზნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$L(X)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}C_{ij}\cdot X_{ij}\to\min.$$

გვაქვს შემდეგი სახის შეზღუდვები:

$$\sum_{i=1}^{2}X_{ij}=b_j\ ,\ \left(j=\overline{1,3}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{3}X_{ij}=a_i\ ,\ \left(i=\overline{1,2}\right)$$

$$X_{ij}\ge 0\,.$$

სატრანსპორტო ამოცანის ამოსახსნელად ვადგენთ შემდეგ პროგრამას

## პროგრამა **Mathcad-ზე**

ინდექსაცია იწყება i=1-დან

$$\text{ORIGIN} := 1$$

გადაზიდვის ფასები

$$C := \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

ორ ქარხანაში ცემენტის მარაგი

$$A := \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$$

სამი ბინათსამშენებლო კომბინატის მოთხოვნილება

$$B := \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების მიზნის ფუნქცია

$$L(X) := \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} C_{i,j} \cdot X_{i,j}$$

ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$i := 1..2$$

$$i := 1..2$$

$$j := 1..3$$

$$X_{i,j} := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

Given

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,1} = B_1$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,2} = B_2$$

$$\sum_{i=1}^{2} X_{i,3} = B_3$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1,j} = A_1$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2,j} = A_2$$

$$X \geq 0$$

$$R := \mathrm{Minimize}(L, X)$$

ამოცანის მინიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

გადაზიდვების ოპტიმიზებული ფასი

$$L(R) = 2000$$

**სავარჯიშო.**

შეადგინეთ გადაზიდვების ანალოგიური ამოცანა თქვენი რაიონისათვის და იპოვეთ გადაზიდვების ოპტიმალური გეგმა.

(თითოეულ სტუდენტს უნდა ჰქონდეს სხვადასხვა მონაცემები და ამოცანის განსხვავებული შინაარსი).

## 3.5. არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

იპოვეთ მინიმუმის (მაქსიმუმის) წერტილი და მინიმალური (მაქსიმალური) მნიშვნელობა არაწრფივი ფუნქციისათვის:

$$z = f(x_1, x_2, \dots x_n) \tag{3.18}$$

შეზღუდვების პირობებში, რომლებიც მოცემულია ტოლობების სახით

$$S_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \; i = \overline{1,k} \; , \tag{3.19}$$

ან უტოლობების სახით

$$\Psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \; j = \overline{1,m} \; . \tag{3.20}$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 3.5

***ამოცანა.*** ვიპოვოთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$f(x1, x2) = 6x1 - (x1)^2 + x2$$

შემდეგი შეზღუდვების პირობებში:

$$\begin{cases} 2x1 + 3x2 \le 24 \\ x1 + 2 \cdot x2 \le 15 \\ 3x1 + 2 \cdot x2 \le 24 \\ x2 \le 4 \\ x1 \ge 0, \\ x2 \ge 0 \end{cases}$$

ამოხსნა.

### პროგრამა **Mathcad-ზე**

მიზნის ფუნქცია

$$f(x1, x2) := 6 \cdot x1 + x2 - x1^2$$

ამოცანის ცვლადების საწყისი მიახლოებები

$$x1 := 1$$

$$x2 := 1$$

შეზღუდვებისა და ამოცანის ამოხსნის პროგრამული ბლოკი

$$\text{Given}$$
$$x1 \ge 0$$
$$4 \ge x2 \ge 0$$
$$2 \cdot x1 + 3 \cdot x2 \le 24$$
$$x1 + 2 \cdot x2 \le 15$$
$$3 \cdot x1 + 2 \cdot x2 \le 24$$
$$R := \text{Maximize}(f, x1, x2)$$

მაქსიმუმის წერტილი

$$R = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ამოცანის ამონახსნი

$$f\left(R_0, R_1\right) = 13$$

**სავარჯიშო**

1. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობები

$$f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

შემდეგი შეზღუდვებით:

$$3x_1 + 2x_2 \ge 7$$
$$10x_1 - x_2 \le 8 \qquad ;$$
$$-18x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 .$$

პასუხი:

$$x_{1\min} = \frac{123}{101}; \quad x_{2\min} = \frac{422}{101}; \quad f_{\min} = \frac{324}{101} .$$
$$x_{2\max} = 2; \quad x_{2\max} = 12; \quad f_{\max} = 65.$$

2. იპოვეთ არაწრფივი ფუნქციის მინიმალური მნიშვნელობა

$$f(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 ,$$

შემდგი შეზღუდვებით:

$$x_1 + x_2 = 180 ,$$
$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 .$$

პასუხი.

$$x_{1\min} = 91; \; x_{2\min} = 89; \; f_{\min} = 17278 .$$

3. იპოვეთ მაქსიმალური მნიშვნელობა

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2^2 - x_1^2 - 2x_2^2 ,$$

თუ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

პასუხი.

$x_{1\max} = x_{2\max} = 1, \quad f_{\max} = 3$.

4.იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$$f(x) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0 \qquad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

პასუხი.

$x_{1\max} = 0.99528; x_{2\max} = 0.96321; \quad f_{\max} = 2.99957$.

5.იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 1)^4 + (x_2 - 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \\ -3x_1^2 - 2x_2^2 + 21 \ge 0 \\ -4x_1 - 5x_2 + 20 \ge 0 \end{cases}$$

პასუხი.

$x_{1\min} = 0.9989; \quad x_{2\min} = 2.999763; \quad f_{\min} = 0$.

6. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2;$$

$$x_1 + x_2 - 5 = 0.$$

პასუხი.

$x_{1\min} = 2.5; \quad x_{2\min} = 2.5; \quad f_{\min} = 4.5.$

7. იპოვეთ $f_{\min}$, თუ

$$f(x) = (x_1 - 1) \cdot (x_1 - 2) \cdot (x_1 - 3) + x_3$$

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 \ge 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4 \ge 0$$

$$5 - x_3 \ge 0$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \quad x_3 \ge 0$$

პასუხი.

$x_{1\min} = 2.01; \quad x_{2\min} = 0.001; \quad x_{3\min} = 2.011; \quad f_{\min} = 2.0$.

8. იპოვეთ $f_{\max}$, თუ

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2; \quad 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2 \ge 0, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

პასუხი.

$x_{1\max} = 4.021; \quad x_2 = 4.021; \quad f_{\max} = -32.337$.

## თავი IV. საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები

თანამედროვე ეტაპზე საინვესტიციო პროექტების შეფასებისას, საბაზრო ეკონომიკის მქონე ქვეყნებში ფართოდ გამოიყენება

დისკონტირების ტექნიკა, რომელიც ემყარება რთული პროცენტის ლოგიკას. ამ თავში განვიხილავთ ასეთი მეთოდების არსსა და უპირატესობებს.

## 4.1. პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის გამოთვლა

საინვესტიციო პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის ცნებების შესასწავლად განვიხილოთ კონკრეტული ამოცანა.

**განსაზღვრება.** მოსალოდნელი შემოსავლის მოცულობის ფარდობას საინვესტიციო კაპიტალის მოცულობასთან პროექტის **რენტაბელურობის მაჩვენებელი** ეწოდება.

მაგალითად, თუ ჩვენი პროექტის რეალიზაციისათვის საჭიროა \$20000 მოცულობის ინვესტიციები და მოსალოდნელი წლიური შემოსავალია \$30000, მაშინ რენტაბელურობის *ReX* მაჩვენებელი იქნება:

$$RX = \frac{30000}{20000} = 1.5. \tag{4.1}$$

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია** ეწოდება შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა ცხრილს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

$p_i$ არის ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი $X$ სიდიდის მნიშვნელობა იქნება $x_i$.

დისკრეტული შემთხვევითი $X$ სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის შესაფასებლად შემოდის **მათემატიკური ლოდინის *(MX)*** ცნება.

**განსაზღვრება.** დისკრეტული შემთხვევითი $X$ სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** *(MX)* ეწოდება $X_i$ მნიშვნელობათა შესაბამის $p_i$ ალბათობებზე ნამრავლთა ჯამს, ანუ

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \tag{4.2}$$

შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია *DX* ახასიათებს შემთხვევითი $X$ სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევას მისი საშუალო მნიშვნელობიდან - მათემატიკური ლოდინიდან.

$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 \cdot p_i. \qquad (4.3)$$

**განსაზღვრება.** კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან **საშუალო კვადრატული გადახრა** ეწოდება.

$$SX = \sqrt{DX}. \qquad (4.4)$$

**P.S.** ფინანსურ ანალიზში საშუალო კვადრატულ გადახრას რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა ეწოდება.

**განსაზღვრება.** რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა ეწოდება რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობისა და მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალის სიდიდის ფარდობას, გამოხატულს პროცენტობით.

$$vX = \frac{SX}{MX} \cdot 100\%. \qquad (4.5)$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 4.1

**ამოცანა.** მოცემული პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგება შეადგენს 30%-ს. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა $p$=0,05. შეისწავლეთ რენტაბელურობა და შეაფასეთ შემოთავაზებული პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები.

ამოხსნა. პროექტის \$20000 მოცულობითი ინვესტირებისას, წლის ბოლოს გვაქვს ორი შესაძლებლობა:

ა) წარმატება, მაშინ მივიღებთ: $20000 + 20000 \cdot 0.3 = 20000 \cdot 1.3$; ბ) ჩავარდნა, მაშინ ვღებულობთ 0–ს (ე.ი. ჩადებული ფული იკარგება). სამუშაოს შესასრულებლად საჭიროა ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი ცნება, როგორიცაა: **შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მათემატიკური ლოდინი, დისპერსია, საშუალო კვადრატული გადახრა და ვარიაციის კოეფიციენტი.**

მოსალოდნელი წლიური შემოსავლის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

| | | |
|---|---|---|
| $X$ | $20000 \cdot 1.3$ | $0$ |
| $P$ | 0.95 | 0.05 |

ამოვხსნათ მოცემული ამოცანა Mathcad–პროგრამული პაკეტის საშუალებით.

**პროგრამა Mathcad-ზე**

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$X := \begin{pmatrix} 20000 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 0.95 \\ 1 - 0.95 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი
(მათემატიკური ლოდინი),

$$MX := \sum_{i=0}^{1} X_i \cdot P_i$$

$$MX = 24700$$

რენტაბელურობის მაჩვენებელი

RX:=MX/20000

RX=1.235

დისპერსია,

$$DX := \sum_{i=0}^{1} \left(X_i - MX\right)^2 \cdot P_i$$

$$DX = 32110000$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობა (საშუალო კვადრატული გადახრა)

$$S := \sqrt{DX}$$

$$S = 5666.569$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობა (ვარიაციის კოეფიციენტი)

$$\nu := \frac{S}{MX} \cdot 100$$

$$\nu = 22.942$$

**სავარჯიშო**

მოცემული პროექტის *I* მოცულობით ინვესტირებისას მოსალოდნელი წლიური მოგებაა *m*%. პროექტის ჩავარდნის ალბათობა *p=PA*. შეისწავლეთ რენტაბელურობა და შეაფასეთ წარმოდგენილი პროექტის რისკის შესაძლო მნიშვნელობები, თუ:

*1. I=$30000, m=25%, PA=0.01*
*2. I=$50000, m=20%, PA=0.02*
*3. I=$60000, m=30%, PA=0.03*
*4. I=$70000, m=15%, PA=0.011*
*5. I=$80000, m=35%, PA=0.1*

## 4.2. ორი ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია

**განსაზღვრება.** ორ საინვესტიციო პროექტს ეწოდება **ალტერნატიული**, თუ ერთი მათგანის ინვესტირება გამორიცხავს მეორე პროექტის ინვესტირებას.

ორი პროექტის ალტერნატიულობის შემთხვევაში, გამოითვლიან ორივე პროექტისათვის რენტაბელურობის მაჩვენებლებსა და რისკის კოეფიციენტებს.

განვიხილოთ სხვადასხვა შემთხვევები:

ა) თუ ორივე პროექტს რენტაბელურობის ერთი და იგივე მაჩვენებელი აქვს, მაშინ ირჩევენ იმ პროექტს, რომლის რისკის ფარდობითი მაჩვენებელიც ნაკლებია;

ბ) თუ ორივე პროექტის რისკის ფარდობითი კოეფიციენტის მაჩვენებელი ერთნაირია, ამოირჩევენ იმ პროექტს, რომელსაც რენტაბელურობის მაღალი მაჩვენებელი აქვს;

გ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელი მეტია და რისკის კოეფიციენტი ნაკლები, ვიდრე მეორე პროექტისა, მაშინ უპირატესობა ენიჭება პირველ პროექტს;

დ) თუ პირველი პროექტის რენტაბელურობის მაჩვენებელიც და რისკის კოეფიციენტი მეტია მეორე პროექტისაზე, მაშინ არჩევანს აკეთებს მენეჯერი ინვესტორისათვის დამატებითი მონაცემებიდან, კერძოდ, რისკის დასაშვებ სიდიდეებსა და რენტაბელურობის ფარდობითი კოეფიციენტის ღირებულებაზე დაყრდნობით.

რამდენადაც ეს ამოცანა ემყარება მეორე ლაბორატორიულ სამუშაოში მოცემულ ცნებებს, შეგვიძლია პირდაპირ გადავიდეთ კონკრეტულ ამოცანაზე.

## ლაბორატორიული სამუშაო 4.2

**ამოცანა.** ინვესტორს წარმოუდგინეს ორი ალტერნატიული საინვესტიციო *A* და *B* პროექტი. *A* პროექტი მოითხოვს $100 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 25%-იანი წლიური მოგებით და მისი ჩავარდნის ალბათობაა $PA$=0,011. *B* პროექტი მოითხოვს $250 ათასი მოცულობის ინვესტიციებს 30%-იანი წლიური მოგებით, ჩავარდნის ალბათობაა $PB$=0,012.

გავაკეთოთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის.

ამოხსნა. ორივე პროექტისათვის შევადგინოთ მოსალოდნელი შემოსავლებისა და შესაბამისი ალბათობების მატრიცები, ისევე როგორც 4.1 ლაბორატორიული სამუშაოს ამოცანის დროს.

შევადგინოთ განაწილების ფუნქციები:

| | | |
|---|---|---|
| *A* | *100·1.25* | *0* |
| *PA* | *0.989* | *0.011* |

| | | |
|---|---|---|
| *B* | *250·1.3* | *0* |
| *PB* | *0.988* | *0.012* |

თითოეული პროექტისათვის ვიანგარიშოთ რენტაბელურობის მაჩვენებლები და რისკის კოეფიციენტები, რაც შემდგომში მოგვცემს პროექტების შედარების საშუალებას. განაწილების ფუნქციიდან გამომდინარე, შევადგინოთ პროგრამები **Mathcad**–ზე.

## პროგრამა Mathcad-ზე

საწყისი მონაცემების შეტანა

$$A := \begin{pmatrix} 100 \cdot 1.25 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PA := \begin{pmatrix} 0.989 \\ 1 - 0.989 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 250 \cdot 1.3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PB := \begin{pmatrix} 0.988 \\ 1 - 0.988 \end{pmatrix}$$

მოსალოდნელი საშუალო შემოსავალი თითოეული პროექტისათვის

$$MA := \sum_{i=0}^{1} A_i \cdot PA_i \qquad MB := \sum_{i=0}^{1} B_i \cdot PB_i$$

$$MA = 123.625 \qquad MB = 321.1$$

რენტაბელურობა

$$RA := \frac{MA}{100} \qquad RB := \frac{MB}{250}$$

დისპერსია

$$DA := \sum_{i=0}^{1} \left(A_i - MA\right)^2 \cdot PA_i \qquad DB := \sum_{i=0}^{1} \left(B_i - MB\right)^2 \cdot PB_i$$

$$DA = 169.984 \qquad DB = 1252.29$$

რისკის აბსოლუტური მნიშვნელობები

$$SA := \sqrt{DA} \qquad SB := \sqrt{DB}$$

$$SA = 13.038 \qquad SB = 35.388$$

ფინანსური რისკის ფარდობითი მნიშვნელობები

$$\nu A := \frac{SA}{MA} \cdot 100 \qquad \nu B := \frac{SB}{MB} \cdot 100$$

$\nu A = 10.546 \qquad \nu B = 11.021$

$RA = 1.236 \qquad RB = 1.284$

ამ მაგალითში, რენტაბელურობის მაჩვენებლები და ფარდობითი რისკი ორივე პროექტისათვის თითქმის ერთნაირია, ამიტომ პროექტის ამორჩევა ხდება დამატებითი მოსაზრებებიდან ინვესტორისათვის ფულის ღირებულებისა და პროექტების მახასიათებლებს შორის განსხვავებათა შესაბამისი მნიშვნელობების მიხედვით.

**სავარჯიშო**

ინვესტორს წარუდგინეს *A* და *B* ალტერნატიული ორი პროექტი. *A* პროექტი მოითხოვს *IA* მოცულობის ინვესტიციებს *ma%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PA; ხოლო B* პროექტი მოითხოვს *IB* მოცულობის ინვესტიციებს *mb%* წლიური მოგებით, პროექტის ჩავარდნის ალბათობაა *PB*. გააკეთეთ არჩევანი ამ ორ პროექტს შორის, თუ:

*1. IA= $ 80 000, ma= 30 %, PA= 0.02*
*IB= $ 70 000, mb= 40 %, PB= 0.04*
*2. IA= $ 100 000, ma= 15 %, PA= 0.011*
*IB= $ 200 000, mb= 15 %, PB= 0.02*
*3. IA= $ 90 000, ma= 20 %, PA= 0.05*
*IB= $ 90 000, mb= 18 %, PB= 0.02*
*4. IA= $ 400 000, ma= 15 %, PA= 0.02*
*IB= $ 500 000, mb= 20 %, PB= 0.05*
*5. IA= $ 1.5 млн., ma= 20 %, PA= 0.03*
*IB= $ 2.1 млн., mb= 15 %, PB= 0.01*

## 4.3. საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ფასეულობის (NPV) დადგენა

**დისკონტი** არის კრედიტის ან ფულის მომავალი ღირებულება, რაიმე პერიოდის გასვლის შემდეგ.

**საპროცენტო განაკვეთი არის:**

ა) დროის ფიქსირებულ ინტერვალში მიღებული შემოსავლის ფარდობითი სიდიდე

ბ) პროცენტული გადასახადების შედარებითი სიდიდე, რომელსაც მსესხებელი უხდის კრედიტორს დროის გარკვეულ პერიოდში(თვე, წელი). იგი შეიძლება გამოისახოს პროცენტის ან ათწილადი რიცხვის სახით.

განვიხილოთ აღნიშვნები:

**PV** — present value, დღევანდელი სიდიდე, საწყისი თანხა;
**FV** — future value, მომავალი სიდიდე, გაზრდილი თანხის სიდიდე;
**I** = (FV - PV) — interest money, შემოსავლის სიდიდე;
**r** = I/PV = (FV-PV)/PV — interest, საპროცენტო განაკვეთი;
**d** = I/FV = (FV-PV)/FV — discount rate, დისკონტირების განაკვეთი.

თუ, ვიცით დისკონტირების განაკვეთი და გაზრდილი თანხის სიდიდე, შეგვიძლია ამოვხსნათ დისკონტირების ამოცანა (ვპოულობთ საწყისი თანხის სიდიდეს):

$$PV = FV*(1-d). \tag{4.6}$$

დისკონტირების განაკვეთი და საპროცენტო განაკვეთი ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი სახით:

$$r = d * (FV/PV); \qquad d = r * (PV/FV). \tag{4.7}$$

**პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა** განისაზღვრება, როგორც დროის ერთსა და იმავე მომენტისათვის დისკონტირებული პროექტის შემოსავლებისა და ხარჯების სხვაობა:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_{INt} - CF_{OFt}}{(1+d)^t}; \tag{4.8}$$

სადაც

$CF_{INt}$ არის პროექტიდან $t$ დროის განმავლობაში მიღებული ფულის ნაკადი;

$CF_{OFt}$ - პროექტის დანახარჯები $t$ დროის განმავლობაში;

$d$ - დისკონტირების განაკვეთი ;

$n$ - პროექტის სასიცოცხლო ციკლი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფულადი ინვესტიცია ხორციელდება ერთჯერადად, საწყის მომენტში **პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა** განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_{INt}}{(1+d)^t} \qquad (4.9)$$

სადაც $C_0$ - საწყისი ინვესტიციაა დროის ნულოვან ეტაპზე.

ამ ფორმულით სარგებლობა საკმაოდ მარტივია. თუ NPV>0, მაშინ ინვესტორი მიიღებს ამ სიდიდის შესაბამის შემოსავალს სასურველი თანხის ზემოთ. თუ NPV<0, მაშინ ინვესტორი არა მარტო დაიბრუნებს ჩადებულ ინვესტიციას, არამედ მიიღებს გადიდებულ თანხას, დისკონტირების განაკვეთის შესაბამისად.

თუ $NPV < 0$ $NPV < 0$ , მაშინ ეს პროექტი უნდა უარვყოთ.

აღსანიშნავია, რომ $NPV$ სიდიდე ადიტიურია დროში, ანუ რამდენიმე პროექტის **სუფთა დღევანდელი ფასეულობები შეგვიძლია შევკრიბოთ,** რაც მეტად მნიშვნელოვანია საინვესტიციო პორტფელის ოპტიმალურობის ამოცანის შესწავლისას.

### 4.4. ინვესტიციების რენტაბელურობის $PI$ ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით

ინვესტიციების რენტაბელურობის ინდექსი განისაზღვრება, როგორც დისკონტირებული მოგების ფარდობა შესაბამისი ინვესტიციების მოცულობასთან. ასე რომ, მაგალითად, ერთჯერადი საწყისი ინვესტირების შემთხვევაში, რენტაბელურობის ინდექსი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$PI = \frac{\sum_t^n \frac{CF_{INt}}{(1+d)^t}}{C_0} \qquad 4.10$$

იმ შემთხვევაში, როცა PI>1 , პროექტი მომგებიანია; ხოლო, თუ, PI<1, მაშინ პროექტზე უარი უნდა ვთქვათ. თუ, რენტაბელურობის ინდექსი ერთის ტოლია, მაშინ პროექტი არც მომგებიანია და არც წამგებიანი.

PI მაჩვენებლის უპირატესობა ისაა, რომ ის ფარდობითი მაჩვენებელია NPV სუფთა დღევანდელი ფასეულობისაგან განსხვავებით. ამიტომ, როცა რამდენიმე პროექტის შედარება გვიწევს ერთნაირი $NPV$ მაჩვენებლით, უპირატესობა აქვს პროექტს მეტი რენტაბელობის მაჩვენებლით. ასევე, როცა რამდენიმე

პროექტის არჩევა უწევს ინვესტორს, ის რანჟირებას ახდენს რენტაბელურობის მაჩვენებლების მიხედვით და ირჩევს პროექტების იმ პორტფელს, სადაც რენტაბელობა მეტია. რადგან ყველა პროექტის ერთდროული დაფინანსებისათვის შეიძლება არ ეყოს ფინანსური რესურსები.

### 4.5. ინვესტიციების რენტაბელურობის IRR ნორმის განსაზღვრა

ინვესტიციების რენტაბელურობის ნორმა (internal rate of return) არის დისკონტირების ის პროცენტული განაკვეთი IRR, რომლის დროსაც პროექტის სუფთა დღევანდელი ფასეულობა ნულის ტოლია, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_{INt} - CF_{OFt}}{(1+IRR)^t} = 0 \qquad 4.11$$

IRR კოეფიციენტის სიდიდე გვიჩვენებს პროექტის ხარჯების მაქსიმალურ დასაშვებ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ პროექტი მთლიანად ფინანსდება საბანკო კრედიტის მეშვეობით, მაშინ რენტაბელურობის ნორმა გვიჩვენებს იმ მაქსიმალური საბანკო პროცენტის განაკვეთის სიდიდეს, რომლის ზემოთაც პროექტი წამგებიანი ხდება.

### 4.6. საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი

დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული ვადა არის ის მინიმალური დრო, რომლის განმავლობაშიც ინვესტორი მთლიანად იბრუნებს პროექტში ჩადებულ ინვესტიციებს, უზრუნველყოფს რა შემოსავლების საჭირო დონეს.

დანახარჯების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრა ხდება განტოლებიდან:

$$\sum_{t-1}^{T} \frac{CF_{INt}}{(1+d)^t} = PV; \qquad 4.12$$

სადაც T დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული დროის სიდიდეა;

$PV$ – ინვესტიციების დღევანდელი ფასი.

ამ მეთოდს იყენებენ, როცა პროექტების რისკი დიდია; მაშინ ცდილობენ, რაც შეიძლება მალე ამოიღონ ჩადებული ინვესტიციები.

## 4.7. ფინანსური ინსტრუმენტები

ფინანსურ ინსტრუმენტებს მიეკუთვნება: ფორვარდული და ფიუჩერსული კონტრაქტები, ოპციონები, ვარიანტები, სვოპი, კომბინაციები, სპრედები და ა.შ.

განვიხილოთ, თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე.

1. **ფორვარდული კონტრაქტი ანუ ფორვარდი,** ეს წინასწარი ყიდვა-გაყიდვის შეთანხმებაა გარკვეულ საქონელზე, გარკვეულ დროზე მომავალში ფიქსირებულ ფასზე.

მაგალითად, გლეხი, უკვე გაზაფხულზე აწარმოებს მოლაპარაკებას ბოსტნეულის საცავის მეპატრონესთან, რომ შემოდგომაზე ფიქსირებულ ფასად მიაწოდებს ბოსტნეულის განსაზღვრულ მოცულობას, თუმცა, ჯერ არც კი დაურგავს ჩითილები; ბოსტნეულის საცავის მეპატრონე მოლაპარაკებას აწარმოებს რეალიზაციის პუნქტების-მაღაზიების, რესტორნების . . . მეპატრონეებთან, რომ ბოსტნეულს მიაწოდებს წინასწარ შეთანხმებულ, ფიქსირებულ ფასად.

ასეთი შეთანხმებები მონაწილეებს იცავს კატასტროფებისა და ბანკროტობისაგან: გლეხს იცავენ რომ ბოსტნეული არ გაუფუჭდეს და დროზე გაყიდოს, ბოსტნეულის საცავის მეპატრონეს საშუალებას აძლევს, რომ არ მოცდეს მისი საცავები და დროზე გაუკეთოს პროდუქციას რეალიზაცია, ხოლო რესტორნებისა და მაღაზიების მეპატრონეებს საშუალებას აძლევს შეუფერხებლად იმუშაონ და მეტი მოგება მიიღონ.

წინასწარი შეთანხმებით მიღებული ფასები შეიძლება აღარ აწყობდეს ერთ-ერთ მონაწილეს, თუმცა, ყველა მონაწილე მზადაა მცირე წაგებისათვის, ოღონდაც თავი დაიცვას უფრო დიდი ზარალისაგან. ასე რომ, **ფორვარდული კონტრაქტი, არის რისკების შემცირების საშუალება** ორივე მონაწილისათვის. ესაა, სწორედ ყველა სხვა წარმოებული ფინანსური ინსტრუმენტების წარმოშობის მიზეზიც.

