ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემია

პატარა ქანდის საჯარო სკოლა

ნინო ჭოხური, ნინო მინაგორაშვილი, თამაზ ობგაძე

დამხმარე სახელმძღვანელო, მათემატიკის წრის მეცადინეობებისათვის პატარა ქანდის საჯარო სკოლაში

2021

თბილისი

დამხმარე სახელმძღვანელო, შედგება ხუთი თავისაგან. პირველ თავში განხილულია სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი და თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები. გადმოცემულია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, შესწავლილია რელაციური სისტემების ძირითადი ცნებები და ჰომომორფიზმები. მეორე თავში მოცემულია რიცხვის ცნების ევოლუცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან კვატერნიონებამდე. მესამე თავში შესწავლილია ფუნქციონალური და სასრულ-სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები. მეოთხე თავი მიძღვნილია ფრაქტალური გეომეტრი-ისადმი და განხილულია ბუნებასთან დაკავშირებული ფრაქტალების აგების წესი. მეხუთე თავში მოცემულია ალბათობათა თეორიისა და გამოყენებითი სტატისტიკის ამოცანები. ყოველი თავის ბოლოს მოცემულია საინტერესო ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

დამხმარე სახელმძღვანელო, პატარა ქანდის საჯარო სკოლის მათემატიკის წრის მოსწავლებისთვისაა შედგენილი, რომლებიც განსაკუთრებულ ინტერესს იჩენენ მათემატიკის საგნის მიმართ.

რეცენზენტი. ცხუმ-აფხაზეთის მეცნიერებათა აკადემიის პრეზიდენტი, აკადემიკოსი, პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, თემურ ჩილაჩავა

საგამომცემლო სახლი "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2021

ISBN 978-9941-8-3896-5

წინასიტყვაობა

დამხმარე სახელმძღვანელო, შედგება ხუთი თავისაგან. პირველ თავში განხილულია სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი და თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები. გადმოცემულია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, შესწავლილია რელაციური სისტემების ძირითადი ცნებები და ჰომომორფიზმები. თავის ბოლოს მოცემულია ამოცანები მოსწავლეების დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, რომლებიც მოიცავენ საოლიმპიადო ამოცანებს.

მეორე თავში მოცემულია რიცხვითი სიმრავლეები, როგორც გარემომცველი სამყაროს რაოდენობრივი მოდელები, გადმოცემულია რიცხვის ცნების ევოლუცია ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლიდან კვატერნიონებამდე. განხილულია გაუსის შედარებათა თეორია, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიურად - რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ჩაკეტვით აგების წესი, შესწავლილია კომპლექსური რიცხვების ალგებრა და მოცემის ხერხები, ორწევრა განტოლებების ამოხსნის მეთოდი. მოცემულია კვატერნიონების ალგებრული თვისებები. თავის ბოლოს მოყვანილია ამოცანები და სავარჯიშოები.

მესამე თავში შესწავლილია ფუნქციონალური და სასრულ-სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები. მოცემულია წრფივი ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის მეთოდები. თავის ბოლოს მოსწავლეების დამოუკიდებელი მუშაობისათვის მოცემულია საინტერესო ამოცანები.

მეოთხე თავი მიძღვნილია ფრაქტალური გეომეტრიისადმი და განხილულია ბუნებასთან დაკავშირებული ფრაქტალების აგების წესი. განხილულია წილადური განზომილების არსი და გეომეტრიული ფრაქტალების აგების წესი, მანდელბროტის და ჟულიას სიმრავლეები.

მეხუთე თავში მოცემულია ალბათობათა თეორიისა და გამოყენებითი სტატისტიკის ამოცანები. თავის ბოლოს მოცემულია ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის.

დამხმარე სახელმძღვანელო, პატარა ქანდის საჯარო სკოლის მათემატიკის წრის მოსწავლეებისთვისაა შედგენილი, რომლებიც განსაკუთრებულ ინტერესს იჩენენ მათემატიკის საგნის მიმართ. ავტორები მადლობას უხდიან ნიჭიერ მოსწავლეებს, წრეში აქტიური მუშაობისათვის. განსაკუთრებით, გიორგი სალბიშვილს და მზია ვარძიაშვილს.

I თავი. სალაპარაკო ენის მათემატიკური მოდელი და თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები

1. გამონათქვამთა ბულის ალგებრა

მოგეხსენებათ, რომ მსჯელობისას ჩვენ ვიყენებთ თხრობით წინადადებებს, მათემატიკაში მათ გამონათქვამებს უწოდებენ და ლათინური ასოებით აღნიშნავენ.

მაგალითად: p – "სოკრატე ადამიანია";
q – "ადამიანი მოკვდავია";
r – "სოკრატე მოკვდავია".

გამონათქვამების საშუალებით ადგენენ რთულ წინადადებებს. ამ ფაქტის ფორმალიზაციას მათემატიკურ ლოგიკაში ახორციელებენ უნარული და ბინარული ოპერაციები.
განსაზღვრება: უნარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ერთ ობიექტზე (გამონათქვამზე). უნა – ლათინურად ნიშნავს ერთს. განსაზღვრება: ბინარული ეწოდება ოპერაციას, რომელიც სრულდება ორ ობიექტზე (გამონათქვამზე). ბი – ლათინურად ნიშნავს ორს.

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის დიზიუნქცია **("$\vee$" – ან)** ეწოდება ისეთ **p$\vee$q** გამონათქვამს (**p ან q**), რომელიც ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია ან **p ან q** (ერთ-ერთი მაინც).
არისტოტელეს მოდელში [1-3] (ზოგჯერ ამბობენ ლოგიკაში), ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი. ამბობენ, რომ ჭეშმარიტი (**tru)** გამონათქვამის ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 1-ს, ხოლო, მცდარი (**false)** გამონათქვამისა კი, უდრის 0- ს. ამ შეთანხმების საფუძველზე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი დიზიუნქციის ოპერაციისათვის(ცხრილი 1):

ცხრილი 1

p	q	**p$\vee$q**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

განსაზღვრება: ორი **p** და **q** გამონათქვამის კონიუნქცია **("$\wedge$" – და)** ეწოდება ისეთ **p$\wedge$q** ეწოდება ისეთ (**p და q**), რომელიც ჭეშმარიტია

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია **p და q** (ორივე ერთდროულად).
კონიუნქციის ოპერაციისათვის, ასევე, შეგვიძლია შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი (ცხრილი 2):

ცხრილი 2

p	q	$p\wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

განსაზღვრება: ორ **p** და **q** გამონათქვამს ექვივალენტური (=) ეწოდებათ (ჩაწერენ $p\equiv q$), თუ მათ აქვთ ჭეშმარიტობის ერთნაირი მნიშვნელობები, მათში შემავალი გამონათქვამების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის.

ექვივალენტობის ცნება საშუალებას გვაძლევს ჩამოვაყალიბოთ ზემოთ შემოყვანილი ორი ბინარული ოპერაციის (“$\vee$”**და** “$\wedge$”) თვისებები. ისინი, ნაწილობრივ, ანალოგიური არიან, ჩვენთვის ცნობილი რიცხვების შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციების თვისებებისა. თუმცა, არის განსხვავებებიც. განვიხილოთ ეს საკითხი უფრო დეტალურად (ცხრილი3).

ცხრილი 3

გამონათქვამების თვისებები	**თვისების დასახელება**	**შესაბამისი თვისება შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებისათვის**	**ემთხვევიან(+), თუ, არ ემთხვევიან(-) თვისებები**
$p\vee q\equiv q\vee p$	კომუტაციურობის თვისება	a+b=b+a	+
$p\wedge q\equiv q\wedge p$		axb=bxa	+
$(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$	ასოციურობის თვისება	(a+b)+c=a+(b+c)	+
$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$		(axb)xc=ax(bxc)	+
$(p\vee q)\wedge r\equiv(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$	დისტრიბუციულობის თვისება	(a+b)xc=axc+bxc	+
$(p\wedge q)\vee r\equiv(p\vee r)\wedge(q\vee r)$		(axb)+c $\neq$ (a+c)x(b+c)	-
$p\vee p\equiv p$	იდემპოტენტობის თვისება	a+a $\neq$ a	-
$p\wedge p\equiv p$		axa $\neq$ a	-

როგორც ვხედავთ, დისტრიბუციულობის მეორე თვისება და იდემპოტენტობის თვისება, გამონათქვამებზე განსაზღვრებული ოპერაციებისათვის, უკვე, იძლევა განსხვავებას რიცხვებზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან შედარებით, რაც იმას ნიშნავს, რომ რიცხვითი სიმრავლეები ოპერაციებთან მიმართებაში (ალგებრის თვალსაზრისით) უფრო სხვა სტრუქტურული სისტემაა ბულის ალგებრასთან შედარებით.

ახლა, განვიხილოთ უარყოფის უნარული ოპერაცია, რომელიც განისაზღვრება გამონათქვამებზე:

განსაზღვრება: p გამონათქვამის უარყოფა ("$\neg$"-არა) ეწოდება ისეთ $\neg$p გამონათქვამს (არა p), რომელიც ჭეშმარიტია, როცა p მცდარია და პირიქით, მცდარია როცა p ჭეშმარიტია.

შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს აქვს სახე(ცხრილი 4) :

ცხრილი 4

p	$\neg$p
1	0
0	1

ამრიგად, გამონათქვამთა ალგებრაში განიმარტება სამი ძირითადი ოპერაცია ($\vee,\wedge,\neg$).ეს სამი ოპერაცია განსაზღვრავს მთელ გამონათქვამთა ალგებრას. ანალოგიურ, ალგებრულ სისტემებს ბულის ალგებრებს უწოდებენ.

ყველა სხვა ოპერაცია გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში, გამოისახება ამ სამი ოპერაციის მეშვეობით.

მათემატიკურ მსჯელობაში (ასევე, სხვა ტიპის განსჯის დროს), ჩვენ ხშირად ვიყენებთ სიტყვიერ კონსტრუქციას:

"თუ p, მაშინ q". ამ წინადადებას მათემატიკურ ლოგიკაში ჩაწერენ შემდეგნაირად: p$\Rightarrow$q (p – დან გამომდინარეობს q). "$\Rightarrow$" - სიმბოლოს იმპლიკაციას უწოდებენ. იმისათვის, რომ განსჯა ვაწარმოოთ და ავაგოთ რთული წინადადებებიც, საჭიროა გამოვყოთ ის ძირითადი კანონები, რომლებსაც ჩვენ აზროვნების კანონებს ვუწოდებთ და რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ ფორმალიზაცია გავუკეთოთ ჩვეულებრივ-სალაპარაკო ენას (ცხრილი 5):

ცხრილი 5

კანონის ფორმალური ჩაწერა	კანონის დასახელება
$p\vee(\neg p)\equiv 1$	გამორიცხული მესამის კანონი
$p\wedge(\neg p)\equiv 0$	წინააღმდეგობის კანონი

$p \vee 1 \equiv 1$; $p \vee 0 \equiv p$; $p \wedge 1 \equiv p$; $p \wedge 0 \equiv 0$	**შთანთქმის კანონები**
$(p \Rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$	**კონტრაპოზიციის კანონი**
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r)$	**სილოგიზმის კანონი**
$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$	**დე მორგანის კანონები**
$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$	
$\neg(\neg p) \equiv p$	**ორმაგი უარყოფის კანონი**
$(p \Leftrightarrow q) \equiv ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	**ექვივალენტობის კანონი**

სალაპარაკო ენის მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა: სამი ოპერაციით, იმპლიკაციის ცნებითა და ექვივალენტობის მიმართებით.

ჩვენ უკვე შეგვიძლია ფორმალიზაცია გავუწიოთ საკმაოდ რთულ წინადადებებს.

მაგალითად: ვთქვათ, გვაქვს წინადადება - “თუ, დიდია ტენიანობა და მაღალია ტემპერატურა, მაშინ ჩვენ, თავს ვერ ვგრძნობთ კარგად”. მოვახდინოთ მისი ფორმალიზაცია. ამისათვის, შემოვიღოთ აღნიშვნები : “დიდია ტენიანობა” – აღვნიშნოთ **P** ასოთი;

“მაღალია ტემპერატურა” – აღვნიშნოთ **Q** ასოთი ;

“თავს ვგრძნობთ კარგად ” – აღვნიშნოთ **C** ასოთი ;

მაშინ, შემოთავაზებული წინადადება შეიძლება ფორმალურად ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg C). \qquad (1)$$

ასეთნაირად აგებულ ფორმალურ გამოსახულებებს, ბულის ფორმულებს უწოდებენ.

განსაზღვრება: ისეთ გამოსახულებებს, რომლებიც აიგებიან ატომებზე - საწყის გამონათქვამებზე, ბულის ალგებრის სამი ოპერაციისა, იმპლიკაციის ცნებისა და ექვივალენტობის მიმართების მეშვეობით ბულის ფორმულები ეწოდებათ.

მაგალითად: $P \wedge$; და $\Rightarrow (\neg C)$ - არა არიან ბულის ფორმულები.

განსაზღვრება: ბულის ფორმულებს ექვივალენტური ეწოდებათ, თუ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან, მათში შემავალი ატომების ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: განვიხილოთ დე მორგანის პირველი კანონი და დავამტკიცოთ, რომ ექვივალენტობის მარჯვენა და მარცხენა მხარეს მდგარი ფორმულები, ექვივალენტური არიან. ამისათვის, განმარტების თანახმად, განვიხილოთ ამ ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები ატომების (p,q) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში (ცხრილი 6) და ვაჩვენოთ, რომ მათი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევიან:

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ დე მორგანის პირველი კანონი (2)

დამტკიცება:

ცხრილი **6**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

როგორც ვხედავთ, ბოლო ორი სვეტის მნიშვნელობები ერთმანეთს ემთხვევა, რაც ნიშნავს დასამტკიცებელს ანუ ექვივალენტობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეს მდგარი ფორმულები – არიან ექვივალენტური.

განსაზღვრება: ისეთ ფორმულას, რომლის ჭეშმარიტული მნიშვნელობაც უდრის 1, მასში შემავალი ატომების (გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში – ტავტოლოგია ეწოდება.

მაგალითად : 1) $G \equiv \mathbf{p} \vee (\neg \mathbf{p})$ – ტავტოლოგიაა, გამორიცხული მესამის კანონის თანახმად.

2) განვიხილოთ ფორმულა : $H \equiv ((\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q$. მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობის დასადგენად, საჭიროა, ან შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილი, ან გავამარტივოთ ის აზროვნების ზემოთ მოყვანილი კანონების მიხედვით. ჩვენ, ამ მაგალითში, ვირჩევთ ბულის ფუნქციის გამარტივების გზას :$H \equiv (((\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \vee \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (((\neg P \wedge \mathbf{P}) \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow Q) \equiv$ (3)

$\equiv (\mathbf{0} \vee (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \Rightarrow Q) \equiv ((\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P}) \Rightarrow Q) \equiv (\neg (\mathbf{Q} \wedge \mathbf{P})) \vee \mathbf{Q} \equiv (\neg \mathbf{Q}) \vee (\neg \mathbf{P}) \vee \mathbf{Q} \equiv$

$\equiv \mathbf{1} \vee (\neg \mathbf{P}) \equiv \mathbf{1}.$

რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ფორმულა ტავტოლოგიაა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა წინააღმდეგობრივია (არაა სწორი), თუ, ის მცდარია (სხვანაირად, მისი ჭეშმარიტული მნიშვნელობა უდრის 0-ს), მასში შემავალი ატომების (მარტივი გამონათქვამების) ნებისმიერი რეალიზაციის შემთხვევაში.

მაგალითად: $G \equiv \mathbf{p} \wedge (\neg \mathbf{p})$ ფორმულა წინააღმდეგობრივია, წინააღმდეგობის კანონის თანახმად.

სავარჯიშო: აჩვენეთ, რომ ფორმულა

$H \equiv (\mathbf{P} \Rightarrow Q) \wedge (\mathbf{P} \wedge (\neg Q))$ - წინააღმდეგობრივია. (4)

განსაზღვრება: ატომს ან ატომის უარყოფას ლიტერა ეწოდება.

მაგალითად: Q; $\neg P$ - ლიტერებია. $\mathbf{P} \Rightarrow Q$ – არაა ლიტერა.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv \mathbf{F_1} \wedge \mathbf{F_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{F_n} \;; \qquad (5)$$

წარმოადგენილია კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს დიზიუნქტიურ ლიტერას.
ანუ, კონიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა, შეიცავს ლიტერების დიზიუნქციათა კონიუნქციას.

მაგალითად: $F \equiv (\mathbf{P} \vee (\neg Q)) \wedge (\neg P \vee \mathbf{Q}).$ (6)

ანალოგიურად, განიხილავენ დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ცნებას.

განსაზღვრება: ამბობენ, რომ ფორმულა

$$F \equiv \mathbf{F_1} \vee \mathbf{F_2} \vee \ldots \vee \mathbf{F_n} \qquad (7)$$

წარმოადგენილია დიზიუნქტიურ ნორმალურ ფორმაში, თუ თითოეული F_i წარმოადგენს კონიუნქტიურ ლიტერას.
ანუ, დიზიუნქტიური ნორმალური ფორმის ფორმულა შეიცავს ლიტერების კონიუნქციათა დიზიუნქციას.

მაგალითად :

$$F \equiv (\mathbf{P} \wedge (\neg Q)) \vee (\neg P \wedge \mathbf{Q}). \qquad (8)$$

თეორემა: ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1;\ F_2;\ \ldots F_n$ და ფორმულა G. ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1;\ F_2;\ \ldots F_n$ ფორმულებიდან , მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \Rightarrow G$ ტავტოლოგიაა.

თეორემა: ვთქვათ მოცემულია ფორმულები $F_1;\ F_2;\ \ldots F_n$ და ფორმულა G. ფორმულა G გამომდინარეობს $F_1;\ F_2;\ \ldots F_n$ ფორმულებიდან, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ფორმულა $(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n) \wedge (\neg G)$ წინააღმდეგობრივი ფორმულაა.

P.S. 1) წარმოდგენილი თეორია, არა მარტო წარმოადგენს სალაპარაკო ენის ფორმალურ მოდელს, არამედ ქმნის საფუძველს, რათა ამოიხსნას რენე დეკარტის ამოცანა უნივერსალური ალგორითმის პოვნის

შესახებ, იმ ამოცანებისათვის, რომლებიც უშვებენ ფორმალიზაციას არისტოტელეს ლოგიკის ფარგლებში, ზემოთ მოყვანილი მეთოდების მეშვეობით [4];

2) არისტოტელეს ლოგიკის გარდა, არსებობს სამნიშნა ლოგიკაც. აქ ნებისმიერი გამონათქვამი ან ჭეშმარიტია, ან მცდარი ან მის ჭეშმარიტობაზე არაფრის თქმა არ შეგვიძლია [3].

3) არსებობს მათემატიკური განზოგადოება **n-** ნიშნა ლოგიკაც. რომლის თეორიაც საკმაოდ განვითარებულია, მაგრამ ჯერ-ჯერობით ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში [5].

4) არსებობს არამკაფიო ლოგიკაც [6]. აქ თითოეული გამონათქვამი ჭეშმარიტია გარკვეული ალბათობით. ეს თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს ეკონომიკაში, კატასტროფების პროგნოზირების საქმეში და საერთოდ, ყველა იმ ამოცანებში, სადაც გარემო პირობები იმდენად სწრაფად და მოულოდნელად იცვლება, რომ ამოცანის დეტერმინირებული, ცალსახა დასმა შეუძლებელია.

5) მათემატიკოსები სწავლობენ ასევე, ინტუციონისტურ ლოგიკას, რომლის ფუძემდებლებიც არიან Bბრაუერი, ვეილი და ჰეიტინგი [7]. ინტუიციონისტური ლოგიკა მათემატიკურ კურიოზს წარმოადგენს, აქ უარყოფენ წინააღმდეგობის კანონს და ცდილობენ ახლებურად ააგონ მთელი მეცნიერება.

2. სიმრავლეთა ბულის ალგებრა

გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურ სტრუქტურას, წარმოადგენს სიმრავლეთა ბულის ალგებრა. მოვახდინოთ მისი კონსტრუქციული აგება, გამონათქვამთა ბულის ალგებრის ანალოგიურად.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ დიდი ლათინური ასოებით, ხოლო მათ ელემენტებს შესაბამისი პატარა ასოებით.

მაგალითად:

A – მსმენელთა რიცხვი აუდიტორიაში;

N – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

Z – მთელ რიცხვთა სიმრავლე;

Q – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე;

R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე;

M – ქალების რიცხვი ქართულ ლექსებში . . .

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებლად ითვლება გერმანელი მათემატიკოსი გეორგ კანტორი [8]. სიმრავლის ცნებას ზუსტი

განსაზღვრება არა აქვს, თუმცა ის მოიცემა ინტუიციურად გ.კანტორის მიერ შემდეგი ფორმით:

მინიშნება: სიმრავლე არის ბევრი, რომელსაც ჩვენ ერთიანად გავიაზრებთ.

განსაზღვრება: ორ სიმრავლეს ეწოდებათ ტოლი, თუ ისინი შედგებიან ერთიდაიმავე ელემენტებისაგან. ამ ფაქტს ჩაწერენ შემდეგნაირად: A=B.

შემოვიღოთ დიზიუნქციისა, კონიუნქციის და გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაციები სიმრავლეებზე.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების გაერთიანება ("$\cup$" - გაერთიანება) ეწოდება ისეთ $A \cup B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის ან A, ან B სიმრავლეს (ერთ-ერთს მაინც).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \vee e \in B\}. \tag{9}$$

ჩანაწერი $e \in A$ - წაიკითხება ასე - "e ეკუთვნის (როგორც ელემენტი) A სიმრავლეს".

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, გაერთიანების ოპერაცია განისაზღვრება დიზიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლეების თანაკვეთა ("$\cap$" - თანაკვეთა) ეწოდება ისეთ $A \cap B$ სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის A-საც და B - საც (ერთდროულად).

სიმბოლოების საშუალებით ეს განსაზღვრება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \wedge e \in B\}. \tag{10}$$

P.S. როგორც სიმბოლური ჩანაწერიდანაც ჩანს, თანაკვეთის ოპერაცია განისაზღვრება კონიუნქციის ოპერაციის საშუალებით.

ახლა განვიხილოთ მცდარი და ჭეშმარიტი გამონათქვამების ანალოგები, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც არ შეიცავს ელემენტებს ცარიელი სიმრავლე ($\varnothing$) ეწოდება.

P.S. ცარიელი სიმრავლე სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც მცდარი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

განსაზღვრება: ისეთ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ყველა სხვა სიმრავლეს უნივერსალური (E) სიმრავლე ეწოდება.

P.S. უნივერსალური სიმრავლე, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში თამაშობს იგივე როლს, რასაც ჭეშმარიტი გამონათქვამი - გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში. (აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ამ ცნებასთან დაკავშირებულია რიგი ანტინომიებისა, რაც ხშირად, უკავშირდება ცნებათა აღრევას – მთელი, არ შეიძლება რომ იყოს თავის ნაწილი, თუმცა, შეიძლება მათ ელემენტებს შორის იყოს ურთიერთცალსახა თანადობა).

ის ფაქტი რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი, ანუ ჩართულია მასში როგორც ქვესიმრავლე, ჩაიწერება შემდეგნაირად: $A \subseteq B$. ამ ჩანაწერში აღნიშნულია, რომ A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის ნაწილი და შეიძლება მთლიანად ემთხვეოდეს კიდეც მას. იმ შემთხვევაში, როცა ამ სიმრავლეების ტოლობა გამორიცხულია, ამბობენ რომ, A სიმრავლე არის სხვა B სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი და ჩაწერენ $A \subset B$.

ახლა განვიხილოთ გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების თვისებები, რომლებიც მთლიანად ანალოგიურია, გამონათქვამებზე განსაზღვრული დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციათა თვისებებისა (ცხრილი 7).

ცხრილი 7

სიმრავლეთა გაერთიანებისა და თანაკვეთისა თვისებები	თვისებისა და კანონების დასახელება	დიზიუნქციისა და კონიუნქციის თვისებები
$A \cup B = B \cup A$	კომუტაციურობა	$p \vee q \equiv q \vee p$
$A \cap B = B \cap A$		$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	ასოციურობა	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$		$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	დისტრიბუციულობა	$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$		$(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
$A \cup A = A$	იდემპოტენტობა	$p \vee p \equiv p$
$A \cap A = A$		$p \wedge p \equiv p$
$A \cup E = E;\ A \cup \varnothing = A;$ $A \cap E = A;\ A \cap \varnothing = \varnothing$	შთანთქმის კანონები	$p \vee 1 \equiv 1;\ p \vee 0 \equiv p;\ p \wedge 1 \equiv p;\ p \wedge 0 \equiv 0$

ახლა, შემოვიღოთ გამონათქვამის უარყოფის შესაბამისი ოპერაცია სიმრავლეებზე. ამ ოპერაციას სიმრავლის დამატებას ეძახიან.

განსაზღვრება: მოცემული A სიმრავლის დამატება E უნივერსუმამდე ეწოდება ისეთ A^c სიმრავლეს, რომლის ყოველი ელემენტიც ეკუთვნის E-ს და არ ეკუთვნის A-ს.
ეს განსაზღვრება, ფორმალური აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება:

$$A^c=\{e|\ e\in E\wedge e\notin A\}. \tag{11}$$

დე მორგანის კანონებს, სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აქვთ სახე:

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c; \tag{12}$$

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c. \tag{13}$$

ორმაგი უარყოფის კანონს, სიმრავლეებისათვის ჩაწერენ შემდეგნაირად:

$$(A^c)^c=A. \tag{14}$$

P.S. როგორც ვხედავთ, გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა, მიუხედავად შინაარსობრივი სხვაობისა, ოპერაციების მიმართ იდენტურნი არიან.

განსაზღვრება: ორ ალგებრულ სისტემას ჰქვიათ ჰომომორფული, თუ, მათში განსაზღვრულია ოპერაციათა ერთნაირი რაოდენობა და მათ ელემენტებს შორის არსებობს ისეთი შესაბამისობა, რომ ოპერაციების შესაბამისობა ინახავს ელემენტთა შესაბამისობას.
ასე, რომ ცხადია გამონათქვამთა ბულის ალგებრა ჰომომორფულია სიმრავლეთა ბულის ალგებრისა.

3. რელაციური სისტემები

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე. მაშინ ამ სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს აღნიშნავენ $AxA=A^2$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ისეთი (a;b) დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, რომელთაგან პირველი ეკუთვნის A-ს, ხოლო მეორე B-ს.
სიმბოლოების საშუალებით ეს განმარტება ასე ჩაიწერება:

$$A\times B=\{(a;b)|\ \mathrm{a}\in\mathrm{A}\wedge\mathrm{b}\in\mathrm{B}\}. \tag{15}$$

დეკარტული ნამრავლის ცნება საშუალებას გვაძლევს ნამდვილ რიცხვთა ერთგანზომილებიანი $\mathbb{R}$ სივრციდან, მივიღოთ ორგანზომილებიანი სივრცე - სიბრტყე, მართლაც, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$, ასევე, სიბრტყის დეკარტული ნამრავლი კიდევ ერთგანზომილებიან სივრცეზე, მოგვცემს სამგანზომილებიან სივრცეს: $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^3$.

დეკარტული ნამრავლის ცნება, საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ **მიმართებისა** და **ფუნქციის** ცნება.

განსაზღვრება: ორი A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ნებისმიერ *R* ქვესიმრავლეს, მიმართება ეწოდება. ე.ი. თუ, R მიმართებაა, მაშინ

$$R \subset A \times B. \tag{16}$$

მაგალითი: თუ, R – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა (წრფის წერტილების სიმრავლე), მაშინ R^2–დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს და ნებისმიერი მონაკვეთი ამ სიბრტყეზე, ან ნებისმიერი წერტილთა ქვესიმრავლე, იქნება მიმართება განსაზღვრული A სიმრავლეზე.

განსაზღვრება: ისეთ მიმართებას, რომლის დროსაც a- ს ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება b- ს ერთადერთი მნიშვნელობა ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქცია ისეთი გადასახვაა $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომლისთვისაც A სიმრავლის ნებისმიერ მნიშვნელობას, შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი. სხვანაირად რომ ვთქვათ, f ფუნქციას მოეთხოვება ცალსახობა.

P.S. არსებობს სამი ტიპის გადასახვა: სურექცია, ინექცია და ბიექცია. სურექციის დროს გადასახვაში მონაწილეობენ A და B სიმრავლეების ყველა ელემენტი; ინექციის დროს A სიმრავლე ურთიერთცალსახა თანადობაშია B სიმრავლის რაღაც ნაწილთან; ხოლო ბიექციის დროს, გვაქვს ურთიერთცალსახა თანადობა A და B სიმრავლეებს შორის. ასე, რომ ბიექცია არის, ერთდროულად, ინექციაც და სურექციაც.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, რომ A და B რაიმე აბსტრაქტული სიმრავლეებია (ფუნქციები, ადამიანები არჩეული გარკვეული ნიშნით, ქალაქები, ნეირონები . . .), მაშინ f გადასახვას ოპერატორს უწოდებენ.

განსაზღვრება: ფუნქციებისაგან შედგენილ სიმრავლეს ფუნქციონალური სივრცე ეწოდება.

მაგალითი: $\boldsymbol{P_n(x)}$ - n ხარისხის მრავალწევრების (პოლინომების) სიმრავლე. $\boldsymbol{P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$.

რაც შეეხება ოპერატორის ცნებას, ჩვენ ვიცით, კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ოპერატორი, შეგვიძლია ასევე, განვიხილოთ ადამიანების აზრების ცვლილება მასმედიის მოქმედების შედეგად, ამ შემთხვევაში, მასმედიის მოქმედებაა ოპერატორი დ.ა.შ.

განსაზღვრება: თუ, გვაქვს ისეთი გადასახვა $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, რომ A რაიმე ფუნქციონალური სივრცეა, ხოლო B რაიმე რიცხვითი სიმრავლე, მაშინ გადასახვას **ფუნქციონალს** უწოდებენ.

მაგალითად, პოლინომების სიმრავლის ელემენტებს, შეგვიძლია შევუსაბამოთ მისი უფროსი ხარისხის კოეფიციენტი

$$\boldsymbol{a_0}. \tag{17}$$

განსაზღვრება: თუ, მოცემული გვაქვს A სიმრავლე და მასზე განსაზღვრულია R მიმართება, მაშინ $\langle A;R\rangle$ წყვილს რელაციური სისტემა ეწოდება.

მაგალითი: თუ, A გამონათქვამთა ბულის ალგებრაა, ხოლო ღ მასში განსაზღვრული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle A;R\rangle$ იქნება რელაციური სისტემა. ასევე, თუ, B სიმრავლეთა ბულის ალგებრაა და S მასზე განსაზღვრებული რაიმე მიმართება, მაშინ $\langle B;S\rangle$ რელაციური სისტემაა.

განსაზღვრება: ორი $\langle A;R\rangle$ და $\langle B;S\rangle$ რელაციურ სისტემას ეწოდებათ იზომორფული, თუ, არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა გადასახვა $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, რომ ნებისმიერი ($\forall$) x,y$\in$A ადგილი აქვს ტოლობას:

$$xRy \equiv f(x)Sf(y). \tag{18}$$

იზომორფული რელაციური სისტემებისათვის, თუ რაიმე თვისებას აქვს ადგილი $\langle A;R\rangle$- ში, მაშინ, აქვს ადგილი $\langle B;S\rangle$- შიც. მაშასადამე, იზომორფული სისტემები ალგებრულად იდენტურია (ერთნაირია).

P.S. ჰომომორფიზმი, იზომორფიზმისაგან განსხვავებით, არ ითხოვს შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას, ხოლო, თუ ჰომომორფიზმის მოთხოვნას დავუმატებთ შესაბამისობის ურთიერთცალსახობას მივიღებთ იზომორფიზმს. რელაციური სისტემები ფართოდ გამოიყენება ინფორმაციის გეომეტრიული კოდირების თეორიაში [4,5,9,10] (**RO-** ფუნქციის მეთოდი).

4. თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორიის ელემენტები (ხელოვნური ინტელექტი)

თეორემათა ავტომატური დამტკიცების თეორია არის ხელოვნური ინტელექტის შემუშავების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა კომპიუტერის საშუალებით დავადგინოთ, რომ

მოცემული მრავალრიცხოვანი ინფორმაციიდან შესაძლებელია, თუ არა, გავაკეთოთ გარკვეული დასკვნა.

მაშინ, როცა ჩვენი ამოცანა ფორმალიზებულია ბულის ფორმულების მეშვეობით, ჩვენ შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა წარმოადგენს, თუ, არა მოცემული ფორმულა, სხვა აგებულ ფორმულათა სიმრავლის ლოგიკურ შედეგს.

მაგალითისათვის, განვიხილოთ ამოცანა: ვთქვათ, აქციების კურსი ეცემა, თუ, მათი საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება. დავუშვათ, ასევე, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურად გრძნობს თავს, როცა აქციების კურსი ეცემა.

ვთქვათ, ცნობილი გახდა, რომ საწყისი საპროცენტო განაკვეთები იზრდება. მაშინ, შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნა, რომ ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

იმისათვის, რომ გავაკეთოთ ასეთი დასკვნა ავტომატურად, მოვახდინოთ მოცემული ამოცანის ფორმალიზაცია:

P – აქციების საწყისი საპროცენტო განაკვეთი იზრდება;

S – აქციების ფასი ეცემა;

U – ხალხის უმრავლესობა უბედურია.

მაშინ, ამ ამოცანის ფორმალიზაციას აქვს სახე:

$$P \Rightarrow S; \tag{19}$$

$$S \Rightarrow U; \tag{20}$$

$$P; \tag{21}$$

$$U. \tag{22}$$

ვაჩვენოთ, რომ (22) ჭეშმარიტია, როგორც კი ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულა: $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$. ჯერ, ეს ფორმულა გარდავქმნათ კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმამდე:

$$\begin{aligned}
&((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P) \equiv ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \wedge P) \equiv (P \wedge ((\neg P) \vee S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv \\
&\equiv (((P \wedge (\neg P)) \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv ((0 \vee (P \wedge S)) \wedge ((\neg S) \vee U)) \equiv \\
&\qquad \equiv (P \wedge S) \wedge ((\neg S) \vee U) \equiv (P \wedge S \wedge (\neg S)) \vee (P \wedge S \wedge U) \equiv P \wedge S \wedge U .
\end{aligned} \tag{23}$$

ასე, რომ თუ, $((P \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow U) \wedge P)$ ფორმულა ჭეშმარიტია, მაშინ $P \wedge S \wedge U$ ფორმულაც ჭეშმარიტია. რადგან ფრმულა $P \wedge S \wedge U$ ჭეშმარიტია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ჭეშმარიტია P, S და U გამონათქვამები ერთდროულად, ცხადია, რომ მაშინ ჭეშმარიტია U გამონათქვამიც. რაც, იმას ნიშნავს რომ, ფორმულა U, არის (19), (20) და (21) ფორმულების შედეგი.

P.S. ანალოგიურად ხდება სხვადსხვა ტიპის ამოცანების ფორმალიზაცია და მათი ავტომატური ამოხსნა კომპიუტერის

მეშვეობით, რისთვისაც შემუშავებულია გილმორის, დევისის, რობინსონის, ჩენის, კოვალსკის და ერბრანის ალგორითმები [4].

5. პრედიკატები. რვაჩოვ-ობგაძის გეომეტრიული კოდირების RO – მეთოდი

ჩვენს მიერ ადრე განხილულ გამონათქვამებს ქონდათ ფიქსირებული სახე: “სოკრატე ადამიანია”, “სოკრეტე მოკვდავია” დ.ა.შ. პრაქტიკაში, ხშირად, ვხვდებით ცვლადების შემცველ გამონათქვამ-ფუნქციებს: “x რაციონალური რიცხვია”, “y კეთილი ადამიანია”.. .

განსაზღვრება: ცვლადის შემცველ გამონათქვამებს **პრედიკატებს** უწოდებენ.

ხარკოველმა ინჟინერმა ვ.რვაჩოვმა, შექმნა გეომეტრიული კოდირების ერთ-ერთი მეთოდი, რომელსაც R – ფუნქციის მეთოდს უწოდებენ. შემდგომში, ეს ფუნქციები გამოყენებული იქნა მათემატიკური ფიზიკის ამოცანების ამოსახსნელად [9]. მოგვიანებით, R – ფუნქციის მეთოდი თამაზ ობგაძის მიერ გადაყვანილ იქნა თანამედროვე ალგებრის ენაზე [10-11], რაც საშუალებას იძლევა მათემატიკური სიზუსტით ჩამოყალიბდეს R – ფუნქციის აგების ალგორითმი და განზოგადდეს მრავლადბმული შემთხვევებისათვის.

ახლა გადავიდეთ, თვით RO – ფუნქციის აგების ალგორითმზე, რომელსაც წარმოვადგენთ დიაგრამის მეშვეობით ბულის ალგებრების კატეგორიაში:

$$L_1 \to L_2 \to L_r \ , \qquad (24)$$

სადაც L_1 - არის სიმრავლეებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_2 - არის პრედიკატებზე აგებული ბულის ალგებრა,

L_r - არის რვაჩოვის ფუნქციების ბულის ალგებრა.

ისრებით აღნიშნულია ბუნებრივი ჰომომორფიზმები. ეს ალგორითმი განვიხილოთ კონკრეტულ მაგალითზე. ვთქვათ, გვსურს ავაგოთ რთული წირის განტოლება, მაშინ როცა ვიცით თუ, მისი ნაწილები რომელი ფუნქციების გრაფიკებია (ნახ.1.)

ნახ. 1. ორი წრეწირი R და r რადიუსებით

ჩვენი ამოცანაა, შევადგინოთ ისეთი ფუნქციის ანალიზური გამოსახულება, რომელიც ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ამ ორი წრეწირის საზღვარზე და სხვა წერტილებში არაა ნული. (24) დიაგრამიდან გამომდინარე, ჯერ L_1 სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში ვაგებთ საყრდენ სიმრავლეებს ანუ იმ სიმრავლეებს, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელია სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში აღვწეროთ საძებნი სიმრავლე.

$$\Omega_1 = \left\{(x,y)\middle|(x-a)^2+(y-b)^2-R^2 \geq 0\right\}, \tag{25}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y)\middle|R^2-(x-a)^2-(y-b)^2 \geq 0\right\}, \tag{26}$$

$$\Omega_3 = \left\{(x,y)\middle|(x-c)^2+(y-d)^2-r^2 \geq 0\right\}, \tag{27}$$

$$\Omega_4 = \left\{(x,y)\middle|r^2-(x-c)^2-(y-d)^2 \geq 0\right\}. \tag{28}$$

ეს ის სიმრავლეებია, რომელთა საშუალებითაც შეიძლება ავაგოთ საძებნი ფუნქციის სიმრავლური განტოლება:

$$\Omega = (\Omega_1 \cap \Omega_2) \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4)\,. \tag{29}$$

საყრდენი სიმრავლეების აგებისას, ჩვენ ვიყენებთ შესაბამისობას “მეტია ან ტოლი ნულზე”, რაც ამ შემთხვევაში საჭიროა რათა შეგვეძლოს ადვილად გადასვლა ჰომომორფიზმების საშუალებით L_2- ში. მართლაც, ბუნებრივი ჰომომორფიზმის საშუალებით L_2- ში მივიღებთ წრის პრედიკატულ განტოლებას:

$$P = (P_1 \wedge P_2) \vee (P_3 \wedge P_4)\,, \tag{30}$$

სადაც P_1 – არის გამონათქვამი $x_1 \geq 0$,

P_2 – არის გამონათქვამი $x_2 \geq 0$,

P_3 – არის გამონათქვამი $x_3 \geq 0$,

P_4 – არის გამონათქვამი $x_4 \geq 0$,

$$x_1 = (x-a)^2+(y-b)^2-R^2;$$
$$x_2 = R^2-(x-a)^2-(y-b)^2;$$
$$x_3 = (x-c)^2+(y-d)^2-r^2; \tag{31}$$
$$x_4 = r^2-(x-c)^2-(y-d)^2.$$

ახლა, გადავიდეთ L_r – ში რვაჩოვის ჰომომორფიზმის მეშვეობით:

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i + x_j + \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i + x_j - \sqrt{x_i^2 + x_j^2} \\ \neg P_i \Leftrightarrow -x_i \end{cases} \tag{32}$$

მივიღებთ R – ფუნქციას:

$$R = (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \vee (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2}) \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - \sqrt{x_3^2 + x_4^2} +$$
$$+ \sqrt{(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 + (x_3 + x_4 - \sqrt{x_3^2 + x_4^2})^2} \tag{33}$$

სადაც გათვალისწინებული უნდა იყოს (31) თანადობები.

ისეთ შემთხვევებში, როცა ზუსტად ცნობილია ბმის რამდენიმე ელემენტის მქონე წირის შემადგენელი ელემენტების განტოლებები, უფრო მიზანშეწონილია, თ.ობგაძის ჰომომორფიზმი [10] სტრუქტურებს შორის:

$$K_1 \to K_2 \to K_{ro}, \tag{34}$$

$$\begin{cases} P_i \vee P_j \Leftrightarrow x_i \cdot x_j \\ P_i \wedge P_j \Leftrightarrow x_i^2 + x_j^2 \end{cases} . \tag{35}$$

სადაც არის შესაბამისობა: “ჭეშმარიტი ” $\Leftrightarrow$ “უდრის ნულს ”;

“მცდარი”$\Leftrightarrow$ “ არ უდრის ნულს ”.

განხილული მაგალითის შემთხვევაში, საყრდენი სიმრავლეები იქნება:

$$\Omega_1 = \{(x, y) | \, (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0\}, \tag{36}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) | \, (x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0\}. \tag{37}$$

მაშინ,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \;; \tag{38}$$

$$\text{ე.ი. } P = P_1 \vee P_2 \;; \tag{39}$$

სადაც P_1 – არის გამონათქვამი $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$, (40)

P_2 – არის გამონათქვამი $(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0$; (41)

ე.ი.

$RO = [(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] \cdot [(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2]$.

როგორც ვხედავთ, ობგაძის [10] ჰომომორფიზმები საგრძნობლად ამარტივებენ საძიებელი წირის განტოლებას, რომელიც თავის მხრივ, საშუალებას იძლევა მრავლადბმული გეომეტრიული სიმრავლეების კოდირებისათვის. ასევე, რიგ შემთხვევებში, მნიშვნელოვნად გამარტივდა R – ფუნქციის ანალიზური სახეც [12-17]. ამიტომ, მიღებულ ალგორითმს ხშირად, რვაჩოვ-ობგაძის RO – მეთოდს ეძახიან.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. განსაზღვრეთ წინააღმდეგობის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების გამოყენებით.
2. განსაზღვრეთ ბინარული ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:

$(A \cup A^c) \cap B = ?$

4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv ?$
5. რამდენი ნულით ბოლოვდება ყველა ნატურალური რიცხვის ნამრავლი 1-დან 81-ის ჩათვლით?
6. რითი განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან სურექცია და ბიექცია? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 2

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილების მეშვეობით.
2. ჩამოწერეთ შთანთქმის კანონები სიმრავლეებისათვის.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება: $(A \cap B) \cup (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \wedge 1) \vee (p \wedge (\neg p)) \equiv ?$
5. გაქვთ 3 ლიტრიანი და 5 ლიტრიანი ქილები. როგორ ჩავასხათ მათი მეშვეობით დოქში 4 ლიტრი ღვინო ?
6. რა განსხვავებაა მიმართებასა და ფუნქციას შორის ? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 3

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.
2. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება: $(A \cup A^c) \cap (B \cap B^c) \cap (A \cup B \cup C)^c = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$((p \vee (\neg p)) \wedge (q \wedge (\neg q)) \wedge (p \vee q \vee r) \equiv ?$
5. რომელიღაც თვეში 3 კვირა დღე დაემთხვა ლუწ რიცხვს. რა დღე იყო ამ თვის 20 რიცხვში?
6. რა განსხვავებაა ოპერატორსა და ფუნქციონალ შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 4

1. დაამტკიცეთ დე მორგანის პირველი კანონი გამონათქვამთა ბულის ალგებრაში.

