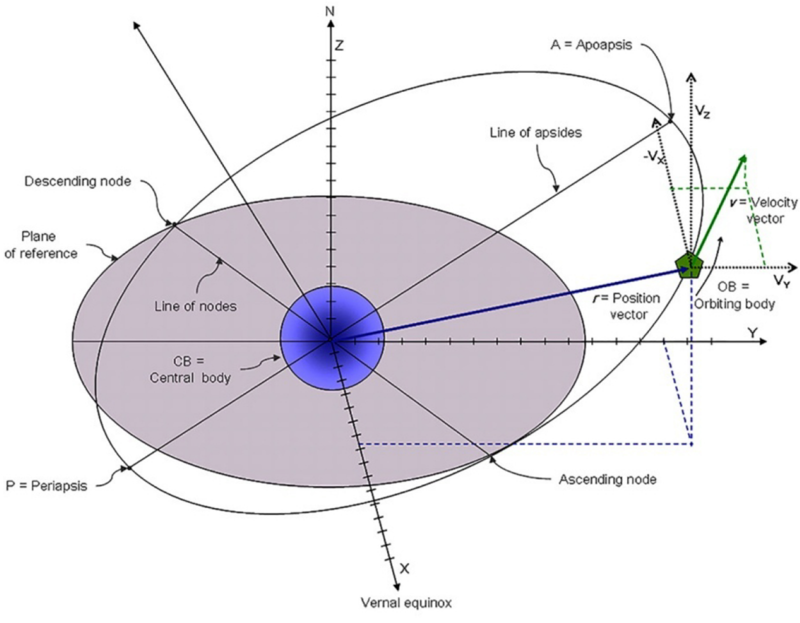
თეიმურაზ კვერნაძე

ცის მექანიკა და კოსმოსური დინამიკა

ლექციათა კურსი



თეიმურაზ კვერნაძე

ცის მექანიკა და კოსმოსური დინამიკა

I

ლექციათა კურსი

გამომცემლობა "ასტრონომია"

საქართველოს ასტრონომიული კავშირი

თბილისი 2020

თ. კვერნაძე. ცის მექანიკა და კოსმოსური დინამიკა. გამომც. „ასტრონომია“, საქართველოს ასტრონომიული კავშირი, თბილისი, 2020.

წიგნი მომზადებულია ხარკოვის ეროვნული უნივერსიტეტის (უკრაინა) პროფესორის იური ალექსანდროვის სახელმძღვანელოს „ცის მექანიკის“ (Александров Ю.В. Небесная Механика. Харьков, ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006) და ასევე სხვა ცნობილი მკვლევარების შრომების საფუძველზე და წარმოადგენს ლექციათა კურსს ცის მექანიკისა და კოსმოსური დინამიკის დარგში. წიგნის I ნაწილი მოიცავს ამ დარგის ძირითად საკითხებს - ორი სხეულის ამოცანას და მის ზოგიერთ განზოგადებას, კეპლერისეული მოძრაობის თეორიის დამატებით საკითხებს, ორი სხეულის რელატივისტურ ამოცანას, სამი სხეულის მოძრაობის ამოცანას. წიგნი განკუთვნილია ასტრონომიის, თეორიული მექანიკის და ფიზიკის დარგის სპეციალისტებისა და სამაგისტრო კურსის სტუდენტებისათვის.

რეცენზენტი

გიორგი ჯავახიშვილი

რედაქტორი

გიორგი ქურხული

ISBN 978-9941-8-2142-4

სარჩევი

ლექცია 1. ციური სხეულების გრავიტაციული ველები 5

ლექცია 2. მრავალი სხეულის ამოცანის დასმა კოორდინატთა ინერციულ სისტემაში 13

ლექცია 3. მრავალი სხეულის ამოცანის დასმა კოორდინატთა ბარიცენტრულ და ფარდობით სისტემებში 23

მრავალი სხეულის ამოცანა კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაში 23

მრავალი სხეულის ამოცანა კოორდინატთა ფარდობით სისტემაში 24

ლექცია 4. ორი სხეულის ამოცანა 27

ლექცია 5. ორბიტის განტოლება და მოძრაობის კანონი ორი სხეულის ამოცანაში 35

ლექცია 6. ორბიტის კეპლერისეული ელემენტები 43

ლექცია 7. მოძრაობის კლასიფიკაცია ორი სხეულის ამოცანაში 47

ლექცია 8. კეპლერისეული მოძრაობის ცალკეული ტიპები 51

ელიფსური მოძრაობა 51

ჰიპერბოლური მოძრაობა 59

წრიული მოძრაობა 61

პარაბოლური მოძრაობა 62

სწორხაზოვანი მოძრაობა 64

ლექცია 9. კეპლერისეული მოძრაობის თეორიის დამატებითი საკითხები 67

ელიფსური მოძრაობის მწკრივები 67

კეპლერის განტოლების ამოხსნა 68

ელიფსური მოძრაობის ხარისხობრივი მწკრივები 71

ელიფსური მოძრაობის ტრიგონომეტრიული მწკრივები 74

ლექცია 10. ორი სხეულის სასაზღვრო ამოცანა 79

ლექცია 11. ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრირება ჰამილტონ-იაკობის მეთოდით 84

ლექცია 12. მოძრაობა ცენტრალური ძალის გავლენით 89
ლექცია 13. ორი სხეულის რელატივისტური ამოცანა 95
ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ელემენტები.... 95
ცენტრალური სიმეტრიის ველი 102
მატერიალური წერტილის მოძრაობა შვარცშილდის ველში 104
ლექცია 14. ორი სხეულის ამოცანა N-განზომილებიან სივრცეში 109
ლექცია 15. სამი სხეულის ამოცანა 113
სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანა.... 113
სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანა.... 114
სამი სხეულის ბრტყელი წრიული შეზღუდული ამოცანა.... 117
ლიბრაციის წერტილები 119
მოძრაობის მდგრადობა ლიბრაციის წერტილებში.... 124
ჰილის სფეროები.... 126
დამატება I.... 133
დამატება II. 139
ლიტერატურა 149

ლექცია 1. ციური სხეულების გრავიტაციული ველები

ძირითადი ძალა, რომელიც განსაზღვრავს ციური სხეულების მოძრაობას, არის გრავიტაცია. იმისათვის, რომ კორექტულად ჩამოვაყალიბოთ ამ სხეულების მოძრაობის ამოცანა და დავადგინოთ ამა თუ იმ მიახლოების გამოყენების საზღვრები, აუცილებელია თავდაპირველად განვიხილოთ ციური სხეულების გრავიტაციული ველების აღწერის თავისებურებები.

დავუშვათ გვაქვს T სხეული $\rho(\vec{r}')$ სიმკვრივით და M მასით, რომლის მდებარეობა განისაზღვრება x, y, z კოორდინატთა სისტემაში (ნახაზი 1). რადგან მიზიდულობის ძალა დამოკიდებულია მხოლოდ მიმზიდველი სხეულების კოორდინატებზე ანუ წარმოადგენს პოტენციალურ ძალას, ამიტომ უნდა ვეძებოთ T სხეულის ***გრავიტაციული პოტენციალი*** და მხედველობაში მივიღოთ, რომ პოტენციალი V განისაზღვრება შემდეგი დამოკიდებულებით: ძალა $\vec{F} = grad\,V$ (ამ შემთხვევაში პოტენციალური ენერგია ტოლია $U = -V$). სხეულის ელემენტი მასით dm' მოცულობაში dv' რადიუს-ვექტორით $\vec{r}$ წერტილში P ქმნის პოტენციალს:

$$dV = f\frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \qquad (1)$$

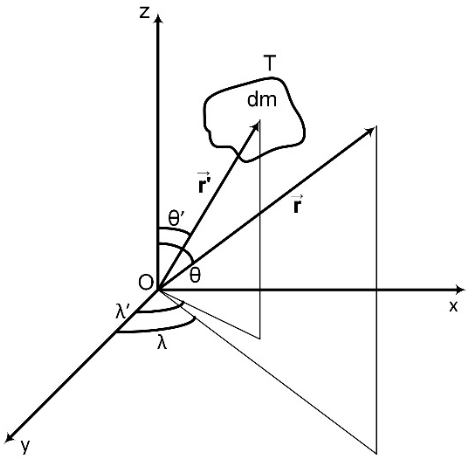
სადაც f არის გრავიტაციული მუდმივა.

მთელი სხეულის პოტენციალის მისაღებად T სხეულის მოცულობაზე ინტეგრირების წინ (1) ფორმულის მნიშვნელი გარდავქმნათ კოსინუსების თეორემის მეშვეობით:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}cos\psi + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}}. \qquad (2)$$

ამ ფორმულის მარჯვენა მხარე წარმოადგენს ლეჟანდრის პოლინომების ***მწარმოებელ ფუნქციას*** $cos\psi$ არგუმენტით, სადაც ψ არის კუთხე $\vec{r}$ და $\vec{r}'$ რადიუს-ვექტორებს შორის. ეს ნიშნავს, რომ (2) გამოსახულება შესაძლოა წარმოვადგინოთ მწკრივის სახით r'/r შეფარდების ხარისხებით, რომელთა კოეფიციენტები იქნება ლეჟანდრის პოლინომები $P_n(cos\psi)$, ანუ:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(cos\psi)\left(\frac{r'}{r}\right)^n. \qquad (3)$$



ნახაზი 1. თავისუფალი სხეულის გრავიტაციული პოტენციალის გამოთვლა.

თუ გადავალთ r, θ, λ სფერულ კოორდინატებზე (ნახაზი 1), მაშინ (3) მწკრივის კოეფიციენტებში უცნობების გაყოფისთვის შეგვიძლია ვისარგებლოთ ***სფერული ფუნქციების შეკრების თეორემით***. ამ თეორემას შემდეგი სახე აქვს (თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $t = \cos\theta$):

$$P_n(\cos\psi) = P_n(t)P_n(t') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(t)P_n^m(t')\cos m(\lambda-\lambda'), \quad (4)$$

სადაც

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \quad (5)$$

ლეჟანდრის პოლინომებია, ხოლო

$$P_n^m(t) = (-1)^m(1-t^2)^{m/2}\frac{d^m}{dt^m}\left(P_n(t)\right) \quad (6)$$

ლეჟანდრის მიერთებული ფუნქციებია.

მარტივია დავრწმუნდეთ, რომ (5) გამოსახულების თანახმად $P_1(t) = t$. შესაბამისად, როცა $n = 1$, ფორმულა (4) იძლევა სფერული ტრიგონომეტრიის კოსინუსების ფორმულას. ამიტომ, შეკრების თეორემა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ამ ფორმულის გარკვეული განზოგადება.

თუ (4)-ს ჩავსვავთ (3)-ში, ხოლო (3)-ს – (1)-ში, ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ პოტენციალს მთელი სხეულისათვის:

$$V = \frac{f}{r}\left[P_n(t) \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n(t')\left(\frac{r'}{r}\right)^n dv' + \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(t)\cos m\lambda \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n^m(t')\cos m\lambda'\left(\frac{r'}{r}\right)^{n'} dv'$$

$$+ \qquad (7)$$

$$\left. +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} 2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(t)\sin m\lambda \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n^m(t')\sin m\lambda'\left(\frac{r'}{r}\right) dv'\right].$$

(7) მწკრივის წევრები გავამრავლოთ და გავყოთ $a^n M$ სიდიდეებზე, სადაც a – მოცემული სხეულის დამახასიათებელი ზომაა (ვარსკვლავის ან პლანეტის ეკვატორული რადიუსი) და განუზღვრელი კოეფიციენტებისთვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$J_n = \frac{1}{a^n M}\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n(t'){r'}^n\, dv'$$

$$C_n^m = \frac{2}{a^n M}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n^m(t')\cos m\lambda'\, dv' \qquad (8)$$

$$S_n^m = \frac{2}{a^n M}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}')P_n^m(t')\sin m\lambda'\, dv'$$

აქედან, სხეულის გრავიტაციული პოტენციალი მის გარშემო სივრცეში ტოლია:

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n P_n(t)\left(\frac{a}{r}\right)^n + \right.$$

$$\left. +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(C_n^m\cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda)P_n^m(t)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]. \qquad (9)$$

ამდენად, მივიღეთ თავისუფალი სხეულის გრავიტაციული პოტენციალის დაშლა $P(\vec{r})$ წერტილის კოორდინატების ***სფერულ ფუნქციებად***, ანუ r მანძილის ხარისხობრივ მწკრივებად, θ პოლარული კუთხის ლეჟანდრის ფუნქციებად და λ გრძედის ფურიე მწკრივებად. აღვნიშნოთ, რომ იგივე შედეგი შეიძლება

მივიღოთ თუ გავითვალისწინებთ, რომ გრავიტაციული პოტენციალი თავისუფალ სივრცეში აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას, ხოლო სფერული ფუნქციები სწორედ ლაპლასის ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებს წარმოადგენს.

(9) მწკრივის კოეფიციენტები სხეულის სიმკვრივის ჯერად მომენტებს წარმოადგენს. მწკრივის წევრების განმსაზღვრელ კოეფიციენტებს J_n, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული λ გრძედზე და θ პოლარულ კუთხეზე და ნოლის ტოლი ხდებიან პარალელებზე, ***ზონალური*** კოეფიციენტები ეწოდებათ. კოეფიციენტები C_n^n და S_n^n განსაზღვრავენ ჰარმონიკებს, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული θ კუთხეზე და ნოლს უტოლდებიან მერიდიანებზე. ბოლოს, კოეფიციენტები C_n^m და S_n^m როცა $m < n$, უტოლდება ნოლს სფერულ ტრაპეციებში, რომლებიც შედგება პარალელების და მერიდიანების შესაბამისი რკალებით (ანუ ტესერებით). ამიტომ მათ უწოდებენ ***ტესერულ*** კოეფიციენტებს.

განვსაზღვროთ (9) მწკრივის პირველი კოეფიციენტების ფიზიკური არსი. სფერულიდან მართკუთხა კოორდინატებზე გადასვლის ფორმულების გათვალისწინებით, როცა $n = 1$, მივიღებთ:

$$J_1 = \frac{z_c}{a}, \qquad C_1^1 = \frac{x_c}{a}, \qquad S_1^1 = \frac{y_c}{a}, \tag{10}$$

სადაც x_c, y_c, z_c – T სხეულის მასათა ცენტრის კოორდინატებია.

ამდენად, $n = 1$ შემთვევაში მწკრივის კოეფიციენტები ტოლია სხეულის მასათა ცენტრის განუზღვრელი კოორდინატების და შესაძლოა გავუტოლოთ ნოლს, თუ კოორდინატთა სისტემის ცენტრს დავამთხვევთ იმ სხეულის მასათა ცენტრს, რომლის გრავიტაციულ პოტენციალსაც ვეძებთ. სანამ გადავალთ $n = 2$ შემთხვევაზე, გავიხსენოთ, რომ სხეულის სიმკვრივის მეორე რიგის მომენტები ქმნიან ამ სხეულის ***ინერციის ტენზორს:***

$$I = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \tag{11}$$

სადაც ***ინერციის ღერძული მომენტები*** ტოლია:

$$A = \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,')\left(y'^2 + z'^2\right) dv',$$

$$B = \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,')\left(x'^2 + z'^2\right) dv', \tag{12}$$

$$C = \int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,')\left(x'^2 + y'^2\right) dv'$$

და ***ინერციის ცენტრიდანული მომენტები*** ტოლია:

$$D = -\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,') x' y'\, dv',$$

$$E = -\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,') x' z'\, dv', \tag{13}$$

$$F = -\int\limits_{(T)} \rho(\vec{r}\,') y' z'\, dv'.$$

ფორმულების (12) და (13) და ასევე, სფერულ და მართკუთხოვან კოორდინატთა სისტემებს შორის დამაკავშირებელი ფორმულების გამოყენებით, გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ, რომ:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{A+B-2C}{2a^2M}, \\ C_2^1 &= \frac{E}{a^2M}, \quad C_2^2 = \frac{B-A}{4a^2M}, \\ S_2^1 &= \frac{F}{a^2M}, \quad S_2^2 = \frac{D}{a^2M}. \end{aligned} \tag{14}$$

ბოლოს აღვნიშნავთ, რომ ყოველთვის შეიძლება ავირჩიოთ კოორდინატთა ღერძების ისეთი მიმართულებები ანუ ***ინერციის მთავარი ღერძები***, რომელთა მიმართ ინერციის ტენზორს დიაგონალური სახე აქვს. ამ დროს C_2^1, S_2^1 და S_2^2 კოეფიციენტები ნოლის ტოლი გახდება.

განვიხილოთ გრავიტირებად სხეულში სიმკვრივის განაწილების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა:

1. დავუშვათ მასათა განაწილება ემორჩილება სფერულ სიმეტრიას ანუ $\rho(\vec{r}') = \rho(r')$. მაშინ, ლეჟანდრის და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ორთოგონალობის გამო (9) მწკრივის ყველა კოეფიციენტი უდრის ნოლს, თუმცა $J_0 = 1$ და პოტენციალი ტოლია:

$$V = \frac{fM}{r}, \tag{15}$$

ამ შემთხვევაში სხეულის გრავიტაციული ველი ემთხვევა M წერტილოვანი მასის ველს, რომელიც იმყოფება სხეულის მასათა ცენტრში. ეს ფაქტი ჯერ კიდევ ისააკ ნიუტონისთვის იყო ცნობილი, თუმცა მას სხვანაირად ამტკიცებდა.

2. ასეთივე შედეგი შეგვიძლია მივიღოთ, თუ განვიხილავთ გრავიტაციულ ველს ჩვენი სხეულიდან საკმარისად შორ მანძილზე ანუ r -ის ისეთი მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც იმდენად აღემატებიან სხეულის a ზომას, რომ შესაძლებელია უგულებელვყოთ $(a/r)^2$ და ასევე, უფრო მაღალი რიგის წევრები.

3. სხეულს გააჩნია ღერძული სიმეტრია ანუ $\rho(\vec{r}') = \rho(r', \theta)$. ასეთ შემთხვევაში გაქრება ყველა სექტორული და ტესერული ჰარმონიკები, რადგან ყველა კოეფიციენტი $C_n^m = S_n^m = 0$ და გრავიტაციულ პოტენციალს მხოლოდ ზონალური ჰარმონიკები ექნება:

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n P_n(t)\left(\frac{a}{r}\right)^n\right]. \tag{16}$$

4. თუ ასევე ადგილი აქვს ეკვატორული სიბრტყის მიმართ სიმეტრიას ანუ სხვანაირად რომ ვთქვათ, სიმკვრივე არის $\varphi = \pi/2 - \theta$ გრძედის ლუწი ფუნქცია, მაშინ ყველა კენტი ზონალური ჰარმონიკა ნოლის ტოლი ხდება და პოტენციალი შემდეგნაირად შეიძლება ჩავწეროთ:

$$V = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} P_{2n}(t)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right]. \tag{17}$$

პუნქტი 2 წარმოადგენს რაოდენობრივ მტკიცებულებას, რომ ციური სხეულები, ერთმანეთისგან დიდი დაშორების გამო, შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც მატერიალური წერტილები და საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ ამ

მიახლოების სიზუსტე ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში. გვიანდელი სპექტრული კლასის ერთმაგი ვარსკვლავები (მაგალითად, მზე), რომელთა ღერძული ბრუნვა არ არის დიდი, საკმაოდ კარგად აკმაყოფილებენ 1 პუნქტის პირობებს. გაზოვანი და თხევადი სხეულები (ადრეული სპექტრული კლასის სწრაფად მბრუნავი ვარსკვლავები, მჭიდრო ორჯერადი სისტემის კომპონენტები, გიგანტური პლანეტები) აკმაყოფილებენ 3 და 4 პუნქტების პირობებს. დედამიწის ტიპის მყარტანიანი პლანეტები და პლანეტების დიდი თანამგზავრები ასევე აკმაყოფილებენ ამ პირობებს, თუმცა ნაკლები სიზუსტით. მზის სისტემის სხეულების გრავიტაციული ველების მახასიათებლები მოყვანილია ცხრილში 1.

ზოგჯერ (კერძოდ, გრავიტაციული ანომალიების აღწერისას), უფრო მოხერხებულია ციური სხეულის გრავიტაციული ველის წარმოდგენა ***გრავიტაციული მულტიველის*** სახით ანუ როგორც მოცემული მასების გარკვეული სახით განლაგებული მატერიალური წერტილების ველების ერთობლიობა.

ასეთ შემთხვევაში, პოტენციალი ტოლია:

$$V = f\sum_{n=1}^{N}\frac{m_n}{|\vec{r}-\vec{r}_n|}, \tag{20}$$

შევნიშნავთ, რომ მოძრაობის განტოლებები გრავიტაციულ დიპოლში პოტენციალით

$$V = f\left(\frac{m_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{m_2}{||\vec{r}-\vec{r}_1||}\right) \tag{21}$$

ინტეგრირდება საბოლოო სახემდე. არსებობს სხვა ტიპის მიდგომებიც გრავიტაციული ველების აღწერისათვის, მაგალითად, სხვადასხვა რადიუსის დისკოების ერთობლიობა.

ცხრილი 1. მზის სისტემის სხეულების გრავიტაციული ველების მახასიათებლები

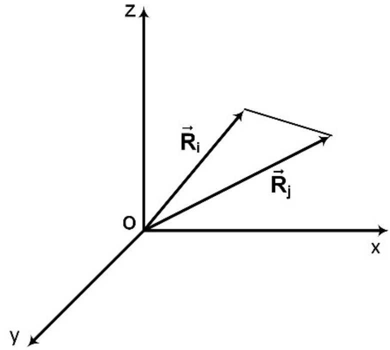
ობიექტი	fM, სმ^3/წ^2	$J_n \cdot 10^6$				
		n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
მზე	$1.33 \cdot 10^{26}$	<10	-	-	-	-
მერკური	$2.17 \cdot 10^{19}$	~ -100	-	-	-	-
ვენერა	$3.25 \cdot 10^{20}$	~ -4	-	-	-	-
დედამიწა	$3.99 \cdot 10^{20}$	-1083	2.54	1.58	0.22	0.59
მარსი	$4.30 \cdot 10^{19}$	-1959	30	-10	-6	-3
იუპიტერი	$1.27 \cdot 10^{23}$	-14733	-	-587	-	5
სატურნი	$3.79 \cdot 10^{22}$	-16479	-	-937	-	11
ურანი	$5.80 \cdot 10^{21}$	-3352	-	-29	-	-
ნეპტუნი	$7.05 \cdot 10^{21}$	-3411	-	-50	-	-
მთვარე	$4.90 \cdot 10^{18}$	-206	-37	33	-5	-

ლექცია 2. მრავალი სხეულის ამოცანის დასმა კოორდინატთა ინერციულ სისტემაში

ცის მექანიკის ცალკეული ამოცანების განხილვაზე გადასვლის წინ, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ კლასიკურ მექანიკაში ყველა შესაძლო კოორდინატთა სისტემა იყოფა ორ კლასად – ***ინერციული***, რომელშიც სრულდება ნიუტონის დინამიკის კანონები, და ***არაინერციული***. არაინერციულ სისტემებში სამართლიანია ფარდობითი მოძრაობის განტოლებები, რომელთა არსი შეიძლება შემდეგნაირად გამოვხატოთ: ძალებს, რომლებიც მოქმედებენ მოცემულ სხეულზე სხვა სხეულების მხრიდან, უნდა დავუმატოთ ინერციის ძალა, რომელიც არაბრუნვადი სისტემების შემთხვევაში ტოლია მოცემული სხეულის მასის ნამრავლისა კოორდინატთა სისტემის სათავის აჩქარებაზე, აღებული საპირისპირო ნიშნით. თავისთავად ინერციის ძალის ცნება არც თუ ისე მარტივია. ის არ არის ძალა მატერიალურ ობიექტებს შორის ურთიერთქმედების გაგებით. თუმცა, ჩვენს შემთხვევაში, საკმარისია გამოვიყენოთ, როგორც არაინერციულ კოორდინატთა სისტემებში მოძრაობის განტოლების ჩაწერის მოხერხებული მეთოდი.

ასტრონომიული ამოცანების გადაწყვეტისას განხილული კოორდინატთა სისტემები დაკავშირებულია გარკვეულ ციურ სხეულებთან. იმისათვის, რომ ასეთი სისტემა იყოს ინერციული, საჭიროა, რომ ეს სხეულები არ ურთიერთქმედებდნენ სხვა მატერიალურ ობიექტებთან. მკაცრად რომ ვთქვათ, ეს შეუძლებელია. ამიტომ, უნდა ვისაუბროთ ამა თუ იმ კოორდინატთა სისტემის ინერციულობის ან არაინერციულობის ხარისხზე. ზოგადად ასტრონომიაში, ინერციულთან მაქსიმალურად მიახლოებული კოორდინატთა სისტემის აგების ამოცანა წყდება ფუნდამენტური ასტრომეტრიის მეშვეობით. შემდგომში, ჩვენ გამოვიყენებთ კოორდინატთა სისტემებს, რომლებიც განსაზღვრების დონეზე არიან ინერციულნი ან დავაზუსტებთ მათი ინერციულობის ხარისხს.

დავუშვათ მოცემული გვაქვს $n+1$ მატერიალური წერტილი M_0, $M_1, \dots, M_n$, რომელთა მასებია $m_0, m_1, \dots, m_n$. უნდა ვიპოვნოთ მათი რადიუს-ვექტორები, როგორც დროის ფუნქციები, თუ თითოეულ წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ სისტემაში შემავალი დანარჩენი სხეულების მიზიდულობის ძალები. კოორდინატთა X, Y, Z ინერციულ სისტემაში M_i წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება მისი $\vec{R}_i$ რადიუს-ვექტორით (ნახაზი 2).



ნახაზი 2. რამდენიმე სხეულის ამოცანა კოორდინატთა ინერციულ სისტემაში.

მაშინ მისი მოძრაობის განტოლება გამოისახება ნიუტონის მეორე კანონით და აქვს შემდეგი სახე:

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = f m_i \sum_{j=0}^{n} \frac{m_j (\vec{R}_j - \vec{R}_i)}{\left|\vec{R}_j - \vec{R}_i\right|^3}, \ j \neq i. \tag{22}$$

განტოლების მარჯვენა მხარის მრიცხველში მოცემული ვექტორი განსაზღვრავს ძალის მიმართულებას, რომლიდანაც M_j წერტილი იზიდავს M_i წერტილს, ხოლო $M_j M_i$ მანძილის კუბი მნიშვნელში უზრუნველყოფს ძალის უკუკვადრატულ დამოკიდებულებას ამ მანძილზე. თუ i მიმდევრობით გაივლის 0-დან n-მდე მნიშვნელობებს, მაშინ (22) იძლევა სისტემას, რომელიც შედგება $n+1$ ვექტორული დიფერენციალური ან $3(n+1)$ სკალარული განტოლებისგან. თითოეულ განტოლებას აქვს მეორე ხარისხი ანუ (22) განტოლებათა მთელი სისტემის ხარისხი ტოლია $6(n+1)$. კერძოდ, განტოლებათა სისტემას, რომელიც აღწერს მზის და ცხრა დიდი პლანეტის მოძრაობას, აქვს მე-60 ხარისხი.

თუ შევძლებთ (22) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ზოგადი ამონახსნის პოვნას, მაშინ იგი უნდა შეიცავდეს შესაბამისი რაოდენობის თავისუფალ წევრებს, ზოგად შემთხვევაში – $6(n+1)$. მათი ამოხსნისათვის უნდა გვქონდეს საწყისი პირობები (***კოშის ამოცანა***):

$$\vec{R}_i^{(0)} = \vec{R}_i(t_0), \qquad \dot{\vec{R}}_i^{(0)} = \dot{\vec{R}}_i(t_0). \tag{23}$$

ე.ი. სისტემის ყველა წერტილის რადიუს-ვექტორის და სიჩქარეთა ვექტორის მნიშვნელობები დროის t_0 საწყის მომენტში ან ყველა რადიუს-ვექტორის მნიშვნელობები დროის ორ, t_1 და t_2 მომენტებში (***სასაზღვრო ამოცანა***):

$$\vec{R}_i^{(1)} = \vec{R}_i(t_1), \qquad \vec{R}_i^{(2)} = \vec{R}_i(t_2). \tag{24}$$

პირველ ამოცანასთან შეხება გვაქვს, მაგალითად, ხელოვნური კოსმოსური ობიექტის (დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრის ან ავტომატური საპლანეტაშორისო სადგურის) ორბიტაზე გაყვანის შემთხვევაში, ხოლო მეორესთან – ციური სხეულის ორბიტის განსაზღვრისას მისი პოზიციური დაკვირვებითი მონაცემების საფუძველზე.

განტოლებათა (22) სისტემა არაწრფივია და როცა $n > 1$ - არ ინტეგრირდება საბოლოო სახით. თუმცა, ამოცანის დასმის შესაბამისად მატერიალურ წერტილთა მოცემული სისტემა არის ჩაკეტილი და ამიტომ, მისთვის უნდა სრულდებოდეს შენახვის შესაბამისი კანონები. ამ უკანასკნელთ მათემატიკური თვალსაზრისით აქვთ $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$ ფუნქციების სახე, რომლებიც უტოლდება მუდმივებს, თუ ფუნქციები $\vec{R}_i(t)$ და $\dot{\vec{R}}_i(t)$ აკმაყოფილებენ მოძრაობის განტოლებებს. ეს $\Psi(\vec{R}_i, \dot{\vec{R}}_i, t)$ ფუნქციები არ შეიცავენ უმაღლეს წარმოებულებს და ამიტომ, ეწოდებათ დიფერენციალურ განტოლებათა (22) სისტემის ***პირველი ინტეგრალები***. ისინი შეიცავენ გარკვეულ ინფორმაციას ჩვენი სისტემის მატერიალური წერტილების მოძრაობის შესახებ.

კერძოდ, ყოველი პირველი ინტეგრალი საშუალებას გვაძლევს დავადაბლოთ სისტემის ხარისხი ერთი ერთეულით, ხოლო დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალების პოვნა რაოდენობით, რომელიც ტოლია განტოლებათა სისტემის ხარისხის, ტოლფასია მისი ინტეგრირებისა. გარკვეული მოსაზრებებით, რომლებსაც შევეხებით მოგვიანებით, მიზანშეწონილია მრავალი სხეულის ამოცანის პირველი ინტეგრალები მივიღოთ უშუალოდ, მექანიკის ზოგადი თეორემების მოშველიების გარეშე და ამისათვის ვისარგებლოთ განსახილველი ამოცანის ძალოვანი ფუნქციით.

თავდაპირველად გავაკეთოთ ორი შენიშვნა. პირველი შენიშვნა ეხება იმას, რომ (22) სისტემის თითოეული განტოლება შეიძლება შევკვეცოთ არანულოვან m_i მასაზე. თუმცა, ალგებრული თვალსაზრისით ამ ტრივიალურ ვითარებას – ყველა მატერიალური ობიექტის ინერციის სიდიდის და გრავიტაციული თვისებების სიდიდის ტოლობას (გრავიტაციული მუდმივას გარკვეული მნიშვნელობისათვის), აქვს ღრმა ფიზიკური აზრი.

კლასიკურ ფიზიკაში ეს ექსპერიმენტულად და საკმაოდ მაღალი სიზუსტით დადგენილი ფაქტია. ამ ფაქტის ფუნდამენტურმა მნიშვნელობამ, რომელიც დაკავშირებულია მის საყოველთაობასთან, მიიყვანა ალბერტ

ეინშტეინი ზოგადი ფარდობითობის თეორიის შექმნამდე. მეორე შენიშვნა – ტერმინოლოგიურია. განსახილველ ამოცანას ეწოდება მრავალი სხეულის ამოცანა, თუმცა მასში საუბარია მატერიალური წერტილების მოძრაობაზე. ტერმინოლოგიის ასეთი ცნობილი უზუსტობა, რომელიც დამკვიდრებულია ტრადიციულად, მიუთითებს სწორედ იმაზე, რომ ცის მექანიკის საფუძვლები იქმნებოდა საკმაოდ დიდი ხნის წინ, ჯერ კიდევ მანამდე, ვიდრე ჩამოყალიბდებოდა თანამედროვე მკაცრი მოთხოვნები გამოყენებული ტერმინოლოგიის მიმართ. მაგალითად, ნაცვლად გამოთქმისა ,,მოძრაობა კოორდინატთა ინერციულ სისტემაში'' დღესაც კი ზოგჯერ გამოიყენება გამოთქმა ,,მოძრაობა აბსოლუტურ ღერძებში'', ხოლო მოძრაობას კოორდინატთა არაინერციულ სისტემაში ეწოდება ,,ფარდობითი მოძრაობა'', თუმცა ყველა მოძრაობა ფარდობითია.

ძალოვანი ფუნქცია ეწოდება სისტემის ყველა წერტილის კოორდინატების ისეთ U ფუნქციას, როცა განტოლებათა (22) სისტემის i-ური განტოლების მარჯვენა მხარე არის ამ ფუნქციის გრადიენტი და განიხილება როგორც i-ური წერტილის კოორდინატების ფუნქცია და რასაც შემდეგნაირად ჩავწერთ: $grad_i U$. უშუალო გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მრავალი სხეულის ამოცანის ძალოვანი ფუნქცია ტოლია:

$$U = \frac{f}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \quad j \neq i, \tag{25}$$

სადაც $\Delta_{ij} = \left|\vec{R}_j - \vec{R}_i\right|$. ნამრავლი 1/2 ჩნდება (25) გამოსახულების სიმეტრიის გამო i და j ინდექსების მიმართ. ამის შემდეგ განტოლებათა (22) სისტემა შესაძლებელია ჩავწეროთ უფრო კომპაქტურად:

$$m_i \ddot{\vec{R}} = grad_i U, \qquad i = 0,1,\dots,n \tag{26}$$

როგორც ვხედავთ, U ძალოვანი ფუნქცია დადებითია, თუ სისტემის ყველა წერტილი იმყოფება ერთმანეთისგან სასრულ არანულოვან მანძილზე და მიისწრაფის ნულისკენ მხოლოდ მაშინ, როცა სისტემის ყველა წერტილი შორდება ერთმანეთს უსასრულოდ.

დავადგინოთ (25) ძალოვანი ფუნქციის ზოგიერთი თვისება და ამისათვის ვისარგებლოთ კოორდინატთა სისტემის არჩევის თავისუფლებით (მისი ინერციულობის ფარგლებში). ამასთან, მნიშვნელოვანია, რომ ეს თავისუფლება დაკავშირებულია სივრცისა და დროის ფუნდამენტურ თვისებებთან – სივრცის ერთგვაროვნებას და იზოტროპულობასთან და დროის ერთგვაროვნებასთან.

სივრცის ერთგვაროვნება ნიშნავს, რომ კოორდინატთა სისტემის სათავე შესაძლებელია განვათავსოთ სივრცის ნებისმერ წერტილში. კოორდინატთა სისტემის სათავე გადავიტანოთ წერტილში, რომელიც განისაზღვრება უსასრულოდ მცირე რადიუს-ვექტორით $d\vec{R}$. ამასთან, სისტემის ყველა წერტილის რადიუს-ვექტორი შეიცვლება $-d\vec{R}$ სიდიდით. ძალოვანი ფუნქციის შესაბამისი ცვლილება მრავალუცნობიანი ფუნქციის დიფერენცირების წესის თანახმად ტოლია:

$$dU = -\sum_{i=0}^{n} grad_i U \cdot d\vec{R}. \tag{27}$$

Δ_{ij} მანძილი ამ დროს არ შეიცვლება, ამიტომ, U ფუნქციაც არ შეიცვლის თავის მნიშვნელობას ანუ $dU = 0$. $d\vec{R}$ თანამამრავლის თავისუფალი მნიშვნელობის გამო უნდა სრულდებოდეს შემდეგი ტოლობა:

$$\sum_{i=0}^{n} grad_i U = 0. \tag{28}$$

ცხადია, რომ (28) ტოლობა შესაძლებელია ასევე განვიხილოთ როგორც ნიუტონის მესამე კანონის შედეგი.

სივრცის იზოტროპულობა ნიშნავს ყველა მიმართულების თანაბარუფლებიანობას და კოორდინატთა ღერძების მიმართულების თავისუფლად არჩევის შესაძლებლობას. შედეგად, ძალოვანი ფუნქციაც გაუტოლდება ნოლს, თუ კოორდინატთა სისტემას მოვაბრუნებთ უსასრულოდ მცირე კუთხით, რომელსაც აღვნიშნავთ მობრუნების ვექტორით $d\vec{\varphi}$. ამ ვექტორის მიმართულება გვაძლევს მობრუნების ღერძს, ხოლო მისი სიდიდე – ამ ღერძის გარშემო მობრუნების კუთხეს. ვისარგებლოთ ტოლობით $\dot{\vec{R}}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$ და $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ და მივიღებთ, რომ $d\vec{R}_i = d\vec{\varphi} \times \vec{R}_i$. შესაბამისად,

$$dU = \sum_{i=0}^{n} grad_i U \cdot d\vec{\varphi} \times \vec{R}_i = 0. \tag{29}$$

თუ შერეულ ვექტორულ ნამრავლში სკალარული და ვექტორული ნამრავლის მიმდევრობას შევცვლით, მობრუნების ვექტორის თავისუფლების გამო მივიღებთ, რომ:

$$\sum_{i=0}^{n} grad_i U \times \vec{R}_i = 0, \tag{30}$$

ანუ დახურული სისტემის ძალის მომენტების ჯამი ტოლია ნოლის.

დროის ერთგვაროვნება საშუალებას გვაძლევს თავისუფლად ავირჩიოთ მისი დაწყების მომენტი. თუ წავანაცვლებთ ამ მომენტს dt სიდიდით, მაშინ ძალოვანი ფუნქციის ცვლილება, არაცხადად მოცემული ფუნქციის დიფერენცირების წესის გათვალისწინებით, ტოლი იქნება:

$$dU = \sum_{i=0}^{n} grad_i U \cdot \vec{R}_i \cdot dt. \tag{31}$$

ამის შემდეგ, გამოვიყენოთ ძალოვანი ფუნქციის თვისებები მრავალი სხეულის ამოცანის პირველი ინტეგრალების მისაღებად.

ავჯამოთ (26) განტოლებები i ინდექსით 0-დან n-მდე. (28) პირობის გამო გვექნება:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\vec{R}}_i = 0. \tag{32}$$

მოვახდინოთ (32) განტოლების ინტეგრირება მიმდევრობით ორჯერ და მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\vec{R}}_i = \vec{a}, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \vec{R}_i = \vec{a}t + \vec{b}, \tag{33}$$

სადაც $\vec{a}$ და $\vec{b}$ - ინტეგრირების თავისუფალი ვექტორული მუდმივებია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i \tag{34}$$

და გავიხსენებთ, რომ რადიუს-ვექტორი:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} m_i \vec{R}_i \tag{35}$$

განსაზღვრავს მატერიალური წერტილების სისტემის ***მასათა ცენტრის*** (ინერციის ცენტრის) მდებარეობას, მაშინ (33)-ის პირველ ინტეგრალებს შემდეგი სახე ექნებათ:

$$\dot{\vec{R}}_C = \frac{\vec{a}}{m}, \quad \vec{R}_C = \frac{\vec{a}}{m} t + \frac{\vec{b}}{m}, \tag{36}$$

რომელიც აჩვენებს მათ ფიზიკურ არსს – სისტემის მასათა ცენტრი მოძრაობს თანაბრად და წრფივად. ამიტომ, ამ პირველ ინტეგრალებს უწოდებენ ***მასათა***

ცენტრის ინტეგრალებს. აქედან, თუ მასათა ცენტრში მოვათავსებთ კოორდინატთა სისტემის სათავეს, მაშინ ასეთი კოორდინატთა ***ბარიცენტრული*** სისტემა იქნება ინერციული.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ (30) ტოლობა, თითოეული განტოლება (26)-დან გავამრავლოთ ვექტორულად $\vec{R}_i$ რადიუს-ვექტორზე მარცხნიდან და ავაჯამოთ ეს ნამრავლი i ინდექსით 0-დან n-მდე. მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} = 0. \tag{37}$$

მივუმატოთ (37)-ს ცხადი ტოლობა:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}} = 0, \tag{38}$$

და მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \left(\vec{R}_i \times \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}}\right) = 0, \tag{39}$$

საიდანაც ინტეგრირებით მივიღებთ, რომ:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \vec{c}\,. \tag{40}$$

რადგან $m_i\dot{\vec{R}}_i$ სიდიდე – i-ური წერტილის ***იმპულსია***, თითოეული შესაკრები (40)-ში ტოლია ამ წერტილის ***იმპულსის მომენტის*** (კინეტიკური მომენტის), ხოლო ინტეგრირების მუდმივა $\vec{c}$ – ჩვენი სისტემის კინეტიკური მომენტია. აქედან გამომდინარე, (40) პირველ ინტეგრალს ***მომენტების ინტეგრალს*** უწოდებენ.

ბოლოს, (26)-ის i-ური განტოლების $\dot{\vec{R}}_i$ ვექტორულ სიჩქარეზე სკალარული გამრავლებით, ხოლო შემდგომ ყველა განტოლების შეკრებით და (31) დამოკიდებულების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} = \sum_{i=0}^{n} grad_i U \cdot \dot{\vec{R}}. \tag{41}$$

თუ სიჩქარის ვექტორის მოდულს აღვნიშნავთ V_i, მაშინ (41) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{n} m_i V_i^2\right) = \frac{dU}{dt}, \tag{42}$$

რაც საბოლოოდ გვაძლევს:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i V_i^2 = U + h. \tag{43}$$

მარცხნიდან (43) ტოლობაში გვხვდება T სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსახულება და ამიტომ (43) პირველ ინტეგრალს შეგვიძლია მივცეთ შემდგი სახე:

$$T - U = h, \tag{44}$$

რომელიც ხაზს უსვამს მისი, როგორც ენერგიის შენახვის კანონის ფიზიკურ არსს და განსაზღვრავს მის სახელწოდებას – ***ენერგიის ინტეგრალი***, ასევე აზუსტებს ძალოვანი ფუნქციის ფიზიკურ არსს – იგი არის სისტემის პოტენციალური ენერგია შებრუნებული ნიშნით.

ნაპოვნი ოთხი პირველი ინტეგრალიდან სამს აქვს ვექტორული სახე, ხოლო ერთს – სკალარული. ამდენად, ჩვენ ვიპოვნეთ მრავალი სხეულის ამოცანის მხოლოდ ათი ე.წ. ***კლასიკური პირველი ინტეგრალი***. თავიანთი არსებობით ეს ინტეგრალები, ისევე როგორც ძალოვანი ფუნქციის შესაბამისი თვისებები, განპირობებულია სივრცისა და დროის გარკვეული თვისებებით – სივრცის ერთგვაროვნებით და იზოტროპულობით და დროის ერთგვაროვნებით.

განვსაზღვრავთ რა დაკვირვებებით, რომ ციური სხეულების, მათ შორის ყველაზე შორეულის, მოძრაობა მრავალი სხეულის ამოცანის მოდელში აკმაყოფილებს ამ კანონებს, ჩვენ ამით ვადგენთ სამყაროს სხვადასხვა უბნებში სივრცისა და დროის მითითებული ფუნდამენტალური თვისებების სამართლიანობას.

ისმება კითხვა - არსებობს თუ არა მრავალი სხეულის ამოცანაში სხვა ინტეგრალები, გარდა ათი კლასიკური ინტეგრალისა. XIX საუკუნის ბოლოს, ზოგიერთი მათემატიკოსის და მექანიკოსის ძალისხმევით მიღებულ იქნა პრაქტიკულად უარყოფითი პასუხი ამ კითხვაზე – დამტკიცებულია, რომ არ არსებობს პირველი ინტეგრალები მეტ-ნაკლებად მარტივი მათემატიკური

ბუნებით, კერძოდ – ისეთი პირველი ინტეგრალები, რომლებიც იქნებოდნენ კოორდინატების, სიჩქარეების და დროის ცალსახა ანალიტიკური ფუნქციები.

არსებული ათი კლასიკური პირველი ინტეგრალი საშუალებას იძლევა შევამციროთ ამ ამოცანის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის რიგი ათი ერთეულით. ამ რიგის კიდევ ორი ერთეულით შემცირება შეგვიძლია (22) განტოლებების მარჯვენა მხარეების თავისებურებებით, კერძოდ, მათი დამოკიდებულებით მხოლოდ სისტემის წერტილების კოორდინატთა სხვაობებზე და მათი დამოუკიდებლობით არგუმენტზე ანუ t დროზე.

ამდენად, შეგვიძლია შევამციროთ სისტემის რიგი 12 ერთეულით. ეს საკმარისი არ არის თუნდაც სამი სხეულის ამოცანის ინტეგრირებისათვის, რომელსაც მე-18 რიგი აქვს. თუმცა, საკმარისია ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნის მისაღებად.