ფორვარდული შეთანხმება ხდება ორ მონაწილეს შორის მოწმის გარეშე, რის გამოც, დიდია ცდუნება რომელიმე მხარემ დაარღვიოს ხელშეკრულება, თუ ადრე შეთანხმებული ფასი, მისთვის უკვე წამგებიანია. სწორედ ასეთი შემთხვევებისათვის შეიქმნა **ფიუჩერსები.**

2. **ფიუჩერსული კონტრაქტები ანუ ფიუჩერსები** ისეთი შეთანხმებებია, რომლებიც ფორვარდის ანალოგიურია, მაგრამ დამატებული აქვს გადაანგარიშების მექანიზმები, რომლებიც

წამგებიანს ხდის ნებისმიერი მონაწილისათვის ხელშეკრულების დარღვევას.

გადაანგარიშების მექანიზმი ბირჟაზე წარმოებს **კლირინგის პალატის** მეშვეობით, რომელიც შეთანხმების ორივე მონაწილისათვის ხსნის სპეციალურ ანგარიშს. ფიუჩერსული შეთანხმების მომენტისათვის ორივე მონაწილეს შეაქვს ამ ანგარიშებზე გარკვეული თანხა, როგორც წესი 2%-10% ხელშეკრულების მოცულობიდან, რომელსაც საწყის მარჟას უწოდებენ. საქონლის საბაზრო ფასის ცვლილებისას, კლირინგის პალატა თვითონ გადარიცხავს წაგებული მონაწილის ანგარიშზე შესაბამის თანხას, მოგებულის ანგარიშიდან, რათა მას აუნაზღაუროს მოსალოდნელი წაგება, თუ მოგებული მხარე მოინდომებს შეცვლილი საბაზრო ფასით სარგებლობას.

3. **ოპციონი** არის კონტრაქტი, რომელიც გამყიდველს ან მყიდველს აძლევს უფლებას გაყიდოს ფასეულობა წინასწარ გარკვეულ დროში, წინასწარ შეთანხმებული პირობებით. ეს პირობები, როგორც წესი, დაიყვანება ყიდვა-გაყიდვის ფასზე.

განასხვავებენ მყიდველის ოპციონს (ოპციონი-კოლი) და გამყიდველის ოპციონს (ოპციონი-პუტი). ოპციონ-კოლის პატრონს უფლება აქვს იყიდოს, ხოლო ოპციონ-პუტის პატრონს აქვს უფლება გაყიდოს.

ოპციონები არსებობს **ევროპული** და **ამერიკული** ტიპის. ევროპული ტიპის ოპციონებში, ყიდვა-გაყიდვის თარიღი ფიქსირებულია მომავალ დროში; ხოლო ამერიკული ტიპის ოპციონებში ყიდვა-გაყიდვის მომენტს ირჩევს ოპციონის მფლობელი, თუმცა ფიქსირებულია დროის გარკვეული შუალედი, როცა შესაძლებელია ოპციონის შესრულება.

## თავი V. სოციალურ-ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

### შესავალი

**ჩვენ გარშემო არსებული მოვლენების უმრავლესობა ხასიათდება განმსაზღვრელი პარამეტრების რხევითი ცვალებადობით, რაიმე მონოტონურად ცვლადი პარამეტრის(დროის) მიმართ. ასეთ პროცესებს, რხევითი პროცესები ეწოდება. რხევით სისტემებს, ზოგჯერ, ოსცილატორებს უწოდებენ.**

ზოგად შემთხვევაში, რხევითი სისტემა ხასიათდება **თავისუფლების ხარისხით** ანუ **სისტემის განმსაზღვრელი პარამეტრების აუცილებელი რაოდენობით**. *მაგალითად,* თუ ვსწავლობთ მყარი სხეულის ბრუნვით რხევებს სიმეტრიის ღერძის გარშემო, მაშინ მოძრაობის აღსაწერად საკმარისია ერთი პარამეტრი - მობრუნების კუთხე. რაც ნიშნავს, რომ ასეთ შემთხვევაში, გვაქვს სისტემა, რომლის თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. რხევითი სისტემების ძირითადი თავისებურებები ნათლად ჩანს ისეთი ოსცილატორების მაგალითზეც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთის ტოლია. ამიტომ სიმარტივი-სათვის, განვიხილავთ რხევითი სისტემების ძირითად ცნებებს სწორედ ასეთი მარტივი ოსცილატორების მაგალითზე, თუმცა არსებობს ისეთი რხევითი სისტემებიც, რომელთა თავისუფლების ხარისხი ერთზე მეტია.

რხევითი სისტემები ხასიათდება, ასევე ორი ძირითადი მიმართულებით; ესენია: **წრფივი და არაწრფივი რხევითი სისტემები, იმის მიხედვით, თუ როგორ ტიპს მიეკუთვნება ის დიფერენციალური განტოლებები, რომლებიც აღწერს შესაბამის მათემატიკურ მოდელებს.** რეალური რხევითი სისტემები ყოველთვის არაწრფივია, თუმცა მიახლოებით, კვლევის გამარტივების მიზნით, ისინი შეიძლება შეიცვალოს შესაბამისი წრფივი სისტემებით.

ვთქვათ, განიხილება რხევითი სისტემა ერთი განმსაზღვრელი $x(t)$ პარამეტრით, რომელიც დამოკიდებულია მონოტონურად ცვლად $t$ პარამეტრზე.

**განსაზღვრება.** ისეთ რხევით სისტემებს, რომელთათვის ადგილი აქვს $x(t) = x(t+T)$ ტოლობას, **პერიოდული რხევითი სისტემა** ეწოდება; ხოლო ისეთ T მინიმალურ მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ამ ტოლობას აქვს ადგილი, **რხევის პერიოდი** ეწოდება.

**განსაზღვრება.** რხევის პერიოდის $f = \dfrac{1}{T}$ შებრუნებულ სიდიდეს, **რხევის სიხშირე** ეწოდება. **რხევის სიხშირე გვიჩვენებს სრულ**

**რხევათა რაოდენობას მონოტონური პარამეტრის (დროის) ერთი ერთეულით ცვლილებისას.** თუ რხევის პერიოდს წამობით გავზომავთ, მაშინ რხევის სიხშირის ერთეული **იქნება ჰერცი (რხევათა რიცხვი ერთ წამში).**

რხევის სიხშირის დასახასიათებლად, ზოგჯერ იყენებენ $\omega$ **კუთხურ სიხშირეს,** რომელიც **გამოხატავს რხევათა რაოდენობას** $2\pi$ **წამის (მონოტონური პარამეტრის მნიშვნელობის) განმავლობაში,** $\omega = 2\pi\ f = \frac{2\pi}{T}$.

ქვემოთ მოცემულია იმ რხევითი პროცესების რხევის სიხშირის რიცხვითი მნიშვნელობები (გამოსახული $წმ^{-1}$ ერთეულებით), რაც ბუნებაში გვხვდება:

$10^{-10}$ – პლანეტების საუკუნოებრივ შეშფოთებათა სიხშირე;
$10^{-8}$ – პლანეტების ბრუნვის სიხშირე;
$10^{-5}$ – მოქცევა-უკუქცევის სიხშირე;
$10^{1}$ – რხევის სიხშირე მანქანებში;
$10^{0}$ – წამის ქანქარა;
$10^{4}$ – აკუსტიკური რხევები;
$10^{5}$ – $10^{8}$ – ულტრაბგერითი მექანიკური რხევები;
50 – ცვლადი დენი;
$10^{12}$ – ინფრაწითელი გამოსხივება;
$10^{15}$ – ხილული ოპტიკური სპექტრი;
$10^{18}$ – რენტგენის სხივები;
$10^{20}$ - $\gamma$ - სხივები;
$10^{23}$ – კოსმოსური სხივები.

რხევითი პროცესები ასევე ხასიათდება $A$ ამპლიტუდით.

**განსაზღვრება.** ერთი სრული რხევის განმავლობაში გადახრის ნახევრის სიგრძეს, **ამპლიტუდა** ეწოდება.

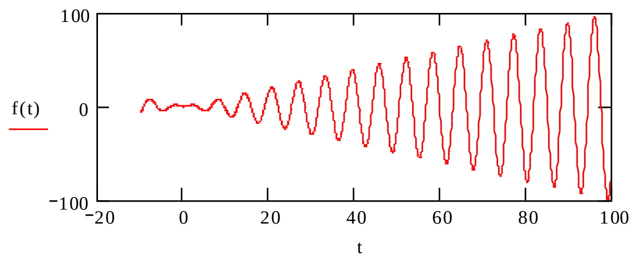
თუ $x_{\max}$ უდიდესი და $x_{\min}$ უმცირესი მნიშვნელობებია $x(t)$ გადახრისას რხევის ერთი პერიოდის განმავლობაში, მაშინ **რხევის ამპლიტუდა** $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$.

პერიოდული რხევისას გადახრის განზოგადებული კოორდინატი $x(t)$ რხევებს ასრულებს $x_0$ საშუალო მნიშვნელობის მიდამოში

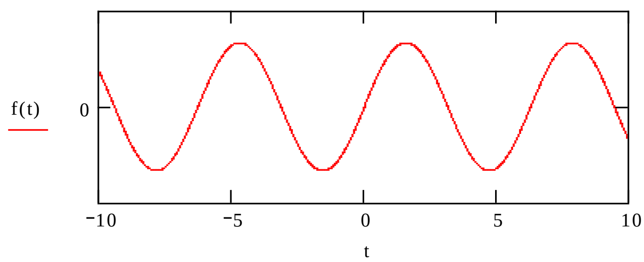
$x_0 = \frac{1}{2}(x_{max} + x_{min})$ სიმეტრიული რხევების შემთხვევაში, ეს მნიშვნელობა შეესაბამება აგრეთვე **წონასწორობის ან უძრაობის მდგომარეობას.**

**განსაზღვრება.** თუ $x(t)$ ფუნქცია მხოლოდ მიახლოებითაა პერიოდული ანუ $|x(t)-x(t+T)| \le \varepsilon$ წინასწარ არჩეული $\varepsilon$ მცირე სიდიდისათვის, მაშინ $x(t)$ ფუნქციას **თითქმის პერიოდული ფუნქცია** ეწოდება.

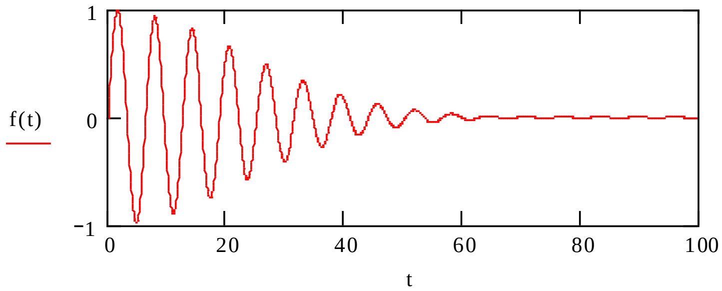
რხევითი სისტემები ხასიათდება **რხევის ამპლიტუდის ცვლილებით რაიმე მონოტონური პარამეტრის (დროის) მიხედვით.** განასხვავებენ: **რხევებს ზრდადი ამპლიტუდით (ნგრევადი სისტემები) (ნახ. 5.1), მუდმივი ამპლიტუდით(პერიოდული) (ნახ. 5.2) და კლებადი ამპლიტუდით (მილევადი) (ნახ.5.3).**




**ნახ. 5.1. რხევები ზრდადი ამპლიტუდით**




**ნახ. 5.2. რხევები მუდმივი ამპლიტუდით**




**ნახ. 5.3. რხევები მილევადი ამპლიტუდით**

**წარმოქმნის მექანიზმიდან გამომდინარე,** რხევითი სისტემები იყოფა შემდეგ ტიპებად:

**1. საკუთრივი რხევითი სისტემები (თავისუფალი რხევები);**
**2. ავტორხევითი სისტემები (თვითაგზნებადი რხევები);**
**3. პარამეტრული რხევითი სისტემები (პარამეტრით აგზნებადი რხევები);**
**4. იძულებითი რხევითი სისტემები (მაიძულებელი ძალის გავლენით წარმოქმნილი რხევები);**
**5. ბმული რხევითი სისტემები (ერთმანეთთან შეკავშირებული რამდენიმე რხევითი სისტემა).**

განვიხილოთ რხევითი სისტემის თითოეული ტიპი.

**საკუთრივი(თავისუფალი) რხევითი სისტემების** დინამიკა მთლიანად ემყარება საწყის ბიძგს და შემდეგ აღარ იღებს გარე ზემოქმედებას, ე.ი. ენერგიის გაზრდა არ ხდება სისტემის გარედან. განიხილება **ორი ტიპის საკუთრივი (თავისუფალი) რხევითი სისტემები: არადემპფირებული და დემპფირებული. დემპფირებული რხევითი სისტემები იმით გამოირჩევა, რომ ადგილი აქვს ენერგიის დახარჯვას წინააღმდეგობის ძალების დაძლევაზე.** ***მაგალითად,*** გრავიტაციული ქანქარა საწყისი ბიძგის შემდეგ, თავისუფალ რხევას იწყებს. **თავისუფალი რხევითი სისტემების დინამიკა აღიწერება ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებებით.**

საკუთრივი რხევებისაგან განსხვავებით, **ავტორხევით სისტემებში ადგილი აქვს ენერგიის გარედან შემოდინებას.** ამასთან, ენერგიის წყარო არაა თვითონ რხევითი სისტემა; სისტემა გარედან იღებს ზუსტად იმდენ ენერგიას, რამდენსაც ხარჯავს.

***მაგალითი.*** განვიხილოთ საათი, რომელშიც ენერგიის წყაროა აწეული ტვირთი ან შეკუმშული ზამბარა. ასეთი საათი ავტორხევით სისტემას წარმოადგენს. **ავტორხევები აღიწერება არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებებით.**

საკუთრივი რხევებისა და ავტორხევითი სისტემების შემთხვევაში, რხევის სიხშირე განისაზღვრება თვით რხევითი სისტემის ხასიათიდან გამომდინარე, ამიტომ, ასეთ **სისტემებს, ავტონომიურს** უწოდებენ.

მათგან განსხვავებით, **პარამეტრულ და იძულებით** რხევით სისტემებს, **ჰეტერონომიული სისტემები** ეწოდება, რადგან ასეთ

სისტემებში რხევის სიხშირე განისაზღვრება გარე ზემოქმედებიდან გამომდინარე. **პარამეტრული აგზნებადობის სისტემებში**, გარე ზემოქმედება იწვევს სისტემის შიგა პარამეტრების პერიოდულ ცვალებადობას. ასეთია ***მაგალითად,*** მათემატიკური ქანქარა ძაფზე ჩამოკიდული ტვირთით, როცა ძაფის სიგრძე პერიოდულად იცვლება. **პარამეტრული რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელები იმით გამოირჩევა, რომ შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების ზოგიერთი კოეფიციენტი არის მონოტონური პარამეტრის(დროის) პერიოდული ფუნქცია.**

**იძულებით რხევით სისტემებში,** სისტემაზე ასევე მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს; **აქ, რხევით პროცესებს კი განსაზღვრავს არა პერიოდული პარამეტრები, არამედ დამატებითი წევრები შესაბამის მათემატიკურ მოდელში, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.**

**ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში, საქმე გვაქვს ორ ან მეტ რხევით სისტემასთან, რომლებიც *ერთმანეთზე* ახდენენ გავლენას.** თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა - იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

**P.S. არსებობს შერეული ტიპის სისტემებიც, რომლებიც ერთდროულად იძულებითი და ავტორხევითი სისტემებია და ა.შ.**

ამ ნაწილში განვიხილავთ **წრფივ რხევით პროცესებს,** ანუ **ისეთ რხევით პროცესებს, რომელთა შესაბამისი მათემატიკური მოდელები წარმოადგენს წრფივ დიფერენციალურ განტოლებებს შესაბამისი საწყისი პირობებით.**

## 5.1. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

თავისუფალი რხევითი პროცესები წარმოიქმნება, როცა სისტემაზე საწყის მომენტში მოქმედებს ამძრავი ძალები, რომლებიც შემდეგ ქრება და სისტემას საშუალებას აძლევს გამოაჩინოს თავისი შინაგანი ბუნება. თავისუფალი რხევითი პროცესების დროს, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები პერიოდულად ცვლიან ერთმანეთს. **თუ სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების ჯამი მონოტონური პარამეტრის(დროის) მიხედვით არ**

**იცვლება (მუდმივია), მაშინ ამ სისტემას კონსერვატიული ეწოდება.** კონსერვატიულ სისტემებში გვაქვს **არადემპფირებული (არამილევადი)** რხევები.

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი **მტაცებელი-მსხვერპლი.** ამ მოდელში, ორი სახეობის ცხოველია. აქედან, ერთი სახეობის ცხოველი იკვებება მეორე სახეობის ცხოველით, ხოლო მეორე სახეობის ცხოველი იკვებება ბალახით. ისმის კითხვა, მოსალოდნელია თუ არა, რომ პირველმა სახეობამ მთლიანად გაანადგუროს მეორე სახეობის ცხოველი ?

ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად ავაგოთ **შესაბამისი მათემატიკური მოდელი.** ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მტაცებლების) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მსხვერპლის შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება და

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 , \tag{5.1}$$

სადაც $\varepsilon_2$ ზრდის სიჩქარის კოეფიციენტია.

ასევე, თუ მტაცებლები მარტო აღმოჩნდებიან, მაშინ მათი რაოდენობა შიმშილის გამო განადგურდება. შესაბამის კანონს აქვს სახე:

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 , \tag{5.2}$$

სადაც $\varepsilon_1$ არის მტაცებლების სიკვდილიანობის სიჩქარის კოეფიციენტი.

ახლა განვიხილოთ ამ ორი სახეობის ერთდროული თანაცხოვრება შესაბამის არეალზე. მაშინ, მტაცებლების გამრავლების სისწრაფე დამოკიდებული იქნება მსხვერპლთან მათი შეხვედრების რაოდენობაზე, რომელიც $N_1 \cdot N_2$ სიდიდის პროპორციულია. მაშასადამე, საბოლოოდ მივიღებთ **ვოლტერას მოდელს**

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 , \tag{5.3}$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 , \tag{5.4}$$

სადაც $\gamma_1$ მსხვერპლის სიკვდილიანობის კოეფიციენტია მტაცებლებთან შეხვედრის გამო; $\gamma_2$ - მტაცებლების გამრავლების კოეფიციენტი.

ახლა, განვიხილოთ ამ მოდელის წონასწორობის წერტილები ანუ ის მნიშვნელობები, რომელთა შემთხვევაში სისტემა სტაციონარულია

$$\dot{N}_1 = -\varepsilon_1 N_1 + \gamma_2 N_1 N_2 = 0 \quad , \tag{5.5}$$

$$\dot{N}_2 = \varepsilon_2 N_2 - \gamma_1 N_1 N_2 = 0 . \tag{5.6}$$

ამ სისტემის არატრივიალური ამონახსნია

$$N^0{}_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_1}, \qquad \mathrm{N}^0{}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2} . \tag{5.7}$$

სახეობათა რაოდენობების წონასწორული მნიშვნელობების მცირე მიდამოში ანუ, როცა $n_1(t)$ და $n_2(t)$ მცირე სიდიდეებია, გვაქვს თანაფარდობები:

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t), \qquad \mathrm{N}_2(t) = N_2^0 + n_2(t) . \tag{5.8}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ ვოლტერას (5.5),(5.6) მოდელში და ჩავატარებთ მიღებული განტოლებების ლინეარიზაციას, გვექნება სისტემა:

$$\dot{n}_1 = \frac{\gamma_2 \varepsilon_2}{\gamma_1} n_2 , \tag{5.9}$$

$$\dot{n}_2 = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1}{\gamma_2} n_1 . \tag{5.10}$$

თუ (5.9) განტოლებას დროით გავაწარმოებთ და გავითვალისწინებთ (5.10) განტოლებას, მივიღებთ:

$$\ddot{n}_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 n_1 = 0 , \tag{5.11}$$

სადაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\omega_0{}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 , \tag{5.12}$$

მივიღებთ თავისუფალი სისტემების რხევის კანონიკურ განტოლებას

$$\ddot{n}_1 + \omega_0{}^2 n_1 = 0 . \tag{5.13}$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, აქაც მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემების რხევის მათემატიკური მოდელი. ნათლად ჩანს, ორი სახეობის თანაცხოვრების შედეგი დამოკიდებულია მათი გამრავლებისა და სიკვდილიანობის სიჩქარეთა კოეფიციენტების მნიშვნელობებზე.**

## 5.2. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელი)

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t) , \tag{5.14}$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა ; $I(t)$ - ინვესტიციები; $X(t)$- ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) , \tag{5.15}$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

$C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების წინა ისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right] d\tau . \tag{5.16}$$

თუ (5.15) და (5.16) გამოსახულებებს შევიტანთ (5.14) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right] dt . \tag{5.17}$$

განტოლების ორივე მხარის $t$-თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t) \cdot \dot{X}(t) + \beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + F\left[X(t),t\right]. \tag{5.18}$$

ამრიგად მივიღეთ დინამიკის ფრანგიშვილ-ობგაძის დიფერენციალური განტოლება შემდეგი სახით:

$$\beta(t) \cdot \ddot{X}(t) + \left(\dot{\beta}(t) - 1\right) \dot{X}(t) + F\left[X(t),t\right] = 0 . \tag{5.19}$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (5.19) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე და მივიღებთ დინამიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)} \cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)} \cdot F\left[X(t),t\right] = 0 . \tag{5.20}$$

თუ ფრანგიშვილ-ობგაძის (5.20) განზოგადებულ განტოლებაში ჩავსვამთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\beta(t) = t \quad \text{და} \quad F\left[X(t),t\right] = \beta(t) \cdot \omega^2 \cdot X(t) , \tag{5.21}$$

მაშინ დინამიკის (5.20) განტოლებიდან მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემების კანონიკურ განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^{\,2} X(t) = 0 . \tag{5.22}$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი; რაც იმას მოწმობს, რომ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.**

**სავარჯიშოები.**

1. შეადგინეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ მიღებული სისტემის რხევის პერიოდი, სიხშირე, ფაზა და ამპლიტუდა, სისტემის საწყისი მდგომარეობიდან გამომდინარე.
2. შეისწავლეთ ენერგიის მუდმივობის კანონი თავისუფალი რხევითი სისტემებისათვის.
3. გამოიკვლიეთ თავისუფალი რხევითი სისტემა ფაზურ სიბრტყეზე. იპოვეთ ტრაექტორიები ფაზურ სიბრტყეზე.
4. ჩამოთვალეთ რხევითი სისტემების ტიპები.

## 5.3. დემპფირებული, საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

თუ, რხევითი სისტემის მთლიანი ენერგია მცირდება (წინააღმდეგობის ძალების გადალახვაზე შესრულებული მუშაობის გამო), მაშინ ასეთ სისტემას **დემპფირებული** ეწოდება. **დემპფირებულ** თავისუფალ სისტემებში გვაქვს **დემპფირებული (პერიოდულ-მილევადი ან არაპერიოდულ-მილევადი) რხევები.**

განვიხილოთ ვოლტერას ცნობილი მოდელი **მტაცებელი-მსხვერპლი.** ამ მოდელში, არის ორი სახის ცხოველი. აქედან, მეორე სახის ცხოველები იკვებებიან პირველი სახის ცხოველებით; ხოლო პირველი სახის ცხოველები იკვებებიან ბალახით. შევისწავლოთ ამ სისტემის შესაბამისი დინამიკა. ამისათვის აუცილებელია სისტემის მათემატიკური მოდელის შედგენა.

ამ სახეობათა რაოდენობის შესასწავლად ავაგოთ,შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ვთქვათ, $N_1(t)$ არის პირველი სახეობის (მსხვერპლის) რაოდენობა დროის მოცემულ მომენტში, ხოლო $N_2(t)$ - მტაცებლების შესაბამისი რაოდენობა. თუ მსხვერპლი ცხოვრობს მარტო შესაბამისი კვების არეალზე, მაშინ მისი რაოდენობა იზრდება მუდმივი $k_0$ სიჩქარით, მაგრამ მტაცებლებთან შეხვედრა იწვევს მათი ზრდის სიჩქარის შემცირებას $k_2$ სიჩქარის კოეფიციენტით. მტაცებლებისა და მსხვერპლის შეხვედრის სიხშირე დამოკიდებულია მათი რაოდენობების ნამრავლზე და, მაშასადამე, შეგვიძლია შევადგინოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება:

$$\dot{N}_1(t) = k_0 - k_1 N_1 N_2 \,. \qquad (5.23)$$

ანალოგიურად, მტაცებლების რაოდენობის ზრდა დამოკიდებულია მსხვერპლთან შეხვედრების რაოდენობაზე, რაც პირდაპირპროპორციულია მათი რაოდენობების ნამრავლისა. მაგრამ, მტაცებლებიც იღუპებიან სიბერით, ავადმყოფობით ან უფრო ძლიერ მტაცებელთან ბრძოლაში. მათი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია $k_2$. მაშინ, შესაბამისი დინამიკის განტოლებას ექნება სახე:

$$\dot{N}_2 = k_1 N_1 N_2 - k_2 N_2 \,. \qquad (5.24)$$

სტაციონარული წერტილის გამოსათვლელად ნულს გავუტოლოთ (5.23),(5.24) განტოლებების მარჯვენა ნაწილები. მიღებული სისტემის ამონახსნი იქნება:

$$N_1^0 = \frac{k_2}{k_1}, \qquad \mathrm{N}_2^0 = \frac{k_0}{k_2} \,. \qquad (5.25)$$

შევისწავლოთ (5.23), (5.24) სისტემა სტაციონარული (5.25) ამონახსნის მიდამოში. ამისათვის საძიებელ რაოდენობებს მივცეთ მცირე ნაზარდები $n_1(t)$ და $n_2(t)$, ანუ (5.23), (5.24) განტოლებებში შევიტანოთ ახალი სიდიდეები და უკუვაგდოთ კვადრატული წევრები მცირე ნაზრდების მიმართ

$$N_1(t) = N_1^0 + n_1(t) \,, \qquad (5.26)$$

$$N_2(t) = N_2^0 + n_2(t) \,. \qquad (5.27)$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\dot{n}_1(t) = -k_2 n_2 - \frac{k_1 k_0}{k_2} n_1 \,, \qquad (5.28)$$

$$\dot{n}(t)_2 = \frac{k_0 k_1}{k_2} n_1 \,. \qquad (5.29)$$

თუ გავაწარმოებთ (5.26) განტოლებას და $\dot{n}_2(t)$-ს მნიშვნელობას შევიტანთ (5.27) განტოლებიდან, მაშინ

$$\ddot{n}_1 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \dot{n}_1 + k_0 k_1 n_1 = 0 \,. \qquad (5.30)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს:

$$\frac{k_1 k_0}{k_2} = 2 \cdot \gamma \quad \text{და} \quad k_0 k_1 = \omega_0^2 \,,$$

მაშინ (5.30) განტოლება გადაიწერება **დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკური სახით:**

$$\ddot{n}_1 + 2\gamma \dot{n}_1 + \omega_0^2 n_1 = 0 \,. \qquad (5.31)$$

ეს სისტემა კი უკვე შესწავლილი გვაქვს.