2. დაამტკიცეთ დე მორგანის მეორე კანონი სიმრავლეთა ბულის ალგებრაში.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B \cup C) \cap A^c \cap (A \cap A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee q \vee r) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (r \wedge (\neg r)) \equiv ?$
5. ტურნირში მონაწილეობდა 7 მოჭადრაკე. სულ რამდენი პარტია გადამაშდებოდა?
6. რა განსხვავებაა ფუნქციასა და ფუნქციონალს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 5

1. განსაზღვრეთ დიზიუნქციისა და კონიუნქციის ოპერაციები.
2. განსაზღვრეთ ოპერაციები სიმრავლეებზე.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup \varnothing) \cap (A \cap A) \cap (A \cup A^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee 0) \wedge (p \wedge p) \wedge ((p \vee (\neg p)) \equiv ?$
5. 1983 წელს იყო 53 შაბათი დღე. კვირის რა დღე იყო 1 იანვარი ამ წელს?
6. რა განსხვავებაა რელაციური სისტემების ჰომომორფიზმსა და იზომორფიზმს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ გამორიცხული მესამის კანონი და დაამტკიცეთ ჭეშმარიტობის ცხრილის მეშვეობით.
2. განსაზღვრეთ მოცემული სიმრავლის დამატებით სიმრავლის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B) \cup (A \cup A^c) \cup (B \cap B^c) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(\neg q) \wedge ((q \vee (q \vee 0)) \wedge ((p \vee (\neg p)) \equiv ?$
5. ოცი ქალაქიდან თითოეული შეერთებულია საჰაერო ხაზებით. სულ რამდენი საჰაერო ხაზია?
6. რა კავშირია სურექციას, ინექციასა და ბიექციას შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 7

1. განსაზღვრეთ იმპლიკაციისა და ექვივალენციის მიმართებები.
2. ჩამოაყალიბეთ მიმართების, ფუნქციის, ოპერატორისა და ფუნქციონალის ცნებები და აჩვენეთ ფუნქციისა და ფუნქციონალის განმასხვავებელი ნიშნები.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cap E) \cup (B \cap \varnothing) \cup (A^c \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(p \vee p) \wedge ((q \vee (\neg q)) \wedge (p \vee 1) \wedge (p \vee 0) \equiv ?$
5. 1970 წელი დაიწყო ხუთშაბათით. კვირის რომელი დღით დაიწყებოდა 1876 და 1977 წლები შესაბამისად? რა კანონზომიერება შეინიშნება?
6. რა განსხვავებაა კონიუნქტიურ და დიზიუნქტიურ ლიტერებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

ვარიანტი 8

1. რელაციური სისტემების იზომორფიზმის ცნება. იზომორფულია თუ ჰომომორფული გამონათქვამთა ბულის ალგებრა და სიმრავლეთა ბულის ალგებრა?
2. განსაზღვრეთ ფუნქციონალის ცნება.
3. გაამარტივეთ გამოსახულება:
$(A \cup B^c) \cap B) = ?$
4. ლოგიკის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ გამოსახულება:
$((p \wedge p \wedge ((q \vee (\neg q))) \vee ((q \wedge (\neg q)) \equiv ?$
5. მოიტანეს 5 ჩემოდანი და 5 გასაღები. არ ვიცით, რომელი გასაღები აღებს ამა თუ იმ ჩემოდანს. ყველაზე უარეს შემთხვევაში, რამდენი ცდაა საჭირო რომ, ყველა ჩემოდანს მოვარგოთ თავისი გასაღები?
6. რა განსხვავებაა ბულის ფორმულის დიზიუნქტიურ და კონიუნქტიურ ნორმალურ ფორმებს შორის? პასუხი დაასაბუთეთ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств, пер. с англ., Мир, Москва, 1970

2. Halmos R. Lecturs on Boolean algebras, Prinston, 1963

3.Тарский А. Некоторые проблемы и результаты, связанные с основаниями теории множеств, сб. «Математическая логика и её применения», пер. с англ., Мир, Москва, 1965
4.Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем, пер. с англ., Москва, 1983
5.Яблонский С.В. Введение в дискретную математику, Наука,Москва,1986
6. Timothy J. Ross. Fuzzy Logic with Engineering Applications, McGraw-Hill, Inc., New York. 1995.
7.Heyting A. Intuitionism An introduction, Amsterdam,1956
8.Kantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J.Reine Angew. Math., 73 1951
9.Рвачёв В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения, Киев, Наукова думка, 1982
10.ОбгадзеТ.А.Элементы математического моделирования,Министерство народного образования ГССР, Груз. политехн.инст, учеб.пос.,Тбилиси,1989
11.Обгадзе Т.А.,Прокошев В.Г. Вычислительная физика, Мин.общ. и проф. образ. РФ, ВлГУ,учеб.пос., Владимир,1999
12.Пескова М.В. Применение метода регулярных источников OG для расчета течения в пограничном слое над уличными каньонами, Тезисы докладов Воронежского симпозиума “Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках” Воронеж, 20-27 января 2000
13. Obgadze T.A.,Barinov V.V., Fedotova O.I.. Numerical modeling of heat and mass transfer in rheological systems, 4-th Minsk International heat and Mass Transfer Forum, Volume 7, 2000
14. Obgadze T.A.,Prokoshev V.G.,Parfionov S.D. Mathematical modeling of the temperature fields induced under the laser processing material, Edited by M. Geiger , A. Otto for CIRP, WGP and WLT Laser Assisted Net Shape Engineering 3, Proceedings of the 3rd LANE,Erlangen, August 28-31, 2001

II თავი. რიცხვითი სიმრავლეები, როგორც გარემომცველი სამყაროს რაოდენობრივი მოდელები

ადამიანი, ბუნებასთან ურთიერთობის პროცესში, დადგა სიმრავლეთა რაოდენობრივი შედარების აუცილებლობის წინაშე. ამგვარად, წარმოიშვა ნატურალური რიცხვის ცნება.

განსაზღვრება: თვლის პროცესში წარმოშობილ რიცხვებს, **ნატურალური რიცხვები** ეწოდებათ.
ნატურალური რიცხვების სიმრავლე აღინიშნება ℕ ასოთი.

$$\mathbb{N} = \{1;2;3;...\}. \qquad (1)$$

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. იმისათვის, რომ შეადარონ უსასრულო სიმრავლეების ელემენტთა რაოდენობა, შემოაქვთ სიმრავლის სიმძლავრის ცნება.

განსაზღვრება: თუ, ორი უსასრულო სიმრავლის ელემენტებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა (ბიექცია), მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიმრავლეებს **ერთნაირი სიმძლავრე** აქვთ.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეს **თვლადი უსასრულობა** ეწოდება.

P.S. ცხადია, რომ ყველა სიმრავლე, რომლის ელემენტების გადანომრვაც შეიძლება ნატურალური რიცხვებით, აგრეთვე, თვლადი იქნება.

ნატურალური რიცხვები არსებობს ორი სახის: **მარტივი** და **შედგენილი** რიცხვები.

განსაზღვრება: ერთისაგან განსხვავებულ რიცხვს მარტივი ეწოდება, თუ ის იყოფა, მხოლოდ ერთზე და თავის თავზე. ხოლო, ერთზე მეტ ნატურალურ რიცხვს, რომელიც არაა მარტივი შედგენილი ეწოდება.

მაგალითი: მარტივი რიცხვებია $P=\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17 ;19 ; 23 ; 29;...\}$.
შედგენილი რიცხვებია $N \setminus P=\{4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15;...\}$.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, დღემდე, ბევრი ამოუხსნელი ამოცანაა დაგროვილი; რომელთა ჩამოყალიბება ელემენტარულია, მაგრამ ამოხსნა ჯერ-ჯერობით ვერ ხერხდება. ეს პრობლემები, ძირითადად ეხება მარტივ რიცხვთა განაწილების კანონს ნატურალური რიცხვების მიმდევრობაში. ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი ასეთი ამოცანა (პრობლემა):

1. ვიცით ლუწი რიცხვების ზოგადი ფორმულა: $n=2k$; ასევე, ვიცით კენტი რიცხვების ზოგადი ფორმულა: $n=2k+1$. ეს ფორმულები გვაძლევენ შესაბამისად, ყველა ლუწ და კენტ რიცხვებს, როცა k ცვლადი გაირბენს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს. საჭიროა, ვიპოვოთ ანალოგიური ფორმულა მარტივი რიცხვებისათვის.

2.ცნობილია ეილერის მრავალწევრი: $f(x)=x^2+x+41$, რომელიც იძლევა მარტივ რიცხვებს, თუ $x=0;1;2;\ldots;39$. უცნობია, არსებობენ, თუ არა ისეთი ნატურალური m>41 რიცხვები, რომ $f(x)=x^2+x+m$ მრავალწევრი იძლეოდეს მარტივ რიცხვებს, როცა $x=0;1;2;\ldots;\mathrm{m}-2$.

3. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა n^2+1 სახის მარტივი რიცხვების სიმრავლე.

4. უცნობია, უსასრულოა, თუ არა ისეთი მარტივი რიცხვების სიმრავლე, რომელთა შორის სხვაობა 2-ის ტოლია (ჰოლდბახის პრობლემა).

5. უცნობია, შესაძლებელია, თუ არა ნებისმიერი ლუწი რიცხვის წარმოდგენა ორი მარტივი რიცხვის სხვაობის სახით.

ზემოთ მოყვანილი პრობლემები, ძირითადად, დაკავშირებული არიან მარტივი რიცხვების ზოგადი ფორმულის პოვნის ამოცანის ამოხსნასთან. ამ პრობლემის ამოხსნის გზაზე საგრძნობ წინსვლას იძლევა ობგაძის თეორემა.

ობგაძის თეორემა (1972წ): მარტივი რიცხვების სიმრავლის ზოგად ფორმულას, არ შეიძლება რომ ჰქონდეს $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის სახე.

დამტკიცება: განვიხილოთ $f(x)=ax^2+bx+c$ კვადრატული ფუნქციის სასრული სხვაობები:

$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2ax+a+b$;

$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta f(x+1)-\Delta f(x)=2a(x+1)+a+b-2ax-a-b=2a$;

$\Delta^3 f(x)=\Delta(\Delta^2 f(x))=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x)=0$.

ცხადია, რომ უფრო მაღალი რიგის $k\geq 3$ სასრული სხვაობები კვადრატული ფუნქციიდან, აგრეთვე იქნებიან ნულის ტოლი. (ადვილად შემოწმდება, რომ ანალოგიური თვისებები აქვთ საზოგადოდ n ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციებს (პოლინომებს), რომელთათვისაც შესაბამისად ყველა $k\geq n+1$ ხარისხის სასრული სხვაობები იქნებიან ნულის ტოლი).

ახლა, განვიხილოთ მარტივი რიცხვების მიმდევრობა და მათი შესაბამისი სასრული სხვაობები მესამე რიგამდე ჩათვლით. თუ, მესამე რიგიდან დაწყებული ყველა სასრული სხვაობა არ აღმოჩნდა ნულის ტოლი, მაშინ მარტივ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიძლება მოიცემოდეს კვადრატული ფუნქციით და ჩვენი თეორემა დამტკიცებული იქნება.
განვიხილოთ, მარტივ რიცხვთა სიმრავლე და შესაბამისი სასრული სხვაობები:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

1 2 2 4 2 4 2 4 6

1 0 2 -2 2 -2 2 2

-1 2 -4 4 -4 4 0

როგორც ვხედავთ, მესამე რიგის სასრული სხვაობა (მეოთხე სტრიქონი) არაა მხოლოდ ნულებისაგან შემდგარი, რაც იმას ნიშნავს, რომ მარტივი რიცხვის ზოგად ფორმულას არ შეიძლება, რომ ჰქონდეს კვადრატული ფუნქციის სახე რ.დ.გ.

P.S. თეორემის დამტკიცებიდან ნათლად ჩანს, რომ ეს თეორემა ადვილად ზოგადდება ნებისმიერი n სასრული ხარისხის მრავალწევრა ფუნქციისათვის. ზემოთმოყვანილი დანარჩენი პრობლემების ამოხსნა ავტორისათვის არაა ცნობილი და ამდენად, ბავშვებს შეუძლიათ გამოსცადონ ძალები მათ ამოსახსნელად.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, ყოველთვის შეიძლება ორი რიცხვის შეკრება. ასე, რომ ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი, ისევ ნატურალური რიცხვი იქნება. ამ ფაქტს მათემატიკაში ჩამოაყალიბებენ ასე: “ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე **ჩაკეტილია შეკრების ოპერაციის** მიმართ”. მაგრამ, ორი ნატურალური რიცხვის სხვაობა, საზოგადოდ არაა ნატურალური რიცხვი.

მაგალითი: $5-7\notin N$ **.** რაც იმას ნიშნავს, რომ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში, შეუძლებელია $x+7=5$ განტოლების ამოხსნა.

ამიტომ, საჭირო გახდა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გაფართოვება **მთელ რიცხვთა** სიმრავლემდე.

განსაზღვრება: ნატურალური რიცხვების, მათი მოპირდაპირე რიცხვების და ნულის გაერთიანებას **მთელ რიცხვთა სიმრავლე** ეწოდება.

მთელ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Z ასოთი. ფორმალურად, ეს განსაზღვრება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად

$$\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\mathbb{N}_{-}\cup\{0\}. \quad (2)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}. \quad (3)$$

ამ სიმრავლეში განტოლება $x+7=5$, უკვე ამოხსნადია და

$$x = 5 - 7 \Leftrightarrow x = -2\,. \qquad (4)$$

მაგრამ, წრფივი განტოლება, საზოგადოდ, არაა ამოხსნადი.

მაგალითი: $$2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin Z\,. \qquad (5)$$

ამიტომ, საჭიროა რიცხვის ცნების შემდგომი გაფართოება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლემდე.

განსაზღვრება*:* $\frac{a}{b}$ სახის რიცხვების სიმრავლეს, სადაც $a \in Z \wedge b \in N$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე აღინიშნება Q ასოთი.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \ \mathrm{a} \in \mathrm{Z} \wedge \mathrm{b} \in \mathrm{N} \right\}. \qquad (6)$$

ადვილი მისახვედრია, რომ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. (7)

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, უკვე, შეგვიძლია ამოვხსნათ წრფივი განტოლებები, თუმცა, არც ეს სიმრავლე აღმოჩნდა საკმარისი ალგებრული განტოლებების ამოსახსნელად. ასე შემოვიდა მათემატიკაში ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მოგვიანებით, ჰიპერკომპლექსური რიცხვების ცნებები. ამ რიცხვითი სიმრავლეების აგება მოითხოვს ფაქიზი მათემატიკური ცნებების ცოდნას და ჩვენი ამოცანებისათვის იმდენად მნიშვნელოვანია, რომ ჩვენ ჩავუღრმავდებით თანდათანობით.

1. ნატურალური და მთელი რიცხვების გამოყენებანი

ნუმეროლოგიის ელემენტები. ნატურალური რიცხვის ცნებას ფართოდ იყენებს მეცნიერების ყველა დარგი. ჯერ კიდევ ანტიკურ ხანაში, როდესაც მეცნიერება და რელიგია ერთად შეისწავლებოდა, როგორც საერთო სიბრძნის ნაწილები, მეცნიერები სწავლობდნენ ამა, თუ იმ მოვლენის რიცხვით მახასიათებლებს: ზომავდნენ სამეურნეო სავარგულების ფართს, მანძილებს, ჭურჭლის მოცულობას და ა.შ. ზოგიერთ შემთხვევაში, კი ისეთი მეცნიერებიც კი, როგორიც იყო **პითაგორა**. სწავლობდნენ რიცხვთა მაგიას. მათ სჯეროდათ, რომ ადამიანის მთელი ცხოვრება და ხასიათი განპირობებულია არა მარტო ვარსკვლავთა და პლანეტების განლაგებით (ასტროლოგია), არამედ იმ რიცხვითი მახასიათებლებით, რაც დაკავშირებულია მოცემული ადამიანის დაბადების თარიღთან (ნუმეროლოგია) [1-2]. ნუმეროლოგიით იყო გატაცებული **ისააკ ნიუტონიც.**

მაგალითისათვის, თუ, ადამიანი დაიბადა 1976 წლის 19 ნოემბერს, მაშინ მისი პერსონალური რიცხვი იქნება დაბადების რიცხვის ციფრების ჯამი 1+9=10 ანუ 1+0=1 ; ხოლო დაბადების თარიღის პერსონალური რიცხვი რომ მივიღოთ, უნდა შევკრიბოთ მისი შესაბამისი თვის ნომრის ციფრებიც ნოემბერი=11 ე.ი. 1+1=2, გარდა ამ რიცხვებისა უნდა შევკრიბოთ დაბადების წლის ციფრებიც ე.ი. 1+9+7+6=23 ამ რიცხვის ციფრების ჯამია 2+3=5, საბოლოოდ, უნდა შევკრიბოთ დაბადების რიცხვის, თვის და წლის ციფრები ერთად 19.11.1976. მაშინ მივიღებთ (1+9)+(1+1)+(1+9+7+6)=10+2+23=35 თუ, ამ რიცხვის ციფრებსაც შევკრიბავთ, მივიღებთ 3+5=8. რაც იმას ნიშნავს, რომ ამ პიროვნებისათვის დამახასიათებელია რიცხვი 8-ის უპირატესი გავლენა. ეს ნიშნავს იმას, რომ განხილული პიროვნება უმეტესწილად, არის წარმატებული ყველა წამოწყებაში, ამასთან ერთად, მასზე მოქმედებს დაბადების რიცხვის (19) ციფრების ჯამი 1, რაც მიგვანიშნებს მისი პატრონის ლიდერულ თვისებებზე.

საზოგადოდ, ადამიანი განიცდის როგორც თავისი რიცხვების, ასევე, ცხოვრების ადგილისა და მოცემული თარიღის გავლენასაც.

განიხილავენ პერსონალური წლის 9 მიმდევრობით საფეხურს, ათვლილს დაბადებიდან:

I წელი – შესაძლებლობათა წელია;
II წელი – წონასწორობის წელია;
III წელი – შემოქმედებითი აქტივობის წელია;
IV წელი – მშენებლობის წელია;
V წელი – კომუნიკაბელობის წელია;
VI წელი – დავალებათა შესრულების წელია;
VII წელი – განხორციელებების წელია;
VIII წელი – კარმის წელია;
IX წელი – ციკლის დასრულების წელია.
P.S. ყოველი 9 წლის შემდეგ, ციკლი იწყებს განმეორებას.

ასევე, განიხილავენ დაბადების თვეთა გავლენას:
იანვარი – გმირული;
თებერვალი – წონასწორობა;
მარტი – სიხარული;
აპრილი – პასუხისმგებლობა;
მაისი – ცხოვრების ენერგია;
ივნისი – შემსრულებლობა, მორჩილება და მზრუნველობა;
ივლისი – სინთეზურობა;

აგვისტო – ლიდერობა;
სექტემბერი – რწმენა;
ოქტომბერი – სიბრძნე;
ნოემბერი - შთაგონებული;
დეკემბერი – დასრულებულობა.

ყოველ რიცხვს შეესაბამება გარკვეული ხასიათი:
რიცხვი 1 - შეესაბამება ეგოცენტრულ ლიდერს;
რიცხვი 2 – მგრძნობიარე, კომუნიკაბელური, უყვარს კუთხეების მომრგვალება;
რიცხვი 3 – მხიარული, ცდილობს მიიღოს სიამოვნება ფიზიკური შრომიდან, უყვარს ხელებით მუშაობა;
რიცხვი 4 – იწვევს დაუდეგარ ხასიათს, რომელიც პერიოდულად, ცდილობს თავი დააღწიოს მონოტონურობას;
რიცხვი 5 – იწვევს ნათელ გონებას და კომუნიკაბელობისაკენ მიდრეკილებას. ამ რიცხვის ხალხს ახასიათებთ მაგნეტიზმი და ჰიპნოზის უნარი, რომელიც იზიდავს მათკენ ხალხს.
რიცხვი 6 – იძლევა თანაგრძნობის მწვავე გრძნობას. უყვარს წესრიგი, სამართლიანობისაკენ სწრაფვა. უყვარს კოლექტიური შრომა. არაd დაგიდევს სხვის აზრს, თუ ისინი ეწინააღმდეგებიან მის საკუთარ ინტერესებს.
რიცხვი 7 – იწვევს განვითარებულ ინტუიციას. უყვარს მარტოობა. არის პუნქტუალური და აკურატული. ხშირად მოსდის შემაშფოთებელი აზრები და ეძებს პრობლემებს იქაც, სადაც ისინი არ არიან.
რიცხვი 8 – იძლევა მომთმენ, დინჯ ხასიათს და აღწევს წარმატებებს ყველა საქმეში. წარმატებული ადამიანია. თქვენი გარშემომყოფნი გრძნობენ თქვენს განსაკუთრებულობას და რესპექტაბელობას, ცდილობენ მოგექცენ მოწიწებით.
რიცხვი 9 – იწვევს ცოდნისაკენ და ფილოსოფიური აზროვნე-ბისაკენ სწრაფვას. ადვილად პატიობთ სხვებს ცოდვებს. ვერ იტანთ ხეპრე ადამიანებს.
ასევე, მნიშვნელოვანია შესაბამისობა ასოებსა და რიცხვებს შორის (ინფორმაციის კოდირების ერთ-ერთი პირველი ისტორიული მაგალითი):

1	ა	კ	ტ	ძ
2	ბ	ლ	უ	წ
3	გ	მ	ფ	ჭ

4	დ	ნ	ქ	ხ
5	ე	ო	ღ	ჯ
6	ვ	პ	ყ	ჰ
7	ზ	ჟ	შ	
8	თ	რ	ჩ	
9	ი	ს	ც	

ამ შესაბამისობის გამოყენების მაგალითისათვის განვიხილოთ სახელები:

იესო ქრისტე=ი+ე+ს+ო+ქ+რ+ი+ს+ტ+ე = 9+5+9+5+4+8+9+9+1+5=64, ციფრთა ჯამი=6+4=10; საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში;
ალაჰი=ა+ლ+ა+ჰ+ი=1+2+1+6+9=19, ციფრთა ჯამი=1+9=10;
ანუ საბოლოოდ 1+0=1; უდავო ლიდერია სამყაროში.

იეღოვო=ი+ე+ღ+ო+ვ+ო=9+5+5+5+6+5=35, ციფრთა ჯამი=3+5=8;
ეშმაკი=ე+შ+მ+ა+კ+ი=5+7+3+1+1+9=26, ციფრთა ჯამი=2+6=8;
სატანა=ს+ა+ტ+ა+ნ+ა=9+1+1+1+4+1=17, ციფრთა ჯამი=1+7=8;
რაც შეესაბამება ამქვეყნიურ წარმატებებს სიამოვნებათა სფეროში, იმქვეყნიური სამუდამო ტანჯვის სანაცვლოდ.

კრიშნა=კ+რ+ი+შ+ნ+ა=1+8+9+7+4+1=30, ანუ 3+0=3, რაც შეესაბამება ღმერთის მსახურს მორჩილებით.
ნათელა=ნ+ა+თ+ე+ლ+ა=4+1+8+5+2+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;
ილია=ი+ლ+ი+ა=9+2+9+1=21, ციფრთა ჯამი=2+1=3;
ნათელა=ილია=3=სწრაფვა ღმერთისაკენ მორჩილებით.

ბიზანტია=ბ+ი+ზ+ა+ნ+ტ+ი+ა=2+9+7+1+4+1+9+1=34, ციფრთა ჯამი=3+4=7;
რომი=8+5+3+9=25, ციფრთა ჯამი=2+5=7;
ბაბილონი=ბ+ა+ბ+ი+ლ+ო+ნ+ი=2+1+2+9+2+5+4+9=34, ციფრთა ჯამი=3+4=7;
ისრაელი=9+9+8+1+5+2+9=27+16=43; ციფრთა ჯამი=3+4=7;
ციფრი 7 შეესაბამება ღმერთთან მებრძოლ, დაუდეგარ ქვეყნებს, რომლებიც ადრე თუ, მალე ქრებიან რუკიდან.

ღმერთი=ღ+მ+ე+რ+თ+ი=5+3+5+8+8+9=38, ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ1+1=2;

ოსანა=5+9+1+4+1=20 რაც იმას ნიშნავს, რომ 2 ღმერთის რიცხვია.
აფხაზეთი=ა+ფ+ხ+ა+ზ+ე+თ+ი=1+3+4+1+7+5+8+9=38, ციფრთა ჯამი=3+8=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ აფხაზეთი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.
ერაყი=5+8+1+6+9=29; ციფრთა ჯამი=2+9=11; ანუ 1+1=2. რაც იმას ნიშნავს, რომ ერაყი ღმერთის მფარველობის ქვეშაა.

რუსეთი =რ+უ+ს+ე+თ+ი=8+2+9+5+8+9=41; ანუ 4+1=5; ძლიერი ქვეყანაა, ახასიათებს კომუნიკაბელობა და მაგნეტიზმი, რომელიც იზიდავს სხვადასხვა ჯურის ხალხს თავისაკენ.
ებრაელი = ე+ბ+რ+ა+ე+ლ+ი=5+2+8+1+5+2+9=32; ანუ 3+2=5; ებრაელებისათვის მეტად ხელსაყრელი ქვეყანაა რუსეთი.

P.S. ცხადია, რომ დაინტერესებულმა მკითხველმა, ზემოთ მოყვანილი პითაგორისეული რიცხვთა მაგიის უფრო დეტალურად გასაცნობად, უნდა მიმართოს დამატებით ლიტერატურას [1-2].

2. რიცხვთა თეორიის ელემენტები

ამ გამოყენებათა გამო, ძველად, ხელისუფალთა ფართო მხარდაჭერით სარგებლობდნენ ბრძენნი (მეცნიერებისა და ფილოსოფიის მსახურნი). სწორედ, ამან მისცა ანტიკურ ხანაში ბიძგი მეცნიერებისა და მათ შორის, რიცხვთა თეორიის განვითარებას. მოგვიანებით, დირიხლეს, გაუსისა და ეილერის ფუნდამენტალურმა შრომებმა, ახალი იმპულსი მისცა რიცხვთა თეორიის განვითარებას. გაუსის მიერ შემუშავებულ იქნა შედარებათა თეორია [3-7] განუსაზღვრელი განტოლებების (განტოლებები, სადაც ცვლადების რიცხვი მეტია განტოლებათა რაოდენობაზე) ამოსახსნელად N - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. მოგვიანებით, ამ თეორიამ დიდი გამოყენება პოვა კრიპტოგრაფიაში [8-9] (ინფორმაციის დაცვა და გაშიფრვა); ასევე, მონაცემთა ციფრული დამუშავების თეორიაში [10] (ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა). ამიტომ, ჩვენ უფრო დეტალურად შევისწავლით გაუსის შედარებათა თეორიას.

განსაზღვრება: ორ a და b რიცხვს **ურთიერთმარტივი** ეწოდებათ თუ, მათი უდიდესი საერთო გამყოფი (a;b)=1.

მაგალითი: 2 და 3 ურთიერთმარტივი რიცხვებია, რადგან (2;3)=1.

3 და 5 ; 7 და 9 ; 9 და 11 დ.ა.შ.

თეორემა*:* თუ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი ორი a და b>0 მთელი რიცხვები, მაშინ არსებობს ერთადერთი წყვილი მთელი q და r რიცხვებისა, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს :

$$a = bq + r, \quad 0 \le r \le b - 1. \tag{8}$$

r - რიცხვს უწოდებენ a-რიცხვის b-ზე გაყოფისას მიღებულ ნაშთს.

მაგალითი: a=185 ; b=12; მაშინ 185=12·15+5, ანუ q=15 da r=5.

ორი რიცხვის უდიდესი საერთო გამყოფის საპოვნელად იყენებენ **ევკლიდეს ალგორითმს,** რომელიც ემყარება (8) წარმოდგენას. მართლაც, ვთქვათ a ნებისმიერი მთელი რიცხვია და b ნებისმიერი მთელი დადებითი რიცხვი, მაშინ თეორემის თანახმად, ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_0; \quad 0 < r_0 < b;\\
&b = r_0 q_1 + r_1; \quad 0 < r_1 < r_0;\\
&r_0 = r_1 q_2 + r_2; \quad 0 < r_2 < r_1;\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n; \quad 0 < r_n < r_{n-1};\\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1}.
\end{aligned} \tag{9}$$

რიცხვები $r_0, r_1, r_2, \ldots$ ადგენენ მკაცრად კლებად არაუარყოფით რიცხვთა მიმდევრობას; მაგრამ ყოველი ასეთი მიმდევრობა სასრულია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი a და b>0 წყვილისათვის მიმდევრობითი გაყოფის პროცესი (ევკლიდეს ალგორითმი) სასრულია, ე.ი. სასრულია (9) ტოლობათა რიცხვი. პროცესი წყდება იმ საფეხურზე, რომელზედაც გაყოფა შესრულდება უნაშთოდ ანუ როცა $r_{n+1} = 0.$ ამგვარად, r_n არის უკანასკნელი ნულისაგან განსხვავებული ნაშთი - უდიდესი საერთო გამყოფი. ცხადია, რომ

$$(a;b) = (b;r_0) = (r_0;r_1) = \ldots = (r_{n-1};r_n) = r_n. \tag{10}$$

მაგალითი: ვიპოვოთ d=(664 ;480) ; a=664 ; b=480.

მაშინ, ევკლიდეს ალგორითმის თანახმად გვექნება:

664=480·1+184 ;
480=184·2+112 ;
184=112·1+72 ;
112=72·1+40 ;
72=40·1+32 ;
40=32·1+**8** ;
32=8·4.

ე.ი. d=(664 ;480)=**8.**

არითმეტიკის ძირითადი თეორემა: ერთზე მეტი ყოველი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი სახით (თანამამრავლთა რიგის სიზუსტით) იშლება მარტივ რიცხვთა ნამრავლად.
ანუ, თუ n ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ

$$n = p_1\, p_2 \dots \mathrm{p_n} \tag{11}$$

ამ ნამრავლში, ზოგიერთი თანამამრავლი შეიძლება რამდენიმეჯერ მეორდებოდეს, ამიტომ თუ, გამოვიყენებთ განმეორებათა რიცხვის ხარისხებს, მივიღებთ (11) გაშლის კანონიკურ წარმოდგენას

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \mathrm{p_n^{\alpha_n}}\,. \tag{12}$$

ამ (12) ჩანაწერიდან ნათლად ჩანს, რომ n რიცხვის განსხვავებულ **გამყოფთა რაოდენობა** იქნება:

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_{\mathrm{n}} + 1)\,. \tag{13}$$

P.S. **ორი რიცხვის უმცირესი საერთო ჯერადი უდრის მათ ნამრავლს გაყოფილს მათსავე უდიდეს საერთო გამყოფზე.**

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე, განისაზღვრება რიგი არითმეტიკული ფუნქციებისა. მათ შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს ეილერის $\varphi(n)$ ფუნქციას, რომელიც უდრის 1-დან n-მდე ყველა იმ ნატურალური რიცხვების რაოდენობას, რომლებიც ურთიერთმარტივი არიან n- ის მიმართ.

მაგალითი: $\varphi(1) = 1;\ \varphi(2) = 1;\ \varphi(3) = 2;\ \varphi(4) = 2;\ \varphi(5) = 4;\ \varphi(6) = 2.$

ვთქვათ, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \mathrm{p_n^{\alpha_n}}$ მოცემული რიცხვის კანონიკური დაშლაა, მაშინ

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})\dots(1 - \frac{1}{\mathrm{p_n}})\,. \tag{14}$$

თუ, p მარტივი რიცხვია, მაშინ

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1}\,. \tag{15}$$

კერძო შემთხვევაში, $\varphi(p) = p - 1.$ (16)

მაგალითი: $\varphi(60) = 60(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 16;$

$\varphi(81) = 81 - 27 = 54;$

$\varphi(5) = 5 - 1 = 4.$

2.1. შედარებათა თეორიის ელემენტები

განვიხილოთ მთელი რიცხვები მოცემულ მ ნატურალურ რიცხვზე გაყოფისას, მიღებული ნაშთების თვალსაზრისით. ამ მ რიცხვს მოდულს უწოდებენ. ყოველ ნატურალურ რიცხვს, მ რიცხვზე

გაყოფისას შეესაბამება ნაშთის გარკვეული მნიშვნელობა (0;1;2;3;... m-1) - ნაშთთა სრული სისტემიდან. სხვანაირად, რომ ვთქვათ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე იყოფა m კლასად. თითოეულ კლასში მოთავსებული არიან ურთიერთსადარი რიცხვები **m** მოდულით. თუ, განიხილება შედარებათა თეორია უფრო ფართო რიცხვით სიმრავლეში, კერძოდ მთელ რიცხვთა სიმრავლეში, მაშინ განიხილავენ აბსოლუტურად უმცირეს ნაშთთა სრულ სისტემას $-\frac{m-2}{2};\ -\frac{m-4}{2};\ \ldots;-2;-1;0;1;2;\ \ldots;\ \frac{m}{2}$; როცა მ ლუწია;

$-\frac{m-1}{2};-\frac{m-3}{2};\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots;\frac{m-1}{2}$; როცა m კენტია.

განსაზღვრება: ორ მთელ a და b>0 რიცხვს ეწოდებათ ურთიერთსა-დარი მოდულით **m**, თუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერნაირ ნაშთებს იძლევიან.

შედარების დამოკიდებულება ასე ჩაიწერება:

$$a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)\ . \qquad (17)$$

(17) იკითხება ასე: a სადარია b –სი მოდულით m.

ცხადია, რომ თუ a სადარია b –სი, ანუ m – ზე გაყოფისას ისინი ერნაირ ნაშთებს იძლევიან, მაშინ მათი სხვაობა (a-b) უნაშთოდ იყოფა m – ზე.

მაგალითი: $25 \equiv 15(\mathrm{mod}10)$, რადგან 25 და 15, 10-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან 5-ს. ასევე, ცხადია რომ 25-15=10 და იყოფა 10-ზე (შედარების მოდულზე).

შედარებათა თვისებები :

1. ერთნაირმოდულიანი შედარებები შეიძლება წევრ-წევრად შევკრიბოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m);\ldots \mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{mod}\, m))\ . \qquad (18)$$

2. შედარებანი ერთნაირი მოდულით, შეიძლება წევრ-წევრად გადავამრავლოთ, ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m);\ \mathrm{a}_2 \equiv b_2(\mathrm{mod}\, m);\ldots \mathrm{a}_\mathrm{n} \equiv b_n) \Rightarrow (\prod_{i=1}^{n} a_i \equiv \prod_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{mod}\, m))\ . \qquad (19)$$

3. შედარების ორივე მხარე და მოდული შეიძლება ერთდროულად გავამრავლოთ ნატურალურ რიცხვზე ანუ

$$(a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\, m)) \Rightarrow (a_1 n \equiv b_1 n(\mathrm{mod}\, mn))\ . \qquad (20)$$

4. თუ, შრდარებას ადგილი აქვს რამდენიმე მოდულით, მაშინ ამ შედარებას ადგილი ექნება ახალი მოდულითაც, რომელიც მოცემული მოდულების უმცირესი საერთო ჯერადის ტოლია, ანუ

$$(a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_1) \wedge a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_2)) \Rightarrow (a \equiv b(\mathrm{mod}[m_1;m_2]))\ . \qquad (21)$$

5. შედარების ორივე მხარე შეიძლება შეიკვეცოს, მათ ისეთ საერთო გამყოფზე, რომელიც მოდულთან ურთიერთმარტივია, ანუ

$$(an \equiv bn(\mathrm{mod}\, m) \wedge (\mathrm{m;n}) = 1) \Rightarrow (\mathrm{a} \equiv \mathrm{b}(\mathrm{modm})). \qquad (22)$$

ეილერის თეორემა: თუ მ ერთზე მეტი ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია და (a ;m)=1, მაშინ

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)\,. \qquad (23)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $m = p$ მარტივი რიცხვია და $(a; p) = 1$, $\varphi(p) = p - 1$, მიიღება ფერმას მცირე თეორემა:

$$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)\,. \qquad (24)$$

განვიხილოთ ერთუცნობიანი შედარებების ამოხსნის მაგალითები.

1) $x^3 + x^2 - 3x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}5)$

ეს შედარება მესამე ხარისხისაა. 5-ის მოდულით ნაშთთა სრული სისტემიდან: (0; 1; 2; 3; 4) ამ შედარებას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 1. ე.ი. მას აქვს ერთი ფესვი. ეს ფესვი ასე ჩაიწერება $x \equiv 1(\mathrm{mod}5)$.

2) $x^2 + x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}4)$

შედარება კვადრატულია. ნაშთთა სრული სისტემიდან 4-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3), მას არცერთი რიცხვი არ აკმაყოფილებს. ე.ი. მას ამონახსნი არა აქვს.

3) $12x^3 + 3x^2 - 2x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}6)$

ეს შედარებაც კვადრატულია, რადგან უფროსი კოეფიციენტი კუბთან მოდულზე იყოფა უნაშთოდ, ანუ $12 \equiv 0(\mathrm{mod}6)$. ასე, რომ იგი შემდეგი შედარების ექვივალენტურია : $3x^2 - 2x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}6)$.
ნაშთთა სრული სისტემიდან 6-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3; 4; 5) მას აკმაყოფილებს მხოლოდ რიცხვი 3, ე.ი. მისი ერთადერთი ფესვი იქნება $x \equiv 3(\mathrm{mod}6)$.

4) $x^5 + x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}7)$

ნაშთთა სრული სისტემიდან 7-ის მოდულით: (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6) ამ შედარებას აკმაყოფილებს ორი რიცხვი 2 და 4; ამიტომ გვექნება ორი ამონახსნი:

$x \equiv 2(\mathrm{mod}7)$; $\quad$ $\mathrm{x} \equiv 4(\mathrm{mod}7)$.

განსაზღვრება: ორ მრავალწევრს ეწოდება ურთიერთმისადარი მოდულით m, თუ მათი სათანადო კოეფიციენტები ურთიერთსადარია m-ის მოდულით. ანუ,

$$f(x) \equiv g(x)(\mathrm{mod}\, m)\,. \qquad (25)$$

P.S.

1.შედარებათა თეორიითა და მათი ინფორმატიკაში გამოყენებებით დაინტერესებულ მკითხველს შეუძლია მიმართოს სათანადო ლიტერატურას [3-10].
2.მთელ რიცხვთა სიმრავლე შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციებთან მიმართებაში ქმნის ალგებრულ სისტემას, რომელსაც მათემატიკაში **კომუტაციურ, უნიტარულ რგოლს** უწოდებენ [11-12].

3. რაციონალური რიცხვები და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის აგება

რაციონალური რიცხვების სიმრავლეში, მთელ რიცხვთა სიმრავლისაგან განსხვავებით, არსებობს მოცემული რიცხვის შებრუნებული რიცხვი გამრავლების ოპერაციის მიმართ. მათემატიკოსები ალგებრულ სისტემას, რომელსაც ქმნის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, მასში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ ველს [11-12] უწოდებენ. Aალგებრის (ალგებრულ ოპერაციებთან მიმართებაში) თვალსაზრისით, არ არის სხვაობა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლესა და ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს შორის .ასე, რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც ალგებრული სისტემის თვალსაზრისით, ქმნის ველს. თუმცა, ამ ორ სიმრავლეს შორის აშკარა სხვაობაა, ტოპოლოგიის [11-12] თვალსაზრისით.

ტოპოლოგიის ცნება საშუალებას გვაძლევს შემოვიღოთ ზღვარისა და უწყვეტი ფუნქციის ცნებები, რაც ესოდენ მნიშვნელოვანია უწყვეტი პროცესების მათემატიკური მოდელირებისათვის.

განსაზღვრება: მოცემულ Q სიმრავლეს, მისი ყოველი x სიმრავლეს, მისი ყოველი B(x) სიმრავლეებთან (ტოპოლოგიის ბაზა) ერთად ტოპოლოგიური სივრცე ეწოდება.

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ტოპოლოგიის ბაზას წარმოადგენს, მისი ყველა ელემენტის შემცველი ღია B(x) სიმრავლე. ამასთან ერთად, რადგან რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე თვლადია, მისი ტოპოლოგიის ბაზაც თვლადია.

განვიხილოთ, რიცხვითი მიმდევრობის ცნება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში.

განსაზღვრება: ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის გადასახვას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში, რაციონალურ რიცხვთა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობა ეწოდება.

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ მიმდევრობას ეწოდება კოშის (ფუნდამენტალური მიმდევრობა), თუ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} |q_m - q_n| = 0 \cdot \tag{26}$$

თეორემა: თუ, რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა კრებადია რაციონალური რიცხვისაკენ, მაშინ ის კოშის მიმდევრობას წარმოადგენს. მაგრამ, თუ $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ კოშის მიმდევრობაა, მისი ზღვარი, საზოგადოდ, შეიძლება არც არსებობდეს (თუ ზღვარითი წერტილი არაა რაციონალური რიცხვი).

განსაზღვრება: $x_0 \in Q$ წერტილს ეწოდება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის ზღვარითი წერტილი, თუ, ამ წერტილის შემცველი ნებისმიერი ღია სიმრავლე (ინტერვალი), შეიცავს რაციონალურ რიცხვს.

თეორემა: $x_0 \in Q$ წერტილი წარმოადგენს ზღვარით წერტილს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს Q რაციონალურ რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ $\lim_{n\to\infty} q_n = x_0$.

მაგალითად, თუ, შევადგენთ რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობას ისეთნაირად, რომ ყოველი შემდეგი წევრი წარმოადგენდეს -ის უკეთეს მიახლოვებას, მაშინ მივიღებთ რაციონალურ რიცხვთა კოშის მიმდევრობას, რომელიც კრებადია არარაციონალური რიცხვისაკენ. ეს იმას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე არ შეიცავს თავისი ზღვარითი წერტილების მთლიან სიმრავლეს. თუმცა, ის შეიცავს რაციონალურ რიცხვებს და თითოეული რაციონალური რიცხვი ზღვარითი წერტილია.

განსაზღვრება: Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის გაერთიანებას მისი ზღვარითი წერტილების ∂Q სიმრავლესთან Q რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის $\bar{Q}$ ჩაკეტვა ეწოდება.

$$\bar{Q} = Q \cup \partial Q \,. \tag{27}$$

განსაზღვრება: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის $\bar{Q}$ ჩაკეტვას ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე ეწოდება.

ყოველივე ზემოთქმულიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ჩაკეტილი სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი წარმოადგენს ზღვარით წერტილს და მაშასადამე, შეგვიძლია ავაგოთ მისკენ კრებადი მიმდევრობა.

განსაზღვრება: სიმრავლეს სრული ეწოდება, თუ ნებისმიერი კოშის მიმდევრობა კრებადია ამ სიმრავლეში.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე არაა სრული, ხოლო ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე სრულია (რადგან ის შეიცავს თავის ყველა ზღვარით წერტილს).

განსაზღვრება: A სიმრავლეს ეწოდება მკვრივი B სიმრავლეში, თუ B სიმრავლის ნებისმიერი x_0 ელემენტისათვის, მოიძებნება A სიმრავლის ელემენტების ისეთი მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება ამ x_0 ელემენტისაკენ.

მაგალითი: რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში, ხოლო ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე არაა მკვრივი მთელ რიცხვთა სიმრავლეში (დაასაბუთეთ რატომ?).

განსაზღვრება (ინტუიციური): სიმრავლეს მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ, თუ, მასში განსაზღვრულია ორ ელემენტს შორის მანძილის ცნება.

მაგალითი: მანძილი ორ რაციონალურ რიცხვს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$\rho(q_1;q_2) = |q_2 - q_1|. \qquad (28)$$

ფორმულა (28)-ის გათვალისწინებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე **მეტრიკული სივრცეა.** თუ, გავიხსენებთ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის მანძილის ცნებას, რომელიც (28) ფორმულის ანალოგიურია, მივიღებთ რომ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეც მეტრიკული სივრცეა.

განსაზღვრება: მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება **სეპარაბელური**, თუ არსებობს არაუმეტეს ვიდრე თვლადი, მასში მკვრივი ქვესიმრავლე.

მაგალითი: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე სეპარაბელურია, რადგან მასში, არსებობს მასში ყველგან მკვრივი თვლადი, რაციონალურ რიცხვთა ქვესიმრავლე.

P.S. სეპარაბელობის თვისება საშუალებას იძლევა მეტრიკული სივრცის ელემენტებს მივუახლოვდეთ თვლადი სიმრავლის ელემენტების მიმდევრობით. ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ვარიაციულ (პირდაპირ) რიცხვით მეთოდებში.

4. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესა და წრფის წერტილებს შორის არსებობს ურთიერთცალსახა თანადობა-ბიექცია; რაც საშუალებას იძლევა, წრფესთან დაკავშირებული გეომეტრიული ამოცანები ჩავწეროთ ნამდვილი რიცხვების მეშვეობით და ამოვხსნათ ალგებრული მეთოდების საშუალებით.

მაგრამ, წრფეების გარდა, გეომეტრიაში არსებობენ სიბრტყეებიც (ორგანზომილებიანი სივრცე). ისმის კითხვა: ვიცით, რომ ერთგანზომილებიან სივრცეს-წრფეს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა

სიმრავლე, არსებობენ თუ არა სიბრტყის შესაბამისი “ბრტყელი რიცხვები"?

ამ კითხვაზე პასუხი არის დადებითი: დიახ არსებობენ, თან ასეთი რიცხვითი სიმრავლეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

როგორც ვიცით, სიბრტყის ყოველ P წერტილს შეესაბამება ორი რიცხვი (მისი კოორდინატები) P(x; y). ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია შემოვიღოთ “ბრტყელი რიცხვები". ვთქვათ, გვაქვს რიცხვები $A=(\alpha;\beta);\quad B=(\gamma;\delta)$.

იმისათვის, რომ აზრი ქონდეს ახალი რიცხვების შემოღებას, უნდა გვქონდეს შესაბამისი ალგებრული ოპერაციები და მათი თვისებები. ამის შემდეგ, შეგვეძლება დავახასიათოთ შესაბამისი ალგებრული სისტემა. ამიტომ, შემოვიღოთ ოპერაციები “ბრტყელ რიცხვებზე".

$$A+B=(\alpha;\beta)+(\gamma;\delta)=(\alpha+\beta;\gamma+\delta)\ ; \tag{29}$$

$$A\cdot B=(\alpha;\beta)\cdot(\gamma;\delta)=(\alpha\cdot\gamma-\beta\cdot\delta;\alpha\cdot\delta+\beta\gamma)\ ; \tag{30}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{(\alpha;\beta)}{(\gamma;\delta)}=\left(\frac{\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2},\frac{\beta\cdot\gamma-\alpha\cdot\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right). \tag{31}$$

თუ, შემოვიღებთ ნულისა და ერთის შესაბამის ბრტყელ რიცხვებს

$$\begin{aligned}0&=(0;0);\\ 1&=(1;0).\end{aligned} \tag{32}$$

მივიღებთ ალგებრულ სისტემას, რომლის ოპერაციებიც ძირითადად აკმაყოფილებენ იგივე თვისებებს, რასაც ოპერაციები ნამდვილ რიცხვებზე (წრფივ რიცხვებზე), თუმცა, არის განსხვავებებიც. კერძოდ, თუ “ბრტყელ რიცხვებს" ჩავწერთ ალგებრული ფორმით $A=\alpha+i\cdot\beta$. სადაც, $i=(0;1);\ \alpha=(\alpha\,;0)$. მაშინ გვექნება

$$i^2=i\cdot i=-1\,. \tag{33}$$

ასეთი ტოლობა შეუძლებელია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში. ასე, რომ ჩვენ საქმე გვაქვს ახალი ტიპის ალგებრულ სისტემასთან რომელსაც C - კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეს [13] უწოდებენ. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

P.S. არსებობენ კომპლექსური რიცხვებისაგან განსხვავებული სხვა ბრტყელი რიცხვებიც. კონკრეტულად, დუალური და ორმაგი რიცხვები, მაგრამ ამ რიცხვებისათვის გაყოფის ოპერაცია არაა ყოველთვის შესაძლებელი (აქ არაა ლაპარაკი ნულზე გაყოფაზე), ამიტომ პრაქტიკაში, “ბრტყელი რიცხვებიდან", ჯერ-ჯერობით, ფართო გამოყენება აქვთ, ძირითადად, **კომპლექსურ რიცხვებს.**

4.1. კომპლექსური რიცხვების ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ჩაწერის ფორმები

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება სიბრტყეზე ამ რიცხვის გამომსახველი წერტილიდან კოორდინატთა სათავემდე მანძილს $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

სამკუთხედის ორი გვერდის სიგრძეთა ჯამი მეტია მესამე გვერდის სიგრძეზე; ხოლო ორი გვერდის სხვაობა ნაკლებია მესამე გვერდზე, რაც კომპლექსური რიცხვების ენაზე შემდეგნაირად ჩაიწერება: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \quad \big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$. (34)

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი ეწოდება $\bar{z} = a - ib$ კომპლექსურ რიცხვს.

ცხადია, რომ ადგილი ექნება ტოლობებს:

$$|\bar{z}| = |z| ; \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} ; \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} . \tag{35}$$

განსაზღვრება: $z = a + ib$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი ეწოდება $\mathrm{Re}\, z = a$ რიცხვს, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი ეწოდება $\mathrm{Im}\, z = b$ რიცხვს.

კომპლექსური რიცხვი იგივე სიბრტყის წერტილია. სიბრტყის წერტილები კი, შეგვიძლია გამოვსახოთ, როგორც დეკარტის კოორდინატებში (შეესაბამება კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ჩაწერის ფორმა $z = x + iy$), ასევე, პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.