(22) სისტემის რიგის შემცირება სხვადასხვა მეთოდებით არის შესაძლებელი. გარდა ამისა, შესაძლებელია მივიღოთ ახალი დამოკიდებულებები, რომლებსაც გააჩნიათ გარკვეული ფიზიკური არსი. მოვიყვანთ ორ მათგანს:

$$\ddot{I} = 2U + 4h, \tag{45}$$

სადაც

$$I = \sum_{i=0}^{n} m_i R_i^2 \tag{46}$$

ტოლია სისტემის ინერციის მომენტის კოორდინატთა სისტემის სათავის მიმართ და

$$\ddot{R} = 2U + 4h_C, \tag{47}$$

სადაც

$$R = \frac{1}{2m}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2, \quad h_C = h - \frac{a^2}{2m}. \tag{48}$$

მუდმივა h_C არის სისტემის სრული ენერგია მისი მასათა ცენტრის მიმართ. (47) დამოკიდებულება ცნობილია ***ლაგრანჟი-იაკობის ტოლობის*** სახელით.

ავიღოთ სისტემის მასათა ცენტრის წერტილი C და მომენტის მუდმივი ვექტორი $\vec{c}$. ეს საშუალებას მოგვცემს განვიხილოთ სიბრტყე, რომელიც გადის C წერტილზე და გააჩნია ნორმალური ვექტორი $\vec{c}$. ამ სიბრტყეს, რომელიც

ინარჩუნებს სივრცეში თავის ორიენტაციას და გადაადგილდება თანაბრად თავისი თავის პარალელურად, ეწოდება ***ლაპლასის უცვლელი სიბრტყე.*** იგი შესაძლოა გამოვიყენოთ, როგორც მრავალი სხეულის ამოცანაში კოორდინატთა სისტემის ძირითადი სიბრტყე.

ლექცია 3. მრავალი სხეულის ამოცანის დასმა კოორდინატთა ბარიცენტრულ და ფარდობით სისტემებში

მრავალი სხეულის ამოცანა კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაში

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, კოორდინატთა ბარიცენტრული სისტემა მრავალი სხეულის ამოცანის შემთხვევაში წარმოადგენს ინერციულს. ამიტომ, თუ მის ღერძებს აღვნიშნავთ ξ, η, ζ, ხოლო რადიუს-ვექტორებს - $\vec{\rho}_i$, მაშინ (22)-ის საფუძველზე მოძრაობის განტოლება ამ კოორდინატთა სისტემაში შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = f m_i \sum_{j=0}^{n} m_j \frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3}, \quad j \neq i, i = 0,1, \dots, n. \qquad (49)$$

ამავე დროს, ბარიცენტრული რადიუს-ვექტორები დაკავშირებულია ერთმანეთთან შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$\sum_{j=0}^{n} m_j \vec{\rho}_j = 0, \qquad (50)$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს გამოვრიცხოთ (49) განტოლებიდან ნებისმიერი წერტილის რადიუს-ვექტორი, მაგალითად, M_0 წერტილის. ამიტომ გვექნება:

$$\vec{\rho}_0 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{n} m_j \vec{\rho}_j. \qquad (51)$$

თუ (51)-ს ჩავსვავთ (49)-ში და j ინდექსიან ჯამებში გამოვყოფთ ნულოვან და i -ურ შესაკრებლებს, მივიღებთ შემდეგი სახის მოძრაობის განტოლებებს კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაში:

$$\ddot{\vec{\rho}}_i + \mu_i \frac{\vec{\rho}_i}{\Delta_{i0}^3} = f \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{\rho}_j}{\Delta_{j0}^3} \right),$$

$$\mu_i = f(m_0 + m_i), \; j \neq i, \; i = 1,2, \dots, n. \qquad (52)$$

თუ პირველ ინტეგრალებში გამოვრიცხავთ $\vec{\rho}_0$ და $\dot{\vec{\rho}}_0$ ვექტორებს, დავინახავთ, რომ მასათა ცენტრის ინტეგრალები იგივურად სრულდება,

როგორც ეს უნდა იყოს ბარიცენტრულ კოორდინატთა სისტემაში, ხოლო მომენტების და ენერგიის ინტეგრალები იღებენ შემდეგ სახეს:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right) = \vec{c}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 + \frac{1}{2m}\left|m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right|^2 = U + h \qquad (53)$$

მართალია, მოძრაობის განტოლებას და მომენტების და ენერგიის ინტეგრალებს უფრო რთული სახე მიეცათ, მაგრამ განტოლებათა სისტემის რიგი შემცირდა ექვსი ერთეულით მასათა ცენტრის ინტეგრალების გამოყენების ხარჯზე.

მრავალი სხეულის ამოცანა კოორდინატთა ფარდობით სისტემაში

რადგან ჩვენ განვიხილავთ მატერიალური წერტილების მოძრაობას ისე, რომ არ ვითვალისწინებთ სხვა მატერიალური წერტილების არსებობას, ამიტომ, კოორდინატთა არაინერციული სისტემა შეიძლება იყოს მხოლოდ ის სისტემა, რომელიც დაკავშირებულია ერთ-ერთ ამ წერტილთან. დავუშვათ ეს არის წერტილი M_0. ასეთი ფარდობითი კოორდინატთა სისტემის ღერძები აღვნიშნოთ x, y, z და დანარჩენი წერტილების რადიუს-ვექტორები - $\vec{r}_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$. ამ წერტილების მოძრაობის განტოლების ჩაწერის მიზნით ვისარგებლოთ წესით, რომელიც ჩამოყალიბებულია წინა ლექციებში:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = f m_i \sum_{j=0}^{n} m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - f m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}, \quad j \neq i, \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (54)$$

აქ პირველი ჯამი არის ძალების ჯამი, რომლებიც მოქმედებენ i-ურ წერტილზე სისტემის სხვა წერტილების მხრიდან, მეორე ჯამი – ინერციის ძალების ჯამი, რომლებიც განპირობებულია M_0 წერტილის ანუ კოორდინატთა სისტემის სათავის აჩქარებით, სისტემის ყველა სხვა წერტილის ზემოქმედებით i-ური წერტილის ჩათვლით. პირველ ჯამში $j = 0$ შესაკრებლის, ხოლო მეორე ჯამში - $j = 1$ შესაკრებლის გამოყოფით, განტოლებათა სისტემა გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = f \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\right), \;\; \mu_i = f(m_0 + m_i), \;\; i = 1,2,\dots,n. \qquad (55)$$

იმის გამო, რომ ასტრონომიის ცალკეულ ამოცანებში შეისწავლება ციური სხეულების სწორედ ფარდობითი მოძრაობა, დიფერენციალურ განტოლებათა (55) სისტემა $6n$ თანრიგით, ერთ-ერთი უმთავრესია ცის მექნიკაში. ამოცანის ასეთი დასმა განსაკუთრებით მიზანშეწონილია იმ შემთხვევბში, როდესაც M_0 წერტილის მასა მნიშვნელოვნად აღემატება სისტემის ყველა სხვა წერტილის მასას, როგორც ამას ადგილი აქვს სისტემაში „მზე-პლანეტები" ან „პლანეტა-თანამგზავრები". რადგან მასა m_0 შედის (55) განტოლების მარცხენა მხარეში და არ შედის მის მარჯვენა მხარეში, ამიტომ მარჯვენა მხარეების აბსოლუტური მნიშვნელობები შედარებით მცირეა ვიდრე განტოლების მარცხენა მხარეები. აქედან გამომდინარებს, რომ მცირე M_i მასის მქონე ყოველი წერტილის მოძრაობა (ყოველ შემთხვევაში, დროის გარკვეულ მონაკვეთში) მცირედ განსხვავდება მოძრაობისგან ორი სხეულის ამოცანაში ანუ M_i წერტილის მოძრაობა M_0 წერტილის მიმართ მხოლოდ ამ უკანასკნელის ზემოქმედებით. რადგან ამ უკანასკნელი ამოცანის ინტეგრირება შესაძლებელია საბოლოო სახით, ამიტომ ფარდობითი მოძრაობა მრავალი სხეულის ამოცანაში შესაძლებელია მიახლოებით შევისწავლოთ შეშფოთებათა თეორიის ამა თუ იმ მეთოდით. მოძრაობას ორის სხეულის ამოცანაში ეწოდება ***არაშეშფოთებული***, ხოლო მოძრაობას, რომელიც აღიწერება განტოლებით:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \vec{F}_i, \tag{56}$$

თანაც ადგილი აქვს შემდეგ პირობას $F_i \ll \mu_i / r_i^2$, ეწოდება ***შეშფოთებული***. დავუბრუნდეთ მრავალი სხეულის ამოცანის (55) განტოლებებს და შემოვიღოთ შემაშფოთებელი (ანუ პერტურბაციული) ფუნქციები:

$$R_i = f \sum_{j=1}^{n} m_j R_{ij}\,, \quad j \neq i, \tag{57}$$

სადაც

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\vec{r}_j \cdot \vec{r}_i}{r_j^3}, \quad j \neq i, \tag{58}$$

შედეგად, ფარდობითი მოძრაობის განტოლებას შემდეგი სახე ექნება:

$$\ddot{\vec{r}}_i + \mu_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = grad_i R_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{59}$$

შევნიშნავთ, რომ უტოლობიდან $m_0 \gg m_i$ ასევე გამომდინარეობს, რომ კოორდინატთა სისტემა, რომელიც დაკავშირებულია M_0 წერტილთან, საკმაოდ ახლოა ინერციულთან, მაშინ როცა კოორდინათა სისტემები, რომელთა ათვლის სათავეები მოთავსებულია ერთ-ერთ M_i წერტილში, მნიშვნელოვნად არაინერციულია. სწორედ ამაში მდგომარეობს განსხვავება ჰელიოცენტრულ და გეოცენტრულ სისტემებს შორის ფიზიკური თვალსაზრისით.

სანამ გადავალთ ფარდობით მოძრაობაში მრავალი სხეულის ამოცანის პირველი ინტეგრალების განხილვაზე, პირველ რიგში უნდა აღვნიშნოთ, რომ კოორდინატთა არაინერციულ სისტემაში არ შეიძლება ადგილი ჰქონდეს მასათა ცენტრის ინტეგრალებს, რადგან იგი მოძრაობს აჩქარებით. მომენტების და ენერგიის ინტეგრალები შეიძლება მივიღოთ, თუ გავიხსენებთ, რომ წერტილების რადიუს-ვექტორები ბარიცენტრულ და ფარდობით კოორდინატთა სისტემებში ურთიერთკავშირშია შემდეგი დამოკიდებულებით: $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \vec{\rho}_0$, რომელიც (51)-ის გათვალისწინებით, ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\vec{\rho}_i = \vec{r}_i + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{\rho}_j. \tag{60}$$

(53) პირველ ინტეგრალებში ბარიცენტრულიდან ფარდობით კოორდინატებზე გადასვლისას, მივიღებთ მომენტების და ენერგიის ინტეგრალებს მრავალი სხეულის ფარდობით ამოცანებში:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}} = \vec{c} \tag{61}$$

და

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 - \frac{1}{2m}\left|\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i\right|^2 = h \tag{62}$$

ამდენად, მრავალი სხეულის ფარდობით ამოცანაში არსებობს მხოლოდ ოთხი კლასიკური პირველი ინტეგრალი.

ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს ფუნდამენტური როლი, რომელსაც ასრულებს ორი სხეულის ამოცანა ცის მექანიკაში. შემდეგ ლექციებში მივიღებთ ამ ამოცანის ზოგად ამოხსნას და გამოვიკვლევთ კეპლერისეული მოძრაობის ცალკეულ ტიპებს.

ლექცია 4. ორი სხეულის ამოცანა

ცხადია, ორი სხეულის ამოცანის განტოლება შესაძლებელია განვიხილოთ როგორც მრავალი სხულის ამოცანის განტოლების კერძო შემთვევა როცა $n = 1$. მაგრამ ჩვენ არ ვისარგებლებთ ამ მიდგომით, რათა საკითხის შემდგომი განხილვა გავხადოთ წინა ლექციებში მოცემული მასალისგან დამოუკიდებელი.

დავიწყოთ მოძრაობის განხილვა კოორდინატთა X, Y, Z ინერციულ სისტემაში. გვაქვს M_0 და M_1 მატერიალური წერტილები მასებით m_0 და m_1 და რადიუს-ვექტორებით $\vec{R}_0$ და $\vec{R}_1$ (იხ. ნახაზი 3). ნიუტონის მეორე კანონი და მსოფლიო მიზიდულობის კანონი გვაძლევს ამ წერტილების მოძრაობის შემდეგ განტოლებას:

$$\begin{aligned} m_0\ddot{R}_0 &= fm_0m_1\frac{\vec{R}_1-\vec{R}_0}{\left|\vec{R}_1-\vec{R}_0\right|^3} \\ m_1\ddot{R}_1 &= fm_0m_1\frac{\vec{R}_0-\vec{R}_1}{\left|\vec{R}_0-\vec{R}_1\right|^3} \end{aligned} \tag{63}$$

სადაც f - გრავიტაციული მუდმივაა.

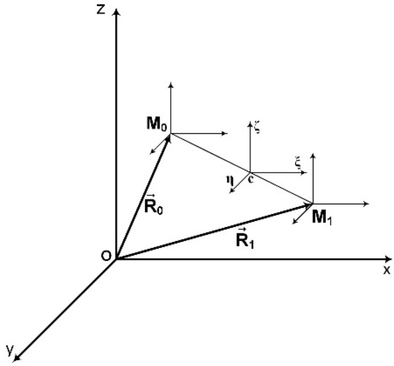
მივიღებთ მე-12 რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, რომელთაც უნდა დავუმატოთ საწყისი პირობები:

$$\vec{R}_{0,1}^{(0)} = \vec{R}_{0,1}(t_0),\ \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(0)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}(t_0) \tag{64}$$

ან სასაზღვრო პირობები:

$$\vec{R}_{0,1}^{(1)} = \vec{R}_{0,1}(t_1),\ \dot{\vec{R}}_{0,1}^{(2)} = \dot{\vec{R}}_{0,1}(t_2) \tag{65}$$

ათი კლასიკური ინტეგრალის არსებობა, (63) განტოლების მარჯვენა მხარეების დამოკიდებულება მხოლოდ M_0 და M_1 წერტილების კოორდინატთა სხვაობაზე და მათი დამოუკიდებლობა t დროზე განსაზღვრავენ (63) სისტემის საბოლოო სახით ინტეგრირების პრინციპულ შესაძლებლობას. თუმცა, პრაქტიკაში ჩვენ ვიყენებთ ორი სხეულის ამოცანას ან კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაში (ორმაგი ვარსკვლავები, „დედამიწა-მთვარის" სისტემის მოძრაობას მზის მიმართ და დედამიწისა და მთვარის მოძრაობა მათი ბარიცენტრის მიმართ) ანდა, კიდევ უფრო ხშირად, კოორდინატთა ფარდობით სისტემაში (ანუ განვიხილავთ ერთი ციური სხეულის მოძრაობას მეორეს მიმართ).



ნახაზი 3. ორი სხეულის ამოცანა ინერციულ და ბარიცენტრულ კოორდინატთა სისტემაში.

კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაზე გადასვლისთვის გავიხსენოთ, რომ ორი წერტილის შემთხვევაში მათი მასათა ცენტრი C ძევს M_0M_1 მონაკვეთზე ρ_0 და ρ_1 მანძილებზე, ამასთან $\rho_0+\rho_1=|M_0M_1|$, ხოლო $m_1\rho_0=m_0\rho_1$, საიდანაც გამოდის (ნახაზი 3), რომ:

$$\vec{\rho}_0=\frac{m_1}{m_0+m_1}\left(\vec{R}_0-\vec{R}_1\right),\ \ \vec{\rho}_1=\frac{m_0}{m_0+m_1}\left(\vec{R}_1-\vec{R}_0\right). \qquad (66)$$

ჩავსვათ (66) გამოსახულებები (63)-ში და შესაბამისად შევკვეცოთ m_0-სა და m_1-ზე. შედეგად მივიღებთ ***ორი სხეულის ამოცანის მოძრაობის განტოლებებს კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაში***:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_0+\mu_0\frac{\vec{\rho}_0}{\rho_0^3}&=0\\ \ddot{\vec{\rho}}_1+\mu_1\frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3}&=0\end{aligned} \qquad (67)$$

სადაც მუდმივები ტოლია

$$\mu_0=\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2},\quad \mu_1=\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}. \qquad (68)$$

ფარდობითი მოძრაობის განტოლებებზე გადასვლისათვის შემოვიტანოთ M_1 წერტილის რადიუს-ვექტორი M_0 წერტილის მიმართ - $\vec{r}_{1/0}$ და M_0 წერტილის რადიუს-ვექტორი M_1 წერტილის მიმართ - $\vec{r}_{0/1}$. მაშინ, თუ (63)-ის პირველ განტოლებას გამოვაკლებთ მეორეს და ასევე, პირიქით, მივიღებთ:

$$\ddot{\vec{r}}_{1/0} + \mu \frac{\vec{r}_{1/0}}{r_{1/0}^3} = 0 \tag{69}$$

და

$$\ddot{\vec{r}}_{0/1} + \mu \frac{\vec{r}_{0/1}}{r_{0/1}^3} = 0 \tag{70}$$

სადაც

$$\mu = f(m_0 + m_1)\,. \tag{71}$$

განტოლებები (69) და (70) უკვე აღარ ქმნიან განტოლებათა სისტემას, არამედ არიან დამოუკიდებელი და ჩაწერილნი არიან სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში.

თუ შევადარებთ (67)-(70) განტოლებებს, დავინახავთ, რომ მათ ყველას ერთნაირი სტრუქტურა აქვთ და განსხვავდებიან მხოლოდ კოეფიციენტების მნიშვნელობებით მარცხენა მხარეების მეორე შესაკრებებში, ხოლო (69) და (70) განტოლებების შემთხვევაში ეს კოეფიციენტებიც ემთხვევა.

ფარდობითი მოძრაობის ორ, (69) და (70) შემთხვევაში საწყისი პირობები განისაზღვრება საპირისპირო ვექტორებით, ხოლო ბარიცენტრულ სისტემაში – ვექტორებით, რომლებიც საპირისპიროა მიმართულებებით და პროპორციული – მოდულებით. ეს ნიშნავს, რომ ყველა შემთხვევაში მოძრაობა წარმოებს ორბიტებზე, რომლებიც გეომეტრიულად მსგავსია, ხოლო ფარდობითი მოძრაობის ორ შემთხვევაში - უბრალოდ ერთნაირია, ოღონდ წერტილები ამ შემთხვევაში იმოძრავებენ საპირისპირო მიმართულებით. ამიტომ, აზრი არ აქვს კითხვას, თუ რომელი წერტილი (M_0 თუ M_1) მოძრაობს მეორეს მიმართ.

კერძოდ, მზის მოძრაობა დედამიწის მიმართ ისვე რეალურია, როგორც დედამიწის მოძრაობა მზის მიმართ. ეს შენიშვნა, რომელიც გამომდინარეობს მოძრაობის ფარდობითობის პრინციპიდან, აუცილებელია აღინიშნოს, რადგან ყოფით აღქმაში და ზოგჯერ სამეცნიერო-პოპულარულ თუ სასწავლო ლიტერატურაში შევხვდებით მოსაზრებას, რომ როდესღაც ითვლებოდა თითქოს მზე მოძრაობს დედამიწის გარშემო, ხოლო კოპერნიკმა დაადგინა, რომ ყველაფერი პირიქითაა – დედამიწა ბრუნავს მზის გარშემო. მაგრამ, თუ ორივე მოძრაობა ერთნაირად რეალურია, მაშინ ისმის კითხვა – რა განსხვავებაა სამყაროს ჰელიოცენტრულ და გეოცენტრულ სისტემებს შორის? პასუხი გამომდინარეობს იმ ობიექტური გარემოებიდან, რომ მზის მასა გაცილებით მეტია დედამიწის მასაზე ($m_0 \gg m_1$). აქედან და (66) თანაფარდობიდან ბარიცენტრულ სისტემაში ორბიტების ზომები და წარმოქმნილი აჩქარებები M_0

და M_1 წერტილების მასების უკუპროპორციულია. თავის მხრივ, ეს ნიშნავს, რომ დიდი მასის წერტილთან (მზე) დაკავშირებული კოორდინატთა სისტემა ძალიან ახლოა ინერციულთან, ხოლო მცირე მასის წერტილთან (დედამიწა) დაკავშირებული სისტემა არსებითად არაინერციულია. ფიზიკური თვალსაზრისით ეს განპირობებულია იმით, რომ ძალა, რომლითაც მზე იზიდავს დედამიწას ტოლია ძალის, რომლითაც დედამიწა ზემოქმედებს მზეზე, თუმცა ამ დროს წარმოქმნილი აჩქარებები მასების უკუპროპორციულია. ხოლო ამ სისტემის არაინერციულობის ხარისხი სწორედ კოორდინატთა სისტემის სათავის აჩქარებასთან არის დაკავშირებული.

ჰელიოცენტრულ და გეოცენტრულ სისტემებს შორის აღნიშნული განსხვავება მჟღავნდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც ვიწყებთ თითოეულ მათგანში რომელიღაც მესამე სხეულის, მაგალითად, მარსის განხილვას. მისი მოძრაობა თითქმის ინერციულ ჰელიოცენტრულ სისტემაში გაცილებით მარტივია, ვიდრე არაინერციულ გეოცენტრულში. ამაში მდგომარეობს გეოცენტრულიდან ჰელიოცენტრულ წარმოდგენაზე გადასვლის წმინდა მექანიკური არსი.

ყოველივე ამასთან ერთად უნდა გვესმოდეს, რომ ისტორიულად პტოლომეოსის გეოცენტრული სისტემა (უფრო სწორად ჰიპარქე-პტოლომეოსის, რადგან სწორედ ჰიპარქემ გამოიყენა პირველად ეპიციკლები და დიფერენტები ციური სხეულების მოძრაობების აღსაწერად) იყო და რჩება მეცნიერების უზარმაზარ მიღწევად ადამიანის მიერ სამყაროს აღქმის გზაზე. ის იყო პირველი თეორია, რომელიც საშუალებას იძლეოდა გარკვეული სიზუსტით აღგვეწერა და გვეწინასწარმეტყველა მზის სისტემის სხეულების მდებარეობა და ეფუძნებოდა გარკვეულ ფიზიკურ საფუძვლებს.

კერძოდ, იგი გამომდინარეობდა არისტოტელეს ფიზიკიდან, რომელშიც მიღებული იყო სიჩქარეების და არა აჩქარებების აბსოლუტურობა. თავის მხრივ, ეს იყო მაშინდელი დროის ყოფითი და საწარმოო გამოცდილების განზოგადება – მუდმივი სიჩქარით მოძრაობისათვის საჭიროა მუდმივი ძალის მოდება (სინამდვილეში, როგორც დღეს ეს გვესმის, მუდმივი ხახუნის ძალის გაწონასწორებისათვის). აქედან გამომდინარეობდა სწორედ თანაბარი მოძრაობის და უძრაობის მდგომარეობათა აბსოლუტიზაცია. მათემატიკური თვალსაზრისით კი, თუ გადავიყვანთ ჰიპარქეს და პტოლომეოსის შედეგებს ანტიკური ხანისთვის დამახასიათებელი გეომეტრიული ენიდან თანამედროვე ანალიტიკურ ენაზე, მაშინ ეს სხვა არაფერია თუ არა ციური სხეულების კოორდინატთა, როგორც დროის ფუნქციების დაშლა ფურიეს რიგებად ანუ ისეთი მათემატიკური აპარატის გამოყენება, რომლის სრული არსი იხსნება მხოლოდ თანამედროვე ეპოქაში.

ყოველივე ზემოთ თქმული არ ამცირებს ნიკოლაუს კოპერნიკის და მისი თანამიმდევრების მიერ შესრულებული სამუშაოს მნიშვნელობას. მათ შექმნეს ახალი ფიზიკა და ახალი ასტრონომია და, პირველ რიგში, მათი საფუძველი – კლასიკური მექანიკა, რომელიც გაცილებით უფრო ადეკვატურად აღწერს უამრავ მოვლენას ბუნებაში და რამაც შექმნა თეორიული წინამძღვრები კაცობრიობის მძლავრი ტექნიკური პროგრესისათვის. თავის მხრივ, კლასიკური მექანიკის გამოყენებას, როგორც შემდგომში გაირკვა, გააჩნია შეზღუდვები კვანტური ფიზიკისა და ფარდობითობის თეორიის მხრიდან. აქვე აღვნიშნავთ, რომ მზისა და დედამიწის მასებს შორის უზარმაზარი განსხვავების გამო, ათვლის ჰელიოცენტრულ და გეოცენტრულ სისტემებს შორის ფიზიკური სხვაობა ნარჩუნდება ასევე ფარდობითობის ზოგადი თეორიის ფარგლებშიც.

კვლავ დავუბრუნდეთ ორი სხეულის ამოცანას. შემდგომში ჩვენი მატერიალური წერტილები, ისევე როგორც მათი მასები, აღვნიშნოთ M და m. განვიხილოთ m წერტილის მოძრაობა M წერტილის მიმართ, რომელიც აღიწერება განტოლებით

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0, \quad \mu = f(M+m) \tag{72}$$

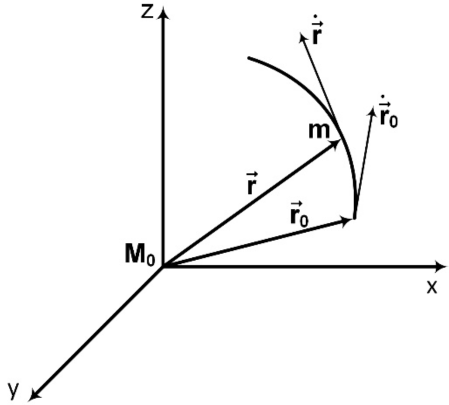
და საწყისი პირობებით

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \tag{73}$$

კოორდინატთა x, y, z სისტემაში (ნახაზი 4). μ მუდმივას ***ორი სხეულის ამოცანის გრავიტაციული მუდმივა*** ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ იგი დამოკიდებულია განსახილველი ორივე მატერიალური წერტილის მასების ჯამზე. ეს განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ორმაგ ვარსკვლავთა სისტემის განხილვისას. თუმცა, მზის გარშემო მცირე პლანეტების და კომეტების მოძრაობის შესწავლისას, ასევე, ხელოვნური ციური სხეულების მოძრაობის განხილვისას, მცირე მასები შეგვიძლია უგულებელვყოთ.

ვიპოვოთ (72) განტოლების ზოგადი ამონახსნი, უფრო სწორად, მეექვსე რიგის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნი პირველი ინტეგრალების მეთოდით.

წინასწარ აღვნიშნოთ, რომ განსაკუთრებით მზის სისტემის სხეულების შესწავლისას მიზანშეწონილია შემოვიღოთ ასტრონომიული ერთეულების განზომილების სპეციალური (გაუსის) სისტემა – სიგრძე გავზომოთ ასტრონომიულ ერთეულებში (ა.ე.), დრო – საშუალო მზის დღე-ღამეში, მასა – მზის მასის ერთეულებში.



ნახაზი 4. ორი სხეულის ფარდობითი ამოცანა.

მაშინ გრავიტაციული მუდმივა $f = 0.0029591$, ხოლო სიდიდე, რომელიც ხშირად გვხვდება $k = \sqrt{f} = 0.0172021$. k-ს უწოდებენ ***გაუსის მუდმივას***.

რადგან ვიხილავთ ფარდობით მოძრაობას (ანუ მოძრაობას არაინერციულ კოორდინატთა სისტემაში), ამიტომ ათი კლასიკური ინტეგრალიდან იარსებებს მხოლოდ ოთხი – ვექტორული ***მომენტის ინტეგრალი*** და სკალარული ***ენერგიის ინტეგრალი***. ამათგან პირველის მისაღებად მოძრაობის განტოლება (72) გავამრავლოთ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორზე ვექტორულად მარცხნიდან. თუ ამ ნამრავლს მივუმატებთ ტოლობას $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$, მივიღებთ:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0. \tag{74}$$

ვაინტეგროთ და მივიღებთ:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \tag{75}$$

ეს ნიშნავს, რომ m წერტილის კინეტიკური მომენტი ნარჩუნდება, ხოლო ინტეგრირების მუდმივა $\vec{c}$ უტოლდება ამ მომენტს მასის ერთეულზე გადათვლით.

ენერგიის ინტეგრალის მისაღებად გავამრავლოთ (72) განტოლება სიჩქარის ვექტორზე $\dot{\vec{r}}$ სკალარულად:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3}. \tag{76}$$

სამართლიანია ტოლობა $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$, რომელიც გამომდინარეობს იქედან, რომ $r = |\vec{r}|$, ხოლო $\dot{r}$ არის r სიდიდის ცვლილების სიჩქარე და ტოლია $\dot{\vec{r}}$

ვექტორის პროექციისა $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულებაზე, ანუ $\dot{r} = |\dot{\vec{r}}| \cdot \cos(\dot{\vec{r}}, \vec{r})$. აღვნიშნოთ $|\dot{\vec{r}}|$ სიჩქარის მოდული როგორც V და მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(V^2) = -\frac{\mu}{r^2} = \mu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{77}$$

ხოლო ინტეგრირების შემდეგ

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{78}$$

სადაც მუდმივა h - გაორმაგებული სრული ენერგიაა წერტილის m მასის ერთეულზე.

გადავდოთ შემდგომისათვის მოძრაობის თვისებების სრული ანალიზი, რომელიც გამომდინარეობს ამ ორი პირველი ინტეგრალის არსებობიდან და მხოლოდ აღვნიშნოთ, რომ მომენტის ინტეგრალიდან და ვექტორული ნამრავლის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{r}$ და $\dot{\vec{r}}$ პერპენდიკულარულია მომენტის ვექტორის $\vec{c}$.

ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრირებისას, გარდა ნაპოვნი კლასიკური ინტეგრალებისა, სპეციფიკურად ამ ამოცანისათვის არსებობს კიდევ ერთი პირველი ინტეგრალი. მისი პოვნისთვის მოძრაობის ვექტორული განტოლება გავამრავლოთ ვექტორულად მარჯვნიდან მომენტის ინტეგრალზე:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{c} + \mu\frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{r^3} = 0. \tag{79}$$

პირველი შესაკრები მარცხნიდან წარმოადგენს $\dot{\vec{r}} \times \vec{c}$ სიდიდის წარმოებულს. ვაჩვენოთ, რომ მეორე შესაკრებიც წარმოადგენს სრულ წარმოებულს. ცნობილი ფორმულის მეშვეობით ორმაგი ვექტორული წარმოებულის გამოთვლით მივიღებთ:

$$\frac{\vec{r} \times \vec{r} \times \dot{\vec{r}}}{r^3} = \frac{\vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}^2}{r^3} = -\frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{80}$$

(80) ჩავსვათ (79)-ში და ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \mu\frac{\vec{r}}{r} = \vec{\lambda}. \tag{81}$$

ორი სხეულის ამოცანის ამ პირველ ინტეგრალს უწოდებენ **ლაპლასის ინტეგრალს**, ხოლო $\vec{\lambda}$ – **ლაპლასის ვექტორს**. ამდენად, გვაქვს შვიდი პირველი

ინტეგრალი – ორი ვექტორული და ერთი სკალარული. ლაპლასის ინტეგრალის გამოყვანის მეთოდს მივყავართ დასკვნამდე, რომ ყველა ნაპოვნი პირველი ინტეგრალი არ არის დამოუკიდებელი. მართლაც, ინტეგრირების $\vec{c}$, $\vec{\lambda}$ და h მუდმივებს შორის არსებობს ორი დამოკიდებულება, რომლებიც აკავშირებს მათ ერთმანეთთან. პირველი მათგანის მიღება ადვილია, თუ გადავამრავლებთ მომენტის სკალარულ ინტეგრალს და ლაპლასის ინტეგრალს. ამავე დროს

$$\vec{c}\cdot\vec{\lambda} = \vec{c}\cdot\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{c}\right) - \mu\frac{\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}{r^3} = 0, \tag{82}$$

რადგან ვექტორის ყოველ შერეულ ნამრავლს, რომელიც შედის (82)-ში, გააჩნია ორი მსგავსი თანამამრავლი. ამდენად, მომენტის ვექტორი და ლაპლასის ვექტორი ერთმანეთის პერპენდიკულარულია. მეორე დამოკიდებულება აკავშირებს ამ ვექტორების მოდულებს. ვიპოვოთ ლაპლასის ვექტორის სკალარული კვადრატი:

$$\lambda^2 = \left(\dot{\vec{r}}\times\vec{c}\right)^2 - 2\mu\frac{\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{r}}{r} + \mu^2\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)^2 = c^2V^2 - 2\mu\frac{c^2}{r} + \mu^2. \tag{83}$$

გამოვრიცხოთ V^2 ენერგიის ინტეგრალის მეშვეობით და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ

$$\lambda^2 = hc^2 + \mu^2. \tag{84}$$

ამდენად, ჩვენ გვაქვს ***ხუთი*** დამოუკიდებელი პირველი ინტეგრალი, რაც საშუალებას გვაძლევს დავიყვანოთ მეექვსე ხარისხის დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა პირველი ხარისხის ერთ განტოლებამდე.

ლექცია 5. ორბიტის განტოლება და მოძრაობის კანონი ორი სხეულის ამოცანაში

გადავიდეთ ორი სხეულის ამოცანაში მოძრაობის გამოკვლევაზე. პირველ რიგში, იმ ფაქტიდან, რომ m წერტილის რადიუს-ვექტორი და მისი სიჩქარის ვექტორი პერპენდიკულარულია მომენტის მუდმივი ვექტორისა, გამომდინარეობს, რომ სიბრტყე, რომელიც განისაზღვრება $\vec{r}$ და $\dot{\vec{r}}$ ვექტორებით, ინარჩუნებს უცვლელ ორიენტაციას სივრცეში და პერპენდიკულარულია $\vec{c}$ ვექტორის. თუმცა, იგი შეიცავს $\vec{r}$ ვექტორს და, მაშასადამე, M_0 წერტილს ანუ კოორდინატთა სათავეს. ამდენად, სიბრტყე, რომელშიც მოძრაობს m წერტილი, უძრავია კოორდინატთა x, y, z სისტემაში. მისი განტოლება ვექტორულ ფორმაში შემდეგია - $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, ხოლო კოორდინატულში –

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0, \tag{85}$$

სადაც c_1, c_2, c_3 - $\vec{c}$ ვექტორის შესაბამისი კომპონენტებია.

რადგან ლაპლასის ვექტორი პერპენდიკულარულია $\vec{c}$ ვექტორის მოძრაობის სიბრტყის ნორმალური ვექტორისა, ამიტომ, ისიც ძევს ამ სიბრტყეში. ეს საშუალებას გვაძლევს შემოვიტანოთ მოძრაობის სიბრტყეში მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ξ, η სადაც ξ ღერძი მიმართულია ლაპლასის $\vec{\lambda}$ ვექტორის გასწვრივ და, ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემა r, ν სადაც პოლარული კუთხე ν, რომელსაც ასტრონომიაში უწოდებენ ***ჭეშმარიტ ანომალიას***, აითვლება $\vec{\lambda}$ ვექტორის მიმართულებიდან. თუ შემოვიღებთ კიდევ ერთ ღერძს ζ, რომელიც მიმართულია მომენტის ვექტორის $\vec{c}$ გასწვრივ, მაშინ საწყის x, y, z კოორდინატთა სისტემასთან ერთად სივრცეში ასევე მივიღებთ მოძრაობის სიბრტყესთან დაკავშირებულ ξ, η, ζ სისტემას, რომელსაც უწოდებენ კოორდინატთა ***ორბიტულ სისტემას.***

აღვნიშნოთ, რომ საწყისი კოორდინატთა სისტემა უმეტესად არის ჰელიოცენტრული ეკლიპტიკური სისტემა ან გეოცენტრული ეკვატორული. თუმცა, საჭიროების შემთხვევაში იგი შეიძლება იყოს სელენოცენტრული ან ნებისმიერი სხვა პლანეტოცენტრული სისტემა. თუ განვიხილავთ მოძრაობას ორმაგ ვარსკვლავთა სისტემაში, მაშინ, ხშირად, საწყის კოორდინატთა სისტემის სახით განიხილავენ ხილულ სიბრტყეს, რომელიც წარმოადგენს ცის სფეროს მდგენელს.

ვიპოვნოთ ორი სხეულის ამოცანაში მოძრაობის ტრაექტორიის განტოლება ანუ, ასტრონომიული ენით რომ ვთქვათ, m წერტილის ორბიტის განტოლება

პირველ რიგში r, ν პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში. ამისათვის, ლაპლასის ინტეგრალი $\vec{\lambda}$ გავამრავლოთ სკალარულად $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორზე:

$$r\lambda \cos\nu = \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) - \mu \frac{\vec{r}^2}{r} = c^2 - \mu r. \tag{86}$$

განვსაზღვროთ r სიდიდე როგორც ν კუთხის ფუნქცია და მივიღებთ ორბიტის განტოლებას:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu}\cos\nu}, \tag{87}$$

რომელიც ემთხვევა განტოლებას:

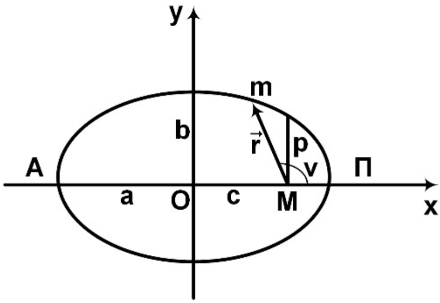
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \tag{88}$$

თუ ჩავთვლით, რომ

$$p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{89}$$

როგორც ცნობილია, განტოლება (88) არის მეორე ხარისხის მრუდის განტოლება, როცა პოლარული ღერძი მიმართულია მრუდის ფოკუსიდან უახლოესი პიკის მიმართულებით. p სიდიდე მრუდის ფოკალური პარამეტრია (ან უბრალოდ მისი პარამეტრი). იგი ტოლია ფოკალური ნახევარქორდის სიგრძის, რომელიც გადის ფოკუსზე ელიფსის დიდი ღერძის, ჰიპერბოლის რეალური ღერძის ან პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის პერპენდიკულარულად (ნახაზი 5).

e ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა განსაზღვრავს თუ კონკრეტულად რომელი მეორე ხარისხის მრუდზე არის ლაპარაკი. თუ $e = 0$, მაშინ ეს წრეწირია, როცა $e < 1-$ ელიფსია, $e = 1$ მნიშვნელობა გვაძლევს პარაბოლას, ხოლო $e > 1$ – ჰიპერბოლას. თუმცა, ამ მრუდებიდან ერთ-ერთი იქნება ორბიტა მხოლოდ მაშინ, როცა p პარამეტრი და, მაშასადამე, კინეტიკური მომენტი c არ უდრის ნოლს. თუ $c = 0$, მაშინ $\vec{r}$ და $\dot{\vec{r}}$ ვექტორები კოლინეარულები არიან, ხოლო ორბიტა წარმოადგენს წრფეს, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე.



ნახაზი 5. წერტილის მოძრაობა ელიფსურ ორბიტაზე.

ამდენად, ჩვენ დავადგინეთ ***კეპლერის პირველი კანონი*** განზოგადებული სახით: *ორი სხეულის ფარდობით ამოცანაში მატერიალური წერტილი მოძრაობს მეორე ხარისხის მრუდის გასწვრივ, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში მოთავსებულია მიზიდულობის ცენტრი.*

მეორე ხარისხის მრუდების განტოლებები დეკარტულ კოორდინატებში წარმოადგენენ მეორე ხარისხის ალგებრულ განტოლებებს. მათი კანონიკური განტოლებები ანუ როდესაც კოორდინატთა სისტემის ცენტრი ემთხვევა ელიფსის ან ჰიპერბოლის ცენტრს ან პარაბოლის პიკს, x ღერძი მიმართულია ელიფსის დიდი ღერძის, ჰიპერბოლის რეალური ღერძის ან პარაბოლის სიმეტრიის ღერძის გასწვრივ, შემდეგია:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad - \text{ელიფსი} \tag{90}$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad - \text{ჰიპერბოლა} \tag{91}$$

$$y^2 = 2px \qquad - \text{პარაბოლა} \tag{92}$$

სადაც a და b – ელიფსის დიდი და პატარა ან ჰიპერბოლის რეალური და წარმოსახვითი ნახევარღერძებია.

ელიფსის ან ჰიპერბოლის ცენტრიდან მათ ფოკუსებამდე მანძილის ანუ c ***ფოკუსური მანძილის*** შეფარდება a დიდი ნახევარღერძის სიდიდესთან განსაზღვრავს მათ ექსცენტრისიტეტს, ე.ი.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}, \tag{93}$$

სადაც ,,–“ ნიშანი მიეკუთვნება ელიფსს, ხოლო ,,+“ – ჰიპერბოლას. თუ გავითვალისწინებთ p პარამეტრის გეომეტრიულ მნიშვნელობას, შეიძლება მივიღოთ შემდეგი ფორმულები:

$$p = a(1 - e^2) \ - \ \text{ელიფსი} \tag{94}$$

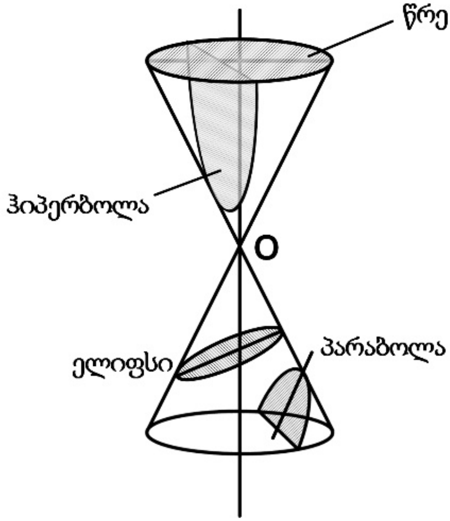
$$p = a(e^2 - 1) \ - \text{ჰიპერბოლა} \tag{95}$$

შევნიშნოთ, რომ ექსცენტრისიტეტის $e = 1$ მნიშვნელობა შესაძლებელია მივიღოთ ორი გზით. ჯერ ერთი, შესაძლებელია დავაფიქსიროთ ელიფსის ერთი წვერი და ერთი ფოკუსი და ვაიძულოთ ელიფსის ცენტრი და მისი მეორე ფოკუსი და მეორე წვერო გადაადგილდენენ დიდი ღერძის გასწვრივ უსასრულობისკენ. ასეთ შემთხვევაში $e \to 1$, რადგან $c \to \infty$ და $a \to \infty$. ამასთან, ელიფსი გაწყდება და გადაიქცევა პარაბოლად. მეორე, ელიფსის ფიქსირებული დიდი a ნახევარღერძის შემთხვევაში შესაძლებელია შევამციროთ მცირე b ნახევარღერძი ნოლამდე და კვლავ $e \to 1$ (იხ. ფორმულა (93)). ასეთ შემთხვევაში ელიფსი შეიკუმშება ორმაგ მონაკვეთში სიგრძით $2a$. ჰიპერბოლა ასეთი პროცედურების შემთხვევაში გადაიქცევა ორ ორმაგ სხივად.

განხილული მრუდების კლასის მეორე დასახელება – ***კონუსური კვეთები***, დაკავშირებულია ჯერ კიდევ უძველეს დროში მათ მისაღებად დადგენილ მეთოდთან. ამ მეთოდის მეშვეობით მრუდები მიიღება სწორი წრიული კონუსის მისი ღერძის მიმართ სხვადასხვა კუთხით დახრილი სიბრტყით კვეთისას. ეს ნათლად ამტკიცებს, რომ ერთი შეხედვით განსხვავებული ფორმის მქონე ეს მრუდები, სინამდვილეში ქმნიან მრუდების გარკვეულ ერთიან ოჯახს (იხ. ნახაზი 6).

დავუბრუნდეთ ორი სხეულის ამოცანას და შევნიშნოთ, რომ ლაპლასის ვექტორი განსაზღვრავს მიზიდულების ცენტრში განთავსებული ფოკუსიდან მის მახლობელ წვერომდე მიმართულებას ანუ ორბიტის ***პერიცენტრს.*** ელიფსური ორბიტის შემთხვევაში ასევე არსებობს ყველაზე დაშორებული წერტილი მიზიდულობის ცენტრიდან – ***აპოცენტრი.*** ამ ორივე წერტილის ზოგადი სახელია – ***აფსიდები,*** ხოლო მათი შემაერთებელი ხაზისა – ***აფსიდების ხაზი.***

თუ განიხილება მოძრაობა რომელიმე კონკრეტული სხეულის გარშემო, მაშინ აფსიდების სახელწოდება ტრადიციის მიხედვით იწარმოება ცენტრალური სხეულის ძველბერძნული დასახელების მეშვეობით.