**P.S. როგორც ვხედავთ, დემპფირებული თავისუფალი რხევითი სისტემა გვხვდება სოციალურ სისტემებშიც. რაც იძლევა იმის**

**საფუძველს, რომ ჩავუღრმავდეთ სხვადასხვა პროცესის აღწერას და ნაკლებად დავიხარჯოთ მიღებული მოდელების აღმწერი განტოლებების გამოკვლევით.**

## 5.4. დემპფირებული, საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t)\,, \tag{5.32}$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$ - ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება:

$$I(t) = \beta(t)\cdot \dot{X}(t)\,, \tag{5.33}$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება ეროვნული შემოსავლის ფუნქციაა და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t) = \int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right]d\tau\,. \tag{5.34}$$

თუ (5.33) და (5.34) განტოლებებს შევიტანთ (5.32) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t)\cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right]dt\,. \tag{5.35}$$

განტოლების ორივე მხარის $t$-თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t)\cdot \dot{X}(t) + \beta(t)\cdot \ddot{X}(t) + F\left[X(t),t\right], \tag{5.36}$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\beta(t)\cdot \ddot{X}(t) + \left(\dot{\beta}(t)-1\right)\dot{X}(t) + F\left[X(t),t\right] = 0\,. \tag{5.37}$$

რადგან $\beta(t)\neq 0$, (5.37) განტოლება შეიძლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე, მივიღებთ შემდეგი სახის დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)}\cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)}\cdot F\left[X(t),t\right] = 0\,. \tag{5.38}$$

თუ **ფრანგიშვილ-ობგაძის** (5.38) **განზოგადებულ განტოლებაში** ჩავსვამთ შემდეგ გამოსახულებას

$$\beta(t) = e^{2\gamma\cdot t}\cdot\left(\frac{e^{-2\gamma\cdot t}-1}{2\gamma}\right)\,,\qquad F\left[X(t),t\right] = \beta(t)\cdot\omega_0^2 X(t) \tag{5.39}$$

მივიღებთ **დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის კანონიკურ განტოლებას:**

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0, \qquad (5.40)$$

რომელიც უკვე შევისწავლეთ სხვა შინაარსის პროცესებისათვის.
**P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც მოწმობს, რომ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და ის გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.**

**სავარჯიშოები**

1. როგორ სისტემებს უწოდებენ დემპფირებულს?
2. როგორ გამოითვლება დემპფირებული საკუთრივი რხევითი სისტემის მილევადი რხევების პერიოდი, რა არის ლოგარითმული დეკრემენტი და რისთვისაა საჭირო?
3. რა შემთხვევაში გვაქვს თავისუფალ, დემპფირებულ სისტემაში არაპერიოდული მილევადი რხევები?
4. მოიყვანეთ სოციალური დემპფირებული სისტემის მაგალითი და აჩვენეთ კოეფიციენტების რა მნიშვნელობებისთვისაა მოსალოდნელი მილევადი რხევითი პროცესები და რა შინაარსი შეესაბამება ამ შემთხვევას.

## 5.5. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

**იძულებით რხევით სისტემებში** მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. **აქ შესაბამის მათემატიკურ მოდელში რხევით პროცესებს განსაზღვრავს დამატებითი წევრები, რაც იწვევს შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას.**

განვიხილოთ სოციუმის დინამიკა დროში. ვთქვათ, $N(t)$ არის სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონი დროში. $m$ ამ სოციუმის საარსებო არეალია, ხოლო $f_1(t)$ - სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა. ამიტომ, სოციუმის მოცულობის ცვლილების კანონის საპოვნელად განვიხილოთ შესაბამისი დინამიკის განტოლება

$$m\ddot{N} = f_1(t)\,. \qquad (5.41)$$

ცხადია, სოციუმის მოცულობის ცვლილების გამომწვევი ძალა სამი ნაწილისაგან შედგება:

ა) დადებითი წევრი, რომელიც გამოწვეულია გარე მიგრაციით მოცემულ სოციუმში $f(t)$;

ბ) $-kN$ უარყოფითი წევრით, რაც შეესაბამება სოციუმის შემცირების გამომწვევ ძალას ბუნებრივი სიკვდილიანობის გამო. $k$ შესაბამისი სიკვდილიანობის კოეფიციენტია;

გ) $-2\lambda\dot{N}$ ძალაა, რომელიც იწვევს სოციუმის შემცირებას სხვა სოციუმებთან ბრძოლაში მარცხის გამო. ეს ნიშნავს, რომ

$$f_1(t) = f_2(t) - 2\lambda\dot{N} - kN\,. \qquad (5.42)$$

თუ (5.42) გამოსახულებას შევიტანთ (5.41)-ში, მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$m\ddot{N} + 2\lambda\dot{N} + kN = f_2(t)\,. \qquad (5.43)$$

ამ განტოლების $m$ არეალის სიდიდეზე გაყოფით და შესაბამისი აღნიშვნებით, მივიღებთ:

$$\frac{\lambda}{m} = \gamma, \quad \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} = \omega_0^2, \quad \frac{\mathrm{f}_2(t)}{m} = f(t). \qquad (5.44)$$

(5.43) განტოლება  გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\ddot{N} + 2\gamma\dot{N} + \omega_0^2 N = f(t)\,. \qquad (5.45)$$

ეს განტოლება ემთხვევა **წრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს.** რაც ნიშნავს, რომ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და აღწერს სრულიად სხვადასხვა შინაარსის პროცესებს.

### 5.6. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ეკონომიკური წონასწორობის განტოლება კეინსის სისტემაში

$$X(t) = C(t) + I(t)\,, \qquad (5.46)$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ - ინვესტიციები, $X(t)$- ეროვნული შემოსავალი.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება

$$I(t) = \beta(t)\cdot\dot{X}(t)\,, \qquad (5.47)$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება არის ეროვნული შემოსავლის ფუნქცია და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინაისტორიაზე

$$C(t)=\int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right]d\tau\,. \tag{5.48}$$

თუ (5.47) და (5.48) თანაფარდობებს შევიტანთ (5.46) წონასწორობის განტოლებაში, მივიღებთ:

$$X(t)=\beta(t)\cdot\dot{X}(t)+\int_0^t F\left[X(\tau),\tau\right]dt \tag{5.49}$$

განტოლების ორივე მხარის $t$-თი დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t)=\dot{\beta}(t)\cdot\dot{X}(t)+\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+F\left[X(t),t\right]\,, \tag{5.50}$$

ანუ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+\left(\dot{\beta}(t)-1\right)\dot{X}(t)+F\left[X(t),t\right]=0\,. \tag{5.51}$$

რადგან $\beta(t)\neq 0$, (5.51) განტოლება შეიძლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას:

$$\ddot{X}(t)+\frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)}\cdot\dot{X}(t)+\frac{1}{\beta(t)}\cdot F\left[X(t),t\right]=0\,. \tag{5.52}$$

თუ **ფრანგიშვილ-ობგაძის განზოგადებულ განტოლებაში** (5.52) მოვახდენთ ჩასმას, მივიღებთ:

$$\beta(t)=e^{2\gamma\cdot t}\cdot\left(\frac{e^{-2\gamma\cdot t}-1}{2\gamma}\right),\qquad F\left[X(t),t\right]=\beta(t)\cdot\left[\omega_0^2X(t)-f(t)\right]. \tag{5.53}$$

ამრიგად, **წრფივი, იძულებითი, თავისუფალი რხევითი სისტემის დინამიკის მათემატიკური მოდელი ჩაიწერება შემდეგი სახით:**

$$\ddot{X}+2\gamma\,\dot{X}+\omega_0^2X\;=\;f(t)\,. \tag{5.54}$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, კვლავ მივიღეთ წრფივი, დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი. რაც მოწმობს, რომ დემპფირებული, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი უნივერსალურია და გვხვდება სრულიად სხვადასხვა შინაარსის ამოცანების გადაწყვეტისას.**

**სავარჯიშოები.**

1. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი პერიოდული, არა აუცილებლად ჰარმონიული, ფუნქციაა.
2. ააგეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, როცა მაიძულებელი ძალა ნებისმიერი, ზოგადად, არაპერიოდული ფუნქციაა.

3. შეადგინეთ იძულებითი, წრფივი, დემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის გამოსაკვლევი პროგრამა Mathcad -ის ბაზაზე.
4. რა თავისებურებები ახასიათებს არადემპფირებულ, იძულებით რხევით სისტემებს?
5. რით განსხვავდება იძულებითი, წრფივი, რეზონანსული დემპფირებული და არადემპფირებული რხევითი სისტემები?

## 5.7. ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება

ბმული რხევითი სისტემების შემთხვევაში საქმე გვაქვს **ორი ან მეტი რაოდენობის რხევით სისტემასთან, რომლებიც ერთმანეთზე ახდენენ გავლენას.** თუ ერთი სისტემა ახდენს გავლენას მეორეზე, ხოლო მეორე ვერ ახდენს გავლენას პირველზე, ეს არ იქნება ბმული რხევითი სისტემა. ასეთ შემთხვევაში, ძირითადი (პირველი) სისტემა იქნება თავისუფალი, ხოლო მეორე სისტემა - იძულებითი რხევითი სისტემა, რომელიც პირველი სისტემით იმართება.

განვიხილოთ, ურთიერთმოქმედი ორი სოციალური ჯგუფი, რომელთა მოცულობებს აღვნიშნავთ, შესაბამისად, $N_1$ და $N_2$-ით. ამ ორი სოციუმის მოქმედების არეალები აღვნიშნოთ $m_1$ და $m_2$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ სოციალური ჯგუფები ურთიერთქმედებს ტოლი და საწინააღმდეგოდ მიმართული ძალებით, რომლებიც პირდაპირპროპორციულია მათი მოცულობების სხვაობისა, ანუ $k_2 \cdot (N_2 - N_1)$; ამასთან, თუ ჩავთვლით, რომ ჯგუფების მოქმედების $m_1$ და $m_2$ არეალები შეზღუდულია და, მაშასადამე, რაც უფრო გაიზრდება სოციუმის $N_1$ და $N_2$ მოცულობები, მით უფრო ნაკლები იქნება ამ სოციუმის ზრდის სიჩქარე, მივიღებთ ბმული სოციალური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{N}_1 = -k_1 \cdot N_1 + k_2 \cdot (N_2 - N_1), \tag{5.55}$$

$$m_2 \cdot \ddot{N}_2 = -k_3 \cdot N_2 - k_2 \cdot (N_2 - N_1). \tag{5.56}$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა.**

## 5.8. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება

განვიხილოთ ორი, ურთიერთკონკურენტუნარიანი პროდუქციის, ბაზარზე რეალიზებულ მოცულობათა $X_1$ და $X_2$ დინამიკა. ცხადია, რაც უფრო დიდია რეალიზებული პროდუქციის მოცულობა, მით უფრო ნაკლებია რეალიზებული პროდუქციის ზრდის სიჩქარის ცვლილება, ბაზრის გაჯერების გამო. ასევე, რეალიზებული პროდუქციის მოცულობის ცვლილების სიჩქარე პირდაპირპროპორციულია მოცულობათა სხვაობისა. ამავე დროს, მოქმედი ძალები სიდიდით ტოლია და მიმართულებით საწინააღმდეგო. თუ $m_1$ და $m_2$ შესაბამისი პროდუქციის ფასებია, მივიღებთ ბმული ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m_1 \cdot \ddot{X}_1 = -k_1 \cdot X_1 + k_2 \cdot (X_2 - X_1), \tag{5.57}$$

$$m_2 \cdot \ddot{X}_2 = -k_3 \cdot X_2 - k_2 \cdot (X_2 - X_1). \tag{5.58}$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, ამ შემთხვევაშიც მივიღეთ ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი, რომელიც ანალოგიურია შესაბამისი ელექტრული ბმული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელისა. ამ მოდელის აგება შესაძლებელია ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზეც.**

**სავარჯიშოები.**

1. გამოიკვლიეთ ბმული რხევითი სისტემა Mathcad პროგრამის საშუალებით.
2. ააგეთ ბმული რხევითი სოციალური სისტემის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
3. ააგეთ ბმული რხევითი ეკონომიკური სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილ-ობგაძის (2.37) მოდელის ბაზაზე და გამოიკვლიეთ Mathcad პროგრამის საშუალებით.
4. ააგეთ ბმული რხევითი ფსიქოლოგიური სისტემის მათემატიკური მოდელი.

## 5.9. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები

მათემატიკური მოდელების ასაგებად იყენებენ უნივერსალურ ვარიაციულ პრინციპებს, რომლებიც ემყარება საუკუნოვან პრაქტიკულ გამოცდილებას ბუნებაში მიმდინარე პროცესების შესახებ. ცნობილია, რომ ბუნება ერთიანია ანუ მეცნიერების ერთ სფეროში მიმდინარე პროცესები, ანალოგიურია, მეორე სფეროში მიმდინარე პროცესებისა. რაც იმას ნიშნავს, რომ საკმარისია აღმოვაჩინოთ პროცესების მსგავსების კრიტერიუმები, რომ შეგვიძლია ფიზიკაში დამუშავებული მოდელები გამოვიყენოთ სხვადასხვა ინტელექტუალურ სფეროში.

### 5.9.1. ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი, ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლისთვის $Q(t)$ მდგომარეობის განმსაზღვრელი კოორდინატია. შესაბამისად, $\dot{Q}$ წარმოადგენს განმსაზღვრელი პარამეტრის ცვლილების სიჩქარეს. განვსაზღვროთ დინამიკური სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია, როგორც სხვაობა მის კინეტიკურ და პოტენციურ ენერგიებს შორის

$$L(Q,\frac{dQ}{dt}) = E_k - E_p\,, \tag{5.59}$$

სადაც $E_k$ და $E_p$, შესაბამისად, სისტემის კინეტიკური და პოტენციური ენერგიებია.

განვიხილოთ სიდიდე, რომელსაც მოქმედებას უწოდებენ და ჩაწერენ ფორმულით:

$$S(Q) = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q,\frac{dQ}{dt}\right)dt\,. \tag{5.60}$$

ამ სიდიდეზეა დამოკიდებული სისტემის ყოფაქცევა. **ჰამილტონის უნივერსალური პრინციპის თანახმად, თუ სისტემა რეალურია, მაშინ $Q(t)$ არის $S(Q)$ ფუნქციონალის სტაციონარული ფუნქცია ანუ**

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(Q+\varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = 0\,. \tag{5.61}$$

ჰამილტონის პრინციპში მოქმედი $\varphi(t)$ ფუნქცია საცდელი ფუნქციაა, რომელიც ნულის ტოლი ხდება დროის $t_1$ და $t_2$ მომენტებში. $\varepsilon\cdot\varphi(t)$ ფუნქციას, $Q(t)$ ფუნქციის ვარიაცია ეწოდება.

ჰამილტონის პრინციპი საშუალებას იძლევა ავაგოთ რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი.

განვიხილოთ სისტემის თავისუფალი რხევები, როცა მოცემულია ზამბარა $m$ მასის ტვირთით. ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია $c$. მაშინ სისტემის ლაგრანჟის ფუნქცია

$$L = \frac{m\left(\frac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c \cdot \frac{X^2}{2} . \tag{5.62}$$

მოქმედებისათვის გვექნება გამოსახულება:

$$S(X) = \int_{t_1}^{t_2} L(X, \frac{dX}{dt})dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 - \frac{c}{2}X^2 \right] dt . \tag{5.63}$$

გამოვთვალოთ მოქმედება $\varepsilon \cdot \varphi(t)$ ვარიაციის შემთხვევაში

$$S(X + \varepsilon\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2}\left(\frac{d(X + \varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 - \frac{c}{2}(X + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt . \tag{5.64}$$

გავაწარმოოთ ეს ფუნქცია $\varepsilon$ ცვლადით, მაშინ

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(X + \varepsilon\varphi) = \frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left[ m\left\{ \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{dX}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} - c\left\{X^2 + 2\varepsilon X\varphi + \varepsilon^2\varphi^2\right\} \right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ m\left\{ \frac{dX}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\} - c\left\{X\varphi + \varepsilon\varphi^2\right\} \right] dt . \tag{5.65}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\varepsilon = 0$, მაშინ

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m\frac{dX}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - cX\varphi \right] dt = 0 . \tag{5.66}$$

ამ განტოლების მარჯვენა ნაწილის პირველი წევრის ნაწილობითი ინტეგრირებით და იმის გათვალისწინებით, რომ $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, მივიღებთ

$$\frac{d}{d\varepsilon}S(X + \varepsilon\varphi)_{\varepsilon=0} = -\int_{t_1}^{t_2} \varphi\left[ m\frac{d^2X}{dt^2} + cX \right] dt = 0 . \tag{5.67}$$

რადგან $\varphi(t)$ ნებისმიერი საცდელი ფუნქციაა, მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს

$$m\frac{d^2X}{dt^2} + cX = 0 . \tag{5.68}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} , \tag{5.69}$$

მივიღებთ თავისუფალი რხევითი სისტემის კლასიკურ მათემატიკურ მოდელს:

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0. \qquad (5.70)$$

**P.S. როგორც ვხედავთ, ვარიაციულ მეთოდს თავისუფალი რხევითი სისტემისათვის მივყავართ იმავე მათემატიკურ მოდელამდე.**

## 5.9. 2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მეთოდით

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემაზე მოქმედებს მაიძულებელი $F_0$ ძალა, იცვლება პოტენციური ენერგიის მხოლოდ ფორმულა

$$E_p = c\frac{X^2}{2} + \int_0^X F_0 dX = c\frac{X^2}{2} + F_0 X \ , \qquad (5.71)$$

ხოლო კინეტიკური ენერგიის გამოსახულება უცვლელი რჩება

$$E_k = m\frac{\left(\dfrac{dX}{dt}\right)^2}{2} . \qquad (5.72)$$

შესაბამის ლაგრანჟის ფუნქციას ექნება სახე:

$$L = m\frac{\left(\dfrac{dX}{dt}\right)^2}{2} - c\frac{X^2}{2} - F_0 X \ . \qquad (5.73)$$

თუ განვახორციელებთ წინა პარაგრაფის ანალოგიურ გარდაქმნებს, მაშინ მივიღებთ იძულებითი, არადემპფირებული, რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს:

$$m\frac{d^2 X}{dt^2} = -cX + F_0 . \qquad (5.74)$$

**დავალება სტუდენტებს.** ააგეთ იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ვარიაციული მეთოდით.

**სავარჯიშოები.**

1. ჩამოაყალიბეთ ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი.
2. ააგეთ თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის ვარიაციული პრინციპის ბაზაზე.
3. ააგეთ იძულებითი, არადემპფირებული რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ჰამილტონის პრინციპის ბაზაზე.

4. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის კავშირი.
5. ლაგრანჟის ფუნქციისა და ჰამილტონის ფუნქციის განმასხვავებელი თვისებები.

## 5.10. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

არაწრფივი რხევითი სისტემის შესაბამისი მათემატიკური მოდელები აღიწერება არაწრფივი განტოლებებით. რეალური სისტემები არაწრფივია და მხოლოდ გარკვეული მიახლოებით შეიძლება შეიცვალოს წრფივი სისტემებით. წრფივი რხევითი სისტემების მათემატიკური მოდელირების საკითხები უკვე განვიხილეთ და ახლა შევისწავლოთ არაწრფივი სისტემები.

განვიხილოთ თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი სისტემა. ამ შემთხვევაში არაწრფივია აღმდგენელი ძალის დამოკიდებულება განმსაზღვრელ პარამეტრზე ანუ გვაქვს $f(x)$ დამოკიდებულება. შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს სახე:

$$m \cdot \ddot{x} + \mathrm{f(x)} = 0\,. \tag{5.74}$$

ამ განტოლების ამოხსნა კვადრატურებში, ზოგადად, შეუძლებელია. ამ განტოლების ზოგადი თვისებების შესწავლა შესაძლებელია **ენერგეტიკული მეთოდის** მეშვეობით.

(5.74) განტოლება გავამრავლოთ $\dot{x}$ სიდიდეზე და გავაინტეგრიროთ, მაშინ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 + \int \mathrm{f(x)} \cdot \dot{\mathrm{x}}\, dt = const = E_0\,. \tag{5.75}$$

ამასთან,

$$\int f(x) \cdot \dot{x}\, dt = \int f(x) dx = E_{pot}\,. \tag{5.76}$$

ამრიგად, (7.75) განტოლება წარმოადგენს ენერგიის მუდმივობის კანონს:

$$E_{kin} + \mathrm{E_{pot}} = E_o\,. \tag{5.77}$$

ცხადია, (5.75) ტოლობიდან შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = E_0 - E_{pot}\,. \tag{5.78}$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვიპოვოთ **რხევის სიჩქარე**

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}\,. \qquad (5.79)$$

ფაზურ სიბრტყეზე $x_0$ წერტილიდან $x$ წერტილამდე გადაადგილების დრო გამოითვლება ფორმულით:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}\,. \qquad (5.80)$$

შესაბამისად, რხევის პერიოდის გამოსათვლელად მიიღება ფორმულა:

$$T = 2 \cdot \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_{pot})}}\,. \qquad (5.81)$$

(7.81) ფორმულა მართებულია **მხოლოდ შეკრული ფაზური ტრაექტორიებისათვის.**

## 5.11. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

განვიხილოთ რხევითი სისტემა ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით

$$f(x) = h \cdot \operatorname{sgn} x = \begin{cases} h, \text{if } x > 0 \\ -h, \text{if } x < 0 \end{cases}. \qquad (5.82)$$

ასეთი სიტუაციაა რელეურ მართვის სისტემებში.

ამ შემთხვევაში ამონახსნი უნდა ვეძებოთ ცალ-ცალკე იმ შემთხვევებისათვის, როცა x>0 და x<0.

როცა x>0, მაშინ

$$m \cdot \ddot{x} = -f(x) = -h, \qquad (5.83)$$

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} \cdot t + v_0\,, \qquad (5.84)$$

$$x = -\frac{h}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0\,. \qquad (5.85)$$

თუ ჩავთვლით, რომ რხევითი სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება ზღვრულ მდებარეობაში, მივიღებთ საწყის პირობებს

$$x_0(0) = A\,, \qquad (5.86)$$

$$v_0(0) = 0\,. \qquad (5.87)$$

თუ (5.84) განტოლებიდან განვსაზღვრავთ $t$ პარამეტრს და ჩავსვამთ (5.85) ტოლობაში, მივიღებთ **ფაზური ტრაექტორიების** $\left(x;\dot{x}\right)$ **განტოლებას**

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)}\,. \tag{5.88}$$

## 5.12. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება

დემპფირებისას რხევითი სისტემა ხარჯავს ენერგიას წინაღობის ძალის დაძლევაზე. შესაბამის მათემატიკურ მოდელში წინაღობის ძალა დამოკიდებულია განმსაზღვრელი პარამეტრის $\dot{x}$ წარმოებულზე.

ზოგადად, დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0\,. \tag{5.89}$$

ზოგჯერ, დემპფირებისა და აღმდგენი ძალები ისე მჭიდროდაა დაკავშირებული ერთმანეთთან, რომ მათი განცალკევება არ ხერხდება. ასეთ შემთხვევაში,

$$\ddot{x} + f(x,\dot{x}) = 0\,. \tag{5.90}$$

შევადგინოთ ამ სისტემის შესაბამისი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე. ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა $\dot{x} = v$, მაშინ $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx}$. აქედან გამომდინარე, (5.90) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x,\dot{x})}{v}. \tag{5.91}$$

**ეს განტოლება საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.**

ახლა განვიხილოთ ამ სისტემის შესაბამისი ენერგეტიკული განტოლება. ამ განტოლების მისაღებად, გავამრავლოთ (5.89) განტოლება $\dot{x}$ სიდიდეზე და ვაინტეგრიროთ. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{2}mv^2+\int_0^t g(x)\cdot \dot{x}\,dt+\int_0^x f(x)dx=E_0\,. \tag{5.92}$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $E_D$ დემპფირების ძალების გადალახვაზე დახარჯული ენერგიისათვის, მივიღებთ ენერგიის განტოლებას

$$E_{kin}+E_{pot}=E_0-E_D\,. \tag{5.93}$$

**ამ განტოლებიდან ნათლად ჩანს, რომ დემპფირებულ, თავისუფალ რხევით სისტემაში ადგილი აქვს ენერგიის დისიპაციას.**

## 5.13. დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი ხახუნით

მყარ სხეულებს შორის მშრალ ხახუნს ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა ერთმანეთს ეხება ორი სხეული, რომლებიც გადაადგილდება ერთმანეთის მიმართ ისე, რომ მათ შორის არ არის თხევადი მასა. ამ შემთხვევაში, ხახუნის ძალები თითქმის არ არის დამოკიდებული გადაადგილების სიჩქარეზე და მიმართულია ფარდობითი სიჩქარის საპირისპიროდ.

უმეტეს შემთხვევაში, მშრალი ხახუნის ძალა მიახლოებით შემდეგი ფორმულით გამოითვლება:

$$K_r=\begin{cases}-r \text{ if } \mathrm{v}>0,\\ +\mathrm{r} \text{ if } \mathrm{v}<0.\end{cases} \tag{5.94}$$

ასე რომ,

$$K_r=-r\cdot \operatorname{sgn}\dot{\mathrm{x}}\,. \tag{5.95}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ პროცესის შესაბამის მათემატიკურ მოდელს აქვს შემდეგი სახე:

$$m\cdot\ddot{x}+r\cdot\operatorname{sgn}\dot{\mathrm{x}}+f(x)=0\,. \tag{5.96}$$

ეს განტოლება ცალ-ცალკე განიხილება იმ შემთხვევებისა-თვის, როცა $v>0$ და $v<0$.

თუ $v>0$, მაშინ (5.96) განტოლებიდან მივიღებთ, რომ

$$m\cdot\ddot{x}+f(x)=-r\,. \tag{5.97}$$

მის შესაბამის ენერგეტიკულ განტოლებას აქვს სახე:

$$E_{kin}+E_{pot}=E_0-r\cdot x=\overline{E_0}\,. \tag{5.98}$$

ამ რხევითი სისტემისათვის **ფაზური ტრაექტორიების განტოლება შემდეგია:**

$$v = + \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left(E_0 - r \cdot x - E_{pot}\right)}, \qquad \text{თუ} \;\; v > 0, \tag{5.99}$$

$$v = - \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left(E_0 + r \cdot x - E_{pot}\right)}, \qquad \text{თუ} \;\; v < 0. \tag{5.100}$$

**სავარჯიშოები.**

1. გამოიყვანეთ არადემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ენერგეტიკული განტოლება.
2. გამოიყვანეთ თავისუფალი, რხევითი სისტემის ფაზური ტრაექტორიების განტოლება, ალაგ-ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალის შემთხვევაში.
3. შეადგინეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის შესაბამისი სურათი ფაზურ სიბრტყეზე.
4. გამოიყვანეთ დემპფირებული, თავისუფალი რხევითი სისტემის ტრაექტორიების განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე, მშრალი ხახუნის შემთხვევაში.
5. გამოიყვანეთ არაწრფივი სისტემის ტრაექტორიების ზოგადი განტოლება ფაზურ სიბრტყეზე.

## 5.14. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში (მატიეს განტოლება)

პარამეტრული რხევითი სისტემებისათვის დამახასიათებელია რხევების აგზნება რომელიმე განმსაზღვრელი პარამეტრის დროში ცვლილების გამო. ყველაზე უფრო ხშირად გვხვდება, ასეთი პარამეტრების პერიოდული ცვლილება. სისტემაში პარამეტრული რხევები არ აღიძვრება, თუ ის წონასწორობის მდგომარეობაშია. ეს განასხვავებს პარამეტრულ რხევებს იძულებითი რხევებისაგან.