ამ შემთხვევაში წერტილი ხასიათდება $|z|$ მოდულით (მანძილით კოორდინატთა სათავემდე) და კუთხით აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$, რომელიც აითვლება საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $2\pi k$ სიზუსტით და რომელსაც კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი $\arg z$ ეწოდება.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi \mathrm{k} ; \tag{36}$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi \mathrm{k} ; \tag{37}$$

$$k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \tag{38}$$

შედეგად, კომპლექსური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

$$z = a + ib = |z|\big(\cos(\mathrm{argz}) + \mathrm{i}\cdot\sin(\mathrm{argz})\big). \tag{39}$$

თუ, გავიხსენებთ ეილერის ფორმულას

$$e^{i\cdot\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi ; \tag{40}$$

მაშინ, კომპლექსური რიცხვის (39) ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გადავალთ მის მაჩვენებლიან ფორმაზე;

$$z=|z|\cdot e^{i\cdot\arg z}\,. \tag{41}$$

მაგალითი: $z=1+i\cdot 1$ კომპლექსური რიცხვი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით.

ამოხსნა: $|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$; $\arg z=arctg\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ აქედან გამომდინარე, ტრიგონომეტრიულ ფორმას ექნება სახე:

$z=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$; ხოლო შესაბამის მაჩვენებლიან ფორმას (40) მივიღებთ შემდეგი სახით $z=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

4.2. ორწევრა განტოლებების ამოხსნა კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში

კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმიდან გამომდინარე, ცხადია რომ

$$z_1z_2=|z_1||z_2|\left(\cos(\arg z_1+\arg z_2)+i\cdot\sin(\arg z_1+\arg z_2)\right). \tag{42}$$

ამ ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$z^n=|z|^n\left(\cos(n\cdot\arg z)+i\cdot\sin(n\cdot\arg z)\right)\,; \tag{43}$$

მაშასადამე .გვაქვს კომპლექსური რიცხვიდან ფესვის ამოღების ფორმულა:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\arg z+2\pi k}{n}\right). \tag{44}$$

სადაც $k=0;1;2;\ldots;\mathrm{n}-1$.

აქედან ნათლად ჩანს, რომ კომპლექსური რიცხვიდან n- ური ხარისხის ფესვს აქვს n მნიშვნელობა. რაც იმას ნიშნავს, რომ n ხარისხის მრავალწევრს აქვს n f ფესვი.

განვიხილოთ ორწევრა განტოლებები:1) $x^2=-1$ ამ განტოლებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსნი არა აქვს. ეხლა ვნახოთ მისი ამონახსნები კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში:

$$x=\sqrt{-1}=\sqrt{\cos\pi+i\cdot\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2\pi k}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}$$

$k=0;1$ ანუ გვაქვს ორი ამონახსნი

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2};$$

$$x_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{3\pi}{2}.$$

2) $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ ფესქვეშა გამოსახულება გადავწეროთ ტრიგონომეტრიული ფორმით და მერე ვისარგებლოთ (44) ფორმულით

$$x = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right).$$

$k = 0;1;2.$ მაშასადამე, გვაქვს სამი ამონახსნი:

$$x_1 = \sqrt[3]{2};\ \ \mathrm{x}_2 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right);$$

$$x_3 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

P.S. კომპლექსურ რიცხვებს ფართო გამოყენება აქვს ინფორმაციის ფრაქტალური შეკუმშვის ამოცანების შესწავლისას და სიგნალების ფილტრაციის საქმეში [13-14]. ასევე, დიდია მათი გამოყენების არეალი უწყვეტ ტანთა მექანიკის ბრტყელი ამოცანების შესწავლის საქმეში [15-16].

5. კვატერნიონები

განსაზღვრება: ოთხგანზომილებიანი $A = (a_1; a_2; a_3; a_4)$ რიცხვების ერთობლიობას კვატერნიონებს უწოდებენ, თუ, ორი რიცხვის ჯამი განისაზღვრება $A + B = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3; a_4 + b_4)$ ფორმულით, ხოლო სპეციალური ოთხგანზომილებიანი რიცხვები, ადგენენ ბაზისს $L = (1;0;0;0);\ \mathrm{M} = (0;1;0;0);\ \mathrm{N} = (0;0;1;0);\ \mathrm{E} = (0;0;0;1)$; ისე, რომ

$$L^2 = M^2 = N^2 = -E^2 = -E;\ \ \mathrm{LE} = \mathrm{EL} = L;\ \mathrm{ME} = \mathrm{EM} = M;\ \mathrm{NE} = \mathrm{EN} = N;\ \mathrm{LM} = \mathrm{N} = -ML;$$
$$MN = L = -NM;\ \mathrm{NL} = \mathrm{M} = -LN;$$

ადგილი აქვს წარმოდგენას $A = a_1L + a_2M + a_3N + a_4E$ **,** ხოლო არაკომუტაციური ნამრავლი კი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A\cdot B = (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)L + (a_2b_4 + a_4b_2 + a_3b_1 - a_1b_3)M +$$
$$(a_3b_4 + a_4b_3 + a_1b_2 - a_2b_1)N + (-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 + a_4b_4)E \neq BA$$

არსებობს ოთხგანზომილებიანი რიცხვის შებრუნებული $A^{-1} = \dfrac{-a_1L - a_2M - a_3N + a_4E}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$ თუ, მნიშვნელი არაა ნულის ტოლი.

$a_1; a_2; a_3$ - კვატერნიონის ვექტორული ნაწილია, ხოლო a_4 -სკალარული ნაწილი. კვატერნიონის კომპონენტები შეიძლება იყვნენ კომპლექსური რიცხვებიც.

თუ, A კვატერნიონს შევუთანადებთ მატრიცას (ცხრილს)

$$A = \begin{pmatrix} a_4 + ia_1 & -a_3 + ia_2 \\ a_3 + ia_2 & a_4 - ia_1 \end{pmatrix}; \qquad (45)$$

მაშინ, მივიღებთ, რომ $(A)+(B)=(A+B)$ და $(A)(B)=(AB)$ მატრიცთა ალგებრის თვალსაზრისით, რაც იმას ნიშნავს, რომ **მატრიცთა ალგებრა კვატერნიონების (45) ალგებრის იზომორფულია** [17].

ამოცანები და სავარჯიშოები

ვარიანტი 1

1. რაში მდგომარეობს ევკლიდეს ალგორითმის არსი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში (რისი პოვნის საშუალებას იძლევა) ?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 120; 180?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 3x^2 + x \equiv 0(\bmod 2)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^5 = 1$;
6. სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე (რატომ)?

ვარიანტი 2

1. ევკლიდეს ალგორითმის გამოყენებით იპოვეთ $d(150;100)$?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 12; 18?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 3x^2 + x \equiv 0(\bmod 5)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^5 = i$;
6. სეპარაბელურია, თუ არა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე(რატომ)?

ვარიანტი 3

1. რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 150; 18?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}2)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^6 = 64$;
6. როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 4

1. რა კავშირია უდიდეს საერთო გამყოფსა, უმცირეს საერთო ჯერადსა და ორი რიცხვის ნამრავლს შორის ?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 125; 8?
3. რისი პოვნის საშუალებას იძლევა ეილერის ფორმულა $\varphi(n)$ და როგორია მისი ანალიზური სახე?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}5)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^3 = 8$;
6. როგორ მიიღება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლიდან?

ვარიანტი 5

1. ჩაწერეთ $z = 3 + 4i$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 56?
3. იპოვეთ $w = \frac{2 + 3i}{4i}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}7)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4 = -1$;

6. მოიყვანეთ სეპარაბელური სივრცის განსაზღვრება?

ვარიანტი 6

1. ჩაწერეთ $z = (3+4i)(2-3i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომე-ტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 250; 560?
3. იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
$x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}3)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^4 = -16$;
6. მოიყვანეთ კვატერნიონების განსაზღვრება?

ვარიანტი 7

1. ჩაწერეთ $z = (3+4i)^{107}$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 50; 60?
3. იპოვეთ $w = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{200}$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?
4. ამოხსენით შედარება:
$5x^2 + 7x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}8)$;
5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:
$x^4 = -16i$;
6. მოიყვანეთ კლიფორდის რიცხვების განსაზღვრება?

ვარიანტი 8

1. ჩაწერეთ $z = (1+i)(1-i)$ კომპლექსური რიცხვი ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმით?
2. რამდენი ნატურალური გამყოფი აქვს რიცხვებს: 25; 60?

3. იპოვეთ $w=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$ კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა?

4. ამოხსენით შედარება:

$x^3+7x+3\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$;

5. ამოხსენით ორწევრა განტოლება:

$x^4=-i$;

6. მოიყვანეთ სრული მეტრიკული სივრცის განსაზღვრება?

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Дьюси С. Нумерология: числа и судьбы, пер. с англ., Москва,1999

2.Ключников. Священная наука чисел,Москва, 2000

3.Лежен Дирихле П.Г. Лекции по теории чисел, пер. с нем., Санкт-Петербург, 1863

4.Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел, пер. с англ., Москва,1965

5.Виноградов И.М. Основы теории чисел, Москва,1972

6.Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, Москва, 1970

7.koRonia p. ricxvTa Teoria, Tbilisi, 1961

8.Rivest R.L. Kryptographi/Hndbook of Theoretical computer Science Vol. A. Algorithms and Cmplexity/J. van Leuwn, ed. Amsterdam: Elsevier, Cambridge, Mass.:The MIT Press.,1990

9.Успенский В.А. Как теория чисел помогает в шифровальном деле,соросовский образовательный журнал,№6, 1996

10.Макклеллан Дж.Х.,Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов, пер. с англ., Москва, 1983

11.Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ, пер. с франц., Москва, 1974

12.Пизо Ш., Заманский М. Курс математики алгебра и анализ, пер. с франц., Москва, 1971

13.Гуц А.К. Комплексный анализ и информатика, учеб. пос., Омск, 2002

14.Welstead S. Fractal and Wavelet Image Compression Techniques,Washington, USA,2002

15.Muskhelischvili N. Praktische lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. – ZAMM, 13, 1933

III თავი. ფუნქციონალური განტოლებების ძირითადი თვისებები

ზევრ პრაქტიკულ ამოცანას მივყავართ ფუნქციონალურ განტოლებამდე. მაგალითისათვის, შეგვიძლია განვიხილოთ იმპულსური სისტემების პროექტირება ავტომატურ სისტემებში, ციფრული ფილტრების გათვლა კავშირგაბმულობის სისტემებში, სოციალურ-ეკონომიკური პროცესების მართვა და ა.შ.

ფუნქციონალური განტოლებები - აკავშირებენ ფუნქციის მნიშვნელობებს დროის სხვადასხვა დისკრეტულ მომენტებში:

$$F(x(t+n); x(t+n-1); \dots; x(t+1); x(t)) = 0. \qquad (1)$$

ფუნქციონალური განტოლებების შესწავლა დაიწყო **ლეონარდ ეილერმა**. მან ფუნქციათა თვისებების შესწავლისას, დაადგინა ერთგვაროავნი ფუნქციების: $F(xz; yz) = z^k F(x; y)$ თვისებები. **ჟ.დალამბერმა, ს.პუასონმა, ო.კოშიმ და ჟ.დარბუმ** შეისწავლეს განტოლებები:

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y);$ **პასუხი:** $f(x) = \cos x;$

$f(x+y) = f(x) + f(y);$ **პასუხი:** $f(x) = ax;$

$f(x+y) = f(x)f(y);$ **პასუხი:** $f(x) = a^x;$

$f(xy) = f(x) + f(y);$ **პასუხი:** $f(x) = \ln x;$

$f(xy) = f(x)f(y).$ **პასუხი:** $f(x) = x.$

1. ფუნქციონალური განტოლებების მაგალითები

n-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი, ერთგვაროვანი, წრფივი სხვაობიანი განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x(t+n) + a_{n-1}x(t+n-1) + \dots + a_1 x(t+1) + a_0 x(t) = 0. \qquad (2)$$

სადაც a_k მუდმივი რიცხვებია. თუ, ისინი დამოკიდებულია წერტილის n ნომერზე, მაშინ გვაქვს ცვლადკოეფიციენტებიანი განტოლება.

ამ **განტოლების ამონახსნი** ეწოდება დისკრეტულ $x(t)$ ფუნქციას, რომელიც აკმაყოფილებს (2) განტოლებას.

განვიხილოთ, რამდენიმე ამოცანა:

მაგალითი 1. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს გეომეტრიული პროგრესია $1; a; a^2; \ldots$ ეს მიმდევრობა შეგვიაძლია აღვწეროთ შემდეგი, პირველი რიგის, ერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლებით:

$$x(t+1) = ax(t);\ \ x(0) = 1. \tag{3}$$

***n*-ური რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი, ერთგვაროვანი, წრფივი განტოლების ამონახსნი, როგორც წესი, წარმოადგენ *n* გეომეტრიული პროგრესიების წრფივ კომბინაციას.**

მაგალითი 2. ვთქვათ, გვაქვს არითმეტიკული პროგრესია:

$$a; a+d; a+2d \ldots \tag{4}$$

არითმეტიკული პროგრესია, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად, პირველი რიგის არაერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლების სახით,

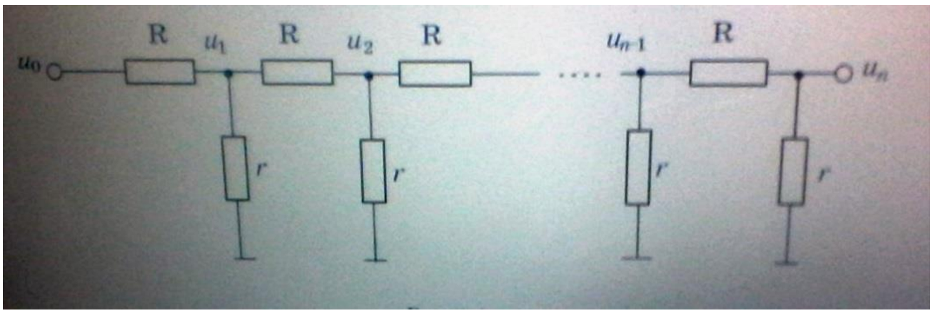
$$x(t+1) = x(t) + d;\ \ x(0) = a. \tag{5}$$

ან მეორე რიგის ერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლების საშუალებით:

$$x(t+2) - 2x(t+1) + x(t) = 0;\ \ x(0) = a. \tag{6}$$

(6) ჩანაწერი გამომდინარეობს არითმეტიკული პროგრესიის თვისებიდან (ნებისმიერი წევრი, დაწყებული მეორედან უდრის მეზობელი წევრების საშუალო არითმეტიკულს).

მაგალითი 3. ვთქვათ, გვინდა გამოვთვალოთ u_n ძაბვა, ელექტრული ქსელის გამოსავალზე ნახ. 1., თუ, ვიცით u_0 ძაბვა შესასვლელზე და ვიცით, რომ წინაღობა $R = r$. (ასეთი ქსელები გვხვდება ციფროანალოგურ გარდამქმნელებზე).



ნახ. 1. გასათვლელი ქსელი

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, თუ დავიწყებთ **კირხგოფისა და ომის კანონების** გამოყენებას, შრომატევადი გამოთვლები დაგვჭირდება. გაცილებით, უფრო მარტივად იხსნება ეს ამოცანა **სხვაობიანი განტოლებების** მეშვეობით.

ჩავწეროთ დენების განტოლება პირველი კვანძისათვის:

$$\frac{u_2-u_1}{R}=\frac{u_1}{r}+\frac{u_1-u_2}{R}\Longrightarrow u_2-\left(2+\frac{R}{r}\right)u_1+u_0=0.$$

ანალოგიურად, $k+1$-ე კვანძისათვის, გვექნება სხვაობიანი განტოლება

$$u_{k+2}-\left(2+\frac{R}{r}\right)u_{k+1}+u_k=0.$$

თუ, გავითვალისწინებთ რომ $R=r$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ, მეორე რიგის, წრფივ ერთგვაროვან ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$u_{k+2}-3u_{k+1}+u_k=0.$$

ამ სხვაობიან განტოლებას ამოვხსნით მოგვიანებით **(მაგალითი 6),** როცა შევისწავლით შესაბამის მეთოდს.

მაგალითი 4. განვიხილოთ **ფიბონაჩის ამოცანა** კურდღლების გამრავლების შესახებ. ამ ამოცანაში მოითხოვება, განვსაზღვროთ მოწიფული კურდღლების წყვილების რაოდენობა ერთი წლის შემდეგ, რომლებიც წარმოიშობიან ერთი წყვილისაგან, თუ, მოწიფული წყვილი ყოველ თვე შობს ახალ წყვილს და ახლადშობილები მოწიფულ ასაკს აღწევენ ერთი თვის ასაკში. ამგვარად, წარმოიქმნება გარკვეული რიცხვითი მიმდევრობა, რომელიც გვინდა ჩავწეროთ ფუნქციონალური განტოლებით.

დროის საწყის მომენტში, წყვილების რაოდენობაა 1 ანუ $x_0=1$. ერთი თვის შემდეგ, ახლადდაბადებული წყვილი იქნება, მაგრამ მოწიფული წყვილების რაოდენობა კვლავ უცვლელია და $x_1=1$.

ორი თვის შემდეგ, ახლადდაბადებულებიც მიაღწევენ მოწიფულ ასაკს და მოწიფული ასაკის კურდღელთა წყვილების რაოდენობა იქნება $x_2=2$.

k თვის შემდეგ მოწიფული კურდღლების წყვილთა რაოდენობა იქნება x_k. კიდევ ერთი თვის შემდეგ, კი - x_{k+1}. მაგრამ, რადგან ამ

დროისათვის გვექნება ნამატის კიდევ x_k ნამატი, მივიღებთ შემდეგ სვაობიან განტოლებას:

$$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k.$$

ამ სხვაობიან განტოლებას ამოვხსნით მოგვიანებით (**მაგალითი 13**), როცა შევისწავლით შესაბამის მეთოდს.

ამრიგად, მივიღეთ მეორე რიგის ფუნქციონალური განტოლება, სადაც ნებისმიერი წევრი დაწყებული მესამედან, წინა ორი წევრის ჯამის ტოლია. ამ განტოლებით აღიწერება ფიბონაჩის რიცხვითი მიმდევრობა:

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \ldots$$

ბოლო ორ მაგალითში, ჩვენ ამოცანის ამოხსნა დავიყვანეთ ფუნქციონალურ განტოლებამდე. ეხლა გადავიდეთ მათი ამოხსნის ზოგად მეთოდებზე.

2. ერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლებების ამოხსნა

n რიგის სხვაობიან (2) განტოლებას აქვს n რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი და მისი ზოგადი ამონახსნი, წარმოადგენს მათ წრფივ კომბინაციას:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_n x_n(t), \qquad (7)$$

სადაც c_i ნებისმიერი მუდმივი რიცხვებია.

ცნობილია, წრფივი სხვაობიანი განტოლებების ამოხსნის ორი მეთოდი.

ესაა: **მახასიათებელი განტოლების მეთოდი.** განვიხილოთ, პირველი მათგანი. წრფივი მუდმივკოეფიციენტებიანი, სხვაობიანი განტოლების ამონახსნს ეძებენ შემდეგი სახით: $x(t) = z^t$, სადაც z რაიმე რიცხვია. თუ, t დისკრეტული რიცხვია, მაშინ $x(t)$ გეომეტრიული პროგრესიაა, ხოლო თუ t უწყვეტია, მაშინ $x(t)$ მაჩვენებლიანი ფუნქციაა. ორივე შემთხვევაში, ის შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი სახით: $x(t) = e^{at}$; სადაც $a = \ln z$.

თუ, შევიტანთ $x(t) = z^t$ ფუნქციას (2) განტოლებაში და შევკვეცავთ მიღებულ განტოლებას z^t-ზე, მივიღებთ შემდეგი სახის მახასიათებელ განტოლებას:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \quad (8)$$

წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის სახე, დამოკიდებულია იმაზე, თუ როგორი ფესვები აქვს მახასიათებელ განტოლებას: **ნამდვილი, კომპლექსური, მარტივი თუ ჯერადი**.

ა) თუ, ყველა ფესვი ნამდვილია და ერთმანეთისაგან განსხვავებული, მაშინ ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x(t) = C_1 z_1^t + C_2 z_2^t + \ldots + C_n z_n^t. \quad (9)$$

განვიხილოთ, შესაბამისი მაგალითები:

მაგალითი 5. ამოხსენით სხვაობიანი განტოლება:

$x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = 0.$

ამოხსნა: მახასიათებელ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \Longrightarrow z_1 = 2;\ z_2 = 3$$

შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$x(t) = C_1 2^t + C_2 3^t.$

მაგალითი 6. ამოხსენით ამოცანა ელექტრული სქემისათვის ნახ. 1 ანუ შემდეგი სხვაობიანი განტოლება: $u_{k+2} - 3u_{k+1} + u_k = 0.$

ამოხსნა: $z^2 - 3z + 1 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$

შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$x_k = C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$

მაგალითი 7. იპოვეთ ფიბონაჩის $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ სხვაობიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი.

ამოხსნა: $\mathrm{z}^2 - \mathrm{z} - 1 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$ შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$x_k = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

მაგალითი 8. ამოხსენით სხვაობიანი განტოლება:

$$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = 0.$$

ამოხსნა: $\mathrm{z}^2 - 3\mathrm{z} + 2 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = \frac{3\pm1}{2} \Longrightarrow z_1 = 2;\ z_2 = 1.$ შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$x(t) = C_1 2^t + C_2.$$

ბ) კომპლექსური $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ფესვების შემთხვევაში, ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$x(t) = \rho^t(C_1 \sin\varphi t + C_2 \cos\varphi t);\quad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2};\ \varphi = arctg\,\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (10)$$

ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ თუ კომპლექსური ფესვები მოქცეული არიან ერთეულოვანი წრის შიგნით, მაშინ სხვაობიანი დისკრეტული განტოლების ამონახსნი არის მდგრადი. უწყვეტი სისტემების მდგრადობისათვის კი საჭიროა, მახასიათებელი განტოლების ფესვები იყოს მოთავსებული მარცხენა ნახევარსიბრტყეში.

მაგალითი 9. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება:

$$x(t+2) + 2x(t+1) + 4x(t) = 0.$$

ამოხსნა: $\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{z} + 4 = 0 \Longrightarrow z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i \Longrightarrow \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2;$

$\varphi = \frac{5\pi}{3}$. შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$$x(t) = 2^t\left(C_1 \sin\frac{5\pi}{3}t + C_2 \cos\frac{5\pi}{3}t\right).$$

გ) ჯერადი ფესვების შემთხვევაში, თუ, რომელიმე ფესვის ჯერადობა მახასიათებელ განტოლებაში არის k, მაშინ მისი შესაბამისი წევრი ზოგად ამონახსნში მრავლდება $k-1$ ხარისხის მრავალწევრზე ანუ შესაბამის წევრს ექნება შემდეგი სახე:

$$x_i(t) = (c_1 + c_2 t + \ldots + c_k t^{k-1}) z_i^t. \qquad (11)$$

აქ სრული ანალოგიაა დიფერენციალურ განტოლებებთან.

მაგალითი 10. ამოხსენით სხვაობიანი განტოლება:

$x(t+3)+7x(t+2)+15x(t+1)+9x(t)=0.$

ამოხსნა: $z^3+7z^2+15z+9=0$. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $z_1=-1$; $z_2=z_3=-3$. შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$x(t)=c_1(-1)^t+(c_2+c_3t)(-3)^t.$

მაგალითი 11. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება ჯერადი კომპლექსური ფესვებით:

$x(t+4)+2x(t+2)+x(t)=0.$

ამოხსნა: $z^4+2z^2+1=0$. მახასიათებელი განტოლების ფესვებია:

$z_1=z_2=i;\ z_3=z_4=-i.$ შესაბამისად, ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$x(t)=(c_1+c_2t)\cos\frac{\pi}{2}t+(c_3+c_4t)\sin\frac{\pi}{2}t.$

2.1. საწყისი და სასაზღვრო პირობების გათვალისწინება

წრფივი, ერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, შეიცავს, რიგის შესაბამისი რაოდენობის ნებისმიერ მუდმივებს. კერძო ამონახსნის საპოვნელად საჭიროა დამატებითი საწყისი ან სასაზღვრო პირობები. თუ, დამატებითი პირობები მოიცავს მხოლოდ მნიშვნელობებს რიცხვითი მიმდევრობის დასაწისიდან, მათ საწყის პირობებს უწოდებენ, ხოლო თუ ზოგი პირობა თავშია და ზოგიც ბოლო წერტილებში, მაშინ ლაპარაკობენ სასაზღვრო პირობებზე.

მაგალითი 12. ამოხსენით სხვაობიანი განტოლება:

$x_{n+2}-3x_{n+1}+2x_n=0$, თუ $x_0=1;\ x_1=3.$

ამოხსნა: მახასიათებელ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$z^2-3z+2=0.$

მახასიათებელი განტოლების ფესვებია: $z_1=1;\ z_2=2$. მაშინ ზოგად ამონახსნს ექნება შემდეგი სახე:

$x_k=c_1+c_22^k.$

საწყისი პირობებიდან $x_0 = 1;\ x_1 = 3$ გამომდინარე, გვექნება განტოლებათა სისტემა მუდმივებისათვის:

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$. მაშასადამე, კერძო ამონახსნი იქნება:

$x_k = -1 + 2^{k+1}$.

მაგალითი 13. იპოვეთ ფიბონაჩის განტოლებისთვის

$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$.

კერძო ამონახსნი, შემდეგ პირობებში $x_0 = 1; x_1 = 1$.

ამოხსნა: ფიბონაჩის განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე (მაგალითი 8): $x_k = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$.

თუ, გავითვალისწინებთ $x_0 = 1;\ x_1 = 1$ პირობებს, მაშინ მივიღებთ რომ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1\left(1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5}\right) = 2 - 1 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}; \\ C_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

მაშასადამე, ფიბონაჩის რიცხვების ზოგად ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]. \qquad (12)$$

ამ ფორმულას **ბინეს ფორმულას** უწოდებენ. ნებისმიერი k-სთვის ეს ფორმულა მთელ რიცხვებს იძლევა (კურდღლების წყვილების რაოდენობა). მაგალითად, თუ $k = 12$ ანუ ერთი წლის ბოლოს, თითოეული წყვილი კურდღელი 233 წყვილს მოგვცემს.

მაგალითი 14. ვარიაციულ მეთოდებში, ხშირად იყენებენ ჩებიშევის T_n ფუნქციების სრულ სისტემას, რომელიც შედგება $[-1; 1]$ შუალედში განსაზღვრული პოლინომებისაგან და მოიცემიან რეკურენტული ფორმულით: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$. ეს პოლინომები მცირედ იხრებიან ნულისაგან ანუ აქვთ ნულის გარშემო რხევის მინიმალური ამპლიტუდა. $T_0(x) = 1;\ T_1(x) = x$. ვიპოვოთ, ჩებიშევის სისტემის გამომსახველი ფორმულა.

ამოხსნა: გადავწეროთ ჩებიშევის რეკურენტული ფორმულა სტანდარტული სახით:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0. \qquad (13)$$

(13) არის მეორე რიგის წრფივი ერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლება. შესაბამის მახასიათებელ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$z^2 - 2xz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

მაშინ, ზოგადი ამონახსნი იქნება:

$$T_n = c_1\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + c_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n.$$

მუდმივების საპოვნელად, ვიყენებთ საწყის $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$ პირობებს. მაშინ მივიღებთ განტოლებათა სისტემას:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ c_1\left(2\sqrt{x^2 - 1}\right) = \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

შესაბამისად, მივიღებთ რომ ჩებიშევის მრავალწევრების გამოსათვლელ ფორმულას ექნება შემდეგი სახე:

$$\mathrm{T_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}\right)^{\mathrm{n}} + \left(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}\right)^{\mathrm{n}}\right]. \qquad (14)$$

3. წრფივი, არაერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლებები

განვიხილოთ წრფივი, არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლება:

$$x_{n+k} + a_{n-1}x_{n+k-1} + a_{n-2}x_{n+k-2} + \ldots + a_1x_{k+1} + a_0x_k = f_k; \qquad (15)$$

სადაც f_k დისკრეტული არგუმენტის ცნობილი ფუნქციაა.

წრფივი, არაერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი ტოლია, შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნისა და არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნის ჯამისა.

არაერთგვაროვანი ფუნქციონალური განტოლების კერძო ამონახსნს ეძებენ, ამ განტოლების მარჯვენა მხარის f_k ფუნქციის სახით. ზოგად ამონახსნში შემავალ მუდმივებს ეძებენ საწყისი და სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე.

მაგალითი 15. ამოხსენით წრფივი არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლება: $x_{k+2} + x_{k+1} + x_k = 1$; თუ, $x_0 = 1$; $x_1 = 2$.

ამოხსნა: მახასიათებელი განტოლება იქნება: $z^2 + z + 1 = 0$.

$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. ერთგვაროვანი $x_{k+2} + x_{k+1} + x_k = 0$ განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება: $x_k = c_1 \sin\frac{\pi}{3}k + c_2 \cos\frac{\pi}{3}k$. არაერთგვაროვანი განტოლების კერძო ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით $x_k = A$, მაშინ მივიღებთ, რომ $x_{k+2} = x_{k+1} = x_k = A$; შესაბამისად, $x_{k+2} + x_{k+1} + x_k = 1$ განტოლებიდან მივიღებთ, რომ $3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$. მაშასადამე, მოცემული არაერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება შემდეგი სახის: $x_k = c_1 \sin\frac{\pi}{3}k + c_2 \cos\frac{\pi}{3}k + \frac{1}{3}$. მუდმივების საპოვნელად ვიყენებთ საწყის მნიშვნელობებს: $x_0 = 1$; $x_1 = 2$. მაშინ, მივიღებთ რომ

$x_k = \frac{8\sqrt{3}}{9}\sin\frac{\pi}{3}k + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{3}k + \frac{1}{3}$.

4. არასტანდარტული ფუნქციონალური განტოლებები

მაგალითი 16. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$f(x)f(y) = f(x - y).$$

ამოხსნა: თუ, გვაქვს იგივეობა, მაშინ ის ჭეშმარიტია ცვლადის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვთქვათ, $y = 0$, მაშინ

$$f(x)f(0) = f(x) \Rightarrow f(x)(f(0) - 1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1.$$

თუ, $x = y$, მაშინ $f(x)f(x) = f(x - x) \Rightarrow \left(f(x)\right)^2 = f(0) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = 1.$$

პასუხი: $f(x) = 1$.

მაგალითი 17. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy.$$

ამოხსნა: ჩავსვათ ამ განტოლებაში მნიშვნელობა $y=0$, მაშინ გვექნება, რომ $f(x)=f(x)+f(0)\Rightarrow f(0)=0$. ეხლა დავუშვათ, რომ $x=y$, მაშინ $f(0)=f(x)+f(x)-2x^2\Rightarrow 2f(x)=2x^2$. ე.ი. $f(x)=x^2$.

პასუხი: $f(x)=x^2$.

მაგალითი 18. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$2f(x)+f(1-x)=x^n.$$

ამოხსნა: ჩავსვათ ამ განტოლებაში x-ის ნაცვლად $1-x$. მაშინ მივირებთ, რომ

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=x^n \\ 2f(1-x)+f(x)=(1-x)^n \end{cases}.$$

სისტემის პირველი განტოლება გავმრავლოთ 2-ზე და გამოვაკლოთ მეორე განტოლება, მაშინ მივიღებთ, რომ

$$f(x)=\frac{2x^n}{3}-\frac{(1-x)^n}{3}.$$

პასუხი: $f(x)=\frac{2x^n}{3}-\frac{(1-x)^n}{3}$.

მაგალითი 19. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$f(x^y)=yf(x).$$

ამოხსნა: ვთქვათ $x=e$, მაშინ $f(e^y)=yf(e)$. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$e^y=z\Rightarrow y=\ln z$. მაშასადამე, $f(z)=C\cdot\ln z$, სადაც $C=f(e)$.

პასუხი: $f(x)=C\cdot\ln x$.

მაგალითი 20. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y);$$

ამოხსნა: ვთქვათ $y = 0$, მაშინ $2f(x) = 2f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$.

თუ $x = y$, მაშინ $f(2x) = 2[f(x)]^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \cos x$

პასუხი: $f(x) = \cos x$

მაგალითი 21. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$f(x + y) = f(x) + f(y)$;

ამოხსნა: ვთქვათ $y = 0$, მაშინ $f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

თუ $x = y$, მაშინ $f(2x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = ax$

პასუხი: $f(x) = ax$;

მაგალითი 22. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$f(x + y) = f(x)f(y)$;

ამოხსნა: ვთქვათ $y = 0$, მაშინ $f(x) = f(x)f(0) \Rightarrow f(0) = 1$. თუ $x = y$, მაშინ $f(2x) = [f(x)]^2 \Rightarrow f(x) = a^x$.

პასუხი: $f(x) = a^x$;

მაგალითი 23. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$f(xy) = f(x) + f(y)$;

ამოხსნა: ვთქვათ $y = 0$, მაშინ $f(0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(x) = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ეს შემთხვევა არაა საინტერესო ან არგუმენტი ნულის ტოლი არ უნდა იყოს. ვთქვათ $y = x = 1 \Rightarrow f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$. თუ $y = x$, მაშინ $f(x^2) = 2f(x)$, მაშასადამე, $f(x) = \ln x$.

პასუხი: $f(x) = \ln x$;

მაგალითი 24. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$f(xy) = f(x)f(y)$.

ამოხსნა: ვთქვათ $y = x$, მაშინ $f(x^2) = [f(x)]^2 \Rightarrow f(x) = x$

პასუხი: $f(x) = x$.

მაგალითი 25. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$z = \varphi(ye^x - e^{2x})$, თუ $z|_{x=0} = y$.

ამოხსნა: განვიხილოთ, შემთხვევა $x = 0$, მაშინ მივიღებთ, რომ

$y = \varphi(y-1)$. თუ, შემოვიღებთ აღნიშვნას $y - 1 = u$ მაშინ $\varphi(u) = u + 1$. მაშასადამე, $z(x;y) = ye^x - e^{2x} + 1$.

პასუხი: $z(x;y) = ye^x - e^{2x} + 1$.

მაგალითი 26. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$u = \varphi(x-y; 2x-z)$, თუ $u|_{x=1} = yz$.

ამოხსნა: $u|_{x=1} = yz \Rightarrow yz = \varphi(1-y; 2-z)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\begin{cases} \xi = 1 - y \\ \eta = 2 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - \xi \\ z = 2 - \eta \end{cases} \Rightarrow \varphi(\xi;\eta) = (1-\xi)(2-\eta).$$

მაშასადამე, $u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$.

პასუხი: $u = (1 - x + y)(2 - 2x + z)$

მაგალითი 27. იპოვეთ, ყველა უწყვეტი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს ფუნქციონალურ განტოლებას:

$u = \varphi\left(\frac{x}{y}; xy - 2z\right)$, თუ $u|_{z=0} = x^2 + y^2$.

ამოხსნა: $u|_{z=0} = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \varphi\left(\frac{x}{y}; xy\right)$. მაშინ შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\begin{cases} \xi = \frac{x}{y} \\ \eta = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \xi y \\ \eta = \xi y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\xi\eta} \\ y = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} \end{cases}$.

მაშინ, $\varphi(\xi;\eta) = \xi\eta + \frac{\eta}{\xi}$.

მაშასადამე,

$$u = \frac{x}{y}(xy - 2z) + \frac{xy - 2z}{\frac{x}{y}} = \frac{x^2(xy-2z) + y^2(xy-2z)}{xy} = \frac{(xy-2z)(x^2+y^2)}{xy}$$

ანუ $u = (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{2z}{xy}\right)$.

პასუხი: $u = (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{2z}{xy}\right)$.

5. ეკონომიკური შინაარსის ამოცანები

სასრულსხვაობიანი განტოლებები დიდ როლს თამაშობენ ეკონომიკურ თეორიაში. ზევრი ეკონომიკური კანონი მტკიცდება სწორედ ასეთი განტოლებების მეშვეობით.

ვთქვათ t დრო თამაშობს დამოუკიდებელი ცვლადის როლს, ხოლო საძებნი (დამოკიდებული) ცვლადი განისაზღვრება დროის სხვადასხვა t, t-1, t-2 . . . მომენტებისათვის. აღვნიშნოთ საძიებელი ცვლადის მნიშვნელობა დროის t მომენტისათვის როგორც y_t. მაშინ დროის წინა მომენტში მისი მნიშვნელობა აღინი მომენტისათვის როგორც შნება როგორც

y_{t-1}; დროის კიდევ ერთი ერთეულით ადრე, მისი მნიშვნელობა იქნება y_{t-2} და ა.შ.

მაგალითი 28. სასრულსხვაობიანი განტოლების მეშვეობით იპოვეთ საბანკო ანაბარის ფორმულა, როცა გვაქვს წლიური ნაზრდი p% .

ამოხსნა: თუ რაღაც თანხა y_0 განთავსებულია ბანკში წლიური p%-იანი ნაზრდით, მაშინ t დროისათვის მისი მოცულობა იქნება

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-1}\frac{p}{100} = (1 + \frac{p}{100})y_{t-1}. \qquad (16)$$

ამრიგად, გვაქვს პირველი რიგის სასრულსხვაობიანი განტოლება, რომლის ამონახსნიც

$(a = 1 + \frac{p}{100})$,იქნება

$$y_t = C(1 + \frac{p}{100})^t. \qquad (17)$$

თუ, აღვნიშნავთ საწყის ანაბარს y_0=A, მაშინ (17)-დან მივიღებთ რომ C=A. რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$y_t = A(1 + \frac{p}{100})^t. \qquad (18)$$

ამრიგად, მივიღეთ ანაბრის მოცულობის გამოსაანგარიშებელი ფორმულა, როცა გაანგარიშება ხდება რთული პროცენტით.

5.1. ინფლაცია და 70-ის სიდიდის წესი

ეკონომიკურ თეორიაში ინფლაციის ტემპის შესწავლისას, განიხილება 70-ის სიდიდის წესი, რომელიც საშუალებას იძლევა, მარტივად გამოვითვალოთ იმ t წლების რაოდენობა, რომელთა გავლისას მოხდება ფასების გაორმაგება, თუ, ინფლაციის წლიური მაჩვენებელი მუდმივია და უდრის p%. მაშინ, როგორც ცნობილია

$$t = \frac{70}{p}. \qquad (29)$$

მაგალითად, თუ წლიური ინფლაციის დონე არის 5%, მაშინ ფასები გაორმაგდება 14 (70/5) წელში.

მაგალითი 29: მალთუსის $y(t) = y_0 \exp(pt/100)$ მოდელიდან გამომდინარე, სადაც y(t) ფასია დროის t მომენტში, ხოლო y_0 ფასია დროის საწყის მომენტში, დაასაბუთეთ 70- ის სიდიდის წესი და გამოიყენეთ დღევანდელი ეკონომიკის პირობებში.

ამოხსნა: თუ, ინფლაციის კოეფიციენტი არის p%, მაშინ მალთუსის მოდელიდან გამომდინარე

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100).$$

ფასის გაორმაგების შემთხვევაში გვაქვს

$$2y_0 = y_0 \exp(pt/100).$$

თუ, განვსაზღვრავთ შესაბამის t დროს, მივიღებთ

$$t = \frac{100 \cdot \ln 2}{p}.$$

რადგან $\ln 2 \approx 0.7$, გვექნება რომ

$$t \approx \frac{70}{p}.$$

რ.დ.გ.

6. დედამიწის მცხოვრებთა რაოდენობის ზრდა და რესურსების ამოწურვა

მაგალითი 30: ერთი ადამიანის საკვებით უზრუნველსაყოფად აუცილებელია 0.1 ჰა სავარგული. დედამიწაზე სულ არის 4000 მლნ. ჰა სავარგული. ამიტომ მოსახლეობის მოსალოდნელი რაოდენობა, თუ, არ იქნება ახალი წყაროები, შემოფარგლულია მოსახლეობის რაოდენობით 40 000 მლნ. ($40 \cdot 10^9$) ადამიანი.

როდის მიიღწევა მოსახლეობის გაჯერების ეს მაჩვენებელი მალთუსის მოდელის ფარგლებში, თუ მოსახლეობა იზრდება ყოველ წელიწადს 1.8% სიჩქარით?

ამოხსნა: მოსახლეობის ზრდა შეგვიძლია გამოვსახოთ მალთუსის ფორმულით:

$$y(t) = y_0 \exp(pt/100). \tag{30}$$

როცა $t = 0$, მივიღოთ 1999წ., როცა დედამიწის მცხოვრებთა რიცხვი იყო $6 \cdot 10^9$ ადამიანი. მაშინ

$$y(t) = 6 \cdot 10^9 e^{0.018t}. \tag{31}$$

ვეძებთ ისეთ t- ს, რომ

$$y(t) = 40 \cdot 10^9. \tag{32}$$

მაშინ

$$40 \cdot 10^9 = 6 \cdot 10^9 e^{0.018t}. \tag{33}$$

აქედან მივიღებთ, რომ $t \approx 105$ წელი.

ასე, რომ დაახლოებით 2104 წელს დედამიწის მოსახლეობა მიაღწევს გაჯერების მდგომარეობას, თუ, შენარჩუნდება ზრდის ტემპი. ეს არის მალთუსის თეორია. რომლის თანახმადაც თუ, მოსახლეობა არ ისწავლის შობადობის მართვას, მაშინ მას ელოდება უმუშევრობა, შიმშილი და მოსახლეობის ფართო ფენების გაღატაკება. თუმცა, მალთუსის თეორია პრაქტიკაში, დროის დიდი მონაკვეთებისათვის არ დასტურდება, რადგან ჩვენ სინამდვილეში საქმე გვაქვს ღია სისტემასთან, რომელსაც თვითორგანიზება ახასიათებს.

ამოცანები და სავარჯიშოები

ამოხსენით სხვაობიანი განტოლებები:

1. $x(t+2)+6x(t+1)+9x(t)=0;\ \ x(0)=-1;\ x(1)=2.$

2. $y_{k+1}-y_k+2y_{k-1}=0.$

3. $13y_{k+1}+4y_k+y_{k-1}=0.$

4. $y_{k+2}+y_k=0;\ \ y_0=2;\ y_1=1.$

5. ამოხსენით არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლება:

$6y_{k-1}-5y_k+y_{k+1}=2^k.$

6. ამოხსენით არაერთგვაროვანი სხვაობიანი განტოლება:

$y_{k+1}+y_k-5y_{k-1}+3y_{k-2}=1.$

7. როგორ შეიცვლება ერთგვაროვანი წრფივი სხვაობიანი განტოლების ამონახსნი, თუ ორჯერ გავადიდებთ ყველა საწყის პირობას?

8. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება:

$z=\varphi(ye^x-e^{2x})$; თუ, $z|_{x=0}=y$.

9. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება:

$u=\varphi(x-y;2x-z);$ თუ $u|_{x=1}=yz.$

10. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება:

$u=\varphi\left(\frac{x}{y};xy-2z\right)$; თუ $u|_{z=0}=x^2+y^2.$

11. ამოხსენით ფუნქციონალური განტოლება:

$u=g\left(x(z-y);\frac{y+z-2x^2}{2x}\right)$; თუ, $u|_{x=1}=y^2-z^2.$

ლიტერატურა

1.Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей, Москва, 1952.

2.Герсеванов Н.М. Итерационное исчисление и его приложения, Ленинград, Машстройиздат, 1950

IV თავი. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალები

მეცნიერები სამყაროს კვლევისა და მოდელირების პროცესში, როგორც წესი, ყურადღებას ამახვილებდნენ ხოლმე ისეთ სიმრავლეებსა და ფუნქციებზე, რომლებისთვისაც ადვილი გამოსაყენებელია გამოთვლის კლასიკური მეთოდები. ისეთ ფუნქციებს კი, რომლებიც არ იყვნენ სათანადო სიგლუვის მატარებელი ანუ რეგულარული, ხშირად თვლიდნენ ხოლმე პათოლოგიებად და არ უთმობდნენ სათანადო ყურადღებას. დიდი ხანი არ არის, რაც სიტუაცია შეიცვალა და არაგლუვმა ფუნქციებმა თუ სიმრავლეებმა დიდი პოპულარობა მოიპოვა, რაც განპირობებულია ბუნებაში მიმდინარე პროცესების კომპიუტერით უფრო ზუსტად აღწერის აუცილებლობით. ბენუა მანდელბროტის ფრაქტალური გეომეტრია [1] სწორედ ასეთი არარეგულარული სიმრავლეების შესწავლითაა დაკავებული. ფრაქტალური გეომე-ტრიის ძირითადი ცნებაა ფრაქტალი, რომლის წარმოშობაც მნიშვნელოვნადაა დაკავშირებული კომპიუტერული მოდელირების ამოცანებთან. მნიშვნელოვანია ფრაქტალების გამოყენებანი ინფო-რმაციის შეკუმშვისა და კომპიუტერული დიზაინის სფეროში. დიდი ხანი არაა, რაც ფრაქტალების საშუალებით აღიწერა წყლის გრუნტში ფილტრაციის ტრაექტორიები, ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე წარმოქმნილი ნათება, ხის ტოტების ზრდის დინამიკა, ადამიანის შინაგანი ორგანოების, ფსიქიკისა და ორგანიზაციული სისტემების ფრაქტალური სტრუქტურა.

ამჟამად, არ არსებობს მათემატიკის თვალსაზრისით ფრაქტალის ზუსტი განსაზღვრება. ლევერიეს [2] აზრით, ფრაქტალი არის გეომეტრიული ფიგურა, რომელშიც ერთი და იგივე გეომეტრიული ფრაგმენტი მეორდება სხვადასხვა მასშტაბში შემცირებისას. ასეთი ფრაქტალები, წრფივი (აფინური) კუმშვადი, მსგავსების ასახვით მიიყვანება “უძრავ წერტილამდე”, რომლის საწყისსაც ჩვენ, კონსტრუქციულ დედა ფრაქტალს ვუწოდებთ.

არსებობს სხვა ტიპის ფრაქტალიც, რომელიც წარმოიქმნება არაწრფივ დინამიკურ სისტემებში და ამიტომ მას, ზოგჯერ,

დინამიკურ ფრაქტალს უწოდებენ [3]. მათაც ახასიათებთ “მასშტაბური ინვარიანტობა”, თუმცა, მხოლოდ მიახლოებით. ორივე ტიპის ფრაქტალის ერთდროულად აღსაწერად, ბენუა მანდელბროტმა მოგვცა ფრაქტალის შემდეგი განსაზღვრება: **“ფრაქტალი ისეთი სიმრავლეა, რომლის ტოპოლოგიური განზომილებაც ნაკლებია, ვიდრე მისი ხაუსდორფის (ფრაქტალური) განზომილება”.**

ცხადია რომ, ამ განსაზღვრებას დამატებითი განმარტება ჭირდება, რომელსაც მოგვიანებით გავაკეთებთ. პირველი განმარტებით, ცნება - “ფრაქტალი” წარმოდგება ლათინური სიტყვიდან “ფრაქტუს”, რაც ნიშნავს დამსხვრეულს. მეორე განსაზღვრებაში, ეს ცნება დაკავშირებულია ინგლისურ სიტყვასთან “ფრაქტიონალ” რაც ნიშნავს წილადურს. დინამიკური ფრაქტალი 1918 წელს აღწერა ფრანგმა მათემატიკოსმა გასტონ ჟულიამ [4]. თუმცა, მაშინ კომპიუტერები არ არსებობდა და შესაბამისი გეომეტრიული ილუსტრაციები მხოლოდ მოგვიანებით გამოჩნდა [5].

აღმოჩნდა, რომ ხისმაგვარ რეგულარულ მათემატიკურ ფრაქ-ტალში თუ, შევიტანთ შემთხვევით შეშფოთებებს მივიღებთ ნამდვილი ხის მოდელს. ფრაქტალებს იყენებენ რთული, სხვადასხვა ტიპის სიგნალების კლასიფიკაციისათვის. გამოიყენება, აგრეთვე, ეკონომიკაში ვალუტის კურსის რხევების შესწავლისას, ჰიდროაერომექანიკაში ტურბულენტური დინების აღსაწერად, გრუნტში სითხის ფილტრაციის დროს ტრაექტორიების აღსაწერად. ფრაქტალისმაგვარი სიმრავლეებია ღრუბელის საზღვარი, ზღვის სანაპირო, დედამიწის რღვევის წირები, გულსისძარღვთა სისტემა, შინაგანი ორგანოების სტრუქტურა. გამოიყენება ქაოსის თეორიაში და ა.შ.

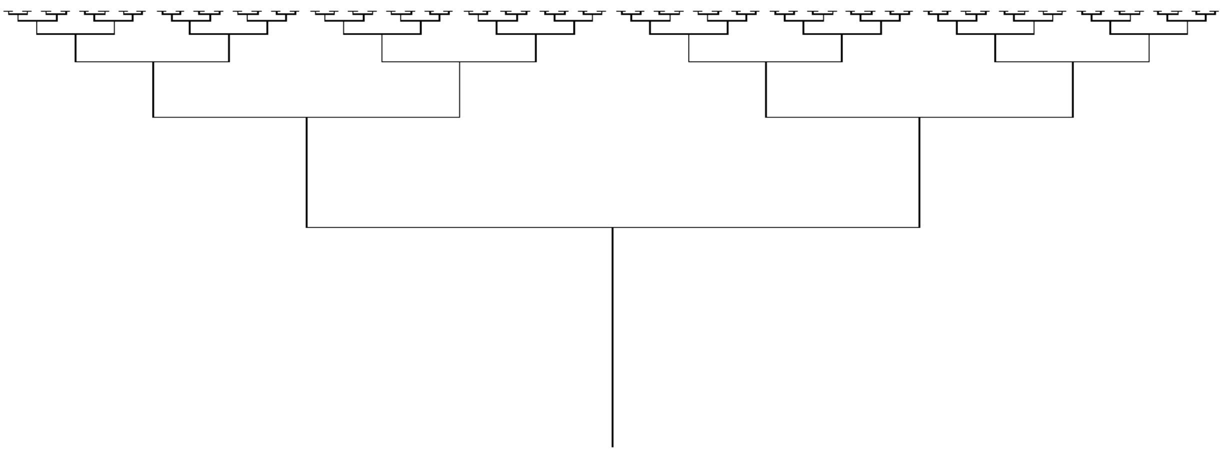
1. ფრაქტალი და პოზიციური თვლის სისტემა

როგორც ვიცით, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა, ამიტომ თითოეული რიცხვისათვის სხვადასხვა სიმბოლოს შემოღება არაპრაქტიკულია. აქედან გამომდინარე, შემუშავებულ იქნა

პოზიციური თვლის სისტემები, რომლებიც სასრული რაოდენობის სიმბოლოთა მეშვეობით გვერდს უვლის ამ სირთულეს, ნატურალური რიცხვების სხვადასხვა პოზიციაში განლაგებით და თითოეული პოზიციისათვის გარკვეული შინაარსის მინიჭებით. ამიტომაც უწოდებენ ამ სისტემებს პოზიციურს. იმის მიხედვით თუ, რიცხვების ჩასაწერად რამდენ სიმბოლოს ვიყენებთ, განასხვავებენ ათობით, ორობით, რვაობით, ოცობით, სამოცობით და ა.შ. რიცხვით სისტემებს.

1.1. პოზიციური სისტემების ხისმაგვარი სტრუქტურა

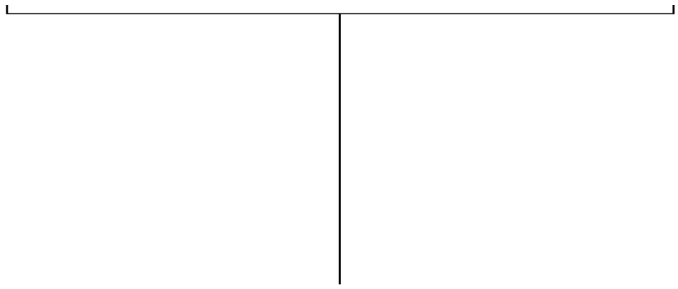
განვიხილოთ ფრაქტალ – "დენდრიტის" ერთ-ერთი სახე: ორობითი ხე. სიტყვა დენდრიტი – წარმოდგება ბერძნული "დენდრონ" – სიტყვისაგან, რაც ნიშნავს ხეს



ნახ. 1. ორობითი ხე

ეს სახელი სავსებით შეესაბამება ამ ფრაქტალს, რადგან მისი სტრუქტურა ძლიერ წააგავს ხის სტრუქტურას: ძირითადი ღეროდან გამოდის ორი ტოტი, რომელთაგან თითოეული ხდება მასშტაბში უფრო მცირე ღერო შემდგომი დატოტვისათვის და ა.შ. თუ, ამ პროცესს გავაგრძელებთ უსასრულოდ, მაშინ გვექნება დონეთა უსასრულო რაოდენობა ნახ. 1. ამ ნახაზზე, თვალშისაცემია თვითმსგავსება სხვადასხვა მასშტაბში. შემცირების მასშტაბი არჩეულია 0.5. ვერტიკალური ღეროების რაოდენობა ორმაგდება ყოველ შემდეგ დონეზე, ხოლო მათი სიგრძეები ორჯერ კლებულობს. ჰორიზონტული ხაზები ორჯერ უფრო გრძელია წინა დონის ვერტიკალურ ღეროსთან შედარებით. რაც უფრო ზემოთა არიან ტოტები, მით უფრო მჭიდროა მათი განლაგება. სიმრავლის დაჯგუფება ან დაყოფა ორ-ორ

ელემენტად დამახასიათებელია თვლის ორობითი სისტემისათვის (ათობითი სისტემისათვის დამახასიათებელია ათ-ათ ელემენტად დაჯგუფება). ნახ. 1. წარმოადგენს ორობითი სისტემის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას ფრაქტალ-დენდრიტის ფორმით. ამ ფრაქტალის წარმომქმნელ საწყის ფრაგმენტ - ელემენტს დედა - ფრაქტალს ვუწოდებთ. ნახ. 2-ზე გამოსახულია დენდრიტის დედა-ფრაქტალი



ნახ. 2. ორობითი ხის დედა-ფრაქტალი

ათობითი სისტემა, რომლითაც ჩვენ ვსარგებლობთ შემუშავებულ იქნა ინდოელების მიერ 14 საუკუნის წინ, ან უფრო ადრე, ჩინელების მიერ. თანამედროვე ათწილადები ევროპაში შემოვიდა სიმონ სტევინის საშუალებით მეთექვსმეტე საუკუნეში. ათობითი სისტემა ჩვენ გვეჩვენება მოქნილად და პრაქტიკულად. ამ სისტემაში ნებისმიერი რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ 10-ის ხარისხების საშუალებით:

$$2016 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0. \qquad (1)$$

ათობითი სისტემის გავრცელება დაკავშირებულია ალბათ იმ ფაქტთან, რომ ადამიანს აქვს 10 თითი. ალბათ არსებობენ სხვა პლანეტაზე ხალხი რომელთაც აქვთ 8 თითი და მათთვის უფრო ბუნებრივია რვაობითი სისტემა. უნდა აღინიშნოს, რომ ათობით სისტემასაც, ისევე, როგორც ნებისმიერ სხვას, აქვს ნაკლიც. თუნდაც ის რომ წილადი $\frac{1}{3}$ ვერ გამოიხატება სასრული ათწილადით და იძულებული ვართ დავჯერდეთ მის მიახლოებით მნიშვნელობას.

დაახლოებით 5000 წლის წინ შუმერებმა მესოპოტამიაში შეიმუშავეს სამოცობითი სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებდა მათ მოთხოვნებს აგროკულტურასა და ასტროლოგიაში. ჩვენ დღესაც

ვსარგებლობთ ამ სისტემით დროის გამოთვლისას: გვაქვს საათში 60 წუთი, წუთში 60 წამი. ასევე, კუთხეების გაზომვისას $1^{\circ} = 60'; 1' = 60''$.

მაიას ტომები სარგებლობდნენ ოცობითი სისტემით (ხელებზე და ფეხებზე ერთად გვაქვს 20 თითი). ეს სისტემა დამახასიათებელია ალბათ ქართველებისთვისაც, რადგან ვიყენებთ რიცხვთა დასახელებებს: ორმოცი=ორი ოცი, სამოცი=სამი ოცი . . .

ამჟამად, მთელი მსოფლიო სარგებლობს ათობითი სისტემით, ხოლო კომპიუტერებში, გამოიყენება ორობითი და რვაობითი სისტემა.

1.2. ორობითი სისტემა

ორობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენება ორი სიმბოლო: 0 და 1. მაგალითად,

$1_{10} = 1_2$ $2_{10} = 10_2$ $3_{10} = 11_2$ $4_{10} = 100_2$ $5_{10} = 101_2$

$6_{10} = 110_2$ $7_{10} = 111_2$ $8_{10} = 1000_2$ $9_{10} = 1001_2$

ორობითი სისტემიდან რომ გადავიყვანოთ რიცხვი ათობით სისტემაში, საჭიროა წარმოვადგინოთ 2-ის ხარისხებად და დავიანგარიშოთ.

მაგალითად,

$$101101_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \quad (2)$$

$$101101_2 = 45_{10} \quad (3)$$

შესაბამისად, ათობითი სისტემიდან რომ გადავიყვანოთ რიცხვი ორობითში, უნდა წარმოვადგინოთ ის 2-ის ხარისხებად და მიმდევრობით ამოვწეროთ წარმოდგენის კოეფიციენტები. ახლა განვიხილოთ ორობითი გამრავლების ტაბულა, ცხრილი 1:

ცხრილი 1

X	0	1
0	0	0
1	0	1

1.3. სამობითი სისტემა

სამობით სისტემაში რიცხვის ჩასაწერად გამოიყენებენ სამ სიმბოლოს: 0; 1; 2. მაგალითად,

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^0 = 12_3 = 5_{10}. \qquad (4)$$

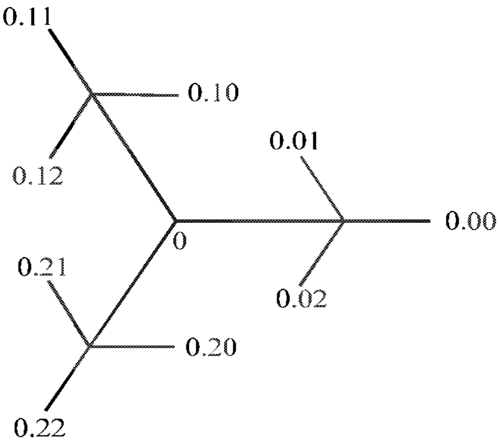
$$1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 121_3 = 16_{10}. \qquad (5)$$

როგორც ვხედავთ, აქ რიცხვი წარმოდგება სამის ხარისხების მიხედვით. სამობით სისტემაში გამრავლების ტაბულა მოიცემა ცხრილი 2-ით:

ცხრილი 2

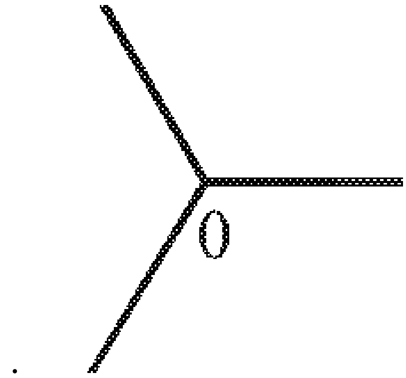
X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ავაგოთ სამობითი სისტემის შესაბამისი დენდრიტი ნახ. 3.



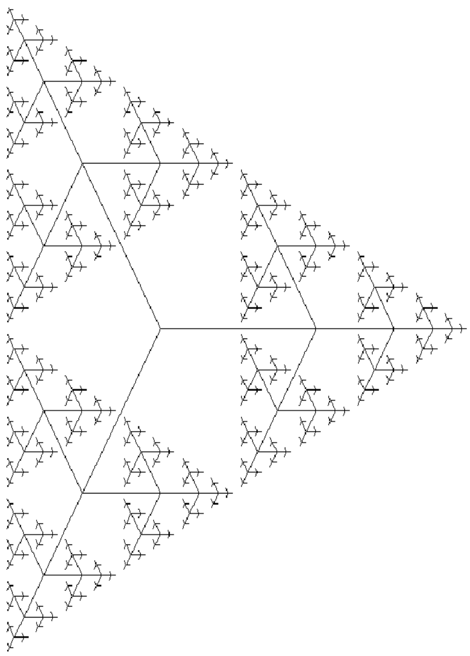
ნახ. 3. სამობითი დენდრიტი

ამ ნახაზზე საწყისი წერტილია 0, საიდანაც ერთმანეთისადმი 120°-იანი კუთხით გამოდის სამი ღერო, რომლების ბოლოებიც, შემდგომ ეტაპზე, თვითონ ხდებიან საწყისი წერტილი და სამი ღეროს მშობელი და ა.შ. მიმართულებას მარჯვნივ აღვნიშნავთ “0”-ით, მიმართულებას მარცხნივ-ზემოთ – “1” და მიმართულებას მარცხნივ-ქვევით – “2”-ით.სამობითი დენდრიტის დედა-ფრაქტალს აქვს სახე



ნახ. 4. სამობითი დენდრიტის დედა-ფრაქტალი

ამ ალგორითმიდან გამომდინარე, შეგვიძლია სამობითი დენდრიტი ავაგოთ კომპიუტერზეც ნახ. 5.

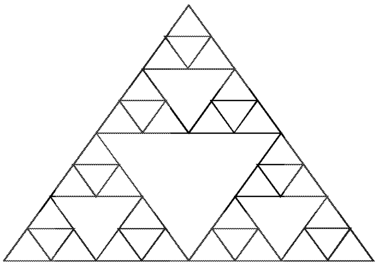


ნახ. 5. სამობითი დენდრიტი

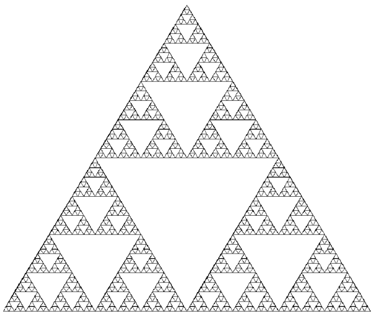
2. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

პოლონელმა მათემატიკოსმა ვაცლავ სერპინსკიმ 1915 წელს შექმნა ლამაზი მათემატიკური ობიექტი, რომელიც ძალზე წააგავს სამობით დენდრიტს. ამ ობიექტს, სერპინსკის ფრაქტალურ ხალიჩას უწოდებენ.

მის ასაგებად, ვიწყებთ ტოლგვერდა სამკუთხედიდან, სადაც ამოვჭრით გვერდების შუა წერტილების შეერთებით მიღებულ სამკუთხედს. შემდეგ დარჩენილ სამ სამკუთხედს ვექცევით ანალოგიურად და ამ პროცესს ვაგრძელებთ უსასრულოდ ნახ. 6, ნახ.7.

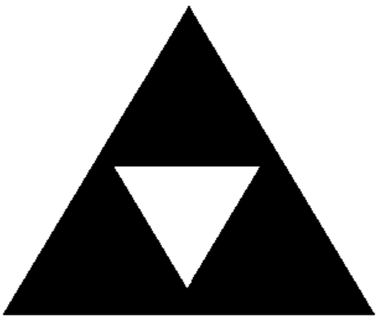


ნახ. 6. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის აგების დაწყებითი ეტაპები



ნახ. 7. სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩა

სერპინხკის ფრაქტალური ხალიჩის დედა-ფრაქტალია ტოლგვერდა სამკუთხედი და მისგან მამა-ფრაქტალის მოქმედებით (შუა სამკუთხედის ამოჭრა) მიიღება სერპინსკის ფრაქტალური ხალიჩის წარმომქმნელი ელემენტი ნახ. 8.

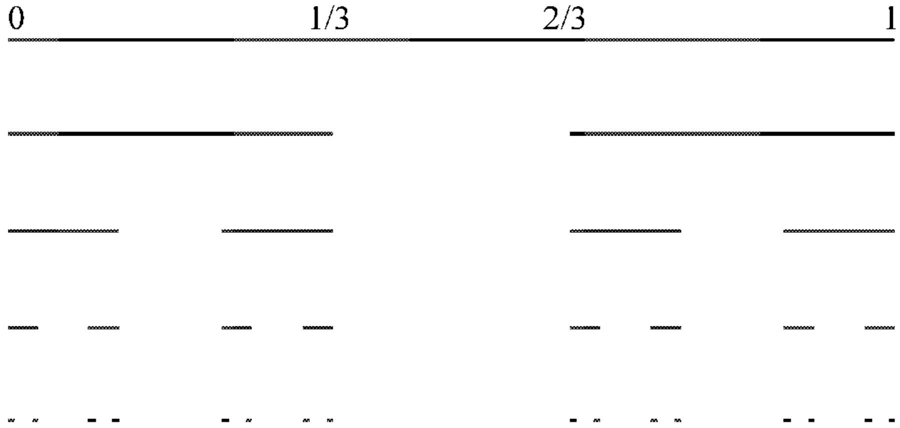


ნახ. 8. სერპინსკის ხალიჩის წარმომქმნელი ელემენტი

3. კანტორის ფრაქტალი

სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთმა შემქმნელმა - გეორგ კანტორმა შეისწავლა საინტერესო სიმრავლე, რომელსაც კანტორის სიმრავლეს უწოდებდნენ. ჩვენ კი კანტორის ფრაქტალს ვუწოდებთ.

კანტორის ფრაქტალის ასაგებად, განიხილავენ ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთს. საწყის ეტაპზე: დაყოფენ სამ ტოლ ნაწილად და ამოჭრიან შუა $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ მონაკვეთს. შემდეგ, დარჩენილ ორ მონაკვეთსაც ასევე მოექცევიან და ამოაჭრიან შუა მესამედს. ეს პროცესი გრძელდება უსასრულოდ. ზღვარში მიღებულ წერტილთა სიმრავლეს კანტორის ფრაქტალს უწოდებენ ნახ. 9.



ნახ. 9. კანტორის ფრაქტალი

კანტორის ფრაქტალის დედა-ფრაქტალს აქვს სახე ნახ. 10:

ნახ. 10. კანტორის ფრაქტალის წარმომქმნელი ელემენტი რომელიც მიიღება კანტორის დედა-ფრაქტალიდან (მონაკვეთი [0;1]) შუა მონაკვეთის ამოჭრით (მამა-ფრაქტალი)

ცხადია, რომ სამი ბიჯის შემდეგ გვექნება $2^3 = 8$ მონაკვეთი, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა $3^{-3} = \frac{1}{27}$. ცხადია, რომ n ბიჯის შემდეგ მივიღებთ 2^n მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძეა 3^{-n}. რაც იმას ნიშნავს, რომ დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძეა $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. გასაგებია რომ, როცა $n \to \infty$ დარჩენილი მონაკვეთების საერთო სიგრძე ნულისკენ მიისწრაფის. ეს იმას ნიშნავს რომ, კანტორის სიმრავლის ლებეგის ზომა ნულის ტოლია და მაშასადამე მისი ტოპოლოგიური განზომილებაც ნულოვანია. არსებობს განზომილების განსაზღვრების სხვა წესიც, რომლის მიხედვითაც კანტორის ფრაქტალის განზომილებაა 0.6309. ეს განზომილება წილადურია (არაა მთელი რიცხვი). აქედან წარმოდგება ფრაქტალური განზომილების ცნებაც.

4. ფრაქტალური სიმრავლეების განზომილების ექსპერიმენტული განსაზღვრა

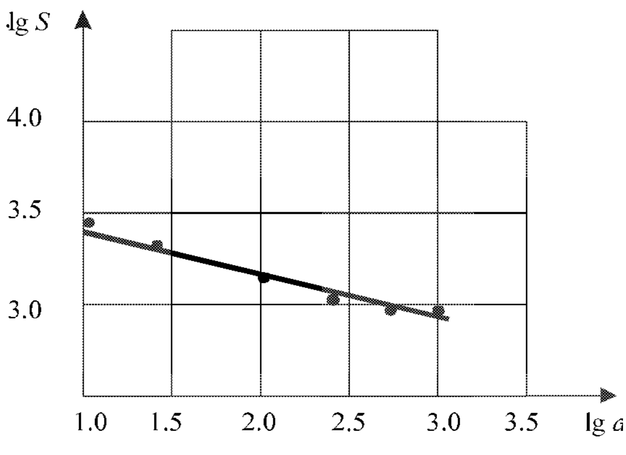
ფრაქტალის განზომილება განისაზღვრება ექსპერიმენტიდან გამომდინარე, რომელიც ჩატარდა რიჩარდსონის მიერ, დიდი ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის განსაზღვრისთვის.

4.1. რიჩარდსონის ექსპერიმენტი

ფრაქტალებისადმი დიდი ყურადღება განპირობებულია ბენუა მანდელბროტის ღრმა ნაშრომებით [1],[6],[7]. მანდელბროტის ეს წარმატება მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული მისი წინამორბედის, ცნობილი მეტეოროლოგის რიჩარდსონის ნაშრომებით [8]. რიჩარდსონის ნაშრომში, რომელიც გამოქვეყნდა მისი სიკვდილის შემდეგ 1961 წელს, მანდელბროტმა აღმოაჩინა ბრიტანეთის სანაპირო ზოლის სიგრძის გამოსათვლელი ფორმულა. რიჩარდსონმა შენიშნა რომ, გაზომვის სიზუსტე მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული რუკის მასშტაბზე. თუ რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და გავზომავთ ფარგლის მეშვეობით რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ რომ $S = N \cdot a$, სადაც N-კონტურის მთლიანად მოსავლელად აუცილებელი ბიჯების

რაოდენობაა, როცა სიგრძის ერთეულია a. სიგრძის ერთეულის შემცირებისას, ცხადია რომ სანაპირო ზოლის სიგრძის მნიშვნელობა იზრდება რადგან სულ უფრო მეტი მიხვეულ-მოხვეულების სიგრძეების დამატება ხდება. ამ გაზომვების შედეგად, რიჩარდსონმა შენიშნა, რომ სანაპირო ზოლის სიგრძის ლოგარითმებსა და სიგრძის მასშტაბის ლოგარითმების მნიშვნელობებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. მან ააგო წრფივი რეგრესიის წრფე და დაადგინა ამ წრფის დახრილობა ნახ. 11, რამაც საშუალება მისცა განესაზღვრა სანაპირო ზოლის კონტურის ფრაქტალური განზომილება. სურ. 1-ზე მოცემულია სანაპირო ზოლის რეალური სახე.

სურ. 1. კუნძულის სანაპირო ზოლი



ნახ. 11. რიჩარდსონის ექსპერიმენტების შედეგი

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$\ln S = -0.22 \cdot \ln a + \ln S_1, \quad (6)$$

სადაც S_1 არის სანაპირო ზოლის სიგრძე როცა სიგრძის ერთეულად მიღებული იყო$a = 1$ კმ. ფორმულა (6)-ის ამოხსნა გვაძლევს გამოსახულებას:

$$S = S_1 \cdot a^{-0.22}. \quad (7)$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია გადავწეროთ ფორმით:

$$S = S_1 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{0.22}. \quad (8)$$

ამ ფორმულიდან ნათლად ჩანს რომ, თუ სიგრძის ერთეულს ა-ს შევამცირებთ 32-ჯერ, მაშინ სანაპიროს სიგრძე გაიზრდება დაახლოებით 2-ჯერ. როცა $a \to 0$ მაშინ $S \to \infty$, მაგრამ რეალურად, სიგრძე უსასრულო არ იქნება რადგან სიგრძის ერთეულის შემცირება გარკვეული ბიჯის შემდეგ აღარ გამოიწვევს სანაპირო ზოლის სიგრძის შეცვლას (აღარ გვექნება დამატებითი მიხვეულ-მოხვეულები საზღვრის კონტურში).

სასარგებლო იქნებოდა კონტურის მრუდწირულობისათვის გვქონოდა რაღაც რიცხვითი მახასიათებელი. მანდელბროტმა ფორმულა (8)-ში ხარისხის მაჩვენებელს დაუმატა ერთი და მიიღო რიცხვი D რომელსაც მან სანაპიროს კონტურის ფრაქტალური განზომილება უწოდა (ამ შემთხვევაში $D = 1.22$).

4.2. ფრაქტალური განზომილების ცნება

მათემატიკაში არსებობს სიმრავლის განზომილების განსაზღვრების სხვადასხვა წესი, მათგან ყველაზე პოპულარულია ა.პუანკარეს ტოპოლოგიური განზომილების განსაზღვრება, რომლის მიხედვითაც, ცარიელი სიმრავლის განზომილებაა “-1”, შემდგომი სიმრავლეებისათვის განზომილება განიმარტება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით: თუ ვიცით, რა არის “n-1” განზომილება, მაშინ სიმრავლის განზომილებაა “n” ნიშნავს, რომ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ რაგინდ მცირე “n-1”- განზომილებიანი

სიმრავლეების საშუალებით და არ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ “n-2” განზომილებიანი სიმრავლეებით. ამ განმარტებიდან გამომდინარე, წერტილს, წრფეს, ზედაპირს შესაბამისად, აქვთ 0; 1 და 2 ტოპოლოგიური განზომილება. მოგვიანებით, განზომილების უფრო ზუსტი განმარტება მოგვცა ბრაუერმა, ხოლო განზომილების სხვა განმარტებები შემოიღეს ხაუსდორფმა, ბეზიკოვიჩმა და კოლმოგოროვმა, რომელთა განსაზღვრებები უკვე მოიცავს წილადური განზომილების სივრცეებსაც.

დავუბრუნდებით რიჩარდსონის ექსპერიმენტებს. თუ, რუკაზე ავირჩევთ რაიმე სიგრძის ერთეულს და გავზომავთ ფარგლის მეშვეობით, რამდენჯერ ეტევა ეს მონაკვეთი სანაპირო ზოლის კონტურში, მივიღებთ რომ $S = N \cdot a$, სადაც N-კონტურის მთლიანად მოსავლელად აუცილებელი ბიჯების (ტეხილის მონაკვეთების) რაოდენობაა, როცა სიგრძის ერთეულია a. მანდელბროტის განსაზღვრების თანახმად, ტეხილის “ფრაქტალური განზომილება D” ტოლია:

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}}. \tag{9}$$

ცხადია, რომ D არის სანაპირო ზოლის წირის “მიხვევ-მოხვევადობის” რიცხვითი მახასიათებელი. თუ a ბიჯის შემდგომი შემცირებისას, (12.9) ფორმულაში შემავალი წილადის მნიშვნელობა ღარ იცვლება, ეს ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \frac{1}{a}}, \tag{10}$$

ანუ

$$N = \left(\frac{1}{a}\right)^{D}. \tag{11}$$

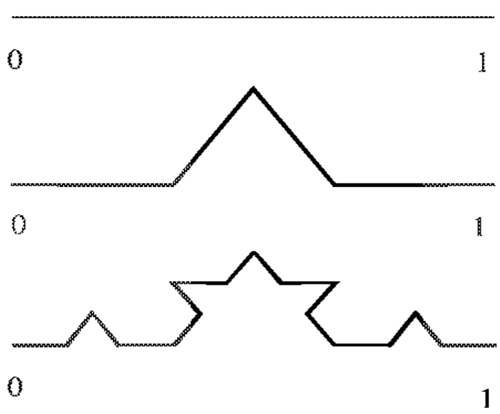
თუ გავიხსენებთ, რომ $S = N \cdot a$, მაშინ გვექნება

$$S = \left(\frac{1}{a}\right)^{D-1}. \tag{12}$$

ეს ფორმულა გვიჩვენებს თუ, როგორ იცვლება სანაპირო ზოლის სიგრძის გაზომილი შ მნიშვნელობა, გაზომვის ა მასშტაბის მიხედვით.

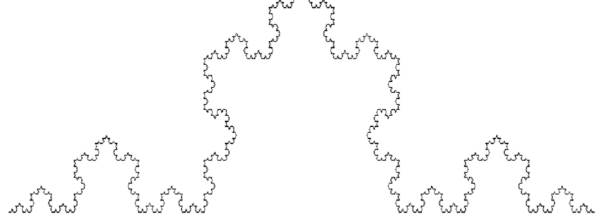
5. კოხის “დაფრაქტალებული” წირი

კოხის დაფრაქტალებული წირის ასაგებად, ვიქცევით იმის ანალოგიურად, როგორც კანტორის ფრაქტალის აგების დროს. განსხვავება ისაა, რომ საწყისი ერთეულოვანი სიგრძის მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილი კი არ უქმდება, არამედ, შეივსება ტოლგვერდა სამკუთხედამდე ქვედა გვერდის გარეშე (მამა-ფრაქტალი) ნახ. 12 და ეს პროცესი გრძელდება მიღებული ტეხილის ყველა მონაკვეთისათვის.



ნახ. 12. კოხის დაფრაქტალებული წირის აგების ალგორითმის სქემა

კოხის ალგორითმით, მონაკვეთის დედა-ფრაქტალიდან ([0;1] მონაკვეთიდან) მამა-ფრაქტალის (მონაკვეთის ამოჭრილი შუა ნაწილის მაგივრად ჩასმული, ამოზნექილი ორი მონაკვეთი) ზემოქმედებით მიღებულ დაფრაქტალებულ წირს აქვს სახე:



ნახ. 13. კოხის დაფრაქტალებული წირი

ვიპოვოთ კოხის დაფრაქტალებული წირის ფრაქტალური განზომილება (5) ფორმულის საშუალებით. რადგან საწყისი მონაკვეთის სიგრძეა 1, პირველი ბიჯის შემდეგ მიღებული თითოეული ფრაგმენტის (მონაკვეთის) სიგრძე იქნება $\frac{1}{3}$ და მაშასადამე ოთხივე მონაკვეთი ერთად მოგვცემს $S=\frac{4}{3}$ სიგრძეს. შემდეგი ბიჯი მოგვცემს 16 მონაკვეთს, რომელთაგან თითოეულის სიგრძე იქნება $\frac{1}{9}$ და მაშასადამე, მიღებული წირის სიგრძეა $S=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$ და ა.შ. აქედან გამომდინარე, (12) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$D=\frac{\ln 4}{\ln 3}=\frac{\ln 4^2}{\ln 3^2}= \dots \tag{13}$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კოხის დაფრაქტალებული წირის განზომილებაა $D\approx 1.26$.

ადვილი შესამჩნევია რომ, კოხის დაფრაქტალებულ წირს ახასიათებს თვითმსგავსება: მისი ყოველი ნაწილი რომელიც მიიღება შემდეგ ბიჯზე, არის მასშტაბში შემცირებული წინა ბიჯის წირის კოპიო.

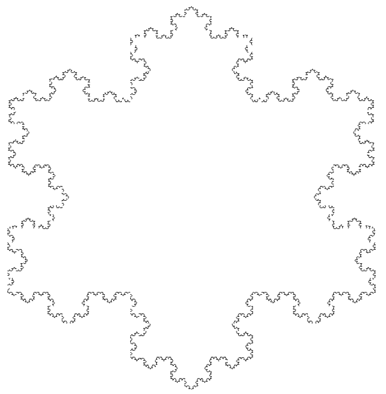
ფრაქტალური წირით შეგვიძლია ავაგოთ რეალური ქვიშის ქარიშხალის საზღვრის მოდელიც სურ. 2.

სურ. 2. ერაყის ერთ-ერთ ქალაქს უახლოვდება ქვიშის ქარიშხალი

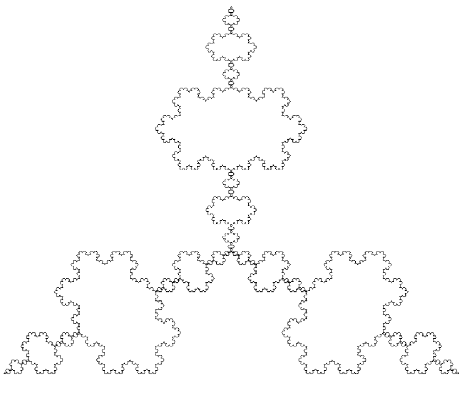
5.1. კოხის დაფრაქტალებული კუნძული

თუ, კოხის დედა-ფრაქტალად ავიღებთ რაიმე წესიერ მრავალ-კუთხედს (მაგალითად, წესიერ სამკუთხედს) და მის შემადგენელ ყოველ მონაკვეთზე ვიმოქმედებთ კოხის გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით, მივიღებთ კოხის დაფრაქტალებულ კუნძულს

თუ, წესიერ მრავალკუთხედზე, როგორც დედა-ფრაქტალზე, ვიმოქმედებთ გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით, მივიღებთ კოხის დაფრაქტალებულ კუნძულს, რაც გამოხატულია ნახ. 14: ხოლო თუ ვიმოქმედებთ გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით, მაშინ მივიღებთ ნახ. 15.



ნახ. 14. კოხის დაფრაქტალებული კუნძული გარეთ მიმართული მამა-ფრაქტალით



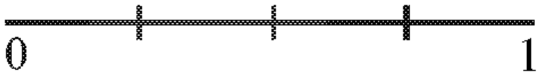
ნახ. 15. კოხის დაფრაქტალებული კუნძული შიგნით მიმართული მამა-ფრაქტალით

რეალურად, ბუნებაში გვხვდება ცოცხალი სისტემები, რომლებსაც წააგავს კოხის კუნძული სურ. 3.

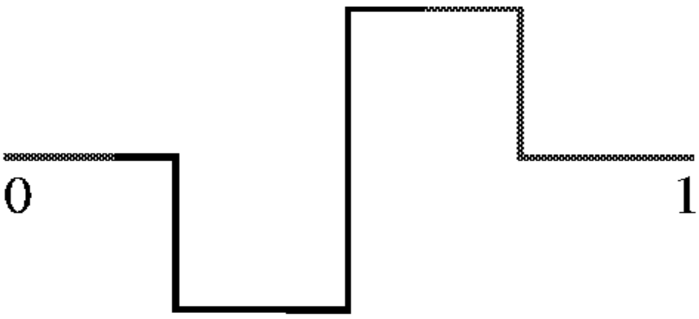
სურ. 3. ხვეული კომბოსტო

6. მინკოვსკის ფრაქტალი

მინკოვსკის ფრაქტალისათვის გვაქვს დედა-ფრაქტალი ნახ. 6 და მამა-ფრაქტალი ნახ. 7.

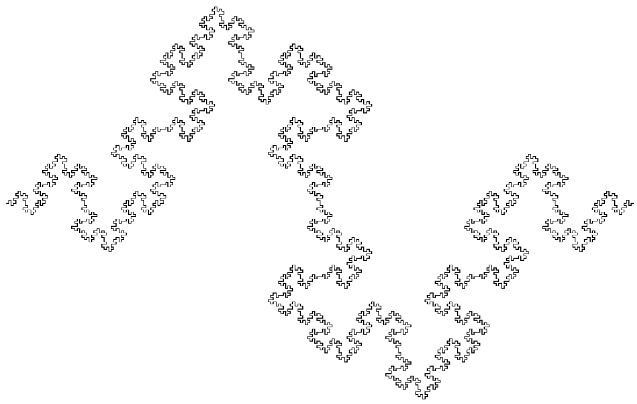


ნახ. 16. მინკოვსკის დედა-ფრაქტალი



ნახ. 17. მინკოვსკის მამა-ფრაქტალი

თუ, მამა-ფრაქტალით ვიმოქმედებთ მინკოვსკის დედა-ფრაქ-ტალზე და შემდეგ, თითოეულ მიღებულ მონაკვეთს განვიხილავთ დედა-ფრაქტალად, მათზეც ვიმოქმედებთ მინკოვსკის მამა-ფრაქტალით და ა.შ. ოთხი ბიჯის შემდეგ მივიღებთ მინკოვსკის ფრაქტალს ფორმით ნახ. 18.



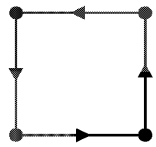
ნახ. 18. მინკოვსკის ფრაქტალი

მინკოვსკის ფრაქტალის განზომილებას გამოვითვლით (12) ფორმულით:

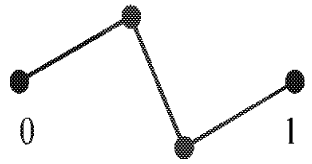
$$D = \frac{\ln N}{\ln\frac{1}{a}} = \frac{\ln N^2}{-\ln a^2} = \frac{\ln 8}{\ln\frac{1}{0.25}} = 1.5. \quad (14)$$

6.1 ფრაქტალური კუნძული

ვთქვათ, დედა-ფრაქტალია კვადრატი წვეროებით წერტილებში (±1;±1), ნახ. 19, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. **20,**

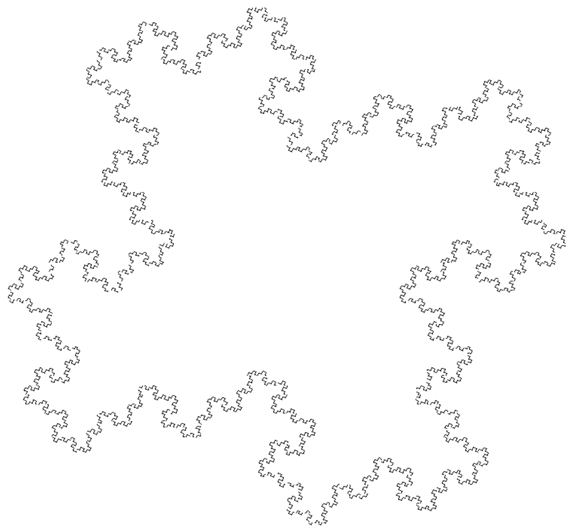


ნახ. 19. კვადრატი წვეროებით (±1;±1) წერტილებში



ნახ. 20. მამა-ფრაქტალი შუალედური წერტილებით (0.4;0.2) და (0.6;-0.2)

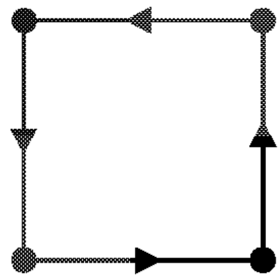
მაშინ მივიღებთ ფრაქტალურ კუნძულს ნახ. 21



ნახ. 21. ფრაქტალური კუნძული

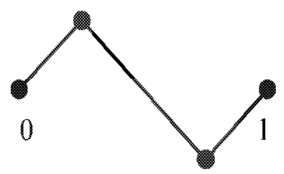
6.2. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

დედა-ფრაქტალად ავიღოთ ისევ კვადრატი წვეროებით წერტილებში (±1;±1), ნახ. 22, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ.**23**



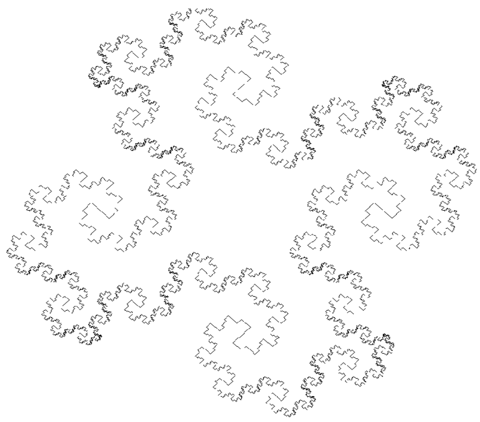
,

ნახ. 22. კვადრატი წვეროებით (±1;±1) წერტილებში



ნახ. 23. მინკოვსკის მამა-ფრაქტალი შუალედური წერტილებით (0.25;0.25) და (0.75;-0.25)

შესაბამისად, აგებულ მინკოვსკის ფრაქტალურ კუნძულს აქვს ფორმა ნახ. 24.



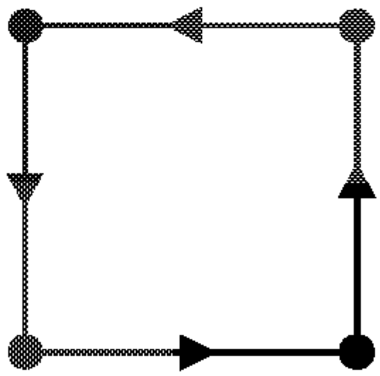
ნახ. 24. მინკოვსკის ფრაქტალური კუნძული

მინკოვსკის ფრაქტალით შეგვიძლია მიუახლოვდეთ მცენარის, კრასულა ბუდას ტაძრის ფორმას სურ. 4

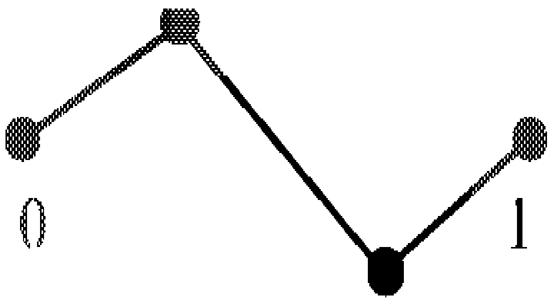
სურ. 4. კრასულა ბუდას ტაძარი

7. ფიორდების ფრაქტალური კუნძული

თუ, დედა-ფრაქტალი კვლავ კვადრატია ნახ. 25 წვეროებით წერტილებში (1; 1), ნახ. 25, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. 26,



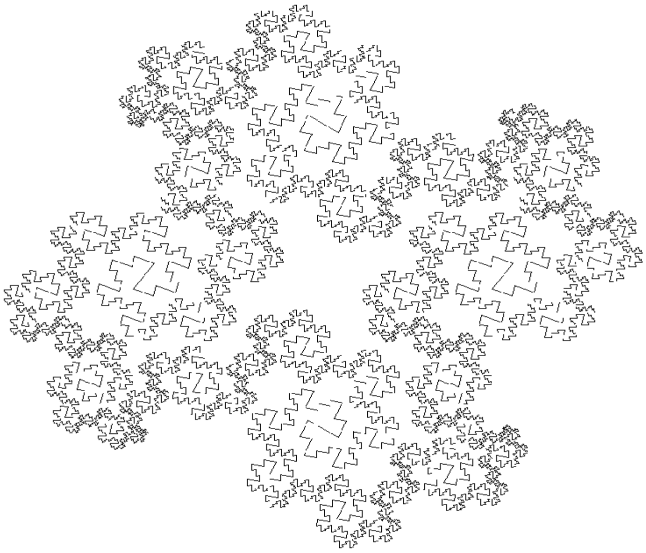
ნახ. 25. კვადრატი წვეროებით (1; 1) წერტილებში



ნახ. 26. ფიორდის მამა-ფრაქტალი შუალედური წვეროებით (0.3;0.3) და (0.7;-0.3)

მაშინ, შესაბამის ფიორდის ფრაქტალურ კუნძულს ექნება სახე

ნახ. 27



ნახ. 27. ფიორდის ფრაქტალური კუნძული ბუნებაში ხშირად გვხვდება სხვადასხვა ფრაქტალური ფორმის ობიექტი სურ. 5, სურ. 6.

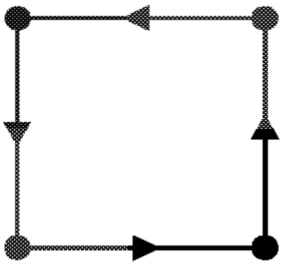
სურ. 5. ფრთის ფორმის ღრუბლის ფრაქტალი წარმოიქმნება

7-10კმ სიმაღლეზე, აღმავალი ჰაერის მასების ატმოსფერული ფრონტის გაციებისას

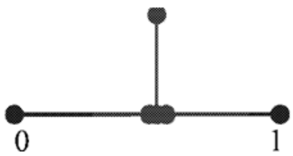
სურ. 6. ყინულის ბუნებრივი ფრაქტალი

7.1 ყინულოვანი ფრაქტალური კვადრატი

განვიხილოთ დედა-ფრაქტალად კვადრატი წვეროებით (±1;±1) წერტილებში ნახ. 18, ხოლო მამა-ფრაქტალია ფრაგმენტი ნახ. 29 სამი შუალედური წერტილით: (0.5;0), (0.5;0.33) და (0.5;0).

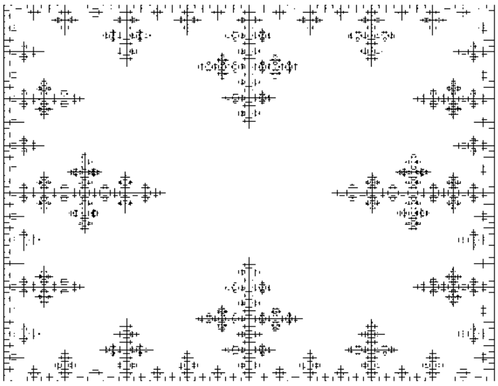


ნახ. 28. დედა ფრაქტალი



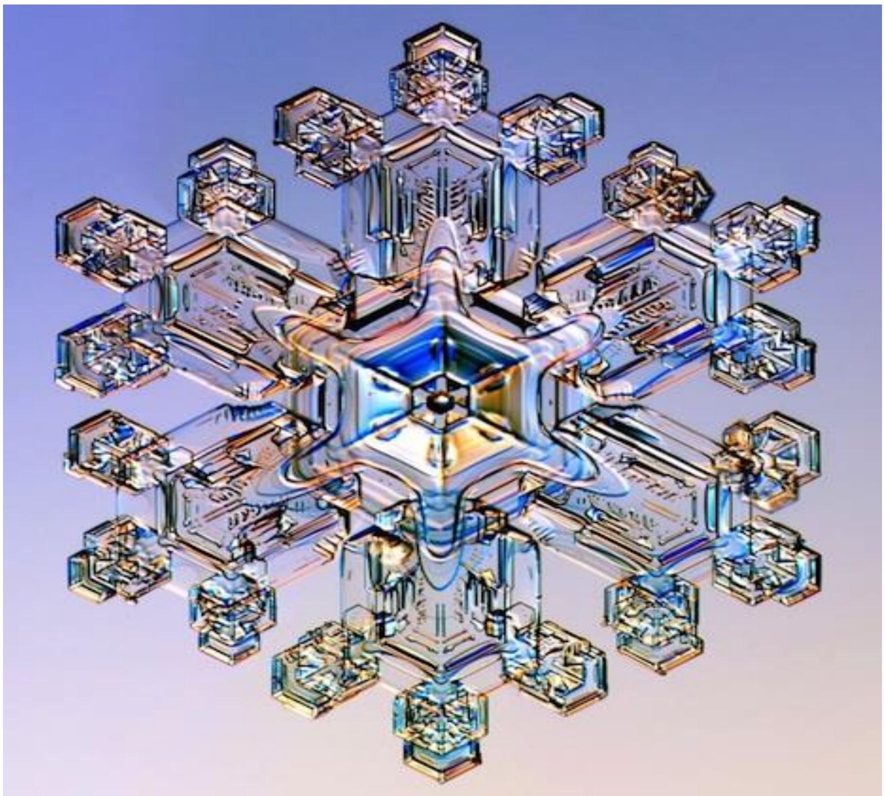
ნახ. 29. მამა-ფრაქტალი შუალედური წვეროებით წერტი-ლებში (0.5;0), (0.5; 0.33) და (0.5; 0)

შესაბამის ყინულოვან, ფრაქტალურ კვადრატს ექნება შემდეგი სახე ნახ. 30:



ნახ. 30. ყინულოვანი ფრაქტალური კვადრატი

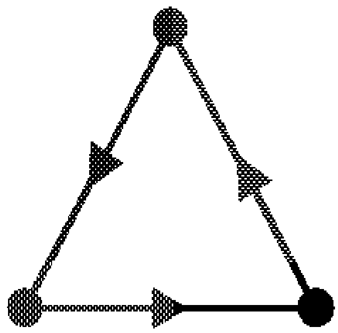
შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალია თოვლის ფიფქი სურ. 7



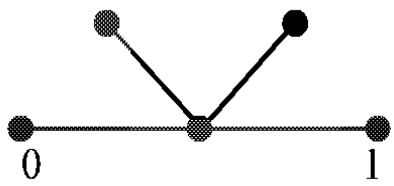
სურ. 7. თოვლის ფიფქის ყინულოვანი ფრაქტალი

7.2. ყინულოვანი ფრაქტალური სამკუთხედი

დედა-ფრაქტალად განვიხილოთ ტოლგვერდა სამკუთხედი, წვეროებით წერტილებში (0;0), (0.5;0.85) და (0;1) ნახ. 31, ხოლო მამა-ფრაქტალად განვიხილავთ ფრაგმენტს ნახ. 32 შუალედური წვეროებით წერტილებში (0.5;0), (0.375;0.2165) და (0.625;0.2165).

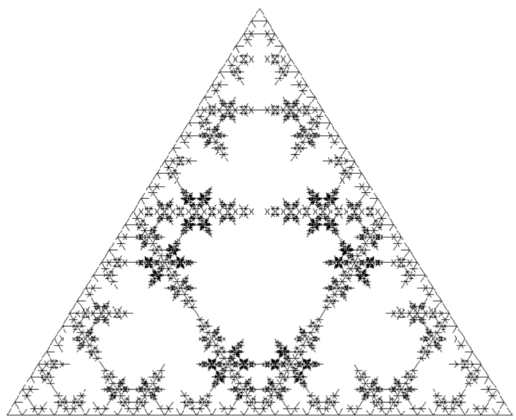


ნახ. 31. დედა-ფრაქტალი



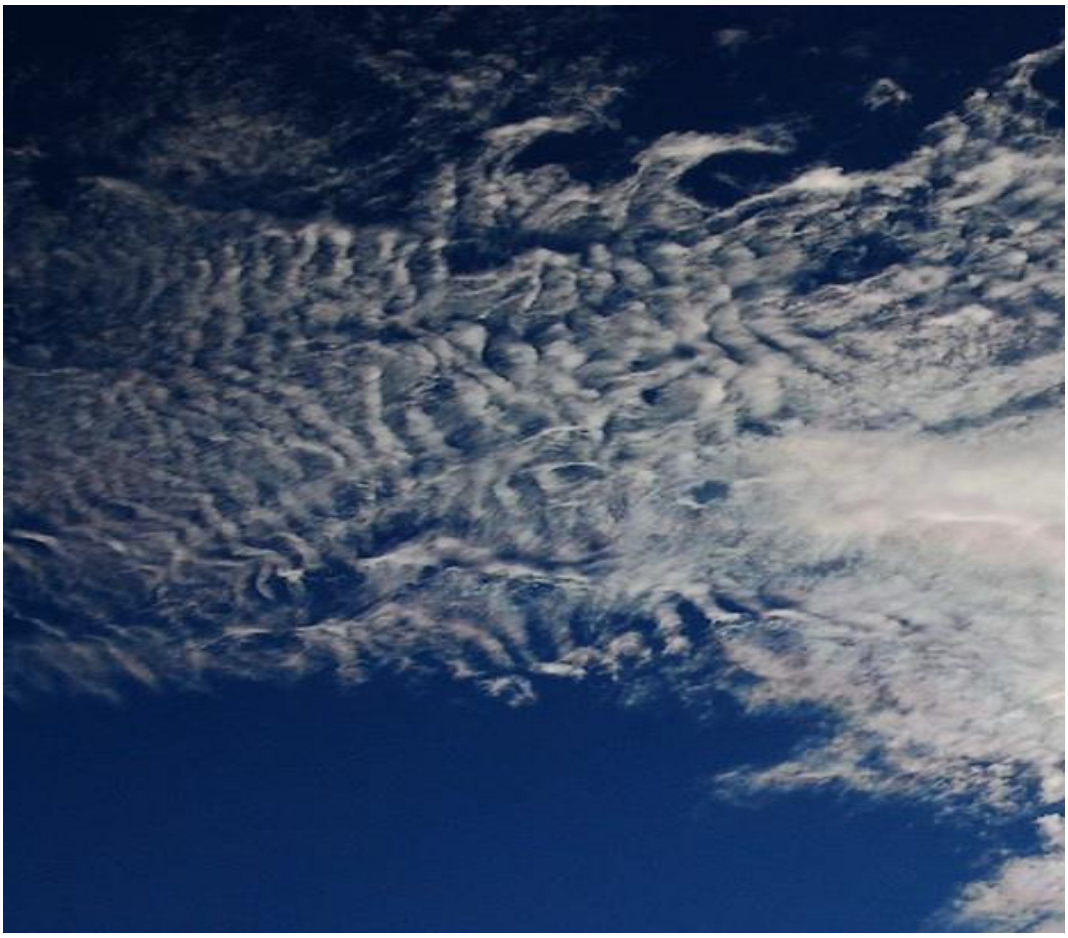
ნახ. 32. მამა-ფრაქტალი

მაშინ, შესაბამის ყინულოვან ფრაქტალურ სამკუთხედს ექნება სახე ნახ. 33



ნახ. 33. ყინულოვანი ფრაქტალური სამკუთხედი

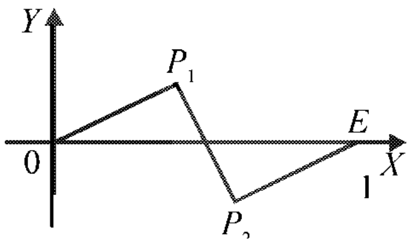
სურ. 8. წვიმის ღრუბლის წყლის ორთქლისაგან შედგენილი ფრაქტალი, წარმოიქმნება 0.5-2კმ სიმაღლეზე



სურ. 9. ყინულის ნაწილაკებისაგან შედგენილი ღრუბლის ფრაქტალი 8კმ სიმაღლეზე წარმოიქმნება

8. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი

ზემოთ განხილული, გემეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების აგების მაგალითებიდან გამომდინარე, შეგვიძლია ავაგოთ ზოგადი ალგორითმი.ვთქვათ, დედა-ფრაქტალი შედგება n რაოდენობის მონაკვეთისგან, ხოლო, მამა-ფრაქტალის ფრაგმენტი მოიცავს m მონაკვეთს. დედა-ფრაქტალისა და მამა-ფრაქტალის მონაკვეთების ბოლოების კოორდინატები, ითვლება რომ წინასწარაა განსაზღვრული. ვთქვათ, მოცემულია მამა-ფრაქტალი ნახ. 34

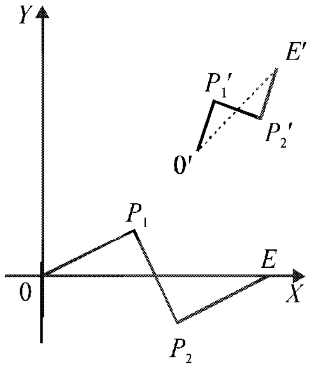


ნახ. 34. მამა-ფრაქტალი

O წერტილი კოორდინატთა სათავეა კოორდინატებით $(0;0)$, ხოლო E წერტილების კოორდინატებია $(1;0)$. შუალედური წვეროების კოორდინატებია $P_1(0.4;0.2)$, $P_2(0.6;-0.2)$. მაშინ $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

დედა-ფრაქტალად განვიხილოთ კვადრატი წვეროებით $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$. თუ ბიჯების რაოდენობაა k, მაშინ OE მამა-ფრაქტალის მოქმედებით დედა-ფრაქტალის ყოველ მონაკვეთზე, მივიღებთ $m^k - 1$ წვეროს მქონე ტეხილს. ამ ტეხილის წვეროების კოორდინატები გამოითვლება მსგავსების გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = (x_2 - x_1)\cdot x - (y_2 - y_1)\cdot y + x_1 \\ y' = (y_2 - y_1)\cdot x + (x_2 - x_1)\cdot y + y_1 \end{cases}. \qquad (15)$$

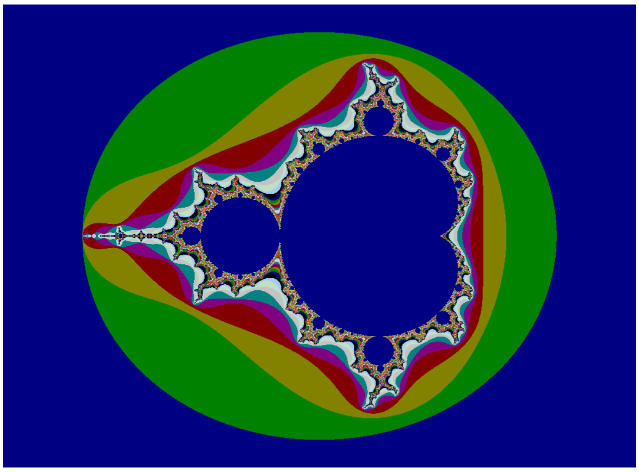


ნახ. 35. მსგავსების გარდაქმნა

ამ გარდაქმნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია ნახ. 35. შესაბამისად გვაქვს ასახვა: $O(0;0) \to O'(x_1;y_1)$,

$E(1;0) \to E'(x_2;y_2)$, $P(x;y) \to P'(x';y')$.

თვითმსგავსება კარგად ჩანს, ანალიზურად აგებულ [5] მან-დელბროტის ფრაქტალში ნახ. 36.



ნახ. 36. მანდელბროტის ფრაქტალი

9. სპირალები, ხეები და ვარსკვლავები

პითაგორამ დაამტკიცა თავისი სახელგანთქმული თეორემა, რომლისთვისაც მან, მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებზე ააგო კვადრატები. ამჟამად, ამ ფიგურიდან უკვე წარმოიქმნა “ხე”. არქიმედის ყურადღება მიიპყრო სპირალურმა ფორმამ და მან ტრაქტატიც კი მიუძღვნა სპირალს. ერთ-ერთი ტიპის სპირალს

არქიმედის სახელი ქვია. სპირალი ცოცხალი სისტემის ასაგები აგურის როლს თამაშობს. ცნობილია რომ, ლოკოკინა თავის სახლს აგებს სპირალური ფრაგმენტების საშუალებით. უჯრედის ბირთვი იგება ორმაგი გადაჯაჭვული სპირალური ფრაგმენტით – დიზოქსირიბონუკლეინის მჟავის სტრუქტურით, რომელიც შეიცავს ფორმირებადი ცოცხალი სისტემის გენეტიკურ კოდს. ასევე, ხშირად, სპირალური ფორმა აქვს განვითარების გარკვეულ ეტაპზე მყოფ გალაქტიკასაც.

9.1. სპირალები

გამოყოფენ სამი ტიპის სპირალს:

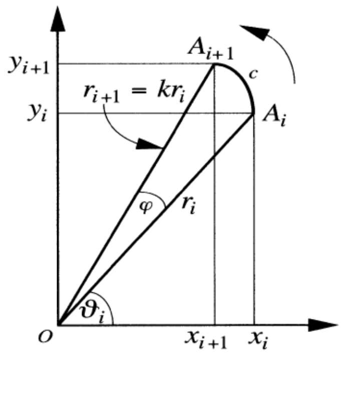
ა) დახვეული ძაფის გახსნისას ძაფის, გაჭიმული ბოლოს მიერ სივრცეში აღწერილი სპირალი;

ბ) არქიმედის სპირალი;

გ) ლოგარითმული ზრდის სპირალი.

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე:

ა) ტიპის სპირალის აღსაწერად მივმართოთ ნახ. 37-ს.



ნახ. 37. ძაფის ნახვევი გაშლისას მისი გაჭიმული ბოლო ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას წაგრძელებით

ადვილი მისახვედრია რომ, თუ ძაფის ბოლოს საწყისი მდგომარეობაა A_i, ხოლო მომდევნო მდგომარეობა - A_{i+1}, მაშინ

რადიუს ვექტორი OA_i შემობრუნდება OA_{i+1} მდგომარეობაში φ კუთხით და რადიუს ვექტორის საწყისი სიგრძე გარკვეულად წაგრძელდება k- ჯერ ანუ $r_{i+1} = k \cdot r_i$. აქედან გამომდინარე, რადგან OA_i რადიუს-ვექტორის აბსცისთა ღერძთან დახრის კუთხეა ϑ_i, გვექნება ტოლობები:

$$x_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \cos(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\cos\vartheta_i \cdot \cos\varphi - \sin\vartheta_i \cdot \sin\varphi), \quad (16)$$

$$y_{i+1} = k \cdot r_i \cdot \sin(\vartheta_i + \varphi) = k \cdot r_i \cdot (\sin\vartheta_i \cdot \cos\varphi + \cos\vartheta_i \cdot \sin\varphi), \quad (17)$$

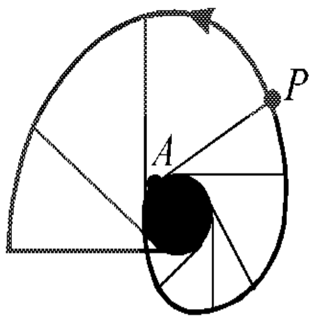
მაგრამ $$x_i = r_i \cdot \cos\vartheta_i \text{ da } y_i = r_i \cdot \sin\vartheta_i. \quad (18)$$

აქედან გამომდინარე მივიღებთ, რომ

$$x_{i+1} = k \cdot (x_i \cdot \cos\varphi - y_i \cdot \sin\varphi), \quad (19)$$

$$y_{i+1} = k \cdot (y_i \cdot \cos\varphi + x_i \cdot \sin\varphi). \quad (20)$$

ამრიგად, მივიღეთ სპირალი, რომელიც ყოველ ბიჯზე, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნდება φ კუთხით და შესაბამისად, დაშორდება კოორდინატთა სათავეს k- ჯერ ნახ. 38



ნახ. 38. ა) ტიპის სპირალი

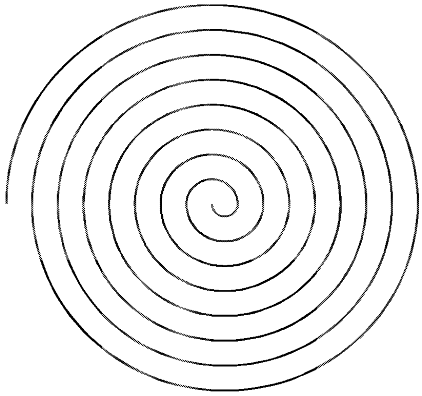
ბ) არქიმედის სპირალი ნახ. 39.

არქიმედის სპირალი პოლარ-კოორდინატებში ჩაიწერება შემდეგი ფორმით:

$$r = k \cdot \varphi, \quad (21)$$

სადაც $k > 0$ მუდმივი რიცხვია და ის გარკვეულ შესაბამისობაშია მეზობელ ხვეულებს შორის მანძილთან, ხოლო φ შესაბამისი

მობრუნების კუთხეა. მართლაც, რადგან r არის მანძილი სპირალის რომელიმე წერტილიდან პოლუსამდე, ავიღოთ წერტილი პირველ ხვეულზე როცა $\varphi = 2\pi$ ანუ $r = k \cdot 2\pi$, სპირალი კიდევ ერთხელ შემობრუნებისას გვექნება $\varphi_1 = 4\pi$ და $r_1 = k \cdot 4\pi$; მაშინ მანძილი მეზობელ ხვეულებს შორის იქნება $\Delta r = r_1 - r = 4\pi \cdot k - 2\pi \cdot k = 2\pi \cdot k$.



ნახ. 39. არქიმედის სპირალი

სურ. 10 ცოცხალი ფრაქტალი: სპირალური სუკულენტი

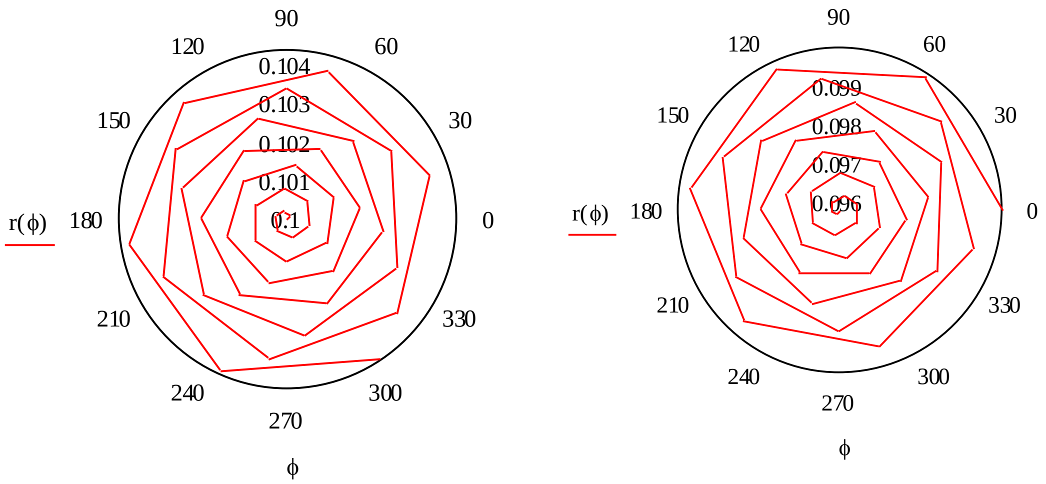
გ) ლოგარითმული ზრდის სპირალი ნახ. 40.

პოლარ-კოორდინატებში ლოგარითმული ზრდის სპირალს აქვს სახე:

$$\ln r = k \cdot \varphi \Leftrightarrow r = r_0 \cdot e^{k \cdot \varphi}. \qquad (22)$$

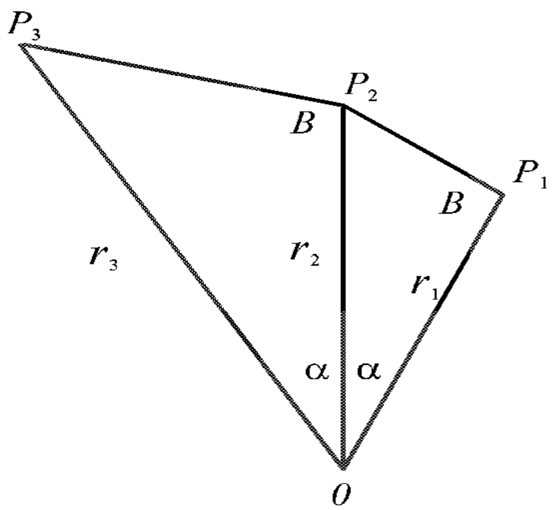
ლოგარითმული სპირალისათვის ნახ. 40 დამახასიათებელია რიგი საინტერესო თვისებებისა, თუ განვიხილავთ სპირალის ბრუნვას თანაბარი სიჩქარით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით და შესაბამის სამ, მიმდევრობით მდგომარეობას ნახ. 41, მაშინ:

$$\ln\frac{r_3}{r_2} = \ln\frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_2}{r_1} \Leftrightarrow r_2^2 = r_1 \cdot r_3. \qquad (23)$$



a) $k > 0$ b) $k < 0$

ნახ. 40. ლოგარითმული სპირალი (დახვევის მიმართულება დამოკიდებულია k კოეფიციენტის ნიშანზე. თუ ის უარყოფითია, მაშინ დახვევის მიმართულება დაემთხვევა საათის ისრის მიმართულებას)



ნახ. 41. ლოგარითმული სპირალის სამი მიმდევრობითი წერტილი

სხვანაირად რომ ვთქვათ, r_1; r_2; r_3 ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას. იაკობ ბერნულიმ ამ სპირალს “სასწაულებრივი” უწოდა, რადგან აღმოაჩინა მისი მასშტაბური ინვარიანტობის თვისება (თვითმსგავსება) ანუ სპირალის მასშტაბური შემცირება გვაძლევს იგივე შედეგს, რაც მისი მობრუნება რაიმე α კუთხით. მართლაც,

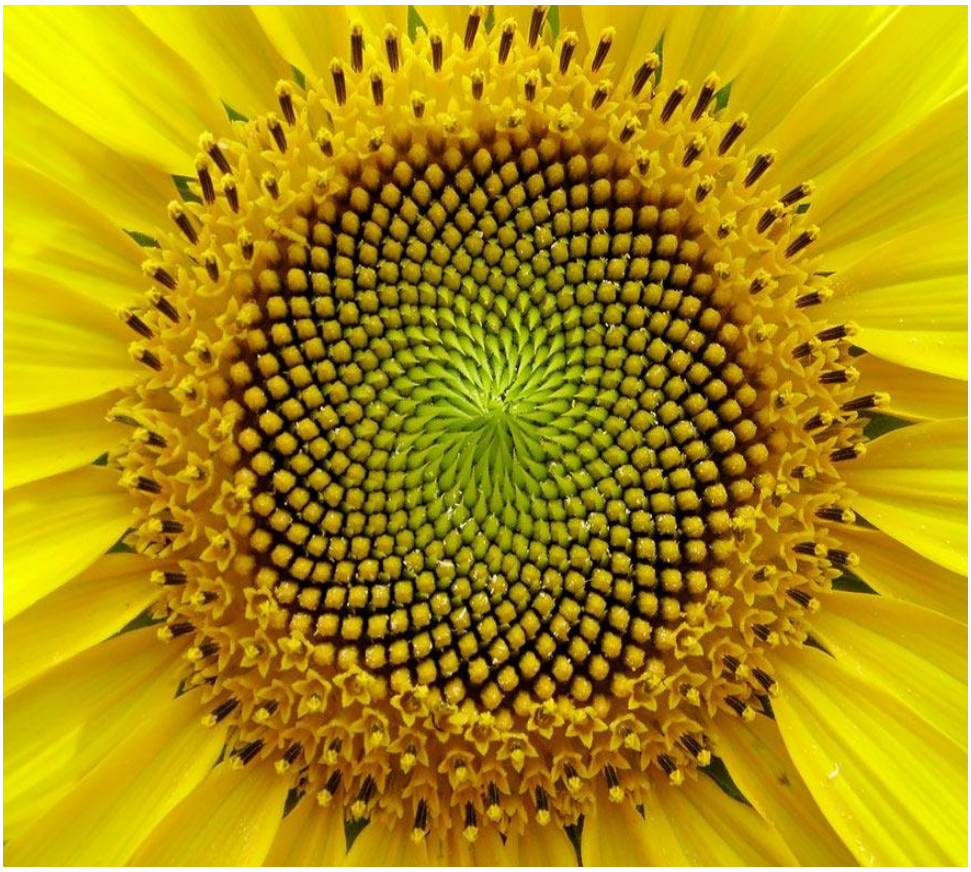
$$r = r_0 \cdot e^{k\cdot(\varphi-\alpha)} = r_0 \cdot e^{-k\cdot\alpha} \cdot e^{k\cdot\varphi} = \overline{r_0} \cdot e^{k\cdot\varphi}. \qquad (24)$$

იმდენად განაცვიფრა ამ ფაქტმა, რომ მის საფლავზე გააკეთებინეს წარწერა “Eადემ მუტატა რესუგო” რაც ნიშნავს შემდეგს “მე უცვლელად აღვდგები”.

შეგვიძლია შევნიშნოთ რომ, ბუნებაში ფართოდაა გავრცელე-ბული სპირალური ფრაქტალის ფორმა: სურ. 11, სურ. 12, სურ. 13, სურ. 14, სურ. 15, სურ. 16.

სურ. 11. ლოკოკინას სახლის ფრაქტალი ($k < 0$)

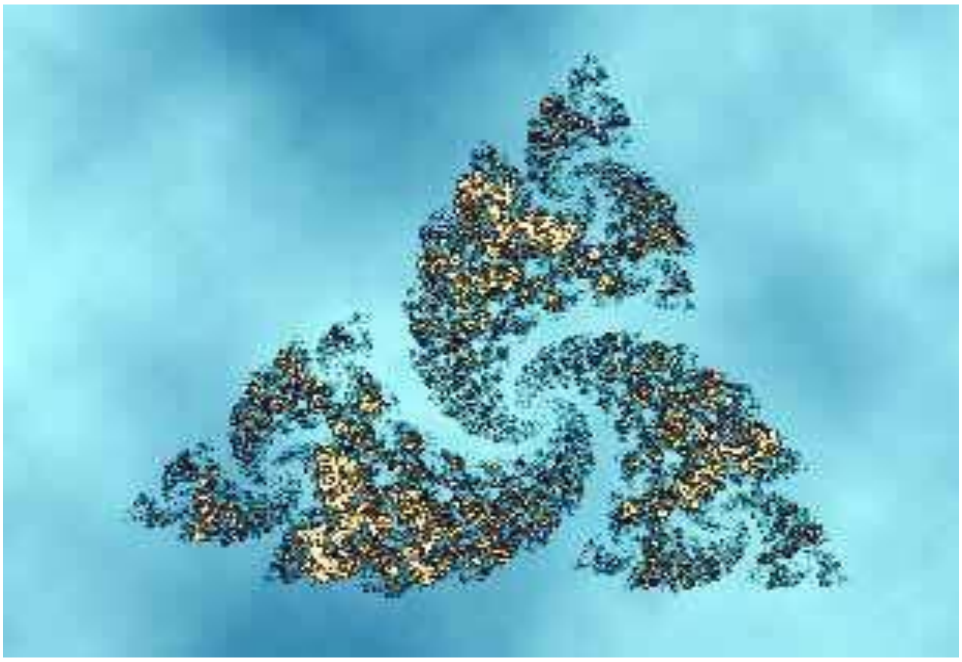
სურ. 12. ლოკოკინას სახლის ლოგარითმული, სპირალური ფრაქტალი (ჭრილი)



სურ. 13. მზესუმზირას ლოგარითმული სპირალური ფრაქტალი ($k > 0$)

სურ. 14. გეორგინას სპირალური ფრაქტალი

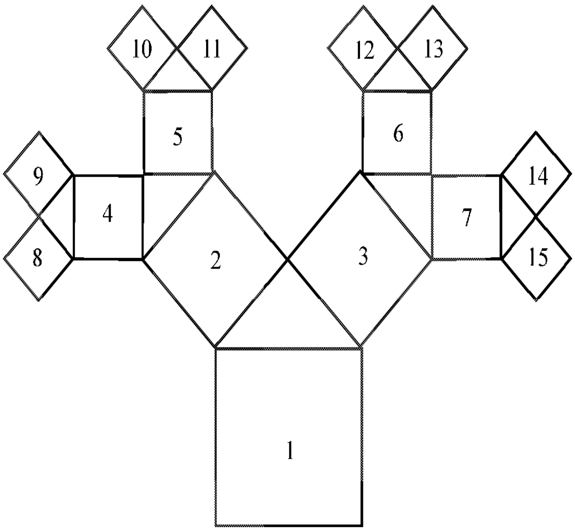
სურ. 15. კომბოსტოს ფოთლებისძარღვები ქმნიან ლოგარითმულ, სპირალურ ფრაქტალს ($k < 0$)



სურ. 16. გალაქტიკის სპირალური ფრაქტალი ($k < 0$)

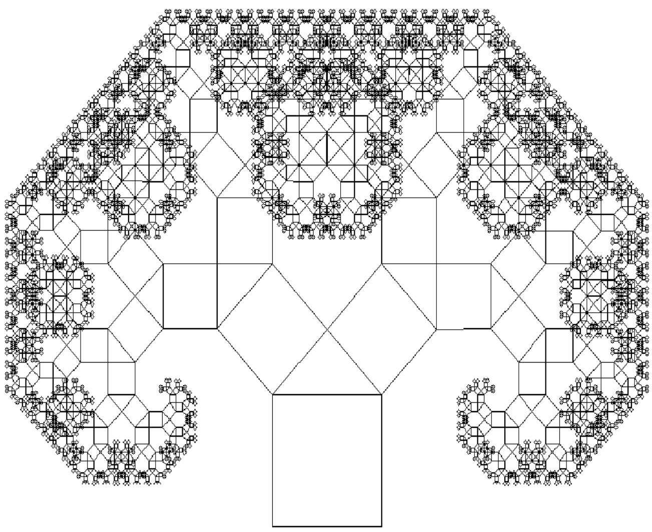
10. პითაგორას ფრაქტალური ხე

როგორც ვიცით, პითაგორას თეორემის თანახმად: მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძის კვადრატი უდრის კათეტების სიგრძეთა კვადრატების ჯამს. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ ერთეულოვანი ფართობის მქონე კვადრატი, როგორც დედა-ფრაქტალი ნომრად 1, ნახ. 41, ხოლო მამა-ფრაქტალი იყოს მის ზედა გვერდზე ჰიპოტენუზით დაყრდნობილი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი მის კათეტებზე აგებული კვადრატებით ნომრით 2 და 3, შემდეგ ეს პროცესი მეორდება თითოეული ამ ახალი კვადრატისათვის და ა.შ. ადვილი მისახვედრია, რომ 2 და 3 ნომრიანი კვადრატების ფართობთა ჯამიც იქნება 1. იგივე ფაქტს ექნება ადგილი სხვა კვადრატებისთვისაც.



ნახ. 41 პათაგორას ფრაქტალური ხის აგების დაწყებითი ეტაპები

თუ, დავაკვირდებით ნახ. 41-ს დავინახავთ, რომ კვადრატზე ინდექსით n, დაყრდნობილია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებზე იზრდება უფრო მცირე სიდიდის ორი კვადრატი. მარცხნივ მდგომი კვადრატის ინდექსია $2n$, ხოლო მარჯვნინ მდგომი კვადრატისა - $(2n + 1)$. მაშინ ყოველ დონეზე არსებული კვადრატების ფართობთა ჯამი, საწყისი კვადრატის ფართობის ტოლია ანუ თუ ავიღებთ კვადრატებს ნომრით 8;9;10;11;12;13;14;15 აღმოვაჩენთ, რომ მათი ფართობების ჯამიც ერთის ტოლი იქნება. თუ, ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ პითაგორას ფრაქტალურ ხეს ნახ. 42

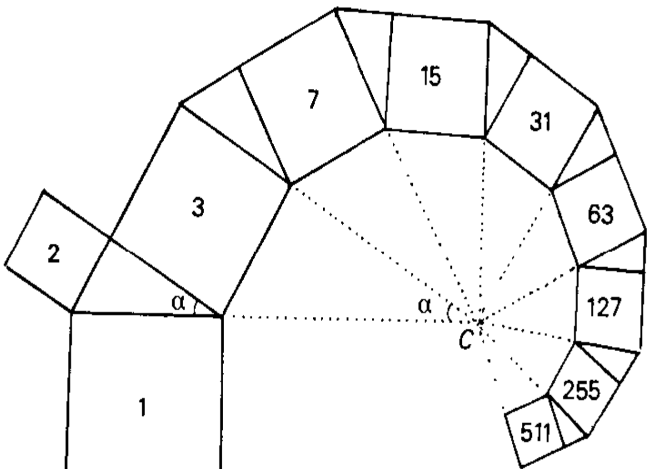


ნახ. 42. პითაგორას ფრაქტალური ხე

სურ. 17. მაგნიუმის ხელოვნური დენდრიტი, რომელიც მიიღება მაგნიუმის ორთქლის კონდენსაციით ცივ ზედაპირზე. ძალიან გავს ნაძვის გირჩების გროვას

10.1. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე

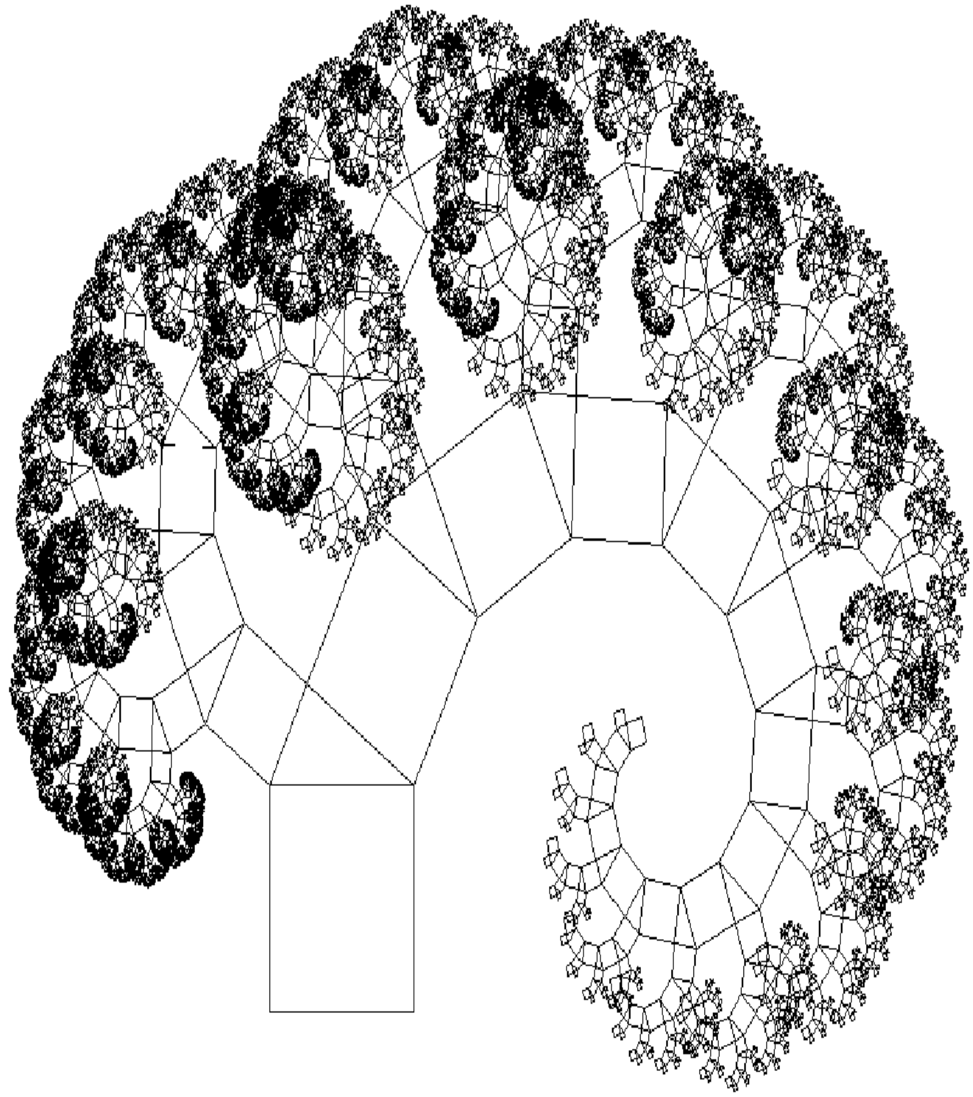
პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე წარმოადგენს პითაგორას ფრაქტალური ხის განზოგადებას. მისი აგების ალგორითმი მოცემულია ნახ. 43-ზე.



ნახ. 43. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმი

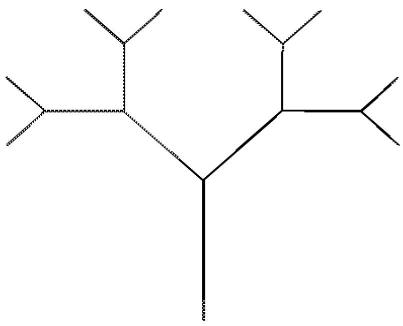
ფრაქტალი წარმოიქმნება თითოეულ ბიჯზე, მარჯვენა მხრიდან კვადრატის დამატებით.

ლოგარითმული სპირალი (ტეხილი) წარმოიქმნება მსგავსების გარდაქმნით, რომელიც წარმოადგენს მობრუნებას α კუთხით და მასშტაბური შემცირებით $\cos\alpha$- ჯერ. ერთდროულად, შეგვიძლია განვიხილოთ მსგავსების გარდაქმნა რომელიც მოქმედებს მარცხენა მხრიდან: მობრუნება $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$-კუთხით და მასშტაბური შემცირება $\sin\alpha$- ჯერ. მაშინ მივიღებთ სპირალურ ფრაქტალურ ხეს ნახ. 44, სადაც $\alpha = \frac{\pi}{6}$, [2].

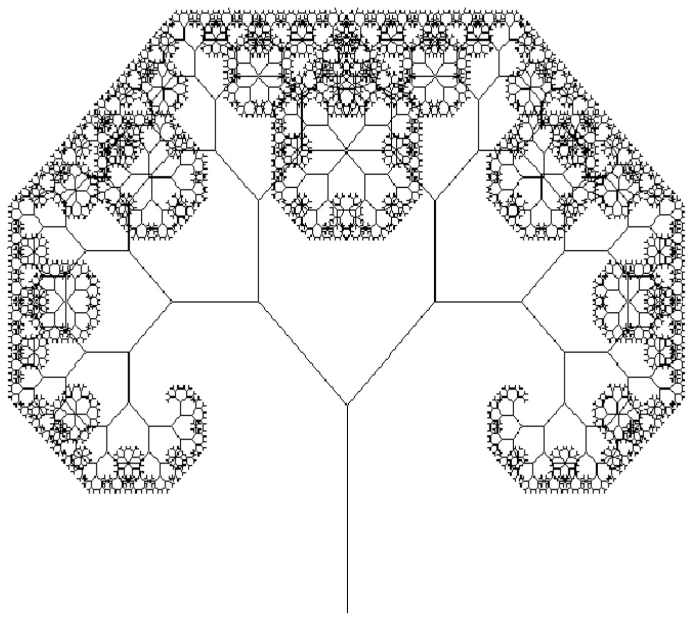


ნახ. 44. სპირალური ფრაქტალური ხე

თუ, გავამარტივებთ პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმს, ამისათვის უკუვაგდებთ კვადრატებს და დავხატავთ მხოლოდ იმ მონაკვეთებს, რომლებიც სამკუთხედების "ცენტრებს" აერთებენ, ხოლო სამკუთხედებს აღარ დავხატავთ, მივიღებთ პითაგორას სპირალურ, გაშიშვლებულ ფრაქტალურ ხეს, რომელიც გამოსახულია ნახ. 45 და ნახ. 46-ზე.

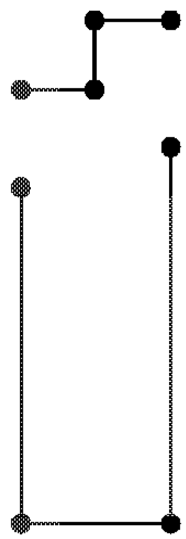


ნახ. 45. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული, ფრაქტალური ხის აგების საწყისი ბიჯები

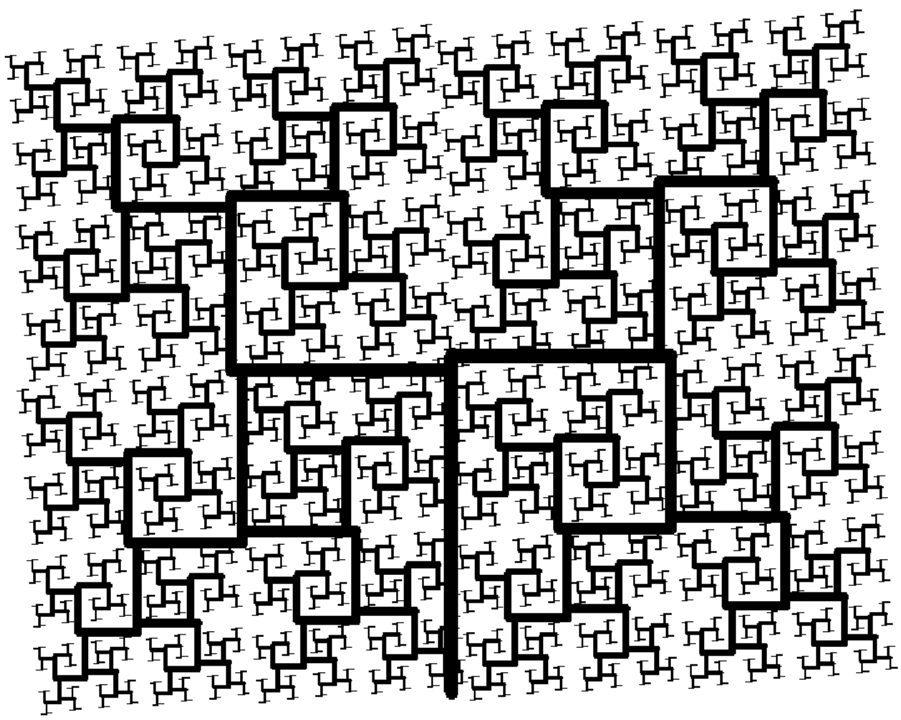


ნახ. 46. პითაგორას სპირალური გაშიშვლებული ფრაქტალური ხე

მანდელბროტის წიგნში [1] განხილულია ფრაქტალური ხის სხვა ვარიანტებიც ნახ. 47, ნახ. 48

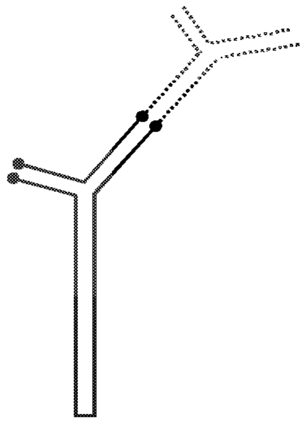


ნახ. 47. მანდელბროტის ფრაქტალური ხის დედა-ფრაქტალი და ზემოთა აგრეგატი(მამა-ფრაქტალი)

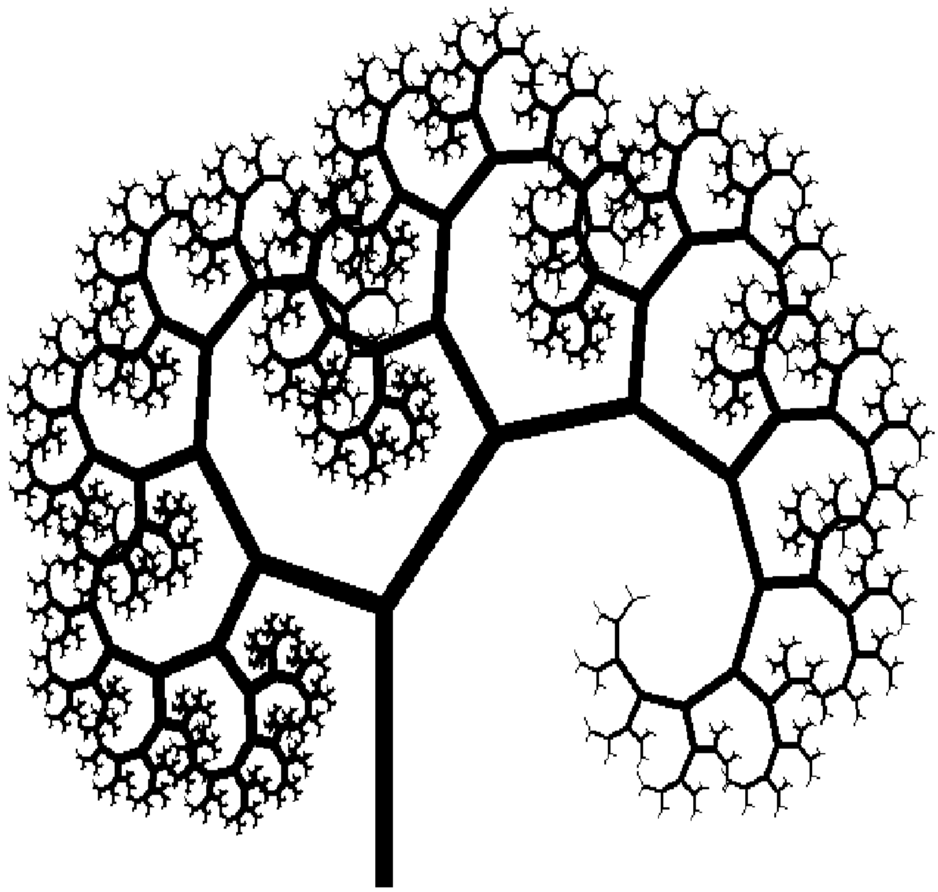


ნახ. 48. მანდელბროტის ფრაქტალური ხე

მანდელბროტმა, ააგო რეალური ფრაქტალური ხის მოდელიც ნახ. 49 და ნახ. 50.



ნახ. 49. რეალური ფრაქტალური ხის მოდელი



ნახ. 50. რეალური ფრაქტალური ხე

განვიხილოთ შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალების სურათები: სურ. 18-28

სურ. 18. დედამიწის ზედაპირის სურათები კოსმოსიდან გვაძლევენ ფრაქტალური ფორმის ლანდშაფტს

სურ. 19. თხევადი ან გაზობრივი ნივთიერების კრისტალიზაციით წარმოქმნილი მინერალის ფრაქტალი

სურ. 20. ქვიშის დიუნის წყლით ნაწილობრივი მორეცხვის შედეგად წარმოქმნილი ფრაქტალი

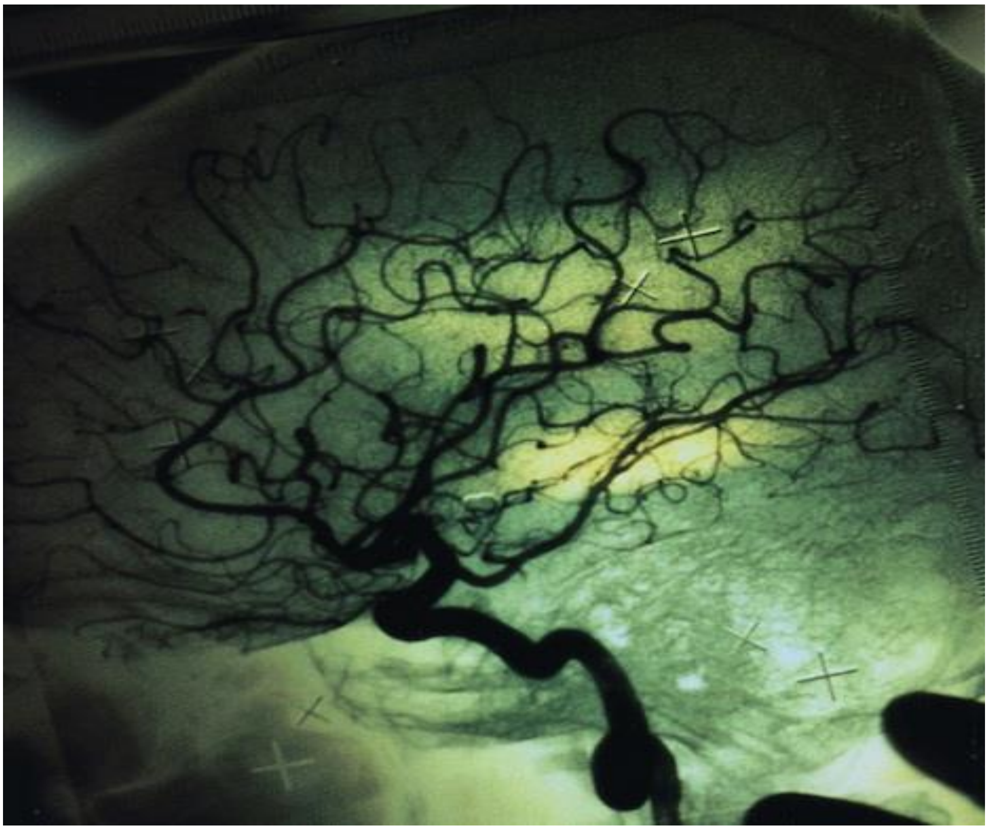
სურ. 21. ხის ტოტები – ბუნებრივი ფრაქტალი

სურ. 22. ხის ტოტები იყოფა ორად, შემდეგ ბიჯზე, თითოეული ტოტი კვლავ იყოფა და ა.შ. გარკვეულ სასრულ რაოდენობამდე (როგორც მის გენეტიკურ პროგრამაშია ჩადებული), ესაა დენდრიტის ტიპის-ფრაქტალი

სურ. 23. ზაობაბი, აგრეთვე, ფრაქტალური კანონით იტოტება, თუმცა, ყველა ხეს თავისი გენეტიკური კოდი (დატოტვის წესი) აქვს

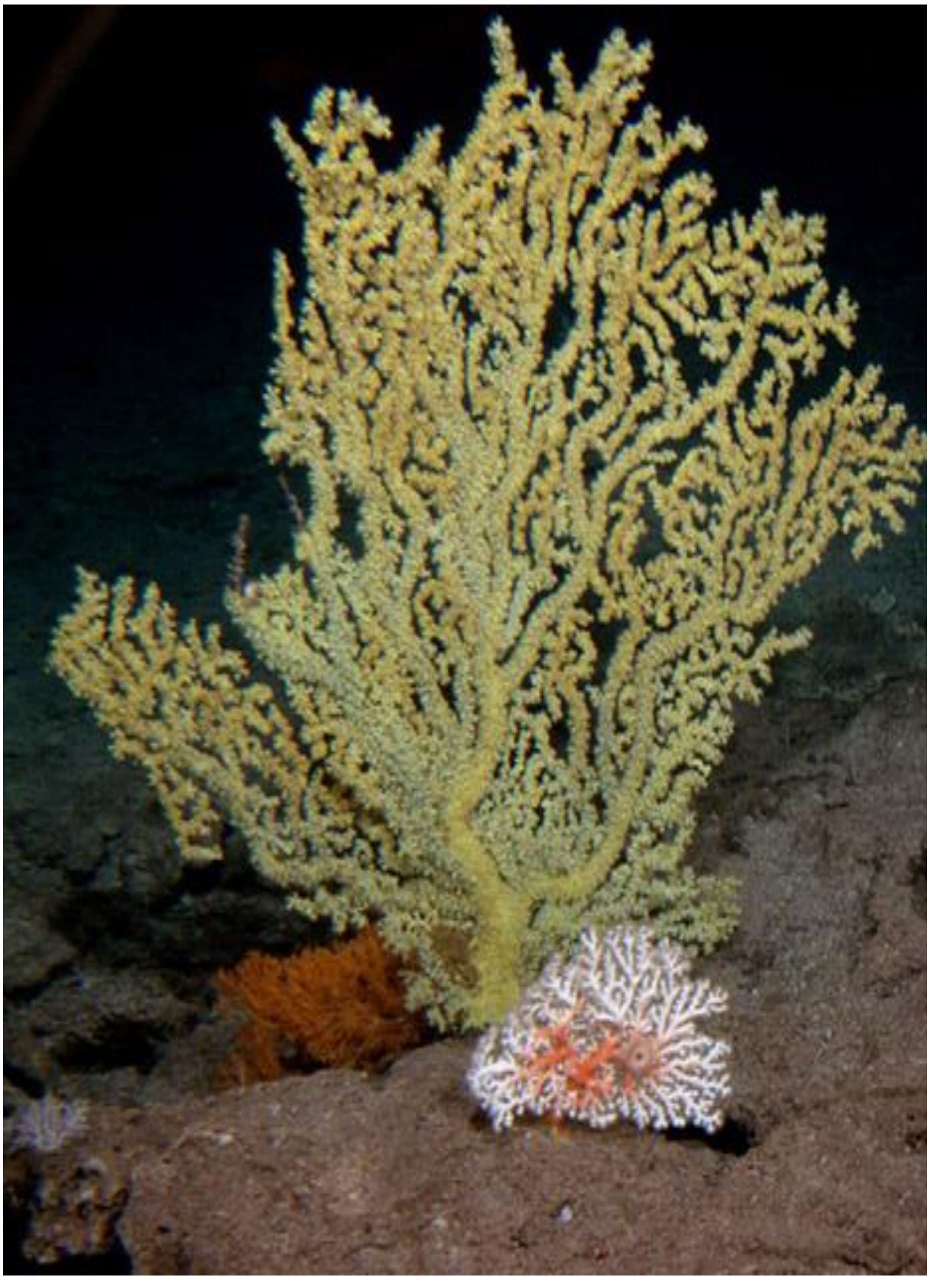
სურ. 24. ამოფრქვეული ვულკანის გაცივებული ლავა ინარჩუნებს დინების ფრაქტალურ ფორმას

სურ. 25. მცენარეთა ფრაქტალური ფორმაა-დენდრიტი



სურ. 26. ადამიანის ტვინის სისხლძარღვთა სისტემაც დენდრიტია

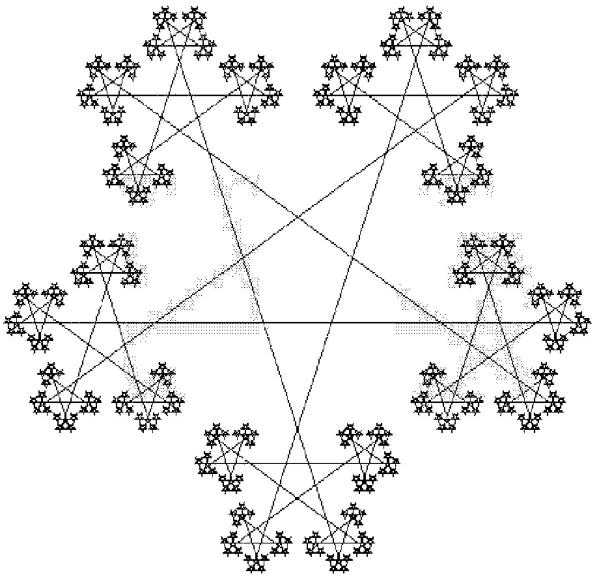
სურ. 27. მდინარეთა დატოტვის ფრაქტალიც დენდრიტია



სურ. 28. მარჯანის ფრაქტალიც დენდრიტია

11. ვარსკვლავები

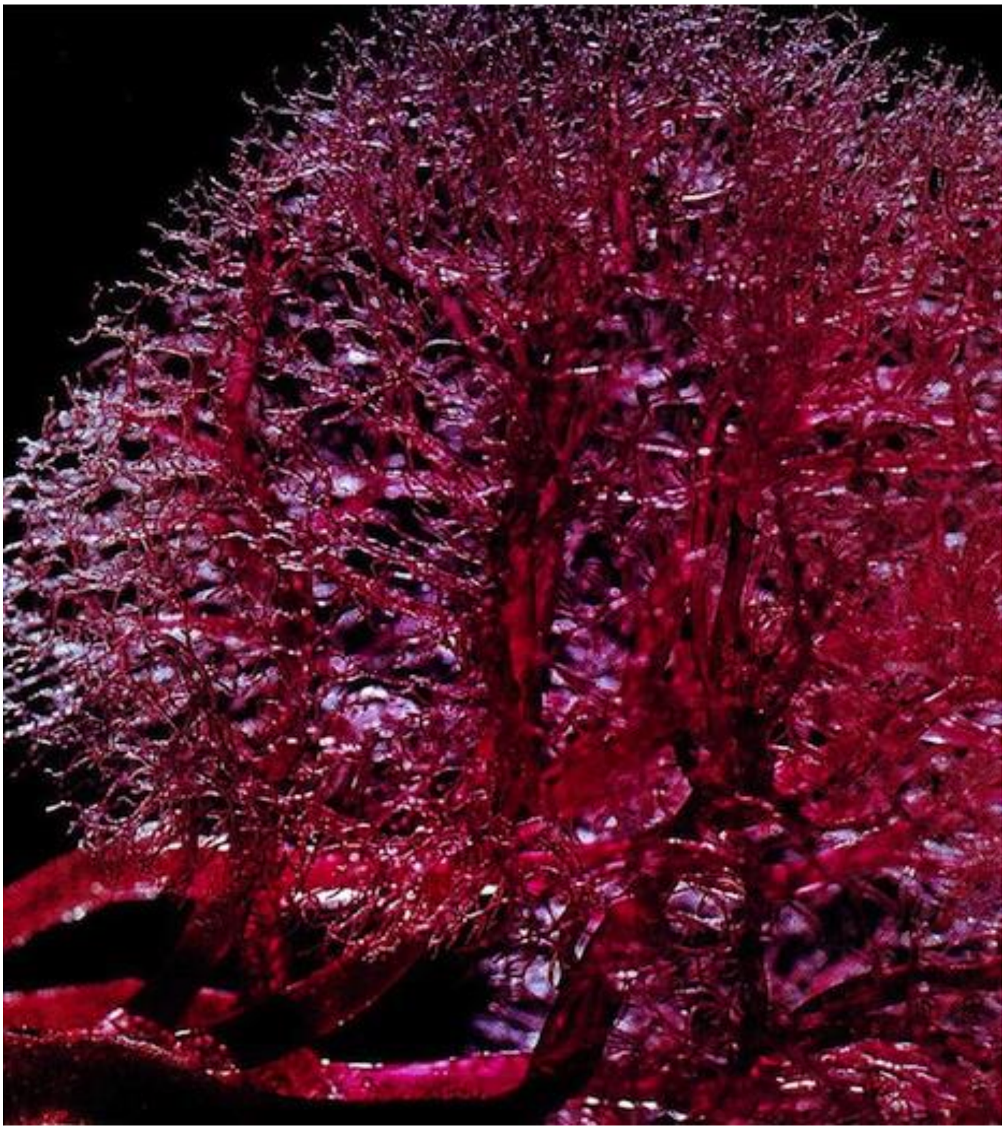
განვიხილოთ ვარსკვლავური ფრაქტალი. ის შედგება ხუთქიმიანი ვარსკვლავისაგან 5 უფრო მცირე გირლიანდით, რომლებიც უფრო მცირე მასშტაბის ვარსკვლავებს წარმოადგენენ და თითოეულის ოთხ წვეროზე უფრო მცირე ზომის ვარსკვლავებიაგანლაგებული. თეორიულად ეს პროცესი უსასრულოდ გრძელდება ნახ. 51.



ნახ. 51. ვარსკვლავური ფრაქტალი

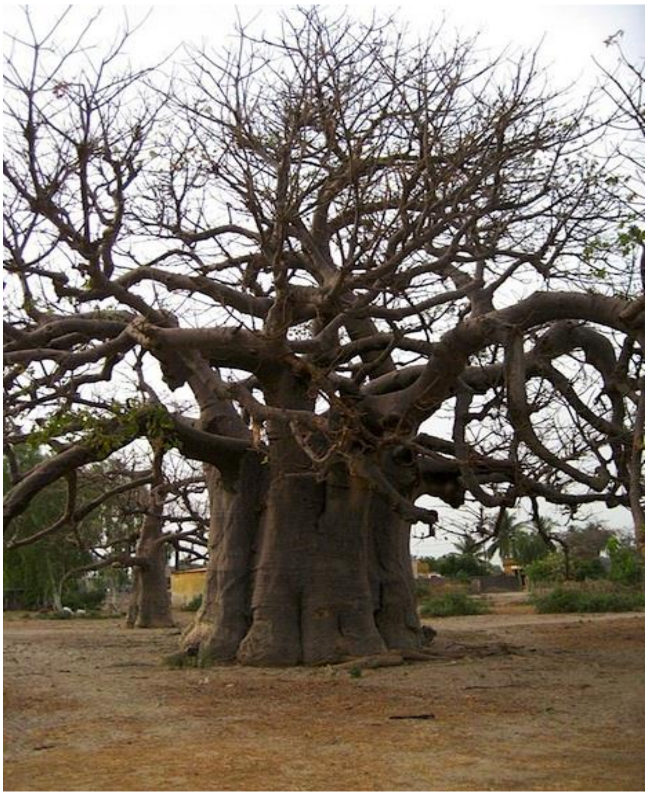
განვიხილოთ ბუნებრივი ვარსკვლავური ტიპის ფრაქტალები: სურ. 29-22

სურ. 29. მცენარის ფესვთა ვარსკვლავური ფრაქტალი



სურ. 30. ფილტვი შეიცავს ერთმანეთში გადაჯაჭვულ სამ ფრაქტალს: სასუნთქი ფრაქტალი, სისხლძარღვთა ვენოზური სისხლის და არტერიული სისხლის ფრაქტალები

სურ. 31. ამაზონის წყლის შროშანი



სურ. 32. ბაობაბის დატოტვის სისტემა მოგვაგონებს სისხლძარღვთა სისტემასაც

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Мандельброт Б.Фрактальная геометрия природы. Пер. с англ., Ижевск, 2002
2. Lauwerier H.A. Fractals – images of chaos. Princetion Univ., press, 1991
3. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. с англ., Москва, 2000
4. Julia G. Memoir sur l'iteration des functions rationnells. J. de Mathematiques pures et appliqees, v. 1, Paris, 1918
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Пер. с англ., Мир, Москва, 1993
6. Мандельброт Б.Фракталы, случай и финансы. Пер. с франц., Ижевск, Москва, 2004
7. Мандельброт Б. Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ., Ижевск, Москва, 2009

8. Richardson L.F. Weather prediction by numerical process. Cambridge University press, 1922
9. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. Институт компьютерных исследований, Ижевск, Москва, 2002
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001
11. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. Учебное пособие, пер. с англ.,Триумф, Москва, 2003
12. Hutchinson J.E. Fractals and Self Similarity. Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5, 1981, pp. 713-747
13. Barnsley M. Fractals Everywhere. Academic Press, Boston, 1993
14. Daubechies I. Ten lectures on wavelets, CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed. 1992
15. Shumaker L., Webb G., editor.Recent Advances in Wavelet Analysis. New York.: Academic Press. 1993
16. Teolis A. Computational Signal Processing with Waveletes. Birkhauser, 1998
17. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Пер. с англ. Е.В. Мищенко. Под ред. А.П.Петухова. Москва, 2001
18. Новиков И.Я., Стечкин С.Б. Основные конструкции всплесков// Фундаментальная и прикладная математика, т.3, вып. 4, 1997
19. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. Москва, 2002
20. Акимов О.Е.Дискретная математика: логика, группы, графы, фракталы. Москва, 2005
21. Мильнор Дж. Голоморфная динамика, пер. с англ., Ижевск,2000
22. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles, bulletin societe, Math.France, v.47, 1919

V თავი. ალბათობათა თეორიისა და გამოყენებითი სტატისტიკის ელემენტები

1. ძირითადი ცნებები

პრაქტიკაში, როგორც წესი, საქმე გვაქვს შემთხვევით სიდიდეებთან და მოვლენებთან. ასეთ სიტუაციაში, გადაწყვეტილების მიღებისას გასათვალისწინებელია, თუ რამდენად მოსალოდნელია ესა თუ ის შემთხვევა. მაგალითად, მთიან რეგიონებში რკინიგზის გაყვანისას, აუცილებელია იმის ცოდნა, თუ, რამდენადაა მოსალოდნელი ზვავი, ღვარცოფი ან მეწყერი. მატარებლების განრიგის დარღვევისას _ რამდენადაა მოსალოდნელი კატასტროფა, ინფლაციის შემთხვევაში – რამდენადაა მოსალოდნელი ფასების ზრდა საკვებ პროდუქტებსა და პირველადი მოხმარების საგნებზე და ა.შ.

სწორედ, შემთხვევითობასთან დაკავშირებული მოვლენების შესასწავლად შეიქმნა მათემატიკური მეცნიერება, რომელსაც ალბათობათა თეორიას უწოდებენ. ალბათობათა თეორიაზეა დამყარებული მეცნიერება – სტატისტიკა, რომელიც წარმოადგენს ფუნდამენტს, ნებისმიერი საინჟინრო ან ეკონომიკური პროცესის კვლევისას.იმისათვის, რომ რიცხვობრივად შეაფასონ, რამდენადაა მოსალოდნელი A შემთხვევითი მოვლენა, განიხილავენ ამ მოვლენის რიცხობრივ მახასიათებელს P(A) - ალბათობის ცნებას.

განსაზღვრება: ისეთ მოვლენას, რომელიც შეიძლება მოხდეს, ან შეიძლება არც მოხდეს, შემთხვევითი მოვლენა ეწოდება.

მაგალითად: დღეს წვიმის მოსვლა; თოვლის მოსვლა, ფეხბურთის მატჩში გამარჯვება, გამოცდაზე 100 ქულის მიღება და ა.შ.

განსაზღვრება: მოცემული ექსპერიმენტისას, შესასწავლი მოვლენის თითოეულ შესაძლო რეალიზაციას ხდომილება ეწოდება.

მაგალითად: ა) **მოვლენა – კამათელის აგდება:**

ხდომილებებია: 1) იაქი (ერთი), 2) დუ (ორი), 3) სე (სამი),
4) ჩარი (ოთხი), 5) ბეში (ხუთი) და 6) შეში (ექვსი).

ბ) **მოვლენა – მონეტის აგდება:**

ხდომილებებია: 1) გერბი, 2) რიცხვიანი მხარე.

განსაზღვრება: A მოვლენის ყველა ურთიერთგამომრიცხავ ხდომილებათა E ერთობლიობას, ელემენტარულ ხდომილებათა

სივრცე ეწოდება. **მაგალითად: ა)** კამათელის აგდებისას E={1;2;3;4;5;6}, ბ) მონეტის აგდებისას E={ გერბი; რიცხვიანი მხარე }.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ A ქვესიმრავლეს A⊆E **მოვლენა** ეწოდება.

განსაზღვრება: მოვლენას, რომელიც აუცილებლად მოხდება, **უეჭველი** (ჭეშმარიტი) მოვლენა ეწოდება. მისი ალბათობა P(A)=1.

განსაზღვრება: მოვლენას, რომელიც არასოდეს არ მოხდება **შეუძლებელი** (მცდარი) მოვლენა ეწოდება. მისი ალბათობა P(A)=0.

მაგალითად : A – დღეს მოჰყვება ღამე–უეჭველი მოვლენაა (ჩვენი განედისათვის).

A – აღმართს მოჰყვება დაღმართი _ უეჭველი მოვლენაა.

A – შიშველი თუ შეხვედი წყალში, მშრალად ამოსვლა შეუძლებელი მოვლენაა.

ამ განსაზღვრებებიდან ჩანს, რომ საზოგადოდ

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (1)$$

ალბათობის განსაზღვრისას, შინაარსიდან გამომდინარე, განიხილავენ **კლასიკურ, გეომეტრიულ და სტატისტიკურ** მიდგომებს.

ალბათობის კლასიკური განსაზღვრისას გამოიყენებენ ფორმულას:

$$p(A) = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

სადაც, m– A მოვლენისათვის ხელშემწყობ ხდომილებათა რაოდენობაა; n – A მოვლენისათვის ელემენტარული ხდომილებათა სრული E სივრცის ელემენტების საერთო რაოდენობაა.

ამ შემთხვევაში იგულისხმება, რომ ელემენტარული ხდომილებები თანაბრად მოსალოდნელი არიან და ისინი ადგენენ სრულ E სიმრავლეს ანუ A მოვლენის ყველა შესაძლო ხდომილება ეკუთვნის E სიმრავლეს.

ალბათობის **გეომეტრიული განსაზღვრისას,** თუ, მოცემული გვაქვს რაღაც S ფართობის მქონე სიმრავლე და მისი გარკვეული D ფართობის მქონე ქვესიმრავლე $D \subseteq S$, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ S - იდან შემთხვევით არჩეული წერტილი ეკუთვნის D-ს, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P(A) = \frac{D}{S}. \qquad (3)$$

ალბათობის **სტატისტიკური განმარტება** ეფუძნება ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებას. **მაგალითად,** თუ, ერთიდაიგივე

ექსპერიმენტს ვატარებთ n-ჯერ და მოცემული მოვლენა რეალიზდება m-ჯერ, მაშინ მისი სტატისტიკური ალბათობა გამოითვლება ფორმულით:

$$p(A)=\frac{m}{n}\,. \tag{4}$$

მაგალითები: 1) მონეტის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოვარდება გერბი.

ამოხსნა: m=1, n=2 e.i. $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$

2) კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაჯდება ბეში (5).

ამოხსნა: m=1, n=6 e.i. $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{6}$

3) კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაჯდება ლუწი რიცხვი.

ამოხსნა: ლუწებია: 2,4,6 $\Rightarrow$ m=3, მაგრამ n=6 ე.ი. $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

4) ორი კამათელის აგდებისას იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება შვიდი.

ამოხსნა: 7=1+6 7=6+1

7=2+5 7=5+2

7=3+4 7=4+3

e.i. m=6, n=6×6=36

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

5) ორი კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება რვა, ხოლო სხვაობა ოთხი.

ამოხსნა: თავდაპირველად, ვნახოთ თუ როდის იქნება კამათელის რიცხვების ჯამი 8:

8=6+2 8=2+6

8=5+3 8=3+5

8=4+4

აქედან სხვაობა 4 იქნება ორ შემთხვევაში 6-2=4, e.i. m=2, n=36 $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

6) ორი კამათელის აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე დამჯდარი კამათელის ჯამი იქნება ხუთი, ხოლო ნამრავლი ოთხი.

ამოხსნა: ჯამი თუ ხუთია:5=4+1 5=1+4

5=3+2 5=2+3,

მაშინ, ნამრავლი ოთხია ორ შემთხვევაში 1×4=4×1, e.i. m=2, n=36 $\Rightarrow$ $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

7) მონეტის ორჯერ აგდებისას ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ერთხელ მაინც დაჯდება “გერბი”.

ამოხსნა: გერბი აღვნიშნოთ ერთი ასოთი– **g**, მეორე მხარე აღვნიშნოთ ასოთი – **r**, მაშინ შესაძლო რეალიზაციებია: gg, gr, rr, rg $\Rightarrow$ n=4. ერთხელ მაინც “g” გვხვდება სამჯერ: gg, gr, rg $\Rightarrow$ m=3. მაშასადამე, $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$.

8) $A=\{10-$ ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების სიმრავლე$\}$;

$B=\{4-$ ზე მეტი კენტი რიცხვების სიმრავლე$\}$. გამოთვალეთ ამ ორი სიმრავლის თანაკვეთის ელემენტების რაოდენობა $n(A\cap B)$.

ამოხსნა:

$A=\{2;3;5;7\}$; $B=\{5;7;9;11;\ldots\}\Longrightarrow n(A\cap B)=n\{5;7\}=2$.

9) აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული ციფრი არ აღემატება 5-ს.

ამოხსნა:

კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=6. ამ რიცხვებიდან 5-ს არ აღემატება 1;2;3;4;5; მაშასადამე m=5. ე.ი. $P(A)=\frac{5}{6}$.

10) მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 3 და 6. დიდ წრეში შემთხვევით ვარდება წერტილი. გამოთვალეთ, იმის ალბათობა რომ ეს წერტილი ჩავარდება პატარა წრეში.

ამოხსნა: გეომეტრიული ალბათობის (3) განსაზღვრის თანახმად, მივიღებთ, რომ

$P(A)=\frac{D}{S}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{3^2}{6^2}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

11) აგორებენ 1 კამათელს. განვიხილოთ ხდომილებები:

$A=\{$მოვიდა მარტივი რიცხვი$\}$;

$B=\{$მოვიდა $5-$ ზე ნაკლები რიცხვი$\}$;

$C=\{$მოვიდა კენტი რიცხვი$\}$;

$D=\{$მოვიდა ლუწი რიცხვი$\}$;

გამოთვალეთ $n[(D\cap A)\cup(B-C)]$.

ამოხსნა: $\boldsymbol{A=\{2;3;5\}}$**;** **B=**$\boldsymbol{\{1;2;3;4\}}$**;** $\boldsymbol{C=\{1;3;5\}}$**;** $\boldsymbol{D=\{2;4;6\}}$**;**

$D\cap A=\{2\}$; $B-C=\{2;4\}$; მაშინ $(D\cap A)\cup(B-C)=\{2;4\}$. ე.ი. $n[(D\cap A)\cup(B-C)]=2$.

12) ყუთში 5 თეთრი, 5 შავი და 2 ყვითელი ფერის ერთნაირი ზომის ბურთულაა. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთულას. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ბურთულა არაა ყვითელი ფერის.

ამოხსნა: ყუთში სულ ყოფილა 5+5+2=12 ბურთულა ანუ $n = 12$. ამოღებული ბურთულებიდან არაყვითელთა რაოდენობაა 5+5=10 ანუ m=10. მაშასადამე,

$P(A) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

13) 36 ქაღალდიანი ბანქოს დასტიდან შემთხვევით ირჩევენ 1 ცალს. განვიხილოთ ხდომილებები:

$A = \{$ამოვიდა ნახატი$\}$;

$B = \{$ამოვიდა ჯვარი$\}$;

$C = \{$ამოვიდა წითელი$\}$. გამოთვალეთ $n[(A - C) \cup (B \cap C)]$.

ამოხსნა:

$A - C = \{$ამოვიდა არაწითელი(ყვავი და ჯვარი)ნახატი $= 8\}$;

$B \cap C = \emptyset$.

$n[(A - C) \cup (B \cap C)] = 8$.

14) 36 ქაღალდიანი ბანქოს დასტიდან შემთხვევით ირჩევენ 1 ცალს. განვიხილოთ ხდომილებები:

$A = \{$ამოვიდა გული$\}$;

$B = \{$ამოვიდა ყვავი$\}$;

$C = \{$ამოვიდა ნახატი$\}$. გამოთვალეთ $n[(A \cup C) - (B \cap C)]$.

ამოხსნა: $A \cup C = \{$ამოვიდა ნახატი ან გული$\}$ ანუ გვაქვს 16+5=21 ქაღალდი; $B \cap C = \{$ამოვიდა ყვავი ნახატი$\}$ ანუ გვაქვს 4 ქაღალდი. მაშინ,

$n[(A \cup C) - (B \cap C)] = 21 - 4 = 17$.

15) აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული რიცხვი არ აღემატება 4-ს.

ამოხსნა: კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=6. ამ რიცხვებიდან 4-ს არ აღემატება 1;2;3;4; მაშასადამე m=4. ე.ი. $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

16) აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული რიცხვი არის მარტივი.

ამოხსნა: კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=6. ამ რიცხვებიდან მარტივია: 2;3;5; ანუ m=3. ე.ი. $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

17) აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული რიცხვი არის ლუწი.

ამოხსნა: კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=6. ამ რიცხვებიდან ლუწია: 2;4;6; ანუ m=3. ე.ი. $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

18) აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული რიცხვი არის 4-ის ჯერადი.

ამოხსნა: კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=6. ამ რიცხვებიდან 4-ის ჯერადია: 4; ანუ m=1. ე.ი. $P(A)=\frac{1}{6}$.

19) აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელებზე მოსული რიცხვების ჯამი არ აღემატება 8-ს.

ამოხსნა: თითოეულ კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=36. ამოსული რიცხვების ჯამი არ აღემატება 8-ს შემდეგ შემთხვევებში: 1+1; 1+2; 2+1; 1+3; 3+1; 1+4; 4+1; 1+5; 5+1; 1+6; 6+1; 2+2; 2+3; 3+2; 2+4; 4+2; 2+5; 5+2; 2+6; 6+2; 3+3; 3+4 ; 4+3; 3+5; 5+3; 4+4; ანუ m=26. ე.ი. $P(A)=\frac{26}{36}=\frac{13}{18}$.

20) აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელებზე მოსული რიცხვების ჯამი აღემატება 9-ს.

ამოხსნა: თითოეულ კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=36. ამოსული რიცხვების ჯამი აღემატება 9-ს შემდეგ შემთხვევებში: 4+6; 6+4; 5+5; 5+6; 6+5; 6+6; ანუ m=6. ე.ი. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

21) აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელებზე მოსული რიცხვების სხვაობის მოდული 3-ის ტოლია.

ამოხსნა: თითოეულ კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=36. ამოსული ციფრების სხვაობის მოდული 3-ის ტოლია შემდეგ შემთხვევებში: 1-4; 4-1; 2-5; 5-2; 3-6; 6-3; ანუ m=6.

ე.ი. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

22) აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელებზე მოსული რიცხვების ჯამი 6-ის ტოლია.

ამოხსნა: თითოეულ კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=36. ამოსული ციფრების ჯამი 6-ის ტოლია შემდეგ შემთხვევებში: 1+5; 5+1; 2+4; 4+2; 3+3; ანუ m=5.

ე.ი. $P(A)=\frac{5}{36}$.

23) აგორებენ ორ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელებზე მოსული რიცხვების ნამრავლი 12-ის ტოლია

ამოხსნა: თითოეულ კამათელს აწერია ციფრები: 1;2;3;4;5;6; მაშასადამე n=36. ამოსული ციფრების ნამრავლი 12-ის ტოლია შემდეგ შემთხვევებში: 2×6; 6×2; 3×4; 4×3; ანუ m=4.

ე.ი. $P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

2. კომბინატორიკის ელემენტები და მათი გამოყენება ალბათობის გამოსათვლელად

როგორც ვხედავთ, ალბათობის კლასიკური წესით გამოსათვლელად საჭიროა სხვადასხვა შემთხვევითი რეალი-ზაციების ყველა შესაძლო რაოდენობების დათვლა. მსგავსი ამოცანების ამოსახსნელად შემუშავებულია მათემატიკური თეორია, რომელსაც კომბინატორიკას უწოდებენ.

განვიხილოთ E სიმრავლე. მისი სხვადასხვა ელემენტებისაგან შევადგინოთ ჯგუფები.

განსაზღვრება: თუ n- ელემენტიანი სიმრავლიდან ვარჩევთ m $(m<n)$ ელემენტიან ჯგუფებს (ქვესიმრავლეებს) ისე, რომ **სხვადასხვა ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც,** მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **ჯუფთება** n- ელემენტიანი სიმრავლიდან m-ელემენტიან ქვესიმრავლეებად. ჯუფთებათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი C_n^m და გამოითვლება ფორმულით:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{5}$$

0!=1 (ნულის ფაქტორიალი);

1!=1 (ერთის ფაქტორიალი);

2!=1·2 (ორის ფაქტორიალი);

3!=1·2·3 (სამის ფაქტორიალი);

4!=1·2·3·4 (ოთხის ფაქტორიალი);

. . .

n!= 1·2·3·. . . ·n.

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ოცი გამცილებლიდან ორი გამცილებელის ამორჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა

ამოხსნა: $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\cdot 18!} = \frac{19\cdot 20}{2!} = 190.$

2) ვიპოვოთ ოცი სტუდენტიდან ლიდერის არჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა

ამოხსნა:

$C_{20}^1 = \frac{20!}{1!(20-1)!} = \frac{20!}{19!} = 20.$

განსაზღვრება: თუ *n*- ელემენტიანი სიმრავლიდან ვირჩევთ *m* ელემენტიან *(m<n)* ჯგუფებს (ქვესიმრავლეებს) ისე, რომ **სხვადასხვა ჯგუფები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან ერთი ელემენტით მაინც ან მათი რიგით,** მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს **წყობა** *n*-ელემენტიანი სიმრავლიდან *m*-ელემენტიან ქვესი¬მრავლეებად. წყობათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი A_n^m.

წყობათა რიცხვის გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულა:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{6}$$

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ ოცი სტუდენტიდან სტუდენტური კავშირის თავმჯდომარის და მისი მოადგილის არჩევის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა.

ამოხსნა: ამჯერად მნიშვნელობა აქვს რიგსაც, ამიტომ გვექნება წყობა $A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$.

2) ათ ბარათზე ჩაწერილია სხვადასხვა ციფრები: 0;1;2;3;...;9. იღებენ 4 ბარათს და ადგენენ ოთხნიშნა რიცხვს ამ ბარათებზე ჩაწერილი ციფრებიდან. ვიპოვოთ რამდენი სხვადასხვა ოთხნიშნა რიცხვი შეიძლება შედგეს ასეთი წესით?

ამოხსნა: ციფრების რაოდენობაა 10, ამათგან დგება ოთხნიშნა რიცხვი. ყველა შესაძლო წყობათა (რიგსაც აქვს მნიშვნელობა) რაოდენობა იქნება A_{10}^4, მაგრამ ამ რიცხვებიდან უნდა ამოვარდეს ის ვარიანტები, სადაც პირველ ადგილზე აღმოჩნდა 0, ასეთი ვარიანტების რიცხვი იქნება A_9^3. ე.ი. საბოლოოდ გვექნება

$$A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{(10-4)!} - \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = \frac{9! \cdot 10 - 9!}{6!} = \frac{9! \cdot (10-1)}{6!} =$$

$$= \frac{9! \cdot 9}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 4536.$$

განსაზღვრება: ისეთ წყობას, როცა *n*- ელემენტიანი სიმრავლიდან ირჩევენ *n* - ელემენტიან ქვესიმრავლეებს, ისე, რომ **თითოეული მათგანი ერთმანეთისაგან განსხვავდება ელემენტთა დალაგების რიგით**, **გადანაცვლება** ეწოდება.

გადანაცვლებათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი $p_n = A_n^n$, (4) -დან მივიღებთ, რომ

$$p_n = n! \tag{7}$$

მაგალითად: თუ, ლექციების ცხრილში მოცემულია დღეში 4 საგანი. მაშინ ორშაბათის ცხრილის შედგენის შესაძლო ვარიანტების რაოდენობის გამოსათვლელად, საქმე გვაქვს გადანაცვლებათა რაოდენობის დათვლასთან: $p_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$.

განვიხილოთ ალბათობათა თეორიაში კომბინატორიკის გამოყენების მაგალითები.

მაგალითები:

1) ყუთში 15 დეტალია, რომელთა შორის 10 შეღებილია. ამწყობი შემთხვევით იღებს 3 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული დეტალები იქნება შეღებილი.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რაოდენობაა $n=C_{15}{}^3$, ხელშემწყობ ხდომილებათა რიცხვი კი $m=C_{10}{}^3$. ე.ი.

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}{}^3}{C_{15}{}^3}=\frac{\frac{10!}{3!\cdot7!}}{\frac{15!}{3!\cdot12!}}=\frac{10!\cdot12!}{7!\cdot15!}=\frac{7!\cdot8\cdot9\cdot10\cdot12!}{7!\cdot12!\cdot13\cdot14\cdot15}=\frac{24}{91}.$$

2) ყუთში 100 დეტალია, იქიდან 10 წუნდებულია. შემთხვევით იღებენ 4 დეტალს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა იმისა, რომ ამოღებული დეტალებიდან ა) არცერთი არაა წუნდებული, ბ) ყველა წუნდებულია.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რიცხვია:
$$n=C_{100}{}^4=\frac{100!}{4!\cdot96!}=\frac{97\cdot98\cdot99\cdot100}{2\cdot3\cdot4};$$

ხელშემწყობ ხდომილებათა რიცხვია:

a) $m=C_{90}^4=\frac{90!\cdot}{4!\cdot86!}=\frac{87\cdot88\cdot89\cdot90}{2\cdot3\cdot4}$;

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{90}{}^4}{C_{100}{}^4}=\frac{87\cdot88\cdot89\cdot90}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{2\cdot3\cdot4}{97\cdot98\cdot99\cdot100}=\frac{87\cdot2\cdot89}{49\cdot5\cdot97!}\approx0.65.$$

b) $m=C_{10}^4=\frac{10!\cdot}{4!\cdot6!}=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4}$;

$$p(A)=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{2\cdot3\cdot4}{97\cdot98\cdot99\cdot100}\approx0.00005.$$

3) ტელეფონის ნომრის აკრეფისას აბონენტს დაავიწყდა თავისი სატრფოს ნომრის ბოლო სამი ციფრი და ახსოვდა მხოლოდ ის, რომ ეს ციფრები იყო სხვადასხვა, ამიტომ მან შემთხვევით აკრიფა ბოლო სამი ციფრი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ აკრეფილი იყო საჭირო ციფრები.

ამოხსნა: საჭირო ნომერი არის ერთადერთი m=1, ციფრები არის სულ 10 ცალი, (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) უნდა აირჩეს 3 ციფრი ისე, რომ ამ ციფრთა რიგსაც აქვს მნიშვნელობა. ე.ი. გვაქვს წყობა:

$$n = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720, \text{ ამიტომ, } \quad p(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}.$$

4) ჯგუფში 12 სტუდენტია, რომელთაგან 8 ფრიადოსანია. შემთხვევით ირჩევენ 9 სტუდენტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეულ სტუდენტებს შორის 5 ფრიადოსანია.

ამოხსნა: ყველა შესაძლო ხდომილებათა რიცხვი იქნება ჯუფთება 12-დან 9-ად $n = C_{12}^{\ 9}$, 8 ფრიადოსანი სტუდენტიდან 5 ფრიადოსნის არჩევათა რაოდენობაა $C_8^{\ 5}$, დანარჩენი 4 უნდა აირჩეს არაფრიადოსნებიდან, ე.ი. 12-8=4- დან რაოდენობა იქნება $C_4^{\ 4}$, მაგრამ აქ ხდება შეწყვილება 5 ფრიადოსანი და 4 არაფრიადოსანი, ამიტომ გვექნება ნამრავლი

$$m = C_8^5 \cdot C_4^4;$$

მაშასადამე, $p(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \dfrac{14}{55}$.

3. სტატისტიკური ალბათობის გამოთვლა

ხშირად, საჭირო ხდება, ამა თუ იმ პირობებში შესასწავლი მოვლენის, მოხდენის შესაძლებლობის დადგენა ექსპერიმენტების საფუძველზე.

ასეთ შემთხვევებში, n და m წინასწარ უცნობია. ისინი მიიღებიან არა თეორიულ - კომბინატორიკული მოსაზრებებიდან, არამედ ექსპერიმენტის შედეგად. ამიტომ, მიღებულ ალბათობას – მოვლენის ფარდობით სიხშირეს (სტატისტიკურ ალბათობას) უწოდებენ და გამოითვლიან ფორმულით (3):

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

სადაც, n – ერთიდაიგივე ექსპერიმენტის ჩატარებათა რაოდენობაა, ხოლო $m - A$ _ მოვლენის ექსპერიმენტებში მოხდენათა რაოდენობა.

მაგალითები:

1) ტექნიკური კონტროლის განყოფილებამ ამორჩეული 100 ელმავლიდან აღმოაჩინა 5 წუნდებული. ვიპოვოთ წუნდებული ელმავლების ფარდობითი სიხშირე.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში n=100, m=5 ამიტომ

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{100} = 0.05.$$

2) 20 გასროლიდან, 18 მოხვდა მიზანს. ვიპოვოთ მიზანში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე.

ამოხსნა: $W(A)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}=0.9$.

3) ვაგონების გამოცდისას დადგინდა, რომ ვარგისი ვაგონების ფარდობითი სიხშირეა 0.9. ვიპოვოთ ვარგისი ვაგონების რიცხვი, თუ შესასწავლი იყო 200 ვაგონი.

ამოხსნა: $W(A)=0.9$ n=200, m=?

$W(A)=\frac{m}{n}\Rightarrow m=W(A)\cdot n=0.9\cdot 200=180$ ვაგონი.

4. ალბათობათა შეკრებისა და გამრავლების თეორემები

განსაზღვრება: ორი A და B მოვლენის ჯამი ეწოდება ისეთ მოვლენას, როდესაც ადგილი აქვს ან A-ს ან B-ს, ანუ ამ მოვლენათაგან ერთ-ერთს მაინც.

მაგალითი: A – ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 8-ის დაჯდომა; B _ ორი კამათელის აგდებისას ნამრავლში 12-ის დაჯდომა; $A+B$ ან $A\cup B$ _ ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 8-ის ან ნამრავლში 12-ის დაჯდომა.

განსაზღვრება: ორი A და B მოვლენის ნამრავლი ეწოდება ისეთ მოვლენას, რომელის დროსაც ადგილი აქვს ორი A და B მოვლენის ერთდროულად მოხდენას $A\cdot B$ ან $A\cap B$.

მაგალითი: A _ ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 5-ის დაჯდომა; B _ ორი კამათელის აგდებისას ნამრავლში 6-ის დაჯდომა; A·B _ ორი კამათელის აგდებისას ჯდება $3\wedge 2$ ან $2\wedge 3$.

განსაზღვრება: ორ A და B მოვლენას ეწოდება არათავსებადი, თუ შეუძლებელია მათი ერთდროული მოხდენა.

მაგალითი: A _ ორი კამათელის აგდებისას ლუწი ჯამის დაჯდომა; B _ ორი კამათელის აგდებისას ჯამში 7-ის დაჯდომა; A და B არათავსებადი მოვლენებია.

განსაზღვრება: ორ A და B მოვლენას ეწოდებათ დამოუკიდებელი მოვლენები, თუ, ერთის მოხდენა არ ახდენს გავლენას მეორე მოვლენაზე.

თეორემა არათავსებადი მოვლენების ჯამის ალბათობის შესახებ: ორი არათავსებადი A და B მოვლენის ჯამის ალბათობა ამ მოვლენათა ალბათობების ჯამის ტოლია:

$$p(A+B)=p(A)+p(B). \tag{8}$$

შენიშვნა: თეორემა ძალაშია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად არათავსებადი მოვლენების ჯამისთვისაც, ე.ი.

$$p(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)\ ; \tag{9}$$

ანუ

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\,. \tag{10}$$

თეორემა ორი დამოუკიდებელი მოვლენის ნამრავლის ალბათობის შესახებ: ორი დამოუკიდებელი მოვლენის ნამრავლის ალბათობა ამ მოვლენათა ალბათობების ნამრავლის ტოლია:

$$p(A \cdot B) = p(A) \cdot p(B)\,. \tag{11}$$

შენიშვნა: თეორემა ძალაშია ნებისმიერი სასრული რაოდენობის წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელი მოვლენებისათვის.

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \cdots \cdot p(A_n)\ ; \tag{12}$$

ანუ

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i)\,. \tag{13}$$

განსაზღვრება: A მოვლენის საპირისპირო მოვლენა ეწოდება ისეთ $\overline{A}$ მოვლენას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A მოვლენას არა აქვს ადგილი.

საპირისპირო მოვლენათა ჯამი წარმოადგენს უეჭველ მოვლენას, ამიტომ მისი ალბათობა ერთის ტოლია:

$$p(A + \overline{A}) = 1\,. \tag{14}$$

შეკრების ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1, \tag{15}$$

ანუ

$$p(A) = 1 - p(\overline{A})\,. \tag{16}$$

განვიხილოთ, **შესაბამისი მაგალითები:**

1) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.8, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.7. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება ორი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;

$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;

$C = \{$სამიზნე დაზიანდება ორი ტყვიით$\}$;

$$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56.$$

2) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების

ალბათობაა 0.9, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.7. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება ერთი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;

$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;

$C = \{$სამიზნე დაზიანდება ერთი ტყვიით$\}$;

$P(C) = P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$

$= P(A) \cdot \left(1 - P(B)\right) + \left(1 - P(A)\right) \cdot P(B) = 0.9 \cdot (1 - 0.7) + (1 - 0.9) \cdot 0.7 =$

$= 0.9 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 = 0.27 + 0.07 = 0.34.$

3) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.9, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.7. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე არ დაზიანდება.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;

$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;

$C = \{$სამიზნე არ დაზიანდება $\}$;

$$P(C) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \left(1 - P(A)\right) \cdot \left(1 - P(B)\right) =$$

$= (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.7) = 0.1 \cdot 0.3 = 0.03.$

4) სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.6, მეორე მსროლელისათვის - 0.7, ხოლო მესამე მსროლელისათვის - 0.9. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება სამი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;

$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;

$C = \{$სამიზნე დაზიანდება მესამე მსროლელით$\}$;

$D = \{$სამიზნე დაზიანდემა სამი ტყვიით$\}$.

$P(D) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 = 0.378.$

5) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.9, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება ორი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;

$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;

$C = \{$სამიზნე დაზიანდება ორი ტყვიით$\}$;

$P(C) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0.9 \cdot 0.6 = 0.54.$

6) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.6, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.8. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება ერთი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{\text{სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით}\}$;

$B = \{\text{სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით}\}$;

$C = \{\text{სამიზნე დაზიანდება ერთი ტყვიით}\}$;

$P(C) = P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$

$= P(A) \cdot \big(1 - P(B)\big) + \big(1 - P(A)\big) \cdot P(B) = 0.6 \cdot (1 - 0.8) + (1 - 0.6) \cdot 0.8 =$

$= 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 = 0.12 + 0.32 = 0.44.$

7) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.6, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.7. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე არ დაზიანდება.

ამოხსნა: $A = \{\text{სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით}\}$;

$B = \{\text{სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით}\}$;

$C = \{\text{სამიზნე არ დაზიანდება }\}$;

$$P(C) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) =$$

$= (1 - 0.6) \cdot (1 - 0.7) = 0.4 \cdot 0.3 = 0.12.$

8) სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.8, მეორე მსროლელისათვის - 0.7, ხოლო მესამე მსროლელისათვის - 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდება სამი ტყვიით.

ამოხსნა: $A = \{\text{სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით}\}$;

$B = \{\text{სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით}\}$;

$C = \{\text{სამიზნე დაზიანდება მესამე მსროლელით}\}$;

$D = \{\text{სამიზნე დაზიანდემა სამი ტყვიით}\}$.

$P(D) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.336.$

9) ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.8, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე არ დაზიანდება.

ამოხსნა: $A = \{\text{სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით}\}$;

$B = \{\text{სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით}\}$;

$C = \{\text{სამიზნე არ დაზიანდება }\}$;

$$P(C) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) =$$
$$= (1 - 0.8) \cdot (1 - 0.6) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08.$$

10) სამი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.9, მეორე მსროლელისათვის - 0.7, ხოლო მესამე მსროლელისათვის - 0.6. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე არ დაზიანდება.

ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდება პირველი მსროლელით$\}$;
$B = \{$სამიზნე დაზიანდება მეორე მსროლელით$\}$;
$C = \{$სამიზნე დაზიანდება მესამე მსროლელით$\}$;
$D = \{$სამიზნე არ დაზიანდემა$\}$.

$$P(D) = P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) =$$
$$= \big(1 - P(A)\big) \cdot \big(1 - P(B)\big) \cdot \big(1 - P(C)\big) =$$
$$= (1 - 0.9) \cdot (1 - 0.7) \cdot (1 - 0.6) = 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.012.$$

5. პირობითი ალბათობა

პირობითი ალბათობის ცნება დაკავშირებულია იმ ფაქტთან, რომ ზოგჯერ ერთი ხდომილების მოხდენა, ცვლის საწყის პირობებს მეორე ხდომილებისათვის და შესაბამისად, მისი მოხდენის ალბათობაც იცვლება.

მაგალითად, თუ კალათაში გვაქვს 5 თეთრი და 3 შავი ბურთულა და ვიღებთ მიმდევრობით თითო ბურთულას. მაშინ, საწყის ეტაპზე თეთრი ბურთულის ამოღების ალბათობაა: $P(A) = \frac{5}{8}$; შავი ბურთულის ამოღების ალბათობაა $P(B) = \frac{3}{8}$. თუ, პირველად ამოვიღებთ 1 თეთრ ბურთულას, მაშინ მეორედ ამოღებისას, საწყისი პირობა უკვე შეგვეცვალა ანუ თეთრი უკვე დარჩა 4 და შავი 3. ასე, რომ მეორედ შემთხვევით ამოღებისას, გვაქვს უკვე პირობითი ალბათობები $P_A(A) = \frac{4}{7}$; $P_A(B) = \frac{3}{7}$.

განვიხილოთ, შესაბამისი **ამოცანები:**

1) ბიბლიოთეკაში ალბათობის თეორიის 6 სახელმძღვანელოა, რომელთაგან 3 ყდითაა. ბიბლიოთეკარი მიმდევრობით იღებს 2 ნებისმიერ სახელმძღვანელოს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორივე სახელმძღვანელო ყდიანია.

ამოხსნა:

$A_1 -$ პირველი წიგნი ყდითაა,

$A_2 -$ მეორე წიგნი ყდითაა.

$p(A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

ალბათობა იმისა, რომ მეორე წიგნიც ყდითაა იმის შემდეგ, რაც ერთი ყდიანი წიგნი უკვე დააკლდა თაროს, $p_{A_1}(A_2)=\frac{2}{5}$ (პირობითი ალბათობა).

მაშასადამე, $p(A_1\cdot A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

2) სექტემბერში თბილისში მოღრუბლული დღეების რიცხვი არის 6. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 1 და 2 სექტემბერს იქნება ღრუბლიანი ამინდი.

ამოხსნა:

ალბათობა იმისა, რომ 1 სექტემბერს ამინდი ღრუბლიანია $p(A_1)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$.

პირობითი ალბათობა იმისა, რომ 2 სექტემბერსაც მოიღრუბლება $p_{A_1}(A_2)=\frac{5}{29}$, e.i. $p(A_1\cdot A_2)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{29}=\frac{1}{29}$.

3) ჯგუფში 7 გოგონა და 3 ბიჭია. შემთხვევით იძახებენ 3 სტუდენტს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყველა გამოძახებული გოგონა იქნება.

ამოხსნა:

A_1 – პირველად გამოიძახეს გოგონა;

A_2 – მეორედ გამოიძახეს გოგონა;

A_3 – მესამედ გამოიძახეს გოგონა.

$p(A_1)=\frac{7}{10}$,

$p_{A_1}(A_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$,

$p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{5}{8}$,

$p(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8}=\frac{7}{24}$.

4) სტუდენტმა იცის 25-დან 20 საკითხი. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი ბილეთის სამივე საკითხს სწორად უპასუხებს.

ამოხსნა:

A_1 – სტუდენტი უპასუხებს I საკითხს;

A_2 – უპასუხებს II საკითხს;

A_3 – უპასუხებს III საკითხს.

$p(A_1)=\frac{20}{25}$,

$$p_{A_1}(A_2)=\frac{19}{24},$$

$$p_{A_1A_2}(A_3)=\frac{18}{23},$$

$$p(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}.$$

5) 1891 წლის აღწერით ინგლისში გამოვლინდა, რომ: შავთვალება მამები და შვილები შეადგენენ $(A\cdot B)$ 5%- ს, შავთვალება მამები და ცისფერთვალება შვილები $(A\cdot\overline{B})$ _ 7.9%, ცისფერთვალება მამები და შავთვალება ბიჭები $(\overline{A}\cdot B)$ _ 8.9%, ცისფერთვალება მამე¬ბი და ცისფერთვალება შვილები $(\overline{A}\cdot\overline{B})$ _ 78.2%. ვიპოვოთ კავ¬ში¬რი მამისა და შვილის თვალთა ფერს შორის.

ამოხსნა:

$p(A\cdot B)=0.05$; $p(A\cdot\overline{B})=0.079$; $p(\overline{A}\cdot B)=0.089$; $p(\overline{A}\cdot\overline{B})=0.782$;

პირობითი ალბათობა იმისა, რომ შვილი შავთვალებაა, თუ მამაა შავთვალებაა

$$p_A(B)=\frac{p(A\cdot B)}{p(A)}=\frac{p(A\cdot B)}{p(A\cdot B)+p(A\cdot\overline{B})}=\frac{0.05}{0.05+0.079}=0.39\approx 0.4;$$

ალბათობა იმისა, რომ შვილი ცისფერთვალებაა, თუ მამა შავთვალებაა

$$p_A(\overline{B})=1-p_A(B)=100.4=0.6;$$

ალბათობა იმისა, რომ შვილი შავთვალაა, თუ მამა ცისფერთვალებაა

$$p_{\overline{A}}(B)=\frac{p(\overline{A}\cdot B)}{p(\overline{A})}=\frac{p(\overline{A}\cdot B)}{p(\overline{A}\cdot B)+p(\overline{A}\cdot\overline{B})}=0.102.$$

ალბათობა, რომ შვილი ცისფერთვალებაა მამასავით: $p_{\overline{A}}(\overline{B})=1-p_{\overline{A}}(B)=1-0.102=0.898$.

თეორემა ურთიერთდამოკიდებული მოვლენების ნამრავლის ალბათობის შესახებ: ორი ურთიერთდამოკიდებული მოვლენების ნამრავლის ალბათობა უდრის ერთ-ერთი მათგანის ალბათობის ნამრავლს მეორე მოვლენის პირობით ალბათობაზე, თუ პირველი მოვლენა უკვე მოხდა:

$$\begin{aligned}p(A\cdot B)&=p(A)\cdot p_A(B)\\ p(A\cdot B)&=p(B)\cdot p_B(A)\end{aligned};\qquad(17)$$

$p_A(B)$ _ B მოვლენის მოხდენის ალბათობაა, თუ A უკვე მოხდა, ხოლო $p_B(A)$ _ A მოვლენის მოხდენის ალბათობა, თუ B უკვე მოხდა.

თეორემა ორი თავსებადი მოვლენის ჯამის ალბათობაზე: ორი თავსებადი მოვლენის ჯამის ალბათობა უდრის ამ მოვლენების ალბათობათა ჯამს, შემცირებულს მათი ნამრავლის ალბათობით.

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B)\,. \tag{18}$$

სამი მოვლენის ჯამისათვის გვექნება ფორმულა:

$$p(A+B+C)=p(A)+p(B)+p(C)-p(A\cdot B)-p(B\cdot C)-p(A\cdot C)\,. \tag{19}$$

6. სრული ალბათობის ფორმულა

თუ, $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ხდომილებათა დამოუკიდებელი სრული სისტემაა, მაშინ A მოვლენის ალბათობა, რომელიც ხდება იმ შემთხვევაში, თუ ადგილი აქვს მხოლოდ ერთს ამ ხდომილებათა (ჰიპოთეზათა) $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ სისტემიდან, გამოითვლება სრული ალბათობის ფორმულით:

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\cdots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)\,. \tag{20}$$

მაგალითები:

1) ყუთში, რომელშიც იყო 2 ბურთულა, ჩადეს ერთი თეთრი ბურთულა. ამის შემდეგ შემთხვევით ამოიღეს ერთი ბურთულა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთულა იქნება თეთრი, თუ საწყისი ორი ბურთულისათვის ყველა ფერი და-საშვები და უცნობია.

ამოხსნა:

A – ამოღებული ბურთულა თეთრია.

შესაძლებელია შემდეგი ჰიპოთეზები უცნობი ბურთულების შესახებ:

B1 – თეთრი არ იყო მათ შორის;

B2 – ერთი თეთრი იყო;

B3 – ორივე იყო თეთრი;

რადგან B_1, B_2, B_3 – ამოწურავენ ყველა შესაძლებლობას ე.ი. სრული სისტემაა, და მათი ალბათობებიც ტოლია $p(B_1)=p(B_2)=p(B_3)=\frac{1}{3}$.

შესაბამისად, პირობოთი ალბათობები იქნება: $p_{B_1}(A)=\frac{1}{3}$, $p_{B_2}(A)=\frac{2}{3}$, $p_{B_3}(A)=1$. მაშინ A–მოვლენის ალბათობა (20)-ის მიხედვით იქნება:

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)=\frac{2}{3}\,.$$

2) საწყობში მიიტანეს ერთი და იგივე დასახელების 300 უცხოური და 700 ადგილობრივი წარმოების დეტალი. ალბათობა იმისა, რომ უცხოური წარმოების დეტალი სტანდარტულია 0.9, ხოლო

ადგილობრივი წარმოებისა - 0.6. საწყობიდან შემთხვევით შეარჩიეს ერთი დეტალი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი სტანდარტულია.

ამოხსნა: $A = \{\text{დეტალი სტანდარტულია}\}$;

$B_1 = \{\text{არჩეული დეტალი უცხოური წარმოებისაა}\}$;

$B_2 = \{\text{არჩეული დეტალი ადგილობრივი წარმოებისაა}\}$;

$P_{B_1}(A) = 0.9$; $P_{B_2}(A) = 0.6$;

$P(B_1) = \frac{300}{1000} = 0.3$; $P(B_2) = \frac{700}{1000} = 0.7$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = 0.3 \cdot 0.9 + 0.7 \cdot 0.6 =$$
$$= 0.27 + 0.42 = 0.69.$$

3) საწყობში მიიტანეს ერთი და იგივე დასახელების 200 უცხოური და 300 ადგილობრივი წარმოების დეტალი. ალბათობა იმისა, რომ უცხოური წარმოების დეტალი სტანდარტულია არის 0.9, ხოლო ადგილობრივი წარმოებისა - 0.8. საწყობიდან შემთხვევით შეარჩიეს ერთი დეტალი. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ ეს დეტალი სტანდარტულია.

ამოხსნა: $A = \{\text{დეტალი სტანდარტულია}\}$;

$B_1 = \{\text{არჩეული დეტალი უცხოური წარმოებისაა}\}$;

$B_2 = \{\text{არჩეული დეტალი ადგილობრივი წარმოებისაა}\}$;

$P_{B_1}(A) = 0.9$; $P_{B_2}(A) = 0.8$;

$P(B_1) = \frac{200}{500} = 0.4$; $P(B_2) = \frac{300}{500} = 0.6$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.8 =$$
$$= 0.36 + 0.48 = 0.84.$$

4) ხარატის მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობაა 0.9. შეგირდის მიერ - 0.7. ხარატმა და შეგირდმა დაამზადეს შესაბამისად 200 და 100 დეტალი. ორივეს მიერ დამზადებული დეტალებიდან შემთხვევით შეარჩიეს ერთი დეტალი. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ეს დეტალი სტანდარტულია.

ამოხსნა: $A = \{\text{დეტალი სტანდარტულია}\}$;

$B_1 = \{\text{არჩეული დეტალი ხარატის გაკეთებულია}\}$;

$B_2 = \{\text{არჩეული დეტალი შეგირდის გაკეთებულია}\}$;

$P_{B_1}(A) = 0.9$; $P_{B_2}(A) = 0.7$;

$P(B_1) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$; $P(B_2) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10} =$$

$= \frac{3}{5} + \frac{7}{30} = \frac{18+7}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$

5) ხარატის მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობაა 0.8. შეგირდის მიერ - 0.6. ხარატმა და შეგირდმა დაამზადეს შესაბამისად 200 და 300 დეტალი. ორივეს მიერ დამზადებული დეტალებიდან შემთხვევით შეარჩიეს ერთი დეტალი. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ეს დეტალი სტანდარტულია.

ამოხსნა: $A = \{$დეტალი სტანდარტულია$\}$;

$B_1 = \{$არჩეული დეტალი ხარატის გაკეთებულია$\}$;

$B_2 = \{$არჩეული დეტალი შეგირდის გაკეთებულია$\}$;

$P_{B_1}(A) = 0.8; P_{B_2}(A) = 0.6;$

$P(B_1) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$; $P(B_2) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10} =$$

$= \frac{8}{25} + \frac{9}{25} = \frac{17}{25} = 0.68.$

6) გვაქვს ორი იდენტური ყუთი. პირველ ყუთში არის 10 თეთრი და 5 შავი ერთი ზომის ბურთულა, ხოლო მეორეში კი - 7 თეთრი და 3 შავი ბურთულა. შემთხვევით შეარჩიეს ყუთი და ამოიღეს ერთი ბურთულა. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ეს ბურთულა თეთრია.

ამოხსნა: $A = \{$ბურთულა თეთრია$\}$;

$B_1 = \{$არჩეული ბურთულა პირველი ყუთიდანაა$\}$;

$B_2 = \{$არჩეული ბურთულა მეორე ყუთიდანაა$\}$;

$P_{B_1}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; $P_{B_2}(A) = \frac{7}{10}$; $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} =$$

$= \frac{1}{3} + \frac{7}{20} = \frac{20+21}{60} = \frac{41}{60}.$

7) გვაქვს ორი იდენტური ყუთი. პირველ ყუთში არის 15 თეთრი და 5 შავი ერთი ზომის ბურთულა, ხოლო მეორეში კი - 10 თეთრი და 10 შავი ბურთულა. შემთხვევით შეარჩიეს ყუთი და ამოიღეს ერთი ბურთულა. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ეს ბურთულა შავია.

ამოხსნა: $A = \{$ბურთულა შავია$\}$;

$B_1 = \{$არჩეული ბურთულ პირველი ყუთიდანაა$\}$;

$B_2 = \{$არჩეული ბურთულ მეორე ყუთიდანაა$\}$;

$P_{B_1}(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}; P_{B_2}(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}; P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$
8) კლასში მოსწავლეებიდან 10 ვაჟი და 15 გოგონაა. ცნობილია, რომ ვაჟი მოსწავლე გამოცდას აბარებს 0.8, ხოლო გოგონა კი - 0.6 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე ჩააბარებს ამ გამოცდას.
ამოხსნა: $A = \{$მოსწავლე ჩააბარებს გამოცდას$\}$;
$B_1 = \{$არჩეული მოსწავლე ვაჟია$\}$;
$B_2 = \{$არჩეული მოსწავლე გოგონაა$\}$;
$P_{B_1}(A) = 0.8;\ \ P_{B_2}(A) = 0.6;\ \ P(B_1) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0.4;\ P(B_2) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6.$
სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ
$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.6 =$$
$= 0.32 + 0.36 = 0.68.$
9) კლასში მოსწავლეებიდან 5 ვაჟი და 25 გოგონაა. ცნობილია, რომ ვაჟი მოსწავლე გამოცდას აბარებს 0.6, ხოლო გოგონა კი - 0.8 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ შემთხვევით შერჩეული მოსწავლე ჩააბარებს ამ გამოცდას.
ამოხსნა: $A = \{$მოსწავლე ჩააბარებს გამოცდას$\}$;
$B_1 = \{$არჩეული მოსწავლე ვაჟია$\}$;
$B_2 = \{$არჩეული მოსწავლე გოგონაა$\}$;
$P_{B_1}(A) = 0.6;\ \ P_{B_2}(A) = 0.8;\ \ P(B_1) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};\ P(B_2) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$ სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ
$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} =$$
$= \frac{1}{10} + \frac{2}{3} = \frac{3+20}{30} = \frac{23}{30}.$
10) 6 კურსანტიდან თითოეულის მიერ სამიზნის ერთი გასროლით დაზიანების ალბათობაა 0.7, ხოლო 4 ოფიცრიდან თითოეული ერთი გასროლით სამიზნეს აზიანებს 0.8 ალბათობით. ამ ორი ჯგუფიდან ერთმა პიროვნებამ მოახდინა ერთი გასროლა. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდა.
ამოხსნა: $A = \{$სამიზნე დაზიანდა$\}$;
$B_1 = \{$სამიზნე დააზიანა კურსანტმა$\}$;
$B_2 = \{$სამიზნე დააზიანა ოფიცერმა$\}$;
$P_{B_1}(A) = 0.7;\ P_{B_2}(A) = 0.8;\ P(B_1) = \frac{6}{10} = 0.6;\ P(B_2) = \frac{4}{10} = 0.4.$ სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ
$$\boldsymbol{P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)} = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.8 =$$
$= 0.42 + 0.32 = 0.74.$

11) 8 კურსანტიდან თითოეულის მიერ სამიზნის ერთი გასროლით დაზიანების ალბათობაა 0.8, ხოლო 12 ოფიცრიდან თითოეული ერთი გასროლით სამიზნეს აზიანებს 0.9 ალბათობით. ამ ორი ჯგუფიდან ერთმა პიროვნებამ მოახდინა ერთი გასროლა. გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ სამიზნე დაზიანდა.

ამოხსნა: $A = \{\text{სამიზნე დაზიანდა}\}$;

$B_1 = \{\text{სამიზნე დააზიანა კურსანტმა}\}$;

$B_2 = \{\text{სამიზნე დააზიანა ოფიცერმა}\}$;

$P_{B_1}(A) = 0.8$; $P_{B_2}(A) = 0.9$; $P(B_1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$; $P(B_2) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$.

სრული ალბათობის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.6 \cdot 0.9 =$$
$$= 0.32 + 0.54 = 0.86.$$

7. განმეორებითი ექსპერიმენტები. ბერნულის ფორმულა

ერთიდაიმავე ექსპერიმენტების n- ჯერ ჩატარებისას როდესაც საჭიროა დადგინდეს მოცემულ დამოუკიდებელ ექსპერიმენტებს შორის A მოვლენის გამეორების რიცხვი, უნდა ვისარგებლოთ ბერნულის თეორემით.

ბერნულის თეორემა: ალბათობა იმისა, რომ n დამოუკიდებელი ექსპერიმენტის ჩატარებისას, A მოვლენა, რომლის ალბათობაც თითოეულ ექსპერიმენტში არის p, მოხდება k- ჯერ უდრის

$$p_n(k) = C_n^k p^k \cdot q^{n-k}, \qquad (21)$$

სადაც

$$q = 1 - p. \qquad (22)$$

მაგალითები:

1) ორი ერთნაირი სიძლიერის მოთამაშე თამაშობს ჭადრაკს. რა უფრო ალბათურია: ის, რომ მოიგებს ერთ-ერთი 4-დან 2-ჯერ, თუ ის, რომ მოიგებს 6-დან 3-ჯერ? (ყაიმები არ ითვლება).

ამოხსნა:

რადგან მოჭადრაკეები თანაბარი სიძლიერის არიან $p = \frac{1}{2}$, ე.ი. $q = 1 - p = \frac{1}{2}$ და მაშასადამე,

$$p_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n;$$

ალბათობა იმისა, რომ 4-დან 2-ს მოიგებს ერთ-ერთი, არის:

$$p_4(2) = C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}\cdot\frac{1}{16} = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{1}{16} = \frac{3\cdot 4}{2\cdot 16} = \frac{6}{16};$$

ალბათობა იმისა, რომ 6-დან იქნება 3 მოგება $p_6(3) = C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{6\cdot 64} = \frac{5}{16};$

ე.ი. $p_6(3) < p_4(2)$. ანუ ოთხი პარტიიდან ორის მოგება უფრო ალბათურია, ვიდრე ექვსიდან სამის მოგება.

2) სამშობიარო პალატაში 5 ბავშვია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ამ ბავშვებს შორის:

ა) ორი ბიჭია;

თუ ბიჭის დაბადების ალბათობა $p = 0.51$.

ამოხსნა:

a) $p_5(2) = C_5^2\cdot p^5\cdot q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot 0.51^5\cdot(1-0.51)^3 = \frac{4\cdot 5}{2}\cdot 0.51^5\cdot 0.49^3 \cong 0.31;$

8. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები

განსაზღვრება: შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული, თუU მისი შესაძლო მნიშვნელობების სიმრავლე სასრულია ან თვლადი.

მაგალითად: X={2; 3; 7; 5; 1}.

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწი¬ლების კანონი ეწოდება ცხრილს, რომელიც შეიცავს შესაძლო მნიშვნელობებს შესაბამის ალბათობებთან ერთად.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიცავს ორ სტრიქონს. პირველ სტრიქონში მოცემულია მისი ყველა შესაძლო მნიშვნელობები, ხოლო მეორეში – შესაბამისი ალბათობები.

მაგალითად:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

(23)

p_1 არის ალბათობა იმისა, რომ დისკრეტული X შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს x_1 მნიშვნელობას;

p_2 ალბათობა იმისაა, რომ Xსიდიდე მიიღებს x_2 მნიშვნელობას და ა.შ.

რადგან განაწილების კანონში მონაწილეობს *X*- ის ყველა შესაძლო მნიშვნელობა, ისინი ადგენენ ხდომილებათა სრულ სისტემას, რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 . \tag{24}$$

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი შეიძ¬ლება მოცემული იქნას როგორც ანალიზურად,

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i) . \tag{25}$$

ასევე, გრაფიკულადაც, ამისათვის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში აგებენ წერტილებს:

$$M_1(x_1; p_1),\ M_2(x_2; p_2), \ldots, M_n(x_n; p_n). \tag{26}$$

შემდეგ ამ წერტილებს აერთებენ მონაკვეთებით. მიღებულ ფიგურას განაწილების მრავალკუთხედს უწოდებენ.

განსაზღვრება: განაწილების კანონს ბინომიალური ეწოდება, თუ, განიხილება n დამოუკიდებელ ექსპერიმენტებს შორის X მოვლენის მოხდენის k რაოდენობათა რიცხვის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე $p_n(k)$, რომლის შესაბამისი ალბათობების გამოთვლა წარმოებს ბერნულის ფორმულით. ე.ი. განაწილების კანონს აქვს სახე:

X	*0*	*1*	*2*	*3*	…	*n*
P	$p_n(0)$	$p_n(1)$	$p_n(2)$	$p_n(3)$	…	$p_n(n)$

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} . \tag{27}$$

თუ, ექსპერიმენტების n -რიცხვი დიდია (n >200), ხოლო მოვლენის მოხდენის ალბათობა p- მეტად მცირეა (p<<1), მაშინ ალბათობების გამოსაანგარიშებლად იყენებენ მიახლოებით ფორმულას:

$$p_n(k) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = n \cdot p ; \tag{28}$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია პუასონის კანონით.

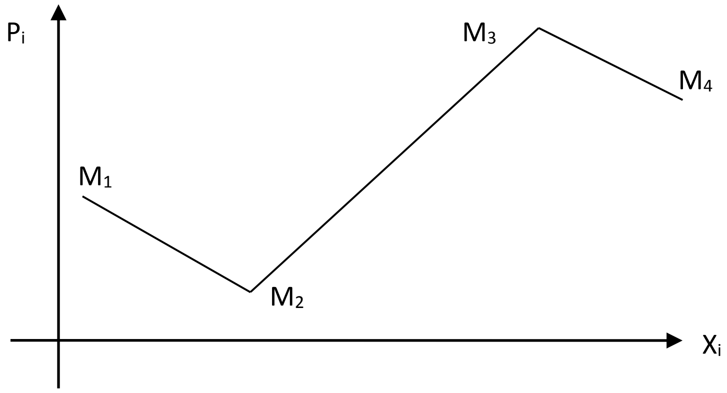
მაგალითები:

1) დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე მოცემულია განაწილების კანონით:

X	*1*	*3*	*6*	*8*
P	*0.2*	*0.1*	*0.4*	*0.3*

ავაგოთ განაწილების მრავალკუთხედი;

ამოხსნა:
$M_1(1;0.2)$, $M_2(3;0.1)$, $M_3(6;0.4)$, $M_4(8;0.3)$,



2) დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე მოცემულია განაწი¬ლების კანონით:

a)

X	2	4	5	6
P	0.2	0.1	0.4	0.3

b)

X	10	15	20
P	0.1	0.7	0.2

ააგეთ განაწილების მრავალკუთხედი.

3) ვაგონი შეიცავს სამ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად მომუშავე ელემენტს. თითოეული ელემენტის წყობიდან გამოსვლის ალბათობა უდრის 0,1. შევადგინოთ წყობიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობის განაწილების კანონი.

ამოხსნა: რადგან თითოეული ელემენტის წყობიდან გამოსვლის ალბათობები ერთმანეთის ტოლია, ჩვენ გვაქვს ბინომიალური განაწილება. წყობიდან გამოსულ ელემენტთა რაოდენობებია: 0 1 2 3. დავთვალოთ შესაბამისი ალბათობები:

$$p_3(0) = C_3^0 p^0 q^{3-0} = \frac{3!}{0!3!} \cdot 1 \cdot (1-0.1)^3 = 0.9^3 = 0.729;$$

$$p_3(1) = C_3^1 p^1 q^{3-1} = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.243;$$

$$p_3(2) = C_3^2 p^2 q^{3-2} = \frac{3!}{2!1!} \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^1 = 3 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9 = 0.027;$$

$$p_3(3) = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^1 = 1 \cdot 0.1^3 \cdot 1 = 0.001.$$

ე.ი. განაწილების კანონს ექნება სახე:

X	*0*	*1*	*2*	*3*
P	*0.729*	*0.243*	*0.027*	*0.001*

შემოწმება: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$.

4) შევადგინოთ ბინომიალური განაწილების კანონი X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის – გერბის ამოვარდნის რაოდენობა მონეტის ორჯერ აგდებისას.

ამოხსნა: მონეტის ორჯერ აგდებისას გერბის ამოვარდნა შეიძლება მოხდეს: 0, 1 ან 2-ჯერ. რაც წარმოადგენს X-ის შესაძლო მნიშვნელობებს. შესაბამისი ალბათობები დაითვლება ბერნულის ფორმულით, სადაც $p = \frac{1}{2}$.

$$p_2(0) = C_2^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$p_2(1) = C_2^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$p_2(2) = C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

X	*0*	*1*	*2*
P	*1/4*	*1/2*	*1/4*

5) სახელმძღვანელო გამოცემულია ტირაჟით 100 000 ეგზემპლარი. ალბათობა იმისა, რომ სახელმძღვანელო ცუდადაა აკინძული არის 0,0001. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ტირაჟი შეიცავდეს ზუსტად 5 წუნდებულ სახელმძღვანელოს.

ამოხსნა: n=100 000 p=0.0001, k=5 რადგან n დიდი რიცხვია, ხოლო p მცირეა, ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ პუასონის განაწილება:

$$p_n(k) \cong \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!},$$

ვიპოვოთ $\lambda = n \cdot p = 100000 \cdot 0.0001 = 10$

$$p_{100000}(5) \cong \frac{10^5 \cdot e^{-10}}{5!} \approx \frac{10^5 \cdot 0.000045}{120} = 0.0375.$$

6) ქარხანამ ბაზარზე გააგზავნა 500 ნაკეთობა. ტრანსპორტირებისას ნაკეთობის დაზიანების ალბათობა არის 0,002. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანდა ზუსტად 3 ნაკეთობა.

ამოხსნა:

n=500 დიდი რიცხვია, p=0.002 _ მცირე. განსახილველი მოვ¬ლენები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, ამიტომ უნდა განვიხილოთ პუასონის განაწილება.

$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0.002 = 1$;

$$p_{500}(3) \cong \frac{\lambda^3 \cdot e^{-\lambda}}{3!} = \frac{e^{-1}}{6} = \frac{0.36788}{6} = 0.0613.$$

განვიხილოთ, შესაბამისი სტანდარტული ამოცანები:

1) ერთი გასროლის შედეგად სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.5. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ოთხი გასროლიდან სამიზნე დაზიანდება ორჯერ.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $p = 0.5$; $k = 2$; $n = 4$; ბერნულის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0.375.$$

2) ერთი გასროლის შედეგად სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.9 გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ოთხი გასროლიდან სამიზნე დაზიანდება სამჯერ.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $p = 0.9$; $k = 3$; $n = 4$; ბერნულის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_4^3 \left(\frac{9}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{1} \cdot \frac{729}{10000} =$$

$= 729 \cdot 0.0004$ =0.2916.

3) სიმეტრიულ ლითონის მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ გერბი მოვა სამჯერ.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $p = 0.5$; $k = 3$; $n = 4$; ბერნულის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

4) სიმეტრიულ ლითონის მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ საფასური მოვა ორჯერ.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $p = 0.5$; $k = 2$; $n = 4$; ბერნულის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3\cdot4}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{8} = 0.375.$

5) ერთ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.8. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ 3 ცდაში A ხდომილება მოხდება ერთჯერ.

ამოხსნა: ამ შემთხვევაში $p = 0.8$; $k = 1$; $n = 3$; ბერნულის ფორმულიდან გამომდინარე, მივიღებთ რომ

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^1 \left(\frac{8}{10}\right)^1 \left(\frac{2}{10}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{25} = \frac{12}{125} = 0.096.$

9. ლაპლასის ლოკალური და ინტეგრალური თეორემები

ლოკალური თეორემა: იმის ალბათობა, რომ n -ჯერ ექსპერიმენტის გამეორებისას, მოცემული მოვლენა, რომლის ალბათობა ყოველი ცდისას არის p რეალიზდება k- ჯერ, მიახლოებით, გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{29}$$

სადაც $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$; $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა: იმის ალბათობა, რომ n -ჯერ ექსპერიმენტის გამეორებისას, მოცემული მოვლენა, რომლის ალბათობა ყოველი ცდისას არის p რეალიზდება არანაკლებ ვიდრე k_1-ჯერ და არაუმეტეს, ვიდრე k_2-ჯერ, მიახლოებით გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \tag{30}$$

სადაც $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$; $x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$; $x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$; $\Phi(-x) = -\Phi(x)$; $\Phi(x > 5) = 0.5$.

განვიხილოთ, შესაბამისი **სტანდარტული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები:**

1) ოსტატი სტანდარტულ დეტალს ამზადებს 0.8 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დამზადებულ 100 დეტალში სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ ვიდრე 85-ის და არაუმეტეს 90-ის. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. $\begin{pmatrix} \Phi(1.25) = 0.3943;\ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(2.5) = 0.4938;\ \Phi(3) = 0.4986 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 85$; $k_2 = 90$; $n = 100$; $p = 0.8$; $q = 1 - p = 0.2$. მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} = \frac{90-100\cdot0.8}{\sqrt{100\cdot0.8\cdot0.2}} = \frac{10}{4} = 2.5$; $x' = \frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{85-100\cdot0.8}{\sqrt{100\cdot0.8\cdot0.2}} = \frac{5}{4} = 1.25$;

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2.5) - \Phi(1.25) =$$
$= 0.4938 - 0.3943 = 0.0995.$

2) ოსტატი სტანდარტულ დეტალს ამზადებს 0.9 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დამზადებულ 100 დეტალში სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებვ 87-ის და არაუმეტეს 96-ის. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. $\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413; & \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(2.5) = 0.4938; & \Phi(3) = 0.4986 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 87$; $k_2 = 96$; $n = 100$; $p = 0.9$; $q = 1 - p = 0.1$. მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{96 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{6}{3} = 2;\ x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{87 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{3}{3} = -1;$

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$
$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185.$

3) ოსტატი სტანდარტულ დეტალს ამზადებს 0.9 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დამზადებულ 400 დეტალში სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 354-ის და არაუმეტეს 366-ის. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. $\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413; & \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(2.5) = 0.4938; & \Phi(3) = 0.4986 \end{pmatrix}$.

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 354$; $k_2 = 366$; $n = 400$; $p = 0.9$; $q = 1 - p = 0.1$. მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{366 - 400 \cdot 0.9}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{6}{6} = 1;\ x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{354 - 400 \cdot 0.9}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{6}{6} = -1;$

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(1) - \Phi(-1) =$$
$= 0.3413 + 0.3413 = 0.6826.$

4) ერთ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.8. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ 400 ცდაში A ხდომილება მოხდება არანაკლებ ვიდრე 312-ზე და არაუმეტეს 336-ზე. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. $\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413; \ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(0.5) = 0.1915; \end{pmatrix}$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 312$; $k_2 = 336$; $n = 400$; $p = 0.8$; $q = 1 - p = 0.2$. მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{336 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{16}{8} = 2;\ x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{312 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -\frac{8}{8} = -1;$

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2) - \Phi(-1) =$$
$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185.$

5) ერთ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.9. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ 100 ცდაში A ხდომილება მოხდება არანაკლებ ვიდრე 84-ზე და არაუმეტეს 93-ზე. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით.

$$\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413;\ \ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(1.5) = 0.4332;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 84; k_2 = 93; n = 100;$ $p = 0.9; q = 1 - p = 0.1.$ მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{93 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{3}{3} = 1;\ x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{84 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{6}{3} = -2;$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185.$

6) ერთ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.8. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ 400 ცდაში A ხდომილება მოხდება არანაკლებ ვიდრე 310-ზე და არაუმეტეს 330-ზე. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. თუ, ვიცით რომ

$$\begin{pmatrix} \Phi(2.5) = 0.4938; \\ \Phi(1.5) = 0.4332;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 310; k_2 = 330; n = 400;$ $p = 0.8; q = 1 - p = 0.2.$ მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{10}{8} = 1.25;$

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{310 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -\frac{10}{8} = -1.25;$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(1.25) - \Phi(-1.25) =$$

$= 0.3943 + 0.3943 = 0.7886.$

7) ერთ ცდაში A ხდომილების მოხდენის ალბათობაა 0.9. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ 400 ცდაში A ხდომილება მოხდება არანაკლებ ვიდრე 351-ზე და არაუმეტეს 375-ზე. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. თუ, ვიცით რომ

$$\begin{pmatrix} \Phi(2.5) = 0.4938;\ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(1.5) = 0.4332;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 351; k_2 = 375; n = 400;$ $p = 0.9; q = 1 - p = 0.1.$ მაშასადამე,

$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{375 - 400 \cdot 0.9}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{15}{6} = 2.5;$

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{351 - 400 \cdot 0.9}{\sqrt{400 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{9}{6} = -1.5;$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) =$$

$= 0.4938 + 0.4332 = 0.927.$

8) ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გამოცდას ჩააბარებს ტოლია 0.9-ის. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ გამოცდაზე გასული 100 მოსწავლიდან გამოცდას ჩააბარებს არაუმეტეს 96-ის და არანაკლებ 84-ის.

პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. თუ, ვიცით რომ

$$\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413;\ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(3) = 0.4986;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 84; k_2 = 96; n = 100;$
$p = 0.9; q = 1 - p = 0.1$. მაშასადამე,

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{96 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{6}{3} = 2;$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{84 - 100 \cdot 0.9}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{6}{3} = -2;$$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= 0.4772 + 0.4772 = 0.9544.$$

9) ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გამოცდას ჩააბარებს ტოლია 0.8-ის. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ გამოცდაზე გასული 100 მოსწავლიდან გამოცდას ჩააბარებს არაუმეტეს 88-ის და არანაკლებ 84-ის.

პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. თუ, ვიცით რომ

$$\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413;\ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(3) = 0.4986;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 84; k_2 = 88; n = 100;$
$p = 0.8; q = 1 - p = 0.2$. მაშასადამე,

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{88 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{8}{4} = 2;$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{84 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359.$$

10) ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გამოცდას ჩააბარებს ტოლია 0.8-ის. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ გამოცდაზე გასული 400 მოსწავლიდან გამოცდას ჩააბარებს არაუმეტეს 344-ის და არანაკლებ 304-ის.

პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. თუ, ვიცით რომ

$$\begin{pmatrix} \Phi(1) = 0.3413;\ \Phi(2) = 0.4772; \\ \Phi(3) = 0.4986;\ \ \Phi(1.25) = 0.3943; \end{pmatrix}.$$

ამოხსნა: ჩვენი ამოცანის შემთხვევაში: $k_1 = 304; k_2 = 344; n = 400;$
$p = 0.8; q = 1 - p = 0.2$. მაშასადამე,

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{344 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{24}{8} = 3;$$

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{304 - 400 \cdot 0.8}{\sqrt{400 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = -\frac{16}{8} = -2;$$

$$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(3) - \Phi(-2) =$$

$$= 0.4986 + 0.4772 = 0.9758.$$

10. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების რიცხვითი მახასიათებლები

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები. შემთხვევითი დისკრეტული სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის მახასიათებლად განიხილავენ მათემატიკურ ლოდინს.

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობათა შესაბამის ალბათობებზე ნამრავლების ჯამს. აღინიშნება $M(X)$. ე.ი.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \,. \tag{31}$$

თუ შემთხვევითი სიდიდე იღებს თვლადი რაოდენობის მნიშვნელობებს, მაშინ

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \,. \tag{32}$$

მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

1. მუდმივი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი თვით ამ რიცხვის ტოლია:

$$M(C) = C \,. \tag{33}$$

2. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მათემატიკური ლოდინი მათი მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია

$$M(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \cdots + M(x_n) \,. \tag{34}$$

3. ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი, ამ სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია:

$$M(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = M(x_1) \cdot M(x_2) \cdot \cdots \cdot M(x_n) \,. \tag{35}$$

4. დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონში არსებული ალბათობების ჯამი ერთის ტოლია:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{36}$$

საშუალო მნიშვნელობის გარშემო, შემთხვევითი სიდიდის მნიშვნელობათა გაბნევის მახასიათებელ სიდიდედ განიხილავენ დისპერსიასა და საშუალო კვადრატულ გადახრას.

განსაზღვრება: დისპერსია ეწოდება შემთხვევითი სიდიდისა და მათემატიკური ლოდინის სხვაობის კვადრატის მათემატიკურ ლოდინს:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 \tag{37}$$

დისპერსიის (39) ფორმულა შეიძლება გავამარტივოთ, თუ გამოვიყენებთ მათემატიკური ლოდინის თვისებებს:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + (M(X))^2) =$$
$$= M(X^2) - 2 \cdot (M(X))^2 + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$$

ე.ი. დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2. \qquad (38)$$

დისპერსიის თვისებები:

1. მუდმივის დისპერსია ნულის ტოლია:

$$D(C) = 0\,. \qquad (39)$$

2. მუდმივი მამრავლი გამოდის დისპერსიიდან კვადრატში აყვენილი:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)\,. \qquad (40)$$

3. დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის დისპერსია, ამ სიდიდეთა დისპერსიების ჯამის ტოლია.

$$D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)\,. \qquad (41)$$

4.ბინომიალური განაწილების დისპერსია გამოითვლება ფორმულით:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q\,. \qquad (42)$$

განსაზღვრება: დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (43)$$

მაგალითები:

1) ვიპოვოთ დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მოცემულია მისი განაწილების კანონი:

a)

X	*-4*	*6*	*10*
P	*0.2*	*0.3*	*0.5*

b)

X	*0.21*	*0.54*	*0.61*
P	*0.1*	*0.5*	*0.4*

ამოხსნა:

a) $M(X) = -4 \cdot 0.2 + 6 \cdot 0.3 + 10 \cdot 0.5 = 6$;

b) $M(X) = 0.21 \cdot 0.1 + 0.54 \cdot 0.5 + 0.61 \cdot 0.4 = 0.535$.

2) ვიპოვოთ Z სიდიდის მათემატიკური ლოდინი, თუ მოცემულია X და Y

სიდიდეების მათემატიკური ლოდინები:

a) $Z = X + 2 \cdot Y, \qquad M(X) = 5, \quad M(Y) = 3$.

b) $Z = 3 \cdot X + 4 \cdot Y, \qquad M(X) = 2, \quad M(Y) = 6$.

ამოხსნა :

a) $M(Z) = M(X) + 2 \cdot M(Y) = 5 + 2 \cdot 3 = 11.$

b) $M(Z) = 3 \cdot M(X) + 4 \cdot M(Y) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 30$.

3) X- დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე იღებს სამ შესაძლო მნიშვნელობას: $x_1=4$ ალბათობით $p_1=0.5$; $x_2=6$ ალბათობით $p_2=0.3$; და x_3 ალბათობით p_3. ვიპოვოთ x_3 და p_3 თუ $M(X)=8$.

ამოხსნა:

შევადგინოთ განაწილების კანონი:

X	x_1	x_2	X_3
P	p_1	p_2	p_3

ანუ,

X	4	6	X_3
P	0.5	0.3	P_3

რადგან $\sum_i p_i = 1 \Rightarrow 0.5 + 0.3 + p_3 = 1 \Rightarrow p_3 = 0.2$;

$$M(X) = \sum_i x_i p_i = 4 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.3 + x_3 \cdot 0.2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.2 \cdot x_3 = 8 - 2 - 1.8 \Rightarrow x_3 = \frac{4.2}{0.2} \Rightarrow x_3 = 21.$$

4) დისკრეტული შემთხვევითი X სიდიდე ღებულობს მნიშვნელობებს:

$x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 1,$

ასევე ცნობილია ამ სიდიდის და მისი კვადრატის მათემატიკური ლოდინები $M(X)=0.1$ და $M(X^2)=0.9$.

ვიპოვოთ x_1, x_2 და x_3 სიდიდეების შესაბამისი p_1, p_2 და p_3 ალბათობები.

ამოხსნა:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ (-1)\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3 = 0.1 \\ (-1)^2\cdot p_1 + 0^2\cdot p_2 + 1^2\cdot p_3 = 0.9 \end{cases} ;$$

ამ სისტემის ამონახსნებია:

$p_1 = 0.4; \qquad p_2 = 2; \qquad p_3 = 0.5$

5) მოცემულია X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3,$

ასევე, ცნობილია ამ სიდიდის და მისი კვადრატის მათემატიკური ლოდინები: *M(X)*=2.3 და $M(X^2)$=5.9.

იპოვეთ X სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების შესაძლო ალბათობები p_1, p_2 და p_3.

ამოხსნა:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + 3\cdot p_3 = 2.3 \\ 1^2\cdot p_1 + 2^2\cdot p_2 + 3^2\cdot p_3 = 5.9 \end{cases} ;$$

ამ სისტემის ამონახსნებია

$p_1 = 0.2; \qquad p_2 = 3; \qquad p_3 = 0.5$.

6) იპოვეთ X დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია. თუ განიხილება A მოვლენის მოხდენის რაოდენობები ორი დამოუკიდებელი ცდისას, თუ ორივე ცდაში მოვლენის ალბათო¬ბები ერთნაირია და ცნობილია, რომ *M(X)*=0.9.

ამოხსნა:

X	*0*	*1*	*2*
P	$p_2(0)$	$p_2(1)$	$p_2(2)$

ე.ი. გვაქვს ბერნულის განაწილების კანონი

$$M(X) = n\cdot p = 2\cdot p = 0.9 \Rightarrow p = 0.45$$

$$D(X) = n\cdot p\cdot q = 2\cdot 0.45\cdot(1-0.45) = 0.9\cdot 0.55 = 0.495\,.$$

7) ატარებენ ცდებს A მოვლენის მოხდენის ერთნაირი ალბათობებით. ვიპოვოთ A მოვლენის მოხდენის ალბათობა, თუ სამი ცდისას მოვლენის მოხდენათა რიცხვის შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია უდრის 0,63.

ამოხსნა: რადგან ცდები დამოუკიდებელია და თითოეულ ცდაში მოვლენის მოხდენის ალბათობა ერთნაირია, გვექნება ბინომიალური განაწილება: სამი ცდისას n=3, $D(X)$=0.63.

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 3 \cdot p \cdot (1-p) = 0.63 \Rightarrow p - p^2 = 0.21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 - p + 0.21 = 0 \Rightarrow p_1 = 0.3; p_2 = 0.7.$$

განვიხილოთ სტანდარტული ამოცანები დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის გამოთვლაზე:

1) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-2	3	5	7
P	0.1	0.2	0.5	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$$M\xi = \sum \xi_i p_i = -2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.2 =$$
$$= -0.2 + 0.6 + 2.5 + 1.4 = 4.3.$$

2) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-1	-2	4	5
P	0.5	0.1	0.2	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$$M\xi = \sum \xi_i p_i = -1 \cdot 0.5 - 2 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.2 =$$
$$= -0.5 - 0.2 + 0.8 + 1.0 = 1.1.$$

3) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-4	-2	0	7
P	0.3	0.3	0.3	0.1

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$$M\xi = \sum \xi_i p_i = -4 \cdot 0.3 - 2 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.3 + 7 \cdot 0.1 =$$
$$= -1.2 - 0.6 + 0 + 0.7 = -1.1.$$

4) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	0	1	2	3
P	0.1	0.2	0.2	0.5

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$M\xi = \sum \xi_i p_i = 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.5 =$
$= 0 + 0.2 + 0.4 + 1.5 = 2.1.$

5) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-1	0	5	7
P	0.1	0.6	0.1	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$M\xi = \sum \xi_i p_i = -1 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.1 + 7 \cdot 0.2 =$
$= -0.1 + 0 + 0.5 + 1.4 = 1.8.$

6) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-2	-5	5	12
P	0.1	0.5	0.2	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$M\xi = \sum \xi_i p_i = -2 \cdot 0.1 - 5 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.2 + 12 \cdot 0.2 =$
$= -0.2 - 2.5 + 1.0 + 2.4 = 0.7.$

7) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-3	-2	6	8
P	0.1	0.5	0.2	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$M\xi = \sum \xi_i p_i = -3 \cdot 0.1 - 2 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.2 + 8 \cdot 0.2 =$
$= -0.3 - 1.0 + 1.2 + 1.6 = 1.5.$

8) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-2	-3	0	7
P	0.4	0.1	0.2	0.3

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად

$M\xi = \sum \xi_i p_i = -2 \cdot 0.4 - 3 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.2 + 7 \cdot 0.3 =$
$= -0.8 - 0.3 + 0 + 2.1 = 1.0.$

9) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-2	-1	0	6
P	0.3	0.4	0.1	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად
$M\xi = \sum \xi_i p_i = -2 \cdot 0.3 - 1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.2 =$
$= -0.6 - 0.4 + 0 + 1.2 = 0.2.$

10) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-8	0	2	15
P	0.5	0.2	0.1	0.2

გამოთვალეთ $M\xi$.

ამოხსნა: განსაზღვრის თანახმად
$M\xi = \sum \xi_i p_i = -8 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 + 15 \cdot 0.2 =$
$= -4.0 + 0 + 0.2 + 3.0 = -0.8.$

განვიხილოთ, დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების დისპერსიის პოვნის სტანდარტული ამოცანები:

1) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-3	2	3
P	0.4	0.3	0.3

გამოთვალეთ $D(\xi)$.

ამოხსნა: როგორც ვიცით, $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;
$M(\xi) = -3 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 = -1.2 + 0.6 + 0.9 = 0.3$;
$M(\xi^2) = 9 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.3 = 3.6 + 1.2 + 2.7 = 7.5$;
$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = 7.5 - 0.09 = 7.41.$

2) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-1	3	4
P	0.5	0.4	0.1

გამოთვალეთ $D(\xi)$.

ამოხსნა: როგორც ვიცით, $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;
$M(\xi) = -1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.1 = -0.5 + 1.2 + 0.4 = 1.1$;

$M(\xi^2) = 1 \cdot 0.5 + 9 \cdot 0.4 + 16 \cdot 0.1 = 0.5 + 3.6 + 1.6 = 5.7;$
$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = 5.7 - 1.21 = 4.49.$
3) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-2	2	3
P	0.5	0.4	0.1

გამოთვალეთ $D(\xi)$.
ამოხსნა: როგორც ვიცით, $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;
$M(\xi) = -2 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.1 = -1.0 + 0.8 + 0.3 = 0.1;$
$M(\xi^2) = 4 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.4 + 9 \cdot 0.1 = 2.0 + 1.6 + 0.9 = 4.5;$
$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = 4.5 - 0.01 = 4.49.$
4) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	1	2	3
P	0.1	0.7	0.2

გამოთვალეთ $D(\xi)$.
ამოხსნა: როგორც ვიცით, $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;
$M(\xi) = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.7 + 3 \cdot 0.2 = 0.1 + 1.4 + 0.6 = 2.1;$
$M(\xi^2) = 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.7 + 9 \cdot 0.2 = 0.1 + 2.8 + 1.8 = 4.7;$
$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = 4.7 - 4.41 = 0.29.$
5) მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	0	1	3
P	0.2	0.3	0.5

გამოთვალეთ $D(\xi)$.
ამოხსნა: როგორც ვიცით, $D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2$;
$M(\xi) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.5 = 0 + 0.3 + 1.5 = 1.8;$
$M(\xi^2) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.5 = 0 + 0.3 + 4.5 = 4.8;$
$D(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = 4.8 - 3.24 = 1.56.$

11. მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის თვისებები

1. მოცემულია: $M(\xi) = 2,\ M(\eta) = -3$. გამოთვალეთ $M(5\xi + 2\eta)$.

ამოხსნა: $M(5\xi + 2\eta) = 5M(\xi) + 2M(\eta) = 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 10 - 6 = \mathbf{4}.$

2. მოცემულია: $M(\xi) = 20,\ M(\eta) = 1$. გამოთვალეთ $M(3\xi - 12\eta - 16)$.

ამოხსნა:

$M(3\xi-12\eta-16)=3M(\xi)-12M(\eta)-16=3\cdot 20-12\cdot 1-16=$
$=60-12-16=\mathbf{32}.$

3. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $M(\xi)=4,$
$M(\eta)=-3$. გამოთვალეთ $M(\xi-3\xi\eta)$.

ამოხსნა: $M(\xi-3\xi\eta)=M(\xi)-3M(\xi)M(\eta)=4-3\cdot 4\cdot(-3)=$
$=4+36=\mathbf{40}.$

4. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $M(\xi)=1,$
$M(\eta)=3$. გამოთვალეთ $M(5\xi-\xi\eta+6)$.

ამოხსნა: $M(5\xi-\xi\eta+6)=5M(\xi)-M(\xi)M(\eta)+6=5-1\cdot 3+6=\mathbf{8}.$

5. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $M(\xi)=4,$
$M(\eta)=-2$. გამოთვალეთ $M(3\xi\eta+2\xi-10)$.

ამოხსნა: $M(3\xi\eta+2\xi-10)=3\cdot M(\xi)M(\eta)+2\cdot M(\xi)-10=$
$=3\cdot 4\cdot(-2)++2\cdot 4-10=-24+8-10=-\mathbf{26}.$

6. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
$D(\xi)=4, D(\eta)=2$. გამოთვალეთ $D(\xi+\eta-7)$.

ამოხსნა: $D(\xi+\eta-7)=D(\xi)+D(\eta)=4+2=\mathbf{6}.$

7. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
$D(\xi)=2, D(\eta)=3$. გამოთვალეთ $D(4\xi-\eta)$.

ამოხსნა: $D(4\xi-\eta)=16\cdot D(\xi)+D(\eta)=16\cdot 2+3=32+3=\mathbf{35}.$

8. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
$D(\xi)=4, D(\eta)=2$. გამოთვალეთ $D(4\xi-\eta-4)$.

ამოხსნა: $D(4\xi-\eta-4)=16\cdot D(\xi)+D(\eta)=16\cdot 4+2=\mathbf{66}.$

9. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია.
$D(\xi)=3, D(\eta)=5$. გამოთვალეთ $D(\xi-4\eta+8)$.

ამოხსნა: $D(\xi-4\eta+8)=D(\xi)+16D(\eta)=3+16\cdot 5=\mathbf{83}.$

10. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $D(\xi)=4,$

$D(\eta) = 2.$ გამოთვალეთ $D(\xi - 2 - \eta)$.

ამოხსნა: $D(\xi - 2 - \eta) = D(\xi) + D(\eta) = 4 + 2 = \mathbf{6}$.

12. რეგიონში საქონელზე საშუალო ფასის დადგენის სტატისტიკური მეთოდი

დიდი მოცულობის ინფორმაციის დამუშავებისას, საინჟინრო საქმეში და ეკონომიკაში ფართოდ გამოიყენება მონაცემთა ანალიზის სტატისტიკური მეთოდები. განვიხილოთ სტატისტიკის ის ცნებები და რიცხვითი მაჩვენებლები, რომლებიც აუცილებელია მოცემული ამოცანის გადასაწყვეტად.

სტატისტიკის ცნებებსა და მაჩვენებლებს გამოიყენებენ, მოცემულ რეგიონში, დროის მოკლე მონაკვეთებში, ფასის მუდმივობის პირობებში, საქონლის საშუალო ფასის შესწავლისათვის, მაშინ როცა სავაჭრო წერტილების რაოდენობა N დიდი რიცხვია (N>1000) და მათ შორის მანძილები საკმარისია იმისათვის, რომ მოუხერ¬ხებელი გახდეს ყველა მათგანის შემოვლა.

ძირითადი ცნებები:

განსაზღვრება: რეგიონის სავაჭრო წერტილების საერთო რიცხვს ეწოდება გენერალური ერთობლიობის მოცულობა.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც გენერალური ერთობლი¬ობის მოცულობა N=1000, მაშინ მიზანშეწონილია მოვახდინოთ ამორჩევა გენერალური ერთობლიობიდან. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ყველა სავაჭრო წერტილებიდან (N=1000) ამოვირჩიოთ მხოლოდ ზოგიერთი მათგანი, მაგ. n=100, ისე, რომ ადვილი იყოს ამ წერტილების შემოვლა და შესაბამისი ფასების გაგება. ამორჩევა ისე უნდა განხორციელდეს, რომ მოცემული რეგიონის ყველა რაიონი პროპორციულად იყოს წარმოდგენილი.

განსაზღვრება: ამორჩეული სავაჭრო წერტილების საერთო რიცხვს ეწოდება ამორჩევის მოცულობა.

ჩვენს შემთხვევაში ამორჩევის მოცულობა n=100. შემდგომ შევისწავლოთ ამორჩევის საშუალო მახასიათებლები და მიღებული შედეგები გადავიტანოთ ცნობილი ფორმულებით გენერალურ ერთობლიობაზე.

ვთქვათ ამორჩეული სავაჭრო წერტილების შემოვლის შემდეგ ჩვენ მივიღეთ რაიმე პროდუქტის (მაგ. პურის) ფასის შემდეგი მნიშვნელობები თეთრებში (მონაცემთა სტატისტიკური მწკრივი):

$$\underbrace{40;40;40;...;40;}_{10\text{ - ჯერ}} \quad \underbrace{50;50;...;50;}_{70\text{ - ჯერ}} \quad \underbrace{45;45;45;}_{3\text{=ჯერ}} \quad \underbrace{60;...;60;}_{17\text{ - ჯერ}} \qquad (44)$$

ფასების რიცხვთა ამ მასივის დასამუშავებლად შევადგინოთ ვარიაციული მწკრივი.

განსაზღვრება: X მახასიათებლის მნიშვნელობათა ცხრილს, შესაბამისი Fსიხშირეებით სტატისტიკური მწკრივი ეწოდება.

(44) მონაცემებისათვის სტატისტიკურ მწკრივს აქვს შემდეგი სახე:

X	*40*	*50*	*45*	*60*
F	*10*	*70*	*3*	*17*

(45)

განსაზღვრება: ფასის მოცემული X მნიშვნელობის განმეორებათა რიცხვს ეწოდება F_i სიხშირე.

(45) სტატისტიკური მწკრივიდან ცხადია, რომ F_1=10 გვიჩვენებს, რომ ფასის X_1=40- ის ტოლი მნიშვნელობები გვხვდება ამორჩევის 10 სავაჭრო წერტილში, F_2=70 კი გვეუბნება, rom X_2=50-is ტოლი მნიშვნე¬ლობა _ 70 სავაჭრო წერტილში და ა.შ.

(45) სტატისტიკური მწკრივის მონაცემთა დამუშავება იწყება რანჟირებით.

განსაზღვრება: სტატისტიკურ მწკრივს, სადაც მახასიათებლის მნიშვნელობები განთავსებულია ზრდადობის ან კლებადობის მიხედვით ეწოდება რანჟირებული (ვარიაციული მწკრივი). გადავწეროთ (45) სტატისტიკური მწკრივი ვარიაციული მწკრივის სახით:

X	*40*	*45*	*50*	*60*
F	*10*	*3*	*70*	*17*

(46)

გადავიდეთ (46) ვარიაციული მწკრივის საშუალო მახასიათებლების შესწავლაზე.

საშუალო მახასიათებლები:

რანჟირებული ვარიაციული მწკრივის საშუალო მახასიათებლებს წარმოადგენენ: მედიანა, მოდა, ცვლილების დიაპაზონი და ამორჩევის საშუალო მნიშვნელობა.

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის მედიანა ეწოდება მახასიათებლის (ფასის) იმ მნიშვნელობას, რომელიც დგას მწკრივის შუაში (MeX).

$$\text{MeX=50(TeTri)} . \qquad (47)$$

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის მოდა (MoX) ეწოდება მახასიათებლის ისეთ მნიშვნელობას, რომელსაც შეესაბამება ყველაზე მაღალი სიხშირე.

ჩვენს მაგალითში (46) უმაღლესი სიხშირე $F_{imax}=70$, აქვს თვისების მნიშვნელობას $X_i=50$, ამიტომ (46) ვარიაციული მწკრივის მოდა იქნება

$$MoX=50. \tag{48}$$

განსაზღვრება: ვარიაციული მწკრივის ცვლილების დიაპაზონი ეწოდება სხვაობას, მახასიათებელი სიდიდის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობას შორის ანუ $D = X_{max} - X_{min}$.

ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, $D = 60 - 40 = 20$.

განსაზღვრება: ამორჩევის საშუალო მნიშვნელობა ეწოდება ვარიაციული მწკრივის შეწონილ საშუალოს.

$$\bar{X} = X_{საშ.} = \frac{\sum_i X_i F_i}{\sum_i F_i}. \tag{49}$$

ჩვენს მაგალითში

$$X_{საშ} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_i \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{4} F_i}. \tag{50}$$

გაბნევის მახასიათებლები:

ფასის მნიშვნელობათა გაბნევის შესაფასებლად იყენებენ შემდეგ ცნებებს: დისპერსია - **($DX=S_n^2$), საშუალო კვადრატული გადახრა - (σX) და ვარიაციის კოეფიციენტი - (vX)**.

განსაზღვრება: მახასიათებლის საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობას დისპერსია ეწოდება.

$$DX = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{საშ})^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{51}$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$DX = \frac{\sum_{i=1}^{4} \left(X_i - X_{საშ}\right)^2 \cdot F_i}{\sum_{i=1}^{4} F_i}. \tag{52}$$

დისპერსიის მნიშვნელობას X_i მახასიათებელთან შედარებით აქვს კვადრატული განზომილება, ამიტომ განიხილავენ გაბნევის სხვა მახასიათებელს, რომელსაც ეს ნაკლი აღარ გააჩნია.

განსაზღვრება: მახასიათებლის საშუალო მნიშვნელობიდან, საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\sigma X = \sqrt{DX} \ . \tag{53}$$

P.S. საშუალო კვადრატული გადახრა σX წარმოადგენს X_i მახასიათებლის X_{saS} საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრის (აბსოლუტური ცდომილების) სიდიდის მნიშვნელობას.

განვიხილოთ გაბნევის (ფარდობითი ცდომილების) კოეფიციენტი, რომელსაც **ვარიაციის კოეფიციენტი** (vx) ეწოდება და გამოითვლება ფორმულით:

$$v\mathrm{X} = \frac{\sigma \mathrm{X}}{X_{\text{საშ}}} \cdot 100\% \ . \tag{54}$$

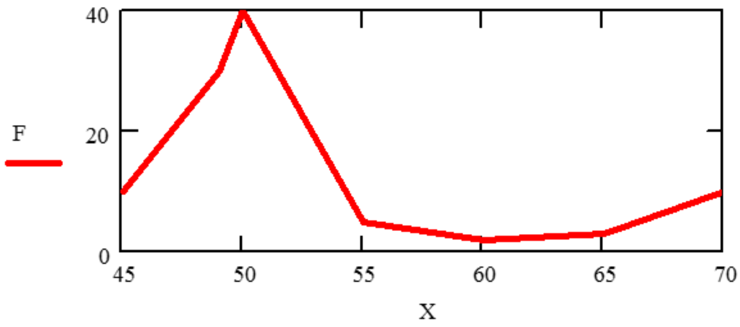
ვარიაციის კოეფიციენტი იძლევა ფარდობით გაბნევას პროცენტებში. გენერალური ერთობლიობის XG_{sas} საშუალო მნიშვნელობის გადაანგარიშებისათვის გამოიყენება საშუალო მნიშვნელობის გადაანგარიშებისათვის გამოიყენება შეფასებები:

$$X_{\text{საშ}} - \frac{\sigma X}{\sqrt{n}} \le XG_{\text{საშ}} \le X_{\text{საშ}} + \frac{\sigma X}{\sqrt{n}}, \ \text{Tu} \ \frac{n}{N} \le 0.1 \ ; \tag{55}$$

$$X_{\text{საშ}} - \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}(1 - \frac{n}{N})} \le XG_{\text{საშ}} \le X_{\text{საშ}} + \sqrt{\frac{(\sigma X)^2}{n}(1 - \frac{n}{N})}, \ \text{Tu} \ 0.1 < \frac{n}{N} \le 0.9 . \tag{56}$$

მახასიათებლის მნიშვნელობების სიხშირეთა განაწილების შესასწავლად გამოიყენება აგრეთვე გრაფიკული მეთოდები.

განსაზღვრება: სიხშირეთა განაწილების, მახასიათებლის მნიშვნელობებზე დამოკიდებულების გრაფიკს, სიხშირეთა პოლიგონი ეწოდება.



სიხშირეთა პოლიგონის გეომეტრიული თვისებების შესაფასებლად შემოაქვთ ასიმეტრიის კოეფიციენტისა და ექსცესის ცნებები.

განსაზღვრება: ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება მესამე მომენტს:

$$\mu X=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-X_{\text{საშ}}\right)^3\cdot F_i}{(\sigma X)^3\cdot\sum_{i=1}^{n}F_i}. \tag{57}$$

ჩვენს შემთხვევაში:

$$\mu X=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(X_i-X_{\text{საშ}}\right)^3\cdot F_i}{(\sigma X)^3\cdot\sum_{i=1}^{4}F_i}. \tag{58}$$

P.S. თუ, სიხშირეთა პოლიგონის გრაფიკი, მედიანის მიმართ სიმეტრიულია, მაშინ $\mu X=0$. თუ $\mu X>0$, მაშინ სიმეტრია ირღვევა მედიანიდან მარჯვნივ, ხოლო თუ $\mu X<0$, მაშინ - მარცხნივ.

გაუსის ნორმალური განაწილების კანონთან შედარებით, სიხშირეთა პოლიგონის ცვლილების სისწრაფის შესაფასებლად, განიხილება მეოთხე მომენტი, რომელსაც **ექსცესი** ეწოდება.

$$EX=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-X_{\text{საშ}}\right)^4\cdot F_i}{(\sigma X)^4\cdot\sum_{i=1}^{n}F_i}-3\ . \tag{59}$$

ჩვენი შემთხვევაში:

$$EX=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(X_i-X_{\text{საშ}}\right)^4\cdot F_i}{(\sigma X)^4\cdot\sum_{i=1}^{4}F_i}-3. \tag{60}$$

რიცხვი 3, ფორმულაში (60), უზრუნველყოფს იმ ფაქტს, რომ გაუსის განაწილებისათვის ექსცესის მნიშვნელობა $EX=0$. თუ $EX>0$,

მაშინ სიხშირეთა ექსპერიმენტული განაწილება გაუსის განაწილებასთან შედარებით, უფრო სწრაფად იცვლება, ხოლო თუ EX<0 მაშინ - უფრო ნელა.

ზოგჯერ, ამორჩევის საშუალო მნიშვნელობას $X_{საშ}$, მათემატიკური ლოდინის წერტილოვან $\bar{X}$ შეფასებას უწოდებენ, რადგან ის დამოკიდებულია მხოლოდ ამორჩევის შემოფარგლულ რაოდენობაზე; ხოლო DX დისპერსიას კი - დისპერსიის წერტილოვან S_n^2 შეფასებას.

განვიხილოთ სტანდარტული ამოცანები:

1. მოცემულია შერჩევა: 2;3;2;7;4;4;3;3;1;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	2	3	4	7	9
f	1	2	3	2	1	1

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 7\cdot 1 + 9\cdot 1}{1+2+3+2+1+1} = \frac{38}{10} = 3.8$$

პასუხი: 3.8

2. მოცემულია შერჩევა: 5;3;5;7;4;5;3;3;1;9;2;4. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	2	3	4	5	7	9
f	1	1	3	2	3	1	1

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 7\cdot 1 + 9\cdot 1}{1+1+3+2+3+1+1} = \frac{51}{12} = 4.25$$

პასუხი: 4.25

3. მოცემულია შერჩევა: 5;1;5;1;6;6;3;3. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	3	5	6
f	2	2	2	2

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2}{2+2+2+2} = \frac{30}{8} = 3.75$$

პასუხი: 3.75

4. მოცემულია შერჩევა: 2;3;5;7;4;6;3;3;2;7. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	2	3	4	5	6	7
f	2	3	1	1	1	2

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{f}_i}{\sum_i \boldsymbol{f}_i} = \frac{2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 2}{2+3+1+1+1+2} = \frac{42}{10} = 4.2$$

პასუხი: 4.2

5. მოცემულია შერჩევა: 8;8;4;7;4;5;3;4;1;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	3	4	5	7	8	9
f	1	1	3	1	1	2	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{f}_i}{\sum_i \boldsymbol{f}_i} = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1}{1+1+3+1+1+2+1} = \frac{53}{10} = 5.3$$

პასუხი: 5.3

6. მოცემულია შერჩევა: 2;3;2;1;4;6;6;3;6;9;6;6. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	2	3	4	6	9
f	1	2	2	1	5	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X}_i \boldsymbol{f}_i}{\sum_i \boldsymbol{f}_i} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 6\cdot 5 + 9\cdot 1}{1+2+2+1+5+1} = \frac{54}{12} = 4.5$$

პასუხი: 4.5

7. მოცემულია შერჩევა: 4;3;6;1;1;5;3;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	3	4	5	6	9
f	2	2	1	1	1	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 9\cdot 1}{2+2+1+1+1+1} = \frac{32}{8} = 4$$

პასუხი: 4.

8. მოცემულია შერჩევა: 2;3;5;2;4;8;3;3;8;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	2	3	4	5	8	9
f	2	3	1	1	2	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1}{2+3+1+1+2+1} = \frac{47}{10} = 4.7$$

პასუხი: 4.7

9. მოცემულია შერჩევა: 5;8;4;5;3;8;7;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	3	4	5	7	8	9
f	1	1	2	1	2	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 1 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1}{1+1+2+1+2+1} = \frac{49}{8} = 6.125$$

პასუხი: 6.125

10. მოცემულია შერჩევა: 2;2;2;7;4;8;3;3;1;9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\bar{X}$.

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	2	3	4	7	8	9
f	1	3	2	1	1	1	1

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 7\cdot 1 + 8\cdot 1 + 9\cdot 1}{1+3+2+1+1+1+1} = \frac{41}{10} = 4.1$$

პასუხი: 4.1

13. დისპერსიის წერტილოვანი შეფასების განსაზღვრა

1. მოცემულია შერჩევა: 1;1;4;3;3;-6;2;3;0;-1. იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) 7.6; ბ) 11.6; გ) 10.6; დ) 12.6

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	1	2	3	4	-6	0	-1
f	2	1	3	1	1	1	1
$\boldsymbol{X_i - \bar{X}}$	0	1	2	3	-7	-1	-2
$\boldsymbol{(X_i - \bar{X})^2}$	0	1	4	9	49	1	4

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (\boldsymbol{X_i} - \bar{\boldsymbol{X}})^2 \boldsymbol{f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 49 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{10} =$$
$$= \frac{0 + 1 + 12 + 9 + 49 + 1 + 4}{10} = \frac{76}{10} = 7.6$$

პასუხი: 7.6

2. მოცემულია შერჩევა: 1;0;4;3;3;2;3;0 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) 2; ბ) 12; გ) 4; დ) 8

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	0	1	2	3	4
f	2	1	1	3	1
$\boldsymbol{X_i - \bar{X}}$	-2	-1	0	1	2
$\boldsymbol{(X_i - \bar{X})^2}$	4	1	0	1	4

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1}{2 + 1 + 1 + 3 + 1} = \frac{16}{8} = 2.$$

$$\boldsymbol{S_n^2} = \frac{\sum_i (\boldsymbol{X_i} - \bar{\boldsymbol{X}})^2 \boldsymbol{f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}} = \frac{4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + +4 \cdot 1}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

პასუხი: 2.

3. მოცემულია შერჩევა: 1;0;4;3;3;-1;1;3;0;-2 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) 3.56; ბ) 1.56; გ) 4.56; დ) 2.56

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-2	-1	0	1	3	4
f	1	1	2	2	3	1
$X_i - \bar{X}$	-3.2	-2.2	-1.2	-0.2	1.8	2.8
$(X_i - \bar{X})^2$	10.24	4.84	1.44	0.04	3.24	7.84

$$\bar{X} = \frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{-2\cdot 1 - 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 1}{1+1+2+2+3+1} = \frac{12}{10} = 1.2.$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 f_i}{\sum_i f_i} = \frac{10.24\cdot 1 + 4.84\cdot 1 + 1.44\cdot 2 + 0.04\cdot 2 + 3.24\cdot 3 + 7.84\cdot 1}{10} =$$
$$= \frac{10.24 + 4.84 + 2.88 + 0.08 + 9.72 + 7.84}{10} = \frac{35.6}{10} = 3.56$$

პასუხი: 3.56

4. მოცემულია შერჩევა: 4;2;2;-3;2;3;0;2 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) 4; ბ) 5; გ) 3; დ) 6

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-3	0	2	3	4
f	1	1	4	1	1
$X_i - \bar{X}$	-4.5	-1.5	0.5	1.5	2.5
$(X_i - \bar{X})^2$	20.25	2.25	0.25	2.25	6.25

$$\bar{X} = \frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{-3\cdot 1 + 0\cdot 1 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1}{1+1+4+1+1} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2 f_i}{\sum_i f_i} = \frac{20.25\cdot 1 + 2.25\cdot 1 + 0.25\cdot 4 + 2.25\cdot 1 + 6.25\cdot 1}{8} =$$
$$= \frac{20.25 + 2.25 + 1 + 2.25 + 6.25}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

პასუხი: 4.

5. მოცემულია შერჩევა: 2;2;4;1;3;-5;2;3;1;-2 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) 6.49; ბ) 5.49; გ) 3.49; დ) 2.49

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-5	-2	1	2	3	4

f	1	1	2	3	2	1
$X_i - \overline{X}$	-6.1	-3.1	-0.1	0.9	1.9	2.9
$(X_i - \overline{X})^2$	37.21	9.61	0.01	0.81	3.61	8.41

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{-5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1} = \frac{11}{10} = 1.1.$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2 f_i}{\sum_i f_i} = \frac{37.21 \cdot 1 + 9.61 \cdot 1 + 0.01 \cdot 2 + 0.81 \cdot 3 + 3.61 \cdot 2 + 8.41 \cdot 1}{10} =$$
$$= \frac{37.21 + 9.61 + 0.02 + 2.43 + 7.22 + 8.41}{10} = \frac{64.9}{10} = 6.49$$

პასუხი: 6.49

6. მოცემულია შერჩევა: 4;3;3;0;2;-2;0;-2 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.
აირჩიეთ ერთი პასუხი:
ა) 3.6; ბ) 1.6; **გ) 4.6**; დ) 2.6
ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-2	0	2	3	4
f	2	2	1	2	1
$X_i - \overline{X}$	-3	-1	1	2	3
$(X_i - \overline{X})^2$	9	1	1	4	9

$$\overline{X} = \frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{-2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{2 + 2 + 1 + 2 + 1} = \frac{8}{8} = 1$$

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2 f_i}{\sum_i f_i} = \frac{9 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 9 \cdot 1}{8} =$$
$$= \frac{18 + 2 + 1 + 8 + 9}{8} = \frac{38}{8} = \frac{19}{4} = 4.75$$

პასუხი: 4.75.

7. მოცემულია შერჩევა: 2;0;-1;3;3;0;2;3;0;-2 იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.
აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) **3;** ბ) 4; გ) 7; დ) 9

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-2	-1	0	2	3
f	1	1	3	2	3
$\boldsymbol{X_i-\bar{X}}$	-3	-2	-1	1	2
$(\boldsymbol{X_i-\bar{X}})^2$	9	4	1	1	4

$$\boldsymbol{\bar{X}}=\frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}}=\frac{-2\cdot 1-1\cdot 1+0\cdot 3+2\cdot 2+3\cdot 3}{1+1+3+2+3}=\frac{10}{10}=1$$

$$\boldsymbol{S_n^2}=\frac{\sum_i(\boldsymbol{X_i-\bar{X}})^2\boldsymbol{f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}}=\frac{9\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 2+4\cdot 3}{10}=$$
$$=\frac{9+4+3+2+12}{10}=\frac{30}{10}=3$$

პასუხი: 3.

8. მოცემულია შერჩევა: 2;0;4;3;1;0;0;-2. იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) **3.25**; ბ) 11.4; გ) 3.4; დ) 1.4

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-2	0	1	2	3	4
f	1	3	1	1	1	1
$\boldsymbol{X_i-\bar{X}}$	-3	-1	0	1	2	3
$(\boldsymbol{X_i-\bar{X}})^2$	9	1	0	1	4	9

$$\boldsymbol{\bar{X}}=\frac{\sum_i \boldsymbol{X_i f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}}=\frac{-2\cdot 1+0\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 1}{1+3+1+1+1+1}=\frac{8}{8}=1$$

$$\boldsymbol{S_n^2}=\frac{\sum_i(\boldsymbol{X_i-\bar{X}})^2\boldsymbol{f_i}}{\sum_i \boldsymbol{f_i}}=\frac{9\cdot 1+1\cdot 3+0\cdot 1+1\cdot 1+4\cdot 1+9\cdot 1}{8}=$$
$$=\frac{9+3+0+1+4+9}{8}=\frac{26}{8}=\frac{13}{4}=3.25$$

პასუხი: 3.25.

9. მოცემულია შერჩევა: 2;0;2;3;3;-3;2;3;0;-2. იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) **4.2**;   ბ) 6.2;   გ) 3.2; დ) 2.2

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-3	-2	0	2	3
f	1	1	2	3	3
$X_i-\bar{X}$	-4	-3	-1	1	2
$(X_i-\bar{X})^2$	16	9	1	1	4

$$\bar{X}=\frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i}=\frac{-3\cdot 1-2\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 3}{1+1+2+3+3}=\frac{10}{10}=1$$

$$S_n^2=\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2 f_i}{\sum_i f_i}=\frac{16\cdot 1+9\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+4\cdot 3}{10}=$$
$$=\frac{16+9+2+3+12}{10}=\frac{42}{10}=4.2$$

პასუხი: 4.2.

10. მოცემულია შერჩევა: 2;0;3;-5;2;3;0;3. იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) **6.5**;   ბ) 5.5;   გ) 8.5; დ) 7.5

ამოხსნა: შევადგინოთ მოცემული შერჩევის ვარიაციული მწკრივი:

X	-5	0	2	3
f	1	2	2	3
$X_i-\bar{X}$	-6	-1	1	2
$(X_i-\bar{X})^2$	36	1	1	4

$$\bar{X}=\frac{\sum_i X_i f_i}{\sum_i f_i}=\frac{-5\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 3}{1+2+2+3}=\frac{8}{8}=1$$

$$S_n^2=\frac{\sum_i (X_i-\bar{X})^2 f_i}{\sum_i f_i}=\frac{36\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2+4\cdot 3}{8}=$$
$$=\frac{36+2+2+12}{8}=\frac{52}{8}=\frac{13}{2}=6.5$$

პასუხი: 6.5.

14. გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. წრფივი რეგრესია

ამოცანა: გაუსის უმცირეს კვადრატთა მეთოდი საშუალებას იძლევა ექსპერიმენტალურ წერტილებს ოპტიმალურად მივუახლოვდეთ მოცემული კლასის ფუნქციების მეშვეობით. ამასთან, თუ მოცემული ფუნქციების კლასი წარმოადგენს წრფივ ფუნქციათა სიმრავლეს $y = a \cdot x + b$, მაშინ ამოცანას ეწოდება წრფივი რეგრესიის ამოცანა, ხოლო თუ მოცემული ფუნქცია მიეკუთვნება არაწრფივ ფუნქციათა კლასს, მაშინ გვაქვს არაწრფივი რეგრესიის ამოცანა.

განვიხილოთ წრფივი ფუნქციით ექსპერიმენტის შედეგებთან მიახლოების ამოცანა: $y = a \cdot x + b$

X	x_1	x_2	..	x_n
Y	y_1	y_2	..	y_n

ამოხსნა: იმ $y = a \cdot x + b$ ფუნქციის საპოვნელად, რომელიც სხვებზე უკეთესად ახდენს ექსპერიმენტული წერტილების აპროქსიმირებას, ყოველ (x_i, y_i) წერტილში უნდა შევადგინოთ სხვაობები (გადახრები).

$$r_i = (ax_i + b) - y_i \,, \tag{61}$$

სადაც, $ax_i + b$ ექსპერიმენტალურ y_i მნიშვნელობასთან თეორიული მიახლოებაა $x=x_i$ წერტილში. ამრიგად, r_i წარმოადგენს $x=x_i$ წერტილში ფუნქციის თეორიულსა და ესქპერიმენტულ მნიშვნე¬ლობებს შორის სხვაობის მნიშვნელობას.

უნდა შედგეს (61) გადახრების კვადრატთა ჯამი, რომელსაც ეწოდება $G_1^{\,2}(a,b)$ გაუსის დისკრეტული ფუნქცია.

$$G_1^2(a,b) = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \quad . \tag{62}$$

მოვახდინოთ გაუსის $G_1^2(a,b)$ ფუნქციის მინიმიზაცია. მინიმუმის წერტილი (a_{min}, b_{min}) ინდივიდუალობას სძენს სწორედ იმ

$$y = a_{\min} \cdot x + b_{\min} \tag{63}$$

წრფეს, რომელიც ყველაზე უკეთესად მიუახლოვდება ექსპერიმენტალურ (x_i, y_i) წერტილებს ერთობლიობაში.

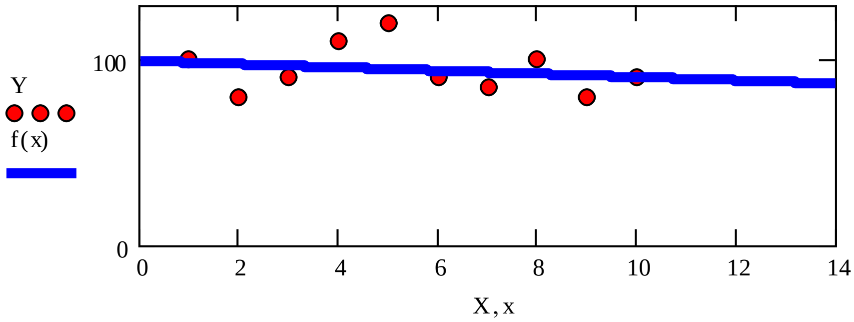
რადგან გაუსის მეთოდში საუკეთესო მიახლოების კრიტერიუმს წარმოადგენს გადახრათა კვადრატების ჯამის მინიმიზაცია, ამიტომ ამ მეთოდს უმცირეს კვადრატთა მეთოდი ეწოდება.

ორუცნობიანი (62) ფუნქციისათვის ექსტრემუმის აუცილებელი პირობები საშუალებას გვაძლევს შევადგინოთ წრფივ განტოლებათა სისტემა, რომელიც განსაზღვრავს მინიმუმის წერტილს $(a_{\min}, b_{\min})$

სისტემას აქვს შემდეგი სახე: $\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$;

(64)

შემდეგ, ერთ სურათზე ვაგებთ ორ გრაფიკს: ექსპერიმენტალურ წერტილებს და თეორიულ ოპტიმალურ წრფეს.



ექსპერიმენტალური წერტილები და თეორიული წრფე.

ეხლა განვიხილოთ, შესაბამისი სტანდარტული ამოცანები:

1) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4
Y	3	1	-1	-3	-5

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = -2x + 3}$; ბ) $y = x + 3$; გ) $y = 3x - 7$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{Y}_i \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-5) = 1 - 2 - 9 - 20 = -30;$

$\sum_i Y_i = 3 + 1 - 1 - 3 - 5 = -5;$

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 30a + 10b = -30 \\ 10a + 5b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y = -2x + 3.$$

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = -2x + 3.}$

2) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4
Y	-5	-3	-1	1	3

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = 2x - 5}$; ბ) $y = x - 5$; გ) $y = 3x - 8$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}.$$ ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot (-5) + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -3 - 2 + 3 + 12 = 10;$

$\sum_i Y_i = -5 - 3 - 1 + 1 + 3 = -5;$

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 10 \\ 10a + 5b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y = 2x - 5.$$

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = 2x - 5}$**.**

3) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4
Y	2	3	4	5	6

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = x + 2}$; ბ) $y = x - 4$; გ) $y = 3x + 2$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{Y}_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 3 + 8 + 15 + 24 = 50$;

$\sum_i Y_i = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20$;

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 50 \\ 10a + 5b = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 5 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = x + 2$.

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = x + 2}$**.**

4) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4
Y	-1	1	3	5	7

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = 2x - 1}$; ბ) $y = x - 1$; გ) $y = 3x - 7$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{Y}_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$;

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 1 + 6 + 15 + 28 = 50$;

$\sum_i Y_i = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 = 15$;

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 50 \\ 10a + 5b = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 5 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = 2x - 1$.

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = 2x - 1}$.

5) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	2	4	5	6
Y	1	3	5	6	7

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = x + 1}$; ბ) $y = x - 4$; გ) $y = 3x + 1$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \mathrm{Y}_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 4 + 16 + 25 + 36 = 81$;

$\sum_i X_i = 0 + 2 + 4 + 5 + 6 = 17$;

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 6 + 20 + 30 + 42 = 98;$

$\sum_i Y_i = 1 + 3 + 5 + 6 + 7 = 22;$

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 81a + 17b = 98 \\ 17a + 5b = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = x + 1.$

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = x + 1.}$

6) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4
Y	-5	-2	1	4	7

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = 3x - 5}$; ბ) $y = x - 5$; გ) $y = 3x - 7$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}.$$ ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot (-5) + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 7 = -2 + 2 + 12 + 28 = 40;$

$\sum_i Y_i = -5 - 2 + 1 + 4 + 7 = 5;$

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 30a + 10b = 40 \\ 10a + 5b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 4 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -5 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = 3x - 5.$

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = 3x - 5.}$

7) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	1	2	3	4	5
Y	-4	-3	-2	-1	0

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = x - 5}$; ბ) $y = 2x - 6$; გ) $y = 3x - 7$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ რომ $\sum_i X_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$;

$\sum_i X_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$;

$\sum_i X_i Y_i = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = -4 - 6 - 6 - 4 = -20$;

$\sum_i Y_i = -4 - 3 - 2 - 1 + 0 = -10$;

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 55a + 15b = -20 \\ 15a + 5b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11a + 3b = -4 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = x - 5$.

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = x - 5.}$

8) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	3	5	6
Y	2	4	8	12	14

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = 2x + 2}$; ბ) $y = x - 4$; გ) $y = 3x + 2$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = 0^2 + 1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 9 + 25 + 36 = 71$;

$\sum_i X_i = 0 + 1 + 3 + 5 + 6 = 15$;

$\sum_i X_i Y_i = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 6 \cdot 14 = 4 + 24 + 60 + 84 = 172$;

$\sum_i Y_i = 2 + 4 + 8 + 12 + 14 = 40$;

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 71a + 15b = 172 \\ 15a + 5b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 71a + 15b = 172 \\ 3a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases};$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = 2x + 2$.

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = 2x + 2}$.

9) მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	-2	-1	0	1	2
Y	1	0	-1	-2	-3

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ ერთი პასუხი:

ა) $\boldsymbol{y = -x - 1}$; ბ) $y = x - 4$; გ) $y = 3x - 7$; დ) $y = -4x + 1$.

ამოხსნა: შერჩევითი რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$y = ax + b$. კოეფიციენტების საპოვნელად გვაქვს წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{cases}$$

. ჩვენი მონაცემების შემთხვევაში, მივიღებთ

რომ $\sum_i X_i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10$;

$\sum_i X_i = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$;

$\sum_i X_i Y_i = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = -2 - 2 - 6 = -10$;

$\sum_i Y_i = 1 + 0 - 1 - 2 - 3 = -5$;

მაშინ მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} 10a = -10 \\ 5b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases} ;$$

მაშასადამე, შერჩევითი რეგრესიის წრფივ განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$y = -x - 1.$

პასუხი: ა) $\boldsymbol{y = -x - 1.}$

ამოცანები და სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ $\frac{A_8^2 - P_3}{C_5^2}$;

პასუხი: 5.

2. $\boldsymbol{A = \{10 -}$ **ზე ნაკლები მარტივი რიცხვების სიმრავლე};**

$\boldsymbol{B = \{4 -}$ **ზე მეტი კენტი რიცხვების სიმრავლე};**

გამოთვალეთ $\boldsymbol{n(A \cap B)}$.

პასუხი: 2.

3. აგორებენ ერთ კამათელს. გამოთვალეთ კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათელზე მოსული ციფრი არ აღემატება 5-ს.

პასუხი: $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$.

4. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 3 და 6. დიდ წრეში შემთხვევით ვარდება წერტილი. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ წერტილი ჩავარდება პატარა წრეში.

პასუხი: $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$.

5. მოცემულია $\boldsymbol{P_B(A) = P((A|B)) = 0.8;\ P(A \cap B) = 0.4.}$

გამოთვალეთ $\boldsymbol{P(B)}$.

პასუხი: $\boldsymbol{0.5.}$

6. $\boldsymbol{C}$ **და** $\boldsymbol{D}$ **დამოუკიდებელი ხდომილებებია.** $\boldsymbol{P(C) = 0.3;\ P(D) = 0.2.}$

გამოთვალეთ $\boldsymbol{P(C \cap D)}$.

პასუხი: 0.06

7. ერთი კამათელის გაგორების ცდაში, განვიხილოთ ხდომილებები:

$\boldsymbol{A}=\{$მოვიდა ციფრი 4 ან 5$\}$; $\boldsymbol{B}=\{$მოვიდა ციფრი 2 ან 6$\}$; რომელი ხდომილება უნდა ავიღოთ, რომ $\boldsymbol{A}$ და $\boldsymbol{B}$ ხდომილებებთან ერთად მივიღოთ სრული სისტემა ?

პასუხი: $\boldsymbol{E}=\{$მოვიდა ციფრი $\mathbf{1}$ ან $\mathbf{3}\}$.

8. საწყობში მიიტანეს ერთი და იგივე დასახელების 200 უცხოური და 300 ადგილობრივი წარმოების დეტალი. ალბათობა იმისა, რომ უცხოური წარმოების დეტალი სტანდარტულია არის 0.9, ხოლო ადგილობრივი წარმოებისა კი - 0.8. საწყობიდან შემთხვევით შეარჩიეს დეტალი. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დეტალი სტანდარტულია.

პასუხი: $\frac{21}{25}$.

9. სიმეტრიულ ლითონის მონეტას აგდებენ ოთხჯერ. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ საფასური მოვა ორჯერ.

პასუხი: 0.375

10. ოსტატი სტანდარტულ დეტალს ამზადებს 0.9 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დამზადებული 100 დეტალიდან, სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 87-ის და არაუმეტეს 96-ის. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით.

$$(\boldsymbol{\Phi(1)=0.3413;\ \Phi(2)=0.4772;\ \Phi(2.5)=0.4938;\ \Phi(3)=0.4986})$$

პასუხი: $\mathbf{0.8185}$

11. მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება.

ξ	-6	-3	5	9
P	2m	0.2	0.4	2m

გამოთვალეთ m.

პასუხი: $\boldsymbol{m=0.1}$

12. 36 ქაღალდიანი ბანქოს დასტიდან შემთხვევითად ირჩევენ 1 ცალს.

განვიხილოთ ხდომილებები: $A = \{$არ ამოვიდა ნახატი$\}$;

$B = \{$ამოვიდა ყვავი$\}$; $C = \{$ამოვიდა შავი$\}$.

გამოთვალეთ $n[(A - C) \cup (B \cap C)]$.

პასუხი: 19.

13. ყუთში 5 თეთრი 4 შავი და 6 ყვითელი ერთნაირი ზომის ბურთულაა. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ ერთ ბურთულას. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ამოღებული ბურთულა არაა ყვითელი ფერის.

აირჩიეთ სწორი პასუხი:

ა) $\frac{9}{15}$; ბ) $\frac{4}{15}$; გ) $\frac{3}{8}$; დ) $\frac{5}{15}$.

პასუხი: $\frac{9}{15}$.

14. ორი მსროლელი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად თითოჯერ ესვრის სამიზნეს. პირველი მსროლელისათვის სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.7, ხოლო მეორე მსროლელისათვის - 0.8. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ სამიზნე არ დაზიანდება.

პასუხი: 0.06.

15. მოცემულია ორი იდენტური ყუთი. პირველ ყუთში არის 15 თეთრი და 10 შავი ბურთულა, ხოლო მეორეში კი - 8 თეთრი და 17 შავი ერთნაირი ბურთულა. შემთხვევით შეირჩა ყუთი და ამოიღეს ერთი ბურთულა. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ეს ბურთულა შავია.

აირჩიეთ სწორი პასუხი:

ა) $\frac{27}{50}$; ბ) $\frac{17}{25}$; გ) $\frac{17}{30}$; დ) $\frac{10}{27}$.

პასუხი: $\frac{27}{50}$.

16. ერთი გასროლის შედეგად სამიზნის დაზიანების ალბათობაა 0.8. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ ოთხი გასროლიდან სამიზნე დაზიანდება ერთხელ.

პასუხი: 0.0256.

17. ოსტატი სტანდარტულ დეტალს ამზადებს 0.8 ალბათობით. გამოთვალეთ იმის ალბათობა, რომ დამზადებულ 400 დეტალს შორის, სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა იქნება არანაკლებ 300-ის და არაუმეტეს 330-ის. პასუხი დაამრგვალეთ მძიმის შემდეგ ოთხი ციფრის სიზუსტით. ($\boldsymbol{\Phi}(-x) = -\boldsymbol{\Phi}(x)$; $\boldsymbol{\Phi}(2) = \mathbf{0,4772}$;

$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1,25}) = \mathbf{0.3943}$; $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{2,5}) = \mathbf{0.4938}$; $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{3}) = \mathbf{0.4986}$).

აირჩიეთ სწორი პასუხი:

ა) 0.8881; ბ) 0.8929; გ) 0.971; დ) 0.8715

პასუხი: 0.8881.

18. მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება:

ξ	-2	1	4	5
P	0.5	0.3	0.1	0.1

გამოთვალეთ $\boldsymbol{M}(\xi)$.

პასუხი: 0.2.

19. მოცემულია დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება:

ξ	-3	2	3
$\boldsymbol{P}$	0.5	0.3	0.2

გამოთვალეთ $\boldsymbol{D}(\xi)$.

პასუხი: 7.41.

20. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. $\boldsymbol{M}(\xi) = \mathbf{2}$, $\boldsymbol{M}(\eta) = -\mathbf{3}$. გამოთვალეთ $\boldsymbol{M}(\mathbf{3}\xi - \mathbf{2}\xi\eta)$.

პასუხი: 18.

21. მოცემულია შერჩევა: 5, 3, 5, 7, 4, 5, 3, 3, 1, 9. იპოვეთ უცნობი მათემატიკური ლოდინის წერტილოვანი შეფასება $\overline{X}$.

პასუხი: 4.5.

22. მოცემულია შერჩევა: 3, 3, -1, 7, 4, -5, 2, 3. იპოვეთ უცნობი დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება S_n^2.

პასუხი: 11.25.

23. მოცემულია ორი რაოდენობრივი ნიშნის შერჩევა:

X	0	1	2	3	4	5
Y	1	3	5	7	9	11

დაწერეთ შერჩევითი რეგრესიის წრფის განტოლება.

აირჩიეთ სწორი პასუხი:

ა) $y = 2x + 1$; ბ) $y = 2x - 1$; გ) $y = x + 2$; დ) $y = x - 2$.

პასუხი: ა) $y = 2x + 1$.

გამოყენებული ლიტერატურა

1.Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, уч. пос., Москва, 1972

2.Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах, том 3, Санк-Петербург, 2003

შინაარსი