ნახაზი 6. კონუსური კვეთები.

მაგალითად, მზის მახლობელ ორბიტებს გააჩნიათ პერიჰელიუმები (თუმცა, ამავე დროს – აფელიუმებიც), დედამიწის მახლობელს – პერიგეა და აპოგეა, მთვარის მახლობელს – პერისელენიუმი და აპოსელენიუმი, მარსის მახლობელს – პერიარიუმი და აპოარიუმი. ორმაგი ვარსკვლავების კომპონენტების ორბიტებს გააჩნიათ პერიასტრიუმი და აპოასტრიუმი.

გარდა ორბიტის განტოლებისა, აუცილებელია განვსაზღვროთ ამ ორბიტაზე ***მოძრაობის კანონი,*** ანუ, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ν ჭეშმარიტი ანომალიის და, შესაბამისად, r რადიუსის დამოკიდებულება t დროზე. ამ კანონის მისაღებად, განვიხილოთ მომენტის ინტეგრალის მოდული:

$$rV\sin(\dot{\vec{r}},\vec{r}) = c. \qquad (96)$$

თუმცა, $V\sin(\dot{\vec{r}},\vec{r})$ სიჩქარე წარმოადგენს რადიუს-ვექტორის პერპენდიკულარულ ვექტორს ანუ წრიულ სიჩქარეს, რომელიც ტოლია r რადიუსის ნამრავლისა $\omega = \dot{\nu}$ კუთხურ სიჩქარეზე. ამიტომ,

$$r^2\dot{\nu} = c. \qquad (97)$$

ვაინტეგროთ (97) დამოკიდებულება (88)-ის და (89)-ის გთვალისწინებით. მაშინ მოძრაობის კანონი შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau). \tag{98}$$

მუდმივა τ არის მეექვსე დამოუკიდებელი მუდმივა, რომელიც პირველი ინტეგრალების $\vec{c},\vec{\lambda},h$ მუდმივებთან ერთად განსაზღვრავს ორი სხეულის ამოცანის ზოგად ამოხსნას. რადგან $t=\tau$ მომენტისთვის ν ჭეშმარიტი ანომალია უნდა უდრიდეს ნოლს, ამიტომ τ მუდმივა წარმოადგენს $\boldsymbol{m}$ ***წერტილის მიერ ორბიტის პერიცენტრის გავლის მომენტს.*** ინტეგრალი, რომელიც მოთავსებულია (98)-ის მარცხნივ, შესაძლოა ვიპოვოთ ელემენტარული ფუნქციების სახით თუნდაც $s=\mathrm{tg}(\nu/2)$ უნივერსალური აღნიშვნის გამოყენებით. საზოგადოდ, მას საკმაოდ რთული სახე აქვს. ამიტომ, მისი გამოთვლა მოხდება კეპლერისეული მოძრაობის ყოველი შესაძლო ტიპის განხილვისას. ნებისმიერ შემთხვევაში, მისი პოვნა განსაზღვრავს ჭეშმარიტ ანომალიას, როგორც დროის ფუნქციას და საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ r მანძილი და ორბიტული კოორდინატები. ამ დროს:

$$\xi = r\cos\nu, \quad \eta = r\sin\nu, \quad \zeta = 0, \tag{99}$$

ანუ უნდა განვსაზღვროთ m წერტილის რადიუს-ვექტორი ორბიტულ კოორდინატთა სისტემაში, რომელსაც აღვნიშნავთ $\vec{\rho}\equiv(\xi,\eta,\zeta)$.

იმისათვის, რომ ვიპოვნოთ ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნა x,y,z კოორდინატთა სისტემაში, ანუ ვიპოვნოთ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი, საჭიროა x,y,z სისტემის მიმართ ξ,η,ζ კოორდინატთა სისტემის მიმართულების კოსინუსების მატრიცა გავამრავლოთ $\vec{\rho}$ ვექტორზე. შემოვიღოთ $\vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ ერთეულოვანი ვექტორები ანუ ξ,η,ζ ღერძების შესაბამისი ორტები. ასეთ შემთხვევაში მიმართულებათა კოსინუსების მატრიცა შედგენილ იქნება $\vec{P},\vec{Q},\vec{R}$ ვექტორების კომპონენტებისაგან, ხოლო $\vec{r}$ ვექტორის განმსაზღვრელი გამოსახულება შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{Q} \\ \vec{R} \end{pmatrix} \cdot \vec{\rho}. \tag{100}$$

ამავე დროს, ორბიტულ კოორდინატთა სისტემის ღერძების ორტები, მათი განსაზღვრებიდან გამომდინარე, უნდა გამოვთვალოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\vec{P} = \frac{\vec{\lambda}}{\lambda}, \quad \vec{Q} = \frac{\vec{c} \times \vec{\lambda}}{c\lambda}, \quad \vec{R} = \frac{\vec{c}}{c}. \tag{101}$$

ამის შემდეგ, ორი სხეულის ამოცანის ზოგადი ამონახსნი შესაძლოა გამოვსახოთ $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, e, p, τ მუდმივებით. ეს მუდმივები, ისევე როგორც პირველი ინტეგრალების მუდმივები, უნდა გამოვთვალოთ რომელიმე კერძო ამონახსნის განსაზღვრისას (73) საწყისი პირობების და (75), (78), (81), (88), (89) და (101) დამოკიდებულებათა მეშვეობით.

ასტრონომიაში ინტეგრირების მუდმივებს, რომლებიც განსაზღვრავენ ციური სხეულის ორბიტას და ამ ორბიტაზე მის მოძრაობას, უწოდებენ ***ორბიტის ელემენტებს.*** კერძოდ, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ვექტორებს უწოდებენ ორბიტის ***ვექტორულ ელემენტებს.***

მომენტის ინტეგრალს ასევე შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{c}\, dt. \tag{102}$$

ამ გამოსახულების მარცხენა მხარე წარმოადგენს $\vec{r}$ და $\vec{r} + d\vec{r}$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის გაორმაგებულ ფართობს. იგი მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე სიდიდეების სიზუსტით ემთხვევა dS სექტორის ფართობს, რომელიც აღიწერება $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორით dt დროში, ანუ:

$$dS = \frac{1}{2} c\, dt. \tag{103}$$

ამ განტოლების ინტეგრირება გვაძლევს:

$$S = \frac{1}{2} ct + c_0. \tag{104}$$

ტოლობები (103) და (104) გამოსახავენ ***კეპლერის მეორე კანონს.*** იგი შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოვაყალიბოთ: **კეპლერისეული მოძრაობის სექტორული სიჩქარე მუდმივია ანუ დროის ტოლი ინტერვალების განმავლობაში წერტილის რადიუს-ვექტორი შემოწერს ტოლი ფართობის სექტორებს**. უნდა აღინიშნოს, რომ (104) არ წარმოადგენს მოძრაობის განტოლების კიდევ ერთ პირველ ინტეგრალს, რადგან სექტორის ფართობი, რომელიც შექმნილია მეორე ხარისხის მრუდის რკალით (გარდა წრეწირის შემთხვევისა), საბოლოო ჯამში არ გამოისახება მისი წვეროების

კოორდინატებით. როგორც ცნობილია, იოჰანეს კეპლერმა დაადგინა პლანეტების მოძრაობის სამი კანონი. თუმცა, მესამე კანონი, მისი შინაარსიდან გამომდინარე, განეკუთვნება მხოლოდ პერიოდული მოძრაობის შემთხვევას და განხილულ იქნება მოგვიანებით.

ლექცია 6. ორბიტის კეპლერისეული ელემენტები

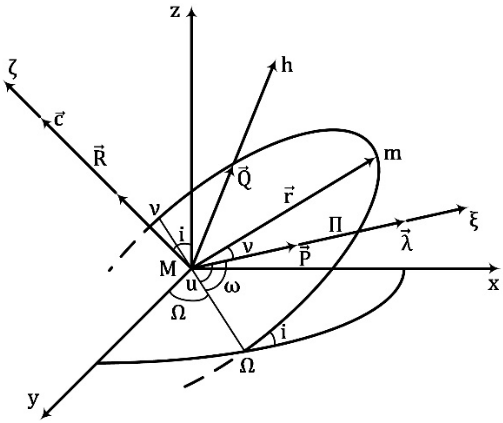
ორბიტის $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$, e, p, τ ელემენტები შესაძლებელია დაიყოს 3 ჯგუფად. პირველი (ვექტორული ელემენტები) განსაზღვრავს ორბიტის სიბრტყის მდებარეობას სივრცეში და მის ორიენტაციას ამ სიბრტყეზე. მეორე ჯგუფი - (e, p) განსაზღვრავს ორბიტის ფორმას და ზომას. მესამე ჯგუფში შედის ერთი ელემენეტი τ, რომელიც განსაზღვრავს ორბიტაზე მატერიალური წერტილის მოძრაობას და ამიტომ, ეწოდება ***დინამიური*** ელემენტი. თუმცა, მიმართულების კოსინუსების მატრიცის ცხრა ელემენტს შორის, რომლებსაც წარმოქმნიან ვექტორული ელემენეტები, მხოლოდ სამია დამოუკიდებელი. დანარჩენი ურთიერდაკავშირებულია ორთონორმირების ექვსი დამოკიდებულებით. ამიტომ, ორბიტის მდებარეობის განსაზღვრის უფრო ,,ეკონომიური'' საშუალება იქნებოდა ეილერის სამი კუთხის გამოყენება, რომლებიც განსაზღვრავენ ორბიტული კოორდინატთა სისტემის მდებარეობას საწყის კოორდინატთა სისტემის მიმართ.

ეს სამი კუთხე მოიცემა შემდეგნაირად (იხ. ნახაზი 7). ზოგად შემთხვევაში, ორბიტის სიბრტყე გადაკვეთს ძირითად x, y კოორდინატთა სისტემას გარკვეული წრფის მიმართულებით, რომელზეც ძევს x, y სიბრტყესთან ორბიტის კვეთის წერტილები. ამ წერტილებს ეწოდება ***ორბიტის კვანძები,*** ხოლო თავად კვეთის წრფეს – ***კვანძების ხაზი.***

კვეთის იმ წერტილს, რომელშიც m წერტილი ორბიტაზე თავისი მოძრაობის პროცესში იცვლის აპლიკატის ნიშანს უარყოფითიდან დადებითზე, უწოდებენ ***აღმავალ კვანძს*** და აღნიშნავენ Ω ასოთი, ხოლო წერტილს, რომელშიც ნიშანი იცვლება პირიქით ,,+''-დან ,,-''-სკენ – ***დაღმავალ კვანძს*** და აღნიშნავე ამოტრიალებული $℧$ სიმბოლოთი.

ამ აღნიშვნების წარმოშობა დაკავშირებულია სასწორის თანავარსკვლავედის ძველბერძნულ აღნიშვნასთან, რომელშიც იმ დროისთვის მდებარეობდა გაზაფხულის დღეღამტოლობის წერტილი და წარმოადგენდა დედამიწის გარშემო მზის წლიური მოძრაობის ორბიტის აღმავალ წერტილს.

ეილერის პირველი კუთხე არის საწყის კოორდინატთა სისტემის x ღერძის დადებით მიმართულებასა და ორბიტის აღმავალი კვანძის მიმართულებას შორის კუთხე. ეს კუთხე ასევე აღინიშნება Ω ასოთი და ეწოდება ***აღმავალი კვანძის გრძედი*** (ან უბრალოდ ***კვანძის გრძედი***). კუთხეს, აღმავალი კვანძის მიმართულებასა და ორბიტის პერიცენტრის მიმართულებას შორის, უწოდებენ **პერიცენტრულ მანძილს** და აღინიშნება ω ასოთი.



ნახაზი 7. ორბიტული კოორდინატთა სისტემა და ეილერის კუთხეები.

ეილერის მესამე კუთხე არის კოორდინატთა x, y სიბრტყესა და ორბიტის სიბრტყეს შორის (ანუ, რაც იგივეა, მათ ნორმალებს – z და ζ ღერძებს შორის) კუთხე i და მას ***ორბიტის დახრილობას*** უწოდებენ.

კვანძის გრძედი აითვლება x ღერძიდან y ღერძის მიმართულებით, პერიცენტრული მანძილი – კვანძების ხაზიდან m წერტილის მოძრაობის მიმართულებით. ამ კუთხეებმა შესაძლოა მიიღონ მნიშვნელობები $0°$-დან $360°$-მდე. ორბიტის დახრილობა i ძევს $0°$-დან $180°$-მდე ინტერვალში. იგი ნაკლებია $90°$-ზე, თუ m წერტილის პროექცია x, y სიბრტყეზე მოძრაობს პირველ მეოთხედში x ღერძიდან y ღერძის მიმართულებით და მეტია $90°$-ზე, თუ ეს მოძრაობა წარმოებს საპირისპირო მიმართულებით. პირველ შემთხვევაში მოძრაობას ეწოდება ***პირდაპირი,*** ხოლო მეორე შემთხვევაში – ***უკუმოძრაობა.***

ზემოთ განვსაზღვრეთ სიდიდეები Ω და ω როგორც ცენტრალური კუთხეები გარკვეულ მიმართულებებს შორის, ხოლო ორბიტის კვანძები, როგორც კვანძების ხაზის თავად ორბიტასთან გადაკვეთის წერტილები. თუმცა, ზოგჯერ სასარგებლოა კვანძის გრძედისა და პერიცენტრული მანძილის სახით განვიხილოთ შესაბამისი რკალები ცის სფეროზე. მაშინ კვანძები არის კვანძების ხაზის ცის სფეროსთან გადაკვეთის წერტილები.

ექვსი დამოუკიდებელი სიდიდე $(\Omega, \omega, i, e, p, \tau)$ სრულად და ცალსახად განსაზღვრავს წერტილის მოძრაობას ორი სხეულის ამოცანაში. მათ უწოდებენ ***ორბიტის კეპლერისეულ ელემენტებს.*** ეს ნაკრები გამოდგება ნებისმიერი სიმრუდის ორბიტისათვის. ცალკეულ შემთხვევებში შესაძლოა მოვახდინოთ მათი

მოდიფიკაცია გარკვეული სახით. მაგალითად, ორბიტის p პარამეტრის ნაცვლად შესაძლოა გამოვიყენოთ ელიფსური ორბიტის დიდი ნახევარღერძი a.

აღვნიშნოთ, რომ r მანძილისა და ν ჭეშმარიტი ანომალიისათვის ორი სხეულის ამოცანის ზოგადი ამონახსნი ზემოთ უკვე ნაპოვნი გვაქვს. ზოგადი ამონახსნის სრულად განსაზღვრისათვის საკმარისია ვიპოვნოთ $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის მიმართულების კოსინუსები, რომლებსაც აღვნიშნავთ α, β, γ-თი, ანუ დავუშვათ, რომ $\vec{r}^0 = \vec{r}/r \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$.

მიმართულების კოსინუსები საპოვნელად, განვიხილოთ ორბიტის პროექცია ცის სფეროზე (ნახაზი 8). მაშინ $x\Omega\mathrm{m}$ სფერულ სამკუთხედში: $x\Omega = \Omega$, $\Omega m = \omega + \nu = u$, $x\Omega m = 180 - i$. აქედან,

$$\alpha = \cos(xm) = \cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i \tag{105}$$

ანალოგიურად,

$$\begin{aligned} \beta &= \cos(ym) = \sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i \\ \gamma &= \cos(zm) = \sin u\sin i \end{aligned} \tag{106}$$

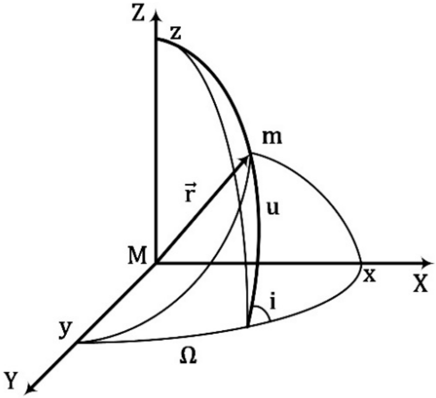
ამის შემდეგ შესაძლებელია ჩავწეროთ, რომ m წერტილის კოორდინატები საწყის კოორდინატთა სისტემაში ტოლია:

$$\begin{aligned} x &= r\alpha = r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i) \\ y &= r\beta = r(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i) \\ z &= r\gamma = r\sin u\sin i. \end{aligned} \tag{107}$$

ფორმულები (88), (98) და (107) იძლევა ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნას კეპლერისეულ ელემენტებში. აქვე, u სიდიდე არის კუთხური მანძილი კვანძების ხაზსა და m წერტილის მიმდინარე რადიუს-ვექტორს შორის. მას ეწოდება ***გრძედის არგუმენტი.*** $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ორტების განსაზღვრების თანახმად ისინი ტოლია $\vec{r}/r$ ორტისა, როცა $u = \omega$ და $u = \omega + 90°$ (ეს მიუთითებს ω სიდიდის კიდევ ერთ სახელწოდებაზე – ***პერიცენტრის არგუმენტი***). ამიტომ, ფორმულები (105) და (106) იძლევა ორბიტის ვექტორულ და კეპლერისეულ ელემენტებს შორის შემდეგი სახის კავშირს:

$$\begin{aligned} P_x &= \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i \\ P_y &= \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i \\ P_z &= \sin\omega\sin i \end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i \\ Q_y &= -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i \\ Q_z &= \cos\omega\sin i \end{aligned} \tag{109}$$



ნახაზი 8. რადიუს-ვექტორის მიმართულების კოსინუსების გამოთვლა.

თუ მოვახდენთ $\vec{R}$ ვექტორის პროექციას უშუალოდ x, y, z ღერძებზე, მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} R_x &= \sin\Omega \sin i \\ R_y &= -\cos\Omega \sin i \\ R_z &= \cos i \end{aligned} \tag{110}$$

ზოგადი ამონახსნი შესაძლოა ასევე ჩავწეროთ შემდეგი სახით, თუ გამოვიყენებთ (99) და (100) ფორმულებს:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \xi + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \eta \tag{111}$$

თუ მოვახდენთ (107) ან (111) გამოსახულების დიფერენცირებას t დროით, შეგვიძლია ვიპოვოთ $\dot{\vec{r}} \equiv (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ სიჩქარის ვექტორის კომპონენტები. ასევე სასარგებლოა ამ ვექტორის დაშლა ***რადიალურ*** V_r და რადიუს-ვექტორის მიმართ ნორმალურ (***ტანგენციალურ***) V_n კომპონენტებად. ცხადია, რომ $V_r = \dot{r}$, ხოლო $V_n = r\dot{\nu}$. მოვახდინოთ (88)-ის დიფერენცირება დროით და გავითვალისწინოთ (97) და (99), და მივიღებთ:

$$\begin{aligned} V_r &= \sqrt{\mu/p}\ e \sin\nu \\ V_r &= \sqrt{\mu/p}\ (1 + e\cos\nu) \\ V &= \sqrt{\mu/p}\ \sqrt{1 + 2e\cos\nu + e^2} \end{aligned} \tag{112}$$

ლექცია 7. მოძრაობის კლასიფიკაცია ორი სხეულის ამოცანაში

დეტალურად განვიხილოთ, თუ რა პირობებში ექნება ორი სხეულის ამოცანაში ამა თუ იმ ტიპის კეპლერისეულ მოძრაობას ადგილი. ამის შესახებ ინფორმაცია შეგვიძლია მოვათავსოთ ერთ ცხრილში (იხ. ცხრილი 2).

ცხრილი 2. კეპლერისეული მოძრაობის ტიპები ორი სხეულის ამოცანაში

მოძრაობის ტიპი	e	c	λ	h	V, r	$\delta = (r, V)$
წრიული	0	≠0	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
ელიფსური	0 < e < 1	-	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	0<δ ≤180°
პარაბოლური	1	-	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	-
ჰიპერბოლური	>1	-	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	-
წრფივი	1	0	ნებისმიერი	ნებისმიერი	ნებისმიერი	0° ან 180°

ცხრილი 2-ის პირველი და მეორე სვეტები გამომდინარეობს კეპლერის პირველი კანონიდან და მეორე ხარისხის მრუდების თეორიიდან. მესამე სვეტი აფიქსირებს კინეტიკური მომენტის მნიშვნელობებს მრუდწიროვანი და წრფივი მოძრაობისას. მეოთხე სვეტი შეიცავს ორი სხეულის ამოცანის გრავიტაციული μ მუდმივას და ლაპლასის ვექტორის სიდიდეს შორის კავშირს, რომელიც გამომდინარეობს (84) და (89) დამოკიდებულებებიდან. მეხუთე სვეტში მოცემული h გაორმაგებული სრული ენერგიის სიდიდეები გამომდინარეობს მესამე და მეოთხე სვეტების მონაცემებიდან და (84) დამოკიდებულებიდან.

ხაზი გავუსვათ, რომ წრიული და ელიფსური მოძრაობების, რომლებიც წარმოადგენენ ***ფინიტურს*** (სასრულს) ანუ ადგილი აქვთ სიბრტყის შემოსაზღვრულ არეებში, სრული ენერგია უარყოფითია – კინეტიკური ენერგია არ არის საკმარისი მიზიდულობის ცენტრის გრავიტაციული ზემოქმედების გადასალახავად. ***ინფინიტური*** (უსასრულო) ანუ პარაბოლური და ჰიპერბოლური მოძრაობების შემთხვევებში სრული ენერგია არაუარყოფითია ანუ მოძრავი წერტილი გადალახავს მიზიდულობის ძალას და მიდის უსასრულობაში. სრული ენერგიის სიდიდის ამ შეზღუდვებიდან და ენერგიის (78) ინტეგრალიდან გამომდინარეობს დამოკიდებულება წერტილის სიჩქარესა და მანძილს შორის, რომელზეც იგი მდებარეობს მოცემული მომენტისათვის და მოცემულია ცხრილი 2-ის მეექვსე სვეტში. წრიული და წრფივი მოძრაობების შემთხვევებში δ კუთხის მნიშვნელობები გამომდინარეობს აშკარა გეომეტრიული მოსაზრებებიდან.

სხვა შემთხვევებში ეს კუთხე უდიდეს მნიშვნელობებს იღებს ორბიტის პერიცენტრში. ნოლისკენ იგი მიისწრაფვის მაშინ, როცა წერტილი მიემართება უსასრულობისკენ პარაბოლაზე ან ჰიპერბოლაზე, ხოლო ელიფსური მოძრაობის შემთხვევაში ეს ხდება ელიფსის მცირე ღერძის ბოლოებში, როცა იგი შეუზღუდავად მცირდება.

ასტრონომიისა და კოსმონავტიკისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს ცხრილი 2-ის მეექვსე სვეტის პირველ და მესამე დამოკიდებულებას. ეს იგივეა, რაც წრიული და პარაბოლური მოძრაობის სიჩქარეების ცნობილი ფორმულები:

$$V_c = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}\,. \tag{113}$$

აღვნიშნოთ, რომ ამ ფორმულებიდან პირველი შეგვიძლია ვიპოვნოთ ელმენტარული მოსაზრებებიდან გამომდინარე, თუ გავუტოლებთ ერთმანეთს გრავიტაციულ და ცენტრიდანულ აჩქარებებს (მათი ტოლობა განაპირობებს სწორედ უწონადობის პირობებს ხელოვნური თანამგზავრის ან ორბიტული სადგურის ბორტზე):

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{V^2}{r} \tag{114}$$

საიდანაც ასვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ წრიული მოძრაობის სიჩქარის ფორმულა. თუ r მანძილს გამოვსახავთ ცენტრალური სხეულის R რადიუსით და ფრენის H სიმაღლით, ხოლო μ გრავიტაციულ მუდმივას – სხეულის რადიუსით და g მიზიდულობის ძალის აჩქარებით მის ზედაპირზე, მაშინ (113) ფორმულები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_p = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}. \tag{115}$$

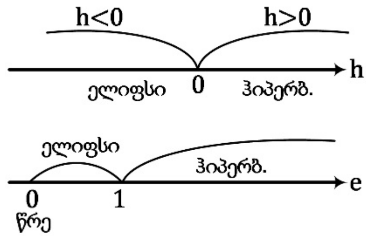
თუ ამჯერად დავუშვებთ, რომ სიმაღლე $H = 0$, მაშინ მივიღებთ წრიული და პარაბოლური მოძრაობის სიჩქარეებს მოცემული ციური სხეულის ზედაპირთან, რომლებიც ცნობილია, როგორც ***პირველი და მეორე კოსმოსური სიჩქარეები:***

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \tag{116}$$

მეორე კოსმოსურ სიჩქარეს ასევე უწოდებენ განთავისუფლების ან გაქცევის სიჩქარეს.

განვიხილოთ ორი სხეულის ამოცანაში სხვადასხვა ტიპის მოძრაობებს შორის თანაფარდობა კიდევ ერთი თვალსაზრისით. ვთქვათ ყველანაირი საწყისი პირობა სრულდება თანაბარი ალბათობით. მაშინ λ და e სიდიდეთა მნიშვნელობები იქნება შემთხვევითი რიცხვები, რომლებიც თანაბრადაა განაწილებული $[0, \infty)$ ინტერვალში. დავსვათ კითხვა: როგორია თითოეული მრუდწიროვანი ტიპის კეპლერისეული მოძრაობის ალბათობა? გეომეტრიული ალბათობების გამოთვლის მეთოდის მიხედვით წრიული და პარაბოლური მოძრაობის ალბათობა 0-ის ტოლია, რადგან მათ შეესაბამება ცალკეული წერტილები ექსცენტრისიტეტის შესაძლო მნიშვნელობების სხივზე (ნახაზი 9). ეს არის მაგალითი ხდომილებებისა, რომელთა ალბათობა ნოლია, თუმცა მათი დადგომა მაინც შესაძლებელია.

ელიფსური და ჰიპერბოლური მოძრაობების ალბათობათა გამოთვლას შესაძლოა შემდეგნაირად მივუდგეთ. დავუშვათ, რომ ნახაზზე 9 მოცემული ჰიპერბოლური მოძრაობის შესაბამის ნახევარღერძზე მდებარე მონაკვეთის სიგრძე დიდია, მაგრამ სასრულია და ტოლია l. მაშინ ელიფსური მოძრაობის ალბათობის $p(e < 1)$ და ჰიპერბოლური მოძრაობის ალბათობის $p(e > 1)$ შეფარდება ტოლია $1/l$. თუ $l \to \infty$ და გავითვალისწინებთ, რომ ალბათობათა ჯამი ტოლია 1-ის, მაშინ მივიღებთ, რომ $p(e < 1) = 0$ და $p(e > 1) = 1$. მაგრამ ასეთი პასუხი არ არის მართებული თუნდაც იმიტომ, რომ $h/2$ სრული ენერგიის მნიშვნელობების რიცხვით ღერძზე ელიფსური და ჰიპერბოლური მოძრაობები იკავებენ ერთნაირ სიმეტრიულ სხივებს – $h < 0$ და $h > 0$. შეცდომა აქ იმაში მდგომარეობს, რომ (0,1) მონაკვეთი განიხილება როგორც სასრული მნიშვნელობა, ხოლო (1,∞) სხივი – როგორც უსასრულო. სინამდვილეში ორივე მონაკვეთი შედგება უსასრულო რაოდენობის წერტილებისგან და აუცილებელია როგორმე შევუსაბამოთ ერთმანეთს ამ მონაკვეთებში მოქცეულ წერტილთა რაოდენობები. თუ მოვახდენთ გარდაქმნას $e \to 1/e$, მაშინ იგი შეუსაბამებს (0,1) მონაკვეთის ერთ წერტილს (1,∞) სხივის ერთ და მხოლოდ ერთ წერტილს და პირიქით. სხვა სიტყვებით, ეს გარდაქმნა ამყარებს ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებას ორივე სიმრავლის წერტილებს შორის. ეს ნიშნავს, რომ ამ ორივე სიმრავლის შემადგენელ წერტილთა რაოდენობა უნდა ჩავთვალოთ ტოლი. სიმრავლეთა თეორიის ენით თუ ვილაპარაკებთ, ამ ორ სიმრავლეს ერთნაირი ზომა აქვთ. ამიტომ ელიფსურ და ჰიპერბოლურ მოძრაობებს ერთნაირი ალბათობები აქვთ და ის ტოლია $p(e < 1) = p(e > 1) = 1/2$.



ნახაზი 9. სხვადასხვა ტიპის კეპლერისეული მოძრაობის ალბათობები.

დავსავთ კიდევ ერთი კითხვა: როგორია ალბათობა იმისა, რომ ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა იქნება რაციონალური ან ირაციონალური რიცხვი? როგორც ცნობილია, რიცხვითი ღერძის რაციონალური მნიშვნელობების შესაბამისი წერტილებისგან შესაძლებელია შევადგინოთ მხოლოდ უსასრულოდ მცირე სიგრძის მონაკვეთი ანუ მათ სიმრავლეს ნულოვანი ზომა აქვს (თუმცა მათი რაოდენობა უსასრულოდ ბევრია). აქედან გამოდის, რომ $p(e_r) = 0$. შესაბამისად მივიღებთ მეორე მნიშვნელობასაც $p(e_{ir}) = 1$. მეორეს მხრივ, ნებისმიერი ციური სხეულის ორბიტის ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა განისაზღვრება მისი პოზიციური დაკვირვებების საფუძველზე, რომელთაც შეზღუდული სიზუსტე გააჩნიათ. ეს ბოლო მოსაზრება საყოველთაო და პრინციპული ხასიათისაა. ამიტომ აზრი აქვს ექსცენტრისიტეტის მხოლოდ რაციონალურ მნიშვნელობებს (ისევე, როგორც ნებისმიერი სხვა გაზომვადი სიდიდისათვის) ანუ რაციონალური ექსცენტრისიტეტის ალბათობის მნიშვნელობაა $p(e_r) = 1$, ხოლო ირაციონალურის ალბათობაა – $p(e_{ir}) = 0$.

პარადოქსი, რომელსაც ჩვენ მივადექით, ღრმა ბუნებისაა. იგი დაკავშირებულია სამყაროს ორ პრინციპულად განსხვავებულ სურათთან. პირველი, კლასიკური, გამომდინარეობს იქედან, რომ სამყარო შედგება დისკრეტული წერტილოვანი ობიექტებისაგან, ეს კი განსაზღვრავს მისი მახასიათებლების და, პირველ რიგში, სივრცე-დროის უსასრულო დაყოფადობას. მეორე სურათს, კვანტურს, საფუძვლად უდევს შეხედულება, რომ სამყაროს შემადგენელ ელემენტებს ერთდროულად გააჩნიათ დისკრეტული და უწყვეტი თვისებები („ნაწილაკი-ტალღის" დუალიზმი). სამყაროს ამ სურათის წინააღმდეგობის მოსახსნელად შემოიღეს განუზღვრელობის პრინციპი (ჰაიზენბერგის პრინციპი), რომელიც ზღუდავს ნებისმიერი გაზომვის სიზუსტეს.

ლექცია 8. კეპლერისეული მოძრაობის ცალკეული ტიპები

მოძრაობათა ტიპები ორი სხეულის ამოცანაში შეიძლება დავალაგოთ შემდეგი მიმდევრობით: ძირითადი – ელიფსური და ჰიპერბოლური, ზღვრული – წრიული და პარაბოლური, გადაგვარებული – წრფივი. სწორედ ამ მიმდევრობით განვიხილავთ თითოეულ ამ ჯგუფს.

ელიფსური მოძრაობა

მოძრაობის ამ ტიპს ადგილი აქვს მაშინ, როცა პირველი ინტეგრალების მუდმივების მნიშვნელობებია – $c \neq 0,\ 0 < \lambda < \mu,\ h < 0$. იმისათვის, რომ დავასრულოთ ამოცანის ამოხსნა, უნდა ვიპოვნოთ ჭეშმარიტ ანომალიასა და დროს შორის კავშირი სასრული სახით ანუ გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

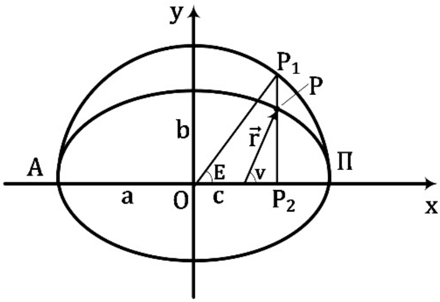
$$\int_0^{\nu} r^2 d\nu = c(t - \tau). \tag{117}$$

საინტერესო ისტორიული ფაქტია, რომ ცვლადების ჩანაცვლება, რომლის მეშვეობითაც საკმაოდ მარტივად იხსნება ეს ინტეგრალი, გეომეტრიული გზით იპოვნა ი.კეპლერმა ჯერ კიდევ მაშინ, როდესაც ინტეგრალური და დიფერენციალური აღრიცხვა არ არსებობდა. თუ ელიფსური ორბიტის დიდი ღერძის მიმართ გავავლებთ პერპენდიკულარს ამ ორბიტაზე მოძრავი წერტილის მიმდინარე მდებარეობის გავლით წრეწირამდე, რომელიც აგებულია ამ ღერძზე, როგორც მის დიამეტრზე, მაშინ კუთხე ელიფსის ცენტრში დიდ ღერძსა და წრეწირთან კვეთის მიმართულებას შორის იქნება სწორედ ინტეგრირების ახალი ცვლადი. ამ E კუთხეს (იხ. ნახაზი 10) უწოდებენ ***ექსცენტრულ ანომალიას.*** თუ განვიხილავთ სამკუთხედებს P_1MP და P_1OP_2 და ექსცენტრისიტეტის (93) განსაზღვრებას, მივიღებთ:

$$a\cos E = ae + r\cos\nu. \tag{118}$$

ელიფსის (90) განტოლების დახმარებით შეიძლება მივიღოთ, რომ a და b ნახევარღერძების მქონე ელიფსზე მდებარე წერტილების ორდინატების შეფარდება a რადიუსის მქონე წრის წერტილების ორდინატებთან ერთნაირი აბსცისების შემთხვევაში ტოლია:

$$\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b}$$



ნახაზი 10. ექსცენტრული ანომალია.

(93)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$r\sin\nu = a\sqrt{1-e^2}\sin E. \qquad (119)$$

ფორმულებიდან (118) და (119) იოლია ვიპოვნოთ ორბიტული კოორდინატები:

$$\xi = r\cos\nu = a(\cos E - e),$$
$$\eta = r\sin\nu = a\sqrt{1-e^2}\sin E, \qquad (120)$$

ხოლო თუ მათი კვადრატების ჯამიდან ავიღებთ კვადრატულ ფესვს, მივიღებთ, რომ:

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (121)$$

ამის შემდეგ (118)-დან შეიძლება ვიპოვნოთ, რომ:

$$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \qquad (122)$$

ხოლო (119)-დან:

$$\sin\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1 - e\cos E}. \qquad (123)$$

$\sin\nu/(1+\cos\nu)$ სიდიდის მნიშვნელობის პოვნით, რომელიც თავის მხრივ ტოლია $\mathrm{tg}\,(\nu/2)$, ვიპოვნით კავშირს ჭეშმარიტ და ექსცენტრულ ანომალიებს შორის, რომელსაც შემდეგი სახით:

$$\mathrm{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}. \qquad (124)$$

ეს ფორმულა მოსახერხებელია იმით, რომ ცალსახად აკავშირებს ერთმანეთთან მეოთხედებს, რომლებშიც მოთავსებულია ν და E. საბოლოოდ, (123)-ის დიფერენცირება (122)-ის დახმარებით, გვაძლევს:

$$d\nu = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos E}dE. \tag{125}$$

(121) და (125) ჩავსვათ (117)-ში და (94)-ის მეშვეობით ვიპოვნით:

$$\int_0^E (1 - e\cos E)dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau) \tag{126}$$

ანუ

$$E - e\sin E = n(t-\tau), \tag{127}$$

სადაც $n = \sqrt{\mu}/a^{3/2}$. ჩვენ მივიღეთ ცნობილი ***კეპლერის განტოლება,*** რომელიც წარმოადგენს ორი სხეულის ამოცანის ამოხსნას ელიფსური მოძრაობის შემთხვევაში. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$M = n(t-\tau), \tag{128}$$

მაშინ მისი უფრო კომპაქტური ფორმა იქნება:

$$E - e\sin E = M. \tag{129}$$

M სიდიდეს, რომელსაც უწოდებენ ***საშუალო ანომალიას,*** შეიძლება შევძინოთ შემდეგი აზრი: თუ წარმოვიდგენთ წერტილს, რომელიც თანაბრად მოძრაობს a რადიუსის წრეზე და გადის პერიცენტრსა და აპოცენტრზე m მატერიალურ წერტილთან ერთად, მაშინ მისი მდებარეობა განისაზღვრება M კუთხით, რომელიც აითვლება პერიცენტრის მიმართულებიდან და მისი წვერო ძევს ელიფსის ცენტრში. n სიდიდე არის ელიფსურ ორბიტაზე მოძრაობის საშუალო კუთხური სიჩქარე და ასტრონომიაში ეწოდება ***საშუალო მოძრაობა.***

ამის შემდგომ შეგვიძლია განვიხილოთ კეპლერის მესამე კანონი. თუ $t-\tau$ სხვაობას გავუტოლებთ მატერიალური წერტილის ელიფსურ ორბიტაზე სრული ბრუნის პერიოდს T, მივიღებთ, რომ

$$T = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{f(M+m)}}. \tag{130}$$

ეს არის ***კეპლერის მესამე კანონი,*** თუმცა იგი ჩაწერილია ნაკლებად გავრცელებული ფორმით. იგი აკავშირებს ერთმანეთთან პერიოდს და ელიფსის

დიდი ნახევარღერძის სიდიდეს, რომელზეც ერთი მეორეს მიმართ მოძრაობენ მატერიალური წერტილები მასებით M და m. სწორედ ამ სახით გამოიყენება ეს კანონი მასების ჯამის განსაზღვრისას ორმაგ ვარსკვლავთა სისტემებში. ორი წერტილისათვის მასებით m_1 და m_2, რომლებიც ბრუნავენ ერთი და იმავე მიზიდულობის ცენტრის გარშემო მასით M, (130)-დან მივიღებთ, რომ:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{M + m_2}{M + m_1} \cdot \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{131}$$

მზის სისტემის სხეულების მასები ძალიან მცირეა მზის მასასთან შედარებით. ერთის მხრივ, სწორედ ამან მისცა საშუალება ი.კეპლერს ეპოვნა ეს კანონი მისი გამარტივებული სახით:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}. \tag{132}$$

მეორეს მხრივ, ამ კანონის მოდიფიცირებული ფორმა, რომელიც იპოვნა ი.ნიუტონმა (131) სახით, პრაქტიკულად არ გამოდგება მზის სისტემის სხეულთა მასების განსაზღვრისათვის. ამისათვის გამოიყენება კეპლერის კანონი იმ სიტუაციებში, როდესაც ცენტრალური სხეულის (მზის) გარშემო მასით M ბრუნავს სხეული მასით m_p (პლანეტა), რომელსაც გააჩნია თანამგზავრი მასით m_s. მაშინ კეპლერის მესამე კანონის გამოყენება ,,მზე-დედამიწა'' წყვილისა და ,,დედამიწა-თანამგზავრი'' წყვილის მიმართ, გვაძლევს:

$$\frac{T_p^2}{T_s^2} = \frac{m_p + m_s}{M + m_p} \cdot \frac{a_p^3}{a_s^3} \cong \frac{m_p}{M} \frac{a_p^3}{a_s^3}, \tag{133}$$

რადგან $M \gg m_p$ და $m_p \gg m_s$.

უნდა ხაზი გაესვას კეპლერის მესამე კანონის უაღრესად დიდ მნიშვნელობას ასტრონომიაში – ეს ციური სხეულების მასების განსაზღვრის ერთადერთი პირდაპირი მეთოდია. ყველა სხვა მეთოდი ეფუძნება ან ემპირიულ დამოკიდებულებებს, რომლებიც საბოლოოდ ეყრდნობიან ამ კანონის მეშვეობით მიღებულ მონაცემებს ან სხეულის ზომის და სიმკვრივის შეფასებებს.

ორბიტული კოორდინატების (120) გამოსახულების ჩასმით ზოგად (111) ფორმულებში მივიღებთ ელიფსურ ორბიტაზე მოძრავი წერტილის კოორდინატებს საწყის კოორდინატთა სისტემაში:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E\right], \tag{134}$$

ხოლო (134)-ის დროის მიხედვით დიფერენცირების შემდეგ სიჩქარის კომპონენტებს:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r}\left[-\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \cos E\right]. \qquad (135)$$

ელიფსურ მოძრაობის სიჩქარის მოდული განისაზღვრება ენერგიის შენახვის კანონიდან იმის გათვალისწინებით, რომ მუდმივა $h = -\mu/a$:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \qquad (136)$$

ან (121)-ის გამოყენებით:

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e\cos E}{1 - e\cos E}. \qquad (137)$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ზოგიერთი ორბიტის ელემენტი შეიძლება შევცვალოთ სხვა ელემენტით. ელიფსური მოძრაობისათვის პირველ რიგში მიზანშეწონილია შევცავალოთ ორბიტის პარამეტრი დიდი ნახევარღერძით, თუმცა სასარგებლოა ასევე სხვა ცვლილებებიც. პერიცენტრული მანძილი იცვლება ***პერიცენტრის გრძედით***

$$\pi = \Omega + \omega, \qquad (138)$$

პერიცენტრში გავლის მომენტი τ – საშუალო ანომალიის M_0 მნიშვნელობით დროის t_0 მომენტში (***საწყისი ეპოქის საშუალო ანომალია***), ხოლო თავად M_0 სიდიდე – ***საწყისი ეპოქის საშუალო გრძედით***

$$\varepsilon = \pi + M_0 = \Omega + \omega + M_0. \qquad (139)$$

რა თქმა უნდა, აღნიშვნები π და ε არც თუ ისე მოსახერხებელია თანამედროვე მათემატიკაში მიღებული აღნიშვნების თვალსაზრისით, მაგრამ ისინი დიდი ხანია დამკვიდრებულია ცის მექანიკაში. ამ ელემენტების შემოღების არსი შემდეგშია: კუთხეები (რკალები) π და ε წარმოადგენენ ტეხილებს ანუ მათი ნაწილები ძევს სხვადასხვა სიბრტყეებში, სამაგიეროდ ისინი Ω კვანძის გრძედთან ერთად აითვლებიან კოორდინატთა ერთი და იგივე x ღერძის მიმართულებით. გარდა ამისა, დიდი ნახევარღერძი შეიძლება შევცვალოთ საშუალო მოძრაობით n, ხოლო ექსცენტრისიტეტი e – ექსცენტრისტეტის კუთხით $\varphi = \arcsin e$. პლანეტების მოძრაობის თეორიაში საკმაოდ

გავრცელებულია ელემენტების შემდეგი ნაკრები – $(\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon)$, რომელსაც უწოდებენ ***ელიფსურ კეპლერისეულ ელემენტებს.***

ცხრილებში 3 და 4 მოყვანილია დიდი პლანეტების და ზოგიერთი მცირე პლანეტის ელემენტები. ცხრილის 2 განხილვა გვიჩვენებს, რომ ორბიტების დახრილობის და ექსცენტრისტეტის მნიშვნელობები საკმაოდ მცირეა, უმეტეს შემთხვევაში ნაკლებია 4°-სა და 0.05-ზე. ეს ფაქტი, დიდი ნახევარღერძების გარკვეულ მნიშვნელობებთან ერთად, განსაზღვრავს მზის სისტემის აგებულების ძირითად დამახასიათებელ ნიშნებს. 4 ცხრილიდან ჩანს, რომ მცირე პლანეტების ორბიტებს ასევე გააჩნიათ დახრილობისა და ექსცენტრისიტეტის არც თუ ისე დიდი მნიშვნელობები, თუმცა მათი დამახასიათებელი სიდიდეები უფრო მეტია, ვიდრე დიდი პლანეტებისათვის. ამავე დროს გვხვდება მცირე პლანეტების დახრილობების და ექსცენტრისიტეტების საკმაოდ მაღალი მნიშვნელობები. მცირე პლანეტები, რომელთა დიდი ნახევარღერძები შეადგენენ დაახლოებით 2-4 ა.ე. (ბრუნავენ მარსსა და იუპიტერს შორის), შეადგენენ ***მცირე პლანეტების ანუ ასტეროიდების მთავარ სარტყელს.***

ცნობილი ორბიტების მქონე მთავარი სარტყელის ასტეროიდების რაოდენობა სწრაფად იზრდება დაკვირვებათა ახალი საშუალებების გამოყენების ხარჯზე. დღეისათვის ამ რიცხვმა გადააჭარბა 120 ათასს. საკმაოდ დიდი ხანია ცნობილია მცირე პლანეტები, რომელთა ორბიტები შესაძლებელს ხდის დედამიწასთან მათ მეტ-ნაკლებად მჭიდრო მიახლოებას. ბოლო დროს ნაპოვნი ასეთი ობიექტების რაოდენობა სწრაფად იზრდება და დღეისათვის ისინი 4000-მდეა ცნობილი (თუმცა ორბიტები განსაზღვრულია მხოლოდ 420 მათგანისთვის).