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით ვადგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$(t)=C(t)+I(t), \tag{5.101}$$

სადაც $C(t)$ მოხმარებაა, $I(t)$ –ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ **ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება**

$$I(t) = \beta(t) \cdot \dot{X}(t), \tag{5.102}$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას და დამოკიდებულია მოხმარების მთელ წინა ისტორიაზე ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე

$$C(t) = \int_0^t F[X(t)]dt\,, \tag{5.103}$$

(5.102)-ისა და (5.103)-ის (5.101)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta(t)\cdot \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)]dt\,. \tag{5.104}$$

(5.104) განტოლების ორივე მხარის $t$-თი დიფერენცირებით,

$$\dot{X}(t) = \dot{\beta}(t)\cdot \dot{X}(t) + \beta(t)\cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]\,, \tag{5.105}$$

ანუ ვღებულობთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\beta(t)\cdot \ddot{X}(t) + \left(\dot{\beta}(t) - 1\right)\dot{X}(t) + F[X(t)] = 0\,. \tag{5.106}$$

რადგან $\beta(t) \neq 0$, შეიძლება (5.106) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას

$$\ddot{X}(t) + \frac{\dot{\beta}(t) - 1}{\beta(t)}\cdot \dot{X}(t) + \frac{1}{\beta(t)}\cdot F[x(t)] = 0\,. \tag{5.107}$$

თუ (5.107)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ -ს და $F[x(t)]$ -ს მნიშვნელობებს

$$\begin{aligned} &\beta(t) = t \\ &F[X(t)] = t\left(\omega^2 + \varepsilon\cos 2t\right)\cdot X(t) \end{aligned}\,, \tag{5.108}$$

მივიღებთ **ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლებას**

$$\ddot{X}(t) + \left(\omega^2 + \varepsilon\cos 2t\right)\cdot X(t) = 0\,. \tag{5.109}$$

**როგორც ვხედავთ, მივიღეთ მატიეს განტოლება, რომლისთვისაც დამახასიათებელია პარამეტრული რხევების არსებობა.**

**სავარჯიშოები.**

1. რით განსხვავდება პარამეტრული რხევები თავისუფალი რხევებისაგან?
2. გამოიყვანეთ მატიეს მათემატიკური მოდელი პარამეტრული რხევებისათვის.

## 5.15. ფრანგიშვილი-ობგაძის არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება)

**იძულებით რხევით სისტემებზე** მოქმედებს გარე ძალა, რომელიც განსაზღვრავს რხევის კანონს. **აქ რხევით პროცესებს განსაზღვრავს შესაბამისი მათემატიკური მოდელის დამატებითი წევრები, რაც შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების არაერთგვაროვნებას იწვევს.**

წრფივი იძულებითი რხევითი სისტემებისგან განსხვავებით, არაწრფივ იძულებით რხევით სისტემებში ადგილი აქვს **არაწრფივი რეზონანსის მოვლენას.** ამ მოვლენის სახელწოდებით ერთიანდება ის მოვლენები, რომელთაც ადგილი აქვს არაწრფივ სისტემებში, გარე პერიოდული ზემოქმედების დროს და რომლებიც რხევების თვისებრივი და რაოდენობრივი მახასიათებლების ცვლილებით მჟღავნდება, გარე ზემოქმედების ამპლიტუდისა და სიხშირის მიხედვით.

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა მიწოდების ტოლია. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი *X(t),* რამდენიც სჭირდება ბაზარს *Y(t).*

$$X(t) = Y(t)\,. \tag{5.110}$$

*X(t)* არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა), *Y(t)* - მოთხოვნა.

(5.110) წონასწორობის პირობის მიხედვით, შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$\mathrm{X(t) = C(t) + I(t),} \tag{5.111}$$

სადაც *C(t)* მოთხოვნის ფუნქციაა, *I(t)* – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ხიკსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t)\ , \tag{5.112}$$

სადაც $\beta$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება არის წარმოების მოცულობის ფუნქცია, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების მთელ წინა ისტორიაზე გავლილ *t* დროში. სხვანაირად,

$$\mathrm{C(t)}=\int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right]d\tau, \tag{5.113}$$

წონასწორობის (5.11) განტოლებაში (5.112) და (5.113) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t)=\beta\,\dot{X}(t)+\int_0^t F[X(t)]dt \quad . \tag{5.114}$$

(5.114) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით, მივიღებთ:

$$\dot{X}(t)=\beta\cdot\ddot{X}(t)+F[X(t)], \tag{5.115}$$

ანუ მივიღებთ ფრანგიშვილ-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას

$$\ddot{X}(t)-\frac{1}{\beta}\dot{X}(t)+\frac{1}{\beta}F[X(t)]=0 \quad . \tag{5.116}$$

ვთქვათ,

$$\beta=-\frac{1}{e} \tag{5.117}$$

მაშინ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$\ddot{X}(t)+e\cdot\dot{X}(t)+F_1[X(t)]=0\,, \tag{5.118}$$

სადაც $e=const$, ხოლო $F_1[X(t)]$ მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)]=[X(t)]^3-X(t)-A\cdot\cos(\omega\cdot t)\,, \tag{5.119}$$

მაშინ (7.119)-დან მივიღებთ **დიუფინგის განტოლებას**

$$\ddot{X}(t)+e\cdot\dot{X}(t)-X(t)+[X(t)]^3=A\cos(\omega\cdot t)\,, \tag{5.120}$$

რომელიც აღწერს **არაწრფივ, იძულებით რხევებს ფრანგიშვილი-ობგაძის ეკონომიკურ სისტემაში.**

## სავარჯიშოები

**1.** არაწრფივი, იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის ზოგადი სახე.

**2.** გამოიყვანეთ არაწრფივი, იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელი ფრანგიშვილ-ობგაძის მოდელის ბაზაზე (დიუფინგის განტოლება).

**3.** **Mathcad**-ის ბაზაზე ამოხსენით დიუფინგის განტოლება და შეისწავლეთ ამონახსნების ყოფაქცევა ფაზურ სიბრტყეზე.

**4.** გამოიყვანეთ ხალხის მასის ემოციური ქცევის დინამიკის მათემატიკური მოდელი და გამოიკვლიეთ **Mathcad**-ის ბაზაზე.

# თავი VI. წილადური რიგის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში

წილადური რიგის დიფერენციალურ აღრიცხვას ოთხსაუკუნოვანი ისტორია აქვს. პირველად მის შესახებ ინფორმაციას ვხვდებით ი.ბერნულისა და გ. ლაიბნიცის მიმოწერაში. ჯერ კიდევ 1695 წელს ლაიბნიცმა იწინასწარმეტყველა, რომ წილადური რიგის დიფერენციალებს მომავალში დიდი გამოყენება ექნებოდა. ამ საკითხზე მუშაობდნენ ისეთი გენიოსები, როგორებიც იყვნენ ეილერი და ლაგრანჟი, შემდგომ კი - ლაპლასი, ფურიე, აბელი, ლიუვილი, რიმანი,ხევისაიდი, ხარდი, ზიგმუნდი, კურანტი, ლეტნიკოვი, სიმაკი,ვასილევი და ა.შ.

თანამედროვე ეტაპზე, მიმდინარეობს მათემატიკური ანალიზის ამ ახალი მიმართულების პრაქტიკული გამოყენების აქტიური განვითარება და დანერგვა: ეკონომიკაში, ფინანსურ გათვლებში, სიგნალების თეორიაში, მექანიკასა და სხვა.

## 6.1. ელემენტარული ფუნქციების ჩვეულებრივი და წილადური რიგის წარმოებულების შედარებითი ანალიზი

წილადური რიგის მათემატიკურ ანალიზში ხშირად გვხვდება კლასიკური - ექსპონენციალური ფუნქციისა და ფაქტორიალის განზოგადება, ამიტომ დავიწყებთ სწორედ ამ ფუნქციებით.

განვიხილოთ, **ეილერის გამა–ფუნქცია** და მსგავსი კლასიკური ფუნქციები

$$\Gamma(x)=\begin{cases}\int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^{x-1}dx, \text{ if } \operatorname{Re}(x)>0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{n!\cdot n^{x-1}}}{\mathrm{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)...(x+n-1)}}, \text{ if } \forall \mathrm{x}\end{cases}. \qquad (6.1)$$

გამა–ფუნქციის არგუმენტი შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი, **როგორც მთელი, ასევე წილადურიც**. თუ, $x=n$ მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\Gamma(n)=(n-1)!. \qquad (6.2)$$

გამა–ფუნქციის გარდა, ფართოდ გამოიყენება აგრეთვე, არასრული გამა–ფუნქცია, ბეტა–ფუნქცია და ფსი–ფუნქცია.

არასრულ გამა–ფუნქციას აქვს სახე

$$\gamma(c,x)=\frac{c^{-x}}{\Gamma(x)}\cdot\int\limits_0^x y^{x-1}\cdot\exp(-y)dy=\exp(-x)\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{\Gamma(i+c+1)}. \qquad (6.3)$$

ბეტა–ფუნქცია განისაზღვრება გამა–ფუნქციის მეშვეობით:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (6.4)$$

ფსი–ფუნქცია გამა–ფუნქციასთან დაკავშირებულია ფორმულით:

$$\psi(x)=\frac{1}{\Gamma(x)}\cdot\frac{d\Gamma(x)}{dx}\,. \tag{6.5}$$

ამ ფუნქციას ახასიათებს რიგი თვისებები, რაც განაპირობებს მის ფართო გამოყენებას წილადურ ანალიზში:

$$\psi(x+1)=\psi(x)+x^{-1}\,, \tag{6.6}$$

$$\psi(n+1)=\psi(1)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\;. \tag{6.7}$$

ფსი–ფუნქცია არის პოლი–გამა ფუნქციის კერძო შემთხვევა.

ახლა, განვიხილოთ ელემენტარული ფუნქციების კლასიკური და წილადური რიგის წარმოებულები.

1. განვიხილოთ ხარისხოვანი $x(t)=t^k$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$\frac{dx(t)}{dt}=k\cdot t^{k-1}\,; \tag{6.8}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=k\cdot(k-1)\cdot t^{k-2}\,; \tag{6.9}$$

. . .

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}=k\cdot(k-1)\cdot(k-2)...(k-n+1)\cdot t^{k-n}=\frac{k!}{(k-n)!}\cdot t^{k-n}\,. \tag{6.10}$$

როგორც (6.10) ფორმულიდან ჩანს, რადგან გვაქვს ფაქტორიალის განზოგადებული ცნება წილადური რიცხვებისათვის, **ადვილად განვაზოგადებთ ამ ფორმულას გამა–ფუნქციის მეშვეობით წილადური რიგის წარმოებულებისათვისაც:**

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}=\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\beta+1)}\cdot t^{k-\beta}\,. \tag{6.11}$$

$\beta$ შეიძლება იყოს როგორც მთელი, ასევე წილადური რიცხვი.

2. განვიხილოთ ექსპონენციალური $x(t)=e^{k\cdot t}$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$\frac{dx(t)}{dt}=k\cdot e^{k\cdot t}\,; \tag{6.12}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=k^2\cdot e^{k\cdot t}\,; \tag{6.13}$$

. . .

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}=k^n\cdot e^{k\cdot t}\,. \tag{6.14}$$

**წილადური რიგის წარმოებულებზე ადვილად განზოგადდება (6.14) ფორმულა, აქ უბრალოდ მთელი მაჩვენებელი** $n$ **შეიცვლება წილადური** $\beta$ **მაჩვენებლით:**

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}=k^\beta\cdot e^{k\cdot t}\,. \tag{6.15}$$

3. ლოგარითმული $x(t)=\ln t$ ფუნქციის წარმოებულები:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{t}; \qquad (6.16)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}; \qquad (6.17)$$

. . .

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{t^n}. \qquad (6.18)$$

რაც შეეხება ლოგარითმული ფუნქციის წილადური რიგის წარმოებულს, ის განიმარტება ფორმულით

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}=t^{-\beta}\cdot(\ln t+\psi(1)-\psi(1-\beta))\cdot\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}. \qquad (6.19)$$

4. ანალოგიურად ხდება $x(t)=\sin(\omega\cdot t+\alpha)$ ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულების განზოგადებაც.

$$\frac{dx(t)}{dt}=\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\alpha)=\omega\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha+\frac{\pi}{2}); \qquad (6.20)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha+2\cdot\pi/2); \qquad (6.21)$$

. . .

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}=\omega^n\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha+n\cdot\frac{\pi}{2}). \qquad (6.22)$$

**(6.22) ფორმულაც მარტივად განზოგადდება წილადური რიგის წარმოებულის შემთხვევისათვის:**

$$\frac{d^\beta x(t)}{dt^\beta}=\omega^\beta\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha+\beta\cdot\frac{\pi}{2}). \qquad (6.23)$$

**სავარჯიშო.**

**1. იპოვეთ ფუნქციების მეორე და 1/2 რიგის წარმოებულები**

**ა)** $x(t)=t^5$ ; **ბ)** $x(t)=3\cdot e^{2\cdot t}$ ; **გ)** $x(t)=5\cdot\ln t$ ; **დ)** $x(t)=8\cdot\sin 3\cdot t$.

**2. იპოვეთ ფუნქციების პირველი და 3/4 რიგის წარმოებულები**

**ა)** $x(t)=t^5\cdot\sin 2\cdot t$ ; **ბ)** $x(t)=3\cdot e^{2\cdot t}\cdot t$ ; **გ)** $x(t)=5\cdot t\cdot\ln t$ ;

**დ)** $x(t)=8\cdot\sin 3\cdot t\cdot\cos t$.

## 6.2. წილადური რიგის, დემპფირების ძალის ეკონომიკური რხევითი სისტემა

განვიხილოთ ფუნქციის კლასიკური წარმოებულის სასრულ-სხვაობიანი მიახლოებები და შევადგინოთ წილადური რიგის წარმოებულის შესაბამისი ფორმულა.

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-f(t-h)}{h}; \tag{6.24}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2}\ ; \tag{6.25}$$

. . .

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}f(t-ih)\ , \tag{6.26}$$

სადაც $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ ბინომიალური კოეფიციენტებია.

თუ, (6.26) ფორმულაში წარმოებულების n რიგს შევცვლით შესაბამისად, წილადური $\beta$ ასოთი, ხოლო ფაქტორიალებს გამა-ფუნქციებით, მივიღებთ წილად რიგის წარმოებულების **გრიუნვალდ-ლეტნიკოვის** ფორმულას

$$D_t^{\beta}f(t) = \frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}}f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{i=0}^{\left[\frac{i}{h}\right]}(-1)^i\binom{\beta}{i}f(t-ih) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{i=0}^{\left[\frac{i}{h}\right]}(-1)^i\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(i+1)\Gamma(\beta-i+1)}f(t-ih); \tag{6.27}$$

სადაც $[x]$ -არის მთელი ნაწილი.

**როცა $\beta < 0$ , მაშინ (6.27) ფორმულა შეესაბამება წილადური რიგის ინტეგრალის ცნებას.**

არსებობს წილადური რიგის წარმოებულისა და ინტეგრალის ცნების განსაზღვრება, რომელიც ემყარება კოშის ინტეგრალური ფორმულის განზოგადებას **(რიმან-ლიუვილის ფორმულა).** როგორც ვხედავთ, წილადური რიგის მათემატიკური ანალიზისას, წარმოებულსა და ინტეგრალს შორის განსხვავება მხოლოდ $\beta$ წარმოებულის რიგის ნიშნით გამოიხატება. თუ დადებითია მისი ნიშანი, გვაქვს წარმოებული, თუ უარყოფითია - ინტეგრალი. ამიტომ, მათ საერთო სახელი, **დიფერინტეგრალები** ეწოდება.

დიფერინტეგრალების კოშისეულ წარმოდგენას აქვს სახე

$$I_{a,t}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau; \tag{6.28}$$

$$D_{a,t}^{\beta}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}}d\tau, \tag{6.29}$$

სადაც $I_{a,t}^{\beta}f(t)$ - ინტეგრალური ოპერატორია($\boldsymbol{\beta} < 0$); $D_{a,t}^{\beta}f(t)$ - დიფერენციალური ოპერატორი($\boldsymbol{\beta} > 0$).

უნდა აღვნიშნოთ, რომ არსებობს წილადური რიგის ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორების სხვა განსაზღვრებებიც: ვეილის, კაპუტოს და ა.შ. პრაქტიკის თვალსაზრისით, ყველაზე უფრო ხელსაყრელია **კაპუტოს განსაზღვრება**. რიმან-ლიუვილისაგან განსხვავებით, ჯერ პოულობენ ფუნქციის წარმოებულს, უმცირესი ნატურალური n რიგით, რომელიც აღემატება წილადურს და შემდეგ შედეგს აინტეგრირებენ $n-\beta$ რიგით:

$$D_{a,t}^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta-n)} \int_{a}^{t} \frac{f^{n}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \qquad (6.30)$$

სადაც $n-1 < \beta < n$.

**განვიხილოთ დიფერინტეგრალების თვისებები:**

1. წილადური რიგის წარმოებულისა და ინტეგრალის ოპერატორები **წრფივობის თვისებით** ხასიათდებიან

$$D_{a,t}^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{k} b_i D_{a,t}^{\beta}(f_i(t)); \qquad (6.32)$$

$$D_{a,t}^{-\beta}\left(\sum_{i=1}^{k} b_i f_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{k} b_i D_{a,t}^{-\beta}(f_i(t)); \qquad (6.33)$$

2. **ორი ფუნქციის ნამრავლის წილადური რიგის წარმოებული და ინტეგრალი, ანუ ორი ფუნქციის ნამრავლის წილადური რიგის დიფერინტეგრალისათვის გვაქვს ფორმულა:**

$$\frac{d^{\beta}(f(x)g(x))}{(d(x-a))^{\beta}} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\beta}{i} \frac{d^{\beta-1}f(x)}{(d(x-a))^{\beta-1}} \cdot \frac{d^{i}g(x)}{(d(x-a))^{i}}. \qquad (6.34)$$

**წილადური რიგის ჩვეულებრივ, წრფივ ინტეგრო დიფერენციალურ განტოლებებს აქვს სახე**

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(t) \cdot D_i^{\beta_i} x(t) = f(t); \qquad (6.35)$$

სადაც $n > \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_m$. (6.36)

**განვიხილოთ წილადური რიგის, დემპფირების ძალის მქონე ეკონომიკური რხევითი სისტემა (5.54)**

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = f(t) \qquad (6.37)$$

თუ ამ განტოლებაში $2\gamma\dot{X}$ დემპფირების ძალის შესაბამის წევრს, შევცვლით $2\gamma D_t^{\frac{3}{2}}$ წილადური რიგის ინტეგროდიფერენციალური ოპერატორით, მივიღებთ **ბაგლეი-ტორვიკის განტოლებას** შესაბამისი საწყისი პირობებით

$$\ddot{X}(t) + 2\gamma D_t^{\frac{3}{2}} X(t) + \omega_0^2 X(t) = f(t); \qquad (6.38)$$

$X(0) = X_0;\quad \dot{X}(0)=X_0'.$ (6.39)

თუ წილადური რიგის წარმოებულს, განვსაზღვრავთ კაპუტოს წესით, მაშინ მივიღებთ განტოლებას

$\ddot{X}(t)+2\gamma D_t^{\frac{-1}{2}}\ddot{X}(t) + \omega_0^2 X(t) = f(t).$ (6.40)

## 6.3. წილადური რიგის ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი

წილადური მათემატიკური ანალიზი გამოიყენება ფინანსური სისტემების მოდელირების საქმეშიც. შესაბამისი მათემატიკური მოდელები იძლევა საინტერესო დინამიკურ სურათს და საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ ფინანსური ქაოსის წარმოქმნის მექანიზმები.

ცნობილია სამი არაწრფივი განტოლებისაგან შემდგარი ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი

$\dot{X} = Z = (Y - a)X;$ (6.41)

$\dot{Y} = 1 - bY - X^2;$ (6.42)

$\dot{Z} = -X - cZ\ ,$ (6.43)

სადაც $X$ საპროცენტო განაკვეთია; $Y$ - მოთხოვნა კაპდაბანდებებზე; $Z$ - ფასების ინდექსი; $a, b, c$ - არაუარყოფითი კოეფიციენტები.

აგებულია ამ მოდელის შესაბამისი წილადური რიგის ფინანსური მათემატიკური მოდელი:

$\frac{d^{\beta_1}X}{dt^{\beta_1}} = Z = (Y - a)X;$ (6.44)

$\frac{d^{\beta_2}Y}{dt^{\beta_2}} = 1 - bY - X^2\ ;$ (6.45)

$\frac{d^{\beta_3}Z}{dt^{\beta_3}} = -X - cZ\ .$ (6.46)

ამ მოდელის შესწავლა მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ფინანსური კრიზისების მექანიზმებში გარკვევასა და მათგან დროულად თავდაღწევის საშუალებას.

**სავარჯიშოები.**

**1.გამოთვალეთ მუდმივის წარმოებულები:**
ა) კლასიკური აზრით;
ბ) 3/2 რიგის წარმოებული გრიუნვალ-ლეტნიკოვის ფორმულით;
გ)5/2 რიგის წარმოებული რიმან-ლიუვილის ფორმულით;
დ)3/2 რიგის წარმოებული კაპუტოს ფორმულით.

**2.შეადგინეთ სოციალური სისტემის ფუქციონირების წილადური რიგის მათემატიკური მოდელი.**

# თავი VII. სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების მოდელირება დინამიკური სისტემების თეორიის ბაზაზე

ეკონომიკაში ფართოდ გამოიყენება დინამიკური სისტემების თეორია. ეს თეორია საშუალებას იძლევა ეკონომიკური პროცესების მთლიან ევოლუციას მივადევნოთ თვალი, მოდელირება გავუკეთოთ ეკონომიკური პროცესების მიმდინარეობას და მივიღოთ ისეთი გადაწყვეტილებები, რომლებიც შესაბამის შედეგს მოგვცემს.

## 7.1. დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი

განვიხილოთ დარგთაშორისი ბალანსის ამოცანა, რომლის არსი ისაა, რომ განვლილი წლის დარგთაშორისი ბალანსის საფუძველზე მეურნეობის ცალკეული დარგების პრიორიტეტული განვითარების აუცილებლობის პირობებში, სწორად დაიგეგმოს მიმდინარე წლის ყველა დარგის პროდუქციის საერთო გამოშვება. ეს ამოცანა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ცალკე აღებული რომელიმე რაიონის ან რეგიონის ფარგლებში, ისე მთელი სახელმწიფოს მასშტაბით.

შესაბამისი მათემატიკური მოდელის ასაგებად შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ვთქვათ, $x_i$ არის $i$-ური დარგის საერთო გამოშვება ფულადი გამოსახულებით, $x_{ij}$ – $i$-ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც გამოიყენება $j$-ური დარგის წარმოების უზრუნველსაყოფად, ხოლო $y_i$ – $i$-ური დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობაა არასაწარმოო დანიშნულებისათვის ფულად გამოსახულებაში.

მაშინ, ვღებულობთ დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \ . \qquad (7.1)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \ . \qquad (7.2)$$

$\alpha_{ij}$ არის $i$-ური დარგის პროდუქციის მოცულობა, რომელიც იხარჯება $j$-ური დარგის პროდუქციის ერთეულოვანი მოცულობის წარმოებაზე.

**განსაზღვრება.** $\alpha_{ij}$ მატრიცას ეწოდება ტექნოლოგიური მატრიცა.

(2) და (1)-დან ვღებულობთ ლეონტიევის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i \quad . \tag{7.3}$$

დარგთაშორისი ბალანსის (7.3) განტოლება უნდა ამოიხსნას $x_i$-ის მიმართ. ამისათვის შემოვიტანოთ მატრიცული აღნიშვნები:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

მაშინ, ლეონტიევის (7.4) განტოლება შეიძლება გადავწეროთ მატრიცული სახით:

$$X = A \cdot X + Y. \tag{7.5}$$

(7.5) განტოლების ამოსახსნელად X-ის შემცველი შესაკრებები გადავიტანოთ ტოლობის მარცხენა მხარეს და გავიტანოთ ფრჩხილებს გარეთ:

$$(E - A) \cdot X = Y \quad . \tag{7.6}$$

(7.6)-დან ადვილად ვღებულობთ ლეონტიევის (7.5) მატრიცული განტოლების ამონახსნს:

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y \quad . \tag{7.7}$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.1

*ამოცანა.* გასული წლის განმავლობაში მეურნეობის სამმა დარგმა: სოფლის მეურნეობამ, მანქანათმშენებლობამ და ენერგეტიკამ საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილები

| *№* | | *სოფლის მეურნეობა* | *მანქა-ნათმშენებლობა* | *ენერგეტიკა* | *საბოლოო პროდუქტი* | *საერთო გამოშვება* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *სოფლის მეურნეობა* | $x_{11}=10$ | $x_{12}=20$ | $x_{13}=30$ | $y_1=40$ | $x_1=100$ |
| *2* | *მანქანათ-მშენებლობა* | $x_{21}=30$ | $x_{22}=20$ | $x_{23}=10$ | $y_2=30$ | $x_2=90$ |
| *3* | *ენერგეტიკა* | $x_{31}=20$ | $x_{32}=30$ | $x_{33}=20$ | $y_3=50$ | $x_3=120$ |

შევადგინოთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის (სოფლის მეურნეობა) საბოლოო პროდუქტი 10%-ით უნდა გაიზარდოს, მეორე დარგის (მანქანათმშენე-ბლობა) – 20%-ით, ხოლო მესამე დარგისა (ენერგეტიკა) – 8%-ით.

ამოხსნა.

