დალი მაგრაქველიძე

ალბათობის მეთოდები ინფორმატიკისათვის

„ტექნიკური უნივერსიტეტი“

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

დალი მაგრაქველიძე

ალბათობის მეთოდები ინფორმატიკისათვის

დამტკიცებულია სალექციო კურსად
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 28.02.2018, ოქმი №1

თბილისი

უაკ 519.21:681.3

სალექციო კურსის შესწავლის საგანია მიღებული ინფორმაციის დამუშავება – გარკვეულ თანამიმდევრულ მოქმედებათა ალგორითმების დახმარებით ერთი რაიმე საინფორმაციო ობიექტის შესახებ ინფორმაციის გარდაქმნის საფუძველზე სხვა საინფორმაციო ობიექტზე ინფორმაციის მიღება.

დამუშავება არის ერთ-ერთი ძირითადი ოპერაცია ინფორმაციებზე და ემსახურება რეალობის ადეკვატური მმართველობითი გადაწყვეტილების მიღებას.

დასახული მიზნის მიღწევისათვის წინამდებარე სალექციო კურსის შესწავლის ძირითადი საგანია ალბათობის თეორიის იმ ელემენტების, მათი თვისებებისა და მათზე მოქმედებების შესწავლა, რომლებიც საშუალებას იძლევიან ბაიესის ქსელის გამოყენებით გადაწყდეს მრავალი ფინანსური და სხვა პრაქტიკული ამოცანა.

ყოველ თეორიულ მსჯელობას თან ახლავს პრაქტიკული მაგალითები და სავარჯიშოები, რომელთა ამოხსნები უფრო განამტკიცებს მიღებულ თეორიულ ცოდნას.

სალექციო კურსი სასარგებლო იქნება სტუდენტებისთვის და ინფორმატიკის პრობლემებით დაინტერესებული ყველა პირისთვის.

რეცენზენტები: საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტის რექტორის მოადგილე სამეცნიერო დარგში, პროფესორი გელა ყიფიანი,

საქართველოს საავიაციო უნივერსიტეტის საინჟინრო ფაკულტეტის პროფესორი ნინო თავაძე

ISBN 978-9941-28-044-3 (PDF)
http://www.gtu.ge

Verba volant, scripta manent

სარჩევი

ნაწილი 1. ბაიესური ქსელები და გადაწყვეტილების ანალიზი

თავი 1

ალბათური ინფორმატიკა

1.1 რა არის ინფორმატიკა?

დასავლეთ ევროპის უმეტეს ნაწილში ინფორმატიკა ნიშნავდა ინგლისური „კომპიუტერული მეცნიერების“ უხეშ თარგმანს, რომელიც წარმოადგენს გამოთვლითი პროცესების შემსწავლელ დისციპლინას. რა თქმა უნდა, კომპიუტერულ მეცნიერებებს შორის პროგრამებსა და ინფორმატიკაში არის თანხვედრები, მაგრამ ისინი ერთმანეთს არ ემთხვევა. ინფორმატიკის პროგრამა ჩვეულებრივ იკვლევს ისეთ საგნებს, როგორიცაა ბიოლოგია და მედიცინა მაშინ, როცა კომპიუტერული მეცნიერების პროგრამები ამას არ აკეთებენ. ასე რომ, ევროპული განმარტება არაა საკმარისი, რადგან მის განსამარტავად ამჟამად სხვა ტერმინია გამოყენებული აშშ-ში.

იმისათვის რომ შეგვექმნას წარმოდგენა ინფორმატიკაზე, განვიხილოთ სუფიქსი „იკა“ რაც ნიშნავს მეცნიერებას, ხელოვნებას ან რაიმეს არსის შესწავლას. მაგალითად „ლინგვისტიკა“ – ეს არის ენის ბუნების შესწავლა, „ეკონომიკა“ – ეს არის წარმოების და საქონლის განაწილების შესწავლა, ხოლო „ფოტონიკა“ – ესაა ელექტრომაგნიტური ენერგიის გამოკვლევა, რომლის ერთეულსაც წარმოადგენს ფოტონი. ამის გათვალისწინებით ინფორმატიკა უნდა იყოს ინფორმაციის შემსწავლელი. მართლაც WordNet 2.1[1] ინფორმატიკას განსაზღვრავს როგორც „ინფორმაციის შეგროვებას, დამუშავებას, შენახვას და ჩაწერილი ინფორმაციის კლასიფიკაციასთან დაკავშირებულ მეცნიერებას“. იმისათვის რომ ჩავწვდეთ ამ განსაზღვრებას, აუცილებელია განიმარტოს სიტყვა „ინფორმაცია“. ლექსიკონების უმეტესობაში მოცემული განმარტებები არ მოიცავენ რაიმე კონკრეტულს. ე.ი. ისინი განსაზღვრავენ ინფორმაციას როგორც რაიმე ცოდნის ან მონაცემთა ერთობლიობას, რაც ნიშნავს იმას, რომ ვრჩებით ცოდნის და მონაცემთა განსაზღვრის სიტუაციაში. იმისათვის, რომ მივაღწიოთ ინფორმატიკის კონკრეტულ განმარტებამდე, თავდაპირველად განვსაზღვროთ რას ნიშნავს მონაცემები, ინფორმაცია და ცოდნა. საწყის (ერთეულ) მონაცემთა ბაზაში ვგულისხმობთ სიმბოლოების სტრიქონს, რომელიც შეიძლება აღვიქვათ როგორც ერთეული. მაგალითად, G ნუკლეოდიტი GATC[2]

---

[1] WordNet® is a large lexical database of English. Nouns, verbs, adjectives and adverbs are grouped into sets of cognitive synonyms (synsets), each expressing a distinct concept. Synsets are interlinked by means of conceptual-semantic and lexical relations.

[2] GATC Guanine, Adenine, Thymine, Cytosine *(nucleotides that make up DNA)*

ნუკლეოდიტურ მიმდევრობაში წარმოადგენს საწყისს (ანუ დატუმ ერთეულს), სფერო „კიბო“ სამედიცინო მონაცემთა ბაზაში წარმოადგენს საწყისს, ხოლო სფერო „ქარწაღებული“ ფილმების მონაცემთა ბაზაში დატუმია (საწყისი?). მიაქციეთ ყურადღება, რომ ერთი სიმბოლო, სიტყვა ან სიტყვათა ჯგუფი შეიძლება იყოს საბაზისო კონკრეტული გამოყენებიდან გამომდინარე. მაშინ მონაცემები მეტია ვიდრე ერთი მონაცემთა ბაზა. ინფორმაციის მიხედვით მხედველობაში გვაქვს მონაცემით მოცემული მნიშვნელობა. მაგალითად, სამედიცინო ბაზაში მონაცემები „ჯო სმიტი“ და „კიბო“ იმავე ჩანაწერში ნიშნავს, რომ ჯო სმიტს აქვს კიბო. ცოდნაში ვგულისხმობთ გამონათქვამს, რომელიც არსებული ინფორმაციიდან ახალი ინფორმაციის მიღების საშუალებას გვაძლევს. მაგალითად, დავუშვათ, რომ ჩვენ გვაქვს ცოდნის შემდეგი ელემენტი (dictum)[3]:

თუ მცენარის ღერო ხისებრი მასალისაა

და ვერტიკალურ მდებარეობაშია

და არსებობს ერთი ძირითადი ღერო

მაშინ მცენარე ხეა.

შედგომ დავუშვათ, რომ მცენარეს შორიდან ვუყურებ ჩემს უკანა ეზოში და ვაკვირდები, რომ ღერო ხისაა, ხოლო მისი მდებარეობა ვერტიკალურია და მას ერთი ღერო აქვს. შემდეგ ვიყენებთ რა ზემოთ მოყვანილ ცოდნის ელემენტს, შეგვიძლია გამოვიტანოთ ახალი ინფორმაცია იმის შესახებ, რომ ჩემს უკანა ეზოში მცენარე ხეა.

ბოლოს, ინფორმატიკას ვსაზღვრავთ როგორც დისციპლინას, რომელიც იყენებს მეცნიერების და ტექნიკის მეთოდოლოგიას ინფორმაციის მიმართ. ეს ეხება ინფორმაციაში მონაცემთა ორგანიზებას, ინფორმაციიდან ცოდნის შეძენას, არსებული ინფორმაციიდან და ცოდნიდან ახალი ინფორმაციის შესწავლას და მიღებული ცოდნის და ინფორმაციის საფუძველზე გადაწყვეტილებების მიღებას. ჩვენ ვიყენებთ ტექნიკას იმ ალგორითმის შესადგენად, რომელიც იძენს ცოდნას ინფორმაციიდან და რომელიც სწავლობს ცოდნიდან და ინფორმაციიდან მიღებულ ინფორმაციას. ჩვენ მეცნიერებას ვიყენებთ ამ ალგორითმის სიზუსტის შესამოწმებლად.

შემდეგ, ჩვენ მოვიყვანთ რამდენიმე მაგალითს იმისას, თუ როგორი მიდგომა აქვს ინფორმატიკას სხვა დისციპლინებთან.

ამ წიგნში კონცენტრაციას ვახდენთ ინფორმატიკის ისეთ სფეროზე, როგორიცაა ფინანსური ინფორმატიკა. ფინანსური ინფორმატიკა თავისთავში მოიცავს ინფორმატიკის

[3] ცოდნის ასეთი ელემენტი იქნებოდა ექსპერტული სისტემის ნაწილი, რომელიც გარკვეულ წესებზე იქნებოდა დაფუძნებული.

მეთოდების გამოყენებას ფულის და სხვა აქტივების მართვაში. კერძოდ ეს ეხება იმ რისკის განსაზღვრას, რომელიც დაკავშირებულია ზოგიერთ ფინანსურ ორგანიზაციასთან. მაგალითის სახით შეგვეძლო შეგვემუშავებინა ინსტრუმენტი, რომელიც გააუმჯობესებდა პორტფელის რისკის ანალიზს.

სანამ დავამთავრებთ ამ განყოფილებას, მოდი ვიმსჯელოთ ინფორმატიკასა და ახალ გამონათქვამ „მონაცემთა ინტელექტუალურ ანალიზს" შორის ურთიერთკავშირზე. ტერმინს „მონაცემთა ინტელექტუალური ანალიზი" ვხვდებით ცოდნის გამოვლენის და მონაცემთა ინტელექტუალური ანალიზის პირველ საერთაშორისო კონფერენციაზე, რომელიც ჩატარდა 1995 წელს. მოკლედ, მონაცემების მოპოვება არის დიდი რაოდენობის დაკვირვების მონაცემებიდან უცნობი ცოდნის ექსტრაპოლიაციის პროცესი. შეგახსენებთ, რომ ჩვენ ვსაუბრობდით ინფორმატიკის პრობლემებზე (1) ინფორმაციაში მონაცემთა ორგანიზებაზე, (2) ინფორმაციიდან ცოდნის შესწავლაზე, (3) არსებული ცოდნიდან და ინფორმაციიდან ახალი ინფორმაციის შესწავლაზე და (4) ცოდნისა და ინფორმაციის საფუძველზე გადაწყვეტილების მიღებაზე. ტექნიკურად რომ ვთქვათ, მონაცემთა ინტელექტუალური ანალიზი არის ინფორმატიკის ქვესფერო, რომელიც პროცედურებიდან მხოლოდ პირველ ორს იყენებს. მაგრამ ორივე ტერმინი ისევ განიცდის განვითარებას და ზოგიერთი ადამიანი მონაცემთა ინტელექტუალური ანალიზის დროს ეყრდნობა ოთხივე პროცედურას.

1.2 ალბათური ინფორმატიკა

XX საუკუნის 60-იან წლებში შემუშავებული იქნა რიგი ახალი ფორმალიზმები განუსაზღვრელობის დასამუშავებლად, მათ შორის სანდოობის ფაქტორები, დემპსტერ-შაფერის მტკიცებულებათა თეორია, ფაზი ლოგიკა, და ფაზი სიმრავლეების თეორია. ალბათობის თეორიას გააჩნია განუსაზღვრელობის ფორმალური აქსიომატიკური აზრით ჩამოყალიბების დიდ ხნის ისტორია. ნეოპოლიტანმა [1990] დაუპირისპირა ალბათობის თეორიის გამოყენების სხვადასხვა მიდგომები და არგუმენტები. ამ არგუმენტებს აქ არ წარმოვადგენთ. პირიქით, ჩვენ განვიხილავთ ალბათობის თეორიას გზად, რომელიც გამოიყენება განუსაზღვრელობის სამართავად და ხსნის თუ რატომ ვიყენებთ ინფორმატიკულ ალგორითმს დასახასიათებლად, რომელიც იყენებს ალბათურ მოდელურ მიდგომას.

ევრისტიკული ალგორითმი იყენებს კეთილგონიერების (Common Sense rule) წესს პრობლემის გადასაჭრელად. ჩვეულებრივ, ევრისტიკულ ალგორითმს არ აქვს თეორიული

საფუძველი და ამიტომ არ გვაძლევს საშუალებას დავამტკიცოთ შედეგები, რომელიც დაფუძნებულია სისტემასთან დაკავშირებულ ვარაუდებზე.

აბსტრაქტული მოდელი წარმოადგენს თეორიულ კონსტრუქციას, რომელიც გამოსახავს ფიზიკურ პროცესებს ცვლადების სიმრავლით და მათ შორის რაოდენობრივი ურთიერთობების (აქსიომების) სიმრავლით. ჩვენ ვიყენებთ მოდელებს, რათა გონივრულად მოვიქცეთ იდეალიზებულ ჩარჩოებში და ამით გავაკეთოთ პროგნოზი/განსაზღვრება სისტემის შესახებ. ჩვენ მათემატიკურად შეგვიძლია ეს პროგნოზი/განსაზღვრება დავამტკიცოთ, რომ არის „სწორი", მაგრამ ისინი სწორია მხოლოდ იმ მხრივ, რომ მოდელი ზუსტად პასუხობს სისტემას. ამიტომ **მოდელზე დაფუძნებული ალგორითმი** აკეთებს პროგნოზ/განსაზღვრებას რომელიმე მოდელის ჩარჩოებში. ალგორითმები, რომლებიც აკეთებენ პროგნოზ/განსაზღვრებას ალბათობის თეორიის ჩარჩოებში, ეფუძნება ალგორითმის მოდელს. ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ ალბათობის თეორიის აქსიომებზე დამყარებული ამ ალგორითმების შედეგები, რომლებსაც განიხილავთ თავ 2-ში. ჩვენ ყურადღებას გავამახვილებთ ასეთ ალგორითმებზე ამ წიგნში. კერძოდ, წარმოვადგენთ ალგორითმებს, რომლებიც იყენებენ ბაიესის ქსელს ალბათობის თეორიის ფარგლებში.

თავი 2

ალბათობა და სტატისტიკა

ამ თავში განიხილება წიგნის დარჩენილი ნაწილის წასაკითხად საჭირო ალბათური და სტატისტიკური მონაცემები. 2.1 განყოფილებაში წარმოვადგენთ ალბათური თეორიის საფუძვლებს, ხოლო 2.2 განყოფილებაში – შემთხვევით სიდიდეებს. 2.3 განყოფილებაში მოკლედ განვიხილავთ ალბათობის მნიშვნელობას. 2.4 განყოფილებაში ვაჩვენებთ თუ როგორ გამოიყენება შემთხვევითი ცვლადები პრაქტიკაში. ბოლოს, 2.5 განყოფილებაში განიხილება ისეთი კონცეფციები სტატისტიკაში, როგორიცაა დისპერსია და კოვარიაცია.

2.1 ალბათობის საფუძვლები

ალბათური სივრცეების განსაზღვრის შემდეგ განვიხილავთ პირობით ალბათობას, დამოუკიდებლობას და პირობით დამოუკიდებულობას, ასევე ბაიესის თეორემას.

2.1.1 ალბათური სივრცე

შეგიძლიათ გაიხსენოთ ალბათობის გამოყენება ისეთ სიტუაციებში, როგორიცაა სათამაშო ბანქოდან ზედა კარტის ნახატი, მონეტის აგდება ან ურნიდან ბურთის ამოღება. ამ პროცესებს ჩვენ ვუწოდებთ **ექსპერიმენტს.** ალბათობის თეორია დაკავშირებულია ექსპერიმენტებთან, რომელთაც გააჩნიათ სხვადასხვა შედეგების ნაკრები. ყველა შედეგის ნაკრებს უწოდებენ **ხდომილებათა სივრცეს** ან **ერთობლიობას**. მათემატიკოსები ჩვეულებრივ ამბობენ „არჩევით სივრცეს“, ხოლო სოციოლოგები ჩვეულებრივ უწოდებენ „მოსახლეობას“, ჩვენ ვუწოდებთ ხდომილებათა სივრცეს. ამ მარტივ მიმოხილვაში ვვარაუდობთ, რომ ხდომილებათა სივრცე სასრულია. ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს ვუწოდებთ **ხდომილებას**. ხოლო ქვესიმრავლეს, რომელიც მხოლოდ ერთ ელემენტს შეიცავს ვუწოდებთ **ელემენტარულ ხდომილებას**.

მაგალითი 2.1 ვთქვათ, გვაქვს ჩვეულებრივი ბანქოს დასტიდან ზედა ბანქოს ამოღების ექსპერიმენტი. მაშინ სიმრავლე:

E = {გულის ვალეტი; ჯვრის ვალეტი; ყვავის ვალეტი და აგურის ვალეტი}

არის ხდომილება, და სიმრავლე

F={გულის ვალეტი}

არის ელემენტარული ხდომილება.

ხდომილების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ქვესიმრავლის ერთ-ერთ ელემენტს წარმოადგენს ექსპერიმენტის შედეგი. წინა მაგალითში ხდომილობის მნიშვნელობას

წარმოადგენს ის, რომ კარტის ნახატი არის ოთხი ვალეტიდან ერთ-ერთი, ხოლო ელემენტარული ხდომილება არის ის, რომ კარტი არის გულის ვალეტი.

ჩვენ დარწმუნებული ვართ, რომ ხდომილება შეიცავს ექსპერიმენტის შედეგს რეალურ 0 და 1 რიცხვებს შორის. ამ რიცხვს უწოდებენ ხდომილების ალბათობას. სასრულ ხდომილებათა სივრცეში ალბათობა 0 ნიშნავს, რომ ხდომილეობა არ შეიცავს შედეგს, მაშინ როცა ალბათობა 1 ნიშნავს, რომ ჩვენ დარწმუნებულები ვართ რომ ეს ასეა. მათ შორის მოთავსებული მნიშვნელობები წარმოადგენენ რწმენის სხვადასხვა ხარისხს. შემდეგი განმარტება ფორმალურად განსაზღვრავს ალბათობას, როცა ალბათობათა სივრცე სასრულია.

განსაზღვრება 2.1. დავუშვათ, გვაქვს ხდომილებათა სივრცე Ω, რომელიც შეიცავს n სხვადასხვა ელემენტს; როგორიცაა,

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

ფუნქციას, რომელიც ანიჭებს თითოეულ ხდომილებას $P(E)$ ნამდვილ რიცხვს, უწოდებენ **ალბათურ ფუნქციას Ω** სიმრავლის ქვესიმრავლეზე, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1. $0 \le P(e_i) \le 1$ $1 \le i \le n$-სთვის
2. $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$.
3. თითოეული ხდომილობისათვის, რომელიც არ წარმოადგენს ელემენტარულ ხდომილობას, $P(E)$ არის ელემენტარული ხდომილობათა ალბათობების ჯამი, რომელთა შედეგები მდებარეობენ E-ში. მაგალითისათვის, თუ

$$E = \{e_3, e_6, e_8\},$$

მაშინ

$$P(E) = P(e_3) + P(e_6) + P(e_8).$$

(Ω, P) წყვილს უწოდებენ **ალბათურ სივრცეს**.

რამდენადაც ალბათობა განისაზღვრება როგორც ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არესაც წარმოადგენს სიმრავლე სიმრავლეების, ჩვენ $P(\{e_i\})$–ის ნაცვლად უნდა ჩავწეროთ $P(e_i)$, რომელიც აღნიშნავს ელემენტარული ხდომილობის ალბათობას, მაგრამ სიმარტივისათვის ამას არ ვაკეთებთ. ამგვარადვე $P(e_3, e_6, e_8)$ –ის ნაცვლად დავწერთ $P(\{e_3, e_6, e_8\})$-ს.

ალბათობის მინიჭების ყველაზე მარტივ ხერხს წარმოადგენს **გულგრილობის პრინციპის** გამოყენება, რომელშიც ნათქვამია, რომ შედეგები უნდა ვიგულისხმოთ თანაბარალბათურად, თუ არ გაგვაჩნია მათი ერთმანეთისაგან გარჩევის მიზეზი. ამ

პრინციპის თანახმად, თუ გვაქვს n ელემენტარული ხდომილობა, თითოეულის ალბათობა $\frac{1}{n}$-ის ტოლია.

მაგალითი 2.2. ვთქვათ აგდებენ მონეტას. მაშინ ხდომილობათა სივრცე იქნება

$\Omega = \{$ავერსი, რევერსი$\}$, და, გულგრილობის პრინციპის თანახმად, მივანიჭებთ

$P($ავერსი$)= P($რევერსი$) = 0,5$.

უნდა აღინიშნოს, რომ ალბათური სივრცის განმარტებაში არაფერია ნათქვამი იმის შესახებ, რომ ავერს და რევერსს უნდა მივანიჭოთ 0,5 ალბათობა. ჩვენ შეგვეძლო $P($ავერსი$)= 0,7$ და $P($რევერსი$) = 0,3$ მიგვენიჭებინა. მაგრამ არ გაგვაჩნია მიზეზი იმისა, რომ ერთს მეორეზე მეტად უნდა ველოდოთ, ამიტომ ვაძლევთ ერთნაირ ალბათობას.

მაგალითი 2.3. ვთქვათ, ექსპერიმენტი იყოს 52 ბანქოს დასტიდან ზედა კარტის ნახატის გამოცნობა, მაშინ Ω შეიცავს 52 კარტის სახეს, და გულგრილობის პრინციპის თანახმად ჩვენ ვანიჭებთ $P(e) = {}^{1}/_{52}$ -ს თითოეულ $e \in \Omega$ -დან. მაგალითად,

$P($გულის ვალეტი$)= \frac{1}{52}$.

ხდომილობები

$E = \{$ გულის ვალეტი; ჯვრის ვალეტი; ყვავის ვალეტი; აგურის ვალეტი$\}$

ნიშნავს, რომ ამოღებული კარტი ვალეტია. მისი ალბათობა ტოლია

$P(E) = P($გულის ვალეტი$) + P($ჯვრის ვალეტი$) + P($ყვავის ვალეტი$) + P($აგურის ვალეტი$)$ $= \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{13}$.

ალბათობების სივრცეებისათვის გვაქვს თეორემა 2.1, რომლის დამტკიცებასაც ვტოვებთ დავალების სახით.

თეორემა 2.1 ვთქვათ (Ω, P) ალბათური სივრცეა. მაშინ

$$P(\Omega) = 1.$$

$0 \leq P(E) \leq 1$ ნებისმიერი $E \subseteq \Omega$-სთვის.

Ω -ს ნებისმიერი ორი E და F ქვესიმრავლისათვის, როცა $E \cap F = \emptyset$

$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$.

სადაც $\emptyset$ აღნიშნავს ცარიელ სიმრავლეს.

მაგალითი 2.4. დავუშვათ თქვენ იღებთ ზედა კარტს ბანქოს დასტიდან. აღვნიშნოთ „დედოფლით" სიმრავლე, რომელიც 4 დედოფალს შეიცავს და „მეფით" სიმრავლე, რომელიც 4 მეფეს შეიცავს. შემდეგ

$P($დედოფალი$\cup$მეფე$) = P($დედოფალი$)+P($მეფე$)= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$.

რამდენადაც „დედოფალი“$\cap$ „მეფე“$= \emptyset$. „ყვავით“ აღვნიშნოთ სიმრავლე, რომელიც 13 ყვავისაგან შედგება. სიმრავლეები „დედოფალი“ და „ყვავი“ არ არიან არათანამკვეთი; ამდენად, მათი ალბათობები არ არის ადიტიური. თუმცა ძნელი არაა იმის დამტკიცება, რომ ზოგადად

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

ამგვარად,

$P($დედოფალი$\cup$ყვავი$)=P($დედოფალი$)+P($ყვავი$)$ - $P($დედოფალი$\cap$ყვავი$)=$

$$= \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

2.1.2 პირობითი ალბათობა და დამოუკიდებლობა

დავიწყოთ განსაზღვრებით.

განსაზღვრება 2.2 ვთქვათ E და F ისეთი ხდომილობებია, რომ $P(F) \neq 0$, მაშინ F-ით მოცემული E-ს პირობითი ალბათობა, რომელიც აღინიშნება ასე $P(E|F)$, მოიცემა შემდეგნაირად:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

ჩვენ შეგვიძლია მივხვდეთ ამ განმარტებას, თუ განვიხილავთ იმ ალბათობებს, რომლებიც მიეკუთვნება ხდომილობას გულგრილობის პრინციპის გამოყენებით. ამ შემთხვევაში $P(E|F)$, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, წარმოადგენს $E \cap F$-ში ელემენტების ფარდობას F-ში ელემენტების რაოდენობასთან. ამას ჩვენ შემდეგნაირად ვაჩვენებთ. ვთქვათ n არის ხდომილებათა რაოდენობა ხდომილებათა სივრცეში, n_F იქნება ხდომილებათა რიცხვი $E \cap F$-ში. მაშინ

$$\frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{n_{EF}/n}{n_F/n} = \frac{n_{EF}}{n_F}$$

რომელიც წარმოადგენს $E \cap F$-ში ხდომილობების რაოდენობის ფარდობას F-ში ხდომილობების რიცხვთან. რაც შეეხება მნიშვნელობას, $P(E|F)$ არის ჩვენი რწმენა იმისა, რომ E შეიცავს შედეგს, რომლის შესახებ ვიცით რომ ის F-შია.

მაგალითი 2.5. ისევ ავიღოთ ბანქოს დასტიდან ზედა კარტი. ვთქვათ „ვალეტი“ (Jeck) იყოს 4 ვალეტის ნაკრები, RedRoyalCard იქნება ექვსი წითელი სამეფო კარტის[4] სიმრავლე და „კლუბი“ (club) იყოს სიმრავლე 13 club-ის, მაშინ:

---

[4] სამეფო კარტი – ვალეტი, დედოფალი და მეფე.

$$P(Jack) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(Jack|RedRoyalCard) = \frac{P(Jack \cap RedRoyalCard)}{P(RedRoyalCard)} = \frac{2/52}{6/52} = \frac{1}{3}$$

$P(Jack|Club) = \frac{P(Jack \cap Club)}{P(Club)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}.$

მიაქციეთ ყურადღება წინა მაგალითს, $P(Jack|Club) = P(Jack)$. ეს ნიშნავს, რომ club კარტის ამოღება არ ცვლის ვალეტის ამოღების ალბათობას. ვამბობთ, რომ ორი ხდომილება ამ შეთხვევაში დამოუკიდებელია, რაც გამოიხატება შემდეგი განსაზღვრებით.

განსაზღვრება 2.3. ორი ხდომილება E და F დამოუკიდებელია შემდეგი პირობებიდან ხორციელდება ერთი მაინც:

$P(E|F) = P(E)$ და $P(E) \neq 0, P(F) \neq 0$.

$P(E) = 0$ ან $P(F) = 0$.

განსაზღვრებაში ორი ხდომილობა დამოუკიდებელია მაშინაც კი, თუ ეს E პირობითი ალბათობით მოცემული F-ია. ამის მიზეზი დამოუკიდებლობის სიმეტრიულობაა. ე.ი., თუ $P(E) \neq 0$ და $P(F) \neq 0$, მაშინ $P(E|F) = P(E)$ და მხოლოდ და მხოლოდ $P(E|F) = P(E)$. ძნელი არაა იმის დამტკიცება, რომ E და F დამოუკიდებელია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

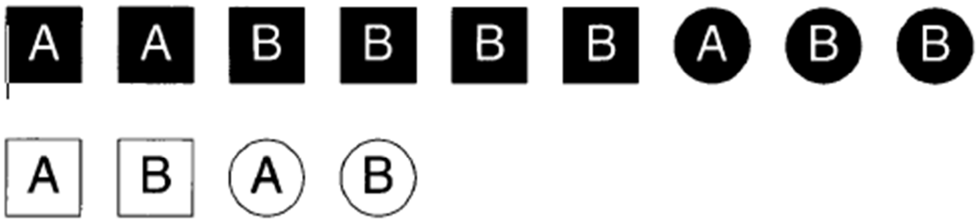
თუ თქვენ ადრე შესწავლილი გაქვთ ალბათობა, ალბათ გაეცანით დამოუკიდებლობის კონცეფციას. მაგრამ დამოუკიდბლობის განზოგადება, ე.წ პირობითი დამოუკიდებლობა არ განიხილება მრავალ შესავალ ტექსტში. ეს კონცეფცია განიხილება ამ წიგნის დანართში, ამის შესახებ შემდგომში ვიმსჯელებთ.

განსაზღვრება 2.4. ორი ხდომილობა E და F G-ით მოცემული **პირობითად დამოუკიდებელია,** თუ $P(G) \neq 0$ და შემდეგი პირობებიდან ერთ-ერთი ხორციელდება:

$P(E|F \cap G) = P(E|G)$ და $P(E|G) \neq 0, P(F|G) \neq 0$.

$P(E|G) = 0$ ან $P(F|G) = 0$.

ყურადღება მიაქციეთ, რომ განსაზღვრება იდენტურია დამოუკიდებლობის განსაზღვრების G-ის გამოკლებით. განმარტება მიგვანიშნებს, რომ E და F დამოუკიდებლები არიან, რადგან ვიცით, რომ შედეგი არის G-ში. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.



ნახ. 2.1. გულგრილობის პრინციპის გამოყენებით თითოეულ ობიექტს ვანიჭებთ 1/13-ის ტოლ ალბათობას

მაგალითი 2.6. ვთქვათ Ω არის ნახ. 2.1-ზე გამოსახული ყველა ობიექტის სიმრავლე. გულგრილობის პრინციპის გამოყენებით თითოეულ ობიექტს ვანიჭებთ 1/13 -ის ტოლ ალბათობას. ვთქვათ Black იყოს ყველა შავი ობიექტის ნაკრები, White – ყველა თეთრი ობიექტის სიმრავლე, Square ყველა კვადრატული ობიექტის სიმრავლე, ხოლო A იყოს ყველა იმ ობიექტის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს „A“-ის. მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$P(A) = \frac{5}{13}$$

$$P(A|Square) = \frac{3}{8}$$

სადაც, A და Square არ არის დამოუკიდებელი. თუმცა,

$$P(A|Black) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(A|Square \cap Black) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ A და Square არიან პირობითად დამოუკიდებელი მოცემული Black-ის. გარდა ამისა,

$$P(A|White) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|Square \cap White) = \frac{1}{2}$$

სადაც, A და Square არიან პირობითად დამოუკიდებელი მოცემული White-ის.

შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ მნიშვნელოვან წესს, რომელსაც მოიცავს პირობითი ალბათობა. ვთქვათ, გვაქვს n ხდომილება $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ისეთივე როგორც

$E_i \cap E_j = \emptyset$ $i \neq j$-სთვის

და

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = \Omega$$

ასეთ ხდომილებებს ეწოდება **ურთიერთგამომრიცხავი და ამომწურავი.** შემდეგ **სრული ალბათობის** კანონით სხვა დანარჩენი F ხდომილებისათვის:

$P(F) = P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \cdots + P(F \cap E_n)$ (2.1)

თქვენ მოგეთხოვებათ დაამტკიცოთ წესი სავარჯიშოებში. თუ $P(E_i) \neq 0$, მაშინ $P(F \cap E_i) = P(F|E_i)P(E_i)$. ამიტომ, თუ $P(E_i) \neq 0$ ყველა i-სთვის, კანონი ხშირად მოცემულია შემდეგი ფორმით:

$P(F) = P(F|E_1)P(E_1) + P(F|E_2)P(E_2) + \cdots + P(F|E_n)P(E_n)$ (2.2)

მაგალითი 2.7 ვთქვათ, იგივე მონაცემები გვაქვს, როგორც მაგალით 2.6-ში. მაშინ, სრული ალბათობის კანონის მიხედვით:

$$P(A) = P(A|Black)P(Black) + P(A|White)P(White) =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{13}\right) = \frac{5}{13}$$

2.1.3 ბაიესის თეორემა

ცნობილი ალბათობებიდან თქვენ შეგიძლიათ გამოვთვალოთ პირობითი ალბათობები თქვენთვის საინტერესო ხდომილებებისათვის შემდეგი თეორემის გამოყენებით:

თეორემა 2.2 (ბაიესი). ორი ისეთი ხდომილობისათვის E და F, რომელთათვისაც $P(E) \neq 0$ და $P(F) \neq 0$, გვაქვს

$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}$. (2.3)

გარდა ამისა, იმის გათვალისწინებით, რომ გვაქვს ურთიერთგამომრიცხავი და ამომწურავი n რაოდენობის $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ხდომილობა, ისეთები, რომ $P(E_i) \neq 0$ ყველა i-სთვის, ადგილი აქვს შემდეგს $1 \leq i \leq n$ -სთვის:

$P(E_i|F) = \frac{P(F|E_i)P(E_i)}{P(F|E_1)P(E_i)+P(F|E_2)P(E_2)+\cdots+P(F|E_n)P(E_n)}$ (2.4)

დამტკიცება. 2.3 ტოლობის მისაღებად პირველ რიგში უნდა გამოვიყენოთ პირობითი ალბათობის განმარტება ასეთი სახით:

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$ და $P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}$.

შემდეგ ყოველ ტოლობას ვამრავლებთ მარჯვენა მხარის მნიშვნელზე, რათა ვაჩვენოთ, რომ

$$P(E|F)P(F) = P(F|E)P(E)$$

რადგან ორივე ტოლია $P(E \cap F)$. საბოლოოდ, ჩვენი შედეგის მისაღებად ამ უკანასკნელ ტოლობას ვყოფთ $P(F)$.

2.4 ტოლობის მისაღებად ჯერ უნდა გამოვსახოთ F სრული ალბათობის კანონის გამოყენებით (2.2 ტოლობა), 2.3 მნიშვნელში.

წინა თეორემის ორივე ფორმულას უწოდებენ ბაიესის თეორემას იმიტომ, რომ მისი ორიგინალური ვერსია შემუშავებული იყო ტომას ბაიესის მიერ (გამოქვეყნებული იყო 1763 წელს). პირველი საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ $P(E|F)$, თუ ცნობილია $P(F|E)$, $P(E)$ და $P(F)$, ხოლო მეორე საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ $P(E_i|F)$, თუ ვიცით $P(F|E_j)$ და $P(E_j)$ $1 \leq j \leq n$-სთვის. შემდეგი მაგალითი ახდენს ბაიესის თეორემის გამოყენების ილუსტრირებას.

მაგალითი 2.8. ვთქვათ Ω არის ნახ. 2.1-ზე გამოსახული ყველა ობიექტის სიმრავლე, და თითოეულს ამ ობიექტებიდან მივანიჭოთ 1/13 ალბათობა. ვთქვათ, A არის ყველა იმ ობიექტის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს „ A “-ს, B არის ყველა იმ ობიექტის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს „B“-ს, ხოლო Black იყოს ყველა შავი ობიექტის სიმრავლე. მაშინ ბაიესის თეორემის თანახმად:

$$P(Black|A) = \frac{P(A|Black)P(Black)}{P(A|Black)P(Black) + P(A|White)P(White)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{13}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{13}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{13}\right)} = \frac{3}{5}$$

რაც იგივეა, რასაც მივიღებდით უშუალოდ $P(Black|A)$-ის გამოთვლით.

წინა მაგალითში ჩვენ შეგვიძლია ასევე მარტივად გამოვთვალოთ $P(Black|A)$ უშუალოდ. 2.4. განყოფილებაში დავინახავთ ბაიესის თეორემის გამოყენების სარგებლიანობას.

2.2 შემთხვევითი ცვლადები

ამ განყოფილებაში წარმოვადგენთ შემთხვევითი ცვლადის ფორმალურ განმარტებას და მათემატიკურ თვისებებს. 2.4. განყოფილებაში ვაჩვენებთ, თუ როგორ ხდება მათი შემუშავება პრაქტიკაში.

განსაზღვრება 2.5 $(\Omega; P)$ ალბათური სივრცისათვის X **შემთხვევითი ცვლადი** არის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა Ω.

X არეს უწოდებენ X სივრცეს.

მაგალითი 2.9. ვთქვათ Ω შეიცავს ექვსწახნაგა კამათელის აგდების შედეგად მიღებული წყვილების ყველა შედეგს, და თითოეულ P მათგანს მივანიჭოთ $1/36$. მაშინ Ω წარმოადგენს შემდეგი დალაგებული წყვილების სიმრავლეს:

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$.

ვთქვათ, X შემთხვევითი ცვლადი ანიჭებს თითოეულ დალაგებულ წყვილს ამ წყვილის ჯამს და ვთქვათ, შემთხვევითი ცვლადი Y კენტი რიცხვების ჯამს ანიჭებს „კენტს" (odd), ხოლო თუ წყვილში ერთი მაინც ლუწია „ლუწს" (even). შემდეგი ცხრილი გვიჩვენებს X და Y-ის ზოგიერთ მნიშვნელობას:

e	$X(e)$	$Y(e)$
$(1,1)$	2	კენტი
$(1,2)$	3	ლუწი
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(2,1)$	3	ლუწი
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$(6,6)$	12	ლუწი

X-ის სივრცეა {2,3,4,5,6,7,8,910,11,12}, ხოლო Y-ის {კენტი,ლუწი}.

X შემთხვევითი ცვლადისთვის ჩვენ ვიყენებთ $X = x$ ისეთი ქვესიმრავლის აღსანიშნავად. იგი შეიცავს ყველა ელემენტს $e \in \Omega$, რომელსაც შესაბამისობაში მოჰყავს X x-ის მნიშვნელობასთან, ე.ი.

$X = x$ წარმოადგენს შემდეგ ხდომილობას $\{e$ ისეთი, რომ $X(e) = x\}$

მიაქციეთ ყურადღება X და x-ს შორის სხვაობას. პატარა x აღნიშნავს X სივრცეში ნებისმიერ ელემენტს, ხოლო X – ფუნქციაა.

მაგალითი 2.10. ვთქვათ Ω, P და X ისეთივეა როგორც ეს მაგალით 2.9-შია. შემდეგ

$X = 3$ წარმოდგენს შემდეგ ხდომილობებს {(1,2),(2,1)} და $P(X = 3) = \frac{1}{18}$.

შევნიშნოთ, რომ

$\sum_{x \in space(X)} P(X = x) = 1$.

მაგალითი 2.11. ვთქვათ Ω, P და Y ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია.

$\sum_{y \in space\,(Y)} P(Y = y) = P(Y = odd) + P(Y = even) = \frac{9}{36} + \frac{27}{36} = 1$.

$P(X = x)$ -ს ვუწოდოთ X შემთხვევითი ცვლადის **ალბათური განაწილება**. ჩვენ ხშირად ვიყენებთ x-ს $X = x$ ხდომილობის წარმოსადგენად, ამიტომ $P(X = x)$ -ის ნაცვლად ვწერთ $P(x)$-ს.

ვთქვათ Ω, P და X ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია. მაშინ თუ $x = 3$

$P(x) = P(X = x) = \frac{1}{18}$.

ერთიდა იმავე Ω ხდომილობის სივრცეზე ორი X და Y შემთხვევითი ცვლადისათვის ვიყენებთ $X = x,\ Y = y$ ქვესიმრავლის აღსანიშნავად, რომელიც შეიცავს $e \in \Omega$-ის ყველა ელემენტს, და აისახებიან X x-ში და Y y-ში. ე.ი.

$X = x,\ Y = y$ წარმოადგენს შემდეგ ხდომილობას $\{e$ ისეთი, რომ $X(e) = x\} \cap \{e$ ისეთი, რომ $(e) = y\}$.

მაგალითი 2.12. ვთქვათ Ω, P და Y ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია. შედეგ $X = 4, Y = odd$ (კენტი) წარმოადგენს შემდეგ ხდომილობას {(1,3), (3,1)},

და ამდენად

$$P(X = 4, Y = odd) = 1/18$$

$P(X = x, Y = y)$ -ს ვუწოდებთ X-ის და Y-ის **ერთობლივ ალბათურ განაწილებას,** თუ $A = \{X, Y\}$, მას ასევე ვუწოდებთ A -ს **ერთობლივ ალბათურ განაწილებას.** გარდა ამისა ხშირად იხმარება „ერთობლივი განაწილება“ ან „ალბათობების განაწილება“.

შესამოკლებლად ჩვენ ხშირად ვხმარობთ x-ს და y-ს $X = x$ და $Y = y$ ხდომილობების აღსანიშნავად და ამიტომ ჩვენ ხშირად დავწერთ $P(x, y)$-ს $P(X = x, Y = y)$–ის აღსანიშნავად. ეს კონცეფცია ვცელდება სამ ან უფრო მეტ შემთხვევით ცვლადზეც. მაგალითად, $P(X = x, Y = y, Z = z)$ წარმოადგენს შემთხვევითი ცვლადების X-ის, Y-ის და Z-ის ალბათობების განაწილებების გაერთიანებულ ფუნქციას, და ჩვენ ხშირად ვწერთ $P(x, y, z)$-ს.

მაგალითი 2.13. ვთქვათ Ω, P და X ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია. შემდეგ თუ $x = 4$-ს და $y = odd$(კენტი)-ს,

$P(x, y) = P(X = x, Y = y) = 1/18$.

თუ ჩვენ გვინდა მივუთითოთ, მაგალითად, X და Y შემთხვევითი ცვლადების ყველა მნიშვნელობა, ზოგჯერ $P(X = x, Y = y)$ –ს ან $P(x, y)$-ის ნაცვლად ვწერთ $P(X, Y)$–ს.

მაგალითი 2.14. ვთქვათ Ω, P და Y ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია. ის იმისთვისაა შერჩეული, გვაჩვენოს, რომ x-ის და y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$P(X = x, Y = y) < 1/2$.

მაგალითად, როგორც ეს ნაჩვენებია 2.12 მაგალითში.

$P(X = 4, Y = odd) = 1/18 < 1/2$.

ჩვენ შეგვიძლია კვლავ დავადასტუროთ ეს ფაქტი შემდეგნაირად: X და Y-ის ყველა მნიშვნელობისათვის გვაქვს, რომ

$P(X,Y) < 1/2$.

მაგალითად, თუ ჩვენ მივანიჭებთ $A = \{X,Y\}$ და $a = \{x,y\}$. ჩვენ გამოვიყენებთ $A = a$ -ს $(X = x, Y = y)$-ის წარმოსადგენად, და ჩვენ ხშირად ვწერთ $P(a)$-ს $P(A = a)$-ს ნაცვლად.

მაგალითი 2.15. ვთქვათ Ω, P, X და Y ისეთივეა, როგორც ეს მაგალით 2.9-შია.

თუ $A = \{X,Y\}$, $a = \{x,y\}$, $x = 4$ და $y = odd$, მაშინ

$P(A = a) = P(X = x, Y = y) = 1/18$.

შეგახსენებთ სრული ალბათობის კანონს (2.1 და 2.2 ტოლობები). ორი X და Y შემთხვევითი ცვლადიებისთვის ეს ტოლობები ასე ჩაიწერება:

$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$. (2.5)

$P(X = x) = \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y)$ (2.6)

სავარჯიშოს სახით აჩვენეთ ეს.

მაგალითი 2.16. ვთქვათ Ω, P, X და Y ისეთივეა როგორც ეს 2.9 მაგალითშია, მაშინ 2.5 ტოლობის თანახმად:

$P(X = 4) = \sum_y P(X = 4, Y = y) =$

$= P(X = 4, Y = odd) + P(X = 4, Y = even) = \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{1}{2}$.

მაგალითი 2.17 ისევ, ვთქვათ Ω, P, X და Y ისეთივეა როგორც ეს 2.9 მაგალიშია, მაშინ 2.6 ტოლობის თანახმად:

$P(X = 4) = \sum_y P(X = x|Y = y)P(Y = y)$=

$= P(X = 4|Y = odd)P(Y = odd) + P(X = 4|y = even)P(Y = even) =$

$= \frac{2}{9} \times \frac{9}{36} + \frac{1}{27} \times \frac{27}{36} = \frac{1}{12}$.

2.5 ტოლობაში $P(X = x)$ ალბათობების განაწილებას უწოდებენ X–ის ზღვრულ ალბათურ განაწილებას $P(X = x, Y = y)$ ერთობლივი განაწილების მიმართ, რამდენადაც ის მიიღება ისეთი პროცესის მეშვეობით, რომელიც რიცხვთა ცხრილში სტრიქონის ან სვეტის დამატების მსგავსია.

ეს ცნება ასევე პირდაპირი გზით ვრცელდება სამი ან მეტი შემთხვევითი ცვლადის დროს. მაგალითად, თუ ჩვენ გვაქვს X, Y და Z-ის ერთობლივი განაწილება $P(X = x, Y = y, Z = z)$, X და Y-ის ზღვრული განაწილება $P(X = x, Y = y)$, რომლებიც მიღებულია Z–ის ყველა მნიშვნელობის შეჯამებით. თუ, $A = \{X,Y\}$, ჩვენ ასევე მას ვუწოდებთ A-ს ზღვრულ ალბათურ განაწილებას.

შემდეგ მაგალითში განიხილება შემთხვევითი ცვლადის ის კონცეფციები, რომლებიც დღესდღეისობითაა ცნობილი.

მაგალითი 2.18. ვთქვათ, Ω არის 12 ინდივიდის სიმრავლე, და P თითოეულს ანიჭებს 1/12-ს. დავუშვათ, რომ ინდივიდების სქესი, სიმაღლე და ხელფასი შემდეგნაირია:

შემთხვევა	სქესი	სიმაღლე(ინჩი)	ხელფასი ($)
1	ქალი	64	30,000
2	ქალი	64	30,000
3	ქალი	64	40,000
4	ქალი	64	40,000
5	ქალი	68	30,000
6	ქალი	68	40,000
7	კაცი	64	40,000
8	კაცი	64	50,000
9	კაცი	68	40,000
10	კაცი	68	50,000
11	კაცი	70	40,000
12	კაცი	70	50,000

ვთქვათ, შემთხვევითი ცვლადებით მოიცემა შესაბამისად სქესი, სიმაღლე და ინდივიდის ინდივიდუალური ხელფასი, მაშინ ამ სამი შემთხვევითი ცვლადის ალბათობების განაწილებას ექნება შემდეგი სახე (შეგახსენებთ, რომ, მაგალითად, $P(s)$ წარმოადგენს $P(S = s)$-ს):

s	$P(s)$
ქალი	1/2
კაცი	1/2

h	$P(h)$
64	1/2
68	1/3
70	1/6

w	$P(w)$
30,000	1/4
40,000	1/2
50,000	1/4

S და H-ის ერთობლივი განაწილება ასე გამოიყურება:

s	h	$P(s,h)$
ქალი	64	1/3
ქალი	68	1/6
ქალი	70	0
კაცი	64	1/6
კაცი	68	1/6
კაცი	70	1/6

შემდეგი ცხრილი ასევე გვიჩვენებს S და H-ის ერთობლივ განაწილებას და ახდენს იმის ილუსტრირებას, რომ ცალკეული განაწილებები მიღება შეიძლება სხვა ცვლადების ერთობლივი განაწილების ყველა მონაცემის შეჯამებით:

s \ h	64	68	70	S-ის განაწილება
ქალი	1/3	1/6	0	1/2
კაცი	1/6	1/6	1/6	1/2
H-ის განაწილება	1/2	1/3	1/6	

შემდეგი ცხრილი გვიჩვენებს S-ის, H-ის და W-ს ერთობლივი განაწილების რამდენიმე პირველ მნიშვნელობას. სულ 18 მნიშვნელობაა და მათგან ბევრი 0-ის ტოლია:

s	h	w	$P(s,h,w)$
ქალი	64	30,000	1/6
ქალი	64	40,000	1/6
ქალი	64	50,000	0
ქალი	68	30,000	1/12
...	...	...	...

ჩვენ ვხურავთ შემთხვევითი ცვლადების შესახებ **ჯაჭვის წესს**, რომელშიც ნათქვამია, რომ მოცემული შემთხვევითი ცვლადები $X_1, X_2, \dots, X_n$ განსაზღვრულია იმავე Ω ხდომილობათა სივრცეზე,

$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_n|x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \dots \times P(x_2|x_1) \times P(x_1)$.

ყოველთვის, როცა $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. ამ წესის დამტკიცება არაა რთული პირობითი ალბათობის წესის გამოყენებით.

მაგალითი 2.19. დავუშვათ, რომ 2.18 მაგალითში გვაქვს შემთხვევითი ცვლადები. შემდეგ, **ჯაჭვის წესის** შესაბამისად s, h და w-ის ყველა მნიშვნელობისათვის და S, H და W-ისთვის:

$$P(s,h,w) = P(w|h,s)P(h|s)P(s)$$

არსებობს სამი შემთხვევითი ცვლადის მნიშვნელობათა რვა კომბინაცია. ცხრილი გვიჩვენებს, რომ ტოლობა არსებობს ორი კომბინაციისათვის:

s	h	w	$P(s,h,w)$	$P(w\|h,s)P(h\|s)P(s)$
ქალი	64	30,000	$\frac{1}{6}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$
ქალი	64	40,000	$\frac{1}{12}$	$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$

ეს მოყვანილია როგორც სავარჯიშო იმის საჩვენებლად, რომ ტოლობა სრულდება დარჩენილი ექვსი კომბინაციისათვისაც.

2.2.2. შემთხვევითი ცვლადების დამოუკიდებლობა

დამოუკიდებლობის ცნება ბუნებრივია ვრცელდება შემთხვევით ცვლადებზე.

განსაზღვრება 2.6. დავუშვათ, გვაქვს (Ω, P) ალბათური სივრცე და ორი, Ω-ზე განსაზღვრული, X და Y შემთხვევითი ცვლადი. მაშინ X და Y დამოუკიდებელნი არიან, თუ X-ის ყველა x მნიშვნელობისთვის და Y-ის ყველა y მნიშვნელობისთვის, ხომილობები $X = x$ და $Y = y$ არიან დამოუკიდებლები. როცა ეს ასეა, მაშინ ვწერთ:

$I_P(X, Y)$,

სადაც I_P დამოუკიდებლობას აღნიშნავს.

მაგალითი 2.20. ვთქვათ, Ω არის ჩვეულებრივი ბანქოს დასტის ყველა კარტის სიმრავლე და P ანიჭებს თითოეულ კარტს $1/52$-ს. შემთხვევითი ცვლადები შემდეგნაირად განვსაზღვროთ:

ცვლადი	სიდიდე	ამ სიდიდის შესაფერისი შედეგი
R	r_1	ყველა სამეფო ბანქო
	r_2	ყველა არასამეფო ბანქო
S	s_1	ყველა ყვავი
	s_2	ყველა დანრჩენი

მაშინ შემთხვევითი ცვლადები R და S არიან დამოუკიდებლები.

ე.ი.

$I_P(R,S)$,

ამის საჩვენებლად, ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ r–ის და s-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$P(r|s) = P(r)$.

რაც ნაჩვენებია ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში:

s	r	$P(r)$	$P(r\|s)$
s_1	r_1	$\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$
s_1	r_2	$\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$	$\frac{10}{13}$
s_2	r_1	$\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$	$\frac{9}{39}=\frac{3}{13}$
s_2	r_2	$\frac{40}{52}=\frac{10}{13}$	$\frac{30}{39}=\frac{10}{13}$

პირობითი დამოუკიდებლობის ცნება ბუნებრივად ვრცელდება შემთხვევით ცვლადებზე.

განსაზღვრება 2.7. დავუშვათ, რომ გვაქვს (Ω, P) ალბათური სივრცე და სამი X, Y და Z შემთხვევითი ცვლადი, რომლებიც განსაზღვრულია Ω–ზე. თუ X და Y არიან **პირობითად დამოუკიდებელნი Z მოცემულობით** X-ის ყველა x მნიშვნელობისთვის, Y-ის ყველა y მნიშვნელობისთვის და Z-ის ყველა z მნიშვნელობისთვის, მაშინ ხდომილებები $X = x$ და $Y = y$ არიან პირობითად დამოუკიდებელნი მოცემულობით $Z = z$ ხდომილობისაგან დამოუკიდებლად, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$I_P(X, Y|Z)$.

მაგალითი 2.21. ვთქვათ, Ω ნახ. 2.1-ზე მოცემული ყველა ობიექტის სიმრავლეა, და ვთქვათ P ანიჭებს თითოეულ ობიექტს $1/13$-ს. შემთხვევითი ცვლადები S (ფორმის მიხედვით), L (ასოს მიხედვით) და C (ფერის მიხედვით) განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

ცვლადი	სიდიდე	ამ სიდიდის შესაფერისი შედეგი
L	l_1	ყველა ობიექტი შეიცავს "A"
	l_2	ყველა ობიექტი შეიცავს "B"
S	s_1	ყველა კვადრატული ობიექტი
	s_2	ყველა წრიული ობიექტი
C	c_1	ყველა შავი ობიექტი
	c_2	ყველა თეთრი ობიექტი

მაშინ L და S პირობითად დამოუკიდებელნი არიან C მონაცემით. ე.ი.

$I_P(L, S|C)$.

ეს რომ ვაჩვენოთ, ჩვენ უნდა წარმოვადგინოთ l, s და c ყველა მნიშვნელობისათვის:

$$P(l|s,c) = P(l|c)$$

არსებობს სამი შემთხვევითი ცვლადის მნიშვნელობათა რვა კომბინაცია. ცხრილი გვიჩვენებს, რომ ტოლობა სრულდება ორი კომბინაციისათვის:

c	s	l	$P(l\|s,c)$	$P(l\|c)$
c_1	s_1	l_1	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
c_1	s_1	l_2	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

ეს მოყვანილია როგორც სავარჯიშო იმის საჩვენებლად, რომ ტოლობა სრულდება სხვა კომბინაციისათვისაც.

განსაზღვრება 2.8. ვთქვათ, გვაქვს (Ω, P) ალბათური სივრცე და ორი, A და B სიმრავლე. რომლებიც შეიცავენ Ω–ზე განსაზღვრულ შემთხვევით ცვლადებს. ვთქვათ a და b არის, შესაბამისად, A და B-ში არსებული შემთხვევითი ცვლადების მნიშვნელობათა სიმრავლე. A და B სიმრავლეებს უწოდებენ დამოუკიდებლებს, თუ a და b სიმრავლეებში შემთხვევითი ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის ხდომილობები $A = a$ და $B = b$ არიან დამოუკიდებლები. თუ ეს ასეა, მაშინ ვწერთ:

$$I_P(A, B),$$

სადაც I_P აღნიშნავს დამოუკიდებელ მნიშვნელობას P-ში.

მაგალითი 2.22. ვთქვათ, Ω არის ბანქოს დასტაში ყველა კარტის სიმრავლე და P თითოეულ კარტს ანიჭებს 1/52-ს. განვსაზღვროთ შემთხვევითი ცვლადები შემდეგნაირად:

ცვლადი	სიდიდე	ამ სიდიდის შესაფერისი შედეგი
R	r_1	ყველა სამეფო ბანქო
	r_2	ყველა არასამეფო ბანქო
T	t_1	ყველა ათიანი და ვალეტი
	t_2	ყველა ბანქო -არც ათიანი და არც ვალეტი
S	s_1	ყველა ყვავი
	s_2	ყველა დანარჩენი

მაშინ $\{S, T\}$ და $\{S\}$ სიმრავლეები დამოუკიდებელნი არიან. ე.ი.

$I_P(\{S,T\},\{S\})$ (2.7)

ეს რომ ვაჩვენოთ, უნდა ვაჩვენოთ, რომ r,t და s-ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$P(r,t|s) = P(r,t).$$

არსებობს სამი შემთხვევითი ცვლადის მნიშვნელობათა რვა კომბინაცია. ცხრილი გვიჩვენებს, რომ ტოლობას ადგილი აქვს ორი კომბინაციისათვის:

s	r	t	$P(r,t\|s)$	$P(r,t)$
s_1	r_1	t_1	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
s_1	r_1	t_2	$\frac{2}{13}$	$\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$

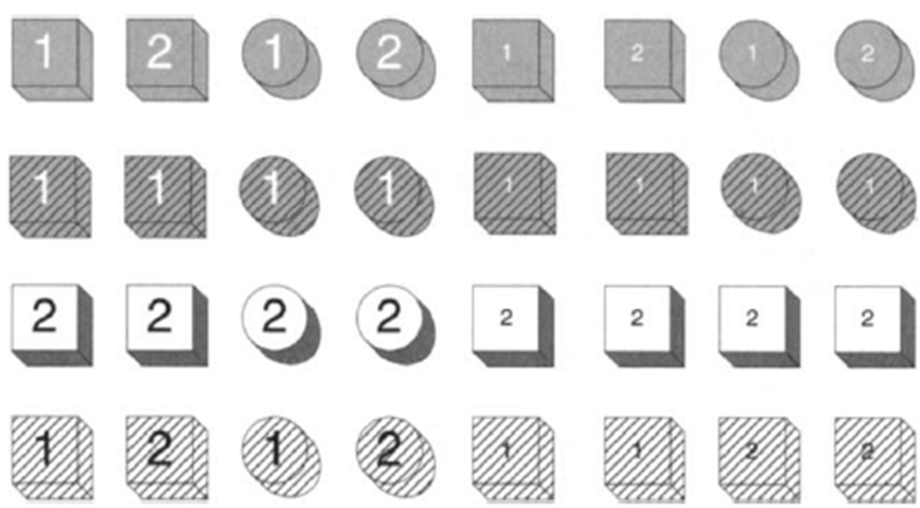
ეს მოყვანილია როგორც სავარჯიშო იმის საჩვენებლად, რომ ტოლობა სრულდება სხვა კომბინაციისათვისაც.

როდესაც სიმრავლე ერთ ცვლადს შეიცავს, მას ჩვეულებრივ, ფიგურული ფრჩხილების გარეშე ვწერთ. მაგალითად, დამოუკიდებლობა 2.7-ს ასე ჩავწერთ:

$I_P(\{S,T\},S)$.

განსაზღვრება 2.9. ვთქვათ, გვაქვს (Ω,P) ალბათური სივრცე და სამი, A, B და C სიმრავლე, რომლებიც შეიცავენ Ω–ზე განსაზღვრულ შემთხვევით ცვლადებს. ვთქვათ a, b და c არის, შესაბამისად, A, B და C-ში არსებული შემთხვევითი ცვლადების მნიშვნელობათა სიმრავლე. . A და B სიმრავლეებს უწოდებენ **პირობითად დამოუკიდებლებს C-ს გათვალისწინებით,** თუ a, b და c სიმრავლეებში შემთხვევითი ცვლადების ყველა მნიშვნელობისათვის, როდესაც $P(c)\neq 0$, $A=a$ და $B=b$, არიან პირობითად დამოუკიდებლები $C=c$ ხდომილობის მოცემულობით. როდესაც ეს ასეა ვწერთ:

$I_P(A,B|C)$.



ნახ. 2.2 ობიექტები ხუთი თვისებით.

მაგალითი 2.23. ვთქვათ, ნახ. 2.2-ზე მოცემული ობიექტების ალბათობის მინიჭებისათვის ჩვენ ვიყენებთ გულგრილობის პრინციპს და ვსაზღვრავთ შემთხვევით ცვლადებს შემდეგნაირად:

ცვლადი	სიდიდე	ამ სიდიდის შესაფერისი შედეგები
V	v_1	ყველა ობიექტი რომელიც მოიცავს „1“-ს
	v_2	ყველა ობიექტი რომელიც მოიცავს „2“-ს
L	l_1	ყველა ობიექტი რომელიც დაფარული ხაზით
	l_2	ყველა ობიექტი რომელიც არაა დაფარული ხაზით
C	c_1	ყველა ნაცრისფერი ობიექტი
	c_2	ყველა თეთრი ობიექტი
S	s_1	ყველა კვადრატული ობიექტი
	s_2	ყველა წრიული ობიექტი
F	f_1	ყველა ობიექტი, რომელიც მოიცავს რიცხვს დიდი შრიფტით
	f_2	ყველა ობიექტი, რომელიც მოიცავს რიცხვს პატარა შრიფტით

ეს დატოვებულია სავარჯიშოს სახით, რათა ვაჩვენოთ, რომ v, l, c, s და f-ის ყველა მნიშვნელობისათვის:

$P(v, l|s, f, c) = P(v, l|c)$.

ამრიგად, ჩვენ გვაქვს

$$I_P(\{V, L\}, \{S, F\}|C).$$

2.3 ალბათობის მნიშვნელობა

თუ თქვენ არ გაქვთ საშუალება საფუძვლიანად შეისწავლოთ ალბათობის თეორია, ხშირად რჩება შთაბეჭდილება, რომ ყველა ალბათობა გამოითვლება ფარდობის საშუალებით. შემდგომში ჩვენ უფრო დაწვრილებით განვიხილავთ ალბათობის მნიშვნელობას და ვაჩვენებთ, რომ ჩვეულებრივი განმარტება არ გამოხატავს მის არსს.

2.3.1. ფარდობითი სიხშირის მიდგომა ალბათობის მიმართ

ალბათობის სახელმძღვანელოში კლასიკური მაგალითი ეხება მონეტის აგდებას. რამდენადაც მონეტა სიმეტრიულია, ჩვენ ვიყენებთ გულგრილობის პრინციპს, რომ მივანიჭოთ

P(ავერსი) $= P$(რევერსი) $=$ 0,5.

ვთქვათ, ამის მაგივრად ვისვრით ჭიკარტს. ის ასევე შეიძლება დაეცეს ორიდან ერთი გზით. ვთქვათ ის ეცემა წვეტიანი თავით ზემოთ, რომელსაც დავარქმევთ „თავს“, ან კიდეთი გვერდზე დაეცეს, რომელსაც „კუდს“ ვუწოდებთ. რამდენედაც ჭიკარტი არაა სიმეტრიული, ჩვენ არ გაგვაჩნია მიზეზი გულგრილობის პრინციპის გამოყენების და ორივე

შედეგის მიმართ 0,5 ალბათობის მინიჭების. მაშ როგორ უნდა მივანიჭოთ ალბათობები? მონეტის აგდების დროს ჩვენ ვანიჭებდით P(ავერსი) = 0,5, და ცხადად ვვარაუდობდით, რომ თუ მონეტას ავაგდებდით ბევრჯერ, ის დაეცემოდა ავერსით დაახლოებით ნახევარ შემთხვევაში. თუ მონეტას ავაგდებდით 1000-ჯერ, ის დაეცემოდა ავერსით 500-ჯერ. განმეორებითი ექსპერიმენტის ჩატარების შესახებ ასეთი გაგება ალბათობის გამოთვლის (ან შეფასების მაინც) საშუალებას გვაძლევს. ე.ი. თუ ჩვენ ექსპერიმენტს ხშირად გავიმეორებთ, ჩვენ სრულიად დავრწმუნდებით, რომ შედეგების ალბათობა, იმ ჯერადობის დროს, რომელშიც ხდება ეს ცდა, დაახლოებით ტოლია. მაგალითად, სტუდენტმა ააგდო მონეტა 10 000-ჯერ და ის დაეცა ავერსით 3761-ჯერ, ე.ი.

$P(Heads) \approx \frac{3761}{10\,000} = 0{,}3761.$

მართლაც, 1919 წელს რიჩარდ ფონ მიზერმა გამოიყენა ამ წილადის ზღვარი ალბათობის განსაზღვრისათვის. ე.ი. თუ n აგდების რაოდენობაა, და S_n კი ის რაოდენობაა რამდენჯერაც დაეცა ჭიკარტი „თავით“, შემდეგ:

$P(Heads) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}.$

ამ განსაზღვრებაში იგულისხმება, რომ ფაქტობრივად ზღვარი მიღწეულია. ე.ი. იგულისხმება, რომ ფარდობა არ იცვლება. მაგალითად, არ გვაქვს მიზეზი, რომ ვიგულისხმოთ, რომ ფარდობა 100 აგდების შემდეგ არ იქნება 0,5; 1000 აგდების შემდეგ 0,1; 10000 აგდების შემდეგ 0,5 და ა. შ. მხოლოდ ექსპერიმენტებს შეუძლია რეალურ სამყაროში დაასაბუთონ ზღვართან მიახლოება. 1946 წელს ჯ.ე. კერიჩმა ჩაატარა მრავალი ასეთი ექსპერიმენტი ისეთი აზარტული თამაშების გამოყენებით, რომლებშიც არის გულგრილობის პრინციპი (მაგალითად, ბანქოს დასტიდან კარტის ამოღება). მისმა შედეგებმა აჩვენა, რომ ფარდობითი სიხშირე ზღვარს უახლოვდებოდა და რომ ეს ზღვარი მიიღებოდა გულგრილობის პრინციპის გამოყენებით.

ალბათობის მიმართ ასეთ მიდგომას უწოდებენ **ალბათობის მიმართ ფარდობითი სიხშირის მიდგომას** და იმ ალბათობებს, რომლებიც ამ მიდგომით მიიღება, უწოდებენ ფარდობით სიხშირეებს. Frequentist არის ადამიანი, რომელიც თვლის, რომ ეს არის ერთადერთი გზა, რომლითაც ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ ალბათობა. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ მიდგომის მიხედვით ჩვენ ვერასოდეს ვერ ვადგენთ ალბათობის სიზუსტეს. მაგალითად, თუ ჩვენ მონეტა ავაგდეთ 10000-ჯერ და ავერსზე დაეცა 4991-ჯერ, მას შევაფასებდით ასე:

$P(Heads) \approx \frac{4991}{10\,000} = 0{,}4991.$

სხვა მხრივ, თუ ჩვენ გამოვიყენებდით გულგრილობის პრინციპს, მაშინ მივანიჭებდით $P(Heads) = 0{,}5$. მონეტის შემთხვევაში ალბათობა შეიძლება არც იყოს 0,5 იმიტომ, რომ მონეტა არ შეიძლება იყოს აბსოლუტურად სიმეტრიული. მაგალითად, კერიჩმა (1946) აღმოაჩინა, რომ კამათლის ასროლისას ექვსიანი უფრო მეტჯერ მოვიდა, ვიდრე ერთიანი. ეს იმიტომ ხდებოდა, რომ კამათელზე ლაქები ამოთხრილი იყო. ამგვარად კამათელი ყველაზე მსუბუქი ექვსიანის მხარეს იყო. სხვა მხრივ ურნით და ბანქოთი ექსპერიმენტების დროს ჩვენ შეგვიძლია დარწმუნებული ვიყოთ იმ ალბათობაში, რომელიც გულგრილობის პრინციპით მიიღება.

მაგალითი 2.24. ვთქვათ, ვისვრით ასიმეტრიულ ექვსწახნაგა კამათელს, და 1000 ასროლის დროს ვაკვირდებით, რომ ექვსი მხარე შემდეგჯერ მოდის:

მხარე	გაგორების რაოდენობა
1	250
2	150
3	200
4	70
5	280
6	50

მგვარად, ჩვენ ვაფასებთ $P(1) \approx 0{,}25, P(2) \approx 0{,}15, P(3) \approx 0{,}2, P(4) \approx 0{,}7, P(5) \approx 0{,}28$ და $P(6) \approx 0{,}05$.

ექსპერიმენტის განმეორებით ჩატარებას (რომ შევაფასოთ ფარდობითი სიხშირე) უწოდებენ **არჩევანს**, ხოლო შედეგების ნაკრებს **შემთხვევით არჩევანს** (ან უბრალოდ ნიმუშს), მაშინ როცა ნაკრებს, რომლიდანაც ჩვენ ვახდენთ არჩევას, უწოდებენ **პოპულაციას.**

მაგალითი 2.25. დავუშვათ ჩვენი პოპულაცია არის 31-დან 85 წლამდე ყველა მამაკაცი აშშ-ში, და ჩვენ გვაინტერესებს სისხლის მაღალი წნევის მქონე მამაკაცთა ალბათობა. მაშინ, თუ ჩვენ ავიღებთ 10000-კაციან სიმრავლეს, ეს სიმრავლე არის ჩვენი არჩევანი. შემდეგ, თუ 3210 აქვს სისხლის მაღალი არტერიული წნევა, ჩვენ მას ვაფასებთ ასე:

$P(\text{სისხლის მაღალი წნევით}) \approx \frac{3210}{10000} = 0{,}321.$

ტექნიკურად ჩვენ არ უნდა დავასახელოთ პოპულაციის ამ ასაკობრივ ჯგუფში მყოფი ყველა მამაკაცი. თეორია ამბობს, რომ ამ ჯგუფის მამაკაცებს აქვთ მიდრეკილება მაღალი არტერიული წნევის მიმართ და ეს მიდრეკილება არის ალბათობა. ეს მიდრეკილება შეიძლება იყოს არათანაბარი მაღალი არტერიული წნევის მქონეთა ჯგუფში. თეორიულად ჩვენ უნდა გვქონოდა მამაკაცთა უსასრულო რაოდენობა, რომ განგვესაზღვრა ალბათობა. ამ ასაკობრივ ჯგუფში მიმდინარე სიმრავლეს ეწოდება **სასრული პოპულაცია**. ამ ასაკის

ყველა მამაკაცის სიმრავლიდან ნაწილს აქვს მაღალი არტერიული წნევის შეძენის ალბათობა. უკანასკნელი ალბათობა არის მაღალი არტერიული წნევის მქონე მამაკაცთა მარტივი ფარდობა. როდესაც ვაკეთებთ სტატისტიკურ დასკვნას, ჩვენ ხანდახან გვსურს შევაფასოთ ეს სასრულ პოპულაციაში მოსახლეობის არჩევითობის მიხედვით, სხვა შემთხვევაში ჩვენ გვსურს შევაფასოთ მიდრეკილება დაკვირვების სასრული მიმდევრობიდან. მაგალითად, სატელევიზიო შემფასებლებს ჩვეულებრივ სურთ გაიგონ ფაქტობრივად შერჩეული ადამიანებიდან ადამიანთა რა რაოდენობა უყურებს შოუს. მეორე მხრივ მედიკოსებს სურთ მამაკაცთა სასრული მიმდევრობიდან შეაფასონ მამაკაცთა მიდრეკილება მაღალი არტერიული წნევის მიმართ. მკვლევარს შეუძლია შექმნას უსასრულო მიმდევრობა სასრული პოპულაციიდან ახალი ელემენტის შერჩევამდე შერჩეული ელემენტის უკან დაბრუნებით. ამას ეწოდება **„ჩანაცვლებით შერჩევა“**. პრაქტიკაში ეს იშვიათად ხდება, მაგრამ ჩვეულებრივ სასრული პოპულაცია იმდენად დიდია სტატისტიკოსები გამარტივების მიზნით უშვებენ ვარაუდს, რომ შერჩევა ასე კეთდება. ე.ი. ისინი არ ცვლიან ელემენტს, მაგრამ ვარაუდობენ, რომ ფარდობა უცვლელია შემდეგი შერჩევისათვისაც.

შერჩევისას დაკვირვებად ფარდობით სიხშირეს ეწოდება ალბათობის **მაქსიმალური ალბათური შეფასება** (ფარდობითი სიხშირის ზღვარი), რამდენადაც ალბათობის ალბათური შეფასება, რომელსაც გვაძლევს დაკვირვებადი მიმდევრობა, შედარებით ზუსტია, როდესაც ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ ცდები (ექსპერიმენტის გამეორება) ალბათურად დამოუკიდებელნი არიან.

მაგალითი 2.26. დავუშვათ, რომ ოთხჯერ ვაგდებთ ჭიკარტს და ვაკვირდებით მიმდევრობას (თავი, კუდი, თავი, თავი). მაშინ თავების გამოჩენის მაქსიმალური ალბათური შეფასება არის 3/4. ვთქვათ, T_1, T_2, T_3 და T_4 ისეთი შემთხვევითი ცვლადებია, რომ T_i წარმოადგენს i-ური აგდების შედეგს. ჩვენი შეფასებით $P(T_i =$თავი$)$ ტოლი უნდა იყოს 0,75-ის ყველა i-სთვის. დავუშვათ ცდები დამოუკიდებელია, მაშინ:

$$P(T_1 heads, T_2 = tails, T_3 = heads, T_4 = heads =$$

$$= P(T_1 = heads)P(T_2 = tails)P(T_3 = heads)P(T_4 = heads) =$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = 0,1055.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი სხვა შეფასება ამ მიმდევრობას ნაკლებ სავარაუდოს გახდის. მაგალითად, თუ ცდას ვაფასებთ $P(T_1 = heads)$ 1/2-ის ტოლად, ჩვენ გვაქვს:

$$P(T_1 heads, T_2 = tails, T_3 = heads, T_4 = heads =$$

$$= P(T_1 = heads)P(T_2 = tails)P(T_3 = heads)P(T_4 = heads) =$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0{,}0625.$

ფონ მიზესის ფარდობითი სიხშირის მიდგომის სხვა ასპექტს წარმოადგენს ის, რომ შემთხვევითი პროცესი ახდენს შედეგების მიმდევრობის გენერირებას. ფონ მიზესის თეორიის თანახმად, შემთხვევითი პროცესი განისაზღვრება როგორც განმეორებადი ექსპერიმენტი, რომლისთვისაც შედეგების უსასრულო მიმდევრობა მიჩნეულია შემთხვევით მიმდევრობად. ინტუიციურად, შემთხვევითია მიმდევრობა, რომელიც არ გვიჩვენებს კანონზომიერებას ან შაბლონს. მაგალითად, სასრული ბინარული მიმდევრობა „1011101100“ წარმოგვიდგება შემთხვევითად მაშინ, როცა მიმდევრობა „1010101010“ არაა, რადგან მას გააჩნია შაბლონი „10“, რომელიც მეორდება ხუთჯერ. თვალსაჩინოა, რომ ექსპერიმენტი როგორიცაა მონეტის აგდება და კამათელის გაგორება ჭეშმარიტად შემთხვევითი პროცესებია. 1971 წელს ივერსენმა და სხვებმა ჩაატარეს მრავალი ექსპერიმენტი კამათლის მეშვეობით შემთხვევითი შედეგების მიმდევრობის მითითებით. ითვლება, რომ მიუკერძოებელი შერჩევა ასევე იძლევა შემთხვევით მიმდევრობას და ამიტომ წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს.

2.3.2. ალბათობის მიმართ სუბიექტური მიდგომა

თუ ჩვენ ჭიკარტს 10 000-ჯერ ავაგდებთ და ის თავით დაეცემა 6000-ჯერ, მას შევაფასებდით შემდეგნაირად – $P(heads)$ ტოლია 0,6-ის. ზუსტად რა რიცხვია ეს? არის ეს ნებისმიერი რიცხვის ციფრებამდე სიზუსტით ჭიკარტების თავით დაცემის რაიმე ალბათობა? როგორც ჩანს, არა. მართლაც, როდესაც ვისვრით საკანცელარიო ჭიკარტს, მისი ფორმა ნელნელა იცვლება თავის მიმართ დახრის კუთხით. განვიხილოთ სხვა მაგალითი, ნამდვილად არსებობს მამაკაცებისათვის კონკრეტულ ასაკში მაღალი არტერიული წნევის მიმართ ზუსტი მიდრეკილება? ჩანს ისევ არა. ჩანს, რომ კარტით და ურნით აზარტული თამაშების გარდა ალბათობის ფარდობითი სიხშირე მხოლოდ იდიალიზებულია. მიუხედავად ამისა, ამ ცნებისაგან ჩვენ გვიჩნდება სასარგებლო შეხედულება. მაგალითად, თუ ჭიკარტი 10000-ჯერ აგდების შემდეგ 6000-ჯერ თავით დაეცა, მას გააჩნია დაახლოებით 0,6-ის ტოლი ალბათობა იმისა, რომ შემდეგ აგდებაზეც შესაბამისად დაეცეს. ე.ი. ჩვენ ვთვლით რომ სამართლიანია ის, რომ მოვიგოთ 40$, თუ ჭიკარტი დაეცემა თავებით და დავკარგოთ 1$ -60$ =60$ თუ ჭიკარტი დაეცემა კუდებით. რამდენედაც ფსონი ითვლება სამართლიანად, საწინააღმდეგო, კერძოდ 40$-ის დაკარგვა, თუ ჭიკარტი დაეცემა თავით, და 60$ მოგება, თუ ის დაეცემა კუდით, ასევე ჩაითვლება

სამართლიანად. ასე, რომ ავირჩევთ ფსონის ორივე მხარეს. ალბათობის როგორც ფასეულის ცნებას, რომელიც განსაზღვრავს სამართლიან ფსონს, უწოდებენ **ალბათობის მიმართ სუბიექტურ მიდგომას**, ხოლო ამ სისტემაში ალბათობებს უწოდებენ **სუბიექტურ ალბათობებს** ან **რწმენას** (დაჯერებას). **სუბიექტივისტი** არის ის ვინც გრძნობს, რომ შეგვიძლია მივანიჭოთ ალბათობა ამ სტრუქტურის ფარგლებში. უფრო კონკრეტულად ამ მიდგომაში ხდომილობის განუსაზღვრელობის სუბიექტური ალბათობა – ეს არის ფულის p ერთეული, რომლის მიცემასაც (დაკარგვასაც) დავეთანხმებით, თუ ხდომილობა არ მოხდებოდა იმის სანაცვლოდ, რომ მივიღოთ (მოვიგოთ) $1-p$ ერთეული თუ ეს მოხდება.

მაგალითი 2.27. დავუშვათ, რომ ჩვენი აზრით $P(heads)=0{,}6$. ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ ვეთანხმებით რომ სამართლიანია მივცეთ 60$ თუ ჭიკარტი დაეცემა თავით და მივიღოთ 40$ თუ ეს მოხდება. მიაქციეთ ყურადღება, თუ ექსპერიმენტს გავიმეორებთ 100-ჯერ და თავით დაცემა იქნება ჯერადობის 60% (როგორც ველოდით), ჩვენ მოვიგებთ 60(40$) = 24$ და წავაგებთ 40(60$) = 24$. ე.ი. წაუგებლები დავრჩებით.

ალბათობის მიმართ ფარდობითი სიხშირის მიდგომისაგან განსხვავებით, სუბიექტური მიდგომა საშუალებას იძლევა გამოვთვალოთ იმ ხდომილობების ალბათობები, რომლებიც არ მეორდება. კლასიკური მაგალითი შეეხება იპოდრომზე დადებულ ფსონებს. იმისათვის, რომ მივიღოთ გადაწყვეტილება ფსონის დადების შესახებ, თავიდან უნდა განვსაზღვროთ, რამდენად სწორია ჩვენი ვარაუდი, რომ ყველა ცხენი გაიმარჯვებს. აღნიშნული რბოლა არც მანამდე გაიმართება და არც შემდგომში. ამგვარად, ჩვენ არ შეგვიძლია ვნახოთ ამის გამოვლენა წინა რბენებში, რომ ვირწმუნოთ. უფრო სავარაუდოა, რომ ამ დაჯერებულობას მივიღებთ, ცხენების საერთო შესაძლებლობის, ჯიშის, ტრასის პირობების, ჟოკეების და ა.შ. შესახებ დაწვრილებითი გაანალიზების საფუძველზე. ცხადია, ანალიზის საფუძველზე ყველა ერთნაირ ვარაუდამდე არ მივა. სწორედ ამიტომ უწოდებენ ამ ალბათობებს სუბიექტურს. ისინი კონკრეტულად ინდივიდუალურები არიან. ზოგადად მათ არ გააჩნიათ ობიექტური ფასეულობა, რომელსაც ყველა უნდა დაეთანხმოს. რა თქმა უნდა, თუ ჩვენ ჩავატარებდით ისეთ ექსპერიმენტებს, როგორიცაა ჭიკარტის 10000-ჯერ აგდება და მისი დაცემა თავით 6000-ჯერ, უმეტესობა დაეთანხმებოდა, თავების ალბათობა შეადგენს დაახლოებით 0,6-ს. მართლაც, დე ფინეტმა აჩვენა, რომ თუ ჩვენ ვაკეთებთ რაიმე გონივრულ ვარაუდს თქვენი რწმენის შესახებ, ეს თქვენი ალბათობაა.

სანამ ამ საკითხს გავაგრძელებდეთ, ჩვენ ვიმსჯელებთ ალბათობასთან დაკავშირებული ცნების შესახებ, კერძოდ, ალბათობის კოეფიციენტზე. მათემატიკურად, თუ $P(E)$ არის E ხდომილობის ალბათობა, მაშინ ალბათური კოეფიციენტი შემდეგნაირად განისაზღვრება:

$O(E) = \frac{P(E)}{1-P(E)}$.

რაც შეეხება ფსონებს, $O(E)$ ეს არის თანხის ის ნაწილი, რომლის დაკარგვასაც ჩვენ სამართლიანად ვთვლით თუ E არ მოხდა 1 დოლარის მიღების სანაცვლოდ, თუ ის მართლაც მოხდა.

მაგალითი 2.28. ვთქვათ E არის ხდომილობა, როდესაც ცხენი ოლდნაგი იგებს კენკუტის დერბს. თუ ჩვენ ვთვლით $P(E) = 0{,}2$, მაშინ

$O(E) = \frac{P(E)}{1-P(E)} = \frac{0{,}2}{1-0{,}2} = 0{,}25.$

ეს ნიშნავს, რომ ჩვენ 0.25$-ის დაკარგვას ვთვლით სამართლიანად, თუ ცხენი არ მოიგებს, და ვიბრუნებთ 1$-ს თუ ის მოიგებს.

თუ ჩვენ სამართლიან ფსონს ჩამოვაყალიბებთ ალბათობის თვალსაზრისით (როგორც ეს ზემოთ იყო განხილული), ჩვენ სამართლიანად ჩავთვლიდით 0,20$ დაკარგვას, თუ ცხენი არ მოიგებდა, 0,80$ მოგების სანაცვლოდ, თუ ის მოიგებდა. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ორივე მეთოდის დროს მოგებულ თანხას და წაგებულს შორის ფარდობა 4-ის ტოლია; ამიტომ ფსონის ქცევის განსაზღვრისას ისინი შეთანხმებადი არიან.

იპოდრომზე ფსონების კოეფიციენტის ჩვენებები წარმოადგენენ ხდომილობის საწინააღმდეგო შანსებს, ე.ი. ეს არის იმის ალბათობა, რომ ხდომილობა არ მოხდება. თუ $P(E) = 0{,}2$ და ^{-}E ნიშნავს, რომ E არ ახდება, მაშინ

$$O(^{-}E) = \frac{P(^{-}E)}{1-P(^{-}E)} = \frac{0{,}8}{1-0{,}8} = 4$$

და იპოდრომზე E-ს წინააღმდეგ შანსი ტოლია 4 1-ის წინააღმდეგ. თუ თქვენ ფსონი E-ზე დადეთ წააგებთ 1$-ს თუ არ მოხდება, და მოიგებთ 4$-ს თუ ეს მოხდება. მიაქციეთ ყურადღება რომ ეს არის შანსი სარბენ ბილიკზე, რომელიც ეფუძნება ყველა მონაწილის ფსონის შედეგს. თუ თქვენ გჯერათ $P(E) = 0{,}5$-ს, თქვენთვის E-ს წინააღმდეგ შანსი ტოლია ერთი ერთის წინააღმდეგ (თუნდაც ფული), და თქვენ გეძლევათ ოთხი ერთთან მიღების შანსი.

ზოგი ადამიანი დისკომფორტს განიცდის თუ სუბიექტური ალბათობის შეფასებისათვის იძულებულია განიხილოს ფსონები. ამ ალბათობის დასადგენად სხვა საშუალებებიც არსებობს. ყველაზე პოპულარულია შემდეგი, რომელიც შემოგვთავაზა ლინდლიმ 1985 წელს. ამ მეთოდის თანახმად ადამიანმა უნდა მიაღწიოს აზარტული თამაშების მიმართ განუსაზღვრელ შედეგს, როცა იხილავს თეთრი და შავი ბურთების შემცველ ურნას. ინდივიდმა უნდა განსაზღვროს თეთრი ბურთების რა რაოდენობისათვის იქნებოდა ის

გულგრილი მცირე პრიზის მისაღებად თუ E ხდომილობა მოხდებოდა (ან ჭეშმარიტი იქნებოდა) და იმავე პრიზის მისაღებად, თუ თეთრი ბურთი იქნებოდა ამოღებული ურნიდან. ბურთების ეს წილი არის ინდივიდუალური ალბათობის შედეგი. ასეთი ალბათობის კონსტრუირება შეიძლება ბინალური შემცირების გამოყენებით. მაგალითად, თუ თქვენ გულგრილი იყავით, როდესაც წილი იყო 0,8, თქვენთვის $P(E) = 0{,}8$. თუ ვინმე გულგრილი იყო, როდესაც წილი იყო 0,6, ამ ადამიანისათვის $P(E) = 0{,}6$. ისევ არც ერთი ადამიანი არაა მართალი და არც მტყუანი.

შეცდომა იქნებოდა გვევარაუდა, რომ სუბიექტური ალბათობა მხოლოდ აზარტული თამაშებისთვისაა მნიშვნელოვანი. სინამდვილეში ის მნიშვნელოვანია ამ წიგნში განხილული ყველა დანართისათვის. შემდეგ განყოფილებაში ჩვენ ვაჩვენებთ სუბიექტური ალბათობის გამოყენების საინტერესო შემთხვევებს.

2.4. შემთხვევითი ცვლადები დანართებში

შევნიშნოთ, რომ 2.6 მაგალითში ჩვენ შემთხვევითი სიდიდე განვსაზღვრეთ წინასწარ ჩამოყალიბებული Ω ხდომილებათა სივრცის გარეშე. თუმცა მათემატიკურად მიღებულია ჯერ დაკონკრეტდეს ხდომილებათა სივრცე და მერე განისაზღვროს ამ სივრცეში შემთხვევითი სიდიდე, პრაქტიკაში ეს ასე არაა. პრაქტიკაში არსებობს ცალკეული ერთეული ან ერთეულთა სიმრავლე, რომელთაც გააჩნიათ გარკვეული მახასითებელი, რომელთა მდგომარეობის განსაზღვრაც გვსურს, მაგრამ ზუსტად ვერ ვსაზღვრავთ. ამიტომ ვხსნით რამდენად მოსალოდნელია რომ ეს კონკრეტული მახასიათებელი იმყოფება განსაზღვრულ მდგომარეობაში. ცალკეული შემთხვევის მაგალითია კანონმდებლობა, რომლის მიხედვითაც ვცდილობთ წარმოვადგინოთ შესაძლო კანცეროგენული ქიმიური ნივთიერების ეკონომიკური სარგებელი. ჩვენი სურვილია განვსაზღვროთ ქიმიური ნივთიერების შედარებითი რისკი მისგან სარგებელის მიღების წინააღმდეგ. სიმრავლის მაგალითს წარმოადგენს პაციენტების სიმრავლე, რომელთაც მსგავსი დაავადებები და სიმპტომები აქვთ. ამ შემთხვევაში, ჩვენ გვსურს მოვახდინოთ დაავადების დიაგნოსტიკა სიმპტომებზე დაყრდნობით. როგორც 2.3.1 განყოფილებაშია მითითებული, მახასიათებლების ასეთ ნაკრებს ეწოდება **პოპულაცია** და ტექნიკურად ეს არის არა ყველა არსებული მახასიათებლის სიმრავლე, არამედ თეორიულად ერთეულთა უსასრულო სიმრავლე.

ამ დანართში შემთხვევითი სიდიდე წარმოადგენს მოდელირებული ერთეულის რაღაც მახასიათებელს და ჩვენ არ ვართ დარწმუნებული ამ მახასიათებლის ფასეულობაში. ერთი

ერთეულის შემთხვევაში ამ მახასიათებელის მნიშვნელობაში დარწმუნებულები არ ვართ მაშინ, როცა მახასიათებლების ნაკრების შემთხვევაში ჩვენ არ ვართ დარწმუნებული ამ სიმრავლის ზოგიერთი წევრისათვის მის ფასეულობაში. იმისათვის, რომ აღმოიფხვრას ეს განუსაზღვრელობა, ჩვენ ვამუშავებთ ცვლადებს შორის ალბათურ ურთიერთდამოკიდებულებას. როდესაც არსებობს მახასითებლების სიმრავლე, ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ სიმრავლეში ყველა მახასიათებელს ერთი და იგივე ალბათობა აქვს იმ ცვლადებთან დაკავშირებით, რომელიც მოდელშია გამოყენებული. იმ შემთხვევაში როდესაც ეს ასე არ არის, ჩვენი ანალიზი არ გამოიყენება. ქიმიური ნივთიერების შემოტანის სცენარის შემთხვევაში, მისი თვისებები შეიძლება შეიცავდეს ადამიანზე კანცეროგენული პოტენციალის ზემოქმედების რაოდენობას. თუ ეს ჩვენთვის საინტერესო თავისებურებებია, მაშინ ჩვენ ვახდენთ შემთხვევითი სიდიდეეების *ადამიანზე ზემოქმედებას* და *კანცეროგენური პოტენციალის* იდენციფირებას (სიმარტივისათვის ჩვენი ილუსტრაციები მოიცავს რამდენიმე ცვლადს. ფაქტობრივად, დანართებში ჩვეულებრივად ამაზე მეტი გამოიყენება). პაციენტების ნაკრების დროს მახასიათებლების ინტერესი შეიძლება მოიცავდეს ისეთი დაავადების არსებობას ან არარსებობას როგორიცაა ფილტვის კიბო, შეიძლება თუ არა ისეთი დაავადებების გამოვლენა, როგორიცაა გულმკერდის რედგენოგრაფია, არსებობს მიზეზები ისეთი დაავადების, როგორიცაა მწეველობა. ამ მახასიათებლების გათვალისწინებით ჩვენ მოვახდენდით შემთხვევეითი ცვლადების *გულმკერდის რენტგენის, ფილტვის კიბოს* და *მოწევის ისტორიის* იდენტიფიცირებას. შემთხვევითი ცვლადების იდეტიფიცირების შემდეგ თითოეული მათგანისათვის განვასხვავებთ ურთიერთგამომრიცხავ და ამომწურავ მნიშვნელობებს. შესაძლებელია შემთხვევითი ცვლადის მნიშვნელობა – ეს სხვადასხვა მდგომარეობაა, რომელიც შეიძლება მიიღოს მახასიათებელმა. მაგალითად, მდგომარეობა ფილტვის კიბო შეიძლება იყოს ან არ იყოს, მდგომარეობა გულმკერდის რენტგენი შეიძლება იყოს დადებითი ან უარყოფითი, ხოლო მწეველობა შეიძლება იყოს კი ან არა, სადაც კი შეიძლება ნიშნავდეს, რომ პაციენტი ეწევა დღეში ერთ ან მეტ კოლოფ სიგარეტს ბოლო 10 წლის განმავლობაში.

შემთხვევითი ცვლადების შესაძლო მნიშვნელობების გამიჯვნის შემდეგ (ე.ი. მათი სივრცეების), ვაფასებთ შემთხვევითი ცვლადების ალბათობებს, გვაქვს რა მათი მნიშვნელობები. თუმცა, ზოგადად, ჩვენ უშუალოდ არ განვსაზღვრავთ შემთხვევითი ცვლადის განაწილების მნიშვნელობას ერთობლივ ალბათობაში. პირიქით, ვადგენთ ჩვენთვის ხელმისაწვდომი შემთხვევითი ცვლადების ალბათობას. შემდგომში, ბაიესის თეორემის გამოყენებით, ამ ცვლადებით მიხედვით შეიძლება ვიმსჯელოთ ჩვენთვის

საინტერესო ხდომილობის ალბათობის მიღების შესახებ. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.

მაგალითი 2.29. ვთქვათ, სემს გადაწყვეტილი აქვს დაქორწინდეს და მიიღოს ქორწინებაში შესვლის ლიცენზია. იმ მდგომარეობაში, რომელშიც ის ცხოვრობს აუცილებელია გაიაროს ტესტი სისხლის ანალიზზე ELISA (ფერმენტი დაკავშირებული იმუნოსორბენტული ანალიზთან), რომელიც ავლენს შიდსს (ადამიანის იმუნოდეფიციტის ვირუსი). სემი გაივლის ტესტს და ის დადებითი აღმოჩნდება შიდსზე. რამდენად სავარაუდოა, რომ სემი შიდსით ინფიცირებულია? ტესტის სიზუსტის გარეშე, სემს ნამდვილად არ გააჩნია შესაძლებლობა გაიგოს, რამდენადაა სავარაუდო, რომ ის აივ ინფიცირებულია. მონაცემები, რომლებიც გვხვდება ასეთ ტესტებში ეს არის ჭეშმარიტად დადებითი მაჩვენებელი (მგრძნობელობა) და ჭეშმარიტად უარყოფითი მაჩვენებელი (სპეციფიკურობა). ჭეშმარიტად დადებითი მაჩვენებელი აქვთ ადამიანთა იმ ნაწილს, რომელთაც ეს ინფექცია აქვთ, როდესაც ტესტი დადებითია. მაგალითად, ELISA -სთვის 10000 ადამიანის რიცხვის მისაღებად ეს ადამიანები უნდა იყვნენ აივ ინფიცირებულად იდენტიფიცირებულნი. ეს კეთდებოდა Western Blot -ის გამოყენებით, რომელიც აივ ინფეცირების სტანდარტულ ოქროს ტესტს წარმოადგენს. იმ ადამიანებიდან რომლებმაც ELISA-ს ტესტი გაიარეს, 9990-ს ჰქონდა დადებითი შედეგი. ამგვარად ჭეშმარიტი დადებითი მაჩვენებელი შეადგენს 0,999-ს. ჭეშმარიტ უარყოფით მაჩვენებელს წარმოადგენს ადამიანთა ის ნაწილი, რომლებსაც არ აქვთ ინფექცია, რომელთა ტესტი უარყოფითია. ELISA -სთვის 10000 ადამიანის რიცხვის მისაღებად ამ ადამიანებს არ უნდა ჰქონდეთ აივ ინფექციის ფაქტორების რისკი. ამათგან 9980-ს უარყოფითი ELISA ტესტის შედეგი აქვს. გარდა ამისა 20-მა დადებითად ტესტირებულმა მონაზონმა Western Blot–ის გამოყენებით უარყოფითი შედეგი მიიღო. ამგვარად ჭეშმარიტი უარყოფითი მაჩვენებელი შეადგენს 0,998-ს, რაც ნიშნავს, რომ 0,002 უარყოფითი მაჩვენებელი ტყუილია. ამიტომ ჩვენ ვახდენთ შემდეგი შემთხვევითი ცვლადების და სუბიექტური ალბათობების ფორმულირებას:

$P(ELISA = positiv|HIV = present) = 0.999$ (2.8)

$P(ELISA = positiv|HIV = absent) = 0.02$ (2.9)

შეიძლება გაგიკვირდეთ, რატომ ვეძახით ამას სუბიექტურ ალბათობას, როდესაც ის მონაცემების მიხედვით გვაქვს მიღებული. შეგახსენებთ, რომ სიხშირული მოდგომით ჩვენ ვერასოდეს გავიგებთ ფაქტობრივ ფარდობ ითსიხშირეს (ობიექტური ალბათობები). ჩვენ მხოლოდ შეგვიძლია შევაფასოთ ისინი მონაცემების მიხედვით. მაგრამ სუბიექტური მოიდგომის ჩარჩოებში, ჩვენ შეგვიძლია წილობრივად ტოლი დაჯერებულობა (სუბიექტური

ალბათობები) მივიღოთ მონაცემებიდან. ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სემი თითქმის აუცილებლად აივ ინფიცირებულია, რამდენადაც ტესტი ამდენად ზუსტია. მიაქციეთ ყურადღება არც 2.8 ტოლობაში და არც 2.9 ტოლობაში არაა იმის ალბათობა, რომ სემი შიდსითაა დაავადებული. რამდენადაც ვიცით, რომ სემს ELISA ტესტის დადებითი შედეგი აქვს, ამდენად ალბათობა იქნება:

$P(HIV = present|ELISA = positive)$.

ამ ალბათობის გამოთვლა შეგვიძლია ბაიესის თორემის საშუალებით თუ ჩვენ ვიცით $P(HIV = present)$. შეგახსენებთ, რომ სემმა ჩააბარა სისხლი ანალიზზე მხოლოდ იმიტომ, რომ ამას სახელმწიფო ითხოვდა. მან ეს გადაწყვეტილება არ მიიღო იმიტომ რომ, ეგონა რაღაც მიზეზით შიდსით ინფიცირებული იყო. ამგვარად, სემის შესახებ გვაქვს მხოლოდ ის ინფორმაცია, რომ ის მამაკაცია იმ შტატში, სადაც ცხოვრობს. ამგვარად თუ სემის შტატის 100 000 კაციდან, რომლებიც აივ ინფიცირებულები არიან, ის ერთია, ჩვენ ვანიჭებთ შემდეგ სუბიექტურ ალბათობას:

$P(HIV = present) = 0{,}0001$.

ახლა გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ბაიესის თეორემა

$P(present|positive) =$

$$= \frac{P(positivt|present)P(present)}{P(pveositive|present)P(present) + P(positive|absent)P(absent)} =$$

$$= \frac{(0{,}00001)}{(0{,}999)(0{,}00001) + (,0002)(0{,}99999)} =$$

$= 0{,}00497$.

საკვირველია, მაგრამ ჩვენ საკმარისად ვართ დარწმუნებულები იმაში, რომ სემი არაა აივ ინფიცირებული.

ისეთ ალბათობას, როგორიცაა $P(HIV = present)$ უწოდებენ **წინა ალბათობას**, იმიტომ რომ კონკრეტულ მოდელში ეს არის რაღაც ხდომილობის ალბათობა იქამდე, ვიდრე ახალი ინფორმაციის გამოყენებით ამ მოდელის ჩარჩოებში არ მოხდება ამ ხდომილობის ალბათობის განახლება. შეცდომა არ იქნება, თუ ვიფიქრებთ, რომ ეს არის ალბათობა ახალ ინფორმაციამდე. $P(HIV = present|ELISA = positive)$ სახის ალბათობას უწოდებენ **მომდევნო ალბთობას**, რადგან ეს არის ხდომილობის ალბათობა, რომელიც ახალი ინფორმციის საფუძველზე განახლდა რომელიღაც მოდელის ფარგლებში. წინა მაგალითში, მიუხედავად იმისა რომ ტესტი საკმარისად ზუსტია, წინა ალბათობის სიმცირის მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ადრინდელი ალბათობა ძალიან მცირეა. შემდეგი მაგალითი

გვიჩვენებს, თუ როგორ შეუძლიათ განსხვავებულ წინა ალბათობას დრამატულად შეცვალოს სიტუაცია.

მაგალითი 2.30. ვთქვათ, მერი და მისი ქმარი ცდილობენ შვილის ყოლას და ქალი ეჭვობს, რომ ის ფეხმძიმედაა. ის იტარებს ტესტს ფეხმძიმობაზე, რომლის ჭეშმარიტი დადებითი მაჩვენებელია 0,99 და ცრუ დადებითი მაჩვენებელია 0,02. შემდეგ დავუშვათ, რომ ყველა იმ ქალის 20%, რომლებმაც ეს ტესტი გაიარა, ნამდვილად ფეხმძიმედაა. ბაიესის თეორემის გამოყენებით გვექნება:

$$P(present|positive) =$$

$$= \frac{P(positivt|present)P(present)}{P(pveositive|present)P(present) + P(positive|absent)P(absent)} =$$

$$= \frac{(0,99)(0,2)}{(0,99)(0,2)+(0,2)(0,8)} = 0,92523.$$

თუმცა მერის ტესტი სემის ტესტთან შედარებით ნაკლებად ზუსტი იყო, ის სავარაუდოდ ფეხმძიმედაა, თუმცა სემი არაა აივ ინფიცირებული. ეს გამოწვეულია წინასწარი ინფორმაციით. არსებობდა მნიშვნელოვანი წინასწარი ალბათობა (0,2), რომ მერი იყო ორსულად, რადგან მხოლოდ ის ქალები გადიოდნენ ტესტს, რომლებიც ეჭვობდნენ რომ ორსულად იყვნენ. მეორე მხრივ, სემი იტარებდა ტესტს უბრალოდ იმიტომ, რომ მას სურდა დაქორწინება. ჩვენ არ გვქონდა წინა ინფორმაცია, რომლითაც ის აივ ინფიცირებული იყო.

წინა ორ მაგალითში ჩვენ მივიღეთ დაჯერებულობა (სუბიექტური ალბათობა) უშუალოდ მონაცემებში დაკვირვებადი ნაწილისაგან. მიუხედავად იმისა, რომ ეს ხშირად ხდება, ამის აუცილებლობა არ არის. ზოგადად, ჩვენს დაჯერებულობას ვიღებთ წარსულის შესახებ ინფორმაციიდან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს დაჯერებულობა წარმოადგენს მთელი ჩვენი გამოცდილების შემადგენელ ნაწილს და არა უბრალოდ დაკვირვებად ფარდობით სიხშირეებს. ამის მაგალითებს ვნახავთ წიგნში. ამის ილუსტრირებაა შემდეგი მაგალითიც.

მაგალითი 2.31. დავუშვათ, მე ვგრძნობ, რომ $NASDAQ$–ის დაცემის ალბათობა ტოლია 0,4-ის, დღეს მინიმუმ 1%-ით მაინც აიწევს. ეს უფუძნება ჩემს ცოდნას, რომ გუშინდელი ვაჭრობის შემდეგ რამდენიმე დიდი კომპანიის ტექნოლოგიურ სექტორში შესანიშნავი მოგება დაფიქსირდა და მოულოდნელად ცნობილი გახდა, რომ აშშ-ის ნედლი ნავთობით მომარაგება გაიზარდა. გარდა ამისა, თუ დღეს $NASDAQ$ გაიზრდება მინიმუმ 1%-ით, მე ვრძნობ, რომ არსებობს 0,1 ალბათობა იმისა, რომ ჩემი ფავორიტი საფონდო $NTPA$ დღეს 10%-ით აიწევს. თუ დღეს $NASDAQ$ არ გაიზრდება მინიმუმ 1%-ით, მე ვრძნობ, რომ არსებობს მხოლოდ 0,02 ალბთობა იმისა, რომ ჩემი ფავორიტი საფონდო $NTPA$ დღეს 10%-ით აიწევს.

მე ამაში იმიტომ ვარ დარწმუნებული, რომ $NTPA$ -ის ეფექტურობა დაკავშირებულია ტექნიკური სექტორის ზოგად მწარმოებლობასთან. მე შევამოწმე $NTPA$ ვაჭრობის დახურვის შემდეგ და შევამჩნიე, რომ ის გაიზარდა 10%-ზე მეტად. რას უდრის იმის ალბათობა, რომ $NASDAQ$-მა აიწია არანაკლებ 1%-ისა? ბაიესის თეორემის გამოყენებით გვაქვს:

$$P(Nasdaq = up1\% | NTPA = up10\%) =$$

$$= \frac{P(up10\%|up1\%)P(up1\%}{P(up10\%|up1\%)P(up1\%) + P(up10\%|not\, up1\%)P(not\, up1\%)} =$$

$$= \frac{(0{,}1)(0{,}4)}{(0{,}1)(0{,}4)+(0{,}02)(0{,}6)} = 0{,}769.$$

წინა სამ მაგალითში ჩვენ გამოვიყენეთ ბაიესის თეორემა ცნობილი სუბიექტური ალბათობებიდან შემდგომი სუბიექტური ალბათობის გამოსათვლელად. მკაცრად რომ ვთქვათ, ამის გაკეთება შეგვიძლია მხოლოდ სუბიექტური მიდგომის ფარგლებში. ანუ, როგორც მკაცრი სიხშირეები ამბობენ, ჩვენ არასოდეს შეგვიძლია გავიგოთ ზუსტი ალბათობები, მათთვის ვერასოდეს გამოიყენებენ ბაიესის თეორემას. მათ შეუძლიათ მხოლოდ ანალიზი, თუ როგორ გამოთვალონ სანდოობის ინტერვალი მონაცემთა საფუძველზე უცნობი ალბათობის მნიშვნელობის გამოსათვლელად. ეს მეთოდები განიხილება ნებისმიერ კლასიკურ სტატისტიკურ ტექსტში. ამდენად სუბიექტივისტები არიან ისინი, რომლებიც იყენებენ ბაიესის თეორემას. მათ ხშირად **ბაიესიანებს** უწოდებენ.

2.5 სტატისტიკური კონცეფციები

შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ სტატისტიკის ძირითად ცნებებს. მიუხედავად იმისა, რომ ჩვენ წარმოვადგენთ მასალას დისკრეტული ცვლადებისათვის, ცნებები პირდაპირი წესით ვრცელდება უწყვეტ ცვლადებზეც.

2.5.1 მოსალოდნელი მნიშვნელობა

განსაზღვრება 2.10. დავუშვათ, ჩვენ გვაქვს დისკრეტული რიცხვითი შემთხვევითი ცვლადი X, რომლის სივრცეა

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

მაშინ მოსალოდნელი მნიშვნელობა $E(X)$ იქნება შემდეგნაირი:

$E(X) = x_1P(x_1) + x_2P(x_2) + \cdots + x_nP(x_n).$

მაგალითი 2.32. ვთქვათ, გვაქვს ისეთი სიმეტრიული მატრიცა, რომლის თითოეული მხარის ალბათობა გვიჩვენებს 1/6-ს. ვთქვათ, X არის შემთხვევითი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა გვიჩვენებს კამათელის აგდებით მიღებულ რიცხვს, შემდეგ:

$E(X) = 1P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) + 5P(5) + 6P(6) =$

$= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3{,}5.$

თუ ჩვენ კამათელს ბევრჯერ ავაგდებთ, გვექნება მოლოდინი, რომ ჩვენების რიცხვების საშუალო დაახლოებით 3,5 იქნება.

