ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა, მ. გაბიძაშვილი,
ნ. მაჭარაშვილი, ა. კვალიაშვილი

ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვა

(თეორია და ამოცანათა კრებული)

საქართველოს სსრ სახალხო განათლების სამინისტრომ
დაამტკიცა სახელმძღვანელოდ უმაღლესი ტექნიკური
სასწავლებლების სტუდენტებისათვის

პროფესორ ს. თოფურიას რედაქციით

გამომცემლობა „განათლება“
თბილისი — 1989

უმაღლესი მათემატიკის წინამდებარე სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების სტუდენტებისათვის. იგი შედგენილია ამჟამად მოქმედი პროგრამის მიხედვით და მოიცავს პროგრამით გათვალისწინებულ ერთი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალური აღრიცხვის საკითხებს.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებსაც.

რეცენზენტები: 1. თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, პროფესორი თ. ჭანტურია

2. საქ. სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფრ. მეცნ. თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი ვ. პაატაშვილი

$T \dfrac{1602010000-410}{M-602(08)-89}$
ISBN 5—505—01207—8

წინასიტყვაობა

წიგნი ერთ-ერთი ნაწილია სახელმძღვანელოთა იმ სერიისა, რომელმაც ავტორთა აზრით, უნდა შეადგინოს უმაღლესი მათემატიკის სრული კურსი (თეორია და ამოცანათა კრებული) უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლებისათვის. იგი დაწერილია მოქმედი პროგრამის მიხედვით.

წიგნით სარგებლობა შეუძლიათ აგრეთვე პედაგოგიური ინსტიტუტების ფიზიკა-მათემატიკის და უნივერსიტეტის ეკონომიკური, ბიოლოგიური, ქიმიური და სხვა ფაკულტეტების სტუდენტებს.

წიგნი შედგება ორი განყოფილებისაგან. პირველში გადმოცემულია თეორიული მასალა. მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანასა და სავარჯიშოს. ისინი დალაგებულია თეორიული მასალის შესაბამისად მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით. თეორიული მასალის ყოველ თავს დართული აქვს კითხვები თვითშემოწმებისათვის.

წიგნის ხელნაწერი გულდასმით წაიკითხეს და სასარგებლო შენიშვნები მოგვცეს რეცენზენტებმა საქართველოს სსრ მეცნიერებათა აკადემიის ა. რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერმა თანამშრომელმა, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორმა ვ. პაატაშვილმა, თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის უფროსმა მეცნიერმა თანამშრომელმა პროფესორმა თ. ჭანტურიამ, რისთვისაც მათ გულწრფელ მადლობას მოვახსენებთ.

ავტორები

პირველი თავი

შესავალი

§ 1. მათემატიკის საგანი

სიტყვა მათემატიკა წარმოდგება ბერძნული სიტყვისაგან „მათემა", რაც ნიშნავს ცოდნას, მეცნიერებას. მათემატიკა, ისევე როგორც ყოველი სხვა მეცნიერება, წარმოიშვა ადამიანის პრაქტიკული საჭიროებისაგან.

ფ. ენგელსის განსაზღვრით მათემატიკა არის მეცნიერება რეალური სამყაროს რაოდენობრივი ურთიერთობებისა და სივრცითი ფორმების შესახებ. მაშასადამე, მათემატიკის შესწავლის საგანს მეტად რეალური მასალა შეადგენს. იმ ფაქტს, რომ ეს მასალა ზოგჯერ მეტისმეტად აბსტრაქტულ სახეს ღებულობს, შეუძლია მხოლოდ ოდნავ მიჩქმალოს ამ მასალის გარე სამყაროდან წარმოშობა. ის რომ მათემატიკა აბსტრაქტული მეცნიერებაა არ ნიშნავს მათემატიკის მოწყვეტას რეალური სინამდვილისაგან. მათემატიკა განუწყვეტლივ კავშირშია ტექნიკის, ბუნებისმეტყველებისა და მრავალი სხვა მეცნიერების მოთხოვნილებასთან.

მათემატიკა უნივერსალური მეცნიერებაა. იგი სხვა მეცნიერებებს აძლევს რიცხვებისა და სიმბოლოების ენას, ბუნების მოვლენებს შორის სხვადასხვა სახის დამოკიდებულებათა გამოსახვისათვის. მათემატიკის უნივერსალობა იმაში გამოიხატება, რომ მისი შესწავლის ობიექტებია არა რაიმე კონკრეტული მოვლენები, არამედ ე. წ. მათემატიკური მოდელები. მისი ძალა იმაშია, რომ იგი ქმნის სულ უფრო ზოგად მათემატიკურ სქემებს, მოდელებს. ერთი და იმავე მათემატიკურ მოდელს შეუძლია აღწეროს თავიანთი კონკრეტული შინაარსით ერთმანეთისაგან ძალიან შორს მდგომი რეალური მოვლენების თვისებები. კერძოდ, ერთი და იგივე დიფერენციალური განტოლებით აღიწერება როგორც რადიაქტიული დაშლის ხასიათი, ასევე სხეულის ტემპერატურის ცვლილება და სხვა მოვლენები. ამიტომ სამეცნიეროტექნიკური პროგრესის საუკუნეში ადამიანის მოღვაწეობის ყველა სფეროში იჭრება მათემატიკური კვლევის მეთოდები.

მათემატიკის კავშირი ტექნიკისა და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებასთან ორი სახით გვევლინება: ბევრი მათემატიკური მოდელი თვითონ არის წარმოშობილი ტექნიკისა და ბუნებისმეტყველების უშუალო მოთხოვნილების საფუძველზე და ამგვარად ისინი განსაზღვრავენ მათემატიკის წინსვლის რეალურ შესაძლებლობას. მაგალითად, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის წარმოშობა დაკავშირებულია გეოდეზიურ სამუშაოებთან, კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ბევრი ახალი ტიპის შესწავლა პირველად დაიწყო ტექნიკური პრობლემის ამოხსნით.

საავიაციო ტექნიკის განვითარების პრობლემებმა აკადემიკოსი მ. ა. ლავრენტიევი მიიყვანა კვაზიკონფორმული ასახვების თეორიის შექმნამდე.

ამავე დროს ხდება პირიქითაც: უკვე ჩამოყალიბებული მათემატიკური თეორია პოულობს გამოყენებას ტექნიკისა და ბუნებისმეტყველების მანამდე ამოუხსნელი პრობლემების ამოხსნაში და ამით წინ სწევს მათ. ამის ბრწყინვალე მაგალითია ა. აინშტეინის მიერ ფარდობითობის ზოგადი თეორიის შედგენა, რომლის სიზუსტე ექსპერიმენტულად მოგვიანებით იქნა შემოწმებული. იგივე შეიძლება ითქვას ნეიტრონის აღმოჩენის შესახებ, რომელიც, როგორც ფიზიკოსები ამბობენ, თავდაპირველად მათემატიკოსების „კალმის წვერზე“ იქნა აღმოჩენილი და მხოლოდ მოგვიანებით აღმოაჩინეს ექსპერიმენტულად. სამამულო ავიაციის განვითარებაში დიდი წარმატება იქნა მიღწეული მ. კელდიშის მიერ შექმნილი მათემატიკური თეორიის გამოყენებით „შიმისა“ და „შტოპორის“ პრობლემის გადაწყვეტაში. ეს მოვლენები წარმოადგენდა მრავალი თვითმფრინავის დაღუპვის მიზეზს. შემდეგში მ. კელდიში მუშაობდა რაკეტული ტექნიკის დარგში და გახდა საბჭოთა კოსმონავტიკის მთავარი თეორეტიკოსი.

თუ რამდენად დიდია მათემატიკის როლი თანამედროვე მეცნიერებაში, შეგვიძლია ვიმსჯელოთ იმ სიტყვებით, რომელიც ჯერ კიდევ XVI საუკუნეში წარმოთქვა დიდმა ხელოვანმა და მოაზროვნემ ლეონარდო და ვინჩიმ — არც ერთ ადამიანურ გამოკვლევას არ შეიძლება ეწოდოს ჭეშმარიტი მეცნიერება, თუ მან არ გაიარა მათემატიკური დამტკიცება, ხოლო XVIII საუკუნის დიდმა ფილოსოფოსმა ემანუელ კანტმა განაცხადა, რომ ყოველი მეცნიერება იმდენადაა მეცნიერება, რამდენადაც დიდია მასში მათემატიკა.

მათემატიკის უნივერსალობა იმაშიც გამოიხატება, რომ მისი შესწავლა ანვითარებს ლოგიკურ და ალგორითმულ აზროვნებას, რაც საშუალებას იძლევა უკეთ გავერკვეთ სახალხო მეურნეობის წინაშე მდგარი სხვადასხვა ურთულესი ამოცანების გადაწყვეტაში, ამიტომ

სტუდენტი უნდა სწავლობდეს არა მარტო იმ საკითხებს, რაც უშუალოდ მას სჭირდება თავისი სპეციალობის დასაუფლებლად, არამედ მან უნდა მიიღოს ისეთი ფუნდამენტური მათემატიკური განათლება, რომელიც საშუალებას მისცემს საჭიროების მიხედვით (დროის, საქმის მოთხოვნილების შესაბამისად) გააფართოოს და გააღრმაოს თავისი მათემატიკური ცოდნის დონე.

§ 2. სიმრავლე. მოქმედებანი სიმრავლეებზე

განვსაზღვროთ რაიმე ცნება ნიშნავს — გადმოვცეთ მისი შინაარსი სხვა ადრე შემოღებული ცნებების საშუალებით, მაგრამ განსაზღვრებათა ამ ჯაჭვში უნდა გამოიყოს საწყისი ცნებები, რომლებიც სხვა ცნებების საშუალებით არ განისაზღვრებიან. ეს ცნებები მიღებულია ძირითად, პირველად ცნებებად და მათზე დაყრდნობით განისაზღვრება ყველა სხვა ცნებები.

მათემატიკის ერთ-ერთი პირველადი ცნებაა სიმრავლის ცნება. სიმრავლე წარმოადგენს რაიმე ნიშნის მიხედვით გაერთიანებული ობიექტების ერთობლიობას. მაგალითად, შეიძლება ვილაპარაკოთ საქართველოს უმაღლეს სასწავლებელთა სიმრავლეზე, მზის სისტემის პლანეტების სიმრავლეზე, ქართული ანბანის ასოების სიმრავლეზე და ა. შ.

ობიექტებს, რომელთაგანაც შედგება სიმრავლე, ამ სიმრავლის ელემენტები ეწოდება.

სიმრავლეებს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით: A, B, C, D..., ხოლო მის ელემენტებს პატარა ასოებით: a, b, c, d...

იმ ფაქტს, რომ a წარმოადგენს A სიმრავლის ელემენტს, ასე ჩაწერენ: $a \in A$ (იკითხება „a ეკუთვნის A-ს"), ხოლო თუ a არ წარმოადგენს A-ს ელემენტს, მაშინ წერენ: $a \notin A$ ან $a \bar{\in} A$ (იკითხება „a არ ეკუთვნის A-ს").

სიმრავლე მოცემულია, თუ ნებისმიერ ობიექტზე შეიძლება ითქვას, წარმოადგენს თუ არა იგი ამ სიმრავლის ელემენტს.

სიმრავლე, რომლის ელემენტებია a, b, c..., აღინიშნება ასე: $\{a, b, c, \ldots\}$, ხოლო ყველა იმ x ელემენტთა სიმრავლე, რომლებსაც გააჩნიათ რაიმე P თვისება, აღინიშნება შემდეგნაირად:

$$\{x : P\}.$$

მაგალითად, ყველა იმ ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე, რომლებიც ნაკლებია 100-ზე, ასე აღინიშნება: $\{x : x \in N,\ x < 100\}$, სადაც N ყველა ნატურალური რიცხვის სიმრავლეა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცხადია, თუ რა თვისების მიხედვით არიან ელემენტები გაერთიანებული A სიმრავლეში, ეს თვისება შეიძლება არ მივუთითოთ და ჩავწეროთ

$$A = \{x\}.$$

მაგალითად, ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ ასე:

$$x = \{n\},$$

სადაც n აღნიშნავს ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვს.

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს, ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება. მაგალითად, $x^2+1=0$ განტოლების ნამდვილ ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია.

A სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ქვესიმრავლე, თუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის B სიმრავლეს და წერენ: $A \subset B$ (იკითხება „A შედის B-ში"). თუ A სიმრავლე არ არის B სიმრავლის ქვესიმრავლე, მაშინ წერენ $A \not\subset B$.

მიღებულია, რომ ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი A სიმრავლის ქვესიმრავლეა. ე. ი. $\varnothing \subset A$.

ცხადია, რომ ნებისმიერი A სიმრავლე თავისი თავის ქვესიმრავლეს წარმოადგენს, ე. ი. $A \subset A$.

თუ A სიმრავლე B სიმრავლის ქვესიმრავლეა, ხოლო B-ში არსებობს ერთი ელემენტი მაინც, რომელიც A-ს არ ეკუთვნის, მაშინ A-ს ეწოდება B-ს საკუთრივი ქვესიმრავლე.

თუ $A \subset B$ და $B \subset A$, მაშინ A და B სიმრავლეებს ტოლი ეწოდება და წერენ $A = B$.

ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება (ჯამი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც ეკუთვნის და $A \cup B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა ვთქვათ გვაქვს რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \dots A_n$. ამ სიმრავლეთა გაერთიანება (ჯამი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ეკუთვნის ერთ-ერთს მაინც მოცემული სიმრავლეებიდან. სიმრავლეთა გაერთიანება აღინიშნება ასე:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{ან} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის, როგორც A ისე B სიმრავლეს და $A \cap B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია რამდენიმე სიმრავლე $A_1, A_2, \ldots, A_n$. ამ სიმრავლეთა თანაკვეთა (ნამრავლი) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც ერთდროულად ეკუთვნის ყველა მოცემულ სიმრავლეს. ამ შემთხვევაში სიმრავლეთა თანაკვეთა ასე აღინიშნება:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{ან} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

ორ A და B სიმრავლეს ურთიერთარაგადამკვეთი (თანაუკვეთი) ეწოდება, თუ მათი გადაკვეთა ცარიელი სიმრავლეა. A და B სიმრავლეთა სხვაობა ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომლებიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნიან და $A \setminus B$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ადვილია ჩვენება, რომ მოქმედებებს სიმრავლეებზე გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (კომუტაციურობა),
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ასოციაციურობა),
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (დისტრიბუციულობა).

§ 3. მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

მათემატიკური წინადადებების (თეორემების, განსაზღვრებების და სხვ.) ფორმულირებისას ხშირად იყენებენ მათემატიკური ლოგიკის სიმბოლოებს.

თუ α და β-თი აღნიშნულია რაიმე წინადადებები, მაშინ $\alpha \Rightarrow \beta$ ($\Rightarrow$ იმპლიკაციის სიმბოლო) ჩანაწერი ნიშნავს: „α წინადადებიდან გამომდინარეობს β წინადადება".

ჩანაწერი $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ ($\Longleftrightarrow$ ეკვივალენტობის სიმბოლო) ნიშნავს: „α და β წინადადებები ეკვივალენტურია" ე. ი. $\alpha \Rightarrow \beta$ და $\beta \Rightarrow \alpha$.

სიმბოლო $\forall$ (ზოგადობის კვანტორი) იხმარება „ნებისმიერი", „თითოეული", „ყოველი" სიტყვების ნაცვლად. მაგალითად: $\forall x \in A : \alpha$ ნიშნავს: „A სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის ადგილი აქვს α წინადადებას".

სიმბოლო $\exists$ (არსებობის კვანტორი) იხმარება „არსებობს", „მოიძებნება" სიტყვების ნაცვლად. მაგალითად, $\exists y \in B : \beta$ ნიშნავს: „B სიმრავლეში არსებობს ელემენტი y, რომლისთვისაც ადგილი აქვს β წინადადებას".

ჩანაწერი $\exists !\, x\in A:\alpha$ ნიშნავს: „არსებობს A სიმრავლის ერთად-ერთი ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს α წინადადებას ($\exists !$ სიმბოლოს ეწოდება არსებობისა და ერთადერთობის კვანტორი).

ჩანაწერი $\alpha\wedge\beta$ ($\wedge$ — კონიუნქციის სიმბოლო) ნიშნავს: „α და β-ს ერთდროულად აქვს ადგილი“. იკითხება: „α და β“.

ჩანაწერი $\alpha\vee\beta$ ($\vee$ — დიზუნქციის სიმბოლო) ნიშნავს“ „α და β-დან ერთ-ერთს მაინც აქვს ადგილი“. იკითხება „α ან β“.

სიმბოლო $\overline{\alpha}$ აღნიშნავს α წინადადების უარყოფას და იკითხება „არა α“. მაგალითად, $\forall x\in A:\alpha$ ნიშნავს, რომ A სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის ადგილი აქვს α წინადადებას, ხოლო $\overline{\forall x\in A:\alpha}$ ნიშნავს, რომ α წინადადება არ სრულდება A სიმრავლის ყოველი x ელემენტისათვის. სხვანაირად რომ ვთქვათ, A სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც x ელემენტი, რომლისთვისაც ადგილი აქვს $\overline{\alpha}$ წინადადებას ე. ი.

$$\overline{\forall x\in A:\alpha}\Longleftrightarrow\exists\, x\in A:\overline{\alpha}\,.$$

§ 4. ნამდვილი რიცხვები. რიცხვითი ღერძი. რიცხვთა შუალედები

რიცხვის ცნება უძველეს დროში წარმოიშვა და განვითარების დიდი გზა გაიარა, რომლის დროსაც ხდებოდა რიცხვის ცნების გაფართოება და განზოგადება.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე:

$$N=\{1,\ 2,\dots,\ n,\dots\}$$

წარმოიშვა საგნების თვლის შედეგად. შემდგომში პრაქტიკისა და თვითონ მათემატიკის განვითარების მოთხოვნილებით შემოტანილი იქნა მთელი რიცხვების

$$Z=\{\ \dots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\dots\}$$

და რაციონალური რიცხვების ცნება:

$$Q=\left\{\frac{m}{n}:m\in Z,\quad n\in N\right\}.$$

როგორც მათემატიკის სასკოლო კურსიდანაა ცნობილი, ყოველი რაციონალური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ სასრული ათწილადის ან უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით და პირიქით.

რაციონალურ რიცხვთა შემოღებამ სრულად ვერ გადაჭრა ზოგიერთი მნიშვნელოვანი პრაქტიკული ამოცანა. მაგალითად მონაკვეთის სიგრძის გაზომვა. არსებობს ისეთი მონაკვეთები რომელთა სიგრძე რაციონალური რიცხვით არ გამოისახება. ასეთი მონაკვეთია იმ კვადრატის დიაგონალი, რომლის გვერდის სიგრძე 1-ის ტოლია. მართლაც, თუ დავუშვებთ, რომ კვადრატის დიაგონალის სიგრძე რაციონალური რიცხვით გამოისახება, მაშინ იგი წარმოიდგინება $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადის სახით და მართებულია ტოლობა:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

აქედან $m^2=2n^2$, ამიტომ m^2 ლუწი რიცხვია და მაშასადამე ლუწი იქნება m-იც. ე. ი. $m=2k$, სადაც $k \in N$ და $m^2=2n^2$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2,$$

ე. ი. n^2 ლუწი რიცხვია და ლუწი იქნება n-იც. მივიღეთ, რომ m და n ლუწი რიცხვებია. ეს კი ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $\frac{m}{n}$ უკვეცი წილადია.

ამრიგად, ვაჩვენეთ, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი 2-ის ტოლია. ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ არ არსებობენ რაციონალური რიცხვები, რომელთა კვადრატებია 3, 5, 6, 7 და ა. შ. ასეთი რიცხვები ეკუთვნიან ე. წ. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. რადგან ასეთი რიცხვები არ არიან რაციონალური, ამიტომ მათი წარმოდგენა უსასრულო პერიოდული ათწილადის სახით შეუძლებელია.

უსასრულო არაპერიოდულ ათწილადს ირაციონალური რიცხვი ეწოდება. ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I ასოთი აღინიშნება.

მაგალითად, ირაციონალურია უსასრულო ათწილადი.

$$0{,}101001000100001\cdots$$

რომლის ჩანაწერში პირველი 1-იანის შემდეგ არის ერთი ნული, მეორე 1-იანის შემდეგ — ორი ნული და ა. შ.

რაციონალურ და ირაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანებას ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე ეწოდება და R ასოთი აღინიშნება.

რადგან ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ძირითადი თვისებები და არითმეტიკული მოქმედებები ნამდვილ რიცხვებზე მკითხველისათვის

ცნობილია მათემატიკის სასკოლო კურსიდან, ამიტომ ჩვენ მათზე არ შევჩერდებით. აღვნიშნოთ მხოლოდ შემდეგი ორი თვისება:

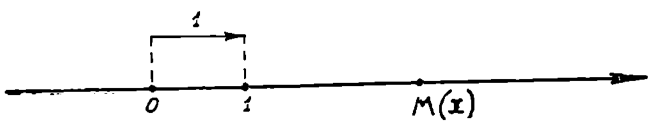
1. **დალაგებულობა.** თუ $x\neq y$, მაშინ ან $x<y$ ან $y<x$.

2. **უწყვეტობა.** ვთქვათ x და y ნამდვილ რიცხვთა ორი სიმრავლეა. თუ ნებისმიერი $x\in X$ და $y\in Y$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $x\leqslant y$, მაშინ არსებობს ერთი მაინც c რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი $x\in X$ და $y\in Y$ რიცხვებისათვის სრულდება უტოლობა:

$$x\leqslant c\leqslant y.$$

შევნიშნოთ, რომ უწყვეტობის თვისება, რომელიც ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეს გააჩნია, არ გააჩნია რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს. მაგალითად, ვთქვათ $X=\{x\in Q : x<\sqrt{2}\}$ და $Y=\{y\in Q : y>\sqrt{2}\}$. ცხადია, რომ თუ $x\in X$ და $y\in Y$, მაშინ $x\leqslant y$. მაგრამ არ არსებობს ისეთი რაციონალური c რიცხვი, რომ ყოველი $x\in X$ და $y\in Y$ მართებული იყოს უტოლობა $x\leqslant c\leqslant y$.

წრფეს, რომელზედაც ფიქსირებულია რაიმე O წერტილი (სათავე), არჩეულია დადებითი მიმართულება და სიგრძის ერთეული (მასშტაბი), რიცხვითი ღერძი ანუ რიცხვითი წრფე ეწოდება (ნახ. 1).



ნახ. 1

რიცხვითი ღერძის ყოველ M წერტილს შეიძლება შევუსაბამოთ ერთადერთი ნამდვილი x რიცხვი და პირიქით. ეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს შემდეგი წესით: $x=|OM|$ (OM მონაკვეთის სიგრძეს), თუ O-დან M-საკენ მიმართულება ემთხვევა ღერძის მიმართულებას და $x=-|OM|$ — წინააღმდეგ შემთხვევაში. ამ x რიცხვს M წერტილის კოორდინატი ეწოდება. ის ფაქტი, რომ x რიცხვი M წერტილის კოორდინატია, ასე ჩაიწერება: $M(x)$. ცხადია, რომ O სათავის კოორდინატია ნული. მოცემულია წერტილი ღერძზე ნიშნავს, რომ მოცემულია წერტილის კოორდინატი.

შემდგომში ნამდვილ რიცხვსა და მის შესაბამის წერტილს ღერძზე გავაიგივებთ.

განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ზოგიერთი ქვესიმრავლე, რომელთაც რიცხვითი შუალედები ეწოდება.

ვთქვათ, a და b ორი ნამდვილი რიცხვია და $a<b$.

განსაზღვრება 4.1. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $a\leqslant x\leqslant b$, ჩაკეტილი შუალედი (მონაკვეთი) ეწოდება და $[a;\ b]$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;\ b]=\{x\in R: a\leqslant x\leqslant b\}.$$

ანალოგიურად

$$]a;\ b[\ =\{x\in R: a<x<b\}.$$

სიმრავლეს ღია შუალედი (ინტერვალი) ეწოდება, ხოლო

$$[a;\ b[\ =\{x\in R: a\leqslant x<b\},$$

$$]a;\ b]=\{x\in R: a<x\leqslant b\},$$

სიმრავლეებს ნახევრად ღია შუალედები ეწოდება.

a და b რიცხვებს განხილული შუალედების საზღვრები ან ბოლოები ეწოდება. ხოლო $b-a$ რიცხვს — შუალედის სიგრძე.

განსაზღვრება 4.2. ყველა იმ ნამდვილ x რიცხვთა სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ უტოლობას $x\geqslant a$, უსასრულო შუალედი ეწოდება და $[a;\ +\infty[$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$[a;\ +\infty[\ =\{x\in R: x\geqslant a\}.$$

უსასრულო შუალედებს წარმოადგენენ აგრეთვე შემდეგი სიმრავლეები:

$$]a;\ +\infty[\ =\{x\in R: x>a\},$$

$$]-\infty;\ b]=\{x\in R: x\leqslant b\},$$

$$]-\infty,\ b[\ =\{x\in R: x<b\}.$$

ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეც უსასრულო შუალედს წარმოადგენს და იგი ასე აღინიშნება: $R=]-\infty;\ +\infty[$.

$a\in R$ რიცხვის მიდამო $U(a)$ ეწოდება ამ რიცხვის შემცველ ყოველ ინტერვალს.

$a\in R$ რიცხვის ε მიდამო $U(a;\ \varepsilon)$ ეწოდება $]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[$ ინტერვალს:

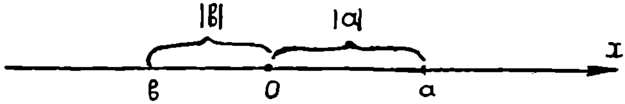
$$U(a;\ \varepsilon)=]a-\varepsilon;\ a+\varepsilon[.$$

§ 5. ნამდვილი რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე) და მისი თვისებები

განსაზღვრება 5.1. ნამდვილი a რიცხვის მოდული (აბსოლუტური სიდიდე) ეწოდება თვით ამ რიცხვს, თუ იგი არაუარყოფითია, მის მოპირდაპირე რიცხვს, თუ იგი უარყოფითია და $|a|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{თუ } a\geqslant 0; \\ -a, & \text{თუ } a<0. \end{cases}$$

გეომეტრიულად ნამდვილი რიცხვის მოდული წარმოადგენს მანძილს რიცხვითი წრფის სათავიდან ამ რიცხვის შესაბამის წერტილამდე (ნახ. 2).



ნახ. 2

ნამდვილი რიცხვის მოდულის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ:

1. $|-a|=|a|$;
2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$;
3. $|a|\leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon\leqslant a\leqslant \varepsilon$, $(\varepsilon>0)$;
4. $|a|\geqslant \varepsilon \Longleftrightarrow a\leqslant -\varepsilon \vee a\geqslant \varepsilon$, $(\varepsilon>0)$.

მოვიყვანოთ მოდულის ზოგიერთი თვისება:

თეორემა 5.1. ორი რიცხვის ჯამის მოდული არ აღემატება ამ რიცხვების მოდულების ჯამს, ე. ი.

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

დამტკიცება. განვიხილოთ ორი შემთხვევა:

ა) ვთქვათ, $a+b\geqslant 0$, მაშინ $|a+b|=a+b\leqslant |a|+|b|$.

ბ) ვთქვათ, $a+b<0$, მაშინ $|a+b|=-(a+b)=(-a)+(-b)\leqslant \leqslant |-a|+|-b|=|a|+|b|$.

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თ ე ო რ ე მ ა 5.2. თუ a და b ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ:

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს:

$$a=(a-b)+b,$$

აქედან

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|,$$

ანუ

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \qquad (5.1)$$

თუ a-სა და b-ს ადგილებს შევუცვლით, მაშინ (5.1) უტოლობიდან მივიღებთ:

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|, \qquad (5.2)$$

ხოლო, რადგან $|a-b|=|b-a|$, (5.1) და (5.2)-დან გვექნება:

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

თ ე ო რ ე მ ა 5.3. ორი რიცხვის ნამრავლის მოდული უდრის ამ რიცხვების მოდულების ნამრავლს, ე. ი.

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

ა) თუ $a\geqslant 0$ და $b\geqslant 0$, მაშინ $|a\cdot b|=ab=|a|\cdot|b|$.
ბ) თუ $a\geqslant 0$ და $b<0$, მაშინ $|a\cdot b|=-(ab)=a\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$
გ) თუ $a<0$ და $b\geqslant 0$, მაშინ $|a\cdot b|=-(ab)=(-a)\cdot b=|a|\cdot|b|$.
დ) თუ $a<0$ და $b<0$, მაშინ $|a\cdot b|=ab=(-a)\cdot(-b)=|a|\cdot|b|$.

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია თანამამრავლთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 5.4. a და b რიცხვების ($b\neq 0$) ფარდობის მოდული ამ რიცხვების მოდულების ფარდობის ტოლია, ე. ი. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, სადაც $b\neq 0$.

§ 6. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა. სასრული და უსასრულო სიმრავლეები. თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები

ვთქვათ, მოცემულია A და B სიმრავლეები და წესი, რომლის საშუალებითაც შეიძლება შევადგინოთ გარკვეული $(a; b)$ სახის წყვილები, სადაც $a\in A$ და $b\in B$. ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მო-

ცემულია შესაბამისობა A და B სიმრავლეებს შორის და b-ს ეწოდება a ელემენტის შესაბამისი.

A და B სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას ეწოდება ურთიერთცალსახა, თუ შესრულებულია შემდეგი ორი პირობა:

1. ყოველ $a(a \in A)$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ელემენტი B სიმრავლიდან.

2. B სიმრავლის ყოველი ელემენტი შეესაბამება A სიმრავლის ერთადერთ ელემენტს.

A და B სიმრავლეებს ეწოდება ეკვივალენტური, თუ მათ შორის შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა და წერენ $A \sim B$.

ცხადია, რომ 1) $A \sim A$ (რეფლექსურობა); 2) თუ $A \sim B$, მაშინ $B \sim A$ (სიმეტრიულობა); 3) თუ $A \sim B$ და $B \sim C$, მაშინ $A \sim C$ (ტრანზიტულობა).

A სიმრავლეს ეწოდება სასრული, თუ იგი არის ცარიელი ან არსებობს ისეთი ნატურალური რიცხვი n, რომ

$$A \sim \{1,\ 2, \dots, n\}.$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ A სიმრავლის ელემენტთა რიცხვი არის n. ცარიელ სიმრავლეში ელემენტთა რიცხვი მიღებულია ნულის ტოლად.

ცხადია, რომ ორი სასრული სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მათი ელემენტების რიცხვი ერთმანეთის ტოლია.

A სიმრავლეს უსასრულო ეწოდება თუ იგი სასრული არ არის.

სიმრავლეს თვლადი ეწოდება, თუ იგი ეკვივალენტურია ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის.

მაგალითად, $M=\{2,4, \dots, 2n; \dots\}$ სიმრავლე თვლადია, რადგან N და M სიმრავლეებს შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა შეიძლება დამყარდეს თანადობით $n \longleftrightarrow 2n$. ასევე სიმრავლე $M=\{2^n\}$ თვლადია რადგან შესაბამისობა $n \longleftrightarrow 2^n$ ურთიერთცალსახაა.

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ N სიმრავლეში არსებობს მისი ეკვივალენტური საკუთრივი ქვესიმრავლე. ამ თვისებით ხასიათდება მხოლოდ უსასრულო სიმრავლე. ეს თვისება შეიძლებოდა მიგვეღო უსასრულო სიმრავლის განსაზღვრებად.

თვლადი სიმრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლებელია მისი ელემენტების დანომვრა ნატურალური რიცხვებით, ამიტომ ხშირად თვლად სიმრავლეს ჩავწერთ მისი ელემენტების მიმდევრობის სახით:

$$A=\{a_1,\ a_2, \dots, a_n \dots\}. \tag{6.1}$$

რადგანაც ეკვივალენტობის მიმართება ტრანზიტულია, ამიტომ ყველა თვლადი სიმრავლე ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. თვლადი სიმრავლის ყოველი უსასრულო ქვესიმრავლე აგრეთვე თვლადი სიმრავლეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, A თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ იგი შეიძლება წარმოვადგინოთ (6.1) სახით. დავუშვათ, რომ B არის A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე. მაშინ A სიმრავლის ელემენტები დაიკავებენ გარკვეულ ადგილს (6.1) მიმდევრობაში. ვთქვათ a_{n_1} არის (6.1) მიმდევრობის პირველი ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის. აღვნიშნოთ იგი l_1-ით. a_{n_2} იყოს (6.1) მიმდევრობის მეორე ელემენტი, რომელიც B სიმრავლეს ეკუთვნის. იგი l_2-ით აღვნიშნოთ, თუ ამ პროცესს განვაგრძობთ, მივიღებთ B სიმრავლის ელემენტთა დანომვრას. ე. ი. B თვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თვლადი A სიმრავლისა და სასრული E სიმრავლის სხვაობა $A \diagup E$ აგრეთვე თვლადი სიმრავლეა.

თ ე ო რ ე მ ა 6.2. სასრული სიმრავლისა და თვლადი სიმრავლის გაერთიანება თვლადი სიმრავლეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$A=\{a_1,\ a_2, \dots, a_n\},\ B=\{b_1,\ b_2,\ b_3, \dots\}.$$

დავუშვათ, რომ $A \cap B=\varnothing$ შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$E=A \cup B.$$

E სიმრავლე შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ:

$$E=\{a_1,\ a_2, \dots, a_n, b_1,\ b_2, \dots, b_m, \dots\}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ E სიმრავლის ელემენტთა დანომვრა შესაძლებელია, ე. ი. ის თვლადია.

ახლა ვთქვათ, A და B სიმრავლეებს აქვთ საერთო ელემენტები; მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$E=A \cup (B \diagdown A).$$

რადგან A და $B \diagdown A$ სიმრავლეებს არა აქვთ საერთო ელემენტები და $B \diagdown A$ თვლადი სიმრავლეა, ამიტომ, ზემოთ დამტკიცებულის ძალით E სიმრავლე თვლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 6.3. თვლად სიმრავლეთა სასრული რაოდენობის გაერთიანება თვლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ მოცემული გვაქვს თვლადი სიმრავლეები:

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\dots,\ a_{1n},\dots\},$$
$$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\dots,\ a_{2n},\dots\},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$A_m=\{a_{m1},\ a_{m2},\dots,\ a_{mn},\dots\}.$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. ვთქვათ

$$A=\bigcup_{k=1}^{m} A_k.$$

წარმოვადგინოთ A სიმრავლე ასე:

$$A=\{a_{11},\ a_{21},\dots,a_{m1},\ a_{12},\ a_{22},\dots a_{m2},\dots,\ a_{1n},\ a_{2n},\ a_{mn},\dots\}.$$

აქედან ვასკვნით, რომ A თვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 6.4. თვლად სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანება თვლადი სიმრავლეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ მოცემული სიმრავლეებია:

$$A_1=\{a_{11},\ a_{12},\dots,\ a_{1n},\dots\},$$
$$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\dots,\ a_{2n},\dots\},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$A_m=\{a_{m1},\ a_{m2},\dots,\ a_{mn},\dots\},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ მოცემული სიმრავლეები წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია. ამ სიმრავლეთა გაერთიანება აღვნიშნოთ A-თი. ის შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$A=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{13},\ a_{22},\ a_{31},\ a_{14},\ a_{23},\ a_{32},\ a_{41},\dots\},$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ A თვლადი სიმრავლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 6.5. რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე თვლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $Q=Q_+\cup Q_-\cup Q_0$, სადაც Q_+ ყველა დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, Q_- — ყველა უარყოფით რაცი-

ონალურ რიცხვთა სიმრავლეა, ხოლო $Q_0=\{0\}$ — ერთელემენტიანი სიმრავლეა. ცხადია, რომ

$$Q_+=\bigcup_{q=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{q}\,,\ \frac{2}{q}\,,\ \frac{3}{q}\,,\dots\right\},$$

აქედან გამომდინარე თეორემა 6.4-ის ძალით Q_+ თვლადია. რადგან Q_+ ეკვივალენტურია Q_-, ამიტომ Q_- აგრეთვე თვლადია. თეორემა 6.2 და თეორემა 6.3-ის ძალით Q სიმრავლე თვლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 6.1. უსასრულო სიმრავლეს, რომელიც თვლადი არაა, არათვლადი სიმრავლე ეწოდება.

თეორემა 6.6. ინტერვალი $\delta=]0,1[$ არათვლადი სიმრავლეა.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ δ ინტერვალი თვლადია, მაშინ ის შეიძლება წარმოვადგინოთ უსასრულო მიმდევრობის სახით:

$$\delta=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n,\dots\}.$$

ამ მიმდევრობის ყოველი წევრი შეიძლება ჩავწეროთ უსასრულო ათწილადით:

$$\begin{array}{l}\alpha_1=0,\ x_1^{(1)}\,x_2^{(1)}\cdots x_k^{(1)}\cdots,\\ \alpha_2=0,\ x_1^{(2)}\,x_2^{(2)}\cdots x_k^{(2)}\cdots,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \alpha_n=0,\ x_1^{(n)}\,x_2^{(n)}\cdots x_k^{(n)}\cdots,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{array}$$

განვიხილოთ რიცხვი

$$a=0,\ a_1\,a_2\cdots a_n\cdots,$$

სადაც

$$a_k=\begin{cases}1, & \text{თუ}\quad x_k^{(k)}\neq 1,\\ 0, & \text{თუ}\quad x_k^{(k)}=1.\end{cases}$$

ცხადია, რომ $a\in\delta$. ასევე ცხადია, რომ $a\neq\alpha_n$ $(n=1,2,\dots)$ და მაშასადამე $a\notin\delta$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.7. ყველა სასრული ინტერვალი ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

დამტკიცება. ტოლობა

$$x=a+(b-a)\,t$$

ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას $]0; 1[$ და $]a, b[$ ინტერვალებს შორის, ე. ი. ნებისმიერი a და b რიცხვისათვის

$$]0,1[\sim]a, b[.$$

აქედან გამომდინარე, სიმრავლეთა ეკვივალენტურობის ტრანზიტულობის ძალით, ნებისმიერი ორი სასრული ინტერვალი ეკვივალენტურია.

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 6.8. ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე ეკვივალენტურია $]0; 1[$ ინტერვალის, ე. ი. არათვლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქცია

$$y=\operatorname{tg} x,\ x\in\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

ამყარებს ურთიერთცალსახა თანადობას ყველა ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეს და $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალს შორის, ე. ი.

$$R\sim\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

თეორემა 6.7-ის ძალით $]0,1[\sim\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ საიდანაც $R\sim]0, 1[$.

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. რიცხვითი სიმრავლის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 7.1. ნამდვილ რიცხვთა რაიმე X სიმრავლეს ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან), შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი c რიცხვი, რომ ნებისმიერი $x\in X$ რიცხვისათვის მართებულია უტოლობა $x\leqslant c$ $(x\geqslant c)$. c რიცხვს X სიმრავლის ზედა (ქვედა) საზღვარი ეწოდება.

სიმრავლეს, რომელიც შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან ასევე ქვემოდან, ეწოდება შემოსაზღვრული.

მაგალითად, ნებისმიერი სასრული შუალედი $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$, შემოსაზღვრულია, ხოლო $]a, +\infty[$ ინტერვალი შემოსაზღვრულია ქვემოდან, $]-\infty, a[$ ინტერვალი კი ზემოდან.

ცხადია, რომ ნებისმიერი ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული სიმრავლის ზედა (ქვედა) საზღვართა სიმრავლე უსასრულოა.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 7.2. a რიცხვს ეწოდება X სიმრავლის უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი, თუ $a\in X$ და $\forall x\in X$ რიცხვისათვის $x\leqslant a$ $(x\geqslant a)$.

სიმრავლის უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი აღინიშნება $\max X$ ($\min X$) სიმბოლოთი. ცხადია, რომ თუ X სასრული არაცარიელი სიმრავლეა, მაშინ მასში არსებობს უდიდესი და უმცირესი რიცხვი. თუ სიმრავლე უსასრულოა, მაშინ მასში უდიდესი ან უმცირესი რიცხვი შეიძლება არ არსებობდეს. მაგალითად

$$X=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots\right\}$$

სიმრავლეში არ არის უდიდესი რიცხვი,

$$X=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n+1},\dots\right\}$$

სიმრავლეში არ არის უმცირესი რიცხვი, ხოლო $]-1,2[$ სიმრავლეში არ არის არც უმცირესი და არც უდიდესი რიცხვი.

შევნიშნოთ, რომ თუ სიმრავლეს გააჩნია უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი, მაშინ იგი ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულია.

ბუნებრივად ისმება ამოცანა: ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი სიმრავლისათვის შემოვიტანოთ ისეთი მახასიათებლები (რიცხვები), რომლებიც გარკვეულად შეცვლიან $\max E$ და $\min E$-ს, როცა ისინი არ არსებობენ.

არაცარიელ სიმრავლის ასეთ მახასიათებლებს წარმოადგენენ სიმრავლის, ე. წ. ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები.

განსაზღვრება 7.3. ზემოდან შემოსაზღვრული X სიმრავლის ზედა საზღვართა შორის უმცირესს ეწოდება X სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი და აღინიშნება $\sup X$-ით, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრული X სიმრავლის ქვედა საზღვართა შორის უდიდესს ეწოდება X სიმრავლის ზუსტი ქვედა საზღვარი და აღინიშნება $\inf X$-ით.

მაგალითად, $]a, b[$ ინტერვალის ზუსტი ზედა საზღვარია b, ზუსტი ქვედა საზღვარია — a.

ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვრის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ სიმრავლეს აქვს ეს საზღვარი, მაშინ ის ერთადერთია, რადგან ყოველ სიმრავლეში უდიდესი (უმცირესი) რიცხვი ერთადერთია.

შევნიშნოთ, რომ, თუ არსებობს $\max E$ ($\min E$), მაშინ $\max E=\sup E$ ($\min E=\inf E$).

გააჩნია თუ არა ყოველ ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულ სიმრავლეს ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი? ამ კითხვაზე პასუხს იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.1. ყოველ არაცარიელ ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრულ სიმრავლეს გააჩნია ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ X ზემოდან შემოსაზღვრული არაცარიელი სიმრავლეა. Y-ით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ზედა საზღვართა სიმრავლე. ზედა საზღვრის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $x \in X$ და $y \in Y$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა $x \leqslant y$. ამიტომ, ნამდვილ რიცხვთა უწყვეტობის თვისებიდან გამომდინარე, არსებობს ისეთი c რიცხვი, რომ

$$x \leqslant c \leqslant y. \tag{7.1}$$

(7.1)-ის პირველი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ c წარმოადგენს X სიმრავლის ზედა საზღვარს, ხოლო მეორე უტოლობის თანახმად c არის უმცირესი ზედა საზღვრებს შორის. ამრიგად c იქნება X სიმრავლის ზუსტი ზედა საზღვარი.

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება ზუსტი ქვედა საზღვრის არსებობა არაცარიელი ქვემოდან შემოსაზღვრული სიმრავლისათვის.

შ ე დ ე გ ი. ნამდვილ რიცხვთა ყოველ არაცარიელ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს აქვს ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვარი.

თუ X სიმრავლე ზემოდან (ქვემოდან) არ არის შემოსაზღვრული, წერენ, რომ $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

სიმრავლის ზუსტ ზედა საზღვარს გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: როგორი მცირეც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, ყოველთვის მოიძებნება ისეთი $x \in X$ ელემენტი, რომ $x > \sup X - \varepsilon$. მართლაც, თუ ასეთი x რიცხვი არ იარსებებს, მაშინ $\sup X - \varepsilon$ აგრეთვე იქნება X-ის ზედა საზღვარი, რაც ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება.

ზუსტი ზედა საზღვრის ეს თვისება შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: თუ $c = \sup X$, მაშინ ნებისმიერი $c' < c$ რიცხვისათვის არსებობს $x \in X$ რიცხვი ისეთი, რომ $x > c'$. ანალოგიურად, თუ $c = \inf X$, მაშინ ნებისმიერი $c' > c$ რიცხვისათვის არსებობს $x \in X$ რიცხვი ისეთი, რომ $x < c'$.

§ 8. კომპლექსური რიცხვები

1. კომპლექსური რიცხვის განსაზღვრება. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

როგორც ვიცით, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ყოველთვის სრულდება შეკრების, გამოკლების, გამრავლებისა და მთელ დადებით ხარისხში ახარისხების ოპერაცია. რაც შეეხება ახარისხების შებრუნე-

ბულ ოპერაციას — ამოფესვას, იგი ყოველთვის არ არის შესაძლებელი. ასე, მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს რიცხვი, რომლის კვადრატი — 1-ის ტოლია, ამიტომ ამ სიმრავლეში ამონახსენი არ გააჩნია ისეთ უმარტივეს კვადრატულ განტოლებას, როგორიცაა

$$x^2 + 1 = 0. \tag{8.1}$$

საზოგადოდ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს რიცხვი, რომლის ლუწი ხარისხი უარყოფითი რიცხვია, ამიტომ იმ ნამდვილ კოეფიციენტებიან კვადრატულ განტოლებებს, რომლებსაც უარყოფითი დისკრიმინანტი აქვთ, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში ამონახსენი არ გააჩნია.

ისმის ამოცანა: მოვახდინოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის ისეთი გაფართოება, რომ მიღებულ სიმრავლეში ნებისმიერ კვადრატულ განტოლებას ჰქონდეს ამონახსენი, ე. ი. ყოველთვის შესაძლებელი იყოს ფესვის ამოღების ოპერაცია.

x და y ნამდვილ რიცხვთა დალაგებულ (x, y) წყვილების სიმრავლეს ეწოდება კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მის ელემენტს კომპლექსური რიცხვი, თუ ტოლობის, ჯამის, ნამრავლის ცნება და ზოგიერთი წყვილის გაიგივება ნამდვილ რიცხვებთან განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

1. $(x, 0)$ წყვილი გაიგივებულია x ნამდვილ რიცხვთან, ე. ი.

$$(x, 0) = x.$$

2. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვი ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $x_1=x_2$ და $y_1=y_2$.

3. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვის ჯამია (x_1+x_2, y_1+y_2) წყვილი, ე. ი.

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

4. ორი $z_1=(x_1, y_1)$ და $z_2=(x_2, y_2)$ კომპლექსური რიცხვის ნამრავლია $(x_1x_2—y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ წყვილი, ე. ი.

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

x და y რიცხვებს (x, y) წყვილის (კომპლექსური რიცხვის) კომპონენტები ეწოდება.

კომპლექსური რიცხვის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსურ რიცხვთა შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები ექვემდებარებიან არითმეტიკის ძირითად კანონებს:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
2. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;

4, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) z_3$;

5. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

გარდა ამისა, კომპლექსური რიცხვების ნამრავლის განსაზღვრების ძალით გვაქვს:

$$k(x, y) = (k, 0)(x, y) = (kx, ky),$$

ე. ი. ნამდვილი რიცხვის გამრავლება წყვილზე ნიშნავს წყვილის კომპონენტების გამრავლებას ამ რიცხვზე. კერძოდ, ყოველი კომპლექსური რიცხვის ნულზე ნამრავლი ნულის ტოლია.

კომპლექსური რიცხვი

$$(-1) z = (-1) \cdot (x, y) = (-x, -y)$$

აღინიშნება $-z$-ით და მას ეწოდება z-ის სიმეტრიული რიცხვი. ცხადია $z + (-z) = 0$.

კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს (0,1) წყვილს.

(0, 1) წყვილს ეწოდება წარმოსახვითი ერთეული და i ასოთი აღინიშნება, ე. ი. $i = (0, 1)$.

ცხადია, რომ

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1,$$

ე. ი. (8.1) განტოლების ამონახსნებს წარმოადგენენ i და $-i$ კომპლექსური რიცხვები.

ადვილი გამოსათვლელია, რომ $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ და, საზოგადოდ, ნებისმიერი ნატურალური n-ისათვის

$$i^{4n} = 1, \; i^{4n+1} = i, \; i^{4n+2} = -1, \; i^{4n+3} = -i.$$

ცხადია, აგრეთვე, რომ

$$iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$$

და

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

$x + iy$ გამოსახულებას ეწოდება (x, y) კომპლექსური რიცხვის ალგებრული ფორმა, x-ს უწოდებენ $x + iy$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს, ხოლო y-ს წარმოსახვით ნაწილს და აღნიშნავენ სიმბოლოებით $x = \mathrm{Re} z$, $y = \mathrm{Im} z$.

კომპლექსურ რიცხვებზე მოქმედებათა თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსური რიცხვების შეკრება და გამრავლება ფორ-

მალურად ისევე ხდება, როგორც ჩვეულებრივი მრავალწევრების შეკრება და გამრავლება. მაგალითად,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + i\, y_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 = $$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$x - iy$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული და $\overline{z}$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი. $\overline{z} = x - iy$.

ცხადია, რომ ყოველი კომპლექსური z რიცხვისათვის $\overline{(\overline{z})} = z$.

შეუღლებულის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლობას $\overline{z} = z$ ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც z ნამდვილი რიცხვია.

$z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ეწოდება $\sqrt{x^2 + y^2}$ რიცხვს და $|z|$ სიმბოლოთი აღინიშნება, ე. ი.

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ცხადია, რომ $|z| \geqslant 0$, ამასთან $|z| = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $z = 0$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$|z| = |\overline{z}|, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2. \qquad (8.2)$$

კომპლექსური რიცხვების გამოკლების და გაყოფის ოპერაციები წარმოადგენენ შესაბამისად შეკრებისა და გამრავლების შებრუნებულ მოქმედებებს.

z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვების $z_1 - z_2$ სხვაობა ეწოდება z კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას $z + z_2 = z_1$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $z_1 = x_1 + y_1 i$ და $z_2 = x_2 + y_2 i$ კომპლექსური რიცხვების სხვაობა ყოველთვის არსებობს და იგი ცალსახად განისაზღვრება ტოლობით $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\, i$.

z_1 კომპლექსური რიცხვის განაყოფი z_2 კომპლექსურ რიცხვზე ეწოდება ისეთ z კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$z \cdot z_2 = z_1 \qquad (8.3)$$

და მას $z_1 : z_2$ ან $\dfrac{z_1}{z_2}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ.

ვაჩვენოთ, რომ (8.3) განტოლებას ნებისმიერი z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვებისათვის აქვს ერთადერთი ამონახსენი, თუ $z_2 \neq 0$. მართლაც, თუ (8.3) განტოლების ორივე მხარეს გავამართლებთ $\overline{z_2}$-ზე და გამოვიყენებთ (8.2) ფორმულას მივიღებთ $z\,|z_2|^2 = z_1\,\overline{z_2}$. აქედან რადგან $|z_2| \neq 0$, გვექნება

$$z = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

ე. ი.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}, \ (z_2 \neq 0) \tag{8.4}$$

თუ $z_1 = x_1 + iy_1$ და $z_2 = x_2 + iy_2$, მაშინ (8.4) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

ამრიგად $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ განაყოფის გამოსათვლელად საკმარისია მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე. მაგალითად,

$$\frac{2-i}{3+2i} = \frac{(2-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i-3i+2i^2}{9+4} = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ მართებულია შემდეგი თვისებები:

1. $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$;
2. $|z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
3. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
5. თუ a ნამდვილი რიცხვია, მაშინ

$$\overline{a z^n} = a(\overline{z})^n;$$

6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ მრავალწევრის კოეფიციენტები ნამდვილი რიცხვებია, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

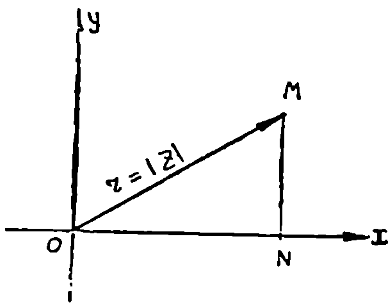
$$\overline{P_n(z)} = P_n(\overline{z}).$$

ავიღოთ სიბრტყეზე Oxy მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. $z=x+iy$ კომპლექსურ რიცხვს შევუსაბამოთ M წერტილი x და y კოორდინატებით. პირიქით, სიბრტყის ყოველ $M(x, y)$ წერტილს შევუსაბამოთ კომპლექსური რიცხვი $x+iy$. ასეთნაირად კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლესა და სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს შორის დამყარდება ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

სიბრტყეს, რომელიც გამოყენებულია კომპლექსური რიცხვების გეომეტრიული წარმოდგენისათვის, კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება და (z) სიმბოლოთი აღინიშნება.

როგორც ვიცით, M წერტილს და ამ წერტილის $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს ერთნაირი კოორდინატები აქვთ (ნახ. 3). ამიტომ ყოველი z კომპლექსური რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ როგორც სიბრტყის წერტილი ან ამ წერტილის შესაბამისი რადიუს-ვექტორი.

ცხადია, რომ კომპლექსური რიცხვის მოდული წარმოადგენს მისი შესაბამისი რადიუს-ვექტორის r სიგრძეს.



ნახ. 3

$z=x+iy\neq 0$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორის მიერ Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ φ ასოთი (ნახ. 3). ΔOMN-დან გვაქვს;

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi, \tag{8.5}$$

საიდანაც

$$\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{8.6}$$

φ კუთხეს, რომელიც (8.6) ტოლობებით განისაზღვრება, ეწოდება $z=x+iy$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი. როდესაც $z=0$, არგუმენტი განუსაზღვრელია და ამიტომ, როდესაც საკითხი ეხება არგუმენტს, ყველგან იგულისხმება, რომ $z\neq0$.

(8.6) ტოლობებს აკმაყოფილებს φ-ს მნიშვნელობათა უსასრულო სიმრავლე, რომლებიც ერთმანეთისაგან 2π-ს ჯერადით განსხვავდებიან. ეს სიმრავლე $\operatorname{Arg} Z$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

z კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტის იმ ერთადერთ მნიშვნელობას, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, ეწოდება

არგუმენტის მთავარი მნიშვნელობა და arg z სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi,$$

ხოლო

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, \ k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

ამასთან,

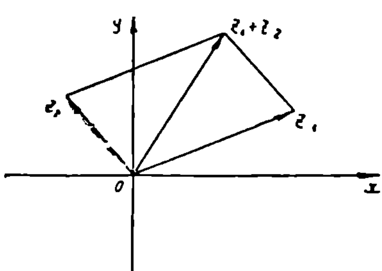
$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x < 0, \quad y \geqslant 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{თუ} \quad x < 0, \quad y < 0. \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{თუ} \quad x = 0, \ y > 0. \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{თუ} \quad x = 0, \ y < 0. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ $\arg \bar{z} = -\arg z$.

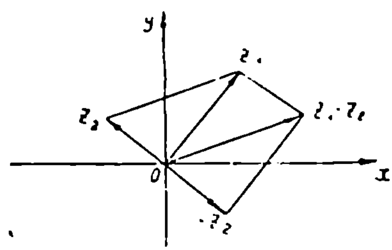
კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული ინტერპრეტაციიდან გამომდინარეობს:

1. ორი z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვის ჯამს გეომეტრიულად შეესაბამება ამ რიცხვების შესაბამისი ვექტორების ჯამი (ნახ. 4ა).

2. მანძილი z_1 და z_2 რიცხვებს შორის ტოლია $|z_1 - z_2|$-ის (ნახ. 4ბ).



ნახ. 4 ა



ნახ. 4 ბ

3. მე-4ა და მე-4ბ ნახაზებიდან ჩანს, როგორიც არ უნდა იყოს z_1 და z_2 კომპლექსური რიცხვები, ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geqslant \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|.$$

მართლაც, ეს უტოლობები გამომდინარეობს, შესაბამისად იქიდან, რომ სამკუთხედის ყოველი გვერდი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე და მეტია, ვიდრე მათი სხვაობა.

3. კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი და ტრიგონომეტრიული ფორმა

თუ (8.5) ტოლობიდან x-ისა და y-ის მნიშვნელობებს შევიტანთ z კომპლექსური რიცხვის ალგებრულ ფორმაში, მივიღებთ:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{8.7}$$

$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ გამოსახულებას ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული ფორმა.

გამოვთვალოთ ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ და $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი და განაყოფი:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{8.8}$$

თუ $z_2 \neq 0$, მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \times$$
$$\times \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{8.9}$$

(8.8) და (8.9) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

სადაც

$$\operatorname{Arg} z_1 \pm \operatorname{Arg} z_2 = \{\varphi_1 \pm \varphi_2 : \varphi_1 \in \operatorname{Arg} z_1,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\left.\begin{aligned} |z_1\cdot z_2\cdots z_n| &= |z_1|\cdot|z_2|\cdots|z_n|, \\ \mathrm{Arg}\,(z_1\cdot z_2\cdots z_n) &= \mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2+\cdots+\mathrm{Arg}\,z_n. \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

კერძოდ, თუ $z_1=z_2=\cdots=z_n$, მაშინ (8.10) ტოლობებიდან მიიღება

$$|z^n|=|z|^n;\ \mathrm{Arg}\,z^n=n\arg z+2k\pi,\ k=0;\ \pm1,\ \pm2\cdots,^{*} \tag{8.11}$$

თუ z კომპლექსური რიცხვი მოცემულია ტრიგონომეტრიული ფორმით, მაშინ (8.11) ტოლობები ნიშნავს, რომ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \tag{8.12}$$

(8.12) ფორმულის გამოყენებით ადვილად მიიღება, რომ

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-n}=r^{-n}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi),$$

ე. ი. (8.12) ფორმულა მართებულია ნებისმიერი მთელი n-ისათვის.

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვი რომ ავახარისხოთ მთელ ხარისხში, საჭიროა მოდული ავახარისხოთ ამ ხარისხში, ხოლო არგუმენტი გავამრავლოთ ხარისხის მაჩვენებელზე.

(8.12.) ფორმულას ეწოდება მუავრის** ფორმულა.

თუ $|z|=1$ და $\varphi=\arg z$, მაშინ (8.7) ფორმულის თანახმად გვაქვს $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. კომპლექსური რიცხვი $\cos\varphi+i\sin\varphi$ აღინიშნება $e^{i\varphi}$ სიმბოლოთი, ე. ი. ნებისმიერი ნამდვილი φ რიცხვისათვის

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \tag{8.13}$$

ამ ფორმულას ეილერის*** ფორმულა ეწოდება ((8.13) აღნიშვნის გამართლება ნაჩვენები იქნება ხარისხოვან მწკრივთა თეორიაში). (8.9) და (8.12) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $e^{i\varphi}$ ფუნქციას აქვს ჩვეულებრივი მაჩვენებლიანი ფუნქციის შემდეგი თვისებები:

1. $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

2. $\dfrac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3. $(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi},\quad n=0,\ \pm1\ldots$.

---

* შევნიშნოთ. რომ $\mathrm{Arg}z^n\neq n\,\mathrm{Arg}z$, $n=2,\ 3,\ \ldots$, სადაც $n\mathrm{Arg}\,z=\{n\varphi:\varphi\in\mathrm{Arg}z\}$.

** ე. მუავრი (1667-1754) — ფრანგი მათემატიკოსი.

*** ლ. ეილერი (1707-1783) — მათემატიკოსი, ფიზიკოსი, მექანიკოსი და ასტრონომი. რუსეთის აკადემიის აკადემიკოსი. წარმოშობით შვეიცარიელი.

(8.7) და (8.13) ფორმულების ძალით ნებისმიერი $z=0$ კომპლექ-სური რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$z = r e^{i\varphi} \tag{8.14}$$

სახით, სადაც $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. კომპლექსური რიცხვის ჩანაწერს (8.14) სახით ეწოდება კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი ფორმა.

4. ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან

n-ური ხარისხის ფესვი z კომპლექსური რიცხვიდან, $n\in N$, ეწო-დება W კომპლექსურ რიცხვს, რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობას

$$W^n = z. \tag{8.15}$$

n-ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებული z კომპლექსუ-რი რიცხვიდან ყოველთვის არსებობს და აქვს n სხვადასხვა მნიშვნე-ლობა. ეს მნიშვნელობები მიიღება ფორმულიდან

$$W_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

სადაც

$$k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n-1;\ r=|z|,\ \varphi=\arg z.$$

მართლაც, ვთქვათ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ და $W = \rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, მაშინ გვაქვს:

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

აქედან მუავრის ფორმულის თანახმად

$$\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

რადგან ორი ტოლი კომპლექსური რიცხვის მოდულები ტოლია, ხოლო არგუმენტები შეიძლება განსხვავდებოდნენ 2π-ს ჯერადით, ამიტომ $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$, $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$.

აქედან

$$\rho = \sqrt[n]{r},\quad \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots .$$

ამრიგად, კომპლექსური რიცხვები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ

(8.15) ტოლობას, არსებობს და ისინი შეიძლება ჩაწერონ შემდეგი სახით:

$$W = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (8.16)$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots .$$

(8.16) ტოლობა განსაზღვრავს კომპლექსურ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობას. ადვილია შემოწმება, რომ ამ უსასრულო რაოდენობათა შორის ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ n, ამასთან ყველა ის მიიღება (8.16) ტოლობიდან, თუ k-ს მივცემთ მიმდევრობით n მნიშვნელობას, მაგალითად, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

მაშასადამე, n-ური ხარისხის ფესვი ნულისაგან განსხვავებული z კომპლექსური რიცხვიდან ყოველთვის არსებობს და აქვს n სხვადასხვა მნიშვნელობა. ყველა ეს რიცხვი ძევს წრეწირზე, რომლის ცენტრია კოორდინატთა სათავე და რადიუსი უდრის $\sqrt[n]{|z|}$-ს. ისინი ამ წრეწირს ყოფენ n ტოლ ნაწილად.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ სიმრავლის ელემენტები, ქვესიმრავლე, ცარიელი სიმრავლე.
2. განსაზღვრეთ სიმრავლეთა ტოლობა, გაერთიანება, თანაკვეთა და სხვაობა.
3. როგორ რიცხვებს ეწოდებათ ირაციონალური?
4. ჩამოაყალიბეთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის დალაგებულობისა და უწყვეტობის თვისებები.
5. განსაზღვრეთ რიცხვითი შუალედები და წერტილის მიდამო.
6. განსაზღვრეთ ნამდვილი რიცხვის აბსოლუტური სიდიდე და ჩამოაყალიბეთ მისი თვისებები.
7. განსაზღვრეთ სიმრავლეთა შორის ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.
8. როგორ სიმრავლეებს ეწოდებათ ექვივალენტური?
9. განსაზღვრეთ სასრული და უსასრულო სიმრავლეები.
10. განსაზღვრეთ თვლადი და არათვლადი სიმრავლეები.
11. როგორ სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული?
12. განსაზღვრეთ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვარი.
13. განსაზღვრეთ კომპლექსური რიცხვი, შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი, მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე.
14. განსაზღვრეთ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი.
15. მოიყვანეთ კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია.
16. მოიყვანეთ კომპლექსური რიცხვის მაჩვენებლიანი და კომპლექსური ფორმა.
17. განსაზღვრეთ ფესვი კომპლექსური რიცხვიდან.
18. მოიყვანეთ კომპლექსური რიცხვიდან n-ური ხარისხის ფესვის გამოსათვლელი ფორმულა.

მეორე თავი

მიმდევრობები

§ 1. მიმდევრობის ცნება

თუ რაიმე წესით ყოველ ნატურალურ n რიცხვს შეესაბამება x_n ნამდვილი რიცხვი, მაშინ ვიტყვით, რომ მოცემულია რიცხვითი მიმდევრობა

$$x_1,\ x_2, \dots, x_n, \dots .$$

x_1-ს ეწოდება მიმდევრობის პირველი წევრი, x_2-ს — მიმდევრობის მეორე წევრი და ა. შ. x_n-ს მიმდევრობის n-ური ან ზოგადი წევრი ეწოდება. მიმდევრობას, რომლის ზოგადი წევრია x_n, მოკლედ $\{x_n\}$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ*.

შევნიშნოთ, რომ იმ შემთხვევაშიც კი, როდესაც $x_n = x_m$, $n \neq m$ ეს რიცხვები ითვლებიან მიმდევრობის განსხვავებულ წევრებად.

მიმდევრობის მოცემის ბუნებრივი წესია ანალიზური წესი, რომელიც გვიჩვენებს თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ n-ზე, რომ მივიღოთ მიმდევრობის x_n წევრი.

მიმდევრობა აგრეთვე შეიძლება მოცემული იყოს რეკურენტული დამოკიდებულებით. ეს წესი იმაში მდგომარეობს, რომ მიმდევრობის ყოველი წევრი, რამოდენიმე საწყისი წევრის გარდა, რომლებიც თავიდანვეა მოცემული, მიიღება მის წინ მდგომ წევრებზე გარკვეული მოქმედებების ჩატარებით. განვიხილოთ მიმდევრობის რამოდენიმე მაგალითი.

1. მიმდევრობა, რომლის ზოგადი წევრია $x_n = \dfrac{1}{n}$, არის შემდეგი მიმდევრობა

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots .$$

2. დავწეროთ მიმდევრობა, თუ მისი ზოგადი წევრია $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.

ცხადია, რომ

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = \frac{3}{4}, \dots .$$

---

* ზოგჯერ გამოვიყენებთ გამოთქმას „ x_n მიმდევრობა".

3. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ ტოლობა განსაზღვრავს შემდეგ მიმდევრობას:

$$0,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots, \frac{1+(-1)^n}{2}, \ldots.$$

4. თუ მიმდევრობის ზოგადი წევრი მოცემულია ფორმულით $x_n = aq^{n-1}$ $(a \neq 0,\ q \neq 0)$, მაშინ

$$x_1 = a,\ x_2 = aq,\ x_3 = aq^2, \ldots,$$

მას გეომეტრიული პროგრესია ეწოდება.

5. თუ $x_n = \cos n\pi$, მაშინ გვექნება მიმდევრობა $-1, 1, -1, \cdots (-1)^n, \ldots$.

6. ვთქვათ $a_1 = 3$ და $a_{n+1} = a_n + 2$; ცხადია, რომ

$$a_2 = 5, \quad a_3 = 7, \quad a_4 = 9, \ldots .$$

ეს მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით.

თუ $x_n = a$, $\forall n \in N$, მაშინ მიმდევრობას ეწოდება მუდმივი.

განსაზღვრება 1.1. რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზემოდან შემოსაზღვრული, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომელიც მიმდევრობის ყოველ წევრზე მეტია, ხოლო ქვემოდან შემოსაზღვრული — თუ მოიძებნება ისეთი L რიცხვი, რომელიც ნაკლებია მოცემული მიმდევრობის ყოველ წევრზე.

თუ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია როგორც ზემოდან, ისე ქვემოდან, მას შემოსაზღვრული მიმდევრობა ეწოდება.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში 1, 2, 3, 5 მიმდევრობები შემოსაზღვრულია. მე-6 მიმდევრობა შემოსაზღვრულია ქვემოდან. მე-4 მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, თუ $|q| \leqslant 1$. (4) მიმდევრობა ქვემოდან (ზემოდან) შემოსაზღვრულია, თუ $a > 0$ $(a < 0)$ და $q > 1$. თუ $q < -1$, მაშინ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული.

განსაზღვრება 1.2. $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება არაკლებადი, თუ $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$ და არაზრდადი, თუ $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots$.

განსაზღვრება 1.3. $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$ და კლებადი, თუ $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > \cdots$.*

არაზრდად და არაკლებად მიმდევრობებს მონოტონური მიმდევრობები ეწოდება.

* ცხადია ზრდადი (კლებადი) მიმდევრობა არაკლებადია (არაზრდადია).

განსაზღვრება 2.1. a რიცხვს ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი (ε-ზე დამოკიდებული) რიცხვი $n_0=n_0(\varepsilon)$, რომ ყოველი ნატურალური $n>n_0(\varepsilon)$-ისათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|x_n-a|<\varepsilon. \tag{2.1}$$

ის ფაქტი, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი a რიცხვია, ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,$$

ან შემოკლებით $\lim x_n=a$, ან კიდევ $x_n\to a$.

ზღვრის განსაზღვრება ლოგიკური სიმბოლოების გამოყენებით შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\,(\exists\, n_0(\varepsilon)\in R)\,(\forall n>n_0(\varepsilon)):|x_n-a|<\varepsilon.$$

თუ $x_n=a$, $\forall n\in N$, მაშინ ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

(2.1) უტოლობა ტოლფასია შემდეგი

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

ორმაგი უტოლობის, რაც ნიშნავს იმას, რომ x_n ეკუთვნის a წერტილის ε მიდამოს, ე. ი. $x_n\in u(a,\varepsilon)$.

ამრიგად, ის ფაქტი, რომ a რიცხვი არის $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ a რიცხვის ნებისმიერ ε მიდამოში მოთავსებულია $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა სასრული რაოდენობა წევრებისა.

მიმდევრობას, რომელსაც ზღვარი გააჩნია, ეწოდება კრებადი. წინააღმდეგ შემთხვევაში მიმდევრობას განშლადი ეწოდება.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

მართლაც, ვთქვათ $\varepsilon>0$ ნებისმიერი რიცხვია. განვიხილოთ უტოლობა $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$. აქედან $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ ანუ $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. მაშასადამე, თუ ავიღებთ $n_0(\varepsilon)=\dfrac{1}{\varepsilon}$, მაშინ $\left|\dfrac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ უტოლობა შესრულდება

ყოველი n-ისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $n > n_0(\varepsilon)$, ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

მაგალითი 2. თუ $|q| < 1$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0. \tag{2.2}$$

მართლაც, თუ $q=0$ (2.2) ცხადია. ვთქვათ, $0 < |q| < 1$, მაშინ

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon. \tag{2.3}$$

ამ უტოლობიდან გვაქვს

$$n \lg |q| < \lg \varepsilon.$$

საიდანაც

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} = n_0(\varepsilon),$$

ე. ი. თუ $n > n_0(\varepsilon)$, ადგილი აქვს (2.3) უტოლობას.

მაგალითი 3. ვაჩვენოთ, რომ $\{(-1)^n\}$ მიმდევრობა განშლადია.

მოცემულ მიმდევრობას აქვს სახე

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1, \cdots, (-1)^n, \cdots.$$

დავუშვათ, რომ ამ მიმდევრობის ზღვარია a რიცხვი. განვიხილოთ a რიცხვის $\left]a-\frac{1}{2},\ a+\frac{1}{2}\right[$ მიდამო, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია. ამ მიდამოში ერთდროულად ვერ მოხვდება -1 და 1 რიცხვები (მოცემული მიმდევრობის წევრები), რადგან მათ შორის მანძილი 2-ის ტოლია. ამრიგად, როგორიც არ უნდა იყოს n რიცხვი, აღებული მიდამოს გარეთ დარჩება მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა, ე. ი. მიმდევრობა განშლადია.

მაგალითი 4. ვთქვათ დადებითი a რიცხვი წარმოდგენილია უსასრულო ათწილადით:

$$a = a_0,\ a_1 a_2 \cdots a_n \cdots.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x_n = a_0,\ a_1 a_2 \cdots a_n.$$

ცხადია, რომ ყოველი $n \in N$-სათვის x_n რაციონალური რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \tag{2.4}$$

მართლაც

$$|a - x_n| = 0,\underbrace{0\,0 \cdots 0}_{n\text{-ჯერ}}\,a_{n+1}\,a_{n+2} \cdots \leqslant 10^{-n}.$$

აქედან ჩანს, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $\varepsilon > 0$ რიცხვი, $10^{-n} < \varepsilon$, თუ $n > n_0 = -\lg \varepsilon$. ე. ი. მართებულია (2.4) ტოლობა.

ანალოგიური მსჯელობა ჩატარდება, თუ $a < 0$.

ამრიგად, ყოველი ნამდვილი რიცხვი წარმოადგენს რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარს, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყოველ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს ერთი მაინც რაციონალური რიცხვი. ამ თვისების გამო ამბობენ, რომ რაციონალურ რიცხვთა Q სიმრავლე ყველგან მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეში.

§ 3. ზოგიერთი თეორემა მიმდევრობის ზღვრის შესახებ

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. თუ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, მაშინ ის ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a და b რიცხვებისაკენ, მაშინ ზღვრის განსაზღვრების თანახმად ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0' და n_0'' რიცხვები, რომ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.1}$$

როდესაც $n > n_0'$ და

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.2}$$

როცა $n > n_0''$. ცხადია, რომ თუ $n > \max\{n_0', n_0''\}$, მაშინ (3.1) და (3.2) უტოლობებს ერთდროულად ექნებათ ადგილი. ამიტომ, თუ $n > \max\{n_0', n_0''\}$, მივიღებთ:

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

მივიღეთ, რომ არაუარყოფითი $|a - b|$ რიცხვი ნაკლებია ნებისმიერ $\varepsilon > 0$ რიცხვზე. ეს კი შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $|a - b| = 0$. ე. ი. $a = b$. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის მიმდევრობის ყველა წევრი, გარდა შესაძლებელია მათი სასრული რაოდენობისა, მოხვდება a წერტილის ε მიდამოში. ამრიგად, $]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[$ ინტერვალის გარეთ შეიძლება აღმოჩნდეს მიმდევრობის წევრთა მხოლოდ სასრული რაოდენობა. ამიტომ არსებობს ორი m და M რიცხვი, ისეთი, რომ $[m;\ M]$ მონაკვეთი მიმდევრობის ყველა წევრს შეიცავს. ე. ი. ყოველი $n\in N$-ისათვის, $m\leqslant x_n\leqslant M$, რაც ნიშნავს, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა წარმოადგენს მიმდევრობის კრებადობის აუცილებელ პირობას. შევნიშნოთ, რომ, მიმდევრობის შემოსაზღვრულობა არ არის მიმდევრობის კრებადობის საკმარისი პირობა. მაგალითად, $\{(-1)^n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაგრამ როგორც ზემოთ ვნახეთ, ის არ არის კრებადი.

თ ე ო რ ე მ ა 3.3. თუ $\lim x_n=a$ და $\lim y_n=b$, მაშინ:

1) $\lim (x_n+y_n)=a+b$,

2) $\lim x_n y_n = ab$,

3) $\lim \dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$, თუ $y_n\neq 0$ $(n\in N)$ და $b\neq 0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1) ვთქვათ, $\varepsilon>0$. ვინაიდან $x_n\to a$ და $y_n\to b$, არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ თუ $n>n_0$, მაშინ $|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ და $|y_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. ამიტომ

$$|(x_n+y_n)-(a+b)|\leqslant|x_n-a|+|y_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

ე. ი. $(x_n+y_n)\to a+b$.

2) შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}|x_n y_n-ab|&=|(x_n y_n-ay_n)+(ay_n-ab)|\leqslant\\&\leqslant|y_n||x_n-a|+|a||y_n-b|.\end{aligned}\qquad(3.3)$$

რადგან $\{y_n\}$ მიმდევრობას ზღვარი აქვს, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია. ე. ი. არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ $|y_n|<M$. ცხადია, M რიცხვი ისე შეგვიძლია შევარჩიოთ, რომ $|a|\leqslant M$. ზღვრის განსაზღვრის ძალით, ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი,

რომ თუ $n > n_0$, მაშინ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ და $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

ამიტომ (3.3)-დან, თუ $n > n_0$, მივიღებთ:

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,$$

ე. ი. $x_n y_n \to ab$.

3) ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$. ზღვრის განსაზღვრების ძალით $\frac{|b|}{2}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0' რიცხვი, რომ $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$, თუ $n > n_0'$. აქედან როცა $n > n_0'$, გვაქვს:

$$|y_n| = |b + (y_n - b)| \geqslant |b| - |y_n - b| \geqslant |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}. \qquad (3.4)$$

ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0'' რიცხვი, რომ

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{2}, \qquad (3.5)$$

როცა $n > n_0''$.

ვთქვათ $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, მაშინ (3.4) და (3.5)-ის ძალით გვაქვს:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - y_n|}{|y_n| \cdot |b|} < \frac{\varepsilon b^2}{2} \cdot \frac{2}{|b|} \cdot \frac{1}{|b|} = \varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}$.

ამ ტოლობისა და 2)-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \to \infty} x_n \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{y_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. მუდმივი მამრავლი შეიძლება ზღვრის ნიშნის გარეთ გავიტანოთ. ე. ი. თუ $\{x_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა, მაშინ:

$$\lim_{n \to \infty} (c x_n) = c \cdot \lim_{n \to \infty} x_n.$$

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ კრებადი მიმდევრობებია, მაშინ:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \to \infty} x_n - \lim_{n \to \infty} y_n.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.4. თუ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ კრებადი მიმდევრობებია და $x_n \leqslant y_n$, მაშინ:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. დავუშვათ, რომ $a > b$. $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობის კრებადობის ძალით $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ $a - \varepsilon < x_n$ და $y_n < b + \varepsilon$, როცა $n > n_0$. აქედან:

$$y_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < x_n.$$

ე. ი. $y_n < x_n$, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას. ამრიგად $a \leqslant b$, ანუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ $\{x_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა და $x_n \leqslant a$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant a.$$

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $\{x_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა და $x_n \in [a; b]$ $(n \in N)$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in [a; b].$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\{x_n\}$ კრებადი მიმდევრობაა და $x_n < a$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < a$. მართლაც, $x_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$ ყოველი $n \in N$-ისათვის, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

თ ე ო რ ე მ ა 3.5. თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $x_n \to a$, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ $|x_n - a| < \varepsilon$, როცა $n > n_0$. აქედან, რადგან $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$, ვღებულობთ:

$$||x_n| - |a|| < \varepsilon,$$

როცა $n > n_0$. ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.5-ის შებრუნებული საზოგადოდ სამართლიანი არ არის. მართლაც, თუ $x_n = (-1)^n$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 1$, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ არ არსებობს.

თ ე ო რ ე მ ა 3.6. თუ $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ისეთი n_0 რიცხვი, რომ:

$$a - \varepsilon < x_n \quad \text{და} \quad y_n < a + \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > n_0.$$

აქედან პირობის ძალით, თუ $n > n_0$, გვაქვს:

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon,$$

ანუ

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 4. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.1. $\{\alpha_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა ან უსასრულოდ მცირე, თუ მისი ზღვარი ნულის ტოლია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. იმისათვის, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი იყოს a რიცხვი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $x_n = a + \alpha_n$, სადაც $\{\alpha_n\}$ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. მართლაც, თუ $x_n = a + \alpha_n$, მაშინ თეორემა 3.3.-ის ძალით გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a + \alpha_n) = \lim_{n\to\infty} a + \lim_{n\to\infty} \alpha_n = a + 0 = a.$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ $\lim x_n = a$. განვიხილოთ $\{\alpha_n\}$ მიმდევრობა, სადაც $\alpha_n = x_n - a$. $\{\alpha_n\}$ არის უსასრულოდ მცირე, რადგან

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} (x_n - a) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} a = a - a = 0.$$

ე. ი. $x_n = a + \alpha_n$, სადაც $\{\alpha_n\}$ არის უსასრულოდ მცირე. თეორემა დამტკიცებულია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.2. $\{\beta_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი, თუ $\forall M > 0$ რიცხვისათვის მოიძებ-

ნება ისეთი n_0 რიცხვი, რომ ყოველი $n>n_0$-ისათვის ადგილი აქვს უტოლობას $\beta_n > M$ $(\beta_n < -M)$.

ის ფაქტი, რომ $\{\beta_n\}$ დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} \beta_n = -\infty) \ \text{ან} \ \beta_n \to +\infty \ (\beta_n \to -\infty).$$

თუ $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = -\infty)$ ამბობენ, რომ $\{\beta_n\}$ მიმდევრობა მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. $\{x_n\}$ მიმდევრობას, რომლისთვისაც $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, უწოდებენ უსასრულოდ დიდს და წერენ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

მიმდევრობა შეიძლება იყოს უსასრულოდ დიდი, მაგრამ არ წარმოადგენდეს არც დადებით უსასრულოდ დიდსა და არც უარყოფით უსასრულოდ დიდ მიმდევრობას. ასეთია მაგალითად $\{(-1)^n \cdot n\}$ მიმდევრობა.

ცხადია, რომ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაგრამ საზოგადოდ ყოველი არაშემოსაზღვრული მიმდევრობა უსასრულოდ დიდი არ არის. მაგალითად $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, \ldots, \ldots, n, \frac{1}{n+1}, \ldots$ მიმდევრობა არ არის შემოსაზღვრული, მაგრამ იგი უსასრულოდ დიდ მიმდევრობას არ წარმოადგენს.

თ ე ო რ ე მ ა 4.2. თუ $\{x_n\}$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, ხოლო $\{y_n\}$ უსასრულოდ დიდია $(y_n \neq 0)$, მაშინ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ უსასრულოდ მცირეა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ M არის ისეთი რიცხვი, რომ $|x_n| < M$, $n \in N$. რადგან $\{y_n\}$ უსასრულოდ დიდია, ამიტომ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი n_0, რომ თუ $n > n_0$, მაშინ $|y_n| > \frac{M}{\varepsilon}$, ანუ $\frac{1}{|y_n|} < \frac{\varepsilon}{M}$. ამრიგად, როცა $n > n_0$, გვექნება:

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - 0 \right| = \left| \frac{x_n}{y_n} \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $\{y_n\}$ უსასრულოდ დიდი მიმდევრობაა, მაშინ $\left\{\frac{c}{y_n}\right\}$ უსასრულოდ მცირეა.

თ ე ო რ ე მ ა 4.3. თუ $\{y_n\}$ უსასრულოდ მცირეა ($y_n \neq 0$), ხოლო $\{x_n\}$ არის ისეთი მიმდევრობა, რომ $0 < a < |x_n|$, მაშინ $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ უსასრულოდ დიდია.

თეორემა 4.3. მტკიცდება თეორემა 4.2-ის ანალოგიურად.

შ ე დ ე გ ი. თუ $\{y_n\}$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა ($y_n \neq 0$), მაშინ $\left\{\frac{c}{y_n}\right\}$ უსასრულოდ დიდია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 4.3. ვიტყვით, რომ:

ა) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ მიმდევრობა ($y_n \neq 0$) წარმოადგენს $\left(\frac{0}{0}\right)$ სახის განუზღვრელობას, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

ბ) $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ მიმდევრობა ($y_n \neq 0$) წარმოადგენს $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ სახის განუზღვრელობას, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

გ) $\{x_n y_n\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს $(0 \cdot \infty)$ სახის განუზღვრელობას, თუ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

დ) $\{x_n + y_n\}$ მიმდევრობა წარმოადგენს $(\infty - \infty)$ სახის განუზღვრელობას, თუ $\lim\limits_{u\to\infty} x_n = +\infty$ და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

როგორი სახის განუზღვრელობასაც არ უნდა წარმოადგენდეს მიმდევრობა, რაიმე გარკვეულის თქმა მისი ზღვრის შესახებ, დამატებითი გამოკვლევის გარეშე, არ შეიძლება. მართლაც განვიხილოთ $\left(\frac{0}{0}\right)$ სახის განუზღვრელობის რამდენიმე მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ $x_n = \frac{1}{n}$ და $y_n = \frac{1}{n^2}$, მაშინ $\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ $x_n = \frac{1}{n^2}$ და $y_n = \frac{1}{n}$, მაშინ $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$.

მაგალითი 3. ვთქვათ $x_n = \frac{c}{n}$ და $y_n = \frac{1}{n}$, მაშინ $\frac{x_n}{y_n} = c \to c$.

მაგალითი 4. ვთქვათ $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ და $y_n = \frac{1}{n}$, მაშინ $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ მიმდევრობას ზღვარი არ გააჩნია.

ანალოგიური მაგალითები შეიძლება მოვიყვანოთ სხვა სახის განუზღვრელობისთვისაც.

გავხსნათ განუზღვრელობა — ნიშნავს მოვძებნოთ მოცემული მიმდევრობის ზღვარი (თუ არსებობს), რისთვისაც ყოველ კონკრეტულ შემთხვევაში საჭიროა სპეციალური გამოკვლევის ჩატარება.

§ 5. მონოტონური მიმდევრობის კრებადობა

თეორემა 5.1. მონოტონური შემოსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ $\{x_n\}$ არაკლებადი და ზემოდან შემოსაზღვრული მიმდევრობაა. მაშინ ამ მიმდევრობის ელემენტთა სიმრავლე იქნება ზემოდან შემოსაზღვრული, ამიტომ პირველი თავის თეორემა 7.1-ის ძალით მას გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი. აღვნიშნოთ იგი x-ით. ცხადია, რომ $x_n \leqslant x$ ნებისმიერი $n \in N$-ისათვის.

ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის ზუსტი ზედა საზღვრის თვისების ძალით მოიძებნება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ერთი მაინც წევრი x_{n_0} ისეთი, რომ:

$$x - \varepsilon < x_{n_0}.$$

რადგან $\{x_n\}$ არაკლებადი მიმდევრობაა, ამიტომ $x_{n_0} \leqslant x_n$, თუ $n > n_0$. აქედან გამომდინარე ყოველი $n > n_0$ რიცხვისათვის გვექნება: $x - \varepsilon < x_n$. ამრიგად, თუ $n > n_0$, მაშინ

$$x - \varepsilon < x_n < x,$$

ანუ

$$|x_n - x| < \varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, სადაც $x = \sup\{x_n\}$.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა არაზრდადია და ქვემოდან შემოსაზღვრულია, მაშინ მას ზღვარი გააჩნია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა მონოტონური მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ ასეც შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: იმისათვის, რომ მონოტონური მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ იგი იყოს შემოსაზღვრული (აუცილებლობა გამომდინარეობს თეორემა 3.2-დან).

ცხადია, რომ ყოველი კრებადი მიმდევრობა არ არის აუცილებელი იყოს მონოტონური. მაგალითად $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \ldots$ მიმდევრობა კრებადია ნულისაკენ, მაგრამ არ არის მონოტონური.

შევნიშნოთ, რომ არაკლებადი შემოსაზღვრული მიმდევრობის წევრები არ აღემატებიან მის ზღვარს, ხოლო არაზრდადი შემოსაზღვრული მიმდევრობის წევრები არ არიან ნაკლები მის ზღვარზე.

თუ არაკლებადი (არაზრდადი) $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრული არ არის, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

განსაზღვრება 5.1. სეგმენტთა $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ მიმდევრობას ეწოდება ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა, თუ ყოველი მომდევნო სეგმენტი შედის წინაში, ე. ი. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$.

თეორემა 5.2. თუ $\{[a_n, b_n]\}$ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობაა და $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ $(n \in N)$ სეგმენტს.

დამტკიცება. პირობის ძალით $\forall m \in N$, გვაქვს

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant b_m.$$

ამრიგად, რიცხვთა $\{a_n\}$ მიმდევრობა არაკლებადია და ზემოდან შემოსაზღვრული. ამიტომ თეორემა 5.1-ის ძალით $\{a_n\}$ კრებადია. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. ცხადია, რომ $a_n \leqslant c \leqslant b_m$ ყოველი n, $m \in N$ რიცხვებისათვის. კერძოდ, თუ $n = m$, მივიღებთ $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, ე. ი. $c \in [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2 \cdots)$.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ c ერთადერთი წერტილია, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს. მართლაც, თუ არსებობს $c_1 \neq c$ წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_n, b_n]$ სეგმენტს, მაშინ:

$$b_n - a_n \geqslant |c_1 - c| > 0.$$

აქედან $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) > 0$, რაც ეწინააღმდეგება თეორემის პირობას, ე. ი. $c_1 = c$. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 5.2-ში არსებითია, რომ განიხილება სეგმენტთა მიმდევრობა. მართლაც ინტერვალთა $\left\{\left]0, \frac{1}{n}\right[\right\}$ მიმდევრობა ჩალაგებულია, მაგრამ არ არსებობს ისეთი წერტილი, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის მოცემული მიმდევრობის ყველა ინტერვალს.

§ 6. ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ზღვარი

1. *e* რიცხვი. განვიხილოთ $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ მიმდევრობა. ვაჩვენოთ, რომ ეს მიმდევრობა კრებადია.

როგორც ცნობილია $a_1, a_2, \dots, a_n$ არაუარყოფითი რიცხვებისათვის მართებულია

$$\sqrt[n]{a_1\, a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \, ^{*} \tag{6.1}$$

უტოლობა (დამოკიდებულება საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის).

თუ $a_1=a_2=\cdots=a_n=1+\frac{1}{n}$ და $a_{n+1}=1$, მაშინ (6.1) უტოლობის თანახმად გვექნება;

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1},$$

საიდანაც

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

ე. ი. $x_n < x_{n+1}$. მაშასადამე x_n მიმდევრობა ზრდადია.

თუ $a_1=a_2=\cdots=a_n=1+\frac{1}{n}$ და $a_{n+1}=a_{n+2}=\frac{1}{2}$, მაშინ (6.1) უტოლობის თანახმად გვექნება

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+1+1}{n+2} = 1,$$

* ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როცა $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

საიდანაც

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

ე. ი. ნებისმიერი $n\in N$-სათვის $x_n < 4$, რაც იმას ნიშნავს, რომ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

ამრიგად, x_n მიმდევრობა ზრდადია და შემოსაზღვრული, ამიტომ თეორემა 5.1-ის ძალით იგი კრებადია. ამ მიმდევრობის ზღვარი e ასოთი აღინიშნება. ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

მტკიცდება, რომ e ირაციონალური რიცხვია და მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა $e\approx 2{,}718281$.

მათემატიკის ზოგიერთი საკითხის განხილვისას მოხერხებულია ვისარგებლოთ ლოგარითმებით, რომელთა ფუძე e რიცხვია. a რიცხვის ლოგარითმს e ფუძით ნატურალური ლოგარითმი ეწოდება და $\ln a$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

2. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$, თუ $q > 1$. წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი უტოლობა:

$$(1+a)^n > 1+na,\ a > -1,\ a\neq 0,\ n\in N. \tag{6.2}$$

დამტკიცება ჩავატაროთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. როცა $n=2$, მაშინ:

$$(1+a)^2 = 1+2a+a^2 \geqslant 1+2a.$$

ე. ი. უტოლობა მართებულია. დავუშვათ (6.2)-ის მართებულობა $n=k$-სათვის. მაშინ, თუ $n=k+1$, გვექნება:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \geqslant (1+ka)(1+a) > 1+(k+1)a.$$

უტოლობა დამტკიცებულია. (6.2) უტოლობას ბერნულის* უტოლობა ეწოდება.

ვინაიდან $q>1$, ამიტომ $q=1+\alpha$, სადაც $\alpha>0$. (6.2) უტოლობის ძალით:

$$q^n = (1+\alpha)^n > 1+n\alpha > n\alpha.$$

აქედან ცხადია, რომ

$$\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty.$$

---

* ი. ბერნული (1654—1705) — შვეიცარიელი მათემატიკოსი.

3. ვთქვათ $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, $|q| < 1$. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{1-q}$.

გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

რადგან $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, როცა $|q| < 1$, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}.$$

4. ვაჩვენოთ, რომ თუ $a > 1$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0. \tag{6.3}$$

მართლაც, თუ $k < 0$ (6.3)-ის მართებულობა ცხადია. ვთქვათ $0 < k < 1$. (6.2)-ის გამო:

$$a^n = [1 + (a-1)]^n > 1 + n(a-1) > n(a-1).$$

ამიტომ

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{n(a-1)} < \frac{1}{n^{1-k}(a-1)}. \qquad (6.4]$$

რადგან $k < 1$, ამიტომ თუ (6.4)-ში გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ (6.3)-ს.

ახლა ვთქვათ $k \geqslant 1$. შემოვიღოთ აღნიშვნა $a^{\frac{1}{2k}} = b$. ცხადია $b > 1$, ამიტომ უკვე დამტკიცებულის თანახმად:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{b^n} = 0.$$

ცხადია, ამ ტოლობის ძალით არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ თუ $n > n_0$, მაშინ $\frac{\sqrt{n}}{b^n} < 1$, ამიტომ თუ $n > n_0$, გვექნება, რომ $\left(\frac{\sqrt{n}}{b^n}\right)^{2k} < \frac{\sqrt{n}}{b^n}$ და მართებული იქნება შემდეგი შეფასება:

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{\sqrt{n}}{\left(a^{\frac{1}{2k}}\right)^n}\right]^{2k} = \left[\frac{\sqrt{n}}{b^n}\right]^{2k} < \frac{\sqrt{n}}{b^n}.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

(6.3) ტოლობა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $a > 1$, მაშინ:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty. \tag{6.5}$$

5. ნებისმიერი $a > 0$-ისათვის

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1. \tag{6.6}$$

თუ $a = 1$, მაშინ (6.6) ცხადია.

ვთქვათ $a > 1$. ბერნულის უტოლობის ძალით (უტოლობა 6.2) გვაქვს:

$$a = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

ამ უტოლობიდან $a > 1$ პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, თეორემა 3.6-ის ძალით გვექნება:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0,$$

ანუ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

თუ $0<a<1$, მაშინ $\frac{1}{a}>1$, ამიტომ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=1$. გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

(6.6) დამტკიცებულია.

6. თუ $a>0$ და $\{x_k\}$ არის რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ:

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,$$

მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}a^{x_k}=1.$$

თუ $a=1$, მაშინ (6.7) ცხადია. დავუშვათ, რომ $a>1$. რადგან $\{x_k\}$ მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ იგი შემოსაზღვრულია და შემოსაზღვრული იქნება $\{a^{x_k}\}$ მიმდევრობაც. ვთქვათ $a^{x_k}<M$ ($k=1, 2,\ldots$). ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვი. (6.6) ტოლობის ძალით არსებობს ისეთი ნატურალური n_0 რიცხვი, რომ უტოლობა

$$0<\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$$

შესრულდება ყოველთვის, როცა $n>n_0$.

რადგან $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$, ამიტომ მოიძებნება ისეთი ნატურალური k_0 რიცხვი, რომ როცა $k>k_0$, გვექნება

$$0\leqslant|x_k|<\frac{1}{n_0+1},$$

ამიტომ

$$0\leqslant a^{|x_k|}-1<a^{\frac{1}{n_0+1}}-1<\varepsilon,\ \ k>k_0.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ $x_k\geqslant 0$, მაშინ

$$0\leqslant a^{x_k}-1<\varepsilon\ \ (k>k_0),$$

ხოლო, თუ $x_k<0$, მაშინ

$$0<1-a^{x_k}<\varepsilon M\ (k>k_0).$$

ამრიგად, როცა $k>k_0$, მაშინ

$$|a^{x_k}-1|<\varepsilon\max\{1, M\}.$$

ე. ი.

$$\lim_{k\to\infty} a^{x_k}=1.$$

თუ $a<1$, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} a^{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{-x_k}=1.$$

7. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1. \tag{6.8}$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $n=4$-დან დაწყებული $\{\sqrt[n]{n}\}$ მიმდევრობა კლებადია. მართლაც, როგორც $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ მიმდევრობის ზღვრის გამოთვლისას ვაჩვენეთ:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4.$$

ამიტომ, თუ $n\geqslant 4$, მაშინ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$, ანუ $(n+1)^n<n^{n+1}$. აქედან კი ვღებულობთ $\sqrt[n+1]{n+1}<\sqrt[n]{n}$ ე. ი. $\{\sqrt[n]{n}\}$ მიმდევრობა $n=4$-დან დაწყებული კლებადია. ამასთანავე $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$ და თეორემა 5.1-ის ძალით $\{\sqrt[n]{n}\}$ მიმდევრობა იქნება კრებადი.

ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=a$. ცხადია, რომ თუ $n\geqslant 4$, მაშინ $1\leqslant a\leqslant\sqrt[n]{n}$, ანუ $\frac{a^n}{n}\leqslant 1$. ამ უტოლობის შესრულება კი ყოველი $n\geqslant 4$-სათვის, შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, თუ $a=1$. რადგან თუ $a>1$, მაშინ როგორც ვაჩვენეთ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n^k}=\infty$ და ამიტომ გარკვეული n_0 ნომრიდან დაწყებული მართებული იქნებოდა უტოლობა $\frac{a^n}{n}>1$, რაც, $\frac{a^n}{n}\leqslant 1$ უტოლობას ეწინააღმდეგება. ამრიგად $a=1$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

8. მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \tag{6.9}$$

სადაც a ნებისმიერი რიცხვია.

მართლაც, თუ $|a| \leqslant 1$, (6. 7)-ის მართებულობა ცხადია. ვთქვათ, $a > 1$. დავუშვათ

$$x_n = \frac{a^n}{n!},$$

მაშინ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ გარკვეული n_0 ნომრიდან დაწყებული $x_{n+1} < x_n$. ამრიგად n_0-დან დაწყებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა კლებადია. ამასთანავე იგი ქვემოდან შემოსაზღვრულია $(0 \leqslant x_n)$, ამიტომ მას ზღვარი გააჩნია. ვთქვათ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

მაშინ ცხადია, რომ

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n \cdot \frac{a}{n+1}\right) = A \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = A \cdot 0 = 0.$$

ამრიგად, როცა a არაუარყოფითი რიცხვია, (6.9) მართებულია, მაგრამ იგი მართებული იქნება მაშინაც, როდესაც $a > 0$, რადგან

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \to 0.$$

9. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა მოცემულია რეკურენტული წესით:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6.10}$$

სადაც x_1 და a წინასწარ მოცემული რაიმე დადებითი რიცხვებია. ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის ზღვარი.

ცხადია, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია, რადგან პირობის თანახმად $x_1 > 0$ და $a > 0$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $n \geqslant 2$, მაშინ $x_n \geqslant \sqrt{a}$. მართლაც, თუ (6.10)-ს გადავწერთ შემდეგი სახით:

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n}\right)$$

და გამოვიყენებთ უტოლობას $t+\dfrac{1}{t}\geqslant 2 \quad (t>0)$, მივიღებთ, რომ $x_{n+1}\geqslant\sqrt{a},\quad n=1,\ 2,\ldots.$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $n=2$-დან დაწყებული $\{x_n\}$ არაზრდადია. მართლაც

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right).$$

რადგან $x_n\geqslant\sqrt{a}$, თუ $n\geqslant 2$, ამიტომ $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{a}{a}\right)=1$, ანუ $x_{n+1}\leqslant x_n$.

ამრიგად, როცა $n\geqslant 2$, $\{x_n\}$ მიმდევრობა არაზრდადია და შემოსაზღვრული, ამიტომ თეორემა 5.1-ის ძალით მას ზღვარი გააჩნია. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. ცხადია $x\geqslant\sqrt{a}>0$.

გადავიდეთ ზღვარზე (6.10) ტოლობაში. გვექნება:

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right).$$

ამ განტოლების ერთადერთი დადებითი ამონახსენი არის $x=\sqrt{a}$. ამრიგად

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ (6.10) ფორმულა ფართოდ გამოიყენება თანამედროვე გამომთვლელ მანქანებში რიცხვიდან კვადრატული ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად.

10. ვთქვათ $x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}$, სადაც $a>0$ და ფესვთა საერთო რაოდენობა n-ის ტოლია. ცხადია, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია.

შევნიშნოთ, რომ მოცემული მიმდევრობა შეიძლება ჩაიწეროს რეკურენტულად

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n} \tag{6.11}$$

იმ პირობით რომ $x_1=\sqrt{a}$.

ვაჩვენოთ, რომ $\{x_n\}$ შემოსაზღვრულია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ $\forall M>0$ რიცხვისათვის იარსებებს ისეთი $n_0\in N$, რომ $x_{n_0}>M$. ამიტომ, რადგან $x_{n+1}=\sqrt{x_n+a}$, მივიღებთ:

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}=\sqrt{\frac{1}{x_{n_0}}+\frac{a}{x_{n_0}^2}}<\sqrt{\frac{1}{M}+\frac{a}{M^2}}.$$

თუ M საკმარისად დიდია, აქედან გვექნება

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}<1,$$

რაც $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზრდადობის ფაქტს ეწინააღმდეგება. ე. ი. $\{x_n\}$ შემოსაზღვრულია. ამრიგად $\{x_n\}$ მიმდევრობა ზრდადია და შემოსაზღვრული, ამიტომ ის კრებადია. ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$. ცხადია, რომ $x\geqslant 0$. ავიყვანოთ კვადრატში (6.11) ტოლობა, მივიღებთ:

$$x_{n+1}^2=x_n+a. \tag{6.12}$$

რადგან $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, ამიტომ თუ გადავალთ ზღვარზე (6.12) ტოლობაში, გვექნება $x^2=x+a$ ანუ $x^2-x-a=0$. ამ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი ამონახსენი:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>0 \quad \text{და} \quad x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0.$$

როგორც ზემოთ ვნახეთ საძებნი ზღვარი არაუარყოფითია, ამიტომ მოცემული მიმდევრობის ზღვარი იქნება:

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

11. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მიმდევრობა

$$y_n=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \quad n=1,\ 2,\dots,$$

აგრეთვე კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, მაშინ $\forall\, \varepsilon > 0$-სათვის $\exists\, n_0 \in N$ ისეთი, რომ

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n > n_0. \tag{6.13}$$

შემდეგ

$$y_n - a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} - n_0 a}{n} + \frac{(x_{n_0+1} - a) + \cdots + (x_n - a)}{n}. \tag{6.14}$$

ვინაიდან $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} - n_0 a$ სასრული რიცხვია, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} - n_0 a}{n} = 0.$$

გამომდინარე აქედან აღებული ε რიცხვისათვის $\exists m_0 \in N$ ისეთი, რომ

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} - n_0 a}{n} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა } n > m_0. \tag{6.15}$$

ვთქვათ $n_0' = \max(n_0, m_0)$, მაშინ (6.12), (6.13) და (6.14)-დან გვაქვს:

$$|y_n - a| \leqslant \left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} - n_0 a}{n}\right| + \frac{|x_{n_0+1} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია მაშინ $\{y_n\}$ მიმდევრობაც დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია.

12. ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

ვინაიდან

$$1 \cdot 2 \cdots n > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

ამიტომ

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt{\frac{n}{2}},$$

საიდანაც ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

§ 7. ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა*

ვთქვათ, მოცემულია რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა. განვიხილოთ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიმდევრობა:

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots.$$

ცხადია $n_k \geqslant k$.

მიმდევრობას

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$$

ეწოდება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა. ყოველი მიმდევრობიდან შეიძლება გამოიყოს უსასრულო სიმრავლე ქვემიმდევრობებისა.

ზღვრის (უსასრულოდ დიდის) განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. თუ მიმდევრობა კრებადია (უსასრულოდ დიდია), მაშინ მისი ყოველი ქვემიმდევრობა აგრეთვე კრებადია (უსასრულოდ დიდია) იმავე ზღვრისაკენ.

შ ე დ ე გ ი 1. დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობის ყოველი ქვემიმდევრობა აგრეთვე დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ მიმდევრობის ყველა ქვემიმდევრობა კრებადია, მაშინ ყველა ისინი კრებადია ერთი და იმავე ზღვრისაკენ (ამავე ზღვრისაკენ იკრიბება მოცემული მიმდევრობაც).

მართლაც, თვით მოცემული მიმდევრობა (როგორც ერთ-ერთი ქვემიმდევრობა) კრებადია რაღაც ზღვრისაკენ, ამიტომ თეორემა 7.1-ის ძალით მისი ნებისმიერი ქვემიმდევრობაც კრებადი იქნება იმავე ზღვრისაკენ.

შ ე დ ე გ ი 3. თუ მიმდევრობის ერთი მაინც ქვემიმდევრობა განშლადია, მაშინ მოცემული მიმდევრობაც განშლადია.

შ ე დ ე გ ი 4. თუ მიმდევრობის ორი მაინც ქვემიმდევრობა კრებადია სხვადასხვა ზღვრისაკენ, მაშინ მოცემული მიმდევრობა განშლადია.

---

* ბ. ბოლცანო (1781—1848) — ჩეხი მათემატიკოსი.
კ. ვაიერშტრასი (1815—1897) — გერმანელი მათემატიკოსი.

როგორც ვიცით, ყოველი კრებადი მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მიმდევრობის შემოსაზღვრულობიდან კი საზოგადოდ არ გამომდინარეობს მისი კრებადობა. თუმცა მართებულია შემდეგი.

თ ე ო რ ე მ ა 7.2 (ბოლცანო-ვაიერშტრასი) ყოველი შემოსაზღვრული მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. მაშინ არსებობს ისეთი $[a_1, b_1]$ სეგმენტი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის ყველა წევრს. გავყოთ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი შუაზე. მიღებული სეგმენტებიდან ერთი მაინც შეიცავს მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს. ეს სეგმენტი აღვნიშნოთ $[a_2, b_2]$-ით. $[a_2, b_2]$ სეგმენტი ისევ გავყოთ შუაზე და $[a_3, b_3]$-ით აღვნიშნოთ ის ნახევარი, რომელიც შეიცავს მიმდევრობის წევრთა უსასრულო სიმრავლეს და ა. შ. მივიღებთ ჩალაგებულ სეგმენტთა $\{[a_k, b_k]\}$ მიმდევრობას. ამასთან

$$b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k\cdot 1}} \to 0, \quad \text{როცა} \quad k \to \infty .$$

თეორემა 5.2-ის ძალით არსებობს ერთადერთი c წერტილი, რომელიც ეკუთვნის ყველა $[a_k, b_k]$ სეგმენტს, ე. ი.

$$a_k \leqslant c \leqslant b_k, \; k = 1, 2, \cdots . \tag{7.1}$$

ავაგოთ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია c-საკენ: ამისათვის x_{n_1} იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი. x_{n_2} იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის წევრი, რომელიც ეკუთვნის $[a_2, b_2]$ სეგმენტს და რომლისთვისაც $n_2 > n_1$ (რადგან $[a_2, b_2]$ სეგმენტი შეიცავს მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობას, ასეთი შერჩევა ყოველთვის შესაძლებელია). x_{n_k} იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ის წევრი, რომელიც ეკუთვნის $[a_k, b_k]$ სეგმენტს და რომლისთვისაც $n_k > n_{k-1}$ და ა. შ.

ამრიგად გვექნება

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k. \tag{7.2}$$

(7.1) და (7.2) უტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$0 \leqslant | x_{n_k} - c | \leqslant b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} .$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to \infty$, მივიღებთ:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = c.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრება საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ არის თუ არა რაიმე რიცხვი მოცემული მიმდევრობის ზღვარი. ვინაიდან ყველა ნამდვილი რიცხვისათვის ზემოთ აღნიშნული გარემოების შემოწმება საზოგადოდ შეუძლებელია, ამიტომ მიმდევრობის ზღვრის ცნება არ გვაძლევს საშუალებას უშუალოდ დავადგინოთ მიმდევრობის კრებადობა, თუ წინასწარ არ ვიცით მისი სავარაუდო ზღვარი. ამდენად მნიშვნელოვანია გვქონდეს მიმდევრობის კრებადობის კრიტერიუმი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს დავადგინოთ კრებადობა მისი წევრების საშუალებით, სავარაუდო ზღვრის გამოყენების გარეშე. ქვემოთ მოყვანილი კოშის თეორემა გვაძლევს ასეთ კრიტერიუმს.

განსაზღვრება 8.1. $\{x_n\}$ მიმდევრობას ეწოდება ფუნდამენტური, თუ $\forall \varepsilon > 0$-სათვის $\exists n_0 \in R$ ისეთი, რომ

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ როდესაც } m > n_0, \quad n > n_0. \tag{8.1}$$

(8.1) პირობა შეიძლება ასეც ჩამოყალიბდეს: $\forall \varepsilon > 0$-სათვის $\exists n_0 \in R$ ისეთი, რომ

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

ყოველი $n > n_0$-სათვის და ყველა არაუარყოფითი მთელი p-სათვის.

ლემა 8. 1. თუ მიმდევრობა ფუნდამენტურია, მაშინ ის შემოსაზღვრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია, მაშინ ფიქსირებული $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $n_0 \in N$, რომ როცა $n, m > n_0$ შესრულდება (8.1) უტოლობა. დავუშვათ $m = n_0 + 1$, მაშინ $|x_n - x_{n_0+1}| < \varepsilon$, აქედან:

$$|x_n| = |x_{n_0+1} + (x_n - x_{n_0+1})| \leqslant |x_{n_0+1}| +$$

$$+ |x_n - x_{n_0+1}| < |x_{n_0+1}| + \varepsilon, \text{ როცა } n > n_0.$$

ვთქვათ $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|, |x_{n_0+1}| + \varepsilon\}$, მაშინ ცხადია $|x_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \ldots$, ე. ი. $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8.1 (კოში). მიმდევრობის კრებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ის იყო ფუნდამენტური.

---

* ო. კოში (1789-1857) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია a რიცხვისაკენ. მაშინ $\forall \varepsilon > 0$-სათვის $\exists n_0 \in R$, ისეთი რომ ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n, m > n_0.$$

ამ უტოლობების გამოყენებით გვაქვს:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

როცა n, $m > n_0$, ე. ი. $\{x_n\}$ ფუნდამენტური მიმდევრობაა.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა ფუნდამენტურია. ლ ე მ ა 8.1-ის ძალით ეს მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემის თანახმად მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ $\{x_{m_k}\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია რაიმე a რიცხვისაკენ. ვაჩვენოთ, რომ $x_n \to a$.

$\{x_n\}$ მიმდევრობის ფუნდამენტურობის ძალით $\forall \varepsilon > 0$-სათვის $\exists n_0' \in R$ — ისეთი, რომ:

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad m, n > n_0'. \tag{8.2}$$

რადგან $m_n \geqslant n$, ამიტომ (8.2)-დან გვაქვს:

$$|x_n - x_{m_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n > n_0'. \tag{8.3}$$

ქვემიმდევრობა $\{x_{m_k}\}$ კრებადია, ამიტომ $\exists n_0'' \in R$ ისეთი, რომ:

$$|x_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{როცა} \quad n > n_0''.$$

ვთქვათ $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, მაშინ (8.2) და (8.3)-ის ძალით მივიღებთ:

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{m_n}) + (x_{m_n} - a)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - x_{m_n}| + |x_{m_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ როცა } n > n_0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

გამოვიყენოთ კოშის კრიტერიუმი $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ მიმდევრობის განშლადობის დასადგენად. ვინაიდან

$$x_{n+p}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}, \quad p\in N,$$

ამიტომ, როცა $p=n$, გვექნება:

$$|x_{2n}-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

ამრიგად $\varepsilon=\frac{1}{2}$ რიცხვისათვის არ არსებობს n_0 რიცხვი ისეთი, რომ

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

ნებისმიერი ნატურალური p-სათვის, როცა $n>n_0$. ეს კი ნიშნავს, რომ მოცემული მიმდევრობა არ არის ფუნდამენტური და ამიტომ ის განშლადია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. რადგან $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ მიმდევრობა ზრდადია და არ არის კრებადი, ამიტომ ის არ არის შემოსაზღვრული. ე. ი. $x_n\to+\infty$.

