ს. ს. ს. რ. სახალხო განათლების კომისარიატი
დაუსწრებელი პედაგოგიური ინსტიტუტი

პროფ. ნ. მუსხელიშვილი

ანალიზური გეომეტრიის კურსი

ნაწილი პირველი

თარგმანი პროფ. ა. ხარაძის

სახტექნიკური გამომცემლობა — ტფილისი 1934 — ტექნიკა და შრომა

სახელგამის 1-ლი სტამბა, პლეხან. გამზ. № 91.

მთავლ. № 207. შეკვეთ. № 969. ტირაჟი 3000.

ანალიზური გეომეტრიის კურსი

შესავალი

ანალიზური გეომეტრიის საგანს შეადგენს გეომეტრიული ნაკვთების თვისებათა შესწავლა ალრიცხვის ანუ მათემატიკური ანალიზის საშუალებით. საქმე ის არის რომ, როგორც ქვევით დავინახავთ, სხვადასხვანაირად შეიძლება მჭიდრო კავშირის დამყარება ერთის მხრივ გეომეტრიულ ნაკვთთა და მეორეს მხრივ რიცხვთა შორის ისეთნაირად, რომ ყოველს გეომეტრიულ ნაკვთს ან რომელიმე მის თვისებას შეესაბამებოდეს რიცხვთა გარკვეული სისტემა (თანწყობა) ან და გარკვეული თანაფარდობა რიცხვთა შორის.

ხსენებული ურთიერთობის დასამყარებლად შეიძლება ბევრნაირი ხერხი მოვიფიქროთ, მაგრამ მხოლოდ ზოგიერთი მათგანი პოულობს სასარგებლო გამოყენებას, როგორც მათემატიკაში ისე ბუნებისმეტყველებაში და ტექნიკაში. უმნიშვნელოვანესს ასეთ ხერხს წარმოადგენს პირველად დეკარტის[1]) მიერ შემოღებული და სისტემატიურად გამოყენებული ხერხი, რომელიც საფუძვლად დაედო ანალიზურ გეომეტრიას.

ასე თუ ისე, ამ თავითვე ჩვენთვის საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ ის, რომ ურთიერთობა გეომეტრიულსა თუ რიცხვით სახეებს შორის შესაძლებელია განხორციელებული იყოს ამა თუ იმ წესით და ამნაირად ყოველი გეომეტრიული ამოცანა შეგვიძლიან წმინდა ანალიზის ამოცანამდე დავიყვანოთ.

უკვე ზემოხსენებულიდან აშკარაა, რამდენად დიდი მნიშვნელობა უნდა ჰქონდეს ანალიზურ გეომეტრიას; მართლაც, იგი საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ გეომეტრიისათვის უდიდესი ნაწილი იმ განძეულობისა, რომელიც მათემატიკური ანალიზის და კერძოდ ალგებრის კუთვნილებას შეადგენს; კიდევ მეტიც, ძალიან ხშირად მიზანშეწონილია ანალიზის ზოგიერთი ამოცანების ამოხსნა დაუკავშიროთ გეომეტრიულ ნაკვთთა განხილვას, ასე რომ თავის მხრივ გეომეტრიაც დიდ დახმარებას უწევს ანა-

[1]) René Descartes ან Cartesius—საფრანგეთის სახელგანთქმული მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი (1596—1650).

ლიზს. მაგალითად ალგებრის მრავალი ამოცანის ამოხსნა პოულობს განსაკუთრებით თვალსაჩინო განსახიერებას გეომეტრიული [illegible] საშუალებით.

ჩვეულებრივ „ანალიზური გეომეტრიის“ სახელწოდებით იგულისხმება ამ მეცნიერების ის ნაწილი, რომელიც სარგებლობს მხოლოდ ელემენტარული ალგებრით (რა თქმა უნდა ტრიგონომეტრიის ჩაუთვლელად).

ასეთივე შინაარსით იგულისხმება ეს სახელწოდება ამ სახელმძღვანელოს სათაურში.

მთელი კურსი ორ ნაწილად იყოფა. წინამდებარე პირველ ნაწილში შეისწავლებიან ისეთი ნაკვთები, რომელნიც შედგენილნი არიან წერტილთა, წრფეთა და სიბრტყეთა მიერ. როგორც მეტად სასარგებლო დამხმარე იარაღი, აქვე გამოყენებულია ვ ე ქ ტ ო რ ი ს ცნება და ვექტორთაგან შედგენილი ნაკვთების თვისებანი; სწორედ ამით იწყება კურსის პირველი თავები. მეორე ნაწილი კი შეიცავს მეორე რიგის წირებისა და ფართეულების თვისებათა მიმოხილვას.

თავი პირველი

ვექტორები. — ბეგმილთა თეორია

I. ნაკვეთი, ღერძი, ვექტორი

1. ნაკვეთი. ნაკვეთის ცნება უკვე ელემენტარული გეომეტრიიდანაა ცნობილი: ნაკვეთი არის წრფის ნაწილი ორივე მხრიდან შემოსაზღვრული ორი წერტილით. ნაკვეთის არსებითი ელემენტი არის მისი სიგრძე.

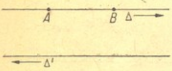
გავიხსენოთ მოკლეთ, როგორ უნდა გვესმოდეს ეს უკანასკნელი. ავილოთ რომელიმე ნებისმიერი, მაგრამ გარკვეული ნაკვეთი, როგორც სიგრძის ერთეული და გავზომოთ აღებული ნაკვეთი. ამ ნაკვეთის სიგრძე ეწოდება იმ რიცხვს, რომელიც გვიჩვენებს თუ რამდენჯერ თავსდება ერთეული აღებულ ნაკვეთში. რასაკვირველია შეიძლება მოხდეს, რომ ნაკვეთი-ერთეული მთელ რიცხვჯერ არ თავსდება აღებულ ნაკვეთში; მაშინ მოცემული ნაკვეთის სიგრძე მთელი რიცხვი კი არ იქნება, არამედ ნაწილადი ან ირრაციონალურიც; ეს უკანასკნელი შემთხვევა არის კიდეც ყველაზე უფრო ზოგადი.

ყველა ეს კარგად ცნობილია ელემენტარული მათემატიკიდან. ჩვენთვის საჭიროა მხოლოდ დავიხსომოთ, რომ აღებული ნაკვეთის სიგრძე შემდეგში ყველგან უნდა გვესმოდეს, როგორც დადებითი რიცხვი, რომელსაც ვღებულობთ ერთეული-ნაკვეთით გაზომვის საშუალებით.

2. ღერძი. ანალიზურ გეომეტრიაში გარდა წრფეწირის ცნებისა ძირითადი მნიშვნელობა აქვს ეგრედ წოდებულს ღერძის ცნებას, რომელიც პირველთან მეტად დაახლოვებული ცნებაა. განვიხილოთ რომელიმე წრფე AB წერტილი, რომელიც განუწყვეტლივ ძრაობს ამ წრფეზე შესაძლებე[illegible] აღწერდეს ამ წრფეს ორი მოპირდაპირე მიმართულებით: A-დან B-საკენ ან პირიქით B-დან A-საკენ. ავარჩიოთ რომელიმე ამ მიმართულებათაგანი და უწოდოთ მას დადებითი მიმართულება; მოპირდაპირე მიმართულებას უწოდოთ უარყოფითი. ის წრფე, რომელზეაც არჩეულია გარკვეული მიმართულება დადები-

თად მიღებული იწოდება ღერძად. დადებით მიმართულებას ეწოდება აგრეთვე გეზი. ღერძი ჩვეულებრივ გამოისახება წრფის საშუალებით, რომელზეაც ისარით აღნიშნულია გეზი, ანუ დადებითი მიმართულება; მაგალითად, Δ-ღერძი დადებითად მიმართულია ანუ მოგეზულია A-დან B-საკენ (იხ. ნახ. 1).

ორი ღერძის შესახებ ამბობენ, რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე გეზი, თუ ისინი არამც თუ პარალელური არიან, არამედ ერთნაირი დადებითი მიმართულება აქვთ; იმ შემთხვევაში, როცა ორი ღერძი პარალელურია, მაგრამ მათი დადებითი მიმართულება სხვადასხვაა, ამბობენ, რომ ეს ღერძები არიან მოპირდაპირედ მოგეზული. მაგალითად Δ და, Δ'-ღერძები სწორედ ასეთი არიან (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1.

3. ვექტორები. ვექტორის ცნება იგივე დამოკიდებულებაში იმყოფება ნაკვეთის ცნებასთან, როგორც ღერძის ცნება წრფესთან.

ვექტორი ეწოდება წრფის ნაკვეთს, რომელსაც მინიჭებული აქვს გარკვეული დადებითი მიმართულება, ანუ გეზი. ნახაზზე ვექტორი გამოისახება როგორც ნაკვეთი, რომელზეაც ისარით აღნიშნულია გეზი. ვექტორის ერთერთი ბოლო წერტილი იწოდება ვექტორის სათავედ, ხოლო მეორე ბოლოდ; ვექტორის დადებითი მიმართულება სათავიდან ბოლოსაკენ მიიმართება. ვექტორის სათავეს უწოდებენ აგრეთვე ვექტორის მოდების წერტილს. ვექტორს ჩვენ აღვნიშნავთ ასეთნაირად: $\overline{AB}$, სადაც პირველ ადგილზე დგას სათავის გამომსახველი ასო, ხოლო მეორეზე ის ასო, რომელიც ბოლოს შეეფერება. ხაზი ზევიდან აღნიშნავს, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ვექტორთან და არა უბრალო ნაკვეთთან. ჩვენ ხშირად ვექტორს აგრეთვე ერთი ასოთი აღვნიშნავთ ხაზით ზევიდან, როგორც მაგალითად: $\overline{P}$.

$\overline{AB}$ ან $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძისათვის ჩვენ ვიხმართ აღნიშვნას $|AB|$ ან $|P|$.

ვექტორის ცნების გამოყენება მეტად ხელსაყრელია, როგორც თვით მათემატიკაში, ისე ფიზიკის და მექანიკის სხვადასხვა დარგებში.

მრავალი ფიზიკური სიდიდის წარმოდგენა შეიძლება ვექტორის საშუალებით და ხშირად ასეთი წარმოდგენა ხელს უწყობს ფორმულების და საერთო დასკვნების განზოგადოებას და გამარტივებას. სახელდობრ, ყოველი ფიზიკური სიდიდე, რომელსაც გარდა გარკვეული რიცხვითი

მნიშვნელობისა აქვს გარკვეული გეზიც, შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთი ვე-ქტორით, რომლის სიგრძე (რიცხობრივ) ტოლია განსახილავი სიდიდის რი-ცხვითი მნიშვნელობისა, და გეზიც ისეთივე აქვს როგორიც აღებულ სიდიდეს.

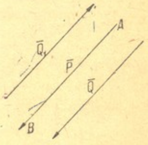
ვექტორით გამოსახული ფიზიკური სიდიდის მაგალითებად შეგვიძ-ლიან მოვიყვანოთ ძალა, სიჩქარე (აღებული წერტილის), აჩქარება და სხვა. ისეთი სიდიდენი რომელთაც ვექტორით გამოსახვა შეეფერებათ ვ ე ქ ტ ო-რ უ ლ ი ს ი დ ი დ ე ე ბ ი ეწოდებათ.

ხშირად ვექტორული სიდიდის და მისი გამომსახველი ვექტორის გაიგივება ხდება; მაგალითად, ამბობენ, რომ ძალა (ან სიჩქარე) არის ვექტორი.

უნდა შევნიშნოთ კიდევ, რომ ჩვენ მიერ მოცემული განმარტება ვექტო-რის, როგორც გეზით აღჭურვილი ნაკვეთის, გარკვეული თვალსაზრისით, მე-ტად ვიწროა. შეიძლება უფრო ზოგადი, განყენებული განმარტება; ამ თვალ-საზრისით ნაკვეთი აღჭურვილი გეზით, უკვე ვექტორი კი არ იქნება, არამედ ვექტორული სიდიდის ერთერთი სახე.

ვექტორულ სიდიდეს უპირისპირებენ ო დ ე ნ უ რ (ანუ სკალარულ) სიდიდეს, რომელსაც არ აქვს მიმართულება და მთლიანად დახასიათდება მისი ზომის გამომსახველი რიცხვით და ნიშნით; მაგალითად, ნაკვეთის სი-გრძე, ფართობი, ტემპერატურა, მასსა და სხვ. ყველა ესენი ოდენური სი-დიდეებია. შემდეგში ჩვენ უწოდებთ ს კ ა ლ ა რ ს ისეთ რიცხვს (დადებითს ან უარყოფითს), რომელიც ახასიათებს აღებულ ოდენურ სიდიდეს.

4. ვექტორთა გეომეტრიული ტოლობა. ორ ვექტორს $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ეწოდებათ გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ ა დ თ ა ნ ა ტ ო ლ ი ან უბრალოდ თ ა ნ ა ტ ო-ლ ი, თ უ მ ა თ ა ქ ვ თ ე რ თ ი დ ა ი გ ი ვ ე ს ი გ რ ძ ე დ ა გ ე ზ ი. ეს გარემოება ასე ჩაი-წერება: $\overline{P}=\overline{Q}$. საჭიროა გვახსოვდეს, რომ ვე-ქტორთა ს ი გ რ ძ ე ე ბ ი ს თ ა ნ ა ტ ო ლ ო ბ ა კიდევ ა რ ნ ი შ ნ ა ვ ს მ ა თ გ ე ო მ ე ტ რ ი უ ლ თ ა ნ ა ტ ო ლ ო ბ ა ს.



ნახ. 2.

თუ $\overline{P}$ და $\overline{Q}$-ვექტორებს ერთი და იგივე სიგრძე აქვთ, ხოლო მოპირდაპირე გეზი, მაშინ ასეთ ვექტორებს უ რ თ ი ე რ თ მ ო პ ი რ დ ა პ ი-რ ე ეწოდებათ. ამას ასე გამოსახავენ: $\overline{P}=-\overline{Q}$. მაგალითად: $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვე-ვექტორები (იხ. ნახ. 2) გეომეტრიულად თანატოლი არიან, ხოლო $\overline{P}$ და $\overline{Q}_1$ ურთიერთ მოპირდაპირე იქნებიან.

თუ ვექტორის სიგრძე ნულია, მაშინ ამბობენ, რომ ეს ვექტორი ნ უ ლ ი ს ტ ო ლ ი ა. ასეთი ვექტორის მიმართულება განუზღვრელია.

5. ვექტორები: თავისუფალი, სრიალა და შებმული. შემდეგში განსახილავ საკითხთა უმეტესი ნაწილისათვის არსებითი მნიშვნელობა აქვთ ვექტორის მხოლოდ სიგრძეს და გეზს; რაც შეეხება სათავის მდებარეობას მას ყურადღება არ ექცევა. ამიტომ შემდეგში (თუ საწინააღმდეგო განსაკუთრებით აღნიშნული არაა) ჩვენ იგივურად ჩავთვლით ისეთ ვექტორებს, რომელთაც ერთი და იგივე სიგრძე და გეზი აქვთ, სათავის მდებარეობის განურჩევლად. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ იგივურად (ანუ ტოლფასად) ჩავთვლით ისეთ ვექტორებს, რომელნიც გეომეტრიულად თანატოლი არიან.

მაგრამ უნდა შევნიშნოთ, რომ თეორიული და გამოყენებითი მათემატიკის მრავალ საკითხში საჭირო ხდება ისეთი ვექტორების განხილვაც, რომელთა სათავის მდებარეობას არსებითი მნიშვნელობა აქვს. ამ უკანასკნელთაგან განსასხვავებლად ის ვექტორები, რომელიც ჩვენ ზევით დავახასიათეთ (ესე იგი ის, რომელთა სათავის მდებარეობას მნიშვნელობა არ აქვს) იწოდებიან როგორც თავისუფალი ვექტორები.

არათავისუფალ ვექტორთა შორის მათემატიკაში, მექანიკაში და ფიზიკაში განიხილებიან სრიალა და შებმული ვექტორები.

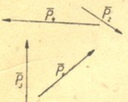
სრიალა ეწოდებათ ისეთ ვექტორს, რომელნიც ითვლებიან ტოლფასად თუ ისინი არამც თუ გეომეტრიულად თანატოლი არიან, არამედ ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარეობენ. სრიალა გეზრის ერთერთ მაგალითად შეიძლება მოვიყვანოთ მყარ ტანზე მოდებული ძალა. მართლაც, მექანიკიდან ცნობილია, რომ ორი ძალა, გეომეტრიულად თანატოლი და ერთსა და იმავე წრფეზე მდებარე არიან ტოლფასი იმ გაგებით, რომ ერთნაირად მოქმედებენ მყარ ტანზე.

შებმული ვექტორები არიან ისეთნი, რომელნიც ტოლფასად ჩაითვლებიან, თუ ისინი არამც თუ გეომეტრიულად თანატოლი არიან, არამედ ერთი და იგივე სათავე აქვთ. მაგალითად, ძალა მოდებული რაიმე არა მყარი (ვთქვათ, დრეკადი) ტანის რომელიმე წერტილზე.

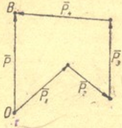
II. გეომეტრიული ჯამი. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი. აღებული მიმართულების პარალელური ვექტორები

შემდეგში ჩვენ მოგვიხდება რამოდენიმე უმარტივესი ოპერაციის შესრულება ვექტორებზე, რომელნიც მსგავსნი არიან ალგებრული შეკრების და გამრავლების მოქმედებისა. ამა თუ იმ ვექტორული ოპერაციის შემოღების გამართლებას ვპოულობთ იმ სარგებლობაში, რომელიც მოაქვს მათ გამოყენებას. ამ სახელმძღვანელოში ჩვენ განვიხილავთ უმნიშვნელოვანესს მათ შორის და დავიწყებთ უმარტივესიდან.

6. გეომეტრიული ჯამი. ვთქვათ მოცემულია რამდენიმე ვექტორი: $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_{n-1}, \overline{P}_n$, როგორმე მდებარე სივრცეში (ნახ. 3a; სიმარტივისათვის ნახაზზე წარმოდგენილია შემთხვევა, როდესაც 4 ვექტორია მოცემული, ესე იგი $n=4$).



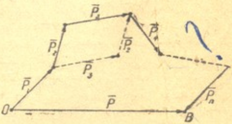
ნახ. 3a.



ნახ. 3b.

ავიღოთ სივრცეში სრულიად ნებისმიერი O წერტილი და ამ წერტილიდან, როგორც სათავიდან, ვექტორი გავავლოთ, გეომეტრიულად თანტოლი $\overline{P}_1$-ვექტორისა (ნახ. 3b). შემდეგ ავაგოთ ვექტორი $\overline{P}_2$-ის თანატოლი ისე, რომ მისი სათავე უკვე გავლებული ვექტორის ბოლოში მოთავსდეს; ეხლა ავაგოთ $\overline{P}_3$-ის თანატოლი ვექტორი, რომლის სათავე წინამავალი ვექტორის ბოლოში მოთავსდეს და ასე შემდეგ ყველა მოცემული ვექტორებისათვის. ამნაირად მივიღებთ ტეხილს, შედგენილს აღებულ ვექტორთა თანატოლ ვექტორებისაგან ისეთნაირად, რომ ყოველი წინამავალი ვექტორის ბოლოში ემთხვევა მიმდევარი ვექტორის სათავე.

ამ ტეხილს (საზოგადოდ არაჩაკეტილს) ეწოდება ვექტორთა მრავალკუთხედი.



ნახ. 4.

ვექტორი $\overline{P} = \overline{OB}$, რომელსაც სათავედ აქვს პირველი ვექტორის სათავე O, ხოლო ბოლოდ უკანასკნელი ვექტორის ბოლო B, არის მოცემული მრავალკუთხედის შემკვრელი ვექტორი.

ეს შემკვრელი ვექტორი ან ყოველი სხვა, გეომეტრიულად მისი თანატოლი, იწოდება აღებულ ვექტორთა გეომეტრიულ ჯამად ან უბრალოდ ჯამად, რაც შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\overline{OB} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_{n-1} + \overline{P}_n.$$

გეომეტრიული ჯამის შედგენის დროს, ჩვენ ავიღეთ შესაკრები ვექტორები გარკვეული მიმდევრობით, მაგრამ ადვილი გასაგებია, რომ გეომეტრიული ჯამი დამოუკიდებელია შესაკრებთა რიგი-

საგან.[1]) მართლაც, დავამტკიცოთ ჯერჯერობით, რომ გეომეტრიული ჯამი არ იცვლება რომელიმე ორი თანამიმდევარი შესაკრების გადანაცვლებით, ესე იგი, მაგალითად;

$$\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\ .\ .\ .\ +\overline{P}_n=\overline{P}_1+\overline{P}_3+\overline{P}_2+\ .\ .\ .\ +\overline{P}_n;$$

ეს აშკარგად ჩანს 4 ნახაზზე, რომელზეაც თავიდანვე აღებულია ვექტორთა მრავალკუთხედი იმ მიმდევრობით, როგორც ეს უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა მხარეზეა წარმოდგენილი, შემდეგ კი პუნქტირით აღნიშნულია $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$-ის გარდანაცვლებით მიღებული მიმდევრობა; ცხადია, რომ $\overline{P}_4$ ვექტორის სათავე დარჩება ძველ ადგილზე და ამგვარად ყველა დანარჩენი ვექტორები არ შეიცვლიან თავის მდებარეობას; ამიტომ მათი ჯამი $\overline{OB}$ დარჩება უცვლელი.

ეხლა უკვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ჯამი არ შეიცვლება შესაკრებთა ნებისმიერი გარდანაცვლებით. მართლაც, ყოველი გარდანაცვლება შეგვიძლიან განვიხილოთ როგორც შედეგი რამოდენიმე ორი მეზობელი შესაკრების თანამიმდევარი გარდანაცვლებით, საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს ჩვენი წინადადების სამართლიანობა.

აღვნიშნოთ გეომეტრიული ჯამის კიდევ ერთი თვისება, რომელიც მსგავსია ალგებრული ჯამის თვისებისა:

გეომეტრიული შეკრების შესრულება შეიძლება შესაკრებთა ნებისმიერ ჯგუფებად შეერთებით[2]). მაგალითად, გეომეტრიული ჯამი:

$$(1)\qquad \overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3+\ .\ .\ .\ +\overline{P}_n$$

შეგვიძლიან მივიღოთ ისეთნაირად, რომ შევადგენთ გეომეტრიულ ჯამს: $\overline{P}_1+\overline{P}_2+\overline{P}_3$ და მიღებულ ვექტორს მიუმატებთ (1) ჯამის დანარჩენ შესაკრებს. ამ უბრალო დებულების დამტკიცებას ჩვენ მივანდობთ თვით მკითხველს.

სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ გეომეტრიული ჯამი ისეთი ვექტორების $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2,\ldots,\overline{P}_n$ რომელთაც ერთი და იგივე გეზი აქვთ და დაამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში გეომეტრიული ჯამის სიგრძე ტოლია შესაკრებთა სიგრძეების ჯამისა.

დაამტკიცეთ, რომ ყველა სხვა შემთხვევაში გეომეტრიული ჯამის სიგრძე ნაკლებია ვიდრე შესაკრებთა სიგრძეების ჯამი.

---

[1]) ამ თვისებას კომუტატივობის თვისება ეწოდება.

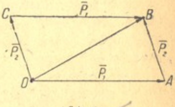
[2]) ეს არის ასოციატივობის თვისება.

2. ააგეთ გეომეტრიული ჯამი ორი ურთიერთ მოპირდაპირე ვექტორის და დაამტკიცეთ, რომ მისი სიგრძე ტოლია შესაკრებთა სიგრძეების სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობისა, ხოლო გეზი იგივე ექნება, რაც უდიდეს (სიგრძით) შესაკრებს.

3. რა თავისებურება აქვს იმ ვექტორთა მრავალკუთხედს, რომლის გეომეტრიული ჯამი ნულის ტოლია?

7. კერძო შემთხვევები. თუ შესაკრებთა რიცხვი ორის ტოლია, მაშინ, როგორც უკვე აღნიშნული იყო, და როგორც ეს ჩანს 5 ნახაზიდან, $(\overline{P}_1+\overline{P}_2)$ ჯამის შედგენის დროს იგივე $\overline{OB}$-ვექტორს მივიღებთ რაც $(\overline{P}_2+\overline{P}_1)$ ჯამისათვის, ასე რომ $\overline{OB}=\overline{P}_1+\overline{P}_2=\overline{P}_2+\overline{P}_1$.

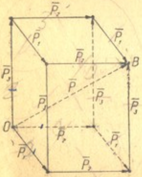
5 ნახაზი გვიჩვენებს, რომ ორი ვექტორის ჯამი არის იმ პარალელოგრამის დიაგონალი, რომელიც აგებულია $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორებზე ისეთნაირად, რომ ამ უკანასკნელთა სათავე ერთი და იგივეა; ამასთანავე, დიაგონალს უნდა მივცეთ გეზი საერთო სათავიდან მოპირდაპირე წვეროსაკენ.



ნახ. 5.

ეს არის, ეგრეწოდებული, ვექტორთა პარალელოგრამის წესი.

წინა პარაგრაფის თანახმად ცხადია, რომ ყოველი გეომეტრიული ჯამი შეგვიძლიან შემდეგნაირად შევადგინოთ: შევკრიბოთ რომელიმე ორი შესაკრები ეხლახან აღნიშნული წესით, მიღებულ შედეგს ამავე წესით მიუმატოთ შემდეგი შესაკრები და ასე შემდეგ.



ნახ. 6.

განვიხილოთ ეხლა სამი შესაკრების შემთხვევა $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$. შეკრება შეიძლება ექვსი[1] სხვადასხვა მიმდევრობით; $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3)$, $(\overline{P}_1, \overline{P}_3, \overline{P}_2)$, $(\overline{P}_2, \overline{P}_1, \overline{P}_3)$, $(\overline{P}_2, \overline{P}_3, \overline{P}_1)$, $(\overline{P}_3, \overline{P}_1, \overline{P}_2)$, $(\overline{P}_3, \overline{P}_2, \overline{P}_1)$, იხ. ნახ. 6.

ყოველი ამ მიმდევრობათაგანი იძლევა, როგორც ეს მოსალოდნელია, ერთსადაიმავე $\overline{OB}$ ჯამს.

ნახაზის თანახმად ცხადია, სამი ვექტორის გეომეტრიული ჯამი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც იმ პარალელეპიპედის დიაგონალი, რომელიც აგებულია $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორებზე ისეთნაირად, რომ ამ უკანასკნელთ ერთი და იგივე სათავე ქონდეთ; დიაგონალს უნდა მივცეთ ის გეზი, რომელიც მიმართულია საერთო სათავიდან მოპირდაპირე წვეროსაკენ.

[1]) სამი ელემენტისაგან გარდანაცვლებათა რიცხვი იქნება 1 . 2 . 3=6.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ და კუთხე ϑ მათ შორის[1]. იპოვეთ ამ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის სიგრძე $|\overline{R}|$ და აგრეთვე, ის α და β კუთხეები, რომელთაც ეს $\overline{R}$ ვექტორი შეადგენს $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებთან.

პას. $|R| = +\sqrt{|P|^2 + |Q|^2 + 2\,|P|\,|Q| \cos\vartheta}$;

რაც შეეხება კუთხეებს, ესენი შეიძლება ვიპოვოთ შემდეგი ტოლობებიდან: $\frac{\sin\alpha}{|Q|} = \frac{\sin\beta}{|P|} = \frac{\sin\vartheta}{|R|}$. საკმარისია ცხრილებით გამოვითვალოთ კუთხე α შემდეგი ტოლობის საშუალებით: $\sin\alpha = \frac{|Q|}{|R|}\sin\vartheta$, მაშინ β მოიპოვება შემდეგი ტოლობიდან $\alpha + \beta = \vartheta$.

2. დაამტკიცეთ $|R|$-ის გამოსახულების მიხედვით (იხ. მაგ. 1), რომ ϑ კუთხის ცვლილების დროს, თუ $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების სიგრძეები უცვლელია, მაშინ გეომეტრიული ჯამის სიგრძე იცვლება $|P| - |Q|$ და $|P| + |Q|$ საზღვრებში (ჩვენ ვგულისხმობთ გარკვეულობისათვის, რომ $|P| \geqq |Q|$).

ϑ-ს რომელ მნიშვნელობათათვის მიაღწევს გეომეტრიული ჯამის სიგრძე უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას?

გამოიყვანეთ იგივე შედეგები ნახაზის უშუალო განხილვით.

3. სამი ვექტორი $\overline{P}$, $\overline{Q}$ და $\overline{R}$ მოთავსებულია ერთსა და იმავე სიბრტყეში; მოცემულია მათი სიგრძეები: $|P| = 2$; $|Q| = |R| = 1$; გარდა ამისა ცნობილია, რომ $\overline{Q}$ და $\overline{R}$ ვექტორები $\overline{P}$ ვექტორთან შეადგენენ კუთხეს 60^0-ს. იპოვეთ α კუთხე $\overline{Q}$ და $\overline{R}$ ვექტორების შორის და აგრეთვე $\overline{P} + \overline{Q} + \overline{R} = \overline{S}$ ჯამის სიგრძე.

პას. $\alpha = 0$ ან 120^0; შესაბამისად ამისა $|S| = 2\sqrt{3}$ ან $|S| = 3$.

4. აღებული ვექტორის წარმოდგენა, როგორც რამოდენიმე შესაკრების ჯამის (ანუ ვექტორის დაშლა ჯამად) — ეს საკითხი განუზღვრელია, ესე იგი მას უამრავი ამოხსნა აქვს.

თუ დავკმაყოფილდებით ისეთი ვექტორებით, რომელნიც ყველა ერთსა და იმავე სიბრტყეში იმყოფებიან, დაამტკიცეთ (უბრალო აგებით), რომ საკითხი რომელიმე $\overline{R}$ ვექტორის ორ შესაკრების ჯამად დაშლის შესახებ განსაზღვრული ხდება თუ დამატებით მოცემულია ან:

a. მიმართულებანი, რომელთა პარალელური იქნებიან შესაკრები ვექტორები (ერთი ამონახსნი);

ან *b*. მიმართულება და სიგრძე ერთერთი შესაკრების (ერთი ამონახსნი);

ან *c*. მიმართულება, რომლის პარალელურია ერთერთი შესაკრები და სიგრძე მეორის (ორი, ერთი ან არცერთი ამონახსნი);

---

[1]) კუთხე ორ ვექტორს შორის ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც ქმნიან ამ ვექტორთა გეზები და რომლის მნიშვნელობა იმყოფება 0^0 და 180^0-ს შორის. თუ ვექტორთა სათავე ერთი და იგივე არ არის, მაშინ კუთხის გასაზომად საჭიროა გეზების შეუცვლელად ისე გადავიტანოთ ვექტორები, რომ მათ საერთო სათავე ქონდეთ.

ან d. შესაკრებთა სიგრძეები (ორი, ერთი ან არცერთი ამონახსნი).

დაამტკიცეთ, რომ ყოველი აქ აღნიშნული შემთხვევა დაიყვანება სამკუთხედის ამოხსნის ერთერთ ძირითად შემთხვევაზე.

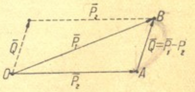
5. სამი ვექტორი $\overline{P}$ $\overline{Q}$ და $\overline{R}$ წყვილ-წყვილად ურთიერთ პერპენდიკულარი არიან და მათი სიგრძეები შესაბამისად ტოლნი არიან 1, 2 და 3-ისა. იპოვეთ ამ ვექტორთა გეომეტრიული $\overline{S}$ — ჯამის სიგრძე და ის კუთხეები α, β, γ, რომელთაც ეს ჯამი შეადგენს აღებულ ვექტორებთან.

პას. $|S|=\sqrt{14}$; $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$; $\cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

8. გეომეტრიული სხვაობა. ორი $\overline{P}_1$ $\overline{P}_2$ ვექტორის გეომეტრიული სხვაობა ან უბრალოდ სხვაობა ეწოდება ისეთ $\overline{Q}$ ვექტორს რომელიც შეკრებილი $\overline{P}_2$-თან გვაძლევს $\overline{P}_1$-ს, ესე იგი $\overline{Q}$ არის ის ვექტორი, რომელიც შემდეგ პირობას აკმაყოფილებს: $\overline{P}_1=\overline{P}_2+\overline{Q}$ ამ გარემოებას ასე აღნიშნავენ: $\overline{Q}=\overline{P}_1-\overline{P}_2$.

განმარტების თანახმად აშკარაა, რომ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების გეომეტრიული სხვაობის ასაგებად საკმარისია გადავიტანოთ[1] ეს ვექტორები ისე, რომ მათ საერთო სათავე ქონდეთ და შემდეგ გავავლოთ ვექტორი $\overline{AB}$ ~~სამცირის~~ ბოლოდან ~~მამცირის~~ ბოლოსაკენ; ეს ვექტორი იქნება სწორედ საძიებელი სხვაობა (ნახ. 7).

ცხადია აგრეთვე, რომ, გეომეტრიული სხვაობა $\overline{P}_1-\overline{P}_2$ შეიძლება მივიღოთ, თუ გეომეტრიულად შევკრებთ ვექტორებს $\overline{P}_1$ და $(-\overline{P}_2)$, ესე იგი, $\overline{Q}=\overline{P}_1-\overline{P}_2=\overline{P}_1+(-\overline{P}_2)$. გავიხსენოთ, რომ $(-\overline{P}_2)$ აღნიშნავს ვექტორს $\overline{P}_2$ ვექტორის მოპირდაპირეს (იხ. ნახ. 7, პუნქტირი).



ნახ. 7.

მაგალითი. იპოვეთ $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორების გეომეტრიული სხვაობის სიგრძე, თუ $|P|=3$, $|Q|=5$ და კუთხე $\overline{P}$ და $\overline{Q}$-ს შორის არის 120^0.

პას. $|R|=7$.

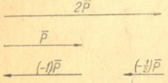
9. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი. ვთქვათ $\overline{P}$ არის რომელიმე ვექტორი და m — რომელიმე დადებითი ან უარყოფითი რიცხვი (სკალარი).

$\overline{P}$ ვექტორისა და m რიცხვის ნამრავლი $m\overline{P}$ ეწოდება ვექტორს, რომელსაც სიგრძედ აქვს $|m|$ $|\overline{P}|$, ხოლო გეზი

[1]) ვექტორის გადატანა ნიშნავს გადატანას გეზის შეუცვლელად.

იგივე რაც $\overline{P}$-ს, თუ $m > 0$ და მოპირდაპირე $\overline{P}$-სი, თუ $m < 0$.

ასე რომ ვექტორის გამრავლება 2-ზე ნიშნავს მისი სიგრძის გაორკეცებას გეზის შეუცვლელად; ვექტორის გამრავლება (-3)-ზე ნიშნავს სიგრძის გასამკეცებას და მოპირდაპირე გეზის მინიჭებას (იხ. ნახ. 8, სადაც გამოსახული არიან შემთხვევები $m = +2$; $m = -1$; $m = -\frac{1}{2}$).



ნახ. 8

აშკარაა, სხვათა შორის, რომ, თუ m მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ $m\overline{P} = \overline{P} + \overline{P} + \ldots + \overline{P}$ (m შესაკრებია). ადვილი შესამოწმებელია, აგრეთვე, განსახილავი ნამრავლის შემდეგი მარტივი თვისებების სამართლიანობა:

$$(1) \qquad (-1)\overline{P} = -\overline{P},$$

$$(2) \qquad m\,(n\overline{P}) = mn\,.\,\overline{P},$$

სადაც m და n ნებისმიერი რიცხვებია; მაგალითად, $3\,(-2\,\overline{P}) = -6\,\overline{P}$ (შეადგინეთ ნახაზი).

ნამრავლი $\overline{P}$ ვექტორისა და $\frac{1}{m}$ რიცხვისა აღინიშნება აგრეთვე $\frac{\overline{P}}{m}$-ით, ასე რომ განმარტების ძალით:

$$(3) \qquad \frac{\overline{P}}{m} = \frac{1}{m}\,\overline{P}.$$

10. ნამრავლი გეომეტრიული ჯამისა და რიცხვისა. დავამტკიცოთ ეხლა შემდეგი მარტივი დებულება.

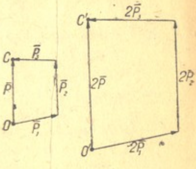
იმისათვის, რომ გეომეტრიული ჯამი გავამრავლოთ აღებულ რიცხვზე, საკმარისია ამ რიცხვზე გავამრავლოთ ყოველი შესაკრები ვექტორი და ყველა მიღებული შედეგი შევკრიბოთ (გეომეტრიულად), ესე იგი:

$$m\,.\,(\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n) = m\overline{P}_1 + m\,\overline{P}_2 + \ldots\, m\,\overline{P}_n.$$

მართლაც, ავიღოთ აღებულ ვექტორთა მრავალკუთხედი და გავიყვანოთ მისი შემკვრელი $\overline{OC} = \overline{P} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n$. (იხ. ნახ. 9, სადაც სიმარტივისათვის აღებულია სამი შესაკრები), შემდეგ ავიღოთ $m\overline{P}_1$,

$m\overline{P}_2, \ldots, m\overline{P}_n$ ვექტორთა მრავალკუთხედი (იხ. ნახ. 9. სადაც სიმარტივისთვის $m = 2$); ვთქვათ $\overline{O'C'}$ არის ამ მრავალკუთხედის შემკვრელი.

რადგანაც მეორე მრავალკუთხედის გვერდები პროპორციულია პირველის გვერდებისა და პარალელურია მათი (აქვთ იგივე [illegible] და მოპირდაპირე, თუ $m < 0$), ამიტომ ეს ორი მრავალკუთხედი მსგავსია და მსგავსად მდებარე. ცხადია, მაშ, რომ ამ მრავალკუთხედების შემკვრელნი $\overline{OC}$ და $\overline{O'C'}$ პარალელური არიან (აქვთ ერთი და იგივე გეზი, თუ $m > 0$ და მოპირდაპირე, თუ $m < 0$) და მათი სიგრძეების ფარდობა ტოლია მრავალკუთხედთა შესაბამ გვერდთა სიგრძეების ფარდობისა. ეს კი ნიშნავს, რომ: $\overline{O'C'} = m\overline{OC} = m\overline{P}$.



ნახ. 9.

მაგრამ $\overline{O'C'}$ განმარტების თანახმად, არის $m\overline{P}_1 + m\overline{P}_2 + \ldots + m\overline{P}_n$; ჩვენი წინადადება ამგვარად დამტკიცებულია.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{OA}$ და $\overline{OB}$ საერთო სათავით O. ააგეთ (პარალელოგრამის წესით) ვექტორი $\overline{OC} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{OB}$ იმავე O სათავით და უშუალოთ შეამოწმეთ, რომ $\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$. დაამტკიცეთ, რომ C წერტილი ყოფს AB ნაკვეთს შუაზე.

2. სიმძიმის ცენტრი.—ვთქვათ მოცემულია რამოდენიმე ნივთიერი წერტილი (ე. ი. წერტილები, რომელთაც გარკვეული მასები მიეწერებათ). აღვნიშნოთ ესენი $M_1, M_2, \ldots, M_n$-ით და მათი მასები[1] კი შესაბამისად $m_1, m_2, \ldots, m_n$. ავიღოთ ნებისმიერი O წერტილი (გეომეტრიული) და ავაგოთ ვექტორი $\overline{OC}$ სათავით O წერტილში, ისე რომ:

$$\overline{OC} = \frac{m_1\overline{OM}_1 + m_2\overline{OM}_2 + \ldots + m_n\overline{OM}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}.$$

---

1) სიტყვებით: „ნივთიერი წერტილი“, „მასა“ ჩვენ ვსარგებლობთ განსაკუთრებით თვალსაჩინობისათვის. არსებითად კი აქ საუბარია წერტილებზე, რომელთაგან თვითეულისათვის მიკუთვნილია რაღაც რიცხვი, რომელიც (პირობით) იწოდება „მასად“. ეს მასები შეიძლება უარყოფითად იყვნენ; ამ შემთხვევაში ჩვენ დამატებით ვიგულისხმოთ, რომ მასების ჯამი $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ განსხვავდება ნულისაგან.

უნდა დავამტკიცოთ, რომ C წერტილის მდებარეობა დამოუკიდებელია O წერტილის შერჩევაზე (ამგვარად ეს C წერტილი დამოკიდებული იქნება მხოლოდ აღებულ ნივთიერ წერტილთა მდებარეობაზე და [illegible] ასეთ წერტილს უწოდებენ ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრს ანუ ინერციის ცენტრს).

დამტკიცება. ავიღოთ რომელიმე სხვა O' წერტილი და ავაგოთ ვექტორი: $\overline{O'C}=m_1\overline{O'M_1}+m_2\overline{O'M_2}+\ldots+m_n\overline{O'M_n}$; ჩვენი წინადადება დამტკიცებული იქნება თუ აღმოვაჩენთ, რომ C' ემთხვევა C-ს. მართალაც, $\overline{O'M_1}=\overline{O'O}+\overline{O'M_1}, \ldots \overline{O'M_n}=\overline{O'O}+\overline{OM_n}$; თუ ამათ შევიტანთ წინა ტოლობის მარჯვენა მხარეში, მივიღებთ:

$$\overline{O'C}=\frac{(m_1+m_2+\ldots+m_n)\ \overline{O'O}+m_1\overline{OM_1}+\ldots+m_n\overline{OM_n}}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\overline{O'O}+\overline{OC}=\overline{O'C};$$

მაშ, $\overline{O'C'}=\overline{O'C}$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ C' ემთხვევა C-ს.

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ ორი ნივთიერი წერტილისაგან შემდგარი სისტემის სიმძიმის ცენტრი C, რომელთა მასები არიან m_1 და m_2, იმყოფება წერტილთა შემაერთებელ ნაკვეთზე და ყოფს ამ ნაკვეთს მასების უკუპროპორციულ ნაწილებად; (კერძოდ, თუ ორივე მასა თანატოლია, მაშინ სიმძიმის ცენტრი შუაზე იმყოფება).

მითითება. ვთქვათ M_1 და M_2 არიან აღებული წერტილები; აიღეთ $M_1 M_2$ ნაკვეთზე ისეთი წერტილი O, რომლისათვის ადგილი აქვს პროპორციას: $\frac{|M_1O|}{OM_2}=\frac{m_2}{m_1}$ და შემდეგი ფორმულის გამოყენებით: $\overline{OC}=\frac{m_1\overline{OM_1}+m_2\overline{OM_2}}{m_1+m_2}$ დაამტკიცეთ, რომ $\overline{OC}=0$, ე. ი, რომ C წერტილი ემთხვევა O-ს.

4. განაზოგადეთ წინა ვარჯიშობის შედეგი იმ შემთხვევისათვის, როცა განიხილებიან უარყოფითი მასებიც.

პას. ორი მასის სიმძიმის ცენტრი ყველა შემთხვევებში იმყოფება M_1M_2 წრფეზე და განისაზღვრება პროპორციით $\frac{|M_1C|}{|CM_2|}=\frac{|m_2|}{|m_1|}$; ამასთანავე C აიღება M_1-სა და M_2-ს შორის თუ მასები დადებითია და M_1M_2 ნაკვეთის გარეთ, (იმ მხარისაკენ საითკენაც უდიდესი აბსოლუტური მნიშვნელობის მასაა), თუ მასები სხვადასხვა ნიშნის არიან.

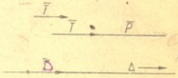
11. მოცემული მიმართულების პარალელური ვექტორები. მგეზავი (ერთეული ვექტორი). ვექტორით შეგვიძლიან ვისარგებლოთ სივრცეში რაიმე მიმართულების განსასაზღვრავად. ვინაიდან ვექტორის სიგრძეს ამ მიზნისათვის არავითარი მნიშვნელობა არ აქვს, ამიტომ მიზანშეწონილია, რომ ამ შემთხვევაში ისეთი ვექტორით ვისარგებლოთ, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია. ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია, ეწოდება მგეზავი[1]). ყოველი მგეზავი განსაზღვრავს გარკვეულ გეზს

[1]) რუსულ ლიტერატურაში ხმარობენ ტერმინს „орт"; ინგლისურად ort (შემოკლებული სიტყვა orientation).

სივრცეში. მაგალითად, „მისთვის რომ რაიმე ღერძის გეზი განვსაზღვროთ“ საკმარისია აღინიშნოს ამ ღერძის მგეზავი, ესე იგი, მგზავრი, რომლის გეზი იგივეა რაც ღერძის.

თუ $\overline{T}$ აღნიშნავს რომელიმე მგეზავს, მაშინ ის გეზიც, რომელიც ამ მგეზავით განისაზღვრება, მოკლეთ იწოდება $\overline{T}$ გეზად.

განვიხილოთ ეხლა ნებისმიერი $\overline{P}$ ვექტორი, $\overline{T}$ მგეზავის პარალელური (ნახ. 10). ადვილი გასაგებია, რომ ეს ვექტორი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც: $\overline{P} = \overline{T} . P$, სადაც P (უხაზოთ) არის რაღაც რიცხვი (სკალარი). სახელდობრ $P = \pm |P|$, თუ რომ $|P|$, ისე როგორც ყველგან აღნიშნავს $\overline{P}$-ვექტორის სიგრძეს; $(+)$ აიღება, როდესაც $\overline{P}$ და $\overline{T}$-ს ერთი და იგივე გეზი აქვთ (როგორც ნახაზზე 10) და $(-)$ მაშინ, თუ $\overline{P}$ და $\overline{T}$-ს მოპირდაპირე გეზები აქვთ.



ნახ. 10.

ეს უშუალოდ გამომდინარეობს ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის განმარტებიდან. მართლაც, ნამრავლი $\overline{T} . P$ არის ვექტორი, რომლის სიგრძე ტოლია $|T| . |P|$ ანუ $|P|$ (ვინაიდან $|T| = 1$, რაც შეეხება $\overline{T} . P$ ვექტორის გეზს, ცხადია, რომ ეს იგივეა რაც $\overline{P}$-ს გეზი (P-ს ნიშნისათვის მიღებული პირობის თანახმად).

მაგალითად, თუ $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძე 5-ის ტოლია და თვით ვექტორს იგივე გეზი აქვს რაც $\overline{T}$-ს, მაშინ $\overline{P} = 5\overline{T}$; თუ $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძე $\frac{1}{2}$-ის ტოლია და გეზი მოპირდაპირე აქვს, მაშინ $\overline{P} = (-\frac{1}{2})\ \overline{T}$; რიცხვი P იწოდება, როგორც $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{T}$ გეზის მიმართულებით. (პირველ მაგალითში ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $+5$-ის ტოლია, ხოლო მეორეში $-\frac{1}{2}$-სა).

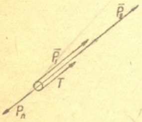
მაშ საჭიროა ორი ცნების განსხვავება: ვექტორის სიგრძე ანუ აბსოლუტური მნიშვნელობა, რაც $|P|$-თი აღინიშნება და მეორეს მხრივ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა, რისთვისაც P-აღნიშვნას ვხმარობთ. ამ უკანასკნელს მაშინ აქვს მხოლოდ აზრი, როდესაც მოცემულია გარკვეული $\overline{T}$ გეზი (პარალელური $\overline{P}$-სი), რომლის მიხედვითაც განიხილება ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა.

მიღებული ფორმულა: $\overline{P}=\overline{T}\,.\,P$ ადვილად შეიძლება გავავრცელოთ იმ შემთხვევისათვისაც, როდესაც $\overline{T}$ მგეზავის მაგიერ მოიცემა ნებისმიერი ვექტორი $\overline{U}$, განსხვავებული ნულისაგან და $\overline{P}$ ვექტორის პარალელური. ცხადია, ამ შემთხვევაშიაც გვექნება: $\overline{P}=\overline{U}\,.\,P_u$, სადაც P_u არის რაიმე რიცხვი; სახელდობრ $P_u=\pm\frac{|P|}{|U|}$, სადაც + ან − ნიშანი აიღება იმის მიხედვით, ერთნაირად არიან მოგეზული $\overline{P}$ და $\overline{U}$, ვექტორები, თუ მოპირდაპირედ.

P_u რიცხვს ვუწოდოთ $\overline{P}$ და $\overline{U}$ ვექტორთა ფარდობა.

განვიხილოთ ეხლა რამოდენიმე ვექტორი $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2, \ldots$, $\overline{P}_n$ ერთი და იგივე $\overline{T}$ გეზის პარალელური (იხ. ნახ. 11, რომელზეაც თვალსაჩინოებისათვის ეს ვექტორები და T მგეზავი მიღებული არიან ერთსა და იმავე წერტილზე).

ცხადია, რომ გეომეტრიული ჯამი $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n$ პარალელურია იმავე $\overline{T}$ გეზისა. შემდეგ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ ვექტორების ალგებრულ მნიშვნელობათა ჯამისა (რა თქმა უნდა იგულისხმება, რომ ალგებრული მნიშვნელობა, $\overline{T}$ გეზის მიმართ განიხილება). მართლაც, ეს წინადადება ცხადია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ყველა შესაკრებ ვექტორებს ერთი და იგივე გეზი აქვთ (ასე რომ მათი ალგებრული მნიშვნელობანი ან ყველა დადებითია, ან ყველა უარყოფითი). შემდგომ ამისა, უშუალოდ ადვილი შესამოწმებელია, რომ ხსენებული წინადადება სამართლიანია ორი ისეთი შესაკრების შემთხვევისათვის, რომელთაც მოპირდაპირე გეზები აქვთ. საზოგადო შემთხვევა კი განხილულ შემთხვევებზე დაიყვანება, თუ ცალკე შევაჯგუფებთ ერთნაირად მოგეზულ შესაკრებთ და ცალკე მოპირდაპირე შესაკრებთ.



ნახ. 11.

დამტკიცებული დებულება ფორმულებით ასე გამოისახება: თუ

(3) $$\overline{P}_1=\overline{T}\,P_1,\ \overline{P}_2=\overline{T}P_2,\ \ldots,\ \overline{P}_n=\overline{T}P_n,$$

მაშინ გეომეტრიული ჯამისათვის $\overline{P}=\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n$, გვექნება: $\overline{P}=\overline{T}\,P$ სადაც

(4) $$P=P_1+P_2+\ldots+P_n.$$

მოკლეთ რომ ვთქვათ:

$$\overline{T}P_1 + \overline{T}P_2 + \ldots + \overline{T}P_n = \overrightarrow{T}\,(P_1 + P_2 + \ldots + P_n). \tag{5}$$

აღვნიშნოთ კიდევ შემდეგი მარტივი დებულება, რომლის დამტკიცებას მკითხველს მივანდობთ: თუ m არის რიცხვი და $\overline{P}$ არის ვექტორი, აღებული $\overline{T}$ მგეზავის პარალელური, მაშინ $m\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა mP-ს ტოლია; ესე იგი:

$$m\,(\overline{T}P) = \overline{T}(mP).$$

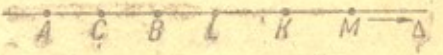
12. ვექტორები ღერძზე. ერთი და იგივე გეზის პარალელურ ვექტორთა კერძო შემთხვევას წარმოადგენენ ვექტორები, რომელნიც ერთსა და იმავე Δ ღერძზე მდებარეობენ. ვთქვათ $\overline{T}$ არის აღებული Δ ღერძის მგეზავი და $\overline{P}$ — რომელიმე ვექტორი ამ ღერძზე მდებარე. როგორც ზევით, აქაც გვექნება: $\overline{P} = \overline{T}P$, სადაც P არის ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{T}$ გეზის მიმართ. განსახილავ შემთხვევაში P სიდიდეს ჩვენ აგრეთვე უწოდებთ $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას Δ ღერძის მიმართ. მაშ $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა Δ ღერძის მიმართ ტოლია $\pm|P|$, სადაც ნიშანი $+$ აიღება იმ შემთხვევაში, თუ ვექტორსა და ღერძს ერთი და იგივე გეზი აქვთ, ხოლო ნიშანი —, თუ მოპირდაპირე გეზები აქვთ.

განვიხილოთ ეხლა რამოდენიმე ვექტორი: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ..., $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ რომელნიც ისეთნაირად მდებარეობენ Δ ღერძზე, რომ ყოველი მიმდევარი ვექტორის სათავე ემთხვევა წინამავალის ბოლოს (იხ. ნახ. 12). მაშინ $\overline{AM}$ ვექტორი იქნება აღებულ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამი:

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{KL} + \overline{LM}. \tag{1}$$

ვთქვათ AB (უხაზოთ) აღნიშნავს $\overline{AB}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას Δ ღერძის მიმართ (და ანალოგიურათ სხვა ვექტორებისათვის); მაშინ წინა პარაგრაფის თანახმად გვექნება:

$$AM = AB + BC + CD + \ldots + KL + LM. \tag{2}$$



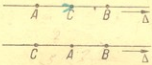
სურ. 12.

ეს მარტივი ფორმულა უშუალოდ ცხადი ხდება როდესაც ყ
ვექტორებს $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... ერთი და იგივე გეზი აქვთ; საზოგადო შემთხვე-

კი. არც ისე აშკარაა ამის სამართლიანობა; ეს ფორმულა ხშირად დიდ სარგებლობას გვიწევს სხვადასხვა ზოგადი დასკვნების მისაღებად.[1]

სავარჯიშო მაგალითები

1. მიაქციეთ ყურადღება ტოლობას $AB+BA=O$.



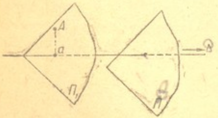
ნახ. 13.

2. შეამოწმეთ ტოლობა $AB+BC=AC$ იმ შემთხვევისათვის, რომელნიც 13 ნახაზზე არიან წარმოდგენილნი:

III. გეგმილები ღერძზე და სიბრტყეზე

13. გეგმილები ღერძზე. ვთქვათ Δ არის რომელიმე ღერძი და Π—რომელიმე სიბრტყე, არაპარალელური ამ ღერძისა (ნახ.14)..

ვთქვათ, რომ A არის ნებისმიერი წერტილი სივრცეში აღებული. გავატაროთ ამ წერტილზე სიბრტყე Π_1, პარალელური Π სიბრტყისა და ვთქვათ, რომ a არის გატარებული სიბრტყისა და Δ ღერძის გადაკვეთის წერტილი.



ნახ. 14.

a წერტილი არის A წერტილის გეგმილი Δ ღერძზე, აღებული Π სიბრტყის პარალელურად.

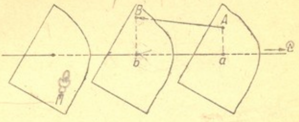
თუ Π სიბრტყე Δ ღერძის მართობია, მაშინ გეგმილს მართკუთხოვანი (ანუ ორთოგონალური) ეწოდება. ამ შემთხვევაში A წერტილის გეგმილი არის ამ წერტილიდან Δ ღერძზე ჩამოშვებული მართობის ფუძე.

არამართკუთხოვანი გეგმილები, მართკუთხოვანისაგან განსასხვავებლად, იწოდებიან ირიბკუთხოვანად; ერთნიც და მეორენიც ერთად იწოდებიან პარალელურ გეგმილებად[2]).

[1]) ამ ფორმულას ხშირად შალის (Chasles) თეორემას უწოდებენ.

[2]) გეგმილთა სხვა სახეებისაგან განსასხვავებლად, როგორც მაგალითად ცენტრალური ანუ პერსპექტიული.

ვთქვათ ეხლა $\overline{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი და [illegible] მისი სათავისა და ბოლოს გეგმილებს Δ ღერძზე; [illegible] ერთი და იგივე Π სიბრტყის პარალელურად (ნახ. 15).



ნახ. 15.

$\overline{ab}$ ვექტორს ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, Π სიბრტყის პარალელურად აღებული.[1] Δ ღერძს ეწოდება გეგმილთა ღერძი.

იმის აღსანიშნავად, რომ $\overline{ab}$ არის $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე, Π სიბრტყის პარალელურად აღებული, სწერენ:

$$\overline{ab} = \overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\ \overline{AB}\ (\text{აღებული} \parallel \Pi).$$

შემდეგში ჩვენ საქმე გვექნება უმთავრესად თვით $\overline{ab}$ გეგმილთან კი არა, არამედ მის ალგებრულ მნიშვნელობასთან ab; გეგმილის ამ ალგებრულ მნიშვნელობას ჩვენ აღვნიშნავთ ანალოგიურად, მაგრამ იმ განსხვავებით, რომ ასოებზე „გეგ“ ხაზს არ გაუკეთებთ; ასე რომ დავწერთ:

$$ab = \text{გეგ}_{\Delta}\overline{AB}\ (\text{აღებული} \parallel \Pi).$$

თუ დამატებითი მითითება არ არის მოხდენილი, მაშინ ჩვეულებრივ გეგმილი მართკუთხოვანად იგულისხმება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ გეომეტრიულად თანატოლ ვექტორთა გეგმილები (ერთი და იგივე სიბრტყის პარალელურად აღებულნი) ერთსა და იმავე ღერძზე, თანატოლი არიან, ესე იგი, თუ $\overline{P} = \overline{Q}$, მაშინ:

$$\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\ \overline{P} = \overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{Q},\quad \text{გეგ}_{\Delta}\overline{P} = \text{გეგ}_{\Delta}\overline{Q}.$$

აგრეთვე, თუ ორი ღერძი ერთნაირადაა მოგეზული, მაშინ ნებისმიერი ვექტორის გეგმილები ამ ღერძებზე თანატოლი იქნებიან.

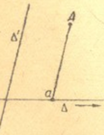
[1]) ხანდისხან $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილად იწოდება $\overline{ab}$ ვექტორი კი არა, არამედ ამ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა ab, განხილული Δ ღერძის მიმართ.

შემდეგ, ორი ურთიერთ მოპირდაპირე ვექტორის გეგმილები ერთსა და იმავე ღერძზე აგრეთვე ურთიერთ მოპირდაპირე იქნებიან, ხოლო მათი ალგებრული მნიშვნელობანი თანატოლი არიან აბსოლუტურად, მაგრამ ნიშანი აქვთ მოპირდაპირე, ესე იგი გეგ$_\Delta$ $(-\overline{P}) = -$ გეგ$_\Delta$ $\overline{P}$ (გეგმილები აღებული არიან ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურად).

შენიშვნები: 1. თუ $\overline{P}$ ვექტორი პარალელურია Π სიბრტყისა, მაშინ A და B წერტილის გეგმილი ერთი მეორეს ემთხვევა და ამიტომ $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი (აღებული $\parallel$ Π) ნულის ტოლია.

2. თუ $\overline{P}$ ვექტორი პარალელურია გეგმილთა Δ, ღერძისა მაშინ, ცხადია, $\overline{P}$ ვექტორის გეგმილი Δ ღერძზე $\overline{P}$ ვექტორის ტოლია, და მისი ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობისა Δ ღერძის მიმართ.

13*a*. შემთხვევა ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე ნაკვთებისა. თუ აღებულ საკითხში განსახილავი ყველა წერტილი და ვექტორი იმყოფება ერთსა და იმავე სიბრტყეში გეგმილთა ღერძთან ერთად, მაშინ გეგმილის ზემოხსენებული განმარტება შეგვიძლიან შემდეგით შევცვალოთ (იხ. ნახ. 16, სადაც ნახაზის სიბრტყეთ მიღებულია სწორედ ხსენებული სიბრტყე).



. 16.

ვთქვათ Δ' არის რომელიმე წრფე განსახილავ სიბრტყეზე, არაპარალელური გეგმილთა ღერძისა Δ. რომელიმე A წერტილიდან (აღებულ სიბრტყეზე მდებარე) გავავლოთ წრფე Δ'-ის პარალელური და ვთქვათ a არის გავლებული წრფისა და Δ ღერძის გადაკვეთის წერტილი; a წერტილს ეწოდება A წერტილის გეგმილი Δ ღერძზე, აღებული Δ' წრფის პარალელურად. თუ Δ' მართობია Δ ღერძის, მაშინ გეგმილს ეწოდება მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური.

დანარჩენი განმარტებანი იგივე რჩებიან, რაც წინა პარაგრაფში, საჭიროა მხოლოდ ყველგან იმის მაგიერ, რომ ითქვას „ $\parallel$ Π სიბრტყისა", უნდა ვსთქვათ „ $\parallel$ Δ'-წრფისა".

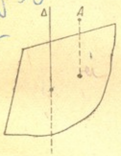
14. გეგმილები სიბრტყეზე. ვთქვათ Π არის რომელიმე სიბრტყე, ხოლო Δ ნებისმიერი წრფე არაპარალელური Π სიბრტყისა (ნახ. 17). გავავლოთ აღებულ A წერტილზე Aa წრფე Δ-ს პარალე-

ლური, რომელიც Π სიბრტყეს გადაკვეთს რომელიმე a წერტილზე. ამ წერტილს ეწოდება A-ს გეგმილი Π სიბრტყეზე ალებული Δ წრფის პარალელურად.

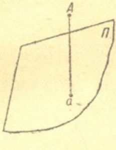
თუ Δ მართობია Π სიბრტყის, მაშინ გეგმილს ეწოდება მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური; არამართკუთხოვან გეგმილებს უწოდებენ ირიბკუთხოვანს, ხოლო ორივეს ერთად, როგორც მართკუთხოვანს ისე ირიბკუთხოვანს ეწოდება პარალელური ანუ ცილინდრული გეგმილები.

მართკუთხოვანი გეგმილის შემთხვევაში a არის A წერტილიდან Π სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძე (ნახ. 18).

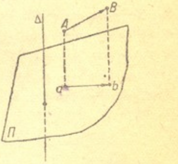
ვთქვათ ეხლა $\overline{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი, ხოლო a და b არიან შესაბამისად სათავისა და ბოლოს გეგმილები Π სიბრტყეზე, ალებულნი Δ წრფის პარალელურად (ნახ. 19).



სურ. 17.



სურ. 18.



სურ. 19.

მაშინ $\overline{ab}$ ვექტორს ეწოდება $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილი Δ წრფის პარალელურად ალებული:

$$\overline{ab} = \overline{\text{გეგ}_{\Pi}}\ \overline{AB}\ (\text{ალებული}\ \|\ \Delta).$$

საზოგადოდ, რომელიმე გეომეტრიული ნაკვთის გეგმილი Π სიბრტყეზე, ეწოდება ამ ნაკვთის წერტილთა გეგმილების გეომეტრიულ ადგილს. კერძოდ სამკუთხედის გეგმილი არის აგრეთვე სამკუთხედი, რომლის წვეროები არიან შესაბამისად ალებული სამკუთხედის წვეროების გეგმილები[1]).

[1]) ამ სახელმძღვანელოს ყველა ნახაზები, რომელნიც სივრცულ ნაკვთებს გამოსახავენ, არსებითად წარმოადგენენ სწორედ ამ ნაკვთების პარალელურ გეგმილებს ნახაზის სიბრტყეზე.

ვექტორების სიბრტყეზე დაგეგმილების შესახებ ადგილი აქვს იმავე მარტივ დებულებებს, როგორც ღერძზე დაგეგმილების შესახებ მივიღეთ: ორი გეომეტრიულად თანატოლი ვექტორის გეგმილები თანატოლია (გეომეტრიულად); ვექტორის გეგმილები ორს პარალელურ სიბრტყეზე თანატოლნი არიან.

15. გეომეტრიული ჯამის და სხვაობის გეგმილები ღერძზე. დავამტკიცოთ ეხლა შემდეგი მარტივი დებულება:

ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის გეგმილი ღერძზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ~~გეომეტრიული~~ ჯამისა:

$$(1)\quad \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_1} + \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_2} + \dots + \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_{n-1}} + \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_n},$$

სადაც $\overline{P}$ აღნიშნავს გეომეტრიულ ჯამს:

$$\overline{P} = \overline{P_1} + \overline{P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}} + \overline{P_n};$$

რასაკვირველია იგულისხმება, რომ გეგმილები აიღებიან ერთსა და იმავე სიბრტყის პარალელურად.

მართლაც, დავალაგოთ აღებული ვექტორები $\overline{P_1}, \dots, \overline{P_n}$ ისე, როგორც ვექტორთა მრავალკუთხედის შედგენის დროს ვიქცევით. თუ სიმარტივისათვის დავკმაყოფილდებით ოთხი შესაკრებით ($n=4$), მივიღებთ რომ (იხ. ნახ. 20).

$$\overline{P_1} = \overline{AB},\ \overline{P_2} = \overline{BC},\quad \overline{P_3} = \overline{CD},\ \overline{P_4} = \overline{DE}.$$

ამ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამი იქნება $\overline{P} = \overline{AE}$.

ვთქვათ a, b, c, d, e შესაბამისად აღნიშნავენ A, B, C, D, E წერტილთა გეგმილებს. გეომეტრიული ჯამის განმარტების მიხედვით, გვექნება:

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de}$$

მაგრამ:

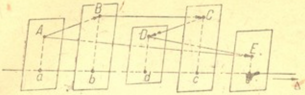
$$\overline{ae} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P};\ \overline{ab} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_1},\ \overline{bc} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_2},\ \overline{cd} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_3},\ \overline{de} = \overline{\text{გეგმ}}\ \overline{P_4}.$$

თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს წინა ტოლობაში, მივიღებთ (1) — ტოლობას, რასაც ვამტკიცებდით.

დამტკიცებულიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ გეომეტრიული ჯამის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია შესაკრებთა გეგმილების ალგებრულ მნიშვნელობათა ჯამის, ე. ი.

$$(1a)\qquad \text{გეგმ}\ \overline{P} = \text{გეგმ}\ P_1 + \text{გეგმ}\ \overline{P_2} + \text{გეგმ}\ \overline{P_3} + \text{გეგმ}\ \overline{P_4}.$$

ვიმეორებთ, რომ ჩვენ დავკმაყოფილდით ოთხი შესაკრების შემთხვევით მხოლოდ ნახაზის გასამარტივებლად. საზოგადო შემთხვევისთვისაც დამტკიცება იგივეა.



ნახ. 20.

სრულიად აგრეთვე ადვილი საჩვენებელია, რომ ორი ვექტორის გეომეტრიული სხვაობის გეგმილი ტოლია ამ ვექტორთა გეგმილების გეომეტრიული სხვაობისა, ე. ი.

$$\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,(\overline{P_1}-\overline{P_2})=\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{P_1}-\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{P_2}. \tag{2}$$

მართლაც, § 8-ში ნათქვამის ძალით გვაქვს;

$$\overline{P_1}-\overline{P_2}=\overline{P_1}+(-\overline{P_2}),$$

საიდანაც ზემოხსენებულის თანახმად:

$$\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,(\overline{P_1}-\overline{P_2})=\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{P_1}+\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,(-\overline{P_2})=\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{P_1}-\overline{\text{გეგ}_{\Delta}}\,\overline{P_2}.$$

გეგმილთა ალგებრულ მნიშვნელობათათვის ანალოგიური ფორმულა გვექნება:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\,(\overline{P_1}-\overline{P_2})=\text{გეგ}_{\Delta}\,\overline{P_1}-\text{გეგ}_{\Delta}\,\overline{P_2}.$$

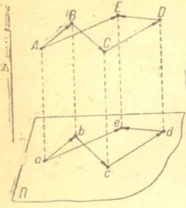
16. გეომეტრიული ჯამის ან სხვაობის გეგმილი სიბრტყეზე. ადვილი საჩვენებელია აგრეთვე, რომ ალებულ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის გეგმილი Π სიბრტყეზე ტოლია შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების (იმავე სიბრტყეზე) გეომეტრიული ჯამისა, ე. ი. თუ:

$$\overline{P}=\overline{P_1}+\overline{P_2}+\ldots+P_n,$$

მაშინ: $\overline{\text{გეგ}_{\Pi}}\,\overline{P}=\overline{\text{გეგ}_{\Pi}}\,\overline{P_1}+\overline{\text{გეგ}_{\Pi}}\,\overline{P_2}+\ldots+\overline{\text{გეგ}_{\Pi}}\,\overline{P_n}.$

რასაკვირველია იგულისხმება, რომ გეგმილები აიღებიან ერთი და იგივე წრფის პარალელურად. ეს თეორემა ერთნაირადვე მტკიცდება, როგორც წინა პარაგრაფის თეორემა (იხ. ნახ. 21).

სრულიად აგრეთვე, ორი ვექტორის გეომეტრიული სხვაობის გეგმილი ტოლია მათი გეგმილების გეომეტრიული სხვაობისა, ე. ი. [illegible] მაშინ:

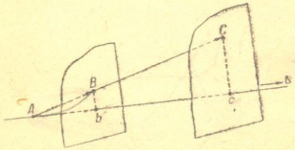


ნახ. 21.

$$(2) \qquad \overline{\text{გეგ}_{\Pi}\,Q} = \overline{\text{გეგ}\,P_1} - \overline{\text{გეგ}_{\Pi}\,P_2}.$$

17. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის გეგმილი. ადვილი გასაგებია, რომ $\overline{P}$ ვექტორისა და m რიცხვის $m\overline{P}$ ნამრავლის გეგმილი რომელიმე ღერძზე (აღებული რაიმე სიბრტყის პარალელურად) ტოლია $\overline{P}$ ვექტორის გეგმილისა და m რიცხვის ნამრავლისა. მართლაც, ზოგადობის დაურღვევლად, ჩვენ შეგვიძლიან $\overline{P}$ ვექტორის A სათავე ავიღოთ თვით Δ ღერძზე.

ვთქვათ $\overline{P}=\overline{AB}$, $m\overline{P}=\overline{AC}$ და გარდა ამისა ვთქვათ b და c აღნიშნავენ B და C წერტილების გეგმილებს (იხ. ნახ. 22).



ნახ. 22.

როგორც ჩანს AbB და AcC სამკუთხედების მსგავსებიდან:

$$\frac{|Ac|}{|Ab|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|m\overline{P}|}{|\overline{P}|} = \frac{|m||\overline{P}|}{|\overline{P}|} = |m|,$$

საიდანაც:

$$|Ac| = |m| \,.\, |Ab| \,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ:

$$\overline{Ac} = m \,.\, \overline{Ab}.$$

ვინაიდან $\overline{Ac}$ და $\overline{Ab}$ ვექტორები იმყოფებიან ერთსა და იმავე წრფეზე ხო-

ლო მათი გეზები ერთი და იგივეა ან მოპირდაპირეა იმის მიხედვით, თუ როგორი ნიშანი აქვს m-ს. უკანასკნელი ფორმულა ამტკიცებს ჩვენს დებულებას, რადგანაც მისი გადაწერა ასე შეიძლება:

$$(1) \qquad \overline{\text{გეგ}}_{\Delta}\,(\overline{mP}) = m \cdot \overline{\text{გეგ}}_{\Delta}\,\overline{P};$$

თუ გადავალთ ალგებრულ მნიშვნელობაზე, მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულას:

$$(1a) \qquad \text{გეგ}\,(\overline{mP}) = m \cdot \text{გეგ}_{\Delta}\,\overline{P}.$$

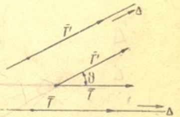
IV. მართკუთხოვანი გეგმილების გამოსათვლელი ფორმულები

ამ განყოფილებაში განიხილებიან განსაკუთრებით მართკუთხოვანი (ორთოგონალური) გეგმილები და ამიტომ ჩვენ აღარ მოვიხსენიებთ ამას ყოველ კერძო შემთხვევაში.

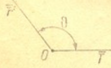
18. კუთხე ორ გეზს შორის. კუთხე ორ გეზს შორის (მაგ., ორ ღერძს შორის, ორ ვექტორს შორის ან ვექტორსა და ღერძს შორის) ეწოდება იმ კუთხეს, რომელსაც ადგენენ ნებისმიერი წერტილიდან გამომავალი მოცემული გეზების მგეზავები.

მაგ., კუთხე ϑ, Δ და Δ' ღერძებს შორის (იხ. ნახ. 23) არის ამ ღერძთა $\overline{T}$ და $\overline{T'}$ მგეზავებს შორის კუთხე; თვით ეს მგეზავები გამოდიან ნებისმიერი წერტილიდან.

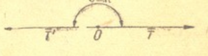
ეს კუთხე განიხილება ყოველთვის მგეზავთა დადებით მიმართულებებს შორის (იხ. ნახ. 24) და შეუძლიან მიიღოს ყველა მნიშვნელობანი 0-დან π-მდე (ე. ი. 0^0-დან 180^0-მდე). თუ $\vartheta = 0$, მაშინ $\overline{T}$ და $\overline{T'}$, გე-



ნახ. 23.



ნახ. 24.



ნახ. 24a

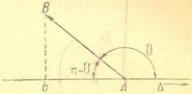
ზები ერთი მეორეს ემთხვევა; თუ $\vartheta = \pi$, მაშინ ეს გეზები ურთიერთ მოპირდაპირე არიან (ნახ. $24a$).

19. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის (ღერძზე) გამოსათვლელი ფორმულა. ვთქვათ მოცემულია Δ ღერძი და $\overline{AB}$ ვექტორი, რომელიც Δ ღერძთან ϑ კუთხეს ადგენს. $\overline{AB}$ ვექტორის Δ-ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობის გამოსათვლელად არსებობს ფორმულა:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\, \overline{AB} = |AB| \cos\vartheta, \tag{1}$$

რომელიც სამართლიანია როგორც სიდიდით ისე ნიშნით; სიტყვიერად ეს ასე გამოითქმის: ვექტორის ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა ტოლია ვექტორის სიგრძისა და იმ კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა, რომელსაც ვექტორი შეადგენს ღერძთან.

ნახ. 25.



ნახ. 25a.

ამ ფორმულის გამოსაყვანად გადავიტანოთ აღებული ვექტორი ისე, რომ მისი A სათავე დაემთხვეს Δ ღერძის ერთერთ წერტილს.

ჯერ-ჯერობით წარმოვიდგინოთ, რომ ϑ კუთხე მახვილია. მაშინ (ნახ. 25) $\overline{AB}$ ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა Ab არის დადებითი სიდიდე და AbB სამკუთხედის განხილვა პირდაპირ გვაძლევს.

$$\text{გეგ}_{\Delta}\, \overline{AB} = Ab = |AB| \cos\vartheta.$$

თუ კი ϑ ბლაგვი იქნება, მაშინ (ნახ. 25a) AbB სამკუთხედი მოგვცემს: $|Ab| = |AB| \cos(180^0 - \vartheta) = -|AB| \cos\vartheta$; მაგრამ, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $Ab < 0$, ამიტომ, როგორც ზევით, აქაც გვექნება:

$$\text{გეგ}_{\Delta}\, \overline{AB} = Ab = -|Ab| = +|AB| \cos\vartheta,$$

და ამნაირად (1) ფორმულა სრულად დამტკიცებულია.

კ ე რ ძ ო   შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ე ბ ი. 1. თუ $\vartheta = 0$, მაშინ $\cos\vartheta = 1$ და გეგ$_{\Delta}$ $\overline{AB} = |AB|$.

2. თუ $\vartheta = 180^0$, მაშინ $\cos\vartheta = -1$ და გეგ$_{\Delta}$$\overline{AB} = -|AB.|$

3. თუ $\vartheta = 90^0$, ე. ი. $\overline{AB}$ ვექტორი Δ ღერძის მართობია, მაშინ $\cos\vartheta = 0$ და $\text{გეგ}_\Delta\, \overline{AB} = 0$; ყველაფერი ეს გამომდინარეობს კოსინუსის განმარტებიდან.

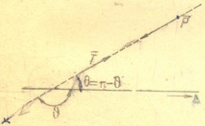
19*a*. განზოგადება. ვთქვათ $\overline{P}$ ვექტორი $\overline{T}$ მგეზავის პარალელურია ისე, რომ (§ 11):

$$\overline{P} = \overline{T}\,.\,P; \tag{1}$$

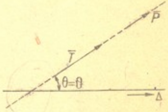
აღვნიშნოთ Θ-თი კუთხე $\overline{T}$ მგეზავსა და Δ ღერძს შორის (ნახ. 26*a* და 26*b*);

ეს კუთხე ან ϑ კუთხის ტოლია [$\overline{P}$-სა და Δ-ს შორის, (ნახ. 26*b*)] ან $(\pi - \vartheta)$-ს ტოლია (ნახ. 26*a*). პირველ შემთხვევას აქვს ადგილი მაშინ, როდესაც $\overline{P}$ და $\overline{T}$-ს ერთი და იგივე გეზი აქვთ, ე. ი. როდესაც $P > 0$; მეორე შემთხვევას კი მაშინ აქვს ადგილი, როდეს $P < 0$. ამიტომ წინა პარაგრაფის თანახმად, პირველ შემთხვევაში გვექნება:

$$\text{გეგ}_\Delta\, \overline{P} = |P| \cos\vartheta = P\cos\vartheta = P\cos\Theta;$$



ნახ. 26a



ნახ. 26b.

მეორე შემთხვევაში (როდესაც $P < 0$ და მაშასადამე $|P| = -P$) გვექნება:

$$\text{გეგ}_\Delta\, \overline{P} = |P| \cos\vartheta = -P\cos\vartheta = -P\cos(\pi - \Theta) = P.\cos\Theta$$

მაშ, ყველა შემთხვევებში გვექნება ერთი და იგივე ფორმულა:

$$\text{გეგ}_\Delta\, \overline{P} = P\cos\Theta, \tag{2}$$

სადაც P აღნიშნავს $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\overline{T}$ გეზის მიმართ, ხოლო Θ არის კუთხე $\overline{T}$ მგეზავსა და გეგმილთა ღერძს შორის;

(2) ფორმულა წარმოადგენს წინა პარაგრაფის ფორმულის განზოგადებას; თუ $\overline{P}$ ვექტორსა და $\overline{T}$ მგეზავს ერთი და იგივე გეზი აქვთ, მაშინ (2) ფორმულა წინა პარაგრაფის ფორმულად იქცევა.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. $\overline{P}$ ვექტორი სიგრძით 10 შეადგენს Δ ღერძთან კუთხეს $150°$. გამოითვალეთ $\overline{P}$ ვექტორის Δ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა.

პას. $-5\sqrt{3}$.

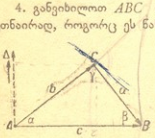
2. წინა მაგალითის პირობებში, როგორ გამოისახება $\overline{P}$ ვექტორის Δ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილი, თუ ამ ღერძის მგეზავი არის $\overline{T}$.

პას. $-5\sqrt{3}\cdot\overline{T}$

3. Δ' და Δ ღერძები ადგენენ კუთხეს $60°$-ს. Δ' ღერძზე აღებულია ვექტორი სიგრძით 20 და მიმართული Δ'-ის მოპირდაპირედ. გამოითვალეთ ამ ვექტორის Δ ღერძზე მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა.

პას. $-20\cos 60° = -10$.

4. განვიხილოთ ABC სამკუთხედი. თუ მივაწერთ მის გვერდებს გეზებს ისეთნაირად, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები (ნახ. 27), გვექნება:



ნახ. 27.

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$. თუ დავაგეგმილებთ ამ გეომეტრიულ ტოლობას ჯერ $\overline{AB}$ მიმართულებაზე და შემდეგ Δ მიმართულებაზე, რომელიც $\overline{AB}$-ს მართობია (იხ. ნახ. 27), დავამტკიცეთ, შემდეგი ტოლობანი.

(*) $c=b\cos\alpha+a\cos\beta$,

(**) $0=b\sin\alpha-a\sin\beta$.

მეორე ტოლობა, რომელსაც შეგვიძლიან დაუმატოთ მსგავსი ტოლობა $0=c\sin\beta-b\sin\gamma$ (ანალოგიურად გამოიყვანება), გვაძლევს ტრიგონომეტრიიდან ცნობილს „სინუსების თეორემას:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}.$$

5. წინა მაგალითის (*) და (**)—ტოლობებიდან გამოიყვანეთ „კოსინუსების თეორემა": $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. ამოხსნა: ორივე მხარე (*) ტოლობისა კვადრატში ავამაღლოთ; მივიღებთ: $c^2=b^2\cos^2\alpha+a^2\cos^2\beta+2ab\cos\alpha\cos\beta=$ $=b^2(1-\sin^2\alpha)+a^2(1-\sin^2\beta)+2ab\cos\alpha\cos\beta=a^2+b^2+2ab\cos\alpha\cos\beta-a^2\sin^2\beta-$ $-b^2\sin^2\alpha$. მაგრამ (**)-დან გამომდინარეობს, რომ: $b^2\sin^2\alpha=a^2\sin^2\beta=a\sin\beta$. $a\sin\beta=$ $=a\sin\beta$. $b\sin\alpha=ab\sin\alpha\sin\beta$. თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს წინა ფორმულაში, მივიღებთ: $c^2=a^2+b^2+2ab(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=a^2+b^2+2ab\cos(\alpha+\beta)$. მაგრამვინაიდან, $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, ამიტომ, $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$, საიდანაც გამომდინარეობს საძიებელი ფორმულა.

20. ვექტორის სიბრტყეზე მართკუთხოვანი გეგმილის სიგრძე. ვთქვათ П არის აღებული სიბრტყე და $\overline{AB}$ რომელიმე ვექტორი; აღვნიშნოთ ϑ-თი მახვილი კუთხე П სიბრტყესა და $\overline{AB}$ ვექტორის მიმართულებას შორის[1]), ვთქვათ $\overline{ab}$ არის $\overline{AB}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილი П სიბრტყეზე. მაშინ გვექნება:

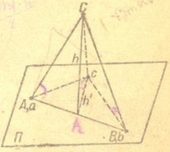
$$(1) \qquad |ab| = |AB| \cos\vartheta,$$

ესე იგი მართკუთხოვანი გეგმილის სიგრძე ტოლია დასაგეგმილებელი ვექტორის სიგრძისა და იმ მახვილი კუთხის კოსინუსის ნამრავლისა, რომელსაც ვექტორი ადგენს სიბრტყესთან. ეს სრულიად აშკარა გახდება, თუ $\overline{AB}$ ვექტორს ისე გადავიტანთ, რომ მისი სათავე П სიბრტყის ერთ-ერთ წერტილს დაემთხვეს.

21. ბრტყელი ნაკვთის სიბრტყეზე გეგმილის ფართობი. განვიხილოთ ჯერჯერობით სამკუთხედის შემთხვევა. ვთქვათ ABC რომელიმე სამკუთხედია; a, b, c-თი აღვნიშნოთ A, B, C წვეროების გეგმილები П სიბრტყეზე. აღვნიშნოთ S-ით ABC სამკუთხედის ფართობი, ხოლო s-ით მისი abc გეგმილის ფართობი. ეს ფართობნი დაკავშირებულნი არიან იმავე თანაფარდობით, როგორც მოყვანილი იყო წინა §-ში:

$$(1) \qquad s = S \cos\vartheta,$$

სადაც ϑ აღნიშნავს იმ მახვილ კუთხეს, რომელსაც შეადგენს გეგმილთა П სიბრტყე დასაგეგმილებელი სამკუთხედის სიბრტყესთან. ამ ფორმულის გამოყვანა მეტად ადვილია. მართლაც წარმოვიდგინოთ, ჯერჯერობით რომ სამკუთხედის ერთერთი გვერდი, მაგ., AB გვერდი, პარალელურია П სიბრტყისა (იხ. ნახ. 28). ამ შემთხვევაში ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლიან წარმოვიდგინოთ, რომ AB გვერდი თვით П სიბრტყეზე ძევს (ამისათვის საკმარისია ABC სამკუთხედის ისეთი გადატანა, რომ მისი სიბრტყის მიმართულება არ შეიცვალოს, რაც მის გეგმილსაც არ შეცვლის). ABC სამკუთხედის S ფართობი ტოლია: $S = \frac{1}{2}|AB| . h$, სადაც h არის სამკუთხედის სიმაღლე. მეორეს მხრივ abc გეგმილის ფართობი ტოლია: $s = \frac{1}{2}|ab| . h'$,



ნახ. 28.

[1]) განმარტების მიხედვით, ϑ კუთხე არის კუთხე $\overline{AB}$ ვექტორსა და მის მართკუთხოვან $\overline{ab}$ გეგმილს შორის.

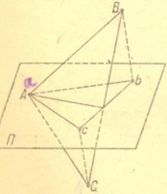
სადაც h' არის abc სამკუთხედის სიმაღლე. მაგრამ $|AB| = |ab|$ და გარდა ამისა $h' = h \cos\vartheta$, ვინაიდან h' არის h სიმაღლის გეგმილი Π სიბრტყეზე[1]. ხოლო კუთხე h-სა და h'-ს შორის არის სწორედ ϑ[2]. მაშასადამე,

$$s = \frac{1}{2}|ab| \cdot h' = \frac{1}{2}|AB|\, h \cos\vartheta = S \cos\vartheta,$$

რის დამტკიცებაც გვსურდა.

თუ $\overline{ABC}$ სამკუთხედის არც ერთი გვერდი არ არის Π სიბრტყის პარალელური, მაშინ, როგორც ეს ადვილი დასანახია, ყოველთვის შეიძლება მისი დაყოფა ორს ისეთს სამკუთხედად, რომელთა შორის თითოეულს აქვს გვერდი ამ სიბრტყის პარალელური (ნახ. 29) და რადგანაც (1) ფორმულა სამართლიანია თითოეული ნაწილისათვის, ამიტომ იგი იქნება სამართლიანი მთელი სამკუთხედისათვის.

თუ ეხლა სამკუთხედის მაგიერ ავიღებთ ნებისმიერ ბრტყელ მრავალკუთხედს, მაშინ (1) ფორმულა ძალაში დარჩება, ვინაიდან ყოველი მრავალკუთხედი შეიძლება რამოდენიმე სამკუთხედად დაიყოს.



სურ. 29.

შემდეგ, ყოველი ბრტყელი ნაკვთის ფართობი, რაიმე მრუდი წირით შემოსაზღვრული, განმარტების ძალით არის მასში ჩახაზული მრავალკუთხედის ფართობის ზღვარი. რადგანაც (1) ფორმულა ძალაშია ყოველი მრავალკუთხედისათვის, ამიტომ იგი სამართლიანი დარჩება ზღვარზე გადასვლის დროსაც.

მაშ, თუ S-ით აღნიშნულია რაიმე ბრტყელი ნაკვთის ფართობი, ხოლო s-ით ამ ნაკვთის გეგმილის ფართობი რომელიმე სიბრტყეზე, მაშინ: $s = S \cos\vartheta$, სადაც ϑ არის ის მახვილი კუთხე, რომელსაც შეადგენენ დასაგეგმილებელი ნაკვთის სიბრტყე და გეგმილთა სიბრტყე.

[1]) გავიხსენოთ ელემენტარული გეომეტრიის თეორემა: თუ სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთის წერტილზე გავიყვანთ ამ სიბრტყეში ხსენებული წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს უკანასკნელი მართობი იქნება ამ წრფის გეგმილისა.

[2]) საჭიროა გავიხსენოთ სიბრტყეთა შორის კუთხის განმარტება, რომელიც ელემენტარულ გეომეტრიაში მოყავთ.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ მართი პრიზმის ირიბი განკვეთის ფართობი, თუ განკვეთის სიბრტყე შეადგენს ფუძესთან კუთხეს 30°-ს და თუ ფუძის ფართობი 10 კვ. სმ ტოლია.

პას. $S = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ კვ. სმ.

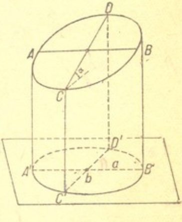
2. გამოიყენეთ გეგმილის ფართობის თვისება და იპოვეთ იმ α კუთხის სიდიდე, რომელსაც შეადგენენ წესიერი ტეტრაედრის (ოთხწახნის) წახნაგები.

პას. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

3. თუ წრეწირს დავაგეგმილებთ II სიბრტყეზე, რომელიც პარალელური არ არის ამ წირის სიბრტყისა, მაშინ დაგეგმილების დროს მიღებულ წირს ელიპსი ეწოდება (ამ წირს სახელმძღვანელოს მეორე ნაწილში დაწვრილებით შევისწავლით). წრის AB დიამეტრი, რომელიც II სიბრტყის პარალელურია (იხ. ნახ. 30), დაგეგმილებისას გვაძლევს $A'B'$ ნაკვეთს, რომელიც სიდიდით ტოლია $|AB| = 2a$, სადაც a არის წრის რადიუსი.

CD დიამეტრი, რომელიც AB ს მართობია, დაგეგმილებისას გვაძლევს $C'D'$ ნაკვეთს, რომელიც $A'B'$ ის მართობია და სიდიდით ტოლია $2a \cdot \cos\alpha$-სი, სადაც α არის კუთხე წრეწირის სიბრტყესა და II სიბრტყეს შორის.

სიდიდეები $a = \frac{1}{2}|A'B'|$ და $b = \frac{1}{2}|C'D'| = a\cos\alpha$ იწოდებიან შესაბამისად ელიპსის დიდ და მცირე ნახევარ ღერძებად. დაამტკიცეთ, რომ ელიპსით შემოსაზღვრული s ფართობი ტოლია πab-სი.



ნახ. 30.

დამტკიცება. გვექნება: $s = \pi a^2 \cos\alpha = \pi a \cdot a\cos\alpha = \pi ab$.

V. ორი ვექტორის ოდენური ნამრავლი

ჩვენ განვიხილეთ ვექტორებზე შემდეგი მოქმედებანი: შეკრება, გამოკლება (გეომეტრიული, რასაკვირველია), და ვექტორის გამრავლება რიცხვზე. ჩვენ განვიხილავთ ეხლა კიდევ ერთს მნიშვნელოვან მოქმედებას, რომელსაც ოდენური გამრავლება ეწოდება. არსებობს ამას გარდა ვექტორული გამრავლება, მაგრამ ამის შესახებ შემდეგში გვექნება საუბარი.

22. ორი ვექტორის ოდენური (სკალარი) ნამრავლი. ორი $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორის ოდენური (სკალარი) ნამრავლი ეწო-

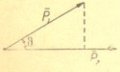
დება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის არსებული კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

ვექტორთა ოდენურ ნამრავლს ჩვენ აღვნიშნავთ $P_1 \cdot P_2$ სიმბოლოთი. (საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ლიტერატურაში არ არის მტკიცედ დამყარებული აღნიშვნები მიღებული; ზოგი ავტორი ხმარობს ოდენური ნამრავლისათვის კიდევ შემდეგ აღნიშვნებს $\overline{P}_1 \times \overline{P}_2$ $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, $(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$; ხშირად ოდენურ ნამრავლს უწოდებენ გეომეტრიულს ან შიგა ნამრავლს.

განმარტების ძალით გვექნება:

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = |P_1|\ |P_2| \cos\vartheta. \tag{1}$$

თუ შევნიშნავთ, რომ ნამრავლი $|P_2| \cos\vartheta$ არის $\overline{P}_2$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა (დაგეგმილება $\overline{P}_1$ ვექტორის მიმართულებაზე ხდება), შეგვიძლიან ვთქვათ, რომ ორი ვექტორის ოდენურ ნამრავლს მივიღებთ, თუ გავამრავლებთ ერთი მათგანის სიგრძეს მეორის მართკუთხოვანი გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობაზე (დაგეგმილება ხდება პირველი ვექტორის მიმართულებაზე), ესე იგი ჩვენი აღნიშვნების თანახმად:



ნახ. 31.

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = |P_1| \cdot გეგ_{\overline{P}_1} \overline{P}_2 = |P_2|\, გეგ_{\overline{P}_2} \overline{P}_1 \tag{2}$$

ავხსნათ ოდენური ნამრავლის უბრალო მექანიკური მნიშვნელობა. თუ მუდმივი (გეზით და სიდიდით) F ძალის მოდების წერტილი წრფივ გადადგილებას განიცდის A მდებარეობიდან B მდებარეობაში, მაშინ განმარტების ძალით, მუშაობა R, შესრულებული $\overline{F}$ ძალის მიერ, ტოლია $|AB|$ სიგრძისა და $\overline{F}$ ძალის გეგმილის (გადადგილების მიმართულებით) ალგებრული მნიშვნელობის ნამრავლისა; ე. ი. $R = |AB| \cdot |F| \cos\vartheta$, სადაც ϑ აღნიშნავს კუთხეს $\overline{AB}$ და $\overline{F}$ ვექტორს შორის. მაშასადამე (1) ფორმულის ძალით: $R = \overline{AB} \cdot \overline{F}$.

მაშ ჩვენს შემთხვევაში მუშაობა ტოლია გადადგილების გამომსახველი ვექტორისა და ძალის გამომსახველი ვექტორის ოდენური ნამრავლისა.

აღვნიშნოთ ოდენური ნამრავლის მნიშვნელოვანი თვისება: იგი ხდება ნული ან მაშინ, როდესაც ერთერთი გასამრავლებელი ვექტორი ნულია ან მაშინ, როდესაც აღებული ვექტორები ურთიერთ მართობული არიან. მართლაც, უკანასკნელ შემთხვევაში $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ და, მაშასადამე, $\cos\vartheta = 0$.

რადგანაც ნულის ტოლი ვექტორის გეზი განუზღვრელია, ამიტომ იგი შეგვიძლიან ვიგულისხმოთ ნებისმიერი მიმართულების მართობულად. ამიტომ შეიძლება ითქვას, რომ ყოველ შემთხვევაში პირობა:

$$(3)\qquad \overline{P_1}\,.\,\overline{P_2}=0.$$

არის $\overline{P_1}$ და $\overline{P_2}$ ვექტორის მართობულობის პირობა.

თუ ორივე ვექტორი თანატოლია, ე. ი. $\overline{P_1}=\overline{P_2}=\overline{P}$, მაშინ ϑ კუთხე მათ შორის ნულია და ამნაირად:

$$\overline{P_1}.\overline{P_2}=\overline{P}\,.\overline{P}=|P|.|P|\cos 0^{\circ}=|P|^2.$$

ნამრავლი $\overline{P_1}.\overline{P_2}$ აღინიშნება $\overline{P^2}$ სიმბოლოთი. ამრიგად აღებული ვექტორის სიგრძის კვადრატი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ ვექტორის თავის თავზე ოდენურად გამრავლების შედეგი;

$$(4)\qquad |P|^2=\overline{P}\,.\,\overline{P}=\overline{P^2}.$$

23. ოდენური ნამრავლის შემდგომი თვისებანი. ოდენურ ნამრავლს აქვს მრავალი თვალსაჩინო თვისება, რომლებიც მსგავსი არიან ორი რიცხვის ჩვეულებრივი ნამრავლის თვისებისა.

თვისება 1°. ვთქვათ m_1 და m_2 არიან მოცემული რიცხვები. მაშინ:

$$(1)\qquad (m_1\overline{P_1})\,.\,(m_2\,\overline{P_2})=(m_1\,m_2)\,(\overline{P_1}\,;\,\overline{P_2});$$

მაგალითად: $3\,\overline{P_1}\,.\,4\,\overline{P_2}=12\,(\overline{P_1}\,.\,\overline{P_2})=12\,.\,|P_1|\,.\,|P_2|\cos\vartheta$. ამის სამართლიანობას მკითხველიც ადვილად დაამტკიცებს. (ამისათვის საჭიროა მხოლოდ გავიხსენოთ რა არის ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი).

თვისება 2°. მეორე თვისება შეეხება ორი გეომეტრიული ჯამის ოდენურ ნამრავლს. ამ თვისებას გამოვთქვამთ, როგორც წესს. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ შემდეგი ორი გეომეტრიული ჯამის ოდენური ნამრავლი:

$$\overline{P_1}+\overline{P_2}+\ldots+\overline{P_n}\ \text{და}\ \overline{Q_1}+\overline{Q_2}+\ldots+\overline{Q_n}$$

საჭიროა ერთი ჯამის თითოეული წევრი გავამრავლოთ (ოდენურად) მეორე ჯამის თითოეულ წევრზე და მიღებული ნამრავლნი შევკრიბოთ (ალგებრულად).

ჯერ დავამტკიცოთ ამ თვისების სამართლიანობა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მეორე ჯამის მაგიერ მხოლოდ ერთი შესაკრები გვექნება მოცემული, ვთქვათ $\overline{Q}$. დავამტკიცოთ, რომ:

$$(2)\qquad (\overline{P_1}+\overline{P_2}+\ldots+\overline{P_n})\,.\,\overline{Q}=\overline{P_1}\,.\,\overline{Q}+\overline{P_2}\,.\,\overline{Q}+\ldots+\overline{P_n}\,.\,\overline{Q}.$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ (იხ. წინა პარაგრაფის ფორმულა (2)) $(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n)\cdot\overline{Q}=|Q|\cdot\text{გეგ}\,(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\ldots+\overline{P}_n)=|Q|\cdot(\text{გეგ}\,\overline{P}_1+\text{გეგ}\,\overline{P}_2+$ $+\ldots+\text{გეგ}\,\overline{P}_n)=|Q|\cdot\text{გეგ}\,\overline{P}_1+|Q|\cdot\text{გეგ}\,\overline{P}_2+\ldots+|Q|\cdot\text{გეგ}\,\overline{P}_n$, სადაც გეგმილები აღებული არიან $\overline{Q}$-ს მიმართულებაზე; სიმოკლისათვის ჩვენ გამოვტოვეთ ნიშნაკი გეგმილთა ღერძის აღმნიშვნელი[1].

მაგრამ იმავე (2)-ფორმულის ძალით (იხ. წინა §-ი), გვექნება:

$|Q|\cdot\text{გეგ}\,\overline{P}_1=\overline{Q}\cdot\overline{P}_1$, $|Q|\cdot\text{გეგ}\,\overline{P}_2=\overline{Q}\cdot\overline{P}_2$ და ასე შემდეგ.

თუ შევიტანთ ამათ წინა ფორმულაში, მივიღებთ სასურველ შედეგს.

გადავიდეთ ეხლა ზოგად შემთხვევაზე და სიმოკლისათვის დავკმაყოფილდეთ ორი შესაკრებისაგან შემდგარი ჯამებით $(\overline{P}_1+\overline{P}_2)$ და $(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2)$; (მსჯელობის მსვლელობა იგივე იქნება რამდენიც არ უნდა იყოს შესაკრებთა რიცხვი). თუ დროებით შემოვიღებთ აღნიშვნას $\overline{Q}=\overline{Q}_1+\overline{Q}_2$ და გამოვიყენებთ უკვე მიღებულს (2) ფორმულას, გვექნება:

$$(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\cdot\overline{Q}=\overline{P}_1\cdot\overline{Q}+\overline{P}_2\;\overline{Q},$$

და თუ აქ შევიტანთ $\overline{Q}$-ს მაგიერ მის მნიშვნელობას, მივიღებთ:

$$(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\cdot(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2)=\overline{P}_1\cdot(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2)+\overline{P}_2\cdot(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2)=\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_1+\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_2+$$
$$+\overline{P}_2\cdot\overline{Q}_1+\overline{P}_2\cdot\overline{Q}_2$$ რის დამტკიცებაც გვსურდა.

სავარჯიშო მაგალითები

1. თუ ვიცით, რომ სიდიდით და გეზით მუდმივი F ძალის[2] მუშაობა R, მოდების წერტილის წრფივი გადადგილების დროს A მდებარეობიდან B-მდებარეობაში, გამოისახება ფორმულით: $R=\overline{AB}\cdot\overline{F}$, დაამტკიცეთ მუშაობის შემდეგი უმარტივესი თვისებანი:

a) მუშაობა ნულის ტოლია, როცა ძალა მართობია გადადგილების მიმართულებისა.

b) ერთსა და იმავე წერტილზე მოდებული რამოდენიმე ძალის ტოლქმედი ტოლია მდგენელთა მუშაობების ჯამისა (ერთ წერტილზე მოდებულ ძალთა გეომეტრიული ჯამისა; ამ უკანასკნელთ მდგენელნი ეწოდებათ; ტოლქმედი მოდებულია იმავე წერტილზე).

c) $\overline{F}$ ძალის მუშაობათა ჯამი, მოდების წერტილის $ABC\ldots KL$ მრავალკუთხედის $AB, BC,\ldots KL$ გვერდებზე გადადგილების დროს (წვეროებს გავივლით აღნიშნული მიმდევრობით) ტოლია იმავე ძალის მუშაობისა მოდების წერტილის წრფივი გადადგილების დროს $\overline{AL}$ შემკვრელზე.

[1]) გავიხსენოთ, რომ P აღნიშნავს გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობას.

[2]) „ძალა“ ჩვენ გვესმის, როგორც ვექტორი ძალის გამომსახველი.

2. დაამტკიცეთ ნებისმიერი ორი $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორისათვის სამართლიანი ტოლობა:

$$(\overline{P}+\overline{Q})^2=(\overline{P}+\overline{Q})\cdot(\overline{P}+\overline{Q})=\overline{P}^2+\overline{Q}^2+2\,\overline{P}\cdot\overline{Q}=|P|^2+|Q|^2+2|P|\cdot|Q|\cos\vartheta,$$

სადაც ϑ არის კუთხე $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებს შორის.

3. განიხილეთ ოთხი ვექტორი $\overline{AB}=\overline{CD}$, $\overline{AC}=\overline{BD}$, რომელნიც $ABDC$ რომბის გვერდებს შეადგენენ, ისე, რომ $|AB|=|CD|=|AC|=|BD|$. თუ გამოვსახავთ $\overline{AD}$ და $\overline{BC}$ დიაგონალებს, როგორც გვერდთა გეომეტრიულ ჯამს და სხვაობას, დაამტკიცეთ რომ $\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$, ესე იგი, რომ რომბის დიაგონალები ურთიერთ მართობი არიან.

4. თუ ABC სამკუთხედის გვერდებს მივაწერთ გარკვეულ მიმართულებას, როგორც ერთერთ უკვე განხილულ მაგალითში (იხ. ნახ. 27), და თუ კვადრატში ავამაღლებთ ორივე ნაწილს შემდეგი ტოლობისას $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$, დავამტკიცოთ ტრიგონომეტრიიდან ცნობილი „კოსინუსების თეორემა“: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$; (აღნიშვნები იხ. ნახ. 27).

24. ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის გამოსახვა ოდენური ნამრავლის საშუალებით. თუ $\overline{T}$ აღნიშნავს Δ ღერძის მგეზავს, მაშინ ნებისმიერი $\overline{P}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილის (Δ ღერძზე) ალგებრული მნიშვნელობა შეიძლება განხილული იყოს, როგორც $\overline{P}$ ვექტორისა და $\overline{T}$ მგეზავის ოდენური ნამრავლი, ესე იგი,

(1) $$\text{გეგ}_{\Delta}\,\overline{P}=\overline{T}\cdot\overline{P}.$$

მართლაც: $\overline{T}\cdot\overline{P}=|T|\cdot|P|\cdot\cos\vartheta=1\cdot|P|\cdot\cos\vartheta=|P|\cos\vartheta$, ვინაიდან $|T|=1$ (ϑ არის კუთხე $\overline{P}$-სა და Δ-ს შორის, ანუ, რაც იგივეა, $\overline{P}$ და $\overline{T}$ შორის). უკანასკნელი ფორმულა ამტკიცებს გამოთქმულ დებულებას.

თავი მეორე

ვექტორისა და წერტილის წრფივი კოორდინატები

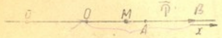
I. წრფივი კოორდინატები

ჩვენ გადავდივართ ეხლა გეომეტრიულ სახეთა და რიცხვთა კავშირის განმახორციელებელს ერთერთ ხერხზე. დავიწყოთ უმარტივესი გეომეტრიული სახეებით — წერტილებით და ვექტორებით და შემოვიღოთ ამ სახეთა წრფივი კოორდინატების ცნება. აღებული გეომეტრიული სახის კოორდინატებად იწოდებიან, საზოგადოდ, ის რიცხვები, რომელნიც სავსებით ახასიათებენ ამ სახესთან დაკავშირებულს არსებითს გეომეტრიულ ელემენტებს.

25. კოორდინატები წრფეზე (ღერძზე). ვთქვათ მოცემულია რომელიმე ღერძი Ox (ნახ. 32) და ამ ღერძზე მდებარე რომელიმე ვექტორი $\overline{P}=\overline{AB}$. ვთქვათ $\overline{u}$ აღნიშნავს Ox ღერძის მ გ ე ზ ა ვ ს. მაშინ (იხ. § 11) შეგვიძლიან დავწეროთ:

$$\overline{P}=\overline{u}\,.\,X, \tag{1}$$

სადაც X აღნიშნავს $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას Ox ღერძის გასწვრივ, ესე იგი: $X=\pm|P|$, სადაც + ან − აიღება იმის მიხედვით ემთხვევა $\overline{P}$-ს გეზი ღერძის გეზს, თუ მისი მოპირდაპირეა. თუ $\overline{P}$ ვექტორი მოცემულია, მაშინ X-სიდიდე სრულიად განსაზღვრულია (მაგ., თუ



ნახ. 32.

$\overline{P}$ ვექტორის სიგრძე 4-ის ტოლია, ხოლო მისი გეზი ღერძის გეზის მოპირდაპირეა, მაშინ $\overline{P}=-4\,\overline{u}$ და $X=-4$). პირიქით, თუ მოცემულია X რიცხვი, მაშინ $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძე და გეზი სრულიად განსაზღვრული იქნება (სიგრძე იქნება X-ის აბსოლუტური მნიშვნელობის ტოლი, ხოლო გეზი განისაზღვრება X-ის ნიშნით; მაგ., თუ $X=-3$, მაშინ $\overline{P}=-3\,\overline{U}$ და ამ ვექტორის სიგრძე 3-ის ტოლი იქნება, გეზი კი — ღერძის გეზის მოპირდაპირე).

ისე როგორც ზევით, ჩვენ ჩავთვლით ვექტორს სრულიად მოცემულად, თუ ცნობილია მისი სიგრძე და გეზი (ასე რომ მის მდებარეობას არავითარ ყურადღებას არ მივაქცევთ). ამიტომ შეგვიძლიან ვთქვათ, რომ X სრულიად განსაზღვრავს $\overline{P}$-ვექტორს.

ეს რიცხვი X (ე. ი., უბრალოდ, $\overline{P}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა Ox ღერძის გასწვრივ) იწოდება როგორც Ox-ღერძზე მდებარე $\overline{P}$ ვექტორის წრფივი კოორდინატი. თვით Ox ღერძი კი იწოდება როგორც კოორდინატთა წრფივი სისტემის ღერძი.

განმარტების თანახმად აშკარაა, რომ გეომეტრიულად თანატოლი ორი ვექტორის კოორდინატები ურთიერთ თანატოლი იქნებიანდა პირიქით, თუ ორი ვექტორის კოორდინატები თანატოლი არიან, მაშინ ვექტორები გეომეტრიულად თანატოლი იქნებიან.

ვთქვათ ეხლა O აღნიშნავს Ox ღერძზე რაიმე მუდმივ წერტილს (ნახ. 32). ნებისმიერი სხვა M წერტილის მდებარეობა ამ ღერძზე სრულიად განისაზღვრება $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძით და გეზით; მეორეს მხრივ ამ ვექტორის სიგრძე და გეზი სრულიად განისაზღვრება მისი კოორდინატით. აღვნიშნოთ x-ით ეს კოორდინატი ე. ი. $x = OM$[1].

x რიცხვი ამავე დროს იწოდება, M წერტილის წრფივ კოორდინატად; O წერტილი კი — კოორდინატთა სათავედ.

ხშირად x კოორდინატს უწოდებენ M-წერტილის აბსცისს, ხოლო Ox ღერძს — აბსცისათა ღერძს.

კოორდინატთა სათავე ყოფს აბსცისათა ღერძს ორ ნაწილად. იმ წერტილებს, რომელნიც ერთერთ ნაწილზე ძევრან (ჩვენს ნახაზზე — O წერტილის მარჯვნივი წერტილები) დადებითი აბსცისები აქვთ, ხოლო უარყოფითი აბსცისები ექნებათ მეორე ნაწილზე მდებარე წერტილებს (ნახაზზე — O წერტილის მარცხნივ). პირველ ნაწილს შეიძლება ეწოდოს x-ღერძის დადებითი ნაწილი, ხოლო მეორეს — უარყოფითი.

ზემოხსენებულის მიხედვით აბსცისი შეიძლება კიდევ შემდეგნაირად განიმარტოს:

M-წერტილის აბსცისი არის ის x-რიცხვი, რომლის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია M წერტილის მანძილისა სათავიდან და რომელიც

---

[1]) გავიხსენოთ, რომ OM (უხაზოთ ზევით) აღნიშნავს დადებითს ან უარყოფითს რიცხვს (იმის და მიხედვით თუ როგორი გეზი აქვს $\overline{OM}$ ვექტორს)

ითვლება დადებითად, თუ M იმყოფება ღერძის დადებით ნაწილზე, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში უარყოფითად.[1]

თუ x არის M-წერტილის კოორდინატი, ამის გამოსათქმელად სწერენ: წერტილი $M(x)$. მაგ., წერტილი $M(-3)$ არის ის წერტილი, რომლის მანძილი სათავიდან სამი ერთეულის ტოლია და რომელიც ღერძის უარყოფით ნაწილზე მდებარეობს.

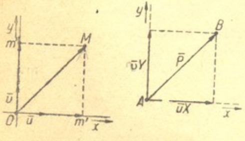
სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ ვექტორები: $\overline{P}=2\,\overline{T}$; $\overline{P}=\frac{1}{2}\,\overline{T}$; $\overline{P}=-\,\frac{2}{3}\overline{T}$
2. ააგეთ წერტილები: $M(-1)$; $M(0)$; $M(10)$.
2. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის: $M_1(-4)$ და $M_2(12)$.
4. მოცემულია ორი წერტილი $A(-3)$ და $B(-4)$; იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორი და $\overline{BA}$-ვექტორი.

პას. $\overline{AB}=-\,\overline{u}$, $\overline{BA}=+\,\overline{u}$.

26. ალებულ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის დაშლა ორი მიმართულებით. ვექტორის და წერტილის კოორდინატები სიბრტყეზე. წინა პარაგრაფში ჩვენ დავრწმუნდით, რომ ალებულ წრფეზე (ღერძზე) მდებარე ვექტორი სავსებით განისაზღვრება ერთი რიცხვის (კოორდინატის) მოცემით; იგივე შეეხება წერტილის მდებარეობას ალებულ წრფეზე.

ჩვენ ეხლავე დავინახავთ, რომ სიბრტყეზე მდებარე ვექტორის განსაზღვრისათვის აუცილებელია ორი რიცხვის მოცემა; იგივე შეეხება წერტილის მდებარეობის განსაზღვრას სიბრტყეზე.



ნახ. 33.

ავილოთ მოცემულ სიბრტყეზე ორი ურთიერთ გადამკვეთი ღერძი Ox და Oy (ნახ. 33). დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი ვექტორი $\overline{P}=\overline{AB}$, რომელიც ამ სიბრტყეზე იმყოფება, შეიძლება ისეთი ორი ვექტორის გეომეტრიულ ჯამად წარმოვადგინოთ, რომელთა შორის თითოეული პარალელურია ერთ-ერთი ღერძისა Ox, Oy.

[1]) ყველა ზემოხსენებულში იგულისხმება, რომ ერთხელ და სამუდამოდ არჩეულია სიგრძის ერთეული (მაგ., სანტიმეტრი), რომლითაც იზომებიან ნაკვეთების სიგრძეები. სხვანაირად აზრი არ ექნებოდა სიტყვებს: „x-ის აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია მანძილისა...“.

მართლაც, გადავიტანოთ $\overline{P}$ ვექტორი (მისი სიგრძისა და მიმართულების შეუ-ცვლელად) $\overline{OM}$ მდებარეობაში ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს ღერძთა გადაკვეთის O წერტილს.

შემდეგ ამისა, გავიყვანოთ Mm' და Mm'' წრფეები შესაბამისად Oy და Ox-ის პარალელური და ვთქვათ m' და m'' აღნიშნავენ ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილებს Ox-სთან და Oy-თან. მაშინ ცხადია, რომ:

(1) $$\overline{P} = \overline{OM} = \overline{Om'} + \overline{Om''},$$

რაც ჩვენ წინადადებას ამტკიცებს.

უკანასკნელ ტოლობას შეგვიძლიან მივცეთ ისეთი სახე, რომელშიაც მკაფიოდ მჟღავნდება (1)-დაშლის ხასიათი.

მართლაც, აღვნიშნოთ $\overline{u}$-ით და $\overline{v}$-თი შესაბამისად Ox-ღერძისა და Oy-ღერძის მგეზავები. მაშინ (იხ. § 11):

(2) $$\overline{Om'} = \overline{u}X;\ \overline{Om''} = \overline{v}Y,$$

სადაც X და Y შესაბამისად $\overline{Om'}$ და $\overline{Om''}$ ვექტორთა ალგებრულ მნიშვნელობებს აღნიშნავენ Ox და Oy ღერძების გასწვრივ. ამნაირად:

(3) $$\overline{P} = \overline{u}\,X + \overline{v}\,Y.$$

X და Y სიდიდეების განმარტების მიხედვით, ცხადია, რომ:

(4) $$X = \text{გეგ}_x\,\overline{OM} = \text{გეგ}_x\,\overline{P}\ (\text{აღებული } Oy\text{-ის პარალელურად})$$
$$Y = \text{გეგ}_y\,\overline{OM} = \text{გეგ}_y\,\overline{P}\ (\text{აღებული } Ox\text{-ის პარალელურად});$$

(გეგ$_x$ და გეგ$_y$ აღნიშნავენ გეგმილთა ალგებრულ მნიშვნელობებს შესაბამისად Ox და Oy ღერძზე).

შევნიშნოთ, რომ (1)-ის ან (3)-ის მისაღებად აუცილებელი არაა $\overline{P}$ ვექტორის გადატანა სათავეში; შეიძლება ამ ვექტორის A სათავეზე გავიყვანოთ დამხმარე Ax' და Ay' ღერძები ისეთნაირადვე მოგეზული, როგორც ძველი ღერძები Ox და Oy და ამის შემდეგ მოვახდინოთ ზემოაღნიშნული აგება (იხ. ნახ. 33).

ადვილი გასაგებია, რომ (3) სახის დაშლა ყოველთვის შესაძლებელია და ამასთანავე ერთნაირად, ესე იგი, თუ როგორმე სხვანაირად შეიძლება იმავე ვექტორის დაშლა ვიპოვოთ: $\overline{P} = \overline{u}\,X' + \overline{v}\,Y'$, მაშინ უსათუოდ: $X' =$ გეგ$_x\,\overline{P} = X$; $Y' =$ გეგ$_y\,\overline{P} = Y$ (გეგმილები აიღებიან შესაბამისად Oy და Ox ღერძის პარალელურად). მართლაც, დავაგეგმილოთ $\overline{P} = \overline{u}\,X' + \overline{v}\,Y'$ ტოლობის ორივე მხარე Ox-ღერძზე (პარალელურად Oy ღერძისა); გვექნება:

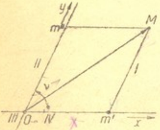
$$\text{გეგ}_x\,\overline{P} = X'\,\text{გეგ}_x\,\overline{u} + Y'\,\text{გეგ}_x\,\overline{v}.$$

მაგრამ ცხადია, რომ გეგ$_x\,\overline{u} = 1$, გეგ$_x\,\overline{v} = 0$, ამიტომ [illegible]
გვაძლევს: გეგ$_x\,\overline{P} = X'$; ანალოგიურად Y'-სათვის.

ამნაირად X და Y სიდიდეები სრულიად განსაზღვრული არიან, თუ მოცემულია $\overline{P}$ ვექტორი. პირიქით, თუ X და Y მოცემულია, $\overline{P}$ ვექტორი სავსებით განისაზღვრება (3) ფორმულით [1].

X და Y სიდიდეებს ეწოდებათ $\overline{P}$ ვექტორის წრფივი კოორდინატები. იმის აღსანიშნავად, რომ X და Y არიან $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები, სწერენ $\overline{P}\ (X.Y)$ ანუ $\overline{P} = (X,Y)$; უკანასკნელი ტოლობა უნდა გვესმოდეს როგორც (3) ფორმულის მოკლე ჩაწერა.

კოორდინატების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ გეომეტრიულად თანატოლ ვექტორთა კოორდინატები თანატოლი არიან და პირიქით, ერთნაირ კოორდინატებიანი ვექტორები გეომეტრიულად თანატოლი არიან.



ნახ 34·

ცხადია აგრეთვე, რომ თუ ვექტორი ნულის ტოლია (ე. ი. მისი სიგრძე ნულის ტოლია) მაშინ მისი კოორდინატებიც ნულის ტოლნი არიან და პირიქით.

ვთქვათ ეხლა, რომ M არის ნებისმიერი წერტილი მოცემულ სიბრტყეზე. M-წერტილის მდებარეობა სიბრტყეზე სრულიად განსაზღვრულია თუ ცნობილია $\overline{OM}$ ვექტორის სიგრძე და გეზი (ნახ. 34), სხვანაირად, რომ ვთქვათ, თუ ცნობილია ამ ვექტორის კოორდინატები. ამ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ.

აღვნიშნოთ x და y-ით ეს კოორდინატები, ესე იგი:

$$x = \text{გეგ}_x\,\overline{OM}\ \ (Oy \text{ ღერძის პარალელურად}),$$

$$y = \text{გეგ}_y\,\overline{OM}\ \ (Ox \text{ ღერძის პარალელურად});$$

რიცხვები x და y, რომელნიც სავსებით განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე, იწოდებიან როგორც M წერტილის წრფივი (დეკარტის) კოორდინატები. წერტილის მოცემა ნიშნავს მისი კოორდინატების მოცემას.

---

[1]) კიდევ ერთხელ გავიხსენოთ, რომ თავისუფალი ვექტორი განსაზღვრულად ითვლება, თუ ცნობილია მისი სიგრძე და გეზი; სათავის მდებარეობას მნიშვნელობა არ აქვს.

იმის გამოსათქმელად, რომ x და y არიან M წერტილის კოორდინატები, სწერენ: წერტილი $M(x,y)$.

x და y კოორდინატების კიდევ სხვანაირი განმარტება შეიძლება: ვთქვათ m' და m'' აღნიშნავენ M წერტილის გეგმილებს Ox და Oy ღერძებზე (შესაბამისად Oy და Ox ღერძების პარალელურად აღებულთ); მაშინ: $x = Om'$, $y = Om''$; სხვანაირად რომ ვთქვათ, x არის Om' ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა, ე. ი. m' წერტილის კოორდინატი Ox ღერძზე (იხ. წინა §-ი); ანალოგიურად y-სათვის.

M წერტილის ასაგებად მოცემული მისი კოორდინატების მიხედვით, საკმარისია მოვზომოთ (ნიშნის მხედველობაში მიღებით) Ox ღერძზე ნაკვეთი $Om' = x$, ხოლო Oy ღერძზე ნაკვეთი $Om'' = y$ და მიღებულ წერტილებზე გავავლოთ შესაბამისად Oy და Ox ღერძების პარალელური წრფეები; ამ უკანასკნელთა გადაკვეთის წერტილი სწორედ M წერტილი იქნება.

Ox და Oy ღერძები იწოდებიან კოორდინატთა წრფივი სისტემის ღერძები, ხოლო O წერტილი არის კოორდინატთა სათავე. ის კუთხე კი, რომელსაც შეადგენენ ღერძთა დადებითი მიმართულებანი, საკოორდინატო კუთხედ იწოდება.

კოორდინატთა ღერძები მთელ სიბრტყეს ყოფენ ოთხ ნაწილად: I, II, III IV (იხ. ნახ. 34), რომელთა შორის თითოეული დახასიათდება იმ წერტილთა კოორდინატების ნიშნით, რომელნიც ამ ნაწილს ეკუთვნიან.

I ნაწილში ორივე კოორდინატი დადებითია, II ნაწილში $x<0$, $y>0$; III ნაწილში $x<0$, $y<0$ და IV ნაწილში $x>0$, $y<0$.

I ნაწილი (ე. ი. სადაც $x>0$, $y>0$) ხანდისხან იწოდება, როგორც ნორმალური საკოორდინატო კუთხე.

ჩვეულებრივ, ნახაზზე Ox ღერძი (x-სთა ღერძი) ჰორიზონტალურად გაიყვანება და მიიგზება მარცხნიდან მარჯვენისაკენ, ხოლო Oy ღერძი (y-კთა ღერძი)—ქვევიდან ზევით.

x კოორდინატს M წერტილის აბსცისი ეწოდება, ხოლო y კოორდინატს — ორდინატი. ამისდამიხედვით x-სთა ღერძი იწოდება აგრეთვე აბსცისათა ღერძად, ხოლო y-კთა ღერძი — ორდინატთა ღერძად.

ნახაზის ზემოაღნიშნული აგებულების მიხედვით, იმ წერტილებს, რომელნიც Oy ღერძის მარჯვნივ ძევრან, დადებითი აბსცისები აქვთ, ხოლო წერტილებს, რომელნიც ამ ღერძის მარცხნივ ძევრან — უარყოფითი აბსცისები. სრულიად აგრეთვე წერტილებს, რომელნიც Ox-ის ზევით ძე-

ვრან, დადებითი ორდინატები აქვთ, ხოლო ამ ღერძის ქვევით — უარყოფითი ორდინატები.

მაგ., წერტილი $M(-3, +5)$ მოთავსებულია Oy ღერძის მარცხნივ და Ox ღერძის ზევით და ამ წერტილის ასაგებად საკმარისია Ox-ზე O წერტილიდან მარცხნივ მოვზომოთ ნაკვეთი სიგრძით 3, ხოლო ამ ნაკვეთის ბოლოზე გავლებულ Oy-ის პარალელურ წრფეზე მოვზომოთ ზევითკენ ნაკვეთი სიგრძით 5.

სავარჯიშო მაგალითები

1. ააგეთ კოორდინატთა ღერძების რომელიმე სისტემა Ox, Oy და სიგრძის ერთეულის არჩევით ააგეთ წერტილები: $M(0,0)$, $M(5,0)$, $M(0,3)$ $M(0,-1)$, $M(5,-2)$, $M(-3,-3)$.

2. ააგეთ ვექტორი $\overline{P}(3,-1)$, რომლის სათავე კოორდინატთა სათავეშია.

3. ააგეთ ვექტორები (1,2) და (4,8) და დაამტკიცეთ, რომ ისინი პარალელური არიან.

4. თუ საკოორდინატო კუთხე 60^0-ის ტოლია, ააგეთ წერტილები: $M_1(1,0)$ და $M_2(0,2)$, იპოვეთ მანძილი მათ შორის. პას. $|M_1 M_2| = \sqrt{5}$.

5. თუ საკოორდინატო კუთხე 60^0-ის ტოლია, იპოვეთ მანძილი $M(4,4)$ წერტილისა სათავიდან. პას. $4\sqrt{3}$.

6. დაამტკიცეთ, რომ $M(x,y)$ წერტილის მანძილი სათავემდე მოიცემა შემდეგი ფორმულით: $|OM| = \sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\nu}$, სადაც ν არის საკოორდინატო კუთხე (აქ ისარგებლეთ § 7-ის 1 მაგალითის შედეგებით).

ეს ფორმულა ქვევით გამოყვანილი იქნება ზოგადი მეთოდის საშუალებით.

27. მართკუთხოვანი კოორდინატები სიბრტყეზე. თუ ν კუთხე ღერძთა შორის მართია $\left(\nu=\frac{\pi}{2}\right)$, მაშინ კოორდინატთა სისტემას ეწოდება წრფივი მართკუთხოვანი ანუ ორთოგონალური სისტემა.

ამ შემთხვევაში $\overline{AB}$ ვექტორის, ანუ რაც იგივეა, $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები არიან ამ ვექტორის მართკუთხოვან გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი საკოორდინატო ღერძებზე:

$$X = \text{გეგ}_x\overline{P}, \quad Y = \text{გეგ}_y\overline{P}$$

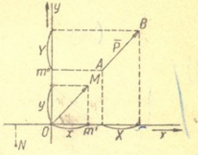
სხვანაირად ეს ფორმულები შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწერონ:

$$X = \bar{u}\overline{P}, \quad Y = \bar{v}\overline{P}, \tag{1}$$

სადაც $\bar{u}$, $\bar{v}$ აღნიშნავენ საკოორდინატო ღერძების მგეზავებს (იხ. § 24).

სრულიად აგრეთვე, ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები არიან ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის მართკუთხოვან გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი საკოორდინატო ღერძებზე (იხ. ნახ. 35).

შეიძლება აგრეთვე ითქვას, რომ M-წერტილის კოორდინატე-ბი არიან ამ წერტილის მანძილები ღერძებამდე შესაფერ-ნადო ნიშნით აღებულნი. სახელდობრ x არის M წერტილის მანძილი Oy ღერძამდე აღებული $(+)$ ნიშნით, თუ M მდებარეობს Oy ღერძიდან იმ მხარეზე, საითკენაც Ox ღერძია მიმართული; ანალოგიურად y-სათვის.



ნახ. 35.

იმისათვის, რომ ავაგოთ მაგ., $N(-3, -2)$ წერტილი, საჭიროა Ox ღერძზე, უარყოფითი მიმართულებით O წერტილიდან მოვზომოთ ნაკვეთი სიგრძით 3 და ამ ნაკვეთის ბოლოზე ავმართოთ პერპენდიკულარი სიგრძით 2 Oy-ღერძის მოპირდაპირე მიმართულებით; ამ პერპენდიკულარის ბოლო არის სწორედ N წერტილი (იხ. ნახ. 35).

სავარჯიშო მაგალითები.

1. ააგეთ ვექტორი $\overline{P}=(5,4)$, იპოვეთ მისი სიგრძე და იმ φ კუთხის ტანგენსი, რომელსაც იგი შეადგენს Ox ღერძთან.

პას. $|P|=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{5}$.

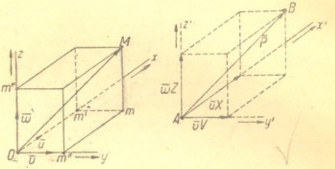
2. ააგეთ წერტილები $A(1,1)$, $B(3,2)$, შემდეგ ააგეთ ვექტორი $\overline{AB}$, გამოითვალეთ მისი კოორდინატები და იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილი φ კუთხე.

პას. $\overline{AB}=(2,1)$; $|AB|=\sqrt{5}$, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

28. ვექტორის დაშლა სამი მიმართულებით. ვექტორის და წერტილის კოორდინატები სივრცეში. სივრცისათვის ზემოხსენებული ცნებების განზოგადოება თავისთავად მოითხოვება. ავიღოთ სამი ღერძი Ox, Oy, Oz, რომელნიც გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში O და არ ძევრან ერთსა და იმავე სიბრტყეში (იხ. ნახ. 36). ამ ღერძებს უწოდოთ კოორდინატთა წრფივი სისტემის ღერძები, ხოლო yOz, zOx, xOy-ს — საკოორდინატო სიბრტყეები. O წერტილს უწოდოთ კოორდინატთა სათავე.

ვთქვათ $\overline{P}=\overline{AB}$ არის რომელიმე ვექტორი, ნებისმიერად მდებარე სივრცეში. დავამტკიცოთ, რომ ეს ვექტორი შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც სამი ვექტორის გეომეტრიული ჯამი, რომელთა შორის თვითეული პარალელურია ერთერთი ღერძის.

მართლაც, გადავიტანოთ $\overline{P}$ ვექტორი $\overline{OM}$ მდებარეობაში, ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს O-ს და M-ზე გავატაროთ სამი სიბრტყე, შესაბამისად სამი საკოორდინატო სიბრტყის პარალელური. ვთქვათ m', m'', m''' აღნიშნავენ გატარებულ სიბრტყეთა და შესაბამისად Ox, Oy, Oz ღერძთა გადაკვეთის წერტილებს.



ან. 36.

ცხადია, რომ სამი საკოორდინატო სიბრტყე სამს გატარებულ სიბრტყეებთან ერთად შეადგენენ პარალელეპიპედს და რომ:

(1) $$\overline{P}=\overline{OM}=\overline{Om'}+\overline{Om''}+\overline{Om'''},$$

რითაც მტკიცდება ზევით გამოთქმული დებულება.

ისე როგორც §-26-ში, უკანასკნელი დაშლა შეიძლება გამოვსახოთ მგეზავთა საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ $\overline{u}$, $\overline{v}, \overline{w}$ არიან შესაბამისად Ox, Oy, Oz ღერძების მგეზავები. მაშინ აშკარაა, რომ:

(2) $$\overline{Om'}=\overline{u}\,.\,X,\quad \overline{Om''}=\overline{v}\,Y,\quad \overline{Om'''}=\overline{w}\,Z,$$

სადაც X, Y, Z აღნიშნავენ შესაბამისად $\overline{Om'}$, Om'' და $\overline{Om'''}$ ვექტორთა ალგებრულ მნიშვნელობებს Ox, Oy და Oz ღერძების გასწვრივ. ამნაირად ვღებულობთ ძირითად ფორმულას.

(3) $$\overline{P}=\overline{u}\,X+\overline{v}\,Y+\overline{w}\,Z.$$

X, Y და Z სიდიდეთა განმარტების თანახმად, აშკარაა, რომ $X=გეგ_x\,\overline{P}$ (აღებული yOz სიბრტყის პარალელურად), $Y=გეგ_y\,\overline{P}$ (აღებული zOx სიბრტყის პარალელურად), $Z=გეგ_z\,\overline{P}$ (აღებული xOy სიბრტყის პარალელურად).

შევნიშნოთ, რომ (3) დაშლის მისაღებად არ არის აუცილებელი $\overline{P}$ ვექტორის გადატანა კოორდინატთა სათავეში. საკმარისია ამისათვის $\overline{P}$ ვექ-

ტორის A სათავიდან გავატაროთ დამხმარე ღერძები Ax', Ay', Az' (ძველ ღერძებსავით მოგეზულნი) და მოვახდინოთ შემდგომ ზემოხსენებული აგება (იხ. ნახ. 36).

ადვილი გასაგებია, რომ (3) დაშლა შესაძლებელია მხოლოდ ერთნაირად, ესე იგი, თუ რაიმე სხვა გზით იმავე $\overline{P}$ ვექტორისათვის ვიპოვით, რომ:

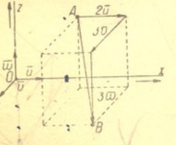
$$\overline{P} = \overline{u}\, X' + \overline{v}\, Y' + \overline{w}\, Z',$$

მაშინ აუცილებლად უნდა იყოს[1]:

$$X = X';\ Y = Y';\ Z = Z'.$$

ამნაირად, თუ მოცემულია $\overline{P}$ ვექტორი, მაშინ X, Y და Z სიდიდეები სავსებით განსაზღვრული იქნებიან და პირიქით, თუ მოცემული არიან X, Y და Z, ამით $\overline{P}$ ვექტორი სავსებით განისაზღვრება (3) ფორმულით.

მაგ., თუ $X = 2$, $Y = 3$, $Z = -3$, მაშინ ვექტორი $\overline{P} = 2\overline{u} + 3\overline{v} - 3\overline{w}$ აიგება შემდეგნაირად: ნებისმიერი A წერტილიდან გავატარებთ ვექტორს $2u$ (ე. ი, ვექტორს სიგრძით 2 და Ox ღერძთან ერთნაირად მოგეზულს); ამ ვექტორის ბოლოდან გავატარებთ ვექტორს $3\overline{v}$ (ესე იგი ვექტორს სიგრძით 3 და Oy ღერძთან ერთნაირად მოგეზულს); დაბოლოს უკანასკნელი ვექტორის ბოლოდან გავატარებთ ვექტორს $-3\overline{w}$ (ესე იგი ვექტორს სიგრძით 3 და Oz ღერძის მოპირდაპირედ მოგეზულს). შემკვრელი $\overline{AB}$ ვექტორი, რომლის სათავე A-შია, ხოლო ბოლო მოთავსებულია უკანასკნელად აგებული ვექტორის B ბოლოში, არის საძიებელი $\overline{P}$ ვექტორი (იხ. ნახ. 37). შეიძლებოდა, რასაკვირველია, აგება მოგვეხდინა პარალელეპიპედის საშუალებითაც (როგორც ეს ნაჩვენებია პუნქტირით 37 ნახაზზე), მაგრამ ზემოხსენებული აგება გაცილებით უფრო მარტივია.



ნახ. 37.

X, Y და Z იწოდებიან $\overline{P}$ ვექტორის წრფივ კოორდინატებად. იმის აღსანიშნავად, რომ X, Y, Z, არიან $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები, სწერენ: $\overline{P} = (X,\ Y,\ Z)$; ეს არის (3) ფორმულის გამარტივებული ჩაწერა.

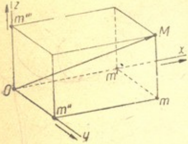
კოორდინატთა ცნების განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ გეომეტრიულად თანატოლი ვექტორების კოორდინატები თანატოლი არიან

[1]) დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია იმისა, რაც ჩვენ ვიხმარეთ ორი მიმართულებით დაშლის შემთხვევისათვის (იხ. წინა §-ი).

და პირიქით, ერთნაირ კოორდინატებიანი ვექტორები გეომეტრიულად თანატოლი არიან.

აშკარაა აგრეთვე, რომ თუ ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ მისი სამივე კოორდინატი ნულის ტოლია და პირიქით.

ანალოგიურად იმისა, რაც ორი განზომილების შემთხვევისათვის გვქონდა (§ 26), სივრცეში რომელიმე M წერტილის მდებარეობა შეიძლება განვსაზღვროთ $\overline{OM}$ ვექტორის კოორდინატებით. ამ შემთხვევაშიაც $\overline{OM}$ ვექტორს ეწოდება M წერტილის რადიუს-ვექტორი O წერტილის მიმართ (ნახ. 38).



ნახ. 38.

აღვნიშნოთ x, y და z-ით ხსენებული კოორდინატები, ესე იგი, ვთქვათ:

$x = \text{გეგ}_x\, \overline{OM}$ (აღებული yOz სიბრტყის პარალელურად)

$y = \text{გეგ}_y\, \overline{OM}$ (აღებული zOx სიბრტყის პარალელურად)

$z = \text{გეგ}_z\, \overline{OM}$ (აღებული xOy სიბრტყის პარალელურად).

x, y, და z რიცხვებს ეწოდებათ M წერტილის წრფივი კოორდინატები. თუ ეს რიცხვები მოცემული არიან, მაშინ M წერტილის აგებისათვის საკმარისია მოვზომოთ საკოორდინატო ღერძებზე (ნიშნების გათვალისწინებით) ნაკვეთები $\overline{Om'} = x$, $\overline{Om''} = y$, $\overline{Om'''} = z$ და m', m'', m''' წერტილებზე გავატაროთ სიბრტყეები შესაბამისად yOz, zOx და xOy-ის პარალელურად. ამ სიბრტყეთა გადაკვეთის წერტილი მოგვცემს M-წერტილს.

სიმარტივისათვის წარმოვიდგინოთ, რომ xOy სიბრტყე ჰორიზონტალურია, Oz ღერძი მიმართულია ქვევიდან ზევით, Ox ღერძი—მარცხნიდან მარჯვნივ, ხოლო Oy ღერძი ჩვენს მხარეზეა.

საკოორდინატო სიბრტყეები ჰყოფენ მთელ სივრცეს რვა ნაწილად.. სახელდობრ, ნახაზის ზემოხსენებული აგებულების მიხედვით, xOy სიბრტყე ყოფს სივრცეს ორ ნაწილად: ზედა და ქვედა; თითოეული ნაწილი იყოფა თავის მხრივ yOz სიბრტყით ორ ნაწილად: მარჯვენა და მარცხენა; დაბოლოს, მიღებულ ოთხ ნაწილთაგან თითოეული იყოფა zOx სიბრტყით ორ ნაწილად: წინა და უკანა. ამნაირად რვა ნაწილს ვღებულობთ.

ამ რვა ნაწილთა შორის თითოეული დახასიათდება x, y და z კოორდინატების ნიშნებით, სახელდობრ, თუ $z >$ ან < 0, მაშინ წერტილი ძევს xOy სიბრტყის ზევით ან ქვევით; თუ $y >$ ან < 0, მაშინ წერტილი ძევს zOx სიბრტყის წინ ან უკან; თუ $x >$ ან < 0, წერტილი ძევს yOz სიბრტყის მარჯვნივ ან მარცხნივ.

სივრცის ის ნაწილი, სადაც სამივე კოორდინატი დადებითია, იწოდება როგორც ნორმალური საკოორდინატო კუთხე; ეს ნაწილი შესდგება (თუ მივიღებთ მხედველობაში ნახაზის ზემოხსენებულ აგებულებას) იმ წერტილთაგან, რომელნიც მდებარეობენ xOy სიბრტყის ზევით, yOz სიბრტყის მარჯვნივ და xOz-ის წინ.

შენიშვნა. ადვილი გასაგებია, რომ $\overline{u}$, $\overline{v}$ და $\overline{w}$ მგეზავთა მაგიერ შეიძლება რომელიმე სხვა ვექტორები ავიღოთ $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, რომელნიც ნულისაგან განსხვავდებიან და მოგეზული არიან შესაბამისად Ox, Oy და Oz ღერძთა გასწვრივ. თუ შევნიშნავთ, რომ (1) ფორმულაში შეიძლება დაიწეროს:

$$\overline{Om'} = \overline{U} P_u, \quad \overline{Om''} = \overline{V} P_v, \quad \overline{Om'''} = \overline{W} P_w,$$

სადაც P_u, P_v, P_w რომელიმე რიცხვებია (იხ. § 11). ჩვენ შეგვიძლიან (1) ფორმულა შემდეგნაირად გადავწეროთ:

$$\overline{P} = \overline{U} P_u + \overline{V} P_v + \overline{W} P_w. \tag{4}$$

ცხადია, რომ $\overline{P}$ ვექტორის ასეთი სახით წარმოდგენისათვის შეიძლება ვისარგებლოთ რომელიმე ისეთი სამი ვექტორით, $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$, რომელნიც პარალელური არ არიან ერთი და იგივე სიბრტყისა. (საკმარისია გადავიტანოთ განსახილავი ვექტორების სათავეები რომელიმე O წერტილში და მოვგეზოთ Ox, Oy და Oz ღერძები ამ ვექტორთა მიხედვით, რომ მივიღოთ გარჩეული შემთხვევა).

სრულიად ანალოგიურად, თუ $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ წარმოადგენენ სამ ვექტორს, რომელნიც პარალელური არიან ერთი და იგივე სიბრტყისა, ისე რომ, $\overline{U}$ და $\overline{V}$ არ არიან ურთიერთ პარალელური, მაშინ ყოველთვის ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\overline{P} = \overline{U} P_u + \overline{V} P_v, \tag{4a}$$

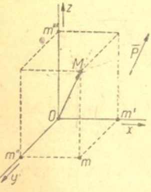
სადაც P_u და P_v რომელიმე რიცხვებია. ეს სრულიად აშკარა გახდება, თუ სამივე ვექტორს გადავიტანთ ერთსა და იმავე სიბრტყეზე ისე, რომ მათი სათავე დაემთხვეს რომელიმე O წერტილს. მაშინ საკმარისია Ox, Oy ღერძები მოვგეზოთ $\overline{U}$ და $\overline{V}$ ვექტორთა მიხედვით, რომ დაიწეროს ტოლობა: $\overline{P} = \overline{Om'} + \overline{Om''}$, საიდანაც გამომდინარეობს მოთხოვნილი ფორმულა.

29. მართკუთხოვანი კოორდინატები სივრცეში. უფრო მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც კოორდინატთა ღერძები წყვილ-წყვილად ურთიერთ მართობი არიან. მაშინ კოორდინატთა სიბრტყეებიც ურთიერთ მართობი იქნებიან და კოორდინატთა სისტემას ამ შემთხვევაში ეწოდება წრფივი მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი ანუ ო რ თ ო გ ო ნ ა ლ უ რ ი, (არამართკუთხოვანი სისტემები იწოდებიან როგორც ირიბკუთხოვანი). მართკუთხოვანი სისტემის შემთხვევაში ვექტორის კოორდინატები არიან მისი მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობანი კოორდინატთა ღერძებზე:

$$X = \text{გეგ}_x \overline{P}, \qquad Y = \text{გეგ}_y \overline{P}. \qquad Z = \text{გეგ}_z \overline{P}.$$

თუ ისე, როგორც ზევით, $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ აღნიშნავენ კოორდინატთა ღერძების მგეზავებს, მაშინ უკანასკნელი ფორმულები შეიძლება ასე გადაიწეროს:

(1) $$X = \overline{u} \cdot \overline{P}, \quad Y = \overline{v} \cdot \overline{P}, \quad Z = \overline{w} \cdot \overline{P}.$$



ნახ. 39.

სრულიად აგრეთვე M წ ე რ ტ ი ლ ი ს კოორდინატები x, y, z არიან ამ წერტილის $\overline{Om}$ რადიუს-ვექტორის მ ა რ თ კ უ თ ხ ო ვ ა ნ ი გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობანი კოორდინატთა ღერძებზე (ნახ. 39).

ცხადია, რომ x, y, z კოორდინატები რიცხობრივ ტოლნი არიან M წერტილის მ ა ნ ძ ი ლ ე ბ ი ს ა შესაბამისად Oyz, Ozx, Oxy სიბრტყეებამდე, ნიშანი კი განისაზღვრება შემდეგი წესით: თუ M მოთავსებულია საკოორდინატო სიბრტყის იმ მხარესაკენ, საითკენაც მიმართულია ამ სიბრტყის მართობი ღერძი, მაშინ მანძილი უნდა ავიღოთ + ნიშნით; წინააღმდეგ შემთხვევაში (—) ნიშნით.

შენიშვნა. შ ე ბ მ უ ლ ი ან ს რ ი ა ლ ა ვექტორის შემთხვევაში (§ 5), რიცხვები X, Y, Z ვერ ჩაითვლებიან მის კოორდინატებად, ვინაიდან ისინი ყველა არსებით ელემენტებს ვერ განსაზღვრავენ. მაგალითად, შებმული ვექტორის შემთხვევაში, მისი სრული განსაზღვრისათვის საჭიროა, გარდა X, Y, Z-ისა, კიდევ ვიცოდეთ მისი სათავის კოორდინატები x, y, z; ამგვარად შებმულ ვექტორს ე ქ ვ ს ი კოორდინატი აქვს: X, Y, Z, x, y, z.

ამიტომ შებმული ან სრიალა ვექტორების შემთხვევებში X, Y, Z რიცხვებს ჩვენ კოორდინატებს კი არ უწოდებთ, არამედ მ დ გ ე ნ ე ლ ე ბ ს (კომპონენტებს). ეს შენიშვნა, რასაკვირველია, ეკუთვნის, როგორც მართკუთხოვანი სისტემის შემთხვევას, ისე ირიბკუთხოვანის.

II. ძირითადი ფორმულები, რომელთაც ერთნაირი სახე აქვთ მართკუთხოვანსა და ირიბკუთხოვან კოორდინატებში

ამ განყოფილებაში ჩვენ გამოვიყვანთ ვექტორთა და წერტილთა წარმოდგენასთან დაკავშირებულს რამოდენიმე ძირითად ფორმულას წრფივი კოორდინატების საშუალებით. ამ განყოფილებაში განხილული ყველა ფორმულები ისეთი არიან, რომ მათ სრულიად ერთნაირი სახე აქვთ როგორც მართკუთხოვანი კოორდინატების გამოყენებისას, ისე ირიბკუთხოვანის[1].

ამ ფორმულებს ჩვენ გამოვიყვანთ რამოდენიმე მარტივი ძირითადი ამოცანის ამოხსნასთან დაკავშირებით.

ყოველ ამოცანას ჩვენ ჯერ ამოვხსნით სამი განზომილების ზოგადი შემთხვევისათვის, და შემდგომ ამისა, იმ გამარტივებებზე მივუთითებთ, რომელნიც მიღებულ ფორმულებში მოხდება, თუ განვიხილავთ ერთსა და იმავე სიბრტყეში მოთავსებულ ნაკვთებს; ამ სიბრტყეს Oxy სიბრტყეთ ჩავთვლით.

ამ უკანასკნელი შემთხვევის შესაფერი ფორმულები. ე. ი. ორი განზომილების შემთხვევის, შეიძლება ან უშუალოდ გამოვიყვანოთ, ან და ზოგადი ფორმულებიდან მივიღოთ, თუ ამაში ნულის ტოლად ვიგულისხმებთ ვექტორთა Z კოორდინატებს ან წერტილთა Z კოორდინატებს.

შემდეგში, სიტყვები: ვიპოვოთ ვექტორი (ან წერტილი), მოცემულია ვექტორი (ან წერტილი), ასე უნდა გვესმოდეს: ვიპოვოთ ვექტორის (ან წერტილის) კოორდინატები, მოცემულია ვექტორის (ან წერტილის) კოორდინატები.

30. ამოცანა 1. მოცემულ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია რამოდენიმე ვექტორი: $\bar{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$, $\bar{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2),\ldots, \bar{P}_n=(X_n, Y_n, Z_n)$. საჭიროა ვიპოვოთ ამ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამი $\bar{P}$ (ე. ი., ვიპოვოთ $\bar{P}$ ვექტორის კოორდინატები X, Y, Z).

ჩვენ გვაქვს (§ 24): $X=$ გეგ$_x$ $\bar{P}$ (Oyz სიბრტყის პარალელურად აღებული). მაგრამ § 15-ის ძალით გვექნება: გეგ$_x$ $\bar{P}=$ გეგ$_x$ $\bar{P}_1+$ გეგ$_x$ $\bar{P}_2+\ldots+$ გეგ$_x$ $\bar{P}_n$ (გეგმილები აიღებიან Oyz სიბრტყის პარალელურად), ესე იგი: $X=X_1+X_2+\ldots+X_n$.

ანალოგიურად მივიღებთ: $Y=Y_1+Y_2+\ldots+Y_n$, $Z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n$; ესე იგი სიტყვიერად: გეომეტრიული ჯამის თითოეული

[1]) ასეთი ფორმულების ჯგუფის არსებობა შემთხვევითი არ არის. ეს ფორმულები გამოსახავენ ნაკვთების, ეგრედწოდებულს, აფინურ თვისებებს, რაზედაც საუბარი გვექნება მეორე ნაწილში.

კოორდინატი შემადგენელ ვექტორთა შესაბამისი კოორ-
დინატების ჯამის ტოლია.

იმავე გზით ამოიხსნება შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ ორი ვექტორის გეომეტრიული სხვაობა. სახელდობრ, თუ $\overline{Q}=(X, Y, Z)$ არის $\overline{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$ ვექტორების გეომეტრიული სხვაობა, მაშინ: $X=X_1-X_2$, $Y=Y_1-Y_2$, $Z=Z_1-Z_2$, ესე იგი გეომეტრიული სხვაობის თითოეული კოორდინატი საკლები და მაკლები ვექტორის შესაბამისი კოორდინატების სხვაობის ტოლია.

ორი განზომილების შემთხვევაში $\overline{P}_1=(X_1, Y_1)$ ..., $\overline{P}_n (X_n, Y_n)$ ვექტორთა გეომეტრიული ჯამის კოორდინატები (X, Y), რასაკვირველია, იმავე ფორმულებით მოიცემიან, რაც ზევით (მხოლოდ უნდა უკუვაგდოთ ფორმულა Z-სათვის); იგივე შეეხება გეომეტრიულ სხვაობას.

სავარჯიშო მაგალითები.

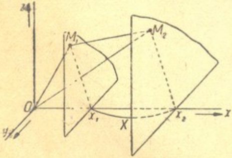
1. იპოვეთ $\overline{P}_1=(3,1)$, $\overline{P}_2=(0,-1)$ და $\overline{P}_3=(-1,-1)$ ვექტორების (სიბრტყეზე) გეომეტრიული ჯამი.

პას. $(2,-1)$.

2. იპოვეთ $\overline{P}_1=(3, 1, 2)$, $\overline{P}_2=(3, 3, 3)$ და $\overline{P}_3=(0, 1, 1)$ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი.

პას. $(6, 5, 6)$.

3. ნივთიერ M წერტილზე მოდებულია n ძალა: $\overline{F_1}=(X_1, Y_1, Z_1)$, $\overline{F_2}=(X_2, Y, Z_2),\ldots, \overline{F_n}=(X_n, Y_n, Z_n)$.



ნახ. 40.

რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდენ ამ ძალთა კოორდინატები მისთვის, რომ ეს ძალები წონასწორობაში იმყოფებოდენ (ე. ი., რომ მათი ტოლქმედი, რომელიც მათი გეომეტრიული ჯამის ტოლია, ნულად იქცეს).

პას. $X_1+X_2+\ldots+X_n=0$, $Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=0$, $Z_1+Z_2+\ldots+Z_n=0$.

31. ამოცანა 2. ვექტორის განსაზღვრა მოცემული სათავისა და ბოლოს მიხედვით. ვთქვათ მოცემულია ორი წერტილი $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$ და $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$ და მოითხოვება $\overline{M_1M_2}$ ვექტორის X, Y, Z კოორდინატების პოვნა (ნახ. 40).

გვაქვს გეომეტრიული ტოლობა: $\overline{OM_2}=\overline{OM_1}+\overline{M_1M_2}$, საიდანაც $\overline{M_1M_2}=\overline{OM_2}-\overline{OM_1}$, ე. ი. $\overline{M_1M_2}$ ვექტორი არის $\overline{OM_2}$ და $\overline{OM_1}$ ვექტორების გეო-

მეტრიული სხვაობა. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ გეომეტრიული სხვაობის კოორდინატები სამცირი და მამცირი ვექტორის შესაბამი კოორდინატების სხვაობის ტოლია. მეორეს მხრივ $\overline{OM}_2$ ვექტორის კოორდინატები არიან x_2, y_2, z_2, ხოლო $\overline{OM}_1$ ვექტორის კოორდინატები იქნებიან x_1, y_1, z_1. მაშასადამე: $X=x_2-x_1$, $Y=y_2-y_1$, $Z=z_2-z_1$ და ამით ამოცანა ამოხსნილია. სიტყვიერად: ვექტორის X კოორდინატი ტოლია ვექტორის ბოლოს აბსცისი მინუს სათავის აბსცისი; ანალოგიურად Y და Z კოორდინატებისათვის. რასაკვირველია, იგივე შეეხება ორი განზომილების შემთხვევასაც.

სავარჯიშო მაგალითები.

1. ააგეთ Oxy სიბრტყეზე წერტილები A (1,0) და B (3,2) და შეამოწმეთ ნახაზზე რომ $\overline{AB}=(2,2)$, $\overline{BA}=(-2,-2)$.

2. იპოვეთ $\overline{AB}$ ვექტორი მისი A (3,3, 2) სათავისა და B $(-1, 5, -2)$ ბოლოს მიხედვით.

პას. $\overline{AB}=(-4, +2, -4)$.

3. $\overline{P}=(X, Y, Z)$ ვექტორის სათავე იმყოფება A (x, y, z) წერტილში. იპოვეთ მისი ბოლო B (x_1, y_1, z_1).

პას. $x_1=x+X$, $y_1=y+Y$; $z_1=z+Z$.

4. სიბრტყეზე პარალელოგრამის სამი მიმდევარი წვერო არის A (1,1). B $(2,-1)$, C (6, 8). იპოვეთ მეოთხე წვერო D (x, y).

ამოხსნა. გვაქვს $\overline{AD}=\overline{BC}=(4,9)$. მაშასადამე, (იხ. წინა ვარჯიშობა), $x=1+4=5$, $y=1+9=10$.

32. ამოცანა 3. მოცემული ვექტორისა და მოცემული რიცხვის ნამრავლის პოვნა. ვთქვათ $\overline{P}=(X, Y, Z)$ მოცემული ვექტორია, ხოლო m მოცემული რიცხვი. § 17-ის თანახმად, ცხადია, რომ $m\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები X', Y', Z' მოიცემიან ფორმულებით:

$$X'=mX, \quad Y'=mY, \quad Z'=mZ, \tag{1}$$

ესე იგი, სიტყვიერად, ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლის კოორდინატები წარმოადგენენ ამ ვექტორის კოორდინატებისა და მოცემული რიცხვის ნამრავლთ; ნათქვამი შეიძლება კიდევ ფორმულით გამოვსახოთ: $m\,(X, Y, Z)=(mX, mY, mZ)$ [ეს ფორმულა ასე უნდა იკითხებოდეს: m გამრავლებული X, Y, Z კოორდინატებიან ვექტორზე, mX, mY, mZ კოორდინატებიანი ვექტორის ტოლია].

კერძოდ თუ $m=-1$, მივიღებთ, რომ $(-1)\,\overline{P}$ ანუ $(\overline{-P})$ ვექტორის კოორდინატები შესაბამისად $-X, -Y, -Z$-ის ტოლნი არიან.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, ურთიერთ მოპირდაპირე P და $(-P)$ ვექტორების კოორდინატები აბსოლუტური სიდიდით ტოლნი არიან, ხოლო ნიშნები მოპირდაპირე აქვთ. ეს სრულიად აშკარაა თვით ვექტორის კოორდინატების განმარტებიდანაც.

ორი განზომილების შემთხვევაში გვექნება: $m(X, Y) = (mX, mY)$.

სავარჯიშო მაგალითები

1. სიბრტყეზე მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}_1=(8, 2)$, $\overline{P}_2=(6, 10)$. იპოვეთ ვექტორი $\frac{1}{2}\ (\overline{P}_1+\overline{P}_2)$.

პას. (7, 6)

~~პას. (1, 3, 3).~~

2. მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}_1=(1, 3, 5)$ და $\overline{P}_2=(2, 0, 4)$. იპოვეთ ვექტორი $\frac{1}{3}\left(\overline{P}_1+\overline{P}_2\right)$.

პას. 1, 1, 3.

3. მოცემულია წერტილი A (5, 4, 3). იპოვეთ $\overline{OA}$ ნაკვეთის შუაწერტილი, სადაც O არის კოორდინატთა სათავე..

ამოხსნა. საძიებელი შუაწერტილი C მოიცემა ფორმულით $\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$. მაშ., C წერტილის კოორდინატები არიან $\frac{5}{2}$, 2, $\frac{3}{2}$

4. განიხილება ნივთიერ წერტილთა სისტემა $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$, $M_2\ (x_2\ y_2, z_2)$, ..., $M_n\ (x_n, y_n, z_n)$, რომელთა მასები არიან $m_1, m_2, \dots, m_n$. ამ სისტემის სიმძიმის ცენტრი განისაზღვრება ფორმულით:

$$\overline{OC}=\frac{m_1\overline{OM}_1+m_2\overline{MO}_2+\dots+m_n\overline{MO}_n}{m_1+m_2+\dots+m_n}=\frac{1}{m}\left(m_1\overline{OM}_1+\dots+m_n\overline{OM}_n\right),$$

სადაც O ნებისმიერი წერტილია, ხოლო m აღნიშნავს ჯამს $m_1+m_2+\dots+m_n$ (იხ. § 10, ვარჯიშობა 2). თუ O-ს ჩავთვლით სათავეთ, იპოვეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. გვაქვს: $\overline{OM}_1=(x_1, y_1, z_1), \dots, \overline{OM}_n=(x_n, y_n, z_n)$. ამიტომ $m_1\overline{OM}_1=(m_1x_1, m_1y_1, m_1z_1), \dots, m_n\overline{OM}_n=m_nx_n\ (m_ny_n, m_nz_n)$.

მაშასადამე:

$$\overline{OC}=\frac{1}{m}(m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n, m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n, m_1z_1+m_2z_2+\dots+m_nz_n),$$

საიდანაც, თუ მივიღებთ, რომ $\overline{OC}=(x, y, z)$, ე. ი. თუ C წერტილის კოორდინატებს აღვნიშნავთ x, y, z-ით გვექნება:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\dots+m_nx_n}{m}, \quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m},$$

$$z=\frac{m_1z_1+m_1z_2+\dots+m_nz_n}{m}.$$

5. თუ ვიცით, რომ თანატოლ მასიანი ორი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრი მათ შუა იმყოფება, როგორ ვიპოვოთ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების შემაერთებელი ნაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები (x, y, z) წინა ვარჯიშობის გამოყენებით.

პას. $x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$

33. ამოცანა 4. ორი ვექტორის პარალელობის პირობის პოვნა.

ვთქვათ მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}_1 (X_1, Y_1, Z_1)$ და $\overline{P}_2(X_2, Y_2, Z_2)$; საჭიროა ვიპოვოთ პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდენ მოცემულ ვექტორთა კოორდინატები იმისათვის, რომ ისინი პარალელური იყვენ.

თუ $\overline{P}_2=0$, ე. ი. თუ $X_2=Y_2=Z_2=0$, მაშინ მისი გეზი განუზღვრელია, და იგი შეიძლება ჩაითვალოს ნებისმიერი მიმართულების პარალელურად, კერძოდ, $\overline{P}_1$ ვექტორის.

ვთქვათ ეხლა $\overline{P}_2 \neq 0$. იმისათვის რომ $\overline{P}_2$ ვექტორი $\overline{P}_1$-ის პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ:

$$\overline{P}_1=k \cdot \overline{P}_2, \tag{1}$$

სადაც k რომელიმე რიცხვია [იხ. § 11, ფორმულა (1a)]; ეს პირობა შეიძლება ასე გადაიწეროს (იხ. წინა პარაგრაფი):

$$X_1=kX_2, \quad Y_1=kY_2, \quad Z_1=kZ_2, \tag{2}$$

ანუ

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2} = K. \tag{3}$$

სწორედ ეს არის პარალელობის საძიებელი პირობა. მაშ, ორი ვექტორის პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი ვექტორის კოორდინატები მეორის კოორდინატების პროპორციული იყვნენ (იხ. კიდევ შენიშვნა პარაგრაფის ბოლოში).

ორი განზომილების შემთხვევაში პარალელობის პირობა ასე გამოისახება (თუ $\overline{P}_2 \neq 0$):

$$X_1=kX_2, \quad Y_1=kY_2, \tag{2a}$$

სადაც k რომელიმე რიცხვია; ანუ:

$$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2} \tag{3a}$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ ვამბობთ, რომ სიდიდეები $a_1, a_2, \ldots a_n$ პროპორციულია $b_1, b_2, \ldots, b_n$ სიდიდეებისა (რომელთა შორის ყველა ერთდროულად ნულის ტოლი არ არი), ეს ნიშნავს რომ:

$$a_1 = kb_1,\ a_2 = kb_2, \ldots,\ a_n = kb_n \tag{A}$$

სადაც k რომელიმე რიცხვია (რომელიც შეიძლება ნულის ტოლიც იყოს). თუ $b_1\ b_2 \ldots,\ b_n$ სიდიდეთაგან არც ერთი არაა ნულის ტოლი, მაშინ ეს გარემოება შეიძლება ასე ჩაიწეროს;

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}\,. \tag{B}$$

მაგრამ თუ $b_1,\ b_2, \ldots b_n$ რიცხვთაგან ზოგიერთი ნულის ტოლია, მაგალითად, $b_1,\ b_2, \ldots b_m$, ნულის ტოლი არ არიან, მაგრამ $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_n = 0$, მაშინ წინა ფორმულის მაგიერ, (A)-ს ძალით გვექნება:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_m}{b_m},\quad a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_n = 0. \tag{B'}$$

მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც შეიძლება (B) ფორმულა შევინარჩუნოთ, თუ შევთანხმდებით შემდეგში: (B) ფ ო რ მ უ ლ ი დ ა ნ ი ს ფ ა რ დ ო ბ ე ბ ი ამოიშლებიან, რომელთა მნიშვნელნი ნულის ტოლი არიან, ხოლო ამოშლილ ფარდობათა მრიცხველნი ნულს გაეტოლებიან.

სწორედ ასე უნდა გვესმოდეს (3) ფორმულა ანუ $(3a)$, როცა X_2, Y_2, Z_2 რიცხვთაგან ერთი ან ორი ნულის ტოლია (სხ. ვარჯ. 3 და 4).

სავარჯიშო მაგალითები

1. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორები $\overline{P}_1 = (3,\ 2,\ 1)$ და $\overline{P}_2 = \left(\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$ პარალელური არიან.

2. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორები $\overline{P}_1 = (3,\ 0,\ 2)$ და $\overline{P}_2 = (-6, 0, -4)$ პარალელური არიან.

3. იპოვეთ (2, 0, 5) და (X, Y, Z) ვექტორთა პარალელობის პირობა.

პ ა ს. (3) პირობა გვაძლევს: $\dfrac{X}{2} = \dfrac{Y}{0} = \dfrac{Z}{5}$.

ეს თანაფარდობანი ასე უნდა გვესმოდეს (იხ. შენიშვნა ამ პარაგრაფის ბოლოში):

$$\frac{X}{2} = \frac{Z}{5},\quad Y = 0.$$

4. იპოვეთ (3, 0, 0) და $(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორთა პარალელობის პირობა.

პ ა ს. (3) პირობის გამოყენება მოგვცემს: $\frac{X}{3}=\frac{Y}{0}=\frac{Z}{0}$; ზემოხსენებული შენიშვნის ძალით, ამ ფორმულიდან უნდა ამოვშალოთ $\frac{Y}{0}$ და $\frac{Z}{0}$; მაშინ არავითარი ტოლობა აღარ რჩება, და თუ ამოშლილი წილადების მრიცხველთ ნულს გაუტოლებთ, მივიღებთ $Y=0$, $Z=0$; სწორედ ეს არის პარალელობის საძიებელი პირობა. ეს, რასაკვირველია, თავიდანვეაც აშკარაა, ვინაიდან (3,0,0,) ვექტორი Ox ღერძის პარალელურია და მაშასადამე $(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორიც ამ ღერძის პარალელური უნდა იყოს, ე. ი. $Y=Z=O$, ხოლო X ნებისმიერი სიდიდეა.

33a. გაგრძელება. ორი ვექტორის პარალელობის პირობა შეიძლება ისეთი უფრო ზოგადი და სიმეტრიული სახით ჩამოყალიბდეს, რომლისათვისაც შემთხვევა $\overline{P}_2=0$ გამონაკლისს არ შეადგენს. სახელდობრ, ადგილი დასანახია, რომ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების პარალელობისათვის, აუცილებელი და საკმარისია ადგილი ქონდეს ტოლობას:

$$l\,\overline{P}_1+m\,\overline{P}_2=0, \tag{1}$$

სადაც l და m რომელიმე რიცხვებია, რომელთაგან ერთი მაინც განსხვავდება ნულისაგან. მართლაც, თუ $\overline{P}_2\neq 0$, მაშინ შეიძლება ავიღოთ $l\neq 0$ და წინა ტოლობა ასე დაიწერება: $P_1=-\frac{m}{l}\overline{P}_2$ ანუ $\overline{P}_1=k\overline{P}_2$, სადაც $k=-\frac{m}{l}$; მიღებული ტოლობა კი უკანასკნელი პარაგრაფის (1) ფორმულაა. თუ კი $\overline{P}_1=0$. მაშინ (1) ტოლობას ადგილი ექნება, თუ ავიღებთ $l=0,\ m\neq 0$.

ზემოხსენებულის მიხედვით, წინა პარაგრაფის (1) პირობათა მაგიერ, შეიძლება დაიწეროს;

$$lX_1+mX_2=0,\ lY_1+mY_2=0,\ lZ_1+mZ_2=0, \tag{2}$$

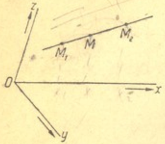
სადაც l და m არიან რომელიმე რიცხვები, ერთდროულად ნულის არატოლი.

34. ამოცანა 5. სამი წერტილის კოლინეარობის[1] პირობის პოვნა. იმისათვის რომ სამი წერტილი $M(x,y,z)$, $M_1(x_1,y_1\ z_1)$, $M_2(x_2\ y_2\ z_2)$ ერთსა და იმავე წრფეზე იმყოფებოდენ, აუცილებელი და საკმარისია. რომ ვექტორები $\overline{M_1M}$ და $\overline{M_1M_2}$ პარალელური იყვნენ (ნახ.41).

---

[1]) წერტილებს ეწოდებათ კოლინეარი, თუ ისინი ერთსა და იმავე წრფეზე იმყოფებიან.

მაგრამ $\overline{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. მაშასადამე, წინა პარაგრაფის დასკვნის ძალით, ამ ვექტორების კოლინეარობის პირობა ასე გამოისახება.



ნახ. 41.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{1}$$

სწორედ ეს არის სივრცეში მოცემული სამი წერტილის კოლინეარობის პირობა. სიბრტყეზე სამი $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ წერტილის კოლინეარობის პირობა ასე გამოისახება:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{2}$$

35. ამოცანა 6. სამი მოცემული ვექტორის კომპლანარობის პირობებისა და ოთხი მოცემული წერტილის კომპლანარობის პირობის პოვნა. თავისუფალ ვექტორებს კომპლანარი ეწოდებათ, თუ ისინი ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელური არიან. (ვინაიდან თავისუფალი ვექტორები შეიძლება გადატანილ იქმნენ სიგრძისა და გეზის შეუცვლელად, ამიტომ კომპლანარი ვექტორები ყოველთვის შეგვიძლიან ერთსა და იმავე სიბრტეზე მოთავსებულად ჩავთვალოთ). ორი ვექტორი ყოველთვის კომპლანარია; ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია ეს ვექტორები ისე გადავიტანოთ, რომ მათი სათავეები ერთი მეორეს დაემთხვენ.

ვთქვათ ეხლა მოცემულია სამი ვექტორი; $\overline{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\overline{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, $\overline{P}_3 = (X_3, Y_3, Z_3)$. ადვილი დასანახია, რომ ამ ვექტორთა კომპლანარობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი სამი l, m და n რიცხვის არსებობა, რომელნიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან და რომელთათვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$l\overline{P}_1 + m\overline{P}_2 + n\overline{P}_3 = 0. \tag{1}$$

მართლაც, წარმოვიდგინოთ, რომ $l \neq 0$. მაშინ წინა ტოლობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$\overline{P}_1 = a\overline{P}_2 + b\overline{P}_3, \tag{1a}$$

სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია; $a = -\frac{m}{l}$, $b = -\frac{n}{l}$. წინა ტოლობა გვიჩვენებს, რომ $\overline{P}_1$ ვექტორი არის $a\overline{P}_2$ და $b\overline{P}_3$ ვექტორების გეომეტრიული ჯამი და რომ ამიტომ მისი წარმოდგენა შეიძლება ამ უკანასკნელ ვექტო-

რებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალად. მაშ, $\overline{P}_1$ ვექტორი $a\overline{P}_2$, $b\overline{P}_3$ ვექტორების კომპლანარია და მაშასადამე $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორებისაც. პირიქით, თუ $\overline{P}_1$ ვექტორი კომპლანარია $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორების მიმართ, და თუ ეს უკანასკნელნი ურთიერთ პარალელური არ არიან, მაშინ § 33-ის ბოლოში მოყვანილი შენიშვნის ძალით, ყოველთვის აქვს ადგილი (1*a*) სახის ტოლობას, რაც (1) ტოლობის კერძო სახეს წარმოადგენს, როცა $l=1$ $a=-m$, $b=-n$. თუ, დაბოლოს, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ პარალელური არიან, მაშინ ყოველთვის არსებობს ისეთი, ერთდროულად ნულის არატოლი, ორი რიცხვი m და n, რომ (იხ. § 33*a*): $m\overline{P}_2+n\overline{P}_3=0$. ეს ტოლობა იგივეა, რაც (1), თუ მივიღებთ $l=0$.

მაშ (1) პირობის აუცილებლობა და საკმარისობა დამტკიცებულია. ეს პირობა შეიძლება ასე დაიწეროს;

$$l\,.\,(X_1,\ Y_1,\ Z_1)+m\,.\,(X_2,\ Y_2,\ Z_2)+n.(X_3,\ Y_3,\ Z_3)=0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს;

$$lX_1=mY_1=nZ_1=0,\ lX_2=mY_2=nZ_2=0,\ lX_3=mY_3=nZ_3=0. \qquad (2)$$

მაგრამ დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია, რომ ისეთი l, m, n რიცხვების არსებობისათვის, რომელნიც ერთდროულად ნულები არ არიან და უკანასკნელ განტოლებათა სისტემას აკმაყოფილებენ, აუცილებელი და საკმარისია რომ:

$$\begin{vmatrix} X_1, & Y_1, & Z_1 \\ X_2, & Y_2, & Z_2 \\ X_3, & Y_3, & Z_3 \end{vmatrix}=0 \qquad (3)$$

სწორედ ეს არის მოცემული სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა, გამოსახული მათი კოორდინატების საშუალებით.

კ ო მ პ ა ლ ა ნ ა რ წერტილებად იწოდებიან ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მდებარე წერტილები. ორი ან სამი წერტილი ყოველთვის კომპლანარია. იმისათვის, რომ ოთხი წერტილი $M(x,\ y,\ z)$, $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ კომპლანარი იყოს, ცხადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორები $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ იყვენ კომპლანარი[1]. თუ შევნიშნავთ, რომ;

$$\overline{M_1M}=(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1),\ \overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\overline{M_1M_3}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$$

---

[1]) რასაკვირველია, ამ ვექტორთა მაგიერ შეიძლება ავიღოთ ვექტორები $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_2}$, $\overline{MM_3}$ ა. შ.

და ამ ვექტორებზე გამოვიყენებთ (3) პირობას, მივიღებთ;

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0; \qquad (3a)$$

სწორად ეს არის ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა. ეს პირობა შეიძლება გადაიწეროს უფრო სიმეტრიული სახით. სახელდობრ იგი ასე შეიძლება დაიწეროს:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

მართლაც, თუ დეტერმინანტის მეორე სტრიქონს მიმდევრობით გამოვაკლებთ პირველი, მესამე და მეოთხე სტრიქონიდან, მარცხენა მხარეში მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$$

ეს კი იგივეა, რაც $(3a)$-ს მარცხენა მხარე.

36. ამოცანა 7. მოცემული ორი წერტილის შემაერთებელი წრფის ნაკვეთის გაყოფა მოცემული ფარდობით. მოცემულ ორ წერტილზე გამავალ Δ წრფის M_1M_2 ნაკვეთის გაყოფა მოცემული λ ფარდობით, ეს ნიშნავს Δ წრფეზე ისეთი M წერტილის პოვნას, რომ:

$$\overline{M_1M} = \lambda\, \overline{MM_2}\ ; \qquad (1)$$

(მიაქციეთ ყურადღება ასოების რიგს, რაც ანგარიშგასაწევია). არსებითად, პირობა, რომ M წერტილი Δ წრფეზე ძევდეს თავისთავად გამომდინარეობს (1) პირობიდან.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $\lambda > 0$, მაშინ M წერტილი უნდა იმყოფებოდეს M_1-სა და M_2-წერტილს შორის, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\overline{M_1M}$ და $\overline{MM_2}$ ვექტორებს ერთი და იგივე გეზი უნდა ქონდეთ; თუ კი $\lambda < 0$,

მაშინ M წერტილი Δ-ზე M_1M_2 ნაკვეთის გარედ უნდა იმყოფებოდეს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში $\overline{M_1M}$ და $\overline{MM_2}$ ვექტორებს მოპირდაპირე ნიშნები უნდა ქონდეთ (შეადგინეთ ნახაზები იმ შემთხვევისათვის, როცა $-1 < \lambda < 0$ და როცა $\lambda < -1$).

ამოცანით მოითხოვება $M(x, y, z)$ წერტილის პოვნა, როცა მოცემულია წერტილები $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ და რიცხვი λ.

პირობის თანახმად: $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda\cdot(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$, ესე იგი: $x-x_1=\lambda(x_2-x)$; $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$, საიდანაც პირდაპირ ვღებულობთ:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

კერძოდ, M_1M_2 ნაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატებისათვის მივიღებთ (ამ შემთხვევაში $\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}, z=\frac{z_1+z_2}{2}, \tag{3}$$

ესე იგი, ეს კოორდინატები არიან ნაკვეთის ბოლოების კოორდინატთა საშუალო არითმეტიკული.

ორი განტოლების შემთხვევაში (2) ფორმულების მაგიერ გვექნება:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2a}$$

შენიშვნა. (2) ფორმულები აზრს კარგავენ, თუ $\lambda=-1$. ადვილი დასანახავია, რომ თუ λ რჩება -1-საგან განსხვავებული, მაგრამ მიისწრაფის ამ მნიშვნელობისაკენ, მაშინ M წერტილი უსასრულოდ შორეული მდებარეობისაკენ მიისწრაფის. ეს გამომდინარეობს როგორც (2) ფორმულებიდან, ისე λ სიდიდის გეომეტრიული მნიშვნელობიდან.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ იმ ნაკვეთის შუაწერტილი, რომელიც აერთებს წერტილებს (0,1,0) და (−3,1,2).

პას. $\left(-\frac{3}{2}, 1, 1\right)$

2. A (0,0) და B (2,2) წერტილებზე (სიბრტყეზე) გამავალ წრფეზე

იპოვეთ M წერტილი, რომელიც AB-ს ყოფს ფარდობით $\lambda=-\frac{1}{2}$ და შეამოწმეთ ნახაზზე შედეგის სამართლიანობა.

3. მოცემულია ორი წერტილი $A(2,3,6)$ და $B(5,8,8)$. იპოვეთ AB წრფეზე ისეთი C წერტილი, რომ B იყოს AC ნაკვეთის შუაწერტილი (მითითება: ამოცანა დაიყვანება AB-ნაკვეთის გაყოფაზე ფარდობით $\lambda=-2$).

პას. $(8,13,10)$

4. სიბტყეზე პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე წვეროა მოცემული $A(2,5)$ და $B(6,6)$ და აგრეთვე დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილი $K(3,8)$. იპოვეთ დანარჩენი წერტილები.

პას. $(4,11)$ და $(0,10)$.

4 *a*. პარალელოგრამის ორი მოსაზღვრე წერტილია მოცემული $A(1,3,-3)$ და $B(2,-5,5)$ და აგრეთვე დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი $K(1,1,1)$. იპოვეთ დანარჩენი წვეროები.

პას. $(1,-1,5)$ და $(0,7,-3)$.

5. $M_1(1,2)$ და $M_2(4,3)$ წერტილებზე გამავალ წრფეზე იპოვეთ ისეთი M წერტილი, რომ $|M_1M|$ და $|MM_2|$ ნაკვეთების სიგრძეთა ფარდობა 2-ის ტოლი იყოს ე. ი. რომ $|M_1M|=2\,|MM_2|$ (მიაქციეთ ყურადღება განსხვავებას (1) ფორმულასა და უკანასკნელ ფორმულას შორის).

ორი პასუხი: $\boxed{M\left(3,\frac{8}{3}\right)}$ და $M(7,4)$

6. მოცემულია სამკუთხედი თავისი წვეროებით $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ $C(x_3,y_3)$; იპოვეთ მისი ერთერთი მედიანა და მასზე ისეთი M წერტილი, რომელიც ყოფს მას ფარდობით $\lambda=2$ (დაწყებული სამკუთხედის წვეროდან) დაამტკიცეთ, რომ ეს წერტილი ორს დანარჩენ მედიანასაც ეკუთვნის და ყოფს მათ იმავე ფარდობით.

ამოხსნა. განვიხილოთ მედიანა AD, სადაც D არის BC გვერდის შუა წერტილი. D-ს კოორდინატები არიან $\frac{x_2+x_3}{2}$, $\frac{y_2+y_3}{2}$.

მაშასადამე $M(x,y)$ წერტილის კოორდინატები იქნებიან.

$$x=\frac{x_1+2\,\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\,,\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\,.$$

ამ გამოსახულებათა სიმეტრია გვიჩვენებს, რომ ჩვენ მივიღებთ იმავე წერტილს, თუ ორს სხვა მედიანას განვიხილავთ. სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს ეწოდება მოცემული სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი.[1]

[1] იგი ემთხვევა უსასრულოდ წვრილი ერთგვაროვანი ფირფიტის (განსახილავი სამკუთხედის სახის) სიმძიმის ცენტრს (ამ სიტყვის ჩვეულებრივი, მექანიკური მნიშვნელობით).

7. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი, რომლის წვეროები არიან: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ (იხ. წინა ვარჯიშობა).

$$\text{პას. } x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \; y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \; z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

8. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები, რომელნიც აერთებენ ტეტრაედრის წვეროებს მოპირდაპირე წახნაგთა ფართობების სიმძიმის ცენტრებთან, იკვეთებიან ერთს M წერტილზე და რომ ეს წერტილი ყოფს ხსენებულ წრფეთა თითოეულ იმ ნაკვეთს, რომელიც მოთავსებულია წვეროსა და მოპირდაპირე წახნაგს შორის, ფარდობით $\lambda=3$.

დამტკიცება სრულიად ანალოგიურია სამკუთხედის მედიანებისათვის მსგავსი დებულების დამტკიცებისა (იხ. ვარჯიშობა 6). M წერტილს ეწოდება მოცემული ტეტრაედრის სიტევის სიმძიმის ცენტრი. მისი კოორდინატები იქნებიან:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{3} \; y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{3}, \; z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{3},$$

სადაც (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) არიან ტეტრაედრის წვეროების კოორდინატები.

9. დაამტკიცეთ, რომ ტეტრაედრის სიტევის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა ტეტრაედრის წვეროებში მდებარე ოთხი ერთნაირი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრს (იხ. § 32, ვარჯ. 4).

დაამტკიცეთ ანალოგიური დებულება სამკუთხედისათვის.

10. თუ ვისარგებლებთ იმით, რომ ორი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ცენტრი ყოფს მათ შემაერთებელ ნაკვეთს მასების უკუპროპორციულ ნაწილებად, გამოიყვანეთ (2) ფორმულები სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების სათანადო ფორმულებიდან (§ 32, ვარჯ.).

III. ძირითადი ფორმულები მართკუთხოვან კოორდინატებში

ამ განყოფილებაში ჩვენ გამოვიყვანთ იმ ძირითად ფორმულებს, რომელნიც საგრძნობლად მარტივდებიან კოორდინატთა მართკუთხოვანი სისტემის გამოყენებით. ამიტომ ამ განყოფილებაში კოორდინატები მართკუთხოვანად იგულისხმებიან. როგორც წინა განყოფილებაში, აქაც ჩვენ ერთდროულად შევისწავლით სამი და ორი განზომილების შემთხვევებს.

37. ამოცანა 8. ორი მოცემული ვექტორის ოდენური (სკალარული) ნამრავლის პოვნა. დავიწყოთ საკოორდინატო

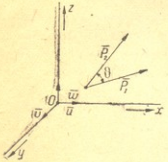
ღერძების $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ მგეზავთა ოდენურ ნამრავლთა განხილვით, ოდენური ნამრავლის თვით განმარტებიდან გვაქვს [1]:

$$\overline{u}^2=\overline{v}^2=\overline{w}^2=1 \tag{1}$$

და

$$\overline{v}\cdot\overline{w}=\overline{w}\cdot\overline{u}=\overline{u}\cdot\overline{v}=0 \tag{2}$$

(1) და (2) ფორმულები წარმოადგენენ საკოორდინატო ღერძების მგეზავთა „გამრავლების ცხრილს“.



ნახ. 42.

ვთქვათ ეხლა მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P_1}=(x_1,y_1,z_1)$ და $\overline{P_2}=(x_2,y_2,z_2)$, და მოითხოვება მათი ოდენური $\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}$ ნამრავლის პოვნა.

ჩვენ ამ ამოცანას ორნაირი ხერხით ამოვხსნით; ორივე ერთნაირად მარტივია.

პირველი ხერხი. გვაქვს: $\overline{P_1}=\overline{u}X_1+\overline{v}Y_1+\overline{w}Z_1$; $\overline{P_2}=\overline{u}X_2+\overline{v}Y_2+\overline{w}Z_2$

§ 23-ში დამტკიცებულის ძალით, საძიებელი ნამრავლის მისაღებად საკმარისია მარჯვენა მხარეები, როგორც ჩვეულებრივი მრავალწევრები გადავამრავლოთ, და მიღებული გამოსახულებანი შევკრიბოთ. ვინაიდან სხვა და სხვა მგეზავთა ნამრავლნი ნულის ტოლი არიან, ამიტომ გვრჩება მხოლოდ იმ წევრთა გადამრავლება, რომელნიც ერთნაირ მგეზავებს შეიცავენ, რაიცა მოგვცემს: $\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=\overline{u}^2X_1X_2+\overline{v}^2Y_1Y_2+\overline{w}^2Z_1Z_2$, ან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (1) ს, დაგვრჩება:

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2. \tag{3}$$

ეს არის ერთერთი ძირითადი ფორმულა.

მეორე ხერხი. გვაქვს: $\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=(\overline{u}X_1+\overline{v}Y_1+\overline{w}Z_1)\cdot\overline{P_2}=$ $=X_1(\overline{u}\cdot\overline{P_2})+Y_1(\overline{v}\cdot\overline{P_2})+Z_1(\overline{w}\cdot\overline{P_2})$. მაგრამ (§ 24) $\overline{u}\cdot\overline{P_2}=$ გეგ. $\overline{P_2}=X_2$; $\overline{v}\cdot\overline{P_2}=Y_2$; $\overline{w}\cdot\overline{P_2}=Z_2$; თუ ამათ წინა ფორმულაში შევიტანთ, ხელახლა (3)-ს მივიღებთ.

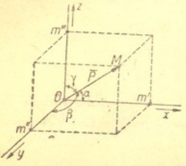
ორი განზომილების შემთხვევაში $\overline{P_1}=(X_1,Y_1)$ და $\overline{P_2}=(X_2,Y_2)$ ვექტორების ოდენური ნამრავლისათვის მივიღებთ:

---

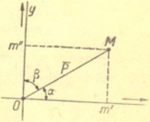
[1]) მაგალითად გვაქვს: $\overline{u}^2=\overline{u}\cdot\overline{u}=1\,.\,1\,.\cos 0=1$, $\overline{v}\cdot\overline{w}=1\,.\,1\,.\cos 90^\circ=0$.

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1\ X_2+Y_1\ Y_2.$$

38. ამოცანა 9. აღებული ვექტორის სიგრძისა და მისი მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი კუთხეების პოვნა; ორ წერტილს შორის მანძილის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია ვექტორი $\overline{P}\ (X,\ Y,\ Z)$; საჭიროა ვიპოვოთ მისი სიგრძე და ის კუთხეები α, β, γ, რომელთაც იგი შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან (ნახ. 43[1]).



ნახ. 43.



ნახ. 43a

სიგრძის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (3) ფორმულით, რომელშიაც მივიღოთ $\overline{P_1}=\overline{P_2}=\overline{P}$. ვინაიდან ჩვენ შემთხვევაში $\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=\overline{P^2}=|P|^2$, ამიტომ ხსენებული ფორმულა მოგვცემს:

$$|\overline{P^2}|=X^2+Y^2+Z^2 \tag{1}$$

ანუ

$$|P|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{2}$$

მკითხველს წინადადება ეძლევა იგივე ფორმულა გამოიყვანოს ელემენტარული გეომეტრიის იმ თეორემის გამოყენებით, რომელიც მართკუთხოვანი პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძის კვადრატს შეეხება.

$\overline{P}$ ვექტორის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან შედგენილი α, β, γ, კუთხეების გამოსათვლელად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ:

$$X=\text{გეგ}_x\,\overline{P}=|P|\cos\alpha;\ Y=|P|\cos\beta;\ \ Z=|P|\ \cos\gamma, \tag{3}$$

[1]) ამ ნახაზზე $\overline{P}$ ვექტორი თვალსაჩინოებისათვის გამოსახულია სათავეზე მოდებულად, რაც ზოგადობას არ არღვევს.

საიდანაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ (2)-ს:

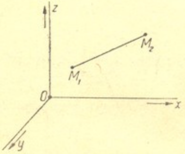
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

(1)—(4) ფორმულები ძირითადი მნიშვნელობის არიან.

თუ (4) ტოლობებს კვადრატში ავამაღლებთ და შემდეგ შევკრებთ, მივიღებთ: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2} = 1$, ესე იგი:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1; \qquad (5)$$

ეს მეტად მნიშვნელოვანი ფორმულაა, რომელიც აკავშირებს ნებისმიერი ვექტორის (ან მიმართულების) კუთხეებს, შედგენილს საკოორდინატო ღერძებთან.



ნახ. 44.

ორი განზომილების შემთხვევაში (ნახ. 43a) კერძოდ გვექნება:

$$|P| = \sqrt{X^2+Y^2}, \qquad (2a)$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \qquad (4a)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1. \qquad (5a)$$

ორს $M_1(x_1\ y_1,\ z_1)$ და $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ წერტილს შორის r მანძილის საპოვნელად (ნახ. 44), საკმარისია გამოვიყენოთ (2) ფორმულა ვექტორისათვის $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, რაიცა გვაძლევს:

$$r = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (6)$$

კერძოდ, $M(x, y, z)$ წერტილის სათავემდე მანძილისათვის (ნახ. 43) გვექნება:

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (7)$$

ორი განზომილების შემთხვევაში შესაბამისად მივიღებთ:

$$r = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \qquad (6a)$$

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (7a)$$

(ააგეთ სათანადო ნახაზები).

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ $\overline{P} = (2, -1)$ ვექტორის (სიბრტყეზე) სიგრძე და მისი კუთხეები ღერძებთან.

პას. $|P| = \sqrt{5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის $M_1(3, 2, 0)$ და $M_2(4, -2, -2)$ და $\overline{M_1 M_2}$ ვექტორის კუთხეები ღერძებთან.

პას. $|M_1 M_2| = \sqrt{21}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{21}}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{\sqrt{21}}$.

3. მოცემულია (სიბრტყეზე) სამკუთხედი წვეროებით $A(1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(5, 6)$. იპოვეთ AB გვერდის მედიანის სიგრძე.

პას. 5.

4. სამკუთხედის წვეროები არიან: $A(0, 0)$, $B(3, 4)$, $C(0, 2)$. იპოვეთ შიგა A კუთხის ბისექტრისისა და BC გვერდის გადაკვეთის M წერტილი. (როგორც ცნობილია ელემენტარული გეომეტრიიდან, M წერტილი ყოფს BC გვერდს $|AB|$ და $|AC|$ სიგრძეების პროპორციულ ნაწილებად).

პას. $M\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}\right)$.

5. იპოვეთ $\overline{P}$ ვექტორის (სივრცეში) კოორდინატები, თუ ცნობილია, რომ მისი სიგრძე 10-ის ტოლია, ხოლო კუთხეები Ox და Oy ღერძებთან 60°-ის ტოლია თითოეული [ისარგებლეთ (3) და (5)-ფორმულებით].

პას. $(5, 5, 5\sqrt{2})$ ან $(5, 5, -5\sqrt{2})$.

6. იპოვეთ ვექტორი $\overline{P}=(X,\ Y,\ Z)$ სიგრძით $|P|=10$, პარალელური $(3, -1, 3)$ ვექტორისა.

პ ა ს. $X=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$, $Y=\pm\frac{10}{\sqrt{19}}$, $Z=\pm\frac{30}{\sqrt{19}}$; ერთდროულად [illegible] ან ზედა ნიშნები, ან ქვედა.

39. მგეზავის კოორდინატები. გეზის კოსინუსები. ვთქვათ $\overline{T}$ აღნიშნავს მ გ ე ზ ა ვ ს, ესე იგი ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია. აღვნიშნოთ l, m, n-ით $\overline{T}$ მგეზავის კოორდინატები, ასე რომ:

$$\overline{T}=(l,\ m,\ n) \tag{1}$$

წინა პარაგრაფის (1) ფორმულა გვაძლევს (თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $|\overline{T}|=1$):

$$l^2+m^2+n^2=1, \tag{2}$$

ხოლო იმავე პარაგრაფის (3) ფორმულები, ასე დაიწერებიან:

$$l=\cos\alpha,\ \ m=\cos\beta,\ \ n=\cos\gamma, \tag{3}$$

სადაც α, β და γ აღნიშნავენ მგეზავის კუთხეებს ღერძებთან.

თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებებს წინა ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, ესე იგი ფორმულას, რომელიც უკვე გამოყვანილი იყო სხვა გზით [§ 38, (5)]. როგორც ცნობილია, სივრცეში ყოველი მგეზავი ახასიათებს გარკვეულ გეზს. ამიტომ l, m, n სიდიდეებს ჩვენ უწოდებთ აგრეთვე გ ე ზ ი ს კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ს ან, თუ მხედველობაში მივიღებთ (3) ფორმულებს — გ ე ზ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ე ბ ს.

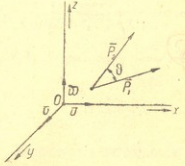
გ ე ზ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ე ბ ი (ა ნ უ კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ი) უ რ თ ი ე რ თ-შ ო რ ი ს დ ა მ ო უ კ ი დ ე ბ ე ლ ი კ ი ა რ ა რ ი ა ნ, არამედ ყოველთვის დაკავშირებული არიან (2) თანაფარდობით.

ა დ ვ ი ლ ი დ ა ს ა ნ ა ხ ი ა, რ ო მ, უ კ უ ღ მ ა, ყ ო ვ ე ლ ი ს ა მ ი ს ი-დ ი დ ე l, m, n, დ ა კ ა ვ შ ი რ ე ბ უ ლ ი (2) თ ა ნ ა ფ ა რ დ ო ბ ი თ, წ ა რ-მ ო ა დ გ ე ნ ს რ ა ღ ა ც გ ე ზ ი ს კ ო ს ი ნ უ ს ე ბ ს. მართლაც, ვექტორი $\overline{T}=(l,\ m,\ n)$ არის მგეზავი, ვინაიდან მისი სიგრძე ერთის ტოლია (2)-ის თანახმად. ამიტომ l, m, n არიან ამ მგეზავით დახასიათებული გეზის კოსინუსები.

შენიშვნა. ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაშიაც $\overline{T}$ მგეზავის l, m, n კოორდინატებს ჩვენ უწოდებთ გ ე ზ ი ს კ ო ო რ დ ი-

ნატებს. კარგად უნდა დავიხსომოთ, რომ ამ შემთხვევაში (ირიბკუთხ. კოორდ.) გეზის კოორდინატები (l, m, n) იგივე არ არიან, რაც გეზის კოსინუსები $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, სადაც α, β, γ წარმოადგენს $\overline{T}$ მგეზავის კუთხეებს საკოორდინატო ღერძებთან (იხ. ქვევით, § 57).

40. ამოცანა 10. ორ ვექტორს (ან გეზს) შორის კუთხის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2, Y_2, Z_2)$. საჭიროა მათ შორისი ϑ კუთხის პოვნა (ნახ. 45).



ნახ. 45.

ოდენური ნამრავლის განმარტების ძალით გვექნება:

$$\cos\vartheta = \frac{\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2}{|P_1|\ |P_2|}\,. \tag{1}$$

თუ აქ შევიტანთ მნიშვნელობებს [§ 37, ფორმ. (3) და § 38, ფორმ. (2)]:

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2;\ |P_1| = \sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2},$$
$$|P_2| = \sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2},$$

მივიღებთ მნიშვნელოვან ფორმულას (მართკუთხოვანი კოორდინატების სისტემაში):

$$\cos\vartheta = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}\,. \tag{2}$$

თუ ნებისმიერი $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორების მაგიერ ავიღებთ მგეზავებს: $\overline{T}_1=(l_1, m_1, n_1)$ და $\overline{T}_2=(l_2, m_2, n_2)$, მაშინ წინა ფორმულა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\cos\vartheta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\,; \tag{3}$$

ეს საშუალებას გვაძლევს ორ გეზს შორის ϑ კუთხე გამოვითვალოთ, თუ მოცემულია ამ გეზთა კოსინუსები (ე. ი. სიდიდეები l_1, m_1, n_1 და l_2, m_2, n_2). კერძოდ, თუ გეზები $\overline{T}_1$ და $\overline{T}_2$ თანამთხვეულნი არიან, მაშინ ჩვენი ფორმულა უკვე ცნობილ ფორმულად გადაიქცევა: $l^2+m^2+n^2=1$ (თუ რომ ჩავთვლით $l_1=l_2=l,\ m_1=m_2=m,\ n_1=n_2=n$).

ორი განზომილების შემთხვევაში ორს $\overline{P}_1=(X_1,\ Y_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2, Y_2)$ ვექტორს შორის კუთხისათვის გვექნება ფორმულა:

$$\cos\vartheta=\frac{X_1 X_2+Y_1 Y_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}\ \sqrt{X_2^2+Y_2^2}}, \tag{2a}$$

ხოლო იმ ორ გეზს შორისი კუთხისათვის, რომელთა კოორდინატები არიან $(l_1,\ m_1)$ და $(l_2,\ m_2)$ გვექნება:

$$\cos\vartheta=l_1 l_2+m_1 m_2. \tag{3a}$$

სავარჯიშო მაგალითები.

1. მოცემულია ორი ვექტორი: $\overline{P}=(1,-1)$ და $\overline{Q}=(-2,\ 6)$ (სიბრტყეზე). იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

პას. $\cos\vartheta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. მოცემულია ორი ვექტორი $\overline{P}=(6,\ 8)$ და $\overline{Q}=(-8,\ 6)$. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

პას. $\vartheta=\dfrac{\pi}{2}$.

3. $(1,\ 2,\ 2)$ და $(-1,\ 0,\ 1)$ ვექტორებს შორისი კუთხე გამოითვალეთ.

პას. $\cos\vartheta=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

4. შეამოწმეთ, რომ $(1,\ 2,\ 3)$ და $(2,\ 4,\ 6)$ ვექტორებს შორის კუთხე ნულის ტოლია.

5. იპოვეთ (სიბრტყეზე) ვექტორი $\overline{P}=(X,\ Y)$, რომლის სიგრძე 2-ის ტოლია და რომელიც $\overline{Q}=(3,\ 4)$ ვექტორთან შეადგენს კუთხეს $\vartheta=60^\circ$.

პას. X და Y განისაზღვრებიან შემდეგი სისტემიდან: $\dfrac{3X+4Y}{5\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$, $X^2+Y^2=4$, საიდანაც: $X=\dfrac{3\pm 4\sqrt{3}}{5}$, $Y=\dfrac{4\mp 3\sqrt{3}}{5}$. ახსენით რატომ მივიღეთ ორნაირი პასუხი.

41. ამოცანა 11. ორი ვექტორის (ან გეზის) მართობულობის პირობის პოვნა. იმისათვის, რომ ორი ვექტორი ურთიერთ მართობი იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (§ 22) $\overline{P}_1\overline{P}_2=0$, რაც მოგვცემს [§ 37, ფორმ. (3)]:

$\overline{P}_1\overline{P}_2=|P_1||P_2|\cos 90^\circ=0$

$$X_1 X_2+Y_1 Y_2+Z_1 Z_2=0; \qquad (1)$$

სწორედ ეს არის ორი ვექტორის მართობულობის პირობა, გამოსახული ანალიზურად. (ეს პირობა გამომდინარეობს აგრეთვე წინა პარაგრაფის ფორმულიდან, რომელიც $\cos\vartheta$-სათვის იყო მიღებული).

კერძოდ, თუ $|P_1|$ და $|P_2|$ ვექტორების სიგრძეები ერთის ტოლია, მაშინ წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, უკანასკნელი ფორმულა გვაძლევს ორი გეზის მართობულობის პირობას:

$$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0, \qquad (2)$$

გამოსახულს გეზის კოსინუსების საშუალებით.

ორი განზომილების შემთხვევაში (1) და (2)-ის მაგიერ შესაბამისად გვექნება:

$$X_1 X_2+Y_1 Y_2=0, \qquad (1a)$$

და

$$l_1 l_2+m_1 m_2=0. \qquad (2a)$$

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი.

1. დაამტკიცეთ, რომ (სიბრტყეზე) ვექტორები $\overline{P}(X, Y)$ და $\overline{Q}(-X, Y)$, ყოველთვის ურთიერთ მართობი არიან.

2. იპოვეთ ვექტორი $\overline{P}$ (სიბრტყეზე) სიგრძით 5, მართობი $\overline{Q}=(1, 2)$ ვექტორისა.

პას. $x=\pm 2\sqrt{5}$, $y=\mp\sqrt{5}$.

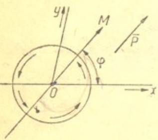
3. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული $\overline{Q}_0=(X_0, Y_0)$ ვექტორისადმი მართობი $\overline{P}=(X, Y)$ ვექტორის კოორდინატები, ყოველთვის შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ: $X=-mY_0$, $Y=mX_0$, სადაც m რაღაც რიცხვია (იხ. ვარჯ. 1).

42. სიბრტყეზე გეზის განსაზღვრა. იმის მაგიერ, რომ განვიხილოთ ორი კუთხე (α და β), რომელთაც ვექტორი (ან, საზოგადოდ, რომელიმე გეზი) შეადგენს Ox და Oy ღერძთან, შეიძლება დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ ერთი კუთხით. მაგრამ ამისათვის საჭიროა წინასწარი შე-

თანხმება Oxy სიბრტყეზე ბრუნვის დადებითი მიმართულების შესახებ. პირობა, რომელსაც ჩვენ აქ ერთხელ და სამუდამოდ მივიღებთ შეეხება როგორც მართკუთხოვანს, ისე ირიბკუთხოვან კოორდინატებს და საჭიროა მისი კარგად დამახსოვრება.

სახელდობრ, Oxy სიბრტყეზე ბრუნვის დადებით მიმართულებად ჩავთვალოთ ის, რომელიც უმოკლესი გზით მიგვიყვანს Ox ღერძის დადებითი მიმართულებიდან Oy ღერძის დადებით მიმართულებასთან; უფრო ზუსტად, ბრუნვის დადებითი მიმართულება არის ის, რომელზედაც უნდა შევატრიალოთ Ox ღერძი π-ზე ნაკლებ ისეთ კუთხეზე, რომ იგი დაემთხვეს Oy ღერძს[1]. ნახ. 46-ზე ბრუნვის დადებითი მიმართულება აღნიშნულია ისრებიანი წრით.

ვთქვათ ეხლა $\overline{P}$ არის რომელიმე ვექტორი Oxy სიბრტყეზე; გადავიტანოთ იგი $\overline{OM}$ მდებარეობაში ისე, რომ მისი სათავე მოთავსდეს კოორდინატთა სათავეზე, (ნახ. 46) და აღვნიშნოთ φ-თი კუთხე, რომელზედაც უნდა შევატრიალოთ Ox ღერძი დადებითი მიმართულებით იმისათვის, რომ მისი გეზი $\overline{P}=\overline{OM}$ გეზს ემთხვეოდეს. ცხადია, რომ ეს კუთხე φ სავსებით განსაზღვრავს მოცემული ვექტორის გეზს; ამ კუთხეს ჩვენ ხშირად აღვნიშნავთ $\widehat{Ox, \overline{P}}$ სიმბოლოთი, სადაც



ნახ. 46.

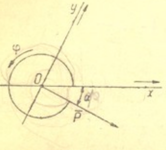
პირველ ადგილზე ის გეზი დაისმის, საიდანაც ხდება კუთხის ათვლა. φ კუთხეს შეიძლება 2π-ზე მეტი მნიშვნელობაც მიეწეროს, როგორც ეს ტრიგონომეტრიაში ხდება. სიბრტყეზე ერთსა და იმავე გეზს ეთანადება φ კუთხის უამრავი მნიშვნელობა, ერთი მეორისაგან $2k\pi$ სახის სიდიდით განსხვავებული, სადაც k მთელი რიცხვია. მართლაც, რამდენჯერაც არ უნდა მოვატრიალოთ აღებული გეზი 2π კუთხეზე (სრული შემოტრიალება), ჩვენ ისევ წინას დაუბრუნდებით.

შევნიშნოთ, რომ φ კუთხე შეიძლება ავთვალოთ Ox ღერძის უარყოფითი მიმართულებითაც, მაგრამ სამაგიეროდ ამ კუთხეს უარყოფითი მნიშვნელობანი მიეწერება (როგორც ეს ტრიგონომეტრიაში ხდება).

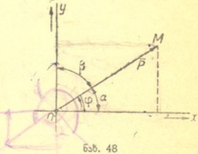
[1]) ორი ღერძი თანამთხვეულად იგულისხმება მხოლოდ მაშინ, თუ მათი გეზები (დადებითი მიმართულებანი) არიან თანამთხვეულნი.

დაუმატოთ კიდევ, რომ ეხლახან განმარტებული φ კუთხე ყოველთვის იგივე არ არის რაც α კუთხე ~~$\bar{P}$ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის~~, რომელიც განმარტებული იყო ორ გეზს შორის კუთხის შესახებ წინმოყვანილი პირობების მიხედვით.

ეს წარმოიშვება იმ განსხვავებიდან, რომელსაც ადგილი აქვს α და φ კუთხის ათვლის პირობებში. სახელდობრ, α კუთხე არის, პირობის თანახმად, დადებითი კუთხე, რომელიც π-ს არ აღემატება; მაშინ როდესაც φ კუთხეს შეუძლიან ნებისმიერი მნიშვნელობა მიიღოს, კერძოდ უარყოფითიც. მაგალითად, 47-ნახაზზე წარმოდგენილ შემთხვევაში φ კუთხე



ნახ. 47



ნახ. 48

არ არის α-ს ტოლი; სახელდობრ, φ კუთხეს შეიძლება მიეწეროს მნიშვნელობა $(-\alpha)$ ან $2\pi-\alpha$ ან, უფრო ზოგადად, $-\alpha+2k\pi$.

დაუბრუნდეთ ეხლა მართკუთხოვან კოორდინატებს. ადვილი დასანახია, რომ ამ შემთხვევაში ყოველთვის გვექნება:

$$\cos\alpha=\cos\varphi,\quad \cos\beta=\sin\varphi, \tag{1}$$

სადაც α და β, ისე როგორც უწინ, აღნიშნავენ კუთხეებს (0-სა და π-ს შორის მოთავსებულს), რომელთაც $\bar{P}$ ვექტორი შეადგენს Ox და Oy ღერძებთან; ეს ფორმულები სამართლიანი არიან, რომელ მეოთხედშიაც არ უნდა იყოს φ კუთხე[1].

შესაბამისად ამისა $\bar{P}$ ვექტორის X და Y კოორდინატისათვის გვექნება:

[1]) მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ თუ φ-ს ვიგულისხმებთ 0-სა 2π-ს შორის არსებულად, გვექნება: პირველ მეოთხედში: $\alpha=\varphi, \beta=\frac{\pi}{2}-\varphi$; მეორეში $\alpha=\varphi, \beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$; მესამეში: $\alpha=2\pi-\varphi,\ \beta=\varphi-\frac{\pi}{2}$; მეოთხეში: $\alpha=2\pi-\varphi, \beta=2\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi$.

$$X=|P|\cos\varphi,\quad Y=|P|\sin\varphi \tag{2}$$

სადაც, როგორც ყოველთვის,

$$|P|=\sqrt{X^2+Y^2}. \tag{3}$$

აქედან გამოგვყავს:

$$\cos\varphi=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}; \tag{4}$$

თუ მეორეს პირველზე გავყოფთ კიდევ შემდეგს მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Y}{X} \tag{5}$$

(4) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ სავსებით განვსაზღვროთ φ კუთხე (თუ არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს, რომელსაც არავითარი გავლენა არ აქვს გეზზე), როცა მოცემულია ვექტორის კოორდინატები.

φ-ს გამოსათვლელად საკმარისია ვისარგებლოთ ამ ფორმულათაგან მხოლოდ ერთერთით, მაგალითად ფორმულით $\sin\varphi$-სათვის; ეს ფორმულა, თუმცა, სავსებით არ განსაზღვრავს ვექტორის გეზს. რომ ეს სრულიად განსაზღვრული გახდეს, უნდა ვიცოდეთ კიდევ φ კუთხის რომელიმე მეორე ტრიგონომეტრული ფუნქციის ნიშანი, მაგალითად, $\cos\varphi$-ს ნიშანი. ყველაზე მარტივია X და Y-ის ნიშნების მიხედვით (რომელნიც იგივე არიან, რაც $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ს ნიშნები) განისაზღვროს ის მეოთხედი, რომელშიაც იმყოფება $\overline{P}$ გეზი, ხოლო ცხრილებით გამოთვლა ერთერთი (4) ან (5) ფორმულით მოხდეს.

მაგალითად, თუ $X=+2$, $Y=-2$, მაშინ საძიებელი გეზი იმყოფება მეოთხე მეოთხედში. ვინაიდან $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{+2}=-1$, ამიტომ აშკარაა, რომ: $\varphi=-45^\circ$ ან, რაც იგივეა, $\varphi=360^\circ-45^\circ=315^\circ$.

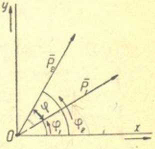
როცა განსახილავი ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლია, ესე იგი როცა ჩვენ საქმე გვაქვს $\overline{T}$ მგეზავთან, მაშინ მისი (l, m, n) კოორდინატები ამავე დროს არიან გეზის კოსინუსები (§ 39); (1) ფორმულები ამ შემთხვევისათვის გვაძლევენ:

$$l=\cos\varphi,\quad m=\sin\varphi. \tag{6}$$

თანაფარდობა $l^2+m^2=1$, რომელიც ამ სიდიდეებს აკავშირებს, დაიყვანება, ამგვარად, ცნობილ ტრიგონომეტრიულ იგივეობაზე $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

43. სიბრტყეზე ორ გეზს შორის კუთხის გამოთვლა, როცა კუთხეს ნიშანი მიეწერება. ვთქვათ მოცემულია Oxy სიბრტყეზე ორი ვექტორი $\overline{P}_1=(X_1, Y_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2, Y_2)$.

ორ ვექტორს შორის (ან, საზოგადოდ, გეზებს შორის) კუთხის შესახებ ჩვენ მივიღოთ პირობა იმის ანალოგიური, რაც წინა პარაგრაფში იყო მიღებული φ კუთხის შესახებ მოცემულ ვექტორსა და Ox ღერძს შორის; სახელდობრ, ჩვენ ავთვალოთ ეს კუთხე დადებითი მიმართულებით ერთ-ერთი მოცემული ვექტორიდან (ან საზოგადოდ, გეზიდან). ჩვენ შესაძლებლად მივიჩნიოთ ათვლა უარყოფითი მიმართულებითაც, მაგრამ იმ პირობით, რომ კუთხეს ამ შემთხვევაში უარყოფითი მნიშვნელობანი მიეწეროს. თუ კუთხის ათვლა ხდება $\overline{P}_1$ გეზიდან, მაშინ მას აღვნიშნავთ $\widehat{\overline{P}_1, \overline{P}_2}$ სიმბოლოთი, სადაც პირველ ადგილზე დაისმის ვექტორი, რომლისაგანაც აითვლება კუთხე.



ნახ. 49

ვიპოვოთ ეხლა კუთხე $\overline{P}_1$-სა და $\overline{P}_2$ -ს შორის. აღვნიშნოთ ამისათვის φ_1 და φ_2-ით კუთხეები, რომელთაც ეს ვექტორები შეადგენენ Ox ღერძთან (იხ. წინა პარაგრაფი). მაშინ ცხადია, რომ (ნახ. 49): $\widehat{\overline{P}_1,\overline{P}_2}=\varphi_2-\varphi_1$ (თუ რასაკვირველია, არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს, რომლის მიმატებით წინა ტოლობის მარჯვენა მხარე არაფრით არ იცვლება). თუ სიმოკლისათვის აღვნიშნავთ $\widehat{\overline{P}_1,\overline{P}_2}$ კუთხეს φ-თი, გვექნება: $\cos\varphi=\cos(\varphi_2-\varphi_1)$; $\sin\varphi=\sin(\varphi_2-\varphi_1)$; აქედან, თუ მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\cos(\varphi_2-\varphi_1)=$ $=\cos\varphi_2\cos\varphi_1+\sin\varphi_2\sin\varphi_1$, $\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\sin\varphi_2\cos\varphi_1-\cos\varphi_2\sin\varphi_1$ და რომ

$\cos\varphi_1=\dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}$, $\sin\varphi_1=\dfrac{Y_1}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}$ (და ანალოგიურად $\cos\varphi_2$ და $\sin\varphi_2$ სათვის), საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}, \qquad (1)$$

$$\sin\varphi = \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}} \qquad (2)$$

თუ (2) ტოლობას (1)-ზე გავყოფთ, მივიღებთ კიდევ შემდეგს:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_1Y_2 - Y_1X_2}{X_1X_2 + Y_1Y_2} \qquad (3)$$

მივაქციოთ ყურადღება იმ გარემოებას, რომ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარე სიმეტრიულია ორივე ვექტორის კოორდინატების მიმართ, მაშინ როდესაც (2) და (3) ფორმულების მარჯვენა მხარეები ნიშანს იცვლიან მოპირდაპირეზე, თუ როლებს შეუცვლით $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორებს.

ეს მოსალოდნელიც იყო, ვინაიდან, აშკარაა, რომ $\widehat{\overline{P}_2,\overline{P}_1} = -(\widehat{\overline{P}_1,\overline{P}_2}) + 2k\pi$, და ამიტომ $\cos\widehat{\overline{P}_2,\overline{P}_1} = \cos\widehat{\overline{P}_1,\overline{P}_2}$ და $\sin\widehat{\overline{P}_2,\overline{P}_1} = -\sin\widehat{\overline{P}_1,\overline{P}_2}$.

(1) და (2) ფორმულები სავსებით განსაზღვრავენ φ კუთხეს (თუ, რასაკვირველია, არ ჩავთვლით $2k\pi$ სახის შესაკრებს). φ კუთხის ნამდვილი გამოთვლისათვის, შეიძლება ვისარგებლოთ (3) ფორმულით, მეოთხედი კი განვსაზღვროთ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ს ნიშნების მიხედვით, რომელნიც იგივე არიან, რაც $X_1X_2 + Y_1Y_2$-ისა და $X_1Y_2 - X_2Y_1$-ის ნიშნები.

სავარჯიშო მაგალითები

1. სიბრტყეზე აღებული ორი ვექტორის მართობულობის პირობა გამოიყვანეთ (1) ან (3) ფორმულის გამოყენებით.

2. იპოვეთ ის $\overline{P} = (X, Y)$ ვექტორი, რომლის სიგრძე 2-ის ტოლია და რომელიც შეადგენს $\overline{Q} = (3,4)$ ვექტორთან კუთხეს $\widehat{\overline{Q},\overline{P}} = +60^\circ$ (იხ. § 40-ის ბოლოში ვარჯ. 5).

ამოხსნა. ამოხსნისათვის შეგვიძლიან ვისარგებლოთ ხსენებული ვარჯიშობის შედეგებით, თუ ნიშანს ისე შევარჩევთ, რომ $\sin\widehat{\overline{Q},\overline{P}}$ დადებითი იყოს, ესე იგი, ისე, რომ $3Y - 4X > 0$; აქედან გამომდინარეობს, რომ, საჭიროა ხსენებული ვარჯიშობის ფორმულებში ქვედა ნიშნების აღება.

შეიძლება ამოცანის ამოხსნა უშუალოდაც, თუ ვიპოვით კუთხეს $\varphi + 60^\circ$, რომელსაც $\overline{P}$ ვექტორი შეადგენს Ox ღერძთან, სადაც φ არის კუთხე $\widehat{Ox,\overline{Q}}$.

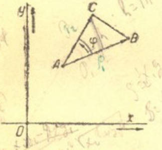
გვაქვს: $\cos(\varphi+60^\circ)=\cos\varphi\,.\cos 60^\circ-\sin\varphi\,.\sin 60^\circ$, $\sin(\varphi+60^\circ)=\sin\varphi\,.\cos 60^\circ+$ $+\cos\varphi\,.\sin 60^\circ$, მაგრამ $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, საიდანაც:

$$\cos(\varphi+60^\circ)=\frac{3-4\sqrt{3}}{10},\ \sin(\varphi+60^\circ)=\frac{4+3\sqrt{3}}{10};$$ დაბოლოს: $X=2\cos(\varphi+60^\circ)=$

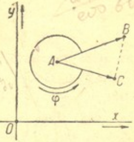
$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{5},\quad Y=2\sin(\varphi+60^\circ)=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}.$$

ჩვენ რომ გვქონდა $\widehat{Q,P}=-60^\circ$, მაშინ მივიღებდით ხსენებულ ვარჯიშობაში ზედა ნიშნების ფორმულებს.

44. ამოცანა 12. საერთო სათავით მოცემულ ორ ვექტორზე აგებული სამკუთხედის ფართობის პოვნა. ვთქვათ $\overline{P}_1=\overline{AB}=(X_1,Y_1)$ და $\overline{AC}=\overline{P}_2=(X_2,Y_2)$ მოცემული ვექტორებია საერთო სათავით A (ნახ. 50, 50a).



ნახ. 50



ნახ. 50 a

თუ შევაერთებთ B და C ბოლოებს, მივიღებთ ABC სამკუთხედს. ვიპოვოთ ამ სამკუთხედის s ფართობი. ცნობილი ფორმულის მიხედვით გვექნება:

$$s=\frac{1}{2}\,|P_1|\,.\,|P_2|\,.\sin\varphi \tag{1}$$

სადაც φ აღნიშნავს კუთხეს $\widehat{P_1,P_2}$.

არსებითად, $\sin\varphi$-ს მაგიერ უნდა დაწერილიყო $|\sin\varphi|$, ვინაიდან $\sin\varphi$-ს შეუძლიან უარყოფითი მნიშვნელობანიც მიიღოს. მაგრამ უფრო მოხერხებულია (1) ფორმულით სარგებლობა იმ სახით, როგორც ის დაწერილია. ეს ფორმულა აწერს ABC სამკუთხედის ფართობს გარკვეულ

ნიშანს. ადვილი გასაგებია, რომ ეს ნიშანი ეთანხმება ქვემოთ მოყვანილ წესს, რომლითაც ჩვენ ვიხელმძღვანელებთ. სახელდობრ, წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომელიც ისე უვლის სამკუთხედის პერიმეტრს, რომ წვეროები გაივლებიან $ABCA$ მიმდევრობით. მაშინ ორ შემთხვევას შეიძლება ადგილი ქონდეს: ან დამკვირვებელი შემოუვლის სამკუთხედის შინაგან წერტილებს დადებითი მიმართულებით[1] (ნახ. 50), ან და უარყოფითი მიმართულებით (ნახ. 50a). პირველ შემთხვევაში ფართობი დადებითად ითვლება, ხოლო მეორეში უარყოფითად.

თუ ეხლა (1) ფორმულებში $\sin\varphi$-ს მაგიერ შევიტანთ წინა პარაგრაფის (2)-ფორმულას, მივიღებთ, მეტად მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$s = \frac{1}{2}\,(X_1 Y_2 - X_2 Y_1), \tag{2}$$

რომელიც სამართლიანია როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით.

ამ ფორმულის წარმოდგენა შეიძლება დეტერმინანტის საშუალებითაც:

$$s = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

45. ამოცანა 13. სამი წვეროთი მოცემული სამკუთხედის ფართობის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია სამი წერტილი: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ და $C(x_3, y_3)$. საჭიროა ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის s ფართობი. ამასთანავე იგულისხმება, რომ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი აღიწერება $ABCA$ მიმართულებით და ამის შესაბამისად აიღება ფართობის ნიშანი (იხ. წინა პარაგრაფი).

საძიებელი ფართობი არის ის ფართობი, რომელიც აგებულია $\overline{AB}$ და $\overline{AC}$ ვექტორებზე, ისე როგორც წინა პარაგრაფში·

ჩვენ შემთხვევაში:

$$X_1 = x_2 - x_1,\quad Y_1 = y_2 - y_1,$$

$$X_2 = x_3 - x_1,\quad Y_2 = y_3 - y_1.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს წინა პარაგრაფის (2) ფორმულაში შევიტანთ, მივიღებთ:

---

[1]) უფრო ზუსტად რომ ვთქვათ, ამ შემთხვევაში ის წრფე, რომელიც აერთებს სამკუთხედის რომელიმე შინაგან წერტილს და დამკვირვებელს, ბრუნავს დადებითი მიმართულებით; რასაკვირველია, ბრუნვის დადებითი მიმართულება არის ის მიმართულება, რომელიც მიღებულია კუთხეთა ათვლის დადებით მიმართულებად (§ 42).

$$s=\frac{1}{2}[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)] \qquad (1)$$

ამ გამოსახულებას შეიძლება მიეცეს უფრო სიმეტრიული სახე, სახელდობრ, უბრალო გარდაქმნა გვიჩვენებს, რომ:

$$s=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(v_1-y_2)]. \qquad (2)$$

ყველაზე მარტივი იქნება s-ის წარმოდგენა დეტერმინანტის საშუალებით:

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}; \qquad (3)$$

რომ შევამოწმოთ ამ ფორმულის სამართლიანობა, გარდავქმნათ წინა დეტერმინანტი ისე, რომ უკანასკნელი ორი სტრიქონის ელემენტებს მიმდევრობით გამოვაკლოთ პირველი სტრიქონის ელემენტები (რაც, როგორც ცნობილია, არ ცვლის დეტერმინანტის სიდიდეს). მივიღებთ:

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

ეხლა ცხადია, რომ უკანასკნელი ფორმულა (1) ფორმულის ტოლფასია.

სავარჯიშო მაგალითები.

1. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროები არიან: $A(1,0)$, $B(2,3)$, $C(2,2)$.

პასუხი. $s=-\frac{1}{2}$.

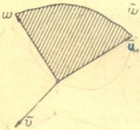
2. იპოვეთ ABC სამკუთხედის იმ სიმაღლის სიგრძე h, რომელიც A წვეროს შეეფერება, თუ A-ს კოორდინატები არიან $(1,1)$, B-სი $(3,2)$ და C-სი $(4, 4)$.

პასუხი. $h=\frac{2|s|}{|Bc|}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

46. სამი გეზის მარჯვენა და მარცხენა სისტემა. შემოვიღოთ ეხლა ერთი ცნება, რომელიც ჩვენ დაგვჭირდება უახლოეს პარაგრაფში და აგრეთვე შემდეგშიაც. განვიხილოთ სამი მგეზავი $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, ერთსა და იმავე სიბრტყის არაპარალელური და წარმოვიდგინოთ, რომ მათ საერთო სათავე აქვთ[1]. წარმოვიდგინოთ დამკვირვებელი, რომლის ადგილმდება-

[1]) არ არის სავალდებულო, რომ ეს მგეზავები წყვილწყვილად ურთიერთ მართობული იყვნენ.

რეობა ისეთია $\bar{u}$ მგეზავის გასწვრივ, რომ ეს მგეზავი მიმართულია დამკვირვებლის ფეხებიდან თავისაკენ და წარმოვიდგინოთ, რომ დამკვირვებელი იყურება $\bar{v}$ მგეზავისაკენ. მაშინ ორ შემთხვევას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი[1]: ან (ნახ. 51a) $\bar{w}$ მგეზავი მიმართულია (დამკვირვებლის მიმართ) მარცხნიდან მარჯვნისაკენ, ან (ნახ. 51b) მარჯვნიდან მარცხნისაკენ. პირველ შემთხვევაში $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ მგეზავები (აღებულნი ხსენებული მიმდევრობით) შეადგენენ მარცხენა სისტემას, მეორეში კი მარჯვენას. სახელწოდება „მარცხენა“ იქიდან წარმოიშვა, რომ პირველ შემთხვევაში $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ მგეზავები (აღებულნი ხსენებული მიმდევრობით) ერთმანეთის მიმართ ისე არიან მოგეზული, როგორც მარცხენა ხელის ცერი, მაჩვენებელი და შუათითი (იგულისხმება, რომ პირველი ორი თითი გაჭიმულია, ხოლო მესამე მოხრილია კუთხით ხელის გულისაკენ). ასეთივენაირად $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ მგეზავები, რომელნიც მარჯვენა სისტემას შეადგენენ, მარჯვენა ხელის თითებთან არიან დაკავშირებული.



ნახ. 51a.

ნახ. 51b.

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ მგეზავთა მარცხენა სისტემა ისევ მარცხენა სისტემად დარჩება, თუ მათ წრიულ გარდანაცვლებას მოვახდენთ[2], ესე იგი, თუ მათ ასეთი მიმდევრობით განვიხილავთ: $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{u}$. ანალოგიურ თვისებას აქვს ადგილი მარჯვენა სისტემისათვის. პირიქით, მარხცენა სისტემა გადავა მარჯვენა სისტემაში და უკუღმა, თუ ადგილს შეუნაცვლებთ მხოლოდ

---

[1]) 51-ნახაზებზე $\bar{u}$ და $\bar{w}$ მგეზავები იმყოფებიან ნახაზის სიბრტყეში. 51a ნახაზზე $\bar{v}$ მგეზავი მიმართულია მკითხველისაკენ, 51b ნახაზზე—მკითხველიდან.

[2]) რამოდენიმე $a, b, c, \ldots, k$ ელემენტის წრიული გარდანაცვლება ეწოდება ისეთ გარდანაცვლებას, რომლის მიხედვით ყოველი ელემენტი შეინაცვლება მისი მიმდევარი ელემენტით, ხოლო უკანასკნელი—პირველით. მაგალითად, თუ გამოვიყენებთ წრიულ გარდანაცვლებას სამი a, b, c ელემენტისათვის, მივიღებთ: b, c, a. თუ კიდევ ერთხელ მოვახდენთ წრიულ გარდანაცვლებას, მივიღებთ c, a, b. თუ კიდევ ერთხელ მოვახდენთ, დაუბრუნდებით ისევ ძველ გარდანაცვლებას a, b, c.

ორ მეგზავს. მაგალითად, თუ სისტემა $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ მარცხენაა, მაშინ სისტემა $\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ იქნება მარჯვენა.

მარჯვენა სისტემის სარკისებრი ანარეკლი გვაძლევს მარცხენა სისტემას და უკუღმა. ყველაფერი აქ ნათქვამი, რასაკვირველია მხოლოდ მეგზავებს არ შეეხება, არამედ ნებისმიერ ვექტორებსაც და ღერძებსაც.

შესაბამისად ნათქვამისა, განასხვავებენ საკოორდინატო ღერძების მარჯვენა და მარცხენა სისტემას და განიხილავენ მათ ასეთი მიმდევრობით: Ox, Oy, Oz. ზევით მოყვანილ ყველა ნახაზზე საკოორდინატო სისტემები მარცხენა არიან.

47. ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი. გეომეტრიისა და გამოყენებითი მათემატიკის მრავალ საკითხში, გარდა უკვე განხილული ოდენური ნამრავლისა, დიდი მნიშვნელობა აქვს ორი ვექტორის, ეგრედ წოდებული, ვექტორული ნამრავლის ცნებას[1], რომლის განმარტებაზე გადავდივართ.

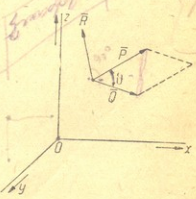
$\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორული ნამრავლი ეწოდება $\overline{R}$ ვექტორს, რომელსაც შემდეგი პირობებით განვსაზღვრავთ:

a) $\overline{R}$ ვექტორის სიგრძე რიცხობრივ ტოლია $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა სიგრძეებისა და მათ შორის არსებული ϑ კუთხის სინუსის ნამრავლისა:

$$|R| = |P| \cdot |Q| \cdot \sin\vartheta; \qquad (1)$$

იხ. ნახ. 52. სხვანაირად რომ ვთქვათ, $\overline{R}$ ვექტორის სიგრძე რიცხობრივ ტოლია $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობისა (თუ ვიგულისხმებთ, რომ ეს ვექტორები ერთი სათავიდან არიან გავლებული) ანუ, რაც იგივეა, ამ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ტოლია.

b) $\overline{R}$ ვექტორი $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა სიბრტყის[2] მართობია.



ნახ. 52

[1]) ვექტორულ ნამრავლს უწოდებენ აგრეთვე „გარე ნამრავლს".

[2]) ე. ი. $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა პარალელური სიბრტყის. თვალსაჩინოებისათვის შეიძლება წარმოვიდგინოთ, რომ ამ ვექტორთა სათავე თანამთხვეულია, როგორც 52 ნახაზზე; მაშინ ხსენებული სიბრტყე არის $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა შემცველი სიბრტყე (ან ყოველი პარალელური).

ეს პირობები კიდევ სავსებით ვერ განსაზღვრავენ $\overline{R}$ ვექტორს: რჩება კიდევ არჩევანი ორს შესაძლებელს ურთიერთ მოპირდაპირე გეზს შორის. ეს ორნაირობა რომ თავიდან ავიცილოთ, ჩვენ ვუმატებთ შემდეგ პირობას:

c) $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$ ვექტორები (აღნიშნული მიმდევრობით) შეადგენენ მარცხენა სისტემას.

რასაკვირველია, ეს პირობა შეიძლება იმ პირობით შეგვეცვალა, რომ ჩვენს ვექტორებს მარჯვენა სისტემა შეედგინათ; ჩვენ შევჩერდით მარცხენაზე მხოლოდ და მხოლოდ გარკვეულობისათვის (იხ. ქვევით, § 50-ის გამოტანა).

$\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა ვექტორულ ნამრავლს ჩვენ აღვნიშნავთ ასე[1]:

$$[\overline{P}\cdot\overline{Q}] \text{ ან } [\overline{P}\;\overline{Q}].$$

არ დავივიწყოთ, რომ ვექტორული ნამრავლი ვექტორია, მაშინ როდესაც ოდენური ნამრავლი — რიცხვია.

ვექტორულ ნამრავლს რიცხვთა ჩვეულებრივი ნამრავლის ბევრი საერთო თვისება აქვს; ამ თვისებებს ქვევით აღვნიშნავთ. აქ კი აღვნიშნავთ ისეთ თვისებებს, რომელნიც განსხვავდებიან ჩვეულებრივი ნამრავლის თვისებებისაგან.

ჯ ე რ ე რ თ ი, (1) ფორმულის თანახმად აშკარაა, რომ ვექტორული ნამრავლი ნული ხდება არამც თუ მაშინ, როცა ერთერთი მამრავლია ნული, არამედ მაშინაც, როცა მამრავლნი პარალელური არიან. ამგვარად ვექტორთა პარალელობის პირობა შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$[\overline{P}\cdot\overline{Q}]=0 \qquad (2)$$

(შეადარეთ მართობულობის ანალოგიურ პირობას $\overline{P}\cdot\overline{Q}=0$, რომელიც გამოისახება ოდენური ნამრავლის საშუალებით).

მ ე ო რ ე, ვექტორული ნამრავლი დ ა მ ო კ ი დ ე ბ უ ლ ი ა მამრავლ-თა რ ი გ ზ ე; სახელდობრ, როგორც ეს თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს:

$$[\overline{Q}\cdot\overline{P}]=-[\overline{P}\cdot\overline{Q}]. \qquad (3)$$

მართლაც, $\overline{P}$ და $\overline{Q}$ ვექტორთა მიმდევრობის შენაცვლებით, $\overline{R}$ ვექტორის გეზი უნდა მოპირდაპირეზე შევცვალოთ, რომ სისტემა $\overline{Q}$, $\overline{P}$, $\overline{R}$ მარცხენა დარჩეს.

---

[1] ვექტორული ნამრავლისათვის იხმარება აგრეთვე აღნიშვნები: $[\overline{P}, \overline{Q}]$, $\overline{P}\times\overline{Q}$, $\overline{P}\wedge\overline{Q}$.

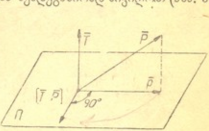
48. ვექტორული ნამრავლის ზოგიერთი თვისებები. მკითხველს წინადადება ეძლევა დაამტკიცოს ვექტორული ნამრავლის ერთი მარტივი თვისება, რომელიც შემდეგი ტოლობით გამოისახება:

$$[m\overline{P} \cdot n\overline{Q}] = mn[\overline{P} \cdot \overline{Q}], \tag{1}$$

სადაც m, n ნებისმიერი რიცხვებია. კერძოდ (თუ $m=-1$, $n=1$)

$$[-\overline{P} \cdot \overline{Q}] = -[\overline{P} \cdot \overline{Q}] = [\overline{Q} \cdot \overline{P}]. \tag{2}$$

შემდეგისათვის ჩვენ დაგვჭირდება ერთი მარტივი შენიშვნა, რომელიც შეეხება ვექტორულ ნამრავლს $[\overline{T} \cdot \overline{P}]$, სადაც ერთერთი მამრავლი არის მგეზავი. ვექტორული ნამრავლის თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ $[\overline{T} \cdot \overline{P}]$-ნამრავლი შეიძლება შემდეგნაირად მივიღოთ (ნახ. 53): დავაგეგმილოთ ორთოგონალურად $\overline{P}$ ვექტორი II სიბრტყეზე, რომელიც $\overline{T}$ მგეზავის მართობია და მიღებული გეგმილი $\overline{p}$ შევაბრუნოთ II სიბრტყეში მართი კუთხით საათის ისრის მიხედვით (იმ დამკვირვებლის მიმართ, რომელსაც ფეხები აქვს $\overline{T}$ მგეზავის სათავეში, ხოლო თავი ბოლოში).



ნახ. 53.

ამ შენიშვნიდან ადვილად გამოიყვანება $\overline{T}$ მგეზავისა და $\overline{P_1}+\overline{P_2}+\cdots+\overline{P_n}$ გეომეტრიული ჯამის ვექტორული ნამრავლის თვისება, რომელიც შემდეგი ტოლობით გამოისახება:

$$[\overline{T} \cdot (\overline{P_1}+\overline{P_2}+\cdots+\overline{P_n})] = [\overline{T} \cdot \overline{P_1}] + [\overline{T} \cdot \overline{P_2}] + \cdots + [\overline{T} \cdot \overline{P_n}]. \tag{3}$$

მართლაც ავაგოთ $\overline{P_1}$, $\overline{P_2} \cdots \overline{P_n}$ ვექტორთა მრავალკუთხედი და მისი შემკვრელი ვექტორი $\overline{P} = \overline{P_1}+\overline{P_2}+\cdots+\overline{P_n}$. მიღებული ნაკვთი დავაგეგმილოთ II სიბრტყეზე; ვთქვათ $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}, \cdots \overline{p_n}$ და $\overline{p}$ არიან შესაბამისად $\overline{P_1}$, $\overline{P_2} \cdots \overline{P_n}$ და $\overline{P}$ ვექტორის გეგმილები; რასაკვირველია $\overline{p}$ იქნება $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}, \cdots \overline{p_n}$ ვექტორთა მრავალკუთხედის შემკვრელი ვექტორი.

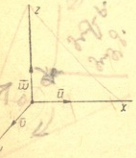
თუ ეხლა დაგეგმილების დროს მიღებულს ბრტყელ ნაკვთს შემობრუნებთ II სიბრტყეში მართი კუთხით (საათის ისრის მიხედვით), მივიღებთ ვექტორთა ახალ მრავალკუთხედს, რომლის გვერდები იქნებიან ვექ-

ტორები $[\overline{T}\cdot\overline{P}_1]$, $[\overline{T}\cdot\overline{P}_2], \cdots, [\overline{T}\cdot\overline{P}_n]$, ხოლო შემკვრელი ვექტორი იქნება $[\overline{T}\cdot\overline{P}]$. სწორედ ეს ამტკიცებს (3) ფორმულას.

ადვილი დასანახია, რომ (3) ფორმულა სამართლიანი დარჩება, თუ მასში $\overline{T}$ მგეზავს ნებისმიერი $\overline{Q}$ ვექტორით შევცვლით. მართლაც, ყოველთვის გვექნება: $\overline{Q}=Q\cdot\overline{T}$. სადაც $\overline{T}$ არის მგეზავი, $\overline{Q}$ ვექტორის პარალელური, ხოლო Q რაღაც რიცხვია. ამიტომ: $[\overline{Q}(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\cdots+\overline{P}_n)]=$ $=Q[\overline{T}(\overline{P}_1+\overline{P}_2+\cdots+\overline{P}_n)]=Q[\overline{T}\cdot\overline{P}_1]+Q[\overline{T}\cdot\overline{P}_2]+\cdots+Q[\overline{T}\cdot\overline{P}_n]=$ $=[\overline{Q}\cdot\overline{P}_1]+[\overline{Q}\cdot\overline{P}_2]+\cdots+[\overline{Q}\cdot\overline{P}_n]$, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

შემდეგ, ცხადია, რომ წინა ფორმულა სამართლიანი რჩება მაშინაც, თუ ერთდროულად მარჯვნივ და მარცხნივ მამრავლთ შეუნაცვლებთ რიგს; მართლაც, ასეთი გარდანაცვლებით ორივე მხარე ნიშანს იცვლის მოპირდაპირეზე.

დაბოლოოს, თუ წინა ტოლობაში $\overline{Q}$ ვექტორს შევცვლით რამოდენიმე ვექტორის გეომეტრიული ჯამით, ადვილად დავამტკიცებთ, ისე როგორც § 22-ში, რომ ორი გეომეტრიული ჯამის ვექტორული ნამრავლის შესადგენად, საკმარისია პირველი ჯამის თითოეული წევრი გავამრავლოთ (ვექტორულად) მეორე ჯამის თითოეულ წევრზე და მიღებულნი შევკრიბოთ (გეომეტრიულად).



ნახ. 54

უნდა გვახსოვდეს, რომ ვექტორული ნამრავლი დამოკიდებულია მამრავლთა რიგზე და ამიტომ გადამრავლების დროს საჭიროა თითოეულ ცალკე ნამრავლში მამრავლთა რიგი შევინარჩუნოთ.

მაგალითად: $[(\overline{P}_1+\overline{P}_2)\cdot(\overline{Q}_1+\overline{Q}_2)]=[\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_1]+[\overline{P}_2\cdot\overline{Q}_1]+[\overline{P}_1\cdot\overline{Q}_2]+$ $+[\overline{P}_2\cdot\overline{Q}_2]$.

შედეგი არ იქნება სამართლიანი, თუ მაგალითად, უკანასკნელი შესაკრების მაგიერ დავწერდით: $[\overline{Q}_2\cdot\overline{P}_2]$.

49. მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის მგეზავთა ვექტორული გამრავლების ცხრილი. ვთქვათ $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ არიან მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის მგეზავები; ეს სისტემა მარცხენა იყოს (ნახ. 54).

ვექტორული ნამრავლის თვით განმარტების ძალით, ცხადია გვექნება:

$$[\bar{u}\cdot\bar{u}]=[\bar{v}\cdot\bar{v}]=[\bar{w}\cdot\bar{w}]=0 \qquad (1)$$

$$[\bar{v}\cdot\bar{w}]=\bar{u},\ [\bar{w}\cdot\bar{u}]=\bar{v},\ [\bar{u}\cdot\bar{v}]=\bar{w}; \qquad (2)$$

საკმარისია დავიხსომოთ (1) ფორმულების გარდა კიდევ პირველი ფორმულა (2)-დან; დანარჩენი ორი მიიღება პირველიდან წრიული გარდანაცვლებით.

(2) ფორმულებს შეიძლება კიდევ შემდეგი დაემატონ:

$$[\bar{w}\cdot\bar{v}]=-\bar{u},\ [\bar{u}\cdot\bar{w}]=-\bar{v},\ [\bar{v}\cdot\bar{u}]=-\bar{w}.$$

სავარჯიშო მაგალითი

დაამტკიცეთ, რომ, თუ კოორდინატთა მარცხენა სისტემის მაგიერ ავიღებთ მარჯვენას, მაშინ (2) ფორმულები შემდეგით უნდა შეიცვალონ:

$$[\bar{v}\cdot\bar{w}]=-\bar{u},\ [\bar{w}\cdot\bar{u}]=-\bar{v},\ [\bar{u}\cdot\bar{v}]=-\bar{w}. \qquad (2a)$$

50. ამოცანა 14. ორი მოცემული ვექტორის ვექტორული ნამრავლის პოვნა. ჩვენ ვგულისხმობთ, როგორც მთელს ამ განყოფილებაში, რომ კოორდინატთა ღერძები მართკუთხოვანია. გარდა ამისა ვგულისხმობთ, რომ სისტემა მარცხენაა [1]

გვაქვს: $\overline{P_1}=\bar{u}X_1+\bar{v}Y_1+\bar{w}Z_1, \overline{P_2}=\bar{u}X_2+\bar{v}Y_2+\bar{w}Z_2$; თუ მარჯვენა მხარეებს გადავამრავლებთ (ვექტორულად) და მხედველობაში მივიღებთ წინა პარაგრაფის გამრავლების ცხრილს, ადვილად მივიღებთ:

$$[\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}]=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\bar{u}+(Z_1X_2-Z_2X_1)\bar{v}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\bar{w}. \qquad (1)$$

მაშ, თუ $\overline{R}=(X,Y,Z,)$ აღნიშნავს $\overline{P_1}$ და $\overline{P_2}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, ე. ი. თუ $\overline{R}=[\overline{P_1}\,\overline{P_2}]$, მაშინ:

$$X=Y_1Z_2-Y_2Z_1,\ Y=Z_1X_2-Z_2X_1,\ Z=X_1Y_2-X_2Y_1. \qquad (2)$$

ყველაზე ადვილია (1) ფორმულისა და მისგან გამომდინარე (2) ფორმულების დანახსოვრება, თუ შევნიშნავთ, რომ (1) ფორმულა შეიძლება ასე დაიწეროს:

---

[1]) საზოგადოდ, როცა ჩვენ საქმე გვაქნება ვექტორულ ნამრავლთან, ყოველთვის ვიგულისხმებთ კოორდინატთა სისტემას მარცხენად. მაგრამ ყველა გამოყვანილი ფორმულები სამართლიანი დარჩებიან მარჯვენა სისტემისათვისაც, თუ რომ ვექტორული ნამრავლის (c) მოთხოვნილებას შევცვლით იმ მოთხოვნილებით, რომ ვექტორები $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}$ შეადგენენ მარჯვენა სისტემას.

$$[\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \overline{u} & \overline{v} & \overline{w} \end{vmatrix}$$

მართლაც, ამ დეტერმინანტს თუ დავშლით უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტებით, მივიღებთ სწორედ (1) ფორმულის მარჯვენა მხარეს.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ (6,4,5) და (−3, 2, 1) ვექტორების ვექტორული ნამრავლი.

პ ა ს. (−6, −21, 24).

2. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, რომლის ორ გვერდს წარმოადგენს $\overline{P}_1=(X_1,Y_1,Z_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2,Y_2,Z_2)$ ვექტორები, რომელთაც სათავე საერთო აქვთ.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ S არის საძიებელი ფართობი, მაშინ $S=\frac{1}{2}|R|$, სადაც $\overline{R}=[\overline{P}_1, \overline{P}_2]$. ვინაიდან $|R|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$, სადაც X, Y, Z მოიცემიან (2) ფორმულებით, მივიღებთ:

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(Y_1Z_2-Y_2Z_1)^2+(Z_1X_2-Z_2X_1)^2+(X_1Y_2-X_2Y_1)^2}$$

3. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია მისი წვეროები: $A(x_1, y_1 z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი ფართობის მისაღებად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა წინა ამოცანაზე დაიყვანება, თუ, მაგალითად, მივიღებთ:

$$\overline{P}_1=\overline{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),\quad \overline{P}_2=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1).$$

4. თუ ვისარგებლებთ ვექტორული ნამრავლის განმარტებით და (2) ფორმულებით, ვიპოვოთ $\sin\vartheta$, სადაც ϑ არის კუთხე მოცემულ ორ ვექტორს შ ორ ის

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს: $|[\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2]| = |P_1|\cdot|P_2|\cdot\sin\vartheta$, საიდანაც:

$$\sin\vartheta=\frac{|[\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2]|}{|P_1|\cdot|P_2|}=\frac{\sqrt{(Y_1Z_2-Y_2Z_1)^2+(Z_1X_2-X_1Z_2)^2+(X_1Y_2-X_2Y_1)^2}}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

5. თუ ვისარგებლებთ ფორმულით $\cos^2\vartheta=1-\sin^2\vartheta$, ზევითმოყვანილი გამოსახულებით $\sin\vartheta$-სათვის (იხ. წინა ვარჯ.) და გამოსახულებით $\cos\vartheta$-სათვის [§ 40, ფორმ. (2)], დავამტკიცოთ ე ი ლ ე რ ი ს-ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი ს იგივეობა:

$$(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(X_2^2+Y_2^2+Z_2^2)-(X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2)^2=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)^2+$$
$$+(Z_1X_2-X_1Z_2)^2+(X_1Y_2-X_2Y_1)^2,$$

სამართლიანი ექვსი $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ სიდიდის ყოველი ერთობლივობისათვის.

6. ვექტორული მომენტი წერტილის მიმართ. ვთქვათ $\overline{P}=\overline{AB}$ რომელიმე დაბმული ან სრიალა ვექტორია (§ 5) და ვთქვათ C რომელიმე წერტილია. $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი C წერტილის მიმართ ეწოდება $\overline{L}$ ვექტორს, $\overline{C}$ წერტილზე მოდებულს და შემდეგი პირობებით განსაზღვრულს: $\overline{L}$ ვექტორის სიგრძე რიცხვობრივ ტოლია $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძისა და იმ h მართობის ნამრავლისა, რომელიც ჩამოშვებულია C წერტილიდან $\overline{P}$ ვექტორის შემცველ წრფეზე; $\overline{L}$ ვექტორი CAB სიბრტყის მართობია და მოგეზულია ისეთნაირად, რომ ვექტორები $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ და $\overline{L}$ შეადგენენ მარცხენა სისტემას.

C წერტილს ეწოდება მომენტის ცენტრი (ანუ პოლუსი).

ადვილი დასანახია, რომ ვექტორის მომენტი მოცემული წერტილის მიმართ არ შეიცვლება, თუ ამ ვექტორს მის შემცველ წრფეზე გადავადგილებთ. პირიქით, თუ ამ წრფის გადადგილებას ვახდენთ, მაშინ მომენტი შეიცვლება, ვინაიდან ასეთ პირობებში ან h სიდიდე შეიცვლება, ან CAB სიბრტყის მიმართულება (და მაშასადამე $\overline{L}$-ის გეზიც), ან ერთიც და მეორეც ერთად. აი რატომ იყენებენ მომენტის ცნებას დაბმულს ან სრიალა ვექტორებისათვის და არა თავისუფალისათვის, რომელნიც ნებისმიერად შეიძლება გადაადგილდენ (გეზის შეუცვლელად).

დასამტკიცებელია, რომ:

$$\overline{L}=[\overline{CA}\,.\,\overline{P}] \tag{4}$$

და მოსაძებნია $\overline{L}$ ვექტორის მდგენელნი (იხ. § 29-ის ბოლოში შენიშვნა), თუ მოცემულია C, A წერტილების კოორდინატები და $\overline{P}$-ვექტორის მდგენელნი.

ამოხსნა. განმარტების ძალით, $\overline{L}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია $|L|=|P|\cdot|h|=2S$ ფართ. ABC; ამნაირად $\overline{L}$ ვექტორის სიგრძე ტოლია $[\overline{CA}\cdot\overline{CB}]$ ვექტორული ნამრავლის სიგრძისა. თუ შევნიშნავთ, რომ $\overline{L}$ ვექტორის განსაზღვრის თანახმად, მისი გეზი იგივეა რაც ამ ნამრავლის გეზი, დავასკვნით, რომ:

$$\overline{L}=[\overline{CA}\cdot\overline{CB}]. \tag{5}$$

მაგრამ, $\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}=\overline{CA}+\overline{P}$; თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ წინა ფორმულებში და შევნიშნავთ, რომ $[\overline{CA}\cdot\overline{CA}]=0$, მივიღებთ საძიებელ (4) ფორმულას.

რომ მივიღოთ $\overline{L}$ ვექტორის მდგენელნი L_x, L_y, L_z, ესე იგი $\overline{L}$ ვექტორის საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილების ალგებრული მნიშვნელობანი, $C(a, b, c)$ წერტილის $A(x,y,z)$ წერტილის და $\overline{P}=(X,Y,Z)$ ვექტორის კოორდინატების მიხედვით, საკმარისია გამოვიყენოთ (2) ფორმულები (4) ფორმულისათვის, სადაც $\overline{CA}=(x-a,\,y-b,\,z-c)$. ამნაირად მივიღებთ:

$$L_x=(y-b)Z-(z-c)Y,\ L_y=(z-c)X-(x-a)Z,\ L_z=(x-a)Y-(y-b)X \quad (6)$$

7. დაამტკიცეთ (4) ფორმულის გამოყენებით, რომ მოცემულ A-წერტილზე მოდებული რამოდენიმე ვექტორის ტოლქმედის[1] მომენტი, შემადგენელთა მომენტების[2] (გეომეტრიული) ჯამის ტოლია („ვარინიონის განზოგადოებული თეორემა").

51. სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი. ვთქვათ მოცემულია სამი ვექტორი $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$. შევადგინოთ პირველი ორის ვექტორული ნამრავლი და მიღებული ვექტორი ოდენურად გავამრავლოთ მესამეზე, ესე იგი შევადგინოთ გამოსახულება $[\overline{P}_1 . \overline{P}_2] . \overline{P}_3$. ამას ეწოდება სამი $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ და $\overline{P}_3$ ვექტორის შერეული ნამრავლი, ვინაიდან მასში ხდება როგორც ოდენური, ისე ვექტორული გამრავლება. შერეულ ნამრავლს ასე აღნიშნავენ: $[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]$, ასე რომ განმარტების ძალით.

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3] = [\overline{P}_1 . \overline{P}_2] . \overline{P}_3 . \quad (1)$$

შერეული ნამრავლი, რა თქმა უნდა, ოდენური სიდიდეა. ადვილი გამოსათვლელია ეს ნამრავლი $\overline{P}_1=(X_1,Y_1,Z_1)$, $\overline{P}_2=(X_2,Y_2,Z_2)$, $\overline{P}_3=(X_3,Y_3,Z_3)$ ვექტორების კოორდინატების მიხედვით. მართლაც, თუ დროებით დაუშვებთ, რომ: $[\overline{P}_1 . \overline{P}_2] = \overline{P} = (X,Y,Z)$ მაშინ, $[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3] = \overline{P} . \overline{P}_3 = XX_3 + YY_3 + ZZ_3$, საიდანაც, თუ შევნიშნავთ, რომ X, Y, Z არიან წინა პარაგრაფის (3)დეტერმინანტის ელემენტების ალგებრული დამატებანი[3], დავასკვნით, რომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე მიიღება ხსენებული დეტერმინანტიდან $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ ელემენტების მაგიერ X_3, Y_3, Z_3 სიდიდეების ჩასმით. მაშასადამე ვღებულობთ მნიშვნელოვან ფორმულას:

$$[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3] = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს, სხვათა შორის, რომ შერეული ნამრავლი $[\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3]$ შეიცვლის ნიშანს მოპირდაპირეზე, თუ შეუნაცვლებთ ადგილს

[1]) წერტილზე მოდებული რამდენიმე ვექტორის ტოლქმედი ეწოდება მათ გეომეტრიულ ჯამს, იმავე წერტილზე მოდებულს.

[2]) აქ საუბარია ვექტორულ მომენტებზე (იხ. წინა ვარჯ.) რაღაც გარკვეული წერტილის მიმართ.

[3]) დეტერმინანტის ელემენტის ალგებრული დამატება ეწოდება გარკვეული ნიშნით განხილულ დეტერმინანტს, მიღებულს იმ სტრიქონისა და სვეტის ამოშლით, რომელნიც მოცემულ ელემენტზე იკვეთებიან (ნიშანი ის აიღება, რომელსაც ადგილი აქვს დეტერმინანტის დაშლაში მოცემული სტრიქონის ან სვეტის ელემენტებით).

რომელიმე ორ ელემენტს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში მარჯვენა მხარის დეტერმინანტში ორი სტრიქონის შენაცვლება მოხდება.

პირიქით, შერეული ნამრავლი არ შეიცვლება ელემენტების წრიული გარდანაცვლებით, ვინაიდან ასეთი გარდანაცვლება შეიძლება მიღებული იყოს, თუ ადგილებს შეუნაცვლებთ ჯერ პირველს და მეორე ელემენტს და შემდეგ (მიღებულ გამოსახულებაში) მეორე და მესამეს. ყოველი ასეთი შენაცვლებით შერეული ნამრავლი ნიშანს იცვლის, მაგრამ ორი გარდანაცვლების შედეგად ისევ წინანდელ ნიშანს მივიღებთ, მაშ:

$$[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3] = [\overline{P}_2,\ \overline{P}_3,\ \overline{P}_1] = [\overline{P}_3,\ \overline{P}_1,\ \overline{P}_2]. \tag{3}$$

ამ ტოლობებიდან გამომდინარეობს:

$$[\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2] \cdot \overline{P}_3 = [\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3] = [\overline{P}_2,\ \overline{P}_3,\ \overline{P}_1] = [\overline{P}_2 \cdot \overline{P}_3] \cdot \overline{P}_1,$$

და, ვინაიდან ოდენური ნამრავლი დამოუკიდებულია მამრავლთა რიგზე,

$$[\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2] \cdot \overline{P}_3 = \overline{P}_1 \cdot [\overline{P}_2 \cdot \overline{P}_3]. \tag{1a}$$

ეს ტოლობა გვიჩვენებს, რომ იმის მაგიერ, რომ პირველი ორი ვექტორის ვექტორული გამრავლება მოვახდინოთ და შედეგი ოდენურად გავამრავლოთ მესამეზე, შეიძლება პირველი ვექტორი ოდენურად გავამრავლოთ მეორე და მესამე ვექტორის ვექტორულ ნამრავლზე.

შევნიშნოთ, რომ შერეული ნამრავლი $[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3]$ დადებითი სიდიდეა, თუ ვექტორები $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ მარცხენა სისტემას შეადგენენ; წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი უარყოფითია.

მართლაც, ადვილი დასანახია, რომ პირველ შემთხვევაში ვექტორი $\overline{P} = [\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2]$ და ვექტორი $\overline{P}_3$ შეადგენენ მახვილ კუთხეს, ხოლო მეორეში ბლაგვს. ამიტომ ნამრავლი $\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2$ დადებითი იქნება პირველ შემთხვევაში და უარყოფითი მეორეში.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. ვექტორის მომენტი ღერძის მიმართ. სრიალა ან დაბმული $\overline{P} = \overline{AB}$ ვექტორის ოდენური მომენტი L_Δ მოცემული Δ ღერძის მიმართ ეწოდება Δ ღერძის რომელიმე წერტილის მიმართ $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტის Δ ღერძზე გეგმილის ალგებრულ მნიშვნელობას.

დაამტკიცეთ, რომ

$$L_\Delta=[\overline{CA},\ \overline{P},\ \overline{T}],$$

სადაც $\overline{T}$ არის Δ ღერძის მგეზავი, და რომ L_Δ დამოუკიდებელია C წერტილის მდებარეობაზე Δ ღერძზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განმარტების ძალით გვაქვს: $L_\Delta=$გეგ$_\Delta$ $\overline{L}=\overline{L}\cdot\overline{T}$; აქ $\overline{L}=[\overline{CA}\cdot\overline{P}]$ არის $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი Δ ღერძზე მდებარე C წერტილის მიმართ. მაშასადამე $L_\Delta=[\overline{CA}\cdot\overline{P}]\cdot\overline{T}=[\overline{CA},\ \overline{P},\ \overline{T}]$; სწორედ ეს არის საძიებელი ფორმულა.

თუ წრიულ გარდანაცვლებებს მოვახდენთ, ამ ფორმულის გადაწერა კიდევ შემდეგნაირად შეიძლება:

$$L_\Delta=[\overline{P},\ \overline{T},\ \overline{CA}]=[\overline{T},\ \overline{CA},\ \overline{P}]=[\overline{T}\cdot\overline{CA}]\cdot\overline{P}.$$

ვთქვათ C' აღნიშნავს რომელიმე სხვა წერტილს Δ ღერძზე. მაშინ $\overline{CA}=\overline{CC'}+\overline{C'A}$. თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობას უკანასკნელ გამოსახულებაში და შევნიშნავთ, რომ $[\overline{T}\cdot\overline{CC'}]=0$, მივიღებთ:

$$L_\Delta=[\overline{T}\cdot\overline{C'A}]\cdot\overline{P}=[\overline{T},\ \overline{C'A},\ \overline{P}]=[\overline{C'A},\ \overline{P},\ \overline{T}],$$

საიდანაც ჩანს, რრმ L_Δ არ შეიცვლება, თუ C-ს მაგიერ C'-ს ჩავსვამთ.

2. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძების მიმართ $\overline{P}$ ვექტორის ოდენური მომენტების გამოსახულებანი, თუ მოცემულია $\overline{P}=(X,\ Y,\ Z)$ ვექტორის მდგენელნი და მისი სათავე $A\,(x,\ y,\ z)$.

ა მ ო ხ ს ნ ა შეიძლება მივიღოთ წინა პარაგრაფის (6) ფორმულებიდან, თუ C წერტილს ავიღებთ კოორდინატთა სათავეზე და თუ შევნიშნავთ, რომ ამ შემთხვევაში ღერძის მიმართ ოდენური მომენტის თვით განმარტების ძალით, საძიებელი მომენტები იქნებიან სწორედ L_x, L_y, L_z. ეს გვაძლევს:

$$L_x=yZ-zY,\ L_y=zX-xZ,\ L_z=xY-yX. \tag{5}$$

მკითხველს მოეთხოვება გამოიყვანოს იგივე ფორმულები ამ პარაგრაფის (2) ფორმულიდან.

3. (2) ფორმულის გამოყენებით და დეტერმინანტთა გამრავლების წესის მიხედვით დაამტკიცეთ, რომ:

$$[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3]^2=\begin{vmatrix} \overline{P}_1\cdot\overline{P}_1 & \overline{P}_1\cdot\overline{P}_2 & \overline{P}_1\cdot\overline{P}_3 \\ \overline{P}_2\cdot\overline{P}_1 & \overline{P}_2\cdot\overline{P}_2 & \overline{P}_2\cdot\overline{P}_3 \\ \overline{P}_3\cdot\overline{P}_1 & \overline{P}_3\cdot\overline{P}_2 & \overline{P}_3\cdot\overline{P}_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

დამტკიცება. გვაქვს:

$$[P_1,\ P_2,\ P_3]^2 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

თუ გამოვიყენებთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესს და თუ ამ გამრავლებას სტრიქონების მიხედვით მოვახდენთ, მივიღებთ:

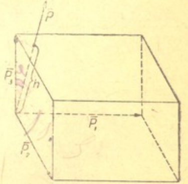
$$[P_1,\ P_2,\ P_3]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} X_1^2+Y_1^2+Z_1^2 & X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2 & X_1X_3+Y_1Y_3+Z_1Z_3 \\ X_2X_1+Y_2Y_1+Z_2Z_1 & X_2^2+Y_2^2+Z_2^2 & X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3 \\ X_3X_1+Y_3Y_1+Z_3Z_1 & X_3X_2+Y_3Y_2+Z_3Z_2 & X_3^2+Y_3^2+Z_3^2 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

საიდანაც საძიებელი ფორმულა პირდაპირ გამომდინარეობს.

52. ამოცანა 15. სამს მოცემულ ვექტორზე აგებული პარალელეპიპედის ან ტეტრაედრის სიტევის პოვნა. ადვილი დასანახია, რომ ერთი და იგივე სათავიდან გავლებულს სამ ვექტორზე აგებული პარალელეპიპედის სიტევე, ამ ვექტორთა შერეული ნამრავლის ტოლია (თუ უკანასკნელის ნიშანს ყურადღებას არ მივაქცევთ).

მართლაც, ხსენებული V სიტევე ტოლია $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის S ფართობისა და h სიმაღლის ნამრავლისა (ნახ. 55). მაგრამ



ნახ. 55.

$S=|P_1|\,|P_2|\cdot\sin\widehat{\overline{P}_1\ \overline{P}_2}$; მაშასადამე, თუ $\overline{P}$ აღნიშნავს ვექტორულ ნამრავლს $[P_1\cdot P_2]$, მაშინ $S=|P|$.

მეორეს მხრივ, ცხადია, $h=|P_3|\cos\varphi$, სადაც φ არის მახვილი კუთხე $\overline{P}_3$-სა და h-ს შორის. ეს კუთხე ტოლია $\overline{P}_3$-სა და $\overline{P}$-ს შორის არსებული კუთხისა ან და მისი დამატებაა 180°-მდე, ეს დამოკიდებულია $\overline{P}$ ვექტორის გეზზე. ამიტომ $\cos\varphi=\pm\cos\widehat{\overline{P},\ \overline{P}_3}$, და ჩვენ გვექნება: $V=S\cdot h=|P|\cdot|P_3|\cos\varphi=$

$=\pm|P|\,|P_3|\cos\widehat{\overline{P},\ \overline{P}_3}=\pm\overline{P}\cdot\overline{P}_3$, ან, თუ გავიხსენებთ, რომ $\overline{P}=[\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2]$:

$$V=\pm[\overline{P}_1\cdot\overline{P}_2]\cdot\overline{P}_3=\pm[\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3]. \qquad (1)$$

ნიშანს (+) ან (−) ისე შევარჩევთ, რომ V-სათვის დადებითი სიდიდე მივიღოთ. მაგრამ, ეს პირობა შეიძლება უკუვაგდოთ და V-ს შემდეგი ფორმულით განვსაზღვროთ:

$$V = [\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3]. \qquad (1a)$$

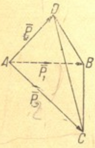
ეს ფორმულა მიაწერს V სიტევეს გარკვეულ ნიშანს: სახელდობრ, სიტევე იქნება დადებითი, თუ $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ ვექტორები შეადგენენ მარცხენა სისტემას; წინააღმდეგ შემთხვევაში სიტევე იქნება უარყოფითი.

წინა პარაგრაფის (2) ფორმულის ძალით, ვღებულობთ V სიტევისათვის საძიებელ გამოსახულებას:

$$V = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ტეტრაედრის სიტევისათვის, რომელიც $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, P_3 ვექტორებზეა აგებული (ნახ. 56) გვექნება: $V' = \frac{1}{2}\, S' \,.\, h$, სადაც $S' = \frac{1}{2}\, S$ არის $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი. ამიტომ გვექნება: $V' = \frac{1}{6}\, Sh$ და

$$V = \frac{1}{6}\ [\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \overline{P}_3] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$



ნახ. 56.

თუ, ჩვენ არ გვინდა სიტევეს ნიშანი მივაწეროთ, მაშინ მარჯვენა მხარის აბსოლუტური მნიშვნელობა უნდა ავიღოთ.

უკანასკნელი ფორმულიდან შეიძლება ხელახლა გამოვიყვანოთ სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობა (§ 35). მართლაც ეს პირობა, ცხადია, დაიყვანება პირობაზე $V = 0$, რაც ხელახლა გვაძლევს ხსენებული პარაგრაფის (3)ფორმულას. მაგრამ იქ მიღებული პირობა უფრო ზოგადია, ვინაიდან იქ ჩვენ არ ვგულისხმობდით კოორდინატებს მაინცა და მაინც მართკუთხოვანად.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. წინა პარაგრაფის (6)-ფორმულით თუ ისარგებლებთ, დაამტკიცეთ ფორმულა:

$$V^2=|P_1|^2 \cdot |P_2|^2 \cdot |P_3|^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

სადაც V აღნიშნავს $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის სიტევეს, ხოლო λ, μ, ν აღნიშნავენ, შესაბამისად, $\overline{P_2}$-სა და $\overline{P_3}$-ს, $\overline{P_3}$-სა და $\overline{P_1}$, $\overline{P_1}$-სა და $\overline{P_2}$-ს შორის კუთხეებს.

2. შტაუდტის სინუსი. ერთი და იგივე სათავიდან გავლებულს ორ $\overline{T_1}$ და $\overline{T_2}$ მგეზავებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობი ტოლია.

$$|T_1| \cdot |T_2| \sin \widehat{\overline{T_1}, \overline{T_2}} = \sin \overline{T_1}, \overline{T_2}.$$

ანალოგიურად ამისა, ერთი და იგივე სათავიდან გავლებულს სამ $\overline{T_1}, \overline{T_2}$ და $\overline{T_3}$ მგეზავზე აგებული პარალელეპიპედის სიტევე შეიძლება იწოდოს, როგორც ამ მგეზავებით განსაზღვრული სამწახნაგოვანი კუთხის სინუსი (შტაუდტის სინუსი). ზემოხსენებულის ძალით იგი ტოლია შერეული ნამრავლის: $[\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}]$. წინა ვარჯიშობის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ ამ სინუსის კვადრატი ტოლია:

$$[\overline{T_1}, \overline{T_2}\, \overline{T_3}]^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

53. ამოცანა 16. ტეტრაედრის სიტევის პოვნა მისი წვეროების კოორდინატების მიხედვით. თუ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$ არიან ტეტრაედრის წვეროების კოორდინატები (ნახ. 56), ცხადია, მისი სიტევე V მიიღება წინა პარაგრაფის (3) ფორმულიდან, თუ ავიღებთ: $\overline{P_1}=\overline{AB}, \overline{P_2}=\overline{AC}, \overline{P_3}=\overline{AD}$. მაშასადამე, გვექნება:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}, \qquad (1)$$

ანუ (იხ. ანალოგიური გარდაქმნა § 35-ში),

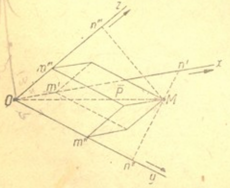
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ამ ფორმულიდან შეიძლება ხელახლა მივიღოთ ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობა, გამოყვანილი § 35-ში სხვა გზით (იხ. წინა პარაგრაფი).

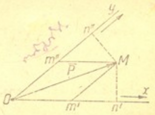
IV. ძირითადი ფორმულები ირიბკუთხოვან კოორდინატებში

ამ განყოფილებაში ჩვენ განვაზოგადოებთ წინა განყოფილების ზოგიერთ ფორმულებს ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევისათვის. „კოვარიანტული კოორდინატების“ ცნება (ნასესხები თანამედროვე ტენზორული აღრიცხვიდან), რომელიც შემოღებული იქნება შემდეგ პარაგრაფში, საშუალებას მოგვცემს წარმოვადგინოთ შედეგები გაცილებით უფრო მარტივი სახით, ვიდრე ეს ხდებოდა, ჩვეულებრივ, ანალიზური გეომეტრიის კურსებში.

54. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული წრფივი კოორდინატები. ვექტორის წრფივი კოორდინატები ჩვენ განვმარტეთ, როგორც ამ ვექტორის გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი საკოორდინატო ღერძებზე ისე, რომ გეგმილები აიღებოდენ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურად (ან საკოორდინატო ღერძების, ორი განზომილების შემთხვევაში).



ნახ. 57. *a*



ნახ. 57. *b*.

57 *a* და 57 *b* ნახაზებზე წარმოდგენილნი არიან, შესაბამისად, შემთხვევები 3 და 2 განზომილებისა. პირველ შემთხვევაში $\overline{P} = \overline{OM}$ ვექტორის

კოორდინატები (ან ყოველი გეომეტრიულად მისი ტოლი ვექტორის) არიან:

$$\boxed{X = Om',\ Y = Om'',\ Z = Om''',}$$

ხოლო მეორე შემთხვევაში:

$$X = Om',\ Y = Om'',$$

(ამასთანავე, რასაკვირველია; Om' აღნიშნავს $\overline{Om'}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას Ox ღერძის გასწვრივ და ა. შ).

მაგრამ, საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურად აღებულ გეგმილთა მაგიერ (ან ორი განზომილების შემთხვევაში — საკოორდინატო ღერძების პარალელურად), შეიძლება განვიხილოთ $\overline{P}$ ვექტორის მართკუთხოვანი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე. ამ გეგმილთა ალგებრული მნიშვნელობანი იწოდებიან ვექტორის კოვარიანტულ კოორდინატებად. ჩვენ მათ აღვნიშნავთ X^*, Y^*, Z^*-ით.

მაშ განმარტების ძალით (ნახ. 57a):

$$X^* = On' = \text{მართკუთხოვანი გეგ}_x\, \overline{P},$$
$$Y^* = On'' = \quad \text{"} \quad \text{გეგ}_y\, \overline{P},$$
$$Z^* = On''' = \quad \text{"} \quad \text{გეგ}_z\, \overline{P};$$

(ანალოგიურად ორი განზომილების შემთხვევისათვის — ნახ. 57 b).

თუ $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ აღნიშნავენ Ox, Oy, Oz ღერძების მგეზავებს, მაშინ ზემოხსენებულის მიხედვით:

$$X^* = \overline{P}.\overline{u},\ Y^* = \overline{P}.\overline{v},\ Z^* = \overline{P}.\overline{w}; \tag{1}$$

(ანალოგიურად ორი განზომილების შემთხვევისათვის).

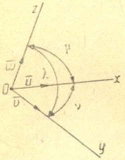
კოვარიანტული კოორდინატებისაგან განსასხვავებლად, ჩვეულებრივ კოორდინატებს, ესე იგი, ჩვენ მიერ ადრე შემოღებულ კოორდინატებს, ეწოდებათ კონტრავარიანტული[1].

შემდეგში ყველგან, თუ რომ წინააღმდეგი განსაკუთრებით ხაზგასმული არ არის, სიტყვა „კოორდინატები" უნდა გვესმოდეს, ისე როგორც წინა განყოფილებაში, როგორც კონტრავარიანტული კოორდინატები, ე. ი. X, Y, Z.

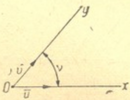
---

[1]) ამ სახელწოდებათა წარმოშობა ახსნილი იქნება იმ თავში, რომელიც კოორდინატთა გარდაქმნას შეეხება (§ 61).

ცხადია, რომ მართკუთხოვანი სისტემის შემთხვევაში კოვარიანტულს და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს შორის არავითარი განსხვავება არ არის.



ნახ. 58*a*



ნახ. 58*b*.

გარდა ამისა თავიდანვე ცხადია, რომ, თუ მოცემულია კონტრავარიანტული კოორდინატები (მოცემულ ღერძთა სისტემის მიმართ), მაშინ ამით მოცემული იქნებიან კოვარიანტული კოორდინატებიც, და უკუღმა. მართლაც, ძნელი არ არის დამოკიდებულების პოვნა კოორდინატთა ამ ორივე სახეს შორის.

ამისათვის დავიწყოთ იმით, რომ შევნიშნოთ შემდეგი აშკარა ფორმულები (კოორდინატთა ირიბკუთხოვანი სისტემის მგეზავთა ოდენური გამრავლების ცხრილი):

$$\overline{u}^2 = \overline{v}^2 = \overline{w}^2 = 1 \tag{2}$$

$$\overline{v} \cdot \overline{w} = \cos\lambda, \quad \overline{w} \cdot \overline{u} = \cos\mu, \quad \overline{u} \cdot \overline{v} = \cos\nu, \tag{3}$$

სადაც λ, μ, ν აღნიშნავენ კუთხეებს, შესაბამისად, Oy-სა და Oz-ს, Oz-სა და Ox-ს, და Ox-სა და Oy-ს შორის (ნახ. 58*a*).

სიბრტყეზე განხილული კოორდინატების შემთხვევაში გვექნება (ნახ. 58*b*):

$$\overline{u}^2 = \overline{v}^2 = 1, \tag{2a}$$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \cos\nu. \tag{3b}$$

ამ ფორმულების ძალით, თუ შევნიშნავთ, რომ:

$$\overline{P} = \overline{u}X + \overline{v}Y + \overline{w}Z, \tag{4}$$

(1) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
X^* &= X + Y\cos\nu + Z\cos\mu, \\
Y^* &= X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda \\
Z^* &= X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ეს ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ კოვარიანტული კოორდინატები არიან წრფივი და ერთგვაროვანი ფუნქციები კონტრავარიანტულის და რომ ამასთანავე X, Y, Z-ის კოეფიციენტთა ცხრილი, ესე იგი, ცხრილი:

$$
\begin{matrix}
1 & \cos\nu & \cos\mu \\
\cos\nu & 1 & \cos\lambda \\
\cos\mu & \cos\lambda & 1
\end{matrix}
$$

სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ (ესე იგი, ზედა მარცხენა კუთხიდან ქვედა მარჯვენა კუთხისაკენ მიმავალის).

ეს ფორმულები გამოსახავენ კოვარიანტულ კოორდინატებს ჩვეულებრივის (კონტრავარიანტულის) საშუალებით. შებრუნებულ გამოსახულებებს მივიღებთ, თუ წინა განტოლებებს ამოვხსნით X, Y, Z-ის მიმართ; ეს ყოველთვის შესაძლებელია, ვინაიდან, დეტერმინანტი შედგენილი X, Y, Z-ის კოეფიციენტებისაგან:

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
1 & \cos\nu & \cos\mu \\
\cos\nu & 1 & \cos\lambda \\
\cos\mu & \cos\lambda & 1
\end{vmatrix}
$$

განსხვავდება ნულისაგან (ვინაიდან იგი წარმოადგენს $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ მგეზავებზე აგებული პარალელეპიპედის სიტევის კვადრატს (§ 52, ვარჯ. 1).

მკითხველს მოეთხოვება იპოვოს ეს გამოსახულებანი და დაამტკიცოს რომ X, Y, Z აგრეთვე წრფივი, ერთგვაროვანი ფუნქციები არიან X^*, Y^*, Z^*-ის მიმართ; სათანადო კოეფიციენტთა ცხრილი კი აგრეთვე სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ (იხ. ვარჯ. პარაგრაფის ბოლოში).

ორი განზომილების შემთხვევაში ფორმულები მარტივდებიან,[1] და ჩვენ გვექნება:

[1]) ფორმულები ან უშუალოდ გამოიყვანებიან, სამი განზომილების შემთხვევის ანალოგიურად ან მიიღებიან სამი განზომილებისათვის არსებული ფორმულებიდან, თუ მათში $Z^*=Z=0$ (იგივურად); ეს კი მოითხოვს, რომ $\cos\mu=\cos\lambda=0$ [იხ. უკანასკნელი (5) ფორმულათაგან], ე. ი. რომ Oz ღერძი მართობული იყოს Oxy სიბრტყისა. ეს გასაგებიც არის, ვინაიდან სხვანაირად Z^* კოორდინატი ნულისაგან განსხვავებული იქნება Oxy სიბრტყეზე მდებარე წერტილთათვისაც

$$X^* = X + Y\cos\nu, \quad Y^* = X\cos\nu + Y; \qquad (5a)$$

თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით X და Y-ის მიმართ, მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს:

$$X = \frac{1}{\sin^3\nu}(X^* - Y^*\cos\nu), \quad Y = \frac{1}{\sin^2\nu}\left(-X^*\cos\nu + Y^*\right). \qquad (7)$$

რასაკვირველია, ყველაფერი ამ პარაგრაფში ნათქვამი ეხება აგრეთვე წერტილის კოორდინატებსაც, ვინაიდან მათი განხილვა შეიძლება, როგორც სათავიდან გავლებული ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის კოორდინატებისა.

სავარჯიშო მაგალითი

იპოვეთ კონტრავარიანტული კოორდინატების გამოსახულება კოვარიანტულის საშუალებით ზოგად შემთხვევაში.

პას. თუ (5) სისტემას ამოვხსნით X, Y, Z-ის მიმართ, დეტერმინანტთა თეორიის წესების მიხედვით, მივიღებთ:

$$X = a_{11}X^* + a_{12}Y^* + a_{13}Z^*,$$
$$Y = a_{21}X^* + a_{22}Y^* + a_{23}Z^*,$$
$$Z = a_{31}X^* + a_{32}Y^* + a_{33}Z^*,$$

სადაც

$$a_{11} = \frac{\sin^2\lambda}{\Delta}, \quad a_{22} = \frac{\sin^2\mu}{\Delta}, \quad a_{33} = \frac{\sin^2\nu}{\Delta},$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda}{\Delta}, \quad a_{31} = a_{13} = \frac{\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu}{\Delta},$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu}{\Delta}$$

და Δ აღნიშნავს (6) დეტერმინანტს,

55. ორი ვექტორის ოდენური ნამრავლის გამოსახულება. ვთქვათ $\overline{P}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ და $\overline{P}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$ არიან მოცემული ვექტორები. მათი ოდენური ნამრავლი რომ გამოვითვალოთ ირიბკუთხოვან კოორდინატებში, შეიძლება ისე მოვიქცეთ, როგორც მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში (§ 37). სახელდობრ, გვაქვს:

$$\overline{P}_1 = \overline{u}X_1 + \overline{v}Y_1 + \overline{w}Z_1,$$

საიდანაც

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1(\bar{u}\cdot\overline{P_2})+Y_1(\bar{v}\cdot\overline{P_2})+Z_1(\bar{w}\cdot\overline{P_2})$$

ან, წინა პარაგრაფის (1) ფორმულების ძალით:

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1X_2^*+Y_1Y_2^*+Z_1Z_2^*; \tag{1}$$

ასეთნაირადვე შეგვიძლიან მივიღოთ (თუ როლებს შევუცვლით $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$-ს):

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1^*X_2+Y_1^*Y_2+Z_1^*Z_2. \tag{1a}$$

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში $X_2=X_2^*$, $Y_2=Y_2^*$, $Z_2=Z_2^*$ და (1) ფორმულა გადაიქცევა უკვე ცნობილ ფორმულად.

ორი განზომილების შემთხვევაში წინა ფორმულები გვაძლევენ:

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1X_2^*+Y_1Y_2^* \tag{2}$$

ადვილი გადასასვლელია (1) ან (2) გამოსახულებიდან მხოლოდ ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატების შემცველ გამოსახულებაზე; ამისათვის საკმარისია ამ ფორმულებში შემავალი კოვარიანტული კოორდინატები გამოვსახოთ ჩვეულებრივის საშუალებით, წინა პარაგრაფის (5) ან (5a) ფორმულის გამოყენებით (იხ. ქვევით, ვარჯიშობანი). სრულიად ასეთივე გზით შეიძლება გადასვლა მხოლოდ კოვარიანტული კოორდინატების შემცველ გამოსახულებაზე.

ამ მარტივი გამოთვლების შესრულებას მივანდობთ მკითხველს.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. ამ პარაგრაფის (2) ფორმულისა და წინა პარაგრაფის (5a) ფორმულების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ ორი განზომილების შემთხვევაში: $\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+(X_1Y_2+X_2Y_1)\cos\nu$.

2. დაამტკიცეთ სამი განზომილების შემთხვევისათვის შემდეგი ფორმულა (იხ. წინა მაგალითი):

$$\overline{P_1}\cdot\overline{P_2}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2+(Y_1Z_2+Y_2Z_1)\cos\lambda+(Z_1X_2+Z_2X_1)\cos\mu+(X_1Y_2+X_2Y_1)\cos\nu.$$

56. ვექტორის სიგრძისა, ორ ვექტორს შორის კუთხისა და ორ წერტილს შორის მანძილის გამოსახვა. თუ წინა პარაგრაფის ფორმულებში ვიგულისხმებთ, რომ $\overline{P}_1=\overline{P}_2=\overline{P}=(X,\ Y,\ Z)$, მივიღებთ $\overline{P}$ ვექტორის სიგრძის კვადრატისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$\overline{P^2} = |P|^2 = XX^* + YY^* + ZZ^*; \tag{1}$$

ეს გამოსახულება საშუალებას გვაძლევს $|P|$ სიგრძე გამოვთვალოთ.

თუ ამ ფორმულაში შევიტანთ X^*, Y^*, Z^*-ისათვის § 54-ში მიღებულ გიმოსახულებებს [იხ. ფორმულა (5)], მივიღებთ $|P|^2$-სათვის ისეთ გამოსახულებას, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ჩვეულებრივ კოორდინატებს:

$$|P|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu. \tag{2}$$

ამნაირად, ჩვენ ვხედავთ, რომ $|P|^2$ წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას X, Y, Z სიდიდეთა მიმართ, (ალებულ ცვლადთა კვადრატული ფორმა ეწოდება ამ ცვლადების მთელს რაციონალურს და ერთგვაროვან მეორე ხარისხის ფუნქციას).

(1) და (2)-დან უშუალოდ მიიღებიან გამოსახულებანი მანძილის კვადრატისათვის ორ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ წერტილს შორის; ამისთვის მარჯვენა მხარეებში უნდა ჩაისვას:

$$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1, \qquad Z = z_2 - z_1,$$
$$X^* = x_2^* - x_1^*, \quad Y^* = y_2^* - y_1^*, \quad Z^* = z_2^* - z_1^*,$$

სადაც, საზოგადოდ, x^*, y^*, z^* აღნიშნავენ წერტილის კოვარიანტულ კოორდინატებს.

ძნელი არაა აგრეთვე $|P|^2$-სათვის ისეთი გამოსახულების პოვნა, რომელიც შეიცავს მხოლოდ კოვარიანტულ კოორდინატებს X^*, Y^*, Z^*; ამისათვის საკმარისია შევიტანოთ (1)-ში X, Y, Z-ის გამოსახულებანი X^*, Y^*, Z^*-ის საშუალებით წარმოდგენილნი. მაგრამ უფრო მარტივი იქნება შემდეგნაირად მოქცევა: გვაქვს [§ 54-ის (5) ფორმულა და ამ პარაგრაფის (1) ფორმულა]:

$$X + Y\cos\nu + Z\cos\mu = X^*,$$
$$X\cos\nu + Y + Z\cos\lambda = Y^*,$$
$$X\cos\mu + Y\cos\lambda + Z = Z^*,$$
$$XX^* + YY^* + ZZ^* = |P|^2.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სამი სიდიდე X, Y, Z აკმაყოფილებს ოთხს წრფივ განტოლებას. ეს კი, როგორც დეტერმინანტთა თეორიიდან ცნობილია, შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც დეტერმინანტი, შედგენილი ამ განტოლებათა კოეფიციენტებისაგან, ნულის ტოლია, ესე იგი, როდესაც:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & X^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & Y^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & Z^* \\ X^* & Y^* & Z^* & |P|^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

თუ მარცხენა მხარეზე მდგომ დეტერმინანტს დავშლით, ვთქვათ, უკანასკნელი სტრიქონის ელემენტების მიხედვით, მივიღებთ ერთ წევრს $|P|^2$. Δ სახის[1] და ისეთ წევრებს, რომელნიც შეიცავენ X^*, Y^*, Z^* სიდიდეთა კვადრატებს და ნამრავლთ; თუ ამ უკანასკნელ წევრებს გადავიტანთ მარჯვნივ და ორივე მხარეს Δ-ზე გავყოფთ, მივიღებთ $|P|^2$-სათვის საძიებელ გამოსახულებას, როგორც კოვარიანტული კოორდინატების კვადრატულ ფორმას.

ორს $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორს შორის ϑ კუთხისათვის გვექნება:

$$\cos\vartheta = \frac{\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2}{|\overline{P}_1| \cdot |\overline{P}_2|}, \qquad (4)$$

საიდანაც წინა პარაგრაფის (1) ან ($1a$) ფორმულის გამოყენებით და იმავე აღნიშვნების ხმარებით, მივიღებთ:

$$\cos\vartheta = \frac{X_1 X_2^* + Y_1 Y_2^* + Z_1 Z_2^*}{|P_1| \cdot |P_2|} \qquad (5)$$

(ან ანალოგიურ ფორმულას, სადაც ვარსკვლავნი გადატანილი არიან პირველ მამრავლებზე); ამ ფორმულებში:

$$|P_1| = \sqrt{X_1 X_1^* + Y_1 Y_1^* + Z_1 Z_1^*}, \qquad |P_2| = \sqrt{X_2 X_2^* + Y_2 Y_2^* + Z_2 Z_2^*}.$$

ორი განზომილების შემთხვევაში (2) ფორმულის მაგიერ გვექნება:

$$|P|^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\nu, \qquad (2a)$$

ხოლო (3)-ის მაგიერ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & X^* \\ \cos\nu & 1 & Y^* \\ X^* & Y^* & |P|^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3a)$$

[1]) Δ, ისე როგორც ზევით, აღნიშნავს § 54-ის (6) დეტერმინანტს.

საიდანაც

$$|P|^2 \sin^2 \nu = X^{*2} + Y^{*2} - 2X^* Y^* \cos \nu \qquad (3ბ).$$

რასაკვირველია, ამ ფორმულის მიღება უშუალოდ შეიძლებოდა ფორმულიდან $|P|^2 = XX^* + YY^*$, თუ მასში შევიტანდით X და Y-ის გამოსახულებებს, წარმოდგენილთ X^* და Y^*-ის საშუალებით [§ 54, ფორმულა (7)].

57. გეზის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოეფიციენტები. ეხლა განვაზოგადოთ § 39-ში მიღებული ფორმულები და ცნებანი ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევისათვის.

ვთქვათ $\overline{T}$ აღნიშნავს მგეზავს, რომელიც განსაზღვრავს რაღაც გეზს. ამ მგეზავის ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები, ისე როგორც ზევით, აღვნიშნოთ l, m, n-ით, ასე რომ:

$$\overline{T} = \overline{u}l + \overline{v}m + \overline{w}n; \qquad (1)$$

l, m, n სიდიდეებს ვუწოდოთ გეზის ჩვეულებრივი ანუ კონტრავარიანტული კოორდინატები[1].

რაც შეეხება $\overline{T}$ მგეზავის კოვარიანტულ კოორდინატებს, მათ აღვნიშნავთ l^*, m^*, n^*-ით. ამ სიდიდეებს ვუწოდებთ გეზის კოვარიანტულ კოორდინატებს. ცხადია, რომ:

$$l^* = \cos \alpha, \;\; m^* = \cos \beta, \;\; n^* = \cos \gamma, \qquad (2)$$

სადაც α, β, γ აღნიშნავენ კუთხეებს, შედგენილთ $\overline{T}$ მგეზავის მიერ საკოორდინატო ღერძებთან.

მაშასადამე, გეზის კოსინუსები არიან შესაბამი მგეზავის კოვარიანტული კოორდინატები; ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში ისინი იგივე არ არიან, რაც (l, m, n) გეზის ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები (როგორც უკვე ვთქვით § 39-ში), არამედ l^*, m^*, n^* სიდიდეები დაკავშირებული არიან l, m, n სიდიდეებთან § 54-ის იმავე (5) ფორმულებით, როგორც ნებისმიერი ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები.

$T^2 = 1$ ტოლობიდან, წინა პარაგრაფის (1) ფორმულის ძალით, გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობა:

---

[1]) რადგესაც შემდეგში ჩვენ საუბარი გვექნება უბრალოდ გეზის კოორდინატებზე, ყოველთვის მხედველობაში გვექნება ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატები.

$$ll^* + mm^* + nn^* = 1 \text{ ანუ } l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = 1, \qquad (3)$$

რომელიც იმ თანაფარდობის მაგიერობას სწევს, რომელსაც ადგილი აქვს მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, სახელდობრ: $l^2+m^2+n^2=1$ ანუ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

თუ (3) თანაფარდობას გამოვსახავთ გეზის მხოლოდ ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული) კოორდინატების საშუალებით, მაშინ წინა პარაგრაფის (2) ფორმულის ძალით, მივიღებთ:

$$l^2+m^2+n^2+2mn\cos\lambda+2nl\cos\mu+2lm\cos\nu=1; \qquad (4)$$

მაგრამ თუ ამ თანაფარდობას გამოვსახავთ მხოლოდ კოვარიანტული კოორდინატების საშუალებით (ე. ი. გეზის კოსინუსების საშუალებით), მაშინ იმავე პარაგრაფის (3) ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & l^* \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & m^* \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & n^* \\ l^*, & m^*, & n^* & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

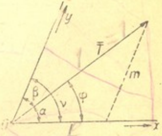
ცხადია, რომ უკუღმაც, (4) თანაფარდობა საკმარისია მისთვის, რომ l, m, n იყვნენ რაღაც გეზის კოორდინატები (კონტრავარიანტული), ხოლო (5) თანაფარდობა კი—მისთვის, რომ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ იყვნენ რაღაც გეზის კოსინუსები (იხ. § 39-ის ბოლო).

ორი განზომილების შემთხვევაში (4) და (5) ის მაგიერ შესაბამისად გვექნება:

$$l^2+m^2+2lm\cos\nu=1 \qquad (4a)$$

და [იხ. წინა პარაგრაფის (3b) ფორმულები]:

$$l^{*2}+m^{*2}-2l^*m^*\cos\nu=\sin^2\nu, \qquad (5a)$$



ნახ. 59.

ან, რაც იგივეა:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\nu=\sin^2\nu. \qquad (5b)$$

ამ შემთხვევაში (ორი განზომილების) შესაძლებელია, როგორც ნათქვამი იყო § 42-ში, სიბრტყეზე გეზის განსაზღვრისათვის ვისარგებლოთ ერთი φ კუთხით, რომელსაც აღებული გეზი Ox ღერძთან შეადგენს და რომელიც აითვლება Ox-ღერძიდან ხსენებულ პარაგრაფში მიღებული წესის მიხედვით (ნახ. 59).

ადვილი გასაგებია, რომ[1] $\cos\alpha = \cos\varphi$, $\cos\beta = \cos(\nu - \varphi)$.

ამგვარად განსახილავი გეზის კოვარიანტული კოორდინატები იქნებიან:

$$l^* = \cos\varphi, \quad m^* = \cos(\nu - \varphi). \tag{6}$$

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ სიბრტყეზე აღებული გეზის კონტრავარიანტული (ჩვეულებრივი) კოორდინატები, თუ მოცემულია საკოორდინატო კუთხე ν და კუთხე φ (იხ. ამ პარაგრაფის ბოლო).

ამოხსნა. თუ § 54-ის (7) ფორმულებს გამოვიყენებთ, ამ პარაგრაფის (6) ფორმულის ძალით მივიღებთ:

$$l = \frac{1}{\sin^2\nu}\left[\cos\varphi - \cos(\nu - \varphi)\cos\nu\right], \quad m = \frac{1}{\sin^2\nu}\left[-\cos\varphi\cos\nu + \cos(\nu - \varphi)\right],$$

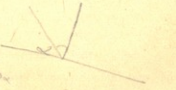
ანუ $\cos(\nu - \varphi)$-ს დაშლისა და ზოგიერთი გამარტივების შემდგომ:

$$l = \frac{\sin(\nu - \varphi)}{\sin\nu}, \quad m = \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}. \tag{7}$$

2. გამოიყვანეთ წინა ფორმულები ელემენტარული წესით, აღებული გეზის სათანადო $\overline{OM} = \overline{T}$ მგეზავის სათავიდან გაყვანით და OMM' სამკუთხედის ამოხსნით, სადაც M' არის M წერტილის გეგმილი Ox ღერძზე, აღებული Oy ღერძის პარალელურად (ნახ. 59).

3. გამოიყვანეთ ($5a$) თანაფარდობა უშუალოდ (6) ფორმულებიდან, ელემენტარული ტრიგონომეტრიული გარდაქმნების საშუალებით.

$l = \frac{\sin(\nu - \varphi)}{\sin\nu}$



$m = \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}$

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$= \pm\frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$

---

[1]) მართლაც, განმარტების ძალით $\alpha = \pm\varphi + 2k\pi$, $\beta = \pm(\nu - \varphi) + 2k\pi$; იხ. § 42-ის გამოტანა.

თავი მესამე [1]

წრფივი კოორდინატების გარდაქმნა. კოორდინატთა ზოგიერთი არაწრფივი სისტემები

წრფივი კოორდინატების მეთოდით ამა თუ იმ გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნის დროს აუცილებელია უპირველესად კოორდინატთა გარკვეული ღერძების არჩევა. ამ ღერძთა მოხერხებულ შერჩევაზე დამოკიდებულია ამოცანის ამოხსნის სიმარტივე.

ხშირად გვიხდება კოორდინატთა ერთი სისტემის მეორეთი შეცვლა და საზოგადოდ, რამოდენიმე სისტემის ერთდროული განხილვა. ერთი და იგივე წერტილის (ან ვექტორის) კოორდინატები, რასაკვირველია, სხვადასხვა იქნებიან სხვადასხვა სისტემების მიმართ. ცხადია, რომ, თუ ცნობილია კოორდინატთა ორი სისტემის ღერძების ურთიერთი მდებარეობა და, თუ ცნობილია წერტილის (ან ვექტორის) კოორდინატები ერთი სისტემის მიმართ, მაშინ ამ წერტილის კოორდინატები მეორე სისტემის მიმართ სრულიად განსაზღვრულნი იქნებიან. შემდეგისათვის მეტად მნიშვნელოვანია ასეთი საკითხის ამოხსნა:

თუ ცნობილია წრფივ კოორდინატთა ორი სისტემის ღერძთა ურთიერთი მდებარეობა და რომელიმე წერტილის ან ვექტორის კოორდინატები ერთერთი სისტემის მიმართ, ვიპოვოთ იმავე წერტილის ან ვექტორის კოორდინატები მეორე სისტემის მიმართ.

გამოთქმის გასამარტივებლად ერთ სისტემას ვუწოდოთ ძველი სისტემა, ხოლო მეორეს ახალი.

I. ზოგადი ფორმულები. ძირითადი დებულება

58. სათავის გადატანა. დავიწყოთ იმ მარტივი შემთხვევის განხილვით, როცა კოორდინატთა ახალი სისტემა განსხვავდება ძველიდან მხოლოდ სათავის მდებარეობით, ასე რომ ორივე სისტემის ღერძთა გეზები ერთნაირი არიან (ნახ. 60). ძველი სისტემის ღერძები აღვნიშნოთ Ox, Oy, Oz-ით, ხოლო ახალი სისტემის $O'x', O'y', O'z'$-ით.

---

[1]) წიგნის პირველად კითხვის დროს მკითხველს შეუძლიან გამოტოვოს ამ თავის მეტი წილი. პირველი ნაწილის გასაგებად საკმარისია I განყოფილების წაკითხვა (§ 58—60) და (69—71).

ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ, ცხადია, სავსებით განისაზღვრება ახალი O' სათავის კოორდინატებით ძველის მიმართ; ვთქვათ ეს კოორდინატები არიან a, b, c.

თუ $\overline{P}$ არის რომელიმე ვექტორი, ცხადია, რომ მისი კოორდინატები ორივე სისტემის მიმართ ერთნაირია. მართლაც, ეს კოორდინატები წარმოადგენენ კოორდინატთა ღერძებზე $\overline{P}$-ვექტორის გეგმილთა ალგებრულ მნიშვნელობებს (დაგეგმილება ხდება გარკვეული საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელურად); გეგმილები კი ერთნაირად მოგეზულ ორ ღერძზე, რასაკვირველია, თანატოლი არიან.

განვიხილოთ ეხლა რომელიმე M წერტილის ძველსა და ახალ კოორდინატებს შორის დამოკიდებულება. ვთქვათ $(x, y, z,)$ აღნიშნავენ M წერტილის კოორდინატებს ძველ სისტემაში, ხოლო (x', y', z') იმავე წერტილის კოორდინატებს ახალ სისტემაში.

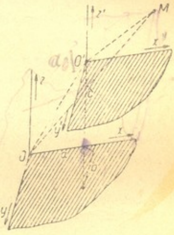
ცხადია, გვექნება შემდეგი გეომეტრიული ტოლობა:

$$\overline{OM}=\overline{OO'}+\overline{O'M} \qquad (1)$$

ავიღოთ ამ ტოლობის ორივე მხარის გეგმილები Ox ღერძზე (ან რაც იგივეა $O'x'$ ღერძზე) Oyz სიბრტყის პარალელურად (ან, რაც იგივეა $O'y'z'$ სიბრტყის პარალელურად). მარცხენა მხარეზე მივიღებთ:

$$\text{გეგ}_x\overline{OM}=x,$$

ვინაიდან OM წარმოადგენს M წერტილის რადიუს-ვექტორს ძველი სისტემის მიმართ. მარჯვნივ კი მივიღებთ: $\text{გეგ}_x\overline{OO'}+\text{გეგ}_x\overline{O'M}$. მაგრამ ცხადია, რომ $\text{გეგ}_x\overline{OO'}=a$



ნახ. 60.

(ვინაიდან $\overline{OO'}$ არის O'-წერტილის რადიუს-ვექტორი ძველი სისტემის მიმართ, ხოლო O' წერტილის კოორდინატები ამ სისტემის მიმართ არიან a, b, c); ცხადია აგრეთვე, რომ $\text{გეგ}_x\overline{O'M}=x'$ (ვინაიდან $\overline{O'M}$ არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი ახალი სისტემის მიმართ; გარდა ამისა უნდა მივიღოთ მხედველობაში, რომ გეგმილები x-თა და x'-თა ღერძზე თანატოლი არიან). ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$x=a+x',\ y=b+y',\ z=c+z'; \qquad (2)$$

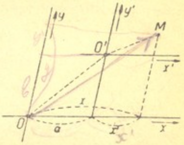
უკანასკნელი ორი ფორმულა დაწერილია პირველის ანალოგიურად.

(2) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ ძველი კოორდინატები, როცა ახალია მოცემული და უკუღმა.

სიბრტყეზე კოორდინატების შემთხვევისათვის ანალოგიურად გვექნება:

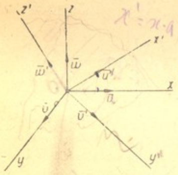
$$x = a + x', \quad y = b + y'; \qquad (3)$$

მკითხველი ადვილად შეამოწმებს ამ ფორმულების სამართლიანობას უშუალოდ ნახაზის განხილვით (იხ. ნახ. 61)



ნახ. 61.

59. ღერძთა გეზების შეცვლა. განვიხილოთ ეხლა მეორე კერძო შემთხვევა, როდესაც ახალი $Ox'y'z'$ სისტემის ღერძები ადგენენ ძველი $Oxyz$ სისტემის ღერძებთან ნებისმიერ კუთხეებს, სათავე კი საერთო აქვთ (ნახ. 62).



ნახ. 62.

ვთქვათ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ აღნიშნავენ ძველი ღერძების მგეზავებს, ხოლო $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ — ახალი სისტემის მგეზავებს (ნახ. 62). ვინაიდან ჩვენ ვთვლით, რომ ახალი ღერძების მდებარეობა ძველის მიმართ მოცემულია, ამიტომ ჩვენ უნდა მოცემულად ჩავთვალოთ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ ვექტორთა კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ; ვთქვათ ეს კოორდინატები შესაბამისად არიან (l_1, m_1, n_1) (l_2, m_2, n_2) და (l_3, m_3, n_3), ისე რომ:

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= l_1\bar{u} + m_1\bar{v} + n_1\bar{w}, \\ \bar{v}' &= l_2\bar{u} + m_2\bar{v} + n_2\bar{w} \qquad (1) \\ \bar{w}' &= l_3\bar{u} + m_3\bar{v} + n_3\bar{w}. \end{aligned}$$

ვთქვათ ეხლა $\bar{P}$ არის რომელიმე ვექტორი და ვთქვათ X, Y, Z აღნიშნავენ მის კოორდინატებს ძველ სისტემაში, ხოლო X', Y', Z' — მისი კოორდინატებია ახალში. საჭიროა გამოვსახოთ X, Y, Z კოორდინატები X', Y', Z'-ის საშუალებით (ან უკუღმა).

გვაქვს შემდეგი იგივეობა:

$$\bar{P} = \bar{u}X + \bar{v}Y + \bar{w}Z = \bar{u}'X' + \bar{v}'Y' + \bar{w}'Z',$$

თუ მარჯვენა მხარეზე $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$-ს მაგიერ შევიტანთ მათ გამოსახულებებს, წარმოდგენილთ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$-ის საშუალებით, მივიღებთ:

$$\bar{u} X + \bar{v} Y + \bar{w} Z = (l_1\bar{u} + m_1\bar{v} + n_1\bar{w}) X' + (l_2\bar{u} + m_2\bar{v} + n_2\bar{w}) Y' + (l_3\bar{u} + m_3\bar{v} + n_3\bar{w}) Z' = \bar{u}(l_1X' + l_2Y' + l_3 Z') + \bar{v}\,(m_1X' + m_2Y' + m_3Z') + \bar{w}(n_1X' + n_2Y' + n_3Z'),$$

საიდანაც $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$-ს კოეფიციენტების გათანაბრებით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} X &= l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z' \\ Y &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z' \\ Z &= n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z'. \end{aligned} \qquad (2)$$

ამნაირად ჩვენი ამოცანა გადაწყვეტილია: ძველი კოორდინატები გამოსახულია ახალის საშუალებით. თუ გვინდა ახალი კოორდინატები გამოვსახოთ ძველის საშუალებით, ამისათვის საკმარისია (2) სისტემის ამოხსნა X', Y', Z'-ის მიმართ ან და პირდაპირ გამოვიყენოთ უკანასკნელი შედეგი, ძველსა და ახალი სისტემის შენაცვლებით[1].

იმ გარემოებიდან, რომ ძველი და ახალი ღერძების შენაცვლებით ჩვენ შეგვიძლიან გამოვსახოთ X', Y', Z' კოორდინატები X, Y, Z-ის საშუალებით, გამომდინარეობს, რომ (2) სისტემა ყოველთვის ამოიხსნება X', Y', Z'-ის მიმართ, ეს კი ნიშნავს, რომ დეტერმინანტი.

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{ანუ} \quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (3)$$

ნულისაგან განსხვავდება. ეს გამომდინარეობს აგრეთვე იქიდან, რომ უკანასკნელი დეტერმინანტი რომ ნული ყოფილიყო, მაშინ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ მგეზავები კომპლანარული იქნებოდენ (§ 35), ესე იგი Ox', Oy', Oz' ღერძები ერთსა და იმავე სიბრტყეზე მოთავსდებოდენ, ეს კი ეწინააღმდეგება იმ პირობას, რომელიც ერთხელვე მიღებულია კოორდინატთა სისტემის ღერძებისათვის სივრცეში.

სრულიად აშკარაა, რომ ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატები გარდაიქმნებიან ამავე (2) ფორმულების მიხედვით, ვინაიდან M წერტილის კოორდინატები არიან ამ წერტილის $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის კოორდინატები. თუ, მაშასადამე, x, y, z და x', y', z' არიან M წერტილის, შესაბამისად, ძველი და ახალი კოორდინატები, მაშინ:

---

[1]) ამ უკანასკნელ შემთხვევაში მოცემულად უნდა ჩავთვალოთ ძველი სისტემის $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ მგეზავების კოორდინატები ახალი სისტემის მიმართ.

$$x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z'$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z'$$
$$z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'.$$

აგრეთვე შეიძლება ახალი კოორდინატები გამოისახონ ძველის საშუალებით.

შევნიშნოთ, რომ $l_1, l_2, \dots, n_3$ სიდიდეები (2) ან (3) ფორმულებში არიან მუდმივი სიდიდეები, დამოკიდებულნი მხოლოდ ძველი და ახალი სისტემის ურთიერთ მდებარეობაზე და დამოუკიდებელნი განსახილავ $\overline{P}$ ვექტორზე (ან M წერტილზე).

სიბრტყეზე კოორდინატთა შემთხვევისათვის ანალოგიურად გვექნება:

$$\overline{u}' = l_1 \overline{u} + m_1 \overline{v},$$
$$\overline{v}' = l_2 \overline{u} + m_2 \overline{v} \qquad (1a)$$

და

$$X = l_1 X' + l_2 Y',$$
$$Y = m_1 X' + m_2 Y' \qquad (2a)$$

(ვექტორისათვის) და

$$x = l_1 x' + l_2 y'$$
$$y = m_1 x' + m_2 y' \qquad (3a)$$

(წერტილისათვის).

სავარჯიშო მაგალითები

1. კოორდინატთა სისტემა სიბრტყეზე მართკუთხოვანია, ახალი Ox' ღერძი შეადგენს ძველ Ox ღერძთან კუთხეს 30°-ს, ხოლო ახალი Oy' ღერძი შეადგენს იმავე Ox ღერძთან კუთხეს 60°-ს (კუთხეები აითვლებიან Ox ღერძიდან Oy ღერძის მიმართულებით). საჭიროა რომელიმე $\overline{P}$ ვექტორის ძველი კოორდინატები (x, y) გამოისახონ ახალი (x', y') კოორდინატების საშუალებით და უკუღმა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\overline{u}'$ ვექტორის (მგეზავის) კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ იქნებიან $(\cos 30°, \sin 30°)$, $\overline{v}'$-ს კოორდინატები იმავე სისტემის მიმართ იქნებიან $(\cos 60°, \sin 60°)$. მაშ:

$$\overline{u}' = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\overline{u} + \frac{1}{2}\overline{v}, \quad \overline{v}' = \frac{1}{2}\overline{u} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\overline{v}.$$

ამგვარად:

$$l_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad l_2 = \frac{1}{2}, \quad m_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

მაშასადამე:

$$X=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,X'+Y'),\quad Y=\frac{1}{2}(X'+\sqrt{3}\,Y').$$

ჩვენ გამოვსახეთ ძველი კოორდინატები ახალის საშუალებით. თუ ამოვხსნით უკანასკნელ განტოლებებს x', y'-ის მიმართ, მივიღებთ ახალი კოორდინატების გამოსახულებებს ძველის საშუალებით:

$$X'=\sqrt{3}\,X-Y,\quad Y'=-X+\sqrt{3}\,Y.$$

2. ახალი სისტემის Ox', Oy', Oz' ღერძები ძველი სისტემის yOz, zOx, xOy კუთხეების ბისექტრისებს წარმოადგენენ; ძველი სისტემა მართკუთხოვანად იგულისხმება. საჭიროა $\overline{P}$ ვექტორის ძველი კოორდინატები X, Y, Z გამოვსახოთ ახალი X', Y', Z' კოორდინატების საშუალებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს[1]:

$$\overline{u}'=0.\overline{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{w}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{v}+\overline{w})$$

$$\overline{v}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{u}+0.\overline{v}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{w}=(\overline{u}+\overline{w})$$

$$\overline{w}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{v}+0.\overline{w}=(\overline{u}+\overline{v}).$$

მაშასადამე,

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(Y'+Z'),\quad Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Z'),\quad Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(X'+Y')$$

60. ზოგადი შემთხვევა. ვთქვათ ეხლა ახალი $O'x'y'z'$ სისტემა სრულიად ნებისმიერად მდებარეობს ძველი $Oxyz$ სისტემის მიმართ. ვინაიდან ვ ე ქ ტ ო რ ი ს კოორდინატები სრულიად დამოუკიდებელი არიან კოორდინატთა სათავის მდებარეობისაგან, ამიტომ, აშკარაა, ისინი გარდაიქმნებიან წინა პარაგრაფის იმავე (2) ფორმულების მიხედვით, ვითომც ახალი O' სათავე O-ში ყოფილიყო.

რაც შეეხება წ ე რ ტ ი ლ ი ს კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულების გამოყვანას, შემოვიღოთ დამხმარე $O'x''y''z''$ სისტემა (ნახ. 63), რომელსაც სათავე აქვს O'-ში, ხოლო ღერძები მოგეზული არიან ისევე, როგორც ძველი.

---

[1]) გარკვეულობისათვის ვგულისხმობთ, რომ ახალი ღერძების დადებითი ნაწილები იმყოფებიან ძველის დადებით ნაწილთა შორის, ესე იგი, რომ, მაგალითად Ox' შეადგენს Oy და Oz-თან კუთხეებს ზომით 45^0.

თუ ალვნიშნავთ (x, y, z) (x', y', z') და (x'', y'', z'')-ით M წერტილის კოორდინატებს შესაბამისად ძველს, ახალს და დამხმარე სისტემაში, მაშინ გვექნება (§ 58):

$$x = a + x'', \; y = b + y'', \; z = c + z'',$$

სადაც a, b, c აღნიშნავენ ახალი O' სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. შემდგომ ამისა, წინა პარაგრაფის ფორმულების მიხედვით მივიღებთ (თუ დამხმარე სისტემას განვიხილავთ, როგორც ძველს):

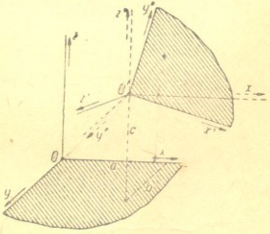
$$x'' = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \; y'' = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$

$$z'' = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z';$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ წინა ფორმულებში, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} x &= a + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' \\ y &= b + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\ z &= c + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'. \end{aligned} \tag{1}$$

სრულიად ასეთნაირად ჩვენ შეგვეძლო ახალი კოორდინატების გამოსახვა ძველის საშუალებით. (1) ფორმულებში ყველა კოეფიციენტი



ნახ. 63.

$a, b, \ldots, n_3$ არიან მუდმივი სიდიდეები M წერტილის მდებარეობისაგან დამოუკიდებელნი (ხსენებული კოეფიციენტები დამოკიდე-

ბული არიან მხოლოდ ძველი და ახალი სისტემის ღერძთა ურთიერთ მდებარეობაზე).

სიბრტყეზე განხილულ კოორდინატთა შემთხვევისათვის (II) ფორმულების მაგიერ გვექნება უფრო მარტივი ფორმულები:

$$x = a + l_1 x' + l_2 y',$$

$$y = b + m_1 x' + m_2 y', \qquad (1a)$$

რომელნიც სრულიად ანალოგიური წესით გამოიყვანებიან.

თუ მიღებულ დასკვნებს თავს მოუყრით, შეგვიძლიან შემდეგი ძირითადი დებულება გამოვთქვათ:

ვექტორის წრფივი კოორდინატები ერთი სისტემის მიმართ წარმოადგენენ წრფივსა და ერთგვაროვან[1] ფუნქციებს იმავე ვექტორის კოორდინატებისას მეორე სისტემის მიმართ.

წერტილის წრფივი კოორდინატები წარმოადგენენ წრფივ ფუნქციებს იმავე წერტილის კოორდინატებისას მეორე სისტემის მიმართ.

61. კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნა. წინა პარაგრაფებში, რასაკვირველია, ჩვენ განვიხილავდით ვექტორის (ან წერტილის) ჩვეულებრივ (კონტრავარიანტულ) კოორდინატებს. ვნახოთ ეხლა, როგორ იცვლებიან ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები ერთი სისტემისაგან მეორეზე გადასვლის დროს.

ისე როგორც ზევით, გვექნება:

$$\overline{u}' = l_1\overline{u} + m_1\overline{v} + n_1\overline{w}$$

$$\overline{v}' = l_2\overline{u} + m_2\overline{v} + n_2\overline{w}, \qquad (1)$$

$$\overline{w}' = l_3\overline{u} + m_3\overline{v} + n_3\overline{w}.$$

ვთქვათ X^*, Y^*, Z^* და X'^*, Y'^*, Z'^* აღნიშნავენ $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატებს შესაბამისად, ძველი და ახალი სისტემის მიმართ. განმარტების ძალით

---

[1]) ერთი ან რამოდენიმე ცვლადის წრფივი ფუნქცია ეწოდება ამ ცვლადთა პირველი ხარისხის მთელს რაციონალურ ფუნქციას პირველი ხარისხისას ამ ცვლადთა მიმართ. მაგალითად სამი x, y, z ცვლადის წრფივ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე: $Ax + By + Cz + D = 0$, სადაც A, B, C, D მუდმივი კოეფიციენტებია. თუ მუდმივი წევრი არ შედის, მაშინ წრფივ ფუნქციას ექნება ერთგვაროვანი; სამი x, y, z ცვლადის შემთხვევაში წრფივს ერთგვაროვან ფუნქციას ექნება სახე: $Ax + By + Cz$.

$X'^* = \bar{u}'.\overline{P},\ Y'^* = \bar{v}'\ \overline{P},\ Z'^* = \bar{w}'.\ \overline{P}$, საიდანაც, თუ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$-ის მაგიერ შევიტანთ (1) გამოსახულებებს და შევნიშნავთ, რომ $\bar{u}\ .\ \overline{P} = X^*$ და ა. შ., მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
X'^* &= l_1 X^* + m_1 Y^* + n_1 Z^*,\\
Y'^* &= l_2 X^* + m_2 Y^* + n_2 Z^*, \qquad (2)\\
Z'^* &= l_3 X^* + m_3 Y^* + n_3 Z^*.
\end{aligned}
$$

თუ ამ განტოლებებს ამოვხსნით X^*, Y^*, Z^*-ის მიმართ, ვიპოვით აგრეთვე ძველი კოორდინატების გამოსახულებას ახალის საშუალებით.

წერტილის კოორდინატებისათვის გარდაქმნის ფორმულები ზევით მოყვანილი ფორმულების ანალოგიურია, თუ კოორდინატთა სათავე არ იცვლება. მკითხველს მოეთხოვება დაწეროს ფორმულები იმ შემთხვევისთვისაც, როცა კოორდინატთა სათავე იცვლის მდებარეობას.

გავაკეთოთ ეხლა ერთი შენიშვნა როგორც ჩვეულებრივი (კონტრავარიანტული), ისე კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულების შესახებ. ამისათვის გავიხსენოთ ჩვეულებრივი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულები (§ 59):

$$
\begin{aligned}
X &= l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z',\\
Y &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z', \qquad (3)\\
Z &= m_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z'.
\end{aligned}
$$

იმისათვის რომ გავაადვილოთ (1), (2) და (3) ფორმულების შედარება, ამოვწეროთ (1) ფორმულებში შემავალი კოეფიციენტების ცხრილი:

$$
\begin{matrix}
l_1 & m_1 & n_1\\
l_2 & m_2 & n_2\\
l_3 & m_3 & n_3
\end{matrix} \qquad (A)
$$

თუ გამოვიყენებთ ალგებრაში მიღებულ ტერმინოლოგიას, (1) ფორმულების შინაარსი შეგვიძლიან შემდეგი სიტყვებით გამოვთქვათ: კოორდინატთა გარდაქმნის დროს ახალი მგეზავები მიიღებიან ძველიდან წრფივი ჩასმის საშუალებით, რომლის ცხრილი ყრის (A).

თუ დაუბრუნდებით (2) ფორმულებს, დავინახავთ, რომ კოორდინატთა გარდაქმნის დროს X^*, Y^*, Z^* სიდიდეები გარდაიქმნებიან სრულიად იგივე წრფივი ჩასმით, როგორც მგეზავები; ალგებრული ტერმინოლოგიის მიხედვით, ეს გარემოება ასე გამოითქმის: X^*, Y^*, Z^* სიდიდეები კოვარიანტული არიან კოორდინატთა ღერძების მგეზავებთან. (სწორედ ამით აიხსნება „კოვარიანტული კოორდინატების“ სახელწოდება).

თუ ეხლა (3) ფორმულებს (1) ფორმულებთან შევადარებთ, დავინახავთ, რომ ძველი კოორდინატები X, Y, Z გამოისახეაიან ახალის საშუალებით ისეთი ჩასმით, რომელიც მიიღება ახალი მგეზავების ძველის საშუალებით გამომ-

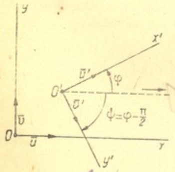
სახველ ჩასმიდან, (A) ცხრილში სტრიქონების სვეტებით შეცვლით და სვეტების სტრიქონებით; ალგებრული ტერმინოლოგიის მიხედვით ვიტყვით, [illegible]-ბრივი კოორდინატები X, Y, Z კონტრავარიანტული [illegible] შე-ზავებთან. სწორედ ამით აიხსნება სახელწოდება „კონტრავარიანტული“.

II. კოორდინატთა გარდაქმნის უმთავრესი კერძო შემთხვევანი

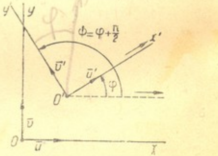
ამ განყოფილებაში ჩვენ დაწვრილებით გავარჩევთ კოორდინატთა გარდაქმნის ზოგიერთ უმთავრეს კერძო შემთხვევებს, რომელთაც უფრო ხშირად ვხვდებით გამოყენების დროს.

62. სიბრტყეზე მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა მართკუთხოვანად და ირიბკუთხოვანად. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ძველი და ახალი სისტემა სიბრტყეზე, ორივე მართკუთხოვანია (ნახ. $64a, b$).

ამ შემთხვევაში ახალი ღერძების მდგომარეობა ძველის მიმართ შეიძლება სავსებით დახასიათდეს ახალი O' სათავის კოორდინატებისა (ძველი სისტემის მიმართ) და იმ φ კუთხის მოცემით, რომელსაც შეადგენს ახალი Ox' ღერძი ძველს Ox ღერძთან: ეს კუთხე ჩვენ ავთვალოთ ძველი Ox ღერძიდან, ნიშნის მიკუთვნებით ათვლის მიმართულების მიხედვით; დადებით კუთხეთა ათვლის მიმართულებად ჩვენ მივიღოთ მიმართულება, რომელიც ეთანადება ღერძთა ძველ სისტემას (ე. ი. მიმართულება, რომელიც უუმოკლესი გზით მიგვიყვანს Ox-დან Oy-მდე).



ნახ. 64a



ნახ. 64b

უნდა მიექცეს ყურადღება იმას, რომ ამ აღვნიშვნების მიხედვით, კუთხე ψ, რომელსაც $O'y'$ ღერძი შეადგენს იმავე Ox ღერძთან (და რომელიც აითვლება იმავე წესით, რაც φ) ტოლი იქნება ან $\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$-ისა, ან $\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$-ისა (თუ ყურადღებას არ მივაქცევთ $2k\pi$ სახის შესაკრებს).

პირველ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ, როცა ახალი სისტემა შეიძლება მიღებული იყოს ძველიდან, ამისი უბრალო გადადგილებით თავის სიბრტყეში, ისე რომ ამ სიბრტყიდან არ გამოვიდეთ (ნახ. 64a).

მეორე შემთხვევაში კი (ნახ. 64b) ჩვენ შეგვიძლიან ასეთი გადადგილებით შევათავსოთ მხოლოდ, მაგალითად, $O'x'$ და Ox ღერძები: $O'y'$ და Oy ღერძები კი მიიღებენ ამ დროს მოპირდაპირე მიმართულებას.

თუ ისე, როგორც ზევით, $\bar{u}$, $\bar{v}$ და $\bar{u}'$, $\bar{v}'$ აღნიშნავენ შესაბამისად, ძველი და ახალი ღერძების მგეზავებს, მაშინ ორივე შემთხვევაში გვექნება:

$$\bar{u}' = (\cos\varphi,\ \sin\varphi),\quad \bar{v}' = (\cos\psi,\ \sin\psi), \tag{1}$$

ესე იგი:

$$\bar{u}' = \bar{u}\cos\varphi + \bar{v}\sin\varphi,\quad \bar{v}' = \bar{u}\cos\psi + \bar{v}\sin\psi. \tag{2}$$

მაშასადამე, განსახილავ შემთხვევაში $l_1 = \cos\varphi$, $m_1 = \sin\varphi$, $l_2 = \cos\psi$, $m_2 = \sin\psi$ და § 59-ის (2a) ფორმულები ვექტორის კოორდინატთა გარდაქმნისათვის იძლევიან:

$$X = X'\cos\varphi + Y'\cos\psi,\quad Y = X'\sin\varphi + Y'\sin\psi. \tag{3}$$

შევჩერდეთ პირველ შემთხვევაზე, როდესაც $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$. მაშინ $\cos\psi = -\sin\varphi$, $\sin\psi = \cos\varphi$ და (2) ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\begin{aligned} \bar{u}' &= \bar{u}\cos\varphi + \bar{v}\sin\varphi, \\ \bar{v}' &= -\bar{u}\sin\varphi + \bar{v}\cos\varphi, \end{aligned} \tag{2a}$$

ხოლო (3) ფორმულები იძლევიან:

$$\begin{aligned} X &= X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi, \\ Y &= X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

ჩვენ მივიღეთ ძველი კოორდინატების გამოსახულება ახალის საშუალებით. თუ წინა განტოლებებს ამოვხსნით X' და Y'-ის მიმართ, ან, თუ იგივე ფორმულებს გამოვიყენებთ ძველი და ახალი ღერძების როლების შეცვლით (ამასთანავე φ უნდა შევცვალოთ $-\varphi$-თი), მივიღებთ ფორმულებს:

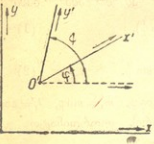
$$\begin{aligned} X' &= X\cos\varphi + Y\sin\varphi \\ Y' &= -X\sin\varphi + Y\cos\varphi, \end{aligned} \tag{5}$$

რომელნიც ახალ კოორდინატებს გამოსახავენ ძველის საშუალებით.

წერტილის კოორდინატები გარდაიქმნებიან შემდეგი ფორმულების მიხედვით (იხ. § 60):

$$x = a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi,$$
$$y = b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \tag{6}$$

სადაც, a და b აღნიშნავენ ახალი სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. წინა ფორმულები გამოსახავენ ძველ კოორდინატებს ახალის საშუალებით.



ნახ. 65

მკითხველს წინადადება ეძლევა დაწეროს სათანადო ფორმულები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$.

შენიშვნა. ცხადია, რომ (1), (2) და (3) ფორმულები ძალაში დარჩებიან მაშინაც, როდესაც ძველი სისტემა მართკუთხოვანია, ხოლო ახალი ირიბკუთხოვანია; მხოლოდ ამ შემთხვევაში ψ კუთხე უკვე აღარ არის $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$-ის ტოლი, არამედ ნებისმიერი შეიძლება იყოს (ნახ. 65).

წერტილის კოორდინატთა გარდაქმნისათვის გვექნება ფორმულები.

$$x = a + x'\cos\varphi + y'\cos\psi, \quad y = b + x'\sin\varphi + y'\sin\psi \tag{7}$$

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ ახალი კოორდინატების გამოსახულებანი ძველის საშუალებით, იმ აღნიშვნების მიხედვით, რაც ამ პარაგრაფშია მიღებული, იმ შემთხვევაში, თუ $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

ამოხსნა. საძიებელი გამოსახულებანი შეიძლება მივიღოთ, თუ (6) სისტემას ამოვხსნით x' და y'-ის მიმართ. მაგრამ, უფრო მარტივი იქნება, თუ ასე მოვიქცევით: განვიხილავთ $\overline{O'M}$ ვექტორს, სადაც O' არის ახალი სათავე, ხოლო M განსახილავი წერტილია. ამ ვექტორის ძველი და ახალი კოორდინატები შესაბამისად იქნებიან: $(x-a,\ y-b)$ და $(x',\ y')$.

თუ $\overline{O'M}$ ვექტორისათვის გამოვიყენებთ (5) ფორმულებს, ერთბაშად მივიღებთ:

$$x'=(x-a)\cos\varphi+(y-b)\sin\varphi,$$
$$y'=-(x-a)\sin\varphi+(y-b)\cos\varphi. \quad (8)$$

2. ამ პარაგრაფში მიღებული აღნიშვნების მიხედვით, იპოვეთ ძველი სათავის კოორდინატები ახალი სისტემის მიმართ (თუ ვიგულისხმებთ, რომ ორივე სისტემა მართკუთხოვანია და $\psi=\varphi+\frac{\pi}{2}$).

პასუხი: $a'=-a\cos\varphi-b\sin\varphi$, $b'=a\sin\varphi-b\cos\varphi$.

3. საკოორდანატო ღერძები შებრუნდებიან კუთხით 30° და სათავე გადაიტანება $O'(3,-1)$ წერტილში. იპოვეთ წერტილის ახალი კოორდინატები, თუ მისი ძველი კოორდინატები იყვნ (3,4).

პასუხი: $x'=\frac{5}{2}$, $y'=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

4. დაამტკიცეთ (4) ტოლობათა ორივე მხარის კვადრატში ამაღლებით და შეკრებით, რომ იგივურად გვექნება:

$$X^2+Y^2=X'^2+Y'^2;$$

მაშასადამე, მიუხედავად იმისა, რომ მართკუთხოვან კოორდინატთა ღერძების შებრუნების დროს, თითოეული კოორდინატი X და Y ღებულობს ახალ მნიშვნელობას, გამოსახულება X^2+Y^2 მაშინ უცვლელი რჩება (მართკუთხოვანი კოორდინატების ისევ მართკუთხოვანი კოორდინატებით შეცვლით). ასეთი თვისების მატარებელი გამოსახულებანი იწოდებიან ინვარიანტებად (მოცემული გვარის გარდაქმნათა მიმართ).

X^2+Y^2 გამოსახულების ინვარიანტობა (თუ ღერძები სულ მუდამ მართკუთხოვანი რჩებიან) აშკარაა უშუალოდაც, ვინაიდან ეს გამოსახულება წარმოადგენს ვექტორის სიგრძის კვადრატს და ამიტომ არ შეიძლება დამოკიდებული იყოს კოორდინატთა ღერძების მოგეზვისაგან.

დაამტკიცეთ, რომ გამოსახულებანი $X_1X_2+Y_1Y_2$ და $X_1Y_2-X_2Y_1$, სადაც X_1, Y_1, X_2, Y_2 არიან ორი ვექტორის კოორდინატები, წარმოადგენენ აგრეთვე ინვარიანტებს (ვგულისხმობთ, რომ მართკუთხოვანი კოორდინატები ისევ მართკუთხოვანად გარდაიქმნებიან[1]). ამის დამტკიცება შეიძლება ან გარდაქმნის ფორმულების გამოყენებით, ან ამ გამოსახულებათა გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით; გაიხსენეთ ეს გეომეტრიული მნიშვნელობანი.

5. (3) ფორმულის გამოყენებით და პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილი შენიშვნის მიხედვით იპოვეთ გამოსახულება ვექტორის სიგრძის კვადრატისათვის ირიბკუთხოვანი $O'X'Y'$ სისტემის მიმართ; დაამტკიცეთ, რომ X^2+Y^2 არ არის

---

[1]) მეორე გამოსახულება იქნება ინვარიანტული მხოლოდ ისეთ გადაქმნებისათვის, როდესაც $\psi=\varphi+\frac{\pi}{2}$; იმ შემთხვევაში. თუ $\psi=\varphi-\frac{\pi}{2}$, იგი იცვლის ნიშანს.

ინვარიანტი იმ შემთხვევაში, როდესაც კოორდინატები ირიბკუთხოვანად გარდაიქმნებიან.

ა მ ო ხ ს ნ ა: თუ (3) ფორმულის ორივე მხარეს კვადრატში ავიყვანთ და შევკრებთ, მივიღებთ: $|P|^2=X^2+Y^2=X'^2+Y'^2+2X'Y'(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi)$, საიდანაც მივიღებთ უკვე ადრე სხვა გზით მიღებულ ფორმულას (§ 56):

$$|P|^2=X'^2+Y'^2+2X'Y'\cos\nu,$$

სადაც ν არის Ox', Oy ღერძთა სისტემის საკოორდინატო კუთხე[1].

ვინაიდან ცხადია, რომ: $X^2+Y^2\neq X'^2+Y'^2\left(\text{თუ } \nu\neq\frac{\pi}{2}\right)$, ამიტომ X^2+Y^2 არ არის ინვარიანტი განსახილავი გარდაქმნის მიმართ.

63. სივრცეში მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა. განვიხილოთ ეხლა ის შემთხვევა, როდესაც მართკუთხოვანი კოორდინატები სივრცეში გარდაიქმნებიან მართკუთხოვანამდე.

თვალსაჩინოობისათვის დავიწყოთ იმ შემთხვევიდან, როდესაც კოორდინატთა სათავე უცვლელი რჩება. ამ შემთხვევაში ახალი სისტემის მდებარეობა ძველის მიმართ განისაზღვრება ახალი ღერძების გეზთა კოორდინატებით, ესე იგი მგეზავთა კოორდინატებით $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$.

ვთქვათ, ისე როგორც ზევით (§ 59):

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}'&=l_1\overline{u}+m_1\overline{v}+n_1\overline{w},\\ \overline{v}'&=l_2\overline{u}+m_2\overline{v}+n_2\overline{w},\\ \overline{w}'&=l_3\overline{u}+m_3\overline{v}+n_3\overline{w},\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

ვინაიდან კოორდინატები მართკუთხოვანი გვაქვს, ამიტომ გეზის კოორდინატები იქნებიან იმავე დროს გეზის კოსინუსებად. თვალსაჩინოობისათვის დავალაგოთ ეს კოსინუსები ცხრილში:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	l_1	m_1	n_1
Oy'	l_2	m_2	n_2
Oz'	l_3	m_3	n_3

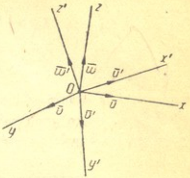
(A)

[1] ეს კუთხე $=\pm(\psi-\varphi)\pm2k\pi$, სადაც ნიშანი და მთელი რიცხვი k ისე უნდა შეირჩეს, რომ $0<\nu<\pi$.

ამ ცხრილში, მაგალითად, m_1 აღნიშნავს Ox' და Oy შორის არსებული კუთხის კოსინუსს, და n_2 — იმ კუთხის კოსინუსს, რომელსაც ადგენენ Oy' და Oz.

§ 59-ის (2) ფორმულები უშუალოდ გვაძლევენ:

$$
\begin{aligned}
X &= l_1 X' + l_2 Y' + l_3 Z' \\
Y &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z', \qquad (2) \\
Z &= n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z';
\end{aligned}
$$



ნახ. 66.

ეს ფორმულები გამოსახავენ ძველ კოორდინატებს ახალის საშუალებით. თუ ძველსა და ახალ სისტემას როლებს შეუცვლით, მივიღებთ შექცეულ ფორმულებს:

$$
\begin{aligned}
X' &= l_1 X + m_1 Y + n_1 Z, \\
Y' &= l_2 X + m_2 Y + n_2 Z, \qquad (3) \\
Z' &= l_3 X + m_3 Y + n_3 Z;
\end{aligned}
$$

ამ ფორმულების მნიშვნელოვანობის გამო, აქ აღვნიშნავთ მათი გამოყვანის კიდევ ერთ წესს, ცოტა უფრო მარტივს, ვიდრე ზემოხსენებული და მასზე დამოუკიდებელს.

ვინაიდან ჩვენ საქმე გვაქვს მართკუთხოვან კოორდინატებთან, ამიტომ:

$$X' = \bar{u}' \cdot \bar{P}, \quad Y' = \bar{v}' \cdot \bar{P}, \quad Z' = \bar{w}' \cdot \bar{P};$$

თუ აქ შევიტანთ $\bar{u}'$, $\bar{v}'$, $\bar{w}'$-ს მაგიერ მათ გამოსახულებებს (1) და თუ შევნიშნავთ, რომ $\bar{u} \cdot \bar{P} = X$, $\bar{v} \cdot \bar{P} = Y$, $\bar{w} \cdot \bar{P} = Z$, ერთბაშად მივიღებთ (3) ფორმულებს. მათგან, ძველი და ახალი ღერძების როლების შენაცვლებით, ისევ (2) ფორმულებს მივიღებთ.

რასაკვირველია, ეხლახან მოყვანილი წესი[1] გამოსაყენებელია სიბრტყეზე მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნისათვის, რაც წინა პარაგრაფში განვიხილეთ.

იგივე (2) და (3) ფორმულები გამოსაყენებელია წერტილის კოორდინატებისათვისაც, ვინაიდან კოორდინატთა სათავე არ იცვლება.

---

[1]) ეს წესი იმის ტოლფასია, რაც § 61-ში მოვიყვანეთ კოვარიანტული კოორდინატების გარდაქმნისათვის. ვინაიდან ჩვენ შემთხვევაში კოორდინატები მართკუთხოვანია, ამიტომ განსხვავება კოვარიანტულსა და ჩვეულებრივ კოორდინატებს შორის ისპობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ღერძთა გეზების შეცვლის დროს ხდება სათავის გადატანაც, მაშინ (1) და (2) ფორმულები ძალაში რჩებიან ვექტორის კოორდინატებისათვის. წერტილის კოორდინატებისათვის გვექნება (იხ. § 60):

$$
\begin{aligned}
x &= a + l_1x' + l_2y' + l_3z', \\
y &= b + m_1x' + m_2y' + m_3z', \\
z &= c + n_1x' + n_2y' + n_3z',
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

სადაც a, b, c აღნიშნავენ ახალი სათავის კოორდინატებს ძველი სისტემის მიმართ. ახალი კოორდინატების ძველის საშუალებით გამომსახველი ფორმულების მიღება არ წარმოადგენს არავითარ სიძნელეს (იხ. ვარ. 1).

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ ახალი კოორდინატების გამოსახულება ძველის საშუალები იმ აღნიშვნების მიხედვით, რაც ამ პარაგრაფშია მიღებული.

პასუხი (შეადარეთ წინა პარაგრაფის ვარჯ. 1)

$$
\begin{aligned}
x' &= l_1(x-a)+m_1(y-b)+n_1(z-c), \\
y' &= l_2(x-a)+m_2(y-b)+n_2(z-c), \\
z' &= l_3(x-a)+m_3(y-b)+n_3(z-c).
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

2. ახალი სისტემა მიიღება ძველიდან Oz ღერძის გარშემობრუნებით ისე, რომ ახალი Ox' ღერძი, რომელიც Oxy სიბრტყეში იმყოფება, შეადგენს Ox ღერძთან φ კუთხეს, იპოვეთ კოორდინატთა გარდაქმნის ფორმულები (ვექტორის ან წერტილის).

პასუხი. $x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$, $y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$, $z=z'$.

64. მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნის ფორმულების კოეფიციენტთა თანაფარდობანი. ახალი სისტემის ღერძთა მიმართულების განსაზღვრისათვის ძველის მიმართ, ჩვენ განვიხილავდით ცხრა სიდიდეს (წინა პარაგრაფის (A) ცხრილის გეზთა კოსინუსები). ამ ცხრა სიდიდეს შორის ყველა არ არი ურთიერთშორის დამოუკიდებელი. მართლაც, თუ, ისე როგორც ზევით, $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ აღნიშნავენ ახალი ღერძების მგეზავებს, მაშინ გვექნება (იხ. წინა პარაგრაფის (A) ცხრილი):

$$
\overline{u}' = (l_1, m_1, n_1),\ \overline{v}' = (l_2, m_2, n_2),\ \overline{w}' = (l_3, m_3, n_3) \qquad (1)
$$

(ე. ი. $\overline{u}'$ მგეზავის კოორდინატები ძველი სისტემის მიმართ იქნებიან l_1, m_1, n_1, და ა. შ.).

ვექტორები (მგეზავები) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ უნდა აკმაყოფილებდენ შემდეგ პირობებს (და მხოლოდ ამათ): მათი სიგრძე ერთის ტოლი უნდა იყოს, და ისინი ურთიერთ მართობული უნდა იყვნენ. ეს პირობები ასე გამოისახება:

$$\bar{u}'^2 = \bar{v}'^2 = \bar{w}'^2 = 1, \ \bar{v}' . \bar{w}' = \bar{w}' . \bar{u}' = \bar{u}' . \bar{v}' = 0; \tag{2}$$

თუ კი პირობებს განსახილავ მგეზავთა კოორდინატების საშუალებით გამოვსახავთ, მივიღებთ [§ 39, ფორმ. (2) და § 41, ფორმ. (2)]:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0 \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 &= 0 \\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

სულ გვაქვს ექვსი განტოლება, ცხრა კოსინუსის მაკავშირებელი.

ამ განტოლებათა გეომეტრიული მნიშვნელობა გვიჩვენებს, რომ არც ერთი მათგანი არ არის დანარჩენთა შედეგი, ე. ი. რომ ეს განტოლებანი ურთიერთ დამოუკიდებელნი არიან.

დავამტკიცოთ, მაგალითად, რომ პირველი მათგანი არ არის ხუთი დანარჩენის შედეგი. მართლაც, ხუთი უკანასკნელი განტოლება გვეუბნება მხოლოდ იმას, რომ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ვექტორები ურთიერთ მართობულნი არიან [განტოლებანი (4)] და რომ $|v'|=|w'|=1$. აქედან, რასაკვირველია, არ გამომდინარეობს, რომ $\bar{u}'$ ვექტორსაც ერთის ტოლი სიგრძე უნდა ქონდეს, ე. ი. არ გამომდინარეობს პირველი განტოლების აუცილებლობა. სრულიად აგრეთვე დავამტკიცებთ, რომ (3) და (4) განტოლებათაგან არც ერთი არ არის დანარჩენის შედეგი.

ადვილად დასანახია, რომ (3) და (4) განტოლებათა გარდა არ არსებობენ ისეთი სხვა, მათგან დამოუკიდებელი თანაფარდობანი, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდენ ყოველი სამი ურთიერთ მართობული მგეზავის კოორდინატები $l_1, l_2, \ldots n_3$.

უკანასკნელი წინადადება ასე უნდა გვესმოდეს, რომ თუ ჩვენ შევძლებთ ისეთი თანაფარდობის შედგენას, რომელსაც ყოველთვის აკმაყოფილებენ სიდიდეები $l_1, l_2, \ldots n_3$, მაშინ ეს თანაფარდობა უთუოდ უკვე დაწერილ (3) და (4) თანაფარდობათა შედეგი იქნება.

მართლაც, თუ (3) და (4) შესრულდა, მაშინ $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ ვექტორები უთუოდ ურთიერთ მართობულ მგეზავებს წარმოადგენენ და, მაშასადამე, ყოველი თანა-

ფარდობა, ნებისმიერი სამი ურთიერთ მართობული მგეზავების მაკავშირებელი, იქნება (3) და (4) თანაფარდობათა შედეგი.

თუ ძველსა და ახალ სისტემას როლებს შეუცვლით, მაშინ (3) და (4) თანაფარდობათა მაგიერ ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ექვსს:

$$\left.\begin{aligned} l_1^2+l_2^2+l_3^2&=1\\ m_1^2+m_2^2+m_3^2&=1\\ n_1^2+n_2^2+m_3^2&=1 \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1n_1+m_2n_2+m_3n_3&=0\\ n_1l_1+n_2l_2+n_3l_3&=0\\ l_1m_1+l_2m_2+l_3m_3&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

ზემოხსენებულის ძალით ეს უკანასკნელი თანაფარდობანი უნდა წარმოადგენდენ (3) და (4)-ის შედეგს; და მართლაც, დიდ სიძნელეს არ წარმოადგენს (3a) და (4a) თანაფარდობათა გამოყვანა (3) და (4)-დან უბრალო ალგებრული გარდაქმნებით (იხ. ქვევით § 66).

ვინაიდან ცხრა $l_1, \ldots, n_3$ კოსინუსს შორის არსებობს ექვსი დამოუკიდებელი თანაბარდობა, ამიტომ ამ კოსინუსთაგან ექვსი შეიძლება სამი დანარჩენის საშუალებით გამოისახოს. აქედან ცხადია, რომ ერთი მართკუთხოვანი სისტემის ღერძთა გეზები მეორის მიმართ ხასიათდება სულ სამი სიდიდით. ეს სიდიდეები (პარამეტრები) შეიძლება სხვადასხვანაირად შეირჩენ. ყველაზე ხშირად ამისათვის სარგებლობენ, ეგრედწოდებული, ეილერის კუთხეებით, რომელთაც ქვევით განვიხილავთ (§ 67).

65. გაგრძელება. ვექტორული ნამრავლის ცნების (§ 47) გამოყენებით, შეიძლება კიდევ რამოდენიმე თანაფარდობა დაიწეროს. განსახილავი გეზის კოსინუსების მაკავშირებელი.

სახელდობრ, თუ ვიგულისხმებთ გარკვეულობისათვის, რომ ღერძთა ძველი სისტემა მარცხენაა, გვექნება:

$$[\bar{v}'\cdot\bar{w}']=\pm\bar{u}',\ [\bar{w}'\cdot\bar{u}']=\pm\bar{v}',\ [\bar{u}'\cdot\bar{v}']=\pm\bar{w}', \qquad (1)$$

სადაც ზედა ნიშანი აიღება იმ შემთხვევაში, როცა ახალი სისტემაც მარცხენაა, ხოლო ქვედა—წინაალმდეგ შემთხვევაში [§ 49, ფორმ. (2) და (2a)].

როგორც უკვე ნათქვამი იყო (§ 50-ის გამოტანა), ყველა ფორმულები სამართლიანი დარჩებიან იმ შემთხვევაშიაც, თუ $Oxyz$ სისტემა მარჯვენაა; ამ შემთხვევაში საჭიროა მხოლოდ ყველა ჩამოყალიბებაში (და კერძოდ ვექტორული ნამრავლის განმარტებაში) სიტყვა „მარცხენა“ შეიცვალოს სიტყვით „მარჯვენა“ და უკუღმა.

მართკუთხოვან ღერძთა ორი მარცხენა ან ორი მარჯვენა სისტემის შესახებ ჩვენ ვიტყვით, რომ ისინი ეკუთვნიან ერთსა და იმავე კლასს, მარჯვენა და მარცხენა სისტემა სხვადასხვა კლასს ეკუთვნის.

შესაბამისად ამისა შეგვიძლიან ეხლა ვთქვათ, რომ (1) ფორმულაში ზედა ნიშანი უნდა ავიღოთ, როცა ძველი და ახალი სასტემა ერთ კლასს ეკუთვნის, ხოლო ქვედა—წინააღმდეგ შემთხვევაში

§ 50-ის (2) ფორმულების ძალით, უკანასკნელი ფორმულები გვაძლევენ შემდეგი სახის ცხრა თანაფარდობას:

$$l_1 = \pm(m_2 n_3 - m_3 n_2), \tag{2}$$

რომელთაგან ჩვენ მხოლოდ პირველი ამოვწერეთ; დანარჩენს მივიღებთ, თუ l, m, n ასოების წრიულ გარდანაცვლებას მოვახდენთ და შემდეგ 1, 2, 3 ნიშნაკებისას. მოკლეთ, ეს თანაფარდობანი გვიჩვენებენ, რომ

$$D = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტის ელემენტები თავის ალგებრულ დამატებათა ტოლნი არიან[1], ისე, რომ ამათ (+) ნიშნით ავიღებთ, თუ საკოორდინატო სისტემები ერთი და იგივე კლასის არიან და (—) ნიშნით, თუ სისტემები სხვადასხვა კლასის არიან.

თუ ეხლა შევნიშნავთ, რომ D დეტერმინანტი წარმოადგენს ურთიერთ მართობულ $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ მგეზავთა შერეულ ნამრავლს (§ 51), ე. ი. რომ $D = [\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}']$, დავასკვნით, რომ:

$$D = \pm 1, \tag{4}$$

ამასთანავე (+) ნიშანი აიღება, თუ ძველი და ახალი სისტემა ერთი და იგივე კლასისა და (—) ნიშანი წინააღმდეგ შემთხვევაში.

იგივე თვისება შეიძლება დავამტკიცოთ, თუ D-ს დავშლით ერთერთი სტრიქონის (ან ერთერთი სვეტის) ელემენტებით და ვისარგებლებთ (2)-ით.

66. ორთოგონალური ჩახმები. წინა ფორმულების ალგებრული გამოყვანა. ამ პარაგრაფში ჩვენ გზადაგზა შევეხებით რამოდენიმე ალგებრულ ცნებას და დებულებას, ზემოხსენებულთან მჭიდროდ დაკავშირებულს. ამ დებულებებს ჩვენ წმინდა ალგებრული გზით დავამტკიცებთ, იმ გეომეტრიულ მოსაზრებათა გარეშე, რომელიც ზევით მოვიყვანეთ.

თუ x, y, z ცვლადები[2] დაკავშირებული არიან x', y' z' ცვლადებთან შემდეგი სახის თანაფარდობათა საშუალებით:

[1] მართლაც ჩვენ ვიცით, რომ $[\overline{u}', \overline{v}', \overline{w}']$ არის $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის სიტევე, გარკვეული ნიშნით განხილული (§ 52). ჩვენ შემთხვევაში ეს პარალელეპედი კუბად იქცევა, რომლის წიბოები ერთის ტოლია.

[2] ჩვენ შევჩერდით სამი ცვლადის შემთხვევაზე მისი გეომეტრიული მნიშვნელობის გამო. ყველაფერი აქ ნათქვამი შეიძლება ცვლადთა ნებისმიერი რიცხვისათვის განვაზოგადოთ.

$$x=l_1x'+l_2y'+l_3z',\; y=m_1x'+m_2y'+m_3z',\; z=n_1x'+n_2y'+n_3z', \quad (1)$$

სადაც $l_1, \ldots, n_3$ არიან მუდმივი რიცხვები, მაშინ ამბობენ, რომ (როგორც უკვე აღნიშნული იყო § 61-ში) x, y, z მიიღებიან x', y', z'-იდან წრფივი და ერთგვაროვანი ჩასმით, რომლის ცხრილი არის:

$$\left.\begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{matrix}\right\} \quad (B)$$

დეტერმინანტი:

$$D=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

იწოდება **ჩასმის დეტერმინანტად**. ჩასმას ეწოდება **საკუთრივი**, თუ $D\neq 0$, **არასაკუთრივი**, თუ $D=0$.

ჩასმას ეწოდება **ორთაგონალური**, თუ იგივურად გვაქვს:

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2. \quad (3)$$

თუ გამოსახულების მარცხენა მხარეში ჩავსვამთ (1) და x'^2, y'^2, z'^2, $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$-ის კოეფიციენტებს მარჯვნივ და მარცხნივ ერთი მეორეს გაუტოლებთ, მივიღებთ იმის აუცილებელ და საკმარის პირობებს, რომ ჩასმა იყოს ორთაგონალური. ეს პირობები იქნებიან:

$$\begin{gathered} l_1^2+m_1^2+n_1^2=1,\; l_2^2+m_2^2+n_2^2=1,\; l_3^2+m_3^2+n_3^2=1, \\ l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0. \end{gathered} \quad (4).$$

ჩვენ, ამნაირად, მივიღეთ იგივე § 64-ის (3) და (4) პირობები, როველთაც უნდა აკმაყოფილებდენ გარდაქმნის იმ ფორმულების კოეფიციენტები, რომელნიც იხმარებიან მართკუთხოვან კოორდინატთა ერთი სისტემიდან მეორე მართკუთხოვანზე გადასვლის დროს. სწორედ ამით აიხსნება სახელწოდება „ორთოგონალური ჩასმა“.

შემდგომ ამისა, თუ დეტერმინანტთა გამრავლების თეორემით ვისარგებლებთ [სტრიქონობრივ გამრავლებით და (4) ფორმულების გამოყენებით], გვექნება:

$$D^2=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

საიდანაც გამომდინარეობს: $D=\pm 1$.

იმ შემთხვევაში, როცა $D=+1$, ჩვენ ვიტყვით, რომ ჩასმა პირველი კლასისაა, მეორეში შემთხვევაში კი, რომ ჩასმა მეორე კლასისაა[1].

[1] გეომეტრიულად, პირველი კლასის ჩასმა შეეფერება იმ შემთხვევას, როცა ღერძთა ძველი და ახალი სისტემა ერთი და იგივე კლასისაა, იეორე კლასის ჩასმა შეეფერება სხვადასხვა კლასის სისტემათა შემთხვევას.

თუ ეხლა ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას [(4) განტოლებებიდან ამოღებული]:

$$l_1l_1+m_1m_1+n_1n_1=1,$$
$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,$$
$$l_1l_3+m_1m_3+n_1n_3=0,$$

რომელშიაც პირველ მამრავლთ (l_1, m_1, n_1) ჩვენ განვიხილავთ, როგორც უცნობთ, ხოლო მეორე მამრავლთ, როგორც კოეფიციენტებს, მივიღებთ დეტერმინანტთა თეორიის ცნობილი წესის მიხედვით:

$$l_1=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & m_1 & n_1 \\ 0 & m_2 & n_2 \\ 0 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}(m_2n_3-m_3n_2)=\pm(m_2n_3-m_3n_2)$$

და ორს სხვა ტოლობას, რომელთაც მივიღებთ l, m, n ასოების წრიული გარდანაცვლებით. ანალოგიურად დავამტკიცებთ კიდევ ექვს ტოლობას, რომელთაც წინა სამი ტოლობიდან მივიღებთ 1, 2, 3 ნიშნაკების წრიული გარდანაცვლებით.

ერთი სიტყვით, ჩვენ ვღებულობთ, რომ (2) დეტერმინანტის ელემენტთა ალგებრული დამატებანი სათანადო ელემენტების ტოლნი არიან, დადებითი ნიშნით, თუ ჩასმა პირველი კლასისაა ($D=+1$) და უარყოფითი ნიშნით—მეორე კლასის შემთხვევაში ($D=-1$).

თუ ამ გარემოებას მივიღებთ მხედველობაში და (1) სისტემას ამოვხსნით x', y', z'-ის მიმართ დეტერმინანტთა ხერხით, მივიღებთ:

$$x'=l_1x+m_1y+n_1z,\quad y'=l_2x+m_2y+n_2z,\quad z'=l_3x+m_3y+n_3z; \tag{1a}$$

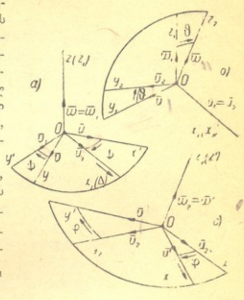
ჩვენ ვჰედავთ, რომ x', y', z' გამოისახებიან x, y, z-ის მიმართ ჩასმით, რომელიც მიიღება წინანდელიდან სვეტების სტრიქონებით უბრალო შეცვლით (და უკუღმა) კოეფიციენტთა სათანადო ცხრილში. მიღებული ჩასმა, რასაკვირველია, დააკმაყოფილებს, ორთაგონალობის (3) პირობის ძალით, (4)-ის ანალოგიურ განტოლებებს, რომელნიც მიიღებიან (4)-იდან კოეფიციენტთა ცხრილში სტრიქონების სვეტებით შეცვლით და უკუღმა.

ამნაირად ჩვენ მივიღებთ § 64-ის განტოლებებს ($3a$) და ($4a$); ეხლა ესენი გამოყვანილი არიან (4) პირობებიდან წმინდა ალგებრული გზით.

67. ეილერის კუთხეები. როგორც უკვე ნათქვამი იყო § 64-ის ბოლოში, ერთი მართკუთხოვანი სისტემის ღერძთა მიმართულებანი მეორე სისტემის მიმართ (ე. ი. მოგეზულობა ერთი სისტემისა მეორის მიმართ) შეიძლება დახასიათდეს სამი კუთხით, რომელთაც ე ი ლ ე რ ი ს კუთხეები ეწოდებათ. გადავიდეთ ამათ განმარტებაზე.

ვინაიდან საუბარია ღერძთა გეზების განსაზღვრაზე, ამიტომ ჩვენ შეგვიძლიან ვიგულისხმოთ, რომ $Oxyz$ და $Ox'y'z'$ სისტემებს აქვთ საერთო სათავე O. წარმოვიდგინოთ, რომ ორივე ეს სისტემა მ ა რ ც ხ ე ნ ა ა, რაც ზოგადობას არ ამცირებს.

მო ψ კუთხეზე. მივიღებთ $Ox_1y_1z_1$ სისტემას, რომლის Ox_1 ღერძი ემთხვევა Δ-ს, ხოლო Oz_1 ემთხვევა Oz-ს (ნახ. 68, a). თუ ამის შემდეგ $Ox_1y_1z_1$ სისტემას Ox_1 ღერძის გარშემო შემოვაბრუნებთ ϑ კუთხეზე, ჩვენ მივიღებთ $Ox_2y_2z_2$ სისტემას, რომლის Ox_2 ღერძი ემთხვევა Ox_1, ხოლო Oz_2 ღერძი შეადგენს Oz_1-თან ϑ კუთხეს (ნახ. 68, b). დაბოლოს, თუ $Ox_2y_2z_2$ სისტემას Oz_2 ღერძის გარშემო შემოვაბრუნებთ φ კუთხეზე, ცხადია, ჩვენ დავალთ საძიებელ $Ox'y'z'$ სისტემაზე, ისე რომ Oz' ღერძი და Oz_2 ღერძი ერთმანეთს ემთხვევა, ხოლო Ox' ღერძი შეადგენს Ox_2 ღერძთან φ კუთხეს (ნახ. 68, c).


ნახ. 68.

ვთქვათ, ისე როგორც ზევით, $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, აღნიშნავენ ძველი ღერძების მგეზავებს, ხოლო $\overline{u}'$, $\overline{v}'$, $\overline{w}'$ არიან ახალი ღერძების მგეზავები. ვთქვათ, შემდეგ, $\overline{u}_1$, $\overline{v}_1$, $\overline{w}_1$, და $\overline{u}_2$, $\overline{v}_2$, $\overline{w}_2$ აღნიშნავენ, შესაბამისად შუამავალ $Ox_1y_1z_1$ და $Ox_2y_2z_2$ სისტემათა მგეზავებს.

ცხადია, გვექნება [იხ. § 62, ფორმ. (2 a)] შემდეგი თანამიმდევარის ფორმულები:

a) $Oxyz$-დან $Ox_1y_1z_1$-ზე გადასვლისას (ნახ. 68 a):

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}_1 &= \overline{u}\cos\psi + \overline{v}\sin\psi,\\ \overline{v}_1 &= -\overline{u}\sin\psi + \overline{v}\cos\psi,\\ \overline{w}_1 &= \overline{w};\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

b) $Ox_1y_1z_1$-დან $Ox_2y_2z_2$-ზე გადასვლისას (ნახ. 68 b):

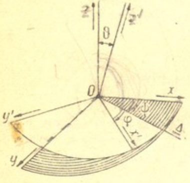
$$\left.\begin{aligned}\overline{u}_2 &= \overline{u}_1,\\ \overline{v}_2 &= \overline{v}_1\cos\vartheta + \overline{w}_1\sin\vartheta,\\ \overline{w}_2 &= -\overline{v}_1\sin\vartheta + \overline{w}_1\cos\vartheta,\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

c) და, დაბოლოს, $Ox_2y_2z_2$-დან $Ox'y'z'$-ზე გადასვლისას (ნახ. 68 c):

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}' &= \overline{u}_2\cos\varphi + \overline{v}_2\sin\varphi,\\ \overline{v}' &= -\overline{u}_2\sin\varphi + \overline{v}_2\cos\varphi,\\ \overline{w}' &= \overline{w}_2.\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

თუ (a)-ს შევიტანთ (b)-ში და, შემდეგ, მიღებულ გამოსახულებებს (c)-ში შევიტანთ, ჯერ მივიღებთ:

ვთქვათ Δ აღნიშნავს $Ox'y'$ და Oxy სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფეს (ნახ. 67); ამ წრფეს ჩვენ მივაწერთ გარკვეულ გეზს, ესე იგი მას განვიხილავთ როგორც ღერძს; სახელდობრ, Δ წრფის გეზად ჩვენ ავარჩევთ ისეთს, რომ სამი Oz, Oz', და Δ გეზების სისტემა მარცხენა იყოს (§ 46).



ნახ. 67.

ვთქვათ ეხლა $\psi=\widehat{Ox, \Delta}$ აღნიშნავს კუთხეს Ox-სა და Δ-ს შორის, მოქცეულს $(0,2\pi)$ საზღვრებში და ათვლილს Oxy სიბრტყეში დადებითი მიმართულებით (ე. ი. Ox-იდან Oy-საკენ; § 42).

ვთქვათ, შემდგომ ამისა, რომ:

$\vartheta=\widehat{Oz, Oz'}$ არის კუთხე Oz-სა და Oz'-ს შორის, მოქცეული $(0,\pi)$ საზღვრებში და

ვთქვათ დაბოლოს, რომ $\varphi=\widehat{\Delta, Ox'}$ არის კუთხე Δ ღერძსა და Ox'-ს შორის, მოქცეული $(0,2\pi)$ საზღვრებში და ათვლილი Δ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით $Ox'y'$ სიბრტყეში,

ცხადია, რომ ამ კუთხეების მოცემა სავსებით განსაზღვრავს $Ox'y'z'$ სისტემის მდებარეობას $Oxyz$ სისტემის მიმართ.

სახელდობრ, თუ ვიცით ψ კუთხე ჩვენ შეგვიძლიან ავაგოთ Δ ღერძი; შემდეგ, თუ გადავზომავთ Δ-სადმი მართობულს და Oz-ზე გამავალ სიბრტყეში კუთხეს ϑ (Oz-დან საათის ისრის მიხედვით, Δ-ს გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის)[1], ჩვენ მივიღებთ Oz' გეზს; შემდეგ, თუ მოვზოვავთ Oz'-ის მართობულს და Δ-ზე გამავალ სიბრტყეში კუთხეს φ (Δ ღერძიდან დადებითი მიმართულებით, ესე იგი საათის ისრის მიხედვით Oz'-ის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის), ჩვენ მივიღებთ Ox' ღერძს; დაბოლოს, თუ მოვზომავთ Ox'-დან (იმავე მიმართულებით და იმავე სიბრტყეში) კუთხეს $+\frac{\pi}{2}$, ჩვენ მივიღებთ Oy' ღერძს.

კუთხეები ψ, ϑ და φ შემოღებული იქმნენ ეილერის მიერ და ამიტომ მის სახელს ატარებენ.

გამოვიყვანოთ ეხლა ფორმულები, რომელნიც ამ კუთხეების საშუალებით გამოსახავენ (A) ცხრილის გეზთა კოსინუსებს (§ 63).

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ახალი სისტემა $Ox'y'z'$ შეიძლება მიღებული იყოს ძველიდან შემდეგნაირად: შევაბრუნოთ ჯერ $Oxyz$ სისტემა Oz-ის გარშე-

---

[1] ვინაიდან მხოლოდ ამ შემთხვევაში Oz Oz' და Δ ღერძების სისტემა იქნება მარცხენა (შეამოწმეთ ეს ნახაზზე!). როცა ჩვენ ვლაპარაკობთ ღერძის გასწვრივ მდგომ დამკვირვებელზე, ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ღერძი მოგეზულია ფეხებიდან თავისაკენ.

$$\bar{u}_2 = \bar{u}\cos\psi + \bar{v}\sin\psi,$$
$$\bar{v}_2 = (-\bar{u}\sin\psi + \bar{v}\cos\psi)\cos\vartheta + \bar{w}\sin\vartheta$$
$$\bar{w}_2 = (\bar{u}\sin\psi - \bar{v}\cos\psi)\sin\vartheta + \bar{w}\cos\vartheta,$$

და შემდეგ:

$$\bar{u}' = (\bar{u}\cos\psi + \bar{v}\sin\psi)\cos\varphi + [(-\bar{u}\sin\psi + \bar{v}\cos\psi)\cos\vartheta + \bar{w}\sin\vartheta]\sin\varphi,$$
$$\bar{v}' = -(\bar{u}\cos\psi + \bar{v}\sin\psi)\sin\varphi + [(-\bar{u}\sin\psi + \bar{v}\cos\psi)\cos\vartheta + \bar{w}\sin\vartheta]\cos\varphi,$$
$$\bar{w}' = (\bar{u}\sin\psi - \bar{v}\cos\psi)\sin\vartheta + \bar{w}\cos\vartheta.$$

თუ ფრჩხილებს გავხსნით და უკანასკნელ ფორმულებს შევადარებთ § 64-ის ფორმულებს:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}' &= l_1\bar{u} + m_1\bar{v} + n_1\bar{w}, \\ \bar{v}' &= l_2\bar{u} + m_2\bar{v} + n_2\bar{w}, \\ \bar{w}' &= l_3\bar{u} + m_3\bar{v} + n_3\bar{w}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ m_1 &= \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi, \\ n_1 &= \sin\vartheta\sin\varphi, \\ l_2 &= -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ m_2 &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi, \\ n_2 &= \sin\vartheta\cos\varphi, \\ l_3 &= \sin\psi\sin\vartheta, \\ m_3 &= -\cos\psi\sin\vartheta, \\ n_3 &= \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ეს ფორმულები, რომელნიც ეილერს ეკუთვნიან, ადვილი მისაღები არიან აგრეთვე სფერული ტრიგონომეტრიის ფორმულების გამოყენებით.

შენიშვნა: 1. თუ ახალი სისტემა—მარჯვენაა (ძველი კი, როგორც ზევით, —მარცხენა), მაშინ ეილერის კუთხეების განმარტება, მაგალითად, შემდეგნაირად შეიძლება: ავიღოთ ღერძთა დამხმარე სისტემა Ox', Oy', Oz'', რომელშიაც პირველი ორი ღერძი იგივეა რაც ახალი სისტემის პირველი ორი ღერძი Ox', Oy', ხოლო მესამე Oz'' ღერძს მოპირდაპირე გეზი აქვს Oz'-ის მიმართ. თუ განვსაზღვრავთ φ, ψ, ϑ კუთხეებს დამხმარე სისტემისათვის (რომელიც, რასაკვირველია, მარცხენა იქნება), იგივე კუთხეებს შეიძლება ეწოდოს მოცემული მარჯვენა სისტემის ეილერის კუთხეები. ვინაიდან გვექნება $\bar{w}' = -\bar{w}''$ (სადაც $\bar{w}''$ აღნიშნავს დამხმარე Oz'' ღერძის მგეზავს), ამიტომ (1) და (2) ფორმულები ძალაში დარჩებიან, თუ რომ (2) ფორმულებში l_3, m_3, n_3-ის გამოსახულებების ნიშანს შევცვლით მოპირდაპირეზე.

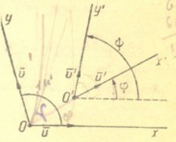
ადვილი გამოსარკვევია, აგრეთვე, თუ როგორ უნდა შეიცვალოს φ, ψ, θ კუთხეების განსაზღვრა, როცა ძველი სისტემა მარჯვენაა.

შენიშვნა 2. (2) ფორმულები გვიჩვენებენ, რომ რომელიმე ორთოგონალური ჩასმის (სამ ცვლადზე) კოეფიციენტები შეიძლება გამოისახონ სამი დამხმარე φ, ψ, θ პარამეტრის[1] საშუალებით.

ეს ფაქტი შეიძლება დამტკიცდეს ორთოგონალური ჩასმის გეომეტრიული მნიშვნელობის გარეშე.

68. სიბრტყეზე ირიბკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნა. დავამთავროთ ეს განყოფილება სიბრტყეზე ირიბკუთხოვანი კოორდინატების ირიბკუთხოვანზე გარდაქმნით. ახალი ღერძების მდებარეობა ძველის მიმართ განსაზღვრული იქნება, თუ მოცემულია ახალი სათავის (a, b) კოორდინატები ძველის მიმართ და კუთხეები φ და ψ, რომელთაც ახალი $O'x'$ და $O'y'$ ღერძები შეადგენენ ძველ Ox ღერძთან (კუთხეების ათვლის მიმართულების შესახებ იხ. § 42) (ნახ. 69). ახალი ღერძების მგეზავებისათვის გვექნება (§ 57):

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}' &= \frac{\sin(\nu-\varphi)}{\sin\nu}\,\bar{u} + \frac{\sin\varphi}{\sin\nu}\,\bar{v}, \\ \bar{v}' &= \frac{\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}\,\bar{u} + \frac{\sin\psi}{\sin\nu}\,\bar{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$



ნახ. 69.

სადაც ν არის ძ ვ ე ლ ი სისტემის საკოორდინატო კუთხე.

აქედან, § 59-ის $(1a)$ და $(2a)$ ფორმულების ძალით, ვექტორის კორდინატებისათვის გვექნება:

$$X = \frac{X'\sin(\nu-\varphi) + Y'\sin(\nu-\psi)}{\sin\nu}, \qquad Y = \frac{X'\sin\varphi + Y'\sin\psi}{\sin\nu} \qquad (2)$$

წერტილის კოორდინატებისათვის მივიღებთ ანალოგიურ ფორმულებს, მხოლოდ მარჯვენა მხარეებს მიემატება, შესაბამისად, a და b სიდიდეები.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. გამოიყვანეთ (2) ფორმულებიდან ფორმულები მართკუთხოვანი კოორდინატების გარდაქმნისათვის მართკუთხოვანზე ან ირიბკუთხოვანზე, მიღებული ზევით სხვა გზით (§ 62).

2. დაამტკიცეთ დეტერმინანტთა გამრავლების წესის გამოყენებით, რომ, თუ (X_1, Y_1) (X_2, Y_2) და (X_1', X_2') (Y_1', Y_2') არიან, შესაბამისად, ორი ვექტორის ძველი და ახალი კოორდინატები, მაშინ:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \sin\nu = \begin{vmatrix} X_1' & Y_2' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix} \sin(\psi-\varphi) = \pm \begin{vmatrix} X_1' & Y_1' \\ X_2' & Y_2' \end{vmatrix} \sin\nu',$$

სადაც ν' არის ახალი სისტემის საკოორდინატო კუთხე.

---

[1] მეორე კლასის ჩასმის შემთხვევაში l_3, m_3, n_3-ის გამოსახულებებში ნიშანი უნდა შეიცვალოს მოპირდაპირეზე.

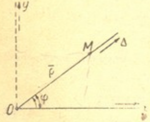
თუ ავიღებთ $\psi - \varphi = +\frac{\pi}{2}$, დაამტკიცეთ, მართკუთხოვანი კოორდინატებში სამკუთხედის ფართობის ფორმულის გამოყენებით, რომ $\overline{P}_1=(X_1, Y_1)$ და $\overline{P}_2=(X_2, Y_2)$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი ტოლია

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\sin\nu.$$

III. კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემები

წრფივ კოორდინატთა გარდა არსებობს კიდევ უამრავი სხვა. ჩვენ დაწვრილებით განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთ მათგანს, სახელდობრ პოლარ კოორდინატთა სისტემას სიბრტყეზე და სივრცეში და ნახევრადპოლარ (ანუ ცილინდრულ) კოორდინატთა სისტემას. დანარჩენი სისტემების შესახებ ჩვენ დავკმაყოფილდებით ზოგადი ხასიათის მოკლე შენიშვნებით. ამასთანავე ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ წერტილის კოორდინატებს.

69. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატთა სისტემა. ამ სისტემაში ძირითად მუდმივ ელემენტებად, რომელთა მიმართ განისაზღვრება ნებისმიერი ნაკვთის მდებარეობა სიბრტყეზე, არიან O წერტილი, პოლუსად წოდებული და Ox ღერძი, წოდებული პოლარ ღერძად (ნახ. 70).



ნახ. 70

ვთქვათ, M არის სიბრტყის რომელიმე წერტილი, რომელიც O-ს არ ემთხვევა. აღვნიშნოთ ρ-თი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე, ხოლო φ-თი კუთხე, შედგენილი მის მიერ პოლარ ღერძთან, ათვლილი ამ ღერძიდან და განხილული გარკვეული ნიშნით[1], ასე რომ, ჩვენი აღნიშვნების თანახმად:

$$\rho = |\overline{OM}|, \quad \varphi = \widehat{Ox, OM}. \qquad (1)$$

ცხადია, ρ და φ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე; მათ ეწოდებათ M წერტილის პოლარი კოორდინატები (თუ M წერტილი პოლუსს ემთხვევა, მაშინ $\rho=0$, ხოლო φ კუთხე განუზღვრელია).

---

[1] ამნაირად იგულისხმება, რომ სიბრტყეზე არჩეულია ბრუნვის გარკვეული დადებითი მიმართულება.

M წერტილს, რომელსაც პოლარ კოორდინატებად აქვს ρ და φ, აღვნიშნავთ ასე: $M\ (\rho,\ \varphi)$.

საყოველთაოდ მიღებული ტერმინოლოგიის მიხედვით, ρ-ს ეწოდება M წერტილის რადიუს-ვექტორად; უფრო წესიერი იქნებოდა თქმა, სიგრძე რადიუს-ვექტორისა, მაგრამ სიმოკლისთვის ჩვენ ხშირად გამოვტოვებთ სიტყვას „სიგრძე"-ს იქ, სადაც გაუგებრობას არ შეიძლება ადგილი ქონდეს.

φ კუთხეს ჩვენ ვუწოდებთ პოლარ კუთხეს[1].

ცხადია, რომ სიბრტყის ყველა წერტილის მისაღებად საკმარისია ρ იცვლებოდეს საზღვრებში $(0, \infty)$, ხოლო φ კუთხეს მიეცეს მნიშვნელობანი $(0, 2\pi)$ საზღვრებში მოქცეულნი (ზედა საზღვრის გამორიცხვით); მაგრამ ხშირად არც კი შემოაქვთ უკანასკნელი შეზღუდვა. φ კუთხის მნიშვნელობანი ერთი და იგივე წერტილის შესაბამი, ცხადია, განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადით.

70. განზოგადოება. ეხლახან აღნიშნული სისტემის გარდა ხშირად სარგებლობენ ცოტა უფრო ზოგადი სისტემით, სადაც ρ ღებულობს აგრეთვე უარყოფით მნიშვნელობებსაც.

ვთქვათ, (ნახ. 70) Δ აღნიშნავს ღერძს, გამავალს O პოლუსზე და M წერტილზე. ამ ღერძს შეიძლება მივცეთ ნებისმიერი გეზი (O-დან M-საკენ ან M-დან O-სკენ). აღვნიშნოთ ახლა φ-თი კუთხე $\widehat{Ox, \Delta}$, შედგენილი Δ ღერძით Ox პოლარ ღერძთან, ხოლო ρ-თი ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{OM}$ ვექტორის Δ ღერძის გასწვრივ. ცხადია, რომ, როგორც წინა შემთხვევაში ρ და φ სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე.

[თუ Δ ღერძის გეზად არჩეულია ის, რომელიც O-დან არის მიმართული M-საკენ, მაშინ აღნიშნული სიდიდეები იგივე არიან, რაც წინა პარაგრაფის ρ და φ სიდიდეები].

ვინაიდან M წერტილის ერთსა და იმავე მდებარეობას, ეთანადება Δ ღერძის ურთიერთ მოპირდაპირე ორი მიმართულება, ამიტომ პოლარი კუთხის მნიშვნელობანი $\varphi = \widehat{Ox, \Delta}$, ერთი და იგივე წერტილის შესაბამი, შეიძლება განსხვავდებოდენ π-ს ჯერადით.

---

[1] ამ ტერმინის გარდა იხმარება კიდევ: ანომალია, ამპლიტუდი, აზიმუტი და სხვ.

ცხადია, რომ, თუ ρ და φ აღნიშნავენ რომელიმე M წერტილის პოლარ კოორდინატებს, მაშინ კოორდინატები $(-\rho)$ და $(\varphi+\pi)$ იქნებიან იმავე წერტილის კოორდინატებად[1].

ამ პარაგრაფში აღნიშნულს კოორდინატთა სისტემას უწოდებენ პოლარ კოორდინატთა განზოგადოებულ სისტემას.

71. სიბრტყეზე პოლარ კოორდინატთა გარდაქმნა წრფივზე. პოლარ კოორდინატებიდან წრფივზე გადასასვლელად და უკუღმა, საკმარისია გვქონდეს ფორმულები, რომელნიც საშუალებას მოგვცემენ გადავიდეთ მოცემული პოლარი სისტემიდან რომელიმე ერთს, გარკვეულად შერჩეულს წრფივ სისტემაზე, ვინაიდან, თუ რომელიმე წრფივ სისტემაზე გადავედით, ჩვენ შეგვეძლება გადავიდეთ ყოველ სხვა წრფივ სისტემაზე § 60-ის ფორმულების ძალით; იმავე ფორმულების მიხედვით შეიძლება უკუღმა გადასვლა ნებისმიერი წრფივი სისტემიდან რომელიმე პოლარ სისტემაზე.

ავიღოთ წრფივ, მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემის სათავედ პოლუსი O, Ox ღერძად პოლარი ღერძი, ხოლო Oy ღერძად — ღერძი Ox-ის მართობული და ისე მოგეზული, რომ Oy გეზს შეეფერებოდეს პოლარი კუთხე $\varphi=+\frac{\pi}{2}$. თუ x და y-ით აღვნიშნავთ M წერტილის კოორდინატებს ამ სისტემის მიმართ, მაშინ, ცხადია:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi; \tag{1}$$

ეს ფორმულები, რომელნიც გამოსახავენ x და y-ს ρ და φ-ს საშუალებით, სამართლიანი არიან როგორც § 69-ის, ისე § 70-ის შემთხვევისთვის[2].

ფორმულები უკუღმა გადასვლისთვის პირდაპირ გამოიყვანებიან წინა ფორმულებიდან. მართლაც, ჯერ ერთი გვაქვს: $x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2$, საიდანაც:

$$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

და მეორეს მხრივ,

$$\cos\varphi=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi=\frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3}$$

---

[1] მართლაც, კუთხე $\varphi+\pi$ ახასიათებს მიმართულებას, იმის მოპირდაპირეს, რომელიც φ კუთხეს ეთანადება.

[2] (1) ფორმულები გამოიყვანებიან § 19-ის (21) ფორმულების გამოყენებით.

რადიკალების წინ ნიშანი შეიძლება სურვილისამებრ შევირჩიოთ, მაგრამ, ერთი და იგივე ყველა ფორმულებში (2) და (3)[1].

თუ ჩვენ შევჩერდებით § 69-ის სისტემაზე, მაშინ საჭიროა მხოლოდ (+) ნიშნის დატოვება და წინა ფორმულები მიიღებენ სახეს:

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2*}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{3*}$$

როგორც ერთს, ისე მეორე შემთხვევაში, გვექნება:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.} \tag{4}$$

ფორმულები (2) და (3) ან (2*) და (3*) საშუალებას გვაძლევენ გამოვითვალოთ პოლარი კოორდინატები, თუ ცნობილია წრფივი. გამოთვლები ყველაზე უკეთესია ასე ვაწარმოოთ: თუ შევჩერდებით რადიკალის წინ გარკვეულ ნიშანზე, გამოვითვალოთ ρ და შემდეგ $\cos\varphi$ და $\sin\varphi$-ს ნიშნების მიხედვით განვსაზღვრავთ იმ მეოთხედს, რომელშიაც იმყოფება φ კუთხე; გამოთვლა ცხრილებით კი მოვახდინოთ (4) ფორმულის მიხედვით.

გავიხსენოთ, რომ (1—4) ფორმულები იმ კერძო შემთხვევას შეეხებიან, როცა კოორდინატთა წრფივი სისტემა მართკუთხოვანია, და აბსცისათა ღერძი მოგეზულია პოლარი ღერძის გასწვრივ.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. წინა აღნიშვნების მიხედვით იპოვეთ წერტილის მართკუთხოვანი კოორდინატები x და y, თუ მოცემულია $\rho=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

პას. $x=1$, $y=\sqrt{3}$.

2. მოცემულია მართკუთხოვანი კოორდინატები: $x=-5$, $y=+5$. იპოვეთ პოლარი კოორდინატები ρ და φ (არაგანზოგადოებულ სისტემაში); აღნიშვნები იგივეა, რაც ზევით.

პას. $\rho=+5\sqrt{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

3. იპოვეთ მანძილი ორ წერტილს შორის $M_1(\rho_1, \varphi_1)$ და $M_2(\rho_2, \varphi_2)$.

---

[1] თუ ავიღებთ (+) ნიშანს, მაშინ ρ მიიღებს დადებით მნიშვნელობას; თუ კი (—) ნიშანს ავიღებთ, მაშინ ρ-სათვის უარყოფით მნიშვნელობას მივიღებთ, მაგრამ სამაგიეროდ Δ ღერძი მიიღებს გეზს იმის მოპირდაპირეს, რომელიც მიიღება რადიკალის წინ (+) ნიშნის აღებით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს : $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(\rho_2\cos\varphi_2-\rho_1\cos\varphi_1)^2+$ $+(\rho_2\sin\varphi_2-\rho_1\sin\varphi_1)^2$, სადაც (x_1, y_1), (x_2, y_2), არიან მართკუთხა [illegible] კოორდინატები; აქედან აშკარა გამარტივებათა შემდგომ მივიღებთ:

$$|M_1M_2|^2=\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1).$$

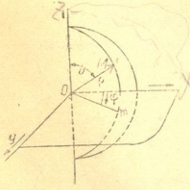
ადვილია ამავე ფორმულის მიღება ნახაზის უშუალო განხილვით.

72. სივრცეში პოლარი კოორდინატები. ამ სისტემაში ძირითად მუდმივ ელემენტებად არიან წერტილი O (პოლუსი), ღ ე რ ძ ი Oz (პო ლ ა რ ი ღ ე რ ძ ი) და ნ ა ხ ე ვ ა რ ს ი ბ რ ტ ყ ე Ozx გამავალი Oz ღერძზე.

ვთქვათ, M არის სივრცის რომელიმე წერტილი [ნახ. 71[1]]. ავღნიშნოთ ρ-თი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძე, ϑ-თი კუთხე შედგენილი $\overline{OM}$-ის მიერ Oz პოლარ ღერძთან და დაბოლოს φ-თი კუთხე, შედგენილი Oz ღერძზე და M წერტილზე გამავალი ნახევარსიბრტყით Oxz პოლარ ნახევარსიბრტყესთან. კუთხე φ აითვლება $\overline{Oxz}$ ნახევარსიბრტყიდან რომელიმე გარკვეული მიმართულებით, მაგალითად, საათის ისრის მიხედვით (Oz-ის გასწვრივ მდგომი დამკვირვებელისათვის).

ცხადია, რომ საკმარისია ρ ვცვალოთ საზღვრებში $(0,\infty)$, ϑ საზღვრებში $(0,\pi)$ და φ საზღვრებში $(0,2\pi)$, რომ მივიღოთ სივრცის ყველა წერტილი.

სიდიდეები ρ, ϑ და φ იწოდებიან M წერტილის პ ო ლ ა რ (ან ს ფ ე რ უ ლ) კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ ე ბ ა დ.



ნახ. 71.

ვიპოვოთ ახლა გადასვლის ფორმულები პოლარ კოორდინატებიდან წრფივს, მართკუთხოვანზე.

ჩვენ ვგულისხმობთ (ნახ. 71 და 72), რომ Oz ღერძი პოლარ ღერძს ემთხვევა, Ox მდებარეობს პოლარ ნახევარსიბრტყეში, ხოლო Oy მართობულია ორივე ხსენებული ღერძისა და ამასთანავე ისეთნაირად არის მოგეზული, რომ φ კუთხე Oyz ნახევარსიბრტყისათვის $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$-ის ტოლი იყოს.

ცხადია, გვაქვს: $z=$ გეგ$_z\overline{OM}=\rho\cos\vartheta$.

შემდგომ, თუ დავაგეგმილებთ $\overline{OM}$ ვექტორს Oxy სიბრტყეზე, მივიღებთ

[1] ღერძები Ox და Oy ნახ. 71-ზე ჩვენ გავიყვანეთ მეტი თვალსაჩინობისათვის. სიბრტყე Oxy მართობულია Oz ღერძისა, ხოლო Ox ღერძის დადებითი ნაწილი მდებარეობს პოლარ ნახევარსიბრტყეზე.

Om ვექტორს (ნახ. **72**), რომლის სიგრძე $r=|Om|=\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\vartheta\right)=$ $=\rho\sin\vartheta$ და რომელიც შეადგენს Ox ღერძთან φ კუთხეს. თუ ამ ვექტორს დავაგეგმილებთ Ox-ზე და Oy-ზე, მივიღებთ:

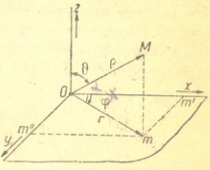
$$x=|Om|\cos\varphi=\rho\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y=|Om|\sin\varphi=\rho\sin\vartheta\sin\varphi.$$

მაშ:

$$x=\rho\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$z=\rho\cos\vartheta. \qquad (1)$$

უკუღმა, თუ ცნობილია x,y,z, შეგვიძლიან ρ, ϑ და φ განვსაზღვროთ. მართლაც, გვაქვს: $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

შემდგომ, კუთხე ϑ (0 და π-ს შორის მოქცეული) სავსებით განისაზღვრება ფორმულით:



ნახ. 72.

$$\cos\vartheta=\frac{z}{\rho}; \qquad (3)$$

φ კუთხე კი (0 და 2π-ს შორის მოქცეული) განისაზღვრება ფორმულებიდან:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\rho\sin\vartheta},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\rho\sin\vartheta}. \qquad (4)$$

73. ნახევრადპოლარი (ცილინდრული) კოორდინატები. წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, M წერტილის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება მისი Oxy სიბრტყეზე m გეგმილის პოლარი (r,φ) კოორდინატების მოცემით და $z=mM$ კოორდინატით. სიდიდეები r,φ,z იწოდებიან M წერტილის ნ ა ხ ე ვ რ ა დ პ ო ლ ა რ (ც ი ლ ი ნ დ რ უ ლ) კოორდინატებად.

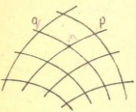
ამ კოორდინატებიდან წრფივ მართკუთხოვანზე გადასვლა ხდება შემდეგი ფორმულების საშუალებით (წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით):

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z. \qquad (1)$$

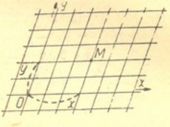
74. კოორდინატთა ზოგადი მეთოდი. მართკუთხოვან, პოლარ და ნახევრადპოლარ კოორდინატთა სისტემები წარმოადგენენ კოორდინატთა ზოგადი მეთოდის განხორციელების მხოლოდ კერძო შემთხვევებს; იმისა-

თვის, რომ წარმოდგენა მივიღოთ ამ მეთოდზე, დავიწყოთ სიბრტყეზე განხილული კოორდინატების შემთხვევიდან.

წარმოვიდგინოთ სიბრტყეზე (ნახ. 73) წირთა (მრუდი თუ წრფე) ორი სისტემა, რომელთაც ის თვისება აქვთ, რომ სიბრტყის ყოველ M წერტილზე გაივლის თითოეული სისტემის მხოლოდ ერთი წირი და რომ M-ის გარდა ეს ორი წირი არსად არ იკვეთება (მაგალითად, ჩვენ შეგვიძლიან პირველი და მეორე სისტემის წირებად მივიღოთ, შესაბამისად, Oy და Ox ღერძების პარალელური წრფეები (ნახ. 74). ხსენებულ წირებს საკოორდინატო წირები უწოდოთ.



ნახ. 73.



ნახ. 74.

შემდგომ, წარმოვიდგინოთ, რომ პირველი სისტემის ყოველი წირი სავსებით ხასიათდება გარკვეული p რიცხვის მნიშვნელობით ისე, რომ ყოველს p მნიშვნელობას ეთანადება პირველი სისტემის სრულიად განსაზღვრული წირი; ვთქვათ, ანალოგიურად, მეორე სისტემის წირები ხასიათდებიან გარკვეული q რიცხვის მნიშვნელობით (ზემოხსენებული მაგალითში შეიძლება მივიღოთ $p=x$, $q=y$, სადაც x არის ნაკვეთი პირველი სისტემის წრფით მოჭრილი Ox ღერძზე, ხოლო y ნაკვეთი, მოჭრილი Oy ღერძზე მეორე სისტემის წრფის მიერ; ორივე ეს ნაკვეთი გარკვეული ნიშნით იგულისხმება).

ვთქვათ, ახლა M არის სიბრტყის რომელიმე წერტილი; პირობის თანახმად, მასზე გაივლის თითოეული სისტემის თითო წირი. ამ წირთა დამახასიათებელი რიცხვები p და q, აშკარაა, სავსებით განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას სიბრტყეზე და იწოდებიან M წერტილის მრუდწიროვან კოორდინატებად.

თუ, კერძოდ, საკოორდინატო წირებად მივიღებთ ორი მოცემული Oy და Ox ღერძის პარალელურ წრფეებს და p და q სიდიდეებათ რიც-

ხვებს x და y (იხ. ზევით), მაშინ მივიღებთ წრფივი კოორდინატების უკვე ცნობილ სისტემას.

პოლარ კოორდინატებამდე რომ მივიდეთ, განვიხილოთ საერთო O ცენტრიანი წრეწირების სისტემა. თვითეული ამ წრეწირთაგან, რომელთაც ჩვენ მივიღებთ პირველი სისტემის საკოორდინატო წირებად, ხასიათდება თავისი რადიუსით ρ. მეორე სისტემის წირებად მივიღოთ O წერტილიდან გამომავალი ნახევარწრფეები (სხივები); თვითეული ამ ნახევარწრფეთაგან სავსებით ხასიათდება იმ φ კუთხით, რომელსაც იგი შეადგენს რაღაც მუდმივ Ox ღერძთან სიბრტყეზე (φ კუთხეს, როგორც ყოველთვის ჩვენ ვაწერთ გარკვეულ ნიშანს). თუ p და q სიდიდეებათ შესაბამისად ρ და φ-ს მივიღებთ, ამით ჩვენ, ცხადია, § 69-ის პოლარ სისტემამდე მივალთ.

შემდეგი მაგალითისათვის განვიხილოთ, ეგრედწოდებული, *ბიპოლარი კოორდინატების სისტემა*, რომელიც შემდეგნაირად შეიძლება გავმარტოთ. ავიღოთ სიბრტყეზე ორი წერტილი O და O'. მივიღოთ პირველი სისტემის წირებად წრეწირები ცენტრით O წერტილში, ხოლო მეორე სისტემის წირებად — წრეწირები ცენტრით O'-ში. ვთქვათ p და q კოორდინატების როლს ასრულებენ პირველი და მეორე სისტემის წრეწირთა რადიუსები ρ და ρ'. სხვანაირად რომ ვთქვათ, რომელიმე M წერტილის კოორდინატებად მივიღოთ ამ წერტილის მანძილი ორს მოცემულ წერტილამდე O და O'. კოორდინატთა მიღებულ სისტემას ეწოდება *ბიპოლარი სისტემა*. შევნიშნოთ, თუმცა, რომ ამ სისტემის საკოორდინატო წირები მთლიანად არ აკმაყოფილებენ ზევით დასახელებულ პირობებს; სხვადასხვა სისტემის წირები, საზოგადოდ, ორ წერტილში იკვეთებიან; ამიტომ ρ, ρ' მნიშვნელობათა ერთობლიობას, საზოგადოდ, ერთი წერტილი კი არ შეეფერება, არამედ ორი. ეს მოუხერხებლობა რომ თავიდან ავიცილოთ, შეიძლება, მაგალითად, დავკმაყოფილდეთ სიბრტყის ერთი რომელიმე ნაწილით იმ ორთაგან, რომელზეც ყოფს ამ სიბრტყეს OO' წრფე.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ ზევით მოყვანილი მოსაზრებანი შეიძლება გამოვიყენოთ წერტილის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ნებისმიერ ფართეულზე (და არამხოლოდ სიბრტყეზე). უმარტივესი მაგალითი — ეს არის საყოველთაოდ ცნობილი *გეოგრაფიული კოორდინატები სფეროზე*. აქ საკოორდინატო წირებად არიან მერიდიანები და პარალელები, ხოლო კოორდინატებად — სიგრძედი და სიგანედი.

წინა მოსაზრებანი უშუალოდ განზოგადოვდებიან სამი განზომილებების შემთხვევისათვის.

წარმოვიდგინოთ სივრცეში ფართეულთა სამი სისტემა, ისეთი, რომ სივრცის ყოველ წერტილზე გაივლის ერთი და მხოლოდ ერთი ფართეული თვითეული სისტემიდან და რომ ეს სამი ფართეული მხოლოდ ერთს საერთო M წერტილში იკვეთება. ვთქვათ, პირველი სისტემის თითოეული ფართეული ხასიათდება რაღაც p სიდიდის მნიშვნელობის მოცემით; ანალოგიურად, ვთქვათ, რომ მეორე და მესამე სისტემის თითოეული ფართეული ხასიათდება რაღაც q და r სიდიდეების მოცემით. განსახილავი ფართეულები იწოდებიან საკოორდინატო ფართეულებად, ხოლო ამ ფართეულთა გადაკვეთის წირები საკოორდინატო წირებად. ცხადია, რომ სივრცის ყოველ წერტილზე გადის სამი საკოორდინატო წირი.

თუ მოცემულია M წერტილი, ამით მოცემული იქნებიან M წერტილზე გამავალი საკოორდინატო ფართეულები, ესე იგი მოცემული იქნებიან p, q, r სიდიდეთა მნიშვნელობანი და უკუღმა. სიდიდეები p, q, r იწოდებიან M წერტილის მრუდწიროვან კოორდინატებად.

წრფივი კოორდინატები წარმოადგენენ მრუდწიროვანის კერძო შემთხვევას: ამ შემთხვევაში საკოორდინატო ფართეულები წარმოადგენენ კოორდინატთა სიბრტყეების პარალელურს სიბრტყეებს; p, q, r სიდიდეთა როლს ასრულებენ x, y, z ნაკვეთები (გარკვეული ნიშნით განხილულნი) ხსენებულ სიბრტყეთა მიერ მოჭრილნი კოორდინატთა ღერძებზე (დაწყებული O-დან). საკოორდინატო წირები არიან კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები.

სივრცეში პოლარ კოორდინატთა შემთხვევაში § 72-ის აღნიშვნების მიხედვით, საკოორდინატო ფართეულები არიან სფეროები ცენტრით O წერტილში, დახასიათებულნი რადიუსით ρ, Oz ღერძზე გამავალი ნახევარსიბრტყეები, დახასიათებულნი Ozx ნახევარსიბრტყესთან შედგენილი φ კუთხით და წრიული კონუსები, რომელთა მსახველნი არიან სხივები, O წერტილიდან გამომავალნი და Oz ღერძთან θ კუთხით დახრილნი.

ნახევრადპოლარ (ცილინდრულ) კოორდინატთა შემთხვევაში საკოორდინატო ფართეულები იქნებიან (§ 72-ის აღნიშვნების მიხედვით) წრიული ცილინდრები Oz ღერძით, დახასიათებელნი განივი კვეთის r რადიუსით, Oz ღერძზე გამავალი ნახევარსიბრტყეები, დახასიათებულნი Ozx ნახევარსიბრტყესთან შედგენილი φ კუთხით და სიბრტყეები Oz-ის მართობულნი, დახასიათებულნი Oz ღერძზე მოჭრილი (დაწყებული O წერტილიდან) ნაკვეთის ალგებრული მნიშვნელობით.

$f(x,y)=0$

$f(x,y)=0$

თავი მეოთხე

ბრტყელი წირის განტოლება. წრფე სიბრტყეზე

ამ თავში ჩვენ განვიხილავთ ისეთ წირებს, რომელნიც მოთავსებული არიან ერთსა და იმავე სიბრტყეზე (ბრტყელ წირებს). ანალიზური გეომეტრიის (სიბრტყეზე) ერთერთი ძირითადი საკითხი მდგომარეობს წირთა ანალიზურ გამოსახვაში იმ განტოლებათა საშუალებით, რომელნიც უკავშირებენ ერთი მეორეს წირის წერტილთა კოორდინატებს. მიუხედავად იმისა, რომ მ რ უ დ ი წ ი რ ე ბ ი ს შესახებ საკითხები მიეკუთვნება კურსის მეორე ნაწილს, ჩვენ აქ წრფეწირთა შესწავლას წინწაუძღოლებთ საერთოდ წირთა განტოლებების შესახებ ძირითადი ცნებების გარჩევას (§ 75—83). ამ ცნებათა შეთვისება აუცილებელია მასალის დამუშავებისათვის.

I. სიბრტყეზე წირთა ანალიზური წარმოდგენა

75. წირის განტოლება. ელემენტარულ გეომეტრიაში ჩვეულებრივ ისწავლება მხოლოდ ერთი მრუდი წირი — წრეწირი.

ჩვენი მიზანია საერთო განმარტება მივცეთ წირის ცნებას.

ვთქვათ

$$\Phi(x,y)=0 \tag{1}$$

არის რომელიმე განტოლება, ორი x და y ცვლადის დამაკავშირებელი. ეს განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს ერთერთ ამ ცვლადს (მაგ., y-ს), როგორც მეორის ფუნქციას (მაგ., x-ს); სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ ამოვხსნით (1) განტოლებას y-ის მიმართ, მივიღებთ:

$$y=f(x) \qquad (2),$$

სადაც $f(x)$ აღნიშნავს x-ის რომელიმე ფუნქციას; ეს ფუნქცია, რასაკვირველია, შეიძლება ცალსახაც იყოს და მრავალსახაც.

შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობანი x-ის ცვლილების დროს განუწყვეტლივ იცვლებიან.

დავიწყოთ იმ შემთხვევის განხილვით, როდესაც $f(x)$ არის ცალსახა ფუნქცია, ყოველ შემთხვევაში x-ის ცვლილების რომელიმე შუალედში.

ავიღოთ წრფივი კოორდინატების ღერძთა რომელიმე სისტემა Oxy და განვიხილოთ x და y ცვლადი, როგორც რომელიმე M წერტილის კოორდინატები Oxy სიბრტყეზე.

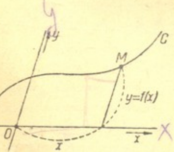
x-ის ყოველ მნიშვნელობას (განსახილავ შუალედში), (2) განტოლების ძალით y-ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა შეეფერება.

მაშასადამე, x-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება სიბრტყეზე ერთი გარკვეული M წერტილი, კოორდინატებით x და $y=f(x)$.

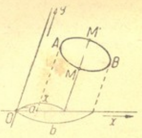
თუ ამის შემდგომ x გაირბენს მნიშვნელობათა განუწყვეტელ ერთობლიობას, მაშინ სათანადო M წერტილი დაიწყებს განუწყვეტელ გადადგილებას Oxy სიბრტყეზე და ასეთნაირად აღწერს რაღაც გეომეტრიულ ადგილს C-ს; ეს გეომეტრიული ადგილი იწოდება წ ი რ ა დ.

ჩვენ ვგულისხმობთ $f(x)$-ს ცალსახად; მაგრამ ეს შეზღუდვა არ არის არსებითი; მართლაც, თუ $f(x)$ მრავალსახაა, მაშინ x-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა $y=f(x)$, ესე იგი რამდენიმე წერტილი $M, M', M'', \ldots$

x-ის ცვლილების დროს თითოეული ამ წერტილთაგან აღწერს რაღაც გეომეტრიულ ადგილს; თითოეული ეს გეომეტრიული ადგილი (და აგრეთვე მათი ერთობლიობაც) წარმოადგენს იმას, რასაც ჩვენ უწოდებთ წირს (იხ. ნახ. 76; ამ ნახაზზე x-ის ყოველ მნიშვნელობას შუალედებში



ნახ. 75.



ნახ. 76.

$a<x<b$ ეთანადება ორი წერტილი; როცა x იცვლება ხსენებულ შუალედში, მაშინ ეს წერტილები აღწერენ შესაბამისად AMB და $AM'B$ რკალებს; მათი ერთობლიობა წარმოადგენს ჩაკეტილ წირს. x-ის იმ მნიშ-

ვნელობებს, რომელნიც ამ შუალედის გარედ იმყოფებიან, არც ერთი წერტილი არ ეთანადება).

შენიშვნა. x-ის ერთი და იმავე მნიშვნელობის შესაბამ წერტილებს M, M', M''.... შეუძლიათ ალწერონ არა მარტო და მაინც ერთი მთლიანი წირი, არამედ ერთმანეთთან სრულიად დაუკავშირებელი წირებიც; ამ წირთა ერთობლიობა მაინც წირად იწოდება — ეს არის წირი, (2) განტოლებით წარმოდგენილი.

შევაჯამოთ ახლა ყველა ზემოხსენებული.

წირი (სიბრტყეზე), ჩვენის განმარტებით, წარმოადგენს წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ (2) სახის ორ ცვლადიან განტოლებას, ან რაც იგივეა, (1) სახისას.

განტოლება (1) [ან (2)], რომელიც წირს განსაზღვრავს, იწოდება ამ წირის განტოლებად.

წირის განმარტების თანახმად (2) განტოლება, ან სულ ერთია, (1) განტოლება, დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y წარმოადგენენ აღებული წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს. მაშ, აღებული წირის (სიბრტყეზე) განტოლება ეწოდება (1) სახის ორ ცვლიდან განტოლებას, რომელიც დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ცვლადის მაგიერ შევიტანთ ამ წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

მოკლეთ, აღებული წირის განტოლება არის ისეთი თანაფარდობა, რომლითაც დაკავშირებულია აღებულ წირზე მოთავსებული წერტილების კოორდინატები (და მხოლოდ ამ წერტილების).

შენიშვნა. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ჩვენ მიერ მოყვანილი განმარტება წირისა ნამეტნავად ზოგადია. იგი შეიცავს ისეთ გეომეტრიულ სახეებსაც, რომელნიც ძალიან განსხვავდებიან იმისგან, რასაც ჩვენ მიჩვეული ვართ წირი ვუწოდოთ.

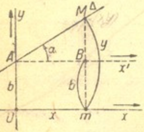
იმისათვის, რომ ცოტად თუ ბევრად დავუახლოვოთ ზოგადი განმარტება იმ წარმოდგენას, რომელიც ჩვენი ინტუიციით გვაქვს მიღებული, საჭიროა $\Phi(x, y)$ ან $f(x)$ ფუნქციებს (1) ან (2) განტოლებაში ქონდეს ზოგიერთი შემზღუდველი პირობები (უწყვეტობა, წარმოებადობა გარკვეულ რიგამდე და სხვ.). ამის შესახებ იხ. დიფერენციალური გეომეტრიისა და ანალიზის კურსები.

76. მაგალითები: წრფეწირისა და წრეწირის განტოლებანი. წინა პარაგრაფში მოყვანილ მოსაზრებათა ნათელსაყოფად და აგრეთვე იმ ზო-

გადი დებულებებისთვის მოსამზადებლად, რომელთაც შემდეგში განვავითარებთ, შევადგინოთ ორი უმარტივესი წირის განტოლებანი — წრფისა და წრეწირის[1]. მკითხველს დაბეჯითებით მოეთხოვება ამ პარაგრაფის ბოლოში მოყვანილი ყველა სავარჯიშო მაგალითები ყურადღებით გააკეთოს და არ იუცხოვოს მათი ზედმეტი სიმარტივე. ეს მაგალითები ძალიან გაადვილებენ იმ ზოგადი დებულების შეთვისებას, რომელთაც შემდეგში მოვიყვანოთ.

მთელს ამ პარაგრაფში სიმარტივისათვის კოორდინატები იგულისხმებიან მართკუთხოვანად.

1. წრფის განტოლება[2]. ვთქვათ Δ არის Oxy სიბრტყეზე აღებული წრფე, არაპარალელური Oy ღერძისა. წრფის მდებარეობა სავსებით განსაზღვრული იქნება, თუ ცნობილია: იმ წერტილის ორდინატი[3] $b = OA$, სადაც წრფე გადაკვეთს Oy ღერძს და ის α კუთხე, რომელსაც წრფე შეადგენს Ox ღერძის გეზთან. ეს კუთხე აითვლება Ox-ის გეზიდან დადებითი მიმართულებით ან, რაც იგივეა, დამხმარე Ax' ღერძიდან, რომელიც ისეთნაირადვეა მოგეზული, როგორც Ox ღერძი.



ნახ. 77.

ვთქვათ $M(x,y)$ არის Δ წრფის ნებისმიერი წერტილი. აშკარაა, რომ $BM = AB\, tg\, \alpha$ (აღნიშვნები მოცემულია ნახაზზე). აქ BM და AB უნდა გვესმოდეს, როგორც $\overline{BM}$ და $\overline{AB}$ ვექტორების ალგებრული მნიშვნელობანი შესაბამისად Oy და Ox ღერძების გასწვრივ.

მკითხველი ადვილად დარწმუნდება, რომ უკანასკნელი ფორმულა სამართლიანია ნიშნების თვალსაზრისითაც.

შემდგომ გვექნება: $BM = y - b$, $AB = x$. თუ ჩავსვამთ ამ მნიშვნელობებს მიღებულ ფორმულაში, გვექნება: $y - b = x\, tg\, \alpha$, ან:

$$y = ax + b \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია:

$$tg\, \alpha = a \tag{2}$$

[1] ამით დამტკიცებული იქნება, რომ წრფე და წრეწირი ყოველ შემთხვევაში წირის იმ ზოგად განმარტებას ემორჩილებიან, რაც წინა პარაგრაფში აღვნიშნეთ.

[2] წრფის განტოლება შემდეგში კიდევ სხვანაირად გამოიყვანება; აქ ეს განტოლება გამოიყვანება მაგალითის სახით წინა პარაგრაფში თქმულის ნათელსაყოფად.

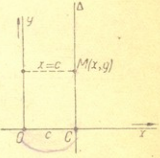
[3] OA-ს მაგიერ, რასაკვირველია, უნდა ვიგულისხმოთ $\overline{OA}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა Oy ღერძის გასწვრივ.

(1) განტოლებას აკმაყოფილებენ ჩვენი წრფის ყოველი წერტილის კოორდინატები და ადვილი გასაგებია, რომ, პირიქით, ყოველი წერტილი, რომელიც თავისი კოორდინატებით ამ განტოლებას აკმაყოფილებს, აუცილებლად ძევს ჩვენს წრფეზე.

მაშასადამე, (1) განტოლება არის Δ წრფის განტოლება. გავიხსენოთ, რომ ამ განტოლებაში a და b არიან მუდმივი სიდიდეები ($a = tg\,\alpha$, $b = OA$).

a სიდიდე იწოდება საკუთხო კოეფიციენტად (ვინაიდან იგი დამოკიდებულია Δ წრფისა და Ox ღერძს შორის არსებულ კუთხეზე), ხოლო b სიდიდე არის საწყისი ორდინატი (ე. ი. ორდინატი, რომელიც შეეფერება აბსცისის ნულოვან მნიშვნელობას).

განვიხილოთ ახლა ზევით გამორიცხული კერძო შემთხვევა, როდესაც Δ წრფე პარალელურია Oy ღერძის (ნახ. 78). ამ შემთხვევაში წრფის მდებარეობა სრულიად განისაზღვრება იმ წერტილის აბსცისით $c = OC$, სადაც წრფე გადაკვეთს Ox ღერძს. ცხადია, რომ ამ წრფის ყოველი $M(x,y)$ წერტილის კოორდინატები (და მხოლოდ ამ წერტილების) აკმაყოფილებენ პირობას $x = c$. ეს თანაფარდობა წარმოადგენს სწორედ Δ წრფის განტოლებას; იმ გარემოებას, რომ მეორე (y) კოორდინატი განტოლებაში არ შედის, არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს.



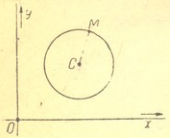
ნახ. 78.

თუ დავუბრუნდებით ახლა ზოგად შემთხვევას, შევნიშნავთ, რომ, თუ მოცემულია წრფის განტოლება, მისი აგება ძალიან ადვილია. ამისათვის საკმარისია ვიპოვოთ რომელიმე ორი წერტილი, რომელიც ამ წრფეს ეკუთვნის. ასეთი ორი წერტილის საპოვნელად საკმარისია x ცვლადს (1) განტოლებაში მივანიჭოთ ორი სხვადასხვა კერძო მნიშვნელობა x_1, x_2 და (1) ფორმულის მიხედვით გამოვითვალოთ y ცვლადის სათანადო მნიშვნელობანი, ვთქვათ y_1 და y_2. მაშინ (x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილები იქნებიან ჩვენს წრფეზე მდებარე წერტილები (იხ. სავარჯიშო მაგალითები პარაგრაფის ბოლოში).

2. წრეწირის განტოლება. ახლა შევადგინოთ წრეწირის განტოლება იმ პირობით, რომ მოცემულია ცენტრი $C(a,b)$ და რადიუსი r (ნახ. 79).

ჩვენი წრეწირი, განმარტების ძალით, არის იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი $C(a,b)$ წერტილამდე მუდმივ r-სიდიდის ტოლია. ვთქვათ $M(x,y)$ არის ნებისმიერი წერტილი სიბრტყეზე. მისი მანძილი C-მდე ტოლია $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$-სი. მისთვის, რომ M წერტილი წრეწირზე იმყოფებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$, ან რადიკალის მოსპობის შემდეგომ:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (3)$$



ნახ. 79.

უკანასკნელი განტოლება სწორედ აღებული წრეწირის განტოლება იქნება. მართლაც, თვით მსჯელობიდან ჩანს, რომ, იგი დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც x და y წარმოადგენენ წრეწირზე აღებული რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

თუ წრეწირის ცენტრი სათავეზეა მოთავსებული, მაშინ განტოლებას უფრო მარტივი სახე ეძლევა:

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (4)$$

შენიშვნა. განტოლება:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=O, \qquad (5)$$

სადაც A და B არიან მუდმივები, შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$(x+A)^2+(y+B)^2=A^2+B^2-C.$$

თუ $A^2+B^2-C>0$, მაშინ, შეიძლება მივიღოთ $A^2+B^2-C=r^2$; ცხადამ, რომ ამ შემთხვევაში (5) წარმოადგენს იმ წრეწირს, რომლის ცენტრი იმყოფება $(-A,-B)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი $r=\sqrt{A^2+B^2-C}$.

მაშ, (5) სახის განტოლება, იმ პირობით, თუ შესრულებულია უტოლობა $A^2+B^2-C>0$, წარმოადგენს წრეწირის განტოლებას (მართკუთხოვან. კოორდინატებში). ცხადია, რომ, პირიქითაც, ნებისმიერი წრეწირის განტოლება, ესე იგი (3) განტოლება, ფრჩხილების გახსნისა და r^2-ის მარცხნივ გადატანის შემდგომ, მიიღებს (5) სახეს.

ცოტა უფრო ზოგადი სახის განტოლება, ვიდრე (5)-ია:

$$A_0(x^2+y^2)+2Ax+2By+C=0, \qquad (5a)$$

სადაც $A_0 \neq 0$, ყოველთვის შეგვიძლიან A_0-ზე გაყოფით (5) სახეზე დავიყვანოთ. ამიტომ (5a) განტოლებაც რაღაც წრეწირს წარმოადგენს, თუ შესრულებულია გარკვეული უტოლობა, რომლის დაწერას მკითხველს მივანდობთ.

სავარჯიშო მაგალითები

1. მოცემულია წრფის განტოლება $y=2x-3$. იპოვეთ ამ წრფის ის წერტილები M_1, M_2, M_3, M_4, რომელთა აბსცისები შესაბამისად არიან:

$$x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=-1;\ x_4=2.$$

პ ა ს. ამ წერტილთა ორდინატები შესაბამისად ტოლნი არიან:

$$y_1=-3,\ y_2=-1,\ y_3=-5,\ y_4=1.$$

2. ააგეთ (მაგალითად მილიმეტრული ქაღალდის გამოყენებით) წერტილები M_1, M_2, M_3, M_4 (წინა მაგალითის) და სახაზავის დადებით შეამოწმეთ, რომ ეს წერტილები ძევრან ერთსა და იმავე წრფეზე.

3. ააგეთ წრფე, რომლის განტოლება არის $y=-2x+4$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ, მაგალითად, მივიღებთ $x=0$, გვექნება, $y=4$; თუ $x=1$, გვექნება $y=2$. ავების მოსახდენად, საკმარისია ავაგოთ (0,4) და (1,2) წერტილი და შევაერთოთ ესენი წრფით.

4. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია და კვეთს Ox ღერძს წერტილზე, რომლის აბსცისი (-2)-ის ტოლია.

პ ა ს. $x=-2$.

5. დაწერეთ Ox და Oy ღერძის განტოლებანი.

პ ა ს. Oy ღერძის განტოლება არის $x=0$. Ox ღერძის განტოლება კი $y=0$.

6. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სათავეზე გადის, და შუაზე ყოფს კუთხეს Oy ღერძების დადებით მიმართულებათა შორის.

პ ა ს. $x=y$ ანუ $x-y=0$.

7. დაწერეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც (0,3) წერტილზე გაივლის და Ox ღერძთან შეადგენს კუთხეს 60^0-ს.

პ ა ს. $y=x\sqrt{3}+3$. $y=\sqrt{3}x+3$

8. წრფის განტოლება არის $y=3x-1$. იპოვეთ ის α კუთხე, რომელსაც იგი შეადგენს Ox ღერძთან.

პ ა ს. $\operatorname{tg}\alpha=3$.

9. წრფის განტოლება არის $y=-3x+6$. იპოვეთ მისი გადაკვეთის წერტილი Ox ღერძთან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი $(x,0)$ წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდნენ მოცემულ განტოლებას. მაშასადამე, მისი აბსცისი უნდა აკმაყოფილებდეს პირობას: $0=-3x+6$, საიდანაც $x=2$.

შეამოწმეთ მიღებული შედეგის სამართლიანობა, განსახილავი წრფის აგებით მილიმეტრულ ქაღალდზე.

10. დაწერეთ იმ წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი იმყოფება $(-1,2)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი 5-ის ტოლია.

პ ა ს. $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ ანუ $x^2+y^2+2x-4y=20$.

11. დაამტკიცეთ, რომ განტოლება $x^2+y^2+2x+2y=14$ არის წრეწირის განტოლება; იპოვეთ ცენტრი და რადიუსი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ეს განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს: $(x+1)^2+(y+1)^2=16$. მაშასადამე, ცენტრი იმყოფება $(-1,-1)$ წერტილში, ხოლო რადიუსი 4-ის ტოლია.

12. იპოვეთ ის M წერტილი, რომელზედაც გადაიკვეთებიან წრფეები: $y=2x-1$ და $y=3x-2$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გადაკვეთის (x,y) წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს ორივე მოცემულ განტოლებას, ვინაიდან M წერტილი იმყოფება, როგორც ერთსა, ისე მეორე წრფეზე. ამიტომ ჩვენ მივიღებთ საძიებელ წერტილს, თუ ამოვხსნით განტოლებათა სისტემას: $y=2x-1$; $y=3x-2$. ამოხსნა მოგვცემს: $x=1$; $y=1$. მაშ, გადაკვეთის წერტილი არის $M(1,1)$.

შეამოწმეთ მიღებული შედეგი გრაფიკულად, განსახილავი წრფეების აგებით მილიმეტრულ ქაღალდზე.

13. მოცემულია წრეწირი თავისი განტოლებით $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ და წრფე განტოლებით: $y=2x$. იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. საძიებელი წერტილების კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე მოცემულ განტოლებას (იხ. წინა მაგალითი). თუ ამოვხსნით ამ განტოლებათა სისტემას, მივიღებთ ორნაირ პასუხს:

$$x_1=\frac{5+2\sqrt{5}}{5},\ y_1=\frac{10+4\sqrt{5}}{5} \text{ და } x_2=\frac{5-2\sqrt{5}}{5},\ y_2=\frac{10-4\sqrt{5}}{5}.$$

(x_1, y_1) და (x_2, y_2) წერტილები იქნებიან საძიებელნი.

77. წირთა პარამეტრული წარმოდგენა. იმის მაგიერ რომ წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის ვისარგებლოთ $\Phi(x,y)=0$ სახის განტოლებით, ხშირად უფრო მოხერხებულია წირის წერტილთა ცვლადი კოორდინატები გამოისახონ მესამე დამხმარე t ცვლადის ანუ პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ს საშუალებით:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{1}$$

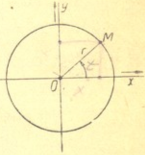
სადაც $\varphi(t)$ და $\psi(t)$ ჩვეულებრივ იგულისხმებიან უწყვეტ ფუნქციებად.

ორი უკანასკნელი განტოლებიდან t-ს გამორიცხვით მივიღებთ ერთ განტოლებას $\Phi(x,y)=0$ სახისას, ესე იგი წირის განტოლების ჩვეულებრივ სახეს.

ზევით მოყვანილი მეთოდი მრუდის წარმოდგენისათვის $y=f(x)$ სახის განტოლების საშუალებით, არის პარამეტრული წარმოდგენის კერძო შემთხვევა; მართლაც, საკმარისია მივიღოთ $x=t$, რომ უკანასკნელი განტო-

ლება დაყვანილ იქნეს ორი განტოლების ერთობლიობამდე: $x = t$, $y = f(t)$, ესე იგი (1) სახის განტოლებამდე.

წირთა პარამეტრული წარმოდგენა თავისთავად მოითხოვება, თუ ამ წირს განვიხილავთ, როგორც სასრბოლეს იმ წერტილისას, რომელიც გარკვეული წესის მიხედვით მოძრაობს. თუ ამ შემთხვევაში t-თი აღვნიშნავთ დროს, რომელმაც განვლო ნებისმიერად არჩეული საწყისი მომენტიდან, მაშინ x და y (მოძრავი წერტილის კოორდინატები) იქნებიან t ცვლადის გარკვეული უწყვეტი ფუნქციები: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ვინაიდან, თუ მოძრაობის წესი ცნობილია, მაშინ დროის ყოველ t მომენტს ეთანადება წერტილის სრულიად გარკვეული მდებარეობა ან, რაც იგივეა, სრულიად გარკვეული მნიშვნელობა x და y კოორდინატებისა.



ნახ. 80.

ავიღოთ მაგალითისათვის წრეწირი[1] რადიუსით r და ცენტრით სათავეზე. ვთქვათ $M(x,y)$ არის წრეწირის ნებისმიერი წერტილი.

აღვნიშნოთ t-თი კუთხე, რომელსაც შეადგენს OM რადიუს-ვექტორი Ox ღერძთან, იმ პირობით, რომ ეს კიდევ აითვლება Ox-იდან დადებითი მიმართულებით. ადვილი გასაგებია, რომ (იხ. ნახ. 80) $x = r\cos t$ $y = r\sin t$.

სწორედ ასეთია წრეწირის საძიებელი პარამეტრული წარმოდგენა.

იმისათვის, რომ პარამეტრული წარმოდგენიდან გადავიდეთ წრეწირის განტოლებაზე, საკმარისია t ცვლადი გამოირიცხოს უკანასკნელი განტოლებებიდან. ამ მიზნისათვის ავამაღლოთ განტოლებათა ორივე მხარე კვადრატში და შევკრიბოთ, რის შემდგომ მივიღებთ: $x^2 + y^2 = r^2$ (ვინაიდან $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$); როგორც მოსალოდნელი იყო, ჩვენ მივიღეთ წინა პარაგრაფის (4) განტოლება.

78. წირის განტოლებანი კოორდინატთა სხვადასხვა სისტემებში. წირის განტოლების სახე, რასაკვირველია, დამოკიდებულია, არა მხოლოდ თვით წირის სახეზე, არამედ კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზეაც. თუ ერთი სისტემის მაგიერ სხვას ავიღებთ, მაშინ აღებული წირის განტოლება გარკვეულად შეიცვლება.

[1] წრფის პარამეტრული წარმოდგენა ქვევით იქნება გამოყვანილი.

ვთქვათ

$$\Phi(x,y)=0 \tag{1}$$

არის აღებული წირის განტოლება, განხილული წრფივ კოორდინატთა ღერძების გარკვეული (Ox, Oy) სისტემის მიმართ. წარმოვიდგინოთ ახლა, რომ აღებულია წრფივ კოორდინატთა მეორე სისტემა, რომლის ღერძები ($O'x'$, $O'y'$) ნებისმიერად მდებარეობენ პირველის მიმართ. ერთი და იგივე წერტილის კოორდინატები (x,y) და (x',y') ორივე ამ სისტემის მიმართ დაკავშირებული არიან შემდეგი სახის თანაფარდობებით [იხ. § 60, ფორმულა ($1a$)]:

$$x=a+l_1x'+l_2y',\ \ y=b+m_1x'+m_2y'; \tag{2}$$

თუ ამ გამოსახულებებს (1)-ში შევიტანთ მივიღებთ განტოლებას:

$$\Phi_1(x',y')=0, \tag{3}$$

$$\Phi(a+l_1x'+l_2y',\ b+m_1x'+m_2y')=\Phi_1(x',y'). \tag{4}$$

(2) განტოლება წარმოადგენს აღებული წირის განტოლებას, განხილულს ღერძთა ახალი სისტემის მიმართ $O'x'$, $O'y'$.

აქამდე წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის ჩვენ ვსარგებლობდით წრფივი კოორდინატების სისტემით. მაგრამ ასეთივე წარმატებით შეიძლებოდა რომელიმე სხვა სისტემის გამოყენება. რა სისტემაც არ უნდა დაუდვათ საფუძვლად, ყოველთვის შეიძლება აღებული წირის განტოლება შევადგინოთ; ესე იგი ორ ცვლადიანი განტოლება, რომელიც მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ დაკმაყოფილდება, თუ ცვლადთა მაგიერ აღებული წირის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს შევიტანთ.

თუ (1) არის აღებული წირის განტოლება წრფივ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, მაშინ ამ განტოლებიდან რომ გადავიდეთ ამავე წირის განტოლებაზე სხვა რომელიმე სისტემის მიმართ, საკმარისია x და y-ის მაგიერ შევიტანოთ მათი გამოსახულობანი ახალი კოორდინატების მიმართ.

ვთქვათ, მაგალითად, განტოლება $\Phi(x,y)=0$ არის აღებული წირის განტოლება წრფივი, მართკუთხოვანი კოორდინატების სისტემის მიმართ.

თუ ვიგულისხმებთ (იხ. § 71): $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, მაშინ $\Phi(x,y)=0$ განტოლება გარდაიქმნება და ახალ სახეს მიიღებს $\Phi_1(\rho,\varphi)=0$, სადაც სიმოკლისათვის მიღებულია აღნიშვნა: $\Phi_1(\rho,\varphi)=\Phi(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$.

$\Phi_1(\rho,\varphi)=0$ განტოლება წარმოადგენს აღებული წირის განტოლებას პოლარული სისტემის მიმართ.

79. ძირითადი საკითხები, წირთა ანალიზურ წარმოდგენასთან დაკავშირებულნი. წირთა ანალიზური წარმოდგენა განტოლებათა საშუალებით შესაძლებლობას გვაძლევს შევისწავლოთ ამ წირების სახე და თვისებანი მათემატიკური ანალიზის გამოყენებით.

უპირველესად ყოვლისა, წირის მოხაზულობაზე წარმოდგენას მივიღებთ განტოლების შემწეობით, თუ განვსაზღვრავთ სიბრტყეზე ამ წირის საკმარისად ახლო-ახლო მდებარე წერტილთა მიმდევრობას.

ამას შემდეგი გზით მივაღწევთ. ვთქვათ:

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (1$$

არის განსახილავი წირის განტოლება კოორდინატთა რომელიმე სისტემის მიმართ. თუ ამოვხსნით მას y-ის მიმართ[1], მივიღებთ განტოლებას: $x=f(x)$.

მივცეთ x ცვლადს საკმაოდ ახლო-ახლო მნიშვნელობანი x_1, x_2, x_3 და ა. შ. ამის მიხედვით განტოლება $y=f(x)$ საშუალებას მოგვცემს გამოვითვალოთ y ცვლადის სათანადო მნიშვნელობანი; ვთქვათ ესენი არიან: $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, $y_3=f(x_3)$, და ა. შ.

თუ აღვნიშნავთ ქაღალდზე წერტილებს (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) და ა. შ., მივიღებთ წერტილთა მიმდევრობას, რომელნიც აღებულ წირს ეკუთვნიან და თუ ამის შემდგომ ამ წერტილებს გლუვი ხაზით შევაერთებთ, მივიღებთ წირის მოხაზულობაზე მიახლოვებით წარმოდგენს.

(თუ საქმე გვაქვს მართკუთხოვან, წრფივ სისტემასთან, მაშინ ყველაზე უფრო მოხერხებულია მილიმეტრული ქაღალდით სარგებლობა).

თუ წირი წარმოდგენილია პარამეტრული სახით:

$$x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),$$

მაშინ მისი წერტილების ასაგებად, საკმარისია t პარამეტრს მივანიჭოთ საკმაოდ ახლო-ახლო მნიშვნელობათა მიმდევრობა t_1, t_2, t_3 და ა. შ. და გამოვითვალოთ უკანასკნელ განტოლებათა საშუალებით სათანადო წერტილთა კოორდინატები (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) და ა. შ.

წირის მოხაზულობის გამორკვევის აღნიშნული ხერხი (ცალცალკე წერტილთა აგებით) არის, ასე ვთქვათ, მექანიკური ხერხი. ასეთი ხერხი ხშირად იძლევა პრაქტიკული მიზნებისათვის სრულიად საკმარის შედე-

---

[1] ჩვენ აქ ვგულისხმობთ, რომ ეს შესაძლებელია და რომ y არის x-ის ცალსახა ფუნქცია, ყოველ შემთხვევაში x-ის ცვლილების გარკვეულ შუალედში. თუ y არის მრავალსახა ფუნქცია, მაშინ x-ის ყოველ მნიშვნელობას ეთანადება y-ის რამდენიმე მნიშვნელობა, რაც არსებითად არ ცვლის იმ მსჯელობას, რომელიც ტექსტში მოვიყვანეთ (იხ. § 75).

გებს, მაგრამ აგრეთვე ხშირად შეიძლება ეს არასაკმარისი აღმოჩნდეს, ვინაიდან ასეთი ხერხი უმეტეს შემთხვევაში შესაძლებლობას არ გვაძლევს სრული დარწმუნებით ვიმსჯელოთ წირის ზოგად თვისებებზე, არ გვაძლევს ზოგად თვალსაზრისს. მრავალი თვისებითი თავისებურება, რომელიც წირს აქვს, შესაძლებელია ასეთი მექანიკური შესწავლის დროს ყურადღებიდან გაგვისხლტეს.

წირის უფრო ზუსტი, თვისებითი და რაოდენობითი შესწავლისათვის, საჭიროა მისი განტოლების შესწავლა ანალიზის მეთოდებით.

უმარტივეს შემთხვევებში (და უმარტივესი თვისებების შესწავლისათვის) შესაძლებელია ელემენტარული მათემატიკის საშუალებებით დავკმაყოფილდეთ; უფრო რთულ შემთხვევებში გვიხდება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საშუალებებსაც მივმართოთ. ეს უკანასკნელი შემთხვევები ეკუთვნიან უკვე დიფერენციალური გეომეტრიის დარგს.

ხანდახან შესასწავლი წირის განტოლება უშუალოდ არ მოიცემა, არამედ წირი მოცემულია, როგორც გარკვეული პირობების მაკმაყოფილებელი წერტილების გეომეტრიული ადგილი. მაშინ ამ წირის შესასწავლად ანალიზური გეომეტრიის მეთოდებით საჭიროა უპირველესად მისი განტოლების შედგენა (ან მისი პარამეტრული წარმოდგენა). აღვნიშნოთ მოკლედ, თუ როგორ ხდება ეს. გავიხსენოთ, ჯერ ერთი, როგორ უნდა გვესმოდეს სიტყვები „გეომეტრიული ადგილი“. წერტილთა გეომეტრიული ადგილი (სიბრტყეზე) ეწოდება სიბრტყის იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომელთა მდებარეობა ნებსითი კი არაა, არამედ გარკვეულს მოცემულ პირობებს ემორჩილებიან. გეომეტრიული ადგილის მოცემა ნიშნავს იმ პირობების მოცემას, რომელთაც უნდა ემორჩილებოდენ გეომეტრიული ადგილის წერტილები.

ვთქვათ ახლა, რომ მოცემულია რომელიმე გეომეტრიული ადგილი. ამ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესოა შემდეგი საკითხები: 1) გავიგოთ, წარმოადგენს თუ არა მოცემული გეომეტრიული ადგილი წირს; 2) დადებითი პასუხის შემთხვევაში, შევადგინოთ ამ წირის განტოლება.

ეს ორი საკითხი ერთდროულად სწყდება შემდეგნაირად. ავიღოთ კოორდინატთა რომელიმე სისტემა; ვთქვათ x,y აღნიშნავენ განსახილავი გეომეტრიული ადგილის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატებს. M წერტილის მდებარეობა ემორჩილება გარკვეულ პირობებს, რომელნიც ახასიათებენ ამ გეომეტრიულ ადგილს. მაგრამ, რადგანაც M წერტილის

მდებარეობა სავსებით ხასიათდება მისი კოორდინატებით x, y, ამიტომ ის პირობები, რომელთაც უნდა აკმაყოფილებდეს M-ის მდებარეობა, ძირითად დაიყვანება x და y-ს შორის არსებულ გარკვეულ დამოკიდებულებამდე, ვთქვათ, $\Phi(x,y)=0$; თუ ამას ადგილი აქვს, მაშინ განსახილავი გეომეტრიული ადგილი არის წირი, რომელიც უკანასკნელი განტოლებით გამოისახება და ამით ჩვენი ამოცანა გადაწყვეტილია.

მაგრამ შესაძლებელია მოხდეს, რომ ხსენებული პირობები ვერ გამოისახებიან ერთი განტოლებით $\Phi(x,y)=0$. მაშინ განსახილავი გეომეტრიული ადგილი არ არის წირი.

ზოგიერთ შემთხვევებში გეომეტრიული ადგილის თვით განმარტებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ამ გეომეტრიული ადგილის წერტილთა მდებარეობა სრულიად ხასიათდება გარკვეული ცვლადი t სიდიდის (პარამეტრის) მნიშვნელობებით.

ეს ნიშნავს, რომ x და y კოორდინატები არიან ამ სიდიდის ფუნქციები, ესე იგი $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. მაშ, ამ შემთხვევაში განსახილავი გეომეტრიული ადგილი არის წირი; მისი პარამეტრული წარმოდგენა ნაპოვნი იქნება, თუ ვიპოვით φ და ψ ფუნქციებს.

აქამდე ჩვენ ვლაპარაკობდით წირთა თვისებების შესწავლაზე იმ ფუნქციონალური დამოკიდებულების შესწავლის საშუალებით, რომელსაც ადგილი აქვს წირის წერტილთა კოორდინატებს შორის.

მაგრამ წირის განტოლების ცნებით შეგვიძლიან ვისარგებლოთ იმ მიზნითაც, რომ შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციონალური დამოკიდებულება იმ წირის საშუალებით, რომელიც ამ დამოკიდებულებითაა წარმოდგენილი.

სახელდობრ, თუ მოცემულია ფუნქციონალური დამოკიდებულება, ორი x და y ცვლადის დამაკავშირებელი, ესე იგი, თუ მოცემულია თანაფარდობა: $y=f(x)$, სადაც $f(x)$ არის მოცემული ფუნქცია, მაშინ, თუ ავარჩევთ კოორდინატთა რომელიმე გარკვეულს სისტემას, შესაძლებლობა გვექნება ავაგოთ ის წირი, რომლის განტოლება სწორედ მოცემული განტოლება იქნება. ეს წირი ნათელ წარმოდგენას მოგვცემს y ცვლადის ცვლილების ხასიათზე x ცვლადის ცვლილებასთან დაკავშირებით. თუ დავხაზავთ ამ წირს ქაღალდზე, მივიღებთ იმას, რასაც ეწოდება აღებული ფუნქციის **გ რ ა ფ ი კ უ ლ ი გ ა მ ო ს ა ხ ვ ა** (ანუ **გ რ ა ფ ი კ ი**).

ასეთი გრაფიკით ხშირად შეიძლება ვისარგებლოთ y ცვლადის გამოსაზღვრელი ცხრილების მაგიერ. მაგალითად, თუ ავაგებთ გრაფიკს ფუნ-

ქსპონენციური დამოკიდებულებისათვის $y = 10^x$ ანუ $x = \lg y$, მაშინ ეს გრაფიკი (იქ სადაც დიდი სიზუსტე არ არის საჭირო) გასწევს ლოგარითმული ცხრილების მაგიერობას (იხ. შემდეგი პარაგრაფი, მაგალითი 1).

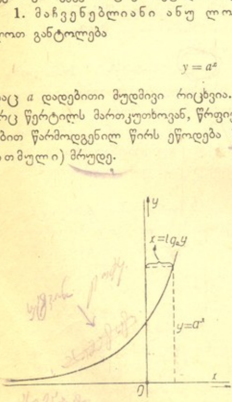
80. სხვადასხვა წირთა მაგალითები. ამ პარაგრაფში ჩვენ მოგვყავს რამდენიმე მაგალითი ზემოხსენებულის ნათელსაყოფად, დამატებით იმ მაგალითებთან, რომელნიც § 78-ში იყვნენ მოყვანილი და რომელნიც წრფესა და წრეწირს შეეხებოდენ.

ამ მაგალითებში ჩვენ ვსარგებლობთ კოორდინატთა ამა თუ იმ სისტემით იმის მიხედვით, რომელი უფრო მოხერხებულია. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ თუმცა თეორიულად სულ ერთია რომელ სისტემას ავიღებთ წირის ანალიზური წარმოდგენისათვის და ფუნქციათა გრაფიკული გამოსახვისათვის, მაგრამ პრაქტიკული თვალსაზრისით კოორდინატთა სისტემის არჩევას მეტად დიდი მნიშვნელობა აქვს, მოუხერხებელ შერჩევას უმარტივეს შემთხვევებშიაც კი შეუძლიან მეტად გაართულოს ფორმულები.

1. მაჩვენებლიანი ანუ ლოგარითმული მრუდე. განვიხილოთ განტოლება

$$y = a^x \tag{1}$$

სადაც a დადებითი მუდმივი რიცხვია. თუ x და y-ს განვიხილავთ, როგორც წერტილს მართკუთხოვან, წრფივ კოორდინატებს, მაშინ (1) განტოლებით წარმოდგენილ წირს ეწოდება მაჩვენებლიანი (ანუ ლოგარითმული) მრუდე.



ნახ. 81.

წარმოვიდგინოთ გარკვეულობისათვის, რომ $a > 1$ და გამოვიკვლიოთ ჩვენი მრუდის სახე. თუ $x = 0$ მაშინ $y = a^0 = 1$; როცა x იზრდება, მაშინ a^x-იც იზრდება; როცა x მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, მაშინ a^x-იც უსასრულობისაკენ მიისწრაფის.

x-ის კლების დროს, a^x მუდამ დადებითი რჩება და ნულისაკენ მიისწრაფის, როცა x მიისწრაფის $(-\infty)$-საკენ.

მრუდეს აქვს ისეთი სახე, როგორც ეს 81 ნახაზზეა წარმოდგენილი.

ჩვენ დავინახეთ, რომ x-ის $(-\infty)$-საკენ მისწრაფების დროს, y უსაზღვროდ კლებულობს; ეს ნიშნავს, რომ x-ის $(-\infty)$-საკენ მისწრაფებისას, მრუდის წერტილები უსაზღვროდ უახლოვდებიან Ox ღერძს, თუმცა არასოდეს მას არ ემთხვევიან[1].

თუ არსებობს ისეთი წრფე, რომელიც უსასრულო გაგრძელების დროს ერთი ან მეორე მხარისაკენ, უსაზღვროდ უახლოვდება აღებული მრუდის წერტილებს, ასეთ წრფეს აღებული მრუდის ასიმპტოტი ეწოდება. როგორც ვხედავთ, Ox ღერძი ჩვენს შემთხვევაში წარმოადგენს ასიმპტოტს.

თუ ჩვენი მრუდე გამოხაზულია საკმაო სიზუსტით და საკმაოდ დიდი მასშტაბით, მაშინ შეიძლება მისი გამოყენება a^x ფუნქციის მიახლოვებითი გამოთვლისათვის, თუ მოცემულია x-ის მნიშვნელობა (ნახ. 81). ამავე მრუდით შეგვიძლიან ვისარგებლოთ x-ის გამოსათვლელად, თუ მოცემულია y-ის მნიშვნელობა. (1) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ,

$$y = \lg_a x;$$

მაშასადამე ჩვენი გრაფიკი საშუალებას გვაძლევს გამოვითვალოთ ლოგარითმები ფუძით a. თუ ავაგებთ მრუდს იმ შემთხვევისათვის, როცა $a = 10$, მივიღებთ გრაფიკს, რომელსაც შეუძლიან ათობითი ლოგარითმების ცხრილების მაგივრობა გასწიოს (თუ რასაკვირველია, დიდი სიზუსტე არ არის საჭირო).

2. სინუსოიდი. ასე იწოდება წირი, რომელიც წრფივი, მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ გამოისახება განტოლებით:

$$y = \sin x. \tag{3}$$

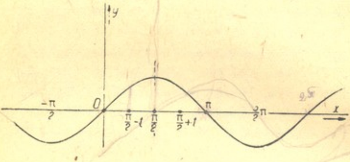
შევეცადოთ ამ მრუდის მოხაზულობის გამოკვევას (ნახ. 82).

როცა $x = 0$, მაშინ $y = 0$. მაშ, მრუდე გაივლის კოორდინატთა სათავეზე. როცა x იზრდება 0-დან $\frac{\pi}{2}$-მდე, მაშინ $y = \sin x$ იზრდება ნულიდან უდიდეს მნიშვნელობამდე $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. x-ის შემდგომი ზრდის დროს,

---

[1] ჩვენ ვხედავთ აქ ისეთი შემთხვევის მაგალითს, როცა მრუდის „მექანიკური“ აგებას ქაღალდზე წერტილთა მიმდევრობის აღნიშვნით შეუძლიან შეცდომაში შეგვიყვანოს. თუ მაგ., $a=10$ და ერთეულად მივიღებთ სანტიმეტრს, უკვე მაშინ, როცა $x=-3$, ჩვენ მივიღებდით $y=10^{-3}=0{,}001$; მაგრამ სანტიმეტრის ერთი მეათასედი, ეს არის მილიმეტრის ერთი მეასედი, რაც პრაქტიკულად თითქმის შეუმჩნეველი სიდიდეა, ასე რომ მრუდის ყველა წერტილები დაწყებული $x=-3$-დან (და უფრო ადრეც), მოხვდებოდენ Ox ღერძზე და ჩვენ მივიღებდით ყალბ წარმოდგენას, ვითომც მრუდის ნაწილი Ox ღერძს ემთხვევა

y კლებულობს. ვინაიდან, საზოგადოდ, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, ამიტომ მრუდე სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია და კვეთს Ox ღერძს წერტილში, რომლის აბსცისი $x=$ $=\frac{\pi}{2}$ (ნახ. 82, პუნქტირით აგებული წრფე).



ნახ. 82

როცა $x=\pi$, y ხელახლა ნული ხდება და ვინაიდან, საზოგადოდ, $\sin(\pi+t)=-\sin(\pi-t)$, ამიტომ მრუდის ნაწილი შუალედისათვის $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ წარმოადგენს ნაწილს შუალედისათვის $0\leqslant x\leqslant\pi$, მაგრამ სარკეში არეკნილს OX ღერძზე და გადაწეულს ამავე ღერძზე π მანძილით.

შემდეგ, მრუდის ნაწილი შუალედისთვის $2\pi\leqslant x\leqslant 4\pi$ ზუსტად იმავე სახის იქნება, რაც უკვე განხილულ ნაწილს ქონდა შუალედისათვის $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, ვინაიდან $\sin x$ არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით 2π; იგივე შეეხება შუალედს $4\pi\leqslant x\leqslant 6\pi$ და ა. შ.

დაბოლოს, x-ის უარყოფითი მნიშვნელობისათვის მივიღებთ იმავე სურათს. მრუდე თავისთავს დაემთხვევა, თუ მას გადავადგილებთ Ox-ის გასწვრივ, მარჯვნივ ან მარცხნივ, 2π მანძილზე

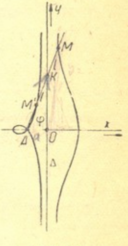
მკითხველს მივანდობთ დაამტკიცოს, რომ მრუდე, გამოსახული განტოლებით

$$y=\cos x \tag{4}$$

წარმოადგენს იმავე სინუსოიდს, გადაადგილებულს Ox ღერძის გასწვრივ, $\frac{\pi}{2}$-ის ტოლ მანძილზე.

3. კონხოიდი არის მრუდე შემდეგნაირად განმარტებული. გარკვეული უძრავი A წერტილიდან გაიყვანებიან AK წრფეები და მათზე, დაწყებული იმ K წერტილიდან, სადაც ეს წრფეები კვეთენ გარკვეულს

უძრავ Δ წრფეს, მოიზომებიან (ორივე მხარეზე) მუდმივი l სიდიდის ნაკვეთები KM და KM'. ასეთნაირად მიღებულს M და M' წერტილთა ერთობლიობას ეწოდება კ ო ნ ხ ო ი დ ი (ნიკომედის). თვით განმარტებიდან ცხადია, რომ კონხოიდი ორი შტოისაგან შესდგება, რომელნიც Δ წრფის ორი მხრით მდებარეობენ. ადვილი გასაგებია აგრეთვე, რომ Δ წრფე იქნება ორივე შტოის ასიმპტოტი (იხ. ნახ. 83). ავიღოთ Oy ღერძი Δ წრფეზე და Ox ღერძად ავარჩიოთ Δ წრფის პერპენდიკულარი წრფე, მიმართული A წერტილიდან Δ წრფის გადაკვეთის O წერტილისაკენ. ეს O წერტილი კოორდინატთა სათავე იქნება. ვთქვათ $|OA| = a$. ვიპოვოთ ჯერჯერობით კონხოიდის პარამეტრული წარმოდგენა, თუ პარამეტრად მივიღებთ იმ φ კუთხეს, რომელსაც შეადგენს $\overline{AK}$ ვექტორი Ox ღერძთან და რომელიც აითვლება Ox ღერძიდან.



ნახ. 83.

φ კუთხეს შეუძლიან იცვალოს შუალედში $-\frac{\pi}{2}$-დან $+\frac{\pi}{2}$-მდე. M წერტილის კოორდინატებისათვის (M წერტილი აღებულია $\overline{AK}$ ვექტორის გაგრძელებაზე) გვექნება [1]:

$$x = \text{გეგ}_x\,\overline{OM} = \text{გეგ}_x\,\overline{OK} + \text{გეგ}_x\,\overline{KM} = l\cos\varphi,$$
$$y = \text{გეგ}_y\,\overline{OM} = \text{გეგ}_y\,\overline{OK} + \text{გეგ}_y\,\overline{KM} = a\operatorname{tg}\varphi + l\sin\varphi.$$

იმ M' წერტილთათვის, რომელნიც აღებული არიან მოპირდაპირე მხარეზე, ცხადია, იმავე ფორმულებს მივიღებთ, იმ განსხვავებით, რომ l-ის მაგიერ უნდა ავიღოთ $(-l)$

მაშ, ჩვენი მრუდის პარამეტრული წარმოდგენა იქნება:

$$x = \pm l\cos\varphi, \qquad (5)$$
$$y = a\operatorname{tg}\varphi \pm l\sin\varphi,$$

სადაც ერთდროულად აიღებიან ან ზედა ნიშნები (მარჯვენა შტოისათვის), ან ქვედა (მარცხენა შტოისათვის).

კონხოიდის პარამეტრული წარმოდგენიდან, რომ მის განტოლებაზე გადავიდეთ, საკმარისია გამოვრიცხოთ φ პარამეტრი (5) განტოლებებიდან.

---

[1] M წერტილის რადიუსი-ვექტორი $\overline{OM}$ ნახაზზე არ არის წარმოდგენილი.

პირველი მათგანი გვაძლევს:

$$\cos \varphi = \pm \frac{x}{l};$$

მეორე კი მოგვცემს:

$$y = \left(\frac{a}{\cos \varphi} \pm l \right) \sin \varphi,$$

ან, თუ $\cos \varphi$-ს მაგიერ შევიტანთ ზევით მიღებულ გამოსახულებას:

$$y = \pm \left(\frac{al}{x} + l \right) \sin \varphi = \pm \frac{l(x+a)}{x} \sin \varphi,$$

საიდანაც $\sin \varphi = \pm \frac{xy}{l(x+a)}$. თუ ახლა ვისარგებლებთ ფორმულით: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ და შევიტანთ ამაში $\sin \varphi$-ს და $\cos \varphi$-ს ნაპოვნ მნიშვნელობებს, მივიღებთ:

$$\frac{x^2y^2}{l^2(x+a)^2} + \frac{x^2}{l^2} = 1,$$

ან, აშკარა გამარტივების შემდგომ;

$$(x+a)^2(x^2 - l^2) + x^2y^2 = 0. \tag{6}$$

სწორედ ეს არის კონხოიდის განტოლება ჩვენს მიერ აღებული მართკუთხოვანი, წრფივი სისტემის მიმართ.

4. არქიმედის ხვია. ვთქვათ Δ ღერძი ბრუნავს უძრავი O წერტილის გარშემო და ვთქვათ, რომ Δ ღერძის გასწვრივ მოძრაობს M წერტილი ისე, რომ $\overline{OM}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა ρ (Δ ღერძის გასწვრივ) ამ ღერძის შებრუნების φ კუთხის პროპორციულია [ეს კუთხე აითვლება გარკვეული უძრავი Ox ღერძიდან (ნახ. 84)]. წერტილის მიერ აღწერილს სასრბოლეს ეწოდება არქიმედის ხვია. თვით განმარტებიდან ვღებულობთ:

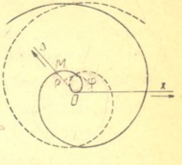
$$\rho = a\varphi, \tag{7}$$

სადაც a არის გარკვეული მუდმივი სიდიდე (პროპორციულობის კოეფიციენტი).

სწორედ ეს არის არქიმედის ხვიას განტოლება პოლარ კოორდინატებში, თუ O-ს მივიღებთ პოლუსად, ხოლო Ox-ს პოლარ ღერძად.

ჩავთვალოთ a დადებით სიდიდეთ. მაშინ ხვიას ის ნაწილი, რომელიც φ კუთხის დადებით მნიშვნელობებს ეთანადება, იქნება ისეთი სა-

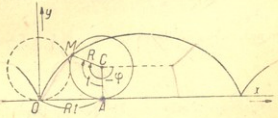
ხის, როგორც ეს წარმოდგენილია ნახაზზე (რასაკვირველია, ხვია აკეთებს ხვეულების უსასრულო რიცხვს, როცა φ იზრდება 0-დან ∞-მდე). φ კუთხის ათვლის დადებით მიმართულებად ჩვენ მივიღეთ საათის ისრის ბრუნვის მოპირდაპირე მიმართულება.



ნახ. 84.

მრუდის ის ნაწილი, რომელიც ეთანადება φ-ს უარყოფით მნიშვნელობებს, ნახაზზე წარმოდგენილია პუნქტირით.

5. ც ი კ ლ ო ი დ ი ეწოდება იმ მრუდს, რომელსაც აღწერს უძრავ წრფეზე მგორავი (უსრიალოდ) წრეწირის ერთერთი M წერტილი. ვთქვათ, R აღნიშნავს მგორავი წრის რადიუსს. მივიღოთ Ox ღერძად ის წრფე, რომელზედაც წრე გორავს, ხოლო სათავედ ავარჩიოთ ამ ღერძის ერთ-ერთი წერტილი, სადაც წრეწირის M წერტილი Ox ღერძზე მოხვდება; Oy ღერძი მოვგეზოთ ისე, როგორც ეს ისრით არის აღნიშნული 85 ნახაზზე.



ნახ. 85.

განვიხილოთ მგორავი წრეწირის რომელიმე მდებარეობა და ვთქვათ A არის მისი შეხების წერტილი Ox ღერძთან, ხოლო C არის ცენტრი. აღვნიშნოთ t-თი კუთხე ACM, ათვლილი $\overline{CA}$ მიმართულებიდან ნახაზზე ისრით აღნიშნული მიმართულებისკენ. ცხადია, რომ t კუთხის მოცემა (ამ კუთხეს ჩვენ რადიანებში ვზომავთ) სავსებით განსაზღვრავს მგორავი წრეწირის მდებარეობას და მაშასადამე M წერტილის მდებარეობასაც. ამიტომ t სიდიდე შეიძლება პარამეტრად აირჩეს ციკლოიდის პარამეტრული წარმოდგენისათვის.

რადგანაც გორვა უსრიალოდ ხდება, ამიტომ OA ნაკვეთი წრეწირის AM რკალის Rt სიგრძის ტოლია.

გამოვსახოთ ახლა M წერტილის x, y კოორდინატები t-ს საშუალე-ბით. თუ $\overline{OM}$ არის M წერტილის რადიუს-ვექტორი (ეს რადიუს-ვექ-ტორი ნახაზზე არ არის აღნიშნული), მაშინ:

$$x = \text{გეგ}_x\,\overline{OM} = \text{გეგ}_x\,\overline{OA} + \text{გეგ}_x\,\overline{AC} + \text{გეგ}_x\,\overline{CM},$$
$$y = \text{გეგ}_y\,\overline{OM} = \text{გეგ}_y\,\overline{OA} + \text{გეგ}_y\,\overline{AC} + \text{გეგ}_y\,\overline{CM}.$$

მაგრამ, აშკარაა, რომ:

$$\text{გეგ}_x\,\overline{OA} = OA = Rt, \quad \text{გეგ}_x\,\overline{AC} = 0, \quad \text{გეგ}_x\,\overline{CM} = -R\sin t\,^{1}$$
$$\text{გეგ}_y\,\overline{OA} = 0, \quad \text{გეგ}_y\,\overline{AC} = R, \quad \text{გეგ}_y\,\overline{CM} = -R\cos t\,^{1}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ წინა ფორმულებში, მივიღებთ ციკლოიდის პარამეტრულ წარმოდგენას:

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t) \tag{8}$$

81. ბრტყელ წირთა კლასიფიკაცია. თუ დავემყარებით წირთა წარმოდგენის შესაძლებლობას განტოლებათა საშუალებით წ რ ფ ი ვ ი კოორდინატების მიმართ, შეიძლება მოვახდინოთ ბრტყელ წირთა გარ-კვეული კლასიფიკაცია.

წირს ეწოდება ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი, როცა მის განტოლებას შეიძლება მიეცეს სახე

$$F(x,y) = 0, \tag{1}$$

სადაც $F(x,y)$ აღნიშნავს პ ო ლ ი ნ ო მ ს (მრავალწევრს), ესე იგი მთელს რაციონალურ ფუნქციას x და y ცვლადების მიმართ, სხვანაირად რომ ვთქვათ, წარმოადგენს Ax^ky^l სახის წევრთა ჯამს, სადაც k და l არიან მთელი, არაუარყოფითი რიცხვები, ხოლო A არის მუდმივი კოეფიციენტი. ამ შემთხვევაში y კოორდინატი, რომელიც (1) განტოლებით განისაზღვ-რება, როგორც x-ის უცხადი ფუნქცია იქნება ა ლ გ ე ბ რ უ ლ ი ფუნქცია.

ყველა არაალგებრულ წირებს ეწოდებათ ტ რ ა ნ ს ც ე ნ დ ე ნ ტ უ ლ ი მრუდეები.

---

[1] შევნიშნოთ, რომ φ კუთხე, რომელსაც $\overline{CM}$ ვექტორი შეადგენს Ox ღერძთან და რომე-ლიც ითვლება (ჩვენ მიერ შერჩეული ღერძთა სისტემის მიხედვით) დადებითად საათის ისრის ბრუნვის მოპირდაპირე მიმართულებით, დაკავშირებულია t კუთხესთან (რომელიც დადებითად ითვლება საათის ისრის ბრუნვისკენ) ფორმულით: $\varphi = -\frac{\pi}{2} - t + 2k\pi$ (სადაც k მთელი რი-ცხვია) (იხ. ნახაზი). მაშასადამე, $\text{გეგ}_x\,\overline{CM} = R\cos\varphi = -R\sin t$; $\text{გეგ}_y\,\overline{CM} = R\sin\varphi = -R\cos t$.

ალგებრული წირები თავის მხრივ დაიყოფიან სხვადასხვა რიგის წირებად.

სახელდობრ, ისეთი წირი, რომელიც (1) განტოლებით გამოისახება, იწოდება n რიგის წირად, თუ n აღნიშნავს $F(x,y)$ პოლინომის ხარისხს[1].

მაგალითად, წრფე არის ალგებრული წირი პირველი რიგის, ვინაიდან იგი გამოისახება პირველი ხარისხის განტოლებით (§ 76):

$$y-ax-b=0 \text{ ან } x-c=0.$$

წრეწირი არის მეორე რიგის ალგებრული წირი, ვინაიდან იგი მეორე ხარისხის განტოლებით გამოისახება (§ 76).

ის წირი, რომლის განტოლება არის:

$$x^3+y^3-3xy=0,$$

მესამე რიგის წირი იქნება. წინა პარაგრაფში განხილული კონხოიდი არის მეოთხე რიგის ალგებრული წირი (ყველა სხვა წირები, რომელნიც წინა პარაგრაფში მოვიხსენიეთ, ტრანსცენდენტული წირებია; იხ. კიდევ § 83, შენიშვნა).

ცხადია, რომ ალგებრულ წირთა აქ მოყვანილი კლასიფიკაციის აზრი არ ექნებოდა, თუ წირის რიგი დამოკიდებული იქნებოდა კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე (წრფივი სისტემის).

მაგრამ, ჩვენ ახლავე დავამტკიცებთ, რომ წირის რიგი არ არის დამოკიდებული ამ არჩევაზე.

მართლაც, ვთქვათ $F(x,y)=0$ და $F_1(x',y')=0$ წარმოადგენენ ერთი და იგივე ალგებრული წირის განტოლებებს ორი სხვადასხვა Oxy და $O'x'y'$ სისტემის მიმართ. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ, რომ $F(x,y)$ და $F_1(x',y')$ პოლინომების ხარისხი ერთი და იგივეა.

$F_1(x',y')$ პოლინომი მიიღება $F(x,y)$ პოლინომისაგან x და y-ის მაგიერ შემდეგი ჩასმით: $x=a+l_1x'+l_2y'$, $y=b+m_1x'+m_2y'$ (§ 78). ცხადია, ამიტომ, რომ $F_1(x',y')$ პოლინომის ხარისხი არ შეიძლება აღემატოს $F(x,y)$ პოლინომის ხარისხს.

თუ Oxy და $O'x'y'$ სისტემებს როლებს შეუცვლით, სრულიად იმავე წესით დავამტკიცებთ, რომ $F(x,y)$-ის ხარისხი არ შეიძლება აღემატებოდეს $F_1(x',y')$-ის ხარისხს; დაგვრჩა, მაშასადამე, ერთი შესაძლებლობა: ამ პოლინომთა ხარისხები ტოლნი არიან.

---

[1] Ax^ky^l წევრის ხარისხი ეწოდება x და y-ის ხარისხების მაჩვენებელთა ჯამს ე. ი. $k+l$. $F(x,y)$ პოლინომის ხარისხი ეწოდება შესაკრებ ერთწევრთა უდიდეს ხარისხს.

მაშ, ჩვენ შეგვიძლიან ალგებრული წირის რიგზე ვილაპარაკოთ წრფივი კოორდინატების სისტემის აღუნიშნავად, რომელთანაც მიმართულია წირის განტოლება.

შენიშვნა. არ უნდა დავივიწყოთ, რომ წირთა აქ მოყვანილი კლასიფიკაცია (დაყოფა ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ წირებად) დამყარებულია წირთა წარმოდგენაზე წრფივი კოორდინატების სისტემასთან მიმართული განტოლებების საშუალებით. მაგალითად, არქიმედის ხვია, რომლის განტოლება არის: $\rho = a\varphi$, სადაც ρ და φ აღნიშნავენ პოლარ კოორდინატებს, ხოლო a რომელიმე მუდმივს, არის ტრასცენდენტური წირი, მიუხედავად იმისა, რომ მისი განტოლება არამც თუ ალგებრულია, არამედ წრფივია პოლარ კოორდინატების მიმართ. მართლაც, თუ გადავალთ პოლარი კოორდინატებიდან წრფივ კოორდინატებზე § 71-ის ფორმულების მიხედვით, გვექნება განტოლება:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

რომელიც აშკარად ტრანსცენდენტულია.

82. დაყვანადი და დაუყვანადი ალგებრული მრუდეები. თუ ალგებრული მრუდის განტოლების

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

მარცხენა მხარე, რომელიც პოლინომს წარმოადგენს, შეიძლება დაიშალოს ორ მამრავლად, რომელნიც აგრეთვე პოლინომები არიან, ესე იგი თუ გვაქვს იგივეობა: $F(x,y)=F_1(x,y) \cdot F_2(x,y)$, სადაც $F_1(x,y)$ და $F_2(x,y)$ პოლინომებს წარმოადგენენ (სხვანაირად რომ ვთქვათ, x და y ცვლადის მთელი რაციონალური ფუნქციები), მაშინ (1) განტოლება ღებულობს სახეს:

$$F_1(x,y) \cdot F_2(x,y)=0. \tag{2}$$

x და y ცვლადები, რომელნიც ამ განტოლებას აკმაყოფილებენ, რასაკვირველია უნდა აკმაყოფილებდენ ერთერთ შემდეგ განტოლებას:

$$F_1(x,y)=0 \text{ ან } F_2(x,y)=0; \tag{3}$$

პირიქით: ცვლადები, რომელნიც ერთერთ ამათგანს აკმაყოფილებენ, აგრეთვე (2) განტოლებასაც დააკმაყოფილებენ. უკანასკნელ განტოლებათაგან თითოეული წარმოადგენს რაღაც ალგებრული მრუდის განტოლებას. ზემოხსენებულიდან აშკარაა, რომ (2) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდის წერტილები, ეკუთვნიან ერერთს იმ მრუდთაგანს, რომელნიც გამოისახებიან განტოლებებით $F_1(x,y)=0$ ან $F_2(x,y)=0$ და პირიქით.

სხვანაირად რომ ვთქვათ, (2) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდე შედგება იმ ორი მრუდის ერთობლივობისაგან, რომელნიც (3) განტოლებით გამოისახებიან.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (1) განტოლებით წარმოდგენილი მრუდე დაყვანადია ან, რომ იგი იშლება ორ ალგებრულ მრუდეთ.

თითოეული ამ უკანასკნელთაგან, თავის მხრივ შეიძლება იყოს დაყვანადი, ასე რომ დაყვანად მრუდეს შეუძლიან დაიშალოს არამც თუ ორ ალგებრულ მრუდეთ, არამედ მეტზეაც.

მაგალითად, ის წირი, რომელიც შემდეგი განტოლებით გამოისახება:

$$x^2-y^2=0 \text{ ანუ } (x-y)(x+y)=0$$

იშლება ორ წირად, რომელთაც შემდეგი განტოლებანი შეეფერებათ: $x-y=0$ და $x+y=0$; პირველი არის წრფე, რომელიც შუაზე ყოფს კუთხეს Ox და Oy ღერძების დადებით მიმართულებათა შორის, მეორე კი წრფე, რომელიც შუაზე ყოფს დამატებით კუთხეს. (მკითხველი ამას თითონ შეამოწმებს).

თუ $F(x,y)$ პოლინომი არ შეიძლება დაიშალოს ორ მამრავლად, რომელნიც პოლინომებს წარმოადგენენ, მაშინ (1) განტოლებით წარმოდგენილ წირს ეწოდება დაუყვანადი.

ნათქვამიდან აშკარაა, რომ დაყვანადი მრუდის შესწავლა ყოველთვის შეგვიძლიან დავიყვანოთ იმ დაუყვანად მრუდეთა შესწავლაზე, რომელთაგანაც იგი შესდგება.

შენიშვნა. არ უნდა ვიფიქროთ, რომ ორი განსხვავებული შტოისაგან შემდგარი ალგებრული მრუდე (მაგალითად, ჰიპერბოლი, რომელსაც ჩვენ გავეცნობით მეორე ნაწილში, ან კონხოიდი § 80-ში განხილული) ყოველთვის წარმოადგენს დაყვანად მრუდეს. გარდამწყვეტი მნიშვნელობა განცალკევებული შტოების არსებობას კი არ აქვს, არამედ მრუდის განტოლების მარცხენა მხარის დაშლას რამდენიმე მამრავლად, რომელნიც პოლინომებს წარმოადგენენ.

მაგალითად, ადვილი საჩვენებელია, რომ კონხოიდის განტოლების (§ 80) მარცხენა მხარე $(x+a)^2(x^2-l^2)+x^2y^2$ (როცა $a \neq 0$, $l \neq 0$) არ შეიძლება ასეთ ორ მამრავლად დაიშალოს, ამიტომ კონხოიდი დაუყვანადი მრუდეა: მისი ორივე შტო ალგებრული თვალსაზრისით ერთს მთლიან რამეს წარმოადგენს (იგივე შეეხება ჰიპერბოლს, რომელსაც ჩვენ მეორე ნაწილში გავეცნობით.)

83. ორი წირის გადაკვეთის შესახებ. შემდეგისათვის მნიშვნელოვანია ასეთი ამოცანის ამოხსნის შესაძლებლობა: მოცემულია ორი წირი თავისი განტოლებებით: $\Phi(x,y)=0$ და $\Psi(x,y)=0$; საჭიროა ამ წირთა გადაკვეთის წერტილების პოვნა. საძიებელი წერტილების კოორდინატები (თუ კი არსებობენ ეს წერტილები) ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდენ ორივე მოცემულ განტოლებას, ვინაიდან საძიებელი წერტილები ორივე წირს უნდა ეკუთვნოდენ ერთდროულად. მაშასადამე, გადაკვეთის წერტილთა საპოვნელად, უნდა ორი განტოლების სისტემა ამოვხსნათ: $\Phi(x,y)=0$, $\Psi(x,y)=0$, სადაც x და y-ს, როგორც ორ უცნობს ვგულისხმობთ (იხ. მაგალითები 12 და 13 § 76-ის). რამდენი ამონახსნიც ექნება ამ სისტემას, იმდენი იქნება გადაკვეთის წერტილი: თუ სისტემას სრულიად არ აქვს ამონახსნი, მაშინ აღებული წირები არსად არ იკვეთებიან.

თუ აღებული წირები ალგებრული არიან, მაშინ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი საზოგადოდ $m.n$-ის ტოლია, სადაც m და n აღნიშნავენ განსახილავ წირთა რიგებს.

მართლაც, ალგებრიდან ცნობილია, რომ ორუცნობიანს ორ განტოლებას (ალგებრული) საზოგადოდ $m.n$ ამონახსნი აქვს, თუ რომ m და n არიან განტოლებათა ხარისხები.

უფრო ზუსტად, ამონახსნთა რიცხვი ყოველთვის $m.n$-ის ტოლია, თუ ჩავთვლით ვითარსს და აგრეთვე უსასრულოდ-დიდ ამონახსნებსაც, ამასთანავე თუ მხედველობაში მივიღებთ თანატოლ ამონახსნთა ჯერადობასაც. თუ კი ამას არ მივიღებთ, მაშინ უნდა ითქვას, რომ ამონახსნთა რიცხვი ყოველ შემთხვევაში $m.n$-ზე მეტი არ იქნება.

გამონაკლისს შეიძლება ისეთი შემთხვევები შეადგენდენ, როცა მრუდებს მთელი ნაწილები აქვთ საერთო და არა მხოლოდ ცალკე წერტილები.

ამ უკანასკნელ შემთხვევას შეიძლება ადგილი ქონდეს მხოლოდ მაშინ, როდესაც მოცემულ მრუდთაგან თითოეული (იხ. წინა პარაგრაფი) და როდესაც, გარდა ამისა, ერთი რომელიმე ერთი იმ ნაწილთაგან, რომელზეაც იშლებიან ეს მრუდები, საერთოთ ორივესათვის.

კერძოდ, გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი წრფისა (რომელიც, როგორც ვიცით, პირველი რიგის წირია) და n რიგის წირისა, საზოგადოდ n-ის ტოლია. უფრო ზუსტად, ეს რიცხვი ყოველთვის n-ის ტოლია, თუ მხედველობაშია მიღებული ვითარსი და უსასრულოდ-დიდი ამონახსნები და აგრეთვე ამონახსნთა ჯერადობა. თუ კი ამას არ მივიღებთ, მაშინ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი ყოველთვის არამეტია n-ისა. გამონაკლისს შეიძლება შეადგენდეს მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა წრფე წარმოადგენს განსახილავი წირის ერთერთ შემადგენელ ნაწილს (იხ. კიდევ § 95).

თუ ზოგად შემთხვევას დაუბრუნდებით, შევნიშნავთ, რომ ორი წირის გადაკვეთის ამოცანა ღებულობს ნამეტნავად უბრალო სახეს, თუ ერთ-ერთი წირი პარამეტრულად არის მოცემული.

ვთქვათ მოითხოვება გადაკვეთის წერტილთა პოვნა პარამეტრულად მოცემული წირისა

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{1}$$

და $\Phi(x,y) = 0$ განტოლებით მოცემული წირის. თუ (1) გამოსახულებებს შევიტანთ უკანასკნელ განტოლებაში, მივიღებთ ერთ t-უცნობიან განტოლებას:

$$\Phi[\varphi(t), \; \psi(t)] = 0.$$

თუ ამ განტოლების ფესვებს ვიპოვით და (1)-ში შევიტანთ x-ს მაგიერ, სწორედ საძიებელი წერტილების კოორდინატებს მივიღებთ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზემოხსენებულიდან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ თუ ალებულ წირს რომელიმე წრფესთან უსასრულო რიცხვი აქვს საერთო წერტილებისა (მაგრამ ისე, რომ ეს წრფე ალებული წირის შემადგენელი ნაწილი არ არის), მაშინ წირი აუცილებლად ტრანსცენდენტულია.

ეს გარემოება პირდაპირ გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ, მაგალითად, სინუსოიდი, ციკლოიდი, არქიმედის ხვია — ყველა ესენი ტრანსცენდეტული მრუდებია.

მაგრამ შებრუნებული დასკვნის გაკეთება არ იქნება სამართლიანი. მაგალითად მაჩვენებლიანი მრუდე ტრანსცენდენტულია, მიუხედავად იმისა, რომ ნებისმიერი წრფე მას გადაკვეთს არა უმეტეს ორ წერტილში[1], როგორც ამის დამტკიცება შეიძლება და რაც თითქმის ცხადია ნახაზიდანაც (ნახ. 81).

სავარჯიშო მაგალითი

იპოვეთ იმ ორი წრეწირის გადაკვეთის წერტილები, რომელთა განტოლებანი არიან: $x^2+y^2=4$ და $(x-1)^2+y^2=3$.

პ ა ს.: $(1, \sqrt{3})$ და $(1, -\sqrt{3})$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ გადაკვეთის წერტილთა რიცხვი (არსი წერტილები გვაქვს მხედველობაში) ორის ტოლია. ჩვენ რომ ანგარიში გაგვეწია ვითარსი და უსასრულოდ შორი წერტილებისათვისაც, მაშინ შეგვეძლო დაგვემტკიცებია, რომ გარდა ორი ნაპოვნი წერტილებისა, არსებობს კიდევ ორი გადაკვეთის წერტილი (ერთდროულად ვითარსი და უსასრულოდ შორი).

II. წრფის განტოლებათა სხვადასხვა სახე

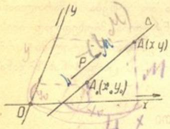
ამ განყოფილებაში ჩვენ უფრო დაწვრილებით შევისწავლით სიბრტყეზე განხილული წრფის განტოლების საშუალებით წარმოდგენის საკითხს.

84. განტოლება გეზის კოეფიციენტებში. პარამეტრული წარმოდგენა. § 76-ში ჩვენ უკვე გამოვიყვანეთ წრფის განტოლება იმ პირობით, რომ კოორდინატებს მართკუთხოვანად ვგულისხმობდით. ადვილია იმავე გზით წრფის განტოლების მიღება ნებისმიერი წრფივი კოორ-

[1] რასაკვირველია აქ საუბარია მხოლოდ არს წერტილებზე; ვითარს წერტილებს ჩვენ ჯერ არ განვიხილავთ.

დინატების სისტემისათვის. მაგრამ ჩვენ ვარჩევთ აქ განტოლების გამოყვანას სხვა გზით.

ვთქვათ (ნახ. 86) Δ არის განსახილავი წრფე. ამ წრფის მდებარეობა სრულიად განისაზღვრება ერთერთი მისი $A_0(x_0,y_0)$ წერტილის მოცემით და რომელიმე ვექტორით $\overline{P}=(L,M)$, რომელიც ნულის ტოლი არ არის და პარალელურია Δ წრფისა. მაშ, ჩავთვალოთ ცნობილად A_0 წერტილის კოორდინატები x_0, y_0 და $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები L, M. $\overline{P}$ ვექტორს უწოდოთ აღებული წრფის გეზის ვექტორი.



ნახ. 86.

იმისათვის რომ $A\ (x,y)$ წერტილი ძევდეს Δ წრფეზე, აშკარაა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორი $\overline{A_0A}=(x-x_0, y-y_0)$ პარალელური იყოს $\overline{P}=(L,M)$ ვექტორისა. თუ გავიხსენებთ ვექტორთა პარალელობის პირობას (§ 33), დავინახავთ, რომ ზემოხსენებული გარემოება შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M} \tag{1}$$

$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}$

ვინაიდან ეს განტოლება გამოსახავს იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას, რომ (x,y) წერტილი Δ-ზე იმყოფებოდეს, ამიტომ სწორედ ეს იქნება Δ წრფის განტოლება.

მასში შემავალნი კოეფიციენტები L და M იწოდებიან გეზის კოეფიციენტებად, ვინაიდან ესენი სავსებით განსაზღვრავენ გეზის ვექტორს $\overline{P}$ და მაშასადამე წრფის გეზსაც. ამიტომ (1) განტოლებას უწოდებენ განტოლებას გეზის კოეფიციენტებში.

ცხადია, რომ, პირიქით, ყოველი (1) სახის განტოლება არის ისეთი წრფის განტოლება, რომელიც $A_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გაივლის და პარალელური იქნება $\overline{P}$ ვექტორისა.

შევნიშნოთ ახლა, რომ $\overline{P}$ ვექტორის მაგიერ შეიძლება ავარჩიოთ ნებისმიერი სხვა, მისი პარალელური (მოგეზული ისეთივენაირად ან მოპირდაპირედ). სხვანაირად რომ ვთქვათ, კოეფიციენტები L და M (1) განტოლებაში შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერი სიდიდეებით kL და kM, რომელნიც მათი პროპორციულია, სადაც k რომელიმე ნულისაგან განსხვავებული რიცხვია.

ეს, რასაკვირველია, უშუალოდაც ცხადია, ვინაიდან (1) განტოლების ორივე მხრის ნებისმიერ k რიცხვზე გაყოფით ($k \neq 0$), მივიღებთ განტოლებას:

$$\frac{\frac{x-x_0}{L}}{K} = \frac{\frac{y-y_0}{M}}{K}$$

$$\frac{x-x_0}{kL} = \frac{y-y_0}{kM}, \tag{1 a}$$

რომელიც (1) განტოლების ტოლფასია.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ იმ Δ წრფის გეზი, რომელიც (1) განტოლებით განისაზღვრება, დამოკიდებულია თვით L და M სიდიდეებზე კი არა, არამედ მათ ფარდობაზე, მაგალითად ფარდობაზე:

$$a = \frac{M}{L}; \tag{2}$$

ეს ფარდობა იწოდება აღებული წრფის საკუთხო კოეფიციენტად, ვინაიდან იგი განსაზღვრავს წრფის გეზს, და მაშასადამე იმ კუთხესაც, რომელსაც წრფე შეადგენს Ox ღერძთან (იხ. კიდევ შემდეგი პარაგრაფი).

თუ დაუბრუნდებით (1) განტოლებას, შევნიშნავთ, რომ აქედან შეგვიძლიან მივიღოთ ჩვენი წრფის მეტად მარტივი პარამეტრული წარმოდგენა. მართლაც, თუ t-თი აღვნიშნავთ (1) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას, ესე იგი, თუ $\frac{x-x_0}{L} = \frac{y-y_0}{M} = t$, მივიღებთ:

$$x = x_0 + Lt, \quad y = y_0 + Mt; \tag{3}$$

სწორედ ეს არის წრფის პარამეტრული წარმოდგენა; t პარამეტრს აქვს მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა. სახელდობრ, თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ t არის $\overline{A_0A}$ და $\overline{P}$ ვექტორების (პარალელური) ფარდობა.

ნებისმიერი სიგრძის $\overline{P}$ ვექტორის მაგიერ ჩვენ, რასაკვირველია შეგვიძლიან ავიღოთ მგეზავი, რომელიც $\overline{T}$-თი აღვნიშნოთ; ამ მგეზავის კოორდინატები აღვნიშნოთ l და m-ით, ესე იგი მივიღოთ; $\overline{T} = (l, m)$.

l და m სიდიდეებს უწოდოთ აღებული წრფის გეზის კოორდინატები[1]. ამ წრფის განტოლება ამ შემთხვევაში ასე დაიწერება:

[1] ვინაიდან მგეზავი $\overline{T}$ შეიძლება შევცვალოთ მგეზავით $(-\overline{T}) = (-l, -m)$, ამიტომ თუ l, m არიან წრფის გეზის კოორდინატები, მაშინ $(-l, -m)$-იც იმავე წრფის გეზის კოორდინატები იქნებიან.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}; \tag{4}$$

ამ განტოლებას ჩვენ ვუწოდებთ განტოლებას გეზის კოეფიციენტებში.

$\overline{T}$ მგეზავის გამოყენების შემთხვავაში (ნებისმიერი სიგრძის $\overline{P}$ ვექტორის მაგიერ) პარამეტრული წარმოდგენა (3) მიიღებს სახეს:

$$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt; \tag{5}$$

ამ შემთხვევაში t პარამეტრი წარმოადგენს $\overline{A_0A}$ ვექტორის ალგებრულ სიდიდეს $\overline{T}$-ს გასწვრივ, ესე იგი ცვლადი A წერტილის მანძილს მუდმივ A_0 წერტილამდე, გარკვეული ნიშნით განხილულს.

შენიშვნა. თუ Δ წრფე ერთერთ საკოორდინატო ღერძის პარალელურია, მაშინ ერთერთი კოეფიციენტი L ან M ნულის ტოლია, ვინაიდან $\overline{P}$ ვექტორი ერთერთი ღერძის პარალელური უნდა იყოს. თუ მაგალითად Δ პარალელურია Oy ღერძისა, მაშინ $L=0$ და (1) განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{M};$$

ეს უკანასკნელი განტოლება, § 33-ში ნათქვამის ძალით, უნდა გვესმოდეს, როგორც ტოლფასი $x-x_0=0$ განტოლებისა, ისე რომ $y-y_0$ რჩება სრულიად ნებისმიერად.

მაშ, Oy ღერძის პარალელური წრფის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს.

$$x-c=0, \tag{6}$$

სადაც $c=x_0$ აღნიშნავს წრფისა და Ox ღერძის გადაკვეთის წერტილის აბსცისს (ეს შედეგი ჩვენ უკვე მივიღეთ § 76-ში; იქ ჩვენ ვგულისხმობდით კოორდინატებს მართკუთხოვანად, რაიც, რასაკვირველია ამ შემთხვევაში არსებითი არ არის).

ანალოგიურ განტოლებას მივიღებთ Ox ღერძის პარალელური წრფისათვის.

სავარჯიშო მაგალითები

1. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც (0,3) წერტილზე გადის (2,5) ვექტორის პარალელურია.

პას. $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{5}$.

2. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $(3, -1)$ წერტილზე გადის და $(5,0)$ ვექტორის პარალელურია.

პას. $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{0}$, ე. ი. (იხ. შენიშვნა ზევით) $y+1=0$.

85. წრფის დაყვანილი განტოლება. ახლა წარმოვიდგინოთ, რომ Δ წრფე არ არის Oy ღერძის პარალელური, ესე იგი რომ წინა პარაგრაფის (1) განტოლებაში $L \neq 0$.

მაშინ ეს განტოლება, M-ზე გამრავლებით, შეიძლება ასე გადაიწეროს;

$y-y_0=a(x-x_0)$

$$y-y_0=a(x-x_0), \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა:

$$a=\frac{M}{L}. \tag{2}$$

(1) განტოლება შეიძლება კიდევ ასეც გადაიწეროს:

$$y=ax+b, \tag{3}$$

სადაც $b=y_0-ax_0$ არის მუდმივი სიდიდე.

(3) განტოლებას ეწოდება წრფის **დაყვანილი** ანუ **უმარტივესი** განტოლება[1].

მეტად მნიშვნელოვანია და კარგად უნდა დავიხსომოთ (3) განტოლების a და b კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობა.

თუ $x=0$, მაშინ, როგორც ამას (3) განტოლება გვიჩვენებს, $y=b$. მაშასადამე, b არის ჩვენი წრფისა და Oy ღერძის გადაკვეთის წერტილის ორდინატი, ანუ როგორც ამბობენ, საწყისი ორდინატი (ჩვენ უკვე შემოვიღეთ ეს ცნება § 76-ში).

რაც შეეხება a კოეფიციენტს, როგორც უკვე წინა პარაგრაფში ვთქვით, იგი განსაზღვრავს ჩვენი წრფის გეზს და იწოდება საკუთხო კოეფიციენტად.

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში, როგორც უკვე § 76-ში იყო ნაჩვენები, გვაქვს:

$$a=\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

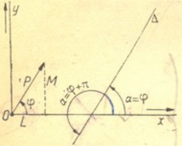
სადაც α არის კუთხე წრფესა და Ox ღერძს შორის. გამოვიყვანოთ კიდევ

[1] ის უკვე მიღებული იყო § 76-ში, სადაც თუმცა ჩვენ ვგულისხმობდით კოორდინატებს მართკუთხოვანად.

ერთხელ ეს მნიშვნელოვანი თანაფარდობა (2) ფორმულის გამოყენებით და ამასთანავე ცოტა უფრო დაწვრილებით შევეხოთ α კუთხის ათვლის საკითხს.

ამ კუთხის ათვლას ჩვენ ვახდენთ Ox ღერძიდან და მას მივაწერთ ნიშანს ათვლის მიმართულების მიხედვით[1].

თუ φ აღნიშნავს $\overline{P}$ ვექტორის მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს, მაშინ (ნახ. 87) ცხადია, რომ α კუთხედ ჩვენ შეგვიძლიან მივიღოთ φ კუთხეც და $(\varphi+\pi)$ კუთხეც (ან, საზოგადოდ, კუთხე $\varphi=k\pi$, სადაც k მთელი რიცხვია).



ნახ. 87.

ეს იმიტომ ხდება, რომ წრფეს (წინააღმდეგ ღერძის ან ვექტორის თვისებისა) არ აქვს გარკვეული დადებითი მიმართულება, რის გამო φ-ს შეცვლა $(\varphi+\pi)$-თ იმავე წრფის მიმართულებას გვაძლევს.

დაუბრუნდეთ ახლა გამოსახულებას $a=\frac{M}{L}$. ვინაიდან L და M არიან $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები, ამიტომ, როგორც ეს § 42-დან ვიცით (და როგორც ეს 87 ნახაზიდან ჩანს), $a=\frac{M}{L}=\operatorname{tg}\varphi$; მაგრამ ვინაიდან φ და α შეიძლება ურთიერთ განსხვავდებოდენ π-ს ჯერადით, ხოლო $\operatorname{tg}\varphi$ ფუნქციას სწორედ π აქვს პერიოდად, ამიტომ $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha$ და ჩვენ ამით (4) ფორმულას ვღებულობთ.

მაშ, თუ მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტი a, მაშინ α კუთხე შეიძლება გამოთვლილი იყოს (4) ფორმულით; ეს ფორმულა α-ს ერთ მნიშვნელობას კი არ გვაძლევს, არამედ $k\pi$ სახის შესაკრებით განსხვავებულ მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლეს; ეს შესაკრებნი ვერავითარ გავლენას ვერ ახდენენ Δ-ს მიმართულებაზე; ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლიან დავკმაყოფილდეთ ამ მნიშვნელობათაგან ნებისმიერის გამოთვლით, მაგალითად იმ მნიშვნელობით, რომელიც 0 და π-ს შორის იმყოფება.

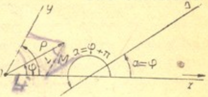
ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში საკუთხო კოეფიციენტისათვის a გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\nu-\alpha)} \qquad (5)$$

[1] დადებითი კუთხეების ათვლის მიმართულება, ჩვენი ჩვეულებრივი შეთანხმების ძალით, არის ის, რომელიც უმოკლესი გზით მიგვიყვანს Ox ღერძიდან Oy ღერძამდე.

სადაც, ისე როგორც ზევით, α აღნიშნავს Δ წრფის მიერ Ox ღერძთან შედგენილ კუთხეს, ათვლილს ამ ღერძიდან, ხოლო ν აღნიშნავს საკოორდინატო კუთხეს (ნახ. 88).

მკითხველს მივანდობთ დაამტკიცოს ეს უბრალო ფორმულა ან უშუალოდ, ნახაზის მიხედვით, ან § 57-ის (7) ფორმულის გამოყენებით. უკანასკნელ შემთხვევაში საკმარისია შევნიშნოთ, რომ $a=\frac{M}{L}=\frac{m}{l}$, სადაც l და m არიან იმ $\overline{T}$ მგეზავის კოორდინატები, რომელიც მოგეზულია ისეთნაირადვე, როგორც $\overline{P}$ ვექტორი.



ნახ. 88.

თუ მოცემულია დაყვანილი განტოლება $x=ax+b$, მას ყოველთვის შეიძლება მიეცეს იმ განტოლების სახე, რომელსაც ჩვენ უწოდეთ განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში. ამისათვის საკმარისია დავწეროთ მოცემული განტოლება შემდეგი სახით:

$$x=\frac{y-b}{a} \text{ ანუ } \frac{x-0}{1}=\frac{y-b}{a};$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ აღებულმა განტოლებამ მართლაც საძიებელი სახე მიიღო; ამ შემთხვევაში მიმართულების კოეფიციენტები იქნებიან $L=1$ და $M=a$.

შენიშვნა. როცა დაყვანილი განტოლება გამოგვყავდა, ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ წრფე არ არის Oy-ის პარალელური, ესე იგი, $L\neq 0$. თუ $L=0$, მაშინ, რასაკვირველია წრფის განტოლებას ვერ მივცემთ სახეს $y=ax+b$, ვინაიდან ამ შემთხვევაში მისი განტოლება იქნება $x=c$ (იხ. წინა პარაგრაფი). გამოსახულება $a=\frac{M}{L}$ კარგავს აზრს (უსასრულოდ იქცევა). მაგრამ ამ შემთხვევაშიაც ხანდისხან მოუხერხებელი არ იქნება, თუ ვილაპარაკებთ უსასრულობის ტოლ საკუთხო კოეფიციენტზე.

86. წრფის ზოგადი განტოლება. ჩვენ დავინახეთ, რომ Oy ღერძის არაპარალელური ყოველი წრფის განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ: $y-ax-b=0$, და თუ პარალელურია Oy ღერძის, მაშინ შემდეგი სახით: $x-c=0$. ორივე ეს განტოლება წარმოადგენს შემდეგი განტოლების კერძო სახეს:

$$Ax+By+C=0, \qquad (1)$$

რომელიც პირველი ხარისხის განტოლების ზოგადი სახეა.

ადვილი გასაგებია, რომ, პირიქით, (1) სახის ყოველი განტოლება იქნება გარკვეული წრფის განტოლება.

ჩვენ, რასაკვირველია, ვგულისხმობთ, რომ A და B კოეფიციენტები ერთდროულად ორივე ნულის ტოლი არაა, სხვანაირად რომ ყოფილიყო, (1) განტოლება არ შეიცავდა x და y ცვლადებს და ამგვარად ვერავითარ დამოკიდებულებას ვერ გამოსახავდა მათ შორის.

განვიხილოთ შესაძლებელი ორი შემთხვევა.

1. ვთქვათ, ჯერ, რომ $B \neq 0$. მაშინ (1) განტოლება შეიძლება ამოიხსნას y-ის მიმართ, რაც მოგვცემს:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

ანუ

$$y = ax + b, \tag{2}$$

სადაც $a = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

ჩვენ ვხედავთ, რომ განტოლება (2) არის იმ წრფის განტოლება, რომლის საწყისი ორდინატია b, ხოლო საკუთხო კოეფიციენტი a.

2. ვთქვათ ახლა $B = 0$. მაშინ განტოლება მიიღებს სახეს:

$Ax + C = 0$, ანუ, ვინაიდან $A \neq 0$, $x = c$, სადაც $c = -\frac{C}{A}$.

ცხადია, რომ განტოლება $x - c = 0$ გამოსახავს Oy ღერძის პარალელურ წრფეს, რომლის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისი არის c.

მაშინ ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ ყოველი წრფე პირველი ხარისხის განტოლებით გამოისახება და პირიქით ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება წრფეს გამოსახავს.

(1) სახის განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ზოგადი სახით. ზემოხსენებულიდან აშკარად ჩანს, როგორ დავიყვანოთ წრფის ზოგადი განტოლება უმარტივეს (დაყვანილ) სახეში. ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ იგი y-ის მიმართ, თუ $B \neq 0$. თუ კი $B = 0$, მაშინ განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე: $x - c = 0$.

დაყვანილი სახიდან, თავის მხრივ, ყოველთვის შეიძლება გადავიდეთ განტოლებაზე მიმართულების კოეფიციენტებში, როგორც ეს ნაჩვენებია წინა პარაგრაფის ბოლოში [იხ, ფორმულა (6)].

ჩვენ გამოვტოვეთ ის შემთხვევა, როცა $A = B = 0$: თუ ამას ადგილი აქვს, მაშინ (1) განტოლება შემდეგ სახეზე დაიყვანება: $C \neq 0$.

თუ C განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ წინა განტოლება ვერ დაკმაყოფილდება x და y ვერავითარი სასრული მნიშვნელობებით, ესე იგი, ის არავითარ გეომეტრიულ ადგილს არ გამოსახავს (ელემენტარული გეომეტრიის თვალსაზრისით). მაგრამ ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წინა განტოლება გამოსახავს უ ს ა ს რ უ ლ ო დ-შ ო რ ე უ ლ წ რ ფ ე ს.

თუ კი ერთდროულად $A=B=C=0$, მაშინ (1) განტოლება დაკმაყოფილდება სიბრტყის ყ ვ ე ლ ა წერტილების კოორდინატებით, ესე იგი გამოსახავს მთელს სიბრტყეს.

სავარჯიშო მაგალითები

1. დაიყვანეთ წრფის განტოლება $2x+2y-5=0$ უმარტივეს სახეზე;

2y = 5-2x   y = 5/2 - x

პ ა ს. $y=-x+\frac{5}{2}$

2. დაიყვანეთ განტოლება $3x-5y+1=0$ უმარტივეს სახეზე და შემდეგ მიმართულების კოეფიციენტებიან სახემდე.

პ ა ს. უმარტივესი (დაყვანილი) სახე იქნება: $y=\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$.

ერთერთ სახე მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებისა იქნება $\frac{y-\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{x-0}{1}$, ან, კიდევ, თუ მნიშვნელს 5-ზე გავამრავლებთ, გვექნება:

-5y = -3x-1   y = 3/5 x

$$\frac{x-0}{5}=\frac{y-\frac{1}{5}}{3}.$$

3. თუ კოორდინატებს მართკუთხოვანად ვიგულისხმებთ, იპოვეთ α კუთხე შედგენილი 1 მაგალითის წრფის მიერ Ox ღერძთან.

პ ა ს. $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ ან, რაც იმავეზე დაიყვანება: $\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$, უფრო ზოგადად: $\alpha=\frac{3\pi}{4}+k\pi$.

87. წრფის ზოგადი განტოლების კერძო შემთხვევები. თუ წრფის ზოგად განტოლებაში $Ax+By+C=0$ ერთერთი კოეფიციენტი ნულია, ეს წრფის მდებარეობის გარკვეულ თავისებურებას ახასიათებს, რაზედაც ჩვენ აქ მიუთითებთ.

1. თუ ზოგად განტოლებაში $C=0$, მაშინ განტოლებას შემდეგი სახე ეძლევა : $Ax+By=0$.

აშკარაა, რომ სათანადო წ რ ფ ე კ ო ო რ დ ი ნ ა ტ თ ა ს ა თ ა ვ ე ზ ე გ ა დ ი ს, ვინაიდან წინა განტოლება კმაყოფილდება შემდეგი მნიშვნელობებით: $x=0$, $y=0$.

2. თუ ზოგად განტოლებაში $B=0$, მაშინ იგი შემდეგ სახეზე დაიყვანება: $x=-\frac{C}{A}$, ესე იგი სათანადო წრფე Oy ღერძის პარალელურია, როგორც უკვე აღვნიშნეთ წინა პარაგრაფში.

3. თუ ზოგად განტოლებაში $A=0$, იგი შემდეგ სახეზე დაიყვანება: $y=-\frac{C}{B}$ და სათანადო წრფე Ox ღერძის პარალელური იქნება.

აღვნიშნოთ კიდევ, რომ თვით Ox ღერძის განტოლება არის $y=0$, ხოლო Oy ღერძის განტოლება იქნება: $x=0$.

88. $Ax+By+C$ **სამწევრის ნიშანი.** სამწევრი

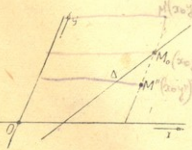
$$Ax+By+C \qquad (1)$$

ნულად ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა (x, y) წერტილი ძევს Δ წრფეზე, რომლის განტოლება არის:

$$Ax+By+C=0; \qquad (2)$$

ხოლო იმ წერტილთათვის, რომელნიც Δ-ზე არ ძევრან, $Ax+By+C\neq 0$; ეს გამომდინარეობს თვით წრფის განტოლების ცნებიდან. საგულისხმოა გამოკვლევა, რა ნიშანს ღებულობს (1) სამწევრი სიბრტყის სხვადასხვა $M(x, y)$ წერტილთათვის.

Δ წრფე ყოფს მთელ სიბრტყეს ორ სხვადასხვა ნაწილად. სანამ $M(x, y)$ წერტილი იმყოფება ერთერთ ამ ნაწილში, (1) სამწევრი ინარჩუნებს მუდმივ ნიშანს, ვინაიდან ნიშნის შეცვლა მოპირდაპირეზე მას შეუძლიან მხოლოდ წინასწარ ნულად გადაქცევით, ეს კი შეიძლება მხოლოდ მაშინ, როცა $M(x, y)$ წერტილი Δ წრფეზე მოხვდება. ახლა დავამტკიცოთ, რომ წრფის სხვადასხვა მხარეზე სამწევრს მოპირდაპირე ნიშანი აქვს. მართლაც, ვთქვათ გარკვეულობისათვის, რომ $B>0$. გავავლოთ რომელიმე წრფე, პარალელური Oy ღერძისა, რომელიც უთუოდ გადაკვეთს აღებულ წრფეს[1] რაღაც $M_0(x_0, y_0)$ წერტილში და გავლებულ წრფეზე ავარჩიოთ კიდევ ორი წერტილი $M'(x_0, y')$ და $M''(x_0, y'')$, ისე რომ $y'>y_0$ და $y''<y_0$ (ნახ. 89).



ნახ. 89.

[1]) ვინაიდან, თუ $B\neq 0$, Δ წრფე Oy ღერძის არაპარალელურია.

ვინაიდან $M(x_0, y_0)$ წერტილი Δ წრფეზე ძევს, მისი კოორდინატები (1) სამწევრს ნულად აქცევენ; ესე იგი: $Ax_0+By_0+C=0$. თუ ამ ტოლობაში y_0-ს შევცვლით მეტი სიდიდით y', ცხადია, ტოლობა დაირღვევა და გვექნება: $Ax_0+By'+C>0$, (ვინაიდან $B>0$); სრულიად აგრეთვე $Ax_0+By''+C<0$; ეს კი ამტკიცებს, რომ Δ წრფის სხვადასხვა მხარეზე (1) სამწევრი მოპირდაპირე ნიშნებს ღებულობს.

ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $B>0$; თუ $B<0$, მაშინ ორს უკანასკნელ უტოლობაში უტოლობათა ნიშნები უნდა შებრუნდენ და მიღებული შედეგი ძალაში დარჩება. დაბოლოს, თუ $B=0$, მაშინ უთუოდ A ნულის ტოლი არ არის და ჩვენი მსჯელობა ძალაში დარჩება, თუ Ox და Oy ღერძებს როლებს შეუცვლით.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია წრფე:

$$2x+y-3=0. \tag{3}$$

თუ სამწევრში

$$2x+y-3 \tag{4}$$

შევიტანთ სათავის კოორდინატებს (ე. ი. $x=0$, $y=0$), მას მიეცემა უარყოფითი მნიშვნელობა (-3). მაშასადამე. ყოველი იმ წერტილისათვის, რომელიც წრფის იმავე მხარეზე იმყოფება, რაც სათავე, გვექნება $2x+y-3<0$; ხოლო მეორე მხარეზე მდებარე წერტილთათვის, $2x+y-3>0$. მაგალითად, ვინაიდან $M(5, 3)$ წერტილის კოორდინატები (4) სამწევრს აქცევენ დადებით სიდიდეთ: $2.\ 5+3-3=10$, ამიტომ M წერტილი და კოორდინატთა სათავე Δ წრფის სხვადასხვა მხარეზე იმყოფებიან.

საზოგადოდ, ამ პარაგრაფში ნათქვამი, ცხადია, შესაძლებლობას გვაძლევს პირდაპირ გადავწყვიტოთ, ძევს თუ არა ორი მოცემული წერტილი აღებული წრფის ერთსადაიმავე მხარეზე, თუ სხვადასხვა მხარეზე.

სავარჯიშო მაგალითები

1. დაამტკიცეთ, რომ წერტილები $(5,-1)$ და $(2, 3)$ იმყოფებიან $x+3y-1=0$ წრფის ერთ მხარეზე, ხოლო წერტილი $(1,-5)$ მეორე მხარეზე.

2. დაამტკიცეთ, რომ წრფე: $y=2x+1$ კვეთს $A(-2,2)$ და $B(4,1)$ წერტილებზე გამავალ წრფეს A და B წერტილებს შუა.

ააგეთ უჯრედებიანი ქაღალდის საშუალებით ხსენებული წერტილები და წრფეები (თუ კოორდინატებს მართკუთხოვანად ვიგულისხმებთ) და შეამოწმეთ შედეგი ნახაზზე.

89. განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში. საჭიროა აღვნიშნოთ წრფის განტოლების კიდევ ერთი სახე, რომელზეაც შეიძლება დავიყვანოთ ზოგადი განტოლება:

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

იმ შემთხვევაში, როცა $C \neq 0$.

სახელდობრ, თუ მისი ორივე ნაწილს C-ზე გავყოფ, მაშინ ნიშნების შეცვლით და აღნიშვნების შემოღებით:

$$-\frac{A}{C}=\frac{1}{p}, \quad -\frac{B}{C}=\frac{1}{q}, \tag{2}$$

მას შემდეგნაირად გადავწერთ:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1 \tag{3}$$

ამ მეტად სიმეტრიულ განტოლებაში p და q სიდიდეებს ძალიან მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ: სახელდობრ, p არის ის ნაკვეთი, რომელსაც განსახილავი წრფე Ox ღერძზე მოკვეთს, ხოლო q არის ნაკვეთი Oy ღერძზე[1]. მართლაც, ვიპოვოთ (3) განტოლებით გამოსახული წრფის Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილი, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ვიპოვოთ (3) წრფის ის წერტილი, რომლის y ორდინატი ნულია. თუ (3) განტოლებაში შევიტანთ $y=0$, მივიღებთ: $\frac{x}{p}=1$, ე. ი. $x=p$, როგორც ეს უკვე ნათქვამი იყო; სრულიად ასეთივე მსჯელობა იხმარება q-ს მიმართ.

თუ მხედველობაში მივიღებთ p და q კოეფიციენტების ეხლახან აღნიშნულ გეომეტრიულ მნიშვნელობას, მაშინ გასაგები გახდება, თუ რატომ უწოდებენ (3) განტოლებას წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ა ს ღ ე რ ძ თ ა ნ ა კ ვ ე თ ე ბ შ ი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ A კოეფიციენტი ზოგად განტოლებაში ნულია, მაშინ (2)-ის ძალით, $\frac{1}{p}=0$ (ე. ი. $p=\infty$), და (3) განტოლება ღებულობს სახეს: $\frac{y}{q}=1$; ეს განტოლება, როგორც მოსალოდნელი იყო, გამოსახავს Ox ღერძის პარალელურს იმ წრფეს, რომელიც Oy ღერძზე q ნაკვეთს მოსჭრის; ამ შემთხვევაშიაც შეიძლება ითქვას, რომ წრფე მოსჭრის საკოორდინატო ღერძებზე ნაკვეთებს $p=\infty$ და q-ს.

---

[1]) ორივე ეს ნაკვეთი თანდართული ნიშნით განიხილება. სახელდობრ, p აღნიშნავს Ox ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისს, ხოლო q არის Oy ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატი.

ანალოგიური შენიშვნა შეეხება იმ შემთხვევასაც, როცა $B=0$.

90. წრფის აგება მოცემული განტოლების მიხედვით. წინა პარაგრაფის (3) განტოლებით გამოსახული წრფე მარტივად აიგება; ამისათვის საკმარისია მოვზომოთ კოორდინატთა სათავიდან სათანადო ღერძებზე მონაკვეთები p და q (ნიშნების დაცვით) და შევაერთოთ ესენი წრფით.

თუ წრფე მოცემულია ზოგადი სახის განტოლებით, რომელშიაც არცერთი კოეფიციენტი ნული არაა, საკმარისია ეს განტოლება ზემოხსენებულ სახეზე დავიყვანოთ, რომ აღნიშნული აგება გამოსაყენებელი გახდეს.

განვიხილოთ, მაგალითად, წრფე: $x-3y-6=0$; თუ ორივე მხარეს 6-ზე გავყოფთ და ერთეულს გადავიტანთ განტოლების მარჯვენა მხარეზე, მივიღებთ: $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$; მაშასადამე, წრფე მოსჭრის Ox ღერძზე ნაკვეთს ზომით 6, ხოლო Oy ღერძზე ნაკვეთს (-2).

თუ ზოგადი განტოლების ერთერთი კოეფიციენტი A, B ნულის ტოლია, მაშინ წრფე ერთერთი ღერძის პარალელურია და ამიტომ მისი აგებაც ადვილია.

თუ, დაბოლოს, $C=0$, მაშინ წრფე გაივლის სათავეზე: მისი აგებისათვის საკმარისია კიდევ ერთი რომელიმე მისი წერტილი ავაგოთ; ამისათვის შეიძლება ამ წერტილის აბსცისა ჩვენის ნებით დავასახელოთ და განტოლებიდან სათანადო ორდინატი გამოვითვალოთ. მაგალითად, თუ მოცემულია წრფის განტოლება: $3x-4y=0$, მაშინ, თუ ავარჩევთ $x=4$, მივიღებთ $y=3$. ამიტომ წრფე გაივლის სათავეზე და $(4,\ 3)$ წერტილზე.

საზოგადოდ განტოლებით მოცემული წრფის ასაგებად, საკმარისია რომელიმე ორი მისი წერტილის პოვნა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ § 76-ში.

91. ზოგადი განტოლების A და B კოეფიციენტის გეომეტრიული მნიშვნელობა. დავუბრუნდეთ წრფის ზოგადი სახის განტოლებას:

$$Ax+By+C=0; \tag{1}$$

ჩვენი მიზანია მივუთითოთ A და B კოეფიციენტების მეტად მარტივ გეომეტრიულ მნიშვნელობაზე, რაც ძალიან გაადვილებს მრავალი ამოცანის ამოხსნას. სახელდობრ, თუ დროებით ჩავთვლით $B \neq 0$ და ამოვხსნით (1) განტოლებას y-ის მიმართ, მივიღებთ დაყვანილ განტოლებას:

$$y=ax+b, \tag{2}$$

სადაც საკუთხო კოეფიციენტი $a=-\frac{A}{B}$. მეორეს მხრივ ჩვენ ვიცით (§ 85), რომ $a=\frac{M}{L}$, სადაც L, M აღნიშნავენ ჩვენი წრფის მიმართულების ვექტორის კოორდინატებს. მაშასადამე:

(B,−A)

$$-\frac{A}{B}=\frac{M}{L} \quad \text{ანუ} \quad \frac{L}{B}=\frac{M}{-A}. \qquad (3)$$

L, M

განვიხილოთ ახლა ვექტორი, რომლის კოორდინატები არიან B და $-A$, ესე იგი ვექტორი $(B, -A)$. როგორც გვიჩვენებენ (3) ფორმულები, ეს ვექტორი აღებული წრფის მიმართულების ვექტორის პარალელურია და მაშასადამე თვით ამ წრფისაც.

მაშ შემდეგი დებულება მივიღეთ: $(B, -A)$ ვექტორი პარალელურია (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფისა.

ვინაიდან წრფის მიმართულების ვექტორად შეიძლება ავარჩიოთ ნებისმიერი ვექტორი, მისი პარალელური, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლიან ჩავთვალოთ, რომ ვექტორი $\overline{P}=(B, -A)$ არის (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფის მიმართულების ვექტორი. ცხადია, რომ იმავე მოსაზრებით ჩვენ შეგვიძლიან ავიღოთ ვექტორი: $-\overline{P}=(-B, A)$.

ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $B \neq 0$. მაგრამ აშკარაა, რომ იმ შემთხვევაშიაც, როცა $B=0$, შედეგი სამართლიანი რჩება.

შეიძლება A, B კოეფიციენტების კიდევ მეორენაირი გეომეტრიული მნიშვნელობა აღვნიშნოთ, რომელსაც წინააღმდეგ პირველისა, ადგილი აქვს მხოლოდ მართკუთხთვანი კოორდინატების შემთხვევისათვის. სახელდობრ, ადვილი გამოსარკვევია, რომ ამ შემთხვევაში $\overline{Q}$ ვექტორი, რომელსაც კოორდინატებად აქვს A და B, ესე იგი, ვექტორი $\overline{Q}=(A, B)$, (1) განტოლებით წარმოდგენილი წრფის მართობია.

მართლაც, $\overline{P}.\ \overline{Q}=B\cdot A+(-A)\cdot B=0$, ე. ი. $\overline{Q}$ ვექტორი $\overline{P}$ ვექტორის მართობია, რის დამტკიცებაც გვსურდა.

ეს შედეგი სამართლიანი დარჩება ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაშიაც, თუ მას ასე ჩამოვაყალიბებთ: $\overline{Q}$ ვექტორი, რომლის კოვარიანტული კოორდინატები არიან A და B, მართობია (1) წრფისა.

დამტკიცებისათვის საკმარისია გავიხსენოთ ვექტორთა ოდენური ნამრავლის ფორმულა ირიბკუთხოვან კოორდინატებში (§ 55), საიდანაც ისევ გამომ-

დინარეობს, რომ $\overline{P}\cdot\overline{Q}=0$. როგორც ზევით, ისე აქაც ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $\overline{P}=(B, -A)$ არის ვექტორი, რომლის ჩვეულებრივ (კონტრავარიანტული) კოორდინატები არიან B და $-A$.

92. წრფის ნორმალური განტოლება. თუ კოორდინატებს მართკუთხოვანად ვიგულისხმებთ და $\overline{Q}=(A, B)$ ვექტორის ზევით აღნიშნული თვისებით ვისარგებლებთ, შეგვიძლიან წრფის განტოლებას

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

მივცეთ სახე, რომელიც ყურადღების ღირსია. სახელდობრ, თუ (1) განტოლებას გავამრავლებთ რაღაც λ მამრავლზე (ნულისაგან განსხვავებულზე), ე. ი. თუ გადავწერთ მას შემდეგი სახით:

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0, \tag{2}$$

ყოველთვის შეგვიძლიან მივაღწიოთ იმას, რომ ვექტორი $\overline{V}=(\lambda A, \lambda B)$, რომელიც წინა პარაგრაფის თანახმად, აღებული წრფის პერპენდიკულარია, იყოს მგეზავი, ე. ი. რომ მისი სიგრძე ერთის ტოლი იყოს. ამისათვის საკმარისია λ ისე ავარჩიოთ, რომ: $(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1$, ე. ი.

$$\lambda=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3}$$

რომ რაიმე გარკვეულ ნიშანზე შევჩერდეთ რადიკალის წინ, შევთანხმდეთ მის ისეთს შერჩევაზე, რომ ნამრავლი λC უარყოფითი სიდიდე იყოს (ამ პირობის გეომეტრიული მნიშვნელობა ქვევით იქნება გამორკვეული); იმ შემთხვევაში კი, როცა $C=0$, ნიშანს რადიკალის წინ ნებისმიერად ავარჩევთ.

თუ ψ-ით აღვნიშნავთ კუთხეს, რომელსაც მგეზავი $\overline{V}=(\lambda A, \lambda B)$ შეადგენს Ox ღერძთან (ეს კუთხე აითვლება ამ ღერძიდან), ხოლო $(-p)$-თი აღვნიშნავთ λC ნამრავლს, მივიღებთ:

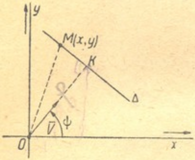
$$\lambda A=\cos\psi,\ \lambda B=\sin\psi,\ \lambda C=-p \tag{4}$$

და (2) განტოლებას შემდეგი სახე მიეცემა:

$$x\cos\psi+y\sin\psi-p=0.$$

უკანასკნელ განტოლებას ეწოდება წრფის განტოლება ნორმალური სახით (Hesse-ს ნორმალური სახე).

ჩვენ ვიცით, რომ ვექტორი $\overline{V}=(\cos\psi,\ \sin\psi)$ აღებული Δ წრფის მართობია. დავამტკიცოთ, რომ, λ-ს ნიშნის შესახებ შეთანხმების მიხედვით ($C\neq 0$), $\overline{V}$ ვექტორი, თუ მას სათავეზე მოვდებთ, მიმართული იქნება Δ-საკენ და რომ $p=|OK|$ არის სათავიდან Δ-ზე დაშვებული მართობის სიგრძე (იხ. ნახ. 90); K აღნიშნავს ამ მართობის ფუძეს.



ნახ. 90.

მართლაც, თუ $M(x,\ y)$ არის Δ-ზე აღებული რომელიმე წერტილი, მაშინ გვექნება: $OK=\overline{V}\cdot\overline{OM}$, სადაც OK არის $\overline{OK}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{V}$-ს გასწვრივ. მაგრამ $\overline{V}=(\cos\psi,\ \sin\psi)$, $\overline{OM}=(x,\ y)$. მაშასადამე $OK=x\cos\psi+y\sin\psi$, საიდანაც (5)-ის ძალით, $OK=p$. ვინაიდან პირობით $p>0$, ამიტომ $\overline{OK}$ ვექტორს უნდა ქონდეს $\overline{V}$ ვექტორის გეზი, მისი სიგრძე კი p-ს ტოლია; სწორედ ეს ამტკიცებს ჩვენს დებულებას.

დავუმატოთ, რომ როცა $C=0$, მაშინ $p=0$, ხოლო $\overline{V}$-ს გეზი შეიძლება ნებისმიერად აირჩეს, როგორც ეს უკვე აღნიშნული იყო.

დავიხსომოთ, რომ (1) განტოლების ნორმალურ სახეზე დასაყვანად საკმარისია მისი გამრავლება λ მამრავლზე, რომელიც (3) ფორმულით განისაზღვრება, ნიშანი კი ისე უნდა შეირჩეს, რომ $\lambda C<0$; λ მამრავლს მანორმალებელი (მაწესებელი) მამრავლი ეწოდება.

ირიბკუთხოვანი სისტემის შემთხვევაში $\overline{V}$ ვექტორი, კოვარიანტული კოორდინატებით λA, λB, მართობია Δ-სი (იხ. წინა პარაგრაფი. ეს ვექტორი რომ მგეზავი იყოს, ისე უნდა შეირჩეს λ, რომ (§ 57): $(\lambda A)^2+(\lambda B)^2-2(\lambda A)(\lambda B)\cos\nu=\sin^2\nu$, საიდანაც:

$$\lambda=\frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}} \qquad (6)$$

თუ რადიკალის წინ ნიშანს ისე შევარჩევთ, რომ $\lambda C\leqslant 0$ და თუ აღვნიშნავთ α-თი და β-თი $\overline{V}$ მგეზავის მიერ Ox და Oy ღერძებთან შედგენილ კუთხეებს, ხოლო $(-p)$-თი მამრავლს λC, მაშინ გვექნება [1]:

---

[1]) ორი α და β კუთხის მაგიერ შეიძლება ერთი ψ კუთხე შემოვიღოთ, რომელიც Ox ღერძთან არის შედგენილი და ამ ღერძიდანაა ათვლილი, თუ ანგარიშს გაუწევთ ამასთანავე ათვლის მიმართულებას.

$$\lambda A=\cos\alpha,\quad \lambda B=\cos\beta,\quad \lambda C=-p,$$

და (2) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta-p=0, \tag{8}$$

რომელსაც ნორმალური სახე ეწოდება.

ისე როგორც ზევით, ადვილი საჩვენებელია (საკმარისია სიტყვა სიტყვით გავიმეოროთ ზევით მოყვანილი მსჯელობა), რომ $\overline{V}$ მგეზავი, მოდებული O წერტილზე, იქნება მიმართული Δ წრფისაკენ და რომ p არის O წერტილიდან Δ-ზე ჩამოშვებული მართობის სიგრძე.

λ მამრავლი, განსაზღვრული (6) ფორმულით და პირობით $\lambda C\leqslant 0$, რომელზედაც (1) განტოლების გამრავლებით ეს უკანასკნელი ნორმალურ სახეზე დაიყვანება, აქაც იწოდება მანორმალებელ (მაწესებელ) მამრავლად.

სავარჯიშო მაგალითები

1. დაიყვანეთ ნორმალურ სახეზე განტოლებანი (მართკუთხოვან კოორდინატებში):

$a)\ x-y+1=0;\quad b)\ x+y=0;\quad c)\ 2x+3y-1=0;\quad d)\ x+4=0;$

პას. $a)\ \dfrac{x}{-\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ ანუ $x\cos\dfrac{3\pi}{4}+y\sin\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0;$

$b)\ \dfrac{x}{\pm\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\pm\sqrt{2}}=0$ ანუ $\pm x\cos\dfrac{\pi}{4}\pm y\sin\dfrac{\pi}{4}=0;$

$c)\ \dfrac{2x}{\sqrt{13}}+\dfrac{3y}{\sqrt{13}}-\dfrac{1}{\sqrt{13}}=0$ ანუ $x\cos\psi+y\sin\psi-\dfrac{1}{\sqrt{13}}=0,$

სადაც $\cos\psi=\dfrac{2}{\sqrt{13}},\quad \sin\psi=\dfrac{3}{\sqrt{13}};$

$d)\ -x-4=0$ ანუ $x\cos\pi-4=0.$

2. წინა მაგალითის წრფეებზე სათავიდან დაშვებულ მართობთა სიგრძეები იპოვეთ.

პას. $a)\ \dfrac{1}{\sqrt{2}};\quad b)\ 0;\quad c)\ \dfrac{1}{\sqrt{13}};\quad d)\ 4.$

III. ძირითადი ამოცანები წრფეზე

წინა განყოფილებაში ჩვენ დაწვრილებით შევჩერდით წრფეთა წარმოდგენის საკითხზე განტოლებების საშუალებებით. ჩვენ დავინახეთ, რომ წრფეები პირველი ხარისხის განტოლებით გამოისახებიან. ამგვარად ყველა გეომეტრიული საკითხები, რომელნიც წრფეებს (და წერტილებს) შეეხებიან, ამ განტოლებათა განხილვაზე დაიყვანებიან.

ჩვენ ახლა ამოვხსნით რამოდენიმე ასეთ საკითხს, ყველაზე უფრო მარტივს და ძირითადს, და დავიწყებთ იმ ამოცანების ამოხსნას, რომელნიც განტოლებით მოცემულ წრფეებს შეეხებათ.

შემდეგ ჩვენ ამოვხსნით რამოდენიმე ამოცანას, რომელნიც მოითხოვენ წრფეთა განტოლებების მონახვას ამა თუ იმ გეომეტრიული პირობების მიხედვით.

შემდეგში სიტყვები: „მოცემულია წრფე“, „ვიპოვოთ წრფე“, ჩვენ უნდა ასე გვესმოდეს: „მოცემულია წრფის განტოლება“, „ვიპოვოთ წრფის განტოლება“,

იმის მიხედვით, თუ როგორ უფრო მოხერხებული იქნება, და აგრეთვე გამოყენების საჭიროების მიხედვით, ჩვენ ვიხმართ წრფის ამა თუ იმ სახის განტოლებას.

დავუმატოთ კიდევ, რომ წინა პარაგრაფებში მოცემულია ყველა ის საჭირო მოსაზრებანი, რომელნიც საკმარისია ქვევით მოყვანილი ამოცანების ამოხსნისათვის, ასე რომ მკითხველი, რომელსაც შეთვისებული აქვს წინა პარაგრაფების შინაარსი და აგრეთვე ზოგიერთი უმარტივესი ზოგადი დებულებანი, რომელთაც ქვევით გავეცნობით (§ 101 და 106), ადვილად ამოხსნის ამ ამოცანებს საკუთარი ძალითაც. ამიტომ ჩვენ თამამად შეგვეძლო ეს ამოცანები მიგვეკუთნებია „სავარჯიშო მაგალითებისათვის“ და თუ ამას არ ვშვებით, ეს მხოლოდ იმიტომ, რომ ამოხსნის შედეგები მეტად მნიშვნელოვანია და საჭიროა მათი ხაზგასმით აღნიშვნა.

93. ამოცანა 1. ორი მოცემული წრფის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობების პოვნა. ვთქვათ წრფეები მოცემული არიან ზოგადი სახის განტოლებებით:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{1}$$

და

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{2}$$

მათი პარალელობისათვის, ცხადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათი მიმართულების ვექტორები (§ 91) $\overline{P}_1 = (B_1, -A_1)$ და $\overline{P}_2 = (B_2, -A_2)$, პარალელური იყვნენ. თუ გავიხსენებთ ვექტორთა პარალელობის პირობას (§ 33), მივიღებთ:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{-A_1}{-A_2},$$

ანუ

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \quad \text{ანუ კიდევ:} \quad A_1B_2-A_2B_1=0 \qquad (3)$$

მაშ, ზოგადი სახის განტოლებებით მოცემული ორი წრფის პარალელობისათვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ x და y ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები ერთ განტოლებაში პროპორციული იყვნენ მეორე განტოლების სათანადო კოეფიციენტებისა.

(3) პირობა შეიძლება კიდევ ასე გადაიწეროს:

$$A_1=kA_2, \quad B_1=kB_2, \qquad (4)$$

სადაც k რომელიმე მუდმივი რიცხვია [(3) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა].

იმისათვის, რომ წრფეები თანამთხვეულნი იყვნენ (თანამთხვევა არის პარალელობის კერძო შემთხვევა), საჭიროა (3) ან (4) პირობებს კიდევ ერთი დაემატოს, რომელსაც შემდეგნაირად ვღებულობთ. ვთქვათ (x, y) აღნიშნავს მოცემულ წრფეთა კუთვნილს რომელიმე წერტილს. მაშინ x და y ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორივე განტოლებას (1) და (2). თუ (2)-ს k-ზე გავამრავლებთ და (1)-დან გამოვაკლებთ, მაშინ (4)-ის თანახმად მივიღებთ: $C_1-kC_2=0$ ანუ $C_1=kC_2$. მაშ თანამთხვევის შემთხვევაში უნდა გვქონდეს:

$$A_1=kA_2, \quad B_1=kB_2, \quad C_1=kC_2, \qquad (5)$$

ან, რაც იგივეა:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (6)$$

ცხადია, რომ (5) პირობა აგრეთვე საკმარისიც არის, ვინაიდან ამ პირობის შესრულების დროს (1) განტოლება მიიღება (2)-დან მუდმივ რიცხვზე გამრავლებით და მაშასადამე მისი ტოლფასია; ესე იგი, ორივე განტოლება კმაყოფილდება x და y კოორდინატების ერთი და იმავე მნიშვნელობებით. ეს ნიშნავს, რომ ერთერთ მოცემულ წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი მდებარეობს აგრეთვე მეორე წრფეზედაც.

მაშ, ზოგადი განტოლებებით მოცემული ორი წრფის თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ ერთი განტოლების სამივე კოეფიციენტი პროპორციუ-

ლი იყოს მეორე განტოლების სათანადო კოეფიციენტებისა.

(5) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ ადგილი აქვს იგივეობას:

$$A_1x + B_1y + C_1 = k(A_2x + B_2y + C_2) \tag{5a}$$

ესე იგი ტოლობას სამართლიანს x და y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. პირიქით, თუ ($5a$) არის იგივეობა, მაშინ აქედან გამომდინარეობენ[1] (5) ტოლობანი.

ამიტომ შეგვიძლიან ვთქვათ, რომ (1) და (2) განტოლებებით მოცემულ წრფეთა თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია ისეთი მუდმივი k რიცხვის არსებობა, რომლისათვისაც ($5a$) არის იგივეობა.

თუ წრფეები დაყვანილი განტოლებებით არიან მოცემულნი:

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2 \tag{7}$$

მაშინ, აშკარაა, პარალელობის პირობა პირდაპირ საკუთხო კოეფიციენტთა ტოლობაში გამოისახება, ე. ი.

$$a_1 = a_2 \tag{8}$$

ხოლო თანამთხვევის პირობები იქნებიან:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2 \tag{9}$$

(8) და (9) უშუალოდ გამომდინარეობენ ზემოხსენებული პირობებიდან (3) (პარალელობისათვის) და (6) (თანამთხვევისათვის), თუ (7) განტოლებებს ასე გადავწერთ: $a_1x - y - b_1 = 0$, $a_2x - y - b_2 = 0$.

პირობები (8) და (9) უშუალოდაც სრულიად აშკარა ხდებიან, თუ გავიხსენებთ დაყვანილი განტოლების კოეფიციენტთა გეომეტრიულ მნიშვნელობებს.

94. ამოცანა **2**. ორი წრფის გადაკვეთის წერტილის პოვნა. თუ წრფეები მოცემული არიან წინა პარაგრაფის (1) და (2) განტოლებებით, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილის საპოვნელად საჭირო იქნება ორუცნობიანი პირველი ხარისხის განტოლებათა შემდეგი სისტემის ამოხსნა:

---

[1]) ადვილი გასაგებია, რომ $Ax + By + C = A'x + B'y + C'$ იგივეობიდან გამომდინარეობს: $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. მართლაც, ვინაიდან ხსენებული იგივეობა სამართლიანია x და y-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, იგი სამართლიანი დარჩება მაშინაც, თუ მივიღებთ $x = y = 0$, რაც გვაძლევს $C = C'$. თუ მივიღებთ $x = 1$, $y = 0$, გვექნება $A = A'$; ანალოგიურად ვღებულობთ $B = B'$.

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

მართლაც, საძიებელი წერტილის კოორდინატები (x, y) უნდა აკმაყოფილებდენ როგორც პირველი წრფის განტოლებას ისე მეორისას (§ 83).

ელემენტარული ალგებრიდან ცნობილია, რომ (1) სისტემას ან ერთი გარკვეული ამონახსნი აქვს, ან არც ერთი, ან ამონახსნთა უსასრულო სიმრავლე.

წინა განტოლებების გეომეტრიული მნიშვნელობის თანახმად, ცხადია, რომ, პირველ შემთხვევას ადგილი აქვს მაშინ, როცა წრფეები არ არიან პარალელური (და არც თანამთხვეულნი) ე. ი. როცა

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ ანუ } A_1B_2-A_2B_1 \neq 0. \qquad (2)$$

მეორე შემთხვევას ადგილი აქვს, როცა წრფეები პარალელური არიან, მაგრამ არა თანამთხვეულნი, ესე იგი, როცა:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \qquad (3)$$

დაბოლოს, მესამე შემთხვევას ადგილი აქვს, როცა წრფეები თანამთხვეულნი არიან, ესე იგი, როცა

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (4)$$

ყველა ამის დამტკიცება ადვილია წმინდა ალგებრული გზით (იხ. ვარჯიშობა 4).

შენიშვნა. თუ $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$, მაშინ, როგორც უკვე ვნახეთ, გადაკვეთის წერტილი არსებობს. თუ ახლა ერთ წრფეს უძრავად დავტოვებთ, ხოლო მეორეს ვაბრუნებთ (ერთერთი მისი წერტილის გარშემო, რომელიც გადაკვეთის წერტილი არ არის) ისე, რომ იგი მიისწრაფოდეს პირველის პარალელურობისაკენ, მაშინ გადაკვეთის წერტილი დაიწყებს უსაზღვროდ დაშორებას. სწორედ ამიტომ ხშირიდ ამბობენ, რომ პარალელური წრფეები იკვეთებიან, მაგრამ მათი გადაკვეთის წერტილი უსასრულობაში იმყოფება.

სავარჯიშო მაგალითები და დავალებანი

1. იპოვეთ შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილი:

$$3x+2y-1=0,\ 2x+y+5=0.$$

პ ა ს. წერტილი $(-11,\ 17)$

2. იპოვეთ შემდეგი წრფეების გადაკვეთის წერტილი:

$$5x-2y=5 \quad \text{და} \quad 10x-4y=1$$

პ ა ს. გადაკვეთის წერტილი უსასრულობაშია (წრფეები პარალელურია)

3. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი პარამეტრულად მოცემული წრფისა:

$$x=2t,\ y=1-3t \text{ და წრფის } 2x-6y-5=0.$$

პ ა ს. $x=1,\quad y=-\dfrac{1}{2}$.

4. დეტერმინანტთა თეორიის საფუძვლებიდან ცნობილია, რომ წრფივ განტოლებათა სისტემას (1) აქვს ერთად ერთი ამონახსნი, თუ დეტერმინანტი: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1$ ნულისაგან განსხვავდება.

თუ $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, მაგრამ ერთი მაინც შემდეგი ორი დეტერმინანტისაგან $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ სისტემას არც ერთი ამონახსნი არ აქვს; დაბოლოს, თუ ყველა ხსენებული დეტერმინანტი ნულია, მაშინ (1) განტოლებანი ტოლფასი არიან ურთიერთშორის (განსხვავდებიან მუდმივი მამრავლით) და სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობენ, როგორც ამ პარაგრაფის დასკვნები, ისე ის, რაც წინა პარაგრაფში სხვა გზით მივიღებთ [1].

95. ამოცანა 3. მოცემული წრფისა და მოცემული მრუდის გადაკვეთის წერტილთა პოვნა. ეს ამოცანა, ისე როგორც წინა, წარმოადგენს ორი წირის გადაკვეთის ამოცანის კერძო შემთხვევას.

ვთქვათ $\Phi(x,\ y)=0$ არის მრუდის განტოლება. წარმოვადგინოთ მოცემული წრფის განტოლება პარამეტრულად:

$$x=x_0+Lt,\ y=y_0+Mt, \tag{1}$$

(სადაც x_0, y_0, L, M მუდმივებია); t პარამეტრის მნიშვნელობანი, რომელნიც გაკვეთის წერტილებს შეეფერებათ, უნდა აკმაყოფილებდენ განტოლებას (§ 83).

$$\Phi(x_0+Lt,\ y_0+Mt)=0 \tag{2}$$

---

[1]) ჩვენ აქ სისტემის ისეთ მარტივ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე, რომ რასაკვირველია დეტერმინანტების გამოუყენებლივაც შეგვეძლო საკითხის გამოკვლევა.

ამ განტოლების ფესვები t_1, t_2 და ა. შ., ჩასმული (1)-ში, მოგვცემენ საძიებელი წერტილების კოორდინატებს. (2) განტოლების ფესვთა რიცხვი შეიძლება უსასრულოდ-დიდიც იყოს.

თუ აღებული მრუდი ალგებრულია და ამასთანავე n რიგის, მაშინ (2) განტოლებაც ალგებრულია და მისი ხარისხი აგრეთვე n-ის ტოლი იქნება (ან შეიძლება ნაკლებიც იყოს, ვინაიდან შესაძლებელია ზოგიერთ წევრთა გაბათილება მოხდეს) და მაშასადამე ჩვენ მივიღებთ n გადაკვეთის წერტილს (ან ნაკლებს).

შესაძლებელია მოხდეს ისიც, რომ (2) განტოლება იგივეობად გადაიქცეს; მაშინ იგი დაკმაყოფილდება t-ს ყველა მნიშვნელობისათვის; ამ შემთხვევაში, ცხადია, მოცემული წრფე წარმოადგენს აღებული ალგებრული მრუდის ერთერთ შემადგენელ ნაწილს.

სავარჯიშო მაგალითები და გამოყენებანი

1. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილები წრფისა: $x=1+t$, $y=1-t$ და მრუდის $(x-1)^2+y^2=16$ (ეს მრუდი წრეწირია, თუ სისტემა მართკუთხოვანია).

$$\text{პას.}\quad \left(\frac{3+\sqrt{31}}{2},\ \frac{1-\sqrt{31}}{2}\right) \text{ და } \left(\frac{3-\sqrt{31}}{2},\ \frac{1+\sqrt{31}}{2}\right).$$

2. მოცემულია წრეწირი თავისი განტოლებით (კოორდინატები მართკუთხოვანია):

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0 \qquad (*)$$

და გარდა ამისა წრფე გამავალი $M_0(x_0, y_0)$ წერტილზე და პარამეტრულად წარმოდგენილი:

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt, \qquad (**)$$

სადაც l, m არიან მიმართულების კოორდინატები. ჩვენ ვიცით, რომ ამ შემთხვევაში t წარმოადგენს მანძილს (x, y) წერტილიდან (x_0, y_0) წერტილამდე (მანძილი თავისი ნიშნით განიხილება) (§ 84).

ვთქვათ M_1 და M_2 არიან ჩვენი წრფისა და წრეწირის გადაკვეთის წერტილები. დაამტკიცეთ, რომ M_0M_1 და M_0M_2 მანძილების ნამრავლი არ არის დამოკიდებულ l-ზე და m-ზე, ე. ი. M_0 წერტილზე გამავალი მკვეთის მიმართულებაზე (ეს დებულება ცნობილია ელემენტარული გეომეტრიიდან). ეს ნამრავლი, გარკვეული ნიშნით განხილული, იწოდება M_0 წერტილის ხ ა რ ი ს ხ ა დ აღებული წრეწირის მიმართ (ნიშანი დადებითად

იგულისხმება, როცა $\overline{M_0M_1}$ და $\overline{M_0M_2}$ ერთნაირად არიან მოგეზული, ხოლო უარყოფითად — წინააღმდეგ შემთხვევაში, ესე იგი ნამრავლი დადებითი იქნება, თუ M_0 წრეწირის გარედ იმყოფება და უარყოფითი, თუ M_0 შიგნითაა; თუ M_0 თვით წრეწირზეა, მაშინ ნამრავლი ნულის ტოლია). იპოვეთ ამ ხარისხის გამოსახულება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ (**) მნიშვნელობებს შევიტანთ (*)-ში, გვექნება:

$$(x_0+lt)^2+(y_0+mt)^2+2A(x_0+lt)+2B(y_0+mt)+C=0,$$

საიდანაც, თუ მხედველობაში მივიღებთ ტოლობას $l^2+m^2=1$, დავწერთ:

$$t^2+2(lx_0+my_0+Al+Bm)t+x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+C=0.$$

მაგრამ ჩვენ ვიცით ელემენტარული ალგებრიდან, რომ ამ განტოლების ფესვთა ნამრავლი t_1t_2 თავისუფალი წევრის ტოლია ესე იგი: $t_1t_2 = x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+C$. მაგრამ $t_1=M_0M_1$, $t_2=M_0M_2$, სადაც M_1 და M_2 არიან გადაკვეთის წერტილები t_1-ისა და t_2-ის შესაფერი. მაშასადამე $M_0(x_0, y_0)$ წერტილის ხარისხისათვის მოცემული წრეწირის მიმართ შემდეგი გამოსახულება გვექნება:

$$k=x_0^2+y_0^2+2Ax_0+2By_0+C; \qquad (***)$$

ვინაიდან ეს გამოსახულება დამოუკიდებელია l-ზე და m-ზე, ამით ჩვენი დებულება დამტკიცებულია.

ამასთანავე ჩვენ ვხედავთ, რომ აღებული წერტილის ხარისხის მისაღებად მოცემული წრეწირის მიმართ, საკმარისია ამ წრეწირის (*) სახეზე დაყვანილი განტოლების მარცხენა მხარეში შევიტანოთ x და y-ის მაგიერ მოცემული წერტილის კოორდინატები.

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა ხარისხები (იხ. წინა ვარჯ.) ორი მოცემული წრეწირის მიმართ თანატოლია, არის წრფე. (ამ წრფეს ეწოდება მოცემულ წრეწირთა რ ა დ ი კ ა ლ უ რ ი ღ ე რ ძ ი).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ მოცემულ წრეწირთა განტოლებანი არიან:

$$x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0 \text{ და } x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+C_2=0.$$

თუ (x_0, y_0) არის საძიებელი გეომეტრიული ადგილის ერთერთი წერტილი, მაშინ თანახმად პირობისა [იხ. წინა ვარჯ., ფორმულა (***)]:

$$x_0^2+y_0^2+2A_1x_0+2B_1y_0+C_1=x_0^2+y_0^2+2A_2x_0+2B_2y_0+C_2$$

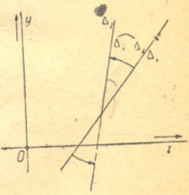
ან გამარტივების შემდგომ:

$$2(A_1-A_2)x_0+2(B_1-B_2)y_0+C_1-C_2=0.$$

მაშასადამე, ჩვენი გეომეტრიული ადგილის წერტილთა კოორდინატები (x_0, y_0) აკმაყოფილებენ პირველი ხარისხის განტოლებას ამ კოორდინატთა მიმართ; მაშ, ეს გეომეტრიული ადგილი — წრფეა.

თუ ალებული წრეწირები იკვეთებიან, მაშინ რადიკალური ღერძი არის მათი გადაკვეთის წერტილებზე გამავალი წრფე. მართლაც, გადაკვეთის წერტილებს აქვთ ერთნაირი ხარისხი ორივე წრეწირის მიმართ (ნულის ტოლი).

96. ამოცანა 4. ორ წრფეთა შორის კუთხის პოვნა. კუთხე Δ_1 და Δ_2 წრფეებს შორის, განხილულთ ისეთი მიმდევრობით, როგორც აქ არის აღნიშნული, ჩვენ უწოდოთ იმ კუთხეს, რომელზეაც უნდა შევაბრუნოთ Δ_1 წრფე (დადებითი მიმართულებით), რომ იგი Δ_2-ს დაემთხვეს (ნახ. 91); ამ კუთხეს ჩვენ აღვნიშნავთ $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$-ით. ამნაირად იმ მიმდევრობას, რომელშიაც ალებული წრფეები განიხილებიან, უთუოდ აქვს მნიშვნელობა. თუ $\bar{P}_1$ და $\bar{P}_2$ არიან მოცემულ წრფეთა მიმართულების ვექტორები, მაშინ აშკარაა, რომ $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}=\widehat{\bar{P}_1, \bar{P}_2}+k\pi$, სადაც k მთელი რიცხვია, ხოლო $\widehat{\bar{P}_1, \bar{P}_2}$ არის კუთხე, ისეთნაირად განსაზღვრული როგორც ეს § 43-ში იყო მოყვანილი. მართლაც, წრფის შემობრუნებით π კუთხეზე, იგი თვითონ თავის თავს ემთხვევა (იხ. § 85).



ნახ. 91.

ამის გამო, გვექნება:

$$\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1, \Delta_2}=\operatorname{tg}\widehat{\bar{P}_1, \bar{P}_2}; \tag{1}$$

პირიქით: ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}=\widehat{\bar{P}_1, \bar{P}_2}+k\pi$.

თუ Δ_1 და Δ_2 წრფეები მოცემული არიან ზოგადი სახის განტოლებებით

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{და} \quad A_2x+B_2y+C_2=0, \tag{2}$$

მაშინ შეგვიძლიან ავიღოთ:

$$\overline{P}_1=(B_1,\ -A_1),\quad \overline{P}_2=(B_2,\ -A_2). \tag{3}$$

თუ ახლა კოორდინატებს მართხუთხოვანად ჩავთვლით, შესაძლებლობა გვექნება § 43-ის (3) ფორმულა გამოვიყენოთ, სადაც უნდა ჩავსვათ:

$$\varphi=\widehat{\overline{P}_1,\ \overline{P}_2},\quad X_1=B_1,\quad Y_1=-A_1,\quad X_2=B_2,\quad Y_2=-A_2.$$

ამნაირად მივიღებთ საძიებელ ფორმულას:

$$\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2} \tag{4}$$

თუ წრფეები მოცემული არიან დაყვანილი განტოლებებით:

$$y=a_1x+b_1,\ y=a_2x+b_2, \tag{5}$$

მაშინ (4) ფორმულა მოგვცემს (მასში უნდა შევიტანოთ: $A_1=a_1$, $B_1=-1$, $A_2=a_2$, $B_2=-1$):

$$\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}. \tag{6}$$

ეს ფორმულა კარგად უნდა გვახსოვდეს; არ უნდა დავივიწყოთ ისიც, რომ ასოების მიმდევრობას აქ უთუოდ მნიშვნელობა აქვს. (მიაქციეთ ყურადღება, რომ მრიცხველში იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი უნდა გამოვაკლოთ, რომლიდანაც კუთხე აითვლება).

სავარჯიშო მაგალითები (კოორდინატები მართკუთხოვანია)

1. იპოვეთ კუთხე Δ_1 და Δ_2 წრფეთა შორის, რომელთა განტოლებანი არიან:

$$x-y-1=0 \text{ და } 2x+3y+2=0.$$

$\perp$

პას. $\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=-5$.

2. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეთა შორის:

$$2x-5y+5=0 \text{ და } 5x+2y+12=0.$$

პას. $\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=\infty$, ესე იგი წრფეები ურთიერთ მართობული არიან.

3. იპოვეთ კუთხე შემდეგ წრფეთა შორის:

$$x-1=0 \text{ და } 2x+2y+5=0.$$

პას. $\operatorname{tg}\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=1$, $\widehat{\Delta_1,\ \Delta_2}=\frac{\pi}{4}+k\pi$.

97. ამოცანა 5. ორი წრფის მართობულობის პირობის პოვნა. ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია. თუ Δ_1 და Δ_2 წრფეები ურთიერთ მართობული არიან, მაშინ:

$$\operatorname{tg} \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \infty, \qquad (1)$$

საიდანაც, წინა პარაგრაფის (4) ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \qquad (2)$$

სწორედ ამაში მდგომარეობს Δ_1 და Δ_2 წრფეების მართობულობის პირობა.

თუ წრფეები მოცემული არიან დაყვანილი განტოლებებით:

$$y = a_1x + b_1, \quad y = a_2x + b_2.$$

მაშინ მართობულობის პირობა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$(3) \qquad a_1a_2 + 1 = 0 \text{ ანუ } a_2 = -\frac{1}{a_1}. \qquad 4)$$

უკანასკნელი პირობა კარგად უნდა გვახსოვდეს. სიტყვიერად ის შემდეგნაირად გამოითქმის: ურთიერთ მართობული წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები მოპირდაპირენი არიან როგორც სიდიდით, ისე ნიშნით.

შევნიშნოთ, რომ (2) ფორმულა უშუალოდ გამომდინარეობს მიმართულების ვექტორთა $\overline{P}_1 = (B_1, -A_1)$ და $\overline{P}_2 = (B_2, -A_2)$ მართობულობის პირობისაგან, მართლაც, $\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = B_1B_2 + A_1A_2$; მაგრამ $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორთა მართობულობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = 0$, საიდანაც პირდაპირ გამომდინარეობს (2).

გავიხსენოთ, რომ ამ ორი უკანასკნელი პარაგრაფის ფორმულები შეეხებიან მართკუთხოვან კოორდინატებს, მაშინ როდესაც პარალელობის პირობა მიღებული იყო ჩვენს მიერ ზოგადი შემთხვევისათვის (§ 93).

ძნელი არაა მართობულობის პირობის მიღება ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევისათვის, თუ § 55-ის ფორმულებით ვისარგებლებთ (იხ. ვარჯიშობა) ორი ვექტორის ოდენური ნამრავლისათვის.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი (კოორდინატები მართკუთხოვანია)

1. იპოვეთ იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი a, რომელიც მართობულია წრფისა: $y = -3x + 1$.

პას. $a = +\frac{1}{3}$.

2. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები: $x-5y+1=0$ და $5x+y+8=0$ ურთიერთ მართობულნი არიან.

3. გამოსახეთ მართობულობის პირობა წრფეთათვის:

$$Ax+By+C=0, \quad \frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}.$$

პას. $\dfrac{A}{L}=\dfrac{B}{M}$.

4. გამოსახეთ მართობულობის პირობა შემდეგი წრფეებისათვის:

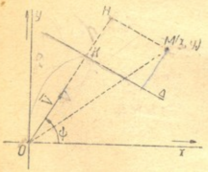
$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1} \quad \text{და} \quad \frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}.$$

პას. $L_1L_2+M_1M_2=0$.

98. ამოცანა 6. *ალებულ წერტილსა და ალებულ წრფეს შორის მანძილის პოვნა.* წარმოვიდგინოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია და ვთქვათ განსახილავი Δ წრფე მოცემულია ნორმალური განტოლებით (§ 92):

$$x\cos\psi+y\sin\psi-p=0. \tag{1}$$

თუ $M(x_1, y_1)$ არის მოცემული წერტილი (ნახ. 92), მაშინ მისი მანძილი Δ წრფემდე, ცხადია, KH ნაკვეთის სიგრძის ტოლი იქნება, სადაც K არის O-დან Δ-ზე ჩამოშვებული მართობის ფუძე, ხოლო H არის M წერტილის მართკუთხოვანი გეგმილი ამ მართობზე (ან მის გაგრძელებაზე). *ამ მანძილს მივაწეროთ გარკვეული ნიშანი;* სახელდობრ, M წერტილის Δ წრფემდე მანძილად ვიგულისხმოთ $\overline{KH}$ ვექტორის ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{V}$ მგეზავის გასწვრივ (ჩვენ აქ ვიყენებთ § 92-ის აღნიშვნებს).



ნახ. 92.

ეს ნიშნავს, რომ h მანძილს ჩვენ ჩავთვლით დადებითად, როცა M წერტილი და კოორდინატთა სათავე Δ წრფის სხვადასხვა მხარეზე იმყოფებიან; წინააღმდეგ შემთხვევაში h იქნება უარყოფითი. ეს კრიტერიუმი გამოუსადეგარია, თუ Δ გაივლის O-ზე; მაგრამ, ცხადია, რომ ყველა შემთხვევებში Δ-ს ერთსა და იმავე მხარეზე მდებარე წერტილებს შეეფერებიან ერთი და იგივე ნიშნის მქონე h-ის მნიშვნელობანი, ხოლო სხვადასხვა მხარეზე მდებარე წერტილებს—მნიშვნელობანი, რომელთაც სხვადასხვა ნიშანი აქვთ.

ცხადია გვაქვს: $OH = \overline{OM} \cdot \overline{V}$, სადაც OH აღნიშნავს $\overline{OH}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\overline{V}$-ს გასწვრივ; გარდა ამისა, $OK = p$, ამიტომ $h = \overline{OM} \cdot \overline{V} - p$.

მაგრამ $\overline{OM} = (x_1,\ y_1)$, $\overline{V} = (\cos\psi, \sin\psi)$. მაშასადამე, $\overline{OM} \cdot \overline{V} = x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi$, საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$h = x_1 \cos\psi + y_1 \sin\psi - p. \tag{2}$$

მაშ, გვაქვს წესი: იმისათვის, რომ ვიპოვოთ მანძილი წერტილიდან წრფემდე, აღებული წრფის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეში მიმდინარე კოორდინატების მაგიერ უნდა ჩავსვათ მოცემული წერტილის კოორდინატები[1].

თუ წრფის განტოლება ზოგადი სახითაა მოცემული

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

მაშინ ამოცანის ამოსახსნელად საკმარისია ამ განტოლების ნორმალურ სახეზე დაყვანა ორივე მხარის მანორმალებელ (მაწესებელ) λ მამრავლზე გამრავლებით, სადაც

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}; \tag{4}$$

ნიშანი აქ შერჩეული უნდა იყოს § 92-ში ნათქვამის თანახმად.

მკითხველს მოეთხოვება დაამტკიცოს, რომ აქ მოყვანილი წესი წერტილიდან წრფემდე მანძილის საპოვნელად გამოსაყენებელია აგრეთვე ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაშიაც. მაგრამ ახლა კი მაწესებელი (მანორმალებელი) მამრავლი მოიცემა ფორმულით (§ 92):

$$\lambda = \frac{\sin\nu}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\nu}}, \tag{4a}$$

და არა (4) ფორმულით.

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ მანძილი სათავიდან წრფემდე: $x + 2y - 1 = 0$.

   პას. $\dfrac{0 + 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

---

[1]) რომელიმე წირის $\Phi(x, y) = 0$ განტოლებაში შემავალი კოორდინატები x და y ხშირად იწოდებიან მიმდინარე კოორდინატებად.

2. იპოვეთ მანძილი (3,5) წერტილიდან წრფემდე: $2x+y+2=0$.

პას. $\dfrac{2\cdot3+5+2}{-\sqrt{2^2+1^2}}=-\dfrac{13}{\sqrt{5}}$.

3. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ წრფეთა შორის:

$$2x+3y+6=0,\quad 2x+3y-1=0.$$

(მითითება. აიღეთ ერთერთ წრფეზე რომელიმე წერტილი და იპოვეთ მისი მანძილი მეორემდე)

პას. $h=\dfrac{7}{\sqrt{13}}$.

99. ამოცანა 7. იპოვეთ ის ფარდობა, რომლითაც კვეთს აღებული წრფე ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნაკვეთს. ვთქვათ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ არიან მოცემული წერტილები და M არის M_1M_2 წრფისა და მოცემული Δ წრფის გადაკვეთის წერტილი (შეადგინეთ ნახაზი!). ცხადია, საძიებელი ფარდობა: $k=\dfrac{M_1M}{MM_2}$, რომელსაც ჩვენ ნიშანს მივაწერთ ისე როგორც § 36-ში, თავისი სიდიდით და ნიშნით $\left(-\dfrac{h_1}{h_2}\right)$ გამოსახულების ტოლია, სადაც h_1 და h_2 აღნიშნავენ შესაბამისად M_1 და M_2 წერტილების მანძილებს Δ წრფემდე, გარკვეული ნიშნის თანდართვით წინა პარაგრაფის თანახმად. ნიშანი $(-)$ უკანასკნელი წილადის წინ იმიტომ არის აღებული, რომ, თუ M_1 და M_2 წერტილები Δ წრფის სხვადასხვა მხარეზე მდებარეობენ, მაშინ h_1 და h_2 სიდიდენი მოპირდაპირე ნიშნის იქნებიან (წინა პარაგრაფში ნათქვამის თანახმად), ხოლო k ფარდობა ამ შემთხვევაში დადებითი უნდა იყოს (§ 36); პირიქით თუ M_1 და M_2 მდებარეობენ Δ-ს ერთსადაიმავე მხარეზე, მაშინ h_1 და h_2 ერთნაირი ნიშნის არიან, ხოლო k ფარდობა უნდა იყოს უარყოფითი.

მაგრამ ჩვენ გვაქვს (იხ. წინა პარაგრაფი): $h_1=\lambda(Ax_1+By_1+C)$, $h_2=\lambda(Ax_2+By_2+C)$, სადაც $Ax+By+C$ არის Δ წრფის განტოლების მარცხენა მხარე, ხოლო λ მაწესებელი მამრავლია. მაშასადამე, საბოლოოდ გვექნება:

$$k=\frac{M_1M}{MM_2}=-\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}. \tag{1}$$

ცხადია, ამ პარაგრაფში ნათქვამი შეეხება არა მხოლოდ მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევას, არამედ ირიბკუთხოვანისაც.

100. დამოუკიდებელ მუდმივთა რიცხვი წრფის განტოლებაში. სანამ გადავალთ იმ ამოცანების ამოხსნაზე, რომლებშიაც მოითხოვება წრფის განტოლების პოვნა ამათუიმ პირობების მიხედვით, გავაკეთოთ ზოგადი ხასიათის შემდეგი შენიშვნა.

წრფის დაყვანილი განტოლება $y=ax+b$ შეიცავს ორ მუდმივს a და b-ს, რომელნიც სავსებით განსაზღვრავენ წრფის მდებარეობას. ამის მიხედვით, ამბობენ, რომ წრფის მდებარეობა სიბრტყეზე განისაზღვრება ორი დამოუკიდებელი მუდმივით. ამიტომ, ცხადია, რომ წრფის პოვნის ამოცანა სრულიად განსაზღვრული იქნება მხოლოდ მაშინ, როცა მოცემულია ო რ ი პირობა[1] (რომელნიც საშუალებას გვაძლევენ ორივე უცნობი მუდმივი a და b განვსაზღვროთ).

ამას ვითომც ეწინააღმდეგება წრფის ზოგადი განტოლება $Ax+By+$ $+C=0$, რომელიც ს ა მ მუდმივს შეიცავს: A, B და C-ს. ნამდვილათ კი არსებითი მნიშვნელობა თვით ამ სამ სიდიდეს კი არ აქვს, არამედ რომელიმე ო რ ი მათგანის ფარდობას მესამისადმი. ეს იქიდან წარმოიშობა, რომ, თუ წინა განტოლებაში ყველა კოეფიციენტს მათი პროპორციული სიდიდეებით შევცვლით, იგი გამოსახავს იმავე წრფეს.

მაგალითად, თუ ცნობილია, რომ საძიებელი წრფის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ ორ თანაფარდობას: $\frac{A}{C}=3$, $\frac{B}{C}=5$, ან რაც იგივეა: $\frac{A}{3}=\frac{B}{5}=\frac{C}{1}$, ეს უკვე საკმარისი იქნება, რომ საძიებელი წრფის განტოლება დაიწეროს. ეს იქნება: $3x+5y+1=0$, ან ყოველი სხვა განტოლება, რომელიც აქედან მიიღება მუდმივ მამრავლზე გამრავლებით, მაგალითად განტოლება: $6x+10y+2=0$.

101. წრფეთა კონა. წინა პარაგრაფში ნათქვამიდან აშკარაა, რომ, თუ ჩვენს წინაშე დაისვა საკითხი წრფის მოძებნის შესახებ ე რ თ ი მოცემული პირობის მიხედვით, ასეთი ამოცანა განუზღვრელი იქნება, ესე იგი, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, მას უამრავი ამონახსნი ექნება, რომელნიც უკვე დამოკიდებულნი არიან ორზე კი არა, არამედ ერთს დამოუკიდებელ მამრავლზე. მაგალითს შეიძლება წარმოადგენდეს ერთს მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის მოძებნის ამოცანა. მას აქვს უამრავი ამონახსნი.

[1] აქ სიტყვა „პირობა“ ჩვენ გვესმის, როგორც მოთხოვნილება, რომელიც ანალიზურად შეიძლება ერთი განტოლებით გამოისახებოდეს. მაგალითად, მოთხოვნილება რომ წრფე $y=ax+b$ გადიოდეს (3,5) წერტილზე გამოისახება ერთი ტოლობით $5=a\,.\,3+b$; მაშასადამე ჩვენ აქ გვაქვს ერთი „პირობა“.

$M(x_0, y_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ეწოდება წრფეთა კონა, რომლის ცენტრია M_0.

თუ (L, M) აღნიშნავენ იმ წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს, რომელიც ეკუთვნის კონას ცენტრით M_0 წერტილში, მაშინ ამ წრფის განტოლება იქნება (§ 84):

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M} \tag{1}$$

L და M-ის შეცვლით ჩვენ შეგვიძლიან წრფის მიმართულების ვექტორს ნებისმიერი გეზი მივცეთ, ესე იგი კონის ნებისმიერი წრფე მივიღოთ. მაშასადამე (1) განტოლება, სადაც L და M ნებისმიერია (ერთდროულად ნულის არატოლი), წარმოადგენს კონის წრფეთა საერთო განტოლებას. ეს განტოლება, როცა $L \neq 0$, შეიძლება ასეც გადაიწეროს.

$$y-x_0=a(x-x_0) \tag{2}$$

სადაც $a=\frac{M}{L}$ არის კონის წრფის საკუთხო კოეფიციენტი. თუ $L=0$ (ე. ი. Oy ღერძის პარალელური წრფისათვის) გვექნება:

$$x-x_0=0. \tag{3}$$

ეს უკანასკნელი განტოლება მიზანშეწონილია განხილულ იქმნეს როგორც (2) განტოლების კერძო შემთხვევა, იმ შეთანხმებით, რომ (3) განტოლება შეეფერება შემთხვევას $a=\infty$[1].

როგორც ეს მოსალოდნელი იყო, აღებულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება დამოკიდებულია ერთს დამოუკიდებელ, ნებისმიერ მუდმივზე; თუ განტოლება დაწერილია (2) სახით, მაშინ ასეთ მუდმივად იქნება საკუთხო კოეფიციენტი a.

მივცემთ რა a-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას, ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა წრფეებს, რომელნიც ერთსადაიმავე M_0 წერტილზე გაივლიან, და თუ შევთანხმდებით, რომ a-ს მიენიჭოს აგრეთვე ∞ მნიშვნელობაც (იმ გაგებით, როგორც ზევით განვმარტეთ), მაშინ შეიძლება დადასტურდეს, რომ (2) განტოლება, a კოეფიციენტის სათანადო შერჩევით, გამოსახავს ყოველ წრფეს, აღებულ წერტილზე გამავალს.

---

[1] თუ (2) განტოლებას დავწერთ $x-x_0=\frac{y-y_0}{a}$ სახით და დაუშვებთ, რომ $a=\infty$, მივიღებთ $x-x_0=0$.

შევნიშნოთ კიდევ, რომ მოცემულ (x_0, y_0) წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლება (1) შეიძლება ასეც გადაიწეროს:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

სადაც A და B არიან ნებისმიერი მუდმივები, შემდეგნაირად განსაზღვრულნი: $A=M$, $B=-L$ (A და B ერთდროულად ნულები არ არიან).

102. ამოცანა 8. *ალებულ წერტილზე გამავალი და ალებული მიმართულების პარალელური წრფის განტოლების პოვნა.* თუ ალებული მიმართულების საკუთხო კოეფიციენტი არის a, ხოლო $M(x_1, y_1)$ ალებული წერტილია, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება, ცხადია, იქნება:

$$y-y_1=a(x-x_1). \qquad (1)$$

თუ ალებული მიმართულება მოცემულია საკუთხო კოეფიციენტით კი არა, არამედ მიმართულების (L, M) კოეფიციენტებით, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება შეიძლება ასეც დაიწეროს:

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}, \qquad (2) \qquad \cancel{(1)}$$

რაც, არსებითად, იგივეა.

103 ამოცანა 9. *მოცემულს ორ $M_1(x_1, y_1)$ და $M_2(x_2, y_2)$ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლების პოვნა.* ამისათვის საკმარისია წინა პარაგრაფის (2) განტოლებაში კოეფიციენტები L და M ისე შევარჩიოთ, რომ წრფე M_2 წერტილზედაც გადიოდეს. შევნიშნავთ რა, რომ ვექტორი $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$ მდებარეობს საძიებელ წრფეზე, შეგვიძლიან იგი მივიღოთ მისი მიმართულების ვექტორად, ესე იგი შეგვიძლიან დავწეროთ, რომ $L=x_2-x_1$, $M=y_2-y_1$ და მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება ასე დაიწერება:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1)$$

ეს განტოლება შეიძლება ერთბაშად დაწერილიყო სამი (x, y), (x_1, y_1), (x_2, y_2) წერტილის კოლინეარობის პირობის თანახმად (§ 34).

(1) განტოლება, ცხადია, შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0,$$

ან (იხ. ანალოგიური გარდაქმნა § 45-ში) კიდევ შემდეგი უფრო სიმეტრიული სახით:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

104. ამოცანა 10. აღებულ წერტილზე გამავალი და აღებული წრფის მართობული წრფის განტოლების პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ვთქვათ $M_1(x_1, y_1)$ მოცემული წერტილია და

$$y = a_1x + b_1 \qquad (1)$$

მოცემული წრფეა. M_1-ზე გამავალი ნებისმიერი წრფის განტოლებას აქვს სახე:

$$y - y_1 = a(x - x_1); \qquad (2)$$

იმისათვის, რომ ეს წრფე მოცემული წრფის მართობული იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ (§ 97):

$$a = -\frac{1}{a_1}. \qquad (3)$$

ჩავსვამთ რა ამ მნიშვნელობას წინა განტოლებაში, მივიღებთ:

$$y - y_1 = -\frac{1}{a_1}(x - x_1), \qquad (4)$$

და ამით ჩვენი ამოცანა ამოხსნილია.

თუ აღებული წრფე მოცემულია მიმართულების კოეფიციენტებიანი განტოლებით: $\frac{x - x_0}{L} = \frac{y - y_0}{M}$, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება იქნება:

$$L(x - x_1) + M(y - y_1) = 0;$$

ეს გამომდინარეობს როგორც წინა ამოხსნიდან (ჩვენ შემთხვევაში $a = -\frac{M}{L}$), აგრეთვე იმ ფაქტიდან (§ 91), რომ (A, B) ვექტორი მართობია $Ax + By + C = 0$ წრფისა.

105. ამოცანა 11. მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემულ წრფესთან მოცემული კუთხის მდგენელი წრ-

ფის განტოლების პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ეს ამოცანა შეიცავს, როგორც კერძო შემთხვევას, წინა ამოცანასაც და § 102-ის ამოცანასაც.

ვთქვათ α არის კუთხე, რომელიც უნდა შეადგინოს საძიებელმა წრფემ მოცემულ წრფესთან ისე, რომ ეს კუთხე აითვლება მოცემული წრფიდან დადებითი მიმართულებით (§ 96). წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, ჩვენ უნდა განვსაზღვროთ a შემდეგი პირობიდან (§ 90):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a - a_1}{1 + aa_1}.$$

თუ ამ განტოლებას a-ს მიმართ ამოვხსნით და ნაპოვნ მნიშვნელობას წინა პარაგრაფის (2) განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას:

$$y - y_1 = \frac{a_1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - a_1 \operatorname{tg}\alpha}(x - x_1).$$

თუ კუთხეების ათვლის მიმართულება აღნიშნული არაა, მაშინ $\operatorname{tg}\alpha$-ს მაგიერ $\pm\operatorname{tg}\alpha$ უნდა ავიღოთ. ამ შემთხვევაში ამოცანას ორი პასუხი ექნება; გამონაკლისს შეადგენენ შემთხვევები $\alpha = 0$ და $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ორს წინა პარაგრაფში განხილულნი, როდესაც ამოცანას მხოლოდ ერთი ამოხსნა აქვს.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი (§ 101—105-სათვის)

1. იპოვეთ წრფე $(6, -2)$ წერტილზე გამავალი და პარალელური $3x - 8y + 2 = 0$ წრფისა.

პას. $3(x-6) - 8(y+2) = 0$.

2. დაამტკიცეთ, რომ იმ წრფის განტოლებას, რომელიც (x_0, y_0) წერტილზე გადის და $Ax + By + C = 0$ წრფის პარალელურია, შემდეგი სახე აქვს:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

3. დაამტკიცეთ, რომ იმ წრფის განტოლებას, რომელიც (x_0, y_0) წერტილზე გადის და $Ax + By + C = 0$ წრფის მართობია, შემდეგი სახე აქვს (მართკუთხოვან კოორდინატებში):

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

4. იპოვეთ $(2, 3)$ წერტილზე გამავალი და $3x - 8y + 2 = 0$ წრფის მართობი წრფე.

პას. $8(x-2) + 3(y-3) = 0$.

5. იპოვეთ (2,3) და (7,8) წერტილებზე გამავალი წრფე

პ ა ს. $\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{8-3}$, ანუ $x-y+1=0$.

6. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც (1,3) წერტილზე გაივლის და $2x-y+5=0$ წრფესთან შეადგენს კუთხეს $60°$-ს.

პ ა ს. თუ კუთხე აითვლება აღებული წრფიდან, მაშინ საძიებელი წრფის განტოლება იქნება:

$$y-3=\frac{2+\sqrt{3}}{1-2\sqrt{3}}(x-1).$$

თუ ათვლის მიმართულება აღნიშნული არაა, მაშინ ამოცანას ორნაირი პასუხი ექნება (მეორე ამონახსნს მივიღებთ პირველიდან, თუ $\sqrt{3}$-ს შევცვლით $-\sqrt{3}$-ით).

106. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლება. ხანდისხან წრფეთა კონის ცენტრი უშუალოდ არ მოიცემა, არამედ მოცემულია კონის კუთვნილი ორი წრფე. მაშინ კონის ცენტრი შეიძლება ვიპოვოთ, როგორც ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილი.

მაგრამ გაცილებით უფრო მიზანშეწონილია ორი მოცემული წრფით განსაზღვრული კონის წრფეთა ზოგადი განტოლების უშუალო პოვნა, სხვანაირად რომ ვთქვათ, ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე გამავალ წრფეთა ზოგადი განტოლების პოვნა.

ვთქვათ

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \qquad (1)$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \qquad (2)$$

არიან მოცემული წრფეების განტოლებანი.

განვიხილოთ განტოლება:

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2)=0, \qquad (3)$$

სადაც l_1 და l_2 აღნიშნავენ ნებისმიერ მუდმივ სიდიდეებს, რომელნიც ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან; ეს განტოლება მიიღება (1) და (2) განტოლებათაგან მათი l_1 და l_2-ზე გამრავლებით და წევრობრივი შეკრებით.

ცხადია, რომ (3) განტოლება, რომელიც შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს:

$$(3a) \qquad (l_1A_1+l_2A_2)x+(l_1B_1+l_2B_2)y+(l_1C_1+l_2C_2)=0$$

წარმოადგენს რაღაც წრფის განტოლებას (ვინაიდან ეს არის პირველი ხარისხის განტოლება).

დავამტკიცოთ ახლა, რომ (3) წრფე აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ესე იგი დავამტკიცოთ, რომ (3) წრფე გაივლის (1) და (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილზე, როგორიც არ უნდა იყვნენ l_1 და l_2 მუდმივების მნიშვნელობანი.

მართლაც, თუ x_0, y_0 აღნიშნავენ (1) და (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს, მაშინ $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$, $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$, და ამიტომ:

$$l_1(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+l_2(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0,$$

ესე იგი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებენ (3) განტოლებას, სხვანაირად რომ ვთქვათ, $(x_0,\ y_0)$ წერტილი (3) წრფეზე ძევს, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

შემოვიღოთ სიმოკლისათვის შემდეგი აღნიშვნანი: $F_1(x,\ y)=A_1x+B_1y+C_1$, $F_2(x,\ y)=A_2x+B_2y+C_2$.

$F_1(x,\ y)$ და $F_2(x,\ y)$ წარმოადგენენ x და y ცვლადების წრფივ ფუნქციებს. ასეთი აღნიშვნების მიხედვით, (3) განტოლება ასე გადაიწერება:

$$l_1F_1(x,\ y)+l_2F_2(x,\ y)=0. \tag{4}$$

მივცემთ რა l_1 და l_2-ს სხვადასხვა მნიშვნელობას, ჩვენ მივიღებთ სხვადასხვა წრფეს (1) და (2) წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე გამავალს.

არსებითად რომ ვთქვათ, (4) წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია თვით l_1 და l_2 სიდიდეებზე კი არა, არამედ მათ ფარდობაზე $k=\frac{l_2}{l_1}$; მართლაც, გავყოფთ რა (4)-ს l_1-ზე, ჩვენ დავიყვანთ მას სახეზე;

$$F_1(x,\ y)+kF_2(x,\ y)=0. \tag{5}$$

ეს ყოველ შემთხვევაში შეიძლება მოვახდინოთ, თუ კი $l_1\neq0$. მაგრამ, თუ $l_1=0$ (და მაშასადამე $l_2\neq0$, ვინაიდან პირობის თანახმად l_1 და l_2 არ შეიძლება ერთდროულად ნული იყოს), მაშინ (4) განტოლება შემდეგზე დაიყვანება: $F_2(x,\ y)=0$, ესე იგი (2) წრფის განტოლებაზე.

შევთანხმდეთ ახლა იმაში, რომ (5) განტოლებაში k სიდიდეს შეუძლიან მიიღოს ∞ მნიშვნელობაც, თუ ჩავთვლით, რომ ასეთ შემთხვე-

ვაში (2) განტოლება დაიყვანება $F_2(x, y)=0$ განტოლებაზე[1], ამ განტოლების მიხედვით (4) და (5) განტოლებანი სრულიად ტოლფასი არიან.

შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ დავინახავთ, რომ (4) განტოლებაში l_1 და l_2 სიდიდეების სათანადო შერჩევით [ანუ k-ს სათანადო შერჩევით (5)-ში] ჩვენ შევძლებთ კონის ნებისმიერი წრფის პოვნას, ასე რომ (4) ან (5) განტოლება მართლაც არის მოცემული ორი წრფით განსაზღვრული კონის წრფეთა ზოგადი განტოლება.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ მოცემული წრფეები (1) და (2) იკვეთებიან რომელიმე წერტილში სასრული მანძილზე. ვნახოთ ახლა რას გამოსახავს (4) განტოლება, თუ მოცემული წრფეები პარალელური არიან, ესე იგი, თუ $A_1=mA_2$, $B_1=mB_2$, სადაც m რომელიმე რიცხვია. ამ შემთხვევაში (4) განტოლება, ანუ რაც იგივეა (3a) განტოლება, ღებულობს სახეს:

$$A'x+B'y+C'=0, \tag{6}$$

სადაც $A'=(ml_1+l_2)A_2$, $B'=(ml_1+l_2)B_2$, $C'=l_1C_1+l_2C_2$. უკანასკნელ ტოლობათაგან პირველი ორი გვიჩვენებს, რომ l_1 და l_2-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (6) განტოლების პირველი ორი კოეფიციენტი (2) განტოლების პირველი ორი კოეფიციენტის პროპორციულია, ეს კი ნიშნავს, რომ (6) განტოლებით გამოსახული წრფე l_1 და l_2-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (2) განტოლებით გამოსახული წრფის პარალელურია, ე. ი. ორივე მოცემული წრფის პარალელურია.

როგორც დავინახავთ შემდეგ პარაგრაფში, ყოველი წრფე, მოცემულთა პარალელური, შეიძლება (6)-დან იყოს მიღებული l_1 და l_2 რიცხვების სათანადო შერჩევით. პარალელურ წრფეთა ერთობლიობას აგრეთვე კონა ეწოდება, მაგრამ ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ კონის ცენტრი უსასრულობაშია, ანუ კონა არასაკუთრივია.

დასასრულს, თუ (1) და (2) წრფეები თანამთხვეულნი არიან, მაშინ ჩვენ გვექნება: $A_1=mA_2$, $B_1=mB_2$, $C_1=mC_2$ (სადაც m რომელიმე რიცხვია), და (6) განტოლების სამივე კოეფიციენტი (2) განტოლების, ან რაც იგივეა, შესაბამ კოეფიციენტების პროპორციულია. მაშასადამე ამ განსაკუთრებულ შემთხვევაში l_1 და l_2-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის (6) განტოლება ერთსა და იმავე წრფეს გამოსახავს (იმავეს, რაც მოცე-

[1] თუ $F_1(x,y)+kF_2(x,y)=0$ განტოლებას შემდეგნაირად გადავწერთ: $\frac{1}{k}F_1(x, y)+$ $+F_2(x, y)=0$, და დაუშვებთ, რომ $k=\infty$, მივიღებთ $F_2(x, y)=0$ (იხ. § 101-ის გამოცანა).

მული განტოლებანი). შემდეგში ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ მოცემული წრფეები თანამთხვეულნი არ არიან.

107. ამოცანა 12. ორი მოცემული წრფის გადაკვეთის წერტილზე და მეორე მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის პოვნა. შევინარჩუნოთ წინა პარაგრაფის აღნიშვნები. ვთქვათ, გარდა ამისა, $M_1(x_1, y_1)$ არის რომელიმე მოცემული წერტილი, რომელიც არ ემთხვევა მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილს. ჩვენი ამოცანა ამოხსნილი იქნება, თუ ჩვენ ისე შევარჩევთ k პარამეტრს წინა პარაგრაფის (5) განტოლებაში, რომ ამ განტოლებით გამოსახული წრფე M_1 წერტილზე გადიოდეს. გამოვთქვამთ რა პირობას, რომ ეს წრფე $M_1(x_1, y_1)$ წერტილზე გაივლის, მივიღებთ:

$$F_1(x_1, y_1) + k F_2(x_1, y_1) = 0, \tag{1}$$

ან უფრო დაწვრილებით:

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 + k(A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2) = 0; \tag{2}$$

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ k:

$$k = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1}{A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2}. \tag{3}$$

თუ შევიტანთ k-ს ნაპოვნ მნიშვნელობას წინა პარაგრაფის (5) განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელი წრფის განტოლებას.

k პარამეტრმა შეიძლება მიიღოს ∞ მნიშვნელობა მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა მნიშვნელი $A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 = 0$. მაგრამ ეს ნიშნავს, რომ $M_1(x_1, y_1)$ წერტილი ძევს წინა პარაგრაფის მოცემულ (2) წრფეზე. მეორეს მხრივ, წინა პარაგრაფში მიღებული პირობის თანახმად, მნიშვნელობას $k = \infty$ ეთანადება წრფე: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, როგორც ეს უნდა იყოს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში საძიებელი წრფე მას უნდა დაემთხვეს.

რასაკვირველია, ყველაფერი აქ ნათქვამი შეეხება არასაკუთრივ კონასაც, ე. ი. როცა მოცემული წრფეები პარალელური არიან (მაგრამ არა თანამთხვეულნი).

მაშ, ამოცანას აქვს ყოველთვის ერთი და მხოლოდ ერთი ამოხსნა[1].

[1] გავიხსენოთ, რომ ჩვენ გამოვრიცხეთ ის შემთხვევა, როცა მოცემული წერტილი ემთხვევა მოცემულ წრფეთა გადაკვეთის წერტილს, ე. ი. როცა ერთდროულად: $A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 = 0$, $A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2 = 0$. ამას რომ ადგილი ქონდეს, მაშინ (3) ფორმულა მოგვცემდა k-სათვის განსაზღვრულ მნიშვნელობას $\frac{0}{0}$. ამ შემთხვევაში წინა პარაგრაფის (5) განტოლება სწყვეტს ამოცანას k-ს ყოველი მნიშვნელობისათვის.

[k მუდმივის უსასრულოდ-დიდი მნიშვნელობა რომ თავიდან ავიცილოთ, შეიძლება ვისარგებლოთ წინა პარაგრაფის (4) განტოლებით].

ჩვენ მიერ ამოხსნილი ამოცანა ამტკიცებს აგრეთვე იმასაც, რაც უკვე წინა პარაგრაფში გამოვთქვით, სახელდობრ, კონის კუთვნილი ყოველი წრფე შეიძლება მიღებულ იქმნეს ზოგადი განტოლებიდან: $F_1(x, y) + k F_2(x, y) = 0$, თუ k მუდმივს სათანადო მნიშვნელობას მივანიჭებთ. მართლაც, ჩვენ შეგვიძლიან k-ს გარკვეული შერჩევით მივიღოთ კონის წრფე, რომელიც სიბრტყის ნებისმიერ წერტილზე გაივლის, მაშასადამე, ჩვენ შეგვიძლიან მივიღოთ კონის ნებისმიერი წრფე.

108. პირობა იმისა, რომ სამი წრფე ერთ წერტილში იკვეთებოდეს. ვთქვათ მოცემულია სამი წრფე განტოლებებით:

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0, \quad F_3(x, y) = 0, \tag{1}$$

სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნები:

$$F_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1, \quad F_2(x, y) = A_2x + B_2y + C_2,$$
$$F_3(x, y) = A_3x + B_3y + C_3. \tag{2}$$

ყოველი იმ წრფის განტოლება, რომელიც პირველი ორი განტოლებით წარმოდგენილი წრფეების გადაკვეთაზე გაივლის, შეიძლება დაიწეროს, როგორც ამაში დავრწმუნდით, შემდეგნაირად:

$$l_1 F_1(x, y) + l_2 F_2(x, y) = 0 \tag{3}$$

კერძოდ, თუ მოცემულ წრფეთაგან მესამე გაივლის პირველი ორის გადაკვეთის წერტილზე, მაშინ წინა განტოლება, l_1 და l_2 მუდმივების სათანადო შერჩევით, უნდა გამოსახავდეს ამ მესამე წრფეს. ის კი ნიშნავს, რომ (3) განტოლების მარცხენა მხარე შეიძლება მხოლოდ მუდმივი მამრავლით განსხვავდებოდეს $F_3(x, y) = 0$ განტოლების მარცხენა მხარისაგან (§ 93); სხვანაირად რომ ვთქვათ, ჩვენ უნდა გვქონდეს იგივეობა: $l_1 F_1(x, y) + l_2 F_2(x, y) = k F_3(x, y)$, სადაც k რომელიმე მუდმივია, ნულისაგან განსხვავებული. თუ სიმეტრიისათვის k-ს აღვნიშნავთ $(-l_3)$-ით, მაშინ წინა იგივეობა შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$l_1 F_1(x, y) + l_2 F_2(x, y) + l_3 F_3(x, y) = 0. \tag{4}$$

(არ დაგვავიწყდეს, რომ წინა ტოლობა უნდა წარმოადგენდეს იგივეობას, ესე იგი უნდა დაკმაყოფილდეს ცვლადთა ყველა მნიშვნელობისათვის).

ცხადია, რომ პირიქითაც: თუ შეიძლება ისეთნაირად შევარჩიოთ ერთდროულად ნულის არატოლი სამი მუდმივი l_1, l_2, l_3, რომ ადგილი ქონდეს (4) იგივეობას, მაშინ მოცემული სამი წრფე გადაიკვეთებიან ერთ წერტილში.

ყველა აქ ნათქვამი შეეხება იმ შემთხვევასაც, როცა მოცემულ წრფეთაგან ორი იკვეთება უსასრულობაში (ე. ი. პარალელური არიან). მაშინ (4) პირობა გამოსახავს იმას, რომ მესამე წრფეც იკვეთება პირველ ორთან უსასრულობაში, ე. ი. მათი პარალელურია.

მაშ, იმისათვის, რომ სამი წრფე (1) იკვეთებოდეს ერთს (სასრულო ან უსასრულოდ შორეულ) წერტილში[1], აუცილებელი და საკმარისია, რომ შესაძლებელი იყოს ისეთი სამი l_1, l_2, l_3 რიცხვის შერჩევა, რომელთათვისაც (4) ტოლობა იგივეობად იქცევა.

მაგალითად წრფეები, წარმოდგენილნი განტოლებებით:

$$x+2y-1=0, \quad 2x+y-4=0, \quad 4x+5y-6=0,$$

გაივლიან ერთ წერტილზე, ვინაიდან გვაქვს იგივეობა:

$$2(x+2y-1)+1\,.\,(2x+y-4)+(-1)\,.\,(4x+5y-6)=0.$$

109. ამოცანა 13. მოცემულ წრფეთა გადაკვეთაზე გამავალი და მოცემული მიმართულების მქონე წრფის განტოლების პოვნა. ვთქვათ a არის მოცემული მიმართულების საკუთხო კოეფიციენტი. § 106-ის აღნიშვნების მიხედვით, ამოცანა დაიყვანება k მუდმივის განსაზღვრაზე განტოლებაში:

$$F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0 \qquad (1)$$

ისე, რომ ამ განტოლებით გამოსახული წრფის საკუთხო კოეფიციენტი იყოს a-ს ტოლი.

გადავწეროთ რა წინა განტოლებას შემდეგი სახით: $(A_1+kA_2)x+(B_1+kB_2)y+C_1+kC_2=0$, ვპოულობთ, რომ საძიებელი პირობა გამოისახება ტოლობით $-\dfrac{A_1+kA_2}{B_1+kB_2}=a$, რაც წარმოადგენს k-ს მიმართ პირველი ხარისხის განტოლებას; ამოვხსნით რა ამ განტოლებას და ჩავსვამთ k ს ნაპოვნ მნიშვნელობას (1)-ში, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას[2].

---

[1] სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს წრფეები რომ ეკუთვნოდენ ერთსა და იმავე კონას.

[2] მკითხველს მოეთხოვება გამოიკვლიოს ის შემთხვევა, როდესაც $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, ესე იგი როცა ჩვენ საქმე გვაქვს პარალელურ წრფეთა კონასთან. ამ შემთხვევაში ამოცანას ან სულ არ აქვს ამოხსნა, ან აქვს უამრავი.

ანალოგიური ამოხსნა აქვს ამოცანას: მოცემული წრფეების გა-დაკვეთაზე გამავალი და მოცემული მიმართულებისადმი მარ-თობული წრფის პოვნა (უფრო ზოგადად, მოცემულ მიმართულებასთან მოცემული კუთხის შემქმნელი) (იხ. § 104, 105).

110. ***k* მუდმივის გეომეტრიული მნიშვნელობა.** პარამეტრი k განტოლებაში

$$F_1(x, y)+k F_2(x, y)=0 \tag{1}$$

ღებულობს მეტად მარტივ გეომეტრიულ მნიშვნელობას, თუ $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$ წრფეების განტოლებანი მოცემული არიან ნორმალური სახით.

ამ შემთხვევაში, შემოვიღებთ რა § 92-ის აღნიშვნებს, თუ კოორ-დინატებს მართკუთხოვანად ჩავთვლით, გვექნება:

$$F_1(x, y)=x \cos \psi_1+y \sin \psi_1-p_1,$$

$$F_2(x, y)=x \cos \psi_2+y \sin \psi_2-p_2.$$

თუ შემდგომ ამისა, h_1 და h_2-ით აღვნიშნავთ (ნიშნის თანდართვით) რომელიმე $M(x, y)$ წერტილის მანძილებს შესაბამისად F_1 და F_2-მდე [1], მივიღებთ (§ 98):

$$h_1=x \cos \psi_1+y \sin \psi_1-p_1,$$

$$h_2=x \cos \psi_2+y \sin \psi_2-p_2.$$

ამიტომ (1) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს: $h_1+k h_2=0$, ანუ $k=-\frac{h_1}{h_2}$.

მაშასადამე, თუ ნიშანს ყურადღებას არ მივაქცევთ, k მუდმივი ტოლია იმ მანძილთა ფარდობისა, რომელზედაც (1) წრფეზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი დაშორებულია $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$ წრფეებიდან.

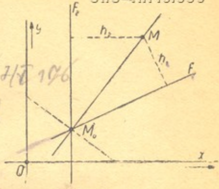
იმ პირობის მიხედვით, რომელსაც ადგილი აქვს მანძილთა ნიშნისათვის (§ 98), ცხადია, რომ k არის უარყოფითი სიდიდე, თუ (1) წრფე გაივლის F_1 და F_2-ს შორის არსებულს იმ კუთხეზე, სადაც კოორდინატთა სათავე იმყოფება და მის ვერტიკალურ კუთხეზე (როგორც 93 ნახაზზეა; წინააღმდეგ შემთხვევაში (ნახ. 93, პუნქტირი) k არის დადებითი.

---

[1] სიმოკლისათვის F წრფეს ჩვენ უწოდებთ $F(x, y)=0$ განტოლებით გამოსახულ წრფეს.

(ამ კრიტერიუმს ადგილი არ ექნება, თუ F_1 და F_2 წრფეთაგან ერთი გაივლის სათავეზე).

ცხადია, რომ ნათქვამი სამართლიანი დარჩება მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაშიაც, თუ წრფეთა განტოლებებს ნორმალური სახით ავიღებთ: $x\cos\alpha_1+y\cos\beta_1-p_1=0$ და $x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2=0$.



ნახ. 93.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გავლის სათავეზე და შემდეგ წრფეთა გადაკვეთაზე: $3x+y-1=0$ და $2x-8y+3=0$.

პას. $11x-5y=0$.

2. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გადის $x+y+1=0$ და $x+2y-2=0$ წრფეთა გადაკვეთაზე და პარალელურია $x=3y+5$ წრფისა.

პას. $x-3y+13=0$.

3. იპოვეთ ის წრფე, რომელიც გადის $x-y-5=0$ და $2x-3y-1=0$ წრფეთა გადაკვეთაზე და მართობულია $x+2y=0$ წრფისა.

პას. $2x-y-19=0$.

4. იპოვეთ იმ კუთხეების ბისექტრისათა განტოლება, რომელნიც მოთავსებული არიან ორ წრფეს შორის, თუ ამ წრფეთა ნორმალური განტოლებანი არიან: $F_1(x, y)=0$ და $F_2(x, y)=0$.

ამოხსნა: წრფეები F_1 და F_2 შეადგენენ ორ კუთხეს, რომელნიც ერთი მეორის დამატებას წარმოადგენენ π-მდე. მაშასადამე, საძიებელი ბისექტრისი ორი იქნება. თუ განტოლებაში: $F_1(x, y)+kF_2(x, y)=0$ მივცემთ k მუდმივს შესაფერ მნიშვნელობას, მივიღებთ მათ განტოლებას.

ვინაიდან ბისექტრისის თითოეული წერტილი ერთნაირადაა დაშორებული მოცემულ F_1 და F_2 წრფეებისაგან, ამიტომ წინა პარაგრაფის თანახმად გვექნება: $k=\pm 1$.

ცხადია, რომ მნიშვნელობას $k=+1$ შეეფერება ერთი ბისექტრისი (სახელდობრ ის, რომელიც არ გაივლის სათავის შემცველ კუთხეზე), ხოლო მნიშვნელობას $k=-1$ შეეფერება მეორე ბისექტრისი.

თუ წრფეთა განტოლებანი ზოგადი სახით არიან მოცემული, მაშინ მათ შორის კუთხეების ბისექტრისათა განტოლებანი შემდეგნაირად დაიწერებიან (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში):

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}};$$

ორს შესაძლებელ ნიშანს ორი ბისექტრისი ეთანადება.

5. ორი წრფის მართობულობის პირობის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ წინა მაგალითში მოხსენებული ორი ბისექტრისი ურთიერთ მართობული არიან.

6. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შინაგანი კუთხეების სამივე ბისექტრისი ერთ წერტილში იკვეთება.

დამტკიცება. ვთქვათ, რომ იმ წრფეების ნორმალური განტოლებანი, რომელნიც სამკუთხედის გვერდებს წარმოადგენენ, არიან $F_1(x, y)=0$, $F_2(x, y)=0$, $F_3(x, y)=0$. თუ სათავე იმყოფება სამკუთხედის შიგნით (რაც ყოველთვის შეგვიძლიან ვიგულისხმოთ), მაშინ შინაგანი კუთხეების ბისექტრისათა განტოლებანი იქნებიან (იხ. ვარჯ. 4):

$$F_2(x, y)-F_3(x, y)=0,\ F_3(x, y)-F_1(x, y)=0,\ F_1(x, y)-F_2(x, y)=0. \qquad (*)$$

მაგრამ, ვინაიდან ჩვენ გვაქვს იგივეობა (სიმოკლისათვის აქ არ ვწერთ x და y-ს): $1\,.(F_2-F_3)+1\,.(F_3-F_1)+1.(F_1-F_2)=0$, ამიტომ § 108-ის თანახმად (*) განტოლებებით წარმოდგენილი წრფეები გაივლიან ერთ წერტილზე (ჩვენ შემთხვევაში $l_1=l_2=l_3=1$).

7. დაამტკიცეთ (იხ. წინა მაგალითი), რომ სამკუთხედის ორი გარეგანი კუთხის ბისექტრისები და მათი არა მოსაზღვრე შინაგანი კუთხის ბისექტრისი იკვეთებიან ერთ წერტილში.

დამტკიცება. წინა მაგალითის აღნიშვნების მიხედვით, იმ გარეგანი კუთხეების ბისექტრისები, რომელთაც შეადგენენ გვერდები F_2, F_3 და F_3, F_1, მოიცემიან განტოლებებით: $F_2+F_3=0$, $F_3+F_1=0$.

F_1 და F_2 გვერდებს შორისი შინაგანი კუთხის ბისექტრისი მოიცემა $F_1-F_2=0$ განტოლებით. მაგრამ, ვინაიდან: $1\,.(F_2+F_3)+(-1)\,.(F_3+F_1)+$ $+1\,.(F_1-F_2)=0$, ამიტომ წინადადება დამტკიცებულია.

8. დაამტკიცეთ, რომ რწყვილ-რწყვილად აღებული სამი წრეწირის რადიკალური ღერძები იკვეთებიან ერთ წერტილში (ეს წერტილი იწოდება მოცემული სამი წრეწირის **რადიკალურ ცენტრად**).

დამტკიცება: თუ $x^2+y^2+2A_1x+2B_1y+C_1=0$, $x^2+y^2+2A_2x+2B_2y+$ $+C_2=0$, $x^2+y^2+2A_3x+2B_3y+C_3=0$ არიან აღებულ წერტილთა განტოლებანი, მაშინ რადიკალური ღერძების განტოლებანი იქნებიან (§ 95, ვარჯ. 3):

$2(A_1-A_2)x+2(B_1-B_2)y+C_1-C_2=0$ (პირველი და მეორე წრეწირისათვის)
$2(A_2-A_3)x+2(B_2-B_3)y+C_2-C_3=0$ (მეორე და მესამე ")
$2(A_3-A_1)x+2(B_3-B_1)y+C_3-C_1=0$ (მესამე და პირველი ")

თუ შევკრებთ ამ განტოლებათა მარცხენა მხარეებს, როგორც ადვილი დასანახია, ჩვენ მივიღებთ გამოსახულებას იგივურად ნულის ტოლს და აქედან გამომდინარეობს ჩვენ მიერ გამოთქმული დებულების სამართლიანობა.

თავი მეხუთე

წრფე და სიბრტყე სივრცეში

ფართეულის განტოლება. წირის განტოლება

წინა თავში ჩვენ გავიცანით სიბრტყეზე გეომეტრიის ძირითად საკითხს — განტოლებათა საშუალებით ბრტყელ წირთა წარმოდგენის საკითხს.

სამ განზომილების სივრცეში გვიხდება ერთგანზომილებიან სახეებთან (წირებთან) ერთად ორგანზომილებიანი სახეების (ფართეულების) განხილვაც.

დავიწყოთ ფართეულთა განხილვით, ვინაიდან ანალიზური წარმოდგენის თვალსაზრისით ისინი, ასე თუ ისე, ბრტყელი წირების ანალოგიური არიან.

მთელს ამ თავში კოორდინატთა სისტემა წრფივად იგულისხმება. ხანდისხან ფორმულების გასამარტივებლად, ამ სისტემას მართკუთხოვანად ვიგულისხმებთ; ამ უკანასკნელ გარემოებას საჭირო შემთხვევაში განსაკუთრებით გაუსვამთ ხაზს.

111. ფართეულის განტოლება. ელემენტარულ გეომეტრიაში არ იძლევიან „ფართეულის“ ცნების ზოგად განმარტებას. იქ ჩვეულებრივ განიხილავენ ფართეულთა კერძო სახეებს, სახელდობრ: სიბრტყეს, სფეროს, წრიულ ცილინდრს და კონუსს. აქ კი ჩვენ მოვიყვანთ ფართეულის ზოგად განმარტებას.

ფართეული ეწოდება იმ წერტილთა გეომეტრიულ ადგილს, რომელთა კოორდინატები (კოორდინატთა მოცემული სისტემის მიმართ) აკმაყოფილებენ შემდეგი სახის ერთ განტოლებას:

$$\Phi(x, y, z)=0, \tag{1}$$

სადაც $\Phi(x, y, z)$ აღნიშნავს სამი x, y, z ცვლადის ფუნქციას. (ეს განმარტება გამოსადეგია სივრცეში კოორდინატთა ყოველი სისტემისათვის).

(1) განტოლებას ეწოდება კოორდინატთა მოცემულ სისტემასთან მიმართული ფართეულის განტოლება.

ჩვენ, რასაკვირველია ვგულისხმობთ, რომ (1) განტოლება ფაქტიურად შეიცავს x, y, z ცვლადთაგან ერთს მაინც, რომლის შესახებაც მისი ამოხსნა შეიძლება. მაგალითად, თუ (1) განტოლება ფაქტიურად შეიცავს z ცვლადს და თუ მისი ამოხსნა შეიძლება ამ ცვლადის მიმართ, მაშინ მას შეიძლება ასეთი სახე მივცეთ:

$$z = \varphi(x, y),$$

სადაც $\varphi(x, y)$ არის x და y ცვლადის ცალსახა ან მრავალსახა ფუნქცია.

ჩვენი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული ფართეულის განტოლება არის სამცვლადიანი განტოლება, რომელიც კმაყოფილდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ცვლადთა მაგიერ შევიტანთ ფართეულის რომელიმე წერტილის კოორდინატებს.

ზევით მოყვანილი განმარტება „ფართეულის“ ცნებისა ნამეტნავად ზოგადია. ამ განმარტებას ემორჩილება მრავალი ისეთი სახე, რომელიც ძალიან განსხვავდება იმისაგან, რასაც ჩვენ მიჩვეულნი ვართ „ფართეული“ ვუწოდოთ. ამიტომ ფართეულთა უფრო დაწვრილებით შესწავლის დროს დამატებითი პირობები უნდა დაედოს $\Phi(x, y, z)$ ან $\varphi(x, y)$ ფუნქციას. იხ. დიფერენციალური გეომეტრიის კურსები.

თუ მოცემულია კოორდინატთა გარკვეულ სისტემასთან მიმართული ფართეულის განტოლება, მაშინ ამავე ფართეულის განტოლების საპოვნელად მეორე სისტემის მიმართ, საკმარისია აღებულ განტოლებაში შევიტანოთ ძველი კოორდინატების მაგიერ მათი გამოსახულებანი ახალის საშუალებით.

მაგალითად, თუ $\Phi(x, y, z) = 0$ წარმოადგენს რომელიმე წრფივი $Oxyz$ სისტემის მიმართ ფართეულის განტოლებას, მაშინ ამავე ფართეულის განტოლების საპოვნელად მეორე $O'x'y'z'$ სისტემის მიმართ, საკმარისია წინა განტოლებაში შევიტანოთ x, y, z-ის გამოსახულებანი x', y', z'-ის საშუალებით [§ 60, ფორმულა (1)]:

$$x = a + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \quad y = b + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',$$
$$z = c + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'.$$

ამიტომ წინა განტოლება ასე გარდაიქმნება: $\Phi_1(x', y', z') = 0$, სადაც სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა:

$$\Phi\left(a + l_1 x' + l_2 y' + l_3 z',\ b + m_1 x' + m_2 y' + m_3 z',\right.$$
$$\left. c + n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'\right) = \Phi_1(x', y', z') \text{ (იხ. § 78).}$$

ჩვენ დაგვრჩა ახლა დავამტკიცოთ, რომ ელემენტარულ გეომეტრიაში განხილული ფართეულნი მართლაც ემორჩილებიან ფართეულის — ზევით მოყვანილს ზოგად განმარტებას, ესე იგი რომ ყოველი მათგანისათვის შეიძლება შევადგინოთ (1) სახის განტოლება, რომელიც დაკმაყოფილდება მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, თუ x, y, z-ის მაგიერ შევიტანთ განსახილავი ფართეულის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებს. ჩვენ დავკმაყოფილდეთ სფეროს, კონუსის და ცილინდრის განტოლების გამოყვანით, ვინაიდან სიბრტყის განტოლებას განვიხილავთ ქვევით.

მოთხოვნილ განტოლებათა გამოსაყვანად ჩვენ შეგვიძლიან ყოველ ცალკე შემთხვევაში ვისარგებლოთ სპეციალურად შერჩეული სისტემით, ვინაიდან გადასვლა რომელიმე მეორე სისტემაზე, ახლახან ნათქვამის ძალით, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს.

112. სფეროსა და წრიული კონუსის განტოლებანი მართკუთხოვან კოორდინატებში. 1. ვთქვათ მოცემულია სფერო რადიუსით r და ცენტრით $C(a, b, c)$ წერტილში. განმარტების ძალით სფერო არის $M(x, y, z)$ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა მანძილი C-მდე r-ის ტოლია.

თუ ამ განმარტებას ანალიზურად გამოვთქვამთ მართკუთხოვან კოორდინატებში, მივიღებთ: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$ ანუ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \tag{1}$$

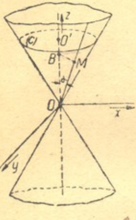
სწორედ ეს არის სფეროს განტოლება წრფივს, მართკუთხოვან კოორდინატებში. თუ სფეროს ცენტრი სათავეში იმყოფება, მაშინ $a=b=$ $=c=0$, და წინა განტოლება ღებულობს სახეს:

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{2}$$

2. კონუსი ეწოდება ისეთ ფართეულს, რომელიც შექმნილია მუდმივ წერტილზე (წვეროზე) გამავალი და მუდმივი წირის (მმართველის) მკვეთი წრფეებით (მსახველებით).

თუ მმართველი არის წრეწირი (c), ხოლო წვერო (O) იმყოფება (c) წრეწირის (O') ცენტრში მისი სიბრტყისადმი აღმართულ მართობზე (იხ. ნახ. 94), მაშინ კონუსს ეწოდება წრიული, ხოლო OO' წრფეს კონუსის ღერძი.

ყოველ კონუსს აქვს ორი კალთა, წვეროს ორივე მხარეზე მდებარე (ელემენტარულ გეომეტრიაში ჩვეულებრივ მხოლოდ ერთი კალთა განიხილება ან და მხოლოდ ერთი კალთის ნაწილი, მოთავსებული წვეროსა და მმართველს შორის).



ნახ. 94.

წრიული კონუსის განტოლების გამოსაყვანად, მივიღოთ მისი წვერო წრფივ, მართკუთხოვან კოორდინატთა სათავედ, ხოლო ამ სისტემის Oz ღერძი მივმართოთ კონუსის ღერძის გასწვრივ.

ვთქვათ α არის მახვილი კუთხე კონუსის მსახველსა და Oz ღერძის დადებით მიმართულებას შორის. ცხადია ეს კუთხე მუდმივი სიდიდეა. იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი კონუსზე იმყოფებოდეს, აშკარაა, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მახვილი კუთხე OM და Oz მიმართულებათა შორის α-ს ტოლი იყოს. ეს პირობა რომ ანალიზურად გამოვთქვათ, აღვნიშნოთ B-თი M წერტილის მართკუთხოვანი გეგმილი Oz-ზე. მაშინ, ცხადია, ჩვენი პირობა ასე გამოისახება $\frac{|BM|}{|OB|} = \operatorname{tg}\alpha$; თუ შევნიშნავთ, რომ B წერტილის კოორდინატები არიან: $(0, 0, z)$, გვექნება: $|OB| = |z|$ და

$$|BM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს წინა ტოლობაში შევიტანთ, მივიღებთ: $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|z|} = \operatorname{tg}\alpha$, ანუ კვადრატში ამაღლებით და მნიშვნელისაგან განთავისუფლებით,

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2 \tag{3}$$

სადაც, სიმოკლისათვის შემოღებულია აღნიშვნა $k = \operatorname{tg}\alpha$.

(3) განტოლება არის სწორედ ის, რასაც ვეძებდით. ზედმეტი არ იქნება კიდევ გავუსვათ ხაზი იმას, რომ უკანასკნელი განტოლება გამოყვანილია კოორდინატთა სპეციალურად არჩეული სისტემისათვის.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. დაამტკიცეთ, რომ სფეროს განტოლებას (მართკუთხოვან კოორდინატებში) აქვს სახე:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+2Cz+D=0\,[1], \qquad (1a)$$

(ამასთანავე, თუ $A^2+B^2+C^2-D>0$) და რომ, პირიქით, ($1a$) განტოლება გამოსახავს სფეროს, რომლის ცენტრი იმყოფება $(-A,\ -B,\ -C)$ წერტილში და და რომლის რადიუსი ტოლია $r=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$ (იხ. § 76, შენიშვნა).

2. იპოვეთ იმ წრიული კონუსის განტოლება, რომლის წვერო სათავეზე იმყოფება, ხოლო ღერძს აქვს $\overline{T}$ მგეზავის მიმართულება, სადაც $\overline{T}=(l,\ m,\ n)$ (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

ამოხსნა. იმისათვის, რომ $M(x,\ y,\ z)$ წერტილი კონუსზე იმყოფებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ϑ კუთხე $\overline{OM}$-სა და $\overline{T}$-ს შორის ტოლი იყოს α-სი ან $(\pi-\alpha)$-სი, სადაც α-ს იგივე მნიშვნელობა აქვს, რაც ზევით. მაშასადამე $\cos\vartheta=\pm\cos\alpha$, $\cos^2\vartheta=\cos^2\alpha$. მაგრამ (§ 40), $\cos\vartheta=\dfrac{lx+my+nz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. მაშ, $\dfrac{(lx+mx+nz)^2}{x^2+y^2+z^2}=a^2$, სადაც მიღებულია: $\cos\alpha=a$, ანუ:

$$(lx+my+nz)^2=a^2(x^2+y^2+z^2) \qquad (4)$$

სწორედ ეს არის საძიებელი განტოლება. თუ $l=m=0$, $n=\pm1$, მაშინ, როგორც ეს ადვილად ჩანს, ისევ (3) განტოლებას მივიღებთ.

113. ცილინდრის განტოლება. ცილინდრი ეწოდება ისეთ ფართეულს, რომელიც შექმნილია ურთიერთ პარალელური, მუდმივი წირის (მმართველის) მკვეთი წრფეებით (მსახველებით).

თუ მმართველი არის წრეწირი, ხოლო მსახველნი მართობნი არიან ამ წრეწირის სიბრტყისადმი, მაშინ ცილინდრს წრიული ეწოდება.

ჩვენ აქ გამოვიყვანთ ზოგადი სახის ცილინდრის (და არა მაინცადამაინც წრიულის) განტოლებას.

ავიღოთ კოორდინატთა წრფივი სისტემა, რომლის Oz ღერძი პარალელურია ცილინდრის მსახველისა. ვთქვათ (C) არის ცილინდრისა და Oxy სიბრტყის გადაკვეთის წირი (ნახ. 95).

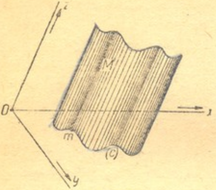
ვთქვათ, რომ:

$$\Phi(x,\ y)=0 \qquad (1)$$

---

[1]) ეს განტოლება შეიძლება კიდევ უფრო ზოგადი სახით შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ: $A_0(x^2+y^2+z^2)+2Ax+2By+2Cz+D=0$, სადაც $A_0\neq0$. მართლაც, ორივე მხარის A_0-ზე გაყოფით მივიღებთ ($1a$) სახის განტოლებას.

არის (C) წირის განტოლება Oxy სიბრტყეზე. იმისათვის, რომ სივრცის რომელიმე წერტილი $M(x, y, z)$ ძევდეს ჩვენს ცილინდრზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის გეგმილი m სიბრტყე Oxy-ზე (Oz-ის პარალელურად) იმყოფებოდეს (C)-ზე. მაშასადამე, მისთვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი აღებულ ცილინდრზე იმყოფებოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის x და y კოორდინატები დაკავშირებულ იყვენ (1) განტოლებით (როგორიც არ უნდა იყოს მესამე z კოორდინატის მნიშვნელობა). სხვანაირად რომ ვთქვათ, განტოლება (1), თუ მას განვიხილავთ, როგორც სივრცის წერტილთა კოორდინატების დამაკავშირებელ განტოლებას, არის მოცემული ცილინდრის განტოლება.



ნახ. 95.

ეს განტოლება წარმოადგენს წინა პარაგრაფის (1) განტოლების კერძო სახეს. მისი დამახასიათებელი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ მასში არ შედის z კოორდინატი.

აშკარაა, რომ, პირიქითაც, ყოველი (1) სახის განტოლება არის ისეთი ცილინდრული ზედაპირის განტოლება, რომლის მსახველნი Oz ღერძის პარალელური არიან და რომლის გადაკვეთის წირი Oxy სიბრტყესთან გამოისახება ამ სიბრტყეში (1) განტოლებით[1].

ანალოგიურად, შემდეგი სახის განტოლებანი: $\Phi(x, z)=0$ და $\Phi(y, z)=0$ გამოსახავენ ცილინდრულ ზედაპირებს, რომელთა მსახველნი შესაბამისად Oy და Ox ღერძის პარალელური არიან.

მაგ, თუ ზედაპირის განტოლებაში არ შედის ერთ-ერთი კოორდინატი, ეს ზედაპირი წარმოადგენს ცილინდრს, რომელიც შესაფერი ღერძის პარალელურია.

განვიხილოთ რამოდენიმე კერძო შემთხვევა.

1. **წრიული ცილინდრი.** თუ ავიღებთ კოორდინატთა მართკუთხოვან სისტემას და წარმოვიდგენთ, რომ (C) წირი არის წრეწირი,

---

[1]) ჩვენ ხაზს ვუსვამთ სიტყვებს „ამ სიბრტყეში", ვინაიდან გვსურს ყურადღება მივაქციოთ იმას, რომ არ შეიძლება $\Phi(x, y)=0$ განტოლებას უბრალოდ (C) წირის განტოლება ეწოდოს: წინა განტოლება სივრცეში ცილინდრს გამოსახავს, და ამ ცილინდრის მხოლოდ ის წერტილები შეადგენენ (C) წირს, რომელთათვისაც $z=0$.

მაშინ (1) განტოლება გადაიქცევა ისეთი წრიული ცილინდრის განტოლებად, რომელიც Oz-ის პარალელურია. თუ (a, b)-თი აღვნიშნოთ Oxy სიბრტყეში მდებარე წრეწირის ცენტრის კოორდინატებს, ხოლო r-ით მის რადიუსს, მაშინ განსახილავი განტოლება ასე დაიწერება (იხ. § 76):

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \tag{2}$$

2. განტოლება

$$Ax+By+C=0, \tag{3}$$

ცხადია, სივრცეში იმ სიბრტყეს გამოსახავს, რომელიც Oz-ის პარალელურია და რომელიც Oxy სიბრტყეს მასზე მდებარე, იმავე (3) განტოლებით გამოსახულს წრფეზე კვეთს (სიბრტყე არის ცილინდრული ფართეულის კერძო სახე, იმ შემთხვევის შესაფერი, როცა (C) წირი არის წრფე).

114. ფართეულთა კლასიფიკაცია. ფართეულები დაიყოფიან ალგებრულ და ტრანსცენდენტულ ფართეულებად იმის მიხედვით, თუ რა სახე აქვს მათ განტოლებას წრფივ კოორდინატებში, ისე როგორც ამას ადგილი აქვს ბრტყელ მრუდთათვის (იხ. § 81). ფართეულს ეწოდება ალგებრული, თუ მისი განტოლება შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$F(x, y, z)=0, \tag{1}$$

სადაც $F(x, y, z)$ არის პოლინომი (მთელი რაციონალური ფუნქცია x, y და z-ის მიმართ). ყველა არაალგებრული ფართეულები ტრანსცენდენტულად იწოდებიან.

ალგებრული ფართეულები თავის მხრივ დაიყოფიან სხვადასხვა რიგის ფართეულებად. სახელდობრ, თუ ფართეულის (1) განტოლებაში $F(x, y, z)$ პოლინომის ხარისხი n-ის ტოლია, მაშინ ამბობენ, რომ ფართეული n რიგისაა.

მაგალითად, სფერო, წრიული კონუსი და წრიული ცილინდრი არიან მეორე რიგის ალგებრული ფართეულები (იხ. მათი განტოლებანი, წინა პარაგრაფში გამოყვანილნი). სიბრტყე კი არის პირველი რიგის ფართეული, როგორც ეს გამომდინარეობს § 118-დან ან და წინა პარაგრაფის (3) განტოლებიდან.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ფართეულის რიგი დამოუკიდებელია წრფივი კოორდინატების სისტემის არჩევაზე. ამის დამტკიცება § 81-ში მოყვანილი დამტკიცების ანალოგიურია და აქ მას არ გავიმეორებთ.

115. წირის განტოლებანი. სივრცეში წირი შეიძლება განიმარტოს, როგორც ორი ფართეულის თანაკვეთა, ესე იგი, როგორც ერთდროულად ორ ფართეულზე მდებარე წერტილთა გეომეტრიული ადგილი. ვთქვათ $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ არიან ის ფართეულები, რომელთა გადაკვეთას წარმოადგენს მოცემული წირი. წირის ყოველი წერტილის კოორდინატები, ცხადია, ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდენ ორივე უკანასკნელ განტოლებას, და, პირიქით, წერტილები, რომელთა კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორივე ამ განტოლებას, მოცემულ წირს ეკუთვნიან. მოკლეთ, მოცემული წირი არის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ ორი განტოლების სისტემას:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(x, y, z)=0,\\ \Psi(x, y, z)=0.\end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1) განტოლებანი იწოდებიან მოცემული წირის განტოლებებად.

შევნიშნოთ, რომ მოცემული წირის წარმოდგენა ორი განტოლებით უამრავი სხვადასხვა ხერხით შეიძლება; მართლაც, ორი მოცემული ფართეულის მაგიერ, ჩვენ შეგვიძლიან ამ წირზე გადამკვეთი ფართეულების ნებისმიერი წყვილი ავიღოთ. ანალიზურად ეს იმას შეეფერება, რომ (1) სისტემის მაგიერ შეიძლება ნებისმიერი მისი ტოლფასი სისტემა ავიღოთ.

მაგალითად, საზოგადოდ, (1) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას რომელიმე ორი ცვლადის მიმართ, ვთქვათ x და y-ის მიმართ; მაშინ (1) სისტემის მაგიერ ჩვენ მივიღებთ მის ტოლფას სისტემას:

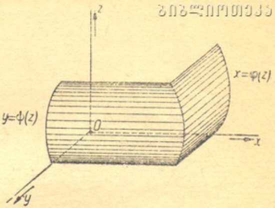
$$\left.\begin{array}{l}x=\varphi(z),\\ y=\psi(z).\end{array}\right\} \qquad (2)$$

ამ სისტემის განტოლებანი წარმოადგენენ ცილინდრთა განტოლებებს, რომელთა შორის პირველი Oy ღერძის პარალელურია, ხოლო მეორე Ox ღერძის. ეს არიან, ცხადია ის ცილინდრები, რომელნიც აგეგმილებენ აღებულ წირს Ozx და Oyz სიბრტყეებზე, შესაბამისად Oy და Ox ღერძების პარალელურად (ნახ. 96).

ავიღოთ, მაგალითად, შემდეგ განტოლებათა სისტემა:

$$\left.\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2=r^2\\ x=a\end{array}\right\} \qquad (3)$$

მართკუთხოვან კოორდინატებში ამ სისტემის პირველი განტოლება არის სფეროს განტოლება ცენტრით სათავეში და რადიუსით r, ხოლო მეორე წარმოადგენს Oyz სიბრტყის პარალელური სიბრტყის განტოლებას, რომელიც Ox ღერძზე მოსჭრის a ნაკვეთს. ამ ორი ფართეულის გადაკვეთა, ცხადია, არის, *წრეწირი* ცენტრით Ox ღერძზე, რომლის სიბრტყე ამ ღერძის მართობია და სჭრის მასზე ნაკვეთს a. ცხადია გადაკვეთა მხოლოდ მაშინ არსებობს, როცა $a \leq r$.



ნახ. 96.

(3) სისტემა შეიძლება შეიცვალოს ტოლფასი სისტემით:

$$\left.\begin{array}{c} y^2+z^2=r^2-a^2 \\ x=a, \end{array}\right\} \tag{4}$$

ამ სისტემის პირველი განტოლება გამოსახავს წრიულ ცილინდრს, რომლის ღერძია Ox, ხოლო განივი კვეთის რადიუსი $\sqrt{r^2-a^2}$-ის ტოლია.

ჩვენი წრეწირი არის ამ ცილინდრისა და $x=a$ სიბრტყის გადაკვეთის წირი.

თუ წირი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ორი ალგებრული ფართეულის გადაკვეთა, ესე იგი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგ განტოლებათა სისტემით: $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, სადაც F_1 და F_2 არიან პოლინომები x, y და z-ის მიმართ, მაშინ იგი იწოდება *ალგებრულ წირად*. წირის რიგი ეწოდება უკანასკნელ განტოლებათა ხარისხების ნამრავლს.

ყოველს არაალგებრულ წირს *ტრანსცენდენტული* ეწოდება.

116. წირთა და ფართეულთა პარამეტრული წარმოდგენა. წინა პარაგრაფში წირი განმარტებული იყო როგორც ორი ფართეულის გადაკვეთა. მაგრამ შეიძლება წირის განხილვა სხვა თვალსაზრისითაც; სახელდობრ, შეიძლება იგი წარმოვიდგინოთ, როგორც გარკვეული წესის მიხედვით მოძრავი წერტილის სასრბოლე. ამგვარად, ჩვენ მივიღებთ (იხ. § 77)

პარამეტრულ წარმოდგენას, როცა x, y და z კოორდინატები გამოისახებიან, როგორც დამხმარე t ცვლადის ფუნქციები:

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t), \tag{1}$$

სადაც $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ და $\varphi_3(t)$ არიან გარკვეულ შუალედში უწყვეტი ფუნქციები. თუ t იცვლება ამ შუალედში, მაშინ (x, y, z) წერტილი განუწყვეტლივ იცვლის მდებარეობას სივრცეში და აღწერს წირს.

წირის ეს ახალი განმარტება რომ არსებითად ზემოხსენებულის ტოლფასია, ამაში დავრწმუნდებით t-ს გამორიცხვით (1)-დან. თუ მაგალითად (1) სისტემის მესამე განტოლებას ამოვხსნით t-ს მიმართ, ესე იგი, t-ს განვსაზღვრავთ z-ის საშუალებით და შემდგომ ამისა ნაპოვნ გამოსახულებას პირველსა და მეორე განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ x და y სათავის z-ის საშუალებით წარმოდგენილ გამოსახულებებს:

$$x=\varphi(z),\ y=\psi(z), \tag{2}$$

ესე იგი წინა პარაგრაფის (2) განტოლებებს.

პირიქით, თუ წირი მოცემულია (2) სახის განტოლებებით, მაშინ, თუ ავარჩევთ ნებისმიერ ფუნქციას $\varphi_3(t)$ და მივიღებთ $z=\varphi_3(t)$, მაშინ (1) სახის განტოლებანი გვექნება:

$$x=\varphi[\varphi_3(t)],\quad y=\psi[\varphi_3(t)],\quad z=\varphi_3(t)$$

ანუ

$$x=\varphi_1(t),\quad y=\varphi_2(t),\quad z=\varphi_3(t),$$

სადაც შემოღებულია აღნიშვნები: $\varphi[\varphi_3(t)]=\varphi_1(t)$, $\psi[\varphi_3(t)]=\varphi_2(t)$.

მაგალითად, თუ წირი მოცემულია განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} y^2+z^2&=r^2,\\ x&=a \end{aligned}\right\}$$

(მართკუთხოვან კოორდინატებში ეს არის Oyz სიბრტყის პარალელური წრეწირი ცენტრით Ox ღერძზე), მაშინ, თუ მივიღებთ, რომ $z=r\ \sin t$, გვექნება: $y=\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}=r\cos t$, რაიცა გვაძლევს აღებული მრუდის უბრალო პარამეტრულ წარმოდგენას: $x=a$, $y=r\cos t$, $z=r\sin t$[1].

---

[1]) ჩვენ არ ავიღეთ რადიკალის წინ ორნაირი ნიშანი y-ის გამოსახულებაში, ვინაიდან ორნაირი ნიშანი $\cos t$-ს წინ არ მოგვცემდა არაფერს ახალს; მართლაც, წერტილს $x=a$, $y=-r\cos t$, $z=r\sin t$, მივიღებთ ტექსტში მოყვანილი განტოლებებიდან, თუ t-ს $(\pi-t)$-თი შევცვლით.

აგრეთვე ფ ა რ თ ე უ ლ ი ც შეიძლება პარამეტრულად იყოს წარმოდგენილი, მხოლოდ აქ x, y და z კოორდინატები იქნებიან ო რ ი პარამეტრის ფუნქციები. მართლაც, ვთქვათ, ალებული ფართეულის განტოლებაა

$$z=f(x, y). \tag{3}$$

ვთქვათ: $x=\varphi(p, q)$, $y=\psi(p, q)$, სადაც $\varphi(p, q)$, $\psi(p, q)$ არის p და q ცვლადის ორი ნებისმიერად არჩეული ფუნქცია, მაგრამ ისეთი, რომ წინა განტოლებანი ამოხსნადი არიან p და q-ს მიმართ (ე. ი. p და q თავის მხრივ შეიძლება გამოსახული იყვნენ x და y-ის მიმართ). თუ x და y-ის p და q-ს საშუალებით წარმოდგენილ გამოსახულებებს შევიტანთ (3)-ში, მივიღებთ $z=f[\varphi(p,q), \psi(p,q)]$. ალვნიშნოთ უკანასკნელი ფუნქცია $\omega(p, q)$-თი; გვექნება:

$$x=\varphi(p, q),\ y=\psi(p, q),\quad z=\omega(p,q). \tag{4}$$

პირიქით, (4) სახის განტოლებანი, რომელთა შორის რომელიმე ორი შეიძლება p და q-ს მიმართ ამოიხსნას, ყოველთვის წარმოადგენს ფართეულს. მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად პირველი ორი განტოლების ამოხსნა შეიძლება p და q-ს მიმართ ისე, რომ მათი ამოხსნით მივიღებთ $p=f_1(x, y)$, $q=f_2(x, y)$. თუ ამათ შევიტანთ მესამე განტოლებაში, მივიღებთ (3) სახის განტოლებას, ე. ი. ფართეულის განტოლებას.

მოკლეთ, ამისათვის რომ პარამეტრული წარმოდგენიდან (4) მივიღოთ ფართეულის განტოლება, საკმარისია სამი განტოლებიდან (4) გამოვრიცხოთ ორი p და q ცვლადი; მაშინ მივიღებთ x, y, z ცვლადების შემცველს ერთ განტოლებას: სწორედ ეს იქნება ფართეულის განტოლება.

მაგალითად, თუ მოცემულია სფერო, რომლის ცენტრი იმყოფება მართკუთხოვანი კოორდინატების სათავეზე და რადიუსი კი r-ის ტოლია, მაშინ მისი განტოლება, როგორც ვიცით, იქნება: $x^2+y^2+z^2=r^2$.

თუ მივიღებთ: $x=r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=r\sin\vartheta\sin\varphi$ (სადაც φ და ϑ ასრულებენ p და q პარამეტრების როლს) და ამათ წინა განტოლებაში შევიტანთ, მივიღებთ: $r^2\sin^2\vartheta+z^2=r^2$, საიდანაც $z^2=r^2\cos^2\vartheta$ ანუ $z=r\cos\vartheta$ [1]. მაშ, სფეროს პარამეტრული წარმოდგენა შემდეგი სახით შეიძლება:

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=r\cos\vartheta. \tag{5}$$

მკითხველი ადვილად გამოარკვევს ϑ და φ პარამეტრების გეომეტრიულ მნიშვნელობას (§ 72). ამ გეომეტრიულ მნიშვნელობის მიხედვით, აშკარა ხდება, რომ სფეროს ყველა წერტილთა მისაღებად საკმარისია ავიღოთ $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\vartheta<\pi$.

117. სივრცეში წირთა და ფართეულთა გადაკვეთა. ორი ფართეულის გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდენ ამ ფართეულთა განტოლებების ერთობლივობას $F_1(x, y, z)=0$ და

[1]) ჩვენ არ ვიღებთ $\cos\vartheta$-ს წინ ორნაირ ნიშანს, რადგანაც ეს არაფერს ახალს არ მოგვცემს (იხ. წინა გამოტანა).

$F_2(x, y, z) = 0$; ვინაიდან ამ შემთხვევაში გვაქვს სამცვლადიანი ორი განტოლება, ამიტომ, საზოგადოდ რომ ვთქვათ, გადაკვეთის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე გვექნება და ესენი, საზოგადოდ, როგორც უკვე ნათქვამი იყო, რაღაც წირს შეადგენენ.

სამი ფართეულის გადაკვეთის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ამ ფართეულთა განტოლებების ერთობლიობას; $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, $F_3(x, y, z) = 0$. ვინაიდან აქ სამცვლადიანი სამი განტოლება გვაქვს, ამიტომ, საზოგადოდ, გადაკვეთის წერტილები ერთი მეორეზე სასრულო მანძილით არიან დაშორებული; მათი რიცხვი ან სასრულო იქნება, ან უსასრულო, მაგრამ ამ უკანასკნელ შემთხვევაში საზოგადოდ ისინი არ ქმნიან უწყვეტ წირს.

იგივე შეეხება $F(x, y, z) = 0$ ფართეულისა და იმ წირის გადაკვეთის წერტილებს, რომლის განტოლებანია $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$. თუ წირი მოცემულია პარამეტრულად: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, მაშინ მისი გადაკვეთის წერტილები ფართეულთან $F(x, y, z) = 0$ განისაზღვრებიან განტოლებიდან $F[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] = 0$ (იხ. § 83).

დაბოლოს, სივრცეში იმ ორი წირის გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები, რომელნიც მოცემული არიან შემდეგი განტოლებებით: $\Phi_1(x, y, z) = 0$, $\Psi_1(x, y, z) = 0$ და $\Phi_2(x, y\ z) = 0$, $\Psi_2(x, y, z) = 0$, უნდა აკმაყოფილებდენ ოთხივე უკანასკნელ განტოლებას. ვინაიდან განტოლებათა რიცხვი აღემატება უცნობთა რიცხვს, ამიტომ, საზოგადოდ, ამ განტოლებებს არ აქვთ ამონახსნი, ესე იგი, საზოგადოდ, სივრცეში ორი წირი არ იკვეთება.

II. სიბრტყის განტოლება

118. სიბრტყის განტოლების ნორმალური და ზოგადი სახე. გადავიდეთ ახლა სიბრტყის განტოლების გამოყვანაზე. ჩვენ დავიწყებთ, ეგრედწოდებული, ნორმალური განტოლების გამოყვანით (ეს სახე ანალოგიურია წრფის ნორმალური განტოლებისა). სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ კოორდინატთა ღერძები მართკუთხოვანად.

ვთქვათ, Π აღნიშნავს განსახილავ სიბრტყეს და $\overline{V}$ არის ამ სიბრტყის მართობული მგეზავი ისეთნაირად მოგეზული, რომ თუ მას სათავეზე მოვდებთ, ის იქნება Π-საკენ მიმართული[1] (ნახ. 97). ვთქვათ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ არიან

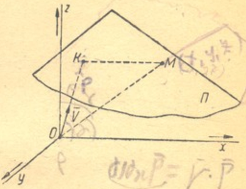
---

[1]) თუ Π გადის სათავეზე, მაშინ Π სიბრტყისადმი მართობული $\overline{V}$ მგეზავის გეზი შეიძლება ნებისმიერად აირჩეს.

გეზის კოსინუსები $\overline{V}$ მგეზავისათვის, ისე რომ:

$$\overline{V}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma). \qquad (1)$$

ვთქვათ ეხლა K აღნიშნავს სათავიდან Π-ზე დაშვებული მართობის ფუძეს და ვთქვათ $|OK|=p$.



ნახ. 97.

Π სიბრტყის მდებარეობა, ცხადია, სავსებით განისაზღვრება p სიგრძისა და $\overline{V}$ მგეზავის მოცემით; ამ უკანასკნელისათვის მოცემული იქნებიან, მაშასადამე, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

იმისათვის, რომ $M(x, y, z)$ წერტილი Π-ზე ძევდეს, ცხადია, აუცილებელი და საკმარისია, რომ K წერტილი წარმოადგენს M წერტილის მართკუთხოვან გეგმილს OK წრფეზე, ამისათვის კი თავის მხრივ აუცილებელი და საკმარისია, რომ $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის გეგმილის ალგებრული მნიშვნელობა $\overline{V}$ მგეზავის გასწვრივ ტოლი იყოს p-სი.

მაგრამ ხსენებული გეგმილი ტოლია $\overline{OM}.\ \overline{V}$-სი; თუ კი მხედველობაში მივიღებთ, რომ $\overline{OM}=(x,\ y\ z)$, $\overline{V}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, გვექნება: $\overline{OM}.\ \overline{V}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma$. მაშასადამე, აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $M(x,\ y,\ z)$ წერტილი Π სიბრტყეზე მდებარეობდეს, გამოიხატება ტოლობით:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \qquad (2)$$

რომელიც წარმოადგენს აღებული სიბრტყის, ეგრედწოდებულს, ნორმალურ განტოლებას (Hesse-ს ნორმალური სახე).

ცხადია, რომ პირიქით: (2) სახის ყოველი განტოლება, სადაც $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ არიან რაღაც გეზის კოსინუსები, ხოლო $p\geqslant 0$, წარმოადგენს იმ სიბრტყის განტოლებას, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება ისე, როგორც ზევით აღვნიშნეთ.

ეს განტოლება წარმოადგენს კერძო სახეს შემდეგი სამცვლადიანი პირველი ხარისხის განტოლებისას (ე. ი. წრფივი განტოლების):

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (3)$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს უკანასკნელი განტოლება (წრფივი, მართკუთხოვანი სისტემის მიმართ) ყოველთვის წარმოადგენს ნორმალურ განტოლებას. ამისათვის გავამრავლოთ უკანასკნელი განტოლება რაღაც მუდმივ λ მამრავლზე და ისე შევარჩიოთ ამ მამრავლის მნიშვნელობა, რომ მიღებულ განტოლებაში:

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0 \tag{4}$$

კოეფიციენტები λA, λB, λC იყვნენ რაღაც მგეზავის გეზის კოსინუსები და რომ, გარდა ამისა, $\lambda D \leqslant 0$.

პირველი პირობა გვაძლევს:

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 + (\lambda C)^2 = 1, \tag{5}$$

საიდანაც λ-სათვის ვღებულობთ მნიშვნელობას:

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{6}$$

თუ, თანახმად პირობისა $\lambda D \leqslant 0$, შევარჩევთ λ-ს ნიშანს, და შემოვიღებთ აღნიშვნას $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \cos\beta$, $\lambda C = \cos\gamma$, მაშინ მივიღებთ (2) სახის განტოლებას, რომელიც, როგორც ვიცით, წარმოადგენს გარკვეული სიბრტყის ნორმალურ განტოლებას.

(3) განტოლება ამ უკანასკნელის ტოლფასია; მაშასადამე (3) განტოლებაც სიბრტყის განტოლებას წარმოადგენს; მას ეწოდება ზოგადი სახის განტოლება.

ზემოხსენებულიდან ჩანს, თუ როგორ დავიყვანოთ ზოგადი სახის (3) განტოლება ნორმალურ სახეზე. სახელდობრ, ამისათვის საჭიროა (3) განტოლება გამრავლდეს მანორმალებელ (მაწესებელ) მამრავლზე $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, ამასთანავე ნიშანი ისე უნდა შეირჩეს, როგორც ზევით აღვნიშნეთ, სახელდობრ, ისე, რომ $\lambda D \leqslant 0$; თუ $D = 0$, მაშინ ნიშანი ნებისმიერია.

შენიშვნა. ეს გამოყვანა ძალას კარგავს მაშინ, თუ $A = B = C = 0$, ვინაიდან ასეთ შემთხვევაში λ-სათვის უსასრულოდ დიდი მნიშვნელობა მიიღება. აღნიშნულ შემთხვევას ჩვენ ყოველთვის გამოვრიცხავთ განხილვიდან, ვინაიდან აქ (5) განტოლება დაიყვანება შემდეგზე: $D=0$ (რომელიც შეუძლებელია, თუ $D \neq 0$ და იგივურია, თუ $D = 0$). თუ $A = B =$

$= C = 0$ და $D \neq 0$, მაინც ამბობენ, რომ (5) განტოლება სიბრტყეს გამოსახავს, მაგრამ ეს სიბრტყე უსასრულოდ დაშორებულია.

ცხადია ზევით მოყვანილი მსჯელობაც და ფორმულებიც მთლიანად განმეორდებიან ირიბკუთხოვანი სისტემის შემთხვევისათვის. მხოლოდ მაწესებელი მამრავლი λ უნდა განისაზღვროს (5) განტოლებიდან კი არა, არამედ უფრო რთული განტოლებიდან, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდენ მგეზავის გეზის კოსინუსები (კოვარიანტული კოორდინატები); იხ. § 57, ფორმულა (5).

შესაბამისად ამისა, (6) ფორმულის მაგიერ ჩვენ გვექნება უფრო რთული ფორმულა, რომლის გამოყვანას მკითხველს მივანდობთ.

ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი პირველი ხარისხის განტოლება წრფივ კოორდინატებში სიბრტყეს გამოსახავს და პირიქით, ყოველი სიბრტყე პირველი ხარისხის განტოლებით გამოისახება.

ეს დებულება რომ ირიბკუთხოვანი კოორდინატებისათვისაც სამართლიანია, იქიდან გამომდინარეობს, რომ, კერძოდ, მართკუთხოვანი სისტემიდან ირიბკუთხოვანზე გადასვლით (ან უკუღმა), პირველი ხარისხის განტოლება ისევ პირველი ხარისხის განტოლებად გადაიქცევა[1].

სავარჯიშო მაგალითები

1. სათავედან სიბრტყეზე დაშვებული OK მართობის სიგრძე ტოლია 3-ის. $\overline{OK}$ ვექტორი შეადგენს Ox და Oy ღერძებთან კუთხეებს $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$; Oz ღერძთან იგი შეადგენს მახვილ კუთხეს. იპოვეთ სიბრტყის ნორმალური განტოლება (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

ამოხსნა. $\overline{OK}$ ვექტორის მიერ Oz ღერძთან შედგენილი γ კუთხეს ვიპოვით ფორმულიდან: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; ვინაიდან $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, მივიღებთ: $\cos\gamma = +\frac{1}{2}$ (ჩვენ ავიღეთ ნიშანი $+$, ვინაიდან, პირობის თანახმად, γ კუთხე მახვილია). მაშასადამე საძიებელი ნორმალური განტოლება იქნება:

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0.$$

2. დაიყვანეთ სიბრტყის განტოლება $x + 3y + 3z + 1 = 0$ ნორმალურ სახეზე.

პას. $\frac{x + 3y + 3z + 1}{-\sqrt{19}} = 0.$

---

[1]) ჩვენი წინადადების სამართლიანობა გამომდინარეობს აგრეთვე უშუალოდ იქიდან, რაც ნათქვამია ტექსტში (წვრილი შრიფტი) სიბრტყის ნორმალურ განტოლებაზე ირიბკუთხოვან კოორდინატებში.

119. A, B, C კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობა. თუ კოორდინატებს ისევ მართკუთხოვანად ვიგულისხმებთ, დავამტკიცოთ, რომ A, B, C კოეფიციენტებს განტოლებაში

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$

აქვთ მეტად მარტივი მნიშვნელობა. ამისათვის გავიხსენოთ წინა პარაგრაფის ფორმულები: $\lambda A=\cos\alpha$, $\lambda B=\cos\beta$, $\lambda C=\cos\gamma$; აქედან აშკარაა, რომ $\overline{V}=\lambda\overline{P}$, სადაც $\overline{V}=(l,\ m,\ n)$ არის სიბრტყისადმი მართობული მგეზავი, ხოლო $\overline{P}$ არის ვექტორი კოორდინატებით A, B, C.

მაშ, თუ A, B და C განიხილებიან როგორც გარკვეული $\overline{P}$ ვექტორის კოორდინატები, მაშინ ეს ვექტორი (1) სიბრტყის მართობი იქნება. $\overline{P}$ ვექტორს ვუწოდებთ $\overline{P}$ სიბრტყის მიმართულების ვექტორს.

ზემოხსენებული სამართლიანი იქნება ირიბკუთხოვანი კოორდინატებისათვისაც, თუ $\overline{P}$-ს ვიგულისხმებთ, როგორც ვექტორს, რომლის კოვარიანტული კოორდინატები იქნებიან A, B, C.

120. კერძო შემთხვევები. სიბრტყის ზოგად განტოლებაში

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$

ერთის ან რამოდენიმე კოეფიციენტის ნულთან ტოლობა ახასიათებს კოორდინატთა ღერძების მიმართ მდებარეობის სხვადასხვა თავისებურებას, რომელთაც აქ აღვნიშნავთ.

1. თუ (1) განტოლებაში თავისუფალი წევრი $D=0$, მაშინ ეს განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს.

$$Ax+By+Cz=0; \quad (2)$$

აშკარაა, რომ სათანადო სიბრტყე სათავეზე გაივლის (ვინაიდან (2) განტოლება კმაყოფილდება მნიშვნელობებით $x=y=z=0$)

2. ვთქვათ (1) განტოლებაში ცვლადთა მდგომი ერთერთი კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაგალითად $C=0$. მაშინ ეს განტოლება ღებულობს სახეს:

$$Ax+By+D=0. \quad (3)$$

სათანადო სიბრტყე Oz ღერძის პარალელურია და კვეთს Oxy სიბრტყეს იმ წრფეზე, რომლის განტოლება ამ სიბრტყეში არის (3) განტოლება (იხ. § 113, 2).

ცხადია, ჩვენი დასკვნა შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ სიბრტყის განტოლებაში არ შედის ერთერთი კოორდინატის შესაბამისი წევრი, მაშინ სიბრტყე პარალელურია კოორდინატთა შესაბამი ღერძისა.

3. ვთქვათ ცვლადებთან მდგომი ო რ ი კოეფიციენტია ნული. მაგალითად, $B=C=0$. მაშინ ზემოხსენებულის თანახმად, სიბრტყე ერთდროულად Oy ღერძის პარალელურიც იქნება და Oz ღერძისაც, ე. ი. პარალელური მთელი Oyz სიბრტყისა.

ეს დასკვნა უშუალოდ გამომდინარეობს აგრეთვე $Ax+D=0$ განტოლების განხილვიდან, რომელიც შეიძლება ასე გადაიწეროს: $x=-\dfrac{D}{A}$.

ცხადია განსახილავი სიბრტყე მოსჭრის Ox ღერძზე ნაკვეთს, რომელიც $-\dfrac{D}{A}$-ს ტოლია.

კერძოდ, განტოლება: $x=0$ გამოსახავს Oyz სიბრტყეს. ანალოგიურად $y=0$ და $z=0$ განტოლებათათვის.

121. $\mathbf{Ax+By+Gz+D}$ ოთხწევრის ნიშანი. ისე როგორც § 88-ში, ადვილი გასაგებია, რომ სიბრტყე $Ax+By+Cz+D=0$ ყოფს მთელ სივრცეს ორ ნაწილად; ერთ მათგანში ოთხწევრი $Ax+By+Cz+D$ ღებულობს დადებით ნიშანს, ხოლო მეორეში უარყოფითს. თვით სიბრტყეზე ეს ოთხწევრი ნულად ხდება.

122. განტოლება ღერძთა ნაკვეთებში (იხ. § 89). თუ სიბრტყის განტოლებაში: $Ax+By+Cz+D=0$, კოეფიციენტი D ნული არ არის, მაშინ ამ განტოლებას შეიძლება ერთი საგულისხმო სახე მიეცეს. სახელდობრ, თუ გ:ნტოლების ორივე მხარეს $(-D)$-ზე გავყოფთ და მივიღებთ აღნიშვნებს:

$$-\frac{A}{D}=\frac{1}{p},\quad -\frac{B}{D}=\frac{1}{q},\quad -\frac{C}{D}=\frac{1}{r} \tag{1}$$

მაშინ იგი შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1. \tag{2}$$

ამ განტოლებაში კოეფიციენტებს p, q და r მეტად მარტივი გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ.

მართლაც, ვიპოვოთ (2) სიბრტყის გადაკვეთა Ox ღერძთან. საძიებელი გადაკვეთის წერტილი ეს არის (2) სიბრტყის ის წერტილი, რომ-

ლისთვისაც $y=z=0$. თუ ამათ შევიტანთ უკანასკნელ განტოლებაში, ვიპოვით: $\frac{x}{p}=1$, ანუ $x=p$. თუ ანალოგიურად მოვიქცევით ორი დანარჩენი ღერძის მიმართ, დავასკვნით, რომ p, q და r აღნიშნავენ იმ ნაკვეთებს, რომელთაც მოსჭრის აღებული სიბრტყე კოორდინატთა ღერძებზე.

შენიშვნა. თუ ერთერთი კოეფიციენტი A, B, C ნულის ტოლია, მაგალითად, $C=0$, მაშინ (2) განტოლების მაგიერ, ცხადია მივიღებთ:

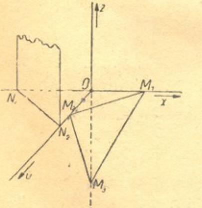
$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \tag{3}$$

სადაც p და q-ს იგივე (1) მნიშვნელობანი აქვთ და იგივე გეომეტრიული შინაარსი; (3) განტოლება (2)-დან მიიღება, თუ ვიგულისხმებთ $r=\infty$; ეს გასაგებიცაა, ვინაიდან, თუ $C=0$, სიბრტყე Oz ღერძის პარალელური იქნება, ესე იგი მოსჭრის მასზე უსასრულოდ დიდი სიგრძის ნაკვეთს.

123. განტოლებით მოცემული სიბრტყის აგება. განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

მოცემული სიბრტყის ასაგებად, საკმარისია ვიპოვოთ რომელიმე სამი მისი წერტილი (ერთსა და იმავე წრფეზე არამდებარე). მაგრამ სიბრტყის რომელიმე წერტილის საპოვნელად, საკმარისია (1) განტოლებაში ორს რომელიმე კოორდინატს (მაგ., x და y-ს) მივცეთ ნებისმიერი მნიშვნელობა და მესამე კოორდინატი ამ განტოლებიდან გამოვითვალოთ.



ნახ. 98.

უმეტეს შემთხვევაში ყველაზე უფრო მარტივია სიბრტყისა და Ox, Oy და Oz ღერძების გადაკვეთის წერტილთა პოვნა და ამ წერტილების მიხედვით სიბრტყის აგება.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია განტოლება: $2x+4y-z+8=0$.

თუ ჩავსვამთ აქ $y=z=0$, მივიღებთ $x=4$; თუ $z=x=0$, მაშინ გვექნება $y=2$ და დაბოლოს, თუ $x=y=0$, მაშინ $z=-8$.

ამიტომ ჩვენი სიბრტყე კვეთს საკოორდინატო ღერძებს წერტილებში: $M_1(4,0,0)$, $M_2(0, 2, 0)$, $M_3(0, 0, -8)$ (ნახ. 98).

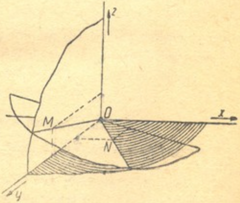
იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ მოცემულ განტოლებას შემდეგნაირად გადავწერთ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-8}=1$, საიდანაც აშკარაა, რომ სიბრტყე მოსჭრის საკოორდინატო ღერძებზე ნაკვეთებს 4, 2 და -8.

ავიღოთ კიდევ სიბრტყის განტოლება: $2x-3y+12=0$. ეს სიბრტყე Oz ღერძის პარალელურია. თუ მის განტოლებაში შევიტანთ $y=0$, მივიღებთ $x=-6$; თუ $x=0$, მაშინ $y=4$; მაშასადამე, ჩვენი სიბრტყე Oz ღერძის პარალელურია და გადის წერტილებზე $N_1(-6, 0, 0)$ და $N_2(0, 4, 0)$ (იხ. ნახ. 98).

იმავე შედეგს მივიღებთ, თუ განტოლებას ასე გადავწერთ: $\frac{x}{-6}+\frac{y}{4}=1$, საიდანაც ჩანს, რომ სიბრტყე მოსჭრის საკოორდინატო ღერძებზე ნაკვეთებს -6, 4, და ∞.

თუ სიბრტყე სათავეზე გადის, მაშინ ღერძებთან გადაკვეთის სამივე წერტილი სათავეს ემთხვევა. იმისათვის, რომ ავაგოთ კიდევ სიბრტყის რომელიმე ორი წერტილი, ყველაზე მარტივი იქნება იმ წერტილთა პოვნა, რომელნიც საკოორდინატო სიბრტყეებზე ძევრან.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია განტოლება; $x-2y+4z=0$. თუ, მაგალითად, აქ შევიტანთ $x=0$ და $y=2$, მივიღებთ: $z=1$; თუ კი $z=0$ და $x=2$, მაშინ $y=1$; ამიტომ ჩვენი სიბრტყე გაივლის წერტილებზე $O(0, 0, 0)$, $M(0, 2, 1)$ და $N(2, 1, 0)$ (იხ. ნახ. 99).



ნახ. 99.

124. სიბრტყის კვალი საკოორდინატო სიბრტყეებზე. $Ax+By+Cz+D=0$ სიბრტყის აგება შეიძლება აგრეთვე სხვა გზითაც, სახელდობრ, თუ თითოეულ საკოორდინატო სიბრტყეზე მოცემული სიბრტყის კვალს ვიპოვით, ესე იგი ამ სიბრტყისა და Oyz, Ozx და Oxy სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეებს.

მაგალითად, Oxy სიბრტყესთან გადაკვეთის წრფე, ცხადია, ეს არის იმ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი, რომელთა კოორდინატები ერთ-

დროულად აკმაყოფილებენ მოცემული სიბრტყის განტოლებას და პირობას $z = 0$. ამიტომ საძიებელი კვალის განტოლება Oxy სიბრტყეში იქნება:

$$Ax + By + D = 0, \quad z = 0 \qquad (1)$$

სრულიად აგრეთვე, Oyz სიბრტყეზე ($x = 0$) კვალის განტოლება იქნება:

$$By + Cz + D = 0, \quad x = 0 \qquad (2)$$

და დაბოლოს Ozx სიბრტყეზე ($y = 0$) კვალის განტოლება არის:

$$Ax + Cz + D = 0, \quad y = 0 \qquad (3)$$

შენიშვნა. არსებითად რომ ვთქვათ, Oxy სიბრტყეზე კვალის განტოლება ასე უნდა დაგვეწერა:

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

ვინაიდან (1) განტოლება თავისთავად Oz ღერძის პარალელურ სიბრტყეს გამოსახავს. დამატებითი პირობა კი: $z = 0$ შეცვლილია აქ სიტყვიერი მითითებით იმაზე, რომ (1) განტოლება შეეხება Oxy სიბრტყის წერტილებს.

იგივე ითქმის (2) და (3) განტოლებების შესახებ.

მკითხველს მოეთხოვება ააგოს წინა პარაგრაფში განხილული სიბრტყეების კვლები და ამათი საშუალებით თვით სიბრტყეების აგება მოახდინოს.

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ $4x+7y+3z+5=0$ სიბრტყის კვლები Oyz, Ozx, Oxy სიბრტყეებზე.

პას. $7y+3z+5=0$; $4x+3z+5=0$; $4x+7y+5=0$.

2. იპოვეთ $x+y+1=0$ სიბრტყის კვლები საკოორდინატო სიბრტყეებზე (და ამათი საშუალებით ააგეთ მოცემული სიბრტყე).

პას. $y+1=0$; $x+1=0$; $x+y+1=0$.

125. ორი სიბრტყის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობები. წინა პარაგრაფში ნათქვამი საშუალებას გვაძლევს ორი სიბრტყის პარალელობის პირობა გამოვიყვანოთ. ვთქვათ ამ სიბრტყეების განტოლებანი არიან:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

იმისათვის, რომ ესენი პარალელური იყვნენ, აუცილებელი და საკმარისია, რომ პარალელური იყვნენ მათი კვლები საკოორდინატო სიბრტყეებზე (ნახ. 100). Oxy სიბრტყეზე კვლების განტოლებანი იქნება:

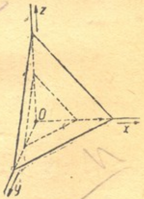
$$A_1x+B_1y+D_1=0 \text{ და } A_2x+B_2y+D_2=0; \qquad (2)$$

მათი პარალელობის პირობა ასე გამოისახება (§ 93): $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$; თუ დანარჩენი ორი საკოორდინატო სიბრტყისათვის ანალოგიურ ტოლობებს დავწერთ, საბოლოოდ მივიღებთ ორი სიბრტყის პარალელობის პირობას:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (3)$$

მაშასადამე, იმისათვის, რომ ორი სიბრტყე პარალელური იყოს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათ განტოლებებში პროპორციული იყვნენ სათანადო ცვლადებთან მდგომი კოეფიციენტები.

პარალელობის კერძო შემთხვევას თანამთხვევა წარმოადგენს.



ნახ. 100.

ორი სიბრტყის თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია საკოორდინატო სიბრტყეებზე მათი კვლების თანამთხვევა. მაგრამ Oxy სიბრტყეზე კვლების [იხ. (2) განტოლებანი] თანამთხვევის პირობა გვაძლევს შემდეგ ტოლობებს: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$; თუ ანალოგიურ ტოლობებს დავწერთ დანარჩენი ორი საკოორდინატო სიბრტყისათვის, საბოლოოდ მივიღებთ საძიებელ პირობებს:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}. \qquad (4)$$

მაშასადამე, იმისათვის რომ ორი სიბრტყე ერთი მეორეს ემთხვეოდეს, აუცილებელი და საკმარისია, რომ მათ განტოლებებში ყველა სათანადო კოეფიციენტები პროპორციული იყვნენ.

თუ k აღნიშნავს (3) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობას, მაშინ უკანასკნელი პირობები ასე შეიძლება გადაიწერონ:

$$A_1 = kA_2,\ B_1 = kB_2,\ C_1 = kC_2,\ D_1 = kD_2. \tag{5}$$

აქედან გამომდინარეობს (იხ. § 93), რომ (1) განტოლებებით მოცემულ სიბრტყეთა თანამთხვევისათვის, აუცილებელი და საკმარისია, რომ არსებობდეს ისეთი k რიცხვი, რომლისათვისაც ადგილი აქვს იგივეობას (ე. ი. ტოლობას, რომელიც x, y და z-ის ყველა მნიშვნელობისათვისაა სამართლიანი)

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2). \tag{5a}$$

III. სივრცეში წრფის განტოლებანი

126. განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში. პარამეტრული წარმოდგენა. გამოვიყვანოთ ახლა სივრცეში წრფის განტოლებანი იმავე ხერხით, რაც § 84-ში ვიხმარეთ. ვთქვათ Δ არის მოცემული წრფე; მისი მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ერთერთი მისი $A_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილის მოცემით და რომელიმე ვექტორით $\overline{P} = (L, M, N)$, რომელიც ნულის ტოლი არ არის და ამ წრფის პარალელურია (ნახ. 101). ამ ვექტორს ჩვენ ვუწოდოთ Δ წრფის მიმართულების ვექტორი. იმისათვის, რომ $A(x, y, z)$ წერტილი ძევდეს Δ წრფეზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ვექტორი $\overline{A_0A} = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$ პარალელური იყოს $\overline{P}$-სი; ეს კი გვაძლევს (§ 33):

$$\frac{x - x_0}{L} = \frac{y - y_0}{M} = \frac{z - z_0}{N}. \tag{1}$$

ეს პირობა წარმოადგენს ორი განტოლების სისტემას, რომელიც შეიძლება ასე დაიწეროს:

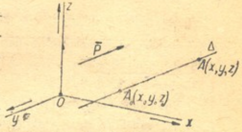
$$\frac{x - x_0}{L} = \frac{z - z_0}{N}, \quad \frac{y - y_0}{M} = \frac{z - z_0}{N}. \tag{1a}$$

ვინაიდან ეს განტოლებანი იმის აუცილებელ და საკმარის პირობას გამოსახავენ, რომ (x, y, z) წერტილი აღებულ წრფეზე ძევდეს, ამიტომ სწორედ ესენი წარმოადგენენ ამ წრფის განტოლებებს.

ჩვენ ვხედავთ, რომ სივრცეში წრფე გამოისახება ორი განტოლებით, როგორც ეს გათვალისწინებული იყო სივრცეში წირთა ანალიზურ

წარმოდგენაზე საუბრის დროს (§ 115). წრფისათვის დამახასიათებელი ის არის, რომ ორივე ეს განტოლება პირველი ხარისხისაა (წრფივია).

L, M, N სიდიდეები სავსებით განსაზღვრავენ წრფის მიმართულებას; ამიტომ მათ უწოდებენ ამ წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს და შესაბამისად ამისა (1) განტოლებას ეწოდება **განტოლება მიმართულების კოეფიციენტებში**.



ნახ. 101.

ცხადია, რომ, პირიქით: (1) სახის განტოლებანი, სადაც L, M, N ერთდროულად ნულები არ არიან, ყოველთვის წრფეს გამოსახავენ, რომელიც (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გაივლის და (L, M, N) ვექტორის პარალელური იქნება.

ვინაიდან $\overline{P}$ ვექტორი შეიძლება ნებისმიერი მისი პარალელური ვექტორით შეიცვალოს, ამიტომ L, M, N სიდიდეები შეიძლება რომელიმე მათი პროპორციული სიდიდეებით შევცვალოთ. აქედან გამომდინარეობს, რომ Δ წრფის მიმართულება დამოკიდებულია თვით L, M, N სიდიდეებზე კი არა, არამედ მათ ფარდობებზე, მაგალითად, ფარდობებზე:

$$a=\frac{L}{N}, \quad b=\frac{M}{N}. \tag{2}$$

ეს ფარდობები შეიძლება იწოდონ აღებული წრფის საკუთხო კოეფიციენტებად (იხ. შემდეგი პარაგრაფი).

(1) განტოლებებიდან ადვილად მივიღებთ წრფის პარამეტრულ წარმოდგენასაც. ამისათვის საკმარისია (1) ფარდობათა საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ t-თი, რაიცა გვაძლევს (იხ. § 84):

$$x=x_0+Lt, \quad y=y_0+Mt, \quad z=z_0+Nt \tag{3}$$

t პარამეტრს აქვს იგივე გეომეტრიული შინაარსი, რაც § 84-ში.

თუ ნებისმიერი სიგრძის $\overline{P}$ ვექტორის მაგიერ ავიღებთ მგეზავს $\overline{T}=(l, m, n)$, მაშინ (1) განტოლებანი მიიღებენ სახეს:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}; \tag{4}$$

სიდიდეები l, m, n იწოდებიან Δ წრფის მიმართულების კოორდინატებად, ხოლო (4) განტოლებანი—განტოლებები მიმართულების კოორდინატებში.

შესაბამი პარამეტრული წარმოდგენა მიიღებს სახეს:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt; \tag{5}$$

t პარამეტრი ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ცვლადი $A(x, y, z)$ წერტილის მანძილს მუდმივ $A_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილამდე გარკვეული ნიშნით განხილულს (იხ. § 84).

შენიშვნა. თუ მოცემულია Δ წრფის მიმართულების კოეფიციენტები L, M, N, მაშინ l, m, n კოორდინატების საპოვნელად საკმარისია L, M, N სიდიდეები ისეთს k მამრავლზე გავამრავლოთ, რომ (kL, kM, kN) ვექტორის სიგრძე ერთის ტოლი იყოს.

მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში ეს მოგვცემს: $(kL)^2 + (kM)^2 + (kN)^2 = 1$, რაიდანაც $k = \pm \dfrac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$

და:

$$\left.\begin{aligned} l = \pm \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad m = \pm \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \\ n = \pm \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

ორნაირი ნიშანი[1] იმიტომ აიღება, რომ თუ l, m, n არიან წრფის მიმართულების კოორდინატები, მაშინ $-l$, $-m$, $-n$ აგრეთვე იმავე წრფის მიმართულების კოორდინატები იქნებიან.

გავიხსენოთ, რომ განსახილავ შემთხვევაში (მართკუთხოვანი კოორდინატების) l, m, n არიან იმავე დროს მიმართულების კოსინუსები, ესე იგი:

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos\beta, \quad n = \cos\gamma, \tag{7}$$

სადაც α, β, γ აღნიშნავენ $\overline{T} = (l, m, n)$ მგეზავის კუთხეებს საკოორდინატო ღერძებთან. მგეზავს $-\overline{T} = (-l, -m, -n)$ შეეფერება კუთხეები: $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$.

Δ წრფესა და საკოორდინატო ღერძებს შორის კუთხეებად ჩვენ ვიგულისხმებთ ან $\overline{T}$ მგეზავის კუთხეებს ამ ღერძებთან (ე. ი. α, β, γ) ან $(-\overline{T})$ მგეზავის კუთხეებს (ე. ი. $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$), განურჩევლად.

---

[1]) უნდა ერთდროულად ან ზედა ნიშნები ავიღოთ ან ქვედა.

მაშ, (6) ფორმულები საშუალებას გვაძლევენ ვიპოვოთ (1) განტოლებით მოცემული წრფის კუთხეები საკოორდინატო ღერძებთან.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც $A_0(1,\ 0,\ 1)$ წერტილზე გადის და პარალელურია $\overline{P}=(3,\ 2,\ 1)$ ვექტორისა.

პას. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z-1.$

2. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც (2, 3, 2) წერტილზე გაივლის და (0, 3, 5) ვექტორის პარალელური იქნება.

პას. $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{5}$ ანუ $x=2,\ \dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{5}.$

3. იპოვეთ Oxy სიბრტყის პარალელური წრფის ზოგადი განტოლებანი.

პას. $\dfrac{x-x_0}{L}=\dfrac{y-y_0}{M}=\dfrac{z-z_0}{0}$ ანუ $\dfrac{x-x_0}{L}=\dfrac{y-y_0}{M},\ z=z_0.$

4. იპოვეთ Oz ღერძის პარალელური წრფის ზოგადი განტოლება.

პას. $\dfrac{x-x_0}{0}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{N}$ ანუ $x=x_0,\ y=y_0.$

5. იპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც წრფე $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-8}{3}$ შეადგენს (მართკუთხოვან) კოორდინატთა ღერძებთან:

პას. $\cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\pm\dfrac{3}{\sqrt{14}}.$

127. წრფის დაყვანილი განტოლებანი. თუ ვიგულისხმებთ, რომ წინა პარაგრაფის (1) განტოლებებში $N\neq 0$, მაშინ მათი გადაწერა ასე შეიძლება:

$$x-x_0=a(z-z_0),\quad y-y_0=b(z-z_0), \tag{1}$$

სადაც, ისე როგორც ზევით, a და b აღნიშნავენ მუდმივებს:

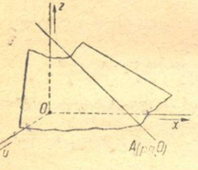
$$a=\frac{L}{N},\quad b=\frac{M}{N}, \tag{2}$$

ან კიდევ ასე:

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q,\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

სადაც p და q აღნიშნავენ გარკვეულ მუდმივებს (სახელდობრ, $p = x_0 - az_0$, $q = y_0 - bz_0$). (3) განტოლებათა სისტემას ეწოდება უმარტივესი, ანუ დაყვანილი სისტემა წრფის განტოლებებისა.

თითოეული ამ განტოლებათაგან, მაგალითად, განტოლება $x = az + p$, თავისთავად აღებული, გამოსახავს სიბრტყეს (ვინაიდან ეს განტოლება პირველი ხარისხისაა). ვინაიდან Δ წრფის წერტილთა კოორდინატები აკმაყოფილებენ ორივე ამ განტოლებას, ამიტომ ეს წრფე ერთდროულად ორივე ამ სიბრტყეს ეკუთვნის, ე. ი. წარმოადგენს მათ გადაკვეთას.



ნახ. 102.

ვინაიდან პირველი განტოლება არ შეიცავს y-ს, ხოლო მეორე x-ს, ამიტომ პირველი სიბრტყე Oy ღერძის პარალელურია, ხოლო მეორე Ox ღერძის. მაშასადამე, (3) განტოლებებით გამოსახული სიბრტყეები, წარმოადგენენ იმ სიბრტყეებს, რომელნიც აგეგმილებენ აღებულ წრფეს, შესაბამისად, სიბრტყეებზე Ozx და Oyz (დაგეგმილება ხდება, შესაბამისად, Oy და Ox-ის პარალელურად) (ნახ. 102).

(3) განტოლებებში a, b, p და q კოეფიციენტებს უბრალო გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვთ. სახელდობრ, აშკარაა, რომ p და q წარმოადგენენ (3) წრფის Oxy სიბრტყეზე კვალის კოორდინატებს. მართლაც, ამ კვალის კოორდინატების საპოვნელად, ესე იგი იმ A წერტილის კოორდინატების საპოვნელად, რომელზედაც კვეთს (3) წრფე Oxy სიბრტყეს, საჭიროა (3) სისტემაში შევიტანოთ $z = 0$, რაიცა გვაძლევს: $x = p$, $y = q$. a და b კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობის გამოსარკვევად დავკმაყოფილდეთ მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევით. თუ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს შევინარჩუნებთ, მივიღებთ:

$$a = \frac{L}{M} = \frac{l}{n}, \quad b = \frac{M}{N} = \frac{m}{n}$$

ანუ:

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}, \tag{4}$$

სადაც α, β, γ აღნიშნავენ Δ წრფის კუთხეებს საკოორდინატო ღერძებთან; შევნიშნოთ, რომ a და b მნიშვნელობანი არ შეიცვლებიან, თუ ერთდროულად α, β და γ-ს შევცვლით $(\pi - \alpha)$, $(\pi - \beta)$ და $(\pi - \gamma)$-თი.

თუ მოცემული არიან დაყვანილი განტოლებანი (3), მაშინ ყოველთვის შეიძლება მათი გარდაქმნა განტოლებებად მიმართულების კოეფიციენტებში; ამისათვის საკმარისია (3) განტოლებანი ასე გადავწეროთ:

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-0}{1}. \tag{5}$$

ზემოხსენებულიდან გამომდინარეობს, რომ (3) განტოლებანი ყოველთვის გამოსახავენ ისეთ წრფეს, რომელიც $(p,\ q,\ 0)$ წერტილზე გაივლის და რომელსაც მიმართულების კოეფიციენტებად აქვს a, b, 1. (ან ყოველი სამი რიცხვი, a, b, 1-ის პროპორციული).

შენიშვნა 1. a, b სიდიდეთაგან ერთერთი ან ორივე ერთად, კერძოდ, შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. თუ მაგალითად $a=0$, მაშინ წრფის განტოლებანი მიიღებენ სახეს: $x=p$, $y=bz+q$; ამ შემთხვევაში წრფე მდებარეობს Oyz სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში $x=p$, ესე იგი წრფე ამ უკანასკნელი სიბრტყის პარალელურია. თუ $a=b=0$, მაშინ წრფის განტოლებანი მიიღებენ სახეს: $x=p$, $y=q$; ამ შემთხვევაში წრფე პარალელურია Oz ღერძისა.

შენიშვნა 2. (3) განტოლებათა გამოყვანის დროს, ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ $N \neq 0$. თუ $N=0$, მაშინ L, M სიდიდეთაგან ერთი მაინც არ არის ნულის ტოლი (ვინაიდან სამივე სიდიდე L, M, N, პირობის თანახმად, ნული ვერ გახდება ერთდროულად); ვთქვათ, მაგალითად, $L \neq 0$; მაშინ ჩვენ შეგვეძლება დაყვანილი განტოლებების დაწერა, თუ z და x ცვლადს როლებს შევუცვლით.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი

1. იპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც (3) განტოლებებით მოცემული წრფე შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

პ ა ს. (5) ფორმულიდან და წინა პარაგრაფის (6) ფორმულიდან გამომდინარეობს: $\cos\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$, $\cos\beta=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$, $\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$.

2. იპოვეთ ის მ ა ხ ვ ი ლ ი კუთხე, რომელსაც შეადგენს Oz ღერძთან შემდეგი განტოლებებით მოცემული წრფე: $x=z+2$, $y=-2z+3$.

პ ა ს. $\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{6}}$

128. ორი წრფის პარალელობისა და თანამთხვევის პირობები. მიმართულების კოეფიციენტთა თვით განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ წრფეების განტოლებანი არიან:

$$\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1} \text{ და } \frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}, \qquad (1)$$

მაშინ მათი პარალელობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ მიმართულების ვექტორები (L_1, M_1, N_1) და (L_2, M_2, N_2) პარალელური იყვნენ, ესე იგი, რომ:

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}. \qquad (2)$$

ეს ტოლობანი გამოხატავენ (1) წრფეთა პარალელობის პირობას.

თუ წრფეები დაყვანილი სახის განტოლებებით არიან მოცემული:

$$\left.\begin{aligned} x&=a_1z+p_1,\\ y&=b_1z+q_1, \end{aligned}\right\} \text{ და } \left.\begin{aligned} x&=a_2z+p_2\\ y&=b_2z+q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

მაშინ თუ ამათ გადავწერთ წინა პარაგრაფის (5) სახით და გამოვიყენებთ (2) პირობას, დავრწმუნდებით, რომ პარალელობის პირობები გამოისახებიან შემდეგნაირად:

$$a_1=a_2,\ \ b_1=b_2. \qquad (4)$$

p და q კოეფიციენტების გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით (იხ. წინა პარაგრაფი) ცხადია აგრეთვე, რომ (3) წრფეთა თანამთხვევისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ:

$$a_1=a_2,\ \ b_1=b_2,\quad p_1=p_2,\ \ q_1=q_2. \qquad (5)$$

129. წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით. წრფის დაყვანილი განტოლებანი:

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ვგანიხილავენ ამ წრფეს, როგორც ორი სიბრტყის გადაკვეთას: $x-az-p=0$ და $y-bz-q=0$, რომელნიც შესაბამისად, Oy და Ox ღერძის პარალელური არიან. მაგრამ, რასაკვირველია, წრფის ანალიზური წარმოდგენი-

სათვის შეიძლება ნებისმიერი ისეთი ორი სიბრტყით ვისარგებლოთ, რომელნიც მოცემული წრფის გასწვრივ იკვეთებიან (მაგრამ ერთიმეორეს არ ემთხვევიან). ვთქვათ

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

არიან ამ სიბრტყეთა განტოლებანი. უკანასკნელ განტოლებათა ერთობლიობა წარმოადგენს ა ღ ე ბ უ ლ ი წ რ ფ ი ს გ ა ნ ტ ო ლ ე ბ ე ბ ს ზ ო გ ა დ ი ს ა ხ ი თ.

პირიქით, (2) განტოლებათა სისტემა ყოველთვის წარმოადგენს რაღაც წრფეს; იგულისხმება, რომ სიბრტყეები, რომელნიც თითოეულ ამ განტოლებით გამოისახებიან, არაპარალელური არიან (არც თანამთხვეული). ეს უშუალოდ აშკარაა, ვინაიდან ჩვენ ვიცით, რომ (2) სისტემა წარმოადგენს ორი ხსენებული სიბრტყის გადაკვეთას, ე. ი. წრფეს.

ცხადია, რომ (2) სისტემა შეგვიძლიან უამრავი სხვა, მისი ტოლფასი სისტემით შევცვალოთ. ეს იმას ნიშნავს, რომ აღებული ორი სიბრტყის მაგიერ ჩვენ შეგვიძლიან ავიღოთ ნებისმიერი სხვა ორი სიბრტყე, რომელნიც მოცემული წრფის გასწვრივ იკვეთებიან.

კერძოდ (2) სისტემა ყოველთვის შეიძლება დავიყვანოთ უმარტივეს სახეზე (2) (ან ანალოგიურ სახეზე, სადაც z-ის როლს ასრულებს x ან y).

ამისათვის საკმარისია ამოვხსნათ (2) სისტემა x, y, z ცვლადთაგან რომელიმე ორის მიმართ, რაც ყოველთვის შესაძლებელია, როგორც ამას ახლავე დავინახავთ.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ შემდეგ სიდიდეთაგან [1]:

$$B_1C_2 - B_2C_1, \quad C_1A_2 - C_2A_1, \quad A_1B_2 - A_2B_1 \qquad (3)$$

ერთი მაინც არ არის ნულის ტოლი, ვინაიდან სამივე რომ ნული იყოს, გვექნებოდა: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, და (1) სისტემის განტოლებებით გამოსახული სიბრტყეები ამ შემთხვევაში პარალელური იქნებოდენ, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

წარმოვიდგინოთ გარკვეულობისათვის რომ ნულისაგან განსხვავდება (3) სიდიდეთაგან მესამე, ე. ი., რომ $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$.

---

[1]) შევნიშნოთ სხვათაშორის, რომ ეს სიდიდეები არიან შემდეგი ცხრილიდან შედგენილი დეტერმინანტები:

$$\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2, \end{matrix}$$

მაშინ, როგორც ეს ადვილი დასანახია, (2) სისტემა შეიძლება ამოიხსნას x და y ცვლადების მიმართ და ჩვენ მივიღებთ (1) სახის განტოლებებს[1]. მაშ, ზოგადი განტოლებებიდან დაყვანილი რომ მივიღოთ, საკმარისია ეს უკანასკნელნი ამოვხსნათ რომელიმე ორი ცვლადის მიმართ. თავის მხრივ, დაყვანილი განტოლებანი შეიძლება ერთბაშად გარდავქმნათ განტოლებებად მიმართულების კოეფიციენტებში (იხ. წინა პარაგრაფი).

შენიშვნა. თუ (2) განტოლებებით წარმოდგენილი სიბრტყეები პარალელური არიან, მაინც მოხერხებულია აქაც ვთქვათ, რომ ეს სიბრტყეები იკვეთებიან წრფეზე, მაგრამ მათი გადაკვეთის წრფე უ ს ა ს რ უ ლ ო დ დ ა შ ო რ ე ბ უ ლ ი ა.

სავარჯიშო მაგალითები

1. მოცემულია წრფის განტოლებანი ზოგადი სახით:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+5&=0,\\ 2x-y-2z+1&=0. \end{aligned}\right\}$$

იპოვეთ დაყვანილი განტოლებანი და განტოლებანი მიმართულების კოეფიციენტებში.

პ ა ს. დაყვანილი განტოლებანი: $x=\frac{1}{3}z-2$, $y=-\frac{4}{3}z-3$.

მიმართულების კოეფიციენტებში განტოლებების ერთერთი სახე:

$$\frac{x+2}{\frac{1}{3}}=\frac{y+3}{-\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{z}{1} \quad \text{ანუ} \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z}{3}.$$

2. იგივე ამოცანა წრფისათვის:

---

[1]) თუ (2) განტოლებათაგან პირველს გავამრავლებთ B_2-ზე, ხოლო მეორეს B_1-ზე და ერთი მეორეს გამოვაკლებთ, მივიღებთ:

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+(C_1B_2-C_2B_1)z+(D_1B_2-D_2B_1)=0; \qquad (*)$$

თუ ამის შემდგომ პირველს გავამრავლებთ A_2-ზე, ხოლო მეორეს A_1-ზე, იმავე გზით მივიღებთ: $(A_1B_2-A_2B_1)y+(A_1C_2-A_2C_1)z+(A_1D_2-A_2D_1)=0$. ვინაიდან $A_1B_2-A_2B_1$ ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ ორივე უკანასკნელი განტოლება შეიძლება $A_1B_2-A_2B_1$-ზე გავყოთ და მაშინ ერთბაშად მივიღებთ (1) სახის განტოლებებს (z-ის შემცველი წევრებისა და თავისუფალი წევრების მარჯვნივ გადატანით).

თუ $A_1B_2-A_2B_1=0$, მაგრამ, მაგალითად, $B_1C_2-C_1B_2\neq 0$, მაშინ (*) განტოლება ღებულობს სახეს: $z=c$, სადაც c მუდმივია. ამ შემთხვევაში აღებული წრფე Oxy სიბრტყის პარალელურია, ვინაიდან ყოველი მისი წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდენ (*) განტოლებას, რომელიც (2) განტოლების შედეგია, ესე იგი განტოლებას $z=c$.

ამ შემთხვევაში (2) სისტემა არ შეიძლება ამოხსნილი იყოს x და y-ის მიმართ, მაგრამ შეიძლება ამოიხსნას, მაგალითად y და z-ის მიმართ.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ 2x+4y-z+6=0. \end{array}\right\}$$

პ ა ს. $x=-2y-2$; $z=2$; (დაყვანილი სახე);

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}.$$ (მიმართ. კოეფ-ში).

3. წრფე მოცემულია განტოლებებით:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y-2z+5=0, \\ 4x-4y-z+2=0; \end{array}\right\}$$

იპოვეთ ის კუთხეები, რომელთაც იგი შეადგენს საკოორდინატო ღერძებთან.

ა მ ო ხ ს ნ ა. დაყვანილი განტოლებანი იქნებიან: $x=\frac{5}{4}z-\frac{7}{2}$, $y=-z+3$; მაშასადამე მიმართულების კოეფიციენტებად იქნებიან: $\left(\frac{5}{4}, -1, 1\right)$ ან $(5, -4, 4)$.

$$\text{აქედან: } \cos\alpha=\pm\frac{5}{\sqrt{57}}, \ \cos\beta=\mp\frac{4}{\sqrt{57}}, \ \cos\gamma=\pm\frac{4}{\sqrt{57}}.$$

IV. ძირითადი ამოცანები წრფეზე და სიბრტყეზე

წრფეთა და სიბრტყეთა ანალიზურ წარმოდგენასთან დაკავშირებულ სხვადასხვა ძირითად ამოცანების ამოხსნაზე გადასვლისას, ჩვენ შეგვეძლო რამოდენიმე წინასწარი შენიშვნა გაგვეკეთებია, ანალოგიურად იმისა, რაც მოყვანილი იყო სიბრტყეზე წრფის შესახებ ძირითადი ამოცანების გარჩევის დროს. განმეორების თავიდან ასაცილებლად ჩვენ ამაზე აქ აღარ ვლაპარაკობთ.

შემდეგში, სიტყვები: „მოცემულია სიბრტყე", „მოცემულია წრფე", „სიბრტყის პოვნა" და ა. შ. ჩვენ ასე უნდა გვესმოდეს: „მოცემულია სიბრტყის განტოლება", „მოცემულია წრფის განტოლებანი" და ა. შ.

130. ამოცანა 1. ო რ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს გ ა დ ა კ ვ ე თ ი ს პ ო ვ ნ ა. თუ მოცემულია ორი სიბრტყე შემდეგი განტოლებებით:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{1}$$

და

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{2}$$

მაშინ ისინი შეიძლება ან იკვეთებოდეს (საერთო წრფე ქონდეთ), ან პარალელური იყვნენ (საერთო უსასრულოდ-შორეული წრფე ქონდეთ), ან თანამთხვეული იყვნენ (ყველა წერტილი საერთო ქონდეთ). ჩვენ უკვე ვი-

ცით, როგორ უნდა თავიდანვე გამოირკვეს, თუ რომელ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე (§ 125). პირველ შემთხვევაში (როცა სიბრტყეები იკვეთებიან სასრული მანძილზე მდებარე წრფის მიხედვით) ეს წრფე განისაზღვრება (1) და (2) განტოლებათა სისტემით.

თუ საჭიროებამ მოითხოვა, ჩვენ შეგვიძლიან ეს სისტემა ისე გარდავქმნათ, რომ დაყვანილი სახე მივცეთ ან მიმართულების კოეფიციენტებში განტოლებების სახე (იხ. წინა პარაგრაფი).

131. ამოცანა 2. სამი სიბრტყის გადაკვეთის პოვნა. თუ მოცემულია სამი სიბრტყე შემდეგი განტოლებებით:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

მათი გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდენ სამივე ამ განტოლებას.

ალგებრიდან ცნობილია, რომ, საზოგადოდ, ამ სისტემას ერთი გარკვეული ამონახსნი აქვს.

ამ განტოლებათა დაწვრილებით ალგებრულ გამოკვლევას ვანდობთ მკითხველს, რომელიც გაცნობილია განტოლებათა ამოხსნის თეორიასთან დეტერმინანტთა საშუალებით, აქ კი მხოლოდ რამოდენიმე შენიშვნით დავკმაყოფილდებით, რომელნიც ემყარებიან სიბრტყის ცნობილ თვისებებს.

აღებული სამი სიბრტყე შეიძლება ერთ წერტილზე იკვეთებოდენ (ეს ყველაზე ზოგადი შემთხვევაა). ამ შემთხვევაში (და მხოლოდ ამ შემთხვევაში) (1) სისტემას აქვს ერთი გარკვეული ამონახსნი.

მაგრამ აღებულ სიბრტყეებს შეიძლება არც ერთი საერთო წერტილი არ ქონდეთ, ესე იგი შეადგენდენ პრიზმას (პარალელური იყვენ ერთი და იმავე წრფისა ისე, რომ ერთსა და იმავე წრფეზე არ იკვეთებოდენ), ან და ურთიერთ პარალელური იყვენ ისე, რომ ერთ სიბრტყეთ არ გადაიქცენ. ამ შემთხვევაში (და მხოლოდ ამ შემთხვევაში) (1) სისტემა არათავსებადია.

შემდგომ, სამივე მოცემული სიბრტყე შეიძლება ერთსა და იმავე წრფეზე იკვეთებოდეს ან და ერთ სიბრტყეთ გადაიქცენ. მაშინ (და მხოლოდ მაშინ) (1) სისტემას უამრავი ამონახსნი აქვს.

მაშ, (1) სისტემის ამოხსნით, ყოველთვის შეიძლება გავიგოთ რომელს, ზევით დასახელებულ, შემთხვევასთან გვაქვს საქმე.

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთის წერტილი:

$$x+y-z=0, \quad 2x-y+z-3=0, \quad x-y-2z+1=0.$$

პ ა ს. წერტილი (1, 0, 1).

2. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთა:

$$x+2y+3z-1=0, \quad x+y+z+1=0, \quad 2x+3y+4z=0.$$

პ ა ს. უკანასკნელი განტოლება არის პირველი ორის შედეგი (მიიღება პირველი ორის შეკრებით). ამიტომ მესამე განტოლება შეიძლება უკუვაგდოთ. დაგვრჩება პირველი ორი განტოლების დაკმაყოფილება. ეს ორი განტოლება განსაზღვრავს წრფეს:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z-1=0, \\ x+y+z+1=0, \end{array}\right\}$$

რომელზედაც იკვეთება სამივე მოცემული სიბრტყე.

3. იპოვეთ შემდეგი სამი სიბრტყის გადაკვეთა:

$$x+2y+3z-1=0, \quad x+y+z+1=0, \quad 2x+3y+4z+5=0.$$

პ ა ს. პირველი ორი განტოლება რომ შევკრიბოთ და მიღებულიდან მესამე გამოვაკლოთ, დაგვრჩება: $-5=0$, ესე იგი შეუძლებელი ტოლობა. მაშ, აღებული სიბრტყეები არ იკვეთებიან (იკვეთებიან უსასრულოდ შორეულ წერტილზე). ადვილი შესამოწმებელია, რომ ეს სიბრტყეები არაპარალელური არიან. მაშასადამე ისინი შეადგენენ პრიზმას.

132. ამოცანა 3. სიბრტყისა და წრფის გადაკვეთის პოვნა. თუ წრფე და სიბრტყე მოცემული არიან ზოგადი განტოლებებით (მაგალითად, წრფე წარმოდგენილია წინა პარაგრაფის (1) სისტემის პირველი ორი განტოლებით, ხოლო სიბრტყე—იმავე სისტემის მესამე განტოლებით), მაშინ ჩვენ საქმე გვექნება წინა პარაგრაფში განხილულ ამოცანასთან.

ამოხსნა უფრო მარტივი იქნება, თუ წრფე მოცემულია, მაგალითად, პარამეტრულად. ვთქვათ:

$$x=x_0+Lt, \quad y=y_0+Mt, \quad z=z_0+Nt \tag{1}$$

არის მოცემული წრფის პარამეტრული წარმოდგენა, ხოლო

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

მოცემული სიბრტყის განტოლებაა. თუ (1) გამოსახვებს შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ:

$$(AL+BM+CN)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{3}$$

თუ t-სთან მდგომი კოეფიციენტი ნულის ტოლი არ არის, ჩვენ მივიღებთ t-ს სრულიად გარკვეულს მნიშვნელობას. თუ შევიტანთ ამას (1)-ში მივიღებთ გადაკვეთის წერტილის კოორდინატებს x, y, z.

მაგრამ, თუ $AL+BM+CN=0$ და ამასთანავე (3) განტოლების თავისუფალი წევრი $Ax_0+By_0+Cz_0+D$ ნულისაგან განსხვავდება, მაშინ გადაკვეთის წერტილი არ არსებობს (ან, როგორც ხშირად ამბობენ იგი უსასრულობაში იმყოფება); ეს ნიშნავს, რომ წრფე და სიბრტყე პარალელური არიან.

დაბოლოს, თუ:

$$AL+BM+CN=0. \tag{4}$$

და გარდა ამისა:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \tag{5}$$

მაშინ (3) განტოლება იგივეობად გადაიქცევა $0=0$ და მაშასადამე, კმაყოფილდება t-ს ყველა მნიშვნელობათათვის. ეს ნიშნავს, რომ წრფე არამც თუ სიბრტყის პარალელურია, არამედ პირდაპირ მასზე მდებარეობს.

იმავე დასკვნებს მივიღებთ, თუ წრფე მოცემულია განტოლებებით მიმართულების კოეფიციენტებში:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}. \tag{1a}$$

დავიხსომოთ, რომ (4) ტოლობა წარმოადგენს (1) წრფისა [ან, რაც იგივეა, (1*a*) წრფისა] და (2) სიბრტყის პარალელობის პირობას. შეიძლება ითქვას, რომ (4) პირობა არის (2) სიბრტყისა და (L, M, N) ვექტორის პარალელობის პირობა.

(4) და (5) ტოლობათა ერთობლივობა გვაძლევს წრფისა და სიბრტყის თანამთხვევის პირობას.

თუ წრფე წარმოდგენილია დაყვანილი განტოლებებით

$$x=az+p, \quad y=bz+q, \tag{6}$$

მაშინ თუ მათ შემდეგი სახით გადავწერთ: $\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-0}{1}$, დავინახავთ, რომ წრფისა და სიბრტყის პარალელობის პირობა იქნება:

$$Aa+Bb+C=0; \tag{4a}$$

წრფისა და სიბრტყის თანამთხვევის პირობები კი შედგება (4a) ტოლობასა და შემდეგი ტოლობისაგან:

$$Ap+Bq+D=0. \tag{5a}$$

სავარჯიშო მაგალითები

1. მოცემულია წრფე: $x=3z+1, y=-z+2$ და სიბრტყე: $4x+y-11z+2=0$. იპოვეთ მათი გადაკვეთის წერტილი.

პ ა ს. წერტილი $(-5, 4, -2)$.

2. k-ს რომელი მნიშვნელობისათვის წრფე: $x=kz+2$, $y=2kz+4$ პარალელურია სიბრტყისა: $x+y+z=0$?

პ ა ს. $k=-\dfrac{1}{3}$.

133. სივრცეში ორი წრფის გადაკვეთა. ორი წრფე სივრცეში, საზოგადოდ, ურთიერთ არ იკვეთება და არც ერთსა და იმავე სიბრტყეზე ძევს. გამოვარკვიოთ, რა პირობებში არსებობს მათი გადაკვეთის წერტილი და როგორ ვიპოვოთ იგი, თუ კი არსებობს[1]. წარმოვიდგინოთ, რომ:

$$\left.\begin{aligned} x&=az+p,\\ y&=bz+q \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

და

$$\left.\begin{aligned} x&=a'z+p',\\ y&=b'z+q' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

არიან მოცემული წრფეების განტოლებანი. ამ წრფეების გადაკვეთის წერტილის (თუ კი არსებობს) კოორდინატები ერთდროულად უნდა აკმაყოფილებდნენ ორივე განტოლებას (1) და (2). თუ x-ს გამოვრიცხავთ (1) და (2) სისტემათა პირველ განტოლებათაგან, მივიღებთ: $az+p=a'z+p'$; ანალოგიურად, თუ y-ს გამოვრიცხავთ, მივიღებთ:

$$bz+q=b'z+q'.$$

z-ის მნიშვნელობა უნდა აკმაყოფილებდეს ორივე უკანასკნელ განტოლებას. პირველი მათგანი გვაძლევს:

$$z=\frac{p'-p}{a-a'}, \tag{3}$$

[1]) ქვევით (§ 150) ეს ამოცანა სხვა გზით იქნება ამოხსნილი, უფრო ზოგადი და სიმეტრიული სახით.

ხოლო მეორე:

$$z=\frac{q'-q}{b-b'}. \tag{4}$$

თუ ასეთნაირად მიღებული z-ის მნიშვნელობანი თანატოლი არიან, ე. ი. თუ

$$\frac{p'-p}{a-a'}=\frac{q'-q}{b-b'} \tag{5}$$

მაშინ (1) და (2) განტოლებათა სისტემებს საერთო ამონახსნი ექნებათ და გადაკვეთის წერტილი არსებობს. მისი z კოორდინატი მოიცემა ერთ-ერთი ტოლობით (3) ან (4), ხოლო x და y გამოითვლებიან (1) ან (2) განტოლებების საშუალებით.

(5) პირობა წარმოადგენს (1) და (2) წრფეების გადაკვეთის წერტილის არსებობის პირობას.

სავარჯიშო მაგალითები

იპოვეთ p-ს ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც წრფეები $x=z+p$, $y=-z$ და $x=2z+1$, $y=3z+2$ ურთიერთ იკვეთებიან. იპოვეთ გადაკვეთის წერტილი.

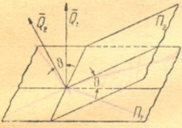
პას. $p=\frac{1}{2}$; გადაკვეთის წერტილის კოორდინატები იქნებიან $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

134. ამოცანა 4. მოცემულ სიბრტყეთა ან წრფეთა შორის კუთხეების პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანად იგულისხმება). ორს Δ_1 და Δ_2 წრფეს შორისი კუთხე $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ ჩვენ გვესმის როგორც ერთერთი იმ კუთხეთაგან, რამდენიც ერთი მეორის დამატებას წარმოადგენენ π-მდე და რომელთაც შეადგენენ ერთ წერტილზე გამავალი და მოცემულთა მიმართ პარალელური წრფეები. ეს კუთხე იმ ϑ კუთხის ტოლია, რომელსაც შეადგენენ ამ წრფეთა მიმართულების $\overline{P}_1$ და $\overline{P}_2$ ვექტორები ან და მისი დამატებაა π-მდე.

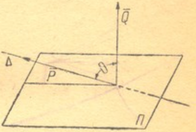
ორს Π_1 და Π_2 სიბრტყეს შორისი კუთხე $\widehat{\Pi_1, \Pi_2}$ ჩვენ გვესმის, როგორც ერთერთი იმ ორწახნაგოვან კუთხეთაგან, რომელთაც ეს სიბრტყეები შეადგენენ. ეს კუთხე იმ ϑ კუთხის ტოლია, რომელსაც შეადგენენ ამ სიბრტყეთა მიმართულების $\overline{Q}_1$ და $\overline{Q}_2$ ვექტორები[1] (ნახ. 103) ან და მისი დამატება π-მდე.

[1]) ე. ი. აღებულ სიბრტყეებისადმი მართობული ვექტორები.

დაბოლოს, Δ წრფესა და Π სიბრტყეს შორის კუთხე (Δ, Π) ჩვენ გვესმის, როგორც ერთერთი იმ კუთხეთაგან, რომელნიც ერთი მეორის დამატებას წარმოადგენენ π-მდე და რომელსაც შეადგენს Δ წრფე თავის მართკუთხოვან გეგმილთან Π სიბრტყეზე. ეს კუთხე და ის ϑ კუთხე, რომელსაც შეადგენენ წრფისა და სიბრტყის მიმართულების ვექტორები $\overline{P}$ და $\overline{Q}$, განსხვავდებიან ერთი მეორისაგან $\frac{\pi}{2}$ სიდიდეზე (ნახ. 104).



ნახ. 103.



ნახ. 104.

თუ ახლა გავიხსენებთ, რომ იმ წრფის მიმართულების ვექტორი, რომელიც მოცემულია განტოლებით:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N} \tag{1}$$

არის ვექტორი $\overline{P}=(L,\ M,\ N)$ (ან ყოველი მისი პარალელური), ხოლო სიბრტყისათვის

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

მიმართულების ვექტორი არის ვექტორი $\overline{Q}=(A,\ B,\ C)$ (ან ყოველი მისი პარალელური), მაშინ განტოლებებით მოცემულ სიბრტყეებსა და წრფეებს შორის კუთხეების პოვნის ამოცანა უშუალოდ დაიყვანება ორ ვექტორს შორის კუთხის პოვნის ამოცანაზე, რომელიც უკვე ამოვხსენით § 40-ში. თუ ამ პარაგრაფის ფორმულებით ვისარგებლებთ, ერთბაშად მივიღებთ შემდეგ დასკვნებს:

1°. კუთხე ორ წრფეს შორის Δ_1 და Δ_2, რომელთა განტოლებანი არიან:

$$\begin{aligned} &\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}, \\ &\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}, \end{aligned} \tag{3}$$

მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\cos \widehat{\Delta_1, \Delta_2} = \pm \frac{L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2}{\sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}\ \sqrt{L_2^2 + M_2^2 + N_2^2}}; \tag{4}$$

(ორნაირი ნიშანი მიტომ აიღება, რომ კუთხე $\widehat{\Delta_1, \Delta_2}$ ან θ-ს ტოლია, ან $\pi-\theta$-სი, სადაც θ არის კუთხე მოცემული წრფეების მიმართულებათა ვექტორებს შორის).

2°. კუთხე ორ სიბრტყეს შორის Π_1 და Π_2, რომელთა განტოლებანი არიან:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{5}$$

მოიცემა ფორმულით:

$$\cos \widehat{\Pi_1, \Pi_2} = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{6}$$

(ორნაირი ნიშანი იმავე მიზეზით აიღება, როგორც ზევით).

3°. (1) განტოლებით მოცემული Δ წრფესა და (2) განტოლებით მოცემული Π სიბრტყის შორის კუთხე მოიცემა ფორმულით:

$$\sin \widehat{\Pi, \Delta} = \pm \frac{AL + BM + CN}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \tag{7}$$

რადიკალის წინ ისეთი ნიშანი უნდა ავიღოთ, რომ $\sin \widehat{\Pi, \Delta} \geqslant 0$, ვინაიდან პირობის თანახმად, $\widehat{\Pi, \Delta}$ კუთხის ორივე მნიშვნელობა იმყოფება 0-სა და π-ს შორის.

შენიშვნა. თუ ზევით განხილული წრფეები, ორივე ან ერთი მათგანი, მოიცემიან დაყვანილი განტოლებებით: $x = az + p$, $y = bz + q$, მაშინ სათანადო ფორმულების მისაღებად საკმარისია გავიხსენოთ, რომ ამ წრფის მიმართულების ვექტორად შეგვიძლიან ავიღოთ ვექტორი $(a, b, 1)$, ასე რომ ამ შემთხვევაში $L = a$, $M = b$, $N = 1$.

ამ პარაგრაფის ფორმულების განზოგადოება ირიბკუთხოვანი კოორდინატების სისტემის შემთხვევისათვის ადვილია § 56-ის ფორმულების გამოყენებით. არ უნდა დავივიწყოთ მხოლოდ, რომ A, B, C არიან იმ Q ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატები, რომელიც (2) სიბრტყის მართობია.

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ ის Θ კუთხე, რომელსაც შეადგენენ წრფე: $x=2z-1,\ y=-z+5$ და სიბრტყე $x-3y+z-5=0$.

პას. $\sin\Theta=\frac{\sqrt{66}}{11}$.

2. იპოვეთ Θ კუთხე შემდეგ ორ სიბრტყეს შორის: $x+y+z+2=0$ და $x-y+z+4=0$.

პას. $\cos\Theta=\pm\frac{1}{3}$.

3. იპოვეთ Θ კუთხე შემდეგ ორ წრფეს შორის: $x=5z+1,\ y=2$ და $x=z+3,\ y=4z-3$.

პას. $\cos\Theta=\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$.

135. ამოცანა 5. მოცემულ წრფეთა და სიბრტყეთა მართობულობის პირობების პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანად იგულისხმებიან). წინა პარაგრაფის ფორმულებით თუ ვისარგებლებთ ან და ორი ვექტორის მართობულობის ან პარალელობის უკვე ცნობილი პირობებით, მაშინ წინა პარაგრაფის აღნიშვნებს თუ შევინარჩუნებთ, იმ წამსვე მივიღებთ შემდეგს:

1. ორი Δ_1 და Δ_2 წრფის მართობულობის პირობა:

$$L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2=0. \tag{1}$$

2. ორი Π_1 და Π_2 სიბრტყის მართობულობის პირობა

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \tag{2}$$

3. Δ წრფისა და Π სიბრტყის მართობულობის პირობა:

$$\frac{A}{L}=\frac{B}{M}=\frac{C}{N}. \tag{3}$$

გავიხსენოთ ამასთან შესადარებლად პარალელობის ის პირობები, რომელნიც წინეთ გამოვიყვანეთ და რომელნიც ირიბკუთხოვანი კოორდინატებისათვისაც გამოსაყენებელი არიან.

ორი წრფისათვის (§ 128):

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2}. \tag{1a}$$

ორი სიბრტყისათვის (§ 125):

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\,. \tag{2a}$$

წრფისა და სიბრტყისათვის (§ 132):

$$AL+BM+CN=0. \tag{3a}$$

ადვილია აგრეთვე ამ უკანასკნელი ფორმულების გამოყვანა ორი ვექტორის პარალელობის ან პერპენდიკულარობის პირობების გამოყენებით.

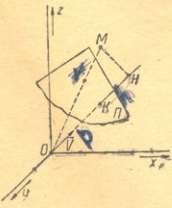
ყურადღება უნდა მიექცეს იმ განსხვავებას, რომელსაც ადგილი აქვს სიბრტყისა და წრფისათვის არსებული პირობების სახესა და ორი წრფის ან ორი სიბრტყისათვის სათანადო პირობების სახეს შორის.

136. ამოცანა 6. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილის პოვნა. ეს ამოცანა § 98-ის ამოცანის ანალოგიურად ამოიხსნება.

ვიგულისხმოთ, რომ კოორდინატები მართკუთხოვანია. წარმოვიდგინოთ, რომ მოცემული სიბრტყის განტოლება დაყვანილია ნორმალურ სახეზე (§ 118):

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{1}$$

თუ $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ არის მოცემული წერტილი, ხოლო H არის იმ მართობის ფუძე, რომელიც M წერტილიდან დაშვებულია Π სიბრტყისადმი მართობულის OK წრფეზე (აღნიშვნები იგივეა, რაც § 118-ში), მაშინ საძიებელი მანძილი (ნახ. 105) $h=KH=OH-OK=OH-p$.



ნახ. 105.

ჩვენ მივაწერთ h მანძილს გარკვეულ ნიშანს, სახელდობრ, h აღნიშნავს $\overline{KH}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\overline{V}$ მგეზავის გასწვრივ; აგრეთვე OH აღნიშნავს $\overline{OH}$ ვექტორის ალგებრულ მნიშვნელობას $\overline{V}$ მგეზავის გასწვრივ.

ცხადია, გვექნება: $OH=\overline{V}\cdot\overline{OM}$. მაგრამ $\overline{V}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, $\overline{OM}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$. ამიტომ $OH=\overline{V}\cdot\overline{OM}=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma$, საიდანაც, საბოლოოდ:

$$h=x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p, \tag{2}$$

ესე იგი, საძიებელ მანძილს მივიღებთ, თუ მოცემული სიბრტყის ნორმალური განტოლების მარცხენა მხარეს

ამოვიღებთ და მასში შევიტანთ მოცემული წერტილის კოორდინატებს.

სახეში უნდა გვქონდეს ის, რომ (2) ფორმულა აწერს h მანძილს გარკვეულ ნიშანს.

თუ სიბრტყის განტოლება ზოგადი სახითაა მოცემული:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1a}$$

მაშინ, ცხადია, გვექნება:

$$h = \lambda\,(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D), \tag{2a}$$

სადაც λ არის მაწესებელი მამრავლი, იგი მოიცემა შემდეგი ფორმულით (თუ კოორდინატები მართკუთხოვანია):

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{3}$$

სადაც ნიშანი ისე შეირჩევა, რომ $\lambda D \leqslant 0$.

ცხადია, რომ ყოველი ზემოხსენებული სამართლიანია ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევისათვისაც, მხოლოდ მაწესებელი მამრავლი λ მოიცემა (3) ფორმულით კი არა, არამედ უფრო რთულით.

სავარჯიშო მაგალითები

1. იპოვეთ მანძილი (2, 3, 1) წერტილიდან სიბრტყემდე $3x + 2y + z + 5 = 0$.

პას. $h = -\frac{18}{\sqrt{14}}$.

2. იპოვეთ მანძილი შემდეგ პარალელურ სიბრტყეთა შორის:

$$2x + 3y + 2z - 3 = 0 \text{ და } 4x + 6y + 4z - 1 = 0.$$

მითითება. თუ ერთერთ სიბრტყეზე ნებისმიერ წერტილს ავიღებთ, უნდა ვიპოვოთ მისი მანძილი მეორემდე.

პას. $\frac{5\sqrt{17}}{34}$.

137. ამოცანა 7. ფარდობის პოვნა, რომლითაც აღებული სიბრტყე ყოფს ორი მოცემული წერტილის შემაერთებელ ნაკვეთს. თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ არიან მოცემული წერტილები, ხოლო $Ax + By + Cz + D = 0$ მოცემული სიბრტყის განტოლებაა, მაშინ § 99-ის ანალოგიური მსჯელობით, მივიღებთ ფორმულას:

$$k = \frac{M_1M}{MM_2} = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D}, \tag{1}$$

სადაც M აღნიშნავს მოცემული სიბრტყისა და M_1 და M_2 წერტილების შემაერთებელი წრფის გადაკვეთის წერტილს.

138. სივრცეში სიბრტყისა და წრფის მდებარეობის განმსაზღვრელი დამოუკიდებელი მუდმივების რიცხვი. სანამ გადავიდოდეთ იმ ამოცანების ამოხსნაზე, რომელნიც მოითხოვენ გარკვეული პირობების მიხედვით წრფისა და სიბრტყის პოვნას, გავაკეთოთ ერთი შენიშვნა, § 100-ის შენიშვნის მსგავსად.

სიბრტყის განტოლება

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$z = ax + by + c, \tag{2}$$

სადაც მიღებულია:

$$a = -\frac{A}{C}, \quad b = -\frac{B}{C}, \quad c = -\frac{D}{C}; \tag{3}$$

[ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ $C \neq 0$; თუ რომ $C = 0$, შეიძლებოდა მაშინ (1) განტოლების x ან y-ის მიმართ ამოხსნა].

მაშასადამე იმისათვის, რომ სიბრტყის განტოლება დავწეროთ, საკმარისია ვიცოდეთ სამი სიდიდე a, b და c; შესაბამისად ამისა ამბობენ, რომ სიბრტყის მდებარეობა დამოკიდებულია სამს დამოუკიდებელ მუდმივზე [(2) განტოლებაში ასეთი მუდმივებია a, b და c].

სიბრტყის განტოლების ზოგადი სახე (1) არ ეწინააღმდეგება ამ დებულებას, ვინაიდან არსებითი მნიშვნელობა მასში თვით ოთხს A, B, C, D კოეფიციენტს კი არ აქვს, არამედ სამი მათგანის ფარდობას მეოთხესთან; ეს აშკარაა იქიდან, რომ თუ (1) განტოლების ყველა კოეფიციენტს შევცვლით მათი პროპორციული სიდიდეებით, ეს განტოლება იმავე სიბრტყეს გამოსახავს (იხ. § 100).

სივრცეში წრფის მდებარეობა განისაზღვრება ოთხი დამოუკიდებელი მუდმივით, როგორც ეს გამოსჩანს წრფის დაყვანილი განტოლებებიდან:

$$x = az + p, \quad y = bz + q; \tag{4}$$

a, b, p, q მუდმივების გეომეტრიული მნიშვნელობის მიხედვით, აშკარაა, რომ ყველა ეს მუდმივი არსებითია, ვინაიდან ყოველი მათგანის ცვლილება იწვევს წრფის მდებარეობის ცვლილებას.

იგივეს თქმა არ შეიძლება x_0, y_0, z_0, L, M, N მუდმივებზე, რომელნიც შედიან განტოლებაში მიმართულების კოეფიციენტებით:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N};$$

მართლაც წრფის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ (x_0, y_0, z_0) წერტილის მაგიერ ავიღებთ რომელიმე სხვა მის წერტილს, მაგალითად, $(p, q, 0)$ წერტილს, რომელზედაც კვეთს ეს წრფე Oxy სიბრტყეს. გარდა ამისა L, M, N სიდიდეები შეიძლება შევცვალოთ ნებისმიერი, მათ მიმართ პროპორციული, სიდიდეებით, მაგალითად სიდიდეებით: $\frac{L}{N}$, $\frac{M}{N}$, 1.

ბოლოს და ბოლოს რჩება მხოლოდ ოთხი სიდიდე p, q, a, b (სადაც მიღებულია: $a=\frac{L}{N}$, $b=\frac{M}{N}$), რომელთა მოცემით სავსებით განისაზღვრება წრფე.

ნათქვამიდან ცხადია, რომ სიბრტყის მდებარეობის განსაზღვრისათვის საჭიროა, საზოგადოდ, სამი პირობა, ხოლო სივრცეში წრფის მდებარეობის განსაზღვრისათვის ოთხი პირობა[1].

139. წრფეთა და სიბრტყეთა შეკვრა. სიბრტყეთა კონა. სივრცეში $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ წრფეთა ერთობლიობას ეწოდება წრფეთა შ ე კ ვ რ ა; შეკვრის ის წრფეები, რომელნიც ერთსა და იმავე სიბრტყეში მდებარეობენ, კონას შეადგენენ (§ 101). M_0 წერტილს ეწოდება შ ე კ ვ რ ი ს ც ე ნ ტ რ ი.

თუ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ არის შეკვრის ცენტრი, ცხადია, რომ ამ შეკვრის ნებისმიერი წრფის განტოლება შეიძლება ასე დაიწეროს:

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N}, \tag{1}$$

სადაც L, M, N არიან წრფის მიმართულების კოეფიციენტები. თუ ამათ სხვადასხვა მნიშვნელობას მივცემთ (ერთდროულად ნულის არატოლს), შევძლებთ (1) წრფეს ნებისმიერი მიმართულება მივცეთ, ესე იგი შევძლებთ შეკვრის ნებისმიერი წრფე მივიღოთ.

(1) განტოლებანი შეიძლება ასე დაიწეროს (თუ $N \neq 0$):

$$x-x_0=a(z-z_0), \quad y-y_0=b(z-z_0), \tag{1a}$$

---

[1] იხ. § 100-ის გამოტანა. შევნიშნოთ სხვათა შორის, რომ მოთხოვნილება, რომ სივრცეში წრფე მოცემულ (x_0, y_0, z_0) წერტილზე გადიოდეს, გამოისახება ო რ ი პირობით:

$$x_0=az_0+p, \quad y=bz_0+q.$$

სადაც $a=\frac{L}{N}$, $b=\frac{M}{N}$; მაშასადამე, შეკვრის კუთვნილი წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია ორს დამოუკიდებელ მუდმივზე.

გავიხსენოთ (§ 101), რომ კონის კუთვნილი წრფის მდებარეობა დამოკიდებულია ერთ მუდმივზე.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას ეწოდება სიბრტყეთა შეკვრა, ხოლო M_0 წერტილს — შეკვრის ცენტრი.

ვიპოვოთ შეკვრის კუთვნილი სიბრტყის ზოგადი განტოლება. იმისათვის, რომ სიბრტყე

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

გადიოდეს M_0 წერტილზე, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებდნენ (1) განტოლებას, ესე იგი რომ:

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

ეს არის ერთად ერთი პირობა, რომელიც აკავშირებს განუზღვრელ კოეფიციენტებს A, B, C და D. ეს პირობა შეიძლება ასეც გადაიწეროს: $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$; თუ D-ს მაგიერ ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (2)-ში, მივიღებთ ამოცანის პირობების მაკმაყოფილებელ განტოლებას:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{3}$$

აქ კოეფიციენტები A, B და C ნებისმიერი რჩებიან. ადვილია უბრალო შემოწმება, რომ (3) განტოლებით გამოსახული სიბრტყე, ნამდვილად გადის $M_0(x_0, y_0, z_0)$ წერტილზე. მართლაც, თუ (3) განტოლებაში x, y და z-ის მაგიერ შესაბამისად x_0, y_0 და z_0-ს შევიტანთ, იგი დაკმაყოფილდება.

თუ (3) განტოლებაში A, B და C კოეფიციენტებს სხვადასხვა მნიშვნელობებს მივცემთ, მივიღებთ M_0 წერტილზე გამავალს სხვადასხვა სიბრტყეს.

შეკვრის თითოეული სიბრტყის მდებარეობა ხასიათდება (3) განტოლებაში შემავალი A, B და C კოეფიციენტების მნიშვნელობებით. მაგრამ, ცხადია, რომ არსებითი მნიშვნელობა აქვთ თვით ამ კოეფიციენტებს კი არა, არამედ მათ ფარდობებს. ამაში ჩვენ პირდაპირ დავრწმუნდებით, თუ (3) განტოლებას ამოვხსნით, მაგალითად, $z-z_0$-ის მიმართ. მაშინ იგი მიიღებს სახეს: $z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$, სადაც მიღებულია

$$a=-\frac{A}{C},\ b=-\frac{B}{C}.$$

მაშასადამე, მოცემულ ცენტრიანი შეკვრის თითოეული სიბრტყე სავსებით განისაზღვრება ორი მუდმივით, ისე, როგორც წრფეთა შეკვრის კუთვნილი წრფის მდებარეობა.

სიბრტყეთა კონა ეწოდება მოცემულ Δ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ერთობლიობას; ამ წრფეს კონის ღერძი ეწოდება.

ვიპოვოთ კონის კუთვნილი სიბრტყის განტოლების ზოგადი სახე. ვთქვათ:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

არიან Δ წრფის (ე. ი. კონის ღერძის) განტოლებანი. ზევით დაწერილ განტოლებათაგან, თითოეული ცალკე, გამოსახავს რაღაც სიბრტყეს; აღვნიშნოთ ეს სიბრტყეები Π_1 და Π_2-ით. Δ წრფე არის ამ სიბრტყეების გადაკვეთა და მაშასადამე ესენი ეკუთვნიან კონას.

მაშ, ჩვენი ამოცანა მდგომარეობს ორი მოცემული სიბრტყის გადაკვეთაზე გამავალ სიბრტყეთა განტოლების ზოგადი სახის მიღებაში. ასეთი ჩამოყალიბებით ეს ამოცანა სრულიად იმის მსგავსია, რაც § 106-ში იყო განხილული.

შევადგინოთ განტოლება:

$$l_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+l_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \tag{5}$$

სადაც l_1 და l_2 ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია, ერთდროულად ნულის არატოლი. ცხადია, რომ (5) განტოლება, რომელიც შეიძლება ასე გადაიწეროს: $(l_1A_1+l_2A_2)x+(l_1B_1+l_2B_2)y+(l_1C_1+l_2C_2)z+l_1D_1+l_2D_2=0$, არის სიბრტყის განტოლება, ვინაიდან იგი პირველი ხარისხისაა.

ეს სიბრტყე აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, ესე იგი ის გაივლის Π_1 და Π_2 სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეზე. მართლაც, ხსენებულ სიბრტყეთა გადაკვეთის წირის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები ერთდროულად აკმაყოფილებენ (4) განტოლებებს და ამიტომ ნულად აქცევენ (5) განტოლების მარცხენა მხარის ფრჩხილებში შემავალ გამოსახულებებს და ამით, მაშასადამე მთელს მარცხენა მხარესაც. ამნაირად, Π_1 და Π_2 სიბრტყეების გადაკვეთის ყოველი წერტილი ძევს (5) სიბრტყეზე, რის დამტკიცებაც მოითხოვებოდა.

შემოვიღოთ სიმოკლისათვის აღნიშვნები: $F_1(x, y, z)=A_1x+B_1y+C_1z+D_1$, $F_2(x, y, z)=A_2x+B_2y+C_2z+D_2$. მაშინ (5) განტოლება შეიძლება ასე გადაიწეროს:

$$l_1F_1(x, y, z)+l_2F_2(x, y, z)=0. \tag{6}$$

თუ l_1 და l_2-ს მივცემთ სხვადასხვა მნიშვნელობებს, მივიღებთ (1) წრფეზე გამავალს სხვადასხვა სიბრტყეს. ჩვენ რომ ასეთნაირად ყველა ასეთს სიბრტყეს მივიღებთ, ეს გამოაშკარავდება § 145-ის ამოცანის ამოხსნიდან.

ორი l_1 და l_2 მუდმივის მაგიერ შეიძლება ერთი მუდმივი შემოვიღოთ: $k = \frac{l_2}{l_1}$, და (6) განტოლებას ასეთი სახით დავწერთ:

$$F_1(x, y, z) + kF_2(x, y, z) = 0. \qquad (7)$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ კონის კუთვნილი სიბრტყის მდებარეობა დამოკიდებულია ერთ მუდმივზე (ისე როგორც სიბრტყეზე წრფეთა კონის შემთხვევაში).

თუ სიბრტყეთა განტოლებანი: $F_1(x, y, z) = 0$ და $F_2(x, y, z) = 0$ აღებული არიან ნორმალური სახით, მაშინ k მუდმივი ღებულობს მეტად მარტივ მნიშვნელობას, რის გამორკვევას მკითხველს მივანდობთ (იხ. § 110).

შენიშვნა. ადვილი დასანახია, რომ თუ სიბრტყეები $F_1(x, y, z) = 0$ და $F_2(x, y, z) = 0$ პარალელური არიან, მაშინ (6) ანუ (7) განტოლებით წარმოდგენილი ყველა სიბრტყე ურთიერთ პარალელურია. ამ შემთხვევაში აგრეთვე ამბობენ, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს კონასთან, რომლის ღერძი იმყოფება უსასრულობაში (ანუ არასაკუთრივ კონასთან).

140. ამოცანა 8. მოცემულ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის (ან ვექტორის) პარალელური წრფის პოვნა. თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ არის მოცემული წერტილი, ხოლო L, M, N მოცემული წრფის მიმართულების კოეფიციენტები (ან მოცემული ვექტორის კოორდინატები), მაშინ საძიებელი წრფის განტოლებანი, ცხადია, იქნებიან.

$$\frac{x - x_1}{L} = \frac{y - y_1}{M} = \frac{z - z_1}{N}.$$

141. ამოცანა 9. მოცემულს $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის $Ax + By + Cz + D = 0$ მართობული წრფის პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). ეს ამოცანა წინაზე დაიყვანება, ვინაიდან საძიებელი წრფე (A, B, C) ვექტორის პარალელური უნდა იყოს.

142. ამოცანა 10. ორს მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება. თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$ არიან მოცემული წერტილები, მაშინ, ცხადია (იხ. § 103), განტოლებანი:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

წარმოადგენენ საძიებელ წრფეს.

ამის მიღება უშუალოდაც შეიძლება, თუ მხედველობაში მივიღებთ სამი (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) წერტილის პირობას.

143. ამოცანა 11. მოცემულს $M(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის პოვნა. ვთქვათ:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \tag{1}$$

არის მოცემული სიბრტყის განტოლება.

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ისე უნდა შევარჩიოთ A, B, C კოეფიციენტები მოცემულ წერტილზე გამავალ სიბრტყეთა ზოგად განტოლებაში (იხ. § 139):

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0, \tag{2}$$

რომ უკანასკნელი განტოლებით გამოსახული სიბრტყე პარალელური იყოს (1) სიბრტყისა. მაგრამ, ამისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ A, B, C კოეფიციენტები პროპორციული იყვნენ A_1 B_1, C_1 კოეფიციენტებისა. თუ A, B, C კოეფიციენტების მაგიერ (2) განტოლებაში შევიტანთ მათ პროპორციულ სიდიდეებს A_1, B_1 და C_1, ვიპოვით საძიებელი სიბრტყის განტოლებას:

$$A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0.$$

144. ამოცანა 12. მოცემულს $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე გამავალი და მოცემული წრფის ან ვექტორის მართობული სიბრტყის პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). თუ L, M, N აღნიშნავენ მოცემული წრფის მიმართულების კოეფიციენტებს (ან მოცემული ვექტორის კოორდინატებს), მაშინ წინა პარაგრაფის აღნიშვნების მიხედვით, A, B, C კოეფიციენტები ამ სიდიდეების პროპორციული უნდა იყვნენ (იხ. § 135, 3). ამიტომ, ეს ამოცანა ისე ამოიხსნება, როგორც წინა (A_1, B_1, C_1-ის მაგიერ უნდა ავიღოთ L, M, N).

ირიბკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში იმავე ამონახსნს მივიღებთ, თუ L, M, N-ს ვიგულისხმებთ როგორც ვექტორის კოვარიანტულ კოორდინატებს.

145. ამოცანა 13. მოცემულ წრფეზე და მოცემულ წერტილზე გამავალი სიბრტყის პოვნა. ვთქვათ $F_1(x, y, z)=0$,

$F_2(x, y, z)=0$ წარმოადგენენ მოცემული წრფის განტოლებებს (აღნიშვნები იხ. § 139). ჩვენ ვიცით, რომ განტოლება:

$$F_1(x, y, z)+kF_2(x, y, z)=0 \tag{1}$$

წარმოადგენს რაღაც სიბრტყეს, მოცემულ წრფეზე გამავალს (§ 139). ვცადოთ k მუდმივის ისეთი შერჩევა, რომ ეს სიბრტყე გადიოდეს მოცემულ წრფეზე არამდებარე $M_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილზე. თუ გამოვსახავთ იმის პირობას, რომ M_1 წერტილი (1) წრფეზე იმყოფება, მივიღებთ:

$$F_1(x_1, y_1, z_1)+kF_2(x_1, y_1, z_1)=0, \text{ საიდანაც:}$$

$$k=-\frac{F_1(x_1, y_1, z_1)}{F_2(x_1, y_1, z_1)}. \tag{2}$$

თუ k-ს ამ მნიშვნელობას (1)-ში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას. იმ შემთხვევაში (და მხოლოდ ამაში), როცა M_1 წერტილი იმყოფება სიბრტყეზე $F_2(x, y, z)=0$, k-სათვის მიიღება მნიშვნელობა ∞, ვინაიდან მხოლოდ და მხოლოდ ამ შემთხვევაში k-ს გამოსახულებაში მნიშვნელი, ე. ი. $F_2(x_1, y_1, z_1)$ ნულად იქცევა[1]. თუ შევთანხმდებით, რომ, როცა $k=\infty$, (1) განტოლება დაიყვანება $F_2(x, y, z)=0$ განტოლებაზე, დავინახავთ, რომ ჩვენს ამოცანას ყოველთვის ერთი გარკვეული ამოხსნა ექნება.

აქედან, კერძოდ, გამომდინარეობს, რომ, თუ (1) განტოლებაში k-ს მივცემთ სათანადო მნიშვნელობას, შეგვიძლიან მივიღოთ აღებულ წრფეზე გამავალი ნ ე ბ ი ს მ ი ე რ ი სიბრტყე.

ვთქვათ, მაგალითად, მოთხოვნილია სიბრტყის გაყვანა წრფეზე: $x=2z-1$, $y=z+5$ და $M_1(1, 3, 2)$ წერტილზე.

მოცემულ წრფეზე გამავალი სიბრტყეების ზოგადი განტოლება იქნება: $(x-2z+1)+k(y-z-5)=0$. ეს სიბრტყე რომ $(1, 3, 2)$ წერტილზე გადიოდეს, უნდა იყოს: $(1-2\cdot 2+1)+k(3-2-5)=0$, საიდანაც $k=-\frac{1}{2}$. თუ ამას შევიტანთ წინა განტოლებაში, გამარტივების შემდგომ მივიღებთ საძიებელი სიბრტყის განტოლებას: $2x-y-3z+7=0$.

146. ამოცანა 14. ს ა მ ს მ ო ც ე მ უ ლ წ ე რ ტ ი ლ ზ ე გ ა მ ა ვ ა ლ ი ს ი ბ რ ტ ყ ი ს პ ო ვ ნ ა. ეს ამოცანა შეიძლება პირდაპირ წინა ამოცანაზე დავიყვანოთ. ამისათვის საკმარისია შევადგინოთ ორს მოცემულ წერტილზე

[1]) ვინაიდან, პირობის თანახმად, M_1 არ ძევს მოცემულ წრფეზე, ამიტომ მრიცხველი $F_1(x_1, y_1, z_1)$ და მნიშვნელი $F_2(x_1, y_1, z_1)$ ე რ თ დ რ ო უ ლ ა დ ნულად ვერ იქცევა.

გამავალი წრფის განტოლება (§ 142) და შემდგომ ამისა შევადგენთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც ამ წრფეზე და მესამე წერტილზე გავლის (რაც წინა პარაგრაფის ამოცანას წარმოადგენს). ჩვენ, რასაკვირველია, ვგულისხმობთ, რომ მოცემული სამი წერტილი ერთსადაიმავე წრფეზე არ იმყოფება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანა განუსაზღვრელი იქნებოდა.

ნათქვამის ნათელსაყოფად განვიხილოთ მაგალითი.

ვთქვათ, მოთხოვნილია სიბრტყის გავლება სამ წერტილზე $M_1(1, 3, 7)$, $M_2(2, 3, 8)$ და $M_3(0, 1, 2)$.

M_1 და M_2 წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლებანი იქნებიან:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-7}{1}$$

ანუ

$$\left.\begin{aligned} y-3&=0, \\ x-z+6&=0. \end{aligned}\right\}$$

ამ წრფეზე გამავალ სიბრტყეთა ზოგადი განტოლება იქნება;

$$(y-3)+k(x-z+6)=0.$$

ახლა k უნდა შევარჩიოთ ისე, რომ ეს განტოლება გამოსახავდეს $M_3(0, 1, 2)$ წერტილზედაც გამავალ სიბრტყეს. თუ ამის პირობას გამოვსახავთ, მივიღებთ: $-2+k\cdot 4=0$, ე. ი. $k=\frac{1}{2}$. ამ მნიშვნელობის ჩასმა წინა განტოლებაში მოგვცემს საძიებელი სიბრტყის განტოლებას:

$$x+2y-z=0.$$

მეორენაირი ამოხსნა. დასმული ამოცანის უფრო სიმეტრიული ამოხსნა პირდაპირ გამომდინარეობს ოთხი წერტილის კომპლანარობის პირობიდან (§ 35). თუ $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ არიან მოცემული წერტილები, მაშინ ყოველი $M(x, y, z)$ წერტილი, რომელიც აღებულს სამ წერტილზე გაივლის უნდა ამათთან კომპლანარული იყოს, ამისათვის კი აუცილებელი და საკმარისია, რომ [§ 35, ფორმულა (3a)]:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0, \qquad (1)$$

ან, უფრო სიმეტრიული სახით [§ 35, ფორმულა (4)]:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

თუ (1) ან (2)-ის მარცხენა მხარეში შემავალ დეტერმინანტს დავშლით პირველი სტრიქონის ელემენტებით, მივიღებთ პირველი ხარისხის განტოლებას, ესე იგი სიბრტყის განტოლებას[1], რომელიც, ცხადია, აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს.

147. ამოცანა 15. მოცემულ წრფეზე გამავალი და მეორე მოცემული წრფის ან ვექტორის პარალელური სიბრტყის პოვნა[2]. ამ ამოცანის ამოხსნისათვის საკმარისია დაიწეროს აღებულ წრფეზე გამავალი სიბრტყის ზოგადი განტოლება [§ 139, განტოლება (7)] და ისე შეირჩეს k მუდმივის მნიშვნელობა, რომ ეს სიბრტყე მეორე მოცემული წრფის (ან ვექტორის) პარალელური იყოს[3].

ვთქვათ, მაგალითად, მოთხოვნილია სიბრტყის გავლება წრფეზე: $4x = 5z - 2$, $y = -3z - 1$, ისე რომ პარალელური იყოს $\overline{P} = (2, 6, 1)$ ვექტორისა.

მოცემულ წრფეზე გამავალი ნებისმიერი სიბრტყის განტოლებას აქვს სახე: $(4x - 5z + 2) + k(y + 3z + 1) = 0$ ანუ:

$$4x + ky + (3k - 5)z + 2 + k = 0. \qquad (*)$$

ამ სიბრტყისა და $\overline{P}$ ვექტორის პარალელობის პირობა გვაძლევს:

$$2 \cdot 4 + 6k + 1 \cdot (3k - 5) = 0,$$

საიდანაც, $k = -\frac{1}{3}$. თუ ამას (*)-ში შევიტანთ, მივიღებთ საძიებელ განტოლებას: $12x - y - 18z + 5 = 0$.

148. ამოცანა 16. მოცემულ წრფეზე გამავალი და მოცემული სიბრტყის მართობული სიბრტყის პოვნა. ეს ამოცანა ამოიხსნება (მართკუთხოვანი კოორდინატების შემთხვევაში) სრულიად ისეთნაირადვე, როგორც წინა ამოცანა.

[1] მკითხველი ადვილად შეამოწმებს, რომ $(x - x_1)$, $(y_1 - y)$ და $(z - z_1)$-ის კოეფიციენტები (1) დეტერმინანტის დაშლაში ერთდროულად ყველა ნული ვერ იქნება იმის გამო, რომ წერტილები კოლინეარული არ არიან.

[3] § 150-ში მოცემული იქნება მეორენაირად, უფრო სიმეტრიული ამოხსნა.

149. ამოცანა 17. მოცემულ M წერტილიდან მოცემულ Δ წრფეზე ჩამოშვებული მართობის განტოლების პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). საძიებელი მართობი შეგვიძლიან განვმარტოთ, როგორც ორი სიბრტყის გადაკვეთის წირი: M წერტილზე და Δ წრფეზე გამავალი სიბრტყის და M წერტილზე Δ წრფის მართობულად გამავალი სიბრტყის. ორივე სიბრტყის განტოლების პოვნა ჩვენ ვიცით (§ 145 და 144). ამ ორი განტოლების ერთობლიობა სწორედ საძიებელ წრფეს გამოსახავს.

სავარჯიშო მაგალითები და დამატებანი § 139 – 140-სათვის

1. იპოვეთ წრფე, გამავალი (5, 6, 0) წერტილზე და პარალელური წრფისა: $y=9x-1,\ z=2x+5$.

პას. $x-5=\dfrac{y-6}{9}=\dfrac{z}{2}$.

2. იპოვეთ წრფე, გამავალი (−3, 2, 1) წერტილზე და $x+3z-1=0$ სიბრტყის მართობული (კოორდინატები მართკუთხოვანია).

პას. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{3}$ ანუ $y-2=0,\ 3x-z+10=0$.

3. იპოვეთ (1, 3, 5) და (2, 3, 7) წერტილებზე გამავალი წრფე.

პას. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z-5}{2}$ ანუ $y-3=0,\ 2x-z+3=0$.

4. იპოვეთ სიბრტყე, გამავალი (0, −3, 1) წერტილზე და მართობული (6, 8, 10) ვექტორისა (კოორდ. მართკუთხ.).

პას. $6x+8(y+3)+10(z-1)=0$ ანუ $6x+8y+10z+14=$.

5. იპოვეთ სიბრტყე გამავალი წრფეზე: $y=2x+4,\ z=-x+1$ და წერტილზე (2, 0, 0).

პას. $6x+y+8z-12=0$.

6. იპოვეთ სიბრტყე, გამავალი სამ წერტილზე: (−1, 1, 1), (1, −1, 1), (1, 1, −1).

პას. $x+4+z-1=0$ $x+y+z-1=0$

7. იპოვეთ სიბრტყე, გამავალი წრფეზე: $x+y+1=0,\ x+2y+2z=0$ მართობულად სიბრტყისა $2x-y-z=0$ (კოორდ. მართკუთხ.).

პას. $3x+4y+2z+2=0$.

8. იპოვეთ (მართკუთხოვან კოორდინატებში) (1, 0, 1) წერტილიდან $x=3z+2,\ y=2z$ წრფეზე ჩამოშვებული მართობის განტოლებანი. იპოვეთ ამ მართობის ფუძე.

პას. მართობის განტოლებანი: $x-2y+z-2=0,\ 3x+2y+z-4=0$.

მართობის ფუძის კოორდინატები: $\left(\dfrac{11}{7},-\dfrac{2}{7},-\dfrac{1}{7}\right)$.

9. ვთქვათ $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, $F_3(x, y, z)=0$ არიან სამი სიბრტყის განტოლებანი. დაამტკიცეთ, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ეს სიბრტყეები ერთსა და იმავე კონას ეკუთვნოდენ (ე. ი. პირობა, რომ სიბრტყეები ერთ წრფეზე იკვეთებიან ან და პარალელური არიან) მდგომარეობს იმაში, რომ არსებობდეს ისეთი სამი რიცხვი l_1, l_2, l_3, ერთდროულად ნულის არატოლი, რომ ადგილი ქონდეს იგივეობას:

$$l_1 F_1(x, y, z)+l_2 F_2(x, y, z)+l_3 F_3(x, y, z)=0.$$

დამტკიცება. სრულიად ანალოგიურია სიბრტყეზე წრფეთათვის არსებული სათანადო დებულების დამტკიცებისა.

10. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყეთა შეკვრის ცენტრი უშუალოდ კი არაა მოცემული, არამედ, როგორც გადაკვეთა სამი სიბრტყის: $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, $F_3(x, y, z)=0$, რომელნიც ერთსა და იმავე კონას არ ეკუთვნიან, მაშინ შეკვრის სიბრტყეთა ზოგად განტოლებას შემდეგი სახე აქვს: $l_1 F_1(x, y, z)+l_2 F_2(x, y, z)+l_3 F_3(x, y, z)=0$, სადაც l_1, l_2, l_3 ერთდროულად ნულის ტოლი არ არიან (იხ. § 106).

11. დაამტკიცეთ, რომ აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ ოთხი სიბრტყე $F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$, $F_3(x, y, z)=0$, $F_4(x, y, z)=0$ ეკუთვნოდეს ერთსა და იმავე შეკვრას, მდგომარეობს იმაში, რომ არსებობდეს ოთხი რიცხვი l_1, l_2, l_3, l_4 (ერთდროულად ნულის არატოლი), რომელთათვის ადგილი ქონდეს იგივეობას: $l_1 F_1(x, y, z)+l_2 F_2(x, y, z)+$ $+l_3 F_3(x, y, z)+l_4 F_4(x, y, z)=0$.

დამტკიცება პირდაპირ გამომდინარეობს წინა ვარჯიშობიდან (იხ. § 108).

150. ამოცანა 18. მოცემულ წერტილზე გამავალი და ორი მოცემული ვექტორის პარალელური სიბრტყის პოვნა. ვთქვათ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ არის მოცემული წერტილი, ხოლო $\overline{P_1}=(L_1, M_1, N_1)$, $\overline{P_2}=(L_2, M_2, N_2)$ მოცემული ვექტორებია. ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ ესენი არაპარალელური არიან, წინააღმდეგ შემთხვევაში ამოცანა განუზღვრელი იქნებოდა. ეს ამოცანა, ცხადია, პირდაპირ შეიძლება დაყვანილი იყოს § 147-ის ამოცანაზე. ამისათვის საკმარისია დაიწეროს M_0 წერტილზე გამავალი და $\overline{P_1}$ ვექტორის პარალელური წრფის განტოლება და შემდეგ მოიპოვოს სიბრტყე, რომელიც გაივლის ამ წრფეზე და პარალელური იქნება $\overline{P_2}$ ვექტორისა.

მაგრამ ჩვენ აქ ვარჩევთ მეორენაირი, უფრო სიმეტრიული ამოხსნის მოყვანას.

ვთქვათ $M(x, y, z)$ არის საძიებელი სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი. მაშინ, პირობის თანახმად, ვექტორი $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ უნდა იყოს მოცემული P_1 და P_2 ვექტორებთან კომპლანარული. მაგრამ, თუ გა-

მოვიყვანებთ სამი ვექტორის კომპლანარობის პირობას (§ 35), პირდაპირ მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0; \qquad (1)$$

თუ დავშლით დეტერმინანტს პირველი სტრიქონის ელემენტებით, მივიღებთ პირველი ხარისხის განტოლებას:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (2)$$

სადაც A, B, C არიან პირველი სტრიქონის ელემენტების ალგებრული დამატებანი, ე. ი.:

$$A=\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} N_1 & L_1 \\ N_2 & L_2 \end{vmatrix}, \quad C=\begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

სწორედ (1) ანუ (2) განტოლება არის საძიებელი. ადვილი დასანახია, რომ A, B, C კოეფიციენტები არ შეიძლება ერთდროულად ნულის ტოლი იყვნენ. მართლაც, რომ ყოფილიყო $A=B=C=0$, მაშინ გვექნებოდა $M_1N_2-M_2N_1=M_1L_2-N_2L_1=L_1M_2-L_2M_1=0$, ე. ი.:

$$\frac{L_1}{L_2}=\frac{M_1}{M_2}=\frac{N_1}{N_2};$$

ეს კი აღნიშნავდა, რომ მოცემული ვექტორები პარალელურია, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

შენიშვნა 1. ცხადია, რომ განტოლება (1) ანუ (2) სწყვეტს შემდეგ ამოცანას: ვიპოვოთ სიბრტყე, გამავალი წრფეზე:

$$\frac{x-x_0}{L_1}=\frac{y-y_0}{M_1}=\frac{z-z_0}{N_1}$$

და პარალელური (L_2, M_2, N_2) ვექტორის, ე. ი. § 147-ის ამოცანას.

შენიშვნა 2. აგრეთვე ადვილია ზემოხსენებულის მიხედვით იმის პირობის პოვნა, რომ ორი წრფე: $\frac{x-x_1}{L_1}=\frac{y-y_1}{M_1}=\frac{z-z_1}{N_1}$ და $\frac{x-x_2}{L_2}=\frac{y-y_2}{M_2}=\frac{z-z_2}{N_2}$ ურთიერთ იკვეთებოდეს (სასრულო ან უსასრულოდ

შორეულ[1] წერტილზე), სხვანაირად რომ ვთქვათ, ეს ორი წრფე რომ ერთსადაიმავე სიბრტყეზე ძევდეს (ეს საკითხი სხვა გზით გადაწყვეტილი § 133-ში).

ამისათვის საკმარისია გამოვთქვათ, რომ II სიბრტყე, მოცემული განტოლებით:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ამავალი, როგორც ვიცით, პირველ წრფეზე და პარალელური მეორის, შეიცავს ამ მეორე წრფეს. ამისათვის კი საკმარისია, რომ მეორე წრფის ერთერთი წერტილი იმყოფებოდეს II-ზე (ვინაიდან, თუ სიბრტყე შეიცავს მისი პარალელური წრფის ერთერთ წერტილს, იგი შეიცავს მთელ წრფეს). თუ გამოვთქვამთ, რომ (x_2, y_2, z_2) წერტილი II სიბრტყეზე ძევს, მივიღებთ საძიებელ პირობას:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

თუ წრფეები მოცემული არიან დაყვანილი განტოლებებით, მაშინ § 133-ის აღნიშვნების გამოყენებით, შეგვიძლიან მივიღოთ

$$(L_1, M_1, N_1) = (a, b, 1), \ (L_2, M_2, N_2) = (a', b', 1), \ x_1 = p, \ y_1 = q, \ z_1 = 0,$$
$$x_2 = p', \ y_2 = q', \ z_2 = 0,$$

და ზემოხსენებული პირობა უშუალოდ დაიყვანება § 133-ში სხვა გზით გამოყვანილ პირობაზე.

151. ამოცანა 19. მოცემული $A_1(x_1, y_1, z_1)$ წერტილიდან Δ წრფემდე მანძილის პოვნა (კოორდინატები მართკუთხოვანია). წერტილიდან მანძილი წრფემდე, რასაკვირველია, უნდა გვესმოდეს როგორც უმოკლესი მანძილი, ე. ი. A_1-დან Δ-ზე დაშვებული მართობის სიგრძე. ამ სიგრძის პოვნა ადვილია შემდეგნაირად. ვიპოვოთ A_1 წერტილზე გამავალი Δ წრფის მართობული სიბრტყის განტოლება. ამ სიბრტყის Δ-სთან გადაკვეთის X წერტილი არის ხსენებული მართობის

[1] გავიხსენოთ, რომ, როცა ამბობენ: „წრფეები იკვეთებიან უსასრულოდ შორეულ წერტილზე", ეს ნიშნავს, რომ წრფეები პარალელური არიან.

ფუძე. ვინაიდან ამ წერტილის პოვნა ჩვენ ვიცით, ამიტომ შესაძლებლობა გვექნება $|A_1 k|$ მანძილიც გამოვითვალოთ.

მაგრამ მეორე ხერხი უფრო სწრაფად მიგვიყვანს მიზნამდე. ვთქვათ

$$\frac{x-x_0}{L}=\frac{y-y_0}{M}=\frac{z-z_0}{N} \qquad (1)$$

არის Δ წრფის განტოლება. თვალსაჩინოებისათვის, ჩვენ ყოველთვის შეგვიძლიან ვიგულისხმოთ, რომ ვექტორი $\overline{P}=\overline{A_0A}=(L,\ M,\ N)$ მდებარეობს თვით Δ წრფეზე და მოდებულია ამ წრფის $A_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ წერტილზე (ნახ. 106).

ალვნიშნოთ $\overline{Q}$-თი $\overline{A_1A_0}$ და $\overline{P}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი [1], ესე იგი:

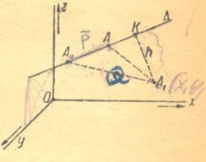
$$\overline{Q}=[\overline{A_1A_0}\cdot \overline{P}] \qquad (2)$$

ჩვენ ვიცით (§ 47), რომ

$$|Q|=2\ \text{ფართ.}\,\overline{A_0AA_1}=|P|\cdot h,$$

სადაც h არის საძიებელი მანძილი. მაშასადამე

$$h=\frac{|Q|}{|P|}. \qquad (3)$$



ნახ. 106.

ვინაიდან $\overline{Q}$ ვექტორი წარმოადგენს $\overline{A_1A_0}=(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$ და $\overline{P}=(L,\ M,\ N)$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს, ამიტომ მისი კოორდინატები, როგორც ვიცით, შესაბამისად, შემდეგი დეტერმინანტების ტოლნი არიან (§ 50):

$$X=\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ M & N \end{vmatrix};\quad Y=\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ N & L \end{vmatrix},\quad Z=\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ L & M \end{vmatrix};$$

მაშასადამე, $|Q|$ სიგრძე ტოლია ამ დეტერმინანტთა კვადრატების ჯამისაგან კვადრატული რადიკალისა.

ამგვარად, (3) ფორმულა გვაძლევს:

$$h=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ M & N \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ N & L \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ L & M \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \qquad (4)$$

[1] $\overline{Q}$ არის, ბოლოს და ბოლოს, $\overline{P}$ ვექტორის ვექტორული მომენტი A_1 წერტილის მიმართ; იხ. § 50-ის ვარჯიშობა 3.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

თავი პირველი

ვექტორები. — გეგმილთა თეორია

I. წერტილი, ღერძი, ვექტორი

II. გეომეტრიული ჯამი. ვექტორისა და რიცხვის ნამრავლი. აღებული მიმართულების პარალელური ვექტორები

III. გეგმილები ღერძზე და სიბრტყეზე

IV. მართკუთხოვანი გეგმილების გამოსათვლელი ფორმულები

V. ორი ვექტორის ოდენური ნამრავლი