მაგალითი 2.33. დავუშვათ, გვაქვს შემთხვევითი ცვლადები H(სიმაღლე) და W(ხელფასი), რომელიც აღწერილია 2.18 მაგალითში. შეგახსენებთ, რომ ისინი სქესზე, სიმაღლზე და ხელფასზე დაყრდნობით შემდეგი ცხრილის მიხედვით იყვნენ განაწილებულნი

შემთხ	სქესი	სიმაღლე (ინჩი)	ხელფასი
1	ქალი	64	30,000
2	ქალი	64	30,000
3	ქალი	64	40,000
4	ქალი	64	40,000
5	ქალი	68	30,000
6	ქალი	68	40,000
7	კაცი	64	40,000
8	კაცი	64	50,000
9	კაცი	68	40,000
10	კაცი	68	50,000
11	კაცი	70	40,000
12	კაცი	70	50,000

შემდეგ

$E(H) = 64\left(\frac{6}{12}\right) + 68\left(\frac{4}{12}\right) + 70\left(\frac{2}{12}\right) = 66{,}33.$

$E(W) = 30{,}000\left(\frac{3}{12}\right) + 40{,}000\left(\frac{6}{12}\right) + 50{,}000\left(\frac{3}{12}\right) = 40{,}000.$

X-ის მოსალოდნელ მნიშვნელობას ასევე უწოდებენ **საშუალოს** და ხანდახან ასე აღნიშნავენ $\bar{X}$. სიტუაციაში, როდესაც ალბათობები მოიცემა იმის შესაბამისად, თუ რამდენჯერ ჩნდება მნიშვნელობა პოპულაციაში (როგორც ეს წინა მაგალითში იყო), ეს არის უბრალოდ მოსახლეობის ყველა წევრზე აღებული საშუალო მაჩვენებელი. მივიღებთ შემდეგ თეორემას, რომლის დამტკიცებასაც სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ და რომელიც ეხება ორ დამოუკუდებელ შემთხვევით ცვლადებს:

თეორემა 2.3. თუ X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი ცვლადებია, მაშინ

$E(XY) = E(X)E(Y).$

მაგალითი 2.34. ვთქვათ X არის შემთხვევითი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა გვიჩვენებს სიმეტრიული კამათელის აგდებით მიღებულ რიცხვს, და Y ცვლადია რომლის მნიშვნელობაა 1, თუ ავერსი წარმოადგენს სწორი მონეტის აგდების შედეგს და 0, თუ შედეგი რევერსია. მაშინ X და Y დამოუკიდებელნი არიან. შემდეგ ვაჩვენოთ, რომ $E(XY) = E(X)E(Y)$ როგორც ეს წინა თეორემაში იყო ნაგულისხმევი. ამ მიზნით:

$$E(XY) = (1\times 1)P(1,1) + (2\times 1)P(2,1) + (3\times 1)P(3,1) +$$
$$+(4\times 1)P(4,1) + (5\times 1)P(5,1) + (6\times 1)P(6,1) +$$
$$+(1\times 0)P(1,0) + (2\times 1)P(1,0) + (3\times 0)P(3,1) +$$
$$+(4\times 0)P(4,0) + (5\times 0)P(5,0) + (6\times 1)P(1,0) =$$

$1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}75.$

გარდა ამისა

$E(X)E(Y) = 3{,}5 \times 5 = 1{,}75.$

2.5.2 დისპერსია და კოვარიაცია

მოსალოდნელი მნიშვნელობა არის შემაჯამებელი სტატისტიკა, რომელიც ხშირად მიგვანიშნებს, თუ მიახლოებით რა მნიშვნელობები შეიძლება არსებობდეს პოპულაციაში. დისპერსია გვიჩვენებს რამდენად შორსაა ფაქტობრივი მნიშვნელობა მოსალოდნელი მნიშვნელობისაგან. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ დისპერსიას.

განსაზღვრება 2.11. დავუშვათ, ჩვენ გვაქვს დისკრეტული რიცხვითი შემთხვევითი ცვლადი X, რომლის სივრცეა

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

მაშინ **დისპერსია** $Var(X)$ წარმოდგენილი იქნება შემდეგი ფორმულით:

$$Var(X) = E(|X - E(X)|^2).$$

შემდეგი თეორემა დისპერსიის მარტივად გამოთვლის საშუალებას იძლევა. მის დამტკიცებას სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ.

თეორემა 2.4. გვაქვს

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$

მაგალითი 2.35. დავუშვათ, გვაქვს 2.32 მაგალითში აღწერილი მატრიცა. მაშინ

$E(X^2) = 1^2P(1) + 2^2P(2) + 3^2P(3) + 4^2P(4) + 5^2P(5) + 6^2P(6) =$

$= 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right) = 15{,}167.$

ასე, რომ

$Var(X) = E(|X - E(X)|^2) = 15{,}167 - (3{,}5)^2 = 2{,}917.$

იმისათვის რომ ერთნაირი რიგის სიდიდეები შევადაროთ, დისპერსიას ხშირად აქცევენ სტანდარტულ გადახრად σ_X, რომელიც შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

მაგალითი 2.36. წინა მაგალითში განხილული მატრიცისათვის:

$\sigma_X = \sqrt{2{,}917} = 1{,}708$.

მაგალითი 2.37. დავუშვათ, არსებობს ორი საზოგადოება, ერთი საზოგადოება შედგება „ამაზონებისაგან“, ხოლო მეორე „პიგმეებისაგან“. ამასთან პირველ საზოგადოებაში ყველა დაახლოებით 7 ფუტის სიმაღლისაა, ხოლო მეორე საზოგადოებაში სიმაღლით დაახლოებით 4 ფუტისები არიან. დავუშვათ, შემდეგ რომ ორივე საზოგადოებაში არსებობს გარკვეული რაოდენობა ადამიანებისა. დავუშვათ, H არის შემთხვევითი ცვლადი, რომელიც წარმოადგენს ცალკეული პირების სიმაღლეებს ორ კომბინირებულ საზოგადოებაში. შემდეგ ძნელი არა იმის ჩვენება, რომ

$$E(H) = 5{,}5$$

$$\sigma_H = 1{,}5.$$

მაგალითი 2.38. ახლა დავუშვათ, რომ არსებობს საზოგადოება, რომელშიც თითოეულის სიმაღლე დაახლოებით 5,5 ფუტია. მაშინ

$$E(H) = 5{,}5$$

$$\sigma_H = 0.$$

წინა ორი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ მხოლოდ მოსალოდნელ მნიშვნელობას არ შეუძლია გვითხრას ბევრი იმაზე, რასაც ველით მოსახლეობაში ფაქტობრივი მნიშვნელობების შესახებ. პირველ მაგალითში ვერასოდეს დავინახავთ 5,5 ფუტის სიმაღლის ადამიანებად, მაშინ როდესაც მეორე მაგალითში მხოლოდ ამას ვხედავთ. სტანდარტული გადახრა წარმოდგენას გვიქმნის იმაზე, რამდენად შორსაა ფაქტობრივი მნიშვნელობა მოსალოდნელისაგან. თუმცა ეს არის მხოლოდ შემაჯამებელი სტატისტიკური და სავარაუდო მნიშვნელობა. მოსალოდნელი მნიშვნელობა და სტატისტიკური გადახრა, ზოგადად, არ შეიცავს ყველა ინფორმაციას ალბათურ განაწილებებში. ზემოთ მეორე მაგლითში ისინი ამას აკეთებენ მაშინ, როცა პირველ მაგალითში შეიძლება მრავალი სხვა განაწილება იყოს, რომლებიც იძლევიან იმავე მოსალოდნელ მნიშვნელობას და სტანდარტულ გადახრას. მომდევნო განსაზღვრება ეხება ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის ურთიერთდამოკიდებულებას.

განსაზღვრება 2.12. ვთქვათ, გვაქვს ორი დისკრეტული რიცხვითი შემთხვევითი სიდიდე X და Y. მაშინ X და Y-ის **კოვარიაცია** მოიცემა შემდეგნაირად:

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]).$$

$Cov(X,Y)$-ს ხშირად ასე აღნიშნავენ σ_{XY}. შემდეგი თეორემა მოცემულია დასამტკიცებლად სავარჯიშოს სახით.

თეორემა 2.5. გვაქვს:

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

წინა თეორემიდან ცხადია, რომ

$Cov(X,y) = Var\,(X)$,

და

$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

მაგალითი 2.39. დავუშვათ, გვაქვს შემთხვევითი სიდიდეები 2.33 მაგალითში. შემდეგ

$$E(HW) =$$
$$= (64 \times 30\,000)P(64{,}30\,000) + (64 \times 40\,000)P(64{,}40\,000) +$$
$$+(64 \times 50\,000)P(64{,}50\,000) + (64 \times 30\,000)P(64{,}30\,000) +$$
$$+(68 \times 40\,000)P(68{,}40\,000) + (68 \times 50\,000)P(68{,}40\,000) +$$
$$+(70 \times 40\,000)P(7040\,000) + (70 \times 50\,000)P(70{,}50\,000) =$$
$$(64 \times 30\,000)\left(\frac{2}{12}\right) + (64 \times 40\,000)\left(\frac{3}{12}\right) + (64 \times 40\,000)\left(\frac{1}{12}\right) +$$
$$+(68 \times 30\,000)\left(\frac{1}{12}\right) + (68 \times 40\,000)\left(\frac{2}{12}\right) + (68 \times 50\,000)\left(\frac{1}{12}\right) +$$
$$+(70 \times 40\,000)\left(\frac{1}{12}\right) + (70 \times 50\,000)\left(\frac{1}{12}\right) = 2\,658\,333.$$

აქედან გამომდინარე:

$$Cov(H,W) = E(H)E(W) =$$
$$= 2\,658\,333 - 66{,}33 \times 40\,000 = 5133.$$

X და Y-ს შორის ფარდობის მიმართ კორელაციას თვითონ არ გააჩნია დიდი მნიშვნელობა. ამის გამო ჩვენ ვითვლით მისგან კორელაციის კოეფიციენტს.

დავუშვათ, გვაქვს ორი დისკრეტული რიცხვითი შემთხვევითი სიდიდე X და Y. მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

მაგალითი 2.40. დავუშვათ, გვაქვს შემთხვევითი სიდიდეები 2.33 მაგალიში.

შემდეგი მოცემულია მაგალითის სახით საჩვენებლად:

$$\sigma_H = 2{,}516,$$
$$\sigma_W = 7071.$$

შემდეგ გვექნება:

$\varrho(H,W) = \frac{Cov(y,W)}{\sigma_H\sigma_W} = \frac{5133}{2,516\times7071} = 0,2885.$

მიაქციეთ ყურადღება $\varrho(H,W)$ დადებითია და 1-ზე ნაკლები. კორელაციის კოფიციენტი -1-სა და +1-ს შორის მდებარეობს. 0-ზე მეტი მნიშვნელობა მიუთითებს, რომ ცვლადები დადებითად კორელირებულნი არიან, ხოლო 0-ზე ნაკლები მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ ცვლადები უარყოფითად არიან კორელირებულნი. დადებითად კორელირების დროს ჩვენ მხედველობაში გვაქვს, რომ ერთის გაზრდა იწვევს მეორის გაზრდას, უარყოფითის დროს კი ვგულისხმობთ, რომ ერთი იზრდება. ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ხელფასი იზრდება სიმაღლის ზრდასთან ერთად. ესე იგი მაღალ ხალხს უფრო მაღალი ხელფასი აქვთ. შემდეგი თეორემა ახდენს ამ შედეგების კონკრეტიზაციას (რომლის დამტკიცებასაც აქ არ განვიხილავთ).

თეორემა 2.6. ნებისმიერი ორი X და Y რიცხვითი შემთხვევითი სიდიდისათვის,

$|\rho(X,Y)| \leq 1.$

გარდა ამისა

$$\rho(X,Y) = 1$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობენ ისეთი $a > 0$ და b მუდმივები რომ

$$Y = aX + b$$

და

$$\rho(X,Y) = -1.$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ არსებობენ ისეთი $a < 0$ და b მუდმივები რომ

$$Y = aX + b.$$

და ბოლოს თუ X და Y არიან დამოუკიდებელნი მაშინ

$\rho(X,Y) = 0.$

მაგალითი 2.41. ვთქვათ, X არის რიცხვი, რომელიც გვიჩვენებს სიმეტრიული კამათლის აგდების რაოდენობას, და Yარის ორჯერ მეტი რიცხვი, რომელიც აისახება. ამგვარად

$Y = 2X.$

წინა თეორემის თანახმად, $\varrho(X,Y) = 1$. ვაჩვენოთ ეს უშუალოდ:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$(1\times2)\left(\frac{1}{6}\right) + (2\times4)\left(\frac{1}{6}\right) + (3\times6)\left(\frac{1}{6}\right) +$$

$$+(4\times8)\left(\frac{1}{6}\right) + (5\times10)\left(\frac{1}{6}\right) + (6\times12)\left(\frac{1}{6}\right) - (3,5)(7,0) = 5,833$$

აქედან გამომდინარე:

$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{5,833}{1,708 \times 3,416} = 1.$

მაგალითი 2.42. ვთქვათ, X არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც გვიჩვენებს სიმეტრიული კამათლის აგდების რიცხვს, და Y-ის შემთხვევითი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა უარყოფითი რიცხვია. ამგვარად,

$Y = -X.$

წინა თეორემის თანახმად, $\varrho(X,Y) = -1$. მაგალითის მეშვეობით ეს უშუალოდ ვაჩვენოთ.

მაგალითი 2.43. ისევე, როგორც 2.34 მაგალითში, ვთქვათ X არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც გვიჩვენებს სიმეტრიული და კამათლის აგდების რიცხვს, და Y იყოს შემთხვევითი ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა ტოლია 1-ის თუ აგდების შედეგი ავერსია და 0-ის ტოლი თუ აგდების შედეგი რევერსია. წინა თეორემის თანახმად, $\varrho(X,Y) = 0$. მაგალითის მეშვეობით ეს უშუალოდ ვაჩვენოთ.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა არ გვეუბნება, რომ $\varrho(X,Y) = 0$ მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა X და Y დამოუკიდებელნი არიან. მართლაც, X და Y შეიძლება დეტერმინებულად იყვნენ ერთმანეთზე დამოკიდებულნი და ჯერ ისევ ჰქონდეთ კორელაციის ნულოვანი კოეფიციენტი. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.

მაგალითი 2.44. ვთქვათ, X სიმრავლე ტოლია {-1,-2,1, 2}-ის, რომელთაგან თითოეულის ალბათობაა 0,25, ვთქვათ Y სიმრავლე იყოს {1,4} და ვთქვათ $Y = X^2$, მაშინ $E(XY)$ შემდეგნაირად გამოიყურება:

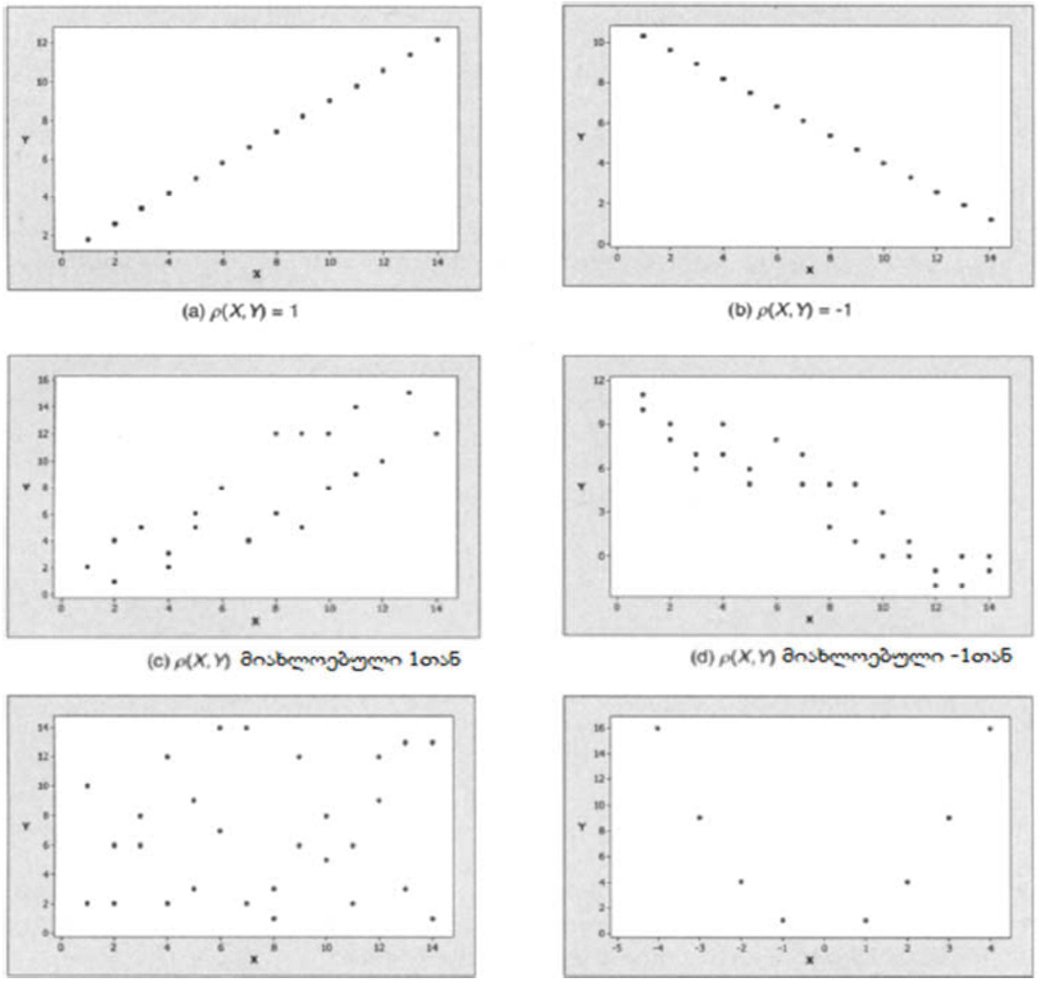
$$E(XY) = (-1)(1)P(X=-1,Y=1) + (-1)(4)P(X=-1,Y=4) +$$

$$+(-2)(1)P(X=-2,Y=1) + (-2)(4)P(X=-2,Y=4) + (1)(1)P(X=1,Y=1) + (1)(4)P(X=1,Y=4) + (2)(1)P(X=2,Y=1) + (2)(4)P(X=2,Y=4) =$$

$$= -1\left(\frac{1}{4}\right) - 4(0) - 2(0) - 8\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{4}\right) + 4(0) + 2(0) + 8\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

ვინაიდან $E(X) = 0$,ჩვენ ვასკვნით, რომ $\varrho(X,Y) = 0$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ კორელაციის კოეფიციენტი არ წარმოადგენს X და Y-ს შორის დამოკიდებულების ზოგად საზომს. ის უფრო წრფივი დამოკიდებულობის ზომას წარმოადგენს. ნახ. 2.3-ზე გამოსახულია გაბნევის დიაგრამები, რომელიც რომელიღაც განაწილებებთან დაკავშირებულ კოლერაციის კოეფიციენტების ილუსტრირებას ახდენს. გაბნევის თითოეულ დიაგრამაში წერტილს წარმოადგენს ერთი წყვილი (x,y), რომელიც ხვდება X და Y-ის საერთო განაწილებაში.



ნახ. 2.3. ორი შემთხვევითი ცვლადისათვის რამდენიმე კორელაციის კოეფიციენტი

ვამთავრებთ თეორემით, რომელიც გვაძლევს რამდენიმე შემთხვევითი ცვლადის ჯამის დისპერსიას, რომელის დამტკიცებასაც სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ.

თეორემა 2.7. შემთხვევთი სიდიდეებისათვის $X_1, X_2, \dots, X_n$ გვაქვს

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j).$$

ორი X და Y შემთხვევითი სიდიდისათვის ეს ტოლობა ასეთია:

$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$.

შევნიშნოთ, რომ თუ X და Y დამოუკიდებლები არიან მათი ჯამის დისპერსია მათი დისპერსიების ჯამის ტოლია.

2.5.3 წრფივი რეგრესია

ხშირად გვსურს ვივარაუდოთ, რომ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის და შემდეგ ცდილობენ შეისწავლონ, ამ შემთხვევით ნიმუშებს

შორის ურთიერთკავშირი, რომელიც აღებულია იმ პოპულაციიდან რომელზედაც არის განსაზღვრული ეს შემთხვევითი სიდიდეები.

მიზანს წარმოადგენს ის, რომ გვქონდეს შესაძლებლობა მოვახდინოთ ერთი ცვლადის მნიშვნელობებით მეორის პროგნოზირება. ამისათვის გამოიყენება წრფივი რეგრესია. შემდგომში მოკლედ განვიხილავთ წრფივ რეგრესიას. აქ ჩვენ არ დავიწყებთ თეორიის შემუშავებას, უბრალოდ განვიხილავთ ტექნიკას, გამოყენებითი სტატისტიკის ტექსტს, ისეთის, რომელიც ავითარებს თეორიას.

მარტივი წრფივი რეგრესია

მარტივ წრფივ რეგრესიაში ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ გვაქვს X დამოუკიდებელი ცვლადი, ისეთი Y დამოკიდებული ცვლადი, რომ

$y = \beta_0 + \beta_1 x + e_x$, (2.10)

სადაც e_x არის, შემდეგი თვისებების მქონე, X-ის x-ზე დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდე.

X-დან x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის e_x ჩვეულებრივ 0 მნიშვნელობითაა განაწილებული.

X-დან x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის e_x-ს გააჩნია ისეთივე სტანდარტული გადახრა σ.

e_x- შემთხვევითი სიდიდეები ყველა x-ისთვის ურთიერთდამოუკიდებლები არიან.

შევნიშნოთ, რომ ეს დაშვებები გულისხმობენ, რომ Y მოსალოდნელი მნიშვნელობა, რომელიც მოცემულია X-დან x-ის მნიშვნელობებით, მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$E(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x$.

იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ Y მოსალოდნელი მნიშვნელობა წარმოადგენს x-ის დეტერმინებულ წრფივ ფუნქციას. მაგრამ, Y-დან y-ის ფაქტობრივი მნიშვნელობა ცალსახად არ განისაზღვრება X-ის მნიშვნელობით შემთხვევითი წევრის e_x შეცდომის გამო.

როგორც კი გავაკეთებთ ამ დაშვებებს ორი შემთხვევითი სიდიდისათვის, ჩვენ გამოვიყენებთ მარტივ წრფივ რეგრესიას, იმისათვის რომ ვეცადოთ აღმოვაჩინოთ X და Y-ს შორის 2.10 ტოლობაში ნაჩვენები წრფივი დამოკიდებულება. მოვიყვანოთ მაგალითი.

მაგალითი 2.45. American Express-მა ივარაუდა, რომ American Express ბარათებზე ხარჯი გაიზარდა ბარათის მფლობლების მიერ გავლილი გაზრდილი მილების რაოდენობასთან ერთად. საკითხის გასარკვევად საკვლევმა ფირმამ შემთხვევით შეარჩია 25 ბარათის მფლობელი და მიიღო მონაცემები, რომლებიც ნაჩვენებია 2.1 ცხრილში. ნახ 2.4-ზე ნაჩვენებია მონაცემთა გაბნევის დიაგრამა. ჩვენ ვხედავთ, რომ ჩნდება წრფივი დამოკიდებულება (Y) დოლარსა და (X) მილს შორის.

β_0 და β_1-ის მნიშვნელობათა შეფასებისათვის, ვპოულობთ b_0 და b_1-ის მნიშვნელობებს რომლებიც ახდენენ შემდეგი გამოსახულების მინიმიზაციას:

$\sum_{i=1}^{n}[y_i-(b_0+b_1x_i)]^2$,

სადაც, n შერჩევის ზომაა, ხოლო x_i და y_i X და Y-ის მნიშვნელობებია შერჩევის i-ური ელემენტისათვის. ეს მნიშვნელობები წარმოადგენენ ჩვენს შეფასებებს. მას ჩვენ არ განვიხილავთ როგორც აქ მინიმალური მნიშვნელობის პოვნას. ნებისმიერ სტატისტიკურ პაკეტებს, როგორიცაა MINITAB, SAS ან SPSS გააჩნია წრფივი რეგრესიის მოდული. თუ ვისარგებლებთ ერთ-ერთი ამ პაკეტით წრფივი რეგრესიული ანალიზისათვის, რომელიც ეფუძნება ცხრილ 2.1-ის მონაცემებს, მივიღებთ:

$b_0=274{,}8 \quad b_1=1{,}26.$

ამგვარად, წრფივი დამოკიდებულება ფასდება როგორც:

$$y=274{,}8+1{,}26x+e_x.$$

მგზავრი	მილები (X)	დოლარები (Y)
1	1211	1802
2	1345	2405
3	1422	2005
4	1687	2511
5	1849	2332
6	2026	2305
7	2133	3016
8	2253	3385
9	2400	3090
10	2468	3694
11	2699	3371
12	2806	3998
13	3082	3555
14	3209	4692
15	3466	4244
16	3643	5298
17	3852	4801
18	4033	5147
19	4267	5738
20	4498	6420
21	4533	6059
22	4804	6426
23	5090	6321
24	5233	7026
25	5439	6964

ცხრილი 2.1 მილი და დოლარები American Express ბარათის 25 მფლობელისათვის

სტატისტიკური პაკეტის სხვა ინფორმაცია, რომელიც გამოყენებული იქნა მაგალითში 2.45 წრფივი რეგრესიის ანალიზისათვის მოიცავს შემდეგს:

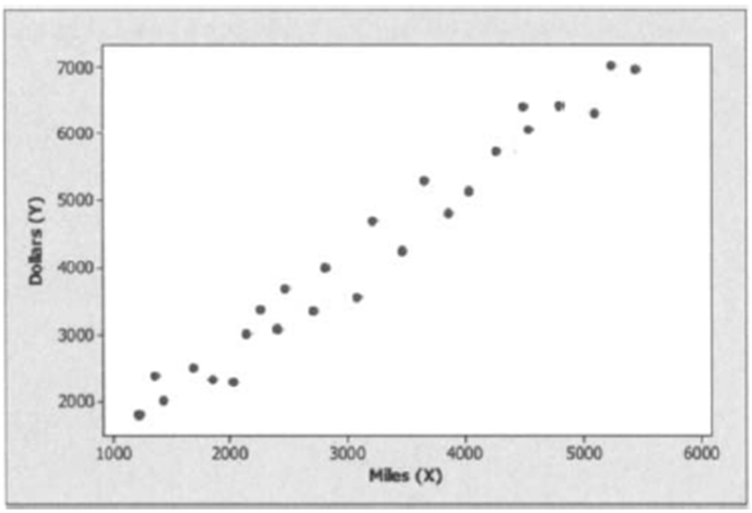
პრედიქტორი	კოეფიციენტი	SE კოეფიციენტი	T	P
Constant	$b_0 = 274.8$	170.3	1.61	.12
x	$b_1 = 1.255$	.0497	25.25	0

$R^2 = 96{,}5\%$.

მოკლედ განვიხილავთ თითოეულ სიდიდეს.

SE კოეფიციენტი: ეს არის სიდიდე, რომელსაც უწოდებენ **კოეფიციენტის სტანდარტულ შეცდომას,** და რომელიც საშუალებას გვაძლევს დავრწმუნდეთ იმაში თუ რამდენად ახლოსაა ჩვენი მიახლოებები ჭეშმარიტ β_0 და β_1 მნიშვნელობებთან (წრფივი დამოკიდებულების გათვალისწინებით). შეგახსენებთ, რომ ნორმალური სიმკვრივის ფუნქციისათვის მასის 95% ხვდება იმ ინტერვალში, რომლის ბოლო წერტილები საშუალოდ $\pm 1{,}96$-ჯერ სტანდარტული გადახრაა. ასე რომ თუ σ_0 b_0-სათვის SE კოეფიციენტია, ჩვენ 95% შეგვიძლია დარწმუნებული ვიყოთ, რომ

$\beta_0 \epsilon (b_0 - 1{,}96\sigma_0, b_0 + 1{,}96\sigma_0)$.



ნახ. 2.4. American Express ბარათის 25 მფლობელისათვის მილების მიხედვით დოლარების გაბნევის წერტილები

მაგალითში 2.45 ჩვენ შეგვიძლია 95%-ით დარწმუნებულები ვიყოთ, რომ

$$\beta_0 \ \epsilon \ (274{,}8 - 1{,}96 \times 170{,}3, \quad 274{,}8 + 1{,}96 \times 170{,}3) = (-58{,}988, \quad 608{,}588)$$

$$\beta_1 \ \epsilon \ (1{,}255 - 1{,}96 \times 0{,}0497, \ 1{,}255 + 1{,}96 \times 0{,}0497 \ ) = (1{,}158, \ 1{,}352).$$

შევნიშნოთ, რომ β_1 -ის შეფასებაში შეიძლება უფრო დარწმუნებულები ვიყოთ.

T: გვაქვს

$$T = \frac{coefficient}{SEcoefficient}$$

რაც უფრო დიდია T-ს მნიშვნელობა უფრო მეტად შეიძლება ვიყოთ დარწმუნებულები, რომ შეფასება ახლოსაა ჭეშმარიტ მნიშვნელობასთან. მიაქციეთ ყურადღება მაგალითში 2.45, რომ T საკმარისად დიდია b_1-სთვის და არც ისე დიდი b_0-სთვის.

P: თუ პარამეტრის (b_0 ან b_1) ჭეშმარიტი მნიშვნელობა 0-ის ტოლია, ეს ნიშნავს, რომ მონაცემების მოპოვების ალბათობა უფრო სავარაუდოა, ვიდრე შედეგის. მაგალით 2.45-ში, თუ $b_0 = 0$, მაშინ მონაცემების მოპოვების ალბათობა უფრო სავარაუდოა, ვიდრე შედეგი, რომლიც 0,12-ია, ხოლო თუ $b_1 = 0$, მაშინ მონაცემების მოპოვების ალბათობა უფრო მეტად სავარაუდოა, ვიდრე შედეგი, რომელიც 0-ია. ამიტომ ჩვენ შეიძლება ძალიან დარწმუნებულები ვიყოთ, რომ $b_1 \neq 0$, მაშინ როცა ვერ ვიქნებით ისე დარწმუნებულნი იმაში, რომ $b_0 \neq 0$. ეს ნიშნავს, რომ მონაცემები ძლიერად გულისხმობს Y-ის X-ზე წრფივ დამოკიდებულებას, მაგრამ ნაკლებ სავარაუდოა, რომ მუდმივა 0-ის ტოლია.

R^2: ეს სიდიდე, რომელსაც **დეტერმინაციის კოეფიციენტს** უწოდებენ, წარმოადგენს პროცენტებში ჩაწერილ კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს. ამგვარად მისი მნიშვნელობა შეადგენს 0%-დან 100%-მდე მნიშვნელობებს. 0% მნიშვნელობა ნიშნავს, რომ X და Y-ის ნიმუშებს შორის არ არის წრფივი დამოკიდებულება, მაშინ როცა 100% მნიშვნელობა ნიშნავს, რომ არსებობს იდეალური წრფივი დამოკიდებულება. ცხადია, რაც უფრო დიდია R^2-ის მნიშვნელობა, მით უფრო დიდია იმის რწმენა, რომ მართლაც არსებობს წრფივი დამოკიდებულება X-ს და Y-ს შორის.

მრავლობითი წრფივი რეგრესია

მრავლობითი წრფივი რეგრესია ანალოგიურია მარტივი წრფივი რეგრესიის, იმის გამოკლებით, რომ ამ დროს არსებობს ერთზე მეტი დამოუკიდებელი ცვლადი. ესე იგი, ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ გვაქვს n რაოდენობის დამოუკიდებელი $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ცვლადი და დამოკიდებული Y ცვლადი ისეთი, რომ:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n + e_{x_1,x_2,\ldots,x_n},$$

სადაც $e_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$ ისეთივეა, როგორიც აღწერილია 2.5.3 პარაგრაფის დასაწყისში.

მაგალითი 2.46. დავუშვათ მიწოდების კომპანიას სურს გამოიძიოს მძღოლების მგზავრობის დროზე დამოკიდებულება განვლილი მილების და მიწოდების რაოდენობის მიხედვით. ვთქვათ გვაქვს მონაცემები ცხრილ 2.2-ში. ჩვენ ვიღებთ შემდეგ შედეგებს ასეთ მონაცემებზე დაყრდნობილი რეგრესიული ანალიზით:

$$b_0 = -0{,}869,$$

$$b_1 = 0{,}062,$$

$$b_2 = 0{,}923.$$

ამგვარად, წრფივი დამოკიდებულება ფასდება როგორც

$y = -0{,}8689 + 0{,}061x_1 + 0{,}923x_2 + e_{x_1x_2}$.

უფრო მეტიც, ჩვენ გვაქვს შემდეგი:

პრედიქტორი	კოეფიციენტი	SE კოეფიციენტი	T	P
Constant	$b_0 = -.8687$	.9515	−.91	.392
მილები (X_1)	$b_1 = .061135$	.009888	6.18	0
ჩაფრენა (X_2)	$b_2 = .9234$	.2211	4.18	.004

$R^2 = 90{,}4\%$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ შეგვიძლია საკმაოდ დარწმუნებული ვიყოთ წრფივი დამოკიდებულების არსებობაში ორ ცვლადის პირობებში, მაგრამ მუდმივი წევრი სავსებით შეიძლება 0-ის ტოლი იყოს.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 2.1

სავარჯიშო 2.1 ვთქვათ, ექსპერიმენტი იყოს 52 ბანქოს დასტიდან ზედა კარტის ნახატის გამოცნობა. ვთქვთ $Heart$ იყოს ხდომილობა, როცა გულს ვიღებთ, და $RoyalCard$ იყოს ხდომილობა როცა სამეფო კარტი მოდის.

გამოვთვალოთ $P(Heart)$.

გამოვთვალოთ $P(\,RoyalCard\,)$.

გამოვთვალოთ $P(Heart \cup RoyalCard)$.

სავარჯიშო 2.2 დაამტკიცეთ თეორემა 2.1.

სავარჯიშო 2.3. მაგალითმა 2.5 გვიჩვენა, რომ ბანქოს დასტიდან ზედა კარტის გათამაშებაში ხდომილობა $(Jack)$ არაა დამოკიდებული ხდომილობა $(Club)$-ზე. ე.ი. გვაჩვენა, რომ $P(Jack|Club) = P(Jack)$.

აჩვენეთ, რომ ხდომილობა $Club$ არაა დამოკიდებული ხდომილობა $Jack$-ზე. ე.ი. აჩვენეთ, რომ $P(Jack \cap Club) = P(Jack)P(Club)$.

აჩვენეთ, რომ ზოგადად, თუ $P(E) \neq 0$ და $P(F) \neq 0$, მაშინ $P(E|F) = P(E)$ მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P(F|E) = P(F)$ და თითოეული მათგანი სრულდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

სავარჯიშო 2.4. E სიმრავლის დამატება შედგება Ω-ს ყველა იმ ელემენტისაგან რომელიც არაა E-ში და აღინიშნება $\bar{E}$-ით.

აჩვენეთ, რომ E დამოუკიდებულია F-სგან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\bar{E}$ დამოუკიდებულია F-სგან, სამართლიანია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\bar{E}$ დამოუკიდებულია $\bar{F}$-სგან.

მაგალითმა 2.6 აჩვენა, რომ ნახ. 2.1-ზე გამოსახული ობიექტებისათვის, A და $Square$ არიან პირობითად დამოუკიდებელნი მოცემული $black$ და მოცემული $White$-სთვის. ვთქვათ, B არის ყველა ობიექტის სიმრავლე, რომელიც შეიცავს “ B “-ს, და $Circle$ -ს არის ყველა მრგვალი ობიექტის სიმრავლე. გამოიყენეთ მიღებული შედეგი იმისათვის, რომ დაასკვნათ რომ A და $Circle$, B და $Square$ და B-ს, და $Circle$ არიან ერთმანეთისაგან პირობითად დამოუკიდებელნი მოცემულობით $black$ ან $White$-სთვის.

სავარჯიშო 2.5. აჩვენეთ, რომ ბანქოს დასტიდან ზედა კარტის გათამაშებაში ხდომილობა $E = \{kh, ks, qh\}$ და ხდომილობა $f = \{kh, kc, qh\}$ არიან პირობითად დამოუკიდებელნი, ხდომილობა $G = \{kh, ks, kc, kd\}$ მოცემულობით. განსაზღვრეთ, წარმოადგენენ თუ არა E და F პირობითად დამოუკიდებელნი $\bar{G}$ მოცემულობით.

სავარჯიშო 2.6. დაამტკიცეთ ზოგადი ალბათობის წესი, რომელიც გვეუბნება, რომ თუ ჩვენ გვაქვს n რაოდენობის ურთიერთექსკლუზიური და ამომწურავი E_1, E_2, …, E_n ხდომილობა, მაშინ ნებისმიერი სხვა F ხდომილობისათვის:

$$P(F) = P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \cdots + P(F \cap E_n).$$

სავარჯიშო 2.7. ვთქვათ Ω არის ნახ.2.1-ზე გამოსახული ყველა ობიექტის სიმრავლე, და მიანიჭეთ თითოეულ ობიექტს $1/13$ ალბათობა. ვთქვათ A არის სიმრავლე ყველა ობიექტისა რომელიც შედგება „ A“ და $Square$ არის სიმრავლე, რომელიც შედგება კვადრატული ობიექტებისაგან. პირდაპირ გამოთვალეთ $P(A|Square)$ ბაიესის თეორემის გამოყენებით.

პარაგრაფი 2.2

სავარჯიშო 2.8. განვიხილოთ მაგალით 2.18-ში მოყვანილი ალბათური სივრცე და შემთხვევითი სიდიდეები.

განვსაზღვროთ S-ის და W-ს ერთობლივი განაწილება, განვსაზღვროთ W-ის და H-ის ერთობლივი განაწილება, და დანარჩენი მნიშვნელობები S-ის, H-ის და W-ის ერთობლივ განაწილებაში.

აჩვენეთ, რომ S-ის და W-ს ერთობლივი განაწილება შეიძლება მიღებული იქნას S-ის, H-ის და W-ის ერთობლივ განაწილებების შეჯამებით W-ს ყველა მნიშვნელობის მიხედვით.

სავარჯიშო 2.9. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ალბათობების ერთობლივი განაწილებები. გამოიყენეთ ზოგადი ალბათობის კანონი, იმის საჩვენებლად, რომ ზოგად შემთხვევაში ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მიიღება სხვა ცვლადების ყველა მნიშვნელობის მიხედვით შეჯამებით.

სავარჯიშო 2.10. ჯაჭვის წესი გვამცნობს, რომ n შემთხვეითი სიდიდისათვის $X_1, X_2, \dots, X_n$, რომლებიც განსაზღვრულია იმავე შესარჩევ $\boldsymbol{\Omega}$ სივრცეზე:

$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \dots \times P(x_2 | x_1) \times P(x_1)$,

როდესაც $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$. დამტკიცეთ ეს წესი.

სავარჯიშო 2.11. გამოიყენეთ სავარჯიშო 2.4-ის შედეგები (1) იმ დასკვნის გასაკეთებლად, რომ ეს მხოლოდ აუცილებელი იყო მაგალით 2.20-ში $P(r,t) = P(r,t|s_1)$-ის საჩვენებლად r-ის და t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის.

სავარჯიშო 2.12. ვთქვათ, გვაქვს ორი შემთხვევითი სიდიდიდე X და Y $\{x_1, x_2\}$ და $\{y_1, y_2\}$ სივრცეებით შესაბამისად.

გამოიყენეთ სავარჯიშო 2.4.-ის შედეგები (1) იმ დასკვნის გასაკეთებლად, რომ ჩვენ გვჭირდება მხოლოდ ვაჩვენოთ $P(y_1|x_1) = P(y_1)$ $I_p(X,Y)$ დასკვნა.

შეადგინეთ მაგალითი, რომელიც აჩვენებს, რომ თუ X -ს და Y -ს ორივეს ერთად გააჩნია სივრცეები, რომლებიც ორზე მეტ მნიშვნელობას შეიცავს, მაშინ ჩვენ გვჭირდება იმის შემოწმება, წარმოადგენს კი $P(y|x) = P(y)$ x-ს და y-ის ყველა მნიშვნელობისათვის $I_p(X,Y)$ დასკვნის გაკეთება.

სავარჯიშო 2.13. განვიხილოთ მაგალითში 2.18 მოყვანილი ალბათური სივრცე და შემთხვევითი სიდიდეები.

არიან H და W დამოუკიდებელნი?

არიან H და W პირობითად დამოუკიდებელნი S მოცემულობით?

თუ ეს პატარა ნიმუში მიუთითებს ცვლადებს შორის ალბათურ ურთიერთობაზე რაღაც პოპულაციაში, რა მიზეზობრივი ურთიერთობი შეიძლება იქნას გათვალისწინებული ამ დამოკიდებულებისათვის და პირობითი დამოკიდებულებისათვის?

სავარჯიშო 2.14. მაგალითში 2.23 ის დატოვებულია სავარჯიშოს სახით ყველა მნიშვნელობის გამოსასახად V-ის v, L-ის l, C-ის c, S-ის s და F-ის f, რომ

$P(v, l|s, f, c) = P(v, l|c)$.

აჩვენეთ ეს.

პარაგრაფი 2.3

სავარჯიშო 2.15. კერიჩმა [1946] ჩაატარა ექსპერიმენტი – ბევრჯერ ააგდო მონეტა და აღმოაჩინა, რომ ფარდობითი სიხშირე, როგორც ჩანს უახლოვდება ზღვარს. ე.ი. მან აღმოაჩინა, რომ 100 აგდების შემდეგ ფარდობითი სიხშირე შეიძლება ყოფილიყო 0,51, 1000 აგდების შემდეგ შეიძლება ყოფილიყო 0,508, 10 000, აგდების შემდეგ შეიძლება ყოფილიყო 0,5003, ხოლო 100 000 აგდების შემდეგ ეს შეიძლება ყოფილიყო 0,50006. შაბლონი იმაში მდგომარეობს, რომ 5 ათწილადის მძიმიდან პირველ ადგილზეა ყველა ფარდობით სიხშირეში პირველი 100 აგდების შემდეგ, 0 მეორე ადგილზეა 1000 აგდების შემთხვევაში ყველა ფარდობით სიხშირეში და ა.შ. ააგდეთ მონეტა არანაკლებ 1000-ჯერ და დააკვირდით მიიღებთ თუ არა ანალოგიურ შედეგებს.

სავარჯიშო 2.16. აარჩიეთ რაიმე მოსალოდნელი ხდომილობა. ეს შეიძლება იყოს სპორტული ხდომილობა ან ის, რომ თქენ მიიღებთ ამ კურსში „*A*“-ის. განსაზღვრეთ თქვენი ალბათობა ლინდლის [1985] მეთოდის გამოყენებით ურნიდან ბურთის ამოღების გათამაშების განუსაზღვრელი ხდომილობის შედარებისათვის.

პარაგრაფი 2.4

სავარჯიშო 2.17. გულმავიწყმა ექთანმა ბატონ ნგუენს წამლის ტაბლეტი ყოვლდღე უნდა მისცეს. იმის ალბათობა, რომ მას მოცემულ დღეს ტაბლეტის მიცემა დაავიწყდება, ტოლია 0,3-ის. თუ ის მიიღებს წამალს, ალბათობა იმისა რომ მოკვდება, ტოლია 0,1-ის. თუ არ მიიღებს – ალბათობა იქნება 0,8. დღეს ბატონი ნგუენი გარდაიცვალა. გამოიყენეთ ბაიესის თეორემა იმის ალბათობის გამოსათვლელად, რომ ექთანს დაავიწყდა მისთვის ტაბლეტის მიცემა.

სავარჯიშო 2.18. ტეხასში ნავთობის ჭაბურღილი შეიძლება გაიბურღოს პროფესორ ნეაპოლიტანის ფერმაში. იქიდან გამომდინარე, რაც მოხდა ანალოგიურ ფერმებში, ჩვენ ვსჯელობთ ნავთობის არსებობის ალბათობაზე, რომლის მნიშვნელობა არის 0,5, მარტო ბუნებრივი აირის არსებობის ალბათობა შეიძლება იყოს 0,2 და იმის ალბათობა, რომ არც ერთი იყოს და არც მეორე 0,3-ია. თუ ნავთობი იქნება, გეოლოგიური გამოკვლევა მოგვცემს დადებით შედეგს 0,9 ალბათობით; თუ აირი იქნება, ის მოგვცემს დადებით შედეგს 0,3 ალბათობით, და თუ არც ერთი არაა დადებითი ალბათობა, იქნება 0,1-ის ტოლი. ვთქვათ ტესტი დადებითად ბრუნდება. გამოიყენეთ ბაიესის თეორემა ნავთობის არსებობის ალბათობის გამოსათვლელად.

პარაგრაფი 2.5

სავარჯიშო 2.19. ვთქვათ აგდებენ ჩვეულებრივ ექვსწახნაგა კამათელს. მოთამაშე მიიღებს დოლარების რაოდენობას, რომელიც ასახავს წერტილებს კამათელზე გარდა

გამონაკლისა, როცა მოვა ხუთი ან ექვსი წერტილი, ამ შემთხვევაში მოთამაშე დაკარგავს 5 ან 6 დოლარს შესაბამისად.

გამოთვალეთ მოსალოდნელი თანხა, რომელსაც მოთამაშე მოიგებს ან წააგებს.

გამოთვალეთ ფულადი თანხის დისპერსია და სტანდარტული გადახრა მოთამაშე მოიგებს ან წააგებს.

თუ თამაში 100-ჯერ გამეორდება, გამოთვალეთ ყველაზე მეტი რამდენი შეუძლია მოიგოს მოთამაშემ, რამდენი შეიძლება წააგოს და თანხა, რომლის მოგების ან წაგების მოლოდინი შეიძლება ჰქონდეს მოთამაშეს.

სავარჯიშო 2.20. დაამტკიცეთ თეორემა 2.3.

სავარჯიშო 2.21. დაამტკიცეთ თეორემა 2.4.

სავარჯიშო 2.22. დაამტკიცეთ თეორემა 2.5.

სავარჯიშო 2.23. დაამტკიცეთ თეორემა 2.7.

სავარჯიშო 2.24. ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი მონაცემები კოლეჯის 10 სტუდენტის შესახებ მათი საშუალო შეფასებები (GPA) და გამოსაშვებ გამოცდაზე მიღებული ქულები (GRE):

სტუდენტი	GPA	GRE
1	2.2	1400
2	2.4	1300
3	2.8	1550
4	3.1	1600
5	3.3	1400
6	3.3	1700
7	3.4	1650
8	3.7	1800
9	3.9	1700
10	4.0	1800

- შეიმუშავეთ (GPA)-ს (GRE)-სთან შედარების გაბნევის დიაგრამა.
- განსაზღვრეთ შერჩევის კოვარიაცია.
- განსაზღვრეთ ნიმუშის კორელაციის კოეფიციენტი. რას გეუბნებათ ეს სიდიდე ამ ორ ცვლადს შორის ურთიერთდამოკიდებულების შესახებ?

სავარჯიშო 2.25. განიხილოთ ისევ სავარჯიშო 2.24-ში მოყვენილი მონაცემები. ზოგიერთი სტატისტიკური პაკეტის გამოყენებით, ისეთის როგორიცაა MINITAB შეასრულეთ წრფივი რეგრესია GRE $-$სთვის GPA-ს თვალსაზრისით აჩვენეთ b_0 და b_1 მნიშვნელობები და SE-ს კოეფიციენტისათვის, თითოეული T-სთვის და P-სთვის მნიშვნელობები. აჩვენეთ R^2. გვაძლევენ ეს შედეგები წრფივ დამოკიდებულებას GRE-ს და GPA-ს შორის? არ გეჩვენებათ, რომ მუდმივ წევრს მნიშვნელობა აქვს?

სავარჯიშო 2.26. დავუშვათ, გვაქვს იგივე მონაცემები, რაც გვქონდა სავარჯიშო 2.24-ში იმის დამატებით, რომ ახლა ჩვენ ასევე გვაქვს ოჯახის შემოსავლების მონაცემები შემდეგნაირად:

სტუდენტი	GPA	GRE	შემოსავალი ($1000)
1	2.2	1400	44
2	2.4	1300	40
3	2.8	1550	46
4	3.1	1600	50
5	3.3	1400	40
6	3.3	1700	54
7	3.4	1650	52
8	3.7	1800	56
9	3.9	1700	50
10	4.0	1800	56

ზოგიერთი სტატისტიკური პაკეტის გამოყენებით, ისეთის როგორიცაა MINITAB შეასრულეთ წრფივი რეგრესია GRE-სთვის GPA-ს თვალსაზრისით. აჩვენეთ b_0, b_1და b_2 მნიშვნელობები და SE-ს კოეფიციენტისათვის, თითოეული T-სთვის და P-სთვის მნიშვნელობები. აჩვენეთ R^2. როგორც ჩანს ჩვენ გავაუმჯობესეთ პროგნოზირების სიზუსტე GRE-სთვის, როცა გავითვალისწინეთ შემოსავლები?

სავარჯიშო 2.27. დავუშვათ, გვაქვს იგივე მონაცემები რაც გვქონდა სავარჯიშო 2.24-ში იმის დამატებით, რომ ახლა გვაქვს ასევე მონაცემები ამერიკული კოლეჯების სტუდენტების შეფასების შესახებ (ACT) შემდეგნაირად:

სტუდენტი	GPA	GRE	ACT
1	2.2	1400	22
2	2.4	1300	23
3	2.8	1550	25
4	3.1	1600	26
5	3.3	1400	27
6	3.3	1700	27
7	3.4	1650	28
8	3.7	1800	29
9	3.9	1700	30
10	4.0	1800	31

ზოგიერთი სტატისტიკური პაკეტის გამოყენებით, ისეთის როგორიცაა MINITAB, შეასრულეთ წრფივი რეგრესია GRE-სთვის GPA-ს და ACT-ს თვალსაზრისით. აჩვენეთ b_0, b_1 და b_2 მნიშვნელობები და SE-ს კოეფიციენტისათვის, T-სთვის და P-სთვის თვითოეულისათვის მნიშვნელობები. აჩვენეთ R^2. როგორც ჩანს, ჩვენ გავაუმჯობესეთ

პროგნოზირების სიზუსტე GRE-სთვის, როცა გავითვალისწინეთ ACT-ს ქულები. და თუ არა, რას ფიქრობთ ამის ასახსნელად?

სავარჯიშო 2.28. გამოიყენეთ სავარჯიშო 2.27-ის მონაცემები და ზოგიერთი სტატისტიკური პაკეტის გამოყენებით, ისეთის როგორიცაა MINITAB შეასრულეთ წრფივი რეგრესია GRE-სთვის ACT-ს თვალსაზრისით. აჩვენეთ b_0 და b_1 მნიშვნელობები და SE-ს კოეფიციენტისათვის, T-სთვის და P-სთვის თვითოეულისათვის მნიშვნელობები. აჩვენეთ R^2. დაუკავშირეთ ეს შედეგი სავარჯიშო 2.27-ში მიღებულ შედეგს.

თავი 3

ბაიესური ქსელები

3.1 რა არის ბაიესური ქსელი?

შეგახსენებთ, რომ თავი 2-ის მაგალითში 2.29 ჩვენ გამოვთვალეთ ჯოს აივ ვირუსის მატარებლის ალბათობა, რომელიც მას დაუდგინდა $ELISA$ ტესტის დადებითობით, კერძოდ, ვიცოდით, რომ

$P(ELISA = positiv|HIV = present) = 0.999$

$P(ELISA = positiv|HIV = absent) = 0.02$

და

$P(HIV = present) = 0{,}0001.$

შემდეგ გამოსათვლელად გამოვიყენეთ ბაიესის თეორემა:

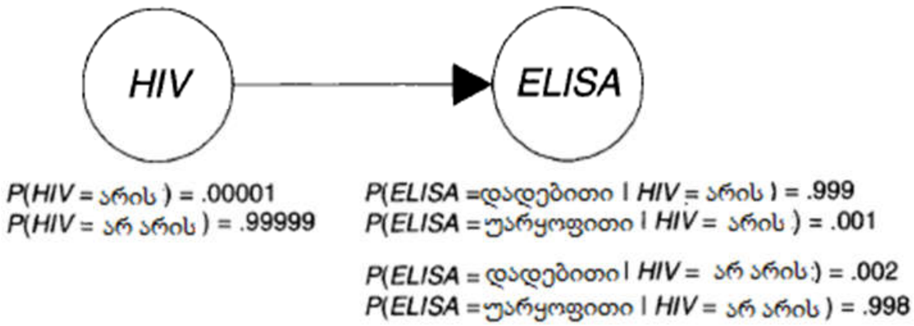
$P(present|positive) =$

$$= \frac{P(positivt|present)P(present)}{P(pveositive|present)P(present) + P(positive|absent)P(absent)} =$$

$$= \frac{(0{,}00001)}{(0{,}999)(0{,}00001) + (,0002)(0{,}99999)} =$$

$= 0{,}00497.$

ამ გამოთვლით მიღებული ინფორმაცია შეჯამებულია ნახ. 3.1-ზე, რომელიც წარმოადგენს ორკვანძიან/ცვლადიან ბაიესის ქსელს. გაითვალისწინეთ, რომ ეს არის შემთხვევითი ცვლადების HIV-ს და $ELISA$-ის მიერ მიმართული აციკლური გრაფი (DAG) და მიზეზობრივი ურთიერთობა HIV-დან და $ELISA$-მდე კიდეებით. ე.ი. აივის (HIV-ის) არსებობა მიზეზობრივ ზემოქმედებას ახდენს იმაზე, არის თუ არა ტესტის შედეგი დადებითი; ამიტომ არის კიდეები HIV-დან და $ELISA$-მდე. გარდა იმისა, რომ ნაჩვენები DAG წარმოადგენს მიზეზობრივ ურთიერთობებს, ნახ. 3.1-ზე ნაჩვენებია აივის გავრცელების წინა ალბათობა და $ELISA$-ის პირობითი ალბათობების განაწილებები მის მშობელთა აივის თითოეული მნიშვნელობის გათვალისწინებით. საზოგადოდ, ბაიესის ქსელი შედგება DAG-ისგან, რომელთა წახნაგები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებებს, რომლებიც ხშირად (მაგრამ არა ყოველთვის) მიზეზობრივია; თითოეული ცვლადის ალბათობების წინა განაწილებები ეს არის ფესვი DAG-ში; არაფესვი ცვლადის ალბათობების პირობითი განაწილება მოიცემა თავიანთი მშობლების მნიშვნელობათა ნაკრებიდან. ჩვენ გამოვიყენეთ ტერმინები „კვანძი“ და „ცვლადი“ ურთიერთშესატყვისები, როცა ვმსჯელობთ ბაიესის ქსელებზე.



ნახ 3.1 ორკვანძიანი ბაიესის ქსელი

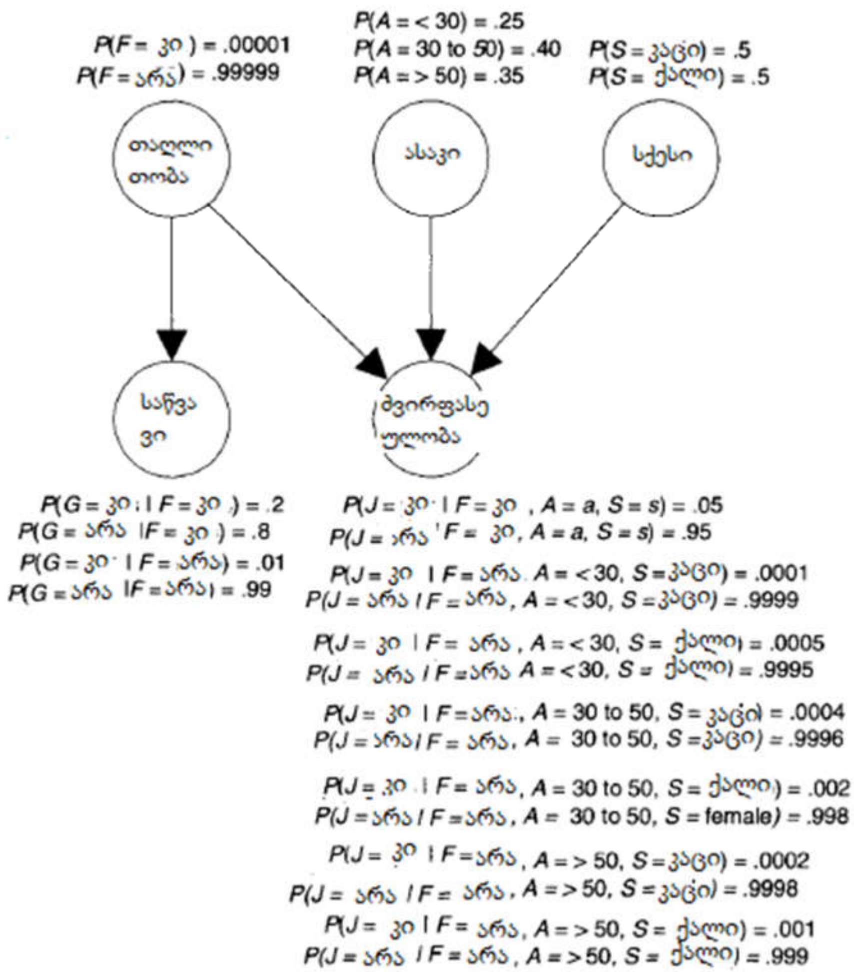
მოდი მოვახდინოთ უფრო რთული ბაიესის ქსელის ილუსტრირება, განვიხილოთ საკრედიტო ბარათებთან დაკავშირებული თაღლითობის აღმოჩენის პრობლემა. დავუშვათ, ჩვენ განვსაზღვრეთ შემდეგი ცვლადები, როგორც პრობლემასთან კავშირის მქონეები:

ცვლადი	რას გამოსახავს ცვლადი
თაღლითი (F)	მიმდინარე შესყიდვა არის თუ არა გაყალბებული
საწვავი(G)	შეძენილია თუ არა საწვავი უკანასკნელ 24 საათში
ძვირფასეულობა(J)	შეძენილია თუ არა ძვირფასეულობა უახლოეს 24 საათში
ასაკი(A)	ბარათის მფლობელის ასაკი
სქესი (S)	ბართის მფლობელის სქესი

ცვლადი	რა არის ცვლადი
თაღლითობა(F)	მიმდინარე შესყიდვა თუ გაყალბებულია
გაზი(G)	ბოლო 24 საათში გაზის შეძენა მოხდა
სამკაულები(J)	შეძენილია თუ არა სამკაული ბოლო 24 საათში
ასაკი(A)	ბარათის მფლობელის ასაკი
სქესი(S)	ბარათის მფლობელის სქესი

ყველა ეს ცვლადი ერთმანეთთან არის დაკავშირებულნი. ე.ი.საკრედიტო ბარათის ქურდი, უფრო მოსალოდნელია ყიდულობდეს გაზს და ძვირფასეულობას, ხოლო შუახნის ქალები უფრო ყიდულობენ საუველირიო ნაწარმს მაშინ, როცა ახალგაზრდები უფრო მეტად სამკაულებს ყიდულობენ. ნახ. 3.2-ზე ნაჩვენებია DAG ჯგუფი, რომელიც წარმოადგენს ამ მიზეზობრივ დამოკიდებულებებს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ისინი ასევე გვიჩვენებენ თითოეული ფესვის გარეშე ცვლადის პირობით განაწილებას მისი მშობლების მნიშვნელობათა თითოეულ ნაკრებში ცვლად Jewelry–ში სამი მშობელია, და არსებობს ამ

მშობლების მნიშვნელობათა თითოეული კომბინაციისათვის ალბათობების პირობითი განაწილება. DAG და პირობითი განაწილება ერთად შედგენენ ბაიესის ქსელს.



ნახ 3.2 საკრედიტო ბარათის გაყალბების გამოვლენის ბაიესის ქსელი

თქვენ შეიძლება გქონდეთ რამდენიმე კითხვა ამ ბაიესის ქსელთან დაკავშირებით. პირველი, თქვენ შეიძლება იკითხოთ: „რა მნიშვნელობა აქვს მას?“ ე.ი. რა სასარგებლო ინფორმაცია შეიძლება მივიღოთ მისგან? შეგახსენებთ, როგორ გამოვიყენეთ ბაიესის თეორემა $P(HIV = present|ELISA = positive)$-ის გამოსათვლელად ნახ. 3.1-ზე გამოსახული ბაიესის ქსელში მოცემული ინფორმაციიდან გამომდინარე. ანალოგიურად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ საკრედიტო ბარათის გამოყენების თაღლითობის ალბათობა, ამ ბაიესის ქსელში სხვა ცვლადების მნიშვნელობები. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ $P(F = yes|G = yes, J = yes, A =< 30, S = female)$. თუ ეს ალბათობა საკმარისად მაღალია ჩვენ შეგვიძლია უარვყოთ მიმდინარე შეძენა ან მოვითხოვოთ დამატებითი იდენტიფიკაცია ისე, როგორც ეს მოხდა ნახ. 3.1-ზე გამოსახული ბაიესის სქემის დროს. ბაიესის თეორემის გამოყენება გამოთვლისას არაა მარტივი, ეს უფრო რთული ალგორითმის გამოყენებით

ხდება. მეორე, თქვენ შეიძლება იკითხოთ, როგორ მივიღეთ ქსელში ალბათობები. ისინი შეიძლება მიღებულ იქნეს ექსპერტის სუბიექტური განსჯით ან ამ სფეროში მოცემული მონაცემებით. მე-4 თავში ჩვენ განვიხილავთ მონაცემთა მიხედვით შესწავლის მეთოდებს, ხოლო II და III ნაწილებში მოვიყვანთ მათი ექსპერტებისაგან მიღების და მონაცემებიდან შესწავლის მაგალითებს. ბოლოს თქვენ შეიძლება იკითხოთ, რატომ ვცდილობთ ასაკის და სქესის ცვლადების ჩართვას, მაშინ როცა ბარათის მფლობელის ასაკს და სქესს არავითარი კავშირი არა აქვს იმასთან იყო თუ არა ბარათი მოპარული (გაყალბებული). ე.ი. თაღლითობას არანაირი მიზეზობრივი გავლენა არ აქვს მფლობელის ასაკზე და სქესზე და პირიქით. იზეზი, რისთვისაც ეს ცვლადები შემოვიტანეთ, საკმაოდ დახვეწილია. ეს იმასთანაა დაკავშირებული, რომ თაღლითობას, ასაკს და სქესს საერთო ეფექტი აქვთ, კერძოდ, საიუველირო ნაწარმის ყიდვა. მაშასადამე, როცა ჩვენ ვიცით, რომ შეძენილია საიუველირო ნაწარმი, სამი ცვლადი ალბათურად დამოკიდებული აღმოჩნდება, იმის გამო, რასაც ფსიქოლოგები დისკონტირებას უწოდებენ. მაგალითად, თუ საიუველირო ნაწარმი ნაყიდი იყო ბოლო 24 საათის განმავლობაში, მაშინ იზრდება გაყალბების ალბათობა. მაგრამ, თუ ბარათის მფლობელი საშუალო ასაკის ქალია, გაყალბების ალბათობა მცირდება (დისკონტირებით), იმიტომ რომ ასეთი ქალები მიდრეკილნი არიან სამკაულების ყიდვისკენ. ე.ი. ის ფაქტი, რომ ბარათის მფლობელი საშუალო ასაკის ქალია, ხსნის საიუველირო ნაწარმის ყიდვას. მეორე მხრივ, თუ ბარათის მფლობელი ახალგაზრდა კაცია, გაყალბების ალბათობა იზრდება, რამდენადაც ასეთი კაცები ნაკლებ სავარაუდოა, რომ შეიძენენ საიუველირო სამკაულებს.

ჩვენ არაოფიციალურად წარმოვადგინეთ ბაიესის ქსელები, მათი თვისებები და სარგებლიანობა. შემდგომში ჩვენ ფორმალურად განვავითარებთ მათ მათემატიკურ თვისებებს.

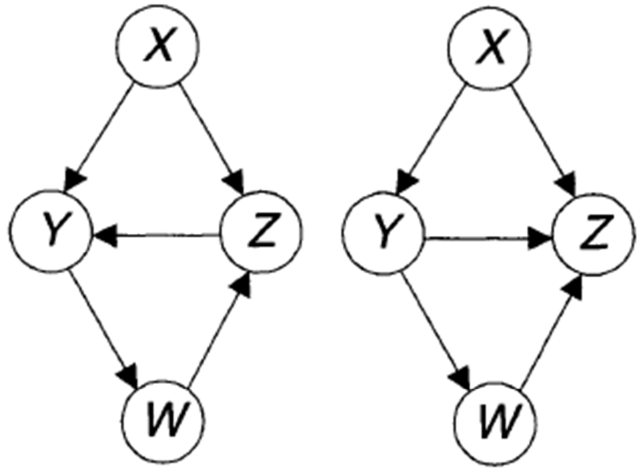
3.2 ბაიესის ქსელების თვისებები

ბაიესის ქსელის განმარტების შემდეგ, ვაჩვენოთ ჩვეულებრივ როგორ არიან ისინი წარმოდგენილნი

3.2.1 ბაიესის ქსელის განსაზღვრება

უპირველეს ყოვლისა განვიხილოთ DAG-ის განსაზღვრება. **ორიენტირებულ გრაფს** წარმოადგენს (V, E) წყვილი, სადაც V სასრული არაცარიელი სიმრავლეა, რომლის

ელემენტებს **კვანძებს** (ან წვეროებს) უწოდებენ, ხოლო E არის V ელემენტების დალაგებული წყვილების სიმრავლე. E - ს ელემენტებს უწოდებენ **მიმართულ კიდეებს**, და თუ $(X,Y) \in E$, ჩვენ ვამბობთ, რომ არსებობს წიბო X-დან Y-მდე. ნახ. 3.3 ორიენტირებული გრაფია



ნახ. 3.3. ორივე გრაფიკა წარმოადგენს ორიენტირებულ გრაფს; მხოლოდ ერთი (b) -დან წარმოადგენს მიმართულ აციკლურ გრაფს.

ამ ნახატზე კვანძების ნაკრებია

$V = \{X, Y, Z, W\}$,

და წიბოების სიმრავლე არის:

$$E = \{(X,Y), (X,Z), (Y,W), (W,Z), (Z,Y)\}$$

ორიენტირებულ გრაფში გზა ეს არის ისეთი კვანძების $[X_1, X_2, \dots, X_k]$ მიმდევრობა, რომ $(X_{i-1}, X_i) \in E$ $2 \le i \le k$ –სთვის. მაგალითად, $[X, Y, W, Z]$ ეს არის გზა ნახ. 3.3 (a) გამოსახულ მიმართულ გრაფში. ორიენტირებულ გრაფში ჯაჭვი წარმოადგენს ისეთი $[X_1, X_2, \dots, X_k]$ კვანძების მიმდევრობას, რომ $(X_{i-1}, X_i) \in E$ ან$(X_i, X_{i-1}) \in E$ $2 \le i \le k$ –სთვის. მაგალითად, $[Y, W, Z, X]$ ჯაჭვს წარმოადგენს ნახ. 3.3 (b) გამოსახულს ორიენტირებულ გრაფში, მაგრამ ეს გზა არაა. ციკლი ორიენტირებულ გრაფში ეს არის გზა კვანძიდან თავისთავამდე. ნახ. 3.3 (a)-ში $[Y, W, Z, Y]$ წარმოადგენს Y-დან Y-მდე ციკლს. მაგრამ ნახ. 3.3 (b)-ში $[Y, W, Z, Y]$ არ წარმოადგენს ციკლს, იმიტომ რომ ის გზა არაა. მიმართულ $\mathbb{G}$ გრაფს უწოდებენ **მიმართულ აციკლურ გრაფს** (DAG) თუ ის არ შეიცავს ციკლებს. ნახ. 3.3 (b) DAG-ია, ხოლო ნახ. 3.3 (a) – არა.

მოცემულია DAG $\mathbb{G} = (V, E)$ და V-ში X და Y კვანძები, Y-ს უწოდებენ X-ის **მშობელს,** თუ არსებობს წახნაგი Y-დან X და Y-მდე, Y-ს უწოდებენ X-ის **შთამომავალს** და X-ს

უწოდებენ Y-ის **წინაპარს,** თუ არსებობს გზა X-დან Y-მდე და Y-ს უწოდებენ X-ის **არაშთამომავალს,** თუ Y არ არის X-ის შთამომავალი და Y არ არის X-ის მშობელი[5].

ახლა ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი განსაზღვრება:

განსაზღვრება 3.1. დავუშვათ, რომ გვაქვს შემთხვევითი ცვლადების P ერთობლივი ალბათობების განაწილება რაღაც V სიმრავლეში და $DAG\ \mathbb{G} = (V, E)$. ვიტყვით, რომ $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობებს თუ თითოეული $X \in V$ ცვლადისათის X პირობითად დამოუკიდებელია მისი ყველა არაშთამომავლის სიმრავლიდან, მშობლების ყველა სიმრავლის გათვალისწინებით. თავი 2-ის პარაგრაფ 2.2.2-ში შემოტანილი აღნიშვნის გამოყენებით, რომელიც ნიშნავდა თუ X-ის მშობლების სიმრავლეს და არაშთამომავლების სიმრავლეს შესაბამისად აღვნიშნავთ PA და ND-თი, მაშინ:

$I_P(X, ND|PA)$.

თუ $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობებს, მაშინ $(\mathbb{G}, P)$-ს ვუწოდებთ **ბაიესის ქსელს**.

მაგალითი 3.1. გავიხსენოთ თავი 2-ის ნახ. 2.1, რომელიც ისევ ჩანს ნახ. 3.4-ზე. თავი 2-ის მაგალით 2.21-ში ჩვენ მივანიჭეთ ნახატზე თითოეულ ობიექტს P $1/13$ და განვსაზღვრეთ ეს ცვლადები სიმრავლეზე, რომლიც ამ ობიექტებს შეიცავს:

ნახ 3.4: შემთხვევითი ცვლადები L და S არ არიან დამოუკიდებელი, მაგრამ ისინი არიან პირობითად დამოუკიდებელი C მოცემულობით.

ცვლადი	მნიშვნელობა	ამ მნიშვნელობის შესაბამისი შედეგი
L	l_1	ყველა ობიექტი, რომელიც შეიცავს "A"
	l_2	ყველა ობიექტი, რომელიც შეიცავს "B"
S	s_1	ყველა კვადრატული ობიექტი
	s_2	ყველა წრიული ობიექტი
C	c_1	ყველა შავი ობიექტი
	c_2	

[5] არ არის სტანდარტი, რომ გამორიცხოს კვანძის მშობლები მისი არა შთამომავლებისგან, მაგრამ ეს განსაზღვრება უკეთ ემსახურება ჩვენს მიზნებს.

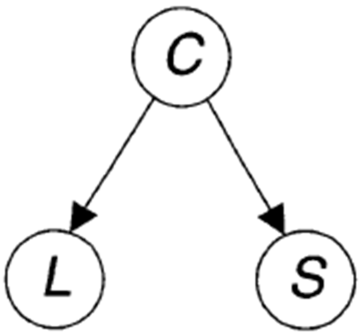
		ყველა თეთრი ობიექტი

შემდგომ ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ L და S პირობითად დამოუკიდებელნი არიან C მოცემულობით. ე.ი. თუ გამოვიყენებთ თავი 2-ში შემოტანილ აღნიშვნას, გვექნება:

$I_P(L,S|C)$.

განვიხილოთ $DAG\ \mathbb{G}$ ნახ.3.5-ზე. ამ DAG-სთვის გვაქვს შემდეგი:

კვანძი	მშობლები	არაშთამომავლები
L	C	S
S	C	L
C	$\varnothing$	$\varnothing$



ნახ. 3.5. L ,S და C -ს ალბათობათა ერთობლივი განაწილება წარმოადგენს ბაიესის ქსელს ამ DAG-ით.

იმისათვს, რომ $(\mathbb{G},P)$-მ დააკმაყოფილოს მარკოვის პირობა, ჩვენ უნდა გვქონდეს:

$$I_P(L,S|C)$$

$$I_P(S,L|C).$$

შევნიშნოთ, რომ რამდენედაც C-ს არ გააჩნია არაშთამომავლები, ჩვენ არ გვაქვს პირობითი დამოუკიდებლობა C-სთვის. რამდენადაც დამოუკიდებლობა სიმეტრიულია, $I_P(L,S|C)$ გულისხმობს $I_P(L,S|C)$-ს. ამიტომ მარკოვის პირობით გათვალისწინებული პირობითი დამოუკიდებლობა დაკმაყოფილებულია და $(\mathbb{G},P)$ არის ბაიესის ქსელი. შემდგომში ჩვენ დამატებით მოვახდენთ მარკოვის პირობის ილუსტრირებას უფრო კომპლექსური DAG-ით.

მაგალითი 3.2. განვიხილოთ $DAG\ \mathbb{G}$ ნახ.3.6-ზე. თუ $(\mathbb{G},P)$ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას X,Y,Z,W და V-ს რაღაც P ალბათური განაწილებით, მაშინ

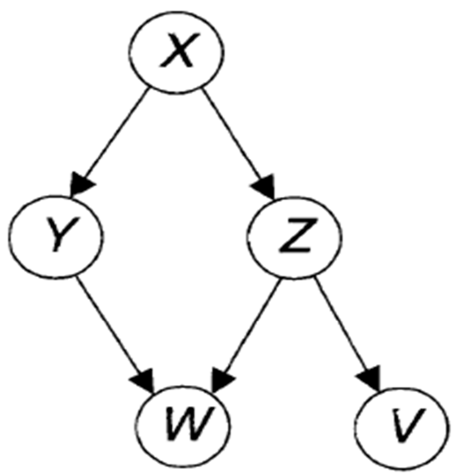
ჩვენ გვექნებოდა შემდეგი პირობითად დმოუკიდებლი სიდიდეები:

კვანძი	მშობლები	არაშთამომავლები	პირობითი დამოუკიდებლობა
X	$\varnothing$	$\varnothing$	არა
Y	X	Z, V	$I_P(Y, \{Z, V\} \| X)$
Z	X	Y	$I_P(Z, Y \| X)$
W	Y, Z	X, W	$I_P(W, \{X, W\} \| \{Y, Z\})$
V	Z	X, Y, W	$I_P(V, \{X, Y, W\} \| Z)$

3.2.2 ბაიესის ქსელის წარმოდგენა

ბაიესის ქსელი $(\mathbb{G}, P)$ განსაზღვრების თანახმად წარმოადგენს DAG $\mathbb{G}$-ს და P ალბათობების ერთობლივ განაწილებას, რომლებიც აკმაყოფილებენ მარკოვის პირობას. მაშინ ნახ. 3.1-ზე და ნახ. 3.2-ზე რატომ ვაჩვენებთ ბაიესის ქსელს როგორც DAG–ის და ალბათობათა პირობითი განაწილებების ნაკრებს? მისი მიზეზი ის არის, რომ $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც P ტოლია მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის. კერძოდ, ჩვენ გვაქვს ასეთი თეორემა.

თეორემა 3.1. $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას (შესაბამისად წარმოადგენს ბაიესის ქსელს), მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა P ტოლია მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის ყველა კვანძში, რომლებიც განაწილებები არსებობისას მოცემულია G-ში მშობლებით ყოველ ჯერზე.



ნახ. 3.6. მარკოვის პრობის გამომსახველი DAG

მაგალითი 3.3. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ L , S და C შემხვევითი ცვლადების ალბათობების ერთობლივი განაწილებები, რომლებიც განსაზღვრულია ნახ. 3.4-ზე, შეადგენენ ბაიესის ქსელს DAG-ით ნახ. 3.5-ზე. შემდგომში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ წინა თეორემა სამართლიანია, რომელიც გვიჩვენებს, რომ P ტოლია მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის $\mathbb{G}$-ში. ნახ. 3.7-ზე ნაჩვენებია ეს პირობითი განაწილებები. ჩვენ ისინი მივიღეთ უშუალოდ ნახ. 3.4-დან.

მაგალითად, რამდენადაც მათგან 9 შავი ობიექტია (c_1) და 6 მათგანი - კვადრატული (s_1), ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ

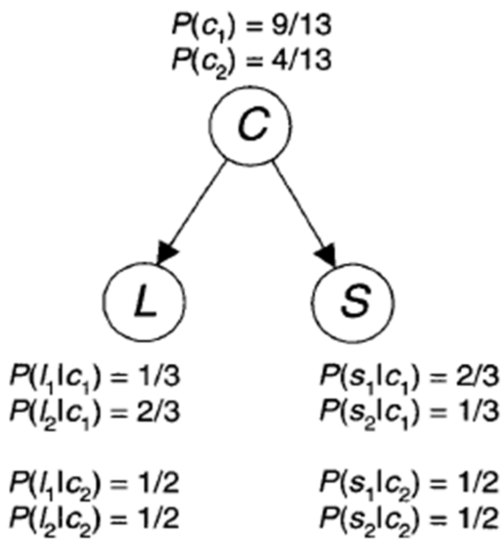
$P(s_1|c_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

ამავე გზით გამოითვლება სხვა პირობითი განაწილებებიც. იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ, ერთობლივი განაწილება წარმოადგენს პირობით განაწილებების ნამრავლს, ჩვენ აუცილებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ l-ის, s-ის და c-ს ყველა მნიშვნელობისათვის:

$$P(s,l,c) = P(s|c)P(l|c)P(c)$$

სულ გვაქვს სამი ცვლადის რვა კომბინაცია. ვაჩვენოთ, რომ ეს ტოლობა სამართლიანია ერთი მათგანისათვის. შემდეგ სავარჯიშოს სახით ვაჩვენოთ, რომ ის სრულდება სხვებისათვისაც. ამ მიზნით, უშუალოდ ნახ. 3.4-დანაც ჩანს, რომ

$$P(s_1, l_1, c_1) = \frac{2}{13}$$



ნახ. 3.7-ზე ბაიესის ქსელი წარმოადგენს ნახ. 3.4-ზე გამოსახული ობიექტების სიმრავლეზე განსაზღვრულ L, S და C შემთხვევითი ცვლადების ალბათობათა განაწილებას.

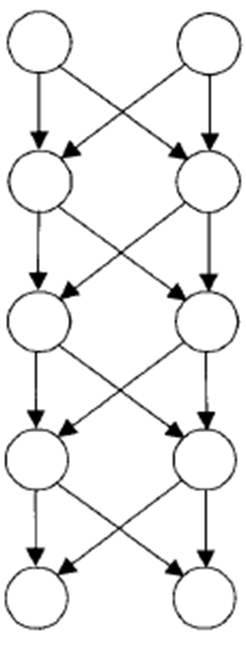
ნახ. 3.7-დან ჩვენ გვაქვს:

$P(s_1|c_1)P(l_1|c_1)P(c_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{9}{13}$.

თეორემა 3.1-ის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია DAG $\mathbb{G}$-ის და პირობითი ალბათობის გამოყენებით წარმოვადგინოთ $(\mathbb{G}, P)$ ბაიესის ქსელი. ჩვენთვის აუცილებელი არაა ერთობლივ განაწილებაში ყველა მნიშვნელობის ჩვენება. ეს მნიშვნელობები შეიძლება გამოთვლილი იქნას პირობითი განაწილებებიდან. ამიტომ ჩვენ ბაიესის ქსელს ყოველთვის წამოვადგენთ როგორც პირობით განაწილებას, როგორც ესა გაკეთებულია ნახატებზე 3.1,

3.2 და 3,.7, ამაში მდგომარეობს ბაიესის ქსელის რეპრეზენტატიული სიძლიერე. თუ გვაქვს ცვლადების დიდი რაოდენობა, ერთობლივ განაწილებაში გვაქვს ბევრი მნიშვნელობა. მაგრამ თუ DAG იშვიათია, მაშინ პირობით განაწილებაში ცოტა მნიშვნელობა რჩება. მაგალითად, დავუშვათ ყველა ცვლადი ორობითია და ერთობლივი განაწილება აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 3.8-ზე მოცემული DAG-ით. მაშინ არსებობს $2^{10} = 1024$ სიდიდე ერთობლივ განაწილებაში, მაგრამ მხოლოდ $2 + 2 + 8 \times 8 = 68$ არსებობს პირობით განაწილებაში. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ გამოთვლაში არც კი ვრთავთ ზედმეტ პარამეტრებს. მაგალითად, ნახ. 3.7-ზე მოცემულ ბაიესის ქსელში არაა იმის აუცილებლობა, რომ $P(c_2) = 4/13$ იმიტომ, რომ $P(c_2) = 1 - P(c_1)$. ასე რომ ჩვენ მხოლოდ გვჭირდება იმის ჩვენება, რომ $P(c_1) = 9/13$. თუ გამოვრიცხავთ ზედმეტ პარამეტრებს, მხოლოდ 34 მნიშვნელობა დაგვრჩება პირობით განაწილებაში DAG-სთვის ნახ. 3.8-ზე, მაგრამ კიდევ 1023 – ერთობლივ განაწილებაში. ჩვენ ვხედავთ, რომ ბაიესის ქსელი არის სტრუქტურა, რომელიც წარმოადგენს ერთობლივი ალბათობის განაწილებას.

მნიშვნელოვანია გვესმოდეს, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია ავიღოთ რომელიმე DAG-ი და ერთობლივი განაწილება, რომელიც ამ DAG-ში პირობითი განაწილებების ნამრავლის ტოლია. ეს სამართლიანია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ შესრულებულია მარკოვის პირობა. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.



ნახ. 3.8 თუ ყველა ცვლადი ორობითია, ხოლო ერთობლივი განაწილება აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ამ DAG-ით, ერთობლივ განაწილებაში 1024 მნიშვნელობაა, მაგრამ მხოლოდ 68 არის პირობით განაწილებებში.

მაგალითი 3.4. ისევ განვიხილოთ L , S და C შემხვევითი ცვლადების ალბათობების ერთობლივი განაწილებები, რომლებიც განსაზღვრულია ნახ. 3.4-ზე მოცემულ ობიექტების სიმრავლეზე. ნახ. 3.9 გვიჩვენებს მათ პირობით განაწილებას DAG-სთვის ამ ნახატზე. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჩვენ აღარ ვუჩვენებთ ჭარბ პარამერტებს ჩვენს ნახატებზე. თუ P-მ დააკმაყოფილა მარკოვის პირობა მოცემული DAG-ით, ჩვენ უნდა გვქონდეს $I_p(L,S)$, რამდენადაც L-ს არ გააჩნია მშობლები, და S არის L-ის ერთადერთი არაშთამომავალი. ამის დამტკიცება სავარჯიშოს სახით რჩება, იმისათვის რომ ვაჩვენოთ, რომ ეს დამოუკიდებლობა არ სრულდება. გარდა ამისა, ამ DAG-ში P არ უდრის მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლს. მაგალითად, პირდაპირ ნახ. 3.4-დან გვაქვს, რომ

$$P(s_1, l_1, c_1) = \frac{2}{13} = 0{,}15385.$$

ნახ. 3.9-დან გვაქვს:

$$P(c_1|l_1, s_1)P(l_1)P(s_1) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{13} \times \frac{8}{13} = 0{,}15779.$$

როგორც ჩანს ჩვენ თავსატეხი გვაქვს. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს წარმოადგინოთ ერთობლივი განაწილება, მოკლედ DAG-ის და DAG-სთვის პირობითი განაწილებების (ბაიესის ქსელის) გამოყენებით, და არა ერთობლივ განაწილებაში ყველა მნიშვნელობის ჩამოთვლა. მაგრამ ჩვენ არ ვიცით რომელი DAG გამოვიყენოთ მანამდე, სანამ არ შევამოწმებთ სრულდება თუ არა მარკოვის პირობა, ზოგადად, ამის შესამოწმებლად აუცილებელია თუ არა გვქონდეს ერთობლივი განაწილება. აქედან ზოგად გამოსავალს წარმოადგენს მიზეზობრივი DAG-ის აგება, რომელიც წარმოადგენს DAG-ს, რომელშიც არსებობს კიდე X-დან Y-მდე, თუ X იწვევს Y-ს. ნახ. 3.1 და 3.2 წარმოადგენენ მიზეზობრივს მაშინ, როცა ამ თავში წარმოდგენილი სხვა DAG-ები არ წარმოადგენენ მიზეზობრივებს. შემდგომში განვიხილავთ, თუ რატომ უნდა აკმაყოფილებდეს მიზეზობრივი DAG მარკოვის პირობას ცვლადების ალათობების განაწილებით DAG-ში. DAG-ის მიღების მეორე გზა არის მისი მონაცემების მიხედვით შესწავლა. ეს მეორე ხერხი განიხილება მე-4 თავში.

3.3 მიზეზობრივი ქსელები როგორც ბაიესის ქსელები

ვიდრე განვიხილავთ, მიზეზობრივი DAG ხშირად რატომ უნდა აკმაყოფილებდეს მარკოვის პირობას ცვლადების ალათობების განაწილებით DAG -ში, მოვახდინოთ მიზეზობრიობის ცნების ფორმალიზება.

3.3.1 მიზეზობრიობა

მიზეზის ოპერატიული განსაზღვრების წარმოდგენის შემდეგ, ჩვენ ვაჩვენებთ ამ განსაზღვრების შესაბამის მიზეზის იდენტიფიკაციის ყოვლისმომცველ მაგალითს.

მიზეზის ოპერატიული განმარტება

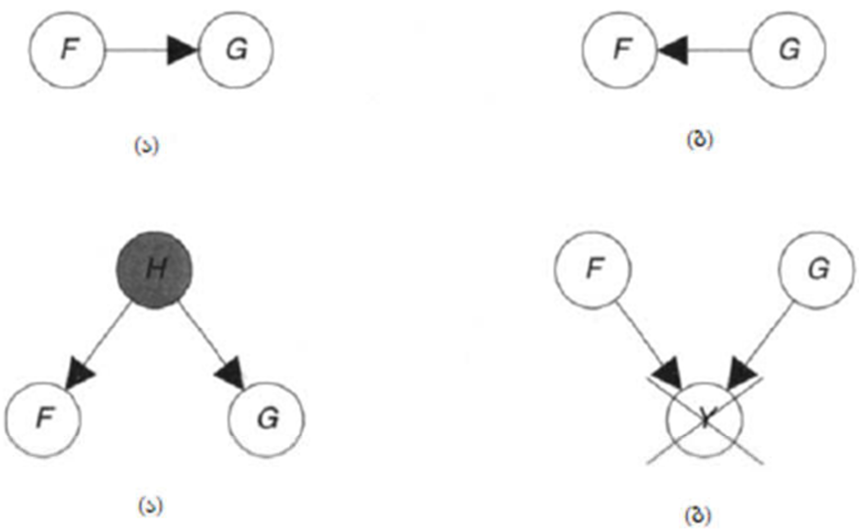
მიზეზის ერთ-ერთი ლექსიკონური განმარტება არის „პიროვნება, მოვლენა ან პირობა, რომელიც პასუხისმგებელია მოქმედებაზე ან შედეგზე". თუმცა ეს განსაზღვრება სასარგებლოა, ის რა თქმა უნდა საბოლოოდ არ განმარტავს მიზეზობრიობას. მაგრამ ეს განმარტება შუქს ფენს მიზეზობრივი კავშირების ინდეტიფიკაციის ოპერატიულ მეთოდებს. ე.ი. თუ X ცვლადის მოქმედება იღებს რაღაც მნიშვნელობას, რომელსაც დროდადრო იცვლის, თუ იღებს Y მნიშვნელობას, მაშინ ჩვენ ვარაუდობთ, რომ X პასუხისმგებელია Y-ის მნიშვნელობის შეცვლაზე, და ჩვენ ვასკვნით, რომ X წარმოადგენს Y-ის მიზეზს.

უფრო ფორმალურად ჩვენ ვამბობთ, რომ ვახდენთ X-ის **მანიპულირებას,** როცა ვაიძულებთ X-ს მიიღოს რომელიღაც მნიშვნელობა და ვამბობთ, რომ X იწვევს Y-ს, თუ არსებობს X-ით რაღაც მანიპულაციები, რასაც მივყავართ Y-ის ალბათობების განაწილების ცვლილებამდე. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ X-ის მანიპულირებას მივყავართ Y-ის ალბათობების განაწილების ცვლილებამდე, მაშინ X-ის ნებისმიერი მნიშვნელობის მიღებასაც მივყავართ Y-ის ალბათობების განაწილების ცვლილებამდე. ამგვარად, ჩვენ ვარაუდობთ, რომ მიზეზები და მათი შედეგები სტატისტიკურად კორელირებულნი არიან. მაგრამ, რამდენადაც ამის შესახებ მალე ვიმსჯელებთ, ცვლადები შეიძლება კოლერილებულნი იყვნენ ისე რომ არ იწვევდნენ ერთმანეთს. მანიპულაცია შედგება **რანდონმიზებული კონტროლირებადი ექსპერიმენტისაგან (RCE)**, რომელიც იყენებს რომელიღაც სუბიექტების კონკრეტულ პოპულაციას (მაგალითად, ადამიანებს, როლებსაც აწუხებს ტკივილი მკერდში) რომელიღაც სპეციფიკურ კონტექსტში (მაგალითად, ამჟამად ისინი არ იღებენ არანაირ წამალს გულმკერდის ტკივილის გასაყუჩებლად და ცხოვრობენ განსაზღვრულ გეოგრაფიულ არეალში). მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი აღმოჩენილია მოსახლეობის ამ ერთობლიობისათვის და ამ კონტექსტში. მოდი განვიხილოთ, როგორ ხდება ეს მანიპულაცია. ჯერ ჩვენ განვსაზღვრავთ მოსახლეობას, რომლის განხილვასაც ვაპირებთ. ჩვენი შემთხვევითი ცვლადები წარმოადგენენ ამ იურიდიული პირების თავისებურებებს. შემდეგ ვარკვევთ იმ მიზეზობრივ დამოკიდებულებებს, რომლის გამოკვლევაც გვსურს. დავუშვათ ჩვენ ვცდილობთ გავარკვიოთ არის თუ არა X ცვლადი y ცვლადის მიზეზი. მაშინ ჩვენ ვირჩევთ რამდენიმე სუბიექტს მოსახლეობიდან. თითოეული არჩეული ობიექტისათვის ვახდენთ X-ის მნიშვნელობით მანიპულაციას ისე, რომ მისი ყოველი

შესაძლო მნიშვნელობა გვაძლევდეს სუბიექტების ერთსა და იმავე რაოდენობას (თუ X უწყვეტია, მაშინ X-ის მნიშვნელობას ვირჩევთ თანაბარი განაწილების შესაბამისად). იმის შემდეგ, რაც მოცემული ობიექტისათვის X-ის მნიშვნელობა დადგენილია, ჩვენ ვზომავთ Y-ის მნიშვნელობას ამ ობიექტისათვის. რაც უფრო მეტი საბოლოო მონაცემი აჩვენებს X და Y-ს შორის დამოკიდებულებას, მით მეტი მხარდამჭერი მონაცემია, რომელიც გვიჩვენებს, რომ X იწვევს Y-ს. X-ის მანიპულაცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნას M ცვლადების სახით, რომლებიც გარეშე ცვლადს წარმოადგენენ შესასწავლი სისტემის მიმართ. X-დან თითოეული x_i მნიშვნელობისათვის არსებობს M-ის ერთი m_i მნიშვნელობა; M-ის ყველა მნიშვნელობისათვის ალბათობები ერთნაირია; და როცა M m_i-ის ტოლია, მაშინ X x_i-ის ტოლია. ე.ი. M-სა და X-ს შორის დამოკიდებულება დეტერმინებულია. მონაცემთა მხარდაჭერა, რომ X იწვევს Y-ს, იმდენად, რამდენადაც მონაცემები მიუთითებენ იმაზე, რომ $P(y_i|m_j) \neq P(y_k|m_k)$ $j \neq k$-სთვის. მანიპულაცია სინამდვილეში წარმოადგენს მიზეზ-შედეგობრვი კავშირის განსაკუთრებულ სახეს, რომელსაც ჩვენ ვვარაუდობთ თავდაპირველად და არის ჩვენი კონტროლის ქვეშ, ასე რომ შეგვძლია განვსაზღვროთ და აღმოვაჩინოთ სხვა მიზეზობრივი ურთიერთობები.

მანიპულაციის ილუსტრაცია

ჩვენ ვახდენთ ამ იდეების დემონსტრირებას უახლოესი სიახლეების ყოვლისმომცველ მაგალითთან დაკავშირებით. ფარმაცევტული კომპანია $Merck$ აწარმოებს პრეპერატ ფინასტერიდს კეთილთვისებიანი პროსტატული ჰიპერპლაზიით (BPH) დაავადებული მამაკაცებისათვის. ანეკდოტურ მტკიცებაზე დაყრდნობით, იყო ვერსია, რომ არსებობს კორელაცია სამკურნალო პრეპატატის გამოყენებასა და თავზე თმის ზრდას შორის. ვთქვათ, $Merck$-მა პოპულაციიდან შემთხვევით არჩევანი გააკეთა, რომელიც ინტერესს წარმოადგენდა, და ამ ნიმუშიდან გამომდინარე, არსებობს კორელაცია ფინასტერიდის გამოყენებასა და თმის ამოსვლას შორის. მათ უნდა დაასკვნან, რომ ფინასტერიდი იწვევს თმის ზდრას, და შესაბამისად გაყიდონ ის როგორც თმის ცვენის საწინააღმდეგო პრეპარეატი? ეს არაა აუცილებელი. არსებობს არც თუ ისე ცოტა მიზეზ-შედეგობრივი ახსნა ორი ცვლადის კორელაციისათვის. მას ჩვენ შემდგომში განვიხილავთ.



ნახ.3.10. ამ გრაფებზე კიდეები წარმოადგენს მიზეზობრივ ზემოქმედებას. ოთხივე მიზეზობრივი დამოკიდებულება შეიძლება აიხსნას F-ის და G-ს კორელაციით.

შესაძლო მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები. ვთქვათ, F იყოს ფინასტერიდის გამოყენების ცვლადი და G თმის ამოსვლასათან დაკავშირებული ცვლადი. F-ის და G-ის ფაქტობრივ მნიშვნელობას აქვს ახლანდელი მნიშვნელობა. ჩვენ შეგვეძლო გამოგვეყენებინა ან უწყვეტი ან დისკრეტული მნშვნელობები. თუ. F-მა გამოიწვია G, მაშინ ისინი ნამდვილად სტატისტიკურად კოლირებენ, მაგრამ ამას ასევე ექნება ადგილი, თუ G-მ გამოიწვია F ან თუ მათ ჰქონდათ გარკვეული დაფარული საერთო მიზეზი H. თუ ჩვენ წარმოვადგენთ მიზეზობრივ გავლენას მიმართული წახნაგით, ნახ 3.10-ზე ნაჩვენებია ეს სამი შესაძლებლობა პლუს კიდევ ერთი ნახ. 3.10 (ა), რომელიც გვიჩვენებს ჰიპოთეზას იმის შესახებ, რომ F იწვევს G-ს, რასაც ჩვენ უკვე ვეჭვობთ, რომ ეს ასეა. თუმცა შეიძლება იყოს, რომ G იწვევს F-ს [ნახ. 3.10 (ბ)]. თქვენ შეიძლება ამტკიცოთ, რომ დომეინის ცოდნაზე დაფუძნებული გონივრული არ ჩანს. თუმცა ჩვენ როდესაც ვაკეთებთ სტატისტიკურ ანალიზს, ამას ზოგადად ვაკეთებთ არა იმიტომ რომ გვაქვს დომეინის ცოდნა. ისე მხოლოდ კორელაციის საფუძველზე მიზეზობრივი ურთიერთობები [ნახ. 3.10 (ა) და (ბ)] თანაბრად გონივრულია. ამ დომენშიც კი G იწვევს F-ს, შესაძლებელი ჩანს. ადამიანმა შესაძლოა თმის ამოსაყვანად გამოიყენა რომელიღაც სხვა პროდუქტი, როგორიცაა მინოქსიდილი, რომელმაც თმა ამოუყვანა, აღფრთოვანდა და გადაწყვიტა სცადოს ფინასტერიტი, რომლის შესახებაც მას გაგონილი ჰქონდა, რომ ის იწვევს განმეორებით მის ზრდას. მესამე შესაძლებლობა [ნაჩვენებია ნახ.3.10 (გ)-ზე] იმაში მდგომარეობს, რომ F და G-ს აქვთ გარკვეული დაფარული საერთო მიზეზი H, რომელიც ითვალისწინებს მათ სტატიტიკურ კორელციას. მაგალითად, ადამიანმა, რომელიც

შეწუხებულია თმის ცვენის გამო, შეიძლება სცადოს როგორც ფინასტერიდი, ისე მინოკსიდილი თმის აღსადგენად. მინოკსიდილს შეუძლია გამოიწვიოს თმის ზრდის აღდგენა მაშინ, როცა ფინასტერიდს არ შეუძლია. ამ შემთხვევაში ფინასტერიდის გამოყენების მიზეზს წარმოადგენს ადამიანის შეშფოთება და თმის ზრდა (არაპირდაპირ მინოქსიდილის გამოყენება), მაშინ როცა ბოლო ორი არ არის მიზეზ-შედეგობრივ კავშირში. მეოთხე შესაძლებლობა იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენი ნიმუში (ან კიდევ მთელი მოსახლეობა) შედგება ადამიანებისაგან, რომელთაც აქვთ ეფექტი (შეიძლება დაფარული) როგორც F-ზე, ისე G-ზე. მაგალითად, დავუშვათ, რომ ფინასტერიდი და თმის ამოუსვლელობასთან დაკავშირებული შიში ერთდროულად წარმოადგენენ ჰიპორტონიის მიზეზს,[6] ხოლო ჩვენი არჩევანი შედგება პიროვნებებისაგან, რომელთაც ჰიპერტონია Y აქვთ. ჩვენ ვამბობთ, რომ კვანძი **იქმნება**, როდესაც ვიცით, მისი მნიშვნელობა იმ მოდელისათვის, რომელიც ამჟამად იგება. ამიტომ ვამბობთ Y ცვლადი იქმნება ჩვენი მაგალითის თითოეული ობიექტისათვის ერთი და იმავე მნიშვნელობით. ეს სიტუაცია გამოსახულია ნახ. 10 (დ)-ზე, სადაც Y-ით ჩამონათვალი ნიშნავს ცვლადის შექნას. როგორც წესი, ზოგადი ეფექტის შექმნა იწვევს მის მიზეზებს შორის დამოკიდებულებას, რამდენადაც თითოეული მიზეზი ხსნის ეფექტის წარმოქმნას, რაც სხვა მიზეზს ნაკლებ სარწმუნოს ხდის. როგორც აღვნიშნეთ, ამას ფსიქოლოგები **დისკონტირებას** უწოდებენ. მაშასადამე, ეს თუ ასეა, დისკონტირება ხსნის F და G-ს შორის კორელაციას. ამ ტიპის დამოკიდებულებას **შერჩევითობას**[7] უწოდებენ. ხოლო შესაძლებლობა (რომელიც არაა გამოსახული ნახ.10-ზე) არის ის, რომ F და G საერთოდ არაა მიზეზობრივად დაკავშირებული ერთმანეთთან. ამ სიტუაციის ყველაზე მნიშვნელოვანი მაგალითი იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვენი პირები წარმოადგენენ დროში წერტილებს, ხოლო ჩვენი შემთხვევითი სიდიდეები წარმოადგენენ თვისებებს მნიშვნელობებს დროის ამ სხვადასხვა მომენტებში. ასეთი შემთხვევითი სიდიდეები ხშირად კორელირებენ რაიმე ცხადი მიზიზ-შედეგობრივი კავშირის გარეშე. მაგალითად, თუ ჩვენი მისახლეობა შედგება დროში წერტილებისაგან, $J-$ არის დოუ ჯონსის საშუალო მოცემულ დროში, და L არის

[6] არ არსეობს არანაირი მტკიცებულება, რომ ფინასტერიდი ან თმის ცვენის შიში იწვევს ჰიპერტონიას ეს მხოლოდ ილუსტრირებისთვისაა განკუთვნილი.

[7] ეს შეიძლება მოხდეს, თუ ჩვენი ნიმუში მოსახერხებელი ნიმუშია, რომლითაც მონაწილეები აირჩევიან მკვლევრისათვის მოხერხებულობის კუთხით. მკვლევარი არ ცდილობს გარანტიების მიცემას, რომ ნიმუში წარმოადგენს უფრო დიდი პოულაციის ზუსტ წარმომადგენელს. მოცემული მაგალითის კონტექსტში იგი დასაშვებია თუ ეს მოსახერხებელია მკვლევრისათვის, დააკვირდეს ჰიპერტონიით ჰოსპიტალიზებულ მამაკაცებს.

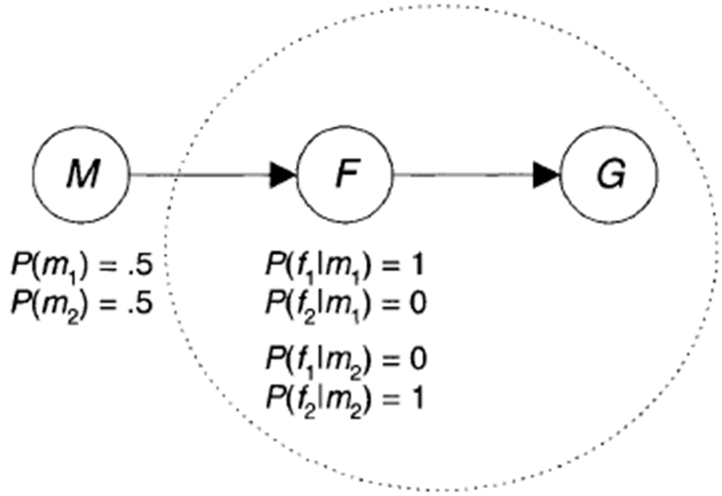
პროფესორ ნეაპოლიტანის თმის ვარცხნილობა მოცემულ დროში, მაშინ J და L კორელირდებიან[8]. მიუხედავად ამისა, ისინი არ არიან მიზეზობრივად დაკავშირებულნი. ზოგი ამტკიცებს, რომ არსებობს დაფარული საერთო მიზეზები, რომლებიც ჩვენი გაზომვის უნარს სცილდება. ჩვენ შემდგომში ამ საკითხს აღარ განვიხილავთ. ჩვენ მხოლოდ გვსურს აღვნიშნოთ ასეთ კორელაციებთან დაკავშირებული სირთულეები. ზემოთ აღნიშნულიდან გამომდინარე, ვხედავთ, რომ ჩვენ არ შეგვძლია გამოვიყვანოთ მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი ორ ცვლადს შორის იმ ფაქტიდან, რომ ისინი სტატისტიკურად კორილებულნი არიან.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ნახ. 3.10-ზე ნაჩვენები ოთხიდან ნებისმიერი მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი შეიძლება მოხდეს კომბინაციაში, რომელსაც მივყავართ F-ის და G-ს კორელაციამდე. მაგალითად, ეს შეიძლება ისიც იყოს, რომ ფინასტერიდს შეუძლია თმის ზრდა გამოიწვიოს და განმეორებით თმის ამოსვლასთან დაკავშირებულმა მღელვარებამ შეიძლება გამოიწვიოს ფინასტერიდის გამოყენება, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ შეიძლება გვქონდეს მიზეზობრივი კვანძი ან უკუკავშირები. ამიტომ ჩვენ გვექნებოდა მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები ორივე ნახ. 3.10 (ა)-სა და ნახ. 3.10 (ბ)-ზე.

არ შეიძლება ცხადი იყოს, თუ ორი ცვლადი საერთო მიზეზით რატომ კორელირებენ. განვიხილოთ წინამდებარე მაგალითი. დავუშვათ, რომ H წარმოადგენს F-ის და G-ს საერთო მიზეზს, და არც ერთი არც F და არც G არ იწვევს ერთმანეთს. მაშინ H და F კორელირდებიან რადგან H იწვევს F-ს, და H და G კორელირდებიან რადგან H იწვევს G-ს, რაც იმას ნიშნავს, რომ F და G ტრანზიტულად არიან დაკავშირებულნი H-ით. ეს არის უფრო დეტელური ახსნა. მაგალითისათვის დავუშვათ, რომ h_1 არის H-ის მნიშვნელობა, რომელსაც გააჩნია მიზეზობრივი გავლენა F-ზე, რომელიც იღებს f_1 მნიშვნელობას და G-ზე, რომელიც იღებს g_1 მნიშვნელობას. მაშინ F-ს ჰქონდა f_1 მნიშვნელობა, მაშინ თითოეული მისი მიზეზთაგანი უფრო სავარაუდო გახდება, რადგან ერთ-ერთი მათგანი პასუხისმგებელი უნდა გახდეს. ამგვარად, $P(h_1|f_1) > P(h_1)$. ახლა რამდენადაც h_1-ის ალბათობა გაიზარდა, g_1-ის ალბათობაც გაიზრდება, რამდენედაც h_1 იწვევს g_1-ს.

აქედან გამომდინარე, $P(g_1|f_1) > P(g_1)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ F და G კოლერილდებიან.

[8] სამწუხაროდ, მისი თმის ვარცხნილობა არ დაბრუნდა 2003 წელს.



ნახ. 3.11. RCE იკვლევს იწვევს თუ არა F G-ს.

მერკის მანიპულაციის გამოკვლევა. მას შემდეგ, რაც მერკმა ვერ შეძლო იმ დასკვნის გაკეთება, ფინასტერიდი თმის აღდგენას იწვევს მხოლოდ მისი უბრალო კორელაციით თუ არა, მათ გააკეთეს მანიპულაციის გამოკვლევა იმისათვის, რომ დაემტკიცებინათ ეს ჰიპოტეზა. კვლევა ჩატარდა 18-დან 41 წლამდე 1879 მამაკაცზე მსუბუქ და ზომიერ თმის ცვენაზე კინკრეხოზე და საფეთქლებზე. მამაკაცთა ნახევარს აძლევდნენ 1 მლ ფინასტერიდს, ხოლო მეორე ნახევარს 1 მლ პლაცებოს. შემდეგ ცხრილში მოცემულია კვლევაში არსებული ცვლადების შესაძლო მნიშვნელობები მანიპულაციის M ცვლადის ჩათვლით:

ცვლადი	სიდიდე	როცა ეს ცვლადი იღებს ამ სიდიდეს
F	f_1	სუბიექტი იღებს 1 მლ.გრ. ფიწასტერს
	f_2	სუბიექტი იღებს 1 მლ.გრ. პლაცებოს
G	g_1	სუბიექტს აქვს თმის მწიშვწელოვაწი ხელახალი ზრდა
	g_2	სუბიექტს არ აქვს თმის მწიშვწელოვაწი ხელახალი ზრდა
M	m_1	სუბიექტი არჩეულია 1 მლ.გრ. ფიწასტერის მისაღებად
	m_2	სუბიექტი არჩეულია 1 მლ.გრ. პლაცებოს მისაღებად

RCE-ის გამოყენება იმ ჰიპოტეზის შესამოწმებლად, რომ F იწვევს G-ს ნაჩვენებია ნახ. 3.11-ზე. არსებობს გამოსაკვლევი სისტემის გარშემო ოვალი (F და G და მათი შესაძლო მიზეზობრივი კავშირები) იმისათვის, რომ მანიპულაცია ხდება სისტემის გარეთ. ნახ. 3.11-ზე კიდეები წარმოადგენს მიზეზობრივ ზემოქმედებას. შემდეგი მონაცემის $P(g_1|m_1) \neq P(g_1|m_2)$ მხარდაჭერის გათვალისწინებით, RCE მხარს უჭერს ჰიპოტეზას იმის შესახებ, რომ F იწვევს G-ს. მერკმა გადაწყვიტა, რომ „თმის მნიშვნელოვანი ზრდა" განეხილა დამოუკიდებლი დერმატოლოგის შეხედულებით. დამოუკიდებელი დერმატოლოგების კომისიამ შეაფასა მამაკაცების სურათები 24-თვიანი მკურნალობის შემდეგ. ექსპერტთა

ჯგუფმა აღნიშნა, რომ თმების მნიშვნელოვანი ზრდა დემონსტრირებული იყო იმ მამაკაცების 66%-ში, რომლებიც იღებდნენ ფინასტერიდს, იმ 7% მამაკაცებთან შედარებით, რომლებიც იღებდნენ პლაცებოს. ამ შედეგებით ჩვენი ალბათობის საფუძველზე, გვაქვს $P(g_1|m_1) \approx 0{,}67$ და $P(g_1|m_2) \approx 0{,}7$. უფრო ანალიტიკური ანალიზისას მამაკაცთა მხოლოდ 17%, რომლებიც იღებდნენ ფინასტერიდს, აღენიშნა თმის დაკარგვა (განისაზღვრება როგორც საბაზისო დონიდან თმების ნებისმიერი შემცირება). პირიქით, პლაცებოს ჯგუფის 72%-მა დაკარგა თმა. მერკი მივიდა დასკვნამდე, რომ ფინასტერიდი ნამდვილად იწვევს თმის ზრდას და 1997 წლის 22 დეკემბერს განაცხადა, რომ აშშ-ის პროდუქტებზე და წამლებზე კონტროლის ადმინისტრაციამ უნდა გასცეს მარკეტიკული უფლება პროპეციაზე (TM) (ფინასტერიდი 1მგ) მამაკაცების თმის ცვენის სამკურნალოდ (ანდროგენეტიკური ალოპეცია), მხოლოდ მამაკაცების სამკურნალოდ გამოყენებზე.