§ 9. მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი

ვთქვათ, $\{x_n\}$ შემოსაზღვრული მიმდევრობაა: $|x_n|\leqslant M$ $(n=1, 2, \cdots)$. A იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა კრებადი ქვემიმდევრობების ზღვრების სიმრავლე. თეორემა. 7.2-ის ძალით A არაცარიელი სიმრავლეა, ასევე ცხადია, რომ A შემოსაზღვრული სიმრავლეა, რადგან თუ ქვემიმდევრობა $x_{n_k}\to c$ $(c\in A)$, მაშინ უტოლობიდან $|x_{n_k}|\leqslant M$ გამომდინარეობს $|c|\leqslant M$-

ვინაიდან A შემოსაზღვრულია, ამიტომ პირველი თავის თეორემა 7.1-ის ძალით არსებობს ამ სიმრავლის ზუსტი ზედა და ზუსტი ქვედა საზღვრები: $\overline{x}=\sup A$, $\underline{x}=\inf A$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 9.1. $\overline{x}=\sup A$ და $\underline{x}=\inf A$ რიცხვებს

ეწოდება შესაბამისად $\{x_n\}$ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვრები და აღინიშნება სიმბოლოებით

$$\overline{x}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n,\quad \underline{x}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

ამ განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს:

თ ე ო რ ე მ ა 9.1. იმისათვის, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა იყოს კრებადი, აუცილებელია და საკმარისი

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

თ ე ო რ ე მ ა 9.2. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდია, მაშინ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty\ (\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty).$$

ისმის კითხვა: არსებობს თუ არა მოცემული მიმდევრობის ქვემიმდევრობები, რომლებიც შესაბამისად იქნება კრებადი ზედა და ქვედა ზღვრებისაკენ, ე. ი. არსებობს თუ არა A სიმრავლეში უდიდესი და უმცირესი რიცხვი?

თ ე ო რ ე მ ა 9.3. არსებობს $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი $\{x_{n_k}\}$ და $\{x_{m_j}\}$ ქვემიმდევრობები, რომ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\overline{x},\ \lim_{j\to\infty} x_{m_j}=\underline{x},$$

ე. ი. $\overline{x}\in A$ და $\underline{x}\in A$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვაჩვენოთ, რომ $\overline{x}\in A$. ავიღოთ $\varepsilon>0$ რიცხვი, მაშინ $]\overline{x}-\varepsilon,\ \overline{x}+\varepsilon[$ ინტერვალი შეიცავს $\{x_n\}$ მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობას. მართლაც, რადგან $\overline{x}=\sup A$, ამიტომ არსებობს ისეთი $x'\in A$, რომ $\overline{x}-\varepsilon<x'\leqslant\overline{x}$, ე. ი. $x'\in]\overline{x}-\varepsilon,\ \overline{x}+\varepsilon[$. შევარჩიოთ x'-ის მიდამო $]x'-\varepsilon_1,\ x'+\varepsilon_1[$ ისე, რომ $]x'-\varepsilon_1,\ x'+\varepsilon_1[\subset\subset]\overline{x}-\varepsilon,\ \overline{x}+\varepsilon[$. A სიმრავლის განსაზღვრით არსებობს ქვემიმდევრობა $x_{m_j}\to x'$. ამიტომ $\{x_{m_j}\}$ მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა იქნება $]x'-\varepsilon_1,\ x'+\varepsilon_1[$ ინტერვალში, ე. ი. $]\overline{x}-\varepsilon,\ \overline{x}+\varepsilon[$ ინტერვალშიც.

ამრიგად, ნებისმიერი $\varepsilon > 0$-სათვის $\left(\text{კერძოდ } \varepsilon = \frac{1}{k},\ k = 1, 2, \ldots\right)$, $]\,\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon\,[$ ინტერვალში ძევს $\{x_n\}$ მიმდევრობის წევრთა უსასრულო რაოდენობა.

ახლა ავაგოთ ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$, რომელიც კრებადია $\overline{x}$ რიცხვისაკენ. ამისათვის $\varepsilon = 1$-სათვის x_{n_1} იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის წევრი, რომელიც ძევს $]\,\overline{x} - 1, \overline{x} + 1\,[$ ინტერვალში $(k = 1)$, x_{n_2} იყოს $\{x_n\}$ მიმდევრობის წევრი, რომელიც ძევს $\left]\,\overline{x} - \frac{1}{2}, \overline{x} + \frac{1}{2}\,\right[$ ინტერვალში $\left(\varepsilon = \frac{1}{2}\right)$ და რომლისთვისაც $n_2 > n_1$ და ა. შ.

ამრიგად, მივიღებთ ქვემიმდევრობას $\{x_{n_k}\}$, რომლისთვისაც ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\overline{x} - \frac{1}{k} \leqslant x_{n_k} \leqslant \overline{x} + \frac{1}{k}.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to \infty$, მივიღებთ $x_{n_k} \to \overline{x}$, ე. ი. $\overline{x} \in A$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $\underline{x} \in A$. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 10. კომპლექსურ რიცხვთა მიმდევრობის ზღვარი

ვთქვათ მოცემულია კომპლექსურ რიცხვთა $\{z_n\}$ მიმდევრობა, სადაც $z_n = x_n + i\,y_n$.

განსაზღვრება 10.1. $z_0 = x_0 + iy_0$ რიცხვს ეწოდება კომპლექსურ რიცხვთა $\{z_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, თუ $\forall\, \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის $\exists\, n_0(\varepsilon)$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $n > n_0(\varepsilon)$-სათვის ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|z_n - z_0| < \varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ z_0 რიცხვი არის $\{z_n\}$ მიმდევრობის ზღვარი, ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{ან} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{ან კიდევ} \quad z_n \to z_0.$$

ვიტყვით, რომ $\{z_n\}$ მიმდევრობა კრებადია უსასრულობისაკენ, თუ $\forall M > 0$ რიცხვისათვის $\exists n_0(\varepsilon)$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $n > n_0$, ადგილი აქვს უტოლობას $|z_n| > M$.

ის ფაქტი, რომ $\{z_n\}$ მიმდევრობა კრებადია უსასრულობისაკენ ასე ჩაიწერება:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

თეორემა 10.1. იმისათვის, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, აუცილებელია და საკმარისი $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$.

დამტკიცება. თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან

$$|x_n| \leqslant |z_n|, \ |y_n| \leqslant |z_n|, \ |z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|.$$

§ 3-ში მოყვანილი თეორემები სათანადო ფორმულირებით მართებულია კომპლექსურ რიცხვთა მიმდევრობისთვისაც.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ რიცხვითი მიმდევრობა, შემოსაზღვრული მიმდევრობა, არაზრდადი და არაკლებადი მიმდევრობები, ზრდადი და კლებადი მიმდევრობები.

2. განსაზღვრეთ მიმდევრობის ზღვარი.

3. რას ნიშნავს, რომ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე მკვრივია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში?

4. ჩამოაყალიბეთ თეორემები კრებადი მიმდევრობის შემოსაზღვრულობისა და ზღვრის ერთადერთობის შესახებ.

5. მოიყვანეთ შემოსაზღვრული არაკლებადი მიმდევრობის მაგალითები.

6. ჩამოაყალიბეთ თეორემა მონოტონური მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ.

7. განსაზღვრეთ უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი მიმდევრობები და ჩამოაყალიბეთ მათი თვისებები.

8. განსაზღვრეთ ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობა და ჩამოაყალიბეთ თეორემა ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობის შესახებ.

9. განსაზღვრეთ მიმდევრობის ქვემიმდევრობა.

10. ჩამოაყალიბეთ ბოლცანო-ვაიერშტრასის თეორემა.

11. განსაზღვრეთ ფუნდამენტური მიმდევრობა და ჩამოაყალიბეთ კოშის თეორემა ფუნდამენტური მიმდევრობის ზღვრის არსებობის შესახებ.

12. განსაზღვრეთ მიმდევრობის ზედა და ქვედა ზღვარი.

МЕСАМЕ

მესამე თავი

ფუნქცია და მისი ზღვარი

§ 1. ფუნქცია. განსაზღვრის არე. მნიშვნელობათა სიმრავლე. შექცეული ფუნქცია. ფუნქციის გრაფიკი

ვთქვათ მოცემულია ორი სიმრავლე X და Y. მათ ელემენტებს შორის შეიძლება დამყარდეს სხვადასხვა სახის შესაბამისობა, რომლებსაც აღნიშნავენ f, g, h, ... ასოებით.

განსაზღვრება 1.1. X და Y სიმრავლეებს შორის შესაბამისობას, როცა X სიმრავლის ყოველ ელემენტს Y სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი შეესაბამება, ფუნქცია ეწოდება.

ფუნქციის ჩასაწერად, რომელიც ამყარებს შესაბამისობას X და Y სიმრავლეებს შორის რაიმე f წესით, მიღებულია აღნიშვნები:

$$X \xrightarrow{f} Y, \quad \text{ან} \quad f: X \to Y, \quad \text{ან} \quad y = f(x), \quad \text{სადაც} \quad x \in X, \ y \in Y.$$

x-ს უწოდებენ დამოუკიდებელ ცვლადს ანუ არგუმენტს, ხოლო $f(x)$-ს ფუნქციის მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება არგუმენტის x მნიშვნელობას. შემდგომში ხშირად ვისარგებლებთ აგრეთვე გამოთქმებით: „f ფუნქცია", „$f(x)$ ფუნქცია" ან „y ფუნქცია".

X სიმრავლეს f ფუნქციის განსაზღვრის არე ეწოდება და $D(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. Y სიმრავლის ყველა იმ ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც X სიმრავლის ერთ ელემენტს მაინც შეესაბამებიან, f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე ან ცვლილების არე ეწოდება და $E(f)$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

f ფუნქციას, რომლისთვისაც $D(f)=X$, ხოლო $E(f)\subset Y$ უწოდებენ აგრეთვე X სიმრავლის ასახვას Y სიმრავლეში. კერძოდ, თუ $E(f)=Y$, მაშინ ვიტყვით, რომ f არის X სიმრავლის ასახვა Y-ზე.

ვთქვათ, მოცემულია f ფუნქცია, რომელიც X სიმრავლეს ასახავს Y სიმრავლეზე. თუ ამ ფუნქციის შექცეული g შესაბამისობა წარმოადგენს ფუნქციას, მაშინ f-ს ეწოდება შექცევადი, ხოლო g-ს მისი შექცეული ფუნქცია და იგი f^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

f^{-1} ფუნქციის განსაზღვრის არეა $E(f)$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე $D(f)$ ე. ი. $D(f^{-1})=E(f)$ და $E(f^{-1})=D(f)$. f-ს და f^{-1}-ს ურთიერთშექცეულ ფუნქციებს უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ შექცევადია მხოლოდ ის ფუნქცია, რომელიც თავის ყოველ მნიშვნელობას ღებულობს მხოლოდ ერთხელ.

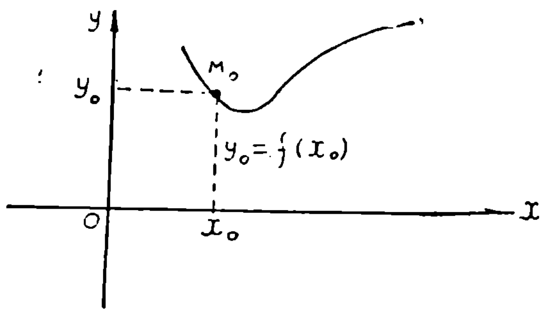
ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე რიცხვითი სიმრავლეებია, რიცხვითი ფუნქცია ეწოდება. ე. ი. რი-

ცხვითი ფუნქცია არის R სიმრავლის რაიმე D ქვესიმრავლის ასახვა R სიმრავლის მეორე E ქვესიმრავლეზე, სადაც D წარმოადგენს ფუნქციის განსაზღვრის არეს, ხოლო E მნიშვნელობათა სიმრავლეს.

შემდგომში ჩვენ მხოლოდ რიცხვით ფუნქციებს განვიხილავთ, თუ არ იქნა სპეციალური მითითება.

განსაზღვრება 1.2. f ფუნქციის გრაფიკი ეწოდება xOy სიბრტყის ყველა იმ (x, y) წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც $y=f(x)$, სადაც $x \in D(f)$ (ნახ. 5).

ფუნქციის გრაფიკს, ჩვეულებრივ, წირს უწოდებენ, ხოლო $y=f(x)$ განტოლებას კი — წირის განტოლებას.



ნახ. 5

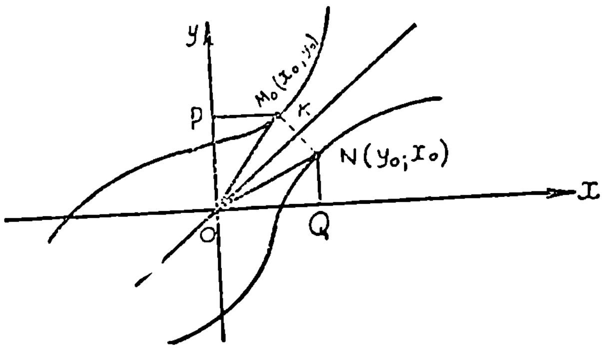
თუ $y=f(x)$ ფუნქცია შექცევადია, მაშინ $x=f^{-1}(y)$. მიღებულია, რომ f და f^{-1} ფუნქციების არგუმენტად ერთი და იგივე ცვლადი ვიგულისხმოთ და ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია ჩაიწერება $y=f^{-1}(x)$ სახით. ცხადია, რომ $f[f^{-1}(x)]=x$ და $f^{-1}[f(x)]=x$. ამასთან იმისათვის, რომ f ფუნქცია იყოს თავისთავის შექცეული, აუცილებელია, რომ $D(f)=E(f)$.

თეორემა 1. 1. ურთიერთშექცეული ფუნქციების გრაფიკები სიმეტრიულია იმ წრფის მიმართ, რომელსაც პირველი და მესამე საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისები შეადგენენ.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $y=f(x)$ და $y=f^{-1}(x)$ ურთიერთშექცეული ფუნქციები. თუ $M_0(x_0, y_0)$ წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის რაიმე წერტილს, მაშინ $N(y_0, x_0)$ წერტილი ეკუთვნის $y=f^{-1}(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. ვაჩვენოთ, რომ ეს წერტილები სიმეტრიულია OK წრფის მიმართ, რომელიც I და III საკოორ-

დინატო კუთხეების ბისექტრისების გაერთიანებას წარმოადგენს (ნახ. 6).

$\Delta\, OM_0P=\Delta\, ONQ$, როგორც შესაბამისად ტოლი კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედები, რადგან $\angle POK=\angle QOK$ და $\angle POM_0=$ $=\angle QON$, ამიტომ $\angle M_0OK=\angle NOK$. ამრიგად, $\Delta\, M_0ON$ ტოლფერდაა და OK წარმოადგენს მის ბისექტრისას. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისებების თანახმად $M_0N \perp OK$ და $M_0K=KN$. ე. ი. M_0 და N წერტილები სიმეტრიულია OK წრფის მიმართ. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 6

ვთქვათ მოცემულია ფუნქციები $f: X\to Y$ და $g: y\to Z$. ამ ფუნქციათა კომპოზიცია (რთული ფუნქცია) ეწოდება ისეთ $h: X\to Z$ ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია ტოლობით:

$$h(x)=g(f(x)),\quad x\in X.$$

ანალოგიურად შეიძლება განვიხილოთ რთული ფუნქცია, რომელიც მიიღება რამოდენიმე ფუნქციის კომპოზიციით:

$$y=f_1(f_2(\cdots f_n(x))\cdots).$$

ვთქვათ მოცემულია t ცვლადის ორი ფუნქცია:

$$x=\varphi(t),\quad y=g(t), \tag{1.1}$$

ამასთან ვიგულისხმოთ, რომ $x=\varphi(t)$ ფუნქციას აქვს შექცეული ფუნქცია $t=\varphi^{-1}(x)$. ე. ი. y შეიძლება განვიხილოთ, როგორც x-ის რთული ფუნქცია:

$$y=g(\varphi^{-1}(x)).$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით (1.1) ფორმულების საშუალებით.

ახლა ვთქვათ x და y ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან რაიმე განტოლებით, რომელიც სიმბოლურად ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$F(x, y)=0. \tag{1.2}$$

თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრული $y=f(x)$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$F(x, f(x))=0, \ \forall x \in E,$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოცემულია (1.2) განტოლებით არაცხადი სახით.

მაგალითად, $x^2+y^2-1=0$ განტოლება $[-1; 1]$ სეგმენტზე განსაზღვრავს არაცხადი ფუნქციების უსასრულო სიმრავლეს. კერძოდ, ასეთებია $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=-\sqrt{1-x^2}$ ფუნქციები და ნებისმიერი ფუნქცია, რომელიც $[-1; 1]$ სეგმენტის გარკვეულ წერტილებზე უდრის $\sqrt{1-x^2}$, ხოლო დანარჩენ წერტილებზე კი $-\sqrt{1-x^2}$, ე. ი.

$$y=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & \text{თუ} \ \ x \in A, \ \ A \subset [-1, 1], \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{თუ} \ \ x \notin A.\end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ (1.2) განტოლებით მოცემული არაცხადი ფუნქცია ყოველთვის არ ჩაიწერება ცხადი სახით. ე. ი. (1.2) განტოლება ყოველთვის არ ამოიხსნება y-ის მიმართ.

ცხადია, რომ (1.2) სახის განტოლება ყოველთვის არ განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციას. მაგალითად $x^2+y^2+1=0$ განტოლება არ განსაზღვრავს არაცხად ფუნქციას.

არაცხადი ფუნქციის არსებობისა და ერთადერთობის საკითხი შემდგომში იქნება შესწავლილი.

ყველა იმ (x, y) წერტილების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.2) განტოლებას, ეწოდება ამ განტოლებით განსაზღვრული წირი, ხოლო თვით ამ განტოლებას — წირის განტოლება არაცხადი სახით.

ერთიდაიმავე E სიმრავლეზე განსაზღვრული f და φ ფუნქციების ჯამი, სხვაობა, ნამრავლი და ფარდობა განსაზღვრებით წარმოადგენს ფუნქციას, რომლის მნიშვნელობები გამოითვლება შესაბამისად ფორმულებით

$$f(x)+\varphi(x), \ \ f(x)-\varphi(x), \ \ f(x)\,\varphi(x), \ \ \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \ \ (x \in E),$$

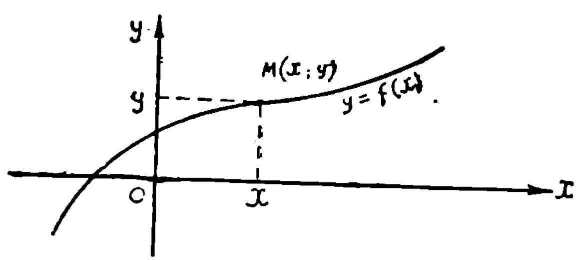
სადაც ფარდობის შემთხვევაში იგულისხმება, რომ $\varphi(x) \neq 0$, E სიმრავლეზე.

§ 2. ფუნქციის მოცემის ხერხები

განსაზღვრის თანახმად ფუნქცია ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ფუნქციის განსაზღვრის არე და შესაბამისობის წესი. ამასთან, ამ წესის მოცემის ხერხი შეზღუდული არ არის. განვიხილოთ ფუნქციის მოცემის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული ხერხი: ცხრილური, გრაფიკული და ანალიზური.

ც ხ რ ი ლ უ რ ი   ხ ე რ ხ ი. ბუნების მოვლენათა შესწავლის დროს ხშირად საქმე გვაქვს ისეთ ცვლადებთან, რომელთა შორის არსებულ დამოკიდებულებას ადგენენ ცდის საფუძველზე. ასეთ შემთხვევაში ცდათა შედეგების მიხედვით ადგენენ ცხრილს, რომელშიც მოცემულია არგუმენტის სხვადასხვა მნიშვნელობების შესაბამისი ფუნქციის მნიშვნელობები.

გ რ ა ფ ი კ უ ლ ი   ხ ე რ ხ ი. ვთქვათ სიბრტყეზე აღებულია მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და ამ სისტემაში მოცემულია ისეთ $M(x, y)$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთაგან არც ერთი ორი წერტილი არ ძევს Oy ღერძის პარალელურ ერთსადაიმავე წრფეზე. წერტილთა ასეთი სიმრავლე განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლეა შესაბამისად მოცემულ წერტილთა სიმრავლის აბსცისთა და ორდინატთა სიმრავლეები. მართლაც, ნებისმიერ x რიცხვს განსაზღვრის არედან შეესაბამება ერთადერთი y რიცხვი, ისეთი რომ $M(x, y)$ წერტილი მოცემულ სიმრავლეს ეკუთვნის (ნახ. 7).



ნახ. 7

ფუნქციის მოცემის ასეთ ხერხს გრაფიკული ხერხი ეწოდება.

ა ნ ა ლ ი ზ უ რ ი   ხ ე რ ხ ი. უმეტეს შემთხვევაში ფუნქცია მოცემულია ფორმულის საშუალებით, რომელიც გვიჩვენებს, თუ რა მოქმედებები უნდა ჩავატაროთ არგუმენტზე, რომ მივიღოთ ფუნქციის შესაბამისი მნიშვნელობა. ასეთ ფორმულას ფუნქციის ანალიზური გა-

მოსახულება ეწოდება, ხოლო ხერხს — ფუნქციის მოცემის ანალიზური ხერხი.

თუ ფუნქცია მოცემულია ფორმულით და არ არის მითითებული განსაზღვრის არე, მაშინ იგულისხმება, რომ ამ ფუნქციის განსაზღვრის არეა არგუმენტის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომლისთვისაც ფორმულას აზრი აქვს.

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

1. $y=x^2+1$ ფორმულით მოცემულია ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[1, +\infty[$ შუალედი.

2. $y=\sqrt{16-x^2}$ ფორმულა განსაზღვრავს ფუნქციას, რომლის განსაზღვრის არეა $[-4; 4]$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი $[0; 4]$ შუალედი.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია განსაზღვრის არის სხვადასხვა უბანზე შეიძლება სხვადასხვა ფორმულით იყოს მოცემული, მაგალითად ფუნქცია

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & \text{თუ} \quad x>0, \\ 0, & \text{თუ} \quad x=0, \\ -1, & \text{თუ} \quad x<0. \end{cases}$$

მოცემულია ანალიზური წესით მთელ რიცხვით ღერძზე. მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება სამი რიცხვისაგან: -1, 0 და 1.

ასევე, დირიხლეს* ფუნქცია:

$$y=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,} \\ 1, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია,} \end{cases}$$

მოცემულია ანალიზური წესით მთელ რიცხვით ღერძზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე შედგება ორი რიცხვისაგან: 0 და 1.

უნდა აღინიშნოს, რომ დირიხლეს ფუნქციის გრაფიკის აგება შეუძლებელია.

§ 3. ზრდადი და კლებადი, შემოსაზღვრული და შემოუსაზღვრელი ფუნქციები

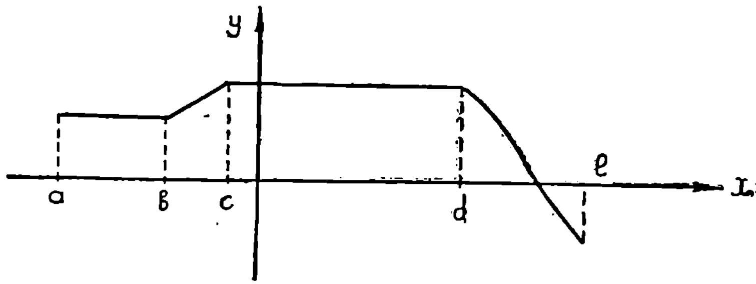
განსაზღვრება 3.1. f ფუნქციას ეწოდება არაკლებადი (არაზრდადი) რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1<x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$).

---

* პეტერ გუსტავ ლეჟენ დირიხლე (1805—1859) — გერმანელი მათემატიკოსი.

განსაზღვრება 3.2. f ფუნქციას ეწოდება ზრდადი (კლებადი) რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლის ნებისმიერი $x_1 < x_2$ რიცხვებისათვის მართებულია უტოლობა: $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$.)*.

მე-8 ნახაზზე გამოსახული გრაფიკით მოცემული ფუნქცია არაკლებადია $[a, d]$ სეგმენტზე, ზრდადია $[b, c]$-ზე, არაზრდადია $[c, e]$-ზე და კლებადია $[d, e]$-ზე.



ნახ. 8

განსაზღვრება 3.3. f ფუნქციას ეწოდება მონოტონური რაიმე სიმრავლეზე, თუ ის ამ სიმრავლეზე არის არაზრდადი ან არაკლებადი.

თუ ფუნქცია ზრდადია ან კლებადი, მაშინ იგი თავის ყოველ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთხელ ღებულობს, ამიტომ იგი შექცევადია და მისი შექცეული ფუნქცია შესაბამისად ზრდადია ან კლებადი.

განსაზღვრება 3.4. f ფუნქციას ეწოდება ზემოდან (ქვემოდან) შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ ამ სიმრავლის ნებისმიერი x წერტილისათვის $f(x) \leqslant M$ ($f(x) \geqslant M$).

განსაზღვრება 3.5. f ფუნქციას ეწოდება შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, თუ ამ სიმრავლეზე იგი შემოსაზღვრულია ზემოდან და ქვემოდან.

თუ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული რაიმე სიმრავლეზე, მას ეწოდება შემოუსაზღვრავი ამ სიმრავლეზე.

მაგალითად, $y = \dfrac{1}{x}$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $[1; 2]$ სეგმენტზე და შემოუსაზღვრავია $]0; 1]$-ზე.

---

* ცხადია ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია არაკლებადია (არაზრდადია).

განსაზღვრება 3.6. თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია E სიმრავლეზე და არსებობს ამ სიმრავლის ისეთი x_0 წერტილი, რომ $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) ნებისმიერი x წერტილისათვის E-დან, მაშინ $f(x_0)$-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა E სიმრავლეზე და წერენ $f(x_0) = \max\limits_{E} f(x)$ ან $f(x_0) = \max f(x)$. ($f(x_0) = \min\limits_{E} f(x)$ ან $f(x_0) = \min f(x)$).

მაგალითად $f(x) = x^2$ ფუნქციისათვის $\min\limits_{[-1,2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1,2]} f(x) = f(2) = 4$. ფუნქციის უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას უწოდებენ აგრეთვე მის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას. ფუნქციის მაქსიმალურ და მინიმალურ მნიშვნელობას უწოდებენ ექსტრემალურ მნიშვნელობებს.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას უდიდესი ან უმცირესი მნიშვნელობები შეიძლება არ გააჩნდეს. მაგალითად $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციას უმცირესი მნიშვნელობა არ გააჩნია.

განსაზღვრება 3.7. E სიმრავლეზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქციის ზუსტი ზედა (ქვედა) საზღვარი ეწოდება ამ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლის ზუსტ ზედა (ქვედა) საზღვარს და აღინიშნება სიმბოლოთი $\sup\limits_{E} f(x)$ ან $\sup f(x)$, ($\inf\limits_{E} (x)$ ან $\inf f(x)$).

პირველი თავის თეორემა 7.1-ის ძალით შემოსაზღვრულ ფუნქციას ყოველთვის გააჩნია ზუსტი ზედა და ქვედა საზღვრები. ცხადია, რომ, თუ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში ღებულობს უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას, მაშინ $f(x_0) = \sup f(x)$ ($f(x_0) = \inf f(x)$).

ზემოთ განხილული $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ფუნქციისათვის $\inf f(x) = 0$.

§ 4. ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციები

ვთქვათ, E რიცხვთა რაიმე სიმრავლეა. ამ სიმრავლეს ეწოდება სიმეტრიული ნულის მიმართ, თუ $x \in E$ პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $-x \in E$. მაგალითად, $[-a, a]$, R, Z, Q ნულის მიმართ სიმეტრიული სიმრავლეებია.

განსაზღვრება 4.1. f ფუნქციას ეწოდება ლუწი, თუ მისი

განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის

$$f(-x) = f(x).$$

მაგალითად, $y = x^2$ და $y = |x|$ ლუწი ფუნქციებია.

განსაზღვრება 4.2. f ფუნქციას ეწოდება კენტი, თუ მისი განსაზღვრის არე სიმეტრიულია ნულის მიმართ და ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის

$$f(-x) = -f(x).$$

მაგალითად $y = x$ და $y = \operatorname{sgn} x$ კენტი ფუნქციებია.

ცხადია, რომ ლუწი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, ხოლო კენტი ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ. შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია შეიძლება არც ლუწი იყოს და არც კენტი. მაგალითად, $y = x^2 + x$ ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი.

ყოველი $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია სიმეტრიულ შუალედზე, შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით. მართლაც,

$$f(x) = \varphi(x) + g(x).$$

სადაც

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ არის ლუწი ფუნქცია, ხოლო $g(x)$ — კენტი.

განსაზღვრება 4.3. f ფუნქციას ეწოდება პერიოდული, პერიოდით $l \neq 0$, თუ ნებისმიერი $x \in D(f)$-ისათვის რიცხვები $x - l$ და $x + l$ აგრეთვე ეკუთვნის $D(f)$-ს და მართებულია ტოლობა:

$$f(x + l) = f(x).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ, თუ f ფუნქციის პერიოდი არის l და $x \in D(f)$, მაშინ

$$f(x) = f((x - l) + l) = f(x - l).$$

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$f(x + kl) = f(x), \quad \text{სადაც} \quad k \in Z.$$

ამრიგად, ყოველ პერიოდულ ფუნქციას გააჩნია პერიოდთა უსასრულო სიმრავლე. შემდგომში ფუნქციის პერიოდის ქვეშ ვიგულისხმებთ უმცირეს დადებით პერიოდს, თუ იგი არსებობს.

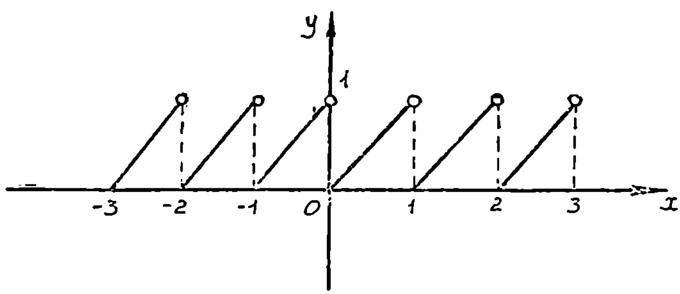
სასკოლო კურსიდან ცნობილია, რომ ტრიგონომეტრიული ფუნქციები პერიოდული ფუნქციებია. პერიოდული ფუნქციის მაგალითია აგრეთვე დირიხლეს ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ რაციონალურია,} \\ 1, & x \text{ ირაციონალურია} \end{cases}$$

და მისი პერიოდია ნებისმიერი რაციონალური r რიცხვი.

მართლაც, თუ x რაციონალურია, მაშინ $x+r$ აგრეთვე რაციონალურია, ხოლო, თუ x ირაციონალურია, მაშინ $x+r$ რიცხვიც ირაციონალურია. ამიტომ დირიხლეს ფუნქციის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x+r)=f(x)$, ე. ი. $f(x)$ პერიოდულია პერიოდით r. ამრიგად, დირიხლეს ფუნქცია არის მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომელსაც უმცირესი დადებითი პერიოდი არ გააჩნია.

ფუნქცია $y=x-[x]$, სადაც $[x]$ წარმოადგენს უდიდეს მთელ რიცხვს, რომელიც არ აღემატება x რიცხვს, ასევე წარმოადგენს პერიოდული ფუნქციის მაგალითს. მისი პერიოდია $l=1$ რიცხვი (ნახ. 9).



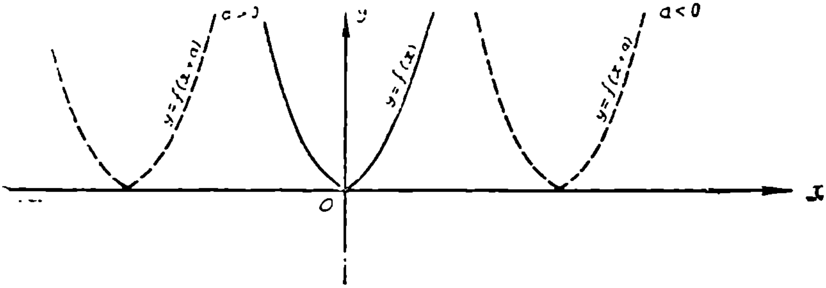
ნახ. 9

§ 5. ფუნქციის გრაფიკის ზოგიერთი გარდაქმნა

ამ პარაგრაფში ჩამოვაყალიბებთ წესებს, რომელთა საშუალებით შეიძლება აიგოს $y=f(x+a)$, $y=f(x)+a$ $(a\in R)$, $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=|f(x)|$ და $y=f(|x|)$ ფუნქციათა გრაფიკები, თუ მოცემულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი.

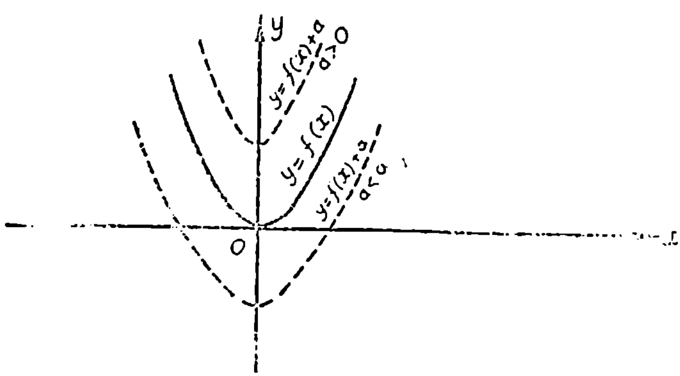
1. $y=f(x+a)$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე Ox ღერძის მი-

მიმართულებით, თუ $a<0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a>0$ (ნახ. 10).



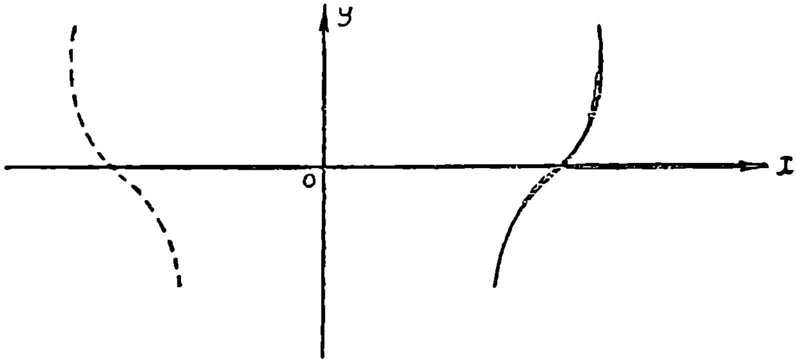
ნახ. 10

2. $y=f(x)+a$ ფუნქციის გრაფიკი მიიღება $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისაგან პარალელური გადატანით $|a|$ მანძილზე Oy ღერძის მიმართულებით, თუ $a>0$ და საწინააღმდეგო მიმართულებით, თუ $a<0$ (ნახ. 11).



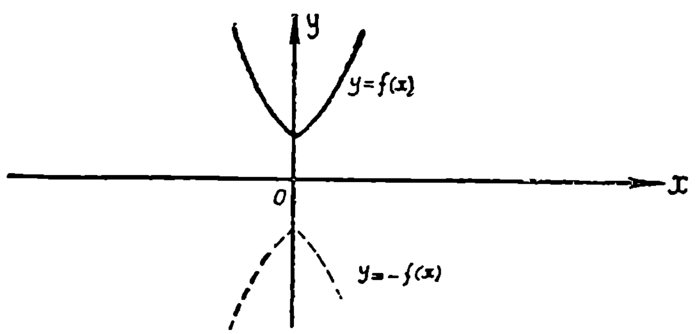
ნახ. 11

3. $y=f(-x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 12).



ნახ. 12

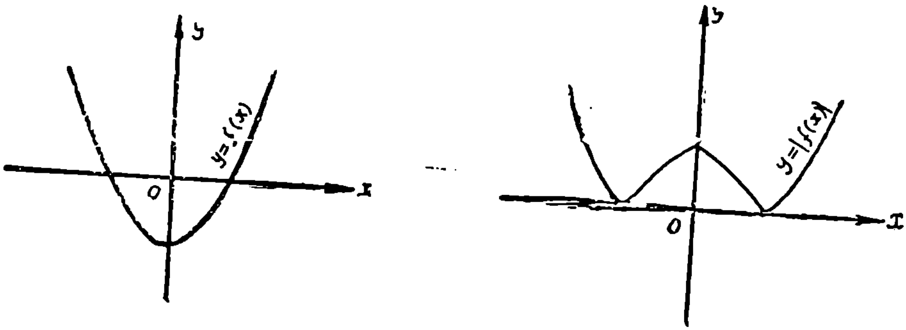
4. $y=-f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკისა Ox ღერძის მიმართ (ნახ. 13).



ნახ. 13

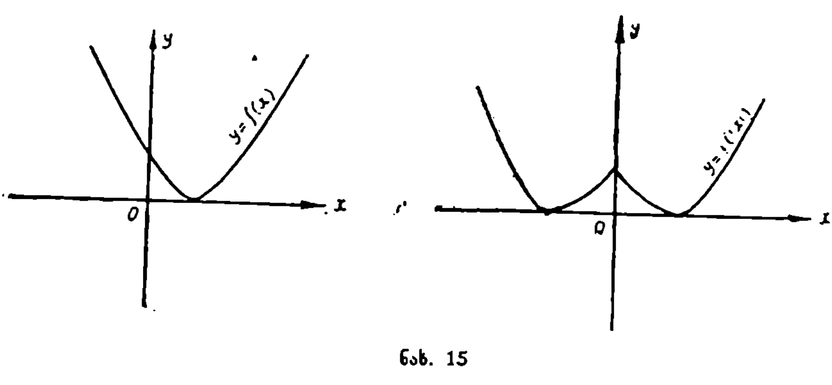
5. $y=|f(x)|$ ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად საჭიროა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც Ox ღერძის ქვემოთ მდება-

რეობს, სიმეტრიულად აისახოს Ox ღერძის მიმართ, ხოლო დანარჩენი ნაწილი უცვლელად დავტოვოთ (ნახ. 14).



ნახ. 14

6. $y=f(|x|)$ ფუნქციის გრაფიკი არგუმენტის არაუარყოფითი მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს. რადგან $y=f(|x|)$ ფუნქცია ლუწია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ (ნახ. 15).



ნახ. 15

§ 6. ფუნქციის ზღვარი

განსაზღვრება 6.1. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტი-

ლის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა, და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია ε-ზე, ისეთი, რომ თუ $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ

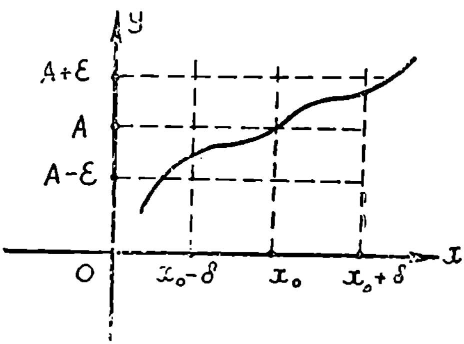
$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

ის ფაქტი, რომ A არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{ან} \quad f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

ფუნქციის ზღვრის ეს განსაზღვრება ეკუთვნის კოშს.

რადგან $|x-x_0|<\delta$ უტოლობა ტოლფასია $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ ორმაგი უტოლობისა, ამიტომ ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრება შეიძლება შემდეგნაირადაც ჩამოყალიბდეს:



ნახ. 16

A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ A რიცხვის ნებისმიერი ε მიდამოსათვის მოიძებნება x_0 წერტილის ისეთი δ მიდამო, რომ ფუნქციის გრაფიკის ის ნაწილი, რომელიც შეესაბამება δ მიდამოს წერტილებს, გარდა შესაძლებელია x_0 წერტილისა, არ გამოვა $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ ზოლიდან (ნახ. 16).

ფუნქციის ზღვრის სხვაგვარი განსაზღვრება მიმდევრობის ზღვრის საშუალებით ჩამოაყალიბა ჰ. ჰეინემ*.

განსაზღვრება 6.2. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში, თუ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა და განსაზღვრის არიდან აღებული ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის $(x_n\neq x_0)$, რომელიც კრებადია x_0-საკენ, $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია A რიცხვისაკენ.

ვაჩვენოთ, რომ ფუნქციის ზღვრის ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებები ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

---

* ჰენრიხ ედუარდ ჰეინე (1821—1881) — გერმანელი მათემატიკოსი.

ვთქვათ A არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში კოშის აზრით. $\{x_n\}$ იყოს ნებისმიერი მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim x_n = x_0$ $(x_n \neq x_0)$. ვთქვათ $\varepsilon > 0$ რაიმე რიცხვია, მაშინ კოშის მიხედვით ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $0 < |x - x_0| < \delta$, მაშინ $|f(x) - A| < \varepsilon$. მაგრამ რადგან $x_n \to x_0$, ამიტომ არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ თუ $n > n_0$, მაშინ $0 < |x_n - x_0| < \delta$, ამიტომ $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. ე. ი. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. ვინაიდან $\{x_n\}$ მიმდევრობა ნებისმიერად იყო არჩეული, ამიტომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი ჰეინეს მიხედვითაც.

ახლა ვთქვათ A არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში ჰეინეს მიხედვით. ვაჩვენოთ, რომ A იქნება $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი კოშის მიხედვითაც.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ A არ არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი კოშის მიხედვით x_0 წერტილში. მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება ერთი მაინც x წერტილი, რომელიც აკმაყოფილებს $0 < |x - x_0| < \delta$ და $|f(x) - A| > \varepsilon$ პირობებს ერთდროულად.

განვიხილოთ $\{\delta_n\}$ მიმდევრობა $(\delta_n > 0)$, რომელიც კრებადია ნულისაკენ. ყოველი δ_n რიცხვისათვის მოიძებნება x_n რიცხვი ისეთი, რომ

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n \tag{6.1}$$

და

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon. \tag{6.2}$$

(6.1) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $x_n \to x_0$ (რადგან $\delta_n \to 0$), ხოლო (6.2)-დან გამომდინარეობს, რომ $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობის ზღვარი არ არის A რიცხვი. ე. ი. A არ წარმოადგენს $f(x)$ ფუნქციის ზღვარს x_0 წერტილში ჰეინეს მიხედვით. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე. ი. A არის $f(x)$-ის ზღვარი x_0 წერტილში კოშის მიხედვითაც.

ამრიგად, 6.1 და 6.2 განსაზღვრებების ეკვივალენტობა დამტკიცებულია. განვიხილოთ მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{როცა } a \leqslant x < x_0, \\ c, & \text{როცა } x_0 < x \leqslant b, \end{cases}$$

სადაც c რაიმე რიცხვია. x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის. დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, ე. ი. მუდმივის ზღვარი იგივე მუდმივია.

მართლაც ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის გვაქვს:

$$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad x \neq x_0.$$

მაშასადამე, ყოველი $\delta>0$ რიცხვისათვის

$$|f(x)-c|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0<|x-x_0|<\delta,$$

ე. ი. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=c$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია მთელ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე, გარდა $x=1$ წერტილისა. ვიპოვოთ $f(x)$-ის ზღვარი ამ წერტილში. ყოველი $x \neq 1$-სათვის $\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$, ამიტომ:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+1).$$

ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x \to 1}(x+1)=2$. მართლაც, რადგან $|(x+1)-2|=|x-1|$, ამიტომ თუ $\forall \varepsilon>0$-სათვის ავიღებთ $\delta=\varepsilon$, გვექნება:

$$0<|x-1|<\delta \Rightarrow |(x+1)-2|<\varepsilon.$$

ე. ი. $\lim\limits_{x \to 1}(x+1)=2$ და მაშასადამე:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვაჩვენოთ, რომ $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ფუნქციას $x_0=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მართლაც, თუ განვიხილავთ ნულისაკენ კრებად $x_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ მიმდევრობას, მაშინ

$$f(x_n)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n.$$

ამ მიმდევრობას კი ზღვარი არ გააჩნია.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 6.3. ვიტყვით, რომ A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ და ჩავწერთ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=A\right)$, თუ ნებისმიერი

$\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი M რიცხვი, რომ როცა $x > M$ $(x < M)$, მაშინ:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

თუ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, მაშინ ვიტყვით, რომ A არის $f(x)$-ის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ და დავწერთ:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ ან } f(x) \to A, \text{ როცა } x \to \infty.$$

განსაზღვრება 6.3-ის ეკვივალენტურია შემდეგი განსაზღვრება: A რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი, როდესაც x მიისწრაფვის პლიუს (მინუს) უსასრულობისაკენ, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}$ დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი მიმდევრობისათვის $\lim f(x_n) = A$.

განსაზღვრება 6.4. A რიცხვს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა (მარცხენა) ზღვარი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta > 0$ რიცხვი, რომ როცა $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, მაშინ $|f(x) - A| < \varepsilon$ და წერენ:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A \;\; (\lim_{x \to x_0-} f(x) = A).$$

ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრებს ფუნქციის ცალმხრივ ზღვრებს უწოდებენ. ხშირად $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრებს x_0 წერტილში აღნიშნავენ შესაბამისად $f(x_0+)$ და $f(x_0-)$ სიმბოლოთი.

ზღვრის განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა:

თეორემა 6.1. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მას ამ წერტილში გააჩნდეს ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი ზღვრები.

ამ თეორემის საფუძველზე ვაჩვენოთ, რომ:

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{თუ } x > 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \\ -1, & \text{თუ } x < 0, \end{cases}$$

ფუნქციას $x_0 = 0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია. მართლაც $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} 1 = 1$, ხოლო $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} (-1) = -1$. ამრიგად $f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები $x_0 = 0$ წერტილში ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, ამიტომ მას ამ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

განსაზღვრება 7.1. ვიტყვით, რომ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში აკმაყოფილებს კოშის პირობას, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

როცა $0<|x'-x_0|<\delta$ და $0<|x''-x_0|<\delta$.

თეორემა 7.1. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციას გააჩნდეს ზღვარი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში აკმაყოფილებდეს კოშის პირობას.

აუცილებლობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. მაშინ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ როცა $0<|x-x_0|<\delta$, ადგილი აქვს უტოლობას $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$. ავიღოთ ნებისმიერად ორი x' და x'' რიცხვი, რომლებიც $0<|x-x_0|<\delta$ პირობას აკმაყოფილებენ. მაშინ

$$|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

ამ უტოლობებიდან გვაქვს:

$$|f(x'')-f(x')|=|(f(x')-A)-(f(x'')-A)|\leqslant$$

$$\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობა. ვთქვათ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ თუ $0<|x'-x_0|<\delta$ და $0<|x''-x_0|<\delta$, მაშინ:

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{7.1}$$

განვიხილოთ რიცხვთა $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_0 წერტილისაკენ და $x_n\neq x_0\,(n=1,2,\cdots)$. მაშინ არსებობს ისეთი n_0 რიცხვი, რომ თუ $n>n_0$, $m>n_0$, გვექნება $0<|x_n-x_0|<\delta$ და $0<|x_m-x_0|<\delta$, ამიტომ (7.1) უტოლობის თანახმად:

$$|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n>n_0,\ m>n_0. \tag{7.2}$$

მაშასადამე $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა არის ფუნდამენტური და ამიტომ იგი კრებადია (თავი II, თეორემა 8.1) რაიმე A რიცხვისაკენ:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{7.3}$$

ახლა განვიხილოთ x_0-საკენ კრებადი ნებისმიერი სხვა $\{x'_n\}$ მიმდევრობა $(x'_n \neq x_0)$. დავამტკიცოთ, რომ:

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = A. \tag{7.4}$$

ავიღოთ ისეთი რიცხვი, $n'_0 > n_0$, რომ თუ $n > n'_0$, მაშინ $0 < |x'_n - x_0| < \delta$ ამიტომ (7.1) უტოლობის თანახმად:

$$|f(x'_n) - f(x_n)| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad n > n'_0 . \tag{7.5}$$

(7.3) ტოლობის ძალით არსებობს $n_0'' > n_0'$ რიცხვი ისეთი, რომ:

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad \text{როდესაც} \quad n > n''_0. \tag{7.5}$$

(7.5) და (7.6) უტოლობების თანახმად ყოველი n-სათვის, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $n > n''_0$, გვექნება,

$$|f(x'_n) - A| = |[f(x'_n) - f(x_n)] + [f(x_n) - A]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

ე. ი. მართებულია (7.4) ტოლობა. რადგან $\{x'_n\}$ მიმდევრობა ნებისმიერია, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 8. თეორემები ფუნქციის ზღვრის შესახებ

თ ე ო რ ე მ ა 8.1. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნია, მაშინ ის ერთადერთია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი x_0 წერტილში არის A და B $(A \neq B)$. ავიღოთ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ $(x_n \neq x_0)$. მაშინ ჰეინეს მიხედვით ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების თანახმად $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა ერთდროულად უნდა იყოს კრებადი A და B

რიცხვებისაკენ, რაც შეუძლებელია (თავი II, თეორემა 3.1). თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.2. თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში*.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. მაშინ $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ:

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0<|x-x_0|<\delta.$$

ე. ი. $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, როცა $0<|x-x_0|<\delta$. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.3. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ და $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, მაშინ:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)+g(x))=A+B$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\,g(x)=AB$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, თუ $B\neq 0$**.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ არის ნებისმიერი მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_0-საკენ $(x_n\neq x_0)$. ფუნქციის ზღვრის ჰეინეს განსაზღვრების თანახმად, $\{f(x_n)\}$ და $\{g(x_n)\}$ მიმდევრობები იქნება კრებადი შესაბამისად A და B რიცხვებისაკენ. მე-2 თავის თეორემა 3.3-ის თანახმად $\{f(x_n)+g(x_n)\}$, $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}$ და $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ მიმდევრობები იქნებიან კრებადი შესაბამისად $A+B$, $A\cdot B$ და $\dfrac{A}{B}$ რიცხვებისაკენ. რადგან $\{x_n\}$ ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ ეს რიცხვები იქნებიან შესაბამისად $f(x)+g(x)$, $f(x)\,g(x)$ და $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ფუნქციების ზღვრები x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. 1. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ და $n\in N$, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n=A^n$.

---

* შეიძლება x_0 არ ეკუთვნოდეს ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

** როგორც ქვემოთ იქნება ნაჩვენები (თეორემა 8.5-ის შედეგი) არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც $g(x)\neq 0$.

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ არსებობს, მაშინ ყოველი ნამდვილი c რიცხვისათვის

$$\lim_{x \to x_0} c f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეგვიძლია გამოვიტანოთ ზღვრის ნიშნის გარეთ.

თ ე ო რ ე მ ა 8.4. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ და $B<A$, მაშინ არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ $f(x)>B$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრის ძალით, ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი. რომ თუ $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ $|f(x)-A|<\varepsilon$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $|f(x)|>A-\varepsilon$. თუ ავიღებთ $\varepsilon=A-B>0$, მივიღებთ:

$$f(x)>B, \text{ როცა } 0<|x-x_0|<\delta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.5. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$ და $B>A$, მაშინ არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ $f(x)<B$.

ამ თეორემის დამტკიცება წინა თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)>0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)<0$, მაშინ არსებობს $A>0$ და $\delta>0$ რიცხვები ისეთი, რომ როცა $0<|x-x_0|<\delta$, მაშინ $f(x)>A$($f(x)<-A$).

შ ე დ ე გ ი 2. თუ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)>\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, მაშინ არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $f(x)>\varphi(x)$, როცა $0<|x-x_0|<\delta$.

თ ე ო რ ე მ ა 8.6. თუ $f(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციებს x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნიათ და x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)\leqslant\varphi(x)$ $(x\neq x_0)$, მაშინ:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} \varphi(x).^*$$

---

* $f(x)<\varphi(x)$ უტოლობიდან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)<\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ და $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=B$. დავუშვათ $A>B$. ავიღოთ რაიმე C რიცხვი ისეთი, რომ $B<C<A$. თეორემა 8.4 და თეორემა 8.5-ის ძალით არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოს ნებისმიერი x_0-საგან განსხვავებული x წერტილისათვის ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$\varphi(x)<C<f(x),$$

ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. $A\leqslant B$, ანუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.7. თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)\leqslant g(x)\leqslant\varphi(x)$, $(x\neq x_0)$ და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, მაშინ:

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $\{x_n\}$ არის ნებისმიერი მიმდევრობა, რომელიც კრებადია x_0-საკენ და $x_n\neq x_0$ $(n=1, 2, \cdots)$. ცხადია, რომ

$$f(x_n)\leqslant g(x_n)\leqslant\varphi(x_n). \tag{8.1}$$

პირობის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=A. \tag{8.2}$$

(8.1) და (8.2)-დან გამომდინარეობს, რომ (თავი II, თეორემა 3.6):

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n)=A.$$

რადგან $\{x_n\}$ ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.8. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების ძალით ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ:

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \text{ როცა } 0<|x-x_0|<\delta.$$

რადგან

$$||f(x)|-|A||<|f(x)-A|,$$

ამიტომ

$$||f(x)|-|A||<\varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0<|x-x_0|<\delta.$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. მაგალითად, თუ:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{როცა } x \text{ რაციონალურია,} \\ -1, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია,} \end{cases}$$

მაშინ $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = 1$ ნებისმიერი $x_0 \in R$ რიცხვისათვის, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას არც ერთ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

თ ე ო რ ე მ ა 8.9. თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x) \geqslant 0$ და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, მაშინ $\forall n \in N$-სათვის

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(x).$$

აქედან

$$f(x) = [\varphi(x)]^n.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ იარსებებს x_0 წერტილისაკენ კრებადი ისეთი ორი მიმდევრობა $\{x_k'\}$ და $\{x_k''\}$, რომ

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x_k') = L_1, \quad \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k'') = L_2, \tag{8.3}$$

სადაც $L_1 \neq L_2$. რადგან $f(x) = [\varphi(x)]^n$ და $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ამიტომ (8.3) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$A = \lim_{k\to\infty} f(x_k') = \lim_{k\to\infty} [\varphi(x_k')]^n = L_1^n,$$

$$A = \lim_{k\to\infty} f(x_k'') = \lim_{k\to\infty}]\varphi(x_k'')]^n = L_2^n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $L_1=L_2$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე ჩვენი დაშვება არასწორია და $\varphi(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი გააჩნია.

ვთქვათ

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x)=B,$$

მაშინ თეორემა 8.3-ის შედეგი 1-ის ძალით

$$B^n=\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)]^n=\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

ე. ი. $B=\sqrt[n]{A}$, მაშასადამე:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 9. უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები

განსაზღვრება 9.1. $\alpha(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ მცირე a წერტილში (როდესაც $x\to a$), თუ $\alpha(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში ნულის ტოლია.

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულოდ მცირე ფუნქციები, როდესაც $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to a+$, $x\to a-$.

თეორემა 9.1. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქციის ზღვარი a წერტილში იყოს A რიცხვი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ $\alpha(x)=f(x)-A$ ფუნქცია იყოს უსასრულოდ მცირე a წერტილში.

აუცილებლობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. განვიხილოთ სხვაობა $f(x)-A=\alpha(x)$. ვაჩვენოთ, რომ $\alpha(x)$ არის უსასრულოდ მცირე a წერტილში. მართლაც, თეორემა 8.1-ის ძალით:

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}(f(x)-A)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} A=A-A=0.$$

საკმარისობა. ვთქვათ $\alpha(x)=f(x)-A$ არის უსასრულოდ მცირე a წერტილში. მაშინ:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}(\alpha(x)+A)=\lim_{x\to a}\alpha(x)+\lim_{x\to a} A=0+A=A.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

უსასრულოდ მცირე ფუნქციებს იგივე თვისებები გააჩნიათ, რაც უსასრულოდ მცირე მიმდევრობებს. მართებულია შემდეგი

თ ე ო რ ე მ ა 9.2. a წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციების ჯამი და ნამრავლი არის უსასრულოდ მცირე ფუნქცია a წერტილში.

თ ე ო რ ე მ ა 9.3. a წერტილში უსასრულოდ მცირე ფუნქციისა და a წერტილის რაღაც მიდამოში შემოსაზღვრული ფუნქციის ნამრავლი არის უსასრულოდ მცირე a წერტილში.

ამ თეორემების მართებულობა უშუალოდ გამომდინარეობს ჰეინეს მიხედვით ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრებიდან და უსასრულოდ მცირე მიმდევრობის თვისებებიდან.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 9.2. $\alpha(x)$ ფუნქციას ეწოდება დადებითი (უარყოფითი) უსასრულოდ დიდი ფუნქცია a წერტილში (როდესაც $x \to a$), თუ ნებისმიერი M რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x - a| < \delta$, მაშინ $\alpha(x) > M$ $(\alpha(x) < M)$ და ამ ფაქტს შემდეგნაირად ჩავწერთ:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to a} \alpha(x) = -\infty).$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 9.3. $\beta(x)$ ფუნქციას ეწოდება უსასრულოდ დიდი a წერტილში, თუ ნებისმიერი $M > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ თუ $0 < |x - a| < \delta$, მაშინ $|\beta(x)| > M$ და ეს ფაქტი შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ a წერტილში დადებითი უსასრულოდ დიდი ან უარყოფითი უსასრულოდ დიდი ფუნქცია ამავე დროს არის უსასრულოდ დიდიც ამავე წერტილში. პირიქით კი საზოგადოდ მართებული არ არის. მაგალითად, $y = \frac{1}{x}$ ფუნქცია არის უსასრულოდ დიდი $a = 0$ წერტილში, მაგრამ არ არის არც დადებითი და არც უარყოფითი უსასრულოდ დიდი ამ წერტილში.

ცალმხრივი ზღვრების განსაზღვრების ანალოგიურად განისაზღვრება უარყოფითი უსასრულოდ დიდი, დადებითი უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები, როცა $x \to a+$ და $x \to a-$.

თ ე ო რ ე მ ა 9.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია a წერტილის რაიმე მიდამოში აკმაყოფილებს პირობას:

$$|f(x)| > M > 0$$

(გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა), ხოლო $\varphi(x)$ ფუნქცია უსასრულოდ მცირეა a წერტილში ($\varphi(x) \neq 0$, $x \neq a$), მაშინ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

დამტკიცება. ავიღოთ ნებისმიერი $P>0$ რიცხვი. რადგან $\lim_{x \to a} \varphi(x) = 0$, არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ როცა $0 < |x-a| < \delta$, მაშინ $|\varphi(x)| < \frac{M}{P}$ ანუ $\frac{1}{|\varphi(x)|} > \frac{P}{M}$. ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| > M \cdot \frac{P}{M} = P, \quad \text{თუ} \quad 0 < |x-a| < \delta.$$

ე. ი.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\varphi(x)$ უსასრულოდ მცირეა a წერტილში ($\varphi(x) \neq 0$, $x \neq a$), მაშინ $\frac{1}{\varphi(x)}$ უსასრულოდ დიდია a წერტილში.

თეორემა 9.5. თუ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, მაშინ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

თეორემა 9.5.-ის დამტკიცება წინა თეორემის დამტკიცების ანალოგიურია.

შედეგი. თუ $\varphi(x)$ უსასრულოდ დიდია a წერტილში, მაშინ $\frac{1}{\varphi(x)}$ უსასრულოდ მცირეა a წერტილში.

§ 10. ორი შესანიშნავი ზღვარი

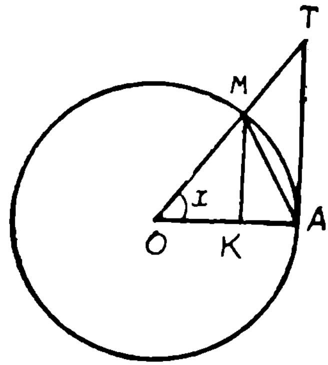
ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორ ზღვარს, რომელთაც დიდი გამოყენება აქვთ მათემატიკურ ანალიზში.

1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

განვიხილოთ ერთეულრადიუსიანი წრეწირის ცენტრალური x კუთხე (ნახ. 17), რომლის რადიანული ზომა აკმაყოფილებს პირობას $0 < x < \frac{\pi}{2}$. რადგან $OA = 1$, ამიტომ

$$\sin x = MK, \ \operatorname{tg} x = AT. \quad (10.1)$$



ნახ. 17

ცხადია, რომ OAM სამკუთხედის ფართობი ნაკლებია OAM სექტორის ფართობზე, რომელიც თავის მხრივ ნაკლებია OAT სამკუთხედის ფართობზე. ე. ი.

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot MK < \frac{1}{2} OA^2 \cdot x < \frac{1}{2} OA \cdot AT.$$

თუ გავითვალისწინებთ (10.1) ტოლობებს, უკანასკნელი თანაფარდობები შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

საიდანაც მივიღებთ

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (10.2)$$

თუ გავყოფთ ამ უტოლობებს $\sin x$-ზე, გვექნება $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, ანუ $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. აქედან ვღებულობთ $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$. რადგან $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ და (10.2) უტოლობის ძალით $2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$, ამიტომ

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}. \quad (10.3)$$

ამრიგად, თუ $0 < x < \frac{\pi}{2}$, მართებულია (10.3) უტოლობები. მაგრამ რადგან $\frac{\sin x}{x}$ და $\frac{x^2}{2}$ ლუწი ფუნქციებია, (10.3) უტოლობები მართე-

ბული იქნება მაშინაც, როდესაც $-\frac{\pi}{2}<x<0$. ვინაიდან $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0$, ამიტომ (10.3)-დან თეორემა 8.7 ძალით

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=0, \quad \text{ანუ} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

2. ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \, ^*$$

ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $x\to+\infty$. როგორც ვიცით, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. ვთქვათ $n=[x]$, სადაც $[x]$ არის x-ის მთელი ნაწილი. ამიტომ $x=n+\alpha$, სადაც $0\leqslant\alpha<1$. რადგან $n\leqslant x<n+1$, ამიტომ:

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}.$$

აქედან მიიღება:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=e$$

და

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e,$$

ამიტომ თეორემა 8.7-ის ძალით მივიღებთ:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

ახლა ვთქვათ $x\to-\infty$. აღვნიშნოთ $x=-y$. მაშინ:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e\cdot 1=e.$$

---

* ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება განხილულია IV თავის § 6-ში.

თუ ორივე შემთხვევას გავაერთიანებთ, მივიღებთ

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

დამტკიცებული ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

მართლაც, მოვახდინოთ ცვლადის გარდაქმნა $y=\frac{1}{x}$. მაშინ, $(x\to 0)\Rightarrow(y\to\infty)$, ამიტომ:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=e.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ ფუნქცია, მისი განსაზღვრისა და ცვლილების არე.
2. განსაზღვრეთ არაზრდადი, არაკრებადი, ზრდადი და კლებადი ფუნქციები.
3. განსაზღვრეთ შექცეული ფუნქცია, რთული ფუნქცია, პარამეტრულად მოცემული ფუნქცია, არაცხადი სახით მოცემული ფუნქცია.
4. განსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკი.
5. განსაზღვრეთ ლუწი, კენტი და პერიოდული ფუნქციები.
6. მოიყვანეთ ფუნქციის ზღვრის ცნება კოშისა და ჰეინეს მიხედვით, აჩვენეთ მათი ეკვივალენტურობა.
7. განსაზღვრეთ ფუნქციის ცალმხრივი ზღვრები.
8. ჩამოაყალიბეთ ფუნქციის ზღვრის არსებობის კოშის კრიტერიუმი.
9. ჩამოაყალიბეთ თეორემები ფუნქციის ზღვრის შესახებ.
10. განსაზღვრეთ უსასრულოდ მცირე და უსასრულოდ დიდი ფუნქციები და მოიყვანეთ მათი თვისებები.

მეოთხე თავი

უწყვეტი ფუნქციები

§ 1. ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში

განსაზღვრება 1.1. $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ იგი განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში და

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0). \tag{1.1}$$

წერტილს, რომელშიც ფუნქცია უწყვეტია, ამ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი ეწოდება.

თუ გამოვიყენებთ ფუნქციის ზღვრის კოშისა და ჰეინეს განსაზღვრებებს, ფუნქციის უწყვეტობის განსაზღვრება შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

ა) $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon, \text{ როცა } |x-x_0|<\delta.$$

ბ) $y=f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის, რომელიც კრებადია x_0 რიცხვისაკენ, $\{f(x_n)\}$ მიმდევრობა კრებადია $f(x_0)$ რიცხვისაკენ.

მოვიყვანოთ ფუნქციის უწყვეტობის კიდევ ერთი განსაზღვრება. (1.1) ტოლობაში $f(x_0)$ გადავიტანოთ მარცხენა ნაწილში და შევიტანოთ ზღვრის ნიშნის ქვეშ. რადგან $x\to x_0$ და $x-x_0\to 0$ პირობები ტოლფასია, მივიღებთ:

$$\lim_{x-x_0\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0. \tag{1.2}$$

$x-x_0$ სხვაობას ეწოდება x არგუმენტის ნაზრდი x_0 წერტილში და Δx სიმბოლოთი აღინიშნება, ხოლო $f(x)-f(x_0)$ სხვაობას არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი ფუნქციის ნაზრდი x_0 წერტილში და Δy ან Δf სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად, $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. (1.2) ტოლობა ახალი აღნიშვნებით ასე ჩაიწერება

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \tag{1.3}$$

(1.3) ტოლობის საფუძველზე ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში შეიძლება შემდეგნაირად განისაზღვროს: ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი რაიმე წერტილში, თუ ამ წერტილში არგუმენტის უსასრულოდ მცირე ნაზრდს შეესაბამება ფუნქციის უსასრულოდ მცირე ნაზრდი.

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ე. ი.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

რადგან $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, ამიტომ

ეს ტოლობა შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x).$$

მაშასადამე, თუ ფუნქცია უწყვეტია, შეიძლება ზღვარზე გადასვლა „ფუნქციის ნიშნის“ ქვეშ — არგუმენტში.

განსაზღვრება 1.2. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება მარჯვნიდან (მარცხნიდან) უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0)\right).$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $f(x)$ ფუნქციას უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში აუცილებელია და საკმარისი, რომ ადგილი ჰქონდეს ტოლობებს:

$$f(x_0+) = f(x_0-) = f(x_0).$$

მაგალითი. დავამტკიცოთ, რომ $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია ნებისმიერ x_0 წერტილში. მართლაც

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| < 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|. \quad (1.4)$$

როგორც III თავის § 10-ში ვაჩვენეთ, $|\sin x| < |x|$, როცა $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. ამიტომ (1. 4)-დან მივიღებთ

$$|\sin x - \sin x_0| < |x - x_0|.$$

აქედან ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, ე. ი. $y=\sin x$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $y=\cos x$ ფუნქცია უწყვეტია $]-\infty, +\infty[$ შუალედის ნებისმიერ წერტილში.

განსაზღვრება 1.3. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $]a, b[$ ინტერვალში, თუ ის უწყვეტია ამ ინტერვალის ყველა წერტილში, ხოლო $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ იგი უწყვეტია $]a, b[$ ინტერვალში და გარდა ამისა, a წერტილში უწყვეტია მარჯვნიდან, b წერტილში კი მარცხნიდან.

ფუნქციის ზღვრის თვისებებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს შემდეგი თეორემების მართებულობა.

თეორემა 1.1. რაიმე წერტილში უწყვეტი ფუნქციების ჯამი, ნამრავლი და შეფარდება (თუ ამ წერტილში მნიშვნელი განსხვავებულია ნულისაგან) აგრეთვე უწყვეტია ამ წერტილში.

თეორემა 1.2. თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში, მაშინ იგი შემოსაზღვრულია ამ წერტილის რაიმე მიდამოში.

თ ე ო რ ე მ ა 1.3. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და $f(x_0) \neq 0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს იგივე ნიშანი, რაც $f(x_0)$-ს.

თ ე ო რ ე მ ა 1.3-ის მართებულობა გამომდინარეობს III თავის თეორემა 8.5-ის შედეგიდან.

თ ე ო რ ე მ ა 1.4. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია რაიმე წერტილში, მაშინ $|f(x)|$) ფუნქციაც უწყვეტია იმავე წერტილში.

ამ თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს III თავის თეორემა 8.8-დან.

თ ე ო რ ე მ ა 1.5. თუ $u=g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ხოლო $f(u)$ ფუნქცია უწყვეტია $u_0=g(x_0)$ წერტილში, მაშინ რთული ფუნქცია $F(x)=f[g(x)]$ უწყვეტია x_0 წერტილში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $u=g(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ როცა $x \to x_0$, მაშინ $u \to u_0$. u_0 წერტილში $f(u)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვაქვს:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f[g(x_0)] = F(x_0).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 2. ფუნქციის წყვეტის წერტილები და მათი კლასიფიკაცია

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში (ცალმხრივ მიდამოში), გარდა შესაძლებელია თვით x_0 წერტილისა. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, თუ შესრულებულია ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

ა) x_0 წერტილში ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.

ბ) ფუნქციას x_0 წერტილში ზღვარი (ცალმხრივი ზღვარი) არ გააჩნია.

გ) x_0 წერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა განსხვავებულია x_0 წერტილში ფუნქციის ზღვრისაგან (ცალმხრივი ზღვრისაგან).

თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას (წყვეტილია) x_0 წერტილში.

როგორც ვიცით, $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი

$$f(x_0-) = f(x_0+) = f(x_0).$$

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.1. თუ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი და არსებობს ცალმხრივი ზღვრები $f(x_0-)$ და $f(x_0+)$, მა-

შინ x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილი (ნახ. 18).

მაგალითად,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{თუ } x>0,\\ x, & \text{თუ } x\leqslant 0,\end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში გააჩნია პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. მართლაც

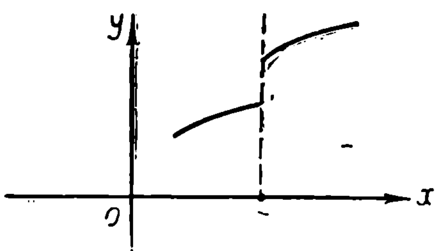
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

ხოლო

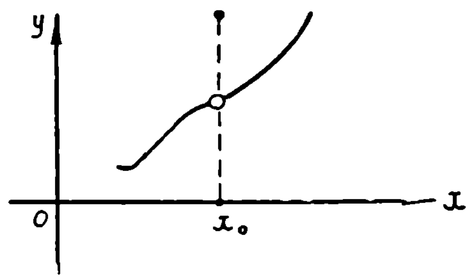
$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} x=0.$$

სხვაობას $f(x+)-f(x-)$ ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ნახტომი x წერტილში. განხილულ მაგალითში $f(0+)-f(0-)=1-0=1$.

თუ x_0 პირველი გვარის წყვეტის წერტილია და $f(x_0+)=f(x_0-)$, მაშინ x_0 წერტილს აცილებადი წყვეტის წერტილი ეწოდება (ნახ. 19).



ნახ. 18



ნახ. 19

მაგალითად

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{თუ } x\neq 0,\\ 1, & \text{თუ } x=0,\end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x_0=0$ წერტილი არის აცილებადი წყვეტის წერტილი.

განსაზღვრება 2.2. x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი, თუ x_0 წერტილში ფუნქციას არ გააჩნია ერთი მაინც ცალმხრივი ზღვარი, ან ცალმხრივი ზღვრებიდან ერთი მაინც უსასრულოდ დიდია. მაგალითად,

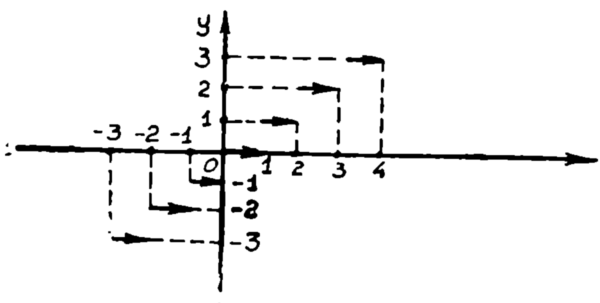
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{თუ } x > 0, \\ x, & \text{თუ } x \leqslant 0 \end{cases}$$

ფუნქციას $x_0=0$ წერტილში მარჯვენა ზღვარი არ გააჩნია, ამიტომ ფუნქციისათვის $x_0=0$ არის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

განსაზღვრება 2.3. $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ის უწყვეტია $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში, გარდა შესაძლებელია სასრული რაოდენობის წერტილებისა, რომლებშიაც ის განიცდის პირველი გვარის წყვეტას და გარდა ამისა მას გააჩნია a და b წერტილებში ცალმხრივი ზღვრები.

ფუნქციას ეწოდება უბან-უბან უწყვეტი რიცხვით ღერძზე, თუ ის უბან-უბან უწყვეტია ნებისმიერ სეგმენტზე.

მაგალითად, ფუნქცია $f(x)=[x]$ უბან-უბან უწყვეტია ნებისმიერ სეგმენტზე. ამ ფუნქციის გრაფიკს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 20).



ნახ. 20

ზოგიერთი კლასის ფუნქციათა წყვეტის წერტილები ხასიათდებიან გარკვეული სპეციფიკური თავისებურებებით. განვიხილოთ მაგალითად მონოტონურ ფუნქციათა კლასი. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1. თუ $f(x)$ ფუნქცია მონოტონურია $]a, b[$ ინტერვალზე, მაშინ $\forall x_0 \in]a, b[$ წერტილზე არსებობს ცალმხრივი

ზღვრები $f(x_0-)$ და $f(x_0+)$, ამასთან, თუ $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია (არაზრდადია), მაშინ:

$$f(x_0-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0+) \quad (f(x_0-) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_0+)) \qquad (2.1)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია $]a, b[$ ინტერვალზე და $x_0 \in]a, b[$. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე როცა $x<x_0$ $(x \in]a, b[)$ შემოსაზღვრულია ზემოდან (რადგან $f(x) \leqslant f(x_0)$), ამიტომ მას გააჩნია ზუსტი ზედა საზღვარი M. ცხადია, $M \leqslant f(x_0)$. ვაჩვენოთ, რომ $f(x_0-)=M$. მართლაც ზუსტი ზედა საზღვრის განსაზღვრების ძალით მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $M-\varepsilon<f(x_0-\delta) \leqslant M$. რადგან $f(x)$ არაკლებადია, ამიტომ როცა $x_0-\delta<x<x_0$ გვექნება $M-\varepsilon< <f(x_0-\delta) \leqslant f(x) \leqslant M$, საიდანაც $M-\varepsilon<f(x) \leqslant M$, როცა $x_0-\delta< <x<x_0$.
ე. ი.

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = M \leqslant f(x_0).$$

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f(x_0+) \geqslant f(x_0)$. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. მონოტონური ფუნქციისათვის განსაზღვრის არის ყოველი წერტილი ან უწყვეტობის წერტილია, ან წარმოადგენს ამ ფუნქციის პირველი გვარის წყვეტის წერტილს, ე. ი. მონოტონურ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

მართლაც, (2.1) უტოლობების ძალით, თუ $f(x_0-)=f(x_0+)$, მაშინ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი, ხოლო, თუ $f(x_0-) \neq =f(x_0+)$, მაშინ x_0 წარმოადგენს $f(x)$-ის პირველი გვარის წყვეტის წერტილს.

თ ე ო რ ე მ ა 2.2. მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია. x_0 იყოს $f(x)$-ის წყვეტის წერტილი, მაშინ (2.1)-ის ძალით

$$f(x_0-) < f(x_0+).$$

რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის სიმკვრივის თვისების ძალით (იხ. II თავის § 2) არსებობს რაციონალური რიცხვი r ისეთი, რომ

$$f(x_0-) < r < f(x_0+).$$

ამრიგად, წყვეტის ყოველ წერტილს შეესაბამება გარკვეული რაციონალური რიცხვი. თუ x_1 და x_2 $(x_1<x_2)$ წყვეტის წერტილებია და

r_1 და r_2 მათი შესაბამისი რაციონალური რიცხვებია, მაშინ $r_1 < f(x_1+) \leqslant f(x_2-) < r_2$, ე. ი. $r_1 < r_2$. მაშასადამე, წყვეტის განსხვავებულ წერტილებს შეესაბამება განსხვავებული რაციონალური რიცხვები; ამრიგად, დადგენილია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა წყვეტის წერტილთა სიმრავლესა და რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლის რაღაც ქვესიმრავლეს შორის. რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე I თავის თეორემა 6.5-ის ძალით თვლადია, ამიტომ მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არა უმეტესი თვლადია. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 3. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. (ვაიერშტრასის პირველი თეორემა). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული. მაშინ ნებისმიერი $n \in N$ რიცხვისათვის იარსებებს ისეთი $x_n \in [a, b]$ რიცხვი, რომ $|f(x_n)| \to n$. $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია და ამიტომ მისგან გამოიყოფა კრებადი ქვემიმდევრობა. ვთქვათ $\{x_{n_k}\}$ არის $\{x_n\}$ მიმდევრობის კრებადი ქვემიმდევრობა. დავუშვათ $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

ცხადია $x_0 \in [a, b]$. ამასთანავე

$$|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty .$$

ამრიგად, x_0 წერტილი იქნება $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი, რაც თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემაში არსებითია, რომ ფუნქცია უწყვეტია სეგმენტზე. ინტერვალზე უწყვეტი ფუნქციები საზოგადოდ არ არიან შემოსაზღვრული ამ ინტერვალზე. მაგალითად, $y = \frac{1}{x}$ ფუნქცია უწყვეტია $]0; 1[$ ინტერვალზე, მაგრამ არ არის შემოსაზღვრული მასზე.

ახლა, ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია I შუალედში (ეს შუალედი შეიძლება იყოს სეგმენტი, ინტერვალი, ნახევრად სეგმენტი).

თუ I შუალედში არსებობს ისეთი ξ_1 წერტილი, რომ (იხ. III თავი, § 3)

$$f(\xi_1) = \sup_{x\in I} f(x),$$

მაშინ ამბობენ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს I შუალედზე თავის ზუსტ ზედა საზღვარს; ასევე, თუ I შუალედში არსებობს ისეთი ξ_2 წერტილი, რომ

$$f(\xi_2)=\inf_{x\in I} f(x),$$

მაშინ $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს I შუალედზე.

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. (ვაიერშტრასის მეორე თეორემა). სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია აღწევს ამ სეგმენტზე თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, მაშინ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $x\in[a, b]$ ისეთი, რომ

$$M\geqslant f(x)>M-\varepsilon.$$

ავიღოთ ε_n მიმდევრობა, რომელიც კრებადია ნულისაკენ. ყოველი $n\in N$-სათვის $x_n\in[a, b]$ იყოს ისეთი წერტილი, რომელიც

$$M\geqslant f(x_n)>M-\varepsilon_n \tag{3.1}$$

უტოლობას აკმაყოფილებს. ცხადია მიღებული $\{x_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან გამოიყოფა კრებადი $\{x_{n_k}\}$ ქვემიმდევრობა. ვთქვათ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=x_0.$$

რადგან $x_{n_k}\in[a, b]$, ამიტომ $x_0\in[a, b]$. (3.1) უტოლობების ძალით

$$M\geqslant f(x_{n_k})>M-\varepsilon_{n_k},$$

თუ ამ უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $k\to\infty$, მივიღებთ

$$M=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k})=f(x_0).$$

ამრიგად, $f(x)$ ფუნქცია აღწევს თავის ზუსტ ზედა საზღვარს $[a, b]$ სეგმენტზე x_0 წერტილში.

ანალოგიურად მტკიცდება $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი x_1 წერტილის არსებობა, სადაც f აღწევს თავის ზუსტ ქვედა საზღვარს. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციის ზუსტი ზედა (ზუსტი ქვედა) საზღვარი, რადგანაც ის მიიღწევა, წარმოადგენს ამ ფუნქციის მაქსიმალურ (მინიმალურ) მნიშვნელობას. ამიტომ თეორემა 3.2 ასე შეიძლება ჩამოყალიბდეს: სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას ამ სეგმენტზე აქვს მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი.

$f(x)$ ფუნქციის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობანი $[a, b]$ სეგმენტზე აღინიშნება შესაბამისად სიმბოლოებით:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ინტერვალზე ან ნახევრად სეგმენტზე უწყვეტმა ფუნქციამ შეიძლება ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა ან ზუსტ ქვედა საზღვარს. მართლაც $]0, 1[$ ინტერვალზე ფუნქცია $f(x)=x$ ვერ მიაღწევს ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს ამ ინტერვალზე.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. სეგმენტზე წყვეტილმა ფუნქციამ შეიძლება მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს. მართლაც, დირიხლეს $D(x)$ ფუნქცია $[0, 1]$-ზე აღწევს ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. შეიძლება ფუნქცია შემოსაზღვრული იყოს სეგმენტზე, მაგრამ მან ვერ მიაღწიოს თავის ზუსტ ზედა და ზუსტ ქვედა საზღვრებს. მაგალითად ასეთია შემდეგი წყვეტილი ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{თუ} \quad 0\leqslant x<1, \\ 1-x, & \text{თუ} \quad 1\leqslant x<2, \\ x-2, & \text{თუ} \quad 2\leqslant x\leqslant 3. \end{cases}$$

ცხადია $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 3} f(x)=2$, $\inf\limits_{0\leqslant x\leqslant 3} f(x)=-1$, მაგრამ ისინი არ მიიღწევა.

თ ე ო რ ე მ ა 3.3 (ბოლცანო). ვთქვათ f ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს სხვადასხვა ნიშანი აქვთ, მაშინ ამ სეგმენტში მოიძებნება ერთი მაინც c წერტილი, ისეთი, რომ $f(c)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი შუაზე. თუ სეგმენტის შუაწერტილში ფუნქციის მნიშვნელობა ნულის ტოლია, თეორემა დამტკიცებულია, წინააღმდეგ შემთხვევაში მიღებული სეგმენტებიდან $[a_1, b_1]$-ით აღვნიშნოთ ის, რომლის ბოლოებზეც ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშანი. შემდეგ $[a_1, b_1]$ სეგმენტი გავყოთ შუაზე. თუ სეგმენტის შუაწერტილში $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულისაგან განსხვავებულია, მაშინ $[a_2, b_2]$-ით აღვნიშნოთ ის სეგმენტი, რომლის ბო-

ლოებზე მას სხვადასხვა ნიშანი აქვს და ა. შ. თუ რომელიმე საფეხურზე ფუნქციის მნიშვნელობა მიღებული სეგმენტის შუაწერტილში იქნება ნულის ტოლი, თეორემა იქნება მართებული და პროცესი შევწყვიტოთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში დაყოფის პროცესი გავაგრძელოთ. მივიღებთ ჩალაგებულ სეგმენტთა $\{[a_k, b_k]\}$ მიმდევრობას. რადგანაც $b_k - a_k \to 0$, ამიტომ II თავის თეორემა 5.2-ის ძალით არსებობს ერთადერთი c წერტილი, რომელიც ყველა სეგმენტს ეკუთვნის. ცხადია, რომ

$$\lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} b_k = c. \tag{3.2}$$

რადგან $[a_k, b_k]$ სეგმენტის ბოლოებზე $f(x)$ ფუნქციას სხვადასხვა ნიშანი აქვს, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

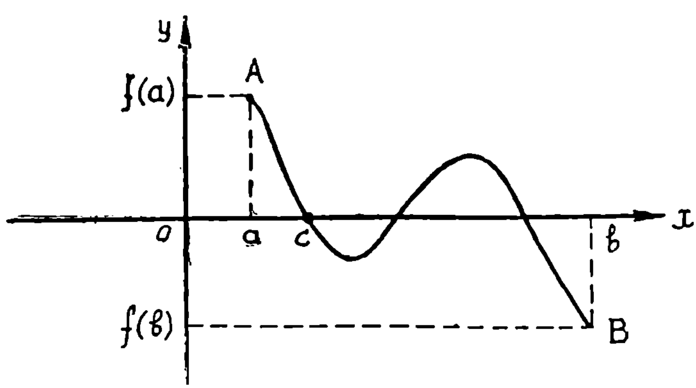
$$f(a_k) > 0 \quad \text{და} \quad f(b_k) < 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.3}$$

თუ (3.3) უტოლობებში გადავალთ ზღვარზე და გავითვალისწინებთ (3.2) ტოლობებს, მივიღებთ

$$f(c) \leqslant 0 \quad \text{და} \quad f(c) \geqslant 0.$$

ეს კი ნიშნავს, რომ $f(c) = 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ უწყვეტი $y = f(x)$ წირის A და B წერტილები მდებარეობენ Ox ღერძის სხვადასხვა მხარეს, მაშინ ეს წირი გადაკვეთს Ox ღერძს ერთ წერტილში მაინც (ნახ. 21).



ნახ. 21

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ბოლცანოს თეორემის გამოყენებით შეიძლება დავადგინოთ, რომ ნამდვილ კოეფიციენტებიან კენტი ხარისხის ალგებრულ

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0 \tag{3.4}$$

განტოლებას აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.

მართლაც, ვთქვათ

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1}.$$

აქედან

$$f(x) = x^{2n+1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right).$$

გარკვეულობისათვის დავუშვათ, რომ $a_0 > 0$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

ამრიგად, მოიძებნება რიცხვები a და b ისეთი, რომ $f(a)<0$, $f(b)>0$, ამიტომ თეორემა 3.3-ის ძალით არსებობს ერთი მაინც ისეთი $c\ (a<c<b)$ რიცხვი, რომ $f(c)=0$, ე. ი. c არის (3. 4) განტოლების ფესვი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. განტოლებას $x - \cos x = 0$ აქვს ფესვი $]0, \pi[$ ინტერვალში.

მართლაც, ფუნქცია $f(x) = x - \cos x$ უწყვეტია $[0, \pi]$ სეგმენტზე და $f(0) \cdot f(\pi) < 0$.

თ ე ო რ ე მ ა 3.4. (კოში). თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a) \neq f(b)$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია მიიღებს ყველა მნიშვნელობას $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $f(a) < f(b)$. ავიღოთ $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს შორის რაიმე P რიცხვი $f(a) < P < f(b)$. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$\varphi(x) = f(x) - P.$$

ცხადია, რომ $\varphi(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $\varphi(a) = f(a) - P < 0$, ხოლო $\varphi(b) = f(b) - P > 0$, ე. ი. $\varphi(x)$ აკმაყოფილებს თეორემა 3.3-ის პირობებს, ამიტომ $[a, b]$-ზე არსებობს ერთი მაინც c წერტილი ისეთი, რომ $\varphi(c) = 0$ ან რაც იგივეა

$$f(c) = P.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ ბოლცანოს თეორემა არის კოშის თეორემის კერძო შემთხვევა. კოშის თეორემას ხშირად უწოდებენ თეორემას შუალედური მნიშვნელობის შესახებ.

ამ თეორემის გეომეტრიული შინაარსი შემდეგში მდგომარეობს: თუ უწყვეტ წირს ჰკვეთს $y=A$ და $y=B$ წრფეები, მაშინ მას ჰკვეთს ყოველი $y=C$ წრფე, რომელიც მდებარეობს მათ შორის.

შ ე დ ე გ ი 1. თუ ფუნქცია უწყვეტია სასრულ ან უსასრულო შუალედზე და მუდმივი არ არის, მაშინ მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე აგრეთვე წარმოადგენს შუალედს.

შ ე დ ე გ ი 2. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია ამ სეგმენტზე ღებულობს ყველა მნიშვნელობას, რომელიც მოთავსებულია მის უდიდეს და უმცირეს მნიშვნელობებს შორის, ე. ი. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობათა არე სეგმენტია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თეორემა 3.4 საზოგადოდ მართებული არ არის სეგმენტზე განსაზღვრული წყვეტილი ფუნქციისათვის. ამასთან შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის თვისება, მიიღოს შუალედური მნიშვნელობა, არ არის უწყვეტობის ეკვივალენტური. არსებობს წყვეტილი ფუნქცია რომელიც ღებულობს ყველა შუალედურ მნიშვნელობას. მართლაც, ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{თუ} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{თუ} \quad x=0\end{cases}$$

წყვეტილია $x=0$ წერტილში, მაგრამ ის ყოველ ინტერვალში, რომელიც შეიცავს ამ წერტილს, ღებულობს ყველა მნიშვნელობას —1-სა და 1-ს შორის.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 3.1 E სიმრავლეზე განსაზღვრულ $f(x)$ ფუნქციას ეწოდება თანაბრად უწყვეტი E სიმრავლეზე, თუ ნებისმიერი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ ε-ზე, ისეთი, რომ E სიმრავლის ნებისმიერი x' და x'' წერტილებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x'-x''|<\delta$, მართებულია უტოლობა

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

თ ე ო რ ე მ ა 3.5. (კანტორი)*. სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია თანაბრად უწყვეტია ამ სეგმენტზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $f(x)$ ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი ამ სეგმენტზე. მაშინ არსებობს დადებითი ε_0 რიცხვი ისეთი, რომ ნებისმიერი $\delta>0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტზე ორი წერტილი x'

* კანტორი (1845—1918) — გერმანელი მათემატიკოსი.

და x'', რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $|x''-x'|<\delta$, ხოლო $|f(x'')-f(x')|\geqslant\varepsilon_0$.

განვიხილოთ ნულისაკენ კრებადი დადებით რიცხვთა $\{\delta_n\}$ მიმდევრობა. აღებული δ_n რიცხვისათვის მოიძებნება $[a, b]$ სეგმენტის ისეთი x'_n და x''_n წერტილები, რომ

$$|x''_n - x'_n| < \delta_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.5}$$

ხოლო

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3.6}$$

რადგან $\{x'_n\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, ამიტომ მისგან შეგვიძლია გამოვყოთ კრებადი ქვემიმდევრობა $\{x'_{n_k}\}$.

ვთქვათ

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_0.$$

ცხადია $x_0\in[a, b]$.

(3.5) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} (x''_{n_k} - x'_{n_k}) = 0,$$

საიდანაც

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \lim_{k\to\infty} [(x''_{n_k} - x'_{n_k}) + x'_{n_k}] = x_0.$$

(3.6) უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.7}$$

რადგან $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ იგი უწყვეტია x_0 წერტილში. მაშასადამე

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0).$$

ახლა თუ გადავალთ ზღვარზე (3.7) უტოლობაში, როდესაც $k\to\infty$, მივიღებთ:

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0,$$

ე. ი. $0\geqslant\varepsilon_0$, რაც შეუძლებელია. ე. ი. ჩვენი დაშვება იმის შესახებ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არ არის თანაბრად უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, არასწორია. თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 4.1. თუ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) და უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია $x=f^{-1}(y)$, რომელიც აგრეთვე ზრდადია (კლებადია) და უწყვეტი თავის განსაზღვრის არეში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია და უწყვეტი $[a, b]$ სეგმენტზე. აღვნიშნოთ Y-ით $f(x)$ ფუნქციის ცვლილების არე. თეორემა 3.4-ის შედეგი 2-ის ძალით Y იქნება სეგმენტი. კერძოდ $Y=[\alpha, \beta]$, სადაც $\alpha=f(a)$ და $\beta=f(b)$. რადგან $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ცხადია არსებობს მისი შექცეული ფუნქცია $x=f^{-1}(y)$, რომელიც განსაზღვრულია $Y=[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე.

დავამტკიცოთ, რომ $f^{-1}(y)$ უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე. განვიხილოთ $y_0\in[\alpha, \beta]$ წერტილი. ავიღოთ $\{y_n\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. ვთქვათ $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y_n) = x_n$ $(n = 1, 2\cdots)$,

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{4.1}$$

ანუ

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0). \tag{4.2}$$

დავუშვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$. მაშინ $f(x)$ ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვექნება

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi).$$

მაგრამ $f(x_n) = y_n$ და მივიღებთ

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} y_n = y_0 = f(x_0).$$

რადგან $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\xi=x_0$. ე. ი. მართებულია (4.1) ტოლობა.

ახლა ვთქვათ $\{x_n\}$ მიმდევრობა განშლადია. მაშინ მოიძებნება $\{x_n\}$ მიმდევრობის ისეთი ორი ქვემიმდევრობა $\{x_{n_k}\}$ და $\{x_{m_j}\}$, რომლებიც სხვადასხვა რიცხვებისაკენ იქნება კრებადი. დავუშვათ

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi_1, \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \xi_2 \quad (\xi_1 \neq \xi_2).$$

მაშინ $f(x)$-ის უწყვეტობის გამო გვექნება:

$$f(\xi_1) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y_0 = f(x_0)$$

და

$$f(\xi_2) = \lim_{j\to\infty} f(x_{m_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{m_j} = y_0 = f(x_0).$$

ე. ი.

$$f(\xi_1) = f(x_0) = f(\xi_2).$$

რადგან $f(x)$ ზრდადია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\xi_1 = \xi_2$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ე. ი. $\{x_n\}$ არ შეიძლება იყოს განშლადი.

ამრიგად $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და მართებულია (4.1) ტოლობა, რაც თავის მხრივ ნიშნავს (4.2) ტოლობის მართებულობას. რადგან $\{y_n\}$ მიმდევრობა ნებისმიერად იყო აღებული, (4.2) ტოლობის ძალით დავასკვნით, რომ

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0).$$

ე. ი. $f^{-1}(y)$ უწყვეტია y_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

§ 5. ელემენტარული ფუნქციები და მათი უწყვეტობა

ანალიზური სახით მოცემულ ფუნქციებს შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავთ ე. წ. ელემენტარულ ფუნქციებს. თავდაპირველად განვიხილოთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები. ასე უწოდებენ შემდეგ ფუნქციებს:

1. მუდმივი $y = C$, სადაც C ნამდვილი რიცხვია.
2. მაჩვენებლიანი ფუნქცია $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
3. ლოგარითმული ფუნქცია $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
4. ხარისხოვანი ფუნქცია $y = x^\alpha$, სადაც α ნულისაგან განსხვავებული ნამდვილი რიცხვია.
5. ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
6. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

დავადგინოთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების თვისებები და გრაფიკები.

1. მუდმივი — ეს ფუნქცია ყოველ ნამდვილ რიცხვს შეუსაბამებს ერთიდაიგივე C რიცხვს. ამ ფუნქციის გრაფიკი არის აბსცისთა ღერძის პარალელური წრფე, რომელიც დაშორებულია მისგან $|C|$ მანძილით. ამასთან ეს წრფე მდებარეობს Ox ღერძის ზემოთ, როცა $C>0$ და Ox ღერძის ქვემოთ, როცა $C<0$. ცხადია, რომ მუდმივი ფუნქცია უწყვეტია.

2. მათემატიკის სასკოლო კურსიდან ცნობილია რაციონალურ-მაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება. ცნობილია აგრეთვე, რომ, თუ α და β რაციონალური რიცხვებია, მაშინ:

1) $a^{\alpha}>0$,

2) $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}\cdot b^{\alpha}$,

3) $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$,

4) $a^{\alpha}<a^{\beta}$ $(\alpha<\beta,\ \ a>1)$, $a^{\alpha}>a^{\beta}$ $(\alpha<\beta,\ 0<a<1)$,

5) $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}$,

6) $a^{\alpha_n}\to+\infty,\ \ \alpha_n\to+\infty\ \ (a>1)$,

7) $a^{\alpha_n}\to 0,\ \alpha_n\to-\infty\ (a>1,\ \alpha_n\in Q)$.

განვაზოგადოთ ხარისხის ცნება ნებისმიერი ნამდვილი მაჩვენებლისათვის, რისთვისაც შემოვიღოთ ირაციონალურ მაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება. წინასწარ დავამტკიცოთ შემდეგი ლემა.

ლ ე მ ა 5.1. რაციონალურ რიცხვთა ნებისმიერი კრებადი α_n მიმდევრობისათვის კრებადია აგრეთვე a^{α_n} მიმდევრობაც $(a>0)$, ამასთან, თუ β_n რაციონალურ რიცხვთა ისეთი კრებადი მიმდევრობაა, რომ $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\alpha_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\beta_n}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $a>1$ და γ_n რაციონალურ რიცხვთა რაიმე ზრდადი, კრებადი მიმდევრობაა. ცხადია, რომ a^{γ_n} აგრეთვე ზრდადი მიმდევრობაა. ვინაიდან γ_n მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ არსებობს ისეთი რაციონალური r რიცხვი, რომ ნებისმიერი n-ისათვის $\gamma_n<r$ და მაშასადამე $a^{\gamma_n}<a^r$. ამრიგად, a^{γ_n} ზრდადი და შემოსაზღვრული მიმდევრობაა, ამიტომ იგი კრებადია (თავი II, თეორემა 5.1). ანალოგიური მსჯელობით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ a^{γ_n} მიმდევრობა კრებადია იმ შემთხვევაშიც, როცა $0<a<1$.

განვიხილოთ ახლა რაციონალურ რიცხვთა ნებისმიერი კრებადი α_n

მიმდევრობა ისეთი, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$. ვაჩვენოთ, რომ a^{α_n} მიმდევრობა აგრეთვე კრებადია და $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\gamma_n}$. განვიხილოთ სხვაობა:

$$a^{\alpha_n} - a^{\gamma_n} = a^{\gamma_n}(a^{\alpha_n-\gamma_n} - 1). \tag{5.1}$$

ვინაიდან $\alpha_n - \gamma_n \to 0$, როცა $n \to \infty$, ამიტომ (თავი II, § 6, მაგალითი 6):

$$\lim_{n\to\infty} (a^{\alpha_n-\gamma_n} - 1) = 0. \tag{5.2}$$

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ a^{γ_n} მიმდევრობა კრებადია, ამიტომ (5.1)-დან (5.2)-ის გამოყენებით გვაქვს:

$$\lim_{n\to\infty} (a^{\alpha_n} - a^{\gamma_n}) = 0,$$

ანუ

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\gamma_n}.$$

ვინაიდან α_n მიმდევრობა ნებისმიერად იყო აღებული, ამიტომ ლემა დამტკიცებულია.

ახლა შემოვიყვანოთ ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის ცნება.

განსაზღვრება 5.1. $a>0$ რიცხვის ირაციონალური x ხარისხი (a^x) განისაზღვრება ტოლობით:

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n},$$

სადაც x_n რაციონალურ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (იხ. თავი II, § 2, მაგალითი 4).*

ამრიგად, თუ $a>0$, მაშინ a^x ფუნქცია განსაზღვრულია ნებისმიერი ნამდვილი x-ისათვის. ამ ფუნქციას მაჩვენებლიანი ფუნქცია ეწოდება. როცა $a=1$ ნებისმიერი x-ისათვის გვაქვს $1^x=1$ ცხადია ეს

---

* ეს განსაზღვრება არის კორექტული, რადგანაც ლემა 5.1-ის თანახმად a^x-ის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული x_n მიმდევრობაზე.

შემთხვევა არ არის საინტერესო, ამიტომ შემდგომში ყოველთვის ვიგულისხმებთ, რომ $a \neq 1$.

მაჩვენებლიან ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) a^x ფუნქცია ზრდადია, როცა $a > 1$ და კლებადია, როცა $0 < a < 1$;

2) $a^x > 0$;

3) a^x ფუნქცია უწყვეტია;

4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;

5) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

6) $(a^x)^y = a^{xy}$;

7) $a^x \to +\infty$, $x \to +\infty$ $(a > 1)$;

8) $a^x \to 0$, $x \to -\infty$ $(a > 1)$.

ვაჩვენოთ ამ თვისებების მართებულობა.

1) ვთქვათ $a > 1$. ვაჩვენოთ, რომ a^x ფუნქცია ზრდადია. ავიღოთ r რაციონალური და α ირაციონალური რიცხვი ისეთი, რომ $r < \alpha$. განვიხილოთ α-საკენ კრებადი რაციონალურ რიცხვთა ისეთი r_n ზრდადი მიმდევრობა, რომ ნებისმიერი n-ისათვის $r < r_n$. რადგან $a > 1$, გვაქვს $a^r < a^{r_n}$, საიდანაც a^{r_n} მიმდევრობის ზრდადობის გამო, მივიღებთ $a^r < \lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = a^\alpha$, ე. ი. $a^r < a^\alpha$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ, თუ $\alpha < r$, მაშინ $a^\alpha < a^r$.

დავუშვათ ახლა, რომ α და β ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვებია ისეთი, რომ $\alpha < \beta$. როგორც ვიცით, ყოველ ორ ნამდვილ რიცხვს შორის არსებობს რაციონალური რიცხვი (იხ. თავი II, § 2, მაგალითი 4).

ვთქვათ r რაციონალური რიცხვია ისეთი, რომ $\alpha < r < \beta$, მაშინ ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად გვაქვს $a^\alpha < a^r < a^\beta$, ე. ი $a^\alpha < a^\beta$.

ამრიგად, ნებისმიერი $x < y$ ნამდვილი რიცხვებისათვის გვაქვს $a^x < a^y$, ე. ი. თუ $a > 1$, მაშინ a^x ფუნქცია ზრდადია.

სავსებით ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ $0 < a < 1$, მაშინ a^x ფუნქცია კლებადია.

2) ვთქვათ $a > 1$ $(0 < a < 1)$ და x ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვია. ავიღოთ რაიმე რაციონალური r რიცხვი ისეთი, რომ $x > r$, $(x < r)$, მაშინ 1) თვისების ძალით გვაქვს:

$$a^x > a^r > 0.$$

3) a^x ფუნქციის უწყვეტობის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ x_0-საკენ კრებადი ნებისმიერი x_n მიმდევრობისათვის $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. ავაგოთ რაციონალურ რიცხვთა α_n და β_n მიმდევრობები, ისეთი, რომ

$$x_n - \frac{1}{n} < \alpha_n < x_n < \beta_n < x_n + \frac{1}{n}. \tag{5.3}$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = x_0$ და მაშასადამე:

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n} = a^{x_0}. \tag{5.4}$$

თუ $a>1$ $(0<a<1)$, მაჩვენებლიანი ფუნქციის ზრდადობის (კლებადობის) გამო (5.3)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$a^{\alpha_n} < a^{x_n} < a^{\beta_n} \ (a^{\alpha_n} > a^{x_n} > a^{\beta_n}).$$

აქედან (5.4)-ის ძალით მივიღებთ:

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0}.$$

4) $a^x \cdot b^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b^{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n} \cdot b^{x_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (ab)^{x_n} = (ab)^x.$

5) $a^x \cdot a^y = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a^{x_n} \cdot a^{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}.$

6) თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $y=n$ ნატურალური რიცხვია, მაშინ:

$$(a^x)^n = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdots a^x}_{n\text{-ჯერ}} = a^{\overbrace{x+x+\cdots+x}^{n\text{-ჯერ}}} = a^{xn}. \tag{5.5}$$

თუ n უარყოფითი მთელი რიცხვია, გვაქვს:

$$(a^x)^n = \frac{1}{(a^x)^{-n}} = \frac{1}{a^{-xn}} = a^{xn}.$$

ცხადია, რომ $(a^x)^0 = 1 = a^0$.

დავუშვათ ახლა, რომ $y=\frac{1}{n}$, სადაც n ნატურალური რიცხვია. დავამტკიცოთ, რომ $(a^x)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{x}{n}}$. ე. ი. $a^{\frac{x}{n}}$ წარმოადგენს n-ური ხარისხის ფესვს a^x რიცხვიდან. ამისათვის კი, ფესვის განსაზღვრების თანახმად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ:

$$\left(a^{\frac{x}{n}}\right)^n=a^x.$$

ეს ტოლობა კი გამომდინარეობს (5.5)-დან.

თუ $y=\frac{m}{n}$, სადაც m მთელი რიცხვია, ხოლო n ნატურალური, მაშინ უკვე დამტკიცებულის თანახმად გვაქვს:

$$(a^x)^{\frac{m}{n}}=[(a^x)^m]^{\frac{1}{n}}=(a^{xm})^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{xm}{n}}.$$

ამრიგად, დავამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი x ნამდვილი რიცხვისა და r რაციონალური რიცხვისათვის

$$(a^x)^r=a^{xr}. \tag{5.6}$$

ვთქვათ, ახლა y ირაციონალური რიცხვია. განვიხილოთ y-საკენ კრებადი რაციონალურ რიცხვთა რაიმე y_n მიმდევრობა. მაშინ ირაციონალურმაჩვენებლიანი ხარისხის განსაზღვრების, (5.6)-ისა და მაჩვენებლიანი ფუნქციის უწყვეტობის გამო გვაქვს:

$$(a^x)^y=\lim_{n\to\infty}(a^x)^{y_n}=\lim_{n\to\infty}a^{xy_n}=a^{xy}.$$

7) ავიღოთ ნებისმიერი $M>0$ რიცხვი. არსებობს რაციონალური რიცხვი α ისეთი, რომ $a^\alpha>M$, ამიტომ

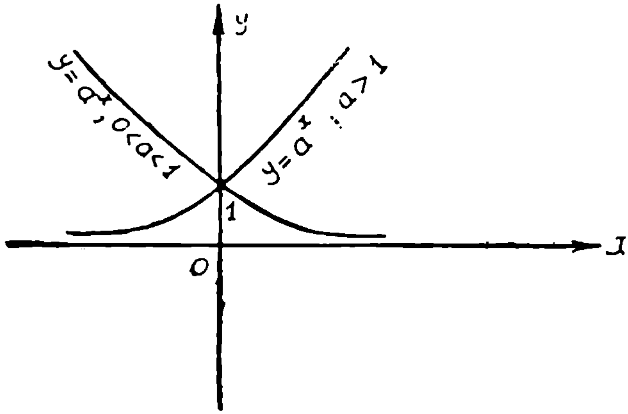
$$M<a^\alpha<a^x,\quad \forall x>\alpha,$$

ე. ი. $a^x\to+\infty$, როცა $x\to+\infty$.

8) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a^{-x}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{a^y}=0.$

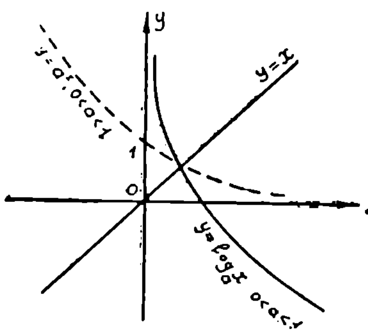
ამრიგად, მაჩვენებლიანი ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty,+\infty[$. შუალედი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]0,+\infty[$ შუალედი.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 22-ე ნახაზზე.

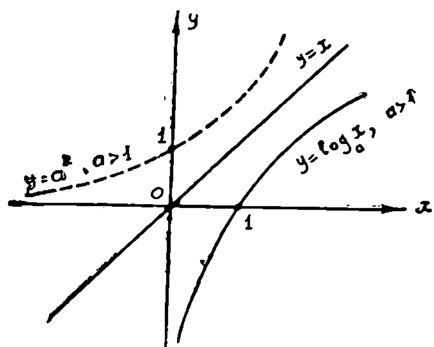


ნახ. 22

3. ლოგარითმული ფუნქცია წარმოადგენს მაჩვენებლიანი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას, ამიტომ $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$) ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y=a^x$ ფუნქციის გრაფიკისა $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ. 23—24).



ნახ. 23



ნახ. 24

მაჩვენებლიანი ფუნქციის თვისებებიდან გამომდინარეობს, მისი შექცეული ლოგარითმული ფუნქციის თვისებები:

1. ლოგარითმული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]0, +\infty[$, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე კი ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლე;

2. ლოგარითმული ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს ჰკვეთს (1; 0) წერტილში.

3. თუ $0<a<1$, მაშინ $y=\log_a x$ ფუნქცია კლებადია, ხოლო თუ $a>1$ — ზრდადია.

4. ლოგარითმული ფუნქცია უწყვეტია მის განსაზღვრის არეში.

4) ვთქვათ n ნატურალური რიცხვია. ვინაიდან $x^n=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n\text{-ჯერ}}$, ამიტომ $y=x^n$ ფუნქცია უწყვეტია მთელს რიცხვით ღერძზე, როგორც n უწყვეტი ფუნქციის ნამრავლი.

ფუნქცია $y=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$, $n\in N$ უწყვეტია, როცა $x\neq 0$ (თეორემა 1.1).

თუ n კენტი ნატურალური რიცხვია, მაშინ $y=\sqrt[n]{x}$ ფუნქცია წარმოადგენს $y=x^n$ ზრდადი, უწყვეტი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას, ამიტომ იგი ზრდადი და უწყვეტია მთელს რიცხვით ღერძზე.

თუ n ლუწი ნატურალური რიცხვია, მაშინ $y=\sqrt[n]{x}$ ფუნქცია წარმოადგენს $y=x^n$ $(x\geqslant 0)$ ზრდადი, უწყვეტი ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას, ამიტომ იგი ზრდადი და უწყვეტია, როცა $x\geqslant 0$.

თუ $r=\dfrac{m}{n}$, $(n\in N,\ m\in z)$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ $y=x^r=(\sqrt[n]{x})^m$ ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x>0$, რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ თეორემის ძალით (თეორემა 1.5).