დედამიწასთან მოახლოებად ასტეროიდებად ითვლება ისეთი ასტეროიდები, რომელთა ორბიტებსა და დედამიწის ორბიტას შორის უმცირესი მანძილი არ აღემატება 30 მლნ. კმ. ამასთან, დიდი პლანეტების შემაშფოთებელი ზემოქმედების შედეგად ამ ასტეროიდების მოძრაობის ცვლილების გამო შესაძლოა გაჩნდეს გარკვეული ალბათობა მათი დედამიწასთან შეჯახებისა. ამან მიიყვანა მეცნიერები ***ასტეროიდული საფრთხის*** პრობლემის შესწავლამდე.

უკანასკნელ ხანებში აღმოჩენილ იქნა მრავალი (დაახლოებით 1100; ორბიტები განსაზღვრულია მხოლოდ 140-თვის) ასტეროიდული სხეული, რომელთა ორბიტების დიდი ნახევარღერძები აღემატება ნეპტუნის და პლუტონის ორბიტებს. ისინი წარმოქმნიან ***ასტეროიდების გარე სარტყელს*** ანუ ***კოიპერის სარტყელს.*** გარკვეული რაოდენობის მცირე პლანეტების ორბიტები მოთავსებულია იუპიტერისა და ნეპტუნის ორბიტებს შორის.

ფორმულები (108), (109), (128), (134) და კეპლერის განტოლება (129) წარმოადგენენ ელიფსურ ორბიტებზე მოძრავი ციური სხეულების ეფემერიდების გამოთვლის საფუძვლებს. ასტრონომიაში ***ეფემერიდებს*** უწოდებენ ციური სხეულების კოორდინატების მნიშვნელობებს დროის გარკვეულ მომენტებში, რომლებიც გამოთვლილია ორბიტის ცნობილი ელემენტებით. თუ ეფემერიდებს აქვთ დროის მიხედვით მუდმივი ბიჯის მქონე ცხრილის სახე, მაშინ ბიჯი შეირჩევა ისეთნაირად, რომ დროის ნებისმიერი მომენტისათვის შესაძლებელი იყოს კოორდინატების პოვნა წრფივი ან კვადრატული ინტერპოლირების მეშვეობით. ცის მექნიკის თვალსაზრისით ეფემერიდების გამოთვლის სრული ალგორითმი მოიცავს რამდენიმე ტექნიკურ ეტაპს: სტანდარტულიდან (დღეისათვის 2000.0 წელი) საძიებო დღეღამტოლობაზე გადასვლა; ორბიტის ეკლიპტიკური ვექტორული ელემენტებიდან ეკვატორულზე გადასვლა; ჰელიოცენტრული კოორდინატებიდან გეოცენტრულზე (ჩვეულებრივ ეკვატორულზე) გადასვლა. როგორც წესი, ეფემერიდები მოიცავენ ასევე ობიექტის ხილულ ვარსკვლავიერ სიდიდეს.

ჩვეულებრივ ასტრონომები თავიანთ პრაქტიკულ საქმიანობაში ეფემერიდების მოსაძებნად იყენებენ ყოველწლიურ გამოცემებს, სადაც მოცემულია სხვადასხვა ციური სხეულის წინასწარ გამოთვლილი ეფემერიდები. ასეთი გამოცემაა, მაგალითად, ,,ასტრონომიული ალმანახი'' (The Astronomical Almanac, აშშ).

მზის, მთვარის და დიდი პლანეტების ეფემერიდების გამოსათვლელად მათში გამოყენებულია პლანეტების და მთვარის მოძრაობის თანამედროვე თეორიები DE2000/LE2000. ყოველწლიურ გამოცემაში ,,მცირე პლანეტების ეფემერიდები'' მოცემულია მათი ორბიტის ელემენტები და ეფემერიდები, მათ შორის იმათი, რომლებსაც აქვთ პირისპირდგომა იმ წელს.

შემოკლებული სახით და ნაკლები სიზუსტით მზის, მთვარის, დიდი და ზოგიერთი მცირე პლანეტის ეფემერიდები ქვეყნდება ასტრონომიულ კალენდრებში (*მაგალითად, ე.ხარაძის საქართველოს ეროვნული ასტროფიზიკური ობსერვატორიის ყოველწლიური ,,ასტრონომიული კალენდარი''*).

ცხრილი 3. დიდი პლანეტების ორბიტის ელემენტები.

პლანეტები	*a*	*T*	*S*	*n*, °	*i*, °	*e*	*Ω*, °	*π*, °	M_0°
მერკური	0.387	0.240	116	4.09	7.00	0.206	48	77	252
ვენერა	0.723	0.615	584	1.60	3.40	0.007	77	131	182
დედამიწა	1.000	1.000	-	0.99	0.00	0.017	-	103	100
მარსი	1.524	1.881	780	0.524	1.85	0.093	49	336	335
იუპიტერი	5.203	11.86	399	0.083	1.30	0.048	100	14	32
სატურნი	9.555	29.54	378	0.034	2.48	0.056	113	93	50
ურანი	19.218	84.25	370	0.012	0.76	0.047	74	173	314
ნეპტუნი	30.110	165.2	368	0.006	1.77	0.009	132	48	304
პლუტონი	39.53	250.1	367	0.004	17.50	0.250	110	223	130

a - დიდი ნახევარღერძი, ა.ე.; T - სიდერული პერიოდი, წელიწადი; S - სინოდური პერიოდი, დღე-ღამე; n - საშუალო მოძრაობა, გრადუსი დღე-ღამეში; e - ექსცენტრისიტეტი; i - ეკლიპტიკის მიმართ დახრა; Ω - კვანძის გრძედი; π - პერიჰელიუმის გრძედი; M_0 *- საშუალო ანომალია 2000 წლის 1.5 იანვრის ეპოქისათვის.*

ცხრილი 4. ზოგიერთი მცირე პლანეტის ორბიტის ელემენტები.

პლანეტები	*a*	*T*	*S*	*N*	*I*,°	*e*	*Ω*, °	*π*, °	M_0°
1 ცერერა	2.78	4.60	467	0.214	10.6	0.077	81	152	8
2 პალადა	2.77	4.61	467	0.214	34.8	0.235	173	123	355
3 იუნონა	2.67	4.36	474	0.226	13.0	0.257	171	57	243
4 ვესტა	2.36	3.63	504	0.272	7.1	0.090	104	254	341
5 ასტრეა	2.57	4.13	482	0.239	5.4	0.192	142	137	43
6 ჰება	2.42	3.78	497	0.261	14.8	0.202	139	17	50
153 ჰილდა	3.98	7.95	419	0.124	7.8	0.143	229	271	14
433 ეროსი	1.46	1.76	846	0.560	10.8	0.223	304	22	57
944 ჰიდალგო	5.84	14.08	393	0.070	42.5	0.658	22	79	223
1566 იკაროსი	1.08	1.12	3409	0.881	22.9	0.827	88	119	105
20000 ვარუნა	43.19	283.82	366	0.003	17.2	0.051	273	10	87
28978 იქსიონა	39.43	247.61	367	0.004	19.8	0.241	71	11	262
1998 BU	33.52	194.03	367	0.005	13.8	0.382	132	55	48

a - დიდი ნახევარღერძი, ა.ე.; T - სიდერული პერიოდი, წელიწადი; S - სინოდური პერიოდი, დღე-ღამე; n - საშუალო მოძრაობა, გრადუსი დღე-ღამეში; e - ექსცენტრისიტეტი; i - ეკლიპტიკის მიმართ დახრა; Ω - კვანძის გრძედი; π - პერიჰელიუმის გრძედი; M_0 *- საშუალო ანომალია 2000 წლის 1.5 იანვრის ეპოქისათვის.*

ჰიპერბოლური მოძრაობა

ამ მოძრაობის განხორციელების პირობაა - $c \neq 0,\ \lambda > \mu,\ h > 0$. მიუხედავად ელიფსური და ჰიპერბოლური ტიპის მოძრაობებს შორის თვისობრივი (პირველი – ფინიტურია, ხოლო მეორე - ინფინიტური) და გარეგნული განსხვავებისა, მათ სიღრმისეული მსგავსებაც ახასიათებთ. ყველაზე სრულად იგი მჟღავნდება, თუ ჰიპერბოლური მოძრაობის აღწერისათვის გამოვიყენებთ ჰიპერბოლურ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს. ეს მსგავსება მდგომარეობს იმაში, რომ ჰიპერბოლური მოძრაობის ყველა ფორმულა შეიძლება მივიღოთ, თუ ელიფსური მოძრაობის შესაბამის ფორმულებში გამოვიყენებთ შემდეგ ცვლილებებს:

$$\sin E \rightarrow \operatorname{sh} H, \qquad \cos E \rightarrow \operatorname{ch} H, \qquad \operatorname{tg} E \rightarrow \operatorname{th} H, \qquad (140)$$

სადაც H – განზომილების არმქონე ცვლადია, რომელიც იცვლება $-\infty; +\infty$ ინტერვალში. გარდა ამისა, ყველა სხვაობა უნდა შევაბრუნოთ. ამასთან დაკავშირებით, შემდეგნაირად მოვიქცეთ: ამოვიწეროთ ელიფსური მოძრაობის ძირითადი დამოკიდებულებები და ზემოთ მოყვანილი მსგავსების გამოყენებით, ჩავწეროთ შესაბამისი ფორმულები ჰიპერბოლური მოძრაობისათვის.

ჭეშმარიტ ანომალიასა და E და H ცვლადებს შორის კავშირი შემდეგია:

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{E}{2} \qquad \operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\operatorname{th}\frac{H}{2}\,. \qquad (141)$$

კეპლერის განტოლება და მისი ჰიპერბოლური ანალოგია:

$$E - e\sin E = n(t-\tau) \qquad e\cdot \operatorname{ch} H - H = n(t-\tau), \qquad (142)$$

ორბიტული კოორდინატებია:

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) & \xi &= a(e - \operatorname{ch} H) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E & \eta &= a\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh} H \\ r &= a(1 - e\,cos\,E) & r &= a(e\operatorname{ch} H - 1) \end{aligned} \qquad (143)$$

მოძრაობის სიჩქარეა:

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\cdot\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E} \qquad V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) = \frac{\mu}{a}\cdot\frac{e\operatorname{ch} H + 1}{e\operatorname{ch} H - 1}\,. \quad (144)$$

ჰიპერბოლური მოძრაობის კოორდინატების ფორმულები საწყის კოორდინატთა სისტემაში (111) და (143)-ის მიხედვით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - \operatorname{ch} H) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \sqrt{e^2 - 1} \cdot \operatorname{sh} H\right]. \qquad (145)$$

(141)-(145) ფორმულების მკაცრად გამოყვანისათვის საჭიროა (98) ინტეგრალში მოვახდინოთ (141) ცვლადების შეცვლა (95)-ის გათვალისწინებით. ასევე აღვნიშნოთ, რომ ზემოთ ნახსენები მსგავსების არსებობამ მოგვცა საფუძველი ჰიპერბოლური ფუნქციებისათვის დაგვერქმია ჰიპერბოლური, თუმცა, ერთი შეხედვით, მათ ჰიპერბოლასთან საერთო არაფერი აქვთ. ფორმალურად (141)-(145)-ში მარცხენა ფორმულებიდან მარჯვენაზე გადასვლა შესაძლებლია განვახორციელოთ, თუ ჩავთვლით, რომ დიდი ნახევარღერძის უარყოფით a მნიშვნელობებს შეესაბამება წარმოსახვითი ელიფსის წარმოსახვითი მცირე ნახევარღერძი ib (მაშინ ელიფსის განტოლება (90) გარდაიქმნება ჰიპერბოლის განტოლებად) და ჩავსვავთ ნახევარღერძების მითითებულ მნიშვნელობებს ელიფსური მოძრაობის ფორმულებში.

(98) ინტეგრალის გამოთვლისათვის ასევე შეიძლება გამოვიყენოთ ცვლილება:

$$\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\frac{F}{2} \qquad (146)$$

და ვიპოვნოთ ჰიპერბოლური მოძრაობის ყველა მახასიათებელი როგორც F ცვლადის ფუნქცია. თუმცა, ასეთი ფორმალური ანალოგია ელიფსური მოძრაობისათვის არ გვექნება.

(144) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ, როცა ჰიპერბოლაზე მოძრაობისას წერტილი მიემართება უსასრულობისკენ მისი სიჩქარე მიისწრაფის არანულოვანი მნიშვნელობისკენ:

$$V_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}}, \qquad (147)$$

რომელიც არის ე.წ. სიჩქარის ***ჰიპერბოლური სიჭარბე.***

ჰიპერბოლურ მოძრაობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა მეტეორული სხეული შედის დედამიწის ან სხვა პლანეტის ზემოქმედების სფეროში გარკვეული ფარდობითი სიჩქარით; კოსმოსური აპარატის სხვა პლანეტისკენ ფრენის ტრაექტორიის პლანეტის მახლობელ მონაკვეთზე; ვარსკვლავების ერთმანეთთან მეტ-ნაკლებად მიახლოებისას. ასეთი მიახლოების ალბათობა ჩვენი გალაქტიკის უმრავლესობა ვარსკვლავებისათვის უაღრესად მცირეა. თუმცა ვარსკვლავთ გროვებში და გალაქტიკის ცენტრთან ახლოს იგი სავარაუდოდ, არც თუ ისე

მცირეა. ასეთი მიახლოების საბოლოო ეფექტი იქნება მხოლოდ ვარსკვლავთა ფარდობითი მოძრაობის მიმართულების ცვლილება. ეს ცვლილება ტოლია ჰიპერბოლის ასიმპტოტებს შორის კუთხის, რომლითაც ერთი ვარსკვლავი შემოუვლის მეორეს.

საბოლოოდ, შევჩერდეთ წმინდა თეორიულ, მაგრამ საინტერესო საკითხზე. ჰიპერბოლური მოძრაობის ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში წერტილი მიყვება ჰიპერბოლის მხოლოდ ერთ რომელიმე შტოს. რა აზრი აქვს ორი სხეულის ამოცანაში მეორე შტოს არსებობას მხოლოდ მიზიდულობის ძალების ზემოქმედების შემთხვევაში? პასუხი ამ კითხვაზე შემდეგია: წერტილი იმოძრავებს ჰიპერბოლის მეორე შტოზე, თუ დროის t ნამდვილი მნიშვნელობებიდან გადავალთ მის it წარმოსახვით მნიშვნელობებზე.

წრიული მოძრაობა

წრიულ მოძრაობას ადგილი აქვს მაშინ, როცა $c \neq 0$, $\lambda = 0$, $h < 0$. ფორმალურად, წრიული მოძრაობა წარმოადგენს ელიფსური მოძრაობის კერძო შემთხვევას, როცა ექსცენტრისიტეტი $e = 0$. თუმცა, ამავე დროს, ფიქსირებულ მნიშვნელობას იღებს არა მარტო ორბიტის ეს ელემენტი. წრიულ ორბიტას არ გააჩნია პერიცენტრი და აპოცენტრი. ამიტომ, პერიცენტრული მანძილი ω აზრს კარგავს.

წრიულ ორბიტაზე მატერიალური წერტილის მდებარეობის განმსაზღვრელი პოზიციური კუთხის ათვლის წერტილად შეიძლება ავიღოთ ორბიტის ამომავალი კვანძი. ამ შემთხვევაში ჭეშმარიტი ანომალია ν ემთხვევა განედის არგუმენტს u. მეორეს მხრივ, განედის არგუმენტის ტოლია ასევე ექსცენტრული ანომალია E და საშუალო ანომალია M. ასევე აზრს კარგავენ ზოგადი სახით მოცემული ორბიტის ვექტორული ელემენტები. წრიული მოძრაობა აღიწერება ორბიტის ოთხი ელემენტით: ორბიტის რადიუსი r, კვანძის გრძედი Ω, ორბიტის დახრილობა i და აღმავალ კვანძში წერტილის გავლის მომენტი τ (ან საშუალო ანომალია M_0 საწყის ეპოქაში t_0). წერტილის კოორდინატები წრიულ ორბიტაზე (107)-ის თანახმად ტოლია:

$$
\begin{aligned}
x &= r(\cos\Omega\cos M - \sin\Omega\sin M\cos i)\\
y &= r(\sin\Omega\cos M + \cos\Omega\sin M\cos i) \qquad (148)\\
z &= r\sin M\sin i
\end{aligned}
$$

სადაც

$$M = n(t-\tau) = n(t-t_0) + M_0,\ \ n = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}}. \tag{149}$$

ამ ბოლო განტოლებიდან გამომდინარეობს კეპლერის მესამე კანონი წრიული მოძრაობისათვის და მოძრაობის წრფივი სიჩქარის გამოსახულება:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{3/2},\ \ V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \tag{150}$$

წრიული მოძრაობა წმინდა სახით ბუნებაში არ გვხვდება, რადგან ყოველთვის არსებობს გარკვეული შემაშფოთებელი ფაქტორები. თუმცა მას დიდი მნიშვნელობა აქვს, როგორც ელიფსური მოძრაობის აღწერის მარტივ მიახლოებას საკმარისად მცირე ექსცენტრისიტეტის შემთხვევაში.

პარაბოლური მოძრაობა

ამ ტიპის მოძრაობის არსებობის პირობაა: $c \neq 0,\ \lambda = \mu,\ h = 0.$ რადგან ექსცენტრისიტეტი $e = 1$, მოძრაობის (98) კანონს ასეთი სახე ექნება:

$$\int_0^{\nu} \frac{d\nu}{(1+\cos\nu)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau). \tag{151}$$

გადავიდეთ $\cos\nu$-დან $\operatorname{tg}(\nu/2)$-ზე შემდეგი ფორმულით:

$$\cos\nu = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}} \tag{152}$$

და მივიღებთ, რომ

$$\int_0^{\nu} \left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\nu}{2}\right) \sec^2\frac{\nu}{2} d\nu = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau). \tag{153}$$

თუ გამოვიყენებთ ცვლილებას $\sigma = \operatorname{tg}(\nu/2)$, ასევე ჩავანაცვლებთ ორბიტის პარამეტრს p -ს $2q$ -თი, სადაც q არის მანძილი პარაბოლის წვეროდან (ორბიტის პერიცენტრი) მის ფოკუსამდე, ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$\sigma^3 + 3\sigma - 3n(t-\tau) = 0, \tag{154}$$

სადაც

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2}}\, q^{-3/2}. \tag{155}$$

კუბური განტოლების მარცხენა მხარე (***ბარკერის განტოლება***) – σ არგუმენტის მონოტონური ფუნქციაა, რადგან მისი წარმოებული, რომელიც ტოლია $3(\sigma^2+1)$, ყველგან დადებითია. ხოლო როცა $\sigma \to \pm\infty$, მაშინ ეს ფუნქციაც მიისწრაფის $\pm\infty$. ამიტომ, (154) განტოლებას ყოველთვის აქვს მხოლოდ ერთი რეალური ამონახსნი. ვიპოვნოთ ეს ფესვი რომელიმე მიახლოებითი რიცხვითი მეთოდით. ავირჩიოთ იგი როგორც ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი, ჩავსვათ ორბიტის განტოლებაში (88) და მივიღებთ:

$$r = q(1+\sigma^2). \tag{156}$$

გავიხსენოთ ფორმულა

$$\sin\nu = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\nu}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\nu}{2}} \tag{157}$$

და ვიპოვნოთ ორბიტული კოორდინატები:

$$\begin{aligned} \xi &= r\cos\nu = q(1-\sigma^2), \\ \eta &= r\sin\nu = 2q\,\sigma. \end{aligned} \tag{158}$$

საბოლოოდ, (111)-ის გარდაქმნა გვაძლევს:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q\left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}\cdot(1-\sigma^2) + 2\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}\cdot\sigma\right]. \tag{159}$$

კიდევ ერთხელ აღვნიშნავთ, რომ პარაბოლუირ მოძრაობისას სიჩქარის მოდული განისაზღვრება ფორმულით

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}, \tag{160}$$

საიდანაც ჩანს, რომ როცა წერტილი მოძრაობს პარაბოლაზე უსასრულობისკენ, მისი სიჩქარე მიისწრაფის ნოლისკენ.

პარაბოლური მოძრაობა გამოყოფს ელიფსურ მოძრაობას ჰიპერბოლურისგან და შეშფოთებების არსებობის გამო ასევე ბუნებაში არ არსებობს. თუმცა იგი გამოიყენება ელიფსური და ჰიპერბოლური მოძრაობების განხილვისას, როცა ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა ახლოა 1-თან, კერძოდ, კომეტების მოძრაობების შესწავლისას.

სწორხაზოვანი მოძრაობა

ამ ტიპის მოძრაობას ადგილი აქვს, როცა კინეტიკური მომენტი ნოლია ანუ $c = 0$. მაშინ (84)-ის გამო $\lambda = \mu$ და გაორმაგებულმა სრულმა ენერგიამ h შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი მნიშვნელობა. ამ შემთხვევაში ორბიტის განტოლება (88) უკვე აღარ გამოდგება. თუმცა, წრფის განტოლების ჩაწერა, რომელიც ფაქტიურად წარმოადგენს მოძრაობის ტრაექტორიას, შესაძლებელია შემდეგნაირად: ეს წრფე უნდა გადიოდეს კოორდინატთა სათავეზე, რადგან $\vec{r} \Updownarrow \dot{\vec{r}}$, ანუ (0,0,0) წერტილზე და მიმართულების ვექტორის სახით შესაძლოა ჰქონდეს საწყისი ვექტორი $\vec{r}_0$. ამიტომ ტრაექტორიის ვექტორული განტოლებისთვის $\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0$, ხოლო სკალარული განტოლებისთვის

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \tag{161}$$

ამ ტრაექტორიის მიხედვით მოძრაობის კანონი შეიძლება მივიღოთ, თუ ენერგიის ინტეგრალს ვაინტეგრებთ, რადგან ამ შემთხვევაში $V^2 = \dot{r}^2$. ინტეგრირება გამარტივდება, თუ მოვახდენთ ცვლადების შემდეგ ცვლილებებს: $\sqrt{|h|}dt = \sqrt{\mu/a}\,dt = r d\eta$, სადაც $a = \mu/|h|$, ხოლო η – ახალი უგანზომილებო ცვლადია. აქედან მივიღებთ, რომ

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + sign(h)\cdot r^2}}. \tag{162}$$

ამ ინტეგრალის გამოთვლით, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \cos\eta), && h < 0, \\ r &= \tfrac{a}{2}\eta^2, && h = 0, \\ r &= a(\operatorname{ch}\eta - 1), && h > 0. \end{aligned} \tag{163}$$

ამავე დროს t დაკავშირებულია η არგუმენტთან შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \eta - \sin\eta &= \tfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0), && h < 0, \\ \frac{\eta^3}{6} &= \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0), && h = 0, \\ sh\,\eta - \eta &= \tfrac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0), && h > 0. \end{aligned} \tag{164}$$

როგორც ვხედავთ, η ცვლადი წარმოადგენს E ექსცენტრული ანომალიის და მისი H ჰიპერბოლური ანალოგის ზღვრულ მნიშვნელობას, თუ მოვახდენთ $e \to 1$ ზღვრულ გადასვლას a სიდიდის მუდმივი მნიშვნელობისათვის. აქ (164)-

ის პირველი და მესამე დამოკიდებულება კეპლერის განტოლების და მისი ჰიპერბოლური ანალოგის ზღვრული ფორმებია. a მუდმივა წარმოადგენს ელიფსის დიდი ნახევარღერძის ან ჰიპერბოლის რეალური ნახევარღერძის ზღვრულ მნიშვნელობას და როცა $h < 0$, აღწევს მაქსიმალურ სიდიდეს. აქვე შევნიშნავთ, რომ (163) გამოსახულება მიღებულია საწყისი პირობისათვის $r_0 = 0$, ხოლო ზოგად შემთვევებში (163)-ის ორივე მხარეს უნდა დაემატოს r_0 სიდიდე.

(163)-(164) ამონახსნები აღწერენ არა მხოლოდ ერთი მატერიალური წერტილის მოძრაობას ნიუტონის მიზიდულობის ველში, არამედ ასევე შეუძლიათ აღწერონ მაგალითად სფერულად სიმეტრიული მტვროვანი ღრუბლის ევოლუცია. ასეთივე მათემატიკური ფორმა აქვს ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ეინშტეინის ფორმულის ცნობილ ამონახსნს, რომელიც მიიღო ა.ფრიდმანმა ერთგვაროვანი და იზოტროპული სამყაროსათვის, რომელიც შევსებულია მტვრის მსგავსი ნივთიერებით (საჭიროა მხოლოდ შევცვალოთ სიდიდე μ/a სინათლის სიჩქარით c).

ეს ფაქტი მიუთითებს, რომ კლასიკური მექანიკა არის ზოგადი ფარდობითობის თეორიის სასაზღვრო შემთხვევა. თუმცა ეს არ ნიშნავს, რომ სამყაროს ევოლუცია შესაძლოა აღიწეროს ნიუტონის მექანიკის საზღვრებში, რადგან (163)-(164) ამონახსნებს ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში გააჩნია სრულიად სხვა ფიზიკური არსი (კლასიკურ შემთხვევაში ვსაუბრობთ სივრცეში ცალკეული მატერიალური წერტილების მოძრაობაზე, ხოლო ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში – თავად სივრცის განზომილების ცვლილებაზე (კერძოდ, გაფართოებაზე)).

ლექცია 9. კეპლერისეული მოძრაობის თეორიის დამატებითი საკითხები

ელიფსური მოძრაობის მწკრივები

პირველ რიგში დავიწყებთ ელიფსური მოძრაობის ხარისხობრივი პარამეტრების და მათ შორის, ექსცენტრული ანომალიის, როგორც კეპლერის განტოლების ამონახსნის, ფუნქციურ მწკრივებად დაშლას. ამოცანის ასეთი დასმა დაკავშირებულია იმასთან, რომ კეპლერის განტოლება

$$E - e\sin E = M, \tag{165}$$

წარმოადგენს ტრანსცენდენტულ განტოლებას და ექსცენტრული ანომალია არ შეიძლება იქნას ნაპოვნი როგორც M და e არგუმენტების ელემენტარული ფუნქცია.

შევნიშნავთ, რომ საკმარისად ფართოდ არის გავრცელებული შემთხვევები (დიდი და უმრავლესობა მცირე პლანეტები, პლანეტების ბუნბერივი თანამგზავრები და დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრები), როცა ორბიტის ექსცენტრისიტეტი ძალზედ მცირეა – $e \ll 1$. ასეთ შემთხვევებში კეპლერის განტოლების ამოხსნის ეფექტური საშუალებაა მისი რიცხვითი ამოხსნა იტერაციის მეთოდით. ამასთან, შემდგომი მიახლოება გამოითვლება წინა მიახლოებით, შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$E_{n+1} = e\sin E_n + M. \tag{166}$$

E_0 სიდიდის საწყის მიახლოებად იღებენ M საშუალო ანომალიის მნიშვნელობას. (166) ფორმულის მარჯვენა მხარის ნამრავლის მოდულისთვის $|e\cos E| \le e < 1$, ანუ იტერაციული პროცესის კრებადობის საკმარისი პირობა სრულდება, ხოლო e სიდიდის სიმცირე უზრუნველყოფს კრებადობის მაღალ სისწრაფეს. ამასთან, იტერაციის მეთოდი კეპლერის განტოლებისთვის შესაძლებელია განხორციელდეს ჩვეულებრივ კალკულატორზე შუალედური ჩანაწერების გარეშე. იტერაციების რაოდენობის შესამცირებლად საწყისი მიახლობის სახით შესაძლებელია ავიღოთ კეპლერის განტოლების მიახლოებითი ამონახსნები შესაბამისი ცხრილებიდან. თუმცა, მთელ რიგ გამოყენებით და, განსაკუთრებით, თეორიულ ამოცანებში, სასარგებლოა გვქონდეს კეპლერის განტოლების ამონახსნი ანალიტიკური სახით, თუნდაც გარკვეული მიახლოებით.

e პარამეტრის სიმცირე ანუ $e \ll 1$, მიგვითითებს ვეძებოთ ასეთი ამონახსნი ექსცენტრისიტეტის ხარისხების მწკრივის სახით. მწკრივის

კოეფიციენტები იქნება M საშუალო ანომალიის ფუნქციები. ამავე დროს, E ექსცენტრული ანომალია M საშუალო ანომალიის პერიოდული ფუნქციაა. ეს ვითარება საშუალებას გვაძლევს დავსვათ E სიდიდის საშუალო ანომალიის მიხედვით ფურიეს მწკრივად დაშლის ამოცანა (შესაბამისად, ფურიეს კოეფიციენტები იქნება e ექსცენტრისიტეტის ფუნქციები).

კეპლერის განტოლების ამოხსნა

იმისათვის, რომ მივიღოთ კეპლერის განტოლების ამოხსნა ხარისხობრივი მწკრივის სახით:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} E_k \, e^k, \tag{167}$$

აუცილებელია ვიპოვნოთ ამ მწკრივის E_k კოეფიციენტები, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$E_k = \frac{1}{k!} \frac{dE(e)}{de}\bigg|_{e=0} \tag{168}$$

თუმცა, (167) გამოსახულებაში თავისუფალი ხარისხის ნამრავლის გამოთვლა დაკავშირებულია მნიშვნელოვან სირთუელეებთან, რადგან E ექსცენტრული ანომალია როგორც e ექსცენტრისიტეტის ფუნქცია მოცემულია კეპლერის განტოლებაში არაცხადი ფუნქციის სახით. ამ სირთულეების გადალახვის საშუალებას გვაძლევს ***ლაგრანჟის თეორემა*** ანალიტიკური ფუნქციების თეორიიდან. ეს თეორემა შემდეგში მდგომარეობს:

<u>ლაგრანჟის თეორემა:</u> თუ განტოლებაში

$$z - \alpha \cdot f(z) = a, \tag{169}$$

მუდმივებს α და a აქვთ ისეთი მნიშვნელობები, რომ z სიბრტყის რომელიღაც არეში სრულდება პირობა:

$$\left|\frac{\alpha \cdot f(z)}{z - a}\right| < 1, \tag{170}$$

მაშინ (169) განტოლების ფესვი არსებობს და ტოლია:

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [(f(a))^k]. \tag{171}$$

ლაგრანჟის (171) მწკრივი კრებადია α-ს ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის, რომლისთვისაც სრულდება (170) პირობა. ლაგრანჟის თეორემის დამტკიცება შესაძლებელია მივიღოთ სრული მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ლაგრანჟის თეორემას გააჩნია *განზოგადება*, რომელიც საშუალებას იძლევა ვიპოვნოთ ხარისხობრივი მწკრივი ნებისმიერი $\Phi(z)$ ანალიტიკური ფუნქციისათვის, რომლის არგუმენტი წარმოადგენს (169) განტოლების ფესვს, კერძოდ:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} \left[\Phi'(a) \cdot \big(f(a)\big)^k\right]. \tag{172}$$

ეს საშუალებას გვაძლევს ვიპოვნოთ ექსცენტრული ანომალიის და ელიფსური მოძრაობის სხვა, მათზე დამოკიდებული, მახასიათებლების მაკლორენის მწკრივის სახით დაშლა. ძირითადი პრობლემა ახლა იმაშია, რომ ვიპოვნოთ ამ მწკრივების კრებადობის რადიუსი პირობიდან:

$$|e| < \left|\frac{E - M}{\sin E}\right|, \tag{173}$$

რომელიც ჩვენს შემთხვევაში გამომდინარეობს (170)-დან.

პირობა (173) განსაზღვრავს არეს, რომელშიც $E(e)$ ფუნქცია, როგორც კეპლერის (165) განტოლების ამონახსნი, იქნება ანალიტიკური ფუნქცია და, შესაბამისად, იარსებებს dE/de წარმოებული E და e სიდიდეების ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის მითითებული არედან. ამ წარმოებულის გამოთვლით კეპლერის განტოლებიდან მივიღებთ:

$$\frac{dE}{de} = \frac{\sin E}{1 - e\cos E}. \tag{174}$$

აქედან, (171) და (172) მწკრივების კრებადობის რადიუსისათვის ვიპოვნოთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} E - e\sin E = M \\ 1 - e\cos E = 0 \end{cases} \tag{175}$$

ამასთან, ამ სისტემის მოდულით უნდა ვიპოვნოთ უმცირესი ფესვი e. მეორე განტოლებიდან გვაქვს, რომ $e = 1/\cos E$. შესაბამისად,

$$|e|^2 = 1/(\cos E \cdot \cos \bar{E}), \tag{176}$$

სადაც $\bar{E}$ აღნიშნავს კომპლექსურ შეუღლებულ სიდიდეს. აქვე გათვალისწინებულია, რომ კოსინუსი არის ლუწი ფუნქცია. ვიპოვნოთ $\cos E \cdot \cos \bar{E}$ ფუნქციის მაქსიმუმი. მისი წარმოებული ტოლია:

$$-(\sin E \cos \bar{E} + \cos E \sin \bar{E}) = -\sin(E + \bar{E}) \tag{177}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $E = \rho + i\sigma$, მაშინ წარმოებული ტოლია $-\sin 2\rho$, ხოლო $\sin 2\rho = 0$ განტოლების უმცირესი, არანულოვანი ფესვი არის $\pi/2$. ჩავსვათ $E = \pi/2 + i\sigma$ კეპლერის განტოლებაში:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma\right)} = M. \tag{178}$$

გავითვალისწინოთ მიყვანის ფორმულები, წარმოსახვითი არგუმენტის ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებსა და ნამდვილი არგუმენტის ჰიპერბოლურ ფუნქციებს შორის კავშირი და მივიღებთ:

$$\frac{\pi}{2} + i\sigma + \frac{\cos i\sigma}{\sin i\sigma} = \frac{\pi}{2} + i\left(\sigma - \frac{ch\,\sigma}{sh\,\sigma}\right) = M. \tag{179}$$

რადგან ჩვენ გვაინტერესებს M საშუალო ანომალიის მხოლოდ ნამდვილი მნიშვნელობები, σ კოეფიციენტის განსაზღვრისათვის გვექნება განტოლება:

$$\sigma \cdot sh\,\sigma - ch\,\sigma = 0. \tag{180}$$

ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ, რომ ამ განტოლების ფესვი ძევს 1-ს და 2-ს შორის. მისი ზუსტი მნიშვნელობაა $\sigma_0 = 1.1997$. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ლაგრანჟის მწკრივების კრებადობის რადიუსია

$$e_0 = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\sigma_0\right)} = \frac{1}{sh\,\sigma} = 0.6627. \tag{181}$$

ექსცენტრისიტეტის e_0 მნიშვნელობას უწოდებენ ***ლაპლასის ზღვარს***, რომელმაც პირველმა იპოვნა ეს სიდიდე, თუმცა განსხვავებული მეთოდით. ექსცენტრისიტეტის e_0 -ზე ნაკლები სიდიდისათვის, ლაგრანჟის მწკრივები აბსოლუტურად იკრიბებიან, ხოლო მეტი სიდიდისათვის შესაძლოა განშლადიც იყვნენ M საშუალო ანომალიის გარკვეული მნიშვნელობებისათვის. ექსცენტრისიტეტის ლაპლასის ზღვარზე ნაკლები, თუმცა ახლო მდებარე, სიდიდისათვის შესაძლოა ამ მწკრივების კრებადობის სიჩქარე მნიშვნელოვნად შემცირდეს.

გადავიდეთ (167) მწკრივის რეალური სახით პოვნაზე. (171)-დან მივიღებთ, რომ

$$E_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (\sin^k M). \tag{182}$$

თუ ჩავატარებთ გამოთვლებს (181) ფორმულით, მაშინ E_k კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ გამოსახულებას პოლინომების სახით, რომელთა ხარისხებია $\sin M$ და $\cos M$. როგორც ცნობილია, შემდეგი ტოლობის მეშვეობით

$$(\cos M + i \sin M)^n = \cos nM + i \sin nM \tag{183}$$

$\sin^n M$ და $\cos^n M$ ხარსიხები შესაძლებელია გამოვსახოთ M-ის ჯერადი ანუ kM არგუმენტის სინუსებით და კოსინუსებით. ამიტომ, E_k კოეფიციენტები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ტრიგონომეტრიული მრავალწევრები M საშუალო ანომალიის ჯერადი არგუმენტებით. კერძოდ, (181)-დან ვიღებთ:

$$E_0 = M, \;\; E_1 = \sin M, \;\; E_2 = \frac{1}{2} \sin 2M. \tag{184}$$

შესაბამისად, კეპლერის განტოლების ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს:

$$E = M + e \sin M + \frac{1}{2} \mathrm{e}^2 \sin 2M + \cdots. \tag{185}$$

ელიფსური მოძრაობის ხარისხობრივი მწკრივები

ელიფსური მოძრაობის სხვადასხვა მახასიათებლების მწკრივების მისაღებად დაგვჭირდება $\cos e$ და $\sin e$ ფუნქციების მწკრივები, ანუ:

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^k, \qquad \sin E = \sum_{k=0}^{\infty} S_k e^k. \tag{186}$$

გამოვიყენოთ ლაგრანჟის განზოგადებული მწკრივი და მივიღებთ, რომ:

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} (-\sin^{k+1} M). \tag{187}$$

გამოვთვალოთ პირველი C_k კოეფიციენტები და მივიღებთ, რომ:

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 1) + \frac{3}{8} e^2 (\cos 3M - \cos M) + \cdots. \tag{188}$$

S_k კოეფიციენტების გამოსათვლელად არ არის აუცილებელი გამოვიყენოთ (172) მწკრივი, რადგან კეპლერის განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\sin E = \frac{E-M}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k e^{k-1} - \frac{M}{e}. \tag{189}$$

თუ (186) მწკრივებიდან მეორეს შევადარებთ (87)-ს, დავრწმუნდებით, რომ კოეფიციენტები ტოლია:

$$S_k = E_{k+1} \tag{190}$$

ასევე მოვიქცევით შემდგომში ანუ შემდგომი მწკრივების კოეფიციენტებს გამოვსახავთ ძირითადი E_k და C_k მწკრივების ანუ ექსცენტრული ანომალიის და მისი კოსინუსის კოეფიციენტებით. რადგან ძირითადი მწკრივების კოეფიციენტები განუზღვრელია, ამიტომ სხვა სიდიდეებიც ჩავწეროთ განუზღვრელი სახით. მაშინ ორბიტის (121) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E. \tag{191}$$

თუ ჩავწერთ მწკრივს:

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} R_k e^k, \tag{192}$$

მაშინ (191)-ის და (192)-ის შედარებით მივიღებთ, რომ

$$R_k = C_{k-1} \qquad k \neq 0,\;\; R_0 = 1. \tag{193}$$

ორბიტის განუზღვრელი კოორდინატებია:

$$\frac{\xi}{a} = \cos E - e,\;\; \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2}\sin E. \tag{194}$$

მათი ხარისხობრივი მწკრივები აღვნიშნოთ შემდეგნაირად:

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k e^k, \quad \frac{\eta}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k e^k. \tag{195}$$

თუ შევადარებთ ξ/a გამოსახულებებს, ადვილად დავინახავთ, რომ:

$$\Xi_k = C_k \quad (k \neq 1), \quad \Xi_1 = C_1 - 1. \tag{196}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვნოთ H_k კოეფიციენტები, უნდა გავიხსენოთ, რომ $(1+x)^m$ -თვის ბინომური მწკრივის ზოგადი სახიდან შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი, თუ $m = 1/2$:

$$\sqrt{1-e^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^k, \tag{197}$$

სადაც

$$\alpha_0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{2j} = (-1)^j \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}, \quad \alpha_{2j+1} = 0.$$

გადავამრავლოთ აბსოლუტურად კრებადი (185) და (197) მწკრივები და მივიღებთ, რომ:

$$H_k = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s\, S_{k-s} = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s\, E_{k-s+1}. \tag{198}$$

ჩავწეროთ კოორდინატების მწკრივები საწყის კოორდინატთა სისტემაში:

$$\frac{x}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{X}_k e^k, \quad \frac{y}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k e^k, \quad \frac{z}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k e^k, \tag{199}$$

შევადაროთ ისინი (108) დამოკიდებულებას და მივიღებთ:

$$\begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \Xi_k + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot H_k. \tag{200}$$

იმისათვის, რომ ვიპოვნოთ მწკრივი განუზღვრელი სიჩქარის კვადრატისათვის, ენერგიის (136) ინტეგრალი ჩავწეროთ (127)-ის მეშვეობით შემდეგი სახით:

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a}{r} - 1. \tag{201}$$

ცხადია ასევე უნდა ვიპოვნოთ მწკრივი შებრუნებული მანძილისათვის:

$$\frac{a}{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{R}_k e^k. \tag{202}$$

კეპლერის განტოლების M-ით დიფერენცირებისას, მივიღებთ

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E} = \frac{a}{r}, \tag{203}$$

ამიტომ კოეფიციენტები:

$$\tilde{R}_k = \frac{dE_k}{dM}, \tag{204}$$

ხოლო თუ ჩავწერთ მწკრივს:

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{(2)} e^k, \tag{205}$$

მაშინ ამ მწკრივის კოეფიციენტები იქნება:

$$V_k^{(2)} = 2\tilde{R}_k \quad (k \neq 0), \quad V_0^{(2)} = 1. \tag{206}$$

საბოლოოდ, შემდეგი დამოკიდებულებების გამოყენებით:

$$\frac{V_n}{na} = \frac{r\dot{v}}{na} = \frac{\sqrt{\mu p}}{nar} = \frac{a}{r} \cdot \sqrt{1-e^2} \tag{207}$$

და

$$\frac{\dot{v}}{n} = \frac{V_n}{nr} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na}, \tag{208}$$

შესაბამისი მწკრივების გადამრავლებით, ხოლო შემდგომ, მიღებული ნამრავლის ინტეგრირებით დროის მიხედვით, შესაძლოა მივიღოთ მწკრივი ჭეშმარიტი ანომალიისთვის, რომელსაც ***ცენტრის განტოლებას*** უწოდებენ:

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k e^k. \tag{209}$$

მისი პირველი წევრები ასეთია:

$$\nu = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \cdots \ . \tag{210}$$

ელიფსური მოძრაობის ტრიგონომეტრიული მწკრივები

კრებადობის არის გამო ხარისხობრივი მწკრივები ეფექტურია პრაქტიკულად მხოლოდ ექსცენტრისიტეტის მცირე მნიშვნელობებისათვის - $e \ll 1$. ამიტომ, საჭიროა ვიპოვნოთ ისეთი მწკრივები, რომლებიც იკრიბება ექსცენტრისიტეტის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის $(0 < e < 1)$. ასეთ მწკრივებს წარმოადგენს ფურიეს მწკრივები M საშუალო ანომალიის მიხედვით, რომელთა განხილვაზეც გადავალთ ქვევით.

ექსცენტრული ანომალია და მასზე დამოკიდებული ელიფსური მოძრაობის სხვა მახასიათებლები წარმოადგენენ საშუალო ანომალიის პერიოდულ ფუნქციებს, რადგან ექსცენტრული ანომალია E ყველა ფორმულაში შედის მხოლოდ სინუსის ან კოსინუსის ნიშნის შიგნით.

გარდა ამისა, კეპლერის განტოლებიდან და ელიფსური მოძრაობის სხვა ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ $E-M$ სხვაობა და r,ξ,η სიდიდეები არიან საშუალო ანომალიის ლუწი ან კენტი ფუნქციები. ლუწი 2π პერიოდიანი ფუნქციის ფურიეს მწკრივს შემდეგი სახე აქვს:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx, \tag{211}$$

სადაც ფურიეს კოეფიციენტებია:

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos kx\,dx, \tag{212}$$

ხოლო კენტი ფუნქციისათვის:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx, \tag{213}$$

და ფურიეს კოეფიციენტებია:

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kx\,dx, \tag{214}$$

დირიხლეს თეორემის მიხედვით (212) და (214) ინტეგრალების საბოლოო მნიშვნელობების არსებობა საკმარისი პირობაა (211) და (213) მწკრივების კრებადობისათვის, რომელიც, საზოგადოდ, პირობითია.

პირველ რიგში ვიპოვნოთ ძირითადი მწკრივების ფურიე კოეფიციენტები ექსცენტრული ანომალიისა და მისი კოსინუსისთვის.