3.3.2 მიზეზობრიობა და მარკოვის პირობა

პირველ რიგში, ჩვენ უფრო მკაცრად განვსაზღვრავთ მიზეზობრივ DAG-ს. ამის შემდეგ მივუთითებთ მარკოვის მიზეზზე და ვიკამათებთ იმაზე, თუ რატომ უნდა სრულდებოდეს ის.

მიზეზობრივი $\boldsymbol{DAG}$-ები

მიზეზობრივი გრაფი – ეს არის ორიენტირებული გრაფი, რომელიც შეიცავს მიზეზობრივად დაკავშირებულ შემთხვევით V ცვლადებს ისეთებს, რომ ყველა $X, Y \in V$-სთვის არსებობს წახნაგი X-დან Y-მდე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ X წარმოადგენს X პირდაპირ მიზეზს. პირდაპირი მიზეზში იგულისხმება, რომ X-ით მანიპულირებას მივყავართ Y ალბათობების განაწილების შეცვლასთან, და არ არსებობს გრაფის ცვლადების სიმრავლეში ისეთი W ცვლადების სიმრავლის ქვესიმრავლე, რომ თუ გვეცოდინებოდა ცვლადების მნიშვნელობა W-ში, X-ით მანიპულირება უკვე აღარ შეცვლის Y ალბათობების განაწილებას. მიზეზობრივი გრაფი არის **მიზეზობრივი $\boldsymbol{DAG}$** თუ მიმართული გრაფი აციკლურია (ე.ი. არ არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები).

მაგალითი 3.5. ტესტოსტერონი (T), როგორც ცნობილია გადაიქცევა ჰიდრო-ტესტოსტერონად (DHT) და წარმოადგენს ჰორმონს, რომელიც აუცილებელია ერექციული ფუნქციისათვის (E). ჩატარებული იქნა გამოკვლევა ვირთხებში ამ ცვლადებს შორის მიზეზ-შედეგობრივ კავშირზე. ისინი ახდენდნენ მანიპულირებას ტესტოსტერიდზე დაბალ დოზებამდე და აღმოაჩინეს, რომ ერექციული ფუნქცია დაბალი იყო ტესტოსტერიდის დოზის მიუხედავად. ბოლოს მათ დააფიქსირეს DHT მაღალ დონეებზე და აღმოაჩინეს, რომ ერექციული ფუნქცია მაღალი იყო ტესტოსტერიდის დოზის მიუხედავად. ამიტომ მათ

შეიტყვეს, რომ მიზეზობრივი გრაფი შეიცავს მხოლოდ T, DHT და E ცვლადებს, T წარმოადგენს DHT-ის პირდაპირ მიზეზს, DHT წარმოადგენს E-ს პირდაპირ მიზეზს, თუმცა T წარმოადგენს E-ს მიზეზს ,ის არაა პირდაპირი მიზეზი. ამგვარად მიზეზობრივ DAG ერთია ნახ.3.12-ზე.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ თუ DHT ცვლადი არაა DAG-ში ნახ.3.12-ზე, მაშინ იქნებოდა წახნაგი T-დან E-ში DHT-ზე გამავალი მიმართული გზის ნაცვლად. ზოგადად, ჩვენი წახნაგები ყოველთვის წარმოადგენს მხოლოდ ინდენტიფიცირებულ ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას. ჩანს, ჩვეულებრივ ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შუალდური, ამოუცნობი ცვლადები თითოეული კიდის გასწვრივ. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი:

ვთქვათ C არის ასანთის გაკვრის ხდომილობა, და A არის ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება ასანთზე ცეცხლის გაჩენას, და არც ერთი სხვა ხდომილობა არ გინიხილება, მაშინ C წარმოადგენს A-ს პირდაპირ მიზეზს. მაგრამ თუ ჩვენ დავუმატებთ B-ს, ასანთის წვერის გოგირდზე სითბოს იმ რაოდენობამ მიაღწია, რომ ჟანგბადთან დავაკავშიროთ, მაშინ ჩვენ უკვე ვერ ვიტყვით, რომ C-მ უშუალოდ გამოიწვია A, არამედ C-მ უშუალოდ გამოიწვია B და B-მ უშუალოდ გამოიწვია A. შესაბამისად, ჩვენ ვამბობთ, რომ B წარმოადგენს შუამავალს C-სა და A-ს შორის, თუ C იწვევს B და B უშუალოდ იწვევს A-ს.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ ინტუიციურ ახსნაში ცვლადის სახელი გამოიყენება ასევე ცვლადის მნიშვნელობისათვის. მაგალითად, A ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა ცეცხლი ან არ არის ცეცხლი, A ასევე გამოიყენება იმის აღსანიშნავად, რომ ასანთი ანთია. ცხადია, რომ ჩვენ შეგვიძლია დავამატოთ მეტი მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები. მაგალითად, ჩვენ შეგვეძლო დაგვემატებინა D ცვლადი, რომელიც გვიჩვენებს გადაკეთდა თუ არა ასანთის წვერო უხეშ ზედაპირად. მაშინ C გამოიწვევს D, რომელიც გამოიწვევს B და ა.შ. ჩვენ შეგვეძლო უფრო შორს წავსულიყავით და აღგვეწერა ქიმიური რეაქცია, რომელიც წარმოიშობა გოგირდის ჟანგბადთან შეერთებით. ნამდვილად, ჩვენ შეგვილია წარმოვადგინოთ მოვლენათა უსასრულო გაგრძელება ნებისმიერი მიზეზობრივი აღწერილობით. ჩვენ ვხედავთ, რომ დასაკვირვებელი ცვლადების სიმრავლე დამკვირვებელზეა დამოკიდებული. როგორც ჩანს, ადამიანი, ითვალისწინებს რა სენსორული შეყვანების დიდ სიმრავლეს, შერჩევით იწერს შესამჩნევ ხდომილებებს და ავითარებს მათ შორის ურთიერთობებს და შედეგებს შორის დამოკიდებულებებს. აქედან გამომდინარეობს, და არ ვვარაუდობთ, რომ იქ არსებობენ მიზეზობრივად დაკავშირებული ცვლადები, უფრო სწორი ჩანს მხოლოდ ვივარაუდოთ, რომ მოცემულ კონტექსტში ან

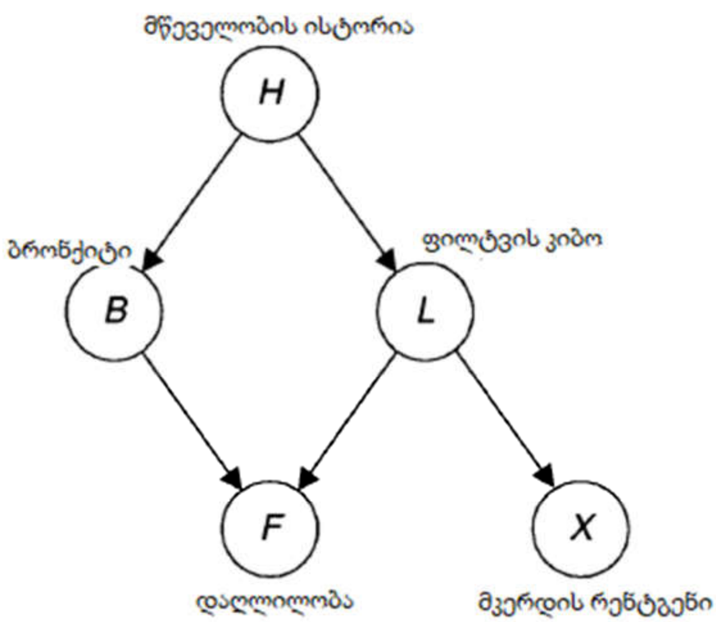
დანართში, ჩვენ ვახდენთ განსაზღვრული ცვლადების იდენტიფიკაციას და ვქმნით მათ შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირების ნაკრებს.

მიზეზობრივი მარკოვისეული ვარაუდი

თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ V შემთხვევითი სიდიდეების P ალბათობების დაკვირვებადი განაწილება აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას მიზეზობრივი DAG $\mathbb{G}$-ით, რომელიც შეიცავს ცვლადებს, ჩვენ ვამბობთ, რომ ვაკეთებთ **მიზეზობრივ მარკოვისეულ ვარაუდს**, და $(\mathbb{G}, P)$--ს ვეძახით **მიზეზობრივ ქსელს**. რატომ უნდა გავაკეთოთ მიზეზობრივი მარკოვისეული ვარაუდი? ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 3.6. ისევ განვიხილოთ სიტუაცია, რომელიც დაკავშირებულია ტესტოსტერონთან (T), DHT-სთან და ერექციულ ფუნქციასთან (E). მანიპულაციის გამოკვლევამ გვიჩვენა, რომ თუ ჩვენ ვქმნით DHT-ს, E-ს მნიშვნელობა არაა დამოკიდებული T-ს მნიშვნელობაზე. ამგვარად, არსებობს იმის ექპერიმენტული მტკიცება, რომ მარკოვის პირობა სრულდება სამ ცვლადიანი მიზეზობრივი ჯაჭვისთვის.

მაგალითი 3.7. მოწევის ისტორია (H), როგორც ცნობილია იწვევს ორივეს, როგორც ბრონქიტს (B) ისე ფილტვების კიბოს (L). ფილტვების კიბო და ბრონქიტი იწვევს დაღლილობას (F), მაშინ როცა მხოლოდ ფილტვების კიბოს შეუძლია მიგვიყვანოს გულმკერდის დადებით რედგენოგრამამდე (X). ცვლადებს შორის არ არსებობს სხვა მიზეზ-შდეგობრივი კავშირები. ნახ. 3.13 გვიჩვენებს ამ ცვლადების შემცველ მიზეზობრივ DAG-ს. ამ DAG-ისთვის მიზეზობრივი მარკოვისეული ვარაუდი იწვევს შემდეგ პირობებით დამოუკიდებლობებს:



ნახ. 3.13. მიზეზობრივი DAG.

კვანძი	მშობლები	არაშთამომავლები	პირობითი დამოუკიდებლობა
H	$\emptyset$	$\emptyset$	None
B	H	L, X	$I_P(B, \{L, X\} \vert H)$
L	H	B	$I_P(L, B \vert H)$
F	B, L	H, X	$I_P(F, \{H, X\} \vert \{B, L\})$
X	L	H, B, F	$I_P(X, \{H, B, F\} \vert L)$

ნახ. 3.13-ზე გამოსახული მიზეზობრივი კავშირის გათვალისწინებით, ჩვენ არ ველით, რომ ბრონქიტი და ფილტვის კიბო დამოუკიდებლები იყვნენ იმიტომ, რომ თუ ვინმეს ჰქონდა ფილტვის კიბო, სავარაუდოა, რომ ის ეწეოდა (რამდენადაც მოწევამ შეიძლება გამოიწვიოს ფილტვის კიბო), რაც უფრო სავარაუდოს ხდის მოწევის მეორე ეფექტს, კერძოდ ბრონქიტის არსებობას. მაგრამ, თუ ჩვენ გვეცოდინებოდა, რომ ვიღაც ეწეოდა, უკვე მეტად იქნებოდა სავარაუდო, რომ ადამიანს ბრონქიტი ჰქონდა. იმის ცოდნა, რომ მათ ფილტვის კიბო აქვთ არ ზრდის მოწევის ალბათობას (რაც ახლა არის 1), რაც იმას ნიშნავს, რომ მას არ შეუძლია შეცვალოს ბრონქიტის წარმოშობის ალბათობა. ე.ი. H ცვლადი იცავს B-ს L-ის გავლენისაგან და წარმოადგენს მარკოვის მიზეზობრივ პირობას. ანალოგიურად, გულმკერდის დადებითი რენტგენის სურათი ზრდის ფილტვის კიბოს ალბათობას, რაც თავის მხრივ, ზრდის მოწევის ალბათობას, და ამავდროულად ზრდის ბრონქიტის ალბთობას. ამგვარად, გულმკერდის რენტგენოგრაფია და ბრონქიტი არ წარმოადგენენ დამოუკიდებლებს. მაგრამ, თუ ჩვენ გვეცოდინებოდა, რომ ადამიანს ფილტვის კიბო ჰქონდა, გულმკერდის რენტგენს არ შეეძლო ფილტვის კიბოს ალბათობის შეცვლა და ამით შეცვლოს ბრონქიტის წარმოქმნის ალბთობა. ამგვარად, B დამოუკიდებულია X-ისგან L პირობით, რაც წარმოადგენს მარკოვის მიზეზობრივ პირობას.

ამგვარად, თუ ჩვენ ვქმნით მიზეზობრივ გრაფს, რომელიც შეიცავს X და Y ცვლადებს, თუ X-ს და Y-ს არ გააჩნიათ დაფარული საერთო მიზეზები (ე.ი. მიზეზები, რომლებიც არ მდებარეობენ ჩვენს გრაფში), თუ არ არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი გზები Y -დან უკან X-მდე (ე.ი. ჩვენი გრაფი DAG-ია), და თუ არ გაგვაჩნია შერჩევის კრიტერიუმი (ე.ი. ალბათობების განაწილებები არ მიიღება იმ პოპულაციიდან, სადაც ზოგადი ეფექტი პოპულაციის ყველა წევრისათვის ერთნაირი დგინდება), მაშინ ჩვენ თვლით, რომ X და Y დამოუკიდებლები არიან, თუ ჩვენ შევთანხმდებით ცვლადების ნაკრებზე, მათ შორის მინიმუმ ერთი ცვლადი მაინც არის მიზეზ-შედეგობრივი X-დან Y-მდე თითოეულ გზაში. რამდენადაც Y-ის ყველა მშობლის სიმრავლე ასეთი სიმრავლეა, ჩვენ ვთვლით, რომ

მარკოვის პირობას ადგილი აქვს X-ს და Y-ის მიმართ. ამრიგად, ვასკვნით, რომ მიზეზობრივი მარკოვისეული ვარაუდი გამართლებულია მიზეზობრივი გრაფისთვის, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

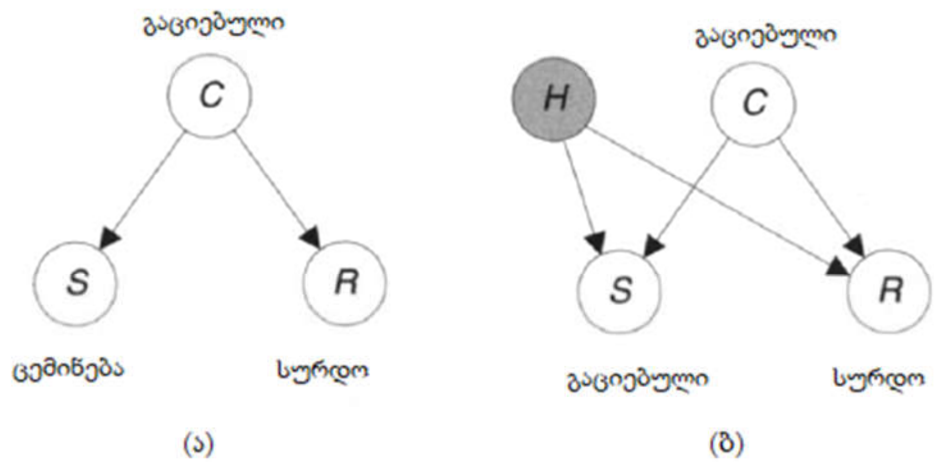
1. არ არის საერთო დაფარული მიზეზები. ე.ი. ყველა საერთო მიზეზი წარმოდგენილია გრაფზე.

2. არ არის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები. ე.ი. ჩვენი გრაფი DAG-ს წარმოადგენს.

3. არ არსებობს შერჩევის კრიტერიუმი.

შევნიშნოთ, რომ მარკოვის პირობისათვის უნდა იყოს წახნაგი X-დან Y-მდე, როცა არის მიზეზობრივი გზა X-დან Y-მდე, იმათ გარდა რომლებიც შეიცავენ ცვლადებს ჩვენს გრაფში. მაგრამ ეს პირობა არ მოითხოვება, რამდენადაც ეს დაკავშირებულია მიზეზობრივი გრაფის განსაზღვრებასთან. შეგახსენებთ, რომ მიზეზობრივ გრაფში არსებობს წახნაგი X-დან Y-მდე, თუ X წარმოადგენს Y -ის პირდაპირ მიზეზს.

შესაძლებელია ყველაზე ხშირად დარღვეული პირობები იმაში მდგომარეობდეს, რომ იქ არ იყოს დამალული საერთო მიზეზები. ამ პირობას ჩვენ განვიხილავთ საბოლოო მაგალითით.



ნახ. 3.14. მიზეზობრივი მარკოვისეული ვარაუდი არ იქნებოდა შესრულებული DAG-ისთვის (ა)-ში თუ არსებობს დაფარული საერთო მიზეზი, როგორც ეს ნაჩვენებია (ბ)-ში.

მაგალითი 3.8. დავუშვათ, რომ ჩვენ გვინდა შევქმნათ მიზეზობრივი DAG, რომელიც შეიცავს ცვლადებს გაციება (C), ცემინება (S) და ცხვირიდან დენა (R). რამდენადაც გაციება იწვევს როგორც ცემინებას ისე ცხვირიდან დენას, და არც ერთ მათგანს არ შეუძლია გამოიწვიოს ერთმანეთი, ნახ. 3.14 (ა)-ზე ჩვენ შევქმნით DAG-ს. DAG-ისთვის მარკოვის მიზეზობრივი პირობა გამოიწვევდა $I_P(S,R|C)$-ს. მაგრამ თუ იარსებებდა S-ის და

R-ის დაფარული საერთო მიზეზები როგორც ეს გამოსახულია ნახ. 3.14 (ბ)-ზე, ეს პირობითი დამოუკიდებლობა არ გატარდება იმიტომ, რომ მაშინაც კი თუ C-მნიშვნელობა ცნობილი იყო, S შეცვლის H-ის ალბათობას, რომელიც თავის მხრივ შეცვლის R-ის ალბათობას. მართლაც, არსებობს სულ ცოტა კიდევ ერთი მიზეზი ცემინების და ცხვირიდან დენის, კერძოდ თივის ცხელება. ამიტომ, როდესაც ჩვენ ვაკეთებთ მიზეზობრივ მარკოვისეულ ვარაუდს, დარწმუნებულები უნდა ვიყოთ, რომ გამოვავლინეთ ყველა საერთო მიზეზი.

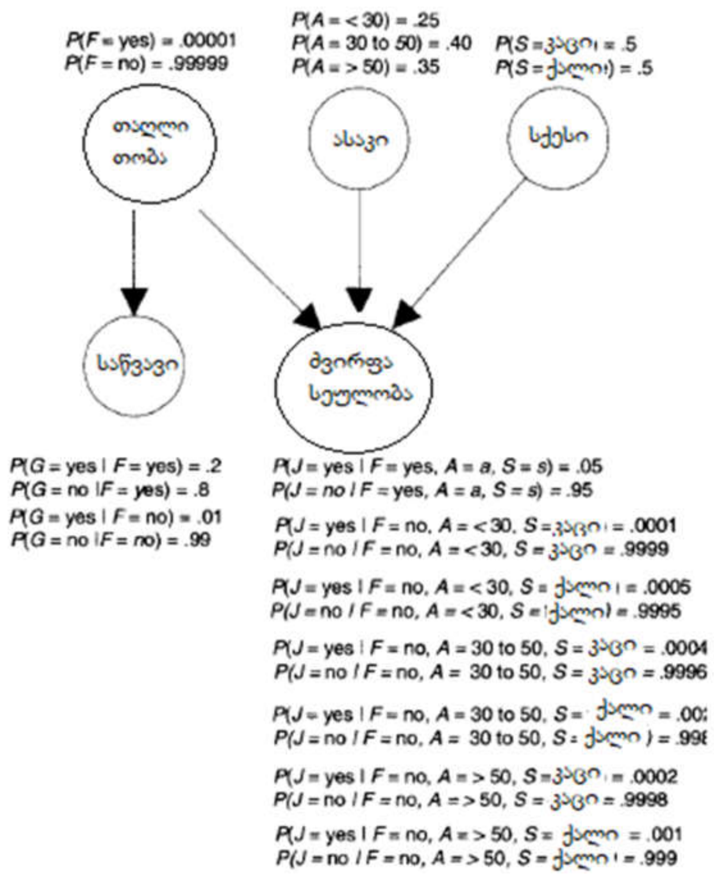
1.3.3 მარკოვის პირობა მიზეზობრიობის გარეშე

ჩვენ ვამტკიცებდით, რომ მიზეზობრივი DAG ხშირად აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას შემთხვევითი სიდიდეების ალბათობების ერთობლივი განაწილებით DAG-ში. ეს არ ნიშნავს, რომ ბაიესის ქსელში DAG-ში წახნაგები უნდა იყოს მიზეზობრივი. ე.ი. DAG-მა შეიძლება დააკმაყოფილოს მარკოვის პირობა DAG-ში ცვლადების ალბათობების განაწილებით წახნაგების გარეშე, რომლებიც მიზეზობრივებს წარმოადგენენ. მაგალითად, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ L, S და C შემთხვევითი სიდიდეების P ალბათობების ერთობლივი განაწილება, რომლებიც განსაზღვრულია ნახ. 3.4-ზე გამოსახული ობიექტების სიმრავლით, აკმაყოფილებენ მარკოვის პირობას ნახ. 3.5-ზე გამოსახული DAG-ით. მაგრამ ჩვენ არ დავიწყებთ იმის მტკიცებას, რომ ობიექტების ფერი იწვევს მათ ფორმას ან ასოს, რომელიც მათზე წერია. როგორც სხვა მაგალითი, თუ ჩვენ შევცლით წახნაგს ნახ. 3.12-ზე DAG-ში, მივიღებთ DAG-ს $E \to DHT \to T$, ახალი DAG ასევე აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას შემთხვევითი სიდიდეების ალბათობების ერთობლივი განაწილებით, მაგრამ წახნაგი არ იქნება მიზეზობრივი.

3.4 დასკვნა ბაიესის ქსელში

როგორც ადრე აღვნიშნეთ, ბაიესის თეორემის სტანდარტული გამოყენება წარმოადგენს დასკნას ორკვანძიან ბაიესის ქსელში. დიდი ბაიესის ქსელები წყვეტენ დიდი რაოდენობის ცვლადების ალბათობების ერთობლივი განაწილების პრობლემას. მაგალითად, ნახ. 3.2, რომელიც ისევ ჩნდება ნახ. 3.15-ზე, წარმოადგენს ცვლადების ალბათობების ერთობლივ განაწილებას, რომლებიც დაკავშირებულია საკრედიტო ბარათებით თაღლითობასთან. ამ ქსელში დასკვნა შედგება ზოგიერთი ცვლადის (ან ცვლადების ერთობლიობის) პირობითი ალბათობის გამოთვლისაგან, იმის გათვალისწინებით, რომ სხვა ცვლადები იქმნება გარკვეული მნიშვნელობით. მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ საკრედიტო

ბარათის გამოყენებით თაღლითობის ალბათობა მონაცემებით: შეძენილია გაზი, შეძენილია საიუველირო ნაკეთობები და ბარათის მფლობელი მამაკაცია. ამ დასკვნის შესასრულებლად ჩვენ გვჭირდება რთული ალგორითმები. პირველი, ვაჩვენებთ როგორ ვიყენებთ ამ ალგორითმებიდან ერთს მარკოვის პირობის და ბაიესის თეორემით დასკვნის გასაკეთებლად. შემდეგ ჩვენ მიუთითებთ ნაშრომებს, რომლებშიც აღწერილია ზოგიერთი ალგორითმი. ბოლოს მოგვყავს ამ ალგორითმებით დასკვნის გაკეთების მაგალითები.



ნახ. 3.15 ბაიესური ქსელი საკრედიტო ბარათის გაყალბების გამოვლენისთვის.

3.4.1 დასკვნის მაგალითები

რამდენიმე მაგალითი მოგვყავს იმის საილუსტრაციოდ, თუ როგორ შეიძლება მარკოვის პირობასთან დაკავშირებული პირობითი დამოუკიდებლების გამოყენება ბაიესის ქსელში დასკვნის გასაკეთებლად.

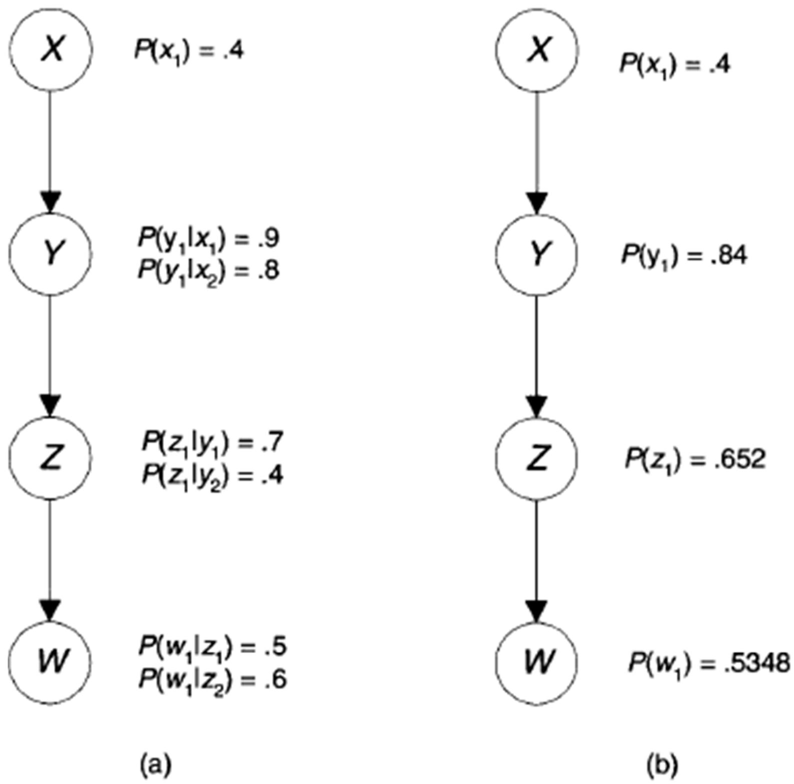
მაგალითი 3.9. განვიხილოთ ბაიესის ქსელი ნახ. 3.16 (ა)-ზე. ყველა ცვლადის წინასწარი ალბათობა შეიძლება გამოითვალოს სრული ალბათობის კანონის მიხედვით:

$$P(y_1) = P(y_1|x_1)P(x_1) + P(y_1|x_2)P(x_2) = (0{,}9)(0{,}4) + (0{,}8)(0{,}6) = 0{,}84$$

$$P(z_1) = P(z_1|y_1)P(y_1) + P(z_1|y_2)P(y_2) = (0{,}7)(0{,}84) + (0{,}4)(016) = 0{,}652$$

$$P(w_1) = P(w|z_1)P(z_1) + P(w_1|z_2)P(z_2) = (0{,}5)(0{,}652) + (0{,}6)(0{,}348) = 0{,}5348.$$

ეს ალბათობები ნაჩვენებია ნახ. 3.16 (ბ)-ზე. შევნიშნოთ, რომ თითოეული ცვლადისათვის გამოთვლა ითხოვს ინფორმაციას, რომელიც განსაზღვრულია მისი მშობლისათვის. განვიხილოთ ეს მეთოდი, როგორც შეტყობინების გადაცემის ალგორითმი, რომელშიც გადის მისი ბავშვის ყველა კვანძი შეტყობინება რომელიც საჭიროა ბავშვის ალბათობის გამოსათვლელად. ცხადია, რომ ეს ალგორითმი გამოყენება ნებისმიერად გრძელი გადაბმული სიის ან ხისათვის.



ნახ. 3.16. ბაიესის ქსელი ჩნდება (ა)-ში, ხოლო ამ ქსელში ცვლადების წინა ალბათობები ნაჩვენებია (ბ)-ზე. თითოეულ ცვლადს აქვს მხოლოდ ორი მნიშვნელობა, ამიტომ (ა)-ზე ნაჩვანებია მხოლოდ ერთის ალბათობა.

მაგალითი 3.10. ახლა დავუშვათ X იქმნება x_1-სთვის. რამდენადაც მარკოვის პირობა გულისხმობს, რომ თითოეული ცვლადი პირობითად არაა დამოკიდებული X-ზე, მაშინ მისი მშობლის გათვალისწინებით, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ დანარჩენი ცვლადების პირობითი ალბათობები ისევ სრული ალბათობის კანონის გამოყენებით (მხოლოდ ახლა იმ ინფორმაციის ფონზე, რომ $X = x_1$) და გაგზავნილი შეტყობინებები ქვემოთაა ჩამოთვლილი:

$$P(y_1|x_1) = 0{,}9$$

$$P(z_1|x_1) = P(z_1|y_1, x_1)P(y_1|x_1) + P(z_1|y_2, x_1)P(y_2|x_1)$$

$$= P(z_1|y_1)P(y_1|x_1) + P(z_1|y_2)P(y_2|x_1) \quad \text{//მარკოვის პირობა}$$

$$= (0,7)(0.9) + (0,4)(0,1) = 0,67$$

$$P(w_1|x_1) = P(w_1|z_1, x_1)P(z_1|x_1) + P(w_1|z_2, x_1)P(z_2|x_1)$$

$$= P(w_1|z_1)P(z_1|x_1) + P(w_1|z_2)P(z_2|x_1)$$

$$= (0,5)(0,67) + (0,6)(1 - 0,67) = 0,533.$$

ცხადია, რომ ეს ალგორითმი გამოყენება ნებისმიერად გრძელი გადაბმული სიის ან ხისათვის.

წინა მაგალითში ნაჩვენებია, თუ როგორ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ქვევით გავრცელებული შეტყობინებები ქვემოთ შექმნილი ცვლადების პირობითი ალბათობების გამოსათვლელად. შემდეგ ვაჩვენებთ, როგორ გამოვთვალოთ ზემოთ შექმნილი ცვლადების პირობითი ალბათობები.

მაგალითი 3.11. დავუშვათ, რომ W იქმნება w_1-სთვის (და სხვა ცვლადები არ იქმნება). ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ გავრცელებული შეტყობინებები დანარჩენი ცვლადების პირობითი ალბათობების გამოსათვლელად. პირველი, ჩვენ გამოვიყენებთ ბაიესის თეორემას $P(z_1|w_1)$-ის გამოსათვლელად:

$$P(z_1|w_1) = \frac{P(w_1|z_1)P(z_1)}{P(w_1)} = \frac{(0,5)(0,652)}{0,5348} = 0,6096$$

შემდეგ $P(y_1|w_1)$-ის გამოსათვლელად ისევ ვიყენებთ ბაიესის თეორემას:

$P(y_1|w_1) = \frac{P(w_1|y_1)P(y_1)}{P(w_1)}$.

ჩვენ ვერ ვასრულებთ ამ გამოთვლას იმიტომ, რომ არ ვიცით $P(w_1|y_1)$. ამ მნიშველობის მიღება შეგვიძლია ქვემოთ გავრცელების გამოყენებით შემდეგნაირად:

$P(w_1|y_1) = (P(w_1|z_1)P(z_1|y_1) + P(w_1|z_2)P(z_2|y_1)$.

ამ გამოთვლის შემდეგ, ასევე $P(w_1|y_2)$ (რამდენადაც X სჭირდება ეს სიდიდე), და შემდეგ განვსაზღვრავთ $P(y_1|w_1)$, ჩვენ გავივლით $P(w_1|y_1)$-ს და $P(w_1|y_2)$-ს X-სკენ. შემდეგ ვითვლით $P(w_1|x_1)$ და $P(x_1|w_1)$ თანმიმდევრობით:

$$P(\omega_1 \mid x_1) = (P(\omega_1 \mid y_1)P(y_1 \mid x_1) + P(\omega_1 \mid y_2)P(y_2 \mid x_1)$$

$$P(x_1 \mid \omega_1) = \frac{P(\omega_1 \mid x_1)P(x_1)}{P(\omega_1)}.$$

ეს გამოთვლები რჩება სავარჯიშოს სახით. ცხადია, რომ გავრცელების ეს აღმავალი სქემა ნებისმიერად გრძელი გადაბმული სიისთვის გამოიყენება.

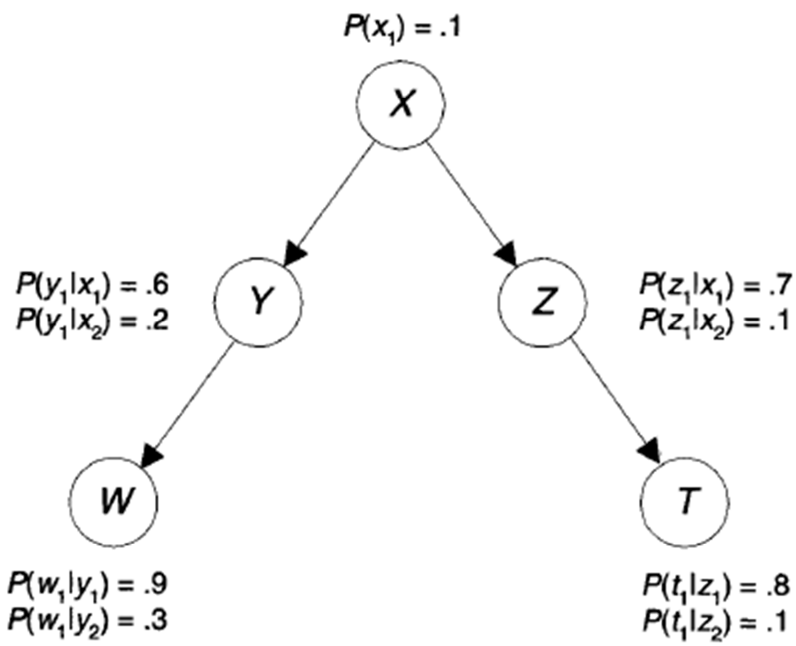
შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს როგორ მოვაბრუნოთ ხეში კუთხეები.

მაგალითი 3.12. განვიხილოთ ბაიესის ქსელი ნახ. 3.17-ზე. ვთქვათ W შექმნილია w_1-სთვის. ახლახანს ზემოთ აღწერილ გავრცელების ალგორითმის გამოიყენებით ვითვლით

$P(y_1|w_1)$, რასაც მოყვება $P(x_1|w_1)$. შემდეგ ვაგრძელებთ ქვემოთ გავრცელების ალგორითმის გამოიყენებით $P(z_1|w_1)$-ის გამოთვლას, რასაც მოყვება $P(t_1|w_1)$, მას ვტოვებთ სავარჯიშოს სახით ამ მიზნით.

3.4.2 შედეგის ალგორითმები და პაკეტები

ლოკალური დამოუკიდებლობის გამოყენებით, როგორც ეს იყო წინა ქვეგანყოფილებაში. *Pearl*-მა [1986,1988] შეიმუშავა შეტყობინების გადაცემის ალგორითმი ბაიესის ქსელში დასკვნის გაკეთებისათვის. ჯენსენ ეტ ოლის მიერ შექმნილ მეთოდზე დაფუძნებით [1990] შემუშავდა შედეგის ალგორითმი, რომელიც მოიცავდა ბაიესის ქსელში არაორიენტირებული გასამკუთხედებული გრაფის გამოყოფას და ისეთი ხის შექმნას, რომლის წვეროები წარმოადგენენ ამ გასამკუთხედებული გრაფის ეშვებს. ასეთ ხეს უწოდებენ გადასვლის ხეს. პირობითი ალბათობები გამოითვლება გადასვლის ხეზე შეტყობინების გადაცემით. ლიმ და დ' ამბროზიომ [1994] აიღეს სხვა მიდგომა. მათ შეიმუშავეს ალგორითმი, რომელიც ალბთობების ერთობლივი განაწილებიდან ჩვენთვის საინტერესო ზღვრული განაწილების გამოთვლის ოპტიმალური გზის მოძენის აპროკსიმაციას ახდენს. ისინი ამას სიმბოლური ალბათობის დასკვნას უწოდებენ (*SPI*).

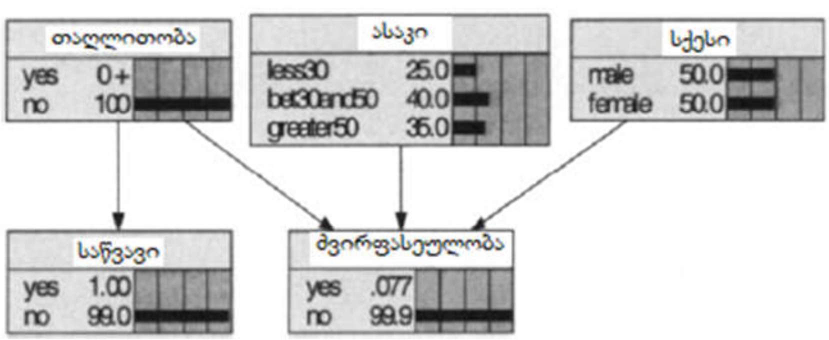


ნახ. 3.17 ფიგურა 3.17: ბაიასური ქსელი. თითოეული ცვლადი მხოლოდ ორი შესაძლო მნიშვნელობითაა; ასე რომ მხოლოდ ერთი ალბათობა ნაჩვენებია.

ყველა ამ ალგორითმს უარესი შემთხვევა აქვს არაპოლინომიური დრო. ეს არაა გასაკვირი რამდენადაც ბაიესის ქსელში დასკვნის პრობლემა ნაჩვენები იყო $NP-hard$ [$Cooper$,1990]. ამ შედეგის ფონზე ბაიესს ქსელში დასკვნისათვის შეიქმნა აპროქსიმაციის ალგორითმები. ერთი ასეთი ალგორითმი, ალბათობის შეწონვა, შემუშავებული იყო ერმანეთისაგან დამოუკიდებლად [$Fung\ and\ Chang$, 1990] -სა და [$Shachter\ and\ peot$, 1990]-ში. [$dagum\ and\ Luby$, 1993]-ში დამტკიცებული იყო, რომ ბაიესის ქსელში აპროქსიმაციული დასკვნის პრობლემა ასევე NP - სიმძიმისაა. მაგრამ არსებობს ბაიესის ქსელის შეზღუდული კლასები, რომლებიც სავარაუდოდ ექვემდებარებიან პოლიამიალური დროით პრობლემის გადაწყვეტას. მართლაც, შეწონილი ალბათობით ვარიანტი, რომელიც წარმოადგენს ყველაზე უარეს პოლინომს იმ დრომდე, სანამ ქსელი არ შეიცავს ექსტრემალურ პირობით ალბათობებს, გამოჩნდა [$pradham\ and\ dagum$, 1996]-ში.

პარქტიკოსი არ უნდა შეშფოთდეს ალგორითმის ყველა იმ რაოდენობით, რომლებიც ჩამოყალიბდა ბაიესის ქსელში პაკეტების სახით. ზოგიერთი მათგანი ქვემოთაა ნაჩვენები.

1. Netica (www.norsys.com)
2. GeNIe (http://genie.sis.pitt.edu/)
3. HUGIN (http://www.hugin.dk)
4. Elvira (http://www.ia.uned.es/~elvira/index-en.html)
5. BUGS (http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/)



ნახ 3.18 გაყალბების გამოვლენა ბაიესის ქსელში ნახ 3.15 განხორციელდა Netika-ს გამოყენებით

ამ წიგნში დასკვნისთვის ჩვენ ვიყენებთ $Netika$ –ს.

3.4.3 $\boldsymbol{Netika}$ –ს გამოყენებით დასკვნა

შემდგომში ჩვენ მოვახდენთ ბაიესის ქსელში დასკვნის გაკეთებაში $Netika$-ს გამოყენების ილუსტრირებას. ნახ. 3.18 გვიჩვენებს ნახ 3.15-ზე თაღლითობის აღმოჩენის

ქსელს, რომელიც ხორციელდება $Netika$–ს გამოყენებით. შევნეშნოთ, რომ $Netika$ ითვლის და გვიჩვენებს ცვლადების წინა ალბათობებს იმის მაგივრად, გვიჩვენოს ალბათობების პირობითი განაწილებები. ალბათობები ნაჩვენებია პროცენტებში. მაგალითად, ის ფაქტი, რომ „სამკაულების" კვანძში „დიახის" შემდეგ 0,077-ია ნიშნავს:

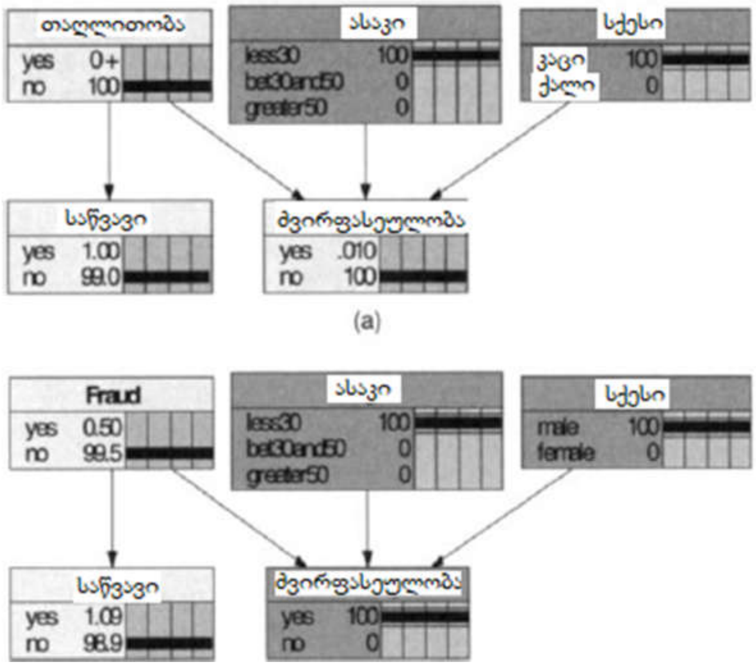
$P(Jewelry = yes) = 0,0077.$

ბოლო 24 საათის განმავლობაში საიუველირო ნაწარმის შეძენის წინა ალბათობა გადაიხდება ნებისმიერი კონკრეტული ბარათით.

იმის შემდეგ რაც იქმნება ცვლადები, $Netika$ გვიჩვენებს ამ ეგზემპლარებით შექმნილი სხვა ცვლადების პირობით ალბათობებს. ნახ. 3. 19 (ა)-ზე ჩვენ შევქმენით ეგზემპლარი 30 წლამდე ასაკი, ხოლო სქესი - მამაკაცი. ამგვარად, ის ფაქტი, რომ „სამკაულების" კვანძში დიახის შემდეგ 0,010-ია ნიშნავს:

$P(Jewelry = yes|Age = les30, sex = male) = 0,00010.$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ F თაღლითობის ალბათობა არ შეიცვალა. ეს ის არის რასაც ჩვენ ველით. პირველი, მარკოვის პირობა ამბობს, რომ თაღლითობა დამოუკიდებელი უნდა იყოს ასაკისა და სქესისაგან. მეორე, როგორც ჩანს, ისინი დამოუკიდებლები უნდა იყვნენ. ე.ი. ის ფაქტი, რომ ბარათის მფლობელი არის ახალგაზრდა ადამიანი, არ უნდა გამოითქვას მეტი ან ნაკლები ვარაუდი, რომ ბარათი თაღლითურად გამოიყენება. ნახ. 3.19 (ბ)-ს იგივე ეგზემპლარები გააჩნია როგორც ეს ნახ. 3.19 (ა)-ზეა ნაჩვენები, იმის გამოკლებით, რომ ჩვენ ასევე შევქმენით $Jewelry$ „დიახისათვის" ეგზემპლარი. შენიშვნაა, რომ F თაღლითობის ალბათობა ახლა შეიცვალა. პირველი, საიუველირო ნაწარმის შეძენა ხდის F თაღლითობას უფრო სავარაუდოს. მეორე, ის ფაქტი, რომ ბარათის მფლობელი ახალგაზრდა მამაკაცია ნიშნავს, რაც ნაკლებ სავარაუდოა, რომ ბარათის მფლობელი განახორციელებს ყიდვას, რაც თაღლითობას უფრო სავარაუდოს ხდის.



ნახ. 3.19. (ა)-ში ასაკი შექმნილი იყო 30 წელზე ნაკლები, ხოლო სქესი შექმნილი იყო მამაკაცისათვის. (ბ)-ში შექმნილი იყო 30 წელზე ნაკლები, სქესი შექმნილი იყო მამაკაცისათვის და საიუველირო ნაწარმი შექმნილი იყო დიახისათვის.

ნახ. 3.20 (ა)-ზე და (ბ)-ზე საწვავი და საიუველირო ნაწარმი შექმნილი იყო დიახისათვის. მაგრამ ნახ. 3.20 (ა)-ზე ბარათის მფლობელი – ახალგაზრდა მამაკაცია, ხოლო ნახ. 3.20 (ბ)-ზე ეს ხანდაზმული ქალია. ეს ახდენს საიუველირო ნაწარმის ყიდვის დისკონტირებას. როდესაც ბარათის მფლობელი ახალგაზრდა მამაკაცია, F თაღლითობა - დიახ მაღალია (0,0909). მაგრამ როდესაც ეს ხანდაზმული ქალია, ის კვლავინდებურად დაბალია (0,0099). იმიტომ, რომ ფაქტი, რომ ბარათის მფლობელი ხანდაზმული ქალია, განმარტავს საიუველირო ნაწარმის ყიდვას.

3.5. როგორ ვიღებთ ალბათობებს?

აქამდე ჩვენ უბრალოდ ვაჩვენეთ ჩვენ მიერ წარმოდგენილ ბაიესის ქსელებში ალბათობების პირობითი განაწილება. ჩვენ არ გვაინტერესებდა თუ როგორ მივიღეთ ისინი. მაგალითად, საკრედიტო ბარათის თაღლითობის მაგალითზე ჩვენ უბრალოდ განვაცხადეთ, რომ $P(Age = les30) = 0{,}25$. თუმცა როგორ მივიღეთ ეს და კიდევ სხვა ალბთობები? როგორც ამ თავის დასაწყისში იყო ნახსენები, ისინი შეიძლება მიღებულ იქნეს ან ამ სფეროში ექსპერტის სუბიექტური განსჯით, ან ისინი შეიძლება გავიგოთ მონაცემებიდან. მე-4 თავში ჩვენ მონაცემებიდან გავიგებთ, ხოლო II და III ნაწილებში მოვიყვანთ მათი ექსპერტთაგან მოპოვების და მონაცემების მიხედვით გაგების მაგალითებს. აქ ვაჩვენებთ მათი განსაზღვრის გამარტივების ორ მეთოდს. პირველი მეთოდი ეხება შემთხვევას,

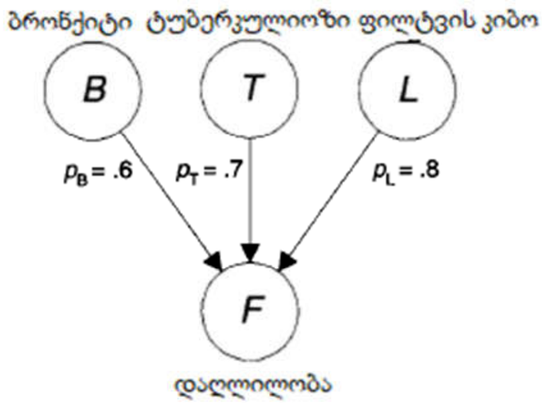
როდესაც კვანძს მხოლოდ რამდენიმე მშობელი გააჩნია, მაშინ როცა მეორე მეთოდი ეხება კვანძებს, რომლებიც უწვეტ შემთხვევით სიდიდეებს წარმოადგენენ.

3.5.1 ხმაურის $OR-Gate$ მოდელი

პირობითი ალბათობების მიღების პრობლემის განხილვის შემდეგ, როდესაც a კვანძს აქვს რამდენიმე მშობელი, ჩვენ წარმოვადგენთ მოდელებს, რომლებიც წყვეტენ ამ პრობლემას.

მრავალრიცხოვან მშობლებთან დაკავშირებული სირთულე

დავუშვათ, რომ ფილტვის კიბო, ბრონქიტი და ტუბეკულოზი იწვევენ დაღლილობას და საჭიროა ამ ურთიერთობის, როგორც სამედიცინო დიაგნოზის სისტემის ნაწილის მოდელირება. DAG-ის ნაწილი, რომელიც მხოლოდ ამ ოთხ ცვლადს ეხება წარმოდგენილია ნახ. 3.21-ზე.



ნახ. 3.21: ჩვენ უნდა შევაფასოთ რვა პირობითი ალბათობა F კვანძისთვის

ჩვენ უნდა შევაფასოთ რვა პირობითი ალბათობა F კვანძისათვის, ამ კვანძის მშობლის რვა კომბინაციიდან თითოეულისათვის ცალ-ცალკე. ე.ი. ჩვენ უნდა შევაფასოთ შემდეგები:

$$P(F = yes|B = no, T = no, L = no)$$

$$P(F = yes|B = no, T = no, L = yes)$$

$$\dots$$

$$P(F = yes|B = yes, T = yes, L = yes).$$

საკმაოდ ძნელი იქნებოდა ამ მნიშვნელობების ან მონაცემებიდან ან ექსპერტ ექიმისაგან მოპოვება. მაგალითად, იმისათვის, რომ მივიღოთ $P(F = yes|B + yes, T = yes, L = no)$-ის მნიშვნელობა უშუალოდ მონაცემებისაგან, ჩვენ დაგვჭირდება ადამიანთა დიდი პოპულაცია, რომლებსაც, როგორც ცნობილია, აქვთ როგორც ბრონქიტი, ასევე ტუბერკულოზი, მაგრამ არ აქვთ ფილტვის კიბო. იმისათვის რომ ეს მნიშვნელობა უშუალოდ ექსპეტისაგან მიიღონ,

ექსპერტისთვის ცნობილი უნდა იყოს დაღლილობის ალბათობა, როცა არსებობს ორი ავადმყოფობა და მესამე – არა. შემდეგ ჩვენ გაჩვენებთ ამ პირობითი ალბთობის მიღების არაპირდაპირ გზას.

ხმაურის $OR-Gate$ ძირითადი მოდელი

ხმაურის $OR-Gate$ მოდელი მიეკუთვნება იმ შემთხვევას, როდესაც ცვლადებს შორის ურთიერთობა ჩვეულებრივ წარმოადგენს მიზეზობრივ გავლენას, და თითოეულ ცვლადს ორი მნიშვნელობა აქვს. ნახ. 3.21-ზე მოცემული მაგალითი წარმოადგენს ტიპურ მაგალითს. იმის ნაცვლად, რომ შევაფასოთ რვავე ალბათობა, ჩვენ ვაფასებთ თითოეული მიზეზის მიზეზობრივ ძალას მისი ეფექტურობისათვის. **მიზეზობრივი ძალა** არის იმ მიზეზის ალბათობა, რომელსაც მივყავართ იმ ეფექტამდე როდესაც მთლიანად მიზეზი არსებობს. ნახ. 3.21-ზე ჩვენ ვაჩვენეთ ბრონქიტის მიზეზობრივი ძალა p_B დაღლილობისათვის არის 0,6. *ნავარაუდევია, რომ ბრონქიტი ყოველთვის მიგვიყვანს დაღლილობამდე, თუ რომელიმე უცნობი მექანიზმი არ აფერხებს ამის მიმდინარეობას,* და ეს დათრგუნვა ხდება დრის 40%-ში. დროის 60%-ში ბრონქიტს მივყავართ დაღლილობამდე. ამჟამად *ჩვენ ვფიქრობთ, რომ ეფექტის ყველა მიზეზი ჩამოყალიბებულია DAG-ში,* და ეფექტი ვერ წარმოიშობა თუ, სულ მცირე ერთი მისი მიზეზი არსებობს. ამ შემთხვევაში მათემატიკურად გვაქვს:

$$p_B = P(F = yes, T = no, L = no).$$

ტუბერკულოზის და ფილტვის კიბოს მიზეზობრივი ძალა დაღლილობისთვის ასევე ნაჩვენებია ნახ. 3.21-ზე. ეს სამი მიზეზობრივი ძალა არ უნდა იყოს დასადგენად ზედმეტად რთული, როგორც რვავე პირობითი ალბათობა. მაგალითად, რომ მივიღოთ p_B მონაცმებიდან, საჭიროა ადამიანთა პოპულაცია, რომელთაც აქვთ მხოლოდ ფილტვის ბრონქიტი და არ აქვთ სხვა დაავადებები. იმისათვის, რომ p_B ექსპერტებისაგან მივიღოთ, ექსპერტისათვის აუცილებელია მხოლოდ დაადგინოს სიხშირე, რომლითაც ბრონქიტი იწვევს დაღლას.

ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ რვა პირობითი ალბათობა, რომლებიც ჩვენ დაგვჭირდება, მივიღოთ სამი მიზეზობრივი ძალიდან, თუ ჩვენ გავაკეთებთ კიდევ ერთ ვარაუდს. *ჩვენ უნდა ვივარაუდოთ, რომ ის მექანიზმები, რომლებიც ახდენენ მიზეზების დათრგუნვას, მოქმედებენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად.* მაგალითისათვის, მექანიზმი, რომელიც ხელს უშლის ბრონქიტის შედეგად დაღლილობის მოქმედებას, დამოუკიდებელია იმ მექანიზმისაგან რომელიც ხელს უშლის ტუბერკულოზის შედეგად დაღლილობის წარმოქმნას. მათემატიკურად ეს ვარაუდი შემდეგნაირად გამოიყურება:

$$P(F = no|B = yes, T = yes, L = no) = (1 - p_B)(1 - p_T)$$

$$= (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7) = 0{,}12.$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ წინა ტოლობაში ჩვენ ვახდენთ ბრონქიტის და ტუბერკულოზის განპირობებას ორივე არსებობს და ფილტვის კიბო არ არსებობს. ამ შემთხვევაში დაღლილობა უნდა მოხდეს, თუ ბრონქიტის და ტუბერკულოზის მიზეზობრივი ეფექტები ერთდროულად არ წარმოადგენენ ხელისშემშლელებს. ვინაიდან ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ, რომ ისინი მოქმედებენ დამოუკიდებლად, ალბათობა იმისა რომ ორივე ეფექტი ხელისშემშლელია არის ალბათობა იმ შედეგისა, რომ ყოველი მათგანი ხელისშემშლელია, რომელიც არის $(1 - p_B)(1 - p_T)$.

ამგვარად, თუ არსებობს სამივე მიზეზი, ჩვენ გვაქვს:

$$P(F = no|B = yes, T = yes, L = yes) = (1 - p_B)(1 - p_T)(1 - p_L)$$
$$= (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7)(1 - 0.8) = 0{,}024.$$

მიაქციეთ ყურადღება, როცა არსებობს მეტი მიზეზი, უფრო ნაკლებ სავარაუდოა, რომ დაღლილობა არ იარსებებს. ეს ის არის, რასაც ველოდით. შემდეგ მაგალითში ჩვენ გამოვითვლით რვავე პირობით ალბათობას, რომელიც საჭიროა ნახ. 3.21-ზე გამოსახული F კვანძისათვის.

მაგალითი 3.13. ვთქვათ ჩვენ ვუშვებთ ვარაუდებს ხმაურის მოდელ $OR - gate$-ში, და ბრონქიტის, ტუბერკულოზის და ფილტვის კიბოს მიზეზობრივი ძალა დაღლილობისთვის ნაჩვენებია ნახ. 3.21-ზე. შემდეგ:

$$P(F = no|B = no, T = no, L = no) = 1$$
$$P(F = no|B = no, T = no, L = yes) = (1 - p_L) = (1 - 0{,}8) = 0{,}2$$
$$P(F = no|B = no, T = yes, L = no) = (1 - p_T) = (1 - 0{,}7) = 0{,}3$$
$$P(F = no|B = no, T = yes, L = yes) = (1 - p_T)(1 - p_L)$$
$$= (1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}06$$
$$P(F = no|B = yes, T = no, L = no) = (1 - p_B) = (1 - 0{,}6) = 0{,}4$$
$$P(F = no|B = yes, T = no, L = yes) = (1 - p_B)(1 - p_L) = (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}8) = 0{,}08$$
$$P(F = no|B = yes, T = yes, L = no) = (1 - p_B)(1 - p_T)$$
$$= (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7) = 0{,}12$$
$$P(F = no|B = yes, T = yes, L = yes) = (1 - p_B)(1 - p_T)(1 - p_L)$$
$$= (1 - 0{,}6)(1 - 0{,}7)(1 - 0{,}8) = 0{,}024.$$

მიაქციეთ ყურადღება, რამდენადაც ცვლადები ორობითია, ეს არის ერთადერთი მნიშვნელობა, რომლებიც უნდა დავაზუსტოთ. სხვა ალბათობები ცალსახად განისაზღვრება. მაგალითად,

$P(F = yes|B = yes, T = yes, L = yes) = 1 - 0,024 = 0.976.$

თუმცა ჩვენ მოდელის ილუსტრირება მოვახდინეთ სამი მიზეზით, ცხადია ის ნებისმიერი რაოდენობის მიზეზზე ვრცელდება. ჩვენ მოდელში გავამუქებთ ვარაუდებს, როცა მას წარმოვადგენთ. შემდეგ შევაჯამებთ მათ და გაჩვენებთ ზოგად ფორმულას.

ხმაურის მოდელი $OR - Gate$ ქმნის შემდეგ სამ ვარაუდს:

1. **მიზეზობრივი შეფერხება**: ეს ვარაუდი გულისხმობს რაღაც მექანიზმის არსებობას, რომელიც აფერხებს მისი ზემოქმედების მიზეზის წარმოშობას, ასევე მიზეზის არსებობას მივყავართ ეფექტის არსებობამდე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს მექანიზმი გამორთულია.

2. **გამონაკლისისაგან დამოუკიდებლობა**: ეს ვარაუდი გულისხმობს, რომ მექანიზმი რომელიც თრგუნავს ერთ მიზეზს, არაა დამოკიდებული იმ მექანიზმზე, რომელიც ხელს უშლის სხვა მიზეზებს.

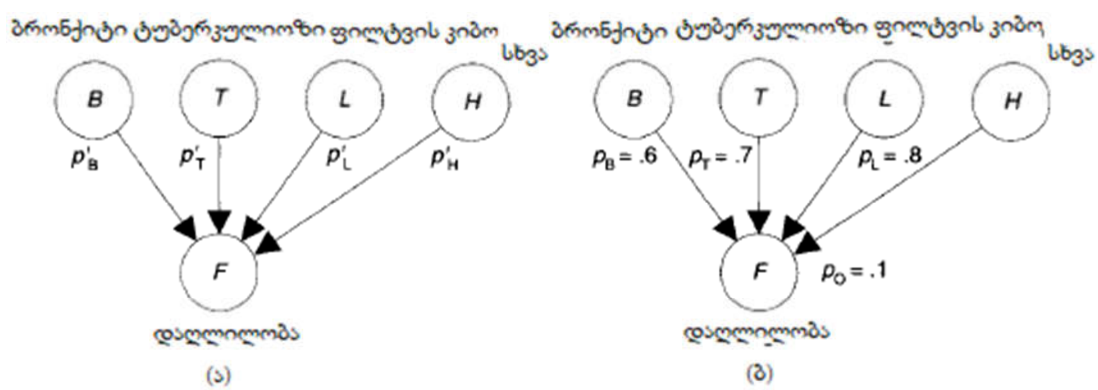
3. **ანგარიშვალდებულება:** ეს ვარაუდი გულისხმობს, რომ ეფექტი შეძლება წარმოიშვას მხოლოდ მაშინ, როცა მისი ერთი მიზეზთაგანი მაინც არსებობს და არ იბლოკება.

ხმაურის $OR - Gate$ მოდელისათვის ზოგადი ფორმულა შემდეგია: ვთქვათ Y-ს აქვს n მიზეზი X_1, X_2, $\ldots, X_n$, ყველა ცვლადი ორობითია, და ჩვენ ვვარაუდობთ ხმაურის $OR - Gate$ მოდელს. ვთქვათ p_i იყოს X_i-ის მიზეზობრივი ძალა Y-სათვის. ანუ,

$p_i = P(Y = yes|X_1 = no, X_2 = no, \ldots, X_i = yes, \ldots, X_n = no).$

მაშინ, თუ X არის კვანძების სიმრავლე, რომლებიც შექმნილი იყო დიახისათვის,

$$P(Y = no|X) = \prod_{i such\ that X_i \in X} (1 - p_i)$$



ნახ. 3.22 (ა)-ში ალბათობები წარმოადგენენ მიზეზობრივ ძალას ხმაურის $OR - Gate$ მოდელში. (ბ)-ში ის ალბათობებია, რომლებსაც ვიკვლევთ.

ჟონვადი ხმაურის **OR-Gate** მოდელი

ხმაურის მოდელ $OR - Gate$-ში დაშვებული სამი ვარაუდიდან ანგარიშვალდებულების შესახებ ვარაუდი ნაკლებ გამართლებულად ჩანს. მაგალითად, დაღლილობის შემთხვევაში, რა თქმა უნდა, დაღლილობის სხვა მიზეზებიც არსებობს, როგორიცაა პროფესორ ნეაპოლიტანის ლექციის მოსმენა. ამგვარად, ნახ. 3.21-ზე მოდელი არ შეიცავს დაღლილობის ყველა მიზეზს, ხოლო ანგარიშვალდებულების შესახებ ვარაუდი არაა გამართლებული. როგორც ჩანს, ბევრ, თუ არა უმეტეს შემთხვევაში, დარწმუნებულები არ ვართ, რომ ჩვენ ეფექტის ყველა ცნობილი მიზეზი შვიმუშავეთ. შემდგომში ჩვენ ვაჩვენებთ მოდელს, რომელიც ანგარიშვალდებულებას მიუღებლად ხდის. ამ მოდელის ფორმულის გამოყვანა არაა მარტივი და ინტუიტიურად გასაგები, როგორც ის, რომელიც გამოიყენებოდა საბაზისო ხმაურის $OR - gate$ მოდელში. ამგვარად, ჩვენ ჯერ წარმოვადგენთ მოდელს, გამომდინარეობის გარეშე, შემდეგ ვაჩვენებთ მის გამომდინარეობას.

ჟონვადი ხმაურის **OR-Gate** ფორმულა

ჟონვადი ხმაურის OR-Gate მოდელი ვარაუდობს, რომ ყველა მიზეზი, რომელიც არ იყო ჩამოყალიბებული, შეიძლება თავი მოიყაროს ერთ სხვა H მიზეზში და ეს გამოხატული მიზეზები H-თან ერთად აკმაყოფილებენ სამ ვარაუდს ხმაურის $OR - Gate$ მოდელში. ეს გამოიხატება დაღლილობის მაგალითში ნახ. 3.22 (ა)-ზე. ამ ნახატის ალბათობები წარმოადგენენ მიზეზობრივ ძალას ხმაურის $OR - Gate$ მოდელში. მაგალითად.

$P'_B = P(F = yes|B = yes, T = no, L = no, H = no)$.

ჩვენ ვერ შევძელით ამ მნიშვნელობის დადგენა, იმიტომ რომ არ ვიცით, არსებობს თუ არა H ამჟამად. ახ. 3.22 (ბ)-ზე ის ალბათობებია, რომლებსაც ჩვენ რეალურად ვადგენთ. თითოეული სამი გამოვლენილი მიზეზისთვის. ნაჩვენები ალბათობა არის ეფექტის არსებობის ალბათობა, რამდენადაც დარჩენილი ორი გამოხატული მიზეზი არ არსებობს. მაგალითად,

$p_B = P(F = yes|B = yes, T = no, L = no)$.

აღვნიშნოთ P'_B და p_B ალბათობებს შორის განსხვავება. უკანასკნელი არ წამოადგენს პირობას H-ის მნიშვნელობაზე. მაშინ როცა პირველი არის. p_0 ალბათობა განსხვავებულია სხვა ალბათობებისაგან. ეს არის იმის ალბათობა, რომ ეფექტი იარსებებს, თუ არც ერთი გამოხატული მიზეზთაგან არ იარსებებს. ანუ

$p_0 = P(F = yes, |B = no, T = no, L = no)$.

კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ არ მოგვიხდენია H-ის განპირობება.

ჟონვადი ხმაურის OR-Gate ზოგადი ფორმულა ასეთია (გამოყვანა ქვეგანყოფილებაშია): ვთქვათ, Y-ს აქვს n მიზეზი X_1, X_2, $\dots, X_n$, ყველა ცვლადი ორობითია, და ჩვენ ვვარაუდობთ, ჟონვადი ხმაურის $OR-Gate$ მოდელს. დავუშვათ,

$$p_i = P(Y = yes|X_1 = no, X_2 = no, \dots, X_i = yes, \dots, X_n = no) \qquad (3.1)$$

$$p_0 = P(Y = yes|X_1 = no, X_2 = no, \dots, X_n = no). \qquad (3.2)$$

მაშინ, თუ X დიახისათვის შექმნილი კვანძების სიმრავლეა,

$$P(Y = no|X) = (1 - p_0) \prod_{i\ such\ that X_i \in X} \frac{1-p_i}{1-p_0}.$$

მაგალითი 3.14. გამოვთვალოთ პირობითი ალბათობები ნახ. 3.22 (ბ)-ზე გამოსახული ქსელისათვის. ჩვენ გვაქვს:

$$P(F = no \mid B = no, T = no, L = no) = 1 - p_0$$
$$= 1 - 0.1 = 9$$

$$P(F = no|B = no, T = no, L = yes) = (1 - p_0)\frac{1 - p_L}{1 - p_o}$$
$$= 1 - 0.8 = 0.2$$

$$P(F = no, |B = no, T = yes, L = no) = (1 - p_{0)}\frac{1 - p_T}{1 - p_0}$$
$$= 1 - 0.7 = 0.3$$

$$P(F = no|B = no, T = yes, L = yes) = (1 - p_0)\frac{1 - p_T}{1 - p_o}\frac{1 - p_L}{1 - p_0}$$
$$= \frac{(1-0.7)(1-0.8)}{1-0.1} = 0.3$$

$$P(F = no|B = no, T = no, L = no) = (1 - p_o)\frac{1 - p_B}{1 - p_0}$$
$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(F = no|B = yes, T = no, L = yes) = (1 - p_o)\frac{1 - p_B}{1 - p_o}\frac{1 - p_L}{1 - p_o}$$
$$= \frac{(1-0.6)(1-0.8)}{1-0.1} = 0.089$$

$$P(F = no|B = yes, T = tes, L = no) = (1 - p_o)\frac{1 - p_B}{1 - p_0}\frac{1 - p_T}{1 - p_o}$$
$$= \frac{(1-0.6)(1-0.7)}{1-0.1} = 0.133$$

$$P(F = no|B = yes, T = yes, L = yes) = (1 - p_o)\frac{1 - p_B}{1 - p_o}\frac{1 - p_T}{1 - p_0}\frac{1 - p_L}{1 - p_o}$$
$$= \frac{(1 - 0.6)(1 - 0.7)(1 - 0.8)}{(1 - 0.1)(1 - 0.1)}0.030.$$

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 3.1

სავარჯიშო 3.1 3.3. მაგალითში ის დავტოვეთ სავარჯიშოს სახით s, l და c-ს ყველა მნიშვნელობის შემდეგნაირად ასახვისათვის:

$P(s, l, c) = P(s|c)P(l|c)p(c)$.

აჩვენეთ ეს.

სავარჯიშო 3.2. განიხილეთ ალბათობების ერთობლივი განაწილება 3.1. მაგალითში.

1. აჩვენეთ, რომ P აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 3.31 (ა)-ზე მოცემული DAG-ით და რომ P ტოლია ამ DAG-ში მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის.

2. აჩვენეთ, რომ P აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 3.31 (ბ)-ზე მოცემული DAG-ით და რომ P ტოლი არაა ამ DAG-ში მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის.

3. აჩვენეთ, რომ P არ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 3.31 (გ)-ზე მოცემული DAG-ით და რომ P ტოლი არაა ამ DAG-ში მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის.

სავარჯიშო 3.3. შექმენით ობიექტების განლაგება იმის მსგავსად, როგორც ეს ნახ. 3.4-ზეა ნაჩვენები, მაგრამ ასოების, ფორმების და ფერის სხვა განლაგებით, ისე, რომ თუ შემთხვევითი L, S და C სიდიდეები განსაზღვრულია როგორც მაგალით 3.1–ში, მაშინ ერთადერთი დამოუკიდებლობა ან ცვლადებს შორის პირობითი დამოუკიდებლობა არის $I_P(L, S)$. აკმაყოფილებს თუ არა ეს განაწილება მარკოვის პირობას ნახ. 3.31-ზე გამოსახული ნებისმიერი DAG-ით. თუ ასეა, რომლით (რომლებით)?

სავარჯიშო 3.4. განვიხილოთ მაგალით 3.1-ში განმარტებული ნახ. 3.4-ზე გამოსახული ობიექტების მიმართ განსაზღვრული შემთხვევითი სიდიდეების ერთობლივი განაწილება. დავუშვათ, ჩვენ ვითვლით ნახ. 3.1-ზე მოცემული DAG-ისთვის განაწილებების განაწილებას და ვიღებთ მათ პროდუქტს. თეორემა 3.1 გვეუბნება, რომ ეს პროდუქტი წარმოადგენს იმ ალბათობების ერთობლივ განაწილებას, რომლებიც წარმოადგენენ ბაიესის ქსელს ამ DAG-ით. წარმოადგენს ეს თუ არა შემთხვევითი სიდიდეების ფაქტობრივ განაწილებას?

პარაგრაფი 3.2

სავარჯიშო 3.5. პროფესორი მორისი იკვლევდა სქესობრივი ნიშნით დისკრიმინაციას სამსახურში მიღებისას. მან მისცა დამქირავებელ პერსონალს თანაბარი რაოდენობის მამაკაცთა და ქალთა რეზიუმეები და შემდეგ იკვლევდა, იყო თუ არა მათი შეფასებები შედგენილი სქესის მიხედვით. როცა მან წარმოადგინა მისი კვლევების შემაჯამებელი დოკუმენტი ფსიქოლოგიურ ჟურნალში, რეცეზენტებმა უარყვეს ეს დოკუმენტი, რადგან ეს

არის მსუქანი ხელებით მანიპულაციის მაგალითი. შეისწავლეთ მსუქანი ხელებით მანიპულაციის კონცეფცია და ახსენით რატომ ფიქრობდნენ ისინი ამას.

სავარჯიშო 3.6. განვიხილოთ სამედიცინო ცოდნის შემდეგი ნაწილი: ტუბერკულიოზმა და ფილტვის კიბომ შეიძლება გამოიწვიოს ქოშინი და გულმკერდის დადებითი რენტგენოგრამა. ბრონქიტი ქოშინის კიდევ ერთი მიზეზია. აზიაში ბოლო დროინდელმა ვიზიტმა შეიძლება გამოიწვიოს ტუბერკულოზის ალბათობის გაზრდა. მოწევამ შეიძლება გამოიწვიოს როგორც ფილტვის კიბო, ასევე ბრონქიტი. შექმენით DAG, რომელიც წარმოადგენს ამ ცვლადებს შორის დამოკიდებულებას ან თქვენი სუბიექტური მოსაზრების, ან მონაცემთა საფუძველზე დაასრულეთ ბაიესის კონსტრუქცია ამ DAG-ში პირობითი ალბათობის მნიშვნელობის განსაზღვრით.

სავარჯიშო 3.7. ახსენით რატომაა, რომ თუ ჩვენ გავაუქმებთ წიბოს DAG-ში ნახ 3.12-ზე რომ მივიღოთ $DAG\ E \rightarrow DHT \rightarrow T$, ახალი DAG ასევე აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ცვლადების ალბათური განაწილებით.

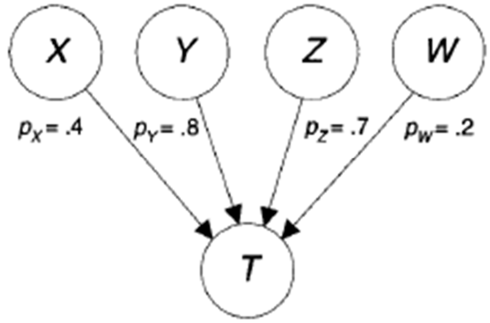
პარაგრაფი 3.3

სავარჯიშო 3.8. გამოთვალეთ $P(x_1|w_1)$ ნახ. 3.16-ზე მოცემული ბაიესის ქსელს გათვალისწინებით.

სავარჯიშო 3.9. გამოთვალეთ $P(t_1|w_1)$ ნახ. 3.17-ზე მოცემული ბაიესის ქსელს გათვალისწინებით.

სავარჯიშო 3.10. გამოთვალეთ $P(x_1|t_2, w_1)$ ნახ. 3.17-ზე მოცემული ბაიესის ქსელს გათვალისწინებით.

სავარჯიშო 3.11. $Netika$-ს გამოყენება ავითარებს ბაიესის ქსელს ნახ. 3.2-ზე, გამოიყენეთ ეს ქსელი შემდეგი პირობითი ალბათობების განსაზღვრისათვის:



ნახ. 3.32. ნავარაუდევია, რომ გამოყენებული იქნება ხმაურის $OR - gate$ მოდელი

1. $P(F = yes|Sex = male)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(F = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

2. $P(F = yes|J = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(F = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

3. $P(F = yes|Sex = male, J = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(F = yes|J = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

4. $P(G = yes|F = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(G = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

5. $P(G = yes|J = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(G = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

6. $P(G = yes|J = yes, F = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(G = yes|F = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

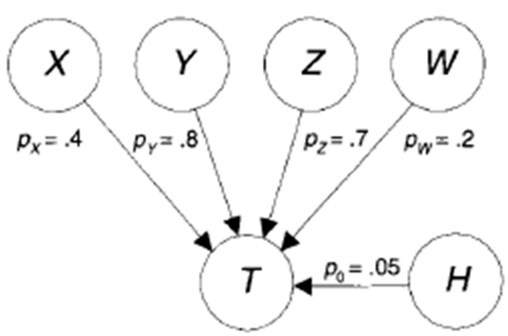
7. $P(G = yes|A =< 30)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(G = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

8. $P(G = yes|A =< 30, J = yes)$. ეს პირობითი ალბათობა განსხვავდება $P(G = yes|J = yes)$-სგან? ახსენით რატომ არის ან არ არის.

პარაგრაფი 3.4

სავარჯიშო 3.12. ვთქვათ, ხმაურის $OR - gate$ მოდელი და მიზეზობრივი ძალა გამოსახულია ნახ. 3.32-ზე. გამოვთალოთ ალბათობა $T = yes$ მშობლების მნიშვნელობის ყველა კომბინაციისათვის.

სავარჯიშო 3.13. ვთქვათ, ჟონვადი ხმაურის OR-Gate მოდელი და შესაბამისი ალბათობები ნაჩვენებია ნახ. 3.33-ზე. გამოვთალოთ ალბათობა $T = yes$ მშობლების მნიშვნელობის ყველა კომბინაციისათვის. შეადარეთ მიღებული შედეგი სავარჯიშო 3.12-ში მიღებულ შედეგს.



ნახ. 3.33. ნავარაუდევია ჟონვადი ხმაურის OR-Gate მოდელი

თავი 4

ბაიესის ქსელის შესწავლა

4.1 პარამეტრების შესწავლა

ჩვენ შგვიძლია შევისწავლოთ, მხოლოდ მონაცემებიდან პარამეტრები, როდესაც ალბათობები წარმოადგენენ ფარდობით სიხშირეებს, რომლებიც განვიხილეთ თავი 2-ის 2.3.1 პარაგრაფში. ამრიგად, ეს მსჯელობა ეხება მხოლოდ ასეთ ალბათობებს. თუმცა მეთოდი ეფუძნება მკაცრ მათემეტიკურ შედეგებს, რომლებიც მიღებულია ინდივიდის სუბიექტური მოსაზრების მოდელირების გზით, თვითონ მეთოდი საკმაოდ მარტივია. აქ ჩვენ უბრალოდ წარმოვადგენთ მეთოდს. თავიდან ჩვენ განვიხილავთ ერთი პარამეტრის შესწავლას, ხოლო შემდეგ ვაჩვენებთ, როგორ შეისწავლება ყველა პარამეტრი ბაიესის ქსელში.

4.1.1. ერთი პარამეტრის შესწავლა

ბინომიალური ცვლადის ალბათობის მეთოდის წარდგენისას, ჩვენ ამ მეთოდს განვავრცობთ მრავალწევრის ცვლადებზე. ბოლოს, ჩვენ წარმოვადგენთ რეკომენდაციებს ალბათობების მიმართ წინა მოსაზრებების ჩამოყალიბებისათვის.

ბინომიალური ცვლადები

საკითხს შევისწავლით მაგალითების მიმდევრობის საშუალებით.

მაგალითი 4.1. შეგახსენებთ თავი 2-ის პარაგრაფ 2.3.1.-ის დასაწყისში მოყვანილ მსჯელობას. ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ჭიკარტი შეიძლება დაეცეს წვეტით ზემოთ, რომელსაც „თავი“ დავარქვით, ან ის შეიძლება დაეცეს კიდით და მიწასთან შეხების წერტილით, რომელსაც „კუდი“ ვუწოდეთ. რამდენადაც ჭიკარტი სიმეტრიული არაა, ჩვენ არ გვაქვს საფუძველი მივიღოთ გულგრილობის პრინციპი და მივანიჭოთ 0,5 ალბათობა ორივე შემთხვევას. ამიტომ ჩვენ გვჭირდება მონაცემები თავების ალბათობის შესაფასებლად. ვთქვათ, ჩვენ ვისვრით ჭიკარტს 100-ჯერ, და ის თავით დაეცა 65-ჯერ. მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევაფასოთ:

$P(heads) \approx \frac{65}{100} = 0{,}65.$

ამ შეფასებას, რომელიც მიიღება თავების რაოდენობის აგდების რაოდენობაზე გაყოფით, უწოდებენ ალბათობის **მაქსიმალური დამაჯერებლობის შეფასებას** ($\boldsymbol{MLE}$). თუ n ცდაში s თავია, ალბათობის MLE ტოლია:

$$P(heads) \approx \frac{s}{n}.$$

MLE-ის გამოყენება გონივრულია, თუ ჩვენ არ გვაქვს ალბთობის შესახებ წინა მოსაზრება. მაგრამ ეს არც ისე გონივრულია, თუ ჩვენ გავაქვს წინასწარი მოსაზრებები. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 4.2. ვთქვათ, თქვენ ჯიბიდან ამოღებულ მონეტას 10-ჯერ აგდებთ და ის ყოველთვის ავერსით ეცემა. შემდეგ MLE-ის გამოყენებით ვაფასებთ:

$$P(heads) \approx \frac{10}{10} = 1.$$

იმის შემდეგ რაც მონეტა 10-ჯერ ავერსით დაეცა, ჩვენ ვერ დავდებდით ნიძლავს იმაზე, რომ თითქოს დარწმუნებულები ვართ, რომ მე-11 აგდების შედეგი ავერსი იქნება. იმიტომ რომ ჩვენი მოსაზრება $P(heads)$-სთან დაკავშირებით არ არის MLE-ის მნიშვნელობა 1-ის. ვთქვათ, გვჯერა, რომ მონეტები ჩვენს ჯიბეებში სამართლიანია, თუ ჩვენ ამის მაგივრად მხარს ვუჭერთ რომ $P(heads) = 0{,}5$ ყველა 10 ასროლისას ეცემა ავერსით? ეს შეიძლება გონივრული მოგვეჩვენოს 10 აგდებისათვის, მაგრამ ეს არც ისე გონივრული ჩანს, თუ 1000 აგდებაზე დაეცა ავერსით. ამ შემთხვევაში ჩვენ ეჭვი გვიჩნდება რომ მონეტა ისე იყო აწონილი, რომ ავერსზე დაცემულიყო. ჩვენ გვჭირდება მეთოდი, რომელიც თავისთავში მოიცავს წინა მოსაზრებებს მონაცემებთან ერთად. სტანდარტული გზა ამისათვის არის ალბათობის შემფასებელი, რათა დადგინდეს მთელი a და b რიცხვები ისე, რომ შედეგი ეკვივალენტური იყოს იმის რაც დაინახა შემფასებელმა პირველი a-ჯერ აგდების დროს (ამ შემთხვევაში თავები), ხოლო მეორე შემთხვევაში შედეგი ხდება b-ჯერ $m = a + b$ ცდის დროს, მაშინ შემფასებლის წინა ალბათობები იქნება:

$P(heads) = \frac{a}{m}, \quad P(tails) = \frac{b}{m}.$

თავებზე და კუდებზე $n = s + t$ ცდაში დაკვირვების შემფასებლის შემდგომი ალბთობები იქნება

$P(heads|s,t) = \frac{a+s}{m+n} \qquad P(tails|s,t) = \frac{a+t}{m+n}.$ (4.1)

ამ ალბათობას უწოდებენ **მაქსიმალურ მომდევნო ალბათობას** (***MAP***). მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჩვენ გამოვიყენეთ „=“ სიმბოლო და არა „≈“, და ალბათობა დავწერეთ როგორც პირბითი ალბათობა და არა როგორც შეფასება. ამის მიზეზი ის არის, რომ ეს ბაიესური ტექნიკაა. ბაიესიანები ამბობენ, რომ ეს მნიშვნელობა მათი ალბათობაა (მოსაზრებაა), რომელიც ემყარება მონაცემებს, იმის მაგივრად, რომ თქვან – ეს არის ალბათობის შეფასება (ფარდობითი სიხშირე). შეცვლის უნართან დაკავშირებული ეს ვარაუდი გამოყენებულია 4.1 ტოლობაში. შეცვლის უნართან დაკავშირებული ვარაუდი, რომელიც პირველად შემუშავებული იყო 1937 წელს ფინეტის მიერ, იმაში მდგომარეობს,

რომ ადამიანი ანიჭებს იმავე ალბათობას ერთნაირი სიგრძის ყველა მიმდევრობებს, რომლებიც იგივე შედეგის ერთნაირ რაოდენობას შეიცავს. მაგალითად, ინდივიდი ერთი და იმავე ალბათობას ანიჭებს თავების (H) და კუდების (T)შემდეგ ორ მიმდევრობას:

$H, T, H, T, H, T, H, T, T, T$ and $H, T, T, T, T, H, H, T, H, T.$

გარდა ამისა, ინდივიდი ანიჭებს იმავე ალბათობას 10 აგდებისაგან შედგენილ ნებისმიერ სხვა მიმდევრობას, რომლებსაც გააჩნიათ 4 თავი და 6 კუდი. ნეოპოლიტანმა დეტალებში განიხილა შეცვლის შესაძლებლობა და მიიღო 4.1 ტოლობა. აქ ჩვენ ვთანხმდებით, რომ ტოლობას გააჩნია ინტუიციური საფუძველი.

შემდგომში მოვიყვანთ მეტ მაგალითს. ამ მაგალითებში ჩვენ გამოვითვლით მხოლოდ პირველი შედეგის ალბათობას, იმიტომ რომ მეორე შედეგის ალბათობა ცალსახად განისაზღვრება მისით.

მაგალითი 4.3. ვთქვათ, თქვენ გადაწყვიტეთ თქვენი ჯიბიდან მრავალჯერ ააგდოთ მონეტა. მას შემდეგ რაც თქვენ იგრძნობთ, რომ ფარდობითი სიხშირე დაახლოებით 0,5 ძალიან სავარაუდოა, თქვენ შეიძლება გაიზიაროთ თქვენი წინასწარი გამოცდილება რომელიც ეკვივალენტურია იმის, რომ დაინახოთ 50 თავი 100 აგდებაში. აქედან გამომდინარე თქვენ შეგიძლიათ წარმოადგინოთ თქვენი მოსაზრება $a = 50$ და $b = 50$-ით. შემდეგ $m = 50 + 50 = 100$, და თქვენი წინა ალბათობა თავების შესახებ არის:

$P(heads) = \frac{a}{m} = \frac{50}{100} = 0{,}5.$

100 აგდებაში 48 თავის ნახვის შემდეგ თქვენი მომდევნო ალბათობა იქნება

$P(heads|48{,}52) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{50+48}{100+100} = 0{,}49.$

$P(heads|48{,}52)$ -ში ხაზს მარჯვნივ 48,52 აღნიშვნა წარმოადგენს ხდომილობას, რომლის დროსაც მოხდა 48 თავი და 52 კუდი.

მაგალითი 4.4. დავუშვათ, გადაწვეტილი გაქვთ მრავალჯერ ააგდოთ ჭიკარტი. მისი სტუქტურიდან გამომდინარე, თქვენ შეიძლება გაგიჩნდეთ მოსაზრება, რომ ის თავით უნდა დაეცეს აგდების ნახევარჯერ, მაგრამ თქვენ დარწმუნებული არ ხართ ისე, როგორც ეს ჯიბიდან მონეტის აგდების დროს იყავით. თქვენ შეიძლება გაგიჩნდეთ მოსაზრება, რომ თქვენი წინა გამოცდილება ეკვივალენტურია იმის, რომ 6 აგდებიდან 3 თავია. მაშინ თქვენი მომდევნო ალბათობა იქნება:

$$P(heads) = \frac{a}{m} = \frac{3}{6} = 0{,}5.$$

100 აგდებიდან 65 თავის დანახვის შემდეგ თქვენ მომდევნო ალბათობა არის:

$P(heads|65|35) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{3+65}{6+100} = 0{,}64.$

მაგალითი 4.5. ვთქვათ, თქვენ გადაწყვიტეთ შეამოწმოთ ინდივიდები აშშ-ში და გაარკვიოთ იხეხავენ თუ არა ისინი კბილებს. ამ შემთხვევაში შეიძლება გაგიჩნდეთ მოსაზრება, რომ თქვენი წინასწარი გამოცდილება ეკვივალენტურია იმის, რომ 20 შემოწმებულიდან 18 ადამიანი იხეხავს კბილებს. თქვენი წინასწარი ალბათობა კბილების გახეხვის შესახებ არის:

$P(brushes) = \frac{a}{m} = \frac{18}{20} = 0{,}9.$

100 კაცის არჩევის და იმის გარკვევის შემდეგ, რომ აქედან 80 იხეხავს კბილებს, თქვენი მომდევნო ალბათობა იქნება

$P(brushes|80{,}20) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{18+80}{20+100} = 0{,}82.$

თქვენ შეიძლება გაგიჩნდეთ მოსაზრება, რომ თუ გვაქვს ალბათობის მიმართ სრული იგნორირება, ჩვენ შეიძლება ავიღოთ $a = b = 0$. მაგრამ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 4.6. დავუშვათ, რომ ჩვენ ვაპირებთ შევარჩიოთ ძაღლები და განვსაზღვროთ ჭამენ თუ არა ისინი იმ კარტოფილის ჩიფსებს, რომლებსაც ჩვენ ვთავაზობთ. რამდენადაც ჩვენ წარმოდგენა არ გვაქვს ესა თუ ის კონკრეტული ძაღლი შეჭამს თუ არა კარტოფილის ჩიფსებს, ჩვენ ვანიჭებთ $a = b = 0$, რაც ნიშნავს $m = 0 + 0 = 0$. რადგან ჩვენ არ შეგვიძლია a გავყოთ m-ზე, ჩვენ არ გვაქვს წინასწარი ალბათობა. ვაგრძელებთ, ვთქვათ ჩვენ ვამოწმებთ ერთ ძაღლს, და ეს ძაღლი ჭამს კარტოფილის ჩიფსს. ჩვენი ალბათობა, რომ შემდეგი ძაღლი შეჭამს კარტოფილის ჩიფს ახლა არის

$$P(eats|1{,}0) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

ეს მოსაზრება არც ისე გონივრულია, რამდენადაც ამ შედეგიდან გამოდინარე ვრწმუნდებით, რომ ყველა ძაღლი ჭამს კარტოფილის ჩიფსს. ასეთი სირთულეების გამო, როგორიც ესაა, და ალბათობის წინა იგნორირების გამო უფრო მკაცრი მათემატიკური შედეგები ჩვეულებრივ მოდელირდება $a = b = 1$-ის აღებით, რაც ნიშნავს $m = 1 + 1 = 2$. თუ ამ მნიშვნელობებს გამოვიყენებთ მომდევნო ალბათობის ნაცვლად, როდესაც შევნიშნეთ რომ შერჩევის დროს პირველმა ძაღლმა შეჭამა კარტოფილის ჩიფსი, მაშინ მომდევნო ალბათობა ამ სახის იქნება:

$P(eats|1{,}0) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}.$

ხანდახან გვჭირდება a და b-სთვის წილადური მნიშვნელობები. განვიხილოთ ეს მაგალითი.

მაგალითი 4.7. შუშის პანელები მაღალსართულიან შენობებში ზოგჯერ იმსხვრევა და ცვივა ძირს. ზოგად შემთხვევაში დაახლოებით 39 დამსხვრეული პანელია. მფლობელებს

მსხვრევის მიზეზის გამოსარკვევად, სურდათ გაეანალიზებინათ დამსხვრეული პანლები, მაგრამ მათ მხოლოდ სამის აღდგენა შეძლეს. აღმოჩენილი იყო, რომ ეს სამი პანელი შეიცავს ნიკელ-სულფიდს (NiS), საწარმოო დეფექტი, რომელმაც შეიძლება მიგვიყვანოს პანელის გატეხვამდე. იმისათვის, რომ გაერკვიათ უნდა ეჩივლათ თუ არა წარმოებაზე პასუხისმგებელისათვის, მესაკუთრეებს შემდეგ უნდოდათ გაერკვიათ, რა იყო იმის ალბათობა, რომ 39-ვე პანელი შეიცავდა NiS-ს, ამიტომ ისინი დაუკავშირდნენ მინის ექსპერტს.

მინის ექსპერტმა თქვა, რომ დამტვრეული პანელებიდან მხოლოდ 5% შეიცავს NiS-ს. თუმცა NiS-ს გააჩნია ტენდენცია გავრცელდეს საწარმოო უბნებზე. ამიტომ იმის გათვალისწინებით, რომ პირველი პანელი, რომელიც აღებული იყო გატეხილი პანელების პროდუქტის კონკრეტული პარტიიდან, შეიცავს NiS-ს, ექსპერტს გაუჩნდა მოსაზრება, რომ ალბათობა იმისა, რომ მეორე პანელი ასევე შეიცავს NiS-ს 0,95-ია. ცნობილი იყო, 39-ვე პანელი ერთი და იმავე წარმოებისა იყო. ამგვარად ჩვენ ვახდენთ ექსპერტის წინა მოსაზრების მოდელირებას a, b, და $m = a + b$ სიდიდეების გამოყენებით, როგორც ეს განხილული იყო ზემოთ, ჩვენ უნდა ვიცოდეთ, რომ წინა ალბათობა მოცემულია შემდეგნაირად:

$P(NiS) = \frac{a}{m} = 0{,}5.$

უფრო მეტიც, ექსპერტის მომდევნო ალბათობა პირველ პანელის NiS-ს აღმოჩენის შემდეგ უნდა იყოს მოცემული ასე:

$P(NiS|1{,}0) = \frac{a+1}{m+1} = 0{,}95.$

a და m-ისთვის ბოლო ორი განტოლების ამოხსნა გვაძლევს

$a = \frac{1}{360} \quad m = \frac{20}{360}.$

ეს არის a და b-ს შეფასების ალტერნატიული მეთოდი. კერძოდ, ჩვენ ვაფასებთ პირველი შემოწმების ალბათობას. შემდეგ ჩვენ ვაფასებთ ალბათობას მეორე შემოწმებისათვის, ვითვალისწინებთ რა, რომ პირველი წარმოადგენს „წარმატებას“. როდესაც გვაქვს a-სა და b-ს მნიშვნელობები ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ რამდენად სავარაუდოა, რომ ნებისმიერი სხვა 36 პანელი (შემდეგი ერთი ნიმუში) შეიცავს NiS-ს იმის შემდეგ, რაც აღმოჩენილი იყო, რომ პირველი სამი ნიმუში შეიცავს. ეს ალბათობა მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$P(NiS|3{,}0) = \frac{a+s}{m+n} = \frac{1/360+3}{20/360+3} = 0{,}983.$

მიაქციეთ ყურადღება, NiS-ის შესახებ ექსპერტის ალბათობა როგორ სწრაფად იცვლება ძალიან მცირედან ძალიან დიდამდე. ეს იმასთანაა დაკავშირებული, რომ a -ს და m-ის მნიშვნელობა საკმაოდ მცირეა. ჩვენ უფრო მეტად გვაინტერესებს, შეიცავს თუ არა NiS-ს დანარჩენი 36 პანელი. სავარჯიშოს სახით ნაჩვენებია, რომ ეს ალბათობა განისაზღვრება შემდეგნაირად

$\prod_{i=0}^{35} \frac{1/360+3+i}{20/360+3+i} = 0{,}866.$

მრავალწევრიანი ცვლადები

ის მეთოდი, რომელიც ახლახანს განვიხილეთ, მარტივად ვრცელდება მრავალწევრიან ცვლადებზე. დავუშვათ k არის მნიშვნელობათა რაოდენობა, რომელიც შეუძლიათ მიიღონ ცვლადებმა, და x_1, $x_2, \ldots, x_k$ k შედეგია. შემდეგ განვსაზღვრავთ a_1, $a_2, \ldots, a_k$ რიცხვებს, ისე რომ ჩვენი ექსპერიმენტი ეკვივალენტური იყოს იმის, რომ პირველი შედეგი ხდებოდეს a_1-ჯერ მეორე შედეგი ხდებოდეს a_2, . . ., და ბოლო შედეგი ხდებოდეს a_k-ჯერ. ჩვენი წინა ალბათობა ყველა ცდის წინ იქნება შემდეგი:

$P(x_1) = \frac{a_1}{m}$ $P(x_2) = \frac{a_2}{m}$ . . . $P(x_k) = \frac{a_k}{m}$,

სადაც $m = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. ვინაიდან x_1-ს ხორციელდება s_1-ჯერ, x_2 – s_2-ჯერ, . . . , x_n – s_n-ჯერ $n = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ ცდაში, ჩვენი მომდევნო ალბათობები იქნება შემდეგი:

$$\begin{aligned}
P(x_1|s_1, s_2, \ldots, s_k) &= \frac{a_1 + s_1}{m+n}\\
P(x_2|s_1, s_2, \ldots, s_k) &= \frac{a_2 + s_2}{m+n}\\
&\vdots\\
P(x_k|s_1, s_2, \ldots, s_k) &= \frac{a_k + s_k}{m+n}.
\end{aligned}$$

მაგალითი 4.8. ვთქვათ, გვაქვს ასმეტრიული ექვსწახნგა კამათელი და ჩვენ გვაქვს მცირე წარმოდგენა თითოეული გვერდის გამოჩენის ალბათობაზე. მაგრამ ჩანს, რომ ყველა გვერდის გამოჩენა ერთნაირად სავარაუდოა. ამიტომ ჩვენ ვანიჭებთ:

$a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 3.$

მაშინ ჩვენი წინა ალბათობები არის შემდეგი:

$P(1) = P(2) = \cdots = P(6) = \frac{a_i}{n} = \frac{3}{18} = 0{,}16667.$

დავუშათ შემდეგ ჩვენ ვაგდებთ კამათელს 100-ჯერ შემდეგი შედეგებით:

შედეგი	მოვლენების რიცხვი
1	10
2	15
3	5
4	30
5	13
6	27

მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$P(1|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_1 + s_1}{m+n} = \frac{3+10}{18+100} = 0{,}110,$$

$$P(2|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_2 + s_2}{m+n} = \frac{3+15}{18+100} = 0{,}153,$$

$$P(3|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_3 + s_3}{m+n} = \frac{3+5}{18+100} = 0{,}067,$$

$$P(4|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_4 + s_4}{m+n} = \frac{3+30}{18+100} = 0280,$$

$$P(5|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_5 + s_5}{m+n} = \frac{3+13}{18+100} = 0{,}136,$$

$$P(6|10{,}15{,}5{,}30{,}13{,}27) = \frac{a_6 + s_6}{m+n} = \frac{3+27}{18+100} = 0{,}254.$$

მეთოდური რეკომენდაციები წინა მოსაზრების ფორმულირებისათვის

შემდგომში ჩვენ მოვიყვანთ ზოგიერთ რეკომენდაციას იმ მნიშვნელობათა შესარჩევად, რომლებიც წარმოადგენენ ჩვენს წინა მოსაზრებებს.

ორობითი ცვლადები. ორობითი ცვლადებისათვის მეთოდური რეკომენდაციები შემდეგია:

1. $a = b = 1$: ჩვენ ამ მნიშვნელობებს ვიყენებთ, როდესაც ვგრძნობთ, რომ საერთოდ არ ვიცით ალბათობის მნიშვნელობის შესახებ. ჩვენ ასევე შეგვეძლო ეს მნიშვნელობები გამოგვეყენებინა ობიქტურობის მისაღწევად იმ გაგებით, რომ ჩვენ არ ვასახელებთ არც ერთ ჩვენს მოსაზრებას შესწავლის ალგორითმის მიმართ. მხოლოდ ვასახელებთ იმ ფაქტს, რომ როგორც ვიცით უკეთეს შემთხვევაში შეიძლება მოხდეს ორი რამე. მაგალითად შეიძლება გამოვიყენოთ ის, როდესაც ჩვენ ვსწავლობთ ფილტვის კიბოს ალბათობას მოწევის მონაცემებიდან გამომდინარე, და გვსურს შედეგები ვაცნობოთ სამეცნიერო საზოგადოებას. სამეცნიერო საზოგადოება არ იქნება დაინტერესებული ჩვენი წინა ვერსიით; უფრო მეტიც, ის დაინტერესდებოდა მხოლოდ იმით, თუ რა მონაცემებიც გვქონდა. არსებითად, როდესაც ჩვენ ამ მონაცემებს ვიყენებთ, მომდევნო ალბათობა წარმოადგენს იმ პირის მოსაზრებას, რომელსაც არ გააჩნია ალბათობის მიმართ წინა მოსაზრება.

2. $a, b > 1$: ეს მნიშვნელობები ნიშნავს, რომ ჩვენ მიგვაჩნია, რომ ეს არის პირველი შედეგის a/m-სთან ტოლობის ალბათობა. რაც უფრო დიდია a-სა და b-ს მნიშვნელობები, მით უფრო გვჯერა ამის. ასეთ მნიშვნელობებს ვიყენებთ მაშინ, როდესაც გვინდა თავს მოვახვიოთ ჩვენი მოსაზრებები ფარდობითი სიხშირის შესახებ შესწავლის ალგორითმს. მაგალითად, თუ ვაგდებთ მონეტას ჯიბიდან, ჩვენ შეგვეძლო აგვეღო $a = b = 50$.

3. $a, b < 1$: ეს მნიშვნელობები ნიშნავს, რომ ჩვენ ვთვლით რომ ერთ-ერთი შედეგის ალბათობის მეტობას, თუმცა არ მიგვაჩნია, რომ ეს ერთია. თუ ავიღებთ $a = b \approx 0$ (თითქმის 0-ს), მაშინ თითქმის გარკვეული გვაქვს, რომ ერთ-ერთი შედეგი 1-თან ახლოსაა. ასეთ მნიშვნელობებს ვიყენებთ მაშინ, როდესაც გვინდა თავს მოვახვიოთ ჩვენი მოსაზრებები ფარდობითი სიხშირის შესახებ შესწავლის ალგორითმს. 4.7. მაგალითში ნაჩვენებია შემთხვევა, რომელშიც ჩვენ უნდა ავირჩიოთ 1-ზე ნაკლები მნიშვნელობა. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ასეთი წინა მოსაზრებები სწრაფად წაილეკება ხოლმე მონაცემების მიერ. მაგალითად, თუ $a = b = 0{,}1$, და ჩვენ დავინახეთ პირველი შედეგი x_1 ხდება ერთ გამოცდაში, ჩვენ გვექნება:

$$P(x_1|1{,}0) = \frac{0{,}1+1}{0{,}2+1} = 0{,}917. \qquad (4.2)$$

ინტუიციურად ჩვენ ვფიქრობდით, აპრიორად რომ შედეგებიდან ერთ-ერთის ალბათობა მაღალი იყო. x_1-ის მნიშვნელობის მიღების ფაქტი, გვაფიქრებინებს, რომ ეს არის შედეგის ალბათობა.

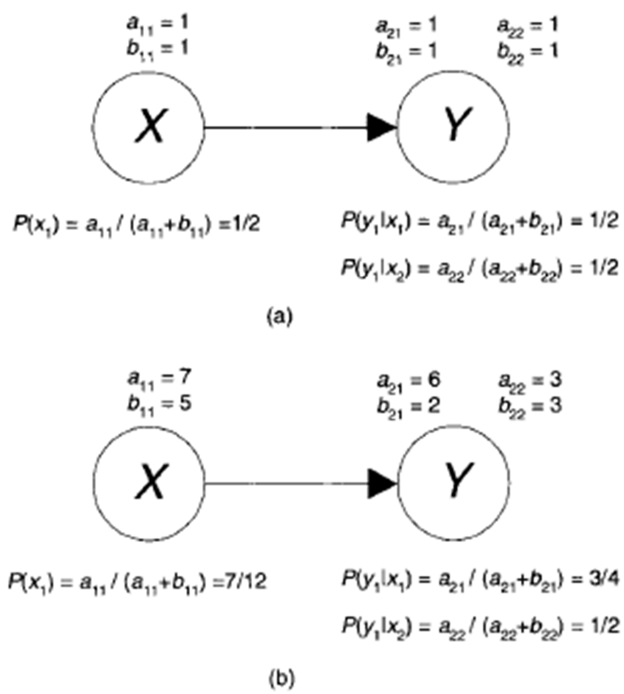
მრავალწევრიანი ცვლადები მეთოდური რეკომენდაციები ძირითადად იგივეა, როგორც ეს იყო ორობითი ცვლადის დროს, მაგრამ სიცხადისათვის ჩვენ მათ გავიმეორებთ.

1. $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$: ჩვენ ამ მნიშვნელობებს ვიყენებთ, როდესაც ვგრძნობთ, რომ საერთოდ არ ვიცით ალბათობის მნიშვნელობის შესახებ. ჩვენ ასევე შგვეძლო ეს მნიშვნელობები გამოგვეყენებინა ობიქტურობის მისაღწევად იმ გაგებით, რომ არ ვასახელებთ არც ერთ ჩვენს მოსაზრებას შესწავლის ალგორითმის მიმართ. ჩვენ მხოლოდ ვასახელებთ იმ ფაქტს, რომ როგორც ვიცით უკეთეს შემთხვევაში k რამ შეიძლება მოხდეს. მაგალითად, შეიძლება იყოს დაბალი, საშუალო და მაღალი არტერიული წნევის ალბათობა იმ მონაცემებიდან, რომელიც გვსურს ვაცნობთ სამეცნიერო საზოგადოებას.

2. $a_1 = a_2 = \cdots = a_k > 1$: ეს მნიშვნელობები ნიშნავს, რომ ჩვენ მიგვაჩნია, რომ k-ური მნიშვნელობის ალბათობა დაახლოებით a_k/m-ის ტოლია. რაც უფრო დიდია a_k-ს მნიშვნელობები, მით უფრო გვჯერა ამის. ასეთ მნიშვნელობებს ვიყენებთ მაშინ, როდესაც გვინდა თავს მოვახვიოთ ჩვენი მოსაზრებები ფარდობითი სიხშირის შესახებ შესწავლის

ალგორითმს. მაგალითად, თუ ვაპირებდით აგვეგდო ჩვეულებრივი კამათელი, შეგვეძლო აგვეღო $a_1 = a_2 = \cdots = a_6 = 50$.

3. $a_1 = a_2 = \cdots = a_k < 1$: ეს მნიშვნელობები ნიშნავს, რომ ჩვენ ვთვლით, რომ ალბათ, მხოლოდ ზოგიერთი შედეგია სავარაუდო. ასეთ მნიშვნელობებს ვიყენებთ მაშინ, როდესაც გვინდა თავს მოვახვიოთ ჩვენი მოსაზრებები ფარდობითი სიხშირის შესახებ შესწავლის ალგორითმს. მაგალითად, დავუშვათ, რომ მსოფლიოში არსებობს 1 000 000 სხვადასხვა სახეობა და ჩვენ გადაწყვეტილი გვაქვს დავეშვათ უკაცრიელ კუნძულზე. ჩვენ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ არ არის ძალიან ბევრი სახეობა რომლებიც იქ არიან. ამიტომ თუ ჩვენ განვიხილავთ ალბათობებს რის შედეგადაც სავარაუდოდ შეიძლება დიდ რაოდენობით სხვადასხვა სახეობები შეგვხვდეს. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $a_i = 1/1\,000\,000$ ყველასთვის.



ნახ. 4.1: პარამეტრების შესასწავლად ინიციალიზებული ბაიესის ქსელი წარმოდგენილი (ა)-ში, რომელიც ემყარება ნახ. 4.2. (ბ)-ში წარმოდგენილ მონაცემებს.

4.1.2. ყველა პარამეტრის შესწავლა ბაიესის ქსელში

ბაიესის ქსელში ყველა პარამეტრის შესწავლის მეთოდი ადვილად გამომდინარეობს ერთი პარამეტრის შესწავლის მეთოდიდან. მოვახდინოთ ბინომიალური ცვლადების მეთოდის ილუსტრირება. ის ადვილად ვრცელდება მრავალწევრა ცვლადების შემთხვევაზე. მეთოდის დემონსტრირების შემდეგ ჩვენ ვიმსჯელებთ ზომის ეკვივალენტურ შერჩევაზე.