**პროგრამა Mathcad-ზე**

სამივე დარგის საბოლოო პროდუქტის მოცულობის რეკომენდებული მნიშვნელობები.

$$Y := \begin{pmatrix} 40 \cdot 1.1 \\ 30 \cdot 1.2 \\ 50 \cdot 1.08 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} \frac{10}{100} & \frac{20}{90} & \frac{30}{120} \\ \frac{30}{100} & \frac{20}{90} & \frac{10}{120} \\ \frac{20}{100} & \frac{30}{90} & \frac{20}{120} \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მოცემული სამი დარგის საერთო გამოშვების გეგმა.

$$X := (E - A)^{-1} \cdot Y$$

$$X = \begin{pmatrix} 111.362 \\ 103.481 \\ 132.919 \end{pmatrix}$$

**სავარჯიშო.**

წინა წელს მეურნეობის რვა დარგმა საშუალება მოგვცა შეგვედგინა დარგთაშორისი ბალანსის ცხრილები:

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | საბოლოო პროდუქტი | საერთო გამოშვება |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 30 | 40 | 20 | 10 | 30 | 40 | 100 | 300 |
| 2 | 20 | 10 | 40 | 30 | 10 | 20 | 40 | 30 | 150 | 350 |
| 3 | 40 | 20 | 10 | 20 | 30 | 10 | 30 | 40 | 200 | 400 |
| 4 | 20 | 20 | 10 | 40 | 40 | 30 | 10 | 30 | 100 | 300 |
| 5 | 10 | 40 | 20 | 20 | 30 | 30 | 40 | 10 | 200 | 400 |
| 6 | 10 | 30 | 20 | 40 | 20 | 40 | 30 | 10 | 150 | 350 |
| 7 | 40 | 30 | 10 | 20 | 40 | 30 | 20 | 10 | 100 | 300 |
| 8 | 10 | 10 | 20 | 20 | 30 | 30 | 40 | 40 | 50 | 250 |

იპოვეთ მიმდინარე წლის საერთო გამოშვების გეგმა იმ პირობით, რომ პირველი დარგის საბოლოო პროდუქტი გაიზრდება $m_1$%-ით, მეორე დარგისა $m_2$%-ით, მესამისა - $m_3$%-ით, ..., მერვე დარგისა $m_8$%-ით, სადაც:

1. $m_1$=10%; $m_2$=20%; $m_3$=5%; $m_4$=8%; $m_5$=20%; $m_6$=5%; $m_7$=0%; $m_8$=9%;
2. $m_1$=5%; $m_2$=9%; $m_3$=10%; $m_4$=8%; $m_5$=6%; $m_6$=0%; $m_7$=0%; $m_8$=0%;
3. $m_1$=10%; $m_2$=5%; $m_3$=-20%; $m_4$=2%; $m_5$=-10%; $m_6$=5%; $m_7$=2%; $m_8$=9%;
4. $m_1$=9%; $m_2$=9%; $m_3$=20%; $m_4$=5%; $m_5$=10%; $m_6$=5%; $m_7$=2%; $m_8$=10%;
5. $m_1$=8%; $m_2$=-10%; $m_3$=-25%; $m_4$=2%; $m_5$=-40; $m_6$=2%; $m_7$=4%; $m_8$=20%;
6. $m_1$=5%; $m_2$=10%; $m_3$=10%; $m_4$=5%; $m_5$=8%; $m_6$=20%; $m_7$=5%; $m_8$=10%;
7. $m_1$=20%; $m_2$=-10%; $m_3$=50%; $m_4$=10%; $m_5$=50%; $m_6$=10%; $m_7$=2%; $m_8$=20%;
8. $m_1$=10%; $m_2$=35%; $m_3$=45%; $m_4$=10%; $m_5$=6%; $m_6$=-10%; $m_7$=8%; $m_8$=15%.

## 7.2. ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ-ჰიქსის მოდელი

ეკონომიკისთვის დამახასიათებელია განვითარების ტალღური ბუნება, ამიტომ ეროვნული შემოსავალი ხან იზრდება, ხან მცირდება.

ეკონომიკის განვითარების ტალღური ბუნების შესასწავლად სამუელსონმა და ჰიქსმა შეადგინეს შესაბამისი მათემატიკური მოდელი. ამ მოდელში $X(t)$ ეროვნული შემოსავლის სიდიდის რხევები აიხსნება **აქსელერაციის პრინციპითა და მულტიპლიკატორის კონცეფციით.**

აქსელერაციის პრინციპი ამტკიცებს, რომ ინვესტიციის მასშტაბები დამოკიდებულია საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის

ზრდის ტემპზე. საინვესტიციო მოთხოვნა საბოლოო პროდუქტზე მოთხოვნის პროპორციულია. პროპორციულობის ხარისხს, ეწოდება აქსელერაციის ფაქტორი.

სამუელსონ-ჰიქსის მოდელში აქსელერაციის პრინციპზე დაფუძნებულ ინვესტიციის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$I(t)=\beta\big(X(t-1)-X(t-2)\big), \tag{7.8}$$

სადაც $\beta$ აქსელერაციის კოეფიციენტია (ფაქტორი).

*C(t)* ხარჯის სიდიდე წრფივად დამოკიდებულია მოთხოვნაზე, სადაც განიხილება ერთეულოვანი ლაგი (შეყოვნება):

$$C(t)=\alpha\cdot X(t-1)+A, \tag{7.9}$$

სადაც $\alpha \in (0,1)$ განისაზღვრება რეგრესიული ანალიზის საფუძველზე (ქვემოთ იქნება განხილული).

$$A=(\text{საარსებო მინიმუმი})\times(\text{მცხოვრებთა რიცხვი}). \tag{7.10}$$

თუ გავითვალისწინებთ მოთხოვნისა და მიწოდების წონასწორობის პირობას, მივიღებთ:

$$X(t)=C(t)+I(t). \tag{7.11}$$

თუ (7.11)-ში შევიტანოთ *C(t)* და *I(t)* მნიშვნელობებს და შევასრულებთ შესაბამის გარდაქმნებს, მივიღებთ სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებას:

$$X(t)=(\alpha+\beta)\cdot X(t-1)-\beta\cdot X(t-2)+A. \tag{7.12}$$

$\beta$ აქსელერაციის კოეფიციენტის მიხედვით, (7.12)-დან შეიძლება მივიღოთ ეროვნული შემოსავლის რხევები როგორც მზარდი, ისე კლებადი ამპლიტუდით.

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.2

**ამოცანა.** შევისწავლოთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლებით, როცა $\alpha=0.5$.

ქალაქ თბილისისათვის ვიპოვოთ *A* კოეფიციენტი და $\beta$ კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შევისწავლოთ *X(t)*-ს დინამიკა.

ამოხსნა**.**

ამოცანის ამოსახსნელად ვირჩევთ საწყის პირობებს.

### პროგრამა **Mathcad-ზე**

ეროვნული შემოსავლის საწყისი მნიშვნელობები

$$X_0 := 10^6 \qquad X_1 := 10^7$$

(მცხოვრებთა რიცხვი) × (საარსებო მინიმუმი)

$A := 1.5 \cdot 10^8$

$\alpha := 0.5$

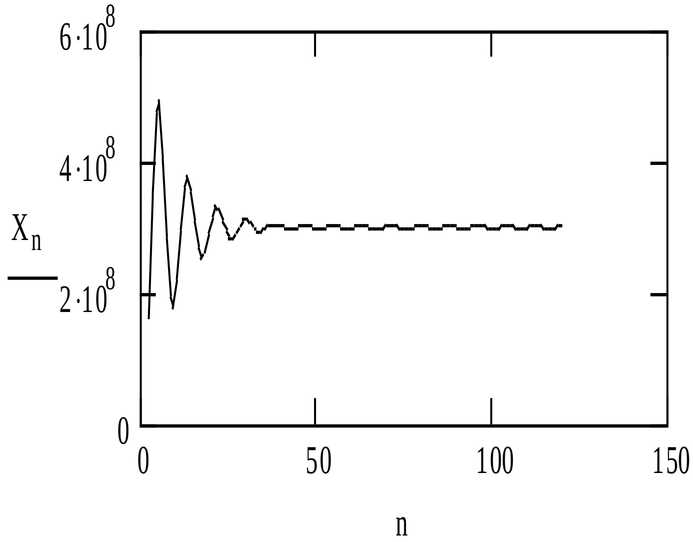
აქსელერაციის კოეფიციენტი,

$\beta := 0.8$

სამუელსონ-ჰიქსის რეკურენტული მოდელი

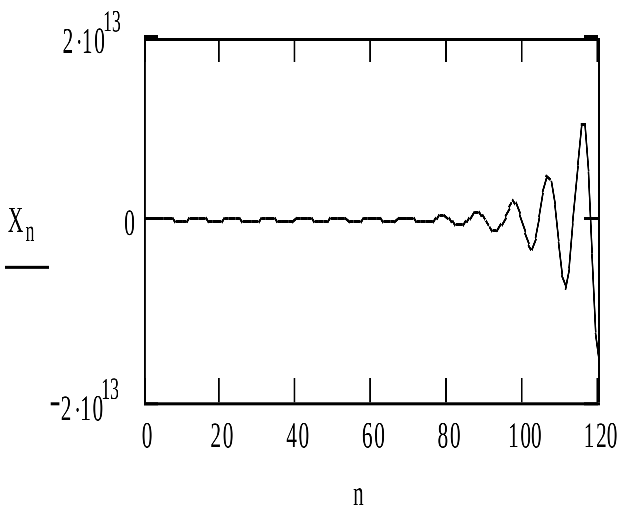
$n := 2..120$

$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$



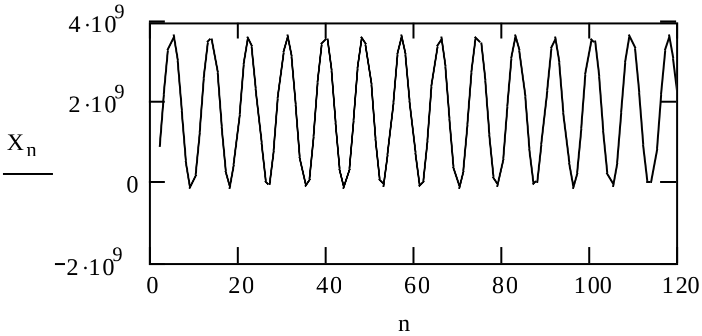

$\beta := 1.2$

$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$




$\beta := 1.$

$$X_n := (\alpha + \beta) \cdot X_{n-1} - \beta \cdot X_{n-2} + A$$




როგორც ვხედავთ, ერთი პარამეტრის ცვლილება საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ დინამიკის სრულიად განსხვავებული რეჟიმები: ა)მილევადი რხევები,
ბ)რხევები მზარდი ამპლიტუდით,
გ)პერიოდული რხევები. ასეთ შემთხვევებში ამბობენ, რომ სისტემაში ადგილი აქვს **ბიფურკაციას.** ბიფურკაციის წერტილია $\beta = 1$. ამ წერტილში სისტემა არის სტრუქტურულად არამდგრადი.

**სავარჯიშო.**

შეისწავლეთ ეროვნული შემოსავლის დინამიკა სამუელსონ-ჰიქსის განტოლების მიხედვით, როცა α ცნობილია. ქალაქისათვის N მცხოვრებით და *l* საარსებო მინიმუმით, β აქსელერაციის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეისწავლეთ X(t) დინამიკა, თუ:

1. $\alpha=0.3$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; $\beta$-?
2. $\alpha=0.2$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; $\beta$-?
3. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=80$; $\beta$-?
4. $\alpha=0.4$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; $\beta$-?
5. $\alpha=0.5$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; $\beta$-?
6. $\alpha=0.6$; $N=5\cdot10^6$; $l=100$; $\beta$-?
7. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=100$; $\beta$-?
8. $\alpha=0.1$; $N=3\cdot10^6$; $l=100$; $\beta$-?

### 7.3. ფერჰიულსტის მოდელი ბანკში ანაბრების დინამიკისათვის

ვთქვათ, $X_n$ ფულადი ანაბრების მოცულობაა n წელიწადში. ანაბრების ფარდობითი ნაზრდის კოეფიციენტი აღვნიშნოთ R-ით, მაშინ გვექნება:

$$R = \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} \ , \tag{7.13}$$

ანუ

$$X_{n+1} = X_n + R \cdot X_n , \tag{7.14}$$

სადაც $R = R_0 = const$.

ანაბრების დინამიკის გამოსაკვლევად (7.14) ფორმულა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$X_{n+1} = (1 + R_0) \cdot X_n . \tag{7.15}$$

ცხადია, თუ ფულადი ანაბრების საწყისი მნიშვნელობა იყო $X_0$, მაშინ

$$\begin{aligned} &X_1 = (1 + R_0) \cdot X_0 \ , \\ &X_2 = (1 + R_0) X_1 = (1 + R_0)^2 \cdot X_0 \ , \\ &\ldots \\ &X_n = (1 + R_0)^n \cdot X_0 . \end{aligned} \tag{7.16}$$

(7.16) იტერაციული ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ n-ის ზრდასთან ერთად ფულადი შენატანების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება, რადგან

$$\lim_{n \to \infty} x_n \to \infty . \tag{7.17}$$

(7.16) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ ამოცანა R-ს ზრდის დასაშვები პროცენტების შესახებ. მაგალითად, გავიგოთ როგორი უნდა იყოს $R_0$, რომ ანაბრების გაორმაგება მოხდეს 50 წელიწადში. გვაქვს

$$\frac{X_{50}}{X_0} = (1 + R_0)^{50} = 2 , \tag{7.18}$$

მაშინ

$$R_0 = \sqrt[50]{2} - 1 . \tag{7.19}$$

ე.ი. პროცენტულ გამოსახულებაში ვღებულობთ ნაზრდის ნორმას

$$( \sqrt[50]{2} - 1 ) \cdot 100\% . \tag{7.20}$$

დავუშვათ, კლიენტების მოსაზიდად ბანკის დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა R ნაზრდის კოეფიციენტის გაზრდა. გაკოტრებისაგან თავის დასაცავად, დირექტორთა საბჭომ გადაწყვიტა აღარ დაუშვას ანაბრების შემდგომი ზრდა, თუ მისი სიდიდე მიაღწევს 1-ს – მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ, კოეფიციენტი უნდა გახდეს უარყოფითი, რათა შემცირდეს ანაბრები, ვიდრე არ გახდება 1-ზე ნაკლები.

ამ პროცესის უზრუნველსაყოფად გადაწყდა, რომ

$$R = r(1 - X_n). \tag{7.21}$$

მაშინ (7.13) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n} = r(1 - X_n), \qquad \text{სადაც} \quad r > R_0. \tag{7.22}$$

(7.22)-დან გვექნება რეკურენტული თანაფარდობა

$$X_{n+1} = (1 + r)\cdot X_n - r \cdot X_n^2. \tag{7.23}$$

ამ სისტემას ეწოდება ფერჰიულსტის მოდელი. გამოვიკვლიოთ მისი წონასწორობის წერტილები.

**განსაზღვრება:** რეკურენტული სისტემის წონასწორობის წერტილები ეწოდება $X_n$–ის იმ მნიშვნელობებს, რომლებიც არ იცვლება n-ის ზრდასთან ერთად, ე.ი. $X_n$ –ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც

$$X_{n+1} = X_n \tag{7.24}$$

წარმოადგენს ფერჰიულსტის მოდელის (7.23) წონასწორობის წერტილებს.

ცხადია, ეს მნიშვნელობებია:

ა) $X_n$=0; ბ) $X_n$=1 .

იმისათვის, რომ წონასწორობის წერტილი განხორციელდეს პრაქტიკულად, საჭიროა მისი მდგრადობა მცირე შეშფოთებების მიმართ.

გამოვიკვლიოთ ეს მდგომარეობები მდგრადობაზე:

ა) თავდაპირველად განვიხილოთ წონასწორობის მდგომარეობა $X_n$=0, ანუ მდგომარეობა, როცა ჩვენს ანგარიშზე ფული არ არის. დავუმატოთ “მცირე შეშფოთება” $-\delta_n$<<1, წონასწორობის წერტილს და გამოვიკვლიოთ მისი დინამიკა დროში, ანუ $X_n = 0 + \delta_n$, მაშინ (7.23) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\delta_{n+1} = (1 + r)\delta_n - r\delta_n^2. \tag{7.25}$$

ვინაიდან $\delta_n$<<1 , ცხადია, რომ $\delta_n^2 = 0(\delta_n)$<<1 , ამიტომ (7.25) განტოლებაში ის შეიძლება უგულებელვყოთ. ამის შედეგად გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1 + r)\delta_n. \tag{7.26}$$

აქედან ადვილად მივიღებთ, რომ

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| > 1. \tag{7.27}$$

ამრიგად, შეშფოთებები დროში იზრდება, რაც ნიშნავს წონასწორობის წერტილის $X_n$=0 არამდგრადობას. ამოცანის არსის მიხედვით, ეს გამოიხატება იმაში, რომ დროთა განმავლობაში ანაბრები გაიზრდება თუ კი ანგარიშზე დაერიცხება ფულის რაღაც სულ მცირე რაოდენობა $\delta_n$.

ბ) გამოვიკვლიოთ წონასწორობის მეორე წერტილის $X_n=1$ მდგრადობა. წონასწორობის წერტილს აქაც მივცეთ მცირე ნაზრდი $\delta_n$<<1, ანუ განვიხილოთ $X_n = 1 + \delta_n$ მნიშვნელობა და გამოვიკვლიოთ ამ მდგომარეობის დინამიკა n დროის განმავლობაში. (7.23) ფორმულიდან ვღებულობთ:

$$1 + \delta_{n+1} = (1 + r)(1 + \delta_n) - r(1 + \delta_n)^2. \tag{7.28}$$

გარდაქმნების შედეგად გვაქვს:

$$1 + \delta_{n+1} = 1 + r + (1 + r)\delta_n - r - 2r\delta_n - r\delta_n^2. \tag{7.29}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\delta_n^2 = 0(\delta_n) << 1$ და ამის გამო უგულებელვყოფთ მას, გვექნება

$$\delta_{n+1} = (1 - r)\delta_n. \tag{7.30}$$

$X_n=1$ წონასწორობის წერტილის მდგრადობისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა

$$\left|\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}\right| < 1, \tag{7.31}$$

ანუ

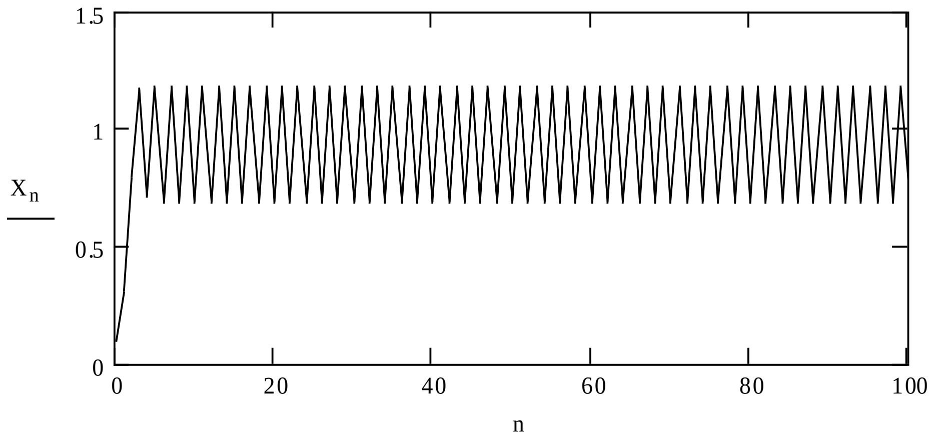
$$|1 - r| < 1. \tag{7.32}$$

თავის მხრივ, ეს პირობა ნიშნავს, რომ

$$0 < r < 2. \tag{7.33}$$

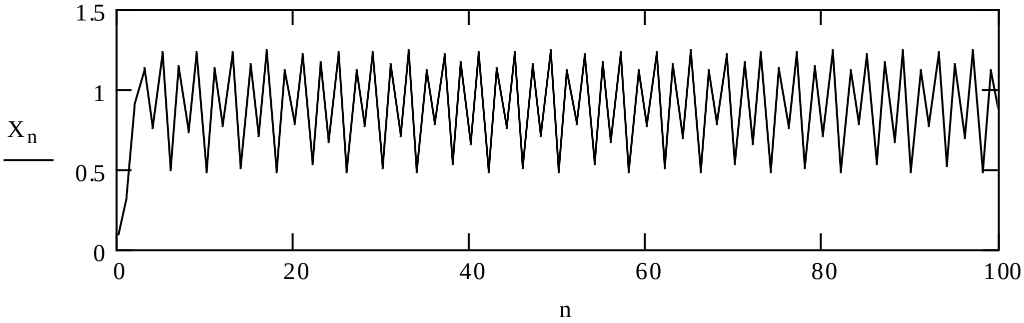
ამრიგად, თუ სრულდება (7.33) პირობა, მაშინ ფერჰიულსტის სისტემის წონასწორობის წერტილი $X_n=1$ მდგრადია. წინააღმდეგ შემთხვევაში, შევიჭრებით არამდგრადობის ზონაში, რომელიც სავსეა მოულოდნელობებით.

კერძოდ, როცა r=2.3, აღიძვრება $X_n$-ის **პერიოდული რხევები** (ნახ.7.1).



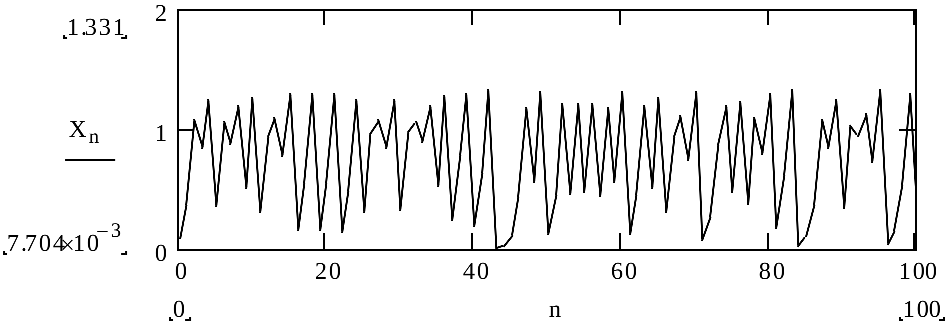

ნახ 7.1. ანაბრის პერიოდული რხევები

r=2.57 შემთხვევაში, სურათი რთულდება და ჩნდება **ორმაგად პერიოდული რხევები** (ნახ 7.2).




ნახ 7.2. ანაბრის ორმაგად პერიოდული რხევები

ნაზრდის r კოეფიციენტის შემდგომი ზრდისას ვღებულობთ პერიოდის გაოთხმაგებას და ა.შ. თუ $r \geq 3.0$, შეინიშნება **ქაოსური რხევები** (ნახ 7.3.).




ნახ 7.3. ანაბრის ქაოსური რხევები.

ამრიგად, ფერჰიულსტის ტიპის არაწრფივი რეკურენტული სისტემები მოიცავს ბევრ საიდუმლოს და მათ ასახსნელად საჭიროა დამატებითი კვლევები ცალკეულ კონკრეტულ შემთხვევაში; მით უმეტეს, რომ ყოველთვის არ ხერხდება რეკურენტული სისტემით მოცემული იტერაციული პროცესის კრებადობის გლობალური შეფასება.

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.3

***ამოცანა.*** გამოიკვლიოთ ფერჰიულსტის მოდელი:

$$X_{n+1} = (1+r) \cdot X_n - r \cdot X_n^2 \tag{7.34}$$

r ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის.

*ამოხსნა.* ლაბორატორიული სამუშაოს შესასრულებლად შემოვი-ფარგლოთ $X_0$ საწყისი პირობებით და $r$ ნაზრდის კოეფიციენტის მნიშვნელობით.

## პროგრამა **Mathcad-ზე**

საწყისი ანაბარი პირად ანგარიშზე

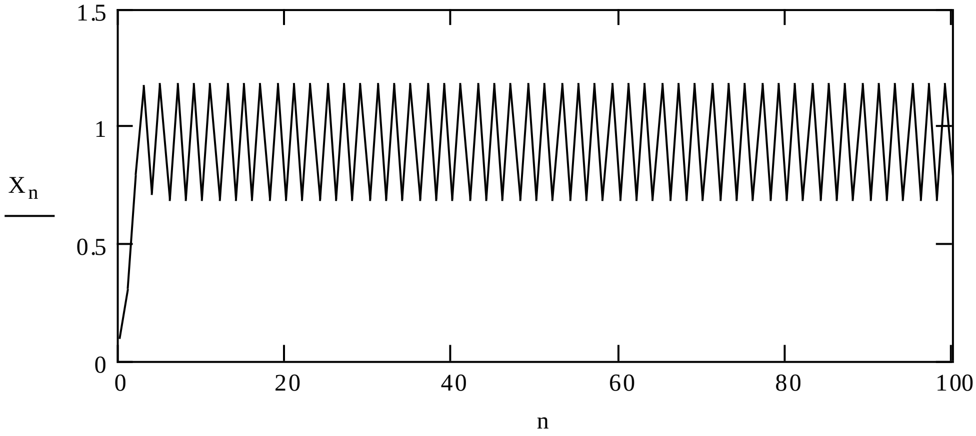
$$X_0 := 0.1$$

ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა ფერჰიულსტის მოდელით პროცენტული განაკვეთით r=2,3.

$$r := 2.3$$

$$n := 0..100$$

$$X_{n+1} := (1+r)\cdot X_n - r\cdot\left(X_n\right)^2.$$

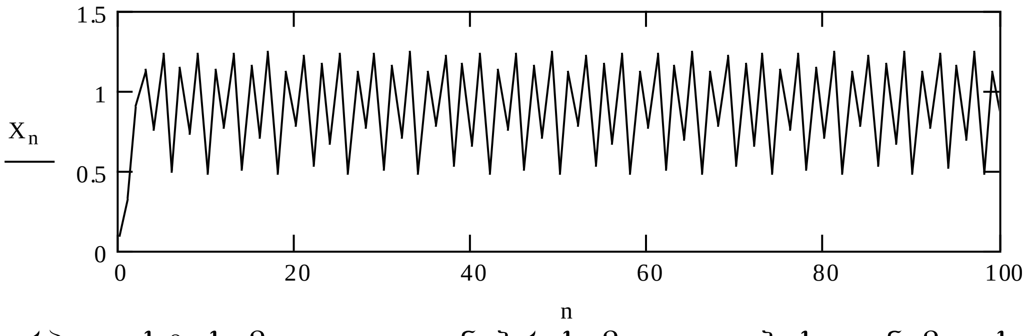



ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით r=2,57.

$$r := 2.57$$

$$n := 0..100$$

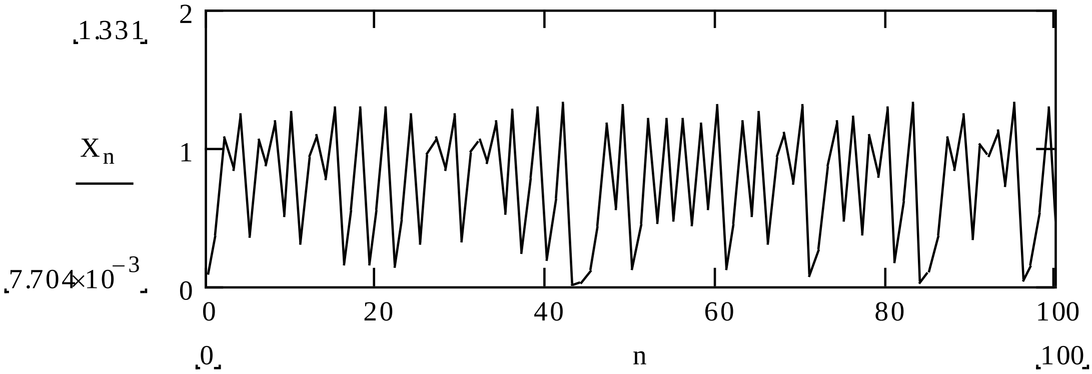
$$X_{n+1} := (1+r)\cdot X_n - r\cdot\left(X_n\right)^2.$$




ფერჰიულსტის მოდელით ანაბრის მოცულობის დინამიკის გამოთვლა პროცენტული განაკვეთით r=3.

$$r := 3$$

$$X_{n+1} := (1+r)\cdot X_n - r\cdot\left(X_n\right)^2$$




როგორც ვხედავთ, აქაც ადგილი აქვს **სისტემის სტრუქტურულ არამდგრადობას.** რაც იწვევს პერიოდული რხევითი სისტემის გადასვლას ქაოსურ რეჟიმში. ეს გადასვლა ხდება პარამეტრის ცვლილებიდან გამომდინარე. ჯერ ვიღებთ ორადპერიოდულ რხევებს, შემდეგ - ოთხადპერიოდულს . . .ბოლოს კი გადავდივართ ქაოსურ რეჟიმში.