კოეფიციენტები $E-M$ სიდიდისთვის (214)-ის თანახმად, ტოლია:

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\sin kM\,dM, \tag{215}$$

რადგან კეპლერის განტოლება იძლევა E სიდიდეს, როგორც M არგუმენტის მქონე არაცხად ფუნქციას, ხოლო M სიდიდეს, პირიქით, E არგუმენტის ცხად ფუნქციას, (215) ინტეგრალში გადავიდეთ E ინტეგრირების

ცვლადზე. ამის გაკეთება მოსახერხებელი იქნება, თუ (215)-ს წინასწარ ნაწილ-ნაწილ ვაინტეგრებთ. მაშინ:

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\left[-(E-M)\cos kM \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos kM(dE - dM)\right] =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \cos(kE - ke\sin E)dE. \qquad (216)$$

თუ გავიხსენებთ ცნობილ ინტეგრალურ ფორმულას ***ბესელის ფუნქციისათვის:***

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (k\varphi - x\sin\varphi)\, d\varphi, \qquad (217)$$

მაშინ კოეფიციენტებისათვის მივიღებთ:

$$b_k = \frac{2}{k}\, J_k(ke), \qquad (218)$$

ხოლო ექსცენტრული ანომალიისთვის ფურიეს მწკრივს შემდეგი სახე აქვს:

$$E = M + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\, J_k(ke)\sin kM. \qquad (219)$$

ანალოგიურად, თუ მოვახდენთ $\cos E$ ფუნქციის ფურიე კოეფიციენტების ნაწილ-ნაწილ ინტეგრირებას:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos E\cos kM\, dM, \qquad (220)$$

მივიღებთ, რომ:

$$a_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin(kE - ke\sin E)\sin E\, dE, \qquad (221)$$

გადავიდეთ სინუსების ნამრავლიდან კოსინუსების სხვაობაზე და, კვლავ, (217)-ის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ:

$$a_k = \frac{1}{k}[J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)]. \qquad (222)$$

(222) გამოსახულება გამოუსადეგარია როცა $k = 0$, მაგრამ ამ შემთხვევაში (220)-ის პირდაპირი ინტეგრირება გვიჩვენებს, რომ $a_0 = -e$. შესაბამისად:

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM. \qquad (223)$$

ამის შემდეგ ელიფსური მოძრაობისათვის შესაძლებელია მივიღოთ ფურიეს მწკრივები სხვა სახით:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM,$$

$$\frac{\xi}{a} = -\frac{3}{2} e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \cos kM, \qquad (224)$$

$$\frac{\eta}{a} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \sin kM.$$

როგორც ცნობილია, ბესელის ფუნქციები იშლება აბსოლუტურად კრებად ხარისხობრივ მწკრივებად, კერძოდ:

$$J_k(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2j}}{k!\,(k+j)!}. \qquad (225)$$

მწკრივი (225) ჩავსვათ მწკრივებში (219), (223) და (224) და ჩავთვალოთ, რომ $x = ke$. თუ ერთად დავაჯგუფებთ წევრებს e ექსცენტრისიტეტის ტოლი ხარისხებით, მივიღებთ მწკრივებს e-ს ხარისხებით, რომელთა კოეფიციენტები იქნება $\sin kM$ და $\cos kM$ ფუნქციების ტრიგონომეტრიული მრავალწევრები. ასევე პირიქით, თუ წინა პარაგრაფში მოყვანილ შესაბამის ხარისხობრივ მწკრივებში დავაჯგუფებთ სინუსებსა და კოსინუსებში ერთნაირ არგუმენტებიან წევრებს, ეს მწკრივები შესაძლებელია გარდავქმნათ ფურიეს მწკრივებად, რომელთა კოეფიციენტებია e არგუმენტის მქონე ხარისხობრივი მწკრივები. თუმცა, ასეთი გარდაქმნები მწკრივების კრებადობის დარღვევის გარეშე, თანაც მათი ჯამის მიმართ, შესაძლებელია შესრულდეს მხოლოდ აბსოლუტურად კრებადი მწკრივებისათვის, რომელთათვისაც კრებადია მწკრივი, შედგენილი მათი წევრების მოდულებისგან.

თუ მწკრივი კრებადია მხოლოდ პირობითად, სხვანაირად რომ ვთქვათ, მისი კრებადობა უზრუნველყოფილია საპირისპირო ნიშნის წევრების ნაწილობრივი ურთიერთკომპენსაციით, მაშინ ასეთი მწკრივის უსასრულო რაოდენობის წევრების გადაადგილებამ შესაძლოა გამოიწვიოს მწკრივის ჯამის ცვლილება ან განშლადი მწკვრივის მიღებაც კი.

ამ მოსაზრებებს მივყავართ ლაპლასის e_0 ზღვრის ახალ გაგებამდე. იგი წარმოადგენს საზღვარს ელიფსური მოძრაობის ფურიეს მწკრივების *აბსოლუტური* და *პირობითი* კრებადობის არეებს შორის. ექსცენტრისიტეტის $e < e_0$ მნიშვნელობებისათვის ფურიეს მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია. ამიტომ, მათგან მიღებული მწკრივები e-ს ხარისხებით ასევე კრებადია და თანაც, აბსოლუტურად. ხოლო $e > e_0$ მნიშვნელობებისათვის ფურიეს მწკრივები ასევე კრებადია, მაგრამ მხოლოდ პირობითად. ამიტომ, შესაბამისი მწკრივები ექსცენტრისიტეტის ხარისხებით შესაძლოა იყოს განშლადი, თუნდაც M საშუალო ანომალიის ზოგიერთი მნიშვნელობებისათვის.

ლექცია 10. ორი სხეულის სასაზღვრო ამოცანა

ორი სხეულის ამოცანა შეიძლება ამოვხსნათ როგორც საწყისი, ასევე სასაზღვრო პირობებით. საწყისი პირობებით ორბიტის ელემენტების პოვნის ამოცანა (ანუ, როგორც ამბობენ, ***ორბიტის პოვნა***) ფაქტიურად უკვე განვიხილეთ წინა ლექციაში. პირველი ინტეგრალების გამოსახულებებიდან განისაზღვრება პირველი ინტეგრალების მუდმივები. შემდეგ, (89) და (98) ფორმულების საფუძველზე ვპოულობთ ელემენტებს e, p, r.

რაც შეეხება სასაზღვრო ამოცანას, პირველ რიგში უნდა გავიხსენოთ, რომ ასტრომეტრიული დაკვირვებები გვაძლევს მხოლოდ ციური სხეულის მდებარეობას ცის სფეროზე მისი ორი კუთხური კოორდინატის სახით. ამიტომ, ორბიტის ექვსი ელემენტის საპოვნელად აუცილებელია სულ მცირე სამი დაკვირვება (წრიული მოძრაობის შემთხვევაში საკმარისია მხოლოდ ორი დაკვირვება).

თუმცა, სანამ გადავალთ ორბიტის ელემენტების განსაზღვრის ამოცანაზე, უნდა განვსაზღვროთ სასაზღვრო პირობები ანუ რადიუს-ვექტორების $\vec{r}_{1,2}$ მნიშვნელობები დროის $t_{1,2}$ მომენტში კუთხური კოორდინატების მნიშვნელობების მიხედვით, როგორც წესი, ეკვატორული α_k, β_k კოორდინატებით t_k დროის მომენტში, სადაც $k = 1,0,2$ (დროის შუალედური მომენტი მოხერხებულია ავღნიშნოთ როგორც t_0). ამისათვის, პირველ რიგში, გამოიყენება აპრიორული ინფორმაცია იმის შესახებ, რომ $\vec{r}_k$ ვექტორის სამი წერტილი ძევს მეორე რიგის რომელიღაც მრუდზე და დროში დაკავშირებულია ერთმანეთთან კეპლერის მეორე კანონით.

სამი დაკვირვებით ელიფსური ორბიტის განსაზღვრის გაუსის მეთოდი ეფუძნება შემდეგ იდეას. რადგან რადიუს-ვექტორები ძევს ერთ სიბრტყეში, მაშინ ისინი წრფივად არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული ანუ $\vec{r}_0 = c_1\vec{r}_1 + c_2\vec{r}_2$, სადაც კოეფიციენტები $c_{1,2}$ ტოლია შესაბამისი სამკუთხედების ფართობების შეფარდების, რომლებიც წარმოქმნილია $\vec{r}_k$ ვექტორებით.

ამავე დროს, კეპლერის მეორე კანონი გვაძლევს შესაბამისი ელიფსური სექტორების ფართობების შეფარდებას. აქედან ისმება სამკუთხედის ფართობის ელიფსური სექტორის ფართობთან შეფარდების პოვნის პრობლემა, რაც საკმაოდ რთული ამოცანაა, რადგან ელიფსური სექტორის ფართობი არ გამოისახება სასრული სახით მისი წვეროების კოორდინატებით. პირველ მიახლოებაში ეს ამოცანა ამოიხსნება იმ ვარაუდით, რომ მოძრაობა წარმოებს წრიულ ორბიტაზე. ეს დასაშვებია მაშინ, როცა დაკვირვებები მოიცავს ორბიტის მხოლოდ

შედარებით მცირე რკალს, როგორც ეს ხდება მცირე პლანეტების ორბიტების განსაზღვრისას და, სავარაუდოდ, ექსცენტრისიტეტის მნიშვნელობა არც ისე დიდია.

განვიხილოთ ორბიტის განსაზღვრის მეთოდი, რომელსაც არ სჭირდება ზემოხსენებული ვარაუდი და, ამიტომ, ფართოდ გამოიყენება ასტროდინამიკაში. იგი ეფუძნება ***ლამბერტის თეორემას***. ეს თეორემა აკავშირებს ელიფსური ორბიტის დიდ ნახევარღერძს a ორი წერტილის რადიუსებთან $r_{1,2}$, ამ წერტილებს შორის ქორდის სიგრძესთან c და დროის შუალედთან $\Delta t = t_2 - t_1$, რომლის განმავლობაში მატერიალური წერტილი გაივლის ორბიტის რკალს $\vec{r}_{1,2}$ წერტილებს შორის.

ამავე დროს, უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ეს რკალი შესაძლებელია იყოს როგორც ნაკლები, ასევე მეტი $180°$-ზე, ხოლო $\vec{r}_{1,2}$ წერტილების შემაერთებელმა ქორდამ შესაძლოა გადაკვეთოს ელიფსის დიდი ნახევარღერძი. ამიტომ, სანამ ჩამოვაყალიბებთ თავად ლამბერტის თეორემას, უნდა შემოვიღოთ დამხმარე სიდიდე a_m – მოსაზღვრე ელიფსის დიდი ნახევარღერძი, რომლის ქორდა (იხ. ნახაზი 11-დ) გადის ელიფსის მეორე ფოკუსზე და ამასთან:

$$a_m = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + c). \tag{226}$$

მაშინ, ამ მოსაზღვრე ორბიტაზე გადაფრენის დრო ტოლია:

$$\Delta t_m = \frac{a_m^{3/2}}{\sqrt{\mu}}[\pi - sign\,(\sin\Phi)(\delta - \sin\delta)]. \tag{227}$$

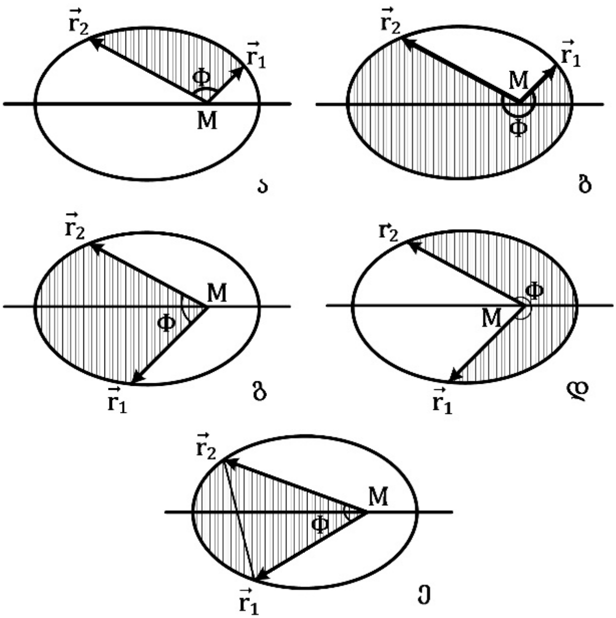
თავად ლამბერტის თეორემას აქვს შემდეგი სახე:

$$\sqrt{\mu}\,(t_2 - t_1) = a^{3/2}[\pi + sign(\Delta t_m - \Delta t)(\varepsilon - \sin\varepsilon)$$

$$- sign(\sin\Phi)(\delta - \sin\delta)\,], \tag{228}$$

სადაც

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{a_m}{a}}, \quad \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{a_m - 2c}{a}}, \quad c = \sqrt{r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2}, \tag{229}$$



ნახაზი 11. ელიფსური სექტორის სხვადასხვა განლაგება ელიფსის დიდი ნახევარღერძის მიმართ.

ხოლო Φ წარმოადგენს კუთხეს $\vec{r}_{1,2}$ ვექტორებს შორის, ანუ $\Phi = \nu_2 - \nu_1$. ამასთანავე, $0 < \delta/2 < \varepsilon/2 < \pi/2$, ხოლო (228)-სა და (229)-ში ნიშნის თანამამრავლის გამოჩენა დაკავშირებულია ორბიტაზე $\vec{r}_{1,2}$ წერტილების სხვადასხვა შესაძლო განლაგებასთან, რომლებსაც შევეხეთ ზემოთ და რომლებიც ნაჩვენებია ნახაზზე 11.

თუ ცნობილია $\vec{r}_{1,2}$ ვექტორები, მაშინ $\sin\Phi$ და $\cos\Phi$ სიდიდეები შეგვიძლია ვიპოვნოთ ამ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის მოდულის და მათი სკალარული ნამრავლის მეშვეობით. მაშინ ლამბერტის თეორემა შესაძლოა განვიხილოთ როგორც განტოლება a დიდი ნახევარღერძის მიმართ, რომელიც უნდა ამოვხსნათ რომელიმე რიცხვითი მეთოდით. თუ ვიცით a სიდიდე, მაშინ შესაძლებელია ვიპოვნოთ ორბიტის პარამეტრი

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 \dfrac{\Phi}{2}}{a \sin \dfrac{\varepsilon - \gamma}{2}} \tag{230}$$

სადაც

$$\gamma = sign(\Delta t_m - \Delta t) \cdot sign(\sin \Phi) \cdot \delta.$$

ფორმულა (230) მიიღება $\vec{r}_{1,2}$ წერტილებში ჭეშმარიტი და ექსცენტრული ანომალიების მნიშვნელობათა სხვაობების შეფარდების და ქორდის სიგრძის ექსცენტრული ანომალიების სხვაობებზე დამოკიდებულებიდან.

თუ განვიხილავთ მომენტის ინტეგრალს, ლაპლასის ინტეგრალს და მათ ვექტორულ ნამრავლს $\vec{r}_{1,2}$ წერტილებში, შესაძლებელია მივიღოთ ორბიტის ვექტორული ელემენტების შემდეგი გამოსახულებები:

$$\vec{P} = \frac{e + \cos \nu_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \sin \nu_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2} \tag{231}$$

$$\vec{Q} = \frac{\sin \nu_{1,2}}{p} \vec{r}_{1,2} - \frac{r_{1,2}}{\sqrt{\mu p}} \cos \nu_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2} \tag{232}$$

გამოვრიცხოთ ამ განტოლებებიდან $\dot{\vec{r}}_{1,2}$ სიჩქარეები და ვიპოვნით ორბიტის ვექტორულ ელემენტებს, რაც საბოლოოდ საშუალებას მოგვცემს ვიპოვნოთ Ω, ω, i.

შევნიშნავთ, რომ თუ (231) და (232) განტოლებების ყოველი წყვილებიდან გამოვრიცხავთ $\vec{P}$ და $\vec{Q}$ ვექტორებს, შესაძლებელია ვიპოვნოთ ორი განტოლება, რომლებიც აკავშირებენ რადიუს-ვექტორებს და სიჩქარის ვექტორებს დროის ორ განხილულ მომენტში. მიღებული განტოლებათა სისტემა ამოვხსნათ $\vec{r}_2$ რადიუს-ვექტორის და $\dot{\vec{r}}_2$ სიჩქარის ვექტორის მიმართ და მივიღებთ:

$$\vec{r}_2 = \left[1 - \frac{r_2}{p}(1 - \cos \Phi)\right] \cdot \vec{r}_1 + \frac{r_1 r_2}{\sqrt{\mu p}} \sin \Phi \cdot \dot{\vec{r}}_1 \tag{233}$$

$$\dot{\vec{r}}_2 = \left[\frac{\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1}{p r_1}(1 - \cos \Phi) - \frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \Phi\right] \cdot \vec{r}_1 + \left[1 - \frac{r_1}{p}(1 - \cos \Phi)\right] \cdot \dot{\vec{r}}_1 \tag{234}$$

საბოლოოდ, (233) და (234) ფორმულებში გამოვტოვოთ ინდექსი 2 და ინდექსი 1 შევცვალოთ ინდექსით 0, მივიღებთ რადიუს-ვექტორის და სიჩქარის

ვექტორის დამოკიდებულებას მათ საწყის მნიშვნელობებზე დროის ნებისმიერ მომენტში:

$$\vec{r} = \left[1 - \frac{r}{p}(1 - \cos\Phi)\right] \cdot \vec{r}_0 + \frac{r r_0}{\sqrt{\mu p}} \sin\Phi \cdot \dot{\vec{r}}_0 \tag{235}$$

$$\dot{\vec{r}} = \left[\frac{\vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0}{p r_0}(1 - \cos\Phi) - \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin\Phi\right] \cdot \vec{r}_0 + \left[1 - \frac{r_0}{p}(1 - \cos\Phi)\right] \cdot \dot{\vec{r}}_0 \tag{236}$$

სადაც $\Phi = \nu - \nu_0$.

თუ ლამბერტის თეორემაში მოვახდენთ სასაზღვრო გადასვლას როცა $a \to \infty$, მივიღებთ ***ეილერის თეორემას***, რომლის მიხედვით

$$6\sqrt{\mu}\Delta t = (r_1 + r_2 + c)^{3/2} - sign(\Phi)(r_1 + r_2 - c)^{3/2}. \tag{237}$$

ეს თეორემა გამოიყენება ოლბერსის მეთოდით პარაბოლური ორბიტების გამოსათვლელად. ლამბერტის და ეილერის თეორემები ასევე გამოიყენება შესაბამის ორბიტაზე ორ წერტილს შორის გადაადგილების დროის გამოსათვლელად.

საზოგადოდ, ხელოვნური ციური სხეულების, კერძოდ, დედამიწის ხელოვნური თანამგზავრების ორბიტების განსაზღვრის ამოცანის ამოხსნა მნიშვნელოვნად არის დამოკიდებული მათი მოძრაობის ტელემეტრიულ მონაცემებზე. რადიოლოკაციური და ვიზიოლოკაციური გაზომვები გვაძლევენ ხელოვნურ ციურ სხეულებამდე მანძილს, ხოლო დოპლერის სიჩქარეების გაზომვები – სიჩქარის რადიალურ კომპონენტს. ამასთან, თუ კუთხური კოორდინატებით და მანძილით ვიპოვნით სიჩქარის ტანგენციალურ კომპონენტს, მაშინ ორბიტის განსაზღვრის ამოცანა დაიყვანება კოშის ამოცანაზე.

ცის მექანიკისა და ვარსკვლავთ ასტრონომიის მომიჯნავე საკითხს წარმოადგენს ორმაგ ვარსკვლავთ სისტემაში ორბიტის განსაზღვრის ამოცანა. ძირითადი სირთულეები აქ ის არის, რომ ჩვენ ვაკვირდებით ამ სისტემის კომპონენტებს მხოლოდ მხედველობის სიბრტყის პროექციაში. ამ სირთულეების გადალახვის შესაძლებლობები და გზები დამოკიდებულია ორმაგი სისტემის ტიპზე. ცის მექანიკის კიდევ ერთი სპეციფიკური ამოცანაა მზისა და მთვარის დაბნელებების დროის და ვითარების გამოთვლა.

ლექცია 11. ორი სხეულის ამოცანის ინტეგრირება ჰამილტონ-იაკობის მეთოდით

პირველი ინტეგრალების მეთოდი, რომლითაც იქნა ინტეგრირებული ორი სხეულის ამოცანის განტოლებები წინა თავში, არ წარმოადგენს ერთადერთ მეთოდს. განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნა სფერულ კოორდინატებში ჰამილტონ-იაკობის მეთოდით.

სფერულ კოორდინატთა სისტემის გამოყენება მიზანშეწონილია, რადგან ამ შემთხვევაში პოტენციალი, რომელიც ტოლია $V = \mu/r$, დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ კოორდინატზე. კუთხური კოორდინატები აღვნიშნოთ როგორც φ და λ, სადაც φ - გრძედია, λ კი - განედი. ჰამილტონ-იაკობის მეთოდის გამოყენებისათვის თავდაპირველად უნდა ვიპოვნოთ r, λ, φ კოორდინატების შესაბამისი განზოგადებული იმპულსები – R, Λ, Φ.

განზოგადებული იმპულსი p_i, რომელიც შეესაბამება განზოგადებულ კოორდინატს q_i, განისაზღვრება ფორმულით:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \tag{238}$$

სადაც ***ლაგრანჟის ფუნქცია*** ტოლია კინეტიკური და პოტენციური ენერგიების სხვაობის ანუ $L = T + V$. კინეტიკურ ენერგიას სფერულ კოორდინატებში შემდეგი სახე აქვს:

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}^2\right). \tag{239}$$

ლაგრანჟის ფუნქცია ტოლია

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}^2\right) + \frac{\mu}{r}. \tag{240}$$

აქედან ვპოულობთ, რომ

$$R = \dot{r}, \quad \Phi = r^2\dot{\varphi}\,, \quad \Lambda = r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda} \tag{241}$$

ამდენად, შეგვიძლია ჩავწეროთ ორი სხეულის ამოცანის ***ჰამილტონის ფუნქცია***, რომელიც ტოლია განზოგადებულ კოორდინატებში და განზოგადებულ იმპულსებში გამოხატული სრული ენერგიის, ანუ

$$H = \frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2} + \frac{\Lambda^2}{r^2\cos^2\varphi}\right) - \frac{\mu}{r}. \tag{242}$$

იმისათვის, რომ ჩავწეროთ ჰამილტონ-იაკობის განტოლება, საჭიროა S ***მოქმედების*** დროითი კერძო წარმოებულის და ჰამილტონის ფუნქციის ჯამი გავუტოლოთ ნოლს. ამასთან, ჰამილტონის ფუნქციაში განზოგადებული იმპულსები უნდა შევცვალოთ S მოქმედების განზოგადებული კოორდინატების მიხედვით კერძო წარმოებულებით. კონსერვატიულ ამოცანებში ანუ ამოცანებში, სადაც მოქმედებენ მხოლოდ კონსერვატიული ძალები, მოქმედება შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$S = W(q_i) - \alpha_1 t, \tag{243}$$

სადაც W - ე.წ. შეკვეცილი მოქმედებაა. მაშინ ჰამილტონ-იაკობის განტოლებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 \tag{244}$$

ამის შემდგომ საჭიროა ვიპოვნოთ ამ განტოლების სრული ინტეგრალი ანუ მისი ისეთი ინტეგრალი, რომელიც ზოგადისგან განსხვავებით, დამოკიდებულია არა სამ ნებისმიერ ფუნქციაზე, არამედ მხოლოდ სამ ნებისმიერ მუდმივაზე. ვიპოვნოთ იგი ცვლადების განცალკევების გზით, ანუ ასეთი სახით:

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda). \tag{245}$$

ჩავსვათ (245) (244)-ში და მივიღებთ:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{d\mathrm{W}_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1 \tag{246}$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$\frac{d\mathrm{W}_3}{d\lambda} = \alpha_3, \qquad \left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} = \alpha_2^2. \tag{247}$$

მაშინ მივიღებთ:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \tag{248}$$

აქედან შეკვეცილი მოქმედება ტოლია:

$$W = \alpha_3\lambda + \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr. \tag{249}$$

ამოცანის ზოგადი ამონახსნი უკვე შემდეგი დამოკიდებულებებით გამოისახება:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \tag{250}$$

რომლებიც ჩვენს შემთხვევაში გვაძელვს შემდეგს:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = t + \alpha_1, \tag{251}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \alpha_2 \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} - \alpha_2 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2, \tag{252}$$

$$\lambda - \alpha_3 \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}} = \beta_3. \tag{253}$$

ინტეგრირების α_i, β_i ექვს მუდმივას, რომლებიც განსაზღვრავენ ორი სხეულის ზოგადი ამოცანის ამოხსნას ჰამილტონ-იაკობის ფორმით, უწოდებენ ***იაკობის ელემენტებს***.

ფორმალურად, ჩვენ გადავწყვიტეთ დასმული ამოცანა. თუმცა შემდგომისათვის, ჩვენ გვჭირდება განვსაზღვროთ კავშირი იაკობის და კეპლერის ელემენტებს შორის. ამისათვის უნდა გამოვთვალოთ ინტეგრალები (251)-(253) ფორმულებში. რადგან (253) ფორმულიდან $\cos^2\varphi > \alpha_3^2/\alpha_2^2$, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2} = \cos i. \tag{254}$$

თუ (253)-ში მოვახდენთ შესაბამის ცვლილებებს, მაშინ მისი ინტეგრირების და გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} i \cdot \sin(\lambda - \beta_3). \tag{255}$$

(255) გავამრავლოთ $r\cos\varphi\cos i$ -ზე და დეკარტეს და სფერულ კოორდინატებს შორის კავშირის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\sin\beta_3 \sin i \cdot x - \cos\beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0 \tag{256}$$

ამდენად, მივიღეთ მოძრაობის სიბრტყის განტოლება და (110)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ β_3 მუდმივა არის კვანძის გრძედი, ხოლო ზემოთ შემოტანილი კუთხე i ემთხვევა ორბიტის დახრის კუთხეს i.

იმისათვის, რომ ვიპოვნოთ პირველი ინტეგრალი (252)-ში, შევცვალოთ ინტეგრირების მუდმივა:

$$\sin\varphi = \sin i \sin u \tag{257}$$

სადაც გრძედის არგუმენტია $u = \omega + \nu$. მაშინ, ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ, რომ

$$\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = u - \beta_2. \tag{258}$$

თუ $s = 1/r$ ცვლილების მეშვეობით გამოვთვლით (258) ინტეგრალს, მივიღებთ ორბიტის განტოლებას

$$r = \frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}\cos(u - \beta_2)}}. \tag{259}$$

თუ (259)-ს შევადარებთ (87)-(89)-ს, დავინახავთ, რომ

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu^2} = p, \quad \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}} = e, \quad \beta_2 = \omega \tag{260}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \tag{261}$$

(261)-ის პირველი ტოლობიდან ჩანს, რომ α_2 ელემენტი ტოლია c კინეტიკური მომენტის, ხოლო მეორედან გამომდინარეობს ჩვენთვის უკვე ცნობილი დამოკიდებულება სრული ენერგიის ნიშანსა (რომელიც ტოლია α_1 მუდმივასი) და ორი სხეულის ამოცანაში მოძრაობის ტიპს შორის. (254) და (261)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_3 = \sqrt{\mu p}\cos i. \tag{262}$$

საბოლოოდ, თუ გამოვითვლით (258) ინტეგრალს r მანძილის უმცირესი მნიშვნელობიდან (პერიცენტრში მისი მნიშვნელობა) r მანძილის მიმდინარე მნიშვნელობამდე, მაშინ მოთხოვნა, რომ მარცხენა და მარჯვენა ნაწილები (258)-ში ერთდროულად უტოლდებოდეს ნოლს, გვაძლევს მნიშვნელობას $\beta_1 = -\tau$.

დასკვნისათვის ერთად მოვუყაროთ თავი ფორმულებს, რომლებიც კეპლერის ელემენტებს გამოხატავენ იაკობის ელემენტების მეშვეობით და პირიქით. შედეგად მივიღებთ:

$$\Omega = \beta_3, \quad \omega = \beta_2, \quad \cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \quad \tau = -\beta_1 \qquad (263)$$

და

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1), \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu p}\cos i,$$
$$\beta_1 = -\tau, \beta_2 = \omega, \quad \beta_3 = \Omega. \qquad (264)$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ იაკობის ელემენტები α_i – ნაწილაკის მოძრაობის სწორედ ის მახასიათებლებია, რომელთა დაკვანტვაც ხდება მიკროფიზიკაში.

ლექცია 12. მოძრაობა ცენტრალური ძალის გავლენით

ორი სხეულის ამოცანაში მოქმედი ძალის მნიშვნელოვანი თავისებურებაა მისი ცენტრალური ხასიათი ანუ ის, რომ ძალის მოქმედების წრფე ყოველთვის გადის ერთ და იგივე წერტილზე – მიზიდულობის ცენტრზე. ამიტომ, ამ ძალის ჩაწერა შესაძლებელია შემდეგი სახით:

$$\vec{F} = F(r)\,\vec{r}^{0}, \tag{265}$$

სადაც $\vec{r}^{0}$ - $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის ორტია. ფუნქციის

$$F(r) = -\frac{\mu}{r^{2}}, \tag{266}$$

მოდული განსაზღვრავს ძალის სიდიდეს, ხოლო ნიშანი – მისი მოქმედების თავისებურებას (ანუ ის, რომ იგი მიზიდულობის ძალაა).

განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა – თავისუფალი ცენტრალური ძალის გავლენით მოძრაობის ამოცანა. ეს ძალა ანუ

$$F = F(r, \dot{r}, t) \tag{267}$$

არის r მანძილის, მისი $\dot{r}$ ცვლილების სიჩქარის და დროის თავისუფალი ფუნქცია. პირველ რიგში, ეს საშუალებას მოგვცემს გავარკვიოთ ორი სხეულის ამოცანის რა თვისებები გამომდინარეობს მასში მოქმედი ძალის ცენტრალური ხასიათიდან, ხოლო რა თვისებები – მისი r მანძილზე დამოკიდებულებიდან. მეორე, ასეთ ამოცანას შესაძლებელია ჰქონდეს გარკვეული პრაქტიკული გამოყენება. ეს შესაძლოა იყოს ვარსკვლავის მოძრაობა ვარსკვლავთ სფერულ გროვაში, სადაც F ფუნქციის სახე განისაზღვრება ამ გროვაში ვარსკვლავთ სიმკვრივის განაწილებით. ასევე შეიძლება განვიხილოთ პლანეტის მოძრაობა ვარსკვლავის მახლობლად, რომელიც ინტენსიურად კარგავს მასას, სადაც $F = F_1(t)/r^2$.

განსახილველ ამოცანაში (72) განტოლების განზოგადებით ჩავწეროთ ფარდობითი მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{\vec{r}} - F(r, \dot{r}, t)\,\vec{r}^{0} = 0. \tag{268}$$

(268) განტოლება გავამრავლოთ მარცხნიდან $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორზე და მივიღებთ მომენტის ინტეგრალს:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0 \Rightarrow \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \qquad (269)$$

ამდენად, მომენტის ინტეგრალის არსებობა და ყველა აქედან გამომდინარე შედეგი, განპირობებულია სწორედ მოქმედი ძალის ცენტრალური ხასიათით. ამ შედეგებიდან ყველაზე მნიშვნელოვანი არის ცენტრალური ძალის გავლენით გამოწვეული მოძრაობის ბრტყელი ხასიათი. მოძრაობის სიბრტყის არსებობა, რომლის განტოლებაა $\vec{c} \cdot \vec{r} = 0$, საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ კვანძების წრფის და ორბიტის ელემენტების მცნებები, რომლებიც განსაზღვრავენ სივრცეში ამ სიბრტყის მდებარეობას აღმავალი კვანძის გრძედის Ω, ორბიტის დახრილობის i მეშვეობით (ნახაზი 12). მაშინ კინეტიკური მომენტის ვექტორის კომპონენტები ტოლია:

$$c_1 = c \sin\Omega \sin i\,,$$
$$c_2 = -c \cos\Omega \sin i, \qquad (270)$$
$$c_3 = c \cos i.$$

ასევე, შესაძლებელია შემოვიღოთ პოლარული ორბიტული კოორდინატები r და w, სადაც პოლარული კუთხე w აითვლება აღმავალი კვანძის მიმართულებიდან. ამასთან, კუთხე w არის ორი სხეულის ამოცანაში გრძედის u არგუმენტის ანალოგი. ამჯერად, რადიუს-ვექტორი და მისი ორტი შესაძლოა წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

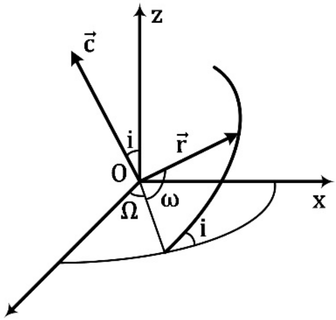
$$\vec{r} = r(t)\, \vec{r}^0\big(w(t)\big), \;\; \vec{r}^0 \equiv \Big(\alpha\big(w(t)\big), \beta\big(w(t)\big), \gamma\big(w(t)\big)\Big), \qquad (271)$$

სადაც $\vec{r}^0$ ორტის კომპონენტები, რომლებიც წარმოადგენენ $\vec{r}$ ვექტორის მიმართულების კოსინუსებს, განისაზღვრება (102) და (103) ფორმულებში u სიდიდის w სიდიდეზე შეცვლით. იმისათვის, რომ (271) ჩავსვათ მოძრაობის (268) განტოლებაში, უნდა მოვახდინოთ (271)-ის ორმაგი დიფერენცირება t დროით:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\vec{r}^0, \;\; \ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{r}^0 + 2\dot{r}\vec{r}^{0\prime}\dot{w} + r\vec{r}^{0\prime\prime}w'^2 + r\vec{r}^{0\prime}\ddot{w} \qquad (272)$$

სადაც $'$ ნიშანი მიუთითებს w წარმოებულს. მიმართულების კოსინუსების წრფივი დამოკიდებულება სიდიდეებზე $\sin w$ და $\cos w$ და ტრიგონომეტრიული ფუნქციების დიფერენცირების წესი გვაძლევს შემდეგს:

$$\vec{r}^{0\prime} = \vec{r}^0_\perp, \quad \vec{r}^{0\prime\prime} = -\vec{r}^0, \qquad (273)$$



ნახაზი 12. მოძრაობა ცენტრალური ძალის გავლენით

სადაც $\vec{r}_{\perp}^{0}$ არის ორტი მოძრაობის სიბრტყეში, რომელიც პერპენდიკულარულია $\vec{r}^{0}$ ორტის. ამჯერად, (273) ჩავსვათ (272)-ში, ხოლო (272) – (268)-ში, მივიღებთ, რომ

$$(\ddot{r} - r\dot{w}^2 - F)\,\vec{r}^0 + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\vec{r}_{\perp}^0 = 0. \tag{274}$$

რადგან ორტები $\vec{r}^0$ და $\vec{r}_{\perp}^0$ წრფივად დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ (274) ტოლობა სამართლიანია მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\ddot{r} - r\dot{w}^2 = F,$$
$$r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w} = 0 \tag{275}$$

(275) განტოლებებიდან მეორე ინტეგრირდება ერთხელ, თუ გავამრავლებთ r-ზე. ასეთ შემთხვევაში, მივიღებთ

$$r^2\dot{w} = c. \tag{276}$$

ინტეგრალი (276) შესაძლებელია მივიღოთ ასევე, თუ განვიხილავთ მომენტის ინტეგრალის მოდულს. ამისათვის ინტეგრირების მუდმივა (276)-ში უნდა უდრიდეს $c = |\vec{c}|$. თუ (275)-ის პირველი განტოლებიდან გამოვრიცხავთ წარმოებულს $\dot{w}$, მივიღებთ განტოლებას r რადიუსისთვის:

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = F(r, \dot{r}, t) \tag{277}$$

თუ ამ განტოლებიდან შევძლებთ ვიპოვნოთ $r = r(t)$ რადიუსი, მაშინ (276) მოგვცემს მოძრაობის კანონს შემდეგი სახით:

$$w = w_0 + c\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{r(t)}. \tag{278}$$

(277) განტოლების ინტეგრირების შესაძლებლობა დამოკიდებულია F ფუნქციის სახეზე. თუ იგი არ არის დამოკიდებული t დროზე, მაშინ მიზანშეწონილია გადავიდეთ t დამოუკიდებელი ცვლადიდან ახალ არგუმენტზე w. გარდა ამისა, შესაძლებელია გამოვრიცხოთ c^2/r^3-ის არაწრფივობა, თუ მოვახდენთ ჩანაცვლებას დამოკიდებული ცვლადით $r = 1/u$. თუ გამოვითვლით წარმოებულებს $\dot{r}$ და $\ddot{r}$, მაშინ (276)-ის მეშვეობით ვიპოვნით:

$$\dot{r} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2u^2u'', \tag{279}$$

ხოლო თუ (279)-ს ჩავსვავთ (277)-ში, მივიღებთ განტოლებას შებრუნებული u მანძილისათვის წრფივი მარცხენა ნაწილით:

$$u'' + u = -\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u}, -cu'\right). \tag{280}$$

ეს განტოლება ცნობილია როგორც ***ბინეს განტოლება***. იგი შეიძლება ინტეგრირდეს, თუ F ძალა წარმოადგენს მხოლოდ u სიდიდის ფუნქციას. ამ შემთხვევაში ხდება ცვლადის ცვლილება $p(u) = u'$, ანუ u სიდიდეს ირჩევენ დამოუკიდებელი ცვლადის სახით. მაშინ ბინეს განტოლება გარდაიქმნება პირველი რიგის განტოლებად:

$$p\frac{dp}{du} + u = -\frac{1}{c^2u^2}F(u) \equiv \Phi(u). \tag{281}$$

ამ განტოლებაში გამოვყოთ ცვლადები, რაც ინტეგრირების შემდეგ გვაძლევს:

$$p^2 = p_0^2 - u^2 + u_0^2 + 2\int_{u_0}^{u} \Phi(u)du. \tag{282}$$

თუ ამოვხსნით განტოლებას $p(u) = u'$, მივიღებთ:

$$w = w_0 + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{p(u)} \tag{283}$$

და თუ კვლავ გამოვიყენოთ (276)-ს, ვიპოვნით დამოკიდებულებას:

$$\int_{w_0}^{w} \frac{dw}{u^2(w)} = c(t - t_0). \quad (284)$$

ამდენად, ნაპოვნია ცენტრალური ძალის გავლენით მოძრაობის ამოცანის ზოგადი ამოხსნა, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ მანძილზე $r = 1/u$, რადგან გვაქვს ექვსი დამოუკიდებელი ინტეგრირების მუდმივა $\vec{c}, p_0, u_0, w_0$. თუმცა, ამ შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნის მიღება შესაძლებელია სხვა გზითაც, თუ შემდეგი დამოკიდებულებით შემოვიღებთ ძალოვან ფუნქციას:

$$F(r) = \frac{dU}{dr}. \quad (285)$$

მაშინ, თუ ბინეს განტოლებას გავამრავლებთ u'-ზე, შესაძლოა ვიპოვნოთ მისი პირველი ინტეგრალი:

$$c^2 u'^2 + c^2 u^2 = 2U + h. \quad (286)$$

ხოლო თუ (286) ინტეგრალში დავბრუნდებით r და t ცვლადებზე, მაშინ მივიღებთ:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{w}^2 = 2U + h, \quad (287)$$

ანუ პირველ ინტეგრალს, რომელიც წარმოადგენს ენერგიის ინტეგრალს.

დავუბრუნდეთ ორი სხეულის ამოცანას, როგორც განხილული ამოცანის კერძო შემთხვევას, ანუ დავუშვათ $F = -\mu/r^2 = -\mu u^2$. მაშინ დავინახავთ, რომ ბინეს განტოლების მარჯვენა მხარე გადაიქცევა მუდმივად μ/c^2, ხოლო თავად ბინეს განტოლება – მუდმივი კოეფიციენტების და მუდმივი მარჯვენა მხარის მქონე წრფივ განტოლებად.

მისი ამოხსნა ხდება ცნობილი სტანდარტული მეთოდით და შესაძლებელია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$u = \frac{\mu}{c^2} + A\cos(w - \omega). \quad (288)$$

თუ დავუშვებთ, რომ ინტეგრირების თავისუფალი წევრი $A = e\,\mu/c^2$, ხოლო მუდმივა $\mu/c^2 = p$, მივიღებთ ჩვენთვის უკვე ცნობილ კეპლერის ორბიტის განტოლებას:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(w - \omega)}. \qquad (289)$$

ლექცია 13. ორი სხეულის რელატივისტური ამოცანა

რადგან ზოგადი ფარდობითობის თეორია, როგორც წესი, არ შედის თეორიული ფიზიკის ძირითად კურსში, მოკლედ განვიხილოთ ამ თეორიის ფიზიკური და მათემატიკური საფუძვლები.

ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ელემენტები

ზოგადი ფარდობითობის თეორია ეფუძნება ცნობილ, მაღალი სიზუსტით დადასტურებულ ექსპერიმენტულ ფაქტს ნებისმიერი ფიზიკური სხეულის ინერციული და გრავიტაციული მასების ტოლობის შესახებ. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს კავშირი ინერციით მოძრაობასა და გრავიტაციულ ველში მოძრაობას შორის. ეს კავშირი თავს იჩენს ინერციულ ათვლის სისტემაში გრავიტაციულ მოძრაობასა და შესაბამის არაინერციულ ათვლის სისტემაში თავისუფალ მოძრაობას შორის არსებულ ***ექვივალენტობის პრინციპში***.

რადგან ნებისმიერ გრავიტაციულ ველში მოძრაობა არათანაბარი და მრუდწიროვანია, ამიტომ აუცილებელია ბრტყელი ოთხგანზომილებიანი მინკოვსკის ფარდობითობის სპეციალური თეორიის სივრცე-დროიდან გადავიდეთ ზოგადი ფარდობითობის თეორიის გამრუდებულ სივრცე-დროზე.

ეს აუცილობლობა დაკავშირებულია იმასთან, რომ გრავიტაციულ ველში მოძრაობიდან არაინერციულ ათვლის სისტემაში თავისუფალ მოძრაობაზე გადასვლისას, არ შეიძლება სივრცის სასრულ ნაწილში შემოვიღოთ დეკარტეს კოორდინატთა სისტემა მრუდწიროვანის ნაცვლად, როგორც ეს ყოველთვის შესაძლებელია გავაკეთოთ მინკოვსკის ბრტყელ სივრცე-დროში. შესაბამისად, აუცილებელია განვაზოგადოთ ფარდობითობის სპეციალურ თეორიაში ცნობილი ინტერვალების გამოსახულება

$$ds^2 = c^2t^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (290)$$

და შევცვალოთ იგი კოორდინატების თავისუფალ კვადრატულ ფორმად:

$$ds^2 = \sum_{i=0}^{3}\sum_{k=0}^{3} g_{ik}dx^i dx^k. \quad (291)$$

აქ კოეფიციენტების ერთობლიობა

$$g_{ik} = g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{292}$$

წარმოქმნის ***ფუნდამენტალურ*** ან ***მეტრიკულ ტენზორს***, რომელიც განსაზღვრავს სივრცე-დროის მეტრიკულ თვისებებს (მეტრიკას). გამოსახულებებში (290)-(292) გამოყენებულია გადასვლა კოორდინატთა ინდექსურ აღნიშვნაზე და ჩათვლილია, რომ $ct = x^0$, სადაც c – სინათლის სიჩქარეა. ტენზორი g_{ik} აღწერს სივრცე-დროის სიმრუდეს და ამავე დროს, აღწერს გრავიტაციულ ველსაც, რადგან ფარდობითობის ზოგადი თეორიის თვალსაზრისით გრავიტაცია როგორც ფიზიკური მოვლენა ამ სიმრუდეში ავლენს სწორედ თავს.