შესწავლის პარამეტრების განსაზღვრის პროცედურა

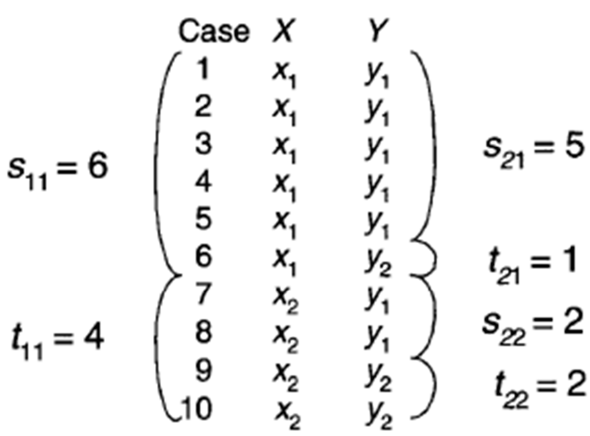
განვიხილოთ ორკვანძიანი ბაიესის ქსელი ნახ. 4.1 (ა)-ზე. ის ინიციალიზებულია პარამეტრების შესასწავლად. ქსელში თითოეული ალბათობისათვის არის წყვილი (a_{ij}, b_{ij}). i ახდენს ცვლადის ინდექსაციას, ხოლო j ახდენს ცვლადის (s) მშობლის მნიშვნელობის ინდექსაციას. მაგალითად, (a_{11}, b_{11}) წყვილი არის პირველი (X) ცვლადისათვის, და მისი მშობლის პირველი მნიშვნელობა (ამ შემთხვევაში არ არის ერთი მშობლის მნიშვნელობა, რამდენადაც X არ აქვს მშობელი). (a_{21}, b_{21}) წყვილი არის მეორე (Y) ცვლადისათვის, და მისი მშობლის პირველი მნიშვნელობა, კერძოდ x_1. (a_{22}, b_{22}) წყვილი არის მეორე (Y) ცვლადისათვის, და მისი მშობლის მეორე მნიშვნელობა, კერძოდ x_2. ჩვენ ვცდილობდით წარმოგვედგინა წინასწარი იგნორირება ალბათობის ყველა მნიშვნელობის მიმართ $a_{ij} = b_{ij}$=1 აღებით. ჩვენ ვითვლით წინა ალბათობებს უბრალოდ წყვილების გამოყენებით, როგორც ამას ვაკეთებდით, როცა ვიხილავდით ერთ პარამეტრს. ჩვენ გვაქვს:

$$P(x_1) = \frac{a_{11}}{a_{11}+b_{11}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$P(y_1|x_1) = \frac{a_{21}}{a_{21}+b_{21}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

$$P(y_1|x_2) = \frac{a_{22}}{a_{22}+b_{22}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

როდესაც ვიღებთ მონაცემებს, ჩვენ ვიყენებთ (s_{ij}, t_{ij}) წყვილს i-ური ცვლადის წარმოსადგენად როდესაც ცვლადის მშობელს j-ური მნიშვნელობა აქვს. დავუშვათ ჩვენ გვაქვს $s_{11} = 6$ იმიტომ, რომ x_1 ხდება 6-ჯერ, და $t_{11} = 4$, იმიტომ რომ x_2 ხდება 4-ჯერ. 6-ჯერ x_1 ხდება, y_1 5-ჯერ ხდება და y_2 ერთხელ.



ნახ. 4.2 მონაცემები 10 შემთხვევაზე

ამგვარად, $s_{21} = 5$ და $t_{21} = 12$. x_2 4-ჯერ ხდება, y_1 – 2-ჯერ და y_2 – 2-ჯერ. ამგვარად, $s_{22} = 2$ და $t_{22} = 2$. რომ განვსაზღვროთ მონაცემთა საფუძველზე წინა ალბათობების განაწილება, ჩვენ ვაახლებთ თითოეულ პირობით ალბათობას, ამ პირობითი ალბათობების

გათვალისწინებით (გადათვლით). იმის შემდეგ, რაც მოგვინდება ბაიესის ქსელის განახლება, ჩვენ გადავითვლით (a_{ij}, b_{ij}) წყვილების მნიშვნელობებს. ამიტომ გვაქვს:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{11} + s_{11} = 1 + 6 = 7 \\ b_{11} &= b_{11} + t_{11} = 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= a_{21} + s_{21} = 1 + 5 = 6 \\ b_{21} &= b_{21} + t_{21} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a_{22} + s_{22} = 1 + 2 = 3 \\ b_{22} &= b_{22} + t_{22} = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

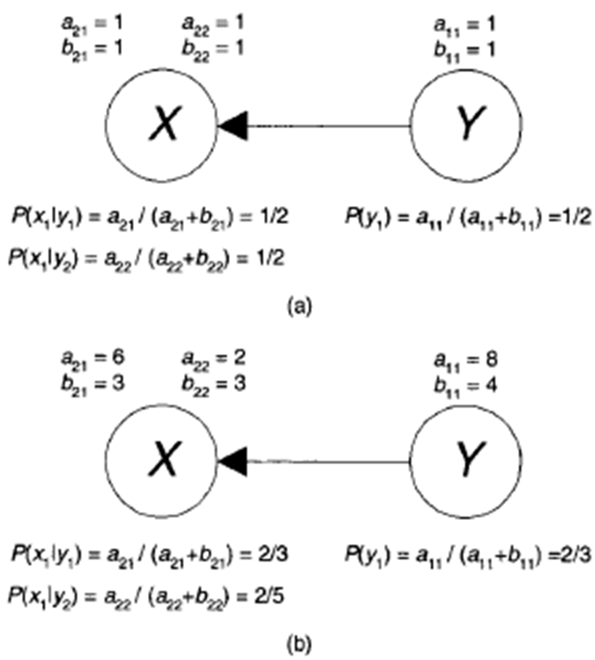
შემდეგ ვითვლით პარამეტრების ახალ მნიშვნელობებს:

$$P(x_1) = \frac{a_{11}}{a_{11}+b_{11}} = \frac{7}{7+5} = \frac{7}{12},$$

$$P(y_1|x_1) = \frac{a_{21}}{a_{21}+b_{21}} = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4},$$

$$P(y_1|x_2) = \frac{a_{22}}{a_{22}+b_{22}} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}.$$

განახლებული ქსელი ნაჩვენებია ნახ. 4.1 (ბ)-ზე.



ნახ. 4.3. პარამეტრების შესწავლისათვის ინიციალიზებული ბაიესის ქსელი წარმოდგენილი (ა)-ში, ხოლო ნახ. 4.2-ზე მოცემულ მონაცემებზე დაფუძნებული განახლებული ქსელი წარმოდგენილია (ბ)-ზე.

ექვივალენტური ნიმუშის ზომა

არსებობს პრობლემა იმასთან დაკავშირებით, თუ როგორ წამოვადგინეთ წინა იგნორირებები წინა განყოფილებაში. მიუხედავად იმისა, რომ თითქოს ბუნებრივია

მითითებული $a_{ij} = b_{ij} = 1$ წარმოადგენს ყველა პირობითი ალბათობის წინა უარყოფას, ასეთი მინიჭება არათავსებადია იმ მეტაფორიით, რომელსაც ვიყენებთ ამ მნიშვნელობების ფორმულირებისას. შეგახსენებთ, რომ ალბათობის შემფასებელმა a და b-ს მნიშვნელობები ისე უნდა შეარჩიოს, რომ ცდის შეფასება ეკვივალენტური იყოს იმის, რომ პირველი შედეგს ადგილი ჰქონდეს a-ჯერ $a + b$ ცდაში. ამიტომ თუ ჩვენ დავადგენთ $a_{11} = b_{11} = 1$, მაშინ შემფასებლის გამოცდილება ეკვივალენტური იქნება, რომ მან x_1 დაინახოს ერთხელ 2 ცდაში. მაგრამ თუ დავუშვებთ $a_{21} = b_{21} = 1$-ს, მაშინ შემფასებლის გამოცდილება ეკვივალენტური იქნება იმის, რომ მან y_1 დაინახა ერთხელ 2-ჯერ x_1-ის მოხდენის დროს. ეს არ არის თავსებადი. პირველი, ჯერ ჩვენ ვამბობთ, რომ x_1 მოხდა ერთხელ; შემდეგ ჩვენ ვამბობთ, რომ ის მოხდა ორჯერ. ამ არათავსებადობასთან ერთად ჩვენ ვიღებთ უცნაურ შედეგებს, თუ ჩვენ გამოვიყენებთ წინა პირობებს. განვიხილოთ ნახ. 4.3 (ა)-ზე გამოსახული პარამეტრული შესწავლისათვის ბაიესის ქსელი. თუ ჩვენ განვაახლებთ ამ ქსელს ნახ. 4.2-ზე მოცემული მონაცემებით, ჩვენ მივიღებთ ნახ.4.3 (ბ)-ზე გამოსახულ ქსელს. ნახ. 4.3.(ა)-ზე DAG ეკვივალენტურია ნახ. 4.1 (ა)-ზე გამოსახულის გარკვეული აზრით. ე.ი. ჩვენ ვამბობთ, რომ ორი DAG **მარკოვური ეკვივალენტია** თუ მათ იგივე პირობითი დამოუკიდებლობა აქვთ. ნახ. 4.1 (ა)-ზე და. 4.3.(ა)-ზე გამოსახული DAG-ები მარკოვური ეკვივალენტია, რადგან ორივე DAG-ს არ გააჩნია პირობითი დამოუკიდებლობა. როგორც ჩანს, თუ ჩვენ ვგულისხმობთ იგივე წინა მოსაზრებებს ეკვივალენტური DAG-ით, შემდეგ მონაცემების საფუძველზე განაწილებები ერთნაირი უნდა იყოს. ამ შემთხვევაში, ჩვენ ვცდილობთ წარმოვადგინოთ წინა იგნორირება, როგორც ყველა შესაძლო ალბთობა ნახ. 4.1 (ა)-ზე და ნახ. 4.3 (ა)-ზე გამოსახულ ქსელში. ამიტომ მონაცემებზე დამყარებული მომდევნო განაწილებები ნახ. 4.2-ზე უნდა იყოს ერთნაირი. მაგრამ ნახ. 4.1 (ბ)-ზე გამოსახული ბაიესის ქსელიდან გვაქვს:

$$P(x_1) = \frac{7}{12} = 0{,}583,$$

მაშინ როცა ნახ. 4.3 (ბ)-ზე გამოსახული ბაიესის ქსელიდან გვაქვს:

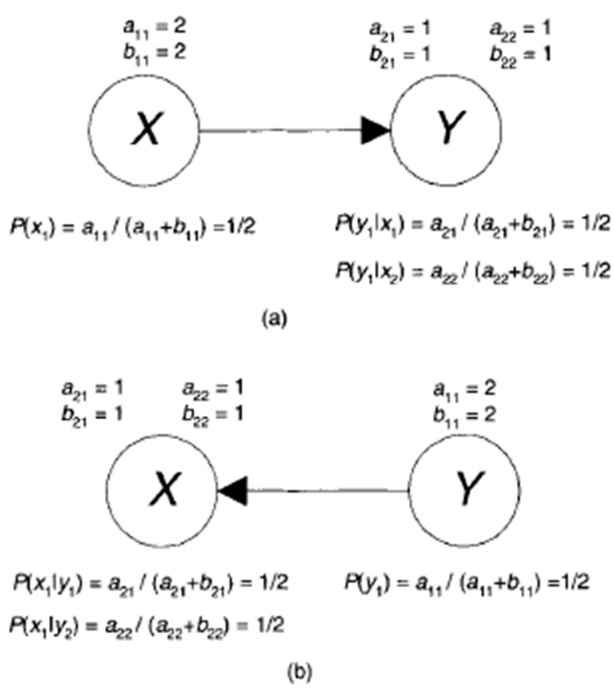
$$P(x_1) = P(x_1|y_1)P(y_1) + P(x_1|y_2)P(y_2) =$$
$$= \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} \times \tfrac{1}{3} = 0{,}578.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ მივიღეთ სხვადასხვა მომდევნო ალბათობები. ასეთი შედეგები არა მარტო უცნაურია, არამედ მიუღებელიც, რამდენადაც ნახ. 4.1 (ა)-ზე და ნახ. 4.3 (ა)-ზე ჩვენ შევეცადეთ ბაიესის ქსელში გაგვეკეთებინა იმავე მოსაზრებების მოდელირება, მაგრამ დასრულდა სხვადასხვა მომდევნო მოსაზრებებით. ჩვენ შეგვიძლია აღმოვფხრათ ეს სირთულე ექვივალენტური ნიმუშის ზომის გამოყენებით. ანუ ჩვენ მივუთითებთ a_{ij} და b_{ij}

მნიშვნელობებს, რომლებსაც შეიძლებოდა გვქონოდა წინა ნიმუშში, რომელიც ასახავს DAG-თან დაკავშირებულ პირობით დამოუკიდებლობას. მაგალითად, მოცემულია ქსელი $X \rightarrow Y$, თუ ჩვენ მივუთითებთ, რომ $a_{21} = b_{21} = 1$-ს, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ წინა ნიმუშს უნდა ჰქონდეს ორჯერ x_1. ამიტომ ჩვენ უნდა მივუთითოთ $a_{11} = 2$. ანალოგიურად, თუ ჩვენ მივუთითებთ, რომ $a_{22} = b_{22} = 1$-ს, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ წინა ნიმუშს უნდა ჰქონდეს ორჯერ x_2. ამიტომ ჩვენ უნდა მივუთითოთ $b_{11} = 2$. გაითვალისწინეთ, რომ ჩვენ არ ვამბობთ, რომ გვაქვს წინა ნიმუში. ვსაუბრობთ იმ ალბათობაზე, როდესაც შემფასებლის მოსაზრება წარმოდგენილია წინა ნიმუშით. ნახ. 4.4-ზე ნაჩვენებია წინა ბაიესის ქსელი, რომელშიც გამოყენებულია ეკვივალენტური ნიმუშის ზომა. შევნიშნოთ, რომ a_{ij} და b_{ij} მნიშვნელობები წარმოადგენენ შემდეგ წინა ნიმუშებს:

შემთხვევა	X	Y
1	x_1	y_1
2	x_1	y_2
3	x_2	y_1
4	x_2	y_2

სავარჯიშოს სახით დავტოვეთ იმის ჩვენება, რომ თუ ჩვენ განვაახლებთ ნახ. 4.4-ზე მოცემულ ბაიესის ქსელს ნახ. 4.2-ზე მოცემული მონაცემების გამოყენებით, მივიღებთ იმავე მოცემულ განაწილების ალბათობას. ეს შედეგი, ზოგადად, სამართლიანია. მას ჩვენ თეორემის სახით ჩამოვაყალიბებთ, მაგრამ ფორმალურად უნდა განვმარტოთ წინა ეკვივალენტური ნიმუშის ზომა.



ნახ. 4.4. პარამეტრების შესწავლის ბაიესის ქსელი, რომელიც შეცავს წინა ეკვივალენტური ნიმუშის ზომას.

განსაზღვრება 4.1. დავუშვათ, მოცემულია ბაიესის ქსელი პარამეტრების შესწავლის მიზნით ბინომიალური ცვლადების შემთხვევაში. თუ არსებობს ისეთი N რიცხვი, რომ ყველა i და j-სთვის:

$a_{ij} + b_{ij} = P(\mathsf{pa}_{ij}) \times N,$

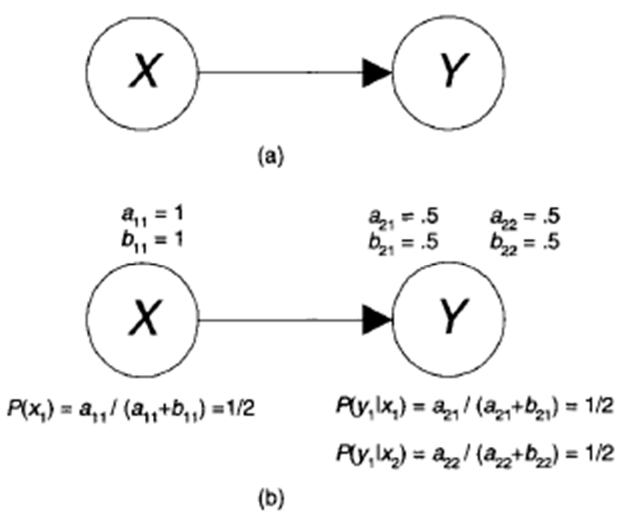
სადაც pa_{ij} ნიშნავს i-ური ცვლადის მშობლების j-ური ინსტირაციას მაშინ ჩვენ ვამბობთ რომ აქვს **წინა ეკვივალენტური ნიმუშის ზომა** N.

თავისთავად ამ განსაზღვრების გაგება ცოტა რთულია. შემდეგი თეორემა იძლევა გზას, წარმოვადგინოთ განაწილება ისე, როგორც ეს ხშირად გვსურს გავაკეთოთ.

თეორემა 4.1 დავუშვათ, ჩვენ მივუთითეთ ბაიესის ქსელზე პარამეტრების შესწავლის მიზნით ბინომიალური ცვლადების შემთხვევაში და მივანიჭეთ ყველა i და j-სთვის:

$a_{ij} = b_{ij} = \frac{N}{2q_i}.$

სადაც N არის დადებითი მთელი რიცხვი და q_i i-ური ცვლადის მშობლების ინსტირაციის რაოდენობა. მაშინ ტოლქმედ ბაიესის ქსელს გააჩნია ეკვივალენტური ნიმუშის ზომა N, და ბაიესის ქსელში ალბათობების ერთობლივი განაწილება ერთგვაროვანს წარმოადგენს. ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ წინა იგნორირება წინა თეორემის მეშვეობით $N = 2$-სთვის. შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს ტექნიკას:



ნახ. 4.5. მოცემულ DAG-ში (ა)-ზე XდაY ბინომიალური ცვლადებია, (ბ)-ზე პარამეტრების შესწავლის ბაიესის ქსელი წარმოადგენს წინა იგნორირებებს

მაგალითი 4.9. დავუშვათ, რომ ჩვენ ვიწყებთ ნახ. 4.5 (ა)-ზე გამოსახული DAG-იდან, და X და y ბინომიალური ცვლადებია. მივანიჭოთ $N = 2$. შემდეგ, თუ ვისარგებლებთ თეორემა 4.1-ში გამოყენებული მეთოდით, გვექნება:

$$a_{11} = b_{11} = \frac{N}{2q_1} = \frac{2}{2\times 1} = 1,$$

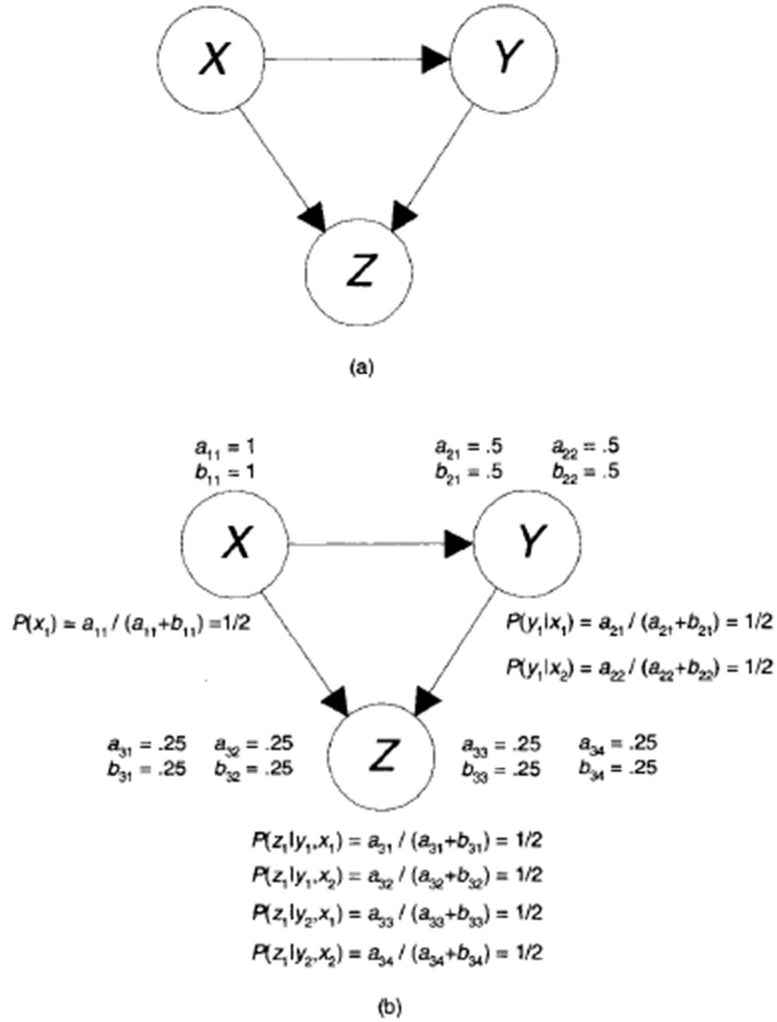
$$a_{21} = b_{21} = a_{22} = b_{22} = \frac{N}{2q_2} = \frac{2}{2\times 2} = 0{,}5.$$

ჩვენ ვიღებთ პარამეტრების შესასწავლად ბაიესის ქსელს ნახ. 4.5 (ბ)-ზე.

შევნიშნოთ, რომ წინა მაგალითში მივიღეთ წილადური მნიშვნელობები a_{21}, b_{21}, a_{22} და b_{22}-სთვის, რომლებიც შეიძლება მოგვეჩვენოს უცნაურად. მაგრამ ამ მნიშვნელობათა ჯამი ტოლია:

$a_{21} + b_{21} + a_{22} + b_{22} = 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2.$

ამგვარად, ეს წილადური მნიშვნელობები თანხმდება იმ მეტაფორასთან, რომელიც ამბობს, რომ ჩვენ წარმოვადგენთ $P(Y)$-ის წინა იგნორირებას იმაში დარწმუნებით, რომ შემფასებლის გამოცდილება ეკვივალენტურია იმის, რომ მან დაინახა ორი ცდა (იხ. განყოფილება 4.1.1). ქვემოთ მოყვანილია იმის იმიტაციური ახსნა, თუ რატომ უნდა იყოს ეს მნიშვნელობები წილადური. განყოფილება 4.1.1-დან შეგახსენებთ, რომ ჩვენ ვიყენებთ წილადურ მნიშვნელობებს თუ ვთვლით იმის ალბათობას, რომ ერთ-ერთი შედეგის ალბათობა მაღალია, მაგრამ არ ვაკონკრეტებთ კერძოდ რომელის. რაც უფრო ნაკლებია მნიშვნელობა, მით უფრო მაღალია ალბათობა იმის, რომ ის შემთხვევაა. ახლა რაც უფრო მეტი მშობელი ჰყავს ცვლადს, მით უფრო ნაკლებია a_{ij}-ის და b_{ij}-ის მნიშვნელობები, როცა მივანიჭებთ $N = 2$-ს. ინტუიციურად ეს გონივრული ჩანს იმიტომ, რომ როდესაც ცვლადს ბევრი მშობელი ჰყავს ჩვენ ვიცით მშობელთა მნიშვნელობები, ჩვენ ვიცით ბევრი ცვლადების მდგომარეობის შესახებ და აქედან გამომდინარე იმის ალბათობაც, რომ ერთ-ერთი შედეგის ალბათობა მაღალია.



ნახ. 4.6. მოცემულ DAG-ში (ა)-ზე X, Y და Z ბინომიალური ცვლადებია, (ბ)-ზე პარამეტრების შესწავლის ბაიესის ქსელი წარმოადგენს წინა იგნორირებებს

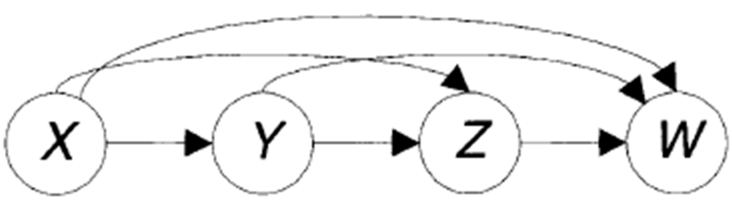
მაგალითი 4.10. დავუშვათ, ჩვენ ვიწყებთ ნახ. 4.6. (ა)-ზე მოცემული DAG-ით და X და Y ბინომიალური ცვლადებია. თუ ჩვენ მივანიჭებთ $N = 2$-ს. და ვისარგებლებთ თეორემა 4.1-ში გამოყენებული მეთოდით, მაშინ:

$$a_{11} = b_{11} = \frac{N}{2q_1} = \frac{2}{2 \times 1} = 1$$

$$a_{21} = b_{21} = a_{22} = b_{22} = \frac{N}{2q_2} = \frac{2}{2 \times 2} = .5$$

$$a_{31} = b_{31} = a_{32} = b_{32} = a_{33} = b_{33} = a_{34} = b_{34} = \frac{N}{2q_3} = \frac{2}{2 \times 4} = .25.$$

ჩვენ ვიღებთ პარამეტრების შესწავლისათვის ბაიესის ქსელს ნახ. 4.6 (ბ)-ზე



ნახ. 4.7. X, Y და Z -ის თითოეული განაწილება აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ამ სრული DAG-ით

შემთხვ.	სქესი	სიმაღლე (ინჩი)	ხელფასი $)
1	ქალი	64	30,000
2	ქალი	64	30,000
3	ქალი	64	40,000
4	ქალი	64	40,000
5	ქალი	68	30,000
6	ქალი	68	40,000
7	კაცი	64	40,000
8	კაცი	64	50,000
9	კაცი	68	40,000
10	კაცი	68	50,000
11	კაცი	70	40,000
12	კაცი	70	50,000

ცხრილი 4.1 მონაცემები 12 მუშაკზე.

4.2 სასწავლო სტუქტურა (მოდელის შერჩევა)

სასწავლო სტრუქტურა მოიცავს ბაიესის ქსელში მონაცემებისაგან DAG-ის შესწავლას. ჩვენ გვსურს შევისწავლოთ DAG, რომელიც აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას იმ P ალბათობების განაწილებით, რომლითაც ხდება მონაცემთა გენერირება. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჩვენ არ ვიცით P; ის რაც ვიცით – ეს მონაცემებია. ასეთი DAG-ის შესწავლის პროცესს უწოდებენ **მოდელის შერჩევას.**

მაგალითი 4.11. დავუშვათ გვსურს მოვახდინოთ ამერიკელი მუშებისათვის სქესის, სიმაღლის და ხელფასის P ალბთობების განაწილების მოდელირება. ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ მონაცემები 12 მუშაკის მიხედვით, რომლებიც ფიგურირებენ ცხრილ 4.1-ში. ჩვენ არ ვიცით P ალბთობების განაწილება. მაგრამ ამ მონაცემებიდან გვსურს შევისწავლოთ DAG, რომელიც ალბათ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას P-თი. თუ ჩვენი ერთადერთი მიზანი იქნებოდა უბრალოდ რაღაც DAG-ის შესწავლა, რომელიც აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას P-თი, ჩვენი ამოცანა ტრივიალური იქნებოდა, რამდენადაც P ალბათობების განაწილება აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას თითოეული სრული DAG-ით, რომლებიც შეიცავენ ცვლადებს, რომლებზეც განსაზღვრულია P. ამას ჩვენ ვაჩვენებთ ოთხი ცვლადის

შემცველი DAG-ის მეშვეობით. პირველი, შეგახსენებთ, რომ სრული DAG წარმოადგენს DAG-ს, რომელსაც გააჩნია საზღვარი ცვლადების თითოეულ წყვილს შორის. შემდეგ, განვიხილოთ ნახ. 4.7-ზე გამოსახული სრული DAG. DAG-ში თოითოეულ ცვლადს არ ჰყავს არაშთამომავალი (შეგახსენებთ, რომ ამ წიგნში ჩვენ არ განვიხილავთ მშობლების არაშთამომავლებს). ამიტომ თითოეული ცვლადი ტრივიალურად დამოუკიდებელია მისი მშობლებით მოცემული არაშთამომავლების, და მარკოვის პირობა სრულდება. ამის გასარკვევად კიდევ ერთი გზა არსებობს ის, რომ ჯაჭვის წესის თანახმად (იხ. თავი 2 პარაგრაფი 2.2.1), X-ის, Y-ის $-Z-$ის W-ს ყველა x, y, z და w-ს ყველა მნიშვნელობისათვის:

$$P(x, y, z, w) = P(w|z, y, x)P(z|y, x)P(x).$$

ამგვარად P ტოლია მისი პირობითი განაწილებების ნამრავლის DAG-ში ნახ. 4.7-ზე, რაც ნიშნავს, რომ თავი 3-ის თეორემა 3.1-ის თანახმად P აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ამ DAG-ით. შეგახსენებთ, რომ ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ბაიესის ქსელის მეშვეობით წარმოვადგინოთ ალბათობის განაწილება ლაკონურად. სრული DAG არ გვაძლევს ამას, იმიტომ რომ თუ არსებობს n ბინომინალური ცვლადი, მაშინ ბოლო ცვლადი სრული DAG -ში მოითხოვს 2^{n-1} პირობით განაწილებას. იმისათვის რომ მოკლედ წარმოვადგინოთ P განაწილება ჩვენ უნდა მოვძებნოთ მეჩხერი DAG (ერთი რამდენიმე კიდის შემცველი), რომელიც აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას P-თი. შემდეგ ორ განყოფილებაში მოცემულია ამის გასაკეთებლად ორი მეთოდი.

4.3 შეზღუდვაზე დაფუძნებული შესწავლის სტრუქტურა.

შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ სწავლების სხვა ტექნიკას, რომელსაც შეზღუდვაზე დაფუძნებული სწავლება ეწოდება. შეზღუდვაზე დაფუძნებული მიდგომის ჩარჩოებში ჩვენ ვცდილობთ ვიპოვოთ DAG, რომლისთვისაც მარკოვის პირობა გულისხმობს ყველა და მხოლოდ იმ პირობით დამოუკიდებლებს, რომლებიც წარმოადგენენ ჩვენთვის საინტერესო ცვლადების P ალბათობების განაწილებებს. პირველი, ჩვენ ვაჩვენებთ შეზღუდვაზე დაფუძნებულ მიდგომას, რომელიც გვიჩვენებს, როგორ შევისწავლოთ ალბათობების განაწილებების მიმართ სანდო DAG. შემდეგ მოსდევს მსჯელობა ჩანერგილი სანდოობის შესახებ. ბოლოს, წარმოვადგენთ მიზეზობრიობის შესწავლას.

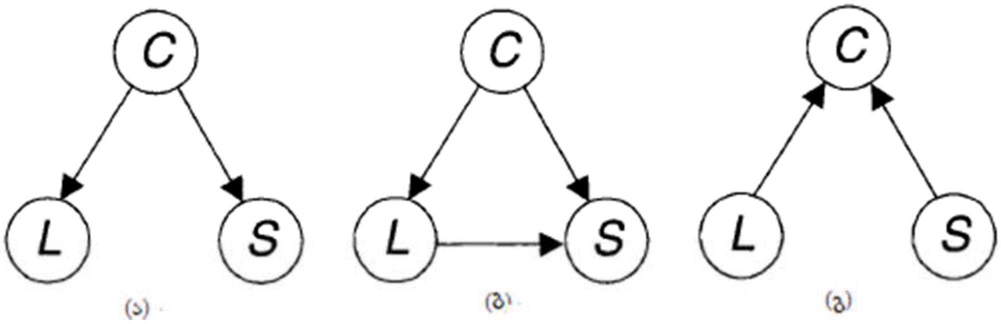
4.3.1. P მიმართ სანდო DAG-ის შესწავლა

შეგახსენებთ, რომ $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს სანდოობის პირობას, თუ ყველა და მხოლოდ პირობითი დამოუკიდებლობა P-ში დაკავშირებულია $\mathbb{G}$-სთან. იმის განხილვის შემდეგ, თუ

რატომ გვსურს შევისწავლოთ P ალბათობის განაწილების მიმართ სანდო DAG, ჩვენ მოვახდენთ ასეთი DAG-ის შესწავლის ილუსტრირებას.

რატომ გვსურს სანდო DAG

განვიხილოთ ისევ თავი 2-ის ნახ. 2.1-ზე გამოსახული ობიექტები, რომლებიც ასევე ფიგურირებენ მე-3 თავში ნახ. 3.4-ზე. თავი 2-ის მაგალითში 2.1 ჩვენ P მივანიჭეთ $1/13$ ნახატზე გამოსახულ თითოეულ ობიექტს და განვსაზღვრეთ ეს შემთხვევითი სიდიდეები სიმრავლეზე, რომელიც შეიცავდა შემდეგ ობიექტებს:



ნახ. 4.8. თუ P-ში ერთადერთ პირობით დამოუკიდებლობას წარმოადგენს $I_P(L,S|C)$, მაშინ P აკონკრეტებს მარკოვის პირობას DAG-ით (ა)-ში და (ბ)–ში, P აკონკრეტებს სანდოობის პირობას მხოლოდ DAG-ით (ა)-ში

ცვლადი	სიდიდე	შედეგები დაფუძნებული ამ სიდიდეზე
L	l_1	ყველა ობიექტი მოიცავს „A“
	l_2	ყველა ობიექტი მოიცავს„ B“
S	s_1	ყველა კვადრატული ობიექტი
	s_2	ყველა რომბის ფორმის ობიექტი
C	c_1	ყველა შავი ობიექტი
	c_2	ყველა თეთრი ობიექტი

შემდეგ ვაჩვენეთ, რომ L და S პირობითად დამოუკიდებელნი არიან C მოცემლობით. თავი 2-ის პარაგრაფ 2.2.2-ში შემოტანილი აღნიშვნის გამოყენებით, ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ

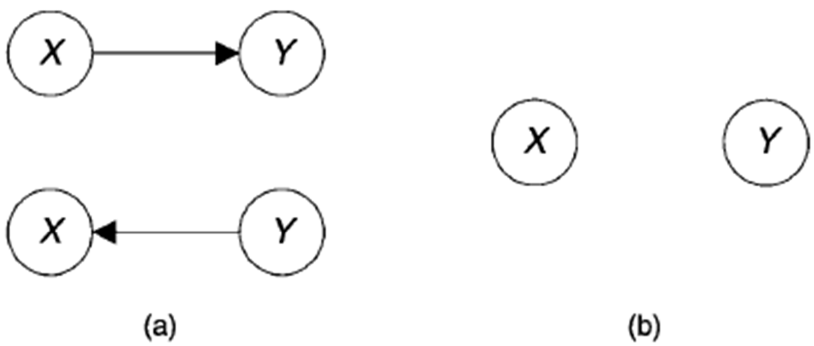
$$I_P(L,S|C)$$

თავი 2-ის მაგალით 3.1-ში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ P აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას DAG-ით ნახ. 4.8 (ა)-ზე. მაგრამ P ასევე აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას სული DAG-ით ნახ. 4.8 (ბ)-ზე. P არ აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას DAG-ით ნახ. 4.8 (გ)-ზე, რამდენედაც ეს DAG არ იწვევს $I_P(L,S)$ და ეს დამოუკიდებლობა არაა P-ში. DAG ნახ. 4. 8 (ბ)-ზე არ წარმოადგენს P-ს ძალიან კარგად, იმიტომ რომ ის არ იწვევს დამოუკიდებლობის პირობას ამ P-ში, კერძოდ $I_P(L,S|C)$. ეს წარმოადგენს სანდოობის პირობის დარღვევას. მხოლოდ ნახ. 4. 8 (ა)-ზე გამოსახული არის P-ს სანდო DAG. თუ ჩვენ შევძლებთ მოვძებნოთ P-ს სანდო

DAG, ჩვენ მივაღწევთ მიზანს, ლაკონურად წარმოვადგინოთ P. როგორც ვხედავთ ყველა P-ს არ აქვს სანდო DAG. მაგრამ თუ DAG P-ს სანდოა (შეიძლება ერთზე მეტიც) შედარებით მარტივია მათი აღმოჩენა. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ სანდო DAG-ის შესწავლას.

სანდო DAG-ის შესწავლა

ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ მოსახლეობიდან იმ ობიექტებს ვარჩევთ, რომლებზედაც განისაზღვრება შემთხვევითი სიდიდეები, და ვიცით ნიმუშში ჩართული პირებისათვის ინტერესის ცვლადების მნიშვნელობები. ნიმუში შეიძლება იყოს შემთხვევითი, ან ის შეიძლება მიღებული იყოს პასიური მონაცემებიდან. ამ ნიმუშიდან ვასკვნით, რომ ცვლადებს შორის პირობითი დამოუკიდებლობაა. ჩვენი ნდობა შესასწავლ DAG-ში იმაზე მეტი არაა, რაც ჩვენი ნდობაა პირობითი დამოუკიდელების მიმართ.



ნახ. 4.9 თუ პირობითი დამოუკიდებელი მნიშვნელობების სიმრავლე არის $\{I(X,Y)\}$, უნდა გვქონდეს DAG (ბ)-ში, ხოლო თუ ის არის $\emptyset$, ჩვენ უნდა გვქონდეს (ა)-ში DAG-ებიდან ერთი.

მაგალითი 4.12. ეს რჩება სავარჯიშოს სახით, იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ მონაცემები, რომლებიც ნაჩვენებია 4.11. მაგალითში. ახდენენ ამ პირობითი დამოუკიდებლობის დემონსტრირებას:

$I_P(Height, Wage|Sex)$.

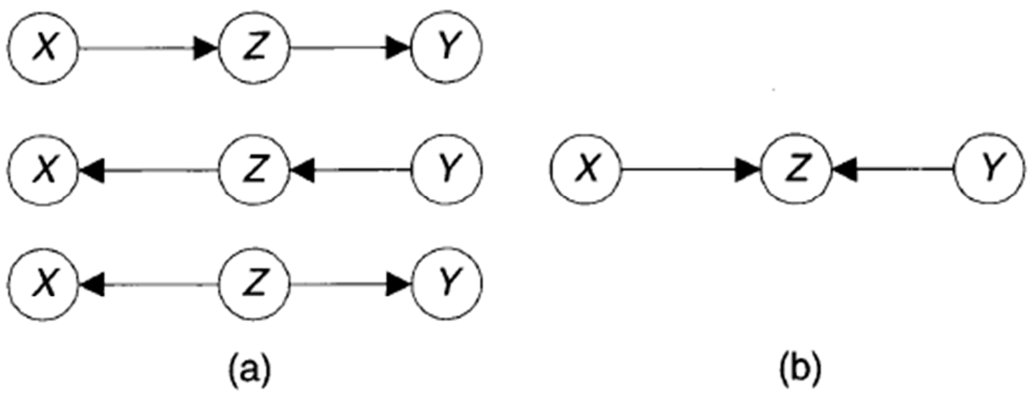
აქედან გამომდინარე, ამ მონაცემებით შეგვიძლია დარწმუნებულები ვიყოთ, რომ ეს პირობითი დამოუკიდებლობა დიდია მოსახლეობაში.

შემდეგ მოვიყვანთ მაგალითების თანმიმდევრობას, რომელშიც შევისწავლით ალბათობების განაწილების მიმართ სანდოობას. ეს მაგალითები გვაჩვენებენ თუ როგორ შეიძლება გამოვიცნოთ სანდო DAG პირობითად დამოუკიდებლებიდან, თუ ასეთი არსებობს. კიდევ ერთხელ აღვნიშნოთ, რომ DAG სანდოა პირობითი დამოუკიდებლების მიმართ, რაც ჩვენ მონაცემებიდან შევიტყეთ. ალბთობათა განაწილებაში ეს პირობითი დამოუკიდებლობა მთელი მოსახლეობისთვისაა.

მაგალითი 4.13. ვთქვათ V არის ჩვენი დაკვრვებადი ცვლადების სიმრავლე, $V = \{X, Y\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია

$\{I(X, Y)\}$.

ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ სრული DAG P-სთვის. ჩვენ არ შეიძლება გვქონდეს ნახ. 4.12 (ა)-ზე გამოსახული DAG–ებიდან არც ერთი. მიზეზი ისაა, რომ ისინი არ იწვევენ X და Y-ის დამოუკიდებლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ სანდოობის პირობა არ სრულდება. ამგვარად, ჩვენ უნდა გვქონდეს DAG ნახ. 4.9 (ბ)-ზე. ჩვენ ვასკვნით, რომ P არის სანდო DAG-სთვის ნახ. 4.9 (ბ)-ზე.



ნახ. 4.10 თუ პირობითი დამოუკიდებელი მნიშვნელობების სიმრავლე არის $\{I_P(X, Y)\}$, უნდა გვქონდეს DAG (ბ)-ში, ხოლო თუ ის არის $\{I_P(X, Y|Z)\}$ ჩვენ უნდა გვქონდეს (ა)-ში DAG-ებიდან ერთი.

მაგალითი 4.14. $V = \{X, Y\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ცარიელი სიმრავლეა

$\emptyset$.

ანუ, არ არსებობს დამოუკიდებლობა. ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ სრული DAG P-სთვის. ჩვენ არ შეიძლება გვქონდეს DAG ნახ. 4.9 (ბ)-ზე. მიზეზი ისაა, რომ ისინი არ იწვევენ X და Y-ის დამოუკიდებლობას, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარკოვის პირობა არ კმაყოფილდება. ამგვარად, ჩვენ უნდა გვქონდეს ნახ. 4.9 (ბ)-ზე გამოსახული DAG-ებიდან ერთი. ჩვენ ვასკვნით, რომ P არის სანდო ორივე DAG-სთვის ნახ. 4.9 (ა)-ზე.

წინა მაგალითი გვიჩვენებს, რომ არ არსებობს უნიკალურ DAG-ის საჭიროება, რომლითაც ალბათობებს განაწილება სანდოა.

მაგალითი 4.15. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y)\}$.

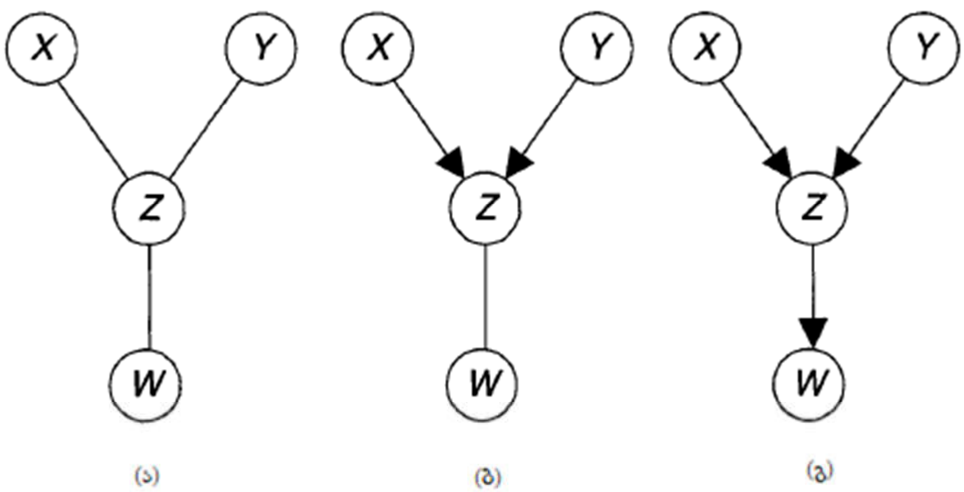
ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ DAG სანდო P-სთვის. 4.14. მაგალითში მოყვანილი მიზეზის გამო არ შეიძლება DAG-ში იყოს X-სა და Y-ს შორის კიდეები. გარდა ამისა, 4.15. მაგალითში მოყვანილი მიზეზის გამო უნდა არსებობდეს წიბოები X-სა და Y-ს და Y-სა და Z-ს შორის. ჩვენ არ შეიძლება გვქონდეს რომელიმე ნახ. 4.10 (ა)-ზე გამოსახული DAG–ებიდან. მიზეზი ისაა, რომ ეს DAG–ები იწვევენ $I(X,Y|Z)$-ს, და ეს პირობითი დამოუკიდებლობა არაა წარმოადგენლი. ასე რომ მარკოვის პირობა არ დაკმაყოფილდა. გარდა ამისა, DAG–ები არ იწვევენ $I(X,Y)$-ს. ამგვარად, DAG უნდა იყოს ისეთი, როგორიც ნაჩვენებია ნახ. 4.10 (ბ)-ზე. ჩვენ ვასკვნით, რომ P არის სანდო DAG-სთვის ნახ. 4.10 (ბ)-ზე.

მაგალითი 4.16. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X,Y|Z)\}$.

ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ DAG სანდო P-სთვის. ადრე მოყვანილი მიზეზის გამო უნდა არსებობდეს მხოლოდ წიბოები X-სა და Y-ს და Y-სა და Z-ს შორის. ჩვენ არ შეიძლება გვქონდეს DAG ნახ. 4.10 (ბ)-ზე. მიზეზი ისაა, რომ ეს DAG აიწვევენ $I(X,Y)$-ს, და ეს პირობითი დამოუკიდებლობა არაა წარმოდგენლი. ასე რომ მარკოვის პირობა არ დაკმაყოფილდა. ასე რომ, ჩვენ უნდა გვქონდეს ნახ. 4.10 (ა)-ზე გამოსახული DAG-ებიდან ერთი. ჩვენ ვასკვნით, რომ P არის სანდო ყველა DAG-სთვის ნახ. 4.10 (ა)-ზე.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ თეორემა. ამ ეტაპზე თქვენი ინტუიცია უნდა ეჭვობდეს, რომ ეს სიმართლეა.



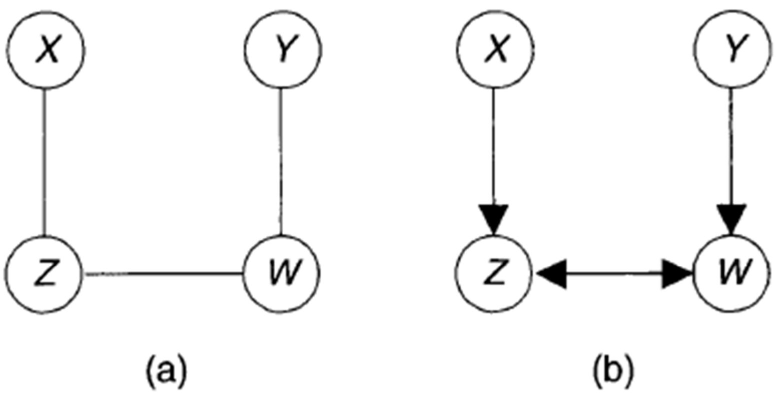
ნახ. 4.11 თუ პირობითი დამოუკიდებელი მნიშვნელობების სიმრავლე არის $\{I_P(X,\{Y,W\}), I_P(Y,\{X,Z\})\}$, უნდა გვქონდეს DAG (გ)-ში.

თეორემა 4.4. თუ $(\mathbb{G}, P)$ აკმაყოფილებს სანდოობის პირობას, მაშინ X-სა და Y-ს შორის კიდეები არსებობენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა X და Y არ წარმოადგენენ პირობითად დამოუკიდებლებს ცვლადების ნებისმიერი სიმრავლის გათვალისწინებით.

მაგალითი 4.17. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$$\{I_P(X, Y),\ \ I_P(W, \{X, Y\}|Z)\}$$

ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ DAG სანდო P-სთვის. თეორემა 4.4-ის თანახმად ბმულები (მიმართულების გარეშე წიბოები) ისეთები უნდა იყოს, როგორიც ეს ნახ. 4.14 (ა)-ზეა ნაჩვენები. ჩვენ უნდა გვქონდეს ნახ. 14 (ბ)-ზე ნაჩვენები მიმართული წიბოები იმიტომ, რომ გვაქვს $I_P(X, Y)$. ამიტომ ჩვენ ასევე უნდა გვქონდეს ნახ. 4 14 (გ)-ზე ნაჩვენები მიმართული კიდე იმიტომ, რომ ჩვენ გვაქვს $I_P(W, X)$. ჩვენ ვასკვნით, რომ P არის სანდო DAG-სთვის ნახ. 4.14 (გ)-ზე.



ნახ. 4.12: პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე არის $\{I_P(X, \{Y, W\}),\ I_P(W, \{X, Y\}|Z)\}$, და აჩვენ ვცდილობთ ვიპოვოთ DAG სანდო P-სთვის, მივიღებთ გრაფს (ბ)-ზე, რომელიც არაა DAG.

მაგალითი 4.18. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$$\{I_P(X, \{Y, W\}),\ \ I_P(W, \{X, Y\}|Z)\}$$

ჩვენ გვსურს ვიპოვოთ DAG სანდო P-სთვის. თეორემა 4.4-ის თანახმად ჩვენ უნდა გვქონდეს ნახ. 4.12 (ა)-ზეა ნაჩვენები ბმულები. ახლა, თუ ჩვენ გვაქვს ჯაჭვი $X \to Z \to W$, $X \leftarrow Z \leftarrow W$ ან$X \leftarrow Z \to W$, მაშინ ჩვენ არ გვაქვს $I_P(X, Y)$. მაშასადამე ჩვენ გვაქვს $X \to Z \leftarrow W$ ჯაჭვი. ანალოგიურად, ჩვენ უნდა გვქონდეს $Y \to W \leftarrow Z$ ჯაჭვი. ამიტომ ჩვენი გრაფი უნდა იყოს ისეთი, როგორიც ეს ნახ. 4.12 (ბ)-ზეა გამოსახული. მაგრამ ეს გრაფი არ წამოადგენს DAG-ს. აქ პრობლემა ისაა, რომ არ არის P-სთვის სანდო DAG.

მაგალითი 4.19. ისევ $V=\{X,Y,Z,W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$$\{I_P(X,\{Y,W\}),\ I_P(W,\{X,Y\}|Z)\}$$

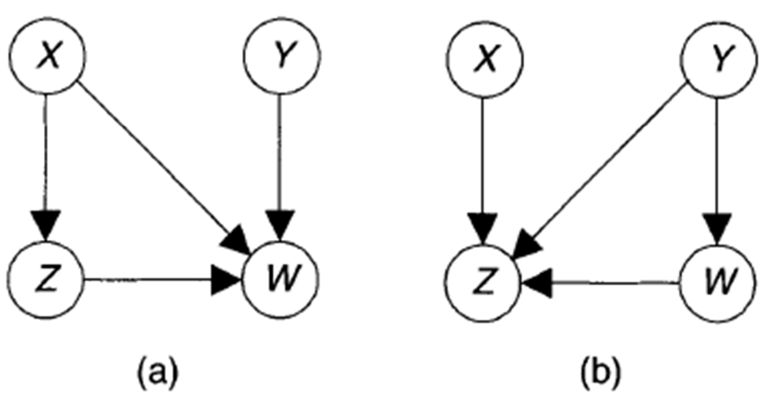
როგორც წინა მაგალითში იყო ნაჩვენები, P-სთვის DAG არ არის სანდო. მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ ჩვენ არ შეგვიძლია P-ს წარმოდგენის უფრო მოკლე გზა მოვნახოთ, ვიდრე სრული DAG–ის გამოყენებაა. P აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 4.16 (ა)-ზე გამოსახული თითოეული DAG–ით. ე.ი. 4.16 (ა)-ზე გამოსახული DAG იწვევს:

$$\{I_P(X,Y),\qquad I_P(Y,Z)\},$$

და ეს პირობითი დამოუკიდებლი სიდიდეები მდებარეობენ P-ში, ხოლო 4.16 (ბ)-ზე გამოსახული DAG იწვევს:

$\{I_P(X,Y),\ I_P(X,W)\}$,

და ეს პირობითი დამოუკიდებლი სიდიდეები მდებარეობენ P-ში. მაგრამ არ აკმაყოფილებენ სანდოობის პირობას ამ DAG-ებიდან ნებისმიერთან იმიტომ, რომ ნახ. 4.13. (ა)-ზე DAG არ იწვევს $I_P(X,W)$-ს, ხოლო ნახ. 4.13. (ბ)-ზე DAG არ იწვევს $I_P(Y,Z)$-ს. თითოეული ამ DAG-დან იმდენად ლაკონურია, რამდენადაც ჩვენ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ალბათობების განაწილებები. ამიტომ, როდესაც არ არსებობს P ალბთობების განაწილებისათვის სანდო DAG, ჩვენ ჯერ კიდევ შეგვიძლია უფრო მოკლედ წარმოვადგინოთ P, ვიდრე სრული DAG-ის გამოყენებით. სტრუქტურის შემსწავლელი ალგორითმი ცდილობს იპოვოს უფრო შემჭიდროებული წარმოდგენა. თითოეული ცვლადის ალტერნატივის რაოდენობაზე დამოკიდებულებით, ნახ. 4.16-ზე ერთ-ერთი DAG შეიძლება ფაქტობრივად უფრო მოკლედ წარმოვადგინოთ, ვიდრე დანარჩენები, რამდენადაც ის ნაკლებ პარამეტერს შეიცავს. შეზღუდვაზე დამყარებულ ლოგორითმის შესწავლა ვერ პოულობს განსხვებას ამ ორს შორის, მაგრამ ქულებზე დაფუძნებული არჩევს.



ნახ. 4.13. თუ პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე არის $\{I_P(X,\{Y,W\}),\ I_PY,\{X,Z\})\}$, მარკოვის პირობა დაკმაყოფილებულია ორივე ამ DAG-ით.

4.4. მიზეზობრივი სწავლება

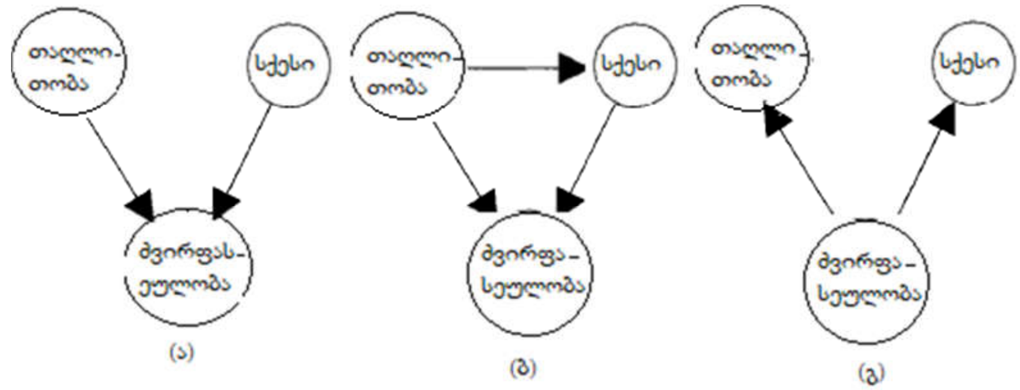
უმეტეს დანართში პროცენტების მნიშვნელობებს ერთმანეთთან შემთხვევითი დამოკიდებულება აქვთ. მაგალთად, ცვლადები 4.11. მაგალითში გავლენას ახდენს სიმაღლეზე და შეიძლება გამოიწვიოს მიზეზობრივი ეფექტი ხელფასზე. თუ ცვლადები მიზეზობრივად დაკავშირებულნი არიან, ჩვენ შეგვიძლია გავიგოთ რაიმე მათ მიზეზ-შედეგობრივ კავშირზე, როდესაც ვსწავლობთ მონაცემებიდან DAG-ის სტრუქტურას. მაგრამ ამისათვის ჩვენ გარკვეული ვარაუდი უნდა გავაკეთოთ. ჩვენ ამ ვარაუდებზე და მიზეზობრივ სწავლებაზე ვიმსჯელებთ შემდეგომში.

4.4.1. მიზეზობრივი სანდოობის ვარაუდი

გავიხსენოთ თავი 3 პარაგრაფი 3.3.2-დან, რომ თუ დავუშვებთ V შემთხვევითი სიდიდეების სიმრავლის P დაკვირვებადი განაწილების ალბათობა აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას მიზეზობრივი DAG $\mathbb{G}$-ით, რომელიც შეიცავს ცვლადებს, ჩვენ ვამბობთ, რომ ვაკეთებთ **მიზეზობრივ მარკოვის ვარაუდს,** და მას ვუწოდებთ $(\mathbb{G}, P)$ **მიზეზობრივ ქსელს**. უფრო მეტიც, ჩვენ მივედით დასკვნამდე, რომ მიზეზობრივი მარკოვის ვარაუდი გამართლებულია მიზეზობრივი ქსელისთვის, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. არ არსებობს დაფარული საერთო მიზეზები,
2. არ არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები. ე.ი. ჩვენი გრაფი DAG –ია,
3. შერჩევის გადახრა არ არსებობს.

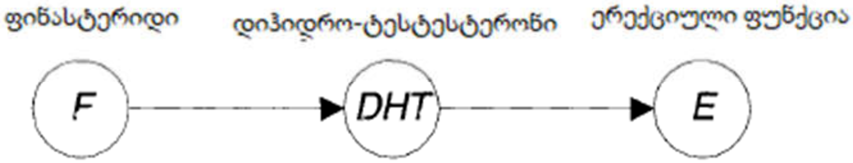
გავიხსენოთ თავი 3-ის პარაგრაფ 3.1-ში დისკუსია საკრედიტო ბარათებით თაღლითობის შესახებ. დავუშვათ, რომ თაღლითობასაც და სქესსაც აქვთ მიზეზობრივი ეფექტი საიუველირო ნაწარმის შეძენაზე და ამ ცვლადებს შორის არაა სხვა რაიმე მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი. მაშინ მიზეზობრივი DAG, რომელიც შეიცავს სამ ცვლადს არის ისეთი, როგორც ნახ. 4.18 (ა)-ზე წარმოდგენილი. თუ ჩვენ გავაკეთებთ მიზეზობრივ მარკოვის ვარაუდს, ჩვენ უნდა გვქონდეს $I_P(Fraud, Sex)$.



ნახ. 4.14. თუ მიზეზობრივი ერთადერთ დამოკიდებულებას წარმოადგენს ის, რომ $Fraud$-ს და Sex-ს აქვთ $Jewelry$-ზე მიზეზობრივი გავლენა, მაშინ მიზეზ-შედეგობრივი DAG არის ერთი (ა)-ში. თუ ჩვენ გავაკეთებთ მიზეზობრივ მარკოვის ვარაუდს, მხოლოდ DAG (გ)-ში გამოირიცხება, თუ ჩვენ ვაკვირდებით $I_P(Fraud, Sex)$.

ახლა დავუშვათ, რომ ჩვენ არ ვიცით ცვლადებს შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი, მაგრამ ჩვენ ვაკეთებთ მარკოვის ვარაუდს და ჩვენ ვსწავლობთ მხოლოდ პირობით დამოუკიდებლობას $I_P(Fraud, Sex)$ მონაცემებიდან. შეგვიძლია თუ არა დავასკვნათ, რომ მიზეზობრივი DAG უნდა იყოს ისეთი, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 4.18(ა)-ზე? არა არ შეგვიძლია, რადგან P ასევე აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას ნახ. 4.18 (ბ)-ზე ნაჩვენები DAG-ით. ეს ცოტა ძნელი გასაგებია. მაგრამ შეგახსენებთ, რომ ჩვენ ვვარაუდობთ და ამას ვაკეთებთ იმ პირობით, რომ არ ვიცით მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი ცვლადებს შორის. რამდენედაც ჩვენ ვიცით, ისინი შეიძლება იყოს როგორც ეს ნახ. 4.14 (ბ)-ზეა გამოსახული. თუ ნახ. 4.14 (ბ)-ზე DAG არის მიზეზობრივი DAG, მიზეზობრივი მარკოვის ვარაუდი მაინც შესრულებული იქნება, მაშინ P-ში ერთადერთი პირობითი დამოკიდებლობა არის $I_P(Fraud, Sex)$, იმიტომ რომ ეს DAG აკმაყოფილებს მარკოვის პირობას P-თი. ამგვარად, მარტო მიზეზობრივი მარკოვის ვარაუდის გაკეთებით ჩვენ ვერ განვასხვავებთ მიზეზობრივ DAG-ებს ნახ. 4.14 (ა) და (ბ)-ზე, რომლებიც ეფუძნება $I_P(Fraud, Sex)$ პირობით დამოუკიდებლობას. მიზეზობრივი მარკოვის ვარაუდი საშუალებას გვაძლევს გამოვრიცხოთ ის მიზეზობრივი DAG-ები, რომლებიც იმ პირობით დამოუკიდებლებს შეიცავენ, რომლებიც არ მდებარეობენ P-ში. ნახ. 4.14 (გ)-ზე ერთი ასეთი DAG-ია. ჩვენ გვჭირდება გავაკეთოთ მიზეზობრივ სანდოობაზე ვარაუდი და დავასკვნათ მიზეზობრივი DAG არის ისეთი, როგორც ნახ. 4.14 (ა)-ზე. ეს ვარაუდი შემდეგია: თუ დავუშვებთ V შემთხვევითი სიდიდეების სიმრავლის P დაკვირვებადი განაწილების ალბათობა აკმაყოფილებს სანდოობის პირობას მიზეზობრივი $\mathbb{G}$-ით, რომელიც შეიცავს ცვლადებს, მაშინ ჩვენ ვამბობთ, რომ ვაკეთებთ **ვარაუდს მიზეზობრივ სანდოობაზე**. თუ ჩვენ ვაკეთებთ ვარაუდს მიზეზობრივ სანდოობაზე,

შემდეგ ვიპოვით უნიკალურ DAG -ს, რომელიც P –ს სანდოა, DAG-ში წიბოები უნდა წარმოადგენდნენ მიზეზობრივ გავლენას. ეს ნაჩვენებია შემდეგ მაგალითებში.



ნახ. 4.15. ფინასტერიდი და ერექციის ფუნქცია დამოუკიდებლები არიან.

მაგალით 4. 20. შეგახსენებთ, რომ მაგალით 4.22-ში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ, $V = \{X, Y, Z\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y)\}$.

მაშინ მხოლოდ P-ს ერთადერთი სანდო DAG არის ისეთი, როგორც ნახ. 4.13 (ბ)-ზეა. თუ გავაკეთებთ ვარაუდს მიზეზობრივ სანდოობაზე, მაშინ ეს DAG უნდა იყოს მიზეზობრივი DAG, რაც იმას ნიშნავს, რომ შეგვიძლია დავასკვნათ X და Y თითოეული $Z-$ის მიზეზია. ეს იგივე სიტუაციაა, როგორიც ნაჩვენები იყო ზემოთ თაღლითობას, სქესსა და საიუველირო ნაწარმთან დაკავშირებით. აქედან გამომდინარე ჩვენ ვაკეთებთ ვარაუდს მიზეზობრივ სანდოობაზე და ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მიზეზობრივი DAG არის ისეთი, როგორც ნახ. 4.18 (ა)-ზეა, რომელიც ეფუძნება $I_P(Fraud, Sex)$ პირობით დამოუკიდებლობას.

მაგალითი 4.21. 4.23 მაგალითში ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ, $V = \{X, Y, Z\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y|Z)\}$,

მაშინ ყველა DAG ნახ. 4.13 (ა)-ზე არის სანდო P-სთვის. თუ გავაკეთებთ ვარაუდს მიზეზობრივ სანდოობაზე, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ერთ-ერთი DAG მიზეზობრივი DAG-ია, მაგრამ ჩვენ არ ვიცით რომელი.

მაგალითი 4.22. მაგალით 4.25-ში ჩვენ ვაჩვნეთ, რომ თუ $V = \{X, Y, Z, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$$\{I_P(X, Y),\ I_P(W, \{X, Y\}|Z)\}$$

მხოლოდ P-ს ერთადერთი სანდო DAG არის ისეთი, როგორც ნახ. 4.14 (გ)-ზეა. ამგვარად, შეგვიძლია დავასკვნათ X და Y თითოეული $Z-$ის მიზეზია და Z W-ს მიზეზია.

როდისაა გამართლებული ვარაუდი მიზეზობრივ სანდოობაზე? ეს მოითხოვს ადრე ნახსენებ მიზეზობრივ მარკოვის ვარაუდისათვის სამ პირობას პლუს ერთით მეტი, რასაც ჩვენ შემდეგ განვიხილავთ. შეგახსენებთ თავი 3-ის პარაგრაფ 3.3.1-დან, რომ ფარმაცეტულმა

კომპანია $Merck$-მა შეიმუშავა პრეპარატი ფინასტერიდი, რომელიც ეფექტური აღმოჩნდა უძლურების სამკურნალოდ. გაგახსენებთ თავი 3-ის პარაგრაფ 3.6.3-დან, რომ ფინასტერიდი ამას აღწევს მამაკაცებში დეჰოდრო-ტესტოსტერონის (DHT) შემცირებით, და DHT აუცილებელია ერექციული ფუნქციისათვის. ასე რომ მიზეზობრივი კავშირი ფინასტერიდს, DHT-ს და ერექციულ დისფუნქციას შორის არის ნაჩვენები ნახ. 4.19-ზე. თავი 3-ის პარაგრაფ 3.6.3-დან გაიხსენეთ იმის შესახებ, რომ ფართომასშტაბიანმა მანიპულირებამ გვიჩვენა, რომ ფინასტერიდი ახდენს მიზეზობრივ მოქმედებას DHT-ის დონეზე, მაგრამ არ ახდენს მიზეზობრივ ეფექტს ერექციულ დისფუნქციაზე. მიზეზ-შედეგობრივი კავშირი ფინასტერიდს, DHT-ს და ერექციულ დისფუნქციას (E) შორის, როგორც დადგინდა, ცხადად იყო ნაჩვენები ნახ. 4.19-ზე? ჩვენ ველით, რომ მიზეზობრივი საშუამავლო გადასცემს ეფექტს თავისი წინამორბედიდან მის შემდგომს, მაგრამ ამ შემთხვევაში ეს ასე არაა. ახსნა იმაში მდგომარეობს, რომ ფინასტერიდს არ შეუძლია დონე დაწიოს გარკვეულ ზღვრულ დონეზე დაბლა, და ეს დონე არის ერექციისათვის აუცილებელი დონე. ამგვარად გვაქვს $I(F,E)$.

მარკოვის პირობა არ იწვევს $I(F,E)$-ს მიზეზობრივი DAG-ისთვის ნახ. 4.19-ზე. ეს მხოლოდ გულისხმობს $I(F,E|DHT)$-ს. ამგვარად, მიზეზობრივი სანდოობის ვარაუდი არაა გამართლებული. თუ გავიგებთ პირობით დამოუკიდებლობას მონაცემების მიხედვით ცვლადების ალბათობების განაწილებაში, ჩვენ გვეცოდინებოდა დამოუკიდებლების შემდეგი სიმრავლე:

$\{I_P(F,E),\ I_P(F,E|DHT)\}$.

არ არსებობს ისეთი DAG, რომელიც იწვევს ამ ორივე პირობით დამოუკიდებლებს. ასე რომ არ არსებობს DAG, რომელსაც ამ მონაცემებით შევიტყობდით.

ჩვეულებრივ, მიზეზობრივი სანდოობის ვარაუდი გამართლებულია, როდესაც ადრე ჩამოთვლილი მარკოვის მიზეზობრივი ვარაუდისათვს სამი პირობა შესრულებულია და როდესაც არ გვაქვს მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები, ისე როგორც ფინასტერიდის მაგალითში. ასე რომ მიზეზობრივი სანდოობის ვარაუდი მიზეზობრივი გრაფისათვის ჩვეულებრივ გამართლებულია, თუ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. არ არსებობს საერთო დაფარული მიზეზები. ე.ი. ყველა გავრცელებული მიზეზი წარმოდგენილია გრაფზე.
2. არ არსებობს მიზეზ-შედეგობრივი კავშირები. ე.ი. ჩვენი გრაფი წაარმოადგენს DAG-ს.
3. შერჩევის გადახრა არ არსებობს.

4. ყველა შუალედური მიზეზი გადასცემს გავლენას თავისი წინამორბედისაგან მის შემდგომს.

4.5 სწავლებისათვის პროგრამული პაკეტები

პარაგრაფ 4.4.1-ში აღწერილ მოსაზრებაზე დაყრდნობით, $Spirtes\ et\ al.$-მა [1993,2000] შეიმუშავა ალგორითმი, რომელიც პოულობს P-ს სანდო DAG-ს P-ში პირობითი დამოუკიდებლებიდან. $Spirtes\ et\ al.$-მა [1993,2000] განახორციელა ალგორითმი, რომელიც შეისწავლის DAG-ს, რომელშიც P სანდოდ არის ჩანერგილი P-ში არსებული პირობითი დამოუკიდებლებისაგან, როცა ასეთი DAG არსებობს. ალგორითმი განხორციელდა $Tetrad$ პროგრამულ პაკეტში [Scheines et al., 1994], რომელიც შეიძლება გადმოიწეროთ უფასოდ შემდეგი საიტიდან

http://www.phil.cmu.edu/projects/tetrad/.

1997 წელს $Meek$ შეიმუშავა ევრისტიკული ძებნის ალგორითმი, რომელსაც ეწოდება $Greedy\ Equivalent\ Search\ (GES)$ და გააჩნია შემდეგი თვისებები: თუ DAG იქნებოდა P-ს სანდო, მაშინ P-ს სანდო DAG -ის მოძებნის ალბათობის ზღვარი იქნებოდა 1-ის ტოლი, რადგანაც მონაცემთა სიმრავლის ზომა მიისწრაფის უსასრულობისაკენ. $Tetrad$ პროგრამულ პაკეტს ასევე გააჩნია მოდული, რომმელიც იყენებს ამ ალგორითმს ბაიესური ინფორმაციის კრიტერიუმთან (BIC) ერთად იმისათვის, რომ შეისწავლოს ბაიესური ქსელი მონაცემებიდან.

სწავლების სხვა ბაიესური პაკეტები შემდეგს მოიცავს:

1. Belief Network Power Constructor (constraint-based approach), http://www.cs.ualberta.ca/~jcheng/bnpc.htm.
2. Bayesware (structure and parameters), http://www.bayesware.com/.
3. Bayes Net Toolbox, http://bnt.sourceforge.net/.
4. Probabilistic Net Library, http://www.intel.com/technology/computing/pnl/.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 4.1

სავარჯიშო 4.1. ექსპერიმენტისათვის, რომელსაც ორი შედეგი აქვს და რომლის გამეორებაც თქვენ უსასრულოდ შეგიძლიათ (მაგალითად ჭიკარტის აგდება), განსაზღვრეთ

a და b თითოეული შედეგის შემთხვევეის რაოდენობა, რომელსაც თქვენ წინა გამოცდილების ეკვივალენტურად თვლით. განსაზღვრეთ პირველი შედეგის ალბათობა.

სავარჯიშო 4.2. ვივარაუდოთ, რომ ჩემი წინასწარი გამოცდილება შედარებითი სიხშირის შესახებ იმის ეკვივალენტურია, რომ კონკრეტულ ბარში დავინახე 14 მწეველი და 6 არამწეველი.

1. შემდეგ გადავწყვიტე გამომეკითხა ბარში მწეველი ადამიანები. როგორია ჩემი ალბათობა იმისა, რომ პირველი ადამიანი იქნება მწეველი?

2. დავუშვათ, 10 კაცის გამოკითხვის შემდეგ მივიღე ეს მონაცემები (1 ნიშნავს, რომ ადამიანი ეწევა, ხოლო 2 ნიშნავს, რომ ეს ადამიანი არ ეწევა):

$\{1, 2, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1\}$.

როგორია ჩემი ალბათობა იმისა, რომ შემდეგი გამოკითხული ადამიანი იქნება მწეველი?

3. დავუშვათ 1000 კაცის გამოკითხვის შემდეგ (ეს დიდი ბარია), მე ვიგებ, რომ 312 მწეველია. როგორია ჩემი ალბათობა იმისა, რომ შემდეგი გამოკითხული მწეველია? ეს ალბათობა როგორ ედრება ჩემს წინა ალბათობას?

სავარჯიშო 4.3. 4.7. მაგალითში სავარჯიშოს სახით დავტოვეთ იმის ჩვენება, რომ შეცავს თუ არა NiS-ს დანარჩენი 36 პანელი, ეს ალბათობა განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\prod_{i=0}^{35} \frac{1/360+3+i}{20/360+3+i} = 0{,}866$.

აჩვენეთ ეს.

სავარჯიშო 4.4. დავუშვათ, მე ვუყურებ სემის და დეივის რბოლებს რამდენჯერმე და სემი ათლეტიკურად შედარებით ჩამორჩება დეივს. ამიტომ მე ვაძლევ სემს პირველი რბოლის მოგების 0,1-ის ტოლ ალბათობას. თუმცა ვფიქრობ, რომ თუ სემი ერთხელ მოიგებს, ჩვეულებრივ მან უნდა მოიგოს ხოლმე. ამიტომ იმის გათვალისწინებით, რომ სემი იგებს პირველ რბოლას, მე ვაძლევ შემდეგი მოგების 0,8-ის ტოლ ალბათობას.

1. მაგალით 4.7-ში ნაჩვენები მეთოდის გამოყენებით გამოთვალეთ ჩემი a და b-ს წინა მნიშვნელობები.

2. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ სემი მოიგებს პირველ 5 რბოლას.

3. დავუშვათ, რომ სემმა მოიგო პირველი 5 რბოლიდან 4. განსაზღვრეთ ჩემი ალბათობა იმისა, რო სემი მოიგებს მე-6 რბოლას.

სავარჯიშო 4.5. იპოვეთ მართკუთხა ბლოკი (არა კუბი) და აღნიშნეთ გვერდები. განსაზღვრეთ $a_1, a_{2,} \ldots, a_6$ მნიშვნელობები, რომლებიც წარმოადგენენ თქვენს წინასწარ ალბთობებს თითოეული გვერდის მოსვლის მიმართ, როდესაც თქვენ ეს ბლოკი გადააგდეთ.

1. როგორია იმის ალბათობა, რომ თითოეული გვერდი მოვა პირველ გადაგდებაზე?

2. გადააგდეთ ბლოკი 20-ჯერ. გამოთვალეთ თქვენი ალბათობა თითოეული გვერდის მოსვლისა შემდეგ გადაგდებაზე.

სავარჯიშო 4.6. დავუშვათ, რომ ჩვენ ვაპირებთ შევარჩიოთ ხალხი, რომლებიც ბოლო 10 წლის განმავლობაში ყოველდღიურად ორ ან მეტ კოლოფ სიგარეტს ეწეოდნენ. ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ არის თუ არა თითოეული ადამიანის სისტოლური არტერიული წნევა ≤100-ზე, 101-120, 121-140, 141-160, თუ ≥161-ზე. განსაზღვრეთ მნიშვნელობები $a_1, a_2, \ldots, a_5$, რომლებიც წარმოადგენენ თითოეული დიაპაზონის არტერიული წნევის ალბათობებს.

1. შემდეგ შეარჩიეთ ასეთი მწეველები. როგორია თითოეული ასეთი სისხლის დიაპაზონის თქვენი ალბათობა პირველი შერჩეული მწეველისათვის?

2. ვთქვათ 100 კაცის შერჩევის შემდეგ მივიღეთ შემდეგი შედეგები:

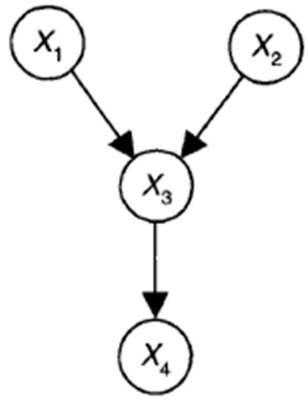
სისხლის წნევის დიაპაზონი	ინდივიდების # დიაპაზონში
≤ 100	2
101-120	15
121-140	23
141-160	25
≥ 161	35

გამოთვალეთ თითოეული დიაპაზონის ალბათობა შემდეგი ცალკეული შერჩეული მწეველისათვის.

სავარჯიშო 4.7. დავუშვათ გვაქვს ნახ. 4.6 (ბ)ზე მოცემული პარამეტრების შესწავლისათვის ბაიესის ქსელი და გვაქვს შემდეგი მონაცემები:

შემთხ.	X	Y	Z
1	x_1	y_2	z_1
2	x_1	y_1	z_2
3	x_2	y_1	z_1
4	x_2	y_2	z_1
5	x_1	y_2	z_1
6	x_2	y_2	z_2
7	x_1	y_2	z_1
8	x_2	y_1	z_2
9	x_1	y_2	z_1
10	x_1	y_1	z_1

განსაზღვრეთ განახლებული ბაიესის ქსელი პარამეტრების შესასწავლისათვის.



ნახ. 4.16 DAG

სავარჯიშო 4.8. გამოიყენეთ თეორემა 4.1-ის მეთოდი პარამეტრების შესაწავლისათვის ბაიესის ქსელის შესაქმნელად 1, 2, 4 და 8–ის ეკვივალენტური ნიმუშის ზომებით ნახ. 4.16-ზე გამოსახული DAG-სთვის.

პარაგრაფი 4.4

სავარჯიშო 4.9. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, U, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y),\ I_P(\{W, U\}, \{X, Y\}|Z)\ I_P(U, \{X, Y, Z\}|W)\}$.

იპოვეთ P-ს სანდო ყველა DAG.

სავარჯიშო 4.10. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, U, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y),\ I_P(X, Z)\ I_P(Y, Z)\ I_P(U, \{X, Y, Z\}|W)\}$.

იპოვეთ P-ს სანდო ყველა DAG.

სავარჯიშო 4.11. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, U, W\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y|U),\ I_P\{U, \{Z, W\}|\{X, Y\})\ I_P(\{X, Y, U\}W|Z)\}$.

იპოვეთ P-ს სანდო ყველა DAG.

სავარჯიშო 4.12. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, W, T, V, R\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, Y|Z)\ \ I_P(T\{X, Y, Z, V\}|W)\ \ I_p(V, \{X, Z, W, T\}|Y) I_P(R, \{X, Y, Z, W\}|\{T, V\})\}$.

იპოვეთ P-ს სანდო ყველა DAG.

სავარჯიშო 4.13. ვთქვათ, $V = \{X, Y, Z, W, U\}$ და P-ში პირობითი დამოუკიდებლების სიმრავლე ტოლია:

$\{I_P(X, \{Y, W\}|U)\ \ I_P(Y, \{X, Z\}|U\}$.

1. არსებობს P-ს სანდო რაიმე DAG?
2. იპოვეთ ისეთი DAG-ები, რომლებიც P-ში სანდოდ არის ჩანერგილი.

პარაგრაფი 4.6

სავარჯოშო 4.14. გამოიყენეთ $Tetrad$ (ან სხვა ნებისმიერი ქსელის შესწავლის ბაიესური ალგორითმი) ცხრილ 4.1-ში მოყვანილი მონაცემებით შეისწავლეთ DAG. შემდეგ შეისწავლეთ პარამეტრები DAG-სთვის. შეგიძლიათ ეჭვი შეიტანოთ DAG-ის მიერ რაიმე მიზეზობრივ გავლენაში?

სავარჯიშო 4.15. ცხრილ 4.1-ში მოყვანილი მონაცემთა 9-ჯერ გამეორების გზით შეადგინეთ მონაცემთა ფაილი, რომელიც შეიცავს 120 ჩანაწერს. გამოიყენეთ $Tetrad$ (ან სხვა ნებისმიერი ქსელის შესწავლის ბაიესური ალგორითმი) ცხრილ 4.1-ში მოყვანილი მონაცემებით შეისწავლეთ DAG ამ დიდი მონაცემთა სიმრავლიდან. შემდეგ შეისწავლეთ პარამეტრები ამ DAG-სთვის. შეადარეთ ეს შედეგები სავარჯიშო 4.18-ში მიღებულ შედეგებს.

სავარჯიშო 4.16. ვთქვათ გვაქვს შემდეგი ცვლადები:

ცვლადი	რასაც გამოსახავს ცვლადი
H	მშობლების მწეველობის ჩვევა
I	შემოსავალი
S	მწეველობა
L	ფილტვის კიბო

და შემდეგი მონაცემები:

შემთხ.	H	I	S	L
1	კი	30,000	კი	კი
2	კი	30,000	კი	კი
3	კი	30,000	კი	არა
4	კი	50,000	კი	კი
5	კი	50,000	კი	კი
6	კი	50,000	კი	არა
7	კი	50,000	არა	არა
8	არა	30,000	კი	კი
9	არა	30,000	კი	კი
10	არა	30,000	კი	არა
11	არა	30,000	არა	არა
12	არა	30,000	არა	არა
14	არა	50.000	კი	კი
15	არა	50,000	კი	კი
16	არა	50,000	კი	არა
17	არა	50,000	არა	არა
18	არა	50,000	არა	არა
19	არა	50,000	არა	არა

გამოიყენეთ $Tetrad$ (ან სხვა ნებისმიერი ქსელის შესწავლის ბაიესური ალგორითმი) შეისწავლეთ DAG ამ მონაცემებიდან. შემდეგ შეისწავლეთ პარამეტრები ამ DAG-სთვის. შეგიძლიათ ეჭვი შეიტანოთ DAG-ის მიერ რაიმე მიზეზობრივ გავლენაში?

სავარჯიშო 4.17. სავარჯიშო 4.16-ში მოყვანილი მონაცემთა 9-ჯერ გამეორების გზით შეადგინეთ მონაცემთა ფაილი, რომელიც შეიცავს 190 ჩანაწერს. $Tetrad$ (ან სხვა ნებისმიერი ქსელის შესწავლის ბაიესური ალგორითმი) შეისწავლეთ DAG ამ დიდი მონაცემთა სიმრავლიდან. შემდეგ შეისწავლეთ პარამეტრები ამ DAG-სთვის. შეადარეთ ეს შედეგები სავარჯიშო 4.16-ში მიღებულ შედეგებს.

თავი 5

გადაწყვეტილების ანალიზის საფუძვლები

ზოგადად, ბაიესის ქსელში დასკვნის საფუძველზე მიღებული ინფორმაცია შეიძლება გამოყენებულ იქნეს გადაწყვეტილებამდე მისასვლელად, ამასთან ბეიესის ქსელი თავისთავად ვერ გირჩევთ გადაწყვეტილებას. ამ თავში, ჩვენ განვავრცობთ ბაიესის ქსელის სტრუქტურას ისე, რომ ქსელმა რეალურად მოგვცეს რეკომენდაცია. ასეთ ქსელს ეწოდება გავლენის დიაგრამა. პარაგრაფ 5.1 გვაცნობს გადაწყვეტილებათა ხეებს, რომლებიც მათემატიკურად ეკვივალენტურია გავლენის დიაგრამის, მაგრამ აქვს დიდი მაგალითების (instance) წარმოდგენის სირთულე, ვინაიდან მათი ზომა ექსპონენციალურად იზრდება ცვლადების რიცხვთან ერთად. პარაგრაფ 5.2-ში ჩვენ განვიხილავთ გავლენის დიაგრამებს, რომელთა ზომა მხოლოდ წრფივად იზრდება ცვლადების რაოდენობასთან ერთად. ბოლოს, პარაგრაფ 5.3-ში გაგაცნობთ დინამიკურ ბაიესის ქსელს და გავლენის დიაგრამებს, რომელიც ახდენს დროის განმავლობაში ცვალებადი შემთხვევითი ცვლადების მოდელირებას. ბევრი მაგალითი ამ თავში ეხება აქციების ბაზარს.

5.1 გადაწყვეტილებათა ხეები

გადაწყვეტილებათა ხეების შესახებ ზოგიერთი მარტივი მაგალითის მოყვანის შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ მათი გამოყენების ზოგიერთ საკითხს. შემდეგ შემოგთავაზებთ მეტად კომპლექსურ მაგალითებს.

5.1.1 მარტივი მაგალითი

დავიწყოთ შემდეგი მაგალითით:

მაგალითი 5.1. ვთქვათ, რომ თქვენი ფავორიტი საფონდო $NASDIP$-მა დაიწია ავტორიტეტული ანალიტიკოსის გამო, და ის ეცემა 40\$-დან 10\$-მდე. თქვენ გრძნობთ, რომ ეს კარგი შენაძენია, მაგრამ არსებობს ბევრი განუსაზღვრელობა. $NASDIP$-ის ყოველკვარტალური მოგების შესახებ ანგარიშგებას მალე გამოუშვებენ და ფიქრობთ, რომ ის კარგი იქნება, რამაც დადებითად უნდა იმოქმედოს მის საბაზრო ღირებულებაზე. მაგრამ თქვენ ასევე ფიქრობთ, რომ არსებობს დიდი ალბათობა იმის, რომ მთელი ბაზარი დაეცემა, რაც ნეგატიურად იმოქმედებს $NASDIP$-ს საბაზრო ღირებულებაზე. თქვენი განუსაზღვრელობის რაოდენობრივი შეფასების მიზნით, ბაზრის დაცემის ალბათობა თქვენ 0,25 ალბათობით შეაფასეთ, ამ შემთხვევაში ივარაუდეთ, რომ თვის ბოლოს $NASDIP$ დაიწევს 5\$-მდე. თუ ბაზარი არ დაეცემა, მაშინ თქვენ ფიქრობთ, რომ თვის ბოლოს $NASDIP$ იქნება ან 10\$ ან 20\$ მოგების შესახებ ანგარიშზე დამოკიდებულებით. თქვენ

გულისხმობთ, რომ ორჯერ სავარაუდოა იყოს 20$, ვიდრე 10$. ამგვარად თქვენ ანიჭებთ 0,5 ალბათობას იმას, რომ $NASDIP$ შეადგენს 20$-ს და 0,25 ალბათობას იმას, რომ ის თვის ბოლოს იქნება 10$. ახლა თქვენ წყვეტთ – იყიდოთ $NASDIP$-ის 100 აქცია 1000$-ად, თუ დატოვოთ 1000$ ბანკში, სადაც ის გამოიმუშავებს 0,005 პროცენტს შემდეგ თვეში.

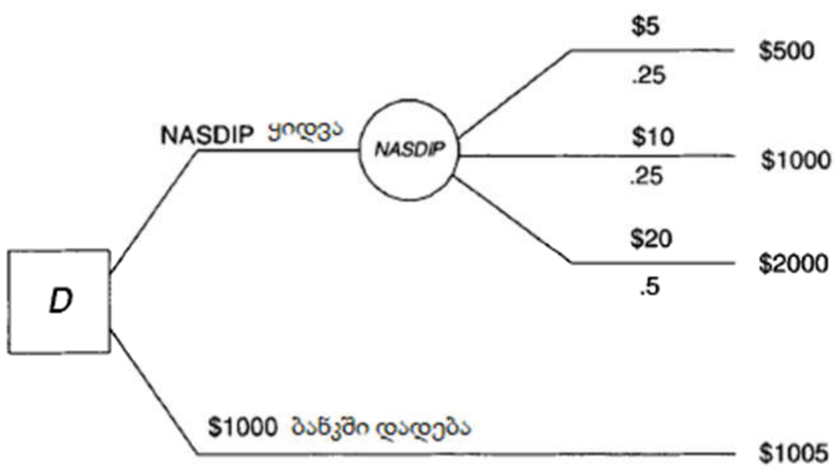
გადაწყვეტილების მიღების ერთ-ერთ გზას წარმოადგენს განისაზღვროს თქვენი ინვესტიციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა $NASDIP$-ში და შედარდეს ეს მნიშვნელობა ფულის იმ რაოდენობას, რომელიც თქვენ გექნებათ თუ ფულს ბანკში ჩადებთ. ვთქვათ, X არის შემთხვევითი სიდიდე, რომლის მნიშვნელობა არის თქვენი ერთი თვის 1000$ ინვესტიციის ღირებულება, თუ თქვენ შეიძენთ $NASDIP$-ს. თუ $NASDIP$ ეღირება 5$, თქვენი ინვესტიცია ეღირება 500$; თუ ის დარჩება 10$-ის დონეზე, თქვენი ინვესტიციები შედაგენს 1000$-ს; მაგრამ თუ ის მიაღწევს 20$-ს, ის ეღირება 2000$. აქედან გამომდინარე:

$E(X) = 0{,}25(500\$) + 0{,}25(1000\$) + 0{,}5(2000\$) = 1375\$.$

თუ ფულს ბანკში დატოვებთ, თქვენი საინვესტიციო ღირებულება იქნება:

$1{,}005(1000\$) = 1005\$.$

თუ თქვენ ხართ ე.წ. მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზატორი, თქვენი გადაწყვეტილება იქნება იყიდოთ $NASDIP$, იმიტომ რომ ამ გადაწყვეტილებას აქვს უფრო მაღალი მოსალოდნელი ღირებულება.



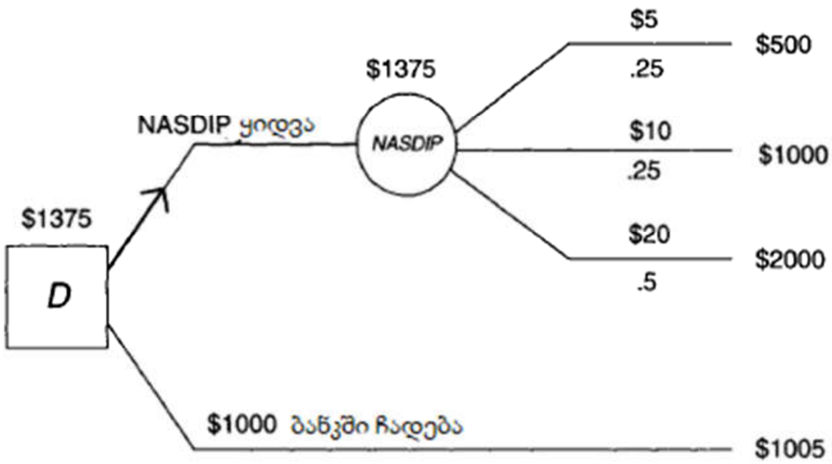
ნახ. 5.1. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს მაგალით 5.1-ში მოყვანილ პრობლემის ნიმუშს.

წინა მაგალითში მოყვანილი პრობლემა შეიძლება წარმოდგენილი იყოს გადაწყვეტილებათა ხის სახით. ეს ხე ნაჩვენებია ნახ. 5.1-ზე. **გადაწყვეტილებათა ხე** შეიცავს ორი ტიპის კვანძს: **შესაძლებლობის (ანუ განუსაზღვრელი) კვანძები**, რომლებიც წარმოდგენენ შემთხვევით ცვლადებს და **გადაწყვეტილებათა კვანძები**, რომლებიც მიღებულ გადაწყვეტილებებს წარმოადგენენ. ამ კვანძებს შემდეგნაირად გამოვსახავთ:

○ - შესაძლებლობის კვანძი

□ - გადაწყვეტილებათა კვანძი

გადაწყვეტილება წარმოადგენს იმ და ურთიერთგამომრიცხავ და ამომწურავ ქმედებების ნაკრებს, რითაც შეიძლება გადაწყვეტილების მიღება. თითოეულ ქმედებას უწოდებენ **ალტერნატივას** გადაწყვეტილებაში. არსებობს კიდე, რომელიც გამოდის გადაწყვეტილებათა კვანძიდან თითოეული გადაწყეევტილებაში ალტერნატივისათვის. ნახ. 5.1-ზე ჩვენ გვაქვს გადაწყვეტილების კვანძი D ორი ალტერნატივით: „$NASDIP$-ის ყიდვა“ და „1000$-ის დატოვება ბანკში“. შემთხვევითი სიდიდის თითოეული შესაძლო შედეგისათვის (მნიშვნელობისათვის) არსებობს გადაწყვეტილებათა კვანძიდან გამომავალი ერთი კიდე. ჩვენ გიჩვენებთ ამ კიდეზე შედეგის ალბათობას და კიდიდან მარჯვნივ შედეგის სარგებლიანობას. შედეგის **საგებლიანობა** წარმოადგენს გადაწყვეტილების მიღებაში პასუხისმგებელი შედეგის მნიშვნელობას. როდესაც ფულადი თანხა დიდი არაა საერთო სიმდიდრესთან შედარებით, ჩვენ ჩვეულებრივ, შედეგის სარგებლიანობად შეიძლება ავიღოთ ფულის ის რაოდენობა, რომელიც დახარჯული იყო ამ შედეგის მისაღებად. ამ თავში ჩვენ გავაკეთებთ ამ დაშვებას. იმ შემთხვევაზე მსჯელობა, როდესაც ჩვენ ამ დაშვებას არ ვაკეთებთ, განხილულია თავი 6-ის პარაგრაფ 6.1-ში. ამგვარად, მაგალითად, თუ თქვენ ყიდულობთ $NASDIP$-ის 100 აქციას და $NASDIP$ იწევს 20$-მდე, ჩვენ ვარაუდობთ, რომ ამ შედეგის სარგებლიანობა თქვენთვის შეადგენს 2000$-ს. ნახ. 5.1-ზე გვაქვს შესაძლებლობის კვანძი $NASDIP$ სამი შესაძლო შედეგის სარგებლიანობით, კერძოდ 500$, 1000$ და 2000$. შესაძლებლობის კვანძის **მოსალოდნელი სარგებლიანობა** EC განისაზღვრება როგორც მის შედეგთან დაკავშირებული სარგებლიანობის მოსალოდნელი მნიშვნელობა. გადაწყვეტილების ალტერნატივის მოსალოდნელი სარგებლიანობა განისაზღვრება როგორც შესაძლებლობის კვანძის მოსალოდნელი სარგებლიანობა, რომელსაც მაშინ ვხვდებით, თუ ეს გადაწყვეტილება მიღებულია. თუ არსებობს განსაზღვრულობა, როდესაც აღებულია ალტერნტივა, მოსალოდნელი სარგებლიანობა – ეს არის ამ განსაზღვრული შედეგის მნიშვნელობა. ამგვარად,



ნახ. 5.2 გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც მოცემულია ნახ. 5.1-ზე გამოსახულ გადაწყვეტილებათა ხის სახით.

$$EU(BuyNASDIP) = EU(NASDIP) = 0.25(500\$) + o,25(1000\$) + 0,5(2000\$) =$$

$$= 1375\$,$$

$$EU(Leave 1000\$ \, in \, bank) = 1005\$.$$

საბოლოო ჯამში, გადაწყვეტილების მოსალოდნელი სარგებლიანობა განისაზღვრება როგორც ყველა სავარაუდო ალტერნატივისაგან მოსალოდნელი სარგებლიანობების მაქსიმუმი. ამგვარად,

$$EU(D) = \max(1375\$, 1005\$) = 1375\$.$$

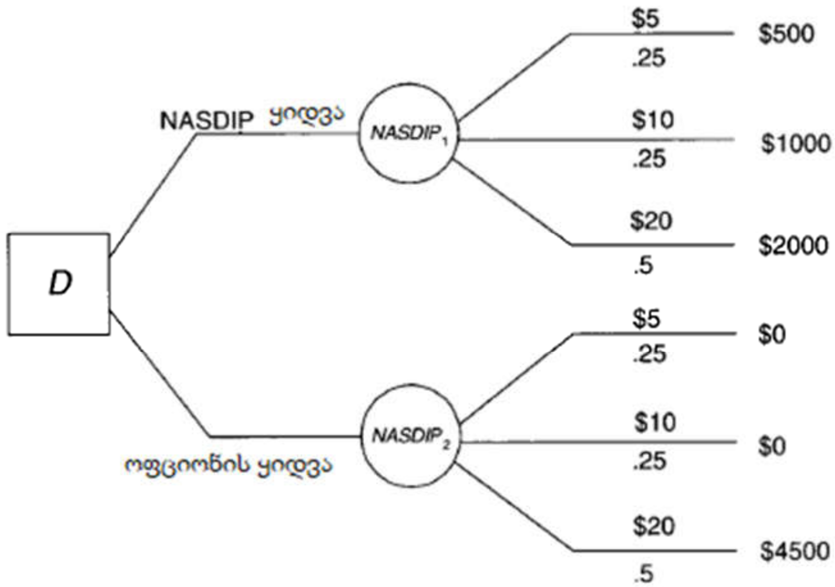
არჩეულია ალტერნატივა, რომელსაც უდიდესი მოსალოდნელი სარგებლიანობა აქვს. ამ მოსალოდნელი სარგებლიანობის განსაზღვრის პროცესს უწოდებენ **გადაწყვეტილ გადაწყვეტილებათა ხეს.** მისი გადაწყვეტის შემდეგ ჩვენ ისრით კვანძებზე ვაჩვენებთ არჩეული ალტერნატივისაკენ. გადაწყვეტილ გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც მოცემულია ნახ. 5.1-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხით, ნაჩვენებია ნახ. 5.2-ზე. პრობლემის კომპონენტების დადგენის მთელი პროცესი, როგორც გადაწყვეტილებათა ხე (ან გავლენის დიაგრამა), გადაწყვეტილების ხის გადაწყვეტა (ან გავლენის დიაგრამა), მგრძნობელობის ანალიზი (იხ. თავი 6 პარაგრაფი 6.4) და შესაძლოა ამ ნაბიჯების გამეორება არის **გადაწყვეტილებათა ანალიზი**.

განვიხილოთ კიდევ ერთი მაგალითი.

მაგალითი 5.2. ვთქვათ თქვენ იმყოფებით იგივე სიტუაციაში, როგორშიც იყავით მაგალით 5.1-ში, გარდა იმისა, რომ თქვენ ფული ბანკში კი არ დატოვეთ, არამედ გააკეთეთ სხვა არჩევანი, შეიძინეთ ოფციონი $NASDIP$-ზე. ოფციონი ღირს 1000$, ეს უფლებას გაძლევთ $NASDIP$ 500 აქციის შეძენის უფლებას ერთ თვეში თითოეული აქცია 11$-ად. ხოლო თუ $NASDIP$ არის 5$ და 0$ თითოეულ აქციაზე ერთ თვეში, თქვენ არ გამოიყენებთ

ოფციონს, და წააგებთ 1000$-ს. ამასთან, თუ $NASDIP$ არის 20$ თითოეულ აქციაზე ერთ თვეში, თქვენ გამოიყენებთ ოფციონს და 1000 $-ის ინვესტიცია ეღირება:

$500(20\$ - 11\$) = 45000\$$.



ნახ. 5.3. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც ახდენს საინვესტიციო გადაწყვეტილების მოდელირებას $NASDIP$-ის მიმართ, როდესაც სხვა არჩევანი არის $NASDIP$-ზე ოფციონის ყიდვა.

ნახ. 5.3-ზე ნაჩვენებია გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს ამ პრობლემის მაგალითს. ამ ხიდან ჩვენ გვაქვს:

$EU(Buy\ option) = EU(NASDIP_2) = 0{,}25(0\$) + 0{,}259(0\$) = 0{,}5(4500\$) = 2250\$.$

შეგახსენებთ, რომ $EU(BuyNASDIP)$ მხოლოდ 1375$-ია. ამიტომ ჩვენი გადაწყვეტილება იქნება ოფციონის ყიდვა. სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ გადაწყვეტილ გადაწყვეტილებათა ხის ჩვენებას.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ნახ. 5.3-ზე წარმოდგენილი გადაწყვეტილებათა ხე სიმეტრიულია მაშინ, როცა ნახ. 5.2-ზე არა. მიზეზი ისაა, რომ ჩვენ ვაწყდებით იგივე განუსაზღვრელ ხდომილობას მიუხედავად იმისა, თუ რა გადაწყვეტილებაა მიღებული. მხოლოდ შედეგის სარგებლიანობაა განსხვავებული.

ვიდრე გავაგრძელებთ, განვიხილოთ პრობლემა, რომელიც შეიძლება აღმოცენდეს. თქვენ შეგიძლიათ დასვათ კითხვა, როგორ შეუძლია ადამიანს მივიდეს 0,25, 0,5 და 0,25 ალბათობებამდე მაგალით 5.1-ში. ეს ალბათობები ხშირად არ წარმოადგენს ფარდობით სიხშირეებს; ეს უფრო სუბიექტური ალბათობებია, რომლებიც წარმოადგენენ ინდივიდების გონივრულ რიცხვით რწმენას. ადამიანი მათთან მიდის სიტუაციის ფრთხილი შეფასების გზით. სუბიექტური მოსაზრების მეთოდები მოკლედ განხილული იყო თავი 2-ის პარაგრაფ

2.3.2-ში. მიუხედავად ამისა, თქვენ შეიძლება ამტკიცებდეთ, რომ ადამიანს აუცილებლად უნდა სჯეროდეს სამზე მეტი მომავალი მნიშვნელობის არსებობა $NASDIP$-ის წილისათვის. როგორ შეიძლება ინდივიდუალური მოთხვნა იყოს ერთადერთი შესაძლებელი მნიშვნელობები 5$, 10$ და 20$? თქვენ მართალი ხართ. მაგრამ, თუ საკუთარი მოსაზრებების შემდგომი დაზუსტება არ მოახდენს გავლენას გადაწყვეტილებაზე, ამის გაკეთება აუცილებელი არაა. ამიტომ, თუ გადაწყვეტილების მიმღები პირი თვლის, რომ მეტი მნიშვნელობის შემცველი მოდელი არ მიგვიყვანს სხვა გადაწყვეტილებამდე, საკმარისია გამოვიყენოთ მოდელი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ მნიშვნელობებს 5$, 10$ და 20$.

5.1.2. უფრო რთულ გადაწყვეტილებათა ხეების გადაწყვეტა

გადაწყვეტილებათა ხეების გადაწყვეტის ზოგადი ალგორითმი საკმაოდ მარტივია. ახლა დროა დავლაგდეთ მარცხნიდან მარჯვნივ გადაწყვეტილებათა ხეზე. ე.ი. ნებისმიერი კვანძის მარჯვნივ მეორე კვანძი ჩნდება ამ კვანძის შემდეგ. ხის გადაწყვეტა შემდეგნაირად ხდება:

დაწყებული მარჯვნიდან

გადავდივართ მარცხნივ

მოსალოდნელი სარგებლიანობის შემთხვევით კვანძებზე გადაცემა;

გადაწყვეტილების კვანძებზე მაქსიმუმების გადაცემა;

სანამ არ მიიღწევა ფესვი.

ახლა წარმოვადგენთ გადაწყვეტილების ხით მოდელირების უფრო რთულ მაგალითებს.

მაგალითი 5.3. დავუშვათ ნენსი არის აზარტული მოთამაშე და ის განიხილავს ICK-ის აქციების თითო 10$-ად შეძენის შესაძლებლობას. აქციების ეს რაოდენობა იმდენად მაღალია, რომ თუ ის მათ შეიძენს, ეს გავლენას იქონიებს ბაზარის აქტივობაზე და აწევს ICK-ის ფასს. ის ასევე ფიქრობს, რომ სამრეწველო ინდექს $Dow\ Jones\ Industrial\ Average$-ის საერთო ღირებულება ასევე მოახდენს გავლენას ICK-ის ფასზე. ის გრძნობს, რომ ერთი თვის შემდეგ Dow იქნება ან 10 000 ან 11 000, და ICK ეღირება ან 15$ ან 10$ აქციაზე. მისი სხვა არჩევანია 100 000$–ის ოფციონის ყიდვა ICK-ზე. ეს ვარიანტი მას საშუალებას აძლევს იყიდოს 50 000 ICK-ის აქცია თითო 15$-ად ერთი თვის განმავლობაში. ამ პრობლემის გასაანალიზებლად ის ადგენს შემდეგ ალბათობებს:

$$P(ICK = 5\$|Decision = BuyICK, Dow = 11\ 000) = 0{,}2$$

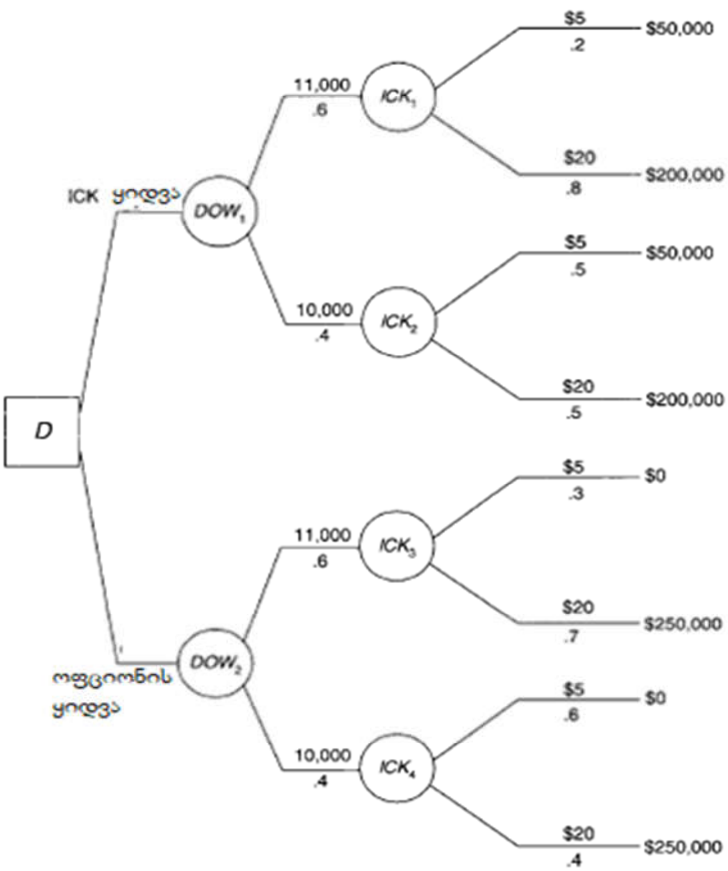
$$P(ICK = 5\$|Decision = BuyICK, Dow = 10\ 000) = 0{,}5$$

$$P(ICK = 5\$|Decision = Buy\ option, Dow = 11\ 000) = 0{,}3$$

$$P(ICK = 5\$ | Decision = Buy\ option, Dow = 10\ 000) = 0{,}6.$$

გარდა ამისა ის ანიჭებს

$$P(Dow = 11\ 000\$) = 0{,}6.$$



ნახ. 5.4. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს ნენსის გადაწყვეტილებას ICK-ს ყიდვაზე ან ICK-ზე ოფციონების ყიდვაზე.

პრობლემის ეს მაგალითი მოყვანილია გადაწყვეტილებათა ხის მეშვეობით ნახ. 5.4-ზე. შემდეგ ჩვენ ვწყვეტთ ხეს:

$$EU(ICK_1) = (0{,}2)(50\ 000\$) + (0{,}8(200\ 000\$) = 170\ 000\$$$

$$EU(ICK_2) = (0{,}5)(50\ 000\$) + (0{,}5(200\ 000\$) = 125\ 000\$$$

$$EU(Buy\ ICK) = EU(DOW_1) = (0{,}6)(170\ 000\$) + (0{,}4)(125\ 000\$) = 152\ 000\$$$

$$EU(ICK_3) = (0{,}3)(0\$) + (0{,}7)(250\ 000\$) = 175\ 000\$$$

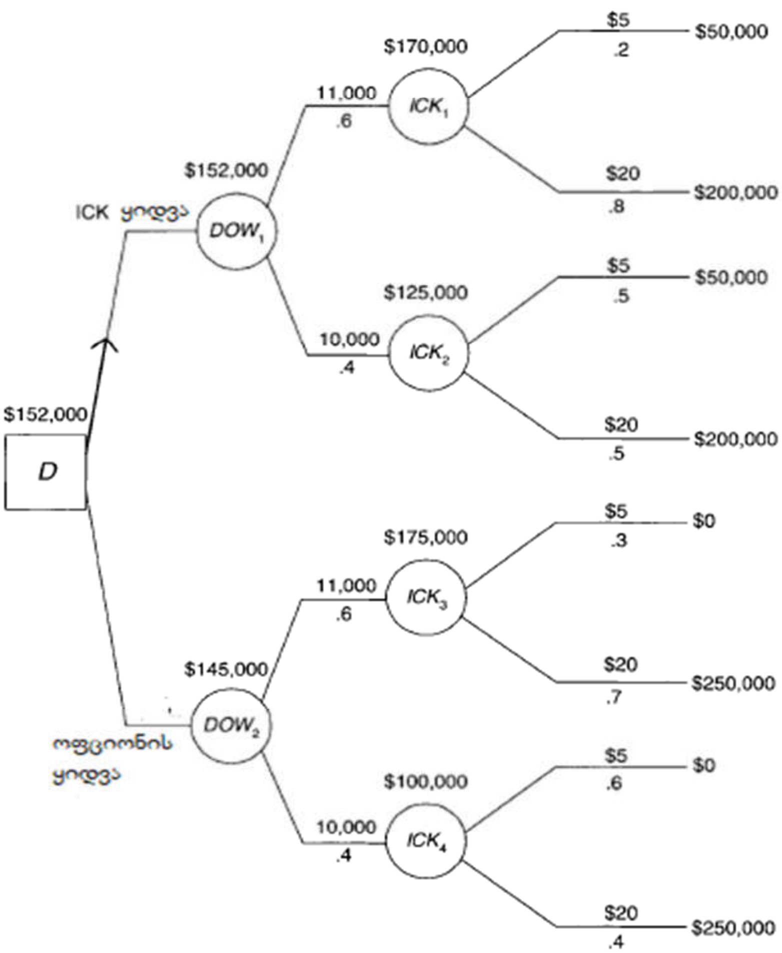
$$EU(ICK_4) = (0{,}3)(0\$) + (0{,}4)(250\ 000\$) = 100\ 000\$$$

$$EU(Buy\ \ option) = EU(DOW_2) = (0{,}6)(175\ 000\$) + (0{,}4)(100\ 000\$) = 145\ 000\$$$

$$EU(D) = \max(152\ 000\$, 145\ 000\$) = 152\ 000\$.$$

გადაწყვეტილი გადაწყვეტილების ხე ნაჩვენებია ნახ. 5.5-ზე. ICK-ის შეძენის გადაწყვეტილება.