**სავარჯიშო.**

გამოიკვლიეთ ფერჰიულსტის მოდელი

$$X_{n+1} = (1+r)\cdot X_n - r\cdot X_n^2$$

r ნაზრდის კოეფიციენტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისა და საწყისი პირობებისათვის, **Mathcad-**ისა და **Matlab**-ის გრაფიკული საშუალებების საფუძველზე.

**შეადგინეთ ანალოგიური რეკურენტული არაწრფივი სისტემა,** იპოვეთ წონასწორობის წერტილები, გამოიკვლიეთ ისინი მდგრადობაზე

## 7.4. ფრანგიშვილი-ობგაძის მათემატიკური მოდელი

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომოკა, ანუ ეკონომიკა, როცა მოთხოვნა ტოლია მიწოდებისა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, იწარმოება ზუსტად იმდენი *X(t)*, რამდენიც სჭირდება ბაზარს *Y(t)*

$$X(t) = Y(t). \tag{7.35}$$

*X(t)* არის მიწოდება (წარმოების მოცულობა), *Y(t)* - მოთხოვნა.

(7.35) წონასწორობის პირობით შეიძლება შევადგინოთ განტოლება:

$$\mathrm{X(t) = C(t) + I(t)}, \tag{7.36}$$

სადაც *C(t)* მოთხოვნის ფუნქციაა, *I(t)* – ინვესტიციის ფუნქცია.

სამუელსონ-ჰიკსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება დავწეროთ განტოლება:

$$I(t) = \beta \dot{X}(t), \tag{7.37}$$

სადაც $\beta$ აქსელერაციის კოეფიციენტია.

გარდა ამისა, მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, რომელიც დამოკიდებულია წარმოების წინა ისტორიაზე, გავლილ *t* დროში. სხვანაირად,

$$\mathrm{C(t)} = \int_0^t F\left[X(\tau),\ \tau\right] d\tau, \tag{7.38}$$

წონასწორობის (7.36) განტოლებაში (7.37) და (7.38) ჩასმით მივიღებთ:

$$X(t) = \beta \dot{X}(t) + \int_0^t F[X(t)]dt\ . \tag{7.39}$$

(7.39) განტოლების ორივე მხარის დიფერენცირებით მივიღებთ:

$$\dot{X}(t) = \beta \cdot \ddot{X}(t) + F[X(t)]. \tag{7.40}$$

ანუ, მივიღებთ ფრანგიშვილი-ობგაძის დინამიკის დიფერენციალურ განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) - \frac{1}{\beta}\dot{X}(t) + \frac{1}{\beta}F[X(t)] = 0 \tag{7.41}$$

ვთქვათ,

$$\beta = -\frac{1}{e}; \tag{7.42}$$

მაშინ მივიღებთ წონასწორული ეკონომიკის დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e \cdot \dot{X}(t) + F_1[X(t)] = 0, \tag{7.43}$$

სადაც $e = const$, ხოლო $F_1[X(t)]$ მოხმარების სიმკვრივეა.

თუ, განვიხილავთ შემთხვევას, როდესაც

$$F_1[X(t)] = [X(t)]^3 - X(t) - A\cdot\cos(\omega\cdot t)\,, \qquad (7.44)$$

მაშინ (7.43)-დან მივიღებთ დიუფინგის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t) + e\cdot\dot{X}(t) - X(t) + [X(t)]^3 = A cos(\omega\cdot t)\,. \qquad (7.45)$$

(7.45) განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ იგი ნორმალური, ე.ი. პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის უნდა შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}(t) \equiv X_1; \qquad X(t) \equiv X_0\,. \qquad (7.46)$$

მაშინ, (7.45) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = X_1 \\ \dot{X}_1(t) = A\cos(\omega\cdot t) + X_0 - X_0^3 - e\cdot X_1 \end{cases}. \qquad (7.47)$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.4

***ამოცანა.*** განვიხილოთ დიუფინგის ეკონომიკური დინამიკის განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases} \qquad (7.48)$$

და $A = 0.25; \omega = 1{,}0; e = 0.2$ მონაცემებით, შემდეგ ამოხსენით ამოცანა Mathcad-სა და Matlab-ში.

ამოხსნა. დიუფინგის განტოლების ამოსახსნელად შევადგინოთ პროგრამა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

დემპფირების პროპორციულობის კოეფიციენტი,

c:=0.2

მოთხოვნის გარე შეშფოთების სეზონური სიხშირე,

ω := 1.0

მოთხოვნის გარე შეშფოთების ამპლიტუდა,

A:=0.25

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი პირობები

$$ic := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

დიუფინგის განტოლებათა სისტემის მარჯვენა მხარის მატრიცა.

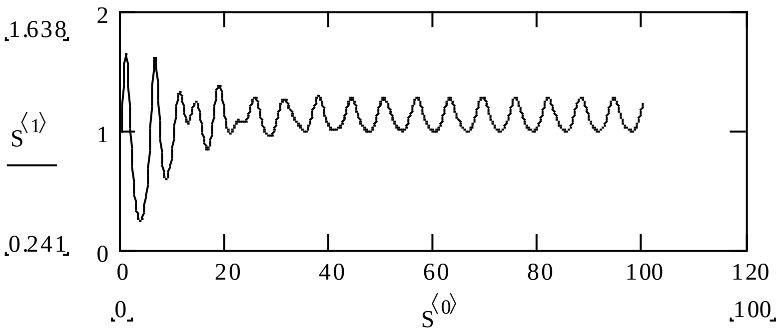
$$D(t,X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ A\cdot\cos(\omega\cdot t) + X_0 - (X_0)^3 - c\cdot X_1 + 0.3 \end{bmatrix}$$

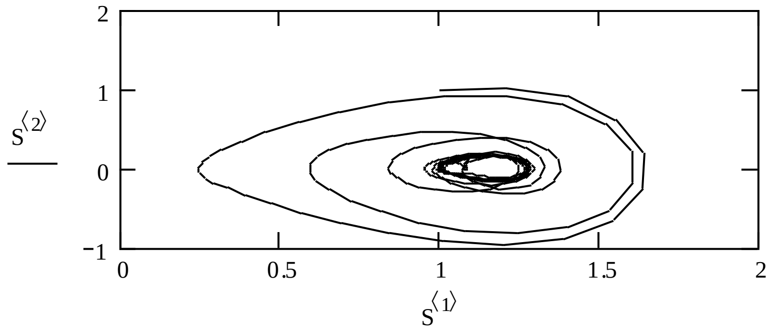
ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ოპერატორი რუნგე-კუტას მეთოდით ცვლადი ბიჯით.

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე

$$i := 0..\mathrm{last}\left(S^{\langle 0\rangle}\right)$$




**სავარჯიშო.**

განიხილეთ დიუფინგის განტოლება ნორმალური სახით:

$$\begin{cases} \dot{X}_0 = X_1 \\ \ddot{X}_1 = A\cos(\omega t) + X_0 - X_0^3 - eX_1 \end{cases}$$

და ამოხსენით საწყისი პირობებით

$$\begin{cases} X_0(0) = 1 \\ X_1(0) = 1 \end{cases}$$

$A,\omega$,e პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის შეეცადეთ ისე შეარჩიოთ პარამეტრების მნიშვნელობები, რომ მიიღოთ ეკონომიკის განვითარების სხვადასხვა რეჟიმები. გამოიკვლიეთ სისტემის წონასწორობის წერტილები მდგრადობაზე. შეაფასეთ ბიფურკაციის წერტილები.

## 7.5. ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლება

განვიხილოთ წონასწორული ეკონომიკა.

წონასწორობის პირობების მიხედვით შევადგენთ წონასწორობის განტოლებას

$$X(t)=C(t)+I(t), \tag{7.49}$$

სადაც *C(t)* მოხმარებაა, *I(t)* –ინვესტიციები.

სამუელსონ-ხიქსის აქსელერაციის პრინციპზე დაყრდნობით, შეიძლება ჩავწეროთ **ინვესტიციების განზოგადებული განტოლება**

$$I(t)=\beta(t)\cdot\dot{X}(t), \tag{7.50}$$

სადაც $\beta(t)$ აქსელერაციის კოეფიციენტია. გარდა ამისა, $C(t)$ მოხმარება წარმოადგენს წარმოების მოცულობის ფუნქციას, ამავდროულად ის დამოკიდებულია მოხმარების წინა ისტორიაზე, ანუ ეროვნული შემოსავლის მოცულობაზე:

$$C(t)=\int_0^t F[X(t)]dt\,. \tag{7.51}$$

(7.50)-ისა და (7.51)-ის (7.49)-ში შეტანით, მივიღებთ

$$X(t)=\beta(t)\cdot\dot{X}(t)+\int_0^t F[X(t)]dt\,. \tag{7.52}$$

(7.52) განტოლების ორივე მხარის *t*-თი დიფერენცირებით მივიღებთ

$$\dot{X}(t)=\dot{\beta}(t)\cdot\dot{X}(t)+\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+F[X(t)]. \tag{7.53}$$

ამრიგად, მივიღეთ დინამიკის დიფერენციალურ განტოლება შემდეგი სახით:

$$\beta(t)\cdot\ddot{X}(t)+\left(\dot{\beta}(t)-1\right)\dot{X}(t)+F[X(t)]=0\,. \tag{7.54}$$

რადგან $\beta(t)\neq 0$, შეიძლება (7.54) განტოლება გავყოთ $\beta(t)$-ზე. მივიღებთ დინამიკის განტოლებას შემდეგი სახით:

$$\ddot{X}(t)+\frac{\dot{\beta}(t)-1}{\beta(t)}\cdot\dot{X}(t)+\frac{1}{\beta(t)}\cdot F[x(t)]=0\,. \tag{7.55}$$

თუ (7.55)-ში შევარჩევთ $\beta(t)$ და $F[x(t)]$

$$\begin{aligned}&\beta(t)=t\\&F[x(t)]=t\left(\omega^2+\varepsilon\cos 2t\right)\cdot x(t)\end{aligned}\quad; \tag{7.56}$$

მივიღებთ **ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლებას:**

$$\ddot{X}(t)+\left(\omega^2+\varepsilon\cos 2t\right)x(t)=0. \tag{7.57}$$

ამ განტოლების ამოსახსნელად უნდა გადავწეროთ ის ნორმალური სახით, ანუ პირველი რიგის ორი განტოლების სისტემის სახით. ამისათვის შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$\dot{X}_0(t)\equiv X_1;\qquad X(t)\equiv X_0. \tag{7.58}$$

მაშინ (7.57) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$\begin{cases}\dot{X}_0(t)=X_1\\ \dot{X}_1(t)=-(\omega^2+\varepsilon\cos 2t)\cdot X_0\end{cases}. \tag{7.59}$$

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.5

***ამოცანა.*** განვიხილოთ ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლება შემდეგი საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases}X_0(0)=1\\ X_1(0)=1\end{cases} \tag{7.60}$$

და მონაცემებით $\omega=0.5;\varepsilon=0.3$. შევისწავლოთ ეკონომიკური დინამიკა $\omega$-სა და $\varepsilon$-ის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ავაგოთ $X_0(t)$ დამოკიდებულების გრაფიკი პარამეტრების სხვა-დასხვა მნიშვნელობებისათვის და შევისწავლოთ ფაზური პორტრეტი.

ამოხსნა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

წარმოების მოცულობის დემპფირების კოეფიციენტის შეშფოთების მცირე ამპლიტუდა

$$\varepsilon := 0.8$$

შეშფოთების სიხშირე

$$\omega := 0.01$$

წარმოების მოცულობისა და მისი ცვლილების სიჩქარის საწყისი მიახლოებები

$$ic := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

მატიეს განტოლების მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

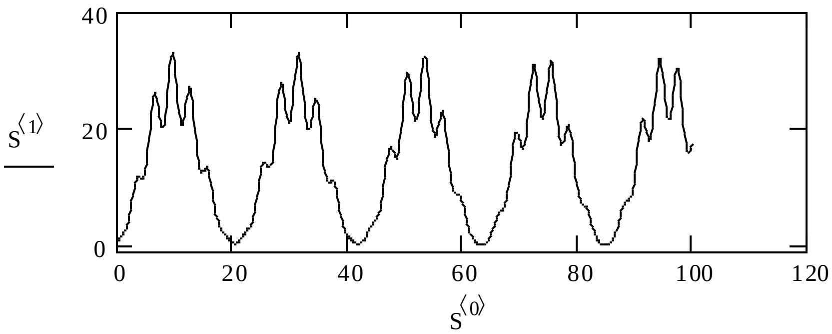
$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -X_0 \cdot \left(\omega^2 + \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot t)\right) + 1.1 \end{bmatrix}$$

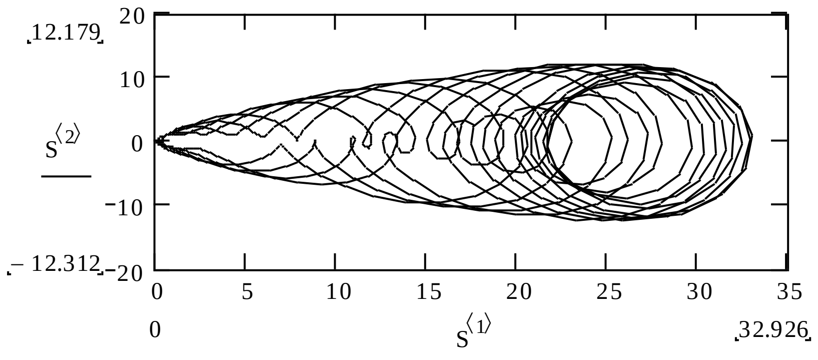
ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯის გამოყენებით

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 100, 500, D)$$

წარმოების მოცულობის დამოკიდებულება დროზე და დინამიკის სურათი ფაზურ სიბრტყეზე წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზებზე:

$$i := 0..\mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$




**სავარჯიშო.**

ა)შეისწავლეთ მატიეს მოდელი $\varepsilon$ და $\omega$ განმსაზღვრელი პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის;

ბ)შეისწავლეთ საწყისი პირობების გავლენა დინამიკურ სურათზე.

## 7.6. კურასაოს ეკონომიკურ-პოლიტიკური ბრძოლის მეთოდი

არსებობს არასასურველ ბიოლოგიურ სახეობასთან ბრძოლის სხვადასხვა მეთოდები. ერთი მათგანი ცნობილია "ბრძოლის კურასაოს მეთოდი"-ს სახელწოდებით. მისი არსი შემდეგია: რაღაც არეალზე მცხოვრებ სახეობათა პოპულაციაში, რომლის განადგურებაც განიზრახეს, რეგულარულად შეჰყავთ სტერილური ინდივიდი. ეს სტერილური ინდივიდები არ მონაწილეობენ კვლავწარმოების პროცესში, მაგრამ სხვა დანარჩენებთან ერთად მონაწილეობენ შიდასახეობრივ ბრძოლაში, რითაც ამცირებენ პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის სიჩქარეს. იგივე ხდება ეკონომიკასა და პოლიტიკაშიც.

განვიხილოთ შესაბამისი მოდელი.

ვთქვათ, $N_1(t)$ ნორმალური ინდივიდების რიცხვია, $M(t)$ – სიჩქარე, რომლითაც ამ პოპულაციაში შეჰყავთ სტერილური ინდივიდები, რომელთა რაოდენობა $N_2(t)$-ს ტოლია. ამოცანის მიზანია, შეძლებისდაგვარად $M(t)$-ს იმ მინიმალური სიჩქარის განსაზღვრა, რომლის დროსაც $N_1$ პოპულაცია ქრება. განვიხილოთ კურასაოს მეთოდის შემდეგი დინამიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{N_1 dt} = a - m(gN_1 + hN_2) \\ \dfrac{dN_2}{N_2 dt} = \dfrac{M(t)}{N_2(t)} - m(gN_1 + hN_2) \end{cases} \tag{7.61}$$

სადაც $m$ პოპულაციის მგრძნობიარობის კოეფიციენტია საკვების უკმარისობაზე, $a$–ჭარბი საკვების პირობებში პოპულაციის რაოდენობის ბუნებრივი ზრდის კოეფიციენტი, $g$ და $h$ კი დადებითი კონსტანტები (პოპულაციის გაუმაძღრობის კოეფიციენტი).

დავუშვათ, სტერილური ინდივიდები შეჰყავთ პოპულაციის $N_2(t)$ მოცულობის პროპორციულად, ე.ი.

$$M(t) = K \cdot N_2(t). \tag{7.62}$$

ასევე თუ ავიღებთ გაუმაძღრობის შემდეგ კოეფიციენტებს:

$$g=h=1, \tag{7.63}$$

(7.61) და (7.62)-დან მივიღებთ კურასაოს მოდელს:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1[a - m(N_1 + N_2)] \\ \dot{N}_2 = N_2(t)[k - m(N_1 + N_2)] \end{cases} \tag{7.64}$$

გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ:

ა) თუ $a>k$ , ნორმალური პოპულაცია არ კვდება მაშინაც კი, როცა $N_2(0)$ ძალიან დიდია. უფრო მეტიც, ამ შემთხვევაში სტერილური ინდივიდები ადრე თუ გვიან კვდებიან;

ბ) თუ $a<k$, მაშინ ნორმალური პოპულაცია კვდება, ხოლო სტერილური ინდივიდების პოპულაცია იზრდება და მისი რაოდენობა აღწევს თავის მაქსიმალურ $N_2=k/m$ მნიშვნელობას. ამის შემდეგ, სტერილურ ინდივიდთა პოპულაციაც იწყებს კვდომას.

კურასაოს მეთოდის ერთ-ერთი სტრატეგიაა: (7.62) დამოკიდებულების ნაცვლად მისი მაქსიმალური სტაბილური, დროში უცვლელი ამონახსნის გამოყენება

$$M = M_0 = K \cdot N_{2\max} = K \cdot \frac{k}{m} = \frac{k^2}{m} \ . \qquad (7.65)$$

ამ შემთხვევაში მიღებულია, რომ $a$ და $m$ პარამეტრები ცნობილია, ხოლო $k$ კოეფიციენტისათვის სრულდება პირობა $k>a$, რის შედეგადაც ნორმალური პოპულაციის რაოდენობა $N_1(t)\to 0$.

მეცნიერებაში ანალოგიურ ამოცანას ვაწყდებით, მაგალითად, რომელიმე შემოქმედებითი კოლექტივის სამეცნიერო პოტენციალის ანალიზის დროს, რომლის შევსება ხდება არაკვალიფიცირებული კადრებით.

ეკონომიკური ანალოგიის სახით გამოდგება უვარგისი დანადგარების შეძენა.

ანალოგიური ამოცანა შეიძლება ავაგოთ რაიმე საწარმოო ჯგუფების კონკურენციის ანალიზის დროს, საქონლის ახალ სახეობათა წარმოების ათვისებისას, როდესაც, მაგალითად, ერთ-ერთი მოწინააღმდეგე "შეიტყუებს" თავის კონკურენტს კონსტრუქციული დამუშავების ანალიზის ნაკლებად პერსპექტიულ გზაზე, რომელიც მიიყვანს მას არაკონკურენტუნარიანი პროდუქციის შექმნამდე.

## ლაბორატორიული სამუშაო 7.6

***ამოცანა.*** შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მეთოდის მათემატიკური მოდელი:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1\left[a - m(N_1 + N_2)\right] \\ \dot{N}_2 = N_2\left[k - m(N_1 + N_2)\right] \end{cases},$$

საწყისი პირობებით:

$$\begin{cases} N_1(0) = 2000 \\ N_2(0) = 2000 \end{cases}$$

როდესაც

ა) $m=\sqrt{0.00001}$; $a=9.9$; $k=10$ $(a<k)$;

ბ) *m=0.01; a=10; k=9.9 (a>k).*

ამოხსნა.

### პროგრამა Mathcad-ზე

დასათრგუნი პოპულაციის ბუნებრივი ზრდის ტემპი

$$a := 9.9$$

დასათრგუნი და შეტანილი პოპულაციების საწყისი მოცულობები

$$ic := \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

სტერილური პოპულაციის ზრდის ტემპი

$$k := 10$$

პოპულაციის გაუმაძღრობის მაჩვენებელი

$$m := \sqrt{0.0000}$$

კურასაოს მოდელის მარჯვენა ნაწილების მატრიცა

$$D(t, X) := \begin{bmatrix} X_0 \cdot \left[a - m \cdot \left(X_0 + X_1\right)\right] \\ X_1 \cdot \left[k - m \cdot \left(X_0 + X_1\right)\right] \end{bmatrix}$$

ჩვეულებრივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რუნგე-კუტას მეთოდით ამოხსნის ოპერატორი ცვლადი ბიჯით

$$S := \mathrm{Rkadapt}(ic, 0, 200, 300, D)$$

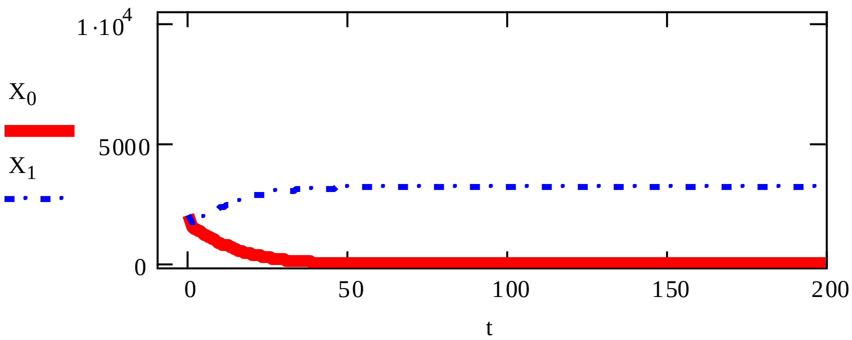
პოპულაციის დინამიკა დროსთან დამოკიდებულებაში

$$i := 0 .. \mathrm{last}\left(S^{\langle 0 \rangle}\right)$$

$$t := S^{\langle 0 \rangle}$$

$$X_0 := S^{\langle 1 \rangle}$$

$$X_1 := S^{\langle 2 \rangle}$$



**სავარჯიშო.**

შეისწავლეთ ბრძოლის კურასაოს მათემატიკური მოდელი *m, a, k* პარამეტრების სხვადასხვა მნიშვნელობების დროს. განიხილეთ საწყისი პირობების სხვადასხვა ვარიანტები. ააგეთ თქვენი შედეგების გრაფიკები და ახსენით მიღებული შედეგები.

## თავი VIII. თამაშთა თეორიის გამოყენება სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების მოდელირების საქმეში

პრაქტიკაში ხშირად ვხვდებით ისეთ ამოცანებს. სადაც აუცილებელია გადაწყვეტილების მიღება გაურკვევლობის პირობებში. ასეთ სიტუაციებს, რომლებიც იქმნება ჭადრაკის ან დომინოს თამაშის დროს, ეწოდება **კონფლიქტური.** ნებისმიერი თამაშის მიზანია - ერთ-ერთი მოთამაშის მოგება.

ეკონომიკაში კონფლიქტური სიტუაციები გვხვდება ძალიან ხშირად, მათ მიეკუთვნება: ურთიერთობა მომხმარებელსა და მიმწოდებელს შორის, მყიდველსა და გამყიდველს შორის, ბანკსა და კლიენტს შორის.

კონფლიქტური სიტუაციების მოსაგვარებლად აუცილებელია მეცნიერული მეთოდები. ასეთი მეთოდები შემუშავებულია კონფლიქტური სიტუაციების მათემატიკურ თეორიაში, რომელსაც **თამაშთა თეორია** ეწოდება.

თამაშთა თეორიაში არსებობს თამაშები, რომლებშიც პირველი სვლის შესრულება მოგების გარანტიაა, ანუ არსებობს ერთი ან უსასრულო რაოდენობა სტრატეგიებისა, რომელთა მიხედვითაც, თუ ყოველ შემდეგ სვლას სპეციალური ალგორითმის მიხედვით შეასრულებ, გამარჯვება გარანტირებული გაქვს. მოწინააღმდეგის სტრატეგიას და ტაქტიკას მნიშვნელობა არა აქვს. მაქსიმუმი, რისი გაკეთებაც ძლიერ მოწინააღმდეგეს შეუძლია - ხანგრძლივი და უშეღავათო წინააღმდეგობაა - ნებისმიერ შემთხვევაში, მარცხი გარდაუვალია.

### 8.1. თამაშთა თეორიის ძირითადი ცნებები

**თამაში** ეს არის ნამდვილი ან ფორმალური კონფლიქტი, რომელშიც მონაწილეობს სულ მცირე ორი მოთამაშე, და ყოველი მათგანი მიისწრაფვის საკუთარი მიზნის მისაღწევად.

სიტუაცია ითვლება **კონფლიქტურად,** როდესაც მასში მონაწილე მხარეების ინტერესები საწინააღმდეგოა.

კონფლიქტში მონაწილე მხარეებს **მოთამაშეები** ეწოდება, ხოლო კონფლიქტის შედეგს - **მოგება.**

თამაშთა თეორია ეკონომიკურ ენაზე განისაზღვრება, როგორც სტრატეგიულ სიტუაციებში ადამიანთა ქცევის შესწავლა. **„სტრატეგიულით„** აღვნიშნავთ ისეთ სიტუაციებს, რომლებშიც თითოეულმა ადამიანმა გადაწყვეტილების მიღებისას უნდა გაითვალისწინოს ის, თუ როგორ მოიქცევა მოწინააღმდეგე მისი

ქცევის საპასუხოდ. თამაშის პროცესში, მოთამაშე აკეთებს არჩევანს კონკრეტული სიტუაციის მიხედვით.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ თამაშის ამოხსნა, აუცილებელია ყოველი მოთამაშისათვის სტრატეგიის არჩევა, რომელიც დააკმაყოფილებს ოპტიმალურობის პირობას, ანუ ერთ-ერთმა მოთამაშემ უნდა მიიღოს მაქსიმალური მოგება, როდესაც მეორე მოთამაშე მიჰყვება თავის სტრატეგიას. ამავე დროს, მეორე მოთამაშეს უნდა ჰქონდეს მინიმალური წაგება, თუ პირველი მიჰყვება თავის სტრატეგიას. ასეთ სტრატეგიებს, ეწოდება **ოპტიმალური.**

თამაშთა თეორიის მიზანია, ყოველი მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიის განსაზღვრა.

## 8.2. მატრიცული თამაშები

განვიხილოთ თამაში, რომელშიც მონაწილეობს ორი მოთამაშე და თითოეულს აქვს სასრული სტრატეგიების რიცხვი.

პირველი მოთამაშე აღვნიშნოთ A-თი, მეორე - B-თი. წარმოვიდგინოთ, რომ პირველ მოთამაშეს აქვს m სტრატეგია: $A_1$, $A_2$, …… Am, მეორე მოთამაშეს n სტრატეგია: $B_1$, $B_2$, …… Bn.

ვთქვათ, A მოთამაშემ აირჩია სტრატეგია $A_i$, B მოთამაშემ სტრატეგია $B_i$. A მოთამაშის მოგება აღვნიშნოთ $a_{ik}$ , B მოთამაშის მოგება $b_{ik}$, ეს მოგებები ერთმანეთთან დაკავშირებული იქნება შემდეგი ტოლობით:

$$b_{ik} = -a_{ik}. \qquad (8.1)$$

(8.1) ტოლობა გვიჩვენებს, რომ ერთ-ერთი მოთამაშის მოგება უდრის მეორე მოთამაშის მოგებას აღებულს საწინაამდეგო ნიშნით. ამიტომ ასეთი თამაშების ანალიზის დროს განვიხილავთ მარტო ერთ-ერთი მოთამაშის, მაგალითად A მოთამაშის, მოგებას.