თუ α ირაციონალური რიცხვია, მაშინ ხარისხოვანი ფუნქცია $y=x^\alpha$ განსაზღვრულია ნებისმიერი $x>0$-სათვის და ადგილი აქვს ტოლობას

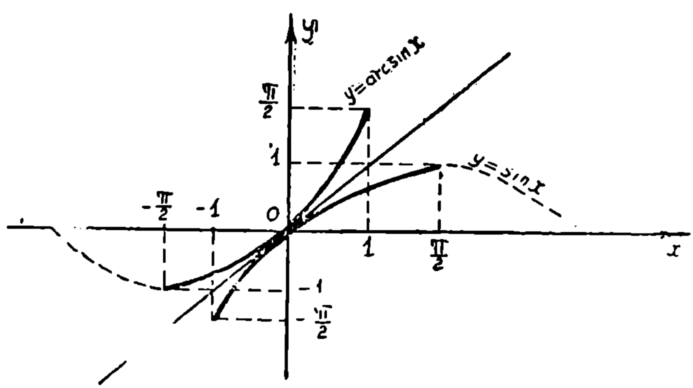
$$x^\alpha=e^{\alpha\ln x}.$$

მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციის უწყვეტობისა და რთული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ თეორემის ძალით, უკანასკნელი ტოლობიდან ცხადია, რომ $y=x^\alpha$ ხარისხოვანი ფუნქცია უწყვეტია, როცა $x>0$.

5. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა განსაზღვრება მკითხველისათვის ცნობილია მათემატიკის სასკოლო კურსიდან. $y=\sin x$ და $y=\cos x$ ფუნქციები უწყვეტი არიან მთელს რიცხვით ღერძზე (იხ. § 1). $y=\mathrm{tg}\,x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე, გარდა $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,

$k \in Z$ სახის წერტილებისა, ხოლო $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქცია — მთელს რიცხვით ღერძზე, გარდა $k\pi$, $k \in Z$ სახის წერტილებისა. $y = \operatorname{tg} x$ და $y = \operatorname{ctg} x$ ფუნქციები უწყვეტი არიან თავიანთ განსაზღვრის არეში, როგორც ორი უწყვეტი ფუნქციის შეფარდება (თეორემა 1.1).

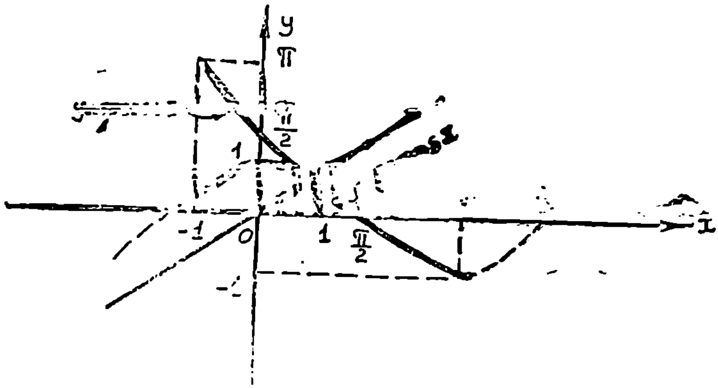
გ. $y = \sin x$ ფუნქცია $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე უწყვეტია და ზრდადი, ამიტომ მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, რომელიც $y = \arcsin x$ სიმბოლოთი აღინიშნება. $y = \arcsin x$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1; 1]$ სეგმენტზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტი. იგი უწყვეტი ფუნქციაა თავის განსაზღვრის არეში, როგორც უწყვეტი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. $y = \arcsin x$ ფუნქციის გრაფიკი სიმეტრიულია $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ ფუნქციის გრაფიკისა $y = x$ წრფის მიმართ (ნახ. 25).



ნახ. 25

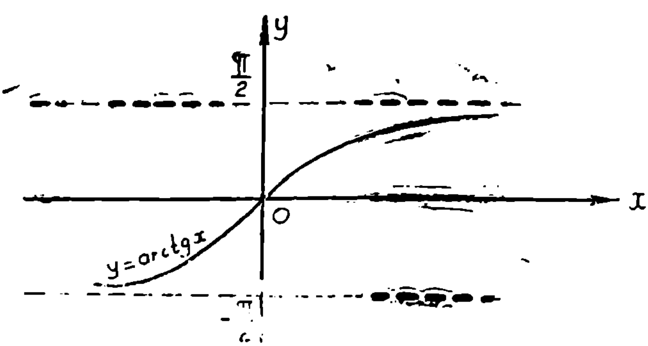
$y = \cos x$ ფუნქცია $[0, \pi]$ სეგმენტზე უწყვეტია და კლებადი, ამიტომ მას გააჩნია შექცეული ფუნქცია, რომელიც $y = \operatorname{arscos} x$ სიმბოლოთი აღინიშნება. $y = \operatorname{arscos} x$ ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1; 1]$ სეგმენტზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $[0, \pi]$ სეგმენტი. იგი უწყვეტი ფუნქციაა თავის განსაზღვრის არეში, როგორც უწყვეტი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. $y = \arccos x$ ფუნქციის გრაფიკი სი-

მეტრიულია $y=\cos x$ ($0\leqslant x\leqslant\pi$) ფუნქციის გრაფიკისა $y=x$ წრფის მიმართ (ნახ. 26).



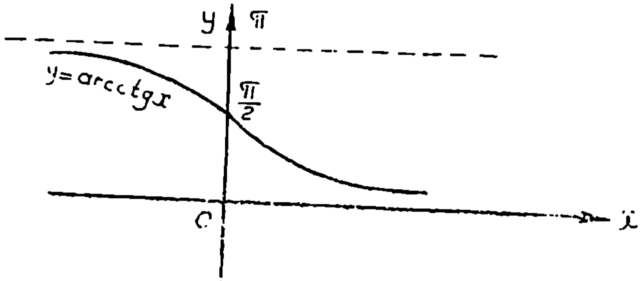
ნახ. 26

$y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქცია განისაზღვრება, როგორც $y=\operatorname{tg} x$ ფუნქციის შექცეული ფუნქცია $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალზე. $y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, ამასთან $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$; იგი უწყვეტი ფუნქციაა, როგორც უწყვეტი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. $y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 27-ე ნახაზზე.



ნახ. 27

$y=\operatorname{arcctg} x$ ფუნქცია წარმოადგენს $y=\operatorname{ctg} x$ ფუნქციის შექცეულ ფუნქციას $]0, \pi[$ ინტერვალზე. $y=\operatorname{arcctg} x$ ფუნქცია განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე და მისი მნიშვნელობათა სიმრავლეა $]0, \pi[$, ამასთან $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x=\pi$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x=0$. იგი უწყვეტი ფუნქციაა, როგორც უწყვეტი ფუნქციის შექცეული ფუნქცია. $y=\operatorname{arcctg} x$ ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 28-ე ნახაზზე.



ნახ. 28

ერთი ფორმულით, ცხადი სახით მოცემულ ფუნქციას ეწოდება ელემენტარული ფუნქცია, თუ იგი შედგენილია ძირითადი ელემენტარული ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

ელემენტარული ფუნქციებია, მაგალითად:

$$y=\ln \operatorname{arctg} x, \quad y=\frac{\sin 2^x-\ln (x+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x^2+\arcsin x}}.$$

არაელემენტარული ფუნქციაა $y=x-[x]$.

თეორემა 1.1, თეორემა 1.5-ისა და ძირითადი ელემენტარულ ფუნქციათა უწყვეტობიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი ელემენტარული ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში.

ელემენტალურ ფუნქციებს, როგორც წესი, ყოფენ შემდეგ კლასებად:

I. მ რ ა ვ ა ლ წ ე ვ რ ე ბ ი (პ ო ლ ი ნ ო მ ე ბ ი). მრავალწევრი ეწოდება შემდეგი სახის ფუნქციას:

$$P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_n x^n=\sum_{k=1}^{n} a_k x^k.$$

II. რაციონალური ფუნქციები. რაციონალური ეწოდება შემდეგი სახით მოცემულ ფუნქციას:

$$Y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

სადაც $P(x)$ და $Q(x)$ მრავალწევრებია.

III. ალგებრული ფუნქციები. ალგებრული ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელიც შედგენილია რაციონალური და რაციონალურ-მაჩვენებლიანი ხარისხოვანი ფუნქციებისაგან მათზე არითმეტიკული ოპერაციებისა და სუპერპოზიციათა სასრულ რიცხვჯერ გამოყენებით.

მაგალითად,

$$y = \sqrt{\sqrt{x} - 1} + x^2$$

ფუნქცია წარმოადგენს ალგებრულ ფუნქციას.

შევნიშნოთ, რომ მრავალწევრების კლასი შედის რაციონალურ ფუნქციათა კლასში, ხოლო რაციონალურ ფუნქციათა კლასი — ალგებრულ ფუნქციათა კლასში.

ალგებრულ ფუნქციას, რომელიც რაციონალური არ არის ირაციონალური ფუნქცია ეწოდება.

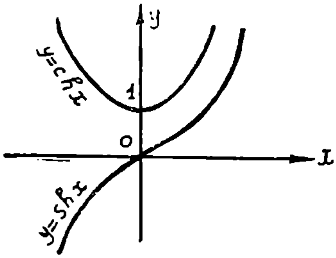
IV. ტრანსცენდენტალური ფუნქციები. ელემენტარულ ფუნქციებს, რომლებიც არ წარმოადგენენ ალგებრულ ფუნქციებს, ეწოდებათ ტრანსცენდენტული ელემენტარული ფუნქციები. შეიძლება ჩვენება, რომ ყველა პირდაპირი და შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები, აგრეთვე მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციები წარმოადგენენ ტრანსცენდენტულ ფუნქციებს.

ამ პარაგრაფის დასასრულს განვიხილოთ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ელემენტარული ფუნქცია, ე. წ. ჰიპერბოლური ფუნქციები. ფუნქციებს

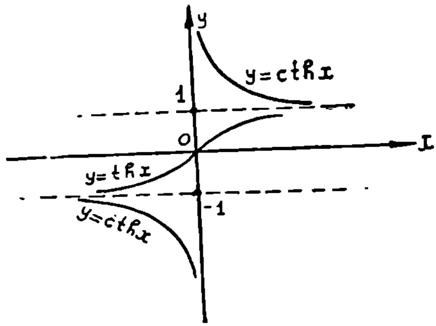
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \ \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

ეწოდება შესაბამისად ჰიპერბოლური სინუსი, კოსინუსი, ტანგენსი და კოტანგენსი. ჰიპერბოლურ ფუნქციათა გრაფიკები მოცემულია 29-ე და 30-ე ნახაზებზე.

$\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ და $\operatorname{th} x$ ფუნქციები განსაზღვრულია მთელს რიცხვით ღერძზე, ხოლო $\operatorname{cth} x$ ფუნქცია — ყველგან გარდა $x=0$ წერტილისა.



ნახ. 29



ნახ. 30

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ადგილი აქვს ფორმულებს:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}y\operatorname{ch}x,$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y.$$

თუ უკანასკნელ ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $y=-x$, მივიღებთ:

$$\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1.$$

§ 6. ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლა

1. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e\quad (a>0,\quad a\neq 1).$$

რადგან $\log_a x$ ფუნქცია უწყვეტია $]0, +\infty[$ შუალედში, ამიტომ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e.$$

კერძოდ, როცა $a=e$, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

2. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a \neq 1, \ \ a > 0).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $a^x - 1 = \alpha$. გვექნება $a^x = 1 + \alpha$ და მივიღებთ-

$$x \ln a = \ln(1 + \alpha),$$

აქედან

$$x = \frac{\ln(1+\alpha)}{\ln a}.$$

როდესაც $x \to 0$, მაშინ $\alpha \to 0$. ამიტომ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha \ln a}{\ln(1+\alpha)} = \ln a \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} = \ln a.$$

კერძოდ, როცა $a = e$, გვექნება:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

3. ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა $(1 + x)^\alpha = 1 + t$. მაშინ:

$$\alpha \ln(1+x) = \ln(1+t),$$

მაშასადამე

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

4. თუ $u(x)$ და $v(x)$ ფუნქციებს აქვთ ზღვარი x_0 წერტილში და, ამასთანავე, $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) > 0$. მაშინ არსებობს $[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის ზღვარი და მართებულია ტოლობა:

$$\lim_{x\to x_0} [u(x)]^{v(x)} = \alpha^\beta,$$

სადაც

$$\alpha = \lim_{x\to x_0} u(x), \quad \beta = \lim_{x\to x_0} v(x).$$

მართლაც, რადგანაც

$$[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to x_0}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}[v(x)\ln u(x)]} = e^{\beta\ln\alpha} = \alpha^{\beta}.$$

§ 7. უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შედარება. o და O სიმბოლოები

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია a წერტილის (a შეიძლება იყოს სასრული ან უსასრულო) რაიმე $u(a)$ მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა. ვიგულისხმოთ, რომ $u(a)$ მიდამოში $\beta(x)\neq 0$.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 7.1. ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია a წერტილში. ვიტყვით, რომ:

1. $\alpha(x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\beta(x)$-თან შედარებით, ხოლო $\beta(x)$ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირესთან შედარებით, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

2. $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A\neq 0 \quad (A \text{ სასრულია}).$$

3. $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ეკვივალენტური (ტოლფასი) უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad \text{და} \quad \text{წერენ} \quad \alpha(x)\sim\beta(x).$$

4. $\alpha(x)$ უსასრულო მცირე n რიგის უსასრულოდ მცირეა $\beta(x)$-თან შედარებით, თუ:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^n(x)} = A\neq 0.$$

ცხადია, რომ თუ $\alpha(x)\sim\beta(x)$, მაშინ $\beta(x)\sim\alpha(x)$, ხოლო თუ $\alpha(x)\sim\beta(x)$ და $\beta(x)\sim\gamma(x)$, მაშინ $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

ანალოგიურად განისაზღვრება უსასრულოდ მცირეთა შედარება, როცა $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. როგორც ვიცით $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ ამიტომ x და $\sin x$ ფუნქციები ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. $\sin 3x$ და $\sin 2x$ ერთი და იმავე რიგის უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to 0$.

მართლაც,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. $\alpha(x)=1-\cos x$ ფუნქცია მეორე რიგის უსასრულოდ მცირეა x-თან შედარებით.

მართლაც

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. $x^2\sin x$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა $1-\cos 2x$-თან შედარებით.

მართლაც

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin x}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=0.$$

ცვლადი სიდიდეების შედარებისას ხშირად გამოიყენება სიმბოლო „O" („O მცირე"). თუ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, მაშინ ეს ასე ჩაიწერება:

$$\alpha(x)=o(\beta(x)),\quad x\to a.$$

(იკითხება: $\alpha(x)$ უდრის o მცირე $\beta(x)$).

კერძოდ ჩანაწერი $\alpha(x)=o(1)$, როცა $x\to a$ ნიშნავს, რომ $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირეა უსასრულოდ მცირეა a წერტილში.

მაგალითად:

$$\sin^4 x=o(x^3)\quad x\to 0,$$
$$(x-a)^3=o((x-a)^2),\ x\to a,$$
$$x^n=o(x^m),\ x\to\infty,\ \text{თუ}\ m>n\ \text{ და }\ m,n\in N.$$

ადვილია შემოწმება, რომ თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში, მაშინ:

$$\alpha(x)\beta(x)=o(\alpha(x)) \quad \text{და} \quad \alpha(x)\beta(x)=o(\beta(x)), \; x\to a.$$

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ამ უსასრულოდ მცირეებს შევცვლით მათი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირე ფუნქციებით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში და $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$ როცა $x\to a$. დავუშვათ, რომ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ არსებობს, ვაჩვენოთ, რომ მაშინ იარსებებს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ და

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

მართლაც

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ეს თეორემა გამოიყენება ორი უსასრულოდ მცირე ფუნქციათა შეფარდების ზღვრის გამოთვლის დროს.

შ ე ნ ი შ ვ ნა. ორი უსასრულოდ მცირე შეიძლება არ იყოს შედარებადი. მართლაც, ფუნქციები $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ და $\beta(x)=x$ უსასრულოდ მცირეებია, როცა $x\to 0$, მაგრამ ზღვარი

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

არ არსებობს.

თ ე ო რ ე მ ა 7.2. $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ უსასრულოდ მცირეთა ეკვივალენტობისათვის, როცა $x\to a$, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x)), \quad x\to a, \tag{7.1}$$

ან

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\alpha(x)), \quad x\to a. \tag{7.2}$$

აუცილებლობა. ვთქვათ $\alpha(x) \sim \beta(x)$. გვაქვს:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

ე. ი.

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \varepsilon(x),$$

სადაც $\varepsilon(x)\to 0$, როცა $x\to a$. გამომდინარე აქედან $\alpha(x) = \beta(x) + \varepsilon(x)\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$, $x \to a$. ამით (7.1) ნაჩვენებია. ანალოგიურად მტკიცება (7.2).

საკმარისობა. ვთქვათ შესრულებულია (7.1), მაშინ:

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)) = \beta(x) + \varepsilon(x)\beta(x), \tag{7.3}$$

სადაც $\varepsilon(x)\to 0$, როცა $x\to a$. ამიტომ (7.3)-დან გვაქვს:

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \varepsilon(x) \to 1, \quad \text{როცა} \quad x \to a.$$

ანალოგიურად მტკიცდება (7.2) პირობის საკმარისობაც. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $\beta_1(x), \beta_2(x), \ldots, \beta_n(x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეებია a წერტილში $\alpha(x)$ უსასრულოდ მცირესთან შედარებით, მაშინ:

$$\sigma(x) = \alpha(x) + \beta_1(x) + \beta_2(x) + \cdots + \beta_n(x) \sim \alpha(x).$$

მართლაც,

$$\lim_{x\to a} \frac{\sigma(x) - \alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x) + \beta_2(x) + \ldots + \beta_n(x)}{\alpha(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\beta_1(x)}{\alpha(x)} + \lim_{x\to a} \frac{\beta_2(x)}{\alpha(x)} + \cdots + \lim_{x\to a} \frac{\beta_u(x)}{\alpha(x)} = 0.$$

ე. ი. სხვაობა $\sigma(x) - \alpha(x)$, როცა $x\to a$ არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე $\alpha(x)$-თან შედარებით, ამიტომ თეორემა 7.2-ის ძალით $\sigma(x) \sim \alpha(x)$.

აქედან გამომდინარეობს პრაქტიკული წესი ზღვრულ ოპერაციებში უსასრულოდ მცირეთა ჯამის გამარტივების შესახებ. თუ მოცემულია უსასრულოდ მცირეთა ჯამი $\alpha(x) + \beta_1(x) + \beta_2(x) + \cdots + \beta_n(x)$ რომლის შესაკრებთა რიცხვი სასრულია და თუ ამ ჯამის $\alpha(x)$ შესაკ-

რები დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირეა დანარჩენ შესაკრებთა მიმართ, მაშინ ზღვრულ თანაფარდობათა განხილვისას შეგვიძლია უკუვაგდოთ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეები $\beta_1(x), \beta_2(x), \cdots, \beta_n(x)$. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ დაბალი რიგის უსასრულოდ მცირე შესაკრები უნდა იყოს მხოლოდ ერთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ $\beta(x) = (1 - \cos x) + 3\sin x + 4x^3 - x^5$. ვაჩვენოთ, რომ $\beta(x) \sim 3\sin x$, როცა $x \to 0$.

მართლაც, რადგან $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} \sim \dfrac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$, ამიტომ $\beta(x) \sim 3\sin x$.

უსასრულოდ მცირეთა უკუგდების წესი გამოიყენება ორი უსასრულოდ მცირის შეფარდების ზღვრის გამოთვლის დროს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ ზღვარი:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3\,\mathrm{tg}\,x + 4\sin^3 x + x^5)}{\sin x + 5\,\mathrm{tg}^5 x - 7x^6}.$$

ცხადია, რომ როცა $x \to 0$

$$\ln(1 + 3\,\mathrm{tg}\,x + 4\sin^3 x + x^5) \sim 3\,\mathrm{tg}\,x + 4\sin^3 x + x^5 \sim 3\,\mathrm{tg}\,x \sim 3x,$$

$$\sin x + 5\,\mathrm{tg}^5 x - 7x^6 \sim \sin x \sim x,$$

ამრიგად

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3\,\mathrm{tg}\,x + 4\sin^3 x + x^5)}{\sin x + 5\,\mathrm{tg}^5 x - 7x^6} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3.$$

ვთქვათ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 7.2. თუ არსებობს ისეთი დადებითი მუდმივი C რიცხვი, რომ E სიმრავლის ყოველ წერტილზე ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|\alpha(x)| \leqslant C|\beta(x)|,$$

მაშინ ეს პირობითად ასე ჩაიწერება:

$$\alpha(x) = O(\beta(x))$$

და იკითხება: $\alpha(x)$ არის „O—დიდი“ $\beta(x)$-ის მიმართ.

კერძოდ ჩანაწერი $\alpha(x) = O(1)$ ნიშნავს, რომ $\alpha(x)$ შემოსაზღვრულია E სიმრავლეზე.

ცხადია, რომ თუ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$ ერთიდაიმავე რიგის უსასრულოდ მცირე ფუნქციებია, მაშინ $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

მაგალითები: 1) $\sin x = O(1)$, $]-\infty, +\infty[$-ზე;

2) $x^n = O(e^x)$ $]-\infty, +\infty[$-ზე $\forall n \in N$-სათვის;

3) $\cos x = O(x)$, $]1, \infty[$-ზე.

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში და შუალედში.
2. განსაზღვრეთ ფუნქციის უწყვეტობა მარჯვნიდან და მარცხნიდან.
3. ჩამოაყალიბეთ წერტილში უწყვეტი ფუნქციის თვისებები.
4. მოიყვანეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილების კლასიფიკაცია.
5. ჩამოაყალიბეთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისებები.
6. განსაზღვრეთ ფუნქციის თანაბრად უწყვეტობა.
7. დაამტკიცეთ კანტორის თეორემა.
8. დაამტკიცეთ თეორემა უწყვეტი ფუნქციის შექცეული ფუნქციის უწყვეტობის შესახებ.
9. ჩამოთვალეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციები და აჩვენეთ მათი უწყვეტობა.
10. მოიყვანეთ ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა თვისებები.
11. მოიყვანეთ არაელემენტარული ფუნქციის მაგალითი.
12. რას ნიშნავს, რომ α უსასრულოდ მცირე მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა β უსასრულოდ მცირესთან შედარებით?
13. რას ნიშნავს, რომ α და β უსასრულოდ მცირეები ერთი და იგივე რიგის უსასრულოდ მცირეებია?
14. რას ნიშნავს, რომ ორი უსასრულოდ მცირე ერთმანეთის ეკვივალენტურია?
15. რას ნიშნავს, რომ α უსასრულოდ მცირე n-ური რიგის უსასრულოდ მცირეა β უსასრულოდ მცირესთან შედარებით?
16. ჩამოაყალიბეთ ორი უსასრულოდ მცირის ეკვივალენტურობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა.

მეხუთე თავი

წარმოებული და დიფერენციალი

§ 1. ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, ხოლო x წარმოადგენს ამ მიდამოს x_0-ისაგან განსხვავებულ წერტილს.

როგორც ვიცით, $x-x_0$ სხვაობას ეწოდება არგუმენტის ნაზრდი x_0 წერტილში და აღინიშნება Δx სიმბოლოთი, ე. ი. $\Delta x=x-x_0$, ხოლო $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ სხვაობას ეწოდება ფუნქციის ნაზრდი და აღინიშნება $\Delta f(x_0)$ ან Δy სიმბოლოთი, ე. ი.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

განსაზღვრება 1.1. f ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში ეწოდება ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდის არგუმენტის ნაზრდთან შეფარდების ზღვარს (თუ ეს ზღვარი არსებობს), როდესაც არგუმენტის ნაზრდი მისწრაფვის ნულისაკენ.

x_0 წერტილში $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის აღსანიშნავად მიღებულია y' ან $f'(x_0)$ სიმბოლოები. ე. ი. თანახმად განსაზღვრებისა

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1.1)$$

თუ (1.1) ზღვარი არსებობს, მაშინ f ფუნქციას x_0 წერტილში წარმოებადი ფუნქცია ეწოდება. შევნიშნოთ, რომ, თუ (1.1) ზღვარი უსასრულოდ დიდია ($+\infty$, $-\infty$ ან ∞), მაშინ ამბობენ, რომ f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს უსასრულო წარმოებული (ტოლი $+\infty$-ის, $-\infty$-ის ან ∞-ის).

ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლის ოპერაციას გაწარმოება ეწოდება.

თუ (1.1) ტოლობაში $\Delta x \to 0$, ისე რომ Δx იღებს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს, მაშინ შესაბამის ზღვარს ეწოდება f ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება $f'_+(x_0)$ სიმბოლოთი. ე. ი. განსაზღვრებით

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ანალოგიურად, (1.1) ზღვარს როცა $\Delta x \to 0$, ისე რომ $\Delta x < 0$, ეწოდება f ფუნქციის მარცხენა წარმოებული x_0 წერტილში და აღინიშნება $f'_-(x_0)$ სიმბოლოთი, ე. ი.

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

$f'_+(x_0)$ და $f'_-(x_0)$-ს ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები ეწოდება x_0 წერტილში.

ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $]a, b[$ ინტერვალზე, თუ ის წარმოებადია ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, ხოლო ფუნქციას წარმოებადი ეწოდება $[a, b]$ სეგმენტზე, თუ ის წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალზე და a წერტილში წარმოებადია მარჯვნიდან, b-ში კი მარცხნიდან.

ადვილი შესამჩნევია, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებადობისათვის აუცილებელია და საკმარისი ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნდეს

ერთმანეთის ტოლი ცალმხრივი წარმოებულები. განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ $y=C=\text{const}$.

გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული. თანახმად წარმოებულის განსაზღვრებისა

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

ე. ი. მუდმივი ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $y=x$ ფუნქციის წარმოებული. თანახმად წარმოებულის განსაზღვრებისა:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

ე. ი. $x'=1$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ $y=\sin x$. რადგან

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2},$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

მაშასადამე $(\sin x)'=\cos x$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. განვიხილოთ $y=\cos x$ ფუნქცია. გვაქვს:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

ე. ი. $(\cos x)'=-\sin x$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. გამოვთვალოთ $y=a^x$ ფუნქციის წარმოებული. რადგან

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1),$$

ამიტომ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

თუ გავითვალისწინებთ IV თავის § 6-ის მე-2 მაგალითს, მივიღებთ:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

მაშასადამე,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

ამ ტოლობიდან კერძოდ მივიღებთ:

$$(e^x)' = e^x.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვთქვათ $y=\log_a x$ გვაქვს:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

ამიტომ:

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}.$$

ამ ტოლობიდან კერძოდ მიიღება:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. გამოვთვალოთ $y=x^\alpha$ ფუნქციის წარმოებული.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=$$

$$=\frac{x^\alpha\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1\right]}{\Delta x}=x^{\alpha-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

აქედან, IV თავის § 6-ის მე-3 მაგალითის გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$(x^\alpha)'=x^{\alpha-1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

ე. ი.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

ამ ფორმულის გამოყვანისას ცხადია იგულისხმებოდა, რომ x ეკუთვნის ფუნქციის განსაზღვრის არეს და $x\neq 0$. თუ $x=0$ მაშინ ამ წერტილის მიდამოში ფუნქციას აზრი აქვს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა α მაჩვენებელი ისეთი დადებითი რაციონალური რიცხვია, რომლის მნიშვნელი კენტია, ამასთან:

$$(x^\alpha)'_{x=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x}=\begin{cases}0, & \text{როცა} \quad \alpha>1,\\ 1, & \text{როცა} \quad \alpha=1,\\ \infty, & \text{როცა} \quad \alpha<1.\end{cases}$$

§ 2. ფუნქციის დიფერენციალი

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 2.1. f ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, თუ ამ წერტილში ფუნქციის ნაზრდი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \tag{2.1}$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული Δx-ზე, ხოლო $\alpha(\Delta x)\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$.

$\alpha(\Delta x)$ ფუნქცია $\Delta x=0$ წერტილზე საზოგადოდ განსაზღვრული არ არის. შემდეგში ხელსაყრელია ჩავთვალოთ, რომ $\alpha(0)=0$. ასეთი შეთანხმებით $\alpha(\Delta x)$ ფუნქცია უწყვეტია $\Delta x=0$ წერტილზე, ამასთან (2.1) ტოლობა შეგვიძლია განვიხილოთ მაშინაც, როცა $\Delta x=0$.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$, ამიტომ (2.1) ტოლობა შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{2.2}$$

$A\cdot\Delta x$ წრფივ ფუნქციას (Δx-ის მიმართ) ეწოდება f ფუნქციის დიფერენციალი x_0 წერტილში და აღინიშნება $df(x_0)$ ან dy სიმბოლოთი. მაშასადამე $dy=A\Delta x$ და ამიტომ (2.2) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$dy = dy + o(\Delta x), \quad \text{როცა} \quad \Delta x\to 0. \tag{2.3}$$

შევნიშნოთ, რომ დიფერენციალი $dy=A\Delta x$, როგორც წრფივი ფუნქცია, განსაზღვრულია Δx-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის: $-\infty<\Delta x<+\infty$. რაც შეეხება ფუნქციის ნაზრდს $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, ცხადია ის განიხილება Δx-ის მხოლოდ იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლისთვისაც $x_0+\Delta x$ ეკუთვნის f ფუნქციის განსაზღვრის არეს.

თუ $A\neq 0$, მაშინ (2.3) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის ნაზრდი და ფუნქციის დიფერენციალი ეკვივალენტური უსასრულოდ მცირეებია, როცა $\Delta x\to 0$, ხოლო თუ $A=0$, მაშინ $dy\equiv 0$ და $\Delta y=o(\Delta x)$, როცა $\Delta x\to 0$. ე. ი. ამ შემთხვევაში Δy არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე Δx-თან შედარებით.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. იმისათვის, რომ $f(x)$ ფუნქცია იყოს დიფერენცირებადი x_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, ის ამ წერტილში იყოს წარმოებადი, ამასთან ამ შემთხვევაში $dy=f'(x_0)\Delta x$.

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში, ე. ი. $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, აქედან:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A.$$

მაშასადამე, ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და $f'(x_0)=A$, ამიტომ $dy=f'(x_0)\Delta x$.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, ე. ი. არსებობს $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$. მაშინ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\Delta x, \quad (\alpha(\Delta x)\to 0, \quad \text{როცა} \quad \Delta x\to 0).$$

საიდანაც

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x.$$

ეს ტოლობა ნიშნავს, რომ f ფუნქცია დიფერენცირებადია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, ერთი ცვლადის ფუნქციისათვის წარმოებადობა და დიფერენცირებადობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით:

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

შევნიშნოთ, რომ $dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$, ამიტომ დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენციალს განსაზღვრავენ, როგორც მის ნაზრდს, რის გამოც $f(x)$ ფუნქციის დიფერენციალისათვის მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$dy = d(f(x)) = f'(x)\,dx.$$

ვინაიდან $o(\Delta x)$ მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირეა Δx-თან შედარებით, ამიტომ (2.3) ტოლობაში $o(\Delta(x))$ შესაკრების უკუგდებით მივიღებთ მიახლოებით ტოლობას:

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{2.4}$$

რომელიც მით უფრო ზუსტია, რაც უფრო მცირეა Δx. რადგან $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, ამიტომ (2.4)-დან გვაქვს:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x, \tag{2.5}$$

რომელიც გამოიყენება ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვთვალოთ $\sqrt[4]{90}$ გამოსახულების მიახლოებითი მნიშვნელობა.

თუ დავუშვებთ, რომ $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x = 81$, $\Delta x = 9$ და გავითვალისწინებთ, რომ $f'(81) = \frac{1}{4} \cdot (81)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4 \cdot 3^3}$, მაშინ (2.5) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\sqrt[4]{90} \approx \sqrt[4]{81} + 9 \cdot \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 3 + \frac{1}{12} \approx 3{,}083.$$

§ 3. კავშირის წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. თუ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, მაშინ ის ამ წერტილში უწყვეტია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მაშინ:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0\cdot f'(x_0)=0.$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არ არის მართებული. მაგალითად განვიხილოთ ფუნქცია $y=|x|$.

ცხადია ეს ფუნქცია უწყვეტია x-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის. ვაჩვენოთ, რომ მას $x=0$ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია. მართლაც, თუ $x=0$, მაშინ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \text{თუ}\quad \Delta x>0,\\ -1, & \text{თუ}\quad \Delta x<0,\end{cases}$$

ამიტომ

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1,\quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-1.$$

ე. ი. ფუნქციის მარჯვენა წარმოებული $x=0$ წერტილში 1-ის ტოლია, ხოლო მარცხენა წარმოებული კი (—1)-ის, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფუნქცია $y=|x|$ არ არის წარმოებადი $x=0$ წერტილში.

მაშასადამე, ფუნქცია შეიძლება იყოს უწყვეტი წერტილში, მაგრამ ის ამ წერტილში არ იყოს წარმოებადი.

შეიძლება ვაჩვენოთ უფრო მეტიც, რომ ფუნქციის უწყვეტობა წერტილში არ უზრუნველყოფს ამ წერტილში ცალმხრივი წარმოებულების არსებობასაც კი. მაგალითად, ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა}\quad x=0,\end{cases}$$

უწყვეტია x-ის ყოველი მნიშვნელობისათვის. დავამტკიცოთ, რომ ამ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ცალმხრივი წარმოებულები არ გააჩნია. მართლაც, $x=0$ წერტილში მოცემული ფუნქციის Δy ნაზრდი ასე გამოისახება:

$$\Delta y=\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\cdot$$

აქედან

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

მაგრამ $\sin \frac{1}{\Delta x}$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში ცალმხრივი ზღვრები არ გააჩნია (იხ. თავი III, § 6, მაგალითი 3).

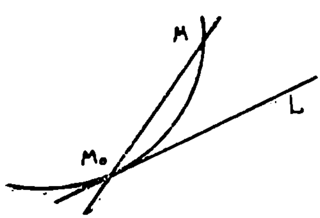
შევნიშნოთ, რომ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციები, რომლებსაც არც ერთ წერტილში წარმოებული არ გააჩნია.

§ 4. წარმოებულის და დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი

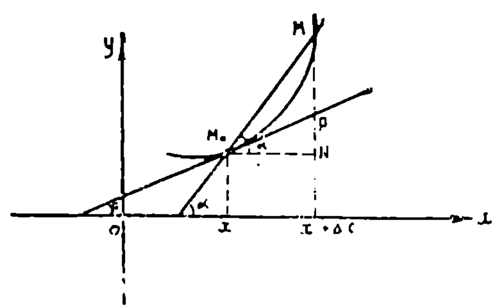
წარმოებულის გეომეტრიული შინაარსის გასარკვევად თავდაპირველად შემოვიყვანოთ $y=f(x)$ წირისადმი მოცემულ წერტილში გავლებული მხების ცნება.

ვთქვათ $y=f(x)$ წირზე მოცემულია რაიმე M_0 წერტილი. განვიხილოთ ამ წირის მეორე M წერტილი და გავავლოთ M_0M მკვეთი (ნახ. 31), თუ M წერტილი მოძრაობს წირზე, ხოლო M_0 — უძრავია, მაშინ მკვეთი იცვლის თავის მდებარეობას. M_0 წერტილზე გავლებულ L წრფეს ეწოდება მოცემული წირის მხები M_0 წერტილში, თუ კუთხე L წრფესა და M_0M მკვეთს შორის მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ წირის გასწვრივ. მოკლედ რომ ვთქვათ, მხები წარმოადგენს მოცემულ წერტილში გავლებული მკვეთის ზღვრულ მდებარეობას.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკს შესაბამის $M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილში გააჩნია მხები, რომლის კუთხური კოეფიციენტი $f'(x_0)$-ის ტოლია.



ნახ. 31



ნახ. 32

ვთქვათ, M წერტილის აბსცისაა $x_0+\Delta x$ და M_0M მკვეთი Ox ღერძთან ადგენს α კუთხეს. გავავლოთ $M_0N||Ox$ და $MN||Oy$ (ნახ. 32). ΔM_0MN-დან გვაქვს:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{MN}{M_0N}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

საიდანაც $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. ცხადია, რომ თუ M წერტილი მიისწრაფვის M_0-საკენ წირის გასწვრივ, მაშინ $\Delta x\to 0$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ არკტანგენს ფუნქცია უწყვეტია და ვისარგებლებთ წარმოებულის განსაზღვრებით, მივიღებთ, რომ:

$$\alpha\to\operatorname{arctg}f'(x_0),\quad \text{როცა}\quad \Delta x\to 0. \tag{4.1}$$

აღვნიშნოთ $\operatorname{arctg}f'(x_0)=\varphi$ ანუ $f'(x_0)=\operatorname{tg}\varphi$ და გავავლოთ Ox ღერძისადმი φ კუთხით დახრილი M_0P წრფე. რადგან $\omega=\angle MM_0P=|\alpha-\varphi|$, ამიტომ (4.1)-დან გამომდინარეობს, რომ $\omega\to 0$, როცა $\Delta x\to 0$. ეს კი ნიშნავს, რომ M_0P წრფე წარმოადგენს $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის მხებს M_0 წერტილში, ამასთან მისი კუთხური კოეფიციენტია $f'(x_0)$. ამრიგად მივიღებთ, რომ წარმოებულს გააჩნია შემდეგი გეომეტრიული შინაარსი: $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული x_0 წერტილში უდრის ამ ფუნქციის გრაფიკისადმი $M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების კუთხურ კოეფიციენტს.

რადგან M_0 წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი $f'(x_0)$-ის ტოლია, ამიტომ მხების განტოლებას აქვს სახე:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

დავადგინოთ ახლა დიფერენციალის გეომეტრიული შინაარსი. ΔM_0NP-დან (ნახ. 32) გვაქვს, რომ:

$$NP=M_0N\cdot\operatorname{tg}\varphi=\Delta x\cdot f'(x_0)=dy.$$

ამრიგად, ფუნქციის დიფერენციალი წერტილში უდრის ფუნქციის გრაფიკისადმი შესაბამის წერტილში გავლებული მხების ორდინატის ნაზრდს.

§ 6. წარმოებულისა და დიფერენციალის ფიზიკური შინაარსი

1. ვთქვათ წერტილის მოძრაობის განტოლებაა $s=s(t)$, რომლის მიხედვითაც დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება გამოვიანგარიშოთ გავლილი მანძილი. დროის t_0 მომენტიდან $t_0+\Delta t$ მომენტამდე გავლი-

ლი მანძილი ტოლია $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$-ისა, ამიტომ დროის Δt მონაკვეთში მოძრაობის საშუალო სიჩქარე გამოითვლება ფორმულით:

$$V_{საშ} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

ეს ფორმულა მით უკეთესად ახასიათებს წერტილის სიჩქარეს t_0 მომენტში, რაც უფრო მცირეა Δt, ამიტომ მიღებულია, რომ

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$$

წარმოადგენს წერტილის მყის სიჩქარეს დროის t_0 მომენტში.

ამრიგად, სიჩქარე დროის მოცემულ მომენტში არის მანძილის წარმოებული დროით. დიფერენციალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს, რომ:

$$ds = s'(t)\, dt = V(t_0)\, \Delta t.$$

მაშასადამე, მანძილის დიფერენციალი არის მანძილი, რომელსაც გაივლიდა წერტილი დროის Δt მონაკვეთში, თუ ის იმოძრავებდა თანაბრად იმ სიჩქარით, რაც ჰქონდა მას დროის t_0 მომენტში.

2. ვთქვათ მოცემულია l სიგრძის არაერთგვაროვანი ძელი. დავუშვათ, რომ ძელი მოთავსებულია Ox ღერძზე ისე, რომ მისი ერთ-ერთი ბოლო ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს. $m = m(x)$ იყოს ფუნქცია, რომლის საშუალებითაც ძელის ნებისმიერი x_0 წერტილისათვის გამოითვლება სათავიდან x_0 წერტილამდე მოთავსებული ძელის ნაწილის მასა. განვიხილოთ ძელის რაიმე x_0 და $x_0 + \Delta x$ წერტილები. ამ წერტილებს შორის მოთავსებულ ძელის მონაკვეთს აქვს Δx სიგრძე და $\Delta m = m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)$ მასა. $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ ფარდობას ეწოდება ძელის განხილული მონაკვეთის საშუალო სიმკვრივე. ძელის x_0 წერტილში სიმკვრივე ეწოდება საშუალო სიმკვრივის ზღვარს, როცა Δx მიისწრაფვის ნულისაკენ და $\rho(x_0)$-ით აღინიშნება, ე. ი.

$$\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = m'(x_0).$$

თუ ρ სიმკვრივე არ არის დამოკიდებული x-ზე ე. ი. მუდმივია, მაშინ ძელს ეწოდება ერთგვაროვანი.

დიფერენციალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს, რომ:

$$dm = m'(x_0)\, dx = \rho(x_0)\, \Delta x.$$

ამრიგად, მასის დიფერენციალი არის Δx სიგრძისა და $\rho(x_0)$ სიმკვრივის მქონე ერთგვაროვანი ძელის მასა, სადაც $\rho(x_0)$ არის ძელის სიმკვრივე x_0 წერტილში.

§ 6. ჯამის, ნამრავლის და ფარდობის წარმოებული

თ ე ო რ ე მ ა 6.1. თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია წერტილში, მაშინ მათი ჯამიც წარმოებადია ამ წერტილში და

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

$$(u(x)+v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x))-(u(x)+v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(u(x+\Delta x)-u(x))+(v(x+\Delta x)-v(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ ეს თეორემა მართებულია შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

თ ე ო რ ე მ ა 6.2. თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში, მაშინ მათი ნამრავლიც წარმოებადია x წერტილში და

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x)+v'(x)\,u(x).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქციის ნაზრდის განსაზღვრების თანახმად

$$\Delta u(x) = u(x+\Delta x)-u(x),$$

საიდანაც

$$u(x+\Delta x) = u(x)+\Delta u(x).$$

ანალოგიურად

$$v(x+\Delta x) = v(x)+\Delta v(x).$$

ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $u(x)$ და $v(x)$ არ არის დამოკიდებული Δx-ზე და $u(x)$ და $v(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია x წერტილში, მივიღებთ:

$$(u(x)\,v(x))' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x)-u(x)\,v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x) + \Delta u(x))(v(x) + \Delta v(x)) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + v(x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x) + \Delta u(x)\Delta v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= v(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \lim \Delta u(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$= v(x)u'(x) + u(x)v'(x) + 0 \cdot v'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე დ ე გ ი. თუ $u(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში და C რაიმე მუდმივია, მაშინ $C \cdot u(x)$ ფუნქცია წარმოებადია ამავე წერტილში და

$$(Cu(x))' = Cu'(x),$$

ე. ი. მუდმივი თანამამრავლი შეიძლება გავიტანოთ წარმოებულის ნიშნის გარეთ.

თ ე ო რ ე მ ა 6.3. თუ $u(x)$ და $v(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია x წერტილში და $v(x) \neq 0$, მაშინ $\frac{u(x)}{v(x)}$ წარმოებადია ამავე წერტილში და

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევარჩიოთ Δx ნაზრდი ისე, რომ $u(x+\Delta x) \neq 0$, რაც შესაძლებელია იმის გამო, რომ $v(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x წერტილში და $v(x) \neq 0$ (იხ. თავი III, თეორემა 8.5-ის შედეგი). ამის შემდეგ მტკიცება ჩავატაროთ თეორემა 3.2-ის ანალოგიურად. გვაქვს:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x) + \Delta u(x)}{v(x) + \Delta v(x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x)v(x) + v(x)\Delta u(x) - u(x)v(x) - u(x)\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x)(v(x) + \Delta v(x))} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x)(v(x) + \Delta v(x))} =$$

$$= \frac{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u(x)}{\Delta x} - u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v(x) + \Delta v(x))} =$$

$$= \frac{u'(x) v(x) - v'(x) u(x)}{v^2(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§ 7. შექცეული ფუნქციის წარმოებული. შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების წარმოებულები

ვთქვათ $y = f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს IV თავის თეორემა 4.1-ის პირობებს შექცეული ფუნქციის არსებობისა და უწყვეტობის შესახებ. დავუშვათ, რომ $x = \varphi(y)$ მისი შექცეული ფუნქციაა. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. თუ $y = f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და $f'(x_0) \neq 0$, მაშინ შექცეულ $x = \varphi(y)$ ფუნქციას $y_0 = f(x_0)$ წერტილში აქვს წარმოებული და მართებულია ტოლობა:

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

ანუ

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{7.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მივცეთ y არგუმენტს y_0 წერტილში $\Delta y \neq 0$ ნაზრდი, მაშინ $x = \varphi(y)$ ფუნქცია მიიღებს სათანადო Δx ნაზრდს, ამასთან შექცეული ფუნქციის ზრდადობის (ან კლებადობის) ძალით $\Delta x \neq 0$, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

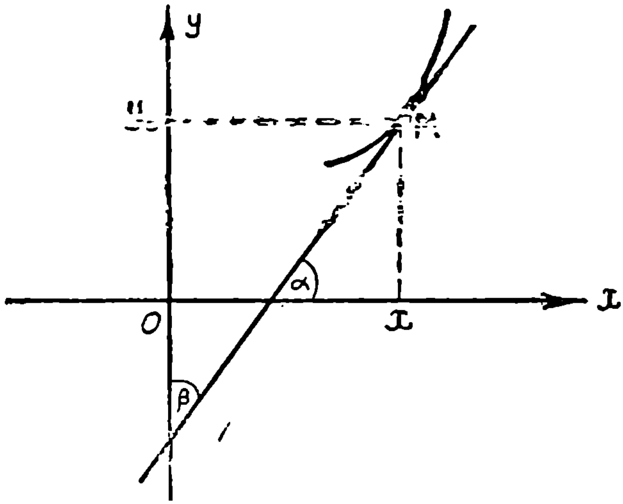
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{7.2}$$

რადგანაც $x = \varphi(y)$ ფუნქცია უწყვეტია y_0 წერტილში, ამიტომ $\Delta x \to 0$, როდესაც $\Delta y \to 0$; მაგრამ თუ $\Delta x \to 0$ მაშინ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \neq 0$, ე. ი. არსებობს (7.2) ტოლობის მარჯვენა ნაწილის ზღვარი. გამომდინარე აქედან არსებობს ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილის ზღვარი და

$$\varphi'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7.1-ს აქვს მარტივი გეომეტრიული შინაარსი. განვიხილოთ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $y=f(x)$ ფუნქციის (ანუ შექცეული $x=\varphi(y)$ ფუნქციის) გრაფიკი.



ნახ. 33

ვთქვათ x_0-ის შესაბამისი წერტილი გრაფიკზე არის M (ნახ. 33). როგორც ვიცით $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$, სადაც α არის კუთხე გრაფიკის M წერტილზე გავლებულ მხებსა და Ox ღერძს შორის, ხოლო $f'(y_0)=\operatorname{tg}\beta$, სადაც β კუთხეა იმავე მხებსა და ღერძს შორის.

ცხადია $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, ამიტომ:

$$\varphi'(y_0)=\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

1. ვიპოვოთ $y=\arcsin x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1,1]$ სეგმენტზე. ამ ფუნქციის შექცეული ფუნქციაა $x=\sin y,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. ვთქვათ $x\in]-1;\ 1[$, მაშინ $y\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, ამიტომ $\cos y>0$. (7.1) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ამრიგად

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$$

2. ვიპოვოთ $y=\arccos x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $[-1,1]$ სეგმენტზე. ვთქვათ $x\in\ ]-1,1[$, მაშინ თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

მივიღებთ

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. ვიპოვოთ $y=\operatorname{arctg} x$ ფუნქციის წარმოებული. ეს ფუნქცია განსაზღვრულია $]-\infty,\infty[$ შუალედში. მისი შექცეული ფუნქციაა $x=\operatorname{tg} y,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. (7.1) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. ვიპოვოთ $y=\operatorname{arctg} x,\ ]-\infty<x<\infty[$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$. აქედან გვაქვს:

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

§ 8. რთული ფუნქციის წარმოებული

ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $y=f(u)$, სადაც $u=\varphi(x)$.

თ ე ო რ ე მ ა 8.1. თუ $u=\varphi(x)$ ფუნქცია წარმოებადია რაიმე წერტილში, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის წარმოებადია $y=f(u)$ ფუნქცია, მაშინ:

$$y=F(x)=f[\varphi(x)]$$

რთული ფუნქცია წარმოებადია x წერტილში და მართებულია ტოლობა:

$$F'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x) \tag{8.1}$$

ანუ

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

ე. ი. რთული ფუნქციის წარმოებული უდრის მოცემული ფუნქციის წარმოებულს დამხმარე ცვლადით, გამრავლებულს დამხმარე ცვლადის წარმოებულზე დამოუკიდებელი ცვლადით.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $u=\varphi(x)$ ფუნქციის არგუმენტს x წერტილში მივცეთ ნულისაგან განსხვავებული Δx ნაზრდი. ამ ნაზრდს შეესაბამება $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ ნაზრდი, ამასთან ეს Δu ნაზრდი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს.

Δu ნაზრდს, თავის მხრივ შეესაბამება $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$ ნაზრდი. რადგანაც $y=f(u)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, ამიტომ:

$$\Delta y = f'(u)\,\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u \tag{8.2}$$

სადაც $\alpha(\Delta u)\to 0$, როცა $\Delta u\to 0$.

შევნიშნოთ, რომ როგორც იყო მითითებული § 2-ში (8.2) ტოლობას ადგილი აქვს მაშინაც, როცა $\Delta u=0$.

გავყოთ (8.2) ტოლობის ორივე ნაწილი Δx-ზე, გვექნება:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

მაგრამ, როდესაც $\Delta x\to 0$, მაშინ $\Delta u\to 0$, $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to\varphi'(x)$ და $\alpha(\Delta u)\to 0$,

ამიტომ უკანასკნელ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით, როცა $\Delta x\to 0$ მტკიცდება, რომ არსებობს მარცხენა ნაწილის ზღვარი და ადგილი აქვს (8.1) ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი მართებულია მაშინაც, როდესაც ფუნქცია წარმოდგენილია არა ორი, არამედ რამოდენიმე ფუნქციის კომპოზიციით. მაგალითად, თუ

$$y=f(u),\ u=\varphi(v),\ v=g(x),$$

მაშინ

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x.$$

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი რთული ფუნქციის წარმოებულის გამოთვლაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $y=\sin^2 x$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქცია წარმოადგენს $y=u^2$ და $u=\sin x$ ფუნქციების კომპოზიციას, ამიტომ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვექნება:

$$y'=(u^2)'_u(\sin x)'_x=2u\cos x=2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

შევნიშნოთ, რომ რთული ფუნქციის წარმოებულის მოძებნა შესაძლებელია დამხმარე ცვლადების შემოღების გარეშე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $y = 2^{\operatorname{arc\,tg}^3 5x}$ ფუნქციის წარმოებული.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$y' = 2^{\operatorname{arc\,tg}^3 5x} \ln 2\, (\operatorname{arctg}^3 5x)' = 2^{\operatorname{arc\,tg}^3 5x} \ln 2 \cdot 3 \operatorname{arc\,tg}^2 5x \cdot (\operatorname{arctg} 5x)' =$$

$$= 2^{\operatorname{arc\,tg}^3 5x} \ln 2 \cdot 3 \operatorname{arc\,tg}^2 5x \cdot \frac{1}{1 + 25x^2} \cdot (5x)' =$$

$$= 15 \ln 2 \cdot 2^{\operatorname{arc\,tg}^3 5x} \frac{\operatorname{arc\,tg}^2 5x}{1 + 25x^2}.$$

გამოვთვალოთ ახლა ჰიპერბოლურ ფუნქციათა წარმოებულები.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

ე. ი. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

$\operatorname{th} x$ და $\operatorname{cth} x$ ფუნქციათა წარმოებულები გამოითვლება $\operatorname{sh} x$ და $\operatorname{ch} x$ ფუნქციათა წარმოებულების გამოყენებით:

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქცია მოცემულია რამოდენიმე ფორმულით, წარმოებულის გამოთვლა ზოგჯერ გვიხდება უშუალოდ წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით. მაგალითად, ვიპოვოთ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული.

როცა $x \neq 0$, მაშინ წარმოებული გამოითვლება ჩვეულებრივ გაწარმოების წესის გამოყენებით:

$$f'(x) = \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

ამ გამოსახულებით მოცემული ფუნქციის წარმოებულს $x=0$ წერტილში ვერ გამოვითვლით. $x=0$ წერტილში მოცემული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელად უნდა გამოვიყენოთ წარმოებულის განსაზღვრება:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

ამრიგად

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

როგორც აქედან ჩანს, $f'(x)$ ყველგან განსაზღვრულია, უწყვეტია როცა $x\neq 0$; $x=0$ წერტილზე $f'(x)$ განიცდის მეორე გვარის წყვეტას რადგან $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. ფუნქციას $x=0$ წერტილში ზღვარი არ გააჩნია.

§ 9. უმარტივეს ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულების ცხრილი

1. $(C)'=0.$
2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}.$
3. $(a^x)'=a^x\ln a.$
4. $(e^x)'=e^x.$
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$
6. $(\ln x)'=\frac{1}{x}.$
7. $(\sin x)'=\cos x.$
8. $(\cos x)'=-\sin x.$
9. $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$
10. $(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}.$
14. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$
15. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x.$
16. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x.$
17. $(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
18. $(\operatorname{cth} x)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

§ 10. ლოგარითმული ფუნქციის წარმოებული. ხარისხოვანმაჩვენებლიანი ფუნქციის წარმოებული

გამოვთვალოთ $y=\ln|x|$ $(x\neq 0)$ ფუნქციის წარმოებული. როგორც ვიცით $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ და $(\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{1}{x}$. ამდენად

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}. \tag{10.1}$$

(10.1) ფორმულის გამოყენებით გამოვითვალოთ $y=\ln|f(x)|$ რთული ფუნქციის წარმოებული, სადაც $f(x)$ წარმოებადი ფუნქციაა. გვაქვს.

$$y'=(\ln|f(x)|)=\frac{f'(x)}{f(x)}. \tag{10.2}$$

ამ წარმოებულს უწოდებენ $f(x)$ ფუნქციის ლოგარითმულ წარმოებულს.

ლოგარითმული წარმოებულის გამოყენებით გამოვთვალოთ ხარისხოვან-მაჩვენებლიანი $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის წარმოებული, სადაც u და v წარმოებადი ფუნქციებია და $u(x)>0$. რადგანაც $\ln y=v(x)\ln u(x)$, ამიტომ (10.2) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$\frac{y'}{y}=[v(x)\ln u(x)]'=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

აქედან

$$y'=[u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \tag{10.3}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი. გამოვითვალოთ $y=x^{\sin x}$ ფუნქციის წარმოებული. (10.3) ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

შევნიშნოთ, რომ $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქციის წარმოებული შეიძლება გამოვითვალოთ აგრეთვე სხვა გზით. ამისათვის $y=[u(x)]^{v(x)}$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ ასეთი სახით $y=e^{v(x)\ln u(x)}$ და გამოვთვალოთ y':

$$\begin{aligned} y' &= (e^{v(x)\ln u(x)})'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot(v(x)\ln u(x))'= \\ &= y\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]= \\ &= [u(x)]^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \end{aligned}$$

§ 11. პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა დამოუკიდებელი ცვლადის გარდაქმნის მიმართ

როგორც ვიცით, თუ $y=f(x)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია, მაშინ მისი დიფერენციალი გამოითვლება ფორმულით

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{11.1}$$

მას უწოდებენ აგრეთვე f ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალს. (11.1) ფორმულის გამოყვანისას ნაგულისხმევი იყო, რომ x დამოუკიდებელი ცვლადია. ახლა, ვთქვათ, x თვითონ t ცვლადის წარმოებადი ფუნქციაა $x=\varphi(t)$, მაშინ y წარმოადგენს t ცვლადის $y=f(\varphi(t))$ რთულ ფუნქციას. რადგანაც t დამოუკიდებელი ცვლადია, ამიტომ

$$dy = \{f(\varphi(t))\}'\,dt, \; dx = \varphi'(t)\,dt. \tag{11.2}$$

რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით

$$\{f(\varphi(t))\}'_t = f'(x)\cdot x'_t.$$

ამ ტოლობის გათვალისწინებით (11.2) ფორმულების პირველი ტოლობა მიიღებს სახეს

$$dy = f'_x\cdot x'_t\cdot dt = f'(x)\,\varphi'(t)\,dt = f'(x)\,dx. \tag{11.3}$$

ეს კი გარეგნულად იგივე (11.1) ფორმულაა, რაც პირველი რიგის დიფერენციალისათვის გვქონდა მაშინ, როცა x დამოუკიდებელი ცვლადი იყო, ე. ი. ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმა უცვლელი რჩება.

ამ თვისებას ეწოდება ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა.

შევნიშნოთ, რომ (11.1) და (11.3) ფორმულებში dx სხვადასხვაა. პირველში dx იგივეა, რაც Δx, მეორეში კი $dx=\varphi'(t)\,dt$, ე. ი. dx აქ წარმოადგენს დამოუკიდებელი t ცვლადის ფუნქციას.

(11.1) და (11.3) ფორმულებიდან გვაქვს

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}\,. \tag{11.4}$$

ე. ი. დიფერენცირებადი $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებული უდრის ამ ფუნქციის dy დიფერენციალის შეფარდებას მისი არგუმენტის dx დიფერენციალთან, იმ შემთხვევაშიც როცა x დამოუკიდებელი ცვლადია და იმ შემთხვევაშიც, როცა x რაიმე სხვა დამოუკიდებელი ცვლადის დიფერენცირებადი ფუნქციაა, ამიტომ წარმოებულის (11.4) უნივერ-

სალური (ფორმის უცვლელობის თვალსაზრისით) წარმოდგენა საშუალებას გვაძლევს ფარდობა $\frac{dy}{dx}$ გამოვიყენოთ $y=f(x)$ ფუნქციის x არგუმენტით წარმოებულის აღსანიშნავად. ამდენად $y=f(x)$ ფუნქციის წარმოებულს ხშირად აღნიშნავენ $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ ან $\frac{df(x)}{dx}$ სიმბოლოებით.

§ 12. მაღალი რიგის წარმოებული

ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში, მაშინ $y'=f'(x)$ წარმოებული არის x ცვლადის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არეა $]a, b[$ ინტერვალი. თუ $f'(x)$ ფუნქციას აქვს წარმოებული, მაშინ მას ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და აღინიშნება y'' ან $f''(x)$ სიმბოლოთი.

ანალოგიურად, $f''(x)$ წარმოებულის წარმოებულს, თუ იგი არსებობს, ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის მესამე რიგის წარმოებული და აღინიშნება y''' ან $f'''(x)$ სიმბოლოთი.

საზოგადოდ, $y=f(x)$ ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული ეწოდება ამ ფუნქციის $(n-1)$ რიგის წარმოებულის წარმოებულს და აღინიშნება $y^{(n)}$ ან $f^{(n)}(x)$ სიმბოლოთი.

ამრიგად, თუ $f(x)$ ფუნქციას x წერტილში აქვს წარმოებულები n-ურ რიგამდე ჩათვლით, მაშინ

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

ე. ი.

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

განვიხილოთ მაგალითები ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებულის გამოთვლაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვთქვათ $y=a^x$, მაშინ:

$$y' = (a^x)' = a^x \ln a,\ y'' = (a^x)'' = a^x \ln^2 a,\ \dots,\ y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

კერძოდ $(e^x)^{(n)} = e^x$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვთქვათ $y=x^\alpha$, მაშინ:

$$y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = (x^\alpha)'' = \alpha(\alpha-1)\cdot x^{\alpha-2}, \dots, y^{(n)} =$$
$$= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-\nu}.$$

თუ $\alpha = n$ ნატურალურია, მაშინ ცხადია $(x^n)^{(n)} = n!$ და $(x^n)^{(m)} = 0$, თუ $m > n$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვთქვათ $y = \sin x$, მაშინ:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \ldots,\quad y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

ანალოგიურად მიიღება:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

ცხადია, რომ ჯამის გაწარმოების წესი უცვლელად გადაიტანება ნებისმიერი რიგის წარმოებულებზე, ხოლო რაც შეეხება ორი ფუნქციის ნამრავლის წარმოებულს, მის შესახებ მართებულია შემდეგი თეორემა, რომელსაც დაუმტკიცებლად მოვიყვანთ.

თ ე ო რ ე მ ა 12.1 (ლეიბნიცი*) თუ u და v ფუნქციებს რაიმე წერტილში აქვს n-ური რიგის წარმოებულები, მაშინ ამ წერტილში uv ნამრავლსაც გააჩნია იმავე რიგის წარმოებული და მართებულია ტოლობა:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}.$$

განვიხილოთ მაგალითი. გამოვთვალოთ $y = x\sin x$ ფუნქციის მეასე რიგის წარმოებული. ლეიბნიცის ფორმულის ძალით:

$$(x\sin x)^{(100)} = x(\sin x)^{(100)} + 100\cdot 1\cdot(\sin x)^{(99)} = x\sin\left(x + 100\cdot\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 100\sin\left(x + 99\cdot\frac{\pi}{2}\right) = x\sin x - 100\cos x.$$

§ 13. რთული ფუნქციისა და უქცეული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულები

თ ე ო რ ე მ ა 13.1. თუ $u = \varphi(x)$ ფუნქციას აქვს მეორე რიგის წარმოებული რაიმე x წერტილში, ხოლო u-ს სათანადო მნიშვნელობისათვის $y = f(u)$-ს — მეორე რიგის წარმოებული, მაშინ $y = f[\varphi(x)]$

---

* ლეიბნიცი (1646—1716) — გერმანელი მათემატიკოსი.

რთულ ფუნქციას x წერტილში გააჩნია მეორე რიგის წარმოებული და მართებულია ტოლობა:

$$y''_{x^2} = y''_{u^2} u'^2_x + y'_u \cdot u''_{x^2}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის ძალით გვაქვს:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

ამ ტოლობის x-ით გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$y''_x = (y'_u \cdot u'_x)'_x = (y'_u)_x u'_x + y'_u \cdot u''_x = y''_u \cdot u'^2_x + y'_u \cdot u''_x.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად გამოითვლება რთული ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები.

ახლა, ვთქვათ, $y=f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს IV თავის თეორემა 4. 1-ის პირობებს. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 13.2. თუ $y=f(x)$ ფუნქციას $x=x_0$ წერტილში გააჩნია წარმოებულები $f'(x_0)$, $f''(x_0)$ და $f'(x_0)\neq 0$, მაშინ შექცეულ $x=\varphi(y)$ ფუნქციას $y_0=f(x_0)$ წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებული და მართებულია ტოლობა

$$x''_y = -\frac{y''_x}{y'^3}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემა 7.1-ის ძალით გვაქვს:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

ამ ტოლობის y-ით გაწარმოებით ვღებულობთ:

$$x''_y = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x \cdot x'_y = -\frac{y''_x}{y'^2_y} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_x}{y'^3_x}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად გამოითვლება შექცეული ფუნქციის უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები.

§ 14. პარამეტრულად და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის გაწარმოება

1. ვთქვათ ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით ფორმულებით $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$ (იხ. III თავი, § 1).

გამოვიყვანოთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულა.

თუ $x=\varphi(t)$ და $y=g(t)$ ფუნქციები წარმოებადია $t=t_0$ წერტილში და $\varphi'(t_0)\neq 0$, მაშინ პარამეტრულად მოცემული $y=g[\varphi^{-1}(x)]$ ფუნქცია წარმოებადია $x_0=\varphi(t_0)$ წერტილში და მართებულია ტოლობა

$$y_x'(x_0)=\frac{y_t'(t_0)}{x_t'(t_0)}=\frac{g'(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{14.1}$$

მართლაც, ფუნქციის პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობის ძალით გვაქვს:

$$y_x'=\frac{dy}{dx}, \text{ მაგრამ } dy=g'(t_0)\,dt,\ dx=\varphi'(t_0)\,dt, \text{ ამიტომ } y_x'=\frac{g'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

მეორე რიგის წარმოებულისათვის გვაქვს:

$$y_x''=\frac{d}{dx}(y_x')=\frac{d}{dx}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{x_t'\,y_t''-y_t'\,x_t''}{(x_t')^3}. \tag{14.2}$$

ანალოგიურად მიიღება y-ის ნებისმიერი რიგის წარმოებული x-ით.

გამოვითვალოთ პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები პარამეტრულად მოცემული

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \ -\infty<t<+\infty \end{cases}$$

ფუნქციის.

წირს, რომელიც წარმოადგენს ამ ფუნქციის გრაფიკს, ციკლოიდა ეწოდება. ეს წირი წარმოადგენს a-რადიუსიანი წრეწირის რაიმე წერტილის ტრაექტორიას, თუ ეს წრეწირი უსრიალოდ გორავს წრფეზე, (t პარამეტრი არის ამ წრეწირის რადიუსის მობრუნების კუთხე). (14.1) და (14.2) ფორმულების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$y'(x)=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y''(x)=\frac{a(1-\cos t)\cdot a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t}{a^3(1-\cos t)^3}=$$

$$=\frac{a^2\cos t-a^2}{a^3(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

2. თუ წარმოებადი $y=f(x)$ ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით განტოლებით $F(x, y)=0$ (იხ. III თავი, § 1), მაშინ $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ წარმოებულის მოსაძებნად უნდა გავაწარმოოთ x-ით იგივეობა $F(x, f(x))=0$, როგორც რთული ფუნქცია. საკითხი არაცხადი ფუნქციის არსებობისა და გადიფერენციალების შესახებ დაწვრილებით განხილული იქნება მრავალი ცვლადის ფუნქციის დიფერენციალურ აღრიცხვაში.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $\sin y - x^2 y=0$ ტოლობით განსაზღვრული არაცხადი y ფუნქციის წარმოებული.

ამ ტოლობაში იგულისხმება, რომ y წარმოადგენს x-ის ფუნქციას და მაშასადამე გვაქვს იგივეობა:

$$\sin y - x^2 y \equiv 0.$$

ამ იგივეობის გაწარმოება რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვაძლევს:

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} - 2xy - x^2 \frac{dy}{dx} = 0.$$

აქედან

$$\frac{dy}{dx}(\cos y - x^2) = 2xy,$$

საიდანაც

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{\cos y - x^2}.$$

აქ იგულისხმება, რომ $\cos y - x^2 \neq 0$ და, ამას გარდა x და y აკმაყოფილებს მოცემულ განტოლებას.

§ 15. მაღალი რიგის დიფერენციალი და მათი კავშირი წარმოებულებთან. მაღალი რიგის დიფერენციალის ფორმის არაინვარიანტობა

ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციას რაიმე $]a, b[$ ინტერვალში აქვს ყველა რიგის სასრული წარმოებული n რიგამდე ჩათვლით. მაშინ როგორც ვიცით, მისი დიფერენციალი

$$dy = f'(x)\,dx.$$

აქ dx დამოუკიდებელი x ცვლადის Δx ნაზრდია, ის არ არის დამოკიდებული x-ზე, ამიტომ

$$(dx)'_x = 0. \tag{15.1}$$

$y=f(x)$ ფუნქციის მეორე რიგის დიფერენციალი, რომელიც აღინიშნება d^2y სიმბოლოთი, ეწოდება პირველი რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს, ე. ი. განსაზღვრებით:

$$d^2y = d\,(dy).$$

(15.1) ტოლობისა და ნამრავლის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულის გამოყენებით გვაქვს:

$$\begin{aligned} d^2y &= d\,(dy) = d\,[f'(x)\,dx] = [f'(x)\,dx]'\,dx = \\ &= [f''(x)\,dx + (dx)'\cdot f'(x)]\,dx = f''(x)\,dx^2, \end{aligned} \tag{15.2}$$

სადაც dx^2-ით აღნიშნულია $(dx)^2$.

საზოგადოდ, განსაზღვრებით n-ური რიგის დიფერენციალი ეწოდება $n-1$ რიგის დიფერენციალის დიფერენციალს და აღინიშნება d^ny სიმბოლოთი. ადვილია ჩვენება, რომ

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)\,dx^n, \tag{15.3}$$

სადაც $dx^n = (dx)^n$. მართლაც (15.3) ტოლობა მართებულია $n=1$-სათვის. თუ დავუშვებთ, რომ ის მართებულია $n-1$-სათვის, მაშინ:

$$\begin{aligned} d^n y &= d\,(d^{n-1} y) = d\,(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}) = \\ &= (f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1})'\,dx = f^{(n)}(x)\,dx^n. \end{aligned}$$

(15.3) ტოლობიდან გვაქვს

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}, \tag{15.4}$$

ე. ი. ფუნქციის n-ური რიგის წარმოებული დამოუკიდებელი ცვლადით უდრის ამავე ფუნქციის n-ური რიგის დიფერენციალს, გაყოფილს არგუმენტის დიფერენციალის n-ურ ხარისხზე.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (15.4) ფორმულა საზოგადოდ არ არის მართებული, თუ x ცვლადი არის რაიმე t დამოუკიდებელი ცვლადის ფუნქცია $(x=\varphi(t))$. მართლაც, თუ y-ს განვიხილავთ, როგორც t ცვლადის ფუნქციას და გავითვალისწინებთ პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობას, გვექნება:

$$\begin{aligned} d^2y &= d\,(dy) = d\,[f'(x)\cdot dx] = dx\cdot d\,[f'(x)] + f'(x)\,d\,(dx) = \\ &= f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x, \end{aligned} \tag{15.5}$$

სადაც $d^2x=\varphi''(t)\,dt^2$.

(15.2) და (15.5) ტოლობების შედარებიდან გამომდინარეობს, რომ მეორე რიგის დიფერენციალისათვის ფორმა შენარჩუნებული არ არის, (15.5) ტოლობაში $f''(x)\,dx^2$-ს ემატება $f'(x)\,d^2x$, რომელიც საზოგადოდ ნულის ტოლი არ არის, ამიტომ ისინი არსებითად სხვადასხვაა.

ამრიგად, მეორე რიგის დიფერენციალისათვის ფორმის ინვარიანტობას ადგილი არ აქვს, ე. ი. (15.4) ტოლობას საზოგადოდ ადგილი არა აქვს როცა $n=2$-ს.

დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობის თვისებას მით უფრო არა აქვს ადგილი უფრო მაღალი რიგის დიფერენციალებისათვის.

თუ (15.5) ტოლობის ორივე ნაწილს გავყოფთ dt^2-ზე, მივიღებთ რთული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის გამოსათვლელ ფორმულას:

$$y''_{t^2}=y''_{x^2}\,x'^2_t+y'_x\,x''_{t^2}\,.$$

ეს ფორმულა მიღებული იყო § 13-ში სხვა გზით.

§ 16. დიფერენციალური აღრიცხვის ძირითადი თეორემები

თ ე ო რ ე მ ა 16.1 (ფერმა). თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული f ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში და ამ წერტილში ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ $f'(x_0)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ f ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, მაშინ საკმარისად მცირე h რიცხვისათვის ადგილი ექნება უტოლობას:

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0.$$

აქედან

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0,\quad \text{როცა}\quad h>0, \tag{16.1}$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0,\quad \text{როცა}\quad h<0. \tag{16.2}$$

თეორემის პირობით x_0 წერტილში არსებობს ფუნქციის წარმოებული, ამიტომ (16.1) და (16.2) უტოლობებიდან გვაქვს:

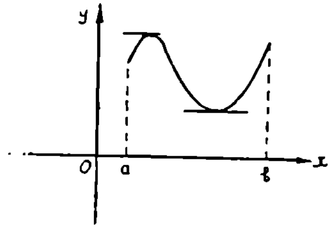
$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leqslant 0, \tag{16.3}$$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0. \tag{16.4}$$

• პ. ფერმა (1601—1665) — ფრანგი მათემატიკოსი.

(16.3) და (16.4) დამოკიდებულებიდან ვღებულობთ $f'(x_0)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

ფერმას თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: თუ f ფუნქცია x_0 წერტილში ღებულობს უდიდეს ან უმცირეს მნიშვნელობას, მაშინ ამ ფუნქციის გრაფიკის $(x_0, f(x_0))$ წერტილზე გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია (ნახ. 34).



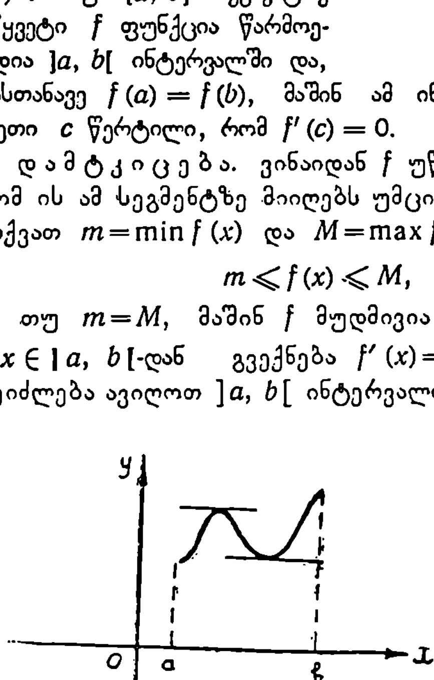
ნახ. 34

თ ე ო რ ე მ ა 1 6.2. (როლი)*. თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და, ამასთანავე $f(a)=f(b)$, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $f'(c)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვინაიდან f უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ ის ამ სეგმენტზე მიიღებს უმცირეს და უდიდეს მნიშვნელობებს. ვთქვათ $m=\min f(x)$ და $M=\max f(x)$, მაშინ

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a, b].$$

თუ $m=M$, მაშინ f მუდმივია $[a, b]$ სეგმენტზე და ამიტომ $\forall x \in]a, b[$-დან გვექნება $f'(x)=0$. ამ შემთხვევაში c წერტილად შეიძლება ავიღოთ $]a, b[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილი.



ნახ. 35

თუ $m \neq M$, მაშინ $f(a)=f(b)$ პირობის ძალით f ფუნქცია m და M მნიშვნელობებიდან ერთ-ერთს მაინც მიიღებს $]a, b[$ ინტერვალის რაიმე c წერტილში. ამ შემთხვევაში ფერმას თეორემის ძალით $f'(c)=0$. თეორემა დამტკიცებულია.

როლის თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: თუ f ფუნქციის გრაფიკს ყოველ $(x, f(x))$, $a<x<b$ წერტილში აქვს მხები და $f(a)=f(b)$, მაშინ ამ გრაფიკზე არსებობს ერთი მაინც წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია (ნახ. 35).

* მ. როლი (1652—1719) — ფრანგი მათემატიკოსი.

თ ე ო რ ე მ ა 16.3. (კოში). თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f და g ფუნქციები წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში $g'(x)=0$, მაშინ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{16.5}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევნიშნოთ, რომ $g(a)\neq g(b)$. მართლაც, თუ $g(a)=g(b)$, მაშინ როლის თეორემის ძალით $]a, b[$ ინტერვალზე იარსებებს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ $g'(c)=0$. ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ამდენად $g(a)\neq g(b)$. განვიხილოთ დამხმარე F ფუნქცია:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(x)-g(a)].$$

ცხადია, F უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და $F(a)=F(b)=0$. ამრიგად, F ფუნქცია აკმაყოფილებს როლის თეორემის ყველა პირობას, ამიტომ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ

$$F'(c)=0. \tag{16.6}$$

მაგრამ

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

ამიტომ (16.6) ტოლობის ძალით:

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0.$$

აქედან

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16.4. (ლაგრანჟის* თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ). თუ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი f ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში, მაშინ ამ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც ისეთი c წერტილი, რომ:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \tag{16.7}$$

---

* ჟ. ა. ლ ა გ რ ა ნ ჟ ი (1736—1813) — ფრანგი მათემატიკოსი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლაგრანჟის თეორემა მიიღება კოშის თეორემიდან, როგორც მისი კერძო შემთხვევა. მართლაც, ვთქვათ $g(x)=x$, მაშინ $g'(x)=1$, $g(a)=a$, $g(b)=b$, ამიტომ (16.5) ტოლობა ასე გადაიწერება:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f'(c)}{1}. \tag{16.8}$$

აქედან

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. (16.7) ფორმულა f ფუნქციის $f(b)-f(a)$ ნაზრდს აკავშირებს არგუმენტის b—a ნაზრდთან, ამიტომ ლაგრანჟის (16.7) ფორმულას სასრული ნაზრდის ფორმულასაც უწოდებენ.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. როლის თეორემა არის ლაგრანჟის თეორემის კერძო შემთხვევა, როცა $f(a)=f(b)$.

ვინაიდან (16.7) ფორმულაში $a<c<b$, ამიტომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$\frac{c-a}{b-a}=\theta,$$

გვექნება $0<\Theta<1$ და $c=a+\Theta(b-a)$.

ამიტომ (16.7) ფორმულა ასე ჩაიწერება:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)). \tag{16.9}$$

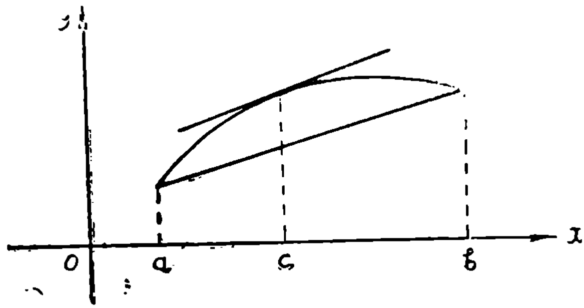
კერძოდ, თუ $b=a+h$, გვექნება:

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h),\ 0<\theta<1.$$

სასრული ნაზრდის ფორმულის ასეთი სახით ჩაწერას ხშირად სასარგებლო გამოყენება აქვს.

ლაგრანჟის თეორემის გეომეტრიული შინაარსია: ვთქვათ $y=f(x)$ წირის ბოლოებია $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$, მაშინ (16.8) ტოლობის მარცხენა ნაწილი წარმოადგენს AB ქორდის კუთხურ კოეფიციენტს, ხოლო მარჯვენა ნაწილი $f'(c)$ არის $y=f(x)$ წირის $(c, f(c))$ წერტილზე გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი. ამრიგად, როცა შესრულებულია ლაგრანჟის თეორემის პირობები, მაშინ $y=f(x)$ წირზე A და B წერტილებს შორის არსებობს ერთი მაინც ისეთი M წერტი-

ლი, რომელზედაც გავლებული მხები AB ქორდის პარალელურია (ნახ. 36).



ნახ. 36

შ ე დ ე გ ი 1. თუ f ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში და $f'(x)=0$ ამ ინტერვალის ყოველ წერტილში, მაშინ f ფუნქცია მუდმივია $]a, b[$-ზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ x_0 რაიმე ფიქსირებული, ხოლო x ნებისმიერი წერტილია $]a, b[$-ში, მაშინ (16.7) ფორმულიდან გვაქვს:

$$f(x)=f(x_0)=\text{const}.$$

ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში $f'(x)=g'(x)$, მაშინ ეს ფუნქციები მხოლოდ მუდმივი შესაკრებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ე. ი. $f(x)=g(x)+\text{const}$.

შ ე დ ე გ ი 2. ვთქვათ f ფუნქცია წარმოებადია $]a, b[$ ინტერვალში, მაშინ ყოველი წერტილი $x_0 \in]a, b[$-დან არის $f'(x)$-ის ან უწყვეტობის წერტილი ან მეორე გვარის წყვეტის წერტილი. სხვანაირად, რომ ვთქვათ $f'(x)$ წარმოებულს არ შეიძლება ქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x), (x_0\in]a,b[)$, მაშინ არსებობს აგრეთვე ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0+} f'[x_0+\theta(x-x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x)$ (რადგანაც $x_0+\Theta(x-x_0)\to x_0$ და $0<\Theta<1$). (16.9) ფორმულის ძალით:

$$\lim_{x\to x_0+} f'(x)=\lim_{x\to x_0+} f'[x_0+\theta(x-x_0)]=\lim_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),$$

ე. ი. $f'(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე მარჯვნიდან. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ თუ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x \to x_0-} f'(x)$, მაშინ $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f'(x_0)$, ე. ი. $f'(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილზე მარცხნიდან. ამრიგად, თუ არსებობს ზღვრები $\lim\limits_{x \to x_0+} f'(x)$ და $\lim\limits_{x \to x_0-} f'(x)$, მაშინ $f'(x)$ უწყვეტია. თუ კი ამ ზღვრებიდან ერთი მაინც არ არსებობს, მაშინ x_0 არის $f'(x)$-ის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

შენიშვნა 1. როგორც ზემოთ ვნახეთ (იხ. § 8-ის შენიშვნა)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & \text{თუ} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ} \quad x = 0, \end{cases}$$

ფუნქცია წარმოებადია ყველგან და $x=0$ არის $f'(x)$-ის მეორე გვარის წყვეტის წერტილი.

შენიშვნა 2. IV თავში დამტკიცებული იყო კოშის თეორემა 3.4 უწყვეტი ფუნქციის შუალედური მნიშვნელობის შესახებ. ეს თვისება საზოგადოდ წყვეტილ ფუნქციას არ გააჩნია. მაგრამ, როგორც დარბუს* მიერ იყო ნაჩვენები, ფუნქციის გაწარმოებით მიღებული ფუნქცია ღებულობს ყველა შუალედურ მნიშვნელობას, მიუხედავად იმისა, განიცდის თუ არა იგი წყვეტას.

შედეგი 3. ვთქვათ $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია, როცა $x \geqslant x_0$ და აკმაყოფილებენ პირობებს $\varphi(x_0) = g(x_0)$, $\varphi'(x) > g'(x)$, როცა $x > x_0$, მაშინ $\varphi(x) > g(x)$, როცა $x > x_0$.

განვიხილოთ ფუნქცია $f(x) = \varphi(x) - g(x)$, ცხადია, რომ $f(x_0) = 0$ და $f'(x) > 0$, როცა $x > x_0$. ლაგრანჟის თეორემის ძალით გვაქვს:

$$f(x) = f'(c)(x - x_0), \; x > x_0. \tag{10.10}$$

რადგან $c > x_0$, ამიტომ 10.10-დან გვაქვს $f(x) > 0$ ანუ $\varphi(x) > g(x)$.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებაზე.

მაგალითი 1. დავამტკიცოთ, რომ

$$\ln(1+x) < x. \quad \text{როცა} \quad x > 0. \qquad (16.11$$

განვიხილოთ $f(x) = \ln(1+x)$ ფუნქცია $[0, x]$ სეგმენტზე. ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით გვაქვს:

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1+c}\, x.$$

ამ უტოლობიდან, რადგან $0 > c > x$, მიიღება (16.11).

---

* გ. დარბუ (1842—1917) — ფრანგი მათემატიკოსი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. დავამტკიცოთ, რომ

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leqslant |x_2 - x_1|, \quad x_1, x_2 \in R. \tag{16.12}$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით გვაქვს:

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1), \tag{16.13}$$

სადაც c მოთავსებულია x_1 და x_2-ს შორის. რადგანაც $0 < \frac{1}{1+c^2} \leqslant 1$, ამიტომ (16.13)-დან მიიღება:

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| = \frac{|x_2 - x_1|}{1+c^2} \leqslant |x_2 - x_1|.$$

თუ (16.12) უტოლობაში დავუშვებთ, რომ $x_2 = x$, $x_1 = 0$, მივიღებთ:

$$|\operatorname{arctg} x| \leqslant |x|, \quad x \in R,$$

და კერძოდ $0 \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant x$, როცა $x > 0$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. დავამტკიცოთ, რომ

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}, \quad \text{როცა} \quad x > 0. \tag{16.14}$$

განვიხილოთ ფუნქციები $\varphi(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$. ცხადია, რომ $\varphi(0) = g(0)$. გარდა, ამისა $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x}$ და $g'(x) = 1 - x$. ადვილია შემოწმება, რომ

$$\frac{1}{1+x} > 1 - x, \quad \text{როცა } x > 0.$$

ამრიგად, $\varphi(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ შედეგი 3-ის პირობებს, ამიტომ ადგილი აქვს (16.14) უტოლობას.

§ 17. განუსაზღვრელობათა გახსნა. ლოპიტალის წესი

იმ შემთხვევაში, როცა f და g ფუნქციები უსასრულოდ მცირეებია, ან უსასრულოდ დიდებია, როცა $x \to a$, მაშინ $\frac{f(x)}{g(x)}$ ფარდობის

• გ. ლ ო პ ი ტ ა ლ ი (1661—1704) — ფრანგი მათემატიკოსი.

ზღვრის გამოთვლა უშუალოდ ზღვარზე გადასვლის გზით არ ხერხდება. ასეთი ზღვრის გამოსათვლელად ზოგჯერ ხელსაყრელია გამოვიყენოთ ეგრეთწოდებული „ლოპიტალის წესი“. ლოპიტალის წესი საშუალებას გვაძლევს ფუნქციათა ფარდობის ზღვარი შევცვალოთ მათი წარმოებულების ფარდობის ზღვრით. ასეთი ზღვრის გამოთვლას უწოდებენ აგრეთვე განუსაზღვრელობის გახსნას.

1. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობები. ვიტყვით, რომ შეფარდება $\frac{f(x)}{g(x)}$ წარმოადგენს $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობას, როცა $x \to a$, თუ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

ამ განუსაზღვრელობათა გახსნა ნიშნავს გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, თუ ის არსებობს, ან დავადგინოთ რომ ის არ არსებობს.

ანალოგიურად განისაზღვრება $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, როცა $x \to a+(x\to a-)$, როცა $x\to\infty$ ან $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$.

თეორემა 17.1. ვთქვათ, $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია a წერტილის რაიმე მიდამოში. თუ:

1) $f(a) = g(a) = 0$,

2) $f'(a)$ და $g'(a)$ არსებობს, ამასთან $g'(a) \neq 0$, მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $\Delta x = x - a$. დიფერენცირებადობის განსაზღვრების ძალით გვაქვს:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(a)\,\Delta x + o(\Delta x)}{g'(a)\,\Delta x + o(\Delta x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(a) + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}}{g'(a) + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თ ე ო რ ე მ ა 17.2. ვთქვათ:

1) $f(x)$ და $g(x)$ ფუნქციები წარმოებადია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა.

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

3) $g'(x) \neq 0, \quad x \neq a$.

4) არსებობს $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ სასრული ან უსასრულო (ტოლი $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის).

მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ და

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{როცა} \quad x \neq a, \\ 0 & \text{როცა} \quad x = a, \end{cases} \qquad g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{როცა } x \neq a, \\ 0 & \text{როცა } x = a. \end{cases}$$

$f_1(x)$ და $g_1(x)$ ფუნქციები უწყვეტია a წერტილში და აკმაყოფილებენ კოშის თეორემის პირობებს a წერტილის მიდამოში მდებარე ნებისმიერ $[a, x]$ სეგმენტზე, ამიტომ არსებობს $c = c(x) \in]\, a, x[$ ისეთი, რომ

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x) - f_1(a)}{g_1(x) - g_1(a)} = \frac{f_1'(c)}{g_1'(c)}, \tag{17.1}$$

ამასთან $\lim\limits_{x\to a} c(x) = a$, ამიტომ (17.1) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f_1'(c)}{g_1'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. ლოპიტალის წესის მიხედვით თუ არსებობს წარმოებულთა შეფარდების ზღვარი, მაშინ არსებობს თვით ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარიც. მაგრამ შეიძლება წარმოებულთა შეფარდე-

ბის ზღვარი არ არსებობდეს, თუმცა თვით ამ ფუნქციათა შეფარდების ზღვარი კი არსებობდეს. მართლაც

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}=0.$$

მაგრამ წარმოებულთა ფარდობა არის

$$\frac{2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}}{\cos x},$$

ამ ფარდობის ზღვარი კი, როცა $x\to 0$ არ არსებობს.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თეორემა სათანადო ფორმულირებით მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა $x\to a+$ ან $x\to a-$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 3. თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა $x\to\infty$, $x\to+\infty$ და $x\to-\infty$.

მართლაც, ვთქვათ, მაგალითად $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ არსებობს (სასრული ან უსასრულო). შემოვიღოთ აღნიშვნა $x=\frac{1}{t}$, მაშინ $t\to 0$, როცა $x\to\infty$ და

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{t\to 0} g\left(\frac{1}{t}\right)=0.$$

$f\left(\frac{1}{t}\right)$ და $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ფუნქციებზე თეორემა 17.2-ის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 4. ვთქვათ $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ არის a წერტილში $\dfrac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა, თუ $f'(x)$ და $g'(x)$ აკმაყოფილებენ თეორემა 17.2-ის პირობებს, მაშინ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

საზოგადოდ მართებულია შემდეგი ზოგადი წესი, თუ:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a} f^{(n-1)}(x)=0,\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} g'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a} g^{(n-1)}(x)=0\end{cases}$$

და არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$, მაშინ არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ და მართებულია ტოლობა:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^\alpha}{\ln(1+x)}$, $\alpha>1$. აქ გვაქვს $\dfrac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის გამოყენებით მიიღება:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^\alpha}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\dfrac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0+}\alpha x^{\alpha-1}(1+x)=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

ლოპიტალის წესის გამოყენებით გვაქვს:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

აქ ისევ მივიღეთ $\dfrac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა. ლოპიტალის წესის კვლავ გამოყენება გვაძლევს:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}.$$

შენიშვნა 3-ის ძალით ვწერთ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\cos\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}}{\cos\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

2. $\frac{\infty}{\infty}$ **სახის განუსაზღვრელობები.** ვიტყვით, რომ შეფარდება $\frac{f(x)}{g(x)}$ წარმოადგენს $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობას, როცა $x\to a$, თუ:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty^*.$$

თ ე ო რ ე მ ა 17.3. ვთქვათ:

1) $f(x)$ და $g(x)$ წარმოებადი ფუნქციებია a წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით a წერტილისა,

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty,$

3) $g'(x)\neq 0,\ x\neq a,$

4) არსებობს $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ სასრული ან უსასრულო (ტოლი $+\infty$-ის ან $-\infty$-ის).

მაშინ არსებობს ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ და

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{17.2}$$

---

* თითოეულ ამ ტოლობაში ∞-ის ნაცვლად შეიძლება იყოს $+\infty$ ან $-\infty$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

სადაც l სასრული რიცხვია. მაშინ $\forall \varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $\delta_1 > 0$ ისეთი, რომ, როცა $0 < |x-a| < \delta_1$, გვექნება:

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17.3}$$

თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

ავიღოთ $[x, x_0]$ სეგმენტი, რომელიც ეკუთვნის $]a, a+\delta_1[$ ინტერვალს. კოშის თეორემის ძალით $\exists c \in]x, x_0[$ ისეთი, რომ:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

აქედან

$$f(x) = f(x_0) + [g(x) - g(x_0)] \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ცხადია, რომ საკმარისად მცირე δ_1-სათვის $]a, a+\delta_1[$ მიდამოში $g(x) \neq 0$, ამიტომ, თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $g(x)$-ზე, მივიღებთ:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(x_0)}{g(x)} - \frac{g(x_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{17.4}$$

ვინაიდან $0 < c-a < \delta_1$, ამიტომ (17.3)-ის ძალით გვექნება:

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

საიდანაც

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < |l| + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17.5}$$

თეორემის პირობის ძალით $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=0$, ამიტომ $\exists\,\delta_2>0$ ისეთი, რომ, როცა $0<x-a<\delta_2$, ადგილი ექნება უტოლობებს:

$$\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{3|l|+\varepsilon}. \tag{17.6}$$

(17.4) ტოლობიდან (17.5) და (17.6) უტოლობების გამოყენებით, როცა $0<x-a<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, მივიღებთ:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|\leqslant\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|+\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|+\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3|l|+\varepsilon}\left(|l|+\frac{\varepsilon}{3}\right)=\varepsilon.$$

ე. ი.

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

ამრიგად, როცა l სასრულია თეორემა დამტკიცებულია.

ახლა ვთქვათ, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, მაშინ

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

ამიტომ ზემოთ განხილული შემთხვევის ძალით

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

საიდანაც

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თეორემა 17.3 სათანადო ფორმულირებით მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\pm\infty$ ან $x\to\infty$.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ $\frac{f'(x)}{g(x)}$ არის a წერტილში $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა და $f'(x)$ და $g'(x)$ აკმაყოფილებენ თეორემა 17.3-ის პირობებს, მაშინ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

საჭიროების შემთხვევაში შეგვიძლია განვიხილოთ მესამე რიგის წარმოებულობის ფარდობა და ა. შ.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. ვიპოვოთ

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

გვაქვს

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{x}=0.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

ამრიგად, ზემოთ დამტკიცებული თეორემების თანახმად ლოპიტალის წესი საშუალებას გვაძლევს გავხსნათ $\frac{0}{0}$ და $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობები. ხშირად, სხვადასხვა გარდაქმნებით $0.\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, $\infty^0, 1^\infty$ სახის განუსაზღვრელობები შეიძლება დავიყვანოთ $\frac{0}{0}$ ან $\frac{\infty}{\infty}$ ტიპის განუსაზღვრელობამდე.

3. $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ და $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, მაშინ:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\,g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}},\tag{17.7}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}. \qquad (17.8)$$

(17.7) და (17.8) ტოლობებიდან ჩანს, რომ $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნა დაიყვანება $\dfrac{0}{0}$ ან $\dfrac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობების გახსნამდე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 6. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

გვაქვს $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. თეორემა 17.2-ის ძალით ვღებულობთ:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}}}=\frac{2}{\pi}.$$

4. $\infty-\infty$ სახის განუსაზღვრელობა. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ და $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. გამოვთვალოთ ზღვარი $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]$. ამ შემთხვევაში ზღვრის გამოთვლა შეიძლება დავიყვანოთ $\dfrac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე. მართლაც:

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,g(x)}}.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 7. ვიპოვოთ $\lim\limits_{x\to a}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}x+\dfrac{x}{\cos^2x}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2x}{\sin x\cos x+x}=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos 2x+1}=0.$$

ნ. 1^{∞}, 0^{0} ∞^{0} სახის განუსაზღვრელობები. ამ სახის განუსაზღვრელობების გახსნა დაიყვანება $0\cdot\infty$ სახის განუსაზღვრელობის გახსნამდე შემდეგი ფორმულის გამოყენებით:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}, \quad (f(x) > 0).$$

განვიხილოთ სათანადო მაგალითები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 8.

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 9.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} e^{\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{ctg} x} = 1.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 10.

$$\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)(e^x-1)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{e^x-1}} = e^2.$$

§ 18. ტეილორის* ფორმულა

ამ პარაგრაფში დავადგენთ მნიშვნელოვან ფორმულას, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს როგორც მათემატიკაში, ასევე სხვა დისციპლინებში.

* ბ. ტ ე ი ლ ო რ ი (1685—1731) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

თ ე ო რ ე მ ა 18.1. თუ f ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს n რიგის წარმოებული, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი x წერტილისათვის:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right). \tag{18.1}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad \varphi(x) = (x - x_0)^n.$$

თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = 0$. ადვილია შემოწმება, რომ

$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$, $\varphi^{(k)}(x_0) = 0$, თუ $k < n$, ხოლო $\varphi^{(n)}(x) = n!$

$r_n^{(n-1)}(x)$ $\varphi^{(n-1)}(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ თეორემა 17.1-ის პირობებს, ამიტომ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_0)} = \frac{0}{n!} = 0.$$

ამრიგად, $r_n(x)$ და $\varphi(x)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ თეორემა 17.2-ის შედეგი 4-ის პირობებს, ამიტომ:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{\varphi^{(n-1)}(x)} = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს (18.1) ტოლობის მართებულობა. თეორემა დამტკიცებულია.

$$Q_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

მრავალწევრს ეწოდება f ფუნქციის ტეილორის n-ური რიგის მრავალ-

წევრი. (18.1) ფორმულას ეწოდება f ფუნქციის ტეილორის ფორმულა, $r_n(x) = f(x) - Q_n(x)$-ს კი ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი. როგორც ვნახეთ

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), \ x \to x_0. \qquad)18.2)$$

$r_n(x)$-ს, რომელიც ჩაწერილია (18.2) ფორმით, ეწოდება ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი პეანოს* სახით.

თ ე ო რ ე მ ა 18.2. თუ f ფუნქციას x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში აქვს $n+1$ რიგის წარმოებული, მაშინ ამ მიდამოს ნებისმიერი x წერტილისათვის x_0-სა და x-ს შორის არსებობს ერთი მაინც c წერტილი ისეთი, რომ ადგილი ექნება ტოლობას:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)^2}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (18.3)$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვეძიოთ $r_n(x)$ ნაშთითი წევრი შემდეგი სახით:

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} g(x), \qquad (18.4)$$

სადაც $g(x)$ ჯერ-ჯერობით უცნობი ფუნქციაა. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} g(x).$$

ცხადია, რომ $F(t)$ წარმოებადია x_0 წერტილის მიდამოში და $F(x) = F(x_0) = 0$, ე. ი. $F(t)$ აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს. ამასთან:

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k(x-t)^{k-1} +$$

---

* დ. პ ე ა ნ ო (1858—1932) — იტალიელი მათემატიკოსი.

$$+\frac{(x-t)^n}{n!}g(x)=-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}+$$

$$+\frac{(x-t)^n}{n!}g(x)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{(x-t)^n}{n!}g(x).$$

როლის თეორემის ძალით x_0-სა და x-ს შორის არსებობს ერთი მაინც c წერტილი ისეთი, რომ:

$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{(x-c)^n}{n!}g(x)=0.$$

აქედან $g(x)=f^{(n+1)}(c)$. თუ $g(x)$-ის მიღებულ მნიშვნელობას ჩავსვამთ (18.4) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{18.5}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $n=0$, (18.3) ტოლობიდან მიიღება ლაგრანჟის ფორმულა სასრული ნაზრდის შესახებ.

(18.5) ფორმით ჩაწერილ $r_n(x)$-ს ეწოდება ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი ლაგრანჟის სახით.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $x-x_0=h$, მაშინ ტეილორის (18.3) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$f(x_0)+h)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},\quad 0<\theta<1. \tag{18.6}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ f ფუნქციის $f^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \dots, n+1)$ წარმოებულები შემოსაზღვრულია x_0 წერტილის $u(x_0, \delta)$ მიდამოში, ე. ი.

$$|f^{(k)}(x)|\leqslant M,\quad x\in]x_0-\delta,\quad x_0+\delta[,$$

მაშინ (18.5) ტოლობიდან, მივიღებთ:

$$|r_n(t)|\leqslant\frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{18.7}$$

(18.7) უტოლობა საშუალებას გვაძლევს შევისწავლოთ $r_n(x)$-ის ყოფაქცევა ფიქსირებული n-ისათვის x_0-ის მიდამოში, ასევე დავადგინოთ $r_n(x)$-ის ყოფაქცევა, როცა $n \to \infty$.

როგორც ვიცით (იხ. თავი III, § 6, მაგალითი 8) ყოველი ფიქსირებული x-ისათვის

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

აქედან გამომდინარე (18.7) უტოლობის მარჯვენა ნაწილი რაგინდ მცირე შეიძლება გავხადოთ n-ის სათანადო შერჩევით. ეს გარემოება გვაძლევს საშუალებას გამოვიყენოთ ტეილორის ფორმულა ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოსათვლელად წინასწარ აღებული ნებისმიერი სიზუსტით.

აქვე შევნიშნოთ, რომ ტეილორის მრავალწევრი ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების მრავალწევრია მოცემული წერტილის მიდამოში. ე. ი. ტეილორის $Q_n(x)$ მრავალწევრს აქვს ის თვისება, რომ როგორიც არ უნდა იყოს $P(x)$ მრავალწევრი, რომლის რიგი არ აღემატება n-ს, მოცემულ წერტილის მიდამოში, ადგილი აქვს უტოლობას

$$|f(x) - Q_n(x)| \leqslant |f(x) - P(x)|.$$

საგულისხმოა ის გარემოებაც, რომ ასეთი თვისების მრავალწევრი ერთადერთია.

როცა $x_0 = 0$, მაშინ ტეილორის (18.6) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (18.8)$$

რომელსაც მაკლორენის* ფორმულა ეწოდება.

§ 19. მაკლორენის ფორმულა ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციისათვის

1. ვთქვათ $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ n-ური რიგის მრავალწევრია. ცხადია, რომ $P_n^{(k)} \equiv 0$ როცა $k > n$, ამიტომ (18.3) ტოლობიდან მიიღება:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad (19.1)$$

* კ. მაკლორენი (1698—1746) — ინგლისელი მათემატიკოსი.

კერძოდ, თუ $x_0=0$, მაშინ:

$$P_n(x)=P_n(0)+\frac{P_n'(0)}{1!}x+\frac{P_n''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (10.2)$$

(19.1) და (19.2) ფორმულებს, შესაბამისად, უწოდებენ ტეილორის და მაკლორენის ფორმულებს მრავალწევრებისათვის.

2. $f(x)=(a+x)^n$, $n\in N$. გვაქვს:

$$f'(x)=n(a+x)^{n-1},\ f'(0)=na^{n-1},$$
$$f''(x)=n(n-1)(a+x)^{n-2},\ f''(0)=n(n-1)a^{n-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]\,a^{n-k},$$
$$f^{(k)}(0)=n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]\,a^{n-k},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!,\ f^n(0)=n!.$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (19.2)-დან მივიღებთ:

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}x^k+\dots+x^n.$$

ამ ფორმულას უწოდებენ ნიუტონის* ბინომის ფორმულას.

3. $f(x)=e^x$. ვინაიდან $f'(x)=f''(x)=\dots=f^{(n)}(x)=e^x$, ამიტომ $f(0)=f'(0)=f''(0)=\dots=f^{(n)}(0)=1$ და (18.8) ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

ნებისმიერი x-სათვის $[-R, R]$ სეგმენტიდან $e^{\theta x}<e^R$, ამიტომ ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს შეფასებას:

$$|r_n(x)|<\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}e^k. \quad (19.4)$$

* ი. ნიუტონი (1643—1727) — ინგლისელი ფიზიკოსი, მექანიკოსი, ასტრონომი და მათემატიკოსი.

4. $f(x)=\sin x$. ადვილია შემოწმება, რომ:

$$f(x)=\sin x, \quad f(0)=0,$$

$$f'(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f'''(0)=-1,$$

$$f^{(JV)}(x)=\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f^{(JV)}(0)=0,$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot$$

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+x\right], \quad f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right].$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს (18.8) ფორმულაში, გვექნება:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right]. \qquad (19.5)$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი x-სათვის $[-R, R]$ სეგმენტიდან ნაშთითი წევრისათვის მართებულია შეფასება:

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (19.6)$$

თუ $n=2k+1$, მაშინ:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+$$
$$+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\sin\theta x.$$

თუ კი $n=2k$, მაშინ:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\dots(-1)^k\frac{x^{3k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

5. $f(x)=\cos x$. გვაქვს:

$$f(x)=\cos x, \quad f(0)=1,$$

$$f'(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f''(0)=-1,$$

$$f'''(x)=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f'''(0)=0,$$

$$f^{(IV)}(x)=\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f^{IV}(0)=1,$$

$$\cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad \cdot$$

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right), \quad f^{(n)}(0)=\cos\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x)=\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+x\right], \quad f^{(n+1)}(\theta x)=\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right].$$

თუ შევიტანთ ამ მნიშვნელობებს (18.8) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left[(n+1)\frac{\pi}{2}+\theta x\right]. \tag{19.7}$$

აქაც ნებისმიერი x-ისათვის $[-R, R]$ სეგმენტიდან ნაშთითი წევრისათვის ადგილი აქვს (19.6) შეფასებას. თუ $n=2k$, გვექნება:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin\theta x.$$

თუ $n=2k+1$, მაშინ:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{k+1}\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cos\theta x.$$

6. $f(x)=\ln(1+x)$, ცხადია, რომ:

$$f(x)=\ln(1+x),\ f(0)=0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\ f''(0)=-1,$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f'''(0)=2,$$

$$f^{(IV)}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ f^{IV)}(0)=-2\cdot 3,$$

$$\cdot\ \cdot\qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(1+x)^{n+1}},\quad f^{(n+1)}(\theta x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

ამრიგად,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

7. $f(x)=(1+x)^\alpha$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია და $x>-1$. ელემენტარული გამოთვლებით მივიღებთ:

$$f(x)=(1+x)^\alpha,\ \ f(0)=1,$$

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f'(0)=\alpha,$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)[(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)],$$

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

ამ ტოლობების ძალით გვაქვს:

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}. \tag{19.8}$$

კერძოდ, თუ α ნატურალური n რიცხვია, მაშინ (19.8) ტოლობიდან მიიღება ბინომის ფორმულა.

1. e რიცხვის ირაციონალობის დამტკიცება. (19.3) ფორმულიდან $x=1$-სათვის გვაქვს:

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\quad 0<\theta<1. \tag{20.1}$$

ამ ტოლობის გამოყენებით ვაჩვენოთ, რომ e ირაციონალური რიცხვია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ e რაციონალურია და $e=\frac{m}{k}$, სადაც m, $k \in \mathbf{N}$. რადგანაც $2<e<3$, ამიტომ ცხადია, რომ $k \geqslant 2$. (20.1) ფორმულა $n=k$-სათვის ასე ჩაიწერება:

$$e=\frac{m}{k}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{e^{\theta}}{(k+1)!},\ 0<\theta<1.$$

გავამრავლოთ ამ ტოლობის ორივე მხარე $k!$-ზე, მივიღებთ:

$$m(k-1)!-k!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)=\frac{e^{\theta}}{k+1}\ 0<\theta<1.$$

ამ ტოლობის მარცხენა მხარე მთელი რიცხვია, ხოლო მარჯვენა კი მთელი არ არის, ვინაიდან $k+1 \geqslant 3$ და $1<e^{\theta}<3$, ამიტომ $0<\frac{e^{\theta}}{k+1}<1$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე. ი. e ირაციონალური რიცხვია.

2. ტრიგონომეტრიულ ფუნქციათა მიახლოებითი მნიშვნელობების გამოთვლა. ადვილია ჩვენება, რომ $\sin x$ და $\cos x$-ის მნიშვნელობები $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ სეგმენტზე სავსებით განსაზღვრავს ამ ფუნქციების მნიშვნელობებს ნებისმიერი x-სათვის, ამიტომ გამოვითვალოთ $\sin x$ და $\cos x$-ის მნიშვნელობები $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ სეგმენტზე.

გამოვითვალოთ $\sin x$-ის მნიშვნელობა 10^{-4}-ის სიზუსტით, ამისათვის (19.5) და (19.6) ფორმულებში ჩავსვათ $n=6$ და $R=\frac{\pi}{4}$, მივიღებთ:

$$|r_n(x)|=|r_6(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^7}{7!}<10^{-4}.$$

ამიტომ ნებისმიერი x-სათვის $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ სეგმენტიდან 10^{-4}-ის სიზუსტით გვაქვს:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

ანალოგიურად, თუ (19.7) ფორმულაში და (19.6) შეფასებაში დავუშვებთ, რომ $n=7$, და $R=\frac{\pi}{4}$, მივიღებთ:

$$|r_n(x)| = |r_8(x)| \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^8}{8!} < 10^{-5}.$$

ამიტომ, ყოველი $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$-სათვის 10^{-5}-ის სიზუსტით, გვაქვს:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

3. ზოგიერთი ელემენტარული ფუნქციის ასიმპტოტური შეფასება და მისი გამოყენება. ელემენტარული ფუნქციებისათვის § 19-ში მიღებული მაკლორენის ფორმულებიდან მიიღება ამ ფუნქციათა ასიმპტოტური* შეფასებები, რომლებიც ახასიათებენ მათ ყოფაქცევას $x=0$ წერტილის მიდამოში. თუ e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ და $(1+x)^\alpha$ ფუნქციების მაკლორენის ფორმულაში ნაშთით წევრს ავიღებთ პეანოს სახით, მივიღებთ, რომ ნებისმიერი n-სათვის მართებულია შემდეგი შეფასებები:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \qquad (20.2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

---

* ფორმულას ან შეფასებას, რომელიც ახასიათებს $f(x)$ ფუნქციის ყოფაქცევას, როცა $x \to a$ (ჩვენს შემთხვევაში, როცა $x \to 0$), უწოდებენ ასიმპტოტურს.

ვაჩვენოთ ამ ასიმპტოტური ფორმულების გამოყენება ზღვრის გამოთვლისას.

1) გამოვთვალოთ ზღვარი:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}.$$

(20.2) ფორმულების გამოყენებით გვაქვს:

$$x-\sin x=\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

$$e^x-1-x=\frac{x^2}{2!}=\frac{x^3}{3!}+o(x^3).$$

ამ ფორმულების ძალით მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3!}+o(x^3)}=1.$$

2) გამოვითვალოთ ზღვარი:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}.$$

მნიშვნელი მიგვანიშნებს იმაზე, რომ განმსაზღვრელი როლი უნდა შეასრულოს x-ის მიმართ მეოთხე რიგის წევრებმა. (20.2) ტოლობებიდან გვაქვს:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),$$

$$\sin x=x+o(x),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}+o(x^4).$$

ამ ფორმულების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^2)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}+0(1)}{1+o(1)}=\frac{1}{12}.$$

1. ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის ნიშნები. ფუნქციის გამოკვლევისას ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა დავადგინოთ ამ ფუნქციის მონოტონურობის შუალედები. ეს საკითხი კი წარმოებადი ფუნქციის შემთხვევაში დაკავშირებულია ფუნქციის წარმოებულის ნიშანთან. მართებულია შემდეგი თეორემები.

თ ე ო რ ე მ ა 21.1. იმისათვის, რომ $]a, b[$ ინტერვალში წარმოებადი $f(x)$ ფუნქცია იყოს არაკლებადი (არაზრდადი) ამ ინტერვალზე აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0), \quad \forall x \in]a, b[. \tag{21.1}$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. დავუშვათ, რომ $f(x)$ ფუნქცია არაკლებადია $]a, b[$ ინტერვალზე. ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს (21.1) პირობას. ვთქვათ x_0 ნებისმიერი წერტილია $]a, b[$ ინტერვალიდან, მაშინ პირობის ძალით:

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \text{როცა} \quad x > x_0,$$
$$f(x) \leqslant f(x_0), \quad \text{როცა} \quad x < x_0.$$

ამ უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $x \in]a, b[$ და $x \neq x_0$, მაშინ გვექნება:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

თუ ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \to x_0$, მივიღებთ:

$$f'(x_0) \geqslant 0.$$

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. დავუშვათ ადგილი აქვს (21.1) პირობას. ვთქვათ x_1 და x_2 $]a, b[$ ინტერვალის ნებისმიერი წერტილებია, ისეთი, რომ $x_1 < x_2$. მაშინ ლაგრანჟის თეორემის თანახმად, ამ წერტილებს შორის არსებობს ისეთი c წერტილი, რომ:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{21.2}$$

რადგან პირობის ძალით $f'(c) \geqslant 0$ და $x_2 - x_1 > 0$, ამიტომ (21.2) ტოლობიდან მივიღებთ, რომ $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, ე. ი.

$$f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 21.2. თუ $]a, b[$ ინტერვალის ყოველ წერტილში ადგილი აქვს უტოლობას:

$$f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0), \tag{21.3}$$

მაშინ ამ ინტერვალზე $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია)*

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. (21.3) პირობა არ არის აუცილებელი ფუნქციის ზრდადობისათვის (კლებადობისათვის). მაგალითად $f(x)=x^3$ ფუნქცია ზრდადია R-ზე, მაგრამ $f'(o)=0$, ე. ი. არ სრულდება (21.3) უტოლობა.

ეს თეორემები შეიძლება გამოვიყენოთ ზოგიერთი უტოლობის დასამტკიცებლად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. დავამტკიცოთ უტოლობა:

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x, \text{ როცა } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{21.4}$$

განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 1, & \text{თუ } x = 0. \end{cases}$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში, ამასთან:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x). \tag{21.5}$$

რადგანაც $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალში ადგილი აქვს უტოლობებს $\cos x > 0$, $\operatorname{tg} x > x$ (იხ. III თავის (10.2) უტოლობა). ამიტომ (21.5)-დან გვაქვს $f'(x) < 0$.

თეორემა 21.2-ის ძალით აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია $f(x)$ კლებადია $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ სეგმენტზე, ამიტომ $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ყო-

---

* თუ ფუნქცია უწყვეტია[a, b] სეგმენტზე, მაშინ თეორემის პირობებში ზრდადობას (კლებადობას) ადგილი ექნება [a, b] სეგმენტზე. ანალოგიური შენიშვნა შეიძლება გავაკეთოთ თეორემა 21.1-სათვისაც.

ველი x-სათვის $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ინტერვალიდან, ე. ი. ადგილი აქვს უტოლობას:

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi},$$

საიდანაც მიიღება (21.4) უტოლობა.

განსაზღვრება 21.1. ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) x_0 წერტილში, თუ არსებობს $\delta>0$ რიცხვი, ისეთი, რომ:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}<0\right),\quad \text{როცა}\quad 0<|\Delta x|<\delta.$$

შევნიშნოთ, რომ ეს პირობა ეკვივალენტურია პირობის

$$f(x_0+\Delta x)<f(x_0),\quad \text{როცა}\quad \Delta x<0,$$
$$f(x_0+\Delta x)>f(x_0),\quad \text{როცა}\quad \Delta x>0.$$

თეორემა 21.3. თუ $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$), მაშინ $y=f(x)$ ფუნქცია ზრდადია (კლებადია) x_0 წერტილში.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $f'(x_0)>0$, მაშინ წარმოებულის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}>0.$$

აქედან ფუნქციის ზღვრის ერთ-ერთი თვისების ძალით (თავი III, თეორემა 8.5-ის შედეგი) არსებობს $\delta<0$ ისეთი, რომ $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$, როცა $0<|\Delta x|<\delta$. ე. ი. ფუნქცია ზრდადია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თუ ფუნქცია ზრდადია წერტილზე, აქედან საზოგადოდ არ გამომდინარეობს, რომ ის ზრდადია ამ წერტილის რაღაც მიდამოში. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{თუ}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{თუ}\quad x=0.\end{cases}$$

ცხადია, რომ

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}-x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2},$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია $x=0$ წერტილში. მაგრამ ეს ფუნქცია არ არის ზრდადი $x=0$ წერტილის არცერთ მიდამოში. მართლაც

$$f'(x)=\frac{1}{2}-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x},$$

აქედან

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right)=\frac{3}{2}\quad (k=1, 2,\ldots),$$

ხოლო

$$f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right)=-\frac{1}{2}\quad (k=1, 2,\ldots).$$

ე. ი. $f'(x)$ ფუნქცია $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მცირე მიდამოში ღებულობს როგორც დადებით ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს.

2. ფუნქციის ექსტრემუმი. მეცნიერებისა და ტექნიკის მრავალი ამოცანა დაკავშირებულია ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის მოძებნასთან. ასეთი ამოცანების ერთი ნაწილი შეისწავლება დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდებით.

ვთქვათ მოცემულია $[a, b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული $f(x)$ ფუნქცია.

განსაზღვრება 21.2. $[a, b]$ სეგმენტის შიგა x_0 წერტილს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილი, თუ მოიძებნება x_0-ის ისეთი $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ მიდამო, რომ ამ მიდამოს ყოველი x წერტილისათვის სრულდება უტოლობა $f(x)\leqslant f(x_0)$ ($f(x)\geqslant f(x_0)$).

ფუნქციის მნიშვნელობებს მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებში უწოდებენ შესაბამისად ფუნქციის ლოკალურ მაქსიმუმს* და ლოკალურ მინიმუმს.

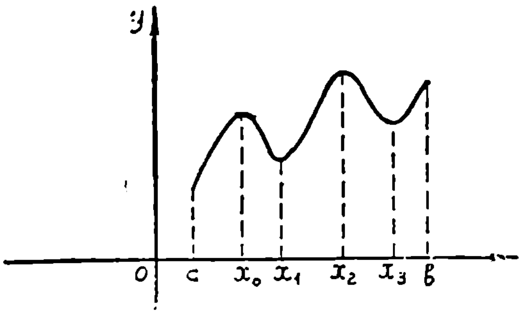
ფუნქციის მაქსიმუმისა და მინიმუმის წერტილებს ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები ეწოდება, ხოლო თვით ფუნქციის მნიშვნელო-

---

* შემდგომში, იქ სადაც გაურკვევლობას არ გამოიწვევს, ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმი) ნაცვლად გამოვიყენებთ გამოთქმას მაქსიმუმი (მინიმუმი).

ბებს ექსტრემუმის წერტილებში ამ ფუნქციის ექსტრემალური მნიშვნელობანი ანუ ექსტრემუმები.

მოყვანილი განსაზღვრებიდან ჩანს, რომ ფუნქციის მაქსიმუმი (მინიმუმი) უდიდესია (უმცირესია) იმ მნიშვნელობებთან შედარებით, რომელიც მას აქვს მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილის გარკვეულ მიდამოში. მაშასადამე ის ფაქტი, რომ ფუნქციას გააჩნია ექსტრემუმი რაიმე წერტილში არის ამ ფუნქციის ლოკალური, ე. ი. მხოლოდ ამ წერტილის რაიმე მიდამოსათვის დამახასიათებელი თვისება.



ნახ. 37

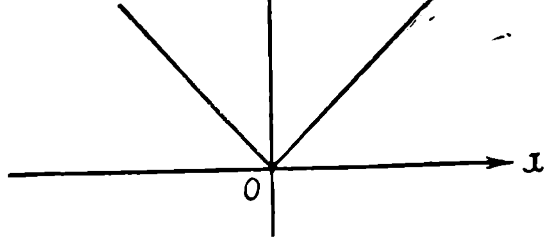
როგორც 37-ე ნახაზიდან ჩანს, მოცემულ შუალედზე ფუნქციას შეიძლება გააჩნდეს რამდენიმე ექსტრემუმი .ამასთან ზოგიერთი მინიმუმი შეიძლება ზოგიერთ მაქსიმუმზე მეტი აღმოჩნდეს.

ახლა შევისწავლოთ ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილების მოძებნის წესი:

ფერმას თეორემის თანახმად, თუ x წერტილში წარმოებად $f(x)$ ფუნქციას ამავე წერტილში აქვს ექსტრემუმი, მაშინ $f'(x)=0$, ე. ი. წარმოებადი ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობაა პირველი რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა.

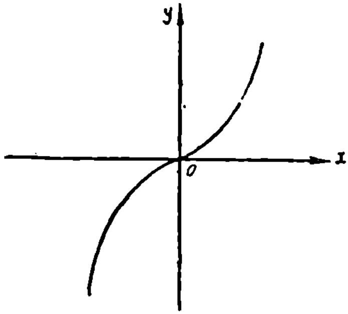
შევნიშნოთ, რომ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება გააჩნდეს იმ წერტილშიც, სადაც წარმოებული არ არსებობს.

მაგალითად, $f(x)=|x|$ ფუნქციას $x=0$ წერტილში წარმოებული არა აქვს, მაგრამ ამ წერტილში მას აქვს მინიმუმი (ნახ. 38).

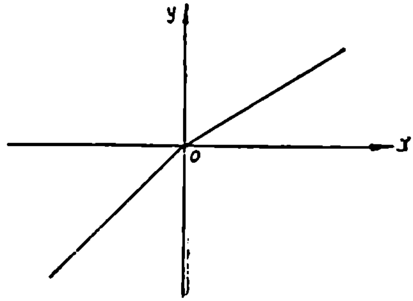


ნახ. 38

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არარსებობა წარმოადგენს ექსტრემუმის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი ექსტრემუმის წერტილია.



ნახ. 39



ნახ. 40

მაგალითად, $x=0$ წერტილში $f(x)=x^3$ ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ხოლო

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{როცა} \quad x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{როცა} \quad x < 0 \end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციებს ექსტრემუმი არ გააჩნიათ (ნახ. 39 და ნახ. 40).

განსაზღვრება 21.3. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულის ტოლია, ამ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი ეწოდება.

განსაზღვრება 21.4. წერტილს, რომელზედაც ფუნქციის წარმოებული ნულია ან არ არსებობს, კრიტიკული წერტილი ეწოდება.

მაშასადამე, როგორც ზემოთ იყო აღნიშნული, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები უნდა ვეძებოთ ამ ფუნქციის კრიტიკულ წერტილებს შორის.

დავადგინოთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

თეორემა 21.4. ვთქვათ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილი. თუ f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)>0, & \text{როცა} \quad x<x_0 \\ f'(x)<0, & \text{როცა} \quad x>x_0 \end{array}\right\} \tag{21.7}$$

მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი, ხოლო თუ

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x)<0, & \text{როცა} \quad x<x_0 \\ f'(x)>0, & \text{როცა} \quad x>x_0 \end{array}\right\} \qquad (21.8)$$

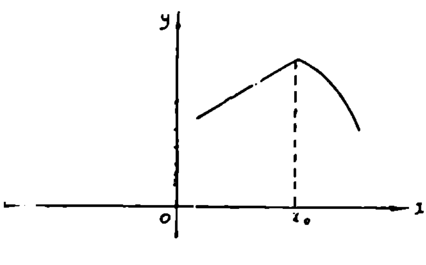
მაშინ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი.

დამტკიცება. ვთქვათ x_0 წერტილის რაიმე $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ მიდამოში შესრულებულია (21.7) პირობა. რადგან $]x_0-\delta, x_0[$ ინტერვალში $f'(x)>0$ და $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, ამიტომ იგი ზრდადია $]x_0-\delta, x_0[$ შუალედში. ე. ი. ნებისმიერი $x\in]x_0-\delta, x_0[$ წერტილისათვის მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ეს უტოლობა მართებულია აგრეთვე ნებისმიერი $x\in]x_0, x_0+\delta[$ წერტილისათვის.

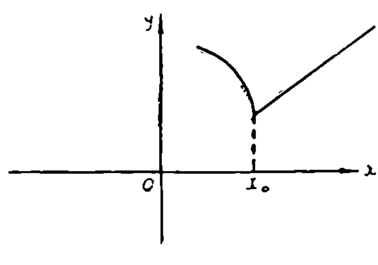
ამრიგად, x_0-საგან განსხვავებული ყოველი x წერტილისათვის $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ მიდამოდან მართებულია უტოლობა $f(x)<f(x_0)$. ე. ი. x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში შესრულებულია (21.8) პირობა, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი. თეორემა დამტკიცებულია.

ხშირად სარგებლობენ ამ თეორემის შემდეგი ფორმულებით: თუ წერტილში ფუნქცია უწყვეტია და ამ წერტილზე მარცხნიდან მარჯვნივ გადასვლის დროს წარმოებული ნიშანს იცვლის „+“-დან „—“-ზე, მაშინ x_0 მაქსიმუმის წერტილია (ნახ. 41), ხოლო, თუ წარმოებული ნიშანს იცვლის „—“-დან „+“-ზე—x_0 მინიმუმის წერტილია (ნახ. 42).



ნახ. 41



ნახ. 42

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 21.4-ში კრიტიკულ წერტილში ფუნქციის უწყვეტობის მოთხოვნა აუცილებელია. მართლაც

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{როცა} \quad x\leqslant 0, \\ x, & \text{როცა} \quad x>0 \end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x=0$ წერტილში შესრულებულია თეორემა 21.4-ის ყველა პირობა, გარდა უწყვეტობისა, მაგრამ ამ წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ ფუნქცია უწყვეტია კრიტიკულ წერტილში და ამ წერტილის რაიმე მიდამოში ფუნქციის წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს, მაშინ ფუნქციას ამ წერტილში არა აქვს ექსტრემუმი.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ჰქონდეს ისეთ სტაციონარულ წერტილშიც, რომლის ნებისმიერ მარჯვენა და მარცხენა მიდამოებში ფუნქციის წარმოებული ნიშანს არ ინარჩუნებს. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია

$$y=\begin{cases}2+x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right), & \text{როცა } x\neq 0,\\ 2, & \text{როცა } x=0.\end{cases}$$

გვაქვს:

$$y'=2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x},\ x\neq 0$$

და

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{2+x^2\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)-2}{x}=\lim_{x\to 0}x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

$\cos\frac{1}{x}$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არის $[-1;\ 1]$ სეგმენტი, ხოლო $2x\left(1-\sin\frac{1}{x}\right)$ უსასრულოდ მცირეა, როცა $x\to 0$. ამიტომ არ არსებობს $x=0$ წერტილის ისეთი მიდამო, სადაც მოცემული ფუნქციის წარმოებული ნიშანს ინარჩუნებს, თუმცა მოცემულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი.

ამრიგად, თეორემა 21.4-ის (21.7) და 21.8) პირობები ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობებია.

თ ე ო რ ე მ ა 21.5. ვთქვათ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის სტაციონალური წერტილი და $f''(x_0)<0$ ($f''(x_0)>0$), მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი (მინიმუმი).

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მეორე რიგის წარმოებულის განსაზღვრების ძალით:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

ახლა თუ დავუშვებთ, რომ $f''(x_0) < 0$, მაშინ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიაც

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $f'(x) < 0$, როცა $x > x_0$ და $f'(x) > 0$, როცა $x < x_0$. თეორემა 21.4-ის ძალით $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მაქსიმუმი.

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ თუ $f''(x_0) > 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მინიმუმი. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. ვიპოვოთ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ იგი ნულს:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0.$$

აქედან მივიღებთ ფუნქციის სტაციონალურ წერტილებს: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. გამოვთვალოთ მოცემული ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = 6x - 12.$$

გამოვარკვიოთ უკანასკნელი ნიშანი $x_1 = 1$ წერტილში:

$$f''(1) = 6 - 12 < 0.$$

ამიტომ $x_1 = 1$ არის ფუნქციის მაქსიმუმის წერტილი და

$$\max f(x) = f(1) = 2.$$

ახლა შევამოწმოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნიშანი $x_2 = 3$ წერტილში. გვაქვს:

$$f''(3) = 18 - 12 > 0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ $x_2 = 3$ არის მოცემული ფუნქციის მინიმუმის წერტილი და ამასთან

$$\min f(x) = f(3) = -2.$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. თუ $f'(x_0)=0$ და $f''(x_0)=0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში შეიძლება ჰქონდეს ექსტრემუმი და შეიძლება არა. მართლაც, $\varphi(x)=x^3$ და $f(x)=x^4$ ფუნქციების პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები $x=0$ წერტილში ნულის ტოლია, მაგრამ $x=0$ წერტილი $\varphi(x)=x^3$ ფუნქციისთვის არ არის ექსტრემუმის წერტილი, ხოლო $f(x)=x^4$ ფუნქციისათვის კი არის მინიმუმის წერტილი.

თ ე ო რ ე მ ა 21.6. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში გააჩნია n-ური რიგის წარმოებული და შესრულებულია პირობები:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0\ (n\geqslant 2). \qquad (21.10)$$

მაშინ:

1) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მაქსიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)<0$;

2) x_0 წერტილში ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი, თუ n ლუწია და $f^{(n)}(x_0)>0$;

3) x_0 წერტილში ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუ n კენტია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის x_0 წერტილის მიდამოში გამოვიყენებთ ტეილორის (18.1) ფორმულას და გავითვალისწინებთ (21.10) პირობებს, გვექნება

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

რადგან $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, ამიტომ ეს ტოლობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n(1+\alpha(x)), \qquad (21.11)$$

სადაც $\alpha(x)=o(1)$, როცა $x\to x_0$. ცხადია, რომ არსებობს x_0 წერტილის ისეთი მიდამო, რომელშიც $1+\alpha(x)>0$, ამიტომ თუ n ლუწია (21.11) ტოლობის მარჯვენა ნაწილს ამ მიდამოში ($x\neq x_0$) აქვს $f^n(x_0)$-ის ნიშანი. ამრიგად, თუ $f^{(n)}(x_0)<0$, მაშინ $f(x)<f(x_0)$, ე.ი. x_0 მაქსიმუმის წერტილია, ხოლო, თუ $f^{(n)}(x_0)>0$, მაშინ $f(x)>f(x_0)$ და x_0 მინიმუმის წერტილია.

თუ n კენტია, მაშინ, როგორც (21.11) ტოლობიდან ჩანს $f(x)-$ $-f(x_0)$ სხვაობას x_0 წერტილის მარცხენა და მარჯვენა მიდამოში აქვს სხვადასხვა ნიშანი, ე. ი. $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია. თეორემა დამტკიცებულია.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. ვიპოვოთ $f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$ ფუნქციის ექს-ტრემუმი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის წარმოებული და გავუტოლოთ ნულს:

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x=0.$$

აქედან მივიღებთ ერთადერთ სტაციონალურ წერტილს $x=0$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

$$f''(0)=f'''(0)=0,\quad f^{IV}(0)=4>0.$$

მაშასადამე, მოცემულ ფუნქციას $x=0$ წერტილში აქვს მინიმუმი და

$$\min f(x)=f(0)=4.$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. ვიპოვოთ $f(x)=x^5+x^3$ ფუნქციის ექსტრემუმი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ადვილია ჩვენება, რომ $f'(o)=f''(o)=0$ და $f'''(o)\neq 0$, ამიტომ მოცემულ ფუნქციას ექსტრემუმი არ გააჩნია.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 21.6-ის გამოყენებით ყოველთვის არ ხერხდება ფუნქციის ექსტრემუმის არსებობის დადგენა. მართლაც, ადვილად შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ

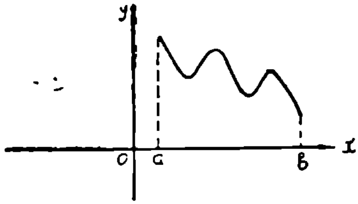
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0 \end{cases}$$

ფუნქციის ყველა რიგის წარმოებული $x=0$ წერტილში 0-ის ტოლია, თუმცა ამ წერტილში ფუნქციას გააჩნია მინიმუმი და $\min f=f(o)=0$.

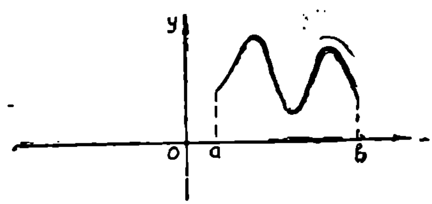
3. უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები სეგმენტზე. როგორც ვიცით სეგმენტზე უწყვეტ ფუნქციას ამ სეგმენ-ტზე აქვს უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები (თავი IV, თეორემა 3.2-ის შენიშვნა).

ცხადია, ფუნქციის უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობა სეგმენტზე შესაძლოა არ უდრიდეს ამ ფუნქციის რომელიმე ლოკალურ მაქსი-მუმს (მინიმუმს) ამ სეგმენტზე (ნახ. 43).

ასევე ცხადია, რომ თუ ფუნქცია უდიდეს (უმცირეს) მნიშვნელობას ღებულობს სეგმენტის შიგა წერტილში, მაშინ ეს წერტილი მისი ლოკალური მაქსიმუმის (მინიმუმის) წერტილიც იქნება (ნახ. 44).



ნახ. 43



ნახ. 44

ზემონათქვამიდან გამომდინარეობს სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის შემდეგი წესი:

იმისათვის, რომ მოვძებნოთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა ამ სეგმენტზე, საჭიროა გამოვთვალოთ ფუნქციის მნიშვნელობები სეგმენტის ბოლოებზე და ფუნქციის ყველა კრიტიკულ წერტილზე; გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის უდიდესი იქნება ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა, ხოლო უმცირესი კი — ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $f(x)=x^3-3x^2$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები [1, 3] სეგმენტზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემულ ფუნქციას [1, 3] სეგმენტზე აქვს ერთადერთი კრიტიკული წერტილი $x=2$ და $f(2)=-4$. ვინაიდან $f(1)=-2$ და $f(3)=0$, ამიტომ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა 0, ხოლო უმცირესი მნიშვნელობაა -4.

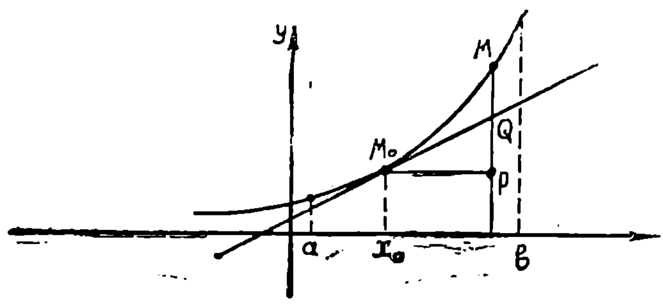
შევნიშნოთ, რომ თუ $f(x)$ არის $[a, b]$ სეგმენტზე ზრდადი (კლებადი) ფუნქცია, მაშინ $f(a)$ და $f(b)$ იქნება შესაბამისად მისი უმცირესი (უდიდესი) და უდიდესი (უმცირესი) მნიშვნელობები ამ სეგმენტზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვთვალოთ $f(x)=x^5+x$ ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები $[-1; 2]$ სეგმენტზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქცია ზრდადია, რადგან $f'(x)=5x^4+1>0$, ამიტომ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობაა $f(-1)=-2$, ხოლო უდიდესი მნიშვნელობაა — $f(2)=34$.

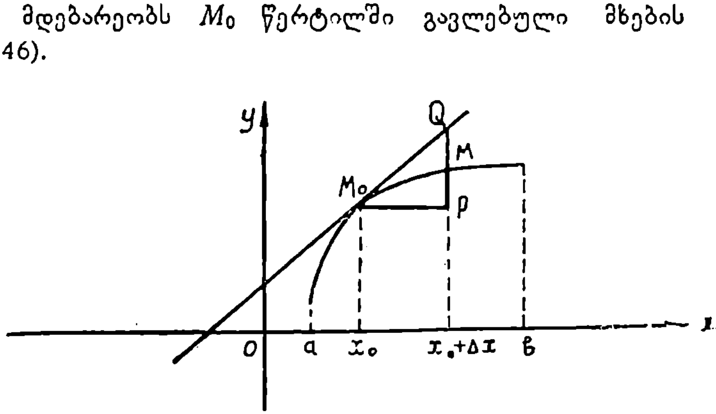
4. ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა. გადაღუნვის წერტილი. განვიხილოთ $[a, b]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y = f(x)$ ფუნქცია. ამ ფუნქციის გრაფიკზე ავიღოთ ისეთი $M_0 (x_0, f(x_0))$ წერტილი, რომლისთვისაც $f'(x_0)$ სასრულია, ე. ი. გრაფიკის M_0 წერტილზე გამავალი მხები Oy ღერძის პარალელური არ არის (ნახ. 45).

ვიტყვით, რომ $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია $M_0 (x_0, f(x_0))$ წერტილში ($f(x)$ ფუნქცია ჩაზნექილია x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს M_0 წერტილში გავლებული მხების ზემოთ (ნახ. 45).



ნახ. 45

ასევე, ვიტყვით, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია $M_0 (x_0, f(x_0))$ წერტილში ($f(x)$ ფუნქცია ამოზნექილია x_0 წერტილში), თუ არსებობს x_0-ის ისეთი მიდამო, რომ ამ მიდამოში ფუნქციის გრაფიკი მდებარეობს M_0 წერტილში გავლებული მხების ქვემოთ (ნახ. 46).



ნახ. 46

როგორც 45-ე ნახაზიდან ჩანს, x_0 წერტილში ფუნქციის ჩაზნექილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში ადგილი ჰქონდეს უტოლობას:

$$\Delta y - dy > 0.$$

მართლაც $\Delta y = MP$, $dy = PQ$, $\Delta y - dy = MP - PQ > 0$.

ასევე, x_0 წერტილში ფუნქციის ამოზნექილობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში სრულდებოდეს უტოლობა:

$$\Delta y - dy < 0.$$

თ ე ო რ ე მ ა 21.7. თუ $f(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს მეორე რიგის წარმოებული და $f''(x_0)>0$, მაშინ ფუნქცია x_0 წერტილში ჩაზნექილია, ხოლო თუ $f''(x_0)<0$ მაშინ — ამოზნექილია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $f''(x_0)$ არსებობს, ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილის გარკვეულ მიდამოში დიფერენცირებადია. ლაგრანჟის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0 + \theta \Delta x), \ 0 < \theta < 1.$$

ამავე დროს

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x.$$

ამიტომ

$$\Delta y - dy = \Delta x\,[f'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0)] =$$
$$= \theta\,(\Delta x)^2 \cdot \frac{f'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0)}{\theta \Delta x}. \qquad (21.12)$$

ვთქვათ $f''(x_0)>0$. მაშინ საკმარისად მცირე Δx-სათვის გვექნება:

$$\frac{f'(x_0 + \theta\Delta x) - f'(x_0)}{\theta \Delta x} > 0$$

და (21.12) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\Delta y - dy > 0,$$

მაშასადამე $f(x)$ ფუნქცია ჩაზნექილია x_0 წერტილში.

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ $f''(x_0)<0$, მაშინ:

$$\Delta y - dy < 0,$$

ე. ი. ფუნქცია ამოზნექილია x_0 წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$) პირობა არ არის აუცილებელი იმისათვის, რომ $f(x)$ იყოს ჩაზნექილი (ამოზნექილი) x_0 წერტილში ვინაიდან, თუ $f''(x_0)=0$, მაშინ x_0 წერტილში $f(x)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს ჩაზნექილი, ამოზნექილი ან არც ჩაზნექილი და არც ამოზნექილი. მართლაც $f(x)=x^4$ და $\varphi(x)=x^3$ ფუნქციებისათვის $f''(0)=\varphi''(0)=0$, მაგრამ $x=0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია ჩაზნექილია, ხოლო $\varphi(x)$ — არც ამოზნექილი და არც ჩაზნექილი.

ვიტყვით, რომ ფუნქცია ჩაზნექილია (ამოზნექილია) შუალედზე, თუ იგი ჩაზნექილია (ამოზნექილია) ამ შუალედის ყოველ წერტილზე.

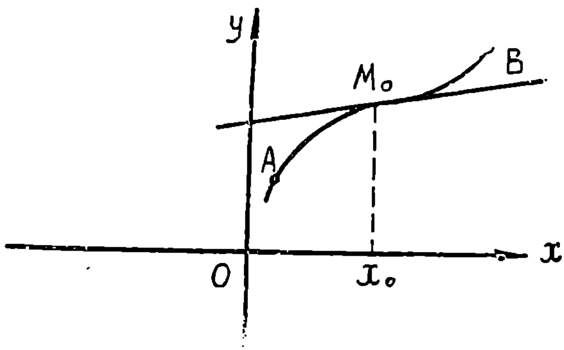
მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y=x^4-6x^3+x$ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან $y''=12x^2-36x$, ამიტომ, როცა $x\in]-\infty;\ 0[\ \cup$ $\cup\ ]3,\ +\infty[$, მაშინ $y''>0$ და, როცა $x\in\ ]0;\ 3[$, მაშინ $y''<0$.

ამრიგად, მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, როცა $x\in]-\infty;\ 0\,[\ \cup\ ]\,3,\ +\infty\,[$ და ამოზნექილია, როცა $x\in\,]0;\ 3\,[$.

ვთქვათ $f\,(x)$ ფუნქციას x_0 წერტილში აქვს სასრული წარმოებული.

ვიტყვით, რომ $M_0\,(x_0,\ f\,(x_0)\,)$ არის $f\,(x)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილი (x_0 არის $f\,(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი), თუ არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ $]\,x_0-\delta,\ x_0[$ ინტერვალში ფუნქცის გრაფიკი მდებარეობს M_0 წერტილში გავლებული მხების ერთ მხარეს, ხოლო $]\,x_0,\ x_0+\delta\,[$ ინტერვალში — მხების მეორე მხარეს (ნახ. 47).



ნახ. 47

ცხადია, რომ თუ x_0 გადაღუნვის წერტილია, მაშინ ამ წერტილში ფუნქცია არც ჩაზნექილია და არც ამოზნექილი. ასევე, თუ x_0 წერტილში ფუნქცია ჩაზნექილია ან ამოზნექილია, მაშინ x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილი.

განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ თუ x_0 არის $f\,(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი და $y=L\,(x)$ ფუნქციის გრაფიკისადმი $M_0\,(x_0,\ f\,(x_0)\,)$ წერტილში გავლებული მხების განტოლებაა, მაშინ $f\,(x)-L\,(x)$ სხვაობა ნიშანს იცვლის x_0 წერტილზე გადასვლისას.

ახლა დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდების საშუალებით შე-

ვისწავლოთ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის მოძებნის წესი.

თ ე ო რ ე მ ა 21.8. თუ x_0 წერტილი $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია და არსებობს $f''(x_0)$, მაშინ $f''(x_0)=0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, $f''(x_0)\neq 0$. მაშინ $f''(x_0)>0$ ან $f''(x_0)<0$, ე. ი. ფუნქცია x_0 წერტილში ან ჩაზნექილია ან ამოზნექილი, ამიტომ x_0 არ არის გადაღუნვის წერტილი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ გადაღუნვის წერტილში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული შეიძლება არ გაჩნდეს. მაგალითად,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0,\\ -\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x<0\end{cases}$$

ფუნქციისათვის $x=0$ გადაღუნვის წერტილია, მაგრამ $f''(0)$ არ არსებობს, ვინაიდან $f'(x)=|x|$.

ამ შენიშვნიდან და თეორემა 21.8-დან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებს შორის, სადაც მეორე რიგის წარმოებული ნულის ტოლია ან არ არსებობს.

უნდა აღინიშნოს, რომ წერტილში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებულის ნულთან ტოლობა ან არარსებობა წარმოადგენს გადაღუნვის წერტილის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ პირობას, ე. ი. იქიდან, რომ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული რაიმე წერტილში ნულია ან არ არსებობს, არ გამომდინარეობს, რომ ეს წერტილი გადაღუნვის წერტილია.

მაგალითად, $x=0$ წერტილში $f(x)=x^4$ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოიბული ნულის ტოლია, ხოლო

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & \text{როცა} \quad x<0,\\ x^2, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0\end{cases}$$

ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული არ არსებობს, მაგრამ $x=0$ ამ ფუნქციებისათვის არ არის გადაღუნვის წერტილი.

ახლა დავადგინოთ გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი პირობა.

თ ე ო რ ე მ ა 21.9. თუ $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია x_0 წერტილში, ხოლო ამ წერტილის რაიმე მიდამოში $f''(x)$ წარმოებულს აქვს სხვადასხვა ნიშანი $x>x_0$ და $x<x_0$ მნიშვნელობებისათვის, მაშინ x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ფუნქციის გრაფიკისადმი $M_0(x_0, f(x_0))$ წერტილში გავლებული მხების განტოლებაა $L(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. განვიხილოთ სხვაობა:

$$f(x)-L(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

ლაგრანჟის თეორემის ძალით $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$, სადაც ξ მოთავსებულია x_0-სა და x-ს შორის. ამიტომ:

$$f(x)-L(x)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0). \tag{21.13}$$

ვაჩვენოთ, რომ $f'(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. როგორც ვიცით (თავი V, თეორემა 16.4-ის შედეგი 2) წარმოებულ ფუნქციას არ შეიძლება ჰქონდეს პირველი გვარის წყვეტის წერტილი. ამასთან თეორემის პირობის ძალით $f'(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილის მიდამოში უბანუბან მონოტონურია. ამიტომ მას არ შეიძლება ჰქონდეს მეორე გვარის წყვეტის წერტილი (თავი IV, თეორემა 2.1-ის შედეგი). ე. ი. $f'(x)$ ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში. მაშასადამე $f'(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილის მიდამოში აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს. ამიტომ (21.13) ტოლობიდან გვაქვს:

$$f(x)-L(x)=f''(\eta)(\xi-x_0)(x-x_0),$$

სადაც η მოთავსებულია ξ-სა და x_0-ს შორის. რადგან ξ და x წერტილები მდებარეობენ x_0 წერტილის ერთ მხარეს, ამიტომ $(\xi-x_0)(x-x_0)>0$ და $f(x)-L(x)$ სხვაობას აქვს $f''(\eta)$-ს ნიშანი. ამრიგად, რადგან $f''(x)$ იცვლის ნიშანს x_0 წერტილზე გადასვლისას, $f(x)-L(x)$ სხვაობაც შეიცვლის ნიშანს x_0 წერტილზე გადასვლისას. ე. ი. x_0 არის $f(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი. თეორემა დამტკიცებულია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი შეიძლება იყოს წერტილი, რომლის ნებისმიერ მარცხენა და მარჯვენა მიდამოებში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ნიშანს არ ინარჩუნებს. მაგალითად, განვიხილოთ ფუნქცია:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+x^{\frac{5}{3}}, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$$

ცხადია, რომ $x=0$ ამ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია და $f'(0)=0$. ადვილია ჩვენება, რომ

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}+\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}, \text{ როცა } x\neq 0.$$

განვიხილოთ წერტილთა ორი მიმდევრობა:

$$x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \text{ და } x_n'' = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n \in N.$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} f''(x_n') = -\infty$, ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty} f''(x_n'') = +\infty$.

ე. ი. $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მარჯვენა მიდამოში ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული ნიშანს არ ინარჩუნებს. ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $f''(x)$ ნიშანს არ ინარჩუნებს $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მარცხენა მიდამოში.

ამრიგად, თეორემა 21.9-ის პირობა $f''(x)$ ნიშანს იცვლიდეს x_0 წერტილზე გადასვლისას, არის გადაღუნვის წერტილის არსებობის საკმარისი, მაგრამ არა აუცილებელი პირობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი. მოვძებნოთ $y = e^{\operatorname{arctg} x}$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები, ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$y' = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{1-2x}{(1+x^2)^2}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}.$$

აქედან ჩანს, რომ $y'' > 0$, როცა $x < \frac{1}{2}$ და $y'' < 0$, როცა $x > \frac{1}{2}$.

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკი ჩაზნექილია, როცა $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, ამოზნექილია, როცა $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, ხოლო $x = \frac{1}{2}$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილია.

6. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

ვთქვათ $M(x, y)$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილი. ვიტყვით, რომ M წერტილი უსასრულობისაკენ მიისწრაფვის, თუ ამ წერტილის ერთი კოორდინატი მაინც აბსოლუტური სიდიდით მიისწრაფვის $+\infty$-საკენ.

ფუნქციის გამოკვლევის დროს ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მომენტია მისი გრაფიკის ფორმის დადგენა, როდესაც გრაფიკის წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის შემთხვევა, როდესაც ფუნქციის გრაფიკი მისი წერტილის უსასრულობისაკენ მისწრაფების დროს ნებისმიერად უახლოვდება რაღაც წრფეს.

გ ა ნ ს ა ზ ღ ვ რ ე ბ ა 21.5. რაიმე წრფეს ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე

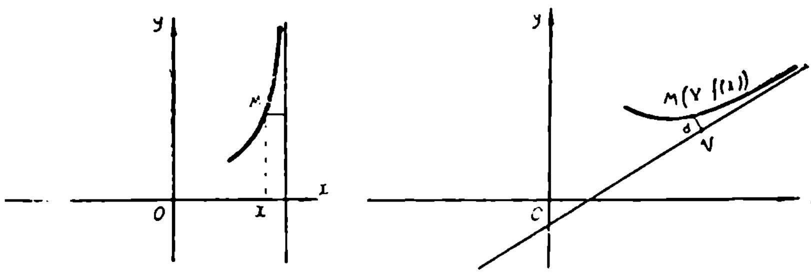
მიისწრაფვის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ.

ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, ვერტიკალური ასიმპტოტი ეწოდება, ხოლო ასიმპტოტს, რომელიც Oy ღერძის პარალელური არ არის, დახრილი ასიმპტოტი.

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $x=a$ წრფე არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, თუ:

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\infty \quad \text{ან} \quad \lim_{x\to a-} f(x)=\infty.$$

მართლაც, ამ შემთხვევაში გრაფიკის წერტილი მიისწრაფვის უსასრულობისაკენ, როცა $x\to a$, ამასთან მანძილი გრაფიკის $M(x, y)$ წერტილიდან $x=a$ წრფემდე არის $|x-a|$ (ნახ. 48 ა), რომელიც ცხადია მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $x\to a$, ე. ი. $x=a$ არის $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი.



ნახ. 48

ამრიგად, ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ არგუმენტის ის მნიშვნელობა რომლის ერთ-ერთ ცალმხრივ მიდამოში მაინც ფუნქცია უსასრულოდ დიდია.

მაგალითად, $x=0$ წრფე არის $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი, რადგან

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$

ახლა ვთქვათ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს დახრილი ასიმპტოტი, მაშინ მის განტოლებას ექნება სახე (ნახ. 48 ბ).

$$y=kx+b.. \tag{2114}$$

ვიპოვოთ k და b რიცხვები. ვთქვათ $M(X, f(X))$ არის $Y=f(X)$ ფუნ-

ქციის გრაფიკის რაიმე წერტილი. მანძილი M წერტილიდან (21.14) წრფემდე გამოითვლება ფორმულით:

$$d = \frac{|kX - f(X) + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ $x \to +\infty$ (შემთხვევა $x \to -\infty$ განიხილება ანალოგიურად). ასიმპტოტის განსაზღვრების ძალით:

$$\lim_{x \to +\infty} (kX - f(X) + b) = 0, \tag{21.15}$$

ანუ

$$\lim_{X \to +\infty} X \left(k - \frac{f(X)}{X} + \frac{b}{X} \right) = 0,$$

აქედან

$$\lim_{X \to +\infty} \left(k - \frac{f(X)}{X} + \frac{b}{X} \right) = 0.$$

საიდანაც:

$$k = \lim_{X \to +\infty} \frac{f(X)}{X}. \tag{21.16}$$

ახლა b შეგვიძლია განვსაზღვროთ (21.15) ტოლობიდან:

$$b = \lim (f(X) - kX). \tag{21.17}$$

ამრიგად, თუ $y = kx + b$ წრფე არის $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი, მაშინ k და b გამოითვლება (21.16) და (21.17) ფორმულებით. ადვილია ჩვენება, რომ პირიქითაც, თუ (21.16) და (21.17) ზღვრები არსებობენ, მაშინ $y = kx + b$ წრფეს არის ასიმპტოტი. ე. ი. იმისათვის, რომ $y = kx + b$ წრფე იყოს ასიმპტოტი, აუცილებელია და საკმარისი, არსებობდეს (21.16) და (21.17) სასრული ზღვრები.

იმ კერძო შემთხვევაში, როცა $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ სასრული რიცხვია, მაშინ (21.16) და (21.17) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ $k = 0$ და $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. ამიტომ ფუნქციის გრაფიკს გააჩნია ასიმპტოტი, რომლის განტოლებაა $y = b$ და მას ჰორიზონტალური ასიმპტოტი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტთან შეიძლება ჰქონდეს საერთო წერტილები (სასრული ან უსასრულო). ამის მაგალითია ფუნქცია $y = \dfrac{\sin x}{x}$ (შეამოწმეთ).

მ ა გ ა ლ ი თ ი. ვიპოვოთ $y = x - 2\operatorname{arctg} x$ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები. ცხადია, რომ ამ ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმ-

პტოტი არ გააჩნია (მოცემული ფუნქცია უწყვეტია R-ზე). ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტები:

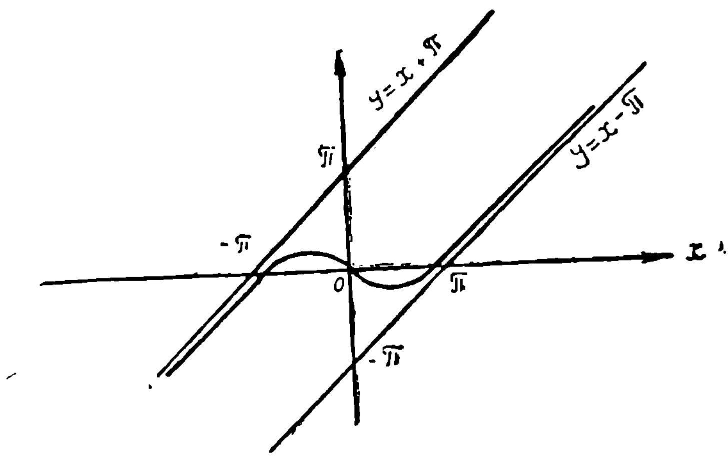
1) როცა $x \to +\infty$, გვაქვს

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2\,\mathrm{arctg}\, x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2\,\mathrm{arctg}\, x}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (x - 2\,\mathrm{arctg}\, x - x) = -2 \lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}\, x = -\pi.$$

ამრიგად, როცა $x \to +\infty$ მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტია $y = x - \pi$ წრფე.

2) როცა $x \to -\infty$, მაშინ ადვილია გამოთვლა, რომ $k = 1$ და $b = \pi$. ე. ი. როცა $x \to -\infty$, მოცემული ფუნქციის ასიმპტოტია $y = x + \pi$ წრფე (ნახ. 49).



ნახ. 49

მაშასადამე $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ორი სხვადასხვა ასიმპტოტი: $y = x - \pi$, როცა $x \to +\infty$ და $y = x + \pi$, როცა $x \to -\infty$.

8. ფუნქციის გრაფიკის აგების სქემა. ფუნქციის გრაფიკის ასაგებად მიზანშეწონილია დიფერენციალური აღრიცხვის მეთოდების დახმარებით გამოვიკვლიოთ ფუნქცია და შემდეგ ავაგოთ მისი გრაფიკი. ფუნქციის გამოკვლევა შეიძლება ჩავატაროთ შემდეგი სქემით:

1) ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და წყვეტის წერტილები;

2) თუ შესაძლებელია, ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები;

3) შევამოწმოთ არის თუ არა ფუნქცია ლუწი ან კენტი, არის თუ არა იგი პერიოდული;

4) მოვძებნოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები, ექსტრემუმის წერტილები და ექსტრემუმები;

5) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის უბნები, გადაღუნვის წერტილები;

6) ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. გამოვთვალოთ $y=\frac{x}{1+x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty; +\infty[$ შუალედი და ეს ფუნქცია უწყვეტია. როცა $x=0$, მაშინ $y=0$ და პირიქით, როცა $y=0$, მაშინ $x=0$, ე. ი. ფუნქციის გრაფიკი გადის კოორდინატთა სათავეზე და სხვა თანაკვეთის წერტილი კორდინატთა ღერძებთან გრაფიკს არა აქვს.

ცხადია ფუნქცია კენტია, ამიტომ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.

ახლა მოვძებნოთ ფუნქციის წარმოებული:

$$y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

აქედან მივიღებთ, რომ ფუნქციის სტაციონალური წერტილებია $x_1=-1$ და $x_2=1$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ $y'>0$, როცა $x\in]-1;1[$ და $y'<0$, როცა $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, ე. ი. ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in]-1;1]$ და კლებადია, როცა $x\in[-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, ამიტომ $x_1=-1$ არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი, ხოლო $x_2=1$—მაქსიმუმის წერტილი:

$$\min y=-\frac{1}{2},\ \max y=\frac{1}{2}.$$

ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

აქედან მიიღება, რომ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]0;\sqrt{3}[$ და ჩაზაექილია, როცა $x\in]-\sqrt{3};0[\cup]\sqrt{3};+\infty]$.

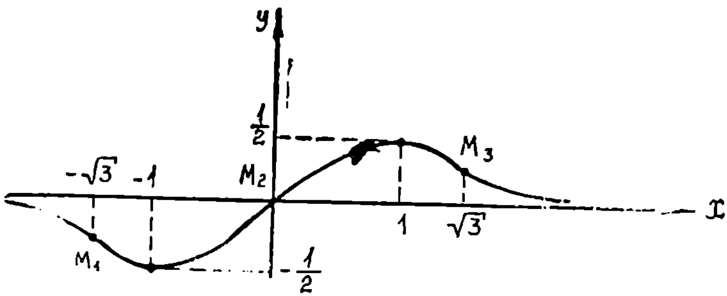
ცხადია, გრაფიკის გადაღუნვის წერტილები იქნება $M_1\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2(0;0)$ და $M_3\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

ვინაიდან:

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{x}{1+x^2}=0,$$

ამიტომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს ჰორიზონტალური ასიმპტოტი $y=0$. ცხადია, რომ $y=\frac{x}{1+x^2}$ ფუნქციის გრაფიკს ვერტიკალური ასიმპტოტი არ გააჩნია.

ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. 50).



ნახ. 50

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. გამოვიკვლიოთ $y=\sqrt[3]{x^3+x^2}$ ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოცემული ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty;\ +\infty[$ შუალედი და ეს ფუნქცია უწყვეტია მთელ განსაზღვრის არეზე. ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო ღერძებს ჰკვეთს $(0;\,0)$ და $(-1;\,0)$ წერტილებში. გამოვთვალოთ წარმოებულები:

$$y'=\frac{3x+2}{3\sqrt[3]{x(x+1)^2}},\quad y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4(x+1)^5}}.$$

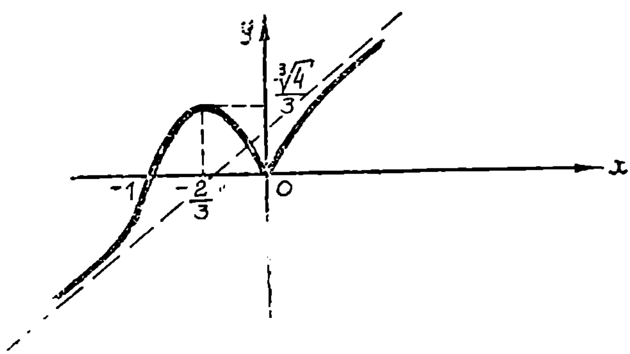
ცხადია $x=-1$ და $x=0$ წერტილებში ფუნქციის წარმოებული არ არსებობს, ამასთან $\lim\limits_{x\to-1} y'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0+} y'(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0-} y'(x)=-\infty$. ე. ი. კრიტიკული წარტილებია $x_1=-1$, $x_2=-\frac{2}{3}$ და $x_3=0$.

ადვილია ჩვენება, რომ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in]-\infty;\,-\frac{2}{3}[\,\cup\,]\,0;\,+\infty\,[$ და კლებადია, როცა $x\in]-\frac{2}{3},\ 0\,[$. $x=-\frac{2}{3}$ წერტილში

ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ამასთან $\max y = y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, ხოლო $x=0$ წერტილში ფუნქციას აქვს მინიმუმი და $\min y = y(0) = 0$.

ადვილი შესამჩნევია, რომ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x > -1$ $(x \neq 0)$ და ჩაზნექილია, როცა $x < -1$, ამასთან $(-1,0)$ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

ვინაიდან $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 1$ და $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x\right) = \frac{1}{3}$, ამიტომ $y = x + \frac{1}{3}$ წრფე წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტს. ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 51-ე ნახაზზე.



ნახ. 51

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია:

$$f(x) = |x+2|\, e^{-\frac{1}{x}},$$

და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფუნქციის განსაზღვრის არეა $]-\infty; 0[\,\cup\,]0; +\infty[$, ამასთან

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

ფუნქციის გრაფიკი Ox ღერძს ჰკვეთს, როცა $x=-2$, ხოლო Oy ღერძს არ ჰკვეთს. ცხადია, ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი. ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{როცა} \quad x < -2, \\ \dfrac{x^2+x+2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{როცა} \quad x > -2, \; x \neq 0. \end{cases}$$

აქედან ცხადია, რომ ფუნქციას სტაციონალური წერტილები არ გააჩნია. ფუნქციის კრიტიკული წერტილია $x=-2$. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x \in [-2; 0[\cup]0; +\infty[$ და კლებადია, როცა $x \in]-\infty; -2[$, ე. ი. $x=-2$ არის ფუნქციის მინიმუმის წერტილი:

$$\min f = f(-2) = 0.$$

გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2-3x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{თუ} \quad x < -2, \\ \dfrac{2-3x}{x^4} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{თუ} \quad x > -2, \; x \neq 0. \end{cases}$$

აქედან ჩანს, რომ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, ჩაზნექილია როცა $x \in \left]-2; 0\right[\cup\left]0; \frac{2}{3}\right[$.

$x=\dfrac{2}{3}$ არის ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, ხოლო $x=-2$ არ არის გადაღუნვის წერტილი (არ არსებობს $f'(-2)$).

ადვილი შესამჩნევია, რომ $y=0$ არის გრაფიკის ვერტიკალური ასიმპტოტი. მოვძებნოთ დახრილი ასიმპტოტები:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(x+2)}{x} e^{-\frac{1}{x}} = -1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

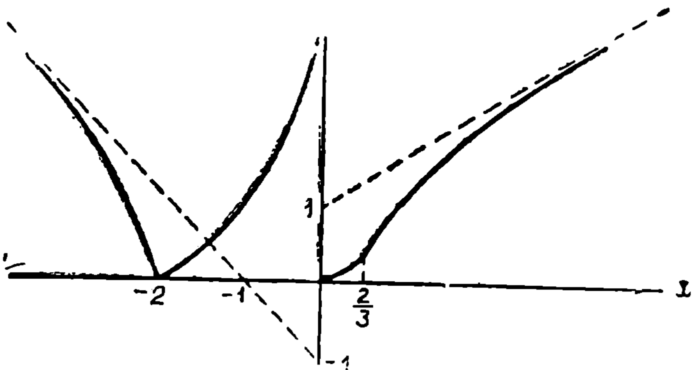
ვინაიდან $e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, როცა $x \to \infty$, ამიტომ

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-(x+2)e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-x-2+1+\frac{2}{x}-o(1)\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+2)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-x-1-\frac{2}{x}+o(1)\right)=1.$$

ამრიგად, გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტებია $y=-x-1$ და $y=x+1$.

ფუნქციის გრაფიკი მოცემულია 52-ე ნახაზზე:



ნახ. 52

ფუნქციის გრაფიკის აგების ზემოთ მოყვანილი მეთოდი შეიძლება გამოვიყენოთ

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \tag{21.18}$$

განტოლებებით მოცემული წირის ასაგებად.

აქ არ იგულისხმება, რომ (21.18) განტოლებებით მოცემულია ცალსახად ერთი ფუნქცია $y=f(x)$ ან $x=g(y)$ სახით. შევნიშნოთ, რომ (21.18) განტოლებებით მოცემული წირი წარმოადგენს ამ განტოლებებით განსაზღვრული ყველა $y=f(x)$ და $x=g(y)$ ფუნქციების გრაფიკების გაერთიანებას, ამიტომ (21.18) განტოლებებით მოცემული წირის ასაგებად t-ს ცვლილების არეს, თუ ეს შესაძლებელია, ყოფენ ინტერვალებად, ისეთნაირად, რომ თითოეულ მათგანზე ფუნქციები $x(t)$ ან $y(t)$ იყოს მონოტონური.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ (21.18) განტოლებებით მოცემული წირის ის ასიმპტოტი, რომელიც Oy ღერძის პარალელურია, საჭიროა ვი-

ვიპოვოთ ისეთი t_0*, რომლისთვისაც არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{t\to t_0+} x(t)=a$ ($\lim\limits_{t\to t_0-} x(t)=a$), ხოლო $\lim\limits_{t\to t_0+} y(t)$ ($\lim\limits_{t\to t_0-} y(t)$) ტოლია $+\infty$ ან $-\infty$. თუ ასეთი t_0 არსებობს, მაშინ $x=a$ იქნება Oy ღერძის პარალელური ასიმპტოტი.

ანალოგიურად, Ox ღერძის პარალელური ასიმპტოტის პოვნა დაიყვანება ისეთი t_0-ის პოვნაზე, რომლისთვისაც არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{t\to t_0+} y(t)=c$ ($\lim\limits_{t\to t_0-} y(t)=c$), ხოლო $\lim\limits_{t\to t_0+} x(t)$ ($\lim\limits_{t\to t_0-} x(t)$ ტოლია $+\infty$ ან $-\infty$. თუ ასეთი t_0 არსებობს, მაშინ $y=c$ იქნება Ox ღერძის პარალელური ასიმპტოტი.

საკოორდინატო ღერძების პარალელური ასიმპტოტის მოსაძებნად საჭიროა ვიპოვოთ ისეთი t_0, რომლისთვისაც

1) ზღვრები $\lim\limits_{t\to t_0+} x(t)$ და $\lim\limits_{t\to t_0+} y(t)$ ($\lim\limits_{t\to t_0-} x(t)$ და $\lim\limits_{t\to t_0-} y(t)$) ტოლია $+\infty$ ან $-\infty$-ის; 2) არსებობს სასრული ზღვარი;

$$\lim_{t\to t_0+} \frac{y(t)}{x(t)}=k\neq 0 \quad \left(\lim_{t\to t_0-} \frac{y(t)}{x(t)}=k\neq 0\right);$$

არსებობს სასრული ზღვარი:

$$\lim_{t\to t_0+} [y(t)-kx(t)]=b \ (\lim_{t\to t_0-} [y(t)-kx(t)]=b).$$

ამ შემთხვევაში $y=kx+b$ წრფე იქნება (21.18) განტოლებებით განსაზღვრული წირის ასიმპტოტი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 4. გამოვიკვლიოთ ფუნქცია:

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases} \tag{21.19}$$

და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ფუნქციები $x(t)=t^3+3t+1$ და $y(t)=t^3-3t+1$ განსაზღვრულნი არიან ნებისმიერი t-სათვის, ამასთან:

$$x_t'=3(t^2+1), \ y_t'=3(t^2-1).$$

ცხადია, რომ $x_t'>0$ ყოველი t-სათვის. ე. ი. $x(t)$ ფუნქცია ზრდადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში, ამასთან:

$$\lim_{t\to-\infty} x(t)=-\infty, \ \lim_{t\to+\infty} x(t)=+\infty.$$

ამიტომ $x(t)$ ფუნქციას გააჩნია შექცეული $t(x)$ ფუნქცია, რომელიც ზრდადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. აქედან გამომდინარე (21.19) განტოლებები განსაზღვრავენ ერთადერთ $y=f(x)$ ფუნქციას.

* აქ და შემდეგშიც t_0 რიცხვია, $+\infty$ ან $-\infty$.

ვინაიდან $f'(x)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, ამიტომ $f'(x)=0$ განტოლებებიდან გვაქვს $t=-1$ და $t=1$. (21.19)-დან ვიპოვით კრიტიკულ წერტილებს $x=-3$ და $x=5$.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ ფუნქცია ზრდადია, როცა $x\in]-\infty;-3[\cup]5;+\infty[$, ხოლო კლებადია, როცა $x\in]-3;5[$, ამიტომ $x=-3$ წერტილში ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი, ხოლო $x=5$ წერტილში მინიმუმი.

გამოვთვალოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x)=\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)'_t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{4t}{3\,((t^2+1)^3}\,.$$

ცხადია, რომ $f''(x)<0$, როცა $t<0$ ანუ $x<1$ და $f''(x)>0$, როცა $t>0$ ანუ $x>1$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის გრაფიკი ამოზნექილია, როცა $x\in]-\infty;1[$ და ჩაზნექილია, როცა $x\in]1;+\infty[$, ხოლო (1,1) წერტილი ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილია.

ვინაიდან

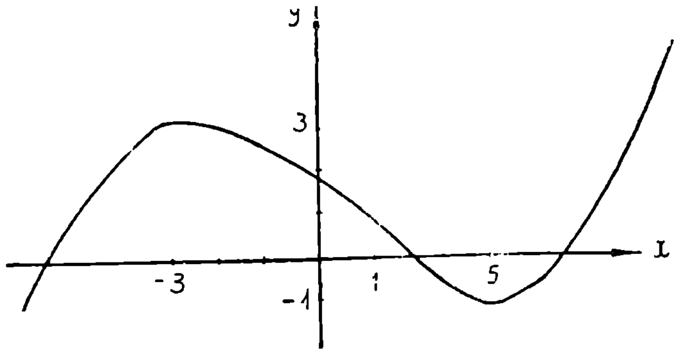
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{t\to\pm\infty}(t^3-3t+1)=\pm\infty,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{t^3+3t+1}{t^3-3t+1}=1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x)=-\lim_{t\to\pm\infty}6t=\infty,$$

ამიტომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ასიმპტოტები არა აქვს.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ფუნქციის გრაფიკს აქვს 53-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 53

შევნიშნოთ, რომ თუ (21.19) განტოლებებიდან გამოვრიცხავთ t პარამეტრს, მივიღებთ:

$$(x-y)^3-18(x+y)+36=0.$$

აქედან ჩანს, რომ ზოგჯერ უმჯობესია ფუნქციის გამოკვლევა ჩავატაროთ პარამეტრული სახით ჩაწერილი ფუნქციისათვის.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 5. ავაგოთ წირი, რომელიც მოცემულია განტოლებებით:

$$\begin{cases} x(t)=t\,e^t, \\ y(t)=t\,e^{-t}. \end{cases} \qquad (21.20)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვაჩვენოთ, რომ (21.20) განტოლებებით მოცემული წირი სიმეტრიულია $y=-x$ წრფის მიმართ. ვინაიდან

$$x(-t)=-t\,e^{-t}=-y(t)=-y,$$
$$y(-t)=-t\,e^t=-x(t)=-x,$$

ამიტომ, თუ (x, y) წერტილი მდებარეობს მოცემულ წირზე ამავე წირზე იქნება $(-y, -x)$ წერტილიც. ამრიგად, (21.20) წირი სიმეტრიულია $y=-x$ წრფის მიმართ, ამიტომ საკმარისია გამოკვლევა ჩავატაროთ იმ შემთხვევაში, როცა $t>0$.

ფუნქციები $x(t)=t\,e^t$, $y(t)=t\,e^{-t}$ განსაზღვრულნი არიან ნებისმიერი t-სათვის. ცხადია

$$x'_t=(t+1)\,e^t, \quad y'_t=(1-t)\,e^{-t}.$$

როცა $t\in]0;+\infty[$, ფუნქცია $x(t)$ ზრდადია და გააჩნია შექცეული ფუნქცია $t=t(x)$, რომელიც აგრეთვე ზრდადია $]0;+\infty[$ შუალედზე.

ტოლობიდან $y'_t=0$, გვაქვს $t=1$. ამასთან $y'_t>0$, როცა $t\in]0;1[$, ხოლო $y'_t<0$, როცა $t\in]1;+\infty[$, ამიტომ $t=1$ წერტილში $y(t)$ ფუნქციას აქვს მაქსიმუმი:

$$\max y=y(1)=\frac{1}{e}.$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} t\,e^t=+\infty$, ხოლო $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty} t\,e^{-t}=$ $=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0$, ამიტომ Ox ღერძი არის მოცემული წირის ასიმპტოტი. რადგანაც წირი მოცემულია $y=-x$ წრფის მიმართ, ამიტომ Oy ღერძიც მისი ასიმპტოტია.

(21.20) განტოლებები $]-1;+\infty[$ შუალედში (სადაც $x'(t)$ დადებითია) განსაზღვრავს $y=y(x)$ ფუნქციას. გამოვითვალოთ y''_x:

$$y''_x = \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}\,\frac{1-t}{1+t}\right)\frac{dt}{dx} = -\,2\,e^{-2t}\left[\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1-t}{1+t}\right]\cdot\frac{1}{(1+t)\,e^t} =$$

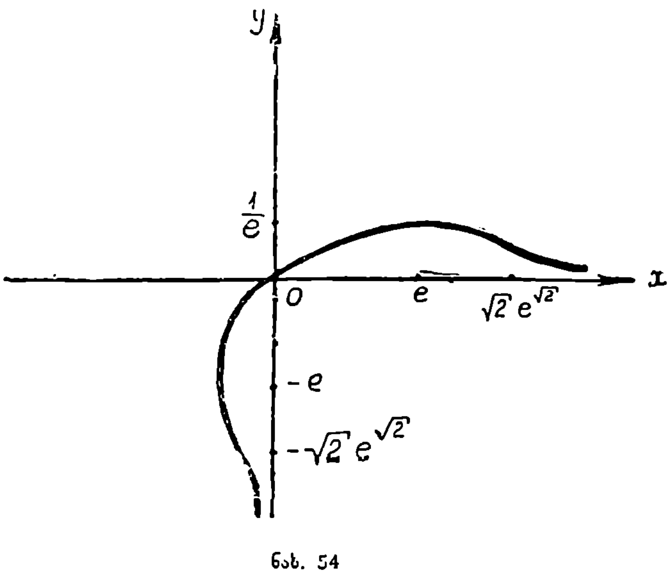
$$= -\,\frac{2\,e^{-3t}}{(1+t)^3}\,(2-t^2), \qquad (21.21)$$

ამ ტოლობიდან ცხადია, რომ დადებითი t-ებისათვის $y''_x=0$, როცა $t=\sqrt{2}$. პარამეტრის ამ მნიშვნელობას შეესაბამება $x=\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}$.

(21.21) ტოლობიდან გვაქვს:

$y''_x<0$, როცა $0<x<\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}$ $(0<t<\sqrt{2})$ და $y''_x>0$, როცა $x>\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}$ $(t>\sqrt{2})$. გამომდინარე აქედან $(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}})$ წერტილი არის $y=y(x)$ ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი, ამასთან $]0, \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}[$ ინტერვალში გრაფიკი ამოზნექილია, ხოლო $]\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}, +\infty[$ ინტერვალში — ჩაზნექილია.

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან იმის გათვალისწინებით, რომ (21.20) განტოლებებით მოცემული წირი სიმეტრიულია $y=-x$ წრფის მიმართ, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემულ წირს აქვს 54-ე ნახაზზე ნაჩვენები სახე.



ნახ. 54

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ ფუნქციის წარმოებული და მოიყვანეთ მისი გეომეტრიული და მექანიკური შინაარსი.

2. განსაზღვრეთ ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები.

3. განსაზღვრეთ ფუნქციის დიფერენცირებადობა წერტილში. რას ეწოდება ფუნქციის დიფერენციალი?

4. მოიყვანეთ ფუნქციის დიფერენციალის გეომეტრიული და მექანიკური შინაარსი.

5. რა კავშირია წარმოებადობასა და დიფერენცირებადობას შორის?

6. რაში მდგომარეობს პირველი რიგის დიფერენციალის ფორმის ინვარიანტობა?

7. რა კავშირია წარმოებადობასა და უწყვეტობას შორის?

8. ჩამოაყალიბეთ შექცეული ფუნქციის გაწარმოების წესი.

9. ჩამოაყალიბეთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი.

10. დაწერეთ ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილი.

11. განსაზღვრეთ ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებული და დიფერენციალი.

12. ჩამოაყალიბეთ თეორემები რთული ფუნქციისა და შექცეული ფუნქციის მაღალი რიგის წარმოებულების შესახებ.

13. გამოიყენეთ პარამეტრულად მოცემული ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულების გამოსათვლელი ფორმულები.

14. როგორ გამოითვლება არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული?

15. რა კავშირია მაღალი რიგის დიფერენციალსა და წარმოებულებს შორის?

16. აჩვენეთ მეორე რიგის დიფერენციალის ფორმის არაინვარიანტობა.

17. ჩამოაყალიბეთ ფერმას, როლის და ლაგრანჟის თეორემები და მოიყვანეთ მათი გეომეტრიული შინაარსი.

18. ჩამოაყალიბეთ კოშის თეორემა.

19. ჩამოაყალიბეთ ლოპიტალის წესი განუსაზღვრელობათა გახსნის შესახებ.

20. დაწერეთ ტეილორის ფორმულა.

21. დაწერეთ ტეილორის ფორმულის ნაშთითი წევრი პეანოსა და ლაგრანჟის სახით.

22. ჩამოაყალიბეთ თეორემები ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შესახებ.

23. განსაზღვრეთ ფუნქციის ლოკალური მაქსიმუმი და ლოკალური მინიმუმი.

24. განსაზღვრეთ სტაციონალური წერტილები, კრიტიკული წერტილები.

25. მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის აუცილებელი პირობა.

26. მოიყვანეთ ექსტრემუმის არსებობის საკმარისი პირობები.

27. ჩამოაყალიბეთ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობების მოძებნის წესი.

28. განსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკის ამოზნექილობა, ჩაზნექილობა და გადაღუნვის წერტილი.

29. ჩამოაყალიბეთ ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის საკმარისი პირობები.

30. მოიყვანეთ ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილის აუცილებელი და საკმარისი პირობები.

31. განსაზღვრეთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი.

32. მოიყვანეთ ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტების მოძებნის წესი.

33. რა სქემის მიხედვით შეიძლება ჩავატაროთ ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება?

მეექვსე თავი

განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნა

§ 1. სიდიდის მიახლოებითი მნიშვნელობა. აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება

ყოველი სიდიდე რიცხვით ან რიცხვთა სისტემით გამოისახება. მათ უმეტეს შემთხვევაში განსაზღვრავენ გამოთვლების, დაკვირვევების ან გაზომვების შედეგად, რომლებიც საზოგადოდ არ შეიძლება ჩატარდეს აბსოლუტური სიზუსტით, ე. ი. ადგილი აქვს გარკვეულ შეცდომებს.

რეალური მოვლენის მათემატიკური მოდელის აგებისას საჭიროა შევადგინოთ ამ მოვლენის შესაბამისი მათემატიკური განტოლება, შევაფასოთ მისი პარამეტრები, საწყისი პირობები, ჩავატაროთ ანალიზი და შევარჩიოთ ამოხსნის მეთოდი. მათემატიკური მოდელი გვაძლევს რეალური მოვლენის მხოლოდ გარკვეულ მიახლოებას. არ არის ზუსტად ცხობილი აგრეთვე პროცესის საწყისი მონაცემები. უმეტეს შემთხვევაში განტოლების ამოხსნის პროცესშიც ვიყენებთ მიახლოებით გამოთვლებს. ამრიგად, როგორც მათემატიკური მოდელის აგების დროს, ასევე მისი ანალიზისას ვუშვებთ გარკვეულ შეცდომებს.

ყოველი ნაკეთობისათვის არსებობს გარკვეული „დაშვება", ე. ი. პროექტიდან გადახრის ის საზღვრები, რომელთა დაცვისას ნაკეთობა ვარგისად ითვლება. სწორედ ამიტომ საჭირო არ არის ყოველი გამოთვლა მაქსიმალურად ზუსტად იყოს შესრულებული ზუსტი ფორმულების მიხედვით. პირიქით, შეიძლება ვისარგებლოთ ფორმულებით, რომელთა შესახებ წინასწარ ვიცით, რომ ისინი ზუსტნი არ არიან, ასევე გამოვიყენოთ გამოთვლის წესები, რომლებიც აგრეთვე ზუსტ შედეგს არ იძლევიან, მაგრამ დარწმუნებული უნდა ვიყოთ, რომ მიღებული შედეგები მასზე მეტად არ არის გადახრილი მოცემული პროექტისაგან, რის უფლებასაც „დაშვება" იძლევა.

გამოთვლების ჩატარების დროს დიდი გამოყენება აქვს ელექტრონულ გამომთვლელ მანქანებს (ეგმ), რადგან ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად საჭიროა მოქმედებათა დიდი რაოდენობის შესრულება. უფრო მეტიც, გარკვეულ პირობებში, თუ მოქმედებათა საკმარისად დიდი რაოდენობა არ შესრულდა დროის მცირე შუალედში, მაშინ დასმული ამოცანის ამოხსნა აზრს კარგავს. მაგალითად, რაკეტის ტრაექტორიის კორექცია ზოგჯერ მოითხოვს დიდი რაოდენობის მათემატიკური ოპერაციების ჩატარებას დროის მცირე შუალედში, ეს კი პრაქტიკულად შეუძლებელია მძლავრი ეგმ-ის გამოყენების გარეშე.

განსაზღვრება 1.1. a რიცხვს ეწოდება A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა α ცდომილებით, თუ

$$A - a = \alpha.$$

ცდომილების აბსოლუტურ სიდიდეს $|\alpha|$ ეწოდება აბსოლუტური ცდომილება.

თუ $A>a$, მაშინ ვიტყვით, რომ a არის A რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობა ნაკლებობით, ხოლო თუ $A<a$ — მიახლოებითი მნიშვნელობა მეტობით.

მიახლოებითი ტოლობის აღსანიშნავად იხმარება სიმბოლო $\approx$, ასე რომ $A \approx a$.

მიუხედავად იმისა, რომ აბსოლუტური ცდომილება მიახლოების გარკვეული მახასიათებელია, იგი გაზომვის ან გამოთვლის ხარისხს ზუსტად არ ახასიათებს. შედეგის (გაზომვის ან გამოთვლის სიზუსტის) ხარისხი გაცილებით უკეთ ხასიათდება ეგრეთწოდებული ფარდობითი ცდომილებით.

განსაზღვრება 1.2. აბსოლუტური $|\alpha|$ ცდომილებისა და მიახლოებითი a მნიშვნელობის აბსოლუტური სიდიდის ფარდობას ეწოდება ფარდობითი ცდომილება და აღინიშნება δ-თი, ე. ი. $\delta=\frac{|\alpha|}{|a|}$.

§ 2. ფესვთა განცალება

განტოლებათა (ეს იქნება ალგებრული თუ ტრანსცენდენტული) ზუსტი ამონახსნის პოვნა ზოგ შემთხვევაში პრაქტიკულად შეუძლებელია ან რთულ გამოთვლებთან არის დაკავშირებული, ამიტომ მიმართავენ განტოლების ამონახსენის მიახლოებითი მოძებნის მეთოდებს. ჩვენ შევისწავლით განტოლებათა ამონახსენის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოძებნის შემდეგ მეთოდებს: შუაზე გაყოფის, ქორდების, მხებთა, კომბინირებული და იტერაციის. მოძებნილი ამონახსენის პრაქტიკაში გამოყენების ვარგისიანობისათვის უნდა ვიცოდეთ, თუ როგორია მიახლოებითი ამონახსენის ცდომილება.

ისეთი $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის მოძებნას, რომლის შიგნით არ არსებობს $f(x)=0$ განტოლების სხვა ფესვი, გარდა ξ-სა, ეწოდება ξ ფესვის განცალება.

ფესვის განცალება საშუალებას გვაძლევს მივიღოთ განტოლების ფესვის პირველი მიახლოება. თუ ξ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის ნებისმიერ წერტილს, მაშინ აბსოლუტური ცდომილება არ აღემატება $\beta-\alpha$ რიცხვს.

განტოლების ფესვი განცალებისათვის გამოიყენება IV თავის თეორემა 3.3, რომელიც შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს.

თეორემა. თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე და $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს საწინააღმდეგო ნიშნები აქვთ, ე. ი. $f(a) f(b)<0$, მაშინ ამ სეგმენტის შიგნით არსებობს $f(x)=0$ განტოლების ერთი ამონახსენი მაინც.

$[a, b]$ სეგმენტში მოთავსებული ფესვი იქნება ერთადერთი, თუ $[a, b]$ შუალედში არსებობს $f'(x)$ და ის ნიშანს ინარჩუნებს ამ შუალედში.

იმ კერძო შემთხვევაში, როდესაც $f'(x)$ უწყვეტია და $f'(x)=0$ განტოლების ფესვები იოლი გამოსათვლელია, მაშინ ფესვების განცალების საკითხი ადვილია, ამისათვის საკმარისია დავადგინოთ $f(x)$ ფუნქციის ნიშნები $f'(x)$ ფუნქციის ნულებზე და სეგმენტის $x=a$ და $x=b$ ბოლოებზე.

§ 3. შუაზე გაყოფის მეთოდი*

ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე. დავუშვათ, რომ ამ სეგმენტში მოთავსებულია $f(x)=0$ განტოლების მხოლოდ ერთი ფესვი ξ, ვიპოვოთ მისი მიახლოებითი მნიშვნელობა. გავყოთ $[a, b]$ სეგმენტი შუაზე c წერტილით და გამოვთვალოთ $f(c)$; თუ $f(c)=0$, მაშინ c იქნება განტოლების ფესვი. თუ $f(c)\neq 0$, მაშინ $[a, c]$ და $[c, b]$ სეგმენტებიდან ავირჩიოთ ის, რომლის ბოლოებში $f(x)$ ფუნქციას აქვს სხვადასხვა ნიშანი. ცხადია, მოცემული განტოლების ფესვი მოთავსებულია ამ სეგმენტში, აღვნიშნოთ ის $[a_1, b_1]$-ით. ეს სეგმენტი გავყოთ შუაზე და ჩავატაროთ იგი მსჯელობა. თუ ამგვარად გავაგრძელებთ სეგმენტის გაყოფის პროცესს, მივიღებთ ერთმანეთში ჩალაგებულ სეგმენტთა მიმდევრობას:

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots,$$

რომელთათვისაც

$$f(a_n) f(b_n) < 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

და

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{3.1}$$

(3.1) ფორმულის საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ ξ ფესვი ნებისმიერი $\varepsilon>0$ სიზუსტით, ამისათვის საჭიროა

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon,$$

საიდანაც

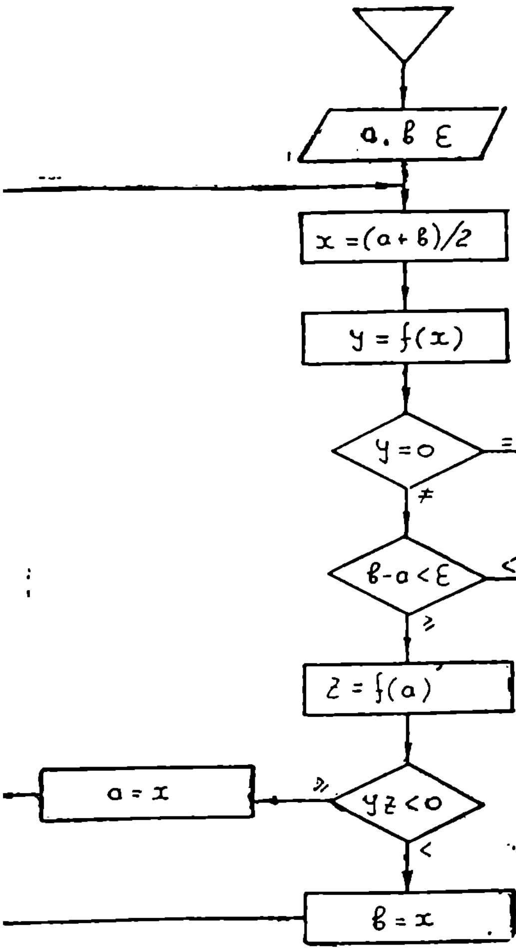
$$n > \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}.$$

---

* მას სინჯვის მეთოდსაც უწოდებენ.

ამ შემთხვევაში ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად შეგვიძლია ავიღოთ $\frac{a_n+b_n}{2}$. შუაზე გაყოფის მეთოდით განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის დიდი სიზუსტით პოვნა მოითხოვს ერთი და იგივე ტიპის გამოთვლითი ოპერაციების მრავალჯერ გამეორებას, რაც განსაკუთრებით მოხერხებულია გამოთვლების ჩასატარებლად ეგმ-ზე.

შუაზე გაყოფის მეთოდის ბლოკ-სქემა



ნახ. 54 ა

შუაზე გაყოფის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
  5  REM — — МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ — —
 10  OREN 'LP:' FOR OUTPUT AS FILE # 1
 20  DATA a, b, ε
 30  READ A, B, E
 40  DEF FNA (U)=f(U)
 50  X = (A + B) / 2\ Y =FNA (X)
 60  IF Y = 0  GO TO 110
 70  IF B — A < E THEN 110
 80  Z = FNA (A)
 90  IF Y * Z < 0 THEN B = X\GO TO 50
100  A = X\GO TO 50
110  PRINT # 1, 'X = '; X, 'F(' ; X; ') = '; Y
120  END
```

შუაზე გაყოფის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
    PROGGAM POLDEL
    READ (5, * ) A, B, DELTA
  2 X = (A + B) / 2
    Y = F (X)
    IF Y. EQ. O GO TO 7
    IF (B — A — DELTA) 7, 3, 3
  3 Z = F(A)
    IF (Y * Z) 6, 5, 5
  5 A = X
    GO TO 2
  6 B = X
    GO TO 2
  7 TYPE B, X, Y
  8 FOPMAT (2X, 'X = ' , F 10. 4, 2X, ' Y= ' , F 10.4)
    GND
    FUNCTION F (U)
    F = f (U)
    RETURN
    END
```

§ 4. ქორდების მეთოდი

ვთქვათ, მოცემულია განტოლება

$$f(x)=0.$$

ამ და § 5-ში ვიგულისხმებთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

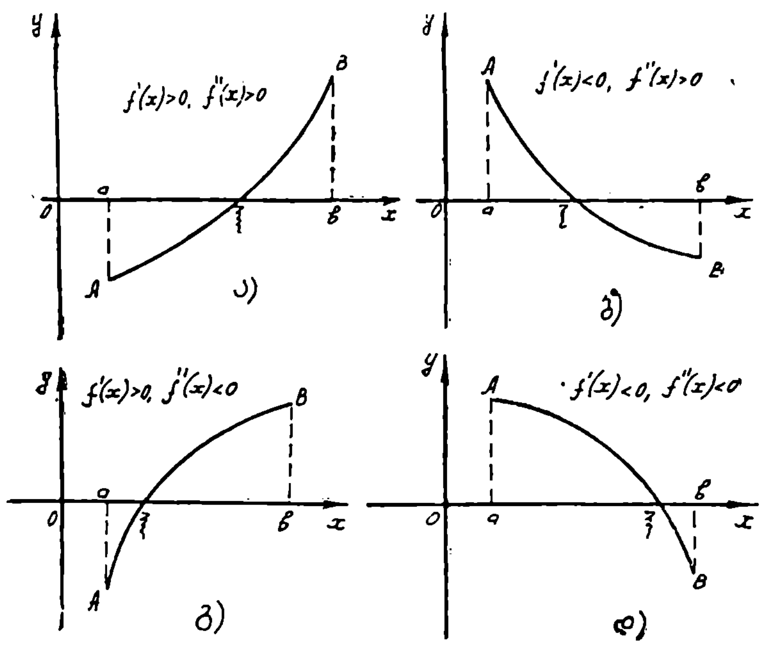
1) ფუნქციები $f(x)$, $f'(x)$ და $f''(x)$ უწყვეტია $[a, b]$ შუალედში;

2) $f(a)$ და $f(b)$ რიცხვებს მოპირდაპირე ნიშნები აქვთ, $f(a)f(b)<0$;

3) ფუნქციები $f'(x)$ და $f''(x)$ ინარჩუნებენ ნიშანს $]a, b[$ შუალედში.

1) და 2) პირობებიდან გამომდინარეობს, რომ a-სა და b-ს შორის არსებობს $f(x)=0$ განტოლების ფესვი, 3) პირობიდან კი $[a, b]$ შუალედში განტოლებას აქვს ერთადერთი ფესვი, ე. ი. ფესვი განცალებულია. გარდა ამისა, 3) პირობა, $f''(x)$ ნიშანს ინარჩუნებს, გეომეტრიულად ნიშნავს, რომ $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი $[a, b]$ შუალედში ან ამოზნექილია ან ჩაზნექილი.

ზემოთ მოყვანილ პირობებში $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს ექნება ნახ. 55-ზე წარმოდგენილი ერთ-ერთი სახე.



ნახ. 55

ახლა $y=f(x)$ წირის $A(a, f(a))$ და $B(b, f(b))$ წერტილებზე გავავლოთ AB ქორდა. ამ ქორდის და Ox ღერძის გადაკვეთის x_1 წერტილი იქნება ξ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა. ფესვის x_1 მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად დავწეროთ AB ქორდის განტოლება:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}. \tag{4.1}$$

როდესაც $x=x_1$, მაშინ $y=0$ და ამიტომ (4.1) განტოლებიდან გვექნება:

$$-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a}. \tag{4.2}$$

აქედან

$$x_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}. \tag{4.3}$$

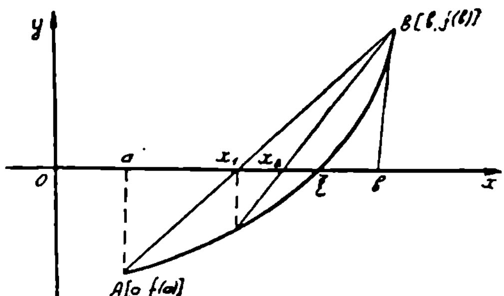
ξ ფესვის x_1 მიახლოებითი მნიშვნელობა შეიძლება სხვა სახითაც წარმოვიდგინოთ. (4.2) განტოლებიდან გვაქვს:

$$\frac{-f(b)+[f(b)-f(a)]}{f(b)-f(a)}=\frac{x_1-a}{b-a},$$

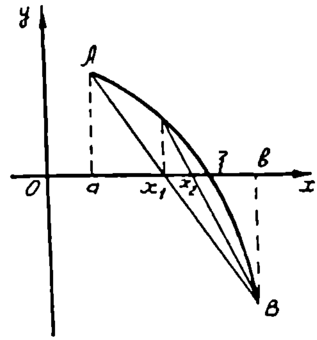
საიდანაც

$$x_1=b-\frac{(b-a)f(b)}{f(b)-f(a)}. \tag{4.4}$$

ξ ფესვის უფრო ზუსტი მნიშვნელობის მოსაძებნად ა) და დ) შემთხვევებში ($f'(x)\cdot f''(x)>0$) გამოვიყენოთ (4.3) ფორმულა $[x_1\; b]$ სეგმენტისათვის (უძრავია b წერტილი; ნახ. 56 და 57).



ნახ. 56



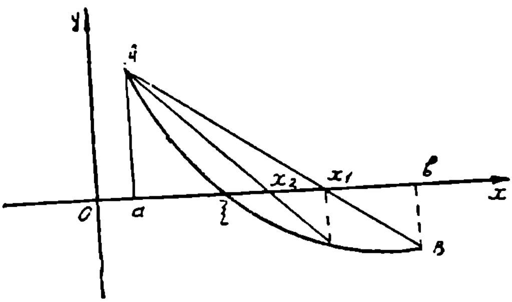
ნახ. 57

გვექნება:

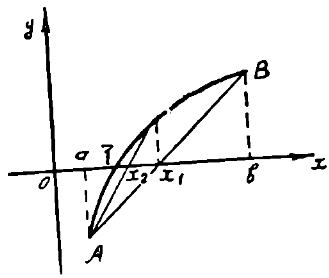
$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1) f(x_1)}{f(b) - f(x_1)} .$$

ბ) და გ) შემთხვევებში ($f'(x) \cdot f''(x) < 0$) გამოვიყენოთ (4.4) ფორმულა $[a, x_1]$ სეგმენტისათვის (უძრავია a წერტილი; ნახ. 58 და 59) და მივიღებთ:

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - a) f(x_1)}{f(x_1) - f(x)} .$$



ნახ. 58



ნახ. 59

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ ξ ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობათა მიმდევრობას:

$$x_1, \ x_2, \dots, x_n, \dots$$

ეს მიმდევრობა, როდესაც უძრავია b წერტილი (შემთხვევები $f'(x) \cdot f''(x) > 0$) ზრდადია, მისი ყოველი x_n წევრი მდებარეობს $[a, \xi]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b - x_n) f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} . \tag{4.5}$$

თუ უძრავია a წერტილი (შემთხვევები $f'(x) \cdot f''(x) < 0$) მიმდევრობა კლებადია, მისი ყოველი წევრი მდებარეობს $[\xi, b]$ შუალედში და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - a) f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} . \tag{4.6}$$

დავამტკიცოთ, რომ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$. ვთქვათ, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \overline{\xi}$ (ზღვარი არსე-

ბობს, რადგანაც $\{x_n\}$ მონოტონური შემოსაზღვრული მიმდევრობაა). თუ გადავალთ ზღვარზე (4.5) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\overline{\xi} = \overline{\xi} - \frac{(b-\overline{\xi}) f(\overline{\xi})}{f(b) - f(\overline{\xi})}.$$

აქედან $f(\overline{\xi}) = 0$. პირობის ძალით განტოლებას $]a, b[$ შუალედში აქვს ერთადერთი ფესვი $\overline{\xi}$, ამიტომ $\xi = \overline{\xi}$.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ (4.6) ტოლობით განსაზღვრული მიმდევრობა კრებადია და $x_n \to \xi$.

ახლა შევაფასოთ $|x_n - \xi|$ ცდომილება. ლაგრანჟის ფორმულის მიხედვით

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) f'(\eta), \tag{4.7}$$

სადაც η მოთავსებულია ξ და x_n წერტილებს შორის. (4.7)-დან გვაქვს

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(\eta)}.$$

თუ $|f'(x)|$ ფუნქციის უმცირეს მნიშვნელობას $[a, b]$ სეგმენტზე აღვნიშნავთ m-ით, $|x_n - \xi|$ ცდომილებისათვის მივიღებთ:

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}.$$

ეს ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ $|x_n - \xi|$ ცდომილება $f(x_n)$ მნიშვნელობის საშუალებით.

§ 5. მხებთა მეთოდი

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)$ აკმაყოფილებს § 4-ში მოყვანილ სამივე პირობას.

მოცემული განტოლების ξ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის მოსაძებნად გავავლოთ მხები AB რკალის იმ ბოლოზე, რომელზედაც f და f'' აქვთ ერთნაირი ნიშანი. ამ მხებისა და Ox ღერძის გადაკვეთა აღვნიშნოთ x_1'-ით, ხოლო α ასოთი a და b რიცხვებიდან ის, რომელზედაც f და f'' ერთნაირი ნიშნისაა. $[\alpha, f(\alpha)]$ წერტილზე გამავალი მხების განტოლებაა:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha). \tag{5.1}$$

როცა $x = x_1'$, მაშინ $y = 0$, ამიტომ (5.1) განტოლებიდან გვექნება:

$$-f(\alpha) = f'(\alpha)(x_1' - \alpha),$$

საიდანაც

$$x_1' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} . \tag{5.2}$$

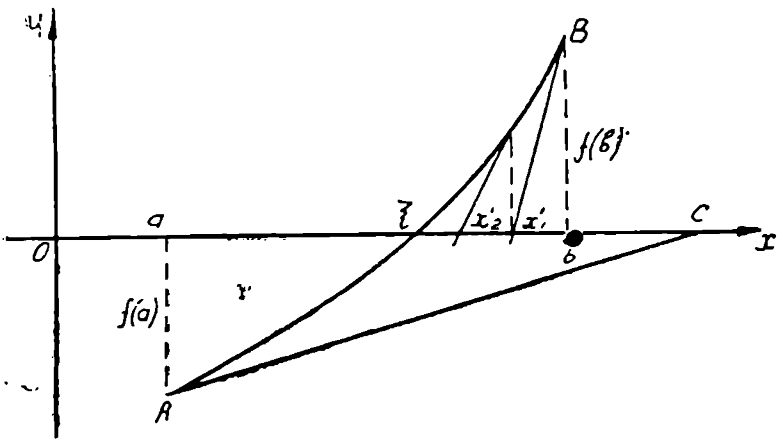
თუ $\alpha = a$ (ნახ. 55, ბ და გ), მაშინ (5.2) ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} . \tag{5.3}$$

ხოლო თუ $\alpha = b$ (ნახ. 55, ა, დ), მაშინ (5.2) ფორმულა ასე დაიწერება:

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} . \tag{5.4}$$

როგორც მე-60 ნახაზიდან ჩანს, თუ $\alpha = b$, მაშინ x_1' მოთავსებულია ξ და b წერტილებს შორის, ე. ი. $\xi < x_1' < b$. თუ $\alpha = b$, მაშინ $a < x_1' < \xi$.



ნახ. 60

ამრიგად, ყოველი ოთხი შესაძლო შემთხვევიდან მითითებულია რომელი ბოლოდან უნდა დავიწყოთ ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა. თუ გავაგრძელებთ პროცესს, მაშინ ა) და დ) შემთხვევებში მივიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობათა კლებად მიმდევრობას:

$$b > x_1' > x_2' > \cdots > x_n' > \cdots > \xi,$$

ხოლო ბ) და გ) შემთხვევაში მივიღებთ მიახლოებით მნიშვნელობათა ზრდად მიმდევრობას: $a < x_1' < x_2' < \cdots < x_n' < \cdots < \xi$, ამასთან:

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')} . \tag{5.5}$$

ადვილია ჩვენება, რომ $x_n' \to \xi$- მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi_0$. თუ გადავალთ ზღვარზე (5.5) ტოლობაში, მივიღებთ:

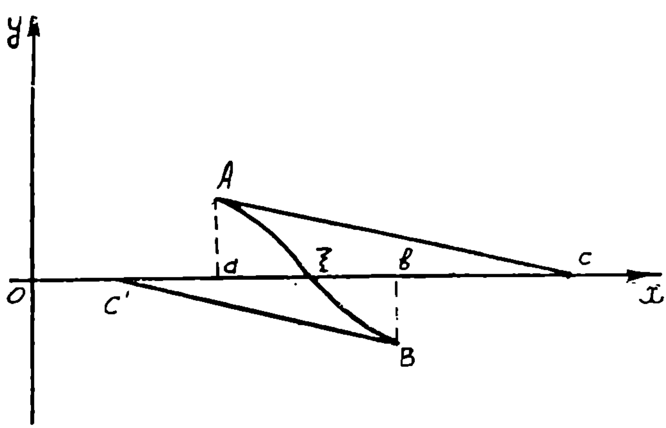
$$\xi_0 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}.$$

საიდანაც $f(\xi_0)=0$, აქედან და პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\xi=\xi_0$

ამრიგად, მხებთა მეთოდი საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ განტოლების ფესვი ნებისმიერი სიზუსტით.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 1. თუ მხებს გავავლებთ რკალის იმ ბოლოზე, სადაც f და f'' აქვთ სხვადასხვა ნიშანი, მაშინ x_1' წერტილი შეიძლება გავიდეს $[a, b]$ სეგმენტიდან (ნახ. 60), რითაც მიახლოება გაუარესდება.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა 2. თუ $f''(x)$ ნიშანს არ ინარჩუნებს $[a, b]$ სეგმენტში, ე. ი. თუ $y=f(x)$ წირს აქვს გადაღუნვის წერტილი, მაშინ რკალის თითოეულ ბოლოში გავლებულმა მხებმა შეიძლება გადაკვეთოს Ox ღერძი $[a, b]$ სეგმენტის გარეთ (ნახ. 61).



ნახ. 61

ახლა გამოვიყენოთ ფორმულა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს შევაფასოთ მიახლოების ცდომილება, თუ ფესვის მნიშვნელობად აღებულია x_n'. ტეილორის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:

$$0=f(\xi)=f(x_n')+f'(x_n')(\xi-x_n')+\frac{1}{2}f''(\eta)(\xi-x_n')^2, \qquad (5.6)$$

სადაც η მოთავსებულია ξ და ξ_n' წერტილებს შორის. (5.6)-დან გვაქვს:

$$\xi - x_n' + \frac{f(x_n')}{f'(x_n')} = -\frac{f''(\eta)}{2f'(x_n')}(\xi - x_n')^2. \tag{5.7}$$

(5.5) და (5.7) ფორმულებიდან

$$\xi - x_{n+1}' = -\frac{f''(\eta)}{2f'(x_n')}(\xi - x_n')^3 \tag{5.8}$$

(5.8) ფორმულა საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ $(n+1)$-ე მიახლოების ცდომილება, თუ ცნობილია n-ური მიახლოების ცდომილება:

$$|\xi - x_{n+1}'| \leqslant \frac{M}{2m}|\xi - x_n'|^2, \tag{5.9}$$

სადაც M არის $|f''(x)|$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $[a, b]$ სეგმენტზე, ხოლო m კი $|f'(x)|$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $[a, b]$-ზე.

ამრიგად, ახალი მიახლოების ცდომილება კლებულობს წინა მიახლოების ცდომილების კვადრატის პროპორციულად.

ვთქვათ, $[a, b]$ სეგმენტი შერჩეულია ისე, რომ აკმაყოფილებს უტოლობას:

$$q = \frac{M}{2m}(b - a) < 1.$$

(5.9) ფორმულიდან გვაქვს:

$$|\xi - x_{n+1}'| \leqslant \left(\frac{M}{2m}\right)^3 (\xi - x_{n-2}')^{2^2} \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^{n+1}-1} (\xi - x_0')^{2^{n+1}} <$$

$$< \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^{n+1}-1} (b-a)^{2^{n+1}} = \left[\frac{M(b-a)}{2m}\right]^{2^{n+1}-1} (b-a) = (b-a)\cdot q^{2^{n+1}-1},$$

(x_0' არის ან a ან b) ე. ი. ამ შემთხვევაში კრებადობა ძალიან სწრაფია.

§ 6. ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდი

ეს მეთოდი გულისხმობს ქორდათა და მხებთა მეთოდების ერთდროულად გამოყენებას $[a, b]$ სეგმენტზე.

აზრის გარკვეულობისათვის ვიგულისხმოთ, რომ საქმე გვაქვს ა) ან დ) შემთხვევებთან ($f'(x)\, f''(x) > 0$). როგორც ვიცით, x_1 და x_1' ამ შემთხვევაში გამოითვლება შესაბამისად (4.3) და (5.4) ფორმულით:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\, f(a)}{f(b) - f(a)},$$

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

ამასთან, როგორც ვნახეთ,

$$a < x_1 < \xi < x_1' < b.$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $[x_n, x_n']$ შუალედისათვის:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n' - x_n)\, f(x_n)}{f(x_n') - f(x_n)}, \qquad (6.1)$$

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \qquad (6.2)$$

(6.2.) იგივეა, რაც (5.5), ხოლო რაც შეეხება (6.1)-ს, ის არსებითად განსხვავდება (4.5)-საგან, რადგანაც b წერტილი აქ შეცვლილია x_n'-ით, რაც თანდათანობით უახლოვდება ξ-ს. ამასთან,

$$a < x_n < \xi < x_n' < b.$$

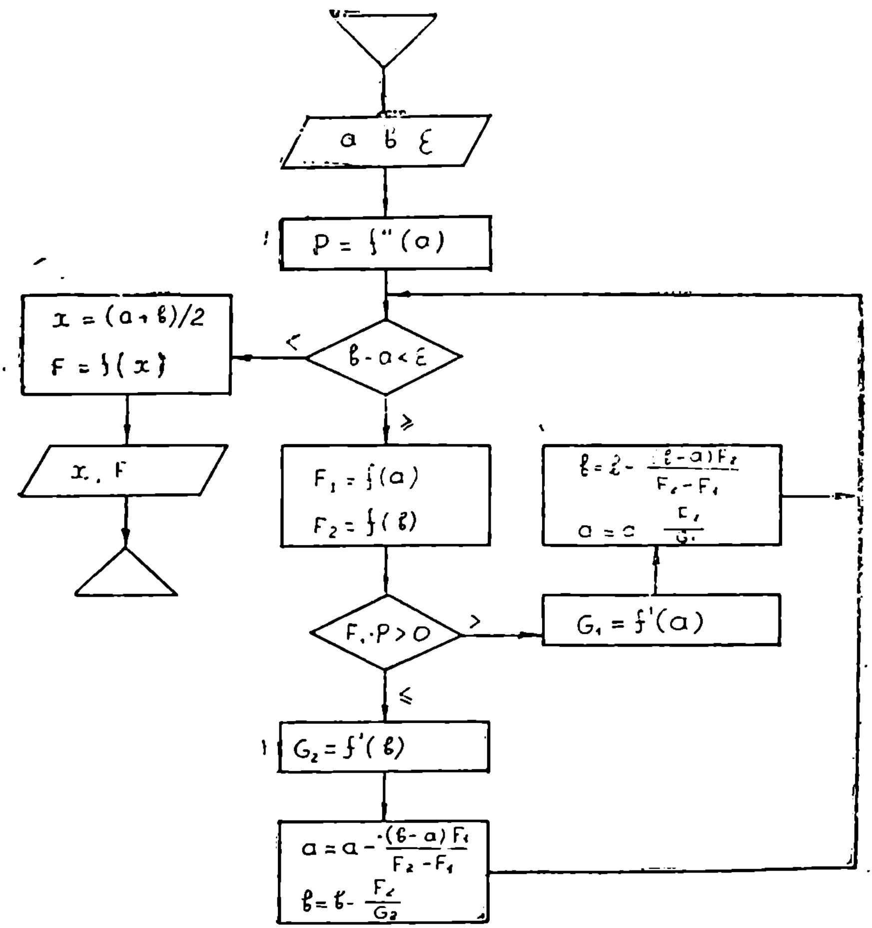
იმისათვის, რომ ε სიზუსტით განვსაზღვროთ $f(x) = 0$ განტოლების ფესვი, გამოთვლები მანამდე უნდა გავაგრძელოთ, სანამ არ შესრულდება პირობა:

$$|x_n - x_n'| < \varepsilon.$$

ამ შემთხვევაში ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად შეიძლება ავილოთ რიცხვი

$$\overline{x} = \frac{x_n + x_n'}{2}.$$

ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდის ბლოკ-სქემა



ნახ. 61 ა

ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
5   REM — — МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ— —
10  OPEN ' LP:' FOR OUTPUT AS FILE # 1
20  DATA a, b, ε
30  READ A, B, E
40  DEF FNF (U) = f (U)\DEF FNG (U)=f'(U)
50  DEF FNQ (U) = f" (U)
60  P = FNQ (A)
70  IF B—A<E THEN X=(A+B)/ 2 \ F=FNF (X) \
    GO TO110
80  F1=FNF (A)\F2=FNF (B)
90  IF F1 * P>0 THEN G1 = FNG (A)\B = B—(B—
    A) * F2/(F2—F1) \ A=A—F1/G1\ GO TO 70
100 G2 = FNG(B) \ A=A—(B—A) * F1 / (F2—F1)\B =
    = B—F2 / G2\GO TO 70
110 PRINT # 1, ' X = '; X, 'F(';X;')= ' ; F
120 END
```

ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
    FROGRAM KOMBI
    READ 1, A, B, DELTA
1   FORMAT (3F7, 4)
    P = F2 (A)
2   IF B—A—DELTA 6, 7, 7
7   U = F (A)
    V = F (B)
    IF (U * P) 4, 4, 3
3   GA = F1 (A)
    B = B—V * (B—A) / (V—U)
    A = A—U / GA
    GO TO 2
4   GB = F1 (B)
    A=A—U * (B—A) / (V —U)
    B = B—V / GB
    GO TO 2
6   X = (A + B) / 2
    Q = F (X)
    TYPE 5, X, Q
```

```
5  FORMAT (X, ' X = ', F7.4, 2X, 'F = ', F7.4)
   END
   FUNCTION F (U)
   F = f (U)
   RETURN
   END
   FUNCTION F1 (U)
   F1 = f' (U)
   RETURN
   END
   FUNCTION F2 (U)
   F2 = f'' (U)
   RETURN
   END
```

§ 7. იტერაციის, ანუ მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდი

განტოლების ფესვის გამოთვლა ზოგჯერ უფრო მოხერხებულია მიმდევრობითი მიახლოების, ანუ, როგორც მას უწოდებენ, იტერაციის მეთოდით. განვიხილოთ განტოლება:

$$f(x) = 0, \tag{7.1}$$

სადაც $f(x)$ უწყვეტად წარმოებადი ფუნქციაა. შევცვალოთ (7.1) განტოლება მისი ეკვივალენტური შემდეგი განტოლებით:

$$x = F(x). \tag{7.2}$$

ვთქვათ, $F(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტად წარმოებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. ავიღოთ $[a, b]$ სეგმენტზე რაიმე x_0 წერტილი და ავაგოთ წერტილები:

$$x_1 = F(x_0),\ x_2 = F(x_1), \ldots, x_{n+1} = F(x_n).$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წერტილი ეკუთვნის $[a, b]$ სეგმენტს. თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ მისი ზღვარი (7.1) განტოლების ფესვი იქნება. მართლაც, ვთქვათ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, მაშინ $x_{n+1} = F(x_n)$ ტოლობაში ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ:

$$\xi = F(\xi),$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ξ არის (7.1) განტოლების ფესვი.

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 7.1. ვთქვათ, ξ არის (7.2) განტოლების ფესვი. თუ ξ-ის მიმართ სიმეტრიულ $[\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$ სეგმენტზე $F(x)$ ფუნქცია წარმოებადია და აკმაყოფილებს პირობას:

$$|F'(x)| \leqslant q < 1, \tag{7.3}$$

მაშინ იტერაციის პროცესი $x_n = F(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, სადაც x^0 არის $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ სეგმენტის ნებისმიერი წერტილი, კრებადია ξ ფესვისაკენ, რომელიც წარმოადგენს (7.2) განტოლების ერთადერთ ფესვს აღნიშნულ სეგმენტში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვაჩვენოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობის ყველა წევრი ეკუთვნის $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ სეგმენტს, სადაც $x_n = F(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$. მართლაც, რადგანაც პირობის ძალით x_0 ეკუთვნის ამ სეგმენტს, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ $x_{n-1} \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$, მაშინ აქედან გამომდინარეობს $x_n \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. ლაგრანჟის ფორმულის ძალით გვაქვს:

$$x_n - \xi = F(x_{n-1}) - F(\xi) = F'(\eta)(x_{n-1} - \xi), \tag{7.4}$$

სადაც η მოთავსებულია x_{n-1} და ξ წერტილებს შორის, ე. ი. $\eta \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. (7.3) და (7.4)-დან გვაქვს:

$$|x_n - \xi| \leqslant q\,|x_{n-1} - \xi|, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.5}$$

აქედან, რადგანაც $0 < q < 1$, ამიტომ

$$|x_n - \xi| < |x_{n-1} - \xi|,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $x_n \in [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$. ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია ξ ფესვისაკენ. (7.5) უტოლობიდან გვაქვს:

$$|x_n - \xi| \leqslant q\,|x_{n-1} - \xi| \leqslant q^2 |x_{n-2} - \xi| \leqslant \cdots \leqslant q^n |x_0 - \xi| \leqslant q^n \varepsilon. \tag{7.6}$$

(7.6) უტოლობიდან, ცხადია, $x_n \to \xi$, რადგანაც $q^n \to 0$.

ვაჩვენოთ, რომ $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$ სეგმენტზე (7.2) განტოლებას სხვა ფესვი არა აქვს, მართლაც, თუ

$$\bar{\xi} = F(\bar{\xi}),$$

მაშინ ლაგრანჟის ფორმულის ძალით გვექნება:

$$\bar{\xi} - \xi = F(\bar{\xi}) - F(\xi) = F'(\eta)(\bar{\xi} - \xi), \tag{7.7}$$

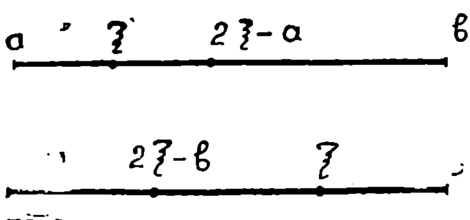
სადაც η მოთავსებულია ξ და $\bar{\xi}$ წერტილებს შორის. (7.7)-დან მივიღებთ:

$$(\bar{\xi} - \xi)[1 - F'(\eta)] = 0. \tag{7.8}$$

რადგანაც $F'(\eta) \neq 1$, ამიტომ (7.8)-დან გამომდინარეობს $\xi = \bar{\xi}$. ე. ი. ξ ფესვი ერთადერთია.

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. დავუშვათ $[a, b]$ სეგმენტზე ძევს (7.2) განტოლების ერთადერთი ფესვი. ვთქვათ, ამ სეგმენტზე შესრულებულია პირო-

ბა $|F'(x)| \leqslant q < 1$. სეგმენტი $[a, b]$ საზოგადოდ არ არის სიმეტრიული საძებნი ფესვის მიმართ, ამიტომ ბუნებრივად ისმის ამოცანა: როგორ შევარჩიოთ x_0 მიახლოება, რათა შესაძლებელი იყოს დამტკიცებული თეორემის გამოყენება. შევნიშნოთ, რომ სადაც არ უნდა მდებარეობდეს $[a, b]$ სეგმენტში საძებნი ξ ფესვი, მის მიმართ სიმეტრიული $[a, 2\xi - a]$, $[2\xi - b, b]$ სეგმენტიდან (ნახ. 62) ერთი მაინც მთლიანად ძევს $[a, b]$ სეგმენტზე, ამიტომ a და b წერტილებიდან ერთი მაინც ეკუთვნის ξ-ის მიმართ სიმეტრიულ სეგმენტს, რომელზედაც სრულდება უტოლობა $|F'(x)| \leqslant q < 1$. მაშასადამე a და b წერტილებიდან ერთი მაინც შეიძლება ავიღოთ x_0 მიახლოებად. კონკრეტულად x_0-ად უნდა ავიღოთ a და b-დან ის, რომელზედაც f (x)-ს ექნება $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$-ის მოპირდაპირე ნიშანი.



ნახ. 62

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი შემთხვევა, როდესაც $F'(x)$ ფუნქცია ნიშანს ინარჩუნებს $[a, b]$ სეგმენტზე. თუ $F'(x) > 0$, მაშინ (7.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\{x_n\}$ მიმდევრობა მონოტონურია, თუკი $F'(x)$ უარყოფითია, მაშინ, როგორც ეს ჩანს (7.4) ტოლობიდან, აგებული მიმდევრობის x_{n-1} და x_n წევრები მდებარეობენ ξ ფესვიდან სხვადასხვა მხარეს, ამიტომ ამ შემთხვევაში მართებულია შეფასება:

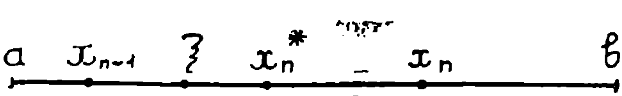
$$|x_n - \xi| \leqslant |x_n - x_{n-1}|.$$

თუ ამ შემთხვევაში ფესვის მიახლოებით მნიშვნელობად ავიღებთ რიცხვს

$$x_n^* = \frac{x_n + x_{n-1}}{2},$$

მაშინ ცდომილებისათვის მივიღებთ შეფასებას (იხ. ნახ. 63):

$$|x_n^* - \xi| \leqslant \frac{|x_n - x_{n-1}|}{2}.$$



ნახ. 63

საზოგადოდ, იტერაციის მეთოდის ცდომილებისათვის (7.6) ფორმულიდან ვღებულობთ შემდეგ შეფასებას:

$$|x_n - \xi| \leqslant q^n (b-a) < \delta,$$

სადაც

$$q = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |F'(x)|.$$

იმისათვის, რომ δ სიზუსტით განვსაზღვროთ $f(x)=0$ განტოლების ფესვი, გამოთვლები უნდა გავაგრძელოთ მანამ, სანამ არ შესრულდება პირობა

$$q^n (b-a) < \delta,$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$n > \frac{\ln \delta/(b-a)}{\ln q}. \tag{7.9}$$

ისმის კითხვა $f(x)=0$ განტოლებისათვის როგორ შევარჩიოთ $F(x)$ ფუნქცია, რომ

$$x = F(x) \tag{7.10}$$

განტოლებაზე შესაძლებელი იყოს იტერაციის მეთოდის გამოყენება. $f(x)=0$ განტოლება სხვადასხვა გზით შეიძლება დავიყვანოთ მის ეკვივალენტურ (7.10) განტოლებამდე. როგორც ზემოთ ვნახეთ, იტერაციის მეთოდისათვის საჭიროა ისეთი (7.10) წარმოდგენა, რომლისთვისაც შესრულდება უტოლობა:

$$|F'(x)| \leqslant q < 1,$$

თანაც, (7.9) პირობიდან გამომდინარე, რაც მცირე იქნება q, მით უკეთესი იქნება პროცესის კრებადობის სიჩქარე. განვიხილოთ $f(x)=0$ განტოლების ეკვივალენტური განტოლება:

$$x = \lambda f(x + x,$$

სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია. ამრიგად,

$$F(x) = \lambda f(x) + x.$$

ამიტომ λ უნდა ვეძიოთ ისეთი, რომ შესრულდეს უტოლობა:

$$|F'(x)| = |\lambda f'(x) + 1| \leqslant q < 1.$$

საიდანაც

$$-(1+q) \leqslant \lambda f'(x) \leqslant -(1-q). \tag{7.11}$$

აქედან, როცა $f'(x) > 0$, მივიღებთ:

$$-\frac{1+q}{f'(x)} \leqslant \lambda \leqslant -\frac{1-q}{f'(x)},$$

ანუ

$$\frac{1-q}{f'(x)} \leqslant -\lambda \leqslant \frac{1+q}{f'(x)}. \tag{7.12}$$

(7.11)-დან, როცა $f'(x)<0$, მივიღებთ:

$$\frac{1-q}{-f'(x)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1+q}{-f'(x)},$$

ანუ

$$\frac{1-q}{|f'(x)|} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1+q}{|f'(x)|}. \tag{7.13}$$

(7.12) და (7.13)-დან გვაქვს:

$$\frac{1-q}{|f'(x)|} \leqslant |\lambda| \leqslant \frac{1+q}{|f'(x)|}.$$

საიდანაც

$$\frac{1-q}{m} \leqslant |\lambda| \leqslant \frac{1+q}{M}, \tag{7.14}$$

სადაც

$$m = \min|f'(x)|, \quad M = \max|f'(x)|.$$

(7.14) პირობიდან ჩანს, რომ q რიცხვი უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას:

$$\frac{1-q}{m} \leqslant \frac{1+q}{M},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ:

$$q \geqslant \frac{M-m}{M+m}. \tag{7.15}$$

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, q უნდა ავიღოთ რაც შეიძლება მცირე, ამიტომ (7.15) უტოლობიდან გამომდინარე, ბუნებრივია დავუშვათ, რომ

$$q = \frac{M-m}{M+m}.$$

q-ს ამ მნიშვნელობისათვის (7.14)-დან გვაქვს:

$$|\lambda| = \frac{1-q}{m} = \frac{1+q}{M} = \frac{2}{M+m},$$

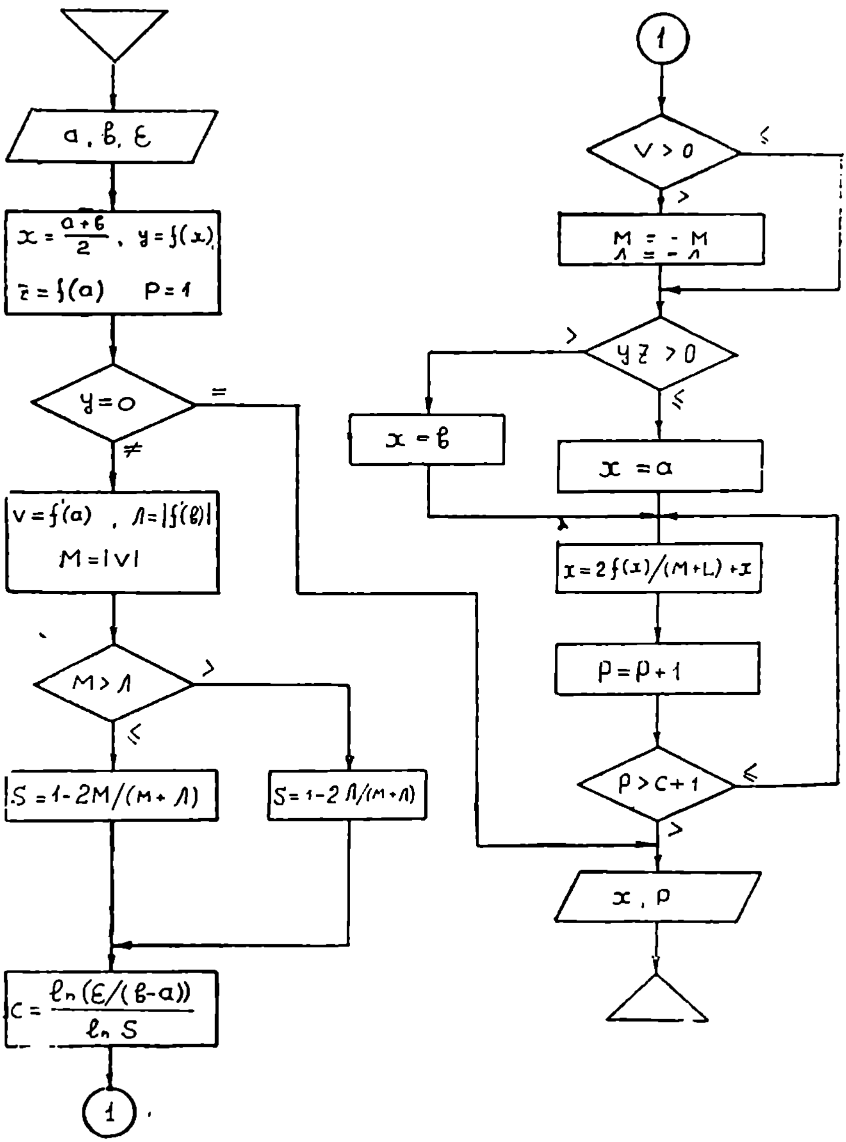
ამასთან (7.12) და (7.13) უტოლობებიდან ცხადია, რომ λ-ს აქვს $f'(x)$-ის საწინააღმდეგო ნიშანი.

ამრიგად, λ-ს მნიშვნელობად შეიძლება ავიღოთ $\lambda = \mp\frac{2}{M+m}$, სადაც „+“ ან „—“ შეირჩევა ისე, რომ λ-ს ქონდეს $f'(x)$-ის საწინა-

ალმდეგო ნიშანი. ამ შემთხვევაში q-ს მნიშვნელობად შეიძლება ავილოთ რიცხვი:

$$q = \frac{M_1 - m}{M + m}.$$

იტერაციის მეთოდის ბლოკ-სქემა.



იტერაციის მეთოდის პროგრამა ბეისიკის ენაზე

```
5   REM — — МЕТОД ИТЕРАЦИИ — - ·
10  OREN 'LP: ' FOR OUTPUT AS FILE # 1
20  DATA a, b, ε
30  READ A, B, E
40  DEF FNF (U)= f(U)\DEF FNG (U)=f'(U)
50  X = (A + B) / 2 \ P = 1
60  Y = FNF (X) \ Z = FNF (A)
70  IF Y = 0 GOTO 180
80  V=FNG (A) \ M=ABS (V) \ L = ABS (FNG (B))
90  IF M>L THEN S=1 — 2 * L /(M+L) \ GOTO 110
100 S = 1 — 2 * M / (M + L)
110 C = LOG (E / (B — A)) / LOG (S)
120 IF V > 0 THEN M = — M \ L = - L
130 X = A
140 IF Y * Z > 0 THEN X = B
150 FOR P = 1  TO C + 1
160 X = 2 * FNF (X) /(M + L) + X
170 NEXT P
180 PRINT # 1, 'X = ' ; X, 'P = ' ; P
190 END
```

იტერაციის მეთოდის პროგრამა ფორტრანის ენაზე

```
      FROGRAM  ITERA
      READ * , A, B, DELTA
      X = (A + B) / 2
      IP = 1
      Y = F (X)
      Z = F (A)
      IF (Y·EQ·O) GOTO 6
      V = F1 (A)
      CM = ABS (V)
```

```
      CL = ABS (F1 (B))
      IF (CM — CL) 1, 1, 2
    1 S = 1 — 2 * CM / (CM+CL)
      GOTO 3
    2 S = 1 — 2 * CL / (CM + CL)
    3 IC = ALOG (DELTA / (B — A)) / ALOG (S)
      IF (V·LE·O) GOTO 4
      CM = — CM
      CL = — CL
    4 X = A
      IF (Y * Z·GT·O) X = B
      DO 5 IP=1, IC + 1
    5 X = 2 * F (X) / (CM + CL) +X
    6 TYPE 7, X, IP
    7 FORMAT (2X, ' X =', F7·4, 2X, ' P = ' , 12)
      STOP
      END
      FUNCTION F (U)
      F = f (U)
      RETURN
      END
      FUNCTION F1 (U)
      F1 = f' (U)
      RETURN
      END
```

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილება.

2. რას ნიშნავს, რომ განტოლების ფესვი განცალებულია?

3. რაში მდგომარეობს განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის შუაზე გაყოფის მეთოდი?

4. რაში მდგომარეობს განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის ქორდათა მეთოდი? მოიყვანეთ ცდომილების შეფასების ფორმულა.

5. რაში მდგომარეობს განტოლების ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნის მხებთა მეთოდი? მოიყვანეთ ცდომილების შეფასების ფორმულა.

6. ჩამოაყალიბეთ თეორემა იტერაციის პროცესის კრებადობის შესახებ.

VII თავი

სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია

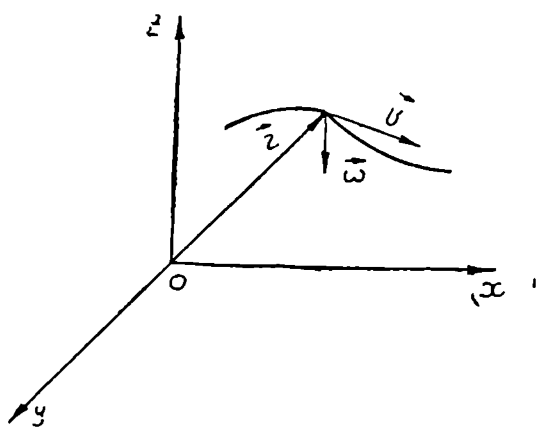
§ 1. ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფი

თუ t ცვლადის ყოველ მნიშვნელობას E სიმრავლიდან რაიმე წესის მიხედვით შეესაბამება გარკვეული $\vec{r}$ ვექტორი, მაშინ ამბობენ, რომ E სიმრავლეზე მოცემულია ვექტორ-ფუნქცია $\vec{r} = \vec{r}(t)$*.

თუ სივრცეში მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა, მაშინ როგორც ცნობილია, ყოველ ვექტორს შეესაბამება ნამდვილი რიცხვების დალაგებული სამეული — მისი კოორდინატები და პირიქით ნამდვილი რიცხვების ყოველი დალაგებული სამეული ცალსახად განსაზღვრავს ვექტორს, რომლისთვისაც დალაგებულ სამეულში შემავალი რიცხვები წარმოადგენენ მის კოორდინატებს. ამდენად, ვექტორ-ფუნქციის მოცემა ეკვივალენტურია სამი სკალარული (რიცხვითი) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ფუნქციის მოცემის, რომლებიც მისი კოორდინატებია, ე. ი.

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}.$$

მაგალითად, მოძრავი M წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი, მისი $\vec{v}$ სიჩქარე და $\vec{w}$ აჩქარება, ცხადია იქნება t დროის ვექტორ-ფუნქციები (ნახ. 64).



ნახ. 64

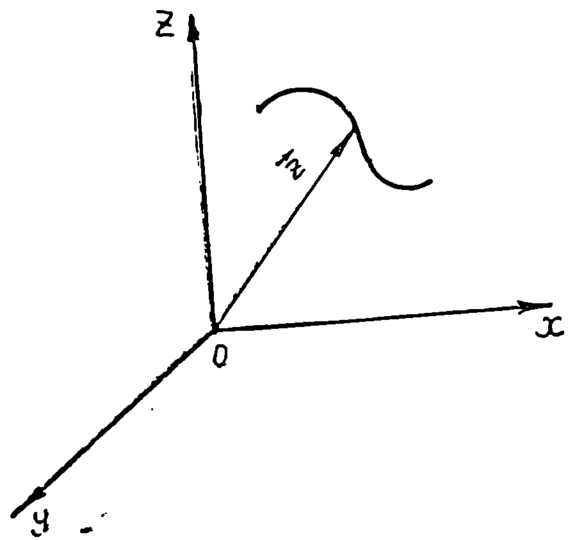
* შემდეგში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ t არგუმენტის ცვლილების არეა რაღაც შუალედი, სასრული ან უსასრულო.

თუ E სიმრავლის ყოველი t წერტილისათვის $z(t) \equiv 0$, მაშინ $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება ორგანზომილებიანი. ამ შემთხვევაში:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}.$$

მოვდოთ $\vec{r}(t)$ ვექტორი კოორდინატთა სისტემის O სათავეს. მაშინ $\vec{r}(t)$ ვექტორის ბოლოების გეომეტრიულ ადგილს ეწოდება $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფი.

მოძრავი წერტილის $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორის ჰოდოგრაფი არის ამ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია (ნახ. 65), ხოლო $\vec{v}$ სიჩქარის



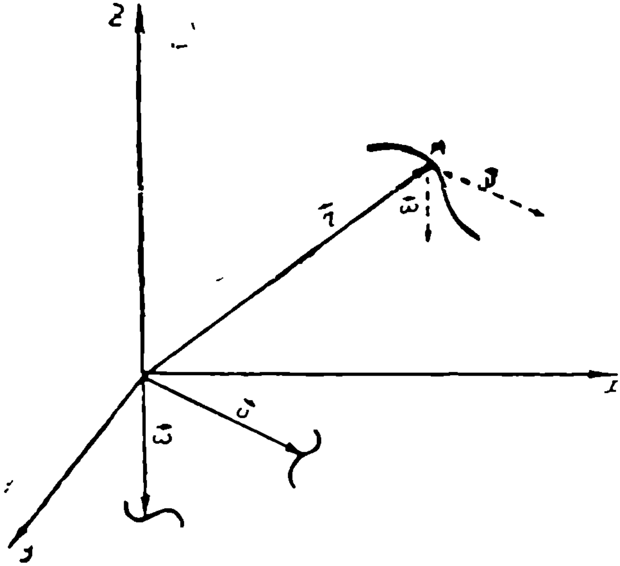
ნახ. 65

ჰოდოგრაფი იქნება სხვა წირი, ასევე სხვა წირი იქნება $\vec{\omega}$ აჩქარების ჰოდოგრაფი (ნახ. 66).

მ ა გ ა ლ ი თ ი 1. განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია:

$$\vec{r}(t) = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}, \ -\infty < t < +\infty.$$

ცხადია, ამ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფია დადებით Oz ნახევარღერძი. ამ ვექტორის მიმართულება უცვლელია, სიგრძე კი წარმოადგენს ცვლად სიდიდეს.

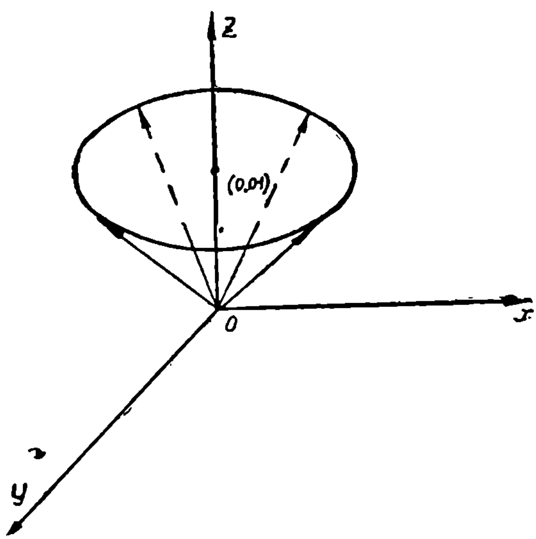


ნახ. 66

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2. განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია:

$$\vec{r}(t) = 2\cos t \cdot \vec{i} + 2\sin t \cdot \vec{j} + \vec{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

ადვილია შემოწმება, რომ ამ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფია წრეწირი, რომელიც ძევს $z=1$ სიბრტყეზე, ცენტრით (0,0,1) წერტილში და რადიუსით 2 (ნახ. 67). ცხადია ამ ვექტორ-ფუნქციის სიგრძე მუდმივია, ხოლო მიმართულება იცვლება.



ნახ. 67

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3. განვიხილოთ ვექტორ-ფუნქცია:

$$\vec{r}(t) = 3\cos t \cdot \vec{i} + 4\sin t \cdot \vec{j} + 2\vec{k}, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

ამ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფია ელიფსი, რომელიც ძევს $z=2$ სიბრტყეზე, ცენტრით (0,0,2) წერტილში და ნახევარღერძებით $a=3$, $b=4$. ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ $\vec{r}(t)$ ვექტორის სიგრძეც, და მიმართულებაც ცვლადია.

§ 2. ვექტორ-ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა

ვთქვათ $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია t_0 წერტილისა. ვიტყვით, რომ მუდმივი $\vec{r_0}$ ვექტორი არის $\vec{r}(t)$ ვექტორის ზღვარი t_0 წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს ისეთი $\delta>0$ რიცხვი, რომ

$$|\vec{r}(t) - \vec{r_0}| < \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$

ამ შემთხვევაში დავწერთ:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}.$$

ცხადია, რომ $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r_0}| = 0$.

ვთქვათ $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$ და $\vec{r_0} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$. მართებულია შემდეგი თეორემა.

თ ე ო რ ე მ ა 2.1. იმისათვის, რომ $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r_0}$, აუცილებელია და საკმარისი, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = y_0$, $\lim\limits_{t\to t_0} z(t) = z_0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან:

$$|x(t) - x_0| \leqslant |\vec{r}(t) - \vec{r_0}| = \sqrt{[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 + [z(t) - z_0]^2},$$

$$|y(t) - y_0| \leqslant |\vec{r}(t) - \vec{r_0}|,$$

$$|z(t) - z_0| \leqslant |\vec{r}(t) - \vec{r_0}|,$$

$$|\vec{r}(t) - \vec{r_0}| \leqslant |x(t) - x_0| + |y(t) - y_0| + |z(t) - z_0|.$$

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{i} \lim_{t\to t_0} x(t) + \vec{j} \lim_{t\to t_0} y(t) + \vec{k} \lim_{t\to t_0} z(t).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ვექტორ-ფუნქციების ზღვრებისთვის მართებულია შემდეგი თვისებები:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} |\vec{r}(t)| = |\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)|$,

2) $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r} = \vec{r}$, თუ $\vec{r} = \text{const}$,

3) $\lim\limits_{t\to t_0} A\vec{r}(t) = A \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$, $A = \text{const}$,

4) $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$ ($f(t)$—სკალარული ფუნქციაა),

5) $\lim\limits_{t\to t_0} [A\vec{r}_1(t) + B\vec{r}_2(t)] = A \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) + B \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$,

6) $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = (\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \cdot \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t))$,

7) $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \times \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$.

ჩამოთვლილ თვისებებში ყველა განსახილველი ფუნქციები განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში, გარდა შესაძლებელია თვით t_0 წერტილისა, და ვგულისხმობთ, რომ ტოლობების მარჯვენა ნაწილის ყველა ზღვარი არსებობს.

ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრულ $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება უწყვეტი t_0 წერტილში, თუ:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

თეორემა 2.1-დან გამომდინარეობს: იმისათვის, რომ t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული ვექტორ-ფუნქცია $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ იყოს უწყვეტი t_0 წერტილში, აუცილებელია და

საკმარისი, t_0 წერტილში უწყვეტი იყოს $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$ ფუნქციები.

ვექტორ-ფუნქციათა ზღვრების ზემოთ ჩამოთვლილ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ვექტორ ფუნქციათა ჯამი, სკალარული და ვექტორული ნამრავლები, სკალარული ფუნქციისა და ვექტორ-ფუნქციის ნამრავლი იქნება უწყვეტი რაღაც წერტილში, თუ ამ წერტილში უწყვეტია ყველა შესაკრები და შესაბამისად თანამამრავლები.

§ 3. ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული და დიფერენციალი

ვთქვათ $\vec{r}\,(t)$ ფუნქცია განსაზღვრულია t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. თუ არსებობს ზღვარი:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t_0 + \Delta t) - \vec{r}\,(t_0)}{\Delta t},$$

მას უწოდებენ $\vec{r}\,(t)$ ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულს t_0 წერტილში და აღნიშნავენ $\vec{r}\,'(t_0)$ სიმბოლოთი. მართებულია შემდეგი თეორემა:

თ ე ო რ ე მ ა 3.1. იმისათვის, რომ t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრული $\vec{r}\,(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$ ფუნქცია იყოს წარმოებადი t_0 წერტილში, აუცილებელია და საკმარისი, t_0 წერტილში წარმოებადი იყოს $x(t)$, $y(t)$ და $z(t)$ ფუნქციები, ამასთან:

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\,\vec{i} + y'(t_0)\,\vec{j} + z'(t_0)\,\vec{k}. \tag{3.1}$$

თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს:

$$\frac{\Delta \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\,\vec{k}$$

ტოლობიდან თეორემა 2.1-ის გამოყენებით.

ამრიგად, ვექტორის წარმოებულის კოორდინატები მოცემული ვექტორის კოორდინატთა წარმოებულის ტოლია.

t_0 წერტილის რაიმე მიდამოში განსაზღვრულ $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ ვექტორ-ფუნქციას ეწოდება დიფერენცირებადი t_0 წერტილში, თუ ამ წერტილში მისი ნაზრდი $\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_0 + \Delta t) - \vec{r}\,(t_0)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Delta \vec{r} = \vec{a}\cdot\Delta t + \vec{\alpha}\,(\Delta t)\cdot\Delta t,$$

სადაც $\vec{a}$ ვექტორი არ არის დამოკიდებული Δt-ზე, ხოლო $\vec{\alpha}(\Delta t)\to\vec{0}$, როცა $\Delta t\to 0$.

ამ შემთხვევაში $\vec{a}\cdot\Delta t$ ვექტორს ეწოდება $\vec{r}(t)$ ვექტორის დიფერენციალი t_0 წერტილში და აღინიშნება $d\vec{r}(t_0)$ ან $d\vec{r}$ სიმბოლოთი.

როგორც სკალარული ფუნქციის შემთხვევაში, აქაც ადვილია ჩვენება იმისა, რომ ვექტორ-ფუნქციის წარმოებადობა და დიფერენცირებადობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია, ამასთან

$$d\vec{r}=\vec{r}\,'(t_0)\cdot\Delta t.$$

თუ განსაზღვრით დავუშვებთ, რომ $dt=\Delta t$, მაშინ

$$d\vec{r}=\vec{r}\,'(t_0)\,dt.$$

საიდანაც

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}\,'(t_0).$$

(3.1.) ტოლობიდან გვაქვს

$$d\vec{r}=dx\cdot\vec{i}+dy\cdot\vec{j}+dz\cdot\vec{k}.$$

აქედან

$$|d\vec{r}|=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

ვექტორ-ფუნქციებისათვის მართებულია გაწარმოების შემდეგი წესები:

1) თუ $\vec{r}(t)=\text{const}$, მაშინ $\vec{r}\,'(t)=\vec{0}$,

2) $(A\vec{r}(t))'=A\vec{r}\,'(t)$, $A=\text{const}$,

3) $(f(t)\vec{r}(t))'=f'(t)\vec{r}(t)+f(t)\vec{r}\,'(t)$ ($f(t)$ — სკალარული ფუნქციაა),

4) $(A\vec{r}_1(t)+B\vec{r}_2(t))'=A\vec{r}_1{}'(t)+B\vec{r}_2{}'(t)$,

5) $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))'=\vec{r}_1{}'(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2{}'(t)$,

6) $(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t))'=\vec{r}_1{}'(t)\times\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2{}'(t)$

7) თუ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ და $t=t(\tau)$, მაშინ $\dfrac{d\vec{r}}{d\tau}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}\cdot\dfrac{dt}{d\tau}$ — რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი.

ზემოთ ჩამოთვლილი წესების დამტკიცებას მკითხველს ვანდობთ.

5) თვისებიდან მიიღება შემდეგი შედეგი.

შ ე დ ე გ ი. მუდმივსიგრძიანი ვექტორის წარმოებული თვით ამ ვექტორის მართობულია.

მართლაც, ვთქვათ $|\vec{r}(t)| = c$, მაშინ $(\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = |\vec{r}(t)|^2 = c^2$, ამიტომ:

$$2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0,$$

საიდანაც

$$\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t).$$

შ ე ნ ი შ ვ ნ ა. ზოგიერთ დებულებას, რომელიც მართებულია სკალარული ფუნქციებისათვის, ვექტორ-ფუნქციების შემთხვევაში საზოგადოდ ადგილი არა აქვს. სახელდობრ, ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ, საზოგადოდ მართებული არ არის. მართლაც, ვთქვათ

$$\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

მაშინ

$$\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = \vec{0}.$$

მაგრამ

$$\vec{r}'(t) = -\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j}.$$

საიდანაც $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ ყოველი t-სათვის $[0, 2\pi]$-დან, ე. ი. არ არსებობს $[0, 2\pi]$-ზე ისეთი t, რომლისთვისაც

$$\vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) = 2\pi\vec{r}'(t).$$

ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ ვექტორ-ფუნქციებისათვის შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი დებულებით:

თ ე ო რ ე მ ა 3.2. ვთქვათ, $\vec{r}(t)$ ვექტორ-ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე. მაშინ არსებობს $t_0 \in]\alpha, \beta[$, ისეთი, რომ:

$$|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)| \leqslant (\beta - \alpha) |\vec{r}'(t_0)|. \tag{3.2}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. განვიხილოთ სკალარული ფუნქცია:

$$\varphi(t) = (\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha), \vec{r}(t)).$$

ეს ფუნქცია უწყვეტია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე და წარმოებადია $]\alpha, \beta[$ ინტერვალზე (რადგანაც $\vec{r}\,(t)$ აკმაყოფილებს ამ პირობებს). ცხადია, რომ

$$\varphi'(t) = (\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,,\ \vec{r}\,'(t)\,).$$

ამიტომ, ლაგრანჟის თეორემის ძალით, არსებობს $t_0 \in\,]\alpha, \beta[$, ისეთი რომ

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\beta - \alpha)\,\varphi'(t_0). \tag{3.3}$$

ამ ტოლობის მარცხენა ნაწილისათვის გვაქვს:

$$\varphi(\beta) - \varphi(\alpha) = (\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,,\ \vec{r}\,(\beta)\,) - (\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,,\ \vec{r}\,(\alpha)) =$$

$$= (\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,,\ \vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,) = |\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,|^2\,.$$

ამიტომ (3.3) მიიღებს სახეს:

$$|\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,|^2 = (\beta - \alpha)\,\varphi'(t_0) = (\beta - \alpha)\,(\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha),\ \vec{r}\,'(t_0)\,). \tag{3.4}$$

თუ $\vec{r}\,(\beta) = \vec{r}\,(\alpha)$, მაშინ (3.2) უტოლობა მართებულია ნებისმიერი $t \in\,]\alpha, \beta\,[$-სათვის. თუ $\vec{r}\,(\beta) \neq \vec{r}\,(\alpha)$, მაშინ $|\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,| > 0$, ამიტომ თუ გამოვიყენებთ უტოლობას $|\,(\vec{a}\cdot\vec{b})\,| \leqslant |\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|$, (3.4)-დან მივიღებთ:

$$|\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,|^2 \leqslant (\beta - \alpha)\,|\,\vec{r}\,(\beta) - \vec{r}\,(\alpha)\,|\cdot|\,\vec{r}\,'(t_0)\,|\,.$$

აქედან კი მიიღება (3.2) უტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ როლის თეორემასაც და ლოპიტალის წესსაც ვექტორ-ფუნქციებისათვის საზოგადოდ ადგილი არა აქვს.

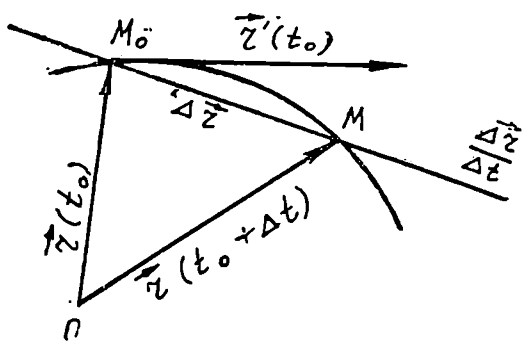
§ 4. ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული და მექანიკური აზრი

ვთქვათ $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ ვექტორ-ფუნქცია განსაზღვრულია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე, წარმოებადია $t_0 \in [\alpha, \beta]$ წერტილში და $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. დავადგინოთ, რა გეომეტრიული აზრი აქვს $\vec{r}\,'(t_0)$ წარმოებულს. რადგანაც $\vec{r}\,(t)$ დიფერენცირებადია, ამიტომ

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(t_0 + \Delta t) - \vec{r}\,(t_0) = \vec{r}\,'(t)\,\Delta t + \vec{\alpha}\,(\Delta t)\cdot\Delta t,\ \Delta t \to 0.$$

აქედან ცხადია, რომ საკმარისად მცირე $\Delta t \neq 0$-სათვის გვექნება $\vec{r}(t_0+\Delta t) \neq \vec{r}(t_0)$, ე. ი. საკმარისად მცირე $\Delta t \neq 0$-სათვის $\Delta r \neq \vec{0}$. მოვდოთ $\vec{r}(t)$ ვექტორი O წერტილზე. მაშინ $\Delta \vec{r}$ ვექტორი ძევს მისი ჰოდოგრაფის $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ და $M(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t))$ წერტილებზე (ნახ. 68) გამავალ მკვეთზე (მკვეთი ცალსახად არის განსაზღვრული, რადგან $\Delta\vec{r} \neq \vec{0}$ საკმარისად მცირე $\Delta t \neq 0$-სათვის). ამ მკვეთზე ძევს აგრეთვე $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ ვექტორიც. ამის გამო $\vec{r}\,'(t_0)$ ვექტორი გადის ჰოდოგრაფის M_0 წერტილზე გამავალი მკვეთი წრფის ზღვრულ წრფეზე, რომელიც არსებობს, რადგანაც პირობით არსებობს

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}.$$



ნახ. 68

ამრიგად, ვექტორ-ფუნქციის წარმოებული არის ვექტორი, რომელიც ძევს ამ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფის M_0 წერტილზე გამავალ მხებ წრფეზე.

ახლა ვთქვათ, მოცემულია $\vec{r}$ რადიუს-ვექტორი როგორც t დროის ვექტორ-ფუნქცია. ეს ვექტორ-ფუნქცია გვაძლევს მისი ბოლო წერტილის მოძრაობის კანონს. მოძრაობის დაწყების მომენტად მივიჩნიოთ t_0, ხოლო ამ მომენტში მოძრავი წერტილის მდებარეობა იყოს M_0. დროის $t_0+\Delta t$ მომენტში მოძრავი წერტილის მდებარეობა იყოს M, მაშინ $\Delta\vec{r}=\overrightarrow{M_0M}$ ვექტორს ეწოდება წერტილის ვექტორული გადა-

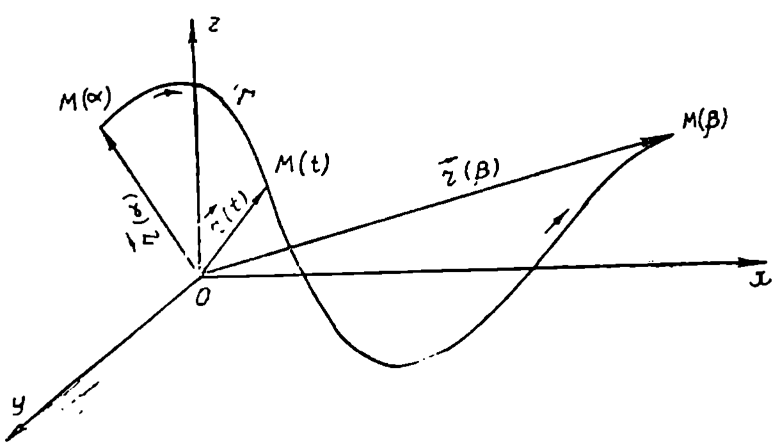
ადგილება. ვექტორული გადაადგილების ფარდობას დროის შესაბამის ნაზრდთან ეწოდება წერტილის საშუალო ვექტორული სიჩქარე, ე. ი. საშუალო ვექტორული სიჩქარეა $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ ვექტორი. საშუალო ვექტორული სიჩქარის ზღვარს, როდესაც $\Delta t \to 0$, ეწოდება წერტილის ვექტორული სიჩქარე მოცემულ მომენტში.

ამრიგად, $\vec{r}(t)$ ვექტორის წარმოებული არის ამ ვექტორის მოძრავი ბოლო წერტილის ვექტორული სიჩქარე. ასეთია ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის მექანიკური აზრი.

§ 5. წირის პარამეტრული სახის განტოლება სიბრტყეზე და სივრცეში. სივრცითი წირის მხების განტოლება ნორმალური სიბრტყე

ვთქვათ სივრცეში არჩეულია მართკუთხა კოორდინატთა $Oxyz$ სისტემა. დავუშვათ, რომ $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე მოცემულია $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ უწყვეტი ფუნქციები. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ მოცემულია $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის უწყვეტი ასახვა სამგანზომილებიან სივრცეში. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ რიცხვები შეიძლება განვიხილოთ, როგორც M წერტილის კოორდინატები, სადაც $M=M(t)$, ან როგორც ისეთი $\vec{r}(t)$ ვექტორის კოორდინატები, რომლის სათავეა O და ბოლო M (ნახ. 69), ე. ი.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \tag{5.1}$$



ნახ. 69

$M(t)$ წერტილთა სიმრავლეს $t \in [\alpha, \beta]$, განხილულს, როგორც $[\alpha, \beta]$ სეგმენტის უწყვეტი სახე, ეწოდება (5.1) ვექტორ-ფუნქციით მოცემული უწყვეტი წირი.

(5.1)-ს ეწოდება Γ წირის პარამეტრული განტოლება, t-ს ეწოდება წირის პარამეტრი.

თუ $\alpha \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \beta$, მაშინ ვიტყვით, რომ (5.1) წირის $M(t_2)$ წერტილი მოსდევს $M(t_1)$ წერტილს (ან $M(t_1)$ წინ უსწრებს $M(t_2)$-ს). ამრიგად, წირი არის სივრცის წერტილთა დალაგებული სიმრავლე.

ვთქვათ, Γ წირი მოცემულია (5.1) განტოლებით. სივრცის წერტილთა $M(\Gamma)=\{M(t): \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ სიმრავლისაგან განსხვავებით Γ წირი არის წერტილთა დალაგებული სიმრავლე. გარდა ამისა Γ წირი განსხვავდება $M(\Gamma)$ სიმრავლისაგან იმითაც, რომ წირის განსხვავებულ წერტილებს შეიძლება ეთანადებოდეს სივრცის ერთი და იგივე წერტილი. მართლაც, თუ $M(t_1)=M(t_2)$, როცა $t_1 \neq t_2$, მაშინ $M(t_1)$ და $M(t_2)$ წერტილები Γ წირის სხვადასხვა წერტილებია, მაგრამ როგორც სივრცის წერტილები, ისინი ერთმანეთს ემთხვევიან. ასეთ წერტილებს წირის ჯერადი წერტილები ეწოდება.

$\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, წირს ეწოდება მარტივი წირი, თუ ყოველი t_1 და t_2-სათვის, $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$, გვაქვს $M(t_1) \neq M(t_2)$, გარდა შესაძლებელია იმ შემთხვევისა, როცა $t_1=\alpha$ და $t_2=\beta$.

$\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, მარტივ წირს ეწოდება შეკრული, თუ $M(\alpha)=M(\beta)$, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი — გახსნილი წირი. $M(\alpha)$ და $M(\beta)$ წერტილებს Γ წირის ბოლო წერტილებს, ანუ, უბრალოდ, ბოლოებს უწოდებენ.

ყოველ უწყვეტ Γ წირზე შეიძლება შევარჩიოთ ორი ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება. ერთ-ერთ მათგანს ეწოდება დადებითი, ხოლო მეორეს (საწინააღმდეგოს)—უარყოფითი მიმართულება. შეთანხმებით $\vec{r}=\vec{r}(t)$ განტოლებით მოცემულ Γ წირზე დადებით მიმართულებად მიღებულია ის, რომელიც შეესაბამება t პარამეტრის ზრდას. ამის გამო, გახსნილი წირის შემთხვევაში $M(\alpha)$ და $M(\beta)$ წერტილებს, შესაბამისად Γ წირის საწყის და ბოლო წერტილებს უწოდებენ.

$\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, წირს ეწოდება გლუვი, თუ $\vec{r}(t)$-ს $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე აქვს უწყვეტი ნულისაგან განსხვავებული წარმოებული, ამასთან თუ $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$, მაშინ დამატებით უნდა შესრულდეს ტოლობა $\vec{r}'(\alpha)=\vec{r}'(\beta)$.

წირს ეწოდება უბან-უბან გლუვი, თუ ის შეიძლება დავანაწილოთ სასრული რაოდენობის გლუვ წირებად.

ხშირად (5.1) განტოლებას კოორდინატებში წერენ:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$$

და მას უწოდებენ სივრცითი წირის პარამეტრული სახის განტოლებას კოორდინატებში.

თუ წირი ძევს ერთ სიბრტყეში, მაშინ მას ბრტყელი წირი ეწოდება. კერძოდ, თუ ეს სიბრტყე ემთხვევა Oxy სიბრტყეს, მაშინ წირის განტოლებას აქვს სახე:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

ხოლო კოორდინატებში ის ასე ჩაიწერება:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta .$$

მას უწოდებენ ბრტყელი წირის პარამეტრულ სახის განტოლებას კოორდინატებში.

მაგალითად, $[\alpha, \beta]$ სეგმენტზე უწყვეტი $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენს ბრტყელ წირს, რომლის პარამეტრული სახის განტოლებაა:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \ a \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

აქ პარამეტრია $t=x$.

ვთქვათ Γ წირი მოცემულია წარმოებადი $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+ +z(t)\vec{k}$ ფუნქციით. ავიღოთ Γ წირზე რაიმე $M(t_0)=M(x_0, y_0, z_0)$ წერტილი ($|\vec{r}'(t_0)|\neq 0$). რადგან

$$\vec{r}'(t_0)= x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$$

ვექტორი ძევს Γ წირისადმი $M(t_0)$ წერტილზე გავლებულ მხებზე, ამიტომ $M(t_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლება იქნება:

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} .$$

Γ წირის $M(t_0)$ წერტილზე გამავალ სიბრტყეს, რომელიც ამავე წერტილზე გავლებული მხების მართობულია, წირის ნორმალური სიბრტყე ეწოდება.

წრფისა და სიბრტყის მართობულობის პირობის გამოყენებით შეგვიძლია დავწეროთ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გავლებულია წირის $M(t_0)$ წერტილში:

$$(x-x_0)\,x'(t_0)+(y-y_0)\,y'(t_0)+(z-z_0)z'(t_0)=0.$$

კითხვები თვითშემოწმებისათვის

1. განსაზღვრეთ ვექტორ-ფუნქცია, მისი ჰოდოგრაფი, ზღვარი, უწყვეტობა, წარმოებული და დიფერენციალი.

2. რა კავშირია წარმოებადობასა და დიფერენცირებადობას შორის?

3. რა წესით ხდება ვექტორ-ფუნქციის გაწარმოება? ვექტორთა ჯამის გაწარმოება? ვექტორ-ფუნქციის სკალარულ ფუნქციაზე ნამრავლის გაწარმოება? ორი ვექტორის სკალარული და ვექტორული ნამრავლის გაწარმოება?

4. რა ურთიერთობაშია მუდმივსიგრძიან ვექტორთან მისი წარმოებული ვექტორი?

5. როგორია ვექტორ-ფუნქციის წარმოებულის გეომეტრიული აზრი? მექანიკური აზრი?

6. მოიყვანეთ წირის ცნება.

7. რა განსხვავებაა წირსა და სივრცის წერტილთა სიმრავლეს შორის?

8. როგორ წირს ეწოდება მარტივი წირი? გახსნილი წირი? შეკრული წირი?

9. როგორ წირს ეწოდება გლუვი? უბან-უბან გლუვი?

10. დაწერეთ სივრცითი წირის მხები წრფის განტოლება.

11. რას ეწოდება წირის ნორმალური სიბრტყე? დაწერეთ მისი განტოლება.

ამოცანათა კრებული

§ 1. სიმრავლეთა თეორიისა და მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

1.1. მართებულია თუ არა შემდეგი ჩანაწერი?

1) $3 \in \{0, -1, 3, 5\}$; 2) $-2 \in \{-5, 2, 3\}$,

3) $5 \in \{2n-1 : n \in N\}$; 4) $7 \in \{2n : n \in z\}$;

5) $1 \in \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in N\right\}$; 6) $0 \in \left\{\dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$;

7) $\{2^n : n \in N\} \subset \{2n : n \in N\}$; 8) $\{4n-3 : n \in N\} \subset \{2n+1 : n \in N\}$;

9) $\{2n + (-1)^n n : n \in z\} \subset \{2n - 1 : n \in z\}$

10) $\left\{\dfrac{x^2}{x^2+1} : x \in Q\right\} \subset \{0 \leqslant x \leqslant 1 : x \in Q\}$.

1.2. დაადგინეთ შემდეგი ორი ჩანაწერიდან რომელია მართებული:

1) $\{2, 3\} \in \{2, 3, \{2, 3, 4\}\}$ თუ $\{2, 3\} \subset \{2, 3, \{2, 3, 4\}\}$;

2) $\{2, 3\} \in \{2, 3, 5, \{2, 3\}, \{0, 1, 3\}\}$ თუ $\{2, 3\} \subset \{2, 3, 5, \{2, 3\}, \{0, 1, 3\}\}$.

1.3. ჩაწერეთ მოცემული სიმრავლე მისი ელემენტების ჩამოთვლით:

1) $A = \{x(x^2-1)(x^2-4x+3) = 0 : x \in R\}$;

2) $A = \left\{0 < x + \dfrac{1}{x} \leqslant 2 : x \in R\right\}$;

3) $A = \{-x^2 + 3x + 10 > 0 : x \in N\}$;

4) $A = \left\{\dfrac{1}{27} \leqslant 3^x < 10 : x \in z\right\}$;

5) $A = \{\log_2(x+1) < 2 : x \in z\}$;

6) $A = \left\{\sin^2 x = \dfrac{1}{2},\ 0 < x < 2\pi : x \in R\right\}$.

1.4. გამოსახეთ კოორდინატთა სიბრტყეზე შემდეგი სიმრავლე:

1) $A = \{1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 : x,\ y \in R\}$;

2) $A = \left\{ y \geqslant \dfrac{1}{x}\ :\ x,\ y \in R \right\}$;

3) $A = \{y \geqslant \sqrt{x-1} : x,\ y \in R\}$;

4) $A = \{2x - y - 1 = 0 : x \in Z\}$.

1.5. მოცემულია A, B და C სიმრავლეები. გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციების საშუალებით ჩაწერეთ სიმრავლე, რომლის ყოველი ელემენტი ეკუთვნის: 1) სამივე სიმრავლეს; 2) ერთ სიმრავლეს მაინც; 3) რომელიმე ორ სიმრავლეს მაინც.

1.6. აჩვენეთ, რომ თანაფარდობები $A \subset B$, $A \cap B = A$ და $A \cup B = B$, ექვივალენტურია.

1.7. აჩვენეთ, რომ $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ ტოლობას ადგილი აქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $C \subset A$.

1.8. აჩვენეთ, რომ $A \setminus B \subset C$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \subset B \cup C$.

1.9. დაამტკიცეთ ტოლობები:

1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$;

5) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

6) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

7) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$;

8) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

9) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

1.10. აჩვენეთ, რომ

1) $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$;

2) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$;

3) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup D) \cap (C \cup D)$;

4) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

1.11. დაადგინეთ შემდეგი წინადადებებიდან რომელია ჭეშმარიტი და რომელი მცდარი:

1) $\forall x \exists y\ (x + y = 3)$; 2) $\exists y \forall x\ (x + y = 3)$;

3) $\exists x,\ y\ (x + y = 3)$; 4) $\forall x,\ y\ (x + y = 3)$;

5) $\exists\, x,\ y\ (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$;

6) $\forall\, x,\ y\ (x < y) \Longleftrightarrow \exists\, z\ (x < z < y)$;

7) $\forall\, x,\ y\ (x^2 \neq 2\, y^2)$;

8) $\forall\, x\ (x^2 > x \Longleftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$;

9) $\forall\, x\ (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Longleftrightarrow 2 < x \leqslant 3)$;

10) $\exists\, x\ (\sqrt{x^2} < x)$;

11) $\forall\, a,\ b,\ c\ (\exists\, x\ (ax^2 + bx + c \neq 0) \Longleftrightarrow b^2 - 4ac \geqslant 0)$;

12 $\forall\, a,\ b,\ c\ (\forall\, x\ (ax^2 + bx + c > 0) \Longleftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0)$;

13) $\forall\, b\, \exists\, a\, \forall\, x\ (x^2 + ax + b > 0)$;

14) $\exists\, b\, \forall\, a\, \exists\, x\ (x^2 + ax + b = 0)$;

15) $\exists\, a\, \forall\, b\, \exists\, x\ (x^2 + ax + b = 0)$.

1.12. დაამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა A და B სიმრავლეებს შორის:

1) $A = z;\ B = N$;

2) $A = \{\cos x = 1 : x \in R\},\ B = N$;

3) $A = \{0 \leqslant x \leqslant 1 : x \in R\},\ B = \{a \leqslant x \leqslant b : x \in R\}$;

4) $A = R,\ B = \{|x| < 1,\ \ x \in R\}$.

1.13. აჩვენეთ, რომ შემდეგი სიმრავლეები თვლადია:

1) $A = \{k^2 - k + 1 : k \in N\}$;

2) სიბრტყის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები რაციონალური რიცხვებია;

3) რაციონალურ კოეფიციენტებიან მრავალწევრთა სიმრავლე;

4) თვლადი სიმრავლის სასრულ ქვესიმრავლეთა სიმრავლე.

1.14. იპოვეთ $\max E$, $\min E$, $\sup E$ და $\inf E$ შემდეგი სიმრავლეებისათვის (თუ ისინი არსებობენ):

1) $E = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in N\right\}$; 2) $E = \left\{\dfrac{n}{n+1} : n \in N\right\}$;

3) $E = \left\{\dfrac{m}{n} : m < n,\ m,\ n \in N\right\}$; 4) $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} : n \in N\right\}$.

1.15. ვთქვათ A ნებისმიერი შემოსაზღვრული სიმრავლეა. აჩვენეთ, რომ სიმრავლე $B = \{x : -x \in A\}$ აგრეთვე შემოსაზღვრულია და ებისათვის (თუ ისინი არსებობენ):

$$\sup B = -\inf A,\ \inf B = -\sup A.$$

1.16. ვთქვათ A და B შემოსაზღვრული სიმრავლეებია. აჩვენეთ, რომ სიმრავლე

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

აგრეთვე შემოსაზღვრულია და

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B;$$
$$\inf (A + B) = \inf A + \inf B.$$

1.17. ვთქვათ A სიმრავლე შემოსაზღვრულია ზემოდან, ხოლო B ქვემოდან. აჩვენეთ, რომ სიმრავლე

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}$$

შემოსაზღვრულია ზემოდან და

$$\sup (A - B) = \sup A - \inf B.$$

1.18. ვთქვათ A და B არაუარყოფით რიცხვთა შემოსაზღვრული სიმრავლეებია, აჩვენეთ, რომ სიმრავლე

$$A \cdot B = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

აგრეთვე შემოსაზღვრულია და

$$\sup (A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B;$$
$$\inf (A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

§ 2 კომპლექსური რიცხვები

2.1. იპოვეთ z_1, და z_2 კომპლექსური რიცხვების ჯამი და სხვაობა, თუ:

1) $z_1 = 2 - 3i, \quad z_2 = -3 + i$; 2) $z_1 = 3, \quad z_2 = -1 + 2i$;

3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}\, i,\ z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}\, i$;

4) $z_1 = -4i, \quad z_2 = -2$.

2.2. იპოვეთ $z_1 \cdot z_2$ და $\dfrac{z_1}{z_2}$, თუ:

1) $z_1 = 1 + 2i, \quad z_2 = 1 - i$; 2) $z_1 = 3 - i, \quad z_2 = 3 + i$;

3) $z_1 = -2, \quad z_2 = 4 + 3i$, 4) $z_1 = \sqrt{5} - i,\ z_2 = \sqrt{5} - 2i$.

2.3. შეასრულეთ მოქმედებანი:

1) $i + i^2 + i^3 + i^4$; 2) $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{12}$;

3) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^{100}$; 4) $3i^3 - 2i^7 + i^5 - i$.

2.4. შეასრულეთ მოქმედებანი და პასუხი ჩაწერეთ ალგებრული ფორმით:

1) $(1-2i)(2+i)^2+5i$;
2) $(2-i)^3(2+11i)$;

3) $\dfrac{2-3i}{1+4i}-i^8$;
4) $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$;

5) $\dfrac{13+12i}{6i-8}+\dfrac{(1+2i)^2}{2+i}$;
6) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

2.5. იპოვეთ განტოლების (x, y) ამონახსენი, სადაც x და y ნამდვილი რიცხვებია:

1) $(1+i)x+(2-3i)y=3+2i$;

2) $(3+2i)x+(5+i)y=-2+3i$;

3) $\dfrac{1}{x+(y-1)i}+\dfrac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$;

4) $y^2-7y+9xi=-12+20i+x^2i$.

2.6. ამოხსენით განტოლება

1) $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$;

2) $z^2+\overline{z}=0$.

2.7. განსაზღვრეთ, x და y-ის რა ნამდვილი მნიშვნელობებისათვის იქნებიან $z_1=8x^2-20i^9$ და $z_2=9x^2-4+10yi^3$ კომპლექსური რიცხვები ურთიერთშეუღლებულნი.

2.8. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი

1) $-i$; 2) $-1+i$; 3) $-1-\sqrt{3}\,i$; 4) $-\sqrt{3}+i$.

2.9. წარმოადგინეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) i;
2) $-2i$;

3) $1+i$;
4) $1-i\sqrt{3}$;

5) $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,
6) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

7) $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$;
8) $-\sin\dfrac{\pi}{8}+i\cos\dfrac{\pi}{8}$;

9) $\sin\dfrac{\pi}{3}+i\cos\dfrac{\pi}{3}$;
10) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$,

11) $\cos\alpha - i\sin\alpha\ (-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi)$; 12) $\cos\alpha - i\sin\alpha\ (\pi \leqslant \alpha < 3\pi)$;

13) $1 - \sin\alpha + i\cos\alpha \left(-\pi \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$;

14) $\dfrac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha - i\sin\alpha}\ (-\pi < \alpha < \pi)$;

15) $1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha \left(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

2.10. ტრიგონომეტრიული ფორმით მოცემული კომპლექსური რიცხვების გამრავლებისა და გაყოფის წესის გამოყენებით შეასრულეთ მოქმედებანი და პასუხი ჩაწერეთ ტრიგონომეტრიული ფორმით:

1) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4} + i\sin\dfrac{11\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{8}\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\sin\dfrac{3\pi}{8}\right)$;

4) $(1-i)\cdot 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$;

5) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}$;

6) $\dfrac{2(\cos\pi + i\sin\pi)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$;

7) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3} - i\cos\dfrac{\pi}{3}}{-1+\sqrt{3}\,i}$;

8) $\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3}+i)}{i-1}$.

2.11. წარმოადგინეთ მაჩვენებლიანი ფორმით შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

1) $-1+i$; 2) $1-\sqrt{3}\,i$;

3) $-\sqrt{3}+i$; 4) $-2+i$.

2.12. მუავრის ფორმულის გამოყენებით გამოთვალეთ:

1) $(1+i)^{20}$; 2) $(1-i)^{40}$;

3) $(1+\sqrt{3}\,i)^{20}$; 4) $\left(1+\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2}$,

5) $\left(1+\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{tin}\,\frac{\pi}{6}\right)^{8}$; 6) $(\text{tg}\,2-i)^{4}$;

7) $\dfrac{(1+i)^{5}}{(1-i)^{3}}$; 8) $(1+i)^{8}\cdot(1-i\sqrt{3})^{-6}$;

9) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{45}$; 10) $\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$.

2.13. n-ის რომელი მთელი მნიშვნელობებისათვისაა მართებული ტოლობა

$$(1+i)^{n}=(1-i)^{n}.$$

2.14. აჩვენეთ, რომ

$$\left(\frac{1+i\,\text{tg}\,\alpha}{1-i\,\text{tg}\,\alpha}\right)^{n}=\frac{1+i\,\text{tg}\,n\alpha}{1-i\,\text{tg}\,n\alpha},\quad \text{როცა}$$

$$\left.n\in z,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ n\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots\right).$$

2.15. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{n}=1$, მაშინ

$$(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{n}=1.$$

2.16. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$, მაშინ ყოველი მთელი m-სათვის

$$z^{m}+\frac{1}{z^{m}}=2\cos m\alpha.$$

2.17. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

1) $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$;
2) $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$;
3) $\sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\sin^3\varphi\cos\varphi$;
4) $\cos 4\varphi = 1 - 8\sin^2\varphi\cos^2\varphi$;
5) $\sin 5\varphi = \sin^5\varphi - 10\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 5\sin\varphi\cos^4\varphi$;
6) $\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$.

2.18. გამოთვალეთ:

1) კუბური ფესვი 1-დან;
2) მეოთხე ხარისხის ფესვი — 1-დან;
3) კვადრატული ფესვი i-დან;
4) კვადრატული ფესვი — i-დან;
5) კუბური ფესვი i-დან;
6) კუბური ფესვი — i-დან;
7) კვადრატული ფესვი $1+i$-დან;
8) კუბური ფესვი — $1+i$-დან;
9) მეოთხე ხარისხის ფესვი, $1-i$-დან;
10) კვადრატული ფესვი $1+\sqrt{3}\,i$-დან.

2.19. ამოხსენით განტოლება:

1) $z^2+2z+5=0$;
2) $4z^2-2z+1=0$;
3) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$;
4) $z^2+(2i-3)z+5-i=0$;
5) $z^4-3z^2-4=0$;
6) $z^4+11z^2+18=0$;
7) $z^4+2z^2+4=0$;
8) $z^4-i\sqrt{3}\,z^2+1+\sqrt{3}=0$.

2.20. გამოსახეთ კომპლექსურ სიბრტყეზე წერტილები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) $\operatorname{Re} z=0$;
2) $\operatorname{Im} z=0$;
3) $-1\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 2$;
4) $0\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant 3$;
5) $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$;
6) $|z|\leqslant 3$;
7) $|z-i|\leqslant 2$;
8) $|z-1-i|>1$;
9) $1\leqslant|z+3i|\leqslant 2$;
10) $|z-1|<1$ და $\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$;

11) რომელთა მეოთხე ხარისხი 16-ის ტოლია;

12) რომელთა მესამე ხარისხი i-ის ტოლია.

§ 8. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი

8.1. დაამტკიცეთ ტოლობები:

1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$;

4) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$;

5) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$;

6) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

7) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$;

8) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+(n-1)\cdot n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

9) $3+33+333+\cdots+\underbrace{33\cdots 3}_{n\text{-ჯერ}}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$;

10) $\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (მარცხენა მხარეში n ცალი ფესვია).

8.2. დაამტკიცეთ უტოლობები:

1) $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$, სადაც $x_1, x_2, \cdots, x_n$ არიან (-1)-ზე მეტი ერთნაირი ნიშნის მქონე რიცხვები, ხოლო $n\in N$;

2) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n>1$, $n\in N$;

3) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$, $n>1$, $n\in N$;

4) $\sqrt{n}<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n>1$, $n\in N$;

5) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < n, \ n > 1, \ n \in N;$

6) $(2n)! > \frac{4n}{n+1} (n!)^2, \quad n > 1, \quad n \in N;$

7) $(2n)! < 4^n (n!)^2, \quad n \in N;$

8) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!, \ n > 1, \ n \in N;$

9) $n^{n+1} > (n+1)^n, \quad n > 2, \quad n \in N;$

10) $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n, \quad n \in N;$

11) $\left| \sin \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \ (0 \leqslant x_k \leqslant \pi; \ k = 1, 2, \cdots, n).$

3.3. ვთქვათ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია და $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$. დაამტკიცეთ, რომ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqslant n,$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ $n=1$ დასამტკიცებელი დებულება ცხადია. დავუშვათ იგი სამართლიანია, როცა $n=k$.

ვთქვათ $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია და $x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \, x_{k+1} = 1$, როცა $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = x_{k+1} = 1$, მაშინ დასამტკიცებელი უტოლობა ცხადია. თუ ამ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ერთისაგან, მაშინ ამ რიცხვებს შორის მოიძებნება მეორე ერთისაგან განსხვავებული რიცხვიც. ამასთან ისეთი, რომ ამ ორი რიცხვიდან ერთი მეტი იქნება ერთზე, მეორე კი ნაკლები. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $x_k > 1$ და $x_{k+1} < 1$.

დაშვების თანახმად k რაოდენობის

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, (x_k \, x_{k+1})$$

რიცხვებისათვის გვექნება

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k-1} + x_k \, x_{k+1} \geqslant k.$$

ამიტომ,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} + x_k \, x_{k+1} - x_k \, x_{k+1} \geqslant$$
$$\geqslant k + x_k + x_{k+1} - x_k \, x_{k+1} = k + 1 + x_k + x_{k+1} - x_k \, x_{k+1} - 1 =$$
$$= k + 1 + (x_k - 1)(1 - x_{k+1}) > k + 1.$$

3.4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ნებისმიერი არაუარყოფითი რიცხვებია, მაშინ

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}, \quad n \in N.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ამოცანა 3.3. შემდეგი რიცხვებისათვის.

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}, \quad \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}, \ldots, \quad \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}.$$

3.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ნებისმიერი დადებითი რიცხვებია, მაშინ

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ამოცანა 3.4. შემდეგი რიცხვებისათვის: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

§ 4. მიმდევრობა და მისი ზღვარი

4.1. ჩაწერეთ მიმდევრობის ზოგადი წევრის ფორმულა:

1) 2, 4, 6, 8, 10,...; 2) 1, 3, 5, 7, 9,...;

3) 2, 5, 8, 11, 14,...; 4) 1, 4, 9,16, 25,...;

5) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$; 6) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;

7) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$; 8) 2, 5, 10, 17, 26,... .

4.2. იპოვეთ $\{x_n\}$ მიმდევრობის პირველი სამი წევრი, თუ:

1) $x_1=7,\ x_{n+1}=x_n-3$; 2) $x_1=-5,\ x_{n+1}=2x_n$;

3) $x_1=\frac{1}{6},\ x_{n+1}=-x_n$; 4) $x_1=3,\ x_{n+1}=\frac{1}{x_n}$.

4.3. არის თუ არა მონოტონური მიმდევრობა:

1) $x_n=10-n$; 2) $x_n=\frac{n+3}{2}$;

3) $x_n=19-n$; 4) $x_n=(n-6)^2$;

5) $x_n=n-\frac{1}{n}$; 6) $x_n=\frac{2^n}{n!}$.

4.4. დაამტკიცეთ, რომ თუ a, b, c, d დადებითი რიცხვებია, მაშინ

$$x_n = \frac{an+b}{cn+d}$$

მიმდევრობის ზრდადობისათვის (კლებადობისათვის) აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს პირობა $ad-bc>0$ ($ad-bc<0$).

4.5. დაამტკიცეთ, რომ მიმდევრობა კლებადია:

1) $x_1 = 3,\ x_{n+1} = \dfrac{2+x_n}{2x_n}$; 2) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 2) ცხადია $\dfrac{x_{n-1}}{x_n} = \left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \dfrac{n-1}{n}$. ბერნულის უტოლობის ძალით

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1+(n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1} = \frac{n}{n-1}.$$

მაშასადამე $\dfrac{x_{n-1}}{x_n} > 1$.

4.6. გაარკვიეთ მოცემული მიმდევრობიდან რომელია შემოსაზღვრული ზემოდან, შემოსაზღვრული ქვემოდან, არ არის შემოსაზღვრული:

1) $x_n = 2n+1$; 2) $x_n = \dfrac{2n+1}{n}$;

3) $x_n = (-2)^n$; 4) $x_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$;

5) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; 6) $x_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$.

4.7. მიმდევრობის ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+5}{1-n} = -3$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2}{1-3n^2} = -\dfrac{4}{3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^6-1}{n^6+1} = 3$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3+2}{1-2n^3} = -2$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5+2}{2n^5-1} = \dfrac{1}{2}$.

4.8. აჩვენეთ, რომ შემდეგ მიმდევრობას არა აქვს ზღვარი:

1) $x_n = 1 + (-1)^n$; 2) $x_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$; 4) $x_n = \dfrac{n+1}{n}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

5) $x_n = (-1)^n n$; 6) $x_n = n^{(-1)^n}$;

7) $x_n = \dfrac{n^2+3n}{n+1}$; 8) $x_n = n^2\sin\dfrac{\pi n}{4}$.

იპოვეთ მიმდევრობის ზღვარი (4.9 — 4.30):

4.9. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{2n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-7n}{n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+(-1)^n}{3-2n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n-n}{\cos n+n}$.

4.10. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-4n+1}{n^2+2n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4-3n^2}{n^2+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)^2+(n+2)^2}{n^2+(n+1)^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^2-n^2}{(n-2)^2-n^2}$.

4.11. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-5n^2+1}{n-4n^3+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{1-4n^3+n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+3n^2-1}{1-4n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n^2-5n^3}{3-n^2}$.

4.12. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-n)^4-(3-n)^4}{(n+1)^3+n^3}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^4-(n+2)^4}{(n-1)^4-(n+1)^4}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^4+4n^4}{(n-1)^4+(n+1)^4}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+3n)^5+n^2}{(2n-1)^5-5n^5}$.

4.13. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)(n+1)(1-2n)}{(4n+3)(n+2)(2n+3)}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(2n+1)(1-4n)(1-n)}{(2n+1)(n+2)(4-3n)(1+2n)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^3-27n^3}{(2+3n)(n+2)(1-4n)}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4+2n^3}{(2n-3)(n+4)(1-3n)}$.

4.14. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+3)(1-4n^2)}{n^4-3n^3+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+1)^3+(n^3+1)^2}{(n+1)^6+(2n^3-1)^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^4+1)^2+(n^4-1)^2}{(n+2)^8+3(n-1)^8}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^3+3)(n^3+1)(n^4-1)}{(n^2+3)(n^4-2)(n+2)}$.

4.15. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+2}+5n}{3-4n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+3n-1}}{\sqrt{n^2+4}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^4+n^3-3}+n}{\sqrt[3]{3-4n-8n^6}}$.

4.16. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-\sqrt[5]{n+2}}{3\sqrt{n}-2n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{9n^6+7n}-n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n-1}-\sqrt[3]{n^3-2}}{\sqrt[4]{3n+1}-\sqrt[5]{32n^5-1}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n^3+4}}{\sqrt[4]{n+3}-\sqrt{n^5+1}}$.

4.17. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^2+3n-1}-\sqrt{n}}{\sqrt[9]{27n^6-4n^2+2}+\sqrt{n-2}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2-2n}+\sqrt[4]{n^5-2n}}{\sqrt[8]{n^{10}-3}-\sqrt[3]{n^3+1}}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^4-3n^2+2}+n}{\sqrt[4]{16n^5+2n^3-2}-3n}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{81n^5+\sqrt{n}-3}-2n}{(\sqrt[3]{n+2}-1)(\sqrt[11]{n^{11}-n^3+1}-\sqrt{n})}$.

4.18. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2\cdot 2^n}{3^n-4\cdot 2^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{n+1}-3\cdot 4^n}{2\cdot 4^{n+1}-5^n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^{2n-1}-8^{2n+1}}{6^{2n}-8^{2n+1}}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^{3n}-3^n}{3^{5n}+3^n}$.

4.19. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3n}{2^{n+2}-n^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+\sqrt[3]{n^5}}{5^n-3n}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{11^n+n^3}{\sqrt{n}-5^n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3}-7^{n+2}}{n^2+5^{n+5}}$.

4.20. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)!-n!}{(n+1)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!+(2n+1)!}{(2n)!\cdot(n+1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)!+(2n+1)!}{(2n+2)!\cdot n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!-2\cdot n!}{3(n+2)!+n^2}$.

4.21. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!-3^n}{2(n+2)!+4^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!+4\cdot 5^{n+1}}{5^n-(2n-1)!}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+2\cdot 3^n}{(n+1)!}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+3)\cdot 2^n}{2(n+2)!-3\cdot 5^n}$.

4.22. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^2+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(2n-1)(3n+2)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{3+7+11+\dots+(4n-1)}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 5^2\cdot 5^3\dots 5^n}{5^{n^2+1}-7^n}$.

4.23. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\dots-\dfrac{2n}{n}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)}{n^3+2}$.

4.24 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\dots+\dfrac{1}{5^n}}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[16]{3}\cdot\sqrt[64]{3}\dots\sqrt[4^n]{3})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (7\cdot\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[9]{7}\dots\sqrt[3^n]{7})$.

4.25. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n+2} - n)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-3n+2} - \sqrt{2+n^2})$.

4.26. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3+1}) \cdot \sqrt{n^3+2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^4+7} - \sqrt{n^4-1}) \cdot n^2$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[4]{n^3}(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3}(\sqrt[4]{n^2+2} - \sqrt{n})$.

4,27. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2(n + \sqrt[3]{8-n^3})$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n(2n - \sqrt[3]{8n^3+n})$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \sqrt[3]{n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{2-n} + \sqrt[3]{n}) \cdot \sqrt[3]{n^2}$.

4.28. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{2n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-2}{n}\right)^{n+1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{-n^2+3n}{3n^2+2}\right)^{n^2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2+1}{n^2+n}\right)^{n^2-1}$;

4.29. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n+2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+2}\right)^{3n-2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+10}{n+3}\right)^{\frac{n}{3}-1}$;

4.30. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n}{n^2+2}\right)^{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+7n+1}{3n^2-n+2}\right)^{\frac{n}{2}-1}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+5}{n^2+4n+1}\right)^{n^2+n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+1}{2n^3-3}\right)^{n-n^3}$.

4.31. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log_a(n+1)-\log_a n},\quad a>0,\ a\neq 1.$$

4.32. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან

$$1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\quad (k=2,3,\ldots,n),$$

ამიტომ

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

აქედან

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

4.33. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან

$$1-\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}\quad (k=2,3,\cdots,n),$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}=\frac{1}{3}.$$

4.34. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვინაიდან

$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]}\qquad (k=2,3,\ldots,n),$$

ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 34}{6\cdot 21}\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)}=\frac{2}{3}.$$

4.35. გამოთვალეთ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვთქვათ

$$s_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}.$$

აჩვენეთ, რომ

$$s_n-\frac{1}{2}s_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

4.36. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0.$$

4.37. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ 3.2-ის მაგალითი 10.

4.38. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ უტოლობა

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

4.39. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)=+\infty.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ უტოლობა

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{n}}{2}.$$

4.40. აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ დამოკიდებულება

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

4.41. იპოვეთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, თუ

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad (n=3,4,\dots).$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გვაქვს

$$x_k - x_{k-1} = -\frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2},$$

ამიტომ

$$x_2 - x_1 = b - a,\ x_3 - x_2 = -\frac{x_2 - x_1}{2} = -\frac{b-a}{2},$$

$$x_4 - x_3 = -\frac{x_3 - x_2}{2} = \frac{b-a}{4}, \dots, x_n - x_{n-1} = (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}} \quad (n = 3, 4, \dots).$$

ვინაიდან

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})$$

ადვილად შეგვიძლია გამოვთვალოთ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4.42. დაამტკიცეთ, რომ თუ მონოტონური მიმდევრობის რომელიმე ქვემიმდევრობა კრებადია, მაშინ კრებადია თვით ეს მიმდევრობაც.

4.43. აჩვენეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, თუ

$$x_0 > 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია მიმდევრობა ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ვინაიდან

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant x_n,$$

ამიტომ მიმდევრობა კლებადია ე. ი. არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ტოლობაში $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ $a = 1$.

4.44. ვთქვათ

$$x_1 = a,\ y_1 = b,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

აჩვენეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ცხადია $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ და

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}.$$

ვინაიდან $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n^2} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant y_n$, ამიტომ

$$x_1 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$.

თუ ტოლობაში $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ გადავალთ ზღვარზე, მივიღებთ $A = B$.

4.45. დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ln 2$, თუ

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. როგორც ვიცით

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e, \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} > e,$$

ამიტომ

$$\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m}, \ \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) > \frac{1}{m+1},$$

ე. ი.

$$\frac{1}{m+1} < \ln(1+m) - \ln m < \frac{1}{m}.$$

საიდანაც

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

აქედან ჩანს, რომ

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0.$$

ცხადია

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+n) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

ე. ი. y_n მიმდევრობა კლებადია და ქვემოდან შემოსაზღვრული. ამიტომ არსებობს $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$. მაშასადამე

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+c+\rho_n \quad (\rho_n\to 0, \text{ როცა } \quad n\to\infty).$$

x_n მიმდევრობის ზღვრის გამოსათვლელად საკმარისია x_n მიმდევრობა ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\ln 2n-\ln(n-1)+\rho_{2n}-\rho_{n-1}.$$

4.46. აჩვენეთ, რომ მოცემული მიმდევრობა კრებადია:

1) $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$;

2) $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\cdots+\frac{p_n}{10^n}$, სადაც ყოველი p_i $(i=0, 1, \ldots)$ ხრის 9-ზე ნაკლები ან ტოლი ნატურალური რიცხვი.

მითითება. 1) ვინაიდან $\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{m}$ (იხ. 4.45-ის მითითება), ამიტომ

$$\ln x_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$

ე. ი. მიმდევრობა შემოსაზღვრულია.

2) ადვილი შესამჩნევია, რომ მიმდევრობა ზრდადია და ზემოდან შემოსაზღვრულია p_0+1 რიცხვით.

4.47. ვთქვათ

$$x_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}} \quad (n \text{ ცალი ფესვი}).$$

დაამტკიცეთ, რომ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ

$$x_n < 2 \quad n = 1,, 2, \dots$$

და ისარგებლეთ ტოლობით

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n}.$$

4.48. მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის საფუძველზე აჩვენეთ, შემდეგი მიმდევრობის კრებადობა:

1) $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \ |a_k| < M \ (k = 0.\ 1, 2, \dots), |q| < 1;$

2) $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n};$

3) $x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)};$

4) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$

5) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k^2}{2^k};$

6) $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}.$

4.49. მიმდევრობის კრებადობის კოშის კრიტერიუმის საფუძველზე აჩვენეთ შემდეგი მიმდევრობის განშლადობა:

1) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n};$

2) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$

4.50. ვთქვათ მოცემულია ორი მიმდევრობა x_n და y_n. ამასთან y_n მიმდევრობა ზრდადია და $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. დაამტკიცეთ, რომ, თუ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a,$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. პირობის ძალით $\forall\varepsilon > 0$-თვის $\exists n_0 \in N$ ისეთი, რომ

$$a - \varepsilon < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < a + \varepsilon, \quad \text{როცა} \quad k > n_0.$$

თუ k-ს მივცემთ მნიშვნელობებს $n_0+1, n_0+2, \dots, n$ და მიღებულ უტოლობებს შევკრებთ, მივიღებთ

$$(y_n - y_{n_0})(a - \varepsilon) < x_n - x_{n_0} < (y_n - y_{n_0})(a + \varepsilon).$$

აქედან

$$a - \varepsilon < \frac{x_n - x_{n_0}}{y_n - y_{n_0}} < a + \varepsilon.$$

4.51. დაამტკიცეთ, რომ თუ $p \in N$, მაშინ

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \dots + (2n+1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვაჩვენოთ მაგალითად 2). დავუშვათ

$$x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \dots + n^p) - n^{p+1}, \quad y_n = (p+1)n^p.$$

მაშინ 4.50 ამოცანის თანახმად

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(n+1)^p - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)\left[(n+1)^p - n^p\right]} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} n^{p-2} + \dots + 1\right]}{(p+1)\left[n^p + pn^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} n^{p-2} + \dots + 1 - n^p\right]} + \right.$$

$$+\frac{-n^{p+1}-(p+1)\,n^{p}-\frac{p+1}{2}\,n^{p-1}-\dots-1+n^{p+1}}{(p+1)\left[n^{p}+p\,n^{p-1}+\dots+\frac{p\,(p-1)}{2}\,n^{p-2}+\dots+1-n^{p}\right]}\Bigg\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p\,(p+1)}{2}+0\left(\frac{1}{n}\right)}{p\,(p+1)+0\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}\,.$$

4.52. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია ($x_n>0$), მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ მიმდევრობისათვის გამოიყენეთ მე-2 თავის § 6-ის მაგალითი 11.

4.53. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\{x_n\}$ მიმდევრობა კრებადია და $x_n>0$, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\,.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ეს ტოლობა მიიღება შემდეგი უტოლობებიდან

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\,.$$

4.54. დაამტკიცეთ, რომ თუ $x_n>0$ ($n=1,\ 2,\dots$) და $\left\{\frac{x_n}{x_{n-1}}\right\}$ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}\,.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ტოლობა

$$\sqrt[n]{x_n}=\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}$$

და წინა მაგალითი.

4.55. ააგეთ ისეთი $\{x_n\}$ მიმდევრობა ($x_n > 0$ $n = 0, 1, \dots$), რომლისთვისაც $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ არსებობს, მაგრამ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ არ არსებობს.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განვიხილოთ მიმდევრობა

$$x_n = \begin{cases} q^{\frac{n}{2}}, & \text{როცა } n \text{ ლუწია}, \\ q^{\frac{n+3}{2}}, & \text{როცა } n \text{ კენტია}, \end{cases}$$

სადაც $q>0$. ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{როცა } n \text{ კენტია}, \\ q^2, & \text{როცა } n \text{ ლუწია}, \end{cases}$$

ხოლო

$$\sqrt[n]{x_n} = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{როცა } n \text{ ლუწია}, \\ q^{\frac{n+3}{2n}}, & \text{როცა } n \text{ კენტია}. \end{cases}$$

4.56. 1) დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n},$$

სადაც $x_n = \frac{n^n}{n!}$. ვინაიდან

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e,$$

ამიტომ 4.54 მაგალითის ძალით ადგილი აქვს ტოლობას

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = e.$$

2) დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ამოცანა 4.56. 1) ის ძალით

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

ვინაიდან $2<e<3$, ამიტომ $\exists n_0 > N$ ისეთი, რომ

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{2},$$

როცა $n > n_0$. აქედან $\dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{1}{2^n}$, როცა $n > n_0$.

4.57. დაამტკიცეთ, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ უტოლობები $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$,
$\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $(n = 2, 3, \dots)$.

4.58. დაამტკიცეთ უტოლობები

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. მარცხენა უტოლობა დავამტკიცოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით. ის მართებულია $n=1$-თვის. დავუშვათ უტოლობა მართებულია, როცა $n=k$. მაშინ

$$(k+1)! = k!\,(k+1) > \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot (k+1) =$$

$$= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \cdot \frac{(k+1)\cdot\left(\dfrac{k}{e}\right)^k}{\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1}} \geqslant \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1},$$

რადგან

$$\frac{(k+1)\left(\frac{k}{e}\right)^k}{\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} > 1.$$

მარჯვენა უტოლობის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ დამოკიდებულება საშუალო არითმეტიკულსა და საშუალო გეომეტრიულს შორის. გვექნება

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} .$$

აქედან

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

4.59. იპოვეთ $\underline{\lim}\, x_n$ და $\overline{\lim}\, x_n$, თუ

1) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 2) $x_n = \cos n\pi$.

4.60. ვთქვათ მოცემულია მიმდევრობა $\{x_n\}$. აჩვენეთ, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n \quad \text{და} \quad \underline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n,$$

თუ

$$\overline{x}_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}, \quad \underline{x}_n = \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

4.61. აჩვენეთ, რომ ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი $\{x_n\}$ მიმდევრობისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\overline{\lim}\, x_n = -\underline{\lim}\,(-x_n),$$
$$\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n).$$

4.62. დაამტკიცეთ, რომ

1) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}\, y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\,(x_n+y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}\, y_n$;

2) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}\, y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\,(x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty}\, y_n$.

მოიყვანეთ მაგალითები მიმდევრობებისა, როდესაც ამ უტოლობებში ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. 1) ცხადია არსებობს ქვემიმდევრობები $\{x_{r_n}\}$, $\{y_{r_n}\}$, $\{x_{m_{r_n}}\}$ ისეთი, რომ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}), \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}.$$

ამიტომ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{r_n} + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

ვინაიდან $\{x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}\}$ წარმოადგენს კრებადი $\{x_{r_n} + y_{r_n}\}$ მიმდევრობის ქვემიმდევრობას, ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} (x_{r_n} + y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}).$$

ამის გარდა $\{x_{m_{r_n}}\}$ მიმდევრობის კრებადობიდან გამომდინარეობს $\{y_{m_{r_n}}\}$ მიმდევრობის კრებადობა. აქედან

$$\lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

ამრიგად გვაქვს

$$\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} + y_{m_{r_n}}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n).$$

უტოლობის მარცხენა ნაწილი დამტკიცებულია. აქედან, თუ გავითვალისწინებთ ტოლობებს

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (-y_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

მივიღებთ

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n + y_n) + \underline{\lim}_{n\to\infty} (-y_n) \leqslant$$

$$\leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} [(x_n + y_n) + (-y_n)] = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

აქედან მიიღება 1) უტოლობის მარჯვენა მხარე.

2) უტოლობები მტკიცდება ანალოგიურად.

მოვიყვანოთ მაგალითი, როდესაც მოცემულ უტოლობებში ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობებს. ვთქვათ

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin^2\frac{\pi n}{2}, \quad y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cos^2\frac{\pi n}{2} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

მაშინ

$$x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = -1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n = -1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} y_n = 1,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) = -1, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) = 1.$$

4.68. ვთქვათ $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ შემოსაზღვრული მიმდევრობებია. დაამტკიცეთ, რომ

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n;$

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$

მოიყვანეთ მაგალითები, როდესაც მოცემულ უტოლობებში ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობებს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. დავამტკიცოთ 1) უტოლობები. 2) უტოლობები მტკიცდება ანალოგიურად.

თუ $x_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ან $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, მაშინ დასამტკიცებელი უტოლობა ცხადია. ვიგულისხმოთ, რომ $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$. ცხადია, რაიმე ნომრიდან დაწყებული $x_n > 0$.

ვთქვათ

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} y_{r_n}), \quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}},$$

გვაქვს

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$$

ვინაიდან $\{ x_{m_{r_n}} \cdot y_{m_{r_n}} \}$ — კრებადი მიმდევრობის ქვემიმდევრობაა, ამიტომ

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} (x_{r_n} y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}).$$

რადგან $\{ x_{m_{r_n}} \}$ მიმდევრობა კრებადია, კრებადი იქნება $\{ y_{m_{r_n}} \}$ მიმდევრობაც, ე. ი.

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}.$$

აქედან გამომდინარე

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} \varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_{m_{r_n}} \cdot y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n).$$

უტოლობის მარცხენა მხარე დამტკიცებულია. უტოლობის მარჯვენა მხარის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

უკვე დამტკიცებულის ძალით გვაქვს

$$\frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n} \cdot \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} \varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y_n} (x_n y_n) \right) = \varliminf_{n\to\infty} x_n.$$

აქედან მიიღება დასამტკიცებელი უტოლობის მარჯვენა მხარე.

მოვიყვანოთ მაგალითი, როდესაც უტოლობებში ადგილი აქვს მკაცრ უტოლობებს. ვთქვათ

$$x_n = 2 + (-1)^n, \quad y_n = 2 - (-1)^n + \frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

მაშინ

$$x_n y_n = 3 + \frac{2 + (-1)^n}{2} \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = 3, \quad \varliminf_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \frac{7}{2},$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) = \frac{3}{2}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) = \frac{9}{2}.$$

§ 5. ფუნქცია

5.1. იპოვეთ $f(0)$, $f(-1)$ და $f(3)$, თუ

$$f(x) = x^3 - 2x + 3.$$

5.2. იპოვეთ $g(1)$, $g(-3)$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)$, თუ

$$g(x) = \frac{3 + 2x}{1 - 2x}.$$

5.3. იპოვეთ $\varphi(3)$, $\varphi(-700)$ და $\varphi(1,1)$, თუ

$$\varphi(x) = \frac{x + |x|}{1 - x}.$$

5.4. იპოვეთ $F(0)$, $F(-3)$ და $F(4)$, თუ

$$F(x) = 3^{x-1} + \log_2(x + 4).$$

5.5. იპოვეთ $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ და $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, თუ

$$f(x) = \cos^2 2x - |\operatorname{tg} x|.$$

5.6. იპოვეთ $\varphi(0)$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ და $\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)$, თუ

$$\varphi(x) = \arcsin(\cos x).$$

5.7. იპოვეთ $f(-2)$, $f(-3)$ და $f(1)$, თუ

$$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}, & \text{როცა} \quad |x|\leqslant 2, \\ 1-3x^2 & \text{როცა} \quad |x|>2. \end{cases}$$

5.8. იპოვეთ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, თუ;

1) $f(x)=ax+b$; 2) $f(x)=ax^2+bx+c$;

3) $f(x)=x^3$; 4) $f(x)=x^4$.

5.9. იპოვეთ $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, თუ

1) $f(x)=ax^2+b$; 2) $f(x)=ax^3$.

5.10. აჩვენეთ, რომ

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0,$$

თუ

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

5.11. აჩვენეთ, რომ

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y),$$

თუ

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \quad (a>0).$$

5.12. იპოვეთ წრფივი ფუნქცია $f(x)=ax+b$, თუ:

1) $f(0)=1$, $f(-1)=-1$; 2) $f(-2)=-8$, $f(3)=7$.

5.13. იპოვეთ კვადრატული ფუნქცია $f(x)=ax^2+bx+c$, თუ:

1) $f(-2)=-5$, $f(1)=-2$, $f(3)=30$;

2) $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=7$.

5.14. აჩვენეთ, რომ თუ $f(x)=ax+b$ ფუნქციის არგუმენტის $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ მნიშვნელობები ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი $y_n=f(x_n)$ მნიშვნელობები აგრეთვე ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას.

5.15. აჩვენეთ, რომ თუ მაჩვენებლიანი $f(x)=a^x$ ფუნქციის არგუმენტის $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ მნიშვნელობები ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ ფუნქციის შესაბამისი $y_n=f(x_n)$ მნიშვნელობები ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას.

5.16. იპოვეთ $f(x)$, თუ $f(x+2)=2x^2+9x+9$.

5.17. იპოვეთ $f(x)$, თუ $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $(|x|\geqslant 2)$.

5.18. იპოვეთ $f(x)$, თუ $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $(x>0)$.

5.19. იპოვეთ $f(x)$, თუ $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$.

5.20. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

1) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$; 2) $y=\lg(x^2-6x+5)$;

3)) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{3x+1}}$; 4) $y=\lg\dfrac{3x+2}{x+3}$;

5) $y=\sqrt{5-x}+\dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$; 6) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{5x-4-x^2}}$;

7) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{6x-8-x^2}}$; 8) $y=\sqrt{\dfrac{\lg x-1}{\lg x}}$;

9) $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x)$; 10) $y=\dfrac{1}{\sin x}$;

11) $y=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$; 12) $y=\sqrt{\sin x-\dfrac{1}{2}}$;

13) $y=\lg(\sqrt{2}-\sin x-\cos x)$. 14) $y=\lg\sin\dfrac{\pi}{x}$;

15) $y=\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}$; 16) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

17) $y=\sqrt{\cos x^2}$; 18) $y=\arcsin\dfrac{x}{4}$;

19) $y=\arcsin(x-2)$; 20) $y=\arccos(1-2x)$;

21) $y=\arcsin\dfrac{1-2x}{4}$; 22) $y=\arcsin\sqrt{2x}$;

23) $y = \arccos x - \arcsin(3-x)$; 24) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$;

25) $y = \arccos(2\sin x)$; 26) $y = \lg(\cos(\lg x))$;

27) $y = \operatorname{ctg}\pi x + \arccos 2^x$; 28) $y = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\arcsin(2-x)}$;

29) $y = \lg(1 - 2\operatorname{arctg} x)$; 30) $y = \sqrt{\arcsin x - \arccos x}$;

31) $y = \sqrt{\lg\sin x}$; 32) $y = \dfrac{\arcsin(0{,}5x-1)}{\sqrt{x^2-3x+1}}$;

33) $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$; 34) $y = \sqrt{\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$.

5.21. იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე:

1) $y = 3x - 2,\quad x \in [-1;\ 4]$; 2) $y = 3 - 5x,\quad x \in [0;\ 3]$;

3) $y = x^2 - 1,\quad x \in [-4;\ -2]$; 4) $y = x^2 - 4x - 7,\quad x \in [1;\ 4]$;

5) $y = 5 + 6x - x^2,\quad x \in [-1;\ 4]$; 6) $y = x^2 + 2x + 3,\quad x \in R$;

7) $y = 2x^2 - 8x - 5;\quad x \in R$; 8) $y = -x^2 + 6x + 7,\quad x \in R$;

9) $y = |x + 2|,\quad x \in [-1;\ 1]$; 10) $y = |x - 1|,\quad x \in [0;\ 2]$;

11) $y = |x^2 - x|,\quad x \in \left[0;\ \dfrac{3}{4}\right]$; 12) $y = |x^2 - 6x + 5|,\quad x \in [2;\ 3{,}5]$;

13) $y = |5 + 4x - x^2|,\quad x \in [0;\ 6]$; 14) $y = |6x - x^2|,\quad x \in [-2;\ 1]$;

15) $y = |x| - x^2,\quad x \in \left[-2;\ \dfrac{1}{4}\right]$; 16) $y = |x + 2| - x^2,\quad x \in [-3;\ 1]$;

17) $y = x + \operatorname{sign} x,\quad x \in R$;

18) $y = x^2 - 2x + 8 + 5\operatorname{sign} x,\quad x \in \left[-1;\ \dfrac{3}{2}\right]$;

19) $y = x^2\operatorname{sign} x - 6x + 5,\quad x \in [-1;\ 4]$;

20) $y = x^2 - 4x + \operatorname{sign}(x^2 - 4x),\quad x \in [-1;\ 3]$;

21) $y = x + \dfrac{1}{x},\quad x \in\ ]0;\ +\infty[$; 22) $y = \dfrac{x^2+4}{x},\quad x \in\ ]-\infty;\ 0[$;

23) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1},\quad x \in R$; 24) $y = \dfrac{x^2-1}{|x|},\quad x \in [-2;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 1]$.

5.22. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე:

1) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$; 4) $y = \sqrt{8 - 2x - x^2}$;

5) $y = \lg(x^2 + 10)$; 6) $y = \ln(x^2 - 4x)$;

7) $y = \log_2(4 - x^2)$; 8) $y = \ln(5 + 6x - x^2)$;

9) $y = \log_3(5 + 4x - x^2)$; 10) $y = \log_{x^2} x$;

11) $y = 10^{-x^2}$; 12) $y = 3^{x^2+4x+5}$;

13) $y = 2^{|3x^2+7x-12|}$; 14] $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|2x^2-3x-5|}$;

15) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; 16) $y = 3^{\frac{1}{x^3-1}}$;

17) $y = 2^{\frac{1}{x^2-2x-3}}$; 18) $y = 2^{\frac{4}{9(2+x-x^2)}}$;

19) $y = 3^{\frac{1}{|x^2-4x|}}$; 20) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{|x^2-5x+4|}}$;

21) $y = \frac{1}{1 - 2^{-x}}$; 22) $y = 4^x - 2^x + 1$;

23) $y = \sqrt{\frac{4x^2 + 1}{x}}$; 24) $y = ax + \frac{b}{x}$, $ab > 0$;

25) $y = ax + \frac{b}{x}$, $ab < 0$; 26) $y = \log_3 x + \log_x 3$;

27) $y = \sqrt{2\log_2 x - \log_2^2 x}$; 28) $y = \log_2(-\log_3^2 x + 6\log_3 x - 5)$;

29) $y = 1 - 2|\cos x|$; 30) $y = \sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

31) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 32) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$;

33) $y = \frac{\sin x + 1}{\sin x}$; 34) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$;

35) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 36) $y = 3\sin x + 4\cos x$;

37) $y = \cos^2 x - \sin x$; 38) $y = \lg(1 - 2\cos x)$;

39) $y = \log_2(\cos x + \sin^2 x)$; 40) $y = \arccos|x|$;

41) $y = \pi - |\operatorname{arctg} x|$; 42) $y = \cos(\arcsin x)$;

43) $y = \operatorname{arcctg}(\sin x)$; 44) $y = \cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin x\right)$;

45) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$; 46) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

5.23. იპოვეთ $\sup f$, $\inf f$, აგრეთვე $\max f$, $\min f$, თუ ისინი არსებობენ:

1) $f(x) = 3x + 1,\ x \in [-1; 2]$; 2) $f(x) = 2 - 5x,\ x \in]0, 3]$;

3) $f(x) = x^2 - 4x + 1,\ x \in [0; 5]$; 4) $f(x) = x^2 - 8x + 12,\ x \in]1, 5[$;

5) $f(x) = 12 + x - x^2,\ x \in]-3; -1[$;

6) $f(x) = |x^2 - 2x - 3|,\ x \in \left]0; \dfrac{7}{2}\right[$;

7) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x \in]0; 2[$; 8) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in]-1; 2[$;

9) $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{2 + x^2},\ x \in]-2; 1[$; 10) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 16},\ x \in R$;

11) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1},\ x \in R$; 12) $f(x) = 2^{x^2 - 4x + 1},\ x \in R$;

13) $f(x) = 3^{-|x-2|},\ x \in R$; 14) $f(x) = 2^{|x^2 - 2x - 7|},\ x \in R$;

15) $f(x) = 3^{2x - x^2},\ x \in R$; 16) $f(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x-1}}$;

17) $f(x) = 8 - 2^{x+1} - 4^x,\ x \in R$; 18) $f(x) = \lg(x^2 + x - 2)$;

19) $f(x) = \log_{0,2}(4x - 3 - x^2)$; 20) $f(x) = 4\cos^2 x - 12\cos x + 5$;

21) $f(x) = 4 - \sin^2 x - \cos x,\ x \in R$; 22) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \cos x}$;

23) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x$; 24) $f(x) = \cos x \cdot \mathrm{tg}\, x$;

25) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\cos x}$; 26) $f(x) = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$;

27) $f(x) = \mathrm{arctg}\,|x|$; 28) $f(x) = \arcsin\left(x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}\right)$.

5.24. დაადგინეთ შემდეგი ფუნქციებიდან რომელია ლუწი, რომელი კენტი და რომელია არც ლუწი და არც კენტი:

1) $y = |x| + 1$; 2) $y = \dfrac{x^5}{x^2+2}$;

3) $y = |x+1|$; 4) $y = |x+1| + |x-1|$;

5) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$; 6) $y = \dfrac{1}{1-x^3}$;

7) $y = x3^x$; 8) $y = 3^x + 3^{-x}$;

9) $y = x\,3^x - x\,3^{-x}$; 10) $y = x^3 5^x + x^3 5^{-x}$;

11) $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$; 12) $y = \sqrt{x-3} + \sqrt{x+3}$;

13) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{5^x - 5^{-x}}$; 14) $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

15) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$; 16) $y = \dfrac{\cos x}{x}$;

17) $y = \dfrac{|\sin x|}{1-\cos x}$; 18) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

19) $y = \sin(\mathrm{tg}\, x)$; 20) $y = |\ln x|$;

21) $y = \ln e^x$; 22) $y = 10^{\lg x}$;

23) $y = f(x) + f(-x)$; 24) $y = f(x) - f(-x)$.

5.25. წარმოადგინეთ f ფუნქცია ლუწი და კენტი ფუნქციების ჯამის სახით

1) $f(x) = (x-1)^2$; 2) $f(x) = |x-1|$;

3) $f(x) = \ln(1+e^x)$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}(x-3)$.

5.26. f ფუნქცია არც ლუწია და არც კენტი, φ ფუნქცია ლუწია, g ფუნქცია კენტი. შეიძლება თუ არა, რომ:

1) $f+\varphi$ იყოს ლუწი; 2) $f+\varphi$ იყოს კენტი;

3) $f+g$ იყოს ლუწი; 4) $f+g$ იყოს კენტი.

5.27. გამოიკვლიეთ მონოტონურობაზე ფუნქცია:

1) $y=2x^2-6x+7$; 2) $y=5-4x-x^2$;

3) $y=|x^2-6x+5|$; 4) $y=x^3+x$;

5) $y=\sqrt{4x-x^2}$; 6) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

7) $y=5^{|x+1|}$; 8) $y=2^{1-x}-2^{x-1}$;

9) $y=\lg(x^2-2x)$; 10) $y=\ln(4x-x^2)$;

11) $y=\lg(1+x^3)$; 12) $y=\log_x 10$;

13) $y=\frac{1}{\cos x}$, $x\in[-\pi;\ \pi]$, $x\neq\pm\frac{\pi}{2}$;

14) $y=\sin\frac{1}{x}$, $x\geqslant\frac{2}{3\pi}$; 15) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

17) $y=\arccos|x|$.

5.28. აჩვენეთ ფუნქციის შემოსაზღვრულობა:

1) $y=x^2+4x-2$, $x\in[-3;1]$; 2) $y=3-2x-x^2$, $x\in[-2;\ 3]$;

3) $y=\frac{2}{x-3}$, $x\in[-1;\ 2[$; 4) $y=\frac{x^2}{x^4+1}$, $x\in R$;

5) $y=\frac{\sqrt{x^3+4}}{x^2+2}$, $x\in R$; 6) $y=\frac{x^2-1}{|x^3+1|}$, $x\in R$, $x\neq-1$;

7) $y=\frac{|x^2-1|}{x^4-1}$, $x\in R$, $x\neq\pm1$; 8) $y=\frac{2x^2-5x+6}{\sqrt[3]{x^6+2}}$, $x\in R$;

9) $y=\frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$, $x\in[0;9[$; 10) $y=x-\sqrt{x^2-4}$, $x\in[2;\ +\infty[$;

11) $y=\sqrt[3]{x^3+8}-x$, $x\in R$; 12) $y=\sqrt{x^2+1}-|x|$, $x\in R$;

13) $y=\sqrt[4]{x^4+1}-|x|,\quad x\in R;$ 14) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|},\quad x\in R;$

15) $y=3^{-|x^2-1|},\quad x\in R;$ 16) $y=10^{\frac{1}{x^2+2x+5}},\quad x\in R;$

17) $y=2^{\frac{1}{x}},\quad x\in]-\infty;\ 0[;$ 18) $y=\frac{1}{\lg(x^4+2)},\quad x\in R;$

19) $y=\log_9(x^2+2x+3)-\log_3(|x|+1),\quad x\in R;$

20) $y=(\log_2 x+\log_x 2)^{-1},\quad x>0,\quad x\neq 1;$

21) $y=\frac{1}{x^2+\ln^2 x},\quad x\in]\,0;\ +\infty];$

22) $y=\log_x(1+x),\quad x\in[2;\ +\infty[;$

23) $y=\frac{\sin x}{1{,}1+\cos x},\quad x\in R;$ 24) $y=\frac{3\cos x}{2+\operatorname{tg}^2 x},\quad x\in R;$

25) $y=\operatorname{ctg} x\cdot\sin 2x,\quad x\in R,\quad x\neq\pi k,\quad k\in z;$

26) $y=\operatorname{tg} x\cdot\cos 3x,\quad x\in R;\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in z;$

27) $y=\frac{\cos 2x}{\operatorname{tg} x-1},\quad x\in R,\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in z;$

28) $y=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{\sin x},\quad |x|\leqslant\frac{\pi}{2},\quad x\neq 0.$

5.29. აჩვენეთ, რომ ფუნქცია არ არის შემოსაზღვრული:

1) $y=\frac{1}{x+1},\ x\in R;\ x\neq-1;$ 2) $y=x^3-3x^2,\quad x\in R;$

3) $y=\frac{x^3}{x^2-1},\ x\in]-\infty;\ -3[;$ 4) $y=\frac{2^x}{x},\ x\in]-\infty;\ 0[;$

5) $y=2^{\frac{1}{x}};\quad x\in R;\quad x\neq 0;$ 6) $y=\log_x(1+x),\ x\in]1;\ 2];$

7) $y=x\cos x,\quad x\in R;$ 8) $y=\frac{1}{\sin x};\ x\in R,\ x\neq\pi k,\ k\in z;$

9) $y=\frac{\sin x}{0{,}5+\cos x},\quad x\in R,\quad x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in z;$

10) $y=\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}},\quad x\in R,\quad x\neq 0.$

5.30. განსაზღვრეთ შემდეგი ფუნქციების უმცირესი დადებითი პერიოდი:

1) $y = \sin 3x$;
2) $y = \cos\frac{4\pi x}{5}$;
3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
4) $y = \sin^2 x$;
5) $y = \sin x + \cos 2x$;
6) $y = a\sin\lambda x + b\cos\lambda x$;
7) $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$;
8) $y = \sin x\cos x$;
9) $y = \sin x\cos 3x$;
10) $y = \sin^3 x$;
11) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{3}$;
12) $y = \sin 2x + \sin^2 3x$;
13) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
14) $y = 3\sin 4x + 2\operatorname{tg} 5x$;
15) $y = \sin 4x + 5\cos 6x$;
16) $y = \sin^4 x$;
17) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;
18) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;
19) $y = |\sin x|$;
20) $y = |\operatorname{tg} x|$;
21) $y = \operatorname{tg}(x + \sin x)$;
22) $y = \sin(\cos x)$;
23) $y = \cos(\sin x)$;
24) $y = \cos(\operatorname{tg} x)$.

5.31. აჩვენეთ, რომ ფუნქციები არაპერიოდულია:

1) $y = \sin x^2$;
2) $y = \sin|x|$;
3) $y = \cos\frac{1}{x}$;
4) $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$;
5) $y = \sin x + \sin\sqrt{2}\,x$;
6) $y = \cos x - \cos\sqrt{3}\,x$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. 1) ამ ფუნქციის მეზობელ ნულებს შორის მანძილი $\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi}$ მიისწრაფის ნულისაკენ, როცა $k \to +\infty$; 5) დავუშვათ ფუნქცია პერიოდულია და მისი პერიოდია T. მაშინ

$$f(x+T) - f(x) = 2\sin\frac{T}{2}\cos\left(x + \frac{T}{2}\right) +$$

$$+ 2\sin\frac{T\sqrt{2}}{2}\cos\left(x\sqrt{2} + \frac{T\sqrt{2}}{2}\right) \equiv 0.$$

აქედან x-ის სათანადო შერჩევით მივიღებთ, რომ $\sin\frac{T}{2} = 0$ და $\sin\frac{T}{\sqrt{2}} = 0$.

საიდანაც $2n\pi = \sqrt{2}\,k\pi$, $n, k \in N$. მივიღეთ წინააღმდეგობა.

5.32. დაამტკიცეთ, რომ თუ f და g პერიოდული ფუნქციების პერიოდების შეფარდება რაციონალური რიცხვია, მაშინ $f+g$ და $f\cdot g$ ფუნქციები აგრეთვე პერიოდულია.

5.33. მოიყვანეთ მაგალითი ორი ისეთი f და g არაპერიოდული ფუნქციებისა, რომ: 1) $f+g$ იყოს პერიოდული; 2) $f\cdot g$ იყოს პერიოდული.

5.34. მოიყვანეთ მაგალითი ისეთი f პერიოდული და g არაპერიოდული ფუნქციებისა, რომ: 1) $f+g$ იყოს პერიოდული; 2) $f\cdot g$ იყოს პერიოდული.

5.35. არსებობს თუ არა მაგალითი ისეთი ფუნქციისა, რომლისთვისაც ყოველი ირაციონალური რიცხვი წარმოადგენს პერიოდს, ხოლო არცერთი რაციონალური რიცხვი არ წარმოადგენს პერიოდს.

5.36. დაამტკიცეთ, რომ f პერიოდული ფუნქციაა, თუ არსებობს ისეთი $T\neq 0$ რიცხვი, რომ $\forall x\in D(f)$, $x+T\in D(f)$, $x-T\in D(f)$ და სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი პირობებიდან:

1) $f(x+T)=-f(x)$; 2) $f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$;

3) $f(x+T)=\dfrac{f(x)+a}{bf(x)-1}$, $a, b\in R$; 4) $f(x+T)=\dfrac{1}{1-f(x)}$.

იპოვეთ თითოეულ შემთხვევაში f ფუნქციის პერიოდი.

5.37. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა $f(x+T)=kf(x)$ $(x\in R)$, სადაც k და T დადებითი რიცხვებია, მაშინ $f(x)=a^x\varphi(x)$, სადაც a რაიმე მუდმივია, ხოლო $\varphi(x)$ არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით T.

5.38. აჩვენეთ, რომ f და g ფუნქციები ურთიერთშექცეულია.

1) $f(x)=2x-5$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$;

3) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$;

4) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$, $g(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

5.39. შეამოწმეთ, არის თუ არა ურთიერთშექცეული შემდეგი ფუნქციები:

1) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $\quad$ 2) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, $\quad y = (1-x)^3$;

3) $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (x-1)^2$; $\quad$ 4) $y = \sqrt{1-x^2}$, $\quad y = \sqrt{1-x^2}$.

5.40. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია ემთხვევა თავის შექცეულს:

1) $y = 7 - x$; $\quad$ 2) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

3) $y = \dfrac{2x+3}{x-2}$; $\quad$ 4) $y = \ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$;

5) $y = \log_a \dfrac{a^x+\alpha}{\beta a^x - 1}$ $(\alpha\beta \neq -1)$.

5.41. a და b-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = ax + b$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

5.42. α-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

5.43. a, b, c და d-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

5.44. a და b-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = \ln(a + be^x)$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

5.45. a და b-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = \operatorname{arctg}(a + b\operatorname{tg} x)$, $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

5.46. a, b, c-ს რა მნიშვნელობებისათვის ემთხვევა $y = \operatorname{arctg}(a + b\operatorname{tg}x) + c$, $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ ფუნქცია თავის შექცეულს.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. იმისათვის, რომ f ფუნქცია ემთხვეოდეს თავის შექცეულს აუცილებელია, რომ $D(f) = E(f)$. ამიტომ $c = \pi$.

5.47. იპოვეთ მოცემული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია და შექცეული ფუნქციის განსაზღვრის არე:

1) $f(x) = 3 - 5x$; $\quad$ 2) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in]-\infty; 0]$;

3) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $x \in]-\infty;\ 0]$, $x \neq -1$;

5) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, $x \in [1;\ +\infty[$;

6) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$, $x \in]\,0;\ 1]$;

7) $f(x) = x - \sqrt{x^2-1}$, $x \in]-\infty;\ 1]$;

8) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$, $x \in]-\infty;\ 1]$;

9) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \\ 2x, & \text{როცა} \quad x > 0; \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{თუ } x < 1, \\ x^2, & \text{თუ } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & \text{თუ } x > 4. \end{cases}$

11) $f(x) = 5^{2-x}$;

12) $f(x) = 2 - \lg(x-2)$;

13) $f(x) = \log_x 4$;

14) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x+1}$;

15) $f(x) = 2^{x-1} - 2^{-x}$;

16) $f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$;

17) $f(x) = \ln(5 - e^x)$;

18) $f(x) = -e^{\frac{1-x^2}{2}}$, $x \in [0;\ +\infty[$;

19) $f(x) = 2^{x^2-2x}$, $]-\infty;\ 1]$;

20) $f(x) = 1 - e^{\frac{1-x}{1+x}}$, $x \neq -1$;

21) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

22) $f(x) = \sin x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$;

23) $f(x) = \cos x$, $x \in [-\pi;\ 0]$;

24) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right[$;

25) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in]-\pi;\ 0[$;

26) $f(x) = 2\sin 3x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{2}\right]$;

27) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$, $x \in [2\pi;\ 4\pi]$;

28) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \neq 0$;

29) $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 30) $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$;

31) $f(x)=\cos^2 x,\ x\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; 32) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2},\ \ x\in[2\pi;\ 3\pi]$;

33) $f(x)=\frac{1}{\cos x},\ x\in[-\pi;\ 0],\ x\neq-\frac{\pi}{2}$;

34) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1;\ 0]$;

35) $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x^2},\ x\in[0;\ \pi]$;

36) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\quad x\neq 0$;

37) $f(x)=2\arcsin\frac{x}{2},\quad x\in[-2;\ 2]$;

38) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2},\quad x\in[0;1]$;

39) $f(x)=\arccos\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1;\ 0]$;

40) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x},\quad x\neq 1.$

5.48. გამოსახეთ y როგორც x-ის ფუნქცია:

1) $y=u^2,\ u=\sin x$; 2) $y=\sqrt{u^2+1},\quad u=\operatorname{tg}x$;

3) $y=\operatorname{arctg}u,\ u=\sqrt{v},\quad v=\lg x$;

4) $y=\sqrt{1+u^2},\quad u=\lg v,\quad v=\sin x$;

5) $y=\begin{cases}2u, & \text{თუ}\quad u\leqslant 0,\\ 0, & \text{თუ}\quad u>0,\end{cases}\quad u=x^2-1$;

6) $y=\begin{cases}0, & \text{თუ}\quad u\leqslant 0,\\ u, & \text{თუ}\quad u>0,\end{cases}\quad u=\begin{cases}0, & \text{თუ}\quad x\leqslant 0,\\ -x^2, & \text{თუ}\quad x>0.\end{cases}$

5.49. მოცემული ელემენტარული ფუნქცია ჩაწერეთ ძირითად ელემენტარულ ფუნქციათა კომპოზიციის სახით:

1) $y=(3x+1)^5$; 2) $y=5^{\sin x}$;

3) $y=\lg\operatorname{tg}10x$; 4) $y=|x|$;

5) $y=\operatorname{tg}\sin\sqrt{x}$; 6) $y=\arccos 2^{-x^3}$.

5.50. მოცემულია $f(x) = x^2$ და $\varphi(x) = 2^x$. იპოვეთ:

1) $f(f(x))$; 2) $\varphi(\varphi(x))$; 3) $f(\varphi(x))$; 4) $\varphi(f(x))$;

5) $f(f(f(x)))$; 6) $f(f(\varphi(x)))$; 7) $f(\varphi(f(x)))$; 8) $\varphi(f(f(x)))$.

5.51. y ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით. იპოვეთ მისი განსაზღვრის არე და ჩაწერეთ y ფუნქცია ცხადი სახით:

1) $x^2 - \arccos y - \pi = 0$; 2) $2^x + 2^y - 2 = 0$;

3) $x + |y| - 2y = 0$; 4) $\lg x + \lg(y+1) - 2 = 0$.

5.52. მოცემული A და B წერტილებიდან რომლები ეკუთვნიან წირს:

1) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t, \end{cases}$ $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 3)$;

2) $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1, \end{cases}$ $A(0;\ -1)$, $B(1,\ 6;\ -0{,}2)$;

3) $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \end{cases}$ $A\left(\frac{3}{2};\ \sqrt{3}\right)$, $B(1;\ 2)$;

4) $\begin{cases} x = 2^t \sin t, \\ y = 2^t \cos t, \end{cases}$ $A(2;\ 2)$, $B(0,\ 2^{\pi})$.

5.53. გამორიცხეთ t პარამეტრი შემდეგი განტოლებებიდან:

1) $\begin{cases} x = t - 1, \\ y = t^2 - 2t + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2 - 3\cos t, \\ y = 1 + 3\sin t; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = |\ln t|, \\ y = 1 + t^3. \end{cases}$

ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი (№№ 5.54—5.67):

5.54.

1) $y = 2x - 5$; 2) $y = 3 - 4x$;

3) $y = |x| + 1$; 4) $y = |2 - x|$;

5) $y = |x - 1| - 5$; 6) $y = 2 - 3|2 - x|$.

5.55.

1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = 3 - x^2$;

3) $y = (x - 3)^2$; 4) $y = x^2 - 4x + 5$;

5) $y = 3 + 2x - x^2$; 6) $y = |x^2 - 1|$;

7) $y = |x^2 - 4x + 3|$; 8) $y = x^2 + |x|$.

5.56.

1) $y = \frac{1}{2} x^3$; 2) $y = -x^3$;

3) $y = 1 + (x - 1)^3$; 4) $y = x^2 |x|$;

5) $y = x^4$; 6) $y = 2 - x^4$.

5.57.

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{|x|}$;

3) $y = 2\sqrt{x} + 1$; 4) $y = 3 - \sqrt{|x|}$;

5) $y = \sqrt{-x}$; 6) $y = 2 - \sqrt{-x}$;

7) $y = \sqrt[3]{x}$; 8) $y = x\sqrt{x}$.

5.58.

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{1-x}$;

3) $y = \frac{-1}{x+1}$; 4) $y = \frac{-2}{x+2} - 2$.

5.59.

1) $y = \frac{x-2}{x+2}$; 2) $y = \frac{5-2x}{x-4}$;

3) $y = \frac{2x-3}{3x+2}$; 4) $y = \frac{5-4x}{2x+1}$.

5.60.

1) $y = \frac{2}{|x|}$; 2) $y = \frac{3}{|x+2|}$;

3) $y = \frac{1}{|x|} - 2$; 4) $y = \frac{3}{|x-2|} - 2$.

5.61.

1) $y = \frac{1}{x^2}$; 2) $y = \frac{1}{x^3}$;

3) $y = \frac{1}{1+x^2}$; 4) $y = x + \frac{1}{x}$.

5.62.

1) $y = 2^{-x}$; 2) $y = 2^{|x|}$;

3) $y = 1 - 3^x$; 4) $y = 3^{1-x}$.

5.63.

1) $y = -\log_2 x$; 2) $y = 1 + \lg(x+2)$;

3) $y = \lg|x|$; 4) $y = \log_x 10$.

5,64.

1) $y = \sin 2x$;

2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$;

3) $y = -\sin\dfrac{x}{3}$;

4) $y = \sin|x|$;

5) $y = |\sin x|$;

6) $y = |\operatorname{tg} x|$;

7) $y = \left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$;

8) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

5.65.

1) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

2) $y = 1 + \operatorname{arctg} 2x$;

3) $y = \dfrac{\pi}{2} - \arccos 2x$;

4) $y = \arcsin\dfrac{1-x}{2}$;

5) $y = \operatorname{arcctg}|x|$;

6) $y = \cos(\arccos x)$;

7) $y = \arccos(\cos x)$;

8) $y = x - \arcsin(\sin x)$.

5.66.

1) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{თუ } x \leqslant 0, \\ x^2+1, & \text{თუ } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^3+1, & \text{თუ } x \leqslant 0, \\ 2^{-x}, & \text{თუ } x > 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} \dfrac{4}{x+2}, & \text{თუ } x < -2, \\ 2x+2, & \text{თუ } -2 \leqslant x \leqslant 1, \\ \ln(x-1), & \text{თუ } x > 1; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 3^{-x}-1, & \text{თუ } x < 1, \\ \ln x, & \text{თუ } 1 \leqslant x < 2, \\ (x-1)\ln 2, & \text{თუ } x \geqslant 2. \end{cases}$

5.67.

1) $y = |1-x| - |1+x|$;

2) $y = |1-x| + |1+x|$;

3) $y = x \operatorname{sign}(\sin x)$;

4) $y = x \operatorname{sign}(\cos x)$;

5) $y = \sin x + |\sin x|$;

6) $y = \cos x - |\cos x|$;

7) $y = \sin x + \sin|x|$;

8) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|$;

9) $f(x) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} \{\sin t\}$;

10) $f(x) = \inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} \{\sin t\}$;

11) $f(x)=\inf\limits_{t\leqslant x}(2t^2-3t-5)$;   12) $f(x)=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant x}(2t^2-3t-5)$;

13) $f(x)=\sup\limits_{t\leqslant x}(5+4t-t^2)$;   14) $f(x)=\inf\limits_{0\leqslant t\leqslant x}(5+4t-t^2)$;

15) $f(x)=\inf\limits_{t\leqslant x}|t^2-6t+5|$;   16) $f(x)=\inf\limits_{2\leqslant t\leqslant x}|t^2-6t+5|$;

17) $f(x)=\sup\limits_{0,5\leqslant t\leqslant x}|t^2-6t+5|$;   18) $f(x)=\inf\limits_{x\leqslant t\leqslant 4}|t^2-6t+5|$;

19) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n}),\quad -1\leqslant x\leqslant 1$;

20) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n},\quad x\geqslant 0$;

21) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

22) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n+1}},\quad x\neq -1$;

23) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;   24) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\quad x\geqslant 0$;

25) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$;

26) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$;   27) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$;

28) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n},\quad x\geqslant 0$;

29) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$;

30) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$.

5.68. პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში ააგეთ შემდეგი განტოლებით მოცემული წირი:

1) $r=2$ (წრეწირი);

2) $r=\dfrac{\varphi}{2}$ (არქიმედეს სპირალი);

3) $r=e^{\varphi}$ (ლოგარითმული სპირალი);

4) $r=\dfrac{\pi}{\varphi}$ (ჰიპერბოლური სპირალი);

5) $r = 2\cos\varphi$ (წრეწირი);

6) $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (წრფე);

7) $r = \dfrac{1}{1+\cos\varphi}$ (პარაბოლა);

8) $r = 4\sin 3\varphi$ (სამფურცელა);

9) $r = a(1+\cos\varphi)\ a>0$ (კარდიოდი);

10) $r^2 = a^2\cos 2\varphi\ (a>0)$ (ლემნისკატა).

5.69. ააგეთ შემდეგი განტოლებებით მოცემული წირი:

1) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ (ნახევრადკუბური პარაბოლა);

2) $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ (ელიფსი);

3) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ (ასტროიდა);

4) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \dfrac{at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{at^2}{1+t^3} \end{cases}$ (დეკარტეს ფოთოლი);

6) $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$ (ნახევარწრეწირი);

7) $\begin{cases} x = 2^t + 2^{-t} \\ y = 2^t - 2^{-t} \end{cases}$ (ჰიპერბოლის შტო);

8) $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ (წრფის მონაკვეთი);

9) $\begin{cases} x = t - t^2, \\ y = t^2 - t^3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + 2\sin t; \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = 2^{t-1}, \\ y = \dfrac{1}{4}(t^3 + 1). \end{cases}$

5.70. ააგეთ შემდეგი განტოლებით მოცემული წირი

1) $x^2+y^2=4$ (წრეწირი);
2) $xy=6$ (ჰიპერბოლა);
3) $y^2=4x$ (პარაბოლა);
4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$ (ელიფსი);
5) $|x|+|y|=1$;
6) $|x|-|y|=2$;
7) $x^4-y^4=0$;
8) $x^2+y^2-4y=0$;
9) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (ასტროიდა);
10) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (ლოგარითმული სპირალი);
11) $x^3+y^3-3xy=0$ (დეკარტეს ფოთოლი);
12) $x^2=\cos y$.

5.71. ააგეთ ფუნქცია რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:
1) ის თავისი შექცეულის ტოლია;
2) მისი გრაფიკი მკვრივია მთელს სიბრტყეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. განვიხილოთ ფუნქცია.

$$\varphi(x)=\begin{cases} b+a\sqrt{2}, & \text{თუ } x=a+b\sqrt{2}, \text{ სადაც } a \text{ და } b \text{ რაციონალური რიცხვებია,} \\ x, & \text{თუ } x\neq a+b\sqrt{2} \text{ არც ერთი რაციონალური } a \text{ და } b\text{-სათვის.} \end{cases}$$

ეს ფუნქცია ცალსახადაა განსაზღვრული მთელს რიცხვით ღერძზე. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი x-თვის

$$y=\varphi(x)\Rightarrow x=\varphi(y).$$

მართლაც, თუ $x=a+b\sqrt{2}$, სადაც a და b რაციონალური რიცხვებია, მაშინ

$$y=\varphi(x)=\varphi(a+b\sqrt{2})=b+a\sqrt{2}$$

და მაშასადამე

$$\varphi(y)=\varphi(b+a\sqrt{2})=a+b\sqrt{2}=x.$$

თუ კი $x\neq a+b\sqrt{2}$ არც ერთი რაციონალური a და b-სათვის, მაშინ $y=x$ და ცხადია, რომ $x=y$. ამით 1) თვისება ნაჩვენებია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკი მკვრივია მთელს სიბრტყეზე, ე. ი. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი წრე, რომლის ცენტრია სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი, შეიცავს $y=\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს.

მართლაც, ვთქვათ (x_0, y_0) რაღაც წერტილია. ავიღოთ რაციონალურ რიცხვთა სამი $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ მიმდევრობა ისე, რომ გვქონდეს

$$\lim_{n\to\infty} u_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} v_n = y_0, \quad \lim_{n\to\infty} w_n = \sqrt{2}.$$

ეს ყოველთვის შესაძლებელია (იხ. თავი II, § 2-ის მაგალითი 4).

განვიხილოთ $\{x_n\}$ და $\{y_n\}$ მიმდევრობები:

$$x_n = (v_n w_n - u_n) + (u_n w_n - v_n)\sqrt{2};$$

$$y_n = (u_n w_n - v_n) + (v_n w_n - u_n)\sqrt{2}.$$

რადგან u_n, v_n, w_n რაციონალური რიცხვებია, ამიტომ

$$\varphi(x_n) = \varphi[(v_n w_n - u_n) + (u_n w_n - v_n)\sqrt{2}] =$$

$$= (u_n w_n - v_n) + (v_n w_n - u_n)\sqrt{2} = y_n,$$

ე. ი. $y_n = \varphi(x_n)$. ეს კი ნიშნავს, რომ $(x_n; y_n)$ წერტილი ნებისმიერი n-თვის $y = \varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე ძევს. მაგრამ ადვილია ჩვენება, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი წრე ცენტრით (x_0, y_0) წერტილში შეიცავს (x_n, y_n) წერტილთა, ე. ი. $\varphi(x)$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილთა, უსასრულო სიმრავლეს.

ზემოთ მოყვანილი $y = \varphi(x)$ ფუნქცია 1914 წელს ააგო ვ. სერპინსკიმ*.

§ 6. ფუნქციის ზღვარი

ფუნქციის ზღვრის განსაზღვრების საფუძველზე (კოშისა და ჰეინეს მიხედვით) აჩვენეთ, რომ (№№ 6.1—6.7):

6.1.

1) $\lim_{x\to 1} (2x + 3) = 5;$ 2) $\lim_{x\to -2} (3x - 1) = -7;$

3) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 2x + 4) = 4;$ 4) $\lim_{x\to -1} (4 - 3x - x^2) = 6.$

---

* ვ. სერპინსკი (1882—1969) — პოლონელი მათემატიკოსი.

6.2.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{7x-3}{2x+2} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x+2}{x+1} = 4$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{9x-2}{2x+3} = \dfrac{3}{11}$; 4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4x+3}{2x+5} = \dfrac{1}{4}$.

6.3.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = 4$; 2) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x-5} = 3$;

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-4x} = 2$; 4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3} = -1$.

6.4.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+1}{(x-3)^2} = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \infty$; 4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-4}{x^2-3x+2} = \infty$.

6.5.

1) $\lim\limits_{x\to 5+} \dfrac{2}{x-5} = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{3}{x-2} = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{x-5}{x^2-4x+3} = +\infty$; 4) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x+2}{x^2-7x+6} = -\infty$.

6.6.

1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x+2}{6x-1} = \dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3}{2x+1} = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{4x+1} = \dfrac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x-2}{-x+3} = -7$.

6.7.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2+1}{5x^2+1} = \dfrac{4}{5}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3}{x^3-1} = 3$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5}{3x^5-2} = \dfrac{1}{3}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^6-2}{x^6+1} = 3$.

გამოთვალეთ ფუნქციის ზღვარი* (№№ 6.8—6.126):

6.8.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)$;
2) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4x+5)$;
3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-4x}{x^2+1}$;
4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{37-4x+2x^3}{x^2-4}$.

6.9.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-3)$;
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(3x-10)$;
3) $\lim\limits_{x\to \infty}(x^2-x+12)$;
4) $\lim\limits_{x\to \infty}(4-2x-x^2)$.

6.10.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3}{2x+1}$;
2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+1}{x^2-4x+2}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$;
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4+3x-2x^2}{x-2}$.

6.11.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}7^{3x+2}$;
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}3^{2x-3}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}4^{1-5x}$;
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}3^{4-7x}$.

6.12.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3+7x}$;
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-2x}$;
3) $\lim\limits_{x\to +\infty}(0,2)^{4-3x}$;
4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(0,3)^{5x-2}$;
5) $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_2(3x+1)$;
6) $\lim\limits_{x\to 2+}\lg(3x-6)$;
7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\log_{\frac{1}{2}}(1-3x)$;
8) $\lim\limits_{x\to 1-}\log_{0,1}(1-x)$.

6.13.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+2}{5x-1}\right)^{x+1}$;
2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+2}{5x-1}\right)^{x+1}$;
3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{7x-3}{3x+4}\right)^{1+2x}$;
4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{5x+3}{4x-1}\right)^{1-3x}$.

---

* ზოგიერთი ზღვრის გამოთვლისას საჭიროა ისარგებლოთ ელემენტარულ ფუნქციათა უწყვეტობით.

6.14.

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-7x+10}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{1-x-6x^2}{x+\frac{1}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{x-\frac{1}{2}}{2-3x-2x^3}$.

6.15.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+12}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+2x-5}{2x^2-x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-9x+4}{20-x-x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x-2x^2}{x^2-1}$.

6.16.

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

6.17.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

6.18.

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-2x^2+1}{(x^3-2x-1)^2}$.

6.19.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+5x^6+4x^3}{x^7+2x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^3+x^2-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x+1}{x^8-2x+1}$.

6.20.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{2x-x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-4x+6}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3x^2-9x+6}\right)$.

6.21.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{49}-7x+6}{x^{41}+6x^2-7}$.

6.22.

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$; 2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^k-1}$ $(n,\ k\in\mathbf{N})$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-x^{k+1}+x^k-nx+n-1}{(x-1)^2}$ $(n,\ k\in\mathbf{N})$.

6.23.

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)}$ $(n,\ k\in\mathbf{N},\ k\leqslant n)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{k}{1-x^k}\right)$ $(n,\ k\in\mathbf{N})$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ $(n\in\mathbf{N})$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ $(n\in\mathbf{N})$.

6.24.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x}{2x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-x+10}{2x^2-5x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x-5x^2}{3x^2-4x+9}$.

6.25.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-7x^2+2}{x^3-4x-5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-3x-x^3+1}{3x^3+x+7}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-4x^5}{2x^5+x^2-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x-x^3+4x^4}{2x^2+4x-3-x^4}$.

6.26.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x-1)^2}{8x^3-x^2+4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x-1)(1-2x)(4x+1)^2}{(16x^2+3)(4x-x^2)}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(5x-1)(2x+3)^2(1-4x)^2}{(4x-5)^3(3-2x)^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2+3)^3(1-3x^3)^2}{(x^4+x)^2(x^2+3x)^2}$.

6.27.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-4x^2}{x^3+4x^2-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3-2x^2+3}{x^2+4x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-5x^3}{2x^2-4x+5}$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^5-3x^3+1}{3x^2-2x^4}$.

6.28.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{5x+4}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt[3]{x^3+x}}{\sqrt[4]{x^3+x^2}-2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt[3]{x^2-5}}{\sqrt[6]{x^6+x^4}-\sqrt[6]{x^4+2}}$.

6.29.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^7+2}}{\sqrt[3]{x^7+x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt[3]{27x^3+1}}{\sqrt[4]{x^8+3x^3-2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x-\sqrt{x})\sqrt[3]{x^6+4x^2-1}}{x\sqrt[5]{x^{10}+3x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1-x^3}\cdot\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{x^8-x^3}}$.

6.30.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{3x+\sqrt{3x+\sqrt{3x}}}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+1}}}}{\sqrt[4]{2x^4-x^3+1}}$.

6.31.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5^x-3\cdot 4^x}{5^x+7\cdot 3^x}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\cdot 7^{x+2}-4\cdot 5^{x+3}}{2\cdot 7^{x+1}+4^{x-3}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^{2x+1}-2\cdot 3^{2x-1}}{3^{x+1}-4^{2x+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^{4x}-4^{3x}}{4^{3x}+3^{2x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5^x-3^x}{5^x-2^x}$;

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3\cdot 7^{2x}+5\cdot 4^{2x}}{16^x-5^{2x}}$.

6.32.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

6.33.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{2-\sqrt{x+1}}$.

6.34.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{5}{4}x+\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2-x+4}}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

6.35.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x^2+x+1}-2-x}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{7+2x-x^2}-\sqrt{1+x+x^2}}{2x-x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+10x+1}-\sqrt{x^2+5x+1}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{18+x^2}-3\sqrt{2x+3}}{x+3}$;

5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $(x>0)$;

6) $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(x\geqslant 0)$.

6.36.

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{x^2+7x+1}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-2}{3-\sqrt{x^2-2x+10}}$.

6.37.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt[3]{x-5}+2}{x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3-\sqrt[3]{x^2+2}}{x^2-6x+5}$.

6.38.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+\sqrt{x^3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^2+x^3}}$.

6.39.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1-\sqrt[3]{1+x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$.

6.40.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{9+x}+x+7}{\sqrt[3]{15+2x}+1}$.

6.41.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

6.42.

1. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[k]{1+bx}}{x}$, $n,\ k\in\mathbf{N}$,

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[k]{1+bx}-1}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$, $m,\ n\in N$;

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-\sqrt{x})\,(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$; $n\in N$;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$, $n\in N$.

6.43.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$.

6.44.

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+4})$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+4})$.

6.45.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+4})$.

6.46.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^4+6}-\sqrt{2x^4-1}\right)\cdot x^2$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3+1}\right)\sqrt{x^3+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2\right)$.

6.47.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(x+\sqrt[3]{8-x^3}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(3x-\sqrt[3]{27x^3+x}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$.

6.48.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}-\sqrt{x^2}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$.

6.49.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}-x\right)\quad(n\in N)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$; $(n\in N)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\cdots(n+x^2)}-x^2)$, $(n\in N)$.

6.50.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $n\neq 0$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

6.51.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 7x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} 3x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{5}$.

6.52.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{\arcsin 3x}$.

6.53.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{x\operatorname{tg} 5x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^3 3x}{x^2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin^2 2x}{\operatorname{arctg}^3 x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

6.54.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^m x}{\sin x^n}$, $(m, n\in N)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^m x}{x^n}$ $(m, n\in N)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}^m x}{\sin x^n}$ $(m, n\in N)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}^m x}{\arcsin^n x}$ $(m, n\in N)$.

6.55.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 15x-x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 7x-2x}{x}$;

6.56.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin x + \sin 2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin x}{\operatorname{tg} 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \sin x}{\sin 3x - \sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x - \sin x}{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} x}$.

6.57.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x - \arcsin x}{x + \operatorname{arctg} x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x - \arcsin x}{\arcsin 3x + \arcsin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{arctg} 2x}{3x - \operatorname{arctg} 4x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 5x + \arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 3x - \arcsin 5x}$.

6.58.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos 5x - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 7x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin 6x}{\cos 5x - \cos x}$.

6.59.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\cos x - \cos 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{arctg} 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

6.60.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 - \cos x)^2}{\sin^3 x - \operatorname{tg}^3 x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$.

6.61.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin x} - 1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{3 + \sin x} - \sqrt{3 - \sin x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}$.

6.62.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2 + x))}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x + 10))}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\cos\left(x+\dfrac{5\pi}{2}\right)}{\arcsin 2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos\dfrac{\pi(x+1)}{2}}$.

6.63.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

6.64.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\operatorname{arctg} 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

6.65.

1) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{2h}$;

2) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{2h}$;

3) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)+\sin(x-h)-2\sin x}{h^2}$;

4) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)+\cos(x-h)-2\cos x}{h^2}$.

5) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg}(x-h)}{2h}$;

6) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+h)+\operatorname{tg}(x-h)-2\operatorname{tg} x}{h^2}$.

6.66.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg} x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\arcsin x}-\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} 2x}}{\sqrt{1+\arcsin 3x}-\sqrt{1-\operatorname{arctg} 4x}}$.

6.67.

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 26x}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi^2-x^2}{\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.

6.68.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

6.69.

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$; 4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

6.70.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$; 4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

6.71.

1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{(x-\pi)^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}{\sin 3\pi x}$;   4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

6.72.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$;   2) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \sin\dfrac{x-a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$;   4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{\sqrt{2-2\cos x}}$.

6.73.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2-2\operatorname{tg} x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}$;   2) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{(2x+\pi)^2}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{2(\sin x-\sin\alpha)}{(x-\alpha)\cos\alpha}$;   4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

6.74.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 x-5\sin x+4}{1-\sin x}$;   2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3\sin x-\sin^2 x-2}{1-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$;   4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

6.75.

1) $\lim\limits_{\alpha\to \beta} \dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$;   2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{\cos^3 x}{1+\sin^3 x}$;   4) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin x+\sqrt{\sin^2 x+\cos x}}$.

6.76.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{4}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x+1}$;   4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{1-x}$.

6.77.

1] $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{2}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+3x}{2-3x}\right)^{\frac{2}{x}}$.

6.78.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{x+3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x}{x^2+1}\right)^{x+2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x-1}{2x^2-2x+1}\right)^{2x-1}$.

6.79.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+2}{3x^3-2}\right)^{x^2-x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2x-1}{x^3-2x+2}\right)^{x^2+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^5+1}{x^5-2}\right)^{x^5}$.

6.80.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3}{4x^2+3}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2+4x-1}{3x^2-x-1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3+3x-3}{x^3+x-3}\right)^{-\frac{2}{x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^6+2}{3x^2+2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$.

6.81.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos 2x}{\cos 4x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

6.82.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(6-\dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos \alpha x}{1+\sin x\cos \beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 2x}$.

6.83.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg} x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$.

6.84.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0-}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

6.85.

1) $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{\frac{1}{x+1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{\frac{2}{x^2-9}}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+3x+3)^{-\frac{1}{x+2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+5)^{\frac{1}{x^3-4x^2+4x}}$.

6.86.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}-x\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+3-\sqrt{x+4}\right)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

6.87.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)^{x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)^{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^4+6x^2}-3x^2\right)^{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)^{2x}$.

6.88.

1) $\lim\limits_{x\to2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to4\pi}(\cos x)^{\frac{3}{\operatorname{tg}3x\cdot\sin 2x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{4}{4x^2-\pi^2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)}}$.

6.89.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{18}{\cos x}}$;

3 $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

6.90.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{e^{5x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-4x}}{2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{e^{-7x}-1}$.

6.91.

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x^2}-1}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{e^{3x^3}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{e^{-4x^4}-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x^6}}{x^6}$.

6.92.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{-3x}}{2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{-x^3}-1}{3x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-7^{2x^3}}{x^3}$.

6.93.

1)) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\ln(1+4x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4x^2)}{2x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x^3)}{x^3+2x^2}$.

6.94.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1+2x)}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\log_2(1-4x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\log_5(1+3x^2)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3}{\log_3(1-2x^3)}$.

6.95.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x^2-2x}-1}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-6x}{4^{x-3}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5^{x^2-x-2}-1}{x^2+x}$.

6.96.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\ln(x+3)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-3x+1)}{x^2-4x+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\log_3(5-x)}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\log_2(x^2-24)}{x^2-5x}$.

6.97.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-1}{\sin 4x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{e^{\operatorname{tg} 4x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 2x}{1-5^{\operatorname{tg}^2 x}}$.

6.98.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\operatorname{tg} 3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}^2 2x)}{\operatorname{arctg}^2 \dfrac{x}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\operatorname{tg}^3 \dfrac{x}{3}}{\ln\left(1+\arcsin^3 \dfrac{x}{2}\right)}$.

6.99.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_5(1-\operatorname{tg} 3x)}{\arcsin \dfrac{x}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{\log_2\left(1+\sin \dfrac{x}{3}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3\left(1+\operatorname{tg}^3 \dfrac{x}{2}\right)}{\arcsin^3 \dfrac{x}{4}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_4(1-\sin^4 2x)}{\operatorname{tg}^4 \dfrac{x}{2}}$.

6.100.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x-1}-1}{4x-\pi}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1-e^{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos x}}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{5^{\cos x-\sin x}-1}{\operatorname{tg} x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}-1}{3x-\pi}$.

6.101.

1) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1+\cos^2 x)}{1-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{\pi-2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\log_3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\lg\left(\dfrac{3}{2}-\cos x\right)}{\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$.

6.102.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{2x}-3^{-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4^{x}-5^{2x}}{\operatorname{tg} 3x-\sin x}$.

6.103.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-e^{-3x^2}}{x^2+\sin^2 x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\operatorname{tg} x}}{\arcsin x^2+2\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^{\operatorname{tg} 2x}-2^{-\sin 3x}}{5^{\sin 4x}-4^{\operatorname{tg} 3x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\arcsin 3x}-e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}{3^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-5^{\arcsin 6x}}$.

6.104.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+\sin 3x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\operatorname{tg}^2 2x)}{5^{\sin^2 3x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_3\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)}{1-e^{\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-3^{\arcsin^3\frac{x}{3}}}{\ln\left(1+4\sin^3\frac{x}{6}\right)}$.

6.105.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{e^{\sin^2 x}-\cos 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_4\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x}-\cos 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2\cos^6 x}{\cos 2x-\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2\frac{x}{2}}}$.

6.106.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}+e^{-\operatorname{tg} x}-2}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 2x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{bx}}{\sin \alpha x-\sin \beta x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(e^{\sin x}-e^{-\operatorname{tg} x})}{5^{1+\sin^3 x}-5}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}$.

6.107.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{tg} 2x}-1}{e^{\sin^2 x}-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{3+\cos 2x}}{\ln\left(1+\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-5^{\operatorname{tg}^2 3x}}{\sqrt{1+x\sin 2x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{7+\cos 4x}-2}{\log_3\left(1-x\arcsin\frac{x}{3}\right)}$.

6.108.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)\sin 3x}{e^{\sin^2 x} - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos \frac{x}{2}}{3^{\sin x} - 3^{\sin 4x}}$.

6.109.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln (x^3 - 6x - 8)}{2^{\sin \pi x} - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{\ln \cos x}{3^{\sin 2x} - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}} \dfrac{e^{\sin^2 6x} - e^{\sin^2 3x}}{\log_2 \cos 6x}$.

6.110.

1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}{\ln (4x-1)}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}+1\right)}{2^{\sqrt{x^2+x+2}} - 4}$;

3) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{3^{\sqrt{\sin x+1}} - 3}{\sin \frac{x^2}{\pi}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt[3]{1 + \ln^2 x}}{1 + \cos \pi x}$.

6.111.

1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(3^{\sin x} - 1)^2}{\log_2(2 + \cos x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sin \left(e^{\sqrt[3]{8-x^2}} - e^{\sqrt[3]{x+2}}\right)}{\arcsin (x+3)}$; 4) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin (x+1)}{2^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}} - 2}$.

6.112.

1) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - e^{\operatorname{tg} x})^{\operatorname{ctg} \pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - e^{x^2})^{\frac{1}{\ln(1+\sin^2 \pi x)}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - 3^{\sin^2 x})^{\frac{1}{\ln \cos x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} (2 - 5^{\operatorname{arctg}^3 x})^{\frac{1}{x \sin^2 x}}$.

6.113.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln\left(1+\sin^2\frac{x}{2}\right)}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(5-\dfrac{4}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\log_2(1+\operatorname{tg}^2 x)}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\left(1+\sqrt[3]{\sin x}\right)\right)^{\frac{x}{\sin^4\sqrt[3]{x}}}$.

6.114.

1) $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{x}{\sin(x-1)}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{\frac{5x+2}{x-2}}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(1+e-x)}{\ln(2-x)}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

6.115.

1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h}$; 2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}$, $a>0$, $a\neq 1$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$;

4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$, $a>0$, $a\neq 1$.

6.116.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{\pi}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$.

6.117.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{2x+3}-\cos\sqrt{2x-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\right);$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt[3]{x+1}-\cos\sqrt[3]{x}\right).$

6.118.

1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}.$

მითითება. რადგან $\lim\limits_{h\to 0}(\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x)=0$, ამიტომ

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg}x)}{h};$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right);$

მითითება. რადგან $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)=0$, ამიტომ

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right);$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi-3\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{x+1}}{\sin\ln(1+x)};$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right);$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right);$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}.$

მითითება: გამოვიყენოთ ფორმულა $\arcsin x=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

6.119.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4};$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right);$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}+2^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\ln^2(1-2\sin^2 x)}-1}{\operatorname{tg}^2 x^2}$.

6.120.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$;

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$ $(a>0)$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\quad b>0)$.

6.121.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin x+e^x)}{\ln(\sin^2 x+e^{2x})}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(e^{x^2}+2\sqrt{x})}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$.

6.122.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^\alpha x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(\cos x)^{\sqrt{2}}}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}$ $(\alpha\neq 0)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ ტოლობით $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ და $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

6.123.

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$;

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}.$$

ვინაიდან

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln x}\left(e^{(x-a)\ln x}-1\right)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x=a^a\ln a$$

და

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right)}{\frac{x-a}{a}}\cdot\frac{1}{a}=a^a;$$

ამიტომ

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln ae.$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}\quad(a>0).$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=a^{\alpha-\beta}\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^\alpha-1}{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^\beta-1}.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}\quad(a>0,\ b>0);$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}.$ 5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}\quad(a>0);$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\frac{a^{x^a}\left(a^{a^x-x^a}-1\right)}{a^x-x^a}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\,a^x+1}{x\,b^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}\quad(a>0,\quad b>0).$

6.124.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right)-1}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{tg}(1-x)-\operatorname{tg}^2 1}{\operatorname{tg}^2 x}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\ (x>0)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}+\sin\dfrac{1}{n}\right]^n$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left[\dfrac{\pi}{4}-1+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}\right]$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\left(\ln\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)$.

6.125.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n\quad (a>0,\ b>0)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ დამოკიდებულებით $(\sqrt[n]{b}-1)\sim\dfrac{1}{n}\ln b$, როცა $n\to\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: ისარგებლეთ ტოლობით $\ln(1+2^x)=x\ln 2+\ln(1+2^{-x})$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+n})$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+n})|$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+n})$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi\sqrt{n^2+1})$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|$.

6.126.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)$;

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გაამრავლეთ და გაყავით $\sin\frac{x}{2^n}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$;

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ვისარგებლებთ ტოლობით (იხ. მაგალითი 120.1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=-\frac{1}{2};$$

გვექნება $\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\sim-\frac{k^2a^2}{2n^3}$, როცა $n\to\infty$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{2n^3}}=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2\cdot 6\cdot n^3}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos x\right)$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ისარგებლეთ ტოლობით

$$\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

6.127. დაამტკიცეთ, რომ

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{a^x} = 0 \quad (a > 1,\ k > 0);$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. ვინაიდან $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+n)^k}{a^n} = 0$ (მეორე თავი, § 6, მაგალითი 4), ამიტომ $\forall\ \varepsilon > 0$-თვის $\exists\ n_0$ ისეთი, რომ $\dfrac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon$, როცა $n > n_0$. ვთქვათ $x > n_0 + 1$, $n = [x]$, მაშინ $n > n_0$-სათვის

$$0 < \frac{x^k}{a^x} < \frac{(n+1)^k}{a^n} < \varepsilon .$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a x}{x^k} = 0 \quad (a > 1,\ k > 0);$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin}_{n\text{-ჯერ}} x = 0.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. დავუშვათ $\sin x \geqslant 0$ (ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა $\sin x < 0$) თუ $a_n = \underbrace{\sin \sin \cdots \sin}_{n\text{-ჯერ}} x$, მაშინ $-1 \leqslant a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1} \leqslant 1$. ე. ი. a_n მიმდევრობა კლებადია და შემოსაზღვრული.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin (2\pi e n!) = 2\pi.$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. გვაქვს (იხ. მეხუთე თავის (20.1))

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!} = y_n + \frac{\theta_n}{n \cdot n!},$$

სადაც $0 < \theta_n < 1$. აქედან

$$\theta_n = \frac{e - y_n}{\dfrac{1}{n \cdot n!}} = n \cdot n! \,(e - y_n) =$$

$$= n \cdot n! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!} - y_n\right) =$$

$$= n \cdot n! \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right) = \frac{n}{n+1} + \frac{n\,\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \to 1,$$

როცა $n\to\infty$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(3\pi e n!) = \lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi y_n \cdot n! + \frac{2\pi\theta_n}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n} = 2\pi.$$

§ 7. ფუნქციის უწყვეტობა

7.1 აჩვენეთ შემდეგი ფუნქციების უწყვეტობა „ε—δ" ენაზე:

1) $y = ax + b$; 2) $y = x^2$; 3) $y = ax^2 + bx + c$;
4) $y = x^3$; 5) $y = \sqrt{x}$; 6) $y = \sqrt[3]{x}$.

7.2. ვთქვათ f ფუნქცია განსაზღვრულია x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში. არის თუ არა იგი უწყვეტი x_0 წერტილში, თუ:

1) $\exists\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\,(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$;
2) $\forall\delta>0\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall x\,(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$;
3) $\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\,(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\delta)$;
4) $\forall\delta>0\quad \exists\varepsilon>0\quad \forall x\,(|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\delta)$;
5) $\exists\varepsilon>0\quad \forall\delta>0\quad \forall x\,(|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$?

7.3. განსაზღვრეთ მოცემული ფუნქცია x_0 წერტილში ისე, რომ იგი იყოს უწყვეტი ამ წერტილში:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$, $x_0 = 0$;

5) $f(x) = \left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$; 6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $x_0 = 0$;

7) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$; 8) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$, $x_0 = 0$;

9) $f(x) = \sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$; 10) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$;

11) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x_0 = 0$; 12) $f(x) = x\ln^2|x|$, $x_0 = 0$.

7.4. აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია განიცდის წყვეტას x_0 წერტილში. ააგეთ ამ ფუნქციის გრაფიკი:

1) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{როცა} \quad x<0, \\ x, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0,\end{cases} \quad x_0=0;$

2) $f(x)=\begin{cases}1+3x, & \text{როცა} \quad x<-1, \\ -x^2, & \text{როცა} \quad x\geqslant -1,\end{cases} \quad x_0=-1;$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0,\end{cases} \quad x_0=0;$

4) $f(x)=\begin{cases}x\sqrt{x^2}, & \text{როცა} \quad x\leqslant 1, \\ x-1, & \text{როცა} \quad x>1,\end{cases} \quad x_0=1;$

5) $f(x)=\operatorname{sign}(x+1), \quad x_0=-1;$

6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{(x-1)^2}}{|x|}, & \text{როცა} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=0,\end{cases} \quad x_0=0;$

7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{როცა} \quad |x|>1, \\ 2^x-1, & \text{როცა} \quad |x|\leqslant 1,\end{cases} \quad x_0=-1;$

8) $f(x)=\begin{cases}-x\sqrt{x^2}, & \text{როცა} \quad x<1, \\ 2^{-x}, & \text{როცა} \quad x\geqslant 1,\end{cases} \quad x_0=1;$

9) $f(x)=\begin{cases}2^{x^2-x}, & \text{როცა} \quad x\leqslant 2, \\ x-1, & \text{როცა} \quad x>2,\end{cases} \quad x_0=2;$

10) $f(x)=\begin{cases}\log_2\left|\dfrac{x-4}{x^2-16}\right|, & \text{როცა} \quad x\neq 4, \\ 0, & \text{როცა} \quad x=4,\end{cases} \quad x_0=4;$

11) $f(x)=\begin{cases}3\sin x, & \text{როცა} \quad x<0, \\ \cos x, & \text{როცა} \quad x\geqslant 0,\end{cases} \quad x_0=0;$

12) $f(x)=\begin{cases}\arcsin x, & \text{როცა} \quad |x|\leqslant 1, \\ \operatorname{arctg} x, & \text{როცა} \quad |x|>1,\end{cases} \quad x_0=1;$

13) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n} \quad (x>0), \quad x_0=1;$

14) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}, \quad x_0=\pm 1;$

15) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \quad x_0 = \pm 1;$

16) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2n}}{x^{2n+1}-1}, & \text{როცა} \quad x \neq 1, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = 1, \end{cases} \quad x_0 = \pm 1.$

7.5. იპოვეთ ფუნქციის წყვეტის წერტილები. გამოარკვიეთ რომელი გვარის წყვეტა აქვს, იპოვეთ ფუნქციის მნიშვნელობა წყვეტის წერტილში და ააგეთ ფუნქციის გრაფიკი:

1) $y = \begin{cases} x^2+1, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \\ x-2, & \text{როცა} \quad x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x < 0, \\ 5x-x^2, & \text{როცა} \quad x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} -x, & \text{როცა} \quad x \leqslant -1, \\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{როცა} \quad x > -1; \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 2-x, & \text{როცა} \quad x < 1, \\ \lg x, & \text{როცა} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{როცა} \quad x \leqslant -1; \\ 2, & \text{როცა} \quad x > -1; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x - \sqrt{x^2}, & \text{როცა} \quad |x| < 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad |x| \geqslant 1; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} x - \sqrt{(x-1)^2}, & \text{როცა} \quad x \geqslant 0, \\ -x^2-x, & \text{როცა} \quad x < 0; \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} x\,|x-1|, & \text{როცა} \quad |x| \leqslant 2, \\ -x & \text{როცა} \quad |x| > 2; \end{cases}$

10) $y = \begin{cases} x\,|x+1|, & \text{როცა} \quad |x| \leqslant 2, \\ x, & \text{როცა} \quad |x| > 2; \end{cases}$

11) $y = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{როცა} \quad |x| > 1, \\ 2^x - 1, & \text{როცა} \quad |x| \leqslant 1; \end{cases}$

12) $y = \begin{cases} x\,|x|, & \text{როცა} \quad x \leqslant 1, \\ \log_{1/2} x, & \text{როცა} \quad x > 1; \end{cases}$

13) $y = \begin{cases} x+1, & \text{როცა} \quad x \leqslant -1, \\ -x^2+1, & \text{როცა} \quad -1 < x \leqslant 1, \\ x-1, & \text{როცა} \quad x > 1; \end{cases}$

14) $y = \begin{cases} 2x+2, & \text{როცა} \quad x \leqslant -1, \\ x^2 - x - 2, & \text{როცა} \quad -1 < x \leqslant 2; \\ -\dfrac{1}{2}x + 1, & \text{როცა} \quad x > 2; \end{cases}$

15) $y = \begin{cases} x^2, & \text{როცა} \quad x < 0, \\ 1, & \text{როცა} \quad x = 0, \\ \operatorname{tg} x + 1, & \text{როცა} \quad x > 0; \end{cases}$

16) $y = \begin{cases} -2\sin x, & \text{როცა} \quad x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ 5\sin x + 1, & \text{როცა} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x + 6, & \text{როცა} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

17) $y = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა} \quad x < -\dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x + 1, & \text{როცა} \quad -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \text{როცა} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

18) $y = \begin{cases} (x+1)^2. & \text{როცა} \quad x < -1, \\ 3, & \text{როცა} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2^x & \text{როცა} \quad x > 1. \end{cases}$

7.6. a-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი.

1) $y = \begin{cases} x \operatorname{ctg} 2x, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \quad |x| < \dfrac{\pi}{2}, \\ a, & \text{როცა} \quad x = 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} (\arcsin x) \operatorname{ctg} x, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{როცა} \quad x = 0; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x+1, & \text{როცა} \quad x \leqslant 1, \\ 3 - ax^2, & \text{როცა} \quad x > 1; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} a(x+1), & \text{როცა} \quad x < 1, \\ x^2 + 2, & \text{როცა} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} ax^2 + 2, & \text{როცა} \quad x \leqslant 2, \\ x^3 + 2a, & \text{როცა} \quad x > 2; \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} 3a \sin x, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \\ 4 \cos x + a, & \text{როცა} \quad x > 0; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} 2^{x-1} + a, & \text{როცა} \quad x \leqslant 1, \\ 2ax^2 + 1, & \text{როცა} \quad x > 1; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} \lg x + 1, & \text{როცა} \quad x \geqslant 1, \\ a \sin \dfrac{\pi}{2} x, & \text{როცა} \quad x < 1. \end{cases}$

7.7. a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობებისათვის იქნება ფუნქცია უწყვეტი?

1) $y = \begin{cases} x^2, & \text{როცა} \quad x \leqslant 2, \\ ax + b, & \text{როცა} \quad 2 < x \leqslant 3, \\ a(x-1), & \text{როცა} \quad x > 3; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x + a, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \\ 2x + 3, & \text{როცა} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ ax^2 + b, & \text{როცა} \quad x > 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} -2 \sin x, & \text{როცა} \quad x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b, & \text{როცა} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{როცა} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} a \sin x + 2b, & \text{როცა} \quad x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b \cos x, & \text{როცა} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 3 \cos x + b + 1, & \text{როცა} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

7.8. დაადგინეთ, არსებობს თუ არა a პარამეტრის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც f ფუნქცია უწყვეტია x_0 წერტილში, თუ:

1) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{როცა} \quad x \neq 0, \\ a, & \text{როცა} \quad x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & \text{როცა} \quad x \neq -1, \\ a, & \text{როცა} \quad x = -1, \end{cases} \quad x_0 = -1,$

3) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{როცა} \quad x > 0, \\ -x, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

4) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{როცა} \quad x \leqslant 1, \\ a(x-1), & \text{როცა} \quad x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

7.9. დაადგინეთ, არსებობს თუ არა a და b პარამეტრების ისეთი მნიშვნელობები, რომელთათვისაც f ფუნქცია უწყვეტია თავის განსაზღვრის არეში, თუ:

1) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{როცა} \quad x \leqslant 0, \\ ax + b, & \text{როცა} \quad 0 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{როცა} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა} \quad |x| \leqslant 1, \\ x^2 + ax + b, & \text{როცა} \quad |x| > 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{როცა} \quad |x| \neq 1, \\ a, & \text{როცა} \quad x = -1, \\ b, & \text{როცა} \quad x = 1; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos \dfrac{x}{2}}{\sin x}, & \text{როცა} \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right], \quad x \neq 0, \ x \neq \pi; \\ a, & \text{როცა} \quad x = 0, \\ b, & \text{როცა} \quad x = \pi. \end{cases}$

7.10. დაამტკიცეთ, რომ დირიხლეს ფუნქცია

$$D(x) = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} \cos^n (\pi m!\, x) \right)$$

წყვეტილია ყოველი x-თვის.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $x = \dfrac{p}{q}$ — რაციონალური რიცხვია, მაშინ

$m!\,x = m! \dfrac{p}{q} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (q-1)(q+1) \cdots mp$ — ლუწი რიცხვია,

ამიტომ $\cos\pi m!x=1$ და $D(x)=1$ თუ x ირაციონალური რიცხვია, მაშინ $m!x$ რიცხვი არ იქნება მთელი არცერთი m-თვის. ამიტომ $|\cos\pi m!x|<1$. აქედან გამომდინარე $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \pi m!\,x = 0$, ე. ი. $D(x) = 0$. ამრიგად

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{როცა } x \text{ — რაციონალურია,}\\ 0, & \text{როცა } x \text{ — ირაციონალურია.}\end{cases}$$

ახლა ვთქვათ x_0 — ნებისმიერი რიცხვია. $\{x_n\}$ იყოს რაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა, ხოლო $\{x_n'\}$ ირაციონალურ რიცხვთა მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = x_0.$$

რადგანაც $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1$, ხოლო $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n') = 0$, ამიტომ x_0 არის წყვეტის წერტილი.

7.11. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x) = x\,D(x),$$

სადაც $D(x)$ — დირიხლეს ფუნქციაა, წყვეტილია ყველგან, გარდა $x=0$ წერტილისა.

7.12. დაამტკიცეთ, რომ რიმანის* ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{თუ } x=\dfrac{m}{n} \ (m \text{ და } n \text{ ურთიერთმარტივი რიცხვებია}),\\ 0, & \text{თუ } x \text{ — ირაციონალურია,}\end{cases}$$

წყვეტილია ყოველ რაციონალურ წერტილზე და უწყვეტია ყოველ ირაციონალურ წერტილზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ $x_0=\dfrac{p}{q}$ — რაციონალური რიცხვია (p და q ურთიერთმარტივი რიცხვებია). მაშინ $f(x_0)=\dfrac{1}{q}$. ცხადია, რომ

---

* გ. რიმანი (1826—1866) — გერმანელი მათემატიკოსი.

რაციონალურ რიცხვთა $\left\{\frac{pn+1}{qn}\right\}$ მიმდევრობა კრებადია $x_0=\frac{p}{q}$ რიცხვისაკენ, როცა $n\to\infty$. მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{pn+1}{qn}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{qn}=0.$$

ე. ი. ყოველი რაციონალური რიცხვი არის $f(x)$ ფუნქციის წყვეტის წერტილი.

ახლა ვთქვათ α ნებისმიერი ირაციონალური რიცხვია, ხოლო $r_n=\frac{p_n}{q_n}$ $(n=1,2,\ldots)$ იყოს რაციონალურ რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობა ისეთი, რომ $r_n\to\alpha$. მაშინ $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=\infty$. ამიტომ

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}=0=f(\alpha),$$

ე. ი. α წერტილზე $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია.

7.13. გამოიკვლიეთ უწყვეტობაზე ფუნქცია

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+1}, & \text{როცა } x \text{ არის უკვეცი წილადი } \dfrac{m}{n} \ (n\geqslant 1),\\ |x|, & \text{როცა } x \text{ ირაციონალურია.}\end{cases}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ x_0 — რაციონალური რიცხვია, ე. ი. $x_0=\frac{m}{n}$ $(n\geqslant 1)$, მაშინ $f(x_0)=\frac{m}{n+1}$. რადგან $x_k=\frac{km+1}{kn}\to\frac{m}{n}=x_0$, როცა $k\to\infty$, ხოლო $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{km+2}{kn+1}=\frac{m}{n}\neq\frac{m}{n+1}=f(x_0)$. ამიტომ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია რაციონალურ წერტილებში.

ახლა ვთქვათ x_0 — რაციონალური რიცხვია, ხოლო $x_k=\frac{m_k}{n_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ რაციონალურ რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობაა ისეთი, რომ $x_k\to x_0$. მაშინ

$$\lim_{k\to\infty}|m_k|=\lim_{k\to\infty}|n_k|=+\infty,$$

და

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{n_k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{m_k}{n_k}}{1+\frac{1}{n_k}} =$$

$$= x_0 = \begin{cases} |x_0| = f(x_0), & \text{როცა} \quad x_0 \geqslant 0, \\ -|x_0|, & \text{როცა} \quad x_0 < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ფუნქცია წყვეტილია x_0 წერტილში, თუ x_0 უარყოფითი ირაციონალური რიცხვია. თუ $x_k \geqslant 0$ ირაციონალური რიცხვებია და $x_k \to x_0$, მაშინ

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} |x_k| = |x_0| = f(x_0). \qquad (2)$$

ვთქვათ $\{x_k\}$ დადებით რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობაა, ისეთი, რომ $x_k \to x_0$, სადაც x_0 — ირაციონალურია. დავუშვათ, რომ $\{x_{k_p}\}$ არის $\{x_k\}$ მიმდევრობის ყველა რაციონალურ რიცხვთა ქვემიმდევრობა, ხოლო $\{x_{k_q}\}$ კი ყველა ირაციონალურ რიცხვთა ქვემიმდევრობა. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ორივე ქვემიმდევრობა უსასრულოა. რადგან $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k_p} = x_0$ და $\lim\limits_{q\to\infty} x_{k_q} = x_0$, ამიტომ (1) და (2) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = |x_0| = f(x_0).$$

ამრიგად, ფუნქცია უწყვეტია მხოლოდ დადებით ირაციონალურ წერტილებში.

7.14. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a, b]$ სეგმენტზე, მაშინ ფუნქციები

$$m(x) = \inf_{a\leqslant\xi\leqslant x} \{f(\xi)\} \quad \text{და} \quad M(x) = \sup_{a\leqslant\xi\leqslant x} \{f(\xi)\}$$

აგრეთვე უწყვეტია $[a, b]$-ზე.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. დასამტკიცებელი დებულების მართებულობა გამომდინარეობს უტოლობებიდან

$$-\sup_{0\leqslant |h|<\delta} |f(x_0+h)-f(x_0)|+m(x_0)\leqslant m(x_0+\delta)\leqslant$$
$$\leqslant m(x_0)+\sup_{0\leqslant |h|<\delta} |f(x_0+h)-f(x_0)|,$$
$$-\sup_{0\leqslant |h|<\delta} |f(x_0+h)-f(x_0)|+M(x_0)\leqslant M(x_0+\delta)\leqslant$$
$$\leqslant M(x_0)+\sup_{0\leqslant |h|<\delta} |f(x_0+h)-f(x_0)|.$$

7.15. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ და $g(x)$ უწყვეტი ფუნქციებია, მაშინ

$$\varphi(x)=\min(f(x),\ g(x))\quad \text{და}\quad \psi(x)=\max(f(x),\ g(x))$$

ფუნქციები აგრეთვე უწყვეტია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. დასამტკიცებელი დებულება გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობებიდან

$$|\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)|\leqslant\max\{\max_{0\leqslant |h|<\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|;\ \max_{0\leqslant |h|\leqslant\delta}|g(x_0+h)-g(x_0)|\}$$
$$|\psi(x_0+h)-\psi(x_0)|\leqslant\max\{\max_{0\leqslant |h|\leqslant\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|;\ \max_{0\leqslant |h|\leqslant\delta}|g(x_0+h)-g(x_0)|\}$$

7.16. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრულია და შემოსაზღვრულია $[a, b]$ სეგმენტზე. დაამტკიცეთ, რომ ფუნქციები

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}\quad \text{და}\quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$$

უწყვეტებია მარცხნიდან $[a, b]$-ზე.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგანაც $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია, ამიტომ ცხადია $m(x)$ და $M(x)$ ფუნქციებიც შემოსაზღვრულია $[a, b]$-ზე. ამასთან $m(x)$ კლებადია, ხოლო $M(x)$ ზრდადია $[a, b]$-ზე. ვთქვათ $x_0\in[a, b]$, მაშინ $m(x)\geqslant m(x_0)$, როცა $x<x_0$. გამომდინარე აქედან არსებობს სასრული ზღვარი $\lim\limits_{x\to x_0-} m(x)$, ამასთან

$$m(x_0-)=\lim_{x\to x_0-} m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x_0}\{f(\xi)\}=m(x_0),$$

ე. ი. $m(x)$ უწყვეტია x_0 წერტილში მარცხნიდან.

ანალოგიურად ვაჩვენებთ $M(x)$-ის უწყვეტობას x_0-ზე მარცხნიდან.

7.17. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $[a+\infty[$ შუალედში და $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ არსებობს და სასრულია, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია ამ შუალედში.

დამტკიცება. ვთქვათ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. მაშინ $\forall\varepsilon>0$-თვის $\exists M>0$ რიცხვი ისეთი, რომ $|f(x)-A|<\varepsilon$, როცა $x>M$, ე. ი. $|f(x)|<$ $<|A|+\varepsilon$, როცა $x>M$. თუ $E=\max\{|A|+\varepsilon, \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant M}\{f(x)\}\}$, მაშინ $|f(x)|\leqslant M$, როცა $x\in[a, +\infty[$.

7.18. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია უწყვეტია და შემოსაზღვრული $]x_0, +\infty[$ ინტერვალზე. დაამტკიცეთ, რომ როგორიც არ უნდა იყოს T რიცხვი, მოიძებნება ისეთი $x_n\to+\infty$ მიმდევრობა, რომ

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $T>0$ ნებისმიერი რიცხვია. განვიხილოთ სხვაობა $f(x+T)-f(x)$.შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1) არსებობს სასრული რიცხვი $x'\geqslant x_0$ ისეთი, რომ სხვაობა $f(x+T)-$ $-f(x)$ ინარჩუნებს ნიშანს, როდესაც $x\geqslant x'$;

2) ნებისმიერი $M\geqslant x_0$-თვის არსებობს $x^*>M$ ისეთი, რომ

$$f(x^*+T)-f(x^*)=0.$$

პირველ შემთხვევაში $\{f(x'+nT)\}$ მიმდევრობა მონოტონურია. გარდა ამისა, რადგანაც ის შემოსაზღვრულია, ამიტომ გააჩნია სასრული ზღვარი $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'+nT)=e$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x'+(n+1)T)-f(x'+nT)\}=e-e=0,$$

ამასთან $x_n=x'+nT\to+\infty$, როცა $n\to\infty$.

მეორე შემთხვევაში არსებობს x წერტილთა $(x>x_0)$ ისეთი უსასრულო მიმდევრობა $\{x_n\}$, რომ $x_n\to+\infty$, როცა $n\to\infty$ და $f(x_n+T)-$ $-f(x_n)=0$, ე. ი.

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

როცა $T<0$ დამტკიცება ჩატარდება ანალოგიურად.

8.1. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის $\Delta y=\Delta f(x)$ ნაზრდი x_0 წერტილში, თუ:

1) $y=x^2,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1;$ 2) $y=\lg x,\ x_0=1,\ \Delta x=9;$

3) $y=4^x,\ x_0=2,\ \Delta x=-0{,}5;$ 4) $y=\sin x,\ x_0=0,\ \Delta x=-\frac{\pi}{6}.$

8.2. იპოვეთ x არგუმენტის Δx ნაზრდის მაქსიმალური და მინიმალური მნიშვნელობა x_0 წერტილში და ფუნქციის შესაბამისი Δy ნაზრდები, თუ:

1) $y=x^2+x,\quad x\in[0;2],\quad x_0=1,5;$

2) $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x,\quad x\in[0;\ 1],\quad x_0=\frac{1}{3}.$

8.3. იპოვეთ $y=f(x)$ ფუნქციის არგუმენტის Δx ნაზრდის შესაბამისი Δy ნაზრდი x წერტილში:

1) $y=ax+b;$ 2) $y=ax^2+bx+c;$ 3) $y=a^x;$

4) $y=\ln x;$ 5) $y=\sin x;$ 6) $y=\cos x.$

8.4. დაამტკიცეთ, რომ

1) $\Delta(f(x)+g(x))=\Delta f(x)+\Delta g(x);$

2) $\Delta(f(x)\cdot g(x))=g(x+\Delta x)\,\Delta f(x)+f(x)\,\Delta g(x);$

3) $\Delta(f(x)\,g(x))=f(x+\Delta x)\,\Delta g(x)+g(x)\,\Delta f(x);$

4) $\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\,\Delta f(x)-f(x)\,\Delta g(x)}{g(x)\,g(x+\Delta x)}.$

8.5. იპოვეთ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ფარდობა x_0 წერტილში, თუ;

1) $y=\sqrt[3]{x},\quad x_0=1,\quad \Delta x=\frac{19}{8};$

2) $y=\left(\frac{1}{27}\right)^x,\quad x_0=0,\quad \Delta x=-\frac{1}{3}.$

3.6. წარმოებულის განსაზღვრების საფუძველზე გამოთვალეთ $f'(x_0)$, თუ:

1) $f(x) = x^2 - x,\ x_0 = -1;$ 2) $f(x) = \sqrt{x-1},\ x_0 = 2;$

3) $f(x) = 2\,|x^2 - 4|,\ x_0 = -1;$ 4) $f(x) = 3^{x+2},\ x_0 = 0;$

5) $f(x) = \ln(x^2 - 1),\ x_0 = 3;$ 6) $f(x) = \sin 3x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{3};$

7) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x + x^2 \sin \dfrac{2}{x}\right), & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

8) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0 & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

3.7. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები x_0 წერტილში

1) $f(x) = |x+2|,\ x_0 = -2;$ 2) $f(x) = |x^2 - 1|,\ x_0 = 1;$

3) $f(x) = \sqrt{|x|},\ x_0 = 0;$ 4) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ x_0 = 0.$

3.8. აჩვენეთ, რომ $f'(x_0)$ არ არსებობს, თუ

1) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0 & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x^2}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0 & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

3.9. დაამტკიცეთ, რომ $f'(x)$ წყვეტილია x_0 წერტილში, თუ

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული (№№ 8.10—8.23):

8.10.

1) $y = x^3 - x^2 + 1$;
2) $y = x^6 - 2x^4 + x^2 + 3$;
3) $y = \frac{2}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 - 2x$;
4) $y = \frac{1}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - 1$.

8.11.

1) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$;
2) $y = \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x} + x^2 - 1$,
3) $y = 2x^{7/2} - 3x^{5/3} + 3x - 1$;
4) $y = 3x^{1/3} - 4x^{3/2} + 2$.

8.12.

1) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x}$;
2) $y = \frac{1}{5x^5} - \frac{3}{4x^4} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}$;
3) $y = \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{3}{x^{4/3}} + \frac{5}{x^{1/5}}$;
4) $y = \frac{3}{x^{5/3}} - 2x^{-(1/2)} + \frac{1}{2x^2}$.

8.13.

1) $y = \frac{2}{\sqrt{x^5}} - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}}$;
2) $x = \frac{3}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^{1/3}} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} - x$;
3) $y = \frac{x}{\sqrt{x^5}} - \frac{4}{x\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}$;
4) $y = \frac{5}{x\sqrt[5]{x}} + \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^{7/2}}$.

8.14.

1) $y = 3\sin x - 4\cos x + 1$;
2) $y = 2\,\mathrm{tg} x - 3\,\mathrm{ctg}\, x + 2\sin x - 1$;
3) $y = 2x - \arcsin x + 2\arccos x$;
4) $y = 2\,\mathrm{arctg}\, x + 3\,\mathrm{arcctg}\, x - 2x$;
5) $y = 5^x$;
6) $y = 3^x - 2\cdot 4^x + \frac{1}{x^2} - x$;
7) $y = 3\ln x - \log_2 x$;
8) $y = 3\log_5 x - 2\ln x + 2\log_2 x$.

8.15.

1) $y = 2\,\mathrm{sh}\, x + 3\,\mathrm{ch}\, x$;
2) $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, x - \frac{3}{2}\,\mathrm{th}\, x$;
3) $y = 3\,\mathrm{ch}\, x - 4\,\mathrm{cth}\, x$;
4) $y = 2\,\mathrm{th}\, x + 3\,\mathrm{cth}\, x - \mathrm{ch}\, x$.

8.16.

1) $y = x^2 \ln x$;
2) $y = e^x \cos x$;
3) $y = \sqrt{x}\cdot 3^x$;
4) $y = (x^2 - 4x + 1)\arccos x$;
5) $y = 5^x\,\mathrm{arctg}\, x$;
6) $y = x\log_2 x$;
7) $y = (1 + e^x)\arcsin x$;
8) $y = (1 + x^2)\,\mathrm{arctg}\, x - 2x\sin x$.

8.17.

1) $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$; 2) $y = e^x \cdot \operatorname{th} x$;

3) $y = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$; 4) $y = x^2 \operatorname{ch} x - \dfrac{3}{2} \operatorname{th} x$.

8.18.

1) $y = x e^x \cos x$; 2) $y = x^2 3^x \ln x$;

3) $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x \cdot \log_3 x$; 4) $y = x \ln x \cdot e^x$.

8.19.

1) $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 3}$; 2) $y = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - x^3}$;

3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{2\sqrt{x} + 1}$ 4) $y = \dfrac{1 - 4x^2}{x^2 + 1}$.

8.20.

1) $y = \dfrac{x}{5^x}$; 2) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$;

3) $y = \log_x 3$; 4) $y = \log_x 5^x$.

8.21.

1) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{ctg} x - 2}$;

3) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$; 4) $y = \dfrac{\ln x + 1}{x}$.

8.22.

1) $y = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$; 2) $y = \dfrac{3^x + 5^x}{3^x - 5^x}$;

3) $y = \dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 2}$; 4) $y = \dfrac{\log_3 x + \log_2 x}{x}$;

5) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x - 2 \operatorname{arcctg} x}{1 + x^2}$; 6) $y = \dfrac{\arcsin x}{1 - x^2}$;

7) $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$; 8) $y = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$.

8.23.

1) $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{ch} x}$; 2) $y = \dfrac{3 \operatorname{cth} x}{\ln x}$;

3) $y = \dfrac{e^x}{\operatorname{th} x}$; 4) $y = \dfrac{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x}$.

იპოვეთ $f'(x_0)$, თუ (№№ 8.24—8.26):

8.24.

1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7, \quad x_0 = 2;$

2) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}, \quad x_0 = 64;$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^{-\frac{1}{3}}, \quad x_0 = 1;$

4) $f(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 1.$

8.25.

1) $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\,x + 4\cos x - 1, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6};$

2) $f(x) = 2\arcsin x - \mathrm{arctg}\,x + x^2 - 2, \quad x_0 = 0;$

3) $f(x) = 20\cdot 3^x - 9^x, \quad x_0 = 2;$

4) $f(x) = 5\log_3 x + \ln x \quad x_0 = \dfrac{1}{2}.$

8.26.

1) $f(x) = x\sin x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{2};$

2) $f(x) = 3e^x\cos x - 7x, \quad x_0 = 0;$

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}, \quad x_0 = 2\pi;$

4) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}, \quad x_0 = e.$

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები (8.27—8.72):

8.27.

1) $y = (x^2 - 1)^5;$

2) $y = (1 - 2\sqrt{x})^3;$

3) $y = (3x^2 + 5x - 1)^4;$

4) $y = (x^5 - 2x^4 + 3\sqrt[5]{x})^6.$

8.28.

1) $y = \sqrt{3x - 5};$

2) $y = \sqrt{4 + 2x - 3x^2};$

3) $y = \sqrt[3]{7 - 2x};$

4) $y = \sqrt[5]{(2x + 1)^3}.$

8.29.

1) $y = \sin 3x$; 2) $y = \operatorname{tg}(2x - 5)$;

3) $y = \arccos 7x$; 4) $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{3}$.

8.30.

1) $y = e^{4x-1}$; 2) $y = 5^{1-x^2}$;

3) $y = \ln(4 - x^3)$; 4) $y = \log_6(x^2 + x)$.

8.31.

1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^3 x$;

3) $y = \operatorname{arctg}^2 x$; 4) $y = \operatorname{ctg}^5 x$.

8.32.

1) $y = \sin x^3$; 2) $y = \cos^4 3x$;

3) $y = \operatorname{tg}^5 x^2$; 4) $y = \arcsin^3 5x$.

8.33.

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \cos\sqrt{x}$;

3) $y = 4^{\sqrt{x}}$; 4) $y = \sqrt[3]{\ln x}$.

8.34.

1) $y = \ln\sin x$; 2) $y = 3^{\cos x}$;

3) $y = \operatorname{arctg} 4^x$; 4) $y = \arccos\ln x$.

8.35.

1) $y = 5^{\arcsin x}$; 2) $y = \log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $y = \cos\ln x$; 4) $y = \operatorname{arctg}\cos x$.

8.36.

1) $y = \sin^2(2x + 5)$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{tg}(x^2 + x)}$;

3) $y = 2^{\cos^3 x}$; 4) $y = \ln^2(\sqrt{x} + 2)$.

8.37.

1) $y = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$; 2) $y = \sqrt[3]{4^{\sin x}}$;

3) $y = \operatorname{ctg} 3^{\cos x}$; 4) $y = \arccos^2 \log_3 x$.

8.38.

1) $y = \arcsin e^{\sqrt{x}}$; 2) $y = \lg^2(x - \cos x)$;

3) $y = e^{\arcsin 2x}$; 4) $y = e^{\sqrt{\ln x}}$;

5) $y = 10^{1-\sin^4 3x}$; 6) $y = \sin\left(e^{x^2+3x-2}\right)$;

7) $y = \sqrt{1 + e^{3x}}$; 8) $y = \ln(1 + \sqrt{x + 1})$.

8.39.

1) $y = \operatorname{sh}^3 2x$; 2) $y = \ln \operatorname{ch} x$;

3) $y = \operatorname{arctg} \operatorname{th} x$; 4) $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$;

5) $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$; 6) $y = \ln \operatorname{sh} 2x$;

7) $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$; 8 $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

8.40.

1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; 2) $y = \ln \ln x$;

3) $y = \log_2 \log_3 \log_5 x$; 4) $y = \sin(\sin(\sin x))$.

8.41.

1) $y = \sin(\cos^2 x)$; 2) $y = \arccos(\cos^2 x)$;

3) $y = \ln \arccos \sqrt{x}$; 4) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

8.42.

1) $y = \arcsin^5 2^x$; 2) $y = \operatorname{arctg} 3^{-x^2}$;

3) $y = \arccos^3(\sin 2x)$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} e^{-x}}$.

8.43.

1) $y = \ln^{10} \sin 7x$; 2) $y = \log_2^5(1 - 2^{-x^3})$;

3) $y = \arcsin^7(\ln^3 x)$; 4) $y = \operatorname{arctg}^5(4^{-x^2} - 1)$.

8.44.

1) $y = \sqrt[5]{\ln \sin \frac{1}{x}}$; 2) $y = 2^{\cos^3 \frac{1}{x}}$;

3) $y = \sqrt[6]{\operatorname{tg}^5 3^{-\frac{1}{x}}}$; 4) $y = \sqrt[3]{\arccos^2 \frac{2}{x^2}}$.

8.45.

1) $y = \dfrac{1}{\sin^3 5x}$; 2) $y = \dfrac{3}{\ln^5 \cos x}$;

3) $y = -\dfrac{5}{\operatorname{tg}^7 2^{-x}}$; 4) $y = -\dfrac{4}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3^{\frac{1}{x}}}}$.

8.46.

1) $y = \sqrt{1 + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x}$, 2) $g = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$;

3) $y = \ln(x + \sqrt[5]{x^2 + b^2})$; 4) $y = \log_5(x - \sqrt[3]{x^2 + a^2})$.

8.47.

1) $y=\sqrt[3]{1+x\sqrt{x+2}}$; 2) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

3) $y=\sqrt[5]{3^{\sin x}-3^{-\cos x}}$; 4) $y=\sqrt{2^x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}}$.

8.48.

1) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}+\sin^2 5x$; 2)) $y=e^{2x^2+5x}-2\cos\sqrt{x}$;

3) $y=5^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}-10\ln^3\sin x$; 4) $y=\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}^2 2^x+\dfrac{1}{3}\cos\ln x$.

8.49.

1) $y=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}$;

2) $y=x-\arcsin e^x+\ln(x+\sqrt{1-e^{2x}})$;

3) $y=x-\ln(1+e^x)-\operatorname{arctg}^2 e^{x/2}$;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{tg}x+\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$.

8.50.

1) $y=\sin\dfrac{x}{3}\cdot\sin 4x$; 2) $y=e^{-x^3}\cos 10x$;

3) $y=2^{1/x}\ln^2 x$, 4) $y=3^{x^3+2x}\cdot\arcsin x^4$.

8.51.

1) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}$; 2) $y=\sqrt[7]{x^3-2x}\cdot e^{1/x}$;

3) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}\ln(\sqrt{x}+1)$;

4) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}\cdot\operatorname{arctg}2x$.

8.52.

1) $y=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$; 2) $y=\dfrac{\arcsin 4x}{1-4x}$;

3) $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$; 4) $y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

8.53.

1) $y = \dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$; 2) $y = \dfrac{\cos^2 5x}{\sin 6x}$;

3) $y = \dfrac{\ln^2(\sin x)}{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \dfrac{5 \arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$.

8.54.

1) $y = e^{x^2 \cos 2x}$; 2) $y = 5^{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}$;

3) $y = \ln(1 + x^2 \sqrt{1+x^2})$; 4) $y = \cos(x - x \cos 2x)$.

8.55.

1) $y = \dfrac{1}{3} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1-x}$; 2) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

3) $x = \operatorname{tg} \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$; 4) $y = \ln \dfrac{x+\sqrt{1+x^2}}{x}$;

5) $y = \dfrac{\sin 3x}{2 \sin^2 x \cos x}$; 6) $y = \dfrac{\sin^2 x \cdot \sin x^2}{x}$;

7) $y = \dfrac{x - 2x \ln 2x}{\sqrt{1+x}}$; 8) $y = \dfrac{1 + x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8.56.

1) $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$; 2) $y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 4x}$;

3) $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$; 4) $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{th} \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{6} \operatorname{th}^3 \dfrac{x}{2}$;

5) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$;

6) $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{th} x + \dfrac{\sqrt{2}}{8} \ln \dfrac{1+\sqrt{2} \operatorname{th} x}{1-\sqrt{2} \operatorname{th} x}$;

7) $y = \dfrac{1}{x} \operatorname{ch} 2x + \sqrt{x} \operatorname{sh} 2x$; 8) $y = \operatorname{th} \ln x + \ln \operatorname{th} x$.

8.57.

1) $y = x^x$; 2) $y = x^{x^2}$;

3) $y = (\ln x)^x$; 4) $y = x^{\ln x}$.

8.58.

1) $y = x^{1/x}$; 2) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

3) $y = (x+1)^{2/x}$; 4) $y = x^{\sin x}$.

8.59.

1) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln \operatorname{arctg} x}$; 2) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$;

3) $y=(\sin x)^{5e^x}$; 4) $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

8.60.

1) $y=x^{\arcsin x}$; 2) $y=\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$;

3) $y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$; 4) $y=(x^2+1)^{\sin x}$.

8.61.

1) $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$; 2) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

3) $y=x^{x^x}$; 4) $y=(\cos 3x)^{\sin^2 2x}$.

8.62.

1) $y=(\sin x)^{e^x}$; 2) $y=(\ln x)^{3^x}$;

3) $y=(\arcsin x)^{e^x}$; 4) $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$;

5) $y=x^{e^{\sin x}}$; 6) $y=x^{e^{\cos x}}$;

7) $y=x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$; 8) $y=x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$;

8.63.

1) $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)$; 2) $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$;

3) $y=x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$; 4) $y=\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;

5) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

6) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$.

8.64.

1) $y=e^x\sin x\cdot\cos^3 x$; 2) $y=2^{x^2}\cdot\operatorname{tg} x\cdot\ln x$;

3) $y=\arcsin\cdot 2^x\cdot\cos x\cdot\log_2 x$; 4) $y=(\ln\sin x)\cdot\operatorname{ctg} x\cdot\sin x$.

8.65.

1) $y=(x^2+4)\sqrt{x^2-4}+\frac{x^4}{4}\arcsin\frac{2}{x}$;

2) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg} x\cdot\ln(1+\sin x)-x$;

3) $y = \frac{3+x}{2}\sqrt{x(2-x)} + 3\arccos\sqrt{\frac{x}{2}}$;

4) $y = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$.

8.66.

1) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

2) $y = \frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$;

3) $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$;

4) $y = \frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$.

8.67.

1) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

2) $y = \frac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{3x\sqrt{x}}$;

3) $y = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

4) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$, $(0 < x < 1)$.

8.68.

1) $y = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$;

2) $y = 2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$; ;

3) $y = 2\ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}) - 6\arcsin 2x$;

4) $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

8.69.

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$;

2) $y = \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$;

3) $y = e^{-x}\arcsin e^x + \ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$;

4) $y = \arcsin e^{-4x} + \ln(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1})$.

8.70.

1) $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^3 x}$; 2) $y = \frac{x\sqrt{1+x^2}\sin x}{x^2-1}$;

3) $y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{\arccos^3 x}$; 4) $y = \frac{\ln(x\sin x\cdot\sqrt{1-x^2})}{\cos x}$.

8.71.

1) $y = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$;

2) $y = x(\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

3) $y = \ln\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$;

4) $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

8.72.

1) $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

2) $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $y = \arccos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$;

4) $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{2}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

8.73. იპოვეთ $f'(x_0)$, თუ

1) $f(x) = \ln(1+x) + \arcsin\frac{x}{2}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$, $x_0 = 2$; 3) $f(x) = \ln\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

4) $f(x) = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$, $x_0 = 5$; 5) $f(x) = \ln(1+2^x)$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = 2^{\sin^2 3x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

8.74. იპოვეთ $f(0) + x f'(0)$, თუ $f(x) = e^{-x}$.

8.75. იპოვეთ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, თუ $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$.

8.76. იპოვეთ y' და ააგეთ y და y' ფუნქციების გრაფიკები, თუ:

1) $y = |x|$; 2) $y = x|x|$; 3) $y = \ln|x|$ $(x \neq 0)$;

4) $y = \begin{cases} 1-x, & \text{როცა } x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & \text{როცა } x > 0; \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} x, & \text{როცა } x < 0, \\ \ln(1+x), & \text{როცა } x \geqslant 0; \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & \text{როცა } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{როცა } x \notin [a; b]; \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{როცა } |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sign} x + \dfrac{x-1}{2}, & \text{როცა } |x| > 1; \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{როცა } |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{e}, & \text{როცა } |x| > 1. \end{cases}$

8.77. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებული:

1) $y = |(x-1)^2(x+1)^3|$; 2) $y = |\sin^3 x|$;

3) $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$; 4) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) $(x-1)^2$ და $(x+1)^3$ ფუნქციები წარმოებადია, ხოლო $\operatorname{sign}(x+1)$ ფუნქცია წარმოებადია ყველგან, გარდა $x=-1$ წერტილისა. ამიტომ თუ y ფუნქციას გადავწერთ შემდეგი სახით

$$y = (x-1)^2(x+1)^3 \operatorname{sign}(x+1),$$

მაშინ ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად მივიღებთ

$$y' = (x^2-1)(5x-1)|x+1|, \quad x \neq -1.$$

$x = -1$ წერტილში კი გვაქვს

$$y'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|(-2+\Delta x)^2(-1+\Delta x+1)^3|}{\Delta x} = 0.$$

ამრიგად

$$y' = (x^2-1)(5x-1)|x+1|$$

ყოველი x-თვის.

ანალოგიურად გვაქვს

2) $y' = 3\sin^2 x \cos x \operatorname{sign}(\sin x) = \dfrac{3}{2}\sin 2x\,|\sin x|$;

3) $$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{\operatorname{sign} x}{|x|^2}\right) = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x|>1);$$

4) $y' = 2\pi[x]\sin\pi x\cos\pi x = \pi[x]\sin 2\pi x$,

სადაც $x \neq k$, k მთელი რიცხვია.

გამოვთვალოთ $y'_-(k)$ და $y'_+(k)$. გვაქვს

$$y'_\pm(k) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{[k+\Delta x]\sin^2\pi(k+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{[k+\Delta x]\pi^2\Delta x^2}{\Delta x} = 0.$$

მაგრამ, რადგან $y'(k) = \pi[k]\sin 2k\pi = 0$, ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს $y' = \pi[x]\sin 2\pi x$ ყველა x-ისათვის.

8.78. იპოვეთ $f'_+(x_0)$ და $f'_-(x_0)$, თუ;

1) $f(x) = \arcsin\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \begin{cases} (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}, & \text{როცა } x \neq 2; \\ 2, & \text{როცა } x = 2; \end{cases}$ $x_0 = 2$.

8.79. დაადგინეთ, რომელ წერტილებში არა აქვს წარმოებული $f(x)$ ფუნქციას. იპოვეთ მარჯვენა და მარცხენა წარმოებულები მათი არსებობის შემთხვევაში, თუ:

1) $f(x)=|x^2-5x+4|$; 2) $f(x)=|(x-1)(x-2)(x-3)|$;

3) $f(x)=|\sin x|$; 4) $f(x)=|\cos x|$;

5) $f(x)=\begin{cases}\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{როცა} \quad x=0;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0 & \text{როცა} \quad x=0.\end{cases}$

8.80. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ცალმხრივი წარმოებულები, თუ:

1) $f(x)=[x]\sin\pi x$; 2) $f(x)=\begin{cases}x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0;\end{cases}$

3) $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$; 4) $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$;

5) $f(x)=|\ln|x||$, $x\neq 0$; 6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0.\end{cases}$

ამოხსნა. 1) $\sin\pi x$ წარმოებადია ყველგან $[x]$ ფუნქციას არა აქვს წარმოებული $x=k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) წერტილებში. ამიტომ, თუ $x\neq k$, გვექნება

$$f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x.$$

$x=k$ წერტილებში წარმოებულის განსაზღვრის ძალით გვაქვს

$$f'_\pm(k)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)-[k]\sin\pi x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{[k+\Delta x](-1)^k\sin\pi\Delta x}{\Delta x}=\begin{cases}(-1)^k k\pi,\\ (-1)^k(k-1)\pi.\end{cases}$$

2) ცხადია, ფუნქციას არა აქვს წარმოებული $x=0$ წერტილში და იმ წერტილებში, სადაც $\cos\dfrac{\pi}{x}=0$. ე. ი. $x_k=\dfrac{2}{2k+1}$ წერტილებში თუ $x\neq 0$ და $x\neq x_k$, მაშინ

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x}\operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{x} =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sign}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right).$$

ახლა გამოვთვალოთ $f'_+(x_k)$ და $f'_-(x_k)$. გვაქვს

$$f_\pm(x_k) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\left|\cos\left(\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x} - \frac{\pi(2k+1)}{2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right| = \lim_{\Delta x \to 0\pm}\left(\frac{2}{2k+1} + \Delta x\right)\frac{1}{\Delta x}\left|\sin\frac{\pi(2k+1)^2\Delta x}{2[2+(2k+1)\Delta x]}\right| =$$

$$= \frac{2}{2k+1}\cdot\frac{\pi}{2}(2k+1)^2(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1).$$

$x=0$ წერტილში მიიღება

$$\lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{\Delta x\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0\pm}\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|.$$ ეს კი არ არსებობს.

3) როცა $\sin x^2 > 0$ გვაქვს

$$f'(x) = \frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

მოცემული $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა

$$\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

ამიტომ $x = \sqrt{(2k+1)\pi}$ წერტილებში უნდა განვიხილოთ მხოლოდ მარცხენა წარმოებული, ხოლო $x = \sqrt{2\pi k}$ წერტილებში მხოლოდ მარჯვენა წარმოებული. გვაქვს

$$f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \lim_{\Delta x \to 0-}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{\sin(\sqrt{(2k+1)\pi} + \Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0-}\frac{1}{\Delta x}\sqrt{-\sin(2\sqrt{(2k+1)\pi}\,\Delta x + (\Delta x^2))} = -\infty;$$

$$f'_+(\sqrt{2k\pi}) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\sin(2\sqrt{2k\pi} \cdot \Delta x + (\Delta x)^2)} = +\infty.$$

$x = 0$ წერტილში გვაქვს

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x} \sqrt{\sin(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \pm 1.$$

4) ცხადია, რომ თუ $x \neq 0$, მაშინ $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ ფუნქცია წარმოებადია და

$$f'(x) = \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

$x = 0$ წერტილში გვაქვს

$$f'_\pm(0) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x} \sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x^2)}} =$$

$$= \pm \lim_{\Delta x \to 0\pm} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = \pm 1.$$

5) თუ $x \neq \pm 1$, მაშინ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გვაქვს

$$f'(x) = \operatorname{sign}(\ln|x|) \cdot \frac{1}{|x|} \operatorname{sign} x = \frac{1}{x} \operatorname{sign}(\ln|x|).$$

$x = \pm 1$ წერტილებში მიიღება:

$$f'_\pm(1) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x} |\ln|1 + \Delta x|| = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0\pm} \left|\frac{\ln(1 + \Delta x)}{\Delta x}\right| = \pm 1.$$

$$f'_\pm(-1) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x} |\ln|-1 + \Delta x|| = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\ln(1 - \Delta x)|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0\pm} \left|\frac{\ln(1 - \Delta x)}{-\Delta x}\right| = \pm 1.$$

6) თუ $x \neq 0$, მაშინ

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}} + \frac{\frac{1}{x} e^{1/x}}{(1+e^{1/x})^2}$$

$x=0$ წერტილში გვაქვს

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}} - f(0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{1}{1+e^{1/\Delta x}} = 0;$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1+e^{1/\Delta x}} - f(0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{1}{1+e^{1/\Delta x}} = 1.$$

8.81. იპოვეთ $f'(a)$, თუ $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, სადაც $\varphi(x)$ ფუნქცია უწყვეტია $x=a$ წერტილში.

ამოხსნა.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a+\Delta x - a)\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a).$$

8.82. აჩვენეთ, რომ $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ ფუნქციას, სადაც $\varphi(x)$ უწყვეტია და $\varphi(a) \neq 0$, არ აქვს წარმოებული $x=a$ წერტილში.

ამოხსნა. გვაქვს

$$f'_{\pm}(a) = \lim_{\Delta x \to 0\pm} \frac{1}{\Delta x} |a+\Delta x - a| \varphi(a+\Delta x) = \pm \varphi(a).$$

8.83. ააგეთ უწყვეტი ფუნქცია, რომელსაც არ აქვს წარმოებულები $a_1, a_2, \ldots, a_n$ წერტილებში

მითითება. აჩვენეთ, რომ ასეთია ფუნქცია

$$f(x) = |x-a_1| \cdot |x-a_2| \cdots |x-a_n|.$$

8.84. გამოთვალეთ $f'(0)$, თუ

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \; n \in N.$$

ამოხსნა. წარმოებულის განსაზღვრის ძალით გვაქვს

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)\cdots(\Delta x-n)}{\Delta x} = \begin{cases} n!, & \text{თუ } n \text{ ლუწია,} \\ -n! & \text{თუ } n \text{ კენტია.} \end{cases}$$

8.85. დაადგინეთ

$$f(x)=\begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & \text{როცა } x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა } x=0\end{cases}$$

ფუნქცია რა პირობებშია:

1) უწყვეტი $x=0$ წერტილში;

2) წარმოებადი $x=0$ წერტილში;

3) უწყვეტად წარმოებადი $x=0$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) განსაზღვრით გვაქვს

$$f(0\pm)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}(\Delta x)^n\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

აქედან ცხადია, რომ ეს ზღვარი არსებობს და ტოლია 0-ის მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $n>0$. ამიტომ ფუნქცია უწყვეტია $x=0$ წერტილში, როცა $n>0$.

2) ცალმხრივი წარმოებულის განსაზღვრის ძალით გვაქვს

$$f'_{\pm}(0)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{(\Delta x)^n\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0\pm}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

ეს ზღვარი არსებობს (და უდრის ნულს) მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $n>1$. ამრიგად, $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული $x=0$ წერტილში, როცა $n>1$.

3) როცა $x\neq 0$ გვაქვს

$$f'(x)=n\,x^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}.$$

$f'(x)$ ფუნქციის უწყვეტობისათვის $x=0$ წერტილში აუცილებელია და საკმარისი ადგილი ჰქონდეს პირობას

$$f'(0-)=f'(0+)=f'(0).$$

ცხადია, რომ როცა $x\to 0\pm$, რიცხვი $f'(0\pm)$ არსებობს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $n>2$ და ტოლია 0-ის. მეორე მხრივ, $f'(0)=0$, როცა $n>2$. ამიტომ $f'(x)$ ფუნქცია უწყვეტია 0 წერტილში, როცა $n>2$.

8.86. დაადგინეთ

$$f(x)=\begin{cases}|x|^n\sin\dfrac{1}{|x|^m}, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0,\end{cases} \quad (m>0)$$

ფუნქციას რა პირობებში აქვს:

1) შემოსაზღვრული წარმოებული 0 წერტილის მიდამოში.

2) შემოუსაზღვრელი წარმოებული 0 წერტილის მიდამოში.

ამოხსნა. 1) $x=0$ წერტილის მიდამოში გვაქვს

$$f'(x)=n|x|^{n-1}\operatorname{sign}x\cdot\sin\frac{1}{|x|^m}-m|x|^{n-m-1}\operatorname{sign}x\cdot\cos\frac{1}{|x|^m} \quad (x\neq 0),$$

ხოლო

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^n\sin\dfrac{1}{|\Delta x|^m}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|^{n-1}\sin\frac{1}{|\Delta x|^m}\operatorname{sign}(\Delta x)\right),$$

არსებობს და უდრის 0-ს, როცა $n>1$. გამომდინარე აქედან $f'(x)$ არსებობს 0 წერტილის მიდამოში, როცა $n>1$. ცხადია, იგი შემოსაზღვრულია, როცა $n-m-1\geqslant 0$, ე. ი. როცა $n\geqslant m+1$.

2) $f'(x)$ ფუნქცია იქნება შემოუსაზღვრელი, თუ $n-1<0$ ან $n-m-1<0$, საიდანაც $n<m+1$. მეორეს მხრივ $f'(0)$-ის არსებობისათვის აუცილებელია $n>1$. ამრიგად, საბოლოოდ გვაქვს $1<n<m+1$.

8.87. აჩვენეთ, რომ, თუ

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{როცა} \quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა} \quad x=0,\end{cases}$$

მაშინ

1) $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული წარმოებული $x=0$ წერტილში.

2) $x=0$ წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არსებობს წერტილი, სადაც $f(x)$ ფუნქციას წარმოებული არ გააჩნია.

ამოხსნა. $y=x^2$ ფუნქცია ყველგან წარმოებადია, ხოლო $\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ ფუნქცია კი წარმოებადია ყველგან, გარდა $x=0$ და

$x=x_k=\dfrac{2}{2k+1}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2\cdots)$ წერტილებისა ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებულები, როცა $x\neq 0$ და $x\neq x_k$ არსებობს და ჩვეულებრივად გამოითვლება. $x=0$ და $x=x_k$ წერტილებში $f'(x)$ გამოითვლება წარმოებულის განსაზღვრის გამოყენებით:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\left|\cos\dfrac{\pi}{\Delta x}\right|}{\Delta x}=0,$$

ე. ი. $f(x)$ ფუნქცია წარმოებადია 0 წერტილში და $f'(0)=0$. როცა $x=x_k=\dfrac{2}{2k+1}$, გვაქვს

$$f'_{\pm}(x_k)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{\left(\dfrac{2}{2k+1}+\Delta x\right)^2\left|\cos\dfrac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}\right|}{\Delta x}=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{1}{\Delta x}\left|\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}+\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right)\right|=$$

$$=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{1}{\Delta x}\left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)\Delta x}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right|=\pm\pi.$$

ე. ი. $f'_+(x_k)\neq f'_-(x_k)$. ამრიგად 0 წერტილის ნებისმიერ მიდამოში არსებობს წერტილი, სადაც $f'(x)$ არ არსებობს.

8.88. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{თუ } x \text{ რაციონალურია,}\\ 0, & \text{თუ } x \text{ ირაციონალურია,}\end{cases}$$

ფუნქცია წარმოებადია მხოლოდ $x=0$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გვაქვს

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n},\quad x_n\neq 0,$$

სადაც x_n არის ნულისაკენ კრებადი ნებისმიერი მიმდევრობა. ცხადია

$$\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|\leqslant\left|\frac{x_n^2}{x_n}\right|=|x_n|,$$

საიდანაც

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=0,$$

ე. ი. $f'(0)=0$. როცა $x\neq 0$, მაშინ $f(x)$ ფუნქცია წყვეტილია და $f'(x)$ არ არსებობს.

8.80. დაადგინეთ, აქვს თუ არა სასრული წარმოებული ფუნქციებს:

1) $f(x)=|\pi^2-x^2|\sin x$; 2) $f(x)=\arcsin(\cos x)$;

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & \text{როცა } |x|\leqslant 1,\\ |x|-1, & \text{როცა } |x|>1.\end{cases}$

ამოხსნა. 1) ნამრავლის გაწარმოების წესის თანახმად გვაქვს:

$$f'(x)=-2x\,\mathrm{sign}(\pi^2-x^2)\sin^2 x+|\pi^2-x^2|\sin 2x \quad (|x|\neq\pi).$$

წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით, $x=\pm\pi$ წერტილებში მივიღებთ:

$$f'_{\pm}(-\pi)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{1}{\Delta x}\left(|\pi^2-(-\pi+\Delta x)^2|\sin^2(-\pi+\Delta x)\right)=0,$$

$$f'_{\pm}(\pi)=\lim_{x\to 0\pm}\left(|\pi^2-(\pi+\Delta x)^2|\sin^2(\pi+\Delta x)\right)=0.$$

ამრიგად, ნებისმიერი x-თვის

$$f'(x)=|\pi^2-x^2|\sin 2x-2x\sin^2 x\,\mathrm{sign}(\pi^2-x^2).$$

2) როცა $x\neq k\pi$, მაშინ

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\frac{-\sin x}{|\sin x|}=-\mathrm{sign}(\sin x).$$

$x=k\pi$ წერტილებში გვაქვს

$$f'_{\pm}(k\pi)=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{1}{\Delta x}(\arcsin(\cos k\pi+\Delta x)-\arcsin(\cos k\pi))=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{1}{\Delta x}(\arcsin((-1)^k\cos\Delta x)-\arcsin((-1)^k))=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0\pm}(-1)^{k+1}\frac{\arcsin|\sin\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=(-1)^{k+1}\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{\arcsin|\sin\Delta x|}{|\sin\Delta x|}\times\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=$$

$$=(-1)^{k+1}\lim_{\Delta x\to 0\pm}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=\pm(-1)^{k+1}.$$

ამრიგად ფუნქციას $x=k\pi$ წერტილებში წარმოებული არ გააჩნია. 3) ცხადია, ფუნქციას გააჩნია სასრული წარმოებულები ყველგან, გარდა შესაძლებელია $x=\pm 1$ წერტილისა. შევისწავლოთ წარმოებულების არსებობის საკითხი ამ წერტილებში. გვაქვს

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|1+\Delta x|-1}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{1}{4}\,\frac{(-1+\Delta x+1)(1+\Delta x+1)^2}{\Delta x}=1.$$

ასევე

$$f'_+(-1)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{1}{4}\,\frac{(-1+\Delta x-1)(-1+\Delta x+1)^2}{\Delta x}=0,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{1-\Delta x-1}{\Delta x}=-1.$$

ამრიგად, ფუნქცია $x=1$ წერტილში წარმოებადია, ხოლო $x=-1$ წერტილში არა.

8.90. გამოიყვანეთ

1) $P_n(x)=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}$

2) $Q_n(x)=1^2+2^2x+3^2x^2+\dots+n^2x^{n-1}$

ჯამების გამოსათვლელი ფორმულა.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ $x+x^2+\dots+x^n$ ჯამის გამოსათვლელი ფორმულა.

8.91. დაამტკიცეთ, რომ ლუწი ფუნქციის წარმოებული კენტი ფუნქციაა, ხოლო კენტი ფუნქციის წარმოებული კი ლუწი ფუნქციაა.

8.92. დაამტკიცეთ, რომ პერიოდული ფუნქციის წარმოებული თუ ის არსებობს, აგრეთვე პერიოდული ფუნქციაა იმავე პერიოდით.

იპოვეთ დიფერენციალი dy (№№ 8.93—8.96):

8.93.

1) $y=3\sqrt{x}-\dfrac{4}{x}$; 2) $y=5^{\ln \operatorname{tg} x}$;

3) $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$; 4) $y=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$.

8.94.

1) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x}$;

3) $y = \ln (\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$; 4) $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$.

8.95.

1) $y = \operatorname{tg} (2\arccos \sqrt{1 - 2x^2})$; 2) $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$;

3) $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4\arcsin \frac{x}{2}$; 4) $y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right)$.

8.96.

1) $y = \frac{\ln |x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2}$; 2) $y = x \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}$;

3) $y = \ln | x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1}$; 4) $y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln | x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

8.97. იპოვეთ $y = f(x)$ ფუნქციის dy დიფერენციალი x_0 წერტილში, თუ:

1) $y = 2x^2 - x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0, 1$;

2) $y = x^3 - x^2$, $x_0 = -1$, $\Delta x = -0, 2$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x_0 = -1$, $\Delta x = -0{,}01 \cdot \sqrt{3}$;

4) $y = 2^{x^2 - 1}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = \frac{0{,}1}{\ln 2}$.

8.98. იპოვეთ $f(x_0 + \Delta x)$-ის მიახლოებითი მნიშვნელობები დიფერენციალის გამოყენებით, თუ:

1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}004$;

2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 30^\circ$, $\Delta x = 1^\circ$;

3) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 60^\circ$, $\Delta x = 1^\circ$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0, 1$;

5) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0, 2$;

6) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0, 2$;

7) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0, 1$;

8) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}012$.

8.99. კვადრატის ფართობი $s(x)=x^2$ გაიზარდა Δs სიდიდით. იპოვეთ გვერდის ნაზრდის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

8.100. სფეროს R რადიუსი გაიზარდა ΔR სიდიდით. იპოვეთ სფეროს მოცულობის ნაზრდის მიახლოებითი მნიშვნელობა.

8.101. აჩვენეთ, რომ y ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას:

1) $y=\ln\dfrac{1}{1+x}, \quad xy'+1=e^y;$

2) $y=\dfrac{\sin x}{x}, \quad xy'+y=\cos x;$

3) $y=5e^{-2x}+\dfrac{1}{3}e^x, \quad y'+2y=e^x;$

4) $y=\dfrac{c}{\cos x}, \quad y'-y\operatorname{tg}x=0;$

5) $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}, \quad 2y=xy'+\ln y';$

6) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x^2)y'-xy=1;$

7) $y=x(c-\ln x), \quad (x-y)\,dx+x\,dy=0;$

8) $y=\sqrt{x^2-cx}, \quad (x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0.$

§ 9. მაღალი რიგის წარმოებული და დიფერენციალი

9.1. იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები:

1) $y=x^3-4x^2+2, \ y''=?$ 2) $y=4x^4-3x^3+2x+6, \ y'''=?$

3) $y=x\sqrt{1+x^2}, \ y''=?$ 4) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ y''=?$

5) $y=e^{x^2}, \ y''=?$ 5) $y=\cos^2 x, \ y'''=?$

7) $y=\operatorname{tg}x, \ y''=?$ 8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), \ y''=?$

9) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x, \ y''=?$ 10) $y=x^3\ln x, \ y^{\mathrm{IV}}=?$

11) $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2}), \ y''=?$ 12) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \ y''=?$

13) $y=\ln f(x), \ y''=?$ 14) $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)], \ y''=?$

9.2. იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები მოცემულ წერტილში:

1) $y=e^{\sqrt{x}}$, $y''(4)=?$ 2) $y=e^{2x^2-1}$, $y''(0)=?$

3) $y=\operatorname{arctg} x$, $y'''(1)=?$ 4) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$, $y''(2)=?$

5) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y''(0)=?$ 6) $y=(2x-7)^2(3x-7)^3$, $y^{V}(x_0)=?$

7) $y=x^2\sin 2x$, $y'''(0)=?$ 8) $y=e^{\sin x}\cos(\sin x)$, $y''(0)=?$

9.3. ვთქვათ $f(x)$ სამჯერ წარმოებადი ფუნქციაა. იპოვეთ y'' და y''', თუ:

1) $y=f(x^2)$; 2) $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 3) $y=f(e^x)$; 4) $y=f(\ln x)$.

9.4. იპოვეთ n-ური რიგის წარმოებულები:

1) $y=a^x$; 2) $y=\sin x$; 3) $y=\cos x$;

4) $y=x^m$; 5) $y=\ln x$; 6) $y=a^{kx}$;

7) $y=\sin ax$; 8) $y=\cos^2 ax$; 9) $y=\sin^2 ax$;

10) $y=\ln(ax+b)$; 11) $y=\dfrac{1}{1-x}$; 12) $y=\dfrac{1}{1+x}$;

13) $y=x^3+x+e^{3x}$; 14) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

9.5. ლაიბნიცის ფორმულის გამოყენებით იპოვეთ მითითებული რიგის წარმოებულები:

1) $y=xe^x$, $y^{(n)}=?$ 2) $y=x^3\ln x$; $y^{(n)}=?$

3) $y=(x-1)\,2^{x-1}$, $y^{(n)}=?$ 4) $y=(x^2+1)\sin x$, $y^{(20)}=?$

5) $y=x\cos x$, $y^{(n)}=?$ 6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $y^{V}=?$

9.6. იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალები:

1) $y=(x^2+x+1)e^{-x}$, $d^2y=?$ 2) $y=\cos 5x$, $d^2y=?$

3) $y=\sqrt{1-x^2}$, $d^2y=?$ 4) $y=2x+\operatorname{ctg} 2x$, $d^2y=?$

5) $y=\arccos x$, $d^2y=?$ 6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $d^2y=?$

7) $y=x^2e^{-x}$, $d^3y=?$ 8) $y=\dfrac{x^4}{2-x}$, $d^4y=?$

9) $y=3\sin(2x+5)$, $d^{(n)}y=?$ 10) $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, $d^{(n)}y=?$

9.7. იპოვეთ მითითებული რიგის დიფერენციალები მოცემულ წერტილში:

1) $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$, $d^2 y(1) = ?$ 2) $y = \dfrac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$, $d^2 y(0) = ?$

3) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2 + x^2}{2 - x^2}$, $d^2 (y)(0) = ?$

4) $y = (x + 5)^5$, $d^3 y(0) = ?$

9.8. ვთქვათ $y = \ln \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x = \operatorname{tg} t$. გამოსახეთ $d^2 y$;

1) x-ისა და dx-ის საშუალებით;

2) t-სა და dt-ს საშუალებით.

9.9. ვთქვათ $y = \sin u$, $u = a^x$, $x = t^3$. გამოსახეთ $d^2 y$;

1) u-სა და du-ს საშუალებით;

2) x-სა და dx-ის საშუალებით;

3) t-სა და dt-ს საშუალებით.

9.10. აჩვენეთ, რომ y ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას:

1) $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$, $y'' + a^2 y = 0$;

2) $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$, $y'' - a^2 y = 0$;

3) $y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$, $y'' - (\alpha + \beta) y' + \alpha\beta y = 0$;

4) $y = (c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) e^{-x}$, $y'' + 2y' + 10y = 0$;

5) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{x}$, $y'' - y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$;

6) $y = e^{10 \arcsin x}$, $(1 - x^2) y'' + xy' - 100 y = 0$.

9.11. აჩვენეთ, რომ ჩებიშევის* მრავალწევრი

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos (n \arccos x), \quad n \in N$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$(1 - x^2) T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

9.12. აჩვენეთ, რომ ლეჟანდრის** მრავალწევრი

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$(1 - x^2) P_n''(x) - 2x P_n'(x) + n(n + 1) P_n(x) = 0.$$

---

* პ. ჩებიშევი (1821—1894) — რუსი მათემატიკოსი.

** ა. ლეჟანდრი (1752—1833) — ფრანგი მათემატიკოსი.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: გავაწარმოოთ $(n+1)$-ჯერ ტოლობა

$$(x^2-1)\,u' = 2nxu,$$

სადაც

$$u=(x^2-1)^n.$$

9.13. ჩებიშევ-ლაგერის მრავალწევრი განისაზღვრება ფორმულით

$$L_n(x)=e^x\,(x^n e^{-x})^{(n)},\quad n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

იპოვეთ $L_n(x)$-ის ცხადი გამოსახულება და აჩვენეთ, რომ $L_n(x)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$x\,L_n''(x)+(1-x)\,L_n'(x)+n\,L_n(x)=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ტოლობა

$$xu'+(x-n)\,u=0,$$

სადაც

$$u=x^n e^{-x}.$$

9.14. ჩებიშევ-ერმიტის* მრავალწევრი განისაზღვრება ფორმულით

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\,(e^{-x^2})^{(n)},\quad n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

იპოვეთ $H_n(x)$-ის ცხადი გამოსახულება და აჩვენეთ, რომ $H_n(x)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$H_n''(x)-2x\,H_n'(x)+2n\,H_n(x)=0.$$

მ ი თ ი თ ე ბ ა. გამოიყენეთ ტოლობა

$$u'+2ux=0,$$

სადაც

$$u=e^{-x^2}.$$

9.15. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ ტოლობა

$$(x^{n-1}\cdot e^{1/x})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\cdot e^{1/x}.$$

---

* შ. ერმიტი (1822—1901) — ფრანგი მათემატიკოსი.

9.16. აჩვენეთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას

$$(x^n \ln x)^{(n)} = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right).$$

9.17. იპოვეთ $f^{(n)}(a)$, თუ

$$f(x) = (x-a)^n \varphi(x),$$

სადაც $\varphi(x)$ ფუნქციას a წერტილის მიდამოში გააჩნია $(n-1)$ რიგის უწყვეტი წარმოებული.

9.18. აჩვენეთ, რომ ფუნქციას

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \end{cases}$$

(n ნატურალური რიცხვია) $x=0$ წერტილში გააჩნია n-ური რიგის წარმოებული და არ გააჩნია $(n+1)$ რიგის წარმოებული.

9.19. წარმოებულის განსაზღვრების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0, & \text{თუ } x = 0 \end{cases}$$

უსასრულოდ დიფერენცირებადია $x=0$ წერტილში. იპოვეთ $f^{(n)}(0)$, $n \in N$.

§ 10. პარამეტრული და არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის წარმოებული

10.1. იპოვეთ $y' = \frac{dy}{dx}$, თუ y ფუნქცია მოცემულია პარამეტრული სახით:

1) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 1 - t^2; \\ y = t - t^3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \dfrac{t}{(t+1)^2}; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}; \end{cases}$

11) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \dfrac{1}{t^2-1}, \end{cases}$

12) $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t; \end{cases}$

13) $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$

14) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$

15) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = e^t \cos t; \end{cases}$

17) $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

18) $\begin{cases} x = a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

10.2. იპოვეთ $y'_x(t_0)$, თუ:

1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $t_0 = 1$;

3) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

4) $\begin{cases} x = \ln\left(\sin\dfrac{t}{2}\right), \\ y = \ln(\sin t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

10.3. იპოვეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის მითითებული რიგის წარმოებული:

1) $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^3}, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

3) $\begin{cases} x = \ln\cos t, \\ y = \ln\cos 2t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

4) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

5) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2), \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$ 6) $\begin{cases} x = a t \cos t, \\ y = at \sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

7) $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$ 8) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

9) $\begin{cases} x = e^t, \\ y = t^3, \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$ 10) $\begin{cases} x = \cos t - \ln\left(\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}\right), \\ y = \sin t, \end{cases}$ $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

11) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \cos nt, \end{cases}$ $\dfrac{d^ny}{dx^n} = ?$ 12) $\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^2 t, \end{cases}$ $\dfrac{d^ny}{dx^n} = ?$

13) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t+1}, \\ y = \dfrac{2t^2+t}{(t+1)^2}, \end{cases}$ $\dfrac{d^ny}{dx^n} = ?$ 14) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m, \end{cases}$ $\dfrac{d^n y}{dx^n} = ?$

10.4. იპოვეთ t_0 წერტილში $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, თუ:

1) $\begin{cases} x = (t^2+1) e^t, \\ y = t^2 e^{2t}, \end{cases}$ $t_0 = 0;$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{2t - t^2}{t-1}, \\ y = \dfrac{t^2}{t-1}, \end{cases}$ $t_0 = 2;$

3) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2, \end{cases}$ $t_0 = 0,$ 4) $\begin{cases} x = \ln(1+\sin t), \\ y = \ln(1-\cos 2t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: 3) გაწარმოების ჩვეულებრივი წესით მოცემული ფუნქციის წარმოებული $t_0=0$ წერტილში არ გამოითვლება. მოცემული ფუნქცია ცხადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება: $y=e^x-1$. პარამეტრის $t_0=0$ მნიშვნელობას შეესაბამება $x=0$.

10.5. აჩვენეთ, რომ მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს მითითებულ ტოლობას:

1) $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = y;$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}; \end{cases}$ $x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - \dfrac{dy}{dx} = 1;$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \dfrac{3+2\ln t}{t}; \end{cases}$ $\quad y\dfrac{dy}{dx} - 2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1;$

4) $\begin{cases} x = \operatorname{ch} 2t, \\ y = \operatorname{sh} 2t, \end{cases}$ $\quad y\dfrac{dy}{dx} - x = 0;$

5) $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{1}{2}t^2 + 1, \end{cases}$ $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}\left(1 + 3\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right) = 1;$

6) $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $\quad (x-y)^2 \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right);$

7) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin kt, \end{cases}$ $\quad (1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + k^2 y = 0;$

8) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}, \end{cases}$ $\quad (1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0.$

10.6. იპოვეთ $\dfrac{dy}{dx}$, თუ y ფუნქცია მოცემულია არაცხადი სახით:

1) $y^2 = 2px;$ 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a};$ 4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0;$

5) $x^4 + y^4 = x^2 y^2;$ 6) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$

7) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2};$ 8) $y \sin x - \cos(x - y) = 0,$

10.7. იპოვეთ $y'(x_0)$, როცა $y_0 = y(x_0)$, თუ:

1) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x, \quad x_0 = 2, \quad y_0 = 4;$

2) $e^y + xy = e, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1;$

3) $2y = 1 + xy^3, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1;$

4) $xy + \ln y = 1, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = e;$

5) $y^2 = x + \ln\dfrac{y}{x}, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1;$

6) $ye^y = e^{x+1}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$

10.8. იპოვეთ არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის მითითებული რიგის წარმოებული:

1) $x^2-y^2=a^2$, $y''=?$ 2) $e^{x-y}=x+y$, $y''=?$

3) $x^3+y^3-3axy=0$, $y''=?$ 4) $e^{x+y}=xy$, $y''=?$

5) $x^2+y^2=a^2$, $y'''=?$ 6) $x^2-xy+y^2=1$ $y'''=?$

7) $y^2+2\ln y=x^4$, $y''=?$ 8) $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, $y''=?$

10.9. იპოვეთ არაცხადი სახით მოცემული ფუნქციის მითითებული რიგის წარმოებული x_0 წერტილში, როცა $y_0=y\,(x_0)$, თუ:

1) $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$, $x_0=1$, $y_0=1$, $y''(x_0)=?$

2) $2\ln(y-x)+\sin xy=0$, $x_0=0$, $y_0=1$, $y''(x_0)=?$

3) $x^3y+\arcsin(y-x)=1$; $x_0=1$, $y_0=1$, $y''(x_0)=?$

4) $3(y-x+1)+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$, $x_0=1$, $y_0=0$, $y''(x_0)=?$

5) $x^2+y^2=25$, $x_0=3$, $y_0=4$, $y'''(x_0)=?$

6) $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$, $x_0=1$, $y_0=1$, $y'''(x_0)=?$

10.10. აჩვენეთ, რომ არაცხადი სახით მოცემული ფუნქცია აკმაყოფილებს ტოლობას:

1) $y=a\ln y+x+b$, $y\cdot y''=(y')^2-(y')^3$;

2) $(a+bx)\,e^{y/x}=x$, $x^3y''=(xy'-y)^2$.

10.11. ვთქვათ $y=f\,(x)$ ფუნქციისათვის ცნობილია $f'(x)$, $f''(x)$, და $f'''(x)$. აჩვენეთ, რომ $x=f^{-1}(y)$ შექცეული ფუნქციის მეორე და მესამე რიგის წარმოებულები გამოითვლება ფორმულით:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\,;\qquad \frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3\,[f''(x)]^2-f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}\,.$$

§ 11. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება გეომეტრიასა და მექანიკაში

11.1. იპოვეთ $y=5x^3$ კუბური პარაბოლის იმ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი, რომლის აბსცისა $x=2$.

11.2. იპოვეთ $y=x^3$ კუბური პარაბოლის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი 3-ის ტოლია.

11.3. იპოვეთ $y=x^3$ კუბური პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია.

11.4. იპოვეთ $y=2+x-x^2$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძთან ადგენს 45°-იან კუთხეს.

11.5. იპოვეთ $y=3x^4+4x^3-12x^2+20$ წირის ის წერტილები, რომელშიც გავლებული მხები Ox ღერძის პარალელურია.

11.6. იპოვეთ $y=x^2-7x+3$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $5x+y-3=0$ წრფის პარალელურია.

11.7. იპოვეთ $y=2x^2-3x+1$ პარაბოლის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $5x-y+2=0$ წრფის პარალელურია.

11.8. იპოვეთ $y=-\dfrac{15}{x}$ ჰიპერბოლის $M(\sqrt{3};\ -5\sqrt{3})$ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი.

11.9. იპოვეთ $y=e^{x-1}$ წირის იმ მხების კუთხური კოეფიციენტი, რომელიც გავლებულია ამ წირის $y=1$ წრფესთან თანაკვეთის წერტილში.

11.10. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც Ox ღერძის დადებით მიმართულებასთან ადგენს $y=x-2x^3+5$ წირის $M(0;5)$ წერტილში გავლებული მხები.

11.11. იპოვეთ $x^3+y^3-xy-7=0$ წირის $(1;\ 2)$ წერტილში გავლებული მხების კუთხური კოეფიციენტი.

11.12. იპოვეთ $y^2=2x^3$ წირის ის წერტილი, რომელშიც გავლებული მხები $4x-3y+2=0$ წრფის მართობულია.

შეადგინეთ $y=f(x)$ წირის $M_0(x_0;\ y_0)$ წერტილში გავლებული მხებისა და ნორმალის განტოლებები, თუ (№№ 11.13—11.16):

11.13.

1) $y=\sqrt{x}$, $M_0(4;\ 2)$; 2) $y=x^3+2x^2-4x-3$, $M_0(-2;\ 5)$;

3) $y=\sqrt[3]{x-1}$, $M_0(1;\ 0)$; 4) $y=\operatorname{tg}2x$, $M_0(0;\ 0)$.

11.14.

1) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$, $M_0(1;\ 0)$; 2) $y=\arccos 3x$, $M_0\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

3) $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$, $M_0(2;\ 3)$; 4) $y=e^{1-x^2}$, $M_0(-1;\ 1)$.

11.15.

1) $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3}, \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t}, \end{cases}$ $M_0(2;\ 2)$;

2) $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t, \end{cases}$ $\quad M_0\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}};\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$;

3) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$ $\quad M_0(1;\ 2)$;

4) $\begin{cases} x = \dfrac{2t + t^2}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{2t - t^2}{1 + t^3}, \end{cases}$ $\quad M_0\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

11.16.

1) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, \quad M_0(-1;\ 3)$;

2) $x^5 + y^5 - 2xy = 0, \quad M_0(1;\ 1)$;

3) $y^4 = 4x^4 + 6xy, \quad M_0(1;\ 2)$;

4) $xy + \ln y = 1, \quad M_0(1;\ 1)$.

რა კუთხით* იკვეთებიან $y=f(x)$ და $y=\varphi(x)$ წირები, თუ (№№ 11.17, 11.18):

11.17.

1) $y = \ln x$ და $y = 0$; 2) $y = x^2$ და $x = y^2$;

3) $y = \sin x$ და $y = \cos x$; 4) $y = x^2$ და $y = x^3$.

11.18.

1) $y = (x-2)^2$ და $y = -4 + 6x - x^2$;

2) $xy = a^2$ და $x^2 - y^2 = b^2$;

3) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ და $x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$;

4) $x^2 - y^2 = 5$ და $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{8} = 1$;

5) $\begin{cases} x = \dfrac{5}{3}\cos t, \\ y = \dfrac{5}{4}\sin t \end{cases}$ და $y = x^2$;

6) $\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = a\sin\varphi \end{cases}$ და $\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{3}\,at}{1+t^2}. \end{cases}$

---

* ორი წირის გადაკვეთის კუთხე ეწოდება მათი გადაკვეთის წერტილში ამ წირებისადმი გავლებულ მხებებს შორის კუთხეს.

11.19. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$.

11.20. აჩვენეთ, რომ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ჰიპერბოლის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

11.21. აჩვენეთ, რომ $y^2=2px$ პარაბოლის $M(x_0, y_0)$ წერტილზე გავლებული მხების განტოლებაა $y_0y=p(x+x_0)$.

11.22. შეადგინეთ $y=x^2-2x+5$ პარაბოლის იმ მხების განტოლება, რომელიც პარალელურია პარაბოლის (1; 4) და (3; 8) წერტილების შემაერთებელი ქორდისა.

11.23. შეადგინეთ $y=-\sqrt{x}+2$ წირის ნორმალის განტოლება, რომელიც გავლებულია ამ წირისა და პირველი საკოორდინატო კუთხის ბისექტრისის გადაკვეთის წერტილში.

11.24. შეადგინეთ $y=x^2-6x+6$ პარაბოლის ნორმალის განტოლება, რომელიც მართობულია პარაბოლის წვეროსა და კოორდინატთა სათავეზე გამავალი წრფის.

11.25. შეადგინეთ $y=\frac{x+9}{x+5}$ ჰიპერბოლის იმ მხებების განტოლებები, რომლებიც გადიან კოორდინატთა სათავეზე.

11.26. იპოვეთ $y=\frac{1}{1+x^2}$ წირის ის წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები პარალელურია აბსცისთა ღერძის.

11.27. იპოვეთ Ox ღერძისა და $y=\frac{x+1}{x+3}$ ფუნქციის გრაფიკის იმ მხებების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები, რომლებიც Ox ღერძთან $\frac{3}{4}\pi$-ის ტოლ კუთხეს ქმნიან.

11.28. იპოვეთ საკოორდინატო ღერძებისა და $y=\frac{2x-3}{x+3}$ ფუნქციის გრაფიკის იმ მხებების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები, რომელთა საკუთხო კოეფიციენტი 9-ის ტოლია.

11.29. იპოვეთ Oy ღერძისა და $y=\frac{3x-1}{x+8}$ ფუნქციის გრაფიკის იმ მხებების გადაკვეთის წერტილების კოორდინატები, რომლებიც Ox ღერძთან $\frac{\pi}{4}$-ის ტოლ კუთხეს ქმნიან.

11.30. იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=3\cos5x$ და $y=5\cos3x+2$ ფუნქციათა გრაფიკების მხებები იმ წერტილებში, რომელთა აბსცისაა x, იქნებიან პარალელური.

11.31. იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $y=2-14\sin3x$ და $y=6\sin7x$ ფუნქციათა გრაფიკების მხებები იმ წერტილებში, რომელთა აბსცისაა x, იქნებიან პარალელური.

11.32. იპოვეთ x-ის ყველა ის მნიშვნელობა, რომელთათვისაც $y=\cos7x+7\cos x$ ფუნქციის გრაფიკის მხები იმ წერტილში, რომლის აბსცისაა x, პარალელური იქნება ამავე ფუნქციის გრაფიკის იმ მხებისა, რომელიც გავლებულია წერტილში, რომლის აბსცისაა $\frac{\pi}{6}$.

11.33. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ წერტილზე, $y=-\frac{x^2}{2}+2$ ფუნქციის გრაფიკს ეხება და $y=\sqrt{4-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰკვეთს ორ განსხვავებულ წერტილში.

11.34. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის (1; 3) წერტილზე, $y=8\sqrt{x}-7$ ფუნქციის გრაფიკს ეხება და $y=x^2+4x-1$ ფუნქციის გრაფიკს ჰკვეთს ორ განსხვავებულ წერტილში.

11.35. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის (5; 10) წერტილზე, $y=-\frac{x^2}{4}+2x+6$ ფუნქციის გრაფიკს ეხება და $y=6+\sqrt{8x-x^2}$ ფუნქციის გრაფიკს ჰკვეთს ორ განსხვავებულ წერტილში.

11.36. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ წერტილზე $y=3\sqrt{x}-\frac{5}{2}$ ფუნქციის გრაფიკს ეხება და $y=$

$=x^2+6x$ ფუნქციის გრაფიკს ჰკვეთს ორ განსხვავებულ წერტილში.

11.37. იპოვეთ მანძილი კოორდინატთა სათავიდან $y=e^{2x}+x^2$ წირის (0;1) წერტილზე გავლებულ ნორმალამდე.

11.38. აჩვენეთ, რომ $y=x^2-x+1$ პარაბოლის (0;1), (−1;3) და $\left(\frac{5}{2};\frac{19}{4}\right)$ წერტილებზე გავლებული ნორმალები იკვეთებიან ერთ წერტილში.

11.39. აჩვენეთ, რომ $y=\frac{x-4}{x-2}$ ჰიპერბოლის საკოორდინატო ღერძებთან გადაკვეთის წერტილებში ამ ჰიპერბოლისადმი გავლებული მხებები ერთმანეთის პარალელურია.

11.40. აჩვენეთ, რომ $y=\frac{1+3x^2}{3+x^2}$ წირის იმ წერტილებში გატარებული მხებები, რომელთათვისაც $y=1$, გადაიკვეთებიან კოორდინატთა სათავეში.

11.41. აჩვენეთ, რომ $y=\frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ წირის ნებისმიერი მხები იკვეთება ორდინატთა ღერძთან წერტილში, რომელიც თანაბრადაა დაშორებული შეხების წერტილიდან და კოორდინატთა სათავიდან.

11.42. დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის ნებისმიერ წერტილში გავლებული ნორმალი, ამ წერტილის ფოკალური რადიუსებით შედგენილი კუთხის ბისექტრისაა.

11.43. მოცემულია $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსების ოჯახი, რომელთაც $2a$ ღერძი საერთო აქვთ, ხოლო $2b$ სხვადასხვა. დაამტკიცეთ, რომ ამ ელიფსების იმ წერტილებში გატარებული მხებები, რომელთაც ერთი და იგივე აბსცისები აქვთ, იკვეთებიან Ox ღერძზე მდებარე ერთ წერტილში.

11.44. აჩვენეთ, რომ $y=e^{kx}\sin mx$ წირის $y=e^{kx}$ და $y=-e^{kx}$ წირებთან საერთო ყოველი წერტილი მათი შეხების წერტილია.

11.45. მატერიალური წერტილის OX ღერძის გასწვრივ მოძრაობის განტოლებას აქვს სახე

$$x=3t-t^3.$$

იპოვეთ სიჩქარე დროის $t_0=0$, $t_1=1$ და $t_2=2$ მომენტში.

11.46. სხეული მოძრაობს წრფივად ისე, რომ მოძრაობის საწყისი წერტილიდან მისი დაშორება დროის ყოველ t მომენტში გამოითვლება ფორმულით

$$s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

იპოვეთ:

1) დროის რა მომენტში იმყოფებოდა სხეული საწყის წერტილში?

2) დროის რა მომენტში იყო სხეულის სიჩქარე ნულის ტოლი.

11.47. 3 კგ მასის სხეული მოძრაობს წრფივად შემდეგი კანონით $s = 1 + t + t^2$. s გამოსახულია სანტიმეტრებში, t — წამებში. განსაზღვრეთ სხეულის კინეტიკური ენერგია $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ მოძრაობის დაწყებიდან 5 წმ-ის შემდეგ.

11.48. ბორბლის შემობრუნების კუთხის დროზე დამოკიდებულება გამოისახება ფუნქციით $\varphi = t^2 + 3t - 5$. იპოვეთ კუთხური სიჩქარე დროის $t = 5$ მომენტში.

11.49. ბორბალი ბრუნავს ისე, რომ შემობრუნების კუთხე დროის კვადრატის პირდაპირპროპორციულია. პირველი ბრუნი შესრულდა 8 წმ-ში. იპოვეთ ბორბლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე დროის $t = 64$ წმ მომენტში.

11.50. ბრუნვის დაწყებიდან t დროში ბორბლის შემობრუნების φ კუთხე გამოისახება ტოლობით $\varphi = at^2 - bt + c$, სადაც a, b, c — დადებითი რიცხვებია. იპოვეთ ბორბლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. დროის რა მომენტში იქნება კუთხური სიჩქარე ნულის ტოლი?

11.51. წერტილი მოძრაობს $y = 8x - x^2$ პარაბოლაზე ისე, რომ მისი აბსცისა იცვლება კანონით $x = \sqrt{t}$ (x იზომება მეტრებში, t — წამებში). იპოვეთ წერტილის ორდინატის სიჩქარე მოძრაობის დაწყებიდან 9 წმ-ის შემდეგ.

11.52. OX ღერძზე მოძრაობს ორი სხეული, რომელთა მოძრაობის კანონებია $x = 100 + 5t$ და $x = \frac{1}{2}t^2$. (x იზომება მეტრებში, t — წამებში, $t \geqslant 0$). რა სიჩქარით სცილდებიან ერთმანეთს ეს სხეულები შეხვედრის მომენტში.

11.53. ჰორიზონტისადმი α კუთხით V_0 საწყისი სიჩქარით გასროლილი სხეულის მოძრაობის კანონს აქვს სახე (ჰაერის წინააღმდეგობა არ არის გათვალისწინებული)

$$x = V_0 t \cos\alpha, \quad y = V_0 t \sin\alpha - \frac{g t^2}{2},$$

სადაც t დროა, g — სიმძიმის ძალის აჩქარება. განსაზღვრეთ სიჩქარის ვექტორის კოორდინატები და სიჩქარის სიდიდე.

11.54. დედამიწის თანამგზავრის r დაშორება დედამიწის ცენტრიდან გამოითვლება ფორმულით

$$r = a\left(1 - \varepsilon\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{T} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\cos\frac{4\pi(t-t^0)}{T} - 1\right)\right),$$

სადაც t — დროა, a — ელიფსური ორბიტის დიდი ნახევარღერძია, ε — მისი ექსცენტრისიტეტი, T — ბრუნვის პერიოდი, t_0 არის პერიგეაზე გავლის დრო. იპოვეთ r მანძილის ცვლილების სიჩქარის სიდიდე (თანამგზავრის ე. წ. რადიალური სიჩქარე).

11.55. გამტარის განივკვეთში გასული q მუხტის სიდიდე იცვლება $q = 3t^2 + 2t$ კანონით. იპოვეთ დენის ძალა მე-5 წამის ბოლოს (q იზომება კულონებში, t — წამებში).

11.56. სითბოს ის რაოდენობა, რომელიც საჭიროა 1 კგ წყლის O_0c-დან $t^\circ c$-მდე გასათბობად, გამოითვლება ფორმულით

$$Q = t + 2\cdot 10^{-5} t^2 + 3\cdot 10^{-7}\cdot t^3.$$

იპოვეთ წყლის კუთრი სითბოტევადობა, როცა $t = 100^\circ c$.

§ 12. როლის, ლაგრანჟის და კოშის თეორემები

12.1. შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა როლის თეორემის პირობებს მითითებულ შუალედში შემდეგი ფუნქციები:

1) $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10, \quad [-1;\ 2]$;

2) $y = x^2 + 3x - 1, \quad [0;\ 1]$;

3) $y = \ln\sin x, \quad \left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$;

4) $y = (x-1)(x-2)(x-3), \quad [1;\ 3]$;

5) $y = \operatorname{tg} x, \quad [0,\ \pi]$; 6) $y = |x|, \quad [-a;\ a]$;

7) $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}, \quad [-1;\ 1]$; 8) $y = \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}; \quad [1; 2]$;

12.2. აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში აკმაყოფილებს როლის თეორემის პირობებს. იპოვეთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილი, რომელზედაც გავლებული მხები აბსცისთა ღერძის პარალელურია:

1) $f(x)=x-x^3$, $[-1;\ 0]$ და $[0;\ 1]$;

2) $f(x)=(x^2-1)(x-2)$; $[-1;\ 1]$ და $[1;\ 2]$;

12.3. აჩვენეთ, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ორ ნამდვილ ფესვს შორის არსებობს მისი წარმოებულის ნამდვილი ფესვი.

12.4. ვთქვათ $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $(a_0\neq 0)$, სადაც a_k $(k=0, 1, \dots, n)$ ნამდვილი რიცხვებია. აჩვენეთ, რომ თუ $P_n(x)$ მრავალწევრის ყველა ფესვი ნამდვილია, მაშინ $P_n'(x)$, $P_n''(x)$, ..., $P_n^{(n-1)}(x)$ მრავალწევრებსაც აქვთ მხოლოდ ნამდვილი ფესვები.

12.5. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქცია n-ჯერ დიფერენცირებადია $[a, b]$ სეგმენტზე. აჩვენეთ, რომ თუ $f(x)$ ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობებს $n+1$ წერტილში, მაშინ არსებობს წერტილი $c\in\,]a, b[$ ისეთი, რომ $f^{(n)}(c)=0$.

12.6. ვთქვათ $f(x)=1+x^m(x-1)^n$, სადაც $m, n\in N$. აჩვენეთ, რომ $f'(x)=0$ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი მაინც $]0;\ 1[$ ინტერვალში.

12.7. დაადგინეთ, რამდენი ნამდვილი ფესვი აქვს $f'(x)=0$ განტოლებას და მიუთითეთ ინტერვალები, რომლებშიც მდებარეობენ ამ განტოლების ფესვები, თუ

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

12.8. დაამტკიცეთ, რომ თუ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x=0$ განტოლებას აქვს დადებითი $x=x_0$ ფესვი, მაშინ

$$n\,a_0\,x^{n-1}+(n-1)\,a_1\,x^{n-2}+\dots+a_{n-1}=0$$

განტოლებასაც აქვს დადებითი ფესვი, რომელიც ნაკლებია x_0-ზე.

12.9. აჩვენეთ, რომ $x^3-3x+c=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი სხვადასხვა ფესვი $]0;\ 1[$ ინტერვალში.

12.10. აჩვენეთ, რომ $x^n+px+q=0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორზე მეტი ნამდვილი ფესვი, როცა n ლუწია და სამზე მეტი ფესვი, როცა n კენტია.

12.11. დაამტკიცეთ, რომ $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x - a_n = 0$ განტოლებას, სადაც $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $a_n > 0$, აქვს მხოლოდ ერთი დადებითი ფესვი.

დამტკიცება. ვთქვათ $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x - a_n$. შევნიშნოთ, რომ $f(0) = -a_n < 0$. თუ ავიღებთ $x = a > \sqrt[n]{a_n}$, მაშინ $f(a) > 0$. ამიტომ სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციის თვისების ძალით $]0, a[$ ინტერვალში არსებობს ერთი მაინც x_0 წერტილი ისეთი, რომ $f(x_0) = 0$. რადგანაც $f'(x) = a^n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} > 0$, როცა $x > 0$, ამიტომ x_0 არის მოცემული განტოლების ერთადერთი დადებითი ამონახსნი, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში $f'(x)$ მრავალწევრსაც ექნებოდა დადებითი ფესვი (იხ. ამოცანა 12.3), რაც შეუძლებელია.

მაგალითად, $x^3 + px - q = 0$ განტოლებას ნებისმიერი $p > 0$ და $q > 0$ რიცხვებისათვის აქვს ერთადერთი დადებითი ფესვი.

12.12. ვთქვათ, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k - (a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n)$, სადაც $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. აჩვენეთ, რომ $f(x) = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ერთზე მეტი დადებითი ფესვი.

დამტკიცება. ვთქვათ

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^k} = \frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{x} + a_k -$$

$$- (a_{k+1} x + \cdots + a_n x^{n-k}).$$

ცხადია, $\varphi(x)$ და $f(x)$ ფუნქციებს აქვს ერთი და იგივე ნულისაგან განსხვავებული ფესვები. დავუშვათ, $f(x)$-ს აქვს ორი დადებითი x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ ფესვი. მაშინ $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. ამიტომ როლის თეორემის ძალით არსებობს $c > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\varphi'(c) = -\frac{k a_0}{c^{k+1}} - \frac{(k-1) a_1}{c^k} - \cdots - \frac{a_{k-1}}{c^2} -$$

$$- [a_{k+1} + 2 a_{k+2} c + \cdots + (n-k) a_n c^{n-k-1}] = 0,$$

რაც შეუძლებელია.

ე. ი. $f(x) = 0$ განტოლებას არ შეიძლება ჰქონდეს ორი დადებითი ფესვი.

მაგალითად, $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$ განტოლებას აქვს ერთადართი ნამდვილი ფესვი (შეამოწმეთ!).

12.13. ვთქვათ $f(x)$ ფუნქციას $]a, b[$ ინტერვალში აქვს სასრული წარმოებული და $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to b-} f(x) = A$. აჩვენეთ, რომ $]a, b[$ ინტერვალში არსებობს წერტილი c ისეთი, რომ $f'(c)=0$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ფუნქცია

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{თუ} \quad x \in]a, b[, \\ A, & \text{თუ} \quad x = a \quad \text{და} \quad x = b. \end{cases}$$

12.14. აჩვენეთ, რომ

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$$

ლეჟანდრის მრავალწევრის ყველა ფესვი ნამდვილია და მოთავსებულია $]-1; 1[$ ინტერვალში.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. $u_n(x) = (x^2 - 1)^n$ მრავალწევრს $[-1; 1]$ სეგმენტზე გააჩნია $2n$ ნამდვილი ფესვი — $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n} = -1$. თანახმად 12.4 ამოცანისა $P_n(x)$ მრავალწევრს გააჩნია n ნამდვილი ფესვი, რომლებიც როლის თეორემის ძალით მდებარეობენ $]-1; 1[$ ინტერვალში.

12.15. აჩვენეთ, რომ

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

ჩებიშევ — ლაგერის მრავალწევრის ყველა ფესვი დადებითია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ფუნქცია $\varphi(x) = x^n e^{-x}$. რადგან $\varphi(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, ამიტომ 12.13 ამოცანის ძალით არსებობს $c_1 \in]0; +\infty[$ ისეთი, რომ $\varphi'(c_1) = 0$. ცხადია $\varphi'(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$. ამიტომ არსებობს $c_2 \in]0; c_1[$ და $c_3 \in]c_1; +\infty[$ ისეთი, რომ $\varphi''(c_2) = \varphi''(c_3) = 0$ და ა. შ.

12.16. აჩვენეთ, რომ

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

ჩებიშევ — ერმიტის მრავალწევრის ყველა ფესვი დადებითია.

მ ი თ ი თ ე ბ ა. განიხილეთ ფუნქცია $u(x) = e^{-x^2}$ ცხადია, რომ $\lim\limits_{x\to\infty} u^{(k)}(x) = 0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\dots,n)$, ამიტომ $u^{(k)}(x) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს 12. 13 ამოცანის პირობებს $]-\infty;\ +\infty[$ ინტერვალზე. შემდგომი დამტკიცება ჩაატარეთ ისევე, როგორც 12. 15 ამოცანის დამტკიცება.

12.17. შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა ლაგრანჟის თეორემის პირობებს მითითებულ შუალედში შემდეგი ფუნქციები:

1) $y = \ln x,\quad [1;\ e]$; 2) $y = \dfrac{1}{x},\quad [a,\ b],\quad ab < 0$;

3) $y = \dfrac{x+1}{x},\quad \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\right]$; 4) $y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{თუ } x \neq 0, \\ 0 & \text{თუ } x = 0, \end{cases} [-1;\ 1]$.

12.18. აჩვენეთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია მითითებულ შუალედში აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს. იპოვეთ ამ ფუნქციის გრაფიკზე წერტილები, რომელზედაც გავლებული მხებები გრაფიკის კიდურა წერტილების შემაერთებელი ქორდის პარალელურია:

1) $y = x^2,\quad [1;\ 3]$; 2) $y = x + \dfrac{1}{x},\quad \left[\dfrac{1}{2};\ 2\right]$;

3) $y = \operatorname{arctg} x,\quad [0;\ 1]$; 4) $y = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2}, & \text{თუ } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{თუ } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

12.19. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f'(x) = 0,\ x \in\ ]a;\ b[$, მაშინ $f(x) = \text{const}$, $x \in\ ]a, b[$.

12.20. დაამტკიცეთ, რომ $f'(x) = k$, $(x \in\ ]-\infty;\ +\infty[\ )$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $f(x)$ არის წრფივი ფუნქცია:

$$f(x) = kx + b.$$

12.21. რა შეიძლება ითქვას $f(x)$ ფუნქციის შესახებ, თუ $f^{(n)}(x) = 0$?

12.22. ლაგრანჟის თეორემის გამოყენებით დაამტკიცეთ უტოლობები:

1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$; 2) $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{a-b}{b}$, თუ $0 < b \leqslant a$;

3) $n y^{n-1}(x-y) \leqslant x^n - y^n \leqslant n x^{n-1}(x-y)$, თუ $0<y<x$ და $n>1$;

4) $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$, თუ $0<\beta\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$;

5) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, როცა $x>0$;

6) $e^x > 1+x$, როცა $x\in R$;

მითითება: 2) ლაგრანჟის თეორემის ძალით

$$\ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a-b), \quad b<\xi<a;$$

3) $x^n - y^n = n\xi^{n-1}(x-y), \quad y<\xi<x, \quad n>1$;

4) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\cos^2\xi}(\alpha-\beta), \quad \beta<\xi<\alpha$;

5) $\ln(1+x) = \frac{x}{1+\xi}, \quad 1<\xi<x.$

12.23. ვთქვათ $\varphi(x)$ და $g(x)$ n-ჯერ დიფერენცირებადი ფუნქციებია და აკმაყოფილებენ პირობებს:

1) $\varphi^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad (k=0, 1, \dots, n-1)$;

2) $\varphi^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$, როცა $x>x_0$;

დაამტკიცეთ, რომ $\varphi(x)>g(x)$, როცა $x>x_0$.

მითითება: განვიხილოთ ფუნქცია $f(x)=\varphi(x)-g(x)$. ცხადია, რომ $f^{(n-1)}(x)=\varphi^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)$ აკმაყოფილებს ლაგრანჟის თეორემის პირობებს $[x_0, x]$ სეგმენტზე. ამიტომ $f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(\xi)(x-x_0)$, $x_0<\xi<x$. აქედან $f^{(n-1)}(x)>0$ $(x>x_0)$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $f^{(n-2)}(x)>0$, როცა $x>x_0$ და ა. შ.

12.24. ამოცანა 12.23-ის გამოყენებით დაამტკიცეთ შემდეგი უტოლობები:

1) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, როცა $x>0$;

2) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$, როცა $x>0$;

3) $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, როცა $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

4) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$, როცა $x > 0$, $y > 0$ და $0 < \alpha < \beta$;

5) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$, როცა $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

6) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, როცა $n > 1$, $x > a > 0$;

7) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$.

მითითება. 1) ვთქვათ $\varphi(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \ln(1+x)$,

$\psi(x) = x$, $x > 0$. ცხადია, რომ $\varphi(0) = g(0) = \psi(0)$ და $\varphi'(x) < g'(x) < \psi'(x)$, $x > 0$. ამიტომ ამოცანა 12.23-ის ძალით $\varphi(x) < g(x) < \psi(x)$, $x > 0$.

2) ფუნქციებისათვის $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$, $g(x) = \sin x$, $\psi(x) = x$,

$x > 0$ გამოიყენეთ ზემოთ ჩატარებული მსჯელობა.

3) ფუნქციებისათვის $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$, როცა $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ გამოიყენეთ ამოცანა 12.23.

4) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + x^\beta)^{1/\beta}$ უტოლობა ნებისმიერი ფიქსირებული $x > 0$, $y > 0$ და $0 < \alpha < \beta$-სათვის ექვივალენტურია უტოლობის $\left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha + 1\right)^{1/\alpha} > \left(\left(\dfrac{x}{y}\right)^\beta + 1\right)^{1/\beta}$. დავუშვათ $\dfrac{x}{y} = t$. განვიხილოთ ფუნქცია $\varphi(z) = (t^z + 1)^{1/z}$, როცა $0 < z < +\infty$. ცხადია, რომ

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2(1+t^z)} \ln \frac{(t^z)^{t^z}}{(1+t^z)^{1+t^z}},$$

უარყოფითია. როცა $0 < z < +\infty$. ე. ი. $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$, როცა $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

7) ვთქვათ $\varphi(x) = 1 + 2\ln x$, $g(x) = x^2$. ცხადია $\varphi(1) = g(1)$ და $\varphi'(x) < g'(x)$, როცა $x > 1$. ამიტომ ამოცანა 12.23-ის ძალით $\varphi(x) < g(x)$, როცა $x > 1$. ახლა ვთქვათ $0 < x < 1$. დავუშვათ $t = \dfrac{1}{x}$, $1 < t < +\infty$, მაშინ $\varphi(x) = 1 - 2\ln t = \varphi_1(t)$;

$g(x) = \dfrac{1}{t^2} = g_1(t)$. ცხადია $\varphi_1(1) = g_1(1)$, ხოლო $\varphi_1'(t) <$

$< g_1'(t)$, როცა $1 < t < +\infty$. ე. ი. $\varphi(x) < g(x)$, როცა $0 < x < +\infty$.

12.25. დაამტკიცეთ, რომ თუ $[x, x+nh]$ სეგმენტზე $f(x)$ ფუნქციას აქვს n-ური რიგის $f^{(n)}(x)$ წარმოებული, მაშინ არსებობს ისეთი θ, $0<\theta<1$, რომ

$$\Delta^n f(x) = h^n f^{(n)}(x+\theta nh),$$

სადაც

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f[x+(n-k)h] \text{ (*}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. როცა $n=1$ დასამტკიცებელი დებულება არის ლაგრანჟის თეორემა სასრული ნაზრდის შესახებ და, მაშასადამე დასამტკიცებელი ფორმულა მართებულია. ახლა ვთქვათ, როცა $k<n$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$\Delta^k f(x) = h^k f^{(k)}(x+\theta' kh), \quad 0<\theta'<1.$$

აქედან გვაქვს

$$\Delta^{k+1} f(x) = \Delta^k(\Delta f(x)) = \Delta^k[f(x+h)-f(x)] =$$
$$= h^k[f^k(x+h+\theta' kh) - f^{(k)}(x+\theta' kh)].$$

ამ ტოლობიდან ლაგრანჟის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\Delta^{k+1} f(x) = h^{k+1} f^{(k+1)}(x+\theta' kh+\theta'' h), \; 0<\theta''<1.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\frac{\theta' k+\theta''}{k+1} = \theta, \quad 0<\theta<1,$$

მაშინ

$$\Delta^{k+1} f(x) = h^{k+1} f[x+\theta(k+1)h].$$

ამრიგად, დავადგინეთ, რომ თუ დებულება მართებულია k-თვის, მაშინ იგი მართებულია $(k+1)$-თვისაც და ამით დებულება დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ $f^{(n)}(x)$ უწყვეტია, მაშინ

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

---

* $\Delta^n f(x)$-ს ეწოდება $f(x)$ ფუნქციის n-ური რიგის სხვაობა.

12.26. შეამოწმეთ, აკმაყოფილებს თუ არა კოშის თეორემის პირობებს მითითებულ შუალედში შემდეგი ფუნქციები:

1) $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = x^3$, $[-1;\ 1]$;

2) $f(x) = x^3$, $\varphi(x) = x^2 + 1$, $[1;\ 2]$;

3) $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = x + \cos x$, $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = x^3$, $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

12.27. შემდეგი ფუნქციებისათვის შეამოწმეთ კოშის თეორემის პირობები და დაწერეთ კოშის ფორმულა:

1) $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \ln x$, $[a;\ b]$, $0 < a < b$;

2) $f(x) = e^{2x}$, $\varphi(x) = 1 + e^x$, $[a;\ b]$.

§ 13. ლოპიტალის წესი

გამოთვალეთ ზღვარი (№№ 13.1—13.32)

I. $\frac{0}{0}$ სახის განუსაზღვრელობა

13.1.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt[3]{x+2} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{6}}$; 4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

13.2.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{5^x - 2^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cdot 7^x - 4^x - 3^x}{\ln(1-x)}$.

13.3.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x + 2^x - 2^{x+1}}{\ln(1+\sin x)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

13.4.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{x^2 + x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$, $(b > 0)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{x^2}$.

13.5.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$,

13.6.

1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{\ln(1+x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$.

13.7.

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$ $(\beta \neq 0)$; 2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^a - a^a}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$.

13.8.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a + x)^x - a^x}{x^2}$.

13.9.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x^2}{x\cos x - \sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2x}{x - \sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3(1 + x)}$.

II. $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუსაზღვრელობა

13.10.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

13.11.

1) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln\sin\alpha x}{\ln\sin x}$ $(\alpha>0)$;

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ $(x>a)$.

13.12.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} x\pi}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{3+\ln x}{2-3\ln\sin x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\ln\ln x}{\sqrt[3]{2x+3\sqrt{\ln x}}}$.

13.13.

1) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^{x-2}-1)+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+}\dfrac{\ln\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1-\cos x)}{\ln\operatorname{tg} x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(e^x-4)}{\ln(3e^x+2)}$.

13.14.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^\alpha x}{x^\beta}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha\ln^\beta x}{e^{\gamma x}}$.

III. 0. ∞ სახის განუსაზღვრელობა

13.15.

1) $\lim\limits_{x\to 0+} x^3 \ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to 2+} (x-2)\ln(x-2)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin 5x \cdot \ln 3x$; 4) $\lim\limits_{x\to 4} \ln(5-x)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$.

13.16.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; 2) $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln \operatorname{tg} x$; 4) $\lim\limits_{x\to 1+} \cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot \ln(1-x)$.

13.17.

1) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin\dfrac{a}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} x \ln\cos\dfrac{1}{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \sin\dfrac{a}{x^\beta}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \ln\cos\dfrac{1}{x^\beta}$.

13.18.

1) $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to \infty} x(e^{1/x}-1)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln^\beta\dfrac{1}{x}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

13.19.

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x})\sqrt{x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

IV. ∞—∞ სახის განუსაზღვრელობა

13.20.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

13.21.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

13.22.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{x^2}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{8/9}-x^{7/8}\ln^2 x)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(e^x+1)}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

13.23.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\alpha}{1-x^\alpha}-\frac{\beta}{1-x^\beta}\right)$, $\alpha\beta\neq 0$, $\alpha\neq\beta$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\frac{1}{x}\right]$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: 4)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\left(1+\frac{\ln(1+xe^{-x})}{x}\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1})=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+t+t^2+t^3}-\sqrt{1+t+t^2}}{t}.$$

V. 1^∞, 0^0, ∞^0 სახის განუსაზღვრელობები

13.24.

1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,x\right)^{x}$.

13.25.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

13.26.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}\,x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{th}\,x)^x$.

13.27.

1) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1-}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$,

13.28.

1) $\lim\limits_{x\to 0+}(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\ln x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln \mathrm{sh}\,x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{x^x-1}$.

მითითება: 4)

$$\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = \lim_{x\to 0+} e^{(x^x-1)\ln x} = \lim_{x\to 0+} e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 0+} e^{x\ln^2 x\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln^2 x\,\cdot\,\lim\limits_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}} = 1.$$

13.29.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2/x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{1/x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

13.30.

1) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2+3^x)^{1/x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-a^2)^{\frac{1}{\ln x}}$.

13.31.

1) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\log_3 (x^2-2x+3))^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0+} |\ln x|^{2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

13.32.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln (x+\sqrt{x^2+1})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

მითითება.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln (x+\sqrt{x^2+1})}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\ln (x+\sqrt{x^2+1})}{x}\right)}{x^2}}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}}{x^2}}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right] =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left[(x+a)^{1/x}\left(\frac{a}{x}+1\right) - x^{\frac{1}{x+a}}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{1/x} \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{x^{\frac{a}{x(x+a)}}}\right] =$$

$$= \lim_{t\to0+} \frac{(1+at)^{t+1} - t^{\frac{at^2}{1+at}}}{t} = \lim_{t\to0+}\left[(1+at)^{t+1}\left(\ln(1+at)+a\frac{t+1}{at+1}\right) - \right.$$

$$\left. - t^{\frac{at^2}{1+at}}\left(2at\ln(1+at) + \frac{a^2t^2}{1+at}\right)\right] = a.$$

13.33. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია ორჯერ წარმოებადია, მაშინ

$$f''(x) = \lim_{t\to0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლოპიტალის წესის ძალით

$$\lim_{t\to0} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2} = \lim_{t\to0} \frac{f'(x+t)-f'(x-t)}{2t} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left[\frac{f'(x+t)-f'(x)}{t} + \frac{f'(x-t)-f'(x)}{-t}\right] = f''(x).$$

13.34. დაამტკიცეთ, რომ თუ $f(x)$ ფუნქცია სამჯერ წარმოებადია, მაშინ

$$f'''(x) = \lim_{t\to0} \frac{f(x+3t)-3f(x+2t)+3f(x+t)-f(x)}{t^3}.$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ლოპიტალის წესის ძალით

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+3t)-3f(x+2t)+3f(x+t)-f(x)}{t^3}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3f'(x+3t)-6f'(x+2t)+3f'(x+t)}{3t^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3f''(x+3t)-4f''(x+2t)+f''(x+t)}{2t}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left[3\,\frac{f''(x+3t)-f''(x+2t)}{t}-\frac{f''(x+2t)-f''(x+t)}{t}\right]=f'''(x).$$

18.35. იპოვეთ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & \text{როცა}\quad x=0\end{cases}$$

ფუნქციის წარმოებული $x=0$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ლოპიტალის წესის ძალით

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{1}{2}.$$

წარმოებულის განსაზღვრის ძალით

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-1-e^x-xe^x}{4x(e^x-1)+2x^2e^x}=\lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{4(e^x-1)+8xe^x+2x^2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x-xe^x}{12e^x+12xe^x+2x^2e^x}=-\frac{1}{12}.$$

18.36. გამოიკვლიეთ ლოპიტალის წესის გამოყენების შესაძლებლობა შემდეგ მაგალითებზე:

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$; 2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2+2x+\sin 2x}{(2x+\sin 2x)e^{\sin x}}$.

§ 14. ტეილორის ფორმულა და მისი ზოგიერთი გამოყენება

14.1. გაშალეთ $p(x)$ მრავალწევრი $x-a$ სხვაობის მთელ დადებით ხარისხებად:

1) $P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4, \quad a = 4;$

2) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5, \quad a = 2;$

3) $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1, \quad a = -1;$

4) $P(x) = x^{10} - 3x^5 + 1, \quad a = 1.$

14.2. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით x_0 წერტილში და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ ლაგრანჟის სახით:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = -1;$ 2) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4;$

3) $f(x) = x e^x, \quad x_0 = 0;$ 4) $f(x) = x^3 \ln x, \quad x_0 = 1.$

14.3. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ პეანოს სახით:

1) $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right);$ 2) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x+2};$

3) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3};$ 4) $f(x) = \ln(5-4x).$

14.4. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით x_0 წერტილში და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ პეანოს სახით:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x_0 = 2;$ 2) $f(x) = \sin(2x-3), \quad x_0 = 1;$

3) $f(x) = x e^{2x}, \quad x_0 = -1;$ 4) $f(x) = (x^2-1) e^{2x}, \quad x_0 = -1.$

14.5. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით x_0 წერტილში n რიგამდე და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ ლაგრანჟის სახით:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}, \quad x_0 = 2, \quad n = 3;$ 2) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = 0, \quad n = 2;$

3) $f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = 0, \quad n = 3;$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3.$

14.6. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია ტეილორის ფორმულით x_0 წერტილში n რიგამდე და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ პეანოს სახით:

1) $f(x) = e^{x^2+x-1}$, $\quad x_0 = -1$, $\quad n = 6$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$, $\quad x_0 = 1$, $\quad n = 6$

3) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$, $\quad x_0 = 1$, $\quad n = 8$;

4) $f(x) = 2^{x-x^2}$, $\quad x_0 = \dfrac{1}{2}$, $\quad n = 7$.

14.7. გაშალეთ $f(x)$ ფუნქცია მაკლორენის ფორმულით n რიგამდე და ნაშთითი წევრი ჩაწერეთ პეანოს სახით:

1) $f(x) = (x+5)\,e^{2x}$, $\quad n = 3$; $\qquad$ 2) $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{2-x}$, $\quad n = 2$;

3) $f(x) = e^x \ln(1+x)$, $\quad n = 4$; $\qquad$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-3x^2-4}$, $\quad n = 3$;

5) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $\quad n = 6$; $\qquad$ 6) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+\sin x}$, $\quad n = 6$.

14.8. გამოთვალეთ ε სიზუსტით;

1) $\sin 1^\circ$, $\quad \varepsilon = 10^{-8}$; $\qquad$ 2) $\cos 9^\circ$, $\quad \varepsilon = 10^{-5}$;

3) $\sqrt{5}$; $\quad \varepsilon = 10^{-4}$; $\qquad$ 4) $\lg 11$; $\quad \varepsilon = 10^{-5}$.

14.9. გამოთვალეთ ზღვარი (№№ 14.9—14.10):

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}$;

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{x^2}{2}}{\ln\dfrac{1+x}{1-x} - 2x}$;

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - x + \dfrac{1}{6}x^3}{x - \operatorname{th} x}$;

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left[\cos(x e^x) - \ln(1-x) - x\right]^{\operatorname{ctg} x^3}$

14.10.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{x+\sin x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x\cdot \operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x\cdot \arcsin x}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[3]{1+3x+\frac{9}{2}x^2}}{x^3}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$.

§ 15. ფუნქციის ზრდადობა და კლებადობა, ექსტრემუმი, უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობა

იპოვეთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები (№№ 15.1—15.9):

15.1.

1) $y=x^3-3x^2-9x+14$; 2) $y=x^4-2x^2-5$;

3) $y=x^3-6x^2+15x-2$; 4) $y=2-3x-6x^2-5x^3$.

15.2.

1) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; 2) $y=(x-1)^3(2x+3)^2$;

3) $y=x^2(x-12)^2$; 4) $y=(x-2)^5(2x+1)^4$,

15.3.

1) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{2x^2-1}{x^4}$;

3) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$; 4) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

15.4.

1) $y=x\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=\sqrt{8x^2-x^4}$;

3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+50}$; 4) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

15.5.

1) $y=x-e^x$; 2) $y=x^2e^{-x}$;

3) $y=2e^{x^2-4x}$; 4) $y=\dfrac{e^x}{x}$.

15.6.

1) $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$; 2) $y = \dfrac{x^4 e^x}{3^x}$;

3) $y = x^7 e^{-x^2+5x}$; 4) $y = (x-1)^3 e^{-1,5(x-1)^2}$.

15.7.

1) $y = x \ln x$; 2) $y = \dfrac{1}{2} x \ln x - x \ln 2$;

3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 4) $y = x^2 - \ln x^2$.

15.8.

1) $y = x + \sin x$; 2) $y = x - 2 \sin x$;

3) $y = 2 \sin x + \cos 2x$; 4) $y = x + |\sin 2x|$.

15.9.

1) $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$; 2) $y = e^x \cos x$;

3) $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$;

4) $y = \begin{cases} x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin \ln x\right), & \text{როცა} \quad x > 0, \\ 0, & \text{როცა} \quad x = 0. \end{cases}$

იპოვეთ ფუნქციის ექსტრემუმი (№№ 15.10—15.21):

15.10.

1) $y = 2x^3 - 3x^2$; 2) $y = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 7$;

3) $y = x^4 - 8x^2 + 12$; 4) $y = (x+2)^2 (x-3)^3$.

15.11.

1) $y = 3x^4 - 4x^3$; 2) $y = (x^3 - 10)(x+5)^2$;

3) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}$; 4) $y = 3x + \dfrac{12}{x}$.

15.12.

1) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;

3) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$; 4) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$.

15.13.

1) $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; 2) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$;

3) $y = \dfrac{(2-x)^3}{(3-x)^2}$; 4) $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$.

15.14.

1) $y = x\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = 2\sqrt{x} - x$;

3) $y = \dfrac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$; 4) $y = (x-5)^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

15.15.

1) $y = \sqrt[3]{x^3-3x^2+64}$; 2) $y = -x^2\sqrt{x^2+2}$;

3) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$; 4) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

15.16.

1) $y = xe^x$; 2) $y = x^2e^{-x}$;

3) $y = \dfrac{e^x}{x}$; 4) $y = 2e^x + e^{-x}$.

15.17.

1) $y = x^4(0,2)^{5x}$; 2) $y = x^2(0,3)^{6x}$;

3) $y = x^7e^{-x^2+5x}$; 4) $y = (x-1)^3e^{-1,5(x-1)^2}$.

15.18.

1) $y = x - \ln(1+x)$; 2) $y = x\ln x$;

3) $y = x\ln^2 x$; 4) $y = x - \ln(1+x^2)$.

15.19.

1) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$; 2) $y = 2\sin 2x + \sin 4x$;

3) $y = \dfrac{10}{1+\sin^2 x}$; 4) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

15.20.

1) $y = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$; 2) $y = x + \sin x$;

3) $y = x - 2\sin^2 x$; 4) $y = \ln\cos x - \cos x$.

15.21.

1) $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$; 2) $y = (x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{\pi}{4}x^2 - x$;

3) $y = \mathrm{arctg}\,x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; 4) $y = e^{x\sin x}$;

5) $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{როცა } x \neq 0; \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} |x|\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right), & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0. \end{cases}$

იპოვეთ ფუნქციის უმცირესი და უდიდესი მნიშვნელობა მითითებულ შუალედში (№№ 15.22—15.31):

15.22.

1) $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + 1$, $[-2;\ 4]$;

2) $y = \frac{3}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 1$, $[-4;\ 2]$;

3) $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$, $[-3;\ 0]$; 4) $y = \frac{3x}{x^2 + 4x + 4}$, $[0;\ 3]$.

15.23.

1) $y = \frac{5}{x} + \frac{x}{5}$, $[1;\ 7]$; 2) $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x-1}$, $[-3;\ 0]$;

3) $y = x + \frac{8}{x^4}$, $[-2;\ -1]$; 4) $y = x + \frac{4}{(x+2)^2}$, $[0;\ 5]$.

15.24.

1) $y = \sqrt{x(10 - x)}$, $[0,\ 10]$; 2) $y = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6;\ 8]$;

3) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0;\ 3]$; 4) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$, $[0;\ 1]$.

15.25.

1) $y = x - 2\ln x + 3{,}5$, $[1;\ e]$; 2) $y = \frac{1}{\ln 3}x\ln x + x$, $[1;\ 3]$;

3) $y = x^2\ln x$, $[1;\ e]$; 4) $y = \ln\left(1 + \sqrt{|x|(x+1)^2}\right)$, $[-2;\ 1]$.

15.26.

1) $y = x^3 - |x^2 + x - 6|$, $[0;\ 3]$;

2) $y = -x^3 + |x^2 + x - 12|$, $\left[\frac{1}{2},\ 4\right]$;

3) $y = 2|x^3 - 6x|$, $[1;\ \sqrt{7}]$;

4) $y = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$, $[-2{,}5;\ -0{,}5]$.

15.27.

1) $y = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x, \quad \left[\frac{1}{2};\ 4\right]$;

2) $y = |x^2 + x - 2| - \ln\frac{1}{x}, \quad \left[\frac{1}{2};\ 2\right]$;

3) $y = (x-3)\,e^{|x+1|}, \quad [-2;\ 4]$;

4) $y = e^{\sqrt{x^2|x+1|}}, \quad [-2;\ 1]$.

15.28.

1) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x, \quad \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $y = 18 - \sin x + \sqrt{3}\cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

3) $y = \cos 2x - 4\cos x + 3, \quad \left[0;\ \frac{3}{2}\pi\right]$;

4) $y = 2\sin x + \sin 2x, \quad \left[0;\ \frac{5}{4}\pi\right]$.

15.29.

1) $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, \quad \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $y = 5\sin^2 x + 3\cos 2x - 2x, \quad \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $y = \sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 2, \quad \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $y = 2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^2 x, \quad \left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

15.30.

1) $y = \cos^2 x + \sin x, \quad \left[\frac{\pi}{3};\ \pi\right]$;

2) $y = 4\sin^2 x + \cos 2x - 2x, \quad \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $y = (3 - x^2)\cos x + 2x\sin x, \quad [0;\ \pi]$;

4) $y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, \quad [\pi;\ 2\pi]$.

15.31.

1) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $\quad [0;\ 1]$;

2) $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$, $\quad]-\infty;\ +\infty[$;

3) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{|x|(1-x)^2}$, $\quad [-1;\ 2]$;

4) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2|1-x|}$, $\quad [-1;\ 2]$;

5) $y = \begin{cases} -x^2, & \text{როცა } x \leqslant 0, \\ 2ex\ln x, & \text{როცა } x > 0, \end{cases}$ $\quad [-1;\ 2]$;

5) $y = \begin{cases} 1+3x, & \text{როცა } x \leqslant 0, \\ (x)^{x^3}, & \text{როცა } x > 0, \end{cases}$ $\quad [-1;\ 2]$.

იპოვეთ $\inf f$ და $\sup f$ მითითებულ შუალედში (№№ 15.32; 15.33):

15.32.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$, $\ ]0;\ 1]$; $\qquad$ 2) $f(x) = \ln x - x$, $\ ]0;\ +\infty[$;

3) $f(x) = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $\quad \left]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[$;

4) $f(x) = (x^2+4)e^{-x^2}$, $\ ]0;\ +\infty[$.

15.33.

1) $f(x) = e^{-x^2}\cos x^2$, $\ ]-\infty;\ +\infty[$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$, $\quad]0;\ +\infty[$;

3) $f(x) = x + \left(\dfrac{2}{x-2}\right)^2$, $\quad \left]\dfrac{3}{2};\ 5\right[$;

4) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$, $\quad]a;\ +\infty[$, $\ a \in R$.

15.34. აჩვენეთ, რომ

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა } x \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x = 0 \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში გააჩნია მინიმუმი, თუმცა $f^{(n)}(0)=0$, $n\in N$.

15.35. აჩვენეთ, რომ

$$f(x)=\begin{cases} x\,e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0 \end{cases}$$

ფუნქციას $x=0$ წერტილში ექსტრემუმი არ გააჩნია, თუმცა $f^{(n)}(0)=0$, $n\in N$.

15.36. იპოვეთ $\min\limits_R f(x)$, თუ

$$f(x)=\max\{2|x|,\ |1+x|\}.$$

15.37. მოცემული a დადებითი რიცხვი დაშალეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი ნამრავლი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ამ შესაკრებების ნამრავლი, თუ $a=8$.

15.38. l სიგრძის მავთულისაგან დაამზადეთ ისეთი მართკუთხედი, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი. იპოვეთ ეს ფართობი, თუ $l=32$.

15.39. რიცხვი 24 დაშალეთ ისეთ ორ შესაკრებად, რომ მათი კუბების ჯამი იყოს უმცირესი. იპოვეთ ამ შესაკრებთაგან უდიდესი.

15.40. რიცხვი 81 დაშალეთ ისეთ ორ თანამამრავლად, რომ მათი კვადრატების ჯამი იყოს უმცირესი. იპოვეთ ამ თანამამრავლთა ჯამი.

15.41. რიცხვი 10 წარმოადგინეთ ორი ისეთი დადებითი შესაკრების სახით, რომელთა კვადრატების ჯამი უმცირესი იქნება.

15.42. იპოვეთ ისეთი a რიცხვი, რომ $4a-a^2$ სხვაობა იყოს უდიდესი.

15.43. იპოვეთ ისეთი დადებითი რიცხვი, რომ ამ რიცხვისა და მისი შებრუნებულის ჯამი იყოს უმცირესი.

15.44. იპოვეთ უდიდესი ფართობი R რადიუსიან წრეში ჩახაზული მართკუთხედისა $(R=3\sqrt{5})$.

15.45. ყველა იმ მართკუთხედებს შორის, რომელთა პერიმეტრია 36, იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის ფართობი.

15.46. $M(2;\ 4)$ წერტილზე გავლებული წრფის მონაკვეთი საკოორდინატო ღერძებთან $(x>0,\ y>0)$ ქმნის მართკუთხა სამკუთხედს. რას უნდა უდრიდეს კათეტების სიგრძეები, რომ სამკუთხედის ფართობი უდიდესი იყოს.

15.47. R რადიუსიან ნახევარწრეწირში ჩახაზული ყველა მართკუთხედიდან (მართკუთხედის ერთი გვერდი ნახევარწრის დიამეტრზე მდებარეობს) იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი.

15.48. მოცემული პერიმეტრის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედებიდან რომელს აქვს უდიდესი ფართობი?

15.49. დაამტკიცეთ, რომ ერთი და იმავე ჰიპოტენუზის მქონე ყველა მართკუთხა სამკუთხედიდან უდიდესი ფართობი ტოლფერდა სამკუთხედს აქვს.

15.50. $2\sqrt{2}$ სმ სიგრძის ფერდის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედებს შორის იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფუძის სიგრძე, რომლის ფართობიც უდიდესია.

15.51. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის სიგრძე 16 სმ-ია, ერთ-ერთი კუთხის სიდიდე კი $60°$. მასში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფუძე ჰიპოტენუზაზე ძევს. რა ზომის ფუძე უნდა ჰქონდეს ამ მართკუთხედს, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

15.52. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის სიგრძე 12 სმ-ია, ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხის სიდიდე კი $30°$. მასში ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფუძე ჰიპოტენუზაზე ძევს. რა სიგრძის უნდა იყოს მართკუთხედის ფუძე, რომ მისი ფართობი იყოს უდიდესი?

15.53. სამკუთხედში, რომლის ფუძეა a, ხოლო სიმაღლე h ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი ორი წვერო მდებარეობს ფუძეზე, ხოლო დანარჩენი ორი ფერდებზე. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის ფართობი.

15.54. ნახევარწრეში, რომლის რადიუსი $R = 14\sqrt{5}$ ჩახაზულია უდიდესი პერიმეტრის მქონე მართკუთხედი. იპოვეთ ამ მართკუთხედის დიდი გვერდის სიგრძე.

15.55. ნახევარწრეში, რომლის რადიუსია R ჩახაზულია უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

15.56. R რადიუსის მქონე წრიულ სეგმენტში, რომლის ცენტრალური კუთხეა α ჩახაზულია უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედი. იპოვეთ ამ მართკუთხედის მცირე გვერდის სიგრძე, თუ

$$R = 36\sqrt{5}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

15.57. იპოვეთ იმ უმცირესი მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც a სიგრძის გვერდის მქონე ტოლგვერდა სამკუთხედს ყოფს ორ ტოლდიდ ნაწილად.

15.58. იპოვეთ იმ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები, რომლის ფართობი უდიდესია იმ მართკუთხა სამკუთხედებს შორის, რომელთა ჰიპოტენუზისა და ერთ-ერთი კათეტის ჯამი მუდმივია.

15.59. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი, რომლის პერიმეტრი უმცირესია იმ ტოლფერდა ტრაპეციებს შორის, რომელთა ფართობია S და მახვილი კუთხე α.

15.60. იმ ტრაპეციებს შორის, რომელთა ფერდები და მცირე ფუძე a-ს ტოლია, იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე ტრაპეციის დიდი ფუძე.

15.61. R რადიუსიან წრეში ჩახაზულია ყველა შესაძლო ტრაპეცია, ისე, რომ წრეწირის ცენტრი ტრაპეციის შიგნითაა. ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძე $R\sqrt{3}$-ის ტოლია. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე ტრაპეციის ფერდი.

15.62. R რადიუსიან წრეში ჩახაზულია ყველა შესაძლო ტრაპეცია, ისე რომ ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძე წარმოადგენს დიამეტრს. იპოვეთ უდიდესი ფართობის მქონე ტრაპეციის კუთხეები.

15.63. AB ქორდა წრეწირის რადიუსის ტოლია, ხოლო AB-ს პარალელური CD ქორდა გავლებულია ისე, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი უდიდესია. იპოვეთ იმ უმცირესი რკალის გრადუსული ზომა, რომელიც CD ქორდითაა მოჭიმული.

15.64. იპოვეთ უმცირესი მანძილი $M(2; 0)$ წერტილიდან $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}\,(x-2)}$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილებამდე.

15.65. იპოვეთ უმცირესი მანძილი $M\ (0; 1)$ წერტილიდან $y=1+\dfrac{1}{4\sqrt{3}\,x^{3/2}}$ ფუნქციის გრაფიკის წერტილებამდე.

15.66. იპოვეთ უმცირესი მანძილი $M\ (3; 0)$ წერტილიდან $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ ჰიპერბოლამდე.

15.67. იპოვეთ უმცირესი მანძილი $M\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ წერტილიდან $y=x^2$ პარაბოლამდე.

15.68. იპოვეთ $M\ (1; 2)$ წერტილზე გამავალი იმ წრფის საკუთხო კოეფიციენტი, რომელიც პირველ საკოორდინატო კუთხიდან მოჰკვეთს უმცირესი ფართობის მქონე სამკუთხედს.

15.69. იმ მართკუთხედების ფართობებს შორის, რომელთა ორი წვერო Ox და Oy დადებით ნახევარღერძებზე მდებარეობს, მესამე წვერო კოორდინატთა სათავეში, მეთხე კი $y=3-x^2$ პარაბოლაზე, იპოვეთ უდიდესი ფართობი.

15.70. $M\left(2; \frac{1}{4}\right)$ წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც დადებით ნახევარღერძებს ჰკვეთს B და C წერტილებში. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომლისთვისაც BC მონაკვეთის სიგრძე იქნება უმცირესი.

15.71. იპოვეთ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსში ჩახაზული უდიდესი ფართობის მქონე მართკუთხედის გვერდები.

15.72. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ელიფსის რომელ წერტილში უნდა გავატაროთ მხები, რომ ამ მხებითა და დადებითი ნახევარღერძებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი იყოს უმცირესი.

15.73. იპოვეთ S ფართობის მქონე მართკუთხედზე შემოხაზულ ელიფსების ფართობებს შორის უმცირესი.

15.74. $2x^2+y^2=18$ ელიფსზე აღებულია წერტილები $A(1; 4)$ და $B(3; 0)$. იპოვეთ მოცემულ ელიფსზე მესამე C წერტილი ისეთი, რომ ABC სამკუთხედის ფართობი იყოს უდიდესი.

15.75. $y=\sqrt[3]{x^2}$ ფუნქციის გრაფიკის მხების შეხების წერტილის აბსცისა C ეკუთვნის $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ სეგმენტს. C-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება იმ სამკუთხედის ფართობი უმცირესი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული მხებით, Ox ღერძითა და $x=2$ წრფით. რას უდრის ეს უმცირესი მნიშვნელობა.

15.76. $y=\frac{1}{x^3}$ ფუნქციის გრაფიკის მხების შეხების წერტილის აბსცისა $C\in[4; 5]$. სეგმენტს. C-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება იმ სამკუთხედის ფართობი უდიდესი, რომელიც შემოსაზღვრულია მოცემული მხებით, Ox ღერძითა და $x=1$ წრფით. რას უდრის ეს უდიდესი მნიშვნელობა.

15.77. ცილინდრის ღერძული კვეთის პერიმეტრი $6a$-ს ტოლია. იპოვეთ ასეთი ცილინდრების მოცულობებს შორის უდიდესი.

15.78. იპოვეთ იმ კონუსის სიმაღლის შეფარდება ფუძის დიამეტრთან, რომელსაც მოცემული მოცულობისათვის უმცირესი გვერდითი ზედაპირი აქვს.

15.79. კონუსის მსახველია l. იპოვეთ ასეთი კონუსების მოცულობებს შორის უდიდესი.

15.80. წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა არის v. როგორი უნდა იყოს ფუძის გვერდი, რომ პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი იყოს უმცირესი?

15.81. საჭიროა დამზადდეს მართკუთხა პარალელეპიპედის ფორმის ღია ავზი, რომლის ფსკერიც იქნება კვადრატი და რომელიც დაიტევს v მოცულობის სითხეს. რას უნდა უდრიდეს ამ ავზის სიმაღლე, რომ მის დასამზადებლად დაიხარჯოს უმცირესი რაოდენობის მასალა? ($v=108$).

15.82. კონუსის შლილის ცენტრალური კუთხეა α. α-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება მოცემული მსახველის მქონე კონუსის მოცულობა უდიდესი?

15.83. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია $2p$. როგორი უნდა იყოს მისი გვერდები, რომ იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ სამკუთხედის ბრუნვით ფუძის გარშემო, იყოს უდიდესი?

15.84. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია $2p$. როგორი უნდა იყოს მისი გვერდები, რომ იმ კონუსის მოცულობა, რომელიც მიიღება ამ სამკუთხედის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის გარშემო ბრუნვით, იყოს უდიდესი?

15.85. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია ცილინდრი. იპოვეთ უდიდესი მოცულობის მქონე ცილინდრის სიმაღლე.

15.86. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია კონუსი. იპოვეთ უდიდესი მოცულობის მქონე კონუსის სიმაღლე.

15.87. R რადიუსიან სფეროზე შემოხაზულია კონუსი. იპოვეთ ასეთი კონუსების მოცულობებს შორის უმცირესი.

15.88. იპოვეთ R რადიუსიან სფეროში ჩახაზული უდიდესი მოცულობის მქონე წესიერი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე.

15.89. R რადიუსიან სფეროში ჩახაზულია ცილინდრი. იპოვეთ ასეთი ცილინდრების სრული ზედაპირის ფართობებს შორის უდიდესი.

15.90. R ფუძის რადიუსისა და h სიმაღლის მქონე კონუსში ჩახაზულია უდიდესი მოცულობის მქონე ცილინდრი. იპოვეთ ამ ცილინდრის სიმაღლე და ფუძის რადიუსი.

15.91. R რადიუსიან ნახევარსფეროში ჩახაზულია წესიერი ოთხკუთხა პრიზმა. იპოვეთ ასეთი პრიზმების მოცულობებს შორის უდიდესი.

15.92. V მოცულობის მქონე სხეული შედგენილია ცილინდრითა და მასზე დადგმული ნახევარსფეროთი. როგორი უნდა იყოს ცილინდრის მსახველი და რადიუსი, რომ სხეულის სრული ზედაპირის ფართობი იყოს უმცირესი?

15.93. N ქარხნის პროდუქციის A ქალაქში გადასატანად შენდება NP გზატკეცილი, რომელიც N ქარხანას აკავშირებს A ქალაქში გამავალ რკინიგზასთან. ცნობილია, რომ ტვირთის გადატანა გზატკეცილით 2-ჯერ ძვირია, ვიდრე რკინიგზით. როგორი უნდა იყოს NP გზატკეცილის სიგრძე, რომ ტვირთის N ქარხნიდან A ქალაქში გადატანის ღირებულება იყოს უმცირესი, თუ უმცირესი NB მანძილი ქარხნიდან რკინიგზამდე 100 კმ-ია, ხოლო რკინიგზის AB მონაკვეთის სიგრძეა 500 კმ.

15.94. a სიგანის მდინარის მართობულად გაყვანილია b სიგანის არხი. რა უდიდესი სიგრძის მქონე მორი შეიძლება შევაცუროთ მდინარიდან არხში.

15.95. დაამტკიცეთ უტოლობა:

1) $x^{\alpha}|\ln x| < \dfrac{1}{\alpha e}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0;$

2) $e^x > ex;$ 3) $1 - 2\ln x \leqslant \dfrac{1}{x^2};$

4) $e^x > 1 + \ln(1+x);$ 5) $\dfrac{\ln x}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}};$

6) $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2};$ 7) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120};$

8) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2};$

9) $x - \dfrac{x^3}{3} < \operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{6}, \quad 0 < x \leqslant 1;$

10) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \geqslant \cos x, \quad 0 < |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2};$

11) $x^{\alpha} - 1 \leqslant \alpha(x-1), \quad x > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$

§ 16. ფუნქციის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა, გადაღუნვის წერტილი, ასიმპტოტები

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ამოზნექილობისა და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები (№№ 16.1—16.6):

16.1.

1) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5;$ 2) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4;$

3) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1;$ 4) $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2;$

5) $y = (x+2)^6 + 2x + 2;$ 6) $y = x^7 + 7x + 1.$

16.2.

1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

3) $y=\dfrac{x^3}{12+x^2}$; 4) $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$.

16.3.

1) $y=\sqrt{1+x^3}$; 2) $y=\sqrt[3]{x+3}$;

3) $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$; 4) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

16.4.

1) $y=(x+1)^4+e^x$; 2) $y=e^{-x^2}$;

3) $y=\ln(1+x^2)$; 4) $y=e^{1/x}$.

16.5.

1) $y=x+\sin x$; 2) $y=x\sin\ln x$;

3) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$; 4) $y=e^{\operatorname{arctg} x}$.

16.6.

1) $y=\dfrac{|x-1|}{x^2}$; 2) $y=\dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$;

3) $y=\begin{cases} x\ln|x|, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0 & \text{როცა } x=0; \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^2\ln|x|, & \text{როცა } x\neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x=0. \end{cases}$

16.7. a პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის აქვს

$$y=e^x+ax^3$$

ფუნქციას გადაღუნვის წერტილები.

16.8. a და b პარამეტრების რა მნიშვნელობისათვის იქნება

$$y=ax^3+bx^2$$

ფუნქციის გრაფიკისათვის (1; 3) გადაღუნვის წერტილი.

16.9. h პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის იქნება

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2},\quad h>0$$

ფუნქციის გრაფიკის (ალბათობის წირის) გადაღუნვის წერტილის აბსცისა ± 6.

16.10. აჩვენეთ, რომ

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

ფუნქციის გრაფიკს აქვს ერთ წრფეზე მდებარე სამი გადაღუნვის წერტილი.

16.11. აჩვენეთ, რომ $y=x\sin x$ წირის გადაღუნვის წერტილები მდებარეობს $y^2(4+x^2)=4x^2$ წირზე.

16.12. აჩვენეთ, რომ $y=\dfrac{\sin x}{x}$ წირის გადაღუნვის წერტილები მდებარეობს $y^2(4+x^4)=4$ წირზე.

16.13. აჩვენეთ, რომ $(0, 0)$ წერტილი არ წარმოადგენს

$$y=\begin{cases} x^3\left(2+\cos\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{როცა}\quad x\neq 0,\\ 0, & \text{როცა}\quad x=0 \end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკის გადაღუნვის წერტილს.

16.14. შეიძლება თუ არა ფუნქციის გადაღუნვის წერტილი იყოს მისი ექსტრემუმის წერტილი? პასუხი დაასაბუთეთ.

16.15. შეიძლება თუ არა ყველგან ამოზნექილ (ჩაზნექილ) ფუნქციას ჰქონდეს ერთზე მეტი ექსტრემუმის წერტილი? პასუხი დაასაბუთეთ.

16.16. დაამტკიცეთ, რომ თუ ფუნქცია ორჯერ წარმოებადია, მაშინ მის ორ ექსტრემუმის წერტილს შორის არსებობს ერთი მაინც გადაღუნვის წერტილი.

16.17. აჩვენეთ, რომ თუ ფუნქცია ორჯერ წარმოებადია, მაშინ მის გადაღუნვის წერტილებს შორის ექსტრემუმის წერტილი შეიძლება არ არსებობდეს.

16.18. დაამტკიცეთ, რომ კენტი რიგის არაწრფივ მრავალწევრს აქვს ერთი მაინც გადაღუნვის წერტილი.

16.19. დაამტკიცეთ, რომ დადებითკოეფიციენტებიან ლუწ მრავალწევრს არ შეიძლება ჰქონდეს გადაღუნვის წერტილი.

16.20. ვთქვათ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$. აჩვენეთ, რომ t პარამეტრის მნიშვნელობებს, რომლისთვისაც გამოსახულება

$$\frac{\varphi'(t)\,g''(t)-g'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)}$$

ნიშანს იცვლის, შეესაბამება წირის გადაღუნვის წერტილი.

16.21. იპოვეთ პარამეტრულად მოცემული წირის გადაღუნვის წერტილები:

1) $x = t^2, \quad y = 3t + t^3;$ 2) $x = e^t, \quad y = \sin t;$

3) $x = t\,e^t, \; y = t\,e^{-t}, \; t > 0;$ 4) $x = \dfrac{t^2}{t-1}, \; y = \dfrac{t^3}{t-1}, \quad t > 2.$

იპოვეთ წირის ასიმპტოტები (№№ 16.22—16.27):

16.22.

1) $y = \dfrac{a}{x};$ 2) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2};$

3) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3};$ 4) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}.$

16.23.

1) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4};$ 2) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9};$

3) $y = \sqrt{x^2 - 1};$ 4) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$

16.24.

1) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x;$ 2) $y = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x};$

3) $y = x \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right);$ 4) $y = x\,e^x.$

16.25.

1) $y = e^{-x^2};$ 2) $y = \dfrac{1}{1 - e^x};$

3) $y = \dfrac{\sin x}{x};$ 4) $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}.$

მ ი თ ი თ ე ბ ა: 4) გვაქვს

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \left[\frac{x^x}{(1+x)^x} - \frac{1}{e}\right] =$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty} x\left[e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0+}\frac{e-(1+t)^{1/t}}{t}=$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0+}(1+t)^{1/t}\left[\frac{1}{t(1+t)}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]=\frac{1}{2e};$$

ე. ი. ასიმპტოტია $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}$.

16.26.

1) $y=\frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$; 2) $y=|e^x-1|$;

3) $y=1-x\,e^{-\frac{1}{|x|}-\frac{1}{x}}$; 4) $y=|x+2|\,e^{-\frac{1}{x}}$.

16.27.

1) $y=x\sin\frac{1}{x}$; 2) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

3) $y=\arcsin\frac{1}{x^2}$; 4) $y=\frac{x}{2}+\arccos\frac{1}{1+x}$.

16.28. ვთქვათ წირი მოცემულია პარამეტრული სახით $x=\varphi(t)$, $y=g(t)$. აჩვენეთ, რომ თუ: 1) $\varphi(t_0)=\infty$, ხოლო $g(t_0)=c$, მაშინ $y=c$ წირის ასიმპტოტია;
2) $g(t_0)=\infty$, ხოლო $\varphi(t_0)=c$, მაშინ $x=c$ წირის ასიმპტოტია;
3) $\varphi(t_0)=g(t_0)=\infty$ და ამასთან $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{g(t)}{\varphi(t)}=k$, $\lim\limits_{t\to t_0}[g(t)-k\varphi(t)]=b$, მაშინ $y=kx+b$ წირის ასიმპტოტია.
იპოვეთ პარამეტრულად მოცემული წირის ასიმპტოტები (№№ 16.29; 16.30):

16.29.

1) $x=\frac{1}{t},\quad y=\frac{t}{t+1}$; 2) $x=t,\ y=t+2\operatorname{arctg}t$,

3) $x=\frac{2e^t}{t-1},\quad y=\frac{te^t}{t-1}$; 4) $x=\frac{2t}{1-t^2},\quad y=\frac{t^2}{1-t^2}$.

16.30.

1) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^3},\\ y=\frac{3at^2}{1+t^3};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=\frac{t^3}{1+t^2},\\ y=\frac{t^3-2t^2}{1+t^2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=t^3-3\pi,\\ y=t^3-6\operatorname{arctg}t;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=t+\cos t.\end{cases}$

16.31. ვთქვათ წირი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში $r=f(\varphi)$. აჩვენეთ, რომ თუ: 1) $f(\varphi_0)\cos\varphi_0=\infty$; ხოლო $f(\varphi_0)\sin\varphi_0=c$, მაშინ $y=c$ არის წირის ასიმპტოტი; 2) $f(\varphi_0)\sin\varphi_0=\infty$, ხოლო $f(\varphi_0)\cos\varphi_0=c$, მაშინ $x=c$ არის წირის ასიმპტოტი; 3) $f(\varphi_0)\cos\varphi_0=f(\varphi_0)\sin\varphi_0=\infty$ და ამასთან

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} f(\varphi)\,[\sin\varphi-\operatorname{tg}\varphi_0\cos\varphi]=b,$$

მაშინ

$$y=x\operatorname{tg}\varphi_0+b$$

არის წირის ასიმპტოტი.

იპოვეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირის ასიმპტოტები (№№ 16.32, 16.33):

16.32.

1) $r=\dfrac{a}{\varphi}$; 2) $r=a\varphi$;

3) $r=a\operatorname{tg}\varphi$; 4) $r=\sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$.

16.33.

1) $r=2\,|1-\operatorname{tg}\varphi|$; 2) $r=\dfrac{2}{|\sin 2\varphi|}$;

3) $r=\dfrac{a}{\cos 3\varphi}$, $a>0$; 4) $r=\dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

16.34. იპოვეთ არაცხადი სახით მოცემული წირის ასიმპტოტები:

1) $y^3-x^3=6x^2$; 2) $x^4-y^4=4x^3y$;

3) $4x^2+9y^2=x^2y^2$; 4) $y^2(4-x)=x^3$.

§ 17. ფუნქციის გრაფიკის აგება

გამოიკვლიეთ ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი (№№ 17.1—17.42):

17.1.

1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=3x-x^3$;

3) $y=3x^3-2x^2+4$; 4) $y=-\dfrac{2}{3}x^3+2x-\dfrac{4}{3}$.

17.2.

1) $y=x^3-3x^2-9x$; 2) $y=3+x-3x^3$;

3) $y=x^3-6x^2+9x-2$; 4) $y=\dfrac{4}{3}x^3-4x$.

17.3.

1) $y = \frac{1}{2} x^4 - x^2$; 2) $y = x^4 - 2x^3 + 3$;

3) $y = -x^4 + 4x^3 - 2x^2$; 4) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$.

17.4.

1) $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$; 2) $y = x^2 (x-2)^2$;

3) $y = (x+2)(4-x^2)$; 4) $y = (x-1)^2 (x+2)$.

17.5.

1) $y = \frac{1}{5} x^5 - 4x^2$; 2) $y = 6x^5 + 16x^4 + 10x^3$;

3) $y = (x-1)^3 (x+1)^2$; 4) $y = \frac{1}{6} x^3 (x^2 - 5)$.

17.6.

1) $y = \frac{1}{4} x^2 (x^2 - 3)^2$; 2) $y = 32x^3 (x^2 - 1)^3$;

3) $y = \frac{x^2}{x^3 + 3}$; 4) $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

17.7.

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$;

3) $y = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$; 4) $y = \frac{x}{3} + \frac{2}{x}$.

17.8.

1) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; 2) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

3) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$; 4) $y = \frac{x^4 + 3}{x}$.

17.9.

1) $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$; 2) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$;

3) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$; 4) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

17.10.

1) $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$; 2) $y = 3x + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}$;

3) $y = \frac{1}{x^2 + 8x}$; 4) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

17.11.

1) $y = \frac{x^3 - 4}{(x-1)^3}$; 2) $y = \frac{x^3 + 4}{(x+1)^3}$;

3) $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$; 4) $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$.

17.12.

1) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$; 2) $y = \frac{x^5}{(x^2-1)^2}$;

3) $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$; 4) $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

17.13.

1) $y = 2x - \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$;

3) $y = x\sqrt{x+3}$; 4) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$.

17.14.

1) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 6}$; 2) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$;

3) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = x - \sqrt{x^2 - 2x}$.

17.15.

1) $y = \sqrt{2x^3 + 9x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - x^3}$;

3) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 1} - 2\sqrt{x+1}$.

17.16.

1) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

17.17.

1) $y = \sqrt[4]{x^4 - 4x^3}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2(3-x)}$;

3) $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$; 4) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$.

17.18.

1) $y = 4\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^3}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{3x^2-4}{x^3}}$;

3) $y = \sqrt{\frac{(x+6)^2}{x^2-4}}$; 4) $y = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

17.19.

1) $y = \sqrt{\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3x}}$; 2) $y = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{2}$;

3) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$; 4) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$.

17.20.

1) $y = \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$; 2) $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-4}}$;

3) $y = \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$; 4) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$.

17.21.

1) $y = |x|\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = x\sqrt{|x^2-1|}$;

3) $y = \sqrt{|3x^2-x^3|}$; 4) $y = 4\,\frac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$.

17.22.

1) $y = |x|\sqrt[3]{1+3x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x^2|2-x|}$;

3) $y = \frac{\sqrt{|1+x|^3}}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$.

17.23.

1) $y = e^x - x$; 2) $y = xe^x$;

3) $y = xe^{-x}$; 4) $y = x^2e^{-x}$.

17.24.

1) $y = (x-1)e^{3x}$; 2) $y = (2x-1)e^{3x}$;

3) $y = e^{4x-x^2}$; 4) $y = e^{1-x^2}$

17.25.

1) $y = 2^{\frac{1}{3}x^2-x}$; 2) $y = e^{x^2-\frac{1}{2}x}$;

3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}x^4-x^3}$; 4) $y = 3^{\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2}$

17.26.

1) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $y = (x^2+2)\,e^{-x^2}$;

3) $y = \dfrac{e^x}{x}$; 4) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$.

17.27.

1) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$; 2) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

3) $y = (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}$; 4) $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

17.28.

1) $y = x \ln x$; 2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;

3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$; 4) $y = x - \ln x$.

17.29.

1) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \ln(x^2+1)$;

3) $y = x^2 \ln x$; 4) $y = x \ln^2 x$.

17.30.

1) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 2) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$;

3) $y = \dfrac{x}{\ln^2 x}$; 4) $y = \dfrac{x}{\ln x - 1}$.

17.31.

1) $y = \ln(x^2-1) + \dfrac{1}{x^2+1}$; 2) $y = \ln(1+e^{-x})$;

3) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; 4) $y = \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

17.32.

1) $y = x^2 - 2\ln x$; 2) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

3) $y = \sqrt{x^2+1}\,\ln(x + \sqrt{x^2+1})$; 4) $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + \dfrac{6}{x+1}$.

17.33.

1) $y = \sin x + \cos x$, 2) $y = x + \sin x$;

3) $y = x - 2\sin x$; 4) $y = x + \cos x$.

17.34.

1) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$; 2) $y = \cos x - \cos^2 x$;

3) $y = \sin x - \sin^2 x$; 4) $y = \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

17.35.

1) $y = \sin x \sin 3x$; 2) $y = \cos x \cos 2x$;

3) $y = x \sin x$; 4) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

17.36.

1) $y = 2x - \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

3) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$; 4) $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

17.37.

1) $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$; 2) $y = \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$;

3) $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$; 4) $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$.

17.38.

1) $y = \sqrt{\cos x}$; 2) $y = \sqrt[3]{\cos x}$;

3) $y = \sqrt{\sin x}$; 4) $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

17.39.

1) $y = x \operatorname{arctg} x$; 2) $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$;

3) $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$; 4) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

17.40.

1) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$; 2) $y = \arccos \dfrac{1 - x}{1 - 2x}$;

3) $y = \frac{3}{2}x - \arccos \frac{1}{x}$; 4) $y = \arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

17.41.

1) $y = e^{-\operatorname{arctg} x}$;   2) $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;

3) $y = \arcsin(1 - \sqrt[3]{x^2})$;   4) $y = \dfrac{x}{2} - \arccos \dfrac{2x}{1+x^2}$.

17.42.

1) $y = \ln \cos x$;   2) $y = \sin x - \ln \sin x$;

3) $y = \ln(\cos x - \sin x)$;   4) $y = \ln(\cos x + \sin x)$.

ააგეთ პარამეტრულად მოცემული წირი (№№ 17.43—17.45):

17.43.

1) $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a \sin t, \end{cases}$ $(a > 0)$;   4) $\begin{cases} x = t + e^{-t}; \\ y = 2t + e^{-2t}. \end{cases}$

17.44.

1) $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi, \\ y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{t^2-1}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1-t^2}; \\ y = \dfrac{1}{1+t^2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

17.45.

1) $\begin{cases} x = a \cos 2t, \\ y = a \cos 3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^3 - t^2}, \\ y = \dfrac{1}{t^2 - t}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{t}, \\ y = \dfrac{t^3+1}{t^2}. \end{cases}$

17.46. არაცხადი სახით მოცემული წირის განტოლება ჩაწერეთ პარამეტრული სახით და ააგეთ მისი გრაფიკი:

1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$;   2) $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$;

3) $x^2y^2 = x^3 - y^3$;   4) $x^4 - y^4 = 4x^2y$.

მ ი თ ი თ ე ბ ა: 1) შემოიყვანეთ აღნიშვნა $y=tx$; 2) განიხილეთ შემთხვევა $x>0$, $y>0$ და შემოიყვანეთ აღნიშვნა $y=tx$; 3) თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y=tx$, მივიღებთ $x=\dfrac{1}{t^3}-t$, $y=\dfrac{1}{t}-t^2$ $(t\neq 0)$; 4) თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $y=tx$, მივიღებთ $x=\dfrac{4t}{1-t^4}$, $y=\dfrac{4t^2}{1-t^4}$ $(t\neq\pm 1)$.

ააგეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული წირი (№№ 17.47, 17.48):

17.47.

1) $r=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$; 2) $r=|\sin 2\varphi|$;

3) $r=a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$; 4) $r=\sqrt{\dfrac{\pi}{\varphi}}$.

17.48.

1) $r=2+\cos\varphi$; 2) $r=\dfrac{2}{\cos\varphi}-1$;

3) $r^3=2a^2\cos 2\varphi$; 4) $\begin{cases} r=\sqrt{1-t^2}; \\ \varphi=\arcsin t+\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

17.40. არაცხადი სახით მოცემული წირის განტოლება ჩაწერეთ პოლარულ კოორდინატებში და ააგეთ მისი გრაფიკი:

1) $(x^2+y^2)x=y$; 2) $x^4+y^4=x^2+y^2$;

3) $x^4+y^4=2xy$; 4) $(x^2+y^2)^2=xy$.

§ 18. განტოლებათა მიახლოებითი ამოხსნა*

იპოვეთ მითითებულ შუალედში, შუაზე გაყოფის მეთოდით, განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი ε სიზუსტით (№№ 18.1, 18.2):

18.1.

1) $x^5+2x-7=0$, $[1;\ 2]$; $\varepsilon=0{,}0001$;

2) $0{,}1\,x^7+0{,}3\,x^3+x-18=0$, $[2;\ 3]$, $\varepsilon=0{,}0001$;

3) $3e^x+\cos x+x=0$, $[-2;\ -1]$, $\varepsilon=0{,}0001$;

4) $\operatorname{arctg} e^x+x^3=0$, $[-1;\ 0]$, $\varepsilon=0{,}0001$.

---

* ამ პარაგრაფში მოცემული ამოცანების ამოხსნა გათვალისწინებულია ეგმ-ის გამოყენებით.

18.2.

1) $\operatorname{arctg} x^2 + \ln(e^x + 1) - \dfrac{2}{x+1} = 0, \quad [0;\ 1], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

2) $\operatorname{arctg}(\ln x + 1) - \dfrac{1}{x} = 0, \quad [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

3) $2^x + \operatorname{arctg} x + x^3 = 0, \quad [-1;\ 0], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

4) $e^{\arcsin x} + \sqrt{1 + x^2} + x^3 = 0; \quad [-0{,}9;\ 0]; \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

იპოვეთ მითითებულ შუალედში, ქორდათა და მხებთა კომბინირებული მეთოდით, განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი ε სიზუსტით (№№ 18.3, 18.4):

18.3

1) $0{,}4\,x^5 + 3x - 15 = 0, \quad [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}001;$

2) $2x^5 + 3x^3 + 6x - 9 = 0, \quad [0;\ 1] \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

3) $\ln(e^x + 1) + x^3 - 7 = 0, \quad [1,\ 2] \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

4) $\ln(2x - 1) - \dfrac{3}{x-1} + x - 1 = 0, \ [1;\ 2], \ \varepsilon = 0{,}0001.$

18.4.

1) $x e^{x^2} + \arcsin x + 2 = 0, \quad [-0{,}9;\ 0], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

2) $\dfrac{x^2}{2} + \ln x - \operatorname{arctg} x = 0; \quad [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

3) $(1 + x^2)\operatorname{arctg} x + \ln x = 0, \quad [0{,}5;\ 1], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

4) $\arcsin e^x + \ln(1 + x^2) + 3x = 0, \quad [-0{,}9;\ 0], \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

იპოვეთ მითითებულ შუალედში, იტერაციის მეთოდით, განტოლების მიახლოებითი ამონახსნი ε სიზუსტით (№№ 18.5, 18.6):

18.5.

1) $x^7 + 4x - 11 = 0, \quad [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

2) $x^7 + 12x^3 + 3x - 1 = 0, \quad [0;\ 1], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

3) $x\ln(4 + x^2) + x^3 - 8 = 0, \quad [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

4) $10\ln\operatorname{arctg} 2x - e^{1/x} = 0, \ [1;\ 2], \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

18.6.

1) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + 3x = 0, \ [-0{,}9;\ 0], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

2) $\ln(1 + e^x) + \operatorname{arctg} 2x + x = 0, \ [-1;\ 0], \quad \varepsilon = 0{,}0001;$

3) $2x\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) + 5x + 1 = 0, \ [-1;\ 0], \ \varepsilon = 0{,}0001;$

4) $\ln(x - 2) - \dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = 0, \ [2{,}1;\ 5], \ \varepsilon = 0{,}0001.$

განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის შუაზე გაყოფის, ან ქორდათა და მხებთა კომბინირებული, ან იტერაციის მეთოდით იპოვეთ განტოლების მიახლოებითი ამონახსნები ε სიზუსტით (№№ 18.7—18.9):

18.7.

1) $x^3 - 6x + 2 = 0, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

2) $x^3 - 3x^2 + 8x + 10 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-5};$

3) $x^4 - 2x^2 + 4x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

4) $x^5 + x + 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

18.8.

1) $x - 0{,}1 \sin x = 2, \quad \varepsilon = 10^{-3};$ 2) $x = 2 + \sqrt[4]{x}, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $x^2 = e^x + 2, \quad \varepsilon = 10^{-4};$ 4) $\cos x = x^2, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$

18.9.

1) $\ln x = \operatorname{arctg} x, \quad \varepsilon = 10^{-4};$ 2) $x^2 + \ln x - 4 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-4};$

3) $10 \ln x = x^3 - 3, \quad \varepsilon = 10^{-3};$ 4) $x^2 \operatorname{arctg} x - 1 = 0, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$

§ 10. სკალარული არგუმენტის ვექტორ-ფუნქცია და მისი გამოყენება

ააგეთ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფი (№№ 19.1, 19.2):

19.1.

1) $\vec{r}(t) = (2t - 1)\vec{i}' + (-3t + 2)\vec{j} + 4t\vec{k}, \quad t \in R;$

2) $\vec{r}(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}\vec{i} + \dfrac{2t}{1 + t^2}\vec{j} + \vec{k}, \quad t \in R;$

3) $\vec{r}(t) = 2\vec{i} + t^2\vec{j} - t^2\vec{k}, \quad t \in R;$

4) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \in R.$

19.2.

1) $\vec{r}(t) = \dfrac{t^2 + 1}{(t + 1)^2}\vec{i} + \dfrac{2t}{(t + 1)^2}\vec{j}, \quad t \neq -1, \quad t \in R;$

2) $\vec{r}(t) = \sqrt{1 - t^2}\,\vec{i} + \sqrt{1 + t^2}\,\vec{j}, \quad t \in [0;\ 1];$

3) $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \in R;$

4) $\vec{r}(t) = 2\cos^3 t \cdot \vec{i} + 2\sin^3 t\,\vec{j}, \quad t \in R.$

19.3. გამოთვალეთ ზღვარი:

1) $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1 - t}{1 + t}\vec{i} + \dfrac{\sin t}{t}\vec{j} - \dfrac{\ln(1 - t)}{t}\vec{k} \right);$

2) $\lim\limits_{t\to\pi}\left(\frac{\sin t}{t-\pi}\vec{i}+\frac{\ln\frac{t}{\pi}}{\pi-t}\vec{j}+\vec{k}\right)$;

3) $\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{1-\sqrt{t}}{1-t}\vec{i}+\frac{t}{1+t}\vec{j}+\vec{k}\right)$;

4) $\lim\limits_{t\to1}\left(\frac{e^t-e}{t-1}\vec{i}+\frac{\ln t}{1-t}\vec{j}+2\vec{k}\right)$.

19.4. იპოვეთ $\frac{d\vec{r}}{dt}$, თუ:

1) $\vec{r}(t)=\sin t\,\vec{i}-\cos^2 t\,\vec{j}+\frac{1}{2}\sin 2t\,\vec{k}$;

2) $\vec{r}(t)=t\cos t\,\vec{i}+t\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$;

3) $\vec{r}(t)=(t+\cos t)\vec{i}+t\,\vec{j}+\sin t\,\vec{k}$;

4) $\vec{r}(t)=e^{2t}\,\vec{i}-\operatorname{arctg} t\,\vec{j}+3^t\,\vec{k}$.

19.5. იპოვეთ $\frac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$, თუ:

1) $\vec{r}(t)=e^t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+(t^2+1)\,\vec{k}$, $t_0=0$;

2) $\vec{r}(t)=t^3\,\vec{i}+(t+1)^2\,\vec{j}+\sqrt{t^2+1}\,\vec{k}$, $t_0=-2$;

3) $\vec{r}(t)=e^{2t}\,\vec{i}-(t+1)^3\,\vec{j}+\sin 2t\,\vec{k}$, $t_0=0$;

4) $\vec{r}(t)=\ln 2t\cdot\vec{i}-3^t\,\vec{j}+\operatorname{arctg} t\,\vec{k}$, $t_0=1$.

19.6. იპოვეთ $\frac{d}{dt}(\vec{a},\vec{b})$, თუ $\vec{a}=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+$ $+t\vec{j}+t^2\vec{k}$.

19.7. იპოვეთ $\frac{d}{dt}[\vec{a},\vec{b}]$, თუ $\vec{a}=\vec{i}+t\vec{j}+t^2\vec{k}$, $\vec{b}=t\vec{i}+$ $+\vec{j}+k^2\vec{k}$.

19.8. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $\vec{r}=3t\vec{i}-4t\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე.

19.9. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $\vec{r}=3t\vec{i}+$ $+(4t-t^2)\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარე. ააგეთ სიჩქარის ვექტორი $t=0$, $t=1$, $t=2$, $t=3$ მომენტებისათვის.

19.10. მოცემულია წერტილის მოძრაობის განტოლება $\vec{r}=2(t-\sin t)\vec{i}+$ $+2(1-\cos t)\vec{j}$. განსაზღვრეთ მოძრაობის ტრაექტორია და სიჩქარის ვექტორი $t=\dfrac{\pi}{2}$ და $t=\pi$ მომენტებისათვის.

19.11. იპოვეთ $\vec{r}(t)=e^{2t}\vec{i}+(t+8)^{4/3}\vec{j}$ ვექტორ-ფუნქციის ჰოდოგრაფის მხების მიმმართველი ვექტორი, როცა $t=0$.

19.12. იპოვეთ $\dfrac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, თუ:

1) $\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+e^t\,\vec{j}+(t^2+1)\,\vec{k}$, $t_0=0$;

2) $\vec{r}(t)=t\,\vec{i}+t\cos t\,\vec{j}+t\sin t\,\vec{k}$, $t_0=0$.

19.13. მოცემულია ვექტორ-ფუნქცია $\vec{r}=\vec{r}(t)$. იპოვეთ:

1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{r}^2)$; 2) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r},\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$; 3) $\dfrac{d}{dt}\left[\vec{r},\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right]$.

19.14. აჩვენეთ, რომ თუ $\vec{e}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმმართველი ვექტორი, მაშინ

$$[\vec{e},\,d\vec{e}]=\frac{[\vec{a},\,d\vec{a}]}{|\vec{a}|^2}.$$

19.15. წერტილის მოძრაობის განტოლებაა

$$\vec{r}(t)=\vec{a}\sin t\,\vec{i}-a\cos t\,\vec{j}+bt^2\vec{k},\quad (a=\text{const},\quad b=\text{const}).$$

იპოვეთ სიჩქარისა და აჩქარების ჰოდოგრაფი.

19.16. შეადგინეთ მითითებულ წერტილში წირის მხები წრფისა და ნორმალი სიბრტყის განტოლებები:

1) $\begin{cases}x=t^2-1,\\ y=t+1,\\ z=t^3\end{cases}$ $M_0(0;\ 2;\ 1)$; 2) $\begin{cases}x=4\sin^2 t,\\ y=2\sin 2t,\\ z=2\cos^2 t,\end{cases}$ $M_0(2;\ 2;\ 1)$;

3) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t^2,\\ y=\dfrac{1}{3}t^3,\\ z=\dfrac{1}{4}t^4,\end{cases}$ $M_0\left(2;\ \dfrac{8}{3};\ 4\right)$; 4) $\begin{cases}x=a\,\mathrm{ch}\,t,\\ y=a\,\mathrm{sh}\,t,\\ z=at,\end{cases}$ $M_0(a;\ 0;\ 0)$.

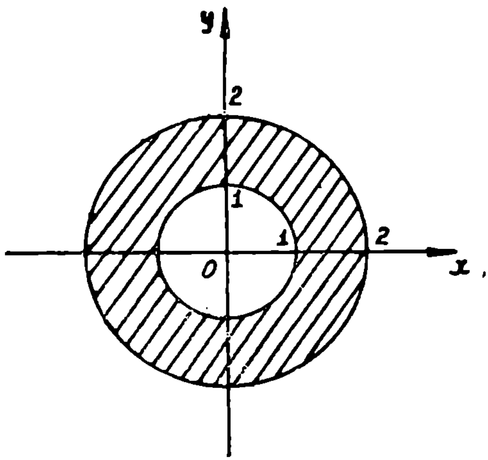
პასუხები

1.1. 1) მართებულია; 2) არა; 3) მართებულია; 4) არა; 5) არა; 6) არა; 7) არა; 8) არა; 9) არა; 10) მართებულია.

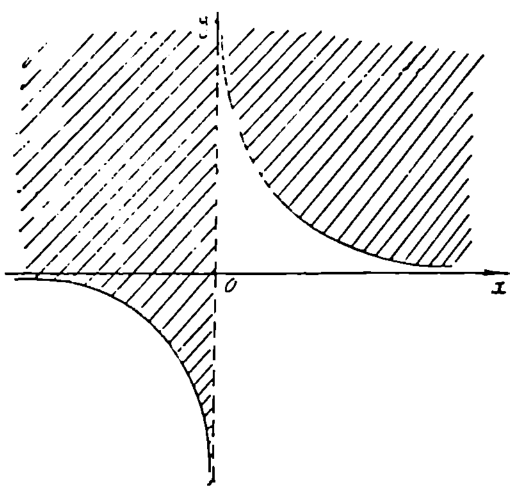
1.2. 1) მართებულია მეორე; 2) ორივე.

1.3. 1) $A = \{-1;\ 0;\ 1;\ 3\}$; 2) $A = \{1\}$; 3) $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ 4) $A = \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$; 5) $A = \{0;\ 1;\ 2\}$; 6) $A = \left\{\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right\}$.

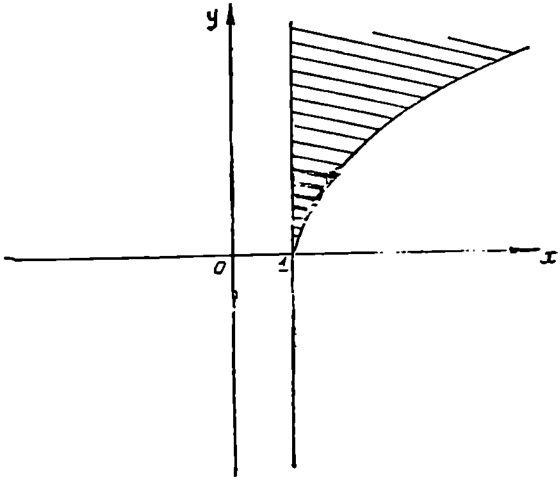
1.4. 1) ნახ. 70. 2) ნახ. 71. 3) ნახ. 72. 4) ნახ. 73.



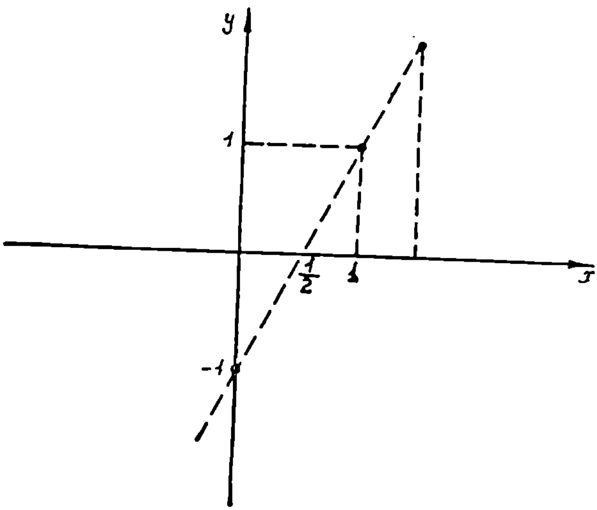
ნახ. 70



ნახ. 71



ნახ. 72



ნახ. 73

1.11. 1) ჭეშმარიტია; 2) მცდარია; 3) ჭეშმარიტია; 4) მცდარია; 5) მცდარია; 6) ჭეშმარიტია; 7) მცდარია; 8) ჭეშმარიტია; 9) ჭეშმარიტია; 10) მცდარია; 11) ჭეშმარიტია; 12) ჭეშმარიტია; 13) ჭეშმარიტია; 14) ჭეშმარიტია; 15) მცდარია. **1.12.** 1) მაგალითად $(2k-1)\longleftrightarrow -(k-1)$, $(2k)\longleftrightarrow 4$, $k\in\mathbf{N}$; 2) მაგალითად $(2k-1)\longleftrightarrow -2\pi(k-1)$, $(2k)\longleftrightarrow 2\pi k$, $k\in\mathbf{N}$; 3) მაგალითად $x\longleftrightarrow(b-a)x+a$, $x\in[0;1]$; 4) მაგალითად $x\longleftrightarrow\dfrac{x}{1-|x|}$, $x\in B$. **1.14.** 1) $\max E=1$, $\inf E=0$; 2) $\sup E=1$, $\min E=\dfrac{1}{2}$; 3) $\inf E=0$, $\sup E=1$; 4) $\max E=\dfrac{1}{2}$, $\min E=-1$.

§ 2.

2.1. 1) $-1-2i$, $5-4i$; 2) $2+2i$, $4-2i$; 3) $2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}\,i$; 4) $-2-4i$, $2-2i$. **2.2.** 1) $3+i$, $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$; 2) 10, $\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$. 3) $-8-6i$, $-\dfrac{8}{25}+\dfrac{6}{25}i$; 4) $3-3\sqrt{5}\,i$, $\dfrac{7}{9}+\dfrac{\sqrt{5}}{9}i$. **2.3.** 1) 0; 2) 0; 3) -1; 4) $-i$. **2.4.** 1) $11+3i$; 2) 125; 3) $-\dfrac{27}{17}-\dfrac{11}{17}i$; 4) 0; 5) $-\dfrac{18}{25}+\dfrac{23}{50}i$; 6) $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$. **2.5.** 1) $\left(\dfrac{13}{5};\ \dfrac{1}{5}\right)$; 2) $\left(\dfrac{17}{7},\ -\dfrac{13}{7}\right)$; 3) $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{8-6\sqrt{3}}{9-6\sqrt{2}}\right)$; 4) (4, 3), (5, 3), (4, 4), (5, 4). **2.6.** 1) $-1-i$; 2) 0, -1, $\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **2.7.** $x=-2$, $y=-2$ და $x=2$, $y=-2$. **2.8.** 1) 1, $-\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\sqrt{2}$, $\dfrac{3\pi}{4}$; 3) 2, $-\dfrac{2\pi}{3}$; 4) 2, $\dfrac{5\pi}{6}$. **2.9.** 1) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$; 2) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$; 3) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$; 5) $\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$; 6) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$; 7) $\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}$; 8) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)$; 9) $\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$;

10) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$; 11) $\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$; 12) $\cos(2\pi-\alpha)+i\sin(2\pi-\alpha)$; 13) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right)$; 14) $\cos\alpha+i\sin\alpha$; 15) $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi))$. **2.10)** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $6\left(\cos\left(-\frac{29\pi}{36}\right)+i\sin\left(-\frac{29\pi}{36}\right)\right)$; 3) $4\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)$; 4) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 7) $\frac{1}{2}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))$; 8) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right)$. **2.11.** 1) $\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$; 2) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$; 3) $2e^{\frac{5\pi}{6}i}$; 4) $\sqrt{5}\,e^{i\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$. **2.12.** 1) -2^{10}; 2) 2^{20}; 3) $-2^{18}+2^{19}\sqrt{3}\,i$; 4) $(\sqrt{2}+i)(1+i)$; 5) $\frac{(1+\sqrt{3})^4}{2}\times$ $\times(-1+\sqrt{3}\,i)$; 6) -2; 7) 2; 8) $-\frac{1}{4}$; 9) 1; 10) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$.

2.13. $n=4k$, $k\in Z$. **2.18.** 1) $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k=0, 1, 2$; 2) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]+i\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]$, $k=0, 1, 2, 3$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0, 1$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+$ $+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, $k=0, 1$; 5) $\cos\left[(4k+1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(4k+\right.$ $\left.+1)\frac{\pi}{6}\right]$, $k=0, 1, 2$; 6) $\cos\left[(4k-1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(4k-1)\cdot\frac{\pi}{6}\right]$, $k=0, 1, 2$; 7) $\sqrt[4]{2}\left\{\cos\left[(8k+1)\frac{\pi}{8}\right]+i\sin\left[(8k+1)\frac{\pi}{8}\right]\right\}$, $k=0, 1$;

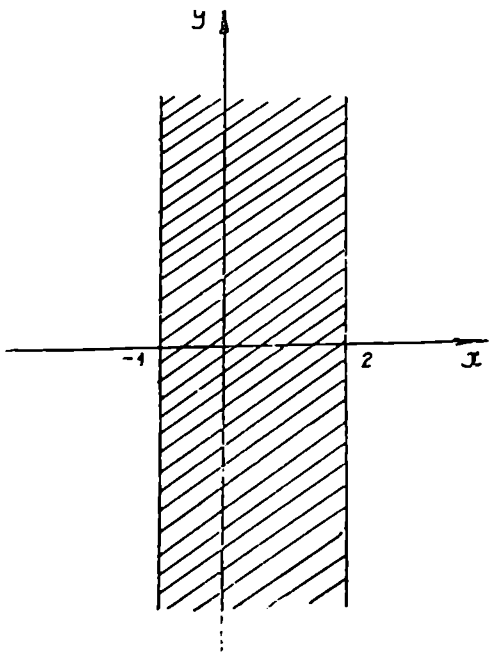
8) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi+8k\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi+8k\pi}{12}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2$;

9) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$;

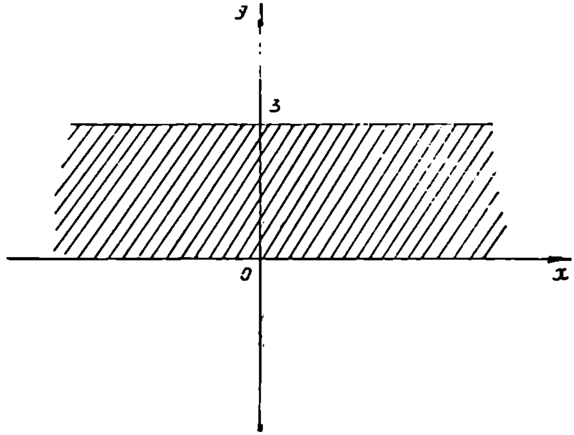
10) $\sqrt{2}\left\{\cos\left[(6k+1)\frac{\pi}{6}\right]+i\sin\left[(6k+1)\frac{\pi}{6}\right]\right\}$, $k=0,\ 1$.

2.19. 1) $-1\pm 2i$; 2) $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$; 3) $-2+i$, $-3+i$; 4) $1+i$, $2-3i$; 5) $\pm i$, ± 2; 6) $\pm\sqrt{2}\,i$, $\pm 3i$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}i$. 8) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$;

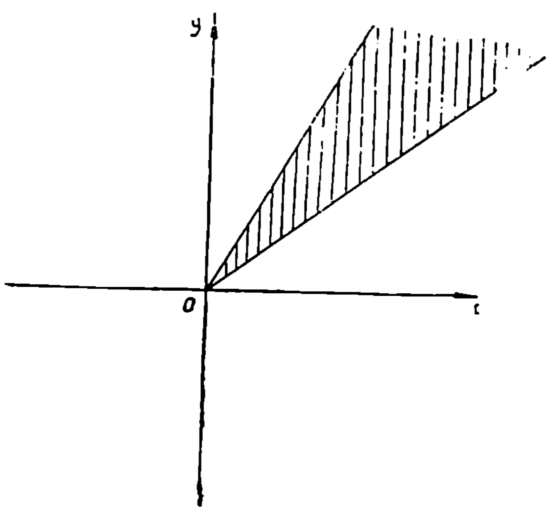
2.20. 1) წარმოსახვითი ღერძი; 2) ნამდვილი ღერძი; 3) ნახ. 74. 4) ნახ. 75. 5) ნახ. 76. 6) ნახ. 77. 7) ნახ. 78. 8) ნახ. 79. 9) ნახ. 80. 10) ნახ. 81. 11) ნახ. 82. 12) ნახ. 83.



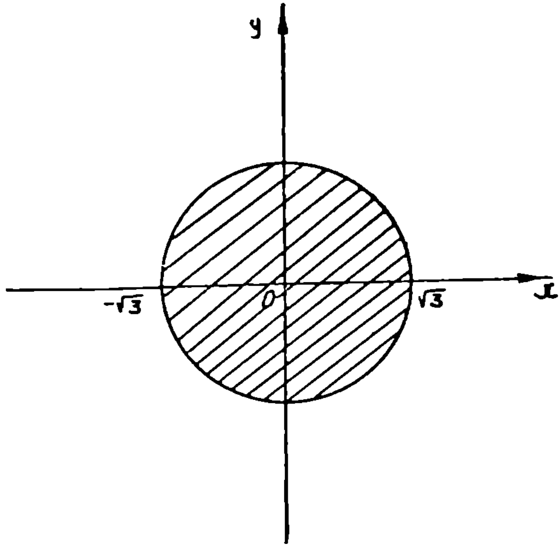
ნახ. 74



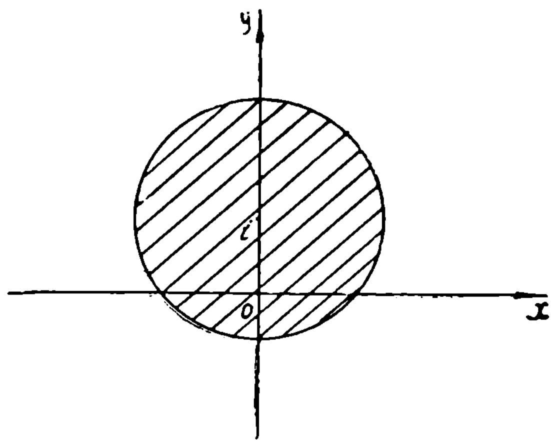
ნახ. 75



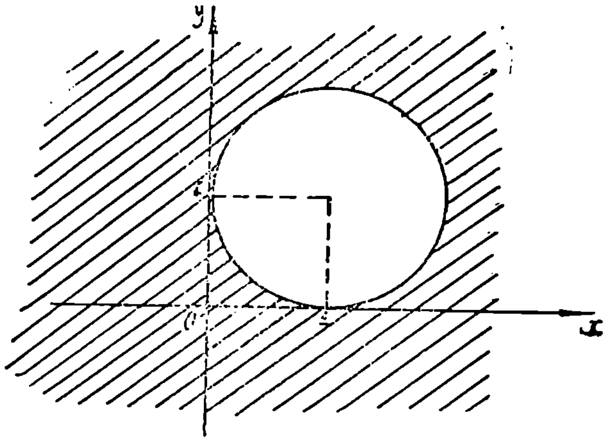
ნახ. 76



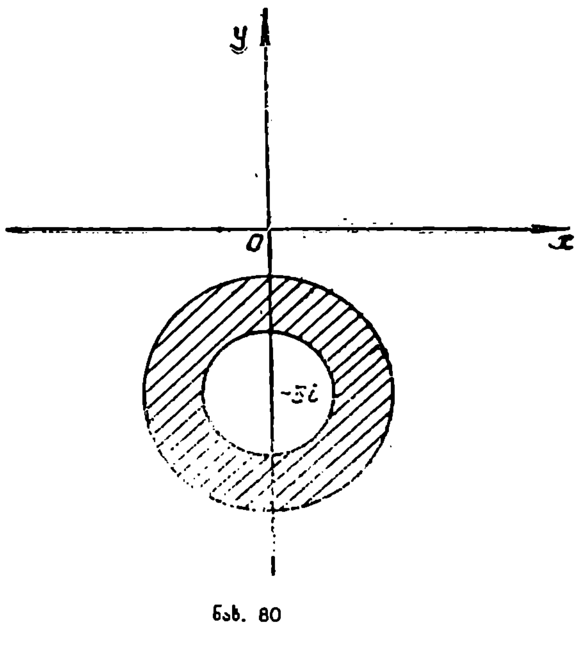
ნახ. 77



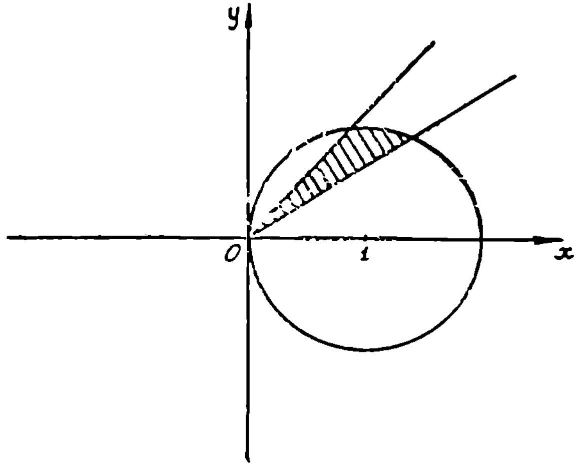
ნახ. 78



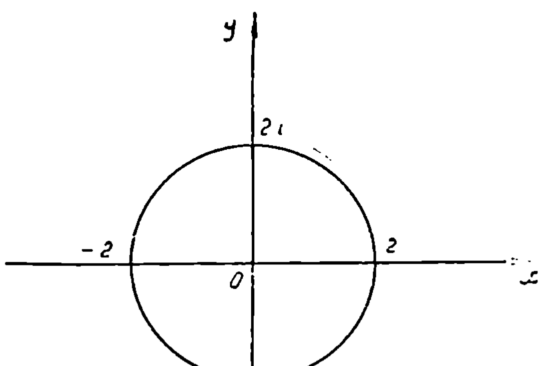
ნახ. 79



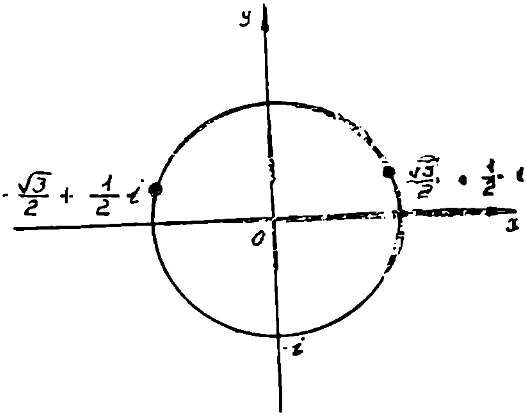
ნახ. 80



ნახ. 81



ნახ. 82



ნახ. 83

§ 4.

4.1. 1) $x_n = 2n$; 2) $x_n = 2n+1$; 3) $x_n = 3n-1$; 4) $x_n = n^2$; 5) $x_n = \frac{1}{n}$; 6) $x_n = \frac{n}{n+1}$; 7) $x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^n}$; 8) $x_n = n^2+1$. **4.2.** 1) 7, 4, 1; 2) -5, -10, -20; 3) $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}$; 4) 3, $\frac{1}{3}$, 3; **4.3.** 1) მონოტონურია; 2) მონოტონურია; 3) არ არის; 4) არ არის; 5) მონოტონურია; 6) მონოტონურია. **4.6.** 1) შემოსაზღვრულია ქვემოდან; 2) შემოსაზღვრულია; 3) არ არის შემოსაზღვრული; 4) შემოსაზღვრულია; 5) შემოსაზღვრულია; 6) შემოსაზღვრულია. **4.9.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) -7; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) -1. **4.10.** 1) 1; 2) -3; 3) 1; 4) -2. **4.11.** 1) $-\frac{7}{4}$; 2) 0; 3) $-\infty$; 4) $+\infty$. **4.12.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{5}{2}$; 4) 9. **4.13.** 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) $-\infty$; **4.14.** 1) -4; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) ∞. **4.15.** 1) 1; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 1; 4) -1. **4.16.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{8}{3}$;

3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **4.17.** 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$; 2) 1; 3) ∞; 4) 3. **4.18.** 1) 1; 2) -5; 3) 1; 4) 0. **4.19.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$. **4.20.** 1) 2; 2) 2; 3) 0; 4) $+\infty$. **4.21.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -1; 3) 0; 4) $+\infty$. **4.22.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 0. **4.23.** 1) -1; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{3}$. **4.24.** 1) $\frac{8}{5}$; 2) $\frac{1-b}{1-a}$; 3) $\sqrt[3]{3}$; 4) $7\sqrt{7}$. **4.25.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{3}{2}$. **4.26.** 1) 1; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$. **4.27.** 1) 8; 2) $-\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$, **4.28.** 1) 0; 2) $+\infty$; 3) 0; 4) $+\infty$. **4.29.** 1) e^3; 2) e^{-3}; 3) $e^{-\frac{5}{3}}$; 4) $e^{\frac{7}{3}}$ **4.30.** 1) e^3; 2) $e^{\frac{4}{3}}$; 3) e^4; 4) e^{-2}. **4.31.** $+\infty$, თუ $a>1$; $-\infty$, თუ $a<1$. **4.32.** $\frac{1}{2}$. **4.33.** $\frac{1}{3}$. **4.34.** $\frac{2}{3}$. **4.35.** 3. **4.41.** $\frac{a+2b}{2}$. **4.59.** 1) 0, 1; 2) -1, 1.

§ 5

5.1. $f(0)=3$, $f(-1)=4$, $f(3)=24$. **5.2.** $g(1)=-5$, $g(-3)=-\frac{3}{7}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1$. **5.3.** $\varphi(3)=-3$, $\varphi(-700)=0$, $\varphi(1{,}1)=-22$. **5.4.** $F(0)=\frac{7}{3}$; $F(-3)=\frac{1}{81}$; $F(4)=30$. **5.5.** $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$, $f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}-\sqrt{3}$. **5.6.** $\varphi(0)=\frac{\pi}{2}$, $\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{12}$. **5.7.** $f(-2)=9$, $f(-3)=-26$, $f(1)=\frac{1}{3}$. **5.8.** 1) a; 2) $2ax+b+ah$; 3) $3x^2+3xh+h^2$; 4) $4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$. **5.9.** 1) $2ax$; 2) $3ax^2$. **5.12.** 1) $f(x)=2x+1$; 2) $3x-2$. **5.13.** 1) $f(x)=3x^2+4x-9$; 2) x^2+x+1. **5.16.** $f(x)=2x^2+x-1$. **5.17.** $f(x)=x^2-2$.

5.18. $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$. **5.19.** $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^2}$. **5.20.** 1) $x\leqslant 1$; $x\geqslant 3$. 2) $x<2$; $x>3$. 3) $x<-\frac{1}{3}$, $x\geqslant 2$. 4) $x<-3$; $x>-\frac{2}{3}$. 5) $2<x\leqslant 5$. 6) $1<x\leqslant 2$; $3\leqslant x<4$. 7) $1\leqslant x<2$; $3\leqslant x<4$. 8) $0<x<1$; $x\geqslant 10$. 9) $-1<x<0$; $1<x<2$; $x>2$. 10) $x\neq k\pi$, $k\in z$. 11) $x\neq-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $k\in z$. 12) $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$. 13) $x\neq\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in z$. 14) $x>1$; $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$, $k\in N$. 15) $2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $\frac{4}{3}\pi+2\pi k\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2\pi k$, $k\in z$. 16) $4k^2\pi^2\leqslant x\leqslant\pi^2(1+2k)^2$, $k=0, 1, 2, \ldots$ 17) $|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$, $k\in N$. 18) $-4\leqslant x\leqslant 4$. 19) $1\leqslant x\leqslant 3$. 20) $0\leqslant x\leqslant 1$. 21) $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}$. 22) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 23) $\varnothing$. 24) $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$. 25) $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in z$. 26) $10^{\frac{\pi}{2}(4k-1)}<x<10^{\frac{\pi}{2}(k+1)}$, $k\in Z$. 27) $x<0$, $x\neq-1, -2, \ldots$ 28) $1\leqslant x<2$. 29) $x>\operatorname{ctg} 0{,}5$. 30) $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 1$. 31) $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in Z$. 32) $\left]-6, -\frac{5}{3}\pi\right]\cup\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{6}\right[$. 33) $1\leqslant x\leqslant 100$. 34) $\frac{\pi}{4}+k\pi<x\leqslant\frac{3}{4}\pi+k\pi$, $k\in z$. **5.21.** 1) $E(y)=[-5;\ 10]$; 2) $E(y)=[-12;\ 3]$; 3) $E(y)=[3;\ 15]$; 4) $E(y)=[-11;\ -7]$; 5) $E(y)=[-2;\ 14]$; 6) $E(y)=[2;\ +\infty[$; 7) $E(y)=[-13;\ +\infty[$; 8) $E(y)=]-\infty;\ 16]$; 9) $E(y)=[1;\ 3]$; 10) $E(y)=[0;\ 2]$; 11) $E(y)=\left[0;\ \frac{1}{4}\right]$; 12) $E(y)=[3;\ 4]$; 13) $E(y)=[0;\ 9]$; 14) $E(y)=[0;\ 16]$; 15) $E(y)=\left[-2;\ \frac{1}{4}\right]$; 16) $E(y)=\left[-8;\ \frac{9}{4}\right]$; 17) $E(y)=$

$=]-\infty; -1[\cup \{0\} \cup]1; +\infty[$; 18) $E(y) =]-13; -10] \cup \cup \{8\} \cup [-4; 3[$; 19) $E(y) = [-4; 5]$; 20) $E(y) = [-5; -1[\cup \cup \{0\} \cup]1; 6]$; 21) $E(y) = [2; +\infty[$; 22) $E(y) =]-\infty; -4[$; 23) $E(y) = [0; 1[$; 24) $E(y) = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$. **5.22.** 1) $D(y) = R$, $E(y) = [2; +\infty[$; 2) $D(y) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, $E(y) = [0; +\infty[$; 3) $D(y) = R$, $E(y) = [1; +\infty[$; 4) $D(y) = [-4; 2]$, $E(y) = [0; 3[$; 5) $D(y) = R$, $E(y) = [1; +\infty[$; 6) $D(y) =]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$, $E(y) = R$; 7) $D(y) =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$, $E(y) =]-\infty; 2]$; 8) $D(y) =]1; 5[$, $E(y) =]-\infty, \ln 14]$; 9) $D(y) =]-1; 5[$, $E(y) =]-\infty; 2]$; 10) $D(y) =]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $E(y) = = \left\{\frac{1}{2}\right\}$; 11) $D(y) = R$; $E(y) =]0; 1]$; 12) $D(y) = R$, $E(y) = = [3; +\infty[$; 13) $D(y) = R$, $E(y) = [1, +\infty[$; 14) $D(y) = R$; $E(y) =]0; 1]$; 15) $D(y) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $E(y) = =]0; 1[\cup]1; +\infty[$; 16) $D(y) = R$, $x \neq \pm 1$, $E(y) =]0, \frac{1}{3}] \cup]1; +\infty[$; 17) $D(y) = R$, $x \neq -1$, $x \neq 3$, $E(y) =]0; \frac{1}{\sqrt{2}}] \cup]1; +\infty[$; 18) $D(y) = R$, $x \neq -1$, $x \neq 2$, $E(y) = =]0, 1[\cup [2; +\infty[$; 19) $D(y) = R$, $x \neq 0$, $x \neq 4$, $E(y) =]1, +\infty[$; 20) $D(y) = R$, $x \neq 1$, $x \neq 4$, $E(y) =]0, 1[$; 21) $D(y) = =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $E(y) =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$; 22) $D(y) = R$, $E(y) = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$; 23) $D(y) =]0; +\infty[$, $E(y) = [2; +\infty[$; 24) $D(y) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $E(y) = =]-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}, +\infty[$; 25) $D(y) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$, $E(y) = R$; 26) $D(y) =]0; 1[\cup]1, +\infty[$, $E(y) =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$; 27) $D(y) = [1; 4]$, $E(y) = [0; 1]$; 28) $D(y) = =]3; 243[$, $E(y) =]-\infty; 2]$; 29) $D(y) = R$, $E(y) = [-1; 1]$; 30) $D(y) = R$, $E(y) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$; 31) $D(y) = R$, $E(y) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; 32) $D(y) = R$; $E(y) = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$; 33) $D(y) = R$, $x \neq k\pi$, $k \in z$, $E(y) =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$; 34) $D(y) = R$, $x \neq 2\pi k$, $E(y) = = [0, +\infty[$ $(k \in Z)$; 35) $D(y) = R$, $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $E(y) = R$ $(k \in Z)$, 36) $D(y) = R$, $E(y) = [-5; 5]$; 37) $D(y) = R$, $E(y) =$

$=\left[-1;\ \frac{5}{4}\right]$; 38) $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in z,\ E(y)=\left]-\infty;\right.$ $\left.\lg 3\right]$; 39) $-\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k<x<\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\pi k,$ $E(y)=\left]-\infty;\ \log_2\frac{5}{4}\right],\ k\in z$; 40) $D(y)=[-1;\ 1],\ E(y)=$ $=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 41) $D(y)=]-\infty;\ +\infty[,\ E(y)=\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$; 42) $D(y)=[-1;\ 1],\quad E(y)=[0;\ 1]$; 43) $D(y)=R,\ E(y)=$ $=\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$; 44) $D(y)=[-1;\ 1],\ E(y)=\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right]$; 45) $D(y)=R,\ E(y)=[0;\ \pi]$; 46) $D(y)=R,\ E(y)=\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

5.23. 1) $\min f=-2,\ \max f=7$; 2) $\min f=-13,\ \sup f=2$; 3) $\min f=-3,\ \max f=6$; 4) $\min f=-4,\ \sup f=5$; 5) $\inf f=0$, $\sup f=10$; 6) $\min f=0,\ \max f=4$; 7) $\inf f=0,\ \max f=\frac{2}{3}$; 8) $\inf f=\frac{1}{5},\ \max f=1$; 9) $\inf f=-\frac{1}{3},\ \max f=1$; 10) $\min f=0$, $\max f=\frac{1}{8}$; 11) $\min f=0,\ \sup f=1$; 12) $\min f=\frac{1}{8},\ \sup f=+\infty$; 13) $\inf f=0,\ \max f=1$; 14) $\min f=1,\ \sup f=+\infty$; 15) $\inf f=0$, $\max f=3$; 16) $\inf f=-\infty,\ \sup f=1$; 17) $\inf f=-\infty,\ \sup f=8$; 18) $\inf f=-\infty,\ \sup f=+\infty$; 19) $\min f=0,\ \sup f=+\infty$; 20) $\min f=-3,\ \max f=21$; 21) $\min f=\frac{9}{4},\ \max f=5$; 22) $\min f=0$; $\max f=\frac{\sqrt{5}}{2}$; 23) $\min f=2,\ \sup f=\pm\infty$; 24) $\inf f=-1$, $\sup f=1$; 25) $\inf f=-\infty,\ \max f=\frac{1}{2}$; 26) $\inf f=-\frac{\pi}{2}$, $\sup f=\frac{\pi}{2}$; 27) $\inf f=0,\ \max f=\frac{\pi}{2}$; 28) $\min f=-\frac{\pi}{6},\ \max f=\frac{\pi}{2}$.

5.24. 1) ლუწია; 2) კენტია; 3) არც ლუწია, არც კენტი; 4) ლუწია; 5) ლუწია; 6) არც ლუწია, არც კენტი; 7) არც ლუწია, არც კენტი; 8) ლუწია; 9) ლუწია; 10) კენტია; 11) ლუწია; 12) არც ლუწია, არც კენტი; 13) კენტია; 14) კენტია; 15) კენტია; 16) კენტია; 17) ლუწია; 18) კენტია; 19) კენტია; 20) არც ლუწია, არც კენტი; 21) კენტია;

22) არც ლუწია, არც კენტი; 23) ლუწია; 24) კენტია; **5.25.** 1) $f(x)=(x^2+1)+(-2x)$; 2) $f(x)=\frac{|x-1|+|x+1|}{2}+\frac{|x-1|-|x+1|}{2}$; 3) $f(x)=\left(\ln(1+e^x)-\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}$; 4) $f(x)=\left(-\frac{\sin 6}{\cos 2x+\cos 6}\right)+\left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x+\cos 6}\right)$. **5.26.** 1) არ შეიძლება; 2) შეიძლება; 3) შეიძლება; 4) არ შეიძლება. **5.27.** 1) კლებადია, როცა $x\in]-\infty; 3]$, ზრდადია, როცა $x\in[3; +\infty$; 2) ზრდადია, როცა $x\in]-\infty; -2]$, კლებადია, როცა $x\in[-2; +\infty[$; 3) კლებადია, როცა $x\in]-\infty; 1]$ და $x\in[3; 5]$, ზრდადია, როცა $x\in[1; 3]$ და $x\in[5; +\infty[$; 4) ზრდადია; 5) ზრდადია, როცა $x\in[0; 2]$, კლებადია, როცა $x\in[2; 4]$; 6) ზრდადია, როცა $x\in]-\infty; 0[$ და $x\in]0; +\infty[$; 7) კლებადია, როცა $x\in]-\infty; -1[$, ზრდადია, როცა $x\in[-1; +\infty[$; 8) კლებადია; 9) კლებადია, როცა $x\in]0; 2]$, კლებადია, როცა $x\in[2; 4[$; 11) ზრდადია, როცა $x\in]-1; +\infty[$; 12) კლებადია, როცა $x\in]0; 1[$ და $x\in]1; +\infty[$; 13) კლებადია, როცა $x\in\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right[$ და $x\in\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, ზრდადია, როცა $x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ და $x\in\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 14) ზრდადია, როცა $x\in\left]\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$, კლებადია, როცა $x\in\left[\frac{2}{\pi}; +\infty\right[$; 15) კლებადია, როცა $x\in]-\infty; 0[$ და $x\in]0; +\infty[$; 16) ზრდადია, როცა $x\in[-1; 0]$, კლებადია, როცა $x\in[0; 1]$. **5.30.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\frac{5}{2}$; 3) π; 4) π; 5) 2π; 6) $\frac{2\pi}{\lambda}$; 7) 2π; 8) π; 9) π; 10) 2π; 11) 6π; 12) π; 13) π; 14) π; 15) π; 16) π; 17) $\frac{\pi}{2}$; 18) 2π; 19) π; 20) π; 21) 2π: 22) 2π; 23) π; 24 π. **5.35.** არა. **5.36.** 1) $2T$; 2) $2T$; 3) თუ $ab\neq-1$, მაშინ პერიოდია $2T$; თუ $ab=-1$, მაშინ პერიოდია ნებისმიერი ნულისაგან განსხვავებული რიცხვი;; 4) $3T$. **5.39.** 1) არის; 2) არის; 3) არ არის; 4) არ არის. **5.41.** $a=1$, $b=0$ ან $a=-1$, $b\in R$. **5.42.** $a=\pm1$. **5.43.** $a+d=0$, $|a|+|c|\neq0$ ან $a=d\neq0$, $b=c=0$. **5.44.** $b=-1$, $a>0$ ან $b=1$, $a=0$. **5.45.** $a=0$, $b=1$ ან $b=-1$, $a\in R$. **5.46.** $c=\pi$, $b=-1$, $a\in R$ ან $c=\pi$, $b=1$, $a=0$. **5.47.** 1) $f^{-1}(x)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}x$, $D(f^{-1})=R$; 2) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}$, $D(f^{-1})=[1; +\infty[$; 3) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^4}$,

$D(f^{-1}) = [0; +\infty[$; 4) $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $D(f^{-1}) =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$; 5) $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2-1}$, $D(f^{-1}) = [1; +\infty[$; 6) $f^{-1}(x) = x - \sqrt{x^2-1}$, $D(f^{-1}) = [1; +\infty[$; 7) $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$; $D(f^{-1}) =]-\infty; -1]$; 8) $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$, $D(f^{-1}) = [-1, 0[$;

9) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{როცა} \quad x \in]-\infty; 0], \\ \frac{1}{2}x, & \text{როცა} \quad x \in]0, +\infty[, \end{cases}$ $D(f^{-1}) = R$; 10) $f^{-1}(x) =$

$= \begin{cases} x, & \text{როცა} \quad x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{როცა} \quad 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & \text{როცა} \quad x > 16. \end{cases}$ 11) $f^{-1}(x) = 2 - \log_5 x$, $D(f^{-1}) =$ $=]0; +\infty[$; 12) $f^{-1}(x) = 10^{2-x} + 1$, $D(f^{-1}) = R$; 13) $f^{-1}(x) = 4^{1/x}$, $D(f^{-1}) =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$; 14) $f^{-1}(x) = \log_3 \frac{x}{1-x}$, $D(f^{-1}) =$ $=]0; 1[$; 15) $f^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+2})$, $D(f^{-1}) = R$; 16) $f^{-1}(x) =$ $= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $D(f^{-1}) =]-\infty; 0]$; 17) $f^{-1}(x) = \ln(5 - e^x)$, $D(f^{-1}) =]-\infty; \ln 5[$; 18) $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - 2\ln(-x)}$, $D(f^{-1}) =$ $= [-\sqrt{e}; 0[$; 19) $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 + \log_2 x}$, $D(f^{-1}) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$;

20) $f^{-1}(x) = \frac{1 - \ln(1-x)}{1 + \ln(1-x)}$, $D(f^{-1}) =]-\infty; 1[$, $x \neq 1 - \frac{1}{e}$;
21) $f^{-1}(x) = \arcsin x$, $D(f^{-1}) = [-1; +1]$; 22) $f^{-1}(x) = \pi +$ $+ \arcsin x$, $D(f^{-1}) = [-1; +1]$; 23) $f^{-1}(x) = -\arccos x$, $D(f^{-1}) =$ $= [-1; 1]$; 24) $f^{-1}(x) = \pi + \operatorname{arctg} x$, $D(f^{-1}) = R$; 25) $f^{-1}(x) =$ $= \operatorname{arcctg} x - \pi$, $D(f^{-1}) = R$; 26) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\pi - \arcsin \frac{x}{2}\right)$, $D(f^{-1}) = [-2; 2]$; 27) $f^{-1}(x) = 4\pi - 2\arccos\frac{x}{2}$; $D(f^{-1}) = [-2; 2]$;

28) $f^{-1}(x) = \begin{cases} \operatorname{arcctg} x - \pi, & \text{როცა} \quad x < 0, \\ \operatorname{arcctg} x, & \text{როცა} \quad x > 0, \end{cases}$ 29) $f^{-1}(x) =$ $= \frac{1}{2}\arccos(2x - 1)$; $D(f^{-1}) = [0; 1]$; 30) $f^{-1}(x) = \pi -$ $- \frac{1}{2}\arccos(2x - 1)$, $D(f^{-1}) = [0; 1]$; 31) $f^{-1}(x) = \pi +$

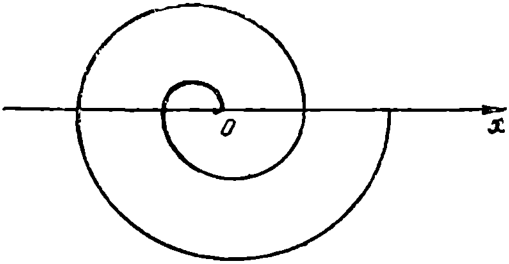
$+\frac{1}{2}\arccos(2x-1)$, $D(f^{-1})=[0;\ 1]$; 32) $f^{-1}(x)=2\pi+2\arcsin\sqrt{x}=$ $=2\pi+\arccos(1-2x)$, $D(f^{-1})=[0;\ 1]$; 33) $f^{-1}(x)=-\arccos\frac{1}{x}$, $D(f^{-1})=]-\infty;\ -1[\cup]1;\ +\infty[$; 34) $f^{-1}(x)=-\cos x$, $D(f^{-1})=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 35) $f^{-1}(x)=\cos x$, $D(f^{-1})=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 36) $f^{-1}(x)=\operatorname{ctg} x$, $D(f^{-1})=\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, $x\neq 0$; 37) $f^{-1}(x)=$ $=2\sin\frac{x}{2}$, $D(f^{-1})=[-\pi;\ \pi]$; 38) $f^{-1}(x)=\sin x$, $D(f^{-1})=$ $=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 39) $f^{-1}(x)=-\sin x$, $D(f^{-1})=\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 40) $f^{-1}(x)=$ $=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $D(f^{-1})=\left]-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

5.48. 1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}$; 3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$; 4) $y=$ $=\sqrt{1+\lg^2(\sin x)}$; 5) $y=\begin{cases}2(x^2-1), & \text{თუ } |x|\leqslant 1,\\ 0, & \text{თუ } |x|>1.\end{cases}$ 6) $y=0$.

5.49. 1) $y=u^5$, $u=3x+1$; 2) $y=5^u$, $u=\sin x$; 3) $y=\lg u$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=5x$; 4) $y=\sqrt{u}$, $u=x^2$; 5) $y=\operatorname{tg} u$, $u=\sin v$, $v=\sqrt{x}$; 6) $y=\arccos u$, $u=2^v$, $v=-x^3$. **5.50.** 1) $f(f(x))=x^4$; 2) $\varphi(\varphi(x))=2^{2^x}$; 3) $f(\varphi(x))=2^{2x}$; 4) $\varphi(f(x))=2^{x^2}$; 5) $f(f(f(x)))=x^8$; 6) $f(f(\varphi(x)))=2^{4x}$; 7) $f(\varphi(f(x)))=2^{2x^2}$; 8) $\varphi(f(f(x)))=2^{x^4}$.

5.51. 1) $y=-\cos x^2$, $\sqrt{\pi}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2\pi}$; 2) $y=\log_2(2-2^x)$, $x<1$; 3) $y=\begin{cases}\frac{x}{3}, & \text{როცა } x<0,\\ x, & \text{როცა } x\geqslant 0;\end{cases}$ 4) $y=\frac{100-x}{x}$, $x>0$. **5.52.** 1) A; 2) A, B; 3) B; 4) ან A, ან B. **5.53.** 1) $y=x^2+1$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 3) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$; 4) $3x=|\ln(y-1)|$.

5.68. 2)

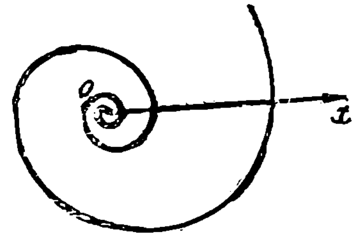


ნახ. 84

არქიმედეს სპირალი

$r = a\varphi \ (r \geqslant 0)$

5.68. 3)

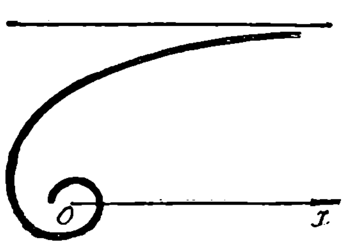


ნახ. 85

ლოგარითმული სპირალი

$r = e^{a\varphi}$

5.68. 4)

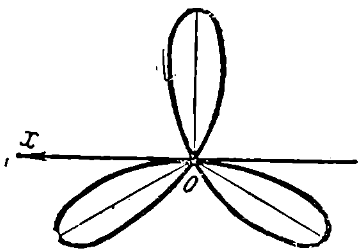


ნახ. 86

ჰიპერბოლური სპირალი

$r = \dfrac{a}{\varphi} \ (r > 0)$

5.68. 8)

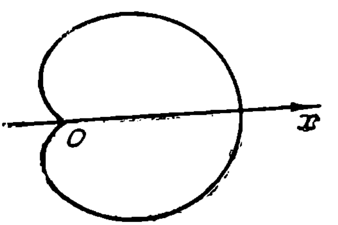


ნახ. 87

სამფურცელა

$r = a \sin 3\varphi$

5,68. 9)

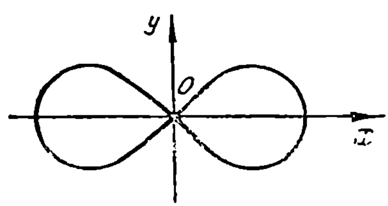


ნახ. 88

კარდიოიდი

$r = a\,(1 + \cos \varphi)$

5.68. 10)

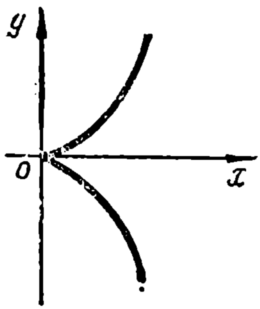


ნახ. 89

ლემნისკატა

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

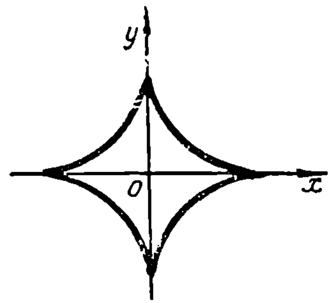
5.69. 1) **5.70. 3)**



ნახ. 90

ნახევრადკუბური პარაბოლა

$$\begin{cases} x=t^2, \\ y=t^3. \end{cases}$$

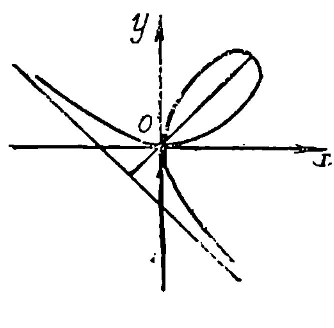


ნახ. 91

ასტროიდა

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$$

5.69 5)



ხაó. 92

დეკარტის ფოთოლი

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

6.8. 1) 7; 2) 17; 3) $\frac{5}{2}$; 4) -1. 6.9. 1) $+\infty$; 2) $-\infty$; 3) $+\infty$; 4) $-\infty$. 6.10. 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$. 6.11. 1) $+\infty$; 2) 0; 3) 0; 4) $+\infty$. 6.12. 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$; 6) $-\infty$; 7) $-\infty$; 8) $+\infty$. 6.13. 1) 0; 2) ∞; 3) 0; 4) 0. 6.14. 1) 2; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) 5; 4) $-\frac{1}{5}$. 6.15. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{7}{9}$; 4) $-\frac{3}{2}$. 6.16. 1) 0; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) $-\frac{2}{5}$. 6.17. 1) 6; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$. 6.18. 1) 0; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) -6. 6.19. 1) 2; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$. 6.20. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $+\infty$; 4) 1. 6.21. 1) $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$; 2) 5050; 3) $\frac{49}{24}$; 4) $\frac{42}{53}$. 6.22. 1) $\frac{a-1}{3a^2}$; 2) $3x^2$; 3) $\frac{n}{k}$; 4) $\frac{1}{2}(n^2-2k+n)$. 6.23) 1) $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$; 2) $\frac{n-k}{2}$; 3) $\frac{n(n+1)}{2}$; 4) $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 6.24. 1) $\frac{3}{2}$; 2) -2; 3) 4; 4) $-\frac{5}{3}$. 6.25. 1) 3; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) -2; 4) -4. 6.26. 1) $\frac{1}{4}$; 2) 6; 3) $\frac{5}{4}$; 4) 72. 6.27. 1) 0 2) $+\infty$; 3) $+\infty$; 4) $+\infty$. 628. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) -1; 4) 1. 6.29. 1) 0; 2) 6; 3) 3; 4) 1. 6.30. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. 6.31. 1) 1; 2) 10,5; 3) -1; 4) $+\infty$; 5) 0; 6) 5. 6.32. 1) $\frac{1}{2}$; 2) -4; 3) 4; 4) $\frac{1}{4}$. 6.33. 1) 0; 2) ∞; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 4. 6.34. 1) $\frac{1}{6}$; 2) 4; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{3}$. 6.35. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. 6.36. 1) 3; 2) $\frac{3}{2}$;

3) $-\frac{1}{7}$; 4) ∞. **6.37.** 1) 3; 2) $\frac{1}{144}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $-\frac{5}{54}$. **6.38.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{2}{27}$; 4) 0. **6.39.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{3}{2}$; 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **6.40.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{16\sqrt{2}}{3}$; 4) 2. **6.41.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $4\frac{4}{27}$; 6) $\frac{7}{36}$. **6.42.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{ak-bn}{nk}$; 3) $\frac{a}{n}+\frac{b}{k}$; 4) $\frac{m}{n}$; 5) $\frac{1}{n!}$; 6) $2n$. **6.43.** 1) 0; 2) 0; 3) $+\infty$; 4) 0. **6.44.** 1) $-\infty$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) 1. **6.45.** 1) $\frac{a+b}{2}$; 2) $+\infty$; 3) $\frac{5}{2}$; 4) $-\frac{5}{2}$. **6.46.** 1) $\frac{7\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{13}{4}$. **6.47.** 1) 0; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 1; 6) $\frac{4}{3}$. **6.48.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **6.49.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$; 3) 2^n; 4) $\frac{n+1}{2}$. **6.50.** 1) 2; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{m}{n}$; 4) 1. **6.51.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 15. **6.52.** 1) 4; 2) $\frac{7}{2}$; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{4}{3}$. **6.53.** 1) $\frac{9}{5}$; 2) 54; 3) 4; 4) 2. **6.54.** 1) $\frac{m}{n}$; 2) $\frac{m}{n}$; 3) $\frac{m}{n}$; 4) $\frac{m}{n}$. **6.55.** 1) 7; 2) 5; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$. **6.56.** 1) 1; 2) 2; 3) 6; 4) $\frac{1}{2}$. **6.57.** 1) 1; 2) 1; 3) -3; 4) -4. **6.58.** 1) $\frac{1}{2}$. 2) $-\frac{6}{25}$; 3) 24; 4) $\frac{1}{2}$. **6.59.** 1) $\frac{25}{8}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 0. **6.60.** 1) -1; 2) ∞; 3) 1; 4) $\frac{1}{4}$. **6.61.** 1) 2; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $4\sqrt{2}$. **6.62.** 1) $\frac{4}{\pi}$; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{\pi}$. **6.63.** 1) ∞; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **6.64.** 1) $6\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{4}$;

4) 0. **6.65.** 1) $\cos x$; 2) $-\sin x$; 3) $-\sin x$; 4) $-\cos x$; 5) $\frac{1}{\cos^2 x}$; 6) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **6.66.** 1) 3; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{21}$. **6.67.** 1) 13; 2) $-\frac{7}{2}$; 3) 2π; 4) $\frac{1}{8}$. **6.68.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) π; 3) $\frac{9}{98}$; 4) 4. **6.69.** 1) $\cos a$; 2) $-\sin a$; 3) $\frac{1}{\cos^2 a}$; 4) $-\frac{1}{\sin^2 a}$. **6.70.** 1) $-\frac{1}{18\pi}$; 2) 1; 3) $\frac{3}{2\pi}$; 4) $\frac{1}{2\pi}$. **6.71.** 1) 8; 2) -1; 3) $\frac{2}{3\pi}$; 4) -3. **6.72.** 1) 1; 2) $\frac{2}{\pi}$; 3) $-\frac{a}{\pi}$; 4) 2. **6.73.** 1) 4; 2) 8; 3) 2; 4) $\frac{3}{4}$. **6.74.** 1) 3; 2) -1; 3) $\sqrt{2}$; 4) -2. **6.75.** 1) $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 2. **6.76.** 1) e^3; 2) e^{-4}; 3) e^2; 4) e^3. **6.77.** 1) e^3; 2) e^4; 3) $e^{-\frac{2}{3}}$; 4) e^6. **6.78.** 1) e^4; 2) e; 3) e^4; 4) e^5. **6.79.** 1) $e^{-\frac{4}{3}}$; 2) e^4; 3) e^2; 4) e^3. **6.80.** 1) e^{-1}; 2) e^{-5}; 3) $e^{\frac{4}{3}}$; 4) $e^{\frac{3}{2}}$. **6.81.** 1) e; 2) $e^{-\frac{3}{4}}$; 3) e^6; 4) e^{-2} **6.82.** 1) e^{-1}; 2) $e^{-\frac{5}{8}}$; 3) $e^{\frac{5}{2}}$; 4) $e^{-\frac{(\alpha^2-\beta^2)\alpha}{16}}$. **6.83.** 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) $\sqrt{e}$; 3) e^{-2}; 4) $\sqrt{e}$. **6.84.** 1) 1; 2) 0; 3) ∞; 4) e^{ab}; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{e}$. **6.85.** 1) e; 2) $e^{\frac{2}{3}}$; 3) e; 4) $\sqrt{e}$. **6.86.** 1) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 2) $e^{\frac{3}{4}}$; 3) e; 4) e^3. **6.87.** 1) $e^{-\frac{3}{4}}$; 2) $e^{-\frac{1}{2}}$; 3) $e^{-\frac{1}{2}}$; 4) e^{-2}, **6.88.** 1) $e^{-\frac{1}{18}}$; 2) $e^{-\frac{1}{4}}$; 3) $e^{\frac{1}{\pi}}$; 4) e^2. **6.89.** 1) e^{-3}; 2) 1; 3) $e^{-\operatorname{tg} 3}$; 4) $\operatorname{ctg} 2$. **6.90.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 2; 4) $-\frac{5}{7}$. **6.91.** 1) -2; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **6.92.** 1) $\ln\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{2}\ln 2$;

3) $-\frac{1}{3}\ln 5$; 4) $-2\ln 7$. **6.93.** 1) 3; 2) $\frac{3}{4}$; 3) -2; 4) 0. **6.94.** 1) $\frac{2}{\ln 3}$; 2) $-\frac{\ln 2}{2}$; 3) $\frac{\ln 5}{3}$; 4) $-\frac{3\ln 3}{2}$. **6.95.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{6}{\ln 4}$; 4) $3\ln 5$. **6.96.** 1) 1; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $-\ln 3$; 4) $\frac{2}{\ln 2}$. **6.97.** 1) 2; 2) $\frac{3}{4}\ln 3$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{4}{\ln 5}$. **6.98.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 2; 3) -16; 4) $\frac{8}{3}$. **6.99.** 1) $-\frac{6}{\ln 5}$; 2) $12\ln 2$; 3) $\frac{8}{\ln 3}$; 4) $-\frac{256}{\ln 4}$. **6.100.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $-\frac{\sqrt{2}\ln 5}{2}$; 4) $\frac{4\ln 2}{3}$. **6.101.** 1) 2; 2) 0; 3) $-\frac{2}{\ln 3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2\ln 10}$. **6.102.** 1) 1; 2) 2; 3) $\ln 75$; 4) $\ln\frac{2}{5}$. **6.103.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{\ln 72}{4\ln 5-3\ln 4}$; 4) $\frac{5}{\ln 3-12\ln 5}$. **6.104.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{4}{9\ln 5}$; 3) $-\frac{9}{4\ln 3}$; 4) $-2\ln 3$. **6.105.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{16(2-\ln 2)\ln 4}$; 4) $\frac{72}{(8-\ln 3)\ln 2}$. **6.106.** 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{2}{5\ln 5}$; 4) $\frac{b-a}{2}$. **6.107.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{27\ln 5}{2}$; 4) $2\ln 3$. **6.108.** 1) 0; 2) $\frac{2}{\pi^2}$; 3) -3; 4) $\frac{1}{10\ln 3}$. **6.109.** 1) $-2\ln 3$; 2) $-\frac{21}{\pi\ln 2}$; 3) 0; 4) $-\frac{3\ln 2}{2}$. **6.110.** 1) $\frac{\pi}{8}$; 2) $-\frac{1}{6\ln 2}$; 3) $\frac{3\ln 3}{4}$; 4) $-\frac{2}{3\pi^2}$. **6.111.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $2\ln^2 3\cdot\ln 2$; 3) $\frac{5}{3e}$; 4) $\frac{3}{22\ln 2}$. **6.112.** 1) $e^{-\frac{1}{\pi}}$; 2) $e^{-\frac{1}{\pi^2}}$; 3) 9; 4) $\frac{1}{5}$. **6.113.** 1) e^4; 2) $e^{-\frac{1}{2}}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) e. **6.114.** 1) e^2; 2) e^{24}; 3) e; 4) $\frac{1}{5}$. **6.115.** 1) $\frac{1}{x}$; 2) $a^x\ln a$; 3) $-\frac{1}{x^2}$; 4) $a^x\ln^2 a$. **6.116.** 1) 0; 2) 0;

3) π; 4) 4. **6.117.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **6.118.** 1) $\frac{1}{1+x^2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; 4) 1; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **6.119.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $4\ln a$. **6.120.** 1) $-\frac{\pi^2}{2}$; 2) e; 3) $\ln^2 a$; 4) $\sqrt{ab}$.

6.121. 1) $\frac{a^2}{b^2}$; 2) $\frac{\alpha}{\beta}$; 3) -2; 4) 1; 5) -2; 6) 2. **6.122.** 1) $\frac{\alpha}{2}$; 2) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $a^a \ln\frac{a}{e}$; 4) 0. **6.123.** 1) $a^a \ln ae$; 2) $\frac{\alpha}{\beta}\, a^{\alpha-\beta}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 4) $\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}$; 5) $a^{a^a}\ln a$; 6) $\frac{a}{b}$.

6.124. 1) $e^{-\frac{x^2}{2}}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg}^4 1-1$; 4) $\ln x$; 5) 1; 6) $e^{1-\alpha}$; 7) $e^{2\alpha}$; 8) $-\frac{\pi^2}{4}$. **6.125.** 1) $b^{1/a}$; 2) 0; 3) $\log_2 3$; 4) $\ln 8$; 5) 0; 6) არ არსებობს; 7) 1; 8) 0; 9) არ არსებობს; 10) 1. **6.126.** 1) $\frac{\sin x}{x}$; 2) $e^{-\frac{a^2}{6}}$; 3) $\frac{a}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $e^{1/2}$; 6) $\frac{\sin x}{x}$.

§ 7.

7.2. 1)—5) არ არის უწყვეტი. **7.3.** 1) $f(1)=2$; 2) $f(-1)=-\frac{3}{2}$; 3) $f(0)=1$; 4) $f(0)=-1$; 5) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$; 6) $f(0)=\frac{1}{2}$; 7) $f(0)=0$; 8) $f(0)=2$; 9) $f(0)=0$; 10) $f(0)=e$; 11) $f(0)=0$; 12) $f(0)=0$; **7.6.** 1) $a=\frac{1}{2}$; 2) $a=1$; 3) $a=1$; 4) $a=\frac{3}{2}$; 5) $a=3$; 6) $a=-4$; 7) $a=0$; 8) $a=1$. **7.7.** 1) $a=4$, $b=-4$; 2) $a=3$, $b=2$; 3) $a=-1$, $b=1$; 4) $a=1$, $b=0$. **7.8.** 1) $a=0$; 2) $a=\frac{1}{3}$; 3) არ არსებობს; 4) $a=-1$. **7.9.** 1) $a=2$, $b=-1$; 2) $a=1$, $b=-1$; 3) არ არსებობს; 4) $a=1$, $b=\frac{\pi}{2}$.

8.1. 1) $\Delta y = 0{,}21$; 2) $\Delta y = 1$; 3) $\Delta y = -8$; 4) $\Delta y = -0{,}5$. **8.2.** 1) $\Delta x = 0{,}5$, $\Delta y = 2{,}25$; $\Delta x = -1{,}5$, $\Delta y = -3{,}75$; 2) $\Delta x = \frac{2}{3}$, $\Delta y = -\frac{3}{8}$; $\Delta x = -\frac{1}{3}$, $\Delta y = \frac{1}{2}$. **8.3.** 1) $\Delta y = a\,\Delta x$; 2) $\Delta y = 2ax\,\Delta x + b\,\Delta x + a\,(\Delta x)^2$; 3) $\Delta y = a^x\,(a^{\Delta x} - 1)$; 4) $\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$; 5) $\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$; 6) $\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$. **8.5.** 1) $\frac{4}{19}$; 2) -6. **8.6.** 1) -3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 4; 4) $9\ln 3$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) -3; 7) 1; 8) $\frac{3}{2}$. **8.7.** 1) $f'_-(-2) = -1$, $f'_+(-2) = 1$; 2) $f'_-(1) = -2$, $f'_+(1) = 2$; 3) $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$; 4) $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$. **8.10.** 1) $3x^2 - 2x$; 2) $6x^5 - 8x^3 + 2x$; 3) $2x^4 + x^2 - 2$; 4) $x^2 - x + 4$. **8.11.** 1) $2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2x$; 3) $7x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 3$; 4) $x^{-\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{2}}$. **8.12.** 1) $-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}$; 2) $-\frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3}$; 3) $-\frac{3}{x^{5/2}} + \frac{4}{x^{7/3}} - \frac{1}{x^{6/5}}$; 4) $-\frac{5}{x^{8/3}} + \frac{1}{x^{3/2}} - \frac{1}{x^3}$. **8.13.** 1) $-\frac{5}{x^{7/2}} + \frac{3}{x^{7/4}} + \frac{1}{x^{6/5}}$; 2) $-\frac{9}{x^4} - \frac{1}{6x^{5/6}} + \frac{4}{5x^{7/5}} - 1$; 3) $-\frac{3}{2x^{5/2}} + \frac{5}{x^{9/4}} - \frac{4}{x^{9/3}}$; 4) $-\frac{6}{x^{11/5}} - \frac{9}{x^4} - \frac{7}{x^{9/2}}$. **8.14.** 1) $3\cos x + 4\sin x$; 3) $\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x} + 2\cos x$; 3) $2 - \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$; 4) $-\frac{1}{1 + x^2} - 2$; 5) $5^x \ln 5$; 6) $3^x \ln 3 - 2\cdot 4^x \ln 4 - \frac{2}{x^3} - 1$; 7) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x\ln 2}$; 8) $\frac{3}{x\ln 5} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x\ln 2}$.
8.15. 1) $2\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x$; 2) $\frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,x - \frac{3}{2\,\mathrm{ch}^2 x}$; 3) $3\,\mathrm{sh}\,x + \frac{4}{\mathrm{sh}^2 x}$; 4) $\frac{2}{\mathrm{ch}^2 x} - \frac{3}{\mathrm{sh}^2 x} - \mathrm{sh}\,x$. **8.16.** 1) $2x\ln x + x$; 2) $e^x(\cos x - \sin x)$;

3) $\dfrac{3^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,3^x \ln 3$; 4) $(2x-4)\arccos x - \dfrac{x^2-4x+1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5) $5^x\left(\operatorname{arctg} x\cdot\ln 5 + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$; 6) $\log_2 x + \dfrac{1}{\ln 2}$; 7) $e^x \arcsin x + \dfrac{1+e^x}{\sqrt{1-x^2}}$; 8) $2x\operatorname{arctg} x - 1 - 2\sin x - 2x\cos x$. **8.17.** 1) $x\operatorname{ch} x$;

2) $e^x\left(\operatorname{th} x + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)$; 3) $\operatorname{ch} 2x$; 4) $2x\operatorname{ch} x + x^2\operatorname{sh} x - \dfrac{2}{3\operatorname{ch}^2 x}$.

8.18. 1) $e^x(\cos x + x\cos x - x\sin x)$; 2) $(2x\ln x + x^2\ln x\cdot\ln 3 + x)3^x$;

3) $2x\operatorname{arctg} x\log_3 x + \log_3 x + \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x\ln 3}$; 4) $e^x(\ln x + 1 + x\ln x)$.

8.19. 1) $-\dfrac{11}{(2x-3)^2}$; 2) $\dfrac{2x^3 - 5x\sqrt{x} + 6\sqrt{x}}{2(2-x^2\sqrt{x})^2}$;

3) $\dfrac{3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} - x}{3x\sqrt[6]{x}(2\sqrt{x}+1)^2}$; 4) $-\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$. **8.20.** 1) $\dfrac{1-x\ln 5}{5^x}$;

2) $\dfrac{e^x(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x}$; 3) $-\dfrac{1}{x\ln 3\cdot\log_3^2 x}$; 4) $\dfrac{\ln 5\cdot\log_5 x - 1}{\ln 5\cdot\log_5^2 x}$.

8.21. 1) $\dfrac{2}{1+\sin 2x}$; 2) $\dfrac{\sin 2x + 2\cos 2x}{\cos^2 x(\cos x - 2\sin x)^2}$; 3) $\dfrac{1-2x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$;

4) $-\dfrac{\ln x}{x^2}$, **8.22,** 1) $-\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$; 2) $\dfrac{2\cdot 15^x(\ln 5 - \ln 3)}{(3^x-5^x)^2}$;

3) $-\dfrac{4}{x(\ln x - 2)^2}$; 4) $\dfrac{\log_3\dfrac{e}{x} + \log_2\dfrac{e}{x}}{x^2}$; 5) $\dfrac{6x\operatorname{arctg} x - \pi x + 3}{(1+x^2)^2}$;

6) $\dfrac{\sqrt{1-x^2} + 2x\arcsin x}{(1-x^2)^2}$; 7) $-\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}$; 8) $\dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$.

8.23. 1) $\dfrac{2x\operatorname{ch} x - x^2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$; 2) $-\dfrac{3(x\ln x + \operatorname{sh} x\cdot\operatorname{ch} x)}{x\ln^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 x}$;

3) $\dfrac{e^x(\operatorname{sh} 2x - 2)}{2\operatorname{sh}^2 x}$; 4) $-2e^{2x}$. **8.24.** 1) 20; 2) $\dfrac{1}{8}$; 3) $-\dfrac{5}{6}$; 4) 1.

8.25. 1) 2; 2) 1; 3) $18\ln 3$; 4) $\dfrac{2(5+\ln 3)}{\ln 3}$. **8.26.** 1) 1; 2) -4;

3) 1; 4) e. **8.27.** 1) $10x(x^2-1)^4$; 2) $-\dfrac{3(1-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$;

3) $4(6x+5)(3x^2+5x-1)^3$. 4) $6\left(5x^4 - 8x^3 + \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)(x^5 - 2x^4 +$

$+3\sqrt[5]{x})^5$. **8.28.** 1) $\dfrac{3}{2\sqrt{2x-5}}$; 2) $\dfrac{1-3x}{\sqrt{4+2x-3x^2}}$; 3) $-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(7-2x)^2}}$;

4) $\dfrac{6}{5\sqrt[5]{(2x+1)^2}}$. **8.29.** 1) $3\cos 3x$; 2) $\dfrac{2}{\cos^2(2x-5)}$; 3) $-\dfrac{7}{\sqrt{1-49x^2}}$;

4) $y=-\dfrac{3}{9+x^2}$. **8.30.** 1) $4e^{4x-1}$; 2) $-2x\,5^{1-x^2}\ln 5$;

3) $\dfrac{3x^2}{x^3-4}$; 4) $\dfrac{2x+1}{(x^2+x)\ln 6}$. **8.31.** 1) $\sin 2x$; 2) $-3\cos^2 x\cdot\sin x$;

3) $\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$; 4) $-\dfrac{5\operatorname{ctg}^4 x}{\sin^2 x}$. **8.32.** 1) $3x^2\cos x^3$; 2) $-12\cos^3 3x\sin 3x$;

3) $\dfrac{10x\operatorname{tg}^4 x^2}{\cos^2 x^2}$; 4) $\dfrac{15\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}}$. **8.33.** 1) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$; 2) $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$;

3) $\dfrac{4^{\sqrt{x}}\ln 4}{2\sqrt{x}}$; 4) $\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$. **8.34.** 1) $\operatorname{ctg} x$; 2) $-\sin x\cdot 3^{\cos x}\ln 3$;

3) $\dfrac{4^x\ln 4}{1+4^{2x}}$; 4) $-\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **8.35.** 1) $\dfrac{5^{\arcsin x}\cdot\ln 5}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\ln 3}$;

3) $-\dfrac{\sin\ln x}{x}$; 4) $-\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. **8.36.** 1) $2\sin(4x+10)$;

2) $\dfrac{2x+1}{2\sqrt{\operatorname{tg}(x^2+x)}\cos(x^2+x)}$; 3) $-3\cos^2 x\sin x\cdot 2^{\cos^3 x}\ln 2$;

4) $\dfrac{\ln(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}$. **8.37.** 1) $\dfrac{3\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}{2(1+x^2)\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{4^{\sin x}\ln 4}{3\sqrt[3]{4^{2\sin x}}}$;

3) $\dfrac{3^{\cos x}\cdot\sin x\ln 3}{\sin^2 3^{\cos x}}$; 4) $-\dfrac{2\arccos(\log_3 x)}{x\sqrt{1-\log_3^2 x}\,\ln 3}$. **8.38.**

1) $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{1-e^{2\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x}}$; 2) $\dfrac{2\lg(x-\cos x)(1+\sin x)}{(x-\cos x)\ln 10}$; 3) $\dfrac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$;

4) $\dfrac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$; 5) $(-12\sin^3 3x\cdot\cos 3x)\cdot 10^{1-\sin^4 3x}\cdot\ln 10$;

6) $(2x+3)\,e^{x^2+3x-2}\cdot\cos\left(e^{x^2+3x-2}\right)$; 7) $\dfrac{3e^x}{2\sqrt{1+e^{3x}}}$;

8) $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\,(1+\sqrt{x+1})}$. **8.39.** 1) $6\operatorname{sh}^2 2x\cdot\operatorname{ch} 2x$; 2) $\operatorname{th} x$; 3) $\dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$;

4) $-\dfrac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$; 5) $2\operatorname{sh} 2x$; 6) $2\operatorname{cth} 2x$; 7) $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\cdot\operatorname{ch} x$; 8) $e^{\operatorname{ch}^2 x}\cdot\operatorname{sh} 2x$.

8.40. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\dfrac{1}{x\ln x}$; 3) $\dfrac{1}{x\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ln 5\cdot\log_3\log_5 x\cdot\log_5 x}$;
4) $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos(\sin(\sin x))$. **8.41.** 1) $-\sin 2x\cdot\cos(\cos^2 x)$;
2) $\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos^4 x}}$; 3) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}\cdot\arccos\sqrt{x}}$; 4) $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x\cdot(1+\operatorname{tg}^4 x)}$.

8.42. 1) $\dfrac{5\cdot 2^x\ln 2\cdot\arcsin^4 2^x}{\sqrt{1-4^x}}$; 2) $-\dfrac{2x\,3^{x^2}\ln 3}{3^{2x^2}+1}$;
3) $-\dfrac{6\arccos^2(\sin 2x)\cos 2x}{|\cos 2x|}$; 4) $\dfrac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{\operatorname{arcctg} e^{-x^3}}\cdot(e^{2x^3}+1)}$.

8.43. 1) $70\operatorname{ctg} 7x\cdot\ln^9\sin 7x$; 2) $\dfrac{15x^2\,2^{-x^3}\log_2^4(1-2^{-x^3})}{1-2^{-x^3}}$;
3) $\dfrac{21\arcsin^6(\ln^3 x)\cdot\ln^2 x}{x\sqrt{1-\ln^6 x}}$; 4) $-\dfrac{10x\operatorname{arctg}^4(4^{-x^2}-1)\,4^{-x^2}\ln 4}{1+(4^{-x^2}-1)^2}$.

8.44. 1) $-\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}{5x^2\sqrt[5]{\ln^4\sin\frac{1}{x}}}$; 2) $\dfrac{3\ln 2}{x^2}\cdot 2^{\cos^3\frac{1}{x}}\cdot\cos^2\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;
3) $\dfrac{5\cdot 3^{-\frac{1}{x}}\cdot\ln 3}{6x^2\sqrt[6]{\operatorname{tg} 3^{-\frac{1}{x}}}}$; 4) $-\dfrac{8}{3x\sqrt[3]{\arccos\frac{2}{x^2}}\cdot\sqrt{x^4-4}}$.

8.45. 1) $-\dfrac{15\cos 5x}{\sin^4 5x}$; 2) $\dfrac{15\operatorname{tg} x}{\ln^6\cos x}$; 3) $-\dfrac{35\cdot 2^{-x}\ln 2}{\cos^2 2^{-x}\operatorname{tg}^8 2^{-x}}$;
4) $\dfrac{4\cdot 3^{1/x}\ln 3}{x^2\operatorname{ctg} 3^{1/x}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 3^{1/x}}\cdot\sin^2 3^{1/x}}$. **8.46.** 1) $-\dfrac{1+2\operatorname{ctg} x}{2\sin^2 x\sqrt{1+\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}^2 x}}$;
2) $\dfrac{2\operatorname{tg} x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{3\cos^2\sqrt[3]{(1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x)^2}}$; 3) $\dfrac{5\sqrt[5]{(x^2+b^2)^4}+2x}{5\sqrt[5]{(x^2+b^2)^4}\cdot(x+\sqrt[5]{x^2+b^2})}$;
4) $\dfrac{3\sqrt[3]{(x^2+a^2)^2}-2x}{3\sqrt[3]{(x^2+a^2)^2}\cdot(x-\sqrt[3]{x^2+a^2})\ln 5}$. **8.47.** 1) $\dfrac{3x+4}{6\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+2})^2}\cdot\sqrt{x+2}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,(4\sqrt{x(x+\sqrt{x})}+2\sqrt{x}+1)}$;

3) $\dfrac{3^{\sin x}\cos x\ln 3-3^{-\cos x}\sin x\ln 3}{5\sqrt[3]{(3^{\sin x}-3^{-\cos x})^4}}$; 4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2^x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\cos x}}}}\times$ $\times\left(2^x\ln 2+\dfrac{2\cos x\sqrt{\cos x}-\sin x}{4\sqrt{\cos x(\sin x+\sqrt{\cos x})}}\right)$. **8.48.** 1) $\dfrac{1}{5\cos^2\dfrac{x}{5}}+$ $+5\sin 10x$; 2) $(4x+5)e^{2x^2+5x}+\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 3) $\dfrac{2\cdot 5^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}\cdot\ln 5}{x^3\sin^2\dfrac{1}{x^2}}-$ $-30\ln^2(\sin x)\cdot\operatorname{ctg} x$; 4) $\dfrac{4\cdot 2^x\cdot\operatorname{arctg} 2^x\cdot\ln 2}{3(1+4^x)}-\dfrac{\sin\ln x}{3x}$. **8.49.** 1) $\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{1-e^{2x}}-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}+\dfrac{\sqrt{1-e^{2x}}-e^{2x}}{x+\sqrt{1-e^{2x}}}$; 3) $\dfrac{1-e^{x/2}\operatorname{arctg} e^{x/2}}{1+e^x}$; 4) $\dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x}}$. **8.50.** 1) $\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{x}{3}\times$ $\times\sin 4x+4\sin\dfrac{x}{3}\cos 4x$; 2) $-e^{-x^3}(3x^2\cos 10x+10\sin 10x)$; 3) $2^{1/x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\left(2-\dfrac{\ln 2\cdot\ln x}{x}\right)$; 4) $3^{x^3+2x}\Bigg((3x^2+2)\ln 3\cdot\arcsin x^4+$ $+\dfrac{4x^3}{\sqrt{1-x^8}}\Bigg)$. **8.51.** 1) $-\dfrac{1}{2}\sin x\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}+\dfrac{\cos^2\dfrac{x}{2}}{5\cos^2\dfrac{x}{5}}$; 2) $\dfrac{3x^3-7x^2-2x+14}{7x\sqrt[7]{(x^2-2x)^6}}\times$ $\times e^{1/x}$; 3) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^9\left(\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{x^3}}\ln(\sqrt{x}+1)+\dfrac{x+1}{2x(\sqrt{x}+1)}\right)$; 4) $\dfrac{(2\sqrt{x}+1)(1+4x^2)\operatorname{arctg} 2x+12x\sqrt{x}+12x}{6\sqrt{x}\,(1+4x^2)\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^2}}$. **8.52.** 1) $\dfrac{-2(\sin x+x\cos x)}{(x\sin x)^2}$; 2) $\dfrac{4(\sqrt{1-4x}+\sqrt{1+4x}\cdot\arcsin 4x)}{\sqrt{1+4x}\,(1-4x)^2}$; 3) $\dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$; 4) $\dfrac{2\sin x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. **8.53.** 1) $\dfrac{4\sin 8x}{\cos^2 8x}$; 2) $-\dfrac{5\sin 10x\sin 6x-6\cos 6x\cos^2 5x}{\sin^2 6x}$; 3) $\dfrac{\ln\sin x(\sin 2x-\ln\sin x)}{\sin^2 x}$;

4) $\dfrac{5^{\arcsin\sqrt{x}}\,(2\sqrt{1-x}\ln 5+1)}{2\sqrt{1-x}\,(1-x)}$. 8.54. 1) $2x\,e^{x^2\cos 2x}(\cos 2x-$
$-x\sin 2x)$; 2) $5^{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\ln 5\,(2x\operatorname{arctg} x+1)$;
3) $\dfrac{3x^3+2x}{(1+x^2\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}}$; 4) $-\sin(x-x\cos 2x)(2\sin^2 x+2x\sin 2x)$.
8.55. 1) $\dfrac{1}{3(2x^2-2x+1)}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$; 3) $-\dfrac{2e^x}{\cos^2\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}\times$
$\times\dfrac{1}{(1+e^x)^2}$; 4) $\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}$; 5) $-\dfrac{2(2+\cos 2x)}{\sin^2 x}$;
6) $\dfrac{(\sin 2x\cdot\sin^2 x+2x\cos x^2\sin^2 x)-\sin^2 x\sin x^2}{x^2}$; 7) $\dfrac{2x\ln 2x+4\ln 2x+3x+2}{2(1+x)\sqrt{1+x}}$;
8) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 8.56. 1) $\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$; 2) $4\operatorname{sh} 4x$;
3) $\dfrac{3\operatorname{th} x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$; 4) $\dfrac{1}{4\operatorname{ch}^4\dfrac{x}{2}}$; 5) $\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}$; 6) $\dfrac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$;
7) $\dfrac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x+2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$; 8) $\dfrac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}+$
$+\dfrac{2}{\operatorname{sh} 2x}$. 8.57. 1) $x^x(\ln x+1)$; 2) $x^{x^2}(2\ln x+1)x$; 3) $(\ln x)^x\times$
$\times\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 4) $x^{\ln x}\cdot\dfrac{2\ln x}{x}$. 8.58. 1) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$;
2) $(\sin x)^{-2\sin^2\frac{x}{2}}(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)$; 3) $2(x+1)^{\frac{2}{x}}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$;
4) $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln x\right)$. 8.59. 1) $(\operatorname{arctg} x)^{\ln\operatorname{arctg} x}\cdot\dfrac{2\ln\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;
2) $(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\cos\sqrt{x}\cdot\ln\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 3) $5(\sin x)^{5e^x}\times$
$\times e^x(\ln\sin x+\operatorname{ctg} x)$; 4) $(\arcsin x)^{e^x}\left(\ln\arcsin x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$.
8.60. 1) $x^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\arcsin x}{x}\right)$; 2) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\ln\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$;

3) $4(\operatorname{tg} x)^{4e^x}\left(\ln \operatorname{tg} x+\frac{2}{\sin 2x}\right)e^x$; 4) $(x^2+1)^{\sin x}\left(\cos x+\frac{2x\sin x}{x^2+1}\right)$.

8.61. 1) $(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}\cdot e^{1/x}\left(\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\ln\sin\sqrt{x}}{x^2}\right)$; 2) $x^{\sqrt{x}}\ \frac{\ln x+2}{\sqrt{x}}$;

3) $x^{x^x}\cdot x^x(2\ln x+1)$; 4) $(\cos 3x)^{\sin^2 2x}(2\sin 4x\ln\cos 3x-3\sin^2 2x\cdot\operatorname{tg} 3x)$.

8.62. 1) $(\sin x)^{e^x}(\ln\sin x+\operatorname{ctg} x)e^x$; 2) $(\ln x)^{3^x}\left(\ln 3\cdot\ln x+\frac{1}{x}\right)$;

3) $(\arcsin x)^{e^x}\cdot e^x\left(\ln\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$; 4) $x^{e^{\operatorname{tg} x}}\times$ $\times e^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}\right)$; 5) $x^{e^{\sin x}}\cdot e^{\sin x}\left(\frac{1}{x}+\cos\ln x\right)$; 6) $x^{e^{\cos x}}\times$ $\times e^{\cos x}\left(\frac{1}{x}-\sin x\ln x\right)$; 7) $x^{e^{\operatorname{ctg} x}}\cdot e^{\operatorname{ctg} x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{\sin^2 x}\right)$;

8) $x^{e^{\operatorname{arctg} x}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{1+x^2}\right)$. **8.63.** 1) $(1+2x)(1+3x)+$ $+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$; 2) $-\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$;

3) $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$; 4) $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;

5) $y\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}$; 6) $\frac{54-36x+4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$. **8.64.** 1) $e^x\cos^2 x\times$ $\times\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\cos^2 x-3\sin^2 x\right)$; 2) $2^{x^2}\left(2x\operatorname{tg} x\cdot\ln x\ln 2+\right.$ $\left.+\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$; 3) $\frac{2^x\log_2 x\cdot\cos x\cdot\ln 2}{\sqrt{1-4^x}}-\arcsin 2x\left(\sin x\log_2 x-\right.$ $\left.-\frac{\cos x}{x\ln 2}\right)$; 4) $\sin 5x-\frac{\sin 5x\cdot\ln\sin x}{\sin^2 x}+5\operatorname{ctg} x\cdot\cos 5x\cdot\ln\sin x$.

8.65. 1) $\frac{6x^3-9x-x^2|x|}{2\sqrt{x^2-4}}+x^3\arcsin\frac{2}{x}$; 2) $\frac{\sin x+\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}-$ $-\frac{\cos^2 x}{\sin x(1+\sin x)}$; 3) $-\frac{x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$; 4) $x^2\left(\arccos x+\frac{x}{9\sqrt{1-x^2}}\right)$.

8.66. 1) $\frac{1}{x^4-1}$; 2) $\sqrt{2+x-x^2}$; 3) $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$; 4) $\frac{x^4-12}{x^4}\times$

$\times \operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. **8.67.** 1) $-\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{2x^2}$; 2) $-\frac{(x+2)\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^3}$; 3) 0; 4) $\frac{\arccos x}{x^3}$. **8.68.** 1) $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$; 2) $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$; 3) $\frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$; 4) $\frac{1+x^5}{x^4(1+x^2)}$. **8.69.** 1) $\frac{2x^3+2x-1}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\times$ $\times e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$; 2) $\frac{1}{\cos^5 x}$; 3) $1-e^{-x}\arcsin e^x$; 4) $4\sqrt{\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}}$. **8.70.** 1) $\frac{xe^x\operatorname{arctg}x}{\ln^3 x}\left(\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}+\frac{1}{x}+1-\right.$ $\left.-\frac{3}{x\ln x}\right)$; 2) $\frac{x\sqrt{1+x^2}\sin x}{x^2-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}+\operatorname{ctg}x-\frac{2x}{x^2-1}\right)$; 3) $\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{\arccos^3 x}\left(3-\frac{2x}{1-x^2}-\operatorname{tg}x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right)$; 4) $\frac{(\sin x-2x^2\sin x+x\sqrt{1-x^2}\cos x)\cos x+x\sin^2 x(1-x^2)\ln(x\sin x\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)x\sin x\cos^2 x}$.

8.71. 1) $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$; 2) $\arcsin^2 x$; 3) $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$; 4) $\frac{1}{x^3+1}$.

8.72. 1) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; 2) $\frac{1}{x^4+x^2+1}$; 3) $-\frac{2n\,x^{2n-1}}{x^{2n}+1}$, თუ n ლუწია და $-\frac{2n\,x^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, თუ n კენტია; 4) $\frac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$.

8.73. 1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) 6π; 3) 1; 4) $\frac{1}{15}$; 5) $\frac{4}{5}\ln 2$; 6) 0. **8.74.** $1-x$. **8.75.** 3. **8.77.** 1) $(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sign}(x+1)$; 2) $\frac{3}{2}\sin 2x\,|\sin x|$; 3) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $(|x|>1)$; 4) $\pi[x]\sin 2\pi x$.

8.78. 1) $f'_+(0)=-\frac{2}{a}$, $f'_-(0)=\frac{2}{a}$; 2) $f'_+(0)=f'_-(0)=0$; 3) არ არსებობს; 4) $f'_+(2)=\frac{\pi}{2}$, $f'_-(2)=-\frac{\pi}{2}$. **8.79.** 1) $x=1$, $x=4$, $f'_-(1)=-3$, $f'_+(1)=3$, $f'_-(4)=-3$, $f'_+(4)=3$; 2) $x=1$, $x=2$, $x=3$, $f'_-(1)=-2$, $f'_+(1)=2$, $f'_-(2)=-1$, $f'_+(2)=1$, $f'_-(3)=$ $=-2$, $f'_+(3)=2$; 3) $x=\pi k$, $k\in z$; $f'_-(\pi k)=-1$, $f'_+(\pi k)=1$; 4) $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k\in z$; $f'_-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=-1$, $f'_+\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=1$;

5) $x=0,\ \ x=\frac{1}{k}$, $k=\pm1,\ \pm2,\ldots$; $f'_-(0)$ და $f'_+(0)$ არ არსებობენ. $f'_-\left(\frac{1}{k}\right)=-\pi k^2$, $f'_+\left(\frac{1}{k}\right)=\pi k^2$; 6) $x=0,\ x=\frac{2}{2k+1}$, $k\in Z$; $f'_-(0)$ და $f'_+(0)$ არ არსებობენ. $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{\pi}{4}(2k+1)^2$, $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{\pi}{4}(2k+1)^2$. **8.90.** 1) $P_n(x)=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+4}}{(1-x)^2}$; 2) $Q_n(x)=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^2}$.

8.93. 1) $\frac{3\sqrt{x}-4}{x}dx$; 2) $\frac{1}{\cos^2 x}(\operatorname{tg}x)^{\log_5\frac{e}{5}}dx$; 3) $2^{\frac{1}{\cos x}}\times$ $\times\ln2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 4) $\frac{2x\cos x-(1-x^2)\sin x}{(1-x^2)^2}dx$. **8.94.** 1) $\frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$; 2) $\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$; 3) $-\frac{\sin 2x(1+\cos^2 x)}{(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{1+2x^2}dx$. **8.95.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{(1-4x^2)^2\sqrt{1-2x^2}}dx$; 2) $2x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\,dx$; 3) $2\sqrt{4-x^2}\,dx$; 4) $\frac{1}{2+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx$. **8.96.** 1) $\frac{1+x^2-2x^2\ln|x|}{x(1+x^2)^2}dx$; 2) $(\ln|x+\sqrt{x^2+3}|)dx$; 3) $\frac{2x^3}{(x^2-1)^2}dx$; 4) $\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx$. **8.97.** 1) 0,3; 2) -1; 3) 0,02; 4) 0,2. **8.98.** 1) 1,002; 2) 0,5151; 3) 0,485; 4) 0,835; 5) 0,2; 6) 1,2; 7) $-0{,}1$; 8) 1,004. **8.99.** $\Delta s=2x\Delta x$, $\Delta x\approx\frac{\Delta s}{2x}$. **8.100.** $4\pi R^2\Delta R$.

§ 9.

9.1. 1) $6x-8$; 2) $96x-18$; 3) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$; 4) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$; 5) $2e^{-x^2}(2x^2-1)$; 6) $4\sin 2x$; 7) $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$; 8) $-\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; 9) $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$; 10) $\frac{6}{x}$; 11) $-\frac{x}{(1+x^2)^2}$; 12) $\frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$;

13) $\frac{f(x)f''(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}$; 14) $-\frac{2}{x}\sin\ln x$. **9.2.** 1) $\frac{e^2}{32}$; 2) $\frac{4}{e}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{7\sqrt{3}}{36}$; 5) 0; 6) 12960; 7) 12; 8) 0. **9.3.** 1) $y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$, $y'''=12xf''(x^2)+8x^3f'''(x^2)$; 2) $y''=\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)$, $y'''=-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)$; 3) $y''=e^xf'(e^x)+e^{2x}f''(e^x)$, $y'''=e^xf'(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^{3x}f'''(e^x)$; 4) $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$, $y'''=\frac{1}{x^3}[2f'(\ln x)-3f''(\ln x)+f'''(\ln x)]$. **9.4.** 1) $a^x(\ln a)^n$; 2) $\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$; 3) $\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$; 4) $m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$; 5) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; 6) $(k\ln a)^n a^{kx}$; 7) $a^n\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$; 8) $2^{n-1}a^n\cos\left(2ax+\frac{n\pi}{2}\right)$; 9) $-2^{n-1}a^n\cos\left(2ax+\frac{n\pi}{2}\right)$; 10) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$; 11) $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$; 12) $\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$; 13) $y'=3x^2+1+3e^{3x}$, $y''=6x+9e^{3x}$, $y'''=6+27e^{3x}$, $y^{(n)}=3^ne^{3x}$, $n>3$; 14) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. **9.5.** 1) xe^x+ne^x; 2) $(-1)^n\times\frac{6(n-4)!}{x^{n-3}}$, $n\geqslant 4$; 3) $(\ln 2)^{n-1}2^{x-1}(\ln 2)(x-1)+n)$; 4) $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$; 5) $x\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)+n\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$; 6) $\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$. **9.6.** 1) $(x^2-3x+1)e^{-x}dx^2$; 2) $-25\cos 5x\,dx^2$; 3) $-\frac{dx^2}{(1-x^2)^{3/2}}$; 4) $\frac{8\operatorname{ctg}2x}{\sin^2 2x}dx^2$; 5) $\frac{-x\,dx^2}{(1-x^2)^{3/2}}$; 6) $\frac{2\ln x-3}{x^3}dx^2$; 7) $-e^{-x}(x^2-6x+6)\,dx^3$; 8) $\frac{384\,dx^4}{(2-x)^5}$; 9) $3\cdot 2^n\sin\left(2x+5+\frac{n\pi}{2}\right)dx^n$; 10) $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)\,dx^n$. **9.7.** 1) $\frac{15}{2}dx^2$; 2) $\frac{56}{125}dx^2$; 3) dx^2;

4) $1500\,dx^3$. **9.8.** 1) $d^2y=\frac{4x}{x^4-1}d^2x-\frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2}dx^2$; 2) $d^2y=$ $=-\frac{4}{\cos^2 2t}dt^2$. **9.9.** 1) $d^2y=\cos u\cdot d^2u-\sin u\,du^2$; 2) $d^2y=$ $=a^x\cos(a^x)\ln a\,d^2x-a^x\ln^2 a\,(a^x\sin a^x-\cos a^x)\,dx^2$; 3) $d^2y=$ $=a^{t^3}\ln a\,[\cos a^{t^3}(6t+9t^4\ln a)-a^{t^3}\sin a^{t^3}\cdot 9t^4\ln a]dt^2$. **9.19.** $f^{(n)}(0)=0$.

§ 10.

10.1. 1) $-\frac{b}{a}\operatorname{ctg}t$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$; 3) $\frac{3}{2}t^2$; 4) $\frac{3t^2-1}{2t}$; 5) -1; 6) $\frac{t}{2}$; 7) $-\frac{2t}{1+t}$; 8) $-\frac{2t}{1-t^2}$; 9) $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$; 10) $\frac{2}{3\sqrt[3]{t}}$; 11) $\frac{1+t^2}{t(2+3t-t^3)}$; 12) $-\frac{b}{a}$; 13) $\operatorname{tg}t$; 14) $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$; 15) $-2e^{3t}$; 16) $\frac{1-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}t}$; 17) $y'_x=\begin{cases}-1, & \text{როცა } t<0,\\ 1, & \text{როცა } t>0;\end{cases}$ 18) $\operatorname{tg}t$. **10.2.** 1) 1; 2) 1; 3) ∞; 4) 0.

10.3. 1) $-\frac{2}{9t^4}$; 2) $\frac{6}{t}\left(\frac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$; 3) $-\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$; 4) $-\frac{b}{a^2\cos^3 t}$; 5) $-\frac{2}{1-t^2}$; 6) $\frac{2+t^2}{a(\cos t-t\sin t)^3}$; 7) $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$; 8) $\frac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\sin t}$; 9) $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$; 10) $\frac{\sin t\,(1+3\sin^2 t)}{\cos^7 t}$; 11) $2^{n-1}n!$; 12) $y'_x=-\frac{b}{a}$, $y^{(n)}_x=0$, $n>1$; 13) $y'=2x+1$, $y''=2$, $y^{(n)}=0$, $n>2$; 14) $m^n t^m$. **10.4.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) -12.

10.6. 1) $\frac{p}{y}$; 2) $-\frac{b^2x}{a^2y}$; 3) $-\sqrt{\frac{y}{x}}$; 4) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; 5) $\frac{x}{y}\,\frac{2x^2-y^2}{x^2-2y^2}$; 6) $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; 7) $\frac{x+y}{x-y}$; 8) $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

10.7. 1) $\frac{5}{2}$; 2) $-\frac{1}{e}$; 3) -1; 4) $-e^2$; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$. **10.8.** 1) $-\frac{a^2}{y^3}$; 2) $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$; 3) $-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$; 4) $-\frac{y[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$; 5) $-\frac{3a^2x}{y^5}$; 6) $\frac{54x}{(x-2y)^5}$; 7) $\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$;

8) $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **10.9.** 1) $\frac{111}{256}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{3}{8}$; 5) $-\frac{225}{1024}$; 6) $\frac{1}{3}$.

§ 11.

11.1. 60. **11.2.** (1; 1), (−1; −1). **11.3.** (0; 0). **11.4.** $\left(\frac{1}{2};\ 2\frac{1}{4}\right)$. **11.5.** (0; 20), (1; 15), (−2; −12). **11.6.** (1; −3). **11.7.** (2; 3). **11.8.** 5. **11.9.** 1. **11.10.** 45°. **11.11.** $-\frac{1}{11}$. **11.12.** $\left(\frac{1}{8};-\frac{1}{16}\right)$. **11.13.** 1) $x-4y+4=0$; $4x+y-18=0$; 2) $y-5=0$, $x+2=0$; 3) $x-1=0$, $y=0$; 4) $y=2x$, $y=-\frac{1}{2}x$. **11.14.** 1) $x-2y-1=0$; $2x+y-2=0$; 2) $6x+2y-\pi=0$, $2x-6y+3\pi=0$; 3) $y=3$, $x=2$; 4) $2x-y+3=0$, $x+2y-1=0$. **11.15.** 1) $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$; 2) $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$, $(\pi-4)x-(\pi+4)y-\sqrt{2}\pi=0$; 3) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$; 4) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$. **11.16.** 1) $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$; 2) $x+y-2=0$, $y=x$; 3) $14x-13y+12=0$, $13x+14y-41=0$; 4) $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **11.17.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 3) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; 4) (0; 0) წერტილში ეხებიან, ხოლო (1; 1) წერტილში იკვეთებიან $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ კუთხით. **11.18.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) წირები იკვეთებიან ორ წერტილში კუთხით $\alpha_1=\alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{41}{42}$; 6) წირები იკვეთებიან სამ წერტილში. პარამეტრის $t=\pm1$ მნიშვნელობისათვის $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{6}$ კუთხით, ხოლო პარამეტრის $t=\infty$ მნიშვნელობისათვის $\alpha_3=0$ კუთხით. **11.22.** $2x-y+1=0$. **11.23.** $2x-y-1=0$. **11.24.** $4x-4y-21=0$. **11.25.** $x+5y=0$, $x+y=0$. **11.26.** (0; 1). **11.27.** (8; 0), (0; 0). **11.28.** (0; 47), (0; 11),

$\left(-\frac{47}{9};\ 0\right)$, $\left(-\frac{11}{9};\ 0\right)$. **11.29.** (0; 21), (0; 1). **11.30.** $k\pi$; $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$. **11.31.** $\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. **11.32.** $\frac{k\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$. **11.33.** $y=-x+\frac{5}{2}$. **11.34.** $y==2x+1$. **11.35.** $y=15-x$. **11.36.** $y=x-\frac{1}{4}$. **11.37.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **11.45.** 3; 0; -9. **11.46.** 1) $t_1=0$, $t_2=8$; 2) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$. **11.47.** $181{,}5\cdot10^3$ ერგი. **11.48.** 13 რად/წმ. **11.49.** 4π რად/წმ. **11.50.** $\omega=(2at-b)$ რად/წმ; $t=\frac{b}{2a}$. **11.51.** $\frac{1}{3}$ მ/წმ. **11.52.** 15 მ/წმ. **11.53.** $\vec{V}=(V_0\cos\alpha,\ V_0\sin\alpha-gt)$, $\vec{V}=\sqrt{V_0^2-2V_0gt+g^2t^2}$. **11.54.** $\frac{2\pi a\varepsilon}{p}\sin\frac{2\pi(t-t_0)}{p}\times\left(2\varepsilon\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{p}+1\right)$. **11.55.** 32 ამპერი. **11.56.** 1,013 ჯ/კგ.

§ 12.

12.1. 1) კი; 2) არა; 3) კი; 4) კი; 5) არა; 6) არა; 7) არა; 8) კი. **12.2.** 1) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$; 2) საძიებელი წერტილის აბსცისებია $\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$. **12.7.** გააჩნია 4 ფესვი, რომლებიც მდებარეობენ]0; 1[;]1; 2[,]2; 3[;]3; 4[ინტერვალებში. **12.17.** 1) კი; 2) არა; 3) კი; 4) არა. **12.18.** 1) (2; 4); 2) (1; 2); 3) $\left(\sqrt{\frac{4}{\pi}-1};\ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\right)$; 4) $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{8}\right)$; $\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **12.21.** $f(x)$ არის არაუმეტეს $(n-1)$ რიგის მრავალწევრი. **12.26.** 1) არა; 2) კი; 3) კი; 4) არა. **12.27.** 1) $\frac{\sin b-\sin a}{\ln b-\ln a}=\xi\cos\xi$, სადაც $a<\xi<b$; 2) $e^b+e^a=2e^{\xi}$, სადაც $a<\xi<b$.

§ 13.

13.1. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$. **13.2.** 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{1}{\ln\frac{5}{2}}$; 4) $\ln\frac{12}{49}$. **13.3.** 1) $\ln\frac{15}{4}$; 2) $\frac{\alpha}{\beta}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{3}$.

13.4. 1) 0; 2) 1; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $-\frac{a^2}{2}$. **13.5.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{1}{8}$. **13.6.** 1) 2; 2) $-\frac{2}{\pi}$; 3) -1; 4) 1. **13.7.** 1) $\frac{\alpha}{\beta}$; 2) $\log_a \frac{e}{a}$; 3) $1-\ln a$; 4) $\frac{1}{6}\ln a$. **13.8.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{a}$. **13.9.** 1) -3; 2) 4; 3) 1; 4) $\frac{1}{3}$. **13.10.** 1) 0; 2) ∞; 3) 0; 4) $\frac{\pi^2}{2}$. **13.11.** 1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) $\cos a$. **13.12.** 1) 1; 2) -2; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 0. **13.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 1. **13.14.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0, როცა $\gamma>0$, ან, როცა $\gamma=0$ ($\alpha<0$, β ნებისმიერია; $\alpha=0$, $\beta<0$); $+\infty$, როცა $\gamma<0$ ან $\gamma=0$ ($\alpha>0$, β ნებისმიერია; $\alpha=0$, $\beta>0$); 1, როცა $\alpha=\beta=\gamma=0$. **13.15.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{8}{\pi}$.
13.16. 1) 0; 2) $\frac{4a^2}{\pi}$; 3) 0; 4) 0. **13.17.** 1) a; 2) 0; 3) 0, როცა $\beta>\alpha$; a, როცა $\beta=\alpha$; ∞, როცა $\beta<\alpha$; 4) 0, როცა $\alpha<2\beta$, $-\frac{\beta}{\alpha}$, როცა $\alpha=2\beta$, $-\infty$, როცა $\alpha>2\beta$. **13.18.** 1) 0; 2) 1; 3) $+\infty$; 4) 0.
13.19. 1) $-\frac{2}{\pi}$; 2) 2; 3) 2; 4) 0, როცა $0<a<1$; $+\infty$, როცა $a>1$. **13.20.** 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$. **13.21.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) $-\frac{1}{3}$. **13.22.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $+\infty$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{3}$.
13.23. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\alpha-\beta}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{6}$. **13.24.** 1) 1; 2) e; 3) $\frac{1}{e}$; 4) $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **13.25.** 1) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; 2) $e^{-\frac{1}{2}}$; 3) $e^{\frac{1}{6}}$; 4) $e^{-\frac{1}{6}}$.
13.26. 1) $e^{\frac{1}{3}}$; 2) $e^{-\frac{1}{3}}$; 3) $\sqrt{e}$; 4) 1. **13.27.** 1) 1; 2) 1; 3) e^3; 4) 1. **13.28.** 1) 1; 2) 1; 3) e; 4) 1. **13.29.** 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) 1.

18.80. 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) e^2. **18.81.** 1) $\frac{1}{e}$; 2) 1; 3) 1; 4) 1

18.82. 1) $e^{-\frac{1}{6}}$; 2) e^{-1}; 3) $\sqrt{e}$; 4) a. **18.85.** $-\frac{1}{12}$. **18.86** 1) არ გამოიყენება; 2) არ გამოიყენება.

§ 14.

14.1. 1) $P(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$; 2) $P(x) = (x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 11$; 3) $P(x) = -2(x+1)^3 + 11(x+1)^2 - 13(x+1) + 5$; 4) $P(x) = (x-1)^{10} + 10(x-1)^9 + 45(x-1)^8 + 120(x-1)^7 + 210(x-1)^6 + 249(x-1)^5 + 195(x-1)^4 + 90(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 5(x-1) - 1$. **14.2.** 1) $-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n + (-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, სადაც $0<\theta<1$; 2) $2+\frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!\,2^{4n-2}} + \frac{(-1)^n(2n)!\,(x-4)^{n+1}}{2^{2n+1}\cdot n!\sqrt{[4+\theta(x-4)]^{2n+1}}}$, სადაც $0<\theta<1$. 3) $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(\theta x + n + 1)e^{\theta x}$, სადაც $0<\theta<1$; 4) $x-1+\frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \frac{(-1)^n 6(x-1)^n}{(n-3)(n-2)(n-1)n} + \frac{(-1)^{n+1}6(x-1)^{n+1}}{(n-2)(n-1)n(n+1)[1+\theta(x-1)]^{n-2}}$, $0<\theta<1$. **14.3.** 1) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\sin\frac{\pi}{4}(2k+1)\cdot x^k + o(x^n)$; 2) $e^{\frac{1}{2}x+2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{e^2}{2^k\cdot k!}x^k + o(x^n)$; 3) $\frac{1}{2x+3} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \times \frac{2^k}{3^{k+1}}x^k + o(x^n)$; 4) $\ln(5-4x) = \ln 5 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k\cdot x^k + o(x^n)$.

14.4. 1) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+o((x-2)^n)$; 2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}-1\right)}{k!}(x-1)^k+o((x-1)^n)$; 3) $-e^{-2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-2}\cdot 2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k+o((x+1)^n)$; 4) $\sum_{k=1}^{n} e^{-2}\,\frac{2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k+o((x+1)^n)$. **14.5.** 1) $2-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+\frac{(x-2)^4}{[1+\theta(x-2)]^5}$, $0<\theta<1$; 2) $x+\frac{x^3}{3}\times\frac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$, $0<\theta<1$; 3) $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{4!}\cdot\frac{9\theta x+6\theta^3x^3}{(1-\theta^2x^2)^{7/2}}$, $0<\theta<1$; 4) $1-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2}(x-1)^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}(x-1)^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4\cdot4!}\times\frac{(x-1)^4}{\sqrt{[1+\theta(x-1)]^9}}$, $0<\theta<1$. **14.6.** 1) $\frac{1}{e^2}\left(1+(x+1)^2+\frac{1}{2}(x+1)^4+\frac{1}{6}(x+1)^6\right)+o((x+1)^6)$; 2) $1+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{3(x-1)^4}{8}+\frac{5(x-1)^6}{16}+o((x-1)^6)$; 3) $\frac{x-1}{4}-\frac{(x-1)^3}{16}+\frac{(x-1)^5}{64}-\frac{(x-1)^7}{256}+o((x-1)^8)$; 4) $\sqrt[4]{2}\left(1-\ln 2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\ln^2 2}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{\ln^3 2}{6}\left(x-\frac{1}{2}\right)^6\right)+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^7\right)$.

14.7. 1) $5+11x+12x^2+\frac{13}{3}x^3+o(x^3)$; 2) $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{6}x+\frac{5}{72}x^2+o(x^2)$; 3) $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)$; 4) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}x^2+o(x^3)$; 5) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^6)$; 6) $x^2-x^3+x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{2}{3}x^6+o(x^6)$. **14.8.** 1) 0,01745241; 2) 0,98769; 3) 2,2361;

4) 1,04139. **14.9.** 1) 2; 2) $-\frac{7}{4}$; 3) 0; 4) $e^{-\frac{2}{3}}$ **14.10.** 1) $e^{\frac{5}{6}}$; 2) 1; 3) $-\frac{32}{3}$; 4) $\frac{28}{3}$.

§ 15.

15.1. 1) ზრდადია $]-\infty; -1[$ და $]3; +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]-1; 3[$ შუალედში; 2) კლებადია $]-\infty; -1[$ და $]0; 1[$ შუალედებში, ზრდადია $]-1; 0[$ და $]1; +\infty[$ შუალედებში; 3) ზრდადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში; 4) კლებადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში. **15.2.** 1) ზრდადია $]-\infty; 1[$ და $]3, +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]1; 3[$ შუალედში; 2) ზრდადია $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$ და $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ შუალედებში, კლებადია $\left]-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right[$ შუალედში; 3) კლებადია $]-\infty; 0[$ და $]6; 12[$ შუალედებში, ზრდადია $]0; 6[$ და $]12; +\infty[$ შუალედებში; 4) ზრდადია $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$ და $\left]\frac{11}{18}; +\infty\right[$ შუალედებში, კლებადია $\left]-\frac{1}{2}; \frac{11}{18}\right[$ შუალედში. **15.3.** 1) კლებადია $]-\infty; -1[$ და $]1; +\infty]$ შუალედებში; ზრდადია $]-1; 1[$ შუალედში; 2) ზრდადია $]-\infty; -1[$ და $]0; 1[$ შუალედებში, კლებადია $]-1; 0[$ და $]1; +\infty[$ შუალედებში; 3) ზრდადია $]-\infty; -1[$ და $]1; +\infty[$ შუალედებში, კლებადია $]-1; 1[$ შუალედში; 4) კლებადია $]-\infty; 0[$, $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ და $]1; +\infty[$ შუალედებში, ზრდადია $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ შუალედში. **15.4.** 1) კლებადია $\left]-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[$ შუალედებში, ზრდადია $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ შუალედში; 2) ზრდადია $]-2\sqrt{2}; -2[$ და $]0; 2[$ შუალედებში, კლებადია $]-2; 0[$ და $]2; 2\sqrt{2}[$ შუალედებში; 3) ზრდადია $]-\infty; -50[$ და $]-50; 25[$ შუალედებში, კლებადია $]25; +\infty[$ შუალედში; 4) ზრდადია $]-\infty; -\sqrt{3}[$ და $]\sqrt{3}; +\infty[$

შუალედებში, კლებადია $]-\sqrt{3}; -1]$, $]-1; 1[$ და $]1; \sqrt{3}[$ შუალედებში. **15.5.** 1) ზრდადია $]-\infty; 0[$ შუალედში, კლებადია $]0; +\infty[$ შუალედში; 2) კლებადია $]-\infty; 0[$ და $]2; +\infty[$ შუალედში, ზრდადია $]0; 2[$-ში; 3) კლებადია $]-\infty; 2[$ შუალედში, ზრდადია $]2; +\infty[$ შუალედში; 4) კლებადია $]-\infty; 0[$ და $]0; 1[$ შუალედებში, ზრდადია $]1; +\infty[$ შუალედში. **15.6.** კლებადია $]-\infty; a[$ და $]a; +\infty[$ შუალედებში; 2) ზრდადია $\left]0; \frac{2}{\ln 3-1}\right[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty; 0[$ და $\left]\frac{2}{\ln 3-1}; +\infty\right[$ შუალედში; 3) ზრდადია $\left]-e^{-6}; \frac{7}{2}\right[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty; -e^{-6}[$ და $\left]\frac{7}{2}; +\infty\right[$ შუალედებში; 4) ზრდადია $]0; 2[$ შუალედში, კლებადია $]-\infty; 0[$ და $]2; +\infty[$ შუალედებში. **15.7.** 1) კლებადია $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ შუალედში, ზრდადია $\left]\frac{1}{e}; +\infty\right[$ შუალედში; 2) კლებადია $\left]0; \frac{4}{e}\right[$ შუალედში, ზრდადია $\left]\frac{4}{e}; +\infty\right[$ შუალედში; 3) კლებადია $]0; 1[$ და $]1; e[$ შუალედებში, ზრდადია $]e; +\infty[$ შუალედში; 4) კლებადია $]-\infty; -1[$ და $]0; 1[$ შუალედებში, ზრდადია $]-1; 0[$ და $]1; +\infty[$ შუალედებში. **15.8.** 1) ზრდადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში; 2) კლებადია $\left]\frac{\pi}{3}(6k-1); \frac{\pi}{3}(6k+1)\right[$ შუალედებში, ზრდადია $\left]\frac{\pi}{3}(6k+1); \frac{\pi}{3}(6k+5)\right[$ შუალედებში $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$; 3) ზრდადია $\left]-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right[$ და $\left]\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right[$ შუალედებში, კლებადია $\left]\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right[$ და $\left]\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right[$ შუალედებში $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 4) ზრდადია $\left]\frac{k\pi}{2}; \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right[$ შუალედებში, კლებადია $\left]\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}; \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right[$ შუალედებში $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. **15.9.** 1) ზრდადია $]0; +\infty[$ შუალედში; 2) ზრდადია $\left]\frac{\pi}{4}(8k-3); \frac{\pi}{4}(8k+1)\right[$ შუალედებში, კლე-

ბადია $\left]\frac{\pi}{4}(8k+1); \frac{\pi}{4}(8k+5)\right[$ შუალედებში ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

3) ზრდადია $]-\infty; +\infty[$ შუალედში; 4) ზრდადია $\left]e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi};\right.$ $\left.e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi}\right[$ შუალედებში, კლებადია $\left]e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi}; e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi}\right[$ შუალედებში ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **15.10.** 1) $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=$ $=y(1)=-1$; 2) $y_{max}=y(-1)=17$; $y_{min}=y(3)=-47$; 3) $y_{max}=$ $=y(0)=12$; $y_{min}=y(\pm 2)=-4$; 4) $y_{min}=y(0)=-108$; $y_{max}=$ $=y(-2)=0$. **15.11.** 1) $y_{min}=y(1)=-1$; 2) $y_{max}=y(-5)=0$, $y_{min}=y(1)=-324$; 3) $y_{min}=y(3)=2$, $y_{max}=y(-3)=-2$; 4) $y_{min}=y(2)=12$, $y_{max}=y(-2)=-12$. **15.12.** 1) ექსტრემუმი არა აქვს; 2) $y_{max}=y\left(\frac{1}{2}\right)=-4$; 3) $y_{max}=y(0)=-2$; $y_{min}=$ $=y(2)=2$; 4) $y_{min}=y(-2)=-\frac{1}{4}$; $y_{max}=y(2)=\frac{1}{4}$. **15.13.** 1) $y_{max}=y(3,2)=\frac{9}{16}$; 2) $y_{max}=y(-3)=-8$; $y_{min}=$ $=y(1)=0$; 3) $y_{max}=y(5)=-\frac{27}{4}$; 4) $y_{max}=y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=$ $=-3\sqrt{3}$; $y_{min}=y\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=3\sqrt{3}$. **15.14.** 1) $y_{min}=$ $=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$, $y_{max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}$; 2) $y_{max}=$ $=y(1)=1$; 3) $y_{max}=y(0)=0$, $y_{min}=y(1)=-\frac{2}{3}$; 4) $y_{max}=$ $=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$; $y_{min}=y(-1)=y(5)=0$. **15.15.** 1) $y_{max}=$ $=y(0)=2$, $y_{min}=y(2)=\sqrt[3]{4}$; 2) $y_{max}=y(0)=0$; 3) $y_{max}=$ $=y(0)=\sqrt{2}$; 4) $y_{max}=y(-2\sqrt{3})=-\sqrt{3}$, $y_{min}=y(2\sqrt{3})=\sqrt{3}$. **15.16.** 1) $y_{min}=y(-1)=-\frac{1}{e}$; 2) $y_{min}=y(0)=0$; $y_{max}=y(2)=\frac{4}{e^2}$. 3) $y_{min}=y(1)=e$; 4) $y_{min}=y(-\ln\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. **15.17.** 1) $y_{min}=$ $=y(0)=0$, $y_{max}=y\left(\frac{4}{5\ln 5}\right)=e^{-4}$; 2) $y_{min}=y(0)=0$; $y_{max}=$

$= y\left(\dfrac{1}{3\ln\dfrac{10}{3}}\right) = e^{-2}$; 3) $y_{\min} = y(-1) = -e^{-6}$; $y_{\max} = y\left(\dfrac{7}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{2}\right)^7 e^{21/4}$; 4) $y_{\min} = y(0) = e^{-1.5}$, $y_{\max} = y(2) = e^{-1.5}$. **15.18.** 1) $y_{\min} = y(0) = 0$; 2) $y_{\min} = y\left(\dfrac{1}{e}\right) = -\dfrac{1}{e}$; 3) $y_{\max} = y\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min} = y(1) = 0$; 4) ექსტრემუმი არა აქვს. **15.19.** 1) $y_{\max} = y(k\pi) = (-1)^k + \dfrac{1}{2}$, $y_{\min} = y\left(\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\dfrac{3}{4}$, $k \in Z$; 2) $y_{\min} = y\left[\left(k - \dfrac{1}{6}\right)\pi\right] = -\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, $y_{\max} = y\left[\left(k + \dfrac{1}{6}\right)\pi\right] = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, $k \in Z$; 3) $y_{\max} = y(k\pi) = 10$, $y_{\min} = y\left[\left(k + \dfrac{1}{2}\right)\pi\right] = 5$, $k \in Z$; 4) $y_{\max} = y(2k\pi) = y\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y_{\max} = y\left(2k\pi + \dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\min} = y(2k\pi + \pi) = y\left(2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$, $y_{\min} = y\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **15.20.** 1) $y_{\max} = y\left(2k\pi + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $y_{\min} = y\left(2k\pi - \dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) ექსტრემუმი არა აქვს; 3) $y_{\max} = y\left(\dfrac{\pi}{12} + k\pi\right) = \dfrac{\pi + 6\sqrt{3} - 12}{12} + k\pi$, $y_{\min} = y\left(\dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right) = \dfrac{5\pi - 6\sqrt{3} - 12}{12} + k\pi$; 4) $y_{\max} = y(2k\pi) = -1$. **15.21.** 1) $y_{\max} = y(-1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, $y_{\min} = y(1) = 1 - \dfrac{\pi}{2}$; 2) $y_{\min} = y(1) = \dfrac{\pi}{4} - 1$, $y_{\max} = y(0) = 0$; 3) $y_{\max} = y(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$;

4) $y_{\min} = y\left(-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, $y_{\max} = y\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}$, $k \in Z$; 5) $y_{\min} = y(0) = 0$; 6) $y_{\min} =$

$= y(0) = 0$. **15.22.** 1) -44; $14\frac{1}{3}$; 2) $-34\frac{3}{4}$; 9; 3) 0; 1; 4) 0; $\frac{3}{8}$. **15.23.** 1) 2; $\frac{26}{5}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3; 3) $-\frac{3}{2}$; 7; 4) 1; $5\frac{4}{49}$; **15.24.** 1) 0; 5; 2) 6; 10; 3) 0; $\sqrt[3]{9}$; 4) $\sqrt[3]{2}$; 2. **15.25.** 1) $5{,}5 - \ln 4$; 4,5; 2) 1; 6; 3) 0; e^2; 4) 0; $\ln 3$. **15.26.** 1) -6; 21; 2) -56; $\frac{89}{8}$; 3) 0; $8\sqrt{2}$; 4) 1,5; 4. **15.27.** 1) 0; $21 + 3\ln 2$; 2) 0; $4 + \ln 2$; 3) $-e^3$; e^5; 4) 1; e^2. **15.28.** 1) 1; $\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2}$; 2) $18 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$; 20; 3) 0; 8; 4) 0; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **15.29.** 1) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{4}$; $1 + \frac{\pi}{4}$; 2) $2 - \pi$; 3; 3) 3; $2 + \sqrt{2}$; 4) 0; 1. **15.30.** 1) 1; $\frac{5}{4}$; 2) $3 - \pi$; 1; 3) $2\cos 1 + 2\sin 1$; $\pi^2 - 3$; 4) $12\pi - 1$; 13π. **15.31.** 1) 0; $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\pi$; π; 3) 0; $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg} 2$; $\frac{\pi}{2}$; 5) -2; $4e\ln 2$; 6) -2; 16. **15.32.** 1) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; $+\infty$; 2) $-\infty$; -1; 3) $-\infty$; 1; 4) 0; 4. **15.33.** 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$; 1; 2) 0; $\frac{1}{e}$; 3) 5; $+\infty$; 4) $\inf f = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{როცა } a \leqslant 0, \\ \frac{a^2+1}{a^2+3}, & \text{როცა } a > 0; \end{cases}$ $\sup f = 1$. **15.36.** $\frac{2}{3}$. **15.37.** 16. **15.38.** 64. **15.39.** 12. **15.40.** 18. **15.41.** 5 და 5. **15.42.** 2. **15.43.** 1. **15.44.** 90. **15.45.** 81. **15.46.** 4; 8. **15.47.** მართკუთხედის გვერდებია $\frac{R}{\sqrt{5}}$ და $\frac{4R}{\sqrt{5}}$. **15.48.** მართკუთხას. **15.50.** 4. **15.51.** 8. **15.52.** 12. **15.53.** $\frac{ah}{2}$. **15.54.** 56. **15.55.** $R\sqrt{2}$; $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **15.56.** 18. **15.57.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **15.58.** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{6}$. **15.59.** $\sqrt{\frac{s}{\sin\alpha}}$. **15.60.** $2a$. **15.61.** $2R\sin\frac{2\pi}{9}$. **15.62.** $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$. **15.63.** $\frac{5\pi}{9}$. **15.64.** $\frac{1}{3}$. **15.65.** $\frac{5}{12}$.

15.66. (2; 1) და (2; —1). **15.67.** (1; 1). **15.68.** —2. **15.69.** 2. **15.70.** $2x+4y-5=0$. **15.71.** $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$. **15.72.** $\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. **15.73.** $\frac{\pi}{2}\ s$. **15.74.** $c(-\sqrt{6};\ -\sqrt{6})$. **15.75.** $c=\frac{4}{5}$; $s=$ $=\frac{48}{25}\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$. **15.76.** $c=\frac{1}{6}$; $s=\frac{5}{3\sqrt[3]{6}}$. **15.77.** πa^3. **15.78.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **15.79.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}e^3$. **15.80.** $\sqrt[3]{4v}$; **15.81.** 3. **15.82.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. **15.83.** ფუძე $\frac{P}{2}$, ხოლო ფერდი $\frac{3P}{4}$. **15.84.** ფუძე $\frac{4}{5}P$, ხოლო ფერდები $\frac{3}{5}P$. **15.85.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$. **15.86.** $\frac{4}{3}R$. **15.87.** $\frac{8}{3}\pi R^3$. **15.88.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **15.89.** $\pi R^2(1+\sqrt{5})$. **15.90.** რადიუსი $\frac{2R}{3}$, სიმაღლე $\frac{h}{3}$. **15.91.** $\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$. **15.92.** $R=H=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$. **15.93.** $\frac{200}{\sqrt{3}}$. **15.94.** $\sqrt{(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^3}$.

§ 16.

16.1. 1) ამოზნექილია $]-\infty;\frac{5}{3}[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]\frac{5}{3};+\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $\left(\frac{5}{3};\ -\frac{250}{27}\right)$; 2) ამოზნექილია $]-\infty;\ 2[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]2;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია (2; 12); 3) ჩაზნექილია $]-\infty;\ -\frac{1}{2}[$ და $]\frac{1}{2};\ +\infty[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{2};-\frac{17}{8}\right)$ და $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{9}{8}\right)$; 4) ამოზნექილია $]-\infty;\ 1[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]1;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(1;\ -1)$; 5) ჩაზნექილია $]-\infty;\ +\infty[$ შუალედში; 6) ამოზნექილია $]-\infty;\ 0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია (0; 1). **16.2.** 1) ჩაზნექილია $]-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}[$ შუალედში, ამოზნექილია $]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{3}}[$

და $\left]\frac{1}{\sqrt{3}};\ +\infty\right[$ შუალედებში. გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{3}{4}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{3}{4}\right)$; 2) ამოზნექილობის შუალედებია $]-\infty;\ -1[$ და $]1;\ +\infty[$. ჩაზნექილობის შუალედებია $]-1;\ 1[$, გადაღუნვის წერტილები არა აქვს; 3) ჩაზნექილია $]-\infty;\ -6]$ და $]0;\ 6[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]-6;\ 0[$ და $]6;\ +\infty[$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილებია, $\left(-6;\ -\frac{9}{2}\right)$, $(0;\ 0)$ და $\left(6;\ \frac{9}{2}\right)$; 4) ამოზნექილია $]-\infty;\ -2\sqrt{3}[$ და $]-2+\sqrt{3};\ 1[$ შუალედებში, ჩაზნექილია $]-2-\sqrt{3};\ -2+\sqrt{3}[$ და $]1;\ +\infty[$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილის აბსცისებია $-2\pm\sqrt{3}$. **16.3.** 1) ამოზნექილია $]-1;\ 0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(0;\ 1)$; 2) ჩაზნექილია $]-\infty;\ -3[$ შუალედში, ამოზნექილია $]-3;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(-3;\ 0)$; 3) ჩაზნექილია $]-\infty;\ -1[$ და $]1;\ +\infty[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]-1;\ 1[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილებია $(-1;\ \sqrt[3]{2})$ და $(1,\ \sqrt[3]{2})$; 4) ამოზნექილია $\left]0;\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right[$ შუალედში, ჩაზნექილია $\left]\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ +\infty\right[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილის აბსცისაა $x=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. **16.4.** 1) ჩაზნექილია $]-\infty;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილი არა აქვს; 2) ჩაზნექილია $\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ და $\left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ +\infty\right[$ შუალედებში, ამოზნექილია $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ შუალედში. გადაღუნვის წერტილებია $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ და $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. 3) ამოზნექილია $]-\infty;\ -1[$ და $]1;\ +\infty[$ შუალედებში, ჩაზნექილია $]-1;\ 1[$ შუალედში. გადაღუნვის წერტილებია $(-1;\ \ln 2)$ და $(1;\ \ln 2)$. 4) ამოზნექილია $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ შუალედში, ჩაზნექილია $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$ და $]0;\ +\infty[$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილია $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{e^2}\right)$. **16.5.** 1) ამოზნექილია $]2k\pi;\ (2k+1)\pi[$ შუალედებში, ჩაზნექილია $](2k+1)\pi;\ (2k+2)\pi[$ შუალედებში. გადაღუნვის წერტილებია $(k\pi;\ k\pi)$, $k\in Z$.

2) ჩაზნექილია $\left]e^{\frac{\pi(8k+1)}{4}};\ e^{\frac{\pi(8k+1)}{6}}\right[$ შუალედებში. გადაღუნვის წერტილების აბსცისებია $x=e^{\frac{\pi(4k+1)}{4}}$, $k\in Z$. 3) ამოზნექილია $]-\infty;\ 0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილები არა აქვს. 4) ჩაზნექილია $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[$ შუალედში, ამოზნექილია $\left]\frac{1}{2},\ +\infty\right[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილის აბსცისაა $x=\frac{1}{2}$.
16.6. 1) ჩაზნექილია $]-\infty;\ 0[$, $]0;\ 1[$ და $]3;\ +\infty[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]1;\ 3[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $\left(3;\ \frac{2}{9}\right)$. 2) ჩაზნექილია $]0;\ 1[$ და $]5;\ +\infty[$ შუალედებში, ამოზნექილია $]1;\ 5[$ შუალედში. გადაღუნვის წერტილია $\left(5;\ \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)$. 3) ამოზნექილა $]-\infty;\ 0[$ შუალედში, ჩაზნექილია $]0;\ +\infty[$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია (0; 0). 4) ჩაზნექილია $\left]-\infty;\ -e^{-\frac{3}{2}}\right[$ და $\left]e^{-\frac{3}{2}};\ +\infty\right[$ შუალედებში; ამოზნექილია $\left[-e^{-\frac{3}{2}};\ e^{-\frac{3}{2}}\right[$ შუალედში; გადაღუნვის წერტილებია $\left(-e^{-\frac{3}{2}};\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ და $\left(e^{-\frac{3}{2}};\ -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. **16.7.** $a\in\left]-\infty,\ -\frac{e}{6}\right]\cup\ ]0;\ +\infty[$.
16.8. $a=-\frac{3}{2}$; $b=\frac{9}{2}$. **16.9.** $h=\frac{1}{6\sqrt{2}}$. **16.14.** არ შეიძლება.
16.15. არ შეიძლება. **16.21.** 1) (1; 4), (1; —4); 2) $\left(e^{\frac{3}{4}\pi+2k\pi};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(e^{\frac{3}{4}\pi+(2k+1)\pi};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $k\in Z$; 3) $(\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}})$; 4) $\left(\frac{9}{2};\ \frac{27}{2}\right)$. **16.22.** 1) $x=0$, $y=0$; 2) $x=2$, $y=0$; 3) $x=1$, $x=3$, $y=0$; 4) $y=0$. **16.23.** 1) $x=\pm 2$, $y=1$; 2) $y=x$; 3) $y=\pm x$;

4) $y=x-\frac{1}{3}$. **16.24.** 1) $y=3x\pm\frac{\pi}{2}$; 2) $x=0$, $y=\pm 1$; 3) $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$; 4) $x=0$; $y=x$. **16.25.** 1) $y=0$; 2) $x=0$, $y=0$, $y=1$; 3) $y=0$; 4) $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}$. **16.26.** 1) $x=0$, $y=2x$, $y=-2x$; 2) $y=1$; 3) $y=x$; 4) $x=0$, $y=-x-1$, $y=x+1$. **16.27.** 1) $y=1$; 2) $y=0$; 3) $y=0$; 4) $y=\frac{x+\pi}{2}$. **16.29.** 1) $x=-1$, $y=0$; 2) $y=x\pm\pi$; 3) $y=\frac{1}{2}x+e$; 4) $y=\pm\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. **16.30.** 1) $y=-x-a$; 2) $y=x-2$; 3) $y=x+6\pi$, $y=x$; 4) ასიმპტოტი არა აქვს. **16.32.** 1) $y=a$; 2) ასიმპტოტი არა აქვს; 3) $x=a$, $x=-a$; 4) $y=0$. **16.33.** 1) $r=\frac{2}{\cos\varphi}$, $r=-\frac{2}{\cos\varphi}$; 2) $r=\frac{1}{\sin\varphi}$, $r=-\frac{1}{\sin\varphi}$, $r=\frac{1}{\cos\varphi}$, $r=-\frac{1}{\cos\varphi}$; 3) $r=\frac{a}{3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)}$, $r=\frac{a}{3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)}$, $r=-\frac{a}{3\cos\varphi}$; 4) $r=-\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}$. **16.34.** 1) $y=x+2$; 2) $y=x-1$, $y=-x-1$; 3) $x=3$, $x=-3$, $y=2$; $y=-2$; 4) $x=4$.

§ 18.

18.1. 1) 1,33998; 2) 2,01584; 3) $-1{,}2233$; 4) 0,759308. **18.2.** 1) 0,546417; 2) 1,16696; 3) $-0{,}556427$; 4) $-0{,}466177$. **18.3.** 1) 1,87879; 2) 0,911537; 3) 1,72275; 4) 1,50278. **18.4.** 1) $-0{,}717325$; 2) 1,18375; 3) 0,533112; 4) $-0{,}305777$. **18.5.** 1) 1,28709; 2) 0,261642; 3) 1,68289; 4) 1,39676. **18.6.** 1) $-0{,}354501$; 2) $-0{,}205597$; 3) $-0{,}208649$; 4) 2, 45934. **18.7.** 1) $x_1=-2{,}602$, $x_2=0{,}340$, $x_3=2{,}262$; 2) $-0{,}88677$; 3) $x_1=-2{,}2340$, $x_2=0{,}3276$; 4) $-0{,}7549$. **18.8.** 1) 2,087; 2) 3,3532; 3) $-1{,}4916$; 4) $\pm 0{,}824$. **18.9.** 1) 3,6926; 2) 1,8411; 3) $x_1=0{,}776$, $x_2=2{,}223$; 4) 1,0967.

§ 19.

19.8. 1) $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; 2) $-\vec{i}-\frac{\vec{j}}{\pi}+\vec{k}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}+\vec{k}$;

4) $2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. **19.4.** 1) $\cos t\cdot\vec{i}-\sin 2t\cdot\vec{j}+\cos 2t\cdot\vec{k}$; 2) $(\cos t-$ $-t\sin t)\vec{i}+(\sin t+t\cos t)\vec{j}+\vec{k}$; 3) $(1-\sin t)\vec{i}+\vec{j}+\cos t\cdot\vec{k}$; 4) $2^{2t}\cdot\vec{i}-\dfrac{1}{1+t^2}\vec{j}+3^t\cdot\ln 3\cdot\vec{k}$. **19.5.** 1) $\vec{i}$; 2) $12\vec{i}-2\vec{j}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$; 3) $\vec{i}-3\vec{j}$; 4) $\vec{i}-3\ln 3\cdot\vec{j}+\dfrac{1}{2}\vec{k}$. **19.6.** $1+3t^2+5t^4$. **19.7.** $(3t^2-$ $-2t)\vec{i}+(3t^2-2t)\vec{j}-2t\cdot\vec{k}$. **19.8.** წრფე $\begin{cases}4x+3y=0,\\ z=0;\end{cases}$ $v=3\vec{i}-4\vec{j}$.

19.9. $y=\dfrac{1}{9}(12x-x^2)$ პარაბოლა xoy სიბრტყეზე. $V=3\vec{i}+$ $+(4-2t)\vec{j}$, $V\Big|_{t=0}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $V\Big|_{t=1}=3\vec{i}+2\vec{j}$, $V\Big|_{t=2}=3\vec{i}$, $V\Big|_{t=3}=3\vec{i}-2\vec{j}$. **19.10.** $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ ციკლოიდა xoy სიბრტყეზე, $V=2(1-\cos t)\vec{i}+2\sin t\cdot\vec{j}$, $V\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=$ $=2(\vec{i}+\vec{j})$, $V\Big|_{t=\pi}=4\vec{i}$. **19.11.** $0{,}6\vec{i}-0{,}8\vec{j}$. **19.12.** 1) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(0)=$ $=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$; 2) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}(0)=2\vec{k}$. **19.13.** 1) $2\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt},\vec{r}\right)$; 2) $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|^2+\left(\vec{r},\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$; 3) $\left[\vec{r};\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$. **19.15.** სიჩქარის ჰოდოგრაფია $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=2bt$ — ხრახნწირი, აჩქარების ჰოდოგრაფია $x=-a\sin t$, $y=a\cos t$, $z=2b$ — წრეწირი. **19.16.** 1) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=$ $=\dfrac{z-1}{3}$, $2x+y+3z-5=0$; 2) $\begin{cases}x+2z=4,\\ y=2,\end{cases}$ $2x-z=3$; 3) $\dfrac{x-2}{1}=$ $=\dfrac{y-\frac{8}{3}}{2}=\dfrac{z-4}{4}$, $3x+6y+12z-70=0$; 4) $\begin{cases}y=z,\\ x=a,\end{cases}$ $y+z=0$.

ლიტერატურა

1. Бараненко Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУзов. Под редакцией Б. П. Демидовича. М., «Наука», 1978.—479 с.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., «Наука», 1977. — 416 с.
3. ა. ბუაძე. მათემატიკა ინჟინრებისათვის, I ნაწილი, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1984.—392 გვ.
4. Болгов В. А. и др. Сборник задач по математике для ВТУЗ-ов, Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. М., «Наука», 1986. — 462 с.
5. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1988. — 431 с.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., «Наука», 1972.—544 с.
7. ნ. დურგლიშვილი. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული, ნაწილი I, თბილისი, განათლება, 1977.—234 გვ.
8. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ I. Издательство Московского университета, 1985. — 660 с.
9. Карташев А. П. Рождественский Б. Л. Математический анализ. М., «Наука», 1984. — 447 с.
10. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, Т. I, М., «Высшая школа», 1981.—687 с.
11. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу (пред, непрерывность, дифференцируемость). М., «Наука», 1984. — 592 с.
12. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (ТР). М., «Высшая школа», 1983, — 174 с.
13. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу, Часть первая. Киев «Вища школа», 1978. — 696 с.
14. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. I, М. ,«Наука», 1978. — 456 с.
15. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. М., «Наука», 1988. — 816 с.
16. Толстов Г. П. Элементы математического анализа. т. I, М., «Наука», 1974. — 520 с.
17. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა. გამოთვლითი მათემატიკა. თბილისი, სპი-ს გამომცემლობა, 1985.—144 გვ.
18. ს. თოფურია, ი. ჩახტაური. კომპლექსური რიცხვები და ნამდვილი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციები. თბილისი. სპი-ს გამოცემა, 1979.—გვ. 80.
19. ს. თოფურია, გ. აბესაძე, გ. ოზბეგაშვილი, ვ. ხოჭოლავა, ზ. მეტრეველი. მათემატიკა, ნაწილი I (ალგებრა და ანალიზის საწყისები). თბილისი, განათლება, 1987.—567 გვ.
20. ვლ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ტომი I, საქართველოს პოლიტექნიკური ინსტიტუტის გამომცემლობა, 1962.—472 გვ.
21. ვლ. ჭელიძე, ნ. ლომჯარია, გ. ხახუბია. უმაღლესი მათემატიკის კურსი. ტომი II, თბილისი, ცოდნა, 1964.—418 გვ.
22. ვლ. ჭელიძე, ე. წითლანაძე. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტომი I თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა. 1976.—637 გვ.
23. Шипачев В. С. Высшая математика. М., Высшая школа, 1985—471 с.
24. Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С. Краткий курс высшей математики, т. I, М., Высшая школа, 1978. — 383 с.

სარჩევი

VII თ ა ვ ი. სკალარული არგუმენტის ვექტორული-ფუნქცია

ამოცანათა კრებული

Топурия Сергей Багратиевич
Хочолава Владимир Владимирович,
Габидзашвили Мераб Ахметович,
Мачарашвили Нодар Давидович,
Квалиашвили Автандил Георгиевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(на грузинском языке)

რედაქტორი რ. დანელია
სამხატვრო რედაქტორი გ. ზაკალაშვილი
ტექნიკური რედაქტორი ზ. მახარაშვილი
უფროსი კორექტორი პ. დგებუაძე
კორექტორი ლ. გოგეშვილი
გამომშვები ლ. დავითური

ასოთამწყობი მ. მამულაშვილი
ლინოტიპისტი ნ. ნებიერიძე

ИБ № 4469. Учебное издание.

გადაეცა ასაწყობად 5.01.89. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 30.10.89. საბეჭდი ქაღალდი № 2. ქაღალდის ზომა $60\times90_1/_{16}$. გარნიტურა ვენა. ბეჭდვა მაღალი. ნაბეჭდი თაბახი 30. საღებავგატარება 30,25. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 25,42. ტირაჟი 10.000. შეკვეთა 616. უე 08438.

ფასი 1 მან.

გამომცემლობა „განათლება", თბილისი, ორჯონიკიძის ქ. № 50
Издательство «Ганатлеба», Тбилиси, ул. Орджоникидзе № 50.
1989

საქართველოს სსრ გამომცემლობათა, პოლიგრაფიისა და წიგნით ვაჭრობის საქმეთა სახელმწიფო კომიტეტის თბილისის ი. ჭავჭავაძის სახ. წიგნის ფაბრიკა, მეგობრობის გამზირი № 7.

Тбилисская книжная фабрика им. И. Чавчавадзе Государственного комитета Грузинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, пр. Дружбы № 7.