წინა მაგალითი ახდენს გადაწყევტილების ხეებით პრობლემის ილუსტრირებას. ე. ი. გადაწყვეტიების ხით მაგალითის წარმოდგენა იზრდება ექსპონენციალურად მაგალითის ზომის ზრდასთან ერთად. მიაქციეთ ყურადღება, რომ მაგალით 5.3-ში ერთი ელემენტით მეტია, ვიდრე მაგალით 5.3-ში; ე.ი. მასში შეტანლია Dow-ის მიმართ განუსაზღვრელობა. მაგრამ მისი წარმოდგენა ორჯერ მეტია. ასე რომ საკმაოდ ძნელია გადაწყვეტილებათა ხით დიდი მაგალითის წარმოდგენა. შემდგომ განყოფილებაში ჩვენ ვნახავთ, რომ დიაგრამაზე ეს პრობლემა გავლენას არ ახდენს. მანამადე მოვიყვანთ სხვა მაგალითებს.



ნახ. 5.5 ნახ. 5.4-ზე მოცემული გადაწყვეტილებათა ხის გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე.

მაგალითი 5.4. სემს აქვს შესაძლებლობა შეიძინოს 1996 წლის ავტომობილი $Spiffycar$ 10 000$-ად, და მას აქვს შემოთავაზება, რომ ვილაც მზად არის გადაიხადოს ავტომობილში 11 000$, თუ ის კარგ მექანიკურ ფორმაშია. სემი არკვევს რომ გადამცემის გარდა ყველა მექანიკური პაქტი კარგ მდგომარეობაშია. თუ გადამცემი ცუდ მდგომარეობაშია სემს მისი აღდგენა დაუჯდება 3000$. მას გაყიდამდე მოუწევს მანქანის შეკეთება. ამგვარად ის მიიღებს მხოლოდ 8000$-ს, თუ ის იყიდის ავტომობილს, რომლის გადამცემი ცუდ

მდგომარეობაშია. მას თვითონ არ შეუძლია განსაზღვროს გადამცემის მდგომარეობა. მაგრამ ჰყავს მეგობარი, რომელსაც შეუძლია გაუშვას გადამცემი ტესტირებაზე. ტესტი არ წარმოადგენს აბსოლუტურად ზუსტს. პირიქით, დროის 30%-ში ტესტი თვლის, რომ კარგი გადამცემი ცუდია, და დროის 10%-ში – რომ ცუდი გადამცემი კარგია. რომ წარმოვადგინოთ გადამცემსა და ტესტს შორის ურთიერთდამოკიდებულება, ჩვენ განვსაზღვრავთ შემდეგ შემთხვევით სიდიდეებს:

ცვლადები	სიდიდე	როდის იღებს ცვლადი ამ სიდიდეს
$Test$	დადებითი	ტესტი ადგენს გადაცემა იქნება ცუდი
	უარყოფითი	ტესტი ადგენს გადაცემა იქნება კარგი
$Tran$	კარგი	გადაცემა კარგია
	ცუდი	გადაცემა ცუდია

წინა მსჯელობა გულისხმობს, რომ ჩვენ გვაქვს შემდეგი პირობითი ალბათობები:

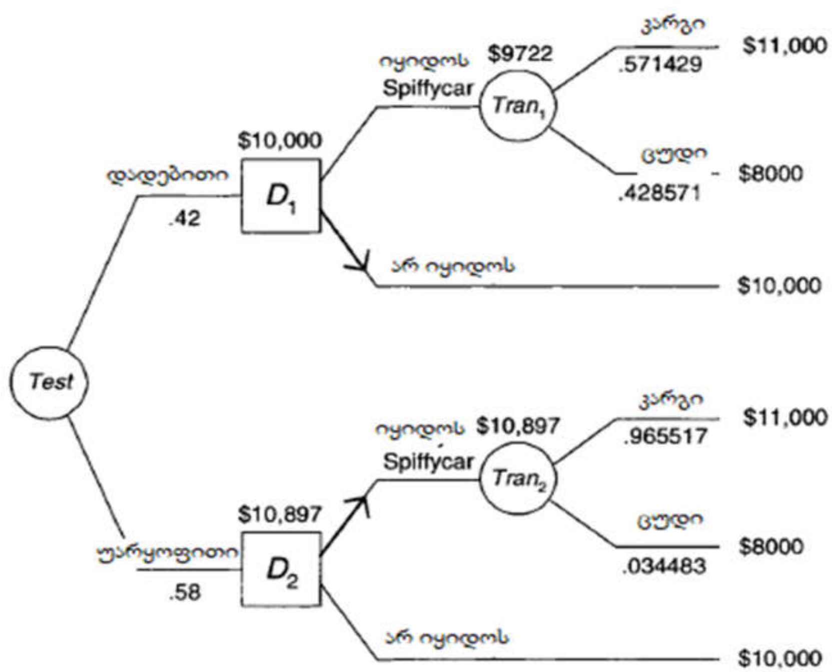
$$P(Test = positive|Tran = good) = 0{,}3,$$

$$P(Test = positive|Tran = bad) = 0{,}9.$$

გარდა ამისა, სემმა იცის, რომ 1996 წლის ავტომობილ $Spiffycar$–ების 20%-ს აქვთ ცუდი გადამცემი. ანუ

$$P(Tran = good) = 0{,}8.$$

სემი აპირებს სთხოვოს მეგობარს ტესტის უფასოდ ჩატარება, ხოლო შემდეგ ის გადაწყვეტს იყიდოს თუ არა ავტომობილი.



ნახ. 5..6. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს მაგალით 5.4-ში მოყვანილ პრობლემას.

ამ პრობლემის მაგალითი წარმოდგენილია გადაწყვეტილებათა ხეში ნახ. 5.6-ზე. პირველ რიგში აღვნიშნავთ, რომ თუ ის არ ყიდულობს მანქანას, შედეგი მხოლოდ 10 000$-ს შეადგენს. ეს იმიტომ რომ მომავალის წერტილი ისე ახლოსაა, რომ ჩვენ ამ ინტერესის უგულველყოფა შეგვიძლია, როგორც უმნიშვნელოსი. გაითვალისწინეთ, რომ ამ ხის ალბათობები არაა მითითებულ მაგალითში. ისინი უნდა გამოითვალოს დადგენილი ალბათობებით – ამას ჩვენ შემდეგ გავაკეთებთ. ზედა წიბოზე ალბათობა, კვანძის ტექსტიდან გამომდინარე, ეს წინა ალბათობაა, რომ ტესტი დადებითია. ის შემდეგნაირად გამოითვლება (შევნიშნოთ, რომ ვიყენებთ შემოკლებულ აღნიშვნებს):

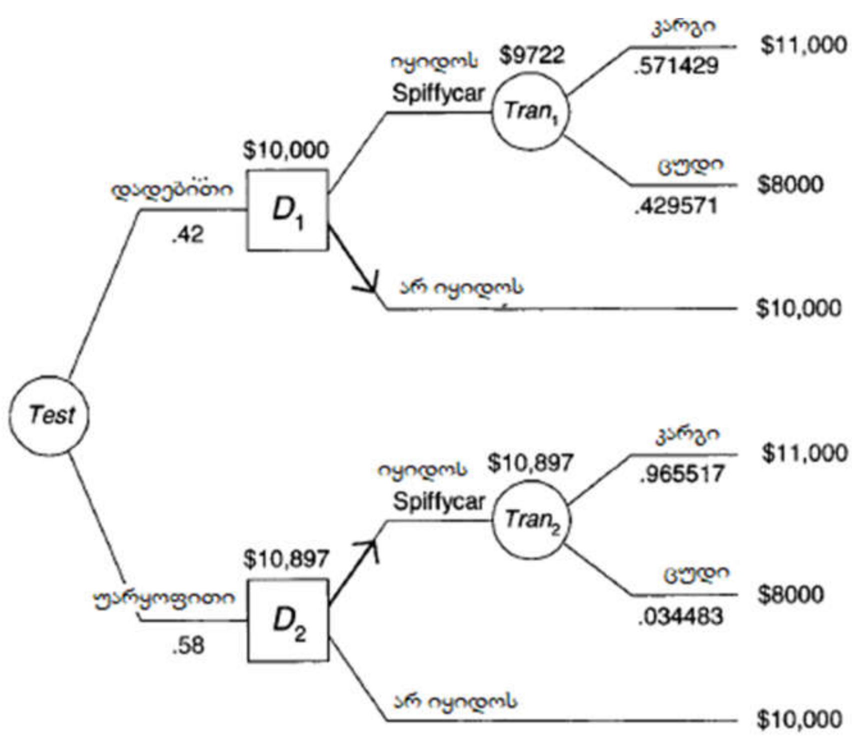
$$P(positive) = P(positive|good)P(good) + P(positive|bad)P(bad) =$$
$$= (0{,}3)(0{,}8) + (0{,}9)(0{,}2) = 0{,}42.$$

ზედა წიბოზე ალბათობა, $Tran_1$ კვანძიდან გამომდინარე, ეს არის გადამცემი კარგია, თუ ტესტი დადებითია. ამას ჩვენ ბაიესის თეორემის გამოყენებით ვითვლით:

$$P(good|positive) = \frac{P(positive|good)P(good)}{P(positive)} =$$
$$= \frac{(0{,}3)(0{,}8)}{0{,}42} = 0{,}571429.$$

ხეში დარჩენილი ალბათობების განსაზღვრას ვტოვებთ როგორც სავარჯიშოს. შემდეგ ვწყვეტთ ხეს:

$$EU(Tran_1) = (0{,}571429)(11\,000\$) + (0{,}428571)(8000\$) = 9714\$$$



ნახ. 5.7. ნახ. 5.6-ით მოცემული გადაწყევტილებათა ხის გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე

$$EU(D_1) = \max(9713\$, 10\,000\$) = 10\,000\$$$

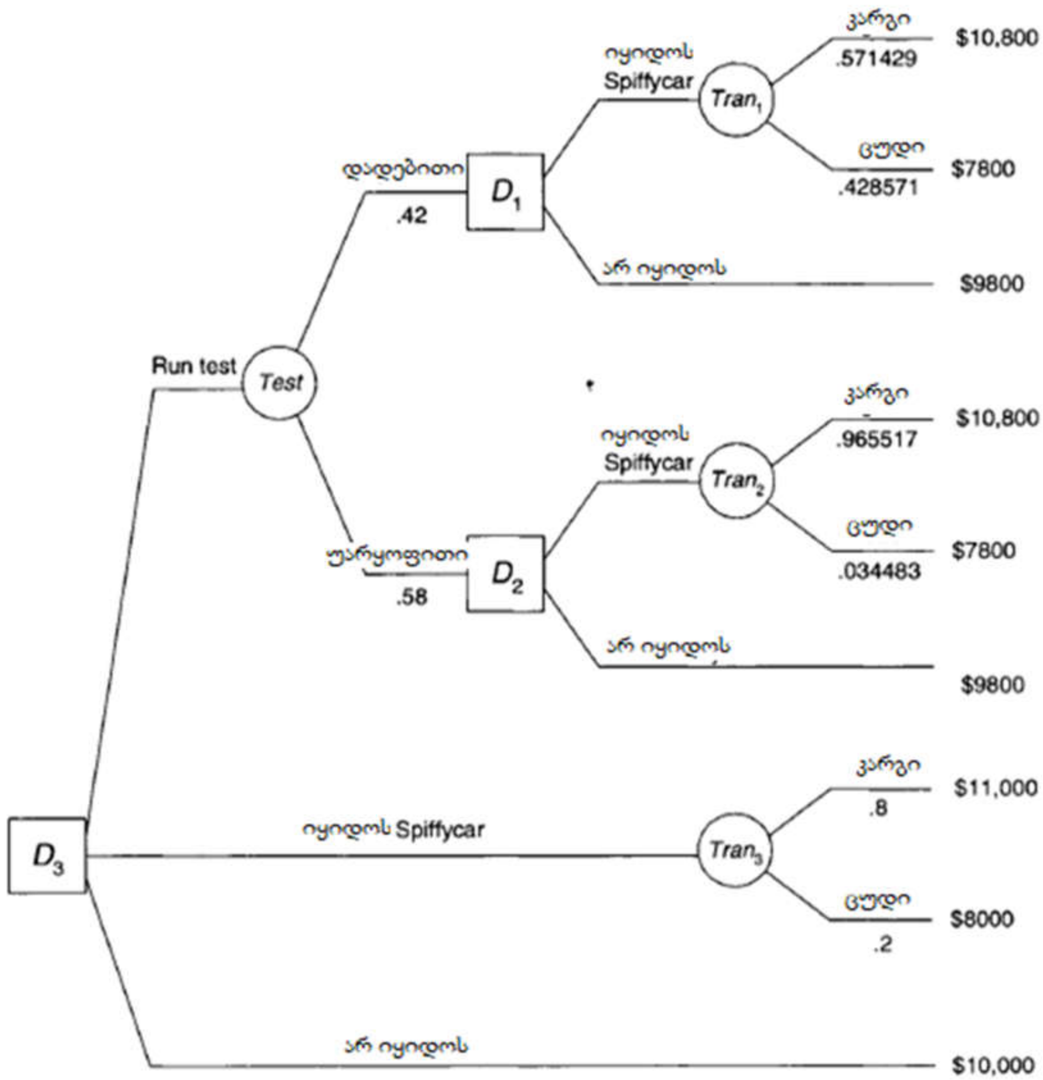
$$EU(Tran_2) = (0{,}9665517)(11\,000\$) + (0{,}034483)(8000\$) = 10\,897\$$$

$$EU(D_2) = \max(10\,897\$, 10\,000\$) = 10\,897\$.$$

ჩვენ არ გვჭირდება ტექსტური კვანძის მოსალოდნელი მნიშვნელობის გამოთვალა, იმიტომ რომ მის მარცხნივ არანაირი გადაწყვეტილება არ არის. გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე ნაჩვენებია ნახ. 5.7-ზე. გადაწყევეტილება მდგომარეობს იმაში, რომ არ უნდა იყიდო მანქანა, თუ ტესტი დადებითია და უნდა იყიდო, თუ ტესტი უარყოფითია.

წინა მაგალითი გვიჩვენებს გადაწყვეტიელებათა ხეებთან დაკავშირებლ კიდევ ერთ პრობლემას, რაც იმაში მდგომარეობს, რომ ალბათობები, რომლებიც აუცილებლია გადაწყევტილებათა ხეში, ყოველთვის არაა ისეთი, რომლებიც ჩვენთვის ადვილად მისაღწევია. ამიტომ ჩვენ ისინი უნდა გამოვთვალოთ საერთო ალბათობის კანონის და ბაიესის თეორემის გამოყენებით. ჩვენ დავინახავთ, რომ გავლენის დიაგრამებს ეს პრობლემა არ აქვთ. განვიხილოთ სხვა მაგალითები.

მაგალითი 5.5. დავუშვათ სემი იგივე სიტუაციაში იმყოფება, როგორიც მაგალით 5.4-შია, მხოლოდ ახლა ტესტი არაა უფასო. პირიქით ის ღირს 200$. ამიტომ სემმა უნდა გადაწყვიტოს გაატაროს მანქანა ტესტზე, იყიდოს მანქანა ტესტირების გარეშე, თუ შეინახოს 100 000$. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც ამ მაგალითის პრობლემას წარმოადგენს, ნაჩვენებია ნახ. 5.8-ზე. შევნიშნოთ, რომ ტესტირების შემთხვევაში შედგები 200$-ით ნაკლებია, ვიდრე მათი შესაბამისი შედეგები მაგალით 5.4-ში. ეს იმიტომ ხდება, რომ ტესტირება 200$ ღირს. შევნიშნოთ, რომ თუ მანქანა ნაყიდი იქნება ტესტირების გარეშე, კარგი გადამცემის ალბათობა უბრალოდ წინა ალბათობას წარმოადგენს 0,8-ს. ეს იმიტომ ხდება, რომ არ იქნა წარმოდგენილი არანაირი ტესტი. ამიტომ ჩვენს ერთადერთ ინფორმაციას გადამცემის შესახებ წინასწარი ინფორმაცია წარმოადგენს. შემდეგ ჩვენ ვწყვეტთ გადაწყვეტილებათა ხეს. ამის ჩვენება რჩება დავალების სახით.



ნახ. 5.8. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს მაგალით 5.5-ში მოცემულ პრობლემას.

$$EU(D_1) = 9800\$$$

$$EU(D_2) = 10\,697\$.$$

აქედან გამომდინარე:

$$EU(Test) = (0{,}42)(9800\$) + (0{,}58)(10\,697\$) = 10\,320\$.$$

გარდა ამისა,

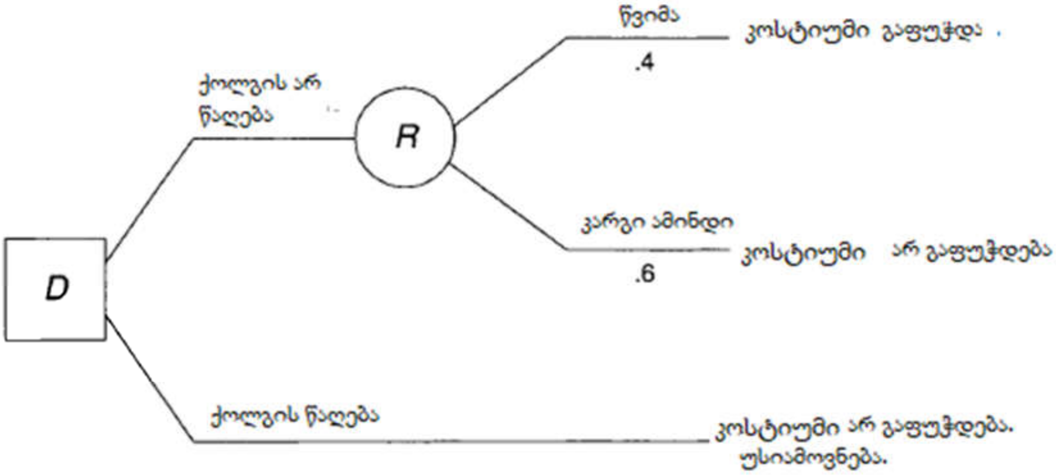
$$EU(Tran_3) = (0{,}8)(11\,000\$) + (0{,}2)(8000\$) = 10\,400\$.$$

ბოლოს:

$$EU(D_3) + \max(10\,20\$, 10\,400\$, 10\,000\$) = 10\,400\$.$$

ამიტომ სემის გადაწყვეტილებაა, იყიდოს მანქანა ტესტირების გარეშე. ეს რჩება დავალებად, რომ აჩვენოთ გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე.

შემდეგი ორი მაგალითი გვიჩვენებს შემთხვევას, როდესაც შედეგები არ წარმოდგენენ რიცხვითს.



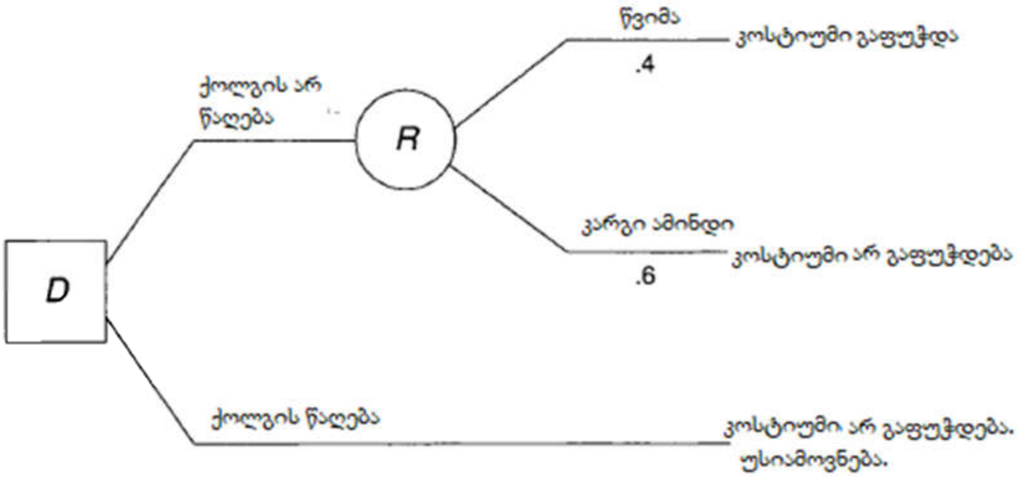
ნახ. 5.9. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს მაგალით 5.6-ში მოცემული პრობლემის მაგალითს

მაგალითი 5.6. დავუშვათ, რომ ლეონარდომ ახლახანს შეიძინა ახალი კოსტიუმი, აპირებს წავიდეს სამსახურში და როგორც ჩანს იწვიმებს. ლეონარდოს დიდი გზა აქვს გასავლელი მატარებლიდან ოფისამდე. ამდენად, მან იცის, რომ თუ იწვიმებს და მას არ ექნება ქოლგა, მისი კოსტიუმი გაფუჭდება. ქოლგა აუცილებლად დაიცავდა მის კოსტიუმს წვიმისაგან, თუმცა მას სძულს დისკომფორტი, რომელსაც უქმნის ქოლგის ყოველდღიური ტარება. ის გრძნობს, რომ არსებობს 0,4 ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს, ამის გათვალისწინებით წაიღებს კი ის ქოლგას? გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს მოცემული პრობლემის მაგალითს, ნაჩვენებია ნახ. 5.9-ზე. ჩვენ ვერ გადავწყვეტთ ამ ხეს, იმიტომ რომ მასში შედეგების რიცხვითებს არ წარმოადგენენ. ჩვენ შეგვიძლია მივცეთ მათ რიცხვითი მნიშვნელობა, როგორც ეს ქვემოთაა ნაჩვენები. ცხადია, რომ შედეგების მიმდევრობა ცუდიდან საუკეთესომდეა:

1. კოსტიუმი გაფუჭებულია
2. კოსტიუმი არაა გაფუჭებული, დისკომფორტი
3. კოსტიუმი არაა გაფუჭებული.

სარგებლიანობას ვანიჭებთ 0-ს ყველაზე უარეს შედეგს და სარგებლიანობას 1-ს – საუკთესო შედეგს. ამგვარად,

$$U(suit\ ruined) = 0$$
$$U(suit\ not\ ruined) = 1.$$



ნახ. 5.10 გადაწყვეტილებათა ხე რიცხვითი მნიშვნელობებით, რომელიც წარმოადგენს მაგალით 5.6-ში მოცემულ პრობლემას.

შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ ლატარეებს L_P (შემთხვევითი კვანძები), რომელშიც ლეონარდო იღებს შედეგს „კოსტიუმი არაა გაფუჭებული“ p ალბთობით და შედეგს „კოსტუმი გაფუჭებულია“ 1-p -ის ტოლი ალბათობით. სარგებლიანობა „კოსტუმი არაა გაფუჭებული, დისკომფორტი“ შეიძლება განისაზღვროს ლატარეა L_P-ს მოსალოდნელი სარგებლობით, რომლისთვისაც ლეონარდო იქნება გულგრილი ლატარეა L_P-ს და „კოსტიუმი არაა გაფუჭებული, დისკომფორტში“ დარწმუნებულობას შორის. ჩვენ მაშინ გვაქვს

$$U(suit\ not\ ruined, inconvenience) \equiv$$
$$\equiv EU\left(L_p\right) = pU(suit\ not\ ruined) + (1-p)U(suit\ ruined) =$$
$$= p(1) + (1-p)0 = p.$$

ვთქვათ, ლეონარდო წყვეტს $p = 0{,}8$. მაშინ:

$$U(suit\ not\ ruined, inconvenience) = 0{,}8.$$

ამ რიცხვითი მნიშვნელობებით გადაწყვეტილებათა ხე ნაჩვენებია ნახ. 5.10-ზე. ჩვენ ამ გადაწყვეტილებათა ხეს შემდეგნაირად ვწყვეტთ:

$$EU(R) = (0{,}4)(0) + (0{,}6)(1) = 6$$
$$EU(D) = \max(0{,}6,\ \ 0{,}8) = 0{,}8.$$

მიტომ მიღებული გადაწყვეტილებაა – წაიღოს ქოლგა.

მეთოდი, რომელიც გამოყენებული იყო რიცხვითი მნიშვნელობების მისაღებად წინა მაგალითში, ადვილად ვრცელდება იმ შემთხვევაზეც, როდესაც გვაქვს სამზე მეტი შედეგი. მაგალითად, დავუშვათ, რომ „კოსტიუმი არაა გაფუჭებული, დისკომფორტი“ და „კოსტიუმი არაა გაფუჭებულს“ შორის გვაქვს მეოთხე შედეგი „კოსტიუმი მიდის მწმენდავთან“ უპირატესობის მიხედვით. ჩვენ განვიხილავთ ლატარეას L_P-ს, რომელშიც ლეონარდო იღებს

შედეგს „კოსტიუმი არაა გაფუჭებული“ q ალბათობით და შედეგს „კოსტუმი არაა გაფუჭებული, დისკომფორტი“ $1-q$ ალბათობით. „კოსტიუმი მიდის მწმენდავთან“ – ამ შედეგის სარგებლიანობა განისაზღვრება ლატარეა L_P-ს მოსალოდნელი სარგებლობით, რომლისთვისაც ლეონარდო იქნება გულგრილი ლატარეა L_P-ს და „კოსტიუმი მიდის მწმენდავთან“ შორის. შემდეგ ჩვენ გვაქვს:

$$U(suit\ goes\ to\ cleaners) \equiv$$

$$\equiv EU(L_p) = qU(suit\ not\ ruined) + (1-q)U(suit\ not\ ruined, inconvenience) =$$

$$= q(1) + (1-q)0{,}8 = 0{,}8 + 0{,}2q.$$

ვთქვათ ლეონარდო წყვეტს $q = 0{,}6$. მაშინ

$$U(suit\ goes\ to\ cleaners) = 0{,}8 + (0{,}2)(0{,}6) = 0{,}92.$$

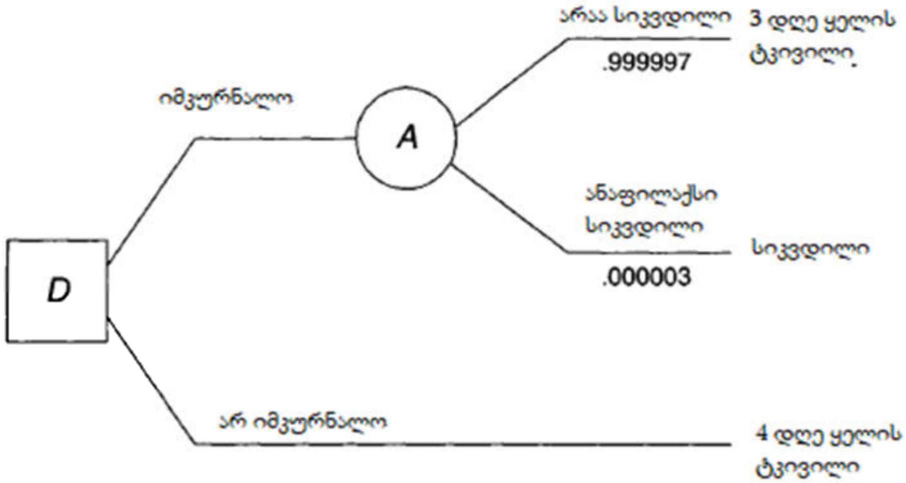
შემდეგ ჩვენ მოვიყვანთ მაგალითს სამედიცინო სფეროდან.

მაგალითი 5.7. 15 წლის უფროსკლასელ ამიტს საბოლოოდ დაუდგინეს სტრეპტოკოკური ინფექცია, და ის თვლის, რომ შეუძლია ჩაიტაროს მკურნალობა, რომელიც დაავადებული ყელით დღეების რაოდენობას ამცირებს 4-დან 3-მდე. მან გაიგო, რომ მკურნალობა არის ანაფილაქსიის გამო 0,000003 ალაბათობით სიკვდილის მიზეზი. უნდა გაიაროს თუ არა მან მკურნალობა?

თქვენ შეიძლება ამტკიცოთ, რომ თუ ის შეიძლება მოკვდეს, მან ეს მკურნალობა არ უნდა ჩაიტაროს, თუმცა სიკვდილიანობის ალბათობა იმდენად მცირეა, რომ შეგვიძლია გავწიოთ მცირე რისკი იმისათვის, რომ მოვიპოვოთ რაღაც ჩვენთვის ღირებული. მაგალითად, მრავალი ადამიანი რისკავს დაიღუპის ავტოკატასტროფაში სამსახურში მისვლის დროს. ჩვენ ვხედვთ, რომ არ შეგვიძლია ამ რისკზე დამყარებული მკურნალობის გამორიცხვა. მაშ რა უნდა გააკეთოს ამიტმა? შემდეგ ჩვენ გავაკეთებთ გადაწყვეტილების ანალიზს იმის შესახებ თუ რა რეკომენდაციის გავუწიოთ მას გადაწყვეტილების მიღებაში. ნახ. 5.11-ზე ნაჩვენებია გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წამოადგენს ამიტის გადაწყვეტილებას. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად საჭიროა შევაფასოთ ამ ხეში შედეგები. ჩვენ ეს შეგვიძლია გავაკეთოთ ხარისხით კორექტირებული მოსალოდნელი სიცოცხლის ხანგრძლივობის ($QALE$) გამოყენებით. ჩვენ ვთხოვთ ამიტს დაადგინოს, ერთი წლით ყელის ტკივილით სიცოცხლე ღირს ყელის ტკივილის გარეშე ერთი წელი სიცოცხლეს. ჩვენ ასეთ წელს ვუწოდებთ „კარგ წელს“ ვთქვათ, რომ ის ამბობს, რომ ეს ღირს 0,9 წელი, ანუ ამიტისათვის 1 წელი ყელის ტკივილით ტოლია 0,9 კარგი წელის.

შემდეგ ვიყენებთ **მუდმივ პროპორციულ კომპრომისს**. ე.ი. ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ დროითი კომპრომისი, რომელიც მტკივან ყელთანაა დაკავშირებული, არაა დამოკიდებული მასთან გატარებულ დროზე. ამ ვარაუდის გათვალისწინებით:

t წელი ყელის ტკივილით ტოლია $0{,}9t$ კარგი წლის.



ნახ. 5.11. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც ახდენს ამიტის გადაწყვეტილების მოდელირებას სტრეპტოკოკური ინფექციის გამო მკურნალობასთან დაკავშირებით.

0,9 მნიშვნელობას ეწოდება **დროზე დამოკიდებულებით ხარისხის რეგულირება** ყელის ტკივილისათვის. მეორე გზა ამის დასანახავად არის ის, რომ ამიტი დათმობს სიცოცხლის 0,1 წელს, რათა აიცილოს თავიდან ყელის ტკივილი სიცოცხლის 0.9 წლის განმავლობაში. ახლა თუ დავუშვებთ, რომ t არის დროის ის რაოდენობა, როდესაც ამ ინფექციის გამო ამიტს ყელის ტკივილი ექნება, და l იქნება ამიტის დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა, ჩვენ $\boldsymbol{QALE}$-ს შემდეგნაირად განვსაზღვრავთ:

$$QALE(l, t) = (l - t) + 0{,}9t.$$

მოსალოდნელი სიცოცხლის ხანგრძლივობის გრაფიკებიდან გამომდინარე ჩვენ ვსაზღვრავთ, რომ ამიტის დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა 60 წელია. თუ დღეებს გარდავქმნით წლებად გვექნება შემდეგი:

3 დღე = 0,008219 წელი

4 დღე = 0,010959 წელი.

ამგვარად, ამიტის $QALE$-ები შემდეგია:

$$QALE(60\ years, 3\ sore\ throat\ days) = 60 - 0{,}008219 + 0{,}9(0{,}008219) = 59{,}999178,$$
$$QALE(60\ years, 4\ sore\ throat\ days) = 60 - 0{,}010959 + 0{,}9(0{,}010959) = 59{,}998904.$$

ნახ. 5.12-ზე ნაჩვენებია ნახ. 5.11-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე $QALE$-ებით შევსებული ფაქტობრივი შედეგებით. შემდეგ ჩვენ გადავწყვეტთ ამ ხეს:

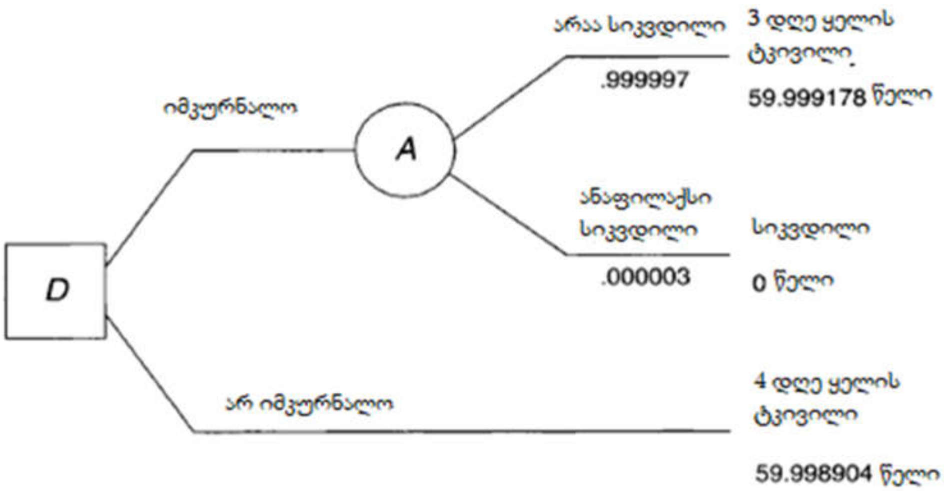
$$EU(Treat) = EU(A) = (0{,}999993)(59{,}99917800 + (0{,}0000030)(0) =$$

$$= 59{,}998858$$

$$EU(Do\, not\, treat) = 59{,}998904$$

$$EU(D) = \max(59{,}998758, 59{,}998904) = 59{,}998904.$$

ამგვარად, გადაწყვეტილებაა მკურნალობის არ ჩატარება, მაგრამ მცირედით.



ნახ. 5.12. ნახ. 5.11-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე $QALE$-ებით შევსებული ფაქტობრივი შედეგებით.

მაგალითი 5.8. ეს მაგალითი წარმოადგენს წინა მაგალითის გადამუშავებას. სინამდვილეში სტრეპტოკოკურმა ინფექციამ შეიძლება მიგვიყვანოს გულის რევმატიულ დაავადებამდე (RHD), რომელიც ნაკლებ სავარაუდოა თუ ავადმყოფი მკურნალობს. კერძოდ, თუ ჩვენ პაციენტს ვკურნალობთ, გულის რევმატიული დაავადების ალბათობა შეადგენს 0,00013, თუ არ ვუმკურნალებთ ავადმყოფს, ალბათობა ტოლია 0,00063. რევმატიული გული დაავადებული იქნება მთელი ცხოვრების განმავლობაში. ამიტომ ამიტმა უნდა გაითვალისწინოს ყოველივე ეს. პირველ რიგში, მან უნდა განსაზღვროს დროზე დამოკიდებულებით ხარისხის რეგულირება როგორც გულის რევმატიული დაავადებისათვის ცალკე თუ დაავადებულ ყელთან ერთად. დავუშვათ ის განსაზღვრავს შემდეგს:

1 წელი RHD -ით ტოლია 0,15 კარგი წელი.

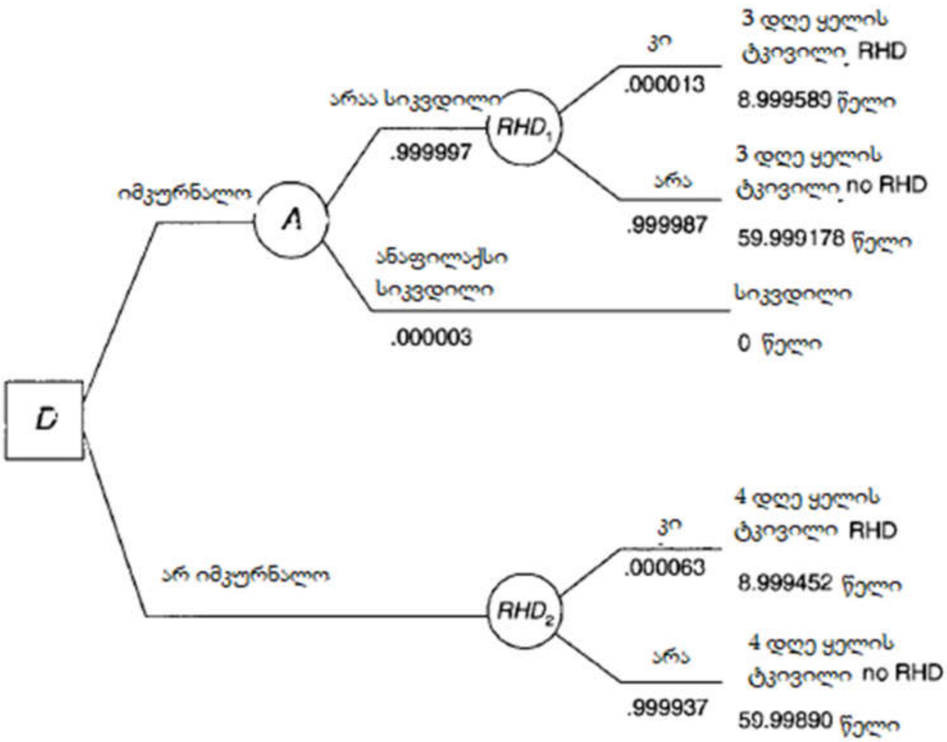
1 წელი ყელის ტკივილით და RHD -ით ტოლია 0,1 კარგი წლის.

მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$QALE(60\, years, RHD, 3\, sore\, throat\, days) = 0{,}15\left(60 - \frac{3}{365}\right) + 0{,}1\left(\frac{3}{365}\right) = 8{,}999589$$

$$QALE(60\ years, RHD, 4\ sore\ throat\ days) = 0{,}15\left(60 - \frac{4}{365}\right) + 0{,}1\left(\frac{4}{365}\right) = 8{,}999452.$$

ჩვენ უკვე გამოვთვალეთ $QALE$-ები 3 და 4 დღისათვის მხოლოდ ყელის ტკივილის დროს წინა მაგალითში. ნახ. 5.13-ზე ნაჩვენებია შედეგობრივი გადაწყვეტილებათა ხე. ჩვენ ვწყვეტთ ამ ხეს შემდეგნაირად:



ნახ. 5.13. გადაწყვეტილებათა ხე გადამუშავებული გულის რევმატიული დაავადების დროს ამიტის გადაწყვეტილების მოდელირების შესახებ.

$$EU(Treat) = EU(A) = (0{,}999997)(59{,}998515) + (0{,}000003)(0) = 59{,}998335$$

$$EU(Do\ not\ treat) = EU(RHD_2) =$$

$$= (0{,}000063)(8{,}999452) + (0{,}999937)(59{,}998904) = 59{,}995691$$

$$EU(D) = \max(59{,}998335, 59{,}995691) = 59{,}998335.$$

ასე, რომ ახლა გადაწყვეტილებაა მკურნალობა, მაგრამ ისევ მცირედით.

თქვენ შეგიძლიათ ამტკიცოთ, რომ წინა ორ მაგალითში მოსალოდნელი სარგებლიანობა უმნიშვნელოდ მცირეა, რამდენადაც ნიშნადი ციფრების რაოდენობა პირდაპირ დასადგენად გაცილებით მეტია, ვიდრე ამიტის შეფასების ნიშნადი ციფრები. ეს არგუმენტი გონივრულია. თუმცა გადაწყვეტილებათა სარგებლიანობები ესოდენ ახლოსაა ერთმანეთთან, იმიტომ რომ ორივე ანაფილაქსიით სიკვდილის და გულის რევმატიული დაავადების ალბათობების რკალი პატარაა. ზოგადად, ასეთ სიტუაცია ყოველთვის ხდება.

დავალების სახით გადამუშავეთ წინა მაგალითი გულის რევმატიული დაავადების 0,13 ალბათობით 0,000063-ის ნაცვლად.

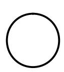
კიდევ ერთ მოსაზრებას სამედიცინო გადაწყვეტილების დროს წარმოადგენს ფინანსური ღირებულება. ამ შემთხვევაში შედეგის მნიშვნელობა წარმოადგენს შედეგთან დაკავშირებული როგორც $QALE$-ის, ისე ფინანსური დანახარჯების ფუნქციას.

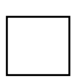
5.2. გავლენის დიაგრამები

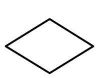
პარაგრაფ 5.1-ში გადაწყვეტილებათა ხეებთან დაკავშირებით ჩვენ აღვნიშნეთ ორი სირთულე. პირველი, მაგალითის პრობლემის გადაწყვეტილებათა ხით წარმოდგენის დრო გადაწყვეტა იზრდება ექსპონენციალურად მაგალითის ზომის ზრდასთან ერთად. მეორე, გადაწყვეტილების ხისთვის საჭირო ალბათობა ყოველთვის ხელმისაწვდომი არაა ჩვენთვის. შემდეგში ჩვენ მოვიყვანთ პრობლემის გადაწყვეტის მაგალითების ალტერნატიულ წარმოდგენას, კერძოდ გავლენის დიაგრამას, რომელსაც არ გააჩნია ამ სირთულეებიდან არც ერთი. პირველად ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ მაგალითის პრობლემას გავლენის დიაგრამის მეშვეობით. შემდეგ პარაგრაფ 5.2.2-ში ვმსჯელებთ გავლენის დიაგრამების გადაწყვეტაზე.

5.2.1. გავლენის დიაგრამებით წარმოდგენა

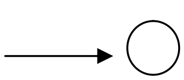
გავლენის დიაგრამა შეიცავს სამი ტიპის კვანძს: შემთხვევითი (ანუ განუსაზღვრელი) კვანძები, რომლებიც შემთხვევთ სიდიდეებს წარმოადგენენ; გადაწყვეტილების კვანძები, რომლებიც გადაწყვეტილების მიღებას წარმოადგენენ; და ერთი სარგებლიანობის კვანძი, რომელიც შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს, მის შესაძლო მნიშვნელობებს წარმოადგენენ შდეგების სარგებლიანობები. ჩვენ მათ შემდეგნაირად გამოვსახავთ:

 **-შესაძლებლობის კვანძი**

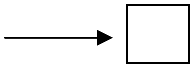
 **-გადაწყვეტილებათა კვანძი**

 **- სარგებლიანობის კვანძი**

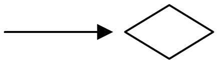
გავლენის დიაგრამაზე წიბოებს შემდეგი მნიშვნელობა აქვთ:

 **- კვანძის მნიშვნელობა ალბათურია**

მშობლის მნიშვნელობის მიხედვით.

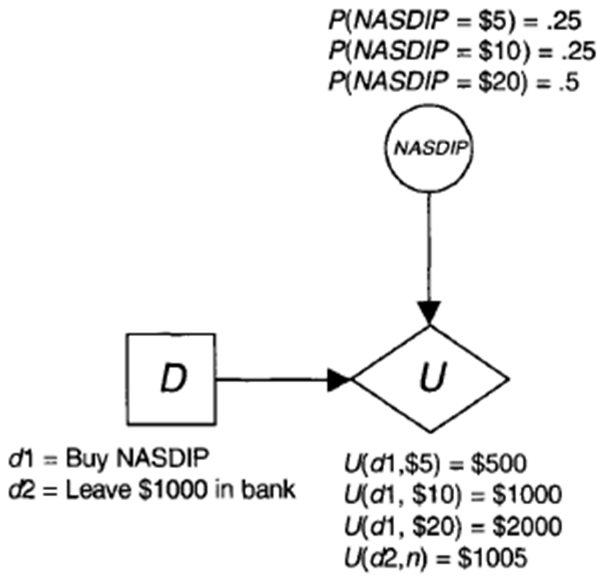


- მშობლის მნიშვნელობა ცნობილია გადაწყვეტიების მიღების მომენტში; ამიტომ კიდეები მიმდევრობას წარმოადგენს.



- კვანძის მნიშვნელობა დეტერმინებულია მშობლის მნიშვნელობაზე დამოკიდებულებით.

გავლენის დიაგრამაზე შემთხვევითი კვანძები აკმაყოფილებენ ალბათობების განაწილებით მარკოვის პირობას. ე.ი. თითოეული X შემთხვევითი კვანძი არა ნათესავებისაგან დამოუკიდებლად პირობითად დამოუკიდებელია, მისი ყველა მშობლის სიმრავლის გათვალისწინებით.



ნახ. 5.14. გავლენის დიაგრამა, რომელიც ახდენს $NASDIP$-ის ყიდვაზე თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას.

ამგვარად, გავლენის დიაგრამა ფაქტობრივად წარმოადგენს ბაიესის ქსელს, რომელიც შევსებულია კვანძების და კვანძის სარგებლიანობების გადაწყვეტებით. გავლენის დიაგრამაში უნდა არსებობდეს კვანძების გადაწყვეტის მოწესრიგებულობა, რომელიც ემყარება იმ წესრიგს, რომელშიც მიიღება გადაწყვეტილება. წესრიგი მოიცემა გადაწყვეტილების კვანძებს შორის წიბოების გამოყენებით. მაგალითად, თუ ჩვენ გვაქვს შემდეგი წესრიგი:

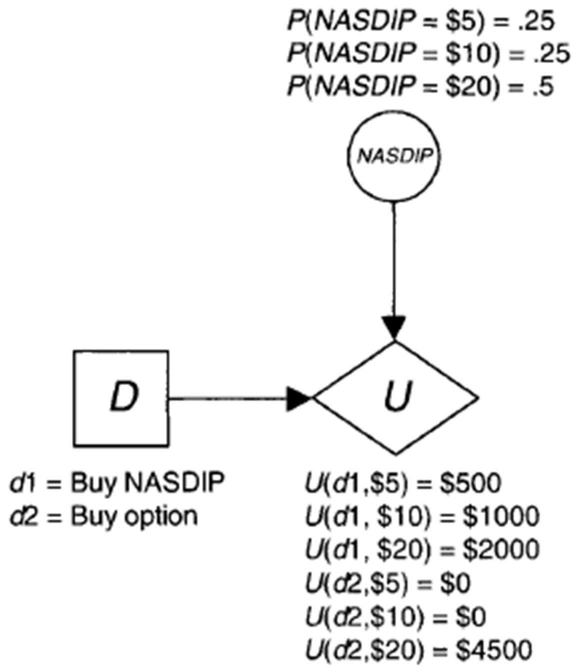
$$D_1, D_2, D_3,$$

მაშინ არის წიბოები D_1-დან D_2-მდე და D_3-მდე და წიბო D_2-დან D_3-მდე.

რომ მოვახდინოთ გავლენის დიაგრამების ილუსტრირება, წარმოგიდგენთ იმ პრობლემის მაგალითებს, იმ მაგალითებში, რომლებიც მოცემულია გავლენის დიაგრამების მიხედვით გადაწყვეტილებათა ხეების შესახებ მიძღვნილ თავში.

მაგალითი 5.9. გაიხსენეთ მაგალითი 5.1, რომელშიც ვთვლიდით, რომ ალბათობა იმის, რომ თვის ბოლოს $NASDIP$ ეღირება 5 დოლარი, შეადგენს 0,25-ს, 20 დოლარი – 0,5-ს, ხოლო 10 დოლარის ალბათობა იქნება 0,25. თქვენი მისაღებია გადაწყვეტილება – ან შეიძინოთ 1000$-ად 100 აქცია ან 1000$ დატოვოთ ბანკში 0,005%-ად. ნახ. 5.14 მოცემულია პრობლემის მაგალითის გავლენის დაიაგრამა. მიაქციეთ ყურადღება ამ დიაგრამის ზოგიერთ ასპექტს. არ არსებობს არანაირი წიბო D-დან $NASDIP$-მდე, იმიტომ რომ თქვენი გადაწყვეტილება $NASDIP$-ის შეძენა არ ახდენს გავლენას მის საქმიანობაზე (ჩვენ ვვარაუდობთ, რომ თქვენი 100 აქცია არაა საკმარისი იმისთვის, რომ გავლენა იქონიოს ბაზრის აქტივობაზე). $NASDIP$-დან D-მდე არ არის წიბო, რადგან იმ დროს, როდესაც თქვენ იღებთ გადაწყვეტილებას თქვენ არ იცით $NASDIP$-ის ერთი თვის მნიშვნელობა. არის წიბოები $NASDIP$-დან D და U –მდე იმიტომ, რომ თქვენი სარგებლიანობა დამოკიდებულია $NASDIP$-ის აწევაზე და ყიდულობთ თუ არა მას. მიაქციეთ ყურადღება, თუ მას არ ყიდულობთ, სარგებლიანობა იმისდა მიუხედავად თუ რა მოსდის $NASDIP$-ს, ერთნაირია. აი რატომ ვწერთ $U(d2, n) = 1005\$$-ს. n ცვლადი წარმადგენს $NASDIP$-ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობას.

მაგალითი 5.10. გაიხსენეთ მაგალითი 5.2, რომელშიც იგივე სიტუაციაა, რაც მაგალით 5.1-ში იმის გამოკლებით, რომ თქვენი არჩევანი იყო გაგეყიდათ ან $NASDIP$ ან ოფციონი $NASDIP$-ზე. შეგახსენებთ, რომ თუ $NASDIP$, შეადგენს 5$ ან 0$-ს ერთ აქციაზე ერთი თვის განმავლობაში, თქვენ არ გამოიყენებდით, თქვენს ვარიანტს, და თქვენ დაკარგავდით 1000$-ს; და თუ $NASDIP$ შეადგენდა 20$-ს აქციაზე ერთი თვის განმავლობაში, თქვენ გამოიყენებთ თქვენს ოფციონს და თქვენი 1000$-ის ინვესტიცია ეღირება 4500$. ნახ. 5.15-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. შეგახსენებთ, როდესაც ჩვენ წარმოვადგინეთ ეს მაგალითი გადაწყვეტლებათა ხით (ნახ. 5.3), ხე სიმეტრიული იყო, რამდენადაც ჩვენ გვქონდა ერთი და იგივე განუსაზღვრელი ხდომილობა იქიდან გამომდინარე რა გადაწყვეტილებაც იყო მიღებული. ეს სიმეტრია თავს იჩენს გავლენის დიაგრამაში იმით, რომ სარგებლიანობის U კვანძის მნიშვნელობა დამოკიდებულია შემთხვევით $NASDIP$ კვანძზე, გადაწყვეტილების D კვანძის მნიშვნელობისაგან დამოუკიდებლად.



ნახ. 5.15. გავლენის დიაგრამა, რომელიც ახდენს $NASDIP$-ის ყიდვაზე თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას, როდესაც თქვენი სხვა არჩევანი ოფციონის ყიდვაა.

მაგალითი 5.11. გავიხსენოთ მაგალითი 5.3, რომელშიც ნენსი იხილავდა ICK-ს 10 000 აქციის ყიდვას თითოს 10$-ად ან ან 100 000$–ად ICK-ზე ოფციონის ყიდვას, რაც 50 000 აქციის ყიდვის საშუალებას მიცემდა 15$-ად აქციაზე ერთი თვის განმავლობაში. ის თვლიდა, რომ ერთი თვის შემდეგ Dow იქნებოდა 10 000 ან 11 000 და ICK იქნებოდა 5$ ან 20$ აქციაზე. ბოლოს, შეგახსენებთ, რომ ის ანიჭებდა შემდეგ ალბათობებს:

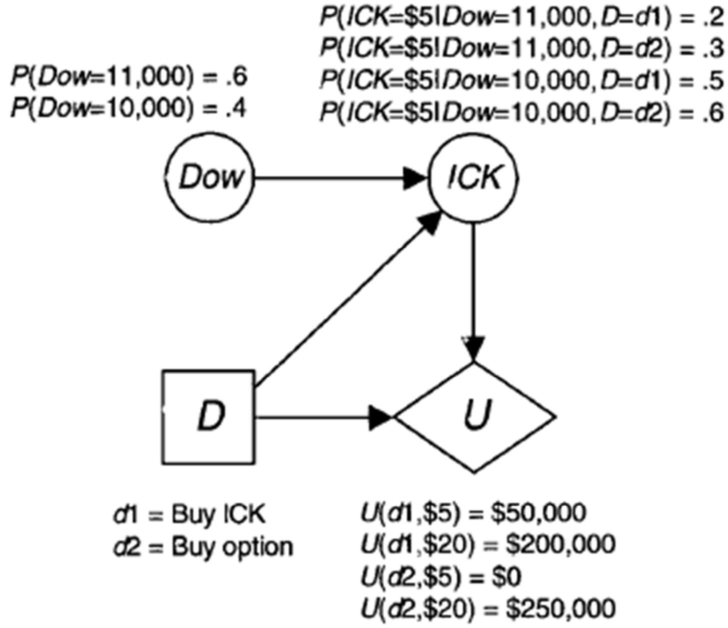
$$P(ICK = 5\$|Dow = 11\,000, Decision = BuyICK) = 0{,}2\ ,$$

$$P(ICK = 5\$|Dow = 11\,000, Decision = Buy\ option) = 0{,}3\ ,$$

$$P(ICK = 5\$|Dow = 10\,000, Decision = BuyICK) = 0{,}5\ ,$$

$$P(ICK = 5\$|Dow = 10\,000, Decision = Buy\ option) = 0{,}6\ ,$$

$$P(Dow = 11\,000\$) = 0{,}6.$$



ნახ. 5.16 გავლენის დიაგრამა ახდენს ნენსის გადაწყვეტილების მოდელირებას ICK-ის ან ICK-ზე ოფციონის ყიდვასთან დაკავშირებთ

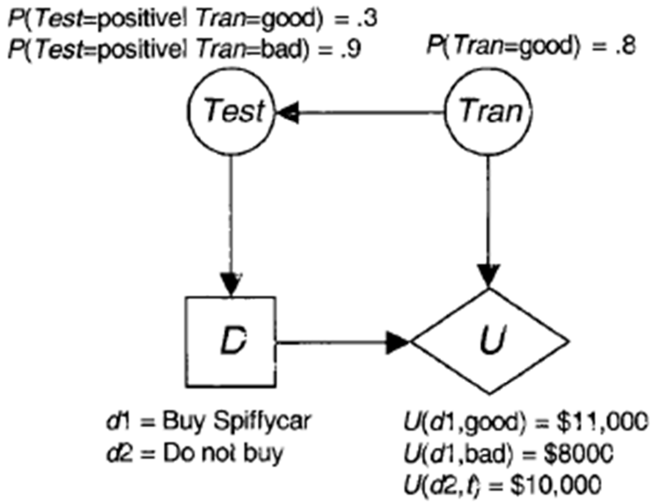
ნახ. 5.16-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ICK-ის მნიშვნელობა მხოლოდ Dow-ს მნიშვნელობაზე არაა დამოკიდებული, არამედ ასევე D გადაწყვეტილებაზეც. ეს იმიტომ, რომ ნენსის გადაწყვეტილებამ შეიძლება გავლენა იქონიოს ბაზრის აქტივობაზე. შემდეგ შევნიშნოთ, რომ ამ მაგალითს ერთით მეტი კომპონენტი აქვს, ვიდრე იმ მაგალითს, რომელიც 5.10-ში გვხვდება, და ჩვენ გვჭირდება მხლოდ ერთი კვანძის დამატება გავლენის დიაგრამით ამის წარმოსადგენად. ამგვარად, წარმოდგენა იზრდება წრფივად მაგალითის ზომის ზრდასთან ერთად. ამის საპირისპიროდ, შეგახსენებთ, რომ მაშინ, როდესაც წარმოვადგენდით გადაწყვეტილებათა ხეს, წარმოდგენა იზრდებდა ექსპონენციალურად.

მაგალითი 5.12. გავიხსენოთ მაგალითი 5.4, რომელშიც სემს ჰქონდა საშუალება ეყიდა ავტომანქანა $Spiffycar$ 10 000\$-ად, და მას ჰქონდა შემოთავაზება, რომელთაც თანახმა იყო გადაეხადათ 11 000\$ მანქანაში, თუ ის საუკეთესო მექანიკურ ფორმაში იქნებოდა. შეგახსენებთ, რომ თუ გადამცემი ცუდი იქნებოდა, სემს მოუწევდა დაეხარჯა 3000\$, რომ გაყიდვამდე აღედგინა ის. ამიტომ მას მხოლოდ 8000\$ დარჩებოდა, თუ ის ავტომობილს შეიძენდა და მისი გადამცემი ცუდი იქნებოდა. ბოლოს გავიხსენოთ, რომ მას ჰყავდა მეგობარი, რომელსაც შეეძლო ჩაეტარებინა ტესტი გადამცემზე, და ჩვენ გვქონდა შემდეგი:

$$P(Test = positive|Tran = good) = 0{,}3,$$

$$P(Test = positive|Tran = bad) = 0{,}9\ ,$$

$$P(Tran = good) = 0{,}8.$$

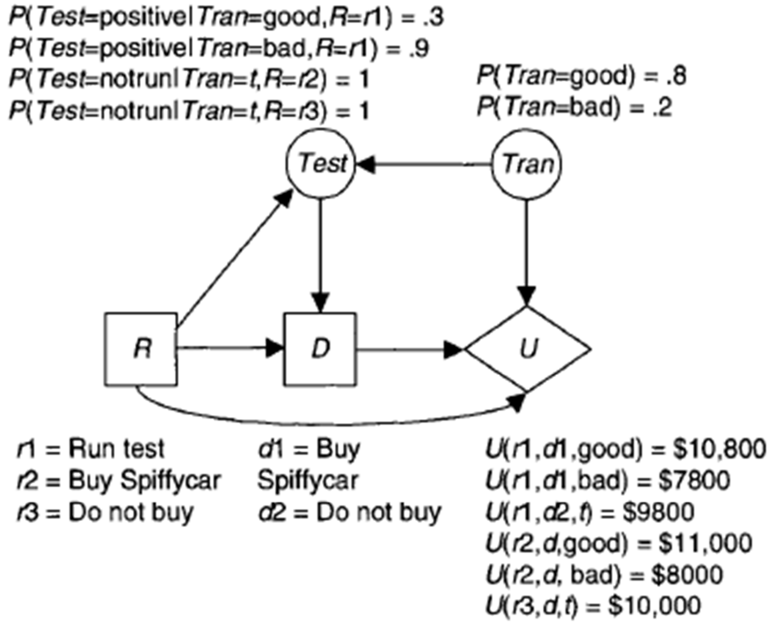


ნახ. 5.17. გავლენის დიაგრამა, რომელიც ახდენს ავტომანქანა $Spiffycar$ ყიდვაზე სემის გადაწყვეტილების მოდელირებას.

ნახ. 5.17-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ არის ისარი $Tran$-დან $Test$-სკენ, იმიტომ რომ ტესტის მნიშვნელობა ალბათურადაა დამოკიდებული გადამცემის მდგომარეობაზე და არსებობს ისარი $Test$-დან D-სკენ იმიტომ, რომ ტესტის შედეგი ცნობილი იქნება გადაწყვეტილების მიღების დროს. ე.ი. D მოსდევს $Test$-ს მიმდევრობით. მიაქციეთ ყურადღება, რომ გავლენის დიაგრამაზე გამოსახულია ის ალბათობები, რომლებიც ვიცით. ჩვენ არ დაგვჭირდა სრული ალბათობის კანონი და ბაიესის თეორემა მათ გამოსათველად, როგორც ეს გავაკეთეთ, მაშინ როდესაც მაგალითი წარმოვადგინეთ გადაწყვეტილებათა ხის მეშვეობით.

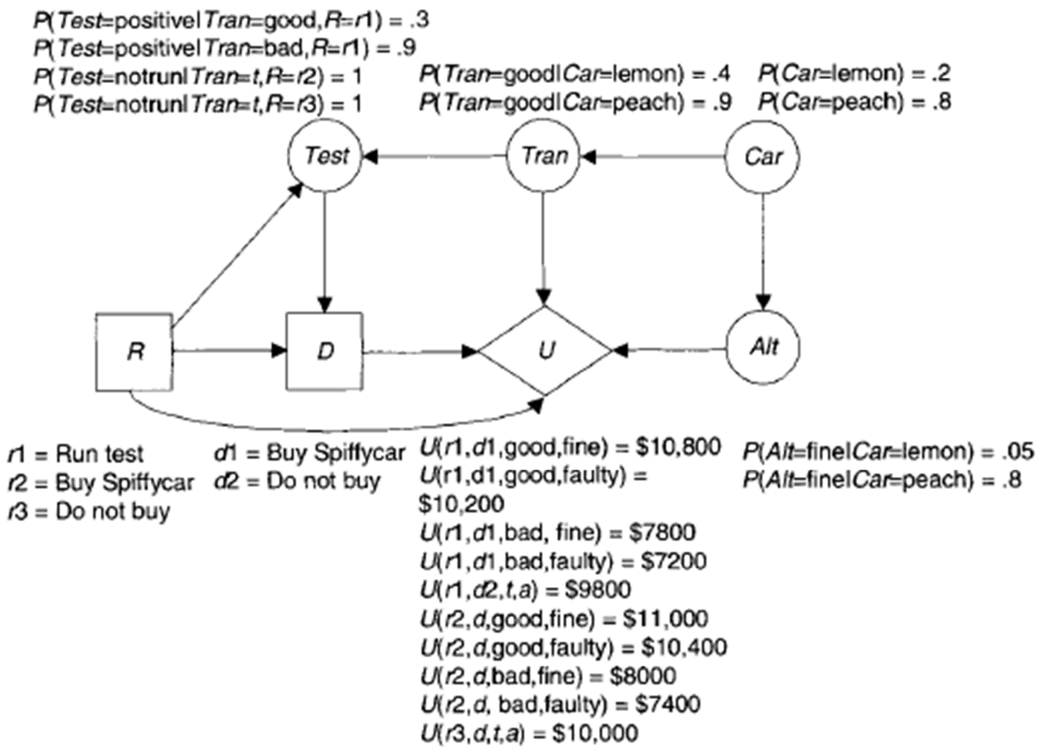
მაგალითი 5.13. გაიხსენეთ მაგალითი 5.5, რომელშიც სემი იმავე სიტუაციაში იმყოფება იმ განსხვავებით, რომ ტესტი არ იყო უფასო. პირიქით, ეს 200$ ღირს. ამრიგად, სემს მოუწია გადაეწყვიტა ჩაეტარებინა თუ არა ტესტირება, ეყიდა მანქანა შემოწმების გარეშე, თუ შეენახა 10 000$. ნახ. 5.18-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ არის წიბო R-დან D-მდე იმიტომ, რომ R გადაწყვეტილება მიიღება D გადაწყვეტილებამდე. შევნიშნოთ ასევე, რომ არსებობს წიბო D-დან T-მდე იმიტომ, რომ T ტესტი მხოლოდ მაშინ ტარდება, თუ ჩვენ ვიღებთ $r1$ გადაწყვეტილებას.

შემდეგ ჩვენ ვაჩვენებთ უფრო რთულ მაგალითებს, რომლებიც ჩვენ არ წარმოვადგინეთ გადაწყვეტილებათა ხის მეშვეობით.



ნახ. 5.18. გავლენის დიაგრამა, რომელიც ახდენს ავტომანქანა $Spiffycar$ ყიდვაზე სემის გადაწყვეტილების მოდელირებას, როდესაც მან უნდა გადაიხადოს ტესტირების საფასური.

მაგალითი 5.14. დავუშვათ, იგივე სიტუაცია, როგორიც 5.13 მაგალითში იყო, მაგრამ შემდეგი ცვლილებით. პირველი სემმა იცის, რომ $Spiffycar$-ის 20% დამზადებლი იყო ქარხანაში, სადაც აწარმოებდნენ ლიმონებს, და 80% დამზადებული იყო ქარხანაში, რომელიც აწარმოებდა ატმებს. გარდა ამისა, მან იცის, რომ ლიმონების 40%-ს აქვს კარგი გადამცემი და ატმების 90%აქვს კარგი გადამცემი. ასევე, ლიმონების 5%-ს აქვს შესანიშნავი გენერატორი, ხოლო ატმების 80%-ს აქვს შესანიშნავი გენერატორი. თუ ცვლადი დენის გენერატორი გაუმართავია (არ ვარგა), სემს დაუჯდება 600$ მისი შეკეთება, ვიდრე მანქანას გაყიდის. ნახ. 5.19-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ გავლენის დიაგრამაში შემთხვევითი კვანძების ერთობლიობა წარმადგენს ბაიესის ქსელს. მაგალითად, $Tran$ და Alt არ წარმოადგენენ დამოუკიდებლებს, მაგრამ ისინი პირობითად დამოუკიდებლები არიან Car მოცემულობით.



ნახ. 5.18. გავლენის დიაგრამა, რომელიც ახდენს ავტომანქანა $Spiffycar$ ყიდვაზე სემის გადაწყვეტილების მოდელირებას, როდესაც ცვლადი დენის გენერატორი შეიძლება იყოს გაუმართავი.

ჩვენ ვამთავრებთ დიდი შემთხვევითი პრობლემის მაგალითით მედიცინაში.

მაგალითი 5.15. ვათქვათ, ავადმყოფს აქვს ფილტვების არასრული უჯრედოვანი კარინომა. პირველადი სიმსივნე დიამეტრში შეადგენს 1 სმ-ს, გულკერდის რენტგენოგრამა გვიჩვენებს, რომ სიმსივნე არ ეკვრის გულმკერდის კედელს ან შუასაყარს და დამატებითი დამუშავებით არ გამოვლინდა ცალკეული მეტასტაზის ნიშნები. ამ სიტუაციაში სასურველ მკურნალობას წარმოადგენს თორაკოტომია. მკურნალობის ალტერნატიული ვარიანტია დასხივება. თორაკოტომიის გადაწყვეტილების დროს პრინციპული მნიშვნელობაა – შუასაყრისებული მეტასტაზების ალბათობა. თუ შუასაყრისებული მეტასტაზები არსებობენ, მაშინ თორაკოტომია უკუჩვენების საფრთხეს შეიცავს, რამდენდაც ეს აყენებს პაციენტს სიკვდილის რისკის ქვეშ ჯამრთელობისათვის სარგებელის გარშე. თუ მეტასტაზები არაა, თორაკოტომია იძლევა მნიშვნელოვან უპირატესობას გადარჩენის კუთხით მანამ, სანამ პირველადი სიმსივნე არ მიწვდება ცალკეულ ორგანოებს.

ჩვენ გვაქვს ორი ტესტი შუასაყარის შესაფასებლად. ეს არის კომპიუტერული ტომოგრაფია ($CT\ scan$) და მედიასტინოსკოპია. ამ პრობლემას გააჩნია სამი გადაწყვეტა. პირველ რიგში, პაციენტმა უნდა გაიაროს კომპუტერული ტომოგრაფია? მეორე, ამ

გადაწყვეტილების და CT შედეგის გათვალისწინებით, პაციენტმა უნდა ჩაიტაროს მედიასტინოსკოპია? მესამე, ამ გადაწყვეტის და გამოკვლევის ნებისმიერი შედეგის გათვალისწინებით უნდა ჩაიტაროს პაციენტმა თორაკოტომია?

CT-ს შეუძლია აღმოაჩინოს საშუალო ზომის მეტასტაზები. ტესტი აბსოლუტურად ზუსტი არაა. უფრო მეტიც, თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $MedMet$ არის ცვლადი, რომლის მნიშვნელობა დამოკიდებულია შუასაყარის მეტასტაზებზე და $CTest$ არის ცვლადი, რომელიც წარმოდგენს $cpos$ -ს და $cneg$-ს იმაზე დამოკიდებულებით დადებითია თუ არა CT, ჩვენ გვაქვს:

$P(CTest = cpos|MedMet = present) = 0.82$,

$P(CTest = cpos|MedMet = absent) = 0.19$.

ედიასტინოსკოპია – ეს არის ინვაზიური ტესტი შუასაყრის ლიმფურ კვანძებში იმის განსაზღვრისათვის, გავრცელდა თუ არა სიმსივნე ამ კვანძებში. თუ ჩვენ დავუშვებთ $Mtest$ არის ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა $mpos$ და $mneg$ იმაზე დამოკიდებულებით მედიასტინოსკოპია დადებითია თუ არა, ჩვენ გვაქვს:

$$P(MTest = mpos|MedMet = present) = 0.82,$$

$$P(MTest = mpos|MedMet = absent) = 0.005.$$

მედიასტინოსკოპიამ შეიძლება გამოიწვიოს სიკვდილი. დავუშვებთ E გადაწყვეტილებას, რომელიც ეხება ჰქონდეს თუ არა მედიასტინოსკოპია, $e1$ – იქნება ჰქონდეს არჩევანი, $e2$ – არ ჰქონდეს, ხოლო $MedDath$ იყოს ცვლადი, რომლის მნიშვნელობებია და $mlive$, იმაზე დამოკიდებულებით კვდება თუ არა პაციენტი მედიასტინოსკოპიისაგან. ჩვენ გვაქვს:

$$P(MedDeath = mdie|E = e1) = 0{,}005,$$

$$P(MedDeath = mdie|E = e2) = 0.$$

თორკოტომიას აქვს მეტი შანსი გამოიწვიოს სიკვდილი, ვიდრე ალტერნატიული რადიაციით მკურნალობას. თუ ჩვენ დავუშვებთ T გადაწვეტილებას, რომელიც ეხება მკურნალობას, უნდა ჰქონდეს $t1$ – თორაკოტომიის ჩატარების არჩევანი, $t2$ – იქნება რადიაციის არჩევანი, და $Thordeath$ იქნება ცვლადი, რომლის მნიშვნელობაა $tdie$ და $tlive$ იმაზე დამოკიდებულებით, გარდაიცვლება პაციენტი თუ არა მკურნალობის შედეგად, ჩვენ გვაქვს

$$P(ThorDeath = tdie|T = t1) = 0.037,$$

$$P(ThorDeath = tdie|T = t2) = 0.002.$$

საბოლოოდ, ჩვენ გვჭირდება იმის წინასწარი ალბათობა, რომ შუასაყარის მეტასტაზები არსებობენ. ჩვენ გვაქვს:

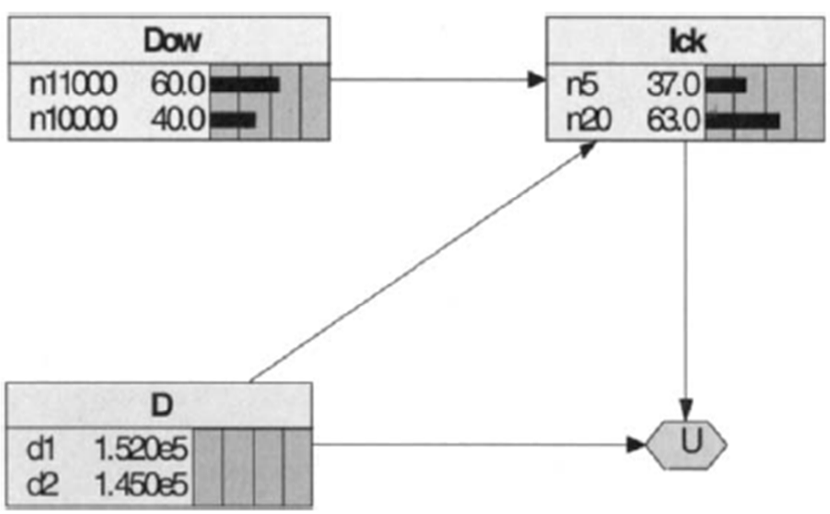
$$P(MedMET = present) = 0{,}46.$$

ნახ. 5.20-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ჩვენ განვიხილეთ დარჩენილი სიცოცხლის ხანგრძლივობა ($QALE$) და ამ მაგალითში ფინანსური დანახარჯი დიდი არაა. მნიშვნელობათა კვანძი მხოლოდ სიცოცხლის ხანგრძლივობაა.

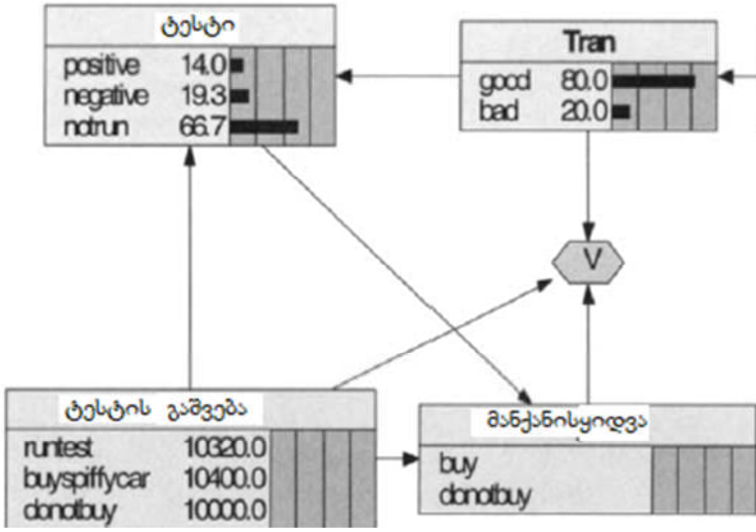
5.2.4 გავლენის დიაგრამების გადაწყვეტა *Netica*-ს გამოყენებით

თავი 3-ის პარაგრაფ 3.4.3-ში ჩვენ ვაჩვენეთ, როგორ გაგვეკეთებინა დასკვნა პროგრამული პაკეტის *Netica*-ს გამოყენებით. შემდეგ ჩვენ ვაჩვენებთ, როგორ გადავწყვიტოთ მისი გამოყენებით გავლენის დიაგრამა.

მაგალითი 5.21. შეგახსენებთ, რომ ნახ. 5.16-ზე ნაჩვენები იყო მაგალითშ 5.11 მოყვანილი პრობლემის გავლენის დიაგრამა. ნახ. 5.21-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია *Netica*-ს გამოყენებით. გაიხსენეთ პარგარაფ 3.4.3-დან, რომ *Netica* უფრო ითვლის და აჩვენებს ცვლადების წინა ალბათობების განაწილებებს და არა ალბათობების პირობით განაწილებებს, ხოლო ალბათობები ნაჩვენებია პროცენტების სახით. *Netica*-ს თავისებურებას წარმოადგენს ის, რომ კვანძები ასოებიდან უნდა იწყებოდნენ. ამიტომ ჩვენ მოვათავსეთ „n“ რიცხვითი მნიშვნელობის წინ. ისარის კიდევ ერთი უარყოფითი თვისებაა ის, რომ ორივე შესაძლებლობა და გადაწყვეტილება გამოსახულია მართკუთხედების სახით.



ნახ. 5.21. ნახ. 5.16-ზე ნაჩვენები გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია *Netica*-ს გამოყენებით



ნახ. 5.22. ნახ. 5.18-ზე ნაჩვენები გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია $Netica$-ს გამოყენებით.

გადაწყვეტილებათა D კვანძზე ნაჩვენები მნიშვნელობა წარმოადგენს ალტერნატიული გადაწყვეტილების მოსალოდნელ მნიშვნელობებს. ჩვენ ვხედავთ, რომ:

$$E(d1) = 1{,}520 \times 10^5 = 152\,000,$$

$$E(d2) = 1{,}450 \times 10^5 = 145\,000.$$

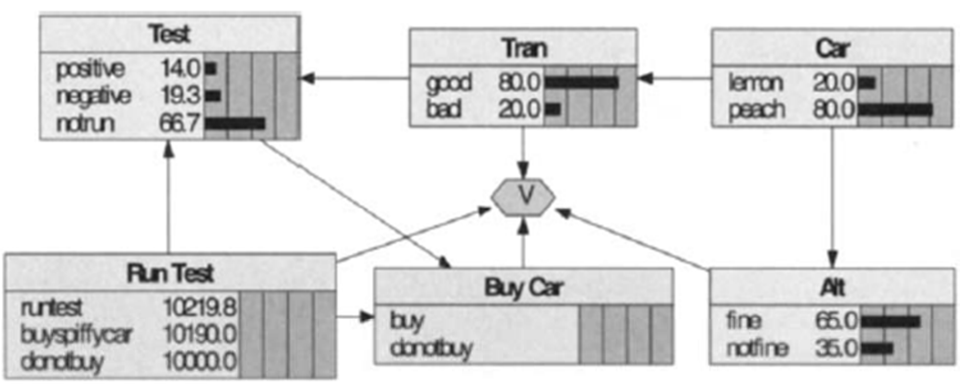
ამგვარად, ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, ტოლია $d1$-ის.

მაგალითი 5.22. შეგახსენებთ, რომ ნახ. 5.18-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს 5.13 მაგალითში არსებულ პრობლემას. ნახ. 5.22-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია $Netica$-ს გამოყენებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ალტერნატიული გადაწყვეტილებაა „$Run\,Test$“, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას, რომელიც მდგომარეობს ტესტის გარეშე მანქანის ყიდვაში.

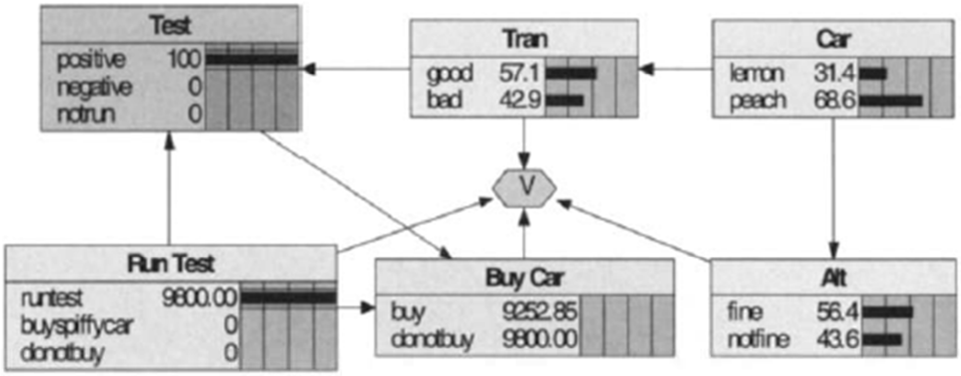
მაგალითი 5.23. შეგახსენებთ, რომ ნახ. 5.19-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს 5.14 მაგალითში პრობლემის მაგალითს. ნახ. 5.23(ა)-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია $Netica$-ს გამოყენებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ალტერნატიული გადაწყვეტილებაა „$Run\,Test$“, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას და მდგომარეობს ტესტირების ჩატარებაში. ტესტირების ჩატარების შემდეგ ტესტის შედეგი იქნება ან დადებითი ან უარყოფითი და ჩვენ მაშინ უნდა გადავწყვიტოთ ვიყიდოთ თუ არ ვიყიდოთ ავტომობილი. გავლენის დიაგრამა განახლებულია ტესტის ჩატარებისთვის და ტესტი დადებითი ხდება როგორც ეს ნახ. 5.23 (ბ)-ზეა ნაჩვენები. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში ალტერნატიული გადაწყვეტილება,

რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – ეს არის არ იყიდოთ ავტომანქანა. გავლენის დიაგრამა განახლებულია ტესტის ჩატარებისთვის და ტესტი უარყოფითი ხდება როგორც ეს ნახ. 5.23 (გ)-ზეა ნაჩვენები. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – ეს არის ავტომანქანის ყიდვა.

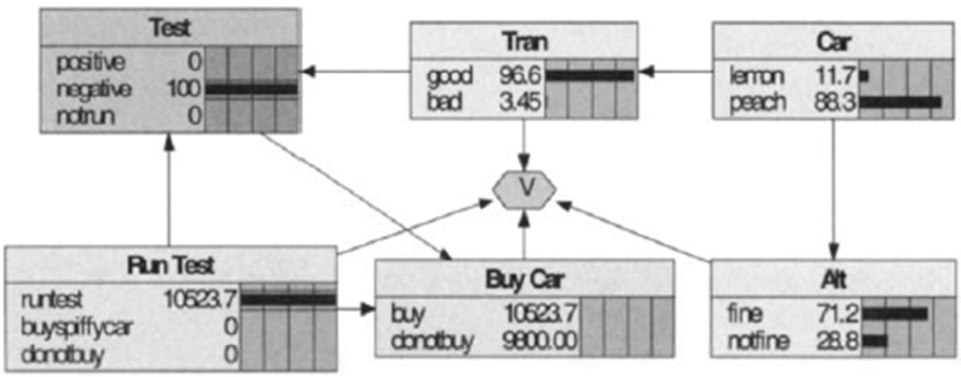
მაგალითი 5.24. შეგახსენებთ, რომ ნახ. 5.20-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც წარმოადგენს 5.15 მაგალითის პრობლემას. ნახ. 5.24(ა)-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია $Netica$-ს გამოყენებით. ჩვენ ვხედავთ, რომ ალტერნატიული გადაწყვეტილებაა „$CT\ Scan$“, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას, რომელიც მდგომარეობს სკანირების ჩატარებაში. სკანრების ჩატარების შემდეგ შედეგი იქნება ან დადებითი ან უარყოფითი და ჩვენ მაშინ უნდა გადავწყვიტოთ გავიკეთოთ თუ არა მედიასტინოსკოპია. გავლენის დიაგრამა განახლებულია სკანირების ჩატარებისთვის და სკანირება დადებითი ხდება როგორც ეს ნახ. 5.24 (ბ)-ზეა ნაჩვენები. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – არის გავიკეთოთ მედიასტინოსკოპია. გავლენის დიაგრამა შემდეგ განახლებულია ამ მიმართულებით, ხოლო ტესტი, რომელიც ბრუნდება, ჩნდება ნახ. 5.24 (გ)-ზე. ჩვენ ვხედავთ, რომ ამ შემთხვევაში ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – ეს თორაკოტომიის გაკეთებაა.



(ა)

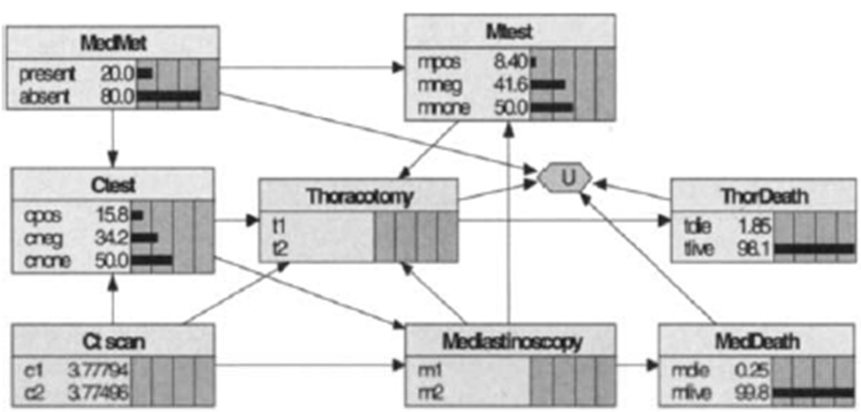


(ბ)

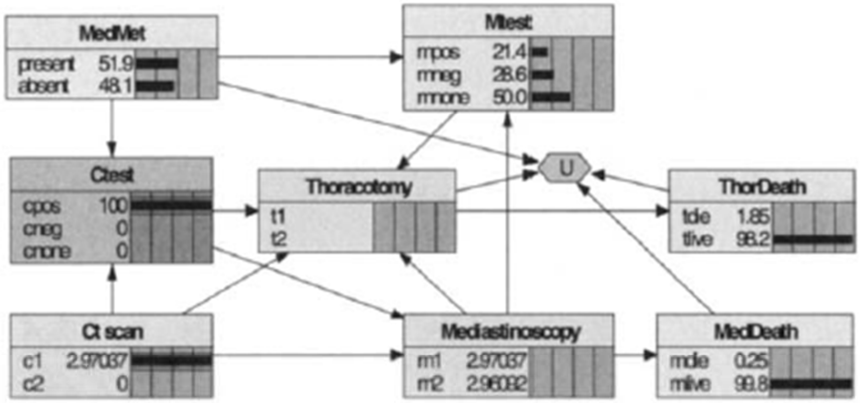


(გ)

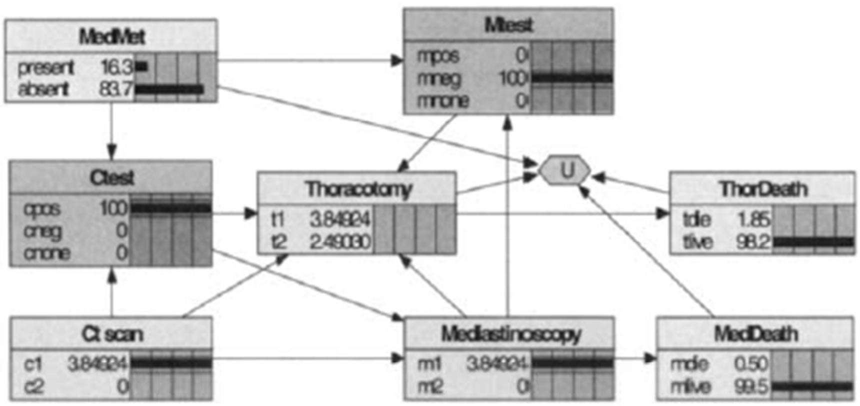
ნახ. 5.23. (ა)-ში გამოჩნდა ნახ. 5.19-ის გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია *Netica*-ს გამოყენებით. გავლენის დიაგრამა განახლებულია ჩატარებული ტესტის მიხედვით და ტესტის დადებითი მნიშვნელობა ჩნდება (ბ)-ზე. გავლენის დიაგრამა განახლებულია ჩატარებულია ტესტით და ტესტის უარყოფითი მნიშვნელობა ჩნდება (გ)-ზე



(ა)



(ბ)



(გ)

ნახ. 5.23. (ა)-ზე გამოჩნდა ნახ. 5.19-ის გავლენის დიაგრამა, რომელიც დამუშავებულია *Netica*-ს გამოყენებით. გავლენის დიაგრამა განახლებულია *CT* სკანირება ჩატარებულია და სკანირების დადებითი მნიშვნელობა ჩნდება (ბ)-ზე. გავლენის დიაგრამა განახლებულია მედიასტინოსკოპიის ჩატარებისას და ტესტის უარყოფითი მნიშვნელობა ჩნდება (გ)-ზე

წინა მაგალითში გასაკვირი არაა, რომ ალტერნატიული გადაწყვეტილება ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – ეს არის კომპუტერული ტომოგრაფის გაკეთება, რამდენადაც მას არ გააჩნია ღირებულება. ვთქვათ სკანირებისას არის ფინანსური დანახარჯი 1000 ამერიკული დოლარის ფარგლებში. რამდენადაც სარგებლიანობის ფუნქცია შეესაბამება ცხოვრების ხანგრძლივობებს გადაწყვეტილებათა ანალიზის ჩასატარებლად გარდავქმნათ 1000 დოლარი სიცოცხლის წლების ერთეულად (ან პირიქით). დავუშვათ, რომ პიროვნება, რომელიც იღებს გადაწყვეტილებას, თვლის, რომ 1000 ამერიკული დოლარი მისი სიცოცხლის 0,01 წლის ეკვივალენტურია. სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ იმის გარკვევას ამ შემთხვევაში გადაწყვეტილება ალტერნატიულია, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას, თუ კვლავ საჭიროა სკანირების ჩატარება.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 5.1

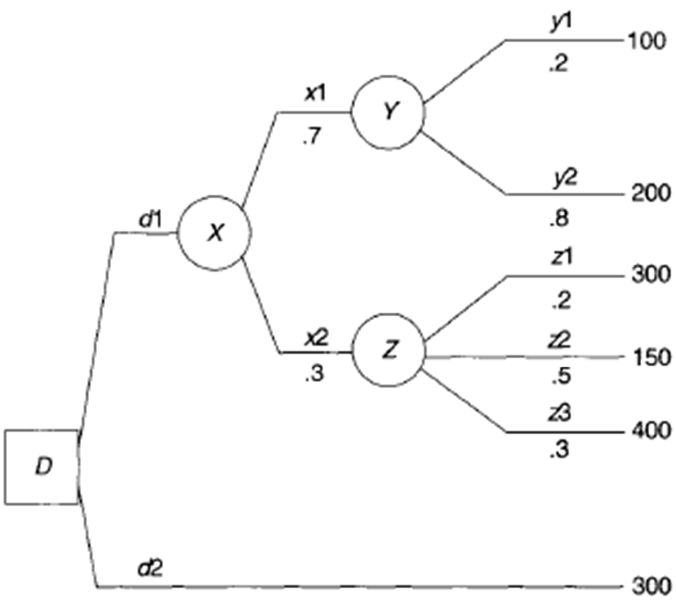
სავარჯიშო 5.1 გადაწყვიტეთ ნახ. 5.34-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე.

სავარჯიშო 5.2 გადაწყვიტეთ ნახ. 5.35-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე.

სავარჯიშო 5.3 აჩვენეთ გადაწყვეტილებათა ხის გადაწყვეტა ნახ. 5.8-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გათვალისწინებით.

სავარჯიშო 5.4. გამოთვალეთ ნახ. 5.6-ზე გამოსახულ გადაწყვეტილებათა ხეში პირობითი ალბათობები 5.4 მაგალითში მოყვანილი პირობითი ალბათობებიდან.

სავარჯიშო 5.5. აჩვენეთ $EU(D_1) = 9800\$$ და $EU(D_2) = 10\ 697\$$ ნახ. 5.8-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხისთვის.



ნახ. 5.34. გადაწყვეტილებათა ხე.

სავარჯიშო 5.6. განვიხილოთ მაგალითი 5.6. დავუშვათ, რომ ლეონარდოს აქვს საშუალება ქოლგის წაღების გადაწყვეტილების მიღებამდე, კონსულტაცია გაიაროს ამინდის პროგნოზის შესახებ. შემდეგ დავუშვათ, რომ ამინდის პროგნოზი ამბობს, რომ წვიმს დღის 90%-ში, ეს დანამდვილებით წვიმს და დღის 20%-ის განმავლობაში წვიმა არ მოდის. ანუ,

$$P(Forecast = rain)|R = rain) = 0{,}9,$$

$$P(Forecast = rain)|R = no\ rain) = 0{,}2.$$

ისევე როგორც ადრე, დავუშვათ, ლეონარდო ფიქრობს, რომ

$$P(R = rain) = 0{,}4.$$

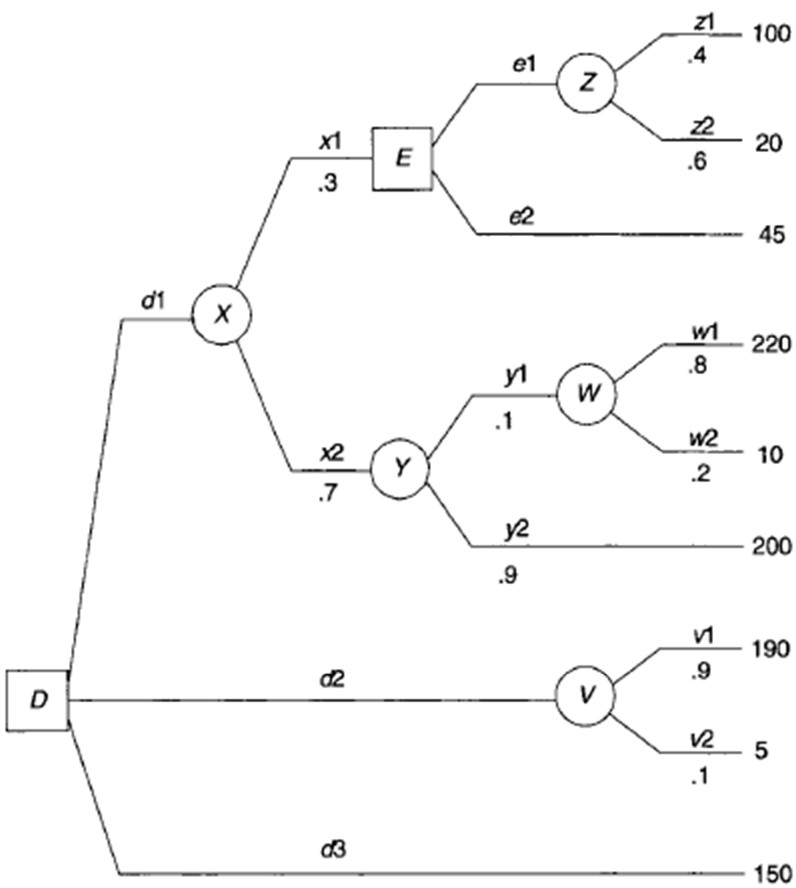
აჩვენეთ გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს ამ პრობლემის მაგალითს, რომელიც ითვალისწინებს მაგალით 5.6 მოცემულ სარგებლიანობას. გადაწყვიტეთ ეს ხე.

სავარჯიშო 5.7. ისევ განვიხილოთ მაგალითი 5.6. დავუშვათ, თუ წვიმს იმის ალბათობა რომ კოსტიუმს გაწმენდა დასჭირდება 0,7-ია, და იმის ალბათობა, რომ იწვიმებს – 0,3. კიდევ ერთხელ დავუშვათ, რომ

$$P(R = rain) = 0{,}4.$$

შეაფასეთ თქვენი საკუთარი სარგებლიანობები ამ სიტუაციისათვის, აჩვენეთ შემაჯამებელ გადაწყვეტილებათა ხე და გადაწყვიტეთ.

სავარჯიშო 5.8. განიხილეთ მაგალითი 5.8. დავუშვათ, თქვენი სიცოცხლის ხანგრძლივობა დაბადებიდან შეადგენს 75 წელს. შეაფასეთ საკუთარი $QALE$ ამ მაგალითში აღწერილი სიტუაციისათვის, აჩვენეთ შემაჯამებელ გადაწყვეტილებათა ხე და გადაწყვიტეთ.



ნახ. 5.35. გადაწყვეტილებათა ხე ორი გადაწყვეტით.

სავარჯიშო 5.9. დავუშვათ, 1000$-ის მქონე ახალგაზრდა, პოტენცური კაპიტალისტი ჯენიფერი აკეთებს ინვესტირებას. მას მოსმენილი აქვს მრავალი შთამბეჭდავი ამბავი იმათ შესახებ, რომლებმაც მიაღწიეს წარმატებას საფონდო ბაზარზე. ამიტომ ის გადაწყვეტს გააკეთოს სამი რამ თავისი 1000$-ით. (1)მას შეუძლია იყიდოს ოფციონები $Techjunk$-ზე, რომელიც საშუალებას აძლევს მას იყიდოს $Techjunk$ -ის 1000 აქცია თითო 22$-ად ერთი თვის განმავლობაში. (2) მას შეუძლია გამოიყენოს 1000 აშშ დოლარი $Techjunk$-ის აქციების საყიდლად. (3) მას შეუძლია დატოვოს 1000 დოლარი ყოველწლიური 0,07 შემოსავლით. ამჟამად, $Techjunk$ -ის აქცია იყიდება თითო 20$-ად. დავუშვათ შემდეგ, რომ ის გრძნობს, რომ არსებობს 0,5 იმის ალბათობა, რომ ორი თვის განმავლობაში $NASDAQ$ იქნება 2000 და 0,5, რომ იქნება 2500. თუ იქნება 2000, ის გრძნობს, რომ 0,3 ალბათობით $Techjunk$ აქცია იქნება თითო 23$-ად და 0,7 ალბათობით 15$-ად თითო აქცია. თუ იქნება 2500, ის გრძნობს, რომ 0,7 ალბათობით $Techjunk$ აქცია იქნება თითო 26$-ად და 0,3 ალბათობით 20$-ად. აჩვენეთ გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს ამ გადაწყვეტილებას, და გადაწყვიტეთ ეს ხე.

ვთქვათ, $P(NASDAQ = 2000) = p$ და, $P(NASDAQ = 2500) = 1 - q$. განსაზღრეთ p-ს მაქსიმალური მნიშვნელობა, რომლისთვისაც გადაწყვეტილება იქნებოდა ოფციონის ყიდვა. არსებობს კი p-ს მნიშვნელობა, რომლისთვისაც გადაწყვეტილება იქნებოდა ოფციონის ყიდვა?

სავარჯიშო 5.10. 1984 წელს $Penzoil$ და $Getty\ Oil$ შეთანხმდნენ შერწყმაზე. მაგრამ გარიგებამდე შეთანხმება დაიხურა, $Texaco$-მ უკეთესი ფასი შესთავაზა. ამგვარად, გორდონ გეტმა უარი თქვა პენზოილთან გარიგებაზე და მიჰყიდა ტექსაკოს. პენზოილმა დაუყონებლივ შეიტანა სარჩლი სამართლოში, მოიგო და დაჯილოვდა 11,1 მილიონი დოლარით. სასამართლოს გადაწყვეტილება შემცირებული იყო 2 მილიონი დოლარით, მაგრამ პროცენტებმა და ჯარიმამ მიგვიყვანა იქამდე, რომ საერთო თანხამ შეადგინა 10,3 მილიონ აშშ დოლარი. ჯეიმს კინერმა, ტექსაკოს მთავარმა აღმასრულებელმა დირექტორმა, თქვა, რომ იბრძოლებდა თავის საქმეზე აშშ-ის უზენაეს სასამართლოში, იმიტომ რომ მისი აზრით პენზოილი არ მოქმედებდა უსაფრთხოების და გაცვლის კომიისის წესების შესაბამისად, როდესაც მართავდა მოლაპარაკებას გეტთან. 1987 წელს, ცოტა ხნით ადრე, ვიდრე პენზოილი შეიტანდა სარჩელს ტექსაკოს წინააღმდეგ ყადაღის დადებაზე, ტექსაკომ შესთავაზა პენზოილს 2 მილიონი დოლარი საქმის მთლიანი დარეგულირებისათვის. პენზოილის თავჯდომარე, ჰუგ ლიდკე მიუთითებდა, რომ მისი მრჩეველის აზრით ამ საქმის

მოსაგვარებლად 3 მილიარდი დოლადიდან 5 მილიარდ დოლარამდე სამართლიანი იქნებოდა.

რა უნდა გააკეთოს ლიდკემ? არსებობს ორი აშკარა არჩევანი: (1) მას შეუძლია მიიღოს 2 მილიონი დოლარი ან (2) უარი თქვას მასზე. ვთქვათ ის განიხილავს ასევე 5 მილიონიან შეთავაზებას. ის თვლის, რომ ტექსაკო ან მიიღებს შეთავაზებას 0,17 ალბათობით ან უარყოფს შემხვედრ შეთავაზებას 0,5 ალბათობით, ან დაუბრუნდებიან 3 მილიონის დოლარის შეთავაზებას 0,33 ალბათობით. თუ ტექსაკო უარს იტყვის, ლიდკე მაშინ გადაწყვეტს უარი თქვას თუ მიიღოს შემხვედრი წინადადება. ლიდკე ვარაუდობს, რომ თუ ის უბრალოდ არ მიიღებს 2 მილიონი დოლარის წინადადებას შემხვედრი შეთავაზების გარეშე, თუ ტექსაკო უარს იტყვის თავის შემხვედრ შეთავაზებაზე, მაშინ საქმე საბოლოოდ სასამართლომდე მივა. თუ ის მიმართავს სასამართლოს, თვლის, რომ პენზოლი მიიღებს 10,3 მილიონ დოლარს, რომლის ალბათობა შეადგენს 0,2-ს, 5 მილიონი დოლარის ალბათობა 0,5-ია, ხოლო 0,3 ალბათობით ისინი არაფერს მიიღებენ.

აჩვენეთ და შეადგინეთ გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც წარმოადგენს ამ გადაწყვეტილებას და გადაწყვიტეთ ეს გადაწყვეტილებათა ხე.

რა მოხდა საბოლოოდ? ლიდკემ უბრალოდ უარი თქვა 2 მილიონ დოლარზე. როგორც კი პენზოლმა დაიწყო ყადაღის დადება ტექსაკოს აქტივებზე, ტექსაკომ გაკოტრების შესახებ ფედერალური კოდექსის მე-11 თავის თანახმად მოითხოვა კრედიტორებისაგან დაცვა. პენზოლმა შემდეგ წარმოადგინა ფინანსური რეორგანიზაციის გეგმა ტექსაკოს სახელით. გეგმის მიხედვით, პენზოლს უნდა მიეღო დაახლოებით 4,1 მლნ. დოლარი. საბოლოოდ, ორი კომპანია მორიგდა 3 მლნ. დოლარზე, როგორც ტექსაკოს ფინანსური რეორგანიზაციის ნაწილი.

პარაგრაფი 5.2

სავარჯიშო 5.11. წარმოადგინეთ სავარჯიშო 5.6-ში მოყვანილი პრობლემის მაგალითი გავლენის დიაგრამით. ხელით გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა. *Netika*-ს ან სხვა რომელიმე პროგრამული პაკეტის გამოყენებით ააგეთ და გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა.

სავარჯიშო 5.12. წარმოადგინეთ სავარჯიშო 5.7-ში მოყვანილი პრობლემის მაგალითი გავლენის დიაგრამით. ხელით გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა. *Netika*-ს ან სხვა რომელიმე პროგრამული პაკეტის გამოყენებით ააგეთ და გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა.

სავარჯიშო 5.13. წარმოადგინეთ სავარჯიშო 5.9-ში მოყვანილი პრობლემის მაგალითი გავლენის დიაგრამით. ხელით გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა. *Netika*-ს ან სხვა რომელიმე პროგრამული პაკეტის გამოყენებით ააგეთ და გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა.

სავარჯიშო 5.14. წარმოადგინეთ სავარჯიშო 5.10-ში მოყვანილი პრობლემის მაგალითი გავლენის დიაგრამით. ხელით გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა. *Netika*-ს ან სხვა რომელიმე პროგრამული პაკეტის გამოყენებით ააგეთ და გადაწყვიტეთ გავლენის დიაგრამა.

სავარჯიშო 5.15. მაგალითი 5.24-ის შემდეგ ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ არაა გასაკვირი ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – ეს არის სკანირების ჩატარება, რამდენადაც ამ სკანირების ჩატარება არ მოითხოვს დანახარჯს. დავუშვათ სკანირება მოითხოვს 1000 დოლარის ფინანსური დანახარჯს. ასევე დავუშვათ, რომ გადაწყვეტილების მიმღები პირი გადაწყვეტს, რომ 1000 აშშ დოლარი ეკვივალენტურია 0,01 სიცოცხლის წელთან. *Netika*-ს ან სხვა რომელიმე პროგრამული უზრუნველყოფის გამოყენებით ააგეთ გავლენის დიაგრამა, რომელიც ამ პრობლემის მაგალითს წარმოადგენს, და განსაზღვრეთ იქნება თუ არა ამ შეთხვევაში ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზაციას – კიდევ ერთხელ სკანირების ჩატარება.

თავი 6

შემდგომი მეთოდები გადაწყვეტილებათა ანალიზში

წინა თავში წარმოდგენილი იყო გადაწყვეტილებათა ანალიზის საფუძვლები. აქ ჩვენ მოგვყავს გადაწყვეტილებათა ანალიზის გამოყენების დამატებითი მეთოდები. ადამიანთა უმეტესობა არ მიიღებს ფულად გადაწყვეტილებებს, რომლებიც უბრალოდ ახდენენ მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, თუ ფულადი თანხის ოდენობა მეტია მათ შემოსავალთან შედარებით. ე.ი. ადამიანთა უმრავლესობა ცდილობს რისკს თავი აარიდოს. ამგვარად, ზოგადად ჩვენ უნდა მოვახდინოთ ინდივიდის რისკთან დამოკიდებულების მოდელირება გადაწყვეტილების მიღების ანალიზის დროს გადაწყვეტლების მიღებაში რეკომენდაციის მისაცემად.

6.1. რისკის არჩევანის მოდელირება

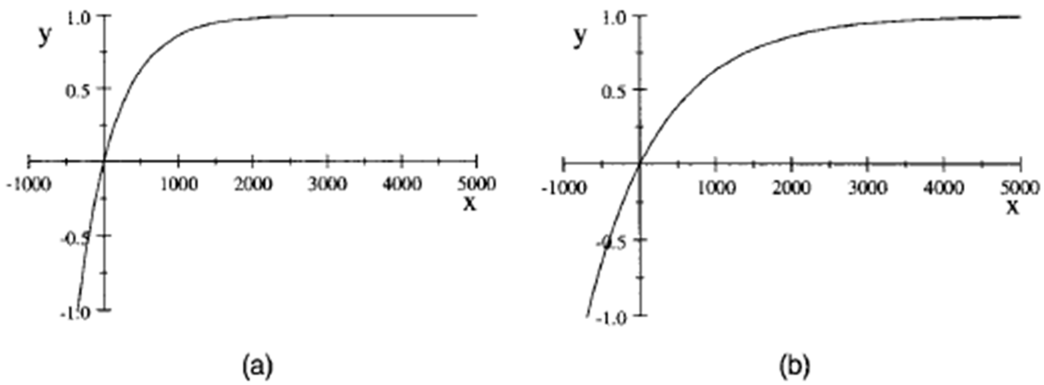
შეგახსენებთ, რომ თავი 5-ის მაგალით 5.1-ში ჩვენ ავირჩიეთ ალტერნატივა უდიდესი მოსალოდნელი მნიშვნელობით. რასაკვირველია ადამიანი, რომელიც ცდილობს რისკს თავი აარიდოს, ალბათ უპირატესობას მიანიჭებს გარანტირებულ 1005$-ს მიღებას, საბოლოო ჯამში მხოლოდ 500$-ის მიღების შესაძლებლობას, თუმცა ბევრი ადამიანი ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას თუ ფულადი თანხის ოდენობა მეტია მათ შემოსავალთან შედარებით. იდეა იმაში მდგომარეობს, რომ გრძელვადიან პერსპექტივაში ისინი უკეთესობისაკენ დაიწყებენ ასე კეთებას. როდესაც ადამიანი ადამიანი ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქიმიზაციას გადაწყვეტილების მისაღებად, ინდივიდს ეწოდება **მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზატორი**. მეორე მხრივ, თავი 5-ის მაგალით 5.1-ში აღწერილი სიტუაციის გათვალისწინებით, ადამიანთა უმეტესობა არ ახდენს 100 000 დოლარის ინვესტირებას *NASDIP*-ში იმიტომ, რომ ეს ძალიან ბევრი ფულია მათ საერთო სიმდიდრესთან შედარებით. იმ შემთხვევაში როცა ადამიანი არ მოახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, ჩვენ უნდა მოვახდინოთ ინდივიდის რისკთან დამოკიდებულების მოდელირება, რომ გამოვიყენოთ გადაწყვეტილების ანალიზი და რეკომენდაცია გავუწიოთ გადაწყვეტილებას. ამის გაკეთების ერთ-ერთ ხერხს **სარგებლიანობის ფუნქციის** გამოყენება წარმოადგენს, რომელიც დოლარებში ასახავს სარგებლიანობის რაოდენობას. შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ ასეთ ფუნქციებს.