თუ ჩვენთვის ცნობილია $a_{ik}$ მოგების მნიშვნელობები თითოეულ სიტუაციაში { $A_i$, $B_k$ }, i – 1,2,…, მაშინ k =1,2,…, და მათი ჩაწერა უფრო იოლია მართკუთხა ცხრილის მეშვეობით (8.1), რომლის სტრიქონები შეესაბამება A მოთამაშის სტრატეგიებს, სვეტები - B მოთამაშის სტრატეგიებს.

ცხრილი 8.1

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_n$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{2n}$ |
| … | …………………………… | | |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{mn}$ |

ამ მონაცემების წარმოდგენა შეგვიძლია მატრიცული სახითაც:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

მიღებული მატრიცის ზომაა mxn და მას ეწოდება **თამაშის მატრიცა,** ანუ **მოგების მატრიცა** (აქედან წარმოიშვა თამაშის სახელიც მატრიცული).

განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი. ვთქვათ, მოთამაშეები მაგიდაზე დებენ წითელ(r), მწვანე(b) და ლურჯ(g) ფერის რგოლებს ისე, რომ ერთმანეთს არ უყურებენ, ადარებენ რგოლის ფერებს და გადახდა ტარდება ისე, როგორც ნაჩვენებია შემდეგ მატრიცაში:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

ვიპოვოთ თითოეული მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგია. გავითვალისწინოთ ისიც, რომ A მოთამაშის სტრატეგიის არჩევისას, B მოწინააღმდეგმ შეიძლება უპასუხოს ისეთი სტრატეგიით რომ A-ს მოგება იყოს მინიმალური.

მაგალითად, სტრატეგიაზე $A_r$ ის უპასუხებს სტრატეგიით $B_r$ (მინიმალური მოგებაა - 2, რაც სინამდვილეში ნიშნავს A მოთამაშის წაგებას, 2-ის ტოლს), სტრატეგიაზე $A_g$ - სტრატეგიით $B_g$ ან $B_b$ (მინიმალური მოგება A მოთამაშის უდრის 1), სტრატეგიაზე $A_b$ - სტრატეგიით $B_g$ (A მოთამაშის მინიმალური მოგებაა - 3).

ჩავწეროთ ეს მინიმალური მოგებები 8.2 ცხრილის მარჯვენა სვეტში:

ცხრილი 8.2

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_r$ | -2 | 2 | -1 | **-2** |
| $A_g$ | 2 | 1 | 1 | **1** |
| $A_b$ | 3 | -3 | 1 | **-3** |

ცხადია, A მოთამაშე არჩევანს შეაჩერებს $A_g$ სტრატეგიაზე, სადაც მისი **მინიმალური მოგება მაქსიმალურია** ( სამ რიცხვიდან -2, 1 და -3 მაქსიმალურია 1), maxmin=1.

იგივე მოსაზრებები შეგვიძლია გამოვხატოთ B მოთამაშეზე. რადგანაც B მოთამაშე დაინტერესებულია იმით, რომ A მოთამაშის მოგება აქციოს მინიმუმად ამისათვის მან უნდა გააანალიზოს ყოველი მისი სტრატეგია A მოთამაშის მაქსიმალური მოგების თვალსაზრისით.

მაგალითად $B_r$ სტრატეგიაზე ის უპასუხებს $A_b$ სტრატეგიით (A მოთამაშის მაქსიმალური მოგება უდრის 3) , სტრატეგიაზე $B_g$ - სტარტეგიით $A_r$ (მაქსიმალური მოგება A მოთამაშის უდრის 2), სტრატეგიაზე $B_b$ - სტარტეგიით $A_g$ an $A_b$ (A მოთამაშის მაქსიმალური მოგება უდრის 1).

ეს მაქსიმალური მოგებები ჩაწერილია 8.3 ცხრილში

ცხრილი 8.3

| | $B_r$ | $B_g$ | $B_b$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A_r$ | -2 | 2 | -1 | -2 |
| $A_g$ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $A_b$ | 3 | -3 | 1 | -3 |
| | **3** | **2** | **1** | |

არაა გასაკვირი, თუ B მოთამაშემ შეაჩერა $B_b$-ზე თავისი არჩევანი , რომლის დროსაც A მოთამაშის მოგება მინიმალურია, ანუ minmax=1. მოცემულ თამაშში maxmin და minmax ერთმანეთს ემთხვევა: maxmin = =minmax=1. $A_g$ და $B_b$ სტრატეგიები ოპტიმალურია A და B მოთამაშეებისთვის. სიტუაცია { $A_g$ ,$B_b$ } **წონასწორულ სიტუაციად** ითვლება.

ახლა განვიხილოთ მატრიცული თამაში:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

( m x n მატრიცის სტრიქონები შეესაბამება A მოთამაშის სტრატეგიებს, სვეტები კი - B მოთამაშის სტრატეგიებს) და აღვწეროთ საერთო ალგორითმი, რომლის მიხედვითაც განვსაზღვრავთ არის თუ არა თამაშში წონასწორული სიტუაცია.

*A მოთამაშის მოქმედება.*

***პირველი ნაბიჯი.*** მინიმალური ელემენტი მოთავსებულია A მატრიცის ყოველ სტრიქონში

$$\alpha_i = \min_k \alpha_{ik}$$

$$i=1,2,\ldots,m.$$

მიღებული რიცხვები ჩაიწერება ცხრილის (8.4) მარჯვენა სვეტში.

*ცხრილი 8.4*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | | $a_{1n}$ | $\alpha_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | | $a_{2n}$ | $\alpha_2$ |
| --- | --- | ---- | --- | --- |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | $a_{mn}$ | $\alpha_m$ |

**მეორე ნაბიჯი.** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ რიცხვებში ავირჩევთ მაქსიმალურ რიცხვს:

$$\alpha = \max_i \alpha_i$$

$\alpha$ -ს ეწოდება **თამაშის ქვედა ფასი.**

A მოთამაშის სტრატეგიის შემუშავების პრინციპს, რომელიც დაფუძნებულია მინიმალური მოგებების მაქსიმიზაციაზე, ეწოდება **მაქსიმინის პრინციპი**, სტრატეგიას კი, რომელიც არჩეულია ამ პრინციპის თანახმად, ეწოდება A მოთამაშის **მაქსიმინის სტრატეგია.**

ახლა განვიხილოთ B მოთამაშის მოქმედება.

**პირველი ნაბიჯი.** A მატრიცის ყოველ სვეტში უნდა მოიძებნოს მაქსიმალური ელემენტი

$$\beta_k = \max_i \alpha_{ik}$$

k=1,2,…,n.

მიღებული რიცხვები ($\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$) ჩაიწერება ცხრილის (8.5) ქვედა სტრიქონში.

*ცხრილი 8.5*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | | $a_{1n}$ | $\alpha_1$ |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | | $a_{2n}$ | $\alpha_2$ |
| --- | --- | ---- | --- | --- |
| $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | | $a_{mn}$ | $\alpha_m$ |
| $\beta_1$ | $\beta_2$ | --- | $\beta_n$ | |

*შენიშვნა.* როდესაც *B* მოთამაშე ირჩევს $B_k$ სტრატეგიას, მან უნდა გათვალოს ისიც, რომ *A* მოთამაშის კარგი სვლების შედეგად ის წააგებს $\beta_k$-ზე არანაკლებს.

მეორე ნაბიჯი. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ რიცხვებში ავირჩევთ მინიმალურ რიცხვს:

$$\beta = \min_k \beta_k$$

*β-ს* ეწოდება **თამაშის ზედა ფასი**.

*B* მოთამაშის სტრატეგიის შემუშავების პრინციპს, რომელიც დაფუძნებულია მაქსიმალური დანაკარგების მინიმიზაციაზე, ეწოდება **მინიმაქსის პრინციპი**, სტრატეგიას კი, რომელიც არჩეულია ამ პრინციპის თანახმად, ეწოდება *B* მოთამაშის **მინიმაქსური სტრატეგია**.

თამაშის ქვედა ფასი და ზედა ფასი ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი უტოლობით :

$$\alpha \le \beta. \tag{8.2}$$

როდესაც $\alpha = \beta$, სიტუაციას ეწოდება **წონასწორობის სიტუაცია**, მათ საერთო მნიშვნელობას კი - **თამაშის უბრალო ფასი**, რომელიც აღინიშნება $v$-თი.

წონასწორობის სიტუაცია ხასიათდება სიტუაციის სტაბილურობით: არც ერთი მოთამაშე არ არის დაინტერესებული მისი დარღვევით და თუ ერთ-ერთი მოთამაშე თავის სტრატეგიას შეცვლის, მეორე კი შეინარჩუნებს თავის სტრატეგიას, მაშინ სტრატეგიის შემცვლელი მოთამაშე ასეთი შეცვლით ვერაფერს მოიგებს. თუ წონასწორობის სიტუაციიდან ორივე მოთამაშე გადაიხრება, ამით შეიძლება გაიზარდოს მათი მოგება.

თამაშს, რომლისთვისაც $\alpha = \beta$, ეწოდება **თამაში უნაგირა წერტილით**.

უნაგირა წერტილი ეს არის ელემენტი, რომელიც ყველაზე პატარაა თავის სტრიქონში და ყველაზე დიდია თავის სვეტში (ან პირიქით, დიდია სტრიქონში და პატარაა სვეტში).

მაგალითად, მატრიცა

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 3 & 7 \\ 8 & 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

*შეიცავს ერთ უნაგირა წერტილს 4. თამაშში შეიძლება იყოს რამდენიმე უნაგირა წერტილი. სწორედ, უნაგირა წერტილების არსებობა განსაზღვრავს თამაშის ამოხსნას* ***წმინდა სტრატეგიებით****.*
*ახლა განვიხილოთ სიტუაცია, როდესაც ქვედა და ზედა ფასი ერთმანეთს არ ემთხვევა ($\alpha \neq \beta$). ასეთ შემთხვევაში, თამაშის ამოხსნა ხდება* ***შერეული სტრატეგიებით****. თავის მხრივ, შერეული სტრატეგია გულისხმობს, რომ ყოველი მოთამაშე წმინდა შესაძლო სტრატეგიებიდან შემთხვევით, ალბათობით მოახდენს შერჩევას. თამაშის ამოხსნად ითვლება შერეული სტრატეგიები* $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ *და* $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}$, სადაც $p_i$ და $q_i$ წმინდა სტრატეგიის ალბათობებია შერეულ $A_i$ $B_j$ სტრატეგიებში.

განვიხილოთ 2x2 თამაში, რომლის ამოხსნაც ხდება შერეულ სტრატეგიებში, სადაც მოთამაშეებს აქვთ ორ-ორი სტრატეგია. ასეთი თამაშის მოგების მატრიცა გამოისახება შემდეგნაირად:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

თამაშის ამოხსნა არის

$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ და $\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, სადაც $p_1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}}$ ; (8.3)

$$p_2 = 1 - p_1. \tag{8.4}$$

$$q_1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} ; \tag{8.5}$$

$$q_2 = 1 - q_1. \tag{8.6}$$

თამაშის ფასი ტოლია:

$$v = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{21}-a_{12}} . \tag{8.7}$$

ზოგიერთს შეიძლება გაუჩნდეს კითხვა: რომელ მატრიცულ თამაშს აქვს ამონახსნი შერეულ სტრატეგიებში? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა ორი თეორემა.

**თეორემა1**

$$max_P \min_Q E(A,P,Q) = \min_Q \max_P E(A,P,Q), \tag{8.8}$$

სადაც $E(A,P,Q)$ არის A მოთამაშის მოგების მათემატიკური მოლოდინი შერეულ სტრატეგიებში.

**თეორემა 2**

$P^0=\{p_1^0, p_2^0,\ldots, p_m^0\}$ და $Q^0=\{q_1^0, q_2^0,\ldots, q_n^0\}$ არის ოპტიმალური შერეული სტრატეგიები და v - თამაშის ფასი,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q_k^0 = v ; \tag{8.9}$$

$$\sum_{i=1} a_{ik}\, p_i^0 = v. \tag{8.10}$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$v = \min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, p_i^0 = \max_P \min_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, p_i = \min_Q \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q_k$$

$$= \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, q_k^0 \tag{8.11}$$

სადაც $a_{ik}$ A მოთამაშის მოგებაა.

განვიხილოთ 2xn თამაში , ამ თამაშის ამოსახსნელად არსებობს ეფექტური მეთოდი, დაფუძნებული უბრალო გეომეტრიულ მოსაზრებებზე და მას ეწოდება **გრაფიკული მეთოდი.**

ვთქვათ $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$ არის 2xn თამაშის მოგების მატრიცა.

თეორემა 2-ის თანახმად, თამაშის ღირებულების და ოპტიმალური მნიშვნელობის $p^0$ მოსაძებნად A მოთამაშისათვის უნდა ვიპოვოთ განტოლების ამონახსნი:

$v = \min_{1\le k\le n}(a_{1k}p^0 + a_{2k}(1-p^0)) = \max_p \min_{1\le k\le n}(a_{1k}p + a_{2k}(1-p))$

ფუნქციის მაქსიმუმის

$\min_{1\le k\le n}(a_{1k}p^0 + a_{2k}(1-p^0))$

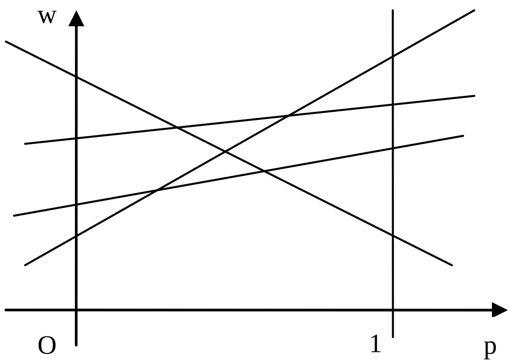
პოვნა უფრო იოლია, თუ ავაგებთ მის გრაფიკს. ამისათვის დავუშვათ, A მოთამაშემ აირჩია შერეული სტრატეგია P={p, 1-p}, ხოლო B მოთამაშემ - k წმინდა სტრატეგია, k=1,2,..,n. მაშინ A მოთამაშის საშუალო მოგება {P,k} სიტუაციაში უდრის:

$$(k): w = a_{1k}p + a_{2k}(1-p) \quad (8.12)$$

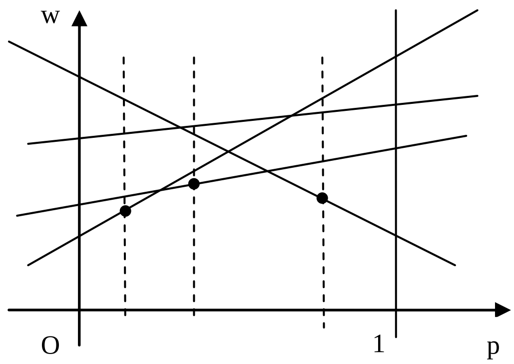
p სიბრტყეზე k განტოლება აღწერს წრფეს. B მოთამაშის ყოველ წმინდა სტრატეგიას ამ სიბრტყეზე შეესაბამება თავისი წრფე. ამიტომ, p,w სიბრტყეზე თავდაპირველად იხაზება ყველა წრფე

$(k): w = a_{1k}p + a_{2k}(1-p)$ , k=1,2,…,n ( ნახ.8.1)

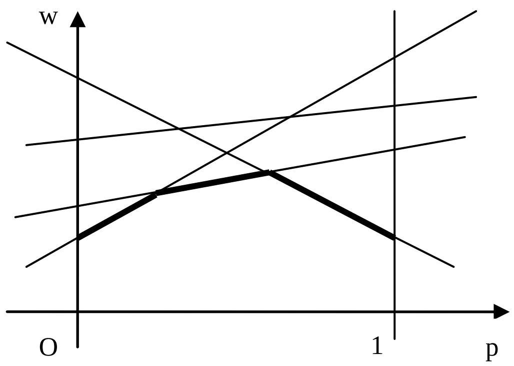
შემდეგ ყველა p მნიშვნელობისათვის, $0 \le p \le 1$ w შესაბამისი მნიშვნელობების ვიზუალური შედარებით ყოველ აგებულ წრფეზე მოინიშნება მათში ყველაზე მცირე (ნახ.8.2). ამის შედეგად, მივიღებთ ტეხილს, რომელიც არის ფუნქციის გრაფიკი ( მუქი ხაზი, ნახ.8.3)



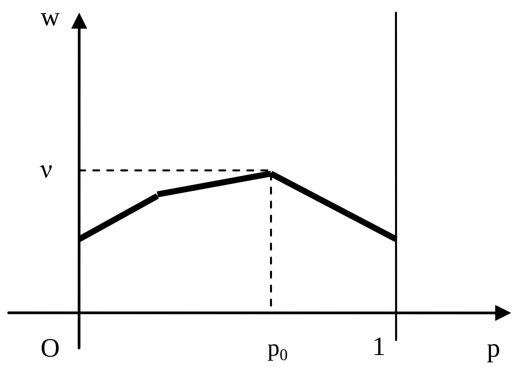

ნახ.8.1




ნახ.8.2




ნახ.8.3




ნახ.8.4

გრაფიკის ზედა წერტილი განსაზღვრავს თამაშის v ფასს და A მოთამაშის ოპტიმალურ სტრატეგიას - $P^0=\{p^0, 1\text{-}p^0\}$ (ნახ.8.4).

**ლაბორატორიული სამუშაო 8.2**

მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა:

| | B სტრატეგიები | | | |
|---|---|---|---|---|
| A სტრატეგიები | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$ | 1.45 | 2.12 | 0.75 | 4.01 |
| $A_2$ | 3.52 | 1.87 | 0.18 | 12.7 |
| $A_3$ | 6.08 | 4.43 | 11.0 | 6.01 |

ვიპოვოთ მატრიცული თამაშის ამოხსნა, კერძოდ: თამაშის ზედა ფასი; ქვედა ფასი; წმინდა მოგება; მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიები.

**ამოხსნა.**

მოგების მატრიცის ყოველ სტრიქონში ვიპოვოთ მინიმალური ელემენტი და ჩავწეროთ ის დამატებით სვეტში (ცხრილი8.6 ).

ცხრილი 8.6

| | B სტრატეგიები | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A სტრატეგიები | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | მინიმუმები |
| $A_1$ | 1.45 | 2.12 | 0.75 | 4.01 | 0.75 |
| $A_2$ | 3.52 | 1.87 | 0.18 | 12.7 | 0.18 |
| $A_3$ | 6.08 | 4.43 | 11.0 | 6.01 | 4.43(მაქს.ელ) |
| მაქსიმუმები | 6.08 | 4.43(მინ. ელ.) | 11.0 | 12.7 | |

ჩვენ შემთხვევაში, თამაშის ქვედა ფასი $\alpha$ =4.43. იმისათვის, რომ გარანტირებული გვქონდეს მოგება არანაკლებ 4.43-ისა, უნდა დავიცვათ $A_3$ სტრატეგია.

ახლა ვიპოვოთ თამაშის ზედა ფასი. მოგების მატრიცის ყოველ სვეტში ვიპოვოთ მაქსიმალური ელემენტი და ჩავწეროთ ის დამატებით სტრიქონში. ვიპოვოთ მინიმალური ელემენტი და იგი ჩავწეროთ დამატებით სვეტში, (ცხრილი 8.6). ჩვენ შემთხვევაში, ზედა ფასი ტოლია $\beta$ =4.43.

ქვედა და ზედა ფასები ტოლია $\alpha = \beta = 4.43$. ეს ნიშნავს, რომ თამაშს ამოხსნა აქვს წმინდა მინიმაქსურ სტრატეგიებში.

„A" მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $A_3$, „B" მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიაა $B_2$. არაა რთული შესამჩნევი, რომ ოპტიმალური სტრატეგიების გადაკვეთაზე მოთავსებული ელემენტი (სტრიქონი 3, სვეტი 2, ანუ 4.43) ერთდროულად არის მინიმალური სტრიქონში და მაქსიმალური სვეტში. როგორც უკვე ვიცით, ამ ელემენტს უნაგირა წერტილი ეწოდება, რომელიც განსაზღვრავს თამაშის ამოხსნას წმინდა სტრატეგიებში და რომლის მნიშვნელობაც თამაშის ფასის $v$ ტოლია. აქედან გამომდინარე, თამაშის ფასი $v = 4.43$.

პასუხი. ქვედა, ზედა და თამაშის ფასები ტოლია: $\alpha = \beta = v = 4.43$;

ოპტიმალურია სტრატეგიები: $A_3B_2$.

**სავარჯიშო.**

მოცემულია მატრიცული თამაშის მოგების მატრიცა:

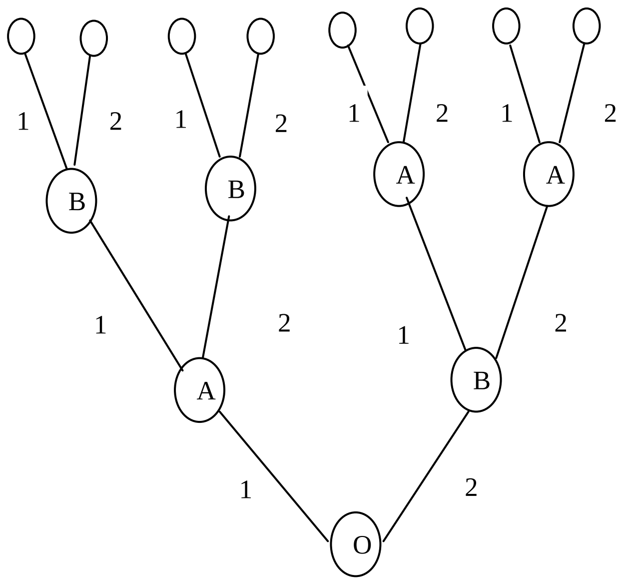
| | B სტრატეგიები | | | |
|---|---|---|---|---|
| A სტრატეგიები | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
| $A_1$ | 2.45 | 2.12 | 7.75 | 3.03 |
| $A_2$ | 3.52 | 1.87 | 0.18 | 12.7 |
| $A_3$ | 5.07 | 3,33 | 10.0 | 7.01 |

ვიპოვოთ მატრიცული თამაშის ამოხსნა, კერძოდ: თამაშის ზედა ფასი; ქვედა ფასი; წმინდა მოგება; მოთამაშის ოპტიმალური სტრატეგიები.

## 8.3. პოზიციური თამაშები

ამ კონფლიქტების აღმწერ ერთ-ერთ თამაშთა კლასს, რომელთა დინამიკა ზეგავლენას ახდენს მოთამაშეთა ქცევაზე, ეწოდება პოზიციური თამაში. თამაშის მდგომარეობას, ეწოდება **პოზიცია**, პოზიციაში შესაძლო არჩევანს - **ალტერნატივა.**

პოზიციური თამაშის განსაკუთრებულობაა პოზიციების წარმოდგენა თამაშის ხის სახით (ნახ.8.5). O, A და B სიმბოლოები მიუთითებს თუ რომელი მოთამაშე აკეთებს მორიგ სვლას, O სიმბოლოთი აღინიშნება სვლა თამაშში, რომელსაც აკეთებს არა მოთამაშე, არამედ შემთხვევითი მექანიზმი.




ნახ.8.5

განვიხილოთ ორი თამაშის მაგალითი, რომელიც შედგება ორი სვლისგან. A და B მოთამაშეები თანამიმდევრულად აკეთებენ სვლას. იწყებს A მოთამაშე: ის ირჩევს ორ ალტერნატივიდან ერთ-ერთს - x რიცხვს 1-ის (პირველი ალტერნატივა) ან 2-ის (მეორე ალტერნატივა). A მოთამაშის სვლაზე მოთამაშე B პასუხობს თავის სვლით, ეს მოთამაშეც ირჩევს ორი ალტერნატივიდან ერთ-ერთს - y რიცხვს 1-ის (პირველი ალტერნატივა), ან 2-ის (მეორე ალტერნატივა) ტოლს. და საბოლოოდ, A მოთამაშე მიიღებს ჯილდოს ან გადაიხდის ჯარიმას.

***პირველი მაგალითი***

1 სვლა. A მოთამაშე ირჩევს x რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2}.

2 სვლა. B მოთამაშე, რომელმაც უკვე იცის A მოთამაშის არჩევანი, ირჩევს y რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2} .

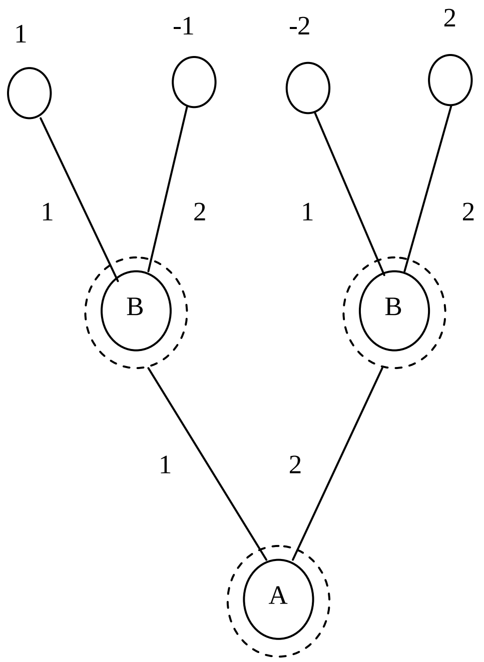
A მოთამაშისათვის B მოთამაშის ხარჯზე გადახდის ფუნქცია W (x,y) ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$W(1,1) = 1, \qquad W(2,1) = -2$$

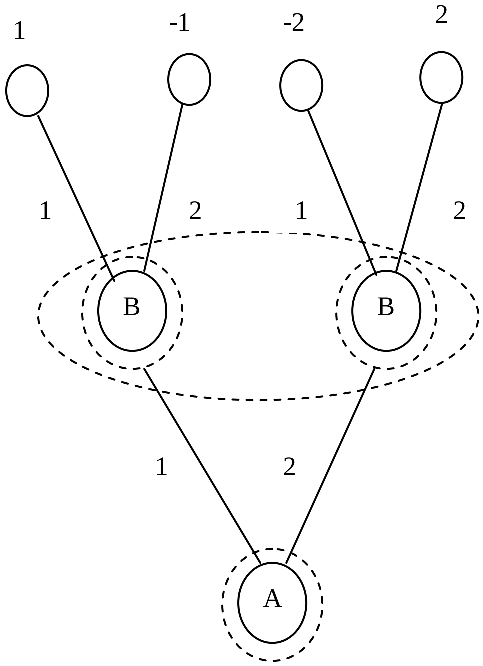
$$W(1,2) = -1, \qquad W(2,2) = 2$$

8.6 ნახაზზე ნაჩვენებია თამაშის ხე და ინფორმაციული სიმრავლეები.

***მეორე მაგალითი.*** იმ შემთხვევაში, თუ წინა მაგალითში შესრულებულია ყველა პირობა, გარდა ერთისა - B მოთამაშის სვლისა, 2 სვლას გააკეთებს B მოთამაშე, რომელმაც არ იცის A მოთამაშის არჩევანი და აირჩევს y რიცხვს სიმრავლედან {1,2}. ინფორმაციული სიმრავლეები გამოიყურება ისე როგორც ნაჩვენებია 8.7 ნახაზზე.




ნახ. 8.6




ნახ. 8.7

განვიხილოთ მოთამაშეების სტრატეგიები მეორე მაგალითიდან: A მოთამაშეს აქვს ორი სტრატეგია: $A_1$ - ირჩევს x =1, $A_2$ -ირჩევს x =2;

რადგანაც B მოთამაშემ A მოთამაშის სვლა არ იცის , ესე იგი B მოთამაშესაც აქვს ორი სტრატეგია: $B_1$ - ირჩევს y =1 და $B_2$ ირჩევს y =2. A მოთამაშის მოგების 8.7 ცხრილი და თამაშის მატრიცა დაიწერება შემდეგნაირად:

ცხრილი 8.7

| | | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|---|
| | | y =1 | y =2 |
| $A_1$ | x=1 | W(1,1) | W(1,2) |
| $A_2$ | x=2 | W(2,1) | W(2,2) |

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ - თამაშის მატრიცა.

მოთამაშეების ოპტიმალური P={2/3,1/3} Q={1/2, 1/2} სტრატეგიებია, თამაშის ფასი კი v=0.

## ლაბორატორიული სამუშაო 8.3

პირველ სვლას აკეთებს მოთამაშე A : ის ირჩევს x რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2}.

მეორე სვლას აკეთებს მოთამაშე B: ვინაიდან მან იცის მოთამაშე A-ს არჩევანი, ის ირჩევს y რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2}.

მესამე სვლას აკეთებს მოთამაშე A: ვინაიდან მან არ იცის B მოთამაშის არჩევანი და უკვე დავიწყებული აქვს მის მიერ პირველ სვლაზე გაკეთებული არჩევანი, ის ირჩევს რიცხვს z, ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2}.

ამის შემდეგ, A მოთამაშე W(x,y,z) ჯილდოს მიიღებს B მოთამაშის ხარჯზე, მაგალითად ასეთს:

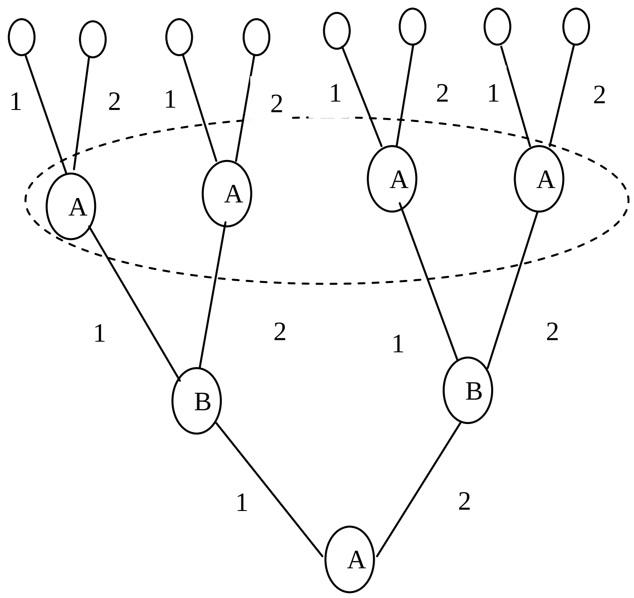
W(1,1,1)=-2, W(2,1,1)=3,

W(1,1,2)=4, W(2,1,2)=0,

W(1,2,1)= 1, W(2,2,1)=-3,

W(1,2,2)=-4, W(2,2,2)=5.

8.8 ნახაზზე გამოსახულია თამაშის ხე და ინფორმაციული სიმრავლეები.




ნახ. 8.8

რადგანაც B მოთამაშემ იცის A მოთამაშის პირველი სვლის არჩევანი, მაშინ B მოთამაშეს აქვს 4 სტრატეგია: $B_1$ –[1,1], $B_2$ –[1,2], $B_3$ –[2,1], $B_4$ –[2,2].

A მოთამაშემ არ იცის 3 სვლაზე წინა არჩევანი ამიტომ მასაც 4 სტრატეგია აქვს: $A_1$ –[1,1], $A_2$ –[1,2], $A_3$ –[2,1], $A_4$ –[2,2].

გამოვთვალოთ A მოთამაშის მოგებები. თუ A მოთამაშემ აირჩია სტრატეგია $A_2$ –[1,2], მაშინ B მოთამაშე აირჩევს სტრატეგიას $B_3$ –[2,1]. მაშინ x=1, საიდანაც გამომდინარეობს y=2. A მოთამაშე და B მოთამაშე დამოუკიდებლად ირჩევს მნიშვნელობას z=2. გამოვითვალოთ მოგების ფუნქციის მნიშვნელობა და მივიღებთ:

$$W(x, y, z)= W(1,2,2)=-2.$$

ასე გამოვითვლით დანარჩენ 15 მოგებას, რის შემდეგაც ავაგებთ მოთამაშის მოგებების ცხრილს 8.8.

ცხრილი 8.8

| | | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | [1,1] | [1,2] | [2,1] | [2,2] |
| $A_1$ | (1,1) | W(1,1,1) | W(1,1,1) | W(1,2,1) | W(1,2,1) |
| $A_2$ | (1,2) | W(1,1,2) | W(1,1,2) | W(1,2,2) | W(1,2,2) |
| $A_3$ | (2,1) | W(2,1,1) | W(2,2,1) | W(2,1,1) | W(2,2,1) |
| $A_4$ | (2,2) | W(2,1,2) | W(2,2,2) | W(2,1,2) | W(2,2,2) |

**სავარჯიშო.**

1 სვლა. A მოთამაშე ირჩევს x რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2}.

2 სვლა. მოთამაშე B რომელმაც უკვე იცის A მოთამაშის არჩევანი, ირჩევს y რიცხვს ორი რიცხვის სიმრავლიდან {1,2} .

A მოთამაშისათვის B მოთამაშის ხარჯზე გადახდის ფუნქცია W (x,y) გამოიყურება შემდეგნაირად:

$$W(1,1) =-1, \qquad W(2,1)=2;$$

$$W(1,2) =1, \qquad W(2,2)=-2.$$

ფუნქცია W (x,y) წარმოადგინეთ გრაფიკულად.

## 8.4. ბიმატრიცული თამაშები და ბრძოლა ბაზრისათვის

განვიხილოთ კონფლიქტური სიტუაცია, რომელშიც მოთამაშეებს აქვთ არჩევის შემდეგი შესაძლებლობები:

A მოთამაშე – შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი სტრატეგია $A_1, \dots, A_m$; B მოთამაშე – შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი სტრატეგია $B_1, \dots, B_n$. თუ, A მოთამაშე ირჩევს $A_i$ -ს i სტრატეგიას და B მოთამაშე ირჩევს $B_k$-ს k სტრატეგიას, მაშინ A მოთამაშის მოგება უდრის $a_{ik}$-ს, ხოლო B მოთამაშის მოგება - $b_{ik}$-ს. A და B მოთამაშეების მოგება შეგვიძლია ჩავწეროთ ორი მატრიცის სახით, პირველი მატრიცა აღწერს A მოგებებს, მეორე კი B მოგებებს.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mk} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

როდესაც მოთამაშეთა ინტერესები განსხვავდება (მაგრამ არაა აუცილებელი საპირისპირო იყოს), ადგილი აქვს **ბიმატრიცულ** თამაშს. განვიხილოთ ბიმატრიცული თამაში - ბრძოლა ბაზრისათვის.

მოცემულია ორი ფირმის (A და B) მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

გამოვთვალოთ მოთამაშეების შერეული სტრატეგიები და მათი საშუალო მოგებები.

ბიმატრიცულ თამაშში საშუალო მოგებები გამოითვლება შემდეგნაირად: $H_A(p,q) = (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq + (a_{12}-a_{22})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22}$ ; (8.13)

$H_B(p,q) = (b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq + (b_{12}-b_{22})p + (b_{21}-b_{22})q + b_{22}$. (8.14)

სადაც წყვილი (p,q) აღნიშნავს წონასწორულ სიტუაციას. იმისათვის, რომ წყვილი (p,q) აღნიშნავდეს წონასწორულ სიტუაციას, აუცილებელია შემდეგი უტოლობების შესრულება:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha) \geq 0 \\ p(Cq-\alpha) \geq 0 \\ (q-1)(Dp-\beta) \geq 0 \\ q(Dp-\beta) \geq 0 \\ 0 \leq p \leq 1 \\ 0 \leq q \leq 1 \end{cases} \tag{8.15}$$

სადაც

$C = a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}$ ; (8.16)

$D = b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$; (8.17)

$\alpha = a_{22} - a_{12};$ (8.18)

$\beta = a_{22} - a_{21}.$ (8.19)

ჩავსვათ მონაცემები და გავიგოთ C , D , α, β მნიშვნელობები:

$$C=-10-2-1-1=-14,\ D=5+2+1+1=9,\ \alpha=-1-2=-3,\ \beta=1+1=2,$$

მივიღებთ:

$$(p-1)(-14q-(-3))\geq 0;$$

$$p(-14q-(-3))\geq 0.$$

შესაძლებელია 3 შემთხვევა ამ უტოლობების შესასრულებლად:

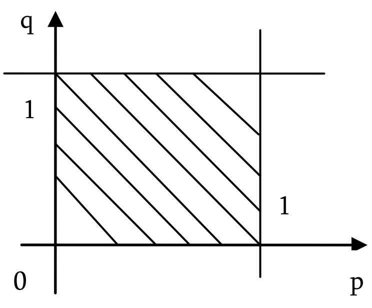
$$1)\ p=1;\quad 2)\ p=0;\quad 3)\ 0<p<1.$$

**პირველი პირობა:** როდესაც $p = 1$ მივიღებთ: $0\geq 0$ და $-14q+3\geq 0$, საიდანაც $q \leq \frac{3}{14}$.

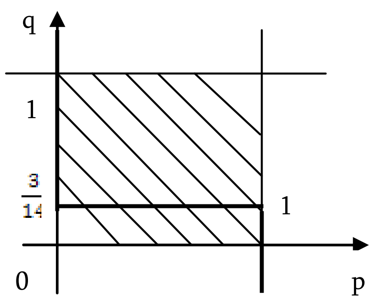
**მეორე პირობა:** როდესაც $p = 0$, მივიღებთ: $-(-14q+3) \geq 0$ და $0\geq 0$, საიდანაც $q \geq \frac{3}{14}$.

**მესამე პირობა:** ბოლოს, როდესაც $0<p<1$, მივიღებთ: $-14q+3\geq 0$ და $-14q+3\leq 0$, რაც შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $-14q+3=0$, $q = \frac{3}{14}$.

მიღებული შედეგები გადავიტანოთ ნახაზზე. ავაგოთ სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და გამოვყოთ მასზე კვადრატი, რომელიც შეესაბამება უტოლობას: $0\leq p\leq 1$, $0\leq q\leq 1$ (ნახ 8.9). მასზე ავიღოთ იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც აღწერილია 1), 2) და 3) პირობებით (ნახ. 8.10).




ნახ. 8.9




ნახ.8.10

ახლა განვიხილოთ შემდეგი უტოლობები:

$$(q-1)(9p-2)\geq 0$$

$$q(9p-2)\geq 0$$

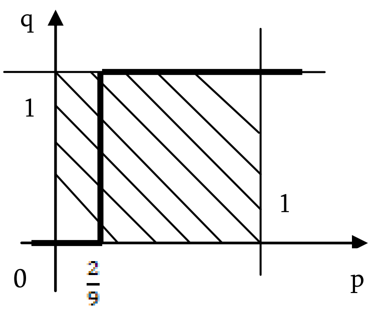
ამ უტოლობების შესასრულებლად არსებობს 3 საშუალება:

1)q=1; 2) q=0; 3) 0<q<1.

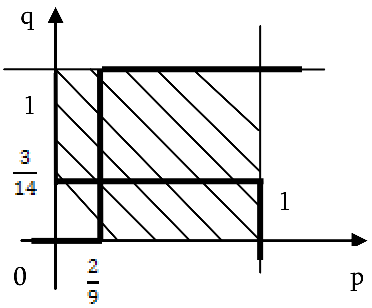
მივიღებთ:

$$q=1,\ p\geq\frac{2}{9},$$
$$q=0,\ p\leq\frac{2}{9}$$
$$0<q<1,\ p=\frac{2}{9}.$$

გადავიტანოთ მონაცემები ნახაზზე, მივიღებთ (ნახ.8.11) . შემდეგ, გავაერთიანოთ 8.8 და 8.9 ნახაზები, მივიღებთ 8.12 ნახ-ს.




ნახ.8.11




ნახ.8.12

მიღებული ზიგზაგების საერთო წერტილია წონასწორობის წერტილი, და მისი კოორდინატებია: $\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)$; მოთამაშეთა შერეული სტრატეგიებია:

$P=\left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\}$ $Q=\left\{\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right\}$, საშუალო მოგებები კი - $H_A\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=-\frac{4}{7}$ , $H_B\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=-\frac{1}{3}$.

## ლაბორატორიული სამუშაო 8.4

ვიპოვოთ ბიმატრიცული თამაშის ამონახსნი:

$$A=\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}, \qquad B=\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}$$

ჩავსვათ ჩვენი მონაცემები და გავიგოთ C , D , α, β მნიშვნელობები. (8.16),(8.17),(8.18),(8.19) ფორმულების თანახმად, მივიღებთ:

C=2-0-0+1=3, D=1-0-0+2=3, α =1-0=1, β =2-0=2

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ ფორმულაში (8.15), მივიღებთ უტოლობათა სისტემას:

1) (p-1)(3q-1))≥0, p(3q-1)≥0,

2) (q-1)(3p-2)≥0 q(3p-2)≥0

პირველი და მეორე უტოლობების შესასრულებლად შესაძლებელია სამი შემთხვევა:

1) p=1; p=0; 0<p<1;

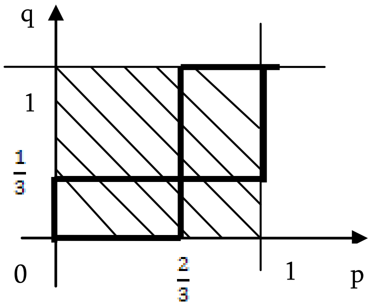
2)q=1; q=0; 0<q<1;

მივიღებთ:

$$p=1,\ q\geq\frac{1}{3};\quad p=0,\ q\leq\frac{1}{3};\quad 0<p<1,\ q=\frac{1}{3};$$

$$q=1,\ p\geq\frac{2}{3};\ q=0,\ p\leq\frac{2}{3};\quad 0<q<1,\ p=\frac{2}{3}.$$

გეომეტრიული შედეგი ნაჩვენებია 8.11 ნახ-ზე.




ნახ. 8.13

მოცემულ თამაშს აქვს 3 წონასწორობის წერტილი. ორი მათგანი არის მოთამაშეების წმინდა სტრატეგია:

$$p=1,\ q=1:\qquad H_A(1,1)=2,\ \ H_B(1,1)=1,$$

$$p=0,\ q=0:\qquad H_A(0,0)=1,\ \ H_B(0,0)=2$$

და ერთი წერტილი არის მოთამაშეების შერეული სტრატეგია:

$$p=\frac{2}{3},\ q=\frac{1}{3}:\ H_A\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}, H_B\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\ .$$

**სავარჯიშო.**

**იპოვეთ ბიმატრიცული თამაშის ამონახსნი:**

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 8 & 2\end{pmatrix}$$

## ლიტერატურა


1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн.М.: Наука, 1984.
2. Андронов А.А.,Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Москва, 1959.
3. Волтерра В. Математическая теория борьбы за существование.М.: Наука, 1976.
4. Магнус К. Колебания.Пер. с немецкого.М.:Мир,1982.
5. Шмидт Г. Параметрические колебания. Пер. с нем. М.: Мир, 1978.
6. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.Линейные колебания и волны.Саратов: Изд-во. Саратовского ГУ, 2002.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн.Пер. с англ.М.:Мир,1979.
8. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон. Теоретическая механика в примерах и задачах.Т.2: М:Наука, 1972.
9. მირიანაშვილი მ. ზოგადი ფიზიკის კურსი, ტ.1. თბილისი: თსუ, 1973.
10. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მოდელები), ტ.1. თბილისი: სტუ, 2006.
11. ობგაძე თ, ობგაძე ლ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი., თუშიშვილი ნ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (ეკონომიქსი Mathcad - ისა და Matlab - ის ბაზაზე), ტ.2. თბილისი: სტუ, 2007.
12. ობგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (მაგისტრანტე-ბისათვის), ტ.3. თბილისი: სტუ, 2008.
13. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г.,Караваев В.А. Колебания и волны. Учеб. пос., Москва: МГУ 2001.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, теоретическая физика.Т.1. М.: Наука, 1973.
15. Постников Л.В., Королев В.И. Сборник задач по теории колебаний. Москва: Наука, 1978.
16. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г.Линейные колебания и волны.Саратов: изд-во Саратовского ГУ, 2002.
17. Obgadze T.A., Prangishvili A.I.,Sakvarelidze N., Iashvili L. Mathematical modelling of excessive demand for essentil commodities dynamics at periodic, panic PR-exciter, transactions automated control systems № 2(7), Tbilisi , 2009.
18. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, 2001.
19. Калиткин Н.Н., Карпенко Н.В., Михайлов А.П., Тишкин В.Ф., Черненков М.В. Математические модели природы и общества. Москва, 2005.
20. Кузнецов А.П.,.Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.Нелинейные колебания Москва,2002.

21. Anrew F.Sigel. Practical Buisiness Statistics, Boston Burr Ridged,WI New York, San Francisco, Lisbon, London, Madrid, Toronto, 2000
22. Мицкевич А.А. Деловая математика в экономической теории и практике, Высшая школа экономики, Москва, 1995
23. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика, пер. с англ., Москва, 2002
24. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов. М., 1997.
25. Салманов О.Н. Математическая экономика с применением Mathcad и Excel, Санкт-Петербург, 2003.
26. ჯიბლაძე ნ., თოფჩიშვილი ა. სტატიკური ოპტიმიზაციის რიცხვითი მეთოდები, მართვის სისტემების ინსტიტუტი, თბილისი, 2001
27. Gilbert A.Cherchill. Marketing Reserch, New York, Orlando, Toronto, Montreal, London, Sydney, Tokyo, 1996.
28. Дьяконов В. Mathcad 2001 учебный курс численные и символьные вычисления. "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
29. Обгадзе Т.А. Высшая математика для экономистов, Министерство образования РФ, Институт гуманитарного образования, Москва, 2002
30. Обгадзе Т.А., Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Министерство образования РФ, ВлГУ, Владимир, 1999.
31. Christopher Dougherty. Introduction to econometrics, New York, Oxford University PRESS, 1992.
32. Дьяконов В. Matlab, учебный курс универсальная интегрированная система компьютерной математики, "Питер", Санкт-Петербург, Москва, Харьков, Минск, 2001.
33. Обгадзе Т.А., Цвераидзе З.Н. Математические модели в экономике; 20 лабораторных работ на основе Mathcad 2001 Professional, ГТУ, Тбилиси, 2006.
34. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями, пер. с англ., М. 1971.
35. Яглом А.Я., Яглом И.М. Вероятность и информация, Москва, 1973.
36. Прохоров Ю.В. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, СМБ, Москва, 1973.
37. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, учеб. пос., М., 1975.
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей, учеб. пос., задачи и упражнения. Москва, 1973.
39. Обгадзе Т.А. Математическая модель Лоренца в экономике производства, ГЭНЖ, компьютерные науки и телекоммуникации,№4(11), 2006.

40.Летников А.В.Теория дифференцирования с произвольным указателем//Матем.Сб.-1868.-т.3, вып.1.-С. 1-68.
41.Самко С.Г.,Килбас А.А.,Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника.-1987-688с.
42.Васильев В.В.,Симак Л.А.Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. НАН Украины, Киев, 2008. 256 с.

სარჩევი

წინასიტყვაობა 3
თავი I. ფუნდამენტური ეკონომიკის ძირითადი ცნებები 6
1.1. მიკროეკონომიკის ძირითადი ცნებები. განურჩევლობის მრუდები.მოხმარებისა და მოთხოვნის თეორია 6
1.2. რ.სტოუნის სარგებლიანობის ფუნქცია და მომხმარებლის არჩევანის ამოცანა 17
1.3. ფუნქციის ელასტიკურობა 21
1.3.1. ელასტიკურობის ცნების გამოყენება ეკონომიკაში 25
1.4. მოთხოვნის ჯვარედინი ელასტიკურობა ფასის მიხედვით 28
1.5. ამონაგების ელასტიკურობა ფასის მიხედვით 30
1.6. წარმოების თეორია. საწარმოო ფუნქცია 32
1.6.1. საწარმოო ფუნქციის ზოგადი თვისებები 33
1.6.2. რამდენიმე რესურსის ტიპური საწარმოო ფუნქციები 34
1.7. ბაზრის მუშაობის ობობას ქსელისებრი მოდელი 36
1.8.ვალრასის თანამიმდევრული მიახლოების პროცესი ეროუ - გურვიცის მოდელში 39
1.9. წონასწორული ეკონომიკის მაკროეკონომიკური ანალიზი 41
1.10. ეკონომიკური ზრდის მაკრომოდელი 45
1.11. ფონ ნეიმანის წონასწორული ეკონომიკური ზრდის დინამიკური დარგთაშორისი ბალანსის მოდელი 48
1.12. ლორენცის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში 51

თავი II. ეკონომეტრიკის ელემენტები.სოციალურ–ეკონომიკური სიტემების კორელაციური და რეგრესიული ანალიზი 56
2.1.მონაცემთა კორელაციური ანალიზი. ეროვნული შემოსავლისა და მოხმარების კორელაცია. რეგრესიული ანალიზი 56
2.2.ექსპორტ–იმპორტის ცნება. ექსპორტ-იმპორტს შორის არსებული უარყოფით სალდოსა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის არსებული კორელაცია, დეტერმინაციის კოეფიციენტი 60
2.3.კორელაცია საგარეო ვალების მოცულობასა და საქართველოს ბიუჯეტს შორის 65
2.4.კორელაცია სამომხმარებლო კალათის მოცულობასა და

ინფლაციის მაჩვენებელს შორის 68
2.5. კავშირი კვების პროდუქტებზე ერთიან მოთხოვნას, საშუალო ხელფასსა და საშუალო ფასს შორის. მრავლობითი რეგრესიული ანალიზი 70
2.6. კობ–დუგლასის წარმოებითი ფუნქცია Mathcad–ის ბაზაზე 75
2.7.კორელაცია ინფლაციის დონესა და უმუშევრობის კოეფიციენტს შორის საქართველოს მაგალითზე.ფილიპსის მრუდი 78
2.8.განზოგადებული წრფივი რეგრესია საქონლის ფასის პროგნოზირებისათვის 80
2.9. არაწრფივი რეგრესია აქციის კურსის პროგნოზისათვის 82
2.10.პოლინომური რეგრესია 85

თავი III. სტატიკური ოპტიმიზაციის ამოცანები ეკონომიკაში 89
3.1.წრფივი დაპროგრამება 89
3.2. საარსებო მონიმუმის დადგენა მოცემულ ქალაქში, მოცემულ რაიონში 91
3.3.რესურსების ოპტიმალური განაწილება 96
3.4.გადაზიდვების სატრანსპორტო ამოცანა 99
3.5 არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანა 103

თავი IV. საინვესტიციო პროექტების შეფასების მეთოდები 106
4.1.პროექტის რენტაბელურობისა და რისკის გამოთვლა 106
4.2. ორო ალტერნატიული საინვესტიციო პროექტის შედარების ტექნოლოგია 109
4.3. საინვესტიციო პროექტის დღევანდელი სუფთა ფასეულობის (NPV) დადგენა 111
4.4. ინვესტიციების რენტაბელურობის PI ინდექსის განსაზღვრა დისკონტირების გათვალისწინებით 113
4.5. ინვესტიციების რენტაბელურობის IRR ნორმის განსაზღვრა 114
4.6. საინვესტიციო პროექტის დანახარჯების ანაზღაურების დისკონტირებული T ვადის განსაზღვრის მეთოდი 114

4.7. ფინანსური ინსტრუმენტები 115

თავი V. სოციალურ–ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება 117
5.1. არადემპფირებული, თავისუფალი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება 121
5.2. არადემპფირებული, თავისუფალი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება (ფრანგიშვილ–ობგაძის მოდელი) 123
5.3. დემპფირებული,საკუთრივი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება 125
5.4. დემპფირებული,საკუთრივი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება ფრანგიშვილ–ობგაძის მოდელის ბაზაზე 127
5.5. იძულებითი სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება 128
5.6. იძულებითი ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება 129
5.7. ბმული სოციალური რხევითი პროცესების მოდელირება 131
5.8. ბმული ეკონომიკური რხევითი პროცესების მოდელირება 132
5.9. რხევითი სისტემების მოდელირების ვარიაციული მეთოდები 133
5.9.1.ჰამილტონის უნივერსალური ვარიაციული პრინციპი, ზოგადი თეორემა და პრაქტიკული რეალიზაციის ალგორითმი, თავისფალი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელის აგება 133
5.9.2. იძულებითი რხევითი სისტემის მათემატიკური მოდელირება ვარიაციული მათოდით 135
5.10. არადემპფირებული, თავისუფალი, არაწრფივი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება 136
5.11. თავისუფალი რხევითი სისტემა ალაგ–ალაგ წრფივი აღმდგენი ძალით 137
5.12. დემპფირებული, თვისუფალი რხევითი პროცესების მათემატიკური მოდელირება 138
5.13. დემპფირებული, თვისუფალი რხევითი სისტემა მშრალი

ხახუნით 139
5.14. პარამეტრული რხევები ფრანგიშვილი–ობგაძის ეკონომიკური სისტემის ფარგლებში (მატიეს განტოლება) 140
5.15. ფრანგიშვილი–ობგაძის არაწრფივი,იძულებითი, ეკონომიკური რხევითი სისტმის მათემატიკური მოდელი (დიუფინგის განტოლება) 142

თავი VI. წილადური რიგის მათემატიკური მოდელი ეკონომიკაში 144
6.1.ელემენტარული ფუნქციების ჩვეულებრივი და წილადური რიგის წარმოებულების შედარებითი ანალიზი 144
6.2. წილადური რიგის, დემპფირების ძალის ეკონომიკური რხევითი სისტემა 147
6.3. წილადური რიგის ფინანსური სისტემის მათემატიკური მოდელი 149

თავი VII.სოციალურ–ეკონომიკური პროცესების მოდელირება დინამიკური სიტემების თეორიის ბაზაზე 151
7.1.დარგთაშორისი ბალანსის ლეონტიევის მოდელი 151
7.2.ეროვნული შემოსავლის დინამიკის სამუელსონ–ჰიქსის მოდელი 154
7.3.ფერჰიულსტის მოდელი ბანკში ანაბრების დინამიკისათვის 158
7.4.ფრანგიშვილი–ობგაძის მათემატიკური მოდელი 164
7.5.ეკონომიკური დინამიკის მატიეს განტოლება 167
7.6.კურასაოს ეკონომიკურ–პოლიტიკური ბრძოლის მეთოდი 170

თავი VIII.თამაშთა თეორიის გამოყენება სოციალურ–ეკონომიკური პროცესების მოდელირების საქმეში 174
8.1.თამაშთა თეორიის ძირითადი ცნებები 174
8.2.მატრიცული თამაშები 175
8.3.პოზიციური თამაშები 185
8.4.ბიმატრიცული თამაშები და ბრძოლა ბაზრისათვის 189
ლიტერატურა 194