გამოსახულებებში (290)-(292) ყურადღებას იპყრობს ზედა და ქვედა ინდექსების არსებობა. მათი გამოჩენა დაკავშირებულია იმასთან, რომ მრუდწიროვან კოორდინატთა სისტემებში უნდა განვასხვავოთ ვექტორული და ტენზორული სიდიდეების განსაზღვრის ორი შესაძლო ფორმა – კოვარიანტული და კონტრავარიანტული. განსაზღვრის თანახმად, **კონტრავარიანტულ** ვექტორს უწოდებენ ვექტორს, რომელიც x'^k კოორდინატთა სისტემიდან x^i სისტემაზე გადასვლისას ისევე გარდაიქმნება, როგორც დიფერენციალი

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k, \tag{293}$$

ანუ

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k, \tag{294}$$

დაწყებული (293) და (294) გამოსახულებებიდან გამოვიყენებთ ეინშტეინის ***აჯამვის წესს***, რომლის მიხედვით აჯამვა ხდება ინდექსების მიხედვით, რომლებიც მოცემულ გამოსახულებაში გვხვდება ორჯერ, ერთხელ როგორც ზედა, მეორეჯერ – როგორც ქვედა. ***კოვარიანტული ვექტორი*** არის ვექტორი, რომელიც გარდაიქმნება როგორც სკალარული ფუნქციის გრადიენტი

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x'^k}, \tag{295}$$

ანუ

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \tag{296}$$

გეომეტრიული თვალსაზრისით ამ ორი ტიპის ვექტორების (უფრო სწორად, ერთი და იგივე ვექტორული სიდიდის ორი ფორმის) გამოჩენა დაკავშირებულია იმასთან, რომ ვექტორი შესაძლებელია გამოვსახოთ როგორც

მისი კომპონენტებით, რომლებიც წარმოადგენენ ამ ვექტორის კოორდინატთა ღერძების ორტებად დაშლის კოეფიციენტებს (კონტრავარიანტული ფორმა), ასევე ვექტორის პროექციებით კოორდინატთა ღერძებზე (კოვარიანტული ფორმა). ეს ორი ფორმა განსხვავებული იქნება მახვილკუთხოვან კოორდინატთა სისტემაში (ნახაზი 13), მაგრამ დაემთხვევა ერთმანეთს - მართკუთხა სისტემაში. ერთი ფორმიდან მეორეზე გადასვლა (ე.წ. ინდექსების აწევა ან დაწევა) ხორციელდება ვექტორის გამრავლებით ფუნდამენტალურ ტენზორზე. მაგალითად,

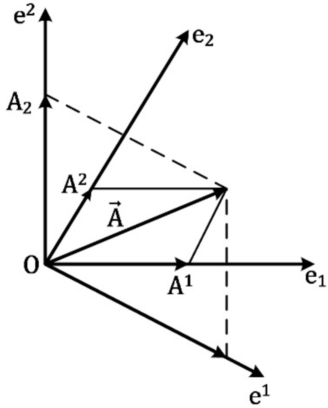
$$A_i = g_{ik}A^k. \tag{297}$$

ტენზორებიც შეიძლება იყოს კოვარიანტული (A_{ik}), კონტრავარიანტული (A^{ik}) და ასევე, შერეული $\left(A_k^i\right)$. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორები ურთიერთსაპირისპიროა ანუ $g_{il} \cdot g^{kl} = \delta_i^k$ - არის ერთეულოვანი ტენზორი. ტენზორებზე ასევე ვრცელდება ინდექსების აწევა-დაწევის წესი.

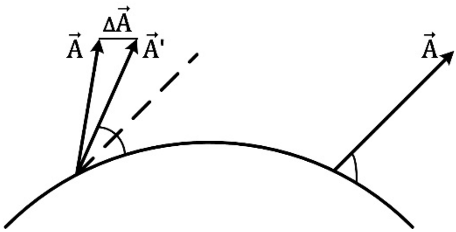
სივრცე-დროის გამრუდება იწვევს ვექტორების და ტენზორების, როგორც კოორდინატების ფუნქციების, დიფერენცირების გარკვეულ გართულებას. იმისათვის, რომ მივიღოთ წარმოებული, საჭიროა (მისი განმარტების თანახმად) თავდაპირველად ვიპოვნოთ დიფერენცირებადი ფუნქციის მნიშვნელობების სხვაობა ორ მახლობელ წერტილში. თუ ეს ფუნქცია არის ვექტორი, ამისათვის საჭიროა ვექტორის საწყისი წერტილი გადავიტანოთ ერთი წერტილიდან მეორეში. თუ ვითვლით კერძო წარმოებულს რომელიღაც კოორდინატით, მაშინ ასეთი გადატანა ხდება შესაბამის კოორდინატთა ღერძის გასწვრივ, რომელიც გამრუდებულია და ამიტომ, ვექტორის კომპონენტები ასეთი გადატანისას დამატებით იცვლებიან (ნახაზი 14). რადგან გადატანა ხდება უსასრულოდ ახლო მდებარე წერტილებს შორის, ამიტომ ეს ცვლილება შეიძლება ჩავთვალოთ წრფივი როგორც ვექტორის კომპონენტების, ასევე კოორდინატთა დიფერენციალების მიხედვით. სხვანაირად რომ ვთქვათ, კონტრავარიანტული ვექტორის სრული დიფერენციალი მრუდწიროვან კოორდინატებში შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$DA_i = \frac{\partial A^i}{\partial x_k}dx^k + \Gamma_{kl}^i A^l dx^k, \tag{298}$$

სადაც Γ_{kl}^i კოექფიციენტების ერთობლიობას უწოდებენ ***კრისტოფელის სიმბოლოებს*** (ან შეკავშირების კოეფიციენტებს). გავყოთ (298) dx^k-ზე და მივიღებთ ე.წ. ვექტორის ***კოვარიანტულ წარმოებულს***:



ნახაზი 13. ვექტორის კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტები.



ნახაზი 14. ვექტორის პარალელური გადატანა მრუდხაზოვან კოორდინატთა სისტემაში.

$$A^i_{,k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl} A^l. \tag{299}$$

კოვარიანტული ვექტორისათვის კოვარიანტული წარმოებული ტოლია:

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} A_l. \tag{300}$$

კრისტოფელის სიმბოლოები Γ^i_{kl}, რომლებიც წარმოადგენენ სივრცე-დროის გამრუდების გარკვეულ ზომას, არ წარმოქმნიან მესამე რანგის ტენზორს. ისინი არიან მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების წარმოებულების წრფივი

ფუნქციები (რაც უფრო გამრუდებულია სივრცე, მით უფრო სწრაფად იცვლება ვექტორი მისი გადატანისას):

$$\Gamma_{kl}^{i} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}} \right). \tag{301}$$

ტენზორების შემთხვევაში ხდება კოვარიანტული დიფერენცირების ფორმულების განზოგადება. მაგალითად:

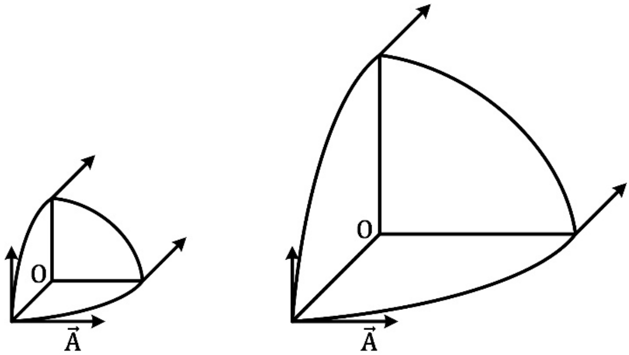
$$A_{k;l}^{i} = \frac{\partial A_{k}^{i}}{\partial x^{l}} - \Gamma_{kl}^{m} A_{m}^{l} + \Gamma_{ml}^{k} A_{m}^{m}. \tag{302}$$

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ყოველთვის შეიძლება ავირჩიოთ ისეთი ათვლის სისტემა, სადაც მოცემულ წერტილში კრისტოფელის ყველა სიმბოლო ტოლია ნოლის. ამიტომ, სასურველია გვქონდეს სივრცე-დროის გამრუდების ისეთი ზომა, რომელსაც ექნებოდა ტენზორული ხასიათი და გაუტოლდებოდა 0-ს მხოლოდ ბრტყელ სივრცეში. ასეთ ზომას წარმოადგენს ***სიმრუდის ტენზორი***. მისი შემოღება შეიძლება შემდეგნაირად: რაც უფრო მეტი იქნება სივრცის გამრუდება, მით უფრო მეტი იქნება გარკვეული ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ პარალელური გადატანისას ვექტორის ცვლილების შეფარდება ფართობთან, რომელსაც შემოწერს ეს კონტური. მაგალითად, ვექტორის მოტრიალება ორი სფეროს ოქტანტების საზღვრების შემოვლისას (ნახაზი 15) ერთნაირია და ტოლია 90°-ის, ხოლო ფართობი ნაკლებია უფრო მცირე რადიუსის და, შესაბამისად, უფრო მეტი სიმრუდის მქონე სფეროს ოქტანტისათვის. ვექტორის ცვლილება ჩაკეტილი კონტურის L შემოვლისას ტოლია:

$$\Delta A_{k} = \oint_{L} \Gamma_{kl}^{i} A_{i} dx^{l}. \tag{303}$$

სტოქსის თეორემის მეშვეობით (303)-ში წრიულიდან გადავიდეთ ზედაპირულ ინტეგრალზე L კონტურით შემოსაზღვრული S ზედაპირის მიხედვით. ამავე დროს, აუცილებელი წარმოებულები გამოვთვალოთ (299) ფორმულით. საბოლოოდ, L კონტურის და S ზედაპირის უსასრულოდ შემცირებით, მივიღებთ:

$$\Delta A_{k} = \frac{1}{2} R_{klm}^{i} A_{i} \Delta S^{lm}, \tag{304}$$



ნახაზი 15. ვექტორის მობრუნება ჩაკეტილი კონტურის გასწვრივ მისი პარალელური გადატანისას.

ამასთან, S^{lm} კოორდინტული ზედაპირის ΔS^{lm} ელემენტი მოიცემა ორი ინდექსით – ამ ზედაპირზე მდებარე კოორდინატული წრფეების ინდექსების მიხედვით. ამჯერად, გაორმაგებული შეფარდება $\Delta A_k/A_i\Delta S^{lm}$, რომელიც წარმოადგენს მეოთხე რანგის R^i_{klm} ტენზორს, იქნება სწორედ სივრცე-დროის გამრუდების ზომა წერტილში, რომლისკენაც იკეცება L კონტური და S ზედაპირი. გამოთვლები უჩვენებს, რომ სიმრუდის ტენზორი (ანუ ***რიმან-კრისტოფელის ტენზორი***) ტოლია:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \qquad (305)$$

(301)-ის გათვალისწინებით ვხედავთ, რომ სიმრუდის ტენზორის კომპონენტები შეიცავენ წრფივად მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების მეორე წარმოებულებს და პირველი წარმოებულების ნამრავლებს. თუ შევკუმშავთ ამ ტენზორს i და m ინდექსების მიხედვით, მივიღებთ ***მეორე რანგის სიმრუდის ტენზორს*** (***რიჩის ტენზორს***)

$$R_{kl} = \frac{\partial \Gamma^m_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^m_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^m_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{kl}. \qquad (306)$$

ხოლო თუ შევკუმშავთ რიჩის ტენზორს, მივიღებთ ***სკალარულ სიმრუდეს*** $R = g^{kl}R_{kl}$. სიმრუდის ტენზორების R^i_{klm} და R_{kl} ყველა კომპონენტი უტოლდება ნოლს მხოლოდ ბრტყელ სივრცე-დროში.

ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ძირითადი იდეის შესაბამისად სივრცე-დროის გამრუდების მახასიათებლები უნდა განისაზღვრებოდეს მასში მოთავსებული მატერიის განაწილებით და მოძრაობით. ეს განაწილება და მოძრაობა აღიწერება ენერგია-იმპულსის ტენზორით:

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \frac{W_1}{c} & \frac{W_2}{c} & \frac{W_3}{c} \\ \frac{W_1}{c} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \frac{W_2}{c} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ \frac{W_3}{c} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}, \qquad (307)$$

სადაც დროითი კომპონენტი T_{00} - არის ***ენერგიის სიმკვრივე***, შერეული კომპონენტები T_{0k} $(k \neq 0)$ შეადგენენ $1/c$ თანამამრავლის სიზუსტით ***ენერგიის ნაკადის*** ვექტორს $\vec{W}$ (უმოვ-პოინტინგის ვექტორი), ხოლო ენერგია-იმპულსის სივრცული ნაწილი არის სამგანზომილებიანი დაძაბულობის ტენზორი p_{ik} $(i, k = 1,2,3)$. მისი დიაგონალური კომპონენტები არის წნევა კოორდინატთა ღერძების გასწვრივ, ხოლო არადიაგონალური p_{ik} $(i \neq k)$ – წანაცვლების სიმკვრივეების k-ური კომპონენტებია სიბრტყეებში, რომლებიც მართობულია x^i ღერძებისა. ენერგია-იმპულსის ტენზორის ზემოთ მოყვანილი ფორმა გულისხმობს უწყვეტი მატერიალური ობიექტების აღწერას (მყარი სხეულები, ფიზიკური ველები). დისკრეტული სისტემების აღსაწერად უნდა გამოვიყენოთ ე.წ. განზოგადებული ფუნქციები, რომელთა ყველაზე მარტივი და ცნობილი წარმომადგენელია დირაკის δ-ფუნქცია.

რადგან ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ძირითადი განტოლების ერთ-ერთი კომპონენტი გრავიტაციულ ველზე სასაზღვრო გადასვლისას, როდესაც გრავიტაციული პოტენციალის შეფარდება სინათლის სიჩქარის კვადრატთან ხდება მცირე $(V/c^2 \ll 1)$, უნდა გადავიდეს პუასონის წრფივ განტოლებაში $\nabla^2 V = 4\pi f \rho$. ამიტომ, ეს საძიებო განტოლება უნდა იყოს g_{ik}, R_{ik} და T_{ik} ტენზორების მიმართ წრფივი, ანუ მას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$R_{ik} + a g_{ik} = b T_{ik}. \qquad (308)$$

სიმრუდის ტენზორის თვისება, რომელიც აკმაყოფილებს ზოგიერთ იგივობებს (ბიანკის და ეინშტეინის იგივობები), საშუალებას იძლევა ვიპოვნოთ a კოეფიციენტი, ხოლო სასაზღვრო გადასვლა $V \ll c^2$ – გვაძლევს b კოეფიციენტს. საბოლოოდ, განტოლებები, რომლებიც განსაზღვრავენ როგორც სივრცე-დროის მეტრიკას, ასევე მასში გრავიტაციის გავლენით მატერიის მოძრაობას (***ეინშტეინის განტოლება***), აქვს შემდეგი სახე:

$$R_{ik}-\frac{1}{2}Rg_{ik}=\frac{8\pi f}{c^4}T_{ik}. \qquad (309)$$

რა თქმა უნდა, მოყვანილი მსჯელობა არ არის ეინშტეინის განტოლების მკაცრი გამოყვანა. ზოგადი ფარდობითობის თეორიის უფრო დეტალური გაცნობისათვის უნდა მივმართოთ დამატებით ლიტერატურას.

ცენტრალური სიმეტრიის ველი

განვიხილოთ საკითხი იმის შესახებ, თუ როგორ სახის გრავიტაციულ ველს, ანუ როგორ მეტრიკას ქმნის თავის გარშემო მატერიალური წერტილი ან სხეული ნივთიერების სფერული სიმეტრიის მქონე განაწილებით. ბუნებრივია, ამისათვის გამოვიყენოთ სფერულ კოორდინატთა სისტემა: $x^0=ct$, $x^1=r$, $x^2=\varphi$, $x^3=\theta$,სადაც φ - გრძედია, ხოლო θ - პოლარული მანძილი. რადგან სივრცის თვისებები უნდა იყოს ერთნაირი ყველა მიმართულებით, მათ შორის რადიუს-ვექტორის მართობულად, ამიტომ, მეტრიკული ტენზორის სივრცული არადიაგონალური კომპონენტები უნდა იყოს 0-ის ტოლი, ხოლო დამოკიდებულება კუთხურ კოორდინატებზე უნდა იყოს ისეთივე, როგორც ბრტყელ სივრცეში. ეს საშუალებას იძლევა ჩავწეროთ ინტერვალის გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}&ds^2=h(r,t)c^2dt^2-l(r,t)dr^2\\&-k(r,t)(\sin^2\theta d\varphi^2+d\,\theta^2)+a(r,t)dtdr.\end{aligned} \qquad (310)$$

ათვლის სისტემის არჩევის თავისუფლება საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ კოორდინატთა შემდეგი გარდაქმნა $r=f_1(r',t')$ და $t=f_2(r',t')$, რათა მივიღოთ $a(r,t)=0$ და $k(r,t)=r^2$. მაშინ, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $h(r,t)=e^{\nu}$ და $l(r,t)=e^{\lambda}$, მივიღებთ:

$$ds^2=e^{\nu}c^2dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(\sin^2\theta d\varphi^2+d\,\theta^2). \qquad (311)$$

(311) გამოსახულება გვაძლევს მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების შემდეგ მნიშვნელობებს:

$$g_{00}=e^{\nu},\;\; g_{11}=-e^{\lambda},\;\; g_{22}=-r^2\sin^2\theta,\;\; g_{33}=-r^2. \qquad (312)$$

პრინციპულად არა რთული, მაგრამ საკმაოდ გრძელი გამოთვლების შედეგად, (301)-ის მეშვეობით შეგვიძლია ვიპოვნოთ კრისტოფელის სიმბოლოები. აღმოჩნდა, რომ 0-სგან განსხვავებული სიმბოლოებია (სიმეტრიის $\Gamma^i_{kl}=\Gamma^i_{lk}$ თვისებების სიზუსტით):

$$\Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2} \quad \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2} \quad \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}$$
$$\Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} \tag{313}$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^3_{23} = ctg\,\theta \quad \Gamma^1_{33} = re^{-\lambda}\sin^2\theta \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

აქ შტრიხი აღნიშნავს წარმოებულს r-ით, ხოლო წერტილი – ct-თი. (306) ფორმულიდან მეორე რანგის სიმრუდის ტენზორის კომპონენტების გამოთვლით და იმის გათვალისწინებით, რომ ჩვენ ვეძებთ ველს, რომელსაც ქმნის სფერული სიმეტრიის მქონე სხეული მის გარშემო სიცარიელეში, ანუ იქ, სადაც ენერგია-იმპულსის ტენზორი $T_{ik} = 0$, (312)-დან ν და λ ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$e^{-\lambda}\left(\nu' + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = 0$$
$$e^{-\lambda}\left(\lambda' - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = 0 \tag{314}$$
$$\dot{\lambda} = 0$$

(314)-ის მესამე განტოლებიდან ჩანს, რომ λ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული t დროზე. პირველი ორი განტოლების ჯამიდან გამომდინარეობს, რომ $\lambda + \nu = f(t)$, რაც ნიშნავს, რომ e^{λ} და e^{ν} ფუნქციები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან მხოლოდ დროითი მამრავლით. თუ მოვახდენთ დროის ისეთ გარდაქმნას, რომ ფუნქცია $f(t) = 0$, მაშინ - $e^{\nu} = e^{-\lambda}$. (314) სისტემის მეორე განტოლებაში ცვლადები შეიძლება გამოვყოთ და იგი ინტეგრირების შემდეგ მივიღებთ:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_g}{r}, \tag{315}$$

სადაც r_g – ინტეგრირების მუდმივაა. საკმარისად დიდ r მანძილებზე უნდა მივიღოთ ნიუტონის მსოფლიო მიზიდულობის კანონი, ანუ პოტენციალი $V = fM/r$, სადაც M - სხეულის მასაა, რომელიც ქმნის სფერული სიმეტრიის ველს. ხოლო, თუ ეინშტეინის განტოლებაში შემოვიფარგლებით V/c^2 რიგის წევრებით, ვიპოვნით, რომ $g_{00} = 1 - 2V/c^2$. აქედან გამომდინარეობს, რომ მუდმივა

$$r_g = \frac{2fM}{c^2}. \tag{316}$$

სიდიდე r_g-ს უწოდებენ სხეულის ***გრავიტაციულ რადიუსს***. საინტერესოა, რომ (316) ფორმულა იპოვნა ჯერ კიდევ დაახლოებით ორასი წლის წინ პიერ ლაპლასმა. მან დასვა კითხვა: როგორი უნდა იყოს M მასის მქონე სხეულის რადიუსი, რათა მის ზედაპირზე პარაბოლური სიჩქარე ტოლი იყოს სინათლის სიჩქარის და სინათლემ ნაკლები რადიუსის შემთხვევაში ვერ დატოვოს მისი ზედაპირი ანუ ეს სხეული წარმოადგენდეს იმას, რასაც დღეს ვუწოდებთ ***შავ ხვრელს***.

საბოლოოდ, (311) და (316)-დან ინტერვალებისათვის ვიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\,\theta^2). \qquad (317)$$

სივრცის ამ მეტრიკას, რომელიც გარს არტყია სფერული სიმეტრიის სხეულს, უწოდებენ ***შვარცშილდის მეტრიკას***, ხოლო მის შესაბამის გრავიტაციულ ველს - ***შვარცშილდის ველს***. (317)-დან გამომდინარეობს, რომ საკუთარი დრო ანუ დრო ათვლის სისტემაში, რომლის სათავე მოთავსებულია სივრცის მოცემულ წერტილში, ტოლია

$$\tau = \sqrt{1-\frac{r_g}{r}}\cdot t < t, \qquad (318)$$

სადაც t – დროა ათვლის სისტემაში, რომლის სათავე მოთავსებულია შვარცშილდის ველის წარმომქმნელი სხეულის ცენტრში. მანძილი r_1 და r_2 წერტილებს შორის ნებისმიერი რადიალური მიმართულების გასწვრივ, აკმაყოფილებს პირობას:

$$\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1. \qquad (319)$$

მატერიალური წერტილის მოძრაობა შვარცშილდის ველში

ზოგადი ფარდობითობის თეორიის ძირითადი იდეის შესაბამისად ორი სხეულის რელატივისტური ამოცანა (იმ პირობით რომ $M \gg m$) დაიყვანება შვარცშილდის მეტრიკის მქონე სივრცე-დროში მატერიალური წერტილის თავისუფალ მოძრაობის შესწავლაზე. იმისათვის, რომ განვახორციელოთ ეს შესწავლა, პირველ რიგში საჭიროა ჩავწეროთ ოთხგანზომილებიანი წრფის განტოლება, რომელიც მოახდენდა სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში

ინერციით თანაბარი და სწორხაზოვანი მოძრაობის განტოლების განზოგადებას. ასეთ წრფეს უწოდებენ ***გეოდეზიურს***.

სპეციალურ ფარდობითობის თეორიაში შემოღებულია ოთხგანზომილებიანი სიჩქარის ცნება $u^i = dx^i/ds$ და შესაბამისად, თავისუფალი მოძრაობის განტოლებაა $du^i/ds \equiv d^2\,x^i/ds^2 = 0$. კოვარიანტული დიფერენცირების (319) ფორმულის შესაბამისად ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში ეს განტოლება გადავა შემდეგ ***გეოდეზიურ ფორმულაში***:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \qquad (320)$$

გადავწეროთ შვარცშილდის მეტრიკის გამოსახულება შემდეგი სახით:

$$c^2e^\nu\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - e^\lambda\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2\right) = 1. \qquad (321)$$

(320) ფორმულის გამოთვლა (313)-ის მეშვეობით გვაძლევს შემდეგ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2t}{ds^2} + \nu'\dfrac{dt}{ds}\dfrac{dr}{ds} = 0, \\ \dfrac{d^2r}{ds^2} + \dfrac{\nu'}{2}\left[c^2e^{2\nu}\left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 - \left(\dfrac{dr}{ds}\right)^2\right] - re^\nu\left[\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2\right] = 0, \\ \dfrac{d^2\theta}{ds^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2\theta}{ds^2} + 2\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{ds} - \operatorname{ctg}\theta\ \dfrac{d\theta}{ds}\right]\dfrac{d\varphi}{ds} = 0. \end{cases} \qquad (322)$$

სიმეტრიის თვალსაზრისიდან გამომდინარე უნდა ველოდოთ, რომ ამ ამოცანის ცენტრალური სიმეტრიის გამო მოძრაობა იქნება ბრტყელი. მოძრაობის სიბრტყის სახით ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემის ეკვატორული სიბრტყე. მაშინ, პოლარული მანძილი ტოლია $\theta = \pi/2$, ამასთან, გრძედი φ ავითვალოთ რადიუს-ვექტორის საწყისი მიმართულებიდან ანუ ჩავთვალოთ, რომ $\varphi_0 = 0$. შესაბამისად, (322)-ის მესამე განტოლება შესრულდება იგივურად, ხოლო მეორე და მეოთხე – გამარტივდება. თუ პირველ განტოლებას გავყოფთ dt/ds-ზე, ხოლო მეოთხეს - $d\varphi/ds$-ზე, მაშინ ისინი შეიძლება მივიყვანოთ შემდეგ სახემდე:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left(\ln\left(c\dfrac{dt}{ds}\right)\right) + \dfrac{d\nu}{ds} = 0, \\ \dfrac{d}{ds}\left(\ln\left(\dfrac{d\varphi}{ds}\right)\right) + \dfrac{d}{ds}(\ln r^2) = 0. \end{cases} \tag{323}$$

ვაინტეგროთ (323) და მივიღებთ ჩვენი ამოცანის შემდეგ პირველ ინტეგრალებს:

$$e^{\nu}\frac{dt}{ds} = k, \quad r^2\frac{d\varphi}{ds} = c_0. \tag{324}$$

ამჯერად, (324)-ის მეშვეობით (323)-დან გამოვრიცხოთ წარმოებულები t და φ-ის მიხედვით. შედეგად მივიღებთ განტოლებას:

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + e^{\nu}\left(\frac{c_0^2}{r^2} + 1\right) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \tag{325}$$

თუ (325)-ში დამოუკიდებელი s ცვლადიდან გადავალთ დამოუკიდებელ φ ცვლადზე და მოვახდენთ ცვლილებას $r = 1/u$, მივიღებთ:

$$c_0^2\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + e^{\nu}(c_0^2u^2 + 1) - \frac{k^2}{c^2} = 0. \tag{326}$$

საბოლოოდ, გამოვრიცხოთ (326)-დან e^{ν} სიდიდე (315)-ის მეშვეობით, მოვახდინოთ მიღებული განტოლების დიფერენცირება φ ცვლადით და მივიღებთ ორბიტის განტოლებას ორი სხეულის რელატივისტურ ამოცანაში:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \frac{3}{2}r_g u^2, \tag{327}$$

სადაც ჩათვლილია, რომ $c_0^2/r_g = p$, ხოლო r_g - ცენტრალური სხეულის გრავიტაციული რადიუსია. (327) განტოლება მხოლოდ მარჯვნიდან მეორე შესაკრებით განსხვავდება ორი სხეულის კლასიკური ამოცანის ორბიტის განტოლებისგან (280)-ის ფორმატში.

შევაფასოთ (327) განტოლების მარჯვენა მხარის შესაკრებების სიდიდეები მზის სისტემის პლანეტებისათვის. პირველი შესაკრები ტოლია $\approx 1/a$, ხოლო მეორე - $\approx r_g/a^2$, სადაც a არის პლანეტური ორბიტის დიდი ნახევარღერძი. მზის გრავიტაციული რადიუსი შეადგენს დაახლოებით 3 კმ-ს. აქედან გამომდინარე, მერკურისთვისაც კი მეორე შესაკრების შეფარდება პირველთან ძალზედ მცირე სიდიდეა – დაახლოებით 10^{-7} რიგის. ეს საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ (327) განტოლება მიმდევრობითი მიახლოებების მეთოდით, სადაც

ნულოვანი მიახლოების სახით შეგვიძლია ავიღოთ ორბიტის კეპლერისეული განტოლება

$$u_0 = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi). \qquad (328)$$

(328) ჩავსვათ (327) განტოლების მარჯვენა მხარეში და პირველი მიახლოებისათვის მივიღებთ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{r_g}{p}(1 + e\cos\varphi)^2\right]. \qquad (329)$$

(329) განტოლების მარჯვენა მხარეში მეორე შესაკრების გარდაქმნით, შეგვიძლია მივიღოთ:

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{1}{p}\left[1 + 3\frac{r_g}{p}e\cos\varphi + \frac{3}{4}\frac{r_g}{p}e^2\cos 2\varphi\right], \qquad (330)$$

სადაც უგულებელვყავით მცირე მუდმივა $3r_g(1+e^2)/2p$. (330) განტოლება ამოიხსნება მუდმივი კოეფიციენტების მქონე წრფივ განტოლებათა თეორიის სტანდარტული მეთოდების გამოყენებით. მის ამოხსნას შემდეგი სახე აქვს:

$$u_1 = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\varphi + \frac{3}{2}\frac{r_g}{p}e\varphi\sin\varphi - \frac{1}{4}\frac{r_g}{p}e^2\cos 2\varphi\right). \qquad (331)$$

ამ ამონახსნში ბოლო შესაკრებს მცირე ამპლიტუდა გააჩნია, ხოლო მესამე შესაკრებში იგი იზრდება დროის მიხედვით. ამიტომ, ბოლო შესაკრები შეიძლება უგულებელვყოთ. განვიხილოთ $\cos(\varphi - \delta\varphi)$, სადაც $\delta\varphi$ - მცირე სიდიდეა. მაშინ გვექნება, რომ

$$\cos(\varphi - \delta\varphi) = \cos\varphi + \delta\varphi\sin\varphi. \qquad (332)$$

თუ შევადარებთ (331)-ს და (332)-ს, მივალთ დასკვნამდე, რომ თანამამრავლი $\sin\varphi$ -ს წინ (331)-ში შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დამატებითი ცვლილება გრძედის არგუმენტში, რომელიც საწყისი პირობის გამო ტოლია φ კოორდინატის მნიშვნელობის და ეს ცვლილება ტოლია

$$\delta\varphi = \frac{3}{2}\frac{r_g}{p}\varphi. \qquad (333)$$

პლანეტის ორბიტის გარშემო ერთი სრული ბრუნვის დროს φ კუთხე იცვლება 2π სიდიდით და $\delta\varphi(2\pi)$ სიდიდე შეიძლება განვსაზღვროთ როგორც პლანეტის ელიფსური ორბიტის ორიენტაციის ცვლილება მის სიბრტყეში ანუ

პერიცენტრული მანძილის ცვლილება ერთი ორბიტული ბრუნვის განმავლობაში (***პერიცენტრის რელატივისტური მობრუნება***). კეპლერის მესამე კანონის მეშვეობით ამ მობრუნების სიდიდეს შესაძლებელია მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\delta\omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}, \tag{334}$$

სადაც T - პლანეტის ორბიტული ბრუნვის კლასიკური პერიოდია. სიდიდე $\delta\omega$ ძალზედ მცირეა, ამიტომ ტრადიციულად გამოითვლება 100 წლის განმავლობაში აფსიდების წრფის მობრუნების სიდიდე. გამოთვლები უჩვენებს, რომ მერკურისათვის ეს სიდიდე ტოლია $43.03''$, ვენერასათვის – $8.62''$, დედამიწისათვის – $3.84''$, მარსისათვის – $1.35''$.

პერიცენტრის ეს მობრუნება პირველ მიახლოებაში ერთადერთი ზოგადრელატივისტური ეფექტია ორი სხეულის ამოცანაში. უფრო მაღალი მიახლოების ეფექტები მზის სისტემისათვის მნიშვნელოვნად სცილდება დაკვირვების სიზუსტეებს. თუმცა, ეს არ გამორიცხავს ორი სხეულის რელატივისტური ამოცანის ზუსტი ამოხსნის შესწავლის მიზანშეწონილობას, რომელიც, სხვათაშორის, შესაძლებელია გამოვსახოთ ელიპტიკური ფუნქციებით.

მერკურის პერიჰელიუმის მობრუნების დაკვირვებულ და სხვა პლანეტების შეშფოთებითი ზეგავლენით გამოწვეულ მნიშვნელობებს შორის განსხვავება, რომელიც 100 წელიწადში აღწევს $40''$, ჯერ კიდევ ცნობილი იყო XIX საუკუნის მეორე ნახევრიდან. პრინციპში, ეს განსხვავება ახსნილი იქნა ზოგადი ფარდობითობის თეორიაში. თუმცა, ამ ახსნის და ასევე, სხვა ექსპერიმენტული ტესტირებების არცთუ მაღალი სიზუსტე (≈10%), ათწლეულების განმავლობაში იწვევდა არა ერთ მცდელობას თუ არ უარეყოთ ზოგადი ფარდობითობის თეორია, ყოველ შემთხვევაში, შეეცვალათ იგი რომელიმე სხვა ალტერნატიული თეორიით.

დედამიწაზე დღემდე ჩატარებული ყველა ექსპერიმენტი (მათ შორის, მესბაუერის ეფექტის მეშვეობით სიმძიმის ძალის სიმაღლის მიხედვით ცვლილების უაღრესად მაღალი სიზუსტის გაზომვები) და ასევე, პლანეტების და პლანეტათაშორისი ავტომატური სადგურების მოძრაობის დაკვირვებები რადიოტექნიკური საშუალებებით, ადასტურებენ ზოგადი ფარდობითობის თეორიას მინიმუმ 0.01% პროცენტის სიზუსტით.

დღეისათვის შემუშავებულია დიდი პლანეტების მოძრაობის რელატივისტური თეორიები, რომლებიც წარმატებით გამოიყენება ამ პლანეტებისკენ გაგაზავნილი კოსმოსური მისიების ორბიტული ტრაექტორიების ბალისტიკური გათვლების დროს.

ლექცია 14. ორი სხეულის ამოცანა N-განზომილებიან სივრცეში

ორი სხეულის კლასიკური ამოცანა N-განზომილებიან სივრცეში განხილულ იქნა პაულ ერენფესტის მიერ ჯერ კიდევ 1907 წელს. თუმცა, დიდი ხნის განმავლობაში მის შედეგებს მხოლოდ აბსტრაქტული მნიშვნელობა ჰქონდა, რადგან ფიზიკა და ასტრონომია ჩვენს გარშემო არსებულ სამყაროში მხოლოდ სამგანზომილებიან სივრცეს განიხილავდა.

თუმცა ბოლო დროს გაჩნდა თეორიული კვლევები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევს ვილაპარაკოთ ჩვენი სამყაროს პარალელურად სხვა სამყაროების არსებობის შესახებ, რომელთაც გააჩნიათ განსხვავებული ფუნდამენტური თვისებები, კერძოდ, სივრცის სამისგან განსხვავებული განზომილება.

ჩავთვალოთ, რომ ნებისმიერი განზომილების სივრცეში ნარჩუნდება მისი ისეთი თვისებები, როგორიცაა სივრცის ერთგვაროვნება და იზოტროპულობა და დროის ერთგვაროვნება. ეს ნიშნავს, რომ უნდა არსებობდეს მომენტისა და ენერგიის ინტეგრალები და შესაბამისად, ორი სხეულის ამოცანაში მოძრაობის ისეთი თვისება, როგორიცაა მისი ბრტყელი ხასიათი. ეს კი, ნიშნავს, რომ მოძრაობის სიჩქარის კვადრატი შესაძლებელია ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\nu}^2, \tag{335}$$

ხოლო (335)-ის ჩასმით ენერგიის (78) ინტეგრალში, მივიღებთ

$$\dot{r} = \pm\sqrt{h - W_N(r)}, \tag{336}$$

სადაც W_N – განზოგადებული პოტენციალია. იგი ტოლია ცენტრისკენული პოტენციალის გაორმაგებული ჯამის, რომელსაც (97)-ის მეშვეობით შეიძლება მივცეთ სახე $c^2/2r^2$ და გრავიტაციული პოტენციალის, რომელსაც N განზომილებიან სივრცეში აღვნიშნავთ როგორც $V_N(r)$, ანუ

$$W_N(r) = \frac{c^2}{r^2} - 2V_N(r). \tag{337}$$

გავიხსენოთ, რომ $V_3 = \mu/r$. როგორი სახე ექნება გრავიტაციულ პოტენციალს N განზომილებიან სივრცეში? ამ კითხვაზე პასუხი გამომდინარეობს იმ გარემოებიდან, რომ გრავიტირებული მასების გარეშე ეს პოტენციალი აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 V_N}{\partial x_i^2} = 0, \tag{338}$$

რომლის ამოხსნა იმ შემთხვევაში, როცა პოტენციალი შექმნილია კოორდინატთა სათავეში მოთავსებული მატერიალური წერტილის მიერ, ტოლია:

$$V_N = \frac{\mu}{(N-2)r^{N-2}} \tag{339}$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ (339) გამოსახულება არ გამოდგება როცა $N = 2$. ადვილია დავრწმუნდეთ, რომ ორგანზომილებიან სამყაროში

$$V_2 = -\mu \ln r. \tag{340}$$

როგორც (339) გამოსახულებიდან ვხედავთ ხარისხი მნიშვნელში 2 ერთეულით ნაკლებია სივრცის განზომილებაზე. შესაბამისად, მიზიდულობის ძალა r^{N-1} სიდიდის უკუპროპორციულია. ფიზიკური თვალსაზრისით ეს იმას ნიშნავს, რომ მიზიდულობის ძალა ყველაზე ნელა მცირდება მანძილთან ერთად თუ ურთიერთქმედების სრული ენერგია სასრულია, რაც გამომდინარეობს შესაბამისი არასაკუთარი ინტეგრალის კრებადობის პირობიდან. მსოფლიო მიზიდულობის კანონში ჩვენი სამყაროს სამგანზომილებიანობასა და ძალის მანძილის კვადრატზე უკუპროპორციულ დამოკიდებულებას შორის კავშირზე ჯერ კიდევ იმანუელ კანტმა გაამახვილა ყურადღება.

(336)-დან გამომდინარეობს, რომ მოძრაობა შესაძლებელია r-ის მხოლოდ ისეთი მნიშვნელობებისათვის, როცა ფესვის შიგნით გამოსახულება არაუარყოფითია, რაც შესრულდება თუ

$$W_N(r) \le h, \tag{341}$$

ანუ მხოლოდ იქ, სადაც (W_N, r) გრაფიკზე $W_N(r)$ ფუნქციის მრუდი გადის $W_N = h$ წრფის ქვევით. განვიხილოთ ეს გრაფიკი სივრცის სხვადასხვა N განზომილებისთვის. ჩავწეროთ განზოგადებული პოტენციალი $W_N(r)$, როცა $N = 2,3,4,5$:

$$W_2 = \frac{c^2}{r^2} + 2\mu \ln r,\ \ W_3 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r},\ \ W_4 = \frac{c^2 - \mu}{r^2},\ \ W_5 = \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{3r^3} \tag{342}$$

ძნელი არ არის დავრწმუნდეთ, რომ ყველა შემთხვევაში r ღერძი იქნება ჰორიზონტული ასიმპტოტა, ხოლო W_N ღერძი – ვერტიკალური. პოტენციალის წარმოებული ტოლია

$$W_N'(r) = -\frac{2c^2}{r^3} - \frac{2\mu}{r^{N-1}} \tag{343}$$

და ყველა შემთხვევაში, გარდა $N = 4$, $W_N(r)$ მრუდზე იქნება მხოლოდ ერთი ექსტრემუმი, მოთავსებული შემდეგ წერტილში:

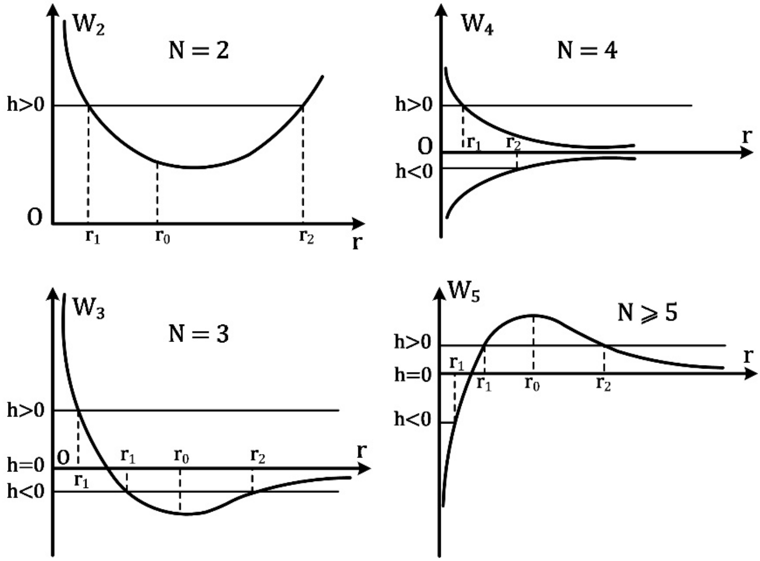
$$r_0 = \left(\frac{\mu}{c^2}\right)^{1/(N-1)}. \tag{344}$$

$W_N(r)$ ფუნქციის ასიმპტოტური ხასიათის გამო ჩანს, რომ ეს ექსტრემუმი როცა $N = 2,3$ არის მინიმუმი, ხოლო როცა $N = 5$ – მაქსიმუმი. ზოგადი გამოსახულებები (339) და (344) გვიჩვენებენ, რომ როცა $N > 5$, $W_N(r)$ ფუნქციის ხარისხობრივი ქცევა არ იცვლება $N = 5$ შემთვევასთან შედარებით, ამიტომ მათი განხილვა არ არის საჭირო.

განზოგადებული $W_N(r)$ პოტენციალის გრაფიკები მოცემულია ნახაზზე 16. ჩანს, რომ $N = 2,3,4,5$ შემთხვევებში შესაძლებელია წრიული ორბიტების არსებობა r_0 რადიუსით, რომლებიც მდგრადია ორ და სამ განზომილებიან სივრცეებში, მაგრამ არამდგრადია ხუთ განზომილებიან სივრცეში. უფრო მეტიც, ორგანზომილებიან სივრცეში ადგილი აქვს გარკვეული თვალსაზრისით ზემდგრადობას ანუ მოძრაობა ყოველთვის იქნება ფინიტური, თუ იგი შემოსაზღვრულია რგოლით $r_1 < r < r_2$ და სრული ენერგია $(h/2)$ ნებისმიერ სასრულ მნიშვნელობას იღებს. ასეთ სამყაროში არ არსებობს მეორე კოსმოსური სიჩქარის ცნება (ანუ $V_2 = \infty$). მრავალგანზომილებიან სამყაროებში $(N \geq 4)$ მატერიალური წერტილი მოძრაობისას (თუ არ გავითვალისწინებთ არამდგრად წრიულ ორბიტას $N \geq 5$ შემთხვევაში) საბოლოოდ აღმოჩნდება მიზიდულობის ცენტრში $(r \to 0)$ ან გავა უსასრულობაში $(r \to \infty)$ ანუ სასრული მოძრაობა უსასრულოდ ხანგრძლივი დროის განმავლობაში შეუძლებელია.

მხოლოდ ჩვენი ,,მშობლიური'' სამგანზომილებიანი სივრცე გამოირჩევა თავისი შესაძლებლობების სიმდიდრით – უარყოფითი სრული ენერგიის შემთხვევაში მოძრაობას გააჩნია სასრული ხასიათი (წრიული ან ელიფსური, $r_1 < r < r_2$). ენერგიის მნიშვნელობებისთვის $h/2 \geq 0$, მოძრაობა უსასრულოა (პარაბოლური ან ჰიპერბოლური). ამასთან, ერთი ტიპის მოძრაობიდან მეორეზე გადასვლა ხდება სრული ენერგიის ზღვრული ცვლილებისას.

ეს არ არის სამგანზომილებიანი სივრცის ერთადერთი თავისებურება. მხოლოდ სამგანზომილებიან სივრცეში ანტისიმეტრიული ტენზორის დამოუკიდებელი კომპონენტების რიცხვი, $(N^2 - N)/2$, ტოლია სივრცის განზომილების, რადგან განტოლებას $(N^2 - N)/2 = N$ გააჩნია მხოლოდ ერთი არატრივიალური ფესვი $N = 3$. ეს, თავის მხრივ, ნიშნავს, რომ მხოლოდ სამგანზომილებიან სივრცეში შეიძლება შემოვიღოთ ვექტორების ვექტორული ნამრავლის ცნება, რომელიც სინამდვილეში წარმოადგენს ფსევდოვექტორს, უფრო სწორად – მეორე რანგის ანტისიმეტრიულ ტენზორს.



ნახაზი 16. მრავალი სხეულის ამოცანის W განზოგადებული პოტენციალის r მანძილზე დამოკიდებულება N განზომილებიან სივრცეში.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფიზიკის ,,მათემატიკური სახე‘‘ სამგანზომილებიანისგან განსხვავებულ განზომილების მქონე სამყაროებში უნდა იყოს განსხვავებული და უფრო რთული – მაგალითად, კლასიკურ მექანიკას და ელექტროდინამიკას ექნებათ არსებითად ტენზორული ხასიათი.

მთავარი საკითხი მდგომარეობს იმაში, რომ გრავიტაციულად (მაგალითად, პლანეტურის) და ელექტროსტატიკურად დაკავშირებული (ატომები და მოლეკულები) სისტემების არსებობა შესაძლებელია მხოლოდ ორ და სამგანზომილებიან სამყაროებში. თუმცა, ორგანზომილებიან სამყაროში შეუძლებელია ასეთი დაკავშირებული სისტემების დარღვევა (პლანეტათაშორისი ფრენები, ნივთიერების გაფანტვა ზეახალი ვარსკვლავების აფეთქებისას, ატომების და მოლეკულების იონიზაცია). შედეგად, მატერიის ორგანიზაციის და მოძრაობის ფიზიკურისგან განსხვავებული უმაღლესი (ქიმიური, ბიოლოგიური, სოციალური) ფორმის განვითარება შესაძლებელია მხოლოდ გარკვეული ფუნდამენტური ფიზიკური თვისებების მქონე სამყაროებში, კერძოდ, მხოლოდ სამგანზომილებიანში.

ლექცია 15. სამი სხეულის ამოცანა

მიუხედავად იმისა, რომ სამი სხეულის ამოცანა არ არის სასრული სახით ინტეგრირებადი, იგი მაინც კარგად არის შესწავლილი, რადგან ხშირად, მისი მეშვეობით, ახდენენ ციური სხეულების რეალური სისტემების მოდელირებას. ამ ამოცანის ზუსტი და ლაკონური განმარტება შემდეგია: ***სამი სხეულის ამოცანა*** არის ამოცანა სამი მატერიალური წერტილის ურთიერთმიზიდულობის ძალთა ველში მოძრაობის შესახებ. ამ სამი მატერიალური წერტილის ქვეშ შეიძლება იგულისხმებოდეს: სამი ვარსკვლავისგან შემდგარი ჯერადი სისტემა, სისტემები - ,,დედამიწა-მთვარე-მზე'', ,,მზე-პლანეტა-კომეტა'', ,,დედამიწა-მთვარე-ხელოვნური თანამგზავრი'' და ა.შ.

ინერციულ კოორდინატთა სისტემაში სამი სხეულის ამოცანის განტოლებებს, როგორც მრავალი სხეულის ამოცანის (22) განტოლებათა სისტემის კერძო შემთხვევას $(n=2)$, შემდეგი სახე აქვთ (ნახაზი 17):

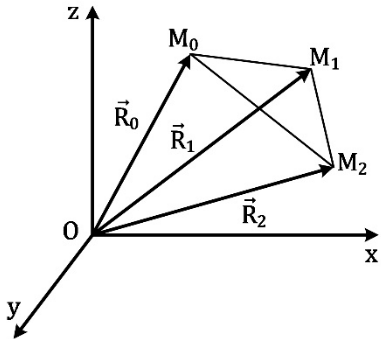
$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{R}}_0 &= f m_1 \frac{\vec{R}_1-\vec{R}_0}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\vec{R}_2-\vec{R}_0}{\Delta_{02}^3},\\
\ddot{\vec{R}}_1 &= f m_0 \frac{\vec{R}_0-\vec{R}_1}{\Delta_{01}^3} + f m_2 \frac{\vec{R}_2-\vec{R}_1}{\Delta_{12}^3},\\
\ddot{\vec{R}}_2 &= f m_0 \frac{\vec{R}_0-\vec{R}_2}{\Delta_{02}^3} + f m_1 \frac{\vec{R}_1-\vec{R}_2}{\Delta_{12}^3}.
\end{aligned} \tag{345}$$

ეს სისტემა არის მე-18 რიგის. I ლექციაში მოყვანილი მოსაზრებების საფუძველზე მისი რიგი შესაძლებელია დავწიოთ მე-6-მდე, ხოლო შემდეგ ვაინტეგროთ რომელიმე მიახლოებითი მეთოდით.

სამი სხეულის ზოგად ამოცანაში გამოყოფენ შემთხვევას, რომელიც ამარტივებს განტოლებათა სისტემას და მნიშვნელოვანი გამოყენებითი დანიშნულება აქვს. ეს ისეთი სიტუაციაა, როცა სამი მატერიალური სხეულიდან ერთ-ერთის მასა უაღრესად მცირეა ორი დანარჩენი წერტილის მასასთან შედარებით.

სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანა

შემთხვევას, როცა მასა $m <<< m_1, m_2$ ანუ m მასა მნიშვნელოვნად მცირეა m_1, m_2 მასებთან შედარებით, უწოდებენ ***სამი სხეულის შეზღუდულ ამოცანას***. ასეთი ამოცანა პირველმა განიხილა პიერ ლაპლასმა ერთ-ერთი გიგანტი პლანეტის მახლობლად კომეტის მოძრაობის შესაწავლისას.



ნახაზი 17. სამი სხეულის ამოცანა ინერციულ კოორდინატთა სისტემაში.

ეს ამოცანა იდეალურად აღწერს სიტუაციას, როცა ერთ-ერთი მატერიალური წერტილი კოსმოსური აპარატია.

სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანის ფიზიკური არსი მდგომარეობს შემდეგში: სამი მატერიალური წერტილიდან ერთ-ერთს იმდენად მცირე მასაა აქვს, რომ პრაქტიკულად ვერ ახდენს ზემოქმედებას ორი დანარჩენი სხეულის მოძრაობაზე, ხოლო თვითონ მოძრაობს მათ გრავიტაციულ ველში. შედეგად, ამ ორი წერტილის (როგორც მათ უწოდებენ „მძიმე წერტილების") მოძრაობა წარმოადგენს კეპლერისეულს და შესაძლოა ჩავთვალოთ ცნობილად. შესაბამისად, სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანა შესაძლოა იყოს წრიული, ელიფსური და ა.შ. განვიხილოთ ყველაზე მარტივი სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანა.

სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანა

ამ შემთხვევაში მძიმე წერტილები M_1, M_2 მასებით m_1, m_2 მდებარეობენ ერთმანეთისგან უცვლელ a მანძილზე და ერთი მოძრაობს მეორეს მიმართ ან მოძრაობენ მათი მასათა ცენტრის გარშემო მუდმივი კუთხური სიჩქარით

$$n = \frac{f(m_1 + m_2)}{a^{3/2}}. \qquad (346)$$

სამი სხეულის ამოცანის (345) სისტემის ბოლო ორ განტოლებაში შეზღუდული ამოცანის შემთხვევაში მარჯვნიდან პირველი შესაკრებები ბათილდება და ეს ორი განტოლება ქმნის ორი სხეულის ამოცანის განტოლებათა სისტემას ცნობილი ამონახსნით. რჩება პირველი განტოლება – მცირე m მასის წერტილის მოძრაობის განტოლება:

$$\ddot{\vec{R}} = fm_1 \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{\vec{R}_2 - \vec{R}}{\rho_2^3}, \tag{347}$$

სადაც $\rho_{1,2}$ აღნიშნავს მანძილს M წერტილიდან $M_{1,2}$ წერტილებამდე.

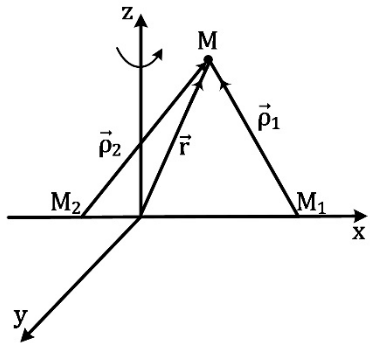
სამი სხეულის წრიულ შეზღუდულ ამოცანაში მიზანშეწონილია გადავიდეთ კოორდინატთა ბარიცენტრულ სისტემაზე, რომელიც ბრუნავს მასათა ცენტრის გარშემო n კუთხური სიჩქარით. გარეგნულად სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანა ჰგავს ორი უძრავი ცენტრის ამოცანას. თუმცა, ამ ორ ამოცანას შორის პრინციპული ფიზიკური განსხვავებაა: ორი უძრავი ცენტრის ამოცანაში მესამე წერტილის მოძრაობა წარმოებს ინერციულ კოორდინატთა სისტემაში და ეს წერტილი არ მოქმედებს პირველი ორი წერტილზე თავად დასმული ამოცანის არსიდან გამომდინარე, ხოლო სამი სხეულის შეზღუდულ ამოცანაში მოძრაობა წარმოებს არაინერციულ კოორდინატთა სისტემაში და პირველი წერტილი არ მოქმედებს ორ დანარჩენ წერტილზე მისი უმნიშვნელო მასის გამო.

იმისათვის, რომ გადავიდეთ M წერტილის მოძრაობის განტოლებაზე არაინერციულ კოორდინატთა სისტემაში, უნდა გავითვალისწინოთ ინერციის ძალები, რომლებიც მოქმედებენ მატერიალურ წერტილზე თანაბრად მბრუნავ კოორდინატთა სისტემაში. ეს არის კორიოლისის ძალა, რომელიც ტოლია $-2\vec{n} \times \dot{\vec{r}}$ და ცენტრიდანული ძალა, რომელიც ტოლია $-\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r}$, სადაც $\vec{n}$ – კოორდინატთა სისტემის კუთხური სიჩქარის ვექტორია, $\vec{r}$ – M წერტილის რადიუს-ვექტორი. შედეგად მივიღებთ:

$$\ddot{\vec{r}} = -2\vec{n} \times \dot{\vec{r}} - \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{r} - fm_1 \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{\vec{\rho}_2}{\rho_2^3}, \tag{348}$$

სადაც რადიუს-ვექტორები $\vec{\rho}_{1,2}$ განსაზღვრავენ M წერტილის მდებარეობას $M_{1,2}$ მძიმე წერტილების მიმართ ანუ $\vec{\rho}_{1,2} = \vec{r} - \vec{r}_{1,2}$, ხოლო $\vec{r}_{1,2}$ - $M_{1,2}$ წერტილების რადიუს-ვექტორებია (ნახაზი 18). ამასთან, იგულისხმება, რომ კოორდინატთა სისტემის z ღერძი მიმართულია $\vec{n}$ ვექტორის გასწვრივ, ხოლო x ღერძი გადის M_1 და M_2 წერტილებზე. მაშინ განტოლება (348) კოორდინატული ფორმით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2 x + fm_1 \frac{x_1 - x}{\rho_1^3} + fm_2 \frac{x_2 - x}{\rho_2^3} \\ \ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - fm_1 \frac{y}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{y}{\rho_2^3} \\ \ddot{z} &= -fm_1 \frac{z}{\rho_1^3} - fm_2 \frac{z}{\rho_2^3} \end{aligned} \tag{349}$$



ნახაზი 18. სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანა

ამოცანის შემდგომი განხილვისათვის შემოვიღოთ სპეციალური კანონიკური ერთეულების სისტემა. სიგრძის ერთეულად ავირჩიოთ მანძილი a, მასის ერთეულად – მასების m_1+m_2 ჯამი, ხოლო დროის ერთეულად – კოორდინატთა სისტემის 1 რადიანით მობრუნების დრო. მაშინ, კუთხური სიჩქარის n სიდიდე ტოლი იქნება 1-ის, ხოლო (346)-დან მივიღებთ, რომ გრავიტაციული მუდმივა f ამ ერთეულთა სისტემაში ასევე ტოლია 1-ის. თუ ამ სისტემაში M_1 წერტილის მასას ავღნიშნავთ როგორც μ, მაშინ M_2 წერტილის მასა ტოლი იქნება $1-\mu$, ხოლო M_1 წერტილის კოორდინატები იქნება $(1-\mu,0{,}0)$, M_2 წერტილის - $(-\mu,0{,}0)$. ჩავთვალოთ, რომ $m_1<m_2$, ანუ $\mu<1/2$. შედეგად (349) განტოლებათა სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-x) - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(\mu - x),\\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{\mu}{\rho_1^3}y - \frac{1-\mu}{\rho_2^3}y,\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu}{\rho_1^3}z - \frac{\mu}{\rho_2^3}z.\end{aligned} \tag{350}$$

თუ (350) სისტემის განტოლებებს გავამრავლებთ ფარდობითი სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებზე $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$, შემდეგ კი შევკრიბავთ, მივიღებთ:

$$\frac{d}{dt}(\nu^2) = \frac{d}{dt}\left(x^2 + y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2}\right). \tag{351}$$

სადაც $\nu^2 = \left|\dot{\vec{r}}\right|$. ვაინტეგროთ (351) და მივიღებთ სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანის პირველ ინტეგრალს:

$$\nu^2 = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right) - c. \tag{352}$$

ამ პირველ ინტეგრალს უწოდებენ ***იაკობის ინტეგრალს***. იგი ენერგიის ინტეგრალის ანალოგს წარმოადგენს, რადგან მარჯვნიდან მოთავსებულია ამოცანის ორმაგი ***განზოგადებული პოტენციალი***, რომელიც ტოლია ცენტრიდანული და გრავიტაციული პოტენციალების ჯამის. იაკობის ინტეგრალი გამოიყენება სამი სხეულის ამოცანაში მდგრადობის შესწავლისათვის. ასტროდინამიკაში იგი შემდეგნაირად გამოიყენება. პლანეტათაშორისი გადაფრენის ტრაექტორია შესაძლებელია დავყოთ სამ ნაწილად: ორი შედარებით მოკლე პლანეტოცენტრული და ერთი ძირითადი – ჰელიოცენტრული და თითოეულ ამ მონაკვეთზე კოსმოსური აპარატის მოძრაობა ჩავთვალოთ კეპლერისეულად (***ნაწილობრივ კონუსური აპროქსიმაციის*** მეთოდი). ტრაექტორიის ერთი მონაკვეთიდან მეორეზე გადასვლის ოპტიმიზაციისათვის გამოიყენება სწორედ იაკობის ინტეგრალი, რადგან გადაფრენის გარდამავალ ეტაპებზე გვაქვს სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანის სიტუაცია.

თუ ამოცანის განზოგადებულ პოტენციალს აღვნიშნავთ როგორც U, ანუ

$$U = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right). \tag{353}$$

მაშინ სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანის განტოლებები მიიღებენ უფრო კომპაქტურ სახეს:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \tag{354}$$

ხოლო იაკობის ინტეგრალი მიიღებს ასეთ სახეს: $v^2 = 2U - c$.

სამი სხეულის ბრტყელი წრიული შეზღუდული ამოცანა

თუ საწყისი პირობები სამი სხეულის შეზღუდულ ამოცანაში იქნება ისეთი, რომ როცა $t = t_0$ მაშინ $z_0 = \dot{z}_0 = 0$, მაშინ როგორც (350)-ის ბოლო განტოლებიდან გამომდინარეობს, აპლიკატა z იგივურად ტოლია ნოლის ანუ მოძრაობა იქნება ბრტყელი და მივიღებთ ***სამი სხეულის ბრტყელ წრიულ შეზღუდულ ამოცანას***. მისი შესწავლისათვის მიზანშეწონილია, როგორც ეს ხშირად ხდება ბრტყელ ამოცანებში, გადავიდეთ კომპლექსურ კოორდინატზე $z = x + iy$. არც თუ მოხერხებულია ის რომ დეკარტეს სისტემის მესამე

კოორდინატას და კომპლექსურ ცვლადს აღნიშნავენ ერთი და იგივე z სიმბოლოთი. არ დავარღვევთ ამ ტრადიციას, თუმცა, გავითვალისწინოთ, რომ შემდგომში z - ეს არის კომპლექსური კოორდინატა სიბრტყეზე, გარდა ცალკეული შემთხვევებისა.

გავამრავლოთ (350)-ის მეორე განტოლება წარმოსახვით ერთეულზე i და მივუმატოთ პირველ განტოლებას, მივიღებთ სამი სხეულის ბრტყელი წრიული შეზღუდული ამოცანის განტოლებას:

$$\ddot{z} = -2i\dot{z} + z + \frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-z) + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}(\mu+z). \qquad (355)$$

ამასთან, $\rho_{1,2} = \left|z - z_{1,2}\right|$. მაშინ, იაკობის ინტეგრალი შემდეგ სახე იღებს:

$$|\dot{z}|^2 = |z|^2 + 2\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right). \qquad (356)$$

ორი სხეულის ამოცანისგან განსხვავებით, რომელშიც (გარდა სწორხაზოვანი მოძრაობისა) წერტილებს შორის მანძილი ყოველთვის ნოლზე მეტია, სამი სხეულის ამოცანაში შესაძლოა წერტილებს შორის შეჯახებები. ამასთან, აჩქარებები მკვეთრად იზრდება, მოძრაობის განტოლებების მარჯვენა მხარეების უწყვეტობა ირღვევა. ამის თავიდან ასაცილებლად დანილემა ასტრონომმა ტ. ტილემ შემოიღო უცნობების სპეციალური ჩანაცვლება სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანის (355) კომპლექსური ფორმის განტოლებაში. პირველ რიგში, კოორდინატთა სათავე გადაიტანება M_1M_2 მონაკვეთის შუა წერტილში:

$$z = \zeta + \mu - \frac{1}{2}. \qquad (357)$$

შემდგომ ხდება გადასვლა ζ კომპლექსური ცვლადიდან ახალ კომპლექსურ ცვლადზე w:

$$\zeta = \cos w. \qquad (358)$$

ამასთან ერთად ხდება t დროის დიფერენციალური ცვლილება ახალ τ ცვლადზე:

$$dt = \rho_1\rho_2 d\tau. \qquad (359)$$

ბოლო ცვლილების არსი ადვილი გასაგებია. როგორც კი ერთ-ერთი მანძილი $\rho_{1,2}$-დან მიისწრაფის ნოლისკენ, დრო თითქოს იწელება უფრო და უფრო ნელი სიჩქარით, როგორც კინოფილმის დემონსტრაციის დროს. (358) ცვლილება სასარგებლოა იმით, რომ საერთო ფოკუსიანი ელიფსები და ჰიპერბოლები ζ სიბრტყეში გადადიან კოორდინატთა ღერძების პარალელურ

წრფეებში w სიბრტყეში. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ ამაში, საჭიროა (358) ტოლობაში გამოვყოთ რეალური და წარმოსახვითი ნაწილები. ხოლო, რადგან ერთ-ერთ მძიმე წერტილთან ახლოს მცირე მასის წერტილის მოძრაობა ახლოა კეპლერისეულთან, ამიტომ ეს მოძრაობა w სიბრტყეში გამოისახება წირებით, რომლებიც ახლოა კოორდინატთა ღერძების პარალელურ წრფეებთან. ეს სიახლოვე მით უფრო მეტია, რაც უფრო ახლოა მცირე მასის წერტილი ერთ-ერთ მძიმე წერტილთან. ტილეს გარდაქმნამ მიიღო განსაკუთრებული მნიშვნელობა ასტროდინამიკაში ერთი ციური სხეულიდან მეორეზე გადაფრენისთვის მოხვედრის ტრაექტორიის გამოთვლისას, მაგალითად დედამიწიდან მთვარეზე.

განსახილველი ამოცანის შემდგომი გამარტივებისათვის გადავიდეთ სწორხაზოვანი მოძრაობის შემთხვევაზე. ამ შემთხვევაში გვექნება შემდეგი საწყისი მნიშვნელობები: $x_0 \neq 0, \dot{x}_0 \neq 0, y_0 = \dot{y}_0 = 0$. ამასთან, M წერტილი იმოძრავებს x ღერძის გასწვრივ და შეეჯახება ერთ-ერთ მძიმე წერტილს ან დაშორდება მათ უსასრულობაში. წრფივი მოძრაობის მეორე შემთხვევას ადგილი ექნება, თუ $\mu = 1/2\,, x_0 = \dot{x}_0 = 0$. M წერტილი კვლავ წავა უსასრულობაში ან დაიწყებს რხევას y ღერძის მონაკვეთის გასწვრივ, რომელიც სიმეტრიულია x ღერძის მიმართ. ავღნიშნავთ, რომ ყოველივე ამას ადგილი ექნება ფარდობით კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც ბრუნავს მძიმე წერტილებთან ერთად მათი მასათა ცენტრის გარშემო.

ლიბრაციის წერტილები

დავსვათ ასეთი კითხვა: შეუძლია თუ არა მცირე მასის წერტილს სამი სხეულის შეზღუდულ ამოცანაში იმყოფებოდეს წონასწორობის მდგომარეობაში მძიმე წერტილების მიმართ ისეთ კოორდინატთა სისტემაში, რომელიც მათთან ერთად ბრუნავს. საზოგადოდ, ინერციულ სისტემაში ეს შეუძლებელია, რადგან ორი ძალის ზემოქმედების ქვეშ, რომლებიც არ არიან მიმართული ერთი წრფის გასწვრივ, წონასწორობის მდგომარეობა ვერ მიიღწევა. ფარდობით კოორდინატთა სისტემში ასეთი წერტილი იმყოფება სამი ძალის გავლენის ქვეშ – ორი გრავიტაციულის და ერთი ცენტრიდანულის, რომლებსაც სხვადასხვა მიმართულება აქვთ. ამიტომ, წონასწორობის მდგომარეობა შესაძლებელია. ვიპოვნოთ ამონახსნები, რომლებიც იძლევიან წონასწორობაში მყოფი მცირე მასის წერტილის მდებარეობას სამი სხეულის ბრტყელ წრიულ შეზღუდულ ამოცანაში. ფარდობითი წონასწორობის ამ წერტილებს უწოდებენ ***ლიბრაციის წერტილებს***.

წონასწორობის მდგომარეობაში აჩქარება $\ddot{z}$ და სიჩქარე $\dot{z}$ იგივურად ტოლია ნოლის. ამიტომ, განტოლება, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს კომპლექსური კოორდინატა z, შემდეგია:

$$z+\frac{\mu}{\rho_1^3}(1-\mu-z)-\frac{1-\mu}{\rho_2^3}(\mu+z)=0 \tag{360}$$

ან

$$z\left(1-\frac{\mu}{\rho_1^3}-\frac{1-\mu}{\rho_2^3}\right)=\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{1}{\rho_2^3}\right). \tag{361}$$

რადგან (361)-ის მარჯვენა მხარე ნამდვილია, ამიტომ z კოორდინატა უნდა იყოს ნამდვილი ან ეს მარჯვენა მხარე და ნამდვილი მამრავლი ფრჩხილებში მარცხენა მხარეს უნდა უდრიდეს ნოლს.

დავიწყოთ ბოლო შესაძლებლობიდან. (361) განტოლების მარჯვენა მხარის ნოლის ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\rho_1=\rho_2$. მაშინ მარცხენა მხარის მამრავლის ნოლის ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $\rho_1=\rho_2=1$. ხოლო, რადგან M_1 და M_2 წერტილებს შორის მანძილი ასევე ტოლია 1-ის, ამიტომ სამივე წერტილი წარმოქმნის ტოლგვერდა სამკუთხედს. დასაშვებია ორი ასეთი კონფიგურაცია – ერთ შემთხვევაში $y>0$, ხოლო მეორე შემთხვევაში $y<0$ (ნახაზი 19). ამ წერტილებს აღნიშნავენ L_4 და L_5 სიმბოლოებით და ეწოდებათ ***სამკუთხა ლიბრაციის წერტილები***.

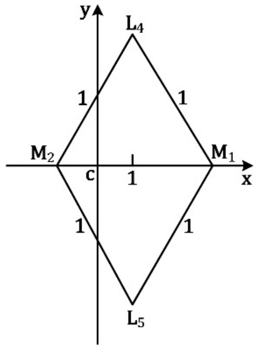
თუ z კოორდინატა ნამდვილია, მაშინ ლიბრაციის ყველა შესაძლო წერტილი ძევს ერთ წრფეზე - x ღერძზე. ამასთან, მათი კოორდინატები და მანძილები $M_{1,2}$ წერტილებამდე დაკავშირებულია გარკვეული თანაფარდობებით. თუმცა, ეს თანაფარდობები დამოკიდებული იქნება იმაზე, თუ კერძოდ, სად მდებარეობს მცირე მასის წერტილი – მძიმე წერტილებს შორის თუ ორივეს მიმართ ერთ ან მეორე მხარეს. განვიხილოთ თითოეული ეს შემთხვევა ცალ-ცალკე:

1) M წერტილი მდებარეობს M_1 და M_2 წერტილებს შორის (ნახაზი 20ა). მაშინ მივიღებთ:

$$\rho_1+\rho_2=1, \quad \mu+z+\rho_1=1. \tag{362a}$$

გამოვრიცხოთ (361) განტოლებიდან ρ_2 და z (362)-ის მეშვეობით და მივიღებთ:

$$(1-\mu-\rho_1)\left(1+\frac{\mu}{\rho_1^3}+\frac{1-\mu}{(1-\rho_1)^3}\right)=\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_1^3}-\frac{1}{(1-\rho_1)^3}\right). \tag{363}$$



ნახაზი 19. სამკუთხა ლიბრაციის წერტილები.

თუ (363)-ს მივიყვანთ საერთო მნიშვნელამდე, მაშინ ρ_1 მანძილისათვის ვიპოვნით მე-5 ხარისხის ალგებრულ განტოლებას:

$$\rho_1^5 - (3-\mu)\rho_1^4 + (3-2\mu)\rho_1^3 - \mu(1-\rho_1)^2 = 0. \qquad (364)$$

2) M წერტილი მდებარეობს M_1 წერტილის მარჯვნივ. მაშინ (ნახაზი 20ბ)

$$\rho_2 = 1 + \rho_1, \quad \mu + z - \rho_1 = 1. \qquad (362b)$$

და ρ_1 სიდიდის შესაბამისი განტოლბა, რომელიც კვლავ მე-5 ხარისხის იქნება, იქნება შემდეგი:

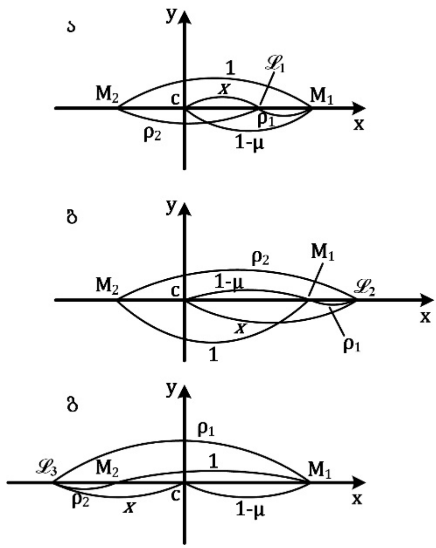
$$\rho_1^5 + (3-\mu)\rho_1^4 + (3-2\mu)\rho_1^3 - \mu(1+\rho_1)^2 = 0. \qquad (365)$$

3) და ბოლოს, M წერტილი მდებარეობს M_1 წერტილის მარცხნივ, მაშინ (ნახაზი 20გ):

$$\rho_1 = \rho_2 + 1, \quad \rho_2 = z + \mu. \qquad (362c)$$

აქედან და (361)-იდან მივიღებთ შემდეგ განტოლებას ρ_2 მანძილისათვის:

$$\rho_2^5 + (2+\mu)\rho_2^4 + (1-2\mu)\rho_2^3 - (1-\mu)(1+\rho_2)^2 = 0. \qquad (366)$$



ნახაზი 20. წრფივი ლიბრაციის წერტილები.

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თითოეულ მიღებულ მე-5 ხარისხის განტოლებას აქვს მხოლოდ ერთი ნამდვილი ფესვი. ამდენად, გვაქვს სამი ***წრფივი ლიბრაციის წერტილი***. ისინი აღინიშნება როგორც L_1 (M_1 და M_2 წერტილებს შორის), L_2 (ნაკლები მასის მქონე M_1 მძიმე წერტილის მარჯვნივ) და L_3 (მეტი მასის მქონე M_2 მძიმე წერტილის მარცხნივ). ρ_1 და ρ_2 მანძილების მნიშვნელობები შეიძლება გამოვითვალოთ იტერაციის მეთოდით, მაგალითად, L_1 წერტილისათვის შემდეგი ფორმულით:

$$\rho_1^{(k)} = \left(\frac{\mu\left(1-\rho_1^{(k-1)}\right)^2}{\left(\rho_1^{(k-1)}\right)^2 - (3-\mu)\rho_1^{(k-1)} + 3 - 2\mu} \right)^{1/3}. \qquad (367)$$

შესაძლებელია ასევე მივიღოთ მწკრივები ρ_1 მნიშვნელობებისათვის $\mu^{1/3}$ ხარისხებით და ρ_2 მნიშვნელობებისათვის μ ხარისხებით. მათ ასეთი სახე აქვთ:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\mu^{1/3} - \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + \cdots, \qquad (L_1)$$
$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\mu^{1/3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{9}\mu^{2/3} - \frac{1}{27}\mu + \cdots, \qquad (L_2) \qquad (368)$$
$$\rho_1 = \frac{7}{12}\mu + \frac{1127}{20736}\mu^3 + \cdots. \qquad (L_3)$$

როგორც ვხედავთ, $\mu \ll 1$ მნიშვნელობებისათვის ლიბრაციის წერტილები L_1 და L_2 მოთავსებულია M_1 წერტილთან ახლოს, მისგან დაახლოებით თანაბარ მანძილებზე.

წრფივი ლიბრაციის წერტილების, როგორც სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანის კერძო ამონახსნების შესახებ, ჯერ კიდევ ლეონარდ ეილერისათვის იყო ცნობილი. შემდგომში ისინი ხელახლა აღმოაჩინა ჟოზეფ ლუი ლაგრანჟმა. მანვე აღმოაჩინა ლიბრაციის სამკუთხა წერტილები. ლაგრანჟმა ასევე დაადგინა, რომ ლიბრაციის წერტილები არსებობს სამი სხეულის ელიფსურ და თუნდაც შეუზღუდავ ამოცანებში. ელიფსურ ამოცანაში a მანძილის როლს ასრულებს ფოკალური პარამეტრი p მძიმე წერტილების ფარდობითი კეპლერისეული მოძრაობისათვის. ამიტომ, ყველა ეს ამონახსნი და ლიბრაციის წერტილები ასევე იწოდება ლაგრანჟისეულებად.

ლიბრაციის წერტილების ასევე საინტერესო თვისებაა შემდეგი: თუ ლიბრაციის წრფივ ან სამკუთხა წერტილებში მოვათავსებთ სამ მატერიალურ წერტილს და მივცემთ მათ საშუალებას იმოძრაონ ნულოვანი საწყისი პირობებით (ინერციულ კოორდინატთა სისტემაში), მაშინ სამივე ერთდროულად დაეჯახებიან ერთმანეთს მათსავე მასათა ცენტრში.

ლიბრაციის წერტილებს მნიშვნელოვანი დანიშნულებაა აქვთ ასტრონომიაში და ასტროდინამიკაში. მათთან დაკავშირებულია ყველაზე ცნობილი მოვლენა – ასტეროიდების ორი ჯგუფის არსებობა, რომლებმაც თავი მოიყარეს „მზე-იუპიტერის" სისტემის ლიბრაციის სამკუთხა წერტილების მახლობელ სივრცეში. რადგან ასტეროიდებს, რომლებიც მოძრაობენ $60°$-ით იუპიტერის წინ, უწოდეს ტროას ალყაში მონაწილე ბერძენთა ლაშქრის გმირების სახელები, ხოლო ასტეროიდებს, რომლებიც მოძრაობენ $60°$-ით იუპიტერის უკან, უწოდეს ტროას დამცველთა სახელები, ამიტომ ყველა ამ ასტეროიდს უწოდებენ „ტროელებს". „დედამიწა-მთვარის" სისტემის სამკუთხა ლიბრაციის წერტილებში პოლონელმა ასტრონომმა კაზიმირ კორდილევსკიმ აღმოაჩინა მეტეორული ნივთიერების შემკვრივება, რომელსაც უწოდებენ

კორდილევსკის ღრუბელს. ლიბრაციის იგივე წერტილები არაერთხელ ყოფილა ადამიანის მიერ კოსმოსის შემდგომი ათვისების პროექტებზე მომუშავე მეცნიერთა ყურადღების ცენტრში. ამერიკელ მეცნიერს ო.ნეილს ეკუთვნის ცნობილი პროექტი ,,დედამიწა-მთვარის'' სამკუთხა ლიბრაციის წერტილებში 100 ათასი ადამიანის შემადგენლობის კოსმოსური დასახლების განთავსების შესახებ. ,,მზე-დედამიწის'' სისტემის ლიბრაციის ერთ-ერთ წერტილში გაშვებულ იქნა კოსმოსური აპარატი SOHO მზეზე მიმდინარე პროცესების შესასწავლად. ასეთი პროექტების შემუშავებისა და განხორციელებისათვის მნიშვნელოვანია ვიცოდეთ ლიბრაციის წერტილებში მოთავსებული სხეულების მოძრაობაზე შეშფოთებათა მოქმედების ხასიათი. გადავიდეთ ამ საკითხის განხილვაზე.

მოძრაობის მდგრადობა ლიბრაციის წერტილებში

დავწეროთ შეშფოთებათა განტოლება მდგრადობის თეორიაში მიღებული ფორმით ანუ

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1}\dot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1,2, \tag{369}$$

სადაც x_i – x, y კოორდინატთა შეშფოთებაა ლიბრაციის წერტილებში ამ კოორდინატთა მუდმივი მნიშვნელობების მიმართ, ხოლო U განზოგადებულ პოტენციალს (353) ფორმულის სახე აქვს. თუ ამ პოტენციალს დავშლით მაკლორენის მწკრივად, მივიღებთ შეშფოთებული მოძრაობის გაწრფივებულ განტოლებას:

$$\ddot{x}_i = 2(-1)^{i+1}\dot{x}_i + \sum_{j=1}^{2} p_{ij}x_j, \tag{370}$$

სადაც

$$p_{ij} = 2^{1-\delta_{ij}} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x_i = x_j = 0} \tag{371}$$

კოეფიციენტების p_{ij} გამოთვლები (371) დახმარებით გვაძლევს შემდეგს:

$$p_{11}^{(k)} = 1 + 2A, \;\; p_{22}^{(k)} = 1 - A,$$

$$p_{11}^{(k)} = p_{11}^{(k)} = 0, \qquad A = \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}, \quad k = 1,2,3 \tag{372}$$

$$p_{11}^{(k)} = \frac{3}{4}, \;\; p_{22}^{(k)} = \frac{9}{4}, \;\; p_{12}^{(k)} = (-1)^k \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu), \qquad k = 4,5.$$

სადაც k - ლიბრაციის წერტილის ნომერია.

თუ შევეცდებით ვიპოვნოთ (370) სისტემის ამონახსნი კომპლექსური ფორმით $A_l \exp(\omega_l t)$, მაშინ A_l ამპლიტუდებისათვის მივიღებთ შემდეგ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას:

$$(\omega^2 - p_{11})A_1 - (2\omega + p_{12})A_2 = 0,$$
$$(2\omega - p_{21})A_1 + (\omega^2 - p_{22})A_2 = 0. \tag{373}$$

იმისათვის, რომ ამ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამოხსნა, საჭიროა მისი დეტერმინანტი უდრიდეს ნოლს:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - p_{11} & -2\omega - p_{12} \\ 2\omega - p_{21} & \omega^2 - p_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{374}$$

სწორედ ω სიხშირის მნიშვნელობები, როგორც (374) მახასიათებელი განტოლების ამონახსნები, განსაზღვრავენ ლიბრაციის წერტილების მახლობლად შეშფოთებული მოძრაობის ხასიათს წრფივ მიახლოებაში. განტოლება (374) წარმოადგენს ბიკვადრატულ განტოლებას

$$\omega^4 + p\omega^2 + q = 0, \tag{375}$$

სადაც

$$p = 2 - A,\ \ q = (1 + 2A)(1 - A),\ \ k = 1,2,3 \tag{376}$$

და

$$p = 1,\ \ q = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu),\ \ k = 4,5. \tag{377}$$

$D = p^2/4 - q$ განტოლების დისკრიმინანტის გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$D = \frac{9}{4}A\left(A - \frac{8}{9}\right)\ \ \ k = 1,2,3 \tag{378}$$

და

$$D = \frac{1}{4}\big(1 - 27\mu(1 - \mu)\big),\ \ k = 4,5. \tag{379}$$

(378) და (379) განტოლებების თანახმად D დისკრიმინანტის და მისი შესაბამისი ω სიხშირის მნიშვნელობების ანალიზი გვაძლევს შემდეგ შედეგებს. ლიბრაციის წრფივი წერტილები წრფივ მიახლოებაში არამდგრადია, რადგან ყოველთვის არსებობს ერთი მაინც ნამდვილი დადებითი სიხშირე. სამკუთხა ლიბრაციის წერტილების შემთხვევაში მდგრადობა დაკავშირებულია μ მასის მნიშვნელობასა და შემდეგი განტოლების ფესვს შორის შეფარდებასთან

$$1-27\mu(1-\mu)=0. \quad (380)$$

ეს ფესვი მოთავსებულია 0-სა და $1/2$-ს შორის, კერძოდ $\bar{\mu}\cong 0.038$. $\mu>\bar{\mu}$ მნიშვნელობებისათვის სამკუთხა ლიბრაციის წერტილები არამდგრადია. $\mu<\bar{\mu}$ მნიშვნელობებისათვის სამკუთხა ლიბრაციის წერტილები მდგრადია წრფივ მიახლოებაში.

რაც შეეხება ლიბრაციის წერტილების მდგრადობას ამოცანის ზუსტი ამოხსნისას, ლიაპუნოვის მდგრადობის თეორია ადასტურებს დასკვნებს, რომლებიც მივიღეთ წრფივ მიახლოებაში წრფივი და სამკუთხა ლიბრაციის წერტილების არამდგრადობის შესახებ, $\mu>\bar{\mu}$ შემთხვევაში. თუმცა იგი არ იძლევა პასუხს პრაქტიკული გამოყენებისათვის მნიშვნელოვან შემთხვევაში როცა $\mu<\bar{\mu}$. ეს პასუხი ნაპოვნი იქნა მხოლოდ 1968 წელს KAM თეორიის მეთოდით. ნაჩვენები იქნა, რომ ლიბრაციის სამკუთხა წერტილები მდგრადია მასის ნებისმიერი მნიშვნელობებისათვის $\mu<\bar{\mu}$, გარდა ორი მნიშვნელობისა

$$\mu_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{213}}{30},\ \ \mu_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{1833}}{90}. \quad (381)$$

ეს შედეგი მტკიცდება „ტროელების" და კორდილევსკის ღრუბლის არსებობით და ლიბრაციის სამკუთხა წერტილებს დიდ მნიშვნელობას ანიჭებს კოსმონავტიკისათვის.

საბოლოოდ აღვნიშნოთ, რომ ლიბრაციის წერტილების შესწავლა სივრცულ (სამგანზომილებიან) მოძრაობაში გვაძლევს მახასიათებელ განტოლებას

$$(\omega^2+s)(\omega^4+p\omega^2+q)=0, \quad (382)$$

სადაც

$$s_k=A,\ \ k=1,2,3,\ \ \ s_k=1,\ \ k=4,5. \quad (383)$$

როგორც ჩანს, დამატებითი სიხშირეები წარმოსახვითია და ამიტომ ლიბრაციის წერტილები პირველ მიახლოებაში მდგრადია მძიმე წერტილების ბრუნვის სიბრტყიდან გადახრის მიმართ.

ჰილის სფეროები

იაკობის ინტეგრალი საშუალებას გვაძლევს მოვახდინოთ სამი სხეულის წრიული შეზღუდული ამოცანის ხარისხობრივი შესწავლა და გამოვყოთ ის არეები, სადაც მცირე მასის წერტილის მოძრაობა დასაშვებია მოცემული საწყისი პირობებისათვის და სადაც ასეთი მოძრაობა შეუძლებელია. ჩავატაროთ გამოკვლევა ბრტყელი შემთხვევისათვის.

დავუშვათ წერტილის ფარდობითი სიჩქარე v მისი მოძრაობისას გაუტოლდა ნოლს (ამასთან, აჩქარება, საზოგადოდ, ნოლისგან განსხვავებულია). იმ წერტილების გეომეტრიული ადგილმდებარეობა, სადაც ამას ექნება ადგილი, იაკობის (352) ინტეგრალის თანახმად გამოიხატება შემდეგი განტოლებით:

$$2U(x,y)-c=r^2+\frac{2\mu}{\rho_1}+\frac{2(1-\mu)}{\rho_2}-c=0. \tag{384}$$

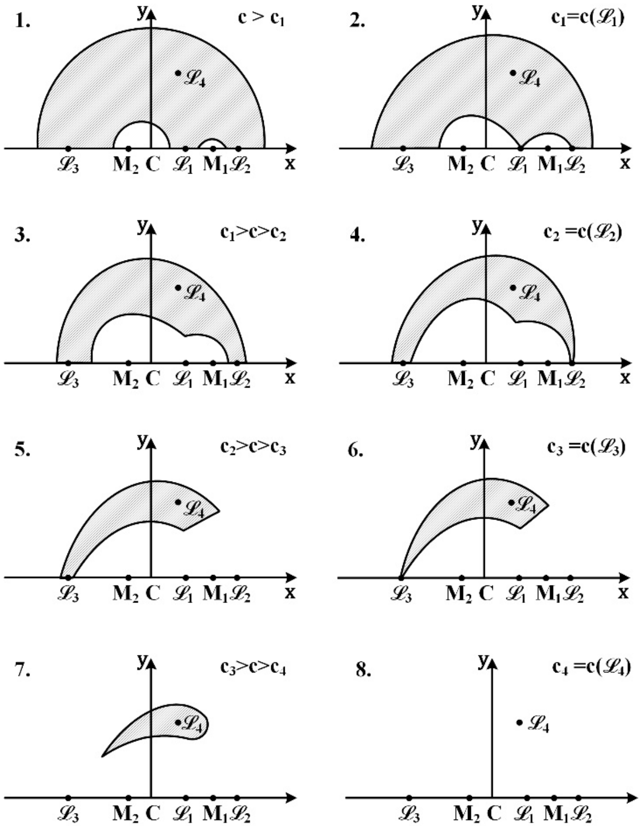
x,y სიბრტყეში ეს იქნება ერთგვარი მრუდი, რომელსაც ვუწოდებთ ***ნულოვანი სიჩქარის მრუდს*** ანუ ***ჰილის სფეროს*** (ამერიკელი ასტრონომის ჯორჯ ჰილის საპატივცემულოდ). რადგან აჩქარება $\dot{v}\neq 0$ (წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს იქნება იზოლირებული წერტილი – ლიბრაციის წერტილი), ამიტომ წერტილები, რომლებიც ქმნიან ჰილის სფეროს, არ იქნებიან $U(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმები. ეს ფუნქცია უნდა იცვლიდეს თავის ნიშანს, როცა M წერტილი მოძრაობისას გადაკვეთს ჰილის სფეროს. მაგრამ მაშინ, ამ მრუდის ერთ მხარეს სიჩქარის კვადრატი v^2 უნდა გახდეს უარყოფითი, რაც შეუძლებელია. ამიტომ, მცირე მასის წერტილი შეიძლება მოძრაობდეს სიბრტყის მხოლოდ იმ ნაწილში, სადაც სრულდება ასეთი პირობა:

$$2U(x,y)-c\geq 0. \tag{385}$$

ამასთან დაკავშირებით აღვნიშნოთ, რომ ლიბრაციის წერტილების კოორდინატები შეიძლება ვიპოვნოთ, როგორც $U(x,y)$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

შემდგომი ანალიზი დავიწყოთ იაკობის c მუდმივას საკმარისად დიდი მნიშვნელობებით. თუ $c\gg 1$, მაშინ r-ის მნიშვნელობა 1-ზე საკმარისად დიდი უნდა იყოს ან საკმარისად მცირე უნდა იყოს $\rho_{1,2}$ მანძილებიდან ერთ-ერთი. პირველ შემთხვევაში (385)-ში მეორე და მესამე შესაკრებები მცირეა c სიდიდესთან შედარებით (M წერტილი საკმარისად არის დაშორებული $M_{1,2}$ წერტილებისგან). ამიტომ, ჰილის სფეროს დაახლოებით $r^2=c$ სახე ექნება და ეს მრუდი ახლოა $\sqrt{c}$ რადიუსის მქონე წრესთან. მეორე შემთხვევაში, როცა $r^2\approx 1$, მეორე ან მესამე შესაკრები (385)-ში გაცილებით მეტია 1-ზე. ასეთ შემთხვევაში ჰილის სფეროს მიახლოებითი განტოლება შემდეგ სახეს იღებს:

$$\frac{2\mu}{\rho_1}+\frac{2(1-\mu)}{\rho_2}=c. \tag{386}$$



ნახაზი 21. ჰილის სფეროები სამი სხეულის ბრტყელ წრიულ შეზღუდულ ამოცანაში იაკობის ინტეგრალის მუდმივას სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის.

ეს განტოლება იძლევა ორ ჩაკეტილ მრუდს, რომელთაგან ერთ-ერთი შემოფარგლავს M_1 წერტილს, ხოლო მეორე - M_2 წერტილს. ამ მრუდებს გეომეტრიაში უწოდებენ „ოვალებს" და გარეგნულად გვანან ელიფსებს (თუმცა ელიფსი ძევს ოვალის შიგნით იგივე ღერძებით). მცირე მასის წერტილის მოძრაობა შესაძლებელია მხოლოდ დიდი $\sqrt{c}$ რადიუსის მქონე წრის გარეთ ან ერთ-ერთი ოვალის შიგნით ანუ $M_{1,2}$ წერტილებიდან ერთ-ერთის მახლობლად. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ ყველა ამ სამ შემთხვევაში მცირე მასის წერტილის მოძრაობა ახლოა მოძრაობასთან ორი სხეულის ამოცანაში მასებით $m_1 + m_2, m_1$ ან m_2, შესაბამისად, და შესაძლებელია შესწავლილ იქნას შეშფოთების თეორიის მეთოდებით.