6.1.1. ექსპონენციალური სარგებლიანობის ფუნქცია

ექსპონენციალური სარგებლიანობის ფუნქცია შემდეგნაირადაა მოცემული:

$$U_r\ (x) = 1 - e^{-x/r}$$

ამ ფუნქციაში r პარამეტრი, რომელსაც ეწოდება **რისკის ტოლერანტობა**, განსაზღვრავს რიკის თავის არიდების ხარისხს, რომელიც მოდელირებულია ფუნქციით. r რაც უფრო მცირე ხდება, ფუნქციური მოდელი მით უფრო რისკის ამრიდებელია. ნახ. 6.1(ა)-ზე ნაჩვენებია $U_{500}(x)$, ხოლო ნახ. 6.1(ბ)-ზე ნაჩვენებია $U_{1000}(x)$.



ნახ. 6.1. $U_{500}(x) = 1 - e^{-x/500}$ ფუნქცია მდებარეობს (ა)-ზე, ხოლო $U_{1000}(x) = 1 - e^{-x/1000}$ ფუნქცია მდებარეობს (ბ)-ზე.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ორივე ფუნქცია ამოზნექილია (ქვემოდან გახსნილი) და ნახ. 6.1 (ბ)-ზე წრფესთან უფრო ახლოსაა. რაც უფრო ამოზნექილია ფუნქცია, მით უფრო რისკის თავის ამრიდებელია ქცევის ფუნქციით მოდელირება. რისკ-ნეიტალობის მოდელირებისას (ე.ი. მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზატორად ყოფნისას), ჩვენ სარგებლიანობის ექსპონენციალური ფუნქციის ნაცვლად გამოვიყენებთ წრფეს და რისკთან დაკავშირებული ქცევის მოდელირებისათვის გამოვიყენებთ ჩაზნექილ (ზემოდან გახსნილი) ფუნქციას. მე-5 თავში რისკის ნეიტრალურობის მოდელირების ბევრი მაგალითი იყო. აქ ჩვენ კონცეტრირებას მოვახდენთ რისკის თავიდან აცილების ქცევის მოდელირებაზე.

მაგალითი 6.1. დავუშვათ, რომ მე-5 თავის მაგალით 5.1-ში სემმა უარყო გადაწყვეტილება, და ის გადაწყვეტს რომ მისი რისკთან ტოლერანტობა r ტოლია 500-ის. ამის შემდეგ სემისთვის გვექნება:

$$EU(Buy\ NASDIP) =$$

$$EU(\ NASDIP) = 0{,}25U_{500}(500\$) + 0{,}25U_{500}(1000\$) + 0{,}5U_{500}(2000\$) =$$

$$= 0{,}25\left(1 - e^{-500/500}\right). + 0{,}25\left(1 - e^{-1000/500}\right) + 0{,}5\left(1 - e^{-2000/500}\right) = 0{,}86504.$$

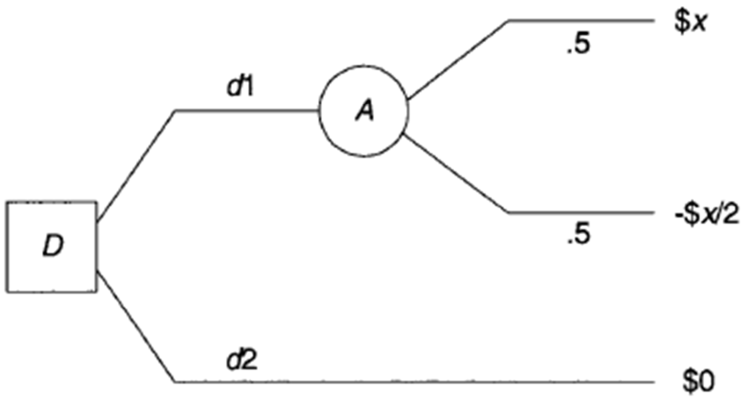
$$EU(Leave 100\$\ in\ bank) = U_{500}(1005\$) = 1 - e^{-1005/500} = 0{,}86601.$$

ამგვარად, სემი წყვეტს ფული ბანკში დატოვოს.

მაგალითი 6.2. ვთქვათ, რომ სიუ ნაკლებად რისკის თავიდან ამრიდებელია, ვიდრე სემი, და ის ყვეტს, რომ მისი რისკის მიმართ ტოლერანტობა 1000-ის ტოლია. თუ სიუ იღებს მე-5 თავის მაგალით 5.1-ში გადაწყვეტილებას, სიუსთვის:

$$EU(Buy\, NASDIP) =$$
$$EU(\, NASDIP) = 0{,}25U_{1000}(500\$) + 0{,}25U_{1000}(1000\$) + 0{,}5U_{1000}(2000\$) =$$
$$= 0{,}25\left(1 - e^{-500/1000}\right). + 0{,}25\left(1 - e^{-1000/1000}\right) + 0{,}5\left(1 - e^{-2000/1000}\right) = 0{,}68873.$$
$$EU(Leave 100\$\; in\; bank) = U_{1000}(1005\$) = 1 - e^{-1005/1000} = 0{,}63396.$$

ამგვარად სიუ გადაწყვეტს იყიდოს $NASDIP$.



ნახ. 6.2. თქვენ შეგიძლიათ შეაფასოთ რისკის ტოლერანტობა r, x-ის უდიდესი მნიშვნელობის მითითებით, რომლისთვისაც თქვენ გულგრილი იქნებით $d1$ და $d2$ შორის.

შეფასება r

წინა მაგალითებში ჩვენ უბრალოდ მივანიჭეთ რისკები სემისთვის და სიუსთვის. თქვენთვის ალბათ საინტერესოა, როგორ აღწევს ადამიანი თავისი რისკის ტოლერანტობას. შემდგომში ჩვენ გაჩვენებთ მისი შეფასების მეთოდს.

ესქპონენციალური სარგებლიანობის ფუნქციაში თქვენი პირადი r-ის მნიშვნელობის გამოთვლის ერთ-ერთი გზა მდგომარეობს იმ თამაშის განხილვაში, რომელშიც თქვენ იგებთ $x\$$-ს 0,5 ალბათობით და აგებთ $-x\$/2$ 0,5 ალბათობით. თქვენი r-ის მნიშვნელობა წარმოდგენს x-ის უდიდეს მნიშვნელობას, რომლისთვისაც თქვენ აირჩევდით ლატარიას არაფრის მოგებით. ეს ნაჩვენებია ნახ. 6.2-ზე.

მაგალითი 6.3. ვთქვათ ვაპირებთ ავაგდოთ სამართლიანი მონეტა. რა თქმა უნდა, მსურს ისეთი თამაში, რომელშიც მოვიგებ 10$-ს თუ მოვა ავერსი და წავაგებ 5$-ს თუ მოვა რევერსი. თუ ჩვენ თანხას 100$ და 500$-ით ან 1000$ და 500$-ით გავზრდით, მე მაინც მომეწონება თამაში. მაგრამ თუ თანხას გავზრდით 1 000 000$ და 500 000$-მდე მე აღარ მომინდებოდა თამაში, იმიტომ რომ მე თავს უფლებას არ მივცემ 50%-იანი შანსით

დავკარგო 500 000$. ამის მსგავსად აქეთ-იქით გადასვლით (ორმაგი შემცირების მსგავსად), მე შემიძლია შევაფასო ჩემი პირადი r-ის მნიშვნელობა. ჩემთვის r დაახლოებით 20 000 შეადგენს (ამდენ ფულს პროფესორები ვერ იღებენ.)

თქვენ შეიძლება გაგიჩნდეთ კითხვა ამ აზარტული თამაშის r-ის შესაფასებლად გამოყენების გამო. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი r-ისთვის:

$$0{,}5\left(1 - e^{-r/r}\right) + 0{,}5\left(1 - e^{-(-r/2)/r}\right) = 0{,}0083,$$

და

$$1 - e^{-0/r} = 0.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ r რისკის ტოლერანტობის მოცემული მნიშვნელობისათვის, თამაშს, რომელშიც თითოეული იგებს $r\$$ -ს 0,5 ალბათობით და აგებს $-r\$/2$-ს 0,5 ალბათობით, აქვს დახლოებით იგივე სარგებლიანობა როგორც გარკვეული 0$-ის მიღებისათვის. ჩვენ შეგვიძლია ეს ფაქტი გამოვიყენოთ, ხოლო შემდეგ საპირისპირო მუშაობით შევაფასოთ r. ე.ი. ჩვენ განვსაზღვრავთ r-ის მნიშვნელობას, რომლისთვისაც ჩვენ გულგრილები ვიმყოფებით ამ თამაშსა და არაფრის მიღებას შორის.

მუდმივი რისკის საშიშროება

ფულის მონაწილეობით პრობლემის გადაწყვეტის მოდელირების კიდევ ერთი გზა ეს არის გადაწყვეტილების მიღების და შედეგების შემდეგ საერთო სიმდიდრის განხილვა. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.

მაგალითი 6.4. ვთქვათ ჯოს აქვს საინვესტიციო შესაძლებლობა, რომელიც 0,4 ალბათობით 4000$-ის მიღების და 0,6 ალბათობით 2500$-ის დაკარგვის საშუალებას იძლევა, ვთქვათ, $d1$ არის საინვესტიციო საშუალებისათვის ალტერნატიული გადაწყვეტილება, ხოლო $d2$ გადაწყვეტილება ალტერნატიულად უარის თქმის (ე.ი. ის იღებს 0$-ს გარკვეულ თანხაზე), მაშინ:

$$E(d1) = 0{,}4(4000\$) + 0{,}6(-2500\$) = 100\$$$

$$E(d2) = 0\$.$$

ამიტომ, თუ ჯო იქნებოდა მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზატორი, ის აირჩევდა საინვესტიციო შესაძლებლობას. შემდეგ დავუშვათ, რომ ჯომ დეტალურად გაანალიზა თავისი რისკის ტოლერანტობა, და მან გადაწყვიტა, რომ მისთვის $r = 5000\$$. მაშინ

$$EU(d1) = 0{,}4\left(1 - e^{-4000/5000}\right) + 0{,}6\left(1 - e^{-(-2500/5000)}\right) = -0{,}1690$$

$$E(d2) = 1 - e^{-0/5000} = 0.$$

გადაწყვეტილებათა ხის გადაწყვეტა ნაჩვენებია ნახ. 6.3 (ა)-ზე. ასე რომ ჯოს რისკის ტოლერანტობის გათვალისწინებით ის ამ სარისკო ინვესტიციას არ აირჩევს.

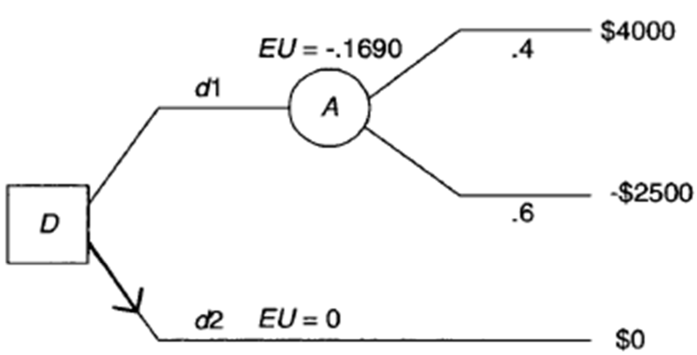
მაგალითი 6.5. დავუშვათ, რომ ჯოს მიმდინარე სიმდიდრე შეადგენს 10 000 დოლარს, და მას აქვს იგივე საივესტიციო შესაძლებლობა რაც ჰქონდა წინა მაგალითში. ჯომ შეიძლება იმსჯელოს, რომ მის ახლანდელ სიმდიდრეს აქვს არსებითი მნიშვნელობა იმის შემდეგ, რაც ის მიიღებს გადაწყვეტილებას და რეალიზების შედეგს. ამიტომ ის ახდენს პრობლემის მაგალითის მოდელირებას მისი საბოოლოო და არა საინვესტიციო შესაძლებლობიდან მოგება წაგების თვალსაზრისით. ამის გაკეთების შემდეგ გვაქვს

$$EU(d1) = 0{,}4\left(1 - e^{-(10\,000+4000)/5000}\right) + 0{,}6\left(1 - e^{-(10\,000-2500)/5000}\right) = 0{,}8418$$

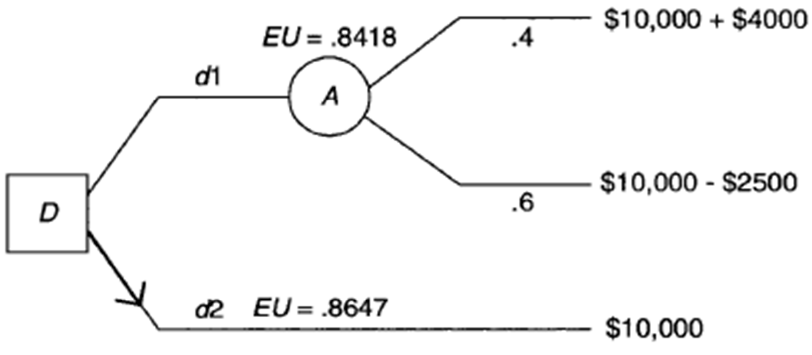
$$E(d2) = 1 - e^{-10\,000/5000} = 0{,}8647.$$

გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე ნაჩვენებია ნახ. 6.3(ბ)-ზე. ის ფაქტი, რომ მისი ახლანდელი სიმდიდრე შეადგენს 10 000 აშშ დოლლარს, ეს გავლენას არ ახდენს მის გადაწყვეტილებაზე. ალტერნატიულ გადაწყვეტილებას აქამდე არ აქვს უფრო დიდი სარგებლიანობა ვიდრე საინვესტიციო შესაძლებლობის არჩევას.

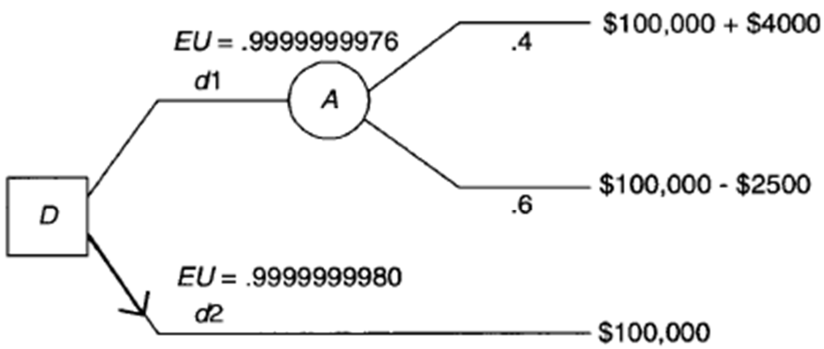
მაგალითი 6.6. შემდეგ დავუშვათ, რომ ჯო უარყოფს ინვესტირების შესაძლებლობას. მაგრამ ის კარგად ახორციელებს სხვა ინვესტიციებს მომდევნო წელს, ხოლო მისი საერთო სიმდიდრის თანხა ხდება 100 000 დოლარი. დავუშვათ, ჯოს იგივე საინვესტიციო შესაძლებლობა აქვს რაც ჰქონდა ერთი წლის წინ. ე.ი. საინვესტიციო შესაძლებლობა, რომელიც 0,4 ალბათობით 4000$-ის მიღების და 0,6 ალბათობით 2500$-ის დაკარგვის საშუალებას იძლევა. ის კვლავ პრობლემას განიცდის საბოლოო სიმდიდრის თავლსაზრისით. შემდეგ ჩვენ გვაქვს



(a)



(b)



(c)

ნახ. 6.3 გადაწყვეტილებათა ხის გადაწყვეტა 6.4 მაგალითისთვის ნაჩვენებია (ა)-ზე. იმავე მაგალითის გადაწყვეტილებათა ხე, როცა ჩვენ ვახდენთ მოდელირებას საერთო სიმდიდრის თვალსაზრისით, ნაჩვენებია (ბ) და (გ)-ზე,ის შეადგენს შესაბამისად 10 000 და 100 000 აშშ დოლარს.

$$EU(d1) = 0{,}4\left(1 - e^{-(100\,000+4000)/5000}\right) + 0{,}6\left(1 - e^{-(100\,000-2500)/5000}\right) = 0{,}9999999976$$

$$E(d2) = 1 - e^{-10\,000/5000} = 09999999980.$$

გადაწყვეტილი გადაწყვეტილებათა ხე ნაჩვენებია ნახ. 6.3(გ)-ზე, თუმცა საინვესტიციო შესაძლებლობის სარგებლიანობა ახლა ძალიან ახლოსაა იმასთან, რომ არაფერი აკეთოს, ის მაინც ისევ მცირეა, და მან მაინც არაფერი უნდა გააკეთოს.

ეს არის სარგებლიანობის ექსპონენციალური ფუნქციის თვისება, რომლითაც ინდივიდის მთლიან სიმდიდრეს არ შეუძლია გავლენა მოახდინოს იმ გადაწყვეტილებაზე, რომელიც ფუნქციის მეშვებით მიიღება. ასეთ ფუნქციას უწოდებენ, **მუდმივად რისკის თავის ამრიდებელი სარგებლინობის ფუნქციას**. თუ ვინმე იყენებს ასეთ ფუნქციას პიროვნების რისკის არჩევითობის მოდელირებისათვის, მაშინ მას მოუწევს გადააფასოს ფუნქციის პარამეტრები როდესაც პიროვნების სიმდიდრე მნიშვნელოვნად იცვლება. მაგალითად, ჯომ უნდა გადააფასოს თავისი რისკის მიმართ ტოლერანტობა r, როდესაც მისი მთლიანი სიმდიდრე იცვლება 10 000 \$-დან 100 000 \$-მდე.

მიზეზი, რომლის გამოც სარგებლიანობის ექსპონენციალური ფუნქცია ახდენს მუდმივი რისკის საშიშროების დემონსტრირებას იმაში მდგომარეობს, რომ ტერმინი „საერთო სიმდიდრე“ აუქმებს უტოლობას, რომელიც ახდენს ორი სარგებლიანობის შედარებას. მაგალითად, განვიხილოთ ისევ ჯოს საინვესტიციო საშუალება, რომელიც გულისხმობს 0,4 ალბათობით 4000$-ის მიღებას და 0,6 ალბათობით 2500$-ის დაკარგვას. ვთქვათ w ჯოს საერთო სიმდიდრეა. პირველი უტოლობა შემდეგ უტოლობათა მიმდევრობაში ახდენს საინვესტიციო საშუალების და არაფრის აღების სარგებლიანობების შედარებას მაშინ, როდესაც განვიხილავთ w საერთო სიმდიდრეს, უკანასკნელი უტოლობა კი ახდენს საინვესტიციო საშუალების და არაფრის აღების სარგებლიანობების შედარებას, მაშინ როდესაც ჩვენ არ გავიხილავთ საერთო სიმდიდრეს. თუ თქვენ მიყვებით უტოლობათა მიმდევრობას, თქვენ დაინახავთ, რომ ყველა მათგანი ერთმანეთის ეკვივალენტურია. ამიტომ საერთო სიმდიდრის განხილვამ არ შეიძლება გავლენა იქონიოს გადაწყვეტილებაზე:

$$0.4\left(1-e^{-\frac{\omega+400}{5000}}\right)+0.6\left(1-e^{-(\omega-2500)/5000}\right)<\left(1-e^{-\omega/5000}\right)$$

$$0.4\left(1-e^{-\omega/5000}e^{-4000/5000}\right)+0.6\left(1-e^{-\omega/5000}e^{-(-2500)/5000}\right)<1-e^{-\omega/5000}$$

$$1-0,4\left(e^{-\omega/5000}e^{-4000/5000}\right)-0.6\left(e^{-\omega/5000}e^{-(-2500)/5000}\right)<1-e^{-\omega/5000}$$

$$-0,4\left(e^{-\omega/5000}e^{-4000/5000}\right)-0.6\left(e^{-\omega/5000}e^{-(-2500)/5000}\right)<-e^{-\omega/5000}$$

$$-0.4\left(e^{-4000/5000}\right)-0.6\left(e^{-(-2500)/5000}\right)<-1$$

$$0,4\left(1-e^{-4000/5000}\right)+0.6\left(1-e^{-(-2500)/5000}\right)<1-1$$

$$0,4\left(1-e^{-4000/5000}\right)+0.6\left(1-e^{-(-2500)/5000}\right)<1-e^{-0/5000}.$$

6.1.2 რისკის თავის ამრიდებელი სარგებლინობის ფუნქციის კლებადობა

თუ საერთო სიმდიდრის ცვლილებას შეუძლია შეცვალოს გადაწყვეტილება, რომელიც მიიღება რისკის თავის ამრიდებელი სარგებლინობის ფუნქციის გამოყენებით, მაშინ ფუნქციას უწოდებენ **კლებად რისკის თავის ამრიდებელ სარგებლიანობის ფუნქციას.** ასეთი ფუნქციის მაგალითს წარმოადგენს ლოგარითმის ფუნქცია. ამას ჩვენ ვაჩვენებთ ამ ფუნქციის ჯოს რისკის არჩევანის მოდელირების გამოყენებით.

მაგალითი 6.7. როგორც 6.4. მაგალითში, დავუშვათ, რომ ჯოს აქვს საინვესტიციო საშუალება, რომელიც გულისხმობს 0,4 ალბათობით 4000$-ის მიღებას და 0,6 ალბათობით

2500\$-ის დაკარგვას. ისევ $d1$ არის საინვესტიციო საშუალებისათვის ალტერნატიული გადაწყვეტილება, ხოლო $d2$ გადაწყვეტილება – ალტერნატიულად უარის თქმის. დავუშვათ, რომ ჯოს რისკის არჩევანის მოდელირება შეიძლება $\ln(x)$-ის გამოყენებით. პირველი, მოდი მოვახდინოთ პრობლემის მაგალითის მოდელირება, როდესაც აქვს საერთო სიმდიდრე 10 000\$-ის ოდენობით. მაშინ გვექნება:

$$EU(d1) = 0{,}4\ln(10\,000 + 4000) + 0{,}6\ln(10\,000 - 2500) = 9{,}1723$$

$$EU(d2) = \ln 10\,000 = 9{,}2103.$$

ამიტომ, გადაწყვეტილება მდგომარეობს იმაში, რომ უარვყოთ საინვესტიციო შესაძლებლობა და არაფერი ვაკეთოთ.

მოდი ახლა მოვახდინოთ პრობლემის მაგალითის მოდელირება, როდესაც ჯოს აქვს 1000 000\$-ის საერთო სიმდიდრე. მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$EU(d1) = 0{,}4\ln(100\,000 + 4000) + 0{,}6\ln(100\,000 - 2500) = 11{,}5134$$

$$EU(d2) = \ln 100\,000 = 11{,}5129.$$

ამიტომ გადაწყვეტილება ახლა მდგომარეობს იმაში, რომ გამოვიყენოთ საინვესტიციო შესაძლებლობა.

6.2 უშუალოდ რისკის გაანალიზება

ზოგიერთ გადაწყვეტილების მიმღები შეიძლება არ იყოს კმაყოფილი პერსონალური სარგებლიანობის ფუნქციის შეფასებებით და ასეთ ფუნქციაზე დაყრდნობით მიღებული გადაწყვეტილებებით. პირიქით, მათ შეიძლება სურდეთ პირდაპირ გაანალიზება იმ რისკის, რომელიც ალტერნატიულ გადაწყვეტილებას ახლავს თან. ამის გაკეთების ერთ-ერთი გზა მდგომარეობს მოსალოდნელი მნიშვნელობის განაწილების ზომად დისპერსიის გამოყენებაში. კიდევ ერთი გზაა რისკის პორტფელების შემუშავება. ჩვენ ვიმსჯელებთ თითოეული ტექნიკის შესახებ რიგრიგობით.

6.2.1 რისკის გასაზომად დისპერსიის გამოყენება

დავიწყოთ შემდეგი მაგალითიდან.

მაგალითი 6.8. დავუშვათ, რომ პატრისია იღებს გადაწყვეტილებას, რომელიც ნახ. 6.4-ზე გამოსახულ გადაწყვეტილებათა ხის საშუალებითაა მოდელირებული. თუ პატრისია უბრალოდ მოახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, სავარჯიშოს სახით დავტოვოთ იმის ჩვენება, რომ

$$E(d1) = 1220\$,$$

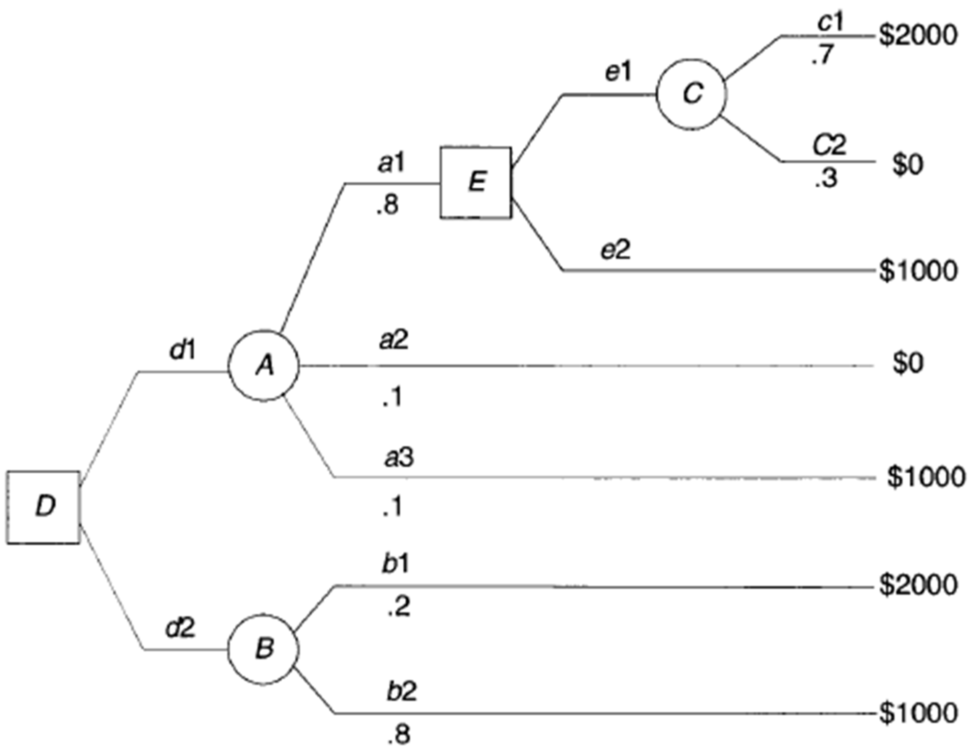
$$E(d2) = 1200\$.$$

ამგვარად, $d2$ არის ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას. მაგრამ მოსალოდნელი მნიშვნელობები თავისთავად არაფერს გვეუბნებიან იმ რისკის შესახებ, რომელიც დაკავშირებულია ალტერნატივებთან. თუ ჩვენ ავირჩევთ $d1$ ალტერნატივას, მაშინ:

$$P(2000) = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$$

$$P(1000) = 0{,}1$$

$$P(0) = 0{,}8 \times 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}34.$$



ნახ. 6.4. მაგალით 6.8-ში განხილული გადაწყვეტილებათა ხე.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ 0$-ის მიღების ორი გზა არსებობს. ე.ი. $a1$ და $c1$ შედეგები შეიძლება მოხდეს $0{,}8 \times 0{,}3$ ალბათობით, და $a2$ შედეგი – 0,1 ალბათობით. მაშინ გვექნება:

$$Var(d1) =$$

$$= (2000 - 1220)^2 P(2000) + (1000 - 1220)^2 P(1000) + (0 - 1220)^2 P(0) =$$

$$= (2000 - 1220)^2 \times 0{,}56 + (2000 - 1220)^2 \times 0{,}1 + (0 - 1220)^2 \times 0{,}34 = 851\ 600$$

$$\sigma_{d1} = \sqrt{851{,}600} = 922{,}82.$$

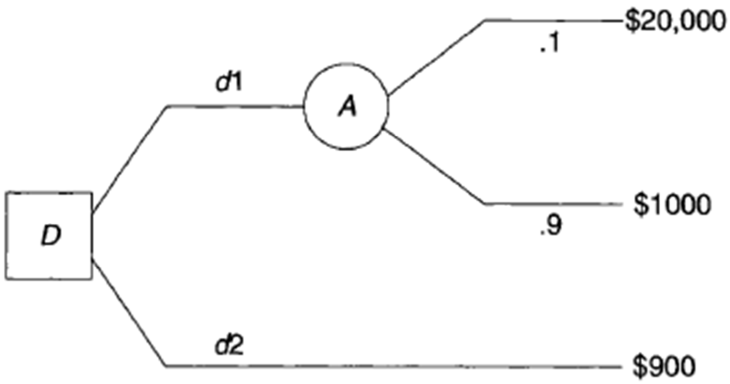
სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ იმის ჩვენებას, რომ

$$Var(d2) = 160\ 000$$

$$\sigma_{d2} = 400.$$

ამიტომ, თუ ჩვენ გამოვიყენებთ რისკის ზომად დისპერსიას, ჩვენ ვთვლით, რომ $d1$ კიდევ უფრო მეტად სარისკოა, რაც იმას ნიშნავს, რომ რამდენედაც პატრისია რისკის თავის ამრიდებელია, მან შეძლება აირჩიოს $d2$.

რისკის ზომად მარტო დისპერსიის გამოყენებამ შეიძლება შეცდომაში შეგვიყვანოს. ამას შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს.



ნახ. 65. მაგალით 6.8-ში განხილული გადაწყვეტილებათა ხე.

მაგალითი 6.9. ახლა დავუშვათ, რომ პატრისია იღებს გადაწყვეტილებას, რომელიც ნახ. 6.5-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის საშუალებითაა მოდელირებული. სავარჯიშოს სახით დავტოვოთ იმის ჩვენება, რომ

$$E(d1) = 2900\$$$

$$Var(d1) = 32\,490\,000$$

$$\sigma_{d_1} = 5700$$

და

$$E(d2) = 900\$$$

$$Var(d2) = 0$$

$$\sigma_{d_2} = 0.$$

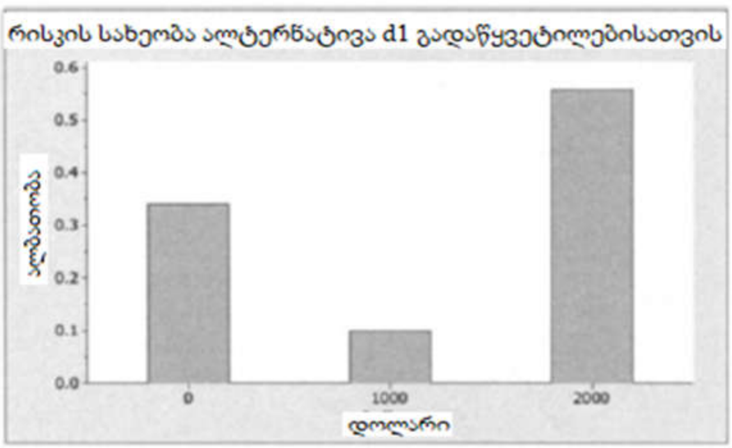
თუ პატრისია რისკის ზომად გამოიყენებს მხოლოდ დისპერსიას, მან შეიძლება აირჩიოს ალტერნატივა $d2$, რამდენედაც $d1$-ს დიდი დისპერსია აქვს. აგრამ დარწმუნებით, რომ $d1$ ალტერნატივით უფრო მეტი ბრუნდება, ვიდრე $d2$ ალტერნატივით.

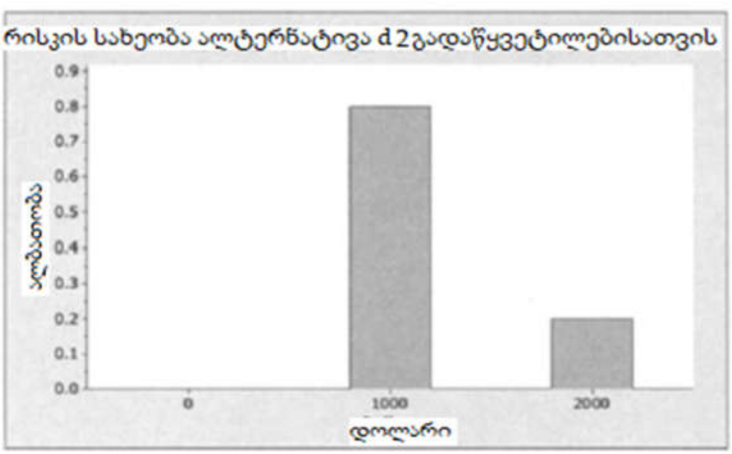
ჩვენ ვხედავთ, რომ რისკის ზომად მხოლოდ დისპერსიის გამოიყენებამ შეიძლება ძალიან შეგვიყვანოს შეცდომაში. ეს ის შეცდომაა, რომელსაც ზოგიერთი ინვესტორი უშვებს. ე.ი. ისინი ხედავენ რომ ერთ თანაზიარ ფონდს ბოლო 10 წლის განმავლობაში შედარებით მაღალი მოსალოდნელი შემოსავალი აქვს, ვიდრე მეორე ფონდს, მაგრამ უარს ამბობენ პირველზე, რომდენადაც მას ასევე მაღალი დიპერსია აქვს. თუმცა თუ ისინი

ყოველწლიურ შედეგებს ადევნებენ თვალს და დაინახავენ, რომ პირველი ყოველთვის დომინირებს მეორეზე.

6.2.2 რისკის პროფილები

მოსალოდნელი მნიშვნელობა და დისპერსია – ეს არის შემაჯამებელი სტატისკიკა, და შესაბამისად, ჩვენ დავკარგავთ ინფორმაციას, თუ ყველა ჩვენი შეტყობინება ამ მნიშვნელობებს წარმოადგენს. გარდა ამისა, თითოეული გადაწყვეტილებისათვის არის ალტერნატივა, ჩვენ შეგვეძლო ყველა შესაძლო შედეგის ალბათობის ანგარიშის წარმოდგენა, თუ ალტერნატივა შერჩეულია. გრაფს, ორმელიც გვიჩვენებს ამ ალბათობებს უწოდებენ **რისკის პროფილს.**

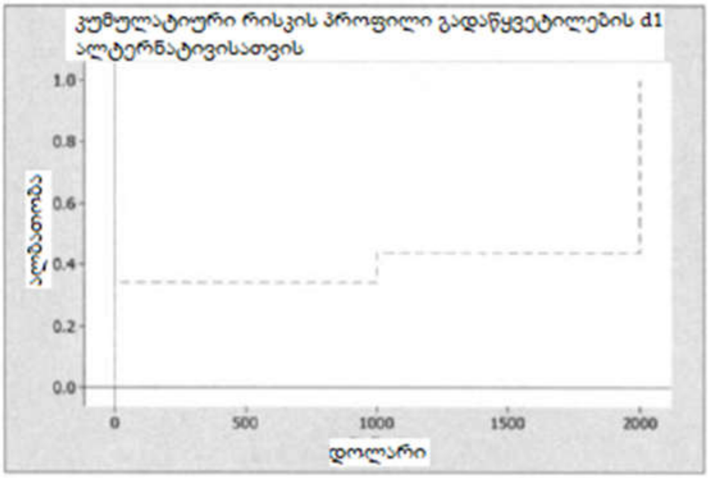


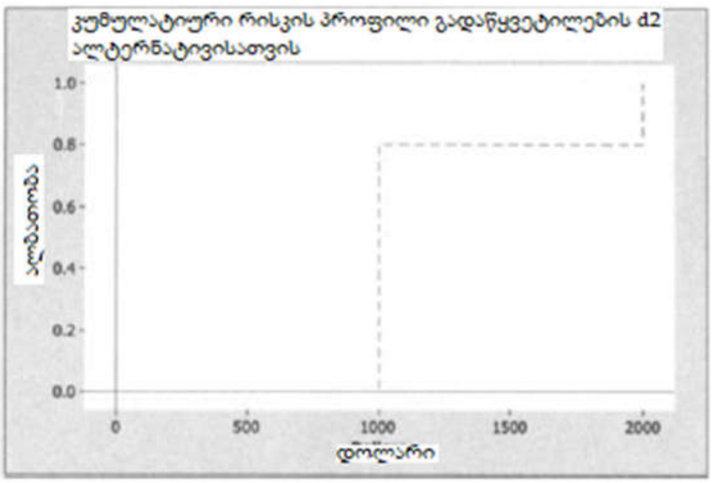


ნახ. 6.6. რისკის პროფილი მაგალით 6.8-ში მოცემული გადაწყვეტილებებისათვის.

მაგალითი 6.10. ისევ განვიხილოთ პატრისიას გადაწყვეტილება, რომელიც განხილული იყო მაგალით 6.8-ში. ამ მაგალითში ჩვენ გამოვთვალეთ ყველა შესაძლო შედეგის ალბათობა თითოეული გადაწყვეტილებისათვის. ეს შედეგები გამოვიყენოთ ნახ. 6.6-ის ასაგებად. რისკის ამ პროფილებიდან პატრიციამ შეიძლება დაინახოს, რომ არსებობს იმის კარგი შანსი, რომ ყველაფერი დასრულდეს არაფრით, თუ ის აირჩევს $d1$ ალტერნატივას,

მაგრამ მას ასევე აქვს შანსი მიიღოს 2000\$. მეორე მხრივ, თუ ის აირჩევს $d2$-ს საბოლოოდ ის მიიღებს 1000\$-ს, მაგრამ ეს ალბათ ყველაფერია რასაც ის მიიღებს.



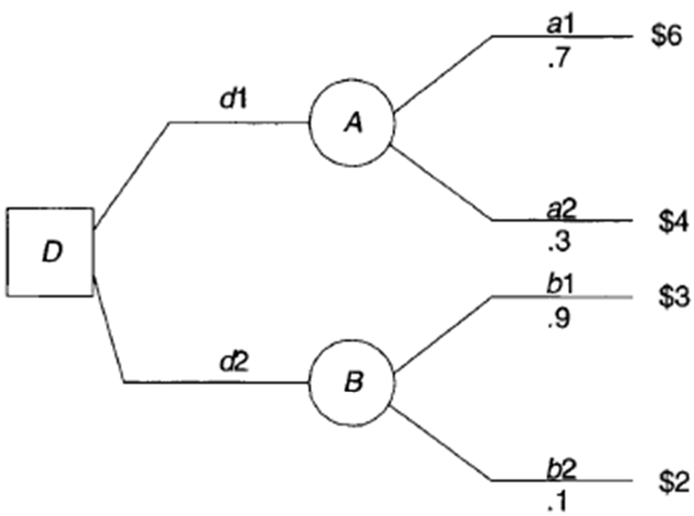


ნახ. 6.7 მაგალით 6.8-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის ერთობლივი რისკების პროფილები.

ერთობლივი რისკის პროფილი თითოეული x თანხისთვის გვჩვენებს იმის ალბათობას, რომ მოგება იქნება ნაკლები ან ტოლი x-ის, თუ ალტერნატიული გადაწყვეტილება არჩეულია. ერთობლივი რისკის პროფილი ერთობლივი განაწილების ფუნქციაა. ნახ. 6.7 გვიჩვენებს მაგალით 6.8-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის ერთობლივი რისკების პროფილებს.

6.3 დომინირება

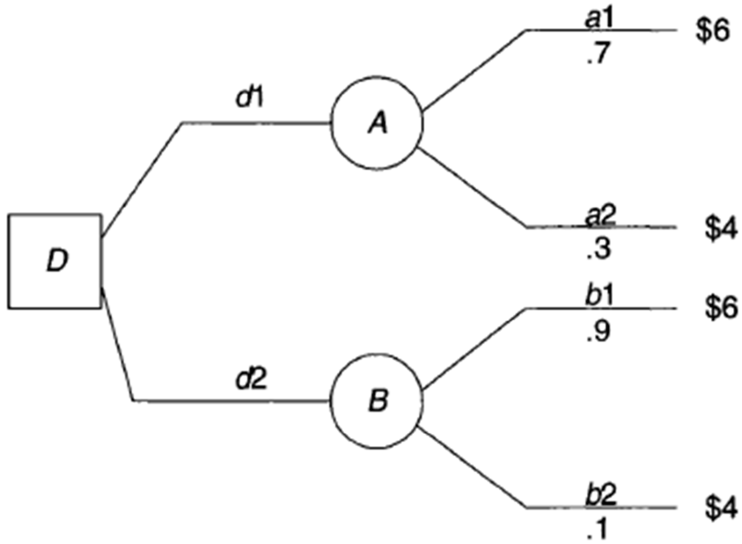
ზოგიერთი გადაწყვეტილება არ მოითხოვს სარგებლიანობის ფუნქციების ან რისკის პროფილების გამოყენებას გადაწყვეტილების მიმღები პირისათვის. ჩვენ შემდგომ განვიხილავთ დომინირებას.



ნახ. 6.8. ალტერნატიული $d1$ გადაწყვეტილების ვარიანტი დეტერმინანტულად დომინირებს $d2$ ალტერნატიულ გადაწყვეტილებაზე.

6.3.1 დეტერმინებული დომინირება

დავუშვათ, გვაქვს გადაწყვეტილება, რომლის მოდელირება შეიძლება ნახ. 6.8-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის მეშვეობით. თუ ჩვენ ავირჩიევთ $d1$ ალტერნატივას, ყველაზე მცირე თანხა რისი მიღებაც შეგვიძლია 4$-ია, მაშინ როდესაც, თუ ჩვენ ავირჩევთ $d2$ ალტერნატივას, ყველაზე დიდი თანხა, რომლის მიღებაც შეგვიძლია 3$-ია. იმის გათვალისწინებით, რომ სიმდიდრის მაქსიმალიზაცია წარმოადგენს ამ გადაწყვეტილებაში ერთადერთ მოსაზრებას, მაშინ არ არსებობს გონივრული არგუმენტი, რომელიც შემოგვთავაზებდა $d2$-ის არჩევას $d1$-ის სანაცვლოდ, და ჩვენ ვამბობთ, რომ $d1$ დეტერმინანტულად დომინირებს $d2$-ს. ზოგადად, $d1$ ალტერნატივა **დეტერმინანტულად დომინირებს** $d2$ ალტერნატიულ გადაწყვეტილებაზე, თუ $d1$-ის არჩევის დროს მიღებული სარგებლიანობა მეტია, ვიდრე სარგებლიანობა, რომელიც მიიღება $d2$-ის არჩევის დროს შემთხვევითი კვანძების შედეგებისაგან დამოუკიდებლად. როდესაც ვხედავთ დეტერმინანტულ დომინირებას, აუცილებელი არაა მოსალოდნელი სარგებლიანობის გამოთვლა ან რისკის პროფილის შემუშავება.



ნახ. 6.9 ალტერნატიული $d2$ გადაწყვეტილება სტოქასტურად დომინირებს $d1$ ალტერნატიულ გადაწყვეტილებაზე.

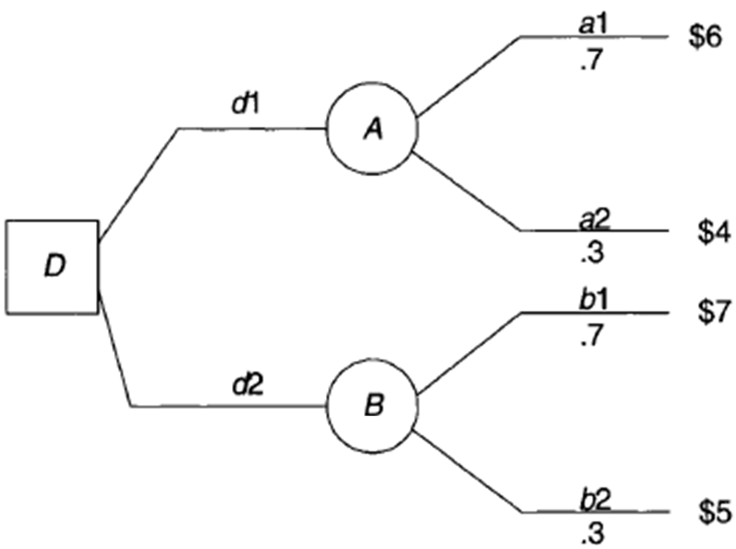
6.3.2 სტოქასტური დომინირება

დავუშათ, რომ გვაქვს გადაწყვეტილება, რომელის მოდელირებაც შეიძლება ნახ. 6.9-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის მეშვეობით. თუ შედეგები იქნება $a1$ და $b2$, ჩვენ უფრო მეტ ფულს მივიღებთ, თუ ავირჩევთ $d1$-ს, მაშინ როცა, თუ შედეგები ტოლი იქნება $a2$ -ის და $b1$-ის ჩვენ მეტ ფულს მივიღებთ, თუ ავირჩევთ $d2$-ს. ამგვარად არ არსებობს დეტერმინებული დომინირება. მაგრამ ორივე გადაწყვეტილებისათვის შედეგი ერთნაირია, კერძოდ 6$ და 4$, და ჩვენ თუ ავირჩევთ $d2$-ს, ალბათობა მაღალია, რომ ჩვენ მივიღებთ 6$-ს. ამგვარად, ისევ ისე, იმის გათვალისწინებით, რომ თუ სიმდიდრის მაქსიმალიზაცია წარმოადგენს ამ გადაწყვეტილებაში ერთადერთ მოსაზრებას, მაშინ არ არსებობს გონივრული არგუმენტი, რომელიც შემოგვთავაზებდა $d2$-ის არჩევას $d1$-ის სანაცვლოდ, და ჩვენ ვამბობთ, რომ $d2$ ალტერნატივა სტოქასტურად დომინირებს $d1$ ალტერნატივაზე.

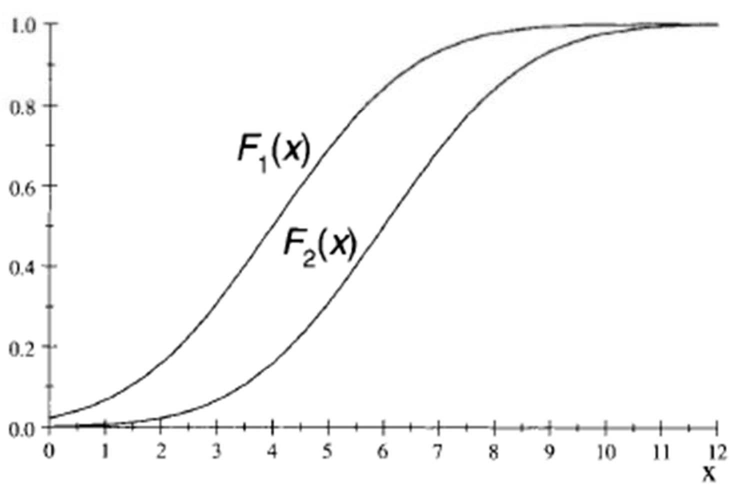
სტოქასტური დომინირების სხვა შემთხვევა ნაჩვენებია ნახ. 6.10-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხით. ამ ხეზე ალბათობები ერთნაირია ორივე შემთხვევითი კვანძისათვის, მაგრამ B-ის შედეგებისათვის სარგებლიანობა მაღალია. ანუ, თუ $b1$ ხდება, ჩვენ ვიღებთ 7$-ს, თუ $a1$ აქვს ადგილი, მაშინ ჩვენ მხოლოდ 6$-ს მივიღებთ, და თუ $b2$ – ჩვენ ვიღებთ 5$-ს, ხოლო თუ $a2$ – მაშინ ჩვენ მხოლოდ 4$-ს ვიღებთ. ამიტომ ისევ თუ დავუშვებთ, რომ სიმდიდრის მაქსიმალიზაცია წარმოადგენს ამ გადაწყვეტილებაში ერთადერთ მოსაზრებას, მაშინ არ არსებობს გონივრული არგუმენტი, რომელიც

შემოგვთავაზებდა $d2$-ის არჩევას $d1$-ის სანაცვლოდ, და ჩვენ ვამბობთ, რომ $d2$ ალტერნატივა სტოქასტურად დომინირებს $d1$ ალტერნატივაზე.

მიუხედავად იმისა, რომ ხშირად არაა რთული სტოქასტური დომინირების აღიარება, კონცეფციის განსაზღვრა ცოტა სახიფათოა. ერთობლივი რისკის პროფილების თვალსაზრისით ჩვენ ამას ვაკეთებთ. ვამბობთ, რომ ალტერნატივა $d2$ **სტოქასტურად დომინირებს** $d1$ ალტერნატივაზე, თუ $d2$-სთვის ერთობლივი რისკის პროფილი $F_2(x)$, რომელიც ძევს $d1$-სთვის ერთობლივი რისკის პროფილი $F_1(x)$-ის ქვეშ თუნდაც x-ის ერთი მნიშვნელობისათვის და არ მდებარეობს მის ზემოთ x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.



ნახ. 6.9. ალტერნატიული $d2$ გადაწყვეტილება სტოქასტურად დომინირებს $d1$ ალტერნატიულ გადაწყვეტილებაზე.



ნახ. 6.11. თუ, $F_1(x)$ არის $d1$-თვის ერთობლივი რისკის პროფილი და $F_2(x)$ არის $d2$-თვის ერთობლივი რისკის პროფილი, მაშინ $d2$ სტოქასტურად დომინირებს $d1$-ზე.

მაშასადამე x-ის თუნდაც ერთი მნიშვნელობისათვის:

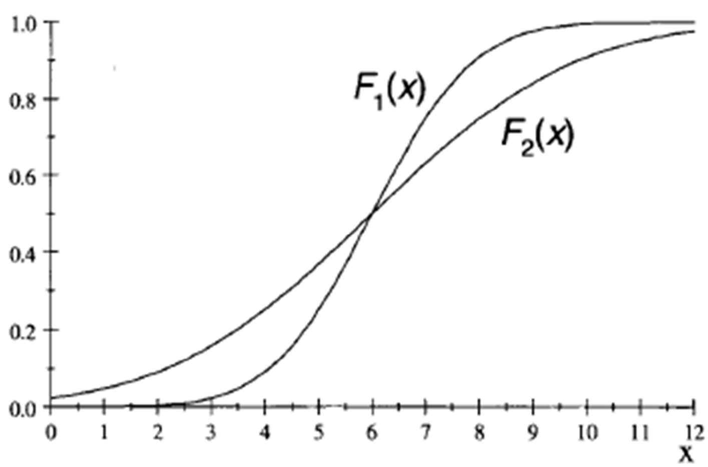
$$F_2(x) < F_1(x),$$

და x-ის ყველა მნიშვნელობისათვის:

$$F_2(x) \leq F_1(x).$$

ეს ნაჩვენებია ნახ. 6.11-ზე. რატომ უნდა იყოს ეს სტოქასტური დომინირების განსაზღვრება? კიდევ ერთხელ შეხედეთ ნახ. 6.11-ს. არ არსებობს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც ა x\$-ის ან უფრო ნაკლების რეალიზაციის ალბათობა უფრო მცირეა, თუ ჩვენ ავირჩევთ $d1$, ვიდრე $d2$-ის არჩევისას. ამგვარად, არ არსებობს ფულადი თანხა, რომელიც შეიძლება დასჭირდეს ან მოითხოვებოდეს, რომ $d1$ გახდეს უკეთესი არჩევანი.

ნახ. 6.12 ნაჩვენებია ორი ერთობლივი რისკის პროფილი, რომლებიც იკვეთებიან, რაც იმას ნიშნავს, რომ სტოქასტური დომინირება არ გვაქვს. ახლა არჩეული ალტერნატივა დამოკიდებულია მხოლოდ ინდივიდის არჩევანზე. მაგალითად, თუ თანხა მითითებულია 100\$-ის ერთეულებში და მერის სჭირდება როგორც მინიმუმ 400 დოლარი, რომ გადაიხადოს იჯარა ან გამოასახლებენ, მას შეუძლია აირჩიოს $d1$ ალტერნატივა, მეორე მხრივ, თუ სემს სჭირდება როგორც მინიმუმ 800 დოლარი, რომ გადაიხადოს იჯარა ან გამოასახლებენ, მას შეუძლია აირჩიოს $d2$ ალტერნატივა.



ნახ. 6.12 არასტოქასტური დომინირება

6.3.3 კარგი არჩევანი კარგი შედეგის წინააღმდეგ

ვთქვათ, რომ სკოტმა და სიუმ მიიღეს გადაწყვეტილება, რომელიც მოდელირებულია ნახ. 6.10-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხით, სკოტი ირჩევს $d1$ ალტერნატივას, ხოლო სიუ ირჩევს $d2$ ალტერნატივას. შემდეგ დავუშვათ, რომ ვიღებთ $a1$ და $b2$ შედეგებს. ამგვარად სკოტი ამთავრებს 6\$-ით, ხოლო სიუ – 5\$-ით. მიიღო სკოტმა სიუზე უკეთესი გადაწყვეტილება? ჩვენ უბრალოდ ვამტკიცებდით, რომ არ არსებობს $d1$-ის არჩევის სასარგებლოდ გონივრული არგუმენტი $d2$-თან შედარებით. თუ ჩვენ ამ მოთხოვნას

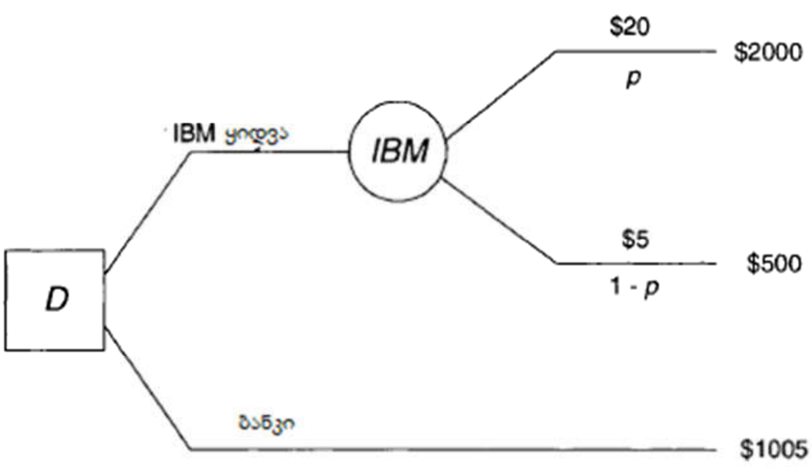
მივიღებთ, ახლა ჩვენ ვერ შევძლებთ გავაკეთოთ დასკვნა, რომ სკოტმა სიუსთან შედარებით უკეთესი არჩევანი გააკეთა. უფრო მეტიც, სკოტმა გააკეთა **ცუდი არჩევანი კარგი შედეგით**, მაშინ როცა სიუმ გააკეტა **კარგი არჩევანი ცუდი შედეგით**. გადაწყვეტილების ხარისხი უნდა შეფასდეს გადაწყვეტილების მიღებისას ხელმისაწვდომი ინფორმაციის საფუძველზე და არა იმ შედეგის საფუძველზე, რომელიც გადაწყვეტილების მიღების შემდეგაა რეალიზებული.

6.4 მგრძნობელობის ანალიზი

როგორც გავლენის დიაგრამა ისე გადაწყვეტილებათა ხე საჭიროებს, რომ ჩვენ შევაფასოთ ალბათობები და შედეგები. ხანდახან ამ მნიშვნელობების შეფასება შეიძლება რთული და შრომატევადი იყოს. მაგალითად, რთული და შრომატევადი იქნებოდა იმის განსაზღვრა, რომ ალბათობა, რომ 2008 წლის იანვარში $S\&P$ 500 იქნება 1500 მაღალი, იქნებოდა 0,3 ან 0,35. ზოგჯერ ამ მნიშვნელობების შემდგომი დაზუსტება ნებისმიერ შემთხვევაში არ იქონიებს გავლენას ჩვენს გადაწყვეტილებაზე. შემდეგ ჩვენ განვიხილავთ **მგრძნობელობის ანალიზს**, რომელიც წარმოადგენს იმის ანალიზს, თუ შედეგების და ალბათობების მნიშვნელობები როგორ ახდენენ გავლენას ჩვენს გადაწყვეტილებაზე. მარტივი მოდელის მეშვეობით კონცეფციის დანერგვით, ჩვენ ვაჩვენებთ უფრო დეტალურ მოდელებს.

6.4.1 მარტივი მოდელი

ჩვენ წარმოგიდგენთ მაგალითების მიმდევრობას.



ნახ. 6.13 ვიდრე p 0,337-ზე მეტია IBM-ის ყიდვა ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას.

მაგალითი 6.11. დავუშვათ, რომ ამჟამად IBM აქციაზე 10$-ს შეადგენს, და თქვენ გრძნობთ, რომ 0,5 ალბათობით თვის ბოლოს ის დაიწევს 5$-მდე, ხოლო 0,5 ალბათობით აიწევს 20$-მდე. თქვენ გაქვთ 1000$, რომ განახორციელოთ ინვესტირება, და თქვენ იყიდით 100 აქციას ან ჩადებთ ფულს ბანკში და ყოველთვიურად მიიღოთ 0,005 საპროცენტო განაკვეთი. თუმცა თქვენ საკმაოდ დარწმუნებული ხართ შედეგის შეფასებაში, მაინც არ ხართ ძალიან დარწმუნებულები ალბათობათა შეფასებაში. ამ შემთხვევაში შეგიძლიათ წარმოადგინოთ თქვენი გადაწყვეტილება ნახ. 6.13-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით. გაითვალისწინეთ, რომ ამ ხეში ჩვენ წარმოვადგინეთ IBM-ის ალბათობა, რომელიც იზრდება p ცვლადით. მაშინ ჩვენ გვაქვს:

$$E(Buy\,IBM) = p(2000) + (1-p)(500)$$

$$E(Bank) = 1005\$.$$

ჩვენ შევიძენთ IBM-ს, თუ $E(Buy\,IBM) > E(Bank)$, რასაც ადგილი აქვს, თუ

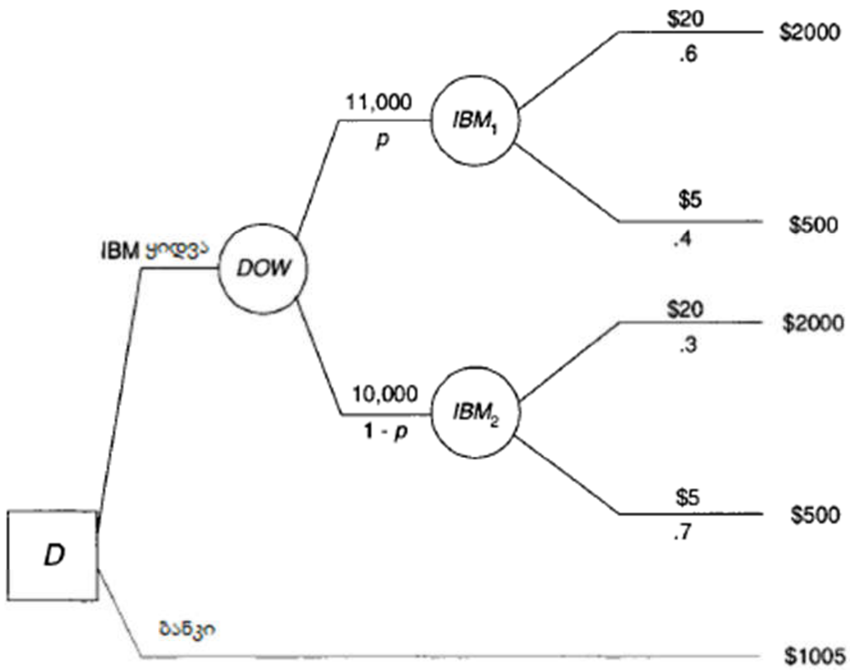
$$p(2000) + (1-p)(500) > 1005.$$

p-სთვის ამ უტოლობის ამოხსნით, გვაქვს:

$$p > 0{,}337.$$

ჩვენ განვსაზღვრეთ რამდენად მგრძნობიარეა ჩვენი გადაწყვეტილება p-ს მნიშვნელობის მიმართ მანამ, სანამ ვგრძნობთ რომ IBM-ის ზრდის ალბათობა სულ მცირე 0,377-ის ტოლია, ჩვენ ვიყიდით IBM-ს. ჩვენ არ გვჭირდება ჩვენი ალბათური შეფასების დახვეწა.

მაგალითი 6.12. დავუშვათ, თქვენ იმყოფებით იგივე სიტუაციაში, როგორიც წინა მაგალითში იყო, იმის გარდა, რომ თქვენ გრძნობთ, რომ IBM-ის ღირებულებაზე გავლენას იქონიებს საწარმოო ინდექს $Dow\,Jones$-ის საერთო მნიშვნელობა ერთი თვის განმავლობაში. ამჟამად Dow შეადგენს 10500 და თქვენ აფასებთ, რომ თვის ბოლოს ის იქნება ან 10 000 ან 11 000. თქვენ თავდაჯერებული ხართ იმაში, რომ იმის ალბათობა, რომ თქვენი აქცია გაიზრდება, დამოკიდებულია Dow აიწევაზე თუ დაიწევაზე, მაგრამ თქვენ არ ხართ დარწმუნებული როცა აფასებთ Dow-ს აიწევს თუ დაიწევს ალბათობას. კერძოდ, თქვენ ახდენთ თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას ნახ. 6.14-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით. ჩვენ მაშინ გვაქვს:



ნახ.6.14. ვიდრე p 0,122-ზე მეტია IBM-ის ყიდვა ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას.

$$E(Buy\,IBM) = p(0{,}6 \times 2000 + 0{,}4 \times 500) + (1 - p)(0{,}3 \times 2000 + 0{,}7 \times 500)$$

$$E(Bank) = 1005.$$

ჩვენ შევიძენთ IBM-ს, თუ $E(Buy\,IBM) > E(Bank)$, რასაც ადგილი აქვს, თუ

$$p(0{,}6 \times 2000 + 0{,}4 \times 500) + (1 - p)(0{,}3 \times 2000 + 0{,}7 \times 500) > 1005.$$

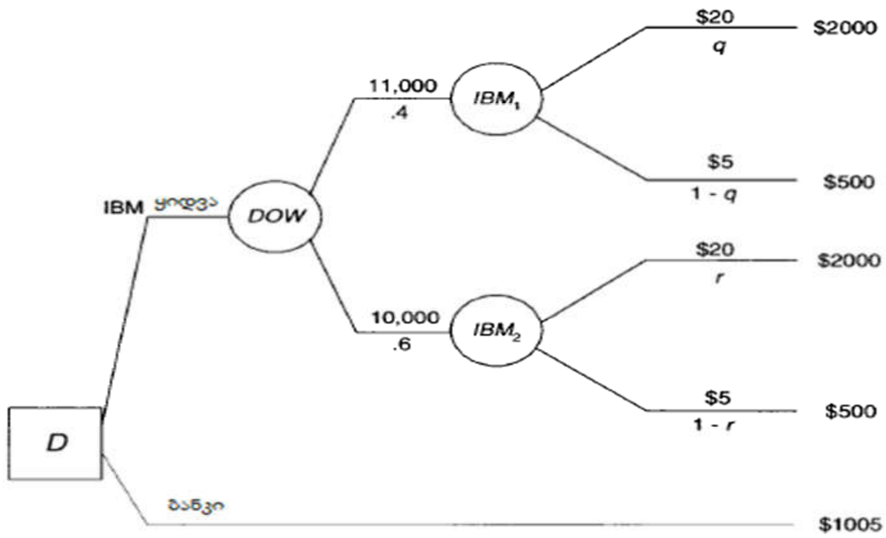
p-სთვის ამ უტოლობის ამოხსნით, გვაქვს:

$$p > 0{,}122.$$

მანამ სანამ ვგრძნობთ რომ IBM-ის ზრდის ალბათობა სულ მცირე 0,122-ის ტოლია, ჩვენ viყიდით IBM-ს.

მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზის დროს ჩვენ ერთდროულად ვაანალიზებთ ჩვენი გადაწყვეტილების მგრძნობელობას ორი სიდიდის შესახებ. შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს ასეთ ანალიზს.

მაგალითი 6.13. დავუშვათ, თქვენ იმყოფებით იგივე სიტუაციაში, როგორიც წინა მაგალითში იყო, იმის გარდა, თქვენ დარწმუნებული ხართ თქვენი ალბათობის შეფასებაში, რომ Dow აიწევს, მაგრამ თქვენ სულმთლად არ ხარ დარწმუნებული იმის ალბათობის შეფასებაში, რომ თქვენი აქციები აიწევს იმაზე დამოკიდებულებთ Dow აიწევს თუ დაიწევს. კერძოდ, თქვენ ახდენთ თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას ნახ. 6.15-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით. ჩვენ მაშინ გვაქვს:



ნახ. 6.15. ამ გადაწყვეტილებისათვის გვჭირდება მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზის ჩატარება.

$$E(Buy\, IBM) = 0{,}4(q \times 2000 + +(1-q) \times 500) + 0{,}6(r \times 2000 + (1-r) \times 500)$$

$$E(Bank) = 1005.$$

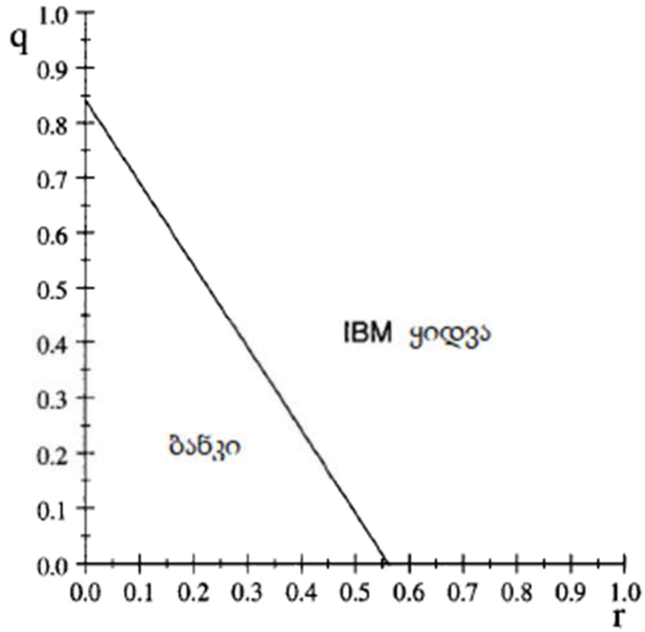
ჩვენ შევიძენთ IBM-ს, თუ $E(Buy\, IBM) > E(Bank)$, რასაც ადგილი აქვს, თუ

$$0{,}4(q \times 2000 + +(1-q) \times 500) + 0{,}6(r \times 2000 + (1-r) \times 500) > 1005.$$

ამ უტოლობის გამარტივებით, მივიღებთ:

$$q > \frac{101}{120} - \frac{3r}{2}.$$

$q = 101/120 - 3r/2$ წრფე გამოსახულია ნახ. 6 16-ზე. წინა უტოლობის თანახმად, გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას – ეს არის IBM-ის ყიდვა მანამ, სანამ (r, q) წერტილი მდებარეობს ამ წრფეზე. მაგალითად, თუ $r = 0{,}6$ და $q = 0{,}1$ ან $r = 0{,}3$ და $q = 0{,}8$, ეს იქნებოდა ჩვენი გადაწყეტილება. მაგრამ თუ $r = 0{,}3$ და $q = 0{,}1$ ის არ იქნებოდა ჩვენი გადაწყვეტილება.



ნახ. 6.16. $q = 101/120 - 3r/2$ წრფე. მანამ სანამ (r, q) წერტილი მდებარეობს ამ წრფეზე ახდენს 6.13 მაგალითში მოცემული გადაწყვეტილების IBM-ის ყიდვას და მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას.

მაგალითი 6.14 დავუშვათ, თქვენ იმყოფებით იგივე სიტუაციაში, როგორიც წინა მაგალითში იყო, იმის გარდა, რომ თქვენთვის მოუხერხებელია ამ მოდელში რაიმე ალბათობის შეფასება. მაგრამ თქვენ გრძნობთ, იმის ალბათობა რომ IBM აიწევს თუ Dow აიწევს, ორჯერ ზრდის იმის ალბათობას, რომ IBM აიწევს თუ Dow დაიწევს. კერძოდ, თქვენ ახდენთ თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას ნახ. 6.17-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით. ჩვენ მაშინ გვაქვს:

$$E(Buy\,IBM) = p(q \times 2000 + (1-q) \times 500) + (1-p)(q/2) \times 2000 + (1-q/2) \times 500)$$

$$E(Bank) = 1005.$$

ჩვენ შევიძენთ IBM-ს, თუ $E(Buy\,IBM) > E(Bank)$, რასაც ადგილი აქვს, თუ

$$p(q \times 2000 + (1-q) \times 500) + (1-p)(q/2) \times 2000 + (1-q/2) \times 500) > 1005.$$

ამ უტოლობის გამარტივება გვაძლევს:

$$q > \frac{101}{150 + 150p}.$$

ნახ. 6.18-ზე გამოსახულია $q = 101/(150 + 150p)$ მრუდი. გადაწყვეტილება რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას არის IBM შეძენა, თუ (p, q) წერტილი ძევს ამ მრუდის ზემოთ.

ჩვენ ასევე შეგვიძლია გამოვიკვლიოთ, რამდენად მგრძნობიარეა ჩვენი გადაწყვეტილებები შედეგის მნიშვნელობის მიმართ. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამ მგრძნობელობის ილუსტრირებას.

მაგალითი 6.15. დავუშვათ, თქვენ იმყოფებით მაგალით 6.11-ში აღწერილ სიტუაციაში. მაგრამ თქვენ არ ხართ დარწმუნებილები თქვენს შეფასებაში იმის მიმართ, თუ როგორ იწევს თუ დაიწევს IBM. ე.ი. ამჟამად IBM-ის ერთი აქცია შეადგენს 10$-ს, და თქვენ გრძნობთ, რომ არსებობს 0,5 ალბათობა, რომ თვის ბოლოს ის აიწევს და 0,5 ალბათობა იმის, რომ ის დაეცემა, მაგრამ თქვენ ვერ აფასებთ რამდენად მაღალი ან დაბალი იქნება ის. ისევე როგორც წინათ, თქვენ გაქვთ 1000$ ინვესტირებისათვის, და თქვენ ან იყიდით IBM-ის 100 აქციას ან ჩადებთ ბანკში 0,005 საპროცენტო განაკვეთით. ამ შემთხვევაში თქვენ შეგიძლიათ თქვენი გადაწყვეტილების მოდელირებას ნახ. 6.19-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით. ჩვენ მაშინ გვაქვს:

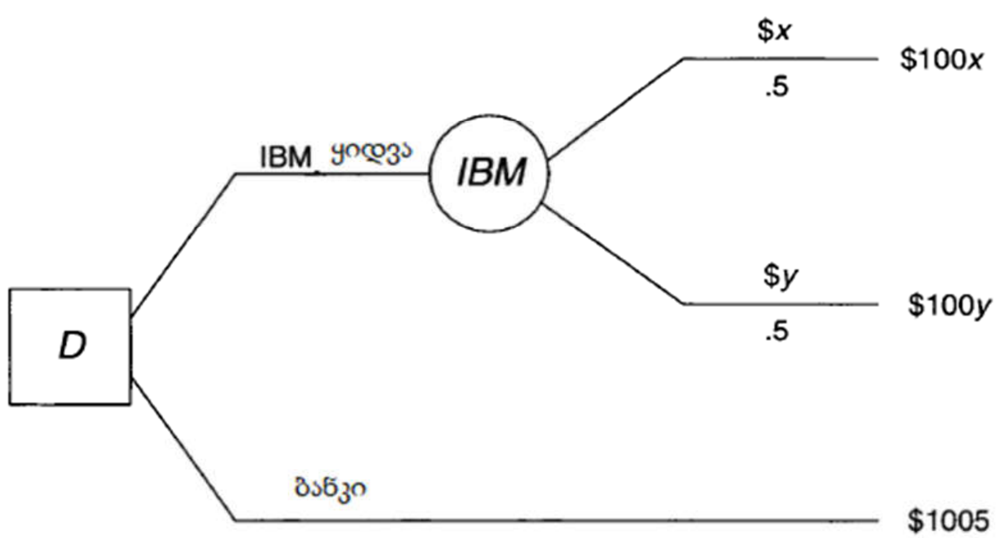
$$E(Buy\,IBM) = 0{,}5(100x) + 0{,}5(100y)$$
$$E(Bank) = 1005\$.$$

ჩვენ შევიძენთ IBM-ს, თუ $E(Buy\,IBM) > E(Bank)$, რასაც ადგილი აქვს, თუ

$$0{,}5(100x) + 0{,}5(100y) > 1005.$$

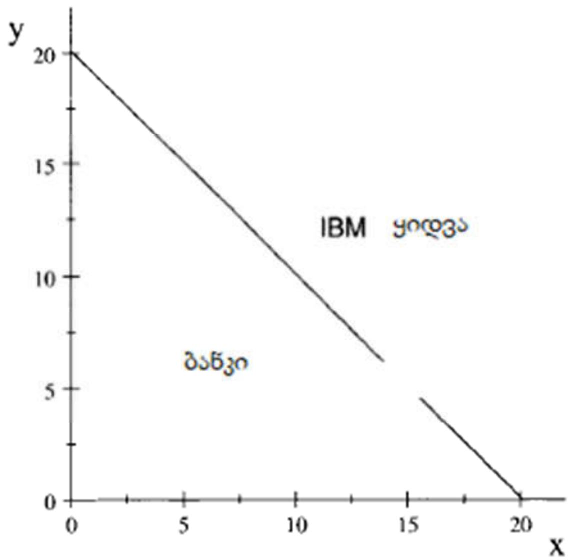
ამ უტოლობის გამარტივება გვაძლევს

$$y > \frac{201}{10} - x.$$



ნახ. 6.19. ეს გადაწყვეტილება მოითხოვს შედეგების მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზის ჩატარებას.

ნახ. 6.20-ზე გამოსახულია $y = 201/10 - x$ მრუდი. ადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას – ეს არის IBM-ის ყიდვა მანამ, სანამ (x, y) წერტილი მდებარეობს ამ მრუდის ზემოთ.



ნახ. 6.20 $y = 201/10 - x$ წრფე. მანამ სანამ (x, y) წერტილი მდებარეობს ამ წრფის ზემოთ, გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას მაგალით 6.15-ში ეს არის IBM-ის ყიდვა.

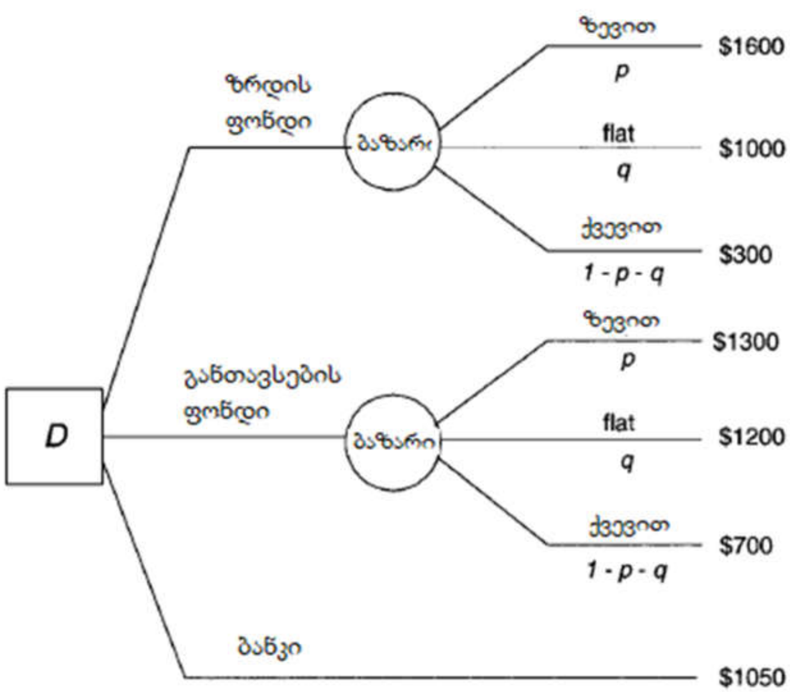
6.4.2 უფრო დეტალური მოდელი

აქამდე მოყვანილი მაგალითები გამარტივებული იყო და ამიტომ არ წარმოადგენდნენ იმ გადაწყვეტილებების მიმღებ მოდელებს, რომლებიც პრაქტიკაში გამოიყენება. ჩვენ ეს იმიტომ გავაკეთეთ, რომ ცნებების გაცნობისას არ გადაგვეტვირთეთ ძალიან ბევრი დეტალით. შემდეგ მოვიყვანთ შედარებით დეტალური მოდელის მაგალითს, რომლის გამოყენებასაც ინვესტორი ნამდვილად შეძლებს გადაწყვეტილების მოდელირებისათვის.

მაგალითი 6.16. ზოგიერთი ფინანსური ანალიტიკოსი ამტკიცებს, რომ მცირე ინვესტორს ურჩევნია ინვესტირება განახორციელოს თანაზიარ ფონდებში, ვიდრე ცალკეულ აქციებში. ინვესტორს აქვს სხვადასხვა ტიპის თანაზიარი ფონდების არჩევანი. აქ განვიხილავთ ორს, სრულიად სხვდასხვას. „აგრესიული" ანუ „ზრდის" თანაზიარი ფონდები ახდენენ ინვესტირებას კომპანიებში, რომლებსაც გააჩნიათ ზრდის მაღალი პოტენციალი და ჩვეულებრივ კარგად საქმიანობენ, როდესაც ბაზარი ზოგადად კარგად მუშაობს, მაგრამ საკმაოდ ცუდად, როდესაც ბაზარი უარესდება. „განთავსების" ფონდები ანაწილებენ თავიანთ ინვესტიციებს ნაღდ ფულად სახსრებს, ობლიგაციებს და აქციებს შორის. გარდა ამისა, აქციები ხშირად არის იმ კომპანიებში, რომლებიც ითვლებიან „ღირებულებით" ინვესტიციებად, რადგანაც რომელიღაც მიზეზის გამო ისინი ამჟამად არასწორად

შეფასებულად ითვლებიან. ასეთი ფონდები ჩვეულებრივ უფრო სტაბილურია. ანუ ისინი არც ისე კარგად საქმიანობენ, როგორც ბაზარი კარგად მუშაობს ან ცუდად, მაშინ როცა ბაზარი ცუდად მუშაობს. დავუშვათ, რომ კრისტინა გეგმავს ჩადოს მომავალ წელს 1000$, და გადაწყვეტს ამ ფულით ინვესტირება განახორციელოს ან ზრდის ფონდში ან განთავსების ფონდში, ან ჩადოს ის ერთწლიან სადეპოზიტო სერთიფიკატში, რომელის საპროცენტო განაკვეთია 5%. გადაწყვეტილების მისაღებად მან უნდა შექმნას მოდელი რას გააკეთებს ეს ფონდი იმის საფუძველზე, თუ როგორ მოიქცევა ბაზარი უახლოესი წლის განმავლობაში და მან უნდა შეაფასოს დამდეგ წელს ბაზარის საქმიანობის ალბათობა. იმის გათვალისწინებით, როგორ საქმიანობდნენ ეს ფონდები გასულ წლებში, ეს საშუალებას აძლევს კრისტინას შეაფასოს ფონდების სამომავლო ქცევა ბაზრის საქმიანობაზე დაფუძნებით. ის ფიქრობს, რომ ბაზარი მომავალ წელს არ იქნება წარმატებული იმიტომ, რომ ეკონომისტები რეცესიას ვარაუდობენ, მაგრამ მას არ აქ ზუსტი ალბათობების შეფასების საშუალება. ამიტომ ის იქმნის გადაწყვეტილებათა ხეს ნახ. 6.21-ზე. ამ ხის გათვალისწინებით ზრდის ფონდი უნდა იყოს უფრო მიმზიდველი ბანკთან შედარებით, თუ

$$1600p + 1000q + 300(1 - p - q) > 1050.$$



ნახ. 6.21. გადაწყვეტილებათა ხე, რომელიც ახდენს იმ გადაწყეტილებების მოდელირებას, რომლის ალტერნატივებია ზრდის თანაზიარი ფონდები, განთავსების თანაზიარი ფონდები და ბანკი.

ამ უტოლობის გამარტივებით მივიღებთ:

$$q > (15 - 26p)/14.$$

ამ უტოლობაზე დაყრდნობით, ნახ. 6..22(ა) გვიჩვენებს არეს, რომელშიც მან უნდა აირჩიოს ზრდის ფონდი, და არეს, სადაც მან უნდა აირჩიოს ბანკი, თუ ეს ერთადერთი არჩევანი იქნება. მიაქციეთ ყურადრება, რომ არეები ზემოდან შემოსაზღვრულია $q = 1 - p$ წრფით. მიზეზი ისაა, რომ უნდა გვქონდეს $q + p \leq 1$.

განთავსების ფონდი სასურველი უნდა იყოს ვიდრე ბანკი, თუ

$$1300p + 1200q + 900(1 - p - q) > 1050.$$

ამ უტოლობის გამარტივებით მივიღებთ:

$$q > (3 - 8p)/6.$$

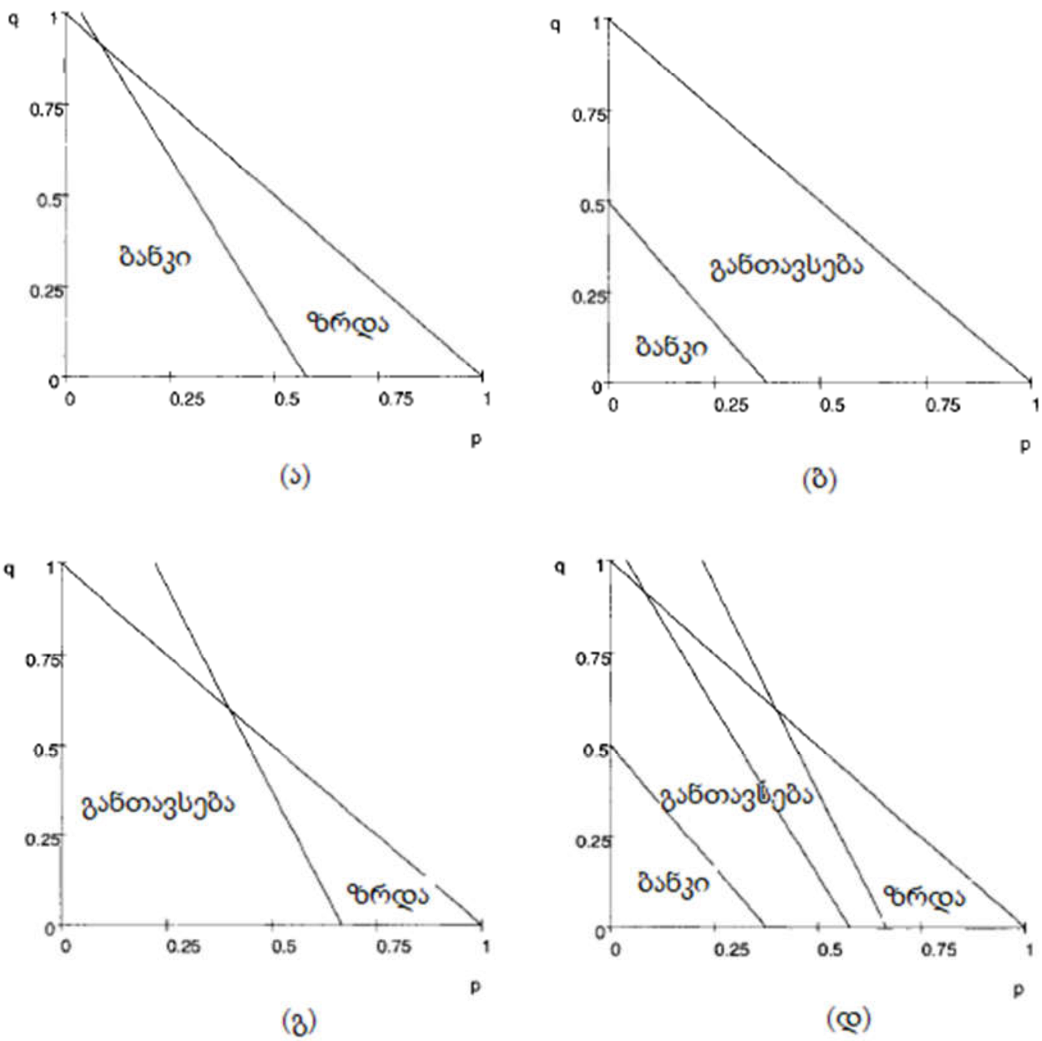
ამ უტოლობაზე დაყრდნობით, ნახ. 6..22(ბ) გვიჩვენებს არეს, რომელშიც მან უნდა აირჩიოს განთავსების ფონდი, და არეს, სადაც მან უნდა აირჩიოს ბანკი, თუ ეს ერთადერთი არჩევანი იქნება.

ზრდის ფონდი უნდა ამჯობინოს განთავსების ფონდს, თუ

$$1600p + 1000q + 300(1 - p - q) > 1300p + 1200q + 900(1 - p - q).$$

ამ უტოლობის გამარტივებით მივიღებთ:

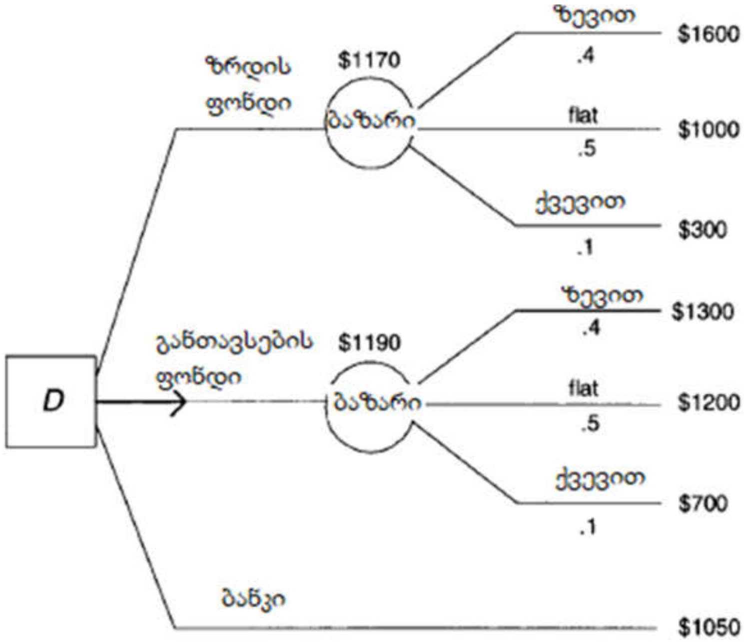
$$q > (6 - 9p)/4.$$



ნახ. 6.22. თუ ფონდსა და ბანკს შორის ერთადერთი არჩევანია, მაშინ კრისტინამ უნდა გამოიყენოს (ა); თუ ის არის განთავსების ფონდს და ბანკს შორის, მან უნდა გამოიყენოს (ბ); თუ არის ზრდის ფონსა და განთავსების ფონდს შორის, მან უნდა გამოიყენოს (გ); და თუ ის ირჩევს სამივე ალტერნატივიდან, მან უნდა გამოიყენოს (დ).

ამ უტოლობაზე დაყრდნობით, ნახ. 6..22(გ) გვიჩვენებს არეს, რომელშიც მან უნდა აირჩიოს ზრდის ფონდი, და არეს, სადაც მან უნდა აირჩიოს განთავსების ფონდი, თუ ეს ერთადერთი არჩევანი იქნება.

ბოლოს, ყველა წინა შედარებებისათვის წრფეები აგებულია ნახ. 6.22 (დ)-ზე. ამ დიაგრამაზე მოცემულია არეები, რომელშიც მან უნდა აირჩიოს სამი ვარიანტიდან, როდესაც სამივე არჩევანი განიხილება.



ნახ. 6.23 განთავსების ფონდის ყიდვა ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას.

წინა მაგალითებში მნიშვნელობები გაზვიადებული იყო. მაგალითად, ჩვენ არ ვთვლით, რომ ფონდის ზრდა წავა 60%-მდე კარგ საბაზრო პირობებში. ჩვენ ეს მნიშვნელობები გავაზვიადეთ იმიტომ, რომ ადვილად დაგვენახა ნახ. 6.22 (დ) დიაგრამაზე გამოსახული არეები. გარდა ამისა, ეს მაგალითი გვიჩვენებს, თუ როგორ ხდება ერთ-ერთი ჩვენგანის პირადი საინვესტიციო გადაწყვეტილებების მიღება. სავარჯიშოს სახით თქვენ შეგიძლიათ შეაფასოთ საკუთარი ფასეულობები და განსაზღვროთ რომელი არე შესაბამება თითოეულ საივესტიციო არჩევანს.

6.5. ინფორმაციის მნიშვნელობა

ნახ. 6.23-ზე ნაჩვენებია 6.21-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე მინიჭებული ალბათობებით. სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ იმის ჩვენებას, რომ ამ მნიშვნელობების გათვალისწინებით გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობების მაქსიმიზაციას, არის განთავსების ფონდის ყიდვა, და

$$E(D) = E(allocation\, fund) = 1190\$.$$

ეს ნაჩვენებია ნახ. 6.23-ზე. გადაწყვეტილების მიღებამდე, ჩვენ ხშირად გვაქვს შესაძლებლობა კონსულტაცია გავიაროთ იმ სფეროს ექსპერტთან, რომელიც გადაწყვეტილებას ეხება. დავუშვათ, რომ მიმდინარე გადაწყვეტილებებში ჩვენ შეგვიძლია კონსულტაცია გავიაროთ ექსპერტ-ფინანსურ ანალიტიკოსთან, რომელიც იდეალურად პროგნოზირებს ბაზრის მდგომარეობას. ე.ი. თუ ბაზარი გაიზრდება ანალიტიკოსი გვეტყვის, რომ ის იზრდება; თუ ის იქნება წონასწორობაში, ანალიტიკოსი იტყვის, რომ ის იქნება

წონასწორობაში; თუ ის დაეცემა, ანალიტიკოსი იტყვის, რომ ის ქვევით მიდის. ჩვენ მზად უნდა ვიყოთ, რომ ინფორმაციისაათვის გადავიხადოთ, მაგრამ არა იმაზე მეტი, რაც ინფორმაცია ღირს. შემდეგ ჩვენ გაჩვენებთ, თუ როგორ უნდა გამოითვალოთ ამ ფასეულობის მოსალოდნელი მნიშვნელობა, რომელსაც ეწოდება სრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა.

6.5.1 სრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა

იმისათვის, რომ გამოვთვალოთ სრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა, ჩვენ ვუმატებთ სხვა ალტერნატიულ გადაწყვეტილებას, რომელზედაც კონსულტაცია უნდა გავიაროთ იდეალურ ექსპერტთან. ნახ. 6.24-ზე ნაჩვენებია 6.23-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე ალტერნატიულის დამატებით. შემდეგ გაჩვენებთ, როგორია ამ ხისათვის ალბათობები. რამდენადაც ექსპერტი სრულყოფილია, ჩვენ გვაქვს:

$$P(Expert = says\ up|Market = up) = 1,$$

$$P(Expert = says\ flat|Market = flat) = 1,$$

$$P(Expert = says\ down|Market = down) = 1.$$

ამიტომ ჩვენ გვაქვს:

$$P(up|says\ up) =$$

$$= \frac{P(says\ up|up)P(up)}{P(says\ up|up)P(up) + P(says\ flat|up)P(flat) + P(says\ down|down)P(down)} =$$

$$= \frac{1 \times 0{,}4}{1 \times 0{,}4 + 0 \times 0{,}5 + 0 \times 1} = 1.$$

გასაკვირი არაა, რომ ეს მნიშვნელობა 1-ის ტოლია, რადგანაც ექსპერტი იდეალურია. ეს მნიშვნელობა უკიდურესი მარჯვენა და ყველაზე მაღალი ალბათობაა ნახ. 6.24-ზე გამოსახულ გადაწყვეტილებათა ხეში. მას ვტოვებთ სავარჯიშოს სახით სხვა ალბათობების გამოსათვლელად და ხის გადასაწყვეტად. ჩვენ ვხედავთ, რომ

$$E(Consult\ Perfect\ Analyst) = 1345\$.$$

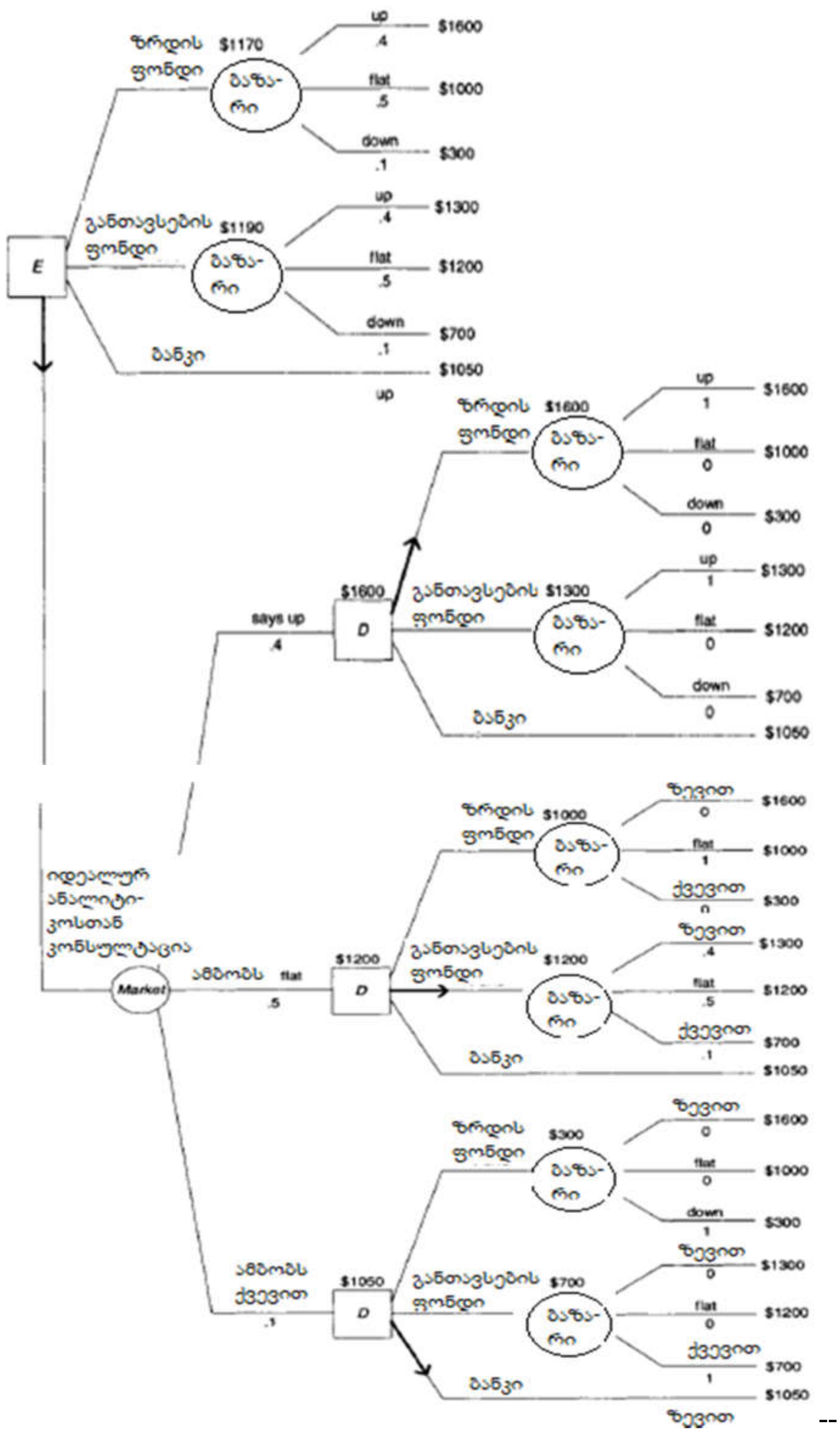
შეგახსენებთ, რომ ამ ანალიტიკოსთან კონსულტაციის გარეშე ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას არის განთავსების ფონდის შეძენა, და

$$E(D) = E(allocation\ fund) = 1190\$.$$

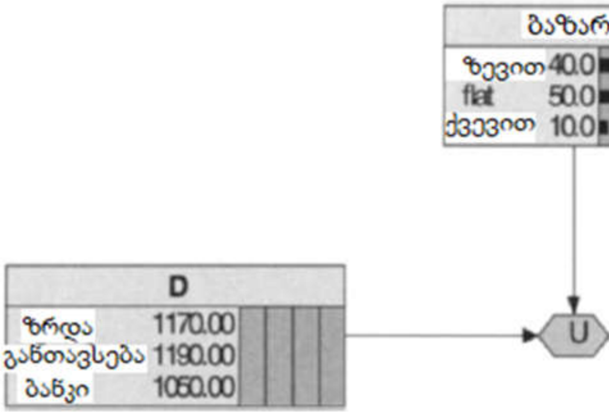
ამ ორ მოსალოდნელ მნიშვნელობას შორის სხვაობა არის **იდეალური ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა ($\boldsymbol{EVPI}$)**. ანუ

$$EVPI = E(Consult\ Perfect\ Analyst) - E(D) = 1345\$ - 1190\$ = 155\$.$$

ეს საუკეთესოა, რაც ჩვენ უნდა გადავიხადოთ ინფორმაციაში. თუ ჩვენ ამ თანხაზე ნაკლებს ვიხდით, ჩვენ ვზრდით კონსულტაციის შედეგად მიღებულ ჩვენს მოსალოდნელ მნიშვნელობას, ხოლო თუ მეტს ვიხდით, ჩვენ ვამცირებთ ჩვენს მოსალოდნელ მნიშვნელობას.



ნახ. 6.24 მაქსიმალური მოსალოდნელი მნიშვნელობა იდეალურ ექსპეტთან კონსულტაციის გარეშე არის 1190$, ამ ექსპერტთან კონსულტაციით – 1345$.



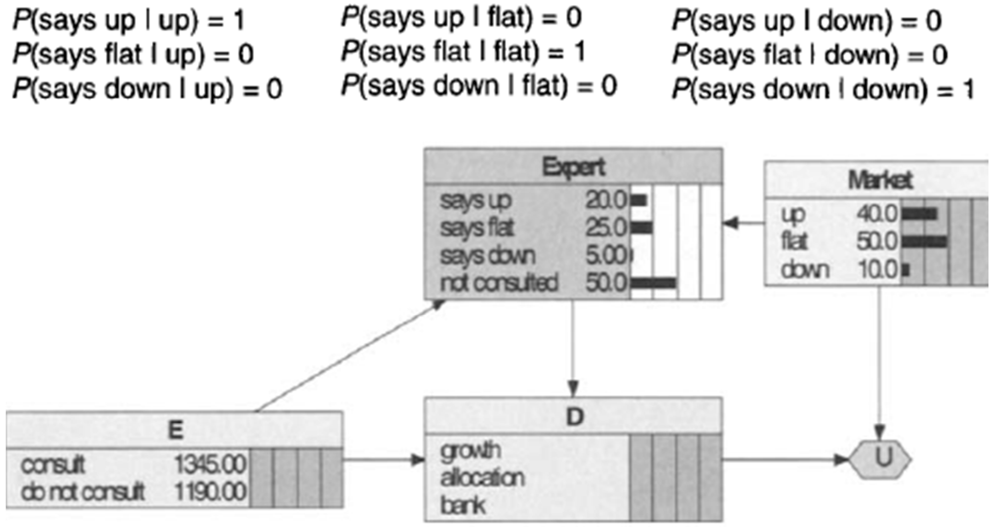
ნახ. 6.25. ნახ. 6.23-ზე გამოსახული გადაწყვეტილების ხე წარმოდგენილია გავლენის დიაგრამის სახით და გადაწყდება $Netica$-ს მეშვეობით.

ნახატებზე 6.23-ზე და 6.24-ზე ჩვენ ვაჩვენეთ გადაწყვეტილებათა ხეები იმისათვის, რომ თქვენ დაგენახათ როგორ გამოითვლება იდეალური ინფორმაციის მნიშვნელობა. თუმცა, როგორც ეს ჩვეულებრივ შემთხვევებში ხდება, უფრო მარტივია გადაწყვეტილების წაროდგენა გავლენის დიაგრამების გამოყენებით. ნახ. 6.25 ნაჩვენებია ნახ 6.23-ზე მოცემული გადაწყვეტილებთა ხე, რომელიც დიაგრამის სახითაა წამოდგენილი და გადაწყვეტილია $Netica$-ს მეშვეობით. ნახ. 6.26 ნაჩვენებია ნახ 6.24-ზე მოცემული გადაწყვეტილებთა ხე, რომელიც დიაგრამის სახითაა წამოდგენილი და გადაწყვეტილია $Netica$-ს მეშვეობით. დიაგრამაზე ჩვენ დავუმატეთ ექსპერტის კვანძის პირობითი ალბათობა (გავიხსენოთ, რომ $Netica$ არ აჩვენებს პირობით ალბათობას), შევნიშნოთ, რომ ჩვენ შეგვიძლია $EVPI$ მივიღოთ უშუალოდ იმ მნიშვნელობებისაგან, რომლებიც ჩამოთვლილია გადაწყვეტილებათა E კვანძში ნახ. 6.26-ზე გამოსახულ გავლენის დიაგრამაში. ანუ

$EVPI = E(consult) - E(do\ not\ consult) = 1345\$ - 1190\$ = 155\$.$

6.5.1 არასრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა

ნამდვილი ექსპერტები და ტესტები სინამდვილეში არ არიან იდეალურნი. უფრო ხშირად, მათ აქვთ უნარი მოგვცენ შეფასება, რომლებიც ხშირად სწორია. ვთქვათ გვყავს ანალიტიკოსი, რომელიც იძლევა საბაზრო აქტივობის შეფასებას 30 წლის განმავლობაში და აქვს შემდეგი შედეგები:



ნახ. 6.26 ნახ. 6.24-ზე გამოსახული გადაწყვეტილების ხე წარმოდგენილია გავლენის დიაგრამის სახით და გადაწყდება *Netica*-ს მეშვეობით.

1. როცა ბაზარი იზრდებოდა, ანალიტიკოსმა თქვა, რომ ის გაიზრდება დროის 80%-ში, წონასწორობაში იქნება დროის 10%-ში და დაეცემა დროის 10%-ში.

2. როდესაც ბაზარი წონასწორობაში იყო, ანალიტიკოსმა თქვა, რომ ის გაიზრდება დროის 20%-ში, წონასწორობაში იქნება დროის 70%-ში და დაეცემა დროის 10%-ში.

3. როდესაც ბაზარი დაეცა, ანლიტიკოსმა თქვა, რომ ის გაიზრდება დროის 20%-ში, წონასწორობაში იქნება დროის 20%-ში და დაიწევს დროის 60%-ში.

ამიტომ ექსპერტისათვის ჩვენ ვაფასებთ შემდეგ პირობით ალბათობებს:

$$P(Expert = says\,up|Market = up) = 0{,}8$$

$$P(Expert = says\,flat|Market = up) = 0{,}1$$

$$P(Expert = says\,down|Market = up) = 0{,}1$$

$$P(Expert = says\,up|Market = flat) = 0{,}2$$

$$P(Expert = says\,flat|Market = flat) = 0{,}7$$

$$P(Expert = says\,down|Market = flat) = 0{,}1$$

$$P(Expert = says\,up|Market = down) = 0{,}2$$

$$P(Expert = says\,flat|Market = down) = 0{,}2$$

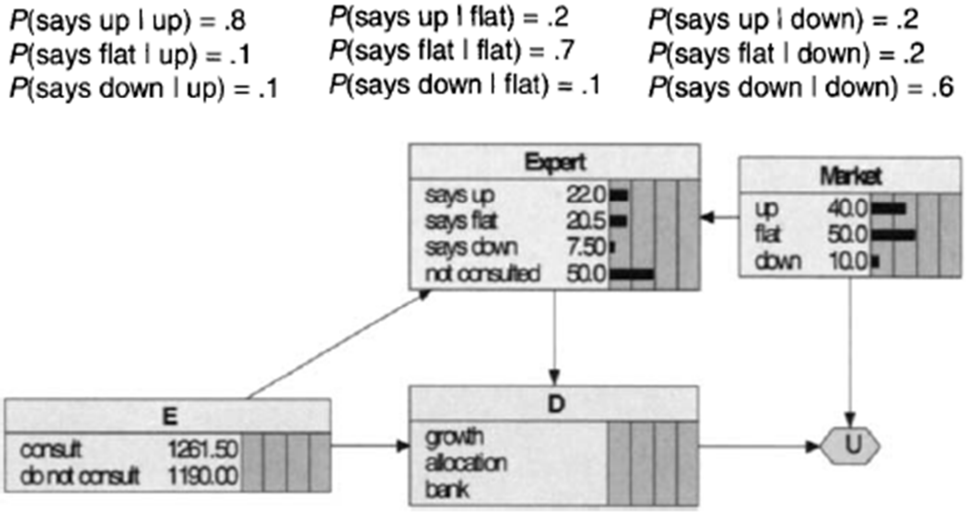
$$P(Expert = says\,down|Market = down) = 0{,}6.$$

ნახ. 6.27-ზე ნაჩვენებია ნახ. 6.25-ზე გამოსახული გავლენის დიაგრამა ალტერნატიული გადაწყვეტილების დამატებით, რომელზედაც კონსულტაცია შეგვიძლია გავიაროთ ამ არასრულყოფილ ექსპერტთან. ამ დიაგრამაზე ასევე ვაჩვენებთ ექსპერტის კვანძის პირობით ალბათობებს. მოსალოდნელი ფასეულობის გაზრდას, რომელსაც ვიღებთ ასეთ ექსპერტთან

კონსულტაციით, უწოდებენ **არასრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობას** (***EVII***). ის მოცემულია შემდეგნაირად

$EVII = E(consult) - E(donot\ consult) = 1261{,}50\$ - 1190\$ = 71{,}50\$.$

ეს არის ყველაზე მეტი, რაც უნდა გადავიხადოთ ამ ექსპერტის ინფორმაციაში.



ნახ. 6.27. გავლენის დიაგრამა, როელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ მოსალოდნელი არასრულყოფილი ინფორმაციის ღირებულება.

