

პრ. ჭაღიძე, ე. ნითღანაძე

# მათემატიკური ანალიზის კურსი

ტომი I

საქართველოს სსრ უმაღლესი და საშუალო  
სპეციალური განათლების სამინისტროს მიერ  
დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ სტუდენტებისათვის

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა  
თბილისი 1989

მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოს პირველი ტომი (II გამოცემა) განკუთვნილია უნივერსიტეტის ფიზიკისა და მექანიკა-მათემატიკის ფაკულტეტების სტუდენტებისათვის. წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებსაც.

სახელმძღვანელოს I - V და XII - XIV თავები დაწერილია ელ. კელიძის მიერ, ხოლო VI - XI თავები ეკუთვნის ე. წითლანაძეს.

წიგნი წარმოადგენს მეორე გამოცემას.

რეცენზენტები: პროფ. ს. თოფურია

პროფ. ი. მეცხვარიშვილი

© თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1989

ყ 1702 05 0000  
M608(06)-88

ISBN - 5 - 511-00004-3

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის სტუდენტები დღემდე მოკლებული არიან მათემატიკური ანალიზის სახელმძღვანელოს მშობლიურ ენაზე. ასეთი სახელმძღვანელოს საკურობა დიდი ხანია მომწიფდა. ამ ხარვეზის შევსებას ვიწყებთ მათემატიკური ანალიზის კურსის წინამდებარე I ტომის გამოცემით. ამ ტომის შედგენისას ვხელმძღვანელობდით უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის პირველი ორი სემესტრის პროგრამით მათემატიკურ ანალიზში.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე უნივერსიტეტის მექანიკა-მათემატიკის, პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის ფაკულტეტებისა და უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებს.

როგორც ცნობილია, კლასიკური მათემატიკური ანალიზისათვის ერთ-ერთი ძირითადი განსაზღვრა არის ორ (ან რამდენიმე) ცვლადს შორის ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნება. იგი უშუალოდ დაკავშირებულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლესთან, რომლის სისტემატური თეორია დამუშავებული იყო გერმანელი მათემატიკოსების — დედეკინდისა და კანტორის მიერ.

ჩვენი სახელმძღვანელოს პირველ თავში განხილულია ნამდვილ რიცხვთა თეორიის ის საკითხები, რომლებიც საფუძვლად უდევს ფუნქციის ცნებას.

მეორე თავში — ფუნქციონალური დამოკიდებულების განსაზღვრა, დახასიათებულია იმ ფუნქციების ძირითადი სახეობანი, რომლებიც გამოიყენება დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის თეორიულსა და პრაქტიკულ საკითხებში.

მესამე თავში განხილულია ნამდვილ რიცხვთა უსასრულო მიმდევრობები. განსაზღვრულია მიმდევრობის ზღვარი, დამტკიცებულია რიცხვთა მიმდევრობის ზღვართან დაკავშირებული ძირითადი წინადადებები. აქვე განსაზღვრულია ნეპერის რიცხვი და ნატურალური ლოგარითმი.

სახელმძღვანელოს მეოთხე თავი შეიცავს ნამდვილ რიცხვთა მწკრივებს. განხილულია დადებით, ნიშანმონაცვლეობით და აბსოლუტურად და არააბსოლუტურად კრებად მწკრივებთან დაკავშირებული საკითხები. მოყვანილია მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი კლასიკური ნიშანი და განხილულია ძირითადი ოპერაციები მწკრივებზე.

მეხუთე თავში განხილულია მათემატიკური ანალიზის ორი ძირითადი საკითხი: ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის უწყვეტობა, აგრეთვე ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები, უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეების მნიშვნელოვანი საკითხები.

მეექვსე თავში გადმოცემულია ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი და მათი მოძებნის წესები, განხილულია უმაღლესი რიგის წარმოებულები და დიფერენციალები.

მეშვიდე თავი განკუთვნილია ფუნქციის გამოკვლევისათვის წარმოებულის გამოყენებით. შესწავლილია ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის ამოცანა და ფუნქციის გრაფიკის აგების ზოგიერთი საკითხი წარმოებულის გამოყენებით.

მერვე თავი განკუთვნილია განუსაზღვრელი ინტეგრალის განმარტებისა, ძირითადი თვისებებისა და მისი გამოთვლის უმარტივესი მეთოდებისათვის.

მეცხრე თავში გადმოცემულია რაციონალური ფუნქციის ინტეგრირების საკითხი. დამტკიცებულია, რომ რაციონალური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მეათე თავში განხილულია ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალები, რომლებიც ელემენტარულ ფუნქციებს წარმოადგენენ.

მეთერთმეტე თავი დათმობილი აქვს ზოგიერთი ტიპის ტრანსცენდენტური ფუნქციების ინტეგრებას.

სახელმძღვანელოს მეთორმეტე თავი ეძღვნება განსაზღვრული ინტეგრალის თეორიას. აქ დახასიათებულია ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი და დამტკიცებულია ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა. გამოყვანილია ინტეგრალის საშუალო მნიშვნელობის ფორმულები, განხილულია არასაკუთრივი ინტეგრალი და შესწავლილია მისი კრებადობის პირობები.

მეცამეტე თავი შეიცავს განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის საკითხებს და ინტეგრალის გამოთვლის მიახლოებით ფორმულებს.

უკანასკნელ მეთოთხმეტე თავში თავმოყრილია ინტეგრალის გამოყენების საკითხები გეომეტრიაში და ფიზიკაში.

თეორიული მასალის უკეთესად ათვისების მიზნით ყოველ თავს დართული აქვს სათანადო მაგალითები და ამოცანები. გარდა ამისა, სტუდენტთა პრაქტიკული ჩვევების გამოსამუშავებლად წიგნში შეტანილია მრავალი სავარჯიშო მასალა.

წიგნის ხელნაწერი წაიკითხა და სასარგებლო შენიშვნები გააკეთა დოცენტმა არჩილ სულაქველიძემ, რისთვისაც მას მადლობას ვუძღვნით. მადლობას მოვახსენებთ აგრეთვე კარლო წითლანაძეს და მერი შკუბულოიანს, რომლებიც დაგვეხმარნენ წიგნის გამოსაცემად მომზადებაში.

ავტორები სიამოვნებით მიიღებენ მკითხველის ყველა საქმიან შენიშვნას, რომელიც გათვალისწინებული იქნება სახელმძღვანელოს შემდგომ გამოცემაში.

**ვლ. ჰელიძე**

**ე. წითლანაძე**

## I ლათინური ანბანი

A	a—ა	N	n—ენ
B	b—ბე	O	o—ო
C	c—ცე	P	p—პე
D	d—დე	Q	q—ქუ
E	e—ე	R	r—ერ
F	f—ფე	S	s—ეს
G	g—გე (გე)	T	t—ტე
H	h—აჰ (ჰა)	U	u—უ
I	i—ი	V	v—ვე
J	j—ჯი (იოტი)	W	w—დუბლ-ვე
K	k—კა	X	x—იქს
L	l—ელ	Y	y—იგრეკ
M	m—ემ	Z	z—ზეტ

## II გერმანული ანბანი

A	ა—ალფა	N	ნ—ენი (ნიუ)
B	ბ—ბეტა	Ξ	ξ—ქსი
Γ	γ—გამა	O	o—ომიკრონი
Δ	δ—დელტა	Π	π—პი
E	ε—ეპსილონი	P	ρ—რო
Z	ζ—ძეტა	Σ	σ—სიგმა
H	η—ეტა	T	τ—ტაუ
Θ	θ—თეტა	Υ	υ—იპსილონი
I	ι—იოტა	Φ	φ—ფი
K	κ—კაპა	X	χ—ხი
Λ	λ—ლამბდა	Ψ	ψ—ფსი
M	μ—მი (მიუ)	Ω	ω—ომეგა

## ნამდვილ რიცხვთა თეორია

მათემატიკური ანალიზის განვითარებასთან დაკავშირებით XVII—XVIII საუკუნეებში ნამდვილი რიცხვები გამოკვლევის ძირითადი ობიექტი გახდა. XIX საუკუნის მეორე ნახევარში რ. დედეკინდის, გ. კანტორისა და კ. ვაიერშტრასის მიერ აგებულ იქნა ნამდვილ რიცხვთა ფორმალური თეორიები, რომლებიც ერთმანეთის ტოლფასია. ამ თეორიების აგებისას ცნობილად იგულისხმება რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. ამ თავში ჩვენ გადმოვცემთ დედეკინდის მიერ შექმნილ ნამდვილ რიცხვთა თეორიას.

ჯერ განვიხილოთ ზოგიერთი საკითხი სიმრავლეთა თეორიიდან.

### § 1. სიმრავლის ცნება

ყოველი მეცნიერება, რომელიც ზოგად თეორიას ავითარებს, შეიცავს რიგ საწყის ცნებას, რომლებსაც იგი ეყრდნობა. ყველა ძირითადი ცნების განსაზღვრა შეუძლებელია, ვინაიდან ცნების განსაზღვრა ხდება უკვე ცნობილი ცნებების საშუალებით, მაგრამ ეს პროცესი სადმე უნდა შეწყდეს, მივალთ რა საწყის ცნებებამდე, რომლებსაც ზუსტად ვერ განვსაზღვრავთ. საწყისი ცნებების აზრი მაგალითებით უნდა გავაშუქოთ.

მათემატიკის ერთ-ერთი საწყისი ცნებაა სიმრავლის ცნება. ამ ცნებას გავეცნოთ კონკრეტული მაგალითებით. შეიძლება ლაპარაკი იმ სტუდენტთა სიმრავლეზე, რომლებიც თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტში სწავლობენ; იმ თევზების სიმრავლეზე, რომლებიც შავ ზღვაში დაცურავენ და სხვა. სიტყვა სიმრავლის ნაცვლად შეიძლება ვიხმაროთ სიტყვები: ერთობლიობა, კლასი, კოლექცია, სისტემა, ოჯახი და სხვა.

იმ ობიექტებს, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. ეს ელემენტები შეიძლება სხვადასხვაგვარი იყოს: რიცხვები, წერტილები, ფუნქციები, სამკუთხედები და სხვ.

როდესაც ცნობილი არაა, თუ რა კონკრეტული თვისებისაა სიმრავლის ცალკეული ელემენტი, მაშინ სიმრავლეს აბსტრაქტული სიმრავლე ეწოდება.

მათემატიკურ დისციპლინას, რომელიც შეისწავლის სიმრავლეთა თვისებებს იმ ობიექტების ბუნებისაგან დამოუკიდებლად, რომელთაგან სიმრავლე შედგება, სიმრავლეთა თეორია ეწოდება. ამ თეორიის განვითარება დაიწყო XIX საუკუნის ბოლოს და XX საუკუნის დასაწყისში.

სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელია გერმანელი მათემატიკოსი გ. კანტორი (G. Cantor, 1845—1918). ამ თეორიის შექმნის საქმეში კანტორის წინამორბედი იყო ჩეხი მათემატიკოსი და ფილოსოფოსი ბ. ბოლცანო (B. Bolzano, 1781—1848).

თანამედროვე მათემატიკაში სიმრავლეთა თეორია ძირითადი მნიშვნელობისაა. ამ თეორიის იდეები და ცნებები შესულია მათემატიკის ყველა დარგში, ამიტომ შეუძლებელია სწორი წარმოდგენა ვიქონიოთ თანამედროვე მათემატიკაზე, თუ არ გავეცნობით სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს.

სიმრავლეები, ჩვეულებრივ, ლათინური ანბანის დიდი ასოებით აღინიშნება, სიმრავლის ელემენტები კი პატარა ასოებით. თუ  $A$  არის სიმრავლე, ხოლო  $a$  წარმოადგენს რომელიმე ობიექტს, მაშინ ჩაწერა

$$a \in A$$

ნიშნავს, რომ  $a$  არის  $A$  სიმრავლის ელემენტი და იკითხება „ $a$  შედის  $A$  სიმრავლეში“ ან „ $a$  ეკუთვნის  $A$  სიმრავლეს“ თუკი  $a$  არ ეკუთვნის  $A$  სიმრავლეს, მაშინ წერენ

$$a \notin A.$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $x$  არის  $A$  სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის ზოგადი აღნიშვნა, წერენ

$$A = \{x\}$$

და  $x$ -ს ეწოდება მოცემული სიმრავლის ცვლადი ელემენტი.

თუ შესაძლებელია სიმრავლის ყველა ელემენტის ჩამოთვლა, მაშინ ფიგურულ ფრჩხილებში ერთიმეორის მიყოლებით ჩაიწერება სიმრავლის ყველა ელემენტი. მაგალითად, თუ  $E$  ოთხკუთხედის გვერდთა სიმრავლეა და ეს გვერდები აღნიშნულია  $a, b, c, d$  ასოებით, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E = \{a, b, c, d\}.$$



§ 2. ცარიელი სიმრავლე. სიმრავლის ნაწილი

სიმრავლეთა თეორიაში განიხილება აგრეთვე ეგრეთ წოდებული ცარიელი სიმრავლე, ე. ი. ისეთი სიმრავლე, რომელიც არ შეიცავს არცერთ ელემენტს. ცარიელი სიმრავლის შემოღება სასარგებლოა ფორმულირებათა ზოგადობისა და სიმარტივის მიზნით, როდესაც ვლაპარაკობთ სიმრავლეზე, ზოგჯერ ცნობილი არაა ეს სიმრავლე შეიცავს თუ არა რაიმე ელემენტს.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,  $A$  არის თბილისში მცხოვრებ იმ ადამიანთა სიმრავლე, რომლებიც ერთდროულად არიან როგორც მათემატიკოსები და ექიმები, ასევე ინჟინრები და ალპინისტები. მაგრამ ასეთი ადამიანები შეიძლება თბილისში სრულებით არ აღმოჩნდეს. მაშინ  $A$  იქნება ცარიელი სიმრავლე.

ცარიელი სიმრავლე აღინიშნება  $\emptyset$  სიმბოლოთი. ცარიელ სიმრავლესთან ერთად გვხვდება ერთელემენტიანი სიმრავლეც. საჭიროა განვასხვავოთ ერთმანეთისაგან  $a$  ელემენტი და ერთელემენტიანი  $\{a\}$  სიმრავლე, რომ ავიცდინოთ წინააღმდეგობანი. მაგალითად, ვთქვათ,  $A$  სიმრავლე შედგება  $a, b, c$  ელემენტებისაგან. განვიხილოთ

$$E = \{A\}$$

სიმრავლე. ეს სიმრავლე ერთელემენტიანია: მისი ერთადერთი ელემენტია თვით  $A$  სიმრავლე. თუ ერთმანეთისაგან არ განვასხვავებთ  $E$  სიმრავლეს მის ერთადერთ  $A$  ელემენტისაგან, მაშინ წავაწყდებით წინააღმდეგობას, ვინაიდან, ერთი მხრით,  $E$  როგორც ერთელემენტიანი სიმრავლე შედგება მხოლოდ ერთი ელემენტისაგან, მეორე მხრივ კი  $A$  სიმრავლე შედგება სამი ელემენტისაგან.

განსახილვრავ 1.  $A$  სიმრავლეს ეწოდება  $B$  სიმრავლის ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე, თუ  $A$  სიმრავლის ყოველი ელემენტი  $B$  სიმრავლეს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში წერენ

$$A \subset B \text{ ანუ } B \supset A$$

და იკითხება:  $A$  სიმრავლე შედის  $B$  სიმრავლეში. ანუ  $B$  სიმრავლე შეიცავს  $A$  სიმრავლეს.

$\subset$  და  $\supset$  სიმბოლოებს ეწოდება ჩართვის სიმბოლოები.

თუ  $E$  რაიმე სიმრავლეა, მაშინ  $E$  და  $\emptyset$  სიმრავლეებს ეწოდება  $E$  სიმრავლის არასაკუთრივი ნაწილები;  $E$  სიმრავლის დანარჩენ ნაწილებს კი  $E$  სიმრავლის საკუთრივი ნაწილები.

მაგალითად, თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ფიზიკის ფაკულტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლე საკუთრივი ნაწილია ამავე უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლისა, ხოლო ყველა ფაკულტეტის სტუდენტთა სიმრავლე არასაკუთარი ნაწილია ამ უნივერსიტეტის ყველა სტუდენტის სიმრავლისა.

განსახილვრა 2. თუ  $A$  სიმრავლის ყოველი ელემენტი  $B$  სიმრავლეში შედის და, პირიქით,  $B$  სიმრავლის ყოველი ელემენტი  $A$  სიმრავლეს ეკუთვნის, მაშინ  $A$  და  $B$  ტოლი სიმრავლეები და წერენ

$$A = B.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ ჩართვის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი თვისებები: ნებისმიერი სამი  $A$ ,  $B$  და  $C$  სიმრავლისათვის მართებულია დამოკიდებულებანი:

1°  $\emptyset \subset A$ , ე. ი. ცარიელი სიმრავლე შედის ნებისმიერ სიმრავლეში.

2°  $A \subset A$ , ჩართვის რეფლექსურობა.

3° თუ  $A \subset B$  და  $B \subset A$ , მაშინ  $A = B$ .

4° თუ  $A \subset B$  და  $B \subset C$ , მაშინ  $A \subset C$ , ჩართვის ტრანზიტულობა.

თუ სიმრავლის ელემენტებია სიმრავლეები, მაშინ ვიხმართ ტერმინს „სიმრავლეთა სისტემა“

### § 3. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები

განვიხილოთ რაიმე ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლე. თუ  $A$  სიმრავლის ყოველ  $x$  ელემენტს რაიმე წესით შეესაბამება  $B$  სიმრავლის ერთი და მხოლოდ ერთი  $y$  ელემენტი ისე, რომ  $B$  სიმრავლის ყოველი  $y$  ელემენტი შესაბამებულია  $A$  სიმრავლის ერთ და მხოლოდ ერთ  $x$  ელემენტთან, მაშინ იტყვიან, რომ  $A$  და  $B$  სიმრავლეს შორის დამყარებულია ერთიერთ ცალსახა შესაბამისობა. ამ შემთხვევაში  $A$  სიმრავლეს  $B$  სიმრავლის ეკვივალენტური ეწოდება და წერენ  $A \sim B$ .

მოვიყვანოთ ეკვივალენტურ სიმრავლეთა მაგალითები.

1 ავიღოთ შემდეგი ორი სიმრავლე:

$$A = \{a, b, c, d\}, \quad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

თუ  $a$  ელემენტს შევუსაბამებთ  $\alpha$  ელემენტს,  $b$  ელემენტს— $\beta$  ელემენტს,  $c$  ელემენტს კი  $\gamma$  ელემენტს, ხოლო  $d$ -ს შევუსაბამებთ  $\delta$

ელემენტს, ამით  $A$  და  $B$  სიმრავლეს შორის დამყარებული იქნება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და, მაშასადამე,  $A \sim B$ .

2. განვიხილოთ ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლე

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

და ყველა დადებითი ლუწი რიცხვის სიმრავლე

$$M = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}.$$

ამ სიმრავლეთა შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეგვიძლია ასე დავამყაროთ:  $N$  სიმრავლის ყოველ  $n$  ელემენტს შევუბამოთ  $M$  სიმრავლის ელემენტი  $2n$ . მაშინ ამ შესაბამისობაში მონაწილეობას მიიღებს როგორც პირველი სიმრავლის, ისე მეორე სიმრავლის ყოველი ელემენტი. ცხადია, რომ  $N \sim M$ . ამრიგად,  $N$  სიმრავლე თავისი საკუთრივი  $M$  ნაწილის ეკვივალენტურია.

განსაზღვრა 3. სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო, თუ იგი თავისი რაიმე საკუთრივი ნაწილის ეკვივალენტურია.

ამ განსაზღვრის მიხედვით ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უსასრულოა. უსასრულო სიმრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ეკუთვნის გერმანელ მათემატიკოსს რ. დედეკინდს (R. Dedekind, 1831 — 1916).

სასრული სიმრავლე უარყოფის გზით განისაზღვრება. სიმრავლე სასრულია, თუ იგი უსასრულო არაა, ე. ი. სიმრავლე სასრულია, თუ არ არსებობს მისი საკუთრივი ნაწილი, რომელიც მთელი სიმრავლის ეკვივალენტურია.

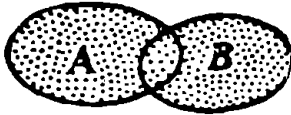
ზოგიერთი მეცნიერის აზრით უსასრულო სიმრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა მიუღებელია, ვინაიდან უსასრულო სიმრავლის ცნება განსაზღვრულია, როგორც პირველადი, ხოლო სასრული სიმრავლის ცნებას მიცემული აქვს მეორადი ხასიათი, იმ დროს, როდესაც ჯერ სასრული გვაქვს და შემდეგ უსასრულო. ასეთი მოსაზრება სწორი არაა, ვინაიდან უსასრულო გვაქვს სასრულთან ერთად, მისგან განუყრელად და არა სასრულის შემდეგ.

#### § 4. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

სიმრავლეებზე შეიძლება ვაწარმოოთ სხვადასხვა მოქმედება. თუ გვაქვს ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლე, შეგვიძლია ყველა ისეთი ობიექტის სიმრავლე შევადგინოთ, რომლებიც შედიან ან  $A$  ან  $B$  სიმრავლეში. ეს ის სიმრავლეა, რომელშიც გაერთიანდება  $A$  და  $B$  სიმრავლის ელემენტები. ასეთ სიმრავლეს ეწოდება  $A$  და  $B$  სიმ-

რავლის ჯამი ანუ გაერთიანება და აღინიშნება  $A \cup B$ . ამრიგად, გვაქვს შემდეგი

განსაზღვრა 4. ორი  $A$  და  $B$  სიმრავლის ჯამი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც  $A$  და  $B$  სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის (ნახ. 1).



ნახ. 1.

სიმრავლეთა ჯამის ცნება განვსაზღვრეთ ორი შესაკრებისათვის. ახლავთქვათ, გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . ამ სიმრავლეთა ჯამი ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან.

აღებულ სიმრავლეთა ჯამი აღინიშნება ასე:

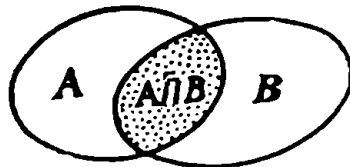
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ ან } \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა ჯამის მაგალითები.

1. ვთქვათ,  $A$  არის თბილისში მცხოვრებ ფიზიკოსთა სიმრავლე,  $B$  კი ამავე ქალაქის ალბინისტთა სიმრავლე. მაშინ  $A \cup B$  იქნება თბილისში მცხოვრებ იმ პირთა სიმრავლე, რომლებიც ფიზიკოსია ან ალბინისტი. კერძოდ, ამ სიმრავლეში ისეთი იდამიანებიც შედიან, რომლებიც ერთდროულად ფიზიკოსებიცაა და ალბინისტებიც.

2. ვთქვათ,  $A$  ყველა ლუწი რიცხვის სიმრავლეა,  $B$  — ყველა კენტი რიცხვისა,  $C$  კი ყველა მარტივი რიცხვის სიმრავლე. მაშინ  $A \cup B \cup C$  იქნება ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლე.

3. ვთქვათ,  $A$  ყველა იმ კენტი რიცხვის სიმრავლეა, რომლებიც სამზე არ იყოფა;  $B$  კი ყველა ლუწი რიცხვის, ხოლო  $C$  ყველა იმ მთელი რიცხვის სამრავლეა, რომლებიც სამზე იყოფა. ცხადია,  $A \cup B \cup C$  ყველა მთელი რიცხვის სიმრავლეა.



ნახ. 2.

განსაზღვრა 5.  $A$  და  $B$  სიმრავლის გადაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის როგორც  $A$ , ისე  $B$  სიმრავლეს (ნახ. 2).

$A$  და  $B$  სიმრავლეთა გადაკვეთა აღინიშნება  $A \cap B$  სიმბოლოთი.

თუ  $A$  ყველა მართკუთხედის სიმრავლეა,  $B$  კი ყველა რომბის სიმრავლე, მაშინ ამ ორი სიმრავლის გადაკვეთა  $A \cap B$  იქნება ყველა კვადრატის სიმრავლე.

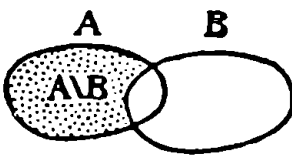
ახლა ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე სიმრავლე  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . ამ სიმრავლეთა გადაკვეთა ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა გადაკვეთა ასე აღინიშნება:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ ან } \bigcap_{k=1}^n A_k.$$

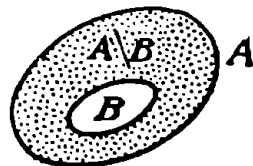
შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ აღებული სიმრავლეთა გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. მაგალითად, თუ  $A$  არის 10-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლე,  $B$  კი 12-წლიან მოსწავლეთა სიმრავლე, მაშინ  $A \cap B$  გადაკვეთა იქნება ცარიელი სიმრავლე, ვინაიდან შეუძლებელია რომელიმე მოსწავლე ერთდროულად იყოს 10 და 12 წლისა.

განსაზღვრა 6. ორ  $A$  და  $B$  სიმრავლეს ურთიერთარაგადამკვეთი ეწოდება, თუ მათი გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა.

განსაზღვრა 7.  $A$  და  $B$  სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება  $A$  სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც  $B$  სიმრავლეს არ ეკუთვნიან (ნახ. 3 და 4).



ნახ. 3.



ნახ. 4.

$A$  და  $B$  სიმრავლეთა სხვაობა აღინიშნება  $A \setminus B$  სიმბოლოთი.

სიმრავლეთა გამოკლების ოპერაცია არ წარმოადგენს, საზოგადოდ, სიმრავლეთა შეკრების ოპერაციის მიმართ შებრუნებულ ოპერაციას, ე. ი. საზოგადოდ

$$(A \setminus B) \cup B \neq A.$$

მართლაც, ვთქვათ,

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{1, 2, 5, 6, 7\}.$$

ცხადია, რომ

$$A \setminus B = \{3, 4\},$$

მაგრამ

$$(A \setminus B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

### § 5. სიდიდის ცნება

სიდიდის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელიც ყოველ ნაბიჯზე გვხვდება ბუნების მოვლენათა შესწავლისას. სიდიდის ცნება საწყის ცნებათა რიცხვს ეკუთვნის. სიდიდე შეიძლება გაიზომოს და გამოისახოს რიცხვით (ან რიცხვებით), ე. ი. სიდიდე ისეთი ობიექტია, რომლისადმი შეიძლება რაიმე სახით გამოყენებულ იქნას გაზომვის პროცესი.

ბუნებისმეტყველსა და ტექნიკოსს პრაქტიკულ საქმიანობაში ხვდება სხვადასხვა სიდიდე, როგორცაა, მაგალითად, სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, წონა, ტემპერატურა, სიჩქარე, ძალა და სხვა.

მათემატიკა არ განიხილავს კონკრეტულ სიდიდეებს. მათემატიკურ ანალიზში მოცემულია ზოგადი თეორია, რომელიც გამოიყენება სხვადასხვა ბუნების სიდიდეზე. ამის მისაღწევად ახდენენ სიდიდეთა კონკრეტული ბუნებისაგან აბსტრაქტიზაციას, ე. ი. მხედველობაში ღებულობენ მხოლოდ მათ რიცხვით მნიშვნელობებს. მათემატიკაში საზოგადოდ განიხილავენ აბსტრაქტულ სიდიდეს და ჩვეულებრივ მას აღნიშნავენ რაიმე სიმბოლოთი. რადგან მხედველობაში არაა მიღებული სიდიდის კონკრეტული ფიზიკური შინაარსი, მათემატიკური თეორიები ერთნაირი წარმატებით გამოიყენება ყოველ კონკრეტულ სიდიდეზე. სწორედ ესაა მათემატიკის ზოგადობა და უნივერსალობა.

### § 6. რაციონალური რიცხვები

მთელ და წილად რიცხვებს, როგორც დადებითს ისე უარყოფითს, ნულის ჩათვლით, რაციონალური რიცხვები ეწოდება. ყოველ რაციონალურ რიცხვს აქვს სახე  $\frac{m}{n}$ , სადაც  $m$  და  $n$  მთელი რიცხვებია, ამასთანავე  $n$  ნულისაგან განსხვავებულია.

აღვნიშნოთ რაციონალურ რიცხვთა ძირითადი თვისებები. თუ  $a$ ,  $b$  რა  $c$  ნებისმიერი რაციონალური რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს არითმეტიკის შემდეგ აქსიომებს:

1.  $a+b$  ცალსახად განსაზღვრული რიცხვია.
2.  $a+b=b+a$ , შეკრების კომუტატიურობის კანონი.
3.  $(a+b)+c=a+(b+c)$ , შეკრების ასოციურობის კანონი
4.  $ab$  ცალსახად განსაზღვრული რიცხვია.
5.  $ab=ba$ , გამრავლების კომუტატიურობის კანონი.
6.  $(ab)c=a(bc)$ , გამრავლების ასოციურობის კანონი.
7.  $a(b+c)=ab+ac$ , დისტრიბუტიულობის კანონი.
8. განტოლებას  $a+x=b$  აქვს ერთადერთი ამონახსნი.
9. თუ  $a \neq 0$ , მაშინ განტოლებას  $ax+b=0$  აქვს ერთადერთი ამონახსნი.

10. სამი დამოკიდებულებიდან  $a=b$ ,  $a > b$ ,  $a < b$  ადგილი აქვს ყოველთვის ერთსა და მხოლოდ ერთს.

11. თუ  $a < b$  და  $b < c$ , მაშინ  $a < c$ .

12. თუ  $a < b$ , მაშინ  $a+c < b+c$  — მონოტონურობის კანონი შეკრებისათვის.

13. თუ  $c$  დადებითია, მაშინ  $a < b$  უტოლობიდან გამომდინარეობს  $ac < bc$  უტოლობა, ხოლო თუ  $c$  უარყოფითია, მაშინ  $ac > bc$  — მონოტონურობის კანონი გამრავლებისათვის.

თუ  $a$ ,  $b$  და  $c$  რიცხვები ისეთია, რომ  $a < c < b$ , მაშინ ამბობენ, რომ  $c$  რიცხვი მოთავსებულია  $a$  და  $b$  რიცხვებს შორის.

**თეორემა 1.** ყოველ ორ რაციონალურ რიცხვს შორის მოთავსებულა უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $a$  და  $b$  რაციონალური რიცხვებია და  $a < b$ . ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ რიცხვების საშუალო არით-

მეტიკული  $a_1 = \frac{a+b}{2}$  მოთავსებულია  $a$  და  $b$  რიცხვებს შორის:

$a < a_1 < b$ . ამავე წესით მოვძებნით ახალ რაციონალურ  $a_2$  რიცხვს, რომელიც მოთავსებულია  $a$  და  $a_1$  რაციონალურ რიცხვებს შორის. ასევე,  $a$  და  $a_2$  რიცხვებს შორის ვიპოვით რაციონალურ  $a_3$  რიცხვს და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებულ თვისებას რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმკვრივის თვისება ეწოდება.

**თეორემა 2.** არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი ორის ტოლია.

**დამტკიცება.** დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ, არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი  $\frac{m}{n}$ , რომ

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

ამასთანავე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $m$  და  $n$  ურთიერთმარტივი რიცხვებია. აქედან

$$m^2 = 2n^2 \quad (6.1)$$

და, მაშასადამე,  $m$  წარმოადგენს ლუწ რიცხვს. ვთქვათ,  $m = 2k$ . სადაც  $k$  მთელი რიცხვია. მაშინ (6.1) ტოლობა მიიღებს სახეს

$$4k^2 = 2n^2,$$

საიდანაც  $n^2 = 2k^2$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ  $n$  ლუწი რიცხვია. გამოდის, რომ  $m$  და  $n$  ლუწი რიცხვებია, რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი ორის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ რაციონალური რიცხვები საკმარისი არაა ყველა სიდიდის გასაზომად. მაგალითად, მე-2 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ კვადრატის დიაგონალი და მისი გვერდი უთანაზომო მონაკვეთებია, ე. ი. მათ საერთო ზომა არა აქვთ. ასე რომ კვადრატის დიაგონალი და მისი გვერდი ერთი და იგივე ერთეულით ვერ გამოისახება მთელი რიცხვებით. ამიტომ, ასეთი და მსგავსი საკითხებისათვის შემოღებულ იქნა ირაციონალური რიცხვები. შემდეგ პარაგრაფში ჩვენ მოგვყავს ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრა, რომელიც დედეკინდს ეკუთვნის.

### § 7. ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრა

აღვნიშნოთ  $H$ -ით ყველა რაციონალური რიცხვის სიმრავლე და დავეყთ იგი ორ  $A$  და  $B$  ქვესიმრავლედ ისე, რომ დატული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1. არც ერთი  $A$  და  $B$  სიმრავლეებიდან ცარიელი არაა.
2.  $A$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $B$  სიმრავლის ყოველ რიცხვზე.
3.  $A$  სიმრავლეში არაა უდიდესი რიცხვი.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის განკვეთა და მას აღნიშნავენ  $A | B$  სიმბოლოთი.  $A$  სიმრავლეს ეწოდება ქვედა კლასი,  $B$  სიმრავლეს კი ზედა კლასი.

განვიხილოთ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის განკვეთის მაგალითები.



მაგალითი 1. ავიღოთ რაიმე რაციონალური  $r$  რიცხვი.  $A$  კლასში მოვათავსოთ ყველა ის რაციონალური რიცხვი, რომლებიც  $r$ -ზე ნაკლებია, ხოლო ყველა დანარჩენი რაციონალური რიცხვი  $B$  კლასს მივაკუთვნოთ. ცხადია,  $B$  კლასში მოთავსდება რიცხვი  $r$  და მასზე მეტი ყველა რაციონალური რიცხვი. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ  $A$  და  $B$  კლასად განკვეთას წარმოადგენს. ამ მაგალითში  $r$  რიცხვი  $B$  კლასის უმცირესი რიცხვია და იგი დაახასიათებს განკვეთას.

ახლა ისმის კითხვა: რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ყოველი განკვეთა იქნება თუ არა დაახასიათებული ერთი რაციონალური რიცხვით? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

მაგალითი 2. რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე დავეოთ ორ  $A$  და  $B$  კლასად შემდეგი წესის მიხედვით:  $A$  კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი ორზე ნაკლებია,  $B$  კლასში კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. დავამტკიცოთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ასეთ ორ  $A$  და  $B$  კლასად დაყოფა გვაძლევს განკვეთას.

ცხადია, განკვეთის პირველი და მეორე პირობები შესრულებულია. ვაჩვენოთ, რომ შესრულებულია მესამე პირობაც. ავიღოთ  $A$  კლასის ნებისმიერი რიცხვი  $a > 1$ . ცხადია, რომ

$$(a+1)^2 > 2,$$

აქედან

$$\frac{2-a^2}{2a+1} < 1.$$

ახლა შევარჩიოთ დადებითი რაციონალური რიცხვი  $h$  შემდეგი პირობით

$$h < \frac{2-a^2}{2a+1}.$$

რადგანაც  $h < 1$ , ამიტომ

$$h < \frac{2-a^2}{2a+h}.$$

აქედან. მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$(a+h)^2 < 2,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $a+h \in A$ . მაშასადამე,  $A$  კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. ამრიგად, გვაქვს  $A \cap B$  ვანკვეთა.

თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-2 თეორემას,  $B$  კლასში მოთავსებულია მხოლოდ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატი ორზე მეტია. დავამტკიცოთ, რომ  $B$  კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. ავიღოთ  $B$  კლასის ნებისმიერი რიცხვი  $b < 2$  და განვიხილოთ ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვი  $h$ , რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$h < \frac{b^2 - 2}{2b}.$$

ცხადია, რომ  $h < 1$  და ამიტომ

$$h < \frac{b^2 - 2}{2b - h}.$$

აქედან, მარტივი გარდაქმნების შემდეგ, მივიღებთ

$$2 < (b - h)^2.$$

მაშასადამე,  $b - h \in B$ , ე. ი.  $B$  კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი.

ამრიგად, გვაქვს ისეთი განკვეთაც, როცა ზედა კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი. ასეთი განკვეთის შემთხვევაში არ გვექნება რაციონალური რიცხვი, რომელიც მდებარეობს ქვედა და ზედა კლასების საზღვარზე, ასე რომ ამგვარი განკვეთა ერთი რაციონალური რიცხვით ვერ დახასიათდება.

განსაზღვრა 7.  $A|B$  განკვეთას ვუწოდოთ პირველ გვარისა, თუ  $B$  კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი, ხოლო განკვეთა მეორე გვარისაა, თუ  $B$  კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი.

ყოველ პირველ გვარის  $A|B$  განკვეთას შევუსაბამოთ  $B$  კლასის უმცირესი  $r$  რიცხვი, რომელსაც ვუწოდოთ გამკვეთი რიცხვი. ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ რაციონალური  $r$  რიცხვი განსაზღვრულია  $A|B$  განკვეთით. ცხადია, რომ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ნებისმიერი განკვეთა საზოგადოდ არ განსაზღვრავს რაციონალურ რიცხვს. განკვეთა რაციონალურ რიცხვს მაშინ განსაზღვრავს, თუ იგი პირველი გვარისაა. მეორე გვარის განკვეთის შემთხვევაში არ არსებობს გამკვეთი რიცხვი. ამიტომ ყოველ მეორე გვარის განკვეთას შევუსაბამოთ გარკვეული ობიექტი, რომელსაც ირაციონალური რიცხვი ვუწოდოთ და რომელიც განსაზღვრის მიხედვით მეტია  $A$  კლასის ყოველ რიცხვზე და ნაკლებია  $B$  კლასის ყოველ რიცხვზე.

ამრიგად, მეორე გვარის განკვეთა განსაზღვრავს ირაციონალურ რიცხვს, რომელიც წარმოადგენს  $A$  და  $B$  კლასების საზღვრით რიცხვს.

ცხადია, ირაციონალური რიცხვის შემოღების შემდეგ, რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ნებისმიერ განკვეთას შეესაბამება ერთი რიცხვი, რაციონალური ან ირაციონალური.

ყველა რაციონალური და ირაციონალური რიცხვის სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და მას, ჩვეულებრივ,  $Z$  სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე წარმოადგენს საძირკველს, რომელზედაც აგებულია მათემატიკა.

ახლა მოვიყვანოთ ირაციონალური რიცხვის მაგალითი. რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე დავეყოთ ორ  $A$  და  $B$  კლასად შემდეგი წესის მიხედვით:  $A$  კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატები ორზე ნაკლებია, ხოლო ყველა დანარჩენი რაციონალური რიცხვი მივაკუთვნოთ  $B$  კლასს. როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ამ შემთხვევაში გვაქვს მეორე გვარის  $A|B$  განკვეთა და ეს განკვეთა განსაზღვრავს ირაციონალურ რიცხვს. ეს ირაციონალური რიცხვი აღინიშნება  $\sqrt{2}$  სიმბოლოთი.

### § 8. ნამდვილ რიცხვთა ტოლობა და უტოლობა

იმის შემდეგ, რაც შემოღებულია ნამდვილი რიცხვის ცნება, დავადგინოთ თუ როგორ ნამდვილ რიცხვებს ეწოდება ტოლი და რას ნიშნავს, რომ ერთი ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია ან მეტია მეორე ნამდვილ რიცხვზე.

განსაზღვრა 8. ვთქვათ  $\alpha$  და  $\alpha'$  ნამდვილი რიცხვები განსაზღვრულია  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით შესაბამისად. ტოლობა  $\alpha = \alpha'$  იმას ნიშნავს, რომ  $\alpha$  იგივე ნამდვილი რიცხვია, რაც  $\alpha'$ , ე. ი.  $A = A'$ .

განსაზღვრა 9.  $\alpha$  ნამდვილი რიცხვი ნაკლებია  $\alpha'$  ნამდვილ რიცხვზე, თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი  $\varphi$ , რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის  $\alpha$  რიცხვის ზედა კლასს და  $\alpha'$  რიცხვის ქვედა კლასს, ე. ი.  $A$  სიმრავლე  $A'$  სიმრავლის საკუთრივი ნაწილია. ამ შემთხვევაში წერენ  $\alpha < \alpha'$ . თუ  $\alpha < \alpha'$ , მაშინ ამბობენ, რომ  $\alpha$  ნამდვილი რიცხვი მეტია  $\alpha$  ნამდვილ რიცხვზე და წერენ  $\alpha' > \alpha$ .

თუ  $\alpha$  და  $\alpha'$  არატოლი ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს ერთ-ერთს შემდეგი უტოლობებიდან:  $\alpha < \alpha'$  ან  $\alpha' < \alpha$ .

**თეორემა 3.** ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის მოთავსებულია უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა.

**დამტკიცება.** ვთქვათ, მოცემულია ორი ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი  $\alpha$  და  $\alpha'$ , რომლებიც განსაზღვრულია  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით შესაბამისად. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $\alpha < \alpha'$ . იმ შემთხვევაში, როცა  $\alpha$  და  $\alpha'$  რაციონალური რიცხვებია, თეორემა ზემოთ იყო დამტკიცებული. ამიტომ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია. ვთქვათ, მაგალითად, რომ  $\alpha$  ირაციონალურია. რადგანაც  $\alpha < \alpha'$ , ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი  $r$ , რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის  $B$  და  $A'$  კლასებს, ასე რომ

$$\alpha < r < \alpha'.$$

მეორე მხრით, რაკი  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვია, ამიტომ  $B$  კლასში არსებობს ისეთი რიცხვი  $r'$ , რომელიც ნაკლებია  $r$ -ზე. მაშასადამე,

$$\alpha < r' < r < \alpha'.$$

მაგრამ  $r'$  და  $r$  რაციონალურ რიცხვებს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა. ამიტომ  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვებს შორის მოთავსებულია უსასრულო სიმრავლე რაციონალური რიცხვებისა. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 4.** თუ  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  ნამდვილი რიცხვებია და  $\alpha < \alpha'$ ,  $\alpha' < \alpha''$ , მაშინ  $\alpha < \alpha''$ .

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $\alpha$ ,  $\alpha'$  და  $\alpha''$  რიცხვები განსაზღვრულია შესაბამისად  $A|B$ ,  $A'|B'$  და  $A''|B''$  განკვეთებით. რადგანაც  $\alpha < \alpha'$  და  $\alpha' < \alpha''$ , ამიტომ  $A$  არის  $A'$  სიმრავლის საკუთრივი ნაწილი, ხოლო  $A'$  წარმოადგენს  $A''$  სიმრავლის საკუთრივ ნაწილს. მაშასადამე,  $A$  საკუთრივი ნაწილია  $A''$  სიმრავლის, ე. ი.  $\alpha < \alpha''$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებული მე-3 თეორემა განსაკუთრებული მნიშვნელობისაა, ვინაიდან იგი გვიჩვენებს, რომ ყველა რაციონალური რიცხვის  $R$  სიმრავლე ყველგან მკვრივია  $Z$  სიმრავლეში, ე. ი. ორ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს რაციონალური რიცხვი.

განსაზღვრა 10. თუ  $\alpha$  ნამდვილი რიცხვია და  $\alpha > 0$ , მაშინ  $\alpha$  რიცხვს დადებითი ეწოდება, ხოლო, თუ  $\alpha < 0$ , მაშინ  $\alpha$  უარყოფითი რიცხვია.

### § 9. ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები

ეთქვას, მოცემულია ირაციონალური რიცხვი  $\alpha$ , რომელიც განსაზღვრულია  $A|B$  განკვეთით. დავუშვათ, რომ  $a$  და  $b$  რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც  $A$  და  $B$  კლასებს ეკუთვნიან შესაბამისად. თუ

$$b - a = \varepsilon,$$

სადაც  $\varepsilon$  მოცემული დადებითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ  $a$ -ს ეწოდება  $\alpha$  რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით  $\varepsilon$  სიზუსტით,  $b$ -ს კი  $\alpha$  რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით  $\varepsilon$  სიზუსტით.

**თეორემა 5.** თუ  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვი წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით, მაშინ ყოველი დადებითი რაციონალური  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რაციონალური რიცხვები  $a \in A$  და  $b \in B$ , რომ  $b - a = \varepsilon$ .

დამტკიცება. ავიღოთ  $A$  და  $B$  კლასებში შესაბამისად  $a_0$  და  $b_0$  რიცხვები და განვიხილოთ არითმეტიკული პროგრესია

$$a_0, a_0 + \varepsilon, a_0 + 2\varepsilon, \dots, a_0 + n\varepsilon, \dots \quad (9.1)$$

შევარჩიოთ მთელი დადებითი  $n$  რიცხვი ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$n > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}.$$

მაშინ

$$a_0 + n\varepsilon > b_0$$

და რაკი  $b_0 \in B$ , ამიტომ  $a_0 + n\varepsilon \in B$ . ვთქვათ,  $a_0 + k\varepsilon$  არის (9.1) პროგრესიის უმცირესი წევრი, რომელიც  $B$  კლასს ეკუთვნის. ასეთი  $a_0 + k\varepsilon$  რიცხვი უეჭველად არსებობს, ვინაიდან  $a_0 + n\varepsilon$  რიცხვი  $B$  კლასს ეკუთვნის და  $a_0 \in A$ : რიცხვი  $a_0 + (k-1)\varepsilon$  ეკუთვნის  $A$  კლასს. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$a = a_0 + (k-1)\varepsilon, \quad b = a_0 + k\varepsilon.$$

გვექნება  $b - a = \varepsilon$ . თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვი წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით, მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$

რიცხვისათვის მოიძებნება  $A$  და  $B$  კლასებში ისეთი ორი  $a$  და  $b$  რიცხვი, რომ  $b - a < \varepsilon$ .

მართლაც, ავიღოთ რაიმე დადებითი რაციონალური რიცხვი  $\varepsilon < \varepsilon$ . წინა თეორემის თანახმად,  $\varepsilon'$  რიცხვისათვის არსებობს  $A$  და  $B$  კლასებში შესაბამისად ისეთი  $a$  და  $b$  რიცხვები, რომ  $b - a = \varepsilon'$ . მაშასადამე,  $b - a < \varepsilon$ .

### § 10. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა

ნამდვილ რიცხვთა  $Z$  სიმრავლე დავყოთ ორ  $X$  და  $Y$  კლასად ისე, რომ დაცული იყოს შემდეგი სამი პირობა:

1. არც  $X$  და არც  $Y$  ცარიელი არაა.
2.  $X$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Y$  კლასის ყოველ რიცხვზე.
3.  $X$  კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს.

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ გვაქვს ნამდვილი რიცხვთა  $Z$  სიმრავლის განკვეთა და მას აღნიშნავენ  $X|Y$  სიმბოლოთი.

მეშვიდე პარაგრაფში განვიხილეთ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ისეთი განკვეთა, როდესაც ზედა კლასში არ არსებობს უმცირესი რიცხვი. ამ შემთხვევაში შემოვიყვანეთ ახალი ობიექტი, რომელსაც ირაციონალური რიცხვი ვუწოდეთ. ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ მოვახდენთ ნამდვილ რიცხვთა  $Z$  სიმრავლის განკვეთას, შეიძლება თუ არა  $Y$  კლასში არ არსებობდეს უმცირესი რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს დედეკინდის შემდეგი

**თეორემა 6.** როგორც გინდა იყოს ნამდვილ რიცხვთა  $Z$  სიმრავლის  $X|Y$  განკვეთა,  $Y$  კლასში ყოველთვის არსებობს უმცირესი რიცხვი.

**დამტკიცება.** აღვნიშნოთ  $A$  და  $B$  სიმბოლოებით  $X$  და  $Y$  კლასებში შემავალი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეები შესაბამისად. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ  $A$  და  $B$  კლასები შემდეგ სამ პირობას აკმაყოფილებენ:

1. არც  $A$  და არც  $B$  ცარიელი არაა.
2.  $A$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $B$  კლასის ყოველ რიცხვზე.

3.  $A$  კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. მაშასადამე, გვაქვს რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის  $A|B$  განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რომელიმე  $\alpha$  ნამდვილ რიცხვს.

დავამტკიცოთ, რომ  $\alpha \in Y$ . დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ  $\alpha \in X$ . რადგანაც  $X$  კლასში არაა უდიდესი რიცხვი, ამიტომ  $X$  კლასში

მოიძებნება ისეთი  $x$  რიცხვი, რომ  $x > \alpha$ . ახლა  $x$  და  $\alpha$  რიცხვებს შორის ავიღოთ რაციონალური რიცხვი  $r$ . მაშინ ეს რიცხვი ერთდროულად უნდა მიეკუთვნოს როგორც  $A$  კლასს, ისე  $B$  კლასსაც, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე,  $\alpha \in Y$ .

ახლა დავამტკიცოთ, რომ  $\alpha$  არის  $Y$  კლასის უმცირესი რიცხვი. დავუშვათ, რომ  $Y$  კლასში არსებობს ისეთი  $y$  რიცხვი, რომელიც ნაკლებია  $\alpha$ -ზე.  $y$  და  $\alpha$  რიცხვებს შორის ავიღოთ რაციონალური რიცხვი  $r$ :

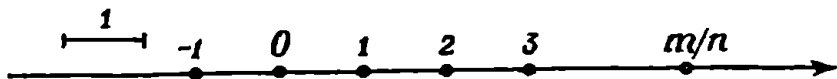
$$y < r < \alpha.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $r$  ეკუთვნის ერთდროულად  $A$  და  $B$  კლასებს, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე,  $\alpha$  წარმოადგენს  $Y$  კლასის უმცირეს რიცხვს. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ნამდვილ რიცხვთა  $Z$  სიმრავლეს აქვს ის თვისება, რომ ყოველი  $X|Y$  განკვეთისათვის  $Y$  კლასში არსებობს უმცირესი რიცხვი. ამის გამო ამბობენ, რომ  $Z$  არის უწყვეტი სიმრავლე. რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე არ წარმოადგენს უწყვეტ სიმრავლეს, ვინაიდან არსებობს  $R$  სიმრავლის ისეთი განკვეთაც, რომლის ზედა კლასში არაა უმცირესი რიცხვი.

§ 11. ნამდვილ რიცხვთა გეომეტრიული წარმოდგენა

დიდი მნიშვნელობა აქვს ნამდვილი რიცხვების გეომეტრიულ წარმოდგენას. იგი გვიჩვენებს, თუ რითაა გამოწვეული ირაციონალური რიცხვების შემოღების აუცილებლობა. ამისათვის ავიღოთ რაიმე წრფე და მასზე საწყისი  $O$  წერტილი (ნახ. 5). წრფის რაიმე



ნახ. 5.

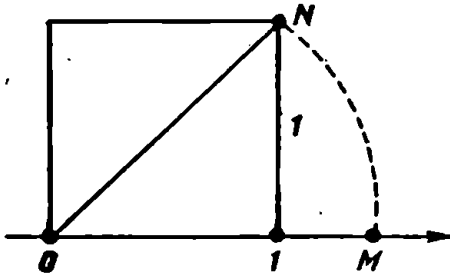
მონაკვეთი მივიჩნიოთ სიგრძის ერთეულად. მაშინ ყოველ რაციონალურ რიცხვს შეგვიძლია შევუსაბამოთ გარკვეული წერტილი.

ვთქვათ, მაგალითად, მოცემულია რაციონალური რიცხვი  $\frac{m}{n}$ .

სიგრძის ერთეულად მიჩნეული მონაკვეთი გავყოთ  $n$  ტოლ ნაწილად და სათაეიდან მოვზომოთ  $m$  ასეთი მონაკვეთი  $O$  წერტილის მარჯვნივ, თუ  $m$  დადებითია, ხოლო  $O$  წერტილის მარცხნივ, თუ  $m$  უარყოფითია ( $n$  ივულისხმება დადებითად). მიღებული მონაკვე-

თის ბოლო წერტილს შევესაბამოთ რაციონალური რიცხვი  $\frac{m}{n}$  თვით ამ წერტილს რაციონალური წერტილი ეწოდება. კერძოდ, 0 რიცხვს შეესაბამება 0 წერტილი.

რაციონალური წერტილებით ვერ ამოიწურება წრფის წერტილთა სიმრავლე. მართლაც, ავიღოთ კვადრატი, რომლის გვერდი სიგრძის ერთეულის ტოლსა და 0 სათავიდან მოვზომოთ მარჯვ-



ნახ. 6.

ნივ ამ კვადრატის დიაგონალი, მივიღებთ  $M$  წერტილს (ნახ. 6). დავამტკიცოთ, რომ  $M$  წერტილი რაციონალური არაა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $M$  რაციონალური წერტილია, მაშინ  $M$  წერტილს შეესაბამება გარკვეული რაციონალური რიცხვი  $\frac{m}{n}$ . ჩვენ

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $m$  და  $n$  ურთიერთმარტივი რიცხვებია. პითაგორას თეორემის თანახმად

$$OM^2 = ON^2 = 2,$$

ე. ი.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

მაგრამ მე-2 თეორემის თანახმად, ამ ტოლობას ადგილი არა აქვს. მაშასადამე,  $M$  არ არის რაციონალური წერტილი.

ამრიგად, წრფეზე აღმოვაჩინეთ ერთი არარაციონალური წერტილი. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ წრფეზე არსებობს უამრავი არარაციონალური წერტილი. თუ განვიხილავთ ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, მაშინ შეიძლება დავამყაროთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ამ სიმრავლესა და წრფის წერტილთა სიმრავლეს შორის, მხოლოდ უნდა ვიგულისხმოთ შემდეგი ორი აქსიომის შესრულება:

1. წრფის ყოველ ორ წერტილს შორის მოთავსებულია ერთი რაციონალური წერტილი მაინც.

2. თუ წრფის ყველა წერტილის სიმრავლეს დავყოფთ ისეთ ორ  $X^*$  და  $Y^*$  კლასად, რომ  $X^*$  კლასის ყოველი წერტილი ძევს



$Y^*$  კლასის ნებისმიერი წერტილის მარცხნივ და  $X^*$  კლასში არ არსებობს ამ კლასის ყველაზე მარჯვენა წერტილი, მაშინ  $Y^*$  კლასში არსებობს ყველაზე მარცხენა წერტილი.

უქანასკნელ აქსიომას უწოდებენ წრფის უწყვეტობის აქსიომას. ახლა შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 7.** წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი, ყოველ ნამდვილ რიცხვს კი გარკვეული წერტილი.

**დამტკიცება.** ჯერ შევნიშნოთ შემდეგი: თუ  $a^*$  და  $b^*$  წარმოდგენენ რაციონალური  $a$  და  $b$  რიცხვების შესაბამის წერტილებს წრფეზე, მაშინ  $a < b$  უტოლობიდან გამომდინარეობს. რომ  $a^*$  წერტილი მდებარეობს  $b^*$  წერტილის მარცხნივ.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის  $A|B$  განკვეთით. აღვნიშნოთ  $A^*$  და  $B^*$  სიმბოლოებით  $A$  და  $B$  კლასების რიცხვთა შესაბამისი წერტილთა სიმრავლეები. რადგანაც  $A$  კლასში არ არის უდიდესი რიცხვი, ამიტომ  $A^*$  კლასში არ იქნება ყველაზე მარჯვენა წერტილი. მაშასადამე, გვაქვს ყველა რაციონალური წერტილის სიმრავლის  $A^*|B^*$  განკვეთა.

აღვნიშნოთ,  $X^*$  სიმბოლოთი წრფის იმ წერტილთა სიმრავლე, როდლებიდან ყოველი მათგანი ეკუთვნის ან  $A^*$  სიმრავლეს ან მდებარეობს  $A^*$  სიმრავლის რაიმე წერტილის მარცხნივ. წრფის დანარჩენ წერტილთა სიმრავლე აღვნიშნოთ  $Y^*$  სიმბოლოთი. ცხადია, რომ

$$B^* = Y^*$$

დავამტკიცოთ, რომ  $X^*$  კლასის ყოველი წერტილი მოთავსებულია  $Y^*$  კლასის ნებისმიერი წერტილის მარცხნივ. ვთქვათ,  $x^* \in X^*$  და  $y^* \in Y^*$ . ადვილად ვაჩვენებთ, რომ  $x^*$  წერტილი ძვეს  $y^*$  წერტილის მარცხნივ. მართლაც,  $X^*$  კლასში მოიძებნება ისეთი რაციონალური წერტილი  $a^*$ , რომელიც ძვეს  $x^*$  წერტილის მარჯვნივ და რაჟი  $y^*$  წერტილი მდებარეობს  $a^*$  წერტილის მარჯვნივ. ამიტომ იგი ძვეს  $x^*$  წერტილის მარჯვნივ.

აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ  $X^*$  კლასში არ არსებობს ყველაზე მარჯვენა წერტილი. მაშასადამე, გვაქვს  $X^*|Y^*$  განკვეთა და მეორე აქსიომის თანახმად  $Y^*$  კლასში არსებობს ყველაზე მარცხენა  $a^*$  წერტილი. ეს წერტილი რაციონალური არაა.  $\alpha$  რიცხვს შევეუსაბამებთ  $a^*$  წერტილს. ამრიგად, ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეგვიძლია შევეუსაბამოთ წრფის გარკვეული წერტილი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველ არარაციონალურ  $\xi^*$  წერტილს შეესაბამება გარკვეული ირაციონალური რიცხვი. ამისათვის აღვნიშნოთ  $A^*$  სიმბოლოთი იმ რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც მდებარეობს  $\xi^*$  წერტილის მარცხნივ,  $B^*$  სიმბოლოთი კი დანარჩენ რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე. ცხადია,  $A^*$  სიმრავლე არ შეიცავს ყველაზე მარჯვენა წერტილს,  $B^*$  სიმრავლე კი ყველაზე მარცხენა წერტილს. თუ აღვნიშნავთ  $A$  ასოთი  $A^*$  სიმრავლის წერტილთა შესაბამის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს,  $B$  ასოთი კი  $B^*$  სიმრავლის წერტილთა შესაბამის რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს, ადვილად დავრწმუნდებით, რომ ყოველი რაციონალური რიცხვი ეკუთვნის ან  $A$ , ან  $B$  სიმრავლეს. გარდა ამისა,  $A$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $B$  კლასის ყოველ რიცხვზე და  $A$  კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი, ხოლო  $B$  კლასში არ არის უმცირესი რიცხვი. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს  $A|B$  განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს რაიმე ირაციონალურ რიცხვს. ამრიგად, წრფის ყოველ არარაციონალურ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ირაციონალური რიცხვი და, მაშასადამე, წრფის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული ნამდვილი რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულია.

წრფეს, რომლისთვისაც შესრულებულია 1 და 2 აქსიომები, რიცხვთა წრფე ან რიცხვთა ღერძი ეწოდება.

ზემოდამტკიცებული თეორემის საფუძველზე, ჩვენ არ განვასხვავებთ ერთმანეთისაგან ნამდვილ რიცხვს მისი შესაბამისი წერტილისაგან.

### § 12. ნამდვილ რიცხვთა უსაღებავი

მათემატიკურ ანალიზში საკირო ხდება ნამდვილ რიცხვებთან ერთად განვიხილოთ ორი „არასაკუთრივი რიცხვი“ —  $-\infty$  და  $+\infty$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ, განსაზღვრის მიხედვით, პირობას: ყოველი ნამდვილი  $a$  რიცხვისათვის

$$-\infty < a < +\infty.$$

ამის საფუძველზე ვწერთ. —  $-\infty < +\infty$ .

—  $\infty$  და  $+\infty$  ნიშნები იკითხება ასე: „მინუს უსასრულო“ და „პლუს უსასრულო“.

თუ ყველა ნამდვილი რიცხვის  $Z$  სიმრავლეს დავუმატებთ არასაკუთრივ —  $\infty$  და  $+\infty$  რიცხვებს, მივიღებთ ეგრეთ წოდებულ

გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს. მას აღვნიშნავთ  $\bar{Z}$  სიმბოლოთი.

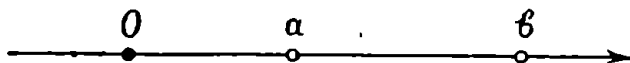
შემოვიღოთ ახლა ზოგიერთი ცნება, რომლებსაც შემდეგში გამოვიყენებთ. ვთქვათ,  $a$  და  $b$  ორი ნამდვილი რიცხვია და  $a < b$ .

განსაზღვრა 11.  $a$  და  $b$  რიცხვებს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, თვით  $a$  და  $b$  რიცხვების ჩათვლელად, ინტერვალს ეწოდება და იგი აღინიშნება  $]a, b[$  სიმბოლოთი. სხვანაირად რომ ვთქვათ,  $]a, b[$  ინტერვალს არის ყველა იმ  $x$  რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a < x < b.$$

$a$  და  $b$  რიცხვებს ეწოდება  $]a, b[$  ინტერვალის საზღვრები.

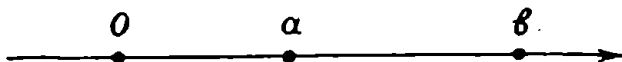
რიცხვთა ღერძზე  $]a, b[$  ინტერვალს შეესაბამება  $a$  და  $b$  წერტილებით შემოსაზღვრული მონაკვეთი  $a$  და  $b$  წერტილების ჩათვლელად (ნახ. 7).



ნახ. 7.

განსაზღვრა 12. მოცემულ ორ  $a$  და  $b$  რიცხვს შორის მოთავსებული ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს,  $a$  და  $b$  რიცხვების ჩათვლით, სეგმენტი ეწოდება და იგი  $[a, b]$  სიმბოლოთი აღინიშნება.  $a$  და  $b$  რიცხვებს  $[a, b]$  სეგმენტის ბოლოები ეწოდება.

რიცხვთა ღერძზე  $[a, b]$  სეგმენტს შეესაბამება  $a$  და  $b$  წერტილებით შემოსაზღვრული მონაკვეთი  $a$  და  $b$  წერტილების ჩათვლით (ნახ. 8).



ნახ. 8.

განსაზღვრა 13. ყველა იმ ნამდვილი  $x$  რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს  $a \leq x < b$  ან  $a < x \leq b$  ეწოდება ნახევარინტერვალს (ნახევარსეგმენტი).

ეს ნახევარინტერვალები აღინიშნება შესაბამისად  $[a, b[$  და  $]a, b]$  სიმბოლოებით.

განსაზღვრა 14. ყველა იმ ნამდვილი  $x$  რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას  $x > a$ , ეწოდება უსასრულო ინტერვალ მარცხენა  $a$  საზღვრით და აღინიშნება  $]a, +\infty[$  სიმბოლოთი.

ანალოგიურად განისაზღვრება  $] - \infty, a[$  ინტერვალ მარჯვენა  $a$  საზღვრით.

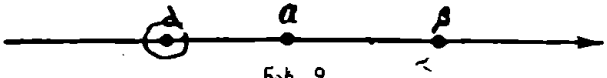
განსაზღვრა 15. ყველა იმ ნამდვილი  $x$  რიცხვის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ  $x \geq a$  უტოლობას, ეწოდება უსასრულო ნახევარსეგმენტი მარცხნიდან და აღინიშნება  $[a, +\infty[$  სიმბოლოთი.

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულო  $] - \infty, a]$  ნახევარსეგმენტი მარჯვნიდან.

განსაზღვრა 16. უსასრულო  $] - \infty, +\infty[$  ინტერვალ ეწოდება ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლეს, ხოლო უსასრულო  $[ - \infty, +\infty]$  სეგმენტი ეწოდება გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა  $\bar{Z}$  სიმრავლეს.

განსაზღვრა 17. ინტერვალებს, სეგმენტებს, ნახევარინტერვალებს, უსასრულო ინტერვალებსა და უსასრულო სეგმენტს ჩვენ ვუწოდებთ შუალედებს.

განსაზღვრა 18. რაიმე  $a$  რიცხვის მიდამო ეწოდება ყოველ  $]a, \beta[$  ინტერვალს, რომელიც  $a$  რიცხვს შეიცავს (ნახ. 9).



ნახ. 9.

განსაზღვრა 19. ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლის რაიმე  $x_0$  წერტილს ეწოდება ამ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს  $x_0$ -ის ისეთი მიდამო, რომელიც  $E$  სიმრავლეში შედის.

განსაზღვრა 20. ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლის რაიმე  $\xi$  წერტილს ეწოდება იზოლირებული წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც არ შეიცავს  $E$  სიმრავლის არც ერთ წერტილს, გარდა  $\xi$  წერტილისა.

განსაზღვრა 21. რაიმე  $a$  რიცხვის გაჩხვლევითი მიდამო ეწოდება  $a$  რიცხვის შემცველ ყოველ  $]a, \beta[$  ინტერვალს, რომლიდან ამოგდებულა  $a$  რიცხვი.

18. სიმეტრიული რიცხვები

რაციონალური  $\alpha$  რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი ეწოდება —  $\alpha$  რიცხვს. სიმეტრიული რიცხვის ცნება შეიძლება განზოგადებულ იქნეს ირაციონალური რიცხვის შემთხვევაშიაც.

ვთქვათ, მოცემულია  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით. აღენიშნოთ  $A$  კლასის რიცხვთა სიმეტრიული რიცხვების სიმრავლე  $B'$  სიმბოლოთი,  $B$  კლასის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე კი  $A'$  სიმბოლოთი. ცხადია, რომ  $A'$  და  $B'$  კლასები ცარიელი არაა.

თუ რომელიმე რაციონალური  $r$  რიცხვი  $A'$  კლასს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ნაკლები ყოველი რაციონალური  $r'$  რიცხვიც იმავე კლასს ეკუთვნის. მართლაც, რაკი  $r' < r$ , ამიტომ  $-r > -r'$ . მაგრამ რიცხვი  $-r$  ეკუთვნის  $B$  კლასს და, მაშასადამე,  $-r'$  რიცხვიც იმავე კლასს მიეკუთვნება. ამიტომ  $r' \in A'$ . ამის გარდა,  $A$  კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში გამოვიდოდა, რომ  $B$  კლასი შეიცავს უმცირეს რიცხვს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

აგრეთვე ადვილი დასამტკიცებელია, რომ  $B'$  კლასი არ შეიცავს უმცირეს რიცხვს. მაშასადამე, გვაქვს  $A'|B'$  განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს გარკვეულ ირაციონალურ  $\alpha'$  რიცხვს. ამ რიცხვს ეწოდება  $\alpha$  რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი და იგი აღინიშნება —  $\alpha$  სიმბოლოთი:

$$\alpha' = -\alpha.$$

ცხადია, თუ განვიხილავთ  $A'$  და  $B'$  კლასების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლეებს, მივიღებთ შესაბამისად  $B$  და  $A$  კლასებს. მაშასადამე,

$$-(-\alpha) = \alpha.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ  $\alpha > 0$ , მაშინ  $-\alpha < 0$ . ამის გარდა, თუ  $\alpha$  და  $\alpha'$  ისეთი ირაციონალური რიცხვებია. რომ  $\alpha < \alpha'$ . მაშინ  $-\alpha > -\alpha'$ .

§ 14. უზარუნავალი რიცხვები

თუ  $\alpha$  ნულისაგან განსხვავებული რაციონალური რიცხვია. მაშინ  $\frac{1}{\alpha}$  რიცხვს ეწოდება  $\alpha$  რიცხვის უზარუნავალი რიცხვი.

ახლა განვსაზღვროთ  $A|B$  განკვეთით წარმოდგენილი ირაციონალური  $\alpha$  რიცხვის უზარუნავალი რიცხვი.

ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ  $\alpha > 0$ . განვსაზღვროთ  $A'$  და  $B'$  კლასები შემდეგნაირად:  $A'$  კლასში მოვათავსოთ ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვი, რიცხვი 0 და  $B$  კლასის რიცხვთა შებრუნებული რიცხვები,  $B'$  კლასში კი  $A$  კლასში შემავალი დადებითი რიცხვების შებრუნებული რიცხვები. ცხადია, რომ  $A'$  და  $B'$  ცარიელი არაა. ადვილი შესამჩნევია, რომ თუ რომელიმე რაციონალური  $r$  რიცხვი  $A'$  კლასს ეკუთვნის, მაშინ მასზე ნაკლები ყოველი რაციონალური რიცხვიც იმავე კლასს ეკუთვნის. ამის გარდა,  $A'$  კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს,  $B'$  კლასი კი — უმცირესს. მაშასადამე, ჩვენ გვაქვს მეორე გვარის  $A'|B'$  განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რაიმე დადებით ირაციონალურ  $\alpha'$  რიცხვს, რომელსაც  $\alpha$  რიცხვის შებრუნებული რიცხვი ეწოდება. იგი აღინიშნება  $\frac{1}{\alpha}$  სიმბოლოთი:

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha}. \quad (14.1)$$

ცხადია, რომ (14.1) ტოლობიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\alpha = \frac{1}{\alpha'}.$$

თუ ირაციონალური  $\alpha$  რიცხვი უარყოფითია, მაშინ მის შებრუნებული ეწოდება რიცხვს

$$-\left(\frac{1}{-\alpha}\right).$$

### § 15. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა რაიმე  $E$  სიმრავლე. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 21. ნამდვილ  $x$  რიცხვს ვუწოდოთ  $E$  სიმრავლის მაქორანტი, თუ  $E$  სიმრავლის არც ერთი რიცხვი  $x$ -ს არ აღემატება, ხოლო  $a$  რიცხვს ვუწოდოთ  $E$  სიმრავლის მინორანტი, თუ  $E$  სიმრავლის არც ერთი რიცხვი  $a$ -ზე ნაკლები არაა.

განსაზღვრა 22. ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს  $E$  სიმრავლის რაიმე  $x$  მაქორანტი, ხოლო  $E$  სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, თუ არსებობს  $E$  სიმრავლის რაიმე  $a$  მინორანტი.

განსაზღვრა 23. ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული, თუ იგი შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან.

მაშასადამე, თუ  $E$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი  $[a, b]$  სეგმენტი, რომელიც შეიცავს  $E$  სიმრავლის ყველა რიცხვს.

ყველა დადებითი ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული, ვინაიდან არ არსებობს ნამდვილი რიცხვი, რომელიც ყოველ დადებით რიცხვს აღემატებოდეს.

ყველა უარყოფითი მთელი რიცხვის სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია, ხოლო იგი ქვემოდან შემოსაზღვრული არ არის.

ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე შემოსაზღვრული არაა არც ზემოდან და არც ქვემოდან.

განსაზღვრა 24. ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლის მაჟორანტთა შორის უმცირესს ეწოდება ამ სიმრავლის ზედა საზღვარი.  $E$  სიმრავლის მინორანტთა შორის უდიდესს  $E$  სიმრავლის ქვედა საზღვარი ეწოდება.

$E$  სიმრავლის ზედა საზღვარი აღინიშნება  $\sup E$  და იკითხება „სუპრემუმ  $E$ “, ხოლო ქვედა საზღვარი აღინიშნება  $\inf E$  და იკითხება „ინფიმუმ  $E$ “.

თუ  $E$  სიმრავლე ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული, მაშინ დავწერთ

$$\sup E = +\infty.$$

ანალოგიურად, თუ  $E$  სიმრავლე ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ დავწერთ  $\inf E = -\infty$ .

ცხადია, თუ  $E$  სიმრავლეში არსებობს უდიდესი რიცხვი, მაშინ ეს რიცხვი იქნება ზედა საზღვარი.

სიმრავლეს შეიძლება არ ჰქონდეს უდიდესი რიცხვი, მაგრამ ჰქონდეს ზედა საზღვარი. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}.$$

ამ სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი. დავამტკიცოთ, რომ  $E$  სიმრავლის ზედა საზღვარია 1. ცხადია 1 არის  $E$  სიმრავლის მაჟორანტი, ვინაიდან ამ სიმრავლის არც ერთი რიცხვი არ აღემატება ერთს. გარდა ამისა, 1 წარმოადგენს მაჟორანტებს შორის

უმცირესს. მართლაც, განვიხილოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი  $x < 1$ . ავიღოთ  $x$ -სა და 1-ს შორის რაიმე რაციონალური რიცხვი  $r$ :  $x < r < 1$ . შევარჩიოთ მთელი დადებითი რიცხვი  $n$  შემდეგი პირობით:

$$n > \frac{r}{1-r}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$r < \frac{n}{n+1}.$$

რადგანაც  $x < r$ , ამიტომ

$$x < \frac{n}{n+1}.$$

მაშასადამე, ერთზე ნაკლები რიცხვი არ შეიძლება იყოს  $E$  სიმრავლის მაქორანტი. ამიტომ რიცხვი 1 წარმოადგენს  $E$  სიმრავლის ზედა საზღვარს.

თუ  $E$  სიმრავლეში არსებობს უმცირესი რიცხვი, მაშინ ეს რიცხვი იქნება ქვედა საზღვარი.

სიმრავლეში შეიძლება არ იყოს უმცირესი რიცხვი, მაგრამ მას ჰქონდეს ქვედა საზღვარი. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$E = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

ამ სიმრავლეში არ არის უმცირესი რიცხვი, მაგრამ მოცემული სიმრავლის ქვედა საზღვარია რიცხვი 0.

ახლა ისმის კითხვა: ყოველ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს თუ არა ზედა და ქვედა საზღვრები? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

**თეორემა 8.** ყოველ ზემოდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზედა საზღვარი.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $E$  ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა. თუ  $E$  სიმრავლეში არსებობს უდიდესი რიცხვი, მაშინ თეორემა ცხადია.

ვიგულისხმობთ, რომ  $E$  სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი. ყველა ნამდვილი რიცხვის  $Z$  სიმრავლე დავყოთ ორ  $X$  და  $Y$  კლასად შემდეგი წესის მიხედვით:  $Y$  კლასში მოვათავსოთ ყველა ისეთი ნამდვილი რიცხვი, რომლებიც აღემატებიან  $E$  სიმრავლის ყოველ რიცხვს,  $X$  კლასში კი დანარჩენი ნამდვილი რიცხვები. ცხადია,  $E = X$ .



$Z$  სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ  $X$  და  $Y$  კლასად გვაძლევს განკვეთას. მართლაც,

1. არც  $X$  და არც  $Y$  ცარიელი არაა.

2.  $X$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Y$  კლასის ნებისმიერ რიცხვზე. მართლაც, ავიღოთ  $X$  კლასის ნებისმიერი  $x$  რიცხვი.  $E$  სიმრავლე შეიცავს ისეთ  $p$  რიცხვს, რომ  $p \geq x$ , ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში  $x$  მიეკუთვნებოდა  $Y$  კლასს. აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ  $X$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Y$  კლასის ნებისმიერ რიცხვზე.

3.  $X$  კლასი არ შეიცავს უდიდეს რიცხვს. მართლაც, ავიღოთ  $X$  კლასის ნებისმიერი  $\xi$  რიცხვი. მაშინ  $E$ -ში შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი რიცხვი  $p$ , რომ  $p \geq \xi$ , ვინაიდან წინა ღმდეგ შემთხვევაში მიეკუთვნებოდა  $Y$  კლასს. რაკი  $E$  სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი; ამიტომ  $E$ -ში მოიძებნება ისეთი  $p'$  რიცხვი, რომელიც  $p$ -ზე მეტია და, მაშასადამე,  $p' > \xi$ . მაგრამ  $p' \in X$ . ამიტომ  $X$  კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი.

ამრიგად, შესრულებულია განკვეთის სამივე პირობა. მაშასადამე, გვაქვს  $X|Y$  განკვეთა. ეს განკვეთა განსაზღვრავს რაიმე ნამდვილ  $L$  რიცხვს. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ  $L$  წარმოადგენს  $E$  სიმრავლის ზედა საზღვარს. მართლაც, ერთი მხრით,  $E$  სიმრავლის არც ერთი ელემენტი არ აღემატება  $L$  რიცხვს, ე. ი.  $L$  არის  $E$  სიმრავლის მაჟორანტი. მეორე მხრით, არც ერთი ნამდვილი რიცხვი  $x < L$  არ შეიძლება იყოს  $E$  სიმრავლის მაჟორანტი. მაშასადამე,  $L$  არის  $E$  სიმრავლის ზედა საზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 9. ქვემოთდან შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ქვედა საზღვარი.

თეორემა 10. თუ  $E$  ზემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და  $E_1 \subset E$ , მაშინ

$$\sup E_1 \leq \sup E. \quad (15.1)$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ  $E$  სიმრავლის ნებისმიერი  $a$  მაჟორანტი წარმოადგენს  $E_1$  სიმრავლის მაჟორანტსაც. კერძოდ,  $\sup E$  იქნება  $E_1$  სიმრავლის მაჟორანტი და რაკი სიმრავლის ზედა საზღვარია ამ სიმრავლის მაჟორანტთა შორის უმცირესია, ამიტომ მართებულია (15.1) დამოკიდებულება.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 11.** თუ  $E$  ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლეა და  $E_1 \subset E$ , მაშინ

$$\inf E_1 \geq \inf E.$$

**§ 10. სუპრემუმის სიგრძე**

ვთქვათ, მოცემულია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტი. თუ  $\alpha$  და  $\beta$  რაციონალურა რიცხვებია, მაშინ სეგმენტს რაციონალური სეგმენტი ეწოდება,  $\beta - \alpha$  სხვაობას კი  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის სიგრძე და აღინიშნება  $|[\alpha, \beta]|$  სიმბოლოთი.

ახლა დავუშვათ, რომ  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია. როგორც ვიცით  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვებს შორის არსებობს უსასრულო სიმრავლე რაციონალურა რიცხვებისა.

აღვნიშნოთ  $E$  ასეთი  $b - a$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $a$  და  $b$  რაციონალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$a < a < b < \beta.$$

ცნადია,  $E$  სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, მას აქვს ზედა საზღვარა. ამ ზედა საზღვარა ეწოდება  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის სიგრძე ანუ მანძალი  $\alpha$  და  $\beta$  წერტილებს შორის. ამ შემთხვევაშიც  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის სიგრძე აღინიშნება  $|[\alpha, \beta]|$ ,  $\alpha$  და  $\beta$  წერტილებს შორის მანძილი კი  $\rho(\alpha, \beta)$  სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრავს მიხედვით

$$\rho(\alpha, \beta) = |[\alpha, \beta]|.$$

თუ მოცემულია  $]\alpha, \beta[$  ინტერვალი ან  $[\alpha, \beta[$  ან  $]\alpha, \beta]$  ნახევრად-ინტერვალი, მაშინ განსაზღვრავს მიაედვით

$$|]\alpha, \beta[| = |[\alpha, \beta[| = |]\alpha, \beta]| = \rho(\alpha, \beta),$$

სადაც  $]\alpha, \beta[$  სიმბოლოთი აღნიშნულაა  $]\alpha, \beta[$  ინტერვალის სიგრძე.

**თეორემა 12.** ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა ორი  $P$  და  $Q$  სიმრავლე, რომლებიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს: 1)  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Q$  სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე; 2) ყოველი დადებითი  $\epsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $P$  და  $Q$  სიმრავლეში ისეთი ორი რიცხვი  $p$  და  $q$ , რომ  $\rho(p, q) < \epsilon$ . მაშინ

$$\sup P = \inf Q. \tag{16.1}$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ  $P$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან,  $Q$  კი ქვემოდან. ამიტომ  $\sup P$  და  $\inf Q$  სასრული რიცხვებია. ვთქვათ,

$$\alpha = \sup P, \beta = \inf Q.$$

რომ იყოს  $\beta < \alpha$ , მაშინ  $[\beta, \alpha]$  შუალედში მოიძებნება წერტილი  $x \in P$ , ხოლო  $[\beta, x]$  შუალედში წერტილი  $y \in Q$  მაშასადამე, გვექნებოდა  $y < x$ , რაც პირობას ეწინააღმდეგება.

ამრავალ,  $\alpha \leq \beta$ . რომ იყოს  $\alpha < \beta$ , მაშინ  $P$  და  $Q$  სიმრავლეებში მოიძებნება ისეთი რიცხვები  $p \in P$  და  $q \in Q$ , რომ  $\rho(p, q) \geq \varepsilon$ , სადაც

$$\varepsilon = \rho(\alpha, \beta).$$

ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე,  $\alpha = \beta$ . თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლის არც ერთი რიცხვი არ აღემატება  $\xi$  რიცხვს, მაშინ  $\sup E \leq \xi$ . ასევე, თუ  $E$  სიმრავლის არც ერთი რიცხვი ნაკლებია არაა  $\eta$  რიცხვზე, მაშინ

$$\inf E \geq \eta.$$

აღვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ ნამდვილი  $\alpha$  რიცხვი წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით, მაშინ

$$\sup A = \inf B = \alpha.$$

§ 17. ნამდვილ რიცხვთა ჯამი

ვთქვათ,  $\alpha$  და  $\alpha'$  ნამდვილი რიცხვებია, რომლებიც წარმოდგენილია  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით შესაბამისად. განვიხილოთ  $\alpha + \alpha'$  სახის რიცხვთა  $P$  სიმრავლე, სადაც  $a \in A$  და  $a' \in A'$ ;  $Q$ -თი აღვნიშნოთ  $b + b'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $b \in B$ ,  $b' \in B'$ . დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P = \inf Q. \quad (17.1)$$

რადგანაც  $\alpha < b$  და  $\alpha' < b'$ , ამიტომ  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Q$  სიმრავლის ყოველ რიცხვზე. ამის გარდა, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვები  $p \in P$ ,  $q \in Q$ , რომ

$$\rho(p, q) < \varepsilon.$$

მართლაც, მე-5 თეორემის თანახმად მოიძებნება ისეთი რიცხვები  $a_0 \in A$ ,  $b_0 \in B$ ,  $a'_0 \in A'$ ,  $b'_0 \in B'$ , რომ

$$b_0 - a_0 = \frac{\varepsilon'}{2}, \quad b'_0 - a'_0 = \frac{\varepsilon'}{2},$$

სადაც  $\varepsilon'$  არის  $\varepsilon$ -ზე ნაკლები დადებითი რაციონალური რიცხვი. ამ ორი ტოლობის წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$(b_0 + b'_0) - (a_0 + a'_0) = \varepsilon' < \varepsilon.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს  $p = a_0 + a'_0$ ,  $q = b_0 + b'_0$ , გვექნება

$$p(q) < \varepsilon.$$

სადაც  $p \in P$ ,  $q \in Q$ . მაშასადამე, მე-12 თეორემის თანახმად, მართებულია (17.1) ტოლობა. რიცხვს  $\inf Q$  ეწოდება  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვების ჯამი და იგი აღინიშნება  $\alpha + \alpha'$  სიმბოლოთი.

ცხადია, თუ  $\alpha$  და  $\alpha'$  რაციონალური რიცხვებია, მაშინ  $\alpha + \alpha'$  ჯამის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა რაციონალურ რიცხვთა ჯამის ჩვეულებრივ განსაზღვრას. მართლაც,  $Q$  სიმრავლის აგების მიხედვით, ამ შემთხვევაში  $\alpha + \alpha'$  რიცხვი  $Q$  სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი  $Q$  სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია. მაშასადამე,

$$\alpha + \alpha' = \inf Q.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ თუ  $\alpha$  რაციონალური რიცხვია, მაშინ  $\alpha + \alpha'$  წარმოადგენს  $Q_0$  სიმრავლის ქვედა საზღვარს, სადაც  $Q_0$  არის  $\alpha + \beta'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე ( $\beta'$  გაირჩენს  $B'$  სიმრავლის ყველა რიცხვს). მართლაც,  $P$  და  $Q_0$  სიმრავლეები აკმაყოფილებს მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P = \inf Q_0 = \alpha + \alpha'.$$

კერძოდ, აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$0 + \alpha = \alpha.$$

ადვილი შესამჩნევია. რომ მართებულია კომუტატიურობის კანონი. ე. ი.

$$\alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha.$$

**თეორემა 13.** თუ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ნამდვილი რიცხვებია და  $\alpha < \beta$ ,  $\alpha' < \beta'$ , მაშინ  $\alpha + \alpha' < \beta + \beta'$ .

დამტკიცება. ავიღოთ რაციონალური რიცხვები  $r, r_1, r'$  და  $r'_1$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$\alpha < r < r_1 < \beta, \alpha' < r' < r'_1 < \beta'.$$

ვთქვათ,  $P$  არის  $\alpha + \alpha'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $\alpha$  ნებისმიერი რაციონალურია რიცხვია, რომელიც  $\alpha$ -ზე ნაკლებია. ხოლო  $\alpha'$  წარმოადგენს  $\alpha'$  რიცხვზე ნაკლებ ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვს. შემდეგ, აღვნიშნოთ  $Q$  ასოთი  $\beta + \beta'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $\beta$  ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც  $\beta$ -ზე ნაკლები არ არის, ხოლო  $\beta'$  ნებისმიერი რაციონალური რიცხვია, რომელიც  $\beta'$ -ზე ნაკლები არ არის. მაშინ

$$\sup P = \alpha + \alpha', \inf Q = \beta + \beta'. \quad (17.2)$$

ცხადია, რომ

$$\alpha + \alpha' < r + r' < r_1 + r'_1 < \beta + \beta'.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (17.2) ტოლობებს, მე-12 თეორემის შედეგის თანახმად გვექნება

$$\alpha + \alpha' \leq r + r' < r_1 + r'_1 \leq \beta + \beta',$$

ე. ი.  $\alpha + \alpha' < \beta + \beta'$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 14.** ნებისმიერი სამი ნამდვილი  $\alpha_1, \alpha_2$  და  $\alpha_3$  რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3). \quad (17.3)$$

დამტკიცება. აღვნიშნოთ  $A_i$  სიმბოლოთა ( $i=1, 2, 3$ ) ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც  $\alpha_i$  რიცხვზე ნაკლებია,  $B_i$  სიმბოლოთი კი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც  $\alpha_i$  რიცხვზე ნაკლები არ არიან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P = \{(x+y)+z\}, Q = \{(x'+y')+z'\},$$

სადაც

$$x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3, x' \in B_1, y' \in B_2, z' \in B_3.$$

დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P = \inf Q = (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3. \quad (17.4)$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. ვთქვათ,  $\varepsilon'$  დადებითი რაციონალური რიცხვია, რომელიც ნაკლებია  $\varepsilon$ -ზე. მე-5 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვები

$$x_0 \in A_1, y_0 \in A_2, z_0 \in A_3, x'_0 \in B_1, y'_0 \in B_2, z'_0 \in B_3.$$

რომ ადგილი ექნება ტოლობებს

$$x'_0 - x_0 = \frac{\varepsilon'}{3}, \quad y'_0 - y_0 = \frac{\varepsilon'}{3}, \quad z'_0 - z_0 = \frac{\varepsilon'}{3}.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$(x'_0 + y'_0) + z'_0 - [(x_0 + y_0) + z_0] = \varepsilon'.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$p = (x_0 + y_0) + z_0, \quad q = (x'_0 + y'_0) + z'_0.$$

გვექნება

$$\rho(p, q) = \varepsilon' < \varepsilon, \quad p \in P, \quad q \in Q.$$

მაშასადამე, მე-12 თეორემის მიხედვით

$$\sup P = \inf Q. \quad (17.5)$$

შემდეგ, რაკი

$$x + y < \alpha_1 + \alpha_2 \leq x' + y', \quad s < \alpha_3 \leq s',$$

ამიტომ მე-13 თეორემის თანახმად

$$(x + y) + s < (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \leq (x' + y') + s',$$

საიდანაც გვექნება

$$\sup P \leq (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3 \leq \inf Q.$$

თუ გავითვალისწინებთ (17.5) ტოლობას, უკანასკნელი დამოკიდებულებიდან მიიღება (17.4) ტოლობები.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\sup P' = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3),$$

სადაც

$$P' = \{x + (y + s)\}, \quad x \in A_1, \quad y \in A_2, \quad s \in A_3.$$

მაგრამ  $P' = P$  და ამიტომ მართებულია (17.3) ტოლობა. ამით შეკრების ასოციურობის ყანონი დამტკიცებულია.

**თეორემა 15.** ყოველი ირაციონალური  $\alpha$  რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\alpha + (-\alpha) = 0. \quad (17.6)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $\alpha$  და  $-\alpha$  რიცხვები წარმოდგენილია შესაბამისად  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$P = \{a + a'\}, \quad Q = \{b + b'\}.$$

სადაც

$$a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B'.$$

დავამტკიცოთ, რომ  $P$  სიმრავლის ყოველ რიცხვი უარყოფითია. ავიღოთ  $P$  სიმრავლის ნებისმიერი  $p$  რიცხვი. ამ რიცხვს აქვს სახე  $a_0 + a'_0$ , ე. ი.

$$p = a_0 + a'_0, a_0 \in A, a'_0 \in A'.$$

მაგრამ  $a_0 = -b_0$ , სადაც  $b_0 \in B$ , მაშასადამე,  $p = a_0 - b_0$  და რაკი  $a_0 < b_0$ , ამიტომ  $p < 0$ . მაშასადამე,

$$\sup P \leq 0. \quad (17.7)$$

ამავე გზით დავამტკიცებთ, რომ

$$\inf Q \geq 0. \quad (17.8)$$

შემდეგ, რაკი

$$\sup P = \inf Q = \alpha + (-\alpha),$$

ამიტომ (17.7) და (17.8) დამოკიდებულებათა თანახმად მართებულა (17.6) ტოლობა და ამით თეორემა დამტკიცებულა.

### § 18. ორი ნამდვილი რიცხვის სხვაობა

გამოკლების ოპერაცია წარმოადგენს შეკრების ოპერაციის შებენებულ ოპერაციას. ამიტომ ნამდვილი  $\alpha$  რიცხვიდან ნამდვილი  $\beta$  რიცხვის გამოკლება ისეთი მესამე  $\gamma$  რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც  $\alpha$  რიცხვთან მიმატებული მოგვცემს  $\beta$  რიცხვს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ზემოაღნიშნული თვისების რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 16. ნებისმიერი ორი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი  $\xi$  რიცხვი, რომ

$$\alpha + \xi = \beta.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ნამდვილი რიცხვი

$$\xi = \beta + (-\alpha),$$

სადაც  $-\alpha$  არის  $\alpha$  რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი. გვაქვს:

$$\alpha + \xi = \alpha + [\beta + (-\alpha)] = \alpha + [(-\alpha) + \beta] = [\alpha + (-\alpha)] + \beta = 0 + \beta = \beta.$$

მაშასადამე,  $\beta + (-\alpha)$  არის საძებლელ რიცხვი. თეორემა დამტკიცებულა.

$\beta + (-\alpha)$  რიცხვს ვწოდება  $\beta$  და  $\alpha$  რიცხვების სხვაობა და იგი აღნიშნება  $\beta - \alpha$  სიმბოლოთი.

ამრიგად,  $\beta - \alpha$  სხვაობის მისაღებად საჭიროა  $\beta$  რიცხვს მივუმატოთ  $\alpha$  რიცხვის სიმეტრიული რიცხვი.

რადგანაც შეკრების ოპერაციის შედეგად ვლემულობთ მხოლოდ ერთ რიცხვს, ამიტომ გამოკლების ოპერაციის შედეგად გვექნება იგრეთვე მხოლოდ ერთი რიცხვი.

დასასრულ, არასაკუთრივი  $-\infty$  და  $+\infty$  რიცხვებისათვის განსაზღვრის მიხედვით გვაქვს:

$$(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty,$$

სადაც  $a$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

### § 19. ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი.

ვთქვათ, მოცემულია ორი ნამდვილი რიცხვი  $\alpha$  და  $\alpha'$  წარმოდგენილი  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით შესაბამისად. განვსაზღვროთ  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვების ნამრავლი.

ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ  $\alpha > 0$  და  $\alpha' > 0$ . ამ შემთხვევაში  $A$  და  $A'$  კლასები შეიცავენ დადებით რაციონალურ რიცხვებს. აღვნიშნოთ  $P$  ასოთი ყველა  $aa'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც

$$a \in A, a' \in A', a > 0, a' > 0,$$

$Q$  ასოთი კი  $bb'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $b \in B, b' \in B'$ . ცხადია,  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Q$  სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე. დავამტკიცოთ, რომ

$$\sup P = \inf Q. \quad (19.1)$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმობთ, რომ  $\varepsilon$  რაციონალური რიცხვია. ვთქვათ,  $b_0 \in B, b'_0 \in B'$ . ცხადია,  $b_0 > 0, b'_0 > 0$ . ავიღოთ ისეთი ოთხი დადებითი რაციონალური რიცხვი  $a, b, a', b'$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$a < \alpha < b \leq b_0, a' < \alpha' < b' \leq b'_0,$$

$$b - a < \frac{\varepsilon}{b_0 + b'_0}, b' - a' < \frac{\varepsilon}{b_0 + b'_0}.$$

ცხადია, რომ  $p \in P, q \in Q$ , სადაც  $p = aa', q = bb'$ . გვაქვს

$$\begin{aligned} p - q &= bb' - aa' = (bb' - ab') + (ab' - aa') = \\ &= b'(b - a) + a(b' - a') < b'_0 \cdot \frac{\varepsilon}{b_0 + b'_0} + b_0 \cdot \frac{\varepsilon}{b_0 + b'_0} = \varepsilon. \end{aligned}$$



ამრიგად,  $P$  და  $Q$  სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ მართებულია (19.1) ტოლობა. რიცხვს  $\inf Q$  ეწოდება  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვების ნამრავლი და აღინიშნება  $\alpha\alpha'$  სიმბოლოთი.

თუ  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვები ორივე რაციონალურია, მაშინ  $\alpha\alpha'$  ნამრავლის ზემომოყვანილი განსაზღვრა ემთხვევა ნამრავლის ჩვეულებრივ განსაზღვრას. მართლაც,  $Q$  სიმრავლის აგების მიხედვით, ამ შემთხვევაში  $\alpha\alpha'$  რიცხვი  $Q$  სიმრავლეს ეკუთვნის და იგი  $Q$  სიმრავლის რიცხვებს შორის უმცირესია. მაშასადამე,

$$\alpha\alpha' = \inf Q.$$

თუ  $\alpha$  რაციონალური რიცხვია,  $\alpha'$  კი ირაციონალურია, მაშინ  $\alpha\alpha'$  წარმოადგენს  $\alpha b'$  სახის რიცხვთა  $Q_0$  სიმრავლის ქვედა საზღვარს, სადაც  $b' \in B'$ . მართლაც, ადვილი საჩვენებელია, რომ  $P$  და  $Q_0$  სიმრავლეები აკმაყოფილებენ მე-12 თეორემის ყველა პირობას. ამიტომ

$$\sup P = \inf Q_0 = \alpha\alpha'.$$

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, რომ  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვებიდან ერთი მაინც უარყოფითია. აქ წარმოგვიდგება სამი შემთხვევა:

ა)  $\alpha > 0$  და  $\alpha' < 0$ . ამ შემთხვევაში  $\alpha\alpha'$  ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით

$$\alpha\alpha' = -[\alpha(-\alpha')].$$

ბ)  $\alpha < 0$  და  $\alpha' > 0$ . ამ შემთხვევაში

$$\alpha\alpha' = -[(-\alpha)\alpha'].$$

გ)  $\alpha < 0$  და  $\alpha' < 0$ . ამ შემთხვევაში

$$\alpha\alpha' = (-\alpha)(-\alpha').$$

თუ  $\alpha = 0$  ან  $\alpha' = 0$ , მაშინ განსაზღვრის მიხედვით

$$\alpha\alpha' = 0.$$

ადვილად მტკიცდება შემდეგი ტოლობები:

1.  $\alpha \cdot 1 = \alpha$ .
2.  $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha$  (გამრავლების კომუტატიურობის კანონი).
3. თუ  $\alpha$ ,  $\alpha'$  და  $\alpha''$  ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ  $(\alpha\alpha')\alpha'' = \alpha(\alpha'\alpha'')$  (გამრავლების ასოციურობის კანონი).
4.  $\alpha(\alpha' + \alpha'') = \alpha\alpha' + \alpha\alpha''$  (დისტრიბუტიულობის კანონი).

თეორემა 17. თუ  $\alpha$  ირაციონალური რიცხვია, მაშინ

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1. \quad (19.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $\alpha$  რიცხვი წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით. ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ  $\alpha > 0$ . მაშინ  $\frac{1}{\alpha}$  განისაზღვრება  $A'|B'$  განკვეთით (იხ. § 14).  $a\alpha'$  და  $b\alpha'$  სახის რიცხვთა სიმრავლეები აღვნიშნოთ შესაბამისად  $P$  და  $Q$  სიმბოლოებით, სადაც  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $\alpha' \in A'$ ,  $\alpha' \in B'$ , ამასთანავე  $a$  და  $\alpha'$  დადებითი რიცხვებია.

ცხადია,  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Q$  სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე. დავამტკიცოთ, რომ  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია ერთზე. ავიღოთ  $P$  სიმრავლის ნებისმიერი რიცხვი

$$p = a_0 \alpha_0, \quad a_0 \in A, \quad \alpha_0' \in A'.$$

მაგრამ  $a_0 = \frac{1}{b_0}$ , სადაც  $b_0 \in B$ . მაშასადამე,  $p = \frac{a_0}{b_0}$  და რაკი  $a_0 < b_0$ , ამიტომ  $p < 1$ . ამრიგად,  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია ერთზე და ამიტომაც

$$\sup P \leq 1. \quad (19.3)$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\sup Q \geq 1. \quad (19.4)$$

შემდეგ, რადგანაც

$$\sup P = \inf Q,$$

ამიტომ (19.3) და (19.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს (19.2) ტოლობის მართებულობა.

თუ  $\alpha < 0$ . მაშინ

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = (-\alpha) \cdot \frac{1}{(-\alpha)} = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ, არასაკუთარივე  $-\infty$  და  $+\infty$  რიცხვებისათვის, განსაზღვრის მიხედვით, გვაქვს:

$$(\pm \infty) \cdot a = a \cdot (\pm \infty) = \pm \infty, \quad \text{თუ } a > 0,$$

$$(\pm \infty) \cdot a = a \cdot (\pm \infty) = \mp \infty, \quad \text{თუ } a < 0.$$

§ 20. ორი ნამდვილი რიცხვის განაყოფი

გაყოფის ოპერაცია წარმოადგენს გამრავლების ოპერაციის შებენებულ ოპერაციას. ამიტომ  $\alpha$  რიცხვის  $\alpha'$  რიცხვზე გაყოფა ( $\alpha' \neq 0$ ) ისეთი მესამე  $\alpha''$  რიცხვის მოძებნას ნიშნავს, რომელიც  $\alpha'$ -ზე გამრავლებული მოგვცემს  $\alpha$  რიცხვს.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი  $\alpha''$  რიცხვი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

**თეორემა 18.** ნებისმიერი ორი  $\alpha$  და  $\beta$  ნამდვილი რიცხვისათვის, სადაც  $\beta \neq 0$ , არსებობს ისეთი ნამდვილი  $x$  რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\beta x = \alpha.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\xi = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

თუ გამოვიყენებთ მე-17 თეორემას გვექნება

$$\beta \xi = \beta \left( \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \right) = \beta \left( \frac{1}{\beta} \cdot \alpha \right) = \left( \beta \cdot \frac{1}{\beta} \right) \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

მაშასადამე,  $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$  საძიებელი რიცხვია. ამ რიცხვს ეწოდება  $\alpha$  და

$\beta$  რიცხვების განაყოფი და აღინიშნება  $\frac{\alpha}{\beta}$  სიმბოლოთი.

დაბოლოს ხაზი გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ რაციონალურ რიცხვთა ყველა ძირითად თვისებას, რომლებზედაც აგებულია ელემენტარული ალგებრა, ადგილი აქვს ნამდვილი რიცხვებისათვისაც. მაშასადამე, ნამდვილი რიცხვებისათვის შენარჩუნებულია ალგებრის ყველა წესი, რომლებიც ეხება არითმეტიკულ ოპერაციებს და ტოლობებსა და უტოლობების შეხამებას.

§ 21.  $n$ -ჯერადი ხარისხის უმჯობესი ნამდვილი რიცხვიდან

ვთქვათ, მოცემულია დადებითი  $\alpha$  რიცხვი და მთელი დადებითი რიცხვი  $n$ . ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა ისეთი ნამდვილი  $x$  რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობას

$$x^n = \alpha.$$

პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

**თეორემა 19.** მოცემული დადებითი  $\alpha$  რიცხვისათვის და მთელი დადებითი  $n$ -სათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\xi$  რიცხვი, რომ

$$\xi^n = \alpha. \quad (21.1)$$

დამტკიცება. რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე დაეყოს ორ  $A$  და  $B$  კლასად შემდეგი წესის მიხედვით:  $A$  კლასს მივაკუთვნოთ ყველა ურაციონალური რაციონალური რიცხვი, ნული და ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვები, რომელთა  $n$ -ური ხარისხი  $\alpha$ -ზე ნაკლებია,  $B$  კლასს კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლის ასეთი დაყოფა ორ  $A$  და  $B$  კლასად აკმაყოფილებს განკვეთის სამივე პირობას. მაშასადამე, გვაქვს  $A|B$  განკვეთა, რომელიც განსაზღვრავს რაიმე ნამდვილ  $\xi$  რიცხვს. დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi^n = \alpha.$$

ამისათვის განვიხილოთ ორი  $P$  და  $Q$  სიმრავლე;  $P$  შედგება  $a^n$  სახის რიცხვებისაგან, სადაც  $a > 0$  და  $a \in A$ ,  $Q$  კი  $b^n$  სახის რიცხვებისაგან, სადაც  $b \in B$ . ცხადია,  $P$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $Q$  სიმრავლის ნებისმიერ რიცხვზე და გარდა ამისა, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ორი რიცხვი  $a^n \in P$  და  $b^n \in Q$ , რომ

$$b^n - a^n < \varepsilon.$$

მართლაც,  $B$  სიმრავლეში ავიღოთ რაიმე  $b_0$  რიცხვი.  $A$  და  $B$  კლასში ავიღოთ შესაბამისად ისეთი ორი რიცხვი  $a$  და  $b$ , რომ

$$b - a < \frac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}},$$

მასთან  $b \leq b_0$ ,  $a > 0$ . მაგრამ

$$\begin{aligned} b^n - a^n &= (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + b a^{n-2} + a^{n-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}} \cdot nb_0^{n-1} = \varepsilon. \end{aligned}$$

მაშასადამე, მე-12 თეორემის თანახმად

$$\sup P = \inf Q.$$

შემდეგ, რაკი  $a^n < \alpha \leq b^n$ , ამიტომ

$$\alpha = \sup P = \inf Q.$$

მეორე მხრით,

$$a^n < \xi^n \leq b^n.$$

ამიტომ

$$\xi^n = \sup P = \inf Q$$

და, მაშასადამე,  $\xi^n = \alpha$ . თეორემა დამტკიცებულია.

$\xi$  რიცხვს, რომელიც (21.1) ტოლობას აკმაყოფილებს, ეწოდება  $n$ -ური ხარისხის არითმეტიკული ფესვი  $\alpha$  რიცხვიდან და აღინიშნება  $\sqrt[n]{\alpha}$  სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n = \alpha.$$

შენიშვნა. თუ  $\alpha > 0$  და  $n$  ლუწი რიცხვია, მაშინ  $\xi$  რიცხვის სიმეტრიული  $-\xi$  რიცხვიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(-\xi)^n = \alpha.$$

მაშასადამე,  $x^n = \alpha$  განტოლებას, როცა  $n$  ლუწია და  $\alpha > 0$ , აქვს ორი ნამდვილი ამონახსნი

$$x = \pm \sqrt[n]{\alpha}.$$

§ 22. ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე

დადებითი  $\alpha$  რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე ეწოდება თვით  $\alpha$  რიცხვს; თუკი  $\alpha$  უარყოფითია, მაშინ მისი აბსოლუტური სიდიდეა  $-\alpha$  რიცხვი. ნულის აბსოლუტური სიდიდე ნულია.  $\alpha$  რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე აღინიშნება  $|\alpha|$  სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრის მიხედვით

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{თუ } \alpha \geq 0, \\ -\alpha & \text{თუ } \alpha < 0. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობების მართებულობა

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|.$$

ცხადია, რომ

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha^2}. \tag{22.1}$$

ამრიგად, ნულისაგან განსხვავებული რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე ყოველთვის დადებითი რიცხვია. ნამდვილი  $\alpha$  რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$|-\alpha| = |\alpha|.$$

თეორემა 20. უტოლობა  $|a| < \varepsilon$ , სადაც  $\varepsilon > 0$ , ტოლფასია უტოლობებისა

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \quad (22.2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|a| < \varepsilon. \quad (22.3)$$

თუ  $a \geq 0$ . მაშინ  $|a| = a$  და (22.3) უტოლობა ასე გადაიწერება

$$a < \varepsilon. \quad (22.4)$$

თუკი  $a < 0$ , მაშინ  $|a| = -a$  და ამიტომ გვექნება  $-a < \varepsilon$  აქედან

$$-\varepsilon < a. \quad (22.5)$$

(22.4) და (22.5) უტოლობების გაერთიანებით მივიღებთ (22.2) უტოლობებს.

ახლა ვთქვათ, მართებულია (22.2) უტოლობები. ეს უტოლობები ასე გადავწეროთ

$$-\varepsilon < a, \quad a < \varepsilon. \quad (22.6)$$

რადგანაც  $|a| = a$ , როცა  $a \geq 0$  და  $|a| = -a$ , როცა  $a < 0$ , ამიტომ (22.6) უტოლობათა ძალით გვექნება (22.3) უტოლობა. ამრიგად, (22.2) და (22.3) უტოლობები ერთმანეთის ტოლფასია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თუ  $|a| = \varepsilon$ , მაშინ  $a = \pm \varepsilon$  და, მაშასადამე, მე-20 თეორემის თანახმად მართებულია

თეორემა 21. თანაფარდობანი

$$|a| \leq \varepsilon \text{ და } -\varepsilon \leq a \leq \varepsilon.$$

ერთმანეთის ტოლფასია.

თეორემა 22. თუ  $|a| \geq \varepsilon$ , სადაც  $\varepsilon > 0$ , მაშინ ან  $a < -\varepsilon$  ან  $a \geq \varepsilon$ .

დამტკიცება. თუ  $a > 0$ , მაშინ  $a \geq \varepsilon$ , თუკი  $a < 0$ , მაშინ  $-a \geq \varepsilon$ . აქედან  $a < -\varepsilon$ . თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ამოცხსნათ უტოლობა

$$|x - 7| < 3. \quad (22.7)$$

ამოხსნა. მე-20 თეორემის თანახმად, მოცემული უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობებისა

$$-3 < x - 7 < 3.$$

აქედან ვღებულობთ

$$4 < x < 10.$$

მაშასადამე, (22.7) უტოლობას აკმაყოფილებს ]4, 10[ ინტერვალის ყველა რიცხვი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $x$ -ის ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც  $\sqrt{4-x^2}$  გამოსახულება გვაძლევს ნამდვილ რიცხვებს.

ამოხსნა. მოცემულ გამოსახულებს აქვს ნამდვილი მნიშვნელობა, როცა  $4-x^2 \geq 0$ . აქედან  $x^2 \leq 4$ . თუ ვისარგებლებთ (22.1) ტოლობით და მე-20 თეორემით, გვექნება

$$|x| \leq 2 \text{ ანუ } -2 \leq x \leq 2.$$

ამრიგად, ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს  $[-2, 2]$  სეგმენტის ნებისმიერი რიცხვი.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $x$ -ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც  $\sqrt{x^2-16}$  გამოსახულებას ექნება ნამდვილი მნიშვნელობები.

ამოხსნა. ცხადია,  $x$  უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას

$$x^2 - 16 \geq 0.$$

აქედან  $x^2 \geq 16$ . თუ ვისარგებლებთ (22.1) ტოლობით და 22-ე თეორემით, გვექნება

$$x \geq 4 \text{ და } x \leq -4.$$

მაშასადამე,  $\sqrt{x^2-16}$  გამოსახულებას ექნება ნამდვილი მნიშვნელობა ნებისმიერი  $x$ -თვის, რომელიც ადებუღია  $]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$  სიმრავლიდან.

თეორემა 28. რამდენიმე რიცხვის ჯამის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება შესაკრებთა აბსოლუტური სიდიდეების ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილი რიცხვები

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|. \quad (22.8)$$

რადგანაც

$$\begin{aligned} -|a_1| &\leq a_1 \leq |a_1|, \\ -|a_2| &\leq a_2 \leq |a_2|, \\ &\dots \\ -|a_n| &\leq a_n \leq |a_n|, \end{aligned}$$

ამიტომ ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს:

$$\begin{aligned} -(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|) &\leq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \leq \\ &\leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|. \end{aligned}$$

მაგრამ ეს უტოლობები ტოლფასია (22.8) უტოლობისა. თეორემა დამტკიცებულია.

(22.8) დაპოკიდებულებაში ტოლობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როდესაც ყველა  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) დადებითია ან ყველა არადადებითია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვებისათვის პართებულია უტოლობა

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

**თეორემა 24.** ნებისმიერი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვებისათვის პართებულია უტოლობა

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|. \quad (22.9)$$

დამტკიცება. რადგანაც  $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ , ამიტომ 23-ე თეორემის თანახმად,

$$|\alpha| \leq |\beta| + |\alpha - \beta|.$$

აქედან

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|. \quad (22.10)$$

თუ  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვებს როლებს შევუცვლით, (22.10) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$|\beta| - |\alpha| \leq |\beta - \alpha| = |\alpha - \beta|. \quad (22.11)$$

(22.10) და (22.11) უტოლობებიდან გამომდინარეობს (22.9) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 25.** რამდენიმე რიცხვის ნამრავლის აბსოლუტური სიდიდე მამრავლთა აბსოლუტური სიდიდეების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $\alpha$  და  $\beta$  ნამდვილი რიცხვებია. თუ  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , მაშინ

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

თუკი  $\alpha > 0$  და  $\beta < 0$ , მაშინ

$$|\alpha\beta| = -(\alpha\beta) = \alpha \cdot (-\beta) = |\alpha| \cdot |\beta|.$$

დასასრულ, თუ  $\alpha < 0$  და  $\beta < 0$ , მაშინ

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta = (-\alpha)(-\beta) = |\alpha| \cdot |\beta|.$$



ამრიგად, თეორემა დამტკიცებულია ორი ნამდვილი რიცხვის შემთხვევაში.

საზოგადოდ, თუ მოცემულია ნამდვილი რიცხვები  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , მაშინ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცებთ, რომ

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \dots |\alpha_n|.$$

**შედეგი.** თუ  $n$  მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n.$$

**თეორემა 26.** ორი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვის ფარდობის აბსოლუტური სიდიდე უდრის ამ რიცხვების აბსოლუტურ სიდიდეთა ფარდობას:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\beta \neq 0). \quad (22.12)$$

**დამტკიცება.** თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{\alpha}{\beta} = \gamma,$$

გვექნება  $\alpha = \beta\gamma$ . აქედან

$$|\alpha| = |\beta| \cdot |\gamma|.$$

მაშასადამე,

$$|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|},$$

ე. ი. მართებულია (22.12) ტოლობა.

**თეორემა 27.** ნებისმიერი ორი  $x$  და  $y$  ნამდვილი რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

სადაც  $\rho(x, y)$  არის მანძილი  $x$  და  $y$  შორის.

**დამტკიცება.** აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $x < y$  და დავამტკიცოთ

$$\rho(x, y) = y - x$$

ტოლობის მართებულობა.

ვთქვათ,  $A$  არის ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც  $x$ -ზე ნაკლებია,  $B$  კი ყველა იმ რაციონალური რიცხვის სიმრავლე, რომლებიც  $x$ -ზე მეტია. შემდეგ,  $A'$  იყოს ისეთი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც  $y$ -ზე ნაკლებია,  $B'$  კი ისეთი რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც  $y'$ -ზე მეტია.

აღვნიშნოთ  $E$  ასოთი  $a' - b$  სახის რიცხვთა სიმრავლე,  $H$ -ით კი  $b' - a$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც

$$x < b < a' < y, \quad a \in A, \quad b \in B, \quad a' \in A', \quad b' \in B'.$$



ნახ. 10.

ცხადია, რომ

$$\inf H = y - x. \quad (22.13)$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\inf H = \sup E. \quad (22.14)$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. ამ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვები

$$a_0 \in A, \quad b_0 \in B, \quad a'_0 \in A', \quad b'_0 \in B',$$

რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$b_0 - a_0 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad b'_0 - a'_0 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad a_0 < x < b_0 < a'_0 < b'_0. \quad (22.15)$$

რადგანაც

$$b'_0 - a_0 = (b_0 - a_0) + (a'_0 - b_0) + (b'_0 - a'_0),$$

ამიტომ (22.15) უტოლობების თანახმად

$$(b'_0 - a_0) - (a'_0 - b_0) = (b_0 - a_0) + (b'_0 - a'_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

რადგანაც  $b'_0 - a_0$  და  $a'_0 - b_0$  რაციონალური რიცხვებია, ამიტომ  $(b'_0 - a_0) - (a'_0 - b_0)$  სხვაობა არის მანძილი იმ  $(b'_0 - a_0)$  და  $(a'_0 - b_0)$  წერტილებს შორის, რომლებიც ეკუთვნიან შესაბამისად  $H$  და  $E$  სიმრავლეებს.

ამრიგად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $H$  და  $E$  სიმრავლეებში ისეთი ორი წერტილი  $b'_0 - a_0$  და  $a'_0 - b_0$ , რომ მათ შორის მანძილი  $\varepsilon$ -ზე ნაკლებია. ამის გარდა,  $E$  სიმრავლის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $H$  სიმრავლის ყოველ რიცხვზე. ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად მართებულია (22.14) ტოლობა. (22.13) და (22.14) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sup E = y - x.$$

მაგრამ

$$\sup E = \rho(x, y).$$

მაშასადამე,

$$\rho(x, y) = y - x$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§ 28. მნიშვნელოვანი უტოლობები

თეორემა 28. თუ მთელი  $n$  რიცხვი ერთზე მეტია, ხოლო  $a > -1$  და  $a \neq 0$ , მაშინ მართებულია უტოლობა

$$(1+a)^n > 1+na. \quad (23.1)$$

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (23.1) უტოლობა მართებულია, როდესაც  $n=2$ . მართლაც,

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2.$$

მაგრამ დადებითი  $a^2$  რიცხვის უკუგდებით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შემცირდება და მივიღებთ

$$(1+a)^2 > 1+2a,$$

რაც (23.1) უტოლობას წარმოადგენს, როდესაც  $n=2$ .

ახლა დავამტკიცოთ (23.1) უტოლობა ნებისმიერი მთელი დადებითი  $n$  რიცხვისათვის, რომელიც ორზე მეტია. ამისათვის მივმართოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს. ვთქვათ, (23.1) უტოლობა მართებულია რაიმე ნებისმიერი  $n=k$  რიცხვისათვის და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია  $n=k+1$  რიცხვისათვის. დაშვების თანახმად

$$(1+a)^k > 1+ka.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $1+a$  რიცხვზე, გვეტყინება

$$(1+a)^{k+1} > (1+ka)(1+a) = 1+(k+1)a+ka^2.$$

მაგრამ  $ka^2$  დადებითია და მისი უკუგდებით მარჯვენა ნაწილი შემცირდება, რის გამო გვაქვს

$$(1+a)^{k+1} > 1+(k+1)a,$$

რაც (23.1) უტოლობას წარმოადგენს, როცა  $n=k+1$ . მაგრამ (23.1) უტოლობის მართებულობა დავამტკიცეთ, როცა  $n=2$ . მაშასადამე, იგივე უტოლობა მართებულია, როცა  $n=2+1=3$  და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

(23.1) უტოლობას ეწოდება ი. ბერნულის (Ich. Bernoulli) უტოლობა.

შედეგი. თუ  $b > 1$ , მაშინ ნებისმიერი მთელი დადებითი  $n$  რიცხვისათვის, რომელიც ერთზე მეტია, მართებულია უტოლობა

$$\sqrt[n]{b} - 1 < \frac{b-1}{n}. \quad (23.2)$$

მართლაც, ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$b = [1 + (\sqrt[n]{b} - 1)]^n > 1 + n(\sqrt[n]{b} - 1).$$

აქედან მიიღება (23.2) უტოლობა.

თეორემა 29. თუ მთელი რიცხვი  $n$  ორზე მეტია, ხოლო  $a$  დადებითი რიცხვია, მაშინ მართებულია უტოლობა

$$(1+a)^n > 1 + na + \frac{n^2}{4} a^2. \quad (23.3)$$

დამტკიცება. (23.3) უტოლობა მართებულია, როცა  $n=3$ . მართლაც,

$$(1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3.$$

მაგრამ დადებითი  $a^3$  რიცხვის უკუგდებით უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა ნაწილი შემცირდება და მივიღებთ

$$(1+a)^3 > 1 + 3a + 3a^2 > 1 + 3a + \frac{3^2}{4} a^2,$$

რაც (23.3) უტოლობას წარმოადგენს, როდესაც  $n=3$ .

ახლა დავამტკიცოთ (23.3) უტოლობის მართებულობა ნებისმიერი მთელი დადებითი  $n$  რიცხვისათვის, რომელიც სამს აღემატება. ამისათვის მივმართოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდს. ვთქვათ (23.3) უტოლობა მართებულია რომელიმე ნებისმიერი  $n=k$  რიცხვისათვის, რომელიც სამს აღემატება და ვაჩვენოთ, რომ იგი მართებულია  $n=k+1$  რიცხვისათვის. დაშვების თანახმად

$$(1+a)^k > 1 + ka + \frac{k^2}{4} a^2.$$

ამ უტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $1+a$  რიცხვზე. გვექნება

$$(1+a)^{k+1} > \left(1+ka + \frac{k^2}{4} a^2\right)(1+a) = 1+ka + \\ + \frac{k^2}{4} a^2 + a + ka^2 + \frac{k^2}{4} a^3.$$

მაგრამ  $\frac{k^2}{4} a^3$  დადებითია და მისი უკუგდებათ მარჯვენა ნაწილი შემცირდება, რის გამოც გვაქვს

$$(1+a)^{k+1} > 1+ka + \frac{k^2}{4} a^2 + a + ka^2 = 1+(k+1)a + \\ + \frac{k^2+4k}{4} a^2 > 1+(k+1)a + \frac{(k+1)^2}{4} a^2,$$

რაც (23.3) უტოლობას წარმოადგენს, როცა  $n=k+1$ . მაგრამ (23.3) უტოლობის მართებულობა დავამტკიცეთ, როცა  $n=3$ . მაშასადამე, იგივე უტოლობა მართებულია, როცა  $n=3+1=4$  და ა. შ. თეორემა დამტკიცებულია.

(23.3) უტოლობას ვუწოდებთ ბერნულის განზოგადებულ უტოლობას.

**შედეგი.** თუ  $n \geq 2$  და  $a$  დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$(1+a)^n > \frac{a^n}{4} n^2. \quad (23.4)$$

(23.1), (23.2), (23.3) და (23.4) უტოლობებს გამოვიყენებთ შემდეგში.

#### 24. ხარისხი ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლით

ვთქვათ,  $a$  დადებითი რიცხვია, ხოლო  $r = \frac{m}{n}$  წარმოადგენს რაიმე დადებით რაციონალურ რიცხვს. განსაზღვრის მიხედვით

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

თუ  $r$  უარყოფითი რაციონალური რიცხვია, მაშინ

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}},$$

ხოლო  $a^0 = 1$ .

მას შემდეგ, რაც შემოყვანილია ხარისხის ცნება ნებისმიერი რაციონალური მაჩვენებლით, ასეთი ხარისხებისათვის მართებულია ის წესები, რომლებიც ცნობილია ელემენტარულ ალგებრაში. მაგალითად, თუ  $\alpha$  და  $\beta$  დადებითი რიცხვებია, ხოლო  $r$  და  $r'$  წარმოადგენენ ნებისმიერ რაციონალურ რიცხვებს, მაშინ

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'},$$

$$(\alpha^r)^{r'} = \alpha^{rr'}, \quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}.$$

მარტივად მტკიცდება შემდეგი თვისებები:

1. თუ  $r$  და  $r'$  რაციონალური რიცხვებია, ამასთანავე  $r < r'$ , მაშინ ერთზე მეტი ნებისმიერი  $\alpha$  რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა

$$\alpha^r < \alpha^{r'}.$$

2. თუ დადებითი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვები ისეთია, რომ  $\alpha < \beta$ , მაშინ ნებისმიერი დადებითი რაციონალური  $r$  რიცხვისათვის

$$\alpha^r < \beta^r.$$

ახლა განვსაზღვროთ ხარისხი ირაციონალური მაჩვენებლით. ავიღოთ ნამდვილი რიცხვი  $\xi > 1$ . ვთქვათ,  $\alpha$  არის ირაციონალური რიცხვი, რომელიც წარმოდგენილია  $A|B$  განკვეთით. განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა ორი სიმრავლე

$$F = \{\xi^a\} \text{ და } Q = \{\xi^b\},$$

სადაც  $a \in A$ ,  $b \in B$ . მართებულია შემდეგი

თეორემა 80.  $P$  სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია,  $Q$  კი ქვემოდან და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sup P = \inf Q. \quad (24.1)$$

დამტკიცება. ავიღოთ  $B$  კლასის რაიმე  $b_0$  რიცხვი. მაშინ  $A$  კლასის ნებისმიერი  $a$  რიცხვისათვის გვექნება

$$\xi^a < \xi^{b_0},$$

ე. ი.  $P$  სიმრავლის ნებისმიერი რიცხვი ნაკლებია  $\xi^{b_0}$  რიცხვზე, ამიტომ  $P$  ზემოდან შემოსაზღვრულია. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ  $Q$  სიმრავლე შემოსაზღვრულია ქვემოდან.

დასასრულ დავამტკიცოთ (24.1) ტოლობის მართებულობა. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და შევარჩიოთ მთელი დადებითი  $n$  რიცხვი ისე, რომ დაცული იყოს უტოლობა

$$\xi^{b_0} \cdot \frac{\xi - 1}{n} < \varepsilon. \quad (24.2)$$

მე-5 თეორემის შედეგის თანახმად, აღებული  $n$  რიცხვისათვის მოძებნება ისეთი რიცხვები  $a \in A$  და  $b \in B$ , რომ

$$b - a < \frac{1}{n}.$$

შემდეგ

$$\xi^b - \xi^a = \xi^a (\xi^{b-a} - 1) < \xi^a \left( \xi^{\frac{1}{n}} - 1 \right) < \xi^{b_0} \left( \sqrt[n]{\xi} - 1 \right).$$

მაგრამ ბერნულის უტოლობის შედეგის თანახმად

$$\sqrt[n]{\xi} - 1 < \frac{\xi - 1}{n}.$$

მაშასადამე, თუ გავითვალისწინებთ (24.2) უტოლობას, გვექნება

$$\xi^b - \xi^a < \xi^{b_0} \cdot \frac{\xi - 1}{n} < \varepsilon.$$

ე. ი.

$$\rho(\xi^a, \xi^b) < \varepsilon.$$

ამრიგად, შესრულებულია მე-12 თეორემის ორავე პირობა და ამიტომ მართებულია (24.1) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

განსახილვეთ 24. § რიცხვის  $\xi^a$  ხარისხი ირაციონალური  $a$  მაჩვენებლით ეწოდება  $\sup\{\xi^a\}$  რიცხვს.

ამ განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $r$  და  $r'$  რაც იო ნალური რიცხვებია და  $r < a < r'$ , მაშინ

$$\xi^r < \xi^a < \xi^{r'} \quad (\xi > 1).$$

თუ  $0 < \xi < 1$ , მაშინ  $\xi^a$  ხარისხს ირაციონალური  $a$  მაჩვენებლით განსაზღვრავთ ასე

$$\xi^a = \frac{1}{\eta^a},$$

სადაც

$$\eta = \frac{1}{\xi}.$$

ამრიგად, თუ  $a$  ერთისაგან განსხვავებული დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველი ნამდვილი  $x$  რიცხვისათვის განსაზღვრულია  $a^x$  ხარისხი.

თეორემა 31. თუ  $x$  და  $y$  ისეთი ნამდვილი რიცხვებია, რომ  $x < y$ , მაშინ ერთისაგან განსხვავებული ნებისმიერი დადებითი  $a$  რიცხვისათვის გვექნება

$$a^x < a^y, \text{ როცა } a > 1, \quad (24.3)$$

$$a^x > a^y, \text{ როცა } a < 1. \quad (24.4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $a > 1$  და ავიღოთ ისეთი რაციონალური რიცხვი  $r$ , რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$x < r < y.$$

მაშინ გვექნება

$$a^x < a^r < a^y.$$

ე. ი. მართებულია (24.3) უტოლობა.

ახლა ვთქვათ,  $a < 1$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $b = \frac{1}{a}$ , გვექნება

$$b^x < b^y,$$

ე. ი.

$$\frac{1}{a^x} < \frac{1}{a^y},$$

აქედან მიიღება (24.4) უტოლობა.

თეორემა 32. თუ  $\xi$  რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველი ნამდვილი  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვებისათვის მართებულია ტოლობა

$$\xi^\alpha \cdot \xi^{\alpha'} = \xi^{\alpha+\alpha'}. \quad (24.5)$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმოთ, რომ  $\xi > 1$ . ვთქვათ,  $\alpha$  და  $\alpha'$  რიცხვები წარმოდგენილია  $A|B$  და  $A'|B'$  განკვეთებით შესაბამისად. აღვნიშნოთ  $P$  ასოთი  $\alpha + \alpha'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $a \in A$ ,  $a' \in A'$ , ხოლო  $Q$ -თი  $b + b'$  სახის რიცხვთა სიმრავლე, სადაც  $b \in B$ ,  $b' \in B'$ . ცხადია, რომ

$$a < a \leq b, \quad a' < a' \leq b',$$

$$a + a' < a + a' \leq b + b'.$$

მაშასადამე,

$$\xi^a < \xi^a \leq \xi^b, \quad \xi^{a'} < \xi^{a'} \leq \xi^{b'} \quad (24.6)$$

$$\xi^{a+a'} < \xi^{a+a'} \leq \xi^{b+b'}. \quad (24.7)$$



თუ (24.6) უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\xi^{a+a'} < \xi^a \cdot \xi^{a'} \leq \xi^{b+b'}. \quad (24.8)$$

მაგრამ რაკი

$$\sup \{ \xi^{a+a'} \} = \inf \{ \xi^{b+b'} \},$$

ამიტომ (24.7) და (24.8) დამოკიდებულებებიდან მივიღებთ (24.5) ტოლობას.

ახლა ვთქვათ,  $\xi < 1$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\eta = \frac{1}{\xi},$$

გვექნება

$$\eta^a \cdot \eta^{a'} = \eta^{a+a'},$$

ე. ი.

$$\frac{1}{\xi^a} \cdot \frac{1}{\xi^{a'}} = \frac{1}{\xi^{a+a'}}.$$

აქედან მიიღება (24.5) ტოლობა.

დასასრულს, თუ  $\xi = 1$ , მაშინ (24.5) ტოლობა ტრივიალურია. ამრიგად, თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 33.** თუ  $a$  და  $b$  დადებითი რიცხვებია,  $x$  და  $y$  კი წარმოადგენენ ნებისმიერ ნამდვილ რიცხვებს, მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

### § 25. ლოგარიტმი

განვიხილოთ ორი ნებისმიერი დადებითი  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვი, ამასთანავე  $\alpha \neq 1$ . მართებულია შემდეგი

**თეორემა 34.** არსებობს ერთადერთი ნამდვილი რიცხვი  $\gamma$ , რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\alpha^\gamma = \beta. \quad (25.1)$$

**დამტკიცება.** ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $\alpha > 1$ . თუ არსებობს ისეთი რაციონალური რიცხვი  $r$ , რომ  $\alpha^r = \beta$ , მაშინ  $r$  წარმოადგენს საძიებელ რიცხვს.

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ ასეთი რაციონალური რიცხვი არ არსებობს. დავყოთ რაციონალურ რიცხვთა  $R$  სიმრავლე ორ  $A$  და  $B$  კლასად შემდეგი წესით:  $A$  კლასში მოვათავსოთ ისეთი რაციონა-

ლური  $\alpha$  რიცხვები, რომელთათვის  $\alpha^a < \beta$ ,  $B$  კლასში კი დანარჩენი რაციონალური რიცხვები. ცხადია,  $B$ -ში უნდა იყოს ისეთი რაციონალური  $b$  რიცხვები, რომელთათვის  $\alpha^b > \beta$ .

დავამტკიცოთ, რომ  $A$  და  $B$  კლასები ცარიელი არაა. ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $n$ , რომ

$$n > \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$\alpha^n > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1) > \frac{\beta}{\alpha - 1} \cdot (\alpha - 1) = \beta.$$

მაშასადამე,  $\alpha^n \in B$  და ამიტომ  $B$  კლასი ცარიელი არაა. ახლა ავიღოთ მთელი დადებითი რიცხვი  $n$  იმ პირობით, რომ

$$n > \frac{1}{\beta(\alpha - 1)}. \quad (25.2)$$

მაშინ (25.2) და ბერნულის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{n(\alpha - 1)} < \beta.$$

მაშასადამე,  $\alpha^{-n} \in A$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ  $A$  ცარიელი არაა.

შემდეგ ცხადია, რომ  $A$  კლასის ყოველი რიცხვი ნაკლებია  $B$  კლასის ნებისმიერ რიცხვზე. დასასრულ, ადვილად დავამტკიცებთ, რომ  $A$  კლასში არ არსებობს უდიდესი რიცხვი. მაშასადამე, გვაქვს  $A \neq B$  განკვეთა. ამ განკვეთით წარმოდგენილი ნამდვილი რიცხვი აღნიშნოთ  $\gamma$ -თი. ხარისხის განსაზღვრის მიხედვით, გვაქვს

$$\alpha^a < \alpha^\gamma < \alpha^b, \quad a \in A, \quad b \in B. \quad (25.3)$$

მეორე მხრივ

$$\alpha^a < \beta < \alpha^b, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

თუ განვიხილავთ  $P = \{\alpha^a\}$  და  $Q = \{\alpha^b\}$  სიმრავლეებს. 30-ე თეორემის თანახმად გვექნება

$$\sup P = \inf Q$$

და, მაშასადამე,

$$\alpha^\gamma = \beta.$$

თეორემა დამტკიცებულაა, როცა  $\alpha > 1$ .

თუ  $\alpha < 1$ , მაშინ  $\frac{1}{\alpha} > 1$  და ზემოდამტკიცებულის თანახმად, არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვი  $\gamma$ , რომ

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\gamma} = \beta.$$

აქედან  $\alpha^{-\gamma} = \beta$ . თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ა 25. (25.1) ტოლობით განსაზღვრულ  $\gamma$  რიცხვს ეწოდება  $\beta$  რიცხვის ლოგარიტმი  $\alpha$  ფუძით და იგი  $\lg_{\alpha} \beta$  სიმბოლოთი აღინიშნება.

**§ 26. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა. აბსოლუტური და ფარდობითი ცლოვილება**

ყოველი სიდიდე გამოისახება რიცხვით ან რიცხვთა სისტემით ტექნიკაში ამ რიცხვს ხშირად განსაზღვრავენ დაკვირვებების ან გაზომვების შედეგად.

არც ერთი გაზომვა არ შეიძლება ჩატარდეს აბსოლუტური სიზუსტით. ეს იმას ნიშნავს, რომ ერთი და იმავე სიდიდის რამდენჯერმე გაზომვისას მიიღება სხვადასხვა რიცხვი. გაზომვათა ამ შედეგების ერთმანეთისაგან განსხვავების მიხედვით აფასებენ ჩვეულებრივ გაზომვის სიზუსტეს. ბუნებისმეტყველებასა და საინჟინრო საქმეში მათემატიკის გამოყენებისას ყოველთვის საქმე გვაქვს გამოთვლებთან. ცხადია, თუ მონაცემები ზუსტი არ არის, მაშინ მათი საშუალებით მიღებული შედეგებიც ზუსტი არ იქნება.

ყოველი ნაკეთობისათვის არსებობს გარკვეული „დაშვება“, ე. ი. პროექტიდან გადახრის ის საზღვრები, რომლის დაცვისას ნაკეთობა ვარგისად ითვლება. სწორედ ამიტომ საჭირო არ არის ყოველი გამოთვლა მაქსიმალურად ზუსტად იყოს შესრულებული ზუსტი ფორმულების მიხედვით. პირიქით, შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულებით, რომელთა შესახებ წინასწარ ვიცით, რომ ისინი ზუსტი არ არის, აგრეთვე ვისარგებლოთ გამოთვლების წესებით. რომლებიც აგრეთვე ზუსტ შედეგს არ იძლევა, მაგრამ დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ მიღებული შედეგები იმაზე მეტად ახლოს გადახრილი მოცემული პროექტისაგან. რის უფლებასაც „დაშვება“ იძლევა.

ვთქვათ,  $A$  არის რაიმე სიდიდის ზუსტი მნიშვნელობა, ან უბრალოდ რაიმე რიცხვი.

განსაზღვრა 26.  $a$  რიცხვს ეწოდება  $A$  რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა  $\alpha$  ცდომილებით, თუ

$$A - a = \alpha.$$

$\alpha$  ცდომილების აბსოლუტური სიდიდეს  $|\alpha|$  ეწოდება აბსოლუტური ცდომილება.

მიახლოებითი ცდომილების აღსანიშნავად იხმარება სიმბოლო  $\approx$ ; ასე რომ  $A \approx a$ .

$a$  რიცხვი შეიძლება იყოს ნაკლები ან მეტი  $A$ -ზე. პირველ შემთხვევაში  $\alpha > 0$  და მაშინ  $a$  წარმოადგენს  $A$  რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, მეორე შემთხვევაში კი  $\alpha < 0$  და  $a$  იქნება  $A$  რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით.

მაგალითი 1. ქარხანაში 1572 მუშაა. ესაა მუშათა ზუსტი რიცხვი,  $A = 1572$ . თუ ამ რიცხვს დავამრგვალებთ 1570-მდე, მაშინ  $\alpha = 1570$  იქნება მუშების მიახლოებითი რიცხვი, ხოლო  $\alpha = A - a = 1572 - 1570 = 2$  არის აბსოლუტური ცდომილება.

ჩვენს მაგალითში 1570 წარმოადგენს მუშათა რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, ვინაიდან  $\alpha > 0$ .

უფრო ხშირად ცნობილი არ არის  $A$  რიცხვი, რომელიც გამოსახავს შესასწავლ სიდიდეს ყოველგვარი შეცდომის გარეშე და არც აბსოლუტური ცდომილება ვიცით, მაგრამ შეგვიძლია დავასახელოთ ისეთი დადებითი  $\delta$  რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$|\alpha| \leq \delta. \quad (26.1)$$

ცხადია, თუ (26.1) უტოლობას აკმაყოფილებს რაიმე დადებითი  $\delta$  რიცხვი, მაშინ მას დააკმაყოფილებს ყოველი  $\delta'$  რიცხვი, რომელიც  $\delta$ -ს აღემატება.

განსაზღვრა 27. მიახლოებითი  $a$  რიცხვის ზღვრული აბსოლუტური ცდომილება ეწოდება რაც შეიძლება ნაკლებ  $\delta$  რიცხვს, რომლის შესახებ გარკვეულია, რომ ეს რიცხვი აბსოლუტურ ცდომილებაზე ნაკლები არ არის, ე. ი.  $|A - a| \leq \delta$ .

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ სიდიდის მართო აბსოლუტური ცდომილებისა და ზღვრული ცდომილების ცოდნით, საზოგადოდ, ვერ დავახასიათებთ მიღებული შედეგის ღირსებას. მაგალითად, თუ რაიმე სიგრძის გაზომვისას დაშვებულია 1 მმ აბსოლუტური ცდომილება, კიდევ არ შეიძლება იმის თქმა, გაზომვა კარგადაა ჩატარებული თუ ცუდად; საჭიროა ვიცოდეთ როგორია თვით გასაზომი სიდიდე. თუ ზემოთქმული ეხება ორ ქალაქს შორის მან-

ძილს, მაშინ შეიძლება ითქვას, რომ შედეგი მიღებულია აქამდე მიუღწეველი სიზუსტით. თუკი ზემოთქმული ეხება წვრილი მავთულის დიამეტრის გაზომვას, მაშინ ალბათ ყველა იტყვის, რომ გაზომვა არ ვარგა. შედეგის ღირსება გაცილებით უკეთესია ეგრეთ წოდებული ფარდობითი ცდომილების მოცემით.