იაკობის c მუდმივას შემცირებისას წრე და ოვალები დაიწყებენ სულ უფრო და უფრო დეფორმირებას, თანაც „კვაზიწრე" (ანუ დეფორმირებული წრე) დაიწყებს შემცირებას, ხოლო „კვაზიოვალები" – გაზრდას. გარკვეული კრიტიკული $c = c_1$ მნიშვნელობისათვის ოვალები შეეხებიან ერთმანეთს. ეს მოხდება სწორედ ლიბრაციის შიდა L_1 წერტილში (მრუდი 2 ნახაზზე 21).

იაკობის c მუდმივას შემდგომი შემცირებისას $(c < c_1)$ ყოფილი ოვალების შემაერთებელი ყელი დაიწყებს გაფართოებას და არე, რომელშიც დასაშვებია M წერტილის მოძრაობა, გახდება ორმაგად შეკრული (მრუდები 3 ნახაზზე 21). კრიტიკული მნიშვნელობისათვის $c = c_2$ ჰილის შიდა და გარე სფეროები შეეხებიან ერთმანეთს ლიბრაციის L_2 წერტილში (მრუდი 4 ნახაზზე 21).

შემდგომ, როცა $c > c_2$, ყელი დაიწყებს გაფართოებას L_2 წერტილის მახლობლად – მცირე მასის წერტილის მოძრაობის არე გახდება ერთმაგად შეკრული (მრუდები 5 ნახაზზე 21). თუ გავაგრძელებთ c მუდმივას შემდგომ შემცირებას კრიტიკულ მნიშვნელობამდე $c = c_3$, მაშინ შეეხებიან ერთმანეთს ჰილის სფეროს შიდა და გარე არეები ლიბრაციის L_3 წერტილში (მრუდი 6 ნახაზზე 21).

$c < c_3$ მნიშვნელობებისათვის ჰილის ერთიანი სფერო კვლავ გაწყდება ორ ცალკეულ ჩაკეტილ მრუდად (თვითმფრინავის ფრთის ჭრილების მსგავად, მრუდი 7 ნახაზზე 21) და M წერტილის მოძრაობა შესაძლებელი გახდება ყველგან იმ არეების გარეთ, რომლებიც გარს არტყიან სამკუთხა ლიბრაციის წერტილებს L_4 და L_5. საბოლოოდ, შემდგომი შემცირებისას c მუდმივას მნიშვნელობა მიაღწევს კრიტიკულ მნიშვნელობას c_4, რომელზეც ჰილის სფეროები შევიწროვდებიან ლიბრაციის $L_{4,5}$ წერტილებში.

ჩატარებული ანალიზიდან შეგვიძლია დავინახოთ განსაკუთრებული როლი, რომელსაც ასრულებენ ლიბრაციის წერტილები ჰილის სფეროების სტრუქტურაში. წრფივი ლიბრაციის წერტილებში ირღვევა ჰილის სფეროების ცალსახობა – ეს წერტილები მათი თვითგადაკვეთის წერტილებს წარმოადგენენ. სამკუთხა წერტილები – ჰილის სფეროების ოჯახის ზღვრული წერტილებია. იაკობის c_k მუდმივების კრიტიკული მნიშვნელობები შეიძლება ვიპოვნოთ, თუ (384)-ში ჩავსვავთ ლიბრაციის წერტილების კოორდინატების x_k, y_k მნიშვნელობებს. c_k მნიშვნელობები, ისევე როგორც ლიბრაციის წერტილების კოორდინატები, დამოკიდებულია μ პარამეტრზე, ანუ M_1 და M_2 მძიმე წერტილების მასებს შორის შეფარდებაზე.

თუ განვიხილავთ ნულოვანი ფარდობითი v სიჩქარის მქონე წერტილების გეომეტრიულ ადგილმდებარეობას სამი სხეულის სივრცულ შეზღუდულ ამოცანაში, ეს უკვე იქნება ***ჰილის ზედაპირები***. ნახაზი 21 გვაძლევს წარმოდგენას ჰილის ზედაპირების კვეთის შესახებ $z = 0$ სიბრტყის მიერ (სადაც z არის M წერტილის აპლიკატა).

ჰილის ზედაპირების $y = 0$ სიბრტყით კვეთის სტრუქტურა განტოლებით

$$x^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c \qquad (387)$$

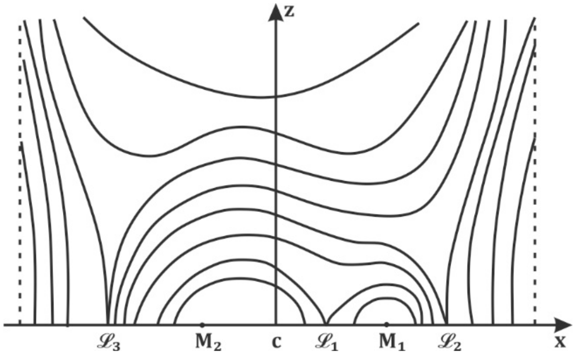
ნაჩვენებია ნახაზზე 22. ხოლო $x = 0$ სიბრტყით კვეთის სტრუქტურა, რომელიც განისაზღვრება განტოლებით

$$y^2 + \frac{2\mu}{\rho_1} + \frac{2(1-\mu)}{\rho_2} = c, \qquad (388)$$

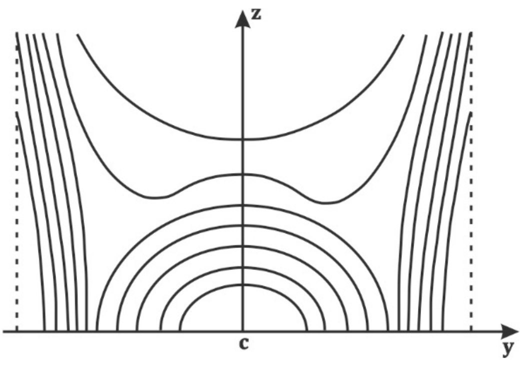
მოცემულია ნახაზზე 23.

ჰილის ზედაპირები განსაკუთრებულ როლს ასრულებენ ორმაგი ვარსკვლავების სისტემის ფიზიკაში, კერძოდ, ის ზედაპირები, რომლებიც შეესაბამება იაკობის C_1 მუდმივას კრიტიკულ მნიშვნელობას. ამ დროს წარმოიქმნება ორი ერთმანეთის მხები კვერცხის მსგავსი არეები $M_{1,2}$ წერტილების გარშემო, რომლებსაც ***როშის ღრუებს*** უწოდებენ. მათი მნშივნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ ერთი კომპონენტიდან მეორეზე ნივთიერების გადადინება ეფექტური ხდება მხოლოდ მაშინ, როცა ორმაგი სისტემის ერთ-ერთი კომპონენტი შეავსებს თავის როშის ღრუს. ასეთ შემთხვევაში ორმაგ სისტემას უწოდებენ ***მჭიდრო ორჯერად სისტემას***.

მჭიდრო ორჯერად სისტემაში განსაკუთრებით საინტერესო მოვლენები იჩენს თავს, როცა მეორე კომპონენტი – მასიური ვარსკვლავია ევოლუციის საბოლოო სტადიაზე (პულსარი ან შავი ხვრელი). მაშინ, ამ კომპაქტურ ობიექტზე დაცემული ნივთიერების აჩქარება აღწევს ძალიან დიდ სიდიდეებს. შედეგად, ამ ნივთიერების ტემპერატურა მკვეთრად იმატებს და აკრეციული დისკო, რომელიც წარმოიქმნება კომპაქტური კომპონენტის ღერძული ბრუნვის გამო, ხდება რენტგენული გამოსხივების წყაროდ. პრეცესიული მოძრაობა ასეთ ორჯერად სისტემაში შესაძლოა გახდეს ამ გამოსხივების დაკვირვებითი ცვალებადობის მიზეზი.



ნახაზი 22. ჰილის ზედაპირების კვეთა $y = 0$ სიბრტყით სამი სხეულის სივრცულ წრიულ შეზღუდულ ამოცანაში.



ნახაზი 23. ჰილის ზედაპირების კვეთა $x = 0$ სიბრტყით სამი სხეულის სივრცულ წრიულ შეზღუდულ ამოცანაში.

პრაქტიკული მნიშვნელობა ენიჭება შემთხვევას, როცა იაკობის მუდმივა $c \gg 1$ იმის ხარჯზე, რომ $\rho_1 \ll 1$, ანუ მცირე მასის წერტილი მოძრაობს უფრო ნაკლები მასის მძიმე წერტილის უშუალო სიახლოვეს (სისტემა „მზე-პლანეტა-მისი თანამგზავრი"). ასეთ შემთხვევაში, პერიოდული ამონახსნების ძიებას ***ჰილის ამოცანას*** უწოდებენ. ამასთან, თუ უარს ვიტყვით კანონიკურ ერთეულთა სისტემაზე, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მანძილი a უსასრულოდ დიდია, მაგრამ იმ პირობით, რომ $n^2a^3 = f(m_1 + m_2)$ რჩება სასრული. ანუ M_2 წერტილი მდებარეობს ძალიან შორს M და M_1 წერტილებიდან, მაგრამ მაინც

ახდენს ზემოქმედებას M წერტილზე თავისი დიდი მასის გამო. ჰილის ამოცანის შესწავლისას მიღებული შედეგების საფუძველზე ე. ბრაუნმა შექმნა მთვარის მოძრაობის თეორია.

სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანის განხილვის ბოლოს, დასკვნის სახით, აღვნიშნავთ, რომ სამი სხეულის ზოგად შეზღუდულ ამოცანაში მოძრაობის განტოლება შესაძლებელია მივიყვანოთ (354) სახემდე, თუ x, y, z კოორდინატებიდან გადავალთ ახალ ξ, η, ζ კოორდინატებზე, სადაც

$$x = \frac{r}{p}\xi, \;\; y = \frac{r}{p}\eta, \;\; z = \frac{r}{p}\zeta, \tag{389}$$

ხოლო p არის $-\, M_{1,2}$ მძიმე წერტილების ფარდობითი კეპლერისეული მოძრაობის ფოკალური პარამეტრი.

მაშინ, სამი სხეულის შეზღუდული ამოცანის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს (ე.წ. ***ნეჰვილის განტოლებები***):

$$\begin{aligned} \xi'' &= 2\eta' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi}, \\ \eta'' &= -2\xi' + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial \bar{U}}{\partial \zeta}, \end{aligned} \tag{390}$$

სადაც პოტენციალი ტოლია

$$\bar{U} = \frac{r}{p}\left[\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{2}e\zeta^2 \cos\nu + p^3\left(\frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2}\right)\right], \tag{391}$$

ხოლო $'$ სიმბოლო ნიშნავს წარმოებულს ჭეშმარიტი ანომალიით ν.

ჰილის მრუდების და ზედაპირების ცნება გამოიყენება მოძრაობის შესწავლისათვის ასევე ცის მექანიკის სხვა ამოცანებში.

დამატება I.

სფერული ტრიგონომეტრიის ელემენტები. ასტრონომიულ კოორდინატთა სისტემები

ამ დამატებაში მოცემულია სფერული ტრიგონომეტრიის ძირითადი ფორმულები, განსაზღვრებები და კოორდინატთა გარდაქმნების ფორმულები, რომლებიც გამოიყენება ასტრონომიაში.

სამკუთხედები სფეროზე წარმოიქმნებიან დიდი წრეების რკალებით, რომელთა რადიუსები ტოლია სფეროს რადიუსის. სფერული სამკუთხედის გვერდები შეიძლება გავზომოთ კუთხურ ერთეულებში (გრადუსები, რადიანები და ა.შ.) და განვიხილოთ მათი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. სფერული სამკუთხედის კუთხეები წარმოადგენენ ამ სამკუთხედის წარმომქმნელი რკალების მხებებს შორის კუთხეებს. სფერული სამკუთხედის გვერდების და კუთხეების ტრიგონომეტრიული ფუნქციები დაკავშირებულია ერთმანეთთან მთელი რიგი დამოკიდებულებებით, რომელთაგან უმთავრესია შემდეგი (ნახაზი დ1.1):

1. კოსინუსების ფორმულა:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A; \tag{1.1}$$

2. სინუსების ფორმულა:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}; \tag{1.2}$$

3. ხუთი ელემენტის ფორმულა:

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A. \tag{1.3}$$

მართკუთხა სფერულ სამკუთხედში (ნახაზი დ1.2):

$$\begin{gathered} \sin b = \sin a \sin B, \\ \cos a = \cos b \cos C. \end{gathered} \tag{1.4}$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემა განისაზღვრება ძირითადი სიბრტყით, რომელიც გადის სფეროს ცენტრზე, და სისტემის ღერძით – წრფე, რომელიც გადის სფეროს ცენტრზე ძირითადი სიბრტყის მართობულად. სისტემის ღერძის სფეროსთან გადაკვეთის წერტილებს სისტემის პოლუსებს უწოდებენ. ერთ-ერთი კოორდინატი აითვლება დიდი წრის გასწვრივ, რომელიც წარმოიქმნება

ძირითადი სიბრტყის სფეროსთან კვეთით, ხოლო მეორე კოორდინატი – ან ამ წრიდან ან სისტემის ერთ-ერთი პოლუსიდან.

ასტრონომიაში, კერძოდ ცის მექანიკაში, ცის სფეროზე (ანუ ნებისმიერი რადიუსის სფეროზე, რომლის ცენტრშიც მოთავსებულია დამკვირვებელი) გამოიყენება შემდეგი კოორდინატთა სისტემები:

1. **ჰორიზონტული სისტემა**. აქ ძირითადი სიბრტყეა – მათემატიკური ჰორიზონტის სიბრტყე, ხოლო სისტემის ღერძი – შვეული ხაზი. კოორდინატებია – *ზენიტური მანძილი*, რომელიც აითვლება ზენიტიდან ვერტიკალის გასწვრივ (ნახაზი დ1.3), $0° \leq z \leq 180°$; *აზიმუტი* – აითვლება ჰორიზონტის გასწვრივ სამხრეთის წერტილიდან (ჰორიზონტის ცის მერიდიანთანდ კვეთის ერთ-ერთი წერტილი) დასავლეთის მიმართულებით, $0° \leq z \leq 360°$. სწორედ ჰორიზონტულ სისტემაში იზომება უშუალოდ მნათობთა კოორდინატები ცის სფეროზე. ეს სისტემა დაკავშირებულია სიმძიმის ძალის მიმართულებასთან და პრინციპში შესაძლებელია ფიზიკურად მარტივად აიგოს ქანქარისა და ორი ჰორიზონტული დონის მეშვეობით. თუმცა ჰორიზონტული კოორდინატები მუდმივად იცვლებიან დედამიწის დღე-ღამისეული ბრუნვის გამო და, თანაც, არათანაბრად.
2. **პირველი ეკვატორული სისტემა.** ამ სისტემის ძირითადი სიბრტყე პარალელურია დედამიწის ეკვატორის სიბრტყის, ხოლო ღერძია – სამყაროს ღერძი, რომელიც პარალელურია დედამიწის ბრუნვის ღერძის. კოორდინატებია – *დახრილობა*, რომელიც აითვლება ცის ეკვატორიდან დახრილობათა წრის გასწვრივ (ნახაზი დ1.4), $-90° \leq \delta \leq +90°$; *საათიერი კუთხე* – აითვლება ცის ეკვატორის გასწვრივ მისი ცის მერიდიანთან კვეთის წერტილიდან, $0^h \leq t \leq 24^h$. დახრილობა არ იცვლება დედამიწის დღე-ღამური ბრუნვის გავლენით, ხოლო საათიერი კუთხე იცვლება თანაბრად და ამიტომ გამოიყენება დროის გასაზომად.
3. **მეორე ეკვატორული სისტემა.** ამ სისტემის ძირითადი სიბრტყე და ღერძი – იგივეა, რაც პირველ ეკვატორულ სისტემაში. კოორდინატებია – *დახრილობა* და *პირდაპირი აღვლენა*, რომელიც აითვლება გაზაფხულის დღეღამტოლობის წერტილიდან (ცის ეკვატორის ეკლიპტიკასთან კვეთის ერთ-ერთი წერტილი, ნახაზი დ1.4), $0^h \leq \alpha \leq 24^h$. არცერთი კოორდინატი არ არის დამოკიდებული დედამიწის ღერძულ ბრუნვაზე და, ამიტომ, სწორედ ისინი გამოიყენება ცის სფეროზე მნათობთა განლაგების განსასაზღვრავად. ეკვატორულ სისტემაში გამოყოფენ ტოპოცენტრულ სისტემას – სათავე მოთავსებულია რომელიმე წერტილში დედამიწის

ზედაპირზე, და გეოცენტრულ სისტემას – სათავე ემთხვევა დედამიწის ცენტრს.

4. **ეკლიპტიკური სისტემა**. ძირითადი სიბრტყეა – ეკლიპტიკის სიბრტყე, ანუ შეუშფოთებელი მზის ორბიტის სიბრტყე მისი მოძრაობისას დედამიწის მიმართ, სისტემის ღერძია – ნორმალი ეკლიპტიკის სიბრტყის მიმართ. კოორდინატებია – *ეკლიპტიკური განედი*, რომელიც აითვლება ეკლიპტიკიდან (ნახაზი დ1.5), $-90° \le \beta \le +90°$; *ეკლიპტიკური გრძედი*, რომელიც აითვლება ეკლიპტიკის გასწვრივ გაზაფხულის დღეღამტოლობის წერტილიდან, $0° \le \lambda \le 360°$. გამოიყენება მზის სიტემის სხეულთა მოძრაობის აღწერისათვის, კერძოდ, მათი ორბიტების ელემენტების განსაზღვრისათვის.

სფერული სამკუთხედიდან ZPM (ნახაზი დ1.4) და $P\Pi M$ (ნახაზი დ1.5) და (1.1-1.3) ფორმულებიდან გამომდინარეობს სხვადასხვა სისტემის კოორდინატებს შორის გადასვლის ფორმულები:

ჰორიზონტულიდან ეკვატორულზე –

$$\begin{aligned} &\cos\delta\cos t = \sin z\sin A, \\ &\cos\delta\cos t = \cos z\cos\varphi + \sin z\sin\phi\cos A, \\ &\sin\delta = \cos z\sin\varphi - \sin z\cos\varphi\cos A, \\ &\alpha = s - t. \end{aligned} \tag{1.5}$$

სადაც φ - დაკვირვების ადგილის გეოგრაფიული გრძედია, s - ვარსკვლავიერი დრო, რომელიც იზომება გაზაფხულის დღეღამტოლობის წერტილის საათიერი კუთხით;

ეკვატორულიდან ჰორიზონტულზე –

$$\begin{aligned} &\sin z\sin A = \cos\delta\sin t, \\ &\sin z\cos A = -\sin\delta\cos\varphi + \cos\delta\sin\varphi\cos t, \\ &\cos z = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t. \end{aligned} \tag{1.6}$$

ეკვატორულიდან ეკლიპტიკურზე –

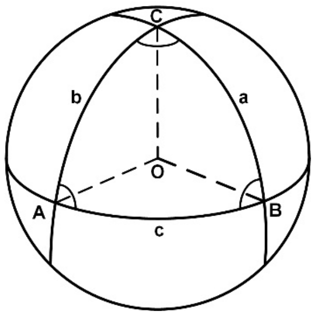
$$\begin{aligned} &\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha, \\ &\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha, \\ &\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha, \end{aligned} \tag{1.7}$$

სადაც ε - ეკლიპტიკის დახრაა ცის ეკვატორის მიმართ ($\approx 23°26'$);

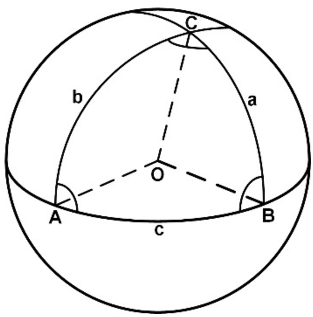
ეკლიპტიკურიდან ეკვატორულზე –

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$
$$\cos\delta\sin\alpha = -\sin\beta\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon\sin\lambda, \qquad (1.8)$$
$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda.$$

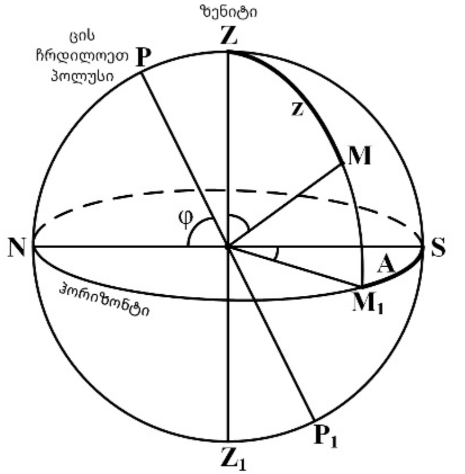
გარდა გეოცენტრულ ეკვატორულ და ეკლიპტიკურ კოორდინატთა სისტემებისა გამოიყენება ჰელიოცენტრული ეკლიპტიკური სისტემა და პლანეტოცენტრული ეკვატორული სისტემები, რომლებიც დაკავშირებულია რომელიმე პლანეტის ეკვატორის სიბრტყესთან.



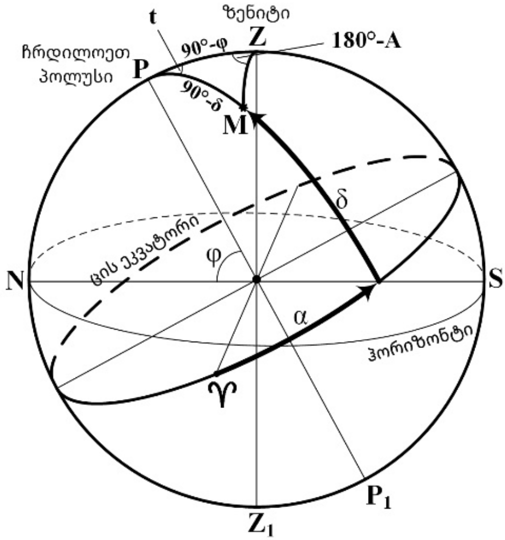
ნახაზი დ1.1. სფერული სამკუთხედი.



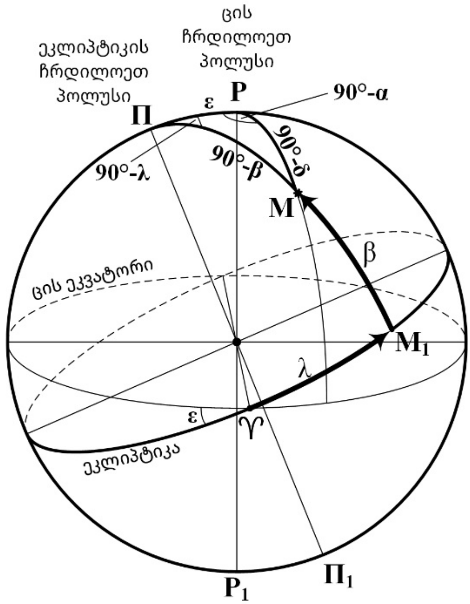
ნახაზი დ1.2. სფერული მართკუთხა სამკუთხედი.



ნახაზი დ1.3. ჰორიზონტალურ კოორდინატთა სისტემა.



ნახაზი დ1.4. ეკვატორული კოორდინატთა სისტემა. ჰორიზონტულ და ეკვატორულ სისტემებს შორის კავშირი.



ნახაზი დ1.5. ეკლიპტიკური კოორდინატთა სისტემა. ეკვატორულ და ეკლიპტიკურ სისტემებს შორის კავშირი.

დამატება II.

ვექტორული და ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

ვექტორი სიბრტყეზე. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატები

განვიხილოთ რაიმე სიბრტყეზე მოცემული ვექტორი. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი ვექტორი შეიძლება სრულად განვსაზღვროთ სიბრტყეზე ორი არაკოლინეარული ვექტორის მეშვეობით:

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2. \tag{1}$$

აქ $a^i, i = 1,2$ – კოეფიციენტებია (ზედა ინდექსით აღნიშნულია კომპონენტის ნომერი და არა ხარისხში აყვანა), რომლებსაც უწოდებენ $\vec{a}$ ვექტორის კონტრავარიანტულ კოორდინატებს. გეომეტრიულად ეს შეიძლება გამოვსახოთ ისე, როგორც არის მოცემული ნახაზზე დ2.1.

ვექტორებს $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ უწოდებენ ბაზისურს, მათ შორის კუთხე, იმ პირობით, რომ $\varphi \neq 0, \pi$, შეიძლება იყოს ნებისმიერი. ასევე ნებისმიერი შეიძლება იყოს არანულოვანი ბაზისური ვექტორების სიგრძეები. ნახაზზე დ2.1 მოცემული ბაზისი იმავე სიბრტყეზე გვაძლევს მახვილკუთხა კოორდინატთა სისტემას (u, v) ღერძებით.

როგორც ნახაზიდან დ2.1 ვხედავთ, OA_1 და OA_2 მონაკვეთების სიგრძეები უდრის:

$$OA_1 = a^1|\vec{e}_1|,\ \ OA_2 = a^2|\vec{e}_2|. \tag{2}$$

თუმცა, ეს არ არის ერთადერთი მეთოდი მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში $\vec{a}$ ვექტორის განსასაზღვრავად. იგი ასევე შეიძლება განვსაზღვროთ (u, v) ღერძებზე ორთოგონალური პროექციებით. ასეთი პროექციები უდრის:

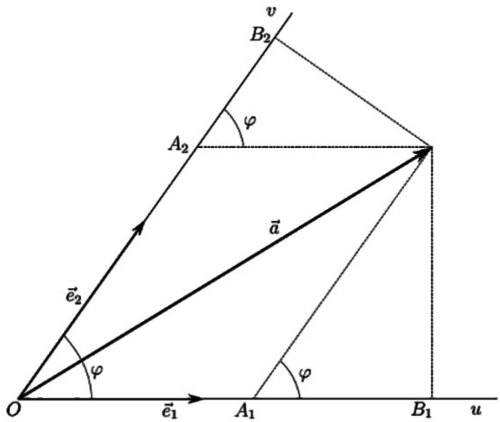
$$OB_1 = OA_1 + OA_2\cos\varphi = a^1|\vec{e}_1| + a^2|\vec{e}_2|\cos\varphi \tag{3}$$

$$OB_2 = OA_1\cos\varphi + OA_2 = a^1|\vec{e}_1|\cos\varphi + a^2|\vec{e}_2| \tag{4}$$

გამოვსახოთ ამ პროექციების სიგრძეები ბაზისური ვექტორების სიგრძეებით შემდეგნაირად:

$$OB_1 = a_u = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = \frac{a_1}{|\vec{e}_1|} \tag{5}$$

$$OB_2 = a_v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = \frac{a_2}{|\vec{e}_2|} \tag{6}$$



ნახაზი დ2.1. სიბრტყეზე მოცემული ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები.

სადაც $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1$ და $a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2$ - $\vec{a}$ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებია.

გავუტოლოთ ერთმანეთს (3), (5) და (4), (6)

$$\frac{a_1}{|\vec{e}_1|} = a^1|\vec{e}_1| + a^2|\vec{e}_2|\cos\varphi \tag{7}$$

$$\frac{a_2}{|\vec{e}_2|} = a^1|\vec{e}_1|\cos\varphi + a^2|\vec{e}_2| \tag{8}$$

გავამრავლოთ (7) $|\vec{e}_1|$ -ზე, ხოლო (8) - $|\vec{e}_2|$ -ზე და გარდავქმნათ შესაბამისად:

$$a_1 = a^1|\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1| + a^2|\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2| \tag{9}$$

$$a_2 = a^1|\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2| + a^2|\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2| \tag{10}$$

შემოვიღოთ მატრიცა:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

მაშინ (9) და (10) შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$a_i = \sum_{j=1}^{2} g_{ij} a^j, \ \ i = 1,2 \tag{12}$$

გამოსახულება (12) გვაძლევს ვექტორის კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს შორის კავშირს, რომელიც განისაზღვრება

მხოლოდ **g** მატრიცის სახით, რომელიც თავის მხრივ დამოკიდებულია ბაზისური ვექტორების ურთიერთგანლაგებაზე.

კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების ერთობლიობა არჩეულ ბაზისში განსაზღვრავენ ერთი და იგივე ვექტორს. კონტრავარიანტული კოორდინატების გამოყენებისას ეს ვექტორი მოიცემა ვერტიკალური მატრიცით:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$$

ხოლო კოვარიანტულის შემთხვევაში – ჰორიზონტული მატრიცით:

$$\mathbf{a} = [a^1 \quad \cdots \quad a^{\mathrm{n}}]$$

ვექტორების სკალარული ნამრავლი

გადავიდეთ უფრო მაღალი განზომილების სივრცეზე და განვიხილოთ ორი ვექტორი:

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3, \ \ \vec{b} = b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3$$

სადაც ბაზისური ვექტორები $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, ისევე როგორც ზევით, არანულოვანი არაკომპლანარული ვექტორებია. გადავამრავლოთ სკალარულად $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3) \cdot (b^1\vec{e}_1 + b^2\vec{e}_2 + b^3\vec{e}_3)$$

ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში გავხსნათ ფრჩხილები

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^1b^1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + a^2b^1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a^3b^1(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) +$$
$$+ a^1b^2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + a^2b^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + a^3b^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) +$$
$$+ a^1b^3(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + a^2b^3(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) + a^3b^3(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)$$

და კვლავ შემოვიღოთ მატრიცა:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

მაშინ სკალარული ნამრავლი შეგვიძლია ჩავწეროთ საკმაოდ კომპაქტურად:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} g_{ij} a^j \right) b^i \qquad (15)$$

თუ (12)-ს განვაზოგადებთ სამგანზომილებიანი სივრცისთვის, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$a_i = \sum_{j=1}^{3} g_{ij} a^j, \;\; i = 1,2,3 \qquad (16)$$

რაც $\vec{a}$ ვექტორის კოვარიანტული კოორდინატებია. აქედან, (15) შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i b^i \qquad (17)$$

ეინშტეინის გამარტივება

განტოლების (17) შემდგომი გამარტივების მეთოდი ეკუთვნის ა. ეინშტეინს. გამოსახულებებში (16) და (17) შეგვიძლია გამოვტოვოთ ჯამის $\sum$ სიმბოლო და ვიგულისხმოთ აჯამვა გამეორებადი ინდექსების მიხედვით. აქედან გამომდინარე, (16) შეგვიძლია შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$a_i = g_{ij} a^j, \;\; i = 1,2,3 \qquad (18)$$

სადაც j არის ინდექსი, რომლითაც ხდება აჯამვა. გარდა ამისა, წესით, ინდექსები უნდა იცვლიდნენ მდებარეობას – თუ პირველ თანამამრავლში ის ქვევით არის, მეორეში უნდა იყოს ზემოთ და პირიქით. (17) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i \qquad (19)$$

ხოლო (15) გამოისახება შემდეგნაირად

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} a^j b^i \qquad (20)$$

მარტივი მაგალითების ანალიზი

განვიხილოთ მარტივი მაგალითები. დავუშვათ ჩვენი ბაზისი დეკარტულია ანუ ორთონორმირებულია. მაშინ, **g** მატრიცა გახდება ერთეულოვანი

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორი მოცემული გვაქვს ასეთ ბაზისში. როგორც ცნობილია, ვექტორის სიგრძის კვადრატი ტოლია ამ ვექტორის სკალარული ნამრავლისა თავის თავზე, ანუ

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = g_{ij} a^j a^i = (g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3)a^1 +$$
$$+(g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3)a^2 +$$
$$+(g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3)a^3 =$$
$$= (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$$

შედეგად მივიღეთ, რომ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ვექტორის სიგრძის კვადრატი ტოლია მისი კომპონენტების კვადრატების ჯამის.

გამოვთვალოთ ვექტორის სიგრძის კვადრატი ბრტყელ მახვილკუთხა ბაზისში (იხ. ნახაზი 2.1). ვთქვათ ასეთ ბაზისში მოცემული გვაქვს $\vec{b}$ ვექტორი თავისი კონტრავარიანტული კოორდინატებით. მაშინ:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & \cos\varphi \\ \cos\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

სადაც φ - კუთხეა ბაზისურ ვექტორებს შორის. გამოვთვალოთ $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძის კვადრატი

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} = g_{ij} b^j b^i = (g_{11}b^1 + g_{12}b^2)b^1 + (g_{21}b^1 + g_{22}b^2)b^2 =$$
$$= (b^1)^2 + b^2 b^1 \cos\varphi + b^1 b^2 \cos\varphi + (b^2)^2 =$$
$$= (b^1)^2 + (b^2)^2 + 2b^1 b^2 \cos\varphi$$

ზუსტად ასეთ შედეგს მივიღებთ, თუ ვისარგებლებთ კოსინუსების თეორემით და ვიპოვით პარალელოგრამის დიაგონალის სიგრძის კვადრატს.

როგორც ვხედავთ, სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემაში მუშაობისას ჩვენ გამოვიყენეთ ერთადერთი ფორმულა (20) სკალარული ნამრავლის გამოსათვლელად და მისი სახე სრულიად არ არის დამოკიდებული ბაზისზე და სივრცის განზომილებაზე. ბაზისით განისაზღვრება მხოლოდ **g** მატრიცის კომპონენტების კონკრეტული მნიშვნელობები.

ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფორმულა (20) გამოსახავს ორი ვექტორის სკალარულ ნამრავლს ***ტენზორული ანუ ბაზისისგან დამოუკიდებელი ფორმით.***

ზემოთ აღნიშნული $\mathbf{g}$ მატრიცა გვაძლევს ე.წ. ***მეტრიკულ ტენზორს***. მისი სახე განსაზღვრავს თუ როგორ გამოითვლება ორ წერტილს შორის მანძილი მოცემულ კოორდინატთა სისტემაში. თუმცა, მათემატიკური ფორმა, ამ შემთხვევაში კვადრატული მატრიცა, რომელიც შეიცავს კომპონენტების ერთობლიობას, ჯერ კიდევ არ არის ტენზორი.

მარტივი მაგალითების ანალიზი

გადავწეროთ (20) დამოკიდებულება მატრიცული ფორმით:

$$c = \mathbf{a}^{(0)T}\mathbf{g}^{(0)}\mathbf{b}^{(0)} \tag{21}$$

სადაც c – ვექტორების სკალარული ნამრავლია. ზედა ინდექსი აღნიშნავს კოორდინატთა სისტემას, რომელშიც მოცემულია ვექტორები და განსაზღვრულია მეტრიკული ტენზორი. ავღნიშნოთ ეს არის კოორდინატთა სისტემა როგორც K0. ვექტორის გარდაქმნა რომელიღაც სხვა კოორდინატთა K1 სისტემაში აღიწერება $\mathbf{A}_{01}$ გარდაქმნის მატრიცით, ანუ:

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{a}^{(1)}, \quad \mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{A}_{01}\mathbf{b}^{(1)} \tag{22}$$

ჩავსვათ (22) (21)-ში:

$$c = \left(\mathbf{A}_{01}\mathbf{a}^{(1)}\right)^{T} \quad \mathbf{g}^{(0)}\mathbf{A}_{01}\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{a}^{(1)T}\mathbf{A}_{01}^{T}\mathbf{g}^{(0)}\mathbf{A}_{01}\mathbf{b}^{(1)}.$$

მეორე განტოლებაში გამოსახულება:

$$\mathbf{A}_{01}^{T}\mathbf{g}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{g}^{(1)}$$

წარმოადგენს მეტრიკულ ტენზორს, რომლის კომპონენტები განისაზღვრება ახალი ბაზისით. როგორც ვხედავთ, ახალ ბაზისში ოპერაციას ანალოგური ფორმა აქვს:

$$c = \mathbf{a}^{(1)T}\mathbf{g}^{(1)}\mathbf{b}^{(1)}$$

ჩვენ ვაჩვენეთ ტენზორების კიდევ ერთი თვისება – მისი კომპონენტები იცვლება სინქრონულად იმავე სივრცის ვექტორების კომპონენტებისა, რომელშიც განსაზღვრულია თავად ტენზორი.

ამდენად, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ტენზორი არის მათემატიკური ობიექტი, რომელიც წარმოდგენილია კომპონენტების ერთობლიობით და მათი ცვლილების წესით ბაზისის ცვლილების შემთხვევაში.

ეინშტეინის წესის გამოყენებით გადავწეროთ (22) და (23) ტენზორული სახით:

$$a^{i(1)} = \alpha_k^i a^{k(0)}, \qquad b^{i(1)} = \alpha_k^i b^{k(0)} \tag{24}$$

$$g_{ij}^{(1)} = \alpha_i^l\, \alpha_j^k\, g_{kl}^{(0)} \tag{25}$$

სადაც α_i^j - $\mathbf{A}_{01}$ მატრიცის ელემენტებია. განვიხილოთ (25) სამგანზომილებიან მაგალითზე. ვთქვათ, კოორდინატთა გარდაქმნის მატრიცას შემდეგი სახე აქვს:

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \alpha_3^1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 \end{bmatrix}$$

ჩავწეროთ მეტრიკული ტენზორის კომპონენტების გარდაქმნა და ამისათვის (25)-ში მოვახდინოთ აჯამვა ინდექსებით k და l:

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(1)} &= \alpha_i^1\left(\alpha_j^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_j^2\, g_{21}^{(0)} + \alpha_j^3\, g_{31}^{(0)}\right) + \\ &+ \alpha_i^2\left(\alpha_j^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_j^2\, g_{22}^{(0)} + \alpha_j^3\, g_{32}^{(0)}\right) + \\ &+ \alpha_i^3\left(\alpha_j^1\, g_{13}^{(0)} + \alpha_j^2\, g_{23}^{(0)} + \alpha_j^3\, g_{33}^{(0)}\right) \end{aligned}$$

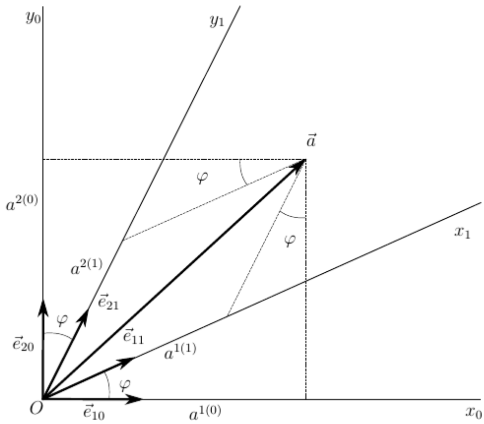
აქედან ჩანს, რომ (25)-ში ხდება გარდაქმნის მატრიცის ტრანსპონირება, შედეგის გამრავლება მეტრიკულ ტენზორზე და მიღებული მატრიცის გამრავლება გარდაქმნის მატრიცაზე.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი სიბრტყეზე. დავუშვათ $\vec{a}$ ვექტორი მოცემულია ორ ნორმირებულ ბაზისში: მართკუთხა $(\vec{e}_{10}, \vec{e}_{20})$ და მახვილკუთხა $(\vec{e}_{11}, \vec{e}_{21})$ (იხ. ნახაზი დ2.2). მახვილკუთხა კოორდინატთა სისტემიდან მართკუთხაში გარდაქმნა გამოისახება შემდეგი მატრიცით:

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

შებრუნებულ გარდაქმნას ასეთი სახე აქვს:

$$\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} & -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi} & \dfrac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} \end{bmatrix}$$



ნახაზი დ2.2. ვექტორის მახვილკუთხა კოორდინატთა სისტემიდან მართკუთხაში გარდაქმნა.

ასევე, დავუშვათ, მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ჩვენს ვექტორის კომპონენტებია:

$$\mathbf{a}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $|\vec{a}| = 5$. მეტრიკული ტენზორი ორთონორმირებულ ბაზისში წარმოადგენს ერთეულოვან მატრიცას:

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

აქედან

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij}^{(0)} a^{j(0)} a^{i(0)} = \left(g_{11}^{(0)} a^{1(0)} + g_{12}^{(0)} a^{2(0)}\right) a^{1(0)} +$$
$$+\left(g_{21}^{(0)} a^{1(0)} + g_{22}^{(0)} a^{2(0)}\right) a^{2(0)} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 25.$$

დავუშვათ ღერძების დახრის კუთხე ტოლია $\varphi = \pi/6$ და გამოვითვალოთ ვექტორის კონტრავარიანტული კოორდინატები მახვილკუთხა სისტემაში:

$$a^{1(1)} = \tilde{\alpha}_1^1 a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^1 a^{2(0)} = 3\sqrt{3} - 4$$
$$a^{2(1)} = \tilde{\alpha}_1^2 a^{1(0)} + \tilde{\alpha}_2^2 a^{2(0)} = -3 + 4\sqrt{3}.$$

ვექტორთან ერთად ასევე უნდა გარდავქმნათ მეტრიკული ტენზორიც:

$$g_{11}^{(1)} = \alpha_1^1\left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2\left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$g_{12}^{(1)} = \alpha_1^1\left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_1^2\left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g_{21}^{(1)} = \alpha_2^1\left(\alpha_1^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2\left(\alpha_1^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_1^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g_{22}^{(1)} = \alpha_2^1\left(\alpha_2^1\, g_{11}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{21}^{(0)}\right) + \alpha_2^2\left(\alpha_2^1\, g_{12}^{(0)} + \alpha_2^2\, g_{22}^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

საბოლოოდ გამოვთვალოთ ვექტორის სიგრძე ახალ კოორდინატთა სისტემაში:

$$|\vec{a}|^2 = g_{ij}^{(1)} a^{j(1)} a^{i(1)}$$
$$= \left(g_{11}^{(1)} a^{1(1)} + g_{12}^{(1)} a^{2(1)}\right) a^{1(1)} + + \left(g_{21}^{(1)} a^{1(1)} + g_{22}^{(1)} a^{2(1)}\right) a^{2(1)}$$
$$= \left(3\sqrt{3} - 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\right)\left(3\sqrt{3} - 4\right) + + \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{3} - 3 + 4\sqrt{3}\right)\left(-3 + 4\sqrt{3}\right)$$
$$= 25$$

ანუ

$$|\vec{a}| = 5,$$

შესაბამისად, გამოდის, რომ ვექტორის სიგრძე და ვექტორების სკალარული ნამრავლი *ინვარიანტულია* ანუ არ იცვლება კოორდინატების გარდაქმნისას. თანაც, ჩვენ გამოვიყენეთ ერთი და იგივე თანაფარდობა (20) სხვადასხვა კოორდინატთა სისტემისათვის, თუმცა, წინასწარ გარდავქმენით მეტრიკული ტენზორი, იგივე განზომილებაში ვექტორების გარდაქმნის (25) წესის შესაბამისად.

როგორც ვხედავთ, თუ სივრცის თვისებები ცნობილია, სირთულეს არ წარმოადგენს მასში განსაზღვრულ ვექტორებზე მოქმედებების შესრულება ისეთი ფორმულებით, რომელთა სახე არ არის დამოკიდებული სივრცის ფორმაზე. თანაც, (20), (24) და (25) ფორმულები გვაძლევენ როგორც გამოთვლის ალგორითმს, ასევე მათი კომპონენტების გარდაქმნის საშუალებებს. ამის ყველაფრის საფუძველია სწორედ ტენზორული მიდგომის გამოყენება.

მრავალ ფიზიკურ თეორიაში, მათ შორის, ფარდობითობის ზოგად თეორიაში, განიხილება გამრუდებული სივრცე-დრო და იქ სხვა მიდგომა სრულიად არაპროდუქტიულია. გამრუდებულ სივრცე-დროში მეტრიკული ტენზორი მოიცემა ლოკალურად, თითოეული წერტილისათვის ცალკე და თუ

შევეცდებით კვლევა ვაწარმოოთ ტენზორების გარეშე, მივიღებთ უაღრესად რთულ და პრაქტიკულად გამოუყენებად განტოლებებს, ზოგჯერ კი საერთოდ ვერ მივიღებთ შედეგს. ტენზორული მეთოდი ასევე გამოიყენება გამოყენებით სფეროებში, სადაც საჭიროა მივიღოთ განტოლებები, რომლებიც არ არიან დამოკიდებული კოორდინატთა სისტემაზე.

ლიტერატურა

1. Kopeikin S., Efroimsky M. and Kaplan G. Relativistic Celestial Mechanics of the Solar System. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2011. 860 p.
2. Brouwer D. and Clemence G.M. Methods of Celestial Mechanics. Academic Press, New York and London. 1961.
3. Collins G.W. The Foundations of Celestial Mechanics. Pachart Publishing House. 2004. 145 p.
4. Escobal P.R. Methods of Astrodynamics. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney. 1968.
5. Александров Ю.В. Небесная Механика. Харьков, ХНУ им. В.Н.Каразина, 2006.
6. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. – М.: Наука, 1972.– 382 с.
7. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы.– М.: Наука, 1968. 799 с.
8. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978. – 456 с.
9. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Методы теории движения искусственных небесних тел. – М.: Наука, 1983. – 351 с.

GEORGIAN ASTRONOMICAL UNION

საქართველოს ასტრონომიული კავშირი

9 789941 821424 >