6.6 ნორმატიული გადაწყვეტილების ანალიზი

გადაწყვეტილების რეკომენდაციისათვის ამ თავში და წინა თავებში წარმოდგენილი ანალიზის მეთოდოლოგიას ეწოდება **ნორმატიული გადაწყვეტილების ანალიზი,** რამდენადაც მეთოდოლოგია განსაზღვრავს, თუ როგორ უნდა მიიღონ ადამიანებმა გადაწყვეტილება და არ აღწერს თუ როგორ იღებენ ადამიანები გადაწყვეტილებას. 1954 წელს ჯიმი სევიჯმა შეიმუშავა აქსიომები ადამიანის უპირატესობების და შეხედულებების შესახებ. თუ ადამიანი იღებს ამას აქსიომებად, დიკარმა აჩვენა, რომ ინდივიდმა გადაწყვეტილების მიღებისას უპირატესობა უნდა მიანიჭოს გადაწყვეტის ანალიზის გამოყენებას. ტვერკიმ და კანემანმა [1981] ჩაატარეს რიგი გამოკვლევები, რომლებიც გვიჩვენებდნენ, რომ ადამიანები არ იღებდნენ გადაწყვეტილებას, რომლებიც შეესაბამებოდნენ გადაწყვეტილების ანალიზის მეთოდოლოგიას. ე.ი. მათმა გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ გადაწყვეტილებათა ანალიზი არ წარმოადგენს აღმწერ თეორიას. კანემანმა და ტვერკიმ [1979] განავითარეს **პერსპექტივის თეორია**, რომ აღეწერათ, თუ როგორ იღებენ ადამიანები გადაწყვეტილებას სინამდვილეში, როდესაც არ ხელმძღვანელობენ გადაწყვეტილებათა ანალიზით. 2002 წელს დენ კანემანმა მიიღო ნობელის პრემია ეკონომიკაში ამ ძალისხმევისათვის. გადაწყვეტილებათა აღწერის ალტერნატიული თეორიაა **სინანულის თეორიის** შექმნა.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 6.1

სავარჯიშო 6.1. მაგალით 6.3-ში ნაჩვენები მეთოდიკის გამოყენებით შეაფასეთ თქვენი პირადი r რისკის ტოლერანტობა.

სავარჯიშო 6.2. წინა მაგალითში შეფასებული r რისკის მნიშვნელობის გამოყენებით, განსაზღვრეთ გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მაგალით 5.1-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის მოსალოდნელი სარგებლიანობის მაქსიმიზიციას.

სავარჯიშო 6.3. ვთქვათ, მერის აქვს საინვესტიციო შესაძლებლობა, რომელიც გულისხმობს 0,9 ალბათობით 8000 დოლარის მიღებას და 0,1 ალბათობით 20 000 დოლარის დაკარგვას. ვთქვათ, $d1$ იყოს ალტერნატიული გადაწყვეტილება საინვესტიციო შესაძლებლობის განხორციელების და $d2$ – მისი უარყოფის ალტერნატიული გადაწყვეტილება. დავუშვათ, რომ მერის უპირატესობა შეიძლება მოდელირებული იყოს $\ln(x)$-ის გამოყენებით.

1. განსაზღვრეთ გადაწყვეტილების ალტერნატივა, რომელიც ახდენს მაქსიმალური მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, როდესაც მერის გააჩნია 21 000 დოლარი.
2. განსაზღვრეთ გადაწყვეტილების ალტერნატივა, რომელიც ახდენს მაქსიმალური მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას, როდესაც მერის გააჩნია 25 000 დოლარი.

პარაგრაფი 6.2

სავარჯიშო 6.4. გამოთვალეთ მაგალით 5.2-ში მოცემული გადაწყვეტილების მიღებისათვის გადაწყვეტილებების ალტერნატივების დისპერსია. რისკის შეფასების პროფილები და გადაწყვეტილების ალტერნატივების მიღებისათვის რისკების ერთობლივი პროფილი. განსაჯეთ, იმ რისკის განსაზღვრისათვის, რომელიც თითოეულ ალტერნატივას ახლავს, რომელი უფრო სასარგებლოა დისპერსიის პოვნა თუ რისკის პროფილის პოვნა.

სავარჯიშო 6.5. გამოთვალეთ მაგალით 5.3-ში მოცემული გადაწყვეტილების მიღებისათვის გადაწყვეტილებების ალტერნატივების დისპერსია. რისკის შეფასების პროფილები და გადაწყვეტილების ალტერნატივების მიღებისათვის რისკების ერთობლივი პროფილი. განსაჯეთ, იმ რისკის განსაზღვრისათვის, რომელიც თითოეულ ალტერნატივას ახლავს, რომელი უფრო სასარგებლოა დისპერსიის პოვნა თუ რისკის პროფილის პოვნა.

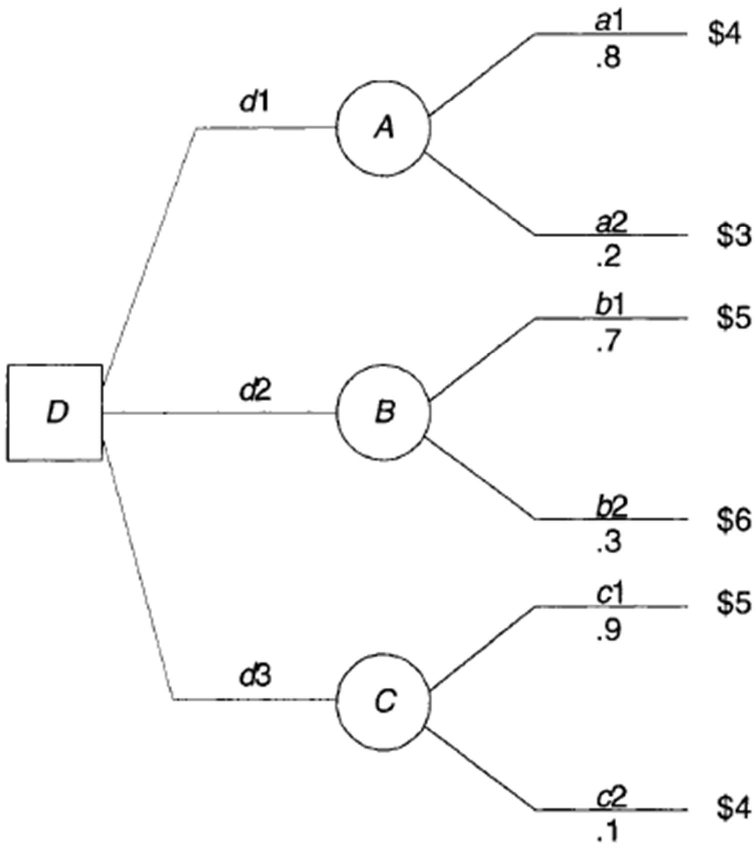
სავარჯიშო 6.6. გამოთვალეთ მაგალით 5.5-ში მოცემული გადაწყვეტილების მიღებისათვის გადაწყვეტილებების ალტერნატივების დისპერსია, რისკის შეფასების

პროფილები და გადაწყვეტილების ალტერნატივების მიღებისათვის რისკების ერთობლივი პროფილი. განსაჯეთ, იმ რისკის განსაზღვრისათვის, რომელიც თითოეულ ალტერნატივას ახლავს, რომელი უფრო სასარგებლოა – დისპერსიის პოვნა თუ რისკის პროფილის პოვნა.

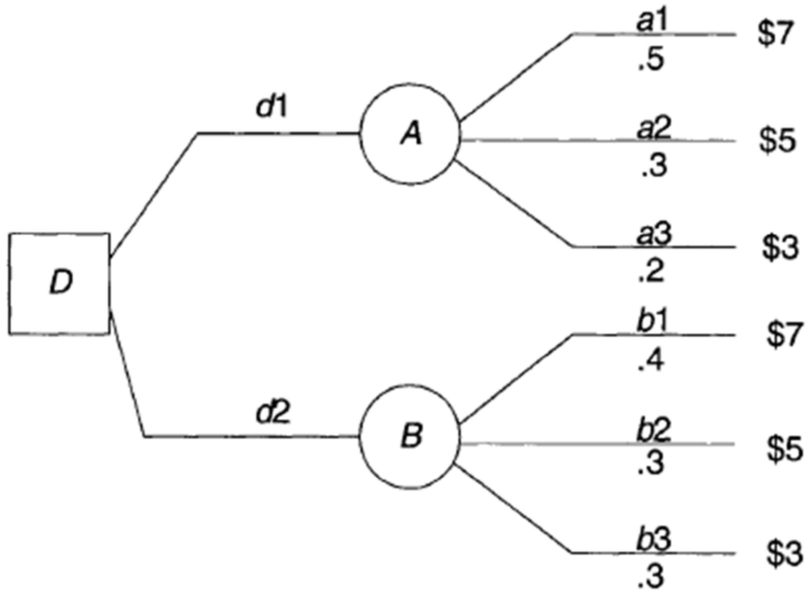
პარაგრაფი 6.3

სავარჯიშო 6.7. ნახ. 6.28-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხეში გადაწყვეტილებათა ვარიანტიდან ერთი დეტერმიმანტულად დომინირებს? თუ კი, მაშინ რომელი?

სავარჯიშო 6.8. ნახ. 6.28-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხეში გადაწყვეტილებათა ვარიანტიდან ერთი სტოქასტურად დომინირებს? თუ კი, მაშინ რომელი? შექმენით ალტერნატიული გადაწყვეტილებებისათვის რისკების ერთობლივი პროფილი.



ნახ. 6.28 გადაწყვეტილებათა ხე.



ნახ. 6.29 გადაწყვეტილებათა ხე.

პარაგრაფი 6.4

სავარჯიშო 6.9. დავუშვათ, ამჟამად *Lucent* შეადგენს 3 დოლარს აქციაზე და თქვენ გრძნობთ, რომ თვის ბოლოს 0,6 ალბათობით ის დაეცემა 2$-მდე და 0,4 ალბათობით აიწევს 5$-მდე. თქვენ გაქვთ ინვესტირებისათვის 3000 დოლარი და თქვენ ან იყიდით 1000 აქციას, ან ჩადებთ ფულს ბანკში ყოველთვიური 0,004 საპროცენტო განაკვეთით. თუმცა თქვენ საკმაოდ დარწმუნებული ხართ შედეგის შეფასებაში, თქვენ არც თუ ისე – ალბთობაზე თქვენ შეფასებაში. ვთქვათ p არის ალბათობა, რომ *Lucent* დაეცემა. განსაზღვრეთ p-ს უდიდესი მნიშვნელობა, რომლისათვის, თქვენ გადაწყვეტთ *Lucent* -ის ყიდვას.

სავარჯიშო 6.10. ვთქვათ, თქვენ იმყოფებით იმავე სიტუაციაში, როგორშიც წინა სავარჯიშოში იმის გამოკლებით, რომ *Lucent* ღირებულება დამოკიდებული იქნება *NASDAQ*-ის საერთო ღირებულებაზე ერთი თვის განმავლობაში. ამჟამად *NASDAQ* იმყოფება 2300-ში, და თქვენ აფასებთ, რომ თვის ბოლოს ის იქნება ან 2000 ან 2500. თქვენ დარწმუნებული ხართ, როცა აფასებთ თქვენი აქციის ზრდის ალბათობას იმაზე დამოკიდებულებით *NASDAQ* აიწევს თუ დაიწევს, მაგრამ დარწმუნებით ვერ აფასებთ იმას, *NASDAQ* აიწევს თუ დაიწევს. კერძოდ, თქვენ გრძნობთ, რომ ალბათობა *Lucent* აიწევს თუ *NASDAQ* არის 0,8, ხოლო ალბათობა *Lucent* აიწევს თუ *NASDAQ* დაიწევს არის 0,3. ვთქვათ p არის *NASDAQ*-ის აწევის ალბათობა. განსაზღვრეთ p-ს უმცირესი მნიშვნელობა რომლისათვის, თქვენ გადაწყვეტთ *Lucent* -ის ყიდვას.

საარჯიშო 6.11. ვთქვათ, თქვენ იმყოფებით იმავე სიტუაციაში როგორშიც წინა სავარჯიშოში. გარდა ამისა, რომ თქვენ დარწმუნებული ხართ $NASDAQ$ აწევის ალბათობის თქვენეულ შეფასებაში, მაგრამ თქვენ არ ხართ დარწმუნებული იმის ალბათობაში, რომ თქვენი აქციები იზრდება იმაზე დამოკიდებულებით $NASDAQ$ აიწევს თუ დაიწევს. კერძოდ, თქვენ გრძნობთ, რომ $NASDAQ$ აიწევს 0,7 ალბათობით. ვთქვათ p არის ალბათობა, რომ $Lucent$ აიწევს იმის გათვალისწინებით, რომ $NASDAQ$ აიწევს და q არის ალბათობა, რომ $Lucent$ აიწევს იმის გათვალისწინებით, რომ $NASDAQ$ დაიწევს. გააკეთეთ მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზი p და q-ზე.

სავარჯიშო 6.12. ვთქვათ, თქვენ იმყოფებით იმავე სიტუაციაში, როგორშიც წინა სავარჯიშოში, იმის გამოკლებით, რომ თქვენ ამ მოდელში ვერ ახერხებთ ალბათობების შეფასებას. მაგრამ თქვენ გრძნობთ, რომ იმის ალბათობა, რომ $Lucent$ აიწევს თუ $NASDAQ$ აიწევს, სამჯერ აღემატება იმის ალბათობას, რომ $Lucent$ აიწევს თუ $NASDAQ$ დაიწევს. ვთქვათ, p არის $NASDAQ$-ის აწევის ალბათობა, და q არის ალბათობა, რომ $Lucent$ აიწევს იმის გათვალისწინებით, რომ $NASDAQ$ დაიწევს. გააკეთეთ მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზი p და q-ზე.

სავარჯიშო 6.13. დავუშვათ, თქვენ იმყოფებით სავარჯიშო 6.9-ში აღწერილ სიტუაციაში. მაგრამ თქვენ არ ხართ დარწმუნებული თქვენს შეფასებაში – რამდენად აიწევს ან დაიწევს $Lucent$. ანუ, ამჟამად $Lucent$ შეადგენს 3 დოლარს აქციაზე და თქვენ გრძნობთ, რომ თვის ბოლოს 0,5 ალბათობით ის აიწევს და 0,5 ალბთობით დაიწევს. მაგრამ ვერ აფასებთ რამდენზე აიწევს ან დაიწევს. ისევე როგორც წინა შემთხვევაში თქვენ გაქვთ 3000 დოლარი ინვესტირებისათვის, და თქვენ ან უნდა იყიდოთ 1000 აქცია, ან ჩადოთ ფული ბანკში ყოველთვიური 0,004 საპროცენტო განაკვეთით. ვთქვათ, x იყოს $Lucent$-ის მნიშვნელობა, თუ ის გაიზრდება, და y იყოს $Lucent$-ის მნიშვნელობა, თუ ის შემცირდება. გააკეთეთ მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზი x და y-ზე

სავარჯიშო 6.14. დავუშვათ, ჩვენ ვიმყოფებით, საავარჯიშო 6.16-ში აღწერილ სიტუაციაში, იმის გამოკლებით რომ ზრდის ფონდი შეადგენს 1800, 1100 და 200 დოლარს, შესაბამისად თუ ბაზარი აიწევს, წონასწორობაში იქნება და დაიწევს, მაში როცა განთავსების ფონდი შეადგენს შესაბამისად 1400, 1000 და 400 დოლარს. შეასრულეთ ანალიზი სავარჯიშო 6.16-ში.

სავარჯიშო 6.15. შეისწავლეთ რომელიმე ფაქტობრივი თანაზიარი ფონდები და ჩამოაყალიბეთ, სად იგრძენით, რომ ისინი წონასწორობაში იქნებიან თუ ბაზარი აიწევს, წონასწორობაში იქნება ან დაიწევს. გარდა ამისა განსაზღვრეთ ფაქტობრივი ფიქსირებული

განაკვეთი, რომლის მიღებაც შეგიძლიათ ბანკში. შემდეგ შეასრულეთ ანალიზი სავარჯიშო 6.16-ში.

სავარჯიშო 6.16. დავუშვათ, ჩადეთ 18 000$ მრავალწლიან პროექტში. წლიური ფულადი ნაკადი შემდეგი ხუთი წლის განმავლობაში შეადგენს 5000 დოლარს. ანუ, თქვენ მიიღებთ 5000 დოლარს ერთი წლის შემდეგ, ორი წლის შემდეგ, ... ,და 5000 დოლარს ხუთ წელიწადში. გარდა ამისა, თქვენ შეგიძლიათ ჩადოთ 10 000 დოლარი ხუთწლიან სადეპოზიტო სერთიფიკატში, რომელიც იძლევა წელიწადში 8%-ს.

1. თუ თქვენ ახდენთ ინვესტირებას პროექტში ან ყიდულობთ სადეპოზიტო სერთიფიკატს, მიაქციეთ ყურადღება, რომ თქვენ უნდა განიხილოთ პროექტის წმინდა დაყვანილი ღირებულება (NPV).

2. დავუშვათ, თქვენ არ ხართ დარწმუნებულები, რომ პროექტი წელიწადში გადაიხდის 5000 დოლარს. უფრო მეტიც, თქვენ 0,3 ალბათობით, რომ ის გადაიხდის 4000$-ს, 0,5 ალაბთობით, რომ გადაიხდის 5000$-ს და 0,2 ალბათობით 6000$-ს. განსაზღვრეთ ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენს მოსალოდნელი მნიშვნელობის მაქსიმიზაციას.

3. დავუშვათ, რომ თქვენ დარწმუნებული ხართ არა მარტო იმაში, რომ პროექტით მიიღებთ 5000$-ს ყოველწლიურად, არამედ იმაშიც, რომ ვერ შეძლებთ განსაზღვროთ იმის ალბათობა, რომ მიიღებთ 4000 დოლარს, 5000 დოლარს ან 6000 დოლარს. ვთქვათ p არის იმის ალბათობა, რომ მიიღებთ 4000$-ს, q არის იმის ალბათობა, რომ მიიღებთ 5000$-ს, და $1-p-q$ არის იმის ალბათობა, რომ მიიღებთ 6000$-ს. გააკეთეთ მგრძნობელობის ორმხრივი ანალიზი p და q-ზე.

სავარჯიშო 6.17. ნახ. 6.21-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხისათვის შეაფასეთ საკუთარი მნიშვნელობები და განსაზღვრეთ შედეგობრივი არე, რომელიც შეესაბამება ინვესტიციის თითოეულ ვარიანტს.

პარაგრაფი 6.5

სავარჯიშო 6.18. დავუშვათ, გვაქვს ნახ. 6.24-ზე გამოსახული გადაწყვეტილებათა ხე იმის გარდა, რომ ზრდის ფონდმა უნდა შეადგინოს 1800 დოლარი, 1100 დოლარი და 200 დოლარი შესაბამისად თუ ბაზარი გაიზრდება, წონასწორობაში იქნება ან დაეცემა, მაშინ როცა განთავსების ფონდი შეადგენს 1400 დოლარს, 1000 დოლარს ან 400 დოლარს.

1. გამოთვალეთ სრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა ხელით.

2. მოახდინეთ პრობლემის მაგალითის მოდელირება როგორც გავლენის დიაგრამა $Netica$-ს მეშვეობით და განსაზღვრეთ სრულყოფილი ინფორმაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა ამ გავლენის დიაგრამის გამოყენებით.

სავარჯიშო 6.19. დავუშვათ, ჩვენ გვაქვს იგივე გადაწყვეტილება რაც წინა სავარჯიშოში, გარდა ამისა, ჩვენ შეიძლება კონსულტაცია გავიაროთ არაიდეალურ ექსპერტთან. კერძოდ, საექსპერტო სიზუსტე ასეთია:

$$P(Expert = says\ up|Market = up) = 0{,}7$$
$$P(Expert = says\ flat|Market = up) = 0{,}2$$
$$P(Expert = says\ down|Market = up) = 0{,}1$$
$$P(Expert = says\ up|Market = flat) = 0{,}1$$
$$P(Expert = says\ flat|Market = flat) = 0{,}8$$
$$P(Expert = says\ down|Market = flat) = 0{,}1.$$

მოახდინეთ პრობლემის მაგალითის მოდელირება გავლენის დიაგრამა $Netica$-ს მეშვეობით და განსაზღვრეთ ექსპერტის კონსულტაციის მოსალოდნელი მნიშვნელობა ამ გავლენის დიაგრამის გამოყენებით.

სავარჯიშო 6.20. განიხილეთ მე-5 თავის მაგალით 5.10-ში განხილული გადაწყევტილების პრობლემა. წარმოადგენით პრობლემა როგორც გავლენის დიაგრამა $Netica$-ს მეშვეობით, და გავლენის დიაგრამის გამოყენებით განსზღვრეთ $EVPI$, რომელიც შეეხება $Texaco$-ს რეაქციას 5 მილიონი დოლარის მიმართ.

ნაწილი II

ფინანსური დანართები

თავი 7

საინვესტიციო მეცნიერება

საივესტიციო მეცნიერებაში მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს პორტფელის რისკის მოდელირება. ამ თავში ჩვენ წარმოვადგენთ ბაიესის ქსელს პორტფელური რისკის ანალიზისათვის. მაგრამ თავიდან ჩვენთვის აუცილებელია განვიხილოთ ინვესტიციების სფეროში სტანდარტული თემები, რამდენადაც ამ მასალის ცოდნა აუცილებელია პორტფელის რისკის ანალიზის გასაგებად.

7.1 საინვეტიციო მეცნიერების საფუძვლები

ამ განყოფილებაში განხილულია საფონდო ბაზრის საფუძვლები და აქციებში ინვესტირება. მაგრამ მანამდე განვიხილავთ პროცენტის კონცეფციას.

7.1.1 პროცენტი

დავიწყოთ შემდეგი მაგალითით:

მაგალითი 7.1. დავუშვათ, ამჟამად თქვენ გაქვთ 1000 დოლარი და გსურთ ის შეინახოთ სამომავლოდ. თქვენ შეგიძლიათ ის ჩადოთ ქილაში ან სეიფში. მაგრამ თუ ეს გააკეთეთ, ერთი წელიწადში, თქვენ მაინც მხოლოდ 1000 დოლარი გექნებათ. ამის გარდა თქვენ შეგიძლიათ ერთწლიანი სადეპოზიტო სერთიფიკატის, ან CD-ის შეძენა, რომელიც იხდის 0,06-ის ტოლ ფიქსირებულ წლიურ საპროცენტო განკვეთს. ბანკი იხდის მხოლოდ ფიქსირებულ საპროცენტო განაკეთს ფიქსირებული ვადის შემდეგ, რომელიც ამ შემთხვევაში ერთი წელია. ამიტომ ერთი წლის შემდეგ ბანკი თქვენ გადაგიხდით:

$$1000\$ \times 0{,}06 = 60\$$$

თქვენი ფულის სანაცვლოდ. ეს თქვენი მოგებაა ინვესტიციისაგან. გარდა ამისა, წლის ბოლოს თქვენი ინვესტიციის ღირებულება შეადგენს:

$$1000\$(1 + -0{,}06) = 1060\$.$$

CD-ები განიხილება, როგორც დაზღვევის დეპოზიტებში ფედერალური კორპორაციის საბანკო დეპოზიტები, რაც ნიშნავს, რომ ისინი დაზღვეულები არიან 100 000 დოლარის თანხამდე, თუ ბანკი გადახდისუუნაროა. ამიტომ ასეთ ინვესტიციებს განვიხილავთ როგორც ურისკოს, მაგრამ გვესმის, რომ ყველაფერს ახლავს გარკვეული რისკი. მაგალითად,

ქვეყანას თვითონ შეუძლია შეიკვეცოს. მაგრამ რისკები რომლებიც სხვა განხილულ რისკებთან შედარებით ძალიან მცირეა, განიხილება როგორც არ არსებული.

საზოგადოდ, ინვესტირებისაგან მიღებულ ფულის ნაწილს ეწოდება ინვესტიციებზე **შემოსავლის განაკვეთი** r . ამგვარად, CD-ის შემთხვევაში, შემოსავლის ნორმა არის საპროცენტო განაკვეთი. ჩადებულ P თანხას უწოდებენ **ძირითადს**, და იმ დროს, რომელიც საჭიროა პროცენტის რეალიზაციისათვის უწოდებენ **ფლობის პერიოდს**. წინა მაგალითში ძირითადი თანხა შეადგენს 1000 დოლარს, ხოლო ფლობის პერიოდი ერთი წელია. თუ სხვა რამეს არ ვგულისხმობთ, ფლობის პერიოდი ერთი წელია და r წარმოადგენს შემოსავლიანობის წლიურ განკვეთს. CD-ისთვის პროცენტები გამოითვლება ფლობის ბოლოს. მას **მარტივი პროცენტი** ეწოდება. ამ შემთხვევაში ინვესტიცისაგან მიღებული მოგება მოიცემა შემდეგნაირად:

$$Profit = P \times r, \qquad (7.1)$$

და ფლობის პერიოდის ბოლოს V ინვესტიციის მნიშვნელობა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$V = P(1 + r).$$

CD-ის შემთხვევაში ჩვეულებრივ მოითხოვება დეპონირებისათვის ფულის დატოვება ფლობის მთელ პერიოდში. ბანკები ასევე სთავაზობენ ჩვეულებრივ შემნახველ ანგარიშებს, რომლებსაც არ გააჩნიათ შენახვის მოთხოვნილი პერიოდი. ანუ თქვენ ამ ეტაპზე დაგროვილი ფულის უკან მიიღება ნებისმიერ დროს შეგიძლიათ. თუ P ძირითადია, r არის წლიური საპროცენტო განაკვეთი და t წლების მიხედვით ის დროა, როდესაც თქვენი ფული იყო შემნახველ ანგარიშზე, მაშინ დროის t მომენტში ინვესტიციის მნიშვნელობაა:

$$V = P(1 + rt). \qquad (7.2)$$

მაგალითი 7.2. ვთქვათ, თქვენ გაქვთ ჩვეულებრივი შემნახველი ანგარიში, 1000$ დეპოზიტი და $r = 0{,}06$. ექვსი თვის (0,5 წელი) შემდეგ თქვენი ინვესტიციების ღირებულებაა:

$$V = P(1 + rt) = 1000\$(1 + 0{,}06 \times 0{,}5) = 1030\$.$$

წინა მაგალითში დრო შეადგენდა ერთ წელზე ნაკლებს. თუ დრო ერთ წელზე მეტია, მაშინ ჩვეულებრივ 7.2 ფორმულა არ გამოიყენება. ნაცვლად ამისა, ერთი წლის შემდეგ მომდევნო წელზე პროცენტი ასევე დაირიცხება პირველ წელს მიღებული პროცენტის მიხედვით. ანუ მეორე წლისთვის ძირითადს შემდეგი წარმოადგენს $P(1 + r)$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ორი წლის ბოლოს ინვესტიციების ღირებულება ტოლია $P(1 + r)(1 + r) = (1 + r)^2$. ეს პროცედურა მეორდება ყოველ შემდეგ წელს ისე, რომ t წლის ბოლოს ინვესტიციის ღირებულება იქნება:

$$V = P(1+r)^t$$

ამას ეწოდება რთული პროცენტი და ჩვენ ვამბობთ, რომ პროცენტი რთულდება ყოველწლიურად. ჩვენ ვამბობთ, რომ „რთულდება“, იმიტომ რომ მომავალ წელს ძირითადი წარმოადგენს წინა ძირითადის და დარიცხული პროცენტის ჯამს (კომბინაციას).

მაგალითი 7.3. დავუშვათ თქვენ ჩადეთ 1000 დოლარი $r = 0{,}06$ წლიური საპროცენტო განაკვეთით, პროცენტი ყოველწლიურად რთულდება. მაშინ $t = 20$ წლის შემდეგ ინვესტიცია იქნება:

$$V = P(1+r)^t = 1000\$(1+0{,}06)^{20} = 3207{,}14\$.$$

გაითვალისწინეთ, რომ თუ არ გვექნებოდა რთული პროცენტი, ჩვენ გვექნებოდა

$$V = P(1+rt) = 1000\$(1+0{,}06\times 20) = 2200\$,$$

რაც მნიშვნლვნად მცირეა.

ხშირად პროცენტი უფრო ხშირად რთულდება, ვიდრე წელიწადში ერთხელ, მაგალითად, შეიძლება გართულდეს ყოველთვიურად. შემდეგ მაგალითში ნაჩვენებია, თუ როგორი მომგებიანია ის ინვესტორისათვის.

მაგალითი 7.4. დავუშვათ, რომ წლიური საპროცენტო განაკვეთი 0,06-ია, პროცენტები რთულდება ყოველთვიურად, ხოლო ძირითადი – 1000 დოლარია. მაშინ ყოვეთვიური საპროცენტო განაკვეთი არის $0{,}06/12 = 0{,}005$, რაც ნიშნავს, რომ 12 თვის (ერთი წლის) შემდეგ ჩვენ გვაქვს:

$$V = 1000\$(1+0{,}005)^{12} = 1061{,}68\$.$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ეს მნიშვნელობა 1,68$-ით მეტია იმასთან შედარებით, პროცენტები რომ ყოველწლიურად გართულებულიყო.

ზოგადად, თუ წლიური საპროცენტო განაკვეთი r-ის ტოლია, ჩვენ ვადგენთ ყოველთვიურ პროცენტს და ძირითადი საწყისი თანხა P-ს ტოლი, მაშინ წლის ბოლოს გვექნება:

$$V = P\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}.$$

იმის ნაცვლად, რომ შეგვედგინა ყოველთვიური, ჩვენ შეგვეძლო შეგვედგინა ყოველკვირეული, ყოველდღიური, საათობრივი და მუდმივიც. მუდმივი რთული პროცენტი მიიღება ზღვრის აღებით, რამდენადაც რთული პროცენტის სიხშირე უსასრულობას აღწევს ინვესტიციების ბოლო მნიშვნელობისათვის. თუ ჩვენ ვართულებთ წელიწადში n-ჯერ, ერთი წლის ბოლოს გვექნება:

$$V = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}.$$

ჩვენ ვიღებთ უწყვეთ რთულ პროცენტს, თუ ავიღებთ ზღვარს ამ გამოსახულებიდან, როდესაც n მიისწრაფის ∞-სკენ. ამ მიზნით ჩვენ გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = Pe^r.$$

წინა ზღვარი წარმოადგენს გამოთვლის სტანდარტულ შედეგს. ჩვენ ვახდენთ ამ შედეგების შეჯამებას თეორემა 7.1-ში.

თეორემა 7.1. დავუშვათ, P ძირითადია, r არის წლიური საპროცენტო განაკვეთი და t წლების მიხედვით ის დროა, როდესაც თქვენი ფული იყო ინვესტირებული. თუ პროცენტი რთულდებოდა წელიწადში n-ჯერ, მაშინ წლის ბოლოს ინვესტიციების ღირებულება არის:

$$V = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

თუ პროცენტი უწყვეტად რთულდება, მაშინ n წლის შემდეგ ინვესტიციების ღირებულება არის:

$$V = Pe^{rt}.$$

მაგალითი 7.5. დავუშვათ წლიური საპროცენტო განაკვეთი არის 0,06 პროცენტი უწყვეტად რთულდება და ძირითადი 1000$-ია. ორი წლის შემდეგ:

$$V = Pe^{rt} = 1000\$e^{0{,}06\times 2} = 1127{,}50\$.$$

7.1.2 წმინდა დაყვანილი ღირებულება

წმინდა დაყვანილი ღირებულების ცნებას წარმოგიდგენთ რამდენიმე მაგალითით.

მაგალითი 7.6. დავუშვათ, რომ ჯორჯმა გადაწყვიტა თავისი მანქანა პიტს მიყიდოს 3000$-ად. თუმცა პიტი ეუბნება ჯორჯს, რომ მას ცოტათი უჭირს ნაღდი ფულის მხრივ და მას შეუძლია ეს ფული დღეიდან ერთი წლის შემდეგ მისცეს. ნამდვილად სთავაზობს პიტ ჯორჯს 3000$-ს. თუ ჯორჯი დღეს მიიღებდა ფულს, მას შეეძლო ის ბანკში ჩაედო ნებისმიერი მისთვის ხელმისაწვდომ საპროცენტო განაკვეთით და საბოლოოდ წელიწადში 3000$-ზე მეტი მიეღო. დავუშვათ საპროცენტო განაკვეთი შეადგენს 0,06-ს და ყოველწლიურად რთულდება. თუ ჯორჯი დღეს მიიღებს 3000$-ს და ბანკში ჩადებს, საბოლოოდ მას ექნება

$$3000\$(1+006) = 3180\$.$$

ამიტომ პიტმა ჯორჯს უნდა გადაუხადოს ერთ წელიწადში 3180$.

ხშირად სასარგებლოა ეს საკითხი განვიხილოთ პირიქით. ე.ი. ჩვენ განვსაზღვრავთ რა ეღირება 3000$ ერთ წელიწადში. ამას უწოდებენ ფულის წმინდა დაყვანილ ღირებულებას

(NPV). ამისათვის გამრავლების მაგივრად ჩვენ უბრალოდ ვყოფთ 1,06-ზე. მაშინ ჩვენ გვექნება:

$$NPV = \frac{3000\$}{1+0{,}06} = 2830{,}19\$.$$

ამიტომ პიტი სინამდვილეში ჯორჯს სთავაზობს 2830,19 დოლარს.

მაგალითი 7.7. როდესაც ჯორჯი მიუთითებს პიტს, რომ ის თაღლითობს. პიტი ეუბნება „მისმინე, დღეს მე შემიძლია ჩამოვიდე 1000$-ს, მაგრამ შემდეგ მე შემიძლია მოგცე მხოლოდ 1000$ ერთ წელიწადში, და საბოლოოდ 1000$ ორ წელიწადში". რეალურად რამდენს სთავაზობს პიტი ჯორჯს ახლა? დღეს მიღებული 1000$ რეალურად ღირს 1000$. იმისათვის რომ განვსაზღვროთ ერთი წელში მიღებული 1000$ -ის მიმდინარე ღირებულება, ის ისევ უნდა გავყოთ 1,06-ზე. რომ განვსაზღვროთ ორი წლის შემდეგ მიღებული 1000$-ის მიმდინარე ღირებულება, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ მისი მიმდინარე ღირებულება ერთი წლის შემდეგ და მიღებული შედეგი გავყოთ 1,06-ზე, რომ გავიგოთ მისი დაყვანილი ღირებულება დღეს. ეს ეკვივალენტურია 1000$-ის $(1{,}06)^2$-ზე გაყოფის. ამიტომ გვაქვს:

$$NPV = 1000\$ + \frac{1000\$}{1+0{,}06} + \frac{1000\$}{(1+0{,}06)^2} = 2833{,}40\$.$$

მაგალითი 7.8 საბოლოოდ, ჯორჯმა უთხრა პიტს, რომ მას შეუძლია გადაიხადოს სამი თანაბარი ნაწილით, როგორ ეს პიტმა მიუთითა, მაგრამ მას სურს, რომ თანხა დღეს მიღებული 3000$-ის ექვივალენტური იყოს. გადახდების ზომა, რომ განვსაზღვროთ ჩვენ უნდა ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$3000\$ = x + \frac{x}{1+0{,}06} + \frac{x}{(1+0{,}06)^2}$$

x-ისთვის. პასუხია $x = 1058{,}80\$$.

ზოგადად, თუ ჩვენ გვაქვს ფულადი სახსრების ნაკადი $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ისე, რომ დღეს x_0, x_1 მიღებულია დროის ერთ პერიოდში, x_2 მიღებულია დროის ორ პერიოდში, . . ., x_n მიღებულია დროის n პერიოდში, და საპროცენტო განაკვეთი თითოეულ პერიოდში შეადგენს r–ს, მაშინ წმინდა დისკონტური ღირებულება (NPV) თითოეული ფულადი სახსრების ნაკადისა მოიცემა შემდეგნაირად:

$$NPV = x_0 + \frac{x_1}{(1+r)} + \frac{x_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{x_n}{(1+r)^n}.$$

7.1.3 აქციები

დავუშვათ, თქვენ დააფუძნეთ მცირე კომპანია, რომელიც აწარმოებს ისეთ ფეხსაცმელს, რომელიც უზრუნველყოფს ელემენტის კვებით მასაჟს, ის ძალიან კარგად მუშაობს და თქვენ გესმით, რომ უფრო მეტი კაპიტალით თქვენ შეგიძლიათ გააფართოვოთ ის უფრო მსხვილ კომპანიად. ამ კაპიტალის გაზრდის მიზნით თქვენ შეგიძლიათ დაიქირავოთ საინვესტიციო-საბანკო ფირმა თქვენი კომპანიის აქციების საჯაროდ გასაყიდად. როგორც კი ამას გააკეთებთ, თქვენ ფირმას დაერქმევა კორპორაცია, ხოლო ამ აქციების ერთობლიობას უწოდებენ **ფონდს** კომპანიაში. ამ აქციების თითოეული წილი წარმოადგენს ერთ ხმას კომპანიის მიმართ კორპორატიულ მმართველობაში. კერძო კომპანიის მიერ აქციების გამოშვების პროცესს ეწოდება პირველადი საჯარო განთავსება (Initial public offering -IPO). დოკუმეტის, რომელიც ახასიათებს კომპანიის პერსპექტივებს, პროსპექტუსი მტკიცდება ფასიანი ქაღალდებისა და საფონდო კომისიის მიერ (SEC) და მისი მეშვეობით განისაზღვრება აქციების გაყიდვის ფასი.

პირველადი საჯარო განთავსების შემდეგ შესაძლებელია აქციების ყიდვა-გაყიდვა საფონდო ბირჟაზე, როგორიცაა ნიუ-ორკის საფონდო ბირჟა (NYSE). საფონდო ბირჟა იძლევა შესაძლებლობებს ინდივიდებისათვის ივაჭრონ აქციებით და მხოლოდ ბირჟის წევრებს აქვთ საშუალება მიიღონ საბირჟო გარიგებებში მონაწილეობა. ბირჟაზე უმეტესი ადგილების მფლობელები არიან მსხვილი საბროკერო ფირმები. ინდვიდუალურ ინვესტორებს შეუძლიათ ბირჟაზე ვაჭრობა ბროკერების მეშვეობით. ამასთან მან უნდა გადაიხადოს საკომისიო გადასახადი სავაჭრო მომსახურებისათვის. დღეისათვის ინდივიდუალურ ინვესტორებს შეუძლიათ იოლად ივაჭრონ ონლაინ საბროკერეო ფირმების მეშვეობით, ისეთით როგორცაა ამერიტრეიდი (Ameritrade). ტერმინი აქტივი უფრო ზოგადია, ვიდრე ტერმინი აქცია. აქტივი ესაა ნებისმიერი ინსტრუმენტი რომლის გაყიდვაც იოლადაა შესაძლებელი. ამასთან, აქციები აქტივია, ამასთან არსებობს სხვა აქტივები, როგორიცაა ობლიგაციები, რომელსაც აქ არ განვიხილავთ.

ისევე როგორც ყველა საქონლის შემთხვევაში, აქციების ფასი იზრდება ბირჟაზე, როდესაც გამყიდველების რაოდენობა ნაკლებია მყიდველების რაოდენობაზე. დღევანდელი დღის ბოლოს მაიკროსოფტმა შესაძლოა გაყიდოს აქცია თითო 28 $-ად, მაშინ როცა ის შეიძლება ავიდეს 30 $-მდე ხვალ დილისთვის და დაიწიოს 29 $-მდე საღამოსთვის. აქციაზე მოთხოვნის განმსაზღვრელი მრავალი ფაქტორი არსებობს, კომპანიის მიმდინარე პროსპექტის, მაკროეკონომიკური ცვლადების, როგორიცაა ინფლაცია და მწარმოებლურობა, და შესაძლოა ჭარბი ინვესტორების გადაწყვეტილებების ჩათვლით.

შემოსავალი აქციებზე

მრავალი კომპანია თავის აქციონერებს დივიდენდებს უხდის. დივიდენდები – ეს არის კომპანიის წმინდა მოგებიდან წილი, რომლებიც განაწილებულია კომპანიის მიერ მის აქციონერებს შორის. დივიდენდები გაიცემა ფიქსირებული რაოდენობით თითოეულ აქციაზე გათვლით. ივიდენდები ჩვეულებრივ გაიცემა ყოველკვარტალურად (ოთხჯერ წელიწადში). როდესაც ვსაზღვრავთ შემოსავლის განაკვეთს აქციებში ინვესტიციებზე, ჩვენ უნდა გავითვალისწინოთ დივიდენდის ნებისმიერი გადახდა. აქციებისათვის შემოსავლის განაკვეთს, იმ პერიოდში, როდესაც აქცია მფლობელობაშია, ხშირად ვუწოდებთ ფლობის პერიოდის შემოსავლიანობის განაკვეთს (HPR).

მაგალითი 7.9. ვთქვათ კომპანია XYZ–ის ერთი აქცია დღეს შეძენილია 10$-ად, გაყიდულია ექვსი თვის შემდეგ 12$-ად, და არ არის გადახდილი არანაირი დივიდენდი. მაშინ, ფლობის პერიოდი არის ექვსი თვე და

$$HPR = \frac{12\$ - 10\$}{10\$} = 0.2$$

მაგალითი 7.10. ვთქვათ გვაქვს იგივე სიტუაცია, როგორიც წინა მაგალითში იყო იმ განსხვავებით, რომ დივიდენდი D_1 1$-ის ოდენობით გადახდილია თითოეულ აქციაზე ფლობის პერიოდის ბოლოს. მაშინ:

$$HPR = \frac{1\$ + 12\$ - 10\$}{10\$} = 0.3$$

ზოგადად, თუ P_0 ერთი აქციის დღევანდელი ფასი, P_1 არის ერთი აქციის ფასი ფლობის პერიოდის ბოლოს, D_1 არის დივიდენდი ერთეულ აქციაზე ფლობის პერიოდის ბოლოს და სხვა დივიდენდის გადახდა არ ხდება ფლობის პერიოდის განმავლობაში, მაშინ:

$$HPR = \frac{D_1 + P_1 + P_0}{P_0} \qquad (7.3)$$

როდესაც ვყიდულობთ აქციას, ჩვენ არ ვიცით რა იქნება შემოსავლის განაკვეთი. აქციებმა შეიძლება აიწიოს და დაიწიოს. ამგვარად, არსებობს რისკი, რომელიც აქციის შეძენასთანაა დაკავშირებული. თუმცა ჩვენ არ ვიცით შემოსავალი, ჩვენ შეგვიძლია შევეცადოთ შევაფასოთ ის დროის წინა პერიოდების შემოსავლის განაკვეთზე დაყრდნობით. ჩვეულებრივ დროის პერიოდად ვიღებთ ერთ წელს. განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 7.11. XYZ აქციებს ჰქონდათ ცხრილში ნაჩვენები წლიური შემოსავლის განაკვეთი:

წელი	წლიური შემოსავალი r
2000	−.05
2001	−.08
2002	−.12
2003	.25
2004	.20

მაშინ მოსალოდნელი მნიშვნელობა $\bar{r}$ და r-ის სტანდარტული გადახრა σ_r მოიცემა შემდეგი გამოსახულებით:

$$\bar{r} = \frac{(-0{,}05) + (-0{,}08) + (-0{,}12) + (0{,}25) + (0{,}20)}{5} = 0{,}04.$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{(-0{,}05 - 0{,}04)^2 + (-0{,}08 - 0{,}04)^2 + (0{,}25 - 0{,}04)^2 + (0{,}20 - 0{,}04)^2}{5}} = 0{,}153.$$

წინა მაგალითში გამოთვლილი მოსალოდნელი შემოსავლის განაკვეთი და სტანდარტული გადახრა გვეუბნება რას უნდა მოველოდეთ XYZაქციებისაგან მომავალ წელს? რა არის აუცილებელი. იმისთვის რომ ინვესტორს მივცეთ წარმოდგენა, თუ რას უნდა მოელოდეს მომავალ 3 წლის, 5 წლის, 10 წლის განმავლობაში, საშუალო წლიური შემოსავალი ვადის განმავლობაში და შესაბამისი სტანდარტული გადახრები, ჩვეულებრივ გამოითვლება კომპანიისთვის და ხელმისაწვდომია საზოგადოებისათვის. ამასთან, ეს სიდიდეები ფარდობითია ალბათობების განაწილების მიმართ, რომელიც დროის მოცემულ პერიოდში მიიღება. ისინი არიან ჩვენი სუბიექტური ალბათობების განაწილებასთან, რომლებიც მიიღება იმისგან, რასაც მომავალ წელს ველოდებით არაფარდობით. ამიტომ ისინი მხოლოდ რაღაც ნაწილია იმ ინფორმაციის, რომელიც გვეხმარება ჩამოვაყალიბოთ ჩვენი ალბათობების განაწილება. აქ ბევრი სხვა ფაქტორია, რომელიც ეხება კომპანიის მიმდინარე პერსპექტივებს და ეკონომიკურ მდგომარეობას, რომელიც აუცილებელია მომავალი წლის გააზრებული სუბიექტური ალბათობების განაწილების ჩამოყალიბებისათვის. ამის შესახებ დაწვრილებით შემდეგ თავებში ვიმსჯელებთ. ამჟამად ჩვენ გთავაზობთ, მხოლოდ შემდეგ მაგალითს, რომელიც იძლევა ამის განმარტებას. დავუშვათ, თქვენი მეგობარი სკოლაში და კოლეჯში პირველი ორი წლის სწავლის დროს უმეტესად იღებდა C. მაგრამ კოლეჯში სწავლის მესამე წლის დასაწყისში მან განაცხადა, რომ გადაწყვიტა სერიოზულად მიუდგეს თავის მომავალს. ამის შედეგი ის იყო, რომ მან მიაღწია საშუალო A-ს სწავლების მესამე წელს. თქვენ არ დაამყარებთ თქვენ მოლოდინებს მისი წარმატებების შესახებ კოლეჯში სწავლების მეოთხე წელს მისი კლასების მიხედვით, იქიდან როდესაც მან სწავლა დაიწყო საშუალო სკოლაში. უფრო მეტიც, თქვენ ასევე გაითვალისწინებთ მიმდინარე ინფორმაციას მასზე, კერძოდ იმას, რომ გასულ წელს მან

თქვა, რომ გადაწყვეტილი აქვს ისწავლოს და მიიღოს კარგი შეფასებები. ზუსტად ასე ვაფასებთ კომპანიის პერსპექტივებს შემოსავლის განაკვეთზე კომპანიის ეკონომიკის შესახებ მისი მიმდინარე ინფორმაციის გამოყენებთ.

მას შემდეგ, რაც მივიღეთ შემოსავლიანობის განაკვეთისთვის ინფორმირებული სუბიექტური განაწილება, ჩვენ შეგვიძლია მივიღოთ გადაწყვეტილება რისკის უპირატესობის შესახებ. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამის ილუსტრირებას.

მაგალითი 7.12. დავუშვათ, ვიხილავთ ორ აქციას XYZ და ABC, და ჩვენს ფრთხილ ანალიზზე დაყრდნობით გვჯერა, რომ მათ შემოსავლიანობას მომავალ წელს გააჩნია შემდეგი მოსალოდნელი მნიშვნელობა $\bar{r}$ და σ_r სტანდარტული გადახრა:

	$\bar{r}$	σ_r
ABC	.1	.02
XYZ	.1	.04

შემდეგ დავუშვათ, რომ შემოსავლიანობის განაკვეთი ნორმალურადაა განაწილებული. ნახ. 7.1-ზე ნაჩვენებია ალბათობების სიმკვრივის ფუნქცია ორი აქციისათვის. თუმცა სიმკვრივის ორივე ფუნქციას აქვს ერთნაირი 0,1-ის ტოლი მნიშვნელობა. ABC-სთვის შემოსავლიანობის განაკვეთის სიმკვრივის ფუნქცია უფრო ახლოსაა 0,1-თან, რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩვენ უფრო დარწმუნებულები ვართ იმაში, რომ შემოსავლიანობის განაკვეთი იქნება 0,1-ის ტოლი. შეგახსენებთ, რომ ნორმალური სიმკვრივის ფუნქციისათვის მასის 95% ხვდება საშუალო მნიშვნელობიდან 1,96 სტანდარტულ გადახრის ფარგლებში. ამგვარად, ABC-სთვის შემოსავლიანობის განაკვეთის შემდეგ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა 0,95-ის ტოლია:

$$(0{,}1 - 1{,}96 \times 0{,}02, \qquad 0{,}1 + 1{,}96 \times 0{,}02) = (0{,}061, 0{,}139),$$

ხოლო XYZ-სთვის შემოსავლიანობის განაკვეთის შემდეგ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა 0,95-ის ტოლია:

$$(0{,}1 - 1{,}96 \times 0{,}04,\ \ 0{,}1 + 1{,}96 \times 0{,}04) = (0{,}022, 0{,}178).$$

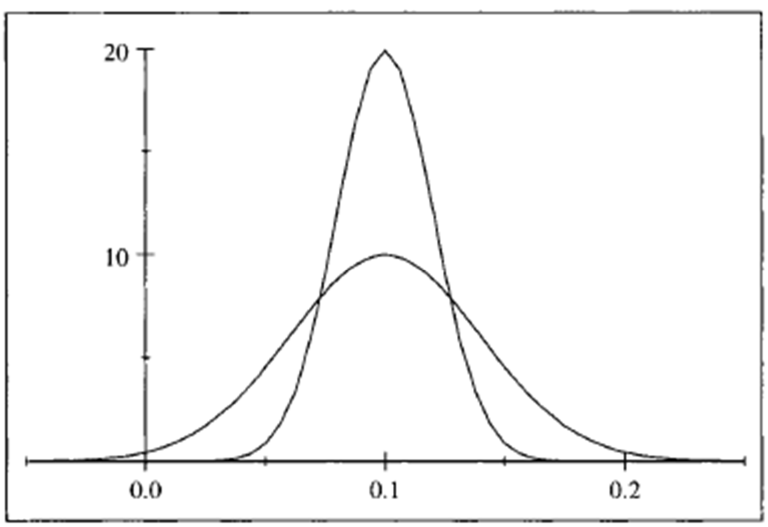
ინვესტორთა უმეტესობამ აირჩია ABC იმიტომ რომ, როდესაც შემოსავლიანობის განაკვეთი ერთი და იგივეა, ისინი ირჩევენ ნაკლებრისკიან ინვესტიციებს. თუმცა, XYZ არჩევაში არაფერია ირაციონალური. რისკის მიმართ თავის ნაკლებამრიდებელი ადამიანი შეიძლება მზად იყოს ნაკლები შემოსავალი ჰქონდეს ან ფოლიც კი დაკარგოს დიდი შემოსავლის მიღების შანსის გამო.

აქციების მოკლე გაყიდვა

დავუშვათ, თქვენ ელოდებით, რომ XYZ კომპანიის აქციები მომავალი წლის განმავლობაში გაიაფდება. თქვენ ფულს გააკეთებთ, თუ ეს მოხდება აქციების მოკლე გაყიდვით. აქციების მოკლე გაყიდვა გამოიხატება ბროკერებისაგან აქციების სესხებით და მათი დღეს გაყიდვით. სამომავლოდ ინვესტორმა უნდა შეიძინოს აქციები ბაზარზე და შეცვალოს ნასესხები აქციები. მას უწოდებენ მოკლე პოზიციის დახურვას. პრაქტიკაში საბროკერო ფირმა ჩვეულებრივ სხვა ინვესტორისაგან სესხულობს აქციებს. მოკლე გამყიდველის ანგარიში უნდა იყოს მოკლე გაყიდვების თანხის 50% სხვა აქტივებში მოკლე გაყიდვების უზრუნველსაყოფად. ამ მოთხოვნად პროცენტს უწოდებენ მოთხოვნილ **მარჟას**. გარდა ამისა, მოკლე გამყიდველს ჩვეულებრივ არ შეუძლია გამოიყენოს მოკლე გაყიდვებიდან მიღებული ფული შემოსავლების გენერირებაზე.

მაგალითი 7.13. დავუშვათ, XYZ-ის წილი ამჟამად იყიდება 100 დოლარად, და თქვენ გაყიდეთ 50 აქცია მოკლე გაყიდვით. შემდეგ დავუშვათ, რომ მოთხოვნილი მარჟა შეადგენს 50%-ს. შემდეგ თქვენი მოკლე გაყიდვა შეადგენს $100\$ \times 50 = 5000\$$, რაც იმას ნიშნავს, რომ თქვენ გქონდეთ 2500$ თქვენს ანგარიშზე სხვა აქტივებში. დავუშვათ 2500$ სახაზინო ვექსილებში. მოკლე გაყიდვის შემდეგ თქვენი ანგარიში იქნება შემდეგი:

აქტივები		ვალდებულება		კაპიტალი
Cash:	\$5000	მოკლე პოზიცია XYZ-ში	\$5000	\$2500
T-Bill:	\$2500	(100 აქცია საკუთრებაში)		



ნახ 7.1. მაგალით 7.12-ში განხილული შემოსავლების განაკვეთისთვის სიმკვრივის ფუნქცია. უფრო გაშლილი მრუდი – ეს ნორმალური სიმკვრივის ფუნქციაა $\bar{r} = 0{,}1$ და $\sigma_r = 0{,}04$-ით, ხოლო შედარებით წვრილი - ეს ნორმალური სიმკვრივის ფუნქციაა $\bar{r} = 0{,}1$ და$\sigma_r = 0{,}02$-ით.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ თქვენი კაპიტალი ისეთივეა, როგორც მოკლე გაყიდვამდე იყო (ასეც უნდა იყოს). ანუ, თუმცა თქვენ გაქვთ დამატებით 5000$ ნაღდი ფული, თქვენ ასევე გაქვთ 5000$-ის ტოლი დამატებითი პასუხისმგებლობა.

დავუშვათ, კომპანია არ იხდის დივიდენდებს, და თქვენ ფარავთ თქვენს მოკლე პოზიციას ერთი წლის შემდეგ, როდესაც აქცია 80 დოლარი ღირს. მაშინ თქვენი მოგებაა

$$100\$ \times 50 - 80\$ \times 50 = 1000\$$$

და თქვენი ფლობის პერიოდიდან შემოსავალი მოიცემა შემდეგნაირად:

$$HPR = \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{-4000\$ - (-5000\$)}{-5000\$} = -0{,}2.$$

შეიძლება უცნაურად მოგეჩვენოთ, რომ თქვენი შემოსავლების განაკვეთი უარყოფითია, მაშინ, როცა თქვენ მოგება მიიღეთ. მაგრამ თქვენი ინვესტიციები უარყოფითი იყო, კერძოდ -5000$. მგვარად 7.1. ტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$Profit = P_1 \times HPR = (-5000\$)(-0{,}2) = 1000\$.$$

თუმცა მოკლე გაყიდვის განთავსებისათვის ჩვეულებრივ მოითხოვება 50%-იანი მარჟა, მისი შენარჩუნებისათვის ნაკლები რაოდენობაა საჭირო, ამ პროცენტს უწოდებენ **მხარდამჭერ მარჟას**.

მაგალითი 7.14. დავუშვათ, თქვენ მაგალით 7.13-ში განათავსეთ მოკლე გაყიდვა და მხარდამჭერი მარჟა შეადგენს 35%-ს.შემდეგ დავუშვათ, რომ აქციების ფასი იზრდება აქციაზე 150 დოლარამდე მაშინ თქვენი პასუხისმგებლობა ხდება:

$$50 \times 150\$ = 7500\$.$$

და თქვენი მარჟა ახლა არის:

$$\frac{2500\$}{7500\$} = 0{,}333.$$

რამდენადაც 33,3%<35%, თქვენ იღებთ დამატებითი უზრუნველყოფის შეტყობინებას, რაც იმას ნიშნავს, რომ თქვენ უნდა შეიტანოთ დამატებითი ფულადი სასხრების საკმარისი დეპოზიტი, რათა დაიყვანოთ თქვენი მარჟა 35%-მდე.

7.1.4 პორტფელები

არსებობს ათასობით აქცია, როგორც აშშ-ში, ისე საერთაშორისო დონეზე, რომლებიც ხელმისაწვდომია. ინვესტორისათვის პორტფელი – ეს არის ინვესტორების მიერ განხორციელებული ინვესტიციების ჯგუფი. მაგალითად, თქვენი პორტფელი შეიძლება შედგებოდეს XYZ-ის 100 აქციისა და ABC-ს 200 აქციისაგან. მოკლედ, ერთზე მეტი აქციის

ყიდვის მიზეზს წარმოადგენს რისკის შემცირება. ABC-ს აქციებმა შეიძლება აიწიოს მაშინაც კი, თუ XYZ-ის აქციები დაიწევს.

თქვენი პორტფელის ფულადინ ღირებულების წილს, რომლის ინვესტირებაც ხდება კონკრეტულ x_i აქციებში ეწოდება ამ აქციების w_i **წონა** ამ პორტფელში. ცხადია თუ პორტფელში n აქციაა, მაშინ:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

მაგალითი 7.15. დავუშვათ, IBM-ის ერთი აქცია 25$ ღირს, $Lucent$-ის ერთი აქცია 5$, ხოლო $Disney$-ის ერთი აქცია 30$. შემდეგ დავუშვათ, რომ თქვენი პორტფელი შედგება IBM-ის 200 აქციის, $Lucent$-ის 400 აქცის და $Disney$-ის 100 აქციისაგან. მაშინ ჩვენ გვაქვს შემდეგი:

აქცია	პორტფელში აქციების #	ფასი/აქცია	მთლიანი რაოდენობა	წონა პორტფელში
IBM	200	$25	$5000	.5
Lucent	400	$5	$2000	.2
Disney	100	$30	$3000	.3
მთლიანი პორტფელი			$10,000	1

მაგალითად, IBM-ის წონა პორტფელში მიღებული იყო შემდეგნაირად:

$$w_{IBM} = \frac{5000\$}{10\,000\$} = 0{,}5.$$

7.1.5 საბაზრო პორტფელი

ერთი კონკრეტული პორტფელი, რომელიც ჩვენ გვაინტერესებს - არის საბაზრო პორტფელი. შაბაზრო პორტფელი შედგება ყველა სავაჭრო აქციისაგან. თუ ინვესტორს სურს მოახდინოს საბაზრო პორტფელის დუბლირება ინვესტორის საკუთარ პორტფელში, მაშინ ამ პორტფელში თითოეული აქციის პროცენტი უნდა შეესაბამებოდეს ბაზარზე აქციის საერთო კაპიტალიზაციას. აქციის საერთო კაპიტალიზაცია წარმოადგენს ყველა აქციის საერთო ღირებულებას. შემდეგი მაგალითი ახდენს ამ ცნების ილუსტრირებას.

მაგალითი 7.16. დავუშვათ ბაზარზე არის მხოლოდ ოთხი აქცია, ABC, XYZ, DEF და GHK, და მათი კაპიტალიზაცია ბაზარზე ასეთია:

აქცია	ბაზარში აქციების #	ფასი/აქცია	მთლიანი კაპიტალიზაცია	წონა ბაზარში
ABC	1000	$20	$20,000	.1
XYZ	10,000	$3	$30,000	.15
DEF	5000	$10	$50,000	.25
GHK	20,000	$5	$100,000	.5
მთლიანად ბაზარში			$200,000	1

თუ მერის საბაზრო პორტფელის იმიტირების სურვილი ექნებოდა, მერი მოახდენდა თავისი ფულის 10%-ის ინვესტირებას ABC-ში, 15%-ის - XYZ-ში, 25%-ის – DEF-ში და 50%-ის – GHK-ში.

უბრალო ილუსტრირებისათვის ჩვენ ვივარაუდეთ, რომ საბაზრო პორტფელში მხოლოდ ოთხი აქციაა. სინამდვილეში არსებობს ათასობით სავაჭრო აქცია. ამგვარად, პრაქტიკაში რთული იქნებოდა, თუ შეუძლებელი არა, ცალკეული ინვესტორისთვის საბაზრო პორტფელის იმიტერება. თუმცა არსებობს თანაზიარი ფონდები და ელექტრონული სავაჭრო ფონდები ($ETFs$), რომლებიც ვაჭრობენ აქციებით და ინვესტორებს საშუალებას აძლევენ ჩაერთონ ბაზრის მსხვილი სეგმენტების ინვესტირებაში ერთიანი შეძენის განხორციელებით. ამას შემდეგში განვიხილავთ.

7.1.6 საბაზრო ინდექსები

საფონდო ბაზრის ინდექსი წარმოადგენს ინდიცატორს, რომელიც თვალყურს ადევნებს აქციების რომელიღაც ქვესიმრავლეს. ალბათ ყველაზე ცნობილ ინდექსს წარმოადგენს *Dow Jones Industrial Average*, რომელიც დაფუძნებულია „ლურჯი ჩიპის“ მქონე კომპანიების სიაზე. სია პირველად შედგენილი იყო 1896 წელს ჩარლს დოუს და ედვარდ ჟონსის მიერ, ამასთან მასში ჩართული იყო 20 კომპანია. მაგრამ 1928 წელს ის გაფართოვდა და მოიცავდა 30 კომპანიას. 30 კომპანიის აქციების საერთო მოცულობა შეადგენს *NYSE*-ის ყველა აქციის ღირებულების 25%-ს და ჟურნალ *Wall Street*-ის რედაქტორები წყვეტენ რომელი კომპანიები შეიტანონ ჩამონათვალში და როდის განახორციელონ ცვლილებები. 1986 წლიდან ის განახლებული იყო 20-ზე უფრო მეტჯერ და მხოლოდ *General Electric* დარჩა 1986 წლის პირველადი სიიდან. სიაში მყოფ კომპანიებში შედიან *AT&T* , *IBM*, *McDonald's* და *Walt Disney*. საშუალო თავის თავად ეფუძნება იმ პორტფელს, რომელსაც ფლობს თითოეული 30 კომპანიის აქციებიდან ერთს. ის არ ემყარება კომპანიის საერთო კაპიტალიზაციას. ამას უწოდებენ **შეწონილი ფასის ინდექსს**.

სხვა კარგად ცნობილ ინდექსს წარმოადგენს *S&P* 500, რომელიც არის აშშ-ის 500 მსხვილი კომპანიის საერთო აქციების მაჩვენებელი, რომელიც შერჩეულია ბაზრის ზომის,

ლიკვიდურობის და ინდუსტრიის მიხედვით. შერჩეული ჯგუფის წარმომადგენლობის მიზანია აქციების ეფექტურობის წარმოდგენა აშშ-ში. ის ხშირად გამოიყენება საბაზრო პორტფელის სახით. ბაზარში ვგულისხმობთ აშშ-ს ბაზაარს. თითოეული კომპანია, რომელიც ამ ინდექსის ღირებულებაში თავისი საერთო კაპიტალიზაციის შესაბამისად. ეს იგივე მეთოდია, რომელიც გამოიყენებოდა საბაზრო პორტფელის იმიტაციის საჩვენებლად მაგალით 7.16-ში. ამ ტიპის ინდექსს უწოდებენ **საბაზრო ღირებულების შეწონილ ინდექსს.**

ინდექსი $MSCI\, U.S.Small - Capitalization\, 1750$ შედგება აშშ-ის მცირე კომპანიებისაგან. ალბათ, აშშ-ის ყველაზე წარმომადგენლობით ინდექსს წარმოადგენს $Wilshire\, 5000$ ინდექსი, რომელიც მოიცავს $NYSE$-ის და $American\, Stock\, Exchange\, (Amex)$-ის ყველა აქციას პლუს $NASDAQ$-ის მრავალი აქცია.

არსებობს არაერთი ინდექსი, რომელიც არ მიეკუთვნება ამერიკულს, მათ შორისაა TSX (კანადა), $Nikkei$ (აიპონია), $FTSE$ (დიდი ბრიტანეთი), და $Hang\, Seng$ (ჰონგ კონგი). $The\, Morgan\, Stanley\, Capital\, Internatuional\, Europe$, $Australia\, and\, Far\, East\, (MSCI\, EAFE)$ ინდექსები განკუთვნილია წარმოადგინოს აშშ-ის და კანადის საზღვრებს გარეთ შექმნილი საფონდო ბაზრების ეფექტურობა.

არსებობს თანაზიარი ფონდები ელექტრონული სავაჭრო ფონდები $(ETFs)$, რომლებიც წარმოადგენენ ამ ინდექსებიდან ბევრს. დეტალების განხილვის გარეშე, ეს ნიშნავს, რომ ამ ფონდებიდან ერთი წილის ინვესტირება ხდება ყველა კომპანიაში, ინდექსის ჩათვლით. მაგალითად, $Vanguard$ ყიდის თანაზიარ ფონდებს, რომლებიც წარმოადგენენ $Wilshire\, 5000$ ინდექსს და ინდექსს $MSCI\, U.S.Small - Capitalization$. ამგვარად თუ ინვესტორს სურს ინვესტირება საბაზრო პორტფელში, რომელიც ინდექსითაა წარმოდგენილი ამ ინვესტორს შეუძლია უბრალოდ შეიძინოს შესაბამისი თანაზიარი ფონდი ან ETF. თუ საბაზრო პორტფელით ჩვენ მხედველობაში გვაქვს აქციები მთელ მსოფლიოში, ინვესტორს მოუწევს ინვესტირება განახორციელოს რამდენიმე ინდექსში საბაზრო პორტფელთან მჭიდროდ დაკავშირებული პორტფელის მისაღებად.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 7.1

სავარჯიშო 7.1. დავუშვათ, თქვენ ჩადეთ 2000$ და საპროცენტო განაკვეთი $r = 0{,}05$.

1. როგორია თქვენი ინვესტიციის ღირებულება ერთ წელიწადში?
2. როგორია თქვენი ინვესტიციის ღირებულება ოთხ თვეში?

სავარჯიშო 7.2. დავუშვათ, თქვენ ჩადეთ 2000$, საპროცენტო განაკვეთი $r = 0{,}05$ და პროცენტი რთულდება ყოველწლიურად.

1. როგორია თქვენი ინვესტიციის ღირებულება 30 წელიწადში?

2. რა იქნება თქვენი ინვესტიციის ღირებულება 30 წელიწადში თუ პროცენტი არ გართულდება?

სავარჯიშო 7.3. დავუშვათ, თქვენ ჩადეთ 2000$, საპროცენტო განაკვეთი $r = 0{,}05$ და პროცენტი რთულდება ყოველთვიურად. რა იქნება თქვენი ინვესტიციის ღირებულება 30 წელიწადში? შეადარეთ მიღებული პასუხი წინა სავარჯიშოს პასუხს.

სავარჯიშო 7.4. დავუშვათ, თქვენ ჩადეთ 2000$, საპროცენტო განაკვეთი $r = 0{,}05$ და პროცენტი რთულდება ყოველთვიურად. რა იქნება თქვენი ინვესტიციის ღირებულება 30 წელიწადში? შეადარეთ მიღებული პასუხი წინა ორ სავარჯიშოში მიღებულ პასუხებს.

სავარჯიშო 7.5. დავუშვათ კლაიდისათვის მომდევნო ოთხი წლის განმავლობაში ხელმისაწვდომი საპროცენტო განაკვეთი 0,05-ის ტოლია. შემდეგ დავუშვათ, რომ რალფს მართებს კლაიდის 9500$ და რალფი სთავაზობს კლაიდს გადაუხადოს 2000 $ დღეს და შემდეგ მომდევნო თითოეული ოთხი წლის ბოლოს. გამოთვალეთ ამ ფულადი ნაკადების დაყვანილი ღირებულება. სთავაზობს რალფი კლაიდს სამართლიან გარიგებას?

სავარჯიშო 7.6. დავუშვათ კლაიდისათვის მომდევნო ოთხი წლის განმავლობაში ხელმისაწვდომი საპროცენტო განაკვეთი 0,05-ის ტოლია. რალფს მართებს კლაიდის 9500$ და რალფი სთავაზობს კლაიდს ვალი დაუბრუნოს ხუთ თანაბარ პარტიად, ერთი დღეს და შემდეგ მომდევნო თითოეული ოთხი წლის ბოლოს. გამოთვალეთ გადახდების სამართლიანი თანხა.

სავარჯიშო 7.7. დავუშვათ ABC კომპანიის ერთი აქცია დღეს ნაყიდი იყო 20 დოლარად, გაყიდულია ოთხი თვის შემდეგ 25 დოლარად და დივიდენდები არ გადაიხდება. გამოთვალეთ ფლობის პერიოდის შემოსავლიანობა.

სავარჯიშო 7.8. დავუშვათ, ისეთივე სიტუაცია, როგორიც წინა სავარჯიშოში გარდა იმისა, რომ ფლობის პერიოდის შემდეგ აქციაზე გადაიხდება დივიდენდი 2$-ის ოდენობით. გამოთვალეთ ფლობის პერიოდის შემოსავლიანობა.

სავარჯიშო 7.9. დავუშვათ XYZ-ის აქციებს ჰქონდა ცხრილში მითითებული წლიური შემოსავლიანობის განაკვეთი:

წელი	წლიური შემოსავალი r
2000	.05
2001	.08
2002	−.11
2003	.25
2004	−.02

გამოთვალეთ r-ის $\bar{r}$ მოსალოდნელი მნიშვნელობა და σ_r სტანდარტული გადახრა.

სავარჯიშო 7.10. დავუშვათ DEF-ის აქციებს ჰქონდა ცხრილში მითითებული წლიური შემოსავლიანობის განაკვეთი:

წელი	წლიური შემოსავალი r
2000	.05
2001	.06
2002	.04
2003	.07
2004	−.03

გამოთვალეთ r-ის $\bar{r}$ მოსალოდნელი მნიშვნელობა და σ_r სტანდარტული გადახრა.

სავარჯიშო 7.11. თუ წინა ორ მაგალითში შემოსავლიანობის განაკვეთი დაახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული, შეადგინეთ ABC-ს და DEF-ის საშემოსავლო განაკვეთების ალბთობების სიმკვრივის ფუნქცია. შეადარეთ შედეგები.

სავარჯიშო 7.12. დავუშვათ, რომ XYZ-ის აქცია ამჟამად იყიდება 50 დოლარად, და თქვენ ყიდით 200 აქციას მოკლე გაყიდვით. შემდეგ დავუშვათ, რომ მოთხოვნილი მარჟა შეადგენს 50%-ს.

1. გამოთვალეთ შემდეგი:

(ა) თქვენი მოკლე გაყიდვების რაოდენობა

(ბ) ფულის რაოდენობა, რომელიც უნდა გქონდეთ თქვენს ანგარიშზე სხვა აქტივებში.

2. დავუშვათ, კომპანია არ იხდის დივიდენდებს, და თქვენ ფარავთ თქვენს მოკლე პოზიციას ერთი თვის შემდეგ, როდესაც ერთი აქცია 40$ ღირს. გამოთვალეთ შემდეგი:

(ა) თქვენი მოგება,

(ბ) თქვენი ფლობის პერიოდის შემოსავლიანობა.

თავი 8

რეალური ოფციონების მოდელირება

როდესაც ვდგავართ ახალი პროექტის განხორციელების წინაშე, კომპანიამ უნდა მიიღოს გადაწყვეტილება, გააგრძელოს თუ არა ეს პროექტი. მისი გადაჭრის სტანდარტული გზაა მოსალოდნელ შემოსავალზე დაფუძნებული ანალიზის ჩატარება. ცნობილია, რომ აქციას აქვს შემოსავლიანობის k მოთხოვნილი დონე, რომელიც უფრო მაღალია, ვიდრე ურისკო განაკვეთი მისი რისკის გამო, და აქციის მოსალოდნელი წმინდა დისკონტური ღირებულება (ნამდვილი ღირებულება) გამოითვლება k–ს გამოყენებით. ანალოგიურად, რისკიანი ინვესტიციები პროექტში ასოცირდება განაკვეთთან, რომელსაც ეწოდება **რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი**. იგი გამოიყენება პროექტის **მოსალოდნელი წმინდა დისკონტური ღირებულებით (NPEV)**. ამ მოსალოდნელი წმინდა შემოსავლის განსაზღვრულობას ეწოდება **დისკონტირებული ფულადი ნაკადების (DCF)** ანალიზი. შემდეგი მაგალითი ახდენს ასეთი ანალიზის ილუსტრირებას.

მაგალითი 8.1. დავუშვათ, კომპანია $Nutrastuff$ განიხილავს ახალი მაღალმწარმოებულური სასმელის შექმნის შესაძლებლობას, რომელიც არ შეიცავს კოფეინს. პროექტის ღირებულება 20 მილიონი დოლარია. $Nutrastuff$-ში გადაწყვეტილების მიმღები პირები არ არიან დარწმუნებული ამ პროდუქტის მოთხოვნაში. მაგრამ ისინი აფასებენ, რომ პროდუქტი მოახდენს ფულადი ნაკადების გენერირებას შემდეგი სამი წლისათვის. თუ მოთხოვნა დაბალი იქნება, ისინი მოახდენენ 2 მლნ. დოლარის ფოლადი ნაკადის რეალიზებას თითოეული ამ წლებიდან; თუ საშუალო ფულადი ნაკადი შეადგენს 10 მლნ. დოლარს თითოეულ წელს; და თუ ის მაღალი იქნება, ფულადი ნაკადი შეადგენს 15 მლნ. დოლარს. საბოლოოდ, ისინი აფასებენ, რომ დაბალის, საშუალოს და მაღალის ალბათობები შესაბამისად 0,25, 0,50 და 0,25 შეადგენს, და რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი ამ პროექტისათვის არის 0,12. ეს ინფორმაცია მოცემულია შემდეგ ცხრილში:

მოთხოვნა	წლიური ფულადი ნაკადები	ალბათობა
დაბალი	\$2 მილიონი	.25
საშუალო	\$10 მილიონი	.50
მაღალი	\$15 მილიონი	.25

შემდეგ ამ პროექტისათვის ჩვენ გვაქვს შემდეგი მნიშვნელობები (ყველა მნიშვნელობა მითითებულია მილიონებში):

$$NPEV = -20\$ + 0{,}25\left(\frac{2\$}{1{,}12} + \frac{2\$}{(1.12)^2} + \frac{2\$}{(1{,}12)^3}\right) +$$

$$+0,5\left(\frac{10\$}{1,12}+\frac{10\$}{(1.12)^2}+\frac{10\$}{(1,12)^3}\right)+$$

$$+0,25\left(\frac{15\$}{1,12}+\frac{15\$}{(1.12)^2}+\frac{15\$}{(1,12)^3}\right)=2,22\$.$$

რამდენადაც $NPEV$ დადებითია, მარტივი DCF ანალიზი გვეუბნება, რომ $Nutrastuff$-მ უნდა განახორციელოს ინვესტირება პროექტში.

მარტივი DCF ანალიზი არ ითვალისწინებს თითოეულ ვარიანტს, რომელიც $Nutrastuff$-ს გააჩნია ამ პროექტის მიმართ. ანუ ისინი იძულებულნი არიან ან დაიწყონ ეს პროექტი დღეს ან უარი თქვან მასზე. მაგალითად, მათ შეუძლიათ გადადონ დაწყება ერთი ან ორი წლით, სანამ ისინი შეამოწმებენ ამ პროდუქტზე ბაზრის რეაქციას. თუნდაც მათ რომ დაიწყონ ის დღეს, მათ შეუძლიათ უარი თქვან მასზე ერთი-ორი წლის შემდეგ, თუ ყველაფერი არც ისე კარგად იქნება. ანუ მენეჯერები გააგრძელებენ პროექტის მიმართ გადაწყვეტილების მიღებას მისი დაწყების შემდეგაც. ამ უფლებას – დაიწყონ პროექტი ან გადახედონ სტრატეგიას მისი დაწყების შემდეგ – უწოდებენ **მენეჯერულ ვარიანტს**. მას ასევე უწოდებენ რეალურ ვარიანტს, რომ განვასხვავოთ ის ფინანსურ აქტივებზე ოფციონებისაგან, ისეთების როგორიცაა აქციები.

სერკუმ და უპალმა [1995] შეიმუშავეს სათამაშო გადაწყვეტილებების პრობლემა, რომელიც შეიცავს რეალური ვარიანტის ბევრ ისეთ თავისებურებას, რომელიც აღმოჩენილია რეალურ გადაწყვეტილებებში, რომლებიც რეალურ ვარიანტს ეხება. ჩვენ შემდეგში წარმოვდგენთ ამ პრობლემას და ვაჩვენებთ როგორ შეიძლება მისი გადაწყვეტილების მოდელირება და გადაწყვეტა გავლენის დიაგრამის გამოყენებით. ლანდერმა და შენოიმ [1999] პირველებმა შეიმუშავეს პრობლემის გადასაწყვეტად გავლენის დიაგრამა.

8.1 რეალური ოფციონების გადაწყვეტილებათა პრობლემების გადაწყვეტა

ჩერკუმ და უპალმა [1995] განავითარეს პრობლემა, რომელიც შეეხება აშშ-ის ფირმებს. დაწყებიდან ყოველ წელს ამ ფირმას შეუძლია აწარმოოს ერთი დამატებითი ერთეული რომელიმე პროდუქტის, შეუძლია მოახდინს ფირმის ლიკვიდაცია ან გადადოს რაიმეს გაკეთება მომდევნო წლისათვის. პროდუქტი იყიდება დიდ ბრიტანეთში და არსებობს განუსაზღვრელობა დოლარსა და ფუნტ სტერლინგს შორის სამომავლო გაცვლით კურსთან დაკავშირებით. ჩვენ გაჩვენებთ ამ სცენართან დაკავშირებული მაგალითების მიმდევრობას, რომლებიც თანდათან რთულდება. პირველ მაგალითს აქვს ერთწლიანი დროითი ინტერვალი, მეორეს ორწლიანი და მესამე მაგალითს – სამწლიანი დროითი ინტერვალი.

პირველ ორ მაგალითში, ჩვენ თავიდან გადავწყვეტთ პრობლემას გადაწყვეტილებათა ხის გამოყენებით, კიდევ ერთხელ მოვახდენთ იმის ილუსტრირებას, რომ გადაწყვეტილებათა ხე და გავლენის დიაგრამა ერთი და იმავე პრობლემებს წყვეტენ. მესამე მაგალითში ჩვენ ამას არ ვაკეთებთ, იმიტომ რომ გადაწყვეტილებათა ხით ძალიან ძნელი იქნება, ხოლო გავლენის დიაგრამით ადვილად გავუმკლავდებით ამ ამოცანას.

მაგალითი 8.2. დავუშვათ, რომ აშშ-ის ფირმას აქვს ერწლიანი საინვესტიციო შესაძლებლობა, რომლის მიხედვით ფირმას შეუძლია აირჩიოს ან აწარმოოს ერთი ერთეული პროდუქტი დროის $t = 0$ მომენტში ან განახორციელოს ლიკვიდაცია. პროდუქტი გაიყიდება დიდ ბრიტანეთში. კერძოდ საინვესტიციო შესაძლებლობებს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. ფირმას შეუძლია აწარმოოს ერთი ერთეული პროდუქტი.

2. პროდუქტის საწარმოებლად საჭიროა ერთი წელი და ღირს 1,80 დოლარი წლის დასაწყისში იმისთვის, რომ მოხდეს მისი წარმოება.

3. პროდუქტი გაიყიდება წლის ბოლოს 1,00 ფუნტ სტერლინგად.

4.იმის მაგივრად, რომ ფირმამ აწარმოოს პროდუქტი, მას შეუძლია მოახდინოს ქარხნის ლიკვიდაცია წმინდა ლიკვიდურობის ღირებულებისათვის, რომელიც 0,20$-ის ტოლია. მაგრამ თუ იწარმოება ერთი ერთეული პროდუქტი, ქარხანას არ აქვს ლიკვიდურობის ღირებულება.

5. მიმდინარე გაცვლითი სპოტ კურსი შეადგენს 2$/1£. ანუ 2.00$ ღირს 1.00£.

6. ერთი წლის შემდგ გაცვლითი კურსი შეიცვლება M მულტიფიკატორული ფაქტორით. M-ის შესძლო მნიშვნელობა არის $u = 1{,}2$ და $d = 0{,}8$. უფრო მეტიც

$$P(M = u) = 0{,}631$$

$$P(M = d) = 0{,}369.$$

7. აშშ-ის ურისკო განაკვეთი r_f^{US} და დიდი ბრიტანეთის ურისკო განაკვეთი r_f^{UK} ორივე 0,05-ის ტოლია.

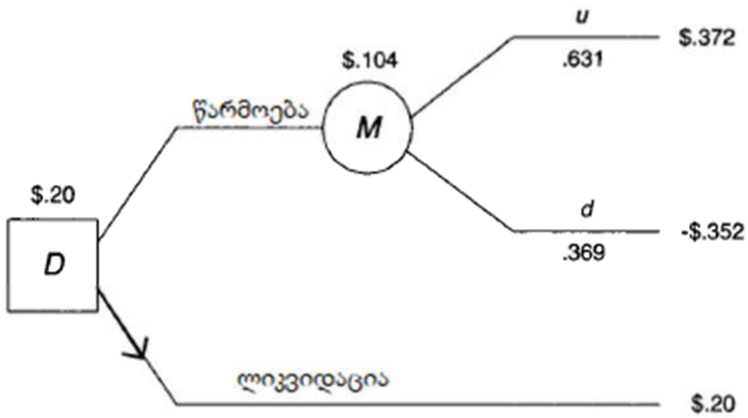
8. დავუშვათ ამ საინვესტიციო შესაძლებლობისათვის რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი 0,105-ის ტოლია.

ფირმამ უნდა მიიღოს გადაწყვეტილება ორი ალტერნატივით: „აწარმოოს“ და „მოახდინოს ლიკვიდაცია“. გადაწყვეტილებათა ხე ამ გადაწყვეტილებისათვის ჩნდება ნახ. 8.1-ზე. ამ გადაწყვეტილებათა ხის მნიშვნელობები წარმოადგენს წმინდა მიმდინარე მნიშვნელობებს. შემდგომში ვაჩვენებთ როგორ იყო ეს მნიშვნელობები გამოთვლილი. შედეგის $M = u$ მნიშვნელობა არის:

$$\frac{2\$(1,2)}{1,105} - 1,8\$ = 0,372\$,$$

ხოლო შედეგის $M = d$ მნიშვნელობა არის:

$$\frac{2\$(0,8)}{1,105} - 1,8\$ = 0,352\$.$$



ნახ. 8.1. მაგალითი 8.2-ში მოცემული გადაწყვეტილების გადასაწყვეტი გადაწყვეტილებათა ხე.

აქედან გამომდინარე

$$E(Produce) = E(M) = 0,631(0,372\$) \pm ,369(-0,352\$) = 0,105\$$$

$$E(Liquidate) = 0,20\$.$$

ამგვარად

$$E(D) = \max(0,105\$, 0,20\$) = 0,20\$,$$

და გადაწყვეტილებაა ლიკვიდაცია.

ნახ. 8.2 ნაჩვენებია ამ პრობლემის მაგალითის გავლენის დიაგრამით გადაწყვეტა. დიაგრამა შემუშავებულია პროგრამული პაკერტის $Netica$-ს გამოყენებით. გადაწყვეტილება ორი ალტერნატივიდან მოსალოდნელი მნიშვნელობა ჩნდება D კვანძში. ეს დიაგრამა ასევე გვიჩვენებს ცხრილს, რომელიც შედგება U მნიშვნელობებისაგან D და M-ის კომბინაციების თითოეული მნიშვნელობისათვის. დიაგრამების შემუშავების პაკეტების, ისეთის როგორიც $Netica$–ა, მომხიბვლელობა იმაში მდგომარეობს, რომ სარგებლიანობის კვანძების მნიშვნელობების გამოთვლა ხელით არ გვიწევს. პირიქით, ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ ფუნქცია, რომელიც მათ ჩვენთვის გამოთვლის. ამ შემთხვევაში $Netica$-ს ფუნქცია ასეთია:

$$U(D, M) =$$

$$D == Liquidate?$$

$$.20:$$

$$2 * M/1.05 - 1.8.$$

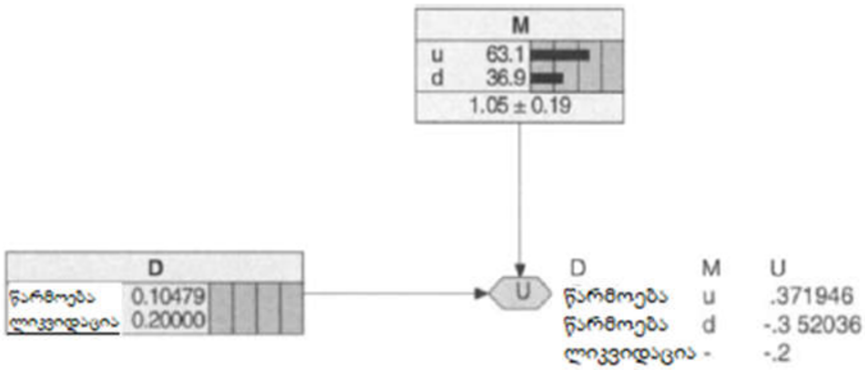
შემდეგი არის ამ ფუნქციის ფსევდოკოდი:

$$\boldsymbol{if}(D == Liquidate)\boldsymbol{then}$$

$$U(D, M) = 20$$

$$\boldsymbol{else}$$

$$U(D, M) = 2 \times M/1.105 - 1.8.$$



ნახ. 8.2 გადაწყვეტილი გავლენის დიაგრამა მაგალით 8.2-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის.

სარგებლიანობის მნიშვნელობის ხელით გამოთვლის მაგივრად ფუნქციის დაწერა დრიოს არც თუ ისეთი დიდი დანაზოგია პრობლემის ამ მაგალითში. მაგრამ, როგორც მომდევნო მაგალითში ვნახავთ, ეს შეიძლება ძალიან სასარგებლო იყოს პრობლემის უმეტეს შემთხვევაში.

მიაქციეთ ყურადღება, წინა მაგალითში ჩვენი გადაწყვეტილება როგორ დაზარალდა გაცვლითი კურსის გაურკვევლობის გამო. თუ ჩვენ გვეცოდინებოდა, რომ კურსი იზრდება ($P(M = u) = 1$), დისკონტირების განაკვეთი ურისკო განაკვეთი იქნება. ამგვარად. ჩვენ მივიღებდით, რომ $M = u$ შედეგის მნიშვნელობა არის:

$$\frac{2(1{,}2)}{1{,}05} - 1{,}8 = 0{,}486\$,$$

და

$$E(Produce) = E(M) = 1(0{,}486\$) = 0{,}486\$.$$

ამგვარად ამ შემთხვევაში არჩევანი იქნებოდა წარმოება.

შემდეგ გადავხედავთ გადაწყვეტილებას, რომელიც სამომავლოდ უნდა განვიხილოთ.

მაგალითი 8.3. ახლა დავუშვათ აშშ-ის ფირმა იმყოფება იმავე სიტუაციში, როგორიც იყო მაგალით 8.2-ში, იმის გამოკლებით, რომ დროის $t = 1$ მომენტში ფირმას გააჩნია შესაძლელობა აწარმოოს პროდუქტის სხვა ერთეული. კერძოდ, ჩვენ ვაკეთებთ შემდეგ ვარაუდებს:

1. ფირმას შუძლია აწარმოოს პროდუქტის ერთი ერთეული ამ წელს ($t = 0$) და ერთი ერთეული მომავალ წელს ($t = 1$).

2. თითოეული დროითი ინტერვალისათვის საჭიროა ერთი წელი პროდუქტის საწარმოებლად და ის ღირს 1,80$ (აშშ დოლარი) მისი წარმოების დაწყების წლის დასაწყისში.

3.თითოეული პერიოდის განმავლობაში პროდუქტი იყიდება წლის ბოლოს 1,00£ -ად (ფუნტ სტერლიგი).

4. $t = 0$ დროისათვის ფირმამ დროებით უნდა დატოვოს ბაზარი 0.10$ -ის ღირებულებით. ეს ნიშნავს, რომ იგი არ აწარმოებს პროდუქციას $t = 0$ –ში. თუ ფირმას შემდეგ მოუნდება საქონლის წარმოება $t = 1$ დროისათვის, მაშინ წარმოება მას დაუჯდება 0.10$ ბაზარზე ხელახლა შესასვლელად.

5. $t = 0$-ში ან $t = 1$ პერიოდში წარმოების ნაცვლად ფირმას შეუძლია ქარხნის ლიკვიდაცია წმინდა ლიკვიდური ღირებულებით, რომელიც 0.20$-ის ტოლია. თუმცა, თუ ერთეულის წარმოებულია $t = 1$ პერიოდში, ქარხანას აღარ ექნება ლიკვიდაციის ღირებულება $t = 2$ პერიოდში.

6. მიმდინარე გაცვლითი სპოტ კურსი შეადგენს $2\$/1£$. ანუ 2.00$ ღირს 1.00£.

7. ერთი წლის შემდგ გაცვლითი კურსი შეიცვლება M მულტიფიკატორული ფაქტორით. M-ის შესძლო მნიშვნელობა არის $u = 1{,}2$ და $d = 0{,}8$. უფრო მეტიც:

$$P(M = u) = 0{,}631$$

$$P(M = d) = 0{,}369.$$

8. აშშ-ის ურისკო განაკვეთი r_f^{US} და დიდი ბრიტანეთის ურისკო განაკვეთი r_f^{UK} ორივე 0,05-ის ტოლია.

9. რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი 0.105-ის ტოლია.

ფირმამ უნდა მიიღოს D_0 გადაწყვეტილება სამი ალტერნატივით: „აწარმოოს“, „მოახდინოს ლიკვიდაცია“ და „გადადოს“. უკანასკნელი ალერნატივა წარმოადგენს გადაწყვეტილებას ბაზრიდან გამოსვლის და დროებით წარმოების ან ლიკვიდაციის გადადების. თუ ირჩევენ აწარმოონ ან გადადონ, მათ უნდა აირჩიონ მიიღონ მეორე გადაწყვეტილება ორი ალტერნატივით: „აწარმოონ“ და „ლიკვიდაცია მოხდინონ“. ამ გადაწყვეტილებისათვის გადაწყვეტილებათა ხე ჩნდება ნახ. 8.3-ზე. შემდეგ ჩვენ ვაჩვენებთ თუ როგორ იქნა გამოთვლილი ამ გადაწყვეტილებათა ხიდან ზოგიერთი მნიშვნელობა. თუ ჩვენ ორჯერ ვირჩევთ $M_{01} = u$ და $M_{11} = u$, შედეგის მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლია:

$$\frac{2\$(1,2)}{1,105} - 1,8\$ + \frac{2\$(1,2)^2}{(1,105)^2} - \frac{1,8\$}{1,105} = 1,102\$.$$

თუ ჩვენ ორჯერ ვირჩევთ $M_{01} = u$ და $M_{11} = d$, შედეგის მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლია:

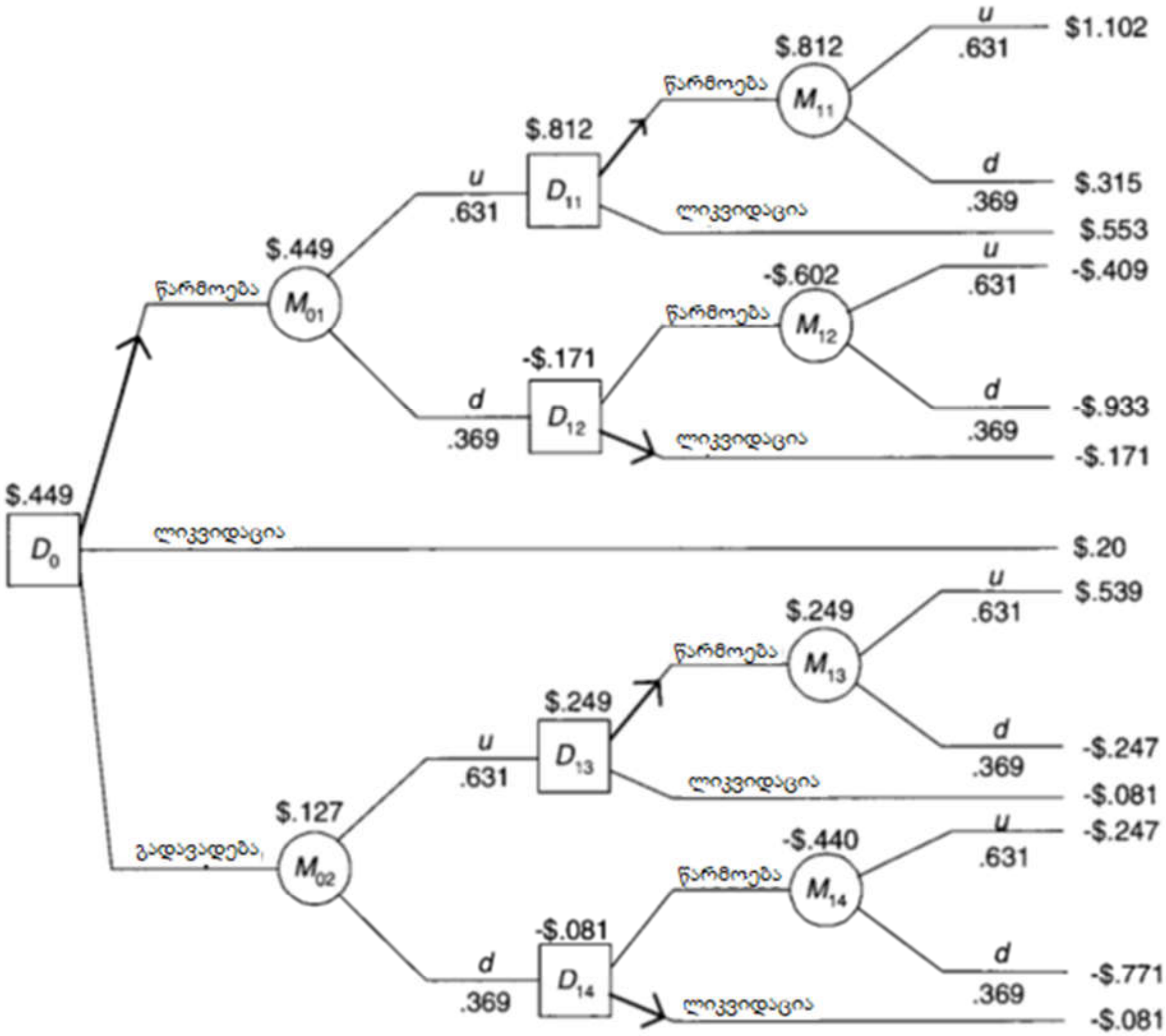
$$\frac{2\$(1,2)}{1,105} - 1,8\$ + \frac{2\$(1,2)(0,8)}{(1,105)^2} - \frac{1,8\$}{1,105} = 0,315\$.$$

თუ ჩვენ გადავწყვიტეთ გადავდოთ (დროებით გამოვიდეთ), ხოლო შემდეგ ავირჩიოთ, ვაწარმოოთ, $M_{02} = u$ და $M_{13} = u$, შედეგის მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლია

$$-10\$ + \frac{10\$}{1,105} + \frac{2(1,2)^2}{(1,105)^2} - \frac{1,8}{1,105} = 0,539\$.$$

თუ ჩვნ გადავწყვიტეთ გადავდოთ, ხოლო შემდეგ ავირჩიოთ მოვახდინოთ ლიკვიდაცია, შედეგის მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლია:

$$-10\$ + \frac{20\$}{1,105} = 0,081\$.$$



ნახ. 8.3 გადაწყვეტილებათა ხე მაგალით 8.3-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის.

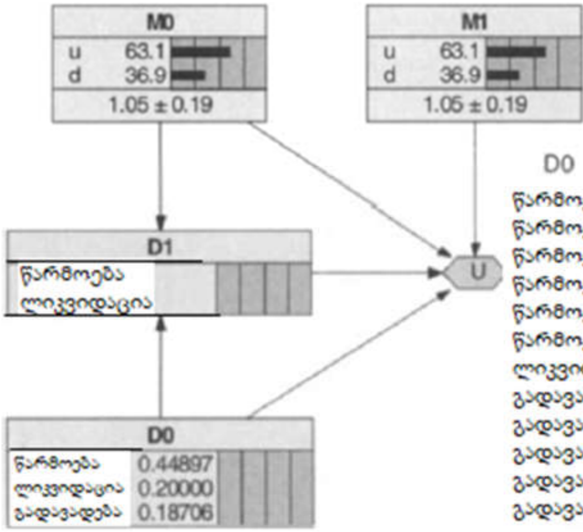
ამას ვტოვებთ სავარჯიშოს სახით სხვა შედეგების გამოსათვლელად. ამ მნიშვნელობების განსაზღვრის შემდეგ, ჩვენ გადავწყვეტთ გადაწყვეტილებათა ხეს მოსალოდნელი მნიშვნელობების შემთხვევით კვანძებზე და კვანძების გადაწყვეტისათვის მაქსიმუმებზე გადაცემის გზით. მაგალითად,

$$E(M_{11}) = 0{,}631(1{,}102\$) + 0.369(0{,}315\$) = 0{,}812\$.$$

$$E(D) = \max(0{,}812\$, 0{,}553\$) = 0{,}812\$.$$

საბოლოოდ, ჩვენ ვხედავთ, რომ ალტერნატიულს „პროდუქტი“ გააჩნია ყველაზე მეტი მოსალოდნელი მნიშვნელობა (0,449$); ასე რომ, ეს არის ჩვენი გადაწყვეტილება.

ახ. 8.4-ზე ნაჩვენებია ამ ამოცანის მაგალითის გადაწყვეტილი გავლენის დიაგრამა ცხრილით, რომელიც ასახავს სარგებლიანობის მნიშვნელობას. $Netica$-დ ფუნქცია, რომელმაც ეს ცხრილი გააკეთა, შემდეგნაირად გამოიყურება:



D0	D1	M0	M1	U
წარმოება	წარმოება	u	u	1.10166
წარმოება	წარმოება	u	d	.315436
წარმოება	წარმოება	d	u	-.408546
წარმოება	წარმოება	d	d	-.932696
წარმოება	ლიკვიდაცია	u	-	.552941
წარმოება	ლიკვიდაცია	d	-	-.171041
ლიკვიდაცია	-	-	-	.2
გადავადება	წარმოება	u	u	.539217
გადავადება	წარმოება	u	d	-.247008
გადავადება	წარმოება	d	u	-.247008
გადავადება	წარმოება	d	d	-.771157
გადავადება	ლიკვიდაცია	-	-	.080996

ნახ. 8.4. მაგალითი 8.3-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის გადაწყვეტილი გავლენის დიაგრამა.

```
U(D0,M0,D1,M1) =
    D0 == Liquidate ?
        .20:
    D0 == Produce && D1 == Produce ?
        2*M0/1.105 - 1.8 + 2*M0*M1/1.105^2 - 1.8/1.105:
    D0 == Produce && D1 == Liquidate ?
        2*M0/1.105 - 1.8 + .2/1.105:
    D0 == Postpone && D1==Produce ?
        -.1 - .1/1.105 + 2*M0*M1/1.105^2 - 1.8/1.105:
    D0 == Postpone && D1 == Liquidate ?
        -.1 + .2/1.105.
```

მიაქციეთ ყურადღება, რამდენად მცირეა გავლენის დიაგრამა გადაწყვეტილებათა ხესთან შედარებით, და მიაქციეთ ყურადღება, რომ სარგებლიანობის მნიშვნელობის მისაღებად საჭირო მტკიცებულებები შედერებით მცირეა, ვიდრე ხელით სჭირდება.

შემდეგ გადავხედავთ გადაწყვეტილებას, რომელიც მომავალში უნდა განვიხილოთ.

მაგალითი 8.4. დავუშვათ, რომ აშშ-ის ფირმა იმყოფება იმავე სიტუაციში, როგორიც იყო მაგალით 8.2-ში, იმის გამოკლებით, რომ დროის t=1 და $t = 2$ მომენტში ფირმას გააჩნია შესაძლელობა აწარმოოს პროდუქტის სხვა ერთეული. კერძოდ, ჩვენ ვაკეთებთ შემდეგ ვარაუდებს:

1. ფირმას შუძლია აწარმოოს პროდუქტის ერთი ერთეული ამ წელს ($t = 0$), ერთი ერთეული მომავალ წელს ($t = 1$) და ერთი ერთეული მომავალ წელს ($t = 2$).

2. თითოეული დროითი ინტერვალისათვის საჭიროა ერთი წელი პროდუქტის საწარმოებლად და ის ღირს 1,80$ (აშშ დოლარი) მისი წარმოების დაწყების წლის დასაწყისში.

3. თითოეული პერიოდის განმავლობაში პროდუქტი იყიდება წლის ბოლოს 1,00£ -ად (ფუნტი სტერლიგი).

4. დროებში $t = 0$ და $t = 1$ ფირმას შეეძლება დროებით გავიდეს ბაზრიდან 0,10$-ის ფასად. თუ ფირმა გავა ბაზრიდან დროის $t = 0$ მომენტში, ის ეღირება 0,10$ მეორედ შესვლისას $t = 1$ ან $t = 2$ მომენტში. მაგრამ არაფერი არ ღირს, თუ დარჩა $t = 1$-ში. თუ ფირმა შევა $t = 1$-ში, ეს ეღირება 0,10$ $t = 2$ მომენტში განმეორებით შესვლისას.

5. იმის მაგივრად, რომ აწარმოოს $t = 0$, $t = 1$ ან $t = 2$ მომენტში, ფირმას შეუძლია მოახდინოს ქარხნის ლიკვიდაცია წმინდა ლიკვიდაციის ღირებულებისათვის, რომელიც 0,20$-ის ტოლია. მაგრამ თუ ერთეული იწარმოება $t = 2$ მომენტში, ქარხანას არ აქვს ლიკვიდურობის მნიშვნელობა $t = 3$ მომენტში.

6. მიმდინარე გაცვლითი სპოტ კურსი შეადგენს $2\$/1£$. ანუ 2.00$ ღირს 1.00£.

7. ერთი წლის შემდეგ გაცვლითი კურსი შეიცვლება M მულტიფიკატორული ფაქტორით. M-ის შესაძლო მნიშვნელობა არის $u = 1{,}2$ და $d = 0{,}8$. უფრო მეტიც

$$P(M = u) = 0{,}631$$

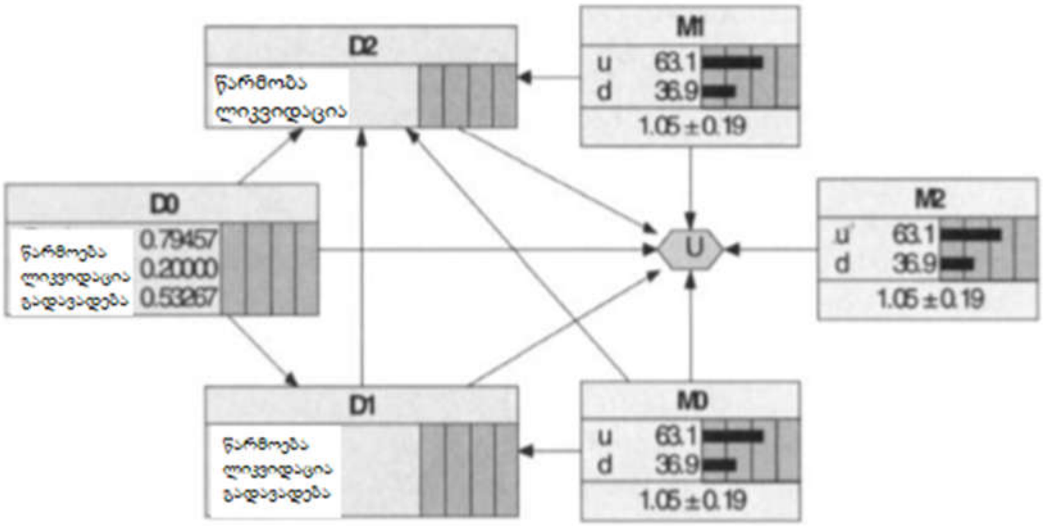
$$P(M = d) = 0{,}369.$$

8. აშშ-ის ურისკო განაკვეთი r_f^{US} და დიდი ბრიტანეთის ურისკო განაკვეთი r_f^{UK} ორივე 0,05-ის ტოლია.

9. რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი 0.105-ის ტოლია.

ფირმამ უნდა მიიღოს D_0 გადაწყვეტილება სამი ალტერნატივით: „აწარმოოს“, „მოახდინოს ლიკვიდაცია“ და „გადადოს“. თუ მას სურს აწარმოოს ან გადადოს, მათ უნდა აირჩიონ მეორე გადაწყვეტილება სამი ალტერნატივით: „აწარმოონ“, „ლიკვიდაცია მოხდინონ“ და „გადადონ“. თუ მეორე გადაწყვეტილებაა – უნდა აწარმოოს ან გადადოს, მან უნდა მიიღოს მესამე გადაწყვეტილება ორი ალტერნატივით: „აწარმოოს“ და „ლიკვიდაცია მოახდინოს“. ჩვენ არ ვაჩვენებთ ამ პრობლემის მაგალითის გადაწყვეტას, რადგან ის ძალიან დიდი იქნებოდა. თუმცა ჩვენ გაჩვენებთ გადაწყვეტილებათა ხის ერთ გაანგარიშებას, თუ სამივე გადაწყვეტილება იწარმოება და M ყოველთვის იღებს u-ს მნიშვნელობას, შედეგის მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლი იქნება:

$$\frac{2\$(1{,}2)}{1{,}105} - 1{,}8\$ + \frac{2\$(1{,}2)^2}{(1{,}105)^2} - \frac{1{,}8\$}{1{,}105} + \frac{2\$(1{,}2)^3}{(1{,}105)^3} - \frac{1{,}8\$}{(1{,}105)^2} = 2{,}189\$.$$



ნახ. 8.5 მაგალითი 8.4-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის გადაწყვეტილი გავლენის დიაგრამა.