განსაზღვრა 28. აბსოლუტური  $|\alpha|$  ცდომილებისა და მიახლოებითი  $a$  მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდის ფარდობას ეწოდება ფარდობითი ცდომილება.

თუ ფარდობით ცდომილებას აღვნიშნავთ  $\alpha^*$ -ით, მაშინ

$$\alpha^* = \frac{|\alpha|}{|a|}.$$

მაგალითი 2. საწარმოში 1005 მუშაა. დაეძრგვალოთ მუშათა რიცხვი 1000-მდე. მაშასადამე,  $A=1005$ ,  $a=1000$ . აბსოლუტური ცდომილება  $|\alpha|=|A-a|=5$ . ფარდობითი ცდომილება იქნება

$$\alpha^* = \frac{|\alpha|}{|a|} = \frac{5}{1000} = 0,005.$$

ჩვეულებრივ, ფარდობითი ცდომილება გამოისახება პროცენტებში. მაშასადამე:

$$\alpha^* = 0,5\%.$$

განსაზღვრა 29. ზღვრული აბსოლუტური  $\delta$  ცდომილებისა და მიახლოებითი  $a$  მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდის ფარდობას ზღვრული ფარდობითი ცდომილება ეწოდება.

თუ ზღვრულ ფარდობით ცდომილებას აღვნიშნავთ  $\delta^*$ -ით, მაშინ

$$\delta^* = \frac{\delta}{|a|}.$$

მაგალითი 3. ლეროს სიგრძე გაზომილია სახაზავით, რომელსაც მილიმეტრიანი დანაყოფები აქვს. გაზომვის შედეგად მივიღებთ  $a=25,6$  სმ. როგორია გაზომვის ზღვრული ფარდობითი ცდომილება?

ამოხსნა. შეგვიძლია მივიღოთ  $\delta=0,1$  სმ  $=1$  მმ, რადგან სახაზავს მილიმეტრიანი დანაყოფები აქვს. ზღვრული ფარდობითი ცდომილებაა

$$\delta^* = \frac{\delta}{|a|} = \frac{0,1}{25,6} \approx 0,004.$$

ზღვრული ფარდობითი ცდომილებაც პროცენტებში იანგარიშება--  
მაშასადამე,

$$\delta^* = 0,4\%.$$

### კ ი თ ხ ვ ე ბ ა

1. რას ეწოდება სიმრავლის ელემენტები? სიმრავლის ნაწილი? ცარიელი სიმრავლე?

2. რას შეისწავლის სიმრავლეთა თეორია?

3. რას ნიშნავს, რომ  $A$  და  $B$  სიმრავლეებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა?

4. როგორ სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტურა?

5. როგორ სიმრავლეს ეწოდება უსასრულო სიმრავლე? სასრული სიმრავლე?

6. როგორ ობიექტს ეწოდება სიდიდე? მოიყვანეთ სიდიდეთა მაგალითები.

7. როგორ რიცხვებს ეწოდება რაციონალური?

8. რას ნიშნავს, რომ  $c$  რიცხვი მოთავსებულია  $a$  და  $b$  რიცხვებს შორის?

9. ორ რაციონალურ რიცხვს შორის რამდენი რაციონალური რიცხვია მოთავსებული?

10. როგორ განკვეთას ეწოდება პირველი გვარისა? მეორე გვარისა?

11. მოიყვანეთ მეორე გვარის განკვეთის მაგალითი.

12. როგორ რიცხვებს ეწოდება ნამდვილი რიცხვები?

13. მოიყვანეთ ორი ნამდვილი რიცხვის ტოლობისა და უტოლობის განსაზღვრა.

14. რას ნიშნავს, რომ ყველა ნამდვილი რიცხვის  $\%$  სიმრავლე უწყვეტია?

15. წრფის რა წერტილს ეწოდება რაციონალური წერტილი?

16. არსებობს თუ არა წრფეზე არარაციონალური წერტილი? მოიყვანეთ არარაციონალური წერტილის მაგალითი.

17. რას ეწოდება ინტერვალი? სეგმენტი? ნახევარინტერვალი? ნახევარსეგმენტი?

18. რას ეწოდება წერტილის მიდამო?

19. მოიყვანეთ ირაციონალური  $a$  რიცხვის სიმეტრიული რიცხვის განსაზღვრა.

20. მოიყვანეთ ირაციონალური  $a$  რიცხვის შებრუნებული რიცხვის განსაზღვრა.

21. რას ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის მაჟორანტი? მინორანტი?
22. რას ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზედა საზღვარი? ქვედა საზღვარი?
23. რას ნიშნავს, რომ  $E$  სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია? ქვემოდან შემოსაზღვრულია? შემოსაზღვრულია?
24. მოიყვანეთ  $[a, \beta]$  სეგმენტის სიგრძის განსაზღვრა, როცა  $a$  და  $\beta$  რიცხვებიდან ერთი მაინც ირაციონალურია.
25. განსაზღვრეთ ნამდვილი  $a$  რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე. რა თეორემები იცით აბსოლუტურ სიდიდეთა შესახებ?
26. დაწერეთ ბერნულის უტოლობა, ბერნულის განზოგადებული უტოლობა.

ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

1. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა  $[0, 1]$  სეგმენტსა და  $[a, b]$  სეგმენტს შორის.
2. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა  $[a, b]$  ინტერვალსა და რიცხვთა ღერძს შორის.
3. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა  $[0, 1[$  და  $[0, +\infty[$  სიმრავლეებს შორის.
4. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წრეწირსა და წრფეს შორის.
5. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ერთეულ რადიუსიან წრეწირსა და  $[0, 1]$  სეგმენტს შორის.
6. დაამტკიცეთ, რომ ყველა კენტი რიცხვის სიმრავლე უსასრულოა.
7. დაამტკიცეთ, რომ არ არსებობს რაციონალური რიცხვი, რომლის კვადრატი სამის ტოლია.
8. ვთქვათ,  $E$  არის ერთზე ნაკლები ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ  $E$  სიმრავლეს არა აქვს უმცირესი და უდიდესი ელემენტი.
9. ვთქვათ, მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე სიმრავლე  $\{x\}$ . აღვნიშნოთ  $\{-x\}$  სიმბოლოთი მოცემული სიმრავლის რიცხვების სიმეტრიულ რიცხვთა სიმრავლე. დაამტკიცეთ, რომ

$$a) \inf \{-x\} = -\sup \{x\}; \quad b) \sup \{-x\} = -\inf \{x\}.$$

10. ვთქვათ,  $\{x+y\}$  არის ყველა  $x+y$  ჯამის სიმრავლე, სადაც  $x \in \{x\}$  და  $y \in \{y\}$ . დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$ა) \sup \{x+y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\};$$

$$ბ) \inf \{x+y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}.$$

11. ვთქვათ,  $\{xy\}$  არის ყველა  $xy$  ნამრავლის სიმრავლე, სადაც  $x \in \{x\}$  და  $y \in \{y\}$ , ამისთანავე  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$ა) \inf \{xy\} = \inf \{x\} \cdot \inf \{y\};$$

$$ბ) \sup \{xy\} = \sup \{x\} \cdot \sup \{y\}.$$

12. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$|a+b+c| \geq |a| - (|b|+|c|).$$

13. ამოხსენით შემდეგი უტოლობები:

$$ა) |x+3| < 0,1; \quad ბ) |x+5| \geq 10; \quad გ) |2x-1| < |x-1|.$$

$$პასუხი: ა)  $-3,1 < x < -2,9$ ; ბ)  $x \leq -15$ ,  $x \geq 5$ ;$$

$$გ)  $0 < x < \frac{2}{3}$ .$$

14. დაამტკიცეთ იგივეობა

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

15. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ ბერნულის უტოლობა

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) > 1+a_1+a_2+\dots+a_n,$$

სადაც  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ერთი და იმავე ნიშნის რიცხვებია, რომლებიც  $-1$  რიცხვს აღემატებიან.

16. დაამტკიცეთ უტოლობა

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2).$$



## თ ა ვ ი II

### ფ უ ნ კ ც ი ა

#### § 1. ც ვ ლ ა დ ი ზ ა მ უ ლ ი ვ ი ს ი დ ი ლ ე ა ვ ი

თუ დავაკვირდებით რაიმე მოვლენას ან თვალყურს ვადევნებთ ტექნიკური პროცესის მსვლელობას, შევნიშნავთ რომ ამ მოვლენაში ან პროცესში მონაწილე სიდიდეები სხვადასხვანაირად იქცევიან. ზოგიერთი არ იცვლება, ზოგი კი განიცდის ცვლილებას. მაგალითად, ჰერმეტიკულად დახურულ ჰურკელში მოთავსებული გაზი გათბობისას მუდმივ მოცულობას ინარჩუნებს; მუდმივია აგრეთვე მისი მოლეკულების რიცხვიც, მაგრამ გაზის ტემპერატურა და დრეკადობა იცვლება.

ვინაიდან მათემატიკა მოქმედი იარაღია ზუსტი ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკისათვის, ამიტომ მან უნდა შექმნას აპარატი. რომელიც საშუალებას მოგვცემს სისტემატურად შევისწავლოთ ბუნებასა და ტექნიკურ პროცესებში მონაწილე სიდიდეთა ცვალებადობა. ასეთი აპარატია სწორედ მათემატიკური ანალიზი.

მათემატიკური ანალიზის პირველი ძირითადი ცნებაა ცვლადი სიდიდის ცნება. ცვლადის შემოღებამ მათემატიკაში გადამწყვეტი გავლენა მოახდინა მის შემდგომ განვითარებაზე.

გ ა ნ ს ა ზ დ ვ რ ა 1. ც ვ ლ ა დ ი ე წოდება ისეთ სიდიდეს, რომელიც მოცემული საკითხის პირობებში ლებულობს სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობას. მუდმივი ეწოდება ისეთ სიდიდეს, რომელსაც მოცემული საკითხის პირობებში აქვს ერთიდაიგივე რიცხვითი მნიშვნელობა.

თუ რაიმე სიდიდეს აღვნიშნავთ  $x$  ან  $y$  ასოთი, ეს არ გვადლევს არავითარ მითითებას იმაზე, ცვლადია ეს სიდიდე თუ მუდმივი. ამიტომ სიდიდის ცვლილების ხასიათი ყოველთვის განსაკუთრებით უნდა იყოს აღნიშნული.

ერთი და იგივე სიდიდე ერთ შემთხვევაში შეიძლება იყოს მუდმივი, მეორეში კი ცვლადი. ასეთ სიდიდეს პ ა რ ა მ ე ტ რ ი ე წოდება. მაგალითად, თუ  $r$  რადიუსიან წრეს მისი რადიუსის შეუცვ-

ლელად ვაგორებთ წრფეზე, ამ წრის ცენტრის მდებარეობა შეიცვლება, ხოლო ფართობი  $\pi r^2$  მუდმივი დარჩება. თუკი წრის ცენტრს უძრავად დავტოვებთ და  $r$  რადიუსს შევცვლით, წრის  $\pi r^2$  ფართობი შეიცვლება. ამრიგად, წრის ფართობი ერთ შემთხვევაში მუდმივია, მეორეში კი—ცვლადი, და რაკი ორივე შემთხვევაში წრის ფართობია  $\pi r^2$ , ამიტომ  $r$  არის პარამეტრი.

არსებობს ისეთი მუდმივი სიდიდეები, რომლებიც თავის მნიშვნელობას ნებისმიერ პირობებში ინარჩუნებენ. ასეთ სიდიდეებს აბსოლუტური მუდმივი სიდიდეები ეწოდება. მაგალითად, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი და წრეწირის სიგრძის ფართობა დიამეტრთან აბსოლუტურად მუდმივი სიდიდეებია. აბსოლუტურად მუდმივია აგრეთვე ზოგიერთი ფიზიკური სიდიდეც, მაგალითად, გრავიტაციული მუდმივი.

ცვლადი სიდიდეები ჩვეულებრივ აღინიშნება ლათინური ანბანის უკანასკნელი ასოებით  $x, y, z, u, v, w, t$ , მუდმივი სიდიდეები კი პირველი ასოებით  $a, b, c, \dots$

### § 2. ფუნქციის ცნება

ფუნქციის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. ფუნქცია მათემატიკური ანალიზის მთავარი ობიექტია. ფუნქციონალური დამოკიდებულების ცნების გამოყენებით შეგვიძლია ავსახოთ მატერიალურ სამყაროში არსებული დამოკიდებულებანი. ბუნებასა და ტექნიკაში არსებული რაოდენობითი დამოკიდებულებების განხილვისას ყოველთვის საქმე გვაქვს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებებთან. ბუნების ერთ და იმავე მოვლენაში მონაწილე თითქმის ყველა სიდიდე ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად არ იცვლება; ჩვეულებრივ ერთი მათგანის შეცვლა იწვევს მეორის შეცვლას.

სხვადასხვა სიდიდეს შორის წარმოშობილ დამოკიდებულებათა შესწავლას მივყავართ ფუნქციის ცნებამდე. შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ გარკვეულ პირობებში ორი სიდიდე ერთმანეთთან დაკავშირებული იყოს ისე, რომ ერთი სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს მეორე სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობა. თუ გვაქვს ასეთი შესაბამისობა, მაშინ ამბობენ რომ მეორე სიდიდე პირველი სიდიდის ფუნქციაა.

განვიხილოთ მაგალითები:

1. სხეულის ტემპერატურის შეცვლა იწვევს მისი მოცულობის

შეცვლას. მაშასადამე, სხეულის მოცულობა ტემპერატურის ფუნქციაა.

2. ჰაერის ტემპერატურა დღის სხვადასხვა დროისათვის სხვადასხვაა, რის გამოც ჰაერის ტემპერატურა დროის ფუნქციაა.

3. სხვადასხვა რადიუსიან სფეროს სხვადასხვა მოცულობა აქვს. ამიტომ სფეროს მოცულობა არის რადიუსის ფუნქცია.

ახლა მოვიყვანოთ ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა, რომელსე დირიხლეს ეკუთვნის.

განსაზღვრა 2. თუ ნამდვილ რიცხვთა  $E$  სიმრავლის ყოველ  $x$  რიცხვს შეესაბამება რაიმე წესით ერთი  $y$  ნამდვილი რიცხვი, მაშინ იტყვიან, რომ  $y$  არის  $x$ -ის ფუნქცია. თვით  $E$  სიმრავლეს ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება.

ის ფაქტი, რომ  $y$  არის  $x$ -ის ფუნქცია, ჩაიწერება ასე:

$$y = f(x)$$

და იკითხება:  $y$  უდრის ეფ იქსს. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ  $x$  და  $y$  ცვლადებს შორის არსებობს ფუნქციონალური დამოკიდებულება.  $x$ -ს ეწოდება დამოუკიდებელი ცვლადი ანუ არგუმენტი,  $y$ -ს კი დამოკიდებული ცვლადი.

აქ  $f$  აღნიშნავს არა სიდიდეს, არამედ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადებს შორის შესაბამისობის კანონს. კერძოდ  $f$  შეიძლება აღნიშნავდეს მათემატიკურ იმ ოპერაციათა ერთობლიობას, რომლებიც უნდა ვაწარმოოთ  $x$ -ზე, რომ მივიღოთ  $y$ -ის მნიშვნელობები.

მაგალითად, ვთქვათ მოცემულია  $y = 2x^2$  ფუნქცია. იგი ჩაწერილია  $y = f(x)$  სახით. აქ  $f$  აღნიშნავს შემდეგს: მოცემული  $x$  მნიშვნელობის შესაბამისი  $y$  მნიშვნელობის მისაღებად საჭიროა  $x$  ავახარისხოთ კუბში და გავამრავლოთ 2-ზე.  $y = \cos x$  ფორმულაში ნიშანი  $\cos$  არსებითად იმავე როლს ასრულებს, რომელსაც  $f$  ნიშანი  $y = f(x)$  ფორმულაში, განსხვავება აქ მხოლოდ იმაშია, რომ  $\cos$  ნიშანი შემოღებულია გარკვეული ფუნქციის აღსანიშნავად, იმ დროს, როდესაც  $f$  შეიძლება ვიხმართ ნებისმიერი ფუნქციისათვის. ცხადია, მოცემული ფუნქციის აღსანიშნავად  $f$ -ის ნაცვლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი ასო, მაგალითად  $\varphi$ .

თუ ერთდროულად განვიხილავთ რამდენიმე სხვადასხვა ფუნქციას, მაშინ აუცილებელი ხდება სხვადასხვა აღნიშვნის შემოღება. მაგალითად,  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $F(x)$ ,  $\Phi(x)$  სხვადასხვა ფუნქციას აღნიშნავს.

თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $E$  სიმრავლეზე და  $x_0$  არის  $E$  სიმრავლის რაიმე ელემენტი, მაშინ,  $f(x_0)$  წარმოადგენს  $x_0$ -ის შესაბამის რიცხვს და მას ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა  $x_0$  წერტილში.

$f(x)$  ფუნქციის ყველა მნიშვნელობის სიმრავლეს ამ ფუნქციის ცვლილებების არე ეწოდება.

შენიშნავთ, რომ ფუნქციის განსაზღვრაში აუცილებელი არაა, რომ  $x$  არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს  $y$  ფუნქციის სხვადასხვა მნიშვნელობა. ასე რომ  $y$ -ის ყველა მნიშვნელობა შეიძლება იყოს ერთიდაიგივე და მაინც  $y$  იყოს  $x$ -ის ფუნქცია. ასეთი ფუნქციაა მაგალითად,  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ , რომელიც ერთის ტოლია  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ასევე, ნებისმიერი  $c$  მუდმივი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $x$ -ის ფუნქცია, რომელიც ინარჩუნებს ერთსა და იმავე  $c$  მნიშვნელობას არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის.

### § 8. ცალსახა და მრავალსახა ფუნქცია

ფუნქციის ცნების განსაზღვრის მიხედვით,  $y$  არის  $x$ -ის ფუნქცია; თუ  $x$ -ის ყოველ მნიშვნელობას მოცემული არიდან შეესაბამება  $y$ -ის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა. მაგრამ ზოგჯერ მიზანშეწონილია განვაზოგადოთ ფუნქციის ცნება ისე, რომ არგუმენტის მოცემულ მნიშვნელობას შეესაბამებოდეს არა ერთი, არამედ რამდენიმე მნიშვნელობა (უსასრულოდ ბევრიც კი). ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ  $y = f(x)$  წარმოადგენს  $x$ -ის მრავალსახა ფუნქციას.

როდესაც არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის ერთი გარკვეული მნიშვნელობა, ამბობენ, რომ მოცემული ფუნქცია ცალსახაა.

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $x$  და  $y$  ცვლადები შეკავშირებულია განტოლებით

$$x^2 + y^2 = 9.$$

მაშინ  $x$  სიდიდის ყოველ მნიშვნელობას  $y$ -ს,  $3$  [ ინტერვალიდან შეესაბამება  $y$ -ის ორი მნიშვნელობა

$$y = +\sqrt{9-x^2}, \quad y = -\sqrt{9-x^2}.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ  $x^2 + y^2 = 9$  განტოლება განსაზღვრავს  $y$ -ს, როგორც  $x$ -ის ორსახა ფუნქციას.

ჩვეულებრივ, მრავალსახა ფუნქცია შეგვიძლია დავყოთ ცალსახა ფუნქციებად, ანუ როგორც იტყვიან, მოცემული მრავალსახა ფუნქციიდან შეგვიძლია გამოვყოთ მისი ცალსახა შტოები.

მაგალითად, თუ შევთანხმდებით განვიხილოთ  $y$ -ის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობანი, რომლებიც აკმაყოფილებენ  $x^2 + y^2 = 9$  განტოლებას, მაშინ ჩვენ მივიღებთ  $]-3, 3[$  ინტერვალში განსაზღვრულ ცალსახა ფუნქციას.

შემდეგში ჩვენ განვიხილავთ ცალსახა ფუნქციას, თუ საწინააღმდეგო არ იქნება ნათქვამი.

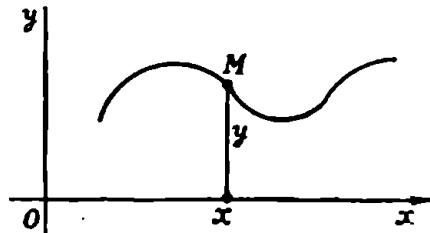
§ 4. ფუნქციის გრაფიკი

ეთქვათ,  $X$  შუალედზე განსაზღვრულია

$$y = f(x) \tag{4.1}$$

ფუნქცია.  $x$ -ის ყოველ მნიშვნელობას  $X$  შუალედიდან შეესაბამება  $y$ -ის გარკვეული მნიშვნელობა. ამ გზით მივიღებთ  $(x, y)$  წყვილების სიმრავლეს. ავიღოთ

სიბრტყეზე მართკუთხა კოორდინატა  $Oxy$  სისტემა (ნახ. 11). ზემოაღნიშნულ ნამდვილ რიცხვთა ყოველ  $(x, y)$  წყვილს შეესაბამება სიბრტყის გარკვეული  $M$  წერტილი, რომლის აბსცისაა  $x$ , ორდინატა კი  $y$ . ამგვარად, სიბრტყეზე მივიღებთ წერტილთა სიმრავლეს, რომელსაც  $f(x)$  ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება.



ნახ. 11.

$f(x)$  ფუნქციის გრაფიკს, ჩვეულებრივ, წირი ჰქვია, (4.1) განტოლებას კი—წირის განტოლება.

ახლა განვიხილოთ განტოლება

$$F(x, y) = 0, \tag{4.2}$$

რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს ორ  $x$  და  $y$  ცვლადს. ეს განტოლება, საზოგადოდ, განსაზღვრავს  $x$  ცვლადის ერთ ან რამდენიმე ფუნქციას. მაგალითად,

$$3y - 5xy + 7 = 0$$

განტოლება განსაზღვრავს ერთ ფუნქციას

$$y = \frac{7}{5x - 3},$$

სადაც  $x \neq \frac{3}{5}$ , ხოლო განტოლება

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

ორ ფუნქციას

$$y = +\sqrt{4-x^2}, \quad y = -\sqrt{4-x^2}.$$

რამე  $y = f(x)$  ფუნქციას, რომელიც გარკვეულ არეში (4.2) განტოლებას იგივეურად აკმაყოფილებს, ეწოდება ამ განტოლებით განსაზღვრულა არა ცხადი ფუნქცია.

ყველა იმ  $(x, y)$  წერტილის სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ  $F(x, y) = 0$  განტოლებას, ეწოდება ამ განტოლებით განსაზღვრული წირი, ხოლო თვით ამ განტოლებას—წირის განტოლება არა ცხადი სახით.

შენიშვნა. წირის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი ურთულესი ცნებაა. წირის ზოგადი განსაზღვრა მოცემულია მათემატიკის სპეციალურ დარგში—ტოპოლოგიაში. ამ წიგნში წირის განსაზღვრა არ მოგვყავს მისი სირთულის გამო. წირზე წარმოდგენას გვაძლევს მოძრავი წერტილის მიერ აღწერილი გზა.

#### § 5. ფუნქციის მოცემის ხარხაი

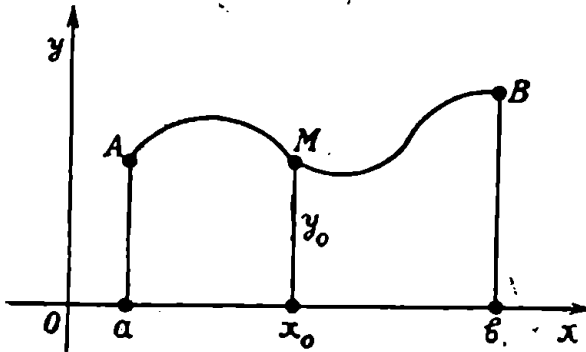
თუ ცნობილაა წესი, რომლის მიხედვით არგუმენტის ყოველ მნიშვნელობას ფუნქციის განსაზღვრის არიდან შეესაბამება ფუნქციის გარკვეული მნიშვნელობა, მაშინ ეს ფუნქცია თეორიულად ცნობილად ითვლება. მაგრამ პრაქტიკისათვის მნიშვნელოვანია, რომ ფუნქციის მოცემის წესი იყოს შეძლებისდაგვარად ყველაზე მოხერხებული. ამ მიზანს ვაღწევთ სხვადასხვა საშუალებით; ყოველ მათგანს აქვს თავისი ღირსება და თავისი ნაკლი. ყველაზე მეტად იხმარება ფუნქციის მოცემის სამი ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

**1. ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი.** ამოწერენ დამოუკიდებელი ცვლადის მთელ რიგ მნიშვნელობას და ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობებს. ამით შედგება გარკვეული ცხრილი. მაგალითად, კარგადაა ცნობილი ლოგარითმების ცხრილი, ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ცხრილი და სხვა. ფუნქციის მოცემის ცხრილური ხერხი განსაკუთრებით გავრცელებულია ბუნებისმეტყველებასა და ტექნიკაში.

ცხრილური ხერხის ღირსება იმაში მდგომარეობს, რომ არგუმენტის რიგი მნიშვნელობისათვის იგი მაშინვე გვაძლევს ფუნქციის შესაბამის მნიშვნელობას (ზუსტს ან მიახლოებითს მოთხოვნილი სიზუსტით). ცხრილური ხერხის ნაკლი იმაში გამოიხატება, რომ ცხრილი ხშირად არ შეიცავს არგუმენტის საჭირო მნიშვნელობებს,

და მაშინ ან უნდა დავკმაყოფილდეთ არასაკმარისი სიზუსტით, ან და ვაწარმოთ დამატებითი გამოთვლები.

2. ფუნქციის მოცემის გრაფიკული ხერხი. ვთქვათ, სიბრტყეზე აღებულია კოორდინატა  $Oxy$  სისტემა და ამ სისტემის მიმართ მოცემულია  $AB$  წირი, რომელსაც  $Oy$  ღერძის ყოველი პარალელური წრფე ან არ კვეთს; ან კვეთს ერთ წერტილში (ნახ. 12). ეს წი-



ნახ. 12.

რი განსაზღვრავს  $y=f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე. მართლაც, ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $x_0$  წერტილი და მასზე გადავლოთ  $Oy$  ღერძის პარალელური წრფე; წრფის გადაკვეთის წერტილი  $AB$  წირთან აღვნიშნოთ  $M$ -ით. ამ წერტილის  $y_0$  ორდინატა იქნება ფუნქციის მნიშვნელობა  $x_0$  წერტილში.

ფუნქციის მოცემის აღწერილ ხერხს ეწოდება ფუნქციის მოცემის გრაფიკული ხერხი.

ფუნქციის მოცემის გრაფიკულ ხერხს ხშირად მიმართავენ ექსპერიმენტულ შრომებში და განსაკუთრებით იქ, სადაც საშუალება გვაქვს გამოვიყენოთ თვითჩამწერი ბელსაწყობები.

3. ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი. ეს ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ შესაბამისობა  $x$  არგუმენტსა და  $y$  ფუნქციის შორის მოცემულია ფორმულით ან ფორპულათა სისტემით. მაგალითად, ფორმულა

$$y = \frac{2x^2 - 6x + 1}{x^2 + 3}$$

განსაზღვრავს  $y$ -ს, როგორც  $x$ -ის ფუნქციას.

მოქმედებანი, რომლებიც ფორპულაშია ნაჩვენები, რაც შემთხვევაში საშუალებას იძლევა მივიღოთ ფუნქციის ზუსტი მნიშვნე-

ლობები არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან; რიგ სხვა შემთხვევაში ფორმულით შეგვიძლია მივიღოთ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობები ნებისმიერი სიზუსტით.

ანალიზური ხერხის ნაკლი ისაა, რომ არ გვაქვს თვალსაჩინოება და ხშირ შემთხვევაში დამქანცველ გამოთვლებთან გვაქვს საქმე.

მათემატიკურ ანალიზში უპირატესობას ანიჭებენ ფუნქციის მოცემის ანალიზურ ხერხს.

განსაზღვრა 3. ანალიზურად მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობის სიმრავლეს, რომელთათვის შესაბამის ფორმულას აზრი აქვს.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y = \sqrt{1-x^2}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა.  $y = \sqrt{1-x^2}$  ფორმულას აზრი აქვს ყველა  $x$ -ისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$1-x^2 \geq 0.$$

აქედან  $x^2 \leq 1$ . მაშასადამე,  $|x| \leq 1$ . ეს უტოლობა ტოლფასია უტოლობებისა

$$-1 \leq x \leq 1.$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $[-1, 1]$  სეგმენტი.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = \frac{1}{x+2}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა  $x = -2$  მნიშვნელობისა, ვინაიდან ნულზე გაყოფა არ შეიძლება. ამიტომ ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება  $]-\infty, -2[ \cup ]-2, +\infty[$  სიმრავლე.

მაგალითი 3.  $y$  ფუნქცია მოცემულია ფორმულით

$$y = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}.$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა.  $\sqrt{x-3}$  გამოსახულებას აზრი აქვს, როდესაც  $x \geq 3$ ,  $\sqrt{8-x}$  გამოსახულებას კი, როდესაც  $x \leq 8$ . მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $[3, 8]$  სეგმენტი.



მაგალითი 4.  $y = \sqrt{-|x|}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე შედგება მხოლოდ ერთი წერტილისაგან, სახელობრ  $x=0$  წერტილისაგან.

### § 6. რაციონალური ფუნქციები

ფუნქციათა უმარტივეს კლასს მრავალწევრები შეადგენენ. მრავალწევრი ეწოდება

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (6.1)$$

სახის ფუნქციას, სადაც  $x$  დამოუკიდებელი ცვლადია,  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვებს (მრავალწევრის კოეფიციენტებს), ხოლო  $n$  არის ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. ამ  $n$  რიცხვს ეწოდება (6.1) მრავალწევრის ხარისხი. ხშირად მრავალწევრს მთელ რაციონალურ ფუნქციას ან პოლინომს უწოდებენ.

მრავალწევრის კერძო სახეებია: წრფივი ფუნქცია

$$y = ax + b \quad (a \neq 0),$$

კვადრატული ფუნქცია

$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0).$$

ფუნქციათა შემდეგი უფრო ფართო კლასია რაციონალურ ფუნქციათა კლასი. ორი მრავალწევრის ფარდობას ეწოდება რაციონალური ფუნქცია:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m}$$

აქ იგულისხმება, რომ მრიცხველსა და მნიშვნელს არა აქვთ საერთო ფესვი.

ასეთი ფუნქციის განსაზღვრის არეს შეადგენს  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობა, რომლებიც მნიშვნელს ნულად არ აქცევენ. ცხადია, მთელი რაციონალური ფუნქცია წარმოადგენს რაციონალური ფუნქციის კერძო შემთხვევას.

რაციონალურ ფუნქციას

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (6.2)$$

სადაც  $a, b, c, d$  მუდმივები აკმაყოფილებენ პირობებს  $c \neq 0$  და

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ , ეწოდება წილადურ-წრფივი ფუნქცია. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $(-\infty, +\infty) \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$  სიმრავლე.

რაციონალური ფუნქციისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ამ ფუნქციის მნიშვნელობის გამოსათვლელად საკმარისია არგუმენტზე შევასრულოთ სასრული რაოდენობა ოთხი არითმეტიკული მოქმედებისა, როგორცაა შეკრება, გამოკლება, გამრავლება და გაყოფა.

ახლა განვიხილოთ ორი ცვლადის მრავალწევრი.  $x$  და  $y$  ცვლადების  $F(x, y)$  მრავალწევრა ეწოდება  $a_{ikh} x^i y^k$  სახის წევრთა ჯამს, სადაც  $a_{ikh}$  ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო  $i$  და  $k$  მაჩვენებლები— არაუარყოფითი მთელი რიცხვები.  $a_{ikh} x^i y^k$  გამოსახულებას ეწოდება  $F(x, y)$  მრავალწევრის წევრი,  $i+k$  რიცხვს კი  $a_{ikh} x^i y^k$  წევრის ხარისხი ან რიგი.

$F(x, y)$  მრავალწევრის ხარისხი ეწოდება მისი წევრების ხარისხებს შორის უდიდესს. მაგალითად,

$$F(x, y) = 2x^3y^2 - 4x^2y + 8x^{10}y^7 + 3x - y + 1$$

მე-17 ხარისხის მრავალწევრია.

თუ  $F(x, y)$  მრავალწევრში  $y$ -ის უდიდესი ხარისხია  $n$  რიცხვი, მაშინ იგი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$F(x, y) = P_0(x) + P_1(x)y + \dots + P_n(x)y^n,$$

სადაც  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  წარმოადგენენ  $x$  ცვლადის მრავალწევრებს.

მაგალითად, თუ

$$F(x, y) = x^{10}y^2 + 2x^{20}y^3 + 3xy^3 + x + 5y + 4.$$

მაშინ იგი შეგვიძლია გადავწეროთ ასე

$$F(x, y) = (x+4) + (5+x^{10})y + 2x^{20}y^2 + 3xy^3.$$

ამ შემთხვევაში

$$P_0(x) = x+4, \quad P_1(x) = 5+x^{10}, \quad P_2(x) = 2x^{20},$$

$$P_3(x) = 3x.$$

ორი ცვლადის რაციონალური ფუნქცია ეწოდება ორი ცვლადის ორი მრავალწევრის ფარდობას.

## § 7. ცხადი და არაცხადი ალგებრული ფუნქციები. ტრანსცენდენტური ფუნქციები

განსაზღვრა 4. შეკრებას, გამოკლებას; გამრავლებას, გაყოფასა და ფესვის ამოღებას ალგებრული ოპერაციები ეწოდება.

განსაზღვრა 5.  $y=f(x)$  ფუნქციას ეწოდება ცხადი ალგებრული ფუნქცია, თუ ყოველი  $x$ -სათვის, ფუნქციის განსაზღვრის არიდან, მისი შესაბამისი  $y$ -ის გამოსათვლელად საჭიროა  $x$ -ზე ეაწარმოთ მხოლოდ სასრული რიცხვი ალგებრული ოპერაციებისა.

მაგალითად,

$$y = \sqrt{1+x} - \sqrt[3]{2-3x} + \frac{7x^3+2x-1}{16x^2-7x+5}$$

არის ცხადი ალგებრული ფუნქცია.

შეიძლება დამტკიცდეს, რომ თუ  $y=f(x)$  არის ცხადი ალგებრული ფუნქცია, მაშინ იგი აკმაყოფილებს  $F(x, y)=0$  განტოლებას, სადაც  $F(x, y)$  წარმოადგენს  $x$  და  $y$ -ის მიმართ რაიმე მრავალწევრს.

განსაზღვრა 6.  $y$ -ს ეწოდება  $x$ -ის არაცხადი ალგებრული ფუნქცია, თუ იგი ამონახსნია  $F(x, y)=0$  განტოლებისა. სადაც  $F(x, y)$  მრავალწევრია  $x$  და  $y$ -ის მიმართ.

შეიძლება ვიფიქროთ, რომ ყოველი არაცხადი ალგებრული  $y$  ფუნქცია იქცევა ცხად ალგებრულ ფუნქციად, თუ  $F(x, y)=0$  განტოლებას ამოვხსნით  $y$ -ის მიმართ რადიკალების საშუალებით. მაგრამ ალგებრული განტოლება, საზოგადოდ, ვერ ამოიხსნება რადიკალების საშუალებით. მაშასადამე, არაცხად ალგებრულ ფუნქციათა კლასი უფრო ფართოა, ვიდრე ცხად ალგებრულ ფუნქციათა კლასი.

მაგალითად,  $y^5+y+x=0$  განტოლება  $y$ -ის მიმართ ვერ ამოიხსნება რადიკალების საშუალებით. მაშასადამე, ეს განტოლება განსაზღვრავს  $y$ -ს როგორც  $x$ -ის არცხადი ალგებრულ ფუნქციას.

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ რაციონალური ფუნქცია ცხადი ალგებრული ფუნქციის კერძო შემთხვევაა, ხოლო ცხადი ალგებრული ფუნქცია არაცხადი ალგებრული ფუნქციის კერძო სახეა.

განსაზღვრა 7. ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც რაციონალური არაა, ირაციონალური ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციას, რომელიც ალგებრული არაა, ტრანსცენდენტური ფუნქცია ეწოდება. მაგალითად,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$  ტრანსცენდენტური ფუნქციებია.

### § 8. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა ფუნქციის ცვლილების ხასიათის შესწავლა. ფუნქციის ცვლილების უმარტივესი შემთხვევა გვაქვს მაშინ, როდესაც ფუნქცია მხოლოდ იზრდება ან მხოლოდ კლებულობს.

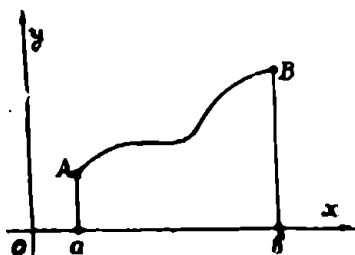
განსაზღვრა 8. რაიმე  $X$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება ზრდადი ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი  $x'$  და  $x''$  რიცხვისათვის

$$f(x') \leq f(x''), \text{ როდესაც } x' < x'',$$

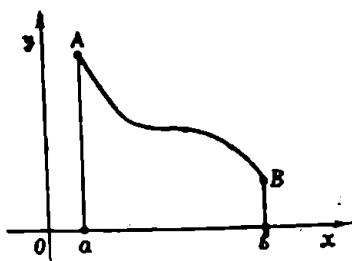
ხოლო  $f(x)$  ფუნქცია კლებადია  $X$  სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი  $x'$  და  $x''$  რიცხვისათვის

$$f(x') \geq f(x''), \text{ როდესაც } x' < x''$$

მე-13 ნახაზზე მოცემულია ზრდადი ფუნქციის გრაფიკი, მე-14 ნახაზზე კი კლებადი ფუნქციის გრაფიკი.



ნახ. 13.



ნახ. 14.

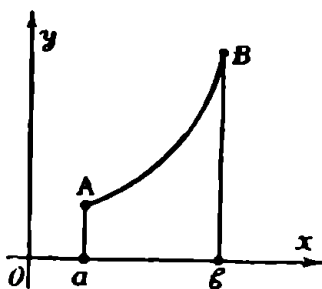
განსაზღვრა 9.  $X$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება არსებითად ზრდადი ამ სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი  $x'$  და  $x''$  რიცხვისათვის

$$f(x') < f(x''), \text{ როდესაც } x' < x'',$$

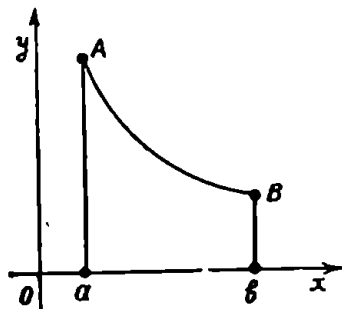
ხოლო  $f(x)$  არსებითად კლებადია  $X$  სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ყოველი  $x'$  და  $x''$  რიცხვისათვის

$$f(x') > f(x''), \text{ როდესაც } x' < x''.$$

მე-15 და მე-16 ნახაზებზე წარმოდგენილია შესაბამისად არსებითად ზრდადი და არსებითად კლებადი ფუნქციების გრაფიკები.



ნახ. 15.



ნახ. 16.

განსაზღვრა 10.  $X$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება მონოტონური ამ სიმრავლეზე, თუ იგი ზრდადი ან კლებადი, ხოლო ფუნქცია არსებითად მონოტონურია, თუ იგი არსებითად ზრდადი ან არსებითად კლებადია.

მაგალითი 1.  $f(x) = x^2$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $[0; +\infty[$  შუალედში, ხოლო იგი არსებითად კლებადია  $] -\infty; 0$  შუალედში.  $[-3; 2]$  სეგმენტზე მოცემული ფუნქცია არც ზრდადი და არც კლებადი.

მაგალითი 2.  $f(x) = x^3$  ფუნქცია არსებითად ზრდადი ნებისმიერ  $X$  შუალედზე, ხოლო  $\varphi(x) = -x^3$  ფუნქცია არსებითად კლებადია ნებისმიერ  $X$  შუალედზე.

§ 9. შემოსაზღვრული და შემოსაზღვრელი ფუნქციები

$X$  სიმრავლეზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული ამ სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი დადებითი  $M$  რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ყოველი  $x$  წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$|f(x)| \leq M. \tag{9.1}$$

(9.1) უტოლობა ტოლფასია. უტოლობებისა

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

$f(x)$  ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრელი  $X$  სიმრავლეზე, თუ ყოველი რაგინდ დიდი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის მოიძებნება ამ სიმრავლის ისეთი  $x_0$  წერტილი, რომ

$$|f(x_0)| > A.$$

მაგალითი 1.  $f(x) = \cos x$  ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში, რადგან ამ შუალედის ყოველი  $x$  წერტილისათვის  $|\cos x| \leq 1$ .

მაგალითი 2. ვთქვათ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]0, 1]$  შუალედში. ეს ფუნქცია შემოუსაზღვრელია ამ შუალედში. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი რაგინდ დიდი დადებითი რიცხვი  $A$  და ავიღოთ  $x_0 = \frac{1}{2A}$  რიცხვი. ცხადია,  $x_0 \in ]0, 1]$ . მეორე მხრით

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} = 2A > A.$$

ამრიგად, მოცემული  $f(x) = \frac{1}{x}$  ფუნქცია შემოუსაზღვრელია  $]0, 1]$  შუალედში.

### § 10. ლუწი და კანტი ფუნქციები

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ისეთ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიულ შუალედებზე.

განსაზღვრა 11.  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ ნებისმიერი  $x$ -სათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან მართებული ტოლობა

$$f(-x) = f(x).$$

ლუწი ფუნქციების მაგალითებია:

$$y = x^2, \quad y = |x|, \quad y = \cos x, \quad y = \sin^2 x.$$

ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ. ამიტომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი მხოლოდ  $x \geq 0$  მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ მიღებული გრაფიკი სარკისებრად გადავსახოთ ორდინატთა ღერძიდან.

განსაზღვრა 12.  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ ნებისმიერი  $x$ -სათვის ფუნქციის განსაზღვრის არიდან მართებული ტოლობა

$$f(-x) = -f(x).$$

კენტი ფუნქციების მაგალითებია:

$$y=x^3, \quad y=\sin x, \quad y=\operatorname{tg} x.$$

კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. კენტი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავადგოთ ფუნქციის გრაფიკი  $x \geq 0$  მნიშვნელობებისათვის. შემდეგ ორმაგი გადასახვით კოორდინატთა ღერძებიდან მიიღება გრაფიკის მეორე ნაწილი.

შენიშვნა. სიმეტრიულ შუალედზე განსაზღვრული ფუნქცია შეიძლება არ იყოს არც ლუწი და არც კენტი. მაგალითად,  $y=x+x$  და  $y=x^2$  ფუნქციები არც კენტია და არც ლუწი.

ლუწი და კენტი ფუნქციების მიმართ მართებულია შემდეგი თეორემები:

**თეორემა 1.** ორი  $f(x)$  და  $g(x)$  ლუწი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა ლუწი ფუნქციაა.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x) = f(x) + g(x).$$

მაშინ

$$F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x).$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ  $f(x) - g(x)$  სხვაობა ლუწი ფუნქციაა. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 2.** ორი კენტი ფუნქციის ჯამი და სხვაობა კენტი ფუნქციაა.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

**თეორემა 3.** ორი ლუწი ან ორი კენტი ფუნქციის ნამრავლი ლუწი ფუნქციაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x) = f(x) g(x).$$

თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ლუწი ფუნქციებია, მაშინ

$$F(-x) = f(-x) g(-x) = f(x) g(x).$$

თუკი  $f(x)$  და  $g(x)$  კენტი ფუნქციებია, მაშინ

$$F(-x) = f(-x) g(-x) = [-f(x)] [-g(x)] = f(x) g(x)$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 4.** ყოველი  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სიმეტრიულ შუალედზე, შეგვიძლია

წარმოვიდგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემდეგი ორი ფუნქცია:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

ცხადია,  $\varphi(x)$  არის ლუწი ფუნქცია,  $\psi(x)$  კი კენტი ფუნქციაა. ამასთანავე,

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

### § 11. პერიოდული ფუნქცია

გახსაზღვრა. რაიმე არეში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება პერიოდული პერიოდით  $\omega$ , ან მოკლედ  $\omega$ —პერიოდული ფუნქცია, სადაც  $\omega > 0$ , თუ ამ არის ყოველი  $x$  წერტილისათვის  $x \pm \omega$  წერტილები ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და მართებულია ტოლობა

$$f(x + \omega) = f(x).$$

მაგალითად  $\sin x$  და  $\cos x$  პერიოდული ფუნქციებია და მათი პერიოდია  $2\pi$ . ასევე,  $\operatorname{tg} x$  და  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციებიც პერიოდულია და მათი პერიოდია  $\pi$ .

თუ  $f(x)$  ფუნქციის პერიოდია  $\omega$ , მაშინ  $-\omega$  რიცხვიც იქნება პერიოდი, ვინაიდან

$$f(x - \omega) = f[(x - \omega) + \omega] = f(x).$$

გარდა ამისა, თუ  $\omega$  არის  $f(x)$  ფუნქციის პერიოდი, მაშინ  $\pm n\omega$ , სადაც  $n$  ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, იქნება აგრეთვე  $f(x)$  ფუნქციის პერიოდი.

ჩვეულებრივ, ფუნქციის პერიოდს უწოდებენ ყველა დადებით პერიოდს შორის უმცირესს.  $\sin x$  ფუნქციას ეწოდება  $2\pi$  პერიოდის ფუნქცია, თუმცა მისი პერიოდებია აგრეთვე  $2k\pi$ , სადაც  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  შევნიშნავთ, რომ ფუნქციის პერიოდთა შორის შეიძლება არ არსებობდეს უმცირესი. მაგალითად,  $f(x) = 1$  ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია ნულისაგან განსხვავებული ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი  $\omega$ , ვინაიდან

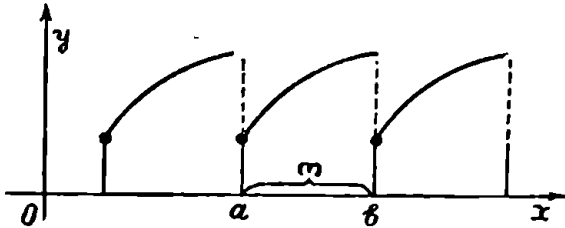
$$f(x + \omega) = 1 = f(x).$$

$\omega$ -პერიოდიანი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავადგოთ იგი ერთი პერიოდის ფარგლებში, ე. ი.  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის  $x + \omega$  მნიშვნელობამდე. შემდეგ, აგებული



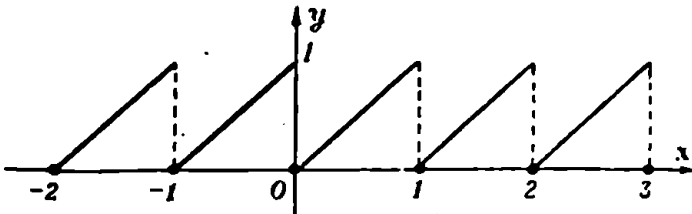
გრაფიკის გადაწვეით მარჯვნივ და მარცხნივ  $a$ ;  $2a$ ,  $3a$ ,... მანძილით, მივიღებთ ფუნქციის გრაფიკულ წარმოდგენას მთელ შუალედზე (ნახ. 17).

მაგალითი. ავადგოთ  $y=x-E(x)$  ფუნქციის გრაფიკი, სადაც  $E(x)$  წარმოადგენს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემა-



ნახ. 17.

ტება  $x$  რიცხვს. აღვიღო შესამოწმებელია; რომ ეს ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდი არის 1. ამ ფუნქციის გრაფიკი წარმოდგენილია მე-18 ნახაზზე.



ნახ. 18.

§ 19. შეკვეთილი ფუნქცია

ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა  $X$  სიმრავლეზე განსაზღვრულია

$$y = f(x) \tag{12.1}$$

ფუნქცია. ამ ფუნქციის ცვალებადობის არე აღვნიშნოთ  $Y$  ასოთი.

ავიღოთ  $Y$  სიმრავლის რაიმე  $y$  რიცხვი. მას შეიძლება შეესაბამებოდეს  $x$  არგუმენტის რამდენიმე მნიშვნელობა. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია მე-19 ნახაზზე.  $y = Om'$  მნიშვნელობას შეესაბამება  $x$ -ის  $Om_1$ ,  $Om_2$  და  $Om_3$  მნიშვნელობა.

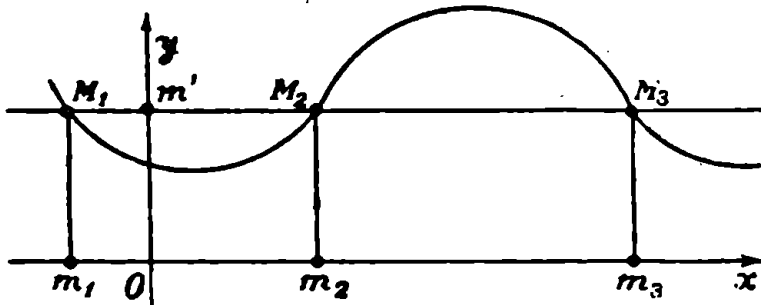
თუ  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია ან არსებითად კლებადი  $X$  სიმრავლეზე, მაშინ ფუნქციის ზრდადობის გამო  $Y$  სიმრავ-

ლის ყოველ  $y$  რიცხვს შეესაბამება  $x$  არგუმენტის მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა (ნახ. 20). მაშასადამე, თუ  $y$ -ს განვიხილავთ როგორც დამოუკიდებელ ცვლადს, მაშინ  $x$  იქნება  $y$ -ის ცალსახა ფუნქცია

$$x = \varphi(y), \quad (12.2)$$

რომელიც განსაზღვრულია  $Y$  სიმრავლეზე.

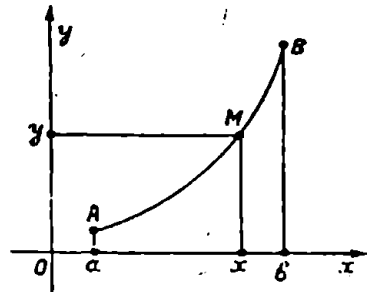
$\varphi(y)$  ფუნქციას ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის შექცეული ფუნქცია,  $f(x)$  კი პირდაპირი ფუნქციაა. შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $Y$ , ხოლო ცვალებადობის არე არის  $X$ .



ნახ. 19.

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $X$  შუალედში. მაშინ შექცეული  $\varphi(y)$  ფუნქციაც აგრეთვე არსებითად ზრდადია: ეს უშუალოდ გამომდინარეობს არსებითად ზრადი ფუნქციის განსაზღვრიდან. თუ დავუშვებთ, რომ  $f(x)$  არსებობს კლებადი ფუნქციაა  $X$  შუალედში, მაშინ მისი შექცეული ფუნქცია იქნება არსებითად კლებადი.

თუ  $X$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად მონოტონური არ არის, მაშინ საზოგადოდ არ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. მაგრამ ბევრ შემთხვევაში ხერხდება  $X$  შუალედის დაყოფა უბნებად ისე, რომ ყოველ მათგანზე  $f(x)$  იყოს არსებითად მონოტონური. ახლა თუ  $f(x)$  ფუნქციას განვიხილავთ ერთ-ერთ უბანზე, მაშინ შექცეული  $f(x)$  ფუნქცია იქნება ცალსახა.



ნახ. 20.

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $y=2x+5$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ამისათვის  $y=2x+5$  განტოლებიდან ვიპოვოთ  $x$ . გვაქვს

$$x = \frac{y-5}{2}.$$

ეს არის მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.

მაგალითი 2.  $y=x^2$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში და ამ შუალედში იგი მონოტონური არ არის. მისი ცვლილების არეა  $[0, +\infty[$  შუალედი.  $y$ -ის ყოველ მნიშვნელობას  $]0, +\infty[$  ინტერვალიდან შეესაბამება  $y=x^2$  ფორმულის მიხედვით  $x$ -ის ორი მნიშვნელობა. მაშასადამე, შექცეული ფუნქცია არის ორსახა. იგი გამოისახება ფორმულით.

$$x = \pm \sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$$

ახლა დავყოთ  $]-\infty, +\infty[$  შუალედი, რომელშიაც იცვლება  $y=x^2$  ფუნქციის არგუმენტი ორ შუალედად  $]-\infty, 0]$  და  $]0, +\infty[$ . ყოველ მათგანში  $y=x^2$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია და, მაშასადამე, შექცეული ფუნქცია არის ცალსახა.  $]-\infty, 0]$  შუალედში  $y=x^2$  ფუნქციის შექცეული ფუნქცია გამოისახება ფორმულით

$$x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty),$$

ხოლო  $]0, +\infty[$  შუალედში შექცეული ფუნქცია იქნება

$$x = +\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty).$$

კოორდინატთა ერთ და იმავე  $Oxy$  სისტემაში (12.1) და (12.2) განტოლებები გამოსახავენ ერთ და იმავე წირს. (12.1) ფუნქციისათვის არგუმენტის მნიშვნელობები აღებულია  $Ox$  ღერძზე, (12.2) ფუნქციისათვის კი  $Oy$  ღერძზე.

თუ (12.2) ფორმულაში არგუმენტს  $x$ -ით აღვნიშნავთ, ისე როგორც (12.1) ფორმულაში, ფუნქციას კი  $y$ -ით, მივიღებთ

$$y = \varphi(x). \tag{12.3}$$

ჩვეულებრივ,  $\varphi(x)$  ფუნქციას ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის შექცეული ფუნქცია,  $f(x)$  კი პირდაპირი ფუნქცია.

ახლა როგორც პირდაპირი, ისე შექცეული ფუნქციისათვის არგუმენტის მნიშვნელობები აიღება ერთ და იმავე  $Ox$  ღერძზე, ფუნქციის კი  $Oy$  ღერძზე.

შევნიშნოთ, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია, ხოლო  $\varphi(x)$  წარმოადგენს მის შებრუნებულ ფუნქციას, მაშინ

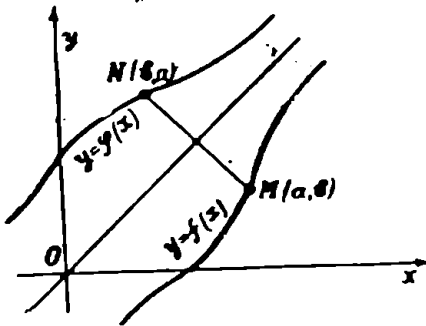
$$f[\varphi(x)] = x \text{ და } \varphi[f(x)] = x.$$

მაგალითად,  $f(x) = x^3$  ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია არის  $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$ . ამიტომ

$$f[\varphi(x)] = (\sqrt[3]{x})^3 = x \text{ და } \varphi[f(x)] = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

**თეორემა 5.** პირდაპირი და შებრუნებული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $y = f(x)$  ფუნქციის შებრუნებული ფუნქციაა  $y = \varphi(x)$ . ვიგულისხმობთ, რომ როცა  $x = a$ , მაშინ  $y = f(a) = b$ .



ნახ. 21.

ცხადია,  $M(a, b)$  წერტილი ძევს  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკზე (ნახ. 21). მაშინ  $N(b, a)$  წერტილი ძევს შებრუნებული  $y = \varphi(x)$  ფუნქციის გრაფიკზე, ვინაიდან  $a = \varphi(b)$ . მაგრამ  $M(a, b)$  და  $N(b, a)$  წერტილები სიმეტრიულია  $y = x$  წრფის მიმართ.

ამრიგად, პირდაპირი ფუნქციის გრაფიკის ყოველ წერტილს შეესაბამება შებრუნებული ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. ეს წერტილები სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისის მიმართ. მაშასადამე, თუ მოცემულია რაიმე ფუნქციის გრაფიკი, მაშინ მისი შებრუნებული ფუნქციის გრაფიკის მისაღებად საჭიროა ნახაზი გადავკეცოთ პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისაზე.

**§ 18. რთული ფუნქცია**

ვთქვათ,  $U$  შუალედზე განსაზღვრულია  $u$  ცვლადის ფუნქცია

$$y = f(u),$$

სადაც  $u$  თავის მხრივ წარმოადგენს  $X$  შუალედზე განსაზღვრულ  $x$  ცვლადის  $\varphi(x)$  ფუნქციას. ვიგულისხმობთ, რომ  $\varphi(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობები მოთავსებულია  $U$  შუალედზე. მაშინ ამ ორი ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია ავაგოთ ახალი ფუნქცია შემდეგნაირად: თუ  $x$  ნებისმიერი რიცხვია  $X$  შუალედიდან, მაშინ მას  $u = \varphi(x)$  ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ  $u$  ნამდვილ რიცხვს, რომელსაც თავის მხრივ  $y = f(u)$  ფუნქცია შეუსაბამებს გარკვეულ  $y$  რიცხვს. ამრიგად,  $y$  არის  $x$ -ის ფუნქცია:

$$y = F(x).$$

ასე განსაზღვრულ  $F(x)$  ფუნქციას ეწოდება  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  ფუნქციებით განსაზღვრული რთული ფუნქცია. მას აღნიშნავენ აგრეთვე ასე:

$$y = f[\varphi(x)]$$

და ამბობენ, რომ  $y$  ფუნქცია აგებულია  $f(u)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების სუპერპოზიციით.

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $y = \lg_a u$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]0, +\infty[$  შუალედში. მაშინ  $y = \lg_a u$  და  $u = \lg x$  ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ  $y = \lg_a \lg x$  ფუნქციას.

მაგალითი 2.  $y = u^3$  და  $u = \sqrt[3]{5x-1}$  ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ  $y = 5x-1$  ფუნქციას.

რთულა ფუნქცია შეგვიძლია შევადგინოთ არა ორი ფუნქციის სუპერპოზიციით, არამედ რამდენიმე ფუნქციის სუპერპოზიციით.

მაგალითი 3.  $y = \lg u$ ,  $u = \sqrt[3]{v}$  და  $v = 2x+1$  ფუნქციების სუპერპოზიციით მივიღებთ რთულ ფუნქციას

$$y = \lg \sqrt[3]{2x+1}.$$

### კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. როგორ სიდიდეებს ეწოდება ცვლადი და მუდმივი? მოიყვანეთ ცვლადი სიდიდის მაგალითები.

2. როგორ სიდიდეს ეწოდება პარამეტრი? აბსოლუტურად მუდმივი სიდიდე?

3. რას ეწოდება ფუნქცია?

4. რას ეწოდება ფუნქციის განსაზღვრის არე? ფუნქციის ცვლილების არე?

5. ფუნქციითა წარმოადგენის რამდენი ძირითადი წესი არსებობს?

6. როგორ ფუნქციას ეწოდება ზრდადი? კლებადი? არსებითად ზრდადი? არსებითად კლებადი? მონოტონური? არსებითად მონოტონური?

7. როგორ ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული? რას ნიშნავს, რომ ფუნქცია შემოსაზღვრულია?

8. როგორ ფუნქციას ეწოდება კენტი და ლუწი?

9. როგორ ფუნქციას ეწოდება პერიოდული? რას ეწოდება ფუნქციის პერიოდი? ყოველ პერიოდულ ფუნქციას აქვს თუ არა უმცირესი პერიოდი?

10. როგორაა განსაზღვრული შექცეული ფუნქცია? ყოველი ფუნქციისათვის არსებობს თუ არა შექცეული ფუნქცია? მოიყვანეთ საკმარისი პირობა იმისა, რომ არსებობდეს მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია.

11. როგორ არიან განლაგებული პირდაპირი და შექცეული ფუნქციების გრაფიკები?

12. მოიყვანეთ რთული ფუნქციის განსაზღვრა.

### ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

1. მოცემულია  $f(x) = x^2 + 4x - 1$  ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x+h) - f(x) = (2x+4)h + h^2.$$

2. მოცემულია  $f(x) = x^2 - 9x + 14$  ფუნქცია. დაამტკიცეთ, რომ

$$f(a+1) = a^2 - 7a + 6.$$

3. მოცემულია  $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$f(3) = f(5).$$

4. მოცემულია ფუნქცია  $\varphi(x) = a^x$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \varphi(y).$$

5. ვთქვათ,

$$\varphi(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

6. მოცემულია

$$\varphi(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad \psi(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}.$$

დაამტკიცეთ, რომ

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \varphi(x) \varphi(y) + \psi(x) \psi(y), \\ \psi(x+y) &= \varphi(x) \psi(y) + \varphi(y) \psi(x). \end{aligned}$$

7. მოცემულია  $f(x) = \cos x$ , დაამტკიცეთ, რომ

$$f(x+h) - f(x) = -2 \sin \frac{h}{2} \sin \left( x + \frac{h}{2} \right).$$

8. მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების განსაზღვრის არეები:

ა)  $y = \sqrt{x-1}$ ; ბ)  $y = \sqrt[3]{x+1}$ ; გ)  $y = \sqrt{x-x^3}$ ;

დ)  $y = \lg \frac{2+x}{2-x}$ ; ე)  $y = \lg \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ .

პასუხი: ა)  $[1, +\infty[$ ; ბ)  $]-\infty, +\infty[$ ; გ)  $[0, 1] \cup ]-\infty, -1]$ ;

დ)  $] -2, +2[$ ; ე)  $] -1, 1[ \cup ] 2, +\infty[$ .

9. მოძებნეთ  $y = \sqrt{\sin 2x}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე.

პასუხი:  $\left[ k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi \right]$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

10. გამოარკვეეთ, ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციებიდან რომელია კენტი და რომელია ლუწი:

ა)  $f(x) = a^x + a^{-x}$ ; ბ)  $f(x) = a^x - a^{-x}$ ;

გ)  $f(x) = \sqrt[3]{1-x+x^2} - \sqrt[3]{1+x+x^2}$ ;

დ)  $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ ; ე)  $f(x) = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$ .

პასუხი: ა) ლუწია; ბ) კენტია; გ) კენტია; დ) კენტია; ე) კენტია.

11. გამოარკვეეთ, შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია პერიოდული და იპოვეთ უმცირესი პერიოდი:

ა)  $f(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3}$ ;

ბ)  $f(x) = A \cos kx + B \sin kx$ ;

გ)  $f(x) = \sqrt{|\operatorname{ctg} x|}$ ; დ)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ ;

ე)  $f(x) = \cos^2 x$ ; ვ)  $f(x) = \operatorname{tg} x^2$ .

პასუხი: ა) პერიოდულია,  $\omega = 2\pi$ ; ბ) პერიოდულია,  $\omega = \frac{2\pi}{k}$ ;

გ) პერიოდულია,  $\omega = \pi$ ; დ) პერიოდულია,  $\omega = 6\pi$ ; ე) პერიოდულია,  $\omega = \pi$ ; ვ) არაპერიოდულია.

12. ააგეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკები:

$$\text{ა) } y = |x|; \quad \text{ბ) } y = \frac{x+|x|}{2}; \quad \text{გ) } y = x|x|; \quad \text{დ) } y = |x+1|;$$

ე)  $y = E(x)$ , სადაც  $F(x)$  არის უდიდესი მთელი რიცხვი, რომელიც არ აღემატება  $x$  რიცხვს.

13.  $y = \operatorname{sgn} x$  ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{თუ } x < 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \\ 1, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი. დაამტკიცეთ, რომ

$$x \operatorname{sgn} x = |x|.$$

14. მოძებნეთ  $f[y(x)]$ , თუ:

$$\text{ა) } f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x; \quad \text{ბ) } f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = \frac{1}{x};$$

$$\text{გ) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } x \leq 0, \\ x, & \text{როდესაც } x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } x \leq 0, \\ -x^2, & \text{როდესაც } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{დ) } f[f(x)] \text{ და } f\{f[f(x)]\}, \text{ თუ } f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

პასუხი: ა)  $4x$ ; ბ)  $\operatorname{sgn} x (x \neq 0)$ ; გ)  $0$ ; დ)  $\frac{x-1}{x}$ ,  $x (x \neq 0, x \neq 1)$ .

15. იპოვეთ  $f(x)$ , თუ  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$ .

$$\text{პასუხი: } \left(\frac{x}{1-x}\right)^2.$$



**რიცხვთა მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი**

**§ 1. მიმდევრობის განსაზღვრა**

თუ რაიმე წესით ყოველ მთელ დადებით  $n$  რიცხვს გარკვეული  $x_n$  ობიექტი შეესაბამება, მაშინ ვიტყვი, რომ მოცემულია ობიექტთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1.1)$$

$x_1$ -ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი,  $x_2$ -ს—მიმდევრობის მეორე წევრი და ა. შ.  $x_n$ -ს მიმდევრობის  $n$ -ური წევრი.  $x_n$ -ს უწოდებენ აგრეთვე მოცემული მიმდევრობის ზოგად წევრს (1.1) მიმდევრობას მოკლედ აღენიშნავთ  $(x_n)_{n>1}$  სიმბოლოთი. თუ მოცემული მიმდევრობის წევრები რიცხვებია, მაშინ მიმდევრობას რიცხვთა მიმდევრობა ეწოდება. ჩვენ განვიხილავთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობებს.

რა წესით შეიძლება მოცემულ იქნას მიმდევრობა? მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი წესია ანალიზური წესი, რომელიც ცხადად გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ვაწარმოოთ  $n$ -ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის ზოგადი  $x_n$  წევრი.

მიმდევრობა შეიძლება მოცემული იქნეს რეკურენტული დამოკიდებულებით. ეს წესი გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებებია საჭირო მიმდევრობის გამოთვლილ  $x_1, x_2, \dots, x_n$  წევრებზე, რომ მივიღოთ შემდგომი  $x_{n+1}$  წევრი. გარდა ამისა, დამოკიდებულების ხასიათის მიხედვით მოცემული უნდა იყოს რამდენიმე პირველი წევრი—საწყისი მონაცემები.

განვიხილოთ მიმდევრობის რამდენიმე მაგალითი.

1. ვთქვათ, მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n = 3n + 1.$$

დავწეროთ მიმდევრობა. ცხადია, რომ

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 10, \dots, \quad x_{20} = 61, \dots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა:

$$4, 7, 10, \dots, 3n+1, \dots$$

2. ვთქვათ. მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

დავწეროთ მიმდევრობა. ცხადია, რომ

$$x_1=0, x_2=1, x_3=0, x_4=1, \dots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა:

$$0, 1, 0, 1, \dots, \frac{1 + (-1)^n}{2}, \dots$$

3. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ მისი ზოგადი წევრია

$$x_n = \frac{2n}{3n+1}$$

გვექვს:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{4}{7}, x_3 = \frac{3}{5}, \dots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა

$$\frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \dots, \frac{2n}{3n+1}, \dots$$

4. არითმეტიკული პროგრესია განისაზღვრება რეკურენტული დამოკიდებულებით

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (n=1, 2, \dots)$$

საწყისი მონაცემით  $a_1 = a$ . პროგრესიას აქვს სახე

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots$$

5. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3$ . ცხადია, რომ

$$a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 10, \dots$$

მაშასადამე, გვექნება შემდეგი მიმდევრობა

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

განსაზღვრა 1. რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი  $L$  რიცხ-

ვი, რომელიც მიმდევრობის ყოველ წევრზე მეტია, ხოლო მიმდევრობა ქვემოთა და ზემოთა ზღვრულია, თუ მოიძებნება ისეთი  $\epsilon$  რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მაშინ მას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

ცხადია, თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს ისეთი სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა წევრს.

განსაზღვრა 2. რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$  და კლებადი, თუ  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$

განსაზღვრა 3. რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ეწოდება არსებითად ზრდადი, თუ  $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$  და არსებითად კლებადი, თუ  $x_1 > x_2 > \dots > x_n > \dots$

განსაზღვრა 4. რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ეწოდება მონოტონური მიმდევრობა, თუ იგი ზრდადია ან კლებადი, ხოლო მიმდევრობა არსებითად მონოტონურია, თუ იგი არსებითად ზრდადია ან არსებითად კლებადი.  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას, სადაც  $x_n = a$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ეწოდება სტაციონარული მიმდევრობა.

§ 2. რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი

შემოვიღოთ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის ცნება. ზღვრის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ცნებაა, რომელსაც დიდი მნიშვნელობა აქვს არა მარტო მათემატიკური ანალიზისათვის, არამედ ბუნებაში მოქმედებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგისათვის.

განსაზღვრა 5. რაიმე  $a$  რიცხვს ეწოდება  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი  $\epsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ როგორც გინდა იყოს მთელი რიცხვი  $n > N$ , ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

ის ფაქტი, რომ აღებული მიმდევრობის ზღვარია  $a$  რიცხვი, აიწერება ასე

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

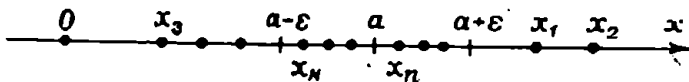
ან შემოკლებით

$$\lim x_n = a$$

და იკითხება: ზღვარი  $x_n$ -ისა, როცა  $n$  მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, არის  $a$ .

აღნიშვნა  $\lim$  წარმოდგება ლათინური სიტყვისაგან *limes*, რაც ზღვარს ნიშნავს.

მიმდევრობის ზღვრის ცნებას შეგვიძლია მივცეთ შემდეგი გეომეტრული ახსნა. ვთქვათ, რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის წევრები გამოსახულია ღერძზე წერტილებით (ნახ. 22).  $a$  წერტილი იქ-



ნახ. 22.

ნება აღებული მიმდევრობის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ მიმდევრობის ყოველი  $x_n$  წერტილი, რომლის ნომერი  $n > N$ , მოთავსდება  $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$  ინტერვალში.

რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ეწოდება კრებადი, თუ მას აქვს ზღვარი, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას განუღიადი ეწოდება.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ . სადაც  $x_n = \frac{n}{n+1}$ . დავამტკიცოთ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარია რიცხვი 1.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი  $\varepsilon$ . რადგანაც

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1},$$

ამიტომ  $n$ -ის იმ მნიშვნელობების მოსაძებნად, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

საკმარისია ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

მაშასადამე,  $N$  რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ  $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$ , სადაც  $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$  არის  $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$  რიცხვის მთელი ნაწილი. მაშინ  $|x_n - 1| < \varepsilon$  უტოლობა შესრულდება ყოველი  $n$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას  $n > N$ . თუ აღმოჩნდა, რომ  $\left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$  დადებითი არაა, მაშინ  $N$  რიცხვად შეგვიძლია ავიღოთ რიცხვი 1. რაკი  $\varepsilon$  ავიღეთ ნებისმიერად, ამიტომ რიცხვი 1 წარმოადგენს მოცემული მიმდევრობის ზღვარს.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას, სადაც  $x_n = (-1)^n$ , ზღვარი არა აქვს.

დამტკიცება. მოცემულ მიმდევრობას აქვს სახე

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

დავუშვათ, რომ ამ მიმდევრობას ზღვრად აქვს რაიმე  $a$  რიცხვი. ეს იმას ნიშნავს, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის, კერძოდ  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  რიცხვისათვის, მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}, \text{ როდესაც } n > N.$$

რადგანაც  $x_n$  თანმიმდევრულად ლებულობს  $-1$  და  $+1$  მნიშვნელობებს, ამიტომ უნდა იყოს

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \text{ და } |(-1) - a| < \frac{1}{2}.$$

მაშინ გვექნება

$$2 = |(1-a) - [(-1)-a]| \leq |1-a| + |(-1)-a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ე. ი.  $2 < 1$ , რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას ზღვარი არა აქვს.

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა, სადაც

$$x_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n},$$

კრებადია ნულისაკენ.

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის ავიღოთ მთელი დადებითი  $N$  რიცხვი იმ პირობით, რომ

$$N > \frac{2}{\varepsilon}.$$

აქედან

$$\frac{2}{N} < \varepsilon$$

და, მაშასადამე, ყოველი  $n$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას  $n > N$ , გვექნება

$$|x_n - 0| < \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $\lim x_n = 0$ .

განსაზღვრა 6. ვიტყვი, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ზღვრად აქვს  $+\infty$  (პლუს უსასრულო), თუ ყოველი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ

$$x_n > A, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim x_n = +\infty.$$

განსაზღვრა 7 ვიტყვი, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ზღვარი აქვს  $-\infty$  (მინუს უსასრულო), თუ ყოველი უარყოფითი  $A$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ

$$x_n < A, \text{ როდესაც } n > N.$$

და წერენ

$$\lim x_n = -\infty.$$

თეორემა 1. თუ  $q > 1$ , მაშინ

$$\lim q^n = +\infty, \quad (2.1)$$

ხოლო

$$\lim q^n = 0, \text{ როდესაც } 0 < q < 1. \quad (2.2)$$

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ  $q > 1$ . ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$q^n = (1+h)^n > 1 + nh,$$

სადაც  $h > 0$ . ნებისმიერი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას

$$N > \frac{A-1}{h}.$$

აქედან  $1 + Nh > A$ . მაშასადამე,

$$1 + nh > A, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი.

$$q^n > A, \text{ როდესაც } n > N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.1) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ, რომ  $q$  ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $a = \frac{1}{q}$ , მაშინ

$$q^n = \frac{1}{a^n},$$

სადაც  $a > 1$ . მაგრამ ზემოთ დამტკიცებულის მიხედვით

$$\lim a^n = +\infty.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ, ადგილი ექნება უტოლობას

$$a^n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ როდესაც } n > N.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{a^n} < \varepsilon,$$

ე. ი.

$$q^n < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.2) ტოლობა.

მაგალითი 4. დაევატყიკოთ, რომ ნებისმიერი დადებითი  $a$  რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1. \quad (2.3)$$

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $a > 1$ . ბერნულის თეორემის შედეგის თანახმად

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}. \quad (2.4)$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ ადვილი ჰქონდეს უტოლობას

$$N > \frac{a-1}{\varepsilon}.$$

მაშინ

$$\frac{a-1}{N} < \varepsilon$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამრიგად, (2.4) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, მართებულია (2.3) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ, რომ  $a < 1$  და შემოვიღოთ აღნიშვნა  $b = \frac{1}{a}$ .  
რაკი  $b > 1$ , ამიტომ ზემოლამტიცებულის თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b} = 1.$$

მაშასადამე, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ უტოლობა

$$\sqrt[n]{b} - 1 < \varepsilon$$

შესრულდება ყოველთვის, როდესაც  $n > N$ . მაგრამ

$$1 - \sqrt[n]{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{b} - 1}{\sqrt[n]{b}} < \sqrt[n]{b} - 1,$$

რის გამოც

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი. (2.3) ტოლობა მართებულია იმ შემთხვევაშიაც, როცა  $a < 1$ .  
თუ  $a = 1$ , (2.3) ტოლობა ცხადია.



მაგალითი 5. ვიპოვოთ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარი, სადაც

$$x_n = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

ბერნულის თეორემის თანახმად

$$2^n = (1+1)^n > 1+n > n.$$

ახლა ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

მაშასადამე,

$$2^N > N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

აქედან

$$\frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

ამიტომ

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ როგორც კი  $n$  გადააჭარბებს  $N$  რიცხვს, შესრულდება უტოლობა

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

შემდეგ, რადგანაც

$$1 - x_n = \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n},$$

ამიტომ

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე,

$$\lim x_n = 1.$$

მაგალითი 6. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1. \quad (2.5)$$

დამტკიცება. I თავის (23.4) უტოლობის თანახმად,

$$n = \left[ 1 + \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right) \right]^n > \frac{n^2}{4} \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^2.$$

აქედან

$$\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 < \frac{4}{n},$$

საიდანაც

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 2). \quad (2.6)$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$\frac{2}{\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

მაშინ (2.6) უტოლობის თანახმად

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი. მართებულია (2.5) უტოლობა.

მაგალითი 7. ვიპოვოთ  $\lim x_n$ , სადაც  $x_n = \frac{a^n}{n^k}$  და  $a > 1$ ,  $k > 0$ .

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $b = \sqrt[k]{a}$ , ცხადია,  $b > 1$ . I თავის (23.4) უტოლობის თანახმად

$$b^n = [1 + (b-1)]^n > \frac{n^2}{4} (b-1)^2.$$

აქედან

$$\frac{b^n}{n} > \frac{(b-1)^2}{4} n$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n} = +\infty. \quad (2.7)$$

ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$\frac{b^n}{n} > 1, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამის გამო

$$\frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{\sqrt[k]{a^n}}{n}\right)^k = \left(\frac{b^n}{n}\right)^k \geq \frac{b^n}{n}, \text{ როდესაც } n \geq N, \quad k \geq 1.$$

ამ შემთხვევაში, (2.7) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty. \quad (2.8)$$

ახლა ვთქვათ,  $k < 1$ , მაშინ

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{a^n}{n} \quad (n=2, 3, \dots).$$

აქედან გამომდინარეობს (2.8) ტოლობის მართებულობა. ამრიგად, (2.8) ტოლობა მართებულია, როცა  $a > 1$  და  $k > 0$ .

**§ 4. ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ**

**თეორემა 2.** ყოველ კრებად მიმდევრობას მხოლოდ ერთი ზღვარი აქვს.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ. ავიღოთ  $a$  რიცხვისაგან განსხვავებული რაიმე  $b$  რიცხვი. ვაჩვენოთ, რომ  $b$  არ შეიძლება იყოს მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. თუ დავუშვებთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b,$$

მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2}, \quad (3.1)$$

როდესაც  $n > N$ . ახლა ვიგულისხმობთ, რომ  $n > N$ . მაშინ (3.1) უტოლობების თანახმად გექნება

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-x_n) + (x_n-b)| \leq |a-x_n| + |x_n-b| < \\ &< \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|, \end{aligned}$$

რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, მოცემულ მიმდევრობას არ შეიძლება ჰქონდეს  $a$  რიცხვისაგან განსხვავებული ზღვარი. თეორემა დამტკიცებულია.

ზემომოყვანილი თეორემა იმას არ ამტკიცებს, თითქოს ყოველ მიმდევრობას ზღვარი ჰქონდეს, არამედ იმას გვიჩვენებს, რომ თუ

მიმდევრობას ზღვარი აქვს, ასეთი ზღვარი შეიძლება მხოლოდ ერთადერთი იყოს.

განსაზღვრა 8. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე ობიექტთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (3.2)$$

და განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა არსებითად ზრდადი მიმდევრობა

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad (3.3)$$

მიმდევრობას

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

ეწოდება (3.2) მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ცხადია, რომ  $n_k \geq k$ .

თეორემა 3. თუ რიცხვთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობაც კრებადია იმავე  $a$  რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $(x_{n_k})_{k>1}$  არის მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. რადგანაც  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $\nu$ , რომ ადგილი ექნეს უტოლობას  $n_\nu > N$ . მაშინ

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } k > \nu.$$

მაშასადამე.  $(x_{n_k})_{k>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ.  $\varepsilon = 1$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $\nu$ , რომ

$$|x_n - a| < 1, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

ახლა ავიღოთ ისეთი დადებითი რიცხვი  $K$ , რომელიც აღემატება შემდეგ რიცხვებს:

$$1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \dots, |x_\nu - a|.$$

მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ  $n$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის

$$|x_n - a| < K.$$

მაგრამ ეს უტოლობა ტოლფასია შემდეგი უტოლობებისა

$$a - K < x_n < a + K \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი: მიმდევრობას რომ ჰქონდეს სასრული ზღვარი, აუცილებელია მისი შემოსაზღვრულობა, მაგრამ მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მიმდევრობის ზღვრის არსებობა.

**თეორემა 5.** ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა ისეთი სამი მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ ,  $(y_n)_{n>1}$  და  $(z_n)_{n>1}$ , რომ

$$x_n \leq z_n \leq y_n, \text{ როდესაც } n > \nu, \quad (3.4)$$

სადაც  $\nu$  რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია. თუ  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობებს აქვთ საერთო  $a$  ზღვარი, მაშინ  $(z_n)_{n>1}$  მიმდევრობასაც იგივე ზღვარი ექნება.

დამტკიცება. პირობის თანახმად,

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = a.$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N > \nu$ , რომ ყოველი მთელი  $n$  რიცხვისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას  $n > N$ , გვექნება

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon.$$

მაგრამ რაკი  $x_n \leq z_n \leq y_n$ , როდესაც  $n > \nu$ , ამიტომ

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე,  $(z_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარია  $a$  რიცხვი და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 6.** თუ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარია  $a$  რიცხვი, მაშინ  $(|x_n|)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარი იქნება  $|a|$  რიცხვი.

დამტკიცება. რაკი  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ, ამიტომ ნებისმიერ დადებით  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება

ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n - a| < \varepsilon. \text{ როდესაც } n > N.$$

მაგრამ, როგორც ვიცი,

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|.$$

მაშასადამე,

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim |x_n| = |a|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 7.** თუ  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობების ზღვრებია შესაბამისად  $a$  და  $b$  რიცხვები, მაშინ მართებულა ტოლობები

$$\lim (x_n + y_n) = a + b, \quad (3.5)$$

$$\lim (x_n - y_n) = a - b. \quad (3.6)$$

**დამტკიცება.** რაკი  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობები კრებადა შესაბამისად  $a$  და  $b$  რიცხვებისაკენ, ამიტომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვები  $N_1$  და  $N_2$ , რომ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ როდესაც } n > N_1$$

და

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n > N_2.$$

თუ აღნიშნავთ  $N$ -ით უდიდესს  $N_1$  და  $N_2$  რიცხვებს შორის, მაშინ ერთდროულად ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n > N.$$

შეორე მხრივ, როდესაც  $n > N$ , გვექნება

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულა (3.5) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (3.6) ტოლობის მართებულობა.

**თეორემა 8.** თუ  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობების ზღვრებია შესაბამისად  $a$  და  $b$ , მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim (x_n y_n) = ab. \quad (3.7)$$

**დამტკიცება.** რადგანაც  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $A$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n| < A \quad (n=1, 2, \dots).$$

აღნიშნოთ  $M$ -ით  $A$  და  $|b|$  რიცხვებს შორის უდიდესი. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. მაშინ ზღვრის განსაზღვრის თანახმად არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{როდესაც } n > N. \quad (3.8)$$

შემდეგ, რადგანაც

$$x_n y_n - ab = x_n (y_n - b) + b (x_n - a),$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} |x_n y_n - ab| &\leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq \\ &\leq A |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a| \leq M |y_n - b| + M |x_n - a|. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.8) უტოლობებს, გვექნება

$$|x_n y_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, მართებულია (3.7) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 9.** თუ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას ზღვრად აქვს ნული საგან განსხვავებული  $a$  რიცხვი, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim \left( \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{a}. \quad (3.9)$$

**დამტკიცება.** ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი  $\varepsilon$ , რომელიც  $\frac{|a|}{2}$  რიცხვზე ნაკლებია. რაჯი  $(|x_n|)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $|a|$  რიცხვისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$|a| - \varepsilon < |x_n| < |a| + \varepsilon, \quad \text{როდესაც } n > N. \quad (3.10)$$

მაგრამე,

$$|a| - \varepsilon > \frac{|a|}{2}$$

ამიტომ (3.10) უტოლობებიდან გვაქვს

$$|x_n| > \frac{|a|}{2}, \text{ როდესაც } n > N. \quad (3.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ (3.11) უტოლობას, გვექნება

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x_n - a|}{|a| \cdot |x_n|} < \frac{|x_n - a|}{|a| \cdot \frac{|a|}{2}} = \frac{2}{a^2} |x_n - a|,$$

როდესაც  $n > N$ .

შემდეგ, რაკი  $\lim x_n = a$ , ამიტომ ალბებული  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $N^* > N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_n - a| < \frac{a^2}{2} \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N^*$$

მაშასადამე,

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{2} \varepsilon = \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N^*,$$

ე. ი. მართებულია (3.9) ტოლობა.

**შედეგა.** თუ  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობები კრებადია შესაბამისად  $a$  და  $b$  რიცხვებისაკენ, ამასთანავე  $b \neq 0$ , მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

მართლაც, მე-8 და მე-9 თეორემის თანახმად

$$\lim \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \lim \left( x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) = \lim x_n \cdot \lim \left( \frac{1}{y_n} \right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

#### § 4. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა

**თეორემა 10.** ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი და ზემოდაღმართული მიმდევრობა კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, ნამდვილ რიცხვთა ზრდადი  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$



სიმრავლეს აქვს ზედა საზღვარი და იგი აღენიშნოთ „ასოთი“. დამტკიცოთ, რომ

$$\lim x_n = a. \quad (4.1)$$

სიმრავლის ზედა საზღვრის განსაზღვრის მიხედვით, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი  $x_\nu$  რიცხვი, რომ

$$x_\nu > a - \varepsilon.$$

ჩაკე მოცემული მიმდევრობა ზრდადია, ამიტომ

$$x_n > a - \varepsilon. \text{ როდესაც } n > \nu,$$

ანუ

$$|x_n - a| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

ეს კი იქვს ნიშნავს. რომ აღგილი აქვს (4.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

აღგილი მისახვედრია, რომ თუ ზრდადი მიმდევრობა ზემოდან არაა შემოსაზღვრული, მაშინ

$$\lim x_n = +\infty.$$

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 11.** ნამდვილ რიცხვთა კლებადი და ქვემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია. თუ კლებადი მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\lim x_n = -\infty.$$

§ 5. თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა

განვიხილოთ სეგმენტთა მიმდევრობა

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots \quad (5.1)$$

რომელიც შემდეგ ორ პირობას აკმაყოფილებს:

1)  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ , ე. ი. ყოველი სეგმენტი დაწვებული მეორედან, მოთავსებულია წინა სეგმენტში.

2)  $[a_n, b_n]$  სეგმენტის სიგრძე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როცა  $n \rightarrow \infty$ , ე. ი.

$$\lim (b_n - a_n) = 0. \quad (5.2)$$

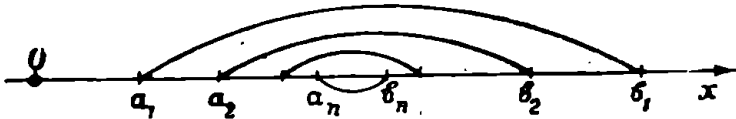
სეგმენტთა ასეთ მიმდევრობას ეწოდება თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა (ნახ. 23).

თეორემა 12 (კანტორა). თუ (5.1) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას, მაშინ არსებობს ერთადერთი რიცხვი  $\xi$ , რომელიც ეკუთვნის ყველა  $[a_n, b_n]$  სეგმენტს.

დამტკიცება. რადგანაც (5.1) წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას, ამიტომ როგორც გინდა იყოს  $n$ . გვექნება

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n.$$

ამრიგად, რიცხვთა  $(a_n)_{n>1}$  მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია,  $(b_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კი კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ამიტომ არსებობს  $\lim a_n$  და  $\lim b_n$ . (5.2) ტო-



ნახ. 23.

ლობის თანახმად ეს ზღვრები ტოლია და ეს საერთო ზღვარი აღვნიშნოთ  $\xi$  ასოთი. ცხადია, ყოველი  $n$ -სათვის

$$a_n \leq \xi \leq b_n,$$

ე. ი.  $\xi \in [a_n, b_n]$  ( $n=1, 2, \dots$ ).

ამრიგად, არსებობს  $\xi$  რიცხვი, რომელიც ეკუთვნის ყველა  $[a_n, b_n]$  სეგმენტს.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ  $\xi$  ერთადერთი რიცხვია, რომელიც ეკუთვნის ყველა  $[a_n, b_n]$  სეგმენტს. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ  $\xi$  რიცხვის გარდა არსებობს სხვა რიცხვი  $\xi^*$ , რომელიც ყველა  $[a_n, b_n]$  სეგმენტს ეკუთვნის. აზრას გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $\xi < \xi^*$ , მაშინ ყოველი  $n$ -სათვის

$$b_n - a_n \geq \xi^* - \xi.$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან  $b_n - a_n$  სხვაობა რაგინდ მცირეა, თუ  $n$ -ს ავიღებთ საკმარისად დიდს. მაშისადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არაა და ამიტომ  $\xi^* = \xi$ . თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. კანტორის თეორემაში  $[a_n, b_n]$  სეგმენტებში, საზოგადოდ, არ შეგვიძლია შევცვალოთ  $]a_n, b_n[$  ინტერვალებით. მართლაც, განვიხილოთ თავმოყრილ ინტერვალთა შემდეგი მიმდევრობა

$$]0, 1[, ]0, \frac{1}{2}[, \dots, ]0, \frac{1}{n}[, \dots$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომელიც ეკუთვნოდეს მოცემულ მიმდევრობის ყველა ინტერვალს.

**§ 6. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა**

ქვემოთ განვიხილავთ ერთ მნიშვნელოვან თეორემას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს მათემატიკური ანალიზის ზოგიერთი თეორემის დამტკიცებისათვის.

ჯერ შემოვიღოთ შემდეგი განსაზღვრა: ორ  $[a, b]$  და  $[c, d]$  სეგმენტს ვუწოდებთ ურთიერთ კონგრუენტულს, თუ მათი სიგრძეები თანატოლია, ე. ი.  $b - a = d - c$ .

**თეორემა 13.** ნამდვილ რიცხვთა ყოველი შემოსაზღვრული  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

**დამტკიცება.** რადგანაც  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ არსებობს ისეთი  $[a, b]$  სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა წევრს. გავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი ორ კონგრუენტულ სეგმენტად: მაშინ ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს მოცემული მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ  $[a_1, b_1]$ . ვთქვათ,  $x_{n_1}$  არის მოცემული მიმდევრობის რაიმე წევრი, რომელიც ეკუთვნის  $[a_1, b_1]$  სეგმენტს.

შემდეგ,  $[a_1, b_1]$  სეგმენტი გავყოთ ორ კონგრუენტულ სეგმენტად და ამ სეგმენტებიდან ის, რომელიც შეიცავს  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს აღვნიშნოთ  $[a_2, b_2]$  სიმბოლოთი. აღვნიშნოთ  $x_{n_2}$  სიმბოლოთი მოცემული მიმდევრობის რაიმე ელემენტი, რომელიც მოსდევს  $x_{n_1}$  ელემენტს და ეკუთვნის  $[a_2, b_2]$  სეგმენტს.

ასეთი პროცესის  $k$ -ურ საფეხურზე გამოვყოფთ  $[a_k, b_k]$  სეგმენტს, რომელიც შეიცავს  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. აღვნიშნოთ  $x_{n_k}$ -თი მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი, რომელიც მოსდევს  $x_{n_{k-1}}$  წევრს და ეკუთვნის  $[a_k, b_k]$  სეგმენტს. ეს პროცესი უსაზღვროდ განუაგრძოთ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots \quad (6.1)$$

ამასთანავე

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

აქედან ჩანს, რომ

$$\lim (b_k - a_k) = 0.$$

მაშასადამე, (6.1) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას და ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი რიცხვი  $\xi$ , რომელიც ეკუთვნის ყველა  $[a_k, b_k]$  სეგმენტს, ე. ი.

$$a_k \leq \xi \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

საიდანაც ცხადია, რომ

$$\lim a_k = \lim b_k = \xi.$$

შემდეგ, რაკი  $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ , ამიტომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

### § 7. მიმდევრობის კრებადობის კოხის ნიშანი

თუ მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n \geq 1}$  და დასახელებულია რაიმე ნამდვილი რიცხვი  $a$ , ჩვენ შეგვიძლია ზღვრის განსაზღვრის საფუძველზე გამოვარკვიოთ,  $a$  რიცხვი არის თუ არა მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. ამ გზით მიმდევრობის კრებადობის გამოკვლევა მოუხერხებელია, ვინაიდან ყველა ნამდვილი რიცხვისათვის ზემოთ აღნიშნული გარემოების შემოწმება, საზოგადოდ, შეუძლებელია. ამიტომ ისმის კითხვა: როგორი აგებულების უნდა იყოს მიმდევრობა, რომ იგი იყოს კრებადი? სანამ ამ კითხვას ვუპასუხებდეთ, შემოვიღოთ

განსახილვერა 9. რიცხვთა  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობას ვუწოდებთ ფუნდამენტალურს, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } m > N, \quad n > N.$$

ლემა. რიცხვთა ყოველი ფუნდამენტალური მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობა ფუნდამენტალურ-

რია. მაშინ  $\varepsilon = 1$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_m - x_n| < 1, \text{ როდესაც } m > \nu, n > \nu.$$

ამ უტოლობაში ვიგულისხმობთ, რომ  $m = \nu + 1$ . მაშინ გვექნება

$$|x_{\nu+1} - x_n| < 1, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

აქედან გვაქვს

$$|x_n| < 1 + |x_{\nu+1}|, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

ახლა  $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_\nu|, 1 + |x_{\nu+1}|$  რიცხვებს შორის უდიდესი ადგილი  $K$ -თი, მაშინ  $n$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის გვექნება

$$|x_n| < K$$

და ამით ლემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 14.** რიცხვთა  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ მოცემული მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, მოცემული მიმდევრობა კრებადია  $a$  რიცხვისაკენ. მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$|x_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } k > N.$$

ახლა ვთქვათ,  $m$  და  $n$  ნებისმიერი ნატურალური რიცხვებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს  $m > N, n > N$ . მაშინ

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე.

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - a) + (a - x_n)| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ე. ი.  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ,  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. ლემის თანახმად ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია ვამოკ-

ყოთ ქვემიმდევრობა  $(x_{n_k})_{k>1}$ , რომელიც კრებადია. რომელიღაც  $\xi$  რიცხვისაკენ.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim x_n = \xi. \quad (7.1)$$

აივლოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. მაშინ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ფუნდამენტალობის გამო მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } m > N, n > N. \quad (7.2)$$

შევარჩიოთ  $k$  ისე, რომ ერთდროულად დაცული იყოს პირობები

$$|x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ და } n_k > N.$$

მაშინ, თუ (7.2) უტოლობაში ვიგულისხმებთ  $m = n_k$ , გვექნება.

$$|x_{n_k} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, ყოველი  $n$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას  $n > N$ , გვექნება

$$\begin{aligned} |x_n - \xi| &= |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - \xi)| \leq |x_n - x_{n_k}| + \\ &+ |x_{n_k} - \xi| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ე. ი. მართებულია (7.1) ტოლობა და ამით თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

ზემოთ დამტკიცებულ თეორემას ეწოდება კოშის თეორემა რიცხვთა მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ. ამ თეორემას დიდი მნიშვნელობა აქვს მათემატიკურ ანალიზში.

#### § 8. $e$ რიცხვი. ნატურალური ლოგარითმი

უმაღლეს მათემატიკაში დიდი მნიშვნელობა აქვს ერთ განსაკუთრებულ რიცხვს, რომელიც ნეპერის მიერ იყო შემოღებული.

განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ , სადაც

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

ეს მიმდევრობა არსებითად ზრდადია. მართლაც, თუ  $n \geq 2$ , გვექნება

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n : \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}.$$

ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = 1,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $x_n > x_{n-1}$ . ამრიგად,  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა არსებითად ზრდადია.

ახლა განვიხილოთ  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობა, სადაც

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ეს მიმდევრობა კლებადია. მართლაც, თუ  $n \geq 2$ , გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

მაგრამ ბერნულის უტოლობის თანახმად,

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n^2-1} > \frac{n}{n-1}.$$

მაშასადამე,  $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$ , ე. ი.  $y_n < y_{n-1}$ . ამრიგად,  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობა არსებითად კლებადია.

შემდეგ, რაკი  $x_n < y_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობა არსებითად კლებადია, ამიტომ ყოველი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის

$$x_n < y_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 < 3.$$

მაშასადამე,  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია

$\left(1 + \frac{1}{5}\right)^n$  რიცხვით. ამიტომ მე-10 თეორემის თანახმად  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი. ამ ზღვარს ეწოდება ნ ე პ ე - რის რიცხვი და აღინიშნება  $e$  ასოთი. ამრიგად, განსაზღვრის მიხედვით

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$e$  რიცხვის შეფასებისათვის შევნიშნავთ, რომ რაკი

$$2 < x_n < \left(1 + \frac{1}{5}\right)^n, \quad n \geq 2,$$

ამიტომ  $2 < e < 3$ .

შტკიცდება, რომ  $e$  ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ათი ათწილადი ნიშნის სიზუსტით შემდეგია

$$e = 2,7182818284.$$

ახლა დავსვათ ასეთი კითხვა: რა ფუძით უნდა ავიღოთ ლოგარითმები, რომ მათი გამოყენება უფრო მოხერხებული იყოს? პრაქტიკულ გამოთვლებში უმეტეს შემთხვევაში ათობითი ანუ ბრიჯის (Briggs) ლოგარითმებით სარგებლობენ. მაგრამ მათემატიკური ანალიზის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას უფრო ხელსაყრელია ვისარგებლოთ ნატურალური ანუ ნეპერის ლოგარითმებით, რომელთა ფუძედ აღებულია ნეპერის  $e$  რიცხვი.

თუ  $x$  რაიმე დადებითი რიცხვია, მაშინ ამ რიცხვის ნატურალურ ლოგარითმს აღნიშნავენ  $\ln x$  სიმბოლოთი.

ვიპოვოთ დამოკიდებულება ლოგარითმების სხვადასხვა სისტემებს შორის. ვთქვათ, მოცემულია ლოგარითმის ორი  $a$  და  $b$  ფუძე და რაიმე დადებითი  $N$  რიცხვი. ვიპოვოთ დამოკიდებულება  $\lg_a N$  და  $\lg_b N$  რიცხვებს შორის. ლოგარითმის განსაზღვრის თანახმად,

$$N = a^{\lg_a N}, \quad N = b^{\lg_b N}$$

და, მაშასადამე

$$a^{\lg_a N} = b^{\lg_b N}$$

თუ ამ ტოლობას გავალოგარითმებთ  $b$  ფუძით, გვექნება

$$\lg_a N \cdot \lg_b a = \lg_b N.$$

აქედან

$$\lg_a N = \frac{1}{\lg_b a} \cdot \lg_b N. \quad (8.1)$$



ასეთია დამოკიდებულება აღნიშნულ ლოგარითმებს შორის. კერძოდ, თუ  $b=e$ , სადაც  $e$  ნეპერის რიცხვია, მაშინ (8.1) ტოლობიდან გვაქვს

$$\lg_a N = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln N. \quad (8.2)$$

როგორც ვხედავთ,  $\frac{1}{\ln a}$  ის მუდმივია, რომელზედაც უნდა გავამრავლოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ნატურალური ლოგარითმი, რომ მივიღოთ იმავე რიცხვის ლოგარითმი  $a$  ფუძით.

$\frac{1}{\ln a}$  რიცხვს ეწოდება  $a$  ფუძიან ლოგარითმთა სისტემის მოდული ნატურალური სისტემის მიმართ. თუკი  $a=10$ , მაშინ (8.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$\lg N = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln N. \quad (8.3)$$

$\frac{1}{\ln 10}$  მოდულს ამ შემთხვევაში აღნიშნავენ  $M$ -ით. მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა ასეთია:

$$M = 0,43429448.$$

მწკრივთა თეორიაში განვიხილავთ ფორმულებს, რომელთა საშუალებით შევძლებთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვის ნატურალური ლოგარითმის გამოთვლას.

მაგალითი. განვიხილოთ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა, სადაც

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

დავამტკიცოთ, რომ მოცემულ მიმდევრობას აქვს სასრული ზღვარი. დამტკიცება. როგორც ვიცით,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e.$$

თუ ამ უტოლობის ორივე ნაწილს გავალოგარითმებთ  $e$  ფუძით, მიიღებთ

$$m \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right) < 1,$$

საიდანაც

8 ვლ. კელიძე, ე. წითლანაძე

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m}. \quad (8.4)$$

შემდეგ,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > e.$$

აქედან გვაქვს

$$(m+1)\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) > 1.$$

საიდანაც

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m+1}. \quad (8.5)$$

(8.4) და (8.5) უტოლობათა გაერთიანებით მივიღებთ

$$\frac{1}{m+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m},$$

საიდანაც

$$\frac{1}{m+1} < \ln(m+1) - \ln m < \frac{1}{m}.$$

თუ  $m$ -ს მივცემთ მნიშვნელობებს  $1, 2, \dots, n$ , გვაქვს

$$\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1},$$

$$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

.....

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრება გვაძლევს

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

საიდანაც

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) > 0.$$

მაშასადამე,  $x_n > 0$  ( $n=1, 2, \dots$ ). ამრიგად,  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ყველა წევრი დადებითია.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია. (8.5) უტოლობის თანახმად გვაქვს:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0.$$

ამიტომ  $x_{n+1} < x_n$ . ამრიგად,  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ამიტომ არსებობს  $\lim x_n$ . ამ ზღვარს აღნიშნავენ  $C$  ასოთი და მას ლ. ეილერის (L. Euler) მუდმივა ეწოდება. ეილერის მუდმივას შემდეგი მიახლოებითი მნიშვნელობა აქვს

$$C = 0,5772156649.$$

ცხადია, შეგვიძლია დავწეროთ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \rho_n, \quad (8.6)$$

სადაც  $\rho_n$  ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ .

### § 9. უტოლობის თეორემა

თეორემა 15. ვთქვათ, მოცემულია ორი მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$ . ამასთანავე მეორე მიმდევრობა არსებითად ზრდადია. თუ  $\lim y_n = +\infty$  და

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A, \quad (9.1)$$

სადაც  $A$  სასრულია, მაშინ არსებობს  $\frac{x_n}{y_n}$  ფარდობის ზღვარი და

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = A. \quad (9.2)$$

დამტკიცება. (9.1) ტოლობის თანახმად, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < A + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } k > \nu.$$

აქედან

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_k - y_{k-1}),$$

როდესაც  $k > v$ . ახლა  $k$ -ს მიეცეთ მნიშვნელობები  $k = v+1, v+2, \dots, n$ , მივიღებთ

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{v+1} - y_v) < x_{v+1} - x_v < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{v+1} - y_v),$$

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{v+2} - y_{v+1}) < x_{v+2} - x_{v+1} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_{v+2} - y_{v+1}),$$

.....

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_{n-1}).$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გამართივების შემდეგ მივიღებთ

$$\left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_v) < x_n - x_v < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(y_n - y_v),$$

საიდანაც

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_v}{y_n - y_v} < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

მაშასადამე, როდესაც  $n > v$ , გვაქვს

$$\left| \frac{x_n - x_v}{y_n - y_v} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9.3)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{x_n}{y_n} - A = \frac{x_v - Ay_v}{y_n} + \left(1 - \frac{y_v}{y_n}\right) \left(\frac{x_n - x_v}{y_n - y_v} - A\right).$$

ახლა შევარჩიოთ ნატურალური რიცხვი  $N > v$  ისე, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\left| \frac{x_v - Ay_v}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } n > N. \quad (9.4)$$

მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (9.3) და (9.4) უტოლობებს, გვექნება

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N,$$

ე. ი. მართებულია (9.2) ტოლობა. ამით უტოლობის თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. გამოვთვალოთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$ .

ამოხსნა. შტოლცის თეორემის თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \frac{1}{4}.$$

**§ 10. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი**

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (10.1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$x_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}, \quad \underline{x}_n = \inf \{x_n, x_{n+1}, \dots\}.$$

თუ (10.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ ყოველი  $n$  რიცხვისათვის  $x_n = +\infty$ , ხოლო თუ მოცემული მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ ყოველი  $n$ -თვის  $\underline{x}_n = -\infty$ .

ვიგულისხმობთ, რომ (10.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშინ

$$\overline{x}_1 \geq \overline{x}_2 \geq \dots \geq \overline{x}_n \geq \dots$$

ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n = \xi.$$

$\xi$  სასრულია, ან  $\xi = -\infty$ . ამ  $\xi$  რიცხვს ეწოდება (10.1) მიმდევრობის ზედა ზღვარი და აღინიშნება  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  სიმბოლოთი.

თუ (10.1) მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

შემდეგ, თუ (10.1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ

$$x_1 \leq \underline{x}_2 \leq \dots \leq \underline{x}_n \leq \dots$$

ეს მიმდევრობა კრებადია. ვთქვათ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \eta.$$

$\eta$  სასრულოა, ან  $\eta = +\infty$ . ამ  $\eta$  რიცხვს ეწოდება (10.1) მიმდევრობის ქვედა ზღვარი და აღინიშნება  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  სიმბოლოთა.

რადგან ყოველი  $n$ -სათვის  $x_n \leq \overline{x_n}$ , ამიტომ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

თუ (10.1) მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრული არაა, მაშინ

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

ცხადია, თუ (10.1) მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

და  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  სასრულია.

თეორემა 16. ნამდვილ რიცხვთა ყოველი  $(x_n)_{n > 1}$  მიმდევრობისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობები:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\liminf_{n \rightarrow \infty} (-x_n). \quad (10.2)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n). \quad (10.3)$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$\xi_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ,  $\eta_n = \inf \{-x_n, -x_{n+1}, \dots\}$ ,  
დავამტკიცოთ, რომ

$$\xi_n = -\eta_n, \quad (n=1, 2, \dots). \quad (10.4)$$

რადგანაც

$$\xi_n \geq x_k, \quad \eta_n \leq -x_k \quad (k=n, n+1, \dots),$$

ამიტომ

$$-\xi_n \leq -x_k, \quad -\eta_n \geq x_k \quad (k=n, n+1, \dots).$$

მაშასადამე,

$$-\xi_n \leq \eta_n, \quad -\eta_n \geq \xi_n.$$

აქედან გამომდინარეობს (10.4) ტოლობის მართებულობა. მაშასადამე,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n,$$

ე. ი. ადგილი აქვს (10.2) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება (10.3) ტოლობის მართებულობა.

თეორემა 17. თუ  $\overline{\lim} x_n = a$ , მაშინ არსებობს  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია  $a$ -კენ.

დამტკიცება. თუ  $a = -\infty$ , მაშინ მოცემული მიმდევრობა კრებადია  $-\infty$  საკენ, ვინაიდან ყოველი  $n$ -სათვის  $x_n \leq \overline{x}_n$ . ამ შემთხვევისათვის თეორემა ტრივიალურია.

ახლა ვთქვათ,  $a = +\infty$ . ამ შემთხვევაში ყველა  $k$ -თვის გვექნება  $\overline{x}_k = +\infty$ . მაშასადამე,  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობა არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული. ამიტომ მოცემული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა  $(x_{n_i})_{i \geq 1}$ , რომელიც კრებადია  $+\infty$ -საკენ.

დასასრულ ვივთხოვსხმოი, რომ  $a$  სასრულია. ამ შემთხვევაში ყოველი  $\overline{x}_n$  სასრულია. რიცხვი 1-თვის შეგვიძლია ვიპოვათ ისეთი ინდექსი  $n_1$ , რომ

$$\overline{x}_1 - 1 < x_{n_1} \leq \overline{x}_1.$$

შემდეგ, რიცხვი 2-თვის მოიძებნება ისეთი ინდექსი  $n_2 > n_1$ , რომ

$$\overline{x}_2 - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq \overline{x}_2.$$

საზოგადოდ,  $k$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ინდექსი  $n_k > n_{k-1}$ , რომ

$$\overline{x}_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq \overline{x}_k. \quad (10.5)$$

თუ ამ პროცესს უსაზღვროდ განვაგრძობთ, მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$ , რომელიც  $(x_n)_{n \geq 1}$  მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა. (10.5) უტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 18. თუ  $\underline{\lim} x_n = b$ , მაშინ არსებობს  $(x_n)_{n \geq 1}$

მიმდევრობის ისეთი ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია  $b$ -კენ.

მე-17 და მე-18 თეორემებიდან გამომდინარეობს

შედეგი.  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები წარმოადგენენ შესაბამისად ამავე მიმდევრობის ყველა კრებადი ქვემიმდევრობის ზღვართა შორის უდიდესსა და უმცირესს.

თეორემა 19. თუ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$ -კენ, რომელიც სასრულია ან უსასრულოა, მაშინ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

დამტკიცება. რადგანაც  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა კრებადია  $a$ -კენ, ამიტომ აღნიშნული მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა კრებადია  $a$ -კენ და, მაშასადამე, მე-17 და მე-18 თეორემების თანახმად

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

თეორემა 20. თუ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები ტოლია, მაშინ ეს მიმდევრობა კრებადია ამ ზღვრების საერთო მნიშვნელობისაკენ.

დამტკიცება. მართლაც, რაკი ყოველი  $n$ -სთვის მართებულია უტოლობები  $\underline{x}_n \leq x_n \leq \overline{x}_n$ , ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x}_n.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

## § 11. თვლადი და აკათვლადი სიმრავლეები

რაიმე  $E$  სიმრავლეს ეწოდება თვლადი, თუ იგი ეკვივალენტურია ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლისა.

თვლადი სიმრავლის განსაზღვრა ტოლფასია შემდეგი განსაზღვრისა: სიმრავლეს თვლადი ეწოდება, თუ შესაძლებელია ამ სიმრავლის ელემენტთა დანომერა.

სიმრავლის ელემენტების დანომერა იმას ნიშნავს, რომ სიმრავლის ყოველი ელემენტისათვის შეიძლება რაიმე ნატურალური რიცხვის დასახელება, როგორც მისი ნომრისა იმგვარად, რომ ყოველ ელემენტს ჰქონდეს



მხოლოდ ერთი ნომერი და ყოველი ნატურალური რიცხვი იყოს ნომერი სიმრავლის მხოლოდ ერთა ელემენტისა.

ამრიგად, თუ  $E$  თელადი სიმრავლეა, მაშინ იგი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}.$$

**თეორემა 21.** თელადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ნაწილი აგრეთვე თელადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $A$  რაიმე თელადი სიმრავლეა. რაკი  $1$  თელადია, ამიტომ მისი ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

$$: a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (11.1)$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $B$  არის  $A$  სიმრავლის რაიმე უსასრულო ნაწილი. მაშინ  $B$  სიმრავლის ელემენტები დაიკავებენ გარკვეულ ადგილებს (11. 1) მიმდევრობაში. დავუშვათ, რომ  $a_{n_1}$  არის (11.1) მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც  $B$  სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი  $s_1$ -ით აღვნიშნოთ.  $a_{n_2}$  იყოს (11. 1) მიმდევრობის მეორე ელემენტი, რომელიც  $B$  სიმრავლეს ეკუთვნის; იგი  $s_2$ -ით აღვნიშნოთ. ასე შემდეგ,  $a_{n_k}$  იყოს (11.1) მიმდევრობის  $k$ -ური ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის  $B$  სიმრავლეს; იგი აღვნიშნოთ  $s_k$ -თი. ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსაზღვროდ; ასე რომ  $B$  სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ მიმდევრობის სახით

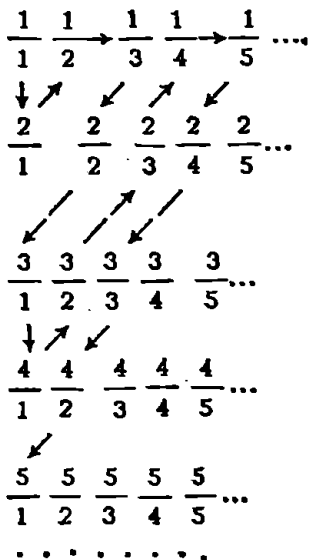
$$s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$$

ეს კი ამტკიცებს, რომ  $B$  თელადი სიმრავლეა და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 22.** ყველა რაციონალური რიცხვის  $R$  სიმრავლე თელადია.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ ყველა დადებითი რაციონალური რიცხვის  $R_+$  სიმრავლე თელადია.

რადგანაც ყოველი დადებითი რაციონალური რიცხვი შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\frac{p}{q}$  წილადის სახით, ამიტომ ცხრილში



შესვლება ყველა დღეებით რაციონალური რიცხვი. მაგრამ ამ ცხრილის ელემენტები შეგვიძლია დავალაგოთ ერთი მიმდევრობის სახით

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

მაშასადამე,  $R_+$  სიმრავლე თვალდასა და ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_+ = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}.$$

შემდეგ, თუ აღვნიშნავთ  $R_-$  სიმბოლოთი ყველა უარყოფითი რაციონალური რიცხვის სიმრავლეს, მაშინ ცხადია, რომ

$$R_- = \{-r_1, -r_2, \dots, -r_n, \dots\}.$$

ახლა  $R$  სიმრავლე შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$R = \{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots, r_n, -r_n, \dots\}.$$

მაშასადამე,  $R$  სიმრავლე თვალდასა. თეორემა დამტკიცებულია.

უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც თვალდასა არაა, არათვალდას სიმრავლე ეწოდება.

თვალდას სიმრავლის ცნებას აზრი და მნიშვნელობა მხოლოდ მაშინ ექნება, თუ არსებობს არათვალდას სიმრავლები, თვალდას სიმრავლე უსასრულო სიმრავლეს გარკვეული სახეა. წინააღმდეგ შემთხ-

ვევაში თვლადი სიმრავლის ცნება იქნება მხოლოდ უსასრულო სიმრავლის. ცნების მოდიფიკაცია.

ამრიგად, თვლადი სიმრავლის ღირებულება იმაზეა დამოკიდებული, არსებობს თუ არა არათვლადი სიმრავლებები. დავამტკიცოთ არათვლადი სიმრავლის არსებობა.

თეორემა 28.  $\Delta = [0, 1]$  სეგმენტი არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $\Delta$  თვლადი სიმრავლეა. მაშინ  $\Delta$  შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე

$$\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

გავყოთ  $\Delta$  სეგმენტი სამ კონგრუენტულ სეგმენტად  $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}$ . ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც იქნება ისეთი, რომელიც არ შეიცავს  $x_1$  ელემენტს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ  $\Delta_1$  სიმბოლოთი.

ახლა  $\Delta_1$  სეგმენტი გავყოთ სამ კონგრუენტულ სეგმენტად  $\Delta_1^{(1)}, \Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(3)}$ . ამ სეგმენტებიდან ერთი მაინც იქნება ისეთი, რომელიც არ შეიცავს  $x_2$  ელემენტს, ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ  $\Delta_2$  სიმბოლოთი.

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ უსაზღვროდ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots \quad (11.2)$$

ცხადია, რომ

$$|\Delta_1| = \frac{1}{3}, |\Delta_2| = \frac{1}{3^2}, \dots, |\Delta_n| = \frac{1}{3^n}, \dots$$

მაშასადამე, (11.2) მიმდევრობა წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას. ამიტომ არსებობს ერთადერთი წერტილი  $\xi$ , რომელიც ეკუთვნის (11.2) მიმდევრობის ყველა სეგმენტს. კერძოდ  $\xi \in \Delta$  და ამიტომ  $\xi$  უნდა იყოს რომელიმე  $x_n$ . მაგრამ  $x_n \in \Delta_n$  და, მაშასადამე,  $\xi \in \Delta_n$ . ამრიგად, ერთდროულად გვაქვს.

$$\xi \in \Delta_n \text{ და } \xi \notin \Delta_n.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამიტომ ჩვენი დაშვება სწორი არაა. მაშასადამე,  $\Delta$  არათვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

## კითხვები

1. რას ეწოდება ობიექტთა მიმდევრობა? რიცხვთა მიმდევრობის მოცემის რა წესები იცით?
2. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული? ქვემოდან შემოსაზღვრული?
3. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი მიმდევრობა? კლებადი მიმდევრობა? არსებითად ზრდადი? არსებითად კლებადი? მონოტონური? არსებითად მონოტონური? სტაციონარული?
4. რას ნიშნავს, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობის ზღვარია  $a$  რიცხვი?
5. სტაციონარულ მიმდევრობას აქვს თუ არა ზღვარი?
6. შემოსაზღვრულია თუ არა კრებადი მიმდევრობა?
7. კრებადია თუ არა ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობა?
8. შეიძლება თუ არა კრებად მიმდევრობას ორი ზღვარი ჰქონდეს?
9. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ ზრდად მიმდევრობას აქვს თუ არა სასრული ზღვარი?
10. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ კლებად მიმდევრობას აქვს თუ არა სასრული ზღვარი?
11. სეგმენტთა როგორ მიმდევრობას ეწოდება თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა?
12. რაში მდგომარეობს კანტორის თეორემა თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობის შესახებ?
13. რაში მდგომარეობს ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა?
14. როგორ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტალური?
15. შეიძლება თუ არა, რომ ფუნდამენტალური მიმდევრობა არ იყოს შემოსაზღვრული?
16. რაში მდგომარეობს კოშის თეორემა მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ?
17. რას ეწოდება ნეპერის  $e$  რიცხვი?

## სავარჯიშო

1. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , თუ  $x_n = \frac{n}{n+1}$ . პასუხი: 1.

2. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , თუ  $x_n = \frac{2n-1}{2n}$ . პასუხი: 1.

3. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , თუ  $x_n = \frac{3n+1}{5n+1}$ . პასუხი:  $\frac{3}{5}$ .

გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , თუ  $x_n = \frac{n^3+4n-1}{n^4-7n+2}$ . პასუხი: 0.

5. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+5n^3+n+1}{n^3-6n^2+2n+3}$ . პასუხი:  $\infty$ .

6. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5-3n^4+1}{3n^5+2n^4-7}$ . პასუხი:  $\frac{2}{3}$ .

7. დაამტკიცეთ, რომ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = 0$ .

8. გამოთვალეთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , თუ  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . პასუხი:  $e$ .

9. დაამტკიცეთ, რომ  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას, სადაც  $x_n = \cos n\pi$ . ზღვარი არა აქვს.

10. ააგეთ არაკრებადი  $(x_n)_{n>1}$  და  $(y_n)_{n>1}$  მიმდევრობები, ისეთი, რომ  $(x_n + y_n)_{n>1}$  მიმდევრობა იყოს კრებადი.

11. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

12. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right] = 0.$$

13. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty.$$

14. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

15. მოცემულია რიცხვთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ , სადაც  $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ . აბოვეთ  $\underline{\lim} x_n$  და  $\overline{\lim} x_n$ , პასუხი: 0 და 1.

16. აბოვეთ  $\underline{\lim} x_n$  და  $\overline{\lim} x_n$ , თუ  $x_n = \cos n\pi$ .  
პასუხი: -1 და 1.

**რიცხვთა მწკრივი**

მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი ძირითადი ნაწილია მწკრივთა თეორია. მწკრივების საშუალებით შეიძლება ვიპოვოთ მიახლოებითი მნიშვნელობები ფუნქციების, ინტეგრალებისა და ა. შ. ამ განყოფილებაში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რიცხვთა მწკრივებს.

**§ 1. ნაშვლილ წამრავიანი რიცხვთა მწკრივი.  
კრავალოზა ლა ზანულალოზა**

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა  $(u_n)_{n \geq 0}$ . თუ ამ მიმდევრობის ყველა წევრს შევადერთებთ + ნიშნით, მივიღებთ სიმბოლოს

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \tag{1.1}$$

რომელსაც რიცხვთა მწკრივი ეწოდება.  $u_n$  რიცხვს მწკრივის  $n$ -ური წევრი ანუ მწკრივის ზოგადი წევრი ეწოდება.

აღებულ მწკრივს ხშირად ეწოდება მწკრივი ზოგადი  $u_n$  წევრით ან მოკლედ  $(u_n)$  მწკრივი.

(1.1) სიმბოლო არ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ჯამი ჩვეულებრივი აზრით, ვინაიდან არითმეტიკაში ჯამის ცნება განსაზღვრულია შესაკრებთა სისრული სიმრავლისათვის. რომ ვილაპარაკოთ (1.1) მწკრივის ჯამზე, საჭიროა გავავრცელოთ ჯამის ცნება შესაკრებთა უსასრულო სიმრავლის შემთხვევაში.

ჯამს

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

ეწოდება (1.1) მწკრივის  $n$ -ური კერძო ჯამი ან უბრალოდ — კერძო ჯამი. როდესაც  $n$  გაიზარდეს მნიშვნელობებს 0, 1, 2, ... მივიღებთ კერძო ჯამთა მიმდევრობას

$$s_0, s_1, \dots, s_n, \dots$$

განსაზღვრა 1. (1.1) მწკრივის ეწოდება კრებადი  $s$  რიცხვისაკენ, თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

ამ შემთხვევაში  $s$  რიცხვს ეწოდება მოცემული მწკრივის ჯამი და წერენ

$$s = u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots,$$

ან მოკლედ

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

თუ  $\lim s_n$  არ არსებობს ანდა იგი უსასრულოა, მაშინ აღებულ მწკრივს განშლადი ეწოდება.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ლაიბნიცის მწკრივი

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

ვიპოვოთ ამ მწკრივის ჯამი. გვაქვს:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

აქედან ვღებულობთ, რომ  $\lim s_n = 1$ . მაშასადამე, აღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამი  $s = 1$ .

მაგალითი 2. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (1.2)$$

ამ მწკრივის პარამონიული მწკრივი ეწოდება. დავამტკიცოთ, რომ ეს მწკრივი განშლადია. წინა თავის მე-8 პარაგრაფში დავადგინეთ, რომ

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) \quad (n=1, 2, \dots).$$



რაკი  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$ , ამიტომ  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$  მაშასადამე, (1.2)

მწკრივი განშლადია.

**თეორემა 1.** თუ მწკრივში რამდენიმე წევრს ახალი წევრით შევცვლით, ან თუ მას ჩამოვაშორებთ (დავუმატებთ) რამდენიმე წევრს, ამით მწკრივის კრებადობა ან განშლადობა არ დაირღვევა.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ (1.1) მწკრივი და მისი რამდენიმე წევრი, მაგალითად,  $u_{k_1}, u_{k_2}, \dots, u_{k_i}$  შევცვალოთ ახალი  $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_i}$  წევრებით ( $k_1 < k_2 < \dots < k_i$ ). ვთქვათ,

$$(v_{k_1} + v_{k_2} + \dots + v_{k_i}) - (u_{k_1} + u_{k_2} + \dots + u_{k_i}) = a.$$

თუ  $s_n$  წარმოადგენს (1.1) მწკრივის  $n$ -ურ კერძო ჯამს, ხოლო  $s'_n$  არის ამ მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივის კერძო ჯამი, მაშინ

$$s'_n - s_n = a, \text{ როდესაც } n \geq k_i.$$

აქედან, თუ  $n \geq k_i$ , გვაქვს

$$s'_n = s_n + a.$$

ცხადია, რომ თუ (1.1) მწკრივი კრებადია, მაშინ  $\lim s_n$  არსებობს და, მაშასადამე, იარსებებს  $\lim s'_n$ . ამიტომ (1.1) მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივი აგრეთვე კრებადია. თუკი (1.1) მწკრივი განშლადია, მაშინ არ არსებობს  $\lim s_n$  და, მაშასადამე, არ იარსებებს აგრეთვე  $\lim s'_n$ . ამიტომ (1.1) მწკრივის წევრთა შეცვლის შედეგად მიღებული მწკრივი აგრეთვე განშლადია.

მწკრივის რამდენიმე წევრის ჩამოშორება ამ მწკრივის სათანადო წევრის 0-ით შეცვლის ტოლფასია. ასე რომ არც ეს ოპერაცია დაარღვევს მწკრივის კრებადობას ან განშლადობას. თეორემა დამტკიცებულია.

## § 2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

**თეორემა 2** (კოში).  $(u_n)$  მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია ყოველი დადებითი  $\epsilon$  რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ როდესაც  $n > N$  და ნებისმიერი ნატურალური  $p$  რიცხვისათვის ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ მოცემული მწკრივის კერძო ჯამთა მიმდევრობა

$$s_0, s_1, \dots, s_n, \dots \quad (2.2)$$

$(u_n)$  მწკრივის კრებადობისათვის. აუცილებელი და საკმარისია (2.2) მიმდევრობა იყოს ფუნდამენტალური, ე. ი. ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის ისეთი ნატურალური  $N$  რიცხვი მოიძებნებოდეს, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|s_m - s_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, n > N. \quad (2.3)$$

თუ ავიღებთ  $m = n + p$ , სადაც  $p$  ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია, მაშინ (2.3) პირობა ასე გადაიწერება

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

ეს კი ტოლფასია (2.1) პირობისა, ვინაიდან

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 3.**  $(u_n)$  მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია, რომ მისი ზოგადი  $u_n$  წევრი მიისწრაფვოდეს ნულისაკენ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ .

დამტკიცება. ვთქვათ,  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია, მაშინ მე-2 თეორემის პირობა შესრულებულია ყოველი  $p$ -თვის, კერძოდ, როდესაც  $p = 1$ . მივიღებთ, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ  $|u_{n+1}| < \varepsilon$ , როდესაც  $n > N$ . ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ისმის კითხვა: თუ ზოგადი წევრი ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ კრებადია თუ არა მწკრივი? საზოგადოდ არა. მართლაც, პარამონიული მწკრივის ზოგადი წევრი  $u_n = \frac{1}{n}$  ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , მაგრამ მწკრივი განშლადია.

**თეორემა 4.** გეომეტრიული პროგრესია

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots \quad (a \neq 0) \quad (2.4)$$

არის კრებადი მწკრივი და მისი ჯამია



აღნიშნოთ  $s_n$  და  $s'_n$  სიმბოლოებით შესაბამისად ( $u_n$ ) და ( $v_n$ ) მწკრივების  $n$ -ური კერძო ჯამები. ადვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი  $k$ -თვის გვექნება

$$s'_k = s_{n_k}.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ( $s'_k$ ) მიმდევრობა წარმოადგენს ( $s_k$ ) მიმდევრობის ქვემიმდევრობას. მაშასადამე, რაკი ( $s_n$ ) მიმდევრობა კრებადია გარკვეული  $s$  რიცხვისაკენ, ამიტომ ( $s'_k$ ) მიმდევრობაც კრებადია  $s$  რიცხვისაკენ, ე. ი. თუ ( $u_n$ ) მწკრივი კრებადია  $s$  რიცხვისაკენ, მაშინ ( $v_k$ ) მწკრივიც კრებადია იმავე რიცხვისაკენ. თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** ( $v_k$ ) მწკრივის კრებადობიდან, საზოგადოდ არ გამომდინარეობს ( $u_k$ ) მწკრივის კრებადობა. მართლაც, განვიხილოთ მწკრივი

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$$

ეს მწკრივი განშლადია, რადგანაც ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, მაგრამ მწკრივი

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

კრებადია.

**თეორემა 6.** თუ ( $u_n$ ) მწკრივი კრებადია  $s$  რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი  $\lambda$  რიცხვისათვის ( $\lambda u_n$ ) მწკრივი კრებადია  $\lambda s$  რიცხვისაკენ.

**დამტკიცება.** თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$\sigma_n = \lambda u_0 + \lambda u_1 + \dots + \lambda u_n,$$

გვექნება

$$\sigma_n = \lambda s_n.$$

პირობის ძალით  $\lim s_n = s$  და, მაშასადამე,  $\lim \sigma_n = \lambda s$ .

თეორემა დამტკიცებულია.

**განსაზღვრა 2.** ( $u_n$ ) და ( $v_n$ ) მწკრივების ჯამი ეწოდება ( $u_n + v_n$ ) მწკრივს, ხოლო მათი სხვაობა არის ( $u_n - v_n$ ) მწკრივი.

**თეორემა 7.** თუ ( $u_n$ ) და ( $v_n$ ) მწკრივები კრებადია შესაბამისად  $s$  და  $\sigma$  რიცხვებისაკენ, მაშინ ( $u_n + v_n$ ) მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია  $s + \sigma$ . ასევე ( $u_n - v_n$ ) მწკრივიც კრებადია და მისი ჯამია  $s - \sigma$ .

**დამტკიცება.** შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n,$$

$$\sigma_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n,$$

$$t_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n).$$

თეორემის პირობის თანახმად

$$\lim s_n = s, \quad \lim \sigma_n = \sigma.$$

ამიტომ

$$\lim t_n = \lim (s_n + \sigma_n) = \lim s_n + \lim \sigma_n = s + \sigma.$$

ამრიგად,  $(u_n + v_n)$  მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია  $s + \sigma$ .

ანალოგიურად მტკიცდება  $(u_n - v_n)$  მწკრივის კრებადობა.

შენიშვნა. შეიძლება, რომ  $(u_n + v_n)$  მწკრივი იყოს კრებადი,  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები კი განშლადი. მართლაც, ვთქვათ,

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{-1}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

ცხადია,  $(u_n + v_n)$  მწკრივი

კრებადია, მაგრამ  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები განშლადია.

განსაზღვრა 3.  $(u_n)$  მწკრივის ნაშთი  $n$ -ური წევრის შემდეგ ეწოდება  $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  მწკრივს.

ცხადია, მწკრივი და მისი ნაშთი ერთდროულად კრებადია ან ერთდროულად განშლადია.

#### § 4. დადებითი მწკრივები

$(u_n)$  მწკრივს, რომლის ყოველი წევრი დადებითი რიცხვია, დადებითი მწკრივი ეწოდება. მართებულია შემდეგი

თეორემა 8. დადებითი მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ კერძო ჯამთა მიმდევრობა იყოს ზემოდან შემოსაზღვრული.

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე დადებითი  $(u_n)$  მწკრივი. აღვლილ შესაძენვეია, რომ კერძო ჯამი

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

იზრდება  $n$ -თან ერთად.

თუ  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია, მაშინ კერძო ჯამთა მიმდევრობა  $(s_n)_{n \geq 0}$  ზემოდან შემოსაზღვრულია და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია. პირიქით, თუ კერძო ჯამთა მიმდევრობა  $(s_n)_{n \geq 0}$  ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ იგი კრებადია, ე. ი.  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად მწკრივი  $1+2+\dots+n+\dots$  განშლადია, ვინაიდან კერძო ჯამთა მიმდევრობა ზემოდან არ არის შემოსაზღვრული.

თეორემა 9. ვთქვათ,  $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots \geq 0$ . მწკრივი  $(u_n)$  კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k u_{2^k} = u_1 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \dots \quad (4.1)$$

კრებადა.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

$$\sigma_n = u_1 + 2u_2 + \dots + 2^k u_{2^k}.$$

როდესაც  $n < 2^k$ , გვაქვს

$$\begin{aligned} s_n &\leq u_1 + (u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + \dots + (u_{2^k} + \dots + u_{2^{k+1}-1}) \leq \\ &\leq u_1 + 2u_2 + 4u_4 + \dots + 2^k u_{2^k} = \sigma_n, \end{aligned}$$

ასე რომ

$$s_n \leq \sigma_n. \quad (4.2)$$

მეორე მხრივ, როდესაც  $n > 2^k$ , გვაქვს

$$\begin{aligned} s_n &\geq u_1 + u_2 + (u_3 + u_4) + (u_5 + u_6 + u_7 + u_8) + \dots + \\ &+ (u_{2^{k-1}+1} + u_{2^{k-1}+2} + \dots + u_{2^k}) \geq \frac{1}{2} u_1 + u_2 + 2u_4 + \\ &+ 4u_8 + \dots + 2^{k-1} u_{2^k} = \frac{1}{2} \sigma_n. \end{aligned}$$

ასე რომ

$$s_n \geq \frac{1}{2} \sigma_n. \quad (4.3)$$

თუ  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია, მაშინ (4.3) უტოლობის ძალით (4.1) მწკრივიც კრებადია, ხოლო თუ  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია, მაშინ (4.2) უტოლობის თანახმად (4.1) მწკრივიც განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. მწკრივი  $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  კრებადია, როდესაც  $\alpha > 1$ , და განშლადია, როდესაც  $\alpha \leq 1$ .

დამტკიცება. თუ  $\alpha \leq 0$ , მაშინ მოცემული მწკრივის განშლადობა გამომდინარეობს მე-3 თეორემიდან. თუ  $\alpha > 0$ , მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა. ჩვენ შემთხვევაში (4.1) მწკრივი ასე გადაიწერება:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-\alpha)k}.$$

მივიღეთ გეომეტრიული პროგრესია, რომლის მნიშვნელია  $2^{1-\alpha}$ . ეს პროგრესია კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $2^{1-\alpha} < 1$ , ე. ი. როდესაც  $\alpha > 1$ . თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. თუ  $\alpha > 1$ , მაშინ მწკრივი

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

კრებადია, თუკი  $\alpha \leq 1$ , მაშინ ეს მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. მიმდევრობა  $\left(\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\right)_{n > 2}$  კლებადია და ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მე-9 თეორემა. ამას მივყავართ მწკრივამდე

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \ln 2)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

მაშასადამე, ეს თეორემა მე-10 თეორემის შედეგია.

§ 6. მწკრივთა შედარების ნიშნები

ვთქვათ, მოცემულია ორი დადებითი მწკრივი  $(u_n)$  და  $(v_n)$ . მართებულია შემდეგი

თეორემა 12 (შედარების პირველი ნიშანი). თუ  $u_n \leq v_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) და  $(v_n)$  მწკრივი კრებადია, მაშინ  $(u_n)$  მწკრივიც კრებადია.

დამტკიცება. ცხადია,  $(u_n)$  მწკრივის კერძო ჯამები არ აღემატება  $(v_n)$  მწკრივის სათანადო კერძო ჯამებს, და რაკი  $(v_n)$  მწკრივი კრებადია, ამიტომ  $(u_n)$  მწკრივს კერძო ჯამთა მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია. მაშასადამე, მე-8 თეორემის თანახმად  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია.

**შედეგი.** თუ  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია და  $u_n < v_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), მაშინ  $(v_n)$  მწკრივი განშლადია.

მართლაც,  $(v_n)$  მწკრივი კრებადი რომ იყოს, მაშინ მე-12 თეორემის თანახმად  $(u_n)$  მწკრივიც კრებადი იქნებოდა.

შენიშვნა. შედარების პირველი ნიშანი ძალაში რჩება, თუ  $u_n \leq v_n$  პირობა შესრულებულია არა ყველა  $n$ -თვის, არამედ  $n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული.

**თეორემა 13.** ვთქვათ,  $(u_n)$  და  $(v_n)$  დადებითი მწკრივებია. თუ არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

მაშინ  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები ერთდროულად კრებადი ან განშლადი არიან.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი რიცხვი  $\varepsilon < l$ . ზღვრის განსაზღვრის თანახმად მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ როდესაც  $n > \nu$ , გვექნება

$$l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon.$$

აქედან გვაქვს

$$(l - \varepsilon)v_n < u_n < (l + \varepsilon)v_n, \text{ როდესაც } n = \nu + 1, \nu + 2, \dots$$

თუ  $(u_n)$  მწკრივი კრებადი; მაშინ მე-12 თეორემის ძალით კრებადი იქნება აგრეთვე მწკრივი  $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} (l - \varepsilon)v_n$  და, მაშასადამე,  $(v_n)$

მწკრივი კრებადი.

პირიქით, თუ  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია, მაშინ მე-12 თეორემის შედეგის თანახმად განშლადი იქნება აგრეთვე მწკრივი

$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} (l + \varepsilon)v_n$  და ამიტომ  $(v_n)$  მწკრივი განშლადია. თეორემა დამ-

ტკიცებულია.

**თეორემა 14** (შედარების მეორე ნიშანი). ვთქვათ,  $(u_n)$  და  $(v_n)$  დადებითი მწკრივებია. თუ  $(v_n)$  მწკრივი კრებადია და მართებულია უტოლობებში



$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (5.1)$$

მაშინ  $(u_n)$  მწკრივი კრებალია.

დამტკიცება. (5.1) უტოლობებიდან გვაქვს

$$\frac{u_1}{u_0} \leq \frac{v_1}{v_0}, \quad \frac{u_2}{u_1} \leq \frac{v_2}{v_1}, \dots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ, მივიღებთ

$$\frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \dots \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_1}{v_0} \cdot \frac{v_2}{v_1} \dots \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

სათანადო შეკვეცის შემდეგ გვაქვს

$$\frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0}.$$

აქედან

$$u_n \leq \frac{u_0}{v_0} v_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

რაკი  $\left(\frac{u_0}{v_0} v_n\right)$  მწკრივი კრებალია, ამიტომ მე-12 თეორემის თა-

ნახმად  $(u_n)$  მწკრივი კრებალია. თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია და შესრულე-  
ბულია (5.1) პირობა, მაშინ  $(v_n)$  მწკრივიც განშ-  
ლადია.

მართლაც,  $(v_n)$  მწკრივი კრებალი რომ ყოფილიყო, მაშინ მე-14  
თეორემის თანახმად  $(u_n)$  მწკრივიც კრებალი იქნებოდა.

შენიშვნა. შედარების მეორე ნიშანი ძალაში რჩება, თუ (5.1)  
პირობა შესრულებულია არა ყველა  $n$ -თვის, არამედ  $n$ -ის გარკვეუ-  
ლი მნიშვნელობიდან დაწყებული:

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$$

კრებალია. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u_n = \frac{1}{2^n + n}, \quad v_n = \frac{1}{2^n}$$

გვექნება  $u_n \leq v_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ). მაგრამ ( $v_n$ ) მწკრივი კრებადია, ვინაიდან იგი წარმოადგენს უსასრულო გეომეტრიულ პროგრესიას. რომლის მნიშვნელია  $\frac{1}{2}$ . მაშასადამე, მე-12 თეორემის ძალით მოცემული მწკრივი კრებადია.

### § 6. ნიშანდონაცვლოებითი მწკრივი. ლაიბნიცის თეორემა

ახლა შევისწავლოთ მწკრივები, რომელთა წევრები ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

განსაზღვრა 4. ნიშანდონაცვლოებითი მწკრივი ეწოდება ისეთ მწკრივს, რომლის წევრებს რიგრიგობით დადებითი და უარყოფითი ნიშნები აქვთ.

ნიშანდონაცვლოებითი მწკრივი შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + \dots, \quad (6.1)$$

სადაც  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  დადებითი რიცხვებია.

თეორემა 15 (ლაიბნიცი). ნიშანდონაცვლოებითი (6.1) მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, რომ  $(u_n)_n > 0$  მიმდევრობა იყოს არსებითად კლებადი და  $\lim u_n = 0$ .

დამტკიცება. (6.1) მწკრივის პირველი  $k$  წევრის ჯამი აღენიშნოს  $s_k$ -თი. მაშინ  $k=2n+1$  რიცხვისათვის გვაქვს:

$$s_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \dots + (u_{2n} - u_{2n+1}).$$

პირობის თანახმად ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებანი არაუარყოფითი რიცხვებია, ამიტომ  $s_{2n+1}$  იზრდება  $n$ -თან ერთად. მეორე მხრივ შეგვიძლია დავწეროთ

$$s_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \dots - (u_{2n-1} - u_{2n}) - u_{2n+1}.$$

აქედან ჩანს, რომ ყოველი  $n$ -თვის

$$s_{2n+1} < u_0.$$

ამრიგად,  $(s_{2n+1})_n > 0$  მიმდევრობა ზემოდან შემოსაზღვრულია და ზრდადია, ამიტომ არსებობს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s.$$

ახლა შევნიშნოთ, რომ

$$s_{2n} = s_{2n-1} + u_{2n}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (6.1) მწკრივი კრებადია და მისი ჯა მია  $s$ . ამით ლაიბნიცის თეორემა დამტკიცებულია.

ზემოდამტკიცებული თეორემიდან ჩანს, რომ  $s_{2n+1}$  ჯამი მისწრაფვის თავის  $s$  ზღვარისაკენ ისე, რომ იგი მუდამ მატულობს. ამრიგად,  $s_{2n+1}$  წარმოადგენს  $s$ -ის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით. პირიქით,  $s_{2n}$  არის  $s$ -ის მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით. მართლაც, ტოლობებიდან

$$\begin{aligned} s_0 &= u_0, \\ s_2 &= u_0 - (u_1 - u_2), \\ s_4 &= u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4), \\ &\dots \end{aligned}$$

ჩანს, რომ  $s_0 > s_2 > s_4 > \dots$

ამ რიგად,  $s_{2n}$  მისწრაფვის  $s$ -კენ ისე, რომ იგი მუდამ კლებულობს.

უტოლობებიდან  $s_1 < s < s_0$  გამომდინარეობს, რომ

$$0 < s < u_0.$$

მაშასადამე, ჩვენი მწკრივის ჯამს აქვს პირველი წევრის ნიშანი და აბსოლუტური სიდიდით ნაკლებია ამ წევრზე.

(6.1) მწკრივის  $R_n$  ნაშთი  $n$ -ური წევრის შემდეგ არის.

$$(-1)^{n+1}(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots).$$

ეს მწკრივი იმავე ხასიათისაა, რაც (6.1) მწკრივი, ამიტომ ამ ნაშთს აქვს  $(-1)^{n+1}$  ნიშანი და

$$|R_n| < u_{n+1}.$$

თუ გავიხსენებთ, რომ

$$s = s_n + R_n,$$

ყველაფერი ზემოთქმული შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ (6.1) მწკრივში უკუვაგდებთ ყველა წევრს  $n$ -ურის შემდეგ და კერძო ჯამს

$$s_n = u_0 - u_1 + u_2 - \dots + (-1)^n u_n$$

მივიჩნევთ  $s$  ჯამის მიახლოებით მნიშვნელობად, მაშინ მივიღებთ გადახრას, რომელსაც ექნება იგივე ნიშანი, რაც პირველ უკუვადებულ  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  წევრს, ხოლო აბსოლუტური სიდიდით მასზე ნაკლებია, ე. ი.

$$|s - s_n| < u_{n+1}$$

ეს თვისება შეგვიძლია გამოვიყენოთ მწკრივის ჯამის მიახლოებით გამოთვლებში.

მაგალითი 1. მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

კრებადია. ვინაიდან

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

და

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

შენიშვნა. მე-15 თეორემა ძალას კარგავს, თუ მოვხსნით  $u_n$ -ის კლებადობის პირობას. მაგალითად, ნიშანმონაცვლეობითი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{4^n} + \dots$$

განშლადია. მართლაც: გვაქვს

$$s_{2n-1} = \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right).$$

პირველ ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , ხოლო მეორე ფრჩხილში მოთავსებული გამოსახულება ნაკლებია  $\frac{1}{3}$ -ზე. მაშასადამე,

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ . ე. ი. აღებული მწკრივი განშლადია.

#### § 7. აბსოლუტურად და არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივები

განსაზღვრა 5. ( $u_n$ ) მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი, თუ კრებადია ამ მწკრივის აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$|u_0| + |u_1| + \dots + |u_n| + \dots \quad (7.1)$$

თეორემა 16. აბსოლუტურად კრებადი მწკრივი კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრება-  
ლია. ე. ი. კრებალია (7.1) მწკრივი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$a_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad b_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

ცხადია, რომ  $a_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$ . ამის გარდა,

$$a_n \leq |u_n|, \quad b_n \leq |u_n|$$

და

$$u_n = a_n - b_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

რაკი (7.1) მწკრივი კრებალია, ამიტომ მე-12 თეორემის თანახმად  $(a_n)$  და  $(b_n)$  მწკრივებიც კრებალია. მაშასადამე, მე-7 თეორემის თანახმად  $(a_n - b_n)$  მწკრივი კრებალია, ე. ი. კრებალია  $(u_n)$  მწკრი-  
ვი და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. მწკრივი შეიძლება კრებადი იყოს, მაგრამ არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი. მართლაც, ავიღოთ მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots \quad (7.2)$$

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები, ეს მწკრივი კრებალია, მაგრამ მისი წევრების აბსოლუტური სიდიდეებისაგან შედგენილი მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

განშლადია.

განსაზღვრა 6. თუ  $(u_n)$  მწკრივი კრებალია, ხოლო  $(|u_n|)$  მწკრივი განშლადია, მაშინ  $(u_n)$  მწკრივს პირობით კრებადი მწკრივი ეწოდება.

მაგალითად, (7.2) მწკრივი პირობით კრებადი მწკრივია.

ცხადია, რომ ყოველი დადებითი კრებადი მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

საზოგადოდ, თუ რაიმე კრებადი მწკრივი  $(u_n)$  შეიცავს უარყოფით წევრთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, ის აბსოლუტურად კრებალია.

მართლაც, თუ  $u_v$  წარმოადგენს იმ უარყოფით წევრს. რომელსაც უდიდესი ნომერი აქვს, მაშინ მწკრივი

$$u_{v+1} + u_{v+2} + \dots$$

კრებალია და დადებითი. მაგრამ მაშინ კრებალია  $(|u_n|)$  მწკრივიც.

ასევე, თუ  $(u_n)$  მწკრივი შეიცავს დადებით წევრების მხოლოდ სასრულ სიმრავლეს, მაშინ ამ მწკრივის წევრების  $(-1)$ -ზე გამრავლებით ისეთ მწკრივს მივიღებთ, რომელიც შეიცავს უარყოფით

წევრთა სასრულ სიმრავლეს, და ამიტომ, თუ ასეთი მწკრივი კრებადია, მაშინ  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

შეენიშნავთ, რომ ყოველი პირობითი კრებადი მწკრივი შეიცავს როგორც დადებით, ისე უარყოფით წევრთა უსასრულო სიმრავლეს.

#### § 8. კრებადობის კოეფიციენტი და ღალატობის ნიშნები

თეორემა 17 (კოეფიციენტი). თუ  $(u_n)$  მწკრივისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $q < 1$ , რომ  $n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული მართებულია უტოლობა

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leq q, \quad (8.1)$$

მაშინ აღებული მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია; თუკი  $n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული

$$\sqrt[n]{|u_n|} \geq 1, \quad (8.2)$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. ჯერ ვიგულისხმეთ, რომ შესრულებულია (8.1) პირობა, მაშინ

$$|u_n| \leq q^n, \text{ როდესაც } n = \nu + 1, \nu + 2, \dots,$$

სადაც  $\nu$  გარკვეული ნატურალური რიცხვია. რაკი  $q < 1$ , ამიტომ

მწკრივი  $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} q^n$  კრებადია და მე-12 თეორემის თანახმად

$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} |u_n|$  მწკრივიც კრებადია. მაშასადამე,  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია.

თუ შესრულებულია (8.2) პირობა, მაშინ

$$|u_n| \geq 1, \text{ როდესაც } n = \nu + 1, \nu + 2, \dots$$

აქედან ჩანს, რომ  $u_n$  არ მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ . მაშასადამე,  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია,

შედეგი. თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l, \quad (8.3)$$

მაშინ  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, როდესაც  $l < 1$  და განშლადია, როდესაც  $l > 1$ , ხოლო თუ  $l = 1$ , გვაქვს საექვო შემთხვევა, ე. ი. ამ შემთხვევაში გაუკრეველი რჩება კრებადია თუ განშლადი.  $(u_n)$  მწკრივი.

საჭიროა აქ გამოვიყენოთ კრებადობის ან განშლადობის სხვა ნიშნები.

მაგალითი 1. განვიხილოთ ჰარმონიული მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

აქ

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

აქედან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1.$$

გვაქვს საექვო შემთხვევა, მაგრამ როგორც იყო ნაჩვენები, ჰარმონიული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 2. ვთქვათ, მოცემულია მწკრივი

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

როგორც ვიცით, ეს მწკრივი კრებადია. ახლა გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი, აქ

$$u_n = \frac{1}{n^2}, \quad \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

შასასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1.$$

გვაქვს საექვო შემთხვევა. ამიტომ კოშის ნიშნის მიხედვით ვერ ვიტყვივით კრებადია თუ განშლადია მოცემული მწკრივი.

ამრიგად, არსებობს როგორც კრებადი, ისე განშლადი მწკრივებიც, რომელთათვის  $l = 1$ .

**თეორემა 18** (დალამბერის ნიშანი). თუ  $(u_n)$  მწკრივისათვის შესრულებულია პირობა

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q \quad (8.4)$$

$n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, სადაც  $q$  ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია, მაშინ ( $u_n$ ) მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, ხოლო თუ  $n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული მარტებულია უტოლობა

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1. \quad (8.5)$$

მაშინ მწკრივი განშლადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ მწკრივი

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (8.6)$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშნას  $v_n = q^n$ , მაშინ

$$\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q.$$

მაშასადამე, (8.4) პირობის თანახმად გვექნება

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right|$$

$n$ -ის გარკვეული მნიშვნელობიდან დაწყებული, და რაკი (8.6) მწკრივი კრებალია, ამიტომ მე-14 თეორემის თანახმად ( $u_n$ ) მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

ახლა ვთქვათ, შესრულებულია (8.5) პირობა. მაშინ გვექნება

$$|u_{n+1}| \geq |u_n|, \quad n = \nu + 1, \nu + 2, \dots$$

სადაც  $\nu$  გარკვეული მთელი დადებითი რიცხვია. აქედან ჩანს, რომ მწკრივის ზოგადი წევრ არ მიისწრაფვის ნულისაკენ და ამიტომ ალებული მწკრივი განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l, \quad (8.7)$$

მაშინ ( $u_n$ ) მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, როდესაც  $l < 1$  და განშლადია, როდესაც  $l > 1$ , ხოლო თუ  $l = 1$  გვაქვს საექვო შემთხვევა.



მართლაც, ვთქვათ,  $l < 1$  და ავიღოთ რაიმე  $q$  რიცხვი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს  $l < q < 1$ . თანახმად (8.7) ტოლობისა არსებობს ისეთი ნატურალური  $\nu$  რიცხვი, რომ

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

მაშასადამე, ზემოლამტკიცებული თეორემის თანახმად  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია.

თუ  $l > 1$ , მაშინ (8.7) ტოლობის თანახმად არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$  რიცხვი, რომ

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1, \text{ როდესაც } n > N.$$

ამიტომ იმავე თეორემის თანახმად  $(u_n)$  მწკრივი განშლადია.

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $l=1$ , გვაქვს საეჭვო შემთხვევა, ე. ი. დამტკიცებული შედეგი საშუალებას ვერ იძლევა გავარკვიოთ აღებული მწკრივის კრებალობა თუ განშლადობა. ამ შემთხვევაში საჭიროა გამოვიყენოთ კრებალობის ან განშლადობის სხვა ნიშნები.

შენიშვნა. არსებობს როგორც კრებალი, ისე განშლდი მწკრივები, რომელთათვის  $l=1$ . ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ მწკრივები  $\left(\frac{1}{n}\right)$  და  $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . თითოეული მათგანისათვის გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1,$$

მაგრამ პირველი განშლადია, მეორე კი კრებალი.

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 2^n}{n^n}$$

კრებალია. ამ შემთხვევაში

$$u_n = \frac{n! 2^n}{n^n}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! 2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n! 2^n}{n^n} = \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

აქედან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{e} < 1 \quad (e \text{ ნუკრის რიცხვია}).$$

მაშასადამე, მოცემული მწკრივით კრებალია.

მაგალითი 4. დაეამტკიცოთ, რომ მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n}$$

განშლადია. ამ შემთხვევაში  $u_n = \frac{n! 3^n}{n^n}$ . გვაქვს

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! 3^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n! 3^n}{n^n} = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

აქედან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{e} > 1.$$

ამიტომ აღებული მწკრივი განშლადია.

მაგალითი 5. განვიხილოთ  $(u_n)$  მწკრივი, სადაც

$$u_n = \begin{cases} q^{n^2}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ q^{\frac{n+2}{2}}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია,} \end{cases}$$

ხოლო  $q$  ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია. გაშლილი სახის ეს მწკრივი ასე ჩაიწერება

$$1 + q^2 + q + q^3 + q^4 + q^5 + \dots + q^k + q^{k-1} + q^{k+1} + q^k + \dots$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია,} \\ q^2, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  ფარდობა შეიძლება იყოს როგორც ერთზე ნაკლები, ისე ერთზე მეტი. დალაშქრის ნიშანი ამ მწკრივის კრებალობას ვერ იჩვენებს.

ახლა აღებული მწკრივისათვის გამოვიყენოთ კოშის ნიშანი. გვაქვს:

$$\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{q}, & \text{როდესაც } n \text{ ლუწია,} \\ q^{(n+2)/2n}, & \text{როდესაც } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[q]{q} < 1.$$

მაშასადამე, კოშის ნიშანი არკვევს მწკრივის კრებადობას. ამ მაგალითის მიხედვით კოშის ნიშანი დალამბერის ნიშანზე ძლიერი აღმოჩნდა.

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ თუ მწკრივის კრებადობის გასარკვევად გამოდგება დალამბერის ნიშანი, გამოდგება აგრეთვე კოშის ნიშანიც. მაშასადამე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კოშის ნიშანი დალამბერის ნიშანზე ძლიერია. ვერ დავამტკიცოთ

**თეორემა 19.** თუ  $(u_n)_{n>0}$  მიმდევრობა დადებითია და არსებობს ზღვარი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \tag{8.8}$$

სასრული ან უსასრულო, მაშინ იარსებებს აგრეთვე

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$  და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{8.9}$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $l$  ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია და ავიღოთ ერთზე და  $l$ -ზე ნაკლები ნებისმიერი რიცხვი  $\varepsilon > 0$ . (8.8) ტოლობის თანახმად არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \frac{\varepsilon}{3}, \text{ როდესაც } n > \nu.$$

მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} < l + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_{\nu+2}}{u_{\nu+1}} < l + \frac{\varepsilon}{3},$$

...

$$l - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{u_n}{u_{n-1}} < l + \frac{\varepsilon}{3}.$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად გადავამრავლებთ და მოვახდენთ სათანადო გარდაქმნებს, მივიღებთ

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu} < \frac{u_n}{u_\nu} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{n-\nu}$$

აქედან გვაქვს

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \sqrt[n]{u_\nu \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} &< \sqrt[n]{u_n} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \times \\ &\times \sqrt[n]{u_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} \end{aligned} \quad (8.10)$$

შემდეგ, რაკი

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_\nu \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} = 1,$$

ამიტომ  $\frac{\varepsilon}{3(l+1)}$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N \geq \nu$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობებს

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\varepsilon}{3(l+1)} &< \sqrt[n]{u_\nu \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}}, \\ \sqrt[n]{u_\nu \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right)^{-\nu}} &< 1 + \frac{\varepsilon}{3(l+1)}, \end{aligned}$$

როდესაც  $n > N$ . მაშასადამე, თუ  $n > N$ , (8.10) უტოლობებიდან გვაქვს:

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) \left[1 - \frac{\varepsilon}{3(l+1)}\right] < \sqrt[n]{u_n} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) \left[1 + \frac{\varepsilon}{3(l+1)}\right].$$

სათანადოდ გარდაქმნის შემდეგ გვექნება

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N.$$

მაშასადამე, მართებულია (8.9) ტოლობა.

ანალოგიური მსჯელობით დავამტკიცებთ (8.9) ტოლობის მართებულობას, როდესაც  $l=0$  ან  $l=+\infty$ . თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, თუ მწკრივის კრებადობა დადგენილია დალაშქვრის ნიშნით, მაშინ კრებადობის დადგენა შეიძლება კოშის ნიშნითაც. მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ მე-5 მაგალითს, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ კოშის ნიშანი უფრო ძლიერია, ვიდრე დალაშქვრის ნიშანი.

§ 9. კრებადობის აბელის ნიშანი

ლემა 1. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვები  $u_0, u_1, \dots, u_n, v_0, v_1, \dots, v_n$ . მაშინ

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_n v_n, \quad (9.1)$$

სადაც

$$s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k.$$

დამტკიცება. თუ  $k \geq 1$ , მაშინ  $u_k = s_k - s_{k-1}$ , ხოლო  $u_0 = s_0$ . ამიტომ

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k v_k &= s_0 v_0 + (s_1 - s_0) v_1 + (s_2 - s_1) v_2 + \dots + (s_{n-1} - s_{n-2}) v_{n-1} \\ &+ (s_n - s_{n-1}) v_n = s_0 (v_0 - v_1) + s_1 (v_1 - v_2) + \dots + s_{n-1} (v_{n-1} - v_n) + \\ &+ s_n v_n = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_n v_n. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია. <sup>4</sup>

(9.1) ფორმულას ეწოდება ნ. აბელის (N. H. Abel) გარდაქმნა.

ლემა 2. ვთქვათ, მოცემულია რიცხვები  $u_0, u_1, \dots, u_n$ . თუ  $v_0 \geq v_1 \geq \dots \geq v_n \geq 0$  და  $l \leq s_k \leq L$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). სადაც  $s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$ , მაშინ

$$l v_0 \leq \sum_{k=0}^n u_k v_k \leq L v_0. \quad (9.2)$$

დამტკიცება. აბელის გარდაქმნის თანახმად

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (v_k - v_{k+1}) + s_n v_n.$$

აქედან

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k \geq l \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) + v_n \right] = l v_0,$$

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k \leq L \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) + v_n \right] = L v_0.$$

მაშასადამე, მართებულია (9.2) უტოლობები.

ეს ლემა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: თუ  $|s_k| \leq A$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) და  $v_0 \geq v_1 \geq \dots \geq v_n \geq 0$ , მაშინ

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k v_k \right| \leq A v_0. \quad (9.3)$$

ამ უტოლობას ეწოდება აბელის უტოლობა.

განსახილვრა 7. ჩვენ ვიტყვით, რომ მწკრივი  $(u_n)$  აკმაყოფილებს აბელის პირობას, თუ

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq A \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

თეორემა 20 (აბელი). თუ მწკრივი  $(u_n)$  აკმაყოფილებს აბელის პირობას და  $(v_n)_{n \geq 0}$  მიმდევრობა კლებადია და ნულისაკენ კრებადი, მაშინ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k v_k. \quad (9.4)$$

დამტკიცება. რადგანაც  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $m$ , რომ

$$v_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

მაგრამ

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m+p} u_k \right| + \left| \sum_{k=0}^m u_k \right| \leq 2A$$

$p$ -ს ყველა მთელი დადებითი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, აბელის უტოლობის თანახმად,

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k v_k \right| \leq 2A v_{m+1} < \varepsilon$$

$p$ -ს ყველა მთელი დადებითი მნიშვნელობისათვის. მაშასადამე, მე-2 თეორემის თანახმად (9.4) მწკრივი კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** ნიშანმონაცვლეობითი  $(\sigma_n)$  მწკრივის კრებადობისათვის საკმარისია, რომ  $(\sigma_n)_{n>0}$  მიმდევრობა იყოს კლებადი და  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .

მართლაც, ვთქვათ,  $u_n = (-1)^n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ). ცხადია, რომ  $(u_n)$  მწკრივი აკმაყოფილებს აბელის პირობას, ვინაიდან

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| \leq 1 \quad (k=0,1,\dots)$$

მაშასადამე, აბელის თეორემის თანახმად კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \sigma_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sigma_k.$$

ასე, რომ ლაიბნიცის თეორემა წარმოადგენს აბელის თეორემის შედეგს.

**მაგალითი.** დავამტკიცოთ, რომ თუ  $q_1 > q_2 > \dots > q_n > \dots$  და  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$ , მაშინ კრებადია მწკრივები

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kx \quad (x - \text{ნებისმიერი}), \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx \quad (x \neq 2k\pi).$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sigma_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $2 \sin \frac{x}{2}$  გამოსახულებანზე.

გვაქნება

$$\begin{aligned} \sigma_n \cdot 2 \sin \frac{x}{2} &= \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left( \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots + \\ &+ \left[ \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x. \end{aligned}$$

აქედან, თუ  $x \neq 2k\pi$ , გვაქვს

$$|\sigma_n| = \frac{\left| \cos \frac{x}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right|}{2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \ll \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

თუკი  $x = 2k\pi$ , მაშინ  $\sigma_n = 0$ . მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული,  $x$ -სათვის მწკრივი  $(\sin kx)$  აკმაყოფილებს აბელის პირობას. ამიტომ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kx.$$

კერძოდ, კრებადია მწკრივები

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}.$$

ახლა შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sigma'_n = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $2 \sin \frac{x}{2}$  გამოსახულებათა, გვექნება

$$\begin{aligned} \sigma'_n \cdot 2 \sin \frac{x}{2} &= \left( \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \left( \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right) + \dots + \\ &+ \left[ \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) x \right] = \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

აქედან, თუ  $x \neq 2k\pi$ , გვაქვს:

$$|\sigma'_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

მაშასადამე, ყოველი ფიქსირებული  $x$ -სათვის,  $x \neq 2k\pi$ , მწკრივი  $(\cos kx)$  აკმაყოფილებს აბელის პირობას. ამიტომ კრებადია მწკრივი

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx, \quad x \neq 2k\pi.$$

კერძოდ, კრებადია მწკრივები

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}, \quad x \neq 2k\pi.$$



§ 10. მწკრივის წევრთა გადანაცვლება

როგორც ცნობილია, სასრულ ჯამში წევრების ურთიერთგადანაცვლებით ჯამი უცვლელი რჩება. ბუნებრივად ისმის კითხვა: თუ კრებად მწკრივში მოვახდენთ წევრების ნებისმიერად გადანაცვლებას, მაშინ იქნება თუ არა ახალი მწკრივი კრებადი? ზოგიერთ კრებად მწკრივში შეიძლება წევრების ისე გადანაცვლება, რომ მიღებული მწკრივი განსვლადი იყოს ან იყოს კრებადი, მაგრამ მისი ჯამი განსხვავდებოდეს აღებულ მწკრივის ჯამისაგან. მოვიყვანოთ მაგალითი. განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (10.1)$$

ამ მწკრივის ჯამი აღვნიშნოთ  $s$ -ით. ცხადია,  $s \neq 0$ . (10.1) მწკრივში წევრების გადანაცვლებით შეიძლება მივიღოთ მწკრივი

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ & + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots \end{aligned} \quad (10.2)$$

მიღებული მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია  $\frac{s}{2}$ . მართლაც, მისი კერძო ჯამისათვის  $s'_{2n}$ , რომელიც შეიცავს  $3n$  წევრს, გვაქვს

$$\begin{aligned} s'_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \\ &+ \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} s_{2n}, \end{aligned}$$

სადაც  $s_{2n}$  არის (10.1) მწკრივის კერძო ჯამი. ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_{2n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \frac{s}{2}.$$

აქედან და (10.2)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s'_{2n} + \frac{1}{4n} \right) = \frac{s}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_{2n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( s'_{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2} \right) = \frac{s}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} s'_n = \frac{s}{2}.$$

ამრიგად, მწკრივის წევრთა გადანაცვლებით მივიღეთ კრებადი მწკრივი, რომლის ჯამი განსხვავდება ალღებული მწკრივის ჯამისაგან.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 21. პირობით კრებადი  $(u_n)$  მწკრივის დადებითი წევრებისაგან შედგენილი  $(u'_n)$  მწკრივი და უარყოფითი წევრებისაგან შედგენილი  $(u''_n)$  მწკრივი ორივე განშლადია.

დამტკიცება. აღვნიშნოთ  $s'_n$  და  $s''_n$  სიმბოლოებით შესაბამისად  $(u'_n)$  და  $(u''_n)$  მწკრივების იმ წევრთა ჯამები, რომლებიც შედიან  $(u_n)$  მწკრივის  $s_n$  კერძო ჯამის შემადგენლობაში. მაშინ

$$s_n = s'_n + s''_n. \quad (10.3)$$

რაკი  $(u_n)$  მწკრივი კრებადია,  $s_n$  მისწრაფვის გარკვეულ სასრული ზღვრისაკენ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ . ამიტომ (10.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $s'_n$  და  $s''_n$  ჯამებიდან ერთ-ერთს აქვს სასრული ზღვარი, როცა  $n \rightarrow \infty$ , მაშინ მეორესაც ექნება ზღვარი. მაგრამ ამ შემთხვევაში

$$s'_n - s''_n = |u_0| + |u_1| + \dots + |u_n|$$

გამოსახულება მისწრაფვის სასრული ზღვრისაკენ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$  და, მაშასადამე,  $(|u_n|)$  მწკრივი კრებადი ექნება, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად,  $s'_n$  და  $s''_n$  სიდიდეებს არ შეიძლება ჰქონდეს სასრული ზღვრები, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , ვ.ი.  $(u'_n)$  და  $(u''_n)$  მწკრივები განშლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 22 (რიმანი). თუ  $(u_n)$  მწკრივი პირობით კრებადია, მაშინ მწკრივის წევრთა სათანადოდ გადაწვლვებით შეიძლება მივიღოთ როგორც განშლადი, ისე ნებისმიერი  $s$  რიცხვისაკენ კრებადი მწკრივი.

დამტკიცება. განშლადი მწკრივის მისაღებად ( $u_n$ ) მწკრივის წევრები შემდგენიარად დავალაგოთ. ავილოთ ( $u_n$ ) მწკრივის იმდენი დადებითი წევრი, რომ მათი ჯამი ერთზე მეტი იყოს, რაც ყოველთვის შეიძლება 21-ე თეორემის ძალით, და ამ ჯამს მივუმატოთ ( $u_n$ ) მწკრივის პირველი უარყოფითი წევრი. მიღებულ ჯამს მივუმატოთ ( $u_n$ ) მწკრივის იმდენი შემდგომი დადებითი წევრი, რომ ახლად მიღებული კერძო ჯამი ორზე მეტი იყოს. ამ კერძო ჯამს მივუმატოთ ( $u_n$ ) მწკრივის მეორე უარყოფითი წევრი და მიღებულ ჯამს კი იმდენი შემდგომი დადებითი წევრი, რომ ახლად მიღებული კერძო ჯამი სამზე მეტი იყოს. 21-ე თეორემის თანახმად, ეს პროცესი უსაზღვროდ შეგვიძლია განვაგრძოთ, ამასთანავე ( $u_n$ ) მწკრივის ყოველი წევრი აღრე თუ გვიან იპოვის თავის ადგილს ახალ მწკრივში. აღვილი შესამჩნევია, რომ ახალი მწკრივის ჯამია  $+∞$ .

ანალოგიური მსჯელობით შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ ( $u_n$ ) მწკრივის წევრები ისე შეგვიძლია გადავსვათ, რომ მიღებული მწკრივის ჯამი იყოს  $-∞$ .

ახლა ( $u_n$ ) მწკრივის წევრები ისე გადავანაცვლოთ, რომ მივიღოთ წინასწარ დასახელებულ  $ε$  ჯამისაკენ კრებადი მწკრივი. აზრის გარკვეულობისათვის ვივალისხმოთ, რომ  $ε ≥ 0$ . ავილოთ ( $u_n$ ) მწკრივის დადებითი წევრები ბუნებრივი რიგით მანამდე, სანამ მათი ჯამი მეტი არ გახდება  $ε$  რიცხვზე. როგორც კი გადააჭრებებს ეს ჯამი  $ε$  რიცხვს, მას მივუმატოთ ( $u_n$ ) მწკრივის უარყოფითი წევრები მათი ბუნებრივი რიგით მანამდე, ვიდრე მთელი ჯამი  $ε$  რიცხვზე ნაკლები არ გახდება. ამის შემდეგ, კვლავ მივუმატოთ მიღებულ ჯამს ( $u_n$ ) მწკრივის დადებითი წევრები, რომლებიც არ გვჭონდა აღებული, მანამდე, ვიდრე ჯამი არ გახდება  $ε$ -ზე მეტი და ა. შ. ამგვარად, მიღებული ( $σ_n$ ) მწკრივის წევრები იქნება ( $u_n$ ) მწკრივის წევრები, მხოლოდ სხვა რიგით დალაგებული. ვთქვათ,

$$σ_n = σ_0 + σ_1 + \dots + σ_n \quad (n=0,1,\dots)$$

რაკი  $σ_n \rightarrow 0$ , როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $ε$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$|σ_n| < ε, \text{ როდესაც } n > N.$$

განვიხილოთ რომელიმე  $σ_n$  ჯამი, სადაც  $n > N$ . თუ  $ε$  მოთავსებულია  $σ_{n-1}$  და  $σ_n$  რიცხვებს შორის, მაშინ

$$|\sigma_n - s| \leq |\sigma_n - \sigma_{n-1}| = |v_n| < \varepsilon.$$

თუკი  $\sigma_n$  და  $\sigma_{n-1}$  რიცხვებიდან ან ორივე მეტია ან ორივე ნაკლებია  $s$ -ზე, მაშინ  $\sigma_n$  უფრო ახლოსაა  $s$ -თან, ვიდრე  $\sigma_{n-1}$ . ამრიგად,  $\sigma_n$  დაშორებულია  $s$ -დან  $\varepsilon$ -ზე ნაკლები მანძილით, ანდა  $\sigma_n$  უფრო ახლოსაა  $s$ -თან, ვიდრე  $\sigma_{n-1}$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ დაწყებული გარკვეული ნომრიდან,  $\sigma_n$  დაშორებულია  $s$ -დან  $\varepsilon$ -ზე ნაკლები მანძილით. მაშასადამე,  $\sigma_n \rightarrow s$ , როდესაც  $n \rightarrow \infty$ . რიმანის თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 23** (დირიხლე). აბსოლუტურად კრებად მწკრივი  $\sigma_n$  წევრთა გადანაცვლებით მწკრივის ჯამი არ იცვლება.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია და მისი ჯამია  $s$ , ხოლო წევრთა რაიმე გადანაცვლებით მიღებული მწკრივია  $(v_n)$ . დასამტკიცებელია, რომ ეს მწკრივიც კრებადია და მისი ჯამია  $s$ .

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $(u_n)$  მწკრივი დადებითია. ავიღოთ  $(v_n)$  მწკრივის პირველი  $n$  წევრის ჯამი  $\sigma_n$ . შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი  $m$ , რომ ყველა  $v_0, v_1, \dots, v_n$  რიცხვი იყოს  $u_0, u_1, \dots, u_m$  რიცხვებს შორის. ამიტომ

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n \leq u_0 + u_1 + \dots + u_m,$$

ე. ი.

$$\sigma_n \leq s_m < s,$$

სადაც  $s_m$  არის  $(u_n)$  მწკრივის  $m$ -ური კერძო ჯამი. ამრიგად, ყოველი  $n$ -თვის  $\sigma_n < s$  და რაკი  $\sigma_n$  არ კლებულობს, როდესაც  $n$  იზრდება, ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \leq s, \quad (10.4)$$

ე. ი.  $(v_n)$  მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია  $\sigma$ .

შემდეგ, თუ  $(v_n)$  მწკრივს ჩავთლით გამოსავალ მწკრივად, მაშინ  $(u_n)$  მწკრივი მიიღება  $(v_n)$  მწკრივიდან წევრთა გადანაცვლებით. ამიტომ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად გვექნება

$$s \leq \sigma. \quad (10.5)$$

(10.4) და (10.5) თანაფარდობებიდან ვლტებულობთ  $s = \sigma$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც  $(u_n)$  მწკრივი დადებითია.

ახლა ვთქვათ, რომ  $(u_n)$  მწკრივი დადებითი არ არის და აბსოლუტურად კრებადია. განვიხილოთ დადებითი მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \text{ და } \sum_{n=0}^{\infty} (|u_n| + u_n).$$

ეს მწკრივები კრებადია და, მაშასადამე, ზემოლამტკიცებულის თანახმად მწკრივები

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \text{ და } \sum_{n=0}^{\infty} (|v_n| + v_n)$$

კრებადია და აქვთ შესაბამისად იგივე ჯამები, რაც  $(|u_n|)$  და  $(|u_n| + u_n)$  მწკრივებს. აქედან გამომდინარეობს  $(v_n)$  მწკრივის კრებადობა და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n &= \sum_{n=0}^{\infty} (|v_n| + v_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (|u_n| + u_n) - \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \end{aligned}$$

თეორემა სავსებით დამტკიცებულია.

### § 11. მწკრივების გაშრავლება

როგორც ვიცით, ორი ჯამის გასამრავლებლად საჭიროა სამრავლის ყოველი წევრი გაგამრავლოთ მამრავლის ყოველ წევრზე და ყველა მიღებული ნამრავლი შეეკრიბოთ. ისმის კითხვა: აქვს თუ არა ადგილი დისტრიბუტიულობის ამ კანონს უსასრულო მწკრივებისათვისაც? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს ქვემოთ მოყვანილი თეორემა. უფრო შემოვიღოთ

გ ა ნ ს ა ზ ლ ე რ ა მ. ვთქვათ, მოცემულია ორი  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივი.  $(w_n)$  მწკრივის, სადაც

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

ეწოდება მოცემული ორი მწკრივის ნამრავლი კოშის აზრით, ან უბრალოდ ორი მწკრივის ნამრავლი.

თეორემა 24 (მერტენსი). თუ  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები კრებადია შესაბამისად  $\sigma$  და  $\sigma'$  რიცხვებისაკენ, ამასთანავე  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ  $(w_n)$  მწკრივი კრებადია  $\sigma\sigma'$  რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$U_n = \sum_{k=0}^n u_k, \quad V_n = \sum_{k=0}^n v_k, \quad W_n = \sum_{k=0}^n w_k.$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\begin{aligned} W_n &= u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \dots + \\ &+ (u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \dots + u_n v_0) = u_0(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \\ &+ u_1(v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + u_2(v_0 + v_1 + \dots + v_{n-2}) + \dots + \\ &+ u_{n-1}(v_0 + v_1) + u_n v_0 = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + u_2 V_{n-2} + \dots + \\ &+ u_{n-1} V_1 + u_n V_0 = \sum_{i=0}^n u_i V_{n-i}. \end{aligned}$$

რადგანაც

$$V_{n-i} = \sigma + (V_{n-i} - \sigma),$$

ამიტომ

$$W_n = \sigma U_n + \rho_n, \quad (11.1)$$

სადაც

$$\rho_n = \sum_{i=0}^n u_i (V_{n-i} - \sigma).$$

დაემტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0. \quad (11.2)$$

რაკი  $(v_n)$  მწკრივი კრებალია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N^*$ , რომ

$$|V_p - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \text{როდესაც } p > N^*, \quad (11.3)$$

სადაც

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

რადგანაც  $(u_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებალია, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu > N^*$ , რომ

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |u_i| < \frac{\varepsilon}{2M^*}, \quad (11.4)$$

სადაც

$$M^* = \sup_{0 < i < +\infty} |V_i - \sigma|.$$

ახლა ვთქვათ, რომ  $n > 2\nu$ . მაშინ (11.3) და (11.4) უტოლობათა თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} |\rho_n| &\leq \sum_{i=0}^{\nu} |u_i| \cdot |V_{n-i} - \sigma| + \sum_{i=\nu+1}^n |u_i| \cdot |V_{n-i} - \sigma| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{i=0}^{\nu} |u_i| + M^* \sum_{i=\nu+1}^{\infty} |u_i| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ამრიგად

$$|\rho_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > 2\nu,$$

ე. ი. მართებულია (11.2) ტოლობა. მაშასადამე, თუ (11.1) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = s\sigma,$$

ე. ი.  $(w_n)$  მწკრივი კრებადია და მისი ჯამია  $s\sigma$ . მერტენსის თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 25.** თუ  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ  $(w_n)$  მწკრივიც აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n^*, \tag{11.5}$$

სადაც

$$w_n^* = |u_0 v_n| + |u_1 v_{n-1}| + \dots + |u_n v_0|.$$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემის თანახმად (11.5) მწკრივი კრებადია. შემდეგ, რაკი  $|w_n| \leq w_n^*$  და (11.5) მწკრივი კრებადია, ამიტომ  $(w_n)$  მწკრივი აბსოლუტურად კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** თუ  $(u_n)$  და  $(v_n)$  მწკრივები პირობით კრებადია, მაშინ  $(w_n)$  მწკრივი შეიძლება განშლადი აღმოჩნდეს. მართლაც, განვიხილოთ კრებადი მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

შევადგინოთ ამ მწკრივის თავისთავზე ნამრავლი. ამ შემთხვევაში

$$w_n = (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right).$$

აქედან

$$|w_n| > \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \\ + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

მაშასადამე,  $(w_n)$  მწკრივის ზოგადი წევრი არ მიისწრაფვის ნული-საკენ და ამიტომ  $(w_n)$  მწკრივი განშლადია.

### კითხვები

1. რას ეწოდება რიცხვთა მწკრივი? რას ეწოდება მწკრივის ზოგადი წევრი?
2. რას ეწოდება მწკრივის ჯამი? მოიყვანეთ კრებადი და განშლადი მწკრივების მაგალითები.
3. რაში მდგომარეობს მწკრივის კრებადობის აუცილებელი პირობა?
4. რაში მდგომარეობს ორი დადებითი მწკრივის შედარების პირველი და მეორე ნიშანი?
5. რაში მდგომარეობს კოშისა და დალამბერის ნიშნები?
6. მოიყვანეთ მწკრივის ისეთი მაგალითი, რომლის კრებადობას დალამბერის ნიშანი ვერ არკვევს; კოშის ნიშანი კი არკვევს.
7. როგორ მწკრივს ეწოდება ნიშანმონაცვლეობითი? რაში მდგომარეობს ასეთი მწკრივის კრებადობის ლაიბნიცის ნიშანი? დაამტკიცეთ ეს ნიშანი.
8. როგორ მწკრივს ეწოდება აბსოლუტურად კრებადი? პირობით კრებადი? მოიყვანეთ აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის მაგალითი; პირობით კრებადი მწკრივის მაგალითი.



9. რაში მდგომარეობს რიმანის თეორემა? რაში მდგომარეობს დირიხლეს თეორემა?

10. რომელ უტოლობას ეწოდება აბელის უტოლობა? ჩამოაყალიბეთ მწკრივის კრებადობის აბელის ნიშანი.

11. ჩამოაყალიბეთ მერტენსის თეორემა. შეიძლება თუ არა ორი აბსოლუტურად კრებადი მწკრივის ნამრავლი არ იყოს აბსოლუტურად კრებადი?

12. მოიყვანეთ მაგალითი ორი კრებადი მწკრივისა, რომელთა ნამრავლი განშლადია.

**ხ ა გ ა რ ჯ ე შ ო**

ქვემოთ მოყვანილი ყოველი მწკრივისათვის იპოვეთ  $x$ -ური კერძო ჯამი, უშუალოდ დაამტკიცეთ მწკრივის კრებადობა და გამოთვალეთ მწკრივის ჯამი.

$$1. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

$$\text{პასუხი: } s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}; \quad s = \frac{1}{2}.$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$$

$$\text{პასუხი: } s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n+3}; \quad s = \frac{1}{3}.$$

$$3. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$\text{პასუხი: } s_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \quad s = \frac{1}{4}.$$

$$4. \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} + \dots$$

$$\text{პასუხი: } s_n = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}; \quad s = \frac{\pi}{4}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$$

$$\text{პასუხი: } 1 - \sqrt{2}.$$

11 ვლ. ჰელიძე, ე. წითლანაძე

წედარებათა ნიშნების გამოყენებით გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებალობა:

$$6. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} + \dots$$

პასუხი: კრებალია.

$$7. \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots$$

პასუხი: კრებალია.

$$8. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

პასუხი: განშლადია.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$$

პასუხი: კრებალია.

$$10. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \dots$$

პასუხი: განშლადია.

დალამბერის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებალობა:

11.  $\frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$ , სადაც  $a$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

$$12. \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \dots (4n-3)} + \dots$$

$$13. \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{3^n \cdot n!} + \dots$$

$$14. \frac{2 \cdot 1!}{1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n \cdot n!}{n^n} + \dots$$

$$15. \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{\pi}{4} + \dots + n^2 \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

$$16. \frac{2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} + \dots$$

კოშის ნიშნის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებალობა:

$$17. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n(n+1)} + \dots$$

$$18. \arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \dots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \dots$$

$$19. \frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

$$20. \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \dots + \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} + \dots$$

გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებალობა:

$$21. \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \dots + \frac{1}{n \ln^2 n} + \dots$$

პასუხი: კრებალია.

$$22. \frac{1}{3 \ln 3 \cdot \ln \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4 \cdot \ln \ln 4} + \dots + \frac{1}{n \ln n \cdot \ln \ln n} + \dots$$

პასუხი: განშლადია.

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

პასუხი: განშლადია.

$$24. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^2}$$

პასუხი: კრებალია.

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$$

პასუხი: კრებალია.

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$$

პასუხი: კრებალია.

27. დაამტკიცეთ, რომ დადებითი  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  მწკრივის კრებადობა-

ბიდან გამომდინარეობს  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{a_n}$  მწკრივის კრებადობა.

28. ვთქვათ, დადებითი მწკრივი  $(a_n)$  განშლადია. დაამტკიცეთ, რომ

a) მწკრივი  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$  განშლადია;

b) მწკრივი  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$  განშლადია,  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ ;

c) მწკრივი  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$  კრებადია.

29. ვთქვათ, დადებითი მწკრივი  $(a_n)$  კრებადია. დაამტკიცეთ, რომ მწკრივი  $\left(\frac{a_n}{r_n}\right)$  განშლადია,  $\left(\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}\right)$  მწკრივი კი კრებადია, სადაც

$$r_n = a_n + a_{n+1} + \dots$$

დაამტკიცეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და იპოვეთ მათი ჯამები:

$$30. 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots$$

პასუხი:  $\frac{2}{9}$ .

$$31. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

პასუხი:  $\ln 2$ .

გამოიკვლიეთ შემდეგი მწკრივების კრებადობა და აბსოლუტურად კრებადობა:

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

პასუხი: აბსოლუტურად კრებალია, როდესაც  $\alpha > 1$ ; პირობით კრებალია, როდესაც  $1 \geq \alpha > 0$ .

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha+1/n}}.$$

პასუხი: აბსოლუტურად კრებალია, როდესაც  $\alpha > 1$ ; პირობით კრებალია, როდესაც  $0 < \alpha \leq 1$ .

$$34. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[ 1 + \frac{(-1)^n}{n^2} \right].$$

პასუხი: აბსოლუტურად კრებალია, როდესაც  $\alpha > 1$ ; პირობით კრებალია, როდესაც  $1 \geq \alpha > \frac{1}{2}$ .

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

პასუხი: პირობით კრებალია, როდესაც  $x$  არ უდრის მთელ უარყოფით რიცხვს.

$$36. \text{ დაამტკიცეთ, რომ მწკრივები } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \text{ და } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

აბსოლუტურად კრებალი არაა  $]0, \pi[$  ინტერვალში.

$$37. \text{ იპოვეთ } \sum_{n=1}^{\infty} [2^{-n} + (-1)^n 3^{-n}] \text{ მწკრივის ჯამი.}$$

$$\text{პასუხი: } \frac{3}{4}.$$

38. დაამტკიცეთ, რომ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

$$39. \text{ დაამტკიცეთ, რომ კრებალი } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \text{ (} \alpha > 0 \text{) და}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}$  ( $\beta > 0$ ) მწკრივების ნამრავლი კრებალია, თუ  $\alpha + \beta > 1$

და განშლადია, როდესაც  $\alpha + \beta < 1$ .

40. მოცემულია ორი განშლადი მწკრივი

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{და} \quad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

დაამტკიცეთ, რომ ამ მწკრივების ნამრავლი არის აბსოლუტურად კრებალი მწკრივი.

**ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა**

მე-3 თავში ჩვენ განვსაზღვრეთ კერძო სახის ფუნქციის, სახელდობრ, ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი და დავამტკიცეთ ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ. ამ თავში დაწვრილებით განვიხილავთ ფუნქციის ზღვარს და მის თვისებებს. ფუნქციის ზღვრის ცნება, თეორემები ზღვართა შესახებ და მათი გამოყენებანი კარგად უნდა ავითვისოთ, რომ შესაძლებელი გახდეს დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვის საფუძვლიანი შესწავლა.

**§ 1. ფუნქციის ზღვრის ცნება**

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის გაჩნელეტილ მიდამოში, შემოვლოთ

განსაზღვრა 1.  $A$  რიცხვს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში, თუ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta. \quad (1.1)$$

სიმბოლურად ეს აღინიშნება ასე:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

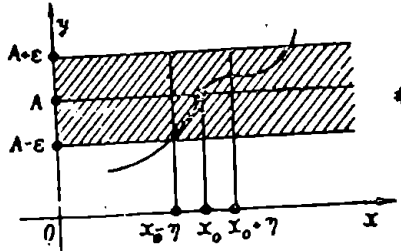
ან  $f(x) \rightarrow A$ , როცა  $x \rightarrow x_0$ .

შევნიშნავთ, რომ  $\eta$  რიცხვი დამოკიდებულია  $\varepsilon$ -ზე, ამასთანავე. საზოგადოდ, იგი მცირდება  $\varepsilon$ -თან ერთად.

გამოვარკვეით ფუნქციის ზღვრის ცნების გეომეტრიული შინაარსი. როგორც ვიცით,  $y = f(x)$  განტოლება დეკარტის  $Oxy$  კოორდინატთა სისტემის მიმართ გამოსახავს გარკვეულ წირს (ნახ. 24).

$Oy$  ღერძზე ავიღოთ  $A$  წერტილის  $|A - \varepsilon|$ ,  $A + \varepsilon|$  მიდამო, სადაც  $\varepsilon$  ნებისმიერი დადებითი რიცხვაა. იმ შემთხვევაში, როცა ადგილი აქვს (1.1) უტოლობას,  $Ox$  ღერძზე არსებობს  $x_0$  წერტილის

ასეთი  $|x_0 - \eta, x_0 + \eta|$  მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი  $x$  წერტილისათვის, რომელიც განსხვავებულია  $x_0$  წერტილისაგან.  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობა მოთავსდება  $A$  წერტილის  $|A - \varepsilon, A + \varepsilon|$  მიდამოში. მაშასადამე:  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც



ნახ. 24.

შეესაბამება  $|x_0 - \eta, x_0 + \eta|$  ინტერვალს, არ გამოვა დაშტრიხული ზოლის გარეთ (ნახ. 24), გარდა შესაძლებელია, გრაფიკის ერთი წერტილისა, რომელიც შეიძლება შეესაბამებოდეს  $x_0$  წერტილს.

**§ 2. ფუნქციის უწყვეტობა და წყვეტა**

ბუნების სხვადასხვა მოვლენის რაოდენობითი, კანონზომიერების შესწავლისას ხშირად გვხვდება პროცესები, რომლებშიც ფუნქციონალური დამოკიდებულებით დაკავშირებული სიდიდეები იცვლებიან ისე, რომ ერთის „საკმაოდ მცირე“ ცვლილებით მეორის „შემჩნევლად მცირედ“ შეცვლა ხდება. ყველასათვის ჩვეული წარმოდგენა ფუნქციის „თანდათანობით“ ცვლილების შესახებ ლოგიკურად დაკავშირებული რთულ მათემატიკურ ცნებასთან, სახელდობრ, ფუნქციის უწყვეტობის ცნებასთან, რომლის მკაცრი დასაბუთება მხოლოდ გასულ საუკუნეში მოხერხდა. პირველ წარმოდგენას უწყვეტობის შესახებ გვაძლევს მთელი რიგი ფიზიკური მოვლენებისა, მაგალითად, ლითონის ღეროს გახურებით მისი სიგრძის ზრდა, ღროის „მიმდინარეობის პროცესი“ და სხვ. მათემატიკური ანალიზი საშუალებას იძლევა უწყვეტობის ცნებას მივცეთ ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა.

**განსაზღვრა 2.**  $x_0$  წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი  $x_0$  წერტილში, თუ  $f(x_0)$  სასრულია და  $x_0$  წერტილში ფუნქციის ზღვარი და ფუნქციის მნიშვნელობა თანატოლია:



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

ქ. ი. ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , როდესაც  $|x - x_0| < \eta$ .

გავაშუქოთ გეომეტრიულად  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობა  $x_0$  წერტილში. როგორც ვიცით,  $y = f(x)$  განტოლება კოორდინატთა  $Oxy$  სისტემის მიმართ გამოსახავს გარკვეულ წირს. თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, მაშინ, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი  $\eta > 0$ , რომ  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის. რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$x_0 - \eta < x < x_0 + \eta,$$

მათებულია უტოლობები

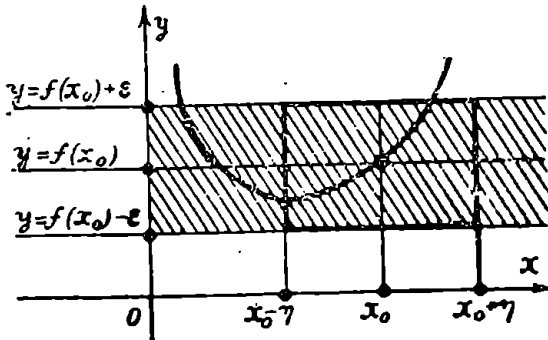
$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

განვიხილოთ  $Ox$  ღერძის პარალელური ორი წრფე, რომელთა განტოლებებია

$$y = f(x_0) - \varepsilon \text{ და } y = f(x_0) + \varepsilon.$$

მივიღებთ ზოლს, რომლის სიგანეა  $2\varepsilon$  (ნახ. 25).

რადგან  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, ამიტომ როგორც გინდა იყოს  $2\varepsilon$ -ე ნახაზზე დაშტრიხული ზოლი, ყოველთვის.



ნახ. 25.

მოიძებნება  $x_0$  წერტილის ისეთი  $|x_0 - \eta, x_0 + \eta|$  მიდამო, რომ  $y = f(x)$  წირის ყველა წერტილი, რომელთა აბსცისები აღებულია ამ მიდამოდან, მოთავსდება დაშტრიხულ ზოლში.

შენიშვნა. თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა რაიმე  $E$  სიმრავლეზე და  $x_0$  წარმოადგენს  $E$  სიმრავლის

იზოლირებულ წერტილს, ამასთანავე  $f(x_0)$  სასრულია, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას ჩვენ ვთვლით უწყვეტად  $x_0$  წერტილში.

ახლა ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $[a, b]$  სეგმენტზე, გარდა, შესაძლებელია, ამ სეგმენტის რაიმე  $x_0$  წერტილისა. შემოვიღოთ

განსაზღვრა 3.  $x_0$  წერტილის ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა)  $x_0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა;

ბ)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  არ არსებობს;

გ)  $x_0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრულია, არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,

მაგრამ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ; ე. ი. ფუნქციის ზღვარა არ უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას  $x_0$  წერტილში.

ფუნქციას, რომელსაც  $[a, b]$  სეგმენტზე აქვს წვეტის რაიმე  $x_0$  წერტილი, ამ სეგმენტზე წყვეტილი ფუნქცია ეწოდება.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ  $f(x) = ax + b$  ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ  $x = x_0$  წერტილში.

დამტკიცება. ცხადია, რომ

$$f(x_0) = ax_0 + b.$$

განვიხილოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და  $\eta$  რიცხვად ავიღოთ  $\frac{\varepsilon}{|a|}$ , ე. ი.  $\eta = \frac{\varepsilon}{|a|}$ . მაშინ ყოველი  $x$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს  $0 < |x - x_0| < \eta$ , გვექნება

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |(ax + b) - (ax_0 + b)| = \\ &= |a| \cdot |x - x_0| < |a| \cdot \eta = \varepsilon. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ე. ი.  $f(x)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში.

კერძოდ,  $f(x) = x$  ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ  $x = x_0$  წერტილში.

მაგალითი 2. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{როდესაც } a \leq x < x_0 \\ c, & \text{როდესაც } x_0 < x \leq b, \end{cases}$$

სადაც  $c$  რაიმე რიცხვია.  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c, \quad (2.1)$$

ე. ი. მუდმივის ზღვარი იგივე მუდმივია.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. მაშინ

$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon, \text{ როდესაც } x \neq x_0.$$

მაშასადამე, ყოველი დადებითი  $\eta$  რიცხვისათვის გვექნება

$$|f(x) - c| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი. მართებულია (2.1) ტოლობა.

თუ  $f(x_0) = c$ , მაშინ მოცემული ფუნქცია იქნება უწყვეტი  $x_0$  წერტილში.

მაგალითი 3. ვთქვათ, მოცემულია  $f(x) = \frac{1}{x}$  ფუნქცია. ეს

ფუნქცია განსაზღვრულია  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა  $x=0$  მნიშვნელობისა.  $x=0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. მაშასადამე,  $x=0$  არის მოცემული ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

**§ 8. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები. ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან და მარცხნიდან**

განსაზღვრა 4.  $A$  რიცხვს ეწოდება  $x_0$ , ხ<sup>1</sup> ინტერვალში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში, იუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < x - x_0 < \eta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A.$$

$f(x)$  ფუნქციის მარჯვენა ზღვარს  $x_0$  წერტილში აღნიშნავენ  $f(x_0+)$  სიმბოლოთი.

თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილშიც და  $f(x_0+) = f(x_0)$ , ე. ი. ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან უწყვეტი  $x_0$  წერტილში.

განსაზღვრა 5.  $A$  რიცხვს ეწოდება  $x_0$  ინტერვალში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის მარცხენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < x_0 - x < \eta.$$

სიმბოლურად ამ ფაქტს ასე ჩაწერთ

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

$f(x)$  ფუნქციის მარცხენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში აღინიშნება  $f(x_0 -)$  სიმბოლოთი.

თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილშიც და  $f(x_0 -) = f(x_0)$ , ე. ი. ფუნქციის მარცხენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში და ფუნქციის მნიშვნელობა ამ წერტილში თანატოლია, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება მარცხნიდან უწყვეტი  $x_0$  წერტილში.

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარს ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები ეწოდება.

ზღვრის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ არსებობს ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები  $x_0$  წერტილში და ეს ზღვრები  $f(x)$  ფუნქციის ზღვრის ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში არა აქვს რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი ან ორივე ცალმხრივი ზღვარი არსებობს, მაგრამ ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, მაშინ  $x_0$  წერტილში ფუნქციას არ ექნება ზღვარი.

**თეორემა 1.** თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი  $x_0$  წერტილში და ისინი თანატოლია, მაშინ ფუნქციას ექნება ზღვარი  $x_0$  წერტილში და იგი ცალმხრივი ზღვრების საერთო მნიშვნელობის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$f(x_0 +) = f(x_0 -) = A.$$

ამ ტოლობების თანახმად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < x - x_0 < \eta,$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < x_0 - x < \eta.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში  $A$  რიცხვია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის  $x_0$  წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $f(x)$  ფუნქციას ჰქონდეს თანატოლი მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი.

ანალოგიურად,  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობისათვის  $x_0$  წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს

$$f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0).$$

განსაზღვრა 6.  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი  $[a, b]$  ინტერვალში, თუ იგი უწყვეტია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი  $[a, b]$  სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია  $[a, b]$  ინტერვალში და, გარდა ამისა,  $a$  წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან,  $b$  წერტილში კი — მარცხნიდან.

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $[0, 2]$  სეგმენტზე განსაზღვრულია  $f(x)$  ფუნქცია ასე

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{როდესაც } 0 \leq x \leq 1, \\ x+1, & \text{როდესაც } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

დავამტკიცოთ, რომ  $f(1-) = 1$  და  $f(1+) = 2$ .

დამტკიცება. ვიგულისხმობთ, რომ  $0 < x < 1$ . მაშინ

$$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |x+1| \cdot |x-1| < 2|x-1| = 2(1-x).$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და  $\eta$  რიცხვად ავიღოთ

$\frac{\varepsilon}{2}$ , ე. ი.  $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ . მაშინ ყოველი  $x$ -ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს  $0 < 1 - x < \eta$ , გვაქნება -

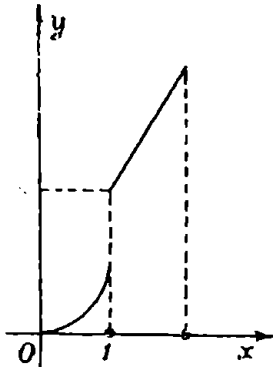
$$|f(x) - 1| < \varepsilon.$$

მაშასადამე,  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ .

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2$ . ამრიგად, მოცემული

მული  $f(x)$  ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები  $x=1$  წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (ნახ. 26). მაშასადამე,  $f(x)$  არაა უწყვეტი  $x=1$  წერტილში.

მაგალითი 2. ვთქვათ,  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , როდესაც  $x \neq 0$ , ხოლო  $x=0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი  $x=0$  წერტილში.



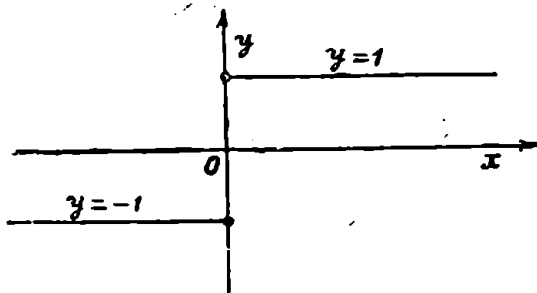
ნახ. 26.

ამოხსნა. თუ  $x > 0$ , მაშინ  $|x| = x$  და ამიტომ  $f(x) = 1$ . მაშასადამე,  $f(0+) = 1$ . თუკი  $x < 0$ , მაშინ  $f(x) = -1$  და ამიტომ  $f(0-) = -1$ .

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვარი  $x=0$  წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია (ნახ. 27). მაშასადამე, მოცემული ფუნქცია წყვეტილია  $x=0$  წერტილში.

თეორემა 2. თუ  $[a, b]$  ინტერვალში ზრდადი  $f(x)$  ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს  $f(b-)$ .

დამტკიცება. პირობის მიხედვით,  $f(x)$  ფუნქცია ზემოდან შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  ინტერვალში. ამიტომ ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ზემოდან შემო-



ნახ. 27.

საზღვრულია. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარი აღენიშნოთ  $A$  ასოთი. მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება  $[a, b]$  ინტერვალის ისეთი  $x_0$  წერტილი, რომ

$$f(x_0) > A - \varepsilon.$$

რაკი  $f(x)$  ფუნქცია ზრდადია მოცემულ ინტერვალში, ამიტომ  $f(x) \geq f(x_0)$ , როდესაც  $x > x_0$ . მაშასადამე.

$$f(x) > A - \varepsilon, \text{ როდესაც } x > x_0.$$

მეორე მხრივ  $a, b[$  ინტერვალის ნებისმიერი  $x$  წერტილისათვის  $f(x) \leq A$ . ამიტომ

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ როდესაც } x > x_0, x \in ]a, b[.$$

ე. ი.

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < b - x < \eta.$$

სადაც  $\eta = b - x_0$ . ეს კი იმას ნიშნავს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A,$$

ე. ი. არსებობს  $f(b-)$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 3. თუ  $]a, b[$  ინტერვალში კლებადი  $f(x)$

ფუნქცია ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ არსებობს  $f(a+)$ .

#### § 4. ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow \pm \infty$

აქამდე განვიხილავდით იმ შემთხვევას, როცა  $x_0$  იყო სასრული რიცხვი. მაგრამ ხშირად საჭირო ხდება განვიხილოთ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც  $x_0 = +\infty$  ან  $x_0 = -\infty$ .

განსაზღვრა 7. თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]a, +\infty[$  შუალედში, მაშინ ვიტყვი, რომ  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარია  $A$  რიცხვი, როდესაც  $x \rightarrow +\infty$ , თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $N$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } x > N.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

განსაზღვრა 8. თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]-\infty, a[$  შუალედში, მაშინ ვიტყვი, რომ  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარია  $A$  რიცხვი, როდესაც  $x \rightarrow -\infty$ , თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $N$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } x < -N.$$

ამ ფაქტს სიმბოლურად ასე ჩავწერთ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , როდესაც  $x \neq 0$ . ხოლო  $x=0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{და} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. ვთქვათ,  $N = \frac{1}{\varepsilon}$ . ცხადია, თუ  $x > N$ , მაშინ  $\frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon$ . ამრიგად, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $N$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - 0| = \frac{1}{x} < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad x > N.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

ანალოგიურად დავამტკიცებთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

მაგალითი 2. მოცემულია ფუნქცია  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ,  $x \neq 0$  დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $x > 0$ . მაშინ მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - 1 = \frac{1}{x(\sqrt{x^2+1}+x)}.$$

რადგანაც  $x > 0$ , ამიტომ

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{x}.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და განვიზიაროთ რიცხვი  $N = \frac{1}{\varepsilon}$ . მაშინ

$$|f(x) - 1| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad x > N.$$



მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

### § 5. უწყვეტი წვემების წერტილთა კლასიფიკაცია

ეთქვას,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის რაიმე გაჩხვლელელ მიდამოში. ვიგულისხმობთ, რომ არსებობს ამ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები  $f(x_0+)$  და  $f(x_0-)$ .

გავარჩიოთ სხვადასხვა შემთხვევა:

1°. არსებობს სასრული ზღვრები  $f(x_0+)$ ,  $f(x_0-)$  და ეს ზღვრები თანატოლია:

$$f(x_0+) = f(x_0-).$$

2°. არსებობს სასრული ზღვრები

$$f(x_0+) \text{ და } f(x_0-),$$

მაგრამ

$$f(x_0+) \neq f(x_0-).$$

3°. არ არსებობს ერთ-ერთი მინც  $f(x_0+)$  და  $f(x_0-)$  ზღვრები-დან, ასეთია, მაგალითად,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  ფუნქცია, რომლისთვისაც არ არსებობს  $f(0+)$  და  $f(0-)$ .

4°. მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებიდან ერთ-ერთი მაინც უსასრულოა.

განსაზღვრა 9.  $f(x)$  ფუნქციის წყვეტის  $x_0$  წერტილს ეწოდება პირველი გვარის წყვეტის წერტილი, თუ ადგილი აქვს 1° ან 2° შემთხვევას, ხოლო 3° ან 4° შემთხვევაში  $x_0$  მეორე გვარის წყვეტის წერტილია.

თუ  $x_0$  არის  $f(x)$  ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი და  $f(x_0+) = f(x_0-)$ , მაშინ  $x_0$  წერტილს ასაცილებელი წყვეტის წერტილი ეწოდება. ეს სახელწოდება საესებით გამართლებულია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში, თუ ფუნქციის მნიშვნელობად  $x_0$  წერტილში ავიღებთ ფუნქციის ზღვარს  $x_0$  წერტილში, მაშინ  $f(x)$  იქნება უწყვეტი მოცემულ წერტილში.

#### § 8. ფუნქციის ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის  $[a, b]$  მიდამოში. მართებულია შემდეგი

თეორემა 4.  $f(x)$  ფუნქციას ზღვრად აქვს  $A$  რიცხვი  $x_0$  წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $[a, b]$  ინტერვალის წერტილთა ყოველი  $(x_n)_{n=1}$  მიმდევრობისათვის ( $x_n \neq x_0, n=1, 2, \dots$ ), რომელიც კრებადია  $x_0$  წერტილისაკენ, ფუნქციის მნიშვნელობათა მიმდევრობა

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

კრებადია  $A$  რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

როდესაც

$$0 < |x - x_0| < \eta.$$

განვიხილოთ  $]a, b[$  ინტერვალის წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$  ( $x_n \neq x_0$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), რომელიც კრებადია  $x_0$ , წერტილისაკენ. ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$|x_n - x_0| < \eta,$$

როდესაც

$$n > N.$$

მაშასადამე,

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

როდესაც

$$n > N,$$

ე. ი.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

დავამტკიცოთ თეორემის პირობის საკმარისობა. ვთქვათ,  $]a, b[$  ინტერვალიდან აღებული წერტილთა ყოველი  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობისათვის ( $x_n \neq x_0$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), რომელიც კრებადია  $x_0$  წერტილისაკენ, რიცხვთა მიმდევრობა  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  კრებადია  $A$

რიცხვისაკენ. დასამტკიცებელია, რომ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში ზღვრად აქვს  $A$  რიცხვი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქციას არა აქვს ზღვრად  $A$  რიცხვი. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი  $\epsilon_0$  რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი  $\eta$  რიცხვისათვის მოიძებნება  $a, b$  ინტერვალის ისეთი  $x'$  წერტილი, რომ

$$|f(x') - A| \geq \epsilon_0 \quad \text{და} \quad 0 < |x' - x_0| < \eta.$$

კერძოდ, ყოველი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის არსებობს  $a, b$  ინტერვალის ისეთი  $x_n$  წერტილი, რომ

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

ხოლო

$$|f(x_n) - A| \geq \epsilon_0.$$

თუ  $n$ -ს მივიანიჭებთ მნიშვნელობებს  $1, 2, \dots$ , მივიღებთ  $a, b$  ინტერვალის წერტილთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობას, რომელიც კრებადია  $x_0$  წერტილისაკენ, ამასთანავე  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  მიმდევრობა კრებადი არ არის  $A$  რიცხვისაკენ. ეს კი პირობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში ზღვრად აქვს  $A$  რიცხვი და ამით პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როდესაც  $x_0 = \pm \infty$ . დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

ეს თეორემა მთელ რიგ შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ  $f(x)$  ფუნქციის ზღვრის არსებობა  $x_0$  წერტილში.

მაგალითი. ვთქვათ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , როდესაც  $x \neq 0$ , ხოლო  $x=0$  წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არაა. დავამტკიცოთ, რომ  $x=0$  წერტილში არ არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი.

დამტკიცება. განვიხილოთ წერტილთა  $(x_n)_{n>1}$  მიმდევრობა, სადაც  $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). ეს მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ. ამის გარდა,

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \cos n\pi = (-1)^n \quad (n=1, 2, \dots).$$

მაგრამ  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  მიმდევრობა კრებადი არაა, მაშასადამე, არ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , ეინაიდან ეს ზღვარი რომ არსებობდეს, მაშინ ზემოლამტკიცებული თეორემის თანახმად იარსებებდა  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

ახლა დავამტკიცოთ კოშის თეორემა ფუნქციის ზღვრის არსებობის შესახებ. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის რაიმე  $]a, b[$  მიდამოში, გარღა, შესაძლებელია, თვით  $x_0$  წერტილისა. მართებულია

თეორემა 5 (კოში).  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ზღვარი  $x_0$  წერტილში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი გაჩხვლექილი მიდამო  $U \subset ]a, b[$ , რომ ამ მიდამოს ორი ნებისმიერი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში ზღვრად აქვს  $A$  რიცხვი. მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი გაჩხვლექილი მიდამო  $U \subset ]a, b[$ , რომ

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ როდესაც } x \in U.$$

ავიღოთ  $U$  მიდამოს ორი ნებისმიერი წერტილი  $x'$  და  $x''$ , მაშინ

$$|f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობათა საფუძველზე გვაქვს:

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |f(x'') - A| + |f(x') - A| \ll \\ &\ll |f(x'') - A| + |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი გაჩხვლევითი მიდამო  $U \subset ]a, b[$ , რომ ამ მიდამოს ყოველი ორი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის მართებულია უტოლობა

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon. \quad (6.1)$$

განვიხილოთ  $]a, b[$  ინტერვალის წერტილთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $n=1, 2, \dots$ , რომელიც კრებადია  $x_0$  წერტილისაკენ. მაშინ მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ , რომ

$$x_n \in U, \text{ როდესაც } n > N.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (6.1) უტოლობას, გვექნება

$$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > N, n > N. \quad (6.2)$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი ნატურალური  $N$ , რომ მართებულია (6.2) უტოლობა. მაშასადამე,  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  არის ფუნდამენტალური მიმდევრობა და ამიტომ იგი კრებადია რაიმე  $A$  რიცხვისაკენ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (6.3)$$

ახლა ავიღოთ  $]a, b[$  ინტერვალიდან წერტილთა ნებისმიერი მიმდევრობა  $(x'_n)_{n>1}$  ( $x'_n \neq x_0$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), რომელიც კრებადია  $x_0$  წერტილისაკენ. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = A. \quad (6.4)$$

ავიღოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N_1 \geq N$ , რომ  $x'_n \in U$ , როდესაც  $n > N_1$ . მაშინ (6.1) უტოლობის თანახმად,

$$|f(x'_n) - f(x_n)| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N_1. \quad (6.5)$$

შემდეგ, თუ გავითვალისწინებთ (6.3) ტოლობას, შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N^* \geq N_1$ , რომ

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } n > N^*. \quad (6.6)$$

მაშასადამე, (6.5) და (6.6) უტოლობების თანახმად ყოველი  $n$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას  $n > N^*$ , გვექნება,

$$\begin{aligned} |f(x'_n) - A| &= |f(x'_n) - f(x_n) + f(x_n) - A| \leq \\ &\leq |f(x'_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

ამრიგად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისთვის არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N^*$ , რომ

$$|f(x_n) - A| < 2\varepsilon, \text{ როდესაც } n > N^*.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (6,4) ტოლობა. მაშასადამე, მე-4 თეორემის თანახმად

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

და ამით თეორემის პირობის საკმარისობა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 6.**  $|a, +\infty|$  შუალედში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ზღვარი, როდესაც  $x \rightarrow +\infty$  მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $N$ , რომ  $[a, +\infty|$  შუალედის ნებისმიერა ორი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობას.

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon, \text{ როდესაც } x' > N, x'' < N.$$

### § 7. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები

მათემატიკური ანალიზის ძირითად ცნებებს, როგორცაა წარმოებული და განსაზღვრული ინტეგრალი, საფუძვლად უდევს უსასრულოდ მცირის ცნება, რის გამოც საინტერესო და მნიშვნელოვანია უსასრულოდ მცირე სიდიდეთა შესწავლა.

განსაზღვრა 9.  $x_0$  წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე  $x_0$  წერტილში, თუ მისი ზღვარი ნულია:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

შენიშვნა.  $x_0$  შეიძლება იყოს  $+\infty$  ან  $-\infty$ . ითუ  $x_0 = +\infty$ , მაშინ ამ არასაკუთრივი წერტილის მიდამოა ყოველი  $[a, +\infty|$  შუალედი, ხოლო თუ  $x_0 = -\infty$ , მაშინ მისი მიდამოა ნებისმიერი  $] -\infty, a|$  შუალედი.

უნდა გვახსოვდეს, რომ ძალიან მცირე სიდიდე არ არის უსასრულოდ მცირე სიდიდე, ვინაიდან უსასრულოდ მცირე სიდიდე ცვლადი სიდიდეა, ძალიან მცირე სიდიდე კი მუდმივია.

თუ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , მაშინ  $f(x) - A$  სხვაობა უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში. ეს გამომდინარეობს ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრიდან.

პირიქით, თუ  $f(x) = A + \alpha(x)$ , სადაც  $\alpha(x)$  უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში, მაშინ  $A$  იქნება  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში.

განსაზღვრა 10.  $x_0$  წერტილის მიდამოში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე  $x_0$  წერტილში, თუ ყოველი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$f(x) > A, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ამ შემთხვევაში წერენ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი, რომელთა  $x$  აბსცისები აკმაყოფილებენ უტოლობებს  $0 < |x - x_0| < \eta$ , მდებარეობენ  $y = A$  წრფის ზემოთ.

განსაზღვრა 11.  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე  $x_0$  წერტილში, თუ ყოველი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$f(x) < -A, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

რაც სიმბოლურად ასე ჩაიწერება

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

გეომეტრიულად ეს იმას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის ყველა წერტილი, რომელთა  $x$  აბსცისები აკმაყოფილებენ  $0 < |x - x_0| < \eta$  უტოლობებს, მდებარეობენ  $y = -A$  წრფის ქვემოთ, სადაც  $A$  ნებისმიერი დადებითი რიცხვია.

განსაზღვრა 12.  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდს  $x_0$  წერტილში, თუ ყოველი დადებითი  $A$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$|f(x)| > A, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

მაგალითი, მოცემულია ფუნქცია  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ . დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty. \quad (7,1)$$



დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $A$  რიცხვი და ამოვხსნათ უტოლობა

$$\frac{1}{(x-1)^2} > A, \quad x \neq 1. \quad (7.2)$$

აქედან

$$(x-1)^2 < \frac{1}{A}, \quad x \neq 1,$$

საიდანაც

$$0 < |x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}. \quad (7.3)$$

ამრიგად, ყოველი  $x$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს (7.3) უტოლობას, მართებულია (7.2) უტოლობა. მაშასადამე, ადგილი აქვს (7.1) ტოლობას.

**თეორემა 7** უსასრულოდ დიდი სიდიდის შებრუნებული სიდიდე უსასრულოდ მცირეა.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f(x)$  უსასრულოდ დიდი სიდიდეა  $x_0$  წერტილში. დავამტკიცოთ, რომ  $\frac{1}{f(x)}$  უსასრულოდ მცირეა იმავე წერტილში. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. რაკი

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty,$$

ამიტომ მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულა.

**თეორემა 8.** დადებითი უსასრულოდ მცირის შებრუნებული სიდიდე დადებითი უსასრულოდ დიდია, უარყოფითი უსასრულოდ მცირის შებრუნებული სიდიდე კი უარყოფითი უსასრულოდ დიდია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f(x)$  დადებითი უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში. ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $A$  რიცხვი. რაკი  $f(x) > 0$  და

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

აფიტომ არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$0 < f(x) < \frac{1}{A}, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{1}{f(x)} > A, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

ანალოგიურად მტკიცდება თეორემის მეორე ნაწილი.

**§ 8. თეორემა 9. ზღვართა უსასრულო უწყვეტობის მახასიათებელი**

თეორემა 9. თუ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს ზღვრად დადებითი  $A$  რიცხვი, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები  $K$  და  $\eta$ , რომ

$$f(x) > K, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

დამტკიცება. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის თანახმად,  $\frac{A}{2}$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \frac{A}{2}, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta$$

ანუ

$$A - \frac{A}{2} < f(x) < A + \frac{A}{2}, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქედან

$$f(x) > \frac{A}{2} = K > 0, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 10.** თუ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , მაშინ არსებობს ისეთი

დადებითი რიცხვები  $K$  და  $\eta$ , რომ

$$f(x) < -K, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მე-9 და მე-10 თეორემებიდან გამომდინარეობს შემდეგი

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში და  $f(x_0) \neq 0$ , მაშინ  $x_0$  წერტილის გარკვეულ მიდამოში  $f(x)$  ფუნქციას ექნება  $f(x_0)$  რიცხვის ნიშანი.

**თეორემა 11.** თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ზღვარი  $x_0$  წერტილში და  $f(x) \geq 0$ ,  $x \neq x_0$ , მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0. \quad (8.1)$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0.$$

მაშინ, მე-10 თეორემის თანახმად, არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ  $f(x) < 0$ , როდესაც  $0 < |x - x_0| < \eta$ . ეს კი ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. მაშასადამე, მართებულია (8.1) უტოლობა.

**თეორემა 12.** ვთქვათ,  $x_0$  წერტილის მიდამოში განსაზღვრულია  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  და  $\psi(x)$  ფუნქციები და

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A. \quad (8.2)$$

თუ  $x_0$  წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (8.3)$$

მაშინ არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი და იგი  $A$  რიცხვის ტოლია.

დამტკიცება. (8.2) ტოლობების თანახმად, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < \psi(x) < A + \varepsilon,$$

როდესაც  $0 < |x - x_0| < \eta$ . მაშასადამე (8.3) უტოლობების თანახმად

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარია  $A$  რიცხვი  $x_0$  წერტილში.

**შედეგი.** თუ  $\alpha(x)$  და  $\beta(x)$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია და ადგილი აქვს უტოლობებს

$$\alpha(x) \leq \gamma(x) \leq \beta(x),$$

მაშინ  $\gamma(x)$  იქნება უსასრულოდ მცირე სიდიდე.

**თეორემა 13.** თუ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|. \quad (8.4)$$

**დამტკიცება.** თეორემის პირობის თანახმად, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $\eta$ , რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

შემდეგ, რაკი

$$||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A|,$$

ამიტომ

$$||f(x)| - |A|| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ე. ი. მართებულია (8.4) ტოლობა.

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, მაშინ  $|f(x)|$  ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

**შენიშვნა.** თუ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ , აქედან საზოგადოდ არ

გამომდინარეობს  $f(x)$  ფუნქციის ზღვრის არსებობა  $x_0$  წერტილში. მართლაც, ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ -1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

ამ ფუნქციას არც ერთ წერტილში ზღვარი არა აქვს. მაგრამ ნებისმიერ  $x_0$  წერტილში  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ .

**თეორემა 14.** თუ არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის სასრული ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ  $f(x)$  შემოსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის რაიმე გაჩხვლევტილ მიდამოში.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

სადაც  $A$  სასრული რიცხვია, მაშინ  $\varepsilon=1$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < 1, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$A - 1 < f(x) < A + 1, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 15.** თუ  $\alpha(x)$  უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში, ხოლო  $f(x)$  ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის გაჩხვლევით მიდამოში, მაშინ  $\alpha(x)f(x)$  ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის გაჩხვლევით  $D(x_0, \eta')$  მიდამოში. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი  $M$  რიცხვი, რომ

$$|f(x)| < M, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta'.$$

შემდეგ, რაკი  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $\eta \leq \eta'$ , რომ

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მაშასადამე, როდესაც  $0 < |x - x_0| < \eta$ , გვექნება

$$|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

ე. ი.  $\alpha(x)f(x)$  ნამრავლი უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში. თეორემა დატკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $\alpha(x)$  და  $\beta(x)$  უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ  $\alpha(x)\beta(x)$  ნამრავლიც უსასრულოდ მცირეა.

**თეორემა 16.** თუ არსებობს  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების ზღვრები  $x_0$  წერტილში, მაშინ იარსებებს  $f(x) + \varphi(x)$  და  $f(x) - \varphi(x)$  ფუნქციების ზღვრები და მართებულაა ტოლობები:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x), \quad (8.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x), \quad (8.6)$$

ე. ი. ალგებრული ჯამის ზღვარი შესაკრებთა ზღვრების ალგებრული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B.$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ აღვნიშნოთ უტოლობებს

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\varphi(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

ვიგულისხმობთ, რომ შესრულებულია უტოლობა  $0 < |x - x_0| < \eta$ , მაშინ

$$\begin{aligned} |[f(x) + \varphi(x)] - (A + B)| &= |[f(x) - A] + [\varphi(x) - B]| \leq \\ &\leq |f(x) - A| + |\varphi(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

მაშასადამე, მართებულია (8.5) ტოლობა. (8.6) ტოლობის მართებულობა მტკიცდება ანალოგიურად.

ზემოდამტკიცებული თეორემა ძალაში რჩება, როცა შესაქრებთა რიცხვი ნებისმიერია, მაგრამ სასრული. თუ შესაქრებთა რიცხვი უსასრულოა, მაშინ თეორემა საზოგადოდ მართებული არაა.

შენიშვნა. შეიძლება არსებობდეს  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + \varphi(x)]$ , მაგრამ არ არსებობდეს  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  და  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ . მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad \text{როდესაც } x \neq 0 \quad \text{და} \quad f(0) = 0, \quad \text{ხოლო} \quad \varphi(x) = -f(x).$$

როგორც ზემოთ იყო ნაჩვენები,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  არ არსებობს და, მაშასადამე,  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$  აგრეთვე არ არსებობს. მაგრამ

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + \varphi(x)] = 0.$$

**შედეგი 1.** თუ მოცემულია სასრული რიცხვი უსასრულოდ მცირეებისა  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x)$ , მაშინ მათი ჯამი  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \dots + \alpha_n(x)$  აგრეთვე უსასრულოდ მცირეა.

**შედეგი 2.** თუ  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, მაშინ მათი ალგებრული ჯამი აგრეთვე უწყვეტია იმავე წერტილში.

**თეორემა 17.** თუ არსებობს  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების ზღვრები  $x_0$  წერტილში და

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x),$$

მაშინ არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$f(x) > \varphi(x), \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \varphi(x)] > 0.$$

მაშასადამე, მე-9 თეორემის მიხედვით არსებობს ისეთი  $\eta > 0$ , რომ

$$f(x) - \varphi(x) > 0, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta,$$

ე. ი.

$$f(x) > \varphi(x), \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 18.** თუ არსებობს  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების ზღვრები  $x_0$  წერტილში და  $f(x) \leq \varphi(x)$ ,  $x \neq x_0$ , მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x). \quad (8.7)$$

დამტკიცება. პირობის მიხედვით,

$$\varphi(x) - f(x) \geq 0, \quad x \neq x_0.$$

მაშასადამე, მე-11 თეორემის თანახმად

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x) - f(x)] \geq 0.$$

აქედან მიიღება (7.7) უტოლობა.

**თეორემა 19.** თუ  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციებს აქვთ ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ არსებობს  $f(x)\varphi(x)$  ნამრავლის ზღვარი და

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x), \quad (8.8)$$

ე. ი. ნამრავლის ზღვარი ზღვართა ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B.$$

აქედან

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad \varphi(x) = B + \beta(x),$$

სადაც  $\alpha(x)$  და  $\beta(x)$  უსასრულოდ მცირეებია  $x_0$  წერტილში. შემდეგ:

$$f(x)\varphi(x) = [A + \alpha(x)][B + \beta(x)] = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x).$$

მაგრამ მე-15 თეორემისა და მე-16 თეორემის 1-ლი შედეგის ძალით

$$\omega(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში. ამრიგად,

$$f(x)\varphi(x) - AB = \omega(x)$$

უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში, რის გამოც

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\varphi(x)] = AB,$$

ე. ი. მართებულია (8.8) ტოლობა.

ზემოაღმტკიცებული თეორემა მართებულია მაშინაც, როდესაც თანამამრავლთა რიცხვი ნებისმიერია, მაგრამ სასრულია.

შენიშვნა. შეიძლება არსებობდეს  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)\varphi(x)]$ , მაგრამ

არ არსებობდეს  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  და  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ .

**შედეგი 1.** თუ  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, მაშინ მათი ნამრავლი აგრეთვე უწყვეტია  $x_0$  წერტილში.

**შედეგი 2.** თუ არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ ყოველი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის არსებობს  $[f(x)]^n$  ფუნქციის ზღვარი და

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n,$$

ე. ი. ხარისხის ზღვარი ზღვრის ხარისხის ტოლია.

მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \overbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdots \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}^{n\text{-ჯერ}} = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^n.$$

**შედეგი 3.** თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ ყოველი ნამდვილი  $A$  რიცხვისათვის არსებობს  $Af(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში და მართებულია ტოლობა



$$\lim_{x \rightarrow x_0} [Af(x)] = A \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ.

თეორემა 20. ყოველი მრავალწევრი

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

უწყვეტია ნებისმიერ  $x_0$  წერტილში,

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_1x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{n-1}x) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n) = \\ &= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_0 + a_n = P(x_0), \end{aligned}$$

ე. ი.  $P(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას  $x_0$  წერტილში. ამიტომ  $P(x)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 21. თუ არსებობს  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების ზღვრები  $x_0$  წერტილში და  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$ , მაშინ არსებობს

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  წილადის ზღვარი და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}, \quad (8.9)$$

ე. ი. წილადის ზღვარი მრიცხველისა და მნიშვნელის ზღვრების ფარდობის ტოლია, თუ მნიშვნელის ზღვარი ნული არ არის.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \quad (8.10)$$

ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A.$$

13 ვლ. პელიძე, ე. წითლანაძე

პირობის თანახმად,  $A \neq 0$ . ამიტომ მე-9 თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვები  $K$  და  $\eta'$ , რომ

$$|\varphi(x)| > K, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta'.$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი. მაშინ მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $\eta \leq \eta'$ , რომ

$$|A - \varphi(x)| < \varepsilon K |A|, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

მაშასადამე, თუ  $x$  აკმაყოფილებს უტოლობებს  $0 < |x - x_0| < \eta$ , გვექნება

$$\left| \frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|A - \varphi(x)|}{|A| \cdot |\varphi(x)|} < \frac{\varepsilon K \cdot |A|}{|A| \cdot K} = \varepsilon,$$

ე. ი. მართებულია (8.10) ტოლობა.

შემდეგ ცხადია, რომ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\varphi(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $x_0$  წერტილში და  $\varphi(x_0) \neq 0$ , მაშინ  $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$  ფარდობა აგრეთვე უწყვეტი ფუნქციაა  $x_0$  წერტილში.

მართლაც,  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციების უწყვეტობის გამო

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)},$$

ე. ი. ფუნქციის ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას.

**თეორემა 22.** თუ  $x_0$  წერტილის მიდამოში  $f(x) \geq 0$  და არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n$ , სადაც  $n$  რაიმე ნატურალური რიცხვი, მაშინ არსებობს აგრეთვე  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = A \quad (8.11)$$

და დაეუშვათ, რომ არ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . მაშინ იარსებებს  $x_0$  წერტილისაკენ კრებადი ისეთი ორი მიმდევრობა  $(x'_k)_{k \geq 1}$  და  $(x''_k)_{k \geq 1}$ , რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_k) = L_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_k) = L_2,$$

სადაც  $L_1$  და  $L_2$  ერთმანეთისაგან განსხვავებული რიცხვებია. (8.11) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_k)]^n = L_1^n = A,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x''_k)]^n = L_2^n = A.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $L_1 = L_2$ . მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება არაა სწორი.

**თეორემა 23.** თუ  $x_0$  წერტილის რაიმე მიდამოში  $f(x) \geq 0$  და არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში, მაშინ ყოველი ნატურალური  $n$  რიცხვისთვის იარსებებს  $\sqrt[n]{f(x)}$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში და მართებულა ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}. \quad (8.12)$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x).$$

აქედან

$$f(x) = [\varphi(x)]^n.$$

პირობის მიხედვით არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi(x)]^n$  და, ამის გარდა,  $x_0$  წერტილის მიდამოში  $\varphi(x) \geq 0$ . ამიტომ 22-ე თეორემის თანახმად, არსებობს  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ . მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \right]^n,$$

საიდანაც

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)},$$

ე. ი. მართებულია (8.12) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში  $f(x) \geq 0$ , მაშინ

$\sqrt[n]{f(x)}$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში.

შენიშვნა. თუ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$  და  $n$  კენტი რიცხვია, მაშინაც

მართებულია (8.12) ტოლობა.

#### § 8. უზღვიერთი მახალითი ზღვრების მოქმედება

$f(x)$  ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრისას ფუნქციის მნიშვნელობის შესახებ  $x_0$  წერტილში არაფერი იყო ნათქვამი. როგორც ვიცით,  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში ზღვრად აქვს  $A$  რიცხვი, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ როდესაც } 0 < |x - x_0| < \eta.$$

აქ მოთხოვნა  $x \neq x_0$  არსებითია. ამ მოთხოვნის გარეშე შეუძლებელია, საზოგადოდ, ფუნქციის ზღვრის მოძებნა. მართლაც, ვთქვათ, საძიებელია

$$\varphi(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

ფუნქციის ზღვარი  $x=3$  წერტილში. თუ ვიგულისხმებთ, რომ  $x$  არგუმენტი მიიღებს  $x=3$  მნიშვნელობას, მაშინ ამოცანის ამოხსნა

შეუძლებელია, ვინაიდან  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი

ნული ხდება. თუ  $x \neq 3$ , მაშინ წილადი შეგვიძლია შევკვეთოთ  $x - 3$  გამოსახულებაზე და ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\varphi(x) = x + 3.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 6.$$

ამრიგად,  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის ზღვრის გამოთვლისას მხედველობაში არ უნდა მივიღოთ ფუნქციის მნიშვნელობა  $x_0$  წერტილში.

ტილში. როგორც ზემოთ დავინახეთ,  $f(x)$  ფუნქციას შეიძლება კქონდეს ზღვარი  $x_0$  წერტილში იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც იგი განსაზღვრული არ არის  $x_0$  წერტილში.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ

$$f(x) = \frac{x^3 + a^3}{x + a}$$

ფუნქციის ზღვარი  $x = -a$  წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{(x+a)(x^2 - ax + a^2)}{x+a} = \lim_{x \rightarrow -a} (x^2 - ax + a^2) = 3a^2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$  ფუნქციის ზღვარი  $x = 1$  წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ , სადაც  $n$  ნატურალური რიცხვია, ხოლო  $a \neq 0$ .

ამოხსნა. თუ ვისარგებლებთ ბეზუს თეორემით, გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}) = na^{n-1}.$$

კერძოდ, თუ  $a = 1$ , გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[q]{x^p} - 1}{\sqrt[r]{x} - 1}$ , სადაც  $p, q, r, s$

ნატურალური რიცხვებია.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $y = \sqrt[sq]{x}$ , გვექნება

$$x=y^p, \sqrt[p]{x^p-1}=y^{ps}-1, \sqrt[r]{x^r-1}=y^{qr}-1.$$

ცხადია, რომ როდესაც  $x \rightarrow 1$ , მაშინ  $y \rightarrow 1$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[p]{x^p-1}}{\sqrt[r]{x^r-1}} &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{ps}-1}{y^{qr}-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \left( \frac{y^{ps}-1}{y-1} : \frac{y^{qr}-1}{y-1} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{ps}-1}{y-1} : \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{qr}-1}{y-1} = \frac{ps}{qr}. \end{aligned}$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$ , სადაც  $k$  ნატურალური რიცხვია.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\sqrt[k]{1+x} = y$ , გვექნება  
 $x = y^k - 1$ .

აღვიღო შესამჩნევია, რომ როდესაც  $x \rightarrow 0$ ; მაშინ  $y \rightarrow 1$  და, მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1}{y^k-1} = \frac{1}{k}.$$

### § 10. ბაზანახლიანი ფუნქცია

$a^x$  ფუნქციას, სადაც  $a$  დადებითი რიცხვია, მანვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა ]-∞, +∞[ შუალედი.

$a^x$  ფუნქცია არსებითად ზრდადი თავის განსაზღვრის არეში, როდესაც  $a > 1$ , ხოლო არსებითად კლებადია, როდესაც  $a < 1$ . მართლაც, თუ  $a > 1$ , მაშინ უოველი  $x_1$  და  $x_2$  რიცხვისათვის, სადაც  $x_1 < x_2$ , გვექნება  $a^{x_1} < a^{x_2}$ , ხოლო თუ  $a < 1$ , მაშინ  $a^{x_1} > a^{x_2}$ .

ლემა. თუ  $a$  დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1. \quad (10.1)$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნულისაკენ კრებადი ნებისმიერი მიმ-

დევრობა  $(x_n)_{n>1}$ : და ეოგულსხმოთ, რომ  $a > 1$ . როგორც ვიციოთ,

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}$$

და ამიტომ ნებისმიერი დაღებოთი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ ადგილი ექნება უტოლობას

$$a^{\frac{1}{\nu}} - 1 < \varepsilon.$$

შემდეგ, რაკი  $(x_n)_{n>1}$  მიმღევრობა კრებოდა ნულისაკენ, ამიტომ არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი  $N$ . რომ

$$|x_n| < \frac{1}{\nu}, \text{ როღესაც } n > N.$$

მაშასადამე, როღესაც  $n > N$ , გვექნება

$$a^{|x_n|} - 1 < \varepsilon.$$

მაგრამ

$$|a^{x_n} - 1| \leq a^{|x_n|} - 1. \quad (10.2)$$

მართლაც, თუ  $x_n \geq 0$ , მაშინ (10.2) დამოკიდებულემა ცხადია. თუკი  $x_n < 0$ , მაშინ

$$\begin{aligned} |a^{x_n} - 1| &= \left| \frac{1}{a^{-x_n}} - 1 \right| = \frac{|1 - a^{-x_n}|}{a^{-x_n}} < |1 - a^{-x_n}| = \\ &= a^{-x_n} - 1 = a^{|x_n|} - 1. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$|a^{x_n} - 1| < \varepsilon, \text{ როღესაც } n > N,$$

ე. ი. მართებულია (10.1) ტოლობა, როღესაც  $a > 1$ . თუ  $a = 1$ , ლემა ცხადია.

ახლა ვთქვათ,  $a < 1$ . მაშინ

$$a^x = \frac{1}{b^x}, \text{ სადაც } b = \frac{1}{a} > 1.$$

მაგრამ ზემოდამტკიცებულის თანახმად  $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$ . ამიტომ (9.1) ტოლობა მართებულია მაშინაც, როცა  $a < 1$ . ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 24. მაჩვენებლიანი  $a^x$  ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი  $\xi$  რიცხვი და განვიხილოთ  $\xi$  რიცხვისაკენ კრებადი ნებისმიერი მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ . გვაქვს

$$a^{x_n} = a^\xi \cdot a^{x_n - \xi}.$$

ლემის თანახმად  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n - \xi} = 1$ . ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^\xi.$$

მაშასადამე,  $a^x$  ფუნქცია უწყვეტია  $\xi$  წერტილში. თეორემა დამტკიცებულა.

გამოეთვალათ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x \text{ და } \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x, \quad a > 0.$$

1. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $a < 1$ . რადგანაც  $a^x$  ფუნქცია არსებითად კლებადია და ყოველი  $x$ -სათვის  $a^x > 0$ , ამიტომ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$ . ეს ზღვარი აღნიშნოთ  $l$  ასოთი. რაკი

$$a^{x+1} = a^x \cdot a,$$

ამიტომ, თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $x \rightarrow +\infty$ , მივიღებთ

$$l = l \cdot a.$$

აქედან  $l(1-a) = 0$ . მაგრამ  $1-a \neq 0$ , ამიტომ  $l = 0$ , ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ როდესაც } a < 1.$$

ახლა ვთქვათ,  $a > 1$ . მაშინ

$$a^x = \frac{1}{b^x}, \text{ სადაც } b = \frac{1}{a} < 1.$$

მაგრამ ზემოლამტკიცებულის თანახმად  $\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0$ . ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ როდესაც } a > 1.$$

2. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $x = -t$ , გვექნება

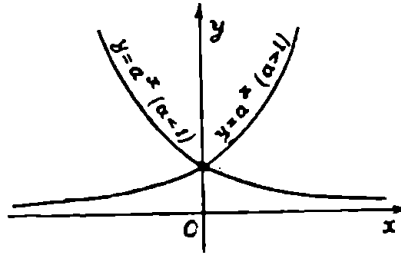
$$a^x = \frac{1}{a^t}$$



და, მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^t} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } a > 1, \\ +\infty, & \text{თუ } a < 1. \end{cases}$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ  $a^x$  ფუნქციის გრაფიკს აქვს 28-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 28.

§ 11. რთული ფუნქციის უწყვეტობა

**თეორემა 25.** თუ  $y=f(u)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, \beta]$  სეგმენტზე,  $u=\varphi(x)$  ფუნქცია კი  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $a \leq \varphi(x) \leq \beta$ , მაშინ რთული ფუნქცია  $y=f[\varphi(x)] = F(x)$  უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

**დამტკიცება.** ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $x_0$  წერტილი და ვთქვათ,  $\varphi(x_0) = u_0$ . რაკი  $\varphi(x)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0.$$

მეორე მხრივ,  $f(u)$  ფუნქციის უწყვეტობის გამო  $u_0$  წერტილში, გვაქნება

$$\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0) = f[\varphi(x_0)] = F(x_0).$$

ამრიგად, რთული  $F(x) = f[\varphi(x)]$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან შეიძ-

ლება იყოს უწყვეტი ფუნქცია. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,  $\psi(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{როდესაც } 0 \leq x < 1. \\ 0, & \text{როდესაც } x = 1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია განსაზღვრულია  $[0, 1]$  სეგმენტზე და წყვეტილია მხოლოდ  $x=1$  წერტილში. ახლა ავიღოთ  $[0, 1]$  სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია  $\varphi(x) = x^2 - x$ . ცხადია, რომ  $\varphi(0) = \varphi(1)$ .

განვიხილოთ ფუნქცია  $f(x) = \varphi[\psi(x)]$ , ე. ი. უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან. რადგანაც  $\psi(1-) = 1$ ,  $f(1) = \varphi(0)$ , ამიტომ

$$f(1-) = \varphi[\lim_{x \rightarrow 1-} \psi(x)] = \varphi[\psi(1-)] = \varphi(1) = \varphi(0) = f(1).$$

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x=1$  წერტილში. შემდეგ, რაკი  $\varphi(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, 1[$  შუალედში, ამიტომ  $f(x)$  იქნება უწყვეტი იმავე შუალედში. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, 1]$  სეგმენტზე, ე. ი. უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან შეიძლება უწყვეტი იყოს.

## § 12. ვაიერშტრასის თეორემა

**თეორემა 26.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

**დამტკიცება.** დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული  $[a, b]$  სეგმენტზე. მაშინ რიცხვი 1-სათვის მოიძებნება  $[a, b]$  სეგმენტში ისეთი  $x_1$  წერტილი, რომ

$$|f(x_1)| > 1.$$

ასევე, რიცხვი 2-სათვის არსებობს  $[a, b]$  სეგმენტში ისეთი  $x_2$  წერტილი, რომ

$$|f(x_2)| > 2$$

და ა. შ., რიცხვი  $n$ -სათვის მოიძებნება  $[a, b]$  სეგმენტში ისეთი  $x_n$  წერტილი, რომ

$$|f(x_n)| > n.$$

ეს პროცესი შეგვიძლია განვაგრძოთ უსაზღვროდ. მივიღებთ რიცხვთა მიმდევრობას  $(x_n)_{n \geq 1}$ . ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად ამ მიმ-

დევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ , რომელიც კრებალია  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე  $\xi$  წერტილისაკენ:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi.$$

რაკი  $a < x_{n_k} < b$  ( $k=1, 2, \dots$ ), ამიტომ

$$a \leq \xi \leq b.$$

შემდეგ,  $\xi$  წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის გამო, გვექნება

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (12.1)$$

მეორე მხრივ  $|f(x_{n_k})| > n_k$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$$

და, მაშასადამე, (12.1) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$|f(\xi)| = +\infty,$$

რაც შეუძლებელია. ამიტომ  $f(x)$  ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $[a, b]$  სეგმენტზე. ვაიერშტრასის თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას ეწოდება ვაიერშტრასის პირველი თეორემა.

თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში, იგი შეიძლება არ იყოს შემოსაზღვრული. მართლაც, ვთქვათ,  $]0, 1[$  ინტერვალში მოცემულია  $f(x) = \frac{1}{x}$  ფუნქცია. ეს ფუნქცია უწყვეტია  $]0, 1[$  ინტერ-

ვალში, მაგრამ ამ ინტერვალში იგი შემოუსაზღვრელია.

ახლა ვთქვათ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $X$  შუალედში (ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევრადსეგმენტი). აღვნიშნოთ  $E$ -თი  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე. ამ სიმრავლის ზედა საზღვარს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ზედა საზღვარი  $X$  შუალედზე და აღინიშნება  $\sup_{x \in X} f(x)$ , ხოლო  $E$  სიმ-

რავლის ქვედა საზღვარს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ქვედა საზღვარი  $X$ -ზე და აღინიშნება  $\inf_{x \in X} f(x)$ .

თუ  $f(x)$  ფუნქცია არ არის ზემოდან შემოსაზღვრული  $X$  შუალედზე, მაშინ  $\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$ , ხოლო თუ  $f(x)$  ქვემოდან არ არის

შემოსაზღვრული, მაშინ  $\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$ .

ვიგულისხმობთ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $X$  შუალედზე. თუ  $X$  შუალედზე არსებობს ისეთი  $\xi_1$  წერტილი, რომ

$$f(\xi_1) = \sup_{x \in X} f(x),$$

მაშინ ამბობენ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია აღწევს  $X$  შუალედზე თავის ზედა საზღვარს. ასევე, თუ  $X$  შუალედზე არსებობს ისეთი  $\xi_2$  წერტილი, რომ

$$f(\xi_2) = \inf_{x \in X} f(x),$$

მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია აღწევს თავის ქვედა საზღვარს  $X$  შუალედზე.

**თეორემა 27.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ იგი მიაღწევს ამ სეგმენტზე თავის ქვედა და ზედა საზღვრებს.

**დამტკიცება.** რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ ზემოდამტკიცებული თეორემის თანახმად  $f(x)$  შემოსაზღვრულია სეგმენტზე. ამ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები აღენიშნოთ შესაბამისად  $M$  და  $m$  ასოებით.

განვიხილოთ ნულისაქენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ . ფუნქციის ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად, ყოველი  $\varepsilon_n$  რიცხვისათვის არსებობს  $[a, b]$  სეგმენტის ისეთი  $x_n$  წერტილი, რომ

$$f(x_n) > M - \varepsilon_n \quad (n=1, 2, \dots). \quad (12.2)$$

მივიღეთ წერტილთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n \geq 1}$ . რადგანაც ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ ქვემიმდევრობა  $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ , რომელიც კრებადია  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე წერტილისაკენ.

პირობის ძალით  $f(x)$  უწყვეტია  $\xi$  წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi). \quad (12.3)$$

მეორე მხრით, (11.2) უტოლობის თანახმად

$$f(x_{n_k}) > M - \varepsilon_{n_k}.$$

აქედან, თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $k \rightarrow \infty$ . (11.3) ტოლობის თანახმად

$$f(\xi) \geq M. \quad (12.4)$$

მაგრამ

$$f(\xi) \leq M. \quad (12.5)$$

მაშასადამე, (12.4) და (12.5) დამოკიდებულებებიდან ვღებულობთ

$$f(\xi) = M.$$

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქცია აღწევს თავის ზედა საზღვარს  $\xi$  წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება  $[a, b]$  სეგმენტის ისეთი  $\xi^*$  წერტილის არსებობა, რომ  $f(\xi^*) = m$ . ვაიერშტრასის მეორე თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. შეიძლება, რომ  $f(x)$  ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს სეგმენტზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზედა ან ქვედა საზღვარს. მართლაც, განვიხილოთ  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც  $[0, 1]$  სეგმენტზე განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ } 0 < x < 1, \\ \frac{1}{3}, & \text{როცა } x=0 \text{ და } x=1. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია  $[0, 1]$  სეგმენტზე:

$$0 < f(x) < 1.$$

ცხადია,

$$\sup_{0 < x < 1} f(x) = 1, \quad \inf_{0 < x < 1} f(x) = 0.$$

მოცემული ფუნქცია ვერ აღწევს ვერც ზედა და ვერც ქვედა საზღვარს. ამის მიზეზი ისაა, რომ  $f(x)$  ფუნქცია წყვეტილია 0 და 1 წერტილში.

ასევე, თუ ფუნქცია უწყვეტია ინტერვალში, მაშინ საზოგადოდ ვაიერშტრასის მეორე თეორემა მართებული არ არის. მართლაც, ავიღოთ  $f(x) = x$  ფუნქცია, განსაზღვრული  $]0, 1[$  ინტერვალში. ამ ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებია 0 და 1, მაგრამ ამ საზღვრებს იგი ვერ მიაღწევს  $]0, 1[$  ინტერვალში.

განსაზღვრა 13. თუ  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $X$  შუალედში, მაშინ  $M = m$  სხვაობას, სადაც  $M = \sup_{x \in X} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in X} f(x)$ , ეწოდება ზემოაღნიშნული ფუნქციის რხევა  $X$  შუალედში და აღინიშნება  $\omega$  სიმბოლოთი.

## § 13. ბოლცანოსა და კოზის თეორემა

თეორემა 28 (ბოლცანო). ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. თუ  $f(a)$  და  $f(b)$  რიცხვებს სხვადასხვანაირნიშნები აქვთ, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $f(\xi) = 0$ .

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $f(a) < 0$  და  $f(b) > 0$ . რაკი  $f(a) < 0$ , ამიტომ მკ-10 თეორემის შედეგის თანახმად  $[a, b]$  სეგმენტში არსებობს ისეთი  $c$  წერტილი, რომ

$$f(x) < 0, \text{ როდესაც } a \leq x \leq c.$$

ყველა ასეთი  $c$  წერტილის სიმრავლე აღენიშნოთ  $E$  ასოთი.  $E$  სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია და ამიტომ მას აქვს ზედა საზღვარი. იგი აღენიშნოთ  $\xi$  ასოთი. ცხადია,  $a < \xi < b$ .

დავამტკიცოთ, რომ

$$f(\xi) = 0. \quad (13.1)$$

ადილი საჩვენებელია, რომ  $f(\xi)$  არ შეიძლება იყოს დადებითი. მართლაც, თუ დაუშვებთ, რომ  $f(\xi) > 0$ , მაშინ  $\xi$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობის გამო არსებობს  $[a, b]$  სეგმენტში ისეთი  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$  სეგმენტი, რომლის ყოველ  $x$  წერტილში  $f(x) > 0$ , კერძოდ,  $f(\xi - \delta) > 0$ . მეორე მხრივ, რაკი  $\xi - \delta \in E$ , ამიტომ

$$f(\xi - \delta) < 0.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე,  $f(\xi)$  არ შეიძლება იყოს დადებითი.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ  $f(\xi)$  არ შეიძლება იყოს უარყოფითი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ  $f(\xi) < 0$ . მაშინ მოიძებნება  $[a, b]$  სეგმენტში ისეთი  $[\xi - \eta, \xi + \eta]$  სეგმენტი, რომლის ყოველ  $x$  წერტილში  $f(x) < 0$ . მაშინ  $\xi + \eta$  წერტილი მიეკუთვნება  $E$  სიმრავლეს და  $\xi$  არ იქნება  $E$  სიმრავლის ზედა საზღვარი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე,  $f(\xi)$  არ შეიძლება იყოს უარყოფითი.

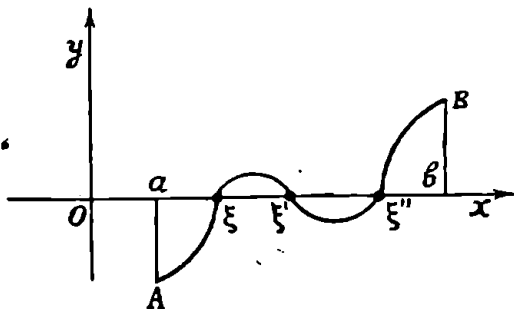
ამრიგად,  $f(\xi)$  არც დადებითია და არც უარყოფითი, ამიტომ მართებულია (13.1) ტოლობა. ბოლცანოს თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს; თუ უწყვეტი  $y=f(x)$  წირის  $A$  და  $B$  ბოლოები მდებარეობენ  $Ox$  ღერძის სხვადასხვა მხარეს, მაშინ ეს წირი გადაკვეთს  $Ox$  ღერძს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 29).

ამ ნახაზზე  $f(x)$  ფუნქცია ლებულობს ნულის მნიშვნელობას  $[a, b]$  სეგმენტის  $\xi$ ,  $\xi'$  და  $\xi''$  წერტილებში.

$x$ -ის იმ მნიშვნელობას, რომელზედაც  $f(x)$  ნული ხდება, ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ნული ანუ  $f(x)=0$  განტოლების ფესვი.

მეორე დამტკიცება. გავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი შუაზე  $c$  წერტილით, მივიღებთ ორ სეგმენტს  $[a, c]$  და  $[c, b]$ . თუ  $f(c)=0$ , თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 29.

ვთქვათ,  $f(c) \neq 0$ . იმ შემთხვევ ში როდესაც  $f(c) > 0$ , შემოვიღოთ აღნიშვნები  $a_1 = a$  და  $b_1 = c$ . ხოლო როდესაც  $f(c) < 0$ , მაშინ  $a_1 = c$ ,  $b_1 = b$ . ორივე შემთხვევაში  $a_1 < b_1$  და

$$f(a_1) < 0, f(b_1) > 0.$$

ცხადია,  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$  და

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

ახლა გავყოთ  $[a_1, b_1]$  სეგმენტი შუაზე  $c_1$  წერტილით, მივიღებთ ორ სეგმენტს  $[a_1, c_1]$  და  $[c_1, b_1]$ . თუ  $f(c_1) = 0$ , თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ,  $f(c_1) \neq 0$ . თუ  $f(c_1) > 0$ , მაშინ იყოს  $a_2 = a_1$  და  $b_2 = c_1$ , ხოლო როცა  $f(c_1) < 0$ , ვიგულისხმობთ, რომ  $a_2 = c_1$  და  $b_2 = b_1$ . ორივე შემთხვევაში გვექნება  $a_2 < b_2$  და

$$f(a_2) < 0, f(b_2) > 0.$$

ცხადია,  $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$  და

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b - a}{2^2}.$$

ასეთი მსჯელობა რომ განვაგრძოთ, მივიღებთ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots \quad (13.2)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ . თუ  $f(c_n)$  რიცხვებიდან ერთ-ერთი ნულია, მაშინ თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც ყველა  $n$ -სათვის

$$f(a_n) < 0, f(b_n) > 0.$$

რადგანაც

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

მაშასადამე, (13.2) წარმოადგენს თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობას და ამიტომ კანტორის თეორემის თანახმად არსებობს ერთადერთი  $\xi$  წერტილი, რომელიც ეკუთვნის მოცემული მიმდევრობის ყველა სეგმენტს, ე. ი.

$$a_n \leq \xi \leq b_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

დავამტკიცოთ, რომ  $f(\xi) = 0$ . რაკი  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $\xi$  წერტილში, ამიტომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi).$$

მაგრამ  $f(a_n) < 0$  ყოველი  $n$ -თვის. მაშასადამე,

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0. \quad (13.3)$$

ასევე, რადგანაც  $f(b_n) > 0$  ყოველი  $n$ -თვის, ამიტომ

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0. \quad (13.4)$$

(13.3) და (13.4) დამოკიდებულებებიდან გამომდინარეობს, რომ  $f(\xi) = 0$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 29** (კომი). თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო შუალედზე და ამ შუალედის ორ  $a$  და  $b$  წერტილში  $f(a) \neq f(b)$ , მაშინ მოცემული ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას  $f(a)$  და  $f(b)$  შორის.



დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $a < b$  და  $f(a) < f(b)$ . ავიღოთ  $f(a)$  და  $f(b)$  რიცხვებს შორის რომელიმე  $P$  რიცხვი:  $f(a) < P < f(b)$ . განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = f(x) - P.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. ამის გარდა,

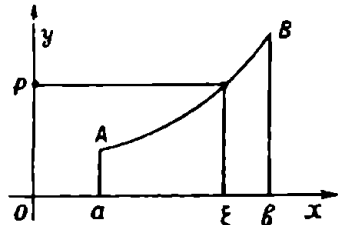
$$\varphi(a) = f(a) - P < 0, \quad \varphi(b) = f(b) - P > 0.$$

ამიტომ, 28-ე თეორემის თანახმად  $[a, b]$  სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $\varphi(\xi) = 0$ , ე. ი.

$$f(\xi) - P = 0.$$

აქედან  $f(\xi) = P$  და ამით კოშის თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს:  $Ox$  ღერძის პარალელური  $y = P$  წრფე კვეთს  $y = f(x)$  წირს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 30). ამ ნახაზის მიხედვით  $f(x)$  ფუნქცია ღებულობს  $P$  რიცხვის მნიშვნელობას  $[a, b]$  სეგმენტის  $\xi$  წერტილში.



ნახ. 30.

შენიშვნა. ზემოდამტკიცებული თეორემები საზოგადოდ პართებული არ არის, როდესაც  $f(x)$  ფუნქცია წყვეტილია  $[a, b]$  სეგმენტზე. მართლაც, ვთქვათ,  $[-1, 1]$  სეგმენტზე  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე

$$f(x) = \frac{|x|}{x}, \text{ როდესაც } x \neq 0, \quad f(0) = 3.$$

ეს ფუნქცია წყვეტილია  $x=0$  წერტილში. ამის გარდა,

$$f(-1) = -1, \quad f(+1) = 1.$$

ცხადია, მოცემული ფუნქცია არ ღებულობს არცერთ მნიშვნელობას, რომლებიც მოთავსებულია  $-1$ -სა და  $+1$ -ს შორის.

**შედეგი 1.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო  $X$  შუალედზე და მულშივი არ არის, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე წარმოადგენს გარკვეულ  $Y$  შუალედს.

მართლაც, ვთქვათ  $l$  და  $L$  წარმოადგენენ  $f(x)$  ფუნქციის ქვე-

და და ზედა საზღვრებს  $X$  შუალედზე. ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი  $y_0$ , რომელიც აკმაყოფილებს პირობას  $l < y_0 < L$ . სიმრავლის ქვედა და ზედა საზღვრის განსაზღვრის თანახმად,  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლეში არსებობს ისეთი რიცხვები  $f(a)$  და  $f(b)$  რომ

$$f(a) < y_0 < f(b).$$

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $a < b$ . რაკი  $[a, b] \subset X$ , ამიტომ ზემოდაშტკიცებული თეორემის თანახმად არსებობს ისეთი წერტილი  $\xi \in [a, b]$ , რომ  $f(\xi) = y_0$ . ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქცია ლებულობს  $X$  შუალედზე  $l$  და  $L$  შორის მოთავსებულ ნებისმიერი რიცხვის მნიშვნელობას.

**შედეგი 2.** თუ  $m$  და  $M$  წარმოადგენენ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციის უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობებს, მაშინ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას  $m$  და  $M$  შორის.

მართლაც, 27-ე თეორემის თანახმად  $[a, b]$  სეგმენტზე არსებობს ისეთი  $x_1$  და  $x_2$  წერტილები, რომ  $f(x_1) = m$ ,  $f(x_2) = M$ . ვთქვათ,  $x_1 < x_2$  და  $m < P < M$ . მაშინ 29-ე თეორემის თანახმად  $[x_1, x_2]$  სეგმენტზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $f(\xi) = P$ .

#### § 11. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $X$  შუალედზე. შემოვიღოთ განსაზღვრა 14. ჩვენ ვიტყვით, რომ  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია  $X$  შუალედზე, თუ ყოველი დადებითი  $\epsilon$  რიცხვისათვის არსებობს  $X$  შუალედის წერტილებზე დამოუკიდებელი ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ  $X$  შუალედის ყოველი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|x'' - x'| < \eta$ , მართებულია უტოლობა

$$|f(x'') - f(x')| < \epsilon.$$

თუ  $f(x)$  თანაბრად უწყვეტი არაა  $X$  შუალედზე, მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი  $\epsilon_0$  რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი  $\eta$  რიცხვისათვის მოიძებნება  $X$  შუალედში ისეთი ორი წერტილი  $x'$  და  $x''$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|x'' - x'| < \eta$  და

$$|f(x'') - f(x')| \geq \epsilon_0.$$

**თეორემა 30** (კანტორი). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. დასამტკიცებელია, რომ  $f(x)$  თანაბრად უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტი არ არის  $[a, b]$  სეგმენტზე. მაშინ არსებობს ისეთი დადებითი  $\varepsilon_0$  რიცხვი, რომ ყოველი დადებითი  $\eta$  რიცხვისათვის მოიძებნება  $[a, b]$  სეგმენტზე ისეთი ორი წერტილი  $x'$  და  $x''$ , რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|x'' - x'| < \eta$ , ხოლო

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon_0.$$

ახლა განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა მიმდევრობა  $(\eta_n)_{n>1}$ . აღებული  $\eta_n (n=1, 2, \dots)$  რიცხვისათვის მოიძებნება  $[a, b]$   $(\eta_n)$  სეგმენტზე ისეთი  $x'_n$  და  $x''_n$  წერტილი. რომ

$$|x''_n - x'_n| < \eta_n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (14.1)$$

ხოლო

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (n=1, 2, \dots). \quad (14.2)$$

წერტილთა მიმდევრობა  $(x'_n)_{n>1}$  შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა  $(x'_{n_k})_{k>1}$ . ვთქვათ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0.$$

ცხადია,  $x_0 \in [a, b]$ .

(14.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x''_{n_k} - x'_{n_k}) = 0,$$

რის გამო

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [(x''_{n_k} - x'_{n_k}) + x'_{n_k}] = x_0.$$

(14.2) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (14.3)$$

შემდეგ, რაკი  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ იგი უწყვეტია  $x_0$  წერტილში. მაშასადამე,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0).$$

ახლა თუ გადავალთ ზღვარზე (14.3) უტოლობაში, როდესაც  $k \rightarrow \infty$ , მივიღებთ

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$$

ე. ი.  $0 \geq \varepsilon_0$ , რაც შეუძლებელია. ამრიგად, ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია არათანაბრად უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, არ არის სწორი. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, და ამით კანტორის თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ინტერვალზე, იგი უწყვეტი იქნება იმავე ინტერვალზე, მაგრამ ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქცია შეიძლება არ იყოს თანაბრად უწყვეტი იმავე ინტერვალზე. განვიხილოთ

მაგალითი. ვთქვათ,  $]0, 1[$  ინტერვალზე განსაზღვრულია ფუნქცია ფორმულით

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია  $]0, 1[$  ინტერვალზე. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია მოცემულ ინტერვალზე. მაშინ  $\varepsilon = 1$  რიცხვისათვის არსებობს  $]0, 1[$  ინტერვალის წერტილებისაგან დამოუკიდებლად ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ  $]0, 1[$  ინტერვალის ყოველი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|x'' - x'| < \eta$  ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x'') - f(x')| < 1. \quad (14.4)$$

ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $\eta < 1$ . ავიღოთ  $]0, 1[$  ინტერვალის ორი წერტილი  $x' = \frac{\eta}{2}$ ,  $x'' = \frac{\eta}{3}$ . ცხადია, რომ

$$|x'' - x'| < \eta.$$

შემდეგ

$$|f(x'') - f(x')| = \left| \frac{1}{x''} - \frac{1}{x'} \right| = \left| \frac{3}{\eta} - \frac{2}{\eta} \right| = \frac{1}{\eta} > 1;$$

რაც (14.4) უტოლობას ეწინააღმდეგება. მაშასადამე, ჩვენი დაშვება სწორი არ არის და ამიტომ  $f(x)$  ფუნქცია არ იქნება თანაბრად უწყვეტი  $]0, 1[$  ინტერვალში.

§ 15. შექცეული ფუნქციის უწყვეტობა

**თეორემა 31.** თუ  $y=f(x)$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია და უწყვეტია  $X$  შუალედზე, მაშინ მისი შექცეული ფუნქცია  $x=\varphi(y)$  არსებითად მონოტონურია და უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

**დამტკიცება.** აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $y=f(x)$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $X$  შუალედზე. აღვნიშნოთ  $Y$ -ით  $f(x)$  ფუნქციის ცელილებს არე. 29-ე თეორემის პირველი შედეგის თანახმად,  $Y$  წარმოადგენს შუალედს. რაკი  $y=f(x)$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $X$  სიმრავლეზე, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია  $x=\varphi(y)$ , რომელიც განსაზღვრულია  $Y$  შუალედზე.

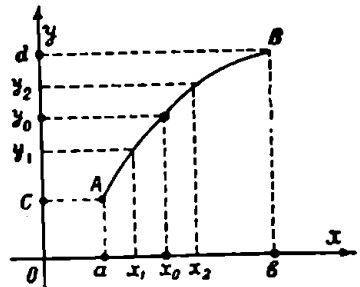
დავამტკიცოთ, რომ  $\varphi(y)$  ფუნქცია უწყვეტია  $Y$  შუალედზე. განვიხილოთ  $Y$  შუალედის ნებისმიერი შიგა წერტილი  $y_0$ . მაშინ არსებობს  $Y$  შუალედის ისეთი ორი  $c$  და  $d$  წერტილი, რომ  $c < y_0 < d$ . ვთქვათ,

$$\varphi(c) = a, \quad \varphi(d) = b, \quad \varphi(x_0) = y_0.$$

ცხადია, რომ  $a < x_0 < b$ . ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და შევარჩიოთ ორი ნებისმიერი  $x_1$  და  $x_2$  რიცხვი ისე, რომ შესრულდეს პირობები (ნახ. 31):

$$a < x_1 < x_0 < x_2 < b \quad \text{და} \\ 0 < x_2 - x_1 < \varepsilon.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ .



ნახ. 31.

რადგანაც  $y_1 < y_2$ , ამიტომ 29-ე თეორემის თანახმად,  $y$ -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის  $[y_1, y_2]$  სეგმენტიდან  $x$ -ის სათანადო მნიშვნელობა მოთავსებულია  $x_1$ -სა და  $x_2$ -ს შორის და, მაშასადამე,  $|x - x_0| < \varepsilon$ , ე. ი.

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } y_1 < y < y_2.$$

ამრიგად,  $x=\varphi(y)$  ფუნქცია უწყვეტია  $y=y_0$  წერტილში. თუ  $Y$  შუალედს აქვს ბოლოები, მაშინ ანალოგიურად მტკიცდება  $x=\varphi(y)$  ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა შუალედის ბოლოებზე.

თეორემა 32. თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე არსებითად მონოტონური  $f(x)$  ფუნქციის მნიშვნელობათა  $f([a, b])$  სიმრავლე სეგმენტია, მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $f(x)$  არსებითად ზრდადია  $[a, b]$  სეგმენტზე; მაშინ

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

დავამტკიცოთ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

ვთქვათ,  $c$  არის  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი შიგა წერტილი. ცხადია,  $f(a) < f(c) < f(b)$ . ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი იმ პირობით, რომ დაცული იყოს უტოლობები

$$f(a) < f(c) - \varepsilon < f(c) + \varepsilon < f(b).$$

$[a, b]$  სეგმენტში მოიძებნება ისეთი  $c_1$  და  $c_2$  წერტილები, რომ

$$f(c_1) = f(c) - \varepsilon, \quad f(c_2) = f(c) + \varepsilon,$$

ამასთანავე  $c_1 < c < c_2$ . თუ აღვნიშნავთ  $\eta$ -თი უმცირესს  $c - c_1$  და  $c_2 - c$  რიცხვებიდან, მაშინ ყოველი  $x$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს  $c - \eta < x < c + \eta$ , გვექნება

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon.$$

მაშასადამე,  $f(x)$  უწყვეტია წერტილში.

$[a, b]$  სეგმენტის ბოლოებში  $f(x)$  ფუნქციის ცალმხრივი უწყვეტობა ანალოგიურად მტკიცდება. თეორემა დამტკიცებულია.

### § 16. ლოგარითული ფუნქცია

განვიხილოთ 1-საგან განსხვავებული დადებითი  $a$  რიცხვი. ვთქვათ,  $x$  წარმოადგენს  $y$  ცვლადის მაჩვენებლიან ფუნქციას

$$x = a^y. \quad (16.1)$$

მე-9 პარაგრაფში ვაჩვენეთ, რომ  $a^y$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში, ამასთანავე  $a^y$  მიიღებს 0 და  $+\infty$  შორის მოთავსებულ ყველა ნამდვილი რიცხვის მნიშვნელობას. ამიტომ 31-ე თეორემის თანახმად (16.1) ტოლობა  $]0, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრავს  $y$ -ს როგორც  $x$ -ის არსებითად მონოტონურ უწყვეტ ფუნქციას. ეს ფუნქცია ასე აღინიშნება:

$$y = \lg_a x.$$

ამ ფუნქციას ეწოდება ლოგარითმული ფუნქცია  $a$  ფუძით. იგი არსებითად ზრდალია, როდესაც  $a > 1$ , ხოლო იგი არსებითად კლებადია, როდესაც  $a < 1$ , ვინაიდან  $a^x$  ფუნქცია პირველ შემთხვევაში არსებითად ზრდალია, მეორე შემთხვევაში კი არსებითად კლებადია.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

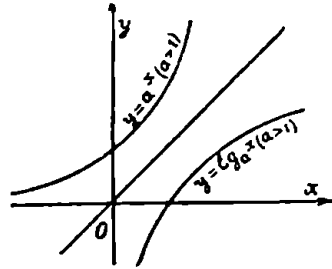
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \lg_a x = -\infty, \text{ როდესაც } a > 1,$$

ხოლო

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \lg_a x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \lg_a x = +\infty, \text{ როდესაც } a < 1.$$



ნახ. 32.

დასასრულ აღენიშნოთ, რომ  $1^x$  ფუნქცია მუდმივია. ამიტომ  $x=1^x$  ტოლობა არ განსაზღვრავს  $y$ -ს, როგორც  $x$ -ის ფუნქციას, რის გამო, ჩვეულებრივ, არ განიხილავენ ლოგარითმს ერთის ფუძით.

რადგანაც ლოგარითმული და მაჩვენებლიანი ფუნქციები ურთიერთშეგვერდული ფუნქციებია, ამიტომ  $y = \lg_a x$  ფუნქციის გრაფიკს აქვს ისეთი სახე, როგორც ეს წარმოდგენილია 32-ე ნახაზზე.

მაგალითი. განვიხილოთ რიცხვთა მიმდევრობა  $(x_n)_{n>1}$ , სადაც

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

ვიპოვოთ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . (8.6) ფორმულის მიხედვით

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} = \ln(2n) + C + \rho_{2n},$$

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} = \ln(n-1) + C + \rho_{n-1},$$

სადაც  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ , ხოლო  $C$  ეილერის მუდმივია. მაგრამ

$$\begin{aligned} x_n &= \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) = \\ &= \ln(2n) - \ln(n-1) + \rho_{2n} - \rho_{n-1} = \ln \frac{2n}{n-1} + \rho_{2n} - \rho_{n-1} \end{aligned}$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც  $n \rightarrow \infty$  და გავითვალისწინებთ  $x_n$ -ის გამოსახულებას, გვექნება

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

**თეორემა 33.** თუ  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციებს აქვთ ზღვარი  $x_0$  წერტილში და, ამასთანავე,  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) > 0$ , მაშინ არსებობს  $[u(x)]^{v(x)}$  ფუნქციის ზღვარი და მართებულა ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = \alpha^\beta,$$

სადაც

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x), \quad \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x),$$

დამტკიცება. რადგანაც

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)},$$

ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x)]^{v(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [v(x) \ln u(x)]} = e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 17.  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  ფუნქციის ზღვარი, როდესაც  $|x| \rightarrow +\infty$

III თავის მე-8 პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობას  $(x_n)_{n>1}$ , სადაც

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

აქვს ზღვარი და ეს ზღვარი აღვნიშნეთ  $e$  ასოთი. ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი

**თეორემა 34.**  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  ფუნქციის ზღვარია  $e$  რიცხვი, როდესაც  $|x| \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (17.1)$$



დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $x \rightarrow +\infty$ . მაშინ  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის,  $x > 1$ , მოიძებნება ისეთი მთელი დადებითი რიცხვი  $n$ , რომ

$$n \leq x < n+1.$$

აქედან

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}.$$

თუ ამ უტოლობების ყოველ წევრს დაემატებთ 1-ს, გვექნება

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

რადგანაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e.$$

ამიტომ მკ-12 თეორემის ძალით

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

ახლა ვთქვათ,  $x < 0$ . შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x = -(1+t).$$

მაშინ

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-(1+t)} = \\ &= \left(\frac{1+t}{t}\right)^{1+t} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \left(1 + \frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e.$$

ამრიგად, მართებულია (17.1) ტოლობა.

ახლა გამოვთვალოთ  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ . შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\frac{1}{\alpha} = x$ . ცხადია, რომ როდესაც  $\alpha \rightarrow 0$ , მაშინ  $|x| \rightarrow +\infty$  და, მაშასადამე,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

ამრიგად,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

დასასრულ განვიხილოთ ზღვრები, რომლებიც დაკავშირებულია  $e$  რიცხვთან.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lg_a e \quad (a > 0, a \neq 1).$$

დამტკიცება. რადგანაც  $\lg_a x$  ფუნქცია უწყვეტია  $]0, +\infty[$  შუალედში, ამიტომ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\lg_a(1+\alpha)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lg_a (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lg_a \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right] = \lg_a e.$$

კერძოდ, თუ  $a = e$ , გვექნება

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a \neq 1, a > 0)$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $a^x - 1 = \alpha$ , გვექნება  $a^x = 1 + \alpha$  და, მაშასადამე,

$$x \ln a = \ln(1+\alpha).$$

აქედან

$$x = \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}.$$

როდესაც  $x \rightarrow 0$ , მაშინ  $a \rightarrow 0$ . ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{\ln(1+a)} = \ln a \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+a)^{1/a}} = \ln a.$$

კერძოდ, თუ  $a = e$ , გვექნება  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ .

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}}$ .

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $1-x = \frac{2y}{\pi}$ . აქედან

$x = 1 - \frac{2}{\pi} y$ . ცხადია, რომ როდესაც  $x \rightarrow 1$ , მაშინ  $y \rightarrow 0$ . მაშასადამე:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y/\pi}{\cos \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{2}{\pi} y \right)} = \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = \frac{2}{\pi}.$$

მაგალითი 4. დავამტკიცოთ, რომ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m}$ ,

სადაც

$$x_n = \left( \frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n, \quad a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

დამტკიცება. გვაქვს

$$x_n = \left[ \frac{(\sqrt[n]{a_1} - 1) + (\sqrt[n]{a_2} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{a_m} - 1)}{m} + 1 \right]^n.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{(\sqrt[n]{a_1} - 1) + (\sqrt[n]{a_2} - 1) + \dots + (\sqrt[n]{a_m} - 1)}{m} = \alpha_n.$$

გვაქვს

$$x_n = (1 + \alpha_n)^n = (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n} \cdot n \alpha_n}.$$

ცხადია, რომ  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  და, ამის გარდა,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n \alpha_n) &= \frac{1}{m} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a_1} - 1}{1/n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt[n]{a_2} - 1}{1/n} + \dots + \frac{\sqrt[n]{a_m} - 1}{1/n} \right) = \\ &= \frac{1}{m} (\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_m) = \ln \sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_m}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^{\ln \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m}} = \sqrt[m]{a_1 a_2 \dots a_m}.$$

მაგალითი 5. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

დამტკიცება. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $(1+x)^\alpha = 1+t$ , გვექნება  $\alpha \ln(1+x) = \ln(1+t)$ . მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

§ 18. ხარისხოვანი ფუნქცია

ხარისხოვანი ფუნქცია ეწოდება  $y = x^\alpha$  ფუნქციას, სადაც  $\alpha$  ნამდვილი რიცხვია.

1. ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $\alpha = m$  მთელი დადებითი რიცხვია. ამ შემთხვევაში

$$y = \overbrace{x \cdot x \dots x}^{m\text{-ჯერ}}$$

აქედან ჩანს, რომ  $x^m$  ფუნქციის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს  $]-\infty, +\infty[$  შუალედი. ამ შუალედში ეს ფუნქცია უწყვეტია, ვინაიდან იგი წარმოადგენს ნამრავლს უწყვეტი ფუნქციებისას, რომელთა რიცხვი სასრულია. თუ  $m$  ლუწია, მაშინ  $x^m$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში, ხოლო არსებითად კლებადია  $]-\infty, 0]$  შუალედში. თუკი  $m$  კენტია, მაშინ  $x^m$  წარმოადგენს არსებითად ზრდად ფუნქციას  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.

დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^m = +\infty, \tag{18.1}$$

სადაც  $m$  მთელი დადებითი რიცხვია. რადგანაც  $x \rightarrow +\infty$ , ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $x > 1$ . ბერნულის უტოლობის თანახმად

$$x^m = [1 + (x-1)]^m > 1 + (x-1)m. \tag{18.2}$$

ავიღოთ ნებისმიერი დადებითი  $M$  რიცხვი. თუ ვიგულისხმებთ

$$x > \frac{M-1}{m} + 1,$$

მაშინ

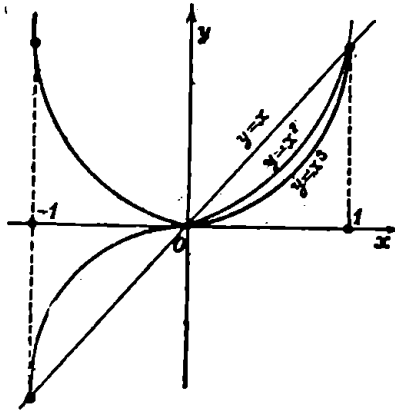
$$1 + (x - 1)m > M$$

და, მაშასადამე, (17.2) უტოლობის თანახმად

$$x^n > M.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ შართებულია (17.1) ტოლობა.

33-ე ნახაზზე მოცემულია  $y = x^m$  ფუნქციის გრაფიკები იმ შემთხვევისათვის, როდესაც  $m = 1, 2, 3$ .



ნახ. 33.

2. ახლა განვიხილოთ ხარისხოვანი ფუნქცია  $f(x) = x^a$ , როდესაც  $a = -m$  მთელი უარყოფითი რიცხვია. ამ შემთხვევაში, განსაზღვრის მიხედვით,

$$f(x) = \frac{1}{x^m}.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია ყოველ  $x = x_0$  წერტილში, სადაც  $x_0 \neq 0$ . მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{x_0^m} = f(x_0),$$

ე. ი. ფუნქციის ზღვარი უდრის ფუნქციის მნიშვნელობას  $x_0$  წერტილში, ამიტომ  $f(x)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში.  $x = 0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქცია წყვეტილია. ამის გარდა,  $x^a$  ფუნქცია,  $a$  ლუწია თუ კენტი,  $]0, +\infty[$  შუალედში არსებითად კლებადია. თუ  $a$  ლუწია,

მაშინ  $x^\alpha$  ფუნქცია ]— $\infty$ ,  $0[$  შუალედში არსებითად ზრდადია, ხოლო როცა  $\alpha$  კენტია, ეს ფუნქცია არსებითად კლებადია იმავე შუალედში.

როდესაც  $\alpha < 0$ , ადვილი დასამტკიცებელია შემდეგ ტოლობათა მართებულება:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x^\alpha = +\infty, \quad \text{როდესაც } \alpha \text{ ლუწია,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} x^\alpha = -\infty, \quad \text{როდესაც } \alpha \text{ კენტია.}$$

3 ახლა შევისწავლოთ ხარისხოვანი  $x^\alpha$  ფუნქცია იმ შემთხვევისათვის, როდესაც  $\alpha$  ნებისმიერი რაციონალური რიცხეია.

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $\alpha$  დადებითია.  $\alpha$  რიცხვს შეგვიძლია ასეთი სახე მივცეთ:  $\alpha = \frac{p}{q}$ , სადაც  $p$  და  $q$  ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ამ შემთხვევაში  $x^{p/q}$  ფუნქცია განისაზღვრება ტოლობით

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}.$$

თუ  $q$  ლუწია, მაშინ  $x^{p/q}$  ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $[0, +\infty[$  შუალედი, ხოლო თუ  $q$  კენტია, მაშინ  $x^{p/q}$  ფუნქციის განსაზღვრის არეა ]— $\infty$ ,  $+\infty[$  შუალედი.

ადვილად ვაჩვენებთ, რომ  $x^{p/q}$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში როდესაც  $q$  ლუწია. მართლაც,

$x^{p/q}$  შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ  $(\sqrt[q]{x})^p$ . მაგრამ  $\sqrt[q]{x}$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში. მასასადამე,  $x^{p/q}$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია და უწყვეტია  $[0, +\infty[$  შუალედში.

ადვილი დასამტკიცებელია აგრეთვე, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p/q} = +\infty$$

თუ  $p$  და  $q$  კენტი რიცხვებია, მაშინ  $x^{p/q}$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია ]— $\infty$ ,  $+\infty[$  შუალედში. თუ  $p$  ლუწია და  $q$  კენტია, მაშინ  $x^{p/q}$  ფუნქცია არსებითად კლებადია ]— $\infty$ ,  $0[$  შუალედში და არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში.

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $\frac{p}{q}$  უარყოფითი რიცხვია და მასთან  $q$  ლეწია,  $x^{p/q}$  ფუნქცია უწყვეტია ]0, +∞[ შუალედში, ხოლო თუ  $q$  კენტია, მაშინ  $x^{p/q}$  ფუნქცია უწყვეტია ]-∞, +∞[ შუალედის ყოველ წერტილში, გარდა  $x=0$  წერტილისა.

4. დასასრულ, ვთქვათ, რომ  $a$  ირაციონალური რიცხვია, ხოლო  $x$  ლებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს. ცხადია, რომ

$$x^a = e^{a \ln x},$$

სადაც  $e$  ნებერის რიცხვია.  $e^{a \ln x}$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია ]0, +∞[ შუალედში. ამრიგად,  $x^a$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად მონოტონურია ]0, +∞[ შუალედში, ამასთანავე  $x^a$  არსებითად ზრდადია, როდესაც  $a > 0$  და არსებითად კლებადია, როდესაც  $a < 0$ . ამის გარდა, ცხადია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{როდესაც } a > 0, \\ 0, & \text{როდესაც } a < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } a > 0, \\ +\infty, & \text{როდესაც } a < 0. \end{cases}$$

#### § 18. ნამდვილკოეფიციენტებიანი ალგებრული განტოლება.

რაციონალური ფუნქციის ზღვარი, როდესაც  $x \rightarrow \pm \infty$

1. როგორც ვიცით, ფუნქციას

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

სადაც  $n$  არაუარყოფითი მთელი რიცხვია, ხოლო  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  ნამდვილი რიცხვებია და ამასთანავე  $a_0 \neq 0$  ეწოდება  $n$ -ური ხარისხის ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი ანუ პოლინომი.

ზემოდამტკიცებელი იყო (თეორემა 20), რომ  $P(x)$  მრავალწევრი უწყვეტია ]-∞, +∞[ შუალედში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |P(x)| = +\infty. \quad (19.1)$$

გვაქვს:

$$P(x) = x^n \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right). \quad (19.2)$$

რადგანაც

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left( a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n} \right) = a_0 \quad (19.3)$$

და



$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^n| = +\infty,$$

ამიტომ მართებულია (19.1) ტოლობა. ამის გარდა,  $n$  კენტი ია თუ ლუწი, (19.2) და (19.3) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty, \text{ თუ } a_0 > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty, \text{ თუ } a_0 < 0,$$

ხოლო თუ  $n$  კენტი, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty, \text{ როდესაც } a_0 > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = +\infty, \text{ როდესაც } a_0 < 0.$$

ამ ტოლობათა საფუძველზე ვღებულობთ შემდეგ დებულებას:

$P(x)$  მრავალწევრს აქვს  $a_0 x^n$  უფროსი წევრის ნიშანი, თუ  $x$ -ის აბსოლუტური სიდიდე საკმაოდ დიდია.

**თეორემა 35.** ნამდვილკოეფიციენტებიანი ყოველი კენტი ხარისხის ალგებრულ განტოლებას ერთი ნამდვილი ფესვი მაინც აქვს.

**დამტკიცება.** ვთქვათ, მოცემულია კენტი ხარისხის ალგებრული განტოლება

$$F(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \dots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივულისხმოთ, რომ  $a_0 > 0$  ზემოთ მიღებული დებულების თანახმად არსებობს ისეთი დადებითი  $\alpha$  რიცხვი, რომ

$$F(-\alpha) < 0, \quad F(\alpha) > 0.$$

ბოლცანოს თეორემის თანახმად,  $-\alpha$  და  $\alpha$ -ს შორის არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  რიცხვი, რომ  $F(\xi) = 0$ . თეორემა დამტკიცებულია.

2. მერვე თავის მეექვსე პარაგრაფში აღნიშნული იყო, რომ  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ფუნქცია, სადაც  $P(x)$  და  $Q(x)$  მრავალწევრებია და არა აქვთ საერთო ფესვები, რაციონალური ფუნქციაა. რაციონალური ფუნქცია უწყვეტია ყოველ წერტილში, გარდა იმ წერტილებისა, სადაც  $Q(x)$  ისპობა. ვთქვათ,  $Q(x)$  მრავალწევრის ფესვებია  $x_1, x_2, \dots, x_p$ . ჩვენ შეგვიძლია ვივულისხმოთ, რომ ეს ფესვები ერთმანეთისაგან განსხვავებულია და, ამის გარდა, ადგილი აქვს უტოლობებს

$$x_1 < x_2 < \dots < x_p.$$

მაშინ  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება

$$]-\infty, x_1[ \cup ]x_1, x_2[ \cup \dots \cup ]x_{p-1}, x_p[ \cup ]x_p, +\infty[$$

ინტერვალთა ჯამი

$$]-\infty, x_1[ \cup ]x_1, x_2[ \cup \dots \cup ]x_{p-1}, x_p[ \cup ]x_p, +\infty[.$$

თუკი  $Q(x)$  მრავალწევრს არა აქვს არცერთი ნამდვილი ფესვი,

მაშინ  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ფუნქციის განსაზღვრის არე იქნება  $]-\infty, +\infty[$  შუალედი და ამ შუალედში იგი უწყვეტია.

ახლა გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)},$$

სადაც

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m.$$

აქ შეიძლება წარმოგვიდგეს სამი შემთხვევა.

ა)  $m = n$ . ამ შემთხვევაში

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{b_n}{x^n}}.$$

აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0}.$$

ბ)  $m < n$ . ამ შემთხვევაში  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ასე წარმოვადგინოთ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \dots + \frac{a_n}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}}.$$

აქედან გამოვძინარეობს, რომ თუ  $a_0$  და  $b_0$  ერთნაირი ნიშნისაა, მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$$

მიუხედავად იმისა  $n-m$  ლუწია თუ კენტია, ხოლო

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} -\infty, & \text{თუ } n-m \text{ კენტია.} \\ +\infty, & \text{თუ } n-m \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

გ)  $m > n$ . ამ შემთხვევაში  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  წარმოადგინოთ ასე

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 x^{m-n} + b_1 x^{m-n-1} + \dots + \frac{b_m}{x^n}}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

§ 20. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ფუნქციებს  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{sec} x$  და  $\operatorname{cosec} x$  ეწოდება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები. მათემატიკურ ანალიზში ტრიგონომეტრიული ფუნქციის არგუმენტი არის რიცხვი, რომელიც შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც რაიმე კუთხის რადიანებში გამოსახული ზომა. ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ამ ფუნქციების თვისებები მათი უწყვეტობის თვალსაზრისით.

1.  $\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციების განსაზღვრის არეა  $]-\infty, +\infty[$  შუალედი. ამ ფუნქციების პერიოდია  $2\pi$ . სანამ შევეუდგებოდეთ  $\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციების შესწავლას მათი უწყვეტობის თვალსაზრისით, დავამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ , მაშინ

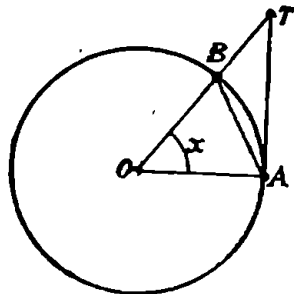
მართებულია უტოლობები

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|. \quad (20.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $R$  რადიუსიან წრეში მახვილი კუთხე,  $AOB$ ,  $AB$  ქორდა და  $AT$  მხები (ნახ. 34). ვთქვათ,  $AOB$  კუთხის რადიანული ზომა არის  $x$  და ვივლით, რომ

$x > 0$ . მაშინ  $\widehat{AB}$  რკალის სიგრძე იქნება  $Rx$ , ამიტომ  $AOB$  სექტორის ფართობი ტოლია  $\frac{R^2 x}{2}$ . გარდა ამისა,

$$\text{ფართ. } \triangle AOB = \frac{1}{2} R^2 \sin x,$$



ნახ. 34.

$$\text{ფართ. } \triangle AOT = \frac{1}{2} R \cdot AT = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\text{ფართ. } \triangle AOB < \text{ფართ. სექტ. } AOB < \text{ფართ. } \triangle AOT,$$

ე. ი.

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

ამ უტოლობების ყველა წევრი გავეყოთ  $\frac{1}{2} R^2$ -ზე, მივიღებთ

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \quad (20.2)$$

ახლა ვთქვათ,  $x$  უარყოფითი მახვილი კუთხეა:  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . მაშინ  $0 < -x < \frac{\pi}{2}$  და, მაშასადამე, (19.2) უტოლობების თანახმად გვექნება

$$\sin(-x) < -x < \operatorname{tg}(-x),$$

ე. ი.

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

მაშასადამე, ყოველი  $x$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2},$$

მართებულია (20.1) უტოლობები. ლემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 36.**  $\cos x$  და  $\sin x$  არის უწყვეტი ფუნქციები  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.

**დამტკიცება.** ავიღოთ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვი  $x_0$ . ტრიგონომეტრიის ერთ-ერთი ფორმულის თანახმად

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}.$$

მაგრამ

$$\left| \sin \frac{x+x_0}{2} \right| \leq 1.$$

ლემის ძალით, თუ  $0 < \left| \frac{x-x_0}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$ , გვექნება

$$\left| \sin \frac{x-x_0}{2} \right| < \left| \frac{x-x_0}{2} \right|.$$

მაშასადამე,

$$|\cos x - \cos x_0| < 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

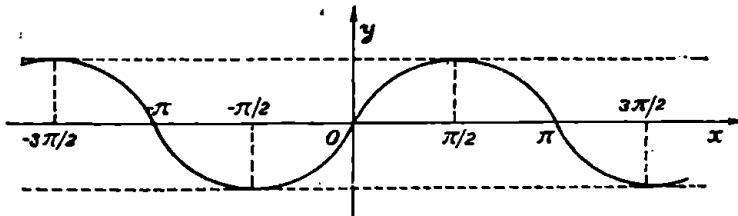
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0.$$

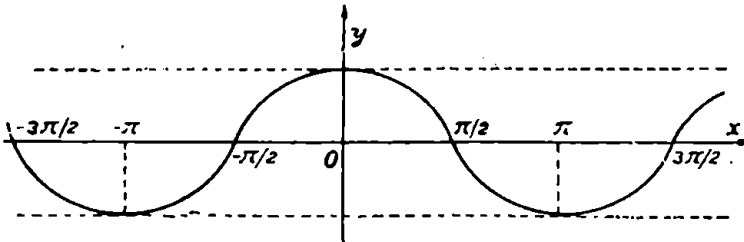
თეორემა დამტკიცებულია.

$\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციების გრაფიკები მოცემულია შესაბამისად 35-ე და 36-ე ნახაზებზე.



ნახ. 35.

$\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციების გრაფიკებს ეწოდება შესაბამისად სინუსოიდი და კოსინუსოიდი.



ნახ. 36.

ახლა დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 37.  $\frac{\sin x}{x}$  ფუნქციის ზღვარია 1, როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (20.3)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . მაშინ ლემის ძალით

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

ამ უტოლობათა ყოველი წევრი გავყოთ  $\sin x$ -ზე, მივიღებთ

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

აქედან გვაქვს

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

თუ ამ უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $x \rightarrow 0+$  მე-12 და 36-ე თეორემების ძალით, გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

ახლა ვთქვათ  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $t = -x$ , გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

ამრიგად,  $\frac{\sin x}{x}$  ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრები  $x=0$  წერტილში ტოლია ერთისა. მაშასადამე, მართებულია (19.3) ტოლობა.

2. განვიხილოთ ახლა  $\operatorname{tg} x$  და  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციები. როგორც ვიცით,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

რადგანაც  $\operatorname{tg} x$  წარმოადგენს ორი უწყვეტი ფუნქციის ფარდობას, ამიტომ იგი უწყვეტია ყოველ წერტილში, რომელზედაც  $\cos x$  განსხვავებულია ნულისაგან. მაგრამ  $\cos x$  ნული ხდება  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  წერტილებში, სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ამიტომ  $\operatorname{tg} x$  ფუნქციის განსაზღვრის არეა ყველა ნამდვილი რიცხვის სიმრავლე; გარდა  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) მნიშვნელობებისა.

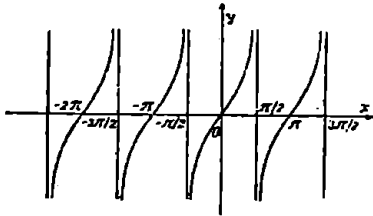
ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (2k+1)\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

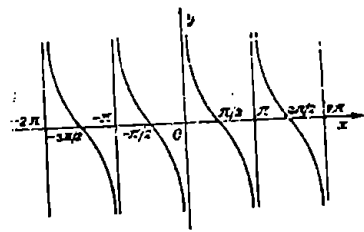
მაშასადამე,  $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$  წერტილებში როგორი მნიშვნელობაც გინდა მივანიჭოთ  $\operatorname{tg} x$  ფუნქციას, იგი წყვეტილია და მასთან წყვეტა უსასრულოა, ხოლო დანარჩენ წერტილებში  $\operatorname{tg} x$  უწყვეტია. ამრიგად,  $\operatorname{tg} x$  უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

რაც შეეხება  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციას, იგი უწყვეტია ყოველ წერტილში, გარდა  $x = k\pi$  წერტილებისა, სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელ რიცხვია.  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

$\operatorname{tg} x$  და  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციების გრაფიკები წარმოდგენილია შესაბამისად 37-ე და 38-ე ნახაზებზე.



ნახ. 37.



ნახ. 38.

$\operatorname{tg} x$  და  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციების გრაფიკებს უწოდებენ შესაბამისად ტანგენსოიდს და კოტანგენსოიდს.

$\operatorname{sec} x$  ფუნქციას წყვეტის წერტილებად აქვს იგივე წერტილები, რაც  $\operatorname{tg} x$  ფუნქციას, ხოლო  $\operatorname{cosec} x$  ფუნქციის წყვეტის წერტილები იგივეა, რაც  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციის წყვეტის წერტილები.

§ 21. შებენი ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით ტრიგონომეტრიული ფუნქციების შექცევის საკითხს.

1. განვიხილოთ განტოლება

$$\sin y = x. \tag{21.1}$$

ცხადია, რომ  $-1$ -სა და  $+1$ -ს შორის მოთავსებული  $x$ -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $y$ -ის უამრავი მნიშვნელობა, რომელიც გამოიხატება ტოლობით

$$y = (-1)^k x + k\pi, \quad (21.2)$$

სადაც  $x$  არის (21.1) განტოლების ფესვი, მოთავსებული  $-\frac{\pi}{2}$ -სა და  $\frac{\pi}{2}$ -ს შორის, ხოლო  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. მაშასადამე,  $y$  შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $x$ -ის მრავალსახა ფუნქცია განსაზღვრული  $[-1, 1]$  სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში წერენ

$$y = \text{Arcsin } x.$$

ამრიგად,  $\text{Arcsin } x$  წარმოადგენს  $\sin x$ -ის შექცეულ ფუნქციას.

$\sin x$ -ის შექცეული ფუნქცია რომ განესაზღვროთ ცალსახად, საჭიროა (21.1) განტოლებაში  $y$ -სთვის ავიღოთ ისეთი სეგმენტი. რომელშიაც  $\sin y$  არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ სეგმენტად შეგვიძლია ავიღოთ  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . ამ სეგმენტში  $\sin y$  უწყვეტია და არსებითად ზრდადია, ამიტომ იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $-1$  და  $+1$ -ს შორის. მაშასადამე,  $-1$ -სა და  $+1$  შორის მოთავსებული ყოველი  $x$  რიცხვისათვის არსებობს  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  სეგმენტში ერთი და მხოლოდ ერთი  $y$  რიცხვი, რომლის სინუსი აღებულია  $x$  რიცხვის ტოლია. ამ შემთხვევაში  $y$  არის  $x$ -ის ცალსახა ფუნქცია და მის ასე აღნიშნავენ

$$y = \arcsin x.$$

$\arcsin x$  ფუნქციას ეწოდება  $\text{Arcsin } x$  ფუნქციის მთავარი შტო. რადგანაც  $\sin y$  უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  სეგმენტზე, ამიტომ  $\arcsin x$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $[-1, 1]$  სეგმენტზე.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (21.2) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\text{Arcsin } x = (-1)^k \arcsin x + k\pi,$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. თუ  $k=0$ , მაშინ

$$\text{Arcsin } x = \arcsin x.$$

განსაზღვრის თანახმად



$$\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x.$$

აქ იგულისხმება, რომ  $|x| \leq 1$ . ცხადია, რომ

$$0 < \operatorname{arcsin} x < \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } 0 < x < 1.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsin} x < 0. \text{ როდესაც } -1 < x < 0$$

და, ამის გარდა,

$$\operatorname{arcsin} 0 = 0, \operatorname{arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}, \operatorname{arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } -1 \leq x \leq 1.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\operatorname{arc} \sin(-x) = -\operatorname{arc} \sin x. \quad (21.3)$$

მართლაც.  $\operatorname{arc} \sin(-x)$  და  $-\operatorname{arc} \sin x$  კუთხეების რადიანული ზომები მოთავსებულია  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  სეგმენტში. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი სინუსი

$$\sin[\operatorname{arc} \sin(-x)] = -x,$$

$$\sin(-\operatorname{arcsin} x) = -\sin(\operatorname{arcsin} x) = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.3) ტოლობის მართებულობა.

$y = \operatorname{Arcsin} x$  ფუნქციის გრაფიკია სინუსოიდი (ნახ. 39), ხოლო  $y = \operatorname{arcsin} x$  ფუნქციისა —  $AB$  რკალი.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} = 1.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\operatorname{arc} \sin x = y,$$

გვექნება  $x = \sin y$ . ცხადია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arc} \sin x = \operatorname{arc} \sin 0 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

2. განვიხილოთ განტოლება

$$\cos y = x. \tag{21.4}$$

$x$ -ის ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $-1$ -სა და  $+1$ -ს შორის. შეესაბამება  $y$ -ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ,

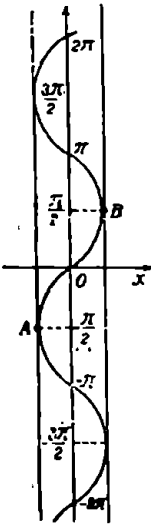
$$y = \pm \alpha + 2k\pi, \tag{21.5}$$

სადაც  $\alpha$  არის  $0$ -სა და  $\pi$ -ს შორის მოთავსებული (21.4) განტოლების ფესვი, ხოლო  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ამრიგად,  $y$

შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $x$ -ის მრავალსახა ფუნქცია, განსაზღვრული  $[-1, +1]$  სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში წერენ

$$y = \text{Arc cos } x.$$

$\text{Arc cos } x$ : წარმოადგენს  $\cos x$ -ის შექცეულ ფუნქციას. ეს შექცეული ფუნქცია ცალსახად რომ იქნეს განსაზღვრული, საჭიროა. ავიღოთ  $y$ -სათვის ისეთი შუალედი, რომელშიც  $\cos y$  არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ შუალედად. შეგვიძლია ავიღოთ  $[0, \pi]$  სეგმენტი. ამ სეგმენტში  $\cos y$  არსებითად კლებადია და იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $-1$ -სა და  $+1$ -ს შორის. ამიტომ  $x$ -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც მოთავსებულია  $-1$ -სა და  $+1$ -ს შორის, არსებობს  $[0, \pi]$  სეგმენტში  $y$ -ის ერთი მნიშვნელობა, რომლის კოსინუსი  $x$ -ის ტოლია. ამ



ნახ. 39.

შემთხვევაში  $y$  არის  $x$ -ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ ასე

$$y = \text{arc cos } x.$$

$\text{arc cos } x$  ფუნქციას ეწოდება  $\text{Arc cos } x$ -ის მთავარი შტო.

რადგანაც  $\cos y$  უწყვეტია და არსებითად კლებადია  $[0, \pi]$  სეგმენტზე, ამიტომ  $\text{arc cos } x$  არის უწყვეტი და არსებითად კლებადი  $[-1, 1]$  სეგმენტზე.

თუ გავითვალისწინებთ (21.5) ტოლობას, გვექნება

$$\text{Arc cos } x = \pm \text{arc cos } x + 2k\pi,$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

განსაზღვრის თანახმად,

$$\cos(\text{Arc } \cos x) = x,$$

ამასთან იგულისხმება, რომ  $|x| \leq 1$ . ცხადია, რომ

$$0 \leq \text{arc } \cos x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \text{arc } \cos x \leq \pi, \text{ როდესაც } -1 \leq x < 0.$$

მაშასადამე,

$$0 \leq \text{arc } \cos x \leq \pi, \text{ როდესაც } -1 \leq x \leq 1.$$

ამის გარდა,

$$\text{arc } \cos(-x) = \pi - \text{arc } \cos x. \quad (21.6)$$

მართლაც, არკკოსინუსის განსაზღვრის თანახმად,  $\text{arc } \cos(-x)$  კუთხის რადიანული ზომა მოთავსებულია  $[0, \pi]$  სეგმენტში, ხოლო  $\pi - \text{arc } \cos x$  კუთხის რადიანული ზომაც იმავე სეგმენტშია მოთავსებული. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი კოსინუსი

$$\cos[\text{arccos}(-x)] = -x,$$

$$\cos(\pi - \text{arc } \cos x) = -\cos(\text{arc } \cos x) = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.6) ტოლობის მართებულობა.

$y = \text{Arccos } x$  ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს კოსინუსოიდს (ნახ. 40), ხოლო  $y = \text{arccos } x$  ფუნქციის გრაფიკია  $AB$  რკალი.

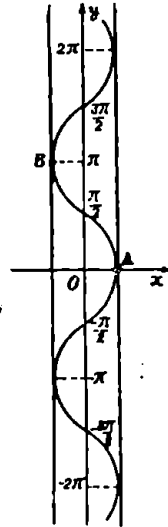
მ. ვთქვათ მოცემულია განტოლება

$$\text{tg } y = x. \quad (21.7)$$

აღვიღდ შესამჩნევია, რომ  $x$ -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $y$ -ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ,

$$y = \alpha + k\pi, \quad (21.8)$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია, ხოლო  $\alpha$  არის (21.7) განტოლების ფესვი  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  ინტერვალში. მაშასადამე,  $y$  შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $x$ -ის მრავალსახა ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. ამ შემთხვევაში წერენ



ნახ. 40.

$$y = \text{Arctg } x.$$

$\text{Arctg } x$  ფუნქციას ეწოდება  $\text{tg } x$  ფუნქციის შებენიანი ფუნქცია. ეს ფუნქცია რომ ცალსახად განესაზღვროთ, საჭიროა (21.7) განტოლებაში  $y$  ცვლადი განვიხილოთ ისეთ ინტერვალში, რომელშიაც  $\text{tg } y$  არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ ინტერვალად შევვიძლია ავიღოთ  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . ამ ინტერვალში  $\text{tg } y$  არსებითად ზრდადია და იგი მხოლოდ ერთხელ მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. ამიტომ  $x$ -ის ერთ მნიშვნელობას  $]\infty, +\infty[$  შუალედიდან შეესაბამება  $y$ -ის ერთი მნიშვნელობა  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  ინტერვალში. რომლის ტანგენსი  $x$ -ის ტოლია. ამ შემთხვევაში  $y$  არის  $x$ -ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ ასე:

$$y = \text{arctg } x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.  $\text{arctg } x$  ფუნქციას ეწოდება  $\text{Arctg } x$  ფუნქციის მთავარი შტო.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (20.8) ტოლობას, გვექნება

$$\text{Arctg } x = \text{arctg } x + k\pi,$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

$\Delta \text{rctg } x$  ფუნქციის განსაზღვრის თანახმად

$$\text{tg}(\text{Arctg } x) = x.$$

ცხადია,

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } x < \frac{\pi}{2}, \text{ როდესაც } -\infty < x < +\infty.$$

აღვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg } x. \quad (21.9)$$

მართლაც,  $\text{arctg}(-x)$  და  $-\text{arctg } x$  კუთხეებს აქვს ერთნაირი ტანგენსები:

$$\text{tg}[\text{arctg}(-x)] = -x, \quad \text{tg}(-\text{arctg } x) = -\text{tg } x = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.9) ტოლობის მართებულობა.

$y = \text{Arc } \text{tg } x$  ფუნქციის გრაფიკია ტანგენსიანი (ნახ. 41), ხოლო  $y = \text{arctg } x$  ფუნქციისა —  $AB$  წირი.

ცხადია,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

ახლა დავამტყიცოთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

რადგანაც  $\operatorname{arctg} x$  ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty; +\infty[$  შუალედში ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$$

4. დასასრულ განვიხილოთ განტოლება

$$\operatorname{ctg} y = x. \tag{21.10}$$

რადგანაც  $\operatorname{ctg} y$  ლეზლობს ყოველ მნიშვნელობას  $-\infty$  და  $+\infty$  შორის და, ამის გარდა, იგი პერიოდული ფუნქციაა  $\pi$  პერიოდით, ამიტომ  $x$ -ის ნებისმიერ მნიშვნელობას შეესაბამება  $y$ -ის უამრავი მნიშვნელობა, სახელდობრ

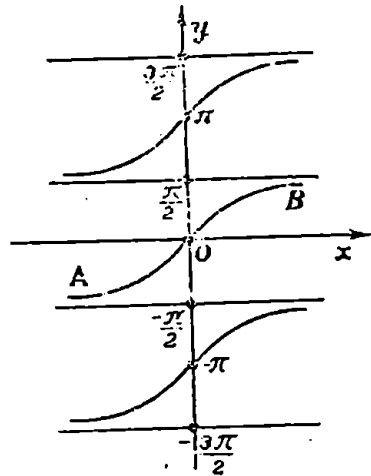
$$y = x + k\pi, \tag{21.11}$$

სადაც  $x$  არის (20.10) განტოლების ფესვი  $]0, \pi[$  ინტერვალში, ხოლო  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. ცხადია,  $y$  არის  $x$ -ის მრავალსახა ფუნქცია. ამ შემთხვევაში წერენ

$$y = \operatorname{Arctg} x.$$

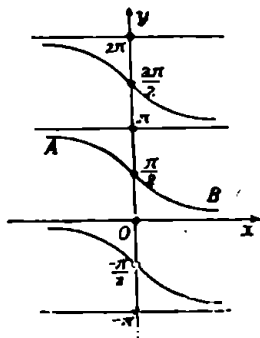
$\operatorname{Arctg} x$  ფუნქციას ეწოდება  $\operatorname{ctg} x$  ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. ეს შექცეული ფუნქცია რომ

ცალსახად იყოს განსაზღვრული, საჭიროა (21.10) განტოლებაში  $y$  განვიხილოთ ისეთ ინტერვალში, რომელშიაც  $\operatorname{ctg} y$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია. მაგალითად, ასეთ ინტერვალად შეგვიძლია



ნახ. 41.

აეილოთ  $0, \pi$ . ამ ინტერვალში  $\operatorname{ctg} x$  არსებითად კლებადია და იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას  $-\infty$  და  $+\infty$  შორის. ამიტომ  $x$ -ის ერთ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $-\infty$  და  $+\infty$  შორის, შეესაბამება  $0, \pi$  ინტერვალში  $y$ -ის ერთი მნიშვნელობა, რომლის კოტანგენსი  $x$ -ის ტოლია. ამ შემთხვევაში  $y$  არის  $x$ -ის ცალსახა ფუნქცია და მას აღნიშნავენ.



ნახ. 42.

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.  $\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x$  ფუნქციას ეწოდება  $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$ -ის მთავარი შტო. თუ გავითვალისწინებთ (21.11) ტოლობას, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + k\pi,$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია. განსაზღვრის თანახმად,

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x) = x,$$

ე. ი.  $\operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$  ისეთი კუთხეა, რომლის კოტანგენსი  $x$ -ის ტოლია. თუ გავითვალისწინებთ  $\operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x$ -ის განსაზღვრას, გვექნება

$$0 < \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x < \pi,$$

ამასთანავე

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} x = \pi.$$

ადვილად დავამტკიცებთ, რომ

$$\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x. \quad (21.12)$$

მართლაც,  $\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-x)$  და  $\pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$  კუთხეები მოთავსებულია  $0, \pi$  ინტერვალში. ორივე კუთხეს აქვს ერთნაირი კოტანგენსი:

$$\operatorname{ctg}[\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-x)] = -x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = -x.$$

აქედან გამომდინარეობს (21.12) ტოლობის მართებულობა.

$y = \operatorname{Arc} \operatorname{ctg} x$  ფუნქციის გრაფიკია კოტანგენსიოიდი (ნახ. 42), ხოლო  $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$  ფუნქციის გრაფიკია  $AB$  წირი.

§ 22. შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის  
დამოკიდებულებანი

ანალიზის მრავალი საკითხისათვის საჭიროა ვიცოდეთ დამოკიდებულებანი შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შორის.

1. დაეამტკიცოთ შემდეგ ტოლობათა მართებულობა.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (22.1)$$

$$\arctg x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (22.2)$$

დამტკიცება. პირობის თანახმად

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi.$$

თუ მეორე უტოლობების ყველა წევრს გავამრავლებთ  $(-1)$ -ზე, მივიღებთ

$$-\pi \leq -\arccos x \leq 0.$$

ამ უტოლობების ყველა წევრს მივუმატოთ  $\frac{\pi}{2}$ , გვექნება

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \arccos x \leq \frac{\pi}{2}.$$

ამრიგად,  $\arcsin x$  და  $\frac{\pi}{2} - \arccos x$  კუთხეები მოთავსებულია

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  სეგმენტზე. ამის გარდა,

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

ამიტომ მართებულია (22.1) ტოლობა.

ანალოგიურად მტკიცდება (22.2) ტოლობის მართებულობა.

2. გამოვსახოთ არკსინუსი არკტანგენსით. ვთქვათ,

$$y = \arcsin x.$$

მაშინ

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1. \quad (22.3)$$

$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  კუთხე მოთავსებულია  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  ინტერვალში და ამ კუთხის ტანგენსია  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , ხოლო (22.3) ტოლობის მიხედვით  $\arcsin x$  კუთხის ტანგენსია  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ . მაშასადამე,

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1. \quad (22.4)$$

3. გამოვსახოთ არკტანგენსი არკსინუსით. რადგანაც

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

ამიტომ

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (22.5)$$

4. გამოვსახოთ არკოსინუსი არკკოტანგენსით. ტოლობიდან

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{\cos(\arccos x)}{\sin(\arccos x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ვღებულობთ

$$\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1. \quad (22.6)$$

### § 28. ჰიპერბოლური ფუნქციები

ჰიპერბოლურ ფუნქციებს გამოყენება აქვს მათემატიკური ანალიზისა და ტექნიკის მრავალ საკითხში.

ფუნქციებს

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

ეწოდება ჰიპერბოლური ფუნქციები და მათ აღნიშნავენ შესაბამისად შემდეგი სიმბოლოებით:  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$ :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cth} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$



1.  $\operatorname{sh} x$  ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედ-  
ში, ჰიპერბოლური სინუსი ეწოდება. ჰიპერბოლური სინუსი  
არსებითად ზრდადია თავის განსაზღვრის არეში, ვინაიდან  $e^x$  არ-  
სებითად ზრდადია,  $e^{-x}$  კი არსებითად კლებადია  $]-\infty, +\infty[$  შუა-  
ლედში ცხადია, რომ

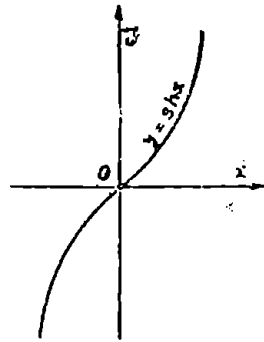
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty.$$

მაშასადამე,  $\operatorname{sh} x$  ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომე-  
ლიც მოთავსებულია  $]-\infty, +\infty[$  შუა-  
ლედში.

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x.$$

მაშასადამე,  $\operatorname{sh} x$  კენტი ფუნქციაა. ამ  
ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 43-ე  
ნახაზზე.



ნახ. 43.

2.  $\operatorname{ch} x$  ფუნქციას, რომელიც უწყ-  
ვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში, ჰი-  
პერბოლური კოსინუსი ეწოდე-  
ბა. ეს ფუნქცია არსებითად ზრდადია  
 $[0, +\infty[$  შუალედში. მართლაც, ვთქვათ  
 $0 \leq x_1 < x_2$ . გვაქვს

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{ch} x_1 &= \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2} - \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{x_2 - x_1} - 1)(e^{x_1} - e^{-x_2}) > 0. \end{aligned}$$

დაე"

ამრიგად,  $\operatorname{ch} x$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში.  
შემდეგ, ცხადია, რომ

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

ე. ი.  $\operatorname{ch} x$  წარმოადგენს ლუწ ფუნქციას. ამიტომ იგი არსებითად  
კლებადია  $]-\infty, 0]$  შუალედში.

$y = \operatorname{ch} x$  ფუნქციის გრაფიკს ჯაჭვწირი ეწოდება. ამ წირის  
გრაფიკი მოცემულია 44-ე ნახაზზე.

ასლა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობის მართებულობა:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{23.2}$$

გვაქვს

16 ვლ. კელიძე, ე. წითლანაძე

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

ადვილად მტკიცდება აგრეთვე შემდეგი ფორმულები:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

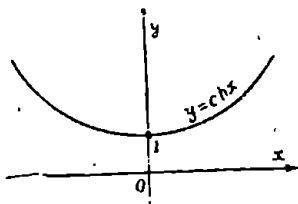
3.  $\operatorname{th} x$  ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში, ჰიპერბოლური ტანგენსი ეწოდება. ეს ფუნქცია არსებითად ზრდადია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. მართლაც, ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\operatorname{th} x = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1},$$

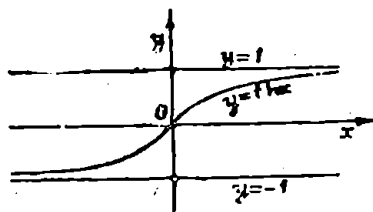
საიდანაც ჩანს, რომ  $\operatorname{th} x$  არსებითად ზრდადი ფუნქციაა  $[0, +\infty[$  შუალედში. შემდეგ, რაკი

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x,$$

ამიტომ  $\operatorname{th} x$  არსებითად ზრდადია  $]-\infty, 0[$  შუალედშიაც ამრიგად,  $\operatorname{th} x$  არსებითად ზრდადია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.



ნახ. 44.



ნახ. 45.

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

ასე რომ

$$-1 < \operatorname{th} x < +1, \text{ როდესაც } -\infty < x < +\infty.$$

$y = \operatorname{th} x$  ფუნქციის გრაფიკს წარმოადგენს 45-ე ნახაზზე მოცემული წირი.

4. შევისწავლოთ ახლა  $\operatorname{cth} x$  ფუნქცია, რომელსაც ჰიპერბო-

ლური კოტანგენსი ეწოდება. იგი განსაზღვრულია  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა  $x=0$  მნიშვნელობისა. ეს ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. ცხადია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{cth} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{cth} x = -\infty.$$

მაშასადამე,  $x=0$  წერტილში  $\operatorname{cth} x$  ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას.

შემდეგ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cth} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{cth} x = -1.$$

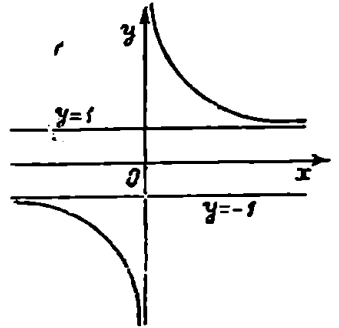
ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\operatorname{cth} x$  ფუნქცია კლებადია  $]-\infty, 0[$  და  $]0, +\infty[$  შუალედებში, მასთან

$$-\infty < \operatorname{cth} x < -1, \quad \text{როდესაც}$$

$$-\infty < x < 0,$$

$$1 < \operatorname{cth} x < +\infty, \quad \text{როდესაც}$$

$$0 < x < +\infty.$$



ნახ. 46.

$y = \operatorname{cth} x$  ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 46-ე ნახაზზე. დასასრულ, (22.1) ტოლობებიდან ადვილად მიიღება ფორმულები

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}, \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1.$$

ამრიგად, ჰიპერბოლური ფუნქციები ენათესავენ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს.

§ 24. შეკვეთული ჰიპერბოლური ფუნქციები

1. განტოლება  $x = \operatorname{sh} y$  განსაზღვრავს შეკვეთულ ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. ეს ფუნქცია აღინიშნება  $\operatorname{arsh} x$  სიმბოლოთი, ასე რომ

$$y = \operatorname{arsh} x$$

ვიპოვოთ  $\operatorname{arsh} x$  ფუნქციის გამოსახულება. რადგანაც

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} - 1}{2e^y},$$

ამიტომ გვაქვს:

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

აქედან

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

რაკი  $e^y > 0$ , ამიტომ რადიკალის წინ ასაღებია + ნიშანი. ასე, რომ

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს გავალოგარითმებთ  $e$  ფუძით, მივიღებთ

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

ანუ

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (24.1)$$

2. განვიხილოთ განტოლება

$$x = \operatorname{ch} y. \quad (24.2)$$

როგორც ვიცით,  $\operatorname{ch} y$  ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში, მასთან იგი არსებითად ზრდადია  $[0, +\infty[$  შუალედში, ხოლო იგი არსებითად კლებადია  $]-\infty, 0]$  შუალედში. ამის გარდა,  $\operatorname{ch} y$  ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას  $[1, +\infty[$  შუალედში. (24.2) განტოლება განსაზღვრავს  $y$ -ს როგორც  $x$ -ის ფუნქციას და მას ასე აღნიშნავენ

$$y = \operatorname{arch} x.$$

ვიპოვოთ  $\operatorname{arch} x$  ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს:

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{e^{2y} + 1}{2e^y}.$$

აქედან

$$e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

თუ ამოვხსნით ამ განტოლებას  $e^y$ -ის მიმართ, მივიღებთ

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}. \quad (24.3)$$

ჯერ განვიხილოთ რადიკალის წინ + ნიშანი:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავალოგარითმით  $e$  ფუძით, მივიღებთ

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

ანუ

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \quad (24.4)$$

ახლა (24.3) ტოლობაში რადიკალის წინ ავიღოთ — ნიშანი, გვექნება

$$e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

აქედან

$$y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

ანუ

$$\begin{aligned} \operatorname{arch} x &= \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}). \end{aligned} \quad (24.5)$$

ამრიგად, თუ გავითვალისწინებთ (24.4) და (24.5) ტოლობებს, შეგვიძლია დავწეროთ

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad 1 \leq x < +\infty. \quad (24.6)$$

როგორც ვხედავთ (24.6) ტოლობაში ორი ნიშანია. ეს მოსალოდნელიც იყო, ვინაიდან  $\operatorname{ch} y$  ფუნქციის ერთ მნიშვნელობას შეესაბამება  $y$  არგუმენტის ორი მნიშვნელობა, რომლებიც აბსოლუტური მნიშვნელობით ტოლი არიან.

3. რადგანაც  $x = \operatorname{ch} y$  ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $] -\infty, +\infty[$  შუალედში, ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შუქცეული ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $] -1, +1[$  ინტერვალში. ეს ფუნქცია აღინიშნება  $\operatorname{arth} x$  სიმბოლოთი:

$$y = \operatorname{arth} x.$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია და არსებითად ზრდადია  $] -1, +1[$  ინტერვალში.

ვიპოვოთ  $\operatorname{arth} x$  ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}.$$

აქედან

$$e^y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad -1 < x < +1.$$

ან ტოლობის ორივე ნაწილი გავალოგარიტმით  $e$  ფუძით, გვექნება

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

ანუ

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \quad (24.7)$$

4. განვიხილოთ განტოლება

$$x = \operatorname{cth} y.$$

როგორც ვიცით,  $\operatorname{cth} y$  ფუნქცია არსებითად კლებადია  $]-\infty, 0[$  და  $]0, +\infty[$  შუალედებში და ამ შუალედებში უწყვეტია. ამასთანავე  $\operatorname{cth} y$  ფუნქციის ცვლილების არეა  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  სიმრავლე. ამიტომ არსებობს ამ ფუნქციის შებენი ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  სიმრავლეზე. ეს ფუნქცია აღინიშნება  $\operatorname{arch} x$  სიმბოლოთი:

$$y = \operatorname{arch} x.$$

ახლა ვიპოვოთ  $\operatorname{arch} x$  ფუნქციის გამოსახულება. გვაქვს

$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}.$$

აქედან

$$e^y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad |x| > 1,$$

საიდანაც

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

ი. ი.

$$\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1. \quad (24.8)$$

## § 25. ელემენტარულ ფუნქციათა კლასი

ფუნქციათა იმ სიმრავლიდან, რომელსაც მათემატიკურ ანალიზში განიხილავენ, გამოყოფენ ეგრეთ წოდებულ ელემენტარულ ფუნქციებს. ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებია შემდეგი:

1.  $y = C$ , სადაც  $C$  არის მუდმივა.
2.  $y = x^a$ , სადაც  $a$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.
3.  $y = a^x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).
4. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \lg x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \operatorname{sec} x$ ,  $y = \operatorname{cosec} x$ .

ბ. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \arctg x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcsec} x$ ,  $y = \operatorname{arccosec} x$ .

განსაზღვრა 15.  $y = f(x)$  ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი წარმოიდგინება ერთი ფორმულით, რომელიც შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

ელემენტარული ფუნქციებია, მაგალითად,

$$y = \ln \cos x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad y = 2^{x^2},$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}^2(\ln x) + \ln \sin(x + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x^2 + \arcsin x + \operatorname{ctg}^2 3x}}$$

არაელემენტარულია ფუნქცია  $y = E(x)$ , სადაც  $E(x)$  აღნიშნავს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება  $x$ -ს.

$y = |x|$  ფუნქცია ელემენტარულია, ვინაიდან იგი წარმოიდგინება ასე

$$y = \sqrt{x^2}.$$

თეორემა 38. ნებისმიერ ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დამტკიცება. წინა პარაგრაფებში დავადგინეთ, რომ ყოველი ძირითადი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. შემდეგ, ნებისმიერი არითმეტიკული ოპერაცია უწყვეტ ფუნქციებზე გვაძლევს ფუნქციას, რომელიც უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

დასასრულ, 25-ე თეორემის თანახმად, უწყვეტი ფუნქცია უწყვეტი ფუნქციიდან კვლავ უწყვეტი ფუნქციაა. მაშასადამე, რაკი ყოველი ელემენტარული ფუნქცია შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებიდან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით, ამიტომ იგი უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 39. ვთქვათ,  $[a, c]$  და  $[c, b]$  სეგმენტებზე განსაზღვრულია შესაბამისად ელემენტარული ფუნქციები  $\varphi(x)$  და  $\psi(x)$ . თუ  $\varphi(c) = \psi(c)$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობებით

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{როდესაც } a \leq x \leq c, \\ \psi(x), & \text{როდესაც } c < x \leq b, \end{cases}$$

წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დაპტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(c) = \psi(c) - A.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\begin{aligned} f(x) = & \varphi \left[ c + \frac{(x-c) - |x-c|}{2} \right] + \\ & + \varphi \left[ c + \frac{(x-c) + |x-c|}{2} \right] - A. \end{aligned} \quad (25.1)$$

მართლაც, თუ  $a \leq x \leq c$ , მაშინ

$$\begin{aligned} f(x) = & \varphi \left( c + \frac{x-c+x-c}{2} \right) + \psi \left( c + \frac{x-c-x+c}{2} \right) - A = \\ = & \varphi(x) + \psi(c) - A = \varphi(x), \end{aligned}$$

ხოლო თუ  $c < x \leq b$ , მაშინ

$$\begin{aligned} f(x) = & \varphi \left( c + \frac{x-c-x+c}{2} \right) + \varphi \left( c + \frac{x-c+c-x}{2} \right) - A = \\ = & \varphi(c) + \psi(x) - A = \psi(x). \end{aligned}$$

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქცია წარმოდგენილია ერთი ფორმულით და ამიტომ იგი ელემენტარული ფუნქციაა.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ,

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{როდესაც } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & \text{როდესაც } 0 < x \leq \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში  $\varphi(x) = \sin^2 x$ ,  $\psi(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $c = 0$ . რადგანაც  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ . ამიტომ (24.1) ფორმულის მიხედვით

$$f(x) = \sin^2 \left( \frac{x-|x|}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{x+|x|}{2} \right).$$

მაშასადამე,  $f(x)$  არის ელემენტარული ფუნქცია  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \right]$  სეგმენტზე.



§ 28. უსასრულოდ მცირეთა შედარება. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები

ვთქვათ, რომელიმე საკითხის გამოკვლევისას ერთდროულად განსილება რამდენიმე უსასრულოდ მცირე  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , ... მრავალ შეთხვევაში საჭიროა აღნიშნულ უსასრულო მცირეთა ერთმანეთთან შედარება მათი ნულისაკენ მისწრაფების ხასიათის მიხედვით. ორი  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირის შედარებას საფუძვლად უდევს მათი ფარდობის ქცევა.

განსახილვოთ 16. თუ  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეთა  $\frac{\alpha}{\beta}$  ფარდობა უსასრულოდ მცირეა, მაშინ  $\alpha$ -ს ეწოდება მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე  $\beta$ -ს მიმართ.

მაგალითად, ვთქვათ,  $\alpha = x^3 \lg x$ ,  $\beta = 3x^2$ . ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც  $x \rightarrow 0$ . რადგანაც

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \lg x}{3x^2} = 0,$$

ამიტომ  $\alpha$  მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა  $\beta$ -თან შედარებით.

განსახილვოთ 17. თუ  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეთა  $\frac{\alpha}{\beta}$  ფარდობა უსასრულოდ დიდია, მაშინ  $\alpha$ -ს ეწოდება დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე  $\beta$ -ს მიმართ.

მაგალითად, ვთქვათ  $\alpha = 1 - \cos x$ ,  $\beta = x^2$ . ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც  $x \rightarrow 0$ . რაკი

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \sin \frac{x}{2} : \frac{x}{2} \right)^2 \frac{1}{2x^2} \right] = +\infty, \end{aligned}$$

ამიტომ  $1 - \cos x$  არის დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე  $x^2$ -ის მიმართ.

განსახილვოთ 18. თუ  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეთა  $\frac{\alpha}{\beta}$  ფარდობის ზღვარი ნულისაგან განსხვავებული სასრული რიცხვია, მაშინ  $\alpha$  და  $\beta$ -ს ეწოდება ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეები.

მაგალითად,  $\alpha = \sin x$  და  $\beta = \sin 2x$  ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც  $x \rightarrow 0$ . მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{\sin x}{x} : \frac{\sin 2x}{2x} \right) \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

ზოგჯერ საჭიროა ზუსტად დახასიათება ერთი უსასრულოდ მცირის ნულისაკენ მისწრაფებისა მეორესთან შედარებით. ამისათვის შემოვიღოთ

განსაზღვრა 19.  $\beta$  უსასრულოდ მცირეს ეწოდება  $k$  რიგის უსასრულოდ მცირე  $\alpha$  უსასრულოდ მცირის მიმართ, თუ  $\beta$  და  $\alpha^k$  უსასრულოდ მცირეები ერთი და იმავე რიგისაა.

მაგალითად, თუ  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეა მაშინ  $\alpha^2$ ,  $\alpha^3$ ,  $\sqrt{\alpha}$  არიან შესაბამისად მეორე, მესამე და  $\frac{1}{4}$  რიგის უსასრულოდ მცირეები  $\alpha$ -ს მიმართ.

განსაზღვრა 20.  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ .

მაგალითად,  $\sin x$  და  $x$  ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ვინაიდან

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

თუ  $\alpha$  და  $\beta$  ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, მაშინ წერენ  $\alpha \sim \beta$  ცხადია, რომ თუ  $\alpha \sim \beta$ , მაშინ  $\beta \sim \alpha$ , ხოლო თუ  $\alpha \sim \beta$  და  $\beta \sim \gamma$ , მაშინ  $\alpha \sim \gamma$ .

თეორემა 40. ორი  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $\alpha - \beta$  სხვაობა იყოს მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე, როგორც  $\alpha$ , ისე  $\beta$ -ს მიმართ.

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ,  $\alpha \sim \beta$ . გვაქვს

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 0.$$

ასევე

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0.$$

ამრიგად,  $\alpha - \beta$  არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე რო-

გორც  $\alpha$ , ისე  $\beta$ -ს მიმართ და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ,  $\alpha \sim \beta$  მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა  $\alpha$ -ს ( $\beta$ -ს) მიმართ. დასამტკიცებელია, რომ  $\alpha \sim \beta$ . პირობის თანახმად

$$\lim \frac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0.$$

შემდეგ, რაკი

$$1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha},$$

ამიტომ

$$\lim \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) = 0,$$

ე. ი.  $\alpha \sim \beta$ . პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

**თეორემა 41.** ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლათ მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეებია და  $\alpha \sim \alpha'$ ,  $\beta \sim \beta'$ . დასამტკიცებელია, რომ თუ არსებობს  $\lim \frac{\alpha}{\beta}$ , მა-

შინ იარსებებს  $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$  და მართებულია ტოლობა

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

გვაქვს

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\alpha}{\beta}.$$

აქედან

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემას გამოყენება აქვს ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვრის გამოთვლის დროს.

**შენიშვნა.** ორი უსასრულოდ მცირის შედარება ზოგჯერ არ

შეიძლება, ვინაიდან ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობას შეიძლება არ ჰქონდეს ზღვარი. მაგალითად, ვთქვათ,

$$\alpha = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \beta = x^2.$$

ეს ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებაა, როდესაც  $x \rightarrow 0$ . მაგრამ  $\frac{\alpha}{\beta} = \sin \frac{1}{x}$  არ მიისწრაფვის არავითარი ზღვრისაკენ, როცა  $x \rightarrow 0$ .

ახლა მოვიყვანოთ ზოგიერთი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირის მაგალითები.

1.  $\sin x \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ვინაიდან

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2.  $\operatorname{tg} x \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ . მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1.$$

3.  $(1+x)^\lambda - 1 \sim \lambda x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ , სადაც  $\lambda$  ნამდვილი რიცხვია. მართლაც, რადგანაც

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{x} = \lambda,$$

ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\lambda - 1}{\lambda x} = 1.$$

4.  $a^x - 1 \sim x \ln a$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ . მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln a = 1.$$

კერძოდ,  $e^x - 1 \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ .

5.  $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ , როდესაც  $\alpha \rightarrow 0$ , ვინაიდან

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$$

6.  $\arcsin x \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ვინაიდან

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

7.  $\arctg x \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ . მართლაც, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\arctg x = y$ , გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = 1.$$

თეორემა 42. თუ  $\omega$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  უსასრულოდ მცირეებია, ამასთანავე  $\omega$  წარმოადგენს დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეს  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  უსასრულოდ მცირეთა მიმართ, მაშინ

$$\omega + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \sim \omega.$$

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\begin{aligned} \lim \frac{\omega + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m}{\omega} &= \lim \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\omega} + \frac{\alpha_2}{\omega} + \dots + \frac{\alpha_m}{\omega} \right) = \\ &= 1 + \lim \frac{\alpha_1}{\omega} + \lim \frac{\alpha_2}{\omega} + \dots + \lim \frac{\alpha_m}{\omega} = 1, \end{aligned}$$

ვინაიდან

$$\lim \frac{\alpha_k}{\omega} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

აქედან გამომდინარეობს პრაქტიკული წესი უსასრულოდ მცირეთა ჯამის გამარტივების შესახებ.

ვთქვათ, მოცემულია უსასრულოდ მცირეთა ჯამი

$$\omega + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m,$$

რომლის შესაკრებთა რიცხვი სასრულია. თუ ამ ჯამის რომელიმე შესაკრები დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეთა დანარჩენ შესაკრებთა მიმართ, მაშინ ზღვრულ თანათარდობათა განხილვისას შეგვიძლია უკუვაგდოთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები, ვინაიდან აღებული უსასრულოდ მცირეთა ჯამი ეკვივალენტურია აღნიშნული დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირისა. აქვე შევნიშნოთ, რომ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე შესაკრები უნდა იყოს მხოლოდ ერთი, ვინაიდან, თუ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე რამდენიმეა, მაშინ მათ შეიძლება ერთმანეთი გააბათილონ და ამ შემთხვევაში აღნიშნული წესი არ გამოდგება.

მაგალითი 1. ვთქვათ,  $\beta = (1 - \cos \alpha) + 2\operatorname{tg} \alpha + 3\alpha^3 - 5\alpha^4$ , სადაც  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეთა. დავამტკიცოთ, რომ  $\beta \sim 2\operatorname{tg} \alpha$ .

დამტკიცება. რადგანაც  $1 - \cos \alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sim \frac{\alpha^2}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ , ამიტომ მოცემულ ჯამში დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე იქნება  $2\operatorname{tg} \alpha$ . მაშასადამე,  $\beta \sim 2\operatorname{tg} \alpha$ .

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , სადაც  $f(x) = \frac{a^x - b^x}{x}$ ,  
 $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ .

ამოხსნა. რადგანაც  $a^x - 1 \sim x \ln a$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln b}{x} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , თუ  $f(x) = \frac{a^{\sin x} - b^{\operatorname{tg} x}}{x}$ .

ამოხსნა. რაკი  $a^{\sin x} - 1 \sim \sin x \ln a$ ,  $b^{\operatorname{tg} x} - 1 \sim \operatorname{tg} x \ln b$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{\sin x} - 1}{x} - \frac{b^{\operatorname{tg} x} - 1}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\sin x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^{\operatorname{tg} x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \ln a}{x} - \\ &- \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \ln b}{x} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , სადაც

$$f(x) = \frac{\ln(1 + \sin^2 x + x^3)}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

ამოხსნა. რადგანაც  $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$ , როდესაც  $\alpha \rightarrow 0$  და  $\operatorname{tg} x \sim x$ , როდესაც  $x \rightarrow 0$ , ამიტომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + x^3}{x^2} = 1.$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , სადაც

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}}{\sin x}.$$

ამოხსნა. რადგანაც  $\sqrt{1 + \alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}$ , როდესაც  $\alpha \rightarrow 0$ , ამიტომ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - 1}{\sin x} - \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - 1}{\sin x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{2 \sin x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. ჩამოთვალეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები.
2. მოიყვანეთ ელემენტარული ფუნქციის განსაზღვრა.
3. მოიყვანეთ არაელემენტარული ფუნქციის მაგალითი.
4.  $A = -1, +1]$  სეგმენტზე განსაზღვრულია  $f(x)$  ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როდესაც } -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + 1, & \text{როდესაც } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

არის თუ არა ეს ფუნქცია ელემენტარული?

5. რას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქციის ზღვარი  $x_0$  წერტილში არის  $A$  რიცხვი?
6. მოიყვანეთ განსაზღვრა  $f(x)$  ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრებისა  $x_0$  წერტილში.
7. აქვს თუ არა ნებისმიერ ფუნქციას ზღვარი რაიმე  $x_0$  წერტილში? მოიყვანეთ მაგალითი, როდესაც ფუნქციას ზღვარი არა აქვს.
8. რას ეწოდება უსასრულოდ მცირე სიდიდე  $x_0$  წერტილში?
9. როგორ სიდიდეს ეწოდება დადებითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე? უარყოფითი უსასრულოდ დიდი სიდიდე?
10. რა დამოკიდებულება არსებობს უსასრულოდ მცირესა და უსასრულოდ დიდ სიდიდეებს შორის?
11. თუ  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , მაშინ  $f(x) - A$  სხვაობა როგორი სიდიდეა  $x_0$  წერტილში?
12. ვთქვათ,  $f(x) = A + \alpha(x)$ , სადაც  $\alpha(x)$  უსასრულოდ მცირეა  $x_0$  წერტილში, ხოლო  $A$  მუდმივია. რას წარმოადგენს მაშინ  $f(x)$  ფუნქციისათვის  $A$  რიცხვი?
13. ჩამოაყალიბეთ და დაამტკიცეთ თეორემები ზღვართა შესახებ.

14. რას ნიშნავს, რომ  $\alpha$  უსასრულოდ მცირე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა  $\beta$  უსასრულოდ მცირის მიმართ?

15. რას ნიშნავს, რომ  $\alpha$  და  $\beta$  უსასრულოდ მცირეები ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია?

16. მოიყვანეთ ეკვივალენტური ორი უსასრულოდ მცირის განსაზღვრა.

17. შეიძლება თუ არა ორი უსასრულოდ მცირე ყოველთვის შევადაროთ?

18. როდის ეწოდება  $\alpha$ -ს  $\beta$ -ური რიგის უსასრულოდ მცირე  $\beta$  უსასრულოდ მცირის მიმართ?

19. რაში მდგომარეობს ორი უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა?

20. შეიძლება თუ არა ორი უსასრულოდ მცირის ფარდობის ზღვრის გამოთვლისათვის მრიცხველი და მნიშვნელი შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებით?

21. რას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში? უწყვეტია მარჯვნიდან? უწყვეტია მარცხნიდან?

22. რას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  ინტერვალში?  $[a, b]$  სეგმენტზე?

23. რას ნიშნავს რომ  $f(x)$  ფუნქცია წყვეტილია  $x_0$  წერტილში?

24. შეიძლება თუ არა ფუნქცია განსაზღვრული არ იყოს  $x_0$  წერტილში, მაგრამ იყოს უწყვეტი? იყოს წყვეტილი?

25. როგორ წერტილს ეწოდება ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი? მეორე გვარის წყვეტის წერტილი?

26. ორი უწყვეტი ფუნქციის ჯამი, ნამრავლი და ფარდობა შეიძლება თუ არა წყვეტილი იყოს?

27. რაში მდგომარეობს ბოლცანოს და კოშის თეორემები?

28. რაში მდგომარეობს უწყვეტ ფუნქციათა შესახებ ვაიერშტრასის თეორემები?

29. რა პირობებშია რთული ფუნქცია უწყვეტი?

30. შეიძლება თუ არა უწყვეტი ფუნქცია წყვეტილი ფუნქციიდან იყოს უწყვეტი ფუნქცია?

31. რას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია შუალედში?

32. რაში მდგომარეობს კანტორის თეორემა?



ს ა გ ა რ ჯ ი შ ო

1. მოძებნეთ ქველა და ზელა საზღვრები შემდეგი ფუნქციებისა:

ა)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ] $-\infty, +\infty$ ] შუალედზე.

ბ)  $f(x) = \frac{1}{x} + x$  ]0,  $+\infty$ [ შუალედზე.

გ)  $f(x) = \sin x + \cos x$   $[0, 2\pi]$  სეგმენტზე.

დ)  $f(x) = x - E(x)$   $[0, 1]$  სეგმენტზე, სადაც  $E(x)$  არის  $x$ -ის მთელი ნაწილი.

პასუხი: ა) 0 და 1; ბ) 2 და  $+\infty$ ; გ)  $-\sqrt{2}$  და  $\sqrt{2}$ ; დ) 0 და 1.

2. ვთქვათ,  $f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{4x^2 + 1}$ ,  $x \neq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2.$$

გამოთვალეთ ზღვრები

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$ .      პასუხი:  $-8$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$ .      პასუხი:  $\frac{2}{3}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .      პასუხი:  $-1$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-3x^4} - \sqrt{1-2x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ .      პასუხი:  $-6$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^4+1} - x^2 \right)$ .      პასუხი: 0.

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x + 2\sin x}$ .      პასუხი:  $\frac{2}{3}$ .

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{x^2}. \quad \text{პასუხი: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}. \quad \text{პასუხი: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^x. \quad \text{პასუხი: } e^2.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}. \quad \text{პასუხი: } e.$$

$$13. \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{x}{m} \right)^m. \quad \text{პასუხი: } 1.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} [n(a^{1/n} - 1)]. \quad \text{პასუხი: } \ln a.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} (a^{1/n} + b^{-1/n} - 2). \quad \text{პასუხი: } \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{x}. \quad \text{პასუხი: } \alpha - \beta.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}. \quad \text{პასუხი: } 1.$$

18. შტოლცის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ზღვრები:

$$ა) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}; \quad ბ) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3};$$

გ)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 2^m + \dots + n^m}{n^{m+1}}$ , სადაც  $m$  მთელი დადებითი რიცხვია;

$$დ) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^m + 3^m + \dots + (2n-1)^m}{n^{m+1}}, \quad m \text{ მთელი დადებითი რიცხვია.}$$

გია.

$$\text{პასუხი: ა) } \frac{1}{3}, \quad ბ) \frac{4}{3}; \quad გ) \frac{1}{m+1}; \quad დ) \frac{2^m}{m+1}.$$

19. დაამტკიცეთ, რომ  $f(x) = |x|$  ფუნქცია უწყვეტია  $-\infty$ ,  $+\infty$  შუალედში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

20. მოცემულია ფუნქცია  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , როდესაც  $x \neq 2$  და  $f(2) = 0$ . დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია წყვეტილია  $x = 2$  წერტილში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

21.  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{როდესაც } x \neq 0, \\ 0, & \text{როდესაც } x = 0. \end{cases}$$

დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ფუნქცია უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი.

22.  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x$  არკუმენტის

ყველა მნიშვნელობისათვის, გარდა  $x = 0$  მნიშვნელობისა. რა მნიშვნელობა უნდა მივანიჭოთ  $f(x)$  ფუნქციას  $x = 0$  წერტილში. რომ ეს ფუნქცია იყოს უწყვეტი ამ წერტილში?

23.  $D(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია ასე:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ 1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია.} \end{cases}$$

$D(x)$  ფუნქციას ეწოდება დირიხლეს (Dirichlet) ფუნქცია. დაამტკიცეთ რომ დირიხლეს ფუნქცია წყვეტილია  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის.

24. ააგეთ ისეთი  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც წყვეტილია  $x$ -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის,  $|f(x)|$  კი უწყვეტია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში.

25.  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, +\infty[$  შუალედში და აქვს სასრული ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია მოცემულ შუალედში.

26. ვთქვათ,  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები უწყვეტია და არიან პერიოდული. დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0,$$

მაშინ  $x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის  $g(x) = f(x)$ .

27. ააგეთ ისეთი ფუნქცია, რომელიც უწყვეტია მხოლოდ ერთ წერტილში.

28. დაამტკიცეთ, რომ სეგმენტზე მონოტონურ ფუნქციას შეიძლება ქონდეს მხოლოდ პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

29. დაამტკიცეთ, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ

$$m(x) = \inf_{a < t < x} \{f(t)\} \quad \text{და} \quad M(x) = \sup_{a < t < x} \{f(t)\}$$

ფუნქციები უწყვეტია  $[a, b]$ -ზე.

30. დაამტკიცეთ, რომ თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $X$  შუალედში, მაშინ

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \quad \text{და} \quad \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

ფუნქციები უწყვეტია  $X$  შუალედში.

31. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია  $[a, b]$  სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ თუ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n < b),$$

მაშინ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

## ფუნქციის წარმოებულ და დიფერენციალი

წინა თავებში გადმოცემული მასალა დიფერენციალური აღრიცხვისა და მათემატიკური ანალიზის სხვა განყოფილებათა ლოგიკური ფუნდამენტია.

დიფერენციალური აღრიცხვის წარმოშობის მთავარი წყარო იყო ორი ამოცანა, რომლებიც წამოყენებული იყო მე-17 საუკუნეში მეცნიერებისა და ტექნიკის მოთხოვნებით. ამ ამოცანებს ქვემოთ განვიხილავთ.

### § 1. არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი

ვთქვათ, მოცემულია  $X$  შუალედში განსაზღვრული  $y=f(x)$  ფუნქცია.  $X$  შუალედში ავიღოთ  $x$  არგუმენტის ორი  $x_0$  და  $x_1$  მნიშვნელობა. სხვაობას  $x_1 - x_0$  ეწოდება  $x$  არგუმენტის ნაზრდი და მას აღნიშნავენ  $\Delta x$  სიმბოლოთი:

$$x_1 - x_0 = \Delta x.$$

აქედან

$$x_1 = x_0 + \Delta x.$$

$\Delta x$  სიდიდეს ეწოდება  $x_0$ -ის ნაზრდი. შევნიშნაეთ, რომ  $\Delta x$  მთლიანი სიმბოლოა და არა  $\Delta$  და  $x$ -ის ნამრაველი.

ახლა განვსაზღვროთ  $y=f(x)$  ფუნქციის ნაზრდი. ვთქვათ,  $x$  წარმოადგენს არგუმენტის მნიშვნელობას  $X$  შუალედში და შემდეგ  $x$  ლებულობს  $\Delta x$  ნაზრდს. მაშინ არგუმენტის ახალი მნიშვნელობა იქნება  $x + \Delta x$ . სხვაობას  $f(x + \Delta x) - f(x)$  ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ნაზრდი და აღინიშნება  $\Delta y$  ან  $\Delta f$  სიმბოლოთი:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (1.1)$$

მაგალითი. ვიპოვოთ  $f(x) = x^3$  ფუნქციის ნაზრდი, როდესაც  $x = 1, \Delta x = 0,1$ .

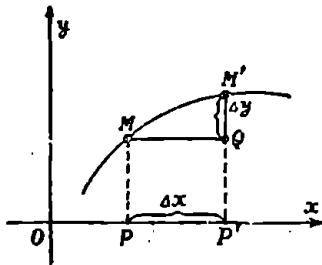
ამოხსნა: გვაქვს:

$$x + \Delta x = 1,1; f(1) = 1, f(1,1) = (1,1)^3 = 1,331.$$

მაშასადამე,

$$\Delta y = f(1,1) - f(1) = 1,331 - 1 = 0,331.$$

ახლა ვაჩვენოთ ფუნქციის ნაზრდის გეომეტრიული მნიშვნელობა. როგორც ვიცით,  $y = f(x)$  განტოლება გამოსახავს  $Oxy$  კოორდინატთა სისტემის მიმართ გარკვეულ წირს (ნახ. 47).



ნახ. 47.

ღია, რომ

$$P'M' = f(x + \Delta x)$$

და

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = P'M' - PM.$$

ახლა  $M$  წერტილზე გავავლოთ  $Ox$  ღერძის პარალელური წრფე. მივიღებთ  $PP'QM$  მართკუთხედს. რადგანაც  $P'Q = PM$ , ამიტომ

$$\Delta y = QM'.$$

მაშასადამე, მოცემული ფუნქციის  $\Delta y$  ნაზრდი გეომეტრიულად გამოსახავს მიმართული  $QM'$  მონაკვეთის სიდიდეს.

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.1) ტოლობას,  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობა შეგვიძლია განვსაზღვროთ ასე:

$y = f(x)$  ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი  $x$  წერტილში, თუ არგუმენტის  $x$  მნიშვნელობის უსასრულოდ მცირე  $\Delta x$  ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე  $\Delta y$  ნაზრდი.

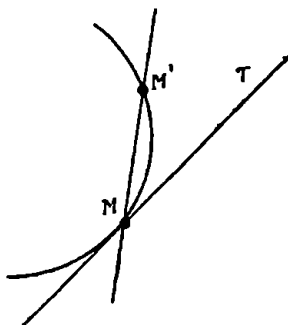
§ 2. ამოცანა წირის მხების მოძებნის შესახებ

ელემენტარულ გეომეტრიაში მხები განსაზღვრულია მხოლოდ წრეწირისათვის, როგორც წრე, რომელსაც წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს. სხვა წირებისათვის ელემენტარულ გეომეტრიაში მხები განსაზღვრული არ არის.

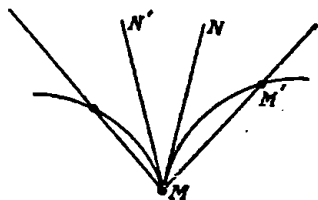
ვთქვათ,  $M$  არის მოცემული წირის რაიმე წერტილი (ნახ. 48). ავიღოთ წირზე მეორე  $M'$  წერტილი და გავაულოთ  $MM'$  მკვეთი. როდესაც  $M'$  წერტილი მოძრაობს წირზე და უახლოვდება  $M$  წერტილს, მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას.

მოცემული წირის მხები  $M$  წერტილში ეწოდება  $MM'$  მკვეთის ზღვოვლ მდებარეობას, როდესაც  $M'$  წერტილი მიისწრაფვის  $M$  წერტილისაკენ წირის გასწვრივ. უფრო ზესტად:

$MT$  წრფეს ეწოდება წირის მხები  $M$  წერტილში, თუ ამ წრფესა და  $MM'$  მკვეთს შორის კუთხე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $M$  და  $M'$  წერტილებს შორის მანძილი ნულისაკენ მიისწრაფვის.  $M$  წერტილს ეწოდება შეხების წერტილი.



ნახ. 48.



ნახ. 49.

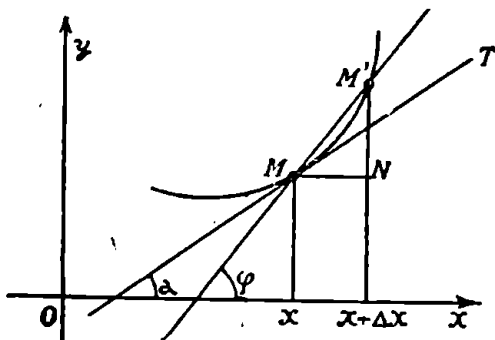
შევნიშნოთ, რომ წირს შეიძლება არ ჰქონდეს მხები ზოგიერთ წერტილში. მაგალითად, 49-ე ნახაზზე წარმოდგენილ წირს არა აქვს მხები. მართლაც, მხების განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი  $MM'$  მკვეთი უნდა მიისწრაფოდეს გარკვეულ  $MT$  წრფისაკენ, როდესაც  $M'$  წერტი-

ლი მიისწრაფვის  $M$  წერტილისაკენ. მაგრამ 49-ე ნახაზზე მოცემული წირის შემთხვევაში, მკვეთი უახლოვდება  $MN$  მდებარეობას, როდესაც  $M'$  წერტილი უახლოვდება  $M$  წერტილს მარჯვნიდან, და უახლოვდება  $MN'$  მდებარეობას, როდესაც  $M'$  წერტილი უახლოვდება  $M$  წერტილს მარცხნიდან. ასე რომ მოცემულ წირს არა აქვს მხები  $M$  წერტილში.

ახლა ვთქვათ, უწყვეტი წირის განტოლებაა  $y=f(x)$ . ავიღოთ ამ წირზე  $M(x, y)$  წერტილი და ვიგულისხმობთ, რომ არსებობს  $MT$  მხები, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელური არაა (ნახ. 50). ვიპოვოთ მხების კუთხური კოეფიციენტი. ამისათვის წირზე ავიღოთ ნებისმიერი  $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$  წერტილი და  $M$  და  $M'$  წერტილებზე გავავლოთ  $MM'$  მკვეთი. აღვნიშნოთ  $\alpha$ -თი კუთხე  $Ox$  ღერძსა და  $MT$  მხებს შორის, ხოლო  $Ox$  ღერძსა და  $MM'$  მკვეთს შორის კუთხე  $\varphi$  ასოთი. ცხადია,  $\varphi$  კუთხე მიისწრაფვის  $\alpha$  კუთხისაკენ, როდესაც  $M'$  წერტილი მიისწრაფვის  $M$  წერტილისაკენ, ე. ი.

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi.$$

მაგრამ რაკი  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , ამიტომ



ნახ. 50.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi.$$

ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

აქედან

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

ამრიგად, მხების კუთხური კოეფიციენტის მოძებნის ამოცანამ მიგვიყვანა ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარლობის ზღერის მოძებნამდე.

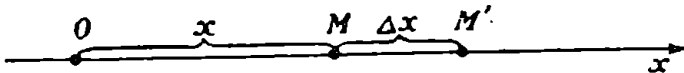


§ 3. ამოცანა ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მოძებნის შესახებ

ვთქვათ, ნივთიერი  $M$  წერტილი მოძრაობს  $Ox$  ღერძზე (ნახ. 51). დროის ყოველ  $t$  მომენტში  $M$  წერტილის  $x$  აბსცისას ექნება გარკვეული მნიშვნელობა, ასე, რომ  $x$  წარმოადგენს  $t$  დროის ფუნქციას

$$x = f(t). \quad (3.1)$$

(3.1) განტოლებას ეწოდება  $M$  წერტილის მოძრაობის განტოლება. დროის ფიქსირებულ  $t$  მომენტს მივცეთ ნებისმიერი  $\Delta t$  ნაზრდი, მაშინ  $x$  მიიღებს სათანადო  $\Delta x$  ნაზრდს.  $M$  წერტილს თანაბ-



ნახ. 51.

რად რომ ემოძრაება დროის  $[t, t + \Delta t]$  შუალედში, მაშინ მისი სიჩქარე იქნებოდა  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ , რომელიც მუდმივ სიდიდეს წარმოადგენს. თუ

$M$  წერტილი თანაბრად არ მოძრაობს, მაშინ  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  ფარდობას ეწოდება საშუალო სიჩქარე დროის  $[t, t + \Delta t]$  შუალედში, ხოლო

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$  ეწოდება  $M$  წერტილის სიჩქარე  $t$  მომენტში.

ამრიგად, ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მოძებნის ამოცანამ მიგვიყვანა ფუნქციის ნაზრდისა და არჯუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვრის მოძებნამდე.

§ 4. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა

ვთქვათ,  $y = f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x_0$  წერტილის რაიმე მიდამოში.  $x_0$ -ს მივცეთ ისეთი  $\Delta x$  ნაზრდი, რომ  $x_0 + \Delta x$  წერტილი ეკუთვნოდეს  $x_0$  წერტილის აღნიშნულ მიდამოს. ფუნქციის ნაზრდი იქნება

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო ზღვარი  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ანუ, რაც იგივეა,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება  $y=f(x)$  ფუნქციის წარმოებული  $x_0$  წერტილში და აღნიშნება  $y'$  ან  $f'(x_0)$  სიმბოლოთი.  $x_0$  ასო ფრჩხილებში აღნიშნავს იმ წერტილს, რომელშიაც განხილულია წარმოებული. ზოგჯერ  $y'$  სიმბოლოს ნაცვლად წერენ  $y'_x$ ; ამით ხაზგასმულია, რომ წარმოებული აღებულია  $x$  ცვლადით.

ამრიგად, ფუნქციის წარმოებული არის ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობის ზღვარი, როდესაც არგუმენტის ნაზრდი ნებისმიერად მიისწრაფვის ნულისაკენ.

თუ ეს ზღვარი სასრულია, მაშინ წარმოებულს სასრული ეწოდება, ხოლო თუ იგი უსასრულოა, წარმოებულს ეწოდება უსასრულო.

ამრიგად, მოცემულ წერტილში წარმოებული წარმოადგენს რიცხვს. თუ რაიმე შეუღედის ყოველ წერტილში არსებობს სასრული წარმოებული, მაშინ ეს წარმოებული წარმოადგენს  $x$ -ის ფუნქციის მოცემულ შეუღედში.

$f(x)$  ფუნქციის ვეწოდებთ წარმოებადს  $x_0$  წერტილში, თუ არსებობს სასრული ან უსასრულო  $f'(x_0)$  წარმოებული.

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

მაგალითი 1. რაიმე  $X$  შეუღედში მოცემულია ფუნქცია  $y=f(x)=C$ , სადაც  $C$  მუდმივია. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. ავიღოთ  $X$  შეუღედის შიგა  $x$  წერტილი.  $\Delta x$  ნაზრდი იმდენად მცირე შეგვიძლია ავიღოთ, რომ  $x+\Delta x$  მიეკუთვნოს აგრეთვე  $X$  შეუღედს. ამიტომ

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

და, მაშასადამე,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ . აქედან  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ , ე. ი.  $X$  შეუღედის

ყოველ შიგა  $x$  წერტილში

$$f'(x) = 0.$$

ამრიგად, მუდმივის წარმოებული ნულის ტოლია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y=x$  ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. აღვნიშნოთ  $x$ -ის ნაზრდი  $\Delta x$ -ით,  $y$ -ის კი  $\Delta y$ -ით. გვაქვს

$$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

აქედან  $\Delta y = \Delta x$ , საიდანაც  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ . ამრიგად,  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

მაშასადამე, იმ ფუნქციის წარმოებულს, რომელიც დამოუკიდებელი ცვლადის ტოლია, უდრის ერთს.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $y = x^3$  ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. ნებისმიერი ფიქსირებული  $x$ -თვის გვაქვს

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3,$$

საიდანაც

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როცა  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2,$$

ე. ი.

$$(x^3)' = 3x^2.$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  ფუნქციის წარმოებულის  $x=0$  წერტილში.

ამოხსნა.  $x=0$  მნიშვნელობას მივცეთ  $\Delta x$  ნაზრდი, მაშინ  $y$ -იც მიიღებს სათანადო  $\Delta y$  ნაზრდს:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = \sqrt[3]{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

და, მაშასადამე,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty.$$

საძიებელი წარმოებული უსასრულოა.

## § 6. ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებული

$f(x)$  ფუნქციის წარმოებული  $x_0$  წერტილში განსაზღვრული გვექონდა როგორც  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  ფარდობის ზღვარი, როდესაც  $\Delta x$  ნებისმიერად მიისწრაფვის ნულისაკენ. ზღვრებს

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{და} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ეწოდება შესაბამისად მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები  $x_0$  წერტილში. ეს წარმოებულები აღინიშნება შესაბამისად  $f'(x_0+)$  და  $f'(x_0-)$  სიმბოლოებით.

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $f(x)$  ფუნქციის წარმოებადობისათვის  $x_0$  წერტილში აუცილებელია და საკმარისია  $x_0$  წერტილში მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულების თანატოლობა.

დასასრულ, ფუნქციის ეწოდება წარმოებადი  $[a, b]$  სეგმენტზე, თუ იგი წარმოებადი ამ სეგმენტის ყველა შიგა წერტილში, ხოლო  $a$  წერტილში ფუნქციას აქვს მარჯვენა წარმოებულო,  $b$  წერტილში კი—მარცხენა.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $f(x) = \sqrt{x}$  ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული  $x=0$  წერტილში.

ამოხსნა. არგუმენტის 0 მნიშვნელობას მიეცეთ დადებითი  $\Delta x$  ნაზრი, მაშინ  $y$ -იც მიიღებს  $\Delta y$  ნაზრას:

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = \sqrt{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}.$$

გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , გვექნება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty,$$

ე. ი.

$$f'(0+) = +\infty.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $f(x) = |x|$  ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები  $x=0$  წერტილში.

ამოხსნა. ვთქვათ,  $x < 0$ , მაშინ  $f(x) = -x$  და, მაშასადამე,

$$\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $f'(0-) = -1$ :

ანალოგიურად მივიღებთ  $f'(0+) = 1$ .

§ 6. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა

პირველ პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ უწყვეტი  $y = f(x)$  წი-  
რის  $M(x, y)$  წერტილზე გამავალი იმ მხების  $k$  კუთხური კოეფი-  
ციენტი, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელური არაა, გამოსახება  
ტოლობით

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ წარმოებულის განსაზღვრას, გვექნება

$$k = f'(x). \quad (6.1)$$

ამრიგად, თუ  $y = f(x)$  წირს აქვს  $M(x, y)$  წერტილში მხები, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელური არაა, მაშინ არსებობს სასრული წარმოებული  $f'(x)$ .

პირიქით, ადვილი დასამტკიცებელია, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული  $x$  წერტილში, მაშინ  $y = f(x)$  წირს სათანადო  $M$  წერტილში აქვს მხები, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელური არაა და მხების  $k$  კუთხური კოეფიციენტი განისაზღვრება (6.1) ტოლობით.

**თეორემა 1.** თუ უწყვეტ  $f(x)$  ფუნქციას  $x = x_0$  წერტილში აქვს წარმოებული

$$f'(x_0) = \infty,$$

მაშინ  $y = f(x)$  წირს სათანადო  $M_0$  წერტილში  $Oy$  ღერძის პარალელური მხები.

დამტკიცება. რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, ამიტომ არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს  $\Delta x = M_0 P$  შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი  $\Delta y = PM$ . მაშასადამე,  $M_0 M \rightarrow 0$ , როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$  (ნახ. 52). პირიქით, უსასრულოდ მცირე მანძილს  $M_0 M$  შეესაბამება უსასრულოდ მცირე ნაზრდი  $\Delta x$ .

გავევლოთ  $M_0$  წერტილზე  $Oy$  ღერძის პარალელური  $N_0T$  წრფე და  $\beta$ -თი აღვნიშნოთ მახვილი კუთხე  $M_0M$  მკვეთსა და  $N_0T$  წრფეს შორის. ცხადია, რომ

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

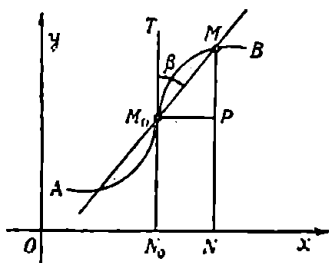
პირობის თანახმად  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha$ , რაც ტოლფასია ტოლობისა

$$\lim_{M_0M \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha, \text{ ანუ } \lim_{M_0M \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{M_0M \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $\lim_{M_0M \rightarrow 0} \beta = 0$ . ეს კი იმას ნიშნავს,



ნახ. 52.

რომ  $N_0T$  არის  $y = f(x)$  წირის მხები. თეორემა დამტკიცებულია.

მართებულია აგრეთვე შებრუნებული თეორემაც: თუ  $y = f(x)$  წირს აქვს  $Oy$  ღერძის პარალელური მხები  $M_0$  წერტილში, მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x_0$  წერტილში და  $f'(x_0) = \infty$ .

ამრიგად: ფუნქციის წარმოებული გეომეტრიულად წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკის მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

### § 7. წარმოებულის მათემატიკური მნიშვნელობა

მეორე პარაგრაფში წერტილის მოძრაობის  $x = f(t)$  განტოლების მიხედვით დროის  $t$  მომენტისათვის მოქმედნეთ წერტილის  $v$  სიჩქარე, როგორც ზღვარი

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

თუ გავიხსენებთ წარმოებულის განსაზღვრას, გვექნება

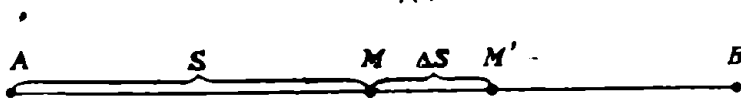
$$v = f'(t).$$

ამრიგად,  $x = f(t)$  ფუნქციის წარმოებული მექანიკულ-

რად წარმოადგენს იმ წერტილის სიჩქარეს  $t$  მომენტში, რომლის მოძრაობის განტოლებაა  $x=f(t)$ , რასაც მოკლედ ასე გამოვთქვამთ: სიჩქარე წარმოადგენს პანძილის წარმოებულს დროით.

დასასრულ განვიხილოთ კიდევ ერთი ინტერპრეტაცია — სიმკვრივის ფიზიკური ცნება. ვთქვათ,  $AB$  წარმოადგენს ნივთიერ მონაკვეთს და მასზე აკილოთ რაიმე  $M$  წერტილი (ნახ. 53).  $AB$  მონაკვეთის  $AM$  ნაწილის სიგრძე აღვნიშნოთ  $s$ -ით, მასა კი  $m$ -ით. ცხადია,  $s$ -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $m$ -ის გარკვეული მნიშვნელობა, ასე რომ მასა წარმოადგენს  $s$ -ის ფუნქციას.

$$m = \varphi(s).$$



ნახ. 53.

ამბობენ, რომ მასა თანაბრად განაწილებულია  $AB$  მონაკვეთზე, თუ მონაკვეთის ორა ნებისმიერი ნაწილი, რომლებსაც თანატოლი სიგრძე აქვთ, შეიცავენ თანატოლ მასებს. ამ შემთხვევაში  $AB$  მონაკვეთის ნებისმიერი ნაწილის მასის ფარდობა ამავე ნაწილის სიგრძესთან მუდმივი სიდიდეა. იგი რიცხობრივად იმ მასის ტოლია, რომელიც აქვს ნივთიერი მონაკვეთის ერთეული სიგრძის ნებისმიერ ნაწილს. ამ ფარდობას ნივთიერი  $AB$  მონაკვეთის სიმკვრივე ეწოდება. თუ მასა თანაბრად განაწილებული არაა, მაშინ საჭირო ხდება შემოვიღოთ სიმკვრივის ცნება წერტილში.

განვიხილოთ  $AB$  მონაკვეთის  $MM'$  ნაწილი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ  $\Delta s$  სიმბოლოთი, მასა კი  $\Delta m$ -ით. ცხადია,

$$\Delta m = \varphi(s + \Delta s) - \varphi(s).$$

$\frac{\Delta m}{\Delta s}$  ფარდობას ეწოდება საშუალო წრფივი სიმკვრივე, ხოლო ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც  $\Delta s \rightarrow 0$  ეწოდება  $AB$  მონაკვეთის სიმკვრივე  $M$  წერტილში და იგი აღინიშნება  $\rho$  ასოთი. ასე რომ

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s},$$

ე. ი.

$$\rho = \varphi'(s).$$

## § 8. ფუნქციის დიფერენციალი

თუ  $y = f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x$  წერტილის მიდამოში და ამ ფუნქციის  $\Delta y$  ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი შესაკრების ჯამი

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (8.1)$$

სადაც  $A$  სასრული რიცხვია და დამოუკიდებელია  $\Delta x$  ნაზრდისაგან, ხოლო  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეა, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი  $x$  წერტილში.

ფუნქციის ნაზრდის  $A \Delta x$  შესაკრებს, რომელიც წრფივია არგუმენტის  $\Delta x$  ნაზრდის მიმართ, ფუნქციის დიფერენციალი ეწოდება.

**თეორემა 2.**  $y = f(x)$  ფუნქციის დიფერენცირებადობისათვის  $x$  წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $f(x)$  ფუნქციას  $x$  წერტილში ჰქონდეს სასრული წარმოებული.

**დამტკიცება.** ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ეთქვას,  $y = f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში. მაშინ  $\Delta y$  წარმოვიდგება (8.1) ტოლობით. გავყოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი  $\Delta x$ -ზე, გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

აქედან

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

ე. ი.  $y' = A$  და ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ეთქვას,  $f'(x)$  სასრულია. მაშინ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

სადაც  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეა, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ . აქედან

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x.$$

ამ გამოსახულების მარჯვენა ნაწილი ორი შესაკრების ჯამია. სადაც  $f'(x) \Delta x$  წრფივი ნაწილია, ხოლო  $f'(x)$  დამოუკიდებელია  $\Delta x$ -ისაგან. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $y$  ფუნქცია დიფერენცირებადია. თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.



$y=f(x)$  ფუნქციის დიფერენციალს აღნიშნავენ  $dy$  ან  $df(x)$  სიმბოლოთი და იკითხება ასე: „დე იგრეკ“ ან „დე ეფ იქს“ ამრიგად,

$$dy=f'(x)\Delta x, \tag{8.2}$$

ე. ი. ფუნქციის დიფერენციალი ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის ნაზრდის ნამრავლის ტოლია.

კერძოდ, თუ  $y=f(x)=x$ , გვაქვს  $f'(x)=1$ , რის გამოც ბუნებრივია დავწერთ

$$dx=\Delta x.$$

ამიტომ (8.2) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$dy=f'(x) dx, \tag{8.3}$$

ე. ი. ფუნქციის დიფერენციალი უდრის ფუნქციის წარმოებულისა და არგუმენტის დიფერენციალის ნამრავლს.

(8.3) ფორმულიდან გვაქვს

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

მაშასადამე, ფუნქციის წარმოებულო უდრის ფუნქციის დიფერენციალისა და არგუმენტის დიფერენციალის ფარდობას.

სიმბოლო  $\frac{dy}{dx}$  იკითხება ასე: „დე იგრეკ დე იქსით“.

**თეორემა 3.** თუ  $y=f(x)$  ფუნქციას  $x$  წერტილში აქვს ნულისაგან განსხვავებული სასრული წარმოებულო, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციის  $\Delta y$  ნაზრდი ეკვივალენტურია  $dy=f'(x)\Delta x$  დიფერენციალისა, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ .

დამტკიცება. ვთქვათ,  $\Delta x$  უსასრულოდ მცირე სიდიდეა. მაშინ

$$\Delta y - f'(x)\Delta x = \Delta y - dy = \alpha \Delta x.$$

რაკი  $f'(x) \neq 0$ , ამიტომ  $\Delta y$  ეკვივალენტურია  $dy$  დიფერენციალისა, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ . თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** თუ  $f'(x)=0$ , მაშინ  $dy=0$ , მაგრამ  $\Delta y$  როგორც წესი, ნულისაგან განსხვავებულია. მაშასადამე,  $\Delta y$  და  $dy$  სიდიდეთა ეკვივალენტობა ირღვევა, როდესაც  $f'(x)=0$ .

18 ვლ. ჰელიძე, ე. წითლანაძე

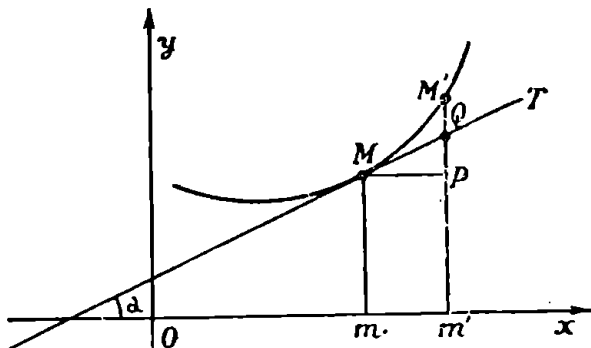
## § 9. ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა

ვთქვათ,  $y=f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში. გამოვარკვეოთ რას წარმოადგენს გეომეტრიულად მოცემული ფუნქციის დიფერენციალი. ავავსოთ  $y=f(x)$  წირი (ნახ. 54). ნახაზიდან ჩანს, რომ

$$y=mM, \quad \Delta x=mm'=MP, \quad \Delta y=m'M'-m'P=PM', \quad f'(x)=\operatorname{tg} \alpha.$$

ფუნქციის დიფერენციალი ასე წარმოგვიდგება

$$dy=f'(x)\Delta x=\operatorname{tg} \alpha \cdot MP.$$



ნახ. 54.

მაგრამ  $MPQ$  სამკუთხედიდან გვაქვს

$$MP \cdot \operatorname{tg} \alpha = PQ.$$

მაშასადამე.

$$dy = PQ.$$

ამრიგად,  $y=f(x)$  ფუნქციის დიფერენციალი გეომეტრიულად წარმოადგენს მხების წერტილის ორდინატის ნაზრდს.

## § 10. კავშირი დიფერენციალთან და უწყვეტობას შორის

**თეორემა 4.** თუ  $y=f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x_0$  წერტილში, მაშინ იგი უწყვეტია ამ ამავე წერტილში.

**დამტკიცება.** რაკი  $y=f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x_0$  წერტილში, ამიტომ მართებულია ტოლობა

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

სადაც  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეა  $\Delta x$ -თან ერთად, ხოლო  $f'(x_0)$  სასრული რიცხვია. აქედან ვღებულობთ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0,$$

რაც ამტკიცებს  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობას  $x_0$  წერტილში.

შენიშვნა. შეიძლება ფუნქცია იყოს უწყვეტი წერტილში, მაგრამ დიფერენცირებადი არ იყოს. მართლაც, განვიხილოთ  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია ასე:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{როდესაც } x \neq 0, \\ 0, & \text{როდესაც } x = 0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $x$ -ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. დავამტკიცოთ, რომ მოცემული ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა  $x=0$  წერტილში. ავიღოთ  $x$  არგუმენტის 0 მნიშვნელობისათვის  $\Delta x$  ნაზრდი, მაშინ  $y=f(x)$  ფუნქციის  $\Delta y$  ნაზრდი ასე გამოისახება:

$$\Delta y = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

მაგრამ  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}$  არ არსებობს, ამიტომ  $f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადი არაა  $x=0$  წერტილში.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომლებიც არც ერთ წერტილში დიფერენცირებადი არ არიან. ასეთი ფუნქციის მაგალითს განვიხილავთ მეორე ტომში.

### კ ი თ ხ ვ ე ბ ი

1. რას ეწოდება წირის მხები მოცემულ წერტილში?
2. რას ეწოდება ფუნქციის წარმოებული?
3. რა გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის წარმოებულს?
4. რა მექანიკური მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის წარმოებულს?
5. რას უდრის მუდმივის წარმოებული? არგუმენტის წარმოებული?
6. რას ნიშნავს ფუნქცია წარმოებადია? ფუნქცია დიფერენცირებადია?

7. რას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი?
8. როგორ გამოისახება ფუნქციის დიფერენციალი?
9. რა გეომეტრიული მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის დიფერენციალს?

## ს ა გ ა რ ჯ ი შ ო

1. იპოვეთ  $y = \frac{1}{x}$  ფუნქციის წარმოებული.

პასუხი:  $y' = -\frac{1}{x^2}$ .

2. მოძებნეთ  $y = 2x^2$  პარაბოლის მხების კუთხური კოეფიციენტი, თუ შეხების წერტილია (1.2).

პასუხი:  $k = 4$ .

3. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა  $x = 2t^2 - t + 1$ . იპოვეთ წერტილის სიჩქარე  $t = 2$  მომენტისათვის.

პასუხი: 6.

4. მოცემულია ფუნქცია  $y = |x|$ . დაამტკიცეთ, რომ ეს ფუნქცია  $x = 0$  წერტილში წარმოებადი არ არის.

## § 11. წარმოებულისა და დიფერენციალის უმარტივესი თვისებები

**თეორემა 5.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია  $x$  წერტილში, მაშინ  $y = Af(x)$  ფუნქციაც, სადა  $A$  მუდმივია, წარმოებადია და მართებულია ტოლობა

$$[Af(x)]' = Af'(x). \quad (11.1)$$

ე. ი. მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

**დამტკიცება.** მივცეთ  $x$ -ს ნაზრდი  $\Delta x$ , მაშინ  $y$ -იც მიიღვს  $\Delta y$  ნაზრდს. ამიტომ გვექნება

$$\Delta y = Af(x + \Delta x) - Af(x) = A[f(x + \Delta x) - f(x)].$$

აქედან ვღებულობთ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

თუ ამ ტოლობაში ზღვიარზე გადავალთ, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ (11.1) ტოლობას.

**თეორემა 6.** თუ  $u = f(x)$  და  $v = g(x)$  დიფერენცირებადი ფუნქციებია  $x$  წერტილში, მაშინ  $u + v$  ფუნქციაც დი-

ფერენცირებადია იმავე წერტილში და მართებულა ტოლობა

$$(u+v)' = u' + v', \quad (11.2)$$

ე. ი. ჯამის წარმოებული წარმოებულთა ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $y = u + v$ . თუ  $x$  მიიღებს  $\Delta x$  ნაზრდს, მაშინ  $u$ ,  $v$  და  $y$  მიიღებენ შესაბამისად  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  და  $\Delta y$  ნაზრდებს, რის გამო გვექნება

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v).$$

აქედან

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

მაშასადამე,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (11.3)$$

მოცემულობის თანახმად არსებობს სასრული ზღვრები  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

და  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$ . ამიტომ იარსებებს  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , ე. ი.  $y$  ფუნქცია წარ-

მოებადია  $x$  წერტილში. ახლა თუ (11.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ (11.2) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

(11.2) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $x$  არგუმენტის  $dx$  დიფერენციალზე, გვექნება

$$(u+v)dx = u'dx + v'dx.$$

აქედან

$$d(u+v) = du + dv, \quad (11.4)$$

ე. ი. ჯამის დიფერენციალი დიფერენციალთა ჯამის ტოლია.

(11.2) და (11.4) ფორმულები მართებულა შესაყრება ნებისმიერი რიცხვის შემთხვევაშიც.

### § 12. ფუნქციათა ნამრავლის წარმოებული და დიფერენციალი

თეორემა 7. თუ  $u = f(x)$  და  $v = g(x)$  ფუნქციები დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში, მაშინ  $uv$  ნამრავლიც დიფერენცირებადია იმავე წერტილში და მართებულა ტოლობა

$$(uv)' = u'v + v'u, \quad (12.1)$$

ე. ი. ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებული უდრის პირველი ფუნქციის წარმოებულს გამრავლებულს მეორე ფუნქციასზე, პლუს მეორე ფუნქციის წარმოებული გამრავლებული პირველ ფუნქციასზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $y = uv$ . ვთქვათ,  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  და  $\Delta y$  არიან  $u$ ,  $v$  და  $y$  ფუნქციების ნაზრდები, რომლებიც შეესაბამება  $x$  არგუმენტის  $\Delta x$  ნაზრდს. გვექნება

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v.$$

აქედან

$$\Delta y = \Delta u \cdot v + \Delta v \cdot u + \Delta u \cdot \Delta v,$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}v + \frac{\Delta v}{\Delta x}u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$$

მაგრამ  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$ . მაშასადამე,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'v + v'u.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა (12.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $x$  არგუმენტის  $dx$  დიფერენციალზე, მივიღებთ

$$(uv)' dx = u' dx \cdot v + v' dx \cdot u.$$

აქედან

$$d(uv) = v du + u dv, \quad (12.2)$$

ე. ი. ორი ფუნქციის ნამრავლის დიფერენციალი უდრის პირველი ფუნქციის დიფერენციალის ნამრავლს მეორე ფუნქციასზე პლუს მეორე ფუნქციის დიფერენციალის ნამრავლი პირველ ფუნქციასზე.

სამი დიფერენცირებადი ფუნქციის ნამრავლის შემთხვევაში გვაქვს

$$(uvw)' = [(uv) \cdot w]' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + v'u)w + uv'w,$$

ანუ

$$(uvw)' = u'vw + uv'w' + uvw'.$$

საზოგადოდ,  $n$  დიფერენცირებადი  $u_1, u_2, \dots, u_n$  ფუნქციისათვის გვექნება

$$(u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} u_n) = u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} u_n + u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} u_n' + \dots + u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} u_n'$$
(12.3)

კერძოდ, თუ

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = x,$$

გვექნება

$$u_1' = u_2' = \dots = u_n' = 1$$

და (11.3) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$(x^n)' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n\text{-ჯერ}}$$

ანუ

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \tag{12.4}$$

§ 13. წილადის წარმოებული და დიფერენციალი

თეორემა 8. თუ  $u = u(x)$  და  $v = v(x)$  ფუნქციები დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და  $v(x) \neq 0$ , მაშინ  $\frac{u}{v}$  წილადიც დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u''}{v^2}, \tag{13.1}$$

ე. ი. წილადის წარმოებული უდრის მრიცხველის წარმოებულის ნამრავლს მნიშვნელზე მინუს მნიშვნელის წარმოებულის ნამრავლი მრიცხველზე და ეს სხვაობა გაყოფილი მნიშვნელის კვადრატზე.

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $y = \frac{u}{v}$ . რადგანაც  $v(x)$

უწყვეტი ფუნქციაა და  $v(x) \neq 0$ , ამიტომ  $x$  არგუმენტს შეგვიძლია მივცეთ იმდენად მცირე  $\Delta x$  ნაზრდი, რომ შესრულდეს პირობა  $v + \Delta v \neq 0$ . ამრიგად,

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

აქედან

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u \cdot v - \Delta v \cdot u}{(v + \Delta v)v}.$$

საიდანაც

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - \frac{\Delta v}{\Delta x} u}{(v + \Delta v)v}$$

და თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u'v - v'u}{v^2},$$

ე. ი. მართებულია (13.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. ვიპოვოთ  $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$  ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. (13.1) ფორმულის მიხედვით

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 1)'(x - 1) - (x - 1)'(x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, \quad (x \neq 1). \end{aligned}$$

ახლა (13.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ არგუმენტის  $dx$  დიფერენციალზე, გვექნება

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}, \quad (13.2)$$

ე. ი. წილადის დიფერენციალი უდრის მრიცხველის დიფერენციალის ნამრავლს მნიშვნელზე მინუს მნიშვნელის დიფერენციალის ნამრავლი მრიცხველზე და ეს სხვაობა გაყოფილი მნიშვნელის კვადრატზე.

#### § 14. ბრიჯონოზებრივი ფუნქციების წარმოებული

1. ვიპოვოთ  $y = \sin x$  ფუნქციის წარმოებული. ყოველი  $x$ -თვის გვაქვს

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$



რადგანაც

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1.$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x,$$

ე. ი. ყოველი  $x$ -თვის

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (14.1)$$

ასევე

$$d(\sin x) = \cos x dx. \quad (14.2)$$

2. ვიპოვოთ  $y = \cos x$  ფუნქციის წარმოებული. ამ ფუნქციის  $\Delta y$  ნაზრდი ასე გამოისახება

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , გვექნება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x,$$

ე. ი. ყოველი  $x$ -თვის

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (14.3)$$

ასევე

$$d(\cos x) = -\sin x dx. \quad (14.4)$$

3. ვიპოვოთ  $y = \operatorname{tg} x$  ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

აქ იგულისხმება, რომ  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). წილადის წარმოებულის წესის თანახმად

$$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

ამრიგად,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (14.5)$$

აქედან

$$d(\operatorname{ctg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}. \quad (14.6)$$

4. მოვიძებნოთ  $y = \operatorname{ctg} x$  ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$y' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

ი. ი.

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (14.7)$$

აქედან

$$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}. \quad (14.8)$$

### § 15. რთული ფუნქციის წარმოებული

**თეორემა 9.** ვთქვათ,  $y=f(u)$ , სადაც  $u=g(x)$ . თუ არ გუ-  
მენტის რაიმე  $x$  მნიშვნელობისათვის  $u=g(x)$  ფუნქ-  
ცია დიფერენცირებადია, ხოლო  $u$ -ს სათანადო მნიშ-  
ვნელობისათვის  $y=f(u)$  ფუნქციაც დიფერენცირება-  
დია, მაშინ რთული  $y=f[g(x)]$  ფუნქციის წარმოებუ-  
ლი არსებობს და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad (15.1)$$

ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცე-  
მული ფუნქციის წარმოებულს დამხმარე ცვლადით,  
გამრავლებულს დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე  
დამოუკიდებელი ცვლადით.

დამტკიცება. რადგანაც  $y=f(u)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია. ამიტომ

$$\Delta y = f'(u) \Delta u + \alpha \Delta u, \quad (15.2)$$

სადაც  $\alpha$  უსასრულოდ მცირეა, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ .

ახლა  $x$ -ს მივცეთ  $\Delta x$  ნაზრდი, მაშინ  $u$  მიიღებს  $\Delta u$  ნაზრდს და, მაშასადამე,  $y$  მიიღებს  $\Delta y$  ნაზრდს.  $f(x)$  ფუნქციის უწყვეტობის გამო  $\Delta u \rightarrow 0$ , როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , ამასთანავე  $\Delta u$  ნაზრდმა თავისი ცვლილებისას შეიძლება ნულის მნიშვნელობაც მიიღოს. ამ შემთხვევაში (15.2) ტოლობით მოცემული  $\alpha$  განსაზღვრული არ არის. ვიგულისხმობთ  $\alpha$  ნულის ტოლად, როდესაც  $\Delta u = 0$ . მაშინ (15.2) ტოლობას ადგილი აქვს, როცა  $\Delta u = 0$ .

თუ გავყოფთ (15.2) ტოლობის ორივე ნაწილს  $\Delta x$ -ზე, გვექნება

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

მაგრამ, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მაშინ  $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow f'(x)$  და  $\alpha \rightarrow 0$ . ამიტომ უქანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მტკიცდება, რომ არსებობს მარცხენა ნაწილის ზღვარი. მაშასადამე, მართებულია (15.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

დასასრულ შევნიშნობთ, რომ (15.1) ფორმულა შეიძლება გავაერთიანოთ იმ შემთხვევაზეც, როდესაც ფუნქცია წარმოდგენილია არა ორი, არამედ რამდენიმე ფუნქციის ერთობლიობის საშუალებით. მაგალითად, თუ

$$y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x),$$

მაშინ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (15.3)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y = \lg^2 x$  ფუნქციის წარმოებულო.

ამოხსნა.  $y$  არის  $x$  არგუმენტის რთული ფუნქცია და იგო არაცხადი სახით ასე წარმოგვიდგება:

$$y = u^2, \quad u = \lg x.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის მიხედვით

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

მაგრამ

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = \cos^3(1+x^4)$  ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. არაცხადი სახით ეს ფუნქცია ასე წარმოგვიდგება:

$$y = u^3, \quad u = \cos v, \quad v = 1 + x^4.$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

მაგრამ

$$\frac{dy}{du} = 3u^2, \quad \frac{du}{dv} = -\sin v, \quad \frac{dv}{dx} = 4x^3.$$

მაშასადამე,

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot 4x^3 = -12 \cos^2(1+x^4) \sin(1+x^4)x^3.$$

შენიშვნა. წარმოებულების გამოთვლაში ძირითადი როლი მიეკუთვნება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესს. რთული ფუნქციის გასწარმოებლად შემოგვაქვს დამხმარე ცვლადები. მაგალითად,

$$y = \sqrt{\operatorname{tg} 5x} \quad (15.4)$$

რთული ფუნქცია  $u$  და  $v$  დამხმარე ცვლადების საშუალებით ასე წარმოვადგინოთ:

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \quad u = \operatorname{tg} v, \quad v = 5x,$$

რაც საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების (15.3) ფორმულა.

სტუდენტმა უნდა მიიღწიოს ამ წესის გამოყენების სრულ გაგებას. ამის შემდეგ დამხმარე ცვლადების შემოღება საჭირო არ არის და ამ ცვლადების შემოღებლად უნდა შევძლოთ ფუნქციის წარმოებული მოძებნა.

ახლა (15.4) ფუნქცია ასე გავაწარმოთ:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left( \left[ \operatorname{tg} 5x \right]^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left( \operatorname{tg} 5x \right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = \\ &= \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{tg} 5x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} (5x)' = \frac{5}{2 \sqrt{\operatorname{tg} 5x} \cos^2 5x} \end{aligned}$$

§ 16. რთული ფუნქციის დიფერენციალი. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა

თუ  $y=f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში, მაშინ

$$dy = f'(x) dx. \quad (16.1)$$

ამ ფორმულის გამოყენებისას ნაგულისხმევი იყო, რომ  $x$  დამოუკიდებელი ცვლადია.

ახლა, ვთქვათ,  $x$  თვითონ  $t$  ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა

$$x = \varphi(t),$$

მაშინ  $y$  წარმოადგენს  $t$  ცვლადის რთულ ფუნქციას. ისმის კითხვა: გამოისახება თუ არა რთული ფუნქციის  $dy$  დიფერენციალი იმავე (16.1) ფორმულით? რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dt} = f'(x) \frac{dx}{dt}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $dt$ -ზე, მივიღებთ

$$dy = f'(x) dx. \quad (16.2)$$

ეს კი გარეგნულად იგივე (16.1) ფორმულაა, რომელიც უკვე გვექონდა.

ამრიგად, ფუნქციის დიფერენციალის ფორმა უცვლელი რჩება იმ შემთხვევაშიც, როდესაც  $x$  წარმოადგენს რაიმე  $t$  ცვლადის ფუნქციას.

ამ თვისებას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა.

შევნიშნოთ, რომ (16.1) და (16.2) ფორმულებში  $dx$  სხვადასხვაა. პირველში  $dx$  იგივეა, რაც  $\Delta x$ , მეორეში კი  $dx = \varphi'(t) dt$ .

§ 17. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებულნი

განვიხილოთ  $y = \ln x$  ფუნქცია. იგი განსაზღვრულია  $]0, +\infty[$  შუალედში.  $x$  არგუმენტს მიეცეთ  $\Delta x$  ნაზრდი; მაშინ  $y$  ფუნქცია მიიღებს ნაზრდს

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

მაგრამ

$$\ln \left( 1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \sim \frac{\Delta x}{x}.$$

თუ გამოვიყენებთ თეორემას ეკვივალენტურ უსასრულოდ მცირეთა შესახებ, გვექნება

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{x} : \Delta x \right) = \frac{1}{x}.$$

ე. ი.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (17.1)$$

ესაა ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული

ახლა ადვილია  $\lg_a x$  ფუნქციის გაწარმოება ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).  
მართლაც, რადგანაც

$$\lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

ამიტომ

$$(\lg_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (17.2)$$

თუ (17.1) და (17.2) ტოლობების ორივე ნაწილს გავამრავლებთ  $dx$ -ზე, გვექნება

$$d \ln x = \frac{dx}{x}, \quad d \lg_a x = \frac{dx}{x \ln a}.$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y = \ln(ax^2 + bx + c)$  ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ax^2 + bx + c} \frac{d}{dx} (ax^2 + bx + c) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$  ფუნქციის დიფერენციალი, სადაც  $|x| < 1$ .

ამოხსნა. გვაქვს

$$dy = d \ln(1-x) - d \ln(1+x) = -\frac{dx}{1-x} - \frac{dx}{1+x} = \frac{2x dx}{x^2-1}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $\ln|x|$  ფუნქციის დიფერენციალი.

ამოხსნა. თუ  $x > 0$ , მაშინ  $|x| = x$  და, მაშასადამე,  $\ln|x| = \ln x$ , ამიტომ, როცა  $x > 0$ , გვაქვს

$$d \ln|x| = \frac{dx}{x}$$

თუ  $x < 0$ , მაშინ  $|x| = -x$  და, მაშასადამე,

$$d \ln|x| = d \ln(-x) = \frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

ამროგად,  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან, გვექნება

$$d \ln|x| = \frac{dx}{x}. \quad (17.3)$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ  $y = \ln \operatorname{ctg} x$  ფუნქციის წარმოებულო. ამოხსნა. გვაქვს

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin 2x}$$

§ 18. ლოგარითული წარმოებულო

თეორემა 10. თუ  $u = f(x)$  ფუნქციაა დიფერენცირებადი რაიმე  $x$  წერტილში და ამავე წერტილში  $f(x) > 0$ , მაშინ  $y = \ln f(x)$  ფუნქციაც დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (18.1)$$

დამტკიცება. რადგანაც  $y = \ln u$ , ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

ე. ი. მართებულია (18.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

$\frac{f'(x)}{f(x)}$  ფარდობას ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებულო.

მაგალითი 1. მოცემულია ფუნქცია

$$y = \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2(x+3)^{10}} \quad (x > 2). \quad (18.2)$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებულო.

ამოხსნა. როდესაც  $x > 2$ , მაშინ  $y$  ფუნქციის მრიცხველი და მნიშვნელი დადებითია, ამიტომ შეიძლება (18.2) ტოლობის გალოგარითმება. გვაქვს

$$\ln y = 3 \ln(x-2) - 2 \ln(x+1) - 10 \ln(x+3). \quad (18.3)$$

(18.3) ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} - \frac{10}{x+3}.$$

აქედან

$$y' = y \left( \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} - \frac{10}{x+3} \right).$$

თუ  $y$ -ის ნაცვლად ჩივისვამთ მის გამოსახულებას, მივიღებთ

$$y' = \frac{(x-2)^2(-9x^2+20x+41)}{(x+1)^3(x+3)^{11}}. \quad (18.4)$$

თუ  $x \leq 2$ , მაშინ (18.3) ფორმულა აზრს კარგავს, ვინაიდან  $y$ -ის მნიშვნელობანი არადადებითია, მაგრამ (18.4) ფორმულა ძალაში რჩება, როდესაც  $x \neq -1$  და  $x \neq -3$ . ამისათვის საკმარისია (18.2) ფორმულა შეეცვალოთ ფორმულით

$$|y| = \left| \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2(x+3)^{10}} \right|.$$

აქედან

$$\ln |y| = 3 \ln|x-2| - 2 \ln|x+1| - 10 \ln|x+3|.$$

(18.3) ფორმულის თანახმად ამ ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+1} - \frac{10}{x+3}.$$

აქედან მიიღება (18.4) ფორმულა.



§ 19. მაჩვენებლიანი და ხარისხოვანი ფუნქციების წარმოებულთა  
განვიხილოთ მაჩვენებლიანი ფუნქცია

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1).$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია  $x$ -ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვიპოვოთ ამ ფუნქციის წარმოებული რაიმე  $x$  წერტილში. ამისათვის  $x$  მნიშვნელობას მივცეთ  $\Delta x$  ნაზრდი, მაშინ  $y$ -იც მიიღებს  $\Delta y$  ნაზრდს:

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1).$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \quad (19.1)$$

როგორც ვიცით

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a.$$

ახლა (19.1) ტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a,$$

ე. ი. .

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (19.2)$$

კერძოდ, თუ  $a = e$ , მაშინ (19.2) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$(e^x)' = e^x, \quad (19.3)$$

ე. ი.  $e^x$  ფუნქციის წარმოებული უდრის თვით ამ ფუნქციას.

ახლა განვიხილოთ  $y = x^a$  ფუნქცია, სადაც  $a$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ამ ფუნქციას ეწოდება ზოგადი ხარისხოვანი ფუნქცია. როგორც ვიცით, როდესაც  $a$  მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ

$$(x^a)' = a x^{a-1}. \quad (19.4)$$

ქვემოთ დავამტკიცებთ, რომ (18.4) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნამდვილი  $a$ -თვის.

ჯერ ვიგულისხმობთ, რომ  $x > 0$ ; მაშინ  $y = x^a$  ფუნქცია შეგვიძლია ასე წარმოვიდგინოთ

$$y = e^{a \ln x}.$$

(19.3) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად გვექნება

19 ვლ. პელიძე, ე. წითლანაძე

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} \cdot y = \frac{\alpha}{x} x^\alpha.$$

აქედან მიიღება (19.4) ფორმულა.

ახლა, ვთქვათ,  $x < 0$ , მაშინ  $x^\alpha$  საზოგადოდ განსაზღვრული არაა ყველა  $\alpha$ -სათვის, მაგრამ ყველა იმ  $\alpha$ -სათვის, რომელთათვის  $x^\alpha$  განსაზღვრულია  $x$ -ის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის, მართებულია იგივეობა

$$x^\alpha = (-x)^\alpha (-1)^\alpha$$

და, მაშასადამე, შეგვიძლია გამოვიყენოთ (19.4) ფორმულა, რის საფუძველზე გვექნება

$$(x^\alpha)' = (-1)^\alpha \alpha (-x)^{\alpha-1} (-1) = (-1)^{\alpha+1} \alpha (-1)^{\alpha-1} (-x)^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1},$$

ე. ი. (19.4) ფორმულა მართებულია ამ შემთხვევაშიც.

დასასრულ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $x=0$ . თუ  $\alpha=1$ , მაშინ  $x'=1$  ნებისმიერი  $x$ -სათვის და, მაშასადამე, (19.4) ფორმულა ძალაში რჩება, თუ ჩავთვლით  $0^0$  ერთის ტოლად. თუკი  $\alpha > 1$  და  $x=0$ , მაშინ

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x} = 0$$

და, მაშასადამე, (19.4) ფორმულა მართებულია ამ უკანასკნელ შემთხვევაშიც. თუ  $\alpha < 1$ , მაშინ (19.4) ფორმულა აზრს კარგავს, როდესაც  $x=0$ .

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y=2^{\operatorname{tg}^2 x}$  ფუნქციის წარმოებული:

ამოხსნა. (19.2) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{tg}^2 x) = 2^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{tg} x) = \\ &= 2^{\operatorname{tg}^2 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 2^{1+\operatorname{tg}^2 x} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} = 2^{\sec^2 x} \operatorname{tg} x \sec^2 x. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$  ფუნქციის წარმოებული. ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y = (\operatorname{ctg} x)^{1/3}.$$

(19.4) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად-

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3} (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{dx} = \frac{1}{3} (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left( -\frac{1}{\sin^2 x} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{3\sin^2 x} \end{aligned}$$

§ 20. ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოება

ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება  $y = u^v$  სახის ფუნქციას, სადაც  $u$  და  $v$  არის  $x$  არგუმენტის ფუნქციები.

თეორემა 11. თუ  $u(x)$  და  $v(x)$  დიფერენცირებადი ფუნქციებია რაიმე შუალედში და ამასთანავე ამ შუალედში  $u(x) > 0$ , მაშინ აღნიშნულ შუალედში  $y = [u(x)]^{v(x)}$  ფუნქცია დიფერენცირებადია და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx} = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \quad (20.1)$$

დამტკიცება. მოცემული  $y$  ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y = e^{v \ln u}.$$

(19.3) ფორმულისა და რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{v \ln u} \frac{d}{dx} (v \ln u) = e^{v \ln u} \left( \frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right) = \\ &= u^v \left( \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + \ln u \cdot \frac{dv}{dx} \right) = v u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მას შემდეგ, რაც დამტკიცებულია  $y = u^v$  ფუნქციის დიფერენცირებადობა, საკმარისია ვიპოვოთ  $y$  ფუნქციის ლოგარითმული წარმოებული და სათანადო გამარტივების შემდეგ მივიღებთ (20.1) ფორმულას.

მაგალითი. ვიპოვოთ  $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$  ფუნქციის წარმოებული იმ  $x$  წერტილებში, სადაც  $\operatorname{tg} x > 0$ .

ამოხსნა. მოცემული ტოლობის გალოგარითმების შედეგად მივიღებთ

$$\ln y = \sin x \ln \operatorname{tg} x.$$

გავაწარმოოთ ტოლობის ორივე ნაწილი, გვექნება

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \sin x \cdot \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg} x} = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.$$

აქედან

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} (\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \sec x).$$

**§ 21. შამტაული ფანატიის წარმოებული. შამტაული ბრიგონომატიული ფანატიის წარმოებული**

**თეორემა 12.** ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტზე არსებითად ზრდადი და უწყვეტი  $y=f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია სეგმენტის შიგა  $x_0$  წერტილში. თუ  $x=\varphi(y)$  არის  $f(x)$  ფუნქციის შექცეული ფუნქცია, მაშინ იგი წარმოებადია შესაბამის  $y_0$  წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (21.1)$$

**დამტკიცება.** თუ  $f'(x_0)=0$ , მაშინ (21.1) ფორმულაში უნდა ვიგულისხმეთ, რომ  $\varphi'(y_0)=\infty$ , ხოლო თუ  $f'(x_0)=\infty$ , მაშინ

$$\varphi'(y_0)=0.$$

პირობის თანახმად,  $x=\varphi(y)$  ფუნქცია ღებულობს  $x_0$  მნიშვნელობას  $y_0$  წერტილში. ახლა  $y$  არგუმენტს მივცეთ  $\Delta y$  ნაზრდი. მაშინ  $x$  ცვლადი მიიღებს სათანადო  $\Delta x$  ნაზრდს:

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\Delta x \neq 0$ , თუ  $\Delta y \neq 0$ . ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (21.2)$$

რაკი  $x=\varphi(y)$  ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ  $\Delta x \rightarrow 0$ , როდესაც  $\Delta y \rightarrow 0$ . მაშასადამე,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x_0).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (21.3)$$

(21.2) და (21.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ  $\varphi(y)$  ფუნქციას აქვს  $y_0$  წერტილში  $\varphi'(y_0)$  წარმოებული, ამასთანავე მართებულია (21.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

1. ვიპოვოთ  $y = \arcsin x$  ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია  $[-1, 1]$  შუალედში. ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა

$$x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \quad (21.4)$$

ვთქვათ,

$$x \in ]-1, 1[, \text{ მაშინ } y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [,$$

რის გამო,  $\cos y > 0$ . მაშასადამე,

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}.$$

(21.1) ფორმულის თანახმად

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (21.5)$$

თუ  $-1 < x < 1$ .

ახლა ვთქვათ,  $x$  არის ერთ-ერთი საზღვრითი წერტილი. მაგალითად  $x = -1$ . მაშინ ჩვენ უნდა განვიხილოთ  $y = \arcsin x$  ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული  $x = -1$  წერტილში. მაშინ  $\frac{dy}{dx} = +\infty$ ,

როდესაც  $x = -1$ .

2. ვიპოვოთ  $y = \arccos x$  ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია  $[-1, 1]$  შუალედში. როგორც ვიცით

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$(\arccos x)' = \left(-\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (21.6)$$

3. ვიპოვოთ  $y = \operatorname{arctg} x$  ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი  $x$ -სათვის. გვაქვს:

$$x = \operatorname{tg} y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

აქედან

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

ამრიგად

$$(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \quad (21.7)$$

4. ვიპოვოთ  $y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x$  ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიციოთ

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}.$$

მაშასადამე,

$$(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)' = -\frac{1}{1+x^2}. \quad (21.8)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y = \operatorname{arcc} \cos \frac{x}{a}$  ფუნქციის წარმოებული ( $a > 0$ ).

ამოხსნა. გვაქვს:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-3}{5}$  ფუნქციის დიფერენციალი.

ამოხსნა. გვაქვს:

$$dy = \frac{d\left(\frac{2x-3}{5}\right)}{1+\left(\frac{2x-3}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2}{5} dx}{1+\left(\frac{2x-3}{5}\right)^2} = \frac{10}{4x^2-12x+34} dx.$$

22 პირდაპირი და შებენიანი ჰიპერბოლური ფუნქციების წარმოშობის

1. ეიპოვოთ  $\operatorname{sh} x$  ფუნქციის წარმოებუი. გვაქვს:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \operatorname{ch} x.$$

2. ეიპოვოთ  $\operatorname{ch} x$  ფუნქციის წარმოებუი. გვაქვს:

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \operatorname{sh} x.$$

3. ეიპოვოთ  $\operatorname{th} x$  ფუნქციის წარმოებუი. გვაქვს

$$\begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \end{aligned}$$

4. ეიპოვოთ  $\operatorname{cth} x$  ფუნქციის წარმოებუი. გვაქვს:

$$\begin{aligned} (\operatorname{cth} x)' &= \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$

5. ეიპოვოთ  $\operatorname{arsh} x$  ფუნქციის წარმოებუი. როგორც ვიციო,

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

ამიტომ

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

6. ეიპოვოთ  $\operatorname{arch} x$  ფუნქციის წარმოებუი. როგორც ვიციო,

$$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

მაშასადამე.

$$\begin{aligned} (\operatorname{arch} x)' &= [\pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \pm \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

7. ეიპოვოთ  $\operatorname{arth} x$  ფუნქციის წარმოებუი. რადგანაც

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1),$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} (\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)]' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \\ &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

8. ვიპოვოთ  $\operatorname{arc} \operatorname{th} x$  ფუნქციის წარმოებული. რადგანაც

$$\operatorname{arc} \operatorname{th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \quad (|x| > 1),$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} (\operatorname{arc} \operatorname{th} x)' &= \frac{1}{2} [\ln|x+1| - \ln|x-1|]' = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) = \\ &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

§ 22. უპიპერტი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებულებისა და დიფერენციალების ცხრილი

1.  $(C)' = 0, dC = 0.$

2.  $(a^x)' = a^x \ln a, d(a^x) = a^x \ln a \cdot dx.$

3.  $(e^x)' = e^x, d(e^x) = e^x dx.$

4.  $(\lg_a x)' = \frac{1}{x} \lg_a e, d(\lg_a x) = \frac{1}{x} \lg_a e dx.$

5.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}, d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$

6.  $(\sin x)' = \cos x, d(\sin x) = \cos x dx.$

7.  $(\cos x)' = -\sin x, d(\cos x) = -\sin x dx.$

8.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$

9.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$



$$10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$13. (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad d(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x \, dx.$$

$$15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x \, dx.$$

$$16. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad d(\operatorname{th} x) = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$17. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad d(\operatorname{cth} x) = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$18. (\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad d(\operatorname{arsh} x) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$19. (\operatorname{arch} x)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad d(\operatorname{arch} x) = \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$20. (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad d(\operatorname{arth} x) = \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$21. (\operatorname{arcch} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad d(\operatorname{arcch} x) = \frac{dx}{1-x^2}.$$

### ხ ა გ ა რ ჯ ი შ ო

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

$$1. f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 1.$$

$$2. g(x) = 7x^3 - 8x^2 + x + 5.$$

$$3. \varphi(x) = 6x(5x+5).$$

$$4. f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \\ + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 2.$$

$$5. g(x) = (2x-1)^3.$$

$$6. f(t) = (3t^2 - 4)^4.$$

7.  $f(t) = t^2(t^2 + 1)^3$ .

8.  $f(t) = 5 \sin 3t$ .

9. იპოვეთ  $f(x) = (2x + 9)^4$  ფუნქციის წარმოებული  $x = 1$  წერტილში.

10. იპოვეთ  $f(t) = 4 \sin^2 t$  ფუნქციის წარმოებული  $t = -\pi$  წერტილში.

11. მოცემულია  $g(t) = at^3 - 3a^2t + 5a^3$ . იპოვეთ  $g'(2a)$ .

12. მოცემულია  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - bx^2$ . იპოვეთ  $f'(2b)$ .

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

13.  $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x} + x - 2x^2$ .

14.  $g(x) = x - \frac{3}{x^2}$ .

15.  $\varphi(x) = 5x^3 + \frac{4}{x^3} - 10$ .

16.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

17.  $f(u) = \frac{3}{u^3} + \frac{4}{u} + 1$ .

18.  $g(x) = (\sqrt{3} - \sqrt{x})^4$ .

19.  $\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$ .

20.  $g(x) = \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^2}$ .

21. მოცემულია ფუნქცია  $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ . გამოთვალეთ  $f'(8)$ .

22. მოცემულია ფუნქცია  $g(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$ . გამოთვალეთ  $g'(-2)$ .

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები და დიფერენციალები:

23.  $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 5x}}$ .

24.  $g(t) = \cos^2 \frac{t}{a} - \sin^2 \frac{t}{a}$ .

25.  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2ut - t^2}}$ .

26.  $g(x) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right)^3$ .

27.  $f(x) = \sin^4 2x + \cos^4 2x$ .

28.  $g(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}$ .

29.  $r = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ .

30.  $y = \sqrt{\frac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$ .

31. მოცემულია ფუნქცია  $f(t) = \sqrt{1 + \sin^2 3t}$ . იპოვეთ  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

32. მოცემულია  $g(t) = \sqrt{1 + \sin^2 t}$  ფუნქცია. იპოვეთ  $g'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ .

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

33.  $y = \frac{2x+1}{x^2-1}$ .

34.  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

35.  $y = (x^2 + 4x - 3)(x^2 - 5x + 1)$ .

36.  $s = (3t+1)^2 (t-1)^2$ .

37.  $s = t\sqrt{t^2+1}$ .

38.  $s = (t-1)\sqrt[3]{t^2+1}$ .

39.  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ .

40.  $y = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ .

41.  $s = \frac{\sin^4 3t}{t}$ .

42.  $y = x \sin 2x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$ .

43.  $y = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ .

44.  $y = \frac{x+a}{x-a}$ .

45.  $y = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)^2}}$ .

46.  $s = \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2-1}}$ .

47.  $y = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$ .

48.  $y = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-1}$ .

49. მოცემულია ფუნქცია  $f(t) = \frac{at}{(b+t)^2}$ . იპოვეთ  $f'(b)$ .

50. მოცემულია ფუნქცია  $f(t) = \frac{(a-x)^2}{a-2x}$ . იპოვეთ  $f'\left(\frac{a}{3}\right)$ .

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

51.  $y = \operatorname{tg}^2 5x$ .

52.  $y = \operatorname{tg}^2 \frac{5x+1}{2}$ .

53.  $s = \frac{\operatorname{tg} 10t}{t^2}$ .

54.  $s = \sqrt{\operatorname{ctg}(1+t)^2}$ .

55.  $y = 2\operatorname{ctg}^2 x - \frac{\cos x}{3 \sin^2 x}$ .

56.  $y = \frac{2 \operatorname{ctg} 3x}{1 - \operatorname{ctg}^2 3x}$ .

57.  $y = \ln(ax+b)$ .

58.  $y = \lg_3(4x-2)$ .

59.  $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

60.  $y = \ln(3x^2 - 5x + 6)$ .

61.  $y = \ln \sin x$ .

62.  $y = \ln \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$ .

63.  $y = \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x})$ .

64.  $y = \ln(\ln x)$ .

65.  $y = x^2 \lg_3 x$ .

66.  $y = \frac{2x+1}{\lg_2 x}$ .

67.  $y = x^2 \ln x - \cos^2 x$ .

68.  $y = x \cos x$ .

69.  $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$ .

70.  $y = x(1+x)\sqrt{1-x}$ .

71.  $y = x^{\operatorname{ctg} x}$ .

72.  $y = \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$ .

73.  $y = e^{\sin x}$ .

74.  $y = x e^{-x^2}$ .

75.  $x = 2^{x^2}$ .

76.  $y = \ln \frac{e^x}{1+e^x}$ .

77.  $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$ .

78.  $y = e^{-x^2} (\cos x + \sin x)$ .

79.  $y = \ln(e^{-x} + x e^{-x})$ .

80.  $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ .

81.  $y = e^{x^2 + x}$ .

82.  $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$ .

83. იპოვეთ  $y = \ln(1 + e^{-2x})$  ფუნქციის წარმოებულო  $x=0$  წერტილში.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების დიფერენციალები:

84.  $y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0)$ .

85.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ .

86.  $y = \operatorname{arctg} \frac{5x+1}{3}$ .

87.  $y = \arccos \frac{3}{4x-1}$ .

88.  $y = \arcsin(3x-1)$ .

89.  $y = \arccos \left( 1 - \frac{x}{a} \right)$ .

90.  $y = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ .

91.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)$ .

92.  $y = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ .

93.  $y = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{a^2 - x^2}$ .

94.  $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} \arccos \frac{x}{a}$ .

95.  $y = \operatorname{arctg} \frac{4 \sin x}{3 + 5 \cos x}$ .

96.  $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$ .

97.  $y = \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{ctg} x \right)$ .

98.  $y = \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} - \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) \operatorname{arctg} \sqrt{1 - x^2}$ .

99.  $y = \arccos \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{2x - 4x^2} + \lg^2 \cos 3x$ .

100.  $y = (\arcsin x)^x$ .                      101.  $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

102.  $y = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right)$ , ( $a > 0$ )

103. მოცემულია  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \ln \sqrt[4]{x^4 - a^4}$ . იპოვეთ  $f'(2a)$ .

104.  $\varphi(x) = e^{-\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$ . დაამტკიცეთ, რომ  $\varphi(0) + a\varphi'(0) = 0$ .

105.  $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ . დაამტკიცეთ, რომ

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ .

§ 24. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის საშუალებით

ვთქვათ,  $y = f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $x$  წერტილის მიდამოში და დიფერენცირებადია  $x$  წერტილში. მაშინ, როგორც ვიცით,

$$\Delta y = dy + \alpha,$$

სიდაც  $\alpha$  უმალდეს რიგის უსასრულოდ მცირეა  $\Delta x$  უსასრულოდ მცირესთან შედარებით. მაშასადამე, შეგვიძლია დავწეროთ მიახლოებითი ტოლობა

$$\Delta y \simeq dy,$$

ანუ

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (24.1)$$

მაგალითი 1. მოცემულია ფუნქცია  $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ , სადაც  $\alpha$  ნულისა და ერთისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია. ვიპოვოთ  $(1+x+\Delta x)^{\alpha}$  გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა. რადგანაც  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ , ამიტომ (24.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$(1+x+\Delta x)^{\alpha} \simeq (1+x)^{\alpha} + \alpha(1+x)^{\alpha-1}\Delta x.$$

კერძოდ, თუ  $x=0$ , მაშინ

$$(1+\Delta x)^{\alpha} \simeq 1 + \alpha\Delta x.$$

თუ  $\alpha = \frac{1}{k}$ , გვექნება

$$\sqrt[k]{1+\Delta x} \simeq 1 + \frac{\Delta x}{k}. \quad (24.2)$$

მაგალითი 2. გამოთვალეთ მიახლოებით  $\sqrt{1,004}$ .

ამოხსნა. თუ (24.2) ფორმულაში ვიგულისხმებთ  $k=2$  და  $\Delta x=0,004$ , გვექნება

$$\sqrt{1,004} = \sqrt{1+0,004} \simeq 1 + \frac{0,004}{2} = 1,002.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $\sin(x+\Delta x)$  გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

ამოხსნა. (24.1) ფორმულის ძალით გვექვს

$$\sin(x+\Delta x) \simeq \sin x + \cos x \cdot \Delta x. \quad (24.3)$$

კერძოდ, თუ  $x=0$ , მაშინ (24.3) ფორმულა გვაძლევს

$$\sin \Delta x \simeq \Delta x.$$

მაგალითი 4. გამოთვალეთ მიახლოებით  $\sin 31^{\circ}$ .

ამოხსნა. თუ (24.3) ფორმულაში ვიგულისხმებთ  $x = \frac{\pi}{6}$ ,

$\Delta x = \frac{\pi}{180}$ , გვექნება

$$\begin{aligned} \sin 31^{\circ} &= \sin\left(30^{\circ} + 1^{\circ}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \simeq \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = \\ &= 0,5 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,01745 \simeq 0,5151. \end{aligned}$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ მიახლოებით  $\arctg 1,1$ .

ამოხსნა.  $f(x) = \arctg x$  ფუნქციისათვის გამოვიყენოთ (24.1) ფორმულა, სადაც ვიგულისხმობთ  $x=1$ ,  $\Delta x=0,1$ . გვექნება

$$\begin{aligned} \arctg 1,1 &\simeq \arctg 1 + (\arctg x)'_{x=1} \cdot 0,1 = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left( \frac{1}{1+x^2} \right)_{x=1} \cdot 0,1 \simeq 0,785 + 0,05 = 0,835. \end{aligned}$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ მიახლოებით  $\ln 1,2$ .

ამოხსნა. განვიხილოთ ფუნქცია  $f(x) = \ln x$ . რადგანაც  $\ln 1,2 = \ln(1+0,2)$ , ამიტომ  $x=1$ ,  $\Delta x=0,2$  და (24.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\ln 1,2 \simeq \ln 1 + (\ln x)'_{x=1} \cdot 0,2 = \left( \frac{1}{x} \right)_{x=1} \cdot 0,2 = 0,2.$$

§ 26. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გაწარმოება

ავილოთ  $t$  ცვლადის ორი ფუნქცია

$$x = g(t), \quad y = f(t), \quad (25.1)$$

რომლებიც უწყვეტია  $[a, \beta]$  სეგმენტზე. ვიგულისხმობთ, რომ  $x = g(t)$  ფუნქციას აქვს შებენი ფუნქცია  $t = \varphi(x)$ , მაშინ  $y$  შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც  $x$ -ის რთული ფუნქცია:

$$y = f[\varphi(x)].$$

ცხადია, ეს რთული ფუნქცია უწყვეტია  $x$  ცვლადის მიმართ. ამრიგად, (25.1) დამოკიდებულებათა მიხედვით,  $y$  წარმოვიდგემა როგორც  $x$ -ის ფუნქცია  $t$  პარამეტრის საშუალებით. ასეთ შემთხვევაში იტყვიან, რომ გვაქვს ფუნქციის პარამეტრული წარმოდგენა.

ახლა ისმის კითხვა: როგორ მოვძებნოთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის  $\frac{dy}{dx}$  წარმოებულები, ისე რომ (25.1) ტოლობებიდან არ გამოვრიცხოთ  $t$  პარამეტრი? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 13. თუ არსებობს  $x = g(t)$  და  $y = f(t)$  ფუნქციების სასრული წარმოებულები რაიმე შუალედში, რომელშიაც  $g'(t)$  ნიშანს არ იცვლის, მაშინ არსე-

ბოზს სასრული  $\frac{dy}{dx}$  წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (25.2)$$

დამტკიცება. რაკი  $g'(t)$  ნიშანს არ იცვლის მოცემულ შუალედში, ამიტომ  $x=g(t)$  ფუნქცია არსებითად მონოტონურია. მაშასადამე, არსებობს ამ ფუნქციის შებენული ფუნქცია  $t=\varphi(x)$  და ეს ფუნქცია დიფერენცირებადია. ამრიგად, გვაქვს რთული ფუნქცია  $y=f[\varphi(x)]$ . რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის თანახმად

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით შემდეგი განტოლებებით:

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t).$$

მოვძებნოთ ამ ფუნქციის წარმოებული.

ამოხსნა. (25.2) ფორმულის თანახმად

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a \sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

### ხაზარჯიშო

1. დიფერენციალის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ შემდეგი სიდიდეები:

ა)  $\sqrt[3]{1,012}$ . პასუხი: 1,004.

ბ)  $\ln 7$ , თუ  $\ln 2=0,6931$  და  $\ln 3=1,0986$ . პასუხი: 1,9584.

მოძებნეთ პარამეტრულად მოცემული შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:



2.  $x=r \cos t, y=r \sin t$ . პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t$ .

3.  $x = \frac{2t}{1+t}, y = \frac{1-t}{1+t}$ . პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = -1$ .

4.  $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t$ . პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$ .

5.  $x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$ . პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg} 3t$ .

6.  $x = \frac{c \cos t}{1+b \cos t}, y = \frac{a \sin t}{1+b \cos t}$ .

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{a(b+\cos t)}{c \sin t}$ .

7.  $x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ . პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = 1$ .

8.  $x = (a+b) \cos t - a \cos \frac{a+b}{a} t, y = (a+b) \sin t - a \sin \frac{a+b}{a} t$ .

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{2a+b}{2a} t$ .

9.  $x = \frac{3a-2t}{at}, y = \frac{4(a-t)^3}{a^2 t^2}$ .

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \frac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2 t}$ .

10.  $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t$ ,

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \frac{3}{2} t$ .

§ 26. უმაღლესი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ,  $y=f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $[a, b]$  ინტერვალში, მაშინ  $y'=f'(x)$  წარმოებული წარმოადგენს  $x$  ცვლადის ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა  $[a, b]$  ინტერვალი. თუ  $f'(x)$  წარმოებულს აქვს წარმოებული, მაშინ ამ წარმოებულს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ან მეორე წარმოებული.  $y=f(x)$  ფუნქციის მეორე წარმოებული აღინიშნება  $y''$  ან  $f''(x)$  სიმბოლოთი.

ანალოგიურად,  $f''(x)$  წარმოებულის წარმოებულს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული ანუ მესამე წარმოებული და აღინიშნება  $y'''$  ან  $f'''(x)$  სიმბოლოთი.

საზოგადოდ,  $y = f(x)$  ფუნქციის  $n$ -რი რიგის წარმოებული ეწოდება ამ ფუნქციის  $n-1$  რიგის წარმოებულის წარმოებულს და აღინიშნება  $y^{(n)}$  ან  $f^{(n)}$  სიმბოლოთი.

ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები გამოიყენება ბუნებისმეტყველების, ტექნიკისა და მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, ღერძზე მოძრაობს რაიმე ნივთიერი  $M$  წერტილი და მისი მოძრაობის განტოლებაა  $s = f(t)$ .

როგორც ვიცით,  $\frac{ds}{dt} = f'(t)$  წარმოადგენს  $M$  წერტილის  $v(t)$  სიჩქარეს  $t$  მომენტში. მეორე წარმოებული  $\frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$ , ე. ი. სიჩქარის წარმოებული არის სიჩქარის ცვლილების სიჩქარე. ამ სიდიდეს ეწოდება  $M$  წერტილის აჩქარება  $t$  მომენტში.

ძრივად, ნივთიერი  $M$  წერტილის  $w$  აჩქარება არის  $s$  მანძილის მეორე რიგის წარმოებული  $t$  დროით:

$$w = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

უმაღლესი რიგის წარმოებულის მოსაძებნად საჭიროა გამოვიყენოთ გაწარმოებები ჩვეულებრივი ოპერაციები. განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ავიღოთ  $n$  ხარისხის მრავალწევრი

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

ვიპოვოთ ამ მრავალწევრის უმაღლესი რიგის წარმოებულები. გაწარმოების ძირითადი წესების თანახმად

$$y' = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}$$

$$y'' = a_0n(n-1)x^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + \dots + 2a_{n-2}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)} = a_0n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = a_0n!$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \dots = 0$ .

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $y = ax^a$  ხარისხოვანი ფუნქციის  $n$  რიგის წარმოებული. სადაც  $a$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

თანდათანობით: გაწარმოება მოგვცემს

$$y' = ax^{a-1}, \quad y'' = a(a-1)x^{a-2}$$

და ა. შ.

დავამტკიცოთ, რომ ნებისმიერი  $n$ -რი რიგის წარმოებული გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}. \quad (26.1)$$

ეთქვათ ეს ფორმულა მართებულია რაიმე  $n$  რიცხვისათვის. (26.1) ტოლობის გაწარმოება მოგვეცემს

$$y^{(n+1)} = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)(\alpha - n)x^{\alpha - (n+1)}.$$

მაშასადამე, თუ მართებულია (26.1) ტოლობა, მაშინ იგი მართებულია აგრეთვე  $n+1$  რიგის წარმოებულისათვისაც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (26.1) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის.

შევნიშნავთ, რომ როცა  $\alpha = -1$ , მაშინ განხილულ ფუნქციას აქვს  $y = \frac{1}{x}$  სახე და (26.1) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

თუკი  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , მაშინ (26.1) ტოლობიდან მივიღებთ

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $y = \ln x$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებული. მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$y^{(n)} = (\ln)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

მაგალითი 4. მოვძებნოთ  $y = a^x$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებული.

გვაქვს:

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x (\ln a)^2, \dots, \quad y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

კერძოდ, თუ  $y = e^x$ , მაშინ  $y^{(n)} = e^x$ .

მაგალითი 5. ვიპოვოთ  $y = \frac{1}{x^2 - a^2}$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებული. ეს ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right).$$

აქედან

$$y' = -\frac{1!}{2a} \left[ \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right].$$

მეორე რიგის წარმოებული იქნება

$$y'' = \frac{2!}{2a} \left[ \frac{1}{(x-a)^3} - \frac{1}{(x+a)^3} \right].$$

შემდეგ

$$y''' = -\frac{3!}{2a} \left[ \frac{1}{(x-a)^4} - \frac{1}{(x+a)^4} \right]$$

და ა. შ. თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ გამოთვლებს დავრწმუნდებით, რომ ნებისმიერი ნატურალური  $n$  რიცხვისათვის მართებულა შემდეგი ტოლობა:

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{2a} \left[ \frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right].$$

მაგალითი 6. ვიპოვოთ  $y = \sin x$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებული.

გვაქვს

$$y' = \cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right), \quad y'' = -\sin x = \sin \left( x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin \left( x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \quad y^{(4)} = \sin x = \sin \left( x + 4 \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

ამის შემდეგ კი ადვილი მისახვედრია, რომ

$$y^{(n)} = \sin \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

სრულიად ასევე მივიღებთ, რომ თუ  $y = \cos x$ , მაშინ

$$y^{(n)} = \cos \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

### § 17. ლაიბნიცის ფორმულა

ცხადია, ალგებრული ჯამის გაწარმოების წესი უცვლელად გადაიტანება ნებისმიერი რიგის წარმოებულებზე, მაგრამ საყურადღებოა ორი ფუნქციის ნამრავლის მიმდევრობითი გაწარმოება. მართებულა შემდეგი

**თეორემა 14.** თუ რაიმე  $X$  შუალედში  $u = u(x)$  და  $v = v(x)$  ფუნქციებს აქვს ყველა რიგის წარმოებული  $n$  რი-

გამდე ჩათვლით, მაშინ  $y = uv$  ნამრავლსაც აქვს ყვე-  
ლა რიგის წარმოებულნი  $n$  რიგამდე ჩათვლით და  
მართებულთა ტოლობა

$$y^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)}v'' + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)} \quad (27.1)$$

დამტკიცება. გავწარმოთ მოცემული  $y = uv$  ფუნქცია ორი  
ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების წესის მიხედვით, გვექნება

$$y' = u'v + v'u.$$

ამ გამოსახულების ხელახლა გაწარმოებით მივიღებთ.

$$y'' = u''v + 2u'v' + v''u.$$

სრულიად ასევე გვექნება

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

აქედან ჩანს, რომ ნებისმიერი  $n$ -სათვის გვექნება

$$y^{(n)} = A_0 u^{(n)}v + A_1 u^{(n-1)}v' + A_2 u^{(n-2)}v'' + \dots +$$

$$+ A_{n-1} u^{(n-1)}v' + A_n u^{(n)}v, \quad (27.2)$$

სადაც  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  მუდმივები დამოკიდებული არ  
არის  $u$  და  $v$  ფუნქციების სახეზე. მოვძებნოთ ეს მუდმივები. ამი-  
სათვის  $u$  და  $v$  ფუნქციები ასეთი სახით ავიღოთ  $u = e^x$  და  $v = e^{\alpha x}$ ,  
სადაც  $\alpha$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. მაშინ

$$u^{(n)} = e^x, \quad v^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x},$$

$$y = e^{(1+\alpha)x}, \quad y^{(n)} = (1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x}$$

და (27.2) ფორმულა გვაძლევს

$$(1+\alpha)^n e^{(1+\alpha)x} = A_0 e^{(1+\alpha)x} + A_1 \alpha e^{(1+\alpha)x} + A_2 \alpha^2 e^{(1+\alpha)x} + \dots + A_n \alpha^n e^{(1+\alpha)x},$$

საიდანაც

$$(1+\alpha)^n = A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \dots + A_n \alpha^n.$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$   
არის  $(1+\alpha)^n$  ბინომის გაშლის კოეფიციენტები და, მაშასადამე,  
ადგილი აქვს ტოლობებს

$$A_0 = C_n^0 = 1, \quad A_1 = C_n^1 = n, \quad A_2 = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}, \dots, \quad A_n = C_n^n = 1.$$

თორემა დამტკიცებულია.

(27.1) ფორმულას ეწოდება ლაიბნიცის ფორმულა.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ  $y = x \sin ax$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებულნი.

ამოხსნა. ლაიბნიცის ფორმულაში ავიღოთ  $u = \sin ax$  და  $v = x$ .

მაშინ  $u^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right)$ ,  $v' = 1$ ,  $v'' = v''' = \dots = v^{(n)} = 0$ . ამიტომ

(27.1) ფორმულის თანახმად

$$y^{(n)} = a^{n-1} \left[ ax \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) + n \sin\left(ax + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \right].$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $y = e^{ax} \sin bx$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებულნი.

ამოხსნა. ლაიბნიცის ფორმულაში ვიგულისხმოთ  $u = e^{ax}$  და

$$v = \sin bx, \quad \text{მაშინ } u^{(n)} = a^n e^{ax}, v^{(n)} = b^n \sin\left(bx + \frac{n\pi}{2}\right),$$

ამიტომ (27.1) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$y^{(n)} = e^{ax} \left[ \left( a^n - \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots \right) \sin bx + \left( n a^{n-1} b - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots \right) \cos bx \right].$$

მაგალითი 3. მოცემბნოთ  $y = \frac{1}{1-x^2}$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებულნი.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასე:

$$y = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x},$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = \frac{1}{1+x}, \quad v = \frac{1}{1-x}.$$

მაშინ მარტივი გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$u^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad v^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

ამის შემდეგ (27.1) ფორმულის თანახმად გვქვინება

$$y^{(n)} = \left( \frac{1}{1-x^2} \right)^{(n)} = \frac{n!}{2} \left[ \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}} \right].$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ  $y = \frac{\ln x}{x}$  ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარ-

მოებულო.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \ln x,$$

გვექვინება

$$u^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad v^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!}{x^{n+1}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln x \right).$$

მაგალითი 5. დავამტკიცოთ, რომ  $y = \operatorname{arctg} x$  ფუნქციისათვის მართებულა ტოლობა

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0.$$

დაამტკიცება. ვინაიდან  $y' = \frac{1}{1+x^2}$ , ამიტომ  $(1+x^2)y' = 1$ .

ასეა ეკვრისკენელი ტოლობის ორივე ნაწილი მიმდევრობით გავაწარმოოთ  $n$ -ჯერ, ამასთან მარცხენა ნაწილს გაწარმოებისათვის გამოვიყენოთ ლაიბნიცის ფორმულა, რომელშიც  $u = y'$  და  $v = 1+x^2$ . ასევეღებთ დისამტკიცებელ ტოლობას.

კ. ა. შაპოვალი რიგის დიფერენციალები და მათი კავშირი  
ნარკვევულათან

განვიხილოთ  $y = f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია რაიმე  $X$  სეგმენტში და ამ სეგმენტში აქვს ყველა რიგის სასრული წარმოებული  $n$  რიგამდე ჩათვლით. როგორც ვიცით,

$$dy = f'(x)dx,$$

რომელსაც შემდეგში ეწოდოთ  $y=f(x)$  ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალი. პირველი რიგის დიფერენციალი დამოკიდებულია  $x$ -ზე და  $dx$ -ზე. მაგრამ  $dx$  არ არის დამოკიდებული  $x$ -ზე. ამიტომ აზრი აქვს  $y=f(x)$  ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს. მას ეწოდება ამ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება  $d^2y$  სიმბოლოთი. განსაზღვრის თანახმად

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]' dx = f''(x)dx^2, \quad (28.1)$$

სადაც  $dx^2$ -ით აღნიშნულია  $(dx)^2$ .

ამ ტოლობიდან ჩანს, რომ როცა არსებობს მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული, მაშინ არსებობს აგრეთვე ამ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი. ასევე განისაზღვრება და გამოითვლება მოცემული ფუნქციის მესამე რიგის დიფერენციალი. სახელდობრ, მეორე რიგის დიფერენციალის პირველი რიგის დიფერენციალს ეწოდება მესამე რიგის დიფერენციალი და აღინიშნება  $d^3y$  სიმბოლოთი. თუ გამოვიყენებთ (28.1) ფორმულას, გვექნება

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2] = f'''(x)dx^3.$$

საზოგადოდ,  $n$ -ური რიგის დიფერენციალი არის  $n-1$  რიგის დიფერენციალის დიფერენციალი და აღინიშნება  $d^n y$  სიმბოლოთი. ამასთან ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n,$$

რომელიც მარტივად გამოიყენება ინტეგრირების მეთოდის გამოყენებით. უკანასკნელი ტოლობიდან მივიღებთ

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

მაშასადამე, ფუნქციის  $n$ -ური რიგის წარმოებული უდრის ამავე ფუნქციის  $n$ -ური რიგის დიფერენციალს, გაყოფილს არგუმენტის დიფერენციალის  $n$ -ურ ხარისხზე.

### § 29. მათული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალი

როგორც ვიცით, ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალს აქვს ინვარიანტული სახე, მაგრამ ეს თვისება ძალაში არ რჩება უმაღლესი რიგის დიფერენციალებისათვის. მართლაც, ავიღოთ  $y=f(u)$  ფუნქცია, სადაც  $u$  დამოუკიდებელი ცვლადია. მაშინ

$$d^2y = f''(u)du^2, \quad (29.1)$$



ახლა ვთქვათ, რომ  $u$  არის  $x$ -ის ფუნქცია:  $u = \varphi(x)$ , მაშინ  $du = u'(x)dx$ . მოვეძებნოთ მოცემული რთული ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი  $x$  ცვლადით. გვაქვს:

$$d^2y = d[f'(u)du] = [f''(u)du]du + f'(u)d^2u. \quad (29.2)$$

აქედან ჩანს, რომ განსახილველ ორ შემთხვევას შორის განსხვავება არის. როცა  $u$  დამოუკიდებელი ცვლადია, მაშინ გვაქვს (29.1) ტოლობა, თუკი  $u$  დამოკიდებულია  $x$ -ზე, გვექნება (29.2) ტოლობა.

§ 30. პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულება და დიფერენციალები

ვთქვათ,  $x$  ცვლადის  $y$  ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

როგორც ვიცით, გარკვეულ პირობებში

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$$

სადაც  $x'$  და  $y'$  სიმბოლოებით აღნიშნულია  $x$  და  $y$  ფუნქციების წარმოებულები  $t$  ცვლადით.

თუ  $x(t)$  და  $y(t)$  ფუნქციებს აქვთ საჭირო რიგამდე უმაღლესი რიგის წარმოებულები  $t$  ცვლადით, მაშინ  $y$  ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები  $x$  ცვლადით შესაძლოა გამოვსახოთ  $t$  პარამეტრის საშუალებით. მართლაც,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{x'} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{y'}{x'} \right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x'}$$

ე. ი.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

ახლა ეს ტოლობა გავაწარმოთ ისევ  $x$  ცვლადით, გვექნება

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \right) \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

საიდანაც

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - x'''y') - 3x''(x'y'' - x''y')}{x'^6}$$

ასეთივე წესით გამოითვლება მეოთხე რიგის წარმოებული და ა. შ.

### § 31. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები

ვთქვათ, მოცემულია რთული ფუნქცია  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ , სადაც  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq u \leq d$ . ვიგულისხმობთ, რომ  $[a, b]$  სეგმენტზე არსებობს  $u = \varphi(x)$  ფუნქციის სასრული წარმოებულები საჭირო რიგამდე  $x$  ცვლადით, ხოლო  $[c, d]$  სეგმენტზე არსებობს  $y = f(u)$  ფუნქციის წარმოებულები საჭირო რიგამდე  $u$  ცვლადით. როგორც ვიცით, ამ პირობებში ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულას:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

გავაწარმოთ ეს ტოლობა  $x$  ცვლადით და ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ  $\frac{dy}{du}$  თანამამრავლი თვითონ წარმოადგენს  $x$  ცვლადის რთულ ფუნქციას, გვექნება

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \quad (31.1)$$

ახლა გავაწარმოთ (31.1) ტოლობის ისევ ორივე ნაწილი  $x$  ცვლადით, გვექნება

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{du^3} \left( \frac{du}{dx} \right)^3 + 3 \frac{d^2y}{du^2} \frac{du}{dx} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dy}{du} \frac{d^3u}{dx^3}$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით შემდეგი ტოლობის მართებულობაში

$$\begin{aligned} \frac{d^4y}{dx^4} = & \frac{d^4y}{du^4} \left( \frac{du}{dx} \right)^4 + 6 \frac{d^3y}{du^3} \frac{du}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2y}{du^2} \left[ 3 \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 4 \frac{du}{dx} \cdot \frac{d^3u}{dx^3} \right] + \frac{dy}{du} \frac{d^4u}{dx^4}. \end{aligned}$$

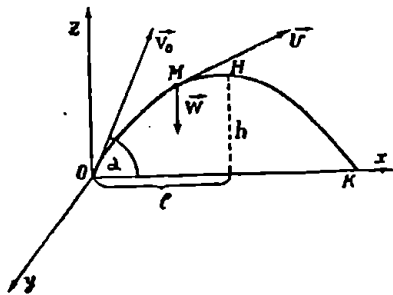
ასევე მივიღებთ რთული ფუნქციის მომდევნო რიგის წარმოებულებს.

§ 32. მორე რივის წარმოებულის ერთი ფიზიკური გამოყენება

ცნობილია, რომ დედამიწის გრავიტაციის ველში ნივთიერი  $M$  წერტილი, რომელზეც მხოლოდ სიმძიმის ძალა მოქმედებს (მხედველობაში არ არის მიღებული ჰაერის წინააღმდეგობის ძალა), ისე მოძრაობს, რომ მისი გ აჩქარება მუდმივი სიდიდეა და მოგეზულია ვერტიკალურად ქვევით. შევადგინოთ  $M$  წერტილის მოძრაობის განტოლებები. ამისათვის მოძრაობის დასაწყისში მივიღოთ, რომ დრო  $t=0$ , ხოლო საწყისი  $\vec{v}_0$  სიჩქარის მოდული  $v_0$ -ით აღვნიშნოთ.  $M$  წერტილის საწყის მდებარეობაში ავიღოთ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის  $O$  სათავე,  $Ox$  ღერძი გავავლოთ დედამიწის ჰორიზონტის გასწვრივ,  $Oz$  ღერძი მიემართოს ქვევიდან ზევით ისე, რომ  $xOz$  სიბრტყემ გაიაროს  $\vec{v}_0$  ვექტორზე. კუთხე  $\alpha$  ვექტორსა და  $Ox$  ღერძს შორის იყოს  $\alpha$ . ამ პირობებში საწყისი სიჩქარის კოორდინატები იქნება:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = 0, \quad v_{0z} = v_0 \sin \alpha.$$

მოძრავი  $M(x, y, z)$  წერტილის ვექტორული  $w$  აჩქარების კომპონენტებია:



ნახ. 55.

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

აქედან ვექტორული  $\vec{v}$  სიჩქარის კომპონენტებისათვის მივიღებთ:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = C_2, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + C_3 \quad (32.1)$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x = C_1 t + D_1, \quad y = C_2 t + D_2, \quad z = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + D_3. \quad (32.2)$$

$C_1, C_2, C_3, D_1, D_2$  და  $D_3$  მუდმივების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ საწყისი პირობები: როცა  $t=0$ , მაშინ  $x=y=z=0$ ,  $v_{0x}=v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y}=0$ ,  $v_{0z}=v_0 \sin \alpha$ . ამ მონაცემებით (32.1) და (32.2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = v_0 \sin \alpha, \quad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

და წერტილის მოძრაობის განტოლებები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin \alpha. \quad (32.3)$$

როგორც ვხედავთ წერტილის მოძრაობა ხდება  $xOz$  სიბრტყეში. თუ (32.3) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ  $t$  ცვლადს, მივიღებთ ტრაექტორიის განტოლებას დეკარტის კოორდინატებში:

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha,$$

რომელიც წარმოადგენს  $xOz$  სიბრტყეში მოთავსებულ პარაბოლას. ამ პარაბოლის წვერო მოთავსებულია  $H(l, 0, h)$  წერტილში, სადაც

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (32.4)$$

პარაბოლის ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ქვევით.  $h$  რიცხვს მოძრავი წერტილის ფრენის სიმაღლე ეწოდება, ხოლო  $2l$  — ფრენის სიშორე. როგორც ვხედავთ, მოცემული საწყისი  $v_0$  სიჩქარისათვის, უდიდესი ფრენის სიშორე მიიღწევა მაშინ, როცა  $\alpha = 45^\circ$ .

### ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

1. მოცემულია ფუნქცია:

$$y = \left(\frac{1}{5}x^3 - x^2 - 3\right)(x-1)^3(3x^2+1). \text{ დაამტკიცეთ რომ } y^{(6)} = 24192.$$

2. მოცემულია ფუნქცია  $y = (x+7)(2x^2+3)(3x+1)^3$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(6)} = 0$ .

3.  $y = x^5 \ln x$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y''' = x^2(60 \ln x + 47)$ .
4.  $y = \frac{a}{x^n}$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(4)} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)a}{x^{n+4}}$
5.  $y = x^2 e^{2x}$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(4)} = 16e^{2x}(x^2 + 4x + 3)$ .
6.  $y = x^2 \sin x$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(60)} = 2450 \sin x + 100x \cos x - x^2 \sin x$ .
7. დაამტკიცეთ, რომ  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$  ფუნქცია, სადაც  $C_1$  და  $C_2$  ნებისმიერი მუდმივებია, დააკმაყოფილებს  $y'' + 3y' + 2y = 0$  განტოლებას.
8. დაამტკიცეთ, რომ  $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$  ფუნქცია, სადაც  $C_1$  და  $C_2$  ნებისმიერი მუდმივებია, დააკმაყოფილებს  $y'' + 4y = 0$  განტოლებას.
9. დაამტკიცეთ, რომ თუ  $y = e^x \sin x$ ,  $z = e^x \cos x$ , მაშინ  $y'' = 2z$  და  $z'' = -2y$ .
10. დაამტკიცეთ, რომ  $y = \sin(m \arcsin x)$  დააკმაყოფილებს  $(1-x^2)y'' = xy' - m^2 y$  განტოლებას.
11.  $y = ax^m$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(n)} = am(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}$ .
12.  $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ , ან  $-\beta\gamma \neq 0$ . დაამტკიცეთ, რომ
- $$y^{(n)} = (-1)^{n-1} (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{n! \gamma^{n-1}}{(\gamma x + \delta)^{n+1}}.$$
13.  $y = \ln(a \pm bx)$ . დაამტკიცეთ, რომ  $y^{(n)} = -\frac{(\mp b)^n (n-1)!}{(a \pm bx)^n}$ .
14.  $y = (a^2 + x^2) \arctg\left(\frac{x}{a}\right)$ . დაამტკიცეთ, რომ
- $$\frac{y^{(4)}}{y'''} = -\frac{4x}{a^2 + x^2}.$$
15. დაამტკიცეთ, რომ  $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$  ფუნქცია აკმაყოფილებს  $(1+x^2)y'' + xy' - n^2 y = 0$  განტოლებას.
16.  $y = \frac{1}{u}$ ,  $u = 9x^2 + 12x + 1$ . დაამტკიცეთ, რომ
- $$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{648(2+3x)(7+12x+9x^2)}{u^4}.$$
17.  $y = e^u$ ,  $u = x^2$ . დაამტკიცეთ, რომ
- $$y^{(4)} = 4y(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

18.  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{4a \sin^4 \left( \frac{t}{2} \right)}.$$

19.  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ . დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{3 \cos t}{a^2 \sin^5 t}.$$

20.  $x = a \cos 2t$ ,  $y = b \sin^2 t$ . დაამტკიცეთ, რომ  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ .

**ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გამოყენებით**

**§ 1. ფერმას თეორემა**

**თეორემა 1.** თუ რაიმე შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია შუალედის შიგან წერტილში და, ამასთანავე, ამ წერტილში მას აქვს თავის უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობა, მაშინ  $f'(ξ) = 0$ .

**დამტკიცება.** აზრის გარკვეულობისათვის ვივლისხმობ, რომ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს  $ξ$  წერტილში უდიდესი მნიშვნელობა. მაშინ საკმარის მცირე დადებითი  $h$  რიცხვისათვის გვექნება

$$f(ξ+h) - f(ξ) \leq 0, \quad f(ξ-h) - f(ξ) \leq 0.$$

აქედან

$$\frac{f(ξ+h) - f(ξ)}{h} \leq 0, \quad \frac{f(ξ-h) - f(ξ)}{-h} \geq 0.$$

რაც  $ξ$  წერტილში არსებობს  $f(x)$  ფუნქციის წარმოებული, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობებიდან მივიღებთ

$$f'(ξ) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ξ+h) - f(ξ)}{h} \leq 0,$$

$$f'(ξ) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ξ-h) - f(ξ)}{-h} \geq 0.$$

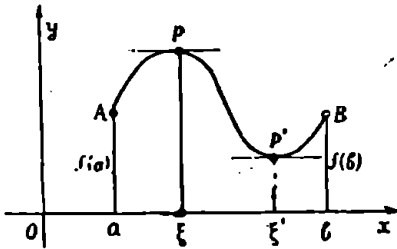
ამ ორი დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ  $f'(ξ) = 0$  და ამით ფერმას (P. Fermat) თეორემა დამტკიცებულია.

**§ 2. როლის თეორემა**

**თეორემა 2.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია  $[a, b]$  ინტერვალში და, ამასთანავე,  $f(a) = f(b)$ , მაშინ  $[a, b]$  ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $ξ$  წერტილი, რომ  $f'(ξ) = 0$ .

დამტკიცება. თუ  $f(x)$  ფუნქცია მუდმივია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $[a, b]$  ინტერვალში  $f'(x) = 0$ . ამრიგად, არსებობს  $\xi$  წერტილი. ეს არის  $[a, b]$  ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია.

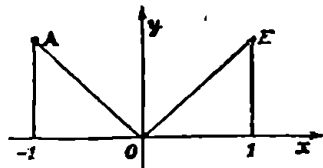
ახლა ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია მუდმივი არაა  $[a, b]$  სეგმენტზე. ვინაიდან  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ მას აქვს ამ სეგმენტზე უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები. ვთქვათ, ესენია  $m$  და  $M$ . რადგანაც  $m < M$  და  $f(a) = f(b)$ , ამიტომ  $f(x)$  ფუნქცია მიიღებს ერთ-ერთს  $m$  ან  $M$  მნიშვნელობას  $[a, b]$  ინტერვალის რაიმე  $\xi$  წერტილში. ფერმას თეორემის თანახმად  $f'(\xi) = 0$  და, მაშასადამე, როლის (Rolle) თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 56.

მეტრიული შინაარსი შემდეგია: თუ  $y = f(x)$  წირს ყოველ წერტილში აქვს მხები, ხოლო  $A$  და  $B$  წერტილებს, რომლებიც  $[a, b]$  სეგმენტის კიდურა წერტილებს შეესაბამებიან, თანატოლი ორდინატები აქვთ, მაშინ მოცემულ წირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისათა ღერძის პარალელურია (ნახ. 56).

შენიშვნა. როლის თეორემას ვერ გამოვიყენებთ, თუ დარღვეულია ერთ-ერთი პირობა, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია. განვიხილოთ ფუნქცია  $f(x) = |x|$ , განსაზღვრული  $[-1, 1]$  სეგმენტზე. ეს ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე,  $f(-1) = f(1) = 1$  და წარმოებადია  $[-1, 1]$  ინტერვალში, გარდა კოორდინატთა სათავისა.



ნახ. 57.

მაშასადამე, დარღვეულია  $[-1, 1]$  ინტერვალში ფუნქციის წარმოებადობის პირობა. როლის თეორემას აღებული ფუნქციისათვის ვერ გამოვიყენებთ. მართლაც,  $f'(x) = 1$ , როდესაც  $x > 0$  და  $f'(x) = -1$ , როდესაც  $x < 0$ , ხოლო  $x = 0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციას არა აქვს წარმოებული. ამრიგად  $[-1, 1]$  ინტერვალში აღებული ფუნქციის წარმოებული არსად ნული არ არის (ნახ. 57).



§ 3. ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ

როლის თეორემის გამოყენებით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი მნიშვნელოვანი

თეორემა 8. თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია  $[a, b]$  ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(\xi). \quad (3.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე  $\varphi(x)$  ფუნქცია

$$\varphi(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - [f(b) - f(a)](x - a).$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 0.$$

ამის გარდა,  $\varphi(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და წარმოებადია  $[a, b]$  ინტერვალში. ამრიგად,  $\varphi(x)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და, მაშასადამე,  $[a, b]$  ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $\varphi'(\xi) = 0$ . მაგრამ

$$\varphi'(x) = f'(x)(b - a) - [f(b) - f(a)].$$

მაშასადამე,

$$f'(\xi)(b - a) - [f(b) - f(a)] = 0.$$

აქედან მიიღება (3.1) ტოლობა. ლაგრანჟის (G. Lagrange) თეორემა დამტკიცებულია.

რადგანაც (3.1) ფორმულაში შედის  $f(b) - f(a)$  და  $b - a$  ნაზრდები, ამიტომ ამ ფორმულას სასრული ნაზრდების ფორმულა ეწოდება. ეს ფორმულა ასე გადაეწეროთ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \quad (3.2)$$

ამ ფორმულის მიხედვით ფუნქციის ნაზრდისა და არგუმენტის ნაზრდის ფარდობა უდრის ფუნქციის წარმოებულს რაღაც „საშუალო“  $\xi$  წერტილში, ამის გამო (3.1) ფორმულას უწოდებენ აგრეთვე საშუალო მნიშვნელობის ფორმულას.

შემდეგ, ვინაიდან (3.1) ფორმულაში  $a < \xi < b$ , ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\frac{\xi - a}{b - a} = \theta, \quad (3.3)$$

გვექნება  $0 < \theta < 1$  და, მაშასადამე, (3.3) ტოლობიდან ვღებულობთ

$$\xi = a + \theta(b-a).$$

ახლა (3.1) ფორმულა შეგვიძლია ჩაწეროთ ასე

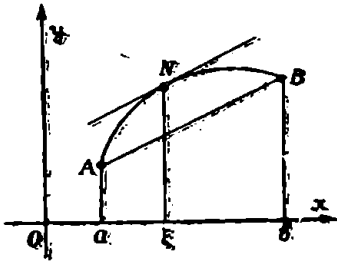
$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(a + \theta(b-a)).$$

ეკრძალა, თუ  $b = a + h$ , გვექნება

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

სასრული ნაშრომის თეორემის ასეთი სახით ჩაწერას სასარგებლო გამოყენება აქვს.

ლაგრანჟის ფორმულას აქვს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. მართლაც, გადავწეროთ (3.1) ფორმულა (3.2) სახით. უკანასკნელი



ნახ. 58.

ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს იმ  $AB$  ქორდის კუთხურ კოეფიციენტს, რომელიც აერთებს  $y=f(x)$  წირის ბოლო  $A$  და  $B$  წერტილებს (ნახ. 58). რაც შეეხება (3.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს, იგი წირის  $N(\xi, f(\xi))$  წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტია. ამრიგად, როცა შესტულებულია ლაგრანჟის თეორემის

პირობები, მაშინ  $y=f(x)$  წირზე არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $N$  წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები  $AB$  ქორდის პარალელურია.

**თეორემა 4.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციის  $f'(x)$  წარმოებულის ნულის ტოლია  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ წერტილშიც, მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია მუდმივია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დამტკიცება. ავიღოთ  $[a, b]$  ინტერვალში ნებისმიერი  $x$  წერტილი და დავწეროთ ლაგრანჟის ფორმულა  $[a, x]$  სეგმენტისათვის, გვექნება

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(\xi), \quad a < \xi < x.$$

ვინაიდან, პირობის თანახმად,  $f'(\xi) = 0$ , ამიტომ აქედან მივიღებთ  $f(x) = f(a)$ . უკანასკნელი ტოლობა ამტკიცებს თეორემას.

**შედეგად** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციებს  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ წერტილში

თანატოლი წარმოებულები აქვთ, მაშინ ეს ფუნქციები მხოლოდ მუდმივით განსხვავდებიან.

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $F(x) = f(x) - \varphi(x)$  ფუნქცია. პირობის თანახმად,  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ წერტილში

$$F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0.$$

მაშასადამე, მე-4 თეორემის თანახმად  $F(x)$  ფუნქცია მუდმივია  $[a, b]$  სეგმენტზე:

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) = C.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. განვიხილოთ ფუნქციები  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  და  $\varphi(x) = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ . ორივე ეს ფუნქცია განსაზღვრულია  $(-\infty, +\infty)$  შუალედში. გვაქვს

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

მე-4 თეორემის შედეგის თანახმად

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad (3.4)$$

ვიპოვოთ  $C$  მუდმივი. ამისათვის (3.4) ტოლობაში ვიგულისხმოთ  $x=0$ . მაშინ გვექნება  $0=C$ . მაშასადამე,  $(-\infty, +\infty)$  შუალედში მართებულია შემდეგი იგივეობა:

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ანალოგიურად შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ  $]-1, +1[$  ინტერვალში მართებულია იგივეობა

$$\operatorname{arcsin} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

#### § 4. კოშის თეორემა

წინა პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემა ფუნქციის სასრული ნაზრდის შესახებ შეიძლება განვაზოგადოთ, ორი ფუნქციის სასრული ნაზრდებისათვის.

თეორემა 5. ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციები წარმოებადია  $[a, b]$  ინტერვალში.

თუ  $f'(x)$  და  $\varphi'(x)$  წარმოებულები ერთდროულად ნულს არ ხდება  $]a, b[$  ინტერვალის არცერთ წერტილში და, ამასთანავე,  $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ , მაშინ  $]a, b[$  ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ მართებულია ტოლობა

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad (4.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე  $F(x)$  ფუნქცია:

$$- F(x) = [\varphi(b) - \varphi(a)] f(x) - [f(b) - f(a)] \varphi(x).$$

ცხადია,  $F(x)$  უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, წარმოებადია  $]a, b[$  ინტერვალში და  $F(a) = F(b)$ . მაშასადამე,  $F(x)$  აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ  $]a, b[$  ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $F'(\xi) = 0$ . მაგრამ

$$F'(\xi) = [\varphi(b) - \varphi(a)] f'(\xi) - [f(b) - f(a)] \varphi'(\xi).$$

მაშასადამე,

$$[\varphi(b) - \varphi(a)] f'(\xi) - [f(b) - f(a)] \varphi'(\xi) = 0. \quad (4.2)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ  $\varphi'(\xi) \neq 0$ . მართლაც, თუ  $\varphi'(\xi) = 0$ , მაშინ (4.2) ტოლობიდან გამოდინარეობს, რომ  $f'(\xi) = 0$ , რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. (4.2) ტოლობიდან მიიღება (4.1) ტოლობა. კოშის თეორემა დამტკიცებულია.

კოშის თეორემა საშუალო მნიშვნელობის თეორემის განზოგადებაა ორი ფუნქციის შემთხვევაში. ამ თეორემას მნიშვნელოვანი გამოყენება აქვს მათემატიკურ ანალიზში.

#### § 5. დარბუს თეორემა

როგორც ვიცით, თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ იგი მიიღებს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $f(a)$  და  $f(b)$ -ს შორის. დარბუს (G. Darboux) მიერ აღმოჩენილი იყო, რომ ანალოგიური თვისება აქვს ფუნქციის წარმოებულსაც. სახელდობრ, მან დაამტკიცა შემდეგი

თეორემა 8. თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია და წარმოებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $f'(x)$  მიიღებს ყოველ მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია  $f'(a)$  და  $f'(b)$  რიცხვებს შორის.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $f'(a) < f'(b)$ . ავიღოთ  $f'(a)$  და  $f'(b)$  რიცხვებს შორის რაიმე  $\lambda$  რიცხვი:

$$f'(a) < \lambda < f'(b).$$

წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად მოიძებნება ისეთი  $h > 0$ , რომ

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < \lambda < \frac{f(b-h)-f(b)}{-h}. \quad (5.1)$$

ახლა განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

ცხადია,  $F(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b-h]$  სეგმენტზე და ამიტომ (5.1) უტოლობათა ძალით  $[a, b-h]$  ინტერვალში არსებობს ისეთი  $x_0$  წერტილი, რომ  $F(x_0) = \lambda$ , ე. ი.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lambda$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად  $[x_0, x_0+h]$  ინტერვალში არსებობს ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(\xi).$$

მაშასადამე,

$$f'(\xi) = \lambda,$$

სადაც  $a < \xi < b$ . დარბუს თეორემა დამტკიცებულია.

§ 6. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები

თეორემა 7. თუ  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადი და ზრდადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტის ყოველ  $x$  წერტილში

$$f'(x) \geq 0. \quad (6.1)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $x$  მოცემული სეგმენტის წერტილია და განსხვავებულია  $b$ -საგან. ავიღოთ დადებითი რიცხვი  $\delta$  იმდენად მცირე, რომ  $x+\delta$  ეკუთვნოდეს  $[a, b]$  სეგმენტს.  $f(x)$  ფუნქციის ზრდადობის გამო ყოველი დადებითი  $\Delta x$  რიცხვისათვის, რომელიც არ აღემატება  $\delta$ -ს, გვექნება

მაშასადამე,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0.$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ (6.1) უტოლობას.

თუკი  $x=b$ , მაშინ ავიღოთ უარყოფითი  $\Delta x$ . ამ შემთხვევაში

$$f(x+\Delta x) - f(x) \leq 0$$

და, მაშასადამე,

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც  $\Delta x \rightarrow 0$ , მივიღებთ (6.1) უტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 8.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე კლებადი  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია ამავე სეგმენტზე, მაშინ აღნიშნულ სეგმენტზე  $f'(x) \leq 0$ .

ამრიგად, ფუნქციის მონოტონურობის შუალედში წარმოებულის ნიშანს არ იცვლის.

**თეორემა 9.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე  $f'(x) \geq 0$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია ზრდადია აღნიშნულ სეგმენტზე.

**დამტკიცება.** ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი ორი წერტილი  $x_1$  და  $x_2$ , ამასთანავე  $x_1 < x_2$ . ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi), \quad x_1 < \xi < x_2.$$

პირობის ძალით  $f'(\xi) \geq 0$ , ხოლო  $x_2 - x_1 > 0$ , ამიტომ  $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$  ანუ  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია ზრდადია  $[a, b]$  სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი ორი თეორემა:

**თეორემა 10.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე  $f'(x) \leq 0$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია კლებადია ამავე სეგმენტზე.

**თეორემა 11.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს  $[a, b]$  ინტერვალის ყოველ წერტილში დადებითი (უარყოფითი) წარმოებულის, მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია არსებითად ზრდადია (კლებადია).

**თეორემა 12.** ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტია და წარმოებადი. თუ ამ სეგმენტზე  $f'(x) \neq 0$ ,

მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია იქნება არსებითად მონოტონური ამავე სეგმენტზე.

დამტკიცება. ადვილი საჩვენებელია, რომ  $[a, b]$  სეგმენტზე  $f'(x)$  დადებითია ან უარყოფითია. მართლაც, ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებში  $f'(x_1) < 0$  (და  $f'(x_2) > 0$ ), მაშინ დარბუს თეორემის თანახმად  $f'(x)$  წარმოებული მთელზე ყველა მნიშვნელობას, მოთავსებულს  $f'(x_1)$  და  $f'(x_2)$  შორის. კერძოდ, არსებობს  $x_1$  და  $x_2$  წერტილებს შორის ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $f'(\xi) = 0$ , რაც პირობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად,  $f'(x)$  წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამიტომ  $f(x)$  არსებითად მონოტონური ფუნქციაა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $y = 3x^2 - 6x + 1$  ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები.

ამოხსნა. რადგანაც  $y' = 6x - 6$ , ამიტომ  $|1, +\infty|$  შუალედში  $y' > 0$ , ხოლო  $]-\infty, 1|$  შუალედში  $y' < 0$ , ამიტომ  $|1, +\infty|$  შუალედში მოცემული ფუნქცია არსებითად ზრდადია, აილო  $]-\infty, 1|$  შუალედში არსებითად კლებადია.

§ 7. განუსაზღვრელობათა ვახსნა

ვთქვათ,  $F(x)$  ფუნქცია განსაზღვრული არაა  $x = a$  წერტილში, მაგრამ ზღვარი აქვს, როდესაც  $x \rightarrow a$ . ასეთი ზღვრის მოძებნას განუსაზღვრელობათა ვახსნა ეწოდება.

1°.  $\frac{0}{0}$  სახის განუსაზღვრელობები. დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 18. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები დიფერენცირებადია  $a$  წერტილის რაიმე გაჩხვლევტილ მიდამოში, ამასთანავე ამ მიდამოში  $g'(x) \neq 0$  და  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . თუ არსებობს სასრული ან უსას-

რულო ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , მაშინ არსებობს აგრეთვე

ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.1)$$

დამტკიცება. რადგანაც  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  და  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , ამიტომ

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $f(a) = 0, g(a) = 0$ . ამ პირობებში

$f(x)$  და  $g(x)$  უწყვეტია  $a$  წერტილში.  $a$  წერტილის აღნიშნულ მიდამოში ავიღოთ რაიმე  $x$  წერტილი. კოშის ფორმულის თანახმად

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

სადაც  $\xi$  მოთავსებულია  $a$  და  $x$  წერტილებს შორის. რაკი  $f(a)=0$ ,  $g(a)=0$ , ამიტომ გვქმნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (7.2)$$

ცხადია, თუ  $x \rightarrow a$ , მაშინ  $\xi \rightarrow a$ . პირობის თანახმად არსებობს

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ამიტომ

$$\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

და (7.2) ტოლობის თანახმად მართებულია (7.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა ცნობილია ლოპიტალის (G. L'Hospital) თეორემის სახელწოდებით.

შენიშვნა. შეიძლება (7.1) ტოლობის მარცხენა ნაწილის ზღვარი არსებობდეს და არ არსებობდეს მარჯვენა ნაწილის ზღვარი. მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0,$$

მაგრამ წარმოებულთა ფარდობა არის

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

რომლის ზღვარი არ არსებობს, როდესაც  $x \rightarrow 0$ .

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x}.$$



ამოხსნა. როდესაც  $x \rightarrow 0$ , მაშინ მრიცხველიც და მნიშვნე-  
ლიც ნულისაკენ მიისწრაფვის. მაშასადამე, გვაქვს  $\frac{0}{0}$  სახის განუ-  
საზღვრელობა. ლოპიტალის თეორემის თანახმად

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

თეორემა 14. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები დიფერ-  
ენცირებადია  $[a, +\infty[$  შუალედში, ამასთანავე  $g'(x) \neq 0$   
და  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . თუ არსებობს სასრული ან

უსასრულო ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , მაშინ არსებობს აგრე-

თვე ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.3)$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $x = \frac{1}{t}$ . როდესაც  $x \rightarrow +$   
 $+\infty$ , მაშინ  $t \rightarrow 0$  და

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{t \rightarrow 0+} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

ლოპიტალის თეორემის თანახმად გვექნება

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)}$$

მაგრამ

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f'_x\left(\frac{1}{t}\right)}{g'_x\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ამრიგად, მართებულია (7.3) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურ ფორმულას მივიღებთ იმ შემთხვევაშიაც, როდესაც  $x \rightarrow -\infty$ .

მე-13 თეორემის რამდენჯერმე გამოყენების საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ზოგადი წესი: თუ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} f^{(n)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \dots = \lim_{x \rightarrow a} g^{(n)}(x) = 0$$

და არსებობს  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ , მაშინ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

და მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{e^x - 1 - x}$ .

ამოხსნა. აქ ჩვენ გვაქვს  $\frac{0}{0}$  სახის განუსაზღვრელობა. გამოვიყენოთ ლოპიტალის თეორემა. გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{e^x - 1 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{e^x - 1} = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ, ლოპიტალის თეორემის ერთხელ გამოყენებამ ვერ მიგვიყვანა ამოცანის ამოხსნამდე. ლოპიტალის თეორემა კიდევ გამოვიყენოთ, გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{e^x - 1 - x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = 3.$$

2°.  $\frac{\infty}{\infty}$  სახის განუსაზღვრელობები. მართებულია შემდეგი

თეორემა 15. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები დიდერენცირებადია  $a$  წერტილის რაიმე გაჩხვლევტილ მიდამოში და  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ , თუ არსე-

ბოზს  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (სასრული ან უსასრულო), მაშინ იარსებებს აგრეთვე  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  და ადგილი ექნება ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (7.4)$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $K = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  არის სასრული რიცხვი. მაშინ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\delta$  რიცხვი, რომ  $x$  ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს  $a - \delta < x < a + \delta$ ,  $x \neq a$  პირობას, გვექნება

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = K + \alpha_1, \quad \text{სადაც } |\alpha_1| < \varepsilon. \quad (7.5)$$

ავილოთ რაიმე  $[x, c]$  სეგმენტი, რომელიც ძვეს  $|a, a + \delta|$  ინტერვალში. ამ სეგმენტზე  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჯონსონის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < c,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}}. \quad (7.6)$$

რადგანაც

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} = 1,$$

ამიტომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $\eta < \delta$ , რომ  $x$  ცვლადის ყოველი მნიშვნელობისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს  $a < x < a + \eta$  პირობას, ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\frac{1 - \frac{g(c)}{g(x)}}{1 - \frac{f(c)}{f(x)}} = 1 + \alpha_2, \quad \text{სადაც } |\alpha_2| < \varepsilon. \quad (7.7)$$

ამის შემდეგ, (7.5) და (7.7) ფორმულების დახმარებით (7.6) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = K\alpha_2 + \alpha_1(1 + \alpha_2),$$

საიდანაც

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - K \right| < (|K| + \varepsilon + 1)\varepsilon, \quad a < x < a + \eta.$$

აქედან კი ჩანს, რომ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია, როდესაც  $K$  სასრულია.

ახლა გადავიდეთ იმ შემთხვევის განხილვაზე, როცა

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty.$$

დავამტკიცოთ, რომ (7.4) ტოლობა კვლავ მართებულია. მართლაც, უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

ამრიგად, უკანასკნელი შემთხვევა მიიყვანება უკვე განხილულ შემთხვევაზე, რომლის თანახმად გვექნება

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

აქედან კი მივიღებთ

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია მთლიანად.

თუ  $\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} |g'(x)| = +\infty$ , მაშინ უნდა განვიხილოთ  $\frac{f''(x)}{g''(x)}$  ფარდობა იმ დაშვებით, რომ  $f'(x)$  და  $g'(x)$  ფუნქციები აკმაყოფილებენ ზემოდამტკიცებული თეორემის პირობებს. მაშინ თუ არსებობს  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ , იარსებებს  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  და მართებულია ტოლობა.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ მესამე რივის წარმოებულების ფარდობა და ა. შ.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ თუ  $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| = +\infty$  და არსებობს  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}.$$

ამოხსნა. აქ გვაქვს  $\frac{\infty}{\infty}$  სახის განუსაზღვრელობა. წარმოებულთა ფარდობის ზღვარია

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln \sin 2x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\cos x}{\sin x} : \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x \cdot \sin 2x}{2 \cos 2x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2 \sin x} = 1. \end{aligned}$$

მაგალითი 4. ვიპოვოთ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

ამოხსნა. აქ გვაქვს  $\frac{\infty}{\infty}$  სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

3°. 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ისეთია, რომ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  და  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$ . მაშინ  $f(x)g(x)$  ნამრავლი  $x = a$  წერტილზე მოგვეცემს 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობას. ასეთი სახის განუსაზღვრელობის გახსნა ხერხდება ისევ ლოპიტალის წესით. მართლაც, გვაქვს

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

აქედან ჩანს, რომ 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დაიყვანება  $\frac{0}{0}$  სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე. შესაძლოა 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დაიყვანოთ  $\frac{\infty}{\infty}$  სახის განუსაზღვრელობაზეც. ამისათვის საჭიროა გამოვიყენოთ შემდეგნაირი გარდაქმნა:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

უკანასკნელ განუსაზღვრელობას კი გავხსნით ისევ ლოპიტალის წესით. მაგალითი 5. ვიპოვოთ

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ (e^a - e^x) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} \right].$$

ამოხსნა. აქ გვაქვს 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობა. თუ გამოვიყენებთ ლოპიტალის წესს, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left[ (e^a - e^x) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a} \right] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^a - e^x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}} = \\ &= \frac{2a}{\pi} \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x}{\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2ae^a}{\pi}. \end{aligned}$$

მაგალითი 6. ლობიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \left[ \left( x - \frac{3}{2} \right) \ln \sqrt{\frac{2x-3}{3}} \right] &= \\ = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \left[ (2x-3) \ln \left( \frac{2}{3}x - 1 \right) \right] &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{\ln \left( \frac{2}{3}x - 1 \right)}{\frac{1}{2x-3}} = \\ = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{(2x-3)^2}{(2x-3)} &= -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (2x-3) = 0. \end{aligned}$$

4°.  $\infty - \infty$  სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$  და

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . გამოვთვალოთ ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ . თუ აქ უშუა-

ლოდ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ  $\infty - \infty$  სახის განუსაზღვრელობას. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაშიც ზღვარის გამოთვლა შესაძლოა დაიყვანოს  $\frac{0}{0}$  სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე. მართლაც,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

მაგალითი 7. ლობიტალის წესის გამოყენება გვაძლევს

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{5}.$$

მაგალითი 8. თუ გამოვიყენებთ ლობიტალის წესს, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x \ln x + x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \ln x}{2 + \ln x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

მაგალითი 9. ლობიტალის წესის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\sin^2(x-1)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\sin^2(x-1)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\sin^2(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 - \sin^2(x-1)}{(x-1)^2 \sin^2(x-1)} = \\ & = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1) - \sin 2(x-1)}{2(x-1) \sin^2(x-1) + (x-1)^2 \sin 2(x-1)} = \\ & = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos 2(x-1)}{\sin^2(x-1) + 2(x-1) \sin 2(x-1) + (x-1)^2 \cos 2(x-1)} = \\ & = \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\left( \frac{x-1}{\sin(x-1)} \right)^2 \cos 2(x-1) + 1 + 4(x-1) \operatorname{ctg}(x-1)} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

5°. 1<sup>o</sup> სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ისეთია, რომ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$  და  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ . მაშინ  $y = [f(x)]g(x)$

ფუნქცია, როცა  $x = a$ , მოგვცემს 1<sup>o</sup> სახის განუსაზღვრელობას. მისი გახსნისათვის წინასწარ  $y$  გავალოგარიტმობთ:

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

და შევნიშნოთ, რომ  $\ln y$ , როცა  $x = a$  გვაძლევს 0  $\infty$  სახის განუსაზღვრელობას. ასეთი განუსაზღვრელობის გახსნა ზემოთ შევისწავლეთ.

მაგალითი 10. გამოვთვალოფ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \sqrt{\frac{2a}{x}} \right)^x.$$



ამოხსნა. გვაქვს

$$\ln y = x \ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}.$$

საიდანაც

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x \ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \cos \sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}} = -\sqrt{\frac{a}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{ctg} \sqrt{2ax^{-1}}} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \sqrt{2ax^{-1}}}{x^{-1}} = -a \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin \sqrt{2ax^{-1}}}{\sqrt{2ax^{-1}}} \right)^2 = -a. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = -a.$$

აქედან

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^{-a},$$

ე. ი.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \sqrt{\frac{2a}{x}} \right)^x = e^{-a}.$$

მაგალითი 11. გამოვთვალოთ

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$$

ამოხსნა. გვაქვს

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \ln y &= \lim_{x \rightarrow a} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \ln \left( 2 - \frac{x}{a} \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left( 2 - \frac{x}{a} \right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}} = \frac{2a}{\pi} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 \frac{\pi x}{2a}}{2a - x} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\lim_{x \rightarrow a} y = \exp \left( \frac{2}{\pi} \right)^1.$$

მ<sup>0</sup>.  $\infty^0$  და  $0^0$  სახის განუსაზღვრელობები. ვთქვათ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , მაშინ  $[f(x)]^{g(x)}$  ფუნქცია  $x = a$  წერტილში გვაძლევს  $\infty^0$  სახის განუსაზღვრელობას, რომლის გახსნა დაიყვანება  $\frac{\infty}{\infty}$  სახის (ან

<sup>1</sup>  $\exp f(x) = e^{f(x)}$ .

$\frac{0}{0}$  სახის) განუსაზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი გარდაქმნის დახმარებით:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{1 : g(x)} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{1 : \ln f(x)} \right).$$

თუ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , მაშინ  $[f(x)]^{g(x)}$  ფუნქცია  $x = a$  წერტილში გვაძლევს  $0^0$  სახის განუსაზღვრელობას, რომლის გახსნა ხდება იმავე ფორმულით.

როგორც ვხედავთ  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$  სახის განუსაზღვრელობათა გახსნა ხდება ერთი და იმავე წესით. საჭიროა ამ შემთხვევაში  $[f(x)]^{g(x)}$  ფუნქცია წინასწარ გავალოგარიტმით და შემდეგ ვაწარმოთ განუსაზღვრელობის გახსნა ზემოთ მოყვანილი ფორმულის მიხედვით.

მაგალითი 12. ლობიტალის წესის თანახმად

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x} &= \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 : \sin x} \right) = \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

მაგალითი 13. ლობიტალის წესი გვაძლევს

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x} &= \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x \operatorname{ctg} x} \right) = \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

მაგალითი 14. ლობიტალის წესის გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1-x))^{\ln(1-x)} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \ln(1-x)}{1 : \ln(1-x)} \right) = \\ &= \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

მაგალითი 15. თუ გამოვიყენებთ ლობიტალის წესს, გვექნება

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} \right) = \\ &= \exp \left( -\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

## სავარჯიშო

1. შეამოწმეთ როლის თეორემა  $f(x) = 2x^2 - 9x + 10$  და  $g(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$  ფუნქციებისათვის.

2.  $f'(x)$  წარმოებულის რომელი ფესვია მოთავსებული  $f(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 1$  ფუნქციის  $x=1$  და  $x=-1$  ფესვებს შორის?

3. რატომ არ აქვს ფესვი  $f(x) = \sqrt{x^2} - 4$  ფუნქციის წარმოებულს  $x=8$  და  $x=-8$  ფესვებს შორის?

4. შეამოწმეთ კოშის თეორემა [1; 4] შუალედში  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  და  $\varphi(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$  ფუნქციებისათვის. გააკეთეთ გამომდინარე დასკვნა.

5. გამოიყენეთ ლაგრანჟის თეორემა  $f(x) = x^3 + 5x - 2$  ფუნქციისათვის (1; 4) შუალედში.

6. დაამტკიცეთ, რომ

$$2 \arcsin \frac{x}{a} + \pi = 4 \arctg \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

სადაც  $|x| < a$ .

7. მოძებნეთ  $e^x$  ფუნქციისაგან განსხვავებული ისეთი  $f(x)$  ფუნქცია, რომლის წარმოებულთა ისევ  $f(x)$ .

ლოპიტალის თეორემის გამოყენებით გამოთვალეთ ზღვრები:

8.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$ ; პასუხი:  $ma^{m-1}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-c)^m - (a-c)^m}{x-a}$ ; პასუხი:  $m(a-c)^{m-1}$

10.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 - 4x^2 + 3}$ ; პასუხი:  $\frac{3}{4}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 10x^2 + 8}{x^3 - 6x + 4}$ ; პასუხი:  $\frac{20}{3}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{ax^3 - 2acx + ac^2}{bx^3 - 2bcx + bc^2}$ ; პასუხი:  $\frac{a}{b}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - 2ax^3 + a^3x}{x^n - a^n}$ ; პასუხი:  $\frac{2}{n(n-1)a^{n-3}}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3x - ax^2 + a^3}{x^2 - a^2}$ ; პასუხი:  $2a$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n - x^n}{\operatorname{tg} a^n - \operatorname{tg} x^n}$ ; პასუხი:  $\cos^2 a^n$ .
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ; პასუხი:  $\frac{1}{2}$ .
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x+a}}{\sqrt{x^2+2ax}}$ ; პასუხი:  $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ .
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{a - \sqrt{a^3-x^2}}$ ; პასუხი:  $2a$ .
19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n-x^n}}{x^n}$ ; პასუხი:  $\frac{1}{na^{n-1}}$ .
20.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{(x^n-a^n)^m}}{\sqrt{(x-a)^m}}$ ; პასუხი: 0, როცა  $m > 0$ ;  $\infty$ ,  
როცა  $m < 0$ .
21.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}}$ ; პასუხი:  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$ .
22.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[3]{2a^3x-x^4-a\sqrt{a^2x}}}{a - \sqrt{ax^3}}$ ; პასუხი:  $\frac{16}{9} a$ .
23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$ ; პასუხი: 1.
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{xa^x}$ ; პასუხი:  $\ln a$ .
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2c^x}{\lg(1-x)}$ ; პასუხი:  $\lg \frac{c^3}{ab}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{5}} \frac{5x-4}{\sin(5x-4)}$ ; პასუხი: 1.
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2) \operatorname{sec} x}{x^2}$ ; პასუხი: 1.
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi-x)}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2}}$ ; პასუხი:  $-\frac{1}{2}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a-x}{\sqrt{1-\cos(a^2-x^2)}}; \text{ პასუხი: } \frac{1}{\sqrt{2a}}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{2x}+1-e^{2x}-x}{e^{2x}-1}; \text{ პასუხი: } -1.$
31.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\cos x + \sin x - 1}; \text{ პასუხი: } 1.$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \sin ax - b^x \sin bx}{e^x \sin cx - d^x \sin dx}; \text{ პასუხი: } \frac{a-b}{c-d}.$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2\cos^2 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x}; \text{ პასუხი: } \frac{9}{4}.$
34.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}; \text{ პასუხი: } \infty.$
35.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}; \text{ პასუხი: } 1.$
36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{4x}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}; \text{ პასუხი: } \frac{\pi^2}{8}.$
37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{a+b \ln \sin x}; \text{ პასუხი: } \frac{1}{b};$
38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(a+be^x)}{a+cx}; \text{ პასუხი: } \frac{1}{c}.$
39.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}(2m-1)x}{\operatorname{tg} x}; \text{ პასუხი: } \frac{1}{2m-1} \text{ (m-მთელი).}$
40.  $\lim_{x \rightarrow a^2} \frac{\ln(a-\sqrt{x})}{m-\frac{1}{x-a^2}}; \text{ პასუხი: } 0.$
41.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right); \text{ პასუხი: } \infty.$

$$42. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - \lg \frac{a}{x}}{\left(\frac{a+m}{a}\right)^{\frac{1}{x}}} - \frac{\ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{arc} \operatorname{tg} mx} + \frac{\ln x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \right];$$

პასუხი:  $\infty$ .

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arc} \sin x \operatorname{ctg} x); \text{ პასუხი: } 1.$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 1} [(1-x) \ln(1-x)]; \text{ პასუხი: } 0.$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 0} [\cos e^x \ln(1-x)]; \text{ პასუხი: } -1.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \sec \frac{\pi x}{2} \ln \frac{1}{x} \right); \text{ პასუხი: } \frac{2}{\pi}.$$

$$47. \lim_{x \rightarrow a} \left[ \ln \left( 2 - \frac{x}{a} \right) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right]; \text{ პასუხი: } \frac{2}{\pi}.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[ \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right]; \text{ პასუხი: } \frac{1}{2}.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow a} \left[ (e^a - e^x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a} \right]; \text{ პასუხი: } \frac{2ae^a}{\pi}.$$

$$50. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{5}{x^2+x-6} \right); \text{ პასუხი: } \frac{1}{5}.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right); \text{ პასუხი: } \frac{2}{3}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{a}{x^a - 1} \right); \text{ პასუხი: } \frac{a}{2}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{2}{x} + \frac{3}{e^x - 1} \right]; \text{ პასუხი: } -1.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\sin^2(x-1)} \right]; \text{ პასუხი: } \frac{5}{6}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \sqrt{\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{4x^2}} - \frac{1}{2x} \right]; \text{ პასუხი: } -1.$$

56.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi x - 1}{2x^3} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)} \right]$ ; პასუხი:  $\frac{\pi^2}{6}$ .

57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)} \right]$ ; პასუხი:  $\frac{\pi^2}{8}$ .

58.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( \frac{1}{x} \right)^{\sin x} \right]$ ; პასუხი: 1.

59.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$ ; პასუხი: 1.

60.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ ; პასუხი: 1.

61.  $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln(1-x)|^{\ln(1-x)}$ ; პასუხი: 1.

62.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ ; პასუხი: 1.

63.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x^3} \right)^x \right]$ ; პასუხი: 1.

64.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \sqrt{\frac{2a}{x}} \right)^x$ ; პასუხი:  $e^{-a}$ .

65.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{a}}$ ; პასუხი: 1.

66.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$ ; პასუხი:  $e^{2/\pi}$ .

67.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$ ; პასუხი: 0.

68.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ; პასუხი: 1.

69.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$ ; პასუხი: 1.

70.  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$ ; პასუხი: 1.

§ 8. ტაილორის და მიალორანის ფორმულები

ვთქვათ,  $[c, d]$  სეგმენტზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია  $n+1$ -ჯერ დიფერენცირებადია მოცემულ სეგმენტზე. ავიღოთ ამ სეგმენტზე ნებისმიერი ორი  $a$  და  $x$  წერტილი,  $a < x$ , და განვიხილოთ  $M$  რიცხვი, რომელიც განსაზღვრება შემდეგი ტოლობიდან

$$f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) = M(x-a)^{p}, \quad (8.1)$$

სადაც  $p$  რაიმე მთელი დადებითი რიცხვია.

ავავით შემდეგი სახის დამხმარე ფუნქცია:

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \dots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) = M(x-t)^p, \quad (8.2)$$

საიდანაც ადვილად მივიღებთ

$$\varphi'(t) = M p(x-t)^{p-1} - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t). \quad (8.3)$$

$\varphi(t)$  ფუნქცია  $(a, x)$  შუალედზე დიფერენცირებადია და როგორც (8.1) და (8.2) ტოლობებიდან ჩანს,  $\varphi(x) = \varphi(a) = 0$ . ამრიგად,  $\varphi(t)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ როლის თეორემის თანახმად არსებობს  $a$  და  $x$  წერტილებს შორის ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $\varphi'(\xi) = 0$ . მაშასადამე, თუ მხედველობაში მივიღებთ (8.3) ტოლობას, გვექნება

$$M p(x-\xi)^{p-1} - \frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

აქედან

$$M = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi).$$

ახლა (8.1) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x), \quad (8.4)$$



სადაც

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(\xi), \quad a < \xi < x.$$

(8.4) ფორმულას ეწოდება ტეილორის ფორმულა,  $R_n(x)$ -ს კი—ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი.

ვინაიდან  $a < \xi < x$ , ამიტომ  $\xi$  რიცხვი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:  $\xi = a + \theta(x-a)$ , სადაც  $0 < \theta < 1$ . მაშასადამე,  $R_n(x)$  დამატებითი წევრი მიიღებს სახეს

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]. \quad (8.5)$$

$R_n(x)$ -ს, რომელიც განსაზღვრულია (8.5) ფორმულით, ეწოდება ტეილორის ფორმულის დამატებითი წევრი შლეშილხის (Schlömilch) სახით.

თუ  $p=1$ , მივიღებთ დამატებით წევრს კოშის სახით

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

თუ  $p=n+1$ , (8.5) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

ეს არის დამატებითი წევრი ლაგრაჟის სახით.

ფუნქციას  $f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$  ეწოდება ტეილორის  $n$ -ური ხარისხის მრავალწევრი (აქ იგულისხმება, რომ  $f^{(n)}(a) \neq 0$ ).

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $x-a=h$ , ტეილორის ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

სადაც დამატებითი წევრი შლეშილხის სახით იქნება

$$R_n = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(a + \theta h),$$

კოშის სახით იქნება

$$R_n = \frac{h^{n+1} (1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta h),$$

ლაგრანჟის სახით კი

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a - \theta h).$$

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ  $[c, d]$  სეგმენტი შეიცავს ნულს და ვიგულისხმობთ, რომ  $a=0$ . მაშინ ტეილორის (8.4) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n, \quad (8.6)$$

რომელსაც მაკლორენის ფორმულა ეწოდება. ამ ფორმულაში დამატებითი წევრი კოშის და ლაგრანჟის სახით შესაბამისად ასე ჩაიწერება

$$R_n = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

იმ შემთხვევაში, როცა  $f(x) = P(x)$  არის  $n$  ხარისხის მრავალწევრი

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

მაშინ ელემენტარული გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ მისი დაშლა  $x-a$  სხვაობის ხარისხების მიხედვით იქნება

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (8.7)$$

კერძოდ, თუ  $a=0$ , მაშინ

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} x + \frac{P''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (8.8)$$

უკანასკნელ (8.7) და (8.8) ფორმულებს, შესაბამისად, უწოდებენ ტეილორის და მაკლორენის ფორმულებს მრავალწევრებისათვის.

**§ 8. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა  
მაკლორენის ფორმულით**

მოვიყვანოთ ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა მაკლორენის ფორმულის გამოყენებით.

1.  $f(x) = e^x$  ფუნქციის დაშლა. ეინაიდან  $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ , ამიტომ  $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$  და, თანახმად (8.6) ფორმულისა, გვექნება

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}. \quad (9.1)$$

აქ დამატებითი  $R_n$  წევრი აღებულია ლაგრანჟის სახით.  $\theta$  დამოკიდებულია აგრეთვე  $n$ -ზე.

2.  $f(x) = \sin x$  ფუნქციის დაშლა. აქ  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = -1$ ,  $f^{(4)}(0) = 0, \dots, f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$ ,

$$f^{(n+1)}(x) = \sin \left[ x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right],$$

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \sin \left[ \theta x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right].$$

მაშასადამე, (8.6) ფორმულა გვაძლევს

$$\begin{aligned} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \sin n \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin \left[ (n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right]. \end{aligned}$$

თუ  $n$  კენტია, ე. ი.  $n = 2k + 1$ , მაშინ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x), \quad (9.2)$$

სადაც

$$R_{2k+1}(x) = (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin \theta x.$$

თუკი  $n$  ლუწია, ე. ი.  $n = 2k$ , მაშინ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x), \quad (9.3)$$

სადაც

$$R_{2k}(x) = (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \theta x.$$

3.  $f(x) = \cos x$  ფუნქციის დაშლა. ამ ფუნქციისათვის გვაქვს:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \dots, \quad f^{(n)}(0) = \cos n \frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos \left[ (n+1) \frac{\pi}{2} + x \right], \quad f^{(n+1)}(\theta x) = \cos \left[ (n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right].$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (8.6) ფორმულაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^n}{n!} \cos n \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cos \left[ (n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right]. \end{aligned}$$

თუ  $n = 2k$ , მაშინ

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \\ + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin \theta x. \end{aligned} \quad (9.4)$$

თუკი  $n = 2k+1$ , მაშინ

$$\begin{aligned} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \\ + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+2)!} \cos \theta x. \end{aligned}$$

4.  $f(x) = \ln(1+x)$  ფუნქციის დაშლა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულები:

$$f(x) = \ln(1+x), \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -3!,$$

.....

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

თუ გამოთვლილ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (8.6) ფორმულაში, გვექნება

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \quad (9.5)$$

აქ დამატებითი წევრი  $R_n$  აღებულია ლაგრანჟის სახით.

5.  $f(x) = (1+x)^\alpha$  ფუნქციის დაშლა, როდესაც  $\alpha$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ელემენტარული გამოთვლები გვარწმუნებს, რომ

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) &= \alpha, \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) &= \alpha(\alpha-1), \\ &\dots & & \dots \\ f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots[\alpha-(n-1)](1+x)^{\alpha-n}, \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\dots[\alpha-(n-1)], \\ f^{(n+1)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \\ f^{(n+1)}(\theta x) &= \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}. \end{aligned}$$

თუ ამ მნიშვნელობებს შევიტანთ (8.6) ფორმულაში, გვექნება

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \\ &+ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!} x^n + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

6.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  ფუნქციის დაშლა. მისი გაწარმოებით მივიღებთ

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{ანუ } (1+x^2) f'(x) = 1.$$

მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილი  $n$ -ჯერ გავაწარმოთ მიმდევრობით, ამასთან მარცხენა ნაწილის გამოსახულების გაწარმოებისათვის გამოვიყენოთ ლეიბნიცის ფორმულა, გვექნება

$$(1+x^2) f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0.$$

თუ ამ ტოლობაში ჩავსვამთ  $x=0$  მნიშვნელობას, მივიღებთ შემდეგი სახის რეკურენტულ ფორმულას

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1) f^{(n-1)}(0). \quad (9.7)$$

ვინაიდან  $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ , ამიტომ  $f''(0) = 0$  და (9.7) ფორმულადან მივიღებთ, რომ  $f(x) = \arctg x$  ფუნქციის ყველა ლუწი რიგის წარმოებულები  $x=0$  წერტილზე ნულის ტოლია:  $f^{(2m)}(0) = 0$ .

გარდა ამისა, ვინაიდან  $f'(0) = 1$ , ამიტომ მოცემული ფუნქციის კენტი რიგის წარმოებულებისათვის მივიღებთ

$$f^{(2m+1)}(0) = -2m(2m-1) f^{(2m-1)}(0), \text{ საიდანაც } f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$$

ამის შემდეგ მოცემული ფუნქციის დაშლა ასე დაიწერება

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x), \quad (9.8)$$

სადაც  $R_{2m-1}(x)$ , თუ  $x \rightarrow 0$ , უფრო მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა, ვიდრე  $x^{2m}$ .

თუ (9.8) ფორმულაში უკუვავადებთ დამატებით წევრს, მივიღებთ  $f(x)$  ფუნქციისათვის მიახლოებით ფორმულას

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (9.9)$$

რომლის ლირსება იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემული ფუნქცია (მიახლოებით) შეცვლილია მარტივი ფუნქციით —  $n$ -ური ხარისხის მრავალწევრით, ამასთან ცდომილება ტოლია უკუვადებული დამატებითი წევრისა. მაგალითად, თუ  $f(x)$  ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებულები შემოსაზღვრულია რაიმე  $M$  რიცხვით, მაშინ

$$|R_n(x)| \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$$

და  $R_n(x)$  ნულისაკენ მიისწრაფის, როცა  $n \rightarrow \infty$ .

ზემონათქვამის გამო  $f(x) = \sin x$  ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

ხოლო

$$|R_{2n}(x)| = \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} + \theta x \right] \right| \leq \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}.$$

$f(x) = \cos x$  ფუნქციის მიახლოებითი მრავალწევრი იქნება

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

სადაც დამატებითი წევრის შეფასებას აქვს შემდეგი სახე:

$$|R_{2n+1}(x)| = \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta x \right| \leq \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!}.$$

### ს ა ვ ა რ ც ი შ ა

დამალეთ მაკლორენის ფორმულით შემდეგი ფუნქციები:

1.  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ,

8.  $f(x) = \frac{1}{1+x} \ln(1+x)$ .

2.  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

9.  $f(x) = \sin^3 x$ .

10.  $f(x) = e^{\sin x}$ .

3.  $f(x) = 3x$ .

11.  $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ .

4.  $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ .

12.  $f(x) = (1+x)^m$ .

5.  $f(x) = \arccos x$ .

6.  $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$ .

13.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

7.  $f(x) = e^{x \sin x}$ .

14.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

19.  $f(x) = \cos^3 x$ .

15.  $f(x) = \arcsin x$ .

20.  $f(x) = \operatorname{tg}^4 x$ .

16.  $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$ .

21.  $f(x) = e^{\cos x}$ .

17.  $f(x) = e^{\arcsin x}$ .

22.  $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$ .

18.  $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ .

23.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x})$ .

## § 10. ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და მინიმუმი

მათემატიკის, ფიზიკის, ტექნიკისა და სხვა მეცნიერებათა მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნასთან. ასეთი ამოცანების ერთი ნაწილი შეისწავლება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით.

ვთქვათ, მოცემულია  $[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია. ვიტყვი, რომ  $f(x)$  ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტის შიგა  $x = x_0$  წერტილში აღწევს მაქსიმუმს, თუ ნებისმიერი  $\Delta x$  ნაზრდისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე საკმარისად მცირეა, ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0.$$

$x_0$  წერტილს ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი ეწოდება.

ასევე ვიტყვი, რომ  $f(x)$  ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტის შიგა  $x = x_1$  წერტილში აღწევს მინიმუმს, თუ ნებისმიერი  $\Delta x$  ნაზრდისათვის, რომლის აბსოლუტური სიდიდე საკმარისად მცირეა, ადგილი აქვს უტოლობას

$$f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \geq 0.$$

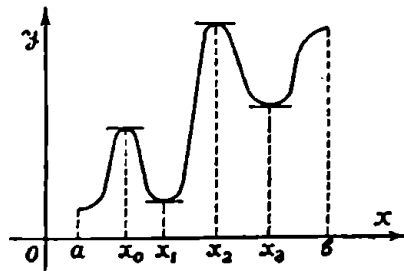
$x_1$  წერტილს ფუნქციის მინიმუმის წერტილი ეწოდება.

მოყვანილი განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობა მაქსიმუმის  $x_0$  წერტილში უდიდესია იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელიც მას აქვს  $x_0$  წერტილის გარკვეულ მიდამოში.

ასევე ფუნქციის მნიშვნელობა მინიმუმის  $x_1$  წერტილში უმცირესია იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელსაც იგი მიიღებს  $x_1$  წერტილის გარკვეულ მიდამოში.



როგორც ვხედავთ, ზემომოყვანილი ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილების განსაზღვრა უეღარებითია და, რატომაც უნდა, იმას არ ნიშნავს, რომ ფუნქციის მნიშვნელობანი მაქსიმუმის  $x_0$  წერტილში და მინიმუმის  $x_1$  წერტილში, შესაბამისად, ამ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობებია მთელ  $[a, b]$  სეგმენტზე.



ნახ. 59.

იმ წერტილებს, რომელზედაც  $f(x)$  ფუნქციას მაქსიმუმი და მინიმუმი აქვს, ეწოდება ამ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელობებს ექსტრემუმის წერტილებში ეწოდება ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

59-ე ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას  $x=x_0$  და  $x=x_2$  წერტილებში აქვს მაქსიმუმი,  $x=x_1$  და  $x=x_3$  წერტილებში კი მინიმუმი.

ცხადია, ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი და ექსტრემუმის წერტილების განლაგება  $[a, b]$  სეგმენტზე ერთგვარ დახასიათებას გვაძლევს ფუნქციის ქვევის შესახებ ამ სეგმენტზე.

ახლა შევისწავლოთ წესი იმ წერტილების მოძებნისა, რომელზედაც ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი ან მინიმუმი.

**თეორემა 16.** თუ  $x$  წერტილში წარმოებად  $f(x)$  ფუნქციას ამავე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ  $f'(x) = 0$ .

ეს თეორემა ფერმას თეორემის შედეგია.

ამრიგად, წარმოებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა.

გეომეტრიული თვალსაზრისით წარმოებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა იმას ნიშნავს, რომ ფუნქციის გრაფიკის მხები ექსტრემუმის შესაბამის წერტილში  $Ox$  ღერძის პარალელურია.

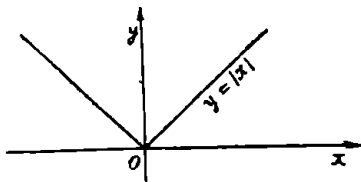
ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემალური მნიშვნელობა აგრეთვე იმ წერტილში, რომელზედაც წარმოებულთ არა აქვს. მაგალითად,

23 ვლ. კელიძე, ე. წითლანაძე

$y=|x|$  ფუნქციას  $x=0$  წერტილში წარმოებული არა აქვს, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი (ნახ. 60).

განსაზღვრა 1.  $x$  წერტილს, რომელზედაც  $f'(x)=0$ , ფუნქციის სტაციონარული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ სტაციონარულ წერტილებსა და იმ წერტილებს შორის, რომლებზედაც ფუნქციას წარმოებული არა აქვს.



ნახ. 60.

განსაზღვრა 2. წერტილს, რომელზედაც უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, ფუნქციის კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

თუ მხედველობაში მივიღებთ ფუნქციის კრიტიკული წერტილის განსაზღვრას შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილი უნდა ვეძებოთ კრიტიკულ წერტილებს შორის.

ისმის კითხვა: აღებული კრიტიკული წერტილი არის თუ არა ექსტრემუმის წერტილი და თუ არის, რომელ ექსტრემუმთან გვაქვს საქმე, მინიმუმთან თუ მაქსიმუმთან? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს ექსტრემუმის ორი კრიტერიუმი, რომლებსაც ქვემოთ დავამტკიცებთ.

**თეორემა 17.** თუ კრიტიკული  $x_0$  წერტილის რაიმე გაჩხვლელი მდამოში

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x < x_0, \quad (10.1)$$

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x > x_0,$$

მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ

$$f'(x) < 0, \text{ როდესაც } x < x_0, \quad (10.2)$$

$$f'(x) > 0, \text{ როდესაც } x > x_0,$$

მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მინიმუმი.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $x_0$  წერტილის რაიმე გაჩხვლელი მდამოში შესრულებულია (10.1) პირობა. მაშინ ამ მდამოში  $x_0$  წერტილის მარცხნივ ფუნქცია ზრდადია, მარჯვნივ კი კლებადი. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ  $x_0$  წერტილის რაიმე მდამოში შესრულებულია (10.2) პირობა, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მინიმუმი.

შენიშვნა. თუ  $x$ -ის  $x_0$  წერტილზე გავლისას  $f'(x)$  წარმოებულნი შანს არ იცვლის, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი, ვინაიდან ამ წერტილის რომელიღაც მიდამოში  $f(x)$  იქნება ზრდადი ან კლებადი.

დამტკიცებულის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ექსტრემუმის მოძებნის შემდეგი წესი:

1) ვიპოვოთ  $f'(x)$  წარმოებულნი და ამოვხსნათ  $f'(x) = 0$  განტოლება. ამონახსნები გვაძლევს სტაციონარულ წერტილებს. ამის გარდა, მოვძებნოთ ის წერტილები, რომლებშიც ფუნქციას წარმოებულნი არა აქვს;

2) შევამოწმოთ წარმოებულის ნიშანი თითოეული კრიტიკული წერტილისათვის ამ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ;

3) წარმოებულის ნიშნების მიხედვით მე-17 თეორემის საფუძველზე ირკვევა ექსტრემუმის საკითხი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$  ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. ჯერ მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებულნი გვაქვს:

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6.$$

ეს წარმოებულნი გავუტოლოთ ნულს

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

აქედან  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .

ამრიგად, მოცემულ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ორი კრიტიკული წერტილი. გამოვიკვლიოთ ახლა  $f'(x) = (x-2)(x-3)$  წარმოებულის ქვეა კრიტიკული წერტილების მცირე მიდამოში.

ავილოთ კრიტიკული წერტილი  $x_1 = 2$ . თუ  $x$  ნაკლებია ორზე, მაშინ წარმოებულნი დადებითია, ხოლო თუ  $x$  მეტია ორზე და ნაკლებია სამზე, მაშინ წარმოებულნი უარყოფითია. მაშასადამე, როცა  $x$  ცვლადი მარცხნიდან მარჯვნივ გაივლის  $x = 2$  წერტილს, მაშინ ფუნქციის წარმოებულნი დადებითი ნიშანს იცვლის უარყოფითი ნიშნით. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x = 2$  არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = 3 \frac{2}{3}.$$

ახლა ავიღოთ კრიტიკული წერტილი  $x_2=3$ . თუ  $x$  მეტია ორზე და ნაკლებია სამზე, მაშინ წარმოებული უარყოფითია, ხოლო თუ  $x$  მეტია სამზე, მაშინ წარმოებული დადებითია. მაშასადამე, როცა  $x$  მარცხნიდან მარჯვნივ გაივლის  $x=3$  წერტილს, მაშინ ფუნქციის წარმოებული უარყოფით ნიშანს იცვლის დადებითი ნიშნით. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x=3$  წერტილი არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და

$$\min f(x) = \frac{1}{3} 3^3 - \frac{5}{2} 3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 3 \frac{1}{2}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $f(x) = x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 12x + 4$  ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. მოვიყენოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული. გვაქვს:

$$f'(x) = 6(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2) = 6(x^2 - 1)(x - 1)^2(x + 2).$$

ეს წარმოებული გავუტოლოთ ნულს

$$6(x^2 - 1)(x - 1)^2(x + 2) = 0.$$

ამ განტოლების ერთმანეთისაგან განსხვავებული ფესვებია:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = -2$ . ამრიგად, ფუნქციას აქვს სამი კრიტიკული წერტილი.

ახლა შევისწავლოთ წარმოებულის ქცევა კრიტიკული წერტილების მცირე მიდამოში.

ავიღოთ კრიტიკული წერტილი  $x_1 = 1$ . თუ  $x$  მეტია ნულზე და ნაკლებია ერთზე, მაშინ  $f'(x) < 0$ , ხოლო თუ  $x$  მეტია ერთზე, მაშინ  $f'(x) > 0$ . მაშასადამე,  $x_1 = 1$  არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და  $\min f(x) = 1^5 - 6 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 4 = 0$ .

ასევე დავრწმუნდებით, რომ  $x_2 = -1$  არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და  $\max f(x) = 16$ .

დაბოლოს  $x_3 = -2$  არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და  $\min f(x) = 0$ .

მაგალითი 3. ვიპოვოთ  $f(x) = (x-1) \sqrt[3]{x^2}$  ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობები.

ამოხსნა. მოვიყენოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0.$$

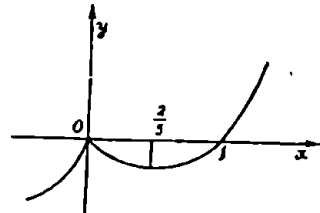
აქედან გვაქვს, რომ  $x_1 = \frac{2}{5}$  და, გარდა ამისა,  $x_2 = 0$  წერტილში არ არსებობს სასრული წარმოებული. მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას აქვს ორი კრიტიკული წერტილი:  $x_1 = \frac{2}{5}$  და  $x_2 = 0$ . შევნიშნოთ, რომ როცა  $x$  ნაკლებია  $\frac{2}{5}$ -ზე, მაშინ  $f'(x) < 0$ , ხოლო როცა  $x$  მეტია  $\frac{2}{5}$ -ზე, მაშინ  $f'(x) > 0$ . ამრიგად,  $x_1 = \frac{2}{5}$  არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და

$$\min f(x) = -\frac{3}{5} \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

$x_2 = 0$  კრიტიკული წერტილის მარცხნივ  $f'(x) > 0$  (ნახ. 61), ხოლო, თუ  $x$  მეტია ნულზე და ნაკლებია  $\frac{2}{5}$ -ზე, მაშინ  $f'(x) < 0$ .

როგორც ვხედავთ  $x_2 = 0$  არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და  $\max f(x) = 0$ .

თეორემა 16. თუ  $x_0$  არის  $f(x)$  ფუნქციის სტაციონარული წერტილი და  $f''(x_0) < 0$ , მაშინ  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ  $f''(x_0) > 0$ , მაშინ აქვს მინიმუმი.



ნახ. 61.

დამტკიცება. მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრის თანახმად

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

მაგრამ პირობის თანახმად  $f'(x_0) = 0$ . ამიტომ

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

ახლა ვიგულისხმობთ, რომ  $f''(x_0) > 0$ . მაშინ არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი გაჩხვლეტილი მიდამო, რომელშიაც

$$\frac{f'(x)}{x-x_0} > 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ  $f'(x) > 0$ , როდესაც  $x > x_0$  და  $f'(x) < 0$ , როდესაც  $x < x_0$ . მე-17 თეორემის თანახმად  $f(x)$  ფუნქციის  $x_0$  წერტილში აქვს მინიმუმი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ  $f''(x_0) < 0$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მაქსიმუმი. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ვლელულობთ ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის მეორე წესს ორჯერ წარმობადი ფუნქციებისათვის.

**შენიშვნა.** თუ  $f''(x_0) = 0$  და  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციას არა აქვს უფრო მაღალი რიგის წარმობებები, მაშინ ექსტრემუმის საკითხის გამოკლევა უნდა ჩავატაროთ პირველი წესით.

**მაგალითი 4.** ვიპოვოთ  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$  ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

**ამოხსნა.** მოძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმობელი და გავუტოლოთ იგი ნულს:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5 = 0.$$

აქედან შივილებთ ფუნქციის სტაციონარულ წერტილებს:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ . ახლა გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმობელი

$$f''(x) = 2x - 6.$$

გამოვარკვიოთ უკანასკნელის ნიშანი  $x_1 = 1$  წერტილში:

$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 6 < 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x_1 = 1$  არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\max f(x) = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = \frac{4}{3}.$$

ახლა შევამოწმოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმობებულის ნიშანი  $x_2 = 5$  წერტილში. გვაქვს:

$$f''(5) = 2 \cdot 5 - 6 > 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x_2 = 5$  არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\min f(x) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 - 1 = -9 \frac{1}{3},$$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ  $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ ,  $x > 0$ ,  $a > 0$ , ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია წინასწარ გავალგაართმით:

$$\varphi(x) = \ln f(x) = x(\ln a - \ln x)$$

და შევნიშნოთ, რომ  $f(x)$  და  $\varphi(x)$  ფუნქციები ექსტრემალურ მნიშვნელობებს მიიღებენ  $x$  ცვლადის ერთი და იმავე მნიშვნელობისათვის. მოვძებნოთ  $\varphi(x)$  ფუნქციის ექსტრემუმი. ამისათვის გავაწარმოოთ იგი და წარმოებული გავუტოლოთ ნულს:

$$\varphi'(x) = \ln a - \ln x - 1 = 0.$$

აქედან მივიღებთ, რომ  $x = \frac{a}{e}$ . ამრიგად,  $\varphi(x)$  ფუნქციას და, მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციასაც აქვს ერთადერთი სტაციონარული წერტილი. ახლა მოვძებნოთ  $\varphi(x)$  ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x}. \text{ ვინაიდან } \varphi''\left(\frac{a}{e}\right) = -\frac{e}{a} < 0, \text{ ამიტომ } x = \frac{a}{e} \text{ არის}$$

მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x) = e^{\frac{a}{e}}.$$

**§ 11. უწყვეტი ექსტრემუმის გამოკვლევა ტეილორის ფორმულის გამოყენებით:**

**თეორემა 19.** ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქციას აქვს  $n+1$  რიგის წარმოებული  $x_0$  წერტილის რაიმე მიდამოში და ეს წარმოებული უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, ამის გარდა, ვიგულისხმობთ, რომ:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0. \quad (11.1)$$

თუ  $n+1$  ლუწია და  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ , მაშინ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს ლოკალური მაქსიმუმი, და მას აქვს ლოკალური მინიმუმი, როდესაც  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ . თუ  $n+1$  კენტი რიცხვია, მაშინ ფუნქციას არა აქვს ექსტრემუმი  $x_0$  წერტილში.

**დამტკიცება.** ჩერ ვიგულისხმობთ, რომ  $n+1$  ლუწი რიცხვია.  $x = x_0$  წერტილის მიდამოში დავშალოთ  $f(x)$  ფუნქცია ტეილორის ფორმულის მიხედვით და გავითვალისწინოთ (11.1) ტოლობები ვეექნება.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

სადაც  $\xi$  მოთავსებულია  $x_0$  და  $x$  შორის. აქ დამატებითი წევრი დაწერილია ლაგრანჟის სახით. მიღებული ტოლობა ასე გადაწერათ

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (11.2)$$

რაკი  $f^{(n+1)}(x)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში და  $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ , ამიტომ არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც  $f^{(n+1)}(x)$  წარმოებულს ექნება  $f^{(n+1)}(x_0)$  რიცხვის ნიშანი. ამიტომ, თუ  $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ , მაშინ  $f^{(n+1)}(\xi) > 0$ , როდესაც  $x$  საკმარად ახლოსაა  $x_0$ -თან. მაშასადამე, (11.2) ტოლობის მიხედვით  $f(x) - f(x_0) > 0$ , როდესაც  $x$  საკმარად ახლოსაა  $x_0$ -თან. ეს კი ამტკიცებს, რომ  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს ლოკალური მინიმუმი.

ანალოგიური მსჯელობით დავრწმუნდებით, რომ თუ  $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ , მაშინ  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ლოკალური მაქსიმუმი.

ახლა ვთქვათ, რომ  $n+1$  კენტი რიცხვია, მაშინ არ არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც (11.2) ტოლობის მარცხენა ნაწილი ნიშანს ინარჩუნებდეს. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში  $f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

მაგალითი. მოვიყვანოთ  $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$  ფუნქციის ექსტრემუმი.

ამოხსნა. ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x.$$

ამ წარმოებულის ერთადერთი ფესვია  $x=0$ . შემდეგ,

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f'''(0) = 0,$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4 > 0.$$

მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას აქვს ერთადერთი ექსტრემუმის წერტილი  $x=0$ : ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი და

$$\min f(x) = f(0) = 4.$$

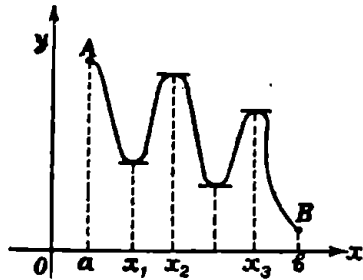
### § 18. ფანქსიის უდიდესი და უსიბრუსი მნიშვნელობები

უკანასკნელ ორ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლეთ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმისა და მინიმუმის ამოცანა. ახლა გავეცნოთ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების საკითხს.



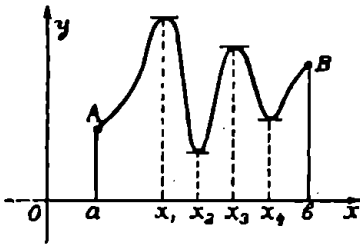
ვთქვათ,  $f(x)$  არის  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია. როგორც ვიცით, ამ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტზე ეწოდება მის ყველა მნიშვნელობას შორის უდიდეს რიცხვს. ასევე  $f(x)$  ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტზე ეწოდება მის ყველა მნიშვნელობას შორის უმცირეს რიცხვს.

ცხადია,  $f(x)$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსიმუმს ამ სეგმენტზე. ასევე,  $f(x)$  ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მინიმუმს ამ სეგმენტზე (ნახ. 62). ამ ნახაზზე გამოსახულ ფუნქციას უდიდესი მნიშვნელობა აქვს  $a$  წერტილში, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობა  $b$  წერტილში. ისიც ცხადია, რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის წერტილიც იქნება.



ნახ. 62.

ასევე, თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს უმცირესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მინიმუმის წერტილიც იქნება (ნახ. 63). ამ ნახაზზე გამოსახული ფუნქცია უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს ლოკალური მაქსიმუმის  $x_1$  წერტილში, ხოლო უმცირეს მნიშვნელობას ლოკალური მინიმუმის  $x_2$  წერტილში.

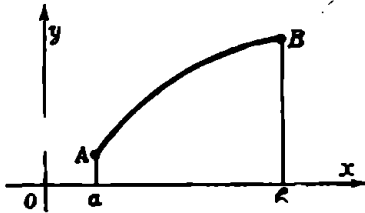


ნახ. 63.

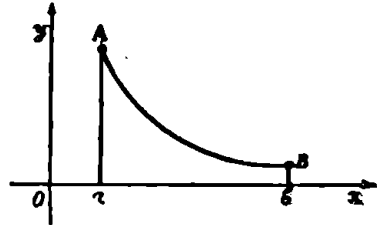
დაბოლოს შევნიშნოთ, რომ თუ  $f(x)$  არის  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი და ზრდადი ფუნქცია, მაშინ  $f(a)$  და  $f(b)$  იქნება შესაბამისად მისი უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე (ნახ. 64). პირიქით, თუ  $f(x)$  არის  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი დი კლებადი ფუნქცია, მაშინ  $f(a)$  და  $f(b)$  იქ-

ნება შესაბამისად მისი უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე (ნახ. 65).

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს მოცემული ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:



ნახ. 64.



ნახ. 65.

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, საჭიროა გამოვთვალოთ მისი ყველა ლოკალური მაქსიმუმები, ყველა ლოკალური მინიმუმები და ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლო წერტილებზე. მოცემულ ყველა რიცხვს შორის უდი-

დესი იქნება  $f(x)$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი — უმცირესი მნიშვნელობა.

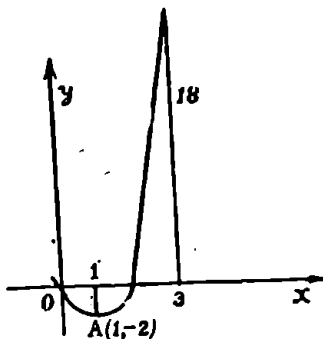
მაგალითი. მოვძებნოთ

$$f(x) = x^2 - 3x$$

ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობაანი  $[0; 3]$  სეგმენტზე.

მოცემულ ფუნქციას  $[0; 3]$  სეგმენტზე აქვს ერთადერთი ლოკალური მინიმუმის წერტილი  $x=1$  და  $\min f(x) = -2$ . ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის მნიშვნელობაანი

$x=0$  და  $x=3$  წერტილებზე:  $f(0) = 0$ ,  $f(3) = 18$ . ამის შემდეგ  $-2, 0, 18$  რიცხვების შედარებით ვრწმუნდებით, რომ მოცემული ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 18, უმცირესი კი  $-2$  (ნახ. 66).

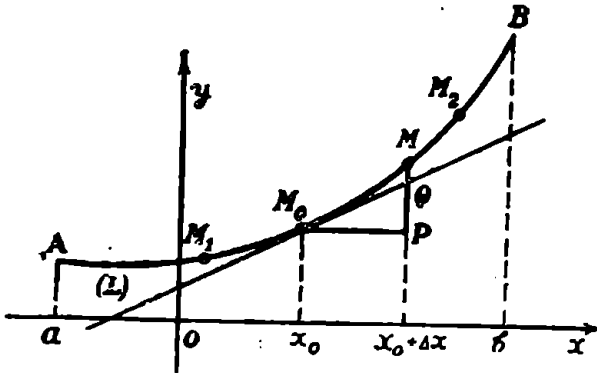


ნახ. 66.

§ 18. ფუნქციის გრაფიკის ამოხსნელობა და ჩაზნეილობა

ფუნქციის თვისობრივი გამოკვლევისათვის, შესაბამისი გრაფიკის აგებისათვის, დიდი მნიშვნელობა აქვს მისი ამოხსნელობისა და ჩაზნეილობის უბნების გამოყოფას, გადაღუნვის წერტილებისა და ასიმპტოტების მოძებნას.

განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია  $y=f(x)$ . ავილოთ ამ ფუნქციის  $L$  გრაფიკის რაიმე  $x_0$  წერტილი, რომლისთვისაც  $f'(x_0)$  სასრულია. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $x_0$  აბსცისის შესაბამის  $M_0$  წერტილზე გამავალი  $L$  წირის მხები  $Oy$  ღერძის პარალელური არ არის. ვიტყვი, რომ  $L$  წირი  $M_0$  წერტილში ჩაზნეილია, თუ არსებობს  $L$  წირის ისეთი  $M_1, M_2$  რკალი, რომელიც შეიცავს  $M_0$  წერტილს და მდებარეობს  $M_0$  წერტილზე გამავალი მხებიდან  $Oy$  მიმართულების



ნახ. 67.

მხარეს (ნახ. 67). ასევე ვიტყვი, რომ  $L$  წირი  $M_0$  წერტილში ამოხსნეილია, თუ არსებობს  $L$  წირის ისეთი  $M_1, M_2$  რკალი, რომელიც შეიცავს  $M_0$  წერტილს და მდებარეობს  $M_0$  წერტილზე გამავალი მხებიდან  $Oy$  მიმართულების საწინააღმდეგო მხარეს (ნახ. 68).

ადვილი შესამჩნევია, რომ წირის ჩაზნეილობისათვის  $M_0$  წერტილში (ნახ. 67) აუცილებელია და საკმარისი  $x_0$  წერტილის გარკვეულ მიდამოში შესრულებული იყოს უტოლობა

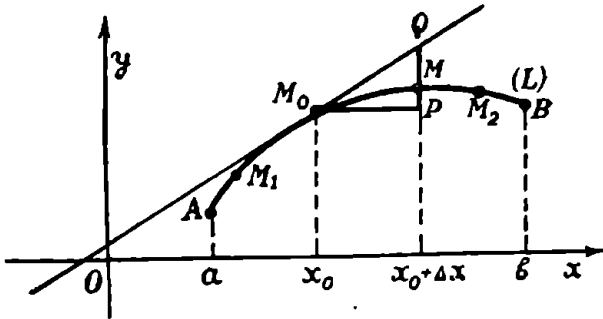
$$\Delta y - dy > 0,$$

სადაც  $x_0$  არის  $M_0$  წერტილის აბსცისი,  $\Delta y$  და  $dy$  არის მოცემული  $y=f(x)$  ფუნქციის ნაზრდი და დიფერენციალი  $x_0$  წერტილში. მართლაც გვაქვს

$$\Delta y = PM, \quad dy = PQ, \quad \Delta y - dy > 0.$$

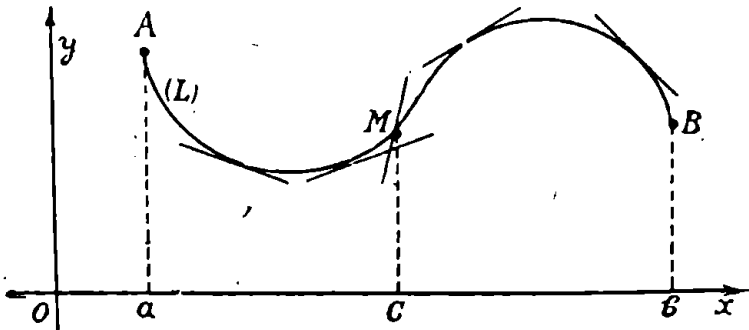
სრულიად ასევე, წირის ამოზნექილობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა  $M_0$  წერტილში (ნახ. 68) იმაში მდგომარეობს, რომ  $x_0$  წერტილის გარკვეულ მიდამოში შესრულებული იყოს უტოლობა

$$\Delta y - dy < 0.$$



ნახ. 68.

თუ  $L$  წირი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) რომელიმე შუალედის ყოველ წერტილში, მაშინ ვიტყვი, რომ იგი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) ამ შუალედში. მაგალითად, 69 ნახაზზე წარმოდგენილი  $L$  წირი  $[a, c]$  შუალედში ჩაზნექილია, ხოლო  $[c, b]$  შუალედში ამოზნექილია.



ნახ. 69.

**თეორემა 20.** თუ  $y=f(x)$  ფუნქციას  $x_0$  წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებულის და  $f''(x_0) > 0$ , მაშინ  $L$

წირი  $x_0$  წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო თუ  $f''(x_0) < 0$ , მაშინ წირი  $M_0$  წერტილში ამოზნექილია.

დამტკიცება. ვინაიდან  $f''(x_0)$  არსებობს, ამიტომ  $f(x)$  ფუნქცია  $x_0$  წერტილის გარკვეულ  $|x_0 - x|$ ,  $x_0 + \theta$  მიდამოში დიფერენცირებადი იქნება. ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x f'(x_0 + \theta \Delta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

ამევე დროს

$$dy = f'(x_0) \Delta x.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \Delta y - dy &= \Delta x [f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0)] = \\ &= \theta(\Delta x)^2 \frac{f''(x_0 + \theta \Delta x) - f''(x_0)}{\theta \Delta x}. \end{aligned} \quad (13.1)$$

ვინაიდან  $f''(x_0) > 0$ , ამიტომ საკმარისად მცირე  $\Delta x$ -სათვის გვექნება

$$\frac{f''(x_0 + \theta \Delta x) - f''(x_0)}{\theta \Delta x} > 0$$

და (13.1) ტოლობიდან მივიღებთ

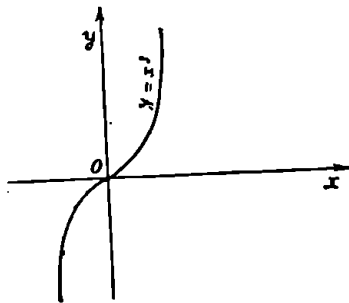
$$\Delta y - dy > 0.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $L$  წირი  $M_0$  წერტილში ჩაზნექილია.

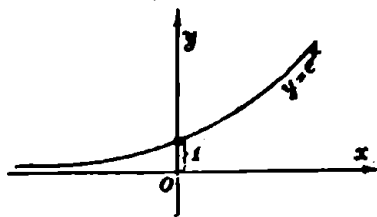
სავესებით ასევე დამტკიცდება, რომ თუ  $f''(x_0) < 0$ , მაშინ  $L$  წირი  $M_0$  წერტილში ამოზნექილია.

მაგალითი 1. მოვიყვანოთ  $y = x^3$  წირის ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. ვინაიდან  $y'' = 6x$ , ამიტომ როდესაც  $x > 0$ , მაშინ



ნახ. 70.



ნახ. 71.

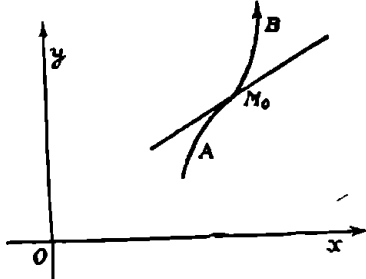
$y'' > 0$  და, მაშასადამე მოცემული წირი ჩაზნექილია  $]0, \infty[$  შუალედში. თუკი  $x < 0$ , მაშინ  $y'' < 0$  და მოცემული წირი ამოზნექილია  $]-\infty, 0[$  შუალედში (ნახ. 70).

მაგალითი 2. გამოვიკელით  $y = e^x$  წირის ჩაზნექილობასა და ამოზნექილობაზე.

ამოხსნა. რაკი  $y'' = e^x$ , ამიტომ  $y'' > 0$  მთელ  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში. მაშასადამე, მოცემული წირი ჩაზნექილია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში (ნახ. 71).

§ 11. ფუნქციის ვარჯიხის გადაღუნვის წერტილები

ვთქვათ,  $y = f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. ვიგულისხმობთ, რომ ამ სეგმენტის შიგა  $x_0$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქცია წარმოებადია, ე. ი. არსებობს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის მხები  $M_0$



ნახ. 72.

წერტილში, სადაც  $M_0$  წერტილის კოორდინატებია  $x_0$  და  $f(x_0)$ .

განსაზღვრა.  $M_0$  წერტილის ეწოდება  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი, თუ რაიმე რკალი, რომელიც  $M_0$  წერტილს შეიცავს, ამ წერტილზე გავლებული მხებიდან სხვადასხვა მხარეს მდებარეობს.

ამ განსაზღვრიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ  $M_0$  წარმოადგენს გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს, მაშინ მოიძებნება რაიმე  $AB$  რკალი, რომლის  $AM_0$  ნაწილი ამოზნექილია,  $M_0B$  ნაწილი კი ჩაზნექილი, ან პირიქით (ნახ. 72).

თეორემა 21. თუ  $M_0$  წერტილი, რომლის აბსცისაა  $x_0$ , წარმოადგენს  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს და არსებობს  $f''(x_0)$ , მაშინ  $f''(x_0) = 0$ .

დამტკიცება. დაეუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ,  $f''(x_0) \neq 0$ ; მაშინ არსებობს  $M_0$  წერტილის შემცველი გრაფიკის ისეთი რკალი, რომლის ყველა წერტილი მოთავსდება  $M_0$  წერტილზე გავლებული მხების ერთ მხარეს და ამიტომ  $x_0$  არ წარმოადგენს გადაღუნვის წერტილს, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად,  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა  $x$ -ის ის მნიშვნელობაა, რომლისთვისაც მეორე წარმოებულს არ არსებობს, ან ნულის ტოლია.

**თეორემა 22.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x_0$  წერტილში, ხოლო ამ წერტილის რაიმე მიდამოში  $f''(x)$  წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი  $x > x_0$  და  $x < x_0$  მნიშვნელობებისათვის, მაშინ  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის  $M_0$  წერტილი გადალენის წერტილია.

**დამტკიცება.** პირობის თანახმად, არსებობს  $x_0$  წერტილის ისეთი მიდამო  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , რომ  $f''(x)$  წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი, როდესაც  $x_0 - \delta < x < x_0$  და  $x_0 < x < x_0 + \delta$ . ახლა ვაჩვენოთ, რომ

$$\Delta y - dy = [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] - f'(x_0) \Delta x$$

გამოსახულება ნიშანს იცვლის  $\Delta x$  ნაზრდთან ერთად, ამასთანავე  $|\Delta x| < \delta$ . მართლაც, ლაგრანჟის თეორემის ორჯერ გამოყენების შედეგად გვაქვს

$$\begin{aligned} \Delta y - dy &= \Delta x f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0) \Delta x = \\ &= \Delta x [f'(x_0 + \theta \Delta x) - f'(x_0)] = (\Delta x)^2 \theta f''(x_0 + \theta_1 \Delta x), \end{aligned}$$

სადაც  $0 < \theta < 1$ . აქედან ჩანს, რომ  $\Delta y - dy$  სხვაობის ნიშანი იცვლება  $\Delta x$  ნაზრდის ნიშანთან ერთად. თეორემა დამტკიცებულია.

**მაგალითი 1.** მოვიძებნოთ  $y = e^{-x^2}$  ფუნქციის გრაფიკის გადალენის წერტილები, ჩაზნეილობისა და ამოზნეილობის შუალედები.

**ამოხსნა.** გვაქვს

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

როგორც ვხედავთ, არსებობს მეორე რიგის წარმოებული არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის და იგი ნულის ტოლია  $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  და

$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  წერტილებში, რაკი

$$y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} < 0, \quad \text{როდესაც } 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ხოლო

$$y'' > 0, \quad \text{როდესაც } x > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ამიტომ, 22-ე თეორემის თანახმად  $M_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-0.8}\right)$  წერტილი  $y=e^{-x^2}$  ფუნქციის გრაფიკის გადალუნვის წერტილია.

შემდეგ, რადგანაც  $y'' > 0$ , როდესაც  $\frac{\sqrt{2}}{2} < x < +\infty$ , ამიტომ  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  შუალედში მოცემული გრაფიკი ჩაზნექილია.

ახლა დავადგინოთ  $y''$  წარმოებულის ნიშანი  $x_2$  წერტილის მიდამოში. ცხადია, რომ  $y'' > 0$ , როდესაც  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ხოლო  $y'' < 0$ , როდესაც  $0 > x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . მაშასადამე,  $M_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$  წერტილი არის აგრეთვე  $y=e^{-x^2}$  ფუნქციის გრაფიკის გადალუნვის წერტილი. გარდა ამისა, რაკ  $y'' > 0$ , როდესაც  $-\infty < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ამიტომ  $\left[-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  შუალედში მოცემული გრაფიკი ამოზნექილია.

დაბოლოს ცხადია, რომ  $y' > 0$ ; როდესაც  $x < 0$  და, მაშასადამე,  $]-\infty, 0[$  შუალედში მოცემული ფუნქცია ზრდადია. გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ  $]0, +\infty[$  შუალედში მოცემული ფუნქცია კლებადია.

შემდეგ, რადგანაც  $f'(0)=0$  და  $f''(0) < 0$ , ამიტომ  $x=0$  არის მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და  $\max f(x)=1$ . თუ გავითვალისწინებთ  $y=e^{-x^2}$  ფუნქციის ზემოთ შესწავლილ თვისებებს, დავრწმუნდებით, რომ მის გრაფიკს აქვს 73-ე ნახაზზე მოყვანილი სახე.

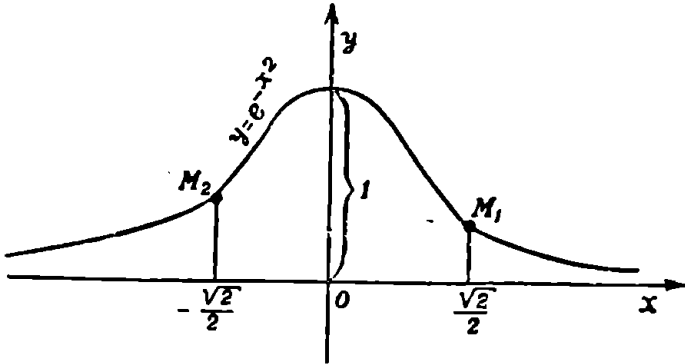
მაგალითი 2. მოვიყენოთ  $y=\sqrt[3]{x-1}$  ფუნქციის გრაფიკის გადალუნვის წერტილები, ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ამოხსნა. მოცემული ფუნქცია უწყვეტია  $[-\infty, +\infty]$  შუალედში. ცხადია, რომ  $y'_{x=1} = +\infty$ , ხოლო თუ  $x \neq 1$ , გვექნება



$$y' = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^5}}.$$

რადგანაც  $y'' > 0$ , როდესაც  $x < 1$ , ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია  $]-\infty, 1[$  შუალედში. შემდეგ  $y'' < 0$ , როდესაც



ნახ. 73.

$x > 1$ . მაშასადამე, გრაფიკი ამოზნექილია  $]1, +\infty[$  შუალედში. ამრიგად,  $M_0(1, 0)$  წერტილი არის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი. გარდა ამისა, ვინაიდან  $y'(1) = +\infty$ , ამიტომ გრაფიკას  $M_0(1, 0)$  წერტილზე გავლებული მხები  $Oy$  ღერძის პარალელურია.

## სავარჯიშო

მოძებნეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმი:

1.  $f(x) = x^2 - 2x + 3$ ; პასუხი: როცა  $x = 1$ ,  $\min f(x) = 2$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ;

პასუხი: როცა  $x = 1$ ,

$$\max f(x) = \frac{7}{2}; \text{ როცა } x = 3, \min f(x) = 1.$$

3.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ ; პასუხი: როცა  $x = 0$ ,  $\max f(x) = 2$ ;  
როცა  $x = \pm 2$ ,  $\min f(x) = -14$ .
4.  $f(x) = x(a-x)$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{2}$ ,  $\max f(x) = \frac{a^2}{4}$ .
5.  $f(x) = x(a^2 - x^2)$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $\max f(x) =$   
 $= \frac{2\sqrt{3}}{9} a^3$ ; როცა  $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $\min f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} a^3$ .
6.  $f(x) = a + bx + cx^2$ ; პასუხი: როცა  $x = -\frac{b}{2c}$  და  $c > 0$ ,  
 $\min f(x) = \frac{4a - b^2}{4c}$ ; როცა  $x = -\frac{b}{2c}$  და  $c < 0$ ,  $\max f(x) =$   
 $= \frac{4a - b^2}{4c}$ .
7.  $f(x) = (r+x)(r^2 - x^2)$ ; როცა  $x = \frac{r}{3}$ ,  $\max f(x) = \frac{32}{27} r^3$ ;  
როცა  $x = -r$ ,  $\min f(x) = 0$ .
8.  $f(x) = x^6 - 6x^4 + 4x^2 + 9x^2 - 12x + 4$ ; პასუხი: როცა  $x = 1$ ,  
 $\min f(x) = 0$ ; როცა  $x = -2$ ,  $\min f(x) = 0$ ; როცა  $x = -1$ ,  
 $\max f(x) = 16$ .
9.  $f(x) = x(a+x)^2(a-x)^2$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{3}$ ,  
 $\max f(x) = \frac{128}{729} a^6$ ; როცა  $x = -a$ ,  $\max f(x) = 0$ , როცა  
 $x = -\frac{a}{2}$ ,  $\min f(x) = -\frac{27}{64} a^6$ .
10.  $f(x) = \sqrt{ax^3 - x^4}$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{3}{4} a$ .  
 $\max f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16} a^2$ ; როცა  $x = 0$ , ფუნქციას არ აქვს არც  
მაქსიმუმი, არც მინიმუმი.

11.  $f(x) = \sqrt{p(p-a)(p-x)(a+x-p)}$ ; პასუხი: როცა  
 $x = p - \frac{a}{2}$ ,  $\max f(x) = \frac{a}{2} \sqrt{p(p-a)}$ .

12.  $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{1}{2}$ ,  $\min f(x) = \frac{3}{5}$ ,

13.  $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ; პასუხი: როცა  $x = 0$ ,  $\min f(x) = 0$ ,  
 როცა  $x = \infty$ ,  $\max f(x) = 1$ .

14.  $f(x) = \frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x}$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{2}$ ,  
 $\min f(x) = 2$ .

15.  $f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \dots + (x-a_n)^2$ ; პასუხი: როცა  
 $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

16.  $f(x) = \sqrt{a^2 + 2bx + mx^2} - nx$ . პასუხი: ფუნქციას აქვს  
 მაქსიმუმი  $x = -\frac{b}{m} + \frac{n}{m} \sqrt{\frac{ma^2 - b^2}{m - n^2}}$  წერტილში, თუ  
 $m > n^2$ ; ფუნქციას აქვს მინიმუმი  $x = -\frac{b}{m} - \frac{n}{m} \sqrt{\frac{ma^2 - b^2}{m - n^2}}$   
 წერტილში, თუ  $m > n^2$ ; როცა  $m < n^2$ , მაშინ ფუნქციას არ აქვს  
 ექსტრემუმი.

17.  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ ; პასუხი: როცა  $x = e$ ,  $\max f(x) = e^{\frac{1}{e}}$ .

18.  $f(x) = x^{1 - \ln x}$ ; პასუხი: როცა  $x = \sqrt[e]{e}$ ,  $\max f(x) =$   
 $= \sqrt[e]{e}$ .

19.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ; პასუხი: როცა  $x = e$ ,  $\min f(x) = e$ .

20.  $f(x) = \left(\frac{a}{x}\right)^x$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{e}$ ,  $\max f(x) = e^{\frac{a}{e}}$ .

21.  $f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ ; პასუხი: როცა  $x = \sqrt[n]{e}$ ,  $\min f(x) = \frac{1}{ne}$ .

22.  $f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{x}{e^x}$ ; პასუხი: როცა  $x = 1$ ,  $\min f(x) = e + e^{-1}$ .

23.  $f(x) = \sin x \cos x$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $\max f(x) = \frac{1}{2}$ ;

როცა  $x = -\frac{\pi}{4}$ ,  $\min f(x) = -\frac{1}{2}$ .

24.  $f(x) = \cos x \cos(a-x)$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{2k\pi + a}{2}$ ,  
ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

25.  $f(x) = \sin^3 x \cos x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; პასუხი: როცა  $x =$   
 $= \frac{\pi}{3}$ ,  $\max f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ .

26.  $f(x) = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; პასუხი: როცა  
 $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $\max f(x) = 1$ .

27.  $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$ ; პასუხი: როცა  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $\max f(x) =$   
 $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ .

28.  $f(x) = \sin x \cos 2x$ ; პასუხი: როცა  $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$ ,  
ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი; როცა  $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ , ფუნქციას აქვს  
მინიმუმი. აგრეთვე,  $x = \pm \arcsin \sqrt{\frac{1}{6}}$  არის ექსტრემუმის წერტილი.

29.  $f(x) = a \sin x + \frac{b}{\sin x}$ ; პასუხი: თუ  $a > 0$  და  $b < a$ ,

მაშინ: ა) როცა  $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ , ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

ბ) როცა  $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$ , ფუნქციას აქვს მინიმუმი.

გ) როცა  $\sin x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ , ფუნქციას აქვს მინიმუმი. დ) რო-

ცა  $\sin x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ , ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

30.  $f(x) = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x$ ,  $a > 0$ ,  $b > a$ . პასუხი: როცა

$\operatorname{tg} x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ , ფუნქციას აქვს მინიმუმი; როცა  $\operatorname{tg} x =$

$= -\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ , ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

31.  $f(x) = (a - \sin x)(b + \sin x)$ . პასუხი: თუ  $\frac{a-b}{2} < 1$ ,

ფუნქციას აქვს მინიმუმი, როცა  $\cos x = 0$ , ხოლო როცა

$\sin x = \frac{a-b}{2}$ , ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

32.  $f(x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$ . პასუხი: როცა  $x = \frac{\pi}{8}$ , ფუნქციას აქვს  
მაქსიმუმი.

33.  $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$ . პასუხი: როცა  $x = \left(2k + \frac{5}{4}\right)\pi$ , ფუნქ-

ციას აქვს მაქსიმუმი; როცა  $x = \left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi$ , ფუნქციას აქვს  
მინიმუმი.

34.  $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ . პასუხი: როცა  $x = 0$ ,  $\min f(x) = 4$ .

35.  $f(x) = \sin^m x \sin^n(a - x)$ . პასუხი: როცა  $x = \frac{a}{2} +$

$+\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{m-n}{m+n} \sin a\right)$ , ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

36.  $f(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ . პასუხი: როცა  $x = 0$ , ფუნქ-

ციას აქვს მინიმუმი; როცა  $x = 2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{7-1}}{6}$ ,

ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი.

37.  $f(x) = \frac{x-e^x}{1+x^2}$ . პასუხი: როცა  $x=1$ ,  $\max f(x) = \frac{1-e}{2}$ ;

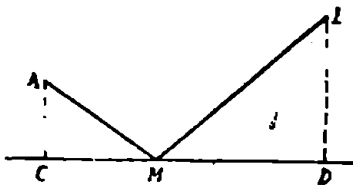
როცა  $x=0$ ,  $\min f(x) = -1$ .

38.  $f(x) = x \arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$ . პასუხი: როცა  $x=0$ ,  
 $\min f(x) = 0$ .

39.  $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ . პასუხი: როცა  $x=0$ ,  
 $\min f(x) = 1$ .

40. მოცემულ წრფეზე მოვძებნოთ ისეთი  $M$  წერტილი, რომლის მანძილების ჩამი ორ მოცემულ  $A$  და  $B$  წერტილამდე უმცირესია.

პასუხი:  $AM$  და  $BM$  მონაკვეთები მოცემულ წრფესთან უნდა შეადგენდეს თანატოლ კუთხეებს, ე. ი.  $\angle AMC = \angle BMD$  (ნახ. 74).



ნახ. 74 :

41. იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა კათეტების ჩამი უდრის  $2s$ , მოვძებნოთ უდიდესი ფართობის სამკუთხედი.

პასუხი: საძიებელი სამკუთხედის კათეტებია:  $a=s$  და  $b=s$ .

42. იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა პერიმეტრია  $2p$ , მოვძებნოთ:

ა) სამკუთხედი უმცირესი პიპოტენუსით.

ბ) სამკუთხედი, რომლის პიპოტენუსისა და მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლის ჩამი უდიდესია.

გ) სამკუთხედი, რომლის კათეტებისა და მართი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლის ჩამი უდიდესია.

პასუხი: ა) საძიებელი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

ბ) თუ სამკუთხედის ერთ-ერთ მახვილ კუთხეს  $x$ -ით აღვნიშნავთ, საჭიროა მოიძებნოს  $f(x) = \frac{1 + \sin x \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$  ფუნქციის მაქსიმუმი.

გ) საძიებელი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

43. დაამტკიცეთ, რომ იმ პარალელოგრამებს შორის, რომლებსაც ტოლი კუთხეები და პერიმეტრები აქვთ, რომბის ფართობი უდიდესია.

44. იმ სამკუთხედებს შორის, რომლებსაც მოცემული  $h$  სიმაღლე და  $2p$  პერიმეტრი აქვთ, მოძებნეთ უდიდესი ფართობის სამკუთხედი.

პ ა ს უ ხ ი: სამკუთხედი ტოლფერდაა.

45. რადიუსიან წრეში ჩახაზეთ მოცემული კუთხე ისე, რომ მისი გვერდებითა და რკალით, რომელსაც იგი ეყრდნობა, შემოსაზღვრული ფართობი იყოს უდიდესი.

პ ა ს უ ხ ი: ქორდები, რომელთა შორის მოთავსებულია მოცემული კუთხე, თანატოლია.

46. მოცემული წრის შიგა  $M$  წერტილზე გაავლეთ უდიდესი სიგრძის ქორდა.

პ ა ს უ ხ ი:  $M$  წერტილზე გამავალი დიამეტრი.

47. მოცემული კვადრატის შიგნით მოძებნეთ ისეთი წერტილი, რომ კვადრატის გვერდებამდე მისი მანძილების კვადრატების ჯამი იყოს უდიდესი.

პ ა ს უ ხ ი: დიაგონალებს გადაკვეთის წერტილი.

48. მოცემულ კონუსში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის, რომლის: ა) მოცულობა უდიდესია, ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია, გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პ ა ს უ ხ ი: ა) ცილინდრის მოცულობა მოცემული კონუსის მოცულობის  $\frac{1}{6}$ -ის ტოლია, ბ) ჩახაზული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი ისეთი ცილინდრის გვერდითი ფართობის  $\frac{1}{4}$ -ის ტოლია, რომელსაც მოცემული კონუსის განზომილებანი აქვს. გ) საძიებელი ცილინდრის რადიუსი

$$r = \frac{Rh}{2(h-R)},$$

სადაც  $R$  კონუსის ფუძის რადიუსია,  $h$ —მისი სიმაღლე და  $h > R$ .

49. მოცემულ სფეროში ჩახაზულ ცილინდრებს შორის იპოვეთ ის, რომლის:

ა) მოცულობა უდიდესია.

ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პასუხი: ა) სფეროს რადიუსი და ცილინდრის სიმაღლე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც  $\sqrt{3} : 2$ .

ბ) ცილინდრის სიმაღლისა და სფეროს რადიუსის ფარდობა უდრის  $\sqrt{2}$ .

გ) ცილინდრის სიმაღლისა და სფეროს რადიუსის ფარდობა უდრის  $\sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$ .

50. მოცემულ სფეროში ჩახაზულ კონუსებს შორის იპოვეთ ის, რომლის:

ა) მოცულობა უდიდესია.

ბ) გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

გ) სრული ზედაპირის ფართობი უდიდესია.

პასუხი: ა) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც 4 : 3;

ბ) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც 4 : 3;

გ) კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება სფეროს რადიუსს, როგორც  $(23 - \sqrt{17}) : 16$ .

51. სფეროს გარშემო შემოხაზეთ უმცირესი მოცულობის კონუსი.

პასუხი: კონუსის წვეროსთან მდებარე კუთხის კოსინუსი უდრის  $\frac{7}{9}$ .

52. მოძებნეთ უმცირესი მანძილი მოცემული  $(x_0, y_0)$  წერტილიდან  $Ax + By + C = 0$  წრფემდე.

$$\text{პასუხი: } \pm \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

53. მოძებნეთ უმცირესი მანძილი მოცემული  $(x_0, y_0)$  წერტილიდან  $x = r(\varphi - \sin \varphi)$ ,  $y = r(1 - \cos \varphi)$  ციკლოიდამდე.

54. მოცემულ  $P(x_0, y_0)$  წერტილზე გავლებული წრფე  $Ox$  და  $Oy$  ღერძებს კვეთს  $A$  და  $B$  წერტილებში. იპოვეთ ამ წრფის მდებარეობა, როცა:



ა)  $AB$  მინიმალურია; ბ)  $AO+OB$  მინიმალურია; გ)  $AO \cdot OB$  მინიმალურია; დ)  $AO+OB+AB$  მინიმალურია; ე)  $AO \cdot OB \cdot AB$  მინიმალურია; ვ)  $AO^n+OB^n$  მინიმალურია, სადაც  $n$  ნატურალური რიცხვია.

55. იმ ელიფსებს შორის, რომელთა ღერძების ჯამი თანატოლია, იპოვეთ ის, რომლის ფართობი უდიდესია.

პასუხი: წრე.

56. მოცემულ პარაბოლოგრამზე შემოხაზეთ უმცირესი ფართობის ელიფსი.

პასუხი: ელიფსისა და პარაბოლოგრამის ფართობები ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც  $\pi : 2$ .

57.  $y^2=2px$  პარაბოლის  $A(x, y)$  წერტილზე გავლებულია მხები, რომელიც დირექტრისას კვეთს  $B$  წერტილში. განსაზღვრეთ  $A$  წერტილის მდებარეობა ისე, რომ  $AB$  მონაკვეთის სიგრძე იყოს უმცირესი.

პასუხი:  $A\left(\frac{p}{4}; \pm \frac{p}{\sqrt{2}}\right)$ .

58. ელიფსში ჩახაზულია უდიდესი (ფართობის) მართკუთხედი, ამ მართკუთხედში ჩახაზულია უდიდესი (ფართობის) ელიფსი, უკანასკნელ ელიფსში ჩახაზულია უდიდესი მართკუთხედი და ა. შ. უსასრულოდ. განსაზღვრეთ ყველა მართკუთხედის ფართობთა ჯამი.

პასუხი: ყველა მართკუთხედის ფართობთა ჯამი უდრის მოცემულ ელიფსზე შემოხაზული მართკუთხედის ფართობს.

59. ცილინდრული ძელისაგან საჭიროა გამოიჭრას მაქსიმალური გამძლეობის კოჭი. განსაზღვრეთ მართკუთხა კვეთის სიგანე და სიმაღლე.

პასუხი: კვეთის სიგანეა  $\frac{2r}{\sqrt{3}}$ ,

კვეთის სიმაღლე კი  $\frac{2\sqrt{2}r}{3}$ ,

სადაც  $r$  ძელის ფუძის რადიუსია.

60. ვერტიკალურ სიბრტყეში მოძრაობს ორი სხეული, ერთი მათგანი ჰორიზონტალური მიმართულებით და მუდმივი სიჩქარით, ხოლო მეორე თავისუფლად ვარდება. სხეულებმა ერთდროულად დაიწყეს მოძრაობა. საწყის მომენტში ტრაექტორიების გადაკვეთის წერტილიდან პირველი სხეული  $a$  მანძილით იყო დაშორებული, ხოლო მეორე სხეული  $b$  მანძილით. მათი მოძრაობის დაწყებიდან რამდენი წუთის შემდეგ იქნებიან სხეულები ერთმანეთისაგან დაშორებული უმცირესი მანძილით?

პასუხი: საჭიროა მოიძებნოს  $t$ -ს ისეთი მნიშვნელობა, რომელიც მინიმუმს მინიმუმს შემდეგ ფუნქციას:

$$d = \sqrt{(a - vt)^2 + \left(b - \frac{1}{2}gt^2\right)^2},$$

სადაც  $g$ —სიმძიმის ძალის აჩქარებაა, ხოლო  $d$  არის მანძილი მოძრავ სხეულებს შორის.

61. რა სიმაღლიდან უნდა ჩამოვარდეს დრეკადი ბურთი, რომ დაცემის შემდეგ მოცემულ  $h$  სიმაღლეზე ასხლტეს უმცირეს დროში.

პასუხი: საძიებელი სიმაღლე  $H = \frac{4}{3}h$ .

62.  $A$  და  $B$  წერტილებში მოთავსებულია სინათლის ორი წყარო, რომელთა სინათლის ძალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს. როგორც  $m:n$ . იპოვეთ  $AB$  წრფეზე წერტილი, რომელიც ყველაზე ნაკლებად იქნება განათებული.

პასუხი: საძიებელი წერტილი  $AB$  მონაკვეთს გაყოფს

$$\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n} \text{ ფარდობით.}$$

63. პარაბოლის რომელ წერტილში უნდა მოვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ წერტილი, რომელიც ღერძზე მდებარეობს და წვეროდან დაშორებულია  $c$  მანძილით, ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

პასუხი: თუ პარაბოლის განტოლებას ავიღებთ კანონიკური სახით  $y^2 = 2px$ , მაშინ სინათლის წყარო უნდა ავიღოთ პარაბოლის იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა

$$x = \frac{1}{5} \left[ 2(c - p) + \sqrt{4(c - p)^2 + 5c^2} \right].$$

64. წრეწირის რომელ წერტილში უნდა მოვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ წრის წერტილი, რომელიც წრეწირიდან დაშორებულია  $c$  მანძილით, ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

65.  $y=f(x)$  წირის რომელ წერტილში უნდა მრვათავსოთ სინათლის წყარო, რომ  $Ox$  ღერძზე მდებარე და კოორდინატთა სათავიდან  $c$  მანძილით დაშორებული მოცემული წერტილი ყველაზე მეტად იყოს განათებული.

პასუხი: საძიებელი წერტილის კოორდინატები უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული წირის  $y=f(x)$  განტოლებას და, ამის გარდა, განტოლებას  $3(x-c)y - (x-c)^2 - 2y^2 y' = 0$ .

მოექმნოთ შემდეგი წირების გადაღუნვის წერტილები და ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის ინტერვალები:

66.  $y=x^3$ . პასუხი: როცა  $x < 0$ , წირი ამოზნექილია; როცა  $x > 0$ , წირი ჩაზნექილია;  $x=0$  არის წირის გადაღუნვის წერტილი.

67.  $y=x^4$ . პასუხი: წირი ყველგან ჩაზნექილია.

68.  $y=a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$ . პასუხი: წირს არ აქვს გადაღუნვის წერტილები.

69.  $y=a - \sqrt[3]{x-b}$ . პასუხი:  $x=b$  არის წირის გადაღუნვის წერტილის აბსცისა.

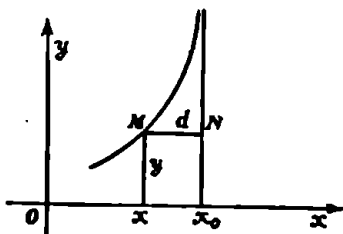
§ 15. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ვთქვათ,  $M$  არის  $y=f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ვიტყვით, რომ  $M$  წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის. ამ შემთხვევაში ძხელი წარმოსადგენია გრაფიკის სახე, მაგრამ მაინც ხერხდება ამ სიძნელის დაძლევა გრაფიკის შედარებით რომელიმე ცნობილ გრაფიკიდან. უმარტივესი შესაძარებელი გრაფიკია წრფე. გრაფიკის იმ შტოს ფორმის შესწავლა, რომლის წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც უსასრულოდ იზრდება, ხდება ასიმპტოტის საშუალებით.

გ ა ნ ს ა ხ ღ ვ რ ა. გრაფიკის ასიმპტოტი ეწოდება წრფეს, რომელსაც ის თვისება აქვს, რომ მანძილი გრაფიკის  $M(x, y)$  წერტილიდან ამ წრფემდე ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $M$  წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის.

გრაფიკის ასიმპტოტს, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელურია, ვერტიკალური ასიმპტოტი ეწოდება, ხოლო გრაფიკის ასიმპტოტს,

რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელური არაა, დახრილი ასიმპტოტი ეწოდება. ჯერ განვიხილოთ ვერტიკალური ასიმპტოტები. ამ შემთხვევაში  $|y| \rightarrow \infty$ , როდესაც  $x \rightarrow x_0$ .



ნახ. 75.

ცხადია  $x = x_0$  წრფე მოცემული გრაფიკის ასიმპტოტია.

მართლაც, მანძილი გრაფიკის  $M$  წერტილიდან  $x = x_0$  წრფემდე არის  $d = |x - x_0|$  (ნახ. 75). ცხადია, როდესაც  $x \rightarrow x_0$ , მაშინ  $d \rightarrow 0$ . ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $x = x_0$  წრფე ასიმპტოტია.

ამრიგად,  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკის იმ ასიმპტოტის მოსაძებნად, რომელიც  $Oy$  ღერძის პარალელურია, უნდა მოიძებნოს აბსცისის ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც  $y$  უსასრულოა. თუ ასეთია  $x_0$ , მაშინ ასიმპტოტი იქნება  $x = x_0$  წრფე.

მაგალითი 1. მოვიძებნოთ  $y = \tan x$  ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. უშუალოდ ჩანს, რომ  $|y| \rightarrow \infty$ , როდესაც  $x \rightarrow (2k + 1) \frac{\pi}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). ამრიგად,  $y = \tan x$  ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტებია  $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) წრფეები.

ახლა განვიხილოთ დახრილი ასიმპტოტები; ასეთი ასიმპტოტის კუთხური კოეფიციენტი სასრული რიცხვია და ამიტომ ასიმპტოტის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე

$$y = ax + b. \tag{15.1}$$

მოვიძებნოთ  $a$  და  $b$ . ვთქვათ,  $M(X, Y)$  მოცემული გრაფიკის რაიმე წერტილია. მანძილი  $M$  წერტილიდან (15.1) წრფემდე გამოისახება ფორმულით

$$d = \pm \frac{aX - Y + b}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

ასიმპტოტის განსაზღვრის თანახმად

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} (aX - Y + b) = 0, \tag{15.2}$$

ანუ

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} \left( a - \frac{Y}{X} + \frac{b}{X} \right) = 0.$$

აქედან

$$a = \lim_{|X| \rightarrow \infty} \frac{Y}{X}. \quad (15.3)$$

ამგვარად,  $a$  მოძებნილია.

აქ ცალ-ცალკე უნდა განვიხილოთ შემთხვევა  $X \rightarrow +\infty$ ,  $X \rightarrow -\infty$ , ახლა (15.2) ტოლობიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ  $b$ :

$$b = \lim_{|X| \rightarrow \infty} (Y - aX). \quad (15.4)$$

აპრივად, მოძებნილია  $a$  და  $b$  და, მაშასადამე, მოძებნილია  $y = ax + b$  ასიმპტოტიც.

მაგალითი 2. მოვძებნოთ  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$  ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

ამოხსნა. რადგანაც

$$\lim_{x \rightarrow 0-} y = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = +\infty$$

და

$$\lim_{x \rightarrow 0+} y = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty,$$

ამიტომ  $x = 0$  წრფე, ე. ი.  $Oy$  ღერძი, არის მოცემული გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.

მოვძებნოთ ახლა გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები. თანახმად (15.3) ტოლობისა

$$a = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1,$$

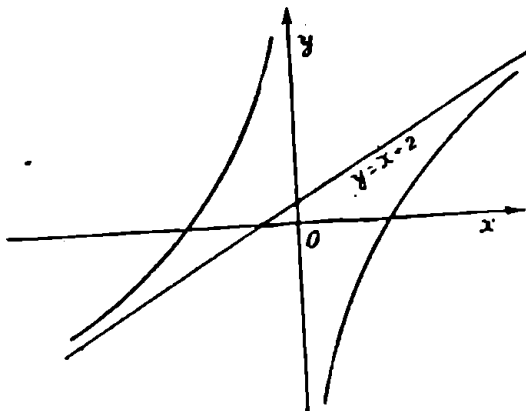
ხოლო (15.4) ტოლობის ძალით

$$b = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = 2.$$

მაშასადამე,  $y = x + 2$  წრფე არის მოცემული წირის დახრილი ასიმპტოტი. ამასთან, ვინაიდან

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - (x + 2) = -\frac{1}{x},$$

ამიტომ, როდესაც  $x > 0$ , მოცემული გრაფიკი  $y = x + 2$  ასიმპტოტის ქვემოთ მდებარეობს, ხოლო როდესაც  $x < 0$ , მოცემული გრაფიკი ამ ასიმპტოტის ზემოთ მდებარეობს (ნახ. 76).



ნახ. 76.

## ს ა ვ ა რ კ ი შ ო

მოძებნეთ შემდეგი წირების ასიმპტოტები:

1.  $y = \frac{1}{x-1}$ . პასუხი:  $x=1$ ;  $y=0$ .

2.  $y = \frac{1}{(x+2)^3}$ . პასუხი:  $x=-2$ ;  $y=0$ .

3.  $y = c + \frac{a^3}{(x-b)^2}$ . პასუხი:  $x=b$ ;  $y=c$ .

4.  $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$ . პასუხი:  $x=-1$ ;  $y=x-1$ .

5.  $y^3 = a^3 - x^3$ . პასუხი:  $x+y=0$ .

6.  $y = x + e^{-x}$ . პასუხი:  $y=x$ .

## § 18. ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემა

ბუნებისმეტყველებისა და ტექნიკის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას დიდი მნიშვნელობა აქვს ფუნქციის გრაფიკის აგებას. გრაფიკის აგების ის ელემენტარული ხერხი, რომელიც ემყარება წერტილ-

ბის აგებას და შემდეგ მათ შეერთებას უწყვეტი წირით, სრულიად მიუღებელია ნებისმიერი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად.

დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდების გამოყენებით შეგვიძლია საკმაოდ ადვილად ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკა.

გრაფიკის აგება დაკავშირებულია ფუნქციის გამოკვლევასთან. ფუნქციის გამოკვლევისათვის მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ შემდეგი სქემით:

1. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და წყვეტის წერტილები.

2. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

3. ვიპოვოთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ ისინი არსებობენ.

4. ვიპოვოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები.

5. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოხნეჭილობისა და ჩაზნეჭილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები.

6. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ფუნქცია ლუწია, საკმარისია ფუნქციის გრაფიკი ავაგოთ არგუმენტის მხოლოდ დადებითი მნიშვნელობებისათვის. გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც არგუმენტის უარყოფით მნიშვნელობებს შეესაბამება, აიგება ისე, რომ მთელი გრაფიკი განლაგებული იყოს სიმეტრიულად  $Oy$  ღერძის მიმართ.

სრულიად ასევე, კენტი ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საკმარისია ავაგოთ მისი ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის დადებით მნიშვნელობებს. არგუმენტის უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის გრაფიკი ისე უნდა დაიხაზოს, რომ მთელი გრაფიკი სიმეტრიულად იყოს განლაგებული კოორდინატთა სათავეის მიმართ.

მაგალითი. გამოვიკვლიოთ  $y = \frac{x}{1+x^2}$  ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა  $] -\infty, \infty [$  ინტერვალი. შევნიშნავთ, რომ როცა  $x > 0$ , მაშინ  $y > 0$  და გრაფიკის სათანადო ნაწილი მოთავსებულია  $Ox$  ღერძის ზემოთ. როცა  $x < 0$ , მაშინ  $y < 0$  და, მაშასადამე, გრაფიკის სათანადო ნაწილი მოთავსებულია  $Ox$  ღერძის ქვემოთ. როცა  $x = 0$ , მაშინ  $y = 0$ . ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე. ეს ფუნქცია განსაზღვრის მთელ ინტერვალზე უწყვეტია.

ახლა შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ექსტრემუმი. ამისათვის მიიწარმოებული გავუტოლოთ ნულს:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

აქედან მივიღებთ, რომ  $x_1 = -1$  და  $x_2 = 1$  არის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმის წერტილები.

ვინაიდან  $x_1 = -1$  წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გავლისას  $y'$  წარმოებული უარყოფითი მნიშვნელობებიდან გადადის დადებით მნიშვნელობებზე, ამიტომ  $x_1 = -1$  არის აღებული ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის წერტილი და

$$\min y = \frac{-1}{1+(-1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

შემდეგ, რაკი  $x_2 = 1$  წერტილის მარცხნიდან მარჯვნივ გავლისას  $y'$  წარმოებული დადებითი მნიშვნელობებიდან გადადის უარყოფით მნიშვნელობებზე, ამიტომ  $x_2 = 1$  მოცემული ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილია და  $\max y = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$ .

ახლა შევისწავლოთ მოცემული ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის უბნები. ვინაიდან  $y' < 0$ , როცა  $-\infty < x < -1$ , ამიტომ  $]-\infty, -1[$  ინტერვალზე ფუნქცია კლებადია, ხოლო რადგანაც  $y' > 0$ , როცა  $-1 < x < +1$ , ამიტომ  $] -1, 1[$  ინტერვალზე ფუნქცია ზრდადია. დაბოლოს, ვინაიდან  $y' < 0$ , როცა  $1 < x < +\infty$ , ამიტომ  $]1, +\infty[$  ინტერვალზე მოცემული ფუნქცია კლებადია.

გამოვიკვლიოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები და მოვძებნოთ გადაღუნვის წერტილები. ამისათვის მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რივის წარმოებულის ფესვები. გვაქვს:

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0,$$

საიდანაც  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = \sqrt{3}$ . ვინაიდან  $y'' < 0$ , როცა  $-\infty < x < -\sqrt{3}$ , ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი  $]-\infty, -\sqrt{3}[$  ინტერვალში ამოზნექილია. შემდეგ რაკი  $y'' > 0$ , როცა  $-\sqrt{3} < x < 0$ , ამიტომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი  $] -\sqrt{3}, 0[$



ინტერვალში ჩაზნეილია. დასასრულ,  $y'' < 0$ , როცა  $0 < x < \sqrt{3}$ , ამიტომ  $]0, \sqrt{3}[$  ინტერვალში გრაფიკა ამოზნეილია, ხოლო  $y'' > 0$ , როცა  $\sqrt{3} < x < +\infty$  და ამიტომ  $]\sqrt{3}, +\infty[$  ინტერვალში ფუნქციის გრაფიკა ჩაზნეილია.

ცხადია, მოცემული ფუნქციის გრაფიკას გადაღუნვის წერტილები

$$\text{იქნება } M_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right), M_2(0, 0) \text{ და } M_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების მოსაძებნად შევნიშნოთ, რომ

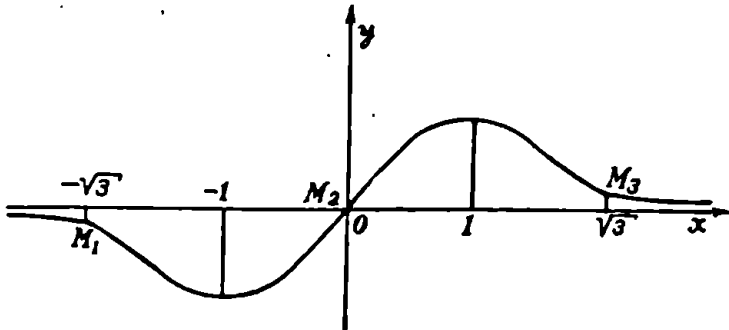
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

და

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკს აქვს ერთადერთი დახრილი ასიმპტოტი  $y=0$ , ე. ი.  $Ox$  ღერძი. ვინაიდან  $y = \frac{x}{1+x^2}$  ფუნქცია, როცა  $x$

შისწრაფვის რაიმე სასრული მნიშვნელობისაკენ, არ მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, ამიტომ გრაფიკს არ აქვს ვერტიკალური ასიმპტოტები; გავითვალისწინებთ რა ზემოთ ნათქვამს, დავრწმუნდებით, რომ გრაფიკს აქვს 77-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 77.

## ს ა ვ ა რ კ ი შ ო

გამოიკლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

1.  $y = e^{-\frac{1}{x}}$ .

2.  $y = \frac{6x}{1+x^2}$ .

3.  $y = \frac{4+x}{x^2}$ .

4.  $y = xe^{-x}$ .

5.  $y = x^3 e^{-x^2}$ .

6.  $y = x - \ln(x+1)$ .

7.  $y = x + \sin x$ .

8.  $y = \ln(1+x^2)$ .

9.  $y = x \sin x$ .

10.  $y = e^{-x} \sin x$ .

11.  $y = \ln \sin x$ .

12.  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

13.  $x = t^2, y = \frac{1}{2} t$ .

**განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ინტეგრაციის ძირითადი მეთოდები**

როგორც ვიცით, დიფერენციალურ აღრიცხვაში შეისწავლება შემდეგი ძირითადი ამოცანა: რაიმე  $X$  შუალედში მოცემულია  $F(x)$  ფუნქცია და უნდა ვიპოვოთ მისი წარმოებული. განუსაზღვრელ ინტეგრალთა თეორიაში შეისწავლება შებრუნებული ამოცანა: რაიმე  $X$  შუალედში მოცემულია  $f(x)$  ფუნქცია და უნდა ვიპოვოთ ისეთი  $F(x)$  ფუნქცია, რომლის წარმოებულია  $f(x)$ .

ასეთ ამოცანამდე დაიყვანება ტექნიკა და ბუნებისმეტყველების მრავალი საკითხი. მაგალითად, მექანიკაში გვხვდება შემდეგი ამოცანა: მოცემულია წრფეზე მოძრავი ნივთიერი წერტილის სიჩქარე დროის ყოველ  $t$  მომენტში:  $v = f(t)$ ; საჭიროა ვიპოვოთ  $M$  წერტილის მოძრაობის კანონი, ე. ი. დამოკიდებულება გავილ  $s$  მანძილსა და გავლილ  $t$  დროს შორის. ჩვენ ვიცით, რომ  $v = f(t)$  სიჩქარე იმ  $s = F(t)$  ფუნქციის წარმოებულია, რომელიც გამოსახავს  $M$  წერტილის მოძრაობის კანონს. ამრიგად, მოცემულია უცნობი  $F(t)$  ფუნქციის წარმოებული  $F'(t) = f(t)$ ; საჭიროა  $F(t)$  ფუნქციის მოძებნა. ეს კი წარმოადგენს დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი ამოცანის შებრუნებულ ამოცანას.

**§ 1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი**

ვთქვათ,  $X$  შუალედში განსაზღვრულია  $f(x)$  ფუნქცია. ამ ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია ანუ ინტეგრალი ეწოდება ისეთ  $F(x)$  ფუნქციას, რომლის წარმოებული  $X$  შუალედის ყოველ წერტილში  $f(x)$  ფუნქციის ტოლია:  $F'(x) = f(x)$ . მაგალითად,  $\sin x$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა  $\cos x$ .

ადვილი შესამჩნევია რომ თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს ერთი პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ მას ექნება უამრავი პირველყოფილი ფუნქცია. მაგალითად, თუ  $F(x)$  არის  $f(x)$  ფუნქციის რაიმე პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ  $F(x) + C$ , სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია, აგრეთვე წარმოადგენს  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას.

**თეორემა 1.** თუ  $F(x)$  არის მოცემული  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ  $F(x)+C$ , სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია, ზოგადი სახის პირველყოფილი ფუნქციაა.

**დამტკიცება.** ვთქვათ,  $\Phi(x)$  არის  $f(x)$  ფუნქციის რაიმე სხვა პირველყოფილი ფუნქცია. მაშინ იგივეურად

$$F'(x) = \Phi'(x).$$

მაგრამ როგორც ვიცით, თუ ორი ფუნქციის წარმოებული იგივეურად თანატოლია, მაშინ ეს ფუნქციები ერთმანეთისაგან მუდმივი სიდიდით განსხვავდებიან, ე. ი.  $\Phi(x) = F(x) + C$ . თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის მიხედვით საკმარისია მოიძებნოს მოცემული ფუნქციის ერთი პირველყოფილი ფუნქცია და მაშინ ყოველი სხვა პირველყოფილი ფუნქცია წარმოგვიღგება მოძებნილი პირველყოფილი ფუნქციისა და გარკვეული მუდმივის ჯამის სახით.

მოცემული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციის ანუ ინტეგრალის მოძებნას ფუნქციის ინტეგრაცია ეწოდება. თუ ინტეგრებას განვიხილავთ როგორც ფუნქციის წარმოებულისაგან თვით ამ ფუნქციამდე გადასვლას ოპერაციას, მაშინ ინტეგრება წარმოადგენს გაწარმოების შებრუნებულ ოპერაციას. ახლა შემოვიღოთ შემდეგ

**განსაზღვრა.** მოცემული  $f(x)$  ფუნქციის რაიმე პირველყოფილი  $F(x)$  ფუნქციისა და ნებისმიერი  $C$  მუდმივის  $F(x)+C$  ჯამს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი და აღინიშნება

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1.1)$$

ეს ტოლობა ასე იკითხება: განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $f(x)dx$  დიფერენციალის ტოლია  $F(x)$  პლუს ნებისმიერი მუდმივი  $C$ .

(1.1) ტოლობაში  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრალქვეშა ფუნქციაა,  $f(x)dx$  დიფერენციალი კი ინტეგრალქვეშა გამოსახულებაა. სიმბოლოს  $\int$  ეწოდება ინტეგრალის ნიშანი.

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა  $[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრული ნებისმიერი  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია? პასუხს ამ კითხვაზე გვაძლევს შემდეგი

**თეორემა 2.** სეგმენტზე ყოველ უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია.

ამ თეორემას დავამტკიცებთ განსაზღვრულ ინტეგრალთა თეორიით.

თუ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ ამბობენ, რომ  $f(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციაა.

დასასრული შენიშნათ, რომ ელემენტარული ფუნქციის წარმოებულნი არის ელემენტარული ფუნქცია, მაგრამ ელემენტარული ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია შეიძლება არ იყოს ელემენტარული ფუნქცია. მაგალითად,

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx$$

არ წარმოადგენენ ელემენტარულ ფუნქციებს. ისინი წარმოადგენენ ეგრეთ წოდებულ უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციებს.

§ 2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები

**თეორემა 3.** თუ  $f(x)$  ფუნქციას ჯერ გავაწარმოებთ და შემდეგ მოვახდენთ ამ წარმოებულის ინტეგრებას, მივიღებთ  $f(x) + C$  ფუნქციას, სადაც  $C$  ნებისმიერი მუდმივია, ე. ი.

$$\int f'(x) dx = f(x) + C. \quad (2.1)$$

დამტკიცება. რაკი  $f(x) + C$  ფუნქციის წარმოებელია  $f'(x)$ , ამიტომ მართებულია (2.1) ტოლობა.

ეს ტოლობა შეკეილია აგრეთვე ასე ჩაწეროთ:

$$\int df(x) = f(x) + C.$$

**თეორემა 4.** განუსაზღვრელი ინტეგრალის დიფერენციალი ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ტოლია.

დამტკიცება. ინტეგრალის განსაზღვრის მიხედვით,  $\int f(x) dx$  ისეთი ფუნქციაა, რომლის წარმოებელია  $f(x)$ , ე. ი.

$$\frac{d}{dx} \left| \int f(x) dx \right| = f(x).$$

აქედან

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 5.** თრი ინტეგრებადი ფუნქციის ჯამი ინტეგრებადია და ამ ფუნქციათა ჯამის განუსაზღვრელი ინტეგრალი უდრის აღნიშნული ფუნქციების განუსაზღვრელი ინტეგრალების ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია. დაეამტკიცოთ, რომ

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (2.2)$$

აღნიშნოთ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციების რაიმე პირველყოფილი ფუნქციები  $F(x)$  და  $G(x)$ -ით. მაშინ

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + \int g(x) dx &= [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] = \\ &= F(x) + G(x) + (C_1 + C_2), \end{aligned}$$

სადაც  $C_1$  და  $C_2$  ნებისმიერი მუდმივებია. მაგრამ  $F(x) + G(x)$  არის  $f(x) + g(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია. მაშასადამე, მართებულია (2.2) ტოლობა.

თეორემა 6. თუ  $f(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ  $Af(x)$ , სადაც  $A$  მუდმივი სიდიდეა, აგრეთვე ინტეგრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int Af(x) dx = A \int f(x) dx.$$

დამტკიცება. ვთქვათ,  $F(x)$  არის  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია, მაშინ

$$\frac{d}{dx} [AF(x)] = A f(x).$$

მაშასადამე,

$$\int Af(x) dx = AF(x) + AC = A[F(x) + C] = A \int f(x) dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ორი უკანასკნელი თეორემისა და მათემატიკური ინდუქციის მეტოდის გამოყენებით შეგვიძლია დაეამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 7. თუ  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია, ხოლო  $A_1, A_2, \dots, A_n$  მუდმივებია, მაშინ მართებულია ტოლობა

$$\int \sum_{k=1}^n A_k f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \int f_k(x) dx.$$

### § 8. უზუალო ინტეგრება

თუ ინტეგრალქვეშ გამოსახულება ცნობილი ფუნქციის დიფერენციალია, მაშინ ამ ფუნქციისათვის ნებისმიერი მუდმივის დამატე-

ბით მივიღებთ საძიებელ განუსაზღვრელ ინტეგრალს. მაშასადამე, უმარტივესი ფუნქციების ღიფერენციალთა ცხრილის მიხედვით შედეგა განუსაზღვრელი ინტეგრალების შემდეგი ცხრილი:

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (x \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad 3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1),$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C, \quad 5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad 7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C = -\operatorname{arc} \cos x + C',$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C',$$

$$11. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \quad 12. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, \quad 14. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

§ 4. დაშლის ხერხი

ეს ხერხი გამოიყენება, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. მაშინ მე-7 თეორემის თანახმად ამგვარი ინტეგრალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ინტეგრალთა ჯამის სახით.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int (3x^2 - 4 \sin x + 5 \sqrt[3]{x}) dx.$$

ამოხსნა. მე-7 თეორემის თანახმად

$$I = \int 3x^2 dx - \int 4 \sin x dx + \int 5 \sqrt[3]{x} dx = 3 \int x^2 dx - 4 \int \sin x dx + 5 \int \sqrt[3]{x} dx = x^3 + 4 \cos x + \frac{15}{4} x \sqrt[3]{x} + C.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left( \frac{5}{\sqrt{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt{x}} - x^3 \sqrt{x} \right) dx.$$

ამოხსნა. მე-7 თეორემის თანახმად გვაქვს:

$$I = 5 \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \frac{1}{3} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \int x^{\frac{5}{2}} dx = 15\sqrt[3]{x} + \\ + \frac{4}{9} \sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + C.$$

ხშირად დაშლის ხერხი მაშინაც გამოიყენება, როცა ინტეგრალ-  
ქვეშა ფუნქცია არ წარმოადგენს ალგებრულ ჯამს. ამ შემთხვევაში  
ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წინასწარ უნდა მივიყვანოთ ალგებრულ  
ჯამზე და შემდეგ გამოვიყენოთ მე-7 თეორემა.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I = \int \frac{(x^2+1) - 1}{1+x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

ამოხსნა. გვაქვს:

$$I = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

### § 5. ნაწილობრივი ინტეგრება

ვთქვათ,  $u = u(x)$  და  $v = v(x)$  არის ორი დიფერენცირებადი  
ფუნქცია, როგორც დიფერენციალური აღრიცხვიდან ცნობილია,  
არსებობს  $uv$  ნამრავლის დიფერენციალი და მართებულია ტო-  
ლობა

$$d(uv) = vdu + udx.$$

ვინტეგრით ამ ტოლობის ორივე ნაწილი და შედეგი ასე ჩა-  
წეროთ



$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (5.1)$$

უკანასკნელ ტოლობას ეწოდება ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს  $\int u dv$  ინტეგრალის გამოთვლა დავიყვანოთ ახალ ინტეგრალამდე  $\int v du$ , რომელიც შეიძლება უფრო მარტივი აღმოჩნდეს ვიდრე პირველი.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ  $\int x^a \ln x dx$ , სადაც  $a \neq -1$ .

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u = \ln x \text{ და } dv = x^a dx. \text{ მაშინ } du = \frac{dx}{x}$$

და  $v = \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ . ამის შემდეგ (5.1) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს

$$\int x^a \ln x dx = \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \frac{1}{a+1} \int x^a dx = \frac{x^{a+1} \ln x}{a+1} - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + C.$$

როგორც ვნახეთ,  $v = v(x)$  ფუნქცია უნდა მოვიძებნოთ  $dv$  დიფერენციალის ინტეგრებით. მაგრამ, ინტეგრება ამ დიფერენციალისა წარმოქმნის ნებისმიერ  $C$  მუდმივსაც. ეს მუდმივი  $v$  ფუნქციის გამოთვლისას ჩათვლილია ნულის ტოლად, ვინაიდან იგი საბოლოო შედეგში არ მიიღებს მონაწილეობას.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $\int x \sin x dx$ . შემოვიღოთ აღნიშვნები  $u = x$  და  $dv = \sin x dx$ ; მაშინ  $du = dx$  და  $v = -\cos x$ . ახლა გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა, გვექნება

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

როგორც ვხედავთ, განხილულ მაგალითში, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებას მივყავართ ახალი მარტივი  $\int \cos x dx$  ინტეგრალის გამოთვლამდე.

თუ ავიღებთ  $u = \sin x$  და  $dv = x dx$ , მაშინ  $du = \cos x dx$  და  $v = \frac{1}{2} x^2$  და იმავე (5.1) ფორმულის გამოყენება მოგვცემს

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2 \sin x}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx.$$

ნათლად ჩანს, რომ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულამ, ამ შემთხვევაში, არა თუ გაამარტივა საძიებელი ინტეგრალის გამოთვლა, არამედ იგი მიიყვანა უფრო რთული  $\int x^2 \cos x dx$  ინტეგრალის მოძებნამდე. ეს გამოწვეულია იმით, რომ  $u$  და  $dv$  მოხერხებულად არ იყო შერჩეული.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ  $\int \arctg x dx$ . ამისათვის მივიღოთ, რომ  $u = \arctg x$ ,  $dv = dx$ . მაშინ  $du = \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $v = x$  და (5.1) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

მაგალითი 4. მოვძებნოთ  $\int (ax^2 + bx + c) \cos kx dx$ , სადაც  $a, b, c, k \neq 0$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ამისათვის ვიგულისხმობთ  $u = ax^2 + bx + c$ ,  $dv = \cos kx dx$  და გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა. მაშინ  $du = (2ax + b) dx$ ,  $v = \frac{1}{k} \sin kx$  და

$$\int (ax^2 + bx + c) \cos kx dx = \frac{1}{k} (ax^2 + bx + c) \sin kx - \frac{1}{k} \int (2ax + b) \sin kx dx.$$

ახლა, ხელახლა გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა უკანასკნელი ინტეგრალის გამოსათვლელად, რომელშიც აღვნიშნოთ  $u = 2ax + b$ ,  $dv = \sin kx dx$ , მაშინ  $du = 2a dx$ ,  $v = -\frac{1}{k} \cos kx$ . გვქვია

$$\begin{aligned} \int (2ax + b) \sin kx dx &= -\frac{1}{k} (2ax + b) \cos kx + \frac{2a}{k} \int \cos kx dx = \\ &= -\frac{1}{k} (2ax + b) \cos kx + \frac{2a}{k^2} \sin kx \end{aligned}$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int (ax^2 + bx + c) \cos kx dx = \frac{1}{k} (ax^2 + bx + c) \sin kx +$$

$$+ \frac{1}{k^2} (2ax + b) \cos kx - \frac{2a}{k^3} \sin kx + C.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ  $\int x^2 e^x dx$ . აღვნიშნოთ  $u = x^2$ ,  $dv = e^x dx$ . მაშინ  $du = 2x dx$ ,  $v = e^x$ . თანახმად ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულისა, გვექნება

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

გამოვთვალოთ უკანასკნელი ინტეგრალი ისევ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით. ამასთან აღვნიშნოთ  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$ . მაშინ  $du = dx$ ,  $v = e^x$ , ამის გამო გვექნება

$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x - 1) e^x$ . შევიტანოთ მიღებული გამოსახულება ტოლობაში. საბოლოოდ გვექნება

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

მაგალითი 6. გამოვთვალოთ  $\int e^{ax} \cos bx dx$ , სადაც  $a \neq 0$  და  $b \neq 0$  ნამდვილი რიცხვებია.

აღვნიშნოთ  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bx dx$ . მაშინ  $du = a e^{ax} dx$ ,

$v = \frac{1}{b} \sin bx$ . გამოვიყენოთ (5.1) ფორმულა, მივიღებთ

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ ისევ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით. ამისათვის, ვთქვათ  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \sin bx dx$ . მაშინ  $du = a e^{ax} dx$ ,  $v = -\frac{1}{b} \cos bx$ . მაშასადამე,

$$\int e^{ax} \sin bx dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

თუ ამ გამოსახულებას შევიტანთ წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx,$$

საიდანაც საბოლოოდ გვექნება:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{(b \sin bx + a \cos bx) e^{ax}}{a^2 + b^2} + C. \quad (5.2)$$

ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{(a \sin bx - b \cos bx) e^{ax}}{a^2 + b^2} + C. \quad (5.3)$$

მაგალითი 7 გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \left( \frac{x}{x \sin x + \cos x} \right)^2 dx.$$

წინასწარ იგი გარდავქმნათ შემდეგნაირად:

$$I = \int \frac{x}{\cos x} \frac{x \cos x \, dx}{(x \sin x + \cos x)^2}.$$

ახლა გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ამისათვის აღვნიშნოთ

$$u = \frac{x}{\cos x}, \quad dv = \frac{x \cos x \, dx}{(x \sin x + \cos x)^2}$$

მაშინ

$$\begin{aligned} du &= \frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x} dx, & v &= \int \frac{x \cos x \, dx}{(x \sin x + \cos x)^2} = \\ &= \int \frac{d(x \sin x + \cos x)}{(x \sin x + \cos x)^2} = -\frac{1}{x \sin x + \cos x}. \end{aligned}$$

ამის შემდეგ საძიებელი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$I = -\frac{x}{\cos x (x \sin x + \cos x)} + \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x} + C.$$

#### § 8. ინტეგრება ცვლადთა გარდაამნიხის ხერხით

ზნირად, განუსაზღვრელი ინტეგრალი, რომელიც საკმარისად რთული ინტეგრალქვეშა გამოთავლებიდან არის გამოსათვლელი, შესაძ-

ლოა გავამარტივოთ ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (6.1)$$

განვიხილოთ  $x = \varphi(t)$  ფუნქცია, რომელიც უწყვეტად წარმოებადია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე და  $a \leq \varphi(t) \leq b$ , როდესაც  $\alpha \leq t \leq \beta$  როგორც ვიცით, ასეთ პირობებში რთული ფუნქცია  $F[\varphi(t)]$  განსაზღვრულია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე და

$$dF[\varphi(t)] = F'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

რადგანაც  $F'(x) = f(x)$ , ამიტომ

$$dF[\varphi(t)] = f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

მოვახდინოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრება, მივიღებთ

$$F[\varphi(t)] + C = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6.2)$$

შეგარამ  $F[\varphi(t)] = F(x)$ , ამიტომ (6.1) და (6.2) ტოლობების ძალით გვექნება

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (6.3)$$

ეს არის ინტეგრალქვეშა ცვლადის გარდაქმნის ფორმულა. ინტეგრების ამ ხერხს ჩასმის ხერხს უწოდებენ.

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალის გამოთვლა მთლიანად დამოკიდებულია  $\varphi(t)$  ფუნქციის შერჩევისაგან. ჩასმის ხერხის ნაყოფიერება იმდენად უფრო ეფექტურია. რამდენადაც მოხერხებულად არის შერჩეული  $\varphi(t)$  ფუნქცია.

შენიშვნა. ზოგჯერ, ნაცვლად  $x = \varphi(t)$  ჩასმისა, უფრო მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ  $t = \psi(x)$  ჩასმა. მაგალითად, თუ გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)},$$

უკეთესია გამოვიყენოთ  $t = \psi(x)$  ჩასმა, საიდანაც გვექნება  $dt = \psi'(x) dx$

და

$$\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

მოვიყენოთ მაგალითები ჩასმის ხერხის გამოყენებაზე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ  $\int \sqrt{\sin x \cos x} dx$ . გამოვიყე-

ნოთ  $t = \sin x$  ჩასმა. მაშინ  $dt = \cos x dx$  და ინტეგრალი ასე გარდაიქმნება

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x \cos x} dx &= \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$ .

ავიღოთ  $\ln x = t$  ჩასმა მაშინ  $\frac{dx}{x} = dt$ . და გამოსათვლელი ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int \frac{\ln^2 x dx}{x} = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 x + C;$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ  $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$ , სადაც  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია.

ავიღოთ  $x = \frac{a}{b} t$  ჩასმა. გვექნება  $dx = \frac{a}{b} dt$ . ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ გამარტივებულ სახეს:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} &= \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{ab} \arctg t + C = \\ &= \frac{1}{ab} \arctg \left( \frac{b}{a} x \right) + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}$ , სადაც  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

თუ ავიღებთ ჩასმას  $x = \frac{at}{b}$ , გვექნება  $dx = \frac{a}{b} dt$ . მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} &= \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{b} \arcsin t + C = \\ &= \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a} + C. \end{aligned}$$

კერძოდ,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $I = \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2}$ ; სადაც  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ .

გამოვიყენოთ  $x = \frac{a}{b} t$  ჩასმა. გვექნება  $dx = \frac{a}{b} dt$ . ამის შემდეგ ინტეგრალი შემდეგნაირად გამარტივდება და გამოითვლება:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2ab} \int \frac{(1-t) + (1+t)}{(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2ab} \int \frac{dt}{1+t} + \\ &+ \frac{1}{2ab} \int \frac{dt}{1-t} = \frac{1}{2ab} \ln|1+t| - \frac{1}{2ab} \ln|1-t| + C = \\ &= \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right| + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 6 გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$ .

ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წინასწარ გარდაკქმნათ ასე:

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx}{\cos^3 x}$$

ახლა ავიღოთ  $\cos x = t$  ჩასმა. მაშინ  $\sin x dx = -dt$  და საძიებელი ინტეგრალი მიიღებს მარტივ სახეს და ამოიხსნება უკვე დაშლის ხერხით შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^3} = - \int t^{-3} dt + 3 \int \frac{dt}{t} - 3 \int t dt + \\ &+ \int t^3 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + 3 \ln|t| - \frac{3}{2} t^2 + \frac{1}{4} t^4 + C. \end{aligned}$$

თუ დავებრუნდებით  $x$  ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2 \cos^2 x} + 3 \ln|\cos x| - \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{1}{4} \cos^4 x + C.$$

მაგალითი 7 გამოვთვალოთ  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ . ეს ინტეგრალი წინასწარ გარდაქმნათ შემდეგნაირად:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

ახლა უკანასკნელი ინტეგრალი გამოვთვალოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულით. ამისათვის აღვნიშნოთ  $u = x$ ,  $dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ :

მაშინ  $du = dx$ ,  $v = \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$ .

მაშასადამე,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება წინა ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, მივიღებთ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx,$$

საიდანაც საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

## § 7. ინტეგრება ფუნქციისა, რომელიც კვადრატულ საფუძვრს შეიცავს

### 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}, \quad (7.1)$$

სადაც  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $c$  ნამდვილი რიცხვებია.

ამისათვის, გამოვიდეთ შემდეგი იგივეობიდან:

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)].$$

მაშინ (7.1) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება

$$I = 4a \int \frac{dx}{(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)}.$$



გამოვიყენოთ  $z = 2ax + b$  ჩასმა, მაშინ  $dz = \frac{dz}{2a}$  და უკანასკნელი ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$I = 2 \int \frac{dz}{z^2 - (b^2 - 4ac)}$$

ახლა პირდაპირ ჩანს, რომ ინტეგრალი მთლიანად დამოკიდებულია  $ax^2 + bx + c$  სამწევრის  $b^2 - 4ac$  დისკრიმინანტზე. თუ  $b^2 - 4ac = 0$ , მაშინ გვექნება

$$I = -\frac{2}{z} + C.$$

ეთქვით ახლა,  $b^2 - 4ac > 0$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $b^2 - 4ac = k^2$ , გვექნება

$$I = 2 \int \frac{dz}{z^2 - k^2} = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{z - k}{z + k} \right| + C.$$

დაბოლოს თუ  $b^2 - 4ac < 0$ , მაშინ  $b^2 - 4ac = -k^2$  და

$$I = 2 \int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \frac{2}{k} \operatorname{arctg} \frac{z}{k} + C.$$

დავუბრუნდეთ ისევ  $x$  ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} -\frac{2}{2ax + b} + C, & \text{თუ } b^2 - 4ac = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| + C, & \text{თუ } b^2 - 4ac > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, & \text{თუ } b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

ამრიგად, როცა  $ax^2 + bx + c$  სამწევრის დისკრიმინანტი ნულის ტოლია, მაშინ ინტეგრალი წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას. როცა იგი დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი არის ლოგარითმული ფუნქცია; ხოლო როცა დისკრიმინანტი უარყოფითი რიცხვია, ინტეგრალი გამოისახება არკტანგენსით.

2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$$

სადაც  $k$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

შემოვიღოთ აღნიშვნა  $y = \sqrt{x^2 + k}$ . გვაქვს:

$$dy = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \frac{x dx}{y}$$

აქედან

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

თუ ვისარგებლებთ პროპორციის ერთ-ერთი თვისებით, გვაქვება

$$\frac{dx}{y} = \frac{dx + dy}{y + x} = \frac{d(x+y)}{x+y}$$

მაშასადამე,

$$I = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{d(x+y)}{x+y} = \ln|x+y| + C.$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + k}) + C. \quad (7.2)$$

3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \quad a \neq 0.$$

ამ ინტეგრალის მოსაძებნად განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

ა)  $a > 0$ . ამ შემთხვევაში კვადრატული სამწევრი  $ax^2 + bx + c$  ასე წარმოვადგინოთ

$$ax^2 + bx + c = \frac{(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)}{4a}.$$

მაშასადამე,

$$I = \int \frac{2\sqrt{a} dx}{\sqrt{(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)}}.$$

ავიღოთ ჩასმა

$$2ax + b = t.$$

აქედან  $dx = dt : 2a$ . მაშასადამე,

$$I = \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + (4ac - b^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + (4ac - b^2)}}$$

მაგრამ (7.2) ფორმულის თანახმად

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + (4ac - b^2)}} = \ln(t + \sqrt{t^2 + (4ac - b^2)}) + C.$$

თუ დავებრუნდებით ძველ  $x$  ცვლადს, გვექნება

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln (2ax + b + \sqrt{4a(ax^2 + bx + c)}) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left[ 2\sqrt{a} \left( \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right) \right] + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right) + C \end{aligned}$$

სადაც

$$C' = C + \frac{1}{\sqrt{a}} \ln (2\sqrt{a}).$$

ბ)  $a < 0$  და  $b^2 - 4ac > 0$ . ამ შემთხვევაში  $ax^2 + bx + c$  საშუალები ასე წარმოვადგინოთ:

$$ax^2 + bx + c = \frac{(b^2 - 4ac) - (2ax + b)^2}{-4a}.$$

მაშასადამე,

$$I = 2\sqrt{-a} \int \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - 4ac) - (2ax + b)^2}}.$$

ავიღოთ ჩასმა  $2ax + b = t$ . აქედან  $dx = dt : 2a$ . მაშასადამე,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{-a}}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{(b^2 - 4ac) - t^2}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{t}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + \\ &+ C = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(2ax + b)}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \end{aligned}$$

ამრიგად,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( \frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c} \right) + \\ \quad + C, \text{ როდესაც } a > 0, & (7.3) \\ \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}} + \\ \quad + C, \text{ როდესაც } a < 0. & (7.3) \end{cases}$$

## ს ა გ ა რ ჯ ი შ ო

მოძებნეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1.  $\int (ax+b) dx$ ; პას.  $\frac{a}{2} x^2 + bx + C$ .

2.  $\int (ax+b)^n dx$ ; პას.  $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$ .

3.  $\int \frac{dx}{2x+1}$ ; პას.  $\frac{1}{2} \ln |2x+1| + C$ .

4.  $\int \frac{x dx}{4x^2-3}$ ; პას.  $\frac{1}{8} \ln |4x^2-3| + C$ .

5.  $\int \sqrt[m]{x^n} dx$ ; პას.  $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} + C$ .

6.  $\int \operatorname{ctg} 4x dx$ ; პას.  $\frac{1}{4} \ln |\sin 4x| + C$ .

7.  $\int \operatorname{tg} (5x-2) dx$ ; პას.  $-\frac{1}{5} \ln |\cos (5x-2)| + C$ .

8.  $\int \frac{x^2 dx}{4x^2+1}$ ; პას.  $\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{32} \ln (4x^2+1) + C$ .

9.  $\int \frac{x dx}{x^2+1}$ ; პას.  $\frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C$ .

10.  $\int \frac{x^{k-1} dx}{ax^k+b}$ ; პას.  $\frac{1}{ak} \ln |ax^k+b| + C$ .

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$ ; პას.  $\frac{3}{2a} \sqrt[3]{(ax+b)^2} + C$ .

12.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}$ ; 306.  $\frac{5}{12} \sqrt{(x^3+1)^4} + C.$
13.  $\int x^4 \sqrt{x^5+1} dx$ ; 306.  $\frac{1}{6} \sqrt{(x^5+1)^6} + C.$
14.  $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx$ ; 306.  $\sqrt{x^2-a^2} - a \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C.$
15.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ; 306.  $\frac{3}{2} \sqrt{x^2}-3\sqrt{x} + 3\ln(1+\sqrt{x}) + C.$
16.  $\int \frac{4x^3-7x+2}{2x+1} dx$ ; 306.  $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x +$   
 $+\frac{5}{2} \ln|2x+1| + C.$
17.  $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^3-x} dx$ ; 306.  $\frac{2}{3}x^3+3x+\ln|x-1| +$   
 $+2 \ln|x| + C.$
18.  $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$ ; 306.  $-x-4\sqrt{x}-4\ln|\sqrt{x}-1| + C.$
19.  $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ ; 306.  $2\sqrt{x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$
20.  $\int x^2 \sqrt{a+x} dx$ ; 306.  $\frac{2}{105} \sqrt{a+x} (8a^3-4a^2x +$   
 $+3ax^2+15x^3) + C.$

$$21. \int \frac{\sqrt[3]{x^3+Vx}+1}{\sqrt{x}-1} dx; \text{ პას. } \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + x +$$

$$+ \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + 3 \sqrt[3]{x^2} + 2 \sqrt{x} + 6 \sqrt[3]{x} + 6 \sqrt[6]{x} +$$

$$+ 9 \ln |\sqrt[6]{x}-1| + 3 \ln |\sqrt{x}+1| + C.$$

$$22. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx; \text{ პას. } 2 \sqrt{a+bx} +$$

$$+ \sqrt{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} \right| + C.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}; \text{ პას. } \frac{1}{3a} \left[ (x+a)^{\frac{3}{2}} + \right. \\ \left. + (x-a)^{\frac{3}{2}} \right] + C.$$

$$24. \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx; \text{ პას. } \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$25. \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}; \text{ პას. } \frac{1}{2} \ln |x^2 + \frac{1}{2}| + \sqrt{1+x^2+x^4} + C.$$

$$26. \int \frac{\sin x dx}{(1-3 \cos x)^2}; \text{ პას. } -\frac{1}{6(1-3 \cos x)^2} + C.$$

$$27. \int \frac{dx}{(3+\sin x)^2}; \text{ პას. } \frac{\cos x}{8(3+\sin x)} +$$

$$+ \frac{3}{8\sqrt{2}} \arctg \left( \frac{3 \operatorname{tg} x/2}{2\sqrt{2}} \right) + C.$$

28.  $\int \frac{\sin^2 x dx}{(2 + \cos x)^2}$ ; 3. б.  $\frac{\sin x}{2 + \cos x} +$   
 $+\frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
29.  $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ ; 3. б.  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x + \sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 + \operatorname{tg} x - \sqrt{2 \operatorname{tg} x}} \right| + C.$
30.  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$ ; 3. б.  $x + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$
31.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^3 x}}$ ; 3. б.  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 - \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}} \right) +$   
 $+\operatorname{arctg} \left( \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \frac{1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} + \sqrt{3} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x} - \sqrt{3} \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}} + C.$
32.  $\int \frac{\cos x dx}{(\cos 2x)^{\frac{3}{2}}}$ ; 3. б.  $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} + C.$
33.  $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ; 3. б.  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2 + \sin 2x}}{\sqrt{2 - \sin 2x}} +$   
 $+\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} 2x \right) + C.$
34.  $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^4 x} dx$ ; 3. б.  $\left( \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x \right) \ln \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x -$   
 $-\frac{1}{9} \operatorname{tg}^3 x + C.$

35.  $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ ; პას.  $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$ .

36.  $\int \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}) \frac{dx}{(x+1)^2}$ ;  
 პას.  $\ln \frac{(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3})}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2x + 3}}{x+1} + C$ .

37.  $\int x^3 \arcsin x dx$ ; პას.  $\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{32}\right) \arcsin x + \left(\frac{x^3}{16} + \frac{3}{32}x\right) \sqrt{1-x^2} + C$ .

38.  $\int \arcsin^3 x dx$ ; პას.  $x(\arcsin^3 x - 6 \arcsin x) + (3 \arcsin^2 x - 6) \sqrt{1-x^2} + C$ .

39.  $\int \frac{\arcsin x}{(1-x)^2} dx$ ; პას.  $\frac{\arcsin x}{1-x} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$ .

40.  $\int \frac{\arcsin x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ; პას.  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} \arcsin x^3 + C$ .

41.  $\int \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ; პას.  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$ .

42.  $\int \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ ; პას.  $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$ .

43.  $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ; პას.  $x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$ .



44.  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ;    3 о б.  $4\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1+x} \arcsin x + C$ .

45.  $\int x\sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$ ;    3 о б.  $\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^3 -$   
 $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arcsin x + C$ .

46.  $\int \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ ;    3 о б.  $(1-x) \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$   
 $+\sqrt{2} \arctg \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$ .

47.  $\int \arcsin \sqrt{x} dx$ ;    3 о б.  $\left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} +$   
 $+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2} + C$ .

48.  $\int \arctg \sqrt{x} dx$ ;    3 о б.  $(x+1) \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$ .

49.  $\int x^2 \arctg x dx$ ;    3 о б.  $\frac{1}{3}x^3 \arctg x - \frac{1}{6}x^2 +$   
 $+\frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$ .

50.  $\int \frac{\arctg x}{(1+x)^2} dx$ ;    3 о б.  $\frac{\arctg x}{1+x} + \frac{1}{2} \ln(1+x) -$   
 $-\frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctg x + C$ .

51.  $\int \frac{x \lg x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;    3 о б.  $\sqrt{1-x^2} + (1 - \sqrt{1-x^2}) \ln x -$   
 $-\ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + C$ .

52.  $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x}}$ ;    3 о б.  $4\sqrt{1-x} + 2(1 - \sqrt{1-x}) \ln x -$   
 $-4 \ln(1 + \sqrt{1-x}) + C$ .

53.  $\int \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$ ; პას.  $\frac{\sin x}{x} + C$ .

54.  $\int \frac{\cos^2 x dx}{(2+3\sin x)^2}$ ; პას.  $\frac{2}{9\sqrt{5}} \ln \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 - \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 + \sqrt{5}} - \frac{\cos x}{3(2+3\sin x)} - \frac{1}{9}x + C$ .

55.  $\int \frac{dx}{(3+\sin x)^2}$ ;

პას.  $\frac{\cos x}{8(3+\sin x)} + \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2\sqrt{2}} \right) + C$ .

**რაციონალური ფუნქციების ინტეგრაცია**

**§ 1. უმარტივესი რაციონალური ფუნქციები და მათი ინტეგრაცია**

როგორც ვიცით,  $x$  ცვლადის რაციონალური ფუნქცია ეწოდება  $\frac{f(x)}{g(x)}$  სახის ფუნქციას, სადაც  $f(x)$  და  $g(x)$  მრავალწევრებია. შემდეგში ვიგულისხმებთ, რომ  $x$  არის ნამდვილი ცვლადი, ხოლო  $f(x)$  და  $g(x)$  მრავალწევრების კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია. ამის გარდა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ  $f(x)$  და  $g(x)$  ურთიერთმარტივი მრავალწევრებია, ე. ი. მათ არა აქვთ საერთო ფესვები, ვინაიდან თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  მრავალწევრებს აქვთ საერთო მამრავლები, მაშინ  $\frac{f(x)}{g(x)}$  წილადი შეგვიძლია შევკვეცოთ ხსენებულ საერთო მამრავლებზე.

ჩვენი მიზანია გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx.$$

თუ  $\frac{f(x)}{g(x)}$  არაწესიერი წილადია, ე. ი.  $f(x)$  მრავალწევრის ხარისხი  $g(x)$  მრავალწევრის ხარისხზე ნაკლები არ არის, მაშინ მრიცხველის მნიშვნელზე გაყოფის შედეგად გვექნება

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F(x) + \frac{\varphi(x)}{g(x)},$$

სადაც  $F(x)$  მრავალწევრია,  $\frac{\varphi(x)}{g(x)}$  კი წესიერი წილადია, ე. ი.  $\varphi(x)$  მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია  $g(x)$  მრავალწევრის ხარისხზე, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int F(x) dx + \int \frac{\varphi(x)}{g(x)} dx$$

მაგრამ ინტეგრალი  $\int F(x) dx$  უშუალოდ გამოითვლება. ამრიგად, რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება დაიყვანება წესიერი წილადის ინტეგრებამდე.

შემდეგ პარაგრაფში დავამტკიცებთ, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით.

უმარტივესი წილადები ეწოდება შემდეგი სახის წილადებს:

1.  $\frac{A}{x-a}$ , სადაც  $A$  მუდმივი სიდიდეა.

2.  $\frac{A}{(x-a)^k}$ , სადაც  $k$  ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია.

3.  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ , სადაც  $A$  და  $B$  მუდმივებია, მნიშვნელს კომპლექსური ფესვები აქვს.

4.  $\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^k}$ , სადაც  $k$  ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვია, მნიშვნელის ფესვები კი კომპლექსურია.

გამოვთვალოთ უმარტივესი წილადების განუსაზღვრელი ინტეგრალები. გვაქვს:

1.  $\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$

2.  $\int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$   
 $= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

3.  $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx =$   
 $= \frac{A}{2} \int \frac{(2x+p) dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$   
 $= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx + \frac{p}{2}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$

$$= \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

გადავიღეთ 4 სახის ფუნქციის ინტეგრებაზე. ამისათვის საჭიროა შევადგინოთ რეკურენტული ანუ დაყვანის ფორმულა. გამოვიყენოთ შემდეგი გარდაქმნები

$$I_k = \int \frac{\frac{P}{2}(2x + p) + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right)}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{P}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^k} + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{P}{2} J + \left(Q - \frac{Pp}{2}\right) J_k,$$

სადაც

$$J = \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx, \quad J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}.$$

ამ ინტეგრალთაგან პირველი მარტივად გამოითვლება. მართლაც, ვთქვათ,  $x^2 + px + q = z$ , მაშინ

$$J = \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int z^{-k} dz = \frac{1}{(1 - k) z^{k-1}} + C = \frac{1}{(1 - k) (x^2 + px + q)^{k-1}} + C.$$

ახლა გამოვთვალოთ  $J_k$  ინტეგრალი. გვაქვს

$$J_k = \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k}.$$

გამოვიყენოთ  $t = x + \frac{p}{2}$  ჩასმა მაშინ  $dx = dt$ . ამასთან გავიხსენოთ, რომ

$q - \frac{p^2}{4} > 0$  და ამიტომ შეგვიძლია შემოვიღოთ აღნიშვნა  $q - \frac{p^2}{4} = r^2$ . ამის შემდეგ  $J_k$  ინტეგრალი ასე გარდაქმნათ:

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + r^2)^k} = \frac{1}{r^2} \int \frac{(t^2 + r^2) - t^2}{(t^2 + r^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{r^2} \int \frac{dt}{(t^2 + r^2)^{k-1}} - \frac{1}{r^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + r^2)^k}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

უკანასკნელი ინტეგრალი გარდავქმნათ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით, გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+r^2)^k} &= \int t \frac{t dt}{(t^2+r^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+r^2)}{(t^2+r^2)^k} = \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \int t d \left( \frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}} \right) = -\frac{t}{2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \\ &\quad + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} = \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \left[ \frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} \right], \end{aligned}$$

ჩავსვათ რა უკანასკნელ გამოსახულებას (1.2) ტოლობაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k} = \frac{1}{r^2} \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{1}{2r^2(k-1)} \left[ \frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} \right] = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \\ &\quad + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^{k-1}} \end{aligned}$$

ანუ

$$J_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)} J_{k-1}. \quad (1.3)$$

როგორც ეს ტოლობა გვიჩვენებს,  $J_k$  ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება იმავე სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომელშიაც  $k$  ხარისხის მაჩვენებელი ერთი ერთეულით არის დაწეული.

(1.3) ფორმულას ეწოდება რეკურენტული ანუ დაყვანის ფორმულა.

დაყვანის ფორმულის მიმდევრობით გამოყენება მიგვიყვანს ინტეგრალამდე

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+r^2} = \frac{1}{r} \operatorname{arctg} \frac{t}{r} + C.$$

ამის შემდეგ საჭიროა  $t$  ცვლადისა და  $r$  მუდმივის მნიშვნელობანი შევცვალოთ  $x$  ცვლადით და  $P$ ,  $Q$ ,  $p$ ,  $q$  მუდმივებით და  $J_k$  ინტეგრალიც ბოლომდე გამოთვლილი იქნება.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \frac{(x+2) dx}{(x^2+2x+4)^2}.$$

გვაქვს:

$$J = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + 1}{(x^2+2x+4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2} dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^2} = -\frac{1}{2(x^2+2x+4)} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^2}.$$

თუ უკანასკნელ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას  $t = x+1$ , გვექნება,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+4)^2} = \int \frac{dx}{|(x+1)^2+3|^2} = \int \frac{dt}{(t^2+3)^2}.$$

ახლა რედუქციის (1.3) ფორმულა გვაძლევს

$$\int \frac{dt}{(t^2+3)^2} = -\frac{t}{6(t^2+3)} + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{t}{6(t^2+3)} +$$

$$+ \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{x+1}{6(x^2+2x+4)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს:

$$\int \frac{(x+2)dx}{(x^2+2x+4)^2} = \frac{x-2}{6(x^2+2x+4)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

## § 2. წახივარი რაციონალური წილადის დაშლა უმარტივეს წილადაებად

განვიხილოთ წესიერი რაციონალური წილადი  $\frac{f(x)}{F(x)}$ . ვიგულისხმობთ, რომ  $f(x)$  და  $F(x)$  ურთიერთმარტივი ნამდვილი კოეფიციენტებიანი მრავალწევრებია, ამასთანავე  $F(x)$  მრავალწევრის უფროსი წევრის კოეფიციენტი ერთის ტოლია. დავამტკიცოთ, რომ ყოველი წესიერი რაციონალური წილადი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ უმარტივესი წილადების ჯამის სახით. ამისათვის დავგვირღებთ ქვემოთ მოცხანილი ორი ლემა.

ლემა 1. ვთქვათ:  $\frac{f(x)}{F(x)}$  წესიერი წილადია და  $F(x) = (x-a)^k F_1(x)$ ,  $F_1(a) \neq 0$ . მაშინ  $\frac{f(x)}{F(x)}$  შეიძლება წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} F_1(x)}, \quad (2.1)$$

სადაც პირველ შესაქრებში  $A$  ნულისაგან განსხვავებული მუდმივია, ხოლო მეორე შესაქრები წესიერი წილადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ იგივეობა

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{f(x) - AF_1(x)}{(x-a)^k F_1(x)}. \quad (2.2)$$

ეს ტოლობა მართებულია  $A$  სიდიდის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. შევარჩიოთ  $A$  ისე, რომ  $f(x) - AF_1(x)$  გამოსახულება გაიყოს  $x-a$  სხვაობაზე. ამისათვის, ბეზუს თეორემის თანახმად, აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს პირობა

$$f(a) - AF_1(a) = 0.$$

რაკი  $f(a) \neq 0$  და  $F_1(a) \neq 0$ , ამიტომ ამ ტოლობიდან გვაქვს:

$$A = \frac{f(a)}{F_1(a)} \neq 0.$$

ასეთი  $A$  რიცხვი ადენიშნოთ  $A_0$ -ით. მაშინ

$$f(x) - A_0 F_1(x) = (x-a) f_1(x), \quad (2.3)$$

სადაც  $f_1(x)$  არის მრავალწევრი, რომლის ხარისხი ნაკლებია  $(x-a)^{k-1} F_1(x)$  მრავალწევრის ხარისხზე.

თუ (2.3) გამოსახულებას ჩავსვამთ (2.2) გამოსახულებაში, მივიღებთ (2.1) ტოლობას.



ახლა წესიერ  $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)}$  წილადზე გამოვიყენოთ (2.1) ფორ-  
მულა, გვექნება

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}F_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2}F_1(x)}$$

თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{f_k(x)}{F_1(x)}, \quad (2.4)$$

სადაც  $\frac{f_k(x)}{F_1(x)}$  წესიერი წილადია.

როდესაც  $F_1(x)$  მრავალწევრს აქვს სხვა ნამდვილი ჯერადი ფეს-  
ვები, მაშინ  $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$  წესიერი წილადის დასაშლელად შეგვიძლია გამო-  
ვიყენოთ (2.4) ფორმულის ანალოგიური ფორმულა.

ლემა 2. ვთქვათ,  $\frac{f(x)}{F(x)}$  წესიერი რაციონალური წი-  
ლადია და

$$F(x) = (x^2 + px + q)^k F_1(x),$$

სადაც  $x^2 + px + q$  სამწევრის ფესვები კომპლექსურია  
და  $F_1(x)$  არ იყოფა ამ სამწევრზე. მაშინ  $\frac{f(x)}{F(x)}$  შეიძლე-  
ბა წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} F_1(x)}, \quad (2.5)$$

სადაც პირველ შესაჯარებში  $M$  და  $N$  გარკვეული მუდ-  
მივებია. ხოლო მეორე შესაჯარები წესიერი წილადია.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი  $M$  და  $N$  რიცხვ-  
ბისათვის ადგილი აქვს იგივეობას

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{f(x) - (Mx + N)F_1(x)}{(x^2 + px + q)^k F_1(x)}. \quad (2.6)$$

განვსაზღვროთ ახლა  $M$  და  $N$  რიცხვები ისე, რომ  $f(x) -$   
 $-(Mx + N)F_1(x)$  მრავალწევრი გაიყოს  $x^2 + px + q$  მრავალწევრზე.  
ამისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $x^2 + px + q$  მრავალ-  
წევრის ფესვები იყოს  $f(x) - (Mx + N)F_1(x)$  მრავალწევრის ფეს-  
ვებიც.

ვთქვათ,  $x^2 + px + q$  მრავალწევრის ფესვებია  $\alpha \pm i\beta$ . მაშინ ადგილი ექნება ტოლობას

$$f(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]F_1(\alpha + i\beta) = 0,$$

საიდანაც

$$\frac{f(\alpha + i\beta)}{F_1(\alpha + i\beta)} = (M\alpha + N) + i\beta M.$$

აქ მარცხენა ნაწილში  $\frac{f(\alpha + i\beta)}{F_1(\alpha + i\beta)}$  ფარდობა კომპლექსური რიცხვია, რომელიც ასე აღვნიშნოთ:

$$\frac{f(\alpha + i\beta)}{F_1(\alpha + i\beta)} = \alpha' + i\beta'.$$

მაშინ წინა ტოლობიდან მივიღებთ

$$M\alpha + N = \alpha', \quad \beta M = \beta',$$

საიდანაც

$$M = \frac{\beta'}{\beta}, \quad N = \frac{\beta\alpha' - \beta'\alpha}{\beta}. \quad (2.7)$$

ამრიგად, თუ  $M$  და  $N$  რიცხვებს (2.7) ტოლობებით შევარჩევთ, მაშინ  $f(x) - (Mx + N)F_1(x)$  მრავალწევრისათვის  $\alpha + i\beta$  იქნება ერთ-ერთი კომპლექსური ფესვი. მაშინ  $\alpha - i\beta$  რიცხვიც იქნება იმავე მრავალწევრის ფესვი. მაშასადამე,  $f(x) - (Mx + N)F_1(x)$  მრავალწევრი გაიყოფა  $[x - (\alpha + i\beta)][x - (\alpha - i\beta)] = x^2 + px + q$  მრავალწევრზე. ვთქვათ,

$$\frac{f(x) - (Mx + N)F_1(x)}{x^2 + px + q} = f_1(x),$$

ი. ი.

$$F(x) - (Mx + N)F_1(x) = (x^2 + px + q)f_1(x),$$

მაშინ (2.6) ტოლობიდან მივიღებთ (2.5) ტოლობას, ამასთან  $f_1(x)$  მრავალწევრის ხარისხი ნაკლებია მნიშვნელის ხარისხზე, ლემა დამტკიცებულია.

ვინაიდან (2.5) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მეორე შესაკრები არის წესიერი რაციონალური ფუნქცია, ამიტომ მასზე შეგვიძლია გავიმეოროთ ანალოგიური მსჯელობა. ეს იმას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  მრავალწევრის  $k$  ჯერადი  $x = \alpha \pm i\beta$  კომპლექსური ფესვებისათვის მართებულია შემდეგი სახის დაშლა:

$$\frac{f(x)}{F(x)} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \dots + \frac{M_{k-1}x+N_{k-1}}{x^2+px+q} + \frac{f_h(x)}{F_1(x)} \quad (2.8)$$

ცხადია, როცა  $F(x)$  მრავალწევრს, გარდა  $x = \alpha \pm \beta i$  კომპლექსური ფესვებისა, აქვს სხვა კომპლექსური ფესვებიც, მაშინ ამ ფესვების მიმართაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ დამტკიცებული დაშლის ხერხი.

ზემოთ დამტკიცებული 1-ლი და მე-2 ლემების საფუძველზე გვექნება შემდეგი დასკვნა:

თუ  $\frac{f(x)}{F(x)}$  წესიერი წილადის მნიშვნელს აქვს სახე

$$F(x) = (x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2} \dots (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+rx+s)^\lambda,$$

მაშინ  $\frac{f(x)}{F(x)}$  წილადი ასე წარმოგვიდგება:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} = & \frac{A_1}{(x-a)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{x-a} + \frac{B_1}{(x-b)^{k_2}} + \\ & + \frac{B_2}{(x-b)^{k_2-1}} + \dots + \frac{B_{k_2}}{x-b} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \\ & + \dots + \frac{M_\mu x+N_\mu}{x^2+px+q} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^\lambda} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\lambda-1}} + \\ & + \dots + \frac{R_\lambda x+S_\lambda}{x^2+rx+s}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$A_1, A_2, \dots, A_{k_1}, B_1, B_2, \dots, B_{k_2}, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_\mu, N_\mu, R_1, S_1, R_2, S_2, \dots, R_\lambda, S_\lambda$  კოეფიციენტები შეგვიძლია სხვადასხვა ხერხით გამოვთვალოთ. ერთ-ერთ ასეთ ხერხს წარმოადგენს კოეფიციენტთა გატოლების ხერხი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: (2.9) ტოლობის მარჯვენა ნაწილი უნდა დავიყვანოთ საერთო მნიშვნელამდე, მიღებული ტოლობის ორივე ნაწილის მრიცხველები დავალაგოთ  $x$ -ის ხარისხების მიხედვით და  $x$ -ის ერთნაირი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ უცნობი კოეფიციენტების მიმართ წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომლის ამოხსნა მოგვცემს საძიებელ კოეფიციენტებს.

დაშლის კოეფიციენტები შეიძლება გამოვთვალოთ აგრეთვე შემდეგი მარტივი მოსაზრების გამოყენებითაც. როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, (2.9) ტოლობის საერთო მნიშვნელზე მიყვანისა და მიღებულ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში მრიცხველების გატოლების შემდეგ, მივიღებთ  $x$  ცვლადის მიმართ ორი მრავალწევრის იგივეურ ტოლობას. თუ უკანასკნელ იგივეობაში  $\mathfrak{X}$  ცვლადს მივანიჭებთ სხვადასხვა კერძო რიცხვით მნიშვნელობებს, საძიებელი დაშლის კოეფიციენტების გამოსათვლელად, მივიღებთ სათანადო წრფივ განტოლებათა სისტემას.

### 8. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

ვთქვათ, გამოსათვლელია ინტეგრალი

$$-\int \frac{\varphi(x)}{F(x)} dx,$$

სადაც  $\varphi(x)$  და  $F(x)$  არის სათანადოდ  $m$  და  $n$  ხარისხის ნამდვილ-კოეფიციენტებიანი მრავალწევრები. როცა  $m \geq n$ , მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} \int \frac{\varphi(x)}{F(x)} dx &= \int P(x) dx + \int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int P(x) dx + \\ &+ A_1 \int \frac{dx}{(x-a)^{k_1}} + A_2 \int \frac{dx}{(x-a)^{k_2-1}} + \dots + A_{k_1} \int \frac{dx}{x-a} + \\ &+ B_1 \int \frac{dx}{(x-b)^{k_2}} + B_2 \int \frac{dx}{(x-b)^{k_2-1}} + \dots + B_{k_2} \int \frac{dx}{x-b} + \dots + \\ &+ \int \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^\mu} dx + \int \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} dx + \dots + \\ &+ \int \frac{M_\mu x + N_\mu}{x^2 + px + q} dx + \dots + \int \frac{R_1 x + S_1}{(x^2 + rx + s)^\lambda} dx + \\ &+ \int \frac{R_2 x + S_2}{(x^2 + rx + s)^{\lambda-1}} dx + \dots + \int \frac{R_\lambda x + S_\lambda}{x^2 + rx + s} dx, \end{aligned} \quad (3.1)$$

სადაც  $P(x)$  არის მრავალწევრი.

ამრიგად, რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება მიიყვანება მრავალწევრისა და უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე. მრავალწევრის ინტეგრება შესრულდება უბრალოდ დაშლის ხერხის მეშვეობით. უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრირება

კი გამოთვლილი გვექონდა § 1-ში. როცა  $m < n$ , მაშინ (3.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში არ გვექნება პირველი შესაყრები.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3(x-1)^2} dx.$$

ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს მხოლოდ ნამდვილი ფესვები, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგი სახით:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x-1)^2} = \frac{A_1}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x} + \frac{B_1}{(x-1)^2} + \frac{B_2}{x-1},$$

საიდანაც, მარჯვენა ნაწილის გაერთმნიშვნელობის შემდეგ, მივიღებთ

$$x^2 + x - 1 = (A_3 + B_2)x^4 + (A_2 - 2A_3 + B_1 - B_2)x^3 + (A_1 - 2A_2 + A_3)x^2 + (A_2 - 2A_1)x + A_1.$$

ამ იგივეობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილების  $x$  ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტები გავუტოლოთ ერთმანეთს, მივიღებთ განტოლებათა შემდეგ სისტემას:

$$A_3 + B_2 = 0, \quad A_2 - 2A_3 + B_1 - B_2 = 0, \quad A_1 - 2A_2 + A_3 = 1, \\ A_2 - 2A_1 = 1, \quad A_1 = -1.$$

აქედან

$$A_1 = -1, \quad A_2 = -1, \quad A_3 = 0, \quad B_1 = 1, \quad B_2 = 0.$$

ამრიგად, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x-1)^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

გავამრავლოთ უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი  $dx$  დიფერენციალზე და შედგევი ვაინტეგრით, მივიღებთ

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{x^3(x-1)^2} dx = -\int \frac{dx}{x^3} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + C.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^4 - 1)^2}.$$

ჯერ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ხერხი, გვექნება:

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{1}{4} \int x d\left(\frac{1}{x^4-1}\right) = -\frac{1}{4} \frac{x}{x^4-1} + \\ + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^4-1} = -\frac{1}{4} \frac{x}{x^4-1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}.$$

ახლა კი შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელ ინტეგრალში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს, როგორც ნამდვილი, ისე კომპლექსური ფესვები და, ამიტომ იგი დაიშლება შემდეგნაირად:

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1},$$

საიდანაც მივიღებთ

$$1 = (A+B+M)x^3 + (B-A+N)x^2 + (A+B-M)x + B-A-N.$$

დაშლის კოეფიციენტების გამოსათვლელად გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა

$$A+B+M=0, \quad B-A+N=0, \quad A+B-M=0, \quad B-A-N=1.$$

აქედან მივიღებთ

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{1}{2}.$$

მაშასადამე,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \\ - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1}.$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \frac{x^4 dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(x^4-1)} + \frac{1}{16} \ln \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

მაგალითი 3. გამოთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2} dx.$$

ვინაიდან აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელს აქვს ორჯერადი

კომპლექსური ფესვები და მარტივი ნამდვილი ფესვი, ამიტომ იგი დაიშლება ასე:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x+1)(x^2+2x+3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2x+3}.$$

დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლის შემდეგ მივიღებთ

$$A=1, M_1=1, N_1=-1, M_2=0, N_2=0.$$

ამის შემდეგ გამოსათვლელი ინტეგრალი წარმოგვიდგება შემდეგი ორი ინტეგრალის ჯამის სახით:

$$J = \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx.$$

მარტივი გამოთვლების შემდეგ, მივიღებთ

$$J = \ln|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

#### § 4. ერმიტისა და ოსტროგრადსკის ხერხი

დავუბრუნდეთ, კიდევ ერთხელ, წესიერი რაციონალური ფუნქციის ინტეგრების საკითხს. როგორც ზევით ვნახეთ, ინტეგრალქვეშა  $\frac{f(x)}{F(x)}$  ფუნქციის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად, როცა  $F(x)$  მრავალწევრს აქვს ნამდვილი და კომპლექსური წერადი ფესვები; საკმარისად რთულია. არსებობს მეთოდი; რომელიც საშუალებას გვაძლევს არ ვაწარმოთ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის დაშლა უმარტივესი წილადების ჯამად და უშუალოდ გამოვყოთ ინტეგრალის რაციონალური ნაწილი, შემდეგ კი ვაინტეგრებთ რაციონალურ ფუნქციას, რომლის მნიშვნელს აქვს მხოლოდ მარტივი ფესვები. ეს მეთოდი პირველად დამუშავებული იყო ერმიტისა და ოსტროგრადსკის მიერ.

ამრიგად, ვთქვათ გამოსათვლელია ინტეგრალი  $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$ , სადაც  $\frac{f(x)}{F(x)}$  წესიერი წილადია და

$$F(x) = (x-a)^{k_1} (x-b)^{k_2} \dots (x^2+rx+s)^\lambda,$$

ამასთანავე:  $k_1 \geq 1$ ;  $k_2 \geq 1$ ; ... ,  $\lambda \geq 1$ .

ამ ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება უმარტივესი რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე. როგორც ვიცით, როცა  $k_1 > 1$ , მაშინ

$$\int \frac{A dx}{(x-a)^{k_1}} = \frac{\bar{A}}{(x-a)^{k_1-1}}, \text{ სადაც } A \text{ და } \bar{A} \text{ მუდმივებია. როცა } \lambda > 1,$$

$$\text{მაშინ } \int \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^\lambda} dx \text{ ინტეგრალი წარმოადგენს } \frac{\bar{R}x+\bar{S}}{(x^2+rx+s)^\lambda}$$

სახის რაციონალურ ფუნქციებს და

$$\int \frac{S^* dx}{x^2+rx+s}$$

სახის ინტეგრალის გამს, სადაც  $R, S, \bar{R}, \bar{S}, S^*$  მუდმივებია, ხოლო ნატურალური რიცხვი  $\bar{\lambda} \leq \lambda - 1$ .

თუ შევკრებთ ზემოაღნიშნულ ყველა რაციონალურ ფუნქციას, მივიღებთ  $\frac{Y}{Q}$  სახის წესიერ რაციონალურ ფუნქციას, სადაც

$$Q = (x-a)^{k_1-1} (x-b)^{k_2-1} \dots (x^2+rx+s)^{\lambda-1}, \quad (4.1)$$

ხოლო  $Y$  ისეთი მრავალწევრია, რომლის ხარისხი ერთით ნაკლებია  $Q$  მრავალწევრის ხარისხზე. შემდეგ, თუ შევკრებთ ყველა დანარჩენ ინტეგრალს, მივიღებთ ინტეგრალს წესიერი რაციონალური  $\frac{X}{P}$  ფუნქციიდან, სადაც

$$P = (x-a)(x-b) \dots (x^2+rx+s),$$

ხოლო  $X$  მრავალწევრის ხარისხი ერთით ნაკლებია  $P$  მრავალწევრის ხარისხზე.

ამრიგად, მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \frac{Y}{Q} + \int \frac{X}{P} dx. \quad (4.2)$$

უკანასკნელი ტოლობის გაწარმოება გვაძლევს

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{QY' - Q'Y}{Q^2} + \frac{X}{P}$$

საიდანაც გვექნება

$$f(x) = \frac{F(x)Y'}{Q} - \frac{F(x)Q'Y}{Q^2} + \frac{F(x)X}{P}$$



ვინაიდან  $F'(x) = PQ$ , ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$f(x) = PY' - \frac{PQ'Y}{Q} + QX. \quad (4.3)$$

ახლა დავემტკიცოთ, რომ  $PQ'$  ნამრავლი იყოფა  $Q$  მრავალწევრზე, ამისათვის (4.1) ტოლობა გავალოგარიტმით და შემდეგ  $x$  ცვლადის მიმართ გავაწარმოოთ, მივიღებთ

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{k_1 - 1}{x - a} + \frac{k_2 - 1}{x - b} + \dots + \frac{(\lambda - 1)(2x + r)}{x^2 + rx + s}.$$

თუ ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში წილადებს საერთო მნიშვნელზე მივიყვანთ, მივიღებთ  $\frac{T}{P}$  სახის ფარდობას, რომელშიც  $T$  მრავალწევრია, რომლის ხარისხი ნაკლებია  $P$  მრავალწევრის ხარისხზე. მაშასადამე, (4.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მეორე შესაკრები შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$P \frac{Q'}{Q} Y = P \frac{T}{P} Y = TY$$

და თვით (4.3) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$f(x) = PY' - TY + QX.$$

გავეტოლებთ რა უკანასკნელი ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებში  $x$  ცვლადის თანატოლი ხარისხების კოეფიციენტებს, მივიღებთ წრფივ განტოლებათა სისტემას, საიდანაც განისაზღვრება  $X$  და  $Y$  მრავალწევრების კოეფიციენტები.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ერმიტ-ოსტროგრადსკის მეთოდით ინტეგრალი

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3(x^2 + 1)^2} dx.$$

ამისათვის შევნიშნოთ, რომ ამ შემთხვევაში

$$F(x) = x^3(x^2 + 1)^2, \quad P(x) = x(x^2 + 1), \quad Q(x) = x^2(x^2 + 1).$$

მაშასადამე,  $X$  და  $Y$  წარმოადგენენ შესაბამისად მეორე და მესამე ხარისხის მრავალწევრებს. ამის გამო (4.2) ასეთ სახეს ლეზულობს:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^2(x^2 + 1)} + \int \frac{Mx^2 + Kx + H}{x(x^2 + 1)} dx. \quad (4.4)$$

გავაწარმოთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილი, მივიღებთ

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 1}{x^3(x^2 + 1)^2} = \\ & = \frac{-Ax^5 - 2Bx^4 + (5A - 3C)x^3 + (4B - 4D)x^2 + 3Cx + 2D}{x^3(x^2 + 1)^2} + \\ & + \frac{Mx^2 + Kx + H}{x(x^2 + 1)}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მივიყვანოთ საერთო მნიშვნელზე და შემდეგ ტოლობის ორივე ნაწილის მრიცხველები ერთმანეთს გავუტოლოთ, გვექნება

$$x^2 - 1 = Mx^6 + (K - A)x^5 + (M + H - 2B)x^4 + (5A - 3C + K)x^3 + (4B - 4D + H)x^2 + 3Cx + 2D.$$

ეს ტოლობა უნდა იყოს იგივეობა. ეს კი მაშინ შეიძლება, როცა ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილში კოეფიციენტები  $x$  ცვლადის თანატოლი ხარისხების წინ თანატოლია. ამრიგად, კოეფიციენტების მოსაძებნად გვექნება განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{aligned} M = 0, \quad K - A = 0, \quad M + H - 2B = 0, \quad 5A - 3C + K = 0, \\ 4B - 4D + H = 1, \quad 3C = 0, \quad 2D = -1, \end{aligned}$$

საიდანაც მივიღებთ

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{6}, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad M = 0, \quad K = 0, \quad H = -\frac{1}{3}.$$

მაშასადამე, (4.4) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^3(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}}{x^3(x^2 + 1)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$$

დაგვრჩა მოსაძებნი მარჯვენა ნაწილის ინტეგრალი. ვინაიდან

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1},$$

ამიტომ

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

ამრიგად, საბოლოოდ გვექნება

$$\int \frac{x^2-1}{x^3(x^2+1)^2} dx = -\frac{x^2+3}{6x^3(x^2+1)} - \frac{1}{3} \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

ს ა გ ა რ ჯ ი შ მ

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$1. \int \frac{(31x-96) dx}{x^2-3x-18}. \quad \text{პას. } 10 \ln(x-6) + 21 \ln(x+3) + C.$$

$$2. \int \frac{(x-3) dx}{x^2-2x+5}. \quad \text{პას. } \frac{1}{2} \ln[(x-1)^2+4] - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$3. \int \frac{x^2-4x+7}{(x^2-1)(x-3)} dx. \quad \text{პას. } \frac{3}{2} \ln(x+1) + \\ + \frac{1}{2} \ln(x-3) - \ln(x-1) + C.$$

$$4. \int \frac{x^3-8ax^2-4a^2x+8a^3}{(x^2-a^2)(x^2-4a^2)} dx. \quad \text{პას. } \frac{1}{2} \ln(x^2-a^2) - \\ - 2 \ln \frac{x-2a}{x+2a} + C.$$

$$5. \int \frac{5x^3+3ax^2+9a^2}{x^3-3ax^2+2a^2x} dx. \quad \text{პას. } \frac{9}{2} \ln x - 17 \ln(x-a) + \\ + \frac{35}{2} \ln(x-2a) + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x(x^2+x+1)}. \quad \text{პას. } \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \\ - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

7.  $\int \frac{13+6x-2x^2}{(x-1)(x^2+5x+11)} dx$ . 306.  $\ln(x-1) -$   
 $-\frac{3}{2} \ln(x^2+5x+11) + \frac{11}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{19}} + C.$
8.  $\int \frac{2x^2-2x+3}{x^3+1} dx$ . 306.  $\frac{7}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) +$   
 $+\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$
9.  $\int \frac{2x^4-2x^3+3x^2-2}{x^2-x} dx$ . 306.  $\frac{2}{3} x^3 + 3x + \ln(x-1) +$   
 $+2 \ln x + C.$
10.  $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$ . 306.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} + C.$
11.  $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$ . 306.  $\frac{1}{5} \ln(5x^2-x+2) +$   
 $+\frac{8}{5\sqrt{39}} \operatorname{arctg} \frac{10x-1}{\sqrt{39}} + C.$
12.  $\int \frac{x^2-1}{(x+2)^3} dx$ . 306.  $-\frac{3}{2(x+2)^2} + \frac{4}{x+2} + \ln(x+2) + C.$
13.  $\int \frac{x^2 dx}{(x-a)^4}$ . 306.  $-\frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{(x-a)^3} + \frac{x}{(x-a)^2} + \frac{1}{x-a} \right] + C.$
14.  $\int \frac{(x+1)^3 dx}{(x-1)^4}$ . 306.  $-\frac{6x^2-6x+\frac{8}{3}}{(x-1)^3} + \ln(x-1) + C.$
15.  $\int \frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x^2-4)} dx$ . 306.  $\frac{1-x}{(1+x)^2} +$   
 $+2 \ln \frac{x+2}{x-2} + \ln(x+1) + C.$

$$16. \int \frac{dx}{x(x-2)^2(x-1)^3} \quad \text{д.б.} \quad -\frac{2x-1}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2(x-2)} + \\ + 2 \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln x - \frac{7}{4} \ln(x-2) + C.$$

$$17. \int \frac{(x^3+3x^2+3x+2)}{x^3(x+1)} dx \quad \text{д.б.} \quad -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 \ln x - \\ - \ln(x+1) + C.$$

$$18. \int \frac{(x+1) dx}{(x-1)(x^2+1)^2} \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \\ + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$19. \int \frac{(x^4+1) dx}{x^2(x^4-1)} \quad \text{д.б.} \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^4+6x^3+11x^2+6x} \quad \text{д.б.} \quad \ln \sqrt{\frac{x}{x+3}} + \\ + \ln \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} + C.$$

$$21. \int \frac{(2x^3-1) dx}{x(x^3+1)} \quad \text{д.б.} \quad \ln \frac{1+x^3}{x} + C.$$

$$22. \int \frac{dx}{x(1-x^3)^2} \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{3} \left( \frac{x^3}{1-x^3} + \ln \frac{x^3}{1-x^3} \right).$$

$$23. \int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2} \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \right) - \ln \frac{x^2}{x^2+1} + C.$$

$$24. \int \frac{(1+2x^2)x dx}{1+x^4} \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} x^2 + \ln(1+x^4) \right] + C.$$

$$25. \int \frac{x^5 dx}{x^6-1} \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{1}{8} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} + C.$$

$$26. \int \frac{x dx}{x^6-1} \\ \text{д.б.} \quad \frac{1}{6} \ln \frac{x^3-1}{\sqrt{x^3+x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C.$$

27.  $\int \frac{dx}{x(x^5+1)}$ . 306.  $\frac{1}{5} \ln \frac{x^5}{x^5+1} + C.$
28.  $\int \frac{x dx}{x^4+x^2+1}$ . 306.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2+1}{\sqrt{3}} + C.$
29.  $\int \frac{x^3 dx}{x^4-3x^2+9}$ . 306.  $\frac{1}{4} \ln (x^4-3x^2+9) +$   
 $+\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2x^2-3}{3\sqrt{3}} \right) + C.$
30.  $\int \frac{dx}{x^3(x^4+1)}$ . 306.  $-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^3} + \operatorname{arctg} x^3 \right) + C.$
31.  $\int \frac{dx}{x^4(x^6+1)}$ . 306.  $-\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C.$
32.  $\int \frac{dx}{x^5(x^6+1)}$ . 306.  $-\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x^4 + C.$
33.  $\int \frac{x^{11} dx}{(x^6+1)^3}$ . 306.  $\frac{2x^6+1}{12(x^6+1)^2} + C.$
34.  $\int \frac{dx}{x(x^4+1)^2}$ . 306.  $\frac{1}{4(x^4+1)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{x^4+1} + C.$
35.  $\int \frac{(x^2+1) dx}{x^4+3x^2+1}$ . 306.  $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{5}}{1-x^2} + C.$
36.  $\int \frac{(x^4+1) dx}{x^6-5x^4-5x^2+1}$ . 306.  $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} +$   
 $+\frac{3}{16} \ln \frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1} + C.$
37.  $\int \frac{(x^4+1) dx}{x^3-1}$ . 306.  $\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} + C.$
38.  $\int \frac{(x^4+1) dx}{x^6+1}$ . 306.  $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + C.$

$$39. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C.$$

$$40. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 + 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C.$$

$$41. \int \frac{x(x-1) dx}{x^5 + 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{10} \ln(x^5 + 1) + \\ + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \frac{x^2 - (\sqrt{5} + 1)\frac{x}{2} + 1}{x^2 + (\sqrt{5} - 1)\frac{x}{2} + 1} + C.$$

$$42. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 5x^2 + 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{3}} + C.$$

$$43. \int \frac{(x+1) dx}{x^3 - 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{3} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C.$$

$$44. \int \frac{x^4 dx}{(x^2 + 2)^3} \quad \text{реш.} \quad -\frac{x^3}{4(x^2 + 2)^2} - \frac{3x}{8(x^2 + 2)} + \\ + \frac{3\sqrt{2}}{16} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} + C.$$

$$45. \int \frac{dx}{x^4 + 1} \quad \text{реш.} \quad \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \sqrt{\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}} + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{x^3(x^4 + 1)^2} \quad \text{реш.} \quad -\frac{1}{2x^3} - \frac{x^2}{4(x^4 + 1)} - \\ - \frac{3}{4} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

$$47. \int \frac{dx}{x^4(x^3 + 1)^2} \quad \text{реш.} \quad \frac{2}{3} \ln \frac{x^3 + 1}{x^3} - \frac{1}{3x^3} - \\ - \frac{1}{3(x^3 + 1)} + C.$$

$$48. \int \frac{x(x^2+1)^3 dy}{(x^4+2x^2+2)^2}. \quad \text{Реш.} \quad -\frac{(x^2+1)^3}{4(x^4+2x^2+2)} + \\ + \frac{1}{4} \ln(x^4+2x^2+2) + C.$$

$$49. \int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3}. \quad \text{Реш.} \quad -\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + \\ + \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$



## ზოგნიბრთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრირება

### § 1. ზოგადი უინოვანაბო

ვთქვათ,  $P(x, y)$  და  $Q(x, y)$  წარმოადგენს მრავალწევრებს  $x$  და  $y$  ცვლადების მიმართ. განვიხილოთ რაციონალური ფუნქცია

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (1.1)$$

ვივულისხმობთ, რომ (1.1) ტოლობაში  $y$  ცვლადის მაგივრად ჩასმულია

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0 \quad (1.2)$$

განტოლების ამონახსნი, სადაც  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x), P_n(x)$  არიან  $x$  ცვლადის მრავალწევრები. ამ პირობებში ინტეგრირება

$$\int R(x, y) dx \quad (1.3)$$

აბელის ინტეგრირება ეწოდება. საზოგადოდ, აბელის ინტეგრირება არ ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციითა კლასში. იგი უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას წარმოადგენს, თუმცა არსებობს (1.3) ინტეგრირების ზოგიერთი კერძო შემთხვევა, როცა იგი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ჩვენ შევისწავლით (1.3) სახის ინტეგრირებას მხოლოდ იმ შემთხვევებში, როცა იგი ელემენტარული ფუნქციებით გამოისახება.

ცხადია, რომ (1.2) განტოლება განსაზღვრავს ბრტყელ ალგებრულ წირს, რომლის წერტილის მიმდინარე კოორდინატებია  $x$  და  $y$ , სადაც  $y = f(x)$  არის (1.2) განტოლების ამონახსნი. ჩაიწეროთ იმავე წირის განტოლება პარამეტრული სახითაც:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (1.4)$$

როგორც ცნობილია, ერთი და იგივე ალგებრული წირის პარამეტრული განტოლება შესაძლოა მრავალი სხვადასხვა სახით ჩაიწეროს.

თუ  $t$  პარამეტრი ისეთია, რომ  $\varphi(t)$  და  $\psi(t)$  რაციონალური ფუნქციებია, მაშინ (1.4) განტოლებებით განსაზღვრულ წირს უნიკურ რაციონალური წირი ეწოდება. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ შემთხვევაში (1.3) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს. მართლაც.

$$\int R(x, y) dx = \int R[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) dt, \quad (1.5)$$

სადაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია  $R[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t)$  არის  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქცია. როგორც წინა თავში ვნახეთ (1.5) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

ქვევით ჩვენ შევისწავლით (1.5) ინტეგრალის რამდენიმე მნიშვნელოვან კერძო შემთხვევას.

§ 2. წრფივი ირაციონალულის ინტეგრება

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(x, y) dx = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx, \quad (2.1)$$

სადაც  $R$  არის  $x$  და  $y = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ვინაიდან (2.1) ინტეგრალში ფესვი შედის წილადწრფივი  $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$  ფუნქციიდან. ამიტომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციას წრფივი ირაციონალური ფუნქციას უწოდებენ. ვიგულისხმობთ, რომ ნებისმიერი ნამდვილი  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  რიცხვები აკმაყოფილებენ  $\alpha\delta \neq \beta\gamma$  პირობას, თუკი  $\alpha\delta = \beta\gamma$ , მაშინ  $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$  ფარდობა მუდმივი სიდიდეა და (2.1) ინტეგრალი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალური ფუნქციიდან.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$t = y = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}} \quad (2.2)$$

მაშინ

$$x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n} \quad (2.3)$$

როგორც ვხედავთ:  $x$  და  $y$  ცვლადები გამოსახულია რაციონალურად

$t$  პარამეტრის საშუალებით. ამრიგად, (2.2) და (2.3) განტოლებებით წარმოდგენილი წირი უნიკურსალურია და (2.1) ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია. მართლაც, გვაქვს

$$dx = \frac{n(\alpha\delta - \beta\gamma) t^{n-1} dt}{(\alpha - \gamma t^n)^2}$$

და

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = n(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R\left(\frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}, t\right) \frac{t^{n-1}}{(\alpha - \gamma t^n)^2} dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის  $t$  პარამეტრის რაციონალური ფუნქცია და მისი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x}.$$

თანახმად (2.2) ტოლობისა, აქ უნდა გამოვიყენოთ ჩასმა

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

აქედან მივიღებთ

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{4t dt}{(t^2 - 1)^2}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x} &= -4 \int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \int \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\ &= \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - 2 \operatorname{arctg} t + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| - \\ &\quad - 2 \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) + C. \end{aligned}$$

§ 3. ზოგადი სახის ირაციონალობის ინტეგრება

ახლა ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R \left[ x, \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{\lambda_1}, \dots, \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{\lambda_k} \right] dx. \quad (3.1)$$

სადაც  $R$  არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  რაციონალური რიცხვებია, ხოლო  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ  $\alpha\delta \neq \beta\gamma$  პირობას. როცა უკანასკნელი პირობა შესრულებული არ არის, ე. ი. როცა  $\alpha\delta = \beta\gamma$ . მაშინ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის  $x$  ცვლადის რაციონალური ფუნქცია და (3.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს.

დავამტკიცოთ, რომ (3.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციას წარმოადგენს მაშინაც, როცა  $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ . მართლაც, ვთქვათ,  $\lambda$  არის  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  რაციონალური რიცხვების საერთო მნიშვნელი, მაშინ  $\lambda\lambda_1, \dots, \lambda\lambda_k$ , მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t.$$

აქედან

$$x = \frac{\delta t^{\lambda} - \beta}{\alpha - \gamma t^{\lambda}}, \quad dx = \frac{\lambda(\alpha\delta - \beta\gamma) t^{\lambda-1} dt}{(\alpha - \gamma t^{\lambda})^2}$$

და (3.1) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\begin{aligned} & \int R \left[ x, \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{\lambda_1}, \dots, \left( \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \right)^{\lambda_k} \right] dx = \\ & = \lambda(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R \left( \frac{\delta t^{\lambda} - \beta}{\alpha - \gamma t^{\lambda}}, t^{\lambda\lambda_1}, \dots, t^{\lambda\lambda_k} \right) \frac{t^{\lambda-1}}{(\alpha - \gamma t^{\lambda})^2} dt. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს  $t$  ცვლადის რაციონალურ ფუნქციას და, მაშასადამე, მისი ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{(x-2) dx}{\sqrt{3x-1} + \sqrt[3]{3x-1}}$$

შევნიშნავთ, რომ აქ  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$  და ამიტომ  $\lambda = 6$ . მაშასადამე, საჭიროა ვისარგებლოთ შემდეგი ჩასმით:  $3x-1 = t^6$ . აქედან გვექნება

$$x = \frac{1}{3}(t^6 + 1), \quad dx = 2t^5 dt.$$

ამის შემდეგ მოცემული ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოვიდგება:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{3} \int \frac{(t^3-5)t^8}{t+1} dt = \\
 &= \int \left( t^8 - t^7 + t^6 - t^5 + t^4 - t^3 - 4t^2 + 4t - 4 + \frac{4}{t+1} \right) dt = \\
 &= \frac{2}{27} \sqrt{(3x-1)^3} - \frac{1}{12} \sqrt[3]{(3x-1)^4} + \frac{2}{21} \sqrt[6]{(3x-1)^7} + \\
 &+ \frac{2}{15} \sqrt[9]{(3x-1)^8} - \frac{1}{6} \sqrt[3]{(3x-1)^2} - \frac{8}{9} \sqrt{3x-1} + \\
 &+ \frac{4}{3} \sqrt[3]{3x-1} - \frac{8}{9} \sqrt[9]{3x-1} + \frac{2}{3} \ln \left( \sqrt[9]{3x-1} + 1 \right) - \\
 &\quad - \frac{x}{3} + C.
 \end{aligned}$$

ინტეგრალს წრფივი ირაციონალური ფუნქციებიდან მიეკუთვნება აგრეთვე ინტეგრალი

$$\int R(x, y) dx = \int R \left( x, \sqrt[m]{A + \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}} \right) dx. \quad (3.2)$$

სადაც  $R$  არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია,  $m$  და  $n$  ნებისმიერი ერთზე მეტი ნატურალური რიცხვებია,  $A$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. რაც შეეხება  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ნამდვილ რიცხვებს, ისინი იმავე პირობას აკმაყოფილებენ, როგორცა (2.1) ინტეგრალის შემთხვევაში. (3.2) სახის ინტეგრალი ამოიხსნება აგრეთვე ელემენტარულ ფუნქციებში. მართლაც, ავიღოთ ჩსმა

$$t = \sqrt[m]{A + \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}}. \quad (3.3)$$

აქედან

$$x = \frac{\beta - \delta (t^m - A)^n}{\gamma (t^m - A)^n - \alpha}, \quad dx = \frac{mn(\alpha\delta - \beta\gamma)(t^m - A)^{n-1} t^{m-1} dt}{[\gamma(t^m - A)^n - \alpha]^2}$$

მაშასადამე, (3.2) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{A + \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}} \right) dx =$$

$$= mn(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R \left[ \frac{\beta - \delta (t^m - A)^n}{\gamma (t^m - A)^n - \alpha}, t \right] \frac{t^{m-1} dt}{[\gamma (t^m - A)^n - \alpha]^2}$$

მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აიღება რაციონალური ფუნქციიდან ცვლადის მიმართ და, ამიტომ, იგი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} dx.$$

თანახმად (3.3) ჩასმისა, გვექნება

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}},$$

საიდანაც

$$x = \frac{1}{(t^2-1)^2-1}, \quad dx = -\frac{4(t^2-1)t dt}{[(t^2-1)^2-1]^2}$$

მაშასადამე,

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} dx = -4 \int \frac{(t^2-1) dt}{t^2(t^2-2)^2}$$

და ვინაიდან

$$\frac{t^2-1}{t^2(t^2-2)^2} = \frac{1}{16} \frac{1}{(t+\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{1}{t+\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{1}{16} \frac{1}{(t-\sqrt{2})^2} - \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \frac{1}{t^2},$$

ამიტომ

$$-4 \int \frac{(t^2-1) dt}{t^2(t^2-2)^2} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{4} \frac{1}{t+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(t+\sqrt{2}) +$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{1}{t - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(t - \sqrt{2}) + C.$$

თუ დაევბრუნდებით ძველ ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x+1}{x}}} + \sqrt{2}} + C.$$

§ 4. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. ეილერის ჩასმები

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx. \quad (4.1)$$

რომელსაც ხშირად უწოდებენ ინტეგრალს კვადრატული ირაციონალობიდან. აქ  $R$  აღნიშნავს  $x$  და  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  ცვლადების რაციონალურ ფუნქციას. გარდა ამისა, იგულისხმება, რომ  $a, b, c$  ნამდვილი რიცხვები აკმაყოფილებენ შემდეგ ორ პირობას:

$$b^2 - 4ac \neq 0 \text{ და } a \neq 0.$$

შევნიშნოთ, რომ როცა ამ პირობათაგან არ არის შესრულებული პირველი, ე. ი. როცა  $b^2 - 4ac = 0$ , მაშინ (4.1) ინტეგრალში  $R$  ფუნქცია გადაიქცევა რაციონალური არგუმენტების რაციონალურ ფუნქციად რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი კი შესწავლილი იყო წინა თავში. იმ შემთხვევაში, როცა  $a = 0$ ,  $R$  ფუნქცია შეიცავს წრფივ ირაციონალობას, რომლის ინტეგრალი წინა პარაგრაფში იყო განხილული.

ცხადია, რომ (4.1) ინტეგრალი ახლის ინტეგრალების ერთ-ერთი კერძო სახეა. მისი ამოხსნა. ინტეგრების ახალი ცვლადის შემოღებით, ყოველთვის მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე. ამისათვის გამოიყენება ე. წ. ეილერის ჩასმები. აქ საჭიროა განვიხილოთ სამი შემთხვევა.

I. ეთქვათ,  $a > 0$ . ამ შემთხვევაში უნდა გამოვიყენოთ ეილერის პირველი ჩასმა:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z \pm \sqrt{a}x. \quad (4.2)$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფესვის წინ ავიღოთ, მაგალითად. ნიშანი + და ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში. მარტივი გამოთვლების შემდეგ მივიღებთ

$$x = \frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{az}}$$

საიდანაც

$$dx = -2 \frac{\sqrt{az^2 - bz + \sqrt{ac}}}{(b - 2\sqrt{az})^2} dz.$$

თუ  $x$  ცვლადის მნიშვნელობას შევითანთ (4.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -\frac{\sqrt{az^2 - bz + \sqrt{ac}}}{b - 2\sqrt{az}}.$$

როგორც ვხედავთ, უკანასკნელი სამი ფორმულით, ინტეგრების ძველი  $x$  ცვლადი, მისი დიფერენციალი და კვადრატული ირაციონალობა. გამოსახულია ინტეგრების ახალი  $z$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციებით. ამის შემდეგ (4.2) ინტეგრალი შემდეგნაირად წარმოგვიდგება

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = -2 \int R\left(\frac{z^2 - c}{b - 2\sqrt{az}}, -\frac{\sqrt{az^2 - bz + \sqrt{ac}}}{b - 2\sqrt{az}}\right) \frac{\sqrt{az^2 - bz + \sqrt{ac}}}{(b - 2\sqrt{az})^2} dz.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალს  $z$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან და, მაშასადამე, იგი ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციითა კლასში.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

თანახმად (4.2) ჩასმისა, გვექნება

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = z + x,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 - 2z}, \quad dx = -2 \frac{z^2 - z + 1}{(1 - 2z)^2} dz,$$



$$\sqrt{x^2+x+1} = -\frac{z^2-z+1}{(1-2z)^2}.$$

ამრიგად, მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოვიდგებთ:

$$I = 2 \int \frac{dz}{1-2z} = -\ln(1-2z) + C.$$

ვინაიდან  $z = \sqrt{x^2+x+1} - x$ , ამიტომ საბოლოოდ გვქვინება

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln(1+2z-2\sqrt{x^2+x+1}) + C.$$

II. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $a < 0$  და  $c > 0$ . ამ შემთხვევაში (4.1) ინტეგრალის გამოსათვლელად მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ ეილერის მეორე ჩასმა

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფესვის წინ ავიღოთ, მაგალითად, +ნიშანი. ტოლობის ორივე ნაწილი კვადრატში ავხარისხოთ და გამოვსახოთ  $x$ ,  $dx$ ;  $\sqrt{ax^2+bx+c}$  ინტეგრების ახალი  $z$  ცვლადით, გვექვინება

$$x = \frac{2\sqrt{cz-b}}{a-z^2}, \quad dx = 2 \frac{\sqrt{cz^2-bz+a}\sqrt{c}}{(a-z^2)^2} dz;$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{cz^2-bz+a}\sqrt{c}}{a-z^2}.$$

თუ გავითვალისწინებთ ამ ფორმულებს, (4.1) ინტეგრალი ასე წარმოვიდგებთ

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx = \\ & = 2 \int R\left(\frac{2\sqrt{cz-b}}{a-z^2}, \frac{\sqrt{cz^2-bz+a}\sqrt{c}}{a-z^2}\right) \frac{\sqrt{cz^2-bz+a}\sqrt{c}}{(a-z^2)^2} dz. \end{aligned}$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის  $z$  ცვლადის რაციონალური ფუნქცია და ამიტომ თვით ინტეგრალი იქნება ელემენტარული ფუნქცია.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

გამოვიყენოთ ვიღერის მეორე ჩასმა

$$\sqrt{-x^2+x+2} = xz + \sqrt{2}$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში და მიღებული შედეგიდან გამოვთვალოთ  $x$  ახალი  $z$  ცვლადის საშუალებით. გვექნება

$$x = \frac{1 - 2\sqrt{2}z}{1+z^2}$$

აქედან

$$dx = 2 \frac{\sqrt{2}z^2 - z - \sqrt{2}}{(1+z^2)^2} dz.$$

შევიტანოთ  $x$  ცვლადის მნიშვნელობა ჩასმის მარჯვენა ნაწილში, გვექნება

$$\sqrt{-x^2+x+2} = -\frac{\sqrt{2}z^2 - z - \sqrt{2}}{1+z^2}.$$

მაშასადამე.

$$I = -2 \int \frac{dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z + c.$$

თუ დავუბრუნდებით ინტე რების ძველ ცვლადს, გვექნება

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+2}} = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{-x^2+x+2} - \sqrt{2}}{x} \right) + C.$$

III. განვიხილოთ ახლა შემთხვევა. როცა  $a < 0$  და  $c < 0$ , ხოლო  $ax^2+bx+c$  სამწევრს აქვს ნამდვილი  $\alpha$  და  $\beta$  ფესვები. ამ შემთხვევაში უნდა ავიღოთ ერთ-ერთი, მაგალითად,  $\alpha$  ფესვი და გამოვიყენოთ ვიღერის მესამე ჩასმა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x - \alpha) z.$$

აქედან

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha) z.$$

უკანასკნელი ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში. მიიღებთ

$$a(x - \beta) = (x - \alpha) z^2,$$

საიდანაც

$$x = \frac{\alpha\beta - \alpha z^2}{\alpha - z^2}, \quad dx = \frac{2\alpha(\beta - \alpha)z}{(\alpha - z^2)^2} dz.$$

შევიტანოთ  $x$  ცვლადის გამოთვლილი მნიშვნელობა ჩასმის მარჯვენა ნაწილში; გამარტივების შემდეგ გვექნება

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha(\beta - \alpha)z}{\alpha - z^2}.$$

მაშასადამე, (4.1) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = 2\alpha(\beta - \alpha) \int R\left(\frac{\alpha\beta - \alpha z^2}{\alpha - z^2}, \frac{\alpha(\beta - \alpha)z}{\alpha - z^2}\right) \frac{z dz}{(z - \beta)^2}.$$

ცხადია, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის  $z$  ცვლადის მიმართ რაციონალური ფუნქცია და ამიტომ მისი ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია.

შენიშვნა. ეილერის მესამე ჩასმა გამოსადეგია არა მარტო მაშინ, როცა  $a < 0$  და  $c < 0$ , არამედ მაშინაც, როცა  $a > 0$ ,  $c < 0$ . არსებითი მნიშვნელობა იმას აქვს, რომ  $ax^2 + bx + c$  სამწევრის ფესვები უნდა იყოს ნამდვილი რიცხვები.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}.$$

აქ  $b^2 - 4ac = 1 > 0$ , ფესვქვეშა  $-x^2 + 5x - 6$  სამწევრის ფესვებია  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ . ამიტომ ეილერის მესამე ჩასმა შეიძლება ავიღოთ ასეთი სახით:

$$\sqrt{-x^2 + 5x - 6} = \sqrt{-(x-2)(x-3)} = (x-2)z.$$

აეზარისხებთ რა ამ ტოლობას კვადრატში და გამოვსახავთ ინტეგრების  $x$  ცვლადს ახალი  $z$  ცვლადით, გვექნება

$$x = \frac{2z^2 + 3}{z^2 + 1},$$

საიდანაც

$$dx = -\frac{2z dz}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{-x^2 + 5x - 6} = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, მივიღებთ

$$I = -2 \int \frac{dz}{1+z^2} = 2 \operatorname{arctg} z + C.$$

ახლა ისევ  $x$  ცვლადს დაეუბრუნდეთ, მივიღებთ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+5x-6}} = 2 \operatorname{arccctg} \left( \frac{\sqrt{-x^2+5x-6}}{x-2} \right) + C.$$

IV. განვიხილოთ (4.1) ინტეგრალის ერთი მნიშვნელოვანი კერძო სახე

$$\int \frac{P(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4.3)$$

სადაც  $P(x)$  მრავალწევრია. ცხადია, რომ იგი შეგვიძლია შემდეგნაირად წარმოვადგინოთ:

$$\sum_{k=0}^m a_k \int \frac{x^k dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \sum_{k=0}^m a_k X_k,$$

სადაც  $m$  არის  $P(x)$  მრავალწევრის ხარისხი,  $a_k$  ( $k=0, 1, \dots, m$ ) ამ მრავალწევრის კოეფიციენტებია, ხოლო

$$X_k = \int \frac{x^k dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \quad (4.4)$$

რა თქმა უნდა უკანასკნელი ინტეგრალი შეგვიძლია ვიღერის ერთ-ერთი ჩასმით ამოვხსნათ, მაგრამ ამ მეთოდის გამოყენება, ხშირად. დაკავშირებულია მომქანცავ გამოთვლებთან. ამის გამო, სასურველია მისი გამოთვლა ვიცოდეთ კიდევ სხვა, უფრო მარტივი, ხერხითაც. ამ მიზნით ქვევით ჩვენ გამოვიყვანთ  $X_k$  ინტეგრალის რეკურენტულ ანუ დაყვანის ფორმულას.

გვაქვს:

$$\begin{aligned} & (x^{k-1} \sqrt{ax^2+bx+c})' = \\ & (k-1)x^{k-2}(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}x^{k-1}(2ax+b) \\ & = \frac{\quad}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობის ორივე ნაწილს ვაინტეგრებთ, გამარტივების შემდეგ მივიღებთ

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{x^{k-1} \sqrt{ax^2+bx+c}}{ak} - \frac{(2k-1)b}{a^2 k} X_{k-1} - \\ & \quad - \frac{k-1}{k} \frac{c}{a} X_{k-2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

უკანასკნელი ტოლობა წარმოადგენს  $X_k$  ინტეგრალის დაყვანის ფორმულას.

როგორც ვხედავთ  $X_k$  ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ამავე ტიპის ორი ინტეგრალის გამოთვლამდე, რომლებშიც  $k$  რიცხვი შემცირებულია სათანადოდ ერთით და ორით. (4.5) ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენება მიგვიყვანს

$$X_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

ინტეგრალამდე, რომლის ამოხსნა ჩვენთვის ცნობილია.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

გამოვიყენებთ რა დაყვანის (4.5) ფორმულას, მივიღებთ

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

იმავე (4.5) ფორმულის ძალით გვექნება

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \sqrt{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \sqrt{x^2+x+1} + \\ &+ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2} (x-3) \sqrt{x^2+x+1} - \\ &- \ln(1+2x-2\sqrt{x^2+x+1}) + C. \end{aligned}$$

V.  $X_k$  ინტეგრალის სახემდე დაიყვანება

$$Y_m = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

სახის ინტეგრალი, რომელიც აგრეთვე (4.1) ინტეგრალის კერძო სახეს წარმოადგენს. ამ ინტეგრალში  $m$  არის ნულზე მეტი მთელი რიცხვი, ხოლო  $\alpha$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$x - \alpha = \frac{1}{t}$$

აქედან

$$dx = \frac{dt}{t^2}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{t} \sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1},$$

სადაც  $a_1, b_1, c_1$  გამოისახება  $a, b, c, \alpha$  მუდმივების საშუალებით. ამის შემდეგ  $Y_m$  ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$Y_m = - \int \frac{t^{m-1} dt}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}.$$

როგორც ვხედავთ უკანასკნელი ინტეგრალი არის  $X_{m-1}$  ინტეგრალი.

VI. ახლა შევჩერდეთ ისეთ დიფერენციალის ინტეგრებაზე, რომელიც შეიცავს ორ წრფივ ირაციონალობას. ასეთი ინტეგრალების ზოგადი სახეა

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx, \quad (4.6)$$

სადაც  $R$  არის თავისი არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია და აკმაყოფილებენ პირობას

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

დავამტკიცოთ, რომ (4.6) სახის ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება ისევ (4.1) სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე. მართლაც, გამოვიღოთ შემდეგი სახის ჩასმიდან

$$\sqrt{\alpha x + \beta} = t \sqrt{\gamma x + \delta}. \quad (4.7)$$

(4.7) ტოლობის ორივე ნაწილი ავახარისხოთ კვადრატში და მიღებული შედეგიდან გამოვთვალოთ  $x$  ცვლადი, გვექნება

$$x = \frac{\delta t^2 - \beta}{\alpha - \gamma t^2}, \quad (4.8)$$

საიდანაც

$$dx = \frac{x(\alpha\delta - \beta\gamma)t}{(\alpha - \gamma t^2)^2} dt \quad (4.9)$$

და

$$\sqrt{\alpha x + \beta} = \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}t}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}}, \quad \sqrt{\gamma x + \delta} = \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}}.$$

უკანასკნელი ორი ტოლობა გვიჩვენებს, რომ (4.7) ჩასმის დახმარებით  $\sqrt{\alpha x + \beta}$  და  $\sqrt{\gamma x + \delta}$  ირაციონალობანი ერთი  $\sqrt{\alpha - \gamma t^2}$  ირა-

ციონილობით გამოისახებიან. რაც შეეხება  $x$  ცვლადსა და  $dx$  დიფერენციალს, როგორც (4.8) და (4.9) ფორმულები გვიჩვენებს, ისინი ახალი  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციებია. ამრიგად, (4.6) ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta}) dx = \\ & = \alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R_1 \left[ \frac{\delta t^2 - \beta}{\alpha - \gamma t^2}, \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma} t}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}}, \frac{\sqrt{\alpha\delta - \beta\gamma}}{\sqrt{\alpha - \gamma t^2}} \right] \frac{t dt}{(\alpha - \gamma t^2)^2} = \\ & = \alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) \int R_1(t, \sqrt{\alpha - \gamma t^2}) dt, \end{aligned}$$

სადაც  $R_1$  არის  $t$  ცვლადის  $\sqrt{\alpha - \gamma t^2}$  ირაციონალობის რაციონალური ფუნქცია. ცხადია, უკანასკნელი ინტეგრალი არაა (4.1) სახის ინტეგრალი.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{x \sqrt{x-1} \sqrt{2x+1}}$$

თანხმად (4.7) ფორმულისა, აქ უნდა ავიღოთ ჩასმა

$$\sqrt{x-1} = t \sqrt{2x+1}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი ავხარისხოთ კვადრატში და გამოვთვალოთ  $x$ , გვექნება

$$x = \frac{1+t^2}{1-2t^2}.$$

საიდანაც

$$dx = \frac{6t dt}{(1-2t^2)^2}.$$

გარდა ამისა. ადვილად გამოვსახავთ  $t$  ცვლადით ინტეგრალქვეშ ირაციონალობებს ერთი ირაციონალობის საშუალებით:

$$\sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{1-2t^2}}, \quad \sqrt{2x+1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-2t^2}}.$$

მაშასადამე,

$$I = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C.$$

დაუბრუნდეთ ძველ ცვლადს, გვექნება

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x-1} \sqrt{2x+1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} + C.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ თუ (4.1) ინტეგრალის ნაცვლად განვიხილავთ ინტეგრალს

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx.$$

სადაც  $P(x)$  ორზე მაღალი ხარისხის მრავალწევრია, მაშინ ინტეგრალი, საზოგადოდ, არ ამოიხსნება ელემენტარული ფუნქციების კლასში.

**§ 6. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება**

ამ პარაგრაფში შევისწავლით

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \tag{5.1}$$

სახის ინტეგრალს, სადაც  $m, n, p$  არის რაციონალური რიცხვები, ხოლო  $a$  და  $b$  ნამდვილი რიცხვებია. ინტეგრალქვეშა  $x^m (a + bx^n)^p dx$  დიფერენციალს ეწოდება ბინომური დიფერენციალი.  $a$  და  $b$  კოეფიციენტები გავლენას არ ახდენს ბინომური დიფერენციალის ინტეგრების სირთულეზე, არსებითი მნიშვნელობა აქვს მხოლოდ  $m, n, p$  პარამეტრების რიცხვით მნიშვნელობებს. იმ შემთხვევაში, როცა  $m, n, p$  რიცხვები (ან მათი ნაწილი) ირაციონალურია, (5.1) ინტეგრალი, საზოგადოდ, წარმოადგენს უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას. თუ  $m, n, p$  პარამეტრები რაციონალური რიცხვებია, მაშინ არსებობს სამი შემთხვევა, როცა (5.1) ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

რუსმა მათემატიკოსმა პ. ჩებიშევა დაამტკიცა, რომ მხოლოდ ხსენებული სამი შემთხვევით ამოიწურება ბინომური დიფერენციალის ელემენტარულ ფუნქციებში ინტეგრების საკითხი.

თეორემა. თუ  $m, n, p$  რაციონალური რიცხვები აკმაყოფილებენ ერთ-ერთს შემდეგი სამი პირობიდან: 1)  $p$  მთელია, 2)  $\frac{m+1}{n}$  მთელია, 3)  $\frac{m+1}{n} + p$  მთელია, მაშინ ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება ელემენტარულ ფუნქციებში შესრულდება.



წინასწარ დაეამტკიცოთ შემდეგი

ლემა. თუ (5.1) ინტეგრალში  $m$  და  $n$  რიცხვებიდან ერთ-ერთი, ან ორივე წილადია, მაშინ გარკვეული ჩასმით შესაძლოა ინტეგრალქვეშა დიფერენციალი მივიყვანოთ ისეთ ახალ ბინომურ დიფერენციალამდე, რომელშიც  $m$  და  $n$  რიცხვების როლში-მთელი რიცხვები იქნება.

მართლაც, ვთქვათ  $m$  და  $n$  რიცხვების საერთო მნიშვნელია  $\lambda$ . მაშინ,  $m\lambda$  და  $n\lambda$  მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ შემდეგი ჩასმა

$$x = t^\lambda,$$

მაშინ

$$dx = \lambda t^{\lambda-1} dt$$

და (5.1) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \lambda \int t^{m\lambda + \lambda - 1} (a + bt^{n\lambda})^p dt.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ინტეგრალი ისევე ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც  $m\lambda + \lambda - 1$  და  $n\lambda$  მთელი რიცხვებია და ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დაეამტკიცოთ თვითონ თეორემა. განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. ვთქვათ,  $p$  მთელი რიცხვია. ამ შემთხვევაში, ზევით დამტკიცებული ლემის ძალით,  $m$  და  $n$  რიცხვების როლში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მთელი რიცხვები და, ვინაიდან  $p$  მთელია, ამიტომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია იქნება რაციონალური ფუნქცია. მისი ინტეგრალი, როგორც ვიცით, ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. კერძოდ, თუ  $p$  მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ (5.1) ინტეგრალის გამოთვლა უფრო გამარტივდება. მართლაც, დავშლით რა  $(a + bx^n)^p$  ფუნქციას ბინომის წესით (5.1) ინტეგრალის გამოთვლა ხარისხოვანი ფუნქციების ინტეგრებაზე მიიყვანება.

განვიხილოთ ახლა მეორე შემთხვევა. ვთქვათ,  $\frac{m+1}{n}$  მთელი რიცხვია. გამოვიყენოთ ჩასმა

$$a + bx^n = t.$$

აქედან

$$x = \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} (t - a)^{\frac{1}{n}}, \quad x^m = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} (t - a)^{\frac{m}{n}},$$

$$dx = \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}} (t-a)^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობანი მოცემულ ინტეგრალში, გვექნება

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int t^p (t-a)^{\frac{m+1}{n}-1} dt.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც  $p$  რიცხვის როლს ასრულებს უკვე  $\frac{m+1}{n} - 1$ . გავითვალისწინებთ რა ზევით განხილულ პირველ შემთხვევას. შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (5.1) ინტეგრალი არის ელემენტარული ფუნქცია, თუ  $\frac{m+1}{n} - 1$  მთელი რიცხვია, მაგრამ  $\frac{m+1}{n} - 1$  მთელი რიცხვია, როცა  $\frac{m+1}{n}$  მთელია. ამრიგად, (5.1) ინტეგრალი ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში. როდესაც  $\frac{m+1}{n}$  მთელია.

განვიხილოთ მესამე შემთხვევა. ვთქვათ,  $\frac{m+1}{n} + p$  მთელი რიცხვია. გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx = \int x^{m+np} (b+ax^{-n})^p dx.$$

შევნიშნავთ, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალი აღებულია ისევ ბინომური დიფერენციალიდან, რომელშიც  $m$  შეცვლილია  $m+np$  რიცხვით, ხოლო  $n$  შეცვლილია  $-n$ -ით. თანახმად მეორე შემთხვევისა, აქედან გამომდინარეობს, რომ (5.1) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა, თუ  $\frac{m+np+1}{n} = \frac{m+1}{n} + p$  მთელი რიცხვია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^7} (1 + \sqrt{x^3})}$$

ეს ინტეგრალი წარმოვადგინოთ ასე:

$$I = \int x^{-\frac{7}{10}} (1+x^{\frac{3}{5}})^{-1} dx.$$

როგორც ვხედავთ, აქ  $p = -1$  მთელი რიცხვია. ავიღოთ ჩასმა

$$x = t^{10}.$$

აქედან

$$dx = 10t^9 dt, \quad x^{-\frac{7}{10}} = t^{-7}, \quad x^{\frac{3}{5}} = t^6.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} I &= 10 \int \frac{t^2 dt}{1+t^6} = \frac{10}{3} \int \frac{d(t^3)}{1+(t^3)^2} = \frac{10}{3} \operatorname{arctg} t^3 + C = \\ &= \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \sqrt[10]{x^3} + C. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ჯერ იგი წარმოვადგინოთ ასე:

$$I = \int x^3 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

აქ  $m=3$ ,  $n=2$ ,  $p=-\frac{1}{2}$ . ამ შემთხვევაში  $\frac{m+1}{n} = 2$  მთელი რიცხვია. ავიღოთ ჩასმა

$$1-x^2 = t.$$

აქედან

$$x = (1-t)^{\frac{1}{2}}, \quad dx = -\frac{1}{2} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} (1-t) dt.$$

ახლა კი ვისარგებლოთ ჩასმით:  $t = z^2$ ; მაშინ

$$dt = 2z dz, \quad t^{-\frac{1}{2}} = z^{-1}$$

და მოცემული ინტეგრალი ასეთ სახეს მიიღებს:

$$I = \int (z^2 - 1) dz + C = \frac{1}{3} z^3 - z + C = \frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2} + C$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

გვაქვს!

$$I = \int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

აქ  $m=0$ ,  $n=2$ ,  $p=-\frac{3}{2}$ . ამ შემთხვევაში  $\frac{m+1}{n} + p = -1$  მთელი რიცხვია. მოცემული ინტეგრალი ასე წარმოვადგინოთ:

$$I = \int x^{-3} (x^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

ახლა ეს გამოვიყენოთ ჩასმა

$$x^{-2}+1=t.$$

აქედან

$$x=(t-1)^{-\frac{1}{2}}, \quad dx = -\frac{1}{2}(t-1)^{-\frac{3}{2}} dt, \quad x^{-3}=(t-1)^{\frac{3}{2}}.$$

მაშასადამე,

$$I = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{3}{2}} dt = t^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

### ს ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1.  $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} dx$ , პას.  $-x-4\sqrt{x}-4 \ln(\sqrt{x}-1)+C$ .
2.  $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ , პას.  $2\sqrt{x+1} + \ln \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} + C$ .
3.  $\int x\sqrt{a-x} dx$ , პას.  $-\frac{2}{15}(2a+3x)\sqrt{(a-x)^3} + C$ .
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$ , პას.  $\frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + C$ .
5.  $\int \sqrt{(a+bx)^m} dx$ , პას.  $\frac{2}{(m+2)b}\sqrt{(a+bx)^{m+2}} + C$ .

$$6. \int \frac{x dx}{\sqrt{a-x}}, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{2}{3} \sqrt{a-x(x+2a)} + C.$$

$$7. \int x^2 \sqrt{a+x} dx, \quad \text{д.б.} \quad \frac{2}{105} \sqrt{a+x} (8a^3 - 4a^2x + 3ax^2 + 15x^3) + C.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx, \quad \text{д.б.} \quad 2\sqrt{a+bx} + \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} + C.$$

$$9. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{a-x}}, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{3}{10} \sqrt[3]{(a-x)^2(2x+3a)} + C.$$

$$10. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{a+bx}}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{5}{36} b^2 \sqrt[3]{(a+bx)^4(4bx-5a)} + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{3a} \left[ (x+a)^{\frac{3}{2}} + (x-a)^{\frac{3}{2}} \right] + C.$$

$$12. \int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} dx, \quad \text{д.б.} \quad \sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{3}{4} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

$$14. \int \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} dx, \quad \text{д.б.} \quad -\sqrt[3]{(1+x)(1-x)^2} + \ln \left( \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{1-x}} + C.$$

15.  $\int \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}} dx$ , პას.  $-\sqrt[4]{(2-x)(1-x)^3} +$   
 $+\frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{2-x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[4]{2+x} + \sqrt[4]{1-x}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}} + C.$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-1)^5}}$ , პას.  $-4\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}} + C.$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^7}}$ , პას.  $\frac{3}{16} \frac{3x+5}{x+1} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + C.$
18.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x(x-1)}}$ , პას.  $\frac{2}{3} \frac{2x+1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x}} + C.$
19.  $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3} dx$ , პას.  $-(5+x) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$   
 $+6 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$
20.  $\int \frac{x + \sqrt{x+1}}{x - \sqrt{x+1}} dx$ , პას.  $x+1+4\sqrt{x+1} +$   
 $+2 \ln(x - \sqrt{x+1}) +$   
 $+\frac{6}{\sqrt{5}} \ln \frac{2\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{5}} + C.$
21.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}$ , პას.  $2\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+2} +$   
 $+\sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3}} + \sqrt{3} \ln \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3}} + C.$
22.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ , პას.  $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$
23.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-a^2+a}\sqrt{1-x^2}}$ , პას.  $a \arcsin x +$   
 $+ \sqrt{1-a^2} \ln(x\sqrt{1-a^2+a}\sqrt{1-x^2}) + C.$

24.  $\int x(3x^2 + 2a^2\sqrt{a^3 + x^3})dx$ ,  $\int \text{об. } x^2\sqrt{a^3 + x^3} + C.$
25.  $\int \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x+1}}}{\sqrt[3]{x-1}} dx$ ,  $\int \text{об. } \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} + x +$   
 $+ \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x} +$   
 $+ 9 \ln(\sqrt[6]{x} - 1) + 3 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$
26.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 6x + 7}}$ ,  $\int \text{об. } \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(3 + 2x +$   
 $+ \sqrt{2} \sqrt{2x^2 + 6x + 7}) + C.$
27.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - 4x^2}}$ ,  $\int \text{об. } \frac{1}{2} \arcsin \frac{1 + 4x}{\sqrt{5}} + C.$
28.  $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 8x - 5x^2}}$ ,  $\int \text{об. } -\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{4 - 5x}{\sqrt{51}} + C.$
29.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$ ,  $\int \text{об. } \ln(1 + x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) + C.$
30.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}$ ,  $\int \text{об. } \pm \frac{1}{\sqrt{b}} \ln(6x \pm \sqrt{b} \sqrt{a + bx^2}) + C.$
31.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}$ ,  $\int \text{об. } \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C.$
32.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2bx - cx^2}}$ ,  $\int \text{об. } -\frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{b - cx}{b} + C. \quad c > 0.$
33.  $\int \sqrt{a + bx^2} dx$ ,  $\int \text{об. } \frac{x}{2} \sqrt{a + bx^2} +$   
 $+ \frac{a}{2\sqrt{b}} \ln(bx + \sqrt{b} \sqrt{a + bx^2}) + C.$
34.  $\int \sqrt{a - bx^2} dx$ ,  $\int \text{об. } \frac{x}{2} \sqrt{a - bx^2} -$   
 $- \frac{a}{2\sqrt{b}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + C.$

$$35. \int \sqrt{2ax+x^2} dx, \quad \text{პას. } \frac{x+a}{2} \sqrt{2ax+x^2} - \\ - \frac{a^2}{2} \ln(x+a+\sqrt{2ax+a^2}) + C.$$

$$36. \int \sqrt{2ax-x^2} dx, \quad \text{პას. } \frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} - \\ - \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{a-x}{a} + C.$$

$$37. \int x \sqrt{2ax-x^2} dx, \quad \text{პას. } \left( \frac{x^3}{3} - \frac{ax}{6} - \frac{a^3}{2} \right) \sqrt{2ax-x^2} + \\ + \frac{a^3}{2} \arcsin \frac{a-x}{a} + C.$$

$$38. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx^2}}, \quad \text{პას. } \frac{a^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2} \sqrt{a+bx^2} + C.$$

$$39. \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}}, \quad \text{პას. } -\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{x-2} + C.$$

$$40. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}, \\ \text{პას. } -\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{x+4}{\sqrt{6}(x-1)} + C.$$

$$41. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{პას. } -\arcsin \frac{1}{x} + C.$$

$$42. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}, \quad \text{პას. } -\arcsin \frac{x-2}{x\sqrt{5}} + C.$$

$$43. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}, \quad \text{პას. } -\ln \frac{x+2+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C.$$

$$44. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}, \\ \text{პას. } \pm \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}{x} + C.$$



$$45. \int \frac{dx}{(x-1)^2 \sqrt{6-6x+x^2}}, \quad \text{306. } \frac{1}{x-1} \sqrt{6-6x+x^2} + 2 \ln \frac{3-2x-\sqrt{6-6x+x^2}}{x-1} + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-4x-2x^2}}, \quad \text{306. } -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{x}\right) \sqrt{1-4x-2x^2} + 7 \ln \frac{1-2x-\sqrt{1-4x-2x^2}}{x} + C.$$

$$47. \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2-2x-2}}, \quad \text{306. } -\frac{\sqrt{x^2-2x-2}}{x+1} + 2 \ln \frac{-1-2x-\sqrt{x^2-2x-2}}{x+1} + C.$$

$$48. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}}, \quad \text{306. } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

$$49. \int x^3 \sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}} dx, \quad \text{306. } \frac{x^2-2a^2}{4} \sqrt{a^4-x^4} - \frac{a^4}{4} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + C.$$

$$50. \int \frac{x dx}{(x^2-3x+2) \sqrt{x^2+x+1}},$$

$$\text{306. } \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{3x+3+2\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{7}} \ln \frac{5x+4 \cdot 2\sqrt{7}\sqrt{x^2+x+1}}{x-2} + C.$$

$$51. \int \frac{dx}{(x^2+x-3) \sqrt{x^2+x+2}},$$

$$\text{306. } \frac{1}{\sqrt{65}} \ln \frac{\sqrt{5}(2x+1) - \sqrt{13}\sqrt{x^2+x+2}}{\sqrt{5}(2x+1) + \sqrt{13}\sqrt{x^2+x+2}} + C.$$

$$52. \int \frac{(2x-1) dx}{(x^2-x+2) \sqrt{2x^2-2x+1}},$$

$$\text{პას. } \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{\sqrt{3}} + C.$$

$$53. \int \frac{(3x+2) dx}{(4x^2+5x+4)\sqrt{3x^2-4x+3}},$$

$$\text{პას. } \frac{5}{2\sqrt{403}} \ln \frac{\sqrt{13}\sqrt{3x^2-4x+3} - \sqrt{31}(1-x)}{\sqrt{13}\sqrt{3x^2-4x+3} + \sqrt{31}(1-x)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{93}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\sqrt{3x^2-4x+3}}{\sqrt{31}(1+x)} + C.$$

$$54. \int \frac{(x-3)dx}{(2x^2+6x+1)\sqrt{3x^2+8x+2}},$$

$$\text{პას. } \frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \frac{\sqrt{7}\sqrt{3x^2+8x+2} + 2 - x}{\sqrt{7}\sqrt{3x^2+8x+2} - 2 + x} +$$

$$+ \frac{2}{3} \ln \frac{\sqrt{3x^2+8x+2} + x + 1}{\sqrt{3x^2+8x+2} - x - 1} + C.$$

$$55. \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{პას. } \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4(1+x^2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}x} + C.$$

**ზოგირთი ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება**

ტრანსცენდენტური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, საზოგადოდ, ელემენტარულ ფუნქციას არ წარმოადგენს. ხშირად იტყვიან, რომ ტრანსცენდენტური ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი არ აიღება სასრული სახით. მიუხედავად ამისა, არსებობს შეტად მნიშვნელოვანი გამონაკლისები, როცა ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას. ქვევით ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ მნიშვნელოვან ტრანსცენდენტურ ფუნქციებს, რომელთა განუსაზღვრელი ინტეგრალი სასრული სახით აიღება.

**§ 1. ზოგირთი ტრიგონომეტრიული დიფერენციალის ინტეგრება**

1°. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int R(\sin x) \cos x \, dx, \quad (1.1)$$

სადაც  $R$  არის  $\sin x$  არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია. ადვილ შესამჩნევია, რომ (1.1) ინტეგრალი ელემენტარული ფუნქციაა. მართლაც, გამოვიყენოთ ჩასმა:  $\sin x = t$ , მაშინ  $\cos x \, dx = dt$  და ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(\sin x) \cos x \, dx = \int R(t) \, dt.$$

როგორც ვხედავთ, ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალი, რომელიც ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

სრულიად ანალოგიურად ამოიხსნება აგრეთვე შემდეგი ინტეგრალი

$$\int R(\cos x) \sin x \, dx,$$

სადაც  $R$  არის  $\cos x$  არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin^2 x}$$

თუ ავიღებთ ჩასმას  $\sin x = t$ , გვექნება

$$I = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

2°. ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი.

$$\int R(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad (1.2)$$

სადაც  $R$  არის  $\operatorname{tg} x$  არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია. მისი გამოთვლა ადვილად მიიყვანება ახალი  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე და, მაშასადამე, ამოიხსნება ელემენტარულ ფუნქციებში. ამისათვის საკმარისია გამოვიყენოთ  $\operatorname{tg} x = t$  ჩასმა. მაშინ

$\frac{dx}{\cos^2 x} = dt$  და (1.2) ინტეგრალი მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\int R(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x} = \int R(t) dt.$$

ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალს რაციონალურ ფუნქციიდან.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$$

გვაქვს

$$I = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

ავიღოთ  $\operatorname{tg} x = t$  ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

3°. ზევით განხილული (1.1) და (1.2) ინტეგრალების გამოთვლა გვარწმუნებს, რომ ყოველი ინტეგრალი

$$\int R(\varphi(x)) \varphi'(x) dx, \quad (1.3)$$

სადაც  $R$  არის უწყვეტად წარმოებადი  $\varphi(x)$  არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია, მარტივად ამოიხსნება  $\varphi(x) = t$  ჩასმის გამოყენებით. მართლაც, პირდაპირ ჩანს, რომ ეს ჩასმა (1.3) ინტეგრალის გამოთვლას მიიყვანს  $t$  ცვლადის მიმართ რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლამდე.

მაგალითი 3. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{2 + \ln x}{x \ln^2 x} dx.$$

აქ

$$\varphi(x) = \ln x, R[\varphi(x)] = \frac{2 + \ln x}{\ln^2 x}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x},$$

ავიღოთ  $\ln x = t$  ჩასმა. აქედან  $\frac{dx}{x} = dt$ . მაშასადამე,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{2+t}{t^2} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{t} = \ln t - \\ &\quad - \frac{2}{t} + C = \ln \ln x - \frac{2}{\ln x} + C. \end{aligned}$$

4°. ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (1.4)$$

სადაც  $R$  არის  $\sin x$  და  $\cos x$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ეს ინტეგრალი

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad (1.5)$$

ჩასმის საშუალებით მიიყვანება  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრალის გამოთვლამდე ან, როგორც ხშირად ამბობენ, (1.5) ჩასმა მუდამ ახდენს (1.4) ინტეგრალის რაციონალიზაციას. მართლაც, გამოვსახოთ  $\sin x$  და  $\cos x$  ფუნქციები  $t$  ცვლადით. გვაქვს:

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

გარდა ამისა, (1.5) ჩასმიდან მივიღებთ  $x = 2 \operatorname{arctg} t$  და, ამიტომ

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

ამრიგად, თუ გამოვალთ (1.5) ჩასმიდან, მაშინ  $\sin x$ ,  $\cos x$  და  $dx$  გამოისახება ინტეგრების ახალი  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციებით და (1.4) ინტეგრალი ასე წარმოგვიდგება:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = 2 \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$$

ცხადია, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში გვაქვს ინტეგრალი  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან და, მაშასადამე, ამოიხსნება სასრული სახით.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{1 + \sin x}$$

გამოვიყენოთ (1.5) ჩასმა, გვექნება

$$I = 2 \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

სადაც  $a$  და  $b$  ნებისმიერი მუდმივებია. ავიღოთ (1.5) ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{a + b \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{(a+b) + (a-b)t^2}$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $a+b > 0$ , შემოვიღოთ აღნიშვნა  $a+b = a^2$  და

განვიხილოთ ორი შემთხვევა: 1)  $a - b > 0$ , 2)  $a - b < 0$ . პირველ შემთხვევაში გამოვიყენოთ  $a - b = \beta^2$  აღნიშვნა. მაშინ გვექნება

$$I = 2 \int \frac{dt}{a^2 + \beta^2 t^2} = \frac{2}{a\beta} \operatorname{arctg} \left( \frac{\beta}{a} t \right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

მეორე შემთხვევაში შემოვიღოთ  $a - b = -\beta^2$  აღნიშვნა, მივიღებთ

$$I = 2 \int \frac{dt}{a^2 - \beta^2 t^2} = \frac{1}{a\beta} \ln \left| \frac{a + \beta t}{a - \beta t} \right| + C.$$

ჩავსვათ  $a$  და  $\beta$  რიცხვების მნიშვნელობანი და თანაც დაეუბრუნდეთ ინტეგრების ძველ ცვლადს, გვექნება

$$I = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b} - \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.$$

(1.5) ჩასმა ყოველთვის ახდენს (1.4) ინტეგრალის რაციონალიზაციას. მაგრამ არის ამ ინტეგრალის ისეთი კერძო შემთხვევები. როცა მის რაციონალიზაციას შესაძლოა მივაღწიოთ და ბოლომდე გამოვეთავალოთ უფრო მოხერხებული გარდაქმნებით.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ ორი ცვლადის ყოველი რაციონალური  $R(u, v)$  ფუნქცია, რომელიც კენტია  $v$  არგუმენტის მიმართ. შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$R(u, v) = v R_1(u, v^2). \quad (1.6)$$

სადაც  $R_1$  არის  $u$  და  $v^2$  არგუმენტის რაციონალური ფუნქცია.

სრულიად ასევე, თუ  $R(u, v)$  კენტია  $u$  არგუმენტის მიმართ, მაშინ იგი შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ

$$R(u, v) = u R_2(u^2, v), \quad (1.7)$$

სადაც  $R_2$  არის  $u^2$  და  $v$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია.

თუკი რაციონალური  $R(u, v)$  ფუნქცია ლუწია  $u$  არგუმენტის მიმართ. მაშინ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$R(u, v) = R_3(u^2, v), \quad (1.8)$$

სადაც  $R_3$  არის  $u^2$  და  $v$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია.

ანალოგიურ ტოლობას აქვს ადგილი როცა  $R(u, v)$  არის ლუწი ფუნქცია  $v$  არგუმენტის მიმართ.

ახლა გადავიდეთ (1.4) ინტეგრალის კერძო შემთხვევების განხილვაზე.

შემთხვევა 1. ვთქვათ, ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია  $\cos x$  არგუმენტის მიმართ:

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

თანახმად (1.6) ტოლობისა, ამ შემთხვევაში, გვექნება

$$R(\sin x, \cos x) = \cos x R_1(\sin x, \cos^2 x)$$

და

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\sin x, 1 - \sin^2 x) d(\sin x).$$

ამის შემდეგ ცხადია, რომ თუ ავიღებთ  $\sin x = t$  ჩასმას, ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი მიიყვანება  $t$ . ცვლადის რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებადღე.

შემთხვევა 2. ვთქვათ, ახლა (1.4) ინტეგრალში რაციონალური  $R$  ფუნქცია კენტია  $\sin x$  არგუმენტის მიმართ:

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

ამ შემთხვევაში, თანახმად (1.7) ტოლობისა, დავწერთ

$$R(\sin x, \cos x) = \sin x R_2(\sin^2 x, \cos x).$$

მაშასადამე, (1.4) ინტეგრალი ასე წარმოვიდგება:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = - \int R_2(1 - \cos^2 x, \cos x) d(\cos x).$$

თუ გამოვიყენებთ  $\cos x = t$  ჩასმას, მაშინ უკანასკნელი ინტეგრალი გამოსათვლელი იქნება  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქციიდან.

შემთხვევა 3. ვთქვათ,  $R(\sin x, \cos x)$  ფუნქცია ლუწია ან კენტია ორივე არგუმენტის მიმართ ერთდროულად, ე. ი.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x). \quad (1.9)$$

წარმოვადგინოთ  $R$  ფუნქცია ასე:

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x, \cos x\right)$$

უკანასკნელი გამოსახულება შეიძლება განვიხილოთ როგორც  $\frac{\sin x}{\cos x}$

და  $\cos x$  არგუმენტების რაციონალური  $R_3$  ფუნქცია, ე. ი.



$$R\left(\frac{\sin x}{\cos x} \cos x, \cos x\right) = R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right).$$

გამოვიყენოთ (1.9) პირობა, მივიღებთ

$$R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) = R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, -\cos x\right)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ  $R_3$  ფუნქცია ლუწია მეორე არგუმენტის მიმართ და, მაშასადამე, თანახმად (1.8) ტოლობისა, შეგვიძლია დავწეროთ

$$R_3\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos x\right) = R_4\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right),$$

სადაც  $R_4$  არის  $\frac{\sin x}{\cos x}$  და  $\cos^2 x$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია. ამრიგად,

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R_4\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right) dx = \\ &= \int R_4\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

ახლა პირდაპირ ჩანს, რომ თუ გამოვიყენებთ  $\operatorname{tg} x = t$  ჩასმას, მივიღებთ

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_4\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

აქ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის  $t$  ცვლადის რაციონალური ფუნქცია.

მაგალითი 6. გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\sin^4 x \cos^2 x dx}{2 - \cos^2 x}.$$

შევნიშნავთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია წარმოადგენს კენტ ფუნქციას  $\cos x$  არგუმენტის მიმართ. ამიტომ, საჭიროა გამოვიყენოთ  $\sin x = t$  ჩასმა. გვექნება

$$I = \int \frac{\sin^4 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{t^4 (1 - t^2) dt}{1 + t^2} =$$

$$= - \int \left( t^4 - 2t^2 + 2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = - \frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 - 2t + \\ + 2 \operatorname{arctg} t + C.$$

დავებრუნდეთ  $x$  ცვლადს, საბოლოოდ მივიღებთ

$$I = - \frac{1}{5} \sin^5 x + \frac{2}{3} \sin^3 x - 2 \sin x + 2 \operatorname{arctg} (\sin x) + C.$$

მაგალითი 7. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\sin^3 x \cos^4 x}{2 - \sin^2 x} dx.$$

როგორც წინა მაგალითში, ინტეგრალქვეშ გვაქვს  $\sin x$  და  $\cos x$  არგუმენტების რაციონალური ფუნქცია, რომელიც კენტია  $\sin x$  არგუმენტის მიმართ. თუ გამოვიყენებთ  $\cos x = t$  ჩასმას, მივიღებთ

$$I = \int \frac{(\cos^2 x - 1) \cos^4 x d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{t^6 - t^4}{t^2 + 1} dt = \\ = \int \left( t^4 - 2t^2 + 2 - \frac{2}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + 2t + \\ + 2 \operatorname{arctg} t + C.$$

დავებრუნდეთ  $x$  ცვლადს, გვექნება

$$I = \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{2}{3} \cos^3 x + 2 \cos x + 2 \operatorname{arctg} (\cos x) + C.$$

მაგალითი 8. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

აქ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის რაციონალური  $\sin x$  და  $\cos x$  არგუმენტების მიმართ და ამასთან ლუწია ამ არგუმენტების მიმართ ერთდროულად. მაშასადამე, საჭიროა გამოვიყენოთ  $\operatorname{tg} x = t$  ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{(t^2 + 1)^2 dt}{t^3} = \\ = \int \left( t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{2} t^2 + 2 \ln t - \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + C = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + 2 \ln \operatorname{tg} x - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C.$$

§ 2. ზოგიერთი კერძო სახის ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება

1°. განვიხილოთ ინტეგრალი

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx, \quad (2.1)$$

სადაც  $m$  და  $n$  რაციონალური რიცხვებია. ცხადია, როცა  $m$  და  $n$  მთელი რიცხვებია, მაშინ (2.1) ინტეგრალი წარმოადგენს წინა პარაგრაფში შესწავლილი (1.4) ინტეგრალის კერძო სახეს და, მაშასადამე, ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება. როცა  $m$  და  $n$  წილადებია, მაშინ, საზოგადოდ, (2.1) ინტეგრალი უმაღლეს ტრანსცენდენტურ ფუნქციას წარმოადგენს; გარდა სამი კერძო შემთხვევისა, როცა იგი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება.

განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

წარმოვადგინოთ (2.1) ინტეგრალი შემდეგნაირად

$$I = \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin^2 x) = \\ = \frac{1}{2} \int (\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin^2 x)$$

და გამოვიყენოთ.  $t = \sin^2 x$  ჩასმა, მივიღებთ

$$I = \frac{1}{2} \int t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt, \quad (2.2)$$

ამრიგად, (2.1) ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება ბინომური დიფერენციალის ინტეგრებამდე. როგორც ვიცით, უკანასკნელი ინტეგრალი ელემენტარულ ფუნქციებში ამოიხსნება, როცა შესრულებულია ერთ-ერთი მაინც შემდეგი სამი პირობიდან:

1)  $\frac{m+1}{2}$  მთელი რიცხვია, 2)  $\frac{n-1}{2}$  მთელი რიცხვია, 3)  $\frac{m+n-2}{2}$

მთელი რიცხვია.

ცხადია, ამ შემთხვევებს მხოლოდ მაშინ ექნება ადგილი, როცა 1')  $m$  კენტი რიცხვია, 2')  $n$  კენტი რიცხვია, 3')  $m+n$  ლუწი რიცხვია.

განვიხილოთ 1') შემთხვევა:  $m = 2k + 1$ . გვაქვს

$$I = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$$

აგიღოთ  $t = \cos x$  ჩასმა, მივიღებთ

$$I = - \int (1 - t^2)^k t^n dt.$$

თუ  $(1 - t^2)^2$  გამოსახულებას დავშლით ბინომის ფორმულის მიხედვით,  $I$  ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება რაციონალური ფუნქციების ინტეგრებამდე.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\sin^5 x \, dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

აქ შესრულებულია 1') პირობა და, მაშასადამე, საჭიროა გამოვიყენოთ  $t = \cos x$  ჩასმა, მივიღებთ

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{(1 - t^2)^2 \, dt}{\sqrt{t}} = - \int \left( t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{5}{2}} \right) dt = \\ &= - \frac{3}{2} t^{\frac{2}{2}} + \frac{3}{4} t^{\frac{6}{2}} - \frac{3}{14} t^{\frac{14}{2}} + C = \\ &= - 3 \sqrt{\cos^2 x} \left( \frac{1}{14} \cos^4 x - \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

განვიხილოთ ახლა 2') შემთხვევა. ვთქვათ,  $n = 2k + 1$ . ავიღოთ  $t = \sin x$  ჩასმა, მივიღებთ

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^n x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^k \, d(\sin x) = \\ &= \int t^n (1 - t^2)^k \, dt. \end{aligned}$$

როგორც ვხედავთ ინტეგრალის ამოხსნა ისევე ჩატარდება, როგორც წინა შემთხვევაში.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{\cos^5 x \, dx}{\sqrt{\sin x}}.$$

ცხადია, საჭმე გვაქვს 2') შემთხვევასთან, გამოვიყენოთ  $t = \sin x$  ჩასმა, მივიღებთ

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x)}{\sqrt{\sin x}} = \int \frac{(1 - t^2)^2}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \\ &- \frac{4}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5} t^{\frac{7}{2}} + C = \sqrt{\sin x} \left( \frac{2}{3} \sin x - \frac{4}{5} \sin^2 x + \frac{2}{9} \sin^4 x \right) + C. \end{aligned}$$

ავიღოთ ახლა 3') შემთხვევა. ვთქვათ,  $m+n=2k$ . გვაქვს:

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^m x \cos^{m+n} x dx = \int \sin^m x \cos^{2k-m} x dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^m x \frac{dx}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^k} = \int \frac{\operatorname{tg}^m x d(\operatorname{tg} x)}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

ვთქვათ,  $m = \frac{p}{q}$ , სადაც  $p$  და  $q$  მთელი რიცხვებია. გამოვიყენოთ  $\operatorname{tg}^{\frac{1}{q}} x = t$  ჩასმა, მაშინ  $d(\operatorname{tg} x) = qt^{q-1} dt$  და

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx = q \int \frac{t^{p+q-1} dt}{(1+t^{2q})^{k+1}}.$$

როგორც ვხედავთ  $I$  ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება რაციონალური ფუნქციის ინტეგრებამდე.

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$$

აქ  $m = -\frac{3}{2}$ ,  $n = -\frac{5}{2}$ ,  $m+n = -4$ . წარმოადგინოთ ინტეგრალი ასე:

$$I = \int \operatorname{tg}^{-\frac{3}{2}} x (1+\operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x).$$

ავიღოთ  $\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x = t$  ჩასმა, მაშინ  $d(\operatorname{tg} x) = 2t dt$  და

$$I = 2 \int t^{-2} (1+t^4) dt = \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - \frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + C.$$

2°. განვიხილოთ ახლა შემდეგი სახის ინტეგრალი:

$$\int P(x, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_k x}, \sin \alpha_1 x, \dots, \sin \alpha_m x, \cos \beta_1 x, \dots, \cos \beta_n x) dx, \quad (2.3)$$

სადაც  $P$  არის თავისი არგუმენტების მრავალწევრი;  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო  $m, n$  და  $k$  ნატურალური რიცხვები.

(2.3) სახის ინტეგრალი წარმოადგენს ელემენტარულ ფუნქციას.

მართლაც, ვინაიდან  $P$  თავისი არგუმენტების მრავალწევრია, ამიტომ მის ყოველ წევრს აქვს შემდეგი სახე:

$$Ax^\mu (e^{\lambda_1 x})^{\gamma_1} \dots (e^{\lambda_k x})^{\gamma_k} \sin^{p_1} \alpha_1 x \dots \sin^{p_m} \alpha_m x \cos^{q_1} \beta_1 x \dots \cos^{q_n} \beta_n x = \\ = Ax^\mu e^{(\lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_k \gamma_k)x} \sin^{p_1} \alpha_1 x \dots \sin^{p_m} \alpha_m x \cos^{q_1} \beta_1 x \dots \cos^{q_n} \beta_n x,$$

სადაც  $\mu, \gamma_1, \dots, \gamma_k$  რიცხვებია,  $A, p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n$ , კი ნატურალური რიცხვები.

ამრიგად, (2.3) ინტეგრალის გამოთვლა მიიყვანება

$$\int x^\mu e^{\lambda x} \sin^{p_1} \alpha_1 x \dots \sin^{p_m} \alpha_m x \cos^{q_1} \beta_1 x \dots \cos^{q_n} \beta_n x dx \quad (2.4)$$

სახის ინტეგრალების გამოთვლამდე, სადაც  $\lambda = \lambda_1 \gamma_1 + \dots + \lambda_k \gamma_k$ .

მაგრამ, ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ის ნაწილი, რომელიც ტრიგონომეტრიული ფუნქციების ნამრავლია, მუდამ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\sin^{p_1} \alpha_1 x \dots \sin^{p_m} \alpha_m x \cos^{q_1} \beta_1 x \dots \cos^{q_n} \beta_n x = \\ = \sum A_i \sin \xi_i x + \sum B_i \cos \eta_i x;$$

ამიტომ (2.4) ინტეგრალი დაიშლება

$$C \int x^\mu e^{\lambda x} \sin \xi x dx \quad \text{და} \quad D \int x^\mu e^{\lambda x} \cos \eta x dx$$

სახის ინტეგრალების ჯამად, სადაც  $C, D, A_i, B_i$  მუდმივებია.

უკანასკნელი ინტეგრალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ აღწერილობები

$$I_\mu = \int x^\mu e^{\lambda x} \sin \xi x dx,$$

$$I_\mu^* = \int x^\mu e^{\lambda x} \cos \eta x dx.$$

გარდაქმნათ  $I_\mu$  ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულათ, ამასთანავე აღვნიშნოთ  $u = x^\mu$ ,  $dv = e^{\lambda x} \sin \xi x dx$ , აქვდა

$$du = \mu x^{\mu-1} dx, \quad v = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \sin \xi x - \xi \cos \xi x)}{\lambda^2 + \xi^2}.$$

შეშასაღამე,

$$I_\mu = \frac{x^\mu e^{\lambda x} (\lambda \sin \xi x - \xi \cos \xi x)}{\lambda^2 + \xi^2} - \frac{\mu \lambda}{\lambda^2 + \xi^2} I_{\mu-1} +$$

$$+ \frac{\mu\xi}{\lambda^2 + \xi^2} \int x^{\mu-1} e^{\lambda x} \cos \xi x dx. \quad (2.5)$$

უკვე მივიღებთ

$$I_{\mu}^{*} \frac{x^{\mu} e^{\lambda x} (\lambda \cos \eta x + \eta \sin \eta x)}{\lambda^2 + \eta^2} - \frac{\mu \lambda}{\lambda^2 + \eta^2} I_{\mu-1}^{*} - \\ - \frac{\mu \eta}{\lambda^2 + \eta^2} \int x^{\mu-1} e^{\lambda x} \sin \eta x dx. \quad (2.6)$$

უკანასკნელი ორი ფორმულა წარმოადგენს  $I_{\mu}$  და  $I_{\mu}^{*}$  ინტეგრლების დაყენების ფორმულებს. ვინაიდან  $I_0$  და  $I_0^{*}$  ინტეგრლები ჩვენთვის უკვე ცნობილია, ამიტომ მათი დახმარებით  $I_{\mu}$  და  $I_{\mu}^{*}$  ინტეგრლები ბოლომდე გამოითვლება ნებისმიერი ნატურალური  $\mu$  რიცხვისათვის.

#### სავარჯიშო

1.  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ , პას.  $\frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{1}{6} \sin^6 x + C$ .
2.  $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$ , პას.  $\frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + C$ .
3.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ , პას.  $-\frac{1}{2} \sin^2 x - \ln \cos x + C$ .
4.  $\int \frac{\sin^6 x}{\cos x} dx$ , პას.  $\cos^2 x - \frac{1}{4} \cos^4 x - \ln \cos x + C$ .
5.  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ , პას.  $\cos x + \frac{1}{\cos x} + C$ .
6.  $\int \sin^3 x dx$ , პას.  $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$ .
7.  $\int \cos^7 x dx$ , პას.  $-\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$ .
8.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ , პას.  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x + C$ .

$$9. \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx. \quad \text{პას. } \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C.$$

$$10. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx. \quad \text{პას. } \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

$$11. \int \frac{\sin^k x}{\cos^{k+2} x} dx. \quad \text{პას. } \frac{1}{k+1} \operatorname{tg}^{k+1} x + C \quad (\text{კ ნატურალური რიცხვია}),$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}. \quad \text{პას. } \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin x}. \quad \text{პას. } \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\cos x}. \quad \text{პას. } \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}. \quad \text{პას. } \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

$$16. \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x}. \quad \text{პას. } -\sin x - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

$$17. \int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx. \quad \text{პას. } -\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x - \\ - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$18. \int \frac{\sin^4 x}{\cos^3 x} dx. \quad \text{პას. } \frac{1}{\cos^2 x} \left( \frac{3}{2} \sin x - \sin^3 x \right) - \\ - \frac{3}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}, \quad \text{პას. } \frac{\sin \alpha}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{x + \alpha}{2},$$

$$\text{სადაც } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



20.  $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$ ,  $c = a^2 + b^2$ ,  
 306.  $\frac{1}{c} \frac{a \sin x - b \cos x}{a \cos x + b \sin x + c} + C$ .
21.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^5 x}$ , 306.  $-\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \frac{4}{\operatorname{tg} x} + 6 \operatorname{tg} x +$   
 $+\frac{4}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C$ .
22.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$ , 306.  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + 3 \ln \operatorname{tg} x -$   
 $-\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + C$ .
23.  $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ , 306.  $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$ .
24.  $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$ , 306.  $-\frac{1}{64 \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2}} - \frac{1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} +$   
 $+\frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{64} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} + C$ .
25.  $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$ , 306.  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x + C$ .
26.  $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ , 306.  $-\frac{1}{8y^2} + \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{8} y^2 + C$ ,  
 63567030  $y = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$ .
27.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$ , 306.  $\frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} +$   
 $+\frac{5}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ .

28.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$ , პ.ს.  $\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + 2 \ln \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^3 x + C$ .
29.  $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$ , პ.ს.  $\operatorname{tg} x - \frac{3}{2} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$ .
30.  $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^3 x} dx$ , პ.ს.  $\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{5}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + 2 \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + C$
31.  $\int \sin^8 x \cos^5 x dx$ , პ.ს.  $\frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + C$ .
32.  $\int \sin^3 x \cos^7 x dx$ , პ.ს.  $-\frac{1}{8} \cos^8 x + \frac{1}{10} \cos^{10} x + C$ .
33.  $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$ , პ.ს.  $-\frac{\cos^5 x}{12} \left( \sin^7 x + \frac{7}{10} \sin^5 x + \frac{7}{16} \sin^3 x + \frac{7}{32} \sin x \right) + \frac{7}{512} \left( \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x \right) + C$ .
34.  $\int \sqrt{\sin^2 x \cos x} dx$ , პ.ს.  $-\frac{2}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x + C$ .
35.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x \cos^4 x}}$ , პ.ს.  $3 \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + C$ .
36.  $\int \sqrt{\sin^3 x \cos x} dx$ , პ.ს.  $-\frac{1}{2} \sqrt{\sin x \cos^3 x} + \frac{1}{8 \sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}}{1 - \sqrt{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}} + \frac{1}{4 \sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x} + C$ .
37.  $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin x \cos^2 x}}$ , პ.ს.  $\frac{4}{3} \operatorname{tg}^{\frac{3}{4}} x + C$ .

$$38. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} x + C.$$

$$39. \int \operatorname{tg}^6 x \, dx, \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln \cos x + C.$$

$$40. \int \operatorname{ctg}^4 x \, dx, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

$$41. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}}{1 - \sqrt{2\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x} + C.$$

$$42. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \text{д.б.} \quad \operatorname{arctg} y + \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \ln \frac{y^2 + y\sqrt[3]{3} + 1}{y^2 - y\sqrt[3]{3} + 1} + \\ + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{1 - y^2} + C, \quad y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}.$$

$$43. \int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

$$44. \int \frac{dx}{(3 + \sin^2 x)^2}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{\sin x \cos x}{24(3 + \sin^2 x)} + \\ + \frac{7}{48\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

$$45. \int \frac{dx}{2 - \operatorname{tg} x}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{2}{5} x - \frac{1}{5} \ln(2 \cos x - \sin x) + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x}, \quad \text{д.б.} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}} + C.$$

$$47. \int \frac{\sin x \, dx}{(1 - 3 \cos x)^2}, \quad \text{д.б.} \quad -\frac{1}{6(1 - 3 \cos x)} + C.$$

48.  $\int \frac{dx}{(1-3\sin x + \cos x)^2}$ , პას.  $\frac{1}{18}y + \frac{1}{27} \ln(1-3y) + \frac{5}{27(1-3y)} + C$ , სადაც  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .
49.  $\int \frac{2\cos x - \sin x + 1}{(2 + \cos x)^3} dx$ , პას.  $\frac{\sin x - 1}{2(2 + \cos x)^2} + \frac{1}{3} \frac{\sin x}{2 + \cos x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$ .
50.  $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ , პას.  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sin 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} 2x \right) + C$ .
51.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ , პას.  $\frac{1}{6} \ln \frac{1 + \sin 2x}{2 - \sin 2x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3}} + C$ .
52.  $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \operatorname{tg} x dx$ , პას.  $x - \ln(1 + \operatorname{tg} x) + C$ .
53.  $\int \frac{\sin x dx}{\sin x - \cos x}$ , პას.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ln \cos 2x - \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + C$ .
54.  $\int \frac{dx}{\cos x - 2 \operatorname{tg} x}$ , პას.  $-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sin x - \sqrt{2}}{1 + \sin x + \sqrt{2}} + C$ .
55.  $\int x^2 \cos x e^x dx$ , პას.  $\frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x] + C$ .
56.  $\int x^2 \sin x e^x dx$ , პას.  $\frac{1}{2} e^x [(x^2 - 1) \sin x - (x - 1)^2 \cos x] + C$ .

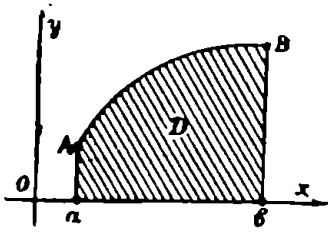
**განსაზღვრული ინტეგრალი**

განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება მათემატიკური ანალიზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებათაგანია, რომლის წარმოშობა ისტორიულად დაკავშირებულია რკალის სიგრძის, ფიგურის ფართობისა და სხეულის მოცულობის გამოთვლის ამოცანებთან. ელემენტარული გეომეტრიიდან ცნობილია მხოლოდ ისეთი ბრტყელი ფიგურების ფართობთა გამოთვლა, რომლებიც შემოსაზღვრულია წრფეთა მონაკვეთებით და წრეწირების რკალებით. ნებისმიერი წირათ, შემოსაზღვრული ბრტყელი ფიგურის ფართობის გამოთვლა შეიძლება ინტეგრალური აღრიცხვის გამოყენებით.

ინტეგრალური აღრიცხვის შემქმნელებია ისააკ ნიუტონი და გოტფრიდ ლაიბნიცი. პირველის ნაშრომებში განხილულია განუსაზღვრელი ინტეგრალი, მეორისაში კი განსაზღვრული.

**§ 1. მრუდწიკვიანი ტრაპეციის ფართობი**

განვიხილოთ  $xOy$  სიბრტყეზე რაიმე  $D$  ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $Ox$  ღერძით,  $x=a$ ,  $x=b$  წრფეებით ( $a < b$ ) და  $y = f(x)$  წირით, სადაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია და დადებითია  $[a, b]$  სეგმენტზე (ნახ. 78). ასეთ ფიგურას მრუდწიკვიანი ტრაპეცია ეწოდება.



ნახ. 78.

ბუნებრივად ისმის კითხვა: რას ვუწოდოთ  $D$  ფიგურის ფართობი და როგორ ვიპოვოთ ეს ფართობი? ამ მიზნით დავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი  $n$  ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

მივიღებთ სეგმენტებს

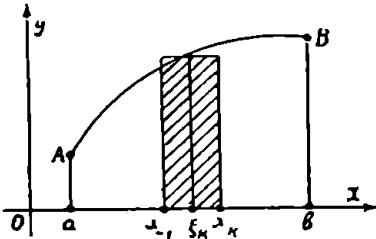
$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]. \tag{1.1}$$

აღნიშნოთ  $\lambda$ -თი  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  რიცხვებს შორის უდიდესი. სადაც

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

სეგმენტთა (1.1) სისტემას ვუწოდებთ  $[a, b]$  სეგმენტის  $\lambda$ -დანაწილებას. ცხადია, რომ ყოველ  $\lambda$  რიცხვს შეესაბამება უამრავი  $\lambda$  დანაწილება.

განვიხილოთ (1.1) სისტემის ნებისმიერი  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტი და მასზე ავიღოთ ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილი.  $x = \xi_k$  წრფე გადაკვეთს  $y =$

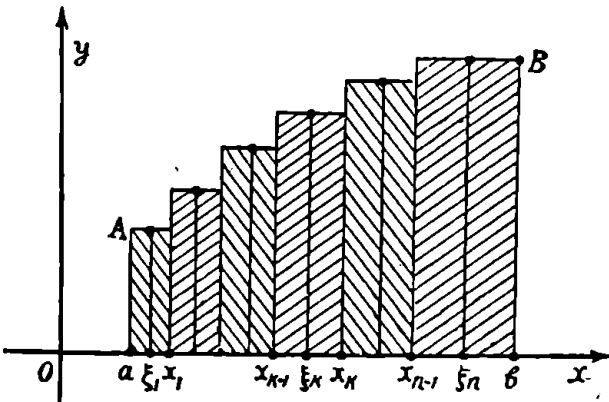


ნახ. 79.

$= f(x)$  წირს  $M_k$  წერტილში. რომლის ორდინატია  $f(\xi_k)$  (ნახ. 2). მაშინ 79-ე ნახაზზე დაშტრიხული მართკუთხედის ფუძეა  $\Delta x_k$ , სიმაღლე კი  $f(\xi_k)$ . მაშასადამე, აღნიშნული მართკუთხედის ფართობია  $f(\xi_k) \Delta x_k$ .

თუ ასეთ კონსტრუქციას ჩავატარებთ ყოველ  $[x_{k-1}, x_k]$

სეგმენტისათვის, მაშინ დაშტრიხული მართკუთხედების ჯამი კიბურ ფიგურას წარმოადგენს (ნახ. 80). ცხადია, ამ ფიგურის ფორმა და-



ნახ. 80.

მოკიდებულია  $[a, b]$  სეგმენტის დანაწილებაზე და  $\xi_k$  წერტილების შერჩევაზე. დაშტრიხული კიბური ფიგურის ფართობი აღნიშნოთ  $S^n$  სიმბოლოთი. იგი გამოისახება ფორმულით:

$$S^* = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

ახლა თუ განვიხილავთ  $[a, b]$  სეგმენტის უფრო და უფრო მცირე დანაწილებებს და ყოველი ასეთი დანაწილებისათვის გამოვთვალოთ დაშტრიხული კაბური ფიგურის  $S^*$  ფართობს, მაშინ ბუნებრივია ვიფიქროთ, რომ ამ პროცესში  $S^*$  ფართობი მიისწრაფვის გარკვეულ  $S$  ზღვრისაკენ და ამ ზღვარს ვუწოდოთ  $D$  ფიგურის  $S$  ფართობი:

$$S = \lim S^* = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

მაგრამ რას ნიშნავს, რომ  $S^*$  ფართობის ზღვარია  $S$  რიცხვი? მოიყვანოთ

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ა.  $S$  რიცხვს ვუწოდებთ  $S^*$  ფართობის ზღვარს, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\delta$  რიცხვი. რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის,  $\lambda < \delta$ , და ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილისათვის  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$|S - S^*| < \varepsilon.$$

მაშასადამე,  $S$  რიცხვი  $D$  ფიგურის ფართობია, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\delta$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის,  $\lambda < \delta$ , და ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილისათვის  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - S \right| < \varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში დავწეროთ

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1.2)$$

ამით პირველი ამოცანა ამოხსნილია, ე. ი. დავადგინეთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ცნება. რაც შეეხება მეორე ამოცანას — ფართობის გამოსათვლელი აპარატის შექმნას, იგი პრინციპულად ამოხსნილია, ვინაიდან (1.2) ფორმულა გვიჩვენებს ამ მიზნისათვის

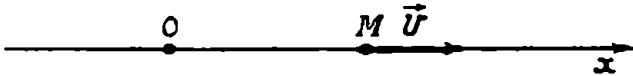
ყველა აუცილებელ ოპერაციას. მაგრამ აღნიშნული მეთოდი პრაქტიკულად დამაკმაყოფილებელი არ არის, ვინაიდან  $\mathcal{D}^*$  გამოსახულების ზღვრის მოძებნა ფაქტიურად ხერხდება მხოლოდ უმარტივეს შემთხვევაში, ამიტომ ზემოაღნიშნული აპარატი ბევრ კონკრეტულ ამოცანაში ვერ პოულობს უშუალო გამოყენებას.

### § 2. ნივთიერი წარბილის მიერ გავლილი მანძილი

ვთქვათ, ნივთიერი  $M$  წერტილი არათანაბრად მოძრაობს  $Ox$  ღერძზე  $v$  სიჩქარით (ნახ. 81). ეს სიჩქარე წარმოადგენს  $t$  დროის ფუნქციას.

$$v = x(t).$$

ეიგულისხმობს, რომ  $v(t)$  უწყვეტია. ვიპოვოთ  $M$  წერტილის მიერ გავლილი  $s$  მანძილი  $t=a$  მომენტიდან  $t=b$  მომენტამდე.



ნახ. 81.

ამისათვის დავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი  $n$  ნაწილად წერტილებით

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

და ვთქვათ,  $\lambda$  უდიდესია  $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$  რიცხვებს შორის, სადაც

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

ყოველ  $[t_{k-1}, t_k]$  სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი  $\tau_k$  წერტილი.  $v(t)$  ფუნქციის უწყვეტობის გამო მისი მნიშვნელობანი  $[t_{k-1}, t_k]$  სეგმენტზე, როდესაც  $\lambda$  საკმარისად მცირეა, მცირედ განსხვავდება  $v(\tau_k)$  მნიშვნელობისაგან, რის გამოც  $v(t)$  ფუნქციის მნიშვნელობად  $[t_{k-1}, t_k]$  სეგმენტზე შეგვიძლია ავიღოთ  $v(\tau_k)$ . მექანიკის თვალსაზრისით ეს იმას ნიშნავს, რომ დროის  $[t_{k-1}, t_k]$  შუალედში  $M$  წერტილის მოძრაობა მიჩნეულია თანაბარ მოძრაობად. მაშინ დროის ამ შუალედში  $M$  წერტილის მიერ გავლილი მანძილი იქნება  $v(\tau_k)\Delta t_k$ , ხოლო მთელი გავლილი მანძილი დროის  $[a, b]$  შუალედში იქნება

$$\sum_{k=1}^n v(\tau_k)\Delta t_k. \quad (2.1)$$



ცხადია, მიღებული გამოსახულება წარმოადგენს  $M$ . წერტილის მიერ დროის  $[a, b]$  შუალედში გავლილი  $s$  მანძილის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$s \approx \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k.$$

ამიტომ  $M$  წერტილის მიერ გავლილი მანძილი გამოისახება ფორმულით:

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k.$$

დასასრულ შევნიშნავთ, რომ (2.1) ჯამს ისეთივე აგებულება აქვს, რაც მრუდწირული ტრაპეციის განსაზღვრისათვის შედგენილ ჯამს.

### § 8. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ორი ამოცანა — ერთი გეომეტრიიდან. მეორე ფიზიკიდან. თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ამ ამოცანების კონკრეტულ შინაარსს და ყურადღებას მივაქცევთ მათ ანალიზურ სტრუქტურას, მაშინ ისინი ზუსტად ერთმანეთს ემთხვევა. ორივე შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა მოცთხოვს გარკვეული სახის ჯამის ზღვრის გამოთვლას.

გეომეტრიის, ფიზიკის, ქიმიის, ტექნიკისა და მეცნიერების სხვა დარგში და კაცობრიობის ხაქმიანობაში წარმოიშობა უამრავი ამოცანა, რომელთა ანალიზური სტრუქტურა ემთხვევა ზემოთ განხილულს. ამიტომ ზემოთ აღწერილი ტიპის ზღვარზე გადასვლა იმსახურებს ყოველმხრივ შესწავლას და მათემატიკური ანალიზის მნიშვნელოვან ამოცანას წარმოადგენს.

ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრულია  $f(x)$  ფუნქცია. დავყოთ ეს სეგმენტი ნაწილებად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

მივიღებთ  $[a, b]$  სეგმენტის ქვესეგმენტებს.

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]. \quad (3.1)$$

აღვნიშნოთ  $\lambda$  ასოთი უდიდესი  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  რიცხვებს შორის, სადაც  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). სეგმენტთა (3.1) სისტემას უწოდოთ  $[a, b]$  სეგმენტების  $\lambda$ -დანაწილება.

31 ვლ. ჰელიძე, ე. წითლანაძე

ახლა ყოველ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილი და შევადგინოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (3.2)$$

ამ ჯამს ეწოდება ინტეგრალური ჯამი. იგი დამოკიდებულია როგორც  $\xi_k$  წერტილების შერჩევაზე, ისე  $[a, b]$  სეგმენტის დანაწილებაზე.

როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$ , მაშინ  $\sigma$  ჯამს შეიძლება ჰქონდეს გარკვეული ზღვარი, რომელიც დამოუკიდებელია როგორც  $[a, b]$  სეგმენტის დანაწილებაზე, ისე  $\xi_k$  წერტილების შერჩევაზე. თუ არსებობს

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I, \quad (3.3)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი  $[a, b]$  სეგმენტზე და აღინიშნება

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (3.4)$$

რაც ასე იკითხება: ინტეგრალი  $a$ -დან  $b$ -მდე  $f(x) dx$ .

როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, (3.3) ტოლობის ზუსტი განსაზღვრა ასეთია:  $I$  რიცხვს ეწოდება ინტეგრალური  $\sigma$  ჯამის ზღვარი, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი  $\delta > 0$ , რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის,  $\lambda < \delta$ , და ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილისათვის  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე, მართებულია უტოლობა

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი წარმოადგენს (3.2) ინტეგრალური ჯამის ზღვარს:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

$a$  და  $b$  რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად ინტეგრების ქვედა და ზედა ზღვრები,  $[a, b]$  სეგმენტს კა: ინტეგრების შუალედი.  $x$  ცვლადს ჰქვია ინტეგრების ცვლადი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც არსებობს (3.4) ინტეგრალი, იტყვიან, რომ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით  $[a, b]$  სეგმენტზე. შემდეგში, თუ ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით  $[a, b]$  სეგმენტზე, სიმოკლისათვის ვიტყვით, რომ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  დამოუკიდებელია ინტეგრების  $x$  ცვლადზე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

§ 4. დარბუს ჯამები. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია. ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b] \tag{4.1}$$

და აღვნიშნოთ  $M_k$  და  $m_k$  სიმბოლოებით  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები  $[a, b]$  სეგმენტზე. ჯამებს

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

ეწოდება შესაბამისად  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამები, ანუ დარბუს ჯამები.

ლემმა 1. ვთქვათ, (4.1) დანაწილებისათვის  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა ჯამებია  $\bar{\sigma}$  და  $\underline{\sigma}$ . თუ  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფის ქველ წერტილებს დავუმატებთ დაყოფის ახალ წერტილებს და ხელახლა შევადგენთ ზედა და ქვედა ჯამებს  $\bar{\sigma}'$  და  $\underline{\sigma}'$ , გვექნება

$$\underline{\sigma} \leq \underline{\sigma}' \leq \bar{\sigma}' \leq \bar{\sigma},$$

ე. ი. დაყოფის ახალი წერტილების დამატებით ქვედა და ჯამი არ შემცირდება, ზედა ჯამი კი აი გადიდება.

დამტკიცება. საკმარისია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევი-სათვის, როდესაც შემოგვაქვს დაყოფის მხოლოდ ერთი ახალი წევრ-ტილი.

ვთქვათ,  $x_{k-1} < \xi < x_k$ . მაშინ ახალი ზედა ჯამი  $\bar{\sigma}$  მიიღება ძვე-ლი ზედა  $\bar{\sigma}$  ჯამისაგან, თუ  $M_k(x_k - x_{k-1})$ . შესაქრებს შევცვლით ორი შესაქრების ჯამით

$$M'_k(\xi - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \xi).$$

სადაც  $M'_k$  და  $M''_k$  წარმოადგენენ შესაბამისად  $f(x)$  ფუნქციის ზე-და საზღვრებს  $[x_{k-1}, \xi]$  და  $[\xi, x_k]$  სეგმენტებზე შესაბამისად. ყველა დანარჩენი შესაქრები ორივე  $\bar{\sigma}$  და  $\bar{\sigma}'$  ჯამში ერთნაირია. ცხადია, რომ

$$M'_k \leq M_k, \quad M''_k \leq M_k.$$

მაშასადამე,

$$M'_k(\xi - x_{k-1}) + M''_k(x_k - \xi) \leq M_k[(\xi - x_{k-1}) + (x_k - \xi)] = M_k \Delta x_k.$$

ამიტომ  $\bar{\sigma}' \leq \bar{\sigma}$ .

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ქვედა ჯამი არ მცირდება, როდესაც  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფის ძველ წევრტილებს დაეუმატებთ დაყოფის ახალ წევრტილებს.

ლემა 2. არცერთი ქვედა ჯამი არ აღემატება არცერთ ზედა ჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფის რაიმე ორი წესი  $(D_1)$  და  $(D_2)$ . აღვნიშნოთ  $\underline{\sigma}_1$  და  $\bar{\sigma}_2$ -ით შესაბამისად დაყოფის  $(D_1)$  და  $(D_2)$  წესთა შესაბამისი ქვედა და ზედა ჯამები. შევადგინოთ  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფის  $(D_3)$  წესი ისე, რომ მისი დაყოფის წევრტილები იყოს ორივე  $(D_1)$  და  $(D_2)$  დაყოფის წესის წევრტილები. აღვნიშნოთ  $\underline{\sigma}_3$  და  $\bar{\sigma}_3$ -ით  $(D_3)$  დაყოფის შესაბამისი ქვედა და ზედა ჯამები. მაშინ 1-ლი ლემის თანახმად

$$\underline{\sigma}_1 \leq \underline{\sigma}_3, \quad \bar{\sigma}_3 \leq \bar{\sigma}_2.$$

მეორე მხრივ,  $\underline{\sigma}_3 \leq \bar{\sigma}_3$ . მაშასადამე,  $\underline{\sigma}_1 \leq \bar{\sigma}_2$  და ამით ლემა დამტკიცებულია.

ახლა თუ განვიხილავთ ინტეგრალურ ჯამს

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

სადაც  $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ , ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma}.$$

შენიშნოთ, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება გარკვეული ქვედა და ზედა ჯამები. რაც შეეხება  $\sigma$  ჯამს, იგი განსაზღვრული არაა, ვინაიდან  $\xi_k$  წერტილები ნებისმიერად შეგვიძლია ავილოთ სათანადო სეგმენტებზე. თუ  $[a, b]$  სეგმენტის დანაწილებას უცვლელად დავტოვებთ, ხოლო ყოველ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტის შიგნით ვცვლით  $\xi_k$  წერტილს ისე, რომ  $\lim f(\xi_k) = M_k$ , მაშინ  $\lim \sigma = \overline{\sigma}$ . ანალოგიურად,  $\xi_k$  წერტილების შერჩევით  $\sigma$  ჯამი შეგვიძლია რაგინდ მიეუახლოვოთ  $\underline{\sigma}$  ჯამს. ამრიგად,  $\overline{\sigma}$  და  $\underline{\sigma}$  ჯამები, რომლებიც შეესაბამებიან  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე დანაწილებას, წარმოადგენენ ინტეგრალურ იმ ჯამთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრებს, რომლებიც შეესაბამებიან  $[a, b]$  სეგმენტის იმავე დანაწილებას.

ამ შენიშვიდან ადვილად დავასკვნით, რომ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოუსაზღვრელი ფუნქცია ინტეგრებადი არ არის. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის  $[a, b]$  სეგმენტზე აუცილებელია მისი შემოსაზღვრულობა.

თეორემა 1.  $[a, b]$  სეგმენტზე  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობისათვის, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი  $\lambda_0$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის,  $\lambda < \lambda_0$ , ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon. \tag{4.2}$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკიცოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

მაშინ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\lambda_0$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის,  $\lambda < \lambda_0$ , ადგილი ჰქონდეს უტოლობებს

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{3},$$

სადაც  $\sigma$ -თი აღნიშნულია აღებული დანაწილების სათანადო ინტეგრალური ჯამი. მაშასადამე,

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \underline{\sigma} \leq \overline{\sigma} \leq I + \frac{\varepsilon}{3};$$

აქედან გამომდინარეობს (4.2) უტოლობა. ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\lambda_0$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილების,  $\lambda < \lambda_0$ , სათანადო ზედა და ქვედა ჯამებისათვის მართებულია (4.2) უტოლობა. ამ შემთხვევაში, ცხადია,

$$\inf \{ \overline{\sigma} \} = \sup \{ \underline{\sigma} \}.$$

ეს საერთო მნიშვნელობა აღვნიშნოთ  $I$  ასოთი. რაკი

$$\underline{\sigma} \leq I \leq \overline{\sigma}, \quad \underline{\sigma} \leq \sigma \leq \overline{\sigma},$$

ამიტომ  $|\sigma - I| < \varepsilon$ , ე. ი.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I.$$

თეორემის პირობის საკმარისობაც დამტკიცებულია.

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, იგი ინტეგრებადია მის ნებისმიერ ქვესეგმენტზე.

მართლაც, ვოქვათ  $[c, d] \subset [a, b]$ . მოვახდინოთ  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფა წერტილთა ისეთი სისტემით, რომელთა შორის შედის  $c$  და  $d$  წერტილები. აღვნიშნოთ  $\overline{\sigma}_1$  და  $\underline{\sigma}_1$ -ით  $f(x)$  ფუნქციის დარბუს ჯამები  $[c, d]$  სეგმენტისათვის, ხოლო  $\overline{\sigma}$  და  $\underline{\sigma}$ -თი ასეთივე ჯამები  $[a, b]$  სეგმენტისათვის. ცხადია, რომ

$$\overline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1 \leq \overline{\sigma} - \underline{\sigma}.$$

ამიტომ, თუ  $f(x)$  ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\overline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1) = 0$  თეორემის ძალით უკანასკნელი უტოლობა მოგვეცემა

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\overline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_1) = 0.$$

ეს კომტკიცებს შედეგს.

**§ 5. ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი. განსაზღვრული ინტეგრების  
გეომეტრიული მნიშვნელობა**

**თეორემა 2.** სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. კანტორის თეორემის თანახმად იგი თანაბრად უწყვეტია მოცემულ სეგმენტზე. მაშასადამე, ნებისმიერ, დადებით  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta(\varepsilon)$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი  $x'$  და  $x''$  წერტილებსათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას  $|x'' - x'| < \eta$  გვექნება

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

ახლა განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ , სადაც  $\lambda < \eta$ . მაშინ

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

სადაც  $M_k$  და  $m_k$  წარმოადგენენ შესაბამისად  $f(x)$  ფუნქციის უდიდესსა და უმცირეს მნიშვნელობებს  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე. მაშასადამე.

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \varepsilon.$$

აქედან, 1-ლი თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობა  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის თანახმად, მრუდწირული ტრაპეციის  $S$  ფართობი, რომელიც მოცემულია (1.2) ტოლობით, შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

ამრიგად, განსაზღვრული ინტეგრალი  $f(x)$  ფუნქციისა. გავრცელებული  $[a, b]$  სეგმენტზე, გეომეტრიულად გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია  $Ox$  ღერძით,  $x=a$ ,  $x=b$  წრფეებით და  $y=f(x)$  წირით.

**თეორემა 3.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრულ

$f(x)$  ფუნქციას აქვს სასრული რიცხვი წყვეტის წერტილები, მაშინ იგი ინტეგრებადია.

დამტკიცება. სიმარტივისათვის ვივლით, რომ  $f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე აქვს წყვეტის მხოლოდ ერთი  $c$  წერტილი. ვთქვათ,  $a < c < b$  და ავიღოთ  $c$  წერტილის ისეთი  $[c-\delta, c+\delta]$  მიდამო, რომელიც  $[a, b]$  სეგმენტშია მოთავსებული. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის  $\lambda$ -დანაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, b]$ , სადაც  $\lambda < \delta$  და შევადგინოთ  $f(x)$  ფუნქციის ღარბუს ჯამების სხვაობა

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k. \quad (5.1)$$

$\bar{\sigma} - \underline{\sigma}$  სხვაობის იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტები მოთავსებულია  $[a, c-\delta]$  სეგმენტზე, აღენიშნოთ  $P$ -თი. ხოლო  $Q$  იყოს იმ შესაკრებთა ჯამი, რომელთა შესაბამისი  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტები მოთავსებულია  $[c+\delta, b]$  სეგმენტზე. (5.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში კადევ გვექნება ისეთი შესაკრებები, რომელთა შესაბამისი ქვესეგმენტები  $[c-\delta, c+\delta]$  სეგმენტშია მოთავსებული. მათი ჯამი  $R$ -ით აღენიშნოთ. შესაძლებელია გვქონდეს კადევ ორი შესაკრებები, რომელთა შესაბამისი ქვესეგმენტები შეიცავენ თავის შიგნით  $c-\delta$  და  $c+\delta$  წერტილებს.

თუ აღენიშნავთ  $M$  და  $m$  ასოებით  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს  $[a, b]$  სეგმენტზე, გვექნება

$$R < 2\delta(M - m).$$

აგრეთვე, თუ უკანასკნელად აღნიშნული ტიპის ორი შესაკრები გვაქვს, მათი ჯამი არ აღემატება  $2\lambda(M - m)$  გამოსახულებას. ამიტომ

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < P + Q + 2\delta(M - m) + 2\lambda(M - m) < P + Q + 4\delta(M - m).$$

აბლა  $\delta$  რიცხვი ისე შევარჩიოთ, რომ

$$\delta < \frac{\varepsilon}{6(M - m)}.$$

მაშინ გვექნება

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < P + Q + \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (5.2)$$

შემდეგ, რაკი  $[a, c-\delta]$  და  $[c+\delta, b]$  სეგმენტებზე  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ ამავე სეგმენტებზე იგი თანაბრად უწყვეტია. მაშა-



სადაც,  $\frac{\epsilon}{3(b-a)}$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $\eta^*(\epsilon)$ , რომ

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\epsilon}{3(b-a)},$$

როდესაც  $|x' - x''| < \eta^*$ , სადაც  $x', x'' \in [a, c - \delta]$  ან  $x', x'' \in [c + \delta, b]$ .

ახლა აღვნიშნოთ  $\eta$ -თი უმცირესი  $\eta^*$  და  $\frac{\epsilon}{6(b-a)}$  რიცხვებს  $\eta$ -ის. თუ  $\lambda < \eta$ , მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} P + Q &\leq \frac{\epsilon}{3(b-a)}(c - \delta - a) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b - c - \delta) = \\ &= \frac{\epsilon}{3(b-a)}(b - a - 2\delta), \end{aligned}$$

ქ. ბ.

$$P + Q < \frac{\epsilon}{3}.$$

მაშასადამე, (5.2) უტოლობიდან ვღებულობთ

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{2\epsilon}{3} = \epsilon.$$

აქედან, 1-ლი თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობა  $[a, b]$  სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ყველგან ნულია, გარდა წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = 0. \tag{5.3}$$

მართლაც, პირობის მიხედვით  $f(x)$  ფუნქციას აქვს სასრული რიცხვი წვევების წერტილებისა და ამიტომ მე-3 თეორემის თანახმად  $f(x)$  ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე. შემდეგ, თუ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი დანაწილებისათვის  $\xi_k$  წერტილებს ისე ავირჩევთ, რომ ისინი განსხვავებული იყვნენ  $f(x)$  ფუნქციის წვევების წერტილები-საგან, მაშინ ინტეგრალური ჯამი  $\sigma = 0$  და, მაშასადამე, მართებულია (5.3) ტოლობა.

განსაზღვრა.  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრულ ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი, თუ ამ სეგმენტზე მას აქვს სასრული რიცხვი წვევების წერტილებისა.

ახლა მე-3 თეორემა შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ: სეგმენტზე უბან-უბან უწყვეტი ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

თეორემა 4. სეგმენტზე მონოტონური ფუნქცია ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $[a, b]$  სეგმენტზე მოცემულია ზრდადი ფუნქცია. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ . ცხადია, რომ

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k).$$

როდესაც  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). ამიტომ

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \Delta x_k.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} - \underline{\sigma} &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \Delta x_k \leq \\ &\leq \lambda \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \lambda [f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი  $\lambda_0 = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$  რიცხვი, რომ  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველი  $\lambda$ -დანაწილებასათვის,  $\lambda < \lambda_0$ , გვექნება

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. განვიხილოთ  $f(x)$  ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია  $[0, 1]$  სეგმენტზე ასე:  $f(x) = 0$ , როდესაც  $x$  ირაციონალურია და  $f(x) = \frac{1}{q}$ , როდესაც  $x$  წარმოიღვინება უკვეცი  $\frac{p}{q}$

წილადით. დავამტკიცოთ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[0, 1]$  სეგმენტზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ეს ფუნქცია წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილში და უწყვეტია ყოველ ირაციონალურ წერტილში. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე ყველგან მკვირვია  $[0, 1]$  სეგმენტზე.

ავილოთ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვი და შევარჩიოთ ისეთი ნატურალური რიცხვი  $\nu$ , რომ  $\frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2}$ . ცხადია, რომ  $[0, 1]$  სეგმენტზე იქნება მხოლოდ სასრული სიმრავლე ისეთი რაციონალური რიცხვებისა, რომელთა უკვეც წილადად წარმოდგენისათვის მნიშვნელი ნაკლებია  $\nu$ -ზე. ასეთი რიცხვების რაოდენობა აღენიშნოთ  $n$ -ით. ცხადია,  $[0, 1]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილების შემთხვევაში, სულ დიდი,  $n$  ქვესეგმენტი შეიძლება შეიცავდეს უკანასკნელი სახის რაციონალურ წერტილებს და ამიტომ ასეთი ქვესეგმენტების შესაბამისი შესაკრებების ჯამი ზედა  $\bar{\sigma}$  ჯამში არ აღემატება  $n\lambda$  ნამრავლს. ყველა სხვა ქვესეგმენტი შეიცავს მხოლოდ ისეთ რაციონალურ წერტილებს, რომელთა მნიშვნელობები მეტია ან ტოლი  $\nu$ -სი. მაშასადამე, ასეთი ქვესეგმენტებზე  $f(x)$  ფუნქცია არ აღემატება  $\frac{1}{\nu}$  რიცხვს. ამიტომ აღნიშნული ქვესეგმენტები შესაბამის შესაკრებთა ჯამი  $\bar{\sigma}$ -ში ნაკლებია, ვიდრე  $\frac{\varepsilon}{2}$ . ამრიგად,

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\varepsilon}{2} + n\lambda.$$

მეორე მხრივ, ყოველი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის  $\underline{\sigma} = 0$ , ვინაიდან ნებისმიერი ქვესეგმენტი შეიცავს ირაციონალურ წერტილებს, რომლებშიც  $f(x) = 0$ . მაშასადამე,

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\varepsilon}{2} + n\lambda,$$

სადაც  $n$  დამოკიდებულია მხოლოდ  $\varepsilon$ -ზე. თუ  $\lambda < \frac{\varepsilon}{2n}$ , გვექნება

$$\bar{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობა  $[0,1]$  სეგმენტზე. ამგვარად, ჩვენ ავაგეთ ისეთი ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელსაც აქვს წყვეტის წერტილთა უსასრულო სიმრავლე.

მაგალითი 2. ახლა მოვიყვანოთ არაინტეგრებადი ფუნქციის მაგალითი. განვიხილოთ დირიხლეს ფუნქცია:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{როდესაც } x \text{ ირაციონალურია,} \\ 0, & \text{როდესაც } x \text{ რაციონალურია.} \end{cases}$$

თუ განვიხილავთ რაიმე  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერ  $\lambda$ -დანაწილებას, ყოველ ქვესეგმენტზე  $D(x)$  ფუნქციის ზედა საზღვარი იქნება 1, ქვედა საზღვარი კი 0, ამიტომ

$$\bar{\sigma} = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a, \quad \underline{\sigma} = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

მაშასადამე,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) = b - a$ , საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $D(x)$  ფუნქცია არ არის ინტეგრებადი  $[a, b]$  სეგმენტზე.

### § 6. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები

თვისება 1. თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე  $f(x) = c$ , სადაც  $c$  მუდმივია, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = c(b-a). \quad (6.1)$$

მართლაც,  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისათვის და ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილისათვის გვექნება

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n \Delta x_k = c(b-a),$$

ის გამოც მართებულია (6.1) ტოლობა.

თვისება 2. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $A$  მუდმივია, მაშინ  $Af(x)$  ფუნქცია აგრეთვე ინტეგრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx.$$

მართლაც, გვაქვს

$$\int_a^b Af(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n Af(\xi_k) \Delta x_k = A \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = A \int_a^b f(x) dx.$$

ამრიგად, მუდმივი მამრავლი შეგვიძლია გავიტანოთ განსაზღვრული ინტეგრალის ნიშნის გარეთ.

**თვისება 8.** თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $f(x) + g(x)$  ჯამიც ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

მართლაც, გვაქვს:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) + g(\xi_k)] \Delta x_k \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

ეს თვისება ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეიძლება გავაცეროთ შესაკრებთა ნებისმიერ რიცხვზე, ე. ი. თუ  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  ჯამიც ინტეგრებადია ამ სეგმენტზე და

$$\begin{aligned} \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx. \end{aligned}$$

**შედეგი.**  $[a, b]$  სეგმენტზე ინტეგრებადი  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  ფუნქციების წრფივი კომბინაციაა  $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)$ , სადაც  $C_1, C_2, \dots, C_n$  მუდმივებია, ინტეგრებადია და

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)] dx =$$

$$= C_1 \int_a^b f(x) dx + C_2 \int_a^b f_2(x) dx + \dots + C_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

ეს ტოლობა გამოსახავს ინტეგრალის წრფივობის თვისებას ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მიმართ.

**თეორემა 5.** თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე  $f(x) \leq g(x)$ , მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx. \quad (6.2)$$

**დამტკიცება.**  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილებისათვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k.$$

თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როცა  $\lambda \rightarrow 0$ , მივიღებთ (6.2) უტოლობას.

**თეორემა 6.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველ წერტილში  $m \leq f(x) \leq M$ , სადაც  $m$  და  $M$  მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a). \quad (6.3)$$

**დამტკიცება.** მე-5 თეორემის თანახმად

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx. \quad (6.4)$$

მაგრამ 1-ლი თვისების თანახმად

$$\int_a^b m dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx = M(b-a).$$

თუ ამ მნიშვნელობებს ჩავსვამთ (6.4) უტოლობებში, მივიღებთ (6.3) უტოლობებს, რომლის მარცხენა და მარჯვენა ნაწილებით მოცემულია ინტეგრალის შეფასება ქვემოდან და ზემოდან.

თეორემა 7. ორი ინტეგრებადი ფუნქციის ნამრავლი აგრეთვე ინტეგრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f_1(x)$  და  $f_2(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $|f_1'(x)| \leq A$ ,  $|f_2(x)| \leq B$ . განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილება

$$[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$$

და აღვნიშნოთ  $M'_k$  და  $m'_k$ ,  $M''_k$  და  $m''_k$ ,  $M_k$  და  $m_k$  სიმბოლოებით, შესაბამისად ზედა და ქვედა საზღვრები  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  და  $f(x)$  ფუნქციების  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე, სადაც

$$f(x) = f_1(x) f_2(x).$$

$[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტის ორი ნებისმიერი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} |f(x'') - f(x')| &= |f_1(x'') f_2(x'') - f_1(x') f_2(x')| = \\ &= |f_1(x'') - f_1(x')| f_2(x'') + |f_2(x'') - f_2(x')| f_1(x')| \leq \\ &\leq B |f_1(x'') - f_1(x')| + A |f_2(x'') - f_2(x')| \leq \\ &\leq B(M'_k - m'_k) + A(M''_k - m''_k). \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$M_k - m_k \leq B(M'_k - m'_k) + A(M''_k - m''_k).$$

აქედან

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k &\leq B \sum_{k=1}^n (M'_k - m'_k) \Delta x_k + \\ &+ A \sum_{k=1}^n (M''_k - m''_k) \Delta x_k. \end{aligned}$$

ორი უკანასკნელი ჯამი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$ , ამიტომ პირველი ჯამიც მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$  და, მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამ სეგმენტის ყოველი  $x$  წერტილისათვის  $|f(x)| > \alpha$ , სადაც  $\alpha$  დადებითი რიცხვია. მაშინ

$\frac{1}{f(x)}$  ფუნქციაც ინტეგრებადია.

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე  $\lambda$ -დანაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ . აღნიშნოთ  $M_k^*$  და  $m_k^*$  სიმბოლოებით  $\frac{1}{f(x)}$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე. ცხადია, რომ

$$M_k^* - m_k^* = \sup \left| \frac{1}{f(x')} - \frac{1}{f(x'')} \right|,$$

სადაც  $x'$  და  $x''$  წარმოადგენენ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტის ნებისმიერ წერტილებს. მაშასადამე,

$$\begin{aligned} M_k^* - m_k^* &= \sup \frac{|f(x'') - f(x')|}{|f(x')f(x'')|} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sup |f(x'') - f(x')| = \\ &= \frac{1}{\alpha^2} (M_k - m_k), \end{aligned}$$

სადაც  $M_k$  და  $m_k$  აღნიშნავენ შესაბამისად  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე. ამრიგად,

$$\sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

$f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო ამ უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$  და ამიტომ მარცხენა ნაწილიც მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე,  $\frac{1}{f(x)}$  ფუნქცია ინტეგრებადია.

**თეორემა 9.** თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და, ამის გარდა, ამ სეგმენტის ყოველი  $x$ -სათვის  $|g(x)| \geq \alpha$ , სადაც  $\alpha$  დადებითი რიცხვია, მაშინ  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ფუნქციაც ინტეგრებადია.

დამტკიცება. ეს თეორემა წარმოადგენს მე-7 და მე-8 თეორემების შედეგს. მართლაც,  $\frac{1}{g(x)}$  ფუნქცია ინტეგრებადია მე-8 თეორემის ძალით, ხოლო მე-7 თეორემის ძალით ნამრავლი

$$f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

აგრეთვე ინტეგრებადია.



**თეორემა 10.** თუ  $f(x)$  ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ  $|f(x)|$  ფუნქციაც ინტეგრებადია და

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (6.5)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი აღნაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ . თუ აღნიშნავთ  $M_k^*$  და  $m_k^*$  სიმბოლოებით  $|f(x)|$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე, გვექნება

$$M_k^* - m_k^* = \sup | |f(x'')| - |f(x')| |,$$

სადაც  $x'$  და  $x''$  წარმოადგენენ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტის ნებისმიერ წერტილებს. მაგრამ

$$| |f(x'')| - |f(x')| | \leq |f(x'') - f(x')|.$$

ამიტომ

$$M_k^* - m_k^* \leq M_k - m_k,$$

სადაც  $M_k$  და  $m_k$  სიმბოლოებით აღნიშნულია  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრები. მაშასადამე,

$$\sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

$f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობის გამო, ამ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა ნაწილი ნულისაკენ მიისწრაფვის, როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$ . ამიტომ მარცხენა ნაწილიც მიისწრაფვის ნულისაკენ. მაშასადამე,  $|f(x)|$  ფუნქცია ინტეგრებადია.

ვაჩვენოთ ახლა (6.5) უტოლობის მართებულობა. გვაქვს:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k = \int_a^b |f(x)| dx. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

**შენიშვნა.** შეიძლება  $|f(x)|$  ფუნქცია იყოს ინტეგრებადი,  $f(x)$  კი არა. მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = D(x) - \frac{1}{2},$$

სადაც  $D(x)$  წარმოადგენს ღირიხლეს ფუნქციას. ცხადია,  $f(x)$  არა-ინტეგრებადი ფუნქციაა ნებისმიერ  $[a, b]$  სეგმენტზე. მაგრამ  $|f(x)| = \frac{1}{2}$  ყოველ  $x$  წერტილში და ამიტომ  $|f(x)|$  ფუნქცია ინტეგრებადია.

**თეორემა 11.** თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრული  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობიდან გამომდინარეობს,  $g(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობა და

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (6.6)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = f(x) - g(x). \quad (6.7)$$

ცხადია,  $\varphi(x)$  ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტზე ნულისაგან განსხვავდება წერტილთა მხოლოდ სასრულ სიმრავლეზე, ამიტომ იგი ინტეგრებადია და მე-3 თეორემის შედეგის მიხედვით

$$\int_a^b \varphi(x) dx = 0. \quad (6.8)$$

შედეგ: (6.7) ტოლობიდან გვაქვს  $g(x) = f(x) - \varphi(x)$ . მაშასადამე,  $g(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია. ახლა (6.8) ტოლობიდან გვაქვს

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = 0.$$

აქედან ძილება (6.6) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

### § 7. განსაზღვრული ინტეგრალის აღიზიარება

ზემოთ ჩვენ შევისწავლეთ  $[a, b]$  სეგმენტზე შემოსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრალის ცნება. ცხადია, აქ იგულისხმება, რომ  $a < b$ . ახლა განვსაზღვროთ ინტეგრალი, როდესაც  $a \geq b$ .

განსაზღვრა 1. თუ  $a = b$ , მაშინ

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

განსაზღვრა 2. თუ  $a > b$  და  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[b, a]$  სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ მე-6 პარაგრაფში დამტკიცებული თეორემები იმ შემთხვევაში, როდესაც ინტეგრალის ქვედა ზღვარი ნაკლებია ზედა ზღვარზე, მართებულია მაშინაც, როდესაც  $a \geq b$ . მაგალითად, დავამტკიცოთ, რომ თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (7.1)$$

ეს ტოლობა ცხადია, როდესაც  $a = b$ . თუ  $a > b$ , გვექნება

$$\int_b^a [f(x) + g(x)] dx = \int_b^a f(x) dx + \int_b^a g(x) dx.$$

აქედან

$$- \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = - \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

ეს კი წარმოადგენს (7.1) ტოლობას.

თეორემა 19. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, \beta]$  სეგმენტზე და  $a, b, c$  ნებისმიერი რიცხვებია ამ სეგმენტებიდან. მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (7.2)$$

დამტკიცება. ჯერ ვივლით სხმოთ, რომ  $a < c < b$ . შევადგინოთ  $f(x)$  ფუნქციისათვის ინტეგრალური ჯამი, რომელიც შეესაბამება  $[a, b]$  სეგმენტს. რადგანაც ინტეგრებადი ფუნქციის ინტეგრალური ჯამის ზღვარი არ არის დამოკიდებული  $[a, b]$  სეგმენტის დაყოფის წესზე, ამიტომ დაყოფის ერთ-ერთ წერტილად შეგვიძლია ავიღოთ  $c$  წერტილი. ინტეგრალური ჯამი, რომელიც შეესაბამება  $[a, b]$  სეგმენტს, ასე წარმოვადგინოთ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (7.3)$$

სადაც  $\sigma_1$  და  $\sigma_2$  ინტეგრალური ჯამები შეესაბამება  $[a, c]$  და  $[c, b]$  სეგმენტებს. თუ (7.3) ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $\lambda \rightarrow 0$ , მივიღებთ (7.2) ტოლობას.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როდესაც  $a' < b < c$ . ზემოდა-მტკიცებულის თანახმად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ინტეგრალის (7.2) თვისებას ეწოდება ინტეგრალის ადრითიურობა ინტეგრების შუალედის მიმართ.

#### § 8. ინტეგრალის თვისებები, რომლებიც უტოლობებით გამოიხატებიან

თეორემა 13. თუ  $f(x)$  არის არაუარყოფითი ინტეგრებადი ფუნქცია  $[a, \beta]$  სეგმენტზე, ხოლო  $a$  და  $b$  ნებისმიერი რიცხვებია ამ სეგმენტიდან, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0, \text{ როდესაც } a < b,$$

ხოლო

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0, \text{ როდესაც } a > b.$$

დამტკიცება. თუ  $a < b$ , მაშინ უტოლობა  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

უშუალოდ გამოდინარეობს მე-5 თეორემიდან. თუკი  $a > b$ , მაშინ

$$-\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx \geq 0.$$

საიდანაც

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 14. თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქცია იგივეურად ნული არ არის, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \quad (8.1)$$

დასტკიცება. რაკი  $f(x)$  იგივეურად ნული არ არის, ამიტომ  $[a, b]$  სეგმენტში არსებობს ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $f(\xi) > 0$ . მოცემული ფუნქციის უწყვეტობის გამო, არსებობს  $[a, b]$  სეგმენტში მოთავსებული  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტი, რომელიც შეიცავს  $\xi$  წერტილს და  $f(x) > 0$ , როდესაც  $\alpha \leq x \leq \beta$ . აღვნიშნოთ  $m$ -ით  $f(x)$  ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე. ცხადია, რომ  $m > 0$ . შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx,$$

ვინაიდან მე-13 თეორემის თანახმად

$$\int_a^\alpha f(x) dx \geq 0, \quad \int_\beta^b f(x) dx \geq 0.$$

შემდეგ, მე-6 თეორემის ძალით

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx \geq m(\beta - \alpha).$$

მაშასადამე, მართებულია (8.1) უტოლობა.

შედეგი. თუ არაუარყოფითი უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციისათვის  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , მაშინ  $f(x)$  იგივეურად ნულის ტოლია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

§ 9. განსაზღვრული ინტეგრალი როგორც ზედა ზღვრის ფუნქცია.  
პირველყოფილი ფუნქციის არსებობა

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე. 1-ლი თეორემის შედეგის ძალით, ეს ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ  $[a, x]$  სეგმენტზე, სადაც  $a < x \leq b$ . შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (9.1)$$

ცხადია,  $F(x)$  წარმოადგენს  $x$ -ის ფუნქციას. მართებულია შემდეგი თეორემა 15. (9.1) ტოლობით განსაზღვრული  $F(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დამტკიცება. რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე. ვთქვათ,

$$|f(t)| \leq M, \quad \text{როდესაც } a \leq t \leq b.$$

ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტზე ორი ნებისმიერი წერტილი  $x'$  და  $x''$ . ვივულისხმით, რომ  $x' < x''$ , მაშინ

$$\begin{aligned} |F(x'') - F(x')| &= \left| \int_a^{x''} f(t) dt - \int_a^{x'} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| \leq \int_{x'}^{x''} |f(t)| dt \leq M(x'' - x'). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის

$$|F(x'') - F(x')| < \varepsilon,$$

როდესაც  $|x'' - x'| < \frac{\varepsilon}{M}$ . ამით დამტკიცებულია  $F(x)$  ფუნქციის

თანაბარი უწყვეტობა  $[a, b]$  სეგმენტზე.

თეორემა 16. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და უწყვეტია ამ სეგმენტის  $x_0$  წერტილში; მაშინ (9.1) ტოლობით განსაზღვრული  $F(x)$  ფუნქცია დიფერენცირებადია  $x_0$  წერტილში და

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

დამტკიცება. მივცეთ  $x_0$ -ს ნაზრდი  $\Delta x$  ისე, რომ  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ . (9.1) ტოლობის თანახმად

$$F(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt. \quad (9.2)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x_0) dt. \quad (9.3)$$

თუ (9.2) ტოლობას გამოვაკელით წევრ-წევრად (9.3) ტოლობა, გვექნება

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt. \quad (9.4)$$

მემდეგ რაკი  $f(t)$  უწყვეტია  $x_0$  წერტილში, ამიტომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი  $\eta > 0$ , რომ

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

როდესაც  $x_0 - \eta \leq t \leq x_0 + \eta$  და  $a \leq t \leq b$ . მაშინ, თუ გავითვალისწინებთ (9.4) ტოლობას, ნებისმიერი  $\Delta x$ -სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას  $|\Delta x| < \eta$ , გვექნება

$$\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

ე. ი.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0).$$

მაშასადამე,  $F'(x_0) = f(x_0)$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას აქვს პირველყოფილი ფუნქცია.

დამტკიცება. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. მაშინ მე-16 თეორემის თანახმად, ფუნქცია

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

დიფერენცირებადია  $[a, b]$  სეგმენტის ყოველ  $x$  წერტილში და

$$F'(x) = f(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

### § 10. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა

თეორემა 18. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და არსებობს ამ ფუნქციის პირელყოფილი  $F(x)$  ფუნქცია, მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (10.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილება  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ . ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) F'(\xi_k) = (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k),$$

სადაც  $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ . მაშინ

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}).$$

აქედან

$$F(b) - F(a) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

(10.1) ფორმულას ეწოდება ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულა. ამ ფორმულას ხშირად ასე წერენ:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

ამგვარად,  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა დაიწყება იმავე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალის მოძებნამდე. მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) dx.$$



ამოხსნა. ჯერ მოვძებნოთ  $x^2+3x-1$  ფუნქციის ერთ-ერთი პირველყოფილი ფუნქცია. გვაქვს:

$$\int (x^2+3x-1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x.$$

ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის მიხედვით

$$\int_0^1 (x^2+3x-1)dx = \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{6}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_0^\pi \cos x dx$ .

ამოხსნა. გვაქვს:

$$\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+2x^3}$ ,

ამოხსნა. ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულის თანახმად,

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+2x^3} = \left[ \frac{1}{6} \ln(1+2x^3) \right]_0^1 = \frac{1}{6} \ln(1+2 \cdot 1^3) = \frac{1}{6} \ln 3.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_{-\pi}^\pi \sin mx \cos nx dx$ ,

სადაც  $m$  და  $n$  მთელი რიცხვებია.

ამოხსნა. როგორც ვიცით,

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin(m-n)x dx = 0, \end{aligned}$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ ,

სადაც  $m$  და  $n$  მთელი რიცხვებია.

ამოხსნა. თუ  $m=n \neq 0$ , გვექნება

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

თუ  $m \neq n$ ,  $m \neq -n$ , გვექნება

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

დასასრულ, თუ  $m=-n \neq 0$ , მაშინ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = -\pi.$$

ამრიგად,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } m \neq n \text{ და } m \neq -n. \\ \pi, & \text{როდესაც } m = n \neq 0, \\ -\pi, & \text{როდესაც } m = -n \neq 0. \end{cases}$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{როდესაც } m \neq n \text{ და } m \neq -n, \\ \pi, & \text{როდესაც } m = n \neq 0 \text{ ან } m = -n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{როდესაც } m = n = 0. \end{cases}$$

#### § 11. ცვლადის პარამეტრა განსაზღვრულ ინტეგრალში

— ეთქვათ, მოცემულია ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$ . ამ ინტეგრალის გა-

მოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია  $x$  ცვლადი შევცვალოთ ახალი  $t$  ცვლადით, რომელიც  $x$ -თან გარკვეულ დამოკიდებულებაშია. მართებულია შემდეგი

**თეორემა 10.** ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. თუ  $x = \varphi(t)$  ფუნქცია უწყვეტად წარმონებადია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, ამასთანავე:  $a \leq \varphi(t) \leq b$ , როცა  $\alpha \leq t \leq \beta$  და  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ , მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt. \quad (11.1)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $t$  ცვლადის ორი ფუნქცია

$$F(t) = \int_a^{\varphi(t)} f(x) dx, \quad \Phi(t) = \int_\alpha^t f[\varphi(u)]\varphi'(u) du.$$

მე-16 თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned} F'(t) &= f[\varphi(t)]\varphi'(t), \\ F'(t) &= f[\varphi(t)]\varphi'(t). \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$F'(t) = \Phi'(t).$$

მაშასადამე,

$$F(t) = \Phi(t) + C, \quad (11.2)$$

სადაც  $C$  მუდმივია. თუ  $t = \alpha$ , მაშინ  $F(\alpha) = 0$ ,  $\Phi(\alpha) = 0$  და ამიტომ (11.2) ფორმულა გვაძლევს  $0 = 0 + C$ , ე. ი.  $C = 0$ . მაშასადამე,

$$F(t) = \Phi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

გვრძოდ, თუ  $t = \beta$ , მივიღებთ (11.1) ტოლობას.

**მაგალითი 1.** გამოეთვალეთ ინტეგრალი  $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ ,  $a > 0$ .

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $x = a \sin t$ , გვექნება

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t, \quad dx = a \cos t dt.$$

როდესაც  $x = 0$ , მაშინ  $t = 0$ , ხოლო, როდესაც  $x = a$ , მაშინ  $t = \frac{\pi}{2}$ .

მაშასადამე, (11.1) ფორმულის თანახმად

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი:

$$I = \int_0^1 x \sqrt{1+x^2} dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნა  $\sqrt{1+x^2} = t$ . აქედან

$$x = \sqrt{t^2-1}, \quad dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

როდესაც  $x=0$ , მაშინ  $t=1$ , ხოლო, როდესაც  $x=1$ , მაშინ  $t=\sqrt{2}$ . მაშასადამე,

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ ჩასმას  $x = \operatorname{tg} t$ , გვექნება

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}.$$

ინტეგრალის ახალი საზღვრები იქნება 0 და  $\frac{\pi}{4}$ . მაშასადამე,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\operatorname{tg} t)}{1+\operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln \frac{\cos t + \sin t}{\cos t} dt = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)}{\cos t} dt = \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt - \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt. \end{aligned}$$

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ორი უკანასკნელი ინტეგრალი თანატოლია. ამისათვის პირველ მათგანში მოვახდინოთ ჩასმა  $\frac{\pi}{4} - t = x$ . აქედან

დან  $dt = -dx$ , ხოლო ინტეგრალის ახალი ზღვრები იქნება  $\frac{\pi}{4}$  და 0.

მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right) dt = - \int_{\pi/4}^0 \ln \cos s ds = \int_0^{\pi/4} \ln \cos s ds.$$

ამიტომ

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

### § 12. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

თუ  $u(x)$  და  $v(x)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ მართებულია ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა

$$\int_a^b uv' dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'v dx. \quad (12.1)$$

მართლაც, როგორც ვიცით

$$(uv)' = uv' + u'v.$$

თუ მოვახდენთ ამ ტოლობის ორივე ნაწილის ინტეგრებას  $a$ -დან  $b$ -მდე, გვექნება

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b uv' dx + \int_a^b u'v dx. \quad (12.2)$$

მაგრამ

$$\int_a^b (uv)' dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) = [u(x)v(x)]_a^b.$$

ამიტომ (12.2) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\int_a^b uv' dx + \int_a^b u'v dx = [u(x)v(x)]_a^b.$$

აქედან მიიღება (12.1) ფორმულა.

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა ზოგჯერ საშუალებას გვაძლევს რთული სახის ინტეგრალის გამოთვლა დაეყვანოთ უფრო მარტივი სახის ინტეგრალის გამოთვლამდე. (12.1) ფორმულა მოკლედ ასე ჩაეწერათ:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du. \quad (12.1)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$u = x, \quad dv = \sin x \, dx.$$

აქედან  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$ . მაშასადამე, (12.1) ფორმულის მიხედვით

$$I = [-x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = \pi.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx.$$

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$u = x^2, \quad dv = \cos x \, dx,$$

გვექნება

$$du = 2x \, dx, \quad v = \sin x.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით

$$I = [x^2 \sin x]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -2 \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = -2\pi.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$J = \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx.$$

ამოხსნა. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

აქედან

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \sqrt{1+x^2}.$$

მაშასადამე, ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენება გვაძლევს

$$I = [\sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x]_0^1 - \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} -$$

$$- [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]_0^1 = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \ln(1 + \sqrt{2}).$$

ახლა განვაზოგადოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა. ვთქვათ,  $u(x)$  და  $v(x)$  ფუნქციებს აქვთ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტი წარმოებულები  $n+1$  რიგამდე ჩათვლით. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის მიხედვით

$$\int_a^b uv^{(n+1)} dx = [uv^{(n)}]_a^b - \int_a^b u'v^{(n)} dx,$$

$$- \int_a^b u'v^{(n)} dx = -[u''v^{(n-1)}]_a^b + \int_a^b u''v^{(n-1)} dx,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(-1)^n \int_a^b u^{(n)}v' dx = (-1)^n [u^{(n)}v]_a^b - (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}v dx.$$

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$\int_a^b uv^{(n+1)} dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \dots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b +$$

$$+ (-1)^{n+1} \int_a^b v u^{(n+1)} dx. \tag{12.2}$$

ეს არის ნაწილობითი ინტეგრების განზოგადებული ფორმულა.

§ 13. საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა

თეორემა, რომელსაც ქვემოთ დავამტკიცებთ, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თეორემათაგანია მათემატიკაში.

თეორემა 20. თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $g(x)$  ამ სეგმენტზე ნიშანს არ იცვლის, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

სადაც  $m \leq \mu \leq M$ , ხოლო  $m$  და  $M$  წარმოადგენენ  $f(x)$  ფუნქციის ქვედა და ზედა საზღვრებს  $[a, b]$  სეგმენტზე.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის, ვიგულისხმობთ რომ  $g(x) \geq 0$ . თუ გავამრავლებთ

$$m \leq f(x) \leq M$$

უტოლობებს  $g(x)$  ფუნქციაზე, მივიღებთ

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

მე-5 თეორემის თანახმად გვექნება

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx. \quad (13.1)$$

რაკი  $g(x) \geq 0$ , ამიტომ

$$\int_a^b g(x) dx \geq 0.$$

თუ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, მაშინ

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$$

და თეორემის მართებულობა ცხადია. ახლა ვთქვათ,  $\int_a^b g(x) dx > 0$ .

მაშინ (13.1) უტოლობებიდან მივიღებთ

$$m \leq \int_a^b f(x)g(x) dx : \int_a^b g(x) dx \leq M.$$

ამრიგად, ამ უტოლობათა შუა წევრი მოთავსებულია  $m$  და  $M$  რიცხვებს შორის. თუ ამ წევრს აღვნიშნავთ  $\mu$ -თი, გვექნება

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx. \quad (13.2)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ არსებობს ამ სეგმენტში ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ  $f(\xi) = \mu$  და (13.2) ფორმულა მიიღებს სახეს:



$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \quad (13.3)$$

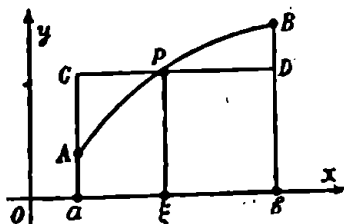
(13.2) და (13.3) ფორმულებს ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის პირველი ინტეგრალური ფორმულა.

**შედეგი.** თუ  $f(x)$  უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტში არსებობს ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi). \quad (13.4)$$

ეს ტოლობა მიიღება (13.3) ტოლობიდან, თუ  $[a, b]$  სეგმენტზე  $g(x) = 1$ .

(13.4) ფორმულის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს:  $y = f(x)$  წირზე მოიძებნება ისეთი წერტილი, რომ მრუდწირული  $abBA$  ტრაპეციის ფართობი ტოლია  $abBC$  მართკუთხედის ფართობისა (ნახ. 82). მაგრამ ასეთი  $\xi$  წერტილის მოძებნა პრაქტიკულად საზოგადოდ არ ხერხდება.



ნახ. 82.

§ 14. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა

**თეორემა 21.** თუ  $f(x)$  და  $g'(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $g(x)$  კლებადია და  $g(b) \geq 0$ , მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_0^\xi f(x) dx.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე დანაწილება

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n] \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

შევადგინოთ ჯამები

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) g(x_{k-1}) \Delta x_k,$$

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^n M_k g(x_{k-1}) \Delta x_k, \quad \underline{s} = \sum_{k=1}^n m_k g(x_{k-1}) \Delta x_k.$$

სადაც  $M_k$  და  $m_k$  წარმოადგენენ შესაბამისად  $f(x)$  ფუნქციის ზედა და ქვედა საზღვრებს  $[a, b]$  სეგმენტზე, ხოლო

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

რადგანაც  $[a, b]$  სეგმენტზე  $g(x) \geq 0$ , ამიტომ

$$\underline{s} \leq \sigma \leq \bar{s}. \quad (14.2)$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$\bar{s} - \underline{s} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) g(x_{k-1}) \Delta x_k \leq g(a) \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$$

და რაკი  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{s} - \underline{s}) = 0, \quad (14.3)$$

სადაც

$$\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}.$$

(14.2) უტოლობებისა და (14.3) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{s} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{s} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (14.4)$$

საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის თანახმად

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx = \mu_k \Delta x_k, \quad m_k \leq \mu_k \leq M_k.$$

აღვილი შესამჩნევია, რომ

$$\underline{s} \leq \sigma^* \leq \bar{s},$$

სადაც

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^n \mu_k g(x_{k-1}) \Delta x_k.$$

თუ გავეითავალისწინებთ (14.4) ტოლობებს, გვექნება

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma^* = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$u_k = \mu_k \Delta x_k, \quad v_k = g(x_{k-1}), \quad s_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k.$$

$$A = \min_{a < x < b} \int_a^x f(t) dt, \quad B = \max_{a < x < b} \int_a^x f(t) dt.$$

მაშინ

$$\sigma_k^* = \sum_{k=1}^n u_k v_k.$$

რადგანაც

$$s_k = \int_a^{x_k} f(t) dt \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

ამიტომ

$$A \leq s_k \leq B.$$

მაშასადამე, აბელის უტოლობის თანახმად

$$A v_1 \leq \sigma^* \leq B v_1,$$

ე. ი.

$$A g(a) \leq \sigma^* \leq B g(a).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$A g(a) \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq B g(a),$$

ანუ

$$A \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x) g(x) dx \leq B.$$

შემდეგ რაკი

$$A \leq \int_a^b f(x) dx \leq B$$

და  $\int_a^x f(t) dt$  უწყვეტი ფუნქციაა  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ იგი

მიიღებს ყველა მნიშვნელობას  $A$  და  $B$ -ს შორის. მაშასადამე,  $[a, b]$  სეგმენტში არსებობს ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x) g(x) dx = \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (14.5)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(14.5) ფორმულას ეწოდება ბონეს (Bonnet) ფორმულა.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 22. თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $g(x)$  ზრდადია და  $g(a) \geq 0$ , მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(b) \int_a^{\xi} f(x) dx. \quad (14.6)$$

თეორემა 23. თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ინტეგრებადი ფუნქციებია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $g(x)$  მონოტონურია. მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx. \quad (14.7)$$

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $g(x)$  კლებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე. განვიხილოთ ფუნქცია

$$\varphi(x) = g(x) - g(b).$$

ცხადია, რომ  $\varphi(x)$  ფუნქცია კლებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $\varphi(x) \geq 0$ . ბონეს თეორემის თანახმად  $[a, b]$  სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც ისეთი  $\xi$  წერტილი, რომ

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx,$$

ანუ

$$\int_a^b f(x) [g(x) - g(b)] dx = [g(a) - g(b)] \int_a^{\xi} f(x) dx.$$

აქედან

$$\int_a^b f(x)g(x)dx - g(b) \int_a^{\xi} f(x)dx - g(b) \int_{\xi}^b f(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx - g(b) \int_a^{\xi} f(x)dx;$$

საიდანაც მიიღება (14.7) ტოლობა.

თითოეულს (14.5), (14.6) და (14.7) ფორმულებიდან ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა.

§ 15. ტვილორის ფორმულის დამატებითი წევრის გამოსახულება განსაზღვრული ინტეგრალით

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და აქვს უწყვეტი წარმოებულები  $n+1$  რიგამდე ჩათვლით. (12.2) ფორმულაში ვიგულისხმობთ

$$u = f(x), v = (b-x)^n.$$

გვაქვს:

$$v' = -n(b-x)^{n-1}, v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \dots,$$

$$v^{(n-1)} = (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 3 \cdot 2 (b-x), v^{(n)} = (-1)^n n!, v^{(n+1)} = 0.$$

ამიტომ (12.2) ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$0 = [(-1)^n n! f(x) - (-1)^{n-1} n(n-1) \dots 3 \cdot 2 (b-x) f'(x) + (-1)^{n-2} n(n-1) \dots 3(b-x)^2 f''(x) - \dots + (-1)^n (b-x)^n f^{(n)}(x)]_a^b + (-1)^{n+1} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx.$$

აქედან, ჩასმის შესრულების შემდეგ მივიღებთ

$$0 = (-1)^n [n! f(b) - n! f(a) - n(n-1) \dots 3 \cdot 2 (b-a) f'(a) - n(n-1) \dots 3 (b-a)^2 f''(a) - \dots - (b-a)^n f^{(n)}(a)] + (-1)^{n+1} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx.$$

საიდანაც გვექნება

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (b-a) + \frac{f''(a)}{2!} (b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + R_n,$$

სადაც

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x) dx.$$

ეს არის ტელორის ფორმულა დამატებითი წევრით განსაზღვრულ ინტეგრალის სახით.

თუ  $x_0$ -ს აღვნიშნავთ  $x_0$ -ით,  $a$ -ს კი  $x_0$ -ით, გვექნება

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n,$$

სადაც

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

ჩაღვინავ  $(b-x)^n$  ფუნქცია ნიშანს არ იცვლის  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ  $R_n$ -თვის შეგვიძლია გამოვიყენოთ საშუალო მნიშვნელობის ზირველი თეორემა, რაც მოგვცემს

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b (b-x)^n dx, \quad a < \xi < b.$$

აქედან

$$R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

ეს გამოსახულება წარმოადგენს დამატებით წევრს ლაგრანჟის სახით.

### § 16. უმოკლესი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx.$$

სადაც  $k$  მთელი დადებითი რიცხვია.

ამოხსნა. ვიგულისხმობთ, რომ

$$\sin^k x = u, \quad \sin x dx = du.$$

მაშინ

$$dx = (k-1) \sin^{k-2} x \cos x dx, \quad v = -\cos x.$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა გადასვლას

$$\begin{aligned} I_k &= [-\sin^{k-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (k-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (k-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (k-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{k-2} x dx - \\ &\quad - (k-1) \int_0^{\pi/2} \sin^k x dx. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$I_k = (k-1)I_{k-2} - (k-1)I_k.$$

აქედან

$$I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}. \quad (16.1)$$

ამ ფორმულის საშუალებით  $I_k$  ინტეგრალის გამოთვლა დაიყვანება  $I_{k-2}$  ინტეგრალის გამოთვლამდე. ესაა  $I_k$  ინტეგრალის რეკურსიის ფორმულა.

(16.1) ფორმულის მიმდევრობითი გამოყენებით მივიღებთ  $I_0$  ან  $I_1$  ინტეგრალს, იმისდა მიხედვით,  $k$  ლუწია თუ კენტი.

თუ  $k$  ლუწია,  $k=2n$ , მაშინ (16.1) ფორმულის თანხმად ვკვ-  
ნება

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2},$$

$$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4},$$

...

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

მიღებული ტოლობების წევრ-წევრად გამრავლება მოგვცემს

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (16.2)$$

თუ  $k$  კენტია,  $k=2n+1$ , მაშინ (16.1) ფორმულის მიმდევრობით გამოყენება, ანალოგიურად წინა შემთხვევისა, მოგვცემს

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1}. \quad (16.3)$$

ვალე-პუსენის მიხედვით შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$2n!! = 2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 3 \cdot 1.$$

მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{როდესაც } m \text{ კენტია,} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } m \text{ ლუწია.} \end{cases}$$

ახლა განვიხილოთ ინტეგრალი  $\int_0^{\pi/2} \cos^m x dx$ . თუ შემოვიღებთ

ჩასმას  $x = \frac{\pi}{2} - t$ , მაშინ  $dx = -dt$ . ინტეგრალის ახალი ზღვრები

იქნება  $\frac{\pi}{2}$  და 0. მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m x dx = - \int_{\pi/2}^0 \cos^m \left( \frac{\pi}{2} - t \right) dt = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx.$$

უკანასკნელი ინტეგრალის გამოთვლა ვიცით.

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx,$$

სადაც  $m$  და  $n$  მთელი დადებითი რიცხვებია.

ამოხსნა. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის ძალით

$$I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x (\cos^n x \sin x) dx = - \left[ \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/2} +$$



$$+ \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx = \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^n x dx -$$

$$- \frac{m-1}{n+1} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx.$$

ამრიგად,

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{n+1} I_{m-2,n} - \frac{m-1}{n+1} I_{m,n}.$$

აქედან გვაქვს:

$$I_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}. \quad (16.4)$$

ანალოგიურად მივიღებთ

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}. \quad (16.5)$$

(16.4) და (16.5) წარმოადგენენ დაყვანის ფორმულებს.

თუ ჩავატარებთ ისეთივე მსჯელობებს, როგორც პირველ მაგალითში, გვექნება

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!} \frac{\pi}{2}, & \text{როდესაც } m \text{ და } n \\ & \text{ლუწია,} \\ \frac{(m-1)!! (n-1)!!}{(m+n)!!}, & \text{როდესაც } m \text{ ან } n \text{ ორივე} \\ & \text{კენტია.} \end{cases}$$

თუ  $m$  და  $n$  ორივე კენტია:  $m=2p+1$ ,  $n=2q+1$ , მაშინ უკანასკნელი ფორმულა მარტივდება:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

და მტკიცება. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი  $\int \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$

არ მოიძებნება ელემენტარულ ფუნქციათა კლასში. მიუხედავად ამისა, მოცემული  $I$  ინტეგრალი მარტივად გამოითვლება ხელოვნური გზით. მართლაც,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

უკანასკნელ შესაყარებში მოვახდინოთ ჩასმა  $x = \pi - t$ , მაშინ  $dx = -dt$  და  $t$  იცვლება  $\frac{\pi}{2}$ -დან 0-მდე. ამიტომ

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx - \int_{\pi/2}^0 \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx +$$

$$+ \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx,$$

სადაც  $p$  და  $q$  მთელი დადებითი რიცხვებია.

ამოხსნა. თუ შემოვიღებთ ჩასმას  $x = \sin^2 z$ , გვექნება

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} z \cos^{2q+1} z dz = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

§ 17. ვალისის ფორმულა

ვთქვათ,  $x$  მთელი დადებითი რიცხვია და  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . მაშინ

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx.$$

თუ ინტეგრალებს შევცვლით მათი რიცხვითი მნიშვნელობებით, გვექნება

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

ამ უტოლობებიდან გვაქვს:

$$\left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$$

მაშასადამე,

$$\frac{\pi}{2} = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{2n + \alpha_n}$$

სადაც  $0 < \alpha_n < 1$ . აქედან ვღებულობთ.

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \frac{1}{n} \right\}.$$

ეს არის ვალისის (Wallis) ფორმულა.

§ 18. ლუწი და კენტი ფუნქციების ინტეგრება

ვთქვათ,  $a$  ნებისმიერი დადებითი რიცხვია და  $[-a, a]$  სეგმენტზე  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია. მაშინ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია აგრეთვე  $[-a, 0]$  და  $[0, a]$  სეგმენტებზე. ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

თუ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველ ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას  $x = -t$ , გვექნება

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= - \int_a^0 f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = \\ &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

თუ  $f(x)$  კენტი ფუნქციაა, გვაქვს

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \tag{18.1}$$

ხოლო, თუ  $f(x)$  ლუწი ფუნქციაა, მაშინ

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \tag{18.2}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალები:

$$ა) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x dx; \quad ბ) \int_a^a \sqrt{a^2 - x^2} dx; \quad გ) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^6 x dx.$$

ამოხსნა. ა)  $\sin^7 x$  ფუნქცია კენტია, ამიტომ (18.1) ფორმულის თანახმად

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x dx = 0.$$

ბ)  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ფუნქცია ლუწია და ამიტომ (18.2), ფორმულის ძალით

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}.$$

გ)  $\sin^6 x$  ფუნქცია ლუწია, ამიტომ

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^6 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = 2 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{16}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^4 x + 3e^{x^2} \sin 5x) dx.$$

ამოხსნა.  $I$  ინტეგრალი ასე გადავწეროთ

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 x dx + 3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{x^2} \sin 5x dx.$$

რადგანაც  $\cos^4 x$  ლუწი ფუნქციაა,  $e^{x^2} \sin 5x$  კი კენტი, ამიტომ (18.1) და (18.2) ფორმულების თანახმად

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

### კითხვები

1. რა ამოცანებს მიყვავართ განსაზღვრული ინტეგრალის ცნებაზე?

2. რას ეწოდება მოცემული ფუნქციის განსაზღვრული ინტეგრალი  $[a, b]$  სეგმენტზე?

3. რას ნიშნავს, რომ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  სემენტზე?

4. ჩამოაყალიბეთ ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

5. რა თვისებები აქვს განსაზღვრულ ინტეგრალს?

6. როგორ გამოითქმის საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემა? მეორე თეორემა?

**ხ ა გ ა რ ჯ ი შ ი**

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

1.  $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx.$  პასუხი:  $\frac{7}{3}.$

2.  $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$  პასუხი:  $33\frac{1}{3}.$

3.  $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx.$  პასუხი:  $\frac{16}{3}.$

4.  $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}.$  პასუხი:  $\arctg \frac{2}{9}.$

5.  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$  პასუხი:  $\ln \frac{4}{3}.$

6.  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$  პასუხი:  $\frac{\pi}{2}.$

7.  $\int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^6+1}}.$  პასუხი:  $\frac{1}{3} \ln(1+\sqrt{2}).$

ცვლადთა გარდაქმნის გამოყენებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

8.  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$  პასუხი:  $4-2\ln 3.$

$$9. \int_3^{27} \frac{(x-2)^{2/3}}{3+(x-2)^{2/3}} dx. \quad \text{პასუხი: } 8 + \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi.$$

$$10. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx. \quad \text{პასუხი: } 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$11. \int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}. \quad \text{პასუხი: } \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a^2\sin^2 t}. \quad \text{პასუხი: } \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}.$$

$$13. \int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}. \quad \text{პასუხი: } \frac{1}{5} \ln 114.$$

$$14. \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}. \quad \text{პასუხი: } \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

$$15. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \quad \text{პასუხი: } \frac{2+\pi}{4}.$$

$$16. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx. \quad \text{პასუხი: } \frac{\pi}{16}.$$

$$17. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}. \quad \text{პასუხი: } \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

18. დაამტკიცეთ, რომ  $[0, 1]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობები

$$ა) \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx;$$

$$ბ) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

19. დაამტკიცეთ, რომ თუ  $f(x)$  ლუწი და ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ ინტეგრალი  $\int_0^x f(t)dt$  წარმოადგენს კენტ ფუნქციას, ხოლო თუ  $f(x)$  კენტია, მაშინ აღნიშნული ინტეგრალი ლუწი ფუნქციაა.

20. ინტეგრალში  $\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx$  მოახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა  $t = \sin x$ .

$$\begin{aligned} \text{პასუხი: } & \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt + \\ & + \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt. \end{aligned}$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

21.  $\int_0^1 x e^{-x} dx$  . . . . . პასუხი:  $1 - \frac{2}{e}$ .

22.  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ . . . . . პასუხი:  $\frac{\pi}{2} - 1$ .

23.  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$  . . . . . პასუხი:  $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .

24.  $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$  . . . . . პასუხი:  $\pi^3 - 6\pi$ .

25.  $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$ . . . . . პასუხი:  $\frac{e\pi - 2}{5}$ .

26.  $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$ . . . . . პასუხი:  $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$27. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx. \quad \text{პასუხი: } \frac{35\pi}{125}.$$

$$28. \int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx. \quad \text{პასუხი: } \frac{16}{35}.$$

სხვადასხვა მაგალითები

29. მოძებნეთ:

$$a) \frac{d}{da} \int_a^b \cos x^2 dx; \quad b) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

$$\text{პასუხი: } a) -\cos^2 a^2; \quad b) \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}.$$

30. დამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \sin t^2 dt = 0.$$

31. დამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt; \quad \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt \right\} = 1.$$

32. ვთქვათ,  $f(x)$  უწყვეტი დადებითი ფუნქციაა. დამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$\varphi(x) = \int_0^x t f(t) dt : \int_0^x f(t) dt$$

ზრდადია, როდესაც  $x > 0$ .

33. ვთქვათ,  $f(x)$  უწყვეტია  $[0, +\infty[$  შუალედში და  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . დამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A.$$

34. ვთქვათ,

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt.$$

დამტკიცეთ, რომ  $|f(x)| < \frac{2}{x}$ , როდესაც  $x > 0$ .



მითითება. შემოიღეთ აღნიშვნა  $x^{\pm} = x$  და გამოიყენეთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემა.

§ 19. ინტეგრალი უსასრულო ზღვრებით

მათემატიკური ანალიზის მრავალი საკითხის შესწავლისას საჭიროა ინტეგრალის ცნების განზოგადება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც ინტეგრების ზღვრებიდან ერთი მინც უსასრულოა.

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $[a, +\infty[$  შუალედში და ინტეგრებადია ყოველ  $[a, x]$  სეგმენტზე, სადაც  $x$  ნებისმიერი  $a$ -ზე მეტი რიცხვია. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (19.1)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი  $a$ -დან  $+\infty$ -მდე და აღინიშნება სიმბოლოთ

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (19.2)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ (19.2) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციას ვუწოდებთ ინტეგრებადს  $[a, +\infty[$  შუალედში.

თუ (19.1) ზღვარი არ არსებობს ანდა უსასრულოა, მაშინ ვიტყვი, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  განშლადია.

თუ  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ  $[a, x]$  სეგმენტზე და არსებობს ამ ფუნქციის პირველყოფილი  $F(x)$  ფუნქცია  $[a, +\infty[$  შუალედში, მაშინ ინტეგრალის  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  არსებობისა-

თვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ არსებობდეს  $F(+\infty)$ , ე. ი. არსებობდეს  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ . ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = [F(x)]_a^{+\infty} \quad (19.3)$$

ახლა ვთქვათ, რომ  $]-\infty, a]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია ყოველ  $[l, a]$  სეგმენტზე, სადაც  $l$  ნებისმიერი  $a$ -ზე ნაკლები რიცხვია. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{l \rightarrow -\infty} \int_l^a f(x) dx, \quad (19.4)$$

მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება  $f(x)$  ფუნქციის არასაკუთრივი ინტეგრალი  $-\infty$ -დან  $a$ -მდე და აღინიშნება სიმბოლოთი

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx. \quad (19.5)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვი, რომ (19.5) ინტეგრალი კრებადია, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციას ვუწოდებთ ინტეგრებადს  $]-\infty, a]$  შუალედში. თუკი (19.4) ზღვარი არ არსებობს ან უსასრულოა, მაშინ ვიტყვი, რომ

ინტეგრალი  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  განშლადია.

დასასრულ, ჩვენ ვიტყვი, რომ  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია ამ შუალედში, თუ კრებადია ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx \quad \text{და} \quad \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

მათ ჯამს ეწოდება ინტეგრალი  $-\infty$ -დან  $+\infty$ -მდე  $f(x) dx$ -დან:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$ , სადაც

$$a > 0, \quad b > 0.$$

ამოხსნა. როგორც ვიცით,  $\frac{1}{a^2 + b^2 x^2}$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია  $[0, +\infty[$  შუალედში არის

$$F(x) = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$F(0) = 0, \quad F(+\infty) = \frac{\pi}{2ab}.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{\pi}{2ab}.$$

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ რომ ინტეგრალი  $\int_0^{+\infty} e^{ax} dx$  განშ-

ლადია, თუ  $a > 0$ .

დამტკიცება. გვაქვს:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{ax} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{ax} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{a} e^{ax} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a} e^{at} - \frac{1}{a} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ , სადაც

$a > 0$ , კრებადია, როდესაც  $\alpha > 1$  და განშლადია, როდესაც  $\alpha \leq 1$ .

დამტკიცება. თუ  $\alpha \neq 1$ , მაშინ

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{როდესაც } \alpha < 1, \\ \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{როდესაც } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

თუ  $\alpha = 1$ , მაშინ

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\ln t - \ln a) = +\infty.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როდესაც  $\alpha > 1$  და განშლადია, როდესაც  $\alpha \leq 1$ .

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ პუასონის (Poisson) ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

ამოხსნა. ჯერ დავამტკიცოთ ამ ინტეგრალის კრებადობა. ამისათვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t) = (1+t)e^{-t}.$$

ადვილი დასამტკიცებელია, რომ ამ ფუნქციას აქვს უდიდესი მნიშვნელობა  $t=0$  წერტილში. ცხადია,  $f(0)=1$ . მაშასადამე, თუ  $x \neq 0$ , გვექნება

$$f(x^2) = (1+x^2)e^{-x^2} < 1, \quad f(-x^2) = (1-x^2)e^{x^2} < 1.$$

აქედან ვღებულობთ

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}. \quad (19.6)$$

ცხადია, ნებისმიერი დადებითი  $t$  რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_0^t e^{-x^2} dx < \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

აქედან გამომდინარეობს  $I$  ინტეგრალის არსებობა.

ახლა გამოეთვალოთ  $I$  ინტეგრალი. ამისათვის (19.6) უტოლობების ყველა წევრი ავამაღლოთ  $n$  ხარისხში ( $n$ —მთელი დადებითი რიცხვია), გვექნება

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n}. \quad (19.7)$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx > \sqrt{n} \int_0^1 e^{-nx^2} dx.$$

მაშასადამე, (19.7) უტოლობათა ძალით

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx > \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx. \quad (19.8)$$

ინტეგრალში  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$  მოვახდინოთ ჩასმა  $x = \sin t$ , გვექნება

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

ამრიგად (19.8) უტოლობის თანახმად

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx > \sqrt{n} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (19.9)$$

ახლა ინტეგრალში  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$  მოვახდინოთ ჩასმა  $x = \operatorname{tg} t$ , გვექნება

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (19.10)$$

(19.9) და (19.10) თანაფარდობათა ძალით, (19.7) უტოლობებიდან ვეპქვს

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}.$$

აქედან

$$\begin{aligned} \frac{n}{2n+1} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &< \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx < \\ &< \frac{2n}{2n-1} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n} \right] \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (19.11)$$

ვალისის ფორმულის თანახმად

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\sqrt{n}} \right] &= \sqrt{\pi}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sqrt{n} \right] &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

თუ (19.11) უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $n \rightarrow \infty$  და გავითვალისწინებთ (19.12) ტოლობებს, გვექნება

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (19.13)$$

ამ ინტეგრალს გამოყენება აქვს ალბათობათა თეორიაში.

## § 30. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი

როგორც ზემოთ ვნახეთ, თუ პირველყოფილი ფუნქცია ცნობილია, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ან განშლადობის საკითხის შესწავლა ადვილია. მაგრამ, როდესაც პირველყოფილი უმაღლესი ტრანსცენდენტური ფუნქციაა, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობისა და განშლადობის საკითხის შესწავლისათვის უნდა მივმართოთ სხვა გზებს. ამ პარაგრაფში შევისწავლით რამდენიმე კრიტერიუმს, რომლებიც საშუალებას მოგვცემს გამოვარკვიოთ არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობა ან განშლადობა.

თეორემა 24. ვთქვათ,  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით

ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე,  $t > a$ . ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთ რიცხვი  $T > a$ , რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T, t'' > T.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქცია

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

პირობის თანახმად  $F(t)$  ფუნქცია სასრულია  $t$  ცვლადის ყოველი შნიშვნელობისათვის  $[a, +\infty[$  შუალედში. როგორც ვიცით,  $F(t)$  ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როდესაც  $t \rightarrow +\infty$ , აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი რიცხვი  $T > a$ , რომ

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T, t'' > T.$$

მაგრამ

$$F(t'') - F(t') = \int_a^{t''} f(x) dx - \int_a^{t'} f(x) dx = \int_{t'}^{t''} f(x) dx.$$

მაშასადამე,

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > T, t'' > T.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25. ვთქვათ,  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $f(x)$  კლებადია  $[a, +\infty[$  შუალედში და  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . თუ

ინტეგრალი  $\int_a^t g(x) dx$  შემოსაზღვრულია  $[a, +\infty[$  შუა-

ლედში, მაშინ კრებადია ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ .

დამტკიცება. ვთქვათ,

$$K = \sup_{a < t < +\infty} \left| \int_a^t g(x) dx \right|.$$

რადგანაც  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ , ამიტომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის

მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $N > a$ , რომ

$$f(x) < \frac{\varepsilon}{2K}, \text{ როდესაც } x > N.$$

განვიხილოთ ახლა ორი ნებისმიერი რიცხვი  $t' > N$  და  $t'' > N$ , სადაც  $t' < t''$ . ბონეს თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^{t''} f(x)g(x) dx \right| &= \left| f(t') \int_{t'}^{t''} g(x) dx \right| = \\ &= \left| f(t') \int_a^{t''} g(x) dx - \int_a^{t'} g(x) dx \right| \leq 2K f(t') < \varepsilon. \end{aligned}$$

მაშასადამე, 24-ე თეორემის თანახმად ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$

კრებადია და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ ,

სადაც  $\alpha > 0$ , კრებადია, თუ  $\alpha > 0$ .

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad g(x) = \sin x.$$

კადგანაც

$$\left| \int_a^t g(x) dx \right| = \left| -\cos t + \cos a \right| \leq 2.$$

ამიტომ

$$\sup_{a < t < \infty} \left| \int_a^t g(x) dx \right| \leq 2.$$

ამის ვარდა,  $f(x)$  ფუნქცია კლებადია  $[a, +\infty]$  შუალედში და  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . მაშასადამე, 25-ე თეორემის თანახმად ინტეგრალი

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ კრებადია.}$$

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$  კრება-

და, როდესაც  $\alpha > 0$ .

**თეორემა 26.** ვთქვათ,  $[a, +\infty]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია რიმა-ნის აზრით. ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $g(x)$  მონოტონურია და შემოსაზღვრული  $[a, +\infty]$  შუალედში. თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებადია, მაშინ

$$\text{კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი } \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

დამტკიცება. მე-18 თეორემის თანახმად



$$\int_{t'}^{t''} f(x) g(x) dx = g(t') \int_{t'}^{\xi} f(x) dx + g(t'') \int_{\xi}^{t''} f(x) dx. \quad (20.1)$$

სადაც  $a \leq t' < \xi < t''$ . ვთქვათ,

$$K = \sup_{a \leq x < +\infty} |g(x)|.$$

რადგანაც ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებადია, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი,  $N > a$ , რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2K}, \text{ როდესაც } t' > N, t'' > N.$$

ასეთი  $t'$  და  $t''$  რიცხვებისათვის, (20.1) ტოლობის თანახმად გვექნება

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^{t''} f(x) g(x) dx \right| &\leq |g(t')| \cdot \left| \int_{t'}^{\xi} f(x) dx \right| + \\ &+ |g(t'')| \cdot \left| \int_{\xi}^{t''} f(x) dx \right| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

მაშასადამე, 24-ე თეორემის თანახმად, ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  კრებადია. თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 27.** ვთქვათ,  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული არაუარყოფითი  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, x]$  სეგმენტზე

და  $f(x) \leq g(x)$ ,  $a \leq x < +\infty$ . თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$

კრებადია, მაშინ კრებადია ინტეგრალიც  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

დამტკიცება. განვიხილოთ ფუნქციები

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad G(t) = \int_a^t g(x) dx, \quad a \leq t < +\infty.$$

ცხადია, რომ

$$F(t) \leq G(t), \quad a \leq t < +\infty.$$

ამის გარდა,  $F(t)$  და  $G(t)$  ფუნქციები ზრდადია  $|a, +\infty|$  შუალედში. პირობის ძალით არსებობს  $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t)$ , ამიტომ იარსებებს

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t), \text{ ე. ი. კრებადია ინტეგრალი } \int_a^{+\infty} f(x) dx. \text{ თეორემა დამტკიცებულია.}$$

შედეგი. თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  განშლადია, მაშინ განშლადია ინტეგრალიც  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ .

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+2^x)}$$

კრებადია  $\alpha$ -ს ყველა მნიშვნელობისათვის.

დამტკიცება. ცხადია, თუ  $x \geq 1$  და  $\alpha \geq 0$ , მაშინ

$$\frac{1}{x^\alpha(1+2^x)} < \frac{1}{2^x}.$$

რადგანაც ინტეგრალი  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2^x}$  კრებადია, ამიტომ 27-ე თეორემის

თანახმად კრებადია  $I$  ინტეგრალიც.

ახლა ვთქვათ,  $\alpha < 0$ . ტეილორის ფორმულის თანახმად

$$2^x = e^{x \ln 2} = 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln 2)^k}{k!} + R_k.$$

სადაც

$$R_k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\theta x \ln 2} \quad 0 < \theta < 1.$$

მაშასადამე,

$$\frac{1}{x^\alpha (1+2^x)} < \frac{k!}{x^\alpha (x \ln 2)^k}, \quad x \geq 1.$$

ავილოთ ისეთი  $k$ , რომ  $k + \alpha > 1$ . მაშინ ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (x \ln 2)^k}$$

კრებადია და, მაშასადამე, კრებადი იქნება  $I$  ინტეგრალიც. ამრიგად, კრებადია  $I$  ინტეგრალი  $\alpha$ -ს ყველა მნიშვნელობისათვის

მაგალითი 3. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + a^2}{x^2 \sqrt{x}} dx$$

განშლადია

დამტკიცება. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 \sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

შეგრამ მე-18 პარაგრაფის მე-3 მაგალითის მიხედვით ინტეგრალი

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

განშლადია, ამიტომ  $I$  ინტეგრალიც განშლადია.

### § 21. აბსოლუტურად კრებადი ინტეგრალები

თეორემა 28. თუ  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ

$(a, \xi)$  სეგმენტზე და ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  კრება-

დია, მაშინ კრებადია აგრეთვე ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

და მართებულია უტოლობა

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (21.1)$$

დამტკიცება. რაკი  $|f(x)|$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, +\infty[$  შუალედში, ამიტომ 24-ე თეორემის თანახმად ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი რიცხვი  $N > a$ , რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } t' > N, t'' > N.$$

მაგრამ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right|.$$

მაშასადამე, როდესაც  $t' > N, t'' > N$ , გვექნება

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

აქედან, 24-ე თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობა  $[a, +\infty[$  შუალედში. შემდეგ, თუ უტოლობაში

$$\left| \int_a^t f(x) dx \right| \leq \int_a^t |f(x)| dx$$

ვადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $t \rightarrow +\infty$ , მივიღებთ (21.1) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ,

სადაც  $a > 0$ , კრებადია, ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty.$$

დამტკიცება. მოცემული ინტეგრალის კრებადობა ზემოთ დავამტკიცეთ. ახლა დავუშვათ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  კრებადია, მაშინ 27-ე თეორემის ძალით კრებადი იქნება ინტეგრალიც  $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ , ვინაიდან  $|\sin x| \geq \sin^2 x$ . ხოლო

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx.$$

ტოლობის ორივე ნაწილს მივუმატოთ კრებადი ინტეგრალი

$$\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx, \text{ გვექნება}$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx + \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}.$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა ნაწილი სასრული სიდიდეა, მარჯვენა ნაწილი კი უსასრულოა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ინტეგ-

რალი  $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$  განშლადია.

განსაზღვრა. თუ  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  და  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  ინტეგრა-

ლები კრებადია, მაშინ იტყვიან, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  აბსო-

ლუტურად კრებადია, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციის ეწოდება აბსოლუ-

ტურად ინტეგრებადი  $[a, +\infty]$  შუალედში. თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

კრებადია, მაგრამ იგი არაა აბსოლუტურად კრებადი, მაშინ ამბობენ,

რომ ინტეგრალი პირობით კრებადია.

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$$

აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. რადგანაც  $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$  და  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ ,

ამიტომ 27-ე თეორემის თანახმად  $I$  ინტეგრალი აბსოლუტურად კრე-

ბადია.

**თეორემა 29.** თუ  $[a, +\infty]$  შუალედში განსაზღვრული

$f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ

$[a, x]$  სეგმენტზე და მართებულია უტოლობა

$$|x^\alpha f(x)| < A, \text{ როდესაც } a \leq x < +\infty, \quad (21.2)$$

სადაც  $a > 0$ ,  $\alpha > 1$ , ხოლო  $A$  დადებითი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  აბსოლუტურად კრებადია.

დამტკიცება. (21.2) უტოლობიდან გვაქვს

$$|f(x)| < \frac{A}{x^\alpha}.$$

მაგრამ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  კრებადია, როდესაც  $\alpha > 1$ . მაშასადამე,

კრებადია ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  და ამით თეორემა დამტკიცებულია.

**თეორემა 30.** ვთქვათ,  $[a, +\infty[$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, x]$  სეგმენტზე და  $[a, +\infty[$  შუალედის ყოველ  $x$  წერტილში  $|f(x)| \leq |g(x)|$ . თუ ინტეგ-

რალი  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  აბსოლუტურად კრებადია, მაშინ ინ-

ტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  აგრეთვე აბსოლუტურად კრებადია.

ეს თეორემა წარმოადგენს 27-ე თეორემის უშუალო შედეგს.

### § 22. არასაკუთრივი ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან

ვთქვათ,  $P(x)$  და  $Q(x)$  არიან შესაბამისად  $m$  და  $n$  ხარისხის მრავალწევრები. ვივლით, რომ  $Q(x)$  მრავალწევრს არა აქვს ნამდვილი ფესვები და, ამის გარდა,  $m \leq n - 2$ . ამ შემთხვევაში არსებობს ინტეგრალი

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

საკმარისია ვაჩვენოთ შემდეგი ორი ინტეგრალის არსებობა:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$f(x) = \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}, \quad g(x) = \frac{1}{x^\alpha},$$

სადაც  $1 < \alpha < 2$ . ცხადია, რომ

$$\sup_{1 < x < +\infty} |f(x)| = M < +\infty.$$

მაშასადამე,

$$\left| \frac{P(r)}{Q(x)} \right| = |f(x) g(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}.$$

30-ე თეორემის თანახმად  $I_2$  ინტეგრალი კრებულა. ანალოგიურად მტკიცდება  $I_1$  ინტეგრალის კრებულობა. ამრიგად,  $I$  ინტეგრალი კრებულა.

ახლა გამოვთვალოთ  $I$  ინტეგრალი. ვთქვათ,

$$x_k = a_k + ib_k \quad (k=1, 2, \dots, l)$$

წარმოადგინებ  $Q(x)$  მრავალწევრის სხვადასხვა ფესვებს.  $x_k$  ფესვის ჯერადობა იყოს  $\alpha_k$ . მაშინ  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ასე:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^l \left[ \frac{A_k^{(1)}}{x-x_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x-x_k)^2} + \dots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} \right], \quad (22.1)$$

სადაც  $A^{(\alpha)}$  საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვებია. თუ  $p > 1$ , მაშინ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-x_k)^p} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{k=1}^l \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{A_k^{(1)}}{x-x_k} dx.$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-x_k} &= \frac{1}{(x-a_k)-ib_k} = \frac{(x-a_k)+ib_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} \\ &= \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} + i \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \int_{-t}^t \frac{dx}{x-x_k} &= \int_{-t}^t \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx + i \int_{-t}^t \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} [\ln |(x-a_k)^2+b_k^2|]_{-t}^t + i \left[ \operatorname{arctg} \frac{x-a_k}{b_k} \right]_{-t}^t = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(t-a_k)^2+b_k^2}{(t+a_k)^2+b_k^2} + i \left( \operatorname{arctg} \frac{t-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{t+a_k}{b_k} \right). \end{aligned}$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $t \rightarrow +\infty$ , მივიღებთ

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \frac{dx}{x-x_k} = \begin{cases} i\pi, & \text{თუ } b_k > 0, \\ -i\pi, & \text{თუ } b_k < 0, \end{cases}$$

ამრიგად,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = i\pi \sum_{k=1}^l \pm A_k^{(1)}, \quad (22.2)$$

ამასთანავე  $A_k^{(1)}$  რიცხვის წინ ასაღებია ნიშანი  $+$ , თუ  $b_k > 0$ , ხოლო ნიშანი  $-$ , როდესაც  $b_k < 0$ .

ახლა (22.1) ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $x$ -ზე და შემდეგ გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც  $x \rightarrow \infty$ , მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^l A_k^{(1)} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\sum_k^{(+)} A_k^{(1)} + \sum_k^{(-)} A_k^{(1)} = 0, \quad (22.3)$$

სადაც  $\sum_k^{(+)} A_k^{(1)}$  და  $\sum_k^{(-)} A_k^{(1)}$  სიმბოლოებით აღნიშნულია იმ  $A_k^{(1)}$

რიცხვების ჯამები, რომლებიც შეესაბამება შესაბამისად  $b_k > 0$  და  $b_k < 0$  რიცხვებს.

(22.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_k^{(+)} A_k^{(1)} = - \sum_k^{(-)} A_k^{(1)}.$$



მაშასადამე, (22.2) ფორმულა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_k^{(+)} A_k^{(1)}. \quad (22.4)$$

თუ ყველა  $x_k$  ფესვი მარტივია, მაშინ  $A_k^{(1)}$  კოეფიციენტებისათვის მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$A_k^{(1)} = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (22.5)$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{p=1}^n \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p}.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $(x-x_k)$ -ზე, მივიღებთ

$$\frac{P(x)}{Q(x) - Q(x_k)} = A_k^{(1)} + (x-x_k) \left[ \sum_{p=1}^{k-1} \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p} + \sum_{p=k+1}^n \frac{A_p^{(1)}}{x-x_p} \right].$$

თუ ზღვარზე გადავალთ, როდესაც  $x \rightarrow x_k$ , მივიღებთ (22.5) ტოლობას.

მაგალითი. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} dx$ , სა-

დაც  $m$  და  $n$  მთელი დადებითი რიცხვებია, ამასთანავე  $m \leq 2n-1$ , როგორც ცნობილია,  $1+x^{2n}$  მრავალწევრის ფესვებია

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad (k=0, 1, \dots, 2n-1).$$

(22.5) ფორმულის მიხედვით, გვაქვს

$$\begin{aligned} A_k^{(1)} &= \frac{x_k^{m-1}}{2nx_k^{2n-1}} = \frac{x_k^m}{2nx_k^{2n}} = -\frac{x_k^m}{2n} \\ &= -\frac{1}{2n} \left( \cos \frac{m\pi}{2n} + i \sin \frac{m\pi}{2n} \right)^{2k+1} = -\frac{1}{2n} x_k^{(2k+1)m}, \end{aligned}$$

სადაც

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$b_k = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

ცხადია, რომ  $b_k > 0$ , როდესაც  $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ . მაშასადამე,

$$\begin{aligned} \sum_k^{(+)} A_k^{(1)} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(2k+1)m} = -\frac{x_0^m - x_0^{(2n+1)m}}{2n(1-x_0^{2n})} = \\ &= -\frac{x_0^m (1-x_0^{2mn})}{2n(1-x_0^{2n})} = -\frac{x_0^m [1-(x_0^{2n})^m]}{2n(1-x_0^{2n})} = \\ &= -\frac{x_0^m [1-(-1)^m]}{2n(1-x_0^{2n})} = -\frac{1-(-1)^m}{2n(x_0^{-m}-x_0^n)}. \end{aligned}$$

მაგრამ

$$x_0^m = \cos \frac{m\pi}{2n} + i \sin \frac{m\pi}{2n}, \quad x_0^{-m} = \cos \frac{m\pi}{2n} - i \sin \frac{m\pi}{2n}.$$

აქედან

$$x_0^m - x_0^{-m} = -2i \sin \frac{m\pi}{2n},$$

მაშასადამე,

$$\sum_k^{(+)} A_k^{(1)} = \frac{1-(-1)^m}{4ni \sin \frac{m\pi}{2n}}.$$

ამრიგად, (22.4) ფორმულის ძალით

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} dx = \begin{cases} 0, & \text{თუ } m \text{ ლუწია,} \\ \frac{\pi}{n \sin \frac{m\pi}{2n}}, & \text{თუ } m \text{ კენტია.} \end{cases}$$

ეკრძოდ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}} \quad (m < n).$$

აგრეთვე ცხადია, რომ

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n \sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}} \quad (m < n). \quad (22.6)$$

**28. ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან**

ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია სასრულია  $[a, b]$  შუალედში, ამასთანავე იგი განიცილის უსასრულო წყვეტას  $b$  წერტილში. ამის გარდა, ვივარაუდოთ, რომ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  შუალედში, სადაც  $a < t < b$ .

თუ არსებობს სასრული ზღვარი  $\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx$ , მაშინ ამ ზღვარს ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი  $f(x)$  ფუნქციისა  $a$ -დან  $b$ -მდე და აღინიშნება  $\int_a^b f(x) dx$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx.$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  არსებობს ანუ კრებადია, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება ინტეგრებადი  $[a, b]$  სეგმენტზე. თუ არ არსებობს  $\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x) dx$ , მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  განშლადია.

როდესაც  $f(x)$  ფუნქცია განიცილის უსასრულო წყვეტას  $[a, b]$  სეგმენტის მარცხენა ბოლოში, მაშინ განსაზღვრის თანახმად,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a+} \int_t^b f(x) dx.$$

დასასრულ, ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განიცილის უსასრულო წყვეტას  $[a, b]$  სეგმენტის შიგა  $c$  წერტილში. თუ არსებობს არასაკუთრივი ინტეგრალები  $\int_a^c f(x) dx$  და  $\int_c^b f(x) dx$ , მაშინ ჯამს

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ეწოდება არასაკუთრივი ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

ე. ი.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \left[ \int_a^{c-\xi} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx \right].$$

თუ  $\int_a^c f(x) dx$  და  $\int_c^b f(x) dx$  ინტეგრალებიდან ერთი მაინც განშლადია, მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  განშლადია.

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ კრებადია თუ არა ინტეგრალი

$$\int_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha}, \quad \text{სადაც } \alpha > 0, a > 0.$$

ინტეგრალქვეშა ფუნქცია  $f(x) = \frac{1}{(a-x)^\alpha}$  განიკდის უსასრულო წყვეტას  $x = a$  წერტილში, ამიტომ განსაზღვრის თანახმად, გვექნება

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{(a-x)^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow a-} \int_0^t \frac{dx}{(a-x)^\alpha} = \lim_{t \rightarrow a-} \left[ -\frac{(a-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{\alpha-1} \lim_{t \rightarrow a-} [(a-t)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{როდესაც } \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{როდესაც } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

თუ  $\alpha = 1$ , ინტეგრალი განშლადია. მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი კრებადია, როდესაც  $\alpha < 1$ , ხოლო განშლადია, როდესაც  $\alpha \geq 1$ .

მაგალითი 2. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$  გან-

შლადია.

დამტკიცება. ვაქვს:

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\epsilon'}^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon'} - 2.$$

აქედან

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0+ \\ \epsilon' \rightarrow 0+}} \left[ \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x^2} + \int_{\epsilon'}^1 \frac{dx}{x^2} \right] = +\infty.$$

მაშასადამე, მოცემული ინტეგრალი განშლადია.

**თეორემა 31.** ვთქვათ,  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე, სადაც  $a < t < b$ : ამის გარდა, ვიგულისხმობთ, რომ  $b$  არის  $f(x)$  ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილი. თუ  $F(x)$  წარმოადგენს  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილ ფუნქციას  $[a, b]$  შუალედში და

არსებობს  $\lim_{t \rightarrow b-} F(t) = F(b-)$ , მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$

კრებადია და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a). \quad (23.1)$$

დამტკიცება. რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე,  $a < t < b$  და  $F(x)$  არის  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქცია  $[a, b]$  შუალედში, ამიტომ

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) - F(a).$$

თუ ამ ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც  $t \rightarrow b-$ , მივიღებთ (23.1) ტოლობას.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი

**თეორემა 32.** ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს უსასრულო წყვეტის  $c$  წერტილი, სადაც  $a < c < b$ , და ყოველ  $[a, t]$  და  $[\tau, b]$  სეგმენტზე ( $a < t < c$ ,  $c < \tau < b$ )  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით. თუ  $f(x)$  ფუნქციის პირველყოფილი  $F(x)$

ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ არასაკუთრივი ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადია და მართებულა ტოლობა

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი  $\int_0^1 \ln x dx$ .

აღვიღო შესამჩნევია, რომ  $\ln x$  ფუნქციის პირველყოფილი ფუნქციაა  $x \ln x - x$ . ცხადია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x) = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1.$$

თეორემა 33. ვთქვათ,  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  სეგმენტზე, სადაც  $a < t < b$ , ამასთანავე  $b$  არის  $f(x)$  ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილია ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც } b - \eta < t' < b, \quad b - \eta < t'' < b.$$

დამტკიცება. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad a \leq t < b.$$

როგორც ვიცით,  $F(t)$  ფუნქციის ზღვრის არსებობისათვის, როდესაც  $t \rightarrow b$ , აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$

რიცხვისათვის არსებობდეს ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$|F(t'') - F(t')| < \varepsilon, \text{ როდესაც } b - \eta < t' < b, \quad b - \eta < t'' < b.$$

მაგრამ

$$F(t'') - F(t') = \int_{t'}^{t''} f(x) dx.$$

მაშასადამე,

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } b - \eta < t' < b, \quad b - \eta < t'' < b.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 34. ვთქვათ,  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, \xi]$  სეგმენტზე,  $a < \xi < b$ , ამასთანავე  $b$  არის  $f(x)$  ფუნქციის უსასრულო წყვეტის წერტილი. თუ არსებობს ინტეგრალი  $\int_a^b |f(x)| dx$ , მაშინ არსებობს აგრეთ-

ვე ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  და მართებულია უტოლობა

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (23.2)$$

დამტკიცება. 33-ე თეორემის ძალით, ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი  $\eta$  რიცხვი, რომ

$$\left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } b - \eta < t' < b, \quad b - \eta < t'' < b.$$

მაგრამ

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right|.$$

მაშასადამე,

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \text{ როდესაც } b - \eta < t' < b, \quad b - \eta < t'' < b.$$

აქედან, 33-ე თეორემის თანახმად, გამომდინარეობს კრებალობა ინტეგრალისა  $\int_a^b f(x) dx$ .

შემდეგ, რაკი

$$\left| \int_a^t f(x) dx \right| \leq \int_a^t |f(x)| dx,$$

ამიტომ, თუ ამ უტოლობაში ზღვარზე გადავალთ, როდესაც  $t \rightarrow b-$ , მივიღებთ (23.2) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრა 1. თუ ინტეგრალები  $\int_a^b f(x) dx$  და  $\int_a^b |f(x)| dx$

კრებალია, მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  აბსოლუტურად

რად კრებალია, ხოლო  $f(x)$  ფუნქციას ეწოდება აბსოლუტურად ინტეგრებალი  $[a, b]$  სეგმენტზე.

ინტეგრებალი ფუნქცია შეიძლება არაიყოს აბსოლუტურად ინტეგრებალი. მოვიყვანოთ

მაგალითი 4. ვთქვათ,  $]0, 1]$  შუალედში განსაზღვრულია ფუნქცია

$$f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის გვაქვს:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx &= \int_{\varepsilon}^1 x \left( \cos \frac{1}{x} \right) dx = \left[ x \cos \frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 - \\ &- \int_{\varepsilon}^1 \cos \frac{1}{x} dx = \cos 1 - \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^1 \cos \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

რადგანაც ინტეგრალი  $\int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx$  არსებობს, ამიტომ იარსებებს

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \cos \frac{1}{x} dx.$$



შემდეგ ცხადია, რომ

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cos \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

მაშასადამე,

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \cos 1 - \int_0^1 \cos \frac{1}{x} dx.$$

ამრიგად  $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $]0, 1]$  შუალედში.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ეს ფუნქცია არ არის აბსოლუტურად ინტეგრებადი  $]0, 1]$  შუალედში.

აღვილი შესამჩნევია, რომ ნებისმიერი მთელი დადებითი  $n$  რიცხვისათვის, უტოლობებიდან

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{1}{x} \leq 2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

გამომდინარეობს

$$\sin \frac{1}{x} \geq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

მაშასადამე, ყოველი მთელი დადებითი  $n$  რიცხვისათვის გვაქვს

$$\int_{a_n}^{b_n} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{a_n}^{b_n} \frac{dx}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{b_n}{a_n},$$

სადაც

$$a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{4}}.$$

ცხადია, რომ

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{8n+1}.$$

ამრიგად,

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{1}{8n+1} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left( 1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{9n} \right) > \frac{M}{n}, \end{aligned}$$

სადაც  $M$  არის  $n$ -ზე დამოუკიდებელი დადებითი რიცხვი.

რადგანაც პარმონიული მწკრივი განშლადია, ამიტომ ყოველი დადებითი  $N$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი  $n$ , რომ

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geq N$$

და მით უმეტეს

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx \geq N.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი  $\int_0^1 \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right| dx$  განშლადია.

ამრიგად,  $f(x)$  ფუნქციის ინტეგრებადობიდან  $[a, b]$  სეგმენტზე საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი აბსოლუტური ინტეგრებადობა იმავე სეგმენტზე.

განსაზღვრა 2. თუ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადია, ხოლო

ინტეგრალი  $\int_a^b |f(x)| dx$  განშლადია, მაშინ ინტეგრალს  $\int_a^b f(x) dx$  ეწოდება პირობით კრებადი ინტეგრალი.

თეორემა 35. ვთქვათ,  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრულ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს სახე:

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^\alpha},$$

სადაც  $a$  დადებითი რიცხვია, ხოლო  $g(x)$  რიმანის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა  $[a, b]$  შუალედში. თუ  $a$  წერტილის რაიმე მიდამოში  $|g(x)| \geq p$ , სადაც  $p$  არის  $x$ -ზე დამოუკიდებელი დადებითი რიცხვი, მაშინ

ინტეგრალის  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $\alpha$  იყოს ერთზე ნაკლები.

დამტკიცება. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $a$  წერტილის რაიმე მიდამოში  $|g(x)| \geq p$  საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით, ყოველ  $\epsilon'$  და  $\epsilon''$ -თვის, რომ-

ლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობებს  $a < t' < a + \varepsilon$ ,  $a < t'' < a + \varepsilon$ , გვაქვს:

$$\int_{t'}^{t''} f(x) dx = \mu \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

სადაც  $|\mu| \geq p$ . მაგრამ ინტეგრალი  $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$  არსებობს მაშინ და

მხოლოდ მაშინ, როდესაც  $\alpha < 1$ , თორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი 1.** ვთქვათ,  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[t, b]$  სეგმენტზე,  $a < t < b$ . თუ არსებობს ისეთი დადებითი  $\alpha$  რიცხვი, რომ

$$\lim_{x \rightarrow a+} (x-a)^\alpha f(x) = K \neq 0,$$

მაშინ ინტეგრალის  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ  $a$  იყოს ერთზე ნაკლები. ადგილად მტკიცება აგრეთვე შეძლება

**თეორემა 28.** თუ  $[a, b]$  შუალედში განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[t, b]$  სეგმენტზე,  $a < t < b$ , და

$$\lim_{x \rightarrow a+} (x-a)^\alpha f(x) = 0,$$

სადაც  $0 < \alpha < 1$ , მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  კრებადია.

ანალოგიური თეორემები შეგვიძლია დავადგინოთ იმ შემთხვევაში, როდესაც  $(x-a)^\alpha$  გამოსახულების ნაცვლად გვექნება  $(b-x)^\alpha$  გამოსახულება.

მაგალითი 5. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$

აბსოლუტურად კრებალია.

**დამტკიცება.** ინტეგრალქვეშა ფუნქცია განიცილის უსასრულო წყვეტას  $x=0$  წერტილში. რაკი

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left( x^{3/4} \cdot \frac{|\ln \sin x|}{\sqrt{x}} \right) = 0,$$

ამიტომ 36-ე თეორემის თანახმად მოცემული ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია.

მაგალითი 6. დავამტკიცოთ, რომ ინტეგრალი  $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$  განშლადია.

დამტკიცება. აქ  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ ,  $a=1$ ,  $b=2$ . ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

35-ე თეორემის შედეგის თანახმად აღებული ინტეგრალი განშლადია.

#### § 24. არასაპაუთრივი ინტეგრალის თვისებები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციებს, რომლებიც განსაზღვრულია  $[a, b]$  შუალედში, სადაც  $a$  და  $b$  არიან არა მარტო სასრული სიდიდეები, არამედ ისინი შეიძლება იყოს აგრეთვე  $\pm \infty$ .

ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს ინტეგრალის შემდეგი თვისებები:

1. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, c]$  და  $[c, b]$  შუალედებზე,  $a < c < b$ , მაშინ  $f(x)$  ინტეგრებადია  $[a, b]$  შუალედზედაც და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

2. თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[a, b]$  შუალედში, მაშინ ყოველი  $A$  რიცხვისათვის  $B f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია იმავე შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx.$$

3. თუ  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  შუალედში, მაშინ  $A f(x) + B g(x)$  ფუნქციაც, სადაც  $A$  და  $B$  მუდმივებია, ინტეგრებადია იმავე შუალედში და მართებულია ტოლობა

$$\int_a^b [A f(x) + B g(x)] dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx.$$

ამ თვისებების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

**თეორემა 87.** ვთქვათ,  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები ინტეგრებადია  $[a, b]$  შუალედში. თუ  $f(x)$  შემოსაზღვრულია, ხოლო  $g(x)$  ნიშანს არ იცვლის  $[a, b]$  შუალედში, მაშინ  $f(x)g(x)$  ფუნქციაც ინტეგრებადია ამ შუალედში.

**დამტკიცება.** ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვივლინებოდეთ, რომ  $g(x) \geq 0$ . ცხადია, რომ

$$|f(x)g(x)| \leq M g(x),$$

სადაც

$$M = \sup |f(x)|, \quad a \leq x \leq b.$$

რადგანაც  $g(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია, ამიტომ  $f(x)g(x)$  ფუნქციაც ინტეგრებადია.

**შენიშვნა.** თუ  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია, მაგრამ შემოსაზღვრული არაა, მაშინ  $f(x)g(x)$  ფუნქცია შეიძლება არ იყოს ინტეგრებადი აღებულ შუალედში. მართლაც, ვთქვათ,

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad a=0, \quad b=1.$$

ინტეგრალები  $\int_0^1 f(x) dx$  და  $\int_0^1 g(x) dx$  კრებადია, მაგრამ ინტეგრალი

$\int_0^1 f(x)g(x) dx$  განშლადია, ვინაიდან

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty.$$

**თეორემა 38.** თუ  $f(x)$  აბსოლუტურად ინტეგრებადია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ხოლო  $g(x)$  შემოსაზღვრული ინტეგრებადი ფუნქციაა, მაშინ  $f(x)g(x)$  ფუნქცია აბსოლუტურად ინტეგრებადია იმავე სეგმენტზე.

დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

### § 25. არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა

ვთქვათ,  $[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[a, t]$  და  $[\tau, b]$  სეგმენტზე, სადაც  $a < t < c < \tau < b$ , ამასთანავე  $c$  წერტილში  $f(x)$  ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას. როგორც ვიცით, არასაკუთრივი ინტეგრალი  $a$ -დან  $b$ -მდე  $f(x) dx$ -დან განისაზღვრება ტოლობით

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon' \rightarrow 0}} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f(x) dx \right].$$

აქ ივლენს მხედველობა, რომ ეს ზღვარი არსებობს, როდესაც  $\varepsilon$  და  $\varepsilon'$  ერთმანეთზე დამოუკიდებლად ნულისაკენ მიისწრაფვიან. შეიძლება ეს ზღვარი არ არსებობდეს, მაგრამ არსებობდეს ზღვარი

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

ამ ზღვარს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება მთავარი მნიშვნელობა არასაკუთრივი ინტეგრალისა  $\int_a^b f(x) dx$  და აღინიშნება *V. p.*  $\int_a^b f(x) dx$  სიმბოლოთი. ამრიგად, განსაზღვრის მიხედვით

$$V. p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

მაგალითად, არასაკუთრივი ინტეგრალი  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  განზღადა, მაგრამ მისი მთავარი მნიშვნელობა ნულია. მართლაც,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = (\ln \varepsilon - \ln 1) + (\ln 1 - \ln \varepsilon) = 0.$$

მაშასადამე,

$$V. p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$

ამავე წესით მივიღებთ, რომ

$$V. p. \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}, \quad a < c < b.$$

განვიხილოთ ინტეგრალი  $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ , სადაც  $a < c < b$ , ხოლო  $n$

ერთზე მეტი მთელი რიცხვია. როგორც ვიცით ეს ინტეგრალი განშლადია. გამოვარკვიოთ, არსებობს თუ არა ეს ინტეგრალი კოშის მთავარი მნიშვნელობით. გვაქვს:

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{\varepsilon^{n-1}} \right].$$

თუ  $n$  კენტი რიცხვია, მაშინ

$$\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{(x-c)^n} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right]$$

და, მაშასადამე,

$$V. p. \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} \right].$$

თუკი  $n$  ლუწი რიცხვია, მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$  არ არსებობს

კოშის მთავარი მნიშვნელობით.

დასასრულ ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $]-\infty, +\infty[$  შუალედში და იგი ინტეგრებადია რიმანის აზრით ყოველ  $[-1, 1]$  სეგმენტზე. თუ არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-1}^l f(x) dx,$$

მაშინ ამბობენ, რომ ინტეგრალი  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  არსებობს კოშის მთავარი მნიშვნელობით, ხოლო აღნიშნულ ზღვარს ეწოდება ინტეგრალის  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  მთავარი მნიშვნელობა და აღინიშნება

$$V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

## § 28. ფრულანის ინტეგრალი

ეთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, +\infty[$  შუალედში და არსებობს სასრული ზღვარი

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty).$$

ინტეგრალს

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx,$$

სადაც  $a$  და  $b$  დადებითი რიცხვებია, ეწოდება ფრულანის (Frullani) ინტეგრალი.

ქვემოთ დავამტკიცებთ ამ ინტეგრალის კრებადობას და, ამის გარდა, გამოვთვლით მის მნიშვნელობასაც.

ავიღოთ ორი ნებისმიერი დადებითი რიცხვი  $a$  და  $\beta$ , სადაც  $a < \beta$ , ადვილი მისახვედრია შემდეგი ტოლობების მართებულობა:

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_a^\beta \frac{f(ax)}{x} dx - \int_a^\beta \frac{f(bx)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(t)}{t} dt - \\ &- \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $a < b$ . საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის ძალით,

$$\int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{dt}{t} = f(\xi) \ln \frac{b}{a}, \quad a\alpha < \xi < b\alpha.$$

$$\int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi') \ln \frac{b}{a}, \quad a\beta < \xi' < b\beta.$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \xi = 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \xi' = +\infty.$$

მაშასადამე,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}, \quad (26.1)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt = f(+\infty) \ln \frac{b}{a}. \quad (26.2)$$



მაგრამ

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \left[ \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt \right].$$

თუ გავითვალისწინებთ (26.1) და (26.2) ტოლობებს, გვექნება

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = [f(0)-f(+\infty)] \ln \frac{b}{a}. \quad (26.3)$$

ასეთია ფრულანის ინტეგრალის მნიშვნელობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, +\infty[$  შუალედში და  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  არ არსებობს, მაშინ  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  ინტეგრალის არსებობიდან, სადაც  $v$  რაიმე დადებითი რიცხვია, გამომდინარეობს ინტეგრალის

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx$$

არსებობა და მართებულია ტოლობა

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (26.4)$$

ამ ფორმულას მივიღებთ იმავე გზით, რა გზითაც მივიღეთ (26.3) ფორმულა, მხოლოდ  $\beta$ -ს ნაცვლად უნდა ავიღოთ  $+\infty$ .

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

აქ  $f(x) = e^{-x}$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(+\infty) = 0$ . მაშასადამე, (26.3) ფორმულის ძალით

$$I = \ln 2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx, \quad a > 0, b > 0,$$

აქ  $f(x) = \arctg x$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ . მაშასადამე, (26.3) ფორმულის ძალით

$$I = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}.$$

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

ამ შემთხვევაში  $f(x) = \sin x$ ,  $f(0) = 0$ , ცხადია,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$  არ არსებობს, მაგრამ ინტეგრალი  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  კრებადია, როდესაც  $\varepsilon \geq 0$ .

ამიტომ (26.4) ფორმულის თანახმად  $I = 0$ .

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$I = \int_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

თუ მოვახდენთ ჩასმას  $x = e^{-t}$ , გვექნება

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}.$$

### § 27. მწკრივის არეზაუმის ინტეგრალური ნიშანი

მწკრივის კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები დამყარებულია მოცემული მწკრივის გეომეტრიულ პროგრესიასთან შედარებაზე. ამიტომ ეს ნიშნები წარმატებით შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მხოლოდ ისეთ მწკრივებზე, რომელთა წევრები უფრო სწრაფად კლებულობენ, ვიდრე რაიმე გეომეტრიული პროგრესიის წევრები. ასეთ მწკრივებზე ამბობენ, რომ ისინი სწრაფად კრებადია. რაც უფრო სწრაფად კრებადია მწკრივი, მით უფრო მოხერხებულია იგი პრაქტიკული გაანგარიშებისათვის, რადგანაც წევრთა უფრო ნაკლები რიცხვის შეკრება დაგვირდება მოცემული სიზუსტით მწკრივის ჯამის გამოსათვლელად.

მწკრივებისათვის, რომლებიც უფრო ნელა კრებადია, ვიდრე ნებისმიერი გეომეტრიული პროგრესია, კოშისა და დალამბერის ნიშ-

ნები უკვე ვერ გამოიყენება. ამიტომ საჭიროა ვეძებოთ უფრო ფაქიზი ნიშნები. ნელა კრებად მწკრივთა რიცხვს გუთვნის დიდი პრაქტიკული მნიშვნელობის უამრავი მწკრივი.

ახლა მოვიყვანოთ დადებითი მწკრივის კრებადობის უფრო ძლიერი ნიშანი.

თეორემა 39. (კოში). თუ  $f(x)$  დადებითი და კლებადი ფუნქციაა  $[a, +\infty[$  შუალედში, მაშინ

$$f(a) + f(a+1) + \dots + f(a+n) + \dots \quad (27.1)$$

მწკრივის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  იყოს კრებადი.

დამტკიცება. რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია კლებადია, ამიტომ

$$f(a+n) \leq f(x) \leq f(a+n-1),$$

როდესაც  $a+n-1 \leq x \leq a+n$ , თუ მოვახდენთ ამ უტოლობების წევრ-წევრად ინტეგრებას  $(a+n-1)$ -დან  $(a+n)$ -მდე, გვექნება

$$f(a+n) \leq \int_{a+n-1}^{a+n} f(x) dx \leq f(a+n-1).$$

ახლა  $n$ -ს მივანიჭოთ მნიშვნელობები  $1, 2, \dots, m$ , გვექნება

$$f(a+1) \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq f(a),$$

$$f(a+2) \leq \int_{a+1}^{a+2} f(x) dx \leq f(a+1),$$

.....

$$f(a+m) \leq \int_{a+m-1}^{a+m} f(x) dx \leq f(a+m-1).$$

ამ უტოლობათა წევრ-წევრად შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^m f(a+k) \leq \int_a^{a+m} f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{m-1} f(a+k).$$

რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია დადებითია, ამიტომ ინტეგრალი  $\int_a^{a+m} f(x) dx$

იზრდება  $m$ -თან ერთად. მაშასადამე, თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებადია, მაშინ მწკრივი (27.1) კრებადია, ვინაიდან ყოველი  $m$ -თვის

$$\sum_{k=0}^m f(a+k) \leq f(a) + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

პირიქით, თუ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  განშლადია, მაშინ უტოლობიდან

$$\sum_{k=0}^{m-1} f(a+k) \geq \int_a^{a+m} f(x) dx$$

გამომდინარეობს (27.1) მწკრივის განშლადობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემაში მოყვანილ ნიშანს ეწოდება დადებითი მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი.

მაგალითი. განვიხილოთ მწკრივი

$$\frac{1}{2(\ln 2)^\alpha} + \frac{1}{3(\ln 3)^\alpha} + \dots + \frac{1}{n(\ln n)^\alpha} + \dots$$

გამოვარკვევით,  $\alpha$  პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის არის მწკრივი კრებადი?  $[2; +\infty[$  შუალედში. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ინტეგრალი  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$  კრებადია, როდესაც  $\alpha > 1$  და განშლადია, როდესაც  $\alpha \leq 1$ .

### კ ი თ ხ გ ე ბ ი

1. რას ნიშნავს, რომ ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებადია? განშლადია?

2. რა ნიშნები იცით ინტეგრალის  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებლობისა?

3. როგორ არის განსაზღვრული არასაკუთრივი ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან?

4. როგორ არის განსაზღვრული არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა?

**ხ ა ვ ა რ ჯ ი შ ი**

გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ . პასუხი:  $\frac{1}{2}$ .

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{3+2x^2}$ . პასუხი:  $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ .

3.  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$ . პასუხი:  $\frac{2}{3} \ln 2$ .

4.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ . პასუხი:  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ .

5.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ . პასუხი:  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ .

6.  $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ . პასუხი:  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ .

7.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^6+x^{10}}}$ . პასუხი:  $\frac{1}{5} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ .

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}} dx$ . პასუხი:  $\frac{\pi}{2} - 1$ .

9.  $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ . პასუხი: 0.

$$10. \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx \quad (\alpha > 0). \quad \text{პასუხი: } \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

დაყვანის ფორმულების საშუალებით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები ( $n$ —მთელი დადებითი რიცხვია):

$$11. I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \, dx. \quad \text{პასუხი: } I_n = n!$$

$$12. I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} \quad (ac - b^2 > 0).$$

$$\text{პასუხი: } I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac - b^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

$$13. I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

$$\text{პასუხი: } I_n = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1),$$

სადაც

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

$$14. I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \, dx. \quad \text{პასუხი: } I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

თუ  $n$  ლუწია, და  $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$ , თუ  $n$  კენტია—

გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$15. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}. \quad \text{პასუხი: } \frac{\pi}{2}.$$

$$16. \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx, \quad \text{პასუხი: } -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx. \quad \text{პასუხი: } -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

$$18. \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \, dx. \quad \text{პასუხი: } \frac{\pi-2}{2}.$$

$$19. \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{x} \right)^2 \, dx. \quad \text{პასუხი: } 2.$$

$$20. \int_0^1 x \ln x \, dx. \quad \text{პასუხი: } -\frac{1}{4}.$$

ლაამტვიცეთ შემდეგი ინტეგრალების კრებადობა:

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \, dx}{x^4 - x^2 + 1}. \quad 22. \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$23. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}. \quad 24. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \quad (p > 0).$$

$$25. \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \, dx \quad (n \geq 0, m > -1, n-m > 1).$$

$$26. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^\alpha} \, dx \quad (a \neq 0, 1 < \alpha < 2).$$

$$27. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \, dx \quad (1 < \alpha < 2).$$

$$28. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx. \quad 29. \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \, dx.$$

$$30. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad (p > 1, q < 1).$$

$$31. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{k_1} |x-a_2|^{k_2} \dots |x-a_n|^{k_n}}$$

$$(k_1 < 1, k_2 < 1, \dots, k_n < 1, k_1 + k_2 + \dots + k_n > 1).$$

დაამტკიცეთ შემდეგი ინტეგრალების აბსოლუტური კრებადობა:

$$32. \int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx \quad \left(-1 < \frac{p+1}{q} < 0\right).$$

$$33. \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (p > -2, q > p+1).$$

34. ვთქვათ, ინტეგრალი  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  კრებადია და  $f(x)$  მონოტონურია. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი  $M$ , რომ  $|x f(x)| \leq M$ , როდესაც  $a \leq x < +\infty$ .

35. დაამტკიცეთ, რომ თუ  $f(x)$  მონოტონურია  $(0, a)$  ინტერვალში და არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^a x^p f(x) dx,$$

მაშინ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{p+1} f(x) = 0.$$

$$36. \text{ დაამტკიცეთ, რომ } V. p. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0.$$

$$37. \text{ დაამტკიცეთ, რომ } V. p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi.$$



**განტოლვაბათა ფესვაზისა და განსაზღვრული ინტეგრალის  
მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები**

**§ 1. განტოლვაბათა ფესვაზის მოძიების მიახლოებითი მეთოდები**

რუფინისა და აბელის მიერ დამტკიცებულბ იყო, რომ მეოთხეზე მაღალი ხარისხის ალგებრული განტოლებები, საზოგადოდ, რადიკალებში ამოხსნადი არ არის, მაგრამ არსებობს სპეციალური კლასი მეოთხეზე მაღალი ხარისხის განტოლებებისა, რომლებიც რადიკალებში ამოხსნადია. ეს საკითხი ზოგად შემთხვევაში გალუამ შეისწავლა.

უნდა აღინიშნოს, რომ ალგებრული განტოლებების რადიკალებში ამოხსნა, როდესაც ეს შესაძლებელია, ხშირად რთულ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული. კიდევ უფრო რთულ გამოთვლებს მოითხოვს ტრანსცენდენტური განტოლებების ამოხსნა. ამიტომ ჩვეულებრივ მიმართავენ განტოლების ამოხსნის მიახლოებით მეთოდებს, რომლებიც განსაკუთრებით გამოიყენება რიცხვითი კოფიციენტებიანი განტოლების შემთხვევაში.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით განტოლებათა ნამდვილი ფესვების მოძიების მიახლოებით მეთოდებს, როგორცაა სინჯვის, ჟორდების, მხებთა. კომბინირებული და იტერაციის მეთოდები. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ამ მეთოდების გამოყენება ისეთი განტოლებების შემთხვევაში, რომელთა ზუსტი ამოხსნა ვერ ხერხდება, ანდა რთულ გამოთვლებთანაა დაკავშირებული. მოძიებითი ამონახსნის პრაქტიკაში გამოსაყენებლად უნდა ვიცოდეთ, თუ რამდენად ახლოსაა ეს ამონახსნი ფესვის ზუსტ მნიშვნელობასთან.

1°. **სინჯვის მეთოდი.** ეს მეთოდი შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ,  $[a_0, b_0]$  სეგმენტში მოთავსებულია  $f(x)=0$  განტოლების მხოლოდ ერთი  $x_0$  ფესვი. ჩვენი მიზანია ვიპოვოთ  $x_0$  ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნებისმიერი სიზუსტით. ამისათვის გავყოთ  $[a_0, b_0]$  სეგ-

მენტი შუაზე  $c$  წერტილით და გამოვთვალოთ ფუნქციის  $f(c)$  მნიშვნელობა. მიღებული  $[a_0, c]$  და  $[c, b]$  სეგმენტებიდან ავირჩიოთ ის, რომლის ბოლოებში  $f(x)$  ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშანი. ცხადია,  $x_0$  ფესვი მოთავსდება ამ სეგმენტში. ამორჩეული სეგმენტი აღვნიშნოთ  $[a_1, b_1]$  და ეს სეგმენტი გავყოთ შუაზე. თუ ამგვარად გავაგრძელებთ სეგმენტების გაყოფის პროცესს, მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

ამ მიმდევრობის ყოველი სეგმენტი შეიცავს მოცემული განტოლების  $x_0$  ფესვს.

თუ სეგმენტის გაყოფისას შუა წერტილი აღმოჩნდა  $f(x)$  ფუნქციის ფესვი, მაშინ სეგმენტების გაყოფის პროცესი შეწყდება და ამით მოძებნილი იქნება  $f(x) = 0$  განტოლების ფესვის ზუსტი მნიშვნელობა. ამ შემთხვევას შემდეგში გამოვირიცხავთ.

ცხადია,  $[a_n, b_n]$  სეგმენტის სიგრძეა

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

ამ ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ  $x_0$  ფესვი ნებისმიერი სიზუსტით.

სინჯვის მეთოდით განტოლების  $x_0$  ფესვის დიდი სიზუსტით მოძებნა მოითხოვს უამრავ გამოთვლას. ამიტომ ეს მეთოდი პრაქტიკულად ნაკლებად გამოსადეგია.

სინჯვის მეთოდი გულისხმობს  $f(x)$  ფუნქციის მხოლოდ უწყვეტობას  $[a_0, b_0]$  სეგმენტზე.

2°. **ქორდების მეთოდი.** ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x) = 0,$$

სადაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია რაიმე შუალედში. ვიგულისხმობთ რომ ამ შუალედში მოძებნილია ისეთი  $[a, b]$  სეგმენტი, რომელშიც  $f(x)$  ფუნქცია მონოტონურია, ხოლო  $f(a)$  და  $f(b)$  სხვადასხვა ნიშნისაა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმობთ, რომ  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$  (ნახ. 83). რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ  $y = f(x)$  წირი გადაკვეთს  $Ox$  ღერძს  $[a, b]$  სეგმენტის რაიმე  $x_0$  წერტილში, რომელიც წარმოადგენს მოცემული განტოლების ფესვს.

ახლა  $y = f(x)$  წირის  $A(a, f(a))$  და  $B(b, f(b))$  წერტილებზე გავავლოთ  $AB$  ქორდა. ამ ქორდისა და  $Ox$  ღერძის გადაკვეთის  $x_1$

წერტილი იქნება  $x_0$  ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა.  $x_0$  ფესვის მიახლოებითი  $x_1$  მნიშვნელობის მოსაძებნად დავწეროთ  $AB$  ქორდის განტოლება:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}$$

როდესაც  $x = x_1$ , მაშინ  $y = 0$  და ამიტომ ამ უკანასკნელი განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x_1-a}{b-a} \quad (1.1)$$

აქედან

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \quad (1.2)$$

$x_0$  ფესვის  $x_1$  მიახლოებითი მნიშვნელობა შეგვიძლია სხვა სახითაც წარმოვადგინოთ.

(1.1) განტოლებიდან გვაქვს

$$\frac{-f(b) + [f(b)-f(a)]}{f(b)-f(a)} = \frac{x_1-a}{b-a}$$

საიდანაც

$$x_1 = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)} \quad (1.3)$$

$x_0$  ფესვის უფრო ზუსტი მნიშვნელობის მოსაძებნად გამოვთვალოთ  $f(x_1)$ . თუ  $f(x_1) < 0$ , მაშინ გამოვიყენებთ იმავე (1.2) ფორმულას  $[a, x_1]$  სეგმენტისათვის. გვექნება

$$x_2 = a - \frac{(x_1-a)f(a)}{f(x_1)-f(a)} \quad (1.4)$$

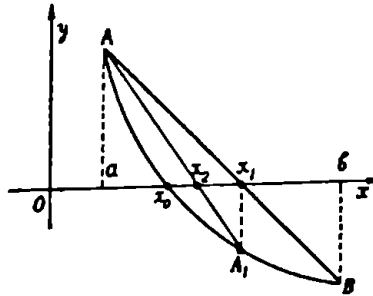
თუკი  $f(x_1) > 0$ , მაშინ გავიმეორებთ იმავე ხერხს და გამოვიყენებთ (1.3) ფორმულას  $[x_1, b]$  სეგმენტისათვის (ნახ. 84). გვექნება

$$x_2 = b - \frac{(b-x_1)f(b)}{f(b)-f(x_1)} \quad (1.5)$$

თუ ამ ხერხს რამდენჯერმე გამოვიყენებთ, მივიღებთ  $x_0$  ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობებს

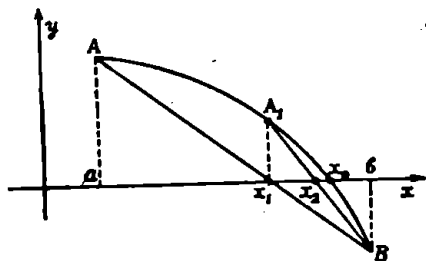
$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

რომლებიც თანდათანობით უახლოვდებიან  $x_0$  ფესვს.



ნახ. 83.

ახლა ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქციას აქვს უწყვეტი  $f'(x)$  წარმოებული  $[a, b]$  სეგმენტზე და ეს წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიპოვოთ  $|x_n - x_0|$  ცლომილება. მართლაც, ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით



ნახ. 84.

$$f(x_n) - f(x_0) = (x_n - x_0) f'(\xi),$$

სადაც  $\xi$  მოთავსებულია  $x_0$  და  $x_n$  წერტილებს შორის. რადგანაც  $f(x_0) = 0$ , ამიტომ

$$f(x_n) = (x_n - x_0) f'(\xi),$$

საიდანაც

$$x_n - x_0 = \frac{f(x_n)}{f'(\xi)}.$$

თუ  $|f'(x)|$  ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას  $[a, b]$  სეგმენტზე აღვნიშნავთ  $m$ -ით,  $|x_n - x_0|$  ცლომილებისათვის მივიღებთ ფორმულას

$$|x_n - x_0| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}. \quad (1.6)$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ  $|x_n - x_0|$  ცლომილება  $f(x_n)$  მნიშვნელობის საშუალებით.

3°. მხებთა მეთოდი. ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x) = 0,$$

სადაც  $f(x)$  უწყვეტია რაიმე შუალედში. დავეუშვათ, რომ ამ შუალედში მოქმდნილია ისეთი  $[a, b]$  სეგმენტი, რომელშიაც მოთავსებულია მოცემული განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვი. ვიგულისხმობთ, რომ  $f(x)$  ფუნქციას აქვს  $[a, b]$  სეგმენტში მეორე რიგის უწყვეტი წარმოებული, ამასთანავე  $f'(x)$  და  $f''(x)$  წარმოებულები ინარჩუნებენ მუდმივ ნიშანს. მაშასადამე,  $f(x)$  ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტზე მონოტონურია და, ამის გარდა,  $y = f(x)$  წირი ამავე სეგმენტში ამოზნექილია ან ჩაზნექილი.

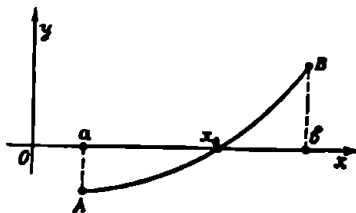
აქ წარმოგიდგება შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

$$1) f'(x) > 0, f''(x) > 0; \quad 2) f'(x) > 0, f''(x) < 0;$$

$$3) f'(x) < 0, f''(x) < 0; \quad 4) f'(x) < 0, f''(x) > 0$$

(ნახ. 85, 86, 87, 88).

მოცემული განტოლების  $x_0$  ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად გავავლოთ მხები  $AB$  რკალის იმ ბოლოზე, რომელზედაც  $f(x)$  და  $f''(x)$  ერთნაირი ნიშნისაა. ამ მხებისა და  $Ox$  ღერძის გადაკვეთის  $x_1$  წერტილი იქნება  $x_0$  ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ახლა აღვნიშნოთ  $\alpha$ -თი  $a$  და  $b$  რიცხვებიდან ის, რომელზედაც  $f(x)$  და  $f''(x)$  ერთნაირი ნიშნისაა.  $[a, f(a)]$  წერტილზე გავავალი მხების განტოლება:



ნახ. 85.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

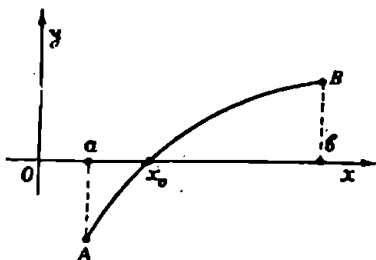
როდესაც  $x = x_1$ , მაშინ  $y = 0$ ; ამიტომ უკანასკნელი განტოლებიდან გვექნება

$$-f(a) = f'(a)(x_1 - a).$$

საიდანაც

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (1.7)$$

თუ  $\alpha = a$  (ნახ. 86 და 88), მაშინ (1.7) ფორმულა მიიღებს სახეს



ნახ. 86.

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad (1.8)$$

ხოლო თუ  $\alpha = b$  (ნახ. 85 და 87), მაშინ (1.7) ფორმულა ასე დაიწერება

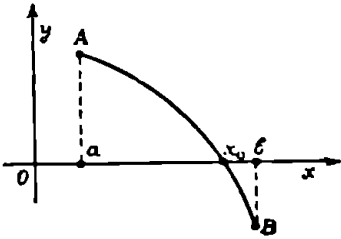
$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (1.9)$$

შეგჩერდეთ პირველ შემთხვევაზე. 89-ე ნახაზიდან ჩანს, რომ  $x_1$  მოთავსებულია

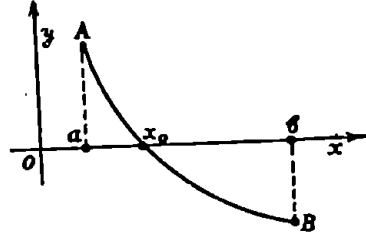
$x_0$  და  $b$  წერტილებს შორის,  $x_0$  კი  $[a, x_1]$  სეგმენტზე.  $x_1$  წერტილიდან გავავლოთ  $Ox$  ღერძის მართობი  $AB$  რკალის გადაკვეთამდე, მივიღებთ  $B_1$  წერტილს და ამ წერტილიდან გავავლოთ მხები. მხებისა და  $Ox$  ღერძის გადაკვეთის  $x_2$  წერტილი იქნება  $x_0$  ფესვის ახალი მიახლოებითი მნიშვნელობა. (1.9) ფორმულის თანახმად

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

$x'_2$  მოთავეებულია  $x_0$  და  $x'_1$  წერტილებს შორის. ახლა თუ განვიხილავთ  $[a, x'_2]$  სეგმენტს, ვიპოვით ახალ  $x'_3$  მიახლოებას და ა. შ.

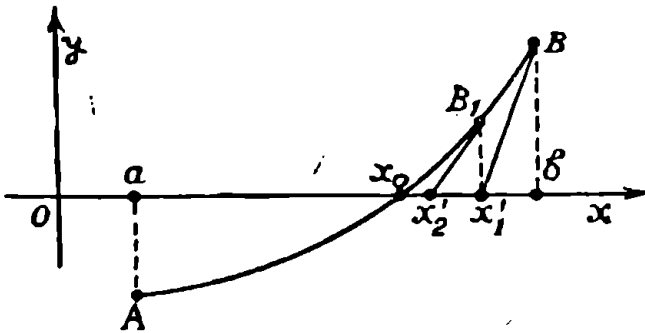


ნახ. 87.



ნახ. 88.

ამგვარად, მივიღებთ  $x_0$  ფესვის უფრო და უფრო უკეთეს მიახლოებებს



ნახ. 89.

$$b > x'_1 > x'_2 > \dots > x'_n > \dots > x_0,$$

ამასთანავე

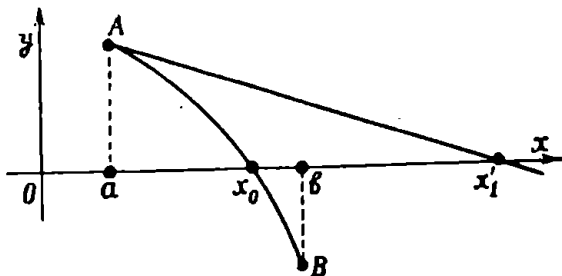
$$x'_{n+1} = x'_n - \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)}. \quad (1.10)$$

შენიშვნა 1. თუ მხებს გავავლებთ რკალის იმ ბოლოზე, სადაც  $f(x)$  და  $f''(x)$  სხვადასხვა ნიშნიანია, მაშინ  $x'_1$  წერტილი შეიძლება გავიღეს  $[a, b]$  სეგმენტიდან და ამით მიახლოება გაუარესდება (ნახ. 90).

შენიშვნა 2. თუ  $f''(x)$  ნიშანს არ ინარჩუნებს  $[a, b]$  სეგმენტში, ე. ი. თუ  $y=f(x)$  წირს აქვს ვალაღუნვის წერტილი, მაშინ

რეალის ორივე ბოლოში გავლებულმა მხებებმა შეიძლება გადაკვეთოს  $Ox$  ღერძი  $[a, b]$  სეგმენტის გარეთ.

ახლა გამოვიყენოთ ფორმულა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ მიახლოების ცდომილება, თუ ფესვის მნიშვნელობად აღებულია  $x'_n$ . ტეილორის ფორმულის მიხედვით



ნახ. 90.

$$f(x_0) = f(x'_n) + f'(x'_n)(x_0 - x'_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_0 - x'_n)^2,$$

სადაც  $\xi$  მოთავსებულია  $x_0$  და  $x'_n$  წერტილებს შორის.

რადგანაც  $f(x_0) = 0$ , ამიტომ

$$x_0 - x'_n + \frac{f(x'_n)}{f'(x'_n)} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x'_n)}(x_0 - x'_n)^2. \quad (1.11)$$

თუ გავითვალისწინებთ (1.10) ფორმულას, (1.11) ფორმულიდან მივიღებთ

$$x_0 - x'_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x'_n)}(x_0 - x'_n)^2,$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ  $(n+1)$ -ე მიახლოების ცდომილება, თუ ცნობილია  $n$ -ური მიახლოების ცდომილება:

$$|x_0 - x'_{n+1}| \leq \frac{M}{2|f'(x'_n)|}(x_0 - x'_n)^2, \quad (1.12)$$

სადაც  $M$  არის  $|f''(x)|$  ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა  $[a, b]$  სეგმენტზე.

ამრიგად, ახალი მიახლოების ცდომილება კლებულობს წინა მიახლოების ცდომილების კვადრატის პროპორციულად, რაც უზრუნველყოფს ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა სწრაფ დაახლოებას მოცემული განტოლების ფესვთან.





ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ  $(x_n)_{n>0}$  მიმდევრობის ყველა წერტილო ეკუთვნის  $X$  შუალედს. კერძოდ, თუ  $U(x_0) = x_0$ , მაშინ  $(x_n)_{n>0}$  მიმდევრობის ყველა წევრი ემთხვევა  $x_0$  წერტილს.

ჩ ვიცხვებ, რომლისთვისაც  $U(\xi) = \xi$  ეწოდება  $U(x)$  ფუნქციის უძრავი წერტილი, ანუ (1.14) იტერაციის ცენტრი, ხოლო  $U(x)$  ფუნქციას ჰქვია მაიტერიკი გელი ფუნქცია.

თუ  $(x_n)_{n>0}$  მიმდევრობა კრებადია  $\xi$  წერტილისაკენ და  $U(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $\xi$  წერტილში, მაშინ ეს წერტილი იქნება  $U(x)$  ფუნქციის უძრავი წერტილი. მართლაც, თუ  $x_{n+1} = U(x_n)$  ტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა  $n \rightarrow \infty$ , მივიღებთ

$$U(\xi) = \xi.$$

შეგნიშნოთ, რომ  $(x_n)_{n>0}$  მიმდევრობა როდია ყოველთვის კრებადი. ამ მიმდევრობის კრებადობის საკმარის პირობას გვაძლევს შემდეგი

თეორემა 1. ვთქვათ,  $U(x)$  ფუნქცია განსაზღვრულია  $X = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  სეგმენტზე და ვიგულისხმობთ, რომ ეს ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1)  $X$  სეგმენტის ყოველი  $x'$  და  $x''$  წერტილისათვის:

$$|U(x'') - U(x')| < |x'' - x'|, \quad (1.15)$$

სადაც  $\alpha$  ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია;

2) შესრულებულია ტოლობა

$$\frac{\rho}{1 - \alpha} \leq \varepsilon, \quad (1.16)$$

სადაც  $\rho = |x_0 - U(x_0)|$ . მაშინ  $X$  სეგმენტში არსებობს  $U(x)$  ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. ადვილი მისახვედრია, რომ  $X$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\bar{x}$  წერტილისათვის  $U(\bar{x})$  იქნება იმავე სეგმენტის წერტილი. მართლაც, თუ გავითვალისწინებთ (1.15) და (1.16) უტოლობებს, გვექნება

$$\begin{aligned} |x_0 - U(\bar{x})| &\leq |x_0 - U(x_0)| + |U(x_0) - U(\bar{x})| \leq \rho + \\ &+ \alpha |x_0 - \bar{x}| \leq \rho + \alpha \varepsilon \leq \varepsilon(1 - \alpha) + \alpha \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

ამრიგად,  $X$  სეგმენტის ნებისმიერი  $x$  წერტილის შესაბამისი  $U(x)$  წერტილი ეკუთვნის იმავე სეგმენტს.

ახლა ავიღოთ წერტილთა მიმდევრობა

$$x_1 = U(x_0), x_2 = U(x_1), \dots, x_n = U(x_{n-1}), \dots$$

დავამტკიცოთ, რომ ეს მიმდევრობა ფუნდამენტალურია. თუ  $n \geq 1$  გვექნება

$$|x_{n+1} - x_n| = |U(x_n) - U(x_{n-1})| \leq \alpha |x_n - x_{n-1}|.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha^n |x_1 - x_0| \leq \alpha^n \varepsilon. \quad (1.17)$$

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ნატურალური  $m$  და  $n$  რიცხვები და აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ  $m > n$ . მაშინ

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{m-1} - x_m|.$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.17) უტოლობას, გვექნება

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \alpha^n \varepsilon + \alpha^{n+1} \varepsilon + \dots + \alpha^{m-1} \varepsilon = \\ &= \alpha^n \varepsilon (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.18)$$

და რაკი  $\alpha < 1$ , ამიტომ

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |x_n - x_m| = 0.$$

მაშასადამე,  $(x_n)_{n \geq 0}$  მიმდევრობა ფუნდამენტალურია და იგი კრებადია გარკვეული  $\xi$  წერტილისაკენ, რომელიც ეკუთვნის  $X$  სეგმენტს. დავამტკიცოთ, რომ

$$U(\xi) = \xi. \quad (1.19)$$

გვაქვს:

$$|U(\xi) - x_n| = |U(\xi) - U(x_{n-1})| \leq \alpha |\xi - x_{n-1}|.$$

აქედან

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = U(\xi).$$

მაშასადამე, მართებულია (1.19) ტოლობა.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ  $U(x)$  ფუნქციისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი უძრავი წერტილი. ვთქვათ,  $\xi'$  არის  $U(x)$  ფუნქციის მეორე უძრავი წერტილი და დავამტკიცოთ, რომ  $\xi' = \xi$ . თუ მხედველობაში მივიღებთ (1.15) პირობას, გვექნება

$$|\xi' - \xi| = |U(\xi') - U(\xi)| \leq \alpha |\xi' - \xi|$$

და რადგანაც  $\alpha < 1$ , ამიტომ  $|\xi' - \xi| = 0$ , ე. ი.  $\xi' = \xi$ .

ამრიგად,  $U(x)$  ფუნქციას აქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

**შედეგი.** ვთქვათ,  $X=[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$  სეგმენტზე მოცემულია წარმოებადი  $U(x)$  ფუნქცია და შესრულებულია პირობები:

1)  $|U'(x)| \leq \alpha$ , სადაც  $\alpha$  ერთზე ნაკლები დადებითი რიცხვია;

2) შესრულებულია უტოლობა

$$\frac{\rho}{1-\alpha} \leq \varepsilon, \quad (1.16)$$

სადაც  $\rho = |x_0 - U(x_0)|$ . მაშინ  $X$  სეგმენტში არსებობს  $U(x)$  ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

დამტკიცება. მოცემულ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი  $x'$  და  $x''$  წერტილი. ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით

$$|U(x'') - U(x')| = |U'(\xi)| \cdot |x'' - x'|,$$

სადაც  $\xi$  მთავსებულია  $x'$  და  $x''$  შორის. თუ მხედველობაში მივიღებთ 1) პირობას, გვექნება

$$|U(x'') - U(x')| \leq \alpha |x'' - x'|.$$

მაშასადამე,  $U(x)$  აკმაყოფილებს 1-ლი თეორემის ყველა პირობას და ამიტომ  $X$  სეგმენტზე არსებობს  $U(x)$  ფუნქციის ერთადერთი უძრავი წერტილი.

ახლა (1.16) უტოლობაში გადავიდეთ ზღვარზე, როდესაც  $n \rightarrow \infty$ , მივიღებთ

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha} \alpha^n \quad (n=1, 2, \dots).$$

ამ ფორმულით შეგვიძლია შევაფასოთ  $x_n$ -ის გადახრა  $\xi$  წერტილისაგან.

## § 2. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებით გამოთვლა

1°. ინტეგრალის მიახლოებით გამოთვლის ამოცანა. როგორც ვიცით, თუ  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ცნობილი მისი პირველყოფილი  $F(x)$  ფუნქცია, მაშინ  $f(x)$  ფუნქციის განსაზღვ-

რული ინტეგრალი  $a$ -დან  $b$ -მდე გამოითვლება ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულით

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

მაგრამ ხშირად პირველყოფილი  $F(x)$  ფუნქცია ვერ მოიძებნება ელემენტარულ ფუნქციებში ანდა  $F(x)$  ფუნქციას ძალიან რთული ანალიზური გამოსახულება აქვს. ამიტომ განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულით ძნელია ან პრაქტიკულად განუხორციელებელი. ამის გარდა, პრაქტიკაში ინტეგრალქვეშა  $f(x)$  ფუნქცია ხშირად ცხრილითაა მოცემული და მაშინ თვით პირველყოფილი ფუნქცია აზრს კარგავს. ამიტომ დიდი მნიშვნელობა აქვს განსაზღვრული ინტეგრალების გამოთვლის მიახლოებით და პირველ რიგში რიცხვით მეთოდებს.

ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრების ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით გამოვთვალოთ ინტეგრალის მნიშვნელობა. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლას ფუნქციის მნიშვნელობათა მიხედვით ზოგჯერ მექანიკური კვადრატურა ეწოდება. მექანიკური კვადრატურის ჩვეულებრივი ხერხი იმაში მდგომარეობს, რომ მოცემულ  $f(x)$  ფუნქციას განსახილავ  $[a, b]$  სეგმენტზე ცვლიან მარტივი სახის მახპროქსიმირებელი  $P(x)$  ფუნქციით (მაგალითად, მრავალწევრით) და შემდეგ მიახლოებით ლებულობენ

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx.$$

თვით  $P(x)$  ფუნქცია ისეთი უნდა იყოს, რომ უშუალოდ შეიძლება ბოლეს გამოთვლა ინტეგრალისა

$$\int_a^b P(x) dx.$$

$[a, b]$  სეგმენტზე განსაზღვრული  $f(x)$  ფუნქციის მახპროქსიმირებელი  $P(x)$  ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელიც მოცემული დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის აკმაყოფილებს უტოლობას

$$| f(x) - P(x) | < \varepsilon$$

$x$ -ის ყველა მნიშვნელობისათვის  $[a, b]$  სეგმენტიდან. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ  $P(x)$  იძლევა  $f(x)$  ფუნქციის მიახლოებას  $\varepsilon$  სიზუსტით.

ქვემოთ ჩვენ შევისწავლით ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის ზოგიერთ ხერხს.

2°. მართკუთხედების ფორმულა. ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით  $[a, b]$  სეგმენტზე. განვიხილოთ განსაზღვ-

რული ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  და გამოვთვალოთ იგი მიახლოებით.

ამისათვის  $[a, b]$  სეგმენტი დავყოთ  $n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

ცხადია, რომ

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x_k) = y_k \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

რადგანაც  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

მაშასადამე,

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (2.1)$$

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (2.2)$$

(2.1) და (2.2) ფორმულებს ეწოდება მართკუთხედების ფორმულა. ცხადია, თუ  $f(x)$  არის დადებითი ზრდადი ფუნქცია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ (2.1) და (2.2) ფორმულები გამოსახავენ კიბური

ფიგურების ფართობებს, ერთი წარმოადგენს განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას ნაკლებობით, მეორე კი მეტობით.

**თეორემა 2.** თუ  $f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე აქვს უწყვეტი  $f'(x)$  წარმოებულის, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგნაირად

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}, \quad (2.3)$$

სადაც

$$M = \max_{a < x < b} |f'(x)|.$$

დამტკიცება. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის თანახმად

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) f'(x) dx = f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx,$$

ანუ

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1}) f'(x) dx = \frac{b-a}{n} y_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

აქედან

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{b-a}{n} y_k \right| \leq \\ & \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)(x - x_k)| dx \leq \frac{M(x_k - x_{k-1})^2}{2}, \end{aligned}$$

ე. ი.

$$\begin{aligned} -\frac{M(b-a)^2}{2n^2} & \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \frac{b-a}{n} y_k \leq \frac{M(b-a)^2}{2n^2} \\ & (k=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, გვექნება

$$-\frac{M(b-a)^2}{2n} \leq \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$

ეს უტოლობები (2.3) უტოლობის ტოლფასია. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მიიღება შეფასება

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}. \quad (2.4)$$

3°. ტრაპეციის ფორმულა. თუ მიახლოებით (2.1) და (2.2) ტოლობებს წვერ-წვერად შევკრებთ და მიღებულ მიახლოებით ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ ორზე, გვექნება

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k + y_{k+1}}{2} = \\ &= \frac{b-a}{2n} [y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n], \end{aligned}$$

ანუ

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (2.5)$$

ამ ფორმულას ტრაპეციის ფორმულა ეწოდება. ეს სახელწოდება წარმოიშვა იმის გამო, რომ

$$\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$$

შესაქრები იმ ტრაპეციის ფართობს წარმოადგენს, რომლის ფუძეებია  $y_k$  და  $y_{k+1}$ , სიმაღლე კი  $\frac{b-a}{n}$ .

თეორემა 3. თუ  $f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე აქვს მეორე რიგის უწყვეტი  $f''(x)$  წარმოებელი, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \right| &\leq \\ &\leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

სადაც

$$M = \max_{a < x < b} |f''(x)|.$$

დამტკიცება. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის მიხედვით

$$\begin{aligned} \int_a^x f''(t)(t-a) dt &= f'(x)(x-a) - \int_a^x f'(x) dx = \\ &= f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]. \end{aligned}$$

აქედან

$$\begin{aligned} |f'(x)(x-a) - [f(x) - f(a)]| &\ll \\ &\ll \int_a^x |f''(t)(t-a)| dt \ll \frac{M(x-a)^2}{2}. \end{aligned}$$

ახლა მოვახდინოთ ამ უტოლობის ინტეგრება  $a$ -დან  $x$ -მდე, გვექნება

$$\left| \int_a^x f'(t)(t-a) dt - \int_a^x f(t) dt + f(a)(x-a) \right| \ll \frac{M(x-a)^3}{6}.$$

თუ ამ უტოლობაში ავიღებთ  $a = x_{k-1}$ ,  $x = x_k$ , მაშინ

$$\begin{aligned} &\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)(t-x_k) dt - \right. \\ &\left. - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt + y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) \right| \ll \frac{M(b-a)^3}{6n^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(t)(t-x_{k-1}) dt &= f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \\ &= \frac{b-a}{n} y_k - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt. \end{aligned}$$

ახლა (2.7) უტოლობა ასე გადაიწერება

$$\left| \frac{b-a}{n} y_k - 2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt + \frac{b-a}{n} y_{k-1} \right| \ll \frac{M(b-a)^3}{6n^3}.$$

აქედან

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - \frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \right| \ll \frac{M(b-a)^3}{12n^3}.$$



თუ ამ უტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ (2.6) შეფასებას. თეორემა დამტკიცებულია.

(2.6) უტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს ინტეგრალის ცდომილებას.

4°. პარაბოლების ფორმულა. დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა. თუ  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ , მაშინ

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (2.8)$$

დამტკიცება. ადვილი შესაძრწნეია, რომ

$$\begin{aligned} f(a) &= Aa^2 + Ba + C, & f(b) &= Ab^2 + Bb + C \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \frac{A}{4}(a+b)^2 + \frac{B}{2}(a+b) + C. \end{aligned} \quad (2.9)$$

შემდეგ

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[ \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_a^b = \\ &= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) = \\ &= \frac{b-a}{6} \left\{ (Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) + 4 \left[ A \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B \cdot \frac{a+b}{2} + C \right] \right\}. \end{aligned}$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.9) ტოლობებს, მივიღებთ (2.8) ფორმულას.

ამრიგად, ჩვენ გამოვთვალეთ იმ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია  $y = Ax^2 + Bx + C$  პარაბოლით,  $[a, b]$  სეგმენტით,  $x = a$  და  $x = b$  წრფეებით.

ახლა ვთქვათ,  $f(x)$  ფუნქცია ინტეგრებადია რიმანის აზრით  $[a, b]$  სეგმენტზე. დავოთ მოცემული სეგმენტი  $2n$  ტოლ ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$f(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2n).$$

განვიხილოთ სეგმენტები

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$$

და ამ სეგმენტების შესაბამისი მრულწირული ტრაპეციების შემოსაზღვრელი  $y=f(x)$  რკალები შეეცვალოთ  $y=Ax^2+Bx+C$  სახის პარაბოლების რკალებით. მაშინ ლემის თანახმად გვექნება

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6n} (y_0+4y_1+y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6n} (y_2+4y_3+y_4),$$

.....

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6n} (y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}).$$

თუ ამ მიახლოებით ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{b-a}{6n} [(y_0+y_{2n}) + 4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1}) + 2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})]. \quad (2.10)$$

ეს არის პარაბოლების ფორმულა. ამ ფორმულას ეწოდება აგრეთვე სიმპსონის ფორმულა.

თეორემა 4. თუ  $f(x)$  ფუნქციას  $[a, b]$  სეგმენტზე აქვს მეოთხე რიგის შემოსაზღვრული  $f^{(IV)}(x)$  წარმოებულის, მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6n} [(y_0+y_{2n}) + 4(y_1+y_3+\dots+y_{2n-1}) + 2(y_2+y_4+\dots+y_{2n-2})] \right| \ll \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}, \quad (2.11)$$

სადაც  $M = \sup_{a < x < b} |f^{(IV)}(x)|$ .

დამტკიცება. განვიხილოთ დამხმარე ფუნქცია

$$\Phi(t) = F(t) - \left(\frac{t}{h}\right)^5 F(h),$$

სადაც

$$F(t) = \int_{x_{2k-1}-t}^{x_{2k-1}+t} f(x) dx - \frac{t}{3} \{f(x_{2k-1}-t) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k-1}+t)\},$$

ხოლო

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad 0 \leq t \leq h.$$

$\Phi(t)$  ფუნქციის სამჯერ გაწარმოება გვაძლევს

$$\Phi'(t) = \frac{2}{3} [f(x_{2k-1}+t) - 2f(x_{2k-1}) + f(x_{2k-1}-t)] - \frac{t}{3} [f'(x_{2k-1}+t) - f'(x_{2k-1}-t)] - \frac{5t^3}{h^3} F(h),$$

$$\Phi''(t) = \frac{1}{3} [f''(x_{2k-1}+t) - f''(x_{2k-1}-t)] - \frac{t}{3} [f'''(x_{2k-1}+t) + f'''(x_{2k-1}-t)] - \frac{20t^2}{h^3} F(h),$$

$$\Phi'''(t) = -\frac{1}{3} t [f'''(x_{2k-1}+t) - f'''(x_{2k-1}-t)] - \frac{60t^3}{h^3} F(h).$$

ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\Phi'''(t) = -\frac{2}{3} t^3 \left[ f^{(IV)}(\xi) + \frac{90}{h^3} F(h) \right], \quad (2.12)$$

სადაც  $x_{2k-1}-t < \xi < x_{2k-1}+t$ .

რადგან  $\Phi(0)=0$ ,  $\Phi(h)=0$ , ამიტომ როლის თეორემის ძალით არსებობს  $(0, h)$  ინტერვალში ისეთი რიცხვი  $t_1$ , რომ

$$\Phi'(t_1) = 0.$$

შემდეგ, რაკი  $\Phi'(0)=0$ , ამიტომ როლის თეორემის თანახმად  $[0, t_1]$  ინტერვალში არსებობს ისეთი წერტილი  $t_2$ , რომ

$$\Phi''(t_2) = 0.$$

დასასრულ, რადგანაც  $\Phi''(0)=0$ , ამიტომ  $[0, t_2]$  ინტერვალში არსებობს ისეთი წერტილი  $t_3$ , რომ

$$\Phi'''(t_3) = 0.$$

ახლა (2.12) ფორმულაში ჩავსვათ  $t = t_3$ , მივიღებთ

$$F(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi).$$

მაშასადამე,

$$\int_{x_{2k-1}-h}^{x_{2k-1}+h} f(x) dx - \frac{h}{3} [f(x_{2k-1}-h) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k-1}+h)] = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi).$$

მაგრამ, რადგანაც

$$x_{2k-1}-h = x_{2k-2}, \quad x_{2k-1}+h = x_{2k},$$

ამიტომ

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{b-a}{6n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^5} f^{(IV)}(\xi).$$

აქედან ვღებულობთ

$$\left| \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx - \frac{b-a}{6n} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) \right| < \frac{M(b-a)^5}{2880n^5}. \quad (2.13)$$

(2.13) უტოლობებში  $k$ -ს მივანიჭოთ მნიშვნელობები  $1, 2, \dots, n$ , მივიღებთ უტოლობებს და მათი წევრ-წევრად შეკრება მოგვცემს (2.11) უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნაეთ, რომ თუ  $f(x)$  არის მრავალწევრი არა უმეტესი მესამე ხარისხისა, მაშინ  $f^{(IV)}(x) = 0$  და სიმპსონის ფორმულა წარმოადგენს არა მიახლოებით, არამედ ზუსტ ფორმულას.

მაგალითი. ვთქვათ,  $2n = 4$  და სიმპსონის ფორმულით გამოვთვალოთ ინტეგრალი

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

გამოვთვალოთ ინტეგრალქვეშა  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ფუნქციის მნიშვნელო-

ბები  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = 0,25$ ;  $x_2 = 0,5$ ;  $x_3 = 0,75$  და  $x_4 = 1$  წერტილებში. თუ შევიზღუდებით ხუთი ნიშნით მძიმის შემდეგ, გვექნება

$$y_0 = 1,00000; \quad 4y_1 = 3,76471; \quad 2y_2 = 1,60000; \quad 4y_3 = 2,56000;$$

$$y_4 = 0,50000.$$

ეს ტოლობები წევრ-წევრად შევკრიბოთ და შემდეგ გავყოთ 12-ზე, ვვექნება

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \simeq 0,78539.$$

მეორე მხრივ

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

მაშასადამე,  $\pi \simeq 3,14156$ .

### ხ ა გ ა რ ჯ ი შ ი

1. დამტკიცეთ, რომ  $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$  განტოლებას აქვს ერთადერთი მარტივი ნამდვილი ფესვი, რომელიც მოთავსებულია  $[0, 1]$  სეგმენტში და გამოთვალეთ ეს ფესვი სინჯვის მეთოდით 0,1 სიზუსტით.

პასუხი:  $x_0 = 0,1875$  ნაკლებობით, სიზუსტით 0,1-მდე;  $x_0 = 0,25$  მეტობით, სიზუსტით 0,1-მდე.

2. ქორდების მეთოდებით მოძებნეთ  $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$  განტოლების ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა სიზუსტით 0,1-მდე.

პასუხი:  $x_0 = 1,75$  ნაკლებობით, სიზუსტით 0,1-მდე;  $x_0 = 2$  მეტობით, სიზუსტით 0,1-მდე.

3. ქორდების მეთოდით მოძებნეთ  $x^3 - 6x + 2 = 0$  განტოლების ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობები.

4. მოძებნეთ  $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$  განტოლების ნამდვილი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა მხებთა მეთოდით.

პასუხი:  $x'_1 \simeq 3,68$ ;  $x'_2 \simeq 3,633$ .

5. მოძებნეთ  $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0$  განტოლების ნამდვილი ფესვების მიახლოებითი მნიშვნელობები კომბინირებული მეთოდით.

პასუხი:  $x_1 = \frac{2}{3}$ ;  $x'_1 = \frac{1}{3}$ ;  $x_2 \simeq 0,401$ ;  $x'_2 \simeq 0,385$ .

6. იტერაციის მეთოდით იპოვეთ  $x^3 - 4x^2 + 10x - 10 = 0$  განტოლების ფესვი, რომელიც მოთავსებულია  $[1, 2]$  სეგმენტზე.

7. მართკუთხედების ფორმულის გამოყენებით მიახლოებით გამოთვალეთ ინტეგრალი

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx \quad (n=10)$$

და შედეგი შეადარეთ ზუსტ პასუხთან.

პასუხი: 6,2832.

ტრაპეციის ფორმულის საშუალებით გამოთვალეთ ინტეგრალები და შეაფასეთ მათი ცდომილებანი:

$$8. \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8). \quad \text{პასუხი: } 0,69315.$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+x^2} \quad (n=12). \quad \text{პასუხი: } 0,83566.$$

$$10. \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n=6). \quad \text{პასუხი: } 1,4675.$$

სიმპსონის ფორმულის საშუალებით გამოთვალეთ ინტეგრალები:

$$11. \int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n=6). \quad \text{პასუხი: } 5,4024.$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n=10). \quad \text{პასუხი: } 1,37039.$$

$$13. \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} \quad (n=6). \quad \text{პასუხი: } 0,2288.$$

$$14. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \quad (n=10). \quad \text{პასუხი: } 0,915966.$$

**განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გეომეტრიული  
და ფიზიკური გამოყენება**

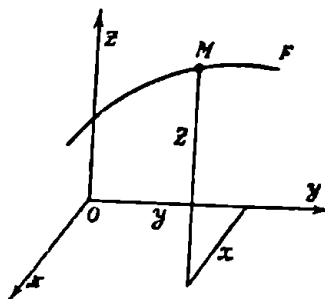
**§ 1. მარტივი წირი**

ვთქვათ,  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  და  $\chi(t)$  ფუნქციები უწყვეტია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე. ამ ფუნქციების  $t$  არგუმენტს შემდეგში ვუწოდებთ პარამეტრს. თუ განვიხილავთ  $t$  პარამეტრს როგორც დროს, მაშინ აღნიშნული ფუნქციები განსაზღვრავენ იმ  $M$  წერტილის მოძრაობის კანონს, რომლის კოორდინატებია

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1.1)$$

იმ  $M$  წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც შეესაბამება  $t$  პარამეტრის ყველა შესაძლო მნიშვნელობას  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტიდან შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც (1.1) კანონით მოძრავე  $M$  წერტილის კვალი (ნახ. 92).

შეგნიშნოთ, რომ  $M$  წერტილთა სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს მოძრავე წერტილის კვალს, შეიძლება არ გადალევდეს თვალსაჩინო წარმოდგენას წირზე. ამიტომ ბუნებრივია გამოვეყოთ  $M$  წერტილთა ისეთი სიმრავლე, რომელიც გადალევს თვალსაჩინო წარმოდგენას წირზე.



ნახ. 92.

განსაზღვრა 1. ყველა იმ  $M$  წერტილის სიმრავლეს, რომელთა  $x$ ,  $y$  და  $z$  კოორდინატები განსაზღვრულია (1.1) განტოლებებით, ეწოდება მარტივი სივრცითი  $\Gamma$  წირი, თუ  $t$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობას  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტიდან შეესაბამება ამ სიმრავლის სხვადასხვა წერტილი.

(1.1) განტოლებებს ეწოდება  $\Gamma$  წირის პარამეტრული განტოლებანი.  $\alpha$  და  $\beta$  რიცხვების შესაბამის წერტილებს  $\Gamma$  წირის ბოლო წერტილები ეწოდება.

თუ გვაქვს განტოლებები

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

მაშინ  $\Gamma$  წირს ბრტყელი წირი ეწოდება.

შეუნიშნავთ, რომ ერთი და იგივე მარტივი  $\Gamma$  წირი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ სხვადასხვა პარამეტრული განტოლებებით. მაგალითად, განტოლებები

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

წარმოადგენენ ელიფსის პარამეტრულ განტოლებებს. განტოლებები

$$x = \frac{2a\tau}{1+\tau^2}, \quad y = \frac{b(1-\tau^2)}{1+\tau^2}, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

წარმოადგენენ აგრეთვე იმავე ელიფსის პარამეტრულ განტოლებებს.

მარტივი წირის მაგალითს წარმოადგენს  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე უწყვეტი  $y = f(x)$  ფუნქციის გრაფიკი. მართლაც, ეს გრაფიკი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც

$$x = t, \quad y = f(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

კანონით მოძრავი  $M$  წერტილის კვალი, ამასთანავე  $t$  პარამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობას შეესაბამება გრაფიკის სხვადასხვა წერტილი.

განსაზღვრა 2. ვთქვათ,  $\Gamma_1$  და  $\Gamma_2$  ისეთი მარტივი ბრტყელი წირებია, რომ  $\Gamma_1$  წირის ბოლოები ემთხვევა  $\Gamma_2$  წირის ბოლოებს, ხოლო  $\Gamma_1$  და  $\Gamma_2$  წირების დანარჩენი წერტილები ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან. მაშინ  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  წირს ეწოდება მარტივი შეკრული ბრტყელი წირი.

ფრანგი თემატიკოსის ჟორდანის (Jordan, 1838—1922) მიერ დამტკიცებული იყო, რომ ყოველი მარტივი შეკრული ბრტყელი წირი ყოფს სიბრტყეს ორ ნაწილად—შიგა და გარე ნაწილებად.

### § 2. წრფივადი წირი. წირის სიგრძე

ვთქვათ, მოცემულია სივრცითი  $\Gamma$  წირი, რომლის განტოლებებია

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad (2.1)$$

სადაც  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  უწყვეტი ფუნქციებია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე. ვიგუ-



ლისხმობთ, რომ როდესაც  $t$  იცვლება  $\alpha$ -დან  $\beta$ -მდე, მაშინ  $M[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)]$  წერტილი აღწერს  $\Gamma$  წირის გარკვეული მიმართულებით  $\alpha$  და  $\beta$ -ს შესაბამისი წერტილები  $\Gamma$  წირზე აღენიშნოთ  $A$  და  $B$  ასოებით. დავყოთ  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტი წერტილებით

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

და  $\Gamma$  წირში ჩაეხაზოთ ტეხილი, რომლის წვეროები შეესაბამებიან  $t$  პარამეტრის  $t_0, t_1, \dots, t_n$  მნიშვნელობებს. ამ ტეხილი წირის სიგრძე აღენიშნოთ  $P$  ასოთი. ამრიგად,  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის ყოველ დანაწილებას შეესაბამება სათანადო დადებითი რიცხვი  $P$ . ასეთი  $P$  რიცხვთა სიმრავლის ზედა საზღვარს ვუწოდებთ  $\Gamma$  წირის სიგრძეს და აღენიშნავთ  $L$  ასოთი. თუ  $L < +\infty$ , მაშინ  $\Gamma$  წირს ეწოდება წრფეული წირო.

ლემა. ნებისმიერი  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  ნამდვილი რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}| &\leq |a_2 - a_1| + \\ &+ |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2|. \end{aligned} \quad (2.2)$$

დამტკიცება. თუ  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  რიცხვები ყველა ნულია, მაშინ ლემა ცხადია. ახლა ვთქვათ, რომ ეს ასე არ არის. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}.$$

გვაქვს

$$\begin{aligned} |r_1 - r_2| &= \frac{|r_1^2 - r_2^2|}{r_1 + r_2} = \frac{|(a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) + (c_1^2 - c_2^2)|}{r_1 + r_2} \leq \\ &\leq |a_1 - a_2| \cdot \frac{|a_1 + a_2|}{r_1 + r_2} + |b_1 - b_2| \cdot \frac{|b_1 + b_2|}{r_1 + r_2} + \\ &+ |c_1 - c_2| \cdot \frac{|c_1 + c_2|}{r_1 + r_2} \leq |a_1 - a_2| \cdot \frac{|a_1| + |a_2|}{r_1 + r_2} + \\ &+ |b_1 - b_2| \cdot \frac{|b_1| + |b_2|}{r_1 + r_2} + |c_1 - c_2| \cdot \frac{|c_1| + |c_2|}{r_1 + r_2} \leq \\ &\leq |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2|. \end{aligned}$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. თუ  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\chi(t)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, მაშინ  $\Gamma$  წირი წრფევალია და

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt. \quad (2.3)$$

დამტკიცება. განვიხილოთ  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $\lambda$ -დანაწილება  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ , სადაც  $t_0 = \alpha$ ,  $t_n = \beta$ . ყოველ  $t_k$  წერტილს შეესაბამება  $\Gamma$  წირის  $M_k$  წერტილი ( $k=0, 1, \dots, n$ ). ჩავხაზოთ  $\Gamma$ -ში  $M_0 M_1 \dots M_n$  ტეხილი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ  $P$ -თი. ცხადია,

$$P = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|^2 + |\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})|^2 + |\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})|^2}.$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) \varphi'(\xi_k),$$

$$\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) \psi'(\eta_k),$$

$$\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) \chi'(\zeta_k),$$

სადაც  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  გარკვეული წერტილებია  $[t_{k-1}, t_k]$  სეგმენტში ( $k=1, 2, \dots, n$ ). მაშასადამე,

$$P = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\eta_k)]^2 + [\chi'(\zeta_k)]^2} \Delta t_k,$$

სადაც  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ . შევნიშნოთ, რომ  $\xi_k, \eta_k$  და  $\zeta_k$  რიცხვები საზოგადოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. განვიხილოთ ჯამი

$$\sigma = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\xi_k)]^2 + [\chi'(\xi_k)]^2} \Delta t_k.$$

დავამტკიცოთ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (P - \sigma) = 0. \quad (2.4)$$

ღმის თანახმად გვაქვს

$$|P - \sigma| \leq \sum_{k=1}^n \{ |\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)| + |\chi'(\zeta_k) - \chi'(\xi_k)| \} \Delta t_k.$$

რადგანაც  $\psi'(t)$  და  $\chi'(t)$  ფუნქციები თანაბრად უწყვეტია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი დადებითი რიცხვი  $\delta(\varepsilon)$ , რომ  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის ნებისმიერი  $t'$  და  $t''$  წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას  $|t'' - t'| < \delta$ , გვექნება

$$|\psi'(t'') - \psi'(t')| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}, \quad |\chi'(t'') - \chi'(t')| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}.$$

ვიგულისხმობთ, რომ  $\lambda < \delta$ , მაშინ  $|t_k - t_{k-1}| < \delta$  და, მაშასადამე,

$$|P - \sigma| < \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} + \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \right] \Delta t_k = \varepsilon.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ მართებულია (2.4) ტოლობა.

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას  $P = \sigma + (P - \sigma)$  შეგვიძლია დავწეროთ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

აღვილი მისახვედრია, რომ  $\Gamma$  წირში ჩახაზული ნებისმიერი ტენილის სიგრძე არ აღემატება ინტეგრალს

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

მაშასადამე,  $\Gamma$  წირი წრფეულია და მისი  $L$  სიგრძე გამოისახება ფორმულით

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt.$$

ეს ფორმულა შეგვიძლია ასე დავწეროთ:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.5)$$

კერძოდ, თუ  $\Gamma$  ბრტყელი წირია, რომელიც მოთავსებულია  $xOy$  სიბრტყეზე, მაშინ  $\chi(t) \equiv 0$  და (2.5) ფორმულა მიიღებს სახეს:

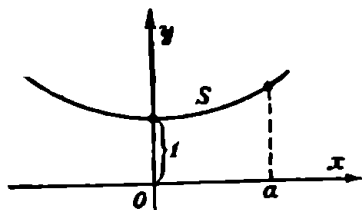
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.6)$$

ახლა ვთქვათ, ბრტყელი  $\Gamma$  წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . ეს განტოლება შეგვიძლია შევცვალოთ განტოლებებით

$$x=t, \quad y=f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

მაშინ (2.6) ფორმულა ასე გადაიწერება

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (2.7)$$



ნახ. 93.

ამიტომ

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \text{sh}^2 x} = \text{ch } x.$$

მაშასადამე, (2.7) ფორმულის თანახმად

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \text{ch } x dx = [\text{sh } x]_0^a = \text{sh } a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $x=a(t - \sin t)$ ,  $y=a(1 - \cos t)$  ციკლოიდის<sup>1</sup> ერთი თაღის  $L$  სიგრძე (ნახ. 94).

გვაქვს:

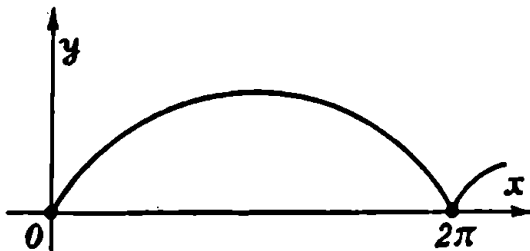
$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t.$$

<sup>1</sup> ციკლოიდა ეწოდება ბრტყელ წირს, რომელსაც შემოხაზავს  $a$  რადიუსიანი იმ წრეწირის წერტილი, რომელიც უსრიალოდ გორავს წრფეზე.

აქედან

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$



ნახ. 94.

მაშასადამე, (2.6) ფორმულის თანახმად,

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

მაგალითი 3. გამოთვლოთ  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ელიფსის რკალის სიგრძე.

ელიფსის მეოთხედი რკალის სიგრძისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (b \cos t)^2} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} dt = a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

ცნობილია, რომ

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2,$$

სადაც  $e$  ელიფსის ექსცენტრისიტეტი. მაშასადამე,

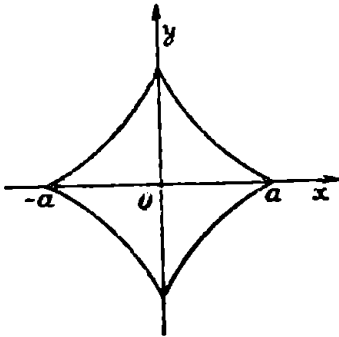
$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt.$$

ამ ინტეგრალს ელიფსური ინტეგრალი ეწოდება. იგი ვერ გამოითვლება ნიუტონისა და ლაიბნიცის ფორმულის უშუალო გამოყენებით, ვინაიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალი  $\int \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt$  ელემენტარული ფუნქციებით ვერ გამოისახება. ელიფსის სიგრძის გამოთვლა ხდება მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებით.

კერძოდ, თუ  $b = a = R$ , ელიფსი გადაიქცევა  $R$  რადიუსიან წრეწირად, ამ შემთხვევაში  $e = 0$  და (2.8) ფორმულა მოგვცემს

$$L = 4R \int_0^{\pi/2} dt = 2\pi R.$$

მივიღეთ ელემენტარულ გეომეტრიაში ცნობილი ფორმულა წრეწირის სიგრძისათვის.



ნახ. 95.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$  ასტროიდის  $L$  სიგრძე (ნახ. 95).

ასტროიდის პირველი მეოთხედის მისაღებად  $t$  უნდა ვცვალოთ 0-დან  $\frac{\pi}{2}$ -მდე. გვაქვს:

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

თუ გამოვიყენებთ (2.6) ფორმულას, გვექნება:

$$\begin{aligned} \frac{L}{4} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 3a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 t \sin^2 t} dt = 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

მაშასადამე,  $L = 6a$ .

#### § 8. წირის რაალის სიგრძე პოლარულ კოორდინატებში

ვთქვათ, ბრტყელი წირის განტოლება მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში  $\rho = f(\varphi)$ , სადაც  $f(\varphi)$  უწყვეტად წარმოებია  $[\alpha, \beta]$

სეგმენტზე. ვიპოვოთ ამ წირის რკალის სიგრძე. როგორც ვიცით, პოლარულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულება

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

აქედან

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi, \quad dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi.$$

საიდანაც

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

მაშასადამე,

$$\left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx^2 = \left[ \rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \right] d\varphi^2.$$

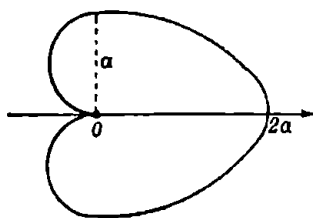
(2.6) ფორმულის თანახმად საძიებელი რკალის  $L$  სიგრძე გამოისახება ფორმულით

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi, \quad (3.1)$$

სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  პოლარული კუთხის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც შესაბამეობა რკალის ბოლო წერტილებს.

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  კარდიოიდის რკალის სიგრძე (ნახ. 96).

ამოხსნა. კარდიოიდის მოხაზულობა მოცემულია 96-ე ნახაზზე. თუ  $\varphi$  კუთხეს ვცვლით 0-დან  $\pi$ -მდე, მივიღებთ საძიებელი რკალის სიგრძის ნახევარს. (3.1) ფორმულის თანახმად,



ნახ. 96.

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= \int_0^{\pi} \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2} d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a. \end{aligned}$$

აქედან  $L = 8a$ .

## § 4. რკალის ღივარენიანი

ვთქვათ,  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე. ამ შემთხვევაში, ცვლადი  $s(t)$  რკალი წარმოიდგინება ფორმულით

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2 + [\chi'(\tau)]^2} d\tau. \quad (4.1)$$

რაკი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია უწყვეტია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, ამიტომ  $s(t)$  ფუნქცია წარმოებადია და

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}. \quad (4.2)$$

აქედან

$$[s'(t)]^2 = [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2.$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი გავამრავლოთ  $dt^2$ -ზე, მივიღებთ რკალის დიფერენციალისათვის შემდეგ გამოსახულებას:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.3)$$

თუ პარამეტრად ავიღებთ ცვლად  $s$  რკალს, მაშინ (4.3) ფორმულიდან მივიღებთ

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \quad (4.4)$$

თეორემა 2. ვთქვათ  $\Gamma$  წირის განტოლებები მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

სადაც  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  და  $\chi(t)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია. თუ  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  და  $\chi'(t)$  წარმოებულები ერთდროულად ნული არ ხდება, მაშინ  $\Gamma$  წირის რკალის სიგრძისა და მისი მომჭიმავი ქორდის სიგრძის ფარდობის ზღვარი, როდესაც რკალის ერთი ბოლო მიისწრაფვის მეორე ბოლოსაკენ, ერთის ტოლია.

დამტკიცება. ავიღოთ  $\Gamma$  წირზე რაიმე  $M(x, y, z)$  წერტილი. აღვნიშნოთ  $\Gamma$  წირის ერთი ბოლო წერტილი  $A$ -თი,  $AM$  რკალის სიგრძე კი  $s$ -ით. ახლა  $\Gamma$  წირზე ავიღოთ მეორე წერტილი  $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ . მაშინ  $AM'$  რკალის სიგრძე იქნება  $s + \Delta s$ , სადაც  $\Delta s$  წარმოადგენს  $MM'$  რკალის სიგრძეს. ორ წერტილს შორის მანძილის კორმულის თანახმად



$$|MM'| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

$M$  და  $M'$  წერტილების შესაბამისი პარამეტრის მნიშვნელობები აღვნიშნოთ  $t$  და  $t + \Delta t$ . განვიხილოთ  $MM'$  რკალის  $\Delta s$  სიგრძისა და  $MM'$  ქორდის  $|MM'|$  სიგრძის ფარდობა,  $\frac{\Delta s}{|MM'|}$ . გვაქვს:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{|MM'|} &= \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}} = \\ &= \frac{\frac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}. \end{aligned}$$

თუ  $\Delta t \rightarrow 0$ , მაშინ  $M' \rightarrow M$  და ამ უქანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როდესაც  $\Delta t \rightarrow 0$ , მივიღებთ

$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\Delta s}{|MM'|} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

### ხ ა ვ ა რ ჯ ი შ ი

1. მოძებნეთ  $y^2 = x^3$  წირის რკალის სიგრძე კოორდინატთა სათავიდან წირის იმ წერტილამდე, რომლის აბსცისაა  $\frac{4}{3}$ .

პასუხი:  $\frac{112}{27}$ .

2. გამოთვალეთ  $y = \frac{x^2}{2} - 1$  პარაბოლის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოები ძვეს  $Ox$  ღერძზე.

პასუხი:  $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ .

3. მოძებნეთ  $y = \ln(\sin x)$  წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლო წერტილების აბსცისებია  $\frac{\pi}{3}$  და  $\frac{2\pi}{3}$ .

პასუხი:  $\ln 3$ .

4. გამოთვალეთ  $5y^3 = x^2$  წირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია  $x^2 + y^2 = 6$  წრეწირის შიგნით.

პასუხი:  $4\frac{26}{27}$ .

5. მოძებნეთ  $x = \cos t + t \sin t$ ,  $y = \sin t - t \cos t$  წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოებს შეესაბამება  $t$  პარამეტრის შემდეგი მნიშვნელობები:  $t=0$ ,  $t=2\pi$ .

პასუხი:  $2\pi^2$ .

6. გამოთვალეთ  $x = \frac{t^6}{6}$ ,  $y = 2 - \frac{t^4}{4}$  წირის იმ რკალის სიგრძე, რომლის ბოლოები ძვეს კოორდინატთა ღერძებზე.

პასუხი: 4, (3).

7. გამოთვალეთ  $x = a \cos^5 t$ ,  $y = a \sin^5 t$  წირის სიგრძე.

პასუხი:  $5a \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3}) \right]$ .

§ 5. ბრტყელი ფიგურის ფართობი

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ მარტივი შეკრული  $\Gamma$  წირით შემოსაზღვრული ბრტყელი  $R$  ფიგურის ფართობის ცნებას.  $\Gamma$  წირს ეწოდება  $R$  ფიგურის საზღვარი.

ჩვენ ვიტყვით, რომ მრავალკუთხედი ჩახაზულია  $R$  ფიგურაში, თუ ამ მრავალკუთხედის ყოველი წერტილი ეკუთვნის  $R$  ფიგურას ან მის საზღვარს. თუ ბრტყელი ფიგურისა და მისი საზღვრის ყველა წერტილი ეკუთვნის მრავალკუთხედს, მაშინ ვიტყვით, რომ აღნიშნული მრავალკუთხედი შემოხაზულია  $R$  ფიგურის გარშემო.

$R$  ფიგურაში ჩახაზული ნებისმიერი მრავალკუთხედის  $S_i$  ფართობი არ აღემატება  $R$  ფიგურის გარშემო შემოხაზული ნებისმიერი მრავალკუთხედის  $S_e$  ფართობს.

აღნიშნოთ  $H_*$ -ით ყველა  $S_i$  რიცხვის სიმრავლე,  $H^*$ -ით კი ყველა  $S_e$  რიცხვის სიმრავლე. ცხადია  $H_*$  სიმრავლე ზემოდან შემოსაზღვრულია,  $H^*$  კი ქვემოდან. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$S_* = \sup H_*, \quad S^* = \inf H^*.$$

$S_*$  და  $S^*$  რიცხვებს ეწოდება შესაბამისად  $R$  ფიგურის შიგა და გარე ფართობები. შევნიშნოთ, რომ შიგა  $S_*$  ფართობი არ აღემატება გარე  $S^*$  ფართობს, ე. ი.  $S_* \leq S^*$ .

ახლა შემოვიღოთ შემდეგი

განსაზღვრა. ბრტყელ  $R$  ფიგურას ეწოდება ფართობადი, თუ ამ ფიგურის შიგა  $S_*$  ფართობი ტოლია გარე  $S^*$  ფართობისა. ამ შემთხვევაში  $S = S_* = S^*$  რიცხვს ეწოდება  $R$  ფიგურის ფართობი.

თეორემა 3. ბრტყელი  $R$  ფიგურის ფართობადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობდეს  $R$ -ის გარშემო შემოხაზული და ჩახაზული მრავალკუთხედები, რომელთა ფართობების სხვაობა  $S_e - S_i$  იყოს  $\varepsilon$ -ზე ნაკლები:

$$S_e - S_i < \varepsilon.$$

დამტკიცება. ჯერ დავამტკოთ პირობის აუცილებლობა. ვთქვათ,  $R$  ფიგურა ფართობადია, ე. ი.

$$S_* = S^* = S.$$

რადგანაც  $S_*$  და  $S^*$  წარმოადგენენ შესაბამისად  $H_*$  და  $H^*$  სიმრავლეების ზედა და ქვედა საზღვრებს, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი  $S_i \in H_*$  და  $S_e \in H^*$ , რომ

$$S - S_i < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_e - S < \frac{\varepsilon}{2}.$$

თუ ამ უტოლობებს შევკრებთ წევრ-წევრად, მივიღებთ

$$S_e - S_i < \varepsilon.$$

ამით პირობის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ პირობის საკმარისობა. ვთქვათ, ყოველი დადებითი  $\varepsilon$  რიცხვისათვის არსებობს ისეთი  $S_i \in H_*$  და  $S_e \in H^*$ , რომ  $S_e - S_i < \varepsilon$ . რადგანაც

$$S_i \leq S_* \leq S^* \leq S_e,$$

ამიტომ  $S^* - S_* < \varepsilon$ . აქედან,  $\varepsilon$ -ის ნებისმიერობის გამო, ვლებულობთ  $S_* = S^*$ . ამრიგად,  $R$  ფიგურა ფართობადია. თეორემა დამტკიცებულია.

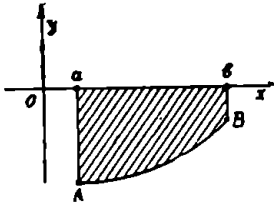
შენიშვნა. ადვილი შესამჩნევია, რომ პირველ პარაგრაფში მოყვანილი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის განსაზღვრა ტოლფასია ფართობის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრისა.

§ 6. ფართობის განმითვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში

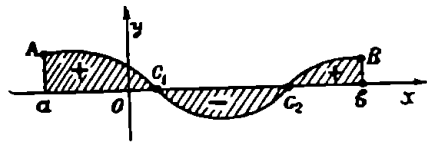
როგორც ვიცით, თუ  $y = f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და ამ სეგმენტზე  $f(x) \geq 0$ , მაშინ ინტეგრალი  $\int_a^b f(x) dx$  გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციის  $S$  ფართობს, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  და  $y=f(x)$  (ნახ. 78), ე. ი.

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (6.1)$$

თუკი  $[a, b]$  სეგმენტში  $f(x) < 0$ , მაშინ  $\int_a^b f(x) dx < 0$  და ეს ინტეგრალი აბსოლუტური სიდიდით შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის  $S$  ფართობის ტოლია (ნახ. 97).



ნახ. 97.



ნახ. 98.

იმ შემთხვევაში, როდესაც  $f(x)$  ფუნქცია ნიშანს იცვლის  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ ამ სეგმენტს ვყოფთ ქვესეგმენტებად ისე, რომ ყოველ ასეთ ქვესეგმენტზე  $f(x)$  იყოს არაუარყოფითი ან არადადებითი (ნახ. 98). ცხადია,

$$\int_a^{c_1} f(x) dx > 0, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx < 0, \quad \int_{c_2}^b f(x) dx > 0.$$

მაშასადამე,  $\int_a^b f(x) dx$  გამოსახავს იმ მრუდწირული ტრაპეციების ფართობთა ალგებრულ ჯამს, რომლებიც მდებარეობენ  $Ox$  ღერძის ზემოთ და ქვემოთ.

$Ox$  ღერძის ზემოთ მოთავსებული ფიგურის ფართობს იღებენ დადებითად,  $Ox$  ღერძის ქვემოთ მოთავსებული ფიგურის ფართობს

კი უარყოფითად. მაშასადამე, რომ მივიღოთ ფართობთა ჯამი ჩვეულებრივი აზრით, საჭიროა ვისარგებლოთ ფორმულით

$$S = \int_a^{c_1} f(x) dx - \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \int_{c_2}^b f(x) dx, \quad (6.2)$$

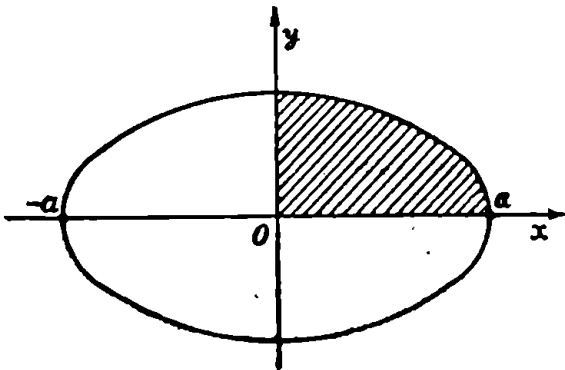
ანუ, რაც იგივეა,

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (6.3)$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრული ელიფსით  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

აშოხსნა. საძიებელ ფართობს ვუწოდოთ ელიფსის ფართობი და იგი აღვნიშნოთ  $S$  ასოთი. ელიფსის განტოლებიდან გვაქვს

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$



ნახ. 99.

რადგანაც ელიფსი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ (ნახ. 99), ამიტომ  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით

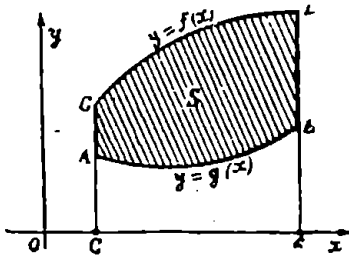
$$S = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

მაგრამ. როგორც ცნობილია

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

მაშასადამე,  $S = \pi ab$ .

კერძოდ, თუ  $a = b = R$ , მაშინ ელიფსი გადაიქცევა  $R$  რადიუსიან წრეწირად და ამიტომ წრის  $S$  ფართობი გამოისახება ფორმულით  $S = \pi R^2$ .



ნახ. 100.

ახლა ვთქვათ, ფიგურა შემოსაზღვრულია  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  წირებით, სადაც  $f(x)$  და  $g(x)$  ფუნქციები უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე და  $f(x) > g(x)$  (ნახ. 100). მაშინ  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx. \quad (6.4)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია წირებით

$$y = 2 - x^2, \quad y = \sqrt[3]{x^2}. \quad (6.5)$$

ამოხსნა. ავაგოთ  $y = 2 - x^2$  და  $y = \sqrt[3]{x^2}$  წირები. (ნახ. 101).

მოძებნოთ ინტეგრების საზღვრები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა (6.5) სისტემა. თუ ამ სისტემას ამოვხსნით  $x$ -ის მიმართ, გვექნება  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . მაშასადამე, (6.4) ფორმულის თანახმად

$$S = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx = \frac{32}{15}.$$

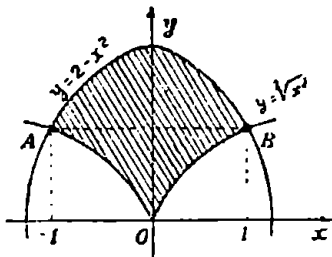
მაგალითი 3. გამოვთვალოთ  $y^2 = 2px$  და  $x^2 = 2py$  პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის  $S$  ფართობი (ნახ. 102).

ამოხსნა. ვიპოვოთ ამ პარაბოლების გადაკვეთის წერტილების აბსცისები. ამისათვის ამოვხსნათ განტოლებათა სისტემა

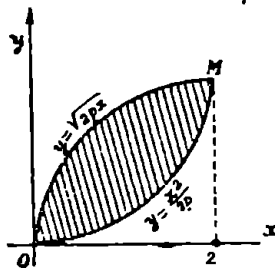
გვაქვს:

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py.$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2p.$$



ნახ. 101.



ნახ. 102.

მაშასადამე,

$$S = \int_0^{2p} \left( \sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p} \right) dx = \frac{4}{3} p^2.$$

§ 7. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით

ვთქვათ, წირი მოცემულია პარამეტრული სახით

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{7.1}$$

სადაც  $\psi(t)$  უწყვეტია, ხოლო  $\varphi(t)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე. ამის გარდა,  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ . დავამტკიცოთ, რომ  $x = a$ ,  $x = b$  წრფეებით,  $Ox$  ღერძითა და მოცემული წირით შემოსაზღვრული ფიგურის  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt. \tag{7.2}$$

თუ (7.1) სისტემიდან გამოვრიცხავთ  $t$  ცვლადს. მივიღებთ  $[a, b]$  სეგმენტზე უწყვეტ  $y = f(x)$  ფუნქციას და, მაშასადამე, მრულწირული ტრაპეციის  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით

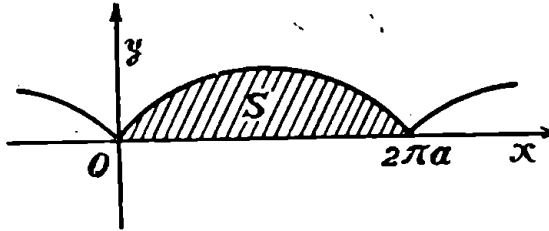
$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

მიღებულ ინტეგრალში მოვახდინოთ ჩასმა  $x = \varphi(t)$ . რაც მოგვცემს (7.2) ფორმულას.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის  $S$  ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია  $Ox$  ღერძითა და

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

ციკლოიდის ერთი თაღით (ნახ. 103).



ნახ. 103.

ამოხსნა. (7.2) ფორმულის თანახმად

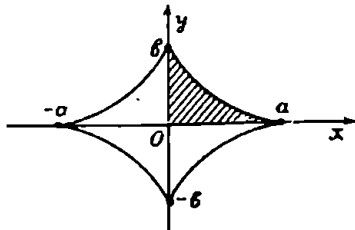
$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2.$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ იმ ფიგურის  $S$  ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია

$$x = a \cos^3 t, \quad y = b \sin^3 t$$

ასტროიდით.

ამოხსნა. რადგანაც ასტროიდი სიმეტრიულია კოორდინატთა ღერძების მიმართ (ნახ. 104), ამიტომ (7.2) ფორმულის თანახმად  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით



ნახ. 104.

$$S = 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt = 12ab \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^2 t dt =$$



$$\begin{aligned}
 &= 12ab \int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = 12'ab \left( \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= \frac{3}{8} \pi ab.
 \end{aligned}$$

§ 8. ფართობის გამოსახულება პოლარულ კოორდინატებში

ეთქვათ,  $L$  წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში განტოლებით

$$\rho = f(\varphi),$$

სადაც  $f(\varphi)$  არაუარყოფითი უწყვეტი ფუნქციაა  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე.

განსაზღვრა. ბრტყელ  $R$  ფიგურას, რომელიც შემოსაზღვრულია  $L$  წირით და  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  სხივებით, ეწოდება მრუდწირული სექტორი.

თეორემა 4. მრუდწირული  $R$  სექტორი წარმოადგენს ფართობად ფიგურას და მისი  $S$  ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \tag{8.1}$$

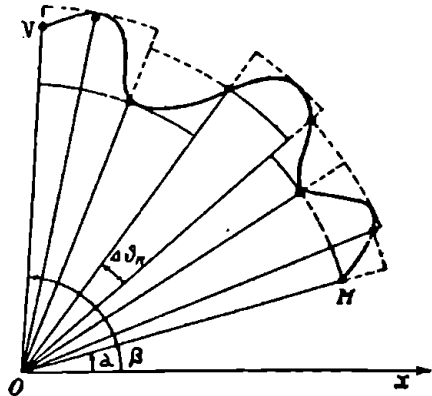
დამტკიცება. დავით [α, β] სეგმენტი  $n$  ქვესეგმენტად შემდეგი წერტილებით

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta.$$

ყოველი  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$  სეგმენტისათვის ავაგოთ წრიული სექტორები, რომელთა რადიუსები  $\rho_k$  და  $\bar{\rho}_k$  წარმოადგენენ  $\rho(\varphi)$  ფუნქციის უმცირესსა და უდიდეს მნიშვნელობებს  $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$  სეგმენტზე (ნახ. 105). მივიღებთ ორ  $\bar{R}$  ფიგურას.

ცხადია, რომ

$$\underline{R} \subset R \subset \bar{R}.$$



ნახ. 105.

$\underline{R}$  და  $\overline{R}$  ფიგურების ფართობები აღნიშნოთ შესაბამისად  $S_i$  და  $S_e$  სიმბოლოებით. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$S_i = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \rho_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}),$$

$$S_e = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^n \overline{\rho}_k^2 (\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

შევნიშნოთ, რომ  $S_i$  წარმოადგენს  $\frac{1}{2} \rho^2(\varphi)$  ფუნქციის ქვედა  $\underline{\sigma}$  ჯამს  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის აღებული დანაწილებისათვის,  $S_e$  კი იმავე ფუნქციის ზედა  $\overline{\sigma}$  ჯამს. რადგანაც  $\frac{1}{2} \rho^2(\varphi)$  ფუნქცია ინტეგრებადია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, ამიტომ ნებისმიერი დადებითი  $\epsilon$  რიცხვისათვის შეგვიძლია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტის ისეთი დანაწილება ავიღოთ, რომ ადგილი ჰქონდეს უტოლობას

$$\overline{\sigma} - \underline{\sigma} < \frac{\epsilon}{3}.$$

მაგრამ  $\overline{\sigma} = S_e$ ,  $\underline{\sigma} = S_i$ . მაშასადამე,

$$S_e - S_i < \frac{\epsilon}{3}.$$

$\underline{R}$  ფიგურა წრიული სექტორების ჯამია და რაკი ყოველი წრიული სექტორი ფართობადია, ამიტომ ფართობადი იქნება  $\underline{R}$  ფიგურაც. ასევე,  $\overline{R}$  ფიგურაც ფართობადია.

ახლა  $\underline{R}$  ფიგურაში ჩავხაზოთ ისეთი  $\underline{Q}$  მრავალკუთხედი, რომლის  $S_i'$  ფართობისათვის

$$S_i - S_i' < \frac{\epsilon}{3},$$

ხოლო  $\overline{R}$ -ის გარშემო შემოვხაზოთ ისეთი  $\overline{Q}$  მრავალკუთხედი, რომლის  $S_e'$  ფართობისათვის

$$S_e' - S_e < \frac{\epsilon}{3}.$$

ცხადია, რომ  $\underline{Q} \subset \underline{R} \subset \overline{Q}$ . რადგანაც

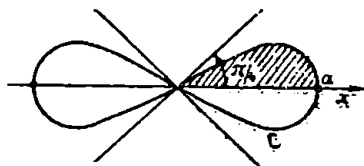
$$\begin{aligned} S_e' - S_i' &= (S_e' - S_e) + (S_e - S_i) + (S_i - S_i') < \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

ამიტომ, მე-3 თეორემის თანახმად,  $R$  ფიგურა ფართობადია. შემდეგ ცხადია, რომ

$$S_i' < \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi < S_c'.$$

აქედან მიიღება (8.1) ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ  $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$  ბერნულის ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.



ნახ. 106.

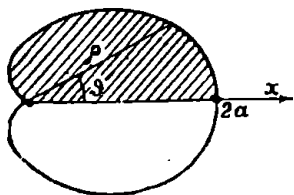
ამოხსნა. ლემნისკატის მოხაზულობა მოცემულია 106-ე ნახაზზე. რადგანაც მოცემული ფიგურა ოთხი სიმეტრიული ნაწილისაგან შედგება, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ საძიებელი  $S$  ფართობის ერთი მეოთხედი.

როდესაც  $\varphi = 0$ , მაშინ  $\rho = a$ , ხოლო როდესაც,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , მაშინ  $\rho = 0$ . მაშასადამე, (8.1) ფორმულის თანახმად

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\sin 2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{4}.$$

საიდანაც  $S = a^2$ .

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  კარდიოიდი შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.



ნახ. 107.

ამოხსნა. კარდიოიდის მოხაზულობა მოცემულია 107-ე ნახაზზე. რადგანაც მოცემული ფიგურა სიმეტრიული ნაწილისაგან შედგება, ამიტომ საკმარისია გამოვთვალოთ საძიებელი ფართობის ნახევარი.

როდესაც  $\varphi = 0$ , მაშინ  $\rho = 2a$ , ხოლო, როდესაც  $\varphi = \pi$ , მაშინ  $\rho = 0$ . მაშასადამე, (8.1) ფორმულის მიხედვით

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi.$$

აქედან

$$S = a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 1,5\pi a^2.$$

## ს ა ვ ა რ ე ჯ ი შ ო

1. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია პარაბოლებით  $y^2 = ax$ ,  $x^2 = ay$ , სადაც  $a > 0$ .

პასუხი:  $\frac{4a^2}{3}$ .

2. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია  $y = 4 - x^2$  პარაბოლითა და  $Ox$  ღერძით.

პასუხი:  $10\frac{2}{3}$ .

3. იპოვეთ  $y^2 = 2x$  პარაბოლითა და  $x^2 + y^2 = 4x$  წრეწირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $2\left(\pi - \frac{8}{3}\right)$ .

4. იპოვეთ  $y = 2x - x^2$  და  $x + y = 0$  წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი 4.5.

5. იპოვეთ  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$  ცისოილითა და  $x = 2a$  წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, სადაც  $a > 0$ .

პასუხი:  $3\pi a^2$ .

6. იპოვეთ  $y = (x+1)^2$ ,  $x = \sin \pi y$  და  $y = 0$  წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი ( $0 \leq y < 1$ ).

პასუხი:  $\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}$ .

7. იპოვეთ  $x = 2t - t^2$ ,  $y = 2t^2 - t^3$  წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $\frac{8}{15}$ .

8. გამოთვალეთ  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  წირითა და  $x = a$  წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, თუ  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $y \leq 0$ .

პასუხი:  $\frac{a^2}{3}(4\pi^2 + 3\pi)$ .

9. გამოთვალეთ  $x = a(2\cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2\sin t - \sin 2t)$  კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფართობი.

პასუხი:  $6\pi a^2$ .

10. იპოვეთ  $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t$ ,  $y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t$  ( $c^2 = a^2 - b^2$ ) წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $\frac{3\pi c^4}{8ab}$ .

11. იპოვეთ  $\rho = a \sin 3\varphi$  სამფურცელას ფართობი.

პასუხი:  $\frac{\pi a^2}{4}$ .

12. მოძებნეთ  $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$  პარაბოლითა და  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

სხივებით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $\frac{p}{6}(3 + 4\sqrt{2})$ .

13. მოძებნეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია  $\rho = a(1 + \sin^2 \varphi)$  და  $\rho = a$  წირებით.

პასუხი:  $1,37\pi a^2$ .

14. იპოვეთ ლეკარტის  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$  ფოთლის მარყუქის ფართობი.

პასუხი:  $\frac{3a^2}{2}$ .

15. გამოთვალეთ  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$  წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $\pi a^2 \sqrt{2}$ .

16. გამოთვალეთ  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  ლემნიცატით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

პასუხი:  $a^2$ .

მითითება. 14—16 მაგალითებში წირების განტოლებები დაწერილი პოლარულ კოორდინატებში.

17. გამოთვალეთ  $x^4 + y^4 = a^4 y$  წირით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი.

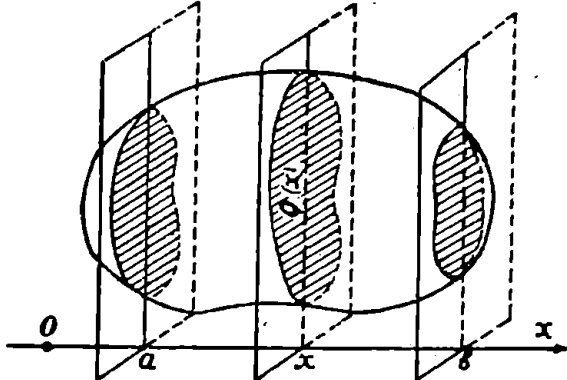
მ ი თ ო ე ბ ა. შემოიღეთ აღნიშვნა  $y = tx$ .

პ ა ს უ ხ ი:  $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$ .

**§ 9. სხაულის მოცულობის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია განივი კვეთების ფართობები**

ნებისმიერი სხეულის მოცულობის გამოთვლა შეიძლება მხოლოდ ჭრადი ინტეგრალების საშუალებით, მაგრამ მრავალ კერძო შემთხვევაში სხეულის მოცულობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ ერთმაგი ინტეგრალით.

განვიხილოთ რაიმე სხეული და  $Ox$  ლერძი<sup>1</sup>. ამ ლერძზე ავიღოთ  $[a, b]$  სეგმენტი და ვიგულისხმოთ, რომ  $x=a$  და  $x=b$  სიბრტყეები კვეთენ მოცემულ სხეულს. აღვნიშნოთ  $T$ -თი მოცემული სხეულის ნაწილი, რომელიც მოთავსებულია  $x=a$  და  $x=b$  სიბრტყეებს შორის (ნახ. 108).



ნახ. 108.

ცხადია,  $[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერ  $x$  წერტილზე გავლებული  $Ox$  ლერძის მართობი სიბრტყე გადაკვეთს  $T$  სხეულს. თუ კვეთის ფართობს აღვნიშნავენ  $Q$ -თი, იგი დამოკიდებული იქნება  $x$ -ზე, ე. ი. კვეთის ფართობი  $x$ -ის გარკვეული  $Q(x)$  ფუნქციაა.

<sup>1</sup> სხეული ეწოდება სივრცის ნაწილს, რომელიც შემოსაზღვრულია არაგადამკვეთი შეკრული ზედაპირით.

დავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი  $n$  ნაწილად წერტილებით

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

ამ წერტილებზე გაავლოთ  $Ox$  ღერძის მართობული სიბრტყეები, მაშინ  $T$  სხეული დაიყოფა  $n$  ნაწილად. განვიხილოთ ერთ-ერთი ქვე-სეგმენტი  $[x_{k-1}, x_k]$ . ამ სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილი და ავაგოთ ცილინდრული სხეული, რომლის მიმმართველი წირია  $x = \xi_k$  სიბრტყისა და  $T$  სხეულის გადაკვეთით მიღებული წირი, ხოლო მსახველი  $Ox$  ღერძის პარალელურია. ცხადია, ასეთი ელემენტარული ცილინდრის ფუძის ფართობია  $Q(\xi_k)$ , ხოლო მოცულობაა  $Q(\xi_k) \Delta x_k$ , სადაც  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ . ყველა ელემენტარული ცილინდრის მოცულობათა ჯამია

$$V_n = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k) \Delta x_k.$$

თუ არსებობს  $V_n$  მოცულობის ზღვარი, როდესაც ყოველი  $\Delta x_k$  ნულისაკენ მიისწრაფვის, მაშინ ამ ზღვარს ვუწოდებთ  $T$  სხეულის  $V$  მოცულობას. ცხადია, თუ  $Q(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ

$$V = \int_a^b Q(x) dx. \tag{9.1}$$

მაგალითი 1. გამოვთვალოთ სამღერძა  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  ელიფსოიდის მოცულობა.

ამოხსნა.  $Ox$  ღერძის მართობული  $X = x$  სიბრტყე ( $-a < x < a$ ) ელიფსოიდთან გადაკვეთაში მოგვცემს ელიფსს. რომლის განტოლებებია

$$\frac{Y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{Z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \quad X = x.$$

ამ ელიფსის ფართობია

$$Q(x) = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

თუ ვისარგებლებთ (9.1) ფორმულით, გვექნება

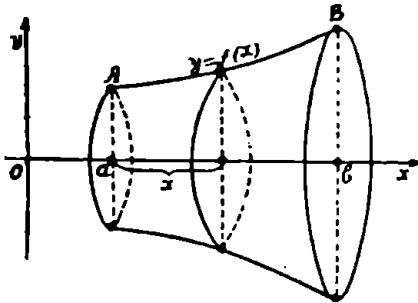
$$V = \int_{-a}^a \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3} \pi abc.$$

კერძოდ, როდესაც  $a=b=c=R$ , მივიღებთ სფეროს მოცულობას

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

§ 10. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა

განვიხილოთ  $y=f(x)$  წირი, სადაც  $f(x)$  უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე. მრუდწირული ტრაპეცია  $aABb$  (ნახ. 109), რომელიც შემოსაზღვრულია  $y=f(x)$  წირით და  $y=0$ ,  $x=a$ ,  $x=b$  წრფეებით, ვაბრუნოთ  $Ox$  ღერძის გარშემო,



ნახ. 109.

მივიღებთ ბრუნვით სხეულს. ვიპოვოთ ამ სხეულის მოცულობა.

$[a, b]$  სეგმენტის ნებისმიერ  $x$  წერტილში  $Ox$  ღერძისადმი მართობულად გაღებული სიბრტყე, ბრუნვით მიღებულ სხეულთან კვეთაში მოგვცემს წრეს, რომლის ფართობია

$$Q(x) = \pi [f(x)]^2.$$

რაკი  $f(x)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამიტომ, (9.1) ფორმულის მიხედვით, ბრუნვითი სხეულის  $V$  მოცულობა გამოისახება ფორმულით

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{10,1}$$

ს ა ვ ა რ გ ი შ ი

1. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ელიფსური პარაბოლოიდით  $x = \frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}$  და  $x=a$  სიბრტყით.

პასუხი:  $\pi a^2 \sqrt{pq}$ .



2. გამოთვალეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია ცალკალთა ჰიპერბოლიდით  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  და  $z=0$  და  $z=h$  სიბრტყეებით.

პასუხი:  $\pi abh \left( 1 + \frac{h^2}{3c^2} \right)$ .

3. მოძებნეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $x^2+z^2=a^2$  და  $y^2+z^2=a^2$  ზედაპირებით.

პასუხი:  $\frac{16}{3} a^3$ .

4. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  ასტროიდით, ბრუნავს  $Ox$  ღერძის გარშემო. მოძებნეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $\frac{32}{105} \pi a^3$ .

5. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $x^2 - y^2 = 4$  ჰიპერბოლით და  $y = \pm 2$  წრფეებით, ბრუნავს  $Oy$  ღერძის გარშემო. მოძებნეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $\frac{64\pi}{3}$ .

6. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $y = \sin x$  სინუსოიდის ნახევარი ტალღითა და  $Ox$  ღერძით, ბრუნავს  $Ox$  ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $\frac{\pi^2}{3}$ .

7. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $y = \frac{1}{1+x^2}$  წირითა და  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$  წრფეებით, ბრუნავს  $Ox$  ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $0,25\pi(\pi+2)$ .

8. ფიგურა, რომელიც შემოსაზღვრულია  $y = x^2$  და  $x = y^2$  პარაბოლებით, ბრუნავს  $Ox$  ღერძის გარშემო. გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $0,3\pi$ .

9. იპოვეთ  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ციკლოიდის ერთი თაღის  $Ox$  ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $5\pi^2 a^3$ .

10. ფიგურა. რომელიც შემოსაზღვრულია  $(y^2 - b^2) = a^2 x$  წირით ბრუნავს  $Oy$  ღერძის გარშემო ( $-b \leq y \leq b$ ). გამოთვალეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი:  $\frac{256\pi b^6}{315a^4}$ .

### § 11. ბრუნვითი ჯაფაიის ფართობი

მრუდე ზედაპირის ფართობის ცნების ზოგად განსაზღვრას მოვიყვანთ მე-2 ტომში. ახლა ჩვენ შევჩერდებით მხოლოდ ბრუნვითი ზედაპირის შემთხვევაზე.

ვთქვათ,  $x(y)$  სიბრტყეზე მოთავსებულია წრფევალი  $\Gamma$  წირი, რომლის განტოლებებია

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

სადაც  $s$  ამ წირის ცვლადი რკალის სიგრძეა. ცხადია,  $x(s)$  და  $y(s)$  წარმოადგენენ  $s$ -ის უწყვეტ ფუნქციებს  $[0, L]$  სეგმენტზე, სადაც  $L$  არის  $\Gamma$  წირის სიგრძე. ვივლისხმობთ, რომ  $[0, L]$  სეგმენტზე  $y(s) > 0$ .

განსაზღვრა.  $\Gamma$  წირის  $Ox$  ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ვეწოდოთ ზღვარს, რომლისაკენაც მისწრაფვის წირში ჩახაზული ტეხილის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი, როდესაც ტეხილის ყოველი გვერდის სიგრძე ნული-საკენ მიისწრაფვის.

აღვნიშნოთ  $\Gamma$  წირის ბოლო წერტილები  $A$  და  $B$  ასოებით (ნახ. 110). დავუშვათ, რომ ბარამეტრის  $s=0$  მნიშვნელობას შეესაბამება  $A$  წერტილი,  $s=L$  მნიშვნელობას კი  $B$  წერტილი.

დავყოთ  $\Gamma$  წირი  $n$  ნაწილად წერტილებით

$$A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B,$$

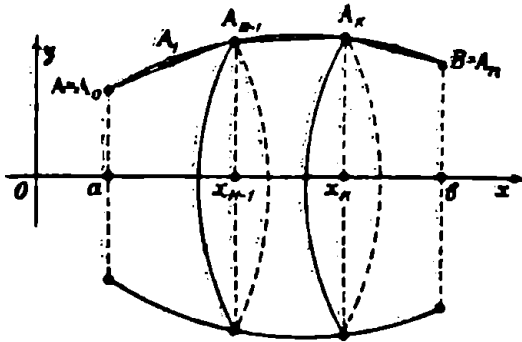
რომლებიც დალაგებულია  $\Gamma$  წირზე  $A$ -დან  $B$ -საკენ, ე. ი. მათი შესაბამისი ბარამეტრის მნიშვნელობებია

$$s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = L.$$

განვიხილოთ ტეხილი, რომლის გვერდებია  $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n$  მონაკვეთები. ყოველი  $A_{k-1} A_k$  მონაკვეთი  $Ox$  ღერძის გარშემო ბრუნვისას მოხაზავს წაკვეთილ კონუსს, რომლის გვერდითი ზედაპირის ფართობია

$$2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \lambda_k.$$

სადაც  $\lambda_k$  წარმოადგენს  $A_{k-1} A_k$  მონაკვეთის სიგრძეს, ხოლო  $y_k$  არის  $A_k$  წერტილის ორდინატი.



ნახ. 110.

მთელი ტეხილის მიერ შემოხაზული ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი იქნება

$$S_n = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \lambda_k.$$

ეს ჯამი შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$S_n = 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \Delta s_k - 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} (\Delta s_k - \lambda_k), \quad (11.1)$$

სადაც  $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$ .

განვიხილოთ ჯერ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის მეორე შესაქრები. რადგანაც  $y(s)$  ფუნქცია უწყვეტია  $[0, L]$  სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს ისეთი რადებითი რიცხვი  $M$ , რომ

$$y(s) \leq M, \quad 0 \leq s \leq L.$$

ამის ფაქტად,  $\lambda_k \leq \Delta s_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). მაშასადამე.

$$\left| 2\pi \sum_{k=1}^n \frac{y_{k-1} + y_k}{2} (\Delta s_k - \lambda_k) \right| \leq 2\pi M \sum_{k=1}^n (\Delta s_k - \lambda_k) =$$

$$= 2\pi M \left( L - \sum_{k=1}^n \lambda_k \right).$$

მაგრამ  $\sum_{k=1}^n \lambda_k$  წარმოადგენს  $L$  წირში ჩახაზული ტეხილის სიგრძეს, რომელიც  $L$  ზღვარისაყენ მიისწრაფვის. ამიტომ

$$\lim \left( L - \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) = 0,$$

როდესაც ყველა  $\Delta s_k \rightarrow 0$ .

ახლა განვიხილოთ (11.1) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის პირველი შესაკრები. იგი შეგვიძლია ასე წარმოვადგინოთ

$$\pi \sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta s_k + \pi \sum_{k=1}^n y_k \Delta s_k.$$

თითოეული ჯამი წარმოადგენს  $\pi y(s)$  ფუნქციის რიმანის ჯამს და ამიტომ მათი ზღვრები არსებობს და ტოლია  $\pi \int_0^L y(s) ds$  ინტეგრალისა.

მაშასადამე, ბრუნვითი ზედაპირის  $S$  ფართობი გამოისახება ფორმულით

$$S = 2\pi \int_0^L y(s) ds. \quad (11.2)$$

ამ ფორმულაში მოითხოვება მხოლოდ  $L$  წირის წრფევალობა.

ახლა ვთქვათ, რომ  $L$  წირი სხვა  $t$  პარამეტრითაა მოცემული

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

სადაც  $\varphi(t)$  და  $\psi(t)$  უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციებია  $[\alpha, \beta]$  სეგმენტზე, ამასთანავე  $A$  წერტილს შეესაბამება პარამეტრის  $t = \alpha$  მნიშვნელობა,  $B$  წერტილს კი  $t = \beta$ . თუ (11.2) ინტეგრალში მოვახდენთ ჩასმას

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau)]^2} d\tau,$$

მივიღებთ

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

ეს ფორმულა მოკლედ ასე გადავწეროთ

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (11.3)$$

დასასრულ, ვთქვათ  $T$  წირის განტოლება მოცემულია ცხადი სახით

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

და  $f(x)$  ფუნქციას აქვს უწყვეტი წარმოებული  $|a, b|$  სეგმენტზე. მაშინ თუ  $x$ -ს მივიჩნევთ პარამეტრად, მივიღებთ

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (11.4)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ციკლოიდის ერთი თაღის  $Ox$  ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის  $S$  ფართობი.

ამოხსნა. ციკლოიდის ერთი თაღისათვის  $0 \leq t \leq 2\pi$ . ამიტომ (11.3) ფორმულის თანახმად

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left( \sin \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \right) dt = \frac{64}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ  $Ox$  ღერძის გარშემო  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ელიფსის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის  $S$  ფართობი,  $a > b$ .

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad f'(x) = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

მაშასადამე,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx = \\ &= \frac{2\pi b}{a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^4 - c^2 x^2} dx = \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - c^2 x^2} dx, \end{aligned}$$

სადაც  $c^2 = a^2 - b^2$ . თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $x = \frac{a^2}{c} \sin t$ , გვექნება

$$S = \frac{4a^2 b}{c} \int_0^{\arcsin \frac{c}{a}} \cos^2 t dt = 2\pi b \left( \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a} + b \right)$$

### § 12. ცვლადი ძალის მუშაობა

ვთქვათ; მატერიალური  $M$  წერტილი მოძრაობს  $Ox$  ღერძზე იმ  $\vec{F}$  ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია  $Ox$  ღერძის გასწვრივ. გამოეთვალათ  $\vec{F}$  ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა, თუ  $M$  წერტილი გადაადგილდა  $x = a$  წერტილიდან  $x = b$  წერტილამდე (ნახ. 111).



ნახ. 111.

ვიგულისხმობთ, რომ  $\vec{F}$  ძალის  $F$  სიდიდე  $x$ -ის უწყვეტი ფუნქციაა

$$F = F(x).$$

დავყოთ  $[a, b]$  სეგმენტი  $n$  ნაწილად წერტილად ით

$$a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b.$$

ყოველ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე ავიღოთ ნებისმიერი  $\xi_k$  წერტილი. რადგანაც  $F(x)$  ფუნქცია უწყვეტია, ამიტომ  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე  $F(x)$

ფუნქცია მცირედ განსხვავდება  $F(x_k)$  მნიშვნელობისაგან, რის გამოც  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე  $\bar{F}$  ძალის  $F$  სიდიდე შეგვიძლია მივიჩნიოთ მუდმივად და  $F(x_k)$  სიდიდის ტოლად. მაშინ  $\bar{F}$  ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა  $[x_{k-1}, x_k]$  სეგმენტზე იქნება

$$F(x_k) \Delta x_k$$

სადაც  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ .

განვიხილოთ ასეთი ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი:

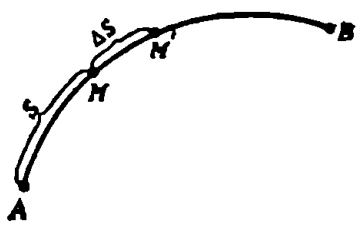
$$\sum_{k=1}^n F(x_k) \Delta x_k. \tag{12.1}$$

(12.1) გამოსახულება წარმოადგენს  $F(x)$  ფუნქციის ინტეგრალურ ჯამს  $[a, b]$  სეგმენტზე, ამ ჯამის ზღვარი, როდესაც უღიდეგო დანაყოფის სიგრძე  $\lambda \rightarrow 0$ , წარმოადგენს განსაზღვრულ ინტეგრალს  $a$ -დან  $b$ -მდე  $F(x)$  ფუნქციისას. ამ ინტეგრალს ეწოდება  $\bar{F}$  ძალის მიერ შესრულებული  $A$  მუშაობა  $[a, b]$  სეგმენტზე:

$$A = \int_a^b F(x) dx. \tag{12.2}$$

§ 18. მატერიალური წირის მასა

განვიხილოთ მატერიალური  $AB$  წირი (ნახ. 112) და ვიგულისხმობთ, რომ ეს წირი წრფევალია. ამ წირზე ავიღოთ რაიმე  $M$  წერტილი.  $AM$  რკალის სიგრძე აღვნიშნოთ  $s$ -ით, მასა კი  $m$ -ით. ცხადია,  $s$ -ის ყოველ მნიშვნელობას შეესაბამება  $m$ -ის გარკვეული მნიშვნელობა, ასე, რომ  $m$  მასა წარმოადგენს  $s$ -ის ფუნქციას:  $m = m(s)$ .



ნახ. 112.

ამბობენ, რომ  $AB$  წირი ერთგვაროვანია, თუ წირის ორი ნებისმიერი რკალი, რომლებსაც თანატოლი სიგრძე აქვთ, შეიცავენ თანატოლ მასებს. ამ შემთხვევაში წირის ნებისმიერი რკალის მასის ფარდობა ამავე რკალის სიგრძესთან ერთი და იგივე მუდმივი სიდიდეა. იგი რიცხობრივ იმ მასის ტოლია, რომელიც აქვს წირის ეროველი სიგრძის ნებისმიერ რკალს. ამ ფარდობას წირის სიმკვრივე ეწო-

დება. თუ  $AB$  წირი ერთგვაროვანი არაა, მაშინ საჭიროა შემოვიღოთ წირის სიმკვრივის ცნება წერტილში.

განვიხილოთ  $MM'$  რკალი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ  $\Delta s$ -ით, მასა კი  $\Delta m$ -ით. ცხადია,

$$\Delta m = m(s + \Delta s) - m(s).$$

$\frac{\Delta m}{\Delta s}$  ფარდობას ეწოდება საშუალო სიმკვრივე, ხოლო ამ ფარდობის ზღვარს, როდესაც  $\Delta s \rightarrow 0$ , ეწოდება  $AB$  წირის სიმკვრივე  $M$  წერტილში და იგი აღინიშნება  $\rho$  ასოთი:

$$\rho = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

ამრიგად, თუ  $m = m(s)$  იმ წირის მასაა, რომლის სიგრძეა  $s$ , მაშინ  $\frac{dm}{ds}$  წირის სიმკვრივეა აღებულ წერტილში.

ახლა ვთქვათ, ცნობილია  $AB$  წირის  $\rho(s)$  სიმკვრივე. ვიგულისხმობთ, რომ ეს სიმკვრივე უწყვეტია. მაშინ  $AM$  რკალის  $m(s)$  მასა გამოითვლება ფორმულით

$$m(s) = \int_0^s \rho(u) du.$$

თუ  $AB$  წირის  $M_1, M_2$  რკალის მასას აღვნიშნავთ  $m(s_1, s_2)$  სიმბოლოთი, მაშინ

$$m(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \rho(u) du. \quad (13.1)$$

#### § 14. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი

განვიხილოთ სივრცეში მატერიალური წერტილები

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n),$$

რომელთა მასებია  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . ამ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები  $\xi, \eta, \zeta$  გამოითვლება ფორმულებით

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \zeta = \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (14.1)$$



ახლა ვთქვათ, გვაქვს მატერიალური  $AB$  წირი (ნახ. 113), რომლის განტოლებებია

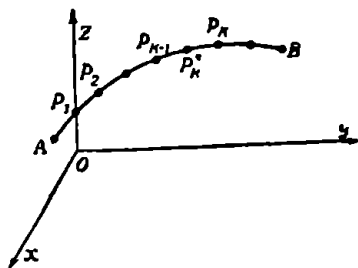
$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad z=z(s), \quad 0 \leq s \leq l.$$

სადაც  $l$  არის  $AB$  წირის სიგრძე.

ვიგულისხმობთ, რომ  $AB$  წირის სიმკვრივე ყოველ  $M(s)$  წერტილში არის  $\rho(s)$ . ვიზოვით ამ წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.  $AB$  წირი გავყოთ ნებისმიერად შემდეგი წერტილებით

$$A=P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n=B.$$

აღვნიშნოთ  $AP_k$  რკალის სიგრძე  $s_k$ -თი, მაშინ  $P_{k-1}P_k$  რკალის სიგრძე იქნება  $s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$ . თუ  $P_{k-1}P_k$  რკალის მასას აღვნიშნავთ  $m_k$ -თი, მაშინ (13.1) ფორმულის თანახმად



ნახ. 113.

$$m_k = \int_{s_{k-1}}^{s_k} \rho(u) du.$$

საშუალო მნიშვნელობის პირველი თეორემის თანახმად

$$m_k = \rho(s_k^*) \Delta s_k,$$

სადაც  $s_{k-1} < s_k^* < s_k$ . თუ  $\Delta s_k$  მცირეა, მაშინ  $P_{k-1}P_k$  მატერიალური წირი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც მატერიალური წერტილი მასით  $m_k$ , რომელიც მოთავსებულია  $P_k^*$  წერტილში. მაშასადამე, გვექნება მატერიალური წერტილები  $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$ ; რომელთა მასებია  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .  $P_k^*$  წერტილის კოორდინატები იქნება

$$x_k = x(s_k^*), \quad y_k = y(s_k^*), \quad z_k = z(s_k^*) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

თუ მიღებულ მატერიალურ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს აღვნიშნავთ  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  და  $\bar{z}$  სიმბოლოებით, მაშინ (14.1) ფორმულის თანახმად გვექნება

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) x(s_k^*) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) \Delta s_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) y(s_k^*) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) \Delta s_k},$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) s(s_k^*) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(s_k^*) \Delta s_k}.$$

განსაზღვრა.  $C(\xi, \eta, \zeta)$  წერტილს, სადაც  $\xi, \eta, \zeta$  წარმოადგენენ შესაბამისად  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$  სიდიდეების ზღვარს, როდესაც ყოველი  $\Delta s_k \rightarrow 0$ , ეწოდება  $AB$  წირის სიმძიმის ცენტრი. მაშასადამე,

$$\xi = \frac{\int_0^l \rho(s) x(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}, \quad \eta = \frac{\int_0^l \rho(s) y(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}, \quad \zeta = \frac{\int_0^l \rho(s) z(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds} \quad (14.2)$$

თუ მატერიალური  $AB$  წირი ერთგვაროვანია, მაშინ  $\rho(s)$  სიმკვრივე მუდმივია და (14.2) ფორმულები მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\xi = \frac{1}{l} \int_0^l x(s) ds, \quad \eta = \frac{1}{l} \int_0^l y(s) ds, \quad \zeta = \frac{1}{l} \int_0^l z(s) ds. \quad (14.3)$$

თუ მატერიალური  $AB$  წირი ძვეს  $xOy$  სიბრტყეზე, მაშინ გვექნება შემდეგი ფორმულები

$$\xi = \frac{\int_0^l \rho(s) x(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}, \quad \eta = \frac{\int_0^l \rho(s) y(s) ds}{\int_0^l \rho(s) ds}, \quad (14.4)$$

როდესაც წირი არაერთგვაროვანია, ხოლო თუ წირი ერთგვაროვანია, მაშინ

$$\xi = \frac{1}{l} \int_0^l x(s) ds, \quad \eta = \frac{1}{l} \int_0^l y(s) ds. \quad (14.5)$$

დაბოლოს, თუ ერთგვაროვანი  $AB$  წირის განტოლებაა  $y=f(x)$ , სადაც  $f(x)$  უწყვეტად წარმოებალია  $[a, b]$  სეგმენტზე, მაშინ (14.5) ფორმულები ასე გადაიწერება:

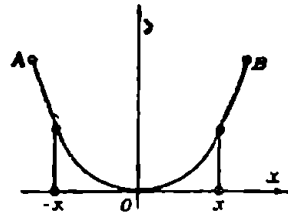
$$\xi = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}, \quad \eta = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx} \quad (14.6)$$

**თეორემა 5.** თუ ერთგვაროვანი  $AB$  წირი სიმეტრიულია რაიმე წრფის მიმართ, მაშინ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ წრფეზე.

**დამტკიცება.** სიმეტრიის ღერძად მივიჩნიოთ  $Oy$  ღერძი,  $O$  წერტილად კი  $Oy$  ღერძის  $AB$  წირთან გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 114).

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას  $\sigma = s - \frac{l}{2}$ , მაშინ (14.5) ინტეგრალებიდან პირველი ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\xi = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x ds.$$

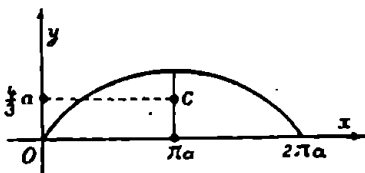


ნახ. 114.

მაგრამ  $x$  წარმოადგენს  $\sigma$ -ს კენტ ფუნქციას, ამიტომ  $\xi = 0$ . მაშასადამე, სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს  $Oy$  ღერძზე, რის დამტკიცებაც გვინდოდა.

**მაგალითი 1.** ვიპოვოთ ერთგვაროვანი  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ციკლოიდის პირველი თალის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

**ამოხსნა.** რაკი მოცემული ციკლოიდის პირველი თალი სიმეტრიულია  $x = \pi a$  წრფის მიმართ (ნახ. 115), ამიტომ  $\xi = \pi a$ .



ნახ. 115.

ახლა ვიპოვოთ  $\eta$ . ამისათვის მეორე ინტეგრალში (14.5)-დან მოვახდინოთ ჩასმა

$$s = \int_0^l \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

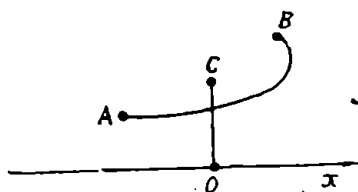
ეს გვაძლევს, თუ ვისარგებლებთ  $l = 8a$  ტოლობით,

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \frac{a}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{4}{3} a. \end{aligned}$$

ამრიგად, საძიებელი სიმძიმის ცენტრია  $\left(\pi a, \frac{4a}{3}\right)$  წერტილი.

**თეორემა 8.** (გულდენის პირველი თეორემა). ღერძის არაგადამკვეთი წრფევალი  $AB$  წირის ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი ტოლია წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლისა, რომელსაც შემოხაზავს წირის სიმძიმის  $C$  ცენტრი.

**დამტკიცება.** ბრუნვის ღერძი მივიჩნიოთ  $Ox$  ღერძად (ნახ. 116) და მეორე ფორმულა (14.5)-დან ასე გადავწეროთ:



ნახ. 116.

$$\eta l = \int_0^l y ds.$$

აქედან

$$2\pi \eta l = 2\pi \int_0^l y(s) ds.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა ნაწილი წარმოადგენს იმ ზედაპირის ფართობს, რომელიც მიიღება  $AB$  წირის ბრუნვით  $Ox$  ღერძის გარშემო. მაშასადამე,

$$S = l \cdot 2\pi \eta, \quad (14.6)$$

სადაც  $S$ -ით აღნიშნულია ზედაპირის ფართობი. თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  ნახევარწრეწირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. რაკი მოცემული წირი სიმეტრიულია  $Oy$  ღერძის მიმართ, ამიტომ  $\xi=0$ . შემდეგ (14.6) ფორმულის მიხედვით გვაქვს,

$$\eta = \frac{S}{2\pi l},$$

სადაც  $S$  წარმოადგენს  $r$  რადიუსიანი სფეროს ზედაპირის ფართობს, ხოლო  $l$  არის ნახევარი წრეწირის სიგრძე, მაშასადამე,

$$\eta = \frac{4\pi r^2}{2\pi \cdot \pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

ამრიგად, მოცემული წირის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებია

$$\xi=0, \eta = \frac{2r}{\pi}.$$

თ ა ე ი I

ნამდვილ რიცხვთა თეორია

§ 1. სიმრავლის ცნება	7
§ 2. კარიელი სიმრავლე. სიმრავლის ნაწილი	9
§ 3. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები	10
§ 4. მოქმედებანი სიმრავლეებზე	11
§ 5. სიდიდის ცნება	14
§ 6. რაციონალური რიცხვები	14
§ 7. ირაციონალური რიცხვის განსაზღვრა	16
§ 8. ნამდვილ რიცხვთა ტოლობა და უტოლობა	19
§ 9. ირაციონალური რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები	21
§ 10. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის უწყვეტობა	22
§ 11. ნამდვილ რიცხვთა გეომეტრიული წარმოდგენა	23
§ 12. ნამდვილ რიცხვთა შუალედები	26
§ 13. სიმეტრიული რიცხვები	29
§ 14. შებრუნებული რიცხვები	29
§ 15. ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზედა და ქვედა საზღვრები	30
§ 16. სეგმენტის სიგრძე	34
§ 17. ნამდვილ რიცხვთა ჯამი	35
§ 18. ორი ნამდვილი რიცხვის სხვაობა	39
§ 19. ნამდვილი რიცხვების ნამრავლი	40
§ 20. ორი ნამდვილი რიცხვის განაყოფი	43
§ 21. n-ური ხარისხის ფესვი ნამდვილი რიცხვიდან	43
§ 22. ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე	45
§ 23. მნიშვნელოვანი უტოლობები	51
§ 24. ხარისხი ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლით	53
§ 25. ლოგარითმი	57
§ 26. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება	59

## თ ა ვ ი II

## ფუნქცია

§ 1. ცვლადი და მუდმივი სიდიდეები . . . . .	65
§ 2. ფუნქციის ცნება . . . . .	66
§ 3. ცალსახა და მრავალსახა ფუნქცია . . . . .	68
§ 4. ფუნქციის გრაფიკი . . . . .	69
§ 5. ფუნქციის მოცემის ხერხები . . . . .	70
§ 6. რაციონალური ფუნქციები . . . . .	73
§ 7. ცხადი და არაცხადი ალგებრული ფუნქციები. ტრანსცენდენტური ფუნქციები . . . . .	75
§ 8. ზრდადი და კლებადი ფუნქციები . . . . .	76
§ 9. შემოახზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები . . . . .	77
§ 10. ლუწი და კენტი ფუნქციები . . . . .	78
§ 11. პერიოდული ფუნქცია . . . . .	80
§ 12. შექცეული ფუნქცია . . . . .	81
§ 13. რთული ფუნქცია . . . . .	84

## თ ა ვ ი III

## რიცხვთა მიმდევრობა. მიმდევრობის ზღვარი

§ 1) მიმდევრობის განსაზღვრა . . . . .	89
§ 2) რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი . . . . .	91
§ 3) ზოგიერთი თეორემა ზღვართა შესახებ . . . . .	99
§ 4) მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა . . . . .	104
§ 5) თავმოყრილ სეგმენტთა მიმდევრობა . . . . .	105
§ 6) ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა . . . . .	107
§ 7) მიმდევრობის კრებადობის კოშის ნიშანი . . . . .	108
§ 8. e რიცხვი. ნატურალური ლოგარითმი . . . . .	110
§ 9) შტოლცის თეორემა . . . . .	115
§ 10. ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი . . . . .	117
§ 11. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები . . . . .	120

## თ ა ვ ი IV

## რიცხვთა მწკრივი

§ 1. ნამდვილ წევრებიანი რიცხვთა მწკრივი. კრებადობა და განშლადობა . . . . .	127
§ 2. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა . . . . .	129

§ 3. მწკრივის ძირითადი თვისებები . . . . .	131
§ 4. დადებითი მწკრივები . . . . .	133
§ 5. მწკრივთა შედარების ნიშნები . . . . .	135
§ 6. ნიშანშეცვლილობითი მწკრივი. ლაიბნიცის თეორემა . . . . .	138
§ 7. აბსოლუტურად და არააბსოლუტურად კრებადი მწკრივები . . . . .	140
§ 8. კრებადობის კოშისა და დალამბერის ნიშნები . . . . .	142
§ 9. კრებადობის აბელის ნიშანი . . . . .	149
§ 10. მწკრივის წევრთა გადანაცვლება . . . . .	153
§ 11. მწკრივების გამრავლება . . . . .	157

### თ ა ვ ი V

#### ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

§ 1. ფუნქციის ზღვრის ცნება . . . . .	167
§ 2. ფუნქციის უწყვეტობა და წვეტა . . . . .	168
§ 3. ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები. ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან და მარცხნიდან . . . . .	171
§ 4. ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow \pm \infty$ . . . . .	175
§ 5. ფუნქციის წვეტის წერტილთა კლასიფიკაცია . . . . .	177
§ 6. ფუნქციის ზღვრის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა . . . . .	178
§ 7. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი სიდიდეები . . . . .	183
§ 8. თეორემები ზღვართა შესახებ. უწყვეტ ფუნქციათა უმარტივესი თვისებები . . . . .	186
§ 9. ზოგიერთი მაგალითი ზღვრების მოძებნაზე . . . . .	196
§ 10. მაჩვენებლიანი ფუნქცია . . . . .	198
§ 11. რთული ფუნქციის უწყვეტობა . . . . .	201
§ 12. ვაიერშტრასის თეორემები . . . . .	202
§ 13. ბოლცანოსა და კოშის თეორემები . . . . .	206
§ 14. ფუნქციის თანაბარი უწყვეტობა . . . . .	210
§ 15. შექცეული ფუნქციის უწყვეტობა . . . . .	213
§ 16. ლოგარითმული ფუნქცია . . . . .	214
§ 17. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $[x] \rightarrow +\infty$ . . . . .	216
§ 18. ხარისხოვანი ფუნქცია . . . . .	221
§ 19. ნამდვილყოფიერებისანი ალგებრული განტოლება. რაციონალური ფუნქციის ზღვარი, როდესაც $x \rightarrow \pm \infty$ . . . . .	224
§ 20. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები . . . . .	227
§ 21. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები . . . . .	221



§ 22. შექცეულ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა შორის დამოკიდებულებანი	239
§ 23. ჰიპერბოლური ფუნქციები	240
§ 24. შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციები	243
§ 25. ელემენტარულ ფუნქციათა კლასი	246
§ 26. უსასრულოდ მცირეთა შედარება. ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეები	249

## თ ა ვ ი VI

## ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

§ 1. არგუმენტისა და ფუნქციის ნაზრდი	261
§ 2. ამოცანა წირის მხების მოძებნის შესახებ	263
§ 3. ამოცანა ნივთიერი წერტილის სიჩქარის მოძებნის შესახებ	265
§ 4. ფუნქციის წარმოებულის განსაზღვრა	266
§ 5. ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები	8
§ 6. წარმოებულის გეომეტრიული მნიშვნელობა	269
§ 7. წარმოებულის მექანიკური მნიშვნელობა	270
§ 8. ფუნქციის დიფერენციალი	272
§ 9. ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული მნიშვნელობა	274
§ 10. კავშირი დიფერენცირებადობასა და უწყვეტობას შორის	274
§ 11. წარმოებულისა და დიფერენციალის უმარტივესი თვისებები	276
§ 12. ფუნქციათა ნამრავლის წარმოებული და დიფერენციალი	277
§ 13. წილადის წარმოებული და დიფერენციალი	279
§ 14. ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები	280
§ 15. რთული ფუნქციის წარმოებული	282
§ 16. რთული ფუნქციის დიფერენციალი. დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა	285
§ 17. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული	285
§ 18. ლოგარითმული წარმოებული	287
§ 19. მაჩვენებლიანი და ხარისხოვანი ფუნქციების წარმოებული	289
§ 20. ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული	291
§ 21. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები	292
§ 22. პირდაპირი და შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციების წარმოებული	295
§ 23. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის წარმოებულებისა და დიფერენციალების ცხრილი	296
§ 24. ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა დიფერენციალის საშუალებით	301
§ 25. პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის გაწარმოება	303

§ 26. უმაღლესი რიგის წარმოებულები . . . . .	305
§ 27. ლაიბნიცის ფორმულა . . . . .	308
§ 28. უმაღლესი რიგის დიფერენციალები და მათი კავშირი წარმოებუ- ლებთან . . . . .	311
§ 29. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის დიფერენციალი . . . . .	312
§ 30. პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარ- მოებულები და დიფერენციალები . . . . .	313
§ 31. რთული ფუნქციის უმაღლესი რიგის წარმოებულები . . . . .	314
§ 32. მეორე რიგის წარმოებულის ერთი ფიზიკური გამოყენება . . . . .	315

## თ ა ვ ი VII

## ფუნქციის გამოკვლევა წარმოებულის გააუყენებით

§ 1. ფერმას თეორემა . . . . .	319
§ 2. როლის თეორემა . . . . .	319
§ 3. ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ . . . . .	321
§ 4. კოშის თეორემა . . . . .	323
§ 5. დარბუს თეორემა . . . . .	324
§ 6. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები . . . . .	325
§ 7. განუსაზღვრელობათა გახსნა . . . . .	327
§ 8. ტეილორის და მაკლორენის ფორმულები . . . . .	344
§ 9. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის დაშლა მაკლორენის ფორ- მულით . . . . .	346
§ 10. ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და მინიმუმი . . . . .	352
§ 11. ფუნქციის ექსტრემუმის გამოკვლევა ტეილორის ფორმულის გამო- ყენებით . . . . .	359
§ 12. ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები . . . . .	360
§ 13. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა . . . . .	363
§ 14. ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები . . . . .	366
§ 15. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები . . . . .	379
§ 16. ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემა . . . . .	382

## თ ა ვ ი VIII

## განუსაზღვრელი ინტეგრალი. ინტეგრების ძირითადი მეთოდები

§ 1. პირველყოფილი ფუნქცია და განუსაზღვრელი ინტეგრალი . . . . .	387
§ 2. განუსაზღვრელი ინტეგრალის ძირითადი თვისებები . . . . .	389
§ 3. უშუალო ინტეგრება . . . . .	390

§ 4. დაშლის ხერხი . . . . .	391
§ 5. ნაწილობითი ინტეგრება . . . . .	392
§ 6. ინტეგრება ცვლადთა გარდაქმნის ხერხით . . . . .	396
§ 7. ინტეგრება ფუნქციისა, რომელიც კვადრატულ სამწევრს შეიცავს . . . . .	400

## თ ა ე ი IX

## რაციონალური ფუნქციების ინტეგრება

§ 1. უმარტივესი რაციონალური ფუნქციები და მათი ინტეგრება . . . . .	411
§ 2. წესიერი რაციონალური წილადის დაშლა უმარტივეს წილადებად . . . . .	416
§ 3. რაციონალური ფუნქციის ინტეგრება . . . . .	420
§ 4. ერმიტისა და ოსტროგრადსკის ხერხი . . . . .	423

## თ ა ე ი X

## ზოგიერთი ირაციონალური ფუნქციის ინტეგრება

§ 1. ზოგადი შენიშვნები . . . . .	433
§ 2. წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება . . . . .	434
§ 3. ზოგადი სახის წრფივი ირაციონალობის ინტეგრება . . . . .	435
§ 4. კვადრატული ირაციონალობის ინტეგრება. ეილერის ჩასმები . . . . .	439
§ 5. ბინომური დიფერენციალის ინტეგრება . . . . .	449

## თ ა ე ი XI

## ზოგიერთი ტრანსცენდენტური ფუნქციების ინტეგრება

§ 1. ზოგიერთი ტრიგონომეტრიული დიფერენციალის ინტეგრება . . . . .	459
§ 2. ზოგიერთი კერძო სახის ტრანსცენდენტური ფუნქციის ინტეგრება . . . . .	467

## თ ა ე ი XII

## განსაზღვრული ინტეგრალი

§ 1. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი . . . . .	477
§ 2. ნივთიერი წერტილის შიერ გავლილი მანძილი . . . . .	480
§ 3. განსაზღვრული ინტეგრალის ცნება . . . . .	481
§ 4. დარბუსს ჟამები. ინტეგრალის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა . . . . .	483

§ 5. ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი. განსაზღვრული ინტეგრალის გეომეტრიული მნიშვნელობა . . . . .	487
§ 6. განსაზღვრული ინტეგრალის თვისებები . . . . .	492
§ 7. განსაზღვრული ინტეგრალის ადიტიურობა . . . . .	498
§ 8. ინტეგრალის თვისებები, რომლებიც უტოლობებით გამოისახებიან . . . . .	500
§ 9. განსაზღვრული ინტეგრალი როგორც ზედა ზღვრის ფუნქცია. პირველყოფილი ფუნქციის არსებობა . . . . .	502
§ 10. ინტეგრალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემა . . . . .	504
§ 11. ცვლადის გარდაქმნა განსაზღვრულ ინტეგრალში . . . . .	506
§ 12. ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა . . . . .	509
§ 13. საშუალო მნიშვნელობის პირველი ფორმულა . . . . .	511
§ 14. საშუალო მნიშვნელობის მეორე ფორმულა . . . . .	513
§ 15. ტელიორის ფორმულის დამატებითი წევრის გამოსახულება განსაზღვრული ინტეგრალით . . . . .	517
§ 16. ზოგიერთი განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა . . . . .	518
§ 17. ვალისის ფორმულა . . . . .	522
§ 18. ლუწი და კენტი ფუნქციების ინტეგრება . . . . .	523
§ 19. ინტეგრალები უსასრულო ზღვრებით . . . . .	529
§ 20. არასაკუთრივი ინტეგრალის კრებადობის ზოგიერთი ნიშანი . . . . .	534
§ 21. აბსოლუტურად კრებადი ინტეგრალები . . . . .	539
§ 22. არასაკუთრივი ინტეგრალი რაციონალური ფუნქციიდან . . . . .	542
§ 23. ინტეგრალი შემოუსაზღვრელი ფუნქციიდან . . . . .	547
§ 24. არასაკუთრივი ინტეგრალის თვისებები . . . . .	556
§ 25. არასაკუთრივი ინტეგრალის მთავარი მნიშვნელობა . . . . .	557
§ 26. ფრულანის ინტეგრალი . . . . .	560
§ 27. მწკრივის კრებადობის ინტეგრალური ნიშანი . . . . .	562

### თ ა ვ ი X I I I

#### განტოლებათა ფესვებისა და განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის მეთოდები

§ 1. განტოლებათა ფესვების მოძებნის მიახლოებითი მეთოდები . . . . .	569
§ 2. განსაზღვრული ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლა . . . . .	579

### თ ა ვ ი X I V

#### განსაზღვრული ინტეგრალის ზოგიერთი გეომეტრიული და ფიზიკური გამოყენება

§ 1. მარტივი წირი . . . . .	591
§ 2. წრფევალი წირი. წირის სიგრძე . . . . .	592

§ 3. წირის რკალის სიგრძე პოლარულ კოორდინატებში . . . . .	598
§ 4. რკალის დიფერენციალი . . . . .	600
§ 5. ბრტყელი ფიგურის ფართობი . . . . .	602
§ 6. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში . . . . .	604
§ 7. ფართობის გამოთვლა, როდესაც წირის განტოლება მოცემულია პარამეტრული სახით . . . . .	607
§ 8. ფართობის გამოსახულება პოლარულ კოორდინატებში . . . . .	609
§ 9. სხეულის მოცულობის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია განივი კვეთების ფართობები . . . . .	614
§ 10. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა . . . . .	616
§ 11. ბრუნვითი ზედაპირის ფართობი . . . . .	618
§ 12. ცვლადი ძალის მუშაობა . . . . .	622
§ 13. მატერიალური წირის მასა . . . . .	623
§ 14. მატერიალური წირის სიმძიმის ცენტრი . . . . .	624

რედაქტორი ა. ს უ ლ ა ქ ე ე ლ ი ძ ე  
გამომცემლობის რედაქტორი ნ ჩ ი ტ ა ძ ე  
ტექნიკური ი. ხ უ ც ი შ ვ ი ლ ი  
კორექტორი ნ. ქ ა ნ თ ა რ ი ა

სბ 1322

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 12 05 88

ქალაქის ფორმატი 60X90<sup>1/16</sup>

საბეჭდი თაბახი 40

სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 29,66

შეკვეთა 1816 ტირაჟი 5000

ფასი 1 მან 50 კაპ

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,  
თბილისი, ი. ჯავახიშვილის პროსპექტი, 14  
Издательство Тбилисского университета  
Тбилиси, пр. И. Чавчавадзе, 14

საქ. სსრ მეცნ. აკადემიის სტამბა,  
თბილისი, 380060, კუტუხოვის ქ. 19  
Типография АН Груз. ССР,  
Тбилиси, 380060, ул. Кутузова, 19

Владимир Георгиевич Челидзе  
Элиабар Семенович Цитланадзе

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

(на грузинском языке)

Издательство Тбилисского университета  
Тбилиси 1989