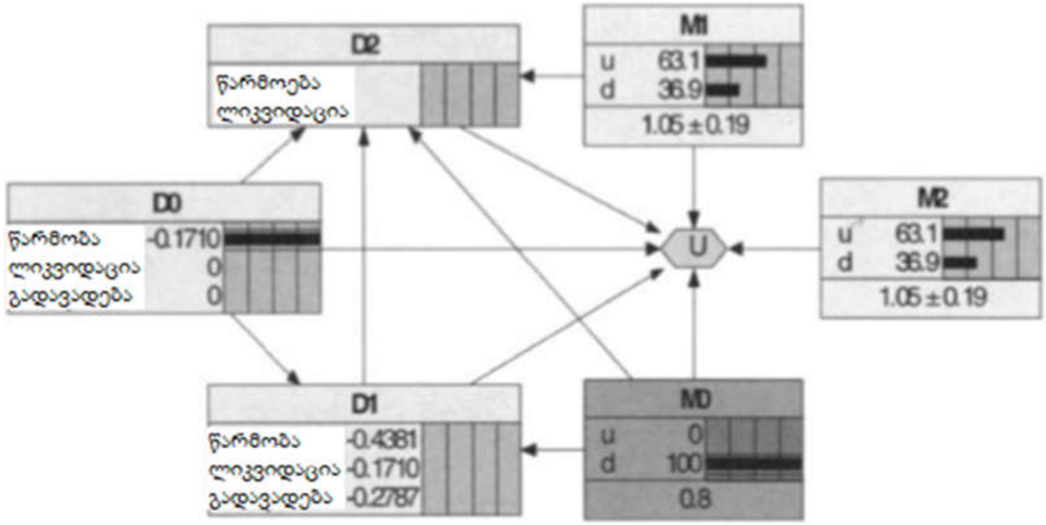
ამ გადაწყვეტილების გავლენის დიაგრამა წარმოდგენილია ნახ. 8.5-ზე. გადაწყვეტილება უმაღლეს დონეზე უნდა წარმოებდეს, რადგან ამ ალტერნატივას გააჩნია ყველაზე მაღალი მოსალოდნელი მნიშვნელობა (0,79457). მიაქციეთ ყურადღება, რომ გავლენის დიაგრამ არც ისე დიდია. პირიქით ის წინა მაგალითში მოცემულ დიაგრამასთან შედარებით წრფივად გაიზარდა. ჩვენ არ გაჩვენებთ სარგებლიანობის შემცველ ცხრილს, რადგან ის ძალიან დიდია (U –ს აქვს ექვსი წიბო). მაგრამ $Netica$, ფუნქცია, რომელიც გამოიყენება ცხრილის შესაქმნელად, არც ისე რთული დასაწერია, რამდენადაც მას აქვს წრფივი ზრდა ამ გადაწყვეტის თვალსაზრისით. ის ასე გამოიყურება:

$$
\begin{aligned}
&U(D0,M0,D1,M1,D2,M2) = \\
&\quad D0 == Liquidate\ ? \\
&\qquad .20: \\
&\quad D0 == Produce\ \&\&\ D1==Produce\ \&\&\ D2==Produce\ ? \\
&\qquad 2*M0/1.105 - 1.8 + 2*M0*M1/1.105\hat{}2 - 1.8/1.105 + \\
&\qquad 2*M0*M1*M2/1.105\hat{}3 - 1.8/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Produce\ \&\&\ D1 == Produce\ \&\&\ D2 == Liquidate\ ? \\
&\qquad 2*M0/1.105 - 1.8 + 2*M0*M1/1.105\hat{}2 - 1.8/1.105 + .20/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Produce\ \&\&\ D1 == Liquidate\ ? \\
&\qquad 2*M0/1.105 - 1.8 + .20/1.105: \\
&\quad D0 == Produce\ \&\&\ D1 == Postpone\&\&\ D2 == Produce\ ? \\
&\qquad 2*M0/1.105 - 1.8 -.10/1.105 - .10/1.105\hat{}2 + \\
&\qquad 2*M0*M1*M2/1.105\hat{}3 - 1.8/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Produce\ \&\&\ D1 == Postpone\ \&\&\ D2 == Liquidate\ ? \\
&\qquad 2*M0/1.105 - 1.8 - .10/1.105 + .20/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Postpone\ \&\&\ D1 == Produce\ \&\&\ D2 == Produce\ ? \\
&\qquad -.10 - .10/1.105 + 2*M0*M1/1.105\hat{}2 - 1.8/1.105 + \\
&\qquad 2*M0*M1*M2/1.105\hat{}3 - 1.8/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Postpone\ \&\&\ D1 == Produce\ \&\&\ D2 == Liquidate\ ? \\
&\qquad -.10 - .10/1.105 + 2*M0*M1/1.105\hat{}2 - 1.8/1.105 + .20/1.105\hat{}2: \\
&\quad D0 == Postpone\&\&\ D1 == Liquidate\ ? \\
&\qquad -.10 + .20/1.105:
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D0 == Postpone\ \&\&\ D1 == Postpone\ \&\&\ D2 == Produce\ ? \\
&\quad -.10 - .10/1.105\hat{}2 + 2*M0*M1*M2/1.105\hat{}3 - 1.8/1.105\hat{}2: \\
&D0 == Postpone\ \&\&\ D1 == Postpone\ \&\&\ D2 == Liquidate\ ? \\
&\quad -.10 + .20/1.105\hat{}2.
\end{aligned}
$$

8.2 გეგმის შედგენა

გავლენის დიაგრამა მენეჯერს აწვდის არა მარტო ინფორმაციას ალტერნატივის უმაღლეს დონეზე არჩევის შესახებ, არამედ ასევე აძლევს გეგმას. ე.ი. ის ინფორმაცია აძლევს მენეჯერს ახალი ინფორმაციის მიღების შემდეგ მომავალში ალტერნატიული არჩევანის შესახებ. ეს ნჩვენებია შემდეგ მაგალითებში:



ნახ. 8.6. მაგალითი 8.5-ში მოცემული გადაწყვეტილებისათვის გადაწყვეტილი გავლენის დიაგრამა.

მაგალითი 8.5. დავუშვათ, ჩვენ განვიხილეთ მაგალით 8.4-ში აღწერილი სიტუაცია, ჩვენ ვიღებთ გადაწყვეტილებას ვაწარმოოთ $t = 0$ დროის მომენტში, ხოლო $M0$ მთავრდება d მნიშვნელობის მიღებით. როგორი მნიშვნელობა უნდა მივიღოთ $t = 1$ დროის მომენტში? ნახ. 8.6-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, იმის შემდეგ, რაც $D0$ იქმნება „აწარმოეზე“, ხოლო $M0$ იქმნება d-ზე. ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენეს $D1$-ის მაქსიმიზაციას ახლა არის „ლიკვიდაცია“ 0,1710 მნიშვნელობით. ამიტომ ჩვენ გვატყობინებენ, რომ უნდა შევამციროთ ჩვენი დანაკარგები და გამოვიდეთ. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ეს იმის საწინააღმდეგოა, რასაც აკეთებს ზოგიერთი გადაწყვეტილების მიმღები. ზოგი ფიქრობს, რომ უნდა დარჩნენ ინვესტიციებში, რომ ჰქონდეთ საშუალება დაიბრუნონ თავიანთი დანაკარგი.

მაგალითი 8.6 დავუშვათ, ჩვენ განვიხილეთ მაგალით 8.4-ში აღწერილი სიტუაცია, ჩვენ ვიღებთ გადაწყევტილებას ვაწარმოოთ $t = 0$ დროის მომენტში, ხოლო $M0$ მთავრდება u მნიშვნელობის მიღებით. მაშინ $t = 1$ დროის მომენტში რეკომენდებული გადაწყვეტილება იქნება ხელახლა წარმოება. დავუშვათ, ჩვენ ვირჩევთ ამ ალტერნატივას, ხოლო $M1$ მთავრდება d მნიშვნელობის მიღებით. როგორი მნიშვნელობა უნდა მივიღოთ $t = 2$ დროის მომენტში? ნახ. 8.7-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა იმის შემდეგ, რაც ორივე $D0$ და $D1$ შექმნილი იყო „აწარმოესთვის“, $M0$ იქმნება u-ზე და $M1$ – d-ზე. ალტერნატიული გადაწყვეტილება, რომელიც ახდენეს $D3$-ის მაქსიმიზაციას, ახლა არის „ლიკვიდირდება“ 0,47923 მნიშვნელობით. ამიტომ ჩვენ გვატყობინებენ, რომ უნდა გავიდეთ ჩვენი მიმდინარე მოგებით.

8.3. მგრძნობელობის ანალიზი

რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი ძნელი შესაფასებელია. მიტომ ჩვენ უნდა შევასრულოთ მისი მნიშვნელობის მიმართ მგრძნობელობის ანალიზი. მაგალითის სახით ვტოვებთ იმის ჩვენებას, რომ მაგალით 8.4-ში გადაწყვეტილება იქნება წარმოების იქამდე, სანამ განაკვეთი იქნება<0,267, რომელიც ჩვენს შეფასებაზე ორჯერ მეტია.

იმის ალბათობა, რომ გაცვლითი კურსი აიწევს ან დაიწევს ყოველწლიურად ასევე ძნელი დასადგენია. სავარჯიშოს სახით ვტოვებთ იმის ჩვენებას, რომ გადაწყეტილება წარმოების იქამდე იქნება, სანამ განაკვეთი შეადგენს >0,315, რაც შეადგენს შეფასების ნახევარზე ნაკლებს.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 8.1

სავარჯიშო 8.1. დავუშვათ, კომპანია $EyesRU$ განიხილავთ კონტაქტური ლინზების შექმნის შესაძლებლობას, რომლის ტარებაც შეიძლება ორი კვირის განმავლობაში მოუხსნელად. პროექტის ღირებულება შეადგენს 5 მილიონ დოლარს. $EyesRU$-ში გადაწყევტილების მიმღები პირები არ არიან ამ პროდუქტის მოთხოვნადობაში. მაგრამ, მათი შეფასებით, პროდუქტი მოახდენს ფულადი ნაკადების გენერირებას მომდევნო ოთხი წლის განმავლობაში. თუ მოთხოვნა დაბალი იქნება, ისინი აწევენ ფულად ნაკადს 500 000 დოლარამდე თითოეულ ამ წელიწადში; თუ ის იქნება საშუალო, ფულადი ნაკადი შეადგენს წელიწადში 2 მლნ. დოლარს; თუ მაღალი იქნება, ფულადი ნაკადი შეადგენს 3 მლნ. დოლარს წელიწადში. ბოლოს მათ გამოთვალეს, რომ დაბალი. საშუალო და მაღალი მოთხოვნილების ალბათობები შეადგენს შესაბამისად 0,2, 0,6 და 0,2-ს და ამ პროექტის რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი ტოლია 0,11-ის. განსაზღვრეთ ამ პროექტისათვის $NPEV$. ამ ანალიზზე დაყრდნობით მიზანშეწონილია თუ არა ამ პროექტის განხორციელება?

სავარჯიშო 8.2. შეცვალეთ მაგალითი 8.2 შემდეგნაირად:

- პროდუქტის ღირებულებაა 1,9$ (აშშ დოლარი)
- ფირმას შეუძლია ქარხნის ლიკვიდაცია წმინდა სალიკვიდაციო ღირებულებისათვის, რომელიც 0,25$-ის ტოლია.

- ერთი წლის შემდგ გაცვლითი კურსი შეიცვლება M მულტიფიკატორული ფაქტორით. M-ის შესძლო მნიშვნელობა არის $u = 1{,}1$ და $d = 0{,}9$. უფრო მეტიც

$$P(M = u) = 0{,}4$$

$$P(M = d) = 0{,}6.$$

- 7. აშშ-ის ურისკო განაკვეთი r_f^{US} და დიდი ბრიტანეთის ურისკო განაკვეთი r_f^{UK} ორივე 0,06-ის ტოლია.
- ამ საინვესტიციო შესაძლებლობისათვის რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი 0,10-ის ტოლია.

1. წარმოადგინეთ პრობლემა გადაწყვეტილებათა ხით და გადაწყვიტეთ ეს გადაწყვეტილება.
2. $Netica$-ს გამოყენებით წარმოადგინეთ და გადწყვიტეთ ეს პრობლემა გავლენის დიაგრამის გამოყენებით.

სავარჯიშო 8.3. შეცვალეთ მაგალითი 8.3 სავარჯიშო 8.2-ში მოცემული მოდიფიკაციით

1. წარმოადგინეთ პრობლემა გადაწყეტიტებათა ხით და გადაწყვიტეთ ეს გადაწყვეტილება.
2. $Netica$-ს გამოყენებით წარმოდგინეთ და გადწყვიტეთ ეს პრობლემა გავლენის დიგრამის გამოყენებით.

სავარჯიშო 8.4. შეცვალეთ მაგალითი 8.4 სავარჯიშო 8.2-ში მოცემული მოდიფიკაციით. $Netica$-ს გამოყენებით წარმოდგინეთ და გადწყვიტეთ ეს პრობლემა გავლენის დიაგრამის გამოყენებით.

პარაგრაფი 8.2

სავარჯიშო 8.5. დავუშვათ, განვიხილეთ სავარჯიშო 8.4-ში აღწერილი სიტუაცია, მივიღეთ გადაწყვეტილება ვაწარმოოთ დროის $t = 0$ მომენტში, და $M0$ იმით მთავრდება, რომ იღებს d-ს ტოლ მნიშვნელობას. როგორია რეკომენდებული გადაწყვეტილება დროის $t = 1$ მომენტში?

სავარჯიშო 8.6. დავუშვათ განვიხილეთ სავარჯიშო 8.4-ში აღწერილი სიტუაცია, მივიღეთ გადაწყვეტილება, ვაწარმოოთ დროის $t = 0$ მომენტში, და $M0$ იმით მთავრდება, რომ იღებს u-ს ტოლ მნიშვნელობას.

1. როგორია რეკომენდებული გადაწყვეტილება დროის $t = 1$ მომენტში?
2. დავუშვათ, დროის $t = 1$ მომენტში ჩვენ ვირჩევთ ვაწარმოოთ, ხოლო $M1$ იმით მთავრდება, რომ იღებს u-ს ტოლ მნიშვნელობას. როგორია რეკომენდებული გადაწყვეტილება დროის $t = 2$ მომენტში?

პარაგრაფი 8.3

სავარჯიშო 8.7. აჩვენეთ, რომ მაგალით 8.4-ში გადაწყვეტილება იწარმოება იქამდე, ვიდრე რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთი შეადგენს <0,267.

სავარჯიშო 8.8. აჩვენეთ, რომ მაგალით 8.4-ში გადაწყვეტილება იწარმოება იქამდე, ვიდრე გაცვლითი კურსი შეადგენს >0,315.

სავარჯიშო 8.9. ჩაატარეთ ანალიზი მგრძნობელობაზე რისკიანობის დისკონტირების განაკვეთის მიმართ პრობლემაში, რომელიც აღწერილია სავარჯიშო 8.4-ში.

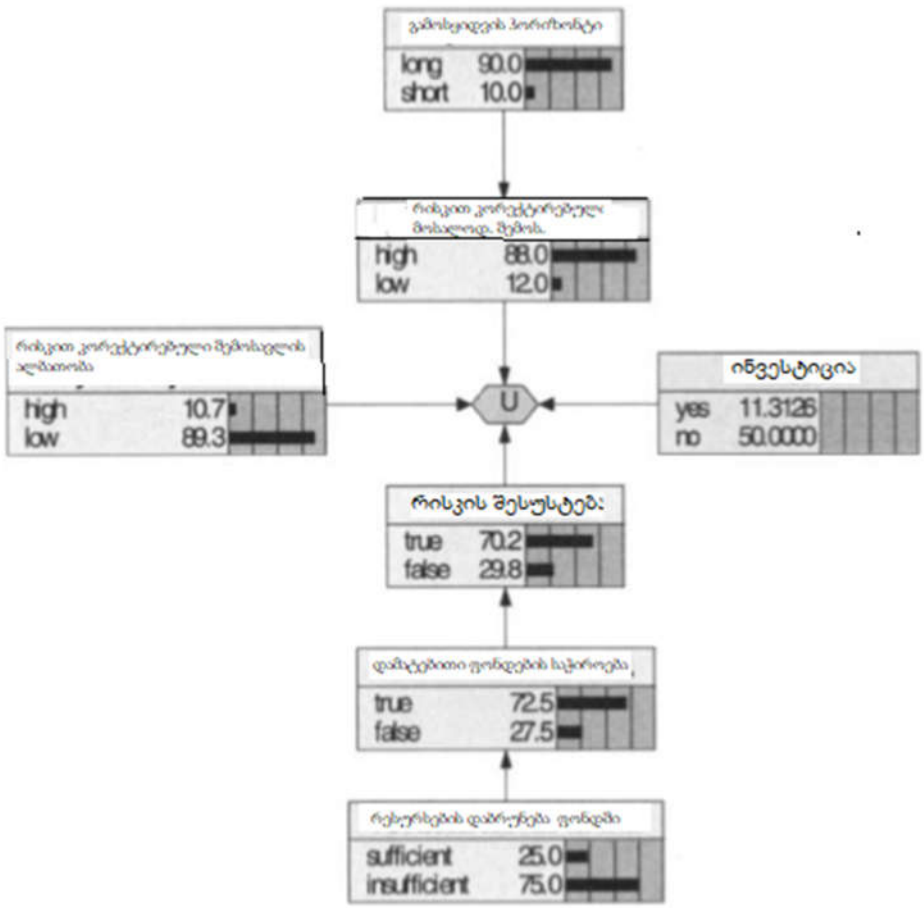
სავარჯიშო 8.10. ჩაატარეთ ანალიზი მგრძნობელობაზე გაცვლითი კურსის მიმართ პრობლემაში, რომელიც აღწერილია სავარჯიშო 8.4-ში.

თავი 9

გადაწყვეტილების მიღება ვენჩურულ კაპიტალზე

დამწყებ კომპანიებს ხშირად ხელი არ მიუწვდებათ საკმარის კაპიტალზე, მაგრამ თუ ისინი შეძლებენ ამ კაპიტალის მოპოვებას, მათ შეიძლება ჰქონდეთ ვადაზე ადრე განვითარების კარგი პოტენციალი. თუ კომპანია ასეთი პოტენციალის მქონედ მოიაზრება, ინვესტორებს შეიძლება ჰქონდეთ იმედი, მიიღონ საშუალოზე მაღალი შემოსავალი ასეთ კომპანიებში ინვესტირების დროს. დამწყებ ფირმებზე ინვესტორების მიერ გაცემულ ფულს უწოდებენ **ვენჩერულ კაპიტალს** (VC). მდიდარი ინვესტორები, საინვესტიციო ბანკები და სხვა ფინანსური დაწესებულებები, როგორც წესი, აფინანსებენ ვენჩერულ კაპიტალს. ვენჩერული კაპიტალის ეროვნული ასოციაციის მონაცემებით, 1990 წელს ინვესტირებული ვენჩერული კაპიტალი შეადგენდა 3,4 მილიარდ დოლარს, რომელიც განაწილებული იყო 5458 კომპანიას შორის.

ვენჩერულ კაპიტალში ინვესტირება შეიძლება ძალიან სარისკო იყოს. გამოკვლევებმა აჩვენა, რომ მხარდაჭერილი საწარმოების 40% წარუმატებლობას განიცდიდნენ. ამიტომ გამართლებულია ახალი ფირმის პერსპექტივის ფრთხილი ანალიზი, ვიდრე გადაწყვეტილება იქნება მიღებული ფირმის მხარდასაჭერად. ვერჩერული კაპიტალისტები - ესენი არიან ექსპერტები, რომლებიც აანალიზებენ ფირმის პერსპექტივებს. *Kemmerer et al.* [2006] ჩაატარა ვერჩერული კაპიტალის ექსპერტების ღრმა გამოკითხვა და გამოიწვია ამ ექსპერტისაგან მიზეზობრივი (ბაიესის) ქსელი. შემდეგ მათ დახვეწეს ქსელი და საბოლოოდ შეაფასეს ქსელისათვის პირობითი ალბათური განაწილება ვენჩურული კაპიტალისტის დახმარებით. ასეთი მოდელები ხშირად ჯობნიან კაპიტალისტებს, რომელთა ცოდნაც გამოყენებული იყო მათ შესაქმნელად. პარაგრაფ 9.1-ში წარმოვადგენთ მათ მიზეზობრივ ქსელზე დამყარებულ გავლენის მარტივ დიაგრამას, რომელიც ახდენს იმ გადაწყვეტილების მოდელირებას, ღირს თუ არა მოცემული ფირმის ინვესტირება. ეს მარტივი გავლენის დიაგრამა ხელმისაწვდომი შესავალის უზრუნველსაყოფადაა განკუთვნილი. პარაგრაფ 9.2-ში ნაჩვენებია მსგავსი გავლენის დიაგრამა, რომელიც მიღებულია მიზეზ-შედეგობრივი ქსელიდან. პარაგრაფ 9.2-ში ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამის გამოყენების შედეგი რეალური გადაწყვეტილების მოდელირებისათვის.



ნახ. 9.1 მარტივი გავლენის დიაგრამა, რომელიც მოდელირებას უკეთებს გადაწყვერტილებას ღირს თუ არა ინვესტირება სტარტაფ ფირმაში.

9.1 *VC* გადაწყვეტილების მიღების მარტივი მოდელი

ნახ.9.1-ზე ნაჩვენებია მარტივი გავლენის დიაგრამა, რომელშიც განხილულია იმის შესახებ გადაწყევტილება, ღირს თუ არა ინვესტირება სტარტაფ ფირმაში. გავლენის დიაგრამა შემუშავებული იყო *Netica*-ს გამოყენებით. *Netica*-ს მიერ მომზადებული შემდეგი ანგარიში გვიჩვენებს სარგებლოანობების პირობით განაწილებას დიაგრამაზე:

Dil_Risk:

true	false	Need_Add_Fund
0.95	0.05	true
0.05	0.95	false

Need_Add_Fund:

true	false	VC_Res_Fund
0.05	0.95	sufficient
0.95	0.05	insufficient

VC_Res_Fund:

sufficient	insufficient
0.25	0.75

VC_Risk_Adj:

high	low	Pay_Hor
0.95	0.05	long
0.25	0.75	short

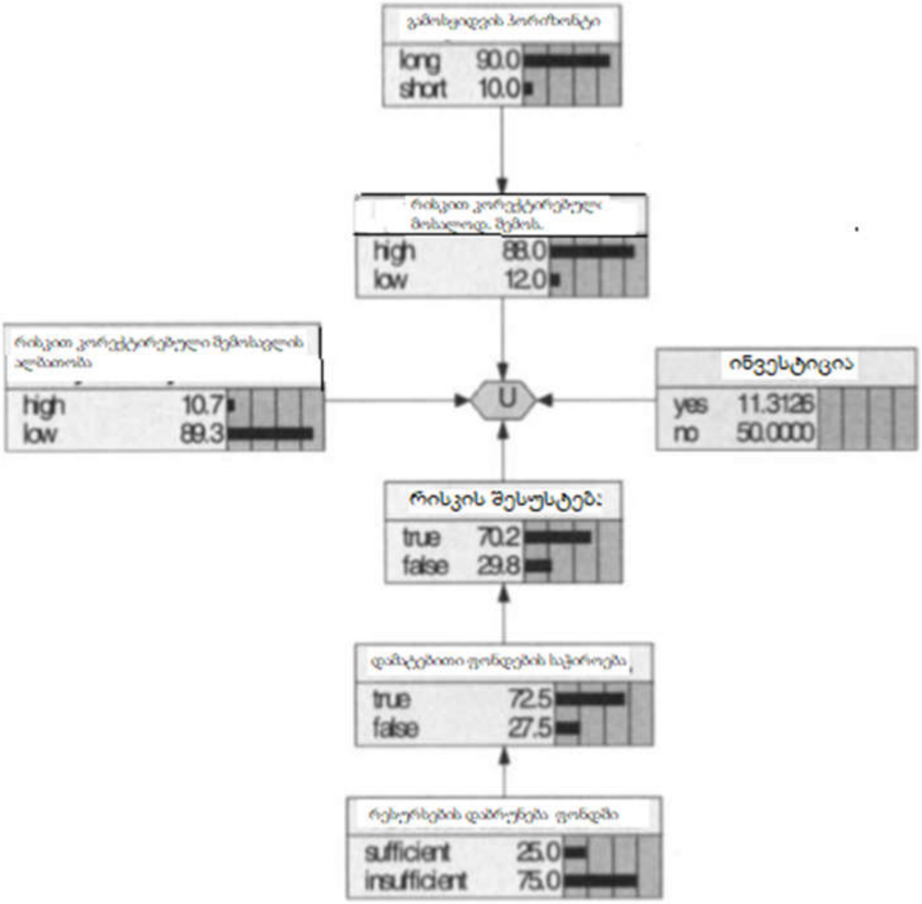
Pay_Hor:

long	short
0.9	0.1

Likely_Ret:

high	low
0.107	0.893

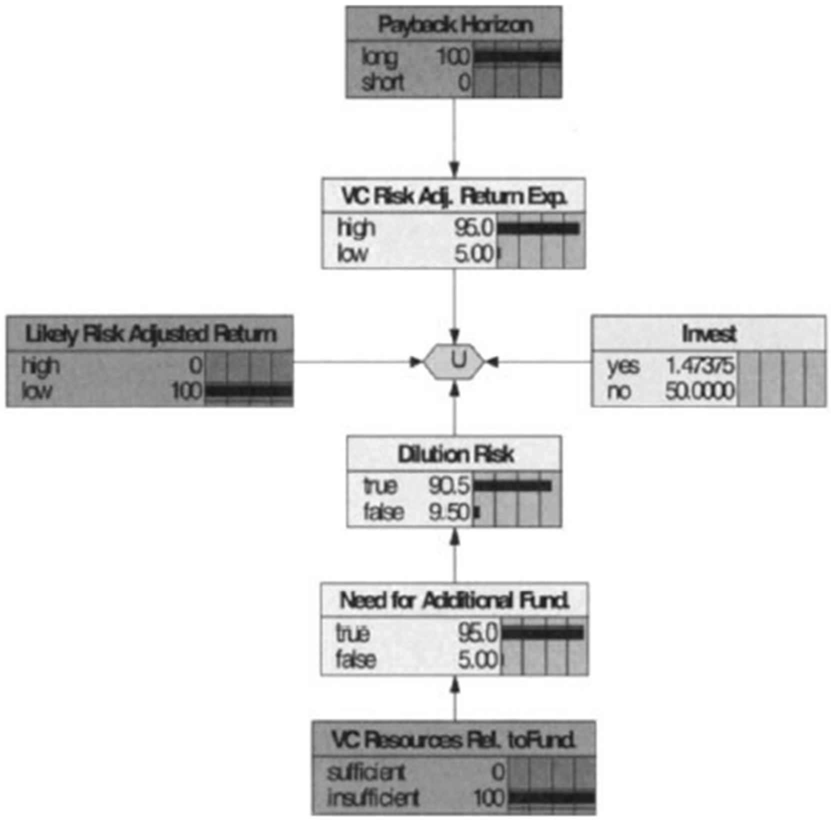
U	Invest	Likely_Risk_Adj_Ret	VC_Risk_Adj_Ret_Exp	Dilution_Risk
85	yes	high	high	true
90	yes	high	high	false
87.5	yes	high	low	true
95	yes	high	low	false
1	yes	low	high	true
1	yes	low	high	false
10	yes	low	low	true
15	yes	low	low	false
50	no	high	high	true
50	no	high	high	false
50	no	high	low	true
50	no	high	low	false
50	no	low	high	true
50	no	low	high	false
50	no	low	low	true
50	no	low	low	false



ნახ. 9.2 როდესაც ძირეული კვანძები იქმნება მათი ყველაზე ხელსაყრელი მნიშვნელობებით, ინვესტიციის სარგებლიანობა იზრდება 93-ზე მეტად.

ჩვენ ვხედავთ, რომ მხოლოდ სამი ცვლადი ახდენს პირდაპირ გავლენას ინვესტიციების სარგებლიანობაზე. ეს ცვლადებია *Likely_Risk_Adjusted_Return*, *Dilution_Risk* და *VC_Risk_Adj_Return_Exp*. ამ სამი ცვალიდან პირველი ეხება ინვესტიციების ალბათურ დაბრუნებას, მეორე ეხება რისკს, რომელიც თან ახლავს კომპანიის უნარს დაფაროს კრედიტი, მაშინ როცა მესამე ეხება რისკის გათვალისწინებით მოსალოდნელ მოლოდინებს იმის შესახებ, თუ რამდენად სწრაფად დააბრუნებს ფირმა კრედიტს. სარგებლიანობები არ არის მიმდინარე შემოსავლიანობები. სარგებლიანობა შეიძლება განხილული იყოს როგორც ფირმის პოტენციის ზომა, ამასთან 0 წარმოადგენს ყველაზე დაბალს, ხოლო 1 – ყველაზე მაღალს. 1 მნიშვნელის მქონე ინვესტიციები შეიძლება განხილული იყოს როგორც იდეალური. თუ მნიშვნელობა *Likely_Risk_Adjusted_Return* მაღალია, *VC_Risk_Adj_Return_Exp* დაბალია და *Dilution_Risk* არის ყალბი, მაშინ ფირმას გააჩნია მაქსიმალურად შესაძლო პოტენციალი, რაც კი შეუძლია წარმოადგინოს მოდელმა, და სარგებლიანობა ენიჭება 95. ამგვარად, მაშინაც კი როცა ცვლადებს, რომლებიც უშუალოდ არიან დაკავშირებული

კვანძის მნიშვნელობასთან, აქვთ ყველაზე ხელსაყრელი მნიშვნელობა, სარგებლიანობა მხოლოდ 95 რჩება. ჩვენ ვადარებთ ინვესტიციების არჩევანს სარგებლიანობის 50-ს. თუ ინვესტიციის სარგებლიანობა 50-ზე ნაკლებს შეადგენს, მაშინ ის არ ჩაითვლება კარგ ინვესტიციად, და ჩვენ ავირჩევდით უარი გვეთქვა ინვესტირებაზე.

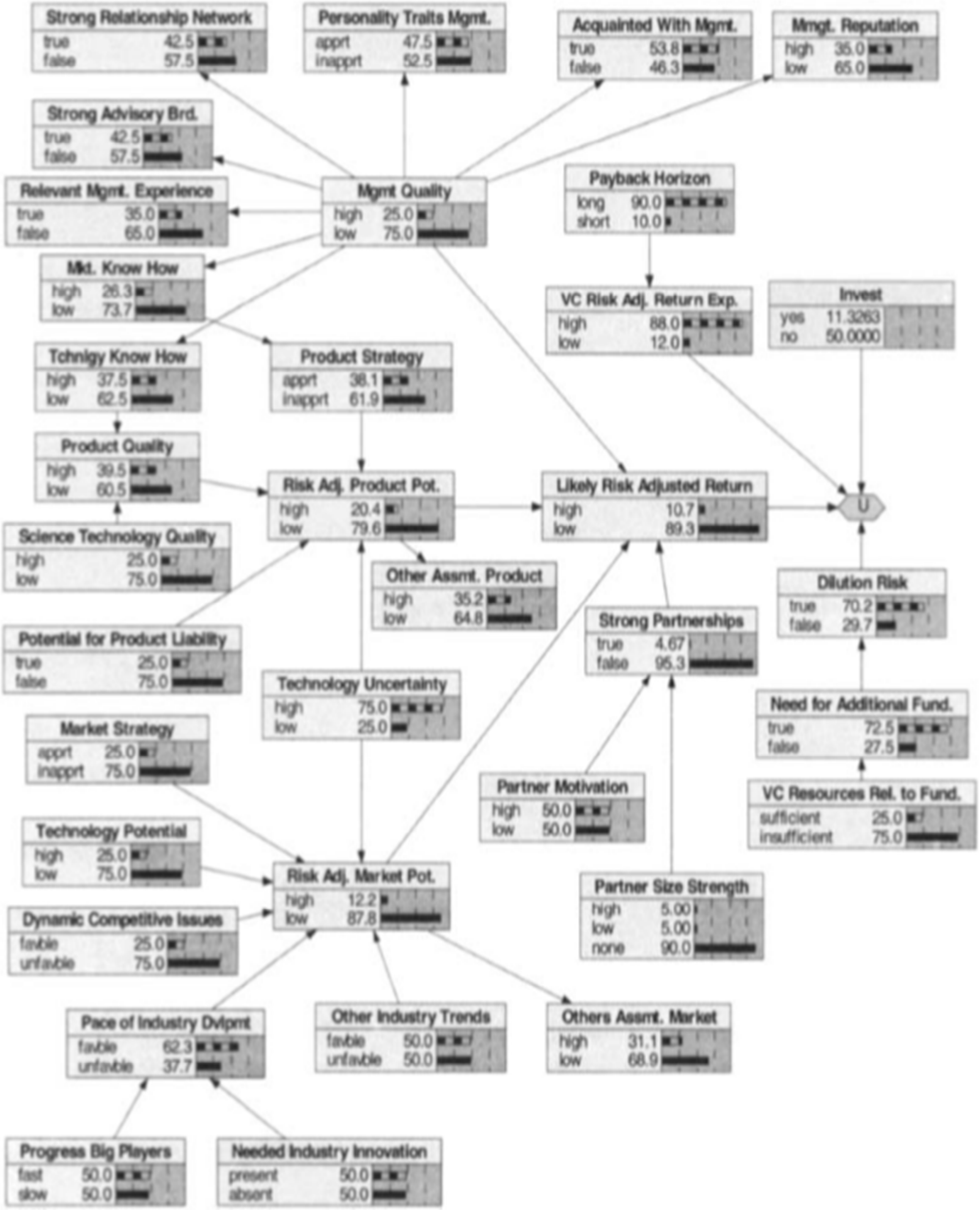


ნახ. 9.3. როდესაც ძირეული კვანძები დაკავშირებულია ყველაზე დაბალ ხელსაყრელ მნიშვნელობებთან, ინვესტიციის სარგებლიანობა შეადგენს დაახლოებით 1,47-ს.

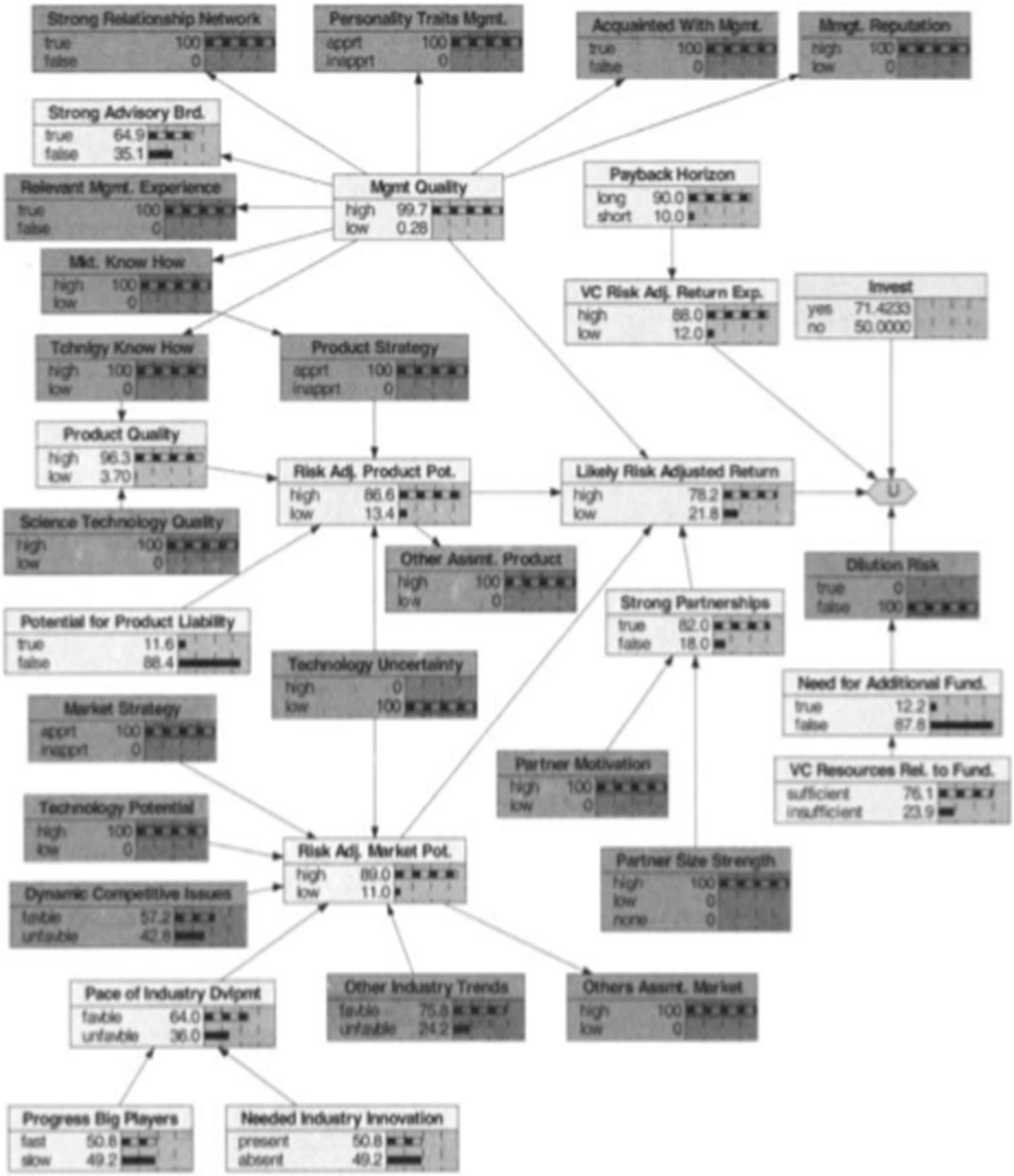
მიაქციეთ ყურადღება, რომ ნახ.9.1-ზე ინვესტიციის სარგებლიანობა შეადგენს მხოლოდ 11,3-ს, როდესაც არაფერია ცნობილი ფირმის შესახებ. ეს იმაზე მიუთითებს, რომ ფირმის შესახებ ინფორმაციის არ ქონისას ფირმა არ განიხილება კარგ ინვესტიციად. ნახ. 9.2-ზე ნაჩვენებია ძირეული კვანძებით გავლენის დიაგრამა, რომელიც შექმნილია მათი ყველაზე ხელსაყრელი მნიშვნელობებისთვის. მაშინ ჩვენ ვხედავთ, რომ ინვესტიციების სარგებლიანობა 93-ს აღემატება. ნახ. 9.3-ზე ნაჩვენებია ძირეული კვანძებით გავლენის დიაგრამა, რომელიც შექმნილია მათი ყველაზე დაბალი ხელსაყრელი მნიშვნელობებისთვის. მაშინ ჩვენ ვხედავთ, რომ ინვესტიციების სარგებლიანობა დაახლოებით 1,47-ია.

9.2 VC გადაწყვეტილების მიღების დეტალური მოდელი

ახლახანს განხილული მოდელის არარელისტური ასპექტი იმაში მდგომარეობს, რომ ჩვეულებრივ ჩვენ ვერ შევძლებთ შევაფასოთ არის თუ არა შესწორებული რისკის ალბათობა მაღალი თუ დაბალი. ალბათ, არის ბევრი სხვა ცვლადი, რომელიც გავლენას ახდენს ამ ცვლადზე, და ჩვენ შეგვეძლო ბევრი მათაგანის მნიშვნელობის შეფასება. ნახ. 9.4-ზე ნაჩვენებია გავლენის დიაგრამა, რომელიც ემყარება სრულ მიზეზობრივ მოდელს, რომელიც მიღებულია ექსპერტული ვენჩერული კაპიტალისტისაგან. ამ გავლენის დიაგრამისათვის ალბათობების პირობითი განაწილებები წარმოდგენილია ამ თავის დანართში. მიაქციეთ ყურადღება, რომ როდესაც კონკრეტული ფირმის შესახებ არაფერი არაა ცნობილი, ფირმის პოტენციალის მოსალოდნელი მნიშვნელობა ისევ მხოლოდ 11,3 რჩება.



ნახ. 9.4. ვენჩერული კაპიტალის დაფინანსების გადაწყვეტილების დეტალური მოდელი.



ნახ. 9.5. ნახ. 9.4-ზე გამოსახული გავლენის დიაგრამა კვანძებით, რომელიც შექმნილია ქიმიურ მრეწველობაში ფირმისათვის მნიშვნელობათა შესაფასებლად.

9.3 რეალური გადაწყვეტილებების მოდელირება

სისტემის ტესტირებისათვის *Kemmerer et al.* [2006]-მა ვენჩერულ კაპიტალისტს სთხოვა გაეხსენებინა წარსულიდან საინვესტიციო შესაძლებლობის მაგალითი, რომელიც მან შეარჩია და რომელიც წარმატებული აღმოჩნდა. არჩეული იქნა ფირმა ქიმიურ მრეწველობაში. შემდეგ ვენჩერულ კაპიტალისტს შესთავაზეს შეეფასებინა ამ ფირმასთან

დაკავშირებული, რაც შეიძლება მეტი რაოდენობის ცვლადების მნიშვნელობები, მაგრამ შესაფასებელი მნიშვნელობები ვენჩერული კაპიტალისტის მიერ უნდა შეფასებულიყო გადაწყვეტილების მიღების მომენტში. ნახ. 9.5-ზე გამოსახულია ნახ. 9.4-ზე გამოსახული გავლენის დიაგრამა კვანძებით, რომელიც შექმნილია ამ შეფასებული მნიშვნელობებისათვის. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ინვესტირების გადაწყევტილების სარგებლიანობა შეადგენს დაახლოებით 71,4-ს, რაც რამდენედმე აღენატება საბაზისო 50-ის მნიშვნელობას.

შემდეგ ვენჩერულ კაპიტალისტს შესთავაზეს გამოეწვია საინვესტიციო გადაწყვეტილება, რომელსაც კატასტროფული შედეგი ჰქონდა და შეეტანა ცვლადებისათვის შეფასებული მნიშვნელობები იმ მომენტისათვის როცა გადაწყვეტილება იქნა მიღებული. საინვესტიციო გადაწყვეტილების სარგებლიანობა აღმოჩნდა 57,4, რაც საბაზოზე ჯერ კიდევ მაღალია. მაგრამ როდესაც შეყვანილი იყო სწორი რეტროსპექტიური ინფორმაცია საბაზრო პოტენციალის შესახებ, სარგებლიანობა აღმოჩნდა მხოლოდ 25,4, რაც შეესაბამება კატასტროფულ შედეგს. ამგვარად, ფარობითად მაღალი სარგებლიანობა, როგორც ჩანს, აიხსნება ცვლადების მნიშვნელობების ცუდი შეფასებით.

მიაქციეთ ყურადღება, რომ ცვლადის $Other\_Industry\_Trends$ მაგალითი არ იქმნება მაღალ ან დაბალ დონეზე. პირიქით, იმის ალბათობა რომ მას გააჩნია მნიშვნელობა, იცვლება 0,5-დან 0,758-მდე. იმის მაგივრად, რომ შევქმნათ ცვლადი ზუსტი მნიშვნელობით, $Netica$ საშუალებას იძლევა შემოვიტანოთ ცვლადის ახალი ალბათობა E მომხმარებლის მონაცემთა საფუძველზე. ამ შემთხვევაში კაპიტალისტმა შეიყვანა:

$P(Other\_Industry\_Trends = favorable|E) = 0{,}75.$

ალბათობა შემდეგ გახდა 0,758 იმიტომ რომ ცვლადი *Others_ Assmt _Market* მითითებული იყო მაღალი, და ამ ცვლადებს გააჩნიათ დამოკიდებულება *Risk_Adj_Market_Pot* ცვლადის მეშვეობით. ზუსტად ასევე იმის ალბათობა, რომ *Dynamic_Competitive _Issues* ხელსაყრელი იყო, გახდა 0,572, ამიტომ კაპიტალისტი შევიდა:

$P\ (Dynamic\_Competitive\_Issues = f\,avorablel|E) = 0{,}5.$

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 9.1

სავარჯიშო 9.1 $Netica$ –ს გამოყენებით შეიმუშავეთ ნახ. 9.1-ზე ნაჩვენები გავლენის დიაგრამა. გამოიკვლიეთ საინვესტიციო გადაწყვეტილება შემთხვევითი კვანძების სხვადასხვა მაგალითისათვის.

სავარჯიშო 9.2 $Netica$ –ს გამოყენებით შეიმუშავეთ ნახ. 9.5-ზე ნაჩვენები გავლენის დიაგრამა.

1. შეისწავლეთ საინვესტიციო გადაწყვეტილება კვანძების სხვადასხვა მაგალითისათვის.

2. შეეცადეთ მოიპოვოთ ინფორმაცია ფაქტობრივი ფირმის შესახებ, რომელიც ცდილობდა მიეღო ვენჩერული კაპიტალი. შეიყვანეთ იმდენი ინფორმაცია, რამდენიც იცით ფირმაზე. შეადარეთ რეკომენდებული გადაწყევტილება იმას რაც იყო გაკეთებული ფირმის მიმართ. თუ ფირმამ მიიღო დაფინანსება შეადარეთ რეკომენდებული გადაწყვეტილება შედეგს.

დანართი 9.ა

$Netica$ –ს მიერ მომზადებული შემდეგი ანგარიში გვიჩვენებს ალბათობების პირობით განაწილებებს და სარგებლიანობებს ნახ. 9.4-ზე გამოსახულ გავლენის დიაგრამაზე:

Dil_Risk:

true	false	Need_Add_Fund
0.95	0.05	true
0.05	0.95	false

VC_Res_Fund:

sufficient	insufficient
0.25	0.75

Mgmt_Rep:

high	low	Mgmt_Qual
0.8	0.2	high
0.2	0.8	low

Acq_Mgmt:

true	false	Mgmt_Qual
0.65	0.35	high
0.5	0.5	low

Strong_Rel_Net:

true	false	Mgmt_Qual
0.65	0.35	high
0.35	0.65	low

Strg_Adv:

true	false	Mgmt_Qual
0.65	0.35	high
0.35	0.65	low

Mgmt_Exp:

true	false	Mgmt_Qual
0.8	0.2	high
0.2	0.8	low

Other_Mrkt:

high	low	Risk_Mrkt
0.75	0.25	high
0.25	0.75	low

Part_Mot:

high	low
0.5	0.5

Tech_Pot:

high	low
0.25	0.75

Tch_Know:

high	low	**Mgmt_Qual**
0.75	0.25	high
0.25	0.75	low

Ind_Dvlpmt:

favble	unfavble	**Prog_Big_Play**	**Nd_Ind_Innov**
0.94	0.06	fast	present
0.75	0.25	fast	absent
0.75	0.25	slow	present
0.05	0.95	slow	absent

Ind_Trends:

favble	unfavble
0.5	0.5

Mkt_Know:

high	low	**Mgmt_Qual**
0.75	0.25	high
0.1	0.9	low

Mgmt_Qual:

high	low
0.25	0.75

Prod_Qlty:

high	low	**Sci_Tech_Qlty**	**Tch_Know**
0.93	0.07	high	high
0.83	0.17	high	low
0.55	0.45	low	high
0.05	0.95	low	low

Sci_Tech_Qlty:

high	low
0.25	0.75

Mrkt_Strgy:

apprt	inapprt
0.25	0.75

Pot_Prod_Lblty:

true	false
0.25	0.75

Dyn_Comp:

favble	unfavble
0.25	0.75

Nd_Ind_Innov:

present	absent
0.5	0.5

Prog_Big_Play:

fast	slow
0.5	0.5

Other_Prod:

high	low	Risk_Prod
0.75	0.25	high
0.25	0.75	low

Tech_Uncrty:

high	low
0.75	0.25

VC_Risk_Adj:

high	low	Pay_Hor
0.95	0.05	long
0.25	0.75	short

Part_Size:

high	low	none
0.05	0.05	0.9

Strong_Part:

true	false	Part_Mot	Part_Size
0.82	0.18	high	high
0.25	0.75	high	low
0	1	high	none
0.75	0.25	low	high
0.05	0.95	low	low
0	1	low	none

Prod_Strat:

apprt	inapprt	Mkt_Know
0.75	0.25	high
0.25	0.75	low

Pay_Hor:

long	short
0.9	0.1

Need_Add_Fund:

true	false	VC_Res_Fund
0.05	0.95	sufficient
0.95	0.05	insufficient

Risk_Prod:

high	low	Pot_Prod_Lblty	Prod_Qlty	Prod_Strat	Tech_Uncrty
0.05	0.95	true	high	apprt	high
0.05	0.95	true	high	apprt	low
0.05	0.95	true	high	inapprt	high
0.05	0.95	true	high	inapprt	low
0.05	0.95	true	low	apprt	high
0.05	0.95	true	low	apprt	low
0.05	0.95	true	low	inapprt	high
0.05	0.95	true	low	inapprt	low
0.9	0.1	false	high	apprt	high
0.95	0.05	false	high	apprt	low
0.25	0.75	false	high	inapprt	high
0.3	0.7	false	high	inapprt	low
0.1	0.9	false	low	apprt	high
0.15	0.85	false	low	apprt	low
0.05	0.95	false	low	inapprt	high
0.075	0.925	false	low	inapprt	low

Likely_Ret:

high	low	Mgmt_Qual	Risk_Prod	Risk_Mrkt	Strong_Part
0.9	0.1	high	high	high	true
0.9	0.1	high	high	high	false
0.35	0.65	high	high	low	true
0.3	0.7	high	high	low	false
0.45	0.55	high	low	high	true
0.4	0.6	high	low	high	false
0.3	0.7	high	low	low	true
0.25	0.75	high	low	low	false
0.5	0.5	low	high	high	true
0.25	0.75	low	high	high	false
0.2	0.8	low	high	low	true
0.1	0.9	low	high	low	false
0.2	0.8	low	low	high	true
0.1	0.9	low	low	high	false
0.1	0.9	low	low	low	true
0.01	0.99	low	low	low	false

Pers_Mgmt:

apprt	inapprt	Mgmt_Qual
0.55	0.45	high
0.45	0.55	low

Risk_Mrkt:

high	low	Dyn_Comp	Tech_Uncrty	Tech_Pot	Mrkt_Strgy	Ind_Dvlpmt	Ind_Trends
0.95	0.05	favble	high	high	apprt	favble	favble
0.95	0.05	favble	high	high	apprt	favble	unfavble
0.95	0.05	favble	high	high	apprt	unfavble	favble
0.92	0.08	favble	high	high	apprt	unfavble	unfavble
0.33	0.67	favble	high	high	inapprt	favble	favble
0.3	0.7	favble	high	high	inapprt	favble	unfavble
0.28	0.72	favble	high	high	inapprt	unfavble	favble
0.25	0.75	favble	high	high	inapprt	unfavble	unfavble
0.33	0.67	favble	high	low	apprt	favble	favble
0.3	0.7	favble	high	low	apprt	favble	unfavble
0.28	0.72	favble	high	low	apprt	unfavble	favble
0.25	0.75	favble	high	low	apprt	unfavble	unfavble
0.01	0.99	favble	high	low	inapprt	favble	favble
0.01	0.99	favble	high	low	inapprt	favble	unfavble
0.01	0.99	favble	high	low	inapprt	unfavble	favble
0.01	0.99	favble	high	low	inapprt	unfavble	unfavble
0.95	0.05	favble	low	high	apprt	favble	favble
0.92	0.08	favble	low	high	apprt	favble	unfavble
0.87	0.13	favble	low	high	apprt	unfavble	favble
0.78	0.22	favble	low	high	apprt	unfavble	unfavble
0.28	0.72	favble	low	high	inapprt	favble	favble
0.26	0.74	favble	low	high	inapprt	favble	unfavble
0.24	0.76	favble	low	high	inapprt	unfavble	favble
0.22	0.78	favble	low	high	inapprt	unfavble	unfavble
0.28	0.72	favble	low	low	apprt	favble	favble
0.26	0.74	favble	low	low	apprt	favble	unfavble
0.24	0.76	favble	low	low	apprt	unfavble	favble
0.22	0.78	favble	low	low	apprt	unfavble	unfavble
0.01	0.99	favble	low	low	inapprt	favble	favble
0.01	0.99	favble	low	low	inapprt	favble	unfavble
0.01	0.99	favble	low	low	inapprt	unfavble	favble
0.01	0.99	favble	low	low	inapprt	unfavble	unfavble
0.69	0.31	unfavble	high	high	apprt	favble	favble
0.63	0.37	unfavble	high	high	apprt	favble	unfavble
0.59	0.41	unfavble	high	high	apprt	unfavble	favble
0.53	0.47	unfavble	high	high	apprt	unfavble	unfavble
0.19	0.81	unfavble	high	high	inapprt	favble	favble
0.17	0.83	unfavble	high	high	inapprt	favble	unfavble
0.16	0.84	unfavble	high	high	inapprt	unfavble	favble
0.15	0.85	unfavble	high	high	inapprt	unfavble	unfavble
0.19	0.81	unfavble	high	low	apprt	favble	favble
0.17	0.83	unfavble	high	low	apprt	favble	unfavble
0.16	0.84	unfavble	high	low	apprt	unfavble	favble
0.15	0.85	unfavble	high	low	apprt	unfavble	unfavble
0.01	0.99	unfavble	high	low	inapprt	favble	favble
0.01	0.99	unfavble	high	low	inapprt	favble	unfavble
0.01	0.99	unfavble	high	low	inapprt	unfavble	favble
0.01	0.99	unfavble	high	low	inapprt	unfavble	unfavble
0.6	0.4	unfavble	low	high	apprt	favble	favble
0.54	0.46	unfavble	low	high	apprt	favble	unfavble
0.51	0.49	unfavble	low	high	apprt	unfavble	favble
0.46	0.54	unfavble	low	high	apprt	unfavble	unfavble
0.17	0.83	unfavble	low	high	inapprt	favble	favble
0.15	0.85	unfavble	low	high	inapprt	favble	unfavble
0.14	0.86	unfavble	low	high	inapprt	unfavble	favble
0.13	0.87	unfavble	low	high	inapprt	unfavble	unfavble
0.17	0.83	unfavble	low	low	apprt	favble	favble
0.15	0.85	unfavble	low	low	apprt	favble	unfavble
0.14	0.86	unfavble	low	low	apprt	unfavble	favble
0.13	0.87	unfavble	low	low	apprt	unfavble	unfavble
0.01	0.99	unfavble	low	low	inapprt	favble	favble
0.01	0.99	unfavble	low	low	inapprt	favble	unfavble
0.01	0.99	unfavble	low	low	inapprt	unfavble	favble
0.01	0.99	unfavble	low	low	inapprt	unfavble	unfavble

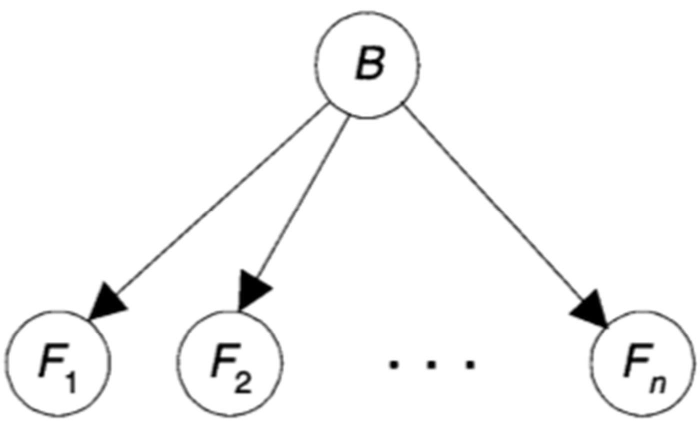
U	Invest	Likely_Ret	VC_Risk_Adj	Dil_Risk
85	yes	high	high	true
90	yes	high	high	false
87.5	yes	high	low	true
95	yes	high	low	false
1	yes	low	high	true
1	yes	low	high	false
10	yes	low	low	true
15	yes	low	low	false
50	no	high	high	true
50	no	high	high	false
50	no	high	low	true
50	no	high	low	false
50	no	low	high	true
50	no	low	high	false
50	no	low	low	true
50	no	low	low	false

თავი 10

გაკოტრების პროგნოზირება

იმის პროგნოზირება, ფირმა გაკოტრდება თუ არა, ძალიან მნიშვნელოვანია აუდიტორების, კრედიტორების და ფირმის აუქციონერებისათვის. მაგრამ აუდიტებიც კი, რომლებმაც ყველაზე კარგად იციან ფირმაში არსებული სიტუაცია, ხშირად ვერ ამჩნევენ მოსალოდნელ გაკოტრებას [$McKee$, 2003]. ამგვარად, შემუშავდა რამდენიმე მოდელი ფირმის შესახებ გაკოტრების ინფორმაციის ალბთობების პროგნოზირებისათვის. ისინი მოიცავენ მოდელებს, რომლებიც ეფუძნება მარტივ ერთგანზომილებიან ანალიზს [$Beaver$, 1966], ლოგისტიკურ რეგრესიას [$Ohlson$, 1980], ნეირონულ ქსელებს [Tam and $Kiang$, 1992], გენეტიკურ პროგრამირებაზე [$McKee$ and $Lensberg$, 2002] და ბაიესის ქსელზე [$Sarkar$ and $Sriram$, 2001], [Sun and $Shenoy$, 2006]. ჩვენ გაჩვენებთ მუშაობას [Sun and $Shenoy$, 2006]-ში, რამდენადაც ის იძლევა დაწვრილებით ხელმძღვანელობას ცვლადების არჩევასა და უწყვეტი ცვლადების დისკრედიტაზიციაში.

თავიდან გაჩვენებთ ქსელს და თუ როგორ იყო ის შემუშავებული. შემდეგ განვიხილავთ მისი სიზუსტის შესამოწმებელ ექსპერომენტებს, ბოლოს წარმოგიდგენთ შესაძლებლო გაუმჯობესებულ მოდელებს.



ნახ 10.1 უბრალო ბაიესის ქსელი.

10.1 ბაიესური ქსელი გაკოტრების პროგნოზირებისათვის

ნაჩვენები იყო, რომ უბრალო ბაიესის ქსელები კარგად ასრულებენ გაკოტრების პროგნოზირებას [$Sarkar$ and $Sriram$, 2001]. აქ წარმოდგენილი მოდელი ეყრდნობა ამ შედეგებს და იყენებს უბრალო ბაიესის ქსელს. ამიტომ თავიდან განვიხილავთ ასეთ

ქსელებს, ხოლო შემდეგ შევიმუშავებთ გაკოტრების პროგნოზირებისათვის უბრალო ბაიესის ქსელს.

10.1.1 უბრალო ბაიესის ქსელი

უბრალო ბაიესის ქსელი არის ბაიესის ქსელი ერთი ფესვით, ყველა დანარჩენი კვანძი წარმოადგენენ ფესვის შვილობილ ელემენტებს და სხვა კვანძებს შორის არ არის წიბოები. ნახ. 10.1-ზე ნაჩვენებია უბრალო ბაიესის ქსელი. ისევე როგორც ნებისმიერი ბაიესის ქსელის შემთხვევაში, უბრალო ბაიესის ქსელში წიბოები შეიძლება წარმოადგენდს ან არ წარმოადგენს მიზეზობრივ გავლენას. ხშირად უბრალო ბაიესის ქსელები გამოიყენება კლასიფიკაციის პრობლემის მოდელირებისათვის. თითოეულ პრობლემაში ფესვის ნიშვნელობას წარმოადგენენ შესაძლო კლასები, რომლებსაც შეიძლება მიეკუთვნოს არსი, ხოლო ფოთლები – ეს არის კლასების ნიშნები ან პრედიკატები. მიმდინარე დანართში არის ორი კლასი: ერთი, რომელიც შედგება იმ კომპანიებისაგან, რომლებიც კოტრდებიან, ხოლო მეორე იმ კომპანიებისაგან, რომლებიც ამას არ აკეთებენ. მახასითებლები – ეს ცვლადებია, რომელთა მნიშვნელობები ხშირად უნდა იყოდს განსხვავებული სხვადასხვა კლასის კომპანიისათვის. რამდენადაც გაკორტრებას არ მივყავართ ნიშნების გამოჩენამდე, რომლებსაც შეუძლიათ გაკოტრების პროვოცირება, ამ დანართში კიდეები არ წარმოადგენენ მიზეზებს.

10.1.2 გაკოტრების პროგნოზირების ქსელის შექმნა

შემდეგ ჩვენ გაკოტრების პროგნოზირებით ვქმნით უბრალო ბაიესის ქსელს. თავიდან ვსაზღვრავთ შესაბამის ცვლადებს. შემდეგ შევისწავლით ქსელის სტუქტურას. საბოლოოდ, ჩვენ ვიღებთ პარამეტრებს ქსელისათვის

ფინანსური ფაქტორები	განსხვავება	Var.	რას გამოხატავს ცვლადი?
	ზომა	TA	In(მთლიანი აქტივები)/(GNP არაცხადი ფასის ინდექსი)
	ლიკვიდაცია	CA	(მიმდინარე აქტივები - მიმდინარე ვალდებულება)/(მთლიანი აქტივები)
		CR	(მიმდინარე აქტივები)/მიმდინარე ვალდებულებები
		OF	(ოპერაციული ფულადი ნაკადები)/(მთლიანი ვალდებულებები)
		LM	$(\mathrm{L}+\mu)/\sigma$ L = ნაღდ ფულს+მოკლევადიანი საბაზრო ფასიანი ქაღალდები $\mu, \sigma =$ საშუალო, სტანდარტული გადახრა კვარტალური ცვლილებები L-ში 12 კვარტლის განმავლობაში
		CA	(მიმდიანრე აქტივები)/(მთლიანი აქტივები)
		CH	ნაღდი ფული/(მთლიან აქტივებთან)
	ლევეროჯი	TL	(მთლიანი ვალდებულება)/(მთლიანი აქტივები)
		LTD	გრძელვადიანი ვალი/მთლიან აქტივებთან
	ბრუნვა	S	გაყიდვები/მთლიან აქტივებთან
		CS	მიმდიანრე აქტივები/გაყიდვები
	ალბათობა	E	შემოსავალი გადასახადებამდე და პროცენტებამდე/მთლიანი აქტივები
		NT	წმინდა შემოსავალი/მთლიან აქტივებთან
		IT	თუ წმინდა შემოსავალი ბოლო 2 წლის განმავლობაში <0, =1, ან =0
		RE	გაუნაწილებელი მოგება/მთლიანი აქტივები
		CHN	(t წლის წმინდა შემოსავალს-წმნიდა შემოსავალი t-1 წელს)/ (Abs(წმინდა შემოსავალი t წელს) + Abs(წმინდა შემოსავალი T-1))
ბაზრის ფაქტორები		M	In(ფირმის ზომა დაკავშირებული CRSP NYSE/AMEX/ /NASDAQ ბაზრის კაპიტალიზაციის ინდექსი)
		R	ფირმის აქციებიდან შემოსავალი t-1 მინუს ღირებულება-შეწონილი CRSP NYSE/AMEX/NASDAQ ინდექსზე შემოსავალი t-1 წელს
სხვა ფაქტორები		AU	თუ კომპუსტატ კოდის აუდიტორების მოსაზრება არის "1"; არაკვალიფიციური = 0, სხვა =1
		IFR	ინდუსტრიის ჩავარდნის მაჩვენებელი გამოთვლილი როგორც გაკოტრების საშუალო განაკვეთი გაკოტრების განაკვეთი არის (#გაკოტრება ორობით SIC ინდ.)/(#ფირმები ინდ-ში)

ცხრლი 10.1. პოტენციალური პრედიქტორული ცვლადები გაკოტრებისათვის.

რელევანტური ცვლადების განსაზღვრება

საკუთარი ანალიზით და წინა გამოკვლევების მიმოხილვით *Sun and Shenoy* [2006]-მა განსაზღვრეს 20 ცვლადი ცხრილ 10.1-ში, როგორც გაკოტრების პოტენციალური პრედიქტორები.

სასწავლო სტრუქტურა

შემდეგ გაჩვენებთ ქსელის სტრუქტურა როგორ იყო მიღებული მონაცემებიდან. პირველ რიგში განვიხილავთ ნიმუშს, რომლიდანაც იქნა მიღებული მონაცემები და შემდეგ ჩვენ წარმოგიდგენთ შესწავლის მეთოდს ამ მონაცემებით. წინასწარ განსაზღვრული იყო, რომ

ბაიესის ქსელი უბრალო იქნებოდა. ამგვარად, „სასწავლო სტუქტურაში“ ჩვენ გვესმის თუ რომელი ცვლადები უნდა ჩავრთოთ ქსელში.

კვლევაში გამოყენებული ტიპური ფირმები იყო 1989-2002 წლებში ძირითად საფონდო ბირჟებზე სხვადასხვა წარმოებაში საჯარო სავაჭრო ფირმები. გაკოტრებული კომპანიები განსაზღვრული იყო შემდეგნაირად: პირველ რიგში ფირმები განლაგებული იყო $Compustat\ and\ Lexis-Nexis$-ის გაკოტრების შესახებ ანგარიშის მონაცემთა ბაზის მიხედვით. შემდეგ გაკოტრებაზე შეტანილი განაცხადები განისაზღვრებოდა $Lexis-Nexis\ Bankruptcy\ Report, Lexis-Nexis\ News$-ის ანგარიშების ბიბლიოთეკაში მოძებნის გზით და ფირმების $8-K$ ფორმის მიხედვით. ფირმები, რომლებსაც არ ჰქონდათ გაკოტრებაზე განაცხადი შეტანილი გამორიცხული იყვნენ. თითოეულ გაკოტრებულ ფირმაზე გაკოტრებაზე განაცხადის შეტანამდე მიღებული იყო ბოლო წლიური ანგარიში. თუ დრო ბოლო წლიური ანგარიშიდან ბოლო გაკოტრებაზე განაცხადის შეტანიდან და გაკოტრებაზე რეგისტრაციის თარიღიდან ორ წელიწადზე მეტი იყო, ფირმა გარიცხული იყო.[9] ამ პროცედურამ გამოიწვია 890 ფირმის გაკოტრება.

იმ ფირმების გამოსავლენად, რომლებიც არ იყვნენ გაკოტრებულები, პირველი 500 ფირმა იყო შემთხვევითობის გზით არჩეული ყველა აქტიური ფირმიდან, რომლებიც ხელმისაწვდომები იყვნენ $Compustat$-ში დროის თითოეულ პერიოდში 1989 წლიდან 2002 წლამდე ჩათვლით. როდესაც ერთი წლის განმავლობაში არჩეული იყო გაუკოტრებელი ფირმა, ის გამორიცხული იყო შემდეგი წლების შერჩევიდან. ამ პროცედურის შედეგად მივიღეთ 700 აქტიური ფირმა. მათგან 63 ჰქონდა დაკარგული მონაცემები ყველა იდენფიცირებული პრედიქტორის მიხედვით, ამიტომ ისინი გამორიცხულნი იყვნენ. საბოლოო ნიმუში შედგებოდა 6937 ფირმისაგან, რომლებიც არ იყვნენ გაკოტრებულნი. ამგვარად, ნიმუშის შერჩევის საერთო ზომა შეადგენდა 890+6937=7827-ს.

სწავლების ევრისტიკული მეთოდიკა. ჩვენი მიზანია წარმოადგენს შევისწავლოთ ბაიესის ქსელი, რომელიც შეიცავს გაკოტრებისათვის კვანძებს, თითოეული შესაბამისი ცვლადისათვის კვანძი ცხრილ 10.1-შია. მის გასაკეთებლად ყველაზე სწორი გზა იქნებოდა ბაიესის ქსელის შესწავლა იმ ნიმუშიდან, რომელიც ახლახანს იყო აღწერილი თავი 4-ის პარაგრაფ 4.6-ში აღწერილი სრუქტურის შესწავლის ერთ-ერთი პაკეტის გამოყენებით. თუ უმეტესობა ფირმისათვის არ გაგვაჩნია 20-ვე ცვლადით მონაცემები ალტერნატივის სახით, ჩვენ შეგვეძლო შეგვესწავლა მიზნობრივი ცვლადებით (გაკოტრება) მარკოვის დაფარვა. ამის მიზეზი ისაა, რომ ამ ნაკრებში ცვლადები იცავენ მიზნობრივ ცვლადებს სხვა

[9] ეს გაკეთდა იმისათვის, რომ გამოყენებული მონაცემები ყოფილიყო მიმდინარე.

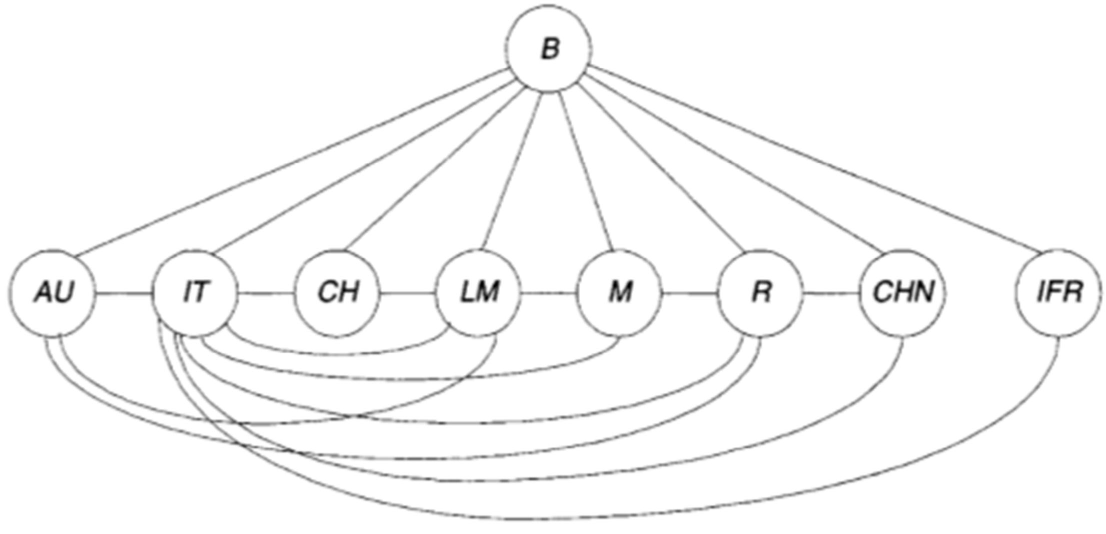
ცვლადების გავლენისაგან. ამიტომ, თუ ჩვენ ვიცით მათი ყველა მნიშვნელობა, სხვა ცვლადებს არა აქვთ კავშირი მიზნობრივი ცვლადების პირობით ალბათობებთან. მეორეს მხივ, თუ ჩვენ ხშირად ვკარგავთ მნიშვნელობებს მარკოვის დაფარვაში, ჩვენ ასევე გვინდა შევისწავლოთ ქსელის შემცველი სხვა ცვლადებიც. ბევრი შემსწავლელ პაკეტს (მაგალითად $Tetrad$) ასევე შეუძლიათ განსაზღვრონ მონაცემებიდან მარკოვის დაფარვა.

Sun и $Shenoy$ [2006]- მა გადაწყვიტა არ გამოიყენოს რაიმე სასწავლო პაკეტი, პრაშაკ შენოიმ [კერძო მიმოწერა] თქვა, რომ მათ ეს გადაწყვეტილება მიიღეს შემდეგი მიზეზების გამო:

ყველა სასწავლო პაკეტი გულისხმობს, რომ ჩვენ გვაქვს ცვლადებისათვის შემთხვევითი შერჩევა, რომლებითაც ჩვენ ვცდილობთ მოდელის შესწავლას. მაგრამ ჩვენ არ გვქონდა შემთხვევითი შერჩევა.

ის მოდელები, რომლებიც ამ სასწავლო პაკეტებით შეისწავლება, ჩვეულებრივ მოითხოვენ ძალიან დიდი ზომის შერჩევას. ჩვენ არ გვქონდა გაკოტრებული ფირმების ძალიან დიდი არჩევანი.

ამის ნაცვლად მათ შეიმუშავეს ევრისტიკული მეთოდი რათა გაერკვეულიყვნენ მარკოვის დაფარვაში გაკოტრების ცვლადებში ცვლადების შერჩევაში. შემდეგ ისინი გამოიყენებენ ამ ცვლადებს უბრალო ბაიესის ქსელში შვილების სახით, რომელშიც გაკოტრების ცვლადი იყო ძირეული.



ნახ. 10.2 არსებობს წიბო ორ ცვლადს შორის თუ ისინი კორელირებულნი არიან.

მათი მეთოდი შემდეგნაირად გამოიყურებოდა: მათ ჰქონდათ 20 პრედიკატორი ცვლადი და 1 მიზნობრივი ცვლადი, კერძოდ გაკოტრების მდგომარეობა, რის შედეგადაც გაკეთდა

საერთო 21 ცვლადი, ხოლო ნიმუში შედგებოდა 7827 ჩანაწერისაგან, რომელშიც მოცემული იყო ამ ცვლადების მნიშვნელობები. ამ ნიმუშზე დაყრდნობით მათ განსაზღვრეს კორელაციის კოეფიციენტი 21 ცვლადიდან თითოეულის სხვა 21 ცვლადს შორის. თუ კორელაციის კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობა იყო >0,1-ზე, ისინი ადგენდნენ, რომ ორი ცვლადი კორელირებული იყვნენ.[10] ამ კრიტერიუმის თანახმად მხოლოდ 8 ცვლადი იყო დაკავშირებული გაკოტრებასთან. ნახ. 10.2-ზე ნაჩვენებია შესაბამისი ცვლადები. ორ პრედიკატს შორის არსებობს კიდე თუ ისინი კორელირებულნი აღმოჩნდებიან. შესაძლებელია, მაგალითად CHN კოლერირებს B-სთან მხოლოდ R-ის მეშვეობით. ანუ ჩვენ შეიძლებოდა გვქონოდა:

$$I_P(CHN, B|R).$$

თუ ეს ასე იქნებოდა, მაშინ CHN არ იქნებოდა აუცილებელი მარკოვის დაფარვისთვის. ეს რომ განესაზღვრათ, გამოთვლილი იყო პირობითი კორელაციის ყველა კოეფიციენტი. ამ კონკრეტული ცვლადებისათვის დადგენილი იქნა, რომ:

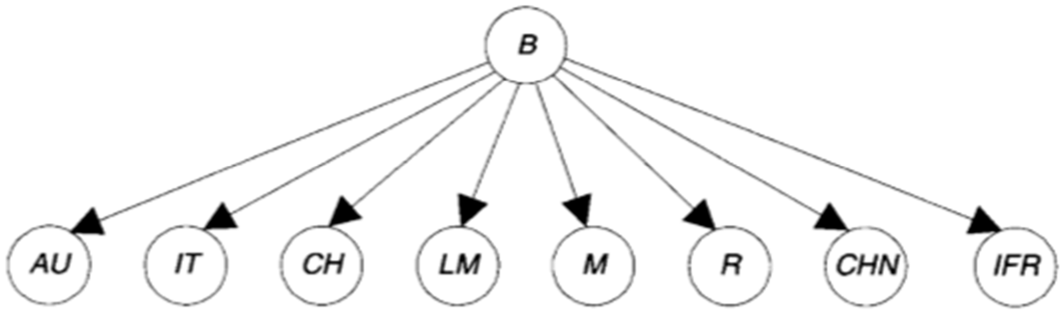
$Corr(CHN, B|R) = -0{,}22.$

თუ ჩვენ კვლავ გამოვიყენებთ 0,1 ჩაჭრას კორელაციის კოეფიციენტის აბსოლუტური მნიშვნელობისათვის, ეს შედეგი მიგვითითებს იმაზე, რომ CHN არა დამოკიდებული B პირობით R-ზე, ამიტომ CHN უნდა დავტოვოთ ქსელში. ყველა შესაბამისი პირობითი კორელაციის კოეფიციენტის ანალოგიურმა შემოწმებამ გვიჩვენა, რომ არც ერთი ცვლადი არ უნდა გამოვრიცხოთ ქსელიდან.

უბრალო ბაიესის ქსელის შემაჯამებელი სტუქტურა გამოსახულია ნახ. 10.3-ზე. მიაქციეთ ყურადღება, რომ არ ჩატარდა არავითარი შემოწმება იმისათვის, რომ დავრწმუნებულიყავით იმაში, რომ პირობითი დამოუკიდებლობა დაკმაყოფილდა ქსელის მიერ. მაგალითად, ქსელი გულისხმობს:

$$I_P(AU, IT|B).$$

[10]. ასევე გამოსცადეს 0,05, ,015 და 0,2. 0,1-ის ჩაჭრით გამოყენებისას გამოვლინდა მოდელი, რომელიც საუკეთესო პროგნოზირების შესაძლებლობას იძლეოდა, ხოლო ცვლადების რაოდენობა მინიმუმამდე შემცირდა.



ნახ.10.3 უბრალო ბაიესის ქსელის სტრუქტურა გაკოტრების პროგნოზირებისათვის.

ნახ. 10.2-დან ჩვენ ვიცით, რომ AU და IT დამოკიდებული არიან. იქნებ ისინი დამოკიდებული რჩებიან B-ს შედეგად. პრაშაკ შენოი [კერძო მიმოწერა] განიხილავს ამ კრიტიკას შემდეგნაირად:

$naYve\,Bayes$, რომელსაც ჩვენ ვიყენებთ გაკოტრების მოდელისათვის, ასეთია: ჩვენ გვესმის რომ პრედიქტორები არ წარმოადგენენ ზუსტ პირობით დამოუკიდებლებს გაკოტრების ცვლადების გათვალისწინებით. არსებობს კომპრომისი მოდელის სირთულესა და პარამეტრების რაოდენობას შორის, რომლებიც აუცილებელია მონაცემებიდან შეფასდეს. $naYve\,Bayes$ მოდელის უპირატესობა მდგომარეობს იმაში, რომ პარამეტრების რაოდენობა მინიმუმამდეა დაყვანილი. ჩვენ დარწმუნებულები ვართ, რომ $naYve\,Bayes$-ის ვარაუდი მაქსიმალურად დაკმაყოფილდა მოდელში ცვლადების ქვესიმრავლის რაც შეიძლება ფრთხილი შერჩევით. პროცედურა, რომელიც აღწერს ცვლადების შერჩევას, მოტივირებული იყო $naYve\,Bayes$-ის პირობითი დამოუკიდებლიბის ვარაუდის საფუძველზე.

პარამეტრების შესწავლა

უმეტესობა პრედიქტორული ცვლადებისა უწყვეტია, მაგრამ მიზნობრივი ცვლადი (გაკოტრების) დისკრეტულს წარმოადგენს. ასეთ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია პროგნოზირების უკეთესი შედეგები მივიღოთ უწყვეტი ცვლადის დისკრედიტაციის გზით (იხ. თავი 4-ის პარაგრაფ 4.7.1-ის მაგალითი, რომელიც ზურგის ტვინის ტრამვას ეხებოდა). ეს იყო მიმდინარე მოდელისათვის შერჩეული გზა. როდესაც ჩვენ ვცდილობთ გავაკეთოთ პროგნოზი, გაკოტრდება თუ არა კომპანია, უჩვეულოდ დაბალი ფულადი ნაკადი წარმოადგენს ამის მაჩვენებელს, მაშინ როცა უჩვეულოდ მაღალი ფულადი ნაკადი მიუთითებს, რომ ისინი არ გაკოტრდებიან [$McKee\ and\ Lensberg$, 2002]. საშუალო მნიშვნელობები არ წარმოადგენენ ინდიკატორებს ამა თუ იმ ფორმით. გავიხსენოთ თავი 3-ის პარაგრაფ 3.5.2-დან, რომ ასეთ შემთხვევებში ჩვენ ხშირად ვიღებთ უკეთეს შედეგებს,

თუ მნიშვნელობებს დავაჯგუფებთ თითოეულ კუდში ერთად, და ამას აკეთებს $Pearson-Tukey$ მეთოდი.

ეს მეთოდი ცვლის უწყვეტი X შემთხვევითი სიდიდის დიაპაზონს სამი დისკრეტული მნიშვნელობით. მიმდინარე მეთოდში ამ მნიშვნელობებს წარმოადგენს დაბალი, საშუალო და მაღალი. X-ის ალბათური განაწილების 18,5 პროცენტილს ქვემოთ X-ის მნიშვნელობები იცვლება *დაბალი* მნიშვნელობით, 18,5 და 81,5 პროცენტილებს შორის მნიშვნელობები იცვლება *საშუალო* მნიშვნელობით, და 81,5 პროცენტიალზე მეტი მნიშვნელობები – *მაღალი* მნიშვნელობით. ამგვარად,

$$P(low) = 0{,}185$$
$$P(medium) = 0{,}63$$
$$P(high) = 0{,}815.$$

პარაგრაფ 10.2.2-დან შეგახსენებთ, რომ განხორციელებული იყო შერჩევა 7827 ჩანაწერიდან, რომელიც შეიცავდა მონაცემებს 6937 გაუკოტრებელი ფირმის და 890 გაკოტრებული ფირმის შესახებ, ნახ. 10.4 (ბ). იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ პირსონ-ტუკის მეთოდი თითოეული X უწყვეტი ცვლადისათვის ნახ. 10.3-დან, განსაზღვრული იყო x_1 და x_2 წერტილი, ისე რომ X-ის 18,5% მნიშვნელობა მოხვდეს x_1-ის ქვემოთ და 81,5%-ის მნიშვნელობა x_2-ის ქვემოთ. შემდეგ თითოეული ფირმისთვის (ჩანაწერისთვის) შერჩევისას ამ ფირმისათვის X-ს მიენიჭა შემდეგი დისკრეტული მნიშვნელობები:

low თუ X-ს მნიშვნელობა ფირმისთვის < x_1;

$medium$ თუ X-ს მნიშვნელობა ფირმისთვის მდებარეობს $[x_1, x_2]$-ში;

$high$ თუ X-ს მნიშვნელობა ფირმისთვის > x_2.

ეს პროცედურა გამოიყენება ნიმუში თითოეული ფირმისათვის CH, LM, M, R, CHN და IFR მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის. AU და IT ცვლადები უკვე იყო 0-ის და 1-ის ტოლი ორობითი ცვლადები. ცვლადი B უკვე იყო „კის" და „არას" ტოლი ორობითი ცვლადი.

შემდეგ, ნახ. 10.3-ზე გამოსახული ბაიესის ქსელისატვის პირობითი ალბათობების მნიშვნელობები შესწავლილი იყო ნიმუშებიდან. აკოტრების ნიმუში პროპორციიტ აღემატებოდა მოსახლეობის პროპორციულობას [McKee and Greenstein, 2000]. ამიტომ გაკოტრების წინა ალბათობისათვის რაიმე პროპორციის გამოყენების ნაცვლად გამოიყენებოდა 0,5. ამგვარად, თუ გაკოტრების მაჩვენებლის მონაცემთა ალბათობა მეტია, ვიდრე გაკოტრების არ წარმოდგენის მაჩვენებლის (ე.ი ალბათობათა ფარდობა >1),

გაკოტრების წინა ალბათობა მეტი იქნება 0,5-ზე, და წინააღმდეგ შემთხვევაში ის ნაკლები იქნება 0,5-ზე.

Netica-s მიერ მომზადებული შემდეგი ანგარიში გვიჩვენებს ქსელში ალბათობების განაწილებას:

B:

yes	no
0.5	0.5

AU:

zero	one	B
0.44	0.56	yes
0.75	0.25	no

CH:

low	medium	high	B
0.29	0.63	0.08	yes
0.19	0.63	0.18	no

LM:

low	medium	high	B
0.31	0.64	0.05	yes
0.15	0.63	0.22	no

M:

low	medium	high	B
0.44	0.54	0.02	yes
0.15	0.65	0.2	no

R:

low	medium	high	B
0.67	0.28	0.05	yes
0.12	0.68	0.2	no

CHN:

low	medium	high	B
0.35	0.53	0.12	yes
0.16	0.64	0.2	no

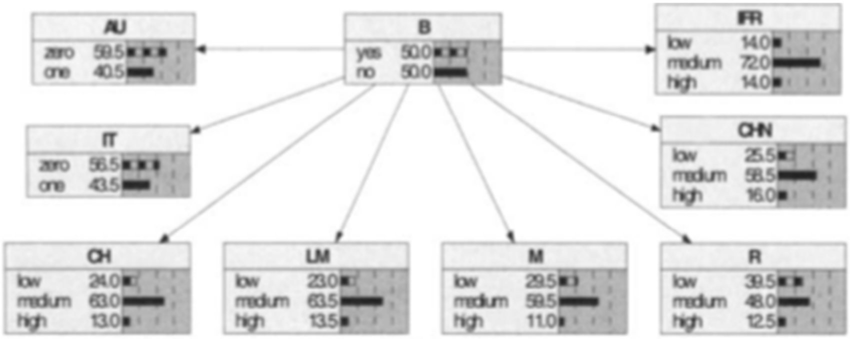
IFR:

low	medium	high	B
0.09	0.69	0.22	yes
0.19	0.75	0.06	no

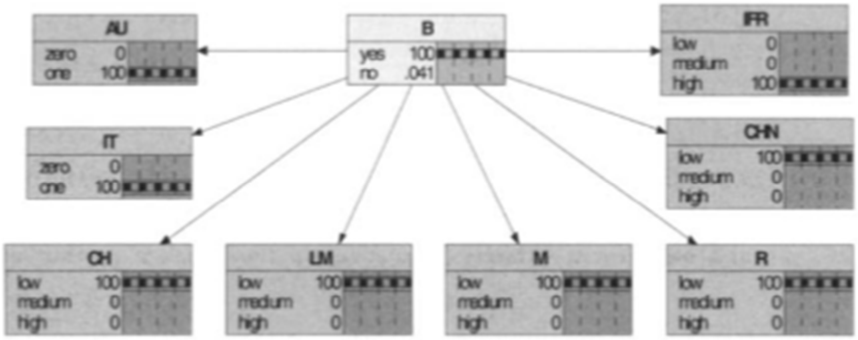
IT:

zero	one	B
0.37	0.63	yes
0.76	0.24	no

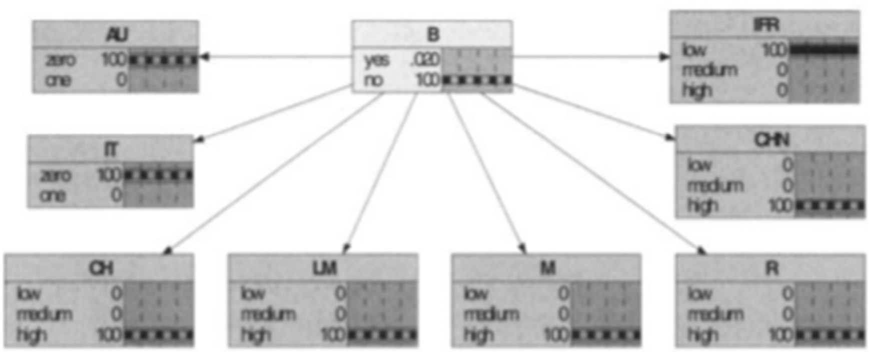
ბაიესის ქსელი, რომელიც გამოსახება Netica-ს გამოყენებით ჩნდება ნახ. 10.4(ა)-ზე. ნახ. 10.4 (ბ)-ზე ყველა პრედიქტორული ცვლადი შექმნილია მათი იმ მნიშვნელობის მიხედვით, რომელიც უფრო მიუთითებს გაკოტრებას. ნახ 10.4(გ) ყველა პრედიქტორული ცვლადი შექმნილია მათი იმ მნიშვნელობის მიხედვით, რომელიც უფრო ნაკლებად მიუთითებს გაკოტრებას. ჩვენ ვხედავთ, რომ ქსელის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია ძალიან ვიყოთ დარწმუნებული გაკოტრებაში ან მტკიცებულებაზე დაფუძნებულ გაკოტრებაში.



(a)



(b)



ნახ. 10.4 გაკოტრების ბაიესის ქსელი წარმოდგენილია (ა)-ზე. (ბ)-ზე ყველა პრედიქტორული ცვლადი შექმნილია მათი მნიშვნელობის მიხედვით, რომელიც უფრო მიუთითებს გაკოტრებას. (გ)-ზე ყველა პრედიქტორული ცვლადი შექმნილია მათი იმ მნიშვნელობის მიხედვით, რომელიც უფრო ნაკლებად მიუთითებს გაკოტრებას.

10.2 ექსპერიმენტები

შემდეგ ჩვენ აღვწერთ ექსპერიმენტებს, რომლებიც ამოწმებენ ბაიესის ქსელის მიერ გაკოტრების პროგნოზირების სიზუსტეს.

10.2.1 მეთოდი

სისტემის შესამოწმებლად გამოიყენება 10-ჯერადი ანალიზი. თავდაპირველად მთელი ნიმუში შემთხვევითობის პრინციპით დაიყო 10 ერთნაირ ქვესიმრავლედ. შემდეგ ცხრა ქვესიმრავლე შემთხვევით იქნა არჩეული სწავლებისათვის ნაკრების სახით, ხოლო

დარჩენილი ქვესიმრავლე იყო ტესტი კომპლექტი. ქსელისათვის სტანდარტული ალბათობები ამოღებული იყო სასწავლო ნაკრებიდან. შემდეგ შემაჯამებელი ქსელი გამოყენებული იყო სატესტო ნაკრებში ყველა ფირმის გაკოტრების ალბათობების განსაზღვრისათვის. თუ გაკოტრების წინა ალბათობა იყო >0,5-ზე, პროგნოზი იყო, რომ ფირმა გაკოტრდება; წინააღმდეგ შემთხვევაში პროგნოზი იყო, რომ ფირმა არ გაკოტრდება. ეს პროცესი მეორდებოდა 10-ჯერ. წინა პარაგრაფებში ნაჩვენები პირობითი ალბათობები, მიღებული იყო 10 გამოკვლევიდან 1-ში; მაგრამ ისინი, რომლებიც მიღებული იყო სხვა 9 გამოკვლევაში, დაახლოებით ერთნაირი იყო.

იგივე ანალიზი, ჩატარებული უბრალო ბაიესის ქსელის გამოყენებით, რომელიც მოიცავდა ყველა 20 ცვლად-პრედიქტორს.

ცხრილი 10.2. პროგნოზირების წარმატება 9 კვანძისათვის და 21 უბრალო ბაიესის ქსელის კვანძისათვის.

	9 კვანძიანი ქსელი		21 კვანძიანი ქსელი	
ცდა	% გაკოტრ. სწორია	% არაგაკოტრ. სწორია	% გაკოტრ. სწორია	% არაგაკოტრ. სწორია
1	79.78	82.25	74.16	80.38
2	86.52	81.24	84.27	81.82
3	78.65	82.56	80.90	83.29
4	87.64	83.14	85.39	83.86
5	74.16	83.69	73.03	83.98
6	79.78	81.53	87.64	82.40
7	85.39	77.06	89.89	78.35
8	79.78	82.25	80.90	81.24
9	79.78	82.4	78.65	81.10
10	79.78	82.4	80.90	81.39
საშ.	81.12	81.85	81.57	81.78

10.2.2 შედეგები

თავდაპირველად გაჩვენებთ ზემოთ აღწერილი ექსპერიმენტის შედეგებს. შემდეგ მას შევადარებთ იმ შედეგებს, რომლებიც მიღებულია ქსელების სხვა ვერსიებით ლოგისტიკური რეგრესიის გამოყენებით.

ძირითადი ექსპერიმენტის შედეგები

ცხრილ 10.2-ში მოცემულია 10 გამოკვლევის შედეგი და ყველა გამოკვლევისათვის საშუალო მნიშვნელობა. მაგალითად, როდესაც ჩვენ ვამბობთ, რომ «$\%\,Bkpt.Correct$»

შეადგენს 81,12-ს, მხედველობაში გვაქვს, რომ 81,12% გასაკოტრებელი ფირმა გაკოტრდა. ჩვენ ვხედავთ, რომ შედეგები საკმაოდ კარგია და 21-კვანძიან ქსელსაც გააჩნია იგივე პროგნოზირების სიზუსტე, როგორიც 9 კვანძს.

სხვა დიაპაზონის ცვლადების გამოყენებით შედარება

მედელმა გამოიყენა პირსონ-ტუკის მეთოდი უწყვეტი ცვლადის დისკრედიტიზაციისათვის, რომელიც ცვლადისთვის იძლევა მხოლოდ სამ მდგომარეობას. დიდი რაოდენობის მდგომარეობების გამოყენებისას შეიძლება უკეთესი შედეგები ყოფილიყო მიღებული. მოხდა ასევე ამ ჰიპოტეზის ტესტირება. თუ n მდგომარეობათა რიცხვია, ხოლო გაკოტრებულ ფირმებს აქვთ მნიშვნელობები განაწილების მარცხენა უკიდურეს კუდში (რასაც ადგილი აქვს M, R, CH, L და CHN-სთვის), მაშინ პროცენტილის სახით გამოიყენებოდა შემდეგი წერტილები, რომლებიც განსაზღვრავენ საზღვარს:

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \dots, \frac{n-1}{n+1}.$$

მაგალითად, თუ $n = 4$, წერტილები იქნებოდა:

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}.$$

IFR-ის შემთხვევაში გაკოტრებულ ფირმებს, როგორც წესი, მნიშვნელობა აქვთ უკიდურეს მარჯვენა კუდში. ამიტომ ამ ცვლადებისათვის გამოიყენება შემდეგი წერტილები:

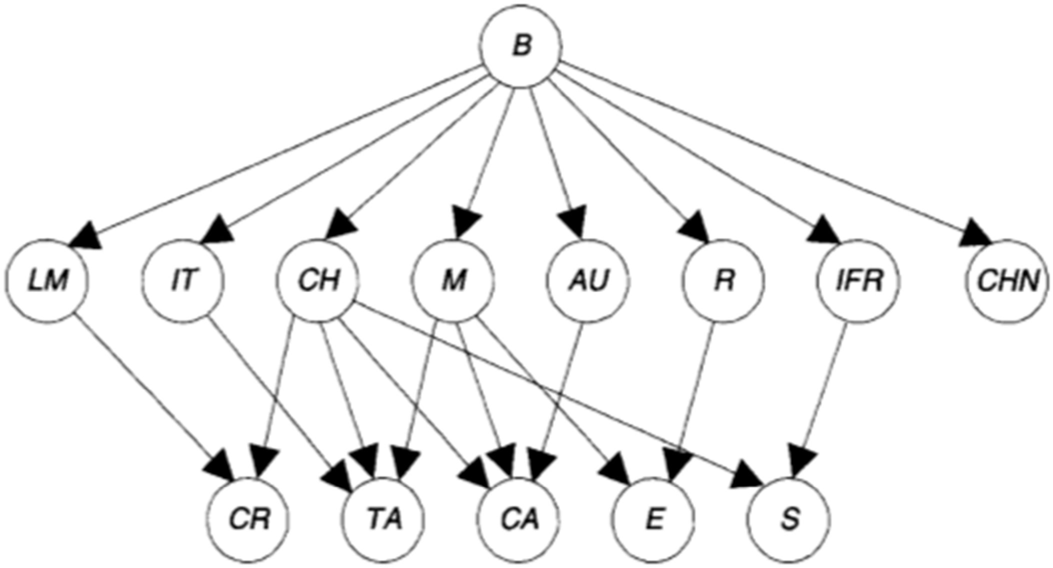
$$\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \frac{4}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}.$$

ცხრილი 10.3. მდგომარეობების რაოდენობის გავლენა პროგნოზირების სიზუსტეზე.

მდგომა-რეობის #	%გაკოტრ. სწორია	%არაგაკოტრ. სწორია
2	82.58	77.55
3	83.37	77.44
4	83.82	74.94
5	83.37	75.45
6	83.15	73.83
7	82.25	75.13
8	82.36	72.36
9	81.57	71.44
10	80.67	69.46
გაგრძელება	83.6	77.51

საშუალო შედეგები მოცემულია ცხრილში 10.3. იმ შედეგებმა რომლებმაც ვერ გაიარეს t-ტესტი, გვიჩვენა, რომ არ არსებობს მნიშვნელოვანი სხვაობა სიზუსტის მხრივ ორ მდგომარეობიანსა და სამ მდგომარეობიანსათვის. გარდა ამისა, სიზუსტე მისაღებია ასევე პირსონ-ტუკის მეთოდის გამოყენებისას. მაგრამ როდესაც მდგომარეობათა რიცხვი ოთხის ტოლია, გაკოტრების სწორი პროგნოზირებისათვის შედეგები სტატისტიკურად უმნიშვნელოა ორ და სამ მდგომარეობასთან შედარებით, მაგრამ შედეგები სწორი არგაკოტრების პროგნოზისთვის ცუდია ($p < .001$). ამის შემდეგ მდგომარეობების გაზრდასთან ერთად ისინი თანდატან უარესდება. ამ შედეგების ერთ-ერთი ინტერპრეტაცია იმაში მდგომარეობს, რომ გაკოტრებულ ფირმებს შეიძლება ჰქონდეთ ექსტრემალური მნიშვნელობა თითოეული დისტრიბუტივის კუდში, ხოლო არგაკოტრებულ ფირმას სხვა კუდში. ამგვარად, ორი მდგომარეობა საკმარისი იქნება, რომ დავაფიქსიროთ განსხვავება, ხოლო ძალიან ბევრ მდგომარობას მივყავართ ზედმეტ რეგულირებამდე.

შეიძლება უკეთესი შესრულება მიგვეღო, თუ არ მოვახდენდით ცვლადების დისკრეტიზებას საერთოდ. ეს ასევე შემოწმებული იყო ცვლადების ნორმალური განაწილების სახით წარმოდგენით. საშუალო შედეგები წარმოდგენილია ცხრილ 10.3-ის ბოლო სტრიქონში. t-ტესტ გაუვლელმა შედეგებმა გვიჩვენა, რომ სიზუსტე, როდესაც ჩვენ გაკოტრების პროგნოზირებისათვის ვიყენებთ უწყვეტ ცვლადებს, სტატისტიკურად უმნიშვნელოა იმ სიზუსტესთან შედარებით, როდესაც ჩვენ ვიყენებთ პირსონ-ტუკის მეთოდს; მაგრამ არაგაკოტრების პროგნოზირების სიზუსტე გაცილებით ცუდია ($p < 0{,}001$).



ნახ. 10.5. გაკოტრების პროგნოზირებისათვის კასკადური უბრალო ბაიესის ქსელის სტუქტურა

კასკადურ უბრალო ბაიესის ქსელთან შედარება

ბევრ ფირმას არ გააჩნია მონაცემები ერთ ან რამდენიმე შვილობილი კვანძის მიხედვით მონაცემები ნახ. 10.4 (ა)-ზე. კერძოდ, 167 8 ფირმას აქვს არასრული მნიშვნელობა IT – სთვის, 2419 ფირმას არასრული მნიშვნელობა – M-ზე, 1537 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა AU-ზე, 2331 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა R-ზე, 964 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა IFR-ზე, 5345 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა LM-ზე, 1086 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა CH-სთვის, ხოლო 1679 ფირმას - არასრული მნიშვნელობა CHN-სთვის. იმის მაგივრად, რომ შევიყვანით ინფორმაცია კვანძისათვის, ჩვენ შეგვეძლო უკეთესი შედეგები მიგვეღო თუ შევიყვანდით ამ კვნძების მნიშვნელობების შესაბამის ინფორმაციას. მაგალითად, თუ CR-ის მნიშვნელობა ალბათურადაა დამოკიდებული LM-ის მნიშვნელობაზე, ხოლო LM-ის მნიშვნელობა არ არსებობს მოცემული ფირმისათვის, მაგრამ CR-ის მნიშვნელობა არ არის, მაშინ CR-ის მნიშვნელობა გვეტყვის რაღაცას LM-ის ალბათურ მნიშვნელობაზე, რამაც თავის მხრივ, რაღაც უნდა გვითხრას B-ს ალბათურ მნიშვნელობაზე.

რედიქტორების პრედიკტორების ჩართვისათვის შემუშავებული იყო კასკადური უბრალო ბაიესის ქსელი. ასეთ ქსელში თითოეული შვილობილი კვანძი (უბრალო ბაიესის უმაღლესი დონე) წარმოადგენს მეორე დონის უბრალო ბაიესის ქსელის ფესვს. კვანძები მეორე დონის ამ ქსელში წარმოადგენენ ამ შვილისთვის პრედიქტორებს. თითოეული შვილისათვის ქსელში ნახ. 10. 4(ა)-ზე შესაბამისი პრედიკატები შესწავლილი იყო იმავე მეთოდის გამოყენებით, რომელიც გამოყენებული იყო გაკოტრებისათვის შესაბამისი პრედიკატორების შესასწავლად. შედეგად მივიღეთ კასკადური ქსელი ნახ. 10.5-ზე.

კასკადურმა უბრალო ქსელმა სამართლიანად გვაჩვენა არასაბანკო კომპანიების 81,12% გაკოტრება და 80,0% არგაკოტრება. შეგახსენებთ, რომ ანალოგიური შედეგები უბრალო ქსელისთვის შეადგენდა 81,12%-ს და 81,85%-ს. t-ტესტის შეუზღუდავმა შედეგებმა გვაჩვენა, რომ გაკოტრების პროგნოზირების სიზუსტეში განსხვავება დიდი არაა; თუმცა კასკადური ქსელი გაცილებით უარესია $(p < 0{,}05)$ არგაკოტრების პროგნოზირებისას.

ეს შედეგები მხარს უჭერს შედარებით ეკონომიური მოდელების გამოყენებას ნახ. 10.4 (ა)-ზე. მაგრამ, თუ კიდევ უფრო მეტი მონაცემი არ გააჩნია მოცემულ ფირმას, შესაძლოა, რომ კასკადურმა მოდელმა უკეთ იმუშაოს.

ლოგისტიკურ რეგრესიასთან შედარება

შეგასხენებთ თავი 2-ის პარაგრაფ 2.5.3-დან, რომ წრფივი რეგრესია ხშირად გამოიყენება უწყვეტი მიზნობრივი ცვლადების პროგნოზირებისათვის. ანალოგიური სტანდარტულ

სტატისტიკური მეთოდიკა, რომელსაც ლოგისტიკური რეგრესია ეწოდება, გამოიყენება, როდესაც მიზნობრივი ცვლადები დისრეტულს წარმოადგენენ. რამდენედაც ლოგისტიკური რეგრესია ფართოდ გამოიყენება გაკოტრების პროგნოზირების ინსტრუმენტად, ნახ. 10.4 (ა)-ზე გამოსახული უბრალო ბაიესის ქსელის მოდელის მწარმოებლობა შედარდა ამგვარ ლოგისტიკურ რეგრესიას. ლოგისტიკური რეგრესიის გამოყენება არ შეიძლება როცა არ გვაქვს მონაცემები, თუ არ ვიყენებთ არ არსებული მონაცემების მნიშვნელობების განსაზღვრისათვის მეთოდებს. ამიტომ შედარება შემოიფარგლებოდა რვავე პრედიკატორზე სრული ინფორმაციის მქონე ფირმებით. ამან შეამცირა შერჩევა 1435-მდე არა გაკოტრებულის და 414 გაკოტრებული ფირმის.

ლოგისტიკური რეგრესიით შესწავლილი იყო შემდეგი ლოგისტიკა:

$$\ln\left(\frac{B}{1-B}\right) = -4{,}755 + 0{,}933AU + 1{,}098IT - 3.165CH - 0{,}056LM -$$

$$-2{,}222R - 0{,}391CHN + 0{,}356IF - 0{,}156M.$$

ნახ. 10.4 (ა)-ზე გამოსახულ უბრალო ბაიესის ქსელს ჰქონდა საშუალო პროდიქტორული სიზუსტე 80,434% გაკოტრებისათვის და 80,00% არაგაკოტრებისათვის, ხოლო ლოგისტიკურ რეგრესიას ჰქონდა საშუალო პროგნოზირებადი სიზუსტე 79,48% გაკოტრებისათვის და 82,02% არა გაკოტრებისათვის. ეს შედეგები სტატისტიკურად უმნიშვნელო აღმოჩნდა.

შეგახსენებთ, რომ ბაიესის ქსელურ მოდელს ჰქონდა ერთნაირი პროგნოზირებადი სიზუსტე, როდესაც ვრთავდით არასრული მონაცემების მქონე ფირმებს. შესაძლოა, ეს არის ყველაზე დიდი არგუმენტი ასეთი მოდელების გამოყენების სასარგებლოდ. კერძოდ, ისინი ადვილად უმკლავდებიან არარსებულ მონაცემებს და სულ ცოტა ამ გამოკვლევაში მათ ეს გააკეთეს მწარმოებლობის გაუარესების გარეშე.

10.2.3 დისკუსია

ეკონომიური უბრალო ბაიესის ქსელური მოდელი ნახ. 10.4(ა)-ზე სრულდება ისევე კარგად, ვიდრე ყველა სხვა განხილული მოდელი. მართლაც უფრო ძლიერი მოდელი, რომელმაც მოახდინა უწყვეტი ცვლადების დისკრედიტაცია მხოლოდ ორ მდგომარეობაში, ისეთივე იყო როგორიც ნახ. 10.4 (ა)-ზეა გამოსახული. რჩება კითხვა, შეგვიძლია კი გავაუმჯობესოთ მუშაობა სხვა უფრო რთული მოდელებით. შეგახსენებთ პარგრაფი 10.1.2-დან, რომ პრაშაკ შენოიმ თქვა: „ჩვენ გვესმის რომ პრედიქტორები არ წარმოადგენენ ზუსტად პირობით დამოუკიდებლებს, გაკოტრების ცვლადის გათვალისწინებით. არსებობს კომპრომისი რთულ მოდელებსა და პარამეტრების რაოდენობას შორის, რომლებიც აუცილებლად უნდა შეფასდეს მონაცემების მიხედვით. *naYve Bayes* მოდელის უპირატესობა

იმაში მდგომარეობს, რომ პარამეტრების რაოდენობა დაყვენილია მინიმუმამდე“. შეიძლება ჩვენ მიგვეღო უფრო მაღალი მწარმოებლობა, თუ ჩვენ მოვახდენდით პრედიქტორებს შორის დამოკიდებულების მოდელირებას. გარდა ამისა, ჩვენ შევძლებდით სრულიად უარი გვათქვა უბრალო ბაიესური ქსელის მიდგომაზე და გვეცადა შეგვესწავლა ზოგადი ბაიესის ქსელი ყველა 21 ცვლადის მონაცემების მიხედვით. სხვა შესაძლო გაუმჯობესება, რომელსაც შეეძლო არ გაერთულებინა ქსელი, იქნებოდა მოსახლეობის წილის გამოყენება გაკოტრებებში, როგორც გაკოტრების წინმსწრები ალბათობა. რამდენადაც ეს ბაიესის ქსელია, ალბათობები წარმოადგენენ ჩვენს მოსაზრებებს და, როგორც ასეთი, არაა აუცილებელი რომ ისინი ერთი წყაროდან მომდინარეობდნენ.

სავარჯიშოები

პარაგრაფი 10.1

სავარჯიშო 10.1. არიან უბრალო ბაიესის ქსელში შვილები ერმანეთისაგან დამოუკიდებლები? არის თუ არა შვილების ერმანეთისაგან დამოუკიდებლობა ფესვზე დამოკიდებულებიდან გამომდინარე?

სავარჯიშო 10.2. $Netica$-ს გამოყენებით შექმენით ბაიესის ქსელი ნახ. 10,4(ა)ზე.

1. შექმენით AU დაბალი დონისთვის. შეიცვალა თუ არა ალბათობების განაწილება სხვა კვანძებისათვის?

2. შექმენით B „კი“-სთვის. ახლა შექმენით AU დაბალი დონისთვის, შეიცვალა თუ არა ალბათობების განაწილება სხვა კვანძებისათვის უფრო?

3. შეისწავლეთ თუ ფოთლების სხვადასხვა ეგზემპლარები როგორ ახდენენ გავლენას გაკოტრების კვანძების ალბათობების განაწილებაზე.

სავარჯიშო 10.3. შეცვალეთ თქვენი ქსელი, ამისთვის გამოიყენეთ საბანკო კომპანიების შერჩეული წილი როგორც გაკოტრების წინა ალბათობები. ფოთლების სხვადასხვა ეგზემპლარებისათვის შეადარეთ მომავალში გაკოტრების კვანძის ალბათობების განაწილებები ამ ქსელში ასეთივე საწყის ქსელთან.

პარაგრაფი 10.2

სავარჯიშო 10.4. მიიღეთ მონაცემები ბანკ-ბანკპოტების შესახებ და გაკოტრების შესახებ $Compustat$ და $Lexis-Nexis\ Bankruptcy\ Report$ მონაცემთა ბაზიდან. მ მონაცემებიდან სწავლობენ ბაიესის ქსელს ბაიესის ქსელის სასწავლო პაკეტის გამოყენებით, როგორიცაა $Tetrad$. შეეცადეთ მოახდინოთ მონაცემთა დისკრეტირება

ჩვეულებრივი დისტრიბუტების გამოყენებით. შეადარეთ თქვენი მოდელის პროგნოზირების შედეგები ნახ. 10.4 (ა)-ზე გამოსახული ქსელის მაჩვენებლებს.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. ო. ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნების თეორია. თსუ, 2008.
2. გ. მარი, ა. მოსიძე. ალბათობის თეორია და გამოყენებითი სტატისტიკა. თბილისი 2007.
3. გ. მარი, ა. მოსიძე. ალბათობის თეორია და გამოყენებითი სტატისტიკა. თბილისი 2007.
4. Richard E. Neapolitan, Xia Jiang, Probabilistic methods for financial and marketing informatics, Elsevier Inc. 2007
5. http://www.norsys.com/tutorials/netica/secA/tut_A1.htm#financial

რედაქტორი ნ. ქაფიანიძე

გადაეცა წარმოებას 11.04.2018. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 04.05.2018. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 16,5.

საგამომცემლო სახლი ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი'', თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent